

Теория чисел (практика)

Владимир Латыпов
donrumata03@gmail.com

Vladimir Latypov
donrumata03@gmail.com

Содержание

1 Разбор ДЗ 1	3
1.1 Поле	3
1.2 Корректность определения локализации $S^{-1}R$	3
1.3 Пример, где условие $\cdot s$ существенно: \mathbb{Z}	3
1.4 Прообраз идеала при гомоморфизме — тоже идеал	3
2 Гауссовы числа	3

1 Разбор ДЗ 1

1.1 Поле

Теорема 1: $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$ — поле из p элементов

Доказательство: Решим уравнение $\bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{c} \cdot \bar{d} = 1$ алгоритмом Евклида, тогда $\bar{a} \cdot \bar{b} = 1$. \square

1.2 Корректность определения локализации $S^{-1}R$

Показываем, что отношение из определения $S^{-1}R$ — отношение эквивалентности:
 $(a_1, s_1) \sim (a_2, s_2) \stackrel{\text{def}}{\iff} (a_1 s_2 - a_2 s_1) \cdot s$ для некоторого s .

Без s транзитивность для не областей целостности не докажется.

Д: домножим накрест равенства, вынесем за скобку.

1.3 Пример, где условие $\cdot s$ существенно: \mathbb{Z}

$$S = \{1, 2, 4\}$$

$$S^{-1}R \cong \mathbb{F}_3$$

Разберём 18 случаев, расположим в 3 ряда, 6 колонок.

1.4 Прообраз идеала при гомоморфизме — тоже идеал

Замечание: Уже доказали для ядра (прообраза $\{0\}$)

Доказательство: Для начала покажем, что это \square

2 Гауссовы числа

Определение 2.1: $\mathbb{Z}[i]$ — целые Гауссовы числа ($\Re, \Im \in \mathbb{Z}$)

Поле частных $\mathbb{Q}[i]$ ($\cong \mathbb{Q}[i] = \mathbb{Z}[i] + i\mathbb{Z}[i]$) вкладывается в \mathbb{C} .

Евклидова норма определяется почти как для комплексных: $d(a + bi) = a^2 + b^2$.

Целые гауссовы числа — тоже Евклидово кольцо: для деления с остатком

- делим как комплексные числа
- берём ближайшее из $\mathbb{Z}[i]$