

Лекция 15. Марковские процессы

26 мая 2022 г.

1 Определение марковского процесса

Мы уже рассмотрели процессы, в которых будущее никак не зависит от прошлого. Однако в реальной жизни часто бывает так, что будущее так зависит от того, что было в прошлом или просто от настоящего. Во втором случае (когда зависимость только от настоящего), удобно ввести понятие *состояния*, описывающее *настоящее*. В случае с дискретным временем мы можем описать процесс как последовательность состояний X_t , где $X_{t+1} = f(X_t, Y_t)$, где f – некоторая функция от предыдущего состояния и некоторого случайного шума Y_t .

Рассмотрим пример очереди в супермаркете. Разобьем время на достаточно маленькие интервалы времени и в начале каждого интервала t будем считать с.в. X_t , равную числу человек в очереди. В данном примере есть явная зависимость будущего от настоящего. Если $X_t = 0$, то вероятность того, что в начале следующего интервала очередь тоже будет пустой, а если $X_t = 10$, то эта вероятность мала. Причем при оценке этой вероятности совсем неважно, сколько было человек в очереди до времени t , то есть X_{t-s} никак не влияет на X_{t+1} .

Более конкретно, Марковским процессом называется процесс $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$, для которого одновременно выполняется:

1. Для всех t, δ, h, i и j выполняется

$$\Pr[X_{t+\delta} = j \mid X_t = i] = \Pr[X_{t+h+\delta} = j \mid X_{t+h} = i],$$

или

$$f_{X_{t+\delta}|X_t}(j \mid i) = f_{X_{t+h+\delta}|X_{t+h}}(j \mid i).$$

Это свойство называется *однородностью* во времени, то есть если мы оказались в состоянии S_1 в момент времени t , то вероятность оказаться в состоянии S_2 через время δ не зависит от момента времени t , а только от состояния в тот момент.

2. Для всех t, δ, i и j , а также любых наборов $\{i_\tau\}_{\tau < t}$ выполняется

$$\Pr[X_{t+\delta} = j \mid X_t = i, \cap_{\tau < t} X_\tau = i_\tau] = \Pr[X_{t+\delta} = j \mid X_t = i],$$

или, для несчетного множества состояний, аналогичное равенство плотностей вероятностей (которое заморочно записывать тут в теке). Это называется *марковское свойство*. Оно означает, что в момент времени t все будущее процесса зависит только от текущего состояния, но не от остальной истории процесса. Иногда это записывается через стандартную фильтрацию:

$$\Pr[X_{t+\delta} = j \mid \mathcal{F}_t] = \Pr[X_{t+\delta} = j \mid X_t].$$

Заметим, что это равенство случайных величин.

3. Удовлетворение свойства вероятностной меры. Сумма или интеграл всех вероятностей перехода по всем возможным состояниям должна равняться единице для любого фиксированного i и δ .

$$\sum_j \Pr[X_{t+\delta} = j \mid X_t = i] = 1,$$

или

$$\int_{\mathbb{R}} f_{X_{t+\delta}|X_t}(x \mid i) dx = 1.$$

Марковские процессы могут быть многих разных типов. Например,

- Процессы с дискретным временем и процессы с непрерывным временем.
- Процессы с конечным, счетным или несчетным множеством состояний.

К сожалению, данный курс не позволяет охватить весь спектр процессов, поэтому мы ограничимся только марковскими процессами *с дискретным временем и с конечным числом состояний*. Везде далее под марковским процессом мы будем иметь в виду именно такие процессы.

2 Марковские процессы с дискретным временем и конечным числом состояний

Время у нас дискретное, то есть процесс у нас описывается последовательностью состояний $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$. У нас есть конечное число состояний. Так как нам неважно, как называть состояния, давайте мы их просто как-то пронумеруем от 1 до m . Тогда мы можем считать, что все X_t — это случайные величины, принимающие значения из $[1..m]$.

В этих условиях свойства Марковского процесса могут быть записаны в более простом виде, причем нам хватит этих свойств для $\delta = 1$.

