№1 (Вар 2)

Латыпов Владимир

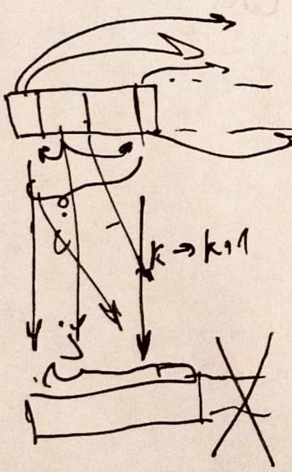
Цепь писем. На каждой итерации каждый, получивший письмо на прошлой, ~~отд~~ отправляет 2-м случайным [разным] адресатам. Всего их $(n+1)$

Пусть на какой-то (k-й) итерации ~~распределение~~ PMF с.в. $=\xi_k$

ξ: „кол-во получивших письмо только что" было $p_\xi(i)=p_i$, $i\in[1:n]$

Тогда посчитаем распределение для след. шага $(\eta=)\,\xi_{k+1}$

$$p_\eta(j)=\sum_{i=1}^{n}\underbrace{P(\eta=j\mid\xi=i)}_{\text{посчитаем эту штуку}}\,p_\xi(i)$$



Посчитаем сначала $P(\eta\le j\mid\xi=i)=$

$=\left[\text{распред письма разным из } j \text{ чел-к от каждого из } i \text{ адресантов}\right]=$

$$=\frac{\#\text{ спос. распред на }\le j}{\#\text{ —"— }\le n}=\frac{\binom{n}{j}\cdot\binom{j}{2}^i}{\binom{n}{2}^i}=$$

$$=\binom{n}{j}\left(\frac{j(j-1)}{n(n-1)}\right)^i$$

Тогда $P(\eta=j\mid\xi=i)=P(\eta\le j\mid\xi=i)-P(\eta\le j-1\mid\xi=i)$

Получим формулу обновления распределения, теперь найдём P, что прародитель не получит письмо в первые r итераций:

$$P=\prod_{k=1}^{r}\left(1-\mathbb{E}\,\xi_k\right).\quad(\text{очевидно})$$

Это страшная, не сокращаемая нормально формула (хотя и верная) (хотя её можно эффективно вычислить). Однако при $2^r \ll n$ оно хорошо приближается.

Найти нужно медиану распред.; (т.ч. вер-ть прародителя стать адресатом до неё $\approx 50\%$).
Это когда префиксная сумма ≈ 0.5, т.е. каждые из „веток" содержат $\approx 0{,}5$. В этой ситуации пересечений мало, и $\mathbb{E}(\xi_i)$ кол-во адресатов растёт $\approx$ $\approx$ экспоненциально с коэфф. ≈ 2.

$\Rightarrow$ будет порядка (m) последних шагов с вер-ю $[2^{-m}, 0.5]$, а перед ними вообще прями $\mathbb{E}(\xi_i) < 2^{-m}$, что очень мало $\Rightarrow$ $\mathbb{E}(\xi_i)$ прями очень экспоненциально и очень с коэфф. ≈ 2 растёт, т.е. Ответ(?): $(\log_2 n) \pm \underset{\text{мало}}{m} \sim \boxed{\log_2 n}$

то, что преф. суммы дают ± 1 итерацию, т.е. всё равно $\sim \log_2 n$

$\boxed{№2\ (\text{ВАР}.2)}$ Трое встречаются между 10:00 и 11:00,

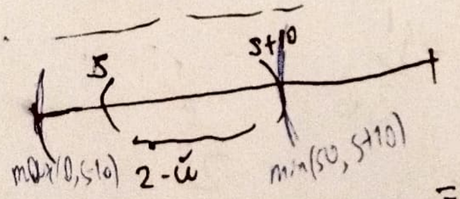
каждый приходит в случ. момент и ждёт 10 минут. $\left\{ \begin{array}{l} \text{Считаем что они приходят} \\ \text{равномерно от 10:00 до 10:50,} \\ \text{т.к. ждать после 11-не по договору} \end{array} \right.$

P(кто-то встретится) — ?

