

# Сжатый конспект по линейной алгебре (2-й семестр)

Латыпов Владимир (конспектор)

[t.me/donRumata03](https://t.me/donRumata03), [github.com/donRumata03](https://github.com/donRumata03), [donrumata03@gmail.com](mailto:donrumata03@gmail.com)

Кучерук Елена Аркадьевна (лектор)

14 июня 2022 г.

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Сопряжённое пространство</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Тензоры</b>	<b>4</b>
3.1	Два определения, смена базиса . . . . .	4
3.2	Тензорное произведение, свёртка, транспонирование . .	4
3.3	Симметрирование, альтенирование . . . . .	5
3.4	$p$ -формы . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Евклидовы пространства</b>	<b>7</b>
4.1	Аксиомы, КБШ . . . . .	7
4.2	Грам-Шмидт, примеры . . . . .	8
4.3	Матрица Грама, её определитель . . . . .	9
4.4	Изометрическая матрица . . . . .	9
4.5	Ортогональное дополнение, расстояния . . . . .	10
4.6	Изометрия $V$ и $V^*$ . . . . .	11
4.7	Метрические тензоры, взаимные базисы . . . . .	12
<b>5</b>	<b>Операторы в Евклидовых пространствах</b>	<b>12</b>
5.1	Сопряжённый . . . . .	12
5.2	Нормальный . . . . .	12
5.3	Самосопряжённый . . . . .	13
5.4	Изометричный . . . . .	13
<b>6</b>	<b>Разложения матриц</b>	<b>14</b>
<b>7</b>	<b>Квадратичные формы</b>	<b>15</b>

## 1. Введение

Конспект старается быть максимального краткой выжимкой из того, что нужно знать для успешной сдачи экзамена по Линейной Алгебре во втором семестре.

Если кто-то сдаёт часть про линейные операторы и готов по ним написать, welcome.

## 2. Сопряжённое пространство

$V^*$  пространство линейных форм над  $V$ .

Вычисление формы на координатном столбце  $f(x) = x^j a_j$ , где строка  $a_j$  размера  $n$  изоморфно сопоставляется форме.

— Координатные функции относительно базиса,  $\omega^i(e_j) = \delta_j^i$ .

Они базис  $V^*$ , так как их как раз  $n$ , а породить любую  $f$  можно, предъявив коэффициенты  $a_j$ .

По  $e$  мы научились находить сопряжённый базис, теперь научимся в обратную сторону находить по базису  $V^*$  такой базис  $V$ , чтобы исходный был к нему сопряжён: возьмём любую сопряжённую пару  $e, \omega$  и через это получим  $\omega' \rightarrow (e', \omega')$

Если назвать  $S = T_{\omega \rightarrow \omega'}^T$ , утверждается, что можем получить  $e'$  так:  $T_{e \rightarrow e'} = S^{-1}$

Чтобы доказать — проверим, что  $\omega'$  — координатные функции  $e'$ . То есть что координаты преобразуются правильно:  $x' = Sx$ .

Элементы  $V^*$  Ковариантные, так как преобразуются (получение новых из старых) с матрицей  $T_{e \rightarrow e'}$ , а элементы  $V$  — контравариантные, так как с матрицей  $S = T^{-1}$

Доказываю, что можно получить изоморфизм

$$\varphi : V \rightarrow (V^*)^*, x \rightarrow "x" \quad \text{where } "x"(f) = f(x) \quad (1)$$

Кстати,  $\varphi \in \text{Aut}(V \rightarrow (V^*)^*)$ .

Линейность  $\varphi$  очевидна, для биективности в силу линейности достаточно проверить, что базис переходит в базис (что  $\text{rg } \varphi = n$ ). Действи-

тельно,  $"e_j"$  — координатные функции базиса координатных функций, так как,  $"e_j"(f) = f(e_j) = (a_f)_j$ .

Отличие от  $V \leftrightarrow V^*$  — в том, что теперь оно не зависит от выбора базиса.

— Умеем считать сопряжённый базис через обратную матрицу и матрицы проекторов через сопряжённый базис.

## 3. Тензоры

### 3.1. Два определения, смена базиса

Это функция  $V^p \times (V^*)^q \rightarrow \mathcal{K}$ .

То, что «из векторов» — ковариантное, «из форм» — контрвариантное.

