

# Заметки практики по матанализу (самые разные семестры)

Латыпов Владимир (конспектор)

[t.me/donRumata03](https://t.me/donRumata03), [github.com/donRumata03](https://github.com/donRumata03), [donrumata03@gmail.com](mailto:donrumata03@gmail.com)

Семёнова Ольга Львовна (препод)

14 января 2023 г.

# Содержание

<b>1</b>	<b>Пределы</b>	<b>5</b>
1.1	Таблица эквивалентности . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Дифференциальное исчисление одной переменной</b>	<b>5</b>
2.1	Использование первой и второй производной для построения картины функции и её поведения у себя в голове и последующего её перенесения на бумагу . . . . .	5
2.2	Оптимизация функций через поиск и проверку критических точек с помощью производной, например, параметры геометрических фигур . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Интегральное исчисление одной переменной</b>	<b>5</b>
3.1	Символьное вычисление неопределённых интегралов . .	5
3.2	Определённые интегралы . . . . .	7
3.3	Несобственные интегралы . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Числовые ряды</b>	<b>8</b>
<b>5</b>	<b>Функциональные ряды</b>	<b>8</b>
5.1	Исследуем равномерную сходимость . . . . .	8
5.2	Доказываем отсутствие равномерной сходимости . . . . .	9
5.3	Свойства равномерно сходящихся . . . . .	10
5.4	Степенные ряды . . . . .	10
<b>6</b>	<b>Функции нескольких переменных</b>	<b>12</b>
6.1	Берём пределы . . . . .	12
6.2	Разница между повторным и двойным пределом . . . . .	12
6.3	Дифференцирование, частные производные . . . . .	14
6.4	Дифференцируем неявно заданные отображения . . . . .	17
6.5	Дифференцируем системы-неявно заданные отображения	18
6.6	Замена переменной в дифференциальных уравнениях .	19
6.7	Поиск экстремумов . . . . .	19
<b>7</b>	<b>Теория функции комплексной переменной</b>	<b>20</b>
7.1	Интегральная формула Коши . . . . .	20
7.2	Интегрирование по частям, разложение в ряд и замена переменной . . . . .	21
7.3	Вычисление вычетов, теорема Коши о сумме вычетов . .	21
7.4	Вычеты на бесконечности . . . . .	22

7.5	Сведение интегралов вещественных функций к комплексным интегралам по контуру . . . . .	22
-----	--	----

Здесь можно вспомнить, чем мы всё это время занимались на практике.

«Стенограмма» практик в виде серии фотографий доски (насколько возможно оперативных) есть в телеграм «чатике с домашкамм» начиная с этого сообщения: <https://t.me/c/1512041988/198>.

В этом же документе содержится список методов, подходов и трюков, которые мы учимся применять на практике.

Крайне полезного освежать его в памяти перед контрольной по отношению к актуальной теме, а также в любой момент по отношению к давнему материалу.

Контрибьютинг всячески приветствуется, благо на Github делать это максимально удобно. Если вы решили, например, в какой-то момент пролистать свой конспект и вспомнить былое — добавьте в этот конспект то, чего нет здесь — помогите товарищам. Или, если что-то написанное здесь настолько вопиюще неверное, что режет ваши глаза и вызывает желание как можно быстрее это пофиксить — вперёд.

Насчёт технических деталей — в README описано по шагам, что надо установить, чтобы компилировать конспект у себя на компьютере, однако ничего не мешает дописать сюда в обычном текстовом редакторе нечто отдалённо напоминающее латех и послать Pull Request — я исправлю, если что-то не будет компилироваться.

Конспект организован по темам, в том порядке, в котором мы их проходим на практиках. Кроме того, примерно расставлены разделения, где заканчивается предыдущая практика и начинается следующая, но могут быть неточности, так как отдаётся приоритет организации по темам.

На данный момент такая картина готовности тем:

- Пределы — почти ничего
- Производные — совсем мало
- Интегралы — довольно полно, но тезисно
- Числовые ряды — вообще ничего
- Функциональные ряды — подробно
- Функции нескольких переменных — сами практики в процессе

# 1. Пределы

## 1.1. Таблица эквивалентности

Отличная ссылка на таблицу эквивалентности с нужными доказательствами: <http://mathserfer.narod.ru/node22.html>

Альтернативный вариант: <https://ib.mazurok.com/2013/05/19/table-equ/>

## 2. Дифференциальное исчисление одной переменной

### 2.1. Использование первой и второй производной для построения картины функции и её поведения у себя в голове и последующего её перенесения на бумагу

А именно:

- Находим область определения
- Смотрим поведение на границах области определения (значения, предел, асимптоты)
- Первая производная  $\implies$  делаем вывод о промежутках возрастания/убывания, экстремумах
- Вторая производная  $\implies$  выпуклость, точки перегиба

### 2.2. Оптимизация функций через поиск и проверку критических точек с помощью производной, например, параметры геометрических фигур

## 3. Интегральное исчисление одной переменной

### 3.1. Символьное вычисление неопределённых интегралов

- Таблица интегрирования основных элементарных функций
- Базовые приёмы интегрирования: замена переменной, интегрирование по частям

