Типовик по линейной алгебре «Дополнительное домашнее задание №3»

Латыпов Владимир Витальевич,
ИТМО КТ M3138, ***вариант 10***

26 мая 2022 г.

1. Формулировка условия

Утверждение 1. Условие можно найти здесь: https://drive.google.com/drive/folders/1SidXsfLaleNJ1MgryzOB-4zpUpHHtcAN

1. Считая, что векторы заданы в ортонормированном базисе, ортонормировать систему векторов

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

2. Векторы

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1+i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1-i \\ -1+i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

заданы в ортонормированном базисе.

а) выписать СЛОУ, задающих ортогональное дополнение к подпространству, натянутому на векторы a_1, a_2

б) выписать СЛОУ, задающих линейное подпространство, натянутое на векторы a_1, a_2

в) дополнить систему векторов a_1, a_2 до ортогонального базиса.

2. Ортонормирование системы

Применим Грамма-Шмидта. Потом возьмём орты. Конец.

Получаем

$$b_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{i}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\frac{1}{2}-\frac{3i}{2}}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{\frac{3}{2}-\frac{i}{2}}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} \frac{\frac{3}{2}-\frac{i}{2}}{\sqrt{10}} \\ -\frac{1-2i}{\sqrt{10}} \\ \frac{\frac{3}{2}-\frac{i}{2}}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \tag{3}$$

3. Ортогональное дополнение

Вектор принадлежит дополнению $\Longleftrightarrow$ скалярное произведение с любым элементом ($\Longleftrightarrow$ базисом) исходного пространства было равно нулю.

Запишем это в матричном виде (у нас всё задано в ортонормированном базисе, так что матрица Грама единичная):

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \overline{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}} = \mathbb{0} \tag{4}$$

Это всё равно что

$$\overline{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \mathbb{0} \tag{5}$$

Тогда дополнение:

$$y_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, y_2 = \begin{pmatrix} -i \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Тогда по аналогии запишем СЛОУ для системы, натянутой на исходные векторы: это ортогональное дополнение к $\mathrm{span}\{y_1, y_2\}$:

$$\overline{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \mathbb{0} \tag{7}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & i & 2 & 0 \\ i & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \mathbb{0} \tag{8}$$

Отлично, осталось только дополнить a_1, a_2 до ортогонального базиса. Дополнение уже есть, нужно только внутри дополнения и внутри исходной системы провести Грама Шмидта и записать в ряд. Хотя чего мелочиться — проведём ГШ сразу вместе для всей системы.

Хотя нет, внутри друг друга они и так получились ортогональными, просто запишем всё вместе

Получим:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1+i \\ 1+i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-i \\ -1+i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \tag{9}$$