Заметки практики по матанализу (самые разные семестры)

Латыпов Владимир (конспектор)
t.me/donRumata03, github.com/donRumata03, donrumata03@gmail.com
Семёнова Ольга Львовна (препод)

21 февраля 2023 г.

Содержание

Здесь можно вспомнить, чем мы всё это время занимались на практике.

«Стенограмма» практик в виде серии фотографий доски (насколько возможно оперативных) есть в телеграм «чатике с домашкамм» начиная с этого сообщения: `https://t.me/c/1512041988/198`.

В этом же документе содержится список методов, подходов и трюков, которые мы учимся применять на практике.

Крайне полезного освежать его в памяти перед контрольной по отношению к актуальной теме, а также в любой момент по отношению к давнему материалу.

Контрибьютинг всячески приветствуется, благо на Github делать это максимально удобно. Если вы решили, например, в какой-то момент пролистать свой конспект и вспомнить былое — добавьте в этот конспект то, чего нет здесь — помогите товарицам. Или, если что-то написанное здесь настолько вопиюще неверное, что режет ваши глаза и вызывает желание как можно быстрее это пофиксить — вперёд.

Насчёт технических деталей — в README описано по шагам, что надо установить, чтобы компилировать конспект у себя на компьютере, однако ничего не мешает дописать сюда в обычном текстовом редакторе нечто отдалённо напоминающее латех и послать Pull Request — я исправлю, если что-то не будет компилироваться.

Конспект организован по темам, в том порядке, в котором мы их проходим на практиках. Кроме того, примерно расставлены разделения, где заканчивается предыдущая практика и начинается следующая, но могут быть неточности, так как отдаётся приоритет организации по темам.

На данный момент такая картина готовности тем:

- Пределы — почти ничего
- Производные — совсем мало
- Интегралы — довольно полно, но тезисно
- Числовые ряды — вообще ничего
- Функциональные ряды — подробно
- Функции нескольких переменных — сами практики в процессе

1. Пределы

1.1. Таблица эквивалантности

Отличная ссылка на таблицу эквивалентности с нужными доказательствами: `http://mathserfer.narod.ru/node22.html`

Альтернативный вариант: `https://ib.mazurok.com/2013/05/19/table-equ/`

2. Дифференциальное исчисление одной переменной

2.1. Использование первой и второй производной для построения картины функции и её поведения у себя в голове и последующего её перенесения на бумагу

А именно:

- Находим область определения
- Смотрим поведение на границах области определения (значения, предел, асимптоты)
- Первая производная $\Longrightarrow$ делаем вывод о промежутках возрастания/убывания, экстремумах
- Вторая производная $\Longrightarrow$ выпуклость, точки перегиба

2.2. Оптимизация функций через поиск и проверку критических точек с помощью производной, например, параметры геометрических фигур

3. Интегральное исчисление одной переменной

3.1. Символьное вычисление неопределённых интегралов

- Таблица интегрирования основных элементарных функций
- Базовые приёмы интегрирования: замена переменной, ингегрирование по частям

- Тригонометрические и гиперболические подстановки
- Интегрирование по индукции, если функция содержит целочисленный параметр
- Сведение интеграла самого к себе, например, $\sqrt{x^2+a^2} \to \frac{t}{\sqrt{x^2+a^2}}t +$ $\ldots \to$ по частям.
- Выделение полного квадрата под корнем или не под корнем в знаменателе, избавление от линейного члена
- Если есть подвыражения вида $x+a$, замена переменной $t = \frac{1}{x+a}$
- Выделение в числителе производной знаменателя, например, `https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%98%D0%BD%D1%82%D0%B5%D0%B3%D1%80%D0%B8%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5_%D1%80%D0%B0%D1%86%D0%B8%D0%BE%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D1%85_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B9#%D0%98%D0%BD%D1%82%D0%B5%D0%B3%D1%80%D0%B8%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5_%D0%B4%D1%80%D0%BE%D0%B1%D0%B5%D0%B9_%D0%B2%D0%B8%D0%B4%D0%B0_%7F'%22%60UNIQ--postMath-0000007E-QINU%60%22'%7F`.
- Рациональные функции: разложение на простейшие, далее элементарно, больше второй степени не получится
- Функции вида $R\left(x,\ \sqrt[N]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)$ через замену переменной на весь корень.
- Подстановки Эйлера: $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$. В зависимости от коэффициентов нужно выбрать правильное t. Случаи могут быть пересекаться. Для функции подходят все те случаи, под условия которых она подходит:
  1. При $a > 0$: $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm t \pm \sqrt{a}x$
  2. При $c > 0$: $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm t \pm \sqrt{a}x$
  3. При наличии двух вещественных корней: $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm t(x-\lambda)$, где λ — один из корней
- Интегрирование дифференциальных биномов

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} z = x^n \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{n}z^{\frac{1-n}{n}}\,\mathrm{d}z \end{bmatrix} = \frac{1}{n}\int z^{\frac{m}{n}+\frac{1-n}{n}}(a+bz)^p\,\mathrm{d}z \tag{3.1}$$

$$q = \frac{m}{n} + \frac{1-n}{n} \tag{3.2}$$

3 случая интегрируемости:

1. $p \in \mathbb{Z}, q = \frac{M}{N}$: $t = z^{\frac{1}{N}}$, выражаем получаем $R(t)$. Профит.