$T_{(p;q)}$  — линейное пространство размерности  $n^{(p+q)}$

За счёт линейности при вычислении на наборе векторов, разложенных по базису, можно вынести  $p+q$  сумм с координатами, остаются значения тензора на разных размещениях базиса, их мы назовём компонентами относительно базисов  $e, \omega$ .

$\alpha_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q}$  Сверху пишется  $q$  «контравариантных индекса» — из форм. Снизу —  $p$  ковариантные индексы — из векторов.

Это можно записать в  $p+q$ -мерную матрицу.

Смена базиса. Выразив старые координаты через новые ( $\xi^i = t_k^i \xi'^k, \eta_j = s_j^m \eta'_m$ ), подставим в формулу вычисления на наборе векторов, сгруппируем  $t, s, \alpha$  скажем, что это новый компонент, а новые координаты как раз останутся.

Другое определение тензора: это многомерная матрица, в которой выделены «ковариантные» и «контравариантные» координаты и которая пересчитывается при смене базиса по той же формуле, что и выше.

Определения эквивалентны.

### 3.2. Тензорное произведение, свёртка, транспонирование

Тензорное произведение: вводим через второе определение (многомерная матрица), проверяем вариантность.

Говорим, что в терминах линейных форм мы берём каждую от своей части координат и перемножаем результаты.

Базис вводим базис  $T_{(p;q)}$  из  $n^{p+q}$  тензорных произведений всех размещений  $e_i, \omega_j$ , помня, что

$$\begin{aligned}\omega_j &: (V)^1 \rightarrow \mathcal{K} \\ e_i &\cong "e_i" : (V^*)^1 \rightarrow \mathcal{K}\end{aligned}$$

Доказываем, что это базис, так как количество  $n^{p+q}$  и порождающее: за коэффициенты для порождения берём компоненты относительно базиса, доказываем через формулу вычисления на наборе векторов.

Заметим, что матрица тензора из базиса будет содержать одну единицу на соответствующих индексах и все остальные нули.

Вводим свёртку как матрицу, доказываем, что это тензор, помня, что  $t_{\tilde{\kappa}}^{\kappa_2} s_{\kappa_1}^{\tilde{\kappa}} = \delta_{\kappa_1}^{\kappa_2}$  и оставляя в сумме только слагаемые, где  $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$ .

Транспонирование:  $\beta = \sigma(\alpha), \beta_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q} = \alpha_{j_{\sigma_1} \dots j_{\sigma_p}}^{i_1 \dots i_q}$ .

То есть набор индексов  $\alpha$  переходит в индексы  $\beta$  под действием обратной к  $\sigma$  перестановки.

Доказываем, что тензор (достаточно доказать про транспозиции, так как перестановка раскладывается на композицию транспозиций)

Заметим, что в терминах функций мы переставляем аргументы, тоже с обратной перестановкой.

Транспонирование — изоморфизм, ассоциативно, но коммутативно (как и группа перестановок).

Если при любом транспонировании тензора он не меняется, он симметричен, если умножается на  $(-1)^{\varepsilon(\sigma)}$ , то кососимметричен.

Кососимметричен  $\Leftrightarrow$  равен нулю при повторяющихся аргументах.

### 3.3. Симметрирование, альтенирование

Оба перестановочны относительно перестановки, причём для симметрирования получается просто симметрирование, а для альтенирования — оно умножить на знак перестановки. (доказывается, используя,

что если все перестановки  $S_n$ , по которым мы суммируем, пропустить через одну перестановку, получим тоже все перестановки, но в другом порядке — таблица Кэли, иначе не группа)

$\alpha$  симметричен  $\Leftrightarrow \alpha = \text{Sim } \alpha$ .  $\alpha$  КОСОсимметричен  $\Leftrightarrow \alpha = \text{Alt } \alpha$ .

Обе идемпотентны, причём  $\text{Sim Alt } \alpha = 0$  (то есть симметрирование любого кососимметричного — ноль, ведь можно подставить кососимметричный  $\beta = \text{Alt } \beta$ , тогда  $\text{Sim } \beta = \text{Sim Alt } \beta = 0$ ).

Доказывается, заметив, что сумма чётностей по всем перестановкам — это ноль, так как это определитель матрицы со всеми единицами.

Заметим, что пересечение подпространств симметричных и антисимметричных тензоров — тривиально. Более того, если транспозиция одна (по двум индексам), то пространство всех тензоров заданного типа раскладывается в дизъюнктивную сумму симметричных и антисимметричных (по этим индексам), где  $\alpha = \text{Sim } \alpha + \text{Alt } \alpha$

### 3.4. р-формы

р-формы — антисимметричные ковариантные тензоры, Если от одного аргумента, отождествляют с  $V^*$ .