- Тригонометрические и гиперболические подстановки
- Интегрирование по индукции, если функция содержит целочисленный параметр
- Сведение интеграла самого к себе, например,  $\sqrt{x^2 + a^2} \rightarrow \frac{t}{\sqrt{x^2 + a^2}}t + \dots \rightarrow$  по частям.
- Выделение полного квадрата под корнем или не под корнем в знаменателе, избавление от линейного члена
- Если есть подвыражения вида  $x + a$ , замена переменной  $t = \frac{1}{x+a}$
- Выделение в числителе производной знаменателя, например, [https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%98%D0%BD%D1%82%D0%B5%D0%B3%D1%80%D0%B8%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5\\_%D1%80%D0%B0%D1%86%D0%B8%D0%BE%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D1%85\\_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B9#%D0%98%D0%BD%D1%82%D0%B5%D0%B3%D1%80%D0%B8%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5\\_%D0%B4%D1%80%D0%BE%D0%B1%D0%B5%D0%B9\\_%D0%B2%D0%B8%D0%B4%D0%B0\\_%7F'%22%60UNIQ--postMath-0000007E-QINU60%22'%7F](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%98%D0%BD%D1%82%D0%B5%D0%B3%D1%80%D0%B8%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5_%D1%80%D0%B0%D1%86%D0%B8%D0%BE%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D1%85_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B9#%D0%98%D0%BD%D1%82%D0%B5%D0%B3%D1%80%D0%B8%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5_%D0%B4%D1%80%D0%BE%D0%B1%D0%B5%D0%B9_%D0%B2%D0%B8%D0%B4%D0%B0_%7F'%22%60UNIQ--postMath-0000007E-QINU60%22'%7F).
- Рациональные функции: разложение на простейшие, далее элементарно, больше второй степени не получится
- Функции вида  $R\left(x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}\right)$  через замену переменной на весь корень.
- Подстановки Эйлера:  $R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)$ . В зависимости от коэффициентов нужно выбрать правильное  $t$ . Случаи могут быть пересекаться. Для функции подходят все те случаи, под условия которых она подходит:
  1. При  $a > 0$ :  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm t \pm \sqrt{a}x$
  2. При  $c > 0$ :  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm t \pm \sqrt{a}x$
  3. При наличии двух вещественных корней:  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm t(x - \lambda)$ , где  $\lambda$  — один из корней
- Интегрирование дифференциальных биномов

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx = \left[ \begin{array}{l} z = x^n \\ dx = \frac{1}{n} z^{\frac{1-n}{n}} dz \end{array} \right] = \frac{1}{n} \int z^{\frac{m}{n} + \frac{1-n}{n}} (a + bz)^p dz \quad (3.1)$$

$$q = \frac{m}{n} + \frac{1-n}{n} \quad (3.2)$$

3 случая интегрируемости:

1.  $p \in \mathbb{Z}, q = \frac{1}{N}$ :  $t = z^{\frac{1}{N}}$ , выражаем получаем  $R(t)$ . Профит.
- Тригонометрические подстановки в рациональных функциях  $R(\cos x, \sin x)$ :
  - Если  $R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x, \sin x)$  (нечётно относительно  $\cos$ ), можно  $t = \sin x$
  - Если  $R(\cos x, -\sin x) = -R(\cos x, \sin x)$  (нечётно относительно  $\sin$ ), можно  $t = \cos x$
  - Если  $R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x)$  (чётно по обоим вместе), можно  $t = \tan x$
  - Наконец, универсальное,  $t = \tan \frac{x}{2}$  работает всегда, через неё легко выражаются  $\sin, \cos, \frac{dt}{dx}$ .
- Похожая шняга получается и с  $R(\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x)$
- Линейное выражение числителя через знаменатель и его производную, решение системы уравнений

### 3.2. Определённые интегралы

- Формула Ньютона-Лейбница
- Замена переменной, если особые точки не появляются, ничего не портит
- При интегрировании по частям надо смотреть, чтобы сумма частей имела смысл в  $\mathbb{R}$ .

### 3.3. Несобственные интегралы

- Взятие предела для несобственных интегралов, если получается сделать это в явном виде

- Рассмотрение «особенных» точек, их может быть несколько
- Анализ сходимости: сначала проверяем абсолютную, потом относительную
- Критерий Коши (если любое значение после некоторого  $A$  не превышаете ни на каком промежутке в  $\mathbb{R}$ ).
- Разбиение промежутка на несколько
- Использование асимптотического анализа для определения абсолютной сходимости
- Дирихле и Абель — позволяют сделать вывод об абсолютной сходимости функции, представленной произведением
  - Дирихле: первая имеет ограниченную первообразную, вторая — монотонно  $\square 0$ , тогда сходится
  - Абель: первый интеграл сходится, вторая монотонна и ограничена, тогда тоже сходится
- Разложение подинтегральной функции в ряд Тейлора: спросить у кого-то

## 4. Числовые ряды

## 5. Функциональные ряды

🌀 Практика 5 сентября 2022 🌀

Фотоотчёт за практику: <https://t.me/c/1512041988/198>

Pro tip: для  $\alpha < \frac{\pi}{2}$  —  $\sin \alpha > \alpha \frac{2}{\pi}$  за счёт выпуклости.

