Типовик по линейной алгебре модуль 1: Задание 6 «Кривые второго порядка»

Латыпов Владимир Витальевич,
ИТМО КТ М3138, ***вариант 12***

10 января 2022 г.

Содержание

1. Формулировка условия

Утверждение 1. Условие таково:

12. Оси гиперболы совпадают с осями координат. Гипербола проходит через точки пересечения параболы $x^2 = 2y$ с прямой $x - 2y + 6 = 0$.

Составить уравнение этой гиперболы.

Сделать рисунок.

2. Решение

Что исправлено? Раньше не учитывалось, что, исходя из формулировки задачи оси гиперболы могут «совпадать с осями координат» двумя разными способами

Для начала найдём эти точки пересечения, решив квадратное уравнение (для обоих случаев они совпадают):

$$\begin{cases} x^2 = 2y \\ x - 2y + 6 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} y = \frac{x^2}{2} \\ x - 2 \cdot \frac{x^2}{2} + 6 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

$$x^2 - x - 6 = 0 \tag{3}$$

$$\left[\begin{aligned} & x = -2, y = \frac{2^2}{2} = 2 \\ & x = 3, y = \frac{3^2}{2} = 4.5 \end{aligned} \right. \tag{4}$$

То есть гипербола должна проходить через точки $(-2, 2)$ и $(3, 4.5)$.

У параболы, указанной в условии, остаётся только два параметра — главная и мнимая полуоси. Причём есть два варианта их ориертации:

1. Главная полуось совпадает с осью OX, минимая — с осью OY.
2. Наоборот: Главная полуось совпадает с осью OY, минимая — с осью OX.

.

Рассмотрим оба случая.

2.1. Случай 1

Найдём их значения, потребовав, что гипербола проходит там, где надо.

$$\begin{cases} \frac{(-2)^2}{a^2} - \frac{2^2}{b^2} = 1 \\ \frac{3^2}{a^2} - \frac{\left(\frac{9}{2}\right)^2}{b^2} = 1 \end{cases} \tag{5}$$

За α обозначим a^2, за β — b^2, помним, что оба параметра больше нуля.

$$\begin{cases} 4\beta - 4\alpha = \alpha\beta \\ 9\beta - \frac{81}{4}\alpha = \alpha\beta \end{cases} \tag{6}$$

$$4\beta - 4\alpha = 9\beta - \frac{81}{4}\alpha \tag{7}$$

$$\frac{65}{4}\alpha = 5\beta \tag{8}$$

$$\beta = \frac{13}{4}\alpha \tag{9}$$

$$4\left(\frac{13}{4}\alpha\right) - 4\alpha = \alpha \cdot \frac{13}{4}\alpha \tag{10}$$

$$13 - 4 = \frac{13}{4}\alpha \Longrightarrow \alpha = \frac{9 \cdot 4}{13} \Longrightarrow a = \sqrt{\alpha} = \frac{6}{\sqrt{13}} \tag{11}$$

$$\beta = \frac{13}{4}\alpha = \frac{\cancel{13}}{\cancel{4}} \cdot \frac{9 \cdot \cancel{4}}{\cancel{13}} = 9 \Longrightarrow b = \sqrt{\beta} = 3 \tag{12}$$

Таким образом, уравнение гиперболы в этом случае:

$$\frac{13}{36}x^2 - \frac{y^2}{9} = 1 \tag{13}$$

2.2. Случай 2

Аналогичные уравнения, но с переменой главной и мнимой полуосей местами гарантируют нам прохождение через точки пересечения:

$$\begin{cases} \frac{(-2)^2}{b^2} - \frac{2^2}{a^2} = 1 \\ \frac{3^2}{b^2} - \frac{\left(\frac{9}{2}\right)^2}{a^2} = 1 \end{cases} \tag{14}$$

Всё ещё за α обозначим a^2, за β — b^2. И всё ещё помним, что оба параметра больше нуля.

$$\begin{cases} 4\alpha - 4\beta = \alpha\beta \\ 9\alpha - \frac{81}{4}\beta = \alpha\beta \end{cases} \tag{15}$$

$$4\alpha - 4\beta = 9\alpha - \frac{81}{4}\beta \tag{16}$$

$$\beta\left(\frac{81}{4} - 4\right) = 5\alpha \tag{17}$$

$$\beta\left(\frac{65}{4}\right) = 5\alpha \tag{18}$$

$$\begin{cases} \alpha = \beta\left(\frac{65}{20}\right) \\ 4\alpha - 4\beta = \alpha\beta \end{cases} \tag{19}$$

$$\begin{cases} \alpha = \beta\left(\frac{65}{20}\right) \\ 4\cancel{\beta}\left(\frac{65}{20}\right) - 4\cancel{\beta} = \cancel{\beta}\left(\frac{65}{20}\right)\beta \end{cases} \tag{20}$$

$$4\left(\frac{65}{20}\right) - 4 = \frac{65}{20}\beta \tag{21}$$

$$\beta = \frac{4\left(\frac{65}{20}\right) - 4}{\frac{65}{20}} = \frac{36}{13} \tag{22}$$

$$\alpha = \frac{65}{20} \times \frac{36}{13} = 9 \tag{23}$$

Кто бы мог подумать: мы решили то же уравнение, только с α и β изменёнными местами. И получили тот же самый ответ. Следовательно, он уж точно верный.