- Тригонометрические подстановки в рациональных функциях $R(\cos x, \sin x)$:
  - Если $R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x, \sin x)$ (нечётно относительно cos), можно $t = \sin x$
  - Если $R(\cos x, -\sin x) = -R(\cos x, \sin x)$ (нечётно относительно sin), можно $t = \cos x$
  - Если $R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x)$ (чётно по обеим вместе), можно $t = \operatorname{tg} x$
  - Наконец, универсальное, $t = \tan\frac{x}{2}$ работает всегда, через неё легко выражаются $\sin, \cos, \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$.
- Похожая шняга получается и с $R(ch\, x, sh\, x)$
- Линейное выражение числителя через знаменатель и его производную, решение системы уравнений

3.2. Определённые интегралы

- Формула Ньютона-Лейбница
- Замена переменной, если особые точки не появляются, ничего не портит
- При интегрировании по частями надо смотреть, чтобы сумма частей имела смысл в $\overline{\mathbb{R}}$.

3.3. Несобственные интегралы

- Взятие предела для несобстыенных интегралов, если получается сделать это в явном виде

- Рассмотрение «особенных» точек, их может быть несколько
- Анализ сходимости: сначала проверяем абсолютную, потом относительную
- Критерий Коши (если любое значение после некоторого A не превышается ни на каком промежутке в $\mathbb{R}$).
- Разбиение промежутка на несколько
- Использование асимптотического анализа для определения абсолютной сходимости
- Дирихле и Абель — позволяют сделать вывод об абсолютной сходимости функции, представленной произведения
  - Дирихле: первая имеет ограниченную первообразную, вторая — монотонно □ 0, тогда сходится
  - Абель: первый интеграл сходится, вторая монотонна и ограничена, тогда тоже сходится
- Разложение подинтегральной функции в ряд Тейлора: спросить у кого-то

4. Числовые ряды

5. Функциональные ряды

Практика 5 сентября 2022

Фотоотчёт за практику: `https://t.me/c/1512041988/198`

Pro tip: для $\alpha < \frac{\pi}{2}$ — $\sin\alpha > \alpha\frac{2}{\pi}$ за счёт выпуклости.

5.1. Исследуем равномерную сходимость

- Если можем посчитать «колебание» (супремум отколнеиня на всём множестве E при фиксированном n), то проанализируем, стремится ли оно к нулю при $n \to \infty$.
- Признак Вейерштрасса (мажорантная сходимость для рядов): находим равномерную норму каждого члена, если ряд норм сходиться, то анализируемый ряд — тоже.

- Критерий Больцано-Коши (равносильно равномерной сходимости). Сходимость в себе, работает для
- Признак Дирихле (равномерная сходимость ряда произведений). У одного частичные суммы **равномерно огранчиены**, другой стремится к нулю и монотонен по n с некоторого номера при каждом фиксированном x. (Теперь везде не забываем добавлять «равномерно»).
- Признак Абеля (равномерная сходимость ряда произведений). Тут у первого частичные суммы должны быть **не равномерно *огранчиены*, а равномерно *сходиться***, но зато второму достаточно просто быть равномерно ограниченным (и всё ещё монотонным).
- Следствие: Лейбниц — сумма знакопеременного, монотонно равномерно сходящегося к 0 ряда со знакочередованием ряда — равномерно сходится.

Ещё pro tip:

$$\left|\sum_{k=1}^{N} \sin k\alpha\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin \frac{\alpha}{2}\right|} \tag{5.1}$$

$$\left|\sum_{k=1}^{N} \cos k\alpha\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin \frac{\alpha}{2}\right|} \tag{5.2}$$

5.2. Доказывем отсутствие равномерной сходимости

Если не сходится поточечно где-то, рассматривать не интересно.

- Не на компакте: если замыкание не сходится даже поточечно (на границах)
- Если не выполняется хотя бы одно необходимое условие из секции 5.3 при выполнении остальных предпосылок теоремы
- Если можно посчитать в явном виде
- Можно оценить остаток через интеграл, если есть монотонность по n и момент, с которой она начинается, не зависит от x — и сказать через него, что найдётся ε, что для любого n найдётся плохой x.
- Можно сделать то же через критерий Больцано-Коши.

Практика 12 сентября 2022

Фотоотчёт за практику: <отсутствует>.

5.3. Свойства равномерно сходящихся

При равномерной сходимости можно производить перестановку пределов, из неё получаем возможность заключить непрерывность предела, получаем перестановочность интегрирования и дифференцирования.

Однако это всё получается и при более вольных условиях, но они более сложные, мы их не изучали.

Практика 19 сентября 2022

Фотоотчёт за практику: `https://t.me/c/1512041988/208`.

5.4. Степенные ряды

Ряды вида $\sum_{i=1}^{\infty} c_i(z - z_0)^i$.

Умеем искать радиус сходимости (это шар, внутри гарантированно сходится, снаружи — не менее гарантированно расходится, а на границе — надо думать, анализировать дальше).

- Коши (база, работает всегда): $R = \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$
- Даламбер (иногда работает и он, если существует): $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|$

Потом можем использовать степенные ряды как составные части для анализа произвольных рядов.

