Pedro Pacheco Mendes Filho

Trabalho de Modelagem Computacional

Santarém, Pará

2018

Pedro Pacheco Mendes Filho

Trabalho de Modelagem Computacional

Esse trabalho foi criado como avaliador na obtenção de nota para a disciplina de Modelagem Computacional.

Universidade Federal do Oeste do Pará

Instituto de Engenharia e Geociência

Programa de Ciência e Tecnologia

Professora: Dra. Marciana Lima Góes

Santarém, Pará

2018

Pedro Pacheco Mendes Filho
Trabalho de Modelagem Computacional/ Pedro Pacheco Mendes Filho. – Santarém, Pará, 2018.
25 p.

Professora: Dra. Marciana Lima Góes

Trabalho Acadêmico – Universidade Federal do Oeste do Pará
Instituto de Engenharia e Geociência
Programa de Ciência e Tecnologia, 2018.

Resumo

Esse trabalho tem como objetivo demonstrar o uso de métodos iterativos, no caso, de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel, para a resolução de sistemas lineares propostos e relacionando a problemas comuns, para fins de demonstrar suas diferenças enquanto desempenho e precisão. Além disso, mostrar como a Modelagem Computacional é um ótimo recurso para resolução de problemas de cálculo como operações matriciais, sistemas, somatória e equações lineares.

Palavras-chave: Gauss-Jacobi. Gauss-Seidel. Métodos Iterativos. Sistemas Lineares. Modelagem Computacional.

Sumário

Introdução

A resolução de sistemas lineares é muito importante para a resolução de problemas reais, para isso usamos a solução numérica com auxílio computacional para resolver e solucionar problemas de maneira rápida e precisa. O sistema linear é descrito por m equações com n incógnitas x_i como em: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = b_i$, e é usualmente representado na forma matricial $Ax = b$, que facilita a visualização computacional.

Os métodos iterativos usados para achar o valor aproximado, partindo de um valor inicial e calculando a discretização numérica se aproximando cada vez do resultado, até o erro ser inferior à tolerância, significando assim a convergência do método; ou quando o número de iterações exceder o limite definido, portanto, não convergindo a um resultado. Pode se achar resultado tão aproximado quanto queira, mas a baixa tolerância pode significar um número de iterações muito grande e talvez desnecessário.

O método de Gauss-Jacob e Gauss-Seidel usados na resolução dos problemas necessitam de alguns parâmetros, são eles, o sistema, o chute inicial, a tolerância desejada e também o limite de iterações.

Será apresentado o algoritmo desenvolvido em Python, tanto para teste de critérios de covergência: critério de linha, diagonal dominante e critério de Sassenfeld; e também a resolução do método de Gauss-Jacob.

Os resultados serão demonstrados pelo método de Gauss-Jacob, será apresentado algumas iterações, o gráfico de rapidez de covergência e os parâmetros usados na resolução.

1 Método de Gauss-Jacob

O método de Gauss-Jacobi permite obter-se uma solução única para um sistema $Ax = b, A = (a_{ij})$ com $i, j = 1, ..., n$ e $det(A) \neq 0$. É denominado iterativo porque fornece uma sequência de raízes aproximadas obtidas através dos resultados anteriores. A construção do método é descrito como a transformação do sistema $Ax = b$ para forma $x = Cx + d$, que a partir dela, lança-se um valor inicial para o sistema, para encontrar a primeira solução aproximada, dando início ao processo iterativo do método, porém só será executado se os critérios de convergência forem atendidos.

1.1 Valores Iniciais

Primeiramente, para a execução de um sistema pelo método, é necessário definir os valores iniciais para aquele específico problema. São parâmetros como as funções do sistema, chute inicial, tolerância, limite de iterações e número de variáveis.