Внешнее произведение:  $f \wedge g = \frac{(p_f + p_g)!}{p_f! p_g!} \text{Alt}(f \otimes g)$ .

Есть свойства, можно через них раскрывать скобки.

1.  $f \wedge g = (-1)^{p_1 p_2} g \wedge f$ . 2.  $(f + g) \wedge h = f \wedge h + g \wedge h$  и  $f \wedge (g + h) = f \wedge g + f \wedge h$ .
3.  $\lambda \cdot (f \wedge g) = (\lambda f) \wedge g = f \wedge (\lambda g)$ . 4.  $\mathbb{D}_{\wedge^{p_1} V^*} \wedge g = f \wedge \mathbb{D}_{\wedge^{p_2} V^*} = \mathbb{D}_{\wedge^{p_1 + p_2} V^*}$ .
5.  $(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h) = \frac{(p_1 + p_2 + p_3)!}{p_1! p_2! p_3!} \text{Alt}(f \otimes g \otimes h)$ .

2, 3, 4 — очевидно.

1 — записываем по определению, сопоставляем у сумм слагаемые, смотрим на количество инверсий между ними, оно как раз  $p_f p_g$ .

5 — по определению, доказываем, что  $\text{Alt}(\text{Alt}(f \otimes g) \otimes h) = \text{Alt}(f \otimes \text{Alt}(g \otimes h)) = \text{Alt}(f \otimes g \otimes h)$ . По линейности заносим второе тензорное произведение под внутреннюю сумму, потом создаём перестановку, работающую на всех трёх наборах индексов, но переставляющую только первые два как  $\sigma$ , по линейности альтенирования заносим его под сумму, замечаем альтенирование от перестановки, сокращаем  $(-1)$ , конец.

По индукции можно обобщить формулу для внешнего произведения на несколько векторов.

Есть базис пространства антисимметричных  $p$ -форм (антисимметричных тензоров) размера  $\binom{n}{p}$  из врённых произведений упорядоченных комбинаций координатных функций. Координаты в нём называют существенными, они численно совпадают с координатой для того же набора в пространстве всех тензоров.

Можно вычислить значение внешнего произведения 1-форм на наборе векторов через определитель матрицы применения каждой функции к каждому вектору.

Также можно найти координаты внешнего произведения в базисе внешних произведений, если знаем разложение самих функций по базису пространства линейных форм.

Комбинируя, можно через сумму произведений двух соответствующих определителей вычислить функцию, заданную произведением 1-форм, заданных координатами, на наборе векторов, заданных координатами.

## 4. Евклидовы пространства

### 4.1. Аксиомы, КБШ

Скалярное (линейные пространства над вещественными числами) — функция от двух векторов: симметричность, линейность по первому ( $\Rightarrow$  каждому) аргументу, положительная определённость.

Псевдоскалярное (линейные пространства над комплексными числами): то же самое, только симметричность — эрмитова и по второму аргументу становится «эрмитова» однородность, хотя и нормальная аддитивность.

Евклидова норма — корень из скалярного квадрата.

КБШ:  $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ , причём равенство только при линейной зависимости. Доказываем так: берём положительное  $\langle \alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y \rangle$ , раскрываем, подставляем  $\alpha = \langle y, y \rangle$ ,  $\beta = -\langle x, y \rangle$ , выносим  $\|y\|$ , получаем, что искомое положительно. Из равенства в КБШ следует зависимость, так как мы берём вот эти альфа и бета, получаем скалярный квадрат ноль. Из зависимости следует равенство: берём  $\alpha x + \beta y = 0$  по определению л.з., рассматриваем  $\langle \alpha x + \beta y, x \rangle = 0$ ;  $\langle \alpha x + \beta y, y \rangle = 0$ , раскрываем, перемножаем равенства, конец.

Проверка свойств норм для Евклидовой нормы: Положительная определённость, однородность — очевидно. Нер-во треугольника: доказываем про квадраты норм, раскрывая  $\|x + y\|^2$ , замечая сумму сопряжённых, применяя КБШ и получая полный квадрат.

Ортогональная система — линейно независима. Доказывается, скалярно умножая нулевую линейную комбинацию на базисный вектор, по ортогональности остаётся только его компонент.