Раскладываем в ряд Тейлора:

Разложить можем, чтобы в пределе все производные совпадали, но когда она будет совпадать с самой функцией на каком-то промежутке?

Оказывается, что достаточно комплексной дифференцируемости в $B_R(z_0)$ — тогда существует единственный набор коэффициентов степенного ряда с заданным центром, с пределом которого функция совпадает — и коэффициенты тогда находятся через Тейлора.

Note: для комплексной дифференцироемости выполняются все естественнные свойства обычной: замкнутость относительно арифметических операций, дифференцируемость элементарных функций, производная локальной обратимой функции и т.д.

Разложение элементарных функций в степенной ряд было на доске..

Как раскладывать в степенные ряды?

- Честно, через производные по Тейлору
- Раскладывать в произведение — перемножать ряды
- В круге сходимости дифференцировать можно почленно — замечаем, что ряд является интегралом чего-то хорошего — и дифферегнцирем его ряд.
- Аналогично — если является производной чего-то хорошего
- Можно пользоваться тем, что сумма ряда равна функции в круге сходимости. Например,

$$\frac{1}{x-x_0} = \frac{1}{-x_0}\left(\frac{1}{1-\frac{x}{x_0}}\right) = -\frac{1}{x_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{x_0}\right)^k \tag{5.3}$$

Практика 26 сентября 2022

Фотоотчёт за практику: `https://t.me/c/1512041988/216`

Если у нас уже есть ряд, и надо проанализировать, какую функцию он описывает или его свойства.

- Для анализа схоимости можно посмотреть на коэффициент, как всегда.
- Можно применить метод божественного озарения и, например, продифференцировать, умножить на какую-то сдвигающую скобку и заметить, что получилось нечто содержащее исходный ряд, получив диффуру...

Признак сходимости обычных, положительных рядов, обобщающий признак Д'Аламбера — признак Гаусса:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right), \varepsilon > 0 \tag{5.4}$$

Тогда при $\lambda > 1$ — сходится, если $\lambda < 1$ — расходится, иначе (при $\lambda = 1$) — $\mu > 1$ — сходится, $\mu \leqslant 1$ — расходится.

6. Функции нескольких переменных

6.1. Берём пределы

Какие механизмы?

- По Коши/окрестностям: для окрестности результатов найдётся окрестность аргументов, такая что каждый студент знает, какая.
- По Гейне — вдоль любой последовательности, стремящейся к x_0 по D
  $\{x_0\}$ $f(x_n) \to\ A$
- Эквивалентно (тривиально — про Коши) — $\sup_{x \in \dot{V}_\delta(x_0) \cap D} |f(x) - A| \underset{\delta \to 0}{\longrightarrow} 0$

6.2. Разница между повторным и двойным пределом

У «хороших» функций, конечно, их существование эквивалентно и они равны. Наверное, Липшицевости достаточно. Также, (по теореме о двойном пределе) если существует конечный или бесконечный двойной предел, а также для каждого фиксированного x' в окрестности существует конечный предел сужения $\varphi(y) = f(x', y)$, то пределы равны. Но вообще могут быть такие варианты:

- Двойной существует, а $\forall x \neq x_0$ не существует даже внутрення часть повторного предела
- Может не сущетствовать двойной, и это можно доказать по Гейне, показав две последовательности, вдоль которых пределы не равны
- Может стремиться к 0 вдоль любого луча от 0 к ∞, но не быть бесконечно малой на $x, y \to +\infty$. Например, $f(x, y) = x^2 e^{-(x^2 - y)}$

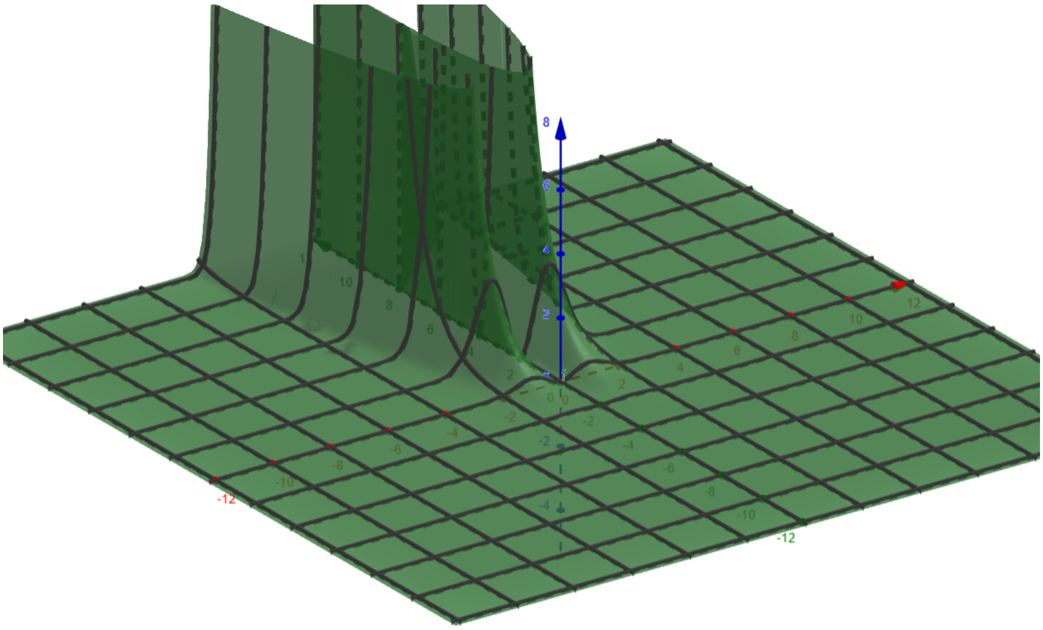

Рис. 1: Та самая $f(x, y) = x^2 e^{-(x^2-y)}$

Примеры с разбором есть в фотоотчёте практики 26.09: `https://t.me/c/1512041988/216`.