1. *Однородность*: вероятность перехода из состояния i в состояние j за один шаг не зависит от времени.

$$\begin{aligned} p_{ij} &:= \Pr[X_1 = j \mid X_0 = i] \\ &= \Pr[X_{n+1} = j \mid X_n = i]. \end{aligned}$$

2. *Марковское свойство*: вероятность перехода зависит только от текущего состояния, а не от всех предыдущих.

$$\begin{aligned} p_{ij} &= \Pr[X_{n+1} = j \mid X_n = i] \\ &= \Pr[X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1}, \dots, X_0]. \end{aligned}$$

3. Удовлетворение свойств вероятностной меры: сумма исходящих вероятностей перехода должна равняться единице (иначе куда мы попадем с оставшейся вероятностью?)

$$\sum_{j=1}^m p_{ij} = 1.$$

Мы чуть позже объясним, почему этого хватает для определения марковского процесса. А пока поговорим о его визуализации, то есть марковских цепях.

2.1 Цепи Маркова

Мы уже поняли, что для определения марковского процесса нам достаточно определить следующие вещи:

1. Множество состояний S
2. Вероятности перехода между состояниями за одну единицу времени p_{ij}

Это очень удобно визуализировать с помощью цепей Маркова. Цепь Маркова — это ориентированный граф без параллельных ребер, но, вероятно, с петлями, где множество вершин соответствует множеству состояний процесса, а ребра — ненулевым вероятностям перехода.

Рассмотрим на примере очереди в супермаркете. Пусть появления новых покупателей, которые встают в конец очереди, описывается процессом Бернулли с вероятностью p . При этом время обслуживания каждого покупателя следует геометрическому распределению с параметром q . Также допустим, что если в очереди уже 10 покупателей, то новые покупатели не встают в очередь. Таким образом, в каждый интервал времени происходит одно из следующих событий:

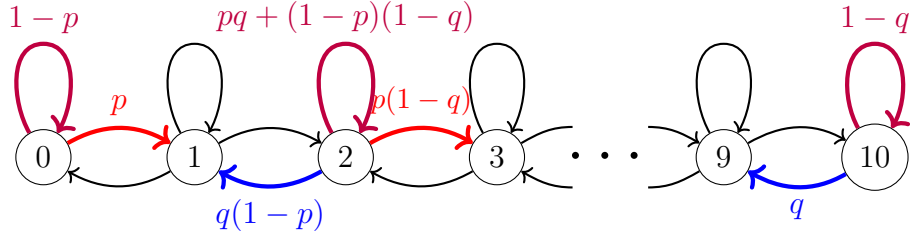
1. Пришел новый покупатель, но мы не обслужили текущего. Очередь выросла на 1, если в ней меньше 10 человек.
2. Мы обслужили текущего покупателя, а новый не появился. Очередь уменьшилась на 1.
3. Пришел новый покупатель, и мы закончили обслуживание текущего. Очередь не изменилась.

4. Ничего не произошло. Очередь не изменилась.

В силу определения прихода покупателей и времени обслуживания покупателей, мы можем считать, что в каждый тайм-слот мы кидаем две нечестных монетки с вероятностями успеха p и q . Если первая монетка упала успехом — к нам приходит покупатель. Если вторая монетка упала успехом — мы заканчиваем обслуживание текущего покупателя. Поэтому вероятность каждого из перечисленных событий следующая:

1. $p(1 - q)$
2. $q(1 - p)$, если очередь не пустая, иначе ноль.
3. pq
4. $(1 - p)(1 - q)$

Отсюда мы можем нарисовать такой граф:



С помощью таких графов очень удобно описывать марковские процессы, чем мы и будем заниматься в дальнейшем. Подчеркнем еще раз, что если вероятность перехода из состояния i в состояние j равна нулю, то соответствующего ребра нет в цепи Маркова.

3 Переход через время n

Чтобы показать, что нам хватает условий на переходы через единицу времени для того, чтобы процесс был марковским в общем смысле этого слова, давайте рассмотрим $r_{ij}(n)$ — вероятность того, что мы попадем в состояние j из состояния i за n шагов. Как его посчитать?