### 5.1. Исследуем равномерную сходимость

- Если можем посчитать «колебание» (супремум отклонения на всём множестве  $E$  при фиксированном  $n$ ), то проанализируем, стремится ли оно к нулю при  $n \rightarrow \infty$ .
- Признак Вейерштрасса (мажорантная сходимость для рядов): находим равномерную норму каждого члена, если ряд норм сходится, то анализируемый ряд — тоже.



- Критерий Больцано-Коши (равносильно равномерной сходимости). Сходимость в себе, работает для
- Признак Дирихле (равномерная сходимость ряда произведений). У одного частичные суммы **равномерно ограничены**, другой стремится к нулю и монотонен по  $n$  с некоторого номера при каждом фиксированном  $x$ . (Теперь везде не забываем добавлять «равномерно»).
- Признак Абеля (равномерная сходимость ряда произведений). Тут у первого частичные суммы должны быть **не равномерно ограничены, а равномерно сходиться**, но зато второму достаточно просто быть равномерно ограниченным (и всё ещё монотонным).
- Следствие: Лейбниц — сумма знакопеременного, монотонно равномерно сходящегося к 0 ряда со знакопеременанием ряда — равномерно сходится.

Ещё pro tip:

$$\left| \sum_{k=1}^N \sin k\alpha \right| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{\alpha}{2} \right|} \quad (5.1)$$

$$\left| \sum_{k=1}^N \cos k\alpha \right| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{\alpha}{2} \right|} \quad (5.2)$$

## 5.2. Доказываем отсутствие равномерной сходимости

Если не сходится поточечно где-то, рассматривать не интересно.

- Не на компакте: если замыкание не сходится даже поточечно (на границах)
- Если не выполняется хотя бы одно необходимое условие из секции 5.3 при выполнении остальных предпосылок теоремы
- Если можно посчитать в явном виде
- Можно оценить остаток через интеграл, если есть монотонность по  $n$  и момент, с которой она начинается, не зависит от  $x$  — и сказать через него, что найдётся  $\varepsilon$ , что для любого  $n$  найдётся плохой  $x$ .
- Можно сделать то же через критерий Больцано-Коши.

## ☞ Практика 12 сентября 2022 ☞

Фотоотчёт за практику: <отсутствует>.

### 5.3. Свойства равномерно сходящихся

При равномерной сходимости можно производить перестановку пределов, из неё получаем возможность заключить непрерывность предела, получаем перестановочность интегрирования и дифференцирования.

Однако это всё получается и при более вольных условиях, но они более сложные, мы их не изучали.

## ☞ Практика 19 сентября 2022 ☞

Фотоотчёт за практику: <https://t.me/c/1512041988/208>.

### 5.4. Степенные ряды

Ряды вида  $\sum_{i=1}^{\infty} c_i (z - z_0)^i$ .

Умеем искать радиус сходимости (это шар, внутри гарантированно сходится, снаружи — не менее гарантированно расходится, а на границе — надо думать, анализировать дальше).

- Коши (база, работает всегда):  $R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$
- Даламбер (иногда работает и он, если существует):  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$

Потом можем использовать степенные ряды как составные части для анализа произвольных рядов.

Раскладываем в ряд Тейлора:

Разложить можем, чтобы в пределе все производные совпадали, но когда она будет совпадать с самой функцией на каком-то промежутке?

Оказывается, что достаточно комплексной дифференцируемости в  $B_R(z_0)$  — тогда существует единственный набор коэффициентов степенного ряда с заданным центром, с пределом которого функция совпадает — и коэффициенты тогда находятся через Тейлора.

Note: для комплексной дифференцируемости выполняются все естественные свойства обычной: замкнутость относительно арифметических операций, дифференцируемость элементарных функций, производная локальной обратимой функции и т.д.

Разложение элементарных функций в степенной ряд было на доске..

Как раскладывать в степенные ряды?

- Честно, через производные по Тейлору
- Раскладывать в произведение — перемножать ряды
- В круге сходимости дифференцировать можно почленно — замечаем, что ряд является интегралом чего-то хорошего — и дифференцируем его ряд.
- Аналогично — если является производной чего-то хорошего
- Можно пользоваться тем, что сумма ряда равна функции в круге сходимости. Например,

$$\frac{1}{x - x_0} = \frac{1}{-x_0} \left( \frac{1}{1 - \frac{x}{x_0}} \right) = -\frac{1}{x_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{x}{x_0} \right)^k \quad (5.3)$$

## ❧ Практика 26 сентября 2022 ❧

Фотоотчёт за практику: <https://t.me/c/1512041988/216>

Если у нас уже есть ряд, и надо проанализировать, какую функцию он описывает или его свойства.

- Для анализа сходимости можно посмотреть на коэффициент, как всегда.
- Можно применить метод божественного озарения и, например, продифференцировать, умножить на какую-то сдвигающую скобку и заметить, что получилось нечто содержащее исходный ряд, получив диффуру...

