Pedro Pacheco Mendes Filho

Trabalho de Modelagem Computacional

Pedro Pacheco Mendes Filho

Trabalho de Modelagem Computacional

Esse trabalho foi criado como avaliador na obtenção de nota para a disciplina de Modelagem Computacional.

Universidade Federal do Oeste do Pará Instituto de Engenharia e Geociência Programa de Ciência e Tecnologia

Professora: Dra. Marciana Lima Góes

Santarém, Pará 2018

Pedro Pacheco Mendes Filho

Trabalho de Modelagem Computacional/ Pedro Pacheco Mendes Filho. — Santarém, Pará, 2018.

25 p.

Professora: Dra. Marciana Lima Góes

Trabalho Acadêmico – Universidade Federal do Oeste do Pará Instituto de Engenharia e Geociência Programa de Ciência e Tecnologia, 2018.

Resumo

Esse trabalho tem como objetivo demonstrar o uso de métodos iterativos, no caso, de Gauss-Jacobi, para a resolução de sistemas lineares propostos e relacionando a problemas comuns. Demonstrando também, como a Modelagem Computacional é um ótimo recurso para resolução de problemas de cálculo em geral como operações matriciais, sistemas, somatória e equações lineares.

Palavras-chave: Gauss-Jacobi. Métodos Iterativos. Sistemas Lineares. Modelagem Computacional.

Sumário

	Introdução
1	MÉTODO DE GAUSS-JACOB
1.1	Valores Iniciais
1.2	Critérios de Convergência
1.3	Algoritmo de Gauss-Jacob
1.4	Algoritmo Completo
2	RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS
2.1	Transferência de calor em uma placa
2.2	Vitaminas equilibradas diariamente
3	CONCLUSÃO

Introdução

A resolução de sistemas lineares é muito importante para a resolução de problemas reais, para isso usamos a solução numérica com auxílio computacional para resolver e solucionar problemas de maneira rápida e precisa. O sistema linear é descrito por m equações com n incógnitas x_i como em: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = b_i$, e é usualmente representado na forma matricial Ax = b, que facilita a visualização computacional.

Os métodos iterativos usados para achar o valor aproximado, partindo de um valor inicial e calculando a discretização numérica se aproximando cada vez do resultado, até o erro ser inferior à tolerância, significando assim a convergência do método. Pode se achar resultado tão aproximado quanto queira, mas a baixa tolerância pode significar um número de iterações muito grande e desnecessário.

O método de Gauss-Jacob usado na resolução do problema necessita de alguns parametros, como já sabemos, o sistema que irá resolver, o chute inicial, a tolerância desejada e também o limite de iterações para que se o método não venha a convergir, o algoritmo terminará sem resultado.

Será apresentado o algoritmo desenvolvido em Python, tanto para teste de critérios de covergência: critério de linha, diagonal dominante e critério de Sassenfeld; e também a resolução do método de Gauss-Jacob.

Os resultados serão demonstrados pelo método de Gauss-Jacob, será apresentado algumas iterações, o gráfico de rapidez de covergência e os parâmetros usados na resolução.

1 Método de Gauss-Jacob

O método de Gauss-Jacobi permite obter-se uma solução única para um sistema $Ax = b, A = (a_{ij})$ com i, j = 1, ..., n e $det(A) \neq 0$. É denominado iterativo porque fornece uma sequência de raízes aproximadas obtidas através dos resultados anteriores. A construção do método é descrito como a transformação do sistema Ax = b para forma x = Cx + d, que a partir dela, lança-se um valor inicial para o sistema, para encontrar a primeira solução aproximada, dando início ao processo iterativo do método, porém só será executado se os critérios de convergência forem atendidos.

1.1 Valores Iniciais

Primeiramente, para a execução de um sistema pelo método, é necessário definir os valores iniciais para aquele específico problema. São parâmetros como as funções do sistema, chute inicial, tolerância, limite de iterações e número de variáveis.