## 4.2. Грам-Шмидт, примеры

Грам-Шмидт: систему векторов можно заменить на ортогональную систему не большего размера с сохранением линейной оболочки. Процессуя очередной вектор, будем вычитать линейную комбинацию предыдущих, уже ортогональных. Так, чтобы новый стал ортогонален каждому. Если на каком-то шаге получится ноль, выкинем его.

Ортонормированную систему можно дополнить до ОНБ.

Примеры: коэффициенты Фурье, полиномы Лежандра.

Формула Родрига:  $\tilde{e}_k = \lambda_k ((x^2 - 1)^k)^{(k)}$ .

Доказываем, что  $\tilde{e}_k \perp x^m \forall m < k$ . Берём интеграл, много раз интегрируя по частям, уменьшая степень  $x^m$  и уменьшая количество дифференцирований у  $\tilde{e}_k$  каждый раз подстановка обнуляется, так как *Если полином имеет корень кратности  $k$ , этот корень — кратности  $k - 1$  у производной.*

Общая формула Родрига (хотя почему общая?...). Если взять  $\lambda_k = \frac{1}{2^k k!}$ , то  $\tilde{e}_k(1) = 1$ . Для доказательства вычислим  $\tilde{e}_k(1)$  по формуле Лейбница для произведения  $(x - 1)^k (x + 1)^k$ , где слагаемые для  $i! = k$  обнуляются.

Квадрат нормы полиномов будет  $\frac{2}{2k+1}$  (опять интегрируем по частям, уменьшая степень у одного и поднимая у другого).

Полиномы Чёбышева. Скалярное произведение — с весом  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ , получаем  $T_n = \cos(n \cos^{-1}(x))$ . Доказываем, что это полиномы по индукции, что  $T_{n+1} + T_{n-1} = 2xT_n$ .

Полиномы Эрмита. Скалярное произведение — от нуля до  $+\infty$  с весом  $e^{-x^2}$ .  $H_n = e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)}$ .



### 4.3. Матрица Грама, её определитель

Скалярное произведение в координатах: через матрицу Грама для базиса,  $\langle x, y \rangle = x^T \Gamma \bar{y}$ . Для ортонормированного — матрица единичная.

Матрица Грама сомосопряжена.

Теорема об определителе матрицы Грама: если система зависима, он равен нулю, иначе — произведению скалярных квадратов векторов, получающихся ортогонализацией Грама-Шмидта.

Доказывается, вычитанием в определителе  $g(\dots, a_i, \dots)$  соответствующих линейных комбинаций одновременно из строк и столбцов  $\leadsto$  на каждом шаге все  $a_i$  в матрице заменяются на  $b_i$ . Получаем определитель ортогональной системы, то есть  $|\text{diag}(b_i)|$ .

Можем посчитать норму ортогонализации нового вектора через отношение матриц нового и старого определителя, если исходная система независима.

Объём параллелепипеда — корень из определителя Грама.

Можно вычислить матрицу Грама системы так:  $G(a_1, \dots, a_i) = A^T \Gamma \bar{A}$ . Для ОНБ, понятно,  $\Gamma$  убирается.

Причём, если количество векторов равно размерности пространства, а  $\Gamma = E$ , объём — это просто определитель матрицы координат.

Объём под действием оператора изменяется в  $\det B$  раз (как определитель системы векторов при применении оператора). Например, при повороте объём сохраняется, а при гомотетии растёт в  $\lambda$  раз.

Матрица Грама базиса положительно определённая, её угловые миноры больше нуля. Она преобразуется при смене базиса:  $\Gamma' = T^T \Gamma \bar{T}$ . (Доказывается через смену координат в формуле для скалярного произведения и подстановку  $x' = e_i, y' = e'_j$ , ведь мы уже получили, что скалярное произведение элементов считается через эту матрицу, а значит, и для базисных векторов это тоже верно).

### 4.4. Изометрическая матрица

Изометрическая матрица: обратна сопряжению.

Свойства:

1. Изометричность равносильна ортонормированности столбцов, как и строк ( $\Gamma = E$ ). Доказывается через  $Q^T \overline{Q} = E$ , что соответствует  $\langle q_i, q_j \rangle = \delta_j^i$
2.  $Q$  — изометрично  $\Leftrightarrow Q^{-1}$  — изометрично
3. Произведение изометричных изометрично
4.  $|\det Q| = 1$
5. Матрица перехода между ОНБ — изометрична (по формуле для  $\Gamma'$ ).

#### 4.5. Ортогональное дополнения, расстояния

$L^\perp$  — ортогональное дополнение  $L$  — мн-во векторов, ортогональным всем векторам  $L$ .

Это линейное подпространство,  $L \cap L^\perp = \{0\}$ , причём  $L \oplus L^\perp = V$ . (Для док-ва дополним онб  $L$  до онб  $V$ . Подпространство, натянутое на добавленные векторы является прямым дополнением  $L$ , причём в сумме — онб, то есть любой вектор из дополнения ортогонален  $L$ , то есть полученное дополнение содержится в  $L^\perp$ , причём  $\dim L^\perp \leq \dim V - \dim L$ , так как иначе бы их пересечение было нетривиально)

$L^{\perp\perp} = L$  — доказываем подмножественность и равенство размерностей.

$(L_1 + L_2)^\perp = L_1^\perp \cap L_2^\perp$ ;  $(L_1 \cap L_2)^\perp = L_1^\perp + L_2^\perp$ . Доказываем прямое и обратное включение, подставляя нули в качестве некоторых векторов. Второе следует из первого.

Единственность представления вектора как сумму составляющих из  $L$  и  $L^\perp$ :  $x = y + z$ . (Единственность и так известна из дизъюнктивности, но здесь есть хороший способ поиска). Найдём разложение составляющей из  $L$  по базису  $L$ . Составим СНЛУ, что  $\langle x, l_i \rangle = \langle y, l_i \rangle$ , раскрыв это по разложению с коэффициентами  $c_i$  и линейности. Получим СЛНУ с единственным решением за счёт  $\det G \neq 0$ :

$$G(l_1, \dots, l_{\dim L})^T \mathbb{C} = \langle x, \mathbb{I} \rangle \quad (2)$$

Теорема Пифагора: для перпендикулярных векторов квадрат суммы — это сумма квадратов, так как смешанные слагаемые обнуляются. Можно также обобщить на  $n$  перпендикулярных векторов.

Теорема о наилучшем приближении: ортогональная проекция — самый близкий элемент  $L$  к исходному вектору. (Из Пифагора)

Расстояния между точкой и линейным пространством, точкой и многообразием, двумя многообразиями.

$dist^2(x, L) = \frac{g(\dots, x)}{g(\dots)}$ , так как при ортогонализации в числителе  $x$  превратится в компоненту относительно  $L^\perp$

Для многообразия  $\rho(x, [P = x_0 + L]) = \rho(x - x_0, L)$ , доказывается через разложение  $x - x_0 = y + z$  и применение теоремы Пифагора.

$\rho([P_1 = x_1 + L_1], [P_2 = x_2 + L_2]) = \rho(x_1 - x_2, L_1 + L_2)$ , так как

$$\min_{\substack{l_1 \in L_1 \\ l_2 \in L_2}} \|x_1 - x_2 + l_1 - l_2\| = \min_{l \in L_1 + L_2} \|x_1 - x_2 + l\| \quad (3)$$

Пространство можно разложить в прямую сумму попарно ортогональных подпространств. Если они все размерности 1, можно найти коэффициенты по Формуле Фурье:  $x_i = \frac{\langle x, e_i \rangle}{\langle e_i, e_i \rangle}$  (просто скалярно домножили разложение в ОБ на  $e_i$ ).

Тождество Парсеваля: в ортогональном базисе  $\|x\|^2 = \sum |x_i|^2 \|e_i\|^2$  (по теореме Пифагора) (Для бесконечномерных будет только неравенство БесселяЖ будет знак  $\leq$ )

Мы также можем строить проекторы на одномерные ортогональные пространства через скалярные произведения с элементами базиса (коэффициенты Фурье).

## 4.6. Изометрия $V$ и $V^*$

Пространства изометричны — существует изоморфизм с сохранением скалярного произведения.

На любых евкл/унит пространствах одной размерности можно ввести изометрию: сопоставляем векторы с одинаковыми коэффициентами в разложениях фиксированных **ОНБ**. Понятно, что такая изометрия зависит от выбора базисов.

Теорема Рисса.

#### 4.7. Метрические тензоры, взаимные базисы

### 5. Операторы в Евклидовых пространствах

#### 5.1. Сопряжённый

Матрица  $\overline{\Gamma}^{-1}A^*\overline{\Gamma}$ , в онб — просто  $A^*$  Сопряжение — взаимнообратно. Относительно композиции — как транспонирование. Аддитивность, псевдооднородность. Перестановочность относительно  $(\cdot)^{-1}$

Ядро оператора и образ сопряжённого — ортогональные дополнения друг друга, как и образ оператора и ядро сопряжённого.