Признак сходимости обычных, положительных рядов, обобщающий признак Д'Аламбера — признак Гаусса:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right), \varepsilon > 0 \quad (5.4)$$

Тогда при  $\lambda > 1$  — сходится, если  $\lambda < 1$  — расходится, иначе (при  $\lambda = 1$ ) —  $\mu > 1$  — сходится,  $\mu \leq 1$  — расходится.

## 6. Функции нескольких переменных

### 6.1. Берём пределы

Какие механизмы?

- По Коши/окрестностям: для окрестности результатов найдётся окрестность аргументов, такая что каждый студент знает, какая.
- По Гейне — вдоль любой последовательности, стремящейся к  $x_0$  по  $D$   
 $\{x_n\} f(x_n) \rightarrow A$
- Эквивалентно (тривиально — про Коши) —  $\sup_{x \in \dot{V}_\delta(x_0) \cap D} |f(x) - A| \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$

### 6.2. Разница между повторным и двойным пределом

У «хороших» функций, конечно, их существование эквивалентно и они равны. Наверное, Липшицевости достаточно. Также, (по теореме о двойном пределе) если существует конечный или бесконечный двойной предел, а также для каждого фиксированного  $x'$  в окрестности существует конечный предел сужения  $\varphi(y) = f(x', y)$ , то пределы равны. Но вообще могут быть такие варианты:

- Двойной существует, а  $\forall x \neq x_0$  не существует даже внутренняя часть повторного предела
- Может не существовать двойной, и это можно доказать по Гейне, показав две последовательности, вдоль которых пределы не равны
- Может стремиться к 0 вдоль любого луча от 0 к  $\infty$ , но не быть бесконечно малой на  $x, y \rightarrow +\infty$ . Например,  $f(x, y) = x^2 e^{-(x^2 - y)}$

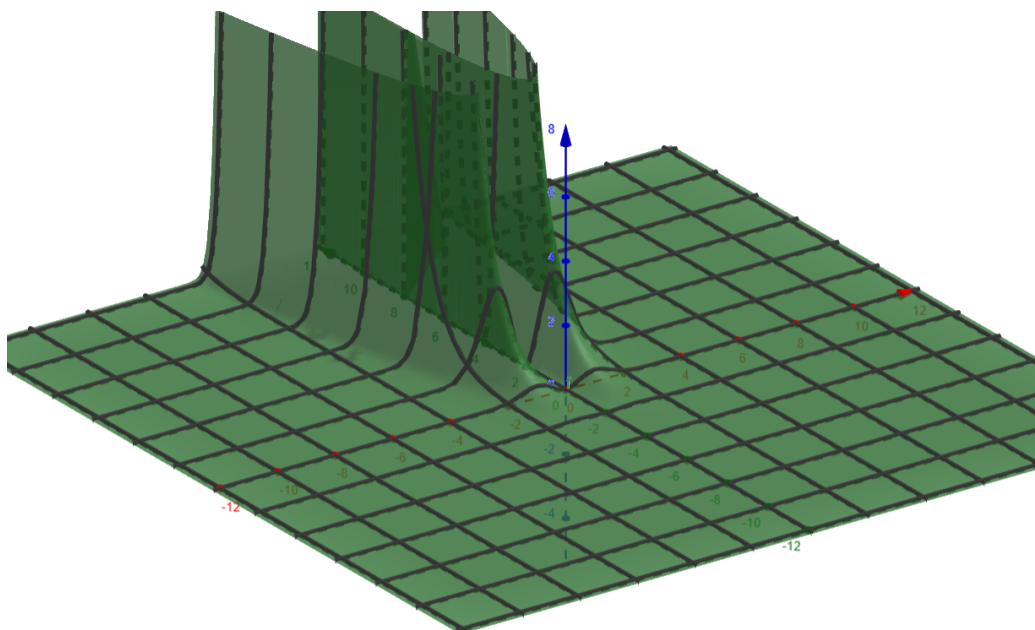


Рис. 1: Та самая  $f(x, y) = x^2 e^{-(x^2 - y)}$

Примеры с разбором есть в фотоотчёте практики 26.09: <https://t.me/c/1512041988/216>.

### 🌀 Практика 10 октября 2022 🌀

Фотоотчёт за практику: ...

Как доказать существование предела функции, например, на  $+\infty, +\infty$ ?

В определении предела фигурирует окрестность точки  $+\infty, +\infty$ , то есть

$$\begin{cases} x > \varepsilon \\ y > \varepsilon \end{cases} \quad (6.1)$$

В отличие от просто  $\|x, y\| \rightarrow \infty$ , когда .

- Нужно оценить супремум отклонения от предела при  $x > \varepsilon, y > \varepsilon$ .
- К поляным координатам и оценить супремум по некоторой части сферы (для  $+\infty, +\infty$ , казалось бы — по  $\varphi \in (0, \pi/2)$ ). Но по идее, это будет корректно, так как там  $x$  может быть сколь угодно малым. Наверное, надо сузить угол до компактного подмноже-

ства  $[\alpha, \beta] \subset (0, \pi/2)$ . И оценить зависимость супремума по  $\varphi$  от  $r$ . Особые извращения будут искать супремум через Лагранжа.

