Содержание

1 Введение.

Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Зачем вообще это изучается? А вот предположим, что мы изучаем природное явление, в котором есть неизвестная величина y. Координата, там, напряжение, количество частиц, популяция или некоторая другая штука, которая зависит от времени, координаты либо чего ещё. Функция, короче. И мы хотим знать в каждый момент времени/в каждой точке, чему эта функция равна. И исследуя её мы можем увидеть связь y и скорости её изменения.

Пример. Давайте, например, рассмотрим популяцию кроликов. И мы сначала проводим эксперимент, в котором мы раз в неделю считаем кроликов. Составляем табличку.

Время	t_0	t_1	$\cdots$	t_n
Количество	y_0	y_1	$\cdots$	y_n

На неё мы внимательно смотрим и, внезапно, замечаем, например, то, что прирост количества кроликов пропорционален их количеству.
А потом мы решили приходить не раз в неделю, а раз в день, чтобы удостовериться в том, что эта пропорциональность и для более маленького промежутка времени соблюдается. А потом раз в час. И если всё ещё соблюдается, то мы получаем, что $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ пропорционально y. И вот, пожалуйста, связь y и y'.

Вообще задача науки — предсказывать будущее. Или прошлое. Что-то, что мы не смогли увидеть. И если мы узнаем, какова функция y, то мы с этой задаче справимся. Для таких целей мы можем исследовать наше уравнение.

Простейший метод исследования дифференциальных уравнений. Самый простой способ — угадать решение.

Пример. Рассмотрим пример $y' = ky$. Подставим, сюда, не знаю, $y = kt$. Получим $k = k^2t \Leftrightarrow t = \frac{1}{k}$. Это не позволяет нам предсказывать популяцию кроликов в любой момент, только в один момент позволяет. Это нас не устраивает.
А вот что подойдёт, так это e^{kt}. Тогда получается, мы предсказываем любой момент, но вот незадача: это не единственное решение, подойдёт Ce^{kt} для любого C. Это, на самом деле, все возможные решения, это мы ещё докажем.

Ограничения.

Пример. Это что же получается, что количество кроликов может быть произвольно большим? Да ну не похоже на правду. В чём проблема?
В том что модель сильно неточная. Кролики ещё умирать умеют, притом тем быстрее, чем их больше. А мы это никак не учитываем, а стоило бы.

То, что описано выше, мы изучать не будем. Всеми пространными рассуждениями о точности моделей занимаются физики, биологи, разные другие люди, но не мы. Нам дают уравнение, мы его решаем.
Чем мы ещё не занимаемся (пока что) — зависимостью от нескольких параметров. Дифференциальные уравнения, где функции нескольких переменных — это не наш курс.

2 Уравнения первого порядка.

Уравнения первого порядка и его решения.

Определение 1. Обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка называют запись

$$F(x; y; y') = 0 \tag{2.1}$$

Замечание. Все наши уравнения будут обыкновенными, так что далее просто «дифференциальное уравнение 1 порядка».

Определение 2. Функция φ называется **решением уравнения 2.1** на интервале $\langle a; b\rangle$, если выполнено 2 условия:

1. φ непрерывно дифференцируема.
2. $F(x; \varphi(x); \varphi'(x)) \equiv 0$ на всём промежутке $\langle a; b\rangle$.

Определение 3. **Общим решением** дифференциального уравнения называется множество всех его решений.

Определение 4. Соотношение вида

$$\Phi(x; y; C) = 0$$

называется **общим интегралом**, если при некоторых значениях C оно неявно задаёт решение 2.1.

Пример.

$$y' = x$$

Если записывать общее решение формально, получим

$$\left\{\varphi\colon \substack{\langle a;b\rangle\to\mathbb{R}\\ \frac{x^2}{2}+C} \;\middle|\; C \in \mathbb{R}; a < b; a, b \in \overline{\mathbb{R}}\right\}$$

Но так никто не пишет, пишут

$$y = \frac{x^2}{2} + C, C \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$$

Определение 5. **Интегральной кривой** называют график решения.

Пример. Рассмотрим вот такой простой пример:

$$y' = -\frac{1}{x^2} \quad x \neq 0$$

Люди, знающие математический анализ, скажут, что ответом является $y = \frac{1}{x} + C$. Люди, знающие анализ чуть лучше, уточнят, что C — это функция, которая может быть равна разным константам на разных промежутках непрерывности.
Тут не так. Тут считается, что константа — это константа. В частности, решение данного уравнения выглядит так:

$$y = \begin{cases} \frac{1}{x} + C_1 & x > 0 \\ \frac{1}{x} + C_2 & x < 0 \end{cases} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Именно поэтому функция может быть решением уравнения только на интервале.

Уравнения в нормальной форме.

Определение 6. Говорят, что дифференциальное уравнение находится в нормальной форме, если оно выглядит как

$$y' = F(x; y) \tag{2.2}$$

Замечание. Давайте посмотрим, что происходит, когда мы подставляем функцию φ в 2.2. Ну, происходит

$$\varphi'(x) = F(x; \varphi(x))$$

А это значит, что множество точек $(x; \varphi(x))$ должно лежать в области определения F.

Определение 7. **Областью определения уравнения** 2.2 называются область определения F (обозначается $\operatorname{dom} F$).

Пример. Например, областью определения $y' = x\sqrt{y}$ является $\{(x; y) \mid x \in \mathbb{R}; y \geqslant 0\}$.

Замечание. Разумеется, исследование уравнения 2.2 начинается с исследования области определения.

