Типовик по линейной алгебре «Канонический вид матрицы. Часть 1»

Латыпов Владимир Витальевич,
ИТМО КТ M3138, ***вариант 10***

11 марта 2022 г.

1. Формулировка условия

Утверждение 1. Условие можно найти здесь: `https://drive.google.com/drive/folders/1_B-ViudQ3-Y385yQO-gfcOkDFWMWNXK3`

Data section:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -10 & 3 & -5 \\ -4 & 12 & -6 & 4 \\ 4 & 20 & -4 & 10 \\ 12 & 0 & 6 & 4 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$G = \begin{pmatrix} -22 & 20 & 4 & -36 \\ 22 & 4 & 10 & 12 \\ 5 & -19 & -9 & 24 \\ 27 & -13 & 3 & 34 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$P = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & -3 & -2 \\ -3 & 5 & 2 & 2 \\ -6 & 11 & 6 & 4 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$Q = \begin{pmatrix} -26 & -39 & 65 & 13 \\ -18 & -27 & 45 & 9 \\ -16 & -24 & 40 & 8 \\ -26 & -39 & 65 & 13 \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$V = \begin{pmatrix} -5 & 8 & 4 & -10 \\ 5 & -7 & 8 & -5 \\ 0 & -4 & -7 & 4 \\ 2 & 8 & 4 & -17 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 10 & -1 & 10 & 8 \\ -2 & 2 & -1 & -4 \\ 4 & -4 & 10 & 11 \end{pmatrix} \tag{6}$$

2. Нахождение спектра и собственных подпространств матрицы

2.1. Характеристическеий многочлен

Для каждой из матриц F, G, P, Q, V, W запишем характеристический многочлен $\chi(t)$ в виде определителя матрицы оператора, дефект которого ищем и найжём явное выражения характетистического многочлена с помощью матричного калькулятора.

$$\chi_F(t) = \\ = \det(F - tE) = \begin{vmatrix} 0-t & -10 & 3 & -5 \\ -4 & 12-t & -6 & 4 \\ 4 & 20 & -4-t & 10 \\ 12 & 0 & 6 & 4-t \end{vmatrix} = \\ = t^4 - 12 \cdot t^3 + 52 \cdot t^2 - 96 \cdot t + 64 = (t-2) \cdot (t-4) \cdot (t-2) \cdot (t-4) = 0 \tag{7}$$

$$\chi_G(t) = \\ = \det(G - tE) = \begin{vmatrix} -22-t & 20 & 4 & -36 \\ 22 & 4-t & 10 & 12 \\ 5 & -19 & -9-t & 24 \\ 27 & -13 & 3 & 34-t \end{vmatrix} = \\ = t^4 - 7 \cdot t^3 - 58 \cdot t^2 + 220 \cdot t + 600 = (t+6) \cdot (t+2) \cdot (t-5) \cdot (t-10) \tag{8}$$

$$\chi_P(t) = \\ = \det(P - tE) = \begin{vmatrix} -4-t & 6 & 3 & 3 \\ 3 & -6-t & -3 & -2 \\ -3 & 5 & 2-t & 2 \\ -6 & 11 & 6 & 4-t \end{vmatrix} = \\ = t^4 + 4 \cdot t^3 + 6 \cdot t^2 + 4 \cdot t + 1 = (t+1)^2 \cdot (t+1)^2 \tag{9}$$

$$\chi_Q(t) = \\ = \det(Q - tE) = \begin{vmatrix} -26-t & -39 & 65 & 13 \\ -18 & -27-t & 45 & 9 \\ -16 & -24 & 40-t & 8 \\ -26 & -39 & 65 & 13-t \end{vmatrix} = \\ = t^4 \quad (10)$$

$$\chi_V(t) = \\ = \det(V - tE) = \begin{vmatrix} -5-t & 8 & 4 & -10 \\ 5 & -7-t & 8 & -5 \\ 0 & -4 & -7-t & 4 \\ 2 & 8 & 4 & -17-t \end{vmatrix} = \\ = t^4 + 36 \cdot t^3 + 478 \cdot t^2 + 2772 \cdot t + 5929 = (t+11) \cdot (t+7) \cdot (t+11) \cdot (t+7) \quad (11)$$

$$\chi_W(t) = \\ = \det(W - tE) = \begin{vmatrix} 1-t & 2 & -4 & -4 \\ 10 & -1-t & 10 & 8 \\ -2 & 2 & -1-t & -4 \\ 4 & -4 & 10 & 11-t \end{vmatrix} = \\ = t^4 - 10 \cdot t^3 + 28 \cdot t^2 - 6 \cdot t - 45 = (t+1) \cdot (t-5) \cdot (t-3)^2 \quad (12)$$