### 6.3. Дифференцирование, частные производные

Дифференцируема  $\stackrel{\text{def}}{\iff}$  представима в виде  $f(x_0) + Ah + o(|h|)$ , где  $A$  — линейный оператор ( $A \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m)$ ). Частная производная — производная направлению вектора-орта.

Иногда вектор частных производных равен вектору производному оператора.

Есть необходимое и достаточное условия.

**Теорема 1** (Базированная теорема о производных). *У нормальных функций всё будет нормально.*

Если быть точнее — для дифференцируемости достаточно существования в окрестности и непрерывности в точке частных производных по каждой переменной. Но не необходимо, так как, например, у функции  $f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & (x \in \mathbb{Q}) \text{ xor } (y \in \mathbb{Q}) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$  частные производные вообще не определены ни в каких точках кроме нуля, что уж там говорить о непрерывности.

А для равенства частных производных по разным перестановкам одной и той же последовательности переменных достаточно (но не необходимо) существования и непрерывности всех рассматриваемых частных производных в окрестности. (Фактически, в теореме было про  $r$  раз непрерывную дифференцируемость, то есть вообще по любой последовательности из  $r$  переменных).

Как искать частные производные? Если функция представлена в виде композиций элементарных функций, считаем по формулам, фиксируя остальные переменные — воспринимая их как параметры.

Если мы уже посчитали частные производные по всем переменным, то проверить дифференцируемость самой функции можно так:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - \langle \nabla f, h \rangle}{\|h\|} \rightarrow 0 \quad (6.2)$$

Но вообще — частная производная всё ещё может существовать, даже если по формулам посчитать не получается (формулы-то применимы только там, где всё определено). Если нет — тогда можем находить их как производные по направлению. Пример:

$$f(x, y) = \sqrt[3]{xy} \quad (6.3)$$

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0 \quad (6.4)$$

Попробуем применить критерий выше: вдруг этот градиент  $(0, 0)$  — и есть производная?

$$\frac{\sqrt[3]{xy} - 0 - 0}{\sqrt{x^2 + y^2}} \rightarrow ? 0 \quad (6.5)$$

Для  $x = y$  — стремится к бесконечности, хотя по лучу  $x = 0$  или  $y = 0$  и ноль, ни о каком стремлении к нулю говорить не приходится.

Для более сложных функций можно представлять их как композицию, заводя переменную для одной из её частей.

Например,

$$u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, u'_{x,y} \text{ — ?}, u'_{xx,xy,yy} \text{ — ?} \quad (6.6)$$

(в нижних индексах через запятую — все частные производные, которые требуется найти).

Обозначим  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $u = r^{-1}x$ .

Находим  $r'_x, r'_y$ . Тогда  $u'_x = (r^{-1})'_x x + r^{-1} \overset{1}{x'_x} = \dots$

Если у нас какая-то большая функция, то частная производная композиции выражается через сумму — как элемент произведения матриц Якоби.

Хозяйке на заметку:  $d\left(\frac{x}{y}\right) = d\left(\frac{ydx - xdy}{y^2}\right)$ .

Ещё на заметку: важно отличать  $d^2t$  от  $dt^2$  (последнее является обозначением для  $(dt)^2$ ).

Первое — второй дифференциал функции (для независимой переменной — это просто ноль, для них никто так не пишет). Второе — приращение переменной, возведённой в квадрат.

Как искать полные дифференциалы разных порядков?

Можно воспользоваться определением, возникшим из Тейлора — там сумма по всем мультииндексом  $k$  порядка  $l$ .

Для двухмерной переменной достаточно перебирать в суммировании степень вхождения приращения одной из переменных:

$$d^n f = \sum_{k=0}^n \frac{n! f'_{x^k y^{n-k}}}{k!(n-k)!} (dx)^k (dy)^{n-k} \quad (6.7)$$

Например,  $df = f'_x dx + f'_y dy$ ,

$$d^2 f = f''_{x^2} dx^2 + 2f''_{xy} dx dy + f''_{y^2} dy^2$$

Но на практиках матанализа дифференциалы первого-второго порядка так не считают, а в «символьном» виде, имея полный дифференциал предыдущего порядка и применяя втупую формулу дифференцирования, получают желаемую формулу.

При этом первый дифференциал рассматривают как отображение с той же сигнатурой, что и исходная функция, считая, что  $dx_i$  берётся то же самое.

Причём

$$\begin{aligned} d(g(x, y) dx + h(x, y) dy) &= (g(x, y) d(dx) + dg(x, y) dx) + (h(x, y) d(dy) + dh(x, y) dy) = \\ &= \left[ d(dx) = d^2 x = (dx)'_x dx + (dx)'_y dy = 0 \leftarrow dx = \text{const everywhere} \Rightarrow (dx)'_x = 0 \right] = \\ &\quad dx dx = (dx)^2 \stackrel{\text{def}}{=} dx^2 \\ dg(x, y) dx + dh(x, y) dy &= (g'_x dx + g'_y dy) dx + (h'_x dx + h'_y dy) dy \quad (6.8) \end{aligned}$$

Частные производные функций  $g$  и  $h$  считаем самостоятельно. Иногда получится, что какие-то из слагаемых нули, когда что-то не зависит от чего-то. И потом приведём подобные слагаемые (например,  $dx dy = dy dx$ ).