Собственные числа — сопряжения друг друга. Для не соответствующих — собственные векторы ортогональны, для соответствующих — одинаковые.

Если подпространство инвариантно относительно  $A$ , то его ортогональное дополнение — относительно  $A^*$ .

#### 5.2. Нормальный

$\Leftrightarrow$  Перестановочен с сопряжённым  $\Leftrightarrow \langle Ax, Ay \rangle = \langle A^*x, A^*y \rangle \Leftrightarrow$  В некотором базисе матрицы перестановочны  $\Leftrightarrow$  ОПС + собственные пространства ортогональны  $\Leftrightarrow$  Существует какой-нибудь ОНБ, что матрица имеет понятно какой блочно-диагональный вид

Не перестанет быть нормальным, если вычесть сколько-то  $\text{id}$ .

У нормального оператора ядро и образ — ортогональные дополнения друг друга (если удалось получить собственные числа из того же поля, то потому, что это собственное подпространство нуля и все остальные).

Причём ядро не меняется при возведении в степень. И  $\text{Ker } A = \text{Ker } A^*$ .

Лемма о комплексификации (оператора):

— Собственные числа сохраняются, собственные пространства будут комплексификацией соответствующих — Комплексные собственные числа и пространства будут разбиваться на пары сопряжённых. — Нормальность сохраняется — Сопряжённость — перестановочная с комплексификацией

(Лемма очевидна, если учесть, что любое полиномиальное уравнение, верное в подполе, верно и в самом поле)

Канонический вид: — В унитарном: находим ОНБ из собственных подпространств, получаем собственные числа на диагонали

— В евклидовом: если все СЧ — вещ. — аналогично. Иначе — добавляем ещё блоки для пар комплексно-сопряжённых. Матрица перехода всё ещё должна быть ортогональная. Как её найти? Для вещественных собственных чисел — просто собственные векторы. Для пар КС разделяем какой-нибудь вектор на пару вещественной и комплексной части и запишем в таком порядке.

### 5.3. Самосопряжённый

(симметричный/эрмитов)

Равносильное определение через скалярное произведение: применить можно как к первому, так и ко второму аргументу, получится то же самое. И в обратную сторону.

Если  $A$  и  $B$  САМОсопряжены и перестановочны, то произведение самосопряжено.

Самосопряжён  $\Leftrightarrow$  нормален + имеет вещественный спектр  $\Leftrightarrow$  существует ОНБ, в котором матрица самосопряжена

Если подпространство инвариантно относительно  $A$ , то и ортогональное дополнение — тоже.

В каноническом виде просто пропадут блоки, останутся просто (и в унитарном, и в Евклидовом)

### 5.4. Изометричный

Унитарный/ортогональный

Равносильное определение через скалярное произведение, что если применить к обоим аргументам, скалярное произведение не изменится.

...  $\Leftrightarrow$  нормален + собственные числа по модулю = 1  $\Leftrightarrow$  существует ОНБ, в котором матрица изометрична  $\Leftrightarrow Q^{-1}$  — изометр.

Если подпространство инвариантно относительно  $Q$ , то орт. дополнение — тоже.

Канонический вид — В Евклидовом на диагонали останутся только  $\pm 1$   
 — В Унитарном в блоках будут  $a^2 + b^2 = 1$

Матрица изометрична  $\iff$  её (столбцы  $\iff$  строки) ортонормированы.

## 6. Разложения матриц

$L(D)U$  — ниже-унитреугольная \* (Диагональная без нулей на диагонали кроме, возможно, последнего) \* выше-унитреугольная; Существует  $\iff$  Все угловые миноры матрицы  $A$ , кроме (возможно)  $\Delta_n$  не равны нулю.

Кстати, здесь  $\det L = \det U = 1$ , то есть  $\prod^k d_i = \Delta_k$ , то есть  $d_k = \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}$ .

Можно найти одновременно Гауссом  $A$  и  $E$  без замены строк и столбцов. Слева будет  $DU$ , справа —  $L^{-1}$ . Доказывается через преобразования элементарной ниже-унитриугольной матрицей слева, то есть добавляя к  $j$ -й строке  $i$ -ую строку с коэффициентом. (Много таких умножений обеих частей — это и есть метод Гаусса). Пользуемся единственностью, получаем, что нашли то, что нужно.

