Топологический анализ данных (листок 3)

Владимир Латыпов

donrumata03@gmail.com

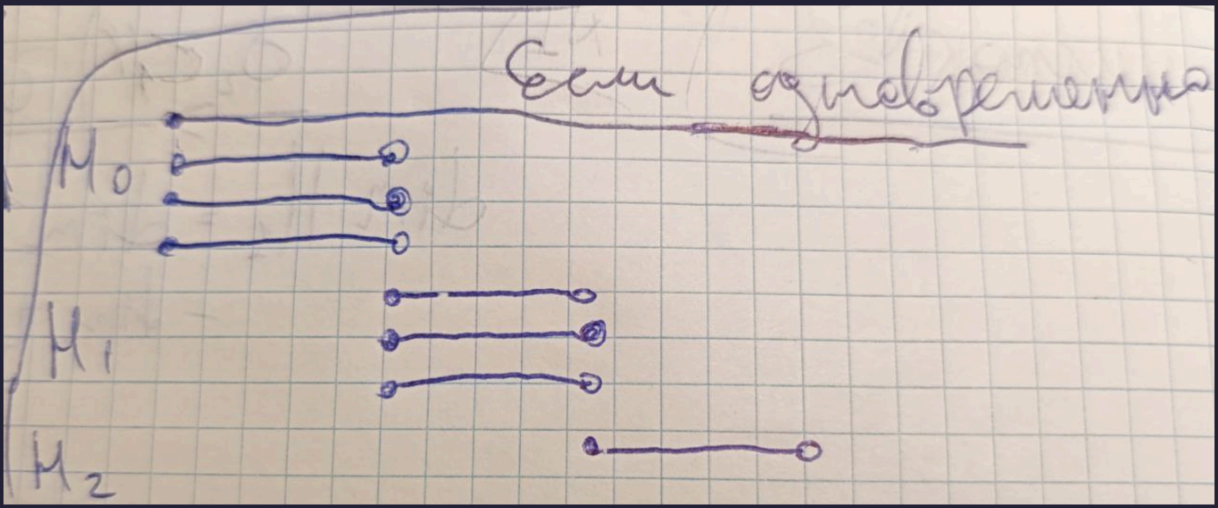
Содержание

1 Задача 1

$$\beta_1(K) = \dim H_1(K) = \dim Z_1(K) - \dim B_1(K) = \underbrace{\dim \operatorname{Ker} \partial_1}_{\dim C_1 - \dim \operatorname{Im} \partial_1} - \dim \operatorname{Im} \partial_2 = \#\text{рёбер} - \mathrm{rk} D_1 - \mathrm{rk} D_2 \blacksquare$$

2 Задача 2

Изображение в случае одновременного появления симплексов одной размерности следующее:



Всё это следует из решения задачи 6 листка 2 (ну и стягиваемости тетраэдра).

Однако если порядок добавления симплексов внутри размерности изменится, произойдёт следующее:

- **Для** H_0: от точек ничего не зависит, всё симметрично. А от появления ребёр — зависит: объединение всех компонент связности в одну может случиться через 3 ребра а может — только после образования треугольника.
- **Для** H_1: соединение компонет связности ребром не даёт нового цикла, не гомологичного предыдущим, а вот ребра внутри одной компоненты добавляют. (см. решение задачи 6 этого листка). А вот всё, что делает добавление очередного треугольника, это убийство очередного гомологического класа в H_0 и, для последнего, добавление H_2 — т.ч. от порядка добавления треугольников структурной зависимости нет (если не считать связь с предыдущей историей баркода).
- **Для** H_2: Как сказано выше, она появляется ровно в момент появления последнего треуольника, т.е. от их порядка не зависит. При этом пропадает при появлении тетраэдра, а его упорядочивания... все равны.