Esses parâmetros tem como características:

a) Funções do sistema:

As funções são colocadas em forma de matriz para que analise e resolva de forma rápida através de operações matriciais:

$$\begin{vmatrix} A = a_{1A}x + a_{2A}y \\ B = a_{1B}x + a_{2B}y \end{vmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a_{1A} & a_{2A} \\ a_{1B} & a_{2B} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

$$Ax = b$$

No algoritmo, elas são definidas e armazenadas em variáveis como:

$$A \to \begin{bmatrix} a_{1A} & a_{2A} \\ a_{1B} & a_{2B} \end{bmatrix} \qquad b \to \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

Em exemplo, ele se apresenta dessa forma:

$$A \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad b \to \begin{bmatrix} 23, 5 \\ 50 \\ 36 \end{bmatrix}$$

Agora no Python,

A bibilioteca *numpy* servirá para auxiliar nas operações matriciais.

b) Chute Inicial

Em valores iniciais você define os valores b para cada equação do sistema. No caso, esses valores vem de analise previamente feitas do sistema. O chute inicial vai ser determinante para definir a quantidade de iterações necessárias para que se encontre o valor aproximado, de acordo com a tolerância definida, de cada raiz.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

E no Python,

```
1 chute\_inicial = [0,0,0]
```

c) Tolerância:

A tolerância é o valor menor valor de aproximação da raiz aceito pelo algoritmo. Quanto menor o valor, maior será a precisão do método, porém, aumentará também o número de iterações. Nos problemas, definimos como padrão a tolerância de 1×10^{-3} . No python, fica:

```
1 tolerancia= 1E-3
```

d) Limite de iterações:

O limite de iterações é necessário para o caso de houver erros programas e levar ao programa executar inúmeras iterações e entrando em um loop infinito, fazendo o código executar cálculos desnecessário e ocupando muita memória. Definimos por padrão, o número limite de iterações como 1×10^3 . No Python, fica:

```
1 iterMax= 1E3
```

e) Números de Variáveis:

No caso do número de variáveis é necessário para alguns cálculos. No caso, fazemos com que Python detecte de forma automática o tamanho da primeira linha da matriz A, e defina como número de coeficientes, logo, também o número de variáveis. No algoritmo, fica:

```
1 \operatorname{coef} = A[0,:].\operatorname{size}
```

f) Tratamento da Matriz:

1.2 Critérios de Convergência

Os critérios de convergência que envolve o método iterativo de Gauss-Jacobi, são esses:

a) Critério de Linha:

$$\max_{1 \le i \le n} = \sum_{\substack{i=1 \ j \ne i}}^{n} |a_{ij}^*| < 1$$

Em Python,

```
max_somatoria = 0
for i in range(A[:,0].size):
    somatoria = 0
for j in range(n):
    somatoria += abs(A[i,j])

if(somatoria > max_somatoria):
    max_somatoria = somatoria

if(max_somatoria < 2):
    print("Criterio de Linha foi Atendido!")
return True</pre>
```

b) Se a matriz for diagonal dominante.

Em Python,

```
diagonais = 0
for i in range(A[:,0].size):
    if(A[i,i] > A[:,i].sum()-A[i,i] and A[i,i] > A[i,:].sum()-A[i,i]):
        diagonais +=1

if diagonais == n:
```

```
print('Criterio da Diagonal Dominante Atendido!')
return True
```

c) Critério de Sassenfeld:

, onde
$$\beta_i = \sum_{j=1}^{\max} |a_{ij}^*| \beta_j + \sum_{j=i+1}^n |a_{ij}^*|$$

Em Python,

```
1 \text{ max\_sassenfeld} = 0
2 \text{ bj} = [0]
  for i in range (A[:,0].size):
     bi = 0
     if i > 0:
       for j in range (A[:,0]. size - 1):
6
          bi += abs(A[i,j]) * bj[j]
8
9
     for j in range (i + 1, n):
       bi += abs(A[i,j])
10
11
12
     bj.append(bi)
13
     if (bi > max_sassenfeld):
14
       max sassenfeld = bi
15
  if (max_sassenfeld < 1):</pre>
17
     print ('Criterio de Sassenfeld foi Atentido!')
18
     return True
```

No algoritmo, para executar os critérios do sistema, apresenta primeiramente um tratamento, que é a divisão de cada equação pela sua diagonal, para facilitar o algoritmo na verificação do critério e para fins de analise. Nos problemas , todos os critérios são testados respectivamente como condição para execução do método, se um desses critérios forem atendido o método é executado. Se nenhum deles retornar um valor verdadeiro, o algoritmo cessará pois não irá convergir.

