Конспект к экзамену по билетам (математический анализ) (3-й семестр)

Латыпов Владимир (конспектор)
t.me/donRumata03, github.com/donRumata03, donrumata03@gmail.com

Виноградов Олег Леонидович (лектор)
olvin@math.spbu.ru

21 февраля 2023 г.

Оглавление

0.1. Как работать с этим сжатым конспектом

Составлено в соответствии с лекциями, а также учебником проф. О. Л. Виноградова

Максимально *сжатый* (как в анекдоте про работорговца) матанал (такая *степень сжатия* достижима только за несколько дней до экзамена): для каждого параграфа сначала сначала вводится список сущностей, а потом описания билетов, относящхся к параграфу — там указания о том, как доказывсать теоремы и в отдельных случаях — специфические определения.

0.2. Названия билетов (ровно как в оригинале)

1. Критерий Больцано —- Коши равномерной сходимости. Полнота пространства ограниченных функций.
2. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости рядов (с примерами).
3. Преобразование Абеля. Признаки Абеля, Дирихле и Лейбница равномерной сходимости рядов (с примерами).
4. Перестановка пределов и почленный переход к пределу.
5. Равномерная сходимость и непрерывность (с примерами). Полнота пространтва непрерывных на компакте функций.
6. Равномерная сходимость и предельный переход под знаком интеграла (с примерами).
7. Предельный переход под знаком производной (с примерами).
8. Пример всюду непрерывной нигде не дифференцируемой функции. Кривые Пеано.
9. Радиус сходимости степенного ряда: формула Коши - Адамара, примеры.
10. Равномерная сходимость степенных рядов. Теорема Абеля. Интегрирование степенных рядов.
11. Дифференцирование степенных рядов.
12. Единственность степенного ряда. Примеры различного поведения рядов Тейлора. Достаточные условия разложимости функции в ряд Тейлора.
13. Синус, косинус и экспонента комплексного аргумента.
14. Разложения логарифма и арктангенса в степенной ряд. Ряд Лейбница.
15. Формула Стирлинга.
16. Биномиальный ряд Ньютона, частные случаи. Разложение арксинуса.
17. Числа Бернулли. Разложения функций ... в степенные ряды.

42. Следствия из аналитичности голоморфной функции. Теорема Мореры. Свойства, равносильные голоморфности.
43. Неравенства Коши для коэффициентов степенного ряда. Теорема Лиувилля.
44. Основная теорема высшей алгебры.
45. Изолированность нулей голоморфной функции (с леммой). Кратность нулей.
46. Теорема единственности для голоморфных функций (с примерами).
47. Теорема о среднем. Принцип максимума модуля.
48. Свойства рядов Лорана.
49. Разложение голоморфной функции в ряд Лорана.
50. Устранимые особые точки.
51. Полюса. Мероморфные функции.
52. Существенно особые точки: теорема Сохоцкого (с доказательством), теорема Пикара (без доказательства).
53. Теорема Коши о вычетах.
54. Правила вычисления вычетов. Вычисление опасного интеграла <данные удалены>
55. Лемма Жордана. Интегралы Лапласа. Вычисление опасного интеграла <данные удалены> (спойлер: здесь замешан Си).
56. Вычет в бесконечности. Теорема о полной сумме вычетов.
57. Простейшие свойства полуколец и сигма-алгебр.
58. Простейшие свойства объема и меры.
59. Непрерывность меры.
60. Внешняя мера.
61. Мера, порожденная внешней мерой.
62. Теорема Каратеодори о стандартном распространении меры.
63. Свойства стандартного распространения меры. Единственность стандартного распространения (без доказательства, с примером существенности сигма-конечности).
64. Полукольцо ячеек. Конечная аддитивность классического объема.
65. Счетная аддитивность классического объема.
66. Мера параллелепипеда. Мера не более чем счетного множества.

90. Неравенство Чебышева и его следствия: конечность суммируемой функции почти везде, неотрицательная функция с нулевым интегралом.
91. Счетная аддитивность интеграла по множеству. Приближение интеграла интегралом по множеству конечной меры.
92. Теорема Фату.
93. Теорема, Лебега о мажорированной сходимости.
94. Абсолютная непрерывность интеграла.
95. Функции Бэра: теорема Бэра, лемма о последовательности дроблений, измеримость функций Бэра.
96. Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману. Сравнение интегралов Римана и Лебега.
97. Восстановление меры множества по мерам сечений (часть 1: случаи ячейки, открытого множества и множества типа жэсигма конечной меры).
98. Восстановление меры множества по мерам сечений (часть 2: случай множества нулевой меры и переход к произвольному множеству).
99. Меры n-мерных шара и конуса.
100. Мера декартова произведения.

0.3. Термины, незнание которых приводит к неуду по экзамену

1. ***Функциональные ряды***: Определения равномерной сходимости, равномерной нормы, признака Вейерштрасса, теорем о перестановках операций при условии равномерной сходимости, определения радиуса сходимости, формулы Коши-Адамара, простейших свойств степенных рядов, тейлоровских разложений экспоненты, синуса, косинуса, логарифма, степени, разложения синуса в бесконечное произведение
2. ***Бернулли***: внимание — ничего.
3. ***Интегралы на плоскости***: Определения криволинейного интеграла, точной и замкнутой формы, формулы Ньютона — Лейбница дифференциальных условий замкнутости формы, определения голоморфной функции, условий Коши—Римана, интегральной теоремы и интегральной формулы Коши, классификации и характеристики особых точек, теоремы о вычетах
4. ***Теория меры***: определений полукольца, в-алгебры, меры, конструкции стандартного продолжения меры, определений и важнейших свойств меры Лебега, измеримых функций, интеграла по мере, формулы преобразования меры Лебега при линейном отображении, теорем Леви и Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, сравнения интегралов Римана и Лебега, теоремы о восстановлении меры множеств по мерам сечений
5. , а также базовых формулировок из материала первого курса.

Глава 1

Функциональные ряды

1.1. Определения

Равномерная, поточечная сходимость, равномерная норма.

1.2. Определения и признаки равномерной сходимости

Критерий Больцано — Коши равномерной сходимости. Полнота пространства ограниченных функций

Теорема 1 (Критерий Больцано-Коши для равномерной сходимости). *Последовательность равномерно сходится $\Leftrightarrow$ равномерно сходится в себе (по равномерной норме).*

Признак Вейерштрасса равномерной сходимости рядов (с примерами)

Теорема 2 (Признак Вейерштрасса (Мажорированная сходимость)). *Доказательство.* Берём то же N из критерия Больцано-Коши ряда норм и подставляем в признак Больцано-Коши для самого ряда. ■

Примеры: $\frac{\sin kx}{k^\alpha}, \alpha > 1$. Сходится мажорированно на $\mathbb{R}$.

Преобразование Абеля. Признаки Абеля, Дирихле и Лейбница равномерной сходимости рядов (с примерами)

Преобразовсание Абеля — дискретный аналог интегрирования по частям. Причём A_0 может быть любым. При монотонности g можно ещё и оценить сумму сверху.

Оба признака: $\{g_n\}$ монотонна.

Дирихле: у f равномерно ограниченные частичные суммы, g равномерно сходится к нулю.

Абель: у f ряд равномерно сходится, g равномерно ограничена. (При доказательстве берём $A_0 = -\sum^{\infty} f_i$)

Лейбниц: знакочередование равномерно стремящейся к нулю последовательности — сходится (следует из Дирихле)

Пример Лейбница: $\sum b_k e^{ikx}$. Сходится равномерно на компактах, где не $e^{\cdots}$ принимает $+1$.

Но на открытых интервалах нет, так как иначе бы сходилост на замыкании.
$\frac{1}{k^x}$ сходится равномерно на $(1, +\infty)$.
$\frac{(-1)^k}{k} x^k$ — на $(0, 1)$

Перестановка пределов и почленный переход к пределу

В предельной точке X. Для равномерно сходящейся функциональной последовательности.

Если существуют пределы каждой функции, повторные пределы по множеству, потом по n и наоборот — равны.

Доказательство. Во-первых, $\lim A_n$ существует: сходится в себе, так как ряд сходится в себе, устремим $x \to x_0$, получим сходимость A_n в себе.

Докажем, что второй предел — тоже A, для этого разделим $|f(x) - A|$ на три слагаемых, все $< \frac{\varepsilon}{3}$ ■

Следствия:

- Почленный переход к пределу
- Непрерывность в точке
- Непрерывность на множестве

Равномерная сходимость и непрерывность (с примерами). Полнота пространтва непрерывных на компакте функций

В следствиях о непрерывности на множестве можно заменить условии и заключении непрерывность на равномерную непрерывность.