Esses parâmetros tem como características:

a) **Funções do sistema:**
As funções são colocadas em forma de matriz para que analise e resolva de forma rápida através de operações matriciais:

$$\left.\begin{array}{r} A = a_{1A}x + a_{2A}y \\ B = a_{1B}x + a_{2B}y \end{array}\right\} \rightarrow \begin{bmatrix} a_{1A} & a_{2A} \\ a_{1B} & a_{2B} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

$$Ax = b$$

No algoritmo, elas são definidas e armazenadas em variáveis como:

$$A \rightarrow \begin{bmatrix} a_{1A} & a_{2A} \\ a_{1B} & a_{2B} \end{bmatrix} \qquad b \rightarrow \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

Em exemplo, ele se apresenta dessa forma:

$$A \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad b \rightarrow \begin{bmatrix} 23,5 \\ 50 \\ 36 \end{bmatrix}$$

Agora no Python,

```
A = numpy.array([[1,2,3],
[2,5,6],
[2,3,4]], dtype=float)

b = [23.5,50,36]

```

A bibilioteca *numpy* servirá para auxiliar nas operações matriciais.

b) **Chute Inicial**

Em valores iniciais você define os valores b para cada equação do sistema. No caso, esses valores vem de analise previamente feitas do sistema. O chute inicial vai ser determinante para definir a quantidade de iterações necessárias para que se encontre o valor aproximado, de acordo com a tolerância definida, de cada raiz.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

E no Python,

```
chute_inicial = [0,0,0]
```

c) **Tolerância:**

A tolerância é o valor menor valor de aproximação da raiz aceito pelo algoritmo. Quanto menor o valor, maior será a precisão do método, porém, aumentará também o número de iterações. Nos problemas, definimos como padrão a tolerância de 1×10^{-3}. No python, fica:

```
tolerancia= 1E-3
```

d) **Limite de iterações:**

O limite de iterações é necessário para o caso de houver erros programas e levar ao programa executar inúmeras iterações e entrando em um *loop infinito*, fazendo o código executar cálculos desnecessário e ocupando muita memória. Definimos por padrão, o número limite de iterações como 1×10^{3}. No Python, fica:

```
iterMax= 1E3
```

e) **Números de Variáveis:**

No caso do número de variáveis é necessário para alguns cálculos. No caso, fazemos com que Python detecte de forma automática o tamanho da primeira linha da matriz A, e defina como número de coeficientes, logo, também o número de variáveis. No algoritmo, fica:

```
coef = A[0,:].size
```

f) **Tratamento da Matriz:**

1.2 Critérios de Convergência

Os critérios de convergência que envolve o método iterativo de Gauss-Jacobi, são esses:

a) **Critério de Linha:**

$$\max_{1\leq i\leq n} = \sum_{\substack{i=1\\ j\neq i}}^{n} |a^*_{ij}| < 1$$

Em Python,

```
max_somatoria = 0
for i in range(A[:,0].size):
somatoria = 0
for j in range(n):
somatoria += abs(A[i,j])

if(somatoria > max_somatoria):
max_somatoria = somatoria

if(max_somatoria < 2):
print("Criterio de Linha foi Atendido!")
return True
```

b) **Se a matriz for diagonal dominante.**

Em Python,

```
diagonais = 0
for i in range(A[:,0].size):
if(A[i,i] > A[:,i].sum()-A[i,i] and A[i,i] > A[i,:].sum()-A[i,i]):
diagonais +=1

if diagonais == n:
print('Criterio da Diagonal Dominante Atendido!')
return True

```

c) **Critério de Sassenfeld:**

$$\max_{1\leq i\leq n}\beta_i < 1$$

, onde

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{i-1} |a^*_{ij}|\beta_j + \sum_{j=i+1}^{n} |a^*_{ij}|$$

Em Python,

```
max_sassenfeld = 0
bj = [0]
for i in range(A[:,0].size):
bi = 0
if i > 0:
for j in range(A[:,0].size - 1):
bi += abs(A[i,j]) * bj[j]

for j in range(i + 1, n):
bi += abs(A[i,j])

bj.append(bi)

if(bi >  max_sassenfeld):
max_sassenfeld = bi

if(max_sassenfeld < 1):
print('Criterio de Sassenfeld foi Atentido!')
return True
```

No algoritmo, para executar os critérios do sistema, apresenta primeiramente um tratamento, que é a divisão de cada equação pela sua diagonal, para facilitar o algoritmo na verificação do critério e para fins de analise. Nos problemas , todos os critérios são testados respectivamente como condição para execução do método, se um desses critérios forem atendido o método é executado. Se nenhum deles retornar um valor verdadeiro, o algoritmo cessará pois não irá convergir.