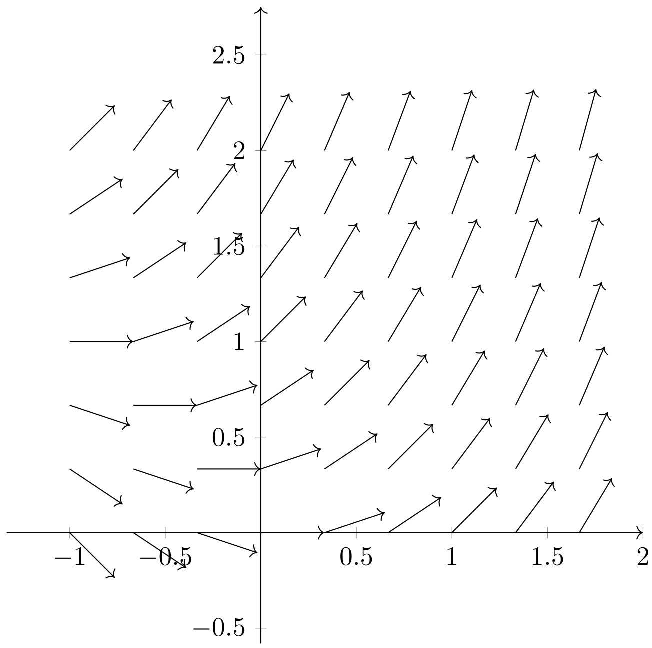
Замечание. Интересно, что у уравнения 2.2 есть геометрический смысл. Давайте возьмём $\operatorname{dom} F$ и в каждой точке $(x;y)$ нарисуем вектор $(1;F(x;y))$. Тогда $F(x;y)$ — тангенс угла наклона вектора в точке $(x;y)$. Тогда, как несложно заметить, если φ — решение на $\langle a;b\rangle$, то

$$\forall x_0 \in \langle a;b\rangle\ \varphi'(x_0) = F(x_0;\varphi(x_0))$$

А отсюда, поскольку производная в точке — угловой коэффициент касательной, интегральная кривая в каждой точке касается вектора.
На самом деле верно и обратное: если мы построили кривую, в каждой точке касающуюся вектора, это будет решение

Пример.

$$y' = x + y$$



Замечание. Вообще рисунок, аналогичный нарисованному выше, предсказывает, как ведут себя все интегральные кривые. Например, в данном случае как параболы.

Определение 8. **Ломаная Эйлера** — это ломаная, получаемая следующим образом: берётся некоторая точка, в ломаную добавляется описанный выше вектор, с началом в этой точке. Дальше по тому же алгоритму рассматривается конец вектора.

Замечание. Если взять достаточно маленькую длину векторов (а им, да, можно изменять длину), то можно приблизительно решить дифференциальное уравнение. Например, если проекция вектора на Ox равна h, то следующую точку можно найти так:

$$x_{i+1} = x_i + h$$
$$\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = f(x_i;y_i) \Rightarrow y_{i+1} = y_i + hf(x_i;y_i)$$

Уравнение в дифференциалах.

Определение 9. Запись вида

$$P(x;y)\mathrm{d}x + Q(x;y)\mathrm{d}y = 0 \tag{2.3}$$

называется **уравнением в дифференциалах**.

Определение 10. Говорят, что φ является **решением 2.3** на $\langle a; b\rangle$, если на этом интервале выполнено

$$P(x;\varphi(x)) + Q(x;\varphi(x))\varphi'(x) \equiv 0$$

Замечание. В чём особенность этого уравнения, так это в том, что x и y входят в это уравнение равноправно (его можно решить и как $x = \psi(y)$).

Определение 11. Также ψ является **решением 2.3** на $\langle a; b\rangle$, если на этом интервале выполнено

$$P(\psi(y); y)\psi'(y) + Q(\psi(y); y) \equiv 0$$

Пример. Например, если мы рассмотрим

$$x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = 0$$

То мы можем получить $\varphi(x) = \sqrt{1-x^2}$ на $(-1; 1)$ и $\varphi(x) = -\sqrt{1-x^2}$ на $(-1; 1)$ или $\psi(y) = \sqrt{1-y^2}$ на $(-1; 1)$ и $\psi(y) = \sqrt{1-y^2}$ на $(-1; 1)$. Это, соответственно, верхняя и правая полуокружности. Понятно, что полную окружность таким образом не получить, потому что окружность — не график функции. Но очень хочется. Так вот как это правильно формально сделать?

Определение 12. Вектор-функция $r(t) = (\varphi(t); \psi(t))$ называется **параметрическим решеним 2.3** на $\langle \alpha; \beta\rangle$, если

- $r \in C^1(\langle \alpha; \beta\rangle \to \mathbb{R}^2)$, $\forall t \in \langle \alpha; \beta\rangle$ $r'(t) \neq 0$.
- $P(\varphi(t); \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t); \psi(t))\psi'(t) \equiv 0$.

Пример. Например, $r(t) = (\cos t; \sin t)$ будет параметрическим решением $x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = 0$.

Определение 13. Интегральная кривая уравнения 2.3 — образ её параметрического решения.

Замечание. Раньше мы называли интегральной кривой что-то другое. А теперь вот это. Как эти определения связаны вообще?

Утверждение. *Это определение строго расширяет предыдущее.*

Доказательство. Давайте возьмём интегральную кривую в прошлом смысле и докажем, что в этом смысле она тоже интегральная кривая. Ну, пусть $y = \varphi(x)$ — решение 2.3 на $\langle a; b\rangle$. Тогда у нас будет интегральная кривая

$$\Gamma = \{(x; \varphi(x)) \mid x \in \langle a; b\rangle\}$$

Тогда, рассмотрев $r(t) = (t; \varphi(t))$, получим параметрическое решение (доказательство этого факта тривиально). □

Утверждение. *Также верно следующее утверждение: если взять интегральную кривую в новом смысле и выделить из неё что-то, что является графиком функции, то эта функция будет решением. Доказывать мы это не будем, но это так. Именно для этого факта, кстати, мы вводили условие на $r'(t) \neq 0$: иначе в интегральной кривой нового смысла могли бы быть изломы.*

Определение 14. Уравнения называются эквивалентными, если они имеют одинаковое множество интегральных кривых.

Утверждение. *Упражнением читателю является следующее утверждение:*

$$y' = f(x; y) \iff \mathrm{d}y = f(x; y)\mathrm{d}x$$

Доказательство. Доказательство этого факта есть в методичке. □

Замечание. Пусть $y = \varphi(x)$ — решение 2.3. Пусть Γ_φ проходит в области $Q(x;y) \neq 0$. Тогда φ — решение $y' = -\frac{P(x;y)}{Q(x;y)}$. Аналогично верно обратное следствие.
Также верно, что если у нас есть решение $x = \psi(y)$ в области, где $P(x;y) \neq 0$, то оно является решением $x' = -\frac{Q(x;y)}{P(x;y)}$.
А значит в случае, когда они оба не равны нулю, мы можем изучать два уравнения в нормальной форме. Потом придётся составлять из графиков функции параметрические решения, но всё же достаточно изучить их.

