Типовик по линейной алгебре «Нахождение проекторов через сопряжённый базис»

Латыпов Владимир Витальевич,
ИТМО КТ M3138, ***вариант 10***

26 сентября 2022 г.

1. Формулировка условия

Утверждение 1. Условие таково:

Для матрицы F найти провекторы на собственные подпространства (они же — спектральный проекторы, так как это ОПС) через сопряжённый базис.

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -10 & 3 & -5 \\ -4 & 12 & -6 & 4 \\ 4 & 20 & -4 & 10 \\ 12 & 0 & 6 & 4 \end{pmatrix} \tag{1}$$

2. Идея

У нас есть базис $\mathbb{R}^4$ из собственных векторов:

Тогда любое x единственным образом раскладывается как $\sum\limits_{\lambda} x_\lambda = \mathrm{x}^i v_i = \omega^i(x) v_i$. И $\mathcal{P}_\lambda x = x_\lambda = \sum\limits_{v_k \in V_\lambda} \mathrm{x}^k v_k = \sum\limits_{v_k \in V_\lambda} \omega^k(x) v_k = \left(\sum\limits_{v_k \in V_\lambda} v_k a^k \right) x$. И можно выразить проектор (а значит, и его матрицу) вот так: $v_k a^k = \mathcal{P}_\lambda$.

3. Подсчёты

$$F : \left\{ \left(2, \left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -14 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix} \right\} \right), \left(4, \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \right) \right\} \tag{2}$$

Найдём сопряжённый базис к нему (по определению, символ кронекера) через обратную матрицу.

$$W = \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \\ w^3 \\ w^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{5} & -1 & \frac{2}{5} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{5} & 0 & \frac{-1}{10} & 0 \\ 1 & 5 & \frac{-3}{2} & \frac{5}{2} \\ 3 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{3}$$

Тогда находим P-шки.

$$P_2 =$$

$$v_1 w^1 + v_2 w^2 =$$

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{5} & -1 & \frac{2}{5} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ -14 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{5} & 0 & \frac{-1}{10} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & \frac{-3}{2} & \frac{5}{2} \\ 2 & -4 & 3 & -2 \\ -2 & -10 & 4 & -5 \\ -6 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$P_4 =$$

$$v_3 w^3 + v_4 w^4 =$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 & \frac{-3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -5 & \frac{3}{2} & \frac{-5}{2} \\ -2 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 10 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Ровно то же самое, что получалось двумя предыдущими способами! Совпадение? Не думаю. Дело не в сухом расчете, дело — в мировом законе!