

Конспект к экзамену по билетам (математический анализ) (3-й семестр)

Латыпов Владимир (конспектор)

t.me/donRumata03, github.com/donRumata03, donrumata03@gmail.com

Лимар Иван Александрович (лектор)

<https://t.me/limvan>

21 февраля 2023 г.

Оглавление

Оглавление	2
0.1 Как работать с этим сжатым конспектом	3
0.2 Определения	3

0.1. Как работать с этим сжатым конспектом

🌀 Составлено в соответствии с лекциями весны 2023 🌀

0.2. Определения

Определение (Вероятностное пространство). Это пространство с *вероятностной* (то есть $P(X) = 1$) мерой: мера должна быть счётно-аддитивной функцией $2^X \rightarrow [0, \infty)$ на σ -алгебре.

Используется «птичий язык»:

$$\begin{aligned} AB &\stackrel{\text{def}}{=} A \cap B \\ A + B &\stackrel{\text{def}}{=} A \cup B \\ \overline{A} &\stackrel{\text{def}}{=} A^c \end{aligned}$$

Почему определяем на какой-то странной сигма-алгебре, а не на полной (2^X) ?

В случае с \mathbb{R}^n — на всём не получится сделать адекватную меру, так как, например, если в \mathbb{R} объявим $\mu[0, 1] = 1$, то множество Витали будет неизмеримо.

(Вспомним из матана, что вообще любая мера, инвариантная относительно сдвига, на той же сигма-алгебре — в константу раз отличается от меры Лебега).

Определение (Вероятностное пространство в широком смысле). Теперь работаем в алгебре, а мера — счётно-дизъюнктивно аддитивна на множествах, объединение которых уже лежит в алгебре.

Теорема 1 (Единственность стандартного распространения). ...вероятностной меры с вероятностного пространства в широком смысле на вероятностное пространство в обычном, а именно — на .

Доказательство. Как легко видеть, $\left| \bigoplus_{k \in S} (\mathfrak{R}^{\mathbb{F}^\alpha(i)})_{i \in \mathcal{U}_k} \right| \preccurlyeq \aleph_1$ при $[\mathfrak{H}]_{\mathcal{W}} \cap \mathbb{F}^\alpha(\mathbb{N}) \neq \emptyset$.

■

Замечание. Из матана известно, что достаточно потребовать первоначальное задание меры на полукольце и сигма-конечности, чтобы она совпадала со стандартным распространением на сигма-алгебре измеримых.

Пример. Примеры вероятностных пространств:

1. Дискретное: состоит из элементарных исходов, у каждого вес. $\mathbb{A} = 2^\Omega$, $P(A) = \sum_{w \in A} w$

а) Броски монеты до первого орла

б) Модель классической вероятности: $\forall i : w_i = \frac{1}{n}$. Колличество элементарных исходов в событии считается комбинаторикой.

Пример: шарики и перегородки кодируют k -элементные мультимножества n объектов или же n -кортежи длины k .

2. Геометрическая вероятность. $\Omega \subset \mathbb{R}^n, \Omega \in \mathbb{A}_n, P(A) = \frac{P(A)}{P(\Omega)}$. Пример: вычисление π Монте-Карловскими бросками иголки (считаем меру допустимого множества, интегрируя его сечение по проекции).

Свойство 0.2.1 (Элементарные свойства вероятности). • *Монотонность*

- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- Включения-исключения
- Полуаддитивность

❧ Лекция 2 ❧

Теорема 2 (Равносильность непрерывности и счётной аддитивности объёма). Утверждения равносильны:

1. P — мера
2. P — объём, непрерывный снизу
3. P — объём, непрерывный сверху

Доказательство. $2 \Leftrightarrow 3$: инвертируем.

$(2, 3) \Leftrightarrow 1$: разбиваем на кольца, остаток сходящегося ряда $\rightarrow 0$. ■