3 Задача 3

4 Задача 4

Прямая сумма состоит из пар с поэлементыми операциями. Для $I_{[a,b)} \oplus I_{[b,c)}$:

$$V_t = \begin{cases} (\mathbb{Z}_2, \mathbb{0}), & t \in [a, b) \\ (\mathbb{0}, \mathbb{Z}_2), & t \in [b, c) \\ (\mathbb{0}, \mathbb{0}), & \text{else} \end{cases}$$

При этом

$$v_{t_1,t_2} = \begin{cases} \mathrm{id}, & t_1, t_2 \in [a, b) \\ \mathrm{id}, & t_1, t_2 \in [b, c) \\ (\mathbb{0}, \mathbb{0}), & \text{else} \end{cases}$$

Покажем отсутствие изоморфизма, найдя инвариант при изоморфзиме, отличающийся для этих объектов. А именно: существование двух ненулевых пространств, отображение между которыми является нулевым. В случае $I_{[a,b)} \oplus I_{[b,c)}$ такие есть — пространства в разных отрезках. А вот в $I_{[a,c)}$ — нет, по нулевые отображения лишь когда одна из точек — вне отрезка.

5 Задача 5

Изучим H_p^{ij}.

- Для $i < p$ сами p-е гомологии тривиальны, т.к. p-я группа цепей появляется только на итерации p. Тогда и отображение из них будет иметь тривиальный образ.
- Для $i > p$ циклы и границы будут совпадать с таковыми исходного множества и не будут меняться. Тогда $H_p^{ij} = \mathrm{id}_{H_p(K)}$.
- Для $i = p$ p-я группа цепей уже появилась, а вот $p - 1$-я — ещё нет. В таком случае $H_p = Z_p$. Тогда при $i = j$ получается $H_p^{ij} = \mathrm{id}_{Z_p(K)}$. А если $i < j$, то это отображение, сопоставляющее циклу его гомологический класс $\begin{pmatrix} Z_p(K) \to H_p(K) \\ z \mapsto [z] \end{pmatrix}$.

6 Задача 6

Назовём добавленный симплекс σ. σ не может являться подмножеством какого-либо симплекса из K, т.к. иначе удаление его привело бы *не* к симплициальному комплексу (а L таковым является).

Единственные группы циклов/границ, которые изменятся — Z_p и B_{p-1} (B_p не изменится). Притом, очевидно, размерность первого пространства может только увеличиться, и второго — тоже увеличиться на 1, эти события по отдельности соответствуют случаям 2 и 1 из условия.

Покажем, что невозможны ситуации, когда произошло 0 или 2 из этих событий.

- Если не произошло ни одно событие, добавление не привело к созданию нового цикла
- Если произошли оба события:

- $\exists$ цикл $c = \sigma + s_1 + ... + s_n$ не гомологичный никому из Z_p (т.е. разность с другими не лежит в B_p — но если цикл добавился, он автоматически не гомологичный старым, т.к. содержит новый симплекс). $\partial_p c = \partial_p \sigma + \partial_p (s_1 + ... + s_n) = 0$. Тогда получится, что $\partial_p \sigma = -\partial_p (s_1 + ... + s_n) = 0$
- σ объединит гомологические классы, т.е. $\exists z_1, z_2 : z_1 - z_2 \notin B_{p-1}$, но $z_1 - z_2 = \partial_p(\sigma + \xi_1 + ... + \xi_m)$. Однако из этого равенства можно исключить σ вот так: $z_1 - z_2 = \partial_p(-s_1 - ... - s_n + \xi_1 + ... + \xi_n) \in B_{p-1}$, что противоречит предположению об объединению гомологических классов.

Обратно, 0 из этих событий также не произойдёт, т.к. если образ σ и так содержится в B_{p-1}, то он должен быть нулевым, т.к. этот симплекс не выражается через другие (т.е. он будет циклом).

Примеры, когда объединяет: добавление треугольника вокруг его границы или соединение компонент связности.

Примеры, когда добавляет цикл: добавление вершины, завершение границы треугольника третьим ребром, когда первые два уже есть.