1.3 Algoritmo de Gauss-Jacob

O método, de forma geral, consiste em dado x_0, aproximação inicial, obter aproximações através da relação recursiva $x(k+1) = Cx^k + d$.
Para $i = 1, 2, ..., n$, podemos reescrever o sistema na (2.2) seguinte forma:

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_{ij}x_j}{a_{ii}}, i = 1, 2, ..., n.$$

até que o critério de parada seja satisfeito. Definiremos agora, o critério de parada e o algoritmo de Gauss-Jacob.

a) **Critério de Parada** Os critérios de parada são usados para fim de não manter o algoritmo rodando quando o resultado já é o bastante preciso e quando, por algum motivo, não alcançar a convergência. Há dois critérios que encerrara a execução do método, são eles:

   Máxima Iterações:

   Será quando o limite de iterações forem atingidas, que poderá ser o caso de não convergência(serve para não sobrecarregar o computador quando não houver convergência).

   Critério de distância:

   Critério de distância avalia a precisão que o algoritmo chegou a partir do módulo da diferença da iteração atual e da anterior se o valor, porém o erro de cada variável do sistema tem que estar abaixo da tolerância para ser satisfeito:

$$d^{(k)} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| < \varepsilon_1$$

   Então a condicional para execução do *loop iterativo* do método, se torna em Python:

```
iterAtual = 0 #Zerando as Iteracoes
erro = 2      #Erro Inicial
while(k < iterMax and erro >= tol):
###Execucao do metodo

```

   Enquanto, que o condicional presente dentro de *while* resultar verdadeiro(*True*), o método iterativo irá executar.

   Obs: A variável 'erro' é definido 2 apenas para fim que o condicional da iteração inicial resulte em verdadeiro, se não fosse definido, o método nunca iria executar.

b) **Algoritmo de Gauss Jacobi:**

   Agora, com todas as variáveis definidas, definiremos o método iterativo usado. Todos os valores entram no algoritmo do método e são executadas até que ache os valores das raízes, ou seja, a convergência. O algoritmo é auto-regulável, então, executará sistemas bidimensionais de tamanhos totalmente distintos. Seu desenvolvimento foi feito em Python, como apresentado logo abaixo:

```
while(k < iterMax and erro >= tol):
```

```
        erro = 0    #Redefine o erro para iteracao atual

        xant = x.copy() #Copia os valores de 'x' antigos

        for i in range(n):
        soma = 0  #Redefine a somatoria para Iteracao atual
        for j in range(n):
        if(j != i):
        soma = soma + float(A[i,j])*xant[j]  #Metodo de Gauss-
    Jabob
        x[i] = (b[i] - soma)/float(A[i,i])     #Metodo de Gauss
    Jacob(se j = i)
        if(abs(x[i]-xant[i])>erro): #Acha o Maximo erro das raizes
        erro = abs(x[i] - xant[i])
        k +=1 #Incremento da Iteracao