Пример, где важна равномерная: x^n

Где не важна: $\sqrt{n}x(1-x^2)^n$ — стремится к нулю — непрерывной, хотя неравномерно.

Полнота: непрерывных — так как замкнутость.

Равномерная сходимость и предельный переход под знаком интеграла (с примерами)

Оцениваем модуль разности интегралов как $\varepsilon/(a-b) * (a-b)$.
Примеры:
$n^2 x(1-x^2)^n$. Сходится поточечно, но интегралы стремятся к бесконечности.
$nx(1-x^2)^n$. Сходится поточечно, но интегралы стремятся к $\frac{1}{2}$.

Предельный переход под знаком производной (с примерами)

Теорема 3. *На ограниченном промежутке: f_n равномерно $\to \varphi$, сам ряд в одной точке сходится. Тогда:*

1. *Сам ряд сходится*
2. *Сумма дифференцируема и равна φ.*

Доказательство. Разностное соотношение для фиксированной точки за счёт Лагранжа на множестве $E \ \ \{x_0\}$ не больше, чем супремум по всему множеству.

$\to$ равномерная сходимость в себе.

Тогда начинаем с точки c. Строим разностное отношение, потом умножаем на равномерно сходящуюся и вычитаем.

Потом доказываем, что к чему надо сходится. ■

Примеры: $\sum 1$ не сходится.
$\frac{sin(nx)}{n}$.
$x^{n+1}/(n+1)$

Пример всюду непрерывной нигде не дифференцируемой функции. Кривые Пеано

Будем подбирать x_n как достаточно далёкие на точки отрезке размера $1/4^n$.

Для больших k — будут нули в разностном отношении, так как они столько-периодичные.

Для меньших — будут с линейны с каким-то знаком.

Тогда предела нет, так как каждый раз целые разной чётности.

Кривые Пеано.

Непрерывна, так как сходятся в себе по равномерной мере + сами они непрерывны.

Множество значений — весь квадрат, так как плотность в нём + компактность образа.

Радиус сходимости степенного ряда: формула Коши-Адамара, примеры

Равномерная сходимость степенных рядов. Теорема Абеля. Интегрирование степенных рядов

Дифференцирование степенных рядов

Теорема 4 (Дифференцирование степенных рядов). *В круге сходимости ряд можно дифференцировать почленно любое число раз*

Доказательство. Составим разностное соотношение, там разложим в ряд и преобразуем как разность k-х степеней.

Это оценивается сверху, есть равномерная сходимость, почленно переходим к пределу. ■

Единственность степенного ряда. Примеры различного поведения рядов Тейлора. Достаточные условия разложимости функции в ряд Тейлора

Теорема 5 (Единственность степенного ряда). *Все коэфициенты определяются однозначно через производные в нуле.*

Примеры различного поведения рядов: $\frac{1}{1+x^2}$ — при < 1 сходится, иначе — расходится — так как в $\pm i$ — полюса.

Функция $e^{-\frac{1}{x^2}}$ (в нуле ноль) — ряд сходится к нулю (так как производные — многочлены умножить на $e^{-\frac{1}{x^2}}$).

Теорема 6 (Достаточные условия разложимости функции в ряд Тейлора). *Все производные в круге ограничены одним числом.(Доказательство — было в первом семе через формулу Тейлора с остатком в форме Лагранжа)*

Синус, косинус и экспонента комплексного аргумента

Определяются для комплексных как ряды.
Свойства:

1. Производные (как вещественные) — из рядов
2. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$ (сумма ряда по диагонали)
3. Чётность косинуса, нечётность синуса (ряды)
4. Формулы Эйлера (3 штуки, из рядов)
5. Формулы косинуса суммы и т.д. (по формулам Эйлера)
6. Гиперболические функции через экспоненты, их ряды, связь с ними (по определению и формулам Эйлера)
7. Неограниченность тригонометрических (вволь мномой оси)
8. Нулей экспоненты нет, у косинуса и синуса — нули только на вещественной прямой (второе из представления как синус суммы $x + iy$)
9. Периоды экспоненты только $2\pi ik$, синуса и косинуса: только $2\pi k$

Разложения логарифма и арктангенса в степенной ряд. Ряд Лейбница

Логарифм: интегрируем ряд для $\frac{1}{1-z}$
Арктаненс: у него производная хорошая.
Ряд Лейбница: арктангенс в единице. Сходится по Лейбницу.

Формула Стирлинга

Смотим на разность логарифмов, подставляем, чтобы был $\ln(1+1/n)$.

Оцениваем ряд, считаем геометрическую прогрессию, зажимаем между 1 и $1/(12n(n+1))$.

Потенциируем, смотрим на последовательность $n!e^n/n^{n+1/2}$.

Её относительные приращения — вот та функция. Оно растёт, а если умножить на $e^{-1/12n}$, будет возрастать.

Они стремятся по пределе монотонной последовательности.

По формуле Валлиса считаем константу.

Биномиальный ряд Ньютона, частные случаи. Разложение арксинуса

Как бином Ньютона, только для вещественного «n», ставшего α чисел — ряд Ньютона.

Сходится на $(-1,1)$ за счёт Даламбера.

Проверим, что получили разложение нужной функции. Продиффененцируем и умножим на $1+x$, получим тот же ряд с точностью до коэфициента. Это диффура, туда подходит то, что надо.

Частные случаи:

1. Целое неотрицательное
2. -1
3. 1/2
4. -1/2
5. Арксинус

Числа Бернулли. Разложения функций … в степенные ряды

Числа Бернулли: определяются как экспоненциально произведённые $\frac{z}{e^z-1}$.
Первые два члена — чётная функция, cth.
То есть нечётные числа Бернулли — это .

Разложение синуса в бесконечное произведение

Разложение котангенса на простые дроби. Вычисление сумм

Берём у разложения синуса модуль и логарифм, дифференцируем. Внутри области определения остаток результата сходится равномерно (по Вейерштрассу), так что можно.

Дифференцируем, получаем для $\frac{1}{\sin^2}$

Подставляем, $x - \frac{\pi}{2}$ получаем для тангенса

Вычисление сумм $\sum \frac{1}{n^2k}$: связываем числа Бернулли и $\zeta(2k)$ через два разложения $z \cot z$.

(Следовательно: B_2k чередуют знак и стремятся к ∞).

Многочлены Бернулли. Вычисление сумм

Разложение функции по многочленам Бернулли

Формула Эйлера — Маклорена

Приложения формулы Эйлера — Маклорена с оценкой остатка

Глава 2

Криволинейные интегралы на плоскости

2.1. Простейшие свойства криволинейных интегавлов

Определения сущностей, вводимых в параграфе

Определение (Интеграл вектор функции). Простой, не криволинейный интеграл вектор функции ($\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, причём можно рассматривать как $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$).

Эквивалентные определения:

- Предел интегральной суммы (с операцией умножения скаляра на вектор) про ранге дроблений $\to 0$. (Основное определение)
- Вектор интегралов координат (практически полезное определение).

Определение (Дифференциальная форма). Бывает вещественная, бывает — комплексная.

Дифференциальная форма ω — это функция от двух точек на плоскости (первая — «центр», вторая — «приращение»), линейная по последним двум плоскостям.

Следовательно, она представима в виде:

$$\omega(x, y, \mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y \tag{2.1.1}$$

Применяя каррирование, представляем w как векторное поле (то есть в каждой точке плоскости определён вектор), где значение функции — скалярное произведение этого вектора и вектора приращения:

$$\omega = \left\langle \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{pmatrix} \right\rangle \tag{2.1.2}$$

Комплексная форма — лишь способ записать (инстанциировать) некое подмножество де-факто вещественных форм — записать в виде комплексной функции (фактические — обе (координатные и вещественные формы) действуют $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$):

Криволинейный интеграл второго рода

По умолчанию под криволинейный интегралом на плоскости подразумеваем его.

Определения, не предполагающие непраерывность/гладкость пути/функции:

$$\int_\gamma \omega = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \left(P\left(\xi_k, \eta_k\right) \Delta x_k + Q\left(\xi_k, \eta_k\right) \Delta y_k\right) \tag{2.1.3}$$

Для комплексного случая:

$$\int_\gamma \omega = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\zeta_k\right) \Delta z_k \tag{2.1.4}$$

Будем пользоваться более удобным определением, требующем гладкость пути и непрерывность функции (потом докажем, что при этих ограничениях определения эквивалентны):

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \left(P(\varphi, \psi)\varphi' + Q(\varphi, \psi)\psi'\right) \tag{2.1.5}$$

И для комплексного случая:

$$\int_\gamma f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\, \mathrm{d}t \tag{2.1.6}$$

Замечание. Для кусочно гладкого пути всё определяем по аддитивности, все свойства сохраняются.

