Практическое рукоВводство по дифференциальным уравнениям

Латыпов Владимир (конспектор)
t.me/donRumata03, github.com/donRumata03, donrumata03@gmail.com

20 декабря 2022 г.

Содержание

Состоит из разобранных в курсе методов решения (и определения границ применимости) и комментариев-концептуализаций.

1. Введение, постановка задачи, визуальные представления

Дифференциальное уравнение — условие на функцию, записанное с использованием дифференциальных операторов. Возможно, ещё дана кастомная область, в которой уравнение рассматривается и точка, через которую требуется проходить.

Решить дифференциальное уравнение — описать класс всех функций, удовлеторяющих уравнению. Pro tip: мы в основном рассматриваем уравнения, для которых «в большей части точек» выполняются условия Коши о единственности, так что решения обычно параметризуются n константами (где n — подядок уравнения).

Также в курсе рассматриваются системы уравнений (которые фактически диффуры для векторной переменной). Теория в основном выводится сначала для них, а потом переносится на уравнения высшего порядка через сведение их к системе.

В общем случае диффуры формулируются как $F(...) = 0$, где $...$ — все символы, которые нам разрешено использовать

Важный тип уравнений: нормальные (для систем и для уравнений первого порядка) и (с той же сутью, но для уравнений высшего порядка) канонический — когда уравнение разрешено относительно производных (самого высокого порядка для УВП). Тогда запись будет $y^{(n)} = f(...)$, где «...» — всё остальное.

Для них мы как бы в каждой точке знаем, в какую сторону надо идти. Направление, в котором надо двигаться (вектор-значение функции f), можно изобразить в виде векторного поля (на плоскости или в пространстве $\mathbb{R}_{t,r}$).

Мы можем построить ломанную Эйлера.

Но тупо проинтегрировать мы не можем (так как есть зависимость от самого y, не только x).

А этот «метод решения диффуров» — вычислительно нестабильный (то есть малая погрешность в начале накапливается и может привести к очень сильно отличающемуся результату в итоге) — в отличие от интегрирования. ...так что решать диффуры (даже в нормальной форме) хочется по-честному...

Иногда предоставить решение в явном виде (т.е. $y(x)$ или $r(t)$) не получается, тогда можно предъявить в параметрическом виде или в виде т.н. «общего интеграла» — неявного отображения.

Иногда записывают уравнения в диффернциалах: $P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$ — это позволяет удобного говорить о решениях как $y(x)$, так и $x(y)$ — и даже $\begin{cases} x(t), \\ y(t) \end{cases}$.

Причём если изобразить векторное поле формы $\omega = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$, получится, что в каждой точке решение ($\overset{\text{def}}{=}$ вектор — его дифференциал) должно быть перпенликулярно вектору (P, Q), потому что требование — равенство скалярного произведения нулю.

2. Уравнения, интегрируемые в квадратурах

Для узкого класса уравнений, можем через элементарные функции и операции интегрирования неявно выразить ответ. Иногда даже получается явно.

2.1. С разделёнными переменными

$P(x)\,\mathrm{d}x+Q(y)\,\mathrm{d}y = 0$ — коэффициенты формы зависят только от «своей» переменной.

Общий интеграл: $\int P(x)\,\mathrm{d}x + \int Q(y)\,\mathrm{d}y = C, \quad C \in \mathbb{R}$.

2.2. С разделЯЮЩИМИСЯ переменными

$p_1(x)q_1(y)\,\mathrm{d}x + p_2(x)q_2(y)\,\mathrm{d}y = 0$ — коэффициенты формы представимы в виде произведения функций, зависящих только от одной переменной.

Метод решения: разделяем область задания на прямоугольники, в которых функции q_1, p_2 принимают ноль, рассматриваем в каждой отдельно, поделив на них $\frac{p_1(x)}{p_2(x)}\,\mathrm{d}x + \frac{q_2(y)}{q_1(y)}\,\mathrm{d}y = 0$, затем — склеиваем решения, чтобы они получились гладкими (то есть совпадать в месте склейки должны пределы самих y и пределы y').

2.3. Однородные

$P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$, где коэффициенты — однородные функции $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ степени p, то есть $f(\alpha x, \alpha y) = \alpha^p f(x,y)$.

Тогда замена

$$\begin{cases} x = x, \\ z = \frac{y}{x} \end{cases} \tag{1}$$

…приводит к УРП.

Обычно замена производится тривиально.

2.4. Линейное первого порядка

$y' = p(x)y + q(x)$.

Решения такие и только такие (покрывают всю область + теорема о единственности):

$$y = \left(C + \int q e^{-\int p}\right) e^{\int p}, \quad C \in \mathbb{R} \tag{2}$$

(Здесь и далее интеграл будет значить «какая-нибудь первообразная» (причём здесь, кажись, должна быть одна и та же в $\pm \int p$) — константу дописываем при необходимости)

2.5. Бернулли

$y' = p(x)y + q(x)y^\alpha, \quad \alpha \neq 0, 1.$

Сводится делением на y^α и переходу к переменной $z(x) = y^{1-\alpha}$.

2.6. Рикатти

$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$.

В общем случае в квадратурах не интегрируется, но, если известно какое-нибудь решение φ, подстановкой $y = z + \varphi$ к Бернулли.

2.7. В полных дифференциалах

Если форма $\omega P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ интегрируема, то есть $du = \omega$, называется «в полных дифференциалах». (То есть u — такая, что $u'_x = P, u'_y = Q$)

Обший интеграл: $u(x, y) = C, \quad C \in \mathbb{R}$.

Если живём в односвязной области, точность формы проверяется через $P'_y \mathrel{?}= Q'_x$.

Получать u можно зафиксировав и проинтегрировав от неё по пути.

А можно сначала зафиксировать y, найти поведение вдоль прямой через частную производную u'_x, а потом — учесть изменение вдоль y. $C(y)$ находится через уравнение для u'_y.

2.7.1. Интегрирующий множитель

Если условие $P'_y = Q'_x$ не выполнено, можно попробовать угадать такое μ, чтобы уравнение $\mu(x, y)\omega = 0$ было в полных дифференциалах.

Для этого необходимо $\mu'_y P + \mu'_x Q = (Q'_x - P'_y)\mu$.

3. Ненормальные уравнения

3.1. Разрешимое

Если можно разрешить локально, делаем это потом склеваем.

3.2. Параметризация

Если какого-то символа из x, y, y' нет — можно параметризовать кривую решения уравнения $F(..., ...)$ как для независимых переменных, а потом — воспользоваться основным соотношением: $\mathrm{d}y = y'_x\,\mathrm{d}x$ (неизвестны всегда разные штуки).

Если все символы есть, параметризуем поверхность (двумя параметрами u, v) $F(x, y, y') = 0$ как для независимых переменных. Запишем то же соотношение и получим диффуру на u, v. Если смогли решить в виде $v = \phi(u, C)$, выражам через один параметр параметрически x, y.

4. Уравнения высшего порядка, методы понижения порядка

5. Системы уравнений, теоремы о единственности и существовании

6. Линейные системы и уравнения

7. Теория устойчивости

//TODO