```

1.4 Algoritmo Completo

Apresentado abaixo o algoritmo completo om todas as definições e algumas f erramentas para analise como o *matplotlib*(para plotagem de gráfico).

```
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Nome = Pedro Pacheco Mendes Filho
Turma = CTEC2017
Matricula = 201701029
Professora = Marciana Lima Goes
Metodo = Metodo iterativo de Gauss Jacobi
"""
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def jacobi(n, A, b, iterMax, tol, x):



    aray.append(x.copy())
    print(x)
    k = 0
    erro = 2

    while(k < iterMax and erro >= tol):

        erro = 0

        xant = x.copy()
```

```python

        for i in range(n):
            soma = 0
            for j in range(n):
                if(j != i):
                    soma = soma + float(A[i,j])*xant[j]
            x[i] = (b[i] - soma)/float(A[i,i])
            if(abs(x[i]-xant[i])>erro):
                erro = abs(x[i] - xant[i])
        k +=1

        aray.append(x.copy())


    if(erro < tol):
        print('iteracoes = ', k)
        print('erro = ', erro)
        print("x = " , x)
        sist_array = np.array(aray, dtype=float)
        return k,sist_array

    else:
        print('Nao houve convergencia')
        return 0, 0




def crit_convergencia(n):

    #Simplificando o sistema
    for i in range(A[:,0].size):
        b[i] = b[i]/A[i,i]
        A[i] = A[i]/A[i,i]


#######Criterio de Linha
    max_somatoria = 0
    for i in range(A[:,0].size):
        somatoria = 0
        for j in range(n):
            somatoria += abs(A[i,j])

        if(somatoria > max_somatoria): max_somatoria = somatoria

    if(max_somatoria < 2):
        print("Criterio de Linha foi Aprovado!")
```

```
        return True

#######Criterio de Diagonal dominante
    diagonais = 0
    for i in range(A[:,0].size):
        if(A[i,i]>A[:,i].sum()-A[i,i] and A[i,i]>A[i,:].sum()-A[i,i]):
            diagonais +=1
    if diagonais == n:
        print('Criterio da Diagonal Dominante Aprovado!')

#######Criterio de Sassenfeld
    max_sassenfeld = 0
    bj = [0]
    for i in range(A[:,0].size):
        bi = 0
        if i > 0:
            for j in range(A[:,0].size - 1):

                bi += abs(A[i,j]) * bj[j]

        for j in range(i + 1, n):
            bi += abs(A[i,j])

        bj.append(bi)

        if(bi >  max_sassenfeld):
            max_sassenfeld = bi

    if(max_sassenfeld < 1):
        print('Criterio de Sassenfeld foi Aprovado!')
        return True
    print("Nenhum criterio foi atendido!")

A = np.array([[1,2,3],
              [2,5,6],
              [2,3,4]], dtype=float)


chute_inicial = [0,0,0]
b = [23.5,50,36]
aray = []
iterMax = 1000
tol = 1E-3
n = A[0,:].size
if(crit_convergencia(n)):
    total_iter,sstm = jacobi(n,A,b,iterMax,tol,chute_inicial)

```

```
    for i in range(n):
        plt.plot(range(tot_iter+1),sstm[:,i],'-o',label='X{}'.format(i+1))
    plt.xlabel("Iteracoes")
    plt.ylabel("Aproximacao")
    plt.title("Gauss Jacob")
    plt.grid(True, linestyle='-.')
    plt.legend()
    plt.savefig("gaus.png")
```

2 Resolução de Problemas

Resolveremos problemas do cotiano para testar a veracidade do método, desempenho e precisão. Os parâmetros de entrada do problema serão:

$$\left.\begin{aligned} A = a_{1A}x + a_{2A}y \\ B = a_{1B}x + a_{2B}y \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{bmatrix} a_{1A} & a_{2A} \\ a_{1B} & a_{2B} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

$$A \rightarrow \begin{bmatrix} a_{1A} & a_{2A} \\ a_{1B} & a_{2B} \end{bmatrix} \qquad b \rightarrow \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

a) **Matriz de A**:
A matriz dos coeficientes das variáveis:

$$A \rightarrow \begin{bmatrix} a_{1A} & a_{2A} \\ a_{1B} & a_{2B} \end{bmatrix}$$

b) **Matriz de b:**

$$b \rightarrow \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

c) **Chute Inicial:** $x_1, x_2, x_3, ..., x_n = 0$

d) **Tolerância:**1×10^{-3}

e) **Iterações Máxima:**1×10^{3}

E como resultado terá valores como:

a) **Critério de Convergência**:
Em qual critério o sistema passou.

b) **Número de Iterações:**
Quantas iterações para achar o resultado com a tolerância desejada.

c) **Primeiras Iterações:**
O resultado das 3 primeiras iterações.

d) **Resultado Obtido:**
Resultado obtido pelo método com a tolerância desejada.