Соответственно, уравнение второй гиперболы:

$$\frac{13}{36}y^2 - \frac{x^2}{9} = 1 \tag{24}$$

3. Иллюстрация

(здесь будет нарисован чертёж)

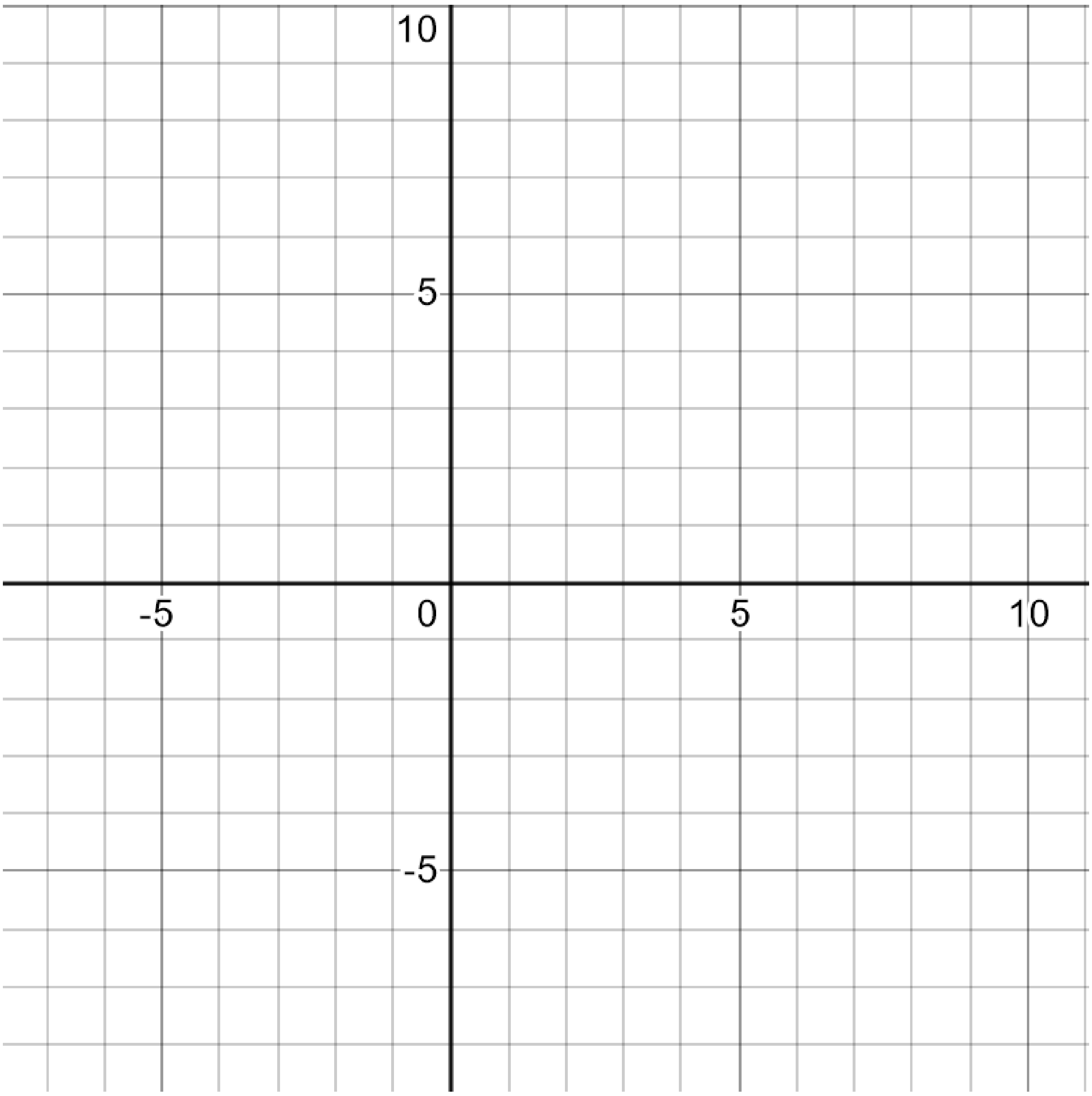

Рис. 1: Чертёж