

# **Конспект к экзамену по матану**

**Владимир Латыпов**  
donrumata03@gmail.com

## Содержание

1 Теория меры .....	3
2 Многообразия .....	3
2.1 Разбиение единицы .....	3
2.2 Гладкие многообразия .....	3
3 Ряды Фурье и приближение функций .....	5
3.1 Пространства Лебега .....	5
3.2 Гильбертовы пространства .....	5

# 1 Теория меры

## 2 Многообразия

### 2.1 Разбиение единицы

**Лемма 2.1.1** Открытое множество в  $\mathbb{R}^n$  представимо как объединение шаров с рациональными центрами и радиусам, в нём содержащихся.

**Теорема 2.1.2 (Теорема Линдлёфа)** Из открытого покрытия множества в  $\mathbb{R}^n$  можно выделить счётное подпокрытие.

#### Доказательство

- Не важно, открыто ли покрытие в  $\mathbb{R}^n$  или в  $M$ , т.ч. считаем, что множество представлено в виде объединения.
- Рассмотрим все шары, содержащиеся хотя бы в одном элементе покрытия  $\rightarrow$  достаточно их объединить (занумеруем).

□

**Теорема 2.1.3 (Теорема Лебега (о компакте))** Для открытого покрытия метрического компакта существует  $\varepsilon$ , что любое пересекающееся с  $K$  множество диаметра  $\leq \varepsilon$  содержится в каком-то элементе покрытия.

**Доказательство** От противного — построим последовательность для  $\varepsilon = \frac{1}{n}$ . По секвенциальной компактности выделим сходящуюся подпоследовательность. Её предел — в элементе покрытия. Тогда множества с какого-то момента содержатся в нём. Противоречие.

□

**Теорема 2.1.4 (Разбиение единицы)** Для открытого покрытия компакта в  $\mathbb{R}^n$  существует разбиение единицы, отвечающее ему, т.е.

- конечный набор финитных функций  $C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1])$ , тч:
- $\text{supp}$  каждой  $\in$  какому-то элементу покрытия.
- Сумма набора  $\leq 1$  всегда
- На компакте в точности равна 1

**Доказательство** Функция  $\tau(x) = e^{-\frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{(t-1)^2}}$  (на  $[0, 1]$ , иначе — 0). Периодизируем, поделим на период, получим  $\theta$ . Тогда  $\tilde{\theta}$  (периодизированная  $\theta$ )  $\equiv 1$ . Через  $\varepsilon$  из леммы Лебега возьмём малое  $h$  и получим для точки  $m$  из  $\mathbb{Z}^n$  перемноженную и промасштабированную штуку  $\theta_{m(x)} = \prod_{i=1}^n \theta(\frac{x_i}{h} - m_i)$ . Тогда возьмём в набор те, которые содержатся в каком-либо элементе покрытия.

□

**Теорема 2.1.5 (Равносильность существования локального и глобального гладкого продолжения)** Если для каждой точки множества существует окрестность и  $r$  — гладкое продолжение отображения, то существует таковое и на объединении окрестностей.

### 2.2 Гладкие многообразия

**Определение 2.2.6** Регулярное отображение на произвольном множестве — существует регулярное продолжение на открытое.

**Определение 2.2.7**  $\mathbb{M}_{kn}^{(r)}$  ( $k$ -мерное многообразие в  $\mathbb{R}^n$  класса  $r$ ) — множество в  $\mathbb{R}^n$ , т.ч. для каждой точки существует локальная параметризация — окрестность (открытое в  $M$  множество, содержащее эту точку) и регулярный класса  $r$  гомеоморфизм  $\varphi : \Pi_k \rightarrow U$ , где  $\Pi_k$  — стандартный куб или полукуб, причём  $\varphi(0) = x$ . Точки, где это куб — внутренние, где полукуб — краевые.

$\partial M$  — край — множество краевых точек. Не зависит от параметризации (следствие из теоремы о регулярности перехода).

**Определение 2.2.8** Нуль-мерное многообразие — *дискретное* множество точек, то есть никакая — не предельная.

**Пример 2.2.9** Многообразия:

- Открытое множество в  $\mathbb{R}^n$  — многообразие без края класса  $\infty$  (тождественная параметризация)
- Путь (простой, незамкнутый, регулярный, на  $[0, 1]$ ).
- Образ открытого в  $\mathbb{R}^k$  множества при регулярном гомеоморфизме. Частный случай — график отображения, где  $\varphi : (u, f(u))$ .
- Поверхность вращения в  $\mathbb{R}^3$  (параметризуем, решая уравнения)
- Сфера (локальная параметризация — через сферические координаты, иначе — вращаем)
- Цилиндрическая поверхность — то же самое, но переходим к сферическим координатам только по первым  $l - 1$  переменным.
- Тор — параметризуем через угол на центральной окружности и на подвешенной к ней

**Теорема 2.2.10** (*Задание многообразия через систему уравнений*) Подмножество открытого, где  $r$  — гладкое регулярное отображение  $\Phi : G \subset \mathbb{R}^{k+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$  равно нулю, —  $\mathbb{M}_{k,k+m}^{(r)}$ .