Практика 10 октября 2022

Фотоотчёт за практику: ...

Как доказать существование предела функции, например, на $+\inf, +\inf$?

В определении предела фигурирует окрестность точки $+\inf, +\inf$, то есть

$$\begin{cases} x > \varepsilon \\ y > \varepsilon \end{cases} \tag{6.1}$$

В отличие от просто $||x, y|| \to \ \inf$, когда .

- Нужно оценить супремум отклонения от предела при $x > \varepsilon, y > \varepsilon$.
- К полянрым координатам и оценить супремум по некоторой части сферы (для $+\inf, +\inf$, казалось бы — по $\varphi \in (0, \pi/2)$). Но по идее, это будет корректно, так как там x может быть сколь угодно малым. Наверное, надо сузить угол до компактного подмноже-

ства $[\alpha, \beta] \subset (0, \pi/2)$. И оценить зависимость супремума по φ от r. Особые извращенцы будут искать супремум через Лагранжа.

6.3. Дифференцирование, частные производные

Дифференцируема $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ представима в виде $f(x_0) + Ah + o(|h|)$, где A — линейный оператор ($A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m)$). Частная производная — производная направлению вектора-орта.

Иногда вектор частных производных равен вектору производному оператора.

Есть необходимое и достаточное условия.

Теорема 1 (Базированная теорема о производных). *У нормальных функций всё будет нормально.*

Если быть точнее — для дифференцируемости достаточно сущетствования в окрестноти и непрерывности в точке частных производных по каждой переменной. Но не необходимо, так как, например, у функции $f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & (x \in \mathbb{Q}) \operatorname{xor} (y \in \mathbb{Q}) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ частные производные вообще не определены ни в каких точках кроме нуля, что уж там говорить о непрерывности.

А для равенства частных производных по разным перестановкам одной и той же последовательности переменных достаточно (но не необходимо) существования и непрерывности всех *рассматриваемых* частных производных в окрестности. (Фактически, в теореме было про r раз непрерывную дифференцируемость, то есть вообще по любой последовательности из r переменных).

Как искать частные производные? Если функция представлена в виде композиций элементарных функций, считаем по формулам, фиксируя остальные переменные — воспринимая их как параметры.

Если мы уже посчитали частные производные по всем переменным, то проверить дифференцируемость самой функции можно так:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - \langle \nabla f, h \rangle}{\|h\|} \to 0 \tag{6.2}$$

Но вообще — частная производная всё ещё может сущетвовать, даже если по формулам посчитать не получается (формулы-то применимы только там, где всё определено). Если нет — тогда можем находить их как производные по направлению. Пример:

$$f(x, y) = \sqrt[3]{xy} \tag{6.3}$$

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0 \tag{6.4}$$

Попробуем применить критерий выше: вдруг этот градиент $(0,0)$ — и есть производная?

$$\frac{\sqrt[3]{xy} - 0 - 0}{\sqrt{x^2 + y^2}} \to ?0 \tag{6.5}$$

Для $x = y$ — стремится к бесконечности, хотя по лучу $x = 0$ или $y = 0$ и ноль, ни о каком стремлении к нулю говорить не приходится.

Для более сложных функций можно представлять их как композицию, заводя переменную для одной из её частей.

Например,

$$u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, u'_{x,y} — ?, u'_{xx,xy,yy} — ? \tag{6.6}$$

(в нижних индексах через запятую — все частные производные, которые требуется найти).

Обозначим $r = \sqrt{x^2 + y^2}, u = r^{-1}x$.

Находим r'_x, r'_y. Тогда $u'_x = (r^{-1})'_x x + r^{-1} \cancelto{1}{x'_x} = \ldots$

Если у нас какая-то большая функция, то частная производная композиции выражается через сумму — как элемемент произведения матриц Якоби.

Хозяйке на заметку: $\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right) = \mathrm{d}\left(\frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{y^2}\right)$.

Ещё на заметку: важно отличать d^2t от dt^2 (последнее является обозначением для $(dt)^2$).

Первое — второй дифференциал функции (для независимой переменной — это просто ноль, для них никто так не пишет). Второе — приращение переменной, возведённой в квадрат.

Как искать полные дифференциалы разных порядков?

Можно воспользоваться определением, возникшим из Тейлора — там сумма по всем мультииндексом k порядка l.