2.2. Корни характеристического многочлена, алгебраическая кратность

Обозначим за A_{Matrix} множество корней в вещественных числах с учётом кратности (пары, где первый элемент — корень, воторой — его кратность).

$$A_F = \{(2,2),(4,2)\} \tag{13}$$
$$A_G = \{(-6,1),(-2,1),(5,1),(10,1)\} \tag{14}$$
$$A_P = \{(-1,4)\} \tag{15}$$
$$A_Q = \{(0,4)\} \tag{16}$$
$$A_V = \{(-11,2),(-7,2)\} \tag{17}$$
$$A_W = \{(-1,1),(5,1),(3,2)\} \tag{18}$$

Заметим, что у всех матриц все корни характеристического многочлена лежат в $\mathbb{R}$.

2.3. Нахождение определителя и следа матрицы

Как известно, след матрицы — это сумма всех корней с учётом кратности, а определитель — их произведение: $\prod\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = \det A$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = \operatorname{tr} A$

Тогда:

$$\det F = 2^2 \cdot 4^2 = 64 \tag{19}$$
$$\operatorname{tr} F = 2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 = 12 \tag{20}$$

Проверим, всё сходится. Проделаем то же самое для остальных матриц.

$$\det G = -6 \cdot -2 \cdot 5 \cdot 10 = 600 \tag{21}$$
$$\operatorname{tr} G = -6 + -2 + 5 + 10 = 7 \tag{22}$$
$$\det P = -1^4 = 1 \tag{23}$$
$$\operatorname{tr} P = -1 \cdot 4 = -4 \tag{24}$$
$$\det Q = 0^4 = 0 \tag{25}$$
$$\operatorname{tr} Q = 0 \cdot 4 = 0 \tag{26}$$
$$\det V = -11^2 \cdot -7^2 = 5929 \tag{27}$$
$$\operatorname{tr} V = -11 \cdot 2 + -7 \cdot 2 = -36 \tag{28}$$
$$\det W = -1 \cdot 5 \cdot 3^2 = -45 \tag{29}$$
$$\operatorname{tr} W = -1 + 5 + 3 \cdot 2 = 10 \tag{30}$$

2.4. СЛОУ для собственных подпространств

Найдём ядра (*чистый изумруд!*) операторов $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$ для всех собственных чисел λ для каждого оператора:

$$v \in V_\lambda \Leftrightarrow (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})v = \mathbb{0} \tag{31}$$

Перечислим матрицы для операторов и с.ч.:

2.4.1. Матрица F

$$F - 2E = \begin{pmatrix} -2 & -10 & 3 & -5 \\ -4 & 10 & -6 & 4 \\ 4 & 20 & -6 & 10 \\ 12 & 0 & 6 & 2 \end{pmatrix} \tag{32}$$

$$F - 4E = \begin{pmatrix} -4 & -10 & 3 & -5 \\ -4 & 8 & -6 & 4 \\ 4 & 20 & -8 & 10 \\ 12 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \tag{33}$$

2.4.2. Матрица G

$$G - (-6)E = \begin{pmatrix} -16 & 20 & 4 & -36 \\ 22 & 10 & 10 & 12 \\ 5 & -19 & -3 & 24 \\ 27 & -13 & 3 & 40 \end{pmatrix} \tag{34}$$

$$G - (-2)E = \begin{pmatrix} -20 & 20 & 4 & -36 \\ 22 & 6 & 10 & 12 \\ 5 & -19 & -7 & 24 \\ 27 & -13 & 3 & 36 \end{pmatrix} \tag{35}$$

$$G - 5E = \begin{pmatrix} -27 & 20 & 4 & -36 \\ 22 & -1 & 10 & 12 \\ 5 & -19 & -14 & 24 \\ 27 & -13 & 3 & 29 \end{pmatrix} \tag{36}$$

$$G - 10E = \begin{pmatrix} -32 & 20 & 4 & -36 \\ 22 & -6 & 10 & 12 \\ 5 & -19 & -19 & 24 \\ 27 & -13 & 3 & 24 \end{pmatrix} \tag{37}$$

2.4.3. Матрица P

$$P - (-1)E = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 3 & 3 \\ 3 & -5 & -3 & -2 \\ -3 & 5 & 3 & 2 \\ -6 & 11 & 6 & 5 \end{pmatrix} \tag{38}$$