Если к требованиям левой части добавить сомосопряжённость матрицы, будет  $A = LDL^* = U^*DU$ . Причём все  $d$  вещественные. Доказывается через LDU разложения для исходной и сопряжённой матриц (которые равны);  $D = \bar{D}$

Положительная/отрицательная определённость операторов и матриц:

1. Положительно/отрицательно определён, если  $\langle Au, u \rangle$  для всех  $u \neq 0$  больше нуля.
2. Положительно/отрицательно **полу**определён, если эта величина всегда больше или равна/меньше или равна нулю. (Требование, что для какого-то должна быть равна нулю не предъявляется!)
3. Не определён, если где-то меньше нуля, где-то — больше.

Это равносильно соответствующему утверждению про собственные числа. Доказательство: вспомним, что у самосопряжённого оператора собственные числа вещественны, а собственные подпространства ортогональны (по нормальности). Разложив и посчитав скалярное произведение разложения любого вектора и убрав перекрёстные слагаемые по ортогональности, получим  $\sum_{\lambda} \lambda \langle u_{\lambda}, u_{\lambda} \rangle$

Разложение Холецкого: самосопряжённая положительно определённая ( $\Rightarrow$  невырожденная), все угловые миноры — не нули  $\Leftrightarrow$  можно в  $LDU$  «размазать»  $D$ , разложив на треугольные с положительными элементами на диагонали:  $A = LL^* = U^*U$ .

Доказательство: по версии  $LDU$  для самопряжённых,  $\exists !L, !U, !D, d_k \in \mathbb{R} : A = LDL^* = U^*DU$ .  $A > 0 \Rightarrow \langle U^*DUx, x \rangle = \langle DUx, Ux \rangle > 0$ , так как  $U$  — невырожденный,  $Ux$  пробегает всё пространство, то есть  $\forall y \langle Dy, y \rangle > 0$ , то есть  $D$  получился положительно определённым, то есть положительных собственные числа, размажем его между  $U^*$  и  $U$ : берём  $\sqrt{D}$ ,  $(U')^* = U^*\sqrt{D}$ ;  $U' = \sqrt{D}U$ .

$QR$  разложение: для невырожденной можно представить как произведение ортогональной на правую. Или же левой на ортогональную (через разложение транспонирования  $A$ ).  $Q$  находится ортонормированием столбцов исходной. За  $R^{-1}$  берём матрицу коэффициентов при ортогонализации (она обратима, так как на диагонали не нули).

Теорема: можно взять корень из оператора, если он ОПС и с.ч. неотрицательны. Сделаем это классическим способом через спектральные проекторы. Единственность следует из единственности спектрального разложения.

Полярное ( $QS$  или  $SQ$ ) разложение: на самосопряжённую ( $H$ ) положительно определённую и изометричную ( $U$ ).

Док-во:  $AA^*$  всегда самосопряжённый, причём положительно определённый, как и  $A^*A$ .

Нужно взять  $\sqrt{AA^*}$  (левый модуль) для получения ортогонального. Далее — через обратную.

Можно также  $UH$ , получается из  $HU$  разложения через взятие обычного от матрицы  $A^*$  и  $H' = H^*, U' = U^*$ , в случае невырожденности берём  $H = \sqrt{A^*A}$  (правый модуль).

## 7. Квадратичные формы

Квадратичная — билинейная симметричная (в  $\mathbb{C}$  — полуторалинейная), в которую подставлены одинаковые аргументы:  $f(x) = \alpha(x, x)$ .

В матричной форме:  $x^T Ax$ . Ранг формы — ранг её матрицы.

При смене координат  $x = Qy$  матрица в новых координатах будет  $Q^T A Q$ .

Если элементы вне диагонали нулевые — канонический вид.

Для формы в каноническом виде положительный, отрицательный индексы инерции и количество нулей — количество соответствующих элементов на диагонали.

Сигнатура — это тройка  $(\sigma^+(f), \sigma^-(f), \sigma_0(f))$

Нормальный вид — канонический и все элементы  $\in \{-1, 0, 1\}$

Приведение к каноническому виду ортогональным преобразованием: так как  $A$  — симметричная, все с.ч. вещественны и можно, приведя к каноническому виду, получить:

$[V = Q^{-1} = Q^T], A = V^T \Lambda V$ , где  $V$  ортонормированная.

