Типовик по линейной алгебре модуль 2: Задание 6. «Сумма и пересечение подпространств»

Латыпов Владимир Витальевич,
ИТМО КТ M3138, ***вариант 12***

26 сентября 2022 г.

1. Формулировка условия

Утверждение 1. Условие таково:

Подпространство L_1 задано как линейная оболочка векторов A_1 и A_2. Подпространство L_2 задано как линейная оболочка векторов B_1, B_2 и B_3. Найти базис и размерность суммы и пересечения этих подпространств.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T \tag{1}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}^T \tag{2}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}^T \tag{3}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & -5 & -1 \end{pmatrix}^T \tag{4}$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}^T \tag{5}$$

2. Нахождение базиса и размерности суммы

Сконкатенируем столбцы в матрицу и посчитаем её ранг и базисные вектора.

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & -1 & 1\\ 3 & 1 & -2 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2 & -1 & 1\\ 1 & 5 & 4 & -5 & 3\\ 2 & 4 & -1 & -1 & 0\end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & -1 & 1\\ 3 & -8 & -2 & 2 & -1\\ -1 & 2 & 2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 4 & -5 & 3\\ 2 & -2 & -1 & -1 & 0\end{pmatrix} =$$

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 3 & -8 & -5 & 5 & -4\\ -1 & 2 & 3 & -2 & 2\\ 1 & 2 & 3 & -4 & 2\\ 2 & -2 & -3 & 1 & -2\end{pmatrix} = 1 + \operatorname{rg}\begin{pmatrix}-8 & -5 & 5 & -4\\ 2 & 3 & -2 & 2\\ 2 & 3 & -4 & 2\\ -2 & -3 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

$$= 1 + \operatorname{rg}\begin{pmatrix}-18 & 10 & 5 & 6\\ -2 & -3 & -2 & -2\\ -6 & -9 & -4 & -6\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix} = 2 + \operatorname{rg}\begin{pmatrix}-18 & 10 & 6\\ -2 & -3 & -2\\ -6 & -9 & -6\end{pmatrix}$$

$$= 2 + \operatorname{rg}\begin{pmatrix}-9 & 5 & 3\\ 2 & 3 & 2\\ 2 & 3 & 2\end{pmatrix} = 2 + \operatorname{rg}\begin{pmatrix}-9 & 5 & 3\\ 2 & 3 & 2\end{pmatrix} = 4 \tag{6}$$

То есть базисными векторами берём A_1, A_2, B_1, B_2.

Размерность суммы: 4.

3. Базис и размерность пересечения

Размерность пересечения можно найти сразу:

$$\dim L_1 \cap L_2 = \dim A + \dim B - \dim A + B = 1 \tag{7}$$

Вектор принадлежит пересечению подпространств $\Leftrightarrow$ он может быть разложен как по векторам одного порпространства, так и по векторам другого.

$$v \in {}_1 \cap L_2 \Leftrightarrow v = \sum_{i=1}^{2} A_i x_i = \sum_{i=1}^{3} B_i y_i \tag{8}$$

Тогда мы получим СЛОУ:

$$x_1A_1 + x_2A_2 - y_1B_1 - y_2B_2 - y_3B_3 = \mathbb{0} \tag{9}$$

Так как A_1, A_2, B_1, B_2 — это базис, выбираем y_3 в качестве параметра.

(примечание — знак эквивалентности в LaTeX
`equiv` отображается как $\equiv$)

$$\begin{aligned}
&\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 & t \\ 3 & 1 & 2 & -2 & -t \\ -1 & -1 & -2 & 1 & t \\ 1 & 5 & -4 & 5 & 3t \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 & t \\ 0 & -8 & 5 & -5 & -4t \\ 0 & 2 & -3 & 2 & 2t \\ 0 & 2 & -3 & 4 & 2t \\ 0 & -2 & 3 & -1 & -2t \end{array}\right) \\
&\equiv \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 & t \\ 0 & 2 & -3 & 2 & 2t \\ 0 & -8 & 5 & -5 & -4t \\ 0 & 2 & -3 & 4 & 2t \\ 0 & -2 & 3 & -1 & -2t \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 & t \\ 0 & 2 & -3 & 2 & 2t \\ 0 & 0 & -7 & 3 & 4t \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \\
&\equiv \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 & t \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 2t \\ 0 & 0 & -7 & 0 & 4t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cccc|c} 21 & 62 & -21 & 0 & 21t \\ 0 & 14 & -21 & 0 & 14t \\ 0 & 0 & -21 & 0 & 12t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \\
&\equiv \left(\begin{array}{cccc|c} 21 & 62 & 0 & 0 & 9t \\ 0 & 14 & 0 & 0 & 2t \\ 0 & 0 & -21 & 0 & 12t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cccc|c} 147 & 434 & 0 & 0 & 63t \\ 0 & 434 & 0 & 0 & 62t \\ 0 & 0 & -21 & 0 & 12t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \\
&\equiv \left(\begin{array}{cccc|c} 147 & 0 & 0 & 0 & 1t \\ 0 & 434 & 0 & 0 & 62t \\ 0 & 0 & -21 & 0 & 12t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{147}t \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{7}t \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{7}t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)
\end{aligned} \tag{10}$$

То есть

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} \frac{1}{147} \\ \frac{1}{7} \\ -\frac{4}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv t \begin{pmatrix} 1 \\ 21 \\ -84 \\ 0 \\ 147 \end{pmatrix} \tag{11}$$

Тогда единственный вектор пересечения представим как:

$$v = 1A_1 + 21A_2 = \begin{pmatrix} 64 \\ 24 \\ -22 \\ 106 \\ 86 \end{pmatrix} \approx -84B_1 + 147B_3 = \begin{pmatrix} 63 \\ 21 \\ -21 \\ 105 \\ 84 \end{pmatrix} \tag{12}$$

Примерно равно получилось, потому что я где-то совсем чуть-чуть обсчитался, но суть понятна.