Домашние задания по теории вероятности

Коробко Семён, ИТМО, M32381, 2023 г.

Домашнее задание №1

1. **Десяток честных монет.** Петя и Вася бросают по десять честных монет. Какая вероятность, что они выбросят одинаковое количество единиц?

   Решение. Пусть n – количество бросков. Найдём количество исходов, когда и у Пети, и у Васи одновременно k монет: $\binom{n}{k}^2$. Тогда количество исходов, когда у мальчиков одинаковое количество монет: $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$. Следовательно, ответ: $\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} = \frac{184756}{1048576} \approx 0.18$.

2. **Пустые корзины.** 10 шаров раскладываются по 5 корзинам. Для каждого шара равновероятно выбирается, в какую корзину он помещается. Какое математическое ожидание числа пустых корзин?

   Решение. Пусть ζ_i – пуста ли i-я корзина. Тогда $E\zeta_i = 0*P(\zeta_i = 0)+1*P(\zeta_i = 1) = P(\zeta_i = 1) = (\frac{4}{5})^{10}$. В силу линейности математического ожидания, получаем: $E\zeta = \sum_{i=1}^{5} E\zeta_i = 5*(\frac{4}{5})^{10}$.

3. **Линейная оболочка.** Дано вероятностное пространство Ω, число $n \in \mathbb{N}$ и $3n$ случайных величин на пространстве Ω, задающих 3 вектора X, Y и Z в $\mathbb{R}^n$. Верно ли, что $P(Z \in \langle X, Y\rangle | X \neq \lambda Y) > P(Z \in \langle X, Y\rangle | X = \lambda Y)$.

4. **Доказательства из R.** Доказать:

   (a) $\binom{X}{n-1} + \binom{X}{n} = \binom{X+1}{n}$ (треугольник Паскаля);

   (b) $\binom{X+Y}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{X}{k}\binom{Y}{n-k}$ (биномиальная свёртка Вандермонда);

   (c) $\binom{X-1}{n} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{X}{k}$;

   (d) $\binom{n-X}{n-m} = \sum_{k=0}^{n-m}(-1)^k\binom{X}{k}\binom{n-k}{m}$;

   (e) $\binom{X+Y+n-1}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{X+n-k-1}{n-k}\binom{Y+k-1}{k}$;

   (f) $\binom{-X}{n} = (-1)^n\binom{X+n-1}{n}$

   Решение.

   (a) $\binom{X}{n-1} + \binom{X}{n} = X!(\frac{1}{(n-1)!(X-n+1)!} + \frac{1}{n!(X-n)!}) = \frac{X!}{(n-1)!(X-n)!}(\frac{1}{X-n+1} + \frac{1}{n}) = \frac{(X+1)!}{n!(X+1-n)!} = \binom{X+1}{n}$;

   (b) $(1+x)^X = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{X}{n}x^n \qquad (1+x)^Y = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{Y}{n}x^n \qquad (1+x)^{X+Y} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{X+Y}{n}x^n$;

   С другой стороны $(1+x)^{X+Y} = (1+x)^X(1+x)^Y = \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n}\binom{X}{k}\binom{Y}{n-k})x^n$.

   Приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях, получаем: $\binom{X+Y}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{X}{k}\binom{Y}{n-k}$

   (c) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{X}{k} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}(\binom{X-1}{k-1} + \binom{X-1}{k}) = \binom{X-1}{n}$

   (d) Вспомним, что $\binom{n-k}{m} = \binom{n-k}{n-m-k}$.

   Сделав замену $l = n-m$, получаем: $\sum_{k=0}^{n-m}(-1)^k\binom{X}{k}\binom{n-k}{m} = \sum_{k=0}^{l}(-1)^k\binom{X}{k}\binom{n-k}{l-k}$.

   Воспользуемся (4.f): $\binom{n-k}{l-k} = (-1)^{l-k}\binom{-(n-k)+l-k-1}{l-k} = (-1)^{l-k}\binom{l-n-1}{l-k}$.

   Подставляя в сумму, получаем: $\sum_{k=0}^{l}(-1)^k\binom{X}{k}\binom{n-k}{l-k} = (-1)^l\sum_{k=0}^{l}\binom{X}{k}\binom{l-n-1}{l-k}$.

   Пользуемся (4.b) и (4.f): $(-1)^l\sum_{k=0}^{l}\binom{X}{k}\binom{l-n-1}{l-k} = (-1)^l\binom{X+l-n-1}{l} = \binom{n-X}{l} = \binom{n-X}{n-m}$.

   (e) Пользуемся (4.f): $\binom{X+n-k-1}{n-k} = (-1)^{n-k}\binom{-X}{n-k} \qquad \binom{Y+k-1}{k} = (-1)^k\binom{-Y}{k}$

   Подставляем в сумму, пользуемся (4.b) и (4.f): $\sum_{k=0}^{n}\binom{X+n-k-1}{n-k}\binom{Y+k-1}{k} = (-1)^n\sum_{k=0}^{n}\binom{-X}{n-k}\binom{-Y}{k} = (-1)^n\binom{-X-Y}{n} = \binom{X+Y+n-1}{n}$

   (f) $\binom{-X}{n} = \frac{-X(-X-1)\ldots(-X-n+1)}{n!} = (-1)^n\frac{(X+n-1)(X+n)\ldots X}{n!} = (-1)^n\binom{X+n-1}{n}$

5. **Пики.** Дать формулу вероятности P_n того, что среди тринадцати карт, извлечённых из 52 карт (полная колода), n карт окажутся пиковой масти.

   Решение.

   (a) Если $n > 13$, то вероятность $P_n = 0$.

   (b) Иначе $P_n = \frac{\binom{13}{n}\binom{39}{13-n}}{\binom{52}{13}}$

6. **Задача о супружеских парах.** Сколькими способами n супружеских пар ($N \geqslant 3$) можно разместить за круглым столом так, чтобы мужчины и женщины чередовались, но супруги не сидели рядом?

7. **Туфельки из детского сада.** Найдите:

   (a) вероятность того, что никто не уйдёт в своей паре;

   (b) вероятность того, что ни левая, ни правая туфли не совпадут;

   Решение.

   (a) Переформулирую задание: хотя бы одна из двух туфлей каждого из детей будет не его. Тогда вероятность этого будет равна: $P_n = 1 - \frac{1}{n!}$.

   (b) Пусть $!n$ – количество беспорядков. Тогда ответ: $P_n = \frac{(!n)^2}{(n!)^2} \approx \frac{1}{e^2}$ (т.к. $!n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{n!}{k!}$).