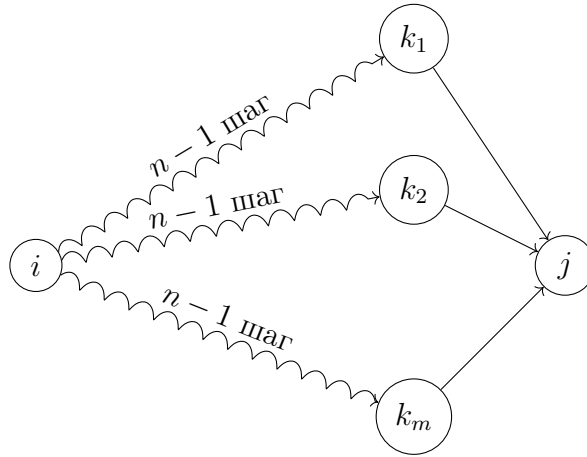
- Для $n = 0$ вероятность того, что мы поменяем состояние есть ноль. Поэтому $r_{ii}(0) = 1$ и $r_{ij}(0) = 0$ для всех $i \neq j$.
- Для $n = 1$ переходы нам уже известны. $r_{ij}(1) = p_{ij}$.
- Чтобы определить оставшиеся, можем последовать по одному из трех вариантов. Но все они основаны на том, что мы суммируем вероятности различных непересекающихся путей длины n в графе из состояния i в состояние j .

1. Этот вариант используется чаще всего. Мы можем разбить все пути длины n по тому, какое в них $n - 1$ -ое состояние. Рассмотрим группу путей, где это состояние есть k . Тогда вероятность этой группы есть

$$r_{ik}(n-1) \cdot p_{kj},$$

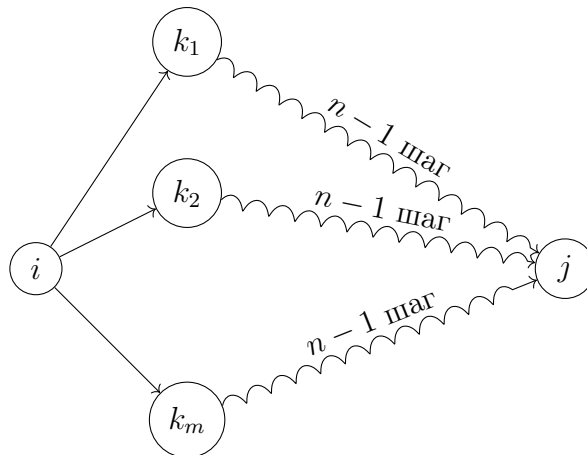
так как вероятность последнего перехода не зависит от всех предыдущих, а только от состояния в момент времени $n - 1$. Так как пути из разных групп не пересекаются, то мы можем просто сложить вероятности этих групп:

$$r_{ij}(n) = \sum_{k=1}^m r_{ik}(n-1) \cdot p_{kj}.$$



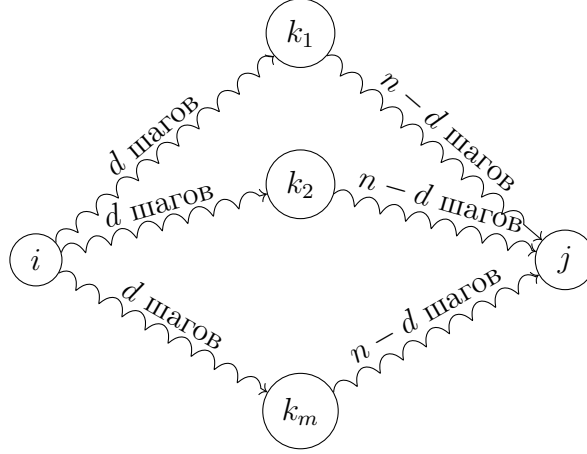
2. Мы также можем разбить все пути на группы по тому, какое состояние было в пути вторым. Группы не пересекаются, поэтому опять можем просто сложить такие вероятности:

$$r_{ij}(n) = \sum_{k=1}^m p_{ik} r_{kj}(n-1).$$



3. Да и вообще можем разбить на группы в зависимости от состояния на любом шаге $d \in [1..n-1]$ и посчитать

$$r_{ij}(n) = \sum_{k=1}^m r_{ik}(d) r_{kj}(n-d).$$



3.1 Стартовое состояние и матрица переходов

Стартовое состояние X_0 в марковском процессе бывает либо случайным, либо детерминированным. Однако даже в во втором случае удобно считать, что начальное состояние случайно, просто оно равно какому-то конкретному состоянию с вероятностью 1.

Так как у нас есть m состояний, мы можем задать стохастический вектор π^* длины m . В этом векторе все элементы удовлетворяют равенству $\pi_i^* = \Pr[X_0 = i]$. Мы упомянули, что этот вектор *стохастический*, то есть все его элементы неотрицательны, и их сумма равна единице.

