Типовик по линейной алгебре модуль 1: Задание 7 «Каноническая форма кривых второго порядка»

Латыпов Владимир Витальевич,
ИТМО КТ M3138, ***вариант 12***

26 сентября 2022 г.

Содержание

1. Формулировка условия

Утверждение 1. Условие таково:

Выполнив последовательно преобразования координат: поворот, а затем параллельный перенос координатных осей, преобразовать к каноническому виду уравнение кривой второго порядка и построить ее в канонической и исходной системе координат, а также найти параметры кривой.

12. $7\sqrt{5}x^2 + \sqrt{5}y^2 + 8\sqrt{5}xy + 72x + 36y + 27\sqrt{5} = 0$

2. Решение

2.1. Поворот системы координат

Для начала найдём такой поворот, чтобы член $x'y'$ исчез.

$$\begin{cases} x = cos(\alpha)x' - sin(\alpha)y' \\ y = sin(\alpha)x' + cos(\alpha)y' \end{cases} \tag{1}$$

Тогда уравнение превращается в:

$$\begin{multline} 7\sqrt{5}(cos(\alpha)x' - sin(\alpha)y')^2 \\ + \sqrt{5}(sin(\alpha)x' + cos(\alpha)y')^2 \\ + 8\sqrt{5}(cos(\alpha)x' - sin(\alpha)y')(sin(\alpha)x' + cos(\alpha)y') \\ + 72(cos(\alpha)x' - sin(\alpha)y') \\ + 36(sin(\alpha)x' + cos(\alpha)y') \\ + 27\sqrt{5} \end{multline} \tag{2}$$

После expansion получается:

$$
\begin{multline}
7\sqrt{5}x'^2\cos^2(\alpha) \\
+\sqrt{5}x'^2\sin^2(\alpha) \\
+8\sqrt{5}x'^2\cos(\alpha)\sin(\alpha) \\
+8\sqrt{5}x'y'\cos^2(\alpha) \\
-8\sqrt{5}x'y'\sin^2(\alpha) \\
-12\sqrt{5}x'y'\sin(\alpha)\cos(\alpha) \\
+72x'\cos(\alpha) \\
+36x'\sin(\alpha) \\
+7\sqrt{5}y'^2\sin^2(\alpha) \\
+\sqrt{5}y'^2\cos^2(\alpha) \\
-8\sqrt{5}y'^2\sin(\alpha)\cos(\alpha) \\
-72y'\sin(\alpha) \\
+36y'\cos(\alpha) \\
+27\sqrt{5} \quad (3)
\end{multline}
$$

Выделяем члены с $x'y'$:

$$+8\sqrt{5}x'y'\cos^2(\alpha)\ -8\sqrt{5}x'y'\sin^2(\alpha)-12\sqrt{5}x'y'\sin(\alpha)\cos(\alpha) \quad (4)$$

Тогда коэффициент перед $x'y'$ будет:

$$
\begin{multline}
7\sqrt{5}\left(-2cos(\alpha)sin(\alpha)\right)+8\sqrt{5}\left(cos^2(\alpha)-sin^2(\alpha)\right)+\sqrt{5}\left(2cos(\alpha)sin(\alpha)\right)= \\
\sqrt{5}(cos(\alpha)sin(\alpha)(7\cdot-2+2)+8cos^2(\alpha)-8sin^2(\alpha)) \quad (5)
\end{multline}
$$

Этот коэффициент должен быть равен нулю. Тогда:

$$-12cos(\alpha)sin(\alpha)+8cos^2(\alpha)-8sin^2(\alpha)=0 \quad (6)$$

$$-12tg(\alpha)+8-8tg^2(\alpha)=0 \quad (7)$$

$$4\xi^2+6\xi-4=0 \quad (8)$$

$$\xi_{1,2}=\{-2,\frac{1}{2}\} \quad (9)$$

Для любого α с одним из этих тангенсов (таких α всего 4) исчезнет перекрёсный член в новой системе координат.