Всё это работатет для независимых переменных. Но рассмотрим хитрую композицию:



$$u = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right) \quad (6.9)$$

И мы считаем, что знаем «всё, что нужно» про функцию  $f$ .

Хотим найти полные дифференциалы  $du, d^2u$  (полагая  $x, y$  независимыми переменными).

И тут у нас получается, что  $d^2s \neq 0$ , так как это более не независимая переменная, а функция.

Так что теперь:

$$d^2u = f''_{s^2} ds^2 + (f''_{st} + f''_{ts}) ds dt + f''_{t^2} dt^2 + f'_s d^2s + f'_t d^2t \quad (6.10)$$

Где  $d^2s$  — это квадратичная форма (если замена, например, была линейная, она обнуляется).

То есть при  $s = \alpha x + \beta y$ :  $ds = \alpha dx + \beta dy$ , тогда:

$$d^2s = d^2xs''_{x^2} + 2 dx dy s''_{xy} + d^2ys''_{y^2} \quad (6.11)$$

И здесь второе слагаемое уже не обнуляется, и в результате получается не ноль, в отличие от независимых переменных.

❧ Практика 17.10.2022 ❧

## 6.4. Дифференцируем неявно заданные отображения

Есть теорема о неявно заданном отображении: если функция достаточно гладкая и в точке  $(x|y)$  оператор  $\Phi'_y$ , можно найти окрестность, в которой последние переменные ( $y$ ) выражаются через первые. Более того, через оператор можем выразить производную  $\varphi'(x)$  неявно заданного отображения  $y = \varphi(x)$  в этой окрестности через матричные выражения.

Однако, если мы знаем что-то о функции и хотим записать короче, без лишних нулей или просто не хотим возиться с матрицами, можем получить частные производные (причём и высших порядков тоже) отображения по новым переменным. Для этого надо дифференцировать тождество  $\Phi(x, \varphi(x)) \equiv 0$  по разным переменным, выражая все частные производные очередного порядка по очереди.

Можно оформить это через дифференциалы очередного порядка. Главное — не забыть, что в тождествах  $d^k(\Phi(x, \varphi(x))) \equiv 0$  переменные,  $y_i$  надо рассматривать как функции, а не независимые переменные, у которых есть ненулевые дифференциалы высших порядков.

WARNING: Простые равенства дифференцировать нельзя, только тождества (равенство должно выполняться в окрестности, чтобы все производные совпадали — они обладают свойством локальности, но требуют, чтобы точка была точкой сочленения... кхм внутренней).

Например,  $F(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2) = 0$ , найти  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

## 6.5. Дифференцируем системы- неявно заданные отображения

Фактически — это всё ещё неявные отображения, просто со значениями в  $\mathbb{R}^{n+m}$ , где .

Мы можем захотеть выразить дифференциал какого-то порядка одной части через дифференциалы других (ну или найти производные одних по другим) — из предположения, что вторая часть — взяты за независимые переменные.

«Инвариантность дифференциалов первого порядка относительно изменения зависимых и независимых переменных»: то есть не важно, какие переменные выбраны за независимые, дифференциалы удовлетворяют одному и тому же отношению. Например,  $\psi(x, y, z) = 0$ ;  $z = \varphi(x, y)$  — неявное отображение,  $dz = \varphi'_x dx + \varphi'_y dy$  — соотношение дифференциалов. Если будет  $x = \xi(y, z)$  удовлетворяет — тому же самому неявному отображению, но теперь зависимая переменная —  $x$ , то соотношение  $dx = \xi'_y dy + \xi'_z dz$  — будет то же самое. (из теоремы о неявном отображении  $\varphi'(x) = -(\Phi'_y(x, y))^{-1} \Phi'_x(x, y) \Big|_{y=\varphi(x)}$ )

А вот для дифференциалов высшего порядка — такого нет. Дифференциалы высших порядков от зависимой переменной могут быть  $\neq 0$ . Например

☞ Практика 24.10.2022 ☞

Параметризация сферы через два угла:

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \theta. \end{cases} \quad (6.12)$$

, где  $r \geq 0$ ,  $\Theta \in [0, \pi]$ ,  $\Theta \in [0, 2\pi)$

## 6.6. Замена переменной в дифференциальных уравнениях

Если хотим взять за переменную  $y$  вместо  $x$ , нужно выразить  $y^{(n)}$  через  $x^{(k)}$  и, возможно,  $y$ . Раньше искали  $f(x) = y$ , теперь будем  $f^{-1}(y) = x$ . Исходим из соотношения  $\langle y \rangle (\langle x \rangle (y)) = y$ . То есть  $\langle y \rangle \circ \langle x \rangle = id_y$ .

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}$$

Можно до посинения дифференцировать это тождество и поочерёдно получать производные  $x_y^{(n)}$  всё более старших порядков.

Если у нас уравнения с частными производными (а значит есть несколько независимых переменных), выражаем дифференциалы новых переменных через дифференциалы старых. Затем записываем полный дифференциал зависимых переменных и подставляем туда, например,  $dx_i =$

## 6.7. Поиск экстремумов

Необходимое условие — стационарна точка. Может быть

1. Локальный min
2. Локальный max
3. Седловая точка

Если представлена в виде композиции, ...