После введения этого вектора нам также удобно рассмотреть матрицу переходов

$$P = (p_{ij})_{i=0..m}^{j=0..m} = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & \dots & p_{0m} \\ p_{10} & p_{11} & \dots & p_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{m0} & p_{m1} & \dots & p_{mm} \end{pmatrix}.$$

Опять, мы говорим, что матрица *стохастическая*, если ее строчки являются стохастическими векторами.

Какова вероятность оказаться в состоянии j после первого шага процесса? По формуле полной вероятности это

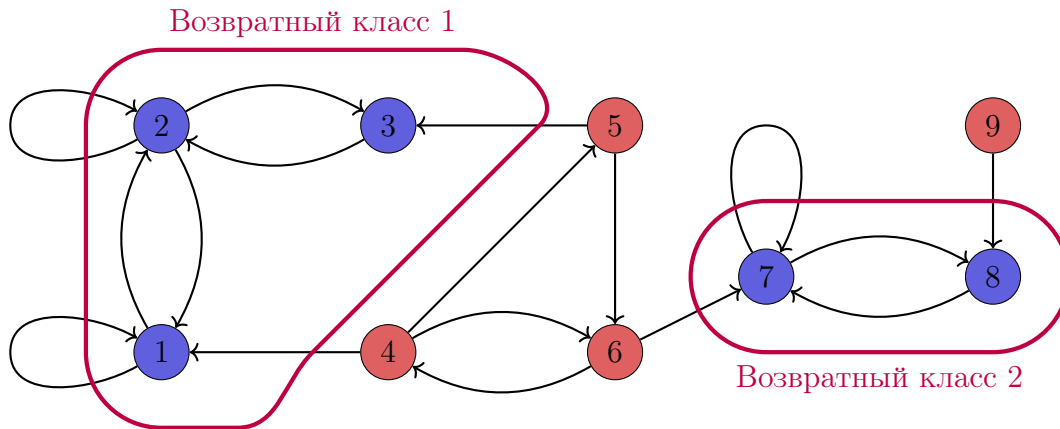
$$\sum_{i=1}^m \Pr[X_0 = i] \Pr[X_1 = j \mid X_0 = i] = \sum_{i=1}^m \pi_i^* p_{ij}$$

Другими словами, эти вероятности образуют вектор, равный $\pi^* P$. Легко показать, что через t шагов вероятности быть в каждом состоянии цепи складываются в вектор $\pi^* P^t$. При этом элементы матрицы P^t равны $r_{ij}(t)$. Все это громоздкий, но тривиальный ЛинАл, поэтому мы его опустим.

4 Возвратные и невозвратные состояния. Периодические состояния

Возвратным называется такое состояние, что если мы в нем находимся, то с вероятностью 1 мы посетим его еще раз в будущем. Другими словами, это такие состояния, для которых если есть путь в какое-то состояние i , то из этого состояния точно есть путь обратно. *Невозвратными* называются все остальные состояния.

Рассмотрим на примере. На приведенном ниже рисунке синим обозначены возвратные состояния, а красным — невозвратные.



Возвратный класс — это множество достижимых друг из друга возвратных состояний. На рисунке можно выделить два класса.

Возвратный класс может быть *периодическим*. Это значит, что для какого-то $d > 1$ его можно разбить на d групп состояний, таких, что все переходы из одной группы ведут в какую-то одну другую группу. На рисунке представлен периодический возвратный класс с $d = 2$.

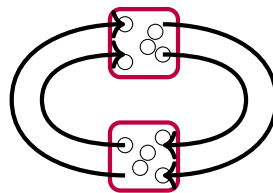
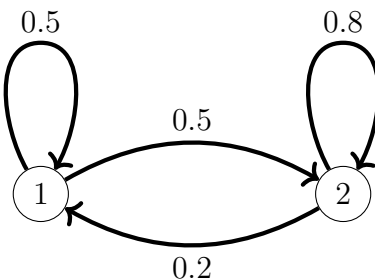


Рисунок с тремя классами проще нарисовать на доске.