1.3 Algoritmo de Gauss-Jacob

O método, de forma geral, consiste em dado x_0 , aproximação inicial, obter aproximações através da relação recursiva $x(k+1) = Cx^k + d$.

Para i = 1, 2, ..., n, podemos reescrever o sistema na (2.2) seguinte forma:

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j}{a_{ii}}, i = 1, 2, ..., n.$$

até que o critério de parada seja satisfeito. Definiremos agora, o critério de parada e o algoritmo de Gauss-Jacob.

a) Critério de Parada Os critérios de parada são usados para fim de não manter o algoritmo rodando quando o resultado já é o bastante preciso e quando, por algum motivo, não alcançar a convergência. Há dois critérios que encerrara a execução do método, são eles:

Máxima Iterações:

Será quando o limite de iterações forem atingidas, que poderá ser o caso de não convergência (serve para não sobrecarregar o computador quando não houver convergência).

Critério de distância:

Critério de distância avalia a precisão que o algoritmo chegou a partir do módulo da diferença da iteração atual e da anterior se o valor, porém o erro de cada variável do sistema tem que estar abaixo da tolerância para ser satisfeito:

$$d^{(k)} = \max_{1 \le i \le n} |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| < \varepsilon_1$$

Então a condicional para execução do *loop iterativo* do método, se torna em Python:

```
iterAtual = 0 #Zerando as Iteracoes
erro = 2 #Erro Inicial
while(k < iterMax and erro >= tol):
###Execucao do metodo
```

Enquanto, que o condicional presente dentro de while resultar verdadeiro (True), o método iterativo irá executar.

Obs: A variável 'erro' é definido 2 apenas para fim que o condicional da iteração inicial resulte em verdadeiro, se não fosse definido, o método nunca iria executar.

b) Algoritmo de Gauss Jacobi:

Agora, com todas as variáveis definidas, definiremos o método iterativo usado. Todos os valores entram no algoritmo do método e são executadas até que ache os valores das raízes, ou seja, a convergência. O algoritmo é auto-regulável,

então, executará sistemas bidimensionais de tamanhos totalmente distintos. Seu desenvolvimento foi feito em Python, como apresentado logo abaixo:

```
1 while (k < iterMax and erro >= tol):
    erro = 0
                #Redefine o erro para iteracao atual
2
3
    xant = x.copy() #Copia os valores de 'x' antigos
4
5
    for i in range(n):
6
      soma = 0 #Redefine a somatoria para Iteracao atual
7
      for j in range(n):
        if (j != i):
          soma = soma + float (A[i,j]) *xant[j] #Metodo de Gauss-
10
     Jabob
      x[i] = (b[i] - soma) / float(A[i,i])
                                             #Metodo de Gauss Jacob (
11
     se j = i)
      if(abs(x[i]-xant[i])>erro): #Acha o Maximo erro das raizes
12
        erro = abs(x[i] - xant[i])
13
    k +=1 #Incremento da Iteracao
14
15
```

