

Типовик по линейной алгебре
«Канонический вид матрицы. Часть 4»

Латыпов Владимир Витальевич,
ИТМО КТ М3138, **вариант 10**

15 апреля 2022 г.

1. Формулировка условия

Утверждение 1. Условие можно найти здесь: <https://drive.google.com/file/d/1S739UJN5bLqxEaGsPdMDfRmLOZEzdFg7/view?usp=sharing>

Data section:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -10 & 3 & -5 \\ -4 & 12 & -6 & 4 \\ 4 & 20 & -4 & 10 \\ 12 & 0 & 6 & 4 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$G = \begin{pmatrix} -22 & 20 & 4 & -36 \\ 22 & 4 & 10 & 12 \\ 5 & -19 & -9 & 24 \\ 27 & -13 & 3 & 34 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$P = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & -3 & -2 \\ -3 & 5 & 2 & 2 \\ -6 & 11 & 6 & 4 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$Q = \begin{pmatrix} -26 & -39 & 65 & 13 \\ -18 & -27 & 45 & 9 \\ -16 & -24 & 40 & 8 \\ -26 & -39 & 65 & 13 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$V = \begin{pmatrix} -5 & 8 & 4 & -10 \\ 5 & -7 & 8 & -5 \\ 0 & -4 & -7 & 4 \\ 2 & 8 & 4 & -17 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 10 & -1 & 10 & 8 \\ -2 & 2 & -1 & -4 \\ 4 & -4 & 10 & 11 \end{pmatrix} \quad (6)$$

2. Нахождение жордановой формы матрицы

Для матриц F и G жорданова форма просто совпадает с диагональной. Остальные сейчас поймём, как выглядят.

3. Матрица P

Для P у нас одно собственное число, и это -1 . Так как геометрическая кратность 2, будет две клетки, причём кратность в минимальном многочлене — 3, а это максимальная высота башни. То есть будут клетки размером 1 и 3.

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

4. Матрица Q

Одно собственное число, и это 0. Так как геометрическая кратность 3, будет три клетки, причём кратность в минимальном многочлене — 2, а это максимальная высота башни. То есть будут клетки размером 1, 1 и 2.

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

5. Матрица V

Собственные числа — $-11, -7$. Для каждого кратности в характеристическом и минимальном многочленах 2, а геометрическая — 1, то есть для каждого будет одна башня высотой 2.

$$J = \begin{pmatrix} -11 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \quad (9)$$

6. Матрица W

Собственные числа — $-1, 3, 5$. Для -1 и 5 просто одна единичная клетка, а вот $m(3) = 2$, то есть будет башня высотой 2.

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad (10)$$

7. Построение жорданового базиса

Для рассматриваемых матриц построим цепочки из подпространств \mathfrak{K}_r . Затем найдём циклические базисы и запишем их в столбцы матрицы перехода.

8. Матрица P

Рассматриваем единственный корень.

$$V_{-1} = \mathfrak{K}_1 = \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (11)$$

$$\mathfrak{K}_2 = \text{Ker}(\mathcal{P} - (-1)\mathcal{E})^2 = \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (12)$$

$$K_{-1} = \mathfrak{K}_3 = \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (13)$$

У нас будет один циклический базис, начинающийся с \mathfrak{K}_3 , то есть длины три, один — начинающийся с собственного длины один.

Выписывая векторы \mathfrak{K}_2 в матрицу и добавляя к ним векторы канонического базиса из \mathfrak{K}_3 , считая ранг, поймём, какого вектора не хватает.

В целом очевидно, что не хватает $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Будем применять к нему оператор $(\mathcal{P} - (-1)\mathcal{E})$.

Получим, что

$$(j_4, j_3, j_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \quad (14)$$

Заметим, что если действовать дальше, будет обнуляться.

j_1 получаем из собственного пространства, чтобы он не лежал в найденной башне. Например, $j_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Запишем $T = (j_1, j_2, j_3, j_4)$ Получим

$$T_{canonical \rightarrow j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

Проверим, что

$$T \cdot J \cdot T^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & -3 & -2 \\ -3 & 5 & 2 & 2 \\ -6 & 11 & 6 & 4 \end{pmatrix} = P \quad (16)$$

Это определённо успех.

9. Отступление

Далее будем использовать несколько более надёжный способ, чем метод тыка. Будем пропалывать базис из конкатенации базисов $\mathfrak{B}K, \{K_i\}_{i=1}^m$

и получать $\{\overline{K_i}\}_{i=1}^m$. Ну а дальше просто применять оператор к векторам из $\{\overline{K_i}\}_{i=1}^m$ соответствующее количество раз ($i - 1$).

10. Матрица Q

Тут у нас единственное собственное число — 0, то есть корневым пространством для него является всё \mathbb{R}^4 . Найдём $\mathfrak{B}K$ для этого выделим базу столбцов характеристического оператора ($\Omega - 0\mathcal{E} = \Omega$)

$$\mathfrak{B}K = \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} 13 \\ 9 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix} \right\} \quad (17)$$

$$K_1 = V = \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \quad (18)$$

$$K_2 = \text{Ker } \mathfrak{B}^2 = \text{Ker } 0 = K = \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (19)$$

Теперь прополем базис

$$\begin{aligned} \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} 13 \\ 9 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \\ = \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} 13 \\ 9 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (20) \end{aligned}$$

То есть

$$\overline{K_1} = \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (21)$$

$$\overline{K_2} = \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (22)$$

То есть у нас есть два циклических базиса высоты 1 и один — высоты 2.

$$j_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (23)$$

$$j_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (24)$$

$$(j_4, j_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathfrak{B} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -26 \\ -18 \\ -16 \\ -26 \end{pmatrix} \right) \quad (25)$$

