

# Конспект по дискретной алгебре (1-й семестр)

Латыпов Владимир (конспектор)

[t.me/donRumata03](https://t.me/donRumata03), [github.com/donRumata03](https://github.com/donRumata03), [donrumata03@gmail.com](mailto:donrumata03@gmail.com)

Андрей Сергеевич **Станкевич**

(лектор, инструктор по отношениям...на множествах пар...И только бинар

[t.me/andrewzta](https://t.me/andrewzta)

4 ноября 2021 г.

## Содержание

<b>1</b>	<b>Отношения</b>	<b>3</b>
1.1	Свойства отношений . . . . .	3
1.2	Транзитивное замыкание . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Булева алгебра</b>	<b>4</b>
2.1	Определения . . . . .	4
2.2	Перечислим некоторые функции...	4
2.2.1	Функции $n = 0$ . . . . .	4
2.2.2	Функции $n = 1$ . . . . .	5
2.2.3	Функции $n = 2$ . . . . .	5
2.3	Базовые связки базовых функций . . . . .	5
2.4	Базисы, критерий Поста . . . . .	6
2.4.1	Канонический базис . . . . .	6
2.5	Полиномы Жегалкина . . . . .	7
2.6	Критерий Поста . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Анонс следующей темы: Схемы элементов</b>	<b>9</b>

# 1. Отношения

## 1.1. Свойства отношений

Отношения бывают:

- Рефлексивные
- Симметричные
- Антисимметричные
- Транзитивные

Транзитивность и квадрат отношения - определения выглядят похоже.

**Определение 1** (Композиция отношений).

$$R \subseteq A \times B, G \subseteq A \times B \quad (1)$$

$$T \subseteq A \times C \text{ is } RG \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists x \in R \quad (2)$$

$$H \subseteq A, H \stackrel{\text{def}}{=} R^2 \quad (3)$$

$$H^0 = \{(x, x) | x \in A\} \quad (4)$$

## 1.2. Транзитивное замыкание

**Замечание.** Квадрат отношения "больше на 1" - это отношение "больше на 2".

**Определение 2** (Транзитивное замыкание).

Т.З. отношения  $R$  - минимальное по включению транзитивное отношение, содержащие  $R$

**Определение 3** (Замкнутое относительно операции свойство).

Оно выполняется для результата этой операции над объектами, тоже удовлетворяющими этому свойству.

**Замечание.** Не всегда есть минимальное по включению множество, удовлетворяющее заданному свойству, но тут есть, так как замкнутое относительно операции пересечения.

**Определение 4** (Транзитивное замыкание, эквивалентное).

Т.З. отношения  $R$ :

$$R^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \quad (5)$$

То, что определения эквивалентны доказывается, через то, что:

- Первое подмножество второго
- Второе подмножество первого

**Определение 5.**

$$R^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} R^i \quad (6)$$

**Замечание.** Бывает такая абстрактная ситуация: просто так не получается, но если добавить композицию самого с собой бесконечное количество раз, то получится.

Например, пути на графе.

## 2. Булева алгебра

### 2.1. Определения

Математические основы компьютера требуют знания двоичной логики, поэтому изучим её основы.

$$\mathbb{B} = \{True(1), False(0)\} \quad (7)$$

Булева функция - возвращает boolean. Бывают также  $n$ -арные функции:  $\mathbb{B}^n \mapsto \mathbb{B}$

Функций  $\mathbb{B}^n \mapsto \mathbb{B}$ :  $2^{2^n}$ .

### 2.2. Перечислим некоторые функции...

#### 2.2.1. Функции $n = 0$

$$\mathbb{B}^0 = \{(), ()\}$$

- alwaysTrue

- `alwaysFalse`

### 2.2.2. Функции $n = 1$

- $id\ x$  - проектор
- `not`
- $0_1$
- $1_1$

### 2.2.3. Функции $n = 2$

- $0000 : 0_2$
- $0001 : \&\&, \wedge$
- $0010 : \leftrightarrow$
- $0011 : P_1$
- $0100 : not \leftarrow$
- $0101 : P_2$
- $0110 : \oplus$
- $0111 : \vee$
- $1000 : \downarrow$
- $1001 : ==$
- $1010 : \neg y$
- ...

## 2.3. Базовые связки базовых функций

Но в реальности мы не хотим всегда задавать функции таблицей.

**Определение 6.** Композиция

**Определение 7.** Подстановка

Подстановка и композиция вместе обеспечивают любой доступный способ комбинации операций.

**Определение 8.** Замыкание множества функций - множество всех функций, которые мы можем выразить через них.

**Определение 9.** Базис (полная система функций) - множество функций, замыкание которого - универсальное множество функций.