5 Стационарное распределение

Рассмотрим следующую простую цепь:

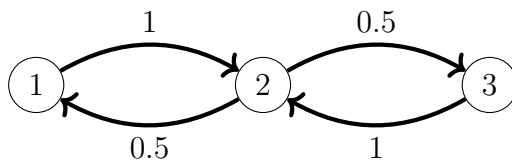


Попробуем посчитать $r_{ij}(t)$

t	0	1	...	100	101
$r_{11}(t)$	1	0.5		$\approx \frac{2}{3}$	$\approx \frac{2}{3}$
$r_{12}(t)$	0	0.5		$\approx \frac{1}{3}$	$\approx \frac{1}{3}$
$r_{21}(t)$	0	0.2		$\approx \frac{1}{3}$	$\approx \frac{1}{3}$
$r_{22}(t)$	1	0.8		$\approx \frac{2}{3}$	$\approx \frac{2}{3}$

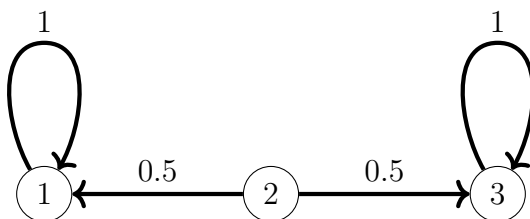
Заметим, что независимо от начального состояния X_0 вероятность находиться в каком-то конкретном состоянии стремится к какому-то числу. Всегда ли это так? Не всегда, вот контрпримеры.

Пример 1. В данной цепи в случае $X_0 = 2$ вероятность находиться в состоянии 2 через четное число шагов есть ноль, а через нечетное есть единица.



Пример 2. В данной цепи пределы $r_{i3}(t)$ очень разнятся:

- $r_{13}(t) \rightarrow 0$
- $r_{23}(t) \rightarrow 0.5$
- $r_{33}(t) \rightarrow 1$



Теорема 1. Если в цепи Маркова есть только один возвратный класс, и он не периодичен, то существует стохастический вектор π , такой что для всех $i, j \in [1..m]$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r_{ij}(t) = \pi_j$$

Мы опустим доказательство (так как оно требует функана и линала) или обсудим его детали позже.

Но рассмотрим такое следствие для цепей Маркова, удовлетворяющим условиям теоремы. У нас есть такое рекуррентное соотношение:

$$r_{ij}(t) = \sum_{k=1}^m r_{ik}(t-1)p_{kj}.$$

Если мы сделаем предельный переход при $t \rightarrow +\infty$, то получим:

$$\pi_j = \sum_{k=1}^m \pi_k p_{kj}.$$

То есть для нахождения всех π_j нам надо решить систему из m линейных уравнений. Но эта система имеет бесконечно много решений: если мы нашли какой-то ненулевой вектор π , то мы можем его также умножить на константу, и он по-прежнему будет удовлетворять систему уравнений. Поэтому нужно дополнительное условие:

$$\sum_{i=1}^m \pi_i = 1,$$

которое следует предельным переходом из равенства

$$\sum_{i=1}^m r_{ji}(t) = 1.$$

Вектор π часто называют *стационарным распределением*.

6 Частота посещений и переходов

Элементы вектора π можно интерпретировать следующим образом. Раз для довольно больших t вероятность находиться в одном конкретном состоянии i близка к π_i , то мы можем рассматривать посещения этого состояния как процесс Бернулли с параметром π_i . То есть для наблюдателя, поставленного в состоянии i за долгий преиод времени будет выполняться следующее:

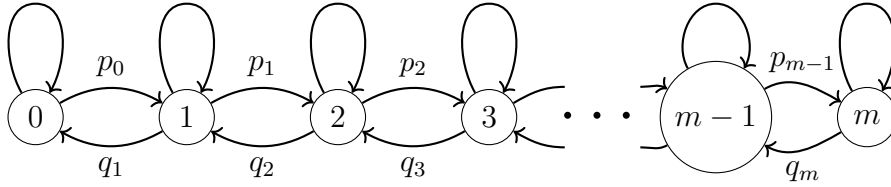
$$\frac{Y_i(t)}{t} \approx \pi_i,$$

где $Y_i(t)$ — число посещений состояния i за первые t шагов.

Мы также можем поставить наблюдателя на конкретный переход $i \rightarrow j$. Этот переход может быть использован только когда мы посетили состояние i , а потом из всех переходов выбрали его. Поэтому если $Z_{ij}(t)$ — число посещений перехода $i \rightarrow j$ за время t , то при больших t мы будем иметь

$$\frac{Z_{ij}(t)}{t} \approx \pi_i p_{ij}.$$

Знание частоты переходов помогает анализировать некоторые процессы, например, так называемый демографический процесс, отображающий численность популяции, которая не может превысить какую-то предельную численность. Примером такого процесса как раз является очередь в супермаркете. Рассмотрим такую марковскую цепь:



Давайте посмотрим частоты переходов из состояния i в состояние $i+1$ и обратно. Логично, что они отличаются не более, чем на $\frac{1}{t}$, при этом равны $\pi_i p_i$ и $\pi_{i+1} q_{i+1}$ соответственно. Таким образом,

$$\begin{aligned} \pi_i p_i &= \pi_{i+1} q_{i+1} \\ \pi_{i+1} &= \pi_i \frac{p_i}{q_{i+1}}. \end{aligned}$$

То есть мы последовательно можем вычислить все π_i из π_0 . Но как найти π_0 ? Да просто из нормировки.

$$\sum_{i=0}^m \pi_i = \sum_{i=0}^m \pi_0 \prod_{j=0}^i \frac{p_j}{q_{j+1}} = \pi_0 \sum_{i=0}^m \prod_{j=0}^i \frac{p_j}{q_{j+1}} = 1.$$

Рассмотрим особый случай, когда у нас все $p_i = p$ и все $q_i = q$. Пусть $\rho = \frac{p}{q}$. В таком случае, можно сказать, что

$$\begin{aligned} \pi_i &= \pi_{i-1} \rho = \pi_0 \rho^i \\ \sum_{i=0}^m \pi_i &= \sum_{i=0}^m \pi_0 \rho^i = \pi_0 \frac{1 - \rho^{m+1}}{1 - \rho} = 1 \\ \pi_0 &= \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{m+1}}, \end{aligned}$$

если $\rho \neq 1$ и

$$\sum_{i=0}^m \pi_i = \sum_{i=0}^m \pi_0 \rho^i = \pi_0 (m+1) = 1$$

$$\pi_0 = \frac{1}{m+1},$$

В случае, когда $p < q$ (то есть $\rho < 1$), а m достаточно велик, чтобы мы могли пренебречь ρ^{m-1} , то мы получаем:

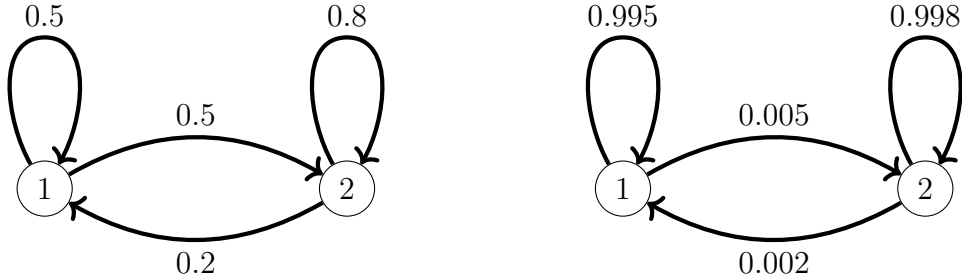
$$\pi_0 = 1 - \rho.$$

Заметим, что при этом вероятность того, что размер популяции равен i , падает экспоненциально с ростом i . И мы можем легко посчитать ожидаемый размер популяции в далеком будущем, то есть когда распределение станет достаточно близким к π :

$$E[X_i] \approx \sum_{i=0}^m i \pi_i = \sum_{i=0}^m i (1 - \rho) \rho^i = E[\text{Geom}(1 - \rho) - 1] = \frac{\rho}{1 - \rho}.$$

7 Скорость сходимости

Рассмотрим пример двух марковских цепей:



С помощью приема с приравниванием частот переходов влево и вправо, мы можем показать, что у обеих одно и то же стационарное распределение:

$$\pi_1 \cdot 0.5 = \pi_2 \cdot 0.2$$

$$\pi_1 \cdot 0.005 = \pi_2 \cdot 0.002,$$

Откуда с учетом нормировки элементов π мы находим $\pi = (\frac{2}{7}, \frac{5}{7})$.

Но насколько быстро мы сходимся к этому распределению? Можно ли сказать, что через 100 шагов мы будем близки к нему?

Для ответа на этот вопрос сначала заметим, что скорость сходимости точно будет разной. Заметим, что в первой цепи мы перемещаемся между расстояниями довольно

часто, два перемещения мы делаем ожидаемо за $\frac{1}{0.5} + \frac{1}{0.2} = 7$ шагов. То есть за 100 мы сделаем что-то вроде 28 перемещений между состояниями. Это значит, что вероятностная масса довольно хорошо “перемешается” между состояниями цепи. Во второй же цепи мы едва ли сделаем одно перемещение, значит, за 100 шагов распределение будет примерно таким же, каким оно было в начале.

