

Сжатый конспект по линейной алгебре (2-й семестр)

Латыпов Владимир (конспектор)

t.me/donRumata03, github.com/donRumata03, donrumata03@gmail.com

Кучерук Елена Аркадьевна (лектор)

13 июня 2022 г.

Содержание

1	Введение	3
2	Сопряжённое пространство	3
3	Тензоры	4
3.1	Два определения, смена базиса	4
3.2	Тензорное произведение, свёртка, транспонирование . .	4
3.3	Симметрирование, альтенирование	5
3.4	p -формы	6
4	Евклидовы пространства	7
4.1	Аксиомы, КБШ	7
4.2	Грам-Шмидт, примеры	8
4.3	Матрица Грама, её определитель	9
4.4	Изометрическая матрица	9
4.5	Ортогональное дополнение, расстояния	10
4.6	Изометрия V и V^*	11
4.7	Метрические тензоры, взаимные базисы	12
5	Операторы в Евклидовых пространствах	12
5.1	Сопряжённый	12
5.2	Нормальный	12
5.3	Самосопряжённый	13
5.4	Изометричный	13
6	Разложения матриц	14
7	Квадратичные формы	14

1. Введение

Конспект старается быть максимального краткой выжимкой из того, что нужно знать для успешной сдачи экзамена по Линейной Алгебре во втором семестре.

Если кто-то сдаёт часть про линейные операторы и готов по ним написать, welcome.

2. Сопряжённое пространство

V^* пространство линейных форм над V .

Вычисление формы на координатном столбце $f(x) = x^j a_j$, где строка a_j размера n изоморфно сопоставляется форме.

— Координатные функции относительно базиса, $\omega^i(e_j) = \delta_j^i$.

Они базис V^* , так как их как раз n , а породить любую f можно, предъявив коэффициенты a_j .

По e мы научились находить сопряжённый базис, теперь научимся в обратную сторону находить по базису V^* такой базис V , чтобы исходный был к нему сопряжён: возьмём любую сопряжённую пару e, ω и через это получим $\omega' \rightarrow (e', \omega')$

Если назвать $S = T_{\omega \rightarrow \omega'}^T$, утверждается, что можем получить e' так: $T_{e \rightarrow e'} = S^{-1}$

Чтобы доказать — проверим, что ω' — координатные функции e' . То есть что координаты преобразуются правильно: $x' = Sx$.

Элементы V^* Ковариантные, так как преобразуются (получение новых из старых) с матрицей $T_{e \rightarrow e'}$, а элементы V — контравариантные, так как с матрицей $S = T^{-1}$

Доказываю, что можно получить изоморфизм

$$\varphi : V \rightarrow (V^*)^*, x \rightarrow "x" \quad \text{where } "x"(f) = f(x) \quad (1)$$

Кстати, $\varphi \in \text{Aut}(V \rightarrow (V^*)^*)$.

Линейность φ очевидна, для биективности в силу линейности достаточно проверить, что базис переходит в базис (что $\text{rg } \varphi = n$). Действи-

тельно, $"e_j"$ — координатные функции базиса координатных функций, так как, $"e_j"(f) = f(e_j) = (a_f)_j$.

Отличие от $V \leftrightarrow V^*$ — в том, что теперь оно не зависит от выбора базиса.

— Умеем считать сопряжённый базис через обратную матрицу и матрицы проекторов через сопряжённый базис.

3. Тензоры

3.1. Два определения, смена базиса

Это функция $V^p \times (V^*)^q \rightarrow \mathcal{K}$.

То, что «из векторов» — ковариантное, «из форм» — контрвариантное.

$T_{(p;q)}$ — линейное пространство размерности $n^{(p+q)}$

За счёт линейности при вычислении на наборе векторов, разложенных по базису, можно вынести $p+q$ сумм с координатами, остаются значения тензора на разных размещениях базиса, их мы назовём компонентами относительно базисов e, ω .

$\alpha_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q}$ Сверху пишется q «контравариантных индекса» — из форм. Снизу — p ковариантные индексы — из векторов.

Это можно записать в $p+q$ -мерную матрицу.

Смена базиса. Выразив старые координаты через новые ($\xi^i = t_k^i \xi'^k, \eta_j = s_j^m \eta'_m$), подставим в формулу вычисления на наборе векторов, сгруппируем t, s, α скажем, что это новый компонент, а новые координаты как раз останутся.

Другое определение тензора: это многомерная матрица, в которой выделены «ковариантные» и «контравариантные» координаты и которая пересчитывается при смене базиса по той же формуле, что и выше.

Определения эквивалентны.

3.2. Тензорное произведение, свёртка, транспонирование

Тензорное произведение: вводим через второе определение (многомерная матрица), проверяем вариантность.

Говорим, что в терминах линейных форм мы берём каждую от своей части координат и перемножаем результаты.

Базис вводим базис $T_{(p;q)}$ из n^{p+q} тензорных произведений всех размещений e_i, ω_j , помня, что

$$\begin{aligned}\omega_j &: (V)^1 \rightarrow \mathcal{K} \\ e_i &\cong "e_i" : (V^*)^1 \rightarrow \mathcal{K}\end{aligned}$$

Доказываем, что это базис, так как количество n^{p+q} и порождающее: за коэффициенты для порождения берём компоненты относительно базиса, доказываем через формулу вычисления на наборе векторов.

Заметим, что матрица тензора из базиса будет содержать одну единицу на соответствующих индексах и все остальные нули.

Вводим свёртку как матрицу, доказываем, что это тензор, помня, что $t_{\tilde{\kappa}}^{\kappa_2} s_{\kappa_1}^{\tilde{\kappa}} = \delta_{\kappa_1}^{\kappa_2}$ и оставляя в сумме только слагаемые, где $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$.

Транспонирование: $\beta = \sigma(\alpha), \beta_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q} = \alpha_{j_{\sigma_1} \dots j_{\sigma_p}}^{i_1 \dots i_q}$.

То есть набор индексов α переходит в индексы β под действием обратной к σ перестановки.

Доказываем, что тензор (достаточно доказать про транспозиции, так как перестановка раскладывается на композицию транспозиций)

Заметим, что в терминах функций мы переставляем аргументы, тоже с обратной перестановкой.

Транспонирование — изоморфизм, ассоциативно, но коммутативно (как и группа перестановок).

Если при любом транспонировании тензора он не меняется, он симметричен, если умножается на $(-1)^{\varepsilon(\sigma)}$, то кососимметричен.

Кососимметричен \Leftrightarrow равен нулю при повторяющихся аргументах.

3.3. Симметрирование, альтенирование

Оба перестановочны относительно перестановки, причём для симметрирования получается просто симметрирование, а для альтенирования — оно умножить на знак перестановки. (доказывается, используя,

что если все перестановки S_n , по которым мы суммируем, пропустить через одну перестановку, получим тоже все перестановки, но в другом порядке — таблица Кэли, иначе не группа)

α симметричен $\Leftrightarrow \alpha = \text{Sim } \alpha$. α КОСОсимметричен $\Leftrightarrow \alpha = \text{Alt } \alpha$.

Обе идемпотентны, причём $\text{Sim Alt } \alpha = 0$ (то есть симметрирование любого кососимметричного — ноль, ведь можно подставить кососимметричный $\beta = \text{Alt } \beta$, тогда $\text{Sim } \beta = \text{Sim Alt } \beta = 0$).

Доказывается, заметив, что сумма чётностей по всем перестановкам — это ноль, так как это определитель матрицы со всеми единицами.

Заметим, что пересечение подпространств симметричных и антисимметричных тензоров — тривиально. Более того, если транспозиция одна (по двум индексам), то пространство всех тензоров заданного типа раскладывается в дизъюнктивную сумму симметричных и антисимметричных (по этим индексам), где $\alpha = \text{Sim } \alpha + \text{Alt } \alpha$

3.4. р-формы

р-формы — антисимметричные ковариантные тензоры, Если от одного аргумента, отождествляют с V^* .

Внешнее произведение: $f \wedge g = \frac{(p_f + p_g)!}{p_f! p_g!} \text{Alt}(f \otimes g)$.

Есть свойства, можно через них раскрывать скобки.

1. $f \wedge g = (-1)^{p_1 p_2} g \wedge f$. 2. $(f + g) \wedge h = f \wedge h + g \wedge h$ и $f \wedge (g + h) = f \wedge g + f \wedge h$.
3. $\lambda \cdot (f \wedge g) = (\lambda f) \wedge g = f \wedge (\lambda g)$. 4. $\mathbb{D}_{\wedge^{p_1} V^*} \wedge g = f \wedge \mathbb{D}_{\wedge^{p_2} V^*} = \mathbb{D}_{\wedge^{p_1 + p_2} V^*}$.
5. $(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h) = \frac{(p_1 + p_2 + p_3)!}{p_1! p_2! p_3!} \text{Alt}(f \otimes g \otimes h)$.

2, 3, 4 — очевидно.

1 — записываем по определению, сопоставляем у сумм слагаемые, смотрим на количество инверсий между ними, оно как раз $p_f p_g$.

5 — по определению, доказываем, что $\text{Alt}(\text{Alt}(f \otimes g) \otimes h) = \text{Alt}(f \otimes \text{Alt}(g \otimes h)) = \text{Alt}(f \otimes g \otimes h)$. По линейности заносим второе тензорное произведение под внутреннюю сумму, потом создаём перестановку, работающую на всех трёх наборах индексов, но переставляющую только первые два как σ , по линейности альтенирования заносим его под сумму, замечаем альтенирование от перестановки, сокращаем (-1) , конец.

По индукции можно обобщить формулу для внешнего произведения на несколько векторов.

Есть базис пространства антисимметричных p -форм (антисимметричных тензоров) размера $\binom{n}{p}$ из вешних произведений упорядоченных комбинаций координатных функций. Координаты в нём называют существенными, они численно совпадают с координатой для того же набора в пространстве всех тензоров.

Можно вычислить значение внешнего произведения 1-форм на наборе векторов через определитель матрицы применения каждой функции к каждому вектору.

Также можно найти координаты внешнего произведения в базисе внешних произведений, если знаем разложение самих функций по базису пространства линейных форм.

Комбинируя, можно через сумму произведений двух соответствующих определителей вычислить функцию, заданную произведением 1-форм, заданных координатами, на наборе векторов, заданных координатами.

4. Евклидовы пространства

4.1. Аксиомы, КБШ

Скалярное (линейные пространства над вещественными числами) — функция от двух векторов: симметричность, линейность по первому (\Rightarrow каждому) аргументу, положительная определённость.

Псевдоскалярное (линейные пространства над комплексными числами): то же самое, только симметричность — эрмитова и по второму аргументу становится «эрмитова» однородность, хотя и нормальная аддитивность.

Евклидова норма — корень из скалярного квадрата.

КБШ: $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$, причём равенство только при линейной зависимости. Доказываем так: берём положительное $\langle \alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y \rangle$, раскрываем, подставляем $\alpha = \langle y, y \rangle$, $\beta = -\langle x, y \rangle$, выносим $\|y\|$, получаем, что искомое положительно. Из равенства в КБШ следует зависимость, так как мы берём вот эти альфа и бета, получаем скалярный квадрат ноль. Из зависимости следует равенство: берём $\alpha x + \beta y = 0$ по определению л.з., рассматриваем $\langle \alpha x + \beta y, x \rangle = 0$; $\langle \alpha x + \beta y, y \rangle = 0$, раскрываем, перемножаем равенства, конец.

Проверка свойств норм для Евклидовой нормы: Положительная определённость, однородность — очевидно. Нер-во треугольника: доказываем про квадраты норм, раскрывая $\|x + y\|^2$, замечая сумму сопряжённых, применяя КБШ и получая полный квадрат.

Ортогональная система — линейно независима. Доказывается, скалярно умножая нулевую линейную комбинацию на базисный вектор, по ортогональности остаётся только его компонент.

4.2. Грам-Шмидт, примеры

Грам-Шмидт: систему векторов можно заменить на ортогональную систему не большего размера с сохранением линейной оболочки. Процессуя очередной вектор, будем вычитать линейную комбинацию предыдущих, уже ортогональных. Так, чтобы новый стал ортогонален каждому. Если на каком-то шаге получится ноль, выкинем его.

Ортонормированную систему можно дополнить до ОНБ.

Примеры: коэффициенты Фурье, полиномы Лежандра.

Формула Родрига: $\tilde{e}_k = \lambda_k ((x^2 - 1)^k)^{(k)}$.

Доказываем, что $\tilde{e}_k \perp x^m \forall m < k$. Берём интеграл, много раз интегрируя по частям, уменьшая степень x^m и уменьшая количество дифференцирований у \tilde{e}_k каждый раз подстановка обнуляется, так как *Если полином имеет корень кратности k , этот корень — кратности $k - 1$ у производной.*

Общая формула Родрига (хотя почему общая?...). Если взять $\lambda_k = \frac{1}{2^k k!}$, то $\tilde{e}_k(1) = 1$. Для доказательства вычислим $\tilde{e}_k(1)$ по формуле Лейбница для произведения $(x - 1)^k (x + 1)^k$, где слагаемые для $i! = k$ обнуляются.

Квадрат нормы полиномов будет $\frac{2}{2k+1}$ (опять интегрируем по частям, уменьшая степень у одного и поднимая у другого).

Полиномы Чёбышева. Скалярное произведение — с весом $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, получаем $T_n = \cos(n \cos^{-1}(x))$. Доказываем, что это полиномы по индукции, что $T_{n+1} + T_{n-1} = 2xT_n$.

Полиномы Эрмита. Скалярное произведение — от нуля до $+\infty$ с весом e^{-x^2} . $H_n = e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)}$.

4.3. Матрица Грама, её определитель

Скалярное произведение в координатах: через матрицу Грама для базиса, $\langle x, y \rangle = x^T \Gamma \bar{y}$. Для ортонормированного — матрица единичная.

Матрица Грама сомосопряжена.

Теорема об определителе матрицы Грама: если система зависима, он равен нулю, иначе — произведению скалярных квадратов векторов, получающихся ортогонализацией Грама-Шмидта.

Доказывается, вычитанием в определителе $g(\dots, a_i, \dots)$ соответствующих линейных комбинаций одновременно из строк и столбцов \leadsto на каждом шаге все a_i в матрице заменяются на b_i . Получаем определитель ортогональной системы, то есть $|\text{diag}(b_i)|$.

Можем посчитать норму ортогонализации нового вектора через отношение матриц нового и старого определителя, если исходная система независима.

Объём параллелепипеда — корень из определителя Грама.

Можно вычислить матрицу Грама системы так: $G(a_1, \dots, a_i) = A^T \Gamma \bar{A}$. Для ОНБ, понятно, Γ убирается.

Причём, если количество векторов равно размерности пространства, а $\Gamma = E$, объём — это просто определитель матрицы координат.

Объём под действием оператора изменяется в $\det B$ раз (как определитель системы векторов при применении оператора). Например, при повороте объём сохраняется, а при гомотетии растёт в λ раз.

Матрица Грама базиса положительно определённая, её угловые миноры больше нуля. Она преобразуется при смене базиса: $\Gamma' = T^T \Gamma \bar{T}$. (Доказывается через смену координат в формуле для скалярного произведения и подстановку $x' = e_i, y' = e'_j$, ведь мы уже получили, что скалярное произведение элементов считается через эту матрицу, а значит, и для базисных векторов это тоже верно).

4.4. Изометрическая матрица

Изометрическая матрица: обратна сопряжению.

Свойства:

1. Изометричность равносильна ортонормированности столбцов, как и строк ($\Gamma = E$). Доказывается через $Q^T \overline{Q} = E$, что соответствует $\langle q_i, q_j \rangle = \delta_j^i$
2. Q — изометрично $\Leftrightarrow Q^{-1}$ — изометрично
3. Произведение изометричных изометрично
4. $|\det Q| = 1$
5. Матрица перехода между ОНБ — изометрична (по формуле для Γ').

4.5. Ортогональное дополнения, расстояния

L^\perp — ортогональное дополнение L — мн-во векторов, ортогональным всем векторам L .

Это линейное подпространство, $L \cap L^\perp = \{0\}$, причём $L \oplus L^\perp = V$. (Для док-ва дополним онб L до онб V . Подпространство, натянутое на добавленные векторы является прямым дополнением L , причём в сумме — онб, то есть любой вектор из дополнения ортогонален L , то есть полученное дополнение содержится в L^\perp , причём $\dim L^\perp \leq \dim V - \dim L$, так как иначе бы их пересечение было нетривиально)

$L^{\perp\perp} = L$ — доказываем подмножественность и равенство размерностей.

$(L_1 + L_2)^\perp = L_1^\perp \cap L_2^\perp$; $(L_1 \cap L_2)^\perp = L_1^\perp + L_2^\perp$. Доказываем прямое и обратное включение, подставляя нули в качестве некоторых векторов. Второе следует из первого.

Единственность представления вектора как сумму составляющих из L и L^\perp : $x = y + z$. (Единственность и так известна из дизъюнктивности, но здесь есть хороший способ поиска). Найдём разложение составляющей из L по базису L . Составим СНЛУ, что $\langle x, l_i \rangle = \langle y, l_i \rangle$, раскрыв это по разложению с коэффициентами c_i и линейности. Получим СЛНУ с единственным решением за счёт $\det G \neq 0$:

$$G(l_1, \dots, l_{\dim L})^T \mathbb{C} = \langle x, \mathbb{I} \rangle \quad (2)$$

Теорема Пифагора: для перпендикулярных векторов квадрат суммы — это сумма квадратов, так как смешанные слагаемые обнуляются. Можно также обобщить на n перпендикулярных векторов.

Теорема о наилучшем приближении: ортогональная проекция — самый близкий элемент L к исходному вектору. (Из Пифагора)

Расстояния между точкой и линейным пространством, точкой и многообразием, двумя многообразиями.

$dist^2(x, L) = \frac{g(\dots, x)}{g(\dots)}$, так как при ортогонализации в числителе x превратится в компоненту относительно L^\perp

Для многообразия $\rho(x, [P = x_0 + L]) = \rho(x - x_0, L)$, доказывается через разложение $x - x_0 = y + z$ и применение теоремы Пифагора.

$\rho([P_1 = x_1 + L_1], [P_2 = x_2 + L_2]) = \rho(x_1 - x_2, L_1 + L_2)$, так как

$$\min_{\substack{l_1 \in L_1 \\ l_2 \in L_2}} \|x_1 - x_2 + l_1 - l_2\| = \min_{l \in L_1 + L_2} \|x_1 - x_2 + l\| \quad (3)$$

Пространство можно разложить в прямую сумму попарно ортогональных подпространств. Если они все размерности 1, можно найти коэффициенты по Формуле Фурье: $x_i = \frac{\langle x, e_i \rangle}{\langle e_i, e_i \rangle}$ (просто скалярно домножили разложение в ОБ на e_i).

Тождество Парсеваля: в ортогональном базисе $\|x\|^2 = \sum |x_i|^2 \|e_i\|^2$ (по теореме Пифагора) (Для бесконечномерных будет только неравенство БесселяЖ будет знак \leq)

Мы также можем строить проекторы на одномерные ортогональные пространства через скалярные произведения с элементами базиса (коэффициенты Фурье).

4.6. Изометрия V и V^*

Пространства изометричны — существует изоморфизм с сохранением скалярного произведения.

На любых евкл/унит пространствах одной размерности можно ввести изометрию: сопоставляем векторы с одинаковыми коэффициентами в разложениях фиксированных **ОНБ**. Понятно, что такая изометрия зависит от выбора базисов.

Теорема Рисса.

4.7. Метрические тензоры, взаимные базисы

5. Операторы в Евклидовых пространствах

5.1. Сопряжённый

Матрица $\overline{\Gamma^{-1}A^*\Gamma}$ в онб — просто A^* . Сопряжение — взаимнообратно. Относительно композиции — как транспонирование. Аддитивность, псевдооднородность. Перестановочность относительно $(\cdot)^{-1}$.

Ядро оператора и образ сопряжённого — ортогональные дополнения друг друга, как и образ оператора и ядро сопряжённого.

Собственные числа — сопряжения друг друга. Для не соответствующих — собственные векторы ортогональны, для соответствующих — одинаковые.

Если подпространство инвариантно относительно A , то его ортогональное дополнение — относительно A^* .