Пример. Интеграл степенной комплексной функции по окружности

$$\int_{\gamma_r} \left(z - z_0\right)^n dz = \begin{cases} 0, & n \neq -1, \\ 2\pi i, & n = -1 \end{cases} \tag{2.1.7}$$

Определение (Криволинейный интеграл **первого** рода)**.** Теперь интегрируем вещественнозначной функции по кривой на плоскости (как $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{C}$):

$$\int_\gamma f ds = \int_a^b f \circ \gamma(t) |\gamma'| \tag{2.1.8}$$

Билет 24: Простейшие свойства криволинейных интегралов

- При инвертировании получаем отрицание интеграла
- Линейность по коэфициентам формы
- Независимость от параметризации
- Аддитивность по пути
- Интеграл по контуру не зависит от выбора начальной точки
- Предельный переход и почленное интегрирование рядов непрерывных функций
- Для интеграла первого рода — всё то же самое за исключением первого свойства: там не противоположны, а равны

Билет 25: Оценка криволинейного интеграла. Криволинейный интеграл как предел интегральных сумм

Теорема 1 (Оценка модуля интеграла). *Через интеграл первого рода, а его — через максиум модуля по пути и длину пути.*

,

Теорема 2 (Криволинейный интеграл как предел интегральных сумм). *Доказательство.* Доказываем, что модуль разности $\to 0$, преобразуя через неравенство треугольника и оценку интеграла. Добиваем равномерной непрерывностью. ■

2.2. Точные и замкнутые формы

Определения и основные результаты

Определение (Линейно связное подмножество нормированного линейного пространства). Любые две точки можно соеднить путём, целиком лежащим во множестве. (путь — непрерывное отображение из отрезка в пространство)

Определение (Звёздное подмножество линейного пространства относительно точки). Отрезок от любой точки множества до центра лежит в множестве

Определение (Область). Открытое линейно связное множество

Определение (Связное (просто, не линейно) метрическое пространство (или подмножество МП)). Нельзя разбить на два непустых открытых подмножества ($\Leftrightarrow$ одновременно открытые и замкнутые подмножества — X и $\emptyset$).

Определение (Регулярный кусочно-гладкий путь). Производная нигде не обращается в ноль.

Определение (Первообразная формы). функция $D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, т.ч. её частные производные — коэфициенты формы (коэфициенты в *этом* определении непрерывны). Другими словами, $\mathrm{d}F = \omega$. *Первообразная существует далеко не у всех... Ведь нужно описать вектор-функцию сразу из двух координат частными производными одной*

Определение (Точная в области форма). Существует первообразная на всей области.

Определение (Замкнутая в области форма). Локально точна: У каждой точки существует окрестность, где точна.

У локальной точности есть простой дифференциальный критерий. И в односвязных областей замкнутые формы точны.

Определение (Первообразная формы вдоль пути). Такая $\Phi \in C[a, b]$, что для любой точки отрезка τ существует окрестность плоскости и локальная первообразная в ней, т.ч. $\Phi \equiv F \circ \gamma$ в некоторой окрестности τ.

Замечание. За счёт самопересечений первообразная — не обязательно функция на носителе пути.

Замечание. Обратим внимание на то, в каком порядке и для каких случаев мы вводим понятия и как связываем:

1. Интеграл первого и второго рода как предел интегральных сумм
2. ---"---как интеграл вектор-функции с производной пути
3. Первообразная точной формы
4. Первообразная замкнутой формы вдоль пути (определение через локальные первообразные + теорема о конструировании + Ньютона-Лейница)

1 и 2 связаны теоремой билета 25
(1-2) и 3 — Ньютон-Лейбниц для точных форм (Билет 27)
3 и 4 — определение и построение интеграла вдоль пути
(1-2) и 4 — Ньютон-Лейбниц для интеграла вдоль пути (Билет 33)

Билет 26: Признак совпадения подобласти с областью. Соединение точек области ломаной

Лемма 1 (Признак совпадения подобласти с областью). *Подобласть области — пустое множество, но открыто и замкнуто в этой области. Что это, детишки? Вся область!*

Доказательство. ... ■

Теорема 1 (Соединение точек области ломаной). *Любые две точки области можно соединить ломанной (а это, отметим, носитель кусочно-гладкого пути).*

...в учебнике ещё вывод теорем о факторизации по отношению эквивалетности для частного случая (линейной)связности (про то, что это факторизация), но можно просто сказать, что это было на линале...

Лемма: к. лин. св. открытого — открытые ($\to$ области).

По 1

Билет 27: Формула Ньютона — Лейбница для криволинейных интегралов. Единственность первообразной

Формула Ньютона — Лейбница для криволинейных интегралов Выводится из определения и соответствующей формулы для интеграла по отрезку. (потом по аддитивности для кусочно гладких)

Следствие 1.1. *Если* $\mathrm{d}F \equiv 0$*, то* $F = \mathrm{const}$

Единственность первообразной Первообразные отличаются на константу и только на неё.

Билет 28: Точность формы и независимость интеграла от пути. Условие точности формы в круге

Точность формы и независимость интеграла от пути Точна $\Leftrightarrow$ интеграл не зависит от пути $\Leftrightarrow$ интеграл по *любому* контуру $= 0$.

Условие точности формы в круге Точна $\Leftrightarrow$ интеграл по любому *прямоугольному* контуру $= 0$.

Билет 29: Точность формы, замкнутой в круге

Форма замкнута в круге $\to$ точна в нём (на самом деле, это верно не только для круга, но и вообще для любой односвязной области — это будет доказано позднее)

Билет 30: Правило Лейбница дифференцирования интегралов

Производная интеграла по параметру — это интеграл частной производной самой функции по параметру.

Билет 31: Дифференциальные условия замкнутости формы. Пример замкнутой, но неточной формы

Теорема 2 (Дифференциальные условия замкнутости формы). *$P'y, Q'_x$ существуют и непрерывны. Тогда форма замкнута $\Leftrightarrow$ $P'y = Q'_x$.*

Доказательство. Очевидно. ■

Пример (Пример замкнутой, но неточной формы). Мнимая часть комплексной формы: $\frac{1}{z}$

Билет 32: Расстояние между множествами

Определение (расстояние между множествами). инфинум расстояний между точками множеств

Теорема 3 (О достижении расстояния). *Расстояние между множествами достигается расстоянием между некоей парой точек. Оба непустые подмножества $\mathbb{R}^n$, одно (F) замкнуто, второе (K) — обязательно компактно.*

Доказательство. 1. Сначала доказываем для случая двух компактных — получаем секвенциальную компактность $K \times F$. Функция расстояния непрерывна $\Rightarrow$ inf достигается.

2. Если F не ограничено, покажем, что расстояние достигается на компактном F', полученным ограничением сферой радиуса $R_K + \rho(K, F) + 1$. ■

Следствие 3.1. *Если ещё и $K \cap F = \emptyset$, то $\rho(K, F) > 0$*

Доказательство. Иначе бы достигалось, то есть была бы общая точка. ■

Следствие 3.2. *Те же условия:* $\rho(K, F) = \rho(K, \partial F)$

Доказательство. Если бы достигалось во внутренней точке, на отрезке между «достигаторами» была бы точка ближе. ■

Билет 33: Первообразная формы вдоль пути. Формула Ньютона — Лейбница для первообразной вдоль пути

Теорема 4 (Существование и единственность* первообразной замкнутой формы вдоль пути). **С точностью до постоянного слагаемого*

Доказательство. (!) Доказываем локальную постоянность $F_1 - F_2$ на отрезке, используя определение и соответствующее свойство для обычных первообразных.

(∃) $\rho\left(\gamma^*, D^{\complement}\right)[=\sigma] > 0$ по 3.1 За счёт равномерной непрерывности γ берём дробление ранга $< 2\delta$, где $\omega(\gamma, \delta)_{[a,b]} < \sigma$.

Рассмотрим края и центры отрезков дроблений. $\gamma([t_j, t_{j+\frac{1}{2}}]) \subset B(z_j, \sigma)[= B_j] \subset D$. Замкнутая в круге ($B_j$) форма имеет первообразную. Пересечения соседних — круговые луночки — *непустые области* (т.к. открыто и выпукло (пересечение таких), непусто — т.к. содержит срединное z). В пересечении соседние локальные первообразные отличаются на константу $\Rightarrow$ стыкуем со сдвигом на $C_2 - C_1$. $\rightarrow$ завершаем конструкцию за конечное число шагов.

Определение интеграла вдоль пути выполнено по построению + потому что объединение окрестностей — открытое множество. ■

Следствие 4.1 (Формула Ньютона-Лейбница для интегралов вдоль пути). *Интеграл (второго рода) замкнутой формы по пути (не обязательно гладкому) — разность первообразной вдоль пути.*

Доказательство. Рассматриваем то же дробление, что и в теореме, расписываем ■

2.3. Гомотопные пути

Определения

Определение (Гомотопные пути). Два пути γ_1, γ_2 гомотопны (либо как с фиксированными концами, либо как замкнутые), если существует такое непрерывное преобразование $\Gamma : I \times I \to D$, т.ч.:

1. $\text{partial}\,\Gamma 0 \equiv s, \text{partial}\,\Gamma 1 \equiv t$
2. При каждом уровне смешения: (Для фиксированных концов — они сохраняются), а (Для замкнутых — остаются замкнутыми)

Замечание. То есть аргументы Γ имеют смысл «доли первого пути в смеси» и «процента пробегания аргумента пути», при этом при каждом уровне смешения частичное применение будет путём того же типа, что и преобразуемые.

Замечание. Гомотопность — отношение эквивалентности

Определение (Односвязная область). Любой замкнутый путь в ней стягивается в точку (интуитивно нет «дырок», которые этому мешают)

Пример. Например, звёздная (в частности, выпклая и круговая)

Определение (Открытое и замкнутое кольцо). $K_{r,R}(z_0)$ или $\overline{K}_{r,R}(z_0)$ — расстояние до центра — между r и R

Определение (Ориентированная граница области). Если ∂G представима в виде конечного объединения регулярных простых контуров, т.ч. при обходе G остаётся слева, это ориентированная граница области.

«Остаётся слева»: какая-то часть (не включая начало) направленного отрезка из пути в сторону производной, повёрнутой на $90°$ против часовой, лежит в области.

Билет 34: Равенство интегралов по гомотопным путям

Теорема 1 (Равенство интегралов по гомотопным путям). *От формы требуется лишь замкнутость.*

Доказательство. $\rho\left(\Gamma(I \times I), D^{\complement}\right)[= \sigma] > 0$ по 3.1 Используя равномерную непрерывность Γ, докажем через локальную постоянность $h(s)$. ■

Билет 35: Точность формы, замкнутой в односвязной области. Интеграл по ориентированной границе области

Лемма 1. *В односвязной области любые пути с общими концами гомотопны.*

Доказательство. Конструируем из их объединения контур, стягиваем в точку. Гомотопия: сначала превращаемся в точку, потом в партнёра. ■

Теорема 2 (Форма замкнута в односвязной области $\to$ точна). *Интеграл по любому контуру — ноль, так как он стягивается в точку. $\to$ точна по теореме параграфа 2.*

Теорема 3 (Интеграл замкнутой формы по ориентированной границе области). *...равен нулю, если G* ***ограничена*** *и вместе с границей лежит в D.*

Доказательство. Составим контур, стягивающийся в точку: обойдём все дыры, соединяя их простыми непересекающимися путями (почему есть такие пути — б/д) — по каждому пути пройдём туда и сюда (не забываем обойти внешнюю границу). Он стягивается в точку (б/д) $\to$ интеграл по границе равен нулю (перемычки проходим туда-сюда $\to$ они самоуничтожаются). ■

Глава 3

Теория функции комплексной переменной

3.1. Комплексная дифференцируемость

Определения и основные результаты

Определение (Функция комплексно дифференцируема). Если аппроксимируема комплексно-линейной

Важно, что далеко не любая дифференцируемая $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — КД: мы обязаны описать поведение функции в окрестности не матрицей 2×2, а лишь двумя координатами, которые подставляются в умножение комплексных чисел. И выполняться это должно в окрестности (эквивалентно, по любому направлению).

Замечание. Эквивалентное определение: существование конечного предела разностных отношений при $z \to z_0$.

Определение (Функция голоморфна/аналитична). Комплексно дифференцируема в некоторой окрестности каждой точки. Для открытого множества — эквивалентно просто комплексной дифференцируемости на множестве.

Билет 36: Условия комплексной дифференцируемости (с примерами)

Теорема 1 (Критерий комплексной дифференцируемости Коши-Римана). *f дифференцируемо $\Leftrightarrow u, v$ — дифференцируемы и $\begin{cases} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{cases}$. (То есть по своей переменной — равны, по чужой — противоположны)*

Доказательство. $\Rightarrow$ ...

$\Leftarrow$ ... ■

Замечание. Эквивалентно тому, что матрица Якоби имеет вид: $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. То есть антисимметричная и с равными элементами на диагонали.

Замечание. Краткая запись: $f'_x + i f_y = 0$

Замечание. Ещё одна, ещё более краткая запись — для извращенцев:
$\tilde{f}'_{\bar{z}} = 0$

Билет 37: Голоморфные функции с постоянной вещественной частью, мнимой частью, модулем

Теорема 2. *Постоянство голоморфной функции $f \in \mathcal{A}(D)$ следует из постоянства:*

1. $\Re f$
2. $\Im f$
3. $|f|$

Доказательство. 1, 2: критерий Коши-Римана + признак постоянства в области (следствие Ньютона-Лейбница).

3: заметим, что частные производные $|f|^2$ — нули, распишем их. Переписав через Коши-Римана и решив это как систему уравнений относительно частных производных. Определитель — не ноль, значит решение для частных производных только нулевое f — постоянна. ∎

Билет 38: Различные формулировки интегральной теоремы Коши. Первое доказательство (для непрерывной производной)

Теорема 3 (Интегральная теорема Коши)**.** *Голоморфная функция задаёт замкнутую форму.*

Эквивалентные утверждения (тоже называют интегральной теоремой Коши):

1. Равенство интегралов по гомотопным путям
2. Равенство нулю интеграла по контуру, стягивающемуся в точку.
3. Равенство нулю интеграла по контуру в обносвязной области
4. Локальная точность
5. Равенство нулю интеграла по ориентированной границе (тут достаточно, чтобы $f \in \mathcal{A}G, C(\overline{G})$. Доказательство: строим приближающую последовательность $\leftarrow$ то, что так можно — без доказательства).

Первое доказательство: требующее непрерывной дифференцируемости. (требующее — так как коэфициенты формы здесь должны быть непрерывными)

Запишем коэфициенты формы в вещественном выражении, а равенства Коши-Римана — в виде $P'_y = Q'_x$. Получим дифференциальные условия точности формы. ∎

Замечание. Первообразная формы в вещественном и комплексном смысле — совпадает.

Доказательство. $\Leftarrow$ ...

$\Rightarrow$ Те же рассуждения, но в обратном порядке ■

Билет 39: Различные формулировки интегральной теоремы Коши. Второе доказательство (лемма Гурса)

Лемма 1 (Э. Гурс). *Интеграл формы с голоморфным коэффициентом по прямоугольному контуру, лежащему в области вместе со внутренностью, равен нулю.*

Доказательство. Пусть $\left|\int_{\gamma_0} f(z)\,\mathrm{d}z\right| [= M] > 0$.

Итеративно представляем интеграл по контуру как сумму интегралов четырёх прямоугольников, на которые разбиваем, выбираем наибольший модуль интеграла. Получим последовательность прямоугольников, $\int \geqslant \frac{M}{4^k}$.

По лемме о вложенных прямоугольниках, существует точка, принадлежащая всем. Рассморим прямоугольник внутри радиуса, где погрешность производной мала.

Прийдём к противоречию, оценивая интеграл через супремум функции и длину контура. ■

Второе доказательство. интегральной теоремы Коши.

По лемме Гурса, точна в любом круге, значит, замкнута. ■

3.2. Интегральная *формула* Коши и её следствия

Билет 40: Интегральная формула Коши

Теорема 1 (Интегральная формула Коши). *Доказательство.* 1. Если не принадлежит области, просто по теореме для интегралу формы, замкнутой в области, это ноль.

2. Иначе — обойдём $\zeta = z$ по кругу. Формула Коши. Разделяем: $\int \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = f(z)\int \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} + \int \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta$. Доопределим последнюю функцию по неепрерывности производной. Второй интеграл — константа (за счёт голоморфности). Тогда доказательство стремления к нулю даст нам постоянную нулёвость. Сделаем это за счёт ограниченности (так как непрерывно на компакте) и стремления $\rho \to 0$. ■

Следствие 1.1 (Теорема о среднем). *Значение голоморфной функции в центре круга — среднее значение по окружности.*

Доказательство. Применим формулу Коши и параметризуем окружность как $\zeta = z_0 + re^{it}, t \in [-\pi, \pi]$. ■

Билет 41: Аналитичность голоморфной функции

Теорема 2 (Аналитичность голоморфной функции). *Комплексно дифференцируемая в круге функция расклазывается в степенной ряд в этом круге с центром в центре круга.*

Доказательство. Проинтегрировав по интегральной теореме по кругу радиуса $r < R$ с центром *всё тем же* — z_0. Разложим подинтегральную функцию по новым степеням: $z - z_0$ (коэфициенты будут тоже в штуки в k-й степени). Ряд на круге сходится равномерно, тогда при домножении на $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}$.