Помашем руками чуть строже, чтобы понять, что происходит с распределением. Вспомним, что матрица переходов P — стохастическая. Если допустить, что у нас нет невозвратных состояний, то она еще и попадает под теорему Перрона-Фробениуса, из которой мы знаем, что ее самое большое по модулю собственное число равно единице и имеет одномерное собственное подпространство. Упорядочим в таком случае все собственные числа матрицы P по модулю:

$$1 = \lambda_1 > \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots$$

При этом если мы можем разложить вектор начального распределения по базису $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ из собственных векторов матрицы P , где вектор $e_1 = \pi$, то можем заметить следующее:

$$\pi^* P^t = \sum_{i=1}^m a_i \lambda_i^t e_i = \pi + \sum_{i=1}^m a_i \lambda_i^t e_i.$$

Так как все $|\lambda_{i>1}| < 1$, то модуль каждого вектора в сумме падает как минимум пропорционально λ_2^t . Данные рассуждения можно расширить на матрицы с невозвратными состояниями.

Таким образом, мы можем увидеть, что сходимость к стационарному распределению происходит со скоростью c^t , где $c < 1$ и равна второму собственному числу матрицы P .

8 Необходимая пропускная способность сети

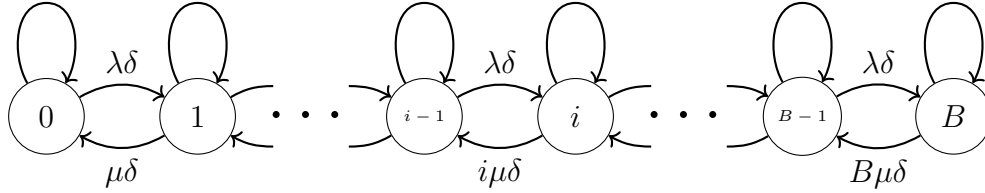
Следующая задача была сформулирована Эрлангом. Пусть у нас есть деревня, и мы хотим связать ее телефонной связью с внешним миром. Для этого нам надо провести в эту деревню B линий связи. То есть одновременно вести телефонный разговор с внешним миром смогут не более B человек в деревне. При этом мы хотим выбрать число B таким образом, чтобы оно не было слишком большим (так как дорого вести слишком много линий), но с другой стороны, мы не хотим, чтобы люди из деревни слишком часто не могли звонить из-за перегруженности линии.

Для этого рассмотрим такую (несколько упрощенную по сравнению с реальным миром) модель. Пусть звонки, поступающие в деревню (или исходящие из нее) образуют собой процесс Пуассона с интенсивностью λ , и продолжительность каждого телефонного разговора следует экспоненциальному распределению $\text{Exp}(\mu)$. Второе допущение грубовато, так как вероятность 1-2-секундного разговора меньше, чем вероятность, например, 10-11-секундного разговора в реальной жизни (ну или сколько

там надо, чтобы понять, что хочет звонящий). но мы воспользуемся данным приближением. На самом деле, продолжительность звонка в реальном мире хорошо приближается распределением Эрланга.

Для решения задачи выбора числа линий B давайте разобьем время на маленькие промежутки длиной δ . Тогда вероятность начала звонка в каждый момент времени будет примерно равна $\lambda\delta$. При этом вероятность окончания звонка зависит от того, сколько звонков одновременно сейчас идет. Вспомним пример с экспоненциальными лампочками. По аналогии представим каждый звонок как процесс Пуассона с интенсивностью μ , и будем считать, что звонок заканчивается при первом же событии в процессе. Если мы хотим узнать, когда закончится первый из i звонков, мы можем слить эти процессы, получив процесс Пуассона с интенсивностью $i\mu$ и посчитать время первого события в нем. Таким образом, можно сказать, что вероятность, что какой-то звонок закончится через маленький промежуток времени δ , примерно равна $i\mu\delta$.

Теперь мы можем построить цепь Маркова, которая при достаточно малых δ неплохо приближает происходящее.



По тому, что мы творили на прошлой паре, мы можем вычислить вектор π , к которому в долгосрочной перспективе сходится распределение в данной цепи. Это можно сделать по формуле:

$$\pi_i = \pi_0 \prod_{j=0}^i \frac{p_j}{q_j} = \pi_0 \prod_{j=0}^i \frac{\lambda\delta}{j\mu\delta} = \pi_0 \frac{\lambda^i}{\mu^i i!}$$

При нормировке замечаем, что

$$\pi_0 = \left(\sum_{i=0}^B \frac{\lambda^i}{\mu^i i!} \right)^{-1} = f(B, \lambda/\mu).$$

И теперь мы можем сказать, что вероятность того, что когда мы звоним, все линии заняты, равна π_B .

