Практическое рукоВводство по дифференциальным уравнениям

Латыпов Владимир (конспектор)
t.me/donRumata03, github.com/donRumata03, donrumata03@gmail.com

5 января 2023 г.

Содержание

Состоит из разобранных в курсе методов решения (и определения границ применимости) и комментариев-концептуализаций □ оформлен в стиле «алгоритма» и нацелен на практическое применение.

Соседний документ — для теоретического экзамена и более глубокого осмысления.

1. Введение, постановка задачи, визуальные представления

Дифференциальное уравнение — условие на функцию, записанное с использованием дифференциальных операторов. Возможно, ещё дана кастомная область, в которой уравнение рассматривается и точка, через которую требуется проходить.

Решить дифференциальное уравнение — описать класс всех функций, удовлеторяющих уравнению. Pro tip: мы в основном рассматриваем уравнения, для которых «в большей части точек» выполняются условия Коши о единственности, так что решения обычно параметризуются n константами (где n — подядок уравнения).

Также в курсе рассматриваются системы уравнений (которые фактически диффуры для векторной переменной). Теория в основном выводится сначала для них, а потом переносится на уравнения высшего порядка через сведение их к системе.

В общем случае диффуры формулируются как $F(\ldots) = 0$, где $\ldots$ — все символы, которые нам разрешено использовать

Важный тип уравнений: нормальные (для систем и для уравнений первого порядка) и (с той же сутью, но для уравнений высшего порядка) канонический — когда уравнение разрешено относительно производных (самого высокого порядка для УВП). Тогда запись будет $y^{(n)} = f(\ldots)$, где «…» — всё остальное.

Для них мы как бы в каждой точке знаем, в какую сторону надо идти. Направление, в котором надо двигаться (вектор-значение функции f), можно изобразить в виде векторного поля (на плоскости или в пространстве $\mathbb{R}_{t,r}$).

Мы можем построить ломанную Эйлера.

Но тупо проинтегрировать мы не можем (так как есть зависимость от самого y, не только x).

А этот «метод решения диффуров» — вычислительно нестабильный (то есть малая погрешность в начале накапливается и может привести к очень сильно отличающемуся результату в итоге) — в отличие от интегрирования. ...так что решать диффуры (даже в нормальной форме) хочется по-честному...

Иногда предоставить решение в явном виде (т.е. $y(x)$ или $r(t)$) не получается, тогда можно предъявить в параметрическом виде или в виде т.н. «общего интеграла» — неявного отображения.

Иногда записывают уравнения в диффернциалах: $P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y = 0$ — это позволяет удобного говорить о решениях как $y(x)$, так и $x(y)$ — и даже $\begin{cases} x(t), \\ y(t) \end{cases}$.

Причём если изобразить векторное поле формы $\omega = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$, получится, что в каждой точке решение ($\overset{\text{def}}{=}$ вектор — его дифференциал) должно быть перпенликулярно вектору (P, Q), потому что требование — равенство скалярного произведения нулю.

2. Уравнения, интегрируемые в квадратурах

Для узкого класса уравнений, можем через элементарные функции и операции интегрирования неявно выразить ответ. Иногда даже получается явно.

2.1. С разделёнными переменными

$P(x)\,\mathrm{d}x + Q(y)\,\mathrm{d}y = 0$ — коэффициенты формы зависят только от «своей» переменной.

Общий интеграл: $\int P(x)\,\mathrm{d}x + \int Q(y)\,\mathrm{d}y = C, \quad C \in \mathbb{R}$.

2.2. С разделЯЮЩИМИСЯ переменными

$p_1(x)q_1(y)\,\mathrm{d}x + p_2(x)q_2(y)\,\mathrm{d}y = 0$ — коэффициенты формы представимы в виде произведения функций, зависящих только от одной переменной.

Метод решения: разделяем область задания на прямоугольники, в которых функции q_1, p_2 принимают ноль, рассматриваем в каждой отдельно, поделив на них $\frac{p_1(x)}{p_2(x)}\,\mathrm{d}x + \frac{q_2(y)}{q_1(y)}\,\mathrm{d}y = 0$, затем — склеиваем решения, чтобы они получились гладкими (то есть совпадать в месте склейки должны пределы самих y и пределы y').