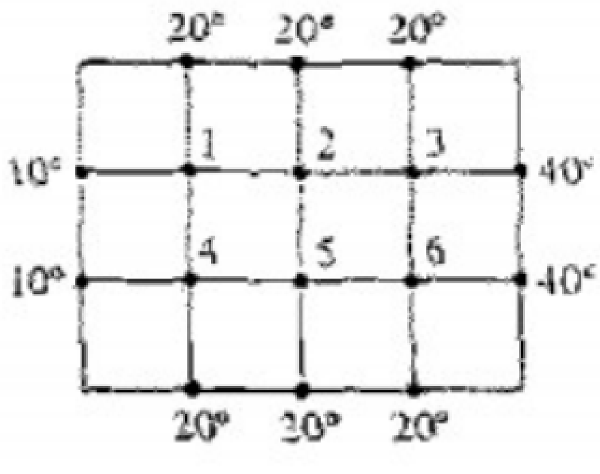
e) **Gráfico de Convergência:** É o gráfico que demonstra qual a rapidez que o método convergiu para o resultado.

2.1 Transferência de calor em uma placa

Uma consideração importante no estudo da transferência de calor é a de se determinar a distribuição de temperatura assintótica de uma placa fina quando a temperatura em seu bordo é conhecida. Suponha que a placa represente uma seção transversal de uma barra de metal, com fluxo de calor desprezível na direção perpendicular à placa. Sejam $T_1, ..., T_6$ as temperaturas em seis vértices interiores do reticulado da figura. A temperatura num vértice é aproximadamente igual à média dos quatro vértices vizinhos mais próximos - à esquerda, acima, à direita, e abaixo. Por exemplo,

$$T_1 = \frac{(10 + 20 + T_2 + T_4)}{4}, \text{ ou } 4T_1 - T_2 - T_4 = 30$$

Escreva um sistema de seis equações cuja solução fornece estimativas para as temperaturas $T_1, ..., T_6$.



Resolução:

A solução desse problema primeiramente devemos encontrar o sistema. O próprio problema da um exemplo para seguir, então foi feito como demonstrado a definição do problema abaixo:

$$\begin{cases} -4T_1 + T_2 + T_4 = -30 \\ T_1 - 4T_2 + T_3 + T_5 = -20 \\ T_2 - 4T_3 + T_6 = -60 \\ T - 1 - 4T_4 + T_5 = -30 \\ T_2 + T_4 - 4T_5 + T_6 = -20 \\ T_3 + T_5 - 4T_6 = -60 \end{cases}$$

criando agora as matrizes A e b:

$$A \rightarrow \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \qquad b \rightarrow \begin{bmatrix} -30 \\ -20 \\ -60 \\ -30 \\ -20 \\ 60 \end{bmatrix}$$

Colocando-a no algoritmo ela retornará os resultados:

a) **Critério de Convergência:** *Critério de linha.*

b) **Número de Iterações:***20.*

c) **Precisão:**$7,14 \times 10^{-3}$

d) **Primeiras Iterações:**

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow_1 \begin{bmatrix} 7,5 \\ 5 \\ 15 \\ 7,5 \\ 5 \\ 15 \end{bmatrix} \rightarrow_2 \begin{bmatrix} 10,625 \\ 11,875 \\ 20 \\ 10,625 \\ 11,875 \\ 20 \end{bmatrix} \rightarrow_3 \begin{bmatrix} 13,125 \\ 15,625 \\ 22,96875 \\ 13,125 \\ 15,625 \\ 22,96875 \end{bmatrix}$$

e) **Resultado Obtido:**

$$\begin{bmatrix} 17,142 \\ 21,427 \\ 27,142 \\ 17,142 \\ 21,427 \\ 27,142 \end{bmatrix}$$

