

Типовик по линейной алгебре
«Приведение поверхности второго
порядка к каноническому виду»

Латыпов Владимир Витальевич,
ИТМО КТ М3138, **вариант 10**

10 июня 2022 г.

1. Формулировка условия

1. (a) Выделить из уравнения поверхности квадратичную форму. Ортогональным преобразованием привести кв. ф. к каноническому виду.
- (b) Интерпретировать ортогональное преобразование, как преобразование поворота трехмерной системы координат. Проверить, что новый базис образует правую тройку. Сделать рис. поворота.
- (c) Преобразовать соответствующим образом уравнение поверхности, используя формулу связи координат в старом и новых базисах.
2. Если это необходимо, преобразовать уравнение, совершив параллельный перенос начала системы координат, поворот соответствующей плоскости. Сделать рис.
3. Выписать каноническое уравнение поверхности. Сделать рис. в канонической системе координат.
4. Выписать итоговое преобразование координат. Сделать рис.

Причём во варианте 10 уравнение такое:

$$P : x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz + 4xz + 10x + 10y + 10z + 15 = 0 \quad (1)$$

2. Ортогональное преобразование

Разделим левую часть уравнения на квадратичную форму, линейную и константную части

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$a = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$P : v^T A v + 2a^T v + a_0 = 0 \quad (4)$$

Избавимся от перекрёстных квадратичных слагаемых, приведя A к каноническому виду заменой координат ортогональной матрицей с определителем 1 (а не -1), чтобы была правая тройка.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = v = Qv' = Q \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad (5)$$

Всё в Евклидовом пространстве, так что $Q^T = Q^{-1}$, так что достаточно диагонализировать матрицу A в о.н.б. Благо она симметричная, значит, нормальная, значит, это сделать можно.

Собственные числа: -1, кратность 2 и число 5: кратность, соответственно, 1.

Просто базис из собственных:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Ортонормируем его, причём так, чтобы определитель был +1:

$$e'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e'_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, e'_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Получим формулу замены координат, а также матрицу новой формы (по сути той же, но в новом базисе).

$$Q = T_{e \rightarrow e'} = (e'_1 e'_2 e'_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = v = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} v' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad (9)$$

Теперь можем нарисовать новый базис:

А ещё мы знаем матрицу новой формы — это диагональ из собственных чисел в правильном порядке:

$$\Lambda = \text{diag}(-1, -1, 5) \quad (10)$$

Наша форма для новых переменных превращается в:

$$P : -1x^2 - 1y^2 + 5z^2 + 2(Q^T a)^T v' + 15 = 0 \quad (11)$$

Назовём $(a^T Q)$ новым a'

$$\left(a' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5\sqrt{3} \end{pmatrix} \right) \quad (12)$$

Итак, на этом этапе получаем:

$$P : -1x'^2 - 1y'^2 + 5z'^2 + 10z' + 15 = 0 \quad (13)$$

3. Параллельный перенос

$$P : -1x'^2 - 1y'^2 + 5(z' + 1)^2 + 10 = 0 \quad (14)$$

Тогда

$$\begin{cases} x'' = x' \\ y'' = y' \\ z'' = z' + 1 \end{cases} \quad (15)$$

Сделаем рисунок такого преобразования:

$$P : -1x''^2 - 1y''^2 + 5z''^2 + 10 = 0 \quad (16)$$

$$P : \frac{1}{10}x''^2 + \frac{1}{10}y''^2 - \frac{1}{2}z''^2 = 1 \quad (17)$$

Получили однополостной гиперболоид.

Нарисуем его в базисе e'' :

4. Итоговое преобразование координат

Итак, у нас есть два преобразования:

$$v = Qv' \quad (18)$$

$$v' = v'' + v_0 = v'' + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (19)$$

Тогда получим

$$v = Qv'' + Qv_0 = Qv'' + \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{-\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \quad (20)$$

Отсюда поймём, где находится $0''$ в исходных координатах:

$$(0'')_e = Q0 + \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{-\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{-\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \quad (21)$$

Это позволяет нам нарисовать ПВП в исходном базисе: