

# **Теория чисел (практика)**

**Владимир Латыпов**  
donrumata03@gmail.com

**Vladimir Latypov**  
donrumata03@gmail.com

## Содержание

1 Разбор ДЗ 1 .....	3
1.1 Поле .....	3
1.2 Корректность определения локализации $S^{-1}R$ .....	3
1.3 Пример, где условие $\cdot s$ существенно: $\mathbb{Z}$ .....	3
1.4 Прообраз идеала при гомоморфизме — тоже идеал .....	3
2 Гауссовы числа .....	3

# 1 Разбор ДЗ 1

## 1.1 Поле

**Theorem 1.1.1**  $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$  — поле из  $p$  элементов

**Proof** Решим уравнение  $\bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{c} \cdot \bar{d} = 1$  алгоритмом Евклида, тогда  $\bar{a} \cdot \bar{b} = 1$ .  $\square$

## 1.2 Корректность определения локализации $S^{-1}R$

Показываем, что отношение из определения  $S^{-1}R$  — отношение эквивалентности:  
 $(a_1, s_1) \sim (a_2, s_2) \stackrel{\text{def}}{\iff} (a_1 s_2 - a_2 s_1) \cdot s$  для некоторого  $s$ .

Без  $s$  транзитивность для не областей целостности не докажется.

Д: домножим накрест равенства, вынесем за скобку.

## 1.3 Пример, где условие $\cdot s$ существенно: $\mathbb{Z}$

$$S = \{1, 2, 4\}$$

$$S^{-1}R \cong \mathbb{F}_3$$

Разберём 18 случаев, расположим в 3 ряда, 6 колонок.

## 1.4 Прообраз идеала при гомоморфизме — тоже идеал

**Remark 1.4.2** Уже доказали для ядра (прообраза  $\{0\}$ )

**Proof** Для начала покажем, что это  $\square$

## 2 Гауссовы числа

**Definition 2.3**  $\mathbb{Z}[i]$  — целые Гауссовы числа ( $\Re, \Im \in \mathbb{Z}$ )

Поле частных  $\mathbb{Q}[i] (\cong \mathbb{Q}[i] = \mathbb{Z}[i] + i\mathbb{Z}[i])$  вкладывается в  $\mathbb{C}$ .

Евклидова норма определяется почти как для комплексных:  $d(a + bi) = a^2 + b^2$ .

Целые гауссовы числа — тоже Евклидово кольцо: для деления с остатком

- делим как комплексные числа
- берём ближайшее из  $\mathbb{Z}[i]$