Интегрируем ряд почленно, получаем, что хотели (так как слева проявится $f(z)$ по интегральной формуле Коши)

Для всех точек коэфициенты получились одинаковыми, так как гомотопность. ■

Билет 42: Следствия из аналитичности голоморфной функции. Теорема Мореры. Свойства, равносильные голоморфности

Следствия:

1. Раскладывается в ряд в круге радиуса $\rho(\partial G, z_0)$.
2. Дифференцируема один раз $\to$ Дифференцируема бесконечность раз.
3. Имеет первообразную $\to$ бесконечно дифференцируема.
4. Если форма *замкнута*, f голоморфна

Теорема 3 (Мореры). *Если комплексная форма непрерывна в области и интеграл по любому прямоугольному контуру = 0, функция голоморфна.*

Билет 43: Неравенства Коши для коэффициентов степенного ряда. Теорема Лиувилля

Билет 44: Основная теорема высшей алгебры

3.3. Теорема единственности, аналитическое продолжение и многозначные функции

Билет 45: Изолированность нулей голоморфной функции (с леммой). Кратность нулей

Билет 46: Теорема единственности для голоморфных функций (с примерами)

Билет 47: Теорема о среднем. Принцип максимума модуля

3.4. Ряды Лорана и выечты

Билет 48: Свойства рядов Лорана

Билет 49: Разложение голоморфной функции в ряд Лорана

Билет 50: Устранимые особые точки

Билет 51: Полюса. Мероморфные функции

Билет 52: Существенно особые точки: теорема Сохоцкого (с доказательством), теорема Пикара (без доказательства)

Билет 53: Теорема Коши о вычетах

Билет 54: Правила вычисления вычетов. Вычисление опасного интеграла <данные удалены

Билет 55: Лемма Жордана. Интегралы Лапласа. Вычисление опасного интеграла <данные удалены> (спойлер: здесь замешан Си)

Билет 56: Вычет в бесконечности. Теорема о полной сумме вычетов

Глава 4

Мера и интеграл

4.1. Мера в абстрактных множествах

Определения

Определение (Полукольцо множеств). Семейство $\mathbb{P}$ подмножеств X, удовлетворяющее аксиомам 1-3:

1. $\emptyset \in \mathbb{P}$
2. $\forall A, B \in \mathbb{P} A \cap B \in \mathbb{P}$ (замкнутость относительно бинарного пересечения)
3. $\forall A, B \in \mathbb{P} B \subset A \exists \{C\}_{k=1}^{n} \in \mathbb{P} : A \quad B = \bigsqcup_{k=1}^{n} C_k$ (разность разложима на конечное дизъюнктное объединение множеств полукольца)

Определение (σ-алгебра множеств). *Непустое* семейство $\mathbb{A}$ подмножеств X, удовлетворяющее аксиомам 1-2:

1. $\forall A \in \mathbb{A} : A^{\complement} \in \mathbb{A}$
2. $\forall C_1 ... C_n \in \mathbb{A} : \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k \in \mathbb{A}$ (замкнтутость относительно счётного объединения)

Замечание. Если замкнтутость только относительно счётного объединения, то это алгебра множеств (но не σ-алгебра).

Простейшие свойства полуколец и сигма-алгебр

Полуколец:

1. Вычесть конечное количество — разложимо на конечное дизъюнктное объединение (доказывается по индукции)
2. Не обязательно дизъюнктное не более, чем счётное объединение — разложимо не более чем, счётное объединение конечных дизюнктных объединений (доказывается, полагая новые множества — разложения $B_k \quad \bigcup_{i=1}^{k-1} B_i$ по первому пункту).

Сигма-агебр:

1. Не более чем счётное пересечение — тоже в сигма алгебре (через де-Моргана)

2. Третья аксиома полукольца о дизъюнктной разложимости на объединение из алгебры

3. $\to$ это полукольцо (так ка непусто и $A \cap A^{\complement}$)

Простейшие свойства объема и меры

1. Усиленная монотонность. Если $\bigsqcup A_i \subset A$, то $\sum \nu A_i \leqslant \nu A$ (в обеих случаях для счётного набора). Доказательство: предсталяем, что осталось, как конечное объединение, пользуемся аддитивностью, устремляем к бесконечности.

2. Полуаддитивность. Если $A \subset \bigcup A_i$, то $\sum \nu A_i \geqslant \nu A$ (для счётного — только у меры). Доказательство: рассматриваем пересечения множеств с A, представляем A как объединение объединений, дальше усиленная монотонность.

Непрерывность меры

Снизу: цепочка вложенных подмножеств, содержащихся в A, в бесконечном объединении дающая A.

Сверху: теперь они все содержат A и с какого-то момента не бесконечной меры.

В обоих случаях мера стремится к мере A.

Доказательство. Представляем A (в первом случае) или A_1 (во втором) как объединение самого первого и разностей соседних (добавок). Добавки расклыдваем на объединения.

В итоге вычисляем телескопическую сумму ряда. ■

Внешняя мера

Аксиоматически определяется как равное нулю на пустом множестве и счётно-полуаддитивно.

(но счётно-аддитивной и даже аддитивной может не быть)

Другой способ ввести: внешняя мера, порождённая олбычной — инфинум по покрытиям множествами полукольца (тут раскрывается его название).

Тогда равенство исходной мере на множествах полукольца (доказывается так: само является разбиением, а лучше нет — по полуаддитивности) и счётно-полуаддитивность (покроем каждое с зазором не больше $\frac{\varepsilon}{2^k}$, устремим $\varepsilon \to 0$) — её свойства.

Если множество A аддитивно разбивает любое $\subset X$, оно «τ-измеримо».

Мера, порожденная внешней мерой

Теорема 1 (Мера, порожденная внешней мерой). *Все измеримые подмножества — σ-алгебра, а сужение внешней меры на неё — мера.*

Доказательство. Для замкнутости относительно бинарного (значит, и конечного) пересечения: аддитивно разбиваем два раза, потом де-морган.

Для (двух и конечного) дизъюнктных измеримых ещё и мера пересечения с ними — сумма мер пересечений.

Для счётных дизъюнктных: ...

Замкнутость для любых счётных: ...

Счётная аддитивность: ... ■

Теорема Каратеодори о стандартном распространении меры

То же самое, что и пред билет, но ещё и полукольцо в этой сигма алгебре и на нём внешняя мера равна исходной.

Свойства стандартного распространения меры. Единственность стандартного распространения (без доказательства, с примером существенности сигма-конечности)

Свойства:

1. Критерий измеримости и нулёвости меры через зажатие.
2. Это полная мера
3. Равносильность сигма-конечности.

Единственность: если продолжение на какую-то ещё сигма алгебру $\mathbb{B}$, а мера сигма-конечная, то на $\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$ они совпадают. Если, кроме того, мера полна, то $\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$.

Существенность сигма-конечности: в полукольце только один элемент из двух. В стандартном продолжении второго и мера всего множества будет бесконечна. Но можно назначить второму вес, и тоже будет другое продолжение.

4.2. Мера Лебега

Полукольцо ячеек. Конечная аддитивность классического объема

Полукольцо: для 3-й аксиомы разбиаем ячейку на 3^n штук (по каждой координате до вычитамеого отркезка, внутри и после).

Конечная аддитивность: сначала разбиваем чисто по сетке.

Потом — проводим разрезы по всем важным координатам, получаем сетку.

Счетная аддитивность классического объема

Лемма: существует ячейки $\Delta^{(+\varepsilon)}, \Delta^{(-\varepsilon)}$ Содержатся вместе с замыканием в Δ или наоборот.

Усиленная монотонность: по свойствам объёма $\leftarrow$ работает даже для бесконечных объединений.

Обратное неравенство. Гомотетией уменьшим объём исходного на ε и возьмём замыкание, а объём составных ячеек — увеличим на $\frac{\varepsilon}{2^i}$ и возьмём внутренность.

Извлечём из открытого покрытия компакта конечное подпокрытие. Для него применим конечную полуаддитивность объёма и устремим $\varepsilon \to 0$.

Мера параллелепипеда. Мера не более чем счетного множества

Теорема 1. *Мера любого параллелепипеда — произведение длин рёбер.*

Доказательство. 1. Для конечных рёбер, но не обязательно полуоткрытый: зажат между открытым и закрытым, а они — представимы в виде бесконечного объединения/пересечения ячеек. Применяем теорему о зажатии и меры предела.

2. Для бесконечного — либо ноль, либо бескоенечность. Представляем его как счётное объединение его пересечений с $[-p\mathbb{1}, p\mathbb{1})$ ■

Мера не более чем счетного множества — ноль, так как оно представимо как не более, чем счётное объединение точек, каждая с нулевой мерой. $\to$ Аксиома меры.

Представление открытого множества в виде объединения ячеек. Измеримость борелевских множеств по Лебегу

Теорема 2 (Представление открытого множества в виде объединения ячеек). *Доказательст*
Дизъюнктно разбиваем простанство на кубические ячейки порядка $\frac{1}{2^k}$, начиная с $\frac{x}{2^k}$, где $x \in \mathbb{Z}^n \to$ х в сумме счётное количество

Ячейки либо дизъюнктны, либо одна содержит другую.

В объединение берём те ячейки, для которых все «родители» содержат точку не в G.

Тогда $H \subset G$ тривиально, обратно — любая точка вместе с собой включает окрестность, поэтому первый ранг, для которого ячейка, соответствующая точке, помещается в окрестность (а такой есть) — будет в объединении. ■

Следствие 2.1. *Борелевские множества измеримы по Лебегу (так как каждое представимо в виде счётного объединения множеств предыдущего проядка).*

Приближение измеримых множеств открытыми и замкнутыми. Регулярность меры Лебега

Теорема 3. *Внешняя мера множества (не обязательно измеримого по Лебегу!) в $\mathbb{R}^n$ может быть представлена как инфинум мер открытых надмножеств или же как супремум замкнутых надмножеств.*

Доказываем для открытых, закрытые — так как дополнения открытых.

Доказательство. Нижняя граница — так как монотонность внешней меры.

Максимальная н.г.: для бесконечности — тривиально. Иначе подберём разбиение из множеств полукольца из определения внешней меры. Уменьшим ячейки на $\frac{\varepsilon}{2^k}$, возьмём внутренность, устремим ε к нулю. ■

Следствие 3.1. *Для каждого ε будет приближение сверху открытыМ множетвОМ. То есть такое надмножество, что мера разности будет не больше ε.*

Если мера конечна, следует из теоремы. Иначе: по σ-конечности разобьём на счётное объединение конечных множеств.

Для каждого подберём приближение с точностью $\frac{\varepsilon}{2^k}$, просуммируем.

Следствие 3.2. *Можно приблизить замкнутыми снизу. (доказываем через дополнение открытого)*

Следствие 3.3. *Меру измеримого можно представить как супремум меры замкнутых или компактных.*

Доказательство. В одну сторону — так как подмножества. Равенство для замкнутых — по предыдущему следствию. Для компактных результат не меньше замкнутых — так как представляем замкнутое как бесконечное объединение компактных ограничений — его пересечений с $[-p\mathbb{I}, p\mathbb{I}]$ ■

Регулярность: меру можно представить в виде инфинума и в виде супремума.

Приближение измеримых множеств борелевскими. Общий вид измеримого множества

Теорема 4 (Приближение измеримых множеств борелевскими.). *Измеримое можно зажать счётным пересечением открытых и счётным объединением закрытых , чтобы мера разности была не просто ε, а вообще ноль.*

Доказательство. Строим последовательность приближений $\frac{1}{m}$, берём объединения/пересечения соответственно. Устремляем к бесконечности. ■

Следствие 4.1 (Общий вид измеримого множества). *Оно представимо в виде бесконечного объединения вложенных компактных множеств и одного множества нулевой меры:*

$$E = \bigcup_{m=0}^{\infty} F_m \cup e, \quad \mu(e) = 0 \tag{4.2.1}$$

Доказательство. Представим каждое замкнутое как счётное объединение компактов, счётно перенумеруем, потом сделаем каждый новый компакт — конечное объединение предыдущих. ■

Сохранение измеримости при гладком отображении

Теорема 5 (Сохранение измеримости при гладком отображении). *Для гладкого отображения $G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, где G открыто:*

1. *Образ подмнолжества G и по совместительству множества нулевой меры измерим и его мера равна нулю.*
2. *Образ измеримого подмнолжества G измерим.*

Доказательство. 1.1. Если содержится в ячейке, лежащей в G вместе с замыканием. Покроем открытым подмножеством, $g = g \cap G$, $\mu g < \varepsilon$. Его представим как дизъюнктное объединение кубических ячеек. На компакте $\overline{P}$ — условие Липшица (вот тут пригодилось содержание), образ каждого паралл-делепипед размера не больше, чем $c\varepsilon$.

1.2. Теперь представим G как объединение ячеек. e — счётное объединение его пересечений с P_i, тогда для каждого применим пункт 1.1, будет измеримость и мера ноль.

2. Представим E как объединение компактов и множества нулевой меры. Применим Вейерштрасса. И сигма-алгебра замкнута относительно счётных объединений. ∎

N-свойство Лузина и сохранение измеримости

N-свойство Лузина: если множество измеримое и ноль

Теорема 6. *Для непрерывных отображений $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Перевод измеримых в измеримые $\Leftrightarrow$ N-свойство Лузина.*

Доказательство. Влево — установили в теореме.

Если перевело нулевое e не в нулевое E, но измеримое, в образе есть неизмеримое подмножество E_1. Тогда $\mu\Phi^{-1} \cap e = 0$ по полноте меры Лебега (то есть измеримо), но его образ — это E_1, он неизмерим. Противоречие. ∎

Канторово множество и канторова функция. Пример гомеоморфизма, не сохраняющего измеримость по Лебегу

Канторово множество — бесконечное пересечение, где на каждом шаге удаляем среднюю треть (удаляем интервал, не отрезок!).

Канторово множество замкнуто (так как бесконечное объединение замкнутых), имеет мощность континуума (троичная запись), измеримо и имеет меру 0 (так как покрывается множествами меры $\left(\frac{2}{3}\right)^n$).

Канторова функция — на каждом шаге вместо удаления определяем как среднее между концами. А на канторовом множестве — определяем как супремум по значениям в точках левее.

Получили монотонную непрерывную функцию.

Но образ канторова множества — $[0;1]$ (меры 1). Почему? Потому что все точки кроме $\{q/2^k\}$ функция принимает на канторовом множестве, т.к. не принимает вне его, а $q/2^k$ на отрезках, все концы которых тоже лежат в канторовом множестве.

Если ещё и добавить x, получится строгое возрастание $\to$ гомеоморфизм $[0;1] \longleftrightarrow [0;2]$, но образ отрезка будет только размера 1, так как образ каждого нашего интервала будет по размеру такой же, как его длина.

Не выполняется N-свойство Лузина, так что нашли гомеоморфизм, который не сохраняет измеримость, так что условие на гладкость в теореме существенно.

Лемма о мере образа при известной мере образа ячейки. Инвариантность меры Лебеа относительно сдвига

Лемма 1 (Лемма о мере образа при известной мере образа ячейки). *Если на кубических ячейках мера ν в c раз больше меры Лебега, то для всей сигма-алгебры Лебега — тоже.*

Доказательство. 1. Открытое: представимо как счётное объединение ячеек.

2. Компакт: K — разность шара и его разности с K. Оба открытые.

3. Нулевая мера: инфинум открытых.

4. Общий случай: объединение компактов и нулевой меры. ■

Следствие 6.1. *Если на кубичесчких ячейках отображение увеличивает меру в c раз, то для всей сигма-алгебры Лебега — тоже.*

Доказательство. Достаточно показать, что $\nu \circ \Phi$ — мера.

Дизъюнктность во второй аксиоме будет из-за обрастимости. ■

Следствие 6.2. *Мера Лебега инвариатнта относительно сдвига*

Описание мер, инвариантных относительно сдвига

Теорема 7 (Описание мер, инвариантных относительно сдвига). *Все они (если заданы на $\mathbb{A}$) $\equiv c\mu$, c — конечно (иначе — считающая мера)!*

Доказательство. c берём из единичной ячейки.

1. Кубические ячейки ребра $\frac{1}{N}$
2. Рациональные рёбра
3. По непрерывности любой меры: для вещественных ячеек.
4. По лемме: для всего. ■

Существование неизмеримого по Лебегу множества

Аналог множества Виталя, но как подмножество любого множества положительной меры.

У такого есть ограничение шаром положительной меры.

Возьмём в множество по одному представителю каждого класса эквивалетности по отношению $x\ y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$.

Покажем, что их *немеренно*. Если раскопировать по всем $\mathbb{Q} \cap B(0, 2R)$, будет шарик в виде счётного *диъюнктного* объединения *одинаковых мер*. Но раз одинаковых, то это либо 0, либо ∞!

Мера Лебега при линейном отображении. Инвариантность меры Лебега относительно движений

Теорема 8 (Мера Лебега при линейном отображении). *Измеримость сохраняется, и мера увеличивается в* $|\det A|$ *раз.*

Доказательство. Измеримость — так как гладкое. Если $\det \neq 0$, обратимость, значит, мера по следствию. Инвриатна относительно сдвига, тогда осталось доказать конечность на ячейках и что $\mu[0, \mathbb{I}] = \det A$

1. Диагональный оператор с положительными с.ч.: выносим с.ч. за знак произведения в стандартном объёме, совпадает везде — по слдедствию леммы.

2. Ортогональный оператор (тогда $|\det A| = 1$): Единичный шар сохраняется на месте (так как оператор сохраняет норму). Тогда конечна на ячейках, а $c = 1$ (так как это верно доя шара).

3. Невырожденный представим в виде $U_1 D U_2$, где U_1, U_1 — ортогональны, а D — диагональный с положительными с.ч. (Это, как лююит говорить Виноградов, хорошо известно из курса алгебры).

4. Есть $\det A = 0$, размерность образа меньше размерности пространства. Тогда можно его ортогонально отобразить на вырожденный параллелепипед (через соответствие коэффициентов ортогональных базисов). Тогда мера равна нулю. ■

Определение. Движение — преобаразование, сохраняющее расстояния.

Замечание. Движение — композиция некоторого ортогонального оператора и сдвига

Следствие 8.1. *Мера Лебега инвариатнта относительно движений*

4.3. Измеримые функции

Определения

Измеримые функции (действуют из пространства с мерой в $\overline{\mathbb{R}}$): если все множества Лебега (то есть прообразы промежутков) измеримы.

Простейшие свойства измеримых функций

Утверждение. *Если функция измерима, то и множество — тоже. (так как оно представимо в виде счётного объединения: промежутков и бесконечности (которая счётное пересечение))*

Лемма 1. *Для измеримости на измеримом множестве достаточно измеримости Лебеговых множеств какого-то одного типа.*

Доказательство. Остальные выражаются через него ■

- Измеримость функции равносильна измеримости $-f$.
- Сужение измеримой не измеримое множество измеримо.
- Функция, измеримая на каждом множестве из счётного количества, измерима и на объединении.
- Константа на счётном дизъюнктном объединении $\to$ измеримо.
- Измеримость множества $\Leftrightarrow$ измеримось его характеристической функции.
- Прообраз вообще любого промежутка измерим (не только лучей)
- Прообраз ещё и борелевского множества измерим. (Доказательство: рассмотрим сигма-алгебру множеств, прообраз которых измерим. Но так как она содержит все открытые (так как содержит промежутки, а открытые — объединения ячеек), то и борелевские — тоже, а борелевская — пересечение всех таких)
- Функция на множестве меры ноль измерима, *если мера полная*.
- Непрерывная на измеримом подмножестве $\mathbb{R}$ измерима. (Доказательство: непрерывная $\to$ прообраз $\mathbb{R}_{<a}$ как открытого открыт в E, а значит, существует открытое множество G, т.ч. $E(f < a) = E \cap G$, получили измеримость)

Измеримость граней и пределов

Теорема 1 (Измеримость граней и пределов). *Для конечного или счётного семейства измеримых функций:*

1. *Инфинум и супрем измеримы*
2. *Верхние поточечные пределы измеримы*

Доказательство.

1. Лебеговы множества граней — просто счётные объединения/пересечения.
2. Последовательность супремумов остатков убывает, поэтому верхний предел — инфинум супремумов остатков. Дважды применим первое утверждение теоремы.

■

Приближение измеримых функций простыми и ступенчатыми

Определение (Простая функция). $X \to \mathbb{R}$, если измерима, неотрицательна и множество значений — *конечно*.

Если убрать требование неотрицаительности — будет «ступенчатая».

Их можно записать как суммы значений и дизъюнктных характеристических функций множеств, где значения принимаются. Множества в объединении дают X.

Замечание. Они замкнуты относительно сложения, разности, умножения, модуля, умножения на константу.

Теорема 2 (Приближение измеримых функций простыми). *Измеримую неотрицательную функцию можно представить как поточечный предел возрастающих простых.*

Доказательство. Дробим множество значений на

- Отезок $[0; n]$, его на 2^n частей, на каждой — определяем значение функции как левый конец промежутка (меньший).
- (n, ∞). Значение функции будет n.

Тогда формула для φ_n: сумма ступеней.
Ещё формула:

$$\varphi_n(x) = \min\{\frac{\lfloor 2^n f(x) \rfloor}{2^n}; n\} \tag{4.3.1}$$

Получаем возрастание последовательности.
Почему стремится? Начиная с $n > f(x)$ погрешность будет не больше $\frac{1}{2^n}$.
∎

Следствие 2.1 (Приближение ступенчатыми). *Любая измеримая, поточечно стремится к f, модуль каждой не превосходит f.*

Посироим послеовательности для положительной и отрицательной частей (обе измеримы), вычтем. Проверим неравенства для случаев $f(x) \geqslant 0, f(x) < 0$.

Действия над измеримыми функциями

Теорема 3 (Арифметические действия над измеримыми функциями). *Замкнутость множества измеримых функций относительно: сложения, модуля, положительной степени, умножения, деления (на множестве $E(g \neq 0)$).*

Доказательство. Все кроме последнего: приближаем каждую ступенчатыми, получаем приближение итоговой ступенчатыми, переходим к пределу.

Деление: вручную расписываем Лебеговы множества $E\left(\frac{1}{g} > a\right)$ через соответствующие лебеговы множества функции g. ∎

Непрерывность и измеримость по Лебегу. C-свойство Лузина (формулировка)

Теорема 4 (Непрерывность и измеримость по Лебегу). *Если $\forall \varepsilon$ f непрерывно на $E \in \mathbb{A}_n$ кроме множества меры $\leqslant \varepsilon$, то $f \in S(E)$*

Доказательство. 1. Если на всём измеримом: Непрерывная на измеримом подмножестве $\mathbb{R}$ измерима. Доказательство: непрерывная $\to$ прообраз $\mathbb{R}_{<a}$ как открытого открыт в E, а значит, существует открытое множество G, т.ч. $E(f < a) = E \cap G$, получили измеримость.

2. Рассморим последовательность множеств, где измеримо, для $\varepsilon = \frac{1}{m}$. Остаётся множество нулевой меры, а на нём мизмерима, так как мера Лебега полна. ■

Теорема 5 (C-свойство Лузина). *Если функция $E \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима и почти везде конечна, $\forall \varepsilon > 0 \exists \varphi_\varepsilon \in C(\mathbb{R}^n) : \mu E(f \neq \varphi_\varepsilon) < \varepsilon$*

Сходимость по мере и почти везде: определения, примеры, формулировки теорем Лебега и Ф.Рисса

Функциональная посдедовательность сходится по мере: $\forall \sigma$ мера множества, где погрешность $> \sigma$, $\underset{n \to 0}{\longrightarrow} 0$. При этом все участнки должны быть конечны почти везде и быть измеримыми.

Без доказательства: предел по мере единственен с точностью до эквивалентности.

Утверждение верно почти везде: за исключением множества меры ноль — верно. Для полных норм: просто «множество, где неверно, имеет меру ноль».

Сходимость почти везде:

Утверждение. *Последовательность измеримых, стремящихся почти всюду к пределу. Тогда предел измерим.*

На множестве меры ноль измерима по полноте меры. На остальном — как предел измеримых.

Сходимость по мере и почти везде не влекут друг друга.

Пример. Поточечная (даже вообще везде) не влечёт по мере:

Пример: характеристическая функция промежутка. Сходится поточечно везде, но не по мере.

Пример. По мере не влечёт почти везде:

Занумеруем харакретистические функции промежутков длины $\frac{1}{m}$, начинающихся откуда угодно в $[0, 1)$.

Получим продбегание отрезка бесконечность раз всё уменьшающимися подортезками.

Стремится по мере к нулю, но нигде — поточечно.

Тем не менее, при определённых условиях друг друга ±влекут.

Теорема 6 (Лебега). *Если на множестве меры $< +\infty$ измеримые стремятся к измеримой почти везде, все конечны почти везде, то стремятся по мере.*

Теорема 7 (Риса). *Если стремятся по мере, то существует подпоследовательность, сходящаяся почти всюду.*

4.4. Интеграл по мере

Определения

Определение интеграла по мере в три шага (функция должна быть измеримой).

1. Для простых (с конечными положительными коэффициентами)
2. Для неотрицаительных: супремум интегралов простых функций, которые мажорируются f.
3. Общий случай: разность интегралов положительной и отрицательной частей (хотя бы одна часть должна быть конечна).

Монотонность интеграла

Теорема 1 (Монотонность интеграла Лебега). *Если оба интеграла существуют, то интеграл от мажорирующей функции больше.*

Доказательство. Три шага.

1. Вводим множества $D_{ij} = A_i \cap B_j$, расписываем неравенство.
2. Один супремум — по *подмножествам* другого.
3. $f_- \leqslant g_- \wedge f_+ \geqslant g_+$

■

$\to$ Корректность определения: новый шаг даёт для функций предыдущего класса то же самое.

1. Разные представления простой функции дают одно и то же.

2. Для простой супремум — она сама

3. Для неотрицательной разность положительной и отрицательной частей — она сама.

Интеграл по множеству и его подмножеству

Теорема 2 (Интеграл по множеству и его подмножеству). *Если на разности множества и подмножества — нули, то интенгралы равны как Option<T>: существуют или не существуют одновременно и равны, если существуют.*

Доказательство. 1. Распишем сумму

2. Будем рассматривать супремум по простым функциям, где в $E \quad E_1$ ноль

3. Обе (положительная и отрицательная часть) равны

■

Следствие 2.1 (Монотонность интеграла по множеству). *Интеграл неотрицательной по подмножеству не больше, чем по множеству. (Так как интеграл по всему множеству равен интегралу произведения с характеристической)*

Теорема Леви

Теорема 3. *Интеграл поточечного предела мажорирующих каждая следующая предыдущую измеримых неотрицательных функций — это поточечный предел интегралов.*

Доказательство. Измеримость предела — как предела измеримых.

Какой-то предел интегралов будет (по монотонности), причём не больше функции (так как переходим к пределу в неравенстве).

Затем зафиксируем простую φ, мажорируемую (нестрого) f и $q \in (0, 1)$.

Покажем, что при каждом q множество $E' = \bigcup n = 1^{\infty} E_n = \bigcup n = 1^{\infty} E(f_n \geqslant q\varphi)$ — это всё E.

Для каждого x с какого-то n, так как $q\varphi < f$, он будет больше.

Затем переходим к пределу/супремуму по n, q, φ. ■

Пренебрежение множествами нулевой меры при интегрировании. Интегралы от эквивалентных функций

Лемма 1 (Пренебрежение множествами нулевой меры при интегрировании). *Доказательст*
Для второго шага примеряем аппроксимацию простыми и теорему Леви. ■

Однородность интеграла

Теорема 4. *Интеграл однороден по функции*

Доказательство. Для простых — очевидно

Для положительных α: теорема Леви

Отрицательные: про -1: меняются местами, иначе применяем для положительных. ■

Аддитивность интеграла по функции

В первом и втором случае — классика, во третьем — аккуратно рассмотрим бесконечности. Две бесконечности разных знаков — на множестве нулевой меры.

Покажем, в равенстве в каждой точке можно нужным образом перенести слагаемые.

Теорема Леви для рядов. Суммируемость функции и ее модуля. Достаточные условия суммируемости

Теорема 5 (Теорема Леви для рядов). *Ряд неотрицательных суммируемых можно интегрировать почленно.*

Неравенство Чебышева и его следствия: конечность суммируемой функции почти везде, неотрицательная функция с нулевым интегралом

Неравенство Чебышева: $\mu E(|f| \geqslant t) \leqslant \frac{1}{t} \int_E |f| \, \mathrm{d}\mu$

Конечность суммируемой функции почти везде: множество, где бесконечно — бесконечное пересечение, тогда ему мера — предел штуки из равенства Чебышева.

Неотрицательная функция с нулевым интегралом: эквивалентна нулю, так как множество совпадения — бесконечное объединение множеств с нулевой мерой.

Счетная аддитивность интеграла по множеству. Приближение интеграла интегралом по множеству конечной меры

Счетная аддитивность интеграла по множеству: сразу через положительные — через характеристические функции множеств. Получается, что там просто сумма характеристических функций, а это просто теорема Леви.

Приближение интеграла интегралом по множеству конечной меры: С любой точностью можно взять множество конечной меры, т.ч. интеграл модуля по остатку будет ноль с этой точностью.

Будем брать $E(|f| > \frac{1}{N})$ при большом N.

Рассмотрим последовательность *остатков* для $N \to \infty$.

Интеграл функции по множеству — это мера. Пользуемся непрерывностью меры.

Теорема Фату

Последовательность неотрицательных измеримых функций:
$\int \liminf f_n \leqslant \liminf \int f_n$.

Если ещё и почти везде сходится, то слева заменяем на просто предел.

Доказательство. 1. Рассматриваем $g = \sup_{k \geqslant n} f$, переходим к нижнему пределу, по теореме Леви один из них просто предел существует.

2. Слева простой предел. ■

Теорема Лебега о мажорированной сходимости

Если модули измеримых функций сходящейся последовательности мажорируются $\Phi \in L$, то интегралы сходятся к интегралу f.

Все суммируемы, так как почти везде мажорируются Φ.

Рассмотрим $\int f_n + \int \Phi$ по теореме фату, аналогично $\int \Phi - \int f_n$, получим двусторонне неравенство.

Абсолютная непрерывность интеграла

$\forall \varepsilon$ существует мера множества, на множестве меньше которой модуль интеграла будет $< \varepsilon$

Доказательство. По неравенству треугольника — достаточно доказать для неотрицательных.

По определению — подберём простую $\int \varphi \in [\int f - \varepsilon/2, \int f]$. Она ограничена как конечная, тогда оценим интеграл. ■

Функции Бэра: теорема Бэра, лемма о последовательности дроблений, измеримость функций Бэра

Теорема 6 (Теорема Бэра). *Непрерывность (в точке) равносильна равенству верхней и нижней функции Бэра.*

Лемма 2 (О последовательности дроблений). *Определяем характеристические функции интервалов дроблений с супремумами по отрезкам (я буду называть «функциямии Дарбу»).*

При ранге $\to 0$ в точках, не совпадающих с концами дроблений, стремятся к функциям Бэра.

Измеримость, так как i-е измеримы, и сходятся кроме счётного объединения по лемме.

Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману. Сравнение интегралов Римана и Лебега

Свойства интеграла Римана:

1. интегрируем $\to$ функция ограничена 2. интегрируемость $\longleftrightarrow$ разность сумм дарбу из леммы $\to 0$ 3. Если интегрируемо, обе суммы дарбу стремятся к $\int$

Теорема 7 (Лебег об интегрируемости по Риману). *Интегрируемо по Риману $\Leftrightarrow$ ограничено и множество точек разрыва имеет нулевую меру.*

Доказательство. Интегралы по Лебегу «функций Дарбу» — суммы Дарбу. С другой стороны, они же — это интегралы m и M.

Получим, что разность сумм Дарбу стремится к интегралу Лебега от $M - m$.

А его нулёвость равносильна равенству m и M почти везде, а по теореме Бэра — это обозначает непрерывность почти везде. ■

Теорема 8 (Сравнение интегралов Лебега и Римана). *Если интегрируема по Риману, то по Лебегу тоже — и интегралы равны.*

Доказательство. Измерима как эквивалентная m. Суммируемая как ограниченная. С одной стороны ■

4.5. Кратные и повторные интегралы

Восстановление меры множества по мерам сечений (часть 1: случаи ячейки, открытого множества и множества типа жэсигма конечной меры)

Теорема 1 (Принцип Кавальери). *Если $E \in \mathbb{A}_{n+m}$, то*

1. *Почти все сечения измеримы.*
2. *Функция меры сечения измерима на $\mathbb{R}^n$*
3. $\mu_{n+m}E = \int_{\mathbb{R}^n} \mu E(x)\,\mathrm{d}x$

Доказательство.
1. Ячейка
2. Открытое — дизъюнктное объединение ячеек, получаем счётную сумму. Интеригуриием почленно по Леви.
3. Жэсигма конечной меры: НУО, в пересечении они вложены. Исходное можно приблизить сверху открктым — пересекаем в ним все. Сечение измеримо по прошлому пункту и

■

Восстановление меры множества по мерам сечений (часть 2: случай множества нулевой меры и переход к произвольному множеству)

Меры n-мерных шара и конуса

Шар: пользуясь афинным преобразованием, выносим R^n и смотрим на единичный шар. Его сечения — шары радиуса $\sqrt{1-x_n^2}$.

Опять афинно преобразуем, заменяем переменную на косинус, пользуемся формулой из Леммы к теореме Валлиса.

Конус с измеримым основанием измерим — как образ $E \times [0,1]$ при непрерывном отображении. Опять используем гомотетию и интегрируем степенную фунукцию.

Мера декартова произведения

Произведение мер, если докажем, что измеримо. Будем усложнять.

Для открытых и замкнутых в любой комбинации — очевидно: получается открытое или замкнутое (замкнутое — разность двух открытых).

Иначе — по регулярности меры: приблизим оба сверху и снизу открытыми и замкнутыми. Введём декартово произведение открытых и декартово произведение замкнутых.

Разность разность между декартовыми произведениями представима объединением и её можно устремить к нулю. А само декартово произведене зажато между ними.