Лабораторная работа №2

Задача 1. (Вар. 2)

Пусть $X = Y + Z$. ~~Пусть~~

По т. Лебега о разложении меры Лебега-Стильтьеса, разложим P_X, P_Y, P_Z на дискретную, сингулярную и абс. непрерывную.

Т.к. P_X – дискретна, таковыми являются и Y, Z (свёртка а. непр. и $\hat{x}$ сингул. а. непр. сингул.)

Т.к. Y, Z не вырождены, они имеют хотя бы по 2 значения: y_1, y_2 и z_1, z_2 (с $P > 0$), что генерирует значения в $X = Y + Z$:

Формула свёртки
$$\begin{cases} y_1 + z_1 & y_2 + z_1 \\ y_2 + z_1 & y_2 + z_2 \end{cases},$$
каждое из них $= x_1$ или x_2.

Если равны два значения с y/z_i, то $(z/y)_1 = (z/y)_2$, т.е. хотя бы одна величина вырождена (т.к. это верно для любой пары $(z/y)_{1,2}$),

противоречие.

Задача 2. (Вар 1)

$(U, V) \in U(B_1(0))$, $W = U^2 + V^2$

Показать, что $(X, Y) \sim N(0, \mathbb{I})$ ← независимы → $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где

$$\begin{cases} X = U\sqrt{\frac{2\ln W}{W}}, \quad Y = V\sqrt{\frac{2\ln W}{W}} \\ \frac{X}{Y} = \frac{U}{V}; \quad XY = UV \cdot \frac{2\ln W}{W} \end{cases}$$

$\Phi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(U, V) \mapsto (X, Y)$

Через замену переменной при диффеоморфизме (или взяв рез-тат с лекции), знаем:

$$\underbrace{p_{U,V}(u, v)}_{= \frac{1}{\mu(B_1(0))} = \pi R^2 = \pi} \cdot |\det \Phi'(u, v)| = p_{X,Y}(x(u,v), y(u,v))$$

$$p_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{\pi} \left|\det \Phi'(u(x,y), v(x,y))\right|$$

$\det \Phi'(u, v) = \frac{2}{u^2+v^2} = \frac{2}{w}$ (см. вычисления по ссылке Wolfram)

осталось выразить W через x, y.] $s = u^2$, $t = v^2$

$$\begin{cases} x^2 = 2\frac{\ln(s+t)}{s+t} \cdot s \\ y^2 = 2\frac{\ln(s+t)}{s+t} \cdot t \end{cases}$$, получим [ссылка на Wolfram #2],

что $\begin{cases} s = \frac{x^2 e^{\frac{x^2+y^2}{2}}}{x^2+y^2} \\ t = \frac{y^2 e^{\frac{x^2+y^2}{2}}}{x^2+y^2} \end{cases}$, тогда $|\det \Phi'(x,y)| = \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \cdot \underbrace{\left(\frac{x^2+y^2}{x^2} + \frac{x^2+y^2}{y^2}\right)}_{=1}$

Итого: $p_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$, ч.т.д.

№3 (Вар 2)

Метод 1: исследуемся, как написано в условии, переопределяем pdf, см. код

Метод 2. Через обратную функцию распр.

Заметим, что $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{5x^4}{\sqrt{2\pi}} e^{-(5-x^5)^2/2}\,dx =$

$= \left[\begin{matrix} y = x^5 \\ dy = 5x^4\,dx \end{matrix}\right] = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(5-y)^2}{2}}\,dx = \frac{1}{2} erf\left(\frac{x^5-5}{\sqrt{2}}\right)$

см. Wolfra

Тогда $F^{-1}(\alpha) = \left(\sqrt{2}\, erf^{-1}(2\alpha) + 5\right)^{1/5}$, что легко считается, но работает для конкретной задачи

Метод 3. Rejecting Sampling.

Семплируем из более простого распр-я y для которого $p_X(x) \leq p_Y(x) \cdot M$. Алгоритм: генерим y из Y, генерим x из $U[0, p_Y(y) \cdot M]$, принимаем при $x \leq p_X(y)$

Покажем, что будут приниматься часто:

$P\left(U \leq \frac{p_X(y)}{M p_Y(Y)}\right) = E\left[\frac{p_X(Y)}{M p_Y(Y)}\right] = \frac{1}{M}\int_{\mathbb{R}} \frac{p_X(y)}{\cancel{p_Y(y)}} \cancel{p_Y(y)}\,dy = \frac{1}{M}\int_{\mathbb{R}} p_X(y)\,dy = \frac{1}{M}$

Т.е. при небольших M – вер-ть велика. $(O(1))$

$F_{\text{итоговое}}(v) = P(X \leq v \mid \text{приняли } x) =$

$= \frac{P(X \leq v \cap \text{приняли})}{P(\text{приняли})} = C \cdot \int\limits_{-\infty}^{v} p_{X\,\text{принят}}(x)\,dx$

$= \alpha \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{p_X(x)}{\alpha\, \cancel{p_Y(x)}} \cancel{p_Y(x)}\,dx = F_X(v)$

(подробнее про метод – по ссылке)

См. рез-ты на github.com

№4 | Оценить n по погрешности в ЗБЧ через

Вар. 2)
- Чебышева
- ЦПТ

$$Pois(\lambda),\ \lambda \in (0, 10)$$

$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum X_i \sim \frac{1}{n}\cdot Pois(n\lambda)$ (то же получим через $D[\sum X_n] = \sum D[X_n]$)

$$D\overline{X}_n = \frac{1}{n^2} D[Pois(n\lambda)] = \frac{\lambda}{n}$$

$$E\overline{X}_n = \frac{1}{n} E X_i = \frac{\lambda n}{n} = \lambda$$

Чебышев: $P(|\overline{X}_n - \overset{=\lambda}{\mu}| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \leq \delta$

$$\Rightarrow \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \leq \delta \Rightarrow \frac{\lambda}{n\varepsilon^2} \leq \delta \Rightarrow n \geq \boxed{\frac{\lambda}{\delta\varepsilon^2}}$$

ЦПТ) Имеем: $\sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma} \approx N(0,1)$ по ЦПТ

$$P(|N(0,1) - 0| \geq \eta) \leq \delta$$

$2\cdot\Phi(-\eta) \leq \delta$, тогда $\eta \geq \overset{=\eta_{min}}{1{,}96}$ [см. Wolfram]

Примеры:

$$P(|N(0,1)| \geq \eta_{min}) \approx P\left(\left|\sqrt{n}\frac{\overline{X}_n-\mu}{\sigma}\right| \geq \eta_{min}\right) = P\Big(|\overline{X}_n - \mu| \geq \underbrace{\frac{\sigma\eta_{min}}{\sqrt{n}}}_{\leq\varepsilon}\Big);$$

$$\Downarrow$$

$$n \geq \frac{(\sigma\eta_{min})^2}{\varepsilon^2} = \frac{DX_i}{\varepsilon^2}\cdot\eta^2_{min} = \frac{\lambda}{\varepsilon^2}\cdot\eta^2_{min}$$

$$\Downarrow$$

$$n \geq \frac{\lambda\eta^2_{min}}{\varepsilon^2}$$

λ	Чебышев	ЦПТ
,5	[illegible] см.	в Readme.md