## 2.4. Базисы, критерий Поста

### 2.4.1. Канонический базис

**Теорема 1.** Через композиции и подстановки операций  $\{\wedge, \neg, \vee\}$  можно выразить любую функцию, которая могла бы появиться в таблице

*Доказательство.* Функция задаётся бинарной последовательностью длины  $n$  (бит для каждого набора аргументов).

Построим конструкцию. Бит совпадения некой последовательности с заданной получается через конструкцию

$$is(seq) = \bigwedge_{i=0}^n (initial\_seq_i == seq_i) = \bigwedge_{i=0}^n (seq_i \text{ if } initial\_seq_i \text{ else } \neg seq_i) \quad (8)$$

Затем выберем те последовательности, где пародируемая функция выдаёт 1 и напишем в ответе:

$$f = \bigvee_{i=0}^n is\_seq_i \text{ if } seq_i \quad (9)$$

■

**Определение 10.** СДНФ - совершенная дизъюнктивная нормальная функция, ...СДНФ - совершенная дизъюнктивная нормальная функция, ...

## 2.5. Полиномы Жегалкина

$\{\oplus, \wedge, 0\}$

**Лемма 1.**  $A, B$  - множества булевых функций  $A$  - базис  $\forall f \in A$  :  
можно выразить формулой через  $B$  Тогда  $B$  - базис

*Доказательство.* Докажем через индукцию по дереву разбора. ■

**Теорема 2.**  $\{\oplus, \wedge, 0\}$  - базис

*Доказательство.*

$$\neg x = x \oplus 1 \wedge \neg(x \vee y) = \neg(x \vee \neg x) \quad (10)$$

■

**Определение 11** (Канонический полином Жегалкина).

$$P = a \oplus \bigoplus_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n \\ k \in \overline{1, n}}} a_{i_1, \dots, i_k} \wedge x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k}, \quad a, a_{i_1, \dots, i_k} \in \{0, 1\}. \quad (11)$$

Любой полином преобразованиями можно привести к приведённому полиному.

**Определение 12.** Моном - одночлен (произведение переменных)

**Замечание.** Мономы  $\in M$ ,  $|M| = 2^n$ :

- $x, y : M = \{1, x, y, xy\}$
- $x, y : M = \dots$

**Теорема 3.** Любая функция, кроме  $0$  :  $\exists!$  приведённый полином Жегалкина

*Доказательство.* •  $\forall$  Булева функция:  $\exists$  полином Жегалкина

- количество ПЖ:  $2^{2^n}$

$\Rightarrow$  биекция:  $\forall$  ПЖ:  $\exists$  БФ ■

Полезные, правда, избыточные базисы:

- $\mathbb{U}_2$  - все функции от двух аргументов
- $\mathbb{T}_2$  - все пороговые функции от двух аргументов

## 2.6. Критерий Поста

Классы функций:

- $F_0 : f(0, 0, \dots, 0) = 0$  - сохраняющие ноль
- $F_1 : f(1, 1, \dots, 1) = 1$  - сохраняющие ноль
- $F_m : \forall i (a_i \leq b_i) \Rightarrow f(a_1, \dots, a_n) \leq f(b_1, \dots, b_n)$  - монотонные, но только "возрастают"
- $F_s$  : существует ПЖ, не использующий  $\wedge$ , таких всего  $2^{(n+1)}$

**Теорема 4** (Теорема Поста).  $F$  - базис  $\iff \forall i \in \{F_0, F_1, L, M, S\} : F \not\subseteq F_i$

*Доказательство.* Первая часть - докажем, что все классы замкнуты, причём существуют функции вне любого класса. Второе очевидно, первое докажем через дерево разбора.

Вторая часть - докажем, что если есть  $f_0, f_1, f_m, f_s, f_l$ , каждая не принадлежит соответствующему классу, это может быть и одна и та же функция, то через них можно выразить что угодно.

Да начнётся разбор случаев!

1.

$$\begin{cases} f_0(1, 1, \dots, 1) = 1 \\ f_0(0, 0, \dots, 0) = 1 \end{cases} \quad (12)$$

$\Rightarrow$  получили 1

2. Кхм.. Тут случаев слишком много, не буду я это записывать...

■



**Замечание.** Критерий Поста конструктивен, поэтому возможна такая лабораторная: даны таблицы 5 истинности функций каждого типа. Задание: выразить через них в явном виде канонический базис

**Замечание.** На самом деле, таблицы истинности и формулы - самые неудобные способы работы с булевыми функциями на практике:

### **3. Анонс следующей темы: Схемы элементов**

А сколько информации содержится в функции, сколько элементов нужно для её выражения, почему обычно - много?! Об этом и обо многом другом вы узнаете на следующей лекции!