Определение 15. Если в уравнении 2.3 $P(x_0;y_0) = 0 = Q(x_0;y_0)$, точка $(x_0;y_0)$ называется **особой точкой**.

Пример. В особых точках могут происходить самые разные вещи. Например, ничего не происходить. Для этого рассмотрим уже имеющийся пример

$$x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = 0$$

Там особой точкой является начало координат, и в нём ничего не происходит. Вообще решениями этого уравнения являются все возможные окружности с центром в нуле, а значит в нуле не проходит ни одна кривая. В то время как в любой другой точке — одна.

Пример. Может быть наоборот, когда в особой точке бесконечность кривых, а в остальных местах — одна.

Геометрический смысл уравнения в дифференциалах.

Замечание. Давайте рассмотрим 2.3 и скрафтим такую функцию: $n(x;y)\colon D \to \mathbb{R}^2$, где $D = \operatorname{dom} P \cap \operatorname{dom} Q$, $n(x;y) = (P(x;y); Q(x;y))$. Тогда, если $r(t)$ — параметрическое решение, то

$$P(\varphi(t);\psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t);\psi(t))\psi'(t) \equiv 0$$

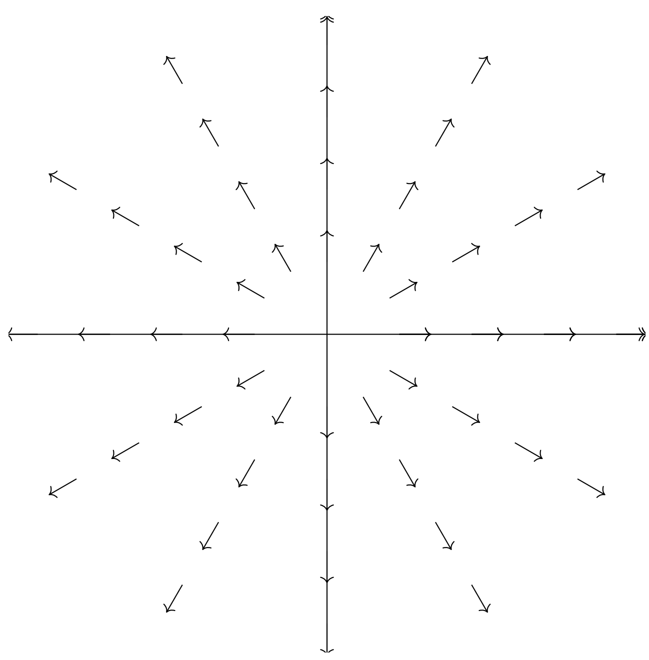
Да это же скалярное произведение:

$$n \cdot r' = 0 \Longleftrightarrow n \perp r'$$

То есть у нас n порождает векторное поле, а касательные к графику должны быть ему перпендикулярны.

Пример.

$$x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = 0$$



Задача Коши.

Замечание. Часть возникает следующий вопрос: вот я строю приближённо решение, и хочу через какую-то точку интегральную кривую провести. А всегда ли я могу это сделать? А может несколько провести могу?

Определение 16. Задачей Коши для уравнения

$$y' = f(x; y) \tag{2.9}$$

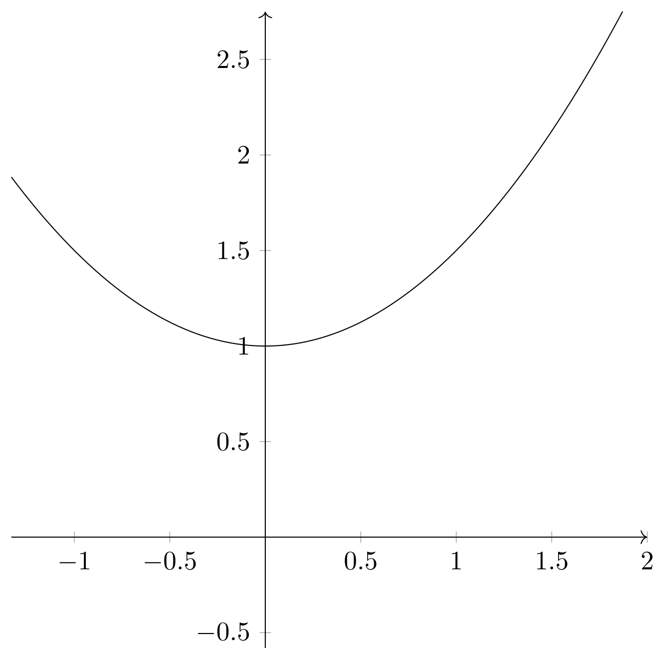
называется задачей нахождения его решения, которое удовлетворяет условию

$$y(x_0) = y_0 \tag{2.10}$$

Пример.

$$y' = x \qquad y(\sqrt{2}) = 2$$

Ну, $y = \frac{x^2}{2} + C$, значит нам нужно $C = 1$



Замечание. Если вы решаете задачу честно, всё будет хорошо. Но если вы решаете задачу численно в компьютере, вам заранее надо знать, что решение существует (и хорошо бы, что единственное).

Теорема 1 (О существовании решения задачи Коши)**.** *Пусть G — область, $f \in C(G)$, $(x_0; y_0) \in G$. Тогда в некоторой окрестности x_0 существует решение 2.10, 2.9.*
Доказательство этой теоремы в общем случае занимает целую пару, на экзамене всё равно не спрашивается, поэтому докажем мы её не в общем виде и в любом случае не сейчас.

Теорема 2 (О единственности решения задачи Коши)**.** *Пусть G — область, $f, f'_y \in C(G)$, $(x_0; y_0) \in G$. Тогда если существуют φ_1, φ_2 — решения 2.9, то $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ на $(a; b)$.*
Это чудо мы тоже доказывать пока не будем, докажем в более строгих предположениях.

Пример.

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2}$$

Ну, $\mathbb{R}^2$ – это область, $f \in C(\mathbb{R}^2)$. То есть решение существует везде. Теперь поймём, где оно единственно. А единственно оно том, где непрерывно f'_y. $f'_y = \frac{2}{\sqrt[3]{y}}$. То есть $f'_y \in C(\mathbb{R} \times (-\infty; 0))$ и $f'_y \in C(\mathbb{R} \times (0; +\infty))$.

Итого у нас получается две области, в которых решение по сути единственно.
Вообще тут мы явно видим два класса решений: $y = 0$ и $(x - c)^3$. Это даёт нам то, что в верхней и нижней полуплоскостях с решениями понятно, что: там кусочек кубической параболы. А вот что на $y = 0$, не понятно. Так вот на самом деле там можно взять нижний кусок параболы, дойти до нуля, и вместо того, чтобы идти вверх, идти вдоль горизонтальной прямой. А потом можем отклониться вверх, если заходим. И тут у нас получается 4 класса решений:

1. $$y = \begin{cases} (x - c_1)^3 & x \leqslant c_1 \\ 0 & c_1 \leqslant x \leqslant c_2 \\ (x - c_2)^3 & c_2 \leqslant x \end{cases}$$

2. $$y = \begin{cases} (x - c)^3 & x \leqslant c \\ 0 & c \leqslant x \end{cases}$$

3. $$y = \begin{cases} 0 & x \leqslant c \\ (x - c)^3 & c \leqslant x \end{cases}$$

4. $$y = 0$$

Замечание. На самом деле этим свойством обладает очень мало что. Так зачем же то нам нужно? А для того, чтобы тестировать наши численные алгоритмы. Тестировать их мы будем на тех штуках, для которых всё знаем, и тут нам очень кстати теоремы о существовании и единственности решения.

Определение 17. γ называется **особой интегральной кривой**, если в любой её точке найдётся другая интегральная кривая α, проходящая через ту же саму точку и не совпадающая с γ в любой окрестности точки.

3 Некоторые уравнения, интегрируемые в квадратурах.

Замечание. Это значит, что общий интеграл таких уравнений выразим в элементарных функциях или первообразных от них.

Уравнение с разделяющимися переменными.

Определение 1. Уравнение
$$P(x)\mathrm{d}x + Q(y)\mathrm{d}y = 0 \tag{3.1}$$
называется **уравнением с разделёнными переменными**.

Теорема 1 (Общее решение УРП). *Пусть $P \in C(a; b)$, $Q \in C(c; d)$. Тогда функция $y = \varphi(x)$ является решением уравнения 3.1 на интервале $(\alpha; \beta)$ тогда и только тогда, когда*

1. *$\varphi \in C'(\alpha; \beta)$.*
2. *φ неявно задаётся уравнением*
$$\int P(x)\mathrm{d}x + \int Q(y)\mathrm{d}y = C$$
для некоторого $C \in \mathbb{R}$.

Замечание. Напоминание: φ неявно задаётся уравнением $F(x; y) = 0$ тогда и только тогда, когда $F(x; \varphi(x)) \equiv 0$ на $(\alpha; \beta)$.

Доказательство. 1. *Необходимость.* Пусть φ — решение. Тогда первый пункт выполняется по определению решения. Второй пункт значит, что выполняется тождество
$$\int_{x_0}^{x} P(t)\ \mathrm{d}t + C_1 + \int_{y_0}^{\varphi(x)} Q(t)\ \mathrm{d}t + C_2 \equiv C$$

Тут слишком много свободных переменных, давайте скажем, что $y_0 = \varphi(x_0)$. Это повлияет только на C_2. Что ж, проверим тождество:

$$\int_{x_0}^{x} P(t)\ \mathrm{d}t + C_1 + \int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} Q(t)\ \mathrm{d}t + C_2 \equiv C \overset{t=\varphi(\tau)}{\iff}$$
$$\int_{x_0}^{x} P(t)\ \mathrm{d}t + C_1 + \int_{x_0}^{x} Q(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)\ \mathrm{d}\tau + C_2 \equiv C \iff$$
$$\int_{x_0}^{x} P(\tau) + Q(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)\ \mathrm{d}\tau \equiv C - C_1 - C_2$$

Осталось выбрать $C = C_1 + C_2$, поскольку левая часть по определению решения равна нулю.

2. *Достаточность.* Если тождество выполняется и функция непрерывно дифференцируема, то решение. Ну так давайте тождество и в качестве y подставим $\varphi(x)$:

$$\int P(x)\mathrm{d}x + \left[\int Q(y)\mathrm{d}y\right]_{y=\varphi(x)} = C$$

Теперь продифференцируем это:

$$P(x) + Q(\varphi(x))\varphi'(x) = 0$$

Не решение ли это.

□

Теорема 2 (Теорема о существовании и единственности решения УРП). *Пусть* $P \in C(a;b)$, $Q \in C(c;d)$, $(x_0;y_0) \in (a;b) \times (c;d)$ *— не особая точка (в ней хотя бы один из* P *и* Q *не обращается в ноль). Тогда существует окрестность* $(x_0;y_0)$*, в которой есть ровно одна интегральная кривая, проходящая через* $(x_0;y_0)$*. Уравнение этой кривой выглядит так:*

$$\int_{x_0}^{x} P(t)\ \mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} Q(t)\ \mathrm{d}t = 0$$

Доказательство. Напрямую следует из теоремы о неявном отображении. □

Определение 2. Уравнение

$$P_1(x)Q_1(y)\mathrm{d}x + P_2(x)Q_2(y)\mathrm{d}y = 0 \tag{3.2}$$

называется **уравнением с разделяющимися переменными**.

Замечание. Это уравнение сводится к уравнению 3.1 простым образом.

Пример.

$$x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = 0$$

Хочется поделить на x и на y. Но поскольку $\mathrm{dom} = \mathbb{R}$, так просто делить нельзя. Потому отметим, что $x \equiv 0$ и $y \equiv 0$ — решения, а дальше поделим. Правда, область определения поделится на 4 четверти.

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} - \frac{\mathrm{d}x}{x} = 0 \iff \int \frac{\mathrm{d}y}{y} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = C$$

Дальше надо в каждой четверти это решить, (получатся открытые лучи из нуля куда-то). Но дальше надо посмотреть, что мы потеряли. А потеряли мы составные решения: у нас есть два луча (из противоположных областей) с одним угловым коэффициентом. Их можно впрямую объединить, получив более широкое решение.

Однородное уравнение.

Определение 3. Функция $P(x;y)$ называется **однородной функцией** степени $\alpha \in \mathbb{R}$, если $\forall x, y, t :$ $x, y, tx, ty \in \operatorname{dom} P$ $P(tx; ty) = t^\alpha P(x; y)$.

Определение 4.

$$P(x;y)\mathrm{d}x + Q(x;y)\mathrm{d}y = 0 \tag{3.3}$$

называется **однородным уравнением**, если P и Q — однородные функции одной степени.

Утверждение. *Замена $z = \frac{y}{x}$ сводит уравнение 3.3 к уравнению 3.2.*

Замечание. Перед этой заменой надо удостовериться, что $x \neq 0$.

Утверждение (Геометрическое свойство)**.** *Пусть $r(t) = (\varphi(t); \psi(t))$ — параметрическое решение на $(\alpha; \beta)$. Тогда $q(t) = \lambda r(t)$ также является решением (когда $\lambda \neq 0$).*

Доказательство. 1. Для начала $q \in C'(\alpha; \beta)$.

2. Также

$$P(\lambda\varphi; \lambda\psi)\lambda\varphi' + Q(\lambda\varphi; \lambda\psi)\lambda\psi' = \lambda^{\alpha+1}(P(\varphi;\psi)\varphi' + Q(\varphi;\psi)\psi') \equiv \lambda^{\alpha+1}0 = 0$$

□

Замечание. С геометрической точки зрения мы получили, что гомотетия относительно нуля переводит интегральную кривую в другую интегральную кривую.

Линейное уравнение первого порядка.

Определение 5. Уравнение

$$y' = p(x)y + q(x) \tag{3.4}$$

называется **линейным уравнением 1 порядка**.

Определение 6. Линейное уравнение 1 порядка с $q \equiv 0$ называют **однородным**, иначе — **неоднородным**.

Лемма 1 (Общее решение ЛОУ)**.** *Пусть $p \in C(a; b)$. Тогда общим решением ЛОУ является*

$$y = Ce^{\int p} \quad C \in \mathbb{R} \quad x \in (a; b) \tag{3.5}$$

Доказательство. Начнём с области определения: $x \in (a; b), y \in \mathbb{R}$.
Мы знаем, что наше уравнение равносильно вот такому уравнению в дифференциалах

$$\mathrm{d}y = p(x)y\mathrm{d}x$$

Тут $y \equiv 0$ — решение. Если $y \not\equiv 0$, то в $y > 0$ получаем (по доказанному ранее)

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = p(x)\mathrm{d}x \Longleftrightarrow y = Ce^{\int p} \mid C > 0$$

Аналогично, при $y < 0$ получаем то же самое, но $C < 0$. Несложно заметить, что мы нашли все решения (потому что ни одна из описанных интегральных кривых не может достигнуть нуля). А ещё наши 3 решения можно объединить в одно: $y = Ce^{\int p} \mid C \in \mathbb{C}$. □

Теорема 3 (Общее решение линейного уравнения 1 порядка)**.** *Пусть $p, q \in C(a; b)$. Тогда общее решение 3.4 выглядит как*

$$y = \left(\int qe^{-\int p} + C\right)e^{\int p} \qquad C \in \mathbb{R} \qquad x \in (a; b)$$

Доказательство. Подстановкой убеждаемся, что выписанные функции действительно являются решениями (на $(a; b)$).
Вопрос: не потеряли ли мы что-нибудь? Ну, пусть ψ — решение 3.4 на $(\alpha; \beta) \subset (a; b)$. Рассмотрим точку $(x_0; \psi(x_0))$. Сначала покажем, что из обозначенного нами семейства функций хотя бы одна проходит через эту точку. Ну так подставим в наше уравнение x_0 и $\psi(x_0)$. Желающие могут сами проверить, что для данных чисел мы можем найти C, а значит найти интересующую нас функцию. А теперь давайте удостоверимся, что наше уравнение удовлетворяет теореме о единственности решения. Ну, взяв

$$f(x; y) = p(x)y_q(x)$$

получим $f \in C((a; b) \times \mathbb{R})$ и $f'_y = p \in C((a; b) \times \mathbb{R})$. Значит $\psi(x)$ на $(\alpha; \beta)$ совпадает с решением из нашего класса решений. □

Уравнения Бернулли и Риккати.

Определение 7. Уравнение вида

$$y' = p(x)y + q(x)y^\alpha \tag{3.6}$$

где $\alpha \neq 0$ называется **уравнением Бернулли**.

Утверждение. *Уравнение 3.6 заменой $z = y^{1-\alpha}$ сводится к линейному.*

Доказательство.

$$y' = p(x)y + q(x)y^\alpha \Leftrightarrow \frac{y'}{y^\alpha} = p(x)y^{1-\alpha} + q(x) \Leftrightarrow \left(y^{1-\alpha}\right)' = \underbrace{(1-\alpha)p(x)}_{P(x)} y^{1-\alpha} + \underbrace{(1-\alpha)q(x)}_{Q(x)}$$

□

Определение 8. Уравнение вида

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x) \tag{3.7}$$

называется **уравнением Риккати**.

Утверждение. *Уравнение 3.7 подстановкой $y = z + \varphi$ (где φ — некоторое решение 3.7) сводится к уравнению 3.6.*

Замечание. Проблема: надо знать какое-то решение. Как его найти, в общем случае не понятно. Причём это может быть и невозможно:

Теорема 4 (Теорема Лиувилля)**.** *Уравнение*

$$y' = y^2 + x^\alpha$$

интегрируется в квадратурах тогда и только тогда, когда $\frac{\alpha}{2\alpha+4} \in \mathbb{Z}$ или $\alpha = -2$.

Уравнение в полных дифференциалах.

Определение 9. Уравнение

$$P(x; y)\mathrm{d}x + Q(x; y)\mathrm{d}y = 0 \tag{3.8}$$

где $\exists u \ u'_x = P, u'_y = Q$ называется уравнением в полных дифференциалах.

Теорема 5. *Пусть G — область в $\mathbb{R}^2$, $u \in C'(G)$, $u'_x = P$, $u'_y = Q$. Тогда φ является решением 3.8 на $(\alpha; \beta)$ тогда и только тогда, когда*

1. *$\varphi \in C'(\alpha; \beta)$.*
2. *φ неявно задаётся уравнением $u(x; y) = C$ при некотором C.*

Доказательство. $\Rightarrow$: $C'(\alpha;\beta)$ из определения решения, для второго пункта имеем

$$P(x;\varphi(x))+Q(x;\varphi(x))\varphi'(x)\equiv 0 \qquad x\in(\alpha;\beta)$$

что равносильно

$$u'_x(x;\varphi(x))+u'_y(x;\varphi(x))\varphi'(x)\equiv 0$$

используя формулу производной композиции, упростим это до

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u(x;\varphi(x)))\equiv 0\Leftrightarrow u(x;\varphi(x))=C$$

Это ли не то, что нам надо?

$\Leftarrow$: Возьмите доказательство вправо и переверните его.

$\square$

Замечание. Всё это очень хорошо, но как понять, что наше уравнение — уравнение в полных дифференциалах? Ну, непонятно. А давайте вот на что посмотрим.
Пусть наше $u\in C^{(2)}(G)$. Тогда $u'_{xy}\equiv u'_{yx}$ или $P'_y\equiv Q'_y$

Определение 10. Односвязная область — такая связная область, что любой замкнутый путь в ней можно непрерывно стянуть в точку.

Замечание. Проще говоря, односвязная область — область, в которой нет «дыр».

Теорема 6. *Пусть G — односвязная область, $P,Q\in C'(G)$ и $P'_y\equiv Q'_x$ на G. Тогда $\exists u\colon G\to\mathbb{R}$ $u'_x=P, u'_y=Q$.*
Кроме того, все эти функции имеют вид $u(\tilde{x};\tilde{y})=\int\limits_{\gamma(\tilde{x};\tilde{y})}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x;y)\mathrm{d}y+C$, где $\gamma(\tilde{x};\tilde{y})$ — произвольная кривая из $(x;y)$ в $(\tilde{x};\tilde{y})$.
Это мы доказать пока не можем (как минимум потом, что не можем понять, что такое криволинейный интеграл).

Определение 11. Функция u из определения 9 называется **потенциалом уравнения** 3.8 или **потенциалом векторного поля** $(P;Q)$.
Векторное поле, обладающее потенциалом, называется **потенциальным**.

Пример.

$$e^{-y}\mathrm{d}x-(2y+xe^{-y})\mathrm{d}y=0$$

Область определения этого — $\mathbb{R}^2$, односвязно. Также $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}e^{-y}=-e^{-y}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-(2y+xe^{-y})$. Значит нужная нам u существует.

$$u'_x(x;y_0)=e^{-y_0}\Rightarrow u(x;y_0)=xe^{-y_0}+C$$

Разве что C может от y_0 зависеть, поэтому воспользуемся вторым уравнением:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}x_0e^{-y}+C(y)=-2y-x_0e^{-y}$$

Отсюда $C(y)=-2y+\mathrm{const}$. Всё, отсюда мы нашли u (она, очевидно, подходит).

Определение 12. Функция $\mu(x;y)$, нигде не равная нулю, называется **интегрирующим множителем** для уравнения

$$P(x;y)\mathrm{d}x+Q(x;y)\mathrm{d}y=0$$

если

$$\mu(x;y)P(x;y)\mathrm{d}x+\mu(x;y)Q(x;y)\mathrm{d}y=0$$

является уравнением в полных дифференциалах.

Замечание. Вообще интегрирующий множитель непонятно, как искать в общем виде, но если у вас не получается решить уравнение нормально, вы можете попытаться поискать интегрирующий множитель какого-нибудь конкретного вида.

Пример. Решим линейное уравнение:

$$(p(x)y + q(x))\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0$$

при этом $p, q \in C(a; b)$. Давайте попытаемся найти $\mu(x; y)$, которое, на самом деле, зависит только от x.

$$\mu(p(x)y + q(x))'_y = -\mu' \Leftrightarrow \mu p(x) = -\mu' \Leftrightarrow \mu = Ce^{-\int p}$$

При этом нам же не надо брать все C, нам же нужен один интегрирующий множитель, вот и возьмём, скажем, $C = 1$, хуле.

Что, кстати, будет, если мы умножим $y' = p(x)y + q(x)$ на этот множитель? А вот что:

$$y'e^{-\int p} - pye^{-\int p} = qe^{-\int p}$$

Ну так извините, это упрощается:

$$\left(ye^{-\int p}\right) = qe^{-\int p}$$

Утверждение. *Общее решение 3.4 выглядит как*

$$y = e^{-\int p}\left(\int qe^{-\int p} + A\right)$$

Доказательство. См. пример выше. □

4 Уравнения, не разрешённые относительно производной.

Уравнения, разрешимые относительно производной.

Замечание. Если вдруг Ваше уравнение первого порядка раскладывается на множители относительно y':

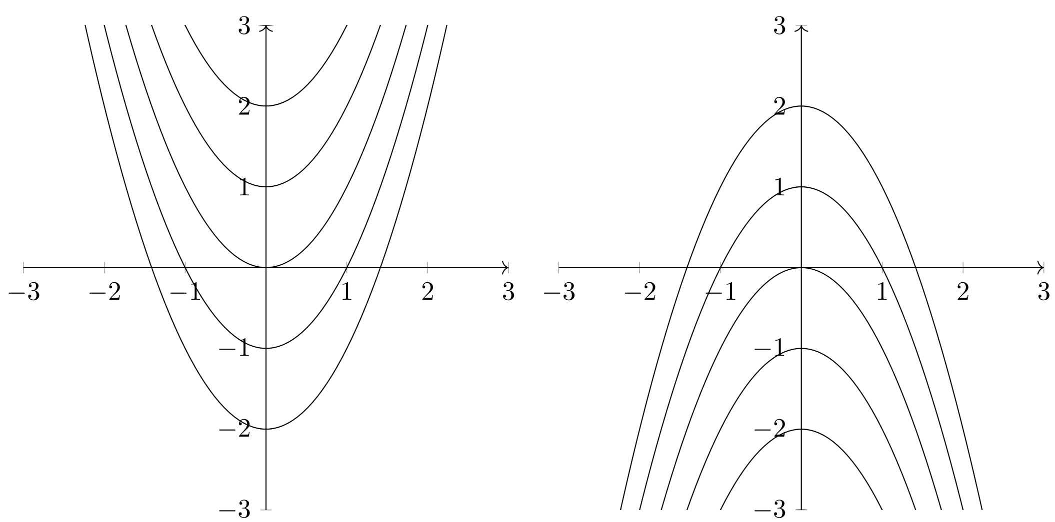
$$(y' - f_1(x; y))(y' - f_2(x; y)) \cdots (y' - f_n(x; y)) = 0$$