1.4 Algoritmo Completo

Apresentado abaixo o algoritmo completo om todas as definições e algumas f erramentas para analise como o matplotlib (para plotagem de gráfico).

```
1 \# -*- coding : utf -8 -*-
2 """
3 Nome = Pedro Pacheco Mendes Filho
4 \text{ Turma} = \text{CTEC2017}
_{5} Matricula = 201701029
6 Professora = Marciana Lima Goes
  Metodo = Metodo iterativo de Gauss Jacobi
8
9 import numpy as np
  import matplotlib.pyplot as plt
11
  def jacobi(n, A, b, iterMax, tol, x):
13
14
       aray.append(x.copy())
15
       print(x)
16
       k = 0
17
       erro = 2
18
19
       while (k < iterMax and erro >= tol):
20
```

```
21
           erro = 0
22
23
           xant = x.copy()
24
25
26
           for i in range(n):
                soma = 0
27
                for j in range(n):
28
                    if (j != i):
29
                        soma = soma + float(A[i,j])*xant[j]
30
                x[i] = (b[i] - soma)/float(A[i,i])
31
                if(abs(x[i]-xant[i])>erro):
32
                    erro = abs(x[i] - xant[i])
33
           k +=1
34
35
           aray.append(x.copy())
36
37
38
       if(erro < tol):
39
           print('iteracoes = ', k)
40
           print('erro = ', erro)
41
           print("x = ", x)
42
           sist_array = np.array(aray, dtype=float)
43
           return k, sist_array
44
45
       else:
46
           print('Nao houve convergencia')
47
           return 0, 0
48
49
50
51
52
53
  def crit_convergencia(n):
54
      #Simplificando o sistema
55
       for i in range (A[:,0].size):
56
           b[i] = b[i]/A[i,i]
57
           A[i] = A[i]/A[i,i]
58
59
60
  ########Criterio de Linha
61
       max\_somatoria = 0
62
       for i in range (A[:,0].size):
63
           somatoria = 0
64
           for j in range(n):
65
                somatoria += abs(A[i,j])
66
67
```

```
if (somatoria > max_somatoria): max_somatoria = somatoria
68
69
        if (\max_{\infty} somatoria < 2):
70
71
            print("Criterio de Linha foi Aprovado!")
            return True
72
73
   ########Criterio de Diagonal dominante
74
        diagonais = 0
75
        for i in range (A[:,0].size):
            if(A[i,i]>A[:,i].sum()-A[i,i] and A[i,i]>A[i,:].sum()-A[i,i]):
77
                 diagonais +=1
78
        if diagonais == n:
79
            print('Criterio da Diagonal Dominante Aprovado!')
80
81
   #######Criterio de Sassenfeld
82
        max\_sassenfeld = 0
83
        bj = [0]
84
        for i in range (A[:,0].size):
85
            bi = 0
86
            if i > 0:
87
                 for j in range (A[:,0]. size - 1):
88
89
                      bi += abs(A[i,j]) * bj[j]
90
91
            for j in range (i + 1, n):
92
                 bi += abs(A[i,j])
93
94
            bj.append(bi)
95
96
            if (bi > max sassenfeld):
97
                 max\_sassenfeld = bi
98
99
        if ( max_sassenfeld < 1):</pre>
100
            print('Criterio de Sassenfeld foi Aprovado!')
101
            return True
102
        print("Nenhum criterio foi atendido!")
103
104
105 A = np.array([[1,2,3],
                   [2,5,6],
106
                   [2,3,4], dtype=float)
107
108
109
the chute_inicial = [0,0,0]
111 b = [23.5, 50, 36]
112 \text{ aray} = []
113 \text{ iterMax} = 1000
114 \text{ tol} = 1E-3
```

```
n = A[0, :]. size
if (crit_convergencia(n)):
117
         total\_iter\ , sstm\ =\ jacobi\left(n\,,A,b\,,iterMax\,,tol\,,chute\_inicial\,\right)
118
         for i in range(n):
119
              plt.\ plot\ (\ range\ (\ tot\_iter+1)\ , sstm\ [\ :\ ,\ i\ ]\ ,\ '-o\ '\ ,\ la\ b\ e\ l=\ 'X\{\}\ '\ .\ format\ (\ i+1))
120
         plt.xlabel("Iteracoes")
121
         plt.ylabel("Aproximacao")
122
         plt.title("Gauss Jacob")
123
         plt.grid(True, linestyle='-.')
124
         plt.legend()
125
         plt.savefig("gaus.png")
126
```

2 Resolução de Problemas

Resolveremos problemas do cotiano para testar a veracidade do método, desempenho e precisão. Os parâmetros de entrada do problema serão:

$$A \to \begin{bmatrix} a_{1A} & a_{2A} \\ a_{1B} & a_{2B} \end{bmatrix} \qquad b \to \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

a) Matriz de A:

A matriz dos coeficientes das variáveis:

$$A \to \begin{bmatrix} a_{1A} & a_{2A} \\ a_{1B} & a_{2B} \end{bmatrix}$$

b) Matriz de b:

$$b \to \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

- c) Chute Inicial: $x_1, x_2, x_3, ..., x_n = 0$
- d) Tolerância: 1×10^{-3}
- e) Iterações Máxima: 1×10^3

E como resultado terá valores como:

a) Critério de Convergência:

Em qual critério o sistema passou.

b) Número de Iterações:

Quantas iterações para achar o resultado com a tolerância desejada.

c) Primeiras Iterações:

O resultado das 3 primeiras iterações.

d) Resultado Obtido:

Resultado obtido pelo método com a tolerância desejada.