Получим матрицу перехода к Жорданову базису

$$T = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -26 & 1 \\ 2 & 0 & -18 & 0 \\ 0 & 2 & -16 & 0 \\ 0 & 0 & -26 & 0 \end{pmatrix} \quad (26)$$

Проверим, что $Q = TJT^{-1}$:

https://matrixcalc.org/#%7B%7B-3,5,-26,1%7D,%7B2,0,-18,0%7D,%7B0,2,-16,0%7D,%7B0,0,-26,0%7D%7D*%7B%7B0,0,0,0%7D,%7B0,0,0,0%7D,%7B0,0,0,1%7D,%7B0,0,0,0%7D%7D*%7B%7B0,0,0,0%7D,%7B0,0,0,0%7D,%7B0,0,0,0%7D%7D%7D

$7B-3, 5, -26, 1\%7D, \%7B2, 0, -18, 0\%7D, \%7B0, 2, -16, 0\%7D, \%7B0, 0, -26, 0\%7D\%7D\%5E(-1)$

11. Матрица V

Заметим, что тут есть два корневых пространства, и топология каждого очевидна: одна башня высоты 2. Нижние векторы у нас есть, а верхние можно найти из условия $j_{k+1} : \mathfrak{B} j_{k+1} = j_k$. Заметим, что j_{k+1} , найденный так, будет гарантированно лежать в нужном ядре и в нужной башне, так как \mathfrak{B} , применённое к нему, будет давать наш вектор j_k .

Начнём с $\lambda_1 = -11$

$$B = V + 11E = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 4 & -10 \\ 5 & 4 & 8 & -5 \\ 0 & -4 & 4 & 4 \\ 2 & 8 & 4 & -6 \end{pmatrix} \quad (27)$$

$$j_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (28)$$

j_2 найдём через уравнение выше. Например, $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{12} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Однако можно умножить обе штуки на 12. Тогда получим

$$(j_1, j_2) = \left(\begin{pmatrix} 36 \\ 24 \\ -12 \\ 36 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad (29)$$

Теперь на повестке дня $\lambda_2 = -7$

$$B = V + 7E = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 & -10 \\ 5 & 0 & 8 & -5 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \\ 2 & 8 & 4 & -10 \end{pmatrix} \quad (30)$$

$$j_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (31)$$

j_2 найдём через уравнение выше. Например, $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{3}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Можно умножить обе штуки на 4. Тогда получим

$$(j_3, j_4) = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad (32)$$

Запишем, наконец, матрицу перехода к Жорданову базису:

$$T = \begin{pmatrix} 36 & 0 & 4 & -4 \\ 24 & 4 & 4 & 0 \\ -12 & 1 & 0 & 3 \\ 36 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad (33)$$

И проверим, что всё сошлось: $V = TJT^{-1}$:

[https://matrixcalc.org/#%7B%7B36,0,4,-4%7D,%7B24,4,4,0%7D,%7B-12,1,0,3%7D,%7B36,0,4,0%7D%7D*%7B%7B-11,1,0,0%7D,%7B0,-11,0,0%7D,%7B0,0,-7,1%7D,%7B0,0,0,-7%7D%7D*%7B%7B36,0,4,-4%7D,%7B24,4,4,0%7D,%7B-12,1,0,3%7D,%7B36,0,4,0%7D%7D%5E\(-1\)](https://matrixcalc.org/#%7B%7B36%2C0%2C4%2C-4%7D%2C%7B24%2C4%2C4%2C0%7D%2C%7B-12%2C1%2C0%2C3%7D%2C%7B36%2C0%2C4%2C0%7D%7D%5E%7B%7B-11%2C1%2C0%2C0%7D%2C%7B0%2C-11%2C0%2C0%7D%2C%7B0%2C0%2C-7%2C1%7D%2C%7B0%2C0%2C-7%7D%7D%5E%7B%7B36%2C0%2C4%2C-4%7D%2C%7B24%2C4%2C4%2C0%7D%2C%7B-12%2C1%2C0%2C3%7D%2C%7B36%2C0%2C4%2C0%7D%7D%5E(-1))

12. Матрица W

Здесь опять вырисовывается простой случай: есть только один дополнительный элемент циклических базисов, который нужно найти. Сделаем это из условия $j_{k+1} : \mathfrak{B}j_{k+1} = j_k$.

$$\text{Для } \lambda_1 = -1 : j_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Для } \lambda_3 = 5 : j_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Для } \lambda_2 = 3 : j_2 = k \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Тогда, решив уравнение, получим:

$$j_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (34)$$

$$j_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \quad (35)$$

Запишем матрицу перехода:

$$T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & -1 \\ 8 & 12 & 7 & -2 \\ -2 & 0 & 3 & -1 \\ 5 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (36)$$

Проведём проверку, сошлось: [https://matrixcalc.org/#%7B%7B-2, 0, 1, -1%7D, %7B8, 12, 7, -2%7D, %7B-2, 0, 3, -1%7D, %7B5, 6, 0, 1%7D%7D](https://matrixcalc.org/#%7B%7B-2%2C%201%2C-1%7D%2C%7B8%2C12%2C7%2C-2%7D%2C%7B-2%2C0%2C3%2C-1%7D%2C%7B5%2C6%2C0%2C1%7D%7D)

$7D\%7D*\%7B\%7B-1,0,0,0\%7D,\%7B0,3,1,0\%7D,\%7B0,0,3,0\%7D,$
 $\%7B0,0,0,5\%7D\%7D*\%7B\%7B-2,0,1,-1\%7D,\%7B8,12,7,-2\%7D,$
 $\%7B-2,0,3,-1\%7D,\%7B5,6,0,1\%7D\%7D\%5E(-1).$