то Вы почти победили. У вас сразу складываются решения каждой из скобок, и решение каждой из скобок точно будет решением вашего уравнения. А вот обратное, к сожалению, не верно:

Пример.

$$y'^2 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow (y' - 2x)(y' + 2x) = 0$$

Нам хотелось бы, чтобы это были два семейства парабол:



Но на самом деле параболы ещё состыковать по вершине можно.

Метод введения параметра.

Пример.

$$e^{y'} + y' - x = 0$$

Фиг вы это разложите. Тут можно попытаться вместо того, чтобы задавать функцию как $f(x; y) = 0$ или $y(x) = ???$ задать её параметрически.

Определение 1. Пусть $\gamma = (\varphi; \psi)\colon I \to \mathbb{R}^2$. Если $\gamma(I)$ — это график некоторой функции f, то говорят, что γ **параметрически определяют функцию** f.

Пример. Например, $\gamma(t) = (t, 1)$ определяет функцию $f(x) = 1$.
Но вообще параметризаций у любой функции бесконечно много.

Замечание. Имея параметризацию можно пытаться выразить функцию как $\psi(\varphi^{-1}(x))$.

Замечание. Итак, давайте рассмотрим вот такое уравнение:

$$F(x; y') = 0$$

При этом считаем, что y' — единый символ, не обладающий внутренней структурой. Тогда это уравнение порождает множество точек на плоскости. Если вдруг это множество — это график некоторой функции, то интеграл этой функции будет являться ответом нашего уравнения.
Проблема в том, что у нас нет формулы $y'(x) = ???$, потому что если есть, то это предыдущий параграф. Поэтому можно пытаться задать эту функцию параметрически.

Утверждение. *Пусть $\gamma = (\varphi; \psi)$ — параметризация кривой, то есть*

$$\forall t \in I \ F(\varphi(t); \psi(t)) = 0$$

Пусть у нас $I = (\alpha; \beta)$, $\varphi \in C'(I)$, $\varphi' \neq 0$ на I, $\psi \in C(I)$.
Тогда

$$x = \varphi(x) \qquad y = \int \psi(t)\varphi'(t) = g(t)\ \mathrm{d}t + C \qquad t \in (\alpha; \beta)$$

является параметрическим заданием решений $F(x; y') = 0$.

Доказательство. Ну, во-первых, надо бы проверить, что у нас вообще функция получается. А она получается, потому что по $\varphi' \neq 0$ φ монотонна, а значит обратима. То есть у нас есть функция $y = g(\varphi^{-1}(x))$. При этом что φ^{-1}, что g непрерывно дифференцируемы на $(\alpha; \beta)$, а значит и $y(x)$ — тоже. Теперь подставим в уравнение наше решение. Во-первых,

$$g(\varphi^{-1}(x)) = g'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1})'(x) = \psi(\varphi^{-1}(x)) \cdot \varphi'(\varphi^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = \psi(\varphi^{-1}(x))$$

В во-вторых, поскольку φ — биекция

$$F(x; \psi(\varphi^{-1}(x))) \overset{x=\varphi(t)}{\Longleftrightarrow} F(\varphi(t); \psi(t)) = 0$$

□

Пример.

$$e^{y'} + y' - x = 0$$

Возьмём $y' = t$, $x = e^t + t$. Тогда

$$y = \in t(e^t + 1)\ \mathrm{d}t + C = te^t - t + \frac{t^2}{2}$$

Определение 2. Основное соотношение метода введения параметра:

$$\mathrm{d}y = y'_x \mathrm{d}x$$

Утверждение. *Подставив это чудо в уравнение, получим формулу выше.*

Доказательство. Положив $\psi(t) = y'$, $\varphi(t) = x$, получим

$$y'_x = \psi(t) \qquad \mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t$$

В основном соотношении получим

$$\mathrm{d}y = \psi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t \Rightarrow y = \in \psi(t)\varphi'(t)\ \mathrm{d}t$$

□

Замечание. А теперь рассмотрим полное уравнение: где есть x, y и y':

$$F(x; y; y') = 0$$

Это какая-то поверхность. Её мы тоже можем пытаться параметризовать, разве что поверхность параметризуется двумя параметрами: u и v.
Итак, пусть

$$x = \varphi(u; v) \qquad y = \psi(u; v) \qquad z = \chi(u; v) \qquad (u; v) \in \Omega$$

И можно опять доказывать сложные формулы, но мы доказывать их не будет, потому что на самом деле из основного соотношения получаются и они.

$$\mathrm{d}y = \psi'_u\mathrm{d}u + \psi'_v\mathrm{d}v \qquad y'_x = \chi(u; v) \qquad \mathrm{d}x = \varphi'_y\mathrm{d}u + \varphi'_v\mathrm{d}v$$

Производя такие подстановки, получим

$$(\psi'_u - \chi\varphi'_u)\mathrm{d}u + (\psi'_v - \chi\varphi'_v)\mathrm{d}v = 0$$

Правда, после этого придётся подставить $v = g(u; C)$, и тогда

$$x = \varphi(u; g(u; C)) \qquad y = \psi(u; g(u; C))$$

являются параметризацией наших решений.

Задача Коши для уравнения, не разрешённого относительно производной.