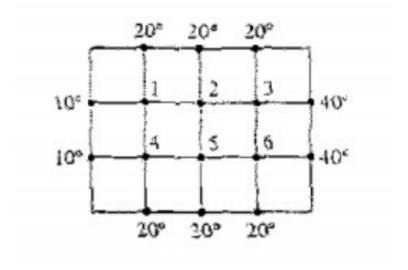
e) **Gráfico de Convergência:** É o gráfico que demonstra qual a rapidez que o método convergiu para o resultado.

2.1 Transferência de calor em uma placa

Uma consideração importante no estudo da transferência de calor é a de se determinar a distribuição de temperatura assintótica de uma placa fina quando a temperatura em seu bordo é conhecida. Suponha que a placa represente uma seção transversal de uma barra de metal, com fluxo de calor desprezível na direção perpendicular à placa. Sejam $T_1, ..., T_6$ as temperaturas em seis vértices interiores do reticulado da figura. A temperatura num vértice é aproximadamente igual à média dos quatro vértices vizinhos mais próximos - à esquerda, acima, à direita, e abaixo. Por exemplo,

$$T_1 = \frac{(10 + 20 + T_2 + T_4)}{4}$$
, ou $4T_1 - T_2 - T_4 = 30$

Escreva um sistema de seis equações cuja solução fornece estimativas para as temperaturas $T_1,...,T_6$.



Resolução:

A solução desse problema primeiramente devemos encontrar o sistema. O próprio problema da um exemplo para seguir, então foi feito como demonstrado a definição do problema

abaixo:

$$\begin{cases}
-4T_1 + T_2 + T_4 = -30 \\
T_1 - 4T_2 + T_3 + T_5 = -20 \\
T_2 - 4T_3 + T_6 = -60 \\
T - 1 - 4T_4 + T_5 = -30 \\
T_2 + T_4 - 4T_5 + T_6 = -20 \\
T_3 + T_5 - 4T_6 = -60
\end{cases}$$

criando agora as matrizes A e b:

$$A \rightarrow \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \qquad b \rightarrow \begin{bmatrix} -30 \\ -20 \\ -60 \\ -30 \\ -20 \\ 60 \end{bmatrix}$$

Colocando-a no algoritmo ela retornará os resultados:

- a) Critério de Convergência: Critério de linha.
- b) Número de Iterações: 20.
- c) **Precisão:** $7,14 \times 10^{-3}$
- d) Primeiras Iterações:

e) Resultado Obtido:

$$\begin{bmatrix} 17, 142\\ 21, 427\\ 27, 142\\ 17, 142\\ 21, 427\\ 27, 142 \end{bmatrix}$$

f) Gráfico de Convergência:

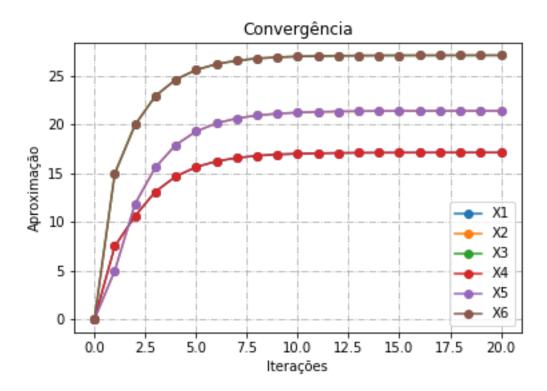


Gráfico de convergência de Gauss Jacob no sistema da placa transversal

2.2 Vitaminas equilibradas diariamente

Sabe-se que uma alimentação diária equilibrada em vitaminas deve constar de 170 unidades de vitamina A, 180 unidades de vitamina C, 140 unidades de vitamina C, 180 unidades de vitamina D e 350 unidades de vitamina E.