2.3. Однородные

$P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$, где коэффициенты — однородные функции $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ степени p, то есть $f(\alpha x, \alpha y) = \alpha^p f(x,y)$.

Тогда замена

$$\begin{cases} x = x, \\ z = \frac{y}{x} \end{cases} \tag{1}$$

…приводит к УРП.

Обычно замена производится тривиально.

2.4. Линейное первого порядка

$y' = p(x)y + q(x)$.

Решения такие и только такие (покрывают всю область + теорема о единственности):

$$y = \left(C + \int q e^{-\int p}\right) e^{\int p}, \quad C \in \mathbb{R} \tag{2}$$

(Здесь и далее интеграл будет значить «какая-нибудь первообразная» (причём здесь, кажись, должна быть одна и та же в $\pm \int p$) — константу дописываем при необходимости)

2.5. Бернулли

$y' = p(x)y + q(x)y^\alpha, \quad \alpha \neq 0, 1.$

Сводится делением на y^α и переходу к переменной $z(x) = y^{1-\alpha}$.

2.6. Рикатти

$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$.

В общем случае в квадратурах не интегрируется, но, если известно какое-нибудь решение φ, подстановкой $y = z + \varphi$ к Бернулли.

2.7. В полных дифференциалах

Если форма $\omega P \, \mathrm{d}x + Q \, \mathrm{d}y$ интегрируема, то есть $du = \omega$, называется «в полных дифференциалах». (То есть u — такая, что $u'_x = P, u'_y = Q$)

Обший интеграл: $u(x, y) = C, \quad C \in \mathbb{R}$.

Если живём в односвязной области, точность формы проверяется через $P'_y \,?\!= Q'_x$.

Получать u можно зафиксировав и проинтегрировав от неё по пути.

А можно сначала зафиксировать y, найти поведение вдоль прямой через частную производную u'_x, а потом — учесть изменение вдоль y. $C(y)$ находится через уравнение для u'_y.

2.7.1. Интегрирующий множитель

Если условие $P'_y = Q'_x$ не выполнено, можно попробовать угадать такое μ, чтобы уравнение $\mu(x, y)\omega = 0$ было в полных дифференциалах.

Для этого необходимо $\mu'_y P + \mu'_x Q = (Q'_x - P'_y)\mu$.

3. Ненормальные уравнения

3.1. Разрешимое

Если можно разрешить локально, делаем это потом склеваем.

3.2. Параметризация

Если какого-то символа из x, y, y' нет — можно параметризовать кривую решения уравнения $F(..., ...)$ как для независимых переменных, а потом — воспользоваться основным соотношением: $\mathrm{d}y = y'_x \, \mathrm{d}x$ (неизвестны всегда разные штуки).

Если все символы есть, параметризуем поверхность (двумя параметрами u, v) $F(x, y, y') = 0$ как для независимых переменных. Запишем то же соотношение и получим диффуру на u, v. Если смогли решить в виде $v = \phi(u, C)$, выражам через один параметр параметрически x, y.

4. Уравнения высшего порядка, методы понижения порядка

4.1. Не присутствуют функция и производные низких порядков

То есть $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ...)$.

Тогда делаем замену $z = y^{(k)}$.

4.2. Без символа x

То есть $F(y, y', y'', ...) = 0$.

Отдельно рассмотрим константные решения. Иначе — область задания разбивается на промежуктки обратимости. В них $z(y) = y'(x(y))$, возьмём y за переменную, а z — за функцию. Получим уравнение менбшего порядка.

Производные высших порядков легко выражаются через $y, z, z', z'', ...$.

4.3. Однородное относительно функции и производных

Делаем замену: $z = \frac{y'}{y}$.

4.4. В точных производных

$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Phi(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$.

Тогда сводимся к $\Phi(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) = C$.

5. Системы уравнений, теоремы о единственности, существовании и продолжимости

Нормальная система. Можно рассмотреть равносильное интегральное уравнение. Можно построить ломанную Эйлера.

Теорема Пеано: Если $f \in C(G \to \mathbb{R}^n)$, то существует решение на отрезке Пеано.

Теорема Пикара: Если она ещё и локально Липшицева по r (равномерно по t), то решение задачи Коши единственно на всём отрезке, на котором существует.