Для двухмерной переменной достаточно перебирать в суммировании степень вхождения приращения одной из переменных:

$$\mathrm{d}^n f = \sum_{k=0}^{n} \frac{n! f'_{x^k y^{n-k}}}{k!(n-k)!} (\mathrm{d}x)^k (\mathrm{d}y)^{n-k} \tag{6.7}$$

Например, $\mathrm{d}f = f'_x \,\mathrm{d}x + f'_y \,\mathrm{d}y$,

$\mathrm{d}^2 f = f''_{x^2} \,\mathrm{d}x^2 + 2f''_{xy} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y + f''_{y^2} \,\mathrm{d}y^2$

Но на практиках матанализа дифференциалы первого-второго порядка так не считают, а в «символьном» виде, имея полный дифференциал предыдущего порядка и применяя втупую формулу дифференцирования, получают желаемую формулу.

При этом первый дифференциал рассматривают как отображение с той же сигнатурой, что и исходная функция, считая, что $\mathrm{d}x_i$ берётся то же самое.

Причём

$$\begin{gathered}\mathrm{d}(g(x,y)\,\mathrm{d}x + h(x,y)\,\mathrm{d}y) = (g(x,y)\,\mathrm{d}(\mathrm{d}x) + \mathrm{d}g(x,y)\,\mathrm{d}x) + (h(x,y)\,\mathrm{d}(\mathrm{d}y) + \mathrm{d}h(x,y)\,\mathrm{d}y) = \\ \begin{bmatrix} \mathrm{d}(\mathrm{d}x) = \mathrm{d}^2 x = (\mathrm{d}x)'_x \,\mathrm{d}x + (\mathrm{d}x)'_y \,\mathrm{d}y = 0 \leftarrow \quad \mathrm{d}x = \text{const everywhere} \Rightarrow (\mathrm{d}x)'_x = 0 \\ \mathrm{d}x \,\mathrm{d}x = (dx)^2 \stackrel{\text{def}}{=} dx^2 \end{bmatrix} = \\ \mathrm{d}g(x,y)\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}h(x,y)\,\mathrm{d}y = (g'_x \,\mathrm{d}x + g'_y \,\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}x + (h'_x \,\mathrm{d}x + h'_y \,\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}y\end{gathered} \tag{6.8}$$

Частные производные функций g и h считаем самостоятельно. Иногда получится, что какие-то из слагаемых нули, когда что-то не зависит от чего-то. И потом приведём подобные слагаемые (например, $\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \mathrm{d}y \,\mathrm{d}x$).

Всё это работатет для независимых переменных. Но рассмотрим хитрую композицию:

$$u = f(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}) \tag{6.9}$$

И мы считаем, что знаем «всё, что нужно» про функцию f.

Хотим найти полные диффенерциалы $\mathrm{d}u, \mathrm{d}^2u$ (полагая x, y независимыми переменными).

И тут у нас получается, что $\mathrm{d}^2s \neq 0$, так как это более не независимая переменная, а функция.

Так что теперь:

$$\mathrm{d}^2u = f''_{s^2}\,\mathrm{d}s^2 + (f''_{st} + f''_{ts})\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t + f''_{t^2}\,\mathrm{d}t^2 + f'_s\,\mathrm{d}^2s + f'_t\,\mathrm{d}^2t \tag{6.10}$$

Где d^2s — это квадратичная форма (если замена, например, была линейная, она обнуляется).

То есть при $s = \alpha x + \beta y$: $\mathrm{d}s = \alpha\,\mathrm{d}x + \beta\,\mathrm{d}y$, тогда:

$$\mathrm{d}^2s = \mathrm{d}^2xs''_{x^2} + 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}ys''_{xy} + \mathrm{d}^2ys''_{y^2} \tag{6.11}$$

И здесь второе слагаемое уже не обнуляется, и в результате получается не ноль, в отличие от нехависимых переменных.

Практика 17.10 2022

6.4. Дифференцируем неявно заданные ображения

Есть теорема о неявно заданном отображении: если функция достаточно гладкая и в точке $(x|y)$ оператор Φ'_y, можно найти окрестность, в которой последние переменные (y) выражаются через первые. Более того, через оператор можем выразить производную $\varphi'(x)$ неявно заданного отображения $y = \varphi(x)$ в этой окрестности через матричные выражения.

Однако, если мы знаем что-то о функции и хотим записать короче, без лишних нулей или просто не хотим возиться с матрицами, можем получить частные производные (причём и высших порядков тоже) отображения по новым переменным. Для этого надо дифференцировать тождество $\Phi(x, \varphi(x)) \equiv 0$ по разным переменным, выражая все частные производные очередного порядка по очереди.

Можно оформить это через дифференциалы очередного порядка. Главное — не забыть, что в тождествах $\mathrm{d}^k\left(\Phi(x,\varphi(x))\right) \equiv 0$ переменные, y_i надо рассматривать как функции, а не независимые переменные, у которых есть ненулевые дифференциалы высших порядков.

WARNING: Простые равенства дифференцировать нельзя, только тождества (равенство должно выполняться в окрестности, чтобы все производные совпадали — они обладают свойством лоакльности, но требуют, чтобы точка ~~была точкой сочленения... кхм~~ внутренней).

Например, $F(x+y+z, x^2+y^2+z^2) = 0$, найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

6.5. Дифференцируем системы-неявно заданные отображения

Фактически — это всё ещё неявные отображения, просто со значениями в $\mathbb{R}^{n+m}$, где .

