

Конспект к экзамену по матану

Владимир Латыпов

donrumata03@gmail.com

Содержание

1 Теория меры	3
2 Многообразия	3
3 Ряды Фурье и приближение функций	3
3.1 Пространства Лебега	3
3.2 Гильбертовы пространства	3

1 Теория меры

2 Многообразие

3 Ряды Фурье и приближение функций

3.1 Пространства Лебега

Определение 3.1.1: Пространство Лебега $L_p(E, \mu)$, $p \in [1, \infty]$ — множество функций п. в. $E \rightarrow \mathbb{R}$ или \mathbb{C} , для которых

$$\begin{cases} \|f\|_p = \left(\int_E |f|^p d\mu \right)^{1/p} < \infty & p \in [1, \infty) \\ \|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_E |f| < \infty & p = \infty \end{cases}$$

Определение 3.1.2: Пространство L_p (обозначается без указания множества и меры) — множество 2π -периодических функций п. в. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ или \mathbb{C} , для которых $\|f\| = \|f\|_{L_p([-\pi, \pi], \mu_1)} < \infty$.

Теорема 1: Полнота

3.2 Гильбертовы пространства

Определение 3.2.1: Гильбертово пространство — полное линейное пространство со скалярным произведением и нормой, им порождённой.

Пример: Пространство $L_2(E, \mu)$ со скалярным произведением:

$$\langle f, g \rangle = \int_E f \bar{g} d\mu$$

(суммируемость $f \bar{g}$ — за счёт неравенства Гёльдера для $p = q = 2$)

Полнота доказана в Теореме 3.1.1

Частные случаи:

- ℓ_2^m — Евклидово пространство
- ℓ_2 — последовательности

• $\ell_2(\mathbb{Z})$ — двусторонние последовательности

Лемма 3.2.1: Сходящийся в \mathcal{H} ряд можно скалярно умножать на вектор почленно

Теорема 2 (Критерий сходимости ортогонального ряда): Сходимость ряда в \mathcal{H} равносильна сходимости $\sum \|x\|^2$, причём

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} x \right\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|x\|^2$$

Следствие 2.1: Перестановка сходящейся в \mathcal{H} последовательности тоже сходится и имеет тот же предел

Теорема 3 (Вычисление коэффициентов ортогонального ряда): Если $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ОС, а $\sum_{i=1}^{\infty} c_k e_k \rightarrow x$, то коэффициенты однозначно вычисляются по формуле

$$c_k = \frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|^2}$$

Теорема 4 (Свойства частичных сумм Фурье):

1. S_n — ортогональная проекция x на $\mathcal{L}(\{e_k\})$
2. S_n — элемент наилучшего приближения к x из $\mathcal{L}(\{e_k\})$, причём равенство достигается только при $y = S_n$
3. $\|S_n\| \leq \|x\|$

Следствие 4.1 (Неравенство Бесселя): Сумма квадратов норм Ряда Фурье x не больше $\|x\|^2$.

Теорема 5 (Рисс, Фишер):

1. Ряд Фурье вектора x сходится
2. Сумма ряда Фурье — ортогональная проекция x на $\mathcal{L}(\{e_k\})$
3. Сходится именно к $x \iff$ выполняется *уравнение замкнутости* (то есть в нер-ве Бесселя достигается равенство).

Определение 3.2.2: Базис: любой вектор раскладывается по этой системе

Определение 3.2.3: Полная система: не существует отличного от нуля вектора, ортогонального всем вектора (то есть нельзя добавить ещё один вектор, чтобы осталась ОС)

Определение 3.2.4: Замкнутая система: для любого вектора выполнено *уравнение замкнутости*

Теорема 6 (Характеристика базиса): Утверждения эквивалентны для ОС $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$:

1. $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — базис
2. $\forall x, y$ выполнено обобщённое уравнение замкнутости:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} c_k(x) \overline{c_k(y)} \|e_k\|^2$$

3. $\{e_k\}$ — полная система
4. $\{e_k\}$ — замкнутая система
5. $\mathcal{L}(\{e_k\})$ плотна в \mathcal{H}

Теорема 7 (Грамм, Шмидт): систему можно ортонормировать, не изменяя линейную оболочку никакого префикса, притом единственным с точностью до коэффициентов ± 1 образом

Пример (Ортогональные базисы многочленов): Весовая функция \rightarrow вводим скалярное произведение

Теорема 8 (Существование элемента наилучшего приближения):