Приближения Пикара, получающиеся в процессе доказательства:

$$\varphi_0(t) = r_0 \tag{3}$$

$$\varphi_k(t) = r_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi_{k-1}(\tau))\,\mathrm{d}\tau \tag{4}$$

Продолжимость решений: для локально липшицевых существует единственное максимальное решение, являющееся продолжением остальных.

Максимальное решение всегда выходит за любой компакт, содержащийся в области.

Если $G = (a, b) \times \mathbb{R}^n$, а система сравнима с линейной, максимальное решение определено на всём (a, b).

Общие методы решения: их особо нет, может быть, получится сделать удачную замену, чтобы взаимозависимость пропала. Иногда можно свести к уравнению высшего порядка.

Pro tip: если хочется проанализировать нормальное уравнение высшего порядка, можно в голове свести его к системе, но фактически нужно проанализировать непрерывность/липщицевость функции f.

6. Линейные системы и уравнения

$$r' = P(t)r + Q(t) \tag{5}$$

Где P — матричная, а Q — вектор- функция. Обе не обязаны быть линейными по t.

Выделяют виды: однородные/неоднродные, с постоянными/непостоянными коэффициентами.

Решение однородной — линейное пространство (так как подпространство непрерывных функций, замкнутое относительно умножения на коэффициент и сложения). Размерность — n. Матрица-базис — «фундаментальная матрица системы». Тогда решения системы — для любого вектора коэфициентов C: $\varphi(t) = \Phi(t)C$

Общее решение неоднородной — частное решение + решение однородного уравнения.

Pro tip: Вронскиан (не) ноль однажды — Вронскиан (не) ноль навсегда (если функции — *решения*). Его можно вычислить через Остроградского-Ливулля как начальное значение умножить на экспоненту интеграла следа матрицы коэффициентов.

7. Решение с постоянными коэффициентами

Если коэффициенты матрицы постоянны, общее решение получается через разложение Жордана: для каждого числа λ и цепочки Жордана будут решения $e^{\lambda t} \cdot h_1$, $e^{\lambda t} \cdot (\frac{t^1}{1!} h_1 + h_2)$, ...

Фактически, получаем e^{Pt} с точностью до умножения на обратимую матрицу справа.

Другой способ получить фундаментальную матрицу: найти матричную экспоненту от матрицы системы, умноженной на t.

Тут нужно помнить, как потенциировать ячейку Жордана... И как строить башни.

Pro tip для поиска корней (тык). То есть в случае характеристического многочлена рациональные корни — целые и делят свободный член.

Башни строить, если они небольшие, можно уравнениями, начиная с собственных векторов: $Ah_{i+1} = h_i$.

Ультимативный способ — пропалывать корневые пространства, но вряд ли это понадобится.

Главное — не забывать, в каком порядке писать в матрице перехода к Жорданову базису векторы — «в обратном»: слева пишутся верхние этажи башни Жордана, а затем — направо по очереди применение оператора)

Рецепта решения однородного уравнения с непостоянными коэффициентами — не будет…

7.1. Метод неопределённых коэффициентов для ЛСУ

Для поиска частного решения неоднородной системы. Работает только для постоянных коэффициентов.

Если в правой части $p_k(t)e^{\gamma t}$, то решением будет некий тоже некий квази-вектор-многочлен (pen-pineapple-apple-pen…): $e^{t\gamma}q_{k+s}(t)$, где s — максимальный размер клетки Жордана для собственного числа γ (также известен как высота замка, самая длинная Жорданова цепочка и кратность в минимальном многочлене) — или ноль, если это не собственное число.

Кроме того, если все координаты вектор-функции — линейные комбинации синуса икосинуса — ищем ответ в виде некой другой комбинации с неизвестными коэффициентами.

Для других случаев простого рецепта не будет — ~~думайте сами~~ используйте метод вариации постоянной (см. далее в программе).

7.2. Метод вариации постоянной для ЛСУ

Коэффициенты не обязаны быть постоянными.

Находим частное решение как линейную комбинацию базиса однородного, но теперь коэффициенты — любые функции, то есть таким образом покрываются все возможные непрерывные кандиадаты на частное решение.

Находим коэффициенты из системы $\Phi C' = q$. И это гарантирует, что полученая штука — частное решение.

