

Типовик по линейной алгебре «Задание
2 модуля 3. Ядро и образ линейного
оператора»

Латыпов Владимир Витальевич,
ИТМО КТ М3138, **вариант 10**

18 февраля 2022 г.

1. Формулировка условия

Утверждение 1. Условие таково: Автоморфизм $\mathfrak{A} : \mathbb{R}^5 \mapsto \mathbb{R}^5$ (этот загадочный значок — это, оказывается, «А красивое») задан в стандартном базисе пространства \mathbb{R}^5 матрицей A . Найти ядро и образ линейного оператора \mathfrak{A} , указать их размерности.

Матрица:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -3 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Найдём сначала ядро: решим уравнение $Ax = \mathbb{0}$, получив все точки \mathbb{R}^5 , переходящие в ноль. Множество решений и будет ядром.

Получаем

$$\text{Ker } \mathfrak{A} = t_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -11 \\ 9 \\ 3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Для нахождения образа достаточно найти базу столбцов и объявить, что ответ — их линейная оболочка. Это лучше, чем просто сказать, что это линейная оболочка всех столбцов, понятно почему... За одно проверим ранг.

$$\text{rg } A = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{7} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{9}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 \quad (3)$$

База строк:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (4)$$

Соответственно, $\operatorname{Im} \mathfrak{A} = \operatorname{Lin} B$