Пример.

$$y'^2 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow (y' - 2x)(y' + 2x) = 0$$

Как мы знаем, это два семейства парабол и их склеивание. Поэтому нельзя однозначно решить, какое решение имеется ввиду, если нам говорят точку, через которую проходит кривая $(x_0; y_0)$.

Определение 3. Для уравнения, не выраженного относительно производной **задача Коши** — это задача о нахождении его решения, удовлетворяющего начальным условиям

$$y(x_0) = y_0 \qquad y'(x_0) = y'_0$$

При этом обозначение y'_0 – единый символ, а не производная.

Пример. Вернёмся к нашему примеру:

$$y'^2 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow (y' - 2x)(y' + 2x) = 0$$

Если $(x_0; y_0)$ мы можем выбирать произвольно (и у нас будет кривая с нужными свойствами), то вот пару $(x_0; y'_0)$ произвольно мы выбрать не можем (например, при $x_0 = 0$ у нас y'_0 вообще может быть равен только нулю). А вообще у нас на производную есть конкретное условие: ${y'_0}^2 = 4x_0^2$.

Замечание. И из предыдущего важный комментарий: при подстановке начальных условий в уравнение должно получиться верное равенство.
Но на самом деле, из того, что $F(x_0; y_0; y'_0) = 0$ ещё не следует ни существование решения задачи Коши, ни единственность.

Теорема 1 (Существование и единственность решения задачи Коши для уравнения не разрешённого относительно производной)**.** *Пусть* $G \subset \mathbb{R}^3_{x,y,y'}$ *— область. Пусть* $F \in C'(G)$*. Пусть* $(x_0; y_0; y_0') \in G$*,* $F(x_0; y_0; y_0')$*. Пусть* $F'_{y'}(x_0; y_0; y_0') \neq 0$*.*
Тогда в некоторой окрестности x_0 *существует единственное решение задачи Коши.*

Замечание. Доказывать это мы не будем, а вообще это опирается на теорему о неявном отображении.

Определение 4. Пусть $F \in C'(G)$. **Дискриминантной кривой** называется множество $D = \{(x; y) \mid \exists y' \in \mathbb{R}\ F(x; y; y') = F'_{y'}(x; y; y') = 0\}$.

Определение 5. Функция φ называется **особым решением** $F(x; y; y') = 0$ на $\langle a; b\rangle$, если $\forall x_0 \in \langle a; b\rangle\ \exists \psi$ — решение задачи коши для $F(x; y; y')$ с начальными условиями

$$x_0 = x_0 \qquad \psi(x_0) = \varphi(x_0) \qquad \psi'(x_0) = \varphi'(x_0)$$

При этом в любой окрестности x_0 $\psi \not\equiv \varphi$.

Утверждение. *Очевидно, это определение согласуется с определением особого решения для нормального уравнения.*

Замечание. Алгоритм поиска особых решения для $F(x; y; y') = 0$ при $F \in C'(G)$ выглядит так:
Сначала мы находим общий интеграл, потом находим дискриминантную кривую D, дальше находим интегральные кривые, проходящие внутри D. Но не любая интегральная кривая внутри дискриминантной кривой будет особым решением, придётся проверять по определению.

Пример.

$$xy' - y - \frac{y'}{2}\ln\frac{y'}{2} = 0$$

Решения вы найдёте как-нибудь сами, а мы поищем особые решения. Для этого надо решить систему

$$\begin{cases} xy' - y - \dfrac{y'}{2}\ln\dfrac{y'}{2} = 0 \\ x - \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{y'}{2} - \dfrac{1}{2} = 0 \end{cases}$$

Из второго у нас выражается $y' = 2e^{2x-1}$, и при подстановке в первое получим

$$2xe^{2x-1} - y - e^{2x-1}(2x-1) = 0$$

То есть $e^{2x-1} = y$ — уравнение D. Это как раз решение нашего уравнения, а значит решение подозрительное на особое. Среди других решений уравнения найдутся ли такие ψ, что

$$\begin{cases} \psi(x_0) = e^{2x_0-1} \\ \psi'(x_0) = 2e^{2x_0-1} \end{cases} \iff \begin{cases} Cx_0 - \dfrac{C}{2}\ln\dfrac{C}{2} = e^{2x_0-1} \\ C = 2e^{2x_0-1} \end{cases}$$

Ну, видимо, найдутся. Остаётся выяснить, что полученное уравнение не совпадает с $y = e^{2x-1}$ в окрестности x_0. Ну, это в общем-то очевидно.

5 Уравнения высшего порядка.

Основные понятия.

Определение 1. Уравнением n-того порядка называется уравнение вида

$$F(x; y; y'; y''; \ldots; y^{(n)}) = 0 \tag{5.1}$$

Определение 2. Каноническим уравнением n-того порядка называется равнение вида

$$y^{(n)} = f(x; y; y'; y''; \ldots; y^{(n-1)}) \tag{5.2}$$

Определение 3. **Решением уравнения 5.1** на $\langle a; b\rangle$ называется такая функция $\varphi \in C^{(n)}$, что

$$F(x; \varphi(x); \varphi'(x)'; \varphi''(x); \ldots; \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0$$

Определение 4. **Задачей Коши** для уравнения 5.2 называется задача нахождения его решения, удовлетворяющего следующим условиям:

$$y(x_0) = y_0 \qquad y'(x_0) = y_0' \qquad y''(x_0) = y_0'' \qquad \cdots \qquad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

Замечание. Например, что с геометрической точки зрения значит решение задачи Коши для канонического уравнения 2 порядка? То, что мы ищем интегральную кривую, которая проходит через заданную точку под заданным углом. Только тут уже начальные условия намного более произвольны.

Теорема 1 (Существование решения задачи Коши для уравнения 5.2)**.** *Пусть* $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}}$ *— область,* $f \in C(G)$*. Тогда для любых* $(x_0, y_0, \ldots, y_0^{(n-1)}) \in G$ *существует решение задачи Коши.*

Теорема 2 (Единственность решения задачи Коши для уравнения 5.2)**.** *Пусть выполнено условие предыдущей теоремы и*

$$\forall k \in [0 : n-1] \;\; f'_{y^{(k)}} \in C(G)$$

Тогда решение задачи Коши на $\langle a; b\rangle$ *единственно, причём глобально, а не локально.*