Метод Лагранжа: Последовательные невырожденные преобразования для диагонализации. Если нет ненулевых квадратов, делаем первый шаг: не трогая остальные переменные, вводим  $x_i = y_i + y_j, x_j = y_i - y_j$ . Получаем квадратный член и матрицу с квадратиком на диагонали из 1, 1, 1, -1.

Если же квадрат есть, разделяем на только этот квадрат с коэффициентом и форму чисто от остальных аргументов. Для этого выделяем полный квадрат с первым членом, где коэффициенты для остальных берём из перекрёстных членов. Тогда в качестве новой переменной берём  $y_i = \sum_j a_{ij} x_j$ . Обратной матрицей преобразования будет, где в  $i$ -й строке стоит  $a_{ij}$ , а остальное —  $\delta_j^i$ .

Метод Якоби (угловые миноры кроме последнего  $\neq 0$ ): матрица формы самосопряжена, так что раскладываем в  $A = U^* D U \Rightarrow \Lambda = (U^{-1})^T A U^{-1}$ , причём будет состоять из отношений миноров. Тогда берём  $Q = U^{-1}$ . Существует единственное такое верхнее унитарное преобразование, причём его можно найти через  $A_{k-1} q_i = -b_i$ , где  $A_i$  — угловые матрицы  $A$ ,  $q_i$  столбцы  $q$ ,  $b_i$  — верхние части столбцов  $A$ .

Для  $n = 2$  доказываем русками через разложение. Далее — по индукции через деление матрицы на 4 части.

Note: если ранг  $n - 1$ , а не  $n$ , проведём сначала невырожденное преобразование матрицей перестановки, получив все миноры кроме последнего не нули.



Критерий инерции квадратичный форм: любое невырожденное преобразование к каноническому виду, даёт одинаковую сигнатуру.

Докажем от противного. Во-первых, ранг не меняется при невырожденных преобразованиях. Запишем с два приведения формы к КВ с разным количеством положительных и отрицательных (но  $\sigma^+ + \sigma^- = \text{rg } f$ , то есть нулевых одинаково).

НУО,  $p < s$ . Для любого  $y, z$  системы  $Q_1^{-1}x = y$  и  $Q_2^{-1}x = z$  имеют единственное решение в силу невырожденности.

Сделаем  $y_0$  — вектор из нулей в первых  $p$  позициях, в остальных — что угодно. И  $z_0$  — с нулями в последних  $n - s$ , а в первых  $s$  — что угодно.

Сделаем однородную систему из  $p + n - s < n$  уравнений, взяв первые  $p$  уравнений из  $Q_1^{-1}x = y$  и последние  $s$  из  $Q_2^{-1}x = z$ . Тогда будет нетривиальное решение новой системы  $x^*$ . Обозначим  $y^* = Q_1^{-1}x^*, z^* = Q_2^{-1}x^*$ . С одной стороны,  $y^* \neq 0 \neq z^*$ , так как  $x^* \neq 0$ . С другой — первые  $p$  и последние  $s$  — нули, так как мы брали нужные уравнения из соответствующей системы. Тогда остальные элементы — не только нули.

Но тогда перейдём к координатам в обоих  $x$ , получив, что  $f(x^*) = g(y^*) > 0$  и  $h(z^*) < 0$  одновременно.

Знакоопределённость формы — определяется как у матрицы.

Критерий Сильвестра: если все угловые миноры ненулевые, то: если все положительные, она положительно определённая, если чередуются начиная с отрицательного — отрицательно определённая, если всё это для предыдущих и последний минор равно нулю, то полуопределённая с соответствующим знаком. Иначе — НЕопределённая.

ПВП к каноническому виду: выделяем квадратичную форму, избавляемся от перекрёстных членов ортогональным преобразованием, заменяем координаты (меняются и линейные члены тоже). Для тех, что ненулевые, выделяем полный квадрат, делаем параллельный перенос. Причём, если ненулевой коэффициент при линейном члене, можно заменой переменной абсорбировать свободный член.

Далее появятся варианты в зависимости от того, сколько у нас ненулевых коэффициентов при квадратах.

1. Если 3 или 2, тривиально.
2. Если только один, то после выдерения полного квадрата при нём

останется ещё линейные члены для  $y$  и  $z$  и свободный. Выполним поворот относительно оси  $OX$ , чтобы ненулевым стал только коэффициент при  $y$ , а  $z$  пропал. (Получается на угол арктангенс отношения).