f) **Gráfico de Convergência:**

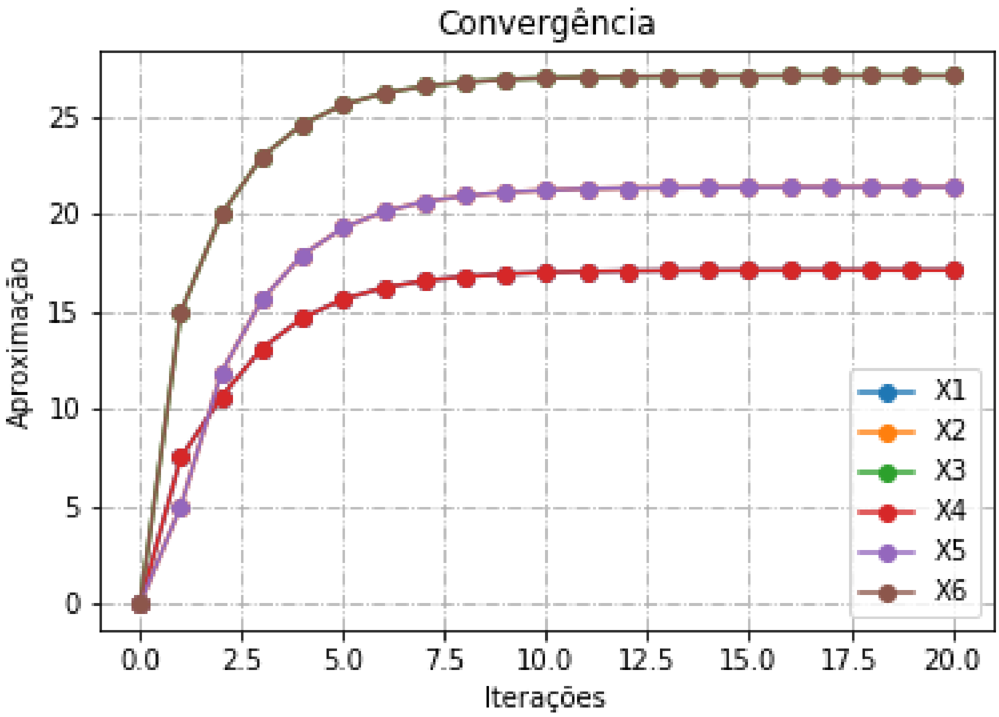


Gráfico de convergência de Gauss Jacob no sistema da placa transversal

2.2 Vitaminas equilibradas diariamente

Sabe-se que uma alimentação diária equilibrada em vitaminas deve constar de 170 unidades de vitamina A, 180 unidades de vitamina C, 140 unidades de vitamina C, 180 unidades de vitamina D e 350 unidades de vitamina E.
Com o objetivo de de descobrir como deverá ser uma refeição equilibrada, foram estudados cinco alimentos. Fixada na mesma quantidade (1g) de cada alimento , determinou-se:

1. O alimento I tem 1 de unidade de vitamina A, 10 unidades de vitamina B, 1 unidade de vitamina C, 2 unidades de vitamina D e 2 unidades de vitamina E.

2. O alimento II tem 9 unidades de vitamina A, 1 unidade de vitamina B, 0 unidade de vitamina C, 1 unidade de vitamina D e 1 unidade de vitamina E.

3. O alimento III tem 2 unidades de A, 2 unidades de B, 5 unidades de C, 1 unidade de D e 2 unidades de E.

4. O alimento IV tem 1 unidade de A, 1 unidade de B, 1 unidade de C, 2 unidades de D e 13 unidades de E.

5. O alimento V tem 1 unidade de A, 1 unidade de B, 1 unidade de C, 9 unidades de D e 2 unidades de E.

Quantos gramas de cada um dos alimentos I, II, III, IV e V devemos ingerir diariamente para que nossa alimentação seja equilibrada?

Resolução:

A solução desse problema primeiramente devemos encontrar o sistema. O sistema encontrado a partir da analise do problema foi esse:

$$\begin{cases} 1I + 9II + 2III + IV + V = 170 \\ 10I + II + 2III + IV + V = 180 \\ 1I + 0II + 5III + IV + V = 140 \\ 2I + II + III + 2IV + 9V = 180 \\ 2I + II + 2III + 13IV + 2V = 350 \end{cases}$$

criando agora as matrizes A e b, já ajustadas, de modo de tentar a diagonal dominante, apenas trocando as posições da equações:

$$A \rightarrow \begin{bmatrix} 10 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 13 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 9 \end{bmatrix} \qquad b \rightarrow \begin{bmatrix} 180 \\ 170 \\ 140 \\ 350 \\ 180 \end{bmatrix}$$