Мы можем захотеть выразить дифференциал какого-то порядка одной части через дифференциалы других (ну или найти производные одних по другим) — из предположения, что вторая часть — взяты за независимые переменные.

«Инвариантность дифференциалов первого порядка относительно изменения зависимых и независимых переменных»: то есть не важно, какие переменные выбраны за независимые, дифференциалы удовлетворяют одному и тому же отношению. Например, $\psi(x,y,z) = 0$; $z = \varphi(x,y)$ — неявное отображение, $dz = \varphi'_x dx + \varphi'_y dy$ — соотношение дифференциалов. Если будет $x = \xi(y,z)$ удовлетворяет — тому же самому неявному отображению, но теперь зависимая переменная — x, то соотношение $\mathrm{d}x = \xi'_y\,\mathrm{d}y + \xi'_z\,\mathrm{d}z$ — будет то же самое. (из теоремы о неявном отображении $\varphi'(x) = -\left(\Phi'_y(x,y)\right)^{-1} \Phi'_x(x,y)\Big|_{y=\varphi(x)}$)

А вот для дифференциалов высшего порядка — такого нет. Дифференциалы высших порядков от зависимой переменной могут быть $\neq 0$. Например

Практика 24.10.2022

Параметризация сферы через два угла:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta. \end{cases} \tag{6.12}$$

, где $r \geq 0, \Theta \in [0, \pi], \Theta \in [0, 2\pi)$

6.6. Замена переменной в дифференциальных уравнениях

Если хотим взять за переменную y вместо x, нужно выразить $y^{(n)}$ через $x^{(k)}$ и, возможно, y. Раньше искали $f(x) = y$, теперь будем $f^{-1}(y) = x$ Исходим из соотношения «y»(«x»(y)) $= y$ То есть «y» $\circ$ «x» $= id_y$.

$y'_x = \frac{1}{x'_y}$

Можно до посинения дифференцировать это тождество и поочерёдно получать производные $x_y^{(n)}$ всё более старших порядков.

Если у нас уравнения с частными производными (а значит есть несколько независимых переменных), выражаем дифференциалы новых переменных через дифференциалы старых. Затем записываем полный дифференциал зависимых переменных и подставляем туда, например, $\mathrm{d}x_i =$

6.7. Поиск экстремумов

Необходимое условие — стационарна точка. Может быть

1. Локальный min
2. Локальный max
3. Седловая точка

Если представлена в виде композиции, ...

Регулярная точка — когда ранг производной максимален (то есть сколько уравнений, такой и ранг).

В точке условного экстремума градиент можно представить в виде линейной комбинации градиентов функций-уравнений.

По этому поводу составляют функции Лагранжа: большую и малую.

— Большая — из переменных и уравнений связи в $\mathbb{R}$. Нужно, чтобы было $\mathcal{L}'(x^*) = 0$ и $\Phi(x) = \mathbb{0}$ — Малая — то же самое, но зависит она только от

7. Теория функции комплексной переменной

- Полная аналитическая функция — класс эквивалентности над парами областей и голоморфных в них функций по отношению аналитической продолжимости вдоль каких-либо компонент связзности какой-то цепочки областей, вдоль которой продолжаем.
- Ветви — элементы ПАФ (те самые пары). Наблюдения:
  - максимальные по включению ветви логарифма (как и аргумента) — образы инъективных отображений прямой в плоскость в виду полосу шириной 2π, где $x \in (-\infty, +\infty)$. В частности — полосы шириной 2π.
  - В области существует голоморфная ветвь логарифма, аргумента и *плохой* степенной функции $\Leftrightarrow$ в ней нельзя обойти ноль по контуру. То есть должен быть какой-то «разрез». Этот разрез может быть максимально кривой, петлять, но он должен быть.
- Риманова поверхность (функция на ней непрерывна, непрерывно отображается на плоскость, ПАФ на ней однозначна):
  - При переходе между ветвями ЛОГАРИФМА против часовой стрелки прибавляется $2\pi i$. Причём переход между ветвями может быть в любом месте. При фиксированной области ветви в ней — это $f + 2\pi ik$ и только они, где f — какая-то ветвь в области. $\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i \,\mathrm{Arg}\, z$. Формулы логарифма произведения и частного работают, если все в одной ветви (по крайней мере, в главной ветви точно работают...).
  - ---"---СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИИ против часовой стрелки умножается на $e^{2\pi ik\alpha}$
  - ---"---Аргумента — просто добавляется 2π

На первой практике ещё было про традиционный подход к комплексным интегралам «в лоб» (через параметризацию и производную пути), но это скучно и на конртрольной не пригодится

7.1. Интегральная формула Коши

(Не путать с *интегральной теоремой Коши*, у которой 6 формулировок, все про замкнутость формы с голоморфным коэфициентом).

Позволяет вычислять интегралы по границе ораниченной области вида

$$\frac{1}{2\pi\imath}\int_{\partial G}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \begin{cases} 0, & z \notin \overline{G} \\ f(z), & z \in G \end{cases} \tag{7.1}$$

Формула показывает, что значения в области полностью определяются значениями по контуру, из неё ещё много важных следствий, но можно применять и напрямую для вычисления интегралов такого вида.

7.2. Интегрирование по частям, разложение в ряд и замена переменной

Всё это можно применять к комплексным интегралам, правда, если функции многозначны, то с осторожностью.

