Типовик по линейной алгебре «Приведение поверхности второго порядка к каноническому виду»

Латыпов Владимир Витальевич,
ИТМО КТ M3138, ***вариант 10***

26 сентября 2022 г.

1. Формулировка условия

1. (a) Выделить из уравнения поверхности квадратичную форму. Ортогональным преобразованием привести кв. ф. к каноническому виду.

   (b) Интерпретировать ортогональное преобразование, как преобразование поворота трехмерной системы координат. Проверить, что новый базис образует правую тройку. Сделать рис. поворота.

   (c) Преобразовать соответствующим образом уравнение поверхности, используя формулу связи координат в старом и новых базисах.

2. Если это необходимо, преобразовать уравнение, совершив параллельный перенос начала системы координат, поворот соответствующей плоскости. Сделать рис.

3. Выписать каноническое уравнение поверхности. Сделать рис. в канонической системе координат.

4. Выписать итоговое преобразование координат. Сделать рис.

Причём во варианте 10 уравнение такое:

$$P : x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz + 4xz + 10x + 10y + 10z + 15 = 0 \tag{1}$$

2. Ортогональное преобразование

Разделим левую часть уравнения на квадратичную форму, линейную и константную части

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 22 & 1 & 22 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$a = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$P : v^T A v + 2a^T v + a_0 = 0 \tag{4}$$

Избавимся от перекрёстных квадратичных слагаемых, приведя А к каноническому виду заменой координат ортогональной матрицей с определителем 1 (а не -1), чтобы была правая тройка.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = v = Qv' = Q \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \tag{5}$$

Всё в Евклидовом пространстве, так что $Q^T = Q^{-1}$, так что достаточно диагонализовать матрицу A в о.н.б. Благо она симметричная, значит, нормальная, значит, это сделать можно.

Собственные числа: -1, кратность 2 и число 5: кратность, соответственно, 1.

Просто базис из собственных:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Ортонормирем его, причём так, чтобы определитель был $+1$:

$$e_1' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2' = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, e_3' = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Получим формулу замены координат, а также матрицу новой формы (по сути той же, но в новом базисе).

$$Q = T_{e \to e'} = (e_1' e_2' e_3') = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = v = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} v' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \tag{9}$$

Теперь можем нарисовать новый базис:

А ещё мы знаем матрицу новой формы — это диагональ из собственных чисел в правильном порядке:

$$\Lambda = \text{diag}(-1, -1, 5) \tag{10}$$

Наша форма для новых переменных превращается в:

$$P : -1x^2 - 1y^2 + 5z^2 + 2\left(Q^T a\right)^T v' + 15 = 0 \tag{11}$$

Назовём $(a^T Q)$ новым a'

$$\left(a' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5\sqrt{3} \end{pmatrix} \right) \tag{12}$$

Итак, на этом этапе получаем:

$$P : -1x'^2 - 1y'^2 + 5z'^2 + 10z' + 15 = 0 \tag{13}$$

3. Параллельный перенос

$$P : -1x'^2 - 1y'^2 + 5(z' + 1)^2 + 10 = 0 \tag{14}$$

Тогда

$$\left[\begin{array}{c} x'' = x' \\ y'' = y' \\ z'' = z' + 1 \end{array} \right. \tag{15}$$

Сделаем рисунок такого преобразования:

$$P : -1x''^2 - 1y''^2 + 5z''^2 + 10 = 0 \tag{16}$$

$$P : \frac{1}{10}x''^2 + \frac{1}{10}y''^2 - \frac{1}{2}z''^2 = 1 \tag{17}$$

Получили однополостной гиперболоид.

Нарисуем его в базисе e'':

4. Итоговое преобразование координат

Итак, у нас есть два преобразования:

$$v = Qv' \tag{18}$$

$$v' = v'' + v_0 = v'' + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{19}$$

Тогда получим

$$v = Qv'' + Qv_0 = Qv'' + \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{-\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \tag{20}$$

Отсюда поймём, где находится $0''$ в исходных координатах:

$$(0'')_e = Q\mathbb{0} + \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{-\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{-\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \tag{21}$$

Это позволяет нам нарисовать ПВП в исходном базисе: