Типовик по линейной алгебре «Дополнительное домашнее задание №4»

Латыпов Владимир Витальевич,
ИТМО КТ M3138, ***вариант 10***

26 сентября 2022 г.

1. Формулировка условия

Утверждение 1. Условие можно найти здесь: https://drive.google.com/drive/folders/1SidXsfLaleNJ1MgryzOB-4zpUpHHtcAN

2. Ортогонализация и дополнение со скалярным произведением через матрицу Грама

Работаем с вещественым пространством, матрица Грама скалярного произведения будет симметрична.

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Через неё вычисляем $a_i \Gamma \overline{a_j} = a_i \Gamma a_j$:

https://matrixcalc.org/#%7B%7B1,0,1%7D%7D*%7B%7B2,-2,-1%7D,%7B-2,5,2%7D,%7B-1,2,2%7D%7D*%7B%7B1%7D,%7B0%7D,%7B1%7D%7D

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Тогда

$$\begin{gathered} \langle a_1, a_1 \rangle = 2 \\ \langle a_1, a_2 \rangle = 1 \\ \langle a_1, a_3 \rangle = 1 \\ \langle a_2, a_2 \rangle = 11 \\ \langle a_2, a_3 \rangle = 4 \\ \langle a_3, a_3 \rangle = 2 \end{gathered}$$

Можно через матричные операции получить сразу матрицу попарных скалярных произведений https://matrixcalc.org/#%7B%7B1,0,1%7D,%7B0,1,1%7D,%7B0,0,1%7D%7D*%7B%7B2,-2,-1%7D,%7B-2,5,2%7D,%7B-1,2,2%7D%7D*%7B%7B1,0,0%7D,%7B0,1,0%7D,%7B1,1,1%7D%7D

Как раз получится, что

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -2 & -1\\ -2 & 5 & 2\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 11 & 4\\ 1 & 4 & 2\end{pmatrix} \tag{3}$$

$$b_1 = a_1 = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix} \tag{4}$$

$$b_2 \hookleftarrow a_2 - \frac{\langle b_1, a_2\rangle}{\langle b_1, b_1\rangle} b_1 = a_2 - \frac{1}{2} b_1 \rightsquigarrow 2a_2 - a_1 = \begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 1\end{pmatrix} \tag{5}$$

$$b_3 \hookleftarrow a_3 - \frac{\langle b_1, a_3\rangle}{\langle b_1, b_1\rangle} b_1 - \frac{\langle b_2, a_3\rangle}{\langle b_2, b_2\rangle} b_2 = a_3 - \frac{1}{2} b_1 - \frac{7}{42} b_2 = a_3 - \frac{3}{6} b_1 - \frac{1}{6} b_2 \tag{6}$$

$$\rightsquigarrow 6a_3 - 3b_1 - b_2 = \begin{pmatrix}-2\\ -2\\ 2\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix} \tag{7}$$

Теперь с системой.

Для попадения в $L^\perp$ нужно, чтобы $\langle x, b_i\rangle$ был нулём. То есть

$$\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix} \Gamma \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = \mathbb{0} \tag{8}$$

Тогда матрица системы:

$$\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix} \Gamma = \begin{pmatrix}-2 & 8 & 3\\ -4 & 9 & 6\end{pmatrix} \tag{9}$$

Получаем, что $L^\perp = \operatorname{span} \begin{pmatrix}3\\ 0\\ 2\end{pmatrix}$

Тогда система уравнений для L:

$$\begin{pmatrix}3 & 0 & 2\end{pmatrix}\Gamma\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \mathbb{0} \tag{10}$$

Считая, получам:

$$\begin{pmatrix}4 & -2 & 1\end{pmatrix} x = \mathbb{0} \tag{11}$$

3. Сопряжённый оператор

$$\Gamma = G(e_1, e_2) = \begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{pmatrix} \tag{12}$$

Тогда

$$A^{\circledast} = \overline{\Gamma^{-1}}A^*\overline{\Gamma} = \Gamma^{-1}A^*\Gamma = \Gamma^{-1}\overline{A^T}\Gamma = \begin{pmatrix}1 & -i\\-2*i & 1\end{pmatrix} \tag{13}$$

Получили оператор, который, согласно matrixcalc, как и сопряжённый, имеет собственные числа $1 \pm \sqrt{2}i$. Понятно, что получилось их совпадение за счёт того, что они сопряжённы друг другу у самого оператора.

В общем же случае у сопряжённых операторов собственные числа сопряжённы соответственным с.ч. друг друга.