Регулярная точка — когда ранг производной максимален (то есть сколько уравнений, такой и ранг).

В точке условного экстремума градиент можно представить в виде линейной комбинации градиентов функций-уравнений.

По этому поводу составляют функции Лагранжа: большую и малую.

— Большая — из переменных и уравнений связи в  $\mathbb{R}$ . Нужно, чтобы было  $\mathcal{L}'(x^*) = 0$  и  $\Phi(x) = 0$  —

## 7. Теория функции комплексной переменной

- Полная аналитическая функция — класс эквивалентности над парами областей и голоморфных в них функций по отношению аналитической продолжимости вдоль каких-либо компонент связности какой-то цепочки областей, вдоль которой продолжаем.
- Ветви — элементы ПАФ (те самые пары). Наблюдения:
  - максимальные по включению ветви логарифма (как и аргумента) — инъективные отображения прямой в плоскость в виду полосу шириной, где  $x \in (-\infty, +\infty)$
- Риманова поверхность (функция на ней непрерывна, непрерывно отображается на плоскость, ПАФ на ней однозначна):
  - При переходе между ветвями ЛОГАРИФМА против часовой стрелки прибавляется  $2\pi i$ . Причём переход между ветвями может быть в любом месте. При фиксированной области ветви в ней — это  $f + 2\pi i k$  и только они, где  $f$  — какая-то ветвь в области.  $\ln z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z$ . Формулы логарифма произведения и частного работают, если все в одной ветви (по крайней мере, в главной ветви точно работают...).
  - ---"---СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИИ против часовой стрелки умножается на  $e^{2\pi i k \alpha}$
  - ---"---Аргумента — просто добавляется  $2\pi$

*☞ На первой практике ещё было про традиционный подход к комплексным интегралам «в лоб» (через параметризацию и производную пути), но это скучно и на контрольной не пригодится ☞*

### 7.1. Интегральная формула Коши

(Не путать с интегральной теоремой Коши, у которой 6 формулировок, все про замкнутость формы с голоморфным коэффициентом).

Позволяет вычислять интегралы по границе ограниченной области вида

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} 0, & z \notin \overline{G} \\ f(z), & z \in G \end{cases} \quad (7.1)$$

Формула показывает, что значения в области полностью определяются значениями по контуру, из неё ещё много важных следствий, но можно применять и напрямую для вычисления интегралов такого вида.

## 7.2. Интегрирование по частям, разложение в ряд и замена переменной

Всё это можно применять к комплексным интегралам, правда, если функции многозначны, то с осторожностью.

При интегрировании рядов (можно делать это почленно в области сходимости) по кругу (и гомотопным ему путям) все слагаемые кроме  $-1$ -го (то есть  $c_{-1} \frac{1}{z}$ ) уничтожаются, остаётся  $2\pi i c_{-1}$ .

...но не всегда можно явно разложить в ряд. Тогда на помощь приходят:

## 7.3. Вычисление вычетов, теорема Коши о сумме вычетов

Вычеты — это база, ведь ряд интегрируют почленно, а остальные степени по окружности — ноль. На этом можно и остановиться, но я продолжу.

Основной подход при интегрировании с помощью вычетов: Теорема Коши —  $\int_{\partial G} f = 2\pi i \sum \text{res}$ . Смотрим все особые точки внутри области, считаем вычеты. На границе (по ней мы интегрируем) особенностей быть не должно.

Как считать вычеты:

- В устранимой особой точке  $\text{res} = 0$  (где существует конечный предел, а значит, и прямое аналитическое продолжение)
- Для существенных особых точек простого пути нет — придётся честно полностью раскладывать в ряд и смотреть на коэффициент  $c_{-1}$ . Хотя нет, не придётся — на контрольной этого не будет.
- В полюсе  $n$ -ного порядка (кажись, работает и для всех меньших порядков, то есть для «полюса порядка не больше  $m$ »):  $\text{res}_{z_0} f =$

$$\frac{1}{(m-1)!} ((z - z_0)^m f(z))^{(m-1)} \Big|_{z=z_0}$$

- В частности, первого порядка:  $\operatorname{res}_{z_0} f = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$ .
- Для рациональной  $f = \frac{P}{Q}$ , где  $z_0$  — ноль  $Q$  первого порядка,  $P(z_0) \neq 0$ , и  $P, Q \in \mathcal{A}(V_{z_0})$ , то  $\operatorname{res}_{z_0} f = \frac{P}{Q'} \Big|_{z=z_0}$ .

**Замечание.** Вычеты чётных функций в противоположных точках антиравны, а нечётных — равны. Не перепутайте. В частности, в нуле и бесконечности для чётных функций вычеты равны нулю, так как антиравны сами себе.

## 7.4. Вычеты на бесконечности

Если голоморфна в окрестности бесконечности, в ней раскладывается в ряд Лорана (который перевёрнутый ряд Лорана функции  $f \circ \frac{1}{z}$  в нуле), вычет определяется как  $-c_{-1}$  нашего ряда, ведь тогда получится, что, как и всегда, вы вычисляем его, обходя бесконечность так, чтобы она оставалась слева:  $\operatorname{res} f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^-} f$ .

