Теория чисел (практика)

Владимир Латыпов
donrumata03@gmail.com

Vladimir Latypov
donrumata03@gmail.com

Содержание

1 Разбор ДЗ 1

1.1 Поле

Теорема 1.1.1 $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$ — поле из p элементов

Доказательство Решим уравнение $\overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{c} \cdot \overline{d} = 1$ алгоритмом Евклида, тогда $\overline{a} \cdot \overline{b} = 1$. □

1.2 Корретность определения локализации $S^{-1}R$

Показываем, что отношение из определения $S^{-1}R$ — отношение эквивалентности: $(a_1, s_1) \sim (a_2, s_2) \overset{\text{def}}{\iff} (a_1 s_2 - a_2 s_1) \cdot s$ для некоторого s.

Без s тразитивность для не областей целостности не докажется.

Д: домножим накрест равенства, вынесем за скобку.

1.3 Пример, где условие $\cdot\, s$ существено: $\mathbb{Z}$

$S = \{1, 2, 4\}$

$S^{-1}R \cong \mathbb{F}_3$

Разберём 18 случаев, расположим в 3 ряда, 6 колонок.

1.4 Прообраз идеала при гомоморфизме — тоже идеал

Замечание 1.4.2 Уже доказали для ядра (прообраза $\{\mathbb{0}\}$)

Доказательство Для начала покажем, что это □

2 Гауссовы числа

Определение 2.3 $Z[i]$ — целые Гауссовы числа $(\mathfrak{R}, \mathfrak{I} \in \mathbb{Z})$

Поле частных $Z[i]$ ($\cong \mathbb{Q}[i] = Z[i] + iZ[i]$) вкладывается в $\mathbb{C}$.

Евклидова норма определяется почти как для копексных: $d(a + bi) = a^2 + b^2$.

Целые гауссовы числа — тоже Евклидово кольцо: для деления с остатком

- делим как комплексные числа
- берём ближайшее из $\mathbb{Z}[i]$