**Доказательство** НУО, ненулевой минор — по последним координатам ( $y$ ). По Т. о неявном отображении возьмём куб с ребром  $a \rightarrow$  шар с радиусом  $b$  и неявное отображение: последние координаты по первым. Тогда параметризация:

$$\varphi(u) = (x_0 + au, f(x_0 + au))$$

□

**Определение 2.2.11** Переход от параметризации  $\varphi$  к  $\psi$  —  $L : \begin{pmatrix} W_1 \rightarrow W_2 \\ \psi^{-1} \circ \varphi \end{pmatrix}$ , то есть по  $\varphi$ -параметру точки из пересечения стандартных окрестностей даёт  $\psi$ -параметр.

**Теорема 2.2.12** (*Регулярность перехода*)  $L \in C^{(r)}$  и регулярно.

## 3 Ряды Фурье и приближение функций

### 3.1 Пространства Лебега

**Определение 3.1.1** Пространство Лебега  $L_{p(E,\mu)}, p \in [1, \infty]$  — множество функций п. в.  $E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  или  $\overline{\mathbb{C}}$ , для которых

$$\begin{cases} \|f\|_p = \left( \int_E |f|^p d\mu \right)^{1/p} < \infty & p \in [1, \infty) \\ \|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_E |f| < \infty & p = \infty \end{cases}$$

**Определение 3.1.2** Пространство  $L_p$  (обозначается без указания множества и меры) — множество  $2\pi$ -периодических функций п. в.  $\mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  или  $\overline{\mathbb{C}}$ , для которых  $\|f\| = \|f\|_{L_{p([- \pi, \pi], \mu_1)}}$   $< \infty$ .

**Теорема 3.1.3** Полнота

### 3.2 Гильбертовы пространства

**Определение 3.2.4** Гильбертово пространство — полное линейное пространство со скалярным произведением и нормой, им порождённой.

**Пример 3.2.5** Пространство  $L_2(E, \mu)$  со скалярным произведением:

$$\langle f, g \rangle = \int_E f \bar{g} d\mu$$

(суммируемость  $f\bar{g}$  — за счёт неравенства Гёльдера для  $p = q = 2$ )

Полнота доказана в Теореме 3.1.3

Частные случаи:

- $\ell_2^m$  — Евклидово пространство
- $\ell_2$  — последовательности
- $\ell_2(\mathbb{Z})$  — двусторонние последовательности

**Лемма 3.2.6** Сходящийся в  $\mathcal{H}$  ряд можно скалярно умножать на вектор почленно

**Теорема 3.2.7 (Критерий сходимости ортогонального ряда)** Сходимость ряда в  $\mathcal{H}$  равносильна сходимости  $\sum \|x\|^2$ , причём

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^2$$

**Следствие 3.2.8** Перестановка сходящейся в  $\mathcal{H}$  последовательности тоже сходится и имеет тот же предел

**Теорема 3.2.9 (Вычисление коэффициентов ортогонального ряда)** Если  $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$  — ОС, а  $\sum_{i=1}^{\infty} c_k e_k \rightarrow x$ , то коэффициенты однозначно вычисляются по формуле

$$c_k = \frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|^2}$$

**Теорема 3.2.10** (Свойства частичных сумм Фурье)

1.  $S_n$  — ортогональная проекция  $x$  на  $\mathcal{L}(\{e_k\})$
2.  $S_n$  — элемент наилучшего приближения к  $x$  из  $\mathcal{L}(\{e_k\})$ , причём равенство достигается только при  $y = S_n$
3.  $\|S_n\| \leq \|x\|$

**Следствие 3.2.11** (Неравенство Бесселя) Сумма квадратов норм Ряда Фурье  $x$  не больше  $\|x\|^2$ .

**Теорема 3.2.12** (Рисс, Фишер)

1. Ряд Фурье вектора  $x$  сходится
2. Сумма ряда Фурье — ортогональная проекция  $x$  на  $\mathcal{L}(\{e_k\})$
3. Сходится именно к  $x \iff$  выполняется уравнение замкнутости (то есть в нер-ве Бесселя достигается равенство).

**Определение 3.2.13** Базис: любой вектор раскладывается по этой системе

**Определение 3.2.14** Полная система: не существует отличного от нуля вектора, ортогонального всем вектора (то есть нельзя добавить ещё один вектор, чтобы осталась ОС)

**Определение 3.2.15** Замкнутая система: для любого вектора выполнено уравнение замкнутости

**Теорема 3.2.16** (Характеристика базиса) Утверждения эквивалентны для ОС  $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ :

1.  $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$  — базис
2.  $\forall x, y$  выполнено обобщённое уравнение замкнутости:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} c_{k(x)} \overline{c_{k(y)}} \|e_k\|^2$$

3.  $\{e_k\}$  — полная система
4.  $\{e_k\}$  — замкнутая система
5.  $\mathcal{L}(\{e_k\})$  плотна в  $\mathcal{H}$

**Теорема 3.2.17** (Грамм, Шмидт) систему можно ортонормировать, не изменяя линейную оболочку никакого префикса, притом единственным с точностью до коэффициентов  $\pm 1$  образом

**Пример 3.2.18** (Ортогональные базисы многочленов) Весовая функция  $\rightarrow$  вводим скалярное произведение

**Теорема 3.2.19** (Существование элемента наилучшего приближения)