При интегрировании рядов (можно делать это почленно в области сходимости) по кругу (и гомотопным ему путям) все слагаемые кроме -1-го (то есть $c_{-1}\frac{1}{z}$) уничтожаются, остаётся $2\pi\imath c_{-1}$.

...но не всегда можно явно разложить в ряд. Тогда на помощь приходят:

7.3. Вычисление вычетов, теорема Коши о сумме вычетов

Вычеты — это база, ведь ряд интегрируют почленно, а остальные степени по окружности — ноль. На этом можно и остановиться, но я продолжу.

Основной подход при интегрировании с помощью вычетов: Теорема Коши — $\int_{\partial G} f = 2\pi\imath \sum \mathrm{res}$. Смотрим все особые точки внутри области, считаем вычеты. На границе (по ней мы интегрируем) особенностей быть не должно.

Как считать вычеты:

- В устранимой особой точке $\mathrm{res} = 0$ (где существует конечный предел, а значит, и прямое аналитическое продолжение)

- Для существенных особых точек простого пути нет — придётся честно полностью раскладывать в ряд и смотреть на коэффициент c_{-1}. Хотя нет, не придётся — на контрольной этого не будет.
- В полюсе m-того порядка (кажись, работает и для всех меньших порядков, то есть для «полюса порядка не больше m»): $\operatorname*{res}_{z_0} f = \frac{1}{(m-1)!}((z-z_0)^m f(z))^{(m-1)}\Big|_{z=z_0}$
- В частности, первого порядка: $\operatorname*{res}_{z_0} f = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$.
- Для $f = \frac{P}{Q}$, где z_0 — ноль Q первого порядка, $P(z_0) \neq 0$, и $P, Q \in \mathcal{A}(V_{z_0})$, то $\operatorname*{res}_{z_0} f = \frac{P}{Q'}\Big|_{z=z_0}$

Замечание. Вычеты чётных функций в противоположных точках антиравны, а *не*чётных — равны. Не перепутайте. В частности, в нуле и бесконечности для чётных функций вычеты равны нулю, так как антиравны сами себе.

7.4. Вычеты на бесконечности

Если голоморфна в окрестности бесконечности, в ней раскладывается в ряд Лорана (который перевёрнутый ряд Лорана функции $f \circ \frac{1}{\cdot}$ в нуле), вычет определяется как $-c_{-1}$ нашего ряда, ведь тогда получится, что, как и всегда, вы вычисляем его, обходя бесконечность так, чтобы она оставалась слева: $\operatorname*{res}_{\infty} f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^-} f$.

Теорема о полной сумме вычетов говорит, что если бесконечность — *изолированная* особая точка, то полная сумма вычетов (в конечных и. о. т. о. х. и в ∞) равна нулю. Это позволяет в некоторых случаях упростить вычисление суммы вычетов в некоторой области (вместо суммы в тех точках, которые в него входят, — минус сумма тех, которые НЕ входят (влючая бескоенечность)).

Как считать вычет в бесконечности?

Для простого полюса: $\lim_{z\to\infty} z(f(\infty) - f(z))$.

Для полюса порядка не больше m (согласно непроверенной информации с сайта: `http://www.pm298.ru/kfunction8.php`): $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \frac{(-1)^m}{(m+1)!} \lim_{z\to\infty} z^{m+2} f^{(m+1)}(z)$.

7.5. Сведение интегралов вещественных функций к комплексным интегралам по контуру

Симметричный вокруг нуля интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}$ по вещественной прямой (как и его главное значение) можно представить как $lim_{R\to\,+\infty}$ часть интеграла по полуокружности. Остальная часть — стремится к нулю.

Стремление к нулю доказываем через лемму Жордана.

Интегралы с тригонометрическими функциями можно представить как вещественные или комплексные части интеграла с экспонентой (пример: интегралы Лапласа).

Интегралы вида $\int_{0}^{+\infty}$ чётной функции $= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}$.

Особенности на вещественной прямой (например, 0) можно обходить по маленькой полуокружности и устремлять её радиус в ноль. В этом нам поможет мощная лемма, *в учебнике и на лекциях вам это не расскажут!* (у Виноградова каждый раз это выводилось ручками для частного случая полуокружности):

Теорема 1 (Лемма о полувычете). *Пусть a - полюс первого порядка у функции f.*

$$\begin{gathered} C_r = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| = r \quad \alpha \leqslant \arg(z-a) \leqslant \beta\} \\ \lim_{r\to 0}\int_{C_r} f(z)dz = i(\beta-\alpha)\operatorname*{res}_{z=a} f \end{gathered} \tag{7.2}$$

То есть если мы берём не весь интеграл в формуле для коэфициента c_{-1} ряда Лорена, а только часть, получаем пропорционально меньшую часть (но только в пределе, разумеется).

Доказательство. Легко получается из ряда Лорена и $\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\mathrm{d}z}{z}$. ∎

Если интегрировать многозначные функции, выбираем те ветви, которые содержатся в области, которая нас интересует $\to$ их продолжения по непрерывности совпадают друг с дргуом.

На практике вместо предела к продолжениям пишут интегралы уже продолженных функций (но юридически это оформляется как непрерывность интеграла с параметром по параметру). Короче, смотреть учебник Виноградова стр. 453-455, там самый крутой интеграл.