Найти C' в явном виде можем так: $C' = \Phi^{-1}q$, потом покоординатно иетегрируем и находим вектор коэффициентов-функций. Считаем линейную комбинацию, получаем частное решение.

Pro tip: если вронскиан хороший, удобно может быть считать обратную матрицу через союзную матрицу: $A^{-1} = \frac{A^{*T}}{\det A}$. (Не путать с сопряжённой матрицей, которая тоже со звёздочкой).

7.3. Задача Коши

Условие Коши $\varphi(t_0) = r_0$.

Получаем отсюда коэффициенты:

$C = \Phi^{-1}(t_0)(r_0 - \psi(t_0))$, где ψ — частное решение неоднородного.

Если решали через матричную экспоненту — легко обращается и решением будет $e^{A(t-t_0)}r_0$.

8. Линейные уравнения высших порядков

В теории ≈все выводы и формулы получаются через сведение к системам, однако формулы для частного случая — более красивые/приятные.

Базис решения (для постоянных коэффициентов) получается через корни характеристического уравнения, для каждого корня λ кратности m будут решения: $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, ...t^{m-1}e^{\lambda t}$.

Причём, если коэффициенты вещественные, то комплексные корни разбиваются на пары комплексно совряжённых, так что заменяем $y, \overline{y}$ на $\Re y, \Im y$: пару $t^k e^{(a \pm b\mathbf{i})t}$ комплексно сопряжённых можно заменить на вещественную: $t^k e^{at} \cos b\mathbf{t}, t^k e^{at} \sin b\mathbf{t}$.

8.1. Метод неопределённых коэффициентов для ЛУВП

Для нахождения частного решения. Работает только для постоянных коэффициентов.

Если $f(x) = p_k(t)e^{\gamma t}$ (квазимногочлен степени k), ищем частное решение системы в виде $t^m q_k(t)e^{\gamma t}$, где m крстность характеристического числа корня γ (0, если это не корень).

В частности, если справа линейная комбинация $a\cos(\beta t) + b\sin(\beta t)$, ищем тоже линейную комбинацию $A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)$.

Подробнее: тут.

8.2. Метод вариации постоянной

Более обобщённый, но и более сложный.

Ищем линейную комбинацию решений однородной, но коэффициенты теперь — функции (так что, так как они базис при каждом t, так можно любую функцию выразить...).

Но ещё добавляем условие $\alpha' y_1 + \beta' y_2 = 0$. И из того, что решение после дифференцирования, подстановки и сокращения (с учётом того, что y_1, y_2 — решения) получися уравнение: $\alpha' y_1' + \beta' y_2' = f$

Это система относительно α', β' в каждой точке разрешима, так как Вронскиан — как раз определитель её матрицы, а решения — линейно независимы.

Решим через Крамера, а потом проинтегрируем, чтобы получить сами α, β.

Подробнее — на Вики или тут.

8.3. Метод «божественного озарения» — угадай и подгони

$n-1$ решений угадываем, а оставшееся — находится, учитывая, что Вронскиан (вычисляющийся по Остроградскому-Ливуллю и записывающийся как определитель — представляем $\frac{W}{y_1^2} = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)'$, интегрируем) везде отличен от нуля.

Для ЛУ теорема О-Л такая: $W = W(t_0)e^{\int_{t_0}^{t}(-p_{n-1}(\tau))\,\mathrm{d}\tau}$. ($p_{n-1}$ — коэффициент перед старшей не-единичной степенью, то есть как раз перед y^{n-1}).

Подробнее — здесь.

8.4. Решение с помощью рядов

Будем искать разложимые в ряд решения в виде ряда. Их легко дифференцировать и умножать на степени x.

Из равенства нулю полученного свёрнутого ряда нулю как функции получаем равенство нулю всех коэффициентов. А из него получаем рекуррентные соотношения на коэффициенты ряда (первые несколько обычно либо нули, либо любые — то есть можно взять их в качестве параметров).

9. Теория устойчивости

Глобально устойчивость в диффурах — свойство не сильно изменяться в дальнейшем при небольших изменениях в начальных данных.

Устойчивым может быть либо решение, либо положение системы (что эквивалентно устойчивости стационарного решения со значением в этой точке).

Устойчивость рассматривают в «автономных системах» — где правая часть не зависит от параметра („времени“).