Возьмём, например, $tg(\alpha) = \frac{1}{2}$ и $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$. Будет $\alpha = arctg\left(\frac{1}{2}\right)$ Тогда $sin, cos > 0$

$$sin(\alpha) = \frac{tg(\alpha)}{\sqrt{1 + tg^2(\alpha)}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \tag{10}$$

$$cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2(\alpha)}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \tag{11}$$

Тогда старые координаты так выражаются через новые:

$$\begin{cases} x = \frac{2\sqrt{5}}{5}x' - \frac{\sqrt{5}}{5}y' \\ y = \frac{\sqrt{5}}{5}x' + \frac{2\sqrt{5}}{5}y' \end{cases} \tag{12}$$

И новая система коодинат будет выглядеть вот так относительно старой:

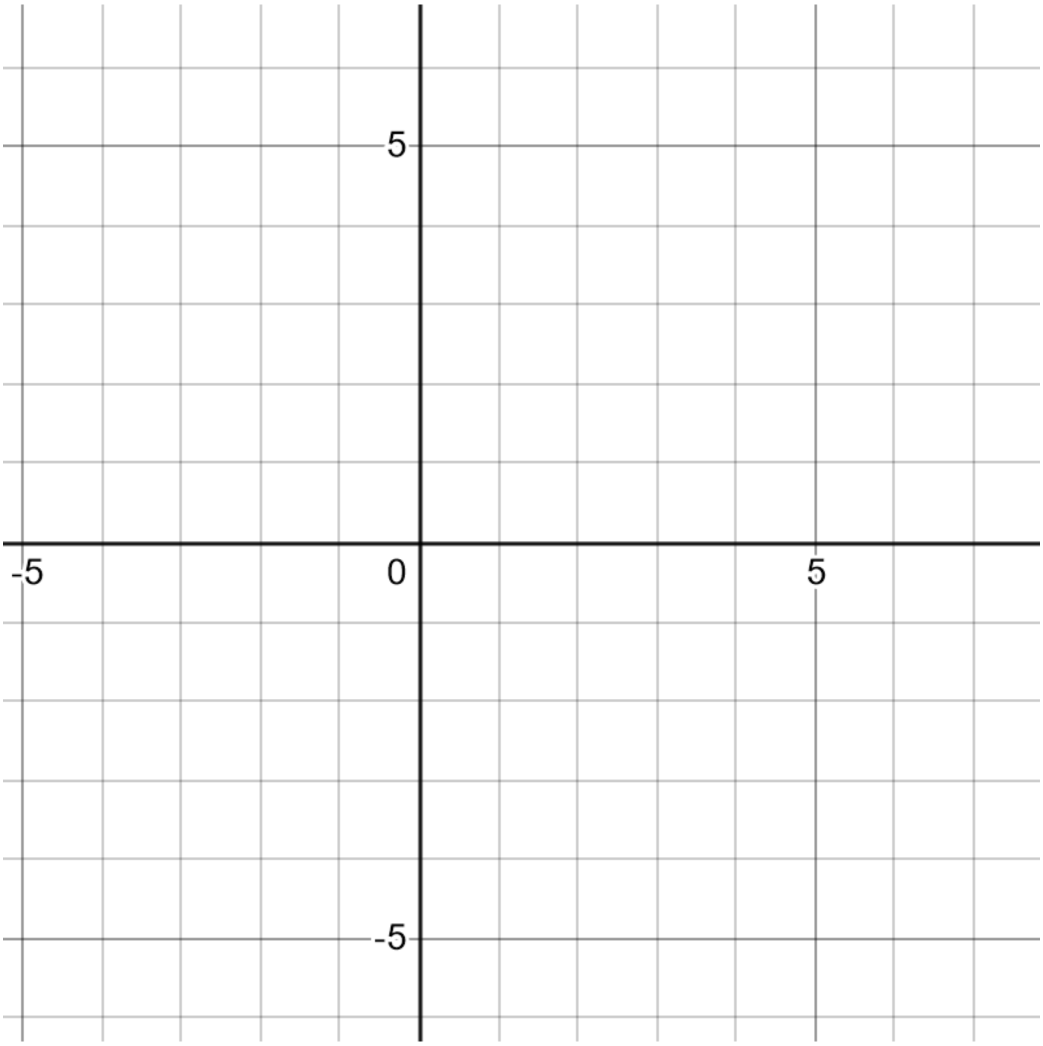

Рис. 1: Система координат (X', Y') относительно исходной

Тогда перепишем уравнение в новой системе коодинат:

$$7\sqrt{5}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}x' - \frac{\sqrt{5}}{5}y'\right)^2 + \\ \sqrt{5}\left(\frac{\sqrt{5}}{5}x' + \frac{2\sqrt{5}}{5}y'\right)^2 + \\ 8\sqrt{5}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}x' - \frac{\sqrt{5}}{5}y'\right)\left(\frac{\sqrt{5}}{5}x' + \frac{2\sqrt{5}}{5}y'\right) + \\ 72\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}x' - \frac{\sqrt{5}}{5}y'\right) + \\ 36\left(\frac{\sqrt{5}}{5}x' + \frac{2\sqrt{5}}{5}y'\right) + \\ 27\sqrt{5} \\ = 0 \quad (13)$$

$$\frac{28x'^2}{\sqrt{5}} - \frac{28x'y'}{\sqrt{5}} + \frac{7y'^2}{\sqrt{5}} +$$
$$\frac{x'^2}{\sqrt{5}} + \frac{4x'y'}{\sqrt{5}} + \frac{4y'^2}{\sqrt{5}} +$$
$$\frac{16x'^2}{\sqrt{5}} + \frac{24x'y'}{\sqrt{5}} - \frac{16y'^2}{\sqrt{5}} +$$
$$\frac{144x'}{\sqrt{5}} - \frac{72y'}{\sqrt{5}} +$$
$$\frac{36x'}{\sqrt{5}} + \frac{72y'}{\sqrt{5}} +$$
$$27\sqrt{5}$$
$$= 0 \quad (14)$$

Получили:

$$9x'^2 + 36'x - y'^2 + 27 = 0 \quad (15)$$

2.2. Параллельный перенос

Выделим полные квадраты:

$$9x'^2+36x'-y'^2+27 = 9(x'^2+4x'+4)-y'^2-9 = 9(x'+2)^2-y'^2-9 = 0 \quad (16)$$

Назовём, получив выражение координат системы (X', Y') через (X'', Y'') и наоборот:

$$\begin{cases} x'' = x' + 2 \\ y'' = y' \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = x'' - 2 \\ y' = y'' \end{cases} \quad (17)$$

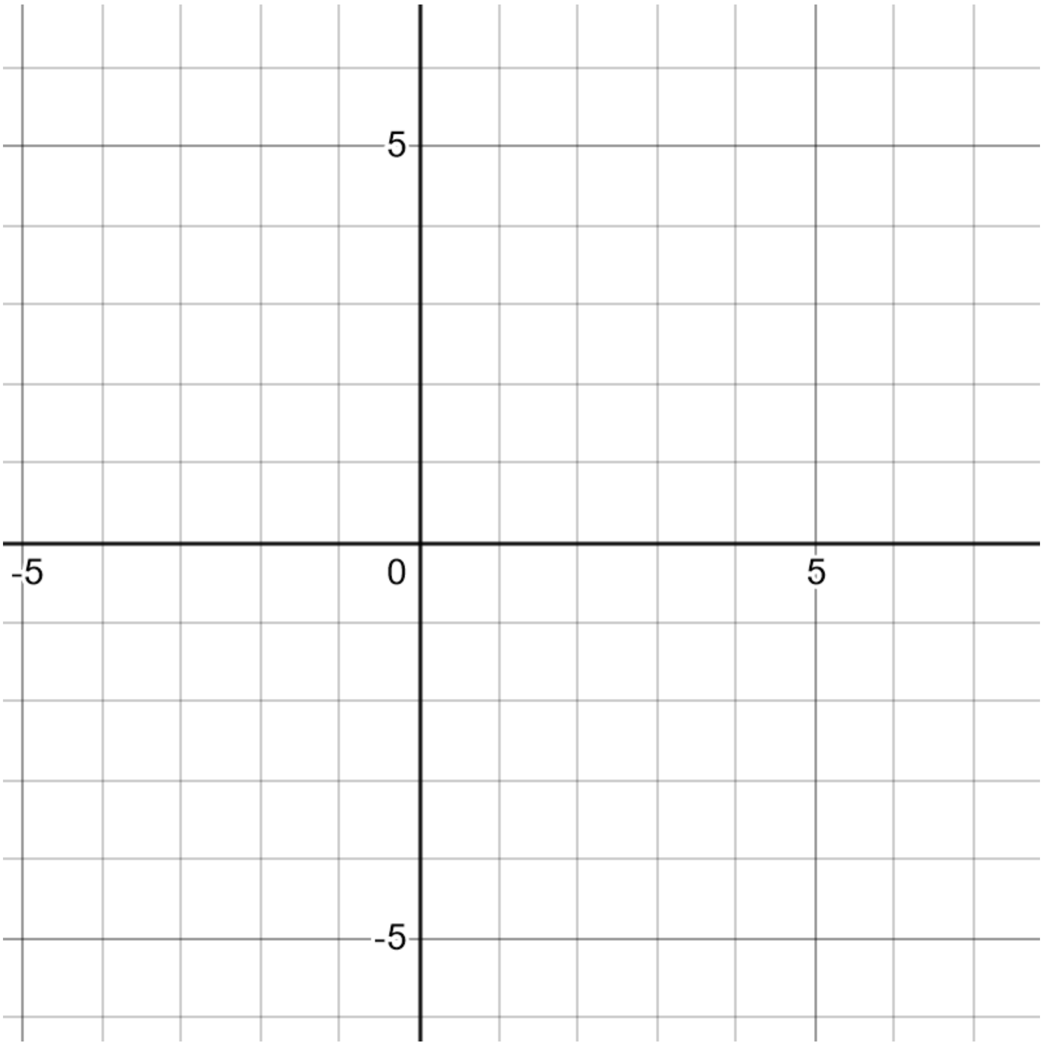

Рис. 2: Система координат (O'', X'', Y'') относительно СК (O', X', Y')

3. Малювание в системе координат два штриха

Тогда уравнение в системе координат «два штриха» будет таким:

$$9x''^2 - y'^2 = 9 \tag{18}$$

$$\frac{x''^2}{1^2} - \frac{y'^2}{3^2} = 1 \tag{19}$$

То есть это гипербола, главная полуось: $a = 1$, мнимая полуось: $b = 3$,

$c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$. Ещё параметры гиперболы:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{10}}{1} = \sqrt{10} \tag{20}$$

$$F_l, F_r = (\mp c; 0) = (\mp\sqrt{10}; 0) \tag{21}$$

$$V_l, V_r = (\mp a; 0) D_l, D_r : x'' = \mp\frac{a}{\varepsilon} = \mp\frac{1}{\sqrt{10}} = \mp\frac{\sqrt{10}}{10} \tag{22}$$

И выглядеть она будет:

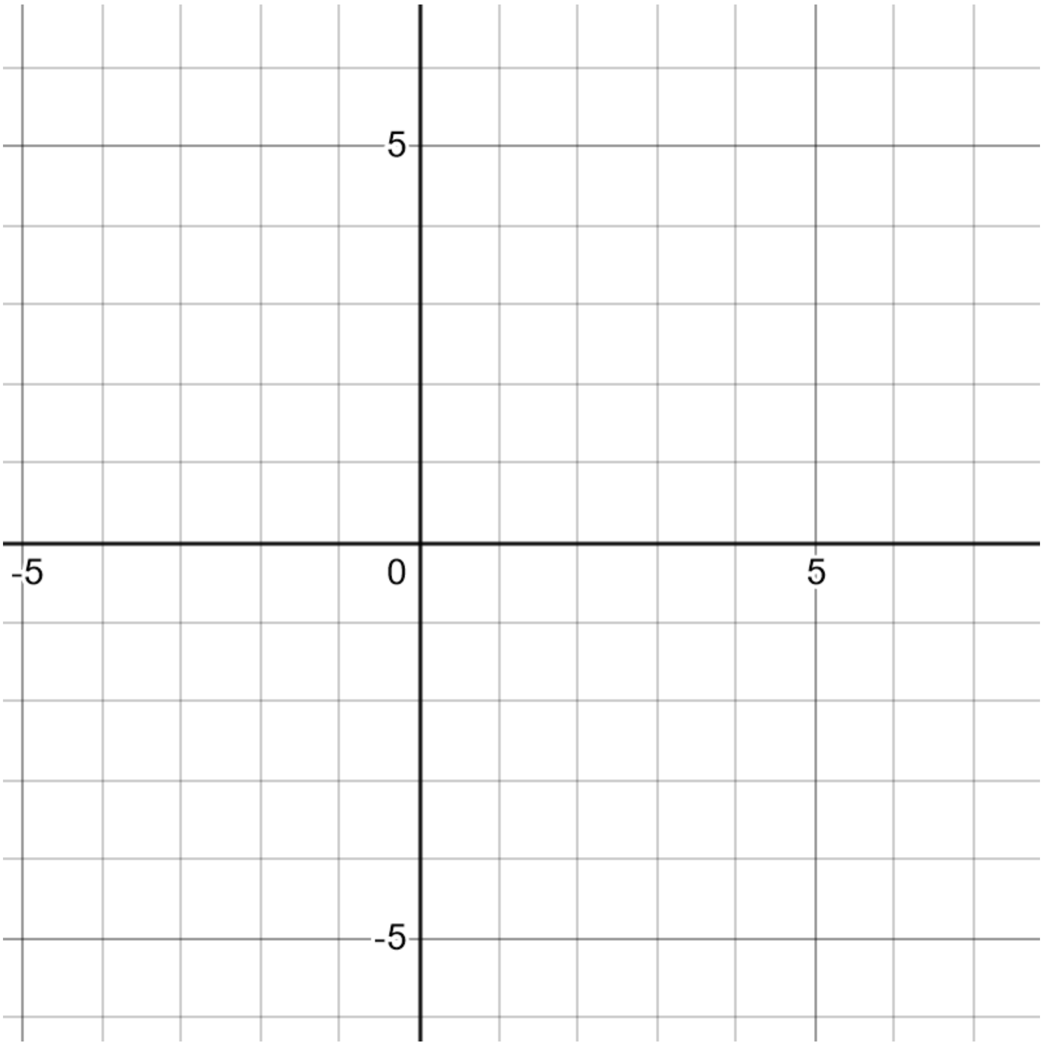

Рис. 3: Гипербола в системе координат (O'', X'', Y'')

4. Итоговое преобразование координат

Таким образом, координаты для системы «один штрих» будут выражаться как:

$$\begin{cases} x' = x'' - 2 \\ y' = y'' \end{cases} \tag{23}$$

(То есть сдвиг влево относительно двух штрихов на 2)

А для изначальной СК:

$$\begin{cases} x = cos(\alpha)x' - sin(\alpha)y' = cos(\alpha)(x'' - 2) - sin(\alpha)y'' = \frac{2\sqrt{5}}{5}(x'' - 2) - \frac{\sqrt{5}}{5}y'' \\ y = sin(\alpha)x' + cos(\alpha)y' = \frac{\sqrt{5}}{5}(x'' - 2) + \frac{2\sqrt{5}}{5}y'' \end{cases} \tag{24}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2\sqrt{5}}{5}x'' - \frac{\sqrt{5}}{5}y'' - \frac{4\sqrt{5}}{5} \\ y = \frac{\sqrt{5}}{5}x'' + \frac{2\sqrt{5}}{5}y'' - \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases} \tag{25}$$

Пользуясь этим, мы можем найти координаты ключевых характеристических фигур нашей гиперболы.

Во-первых — O'' в исходной СК: $\left(-\frac{4\sqrt{5}}{5}; -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \approx (-1.8; -0.9)$.

Далее — в расход идут вершины и фокусы. В новой системе:

$$V_1, V_2 = \left(\frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot (\mp 1) - \frac{4\sqrt{5}}{5}; \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot (\mp 1) - \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \tag{26}$$

$$V_1, V_2 = \left(\frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot (\mp 1) - \frac{4\sqrt{5}}{5}; \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot (\mp 1) - \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \tag{27}$$

$$V_1 \approx (-2.7; -1.3) \tag{28}$$

$$V_2 \approx (-0.9; -0.5) \tag{29}$$

$$F_1, F_2 = \left(\frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot (\mp\sqrt{10}) - \frac{4\sqrt{5}}{5}; \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot (\mp\sqrt{10}) - \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \tag{30}$$

$$F_l \approx (-4.6;\, -2.3) \tag{31}$$
$$F_r \approx (1.;\, .5) \tag{32}$$

Выразим наоборот — новые координаты через старые.

$$\begin{cases} x = \frac{2\sqrt{5}}{5}x'' - \frac{\sqrt{5}}{5}y'' - \frac{4\sqrt{5}}{5} \\ y = \frac{\sqrt{5}}{5}x'' + \frac{2\sqrt{5}}{5}y'' - \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases} \tag{33}$$
$$\begin{cases} x = \frac{2\sqrt{5}}{5}x'' - \frac{\sqrt{5}}{5}y'' - \frac{4\sqrt{5}}{5} \\ 2y = \frac{2\sqrt{5}}{5}x'' + \frac{4\sqrt{5}}{5}y'' - \frac{4\sqrt{5}}{5} \end{cases} \tag{34}$$
$$\begin{cases} x - 2y = (-\frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{4\sqrt{5}}{5})y'' = -\frac{5\sqrt{5}}{5}y'' = -\sqrt{5}y'' \\ 2y = \frac{2\sqrt{5}}{5}x'' + \frac{4\sqrt{5}}{5}y'' - \frac{4\sqrt{5}}{5} \end{cases} \tag{35}$$
$$\begin{cases} y'' = \frac{2y-x}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}y - \frac{\sqrt{5}}{5}x \\ x = \frac{2\sqrt{5}}{5}x'' - \frac{\sqrt{5}}{5}(\frac{2\sqrt{5}}{5}y - \frac{\sqrt{5}}{5}x) - \frac{4\sqrt{5}}{5} \end{cases} \tag{36}$$
$$\frac{2\sqrt{5}}{5}x'' = x + \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}y - \frac{\sqrt{5}}{5}x\right) + \frac{4\sqrt{5}}{5} \tag{37}$$
$$\frac{2\sqrt{5}}{5}x'' = x + \frac{2}{5}y - \frac{1}{5}x + \frac{4\sqrt{5}}{5} = \frac{4}{5}x + \frac{2}{5}y + \frac{4\sqrt{5}}{5} \tag{38}$$
$$x'' = \frac{\sqrt{5}}{2}\left(\frac{4}{5}x + \frac{2}{5}y + \frac{4\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{2\sqrt{5}}{5}x + \frac{\sqrt{5}}{5}y + 2 \tag{39}$$
$$\begin{cases} x'' = \frac{2\sqrt{5}}{10}x + \frac{\sqrt{5}}{5}y + 2 \\ y'' = -\frac{\sqrt{5}}{5}x + \frac{2\sqrt{5}}{5}y \end{cases} \tag{40}$$

Теперь тяжёлая артилерия: оси координат.

$$\begin{aligned} O''Y'' : x'' \equiv 0 \\ &\iff \frac{2\sqrt{5}}{5}x + \frac{\sqrt{5}}{5}y + 2 = 0 \\ &\iff \frac{\sqrt{5}}{5}y = -2 - \frac{2\sqrt{5}}{5}x \\ &\iff y = -2\sqrt{5} - \frac{2\sqrt{5} \times \sqrt{5}}{5}x = -2\sqrt{5} - 2x \end{aligned} \tag{41}$$

$$O''X'' : y'' \equiv 0$$

$$\begin{aligned}
&\iff -\frac{\sqrt{5}}{5}x + \frac{2\sqrt{5}}{5}y = 0 \\
&\iff \frac{2\sqrt{5}}{5}y = \frac{\sqrt{5}}{5}x \\
&\iff y = \frac{\sqrt{5}}{5} \times \frac{\sqrt{5}}{2}x = \frac{1}{2}x
\end{aligned} \tag{42}$$

И, наконец, директриссы:

$$D_l : x'' = -\frac{\sqrt{10}}{10} \tag{43}$$

$$\frac{2\sqrt{5}}{5}x + \frac{\sqrt{5}}{5}y + 2 = -\frac{\sqrt{10}}{10} \tag{44}$$

$$y = -2x - 2\sqrt{5} - \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{45}$$

$$D_r : x'' = +\frac{\sqrt{10}}{10} \tag{46}$$

$$\frac{2\sqrt{5}}{5}x + \frac{\sqrt{5}}{5}y + 2 = +\frac{\sqrt{10}}{10} \tag{47}$$

$$y = -2x - 2\sqrt{5} + \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{48}$$

5. Итоговая иллюстрация

Теперь мы можем изобразить гиперболу в исходой системе координат.

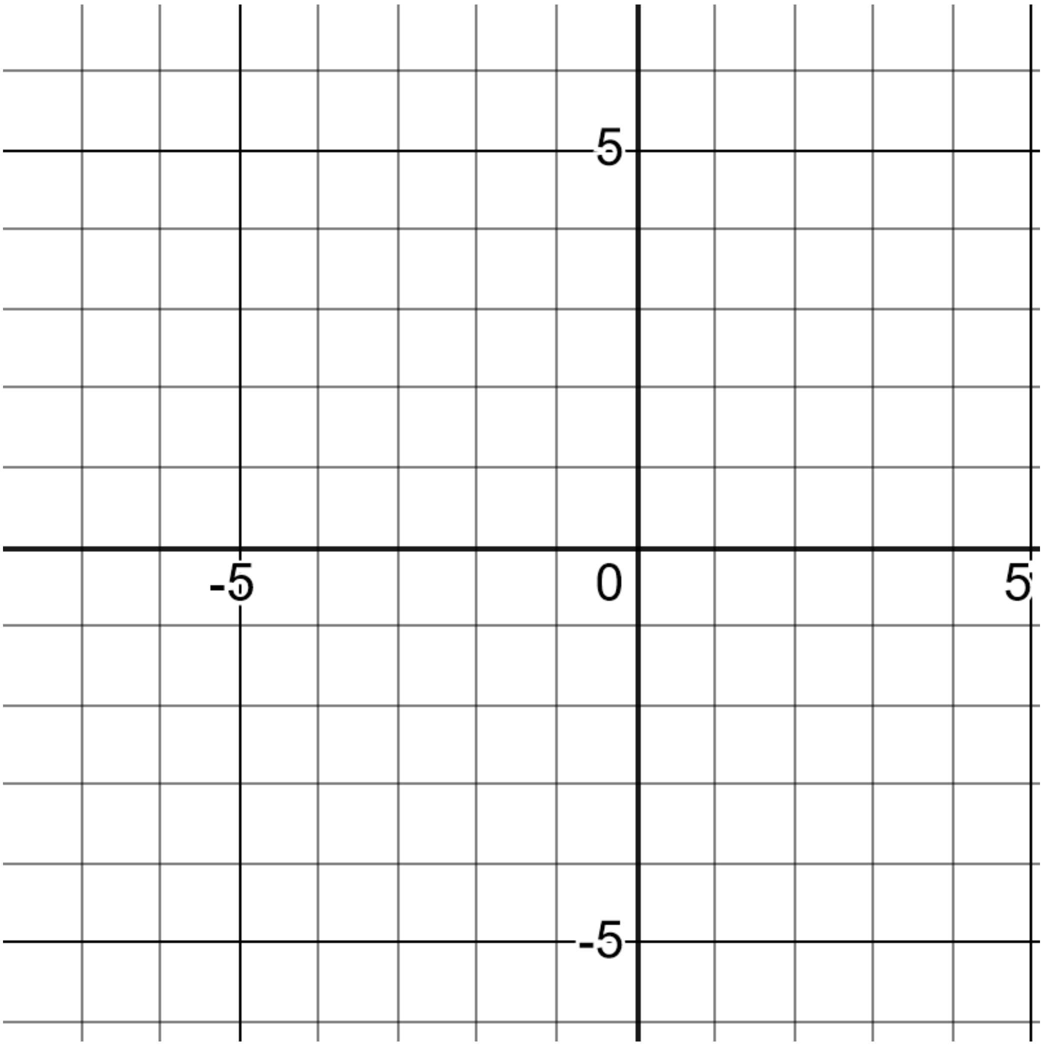

Рис. 4: Гипербола в системе координат (O, X, Y)