

# Линейная Алгебра. Заметки по практике

Латыпов Владимир

26 сентября 2022 г.

## Содержание

<b>1</b>	<b>Тензоры</b>	<b>3</b>
1.1	p-формы . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Евклидовы пространства</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Расстояние до многообразия</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Страсти по операторам</b>	<b>5</b>
4.1	Сопряжённый . . . . .	5
4.2	Нормальный . . . . .	5
<b>5</b>	<b>Самосопряжённый</b>	<b>6</b>
<b>6</b>	<b>Изометричный</b>	<b>6</b>
<b>7</b>	<b>Разложения</b>	<b>7</b>

Что, собственно, интересного мы умеем делать?

## 1. Тензоры

### 1.1. $p$ -формы

$p$ -формы. Есть свойства, можно через них раскрывать скобки.

Есть базис пространства антисимметричных  $p$ -форм (антисимметричных тензоров) размера  $\binom{n}{p}$  из вешних произведений упорядоченных комбинаций координатных функций.

Можно вычислить значение внешнего произведения на наборе векторов через определитель матрицы применения каждой функции к каждому вектору.

Также можно найти координаты внешнего произведения в этом базисе, если знаем разложение самих функций по базису пространства линейных форм.

И можно через сумму произведений двух соответствующих определителей вычислить функцию, заданную произведением 1-форм, заданных координатами, на наборе векторов, заданных координатами.

## 2. Евклидовы пространства

Практика по ЛинАлу 22 апреля (Евклидовы пространства): Ортогонализируем ([https://www.symbolab.com/solver/gram-schmidt-calculator/gram-schmidt%20%5Cleft\(1%2C%20%202%2C%20%200%5Cright\)%2C%20%20%5Cleft\(0%2C%20%203%2C%20%201%5Cright\)?or=input](https://www.symbolab.com/solver/gram-schmidt-calculator/gram-schmidt%20%5Cleft(1%2C%20%202%2C%20%200%5Cright)%2C%20%20%5Cleft(0%2C%20%203%2C%20%201%5Cright)?or=input)) базисы (Проскуряков 1361)

Ещё лучше — <https://www.dcode.fr/gram-schmidt-orthonormalization> (поддерживает комплексные)

Дополняем векторами канонического, потом ортогонализируем (Проскуряков 1357)

Составить СЛАУ на новые векторы, т.ч. скалярные произведения новых векторов друг с другом будут нулями. Размерность пространства решений как раз будет  $n - k$ . Но нужно ещё будет ортогонализировать

ФСУ (а будут автоматически ортогональны имеющимся векторам, так как всё пространство ортогонально, ведь линейная комбинация ортогональных — ортогональна). Система СЛНУ будет выглядеть как векторы, записанные в матрицу строками

Ортогональное дополнение к подпространству: как раз то, что мы находили в предыдущем задании, только ФСУ можно не ортогонализировать. То есть перемножение матрицы системы на  $X$  будет давать столбик скалярных произведений  $X$  с изначальными векторами, и это должно быть ноль для ортогональности

Задаём  $L$  через СЛАУ, то есть через равенство нулям скалярных произведений, то есть получается, что это базис ортогонального дополнения. После нахождения базиса ортогонального дополнения преобразуем базис так, чтобы получить нули в разных местах, а потом выражаем координаты решения уравнения через

Разложение в прямую сумму (но теперь ортогональные) «Задача о поиске перпендикуляра». Номер 1370.  $x = y + z$ , СЛОУ будет утверждать, что  $(x, a_j) = (y, a_j) = (\sum c_i a_i, a_j)$ . То есть транспонированная матрица Грама \* коэффициенты = столбцу из скалярных произведений  $(x, a_j)$ . Важно не забыть убрать лишние векторы, чтобы было линейно независимо

Расстояние от точки до линейного многообразия. Через отношение определителей матриц Грама. Задание 1374

Ортогональное дополнение (для комплексных работает неправильно): [https://wims.univ-cotedazur.fr/wims/en\\_tool~linear~vector.en.html](https://wims.univ-cotedazur.fr/wims/en_tool~linear~vector.en.html)

### 3. Расстояние до многообразия

Можно найти используя отношения определителей матрицы Грама.

Матрица грамма в новом базисе:  $\Gamma' = T^T \Gamma \bar{T}$

Между многообразиями:  $dist(x_1 - x_2; L_1 + L_2)$ .

$$dist^2(x, L) = \frac{g(\dots, x)}{g(\dots)}$$

## 4. Страсти по операторам

### 4.1. Сопряжённый

Матрица  $\overline{\Gamma^{-1}A^*\Gamma}$ , в онб — просто  $A^*$  Сопряжение — взаимнообратно. Относительно композиции — как транспонирование. Аддитивность, псевдооднородность. Перестановочность относительно  $(\cdot)^{-1}$

Ядро оператора и образ сопряжённого — ортогональные дополнения друг друга, как и образ оператора и ядро сопряжённого.

Собственные числа — сопряжения друг друга. Для не соответствующих — собственные векторы ортогональны, для соответствующих — одинаковые.

Если подпространство инвариантно относительно  $A$ , то его ортогональное дополнение — относительно  $A^*$ .

### 4.2. Нормальный

$\iff$  Перестановочен с сопряжённым  $\iff \langle Ax, Ay \rangle = \langle A^*x, A^*y \rangle \iff$  В некотором базисе матрицы перестановочны  $\iff$  ОПС + собственные пространства ортогональны  $\iff$  Существует какой-нибудь ОНБ, что матрица имеет понятно какой блочно-диагональный вид

Не перестанет быть нормальным, если вычесть сколько-то  $\text{id}$ .

У нормального оператора ядро и образ — ортогональные дополнения друг друга (если удалось получить собственные числа из того же поля, то потому, что это собственное подпространство нуля и все остальные).

Причём ядро не меняется при возведении в степень. И  $\text{Ker } A = \text{Ker } A^*$ .

Лемма о комплексификации (оператора):

— Собственные числа сохраняются, собственные пространства будут комплексификацией соответствующих — Комплексные собственные числа и пространства будут разбиваться на пары сопряжённых. — Нормальность сохраняется — Сопряжённость — перестановочная с комплексификацией

(Лемма очевидна, если учесть, что любое полиномиальное уравнение, верное в подполе, верно и в самом поле)

Канонический вид: — В унитарном: находим ОНБ из собственных подпространств, получаем собственные числа на диагонали

— В евклидовом: если все СЧ — вещ. — аналогично. Иначе — добавляем ещё блоки для пар комплексно-сопряжённых. Матрица перехода всё ещё должна быть ортогональная. Как её найти? Для вещественных собственных чисел — просто собственные векторы. Для пар КС разделим какой-нибудь вектор на пару вещественной и комплексной части и запишем в таком порядке.

## 5. Самосопряжённый

(симметричный/эрмитов)

Равносильное определение через скалярное произведение: применить можно как к первому, так и ко второму аргументу, получится то же самое. И в обратную сторону.

Если  $A$  и  $B$  САМОсопряжены и перестановочны, то произведение самосопряжено.

Самосопряжён  $\Leftrightarrow$  нормален + имеет вещественный спектр  $\Leftrightarrow$  существует ОНБ, в котором матрица самосопряжена

Если подпространство инвариантно относительно  $A$ , то и ортогональное дополнение — тоже.

В каноническом виде просто пропадут блоки, останутся просто (и в унитарном, и в Евклидовом)

## 6. Изометричный

Унитарный/ортогональный

Равносильное определение через скалярное произведение, что если применить к обоим аргументам, скалярное произведение не изменится.

...  $\Leftrightarrow$  нормален + собственные числа по модулю = 1  $\Leftrightarrow$  существует ОНБ, в котором матрица изометрична  $\Leftrightarrow Q^{-1}$  — изометр.

Если подпространство инвариантно относительно  $Q$ , то орт. дополнение — тоже.

Канонический вид — В Евклидовом на диагонали останутся только  $\pm 1$   
— В Унитарном в блоках будут  $a^2 + b^2 = 1$

Матрица изометрична  $\Leftrightarrow$  её (столбцы  $\Leftrightarrow$  строки) ортонормированы.

## 7. Разложения

$L(D)U$  — нижне-унитреугольная \* (Диагональная без нулей на диагонали) \* верхне-унитреугольная; Существует  $\Leftrightarrow$  Все угловые миноры матрицы  $A$ , кроме (возможно)  $\Delta_n$  не равны нулю. Можно найти одновременно Гауссом  $A$  и  $E$  без замены строк и столбцов. Слева будет  $DU$ , справа —  $L^{-1}$

Если матрица самосопряжённая, будет  $A = LDL^* = U^*DU$ . Причём все  $d$  вещественные.

Положительная/отрицательная определённость, то же самое про собственные числа

Разложение Холецкого: самосопряжённая положительно определённая, все угловые миноры кроме, возможно, последнего, не нули  $\Leftrightarrow$  можно убрать  $D$ , разложить на треугольные с положительными элементами на диагонали.

$QR$  разложение: для невырожденной можно представить как произведение ортогональной на правую. Или же левой на ортогональную.  $Q$  находится ортонормированием столбцов исходной.

Полярное ( $QS$  или  $SQ$ ) разложение: на самосопряжённую ( $H$ ) положительно определённую и ортогональную ( $U$ ). Нужно взять  $\sqrt{AA^*}$  (левый модуль) для получения ортогонального. Далее — через обратную.

Можно также  $UH$ , тогда берём  $H = \sqrt{A^*A}$  (правый модуль).