Colocando-a no algoritmo ela retornará os resultados:

a) **Critério de Convergência:** *Critério de linha.*

b) **Número de Iterações:***20.*

c) **Precisão:**$6,05 \times 10^{-4}$

d) **Primeiras Iterações:**

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow_1 \begin{bmatrix} 18 \\ 18,888 \\ 28 \\ 26,923 \\ 20 \end{bmatrix} \rightarrow_2 \begin{bmatrix} 5,818 \\ 5,452 \\ 15,015 \\ 15,316 \\ 4,807 \end{bmatrix} \rightarrow_3 \begin{bmatrix} 12,439 \\ 12,669 \\ 22,811 \\ 22,558 \\ 13,029 \end{bmatrix}$$

e) **Resultado Obtido:**

$$\begin{bmatrix} 9,9998 \\ 9,9998 \\ 19,9997 \\ 19,9998 \\ 9,9997 \end{bmatrix}$$

f) **Gráfico de Convergência:**

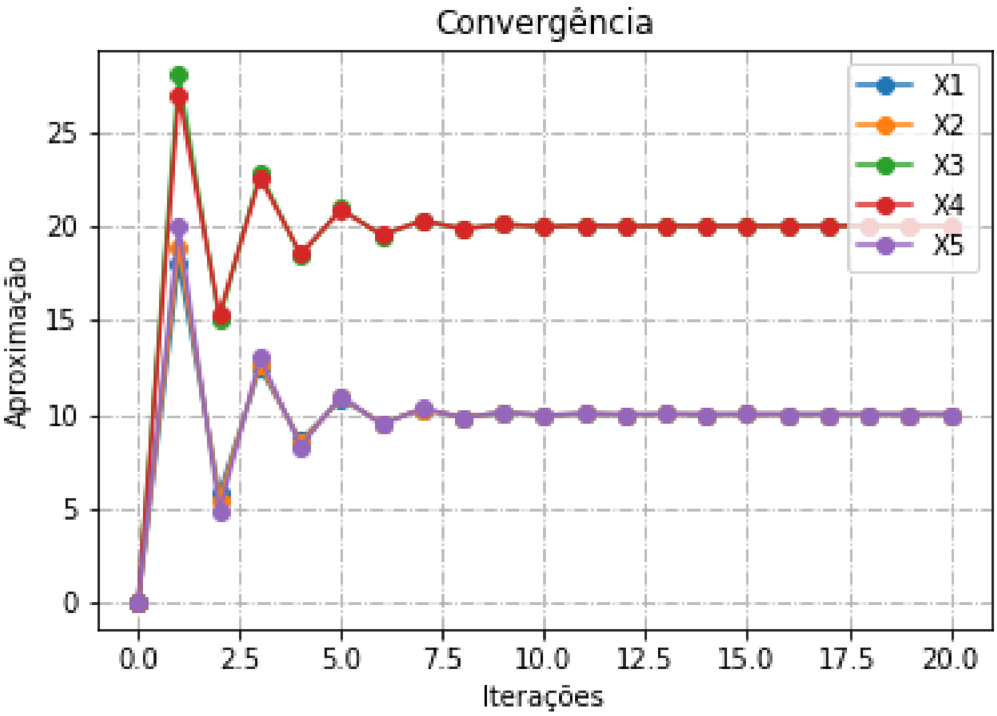


Gráfico de convergência de Gauss Jacob no sistema da vitaminas diárias

3 Conclusão

O método numérico de Gauss-Jacob é preciso e rápido para resolver sistemas, porém e limitado em questão de abrangência de sistema, pois, somente convergem sistemas se, e somente se, passar pelos seus *Critérios de Convergência*. Por isso, não poderá ser usado para resolução para qualquer problema. A convergência de sistemas é rápida, por isso, é usual tratando sistemas grandes, pois pelo método convencional é inviável resolver número grande de equações e variáveis, ae que torna o método eficaz. Há também a possibilidade de paralelização de seu algoritmo, o que aumenta mais ainda a rapidez do código.