Для вещественных интегралов вида *как ниже* можно сделать такую замену (всё, что выражается через z, понятно, может присутствовать в формуле, но тогда никто не гарантирует, что функция будет рациональной и хорошо интегрируемой):

$$\int_{-\pi}^{\pi} R(\sin\varphi, \cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \begin{bmatrix} z = e^{i\varphi} \\ \mathrm{d}z = iz\,\mathrm{d}\varphi \\ \cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2} = \frac{z+\frac{1}{z}}{2} \\ \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i} = \frac{z-\frac{1}{z}}{2i} \end{bmatrix} = \int_{|z|=1} R\left(\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}, \frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right)\frac{\mathrm{d}z}{iz} \tag{7.3}$$

Заметим, что мы здесь неявно перешли от интегралов по «обычному», вещественному отрезку к интегралу по комплексному контуру. Это легально, так как если трактовать интеграл по отрезку как интеграл вдоль пути (γ' там как раз комплексный вектор $1 + 0i$). Также можно сказать, что мы заметили, что интеграл по отрезку представим в виде $\int_a^b (f \circ \gamma)\gamma'$ и воспользовались определением интеграла вдоль пути.

Замечание. Что делать, если интегралы не $\int_{-\pi}^{\pi}$, а какие-то рандомные $\int_{\alpha}^{\beta}$? Всегда работающий способ — линейная замена переменной, приводящая ровно к интегралу по всей окружности.

Замечание. Другой способ для частного случая: если интегрируем по полуокружности и после приведения к интегралу по контуру получилась НЕчётная по z функция. Для неё интеграл по окружности — удвоенный интеграл по полуокружности (можно в этом убедиться, подставив в определение $\int_\gamma f = \int (f \circ \gamma)\gamma'$: $\gamma'(z)$ в противоположных точках противоположно, как и $f(z)$).

К тому же выводу можно прийти, если вспомнить, как соотносятся вычеты в противоположных точках для нечётной функции: 7.3.

Для чётной всё это бессмысленно, так как вычеты антиравны и интеграл по всей окружности превратится в ноль — из него не извлечь информации.

Замечание. Также частный случай: если исходная функция периодична, можем проинтегрировать по нескольким периодам и надеяться, что в сумме будет окружность.

Общее место: если мы хотим составить уравнение для двух выражений интеграла по контуру (через вычеты и сумму частей контура), но оказывается, что на контуре есть особые точки, обойдём их по окружности бесконечно малого радиуса (с любой стороны) и применим лемму о полувычете.

8. Интегралы Лебега в $\mathbb{R}$

8.1. Приёмы вычисления

Очевидные приёмы: линейность по функции, аддитивность по множеству (разрезать множество интегрирования на несколько, в каждом из которых интеграл устроен в некотором смысле единообразно).

8.1.1. Теоремы Тонелли и Фубини

Представляем двойной/тройной/… интеграл по множеству как повторный интеграл по его сечениям и по проекции:

$$\int_E f d\mu_{n+m} = \int_{\mathrm{Pr}_x E} \mathrm{d}\mu_n \int_{E[x]} f(x,y)\,\mathrm{d}\mu_m \tag{8.1}$$

Можно переставлять повторные интегралы в любом порядке, обычно некоторые из них выгоднее, резать не приходится.

8.1.2. Замена переменной

Рассматриваем случай, когда преобразование координат — диффеоморфизм.

Тогда $\nu A = \mu\Phi(A)$ — мера, её плотность относительно μ — $|\det\Phi'|$, то есть $\nu A = \mu\Phi(A) = \int_A |\det\Phi'(x)|\,\mathrm{d}\mu$.

А значит, можно делать замену переменной: $\int_{\Phi(E)} f\,\mathrm{d}\mu = \int_E (f\circ\Phi)|\det\Phi'|\,\mathrm{d}\mu$.

Частные ситуации:

- Линейная замена
- полярная замена (якоибан r), замена $\begin{cases} u = y/x \\ v = xy \end{cases}$

- При четырёхугольнике, ограниченом прямыми, вместо того, чтобы втупую его резать, можно сделать замену, переодящую его в прямоугольник.

8.1.3. Граница задана параметрически

В таком случае, на промежутках обратимости какой-то функции, притворяемся, что как-то получили явную зависимость для уравнение границы ($y = f(x) = \psi \circ \varphi^{-1}(x)$), а потом, когда уже выписали интеграл, делаем в нём замену переменной, чтобы вернуться к выражаемым функциям.

Пример: https://youtu.be/1V1ynMIvL9w?list=PLd7QXkfmSY7YKwk8J9t2CHvnO5ZW 201.

8.2. Вычисление площадей, объёмов

Площадь/объём, совпадающие с мерой, когда определены, вычисляются как интегралы характеристической фукции по объемлющему пространству (или, что эквивалентно, единицы по соответствующему множеству).

А дальше, после выписывания интеграла, можно уже использовать вышеописанные методы (кажется, ещё и интеграирование по частям, когда пройдём интегралы по многообразиям).

8.3. Тройные интегралы

Теперь ещё больше вариантов перестановок и сечений, а также появляются сферическая и циллиндрическая замены.