Теорема о полной сумме вычетов говорит, что если бесконечность — *изолированная* особая точка, то полная сумма вычетов (в конечных и. о. т. о. х. и в  $\infty$ ) равна нулю. Это позволяет в некоторых случаях упростить вычисление суммы вычетов в некоторой области (вместо суммы в тех точках, которые в него входят, — минус сумма тех, которые НЕ входят (включая бесконечность)).

Как считать вычет в бесконечности?

Для простого полюса:  $\lim_{z \rightarrow \infty} z(f(\infty) - f(z))$ .

Для полюса порядка не больше  $m$  (согласно непроверенной информации с сайта: <http://www.pm298.ru/kfunction8.php>):  $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \frac{(-1)^m}{(m+1)!} \lim_{z \rightarrow \infty} z^{m+2} f^{(m+1)}(z)$ .

## 7.5. Сведение интегралов вещественных функций к комплексным интегралам по контуру

Симметричный вокруг нуля интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty}$  по вещественной прямой (как и его главное значение) можно представить как  $\lim_{R \rightarrow +\infty}$  часть интеграла по полуокружности. Остальная часть — стремится к нулю.

Стремление к нулю доказываем через лемму Жордана.

Интегралы с тригонометрическими функциями можно представить как вещественные или комплексные части интеграла с экспонентой (пример: интегралы Лапласа).

Интегралы вида  $\int_0^{+\infty}$  чётной функции  $= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty}$ .

Особенности на вещественной прямой (например, 0) можно обходить по маленькой полуокружности и устремлять её радиус в ноль. В этом нам поможет мощная лемма, в учебнике и на лекциях вам это не расскажут! (у Виноградова каждый раз это выводилось ручками для частного случая полуокружности):

**Теорема 1** (Лемма о полувывчете). Пусть  $a$  - полюс первого порядка у функции  $f$ .

$$C_r = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = r \quad \alpha \leq \arg(z - a) \leq \beta\}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} f(z) dz = i(\beta - \alpha) \operatorname{res}_{z=a} f \quad (7.2)$$

То есть если мы берём не весь интеграл в формуле для коэффициента  $c_{-1}$  ряда Лорена, а только часть, получаем пропорционально меньшую часть (но только в пределе, разумеется).

*Доказательство.* Легко получается из ряда Лорена и  $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dz}{z}$ . ■

Если интегрировать многозначные функции, выбираем те ветви, которые содержатся в области, которая нас интересует  $\rightarrow$  их продолжения по непрерывности совпадают друг с другом.

На практике вместо предела к продолжениям пишут интегралы уже продолженных функций (но юридически это оформляется как непрерывность интеграла с параметром по параметру). Короче, смотреть учебник Виноградова стр. 453-455, там самый крутой интеграл.

Для вещественных интегралов вида как ниже можно сделать такую замену (всё, что выражается через  $z$ , понятно, может присутствовать в формуле, но тогда никто не гарантирует, что функция будет рациональной и хорошо интегрируемой):

$$\int_{-\pi}^{\pi} R(\sin \varphi, \cos \varphi) d\varphi = \left[ \begin{array}{l} z = e^{i\varphi} \\ dz = iz d\varphi \\ \cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2} \\ \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i} \end{array} \right] = \int_{|z|=1} R\left(\frac{z - \frac{1}{z}}{2i}, \frac{z + \frac{1}{z}}{2}\right) \frac{dz}{iz} \quad (7.3)$$

(Заметим, что мы здесь неявно перешли от интегралов по «обычному», вещественному отрезку к интегралу по комплексному контуру. Это легально, так как если трактовать интеграл по отрезку как интеграл вдоль пути ( $\gamma'$  там как раз комплексный вектор  $1 + 0i$ ))

*Замечание.* Что делать, если интегралы не  $\int_{-\pi}^{\pi}$ , а какие-то случайные  $\int_{\alpha}^{\beta}$ ? Всегда работающий способ — линейная замена переменной, приводящая ровно к интегралу по всей окружности.

*Замечание.* Другой способ для частного случая: если интегрируем по полуокружности и после приведения к интегралу по контуру получилась нечётная по  $z$  функция. Для неё интеграл по окружности — удвоенный интеграл по полуокружности (можно в этом убедиться, подставив в определение  $\int_{\gamma} f = \int (f \circ \gamma) \gamma': \gamma'(z)$  в противоположных точках противоположно, как и  $f(z)$ ).

К тому же выводу можно прийти, если вспомнить, как соотносятся вычеты в противоположных точках для нечётной функции: 7.3.

Для чётной всё это бессмысленно, так как вычеты антиравны и интеграл по всей окружности превратится в ноль — из него не извлечь информации.

*Замечание.* Также частный случай: если исходная функция периодична, можем проинтегрировать по нескольким периодам и надеяться, что в сумме будет окружность.

Общее место: если мы хотим составить уравнение для двух выражений интеграла по контуру (через вычеты и сумму частей контура), но оказывается, что на контуре есть особые точки, обойдём их по окружности бесконечно малого радиуса (с любой стороны) и применим лемму о полувычете.