5.2. Нормальный

\Leftrightarrow Перестановочен с сопряжённым $\Leftrightarrow \langle Ax, Ay \rangle = \langle A^*x, A^*y \rangle \Leftrightarrow$ В некотором базисе матрицы перестановочны \Leftrightarrow ОПС + собственные пространства ортогональны \Leftrightarrow Существует какой-нибудь ОНБ, что матрица имеет понятно какой блочно-диагональный вид

Не перестанет быть нормальным, если вычесть сколько-то id .

У нормального оператора ядро и образ — ортогональные дополнения друг друга (если удалось получить собственные числа из того же поля, то потому, что это собственное подпространство нуля и все остальные).

Причём ядро не меняется при возведении в степень. И $\text{Ker } A = \text{Ker } A^*$.

Лемма о комплексификации (оператора):

— Собственные числа сохраняются, собственные пространства будут комплексификацией соответствующих — Комплексные собственные числа и пространства будут разбиваться на пары сопряжённых. — Нормальность сохраняется — Сопряжённость — перестановочная с комплексификацией

(Лемма очевидна, если учесть, что любое полиномиальное уравнение, верное в подполе, верно и в самом поле)

Канонический вид: — В унитарном: находим ОНБ из собственных подпространств, получаем собственные числа на диагонали

— В евклидовом: если все СЧ — вещ. — аналогично. Иначе — добавляем ещё блоки для пар комплексно-сопряжённых. Матрица перехода всё ещё должна быть ортогональная. Как её найти? Для вещественных собственных чисел — просто собственные векторы. Для пар КС разделяем какой-нибудь вектор на пару вещественной и комплексной части и запишем в таком порядке.

5.3. Самосопряжённый

(симметричный/эрмитов)

Равносильное определение через скалярное произведение: применить можно как к первому, так и ко второму аргументу, получится то же самое. И в обратную сторону.

Если A и B САМОсопряжены и перестановочны, то произведение самосопряжено.

Самосопряжён \Leftrightarrow нормален + имеет вещественный спектр \Leftrightarrow существует ОНБ, в котором матрица самосопряжена

Если подпространство инвариантно относительно A , то и ортогональное дополнение — тоже.

В каноническом виде просто пропадут блоки, останутся просто (и в унитарном, и в Евклидовом)

5.4. Изометричный

Унитарный/ортогональный

Равносильное определение через скалярное произведение, что если применить к обоим аргументам, скалярное произведение не изменится.

... \Leftrightarrow нормален + собственные числа по модулю = 1 \Leftrightarrow существует ОНБ, в котором матрица изометрична $\Leftrightarrow Q^{-1}$ — изометр.

Если подпространство инвариантно относительно Q , то орт. дополнение — тоже.

Канонический вид — В Евклидовом на диагонали останутся только ± 1
— В Унитарном в блоках будут $a^2 + b^2 = 1$

Матрица изометрична \Leftrightarrow её (столбцы \Leftrightarrow строки) ортонормированы.

6. Разложения матриц

$L(D)U$ — нижне-унитреугольная * (Диагональная без нулей на диагонали) * верхне-унитреугольная; Существует \Leftrightarrow Все угловые миноры матрицы A , кроме (возможно) Δ_n не равны нулю. Можно найти одновременно Гауссом A и E без замены строк и столбцов. Слева будет DU , справа — L^{-1}

Если матрица самосопряжённая, будет $A = LDL^* = U^*DU$. Причём все d вещественные.

Положительная/отрицательная определённость, то же самое про собственные числа

Разложение Холецкого: самосопряжённая положительно определённая, все угловые миноры кроме, возможно, последнего, не нули \Leftrightarrow можно убрать D , разложить на треугольные с положительными элементами на диагонали.

QR разложение: для невырожденной можно представить как произведение ортогональной на правую. Или же левой на ортогональную. Q находится ортонормированием столбцов исходной.

Полярное (QS или SQ) разложение: на самосопряжённую (H) положительно определённую и ортогональную (U). Нужно взять $\sqrt{AA^*}$ (левый модуль) для получения ортогонального. Далее — через обратную.

Можно также UH , тогда берём $H = \sqrt{A^*A}$ (правый модуль).

7. Квадратичные формы