$$= P(\underbrace{1\text{meet}2}_{M_{12}} \cup \underbrace{2\text{meet}3}_{M_{23}} \cup \underbrace{3\text{meet}1}_{M_{31}}) = P_{12} + P_{23} + P_{31} -$$

$$- P(M_{12} \cap M_{23}) - P(M_{23} \cap M_{31}) - P(M_{31} \cap M_{12}) +$$

$$+ P(M_{123}) = 3P(M_{12}) - 3P(M_{12} \cap M_{23}) + P(M_{123})$$



$$P(M_{12}) = \iint_{M_{12}} dP = \int_{Proj_2 M_{12}} \mu_1 M_{12}[s]\, ds =$$

$$= \frac{1}{50^2}\int_0^{50} \min(50, s+10) - \max(0, s-10)\, ds =$$

$$= \frac{1}{50^2}\int_0^{50} (\underbrace{\min(50, s+10) - s}_{\text{симм. отн. 25-и}}) + (s - \max(0, s-10))\, ds =$$

$$= \frac{2}{50^2}\int_0^{50} s - \max(0, s-10)\, ds = \frac{2}{50^2}\int_0^{50} \begin{cases} s, & s \le 10 \\ 10, & \text{else} \end{cases} ds = \left(\frac{10 \cdot 10}{2} + 10 \cdot 40\right)\frac{2}{50^2}$$

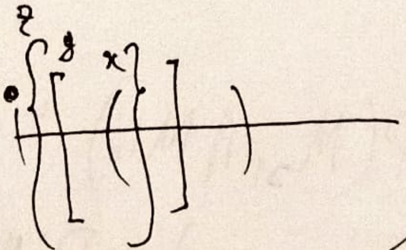
$$= \frac{100 + 800}{2500} = \frac{900}{2500} = \frac{9}{25}$$

$$P(\underbrace{M_{12} \cap M_{23}}_{L}) = \int_{Proj_2 L} \mu_2 L[s]\, ds \overset{\text{независ.}}{=} \int_{Proj_2 L} (\mu_1 M_{12}[s])^2\, ds = \frac{2}{50^3}\int_0^{50} \begin{cases} s^2, & s \le 10 \\ 100, & \text{else} \end{cases} ds$$

$$= \frac{2}{50^3}\left(\frac{10^3}{3} + 100 \cdot 40\right) = \frac{26}{375}$$

$$P(M_{123}) = \left[\begin{array}{l}\text{перестановка не меняет принадл-ть к } M_{123}\text{: } \forall (x,y,z)=t\in M_{123},\ \forall \sigma\in S_3: \sigma(t)\in M_{123} \\ \text{(игнорим равенства)}\end{array}\right] = 3!\,P(M_{123}\cap \{x\ge y\ge z\}) =$$

$$= \frac{3!}{50^3}\int_0^{50} dx \int_{\max(0,x-10)}^{x} dy \int_{\max(0,y-10)}^{y} dz = \frac{3!\cdot 4000}{50^3} = \frac{24}{125}$$



Итого: $\pi := P(M_{12}\cup M_{23}\cup M_{31}) =$

$$= 3\cdot\frac{9}{25} - 3\cdot\frac{26}{125} + \frac{24}{125} =$$

$$= \frac{81}{125} = 0{,}648$$

Note: можно считать и что они приходят до 11:00, тогда:

$$P(M_{12}) = \frac{2!}{60^2}\int_0^{60} dx \int_{\max(0,x-10)}^{x} 1\, dy = \frac{11}{36}$$

$$P(M_{12}\cap M_{23}) = \frac{3!}{60^3}\int_0^{60} dx \int_{\max(0,x-10)}^{x} dy \int_{\max(0,x-10)}^{x} 1\, dz = \frac{2}{27}$$

$$P(M_{123}) = \frac{3!}{60^3}\int_0^{60} dx \int_{\max(0,x-10)}^{x} dy \int_{\max(0,y-10)}^{y} 1\, dz = \frac{5}{72}$$

$$\pi = \frac{55}{72} \approx 0{,}7638$$

№3) (ВАР. 3) $\quad \underbrace{X, Y}_{\text{независ.}} \sim \mathrm{Geom}(p)$

кол-во неудач до первого успеха.

Найти $P(X=i \mid X+Y=j) =: \pi$

Если $i>j$, $\pi = 0$, т.к. $Y \in \mathbb{Z}_+$

Иначе: $P([X=i] \cap [X+Y=j]) = P([X=i] \cap [Y=j-i]) =$

$$= p q^i \cdot p q^{j-i} = p^2 q^j$$

$$P(X+Y=j) = \sum_{k=0}^{j} P(X=k) P(Y=j-k) = \sum_{k=0}^{j} p q^k \cdot p q^{j-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{j} p^2 q^j = (j+1) p^2 q^j$$

Итого: $\pi = \dfrac{p^2 q^j}{(j+1) p^2 q^j} = \boxed{\dfrac{1}{j+1}}$