Com o objetivo de de descobrir como deverá ser uma refeição equilibrada, foram estudados cinco alimentos. Fixada na mesma quantidade (1g) de cada alimento , determinou-se:

- 1. O alimento I tem 1 de unidade de vitamina A, 10 unidades de vitamina B, 1 unidade de vitamina C, 2 unidades de vitamina D e 2 unidades de vitamina E.
- 2. O alimento II tem 9 unidades de vitamina A, 1 unidade de vitamina B, 0 unidade de vitamina C, 1 unidade de vitamina D e 1 unidade de vitamina E.
- 3. O alimento III tem 2 unidades de A, 2 unidades de B, 5 unidades de C, 1 unidade de D e 2 unidades de E.
- 4. O alimento IV tem 1 unidade de A, 1 unidade de B, 1 unidade de C, 2 unidades de D e 13 unidades de E.

5. O alimento V tem 1 unidade de A, 1 unidade de B, 1 unidade de C, 9 unidades de D e 2 unidades de E.

Quantos gramas de cada um dos alimentos I, II, III, IV e V devemos ingerir diariamente para que nossa alimentação seja equilibrada?

Resolução:

A solução desse problema primeiramente devemos encontrar o sistema. O sistema encontrado a partir da analise do problema foi esse:

$$\begin{cases} 1I + 9II + 2III + IV + V = 170 \\ 10I + II + 2III + IV + V = 180 \\ 1I + 0II + 5III + IV + V = 140 \\ 2I + II + III + 2IV + 9V = 180 \\ 2I + II + 2III + 13IV + 2V = 350 \end{cases}$$

criando agora as matrizes A e b, já ajustadas, de modo de tentar a diagonal dominante, apenas trocando as posições da equações:

$$A \to \begin{bmatrix} 10 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 13 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 9 \end{bmatrix} \qquad b \to \begin{bmatrix} 180 \\ 170 \\ 140 \\ 350 \\ 180 \end{bmatrix}$$

Colocando-a no algoritmo ela retornará os resultados:

- a) Critério de Convergência: Critério de linha.
- b) Número de Iterações: 20.
- c) **Precisão:** $6,05 \times 10^{-4}$
- d) Primeiras Iterações:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow_{1} \begin{bmatrix} 18 \\ 18,888 \\ 28 \\ 26,923 \\ 20 \end{bmatrix} \rightarrow_{2} \begin{bmatrix} 5,818 \\ 5,452 \\ 15,015 \\ 15,316 \\ 4,807 \end{bmatrix} \rightarrow_{3} \begin{bmatrix} 12,439 \\ 12,669 \\ 22,811 \\ 22,558 \\ 13,029 \end{bmatrix}$$

e) Resultado Obtido:

f) Gráfico de Convergência:

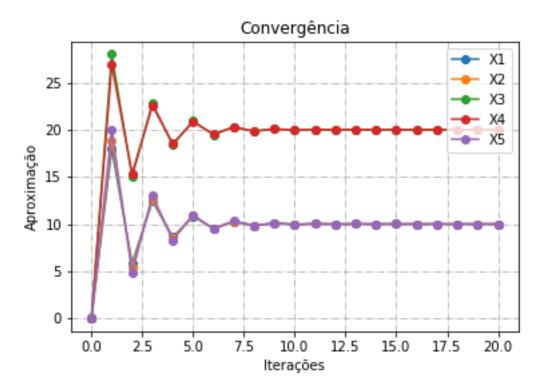


Gráfico de convergência de Gauss Jacob no sistema da vitaminas diárias

3 Conclusão

O método numérico de Gauss-Jacob é preciso e rápido para resolver sistemas, porém e limitado em questão de abrangência de sistema, pois, somente convergem sistemas se, e somente se, passar pelos seus *Critérios de Convergência*. Por isso, não poderá ser usado para resolução para qualquer problema. A convergência de sistemas é rápida, por isso, é usual tratando sistemas grandes, pois pelo método convencional é inviável resolver número grande de equações e variáveis, ae que torna o método eficaz. Há também a possibilidade de paralelização de seu algoritmo, o que aumenta mais ainda a rapidez do código.