2.4.4. Матрица Q

$$Q - 0E = \begin{pmatrix} -26 & -39 & 65 & 13 \\ -18 & -27 & 45 & 9 \\ -16 & -24 & 40 & 8 \\ -26 & -39 & 65 & 13 \end{pmatrix} \tag{39}$$

2.4.5. Матрица V

$$V - (-11)E = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 4 & -10 \\ 5 & 4 & 8 & -5 \\ 0 & -4 & 4 & 4 \\ 2 & 8 & 4 & -6 \end{pmatrix} \tag{40}$$

$$V - (-7)E = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 & -10 \\ 5 & 0 & 8 & -5 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \\ 2 & 8 & 4 & -10 \end{pmatrix} \tag{41}$$

2.4.6. Матрица W

$$W - (-1)E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 & -4 \\ 10 & 0 & 10 & 8 \\ -2 & 2 & 0 & -4 \\ 4 & -4 & 10 & 12 \end{pmatrix} \tag{42}$$

$$
W-5E=\begin{pmatrix}-4 & 2 & -4 & -4\\ 10 & -6 & 10 & 8\\ -2 & 2 & -6 & -4\\ 4 & -4 & 10 & 6\end{pmatrix} \tag{43}
$$

$$
W-3E=\begin{pmatrix}-2 & 2 & -4 & -4\\ 10 & -4 & 10 & 8\\ -2 & 2 & -4 & -4\\ 4 & -4 & 10 & 8\end{pmatrix} \tag{44}
$$

2.5. Решение СЛОУ, нахождение геометрических кратностей

Для каждой матрицы найдём базисы подпространств для каждого собственного числа и проверим, получается ли сделать базис всего пространства их собстыенных векторов (так как пр-ва дизъюнктны, проверяем сумму размерностей).

Данные о каждой матрице запишем как множество из пар собственных чисел и набора векторов для этого числа. Геометрические кратности в таком случае — количества векторов в базисах.

$$
F:\left\{\left(2,\left\{\begin{pmatrix}-5\\4\\10\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-5\\-14\\0\\30\end{pmatrix}\right\}\right),\left(4,\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\2\end{pmatrix}\right\}\right)\right\} \tag{45}
$$

$$
\begin{aligned}
G:\left\{\left(-6,\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\right),\left(-2,\left\{\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\\2\end{pmatrix}\right\}\right),\right.\\
\left.\left(5,\left\{\begin{pmatrix}0\\2\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}\right),\left(10,\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}\right)\right\}
\end{aligned} \tag{46}
$$

$$P : \left\{ \left(-1, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right) \right\} \tag{47}$$

$$Q : \left\{ \left(0, \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \right) \right\} \tag{48}$$

$$V : \left\{ \left(-11, \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \right), \left(-7, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right) \right\} \tag{49}$$

$$W : \left\{ \left(-1, \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} \right), \left(5, \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right), \left(3, \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right) \right\} \tag{50}$$

3. Диагональное представление

Видим, что базис и собственных векторов получилось составить только для F и G. Приведём их к диагональному виду. Для этого построим матрицу перехода к базису с.в.

3.1. Матрица F

$$T_F = \begin{pmatrix} -5 & -5 & -1 & 0 \\ 4 & -14 & 1 & -1 \\ 10 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{51}$$

Проверим, что:

$$T_F^{-1} \cdot F \cdot T_F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \tag{52}$$

А вот и проверка: https://matrixcalc.org/#%7B%7B-5,-5,-1,0%7D,%7B4,-14,1,-1%7D,%7B10,0,2,0%7D,%7B0,30,0,2%7D%7D%5E(-1)*%7B%7B0,-10,3,-5%7D,%7B-4,12,-6,4%7D,%7B4,20,-4,10%7D,%7B12,0,6,4%7D%7D*%7B%7B-5,-5,-1,0%7D,%7B4,-14,1,-1%7D,%7B10,0,2,0%7D,%7B0,30,0,2%7D%7D

3.2. Матрица G

$$T_G = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{53}$$

Проверим, что:

$$T_G^{-1} \cdot G \cdot T_G = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \tag{54}$$

Ссылка на проверку: https://matrixcalc.org/#%7B%7B-1,-1,0,-1%7D,%7B1,3,2,0%7D,%7B0,-2,-1,1%7D,%7B1,2,1,1%7D%7D%5E(-1)*%7B%7B-22,20,4,-36%7D,%7B22,4,10,12%7D,%7B5,-19,-9,24%7D,%7B27,-13,3,34%7D%7D*%7B%7B-1,-1,0,-1%7D,%7B1,3,2,0%7D,%7B0,-2,-1,1%7D,%7B1,2,1,1%7D%7D