Рассмотрим пример с конкретными числами. Пусть $\lambda = 30$ звонков в минуту, а $\mu = \frac{1}{3}$, то есть средняя продолжительность звонка 3 минуты. Рукомаханиями мы можем понять, что за время среднего звонка происходит 90 новых звонков, то есть в среднем у нас занято одновременно 90 линий. Но нам нужно больше линий, чем в среднем, иначе вероятность того, что все линии заняты будет достаточно велика.

Если все точно посчитать, получим, что для того, чтобы $\pi_B \leq 0.01$, нам надо

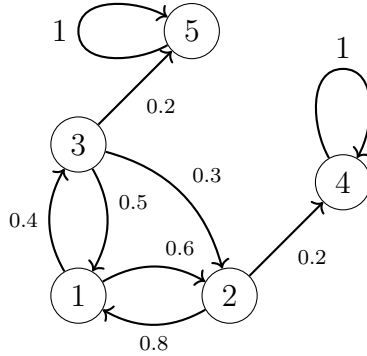
$$\pi_B \approx \pi_0 \frac{(\lambda/\mu)^B}{B!} \leq 0.01,$$

что достигается при $B \geq 106$, что можно посчитать напрямую.

9 Поглощающие состояния

Поглощающими называются возвратные состояния i , такие, что $p_{ii} = 1$. Можно воспринимать их как возвратные классы, состоящие только из одного состояния.

В цепях может быть несколько поглощающих состояний. В таком случае нас может интересовать вопрос, а каким именно мы поглотимся. Рассмотрим пример, в котором все возвратные классы тривиальны, то есть включают в себя ровно одно (поглощающее) состояние.



В данной цепи есть два поглощающих состояния: 4 и 5. Как понять, в каком мы закончим? Это сильно зависит от того, в каком мы начнем. Например, начиная в состоянии 2 у нас неплохой шанс перейти в состояние 4, в то время как из состояния 3 мы намного вероятнее перейдем в состояние 5. Обозначим как a_i вероятность того, что мы закончим в состоянии 4, если начнем в состоянии i . По идее, это суммарная вероятность всех путей, ведущих из состояния i в состояние 4. Но с такой точки зрения ее очень сложно посчитать. Но можно посчитать с помощью формулы полной вероятности.

Заметим, что вероятность a_2 — это вероятность того, что мы перейдем прямо в состояние 4 плюс вероятность того, что мы сначала перейдем в состояние 1, а оттуда где-то в будущем попадем в 4. Другими словами,

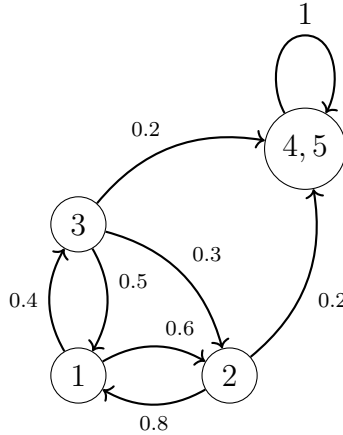
$$a_2 = 0.2 + 0.8a_1.$$

Повторив рассуждение для всех непоглощающих состояний получаем систему линейных уравнений

$$a_i = \sum_{j=1}^m p_{ij} a_j.$$

9.1 Время до поглощения

Как посчитать время до того, как мы будем поглощены каким-то состоянием? Вообще считать время до поглощения конкретным поглощающим состоянием — это гиблое дело, так как есть ненулевая вероятность, что мы можем быть поглощены другим поглощающим состоянием, а значит, матожидание искомого времени есть бесконечность. Поэтому обычно нас интересует матожидание времени до того, как мы будем поглощены хоть каким-то поглощающим состоянием. Для этого мы можем объединить все поглощающие состояния в одно поглощающее мегасостояние, перекинув в него все соответствующие вероятности переходов.



Посчитаем теперь время T_i до того, как мы будем поглощены, если стартуем в состоянии i на примере состояния 2. Для этого воспользуемся формулой полного матожидания. с вероятностью 0.2 мы поглотимся за 1 шаг, а с вероятностью 0.8 мы перейдем в состояние 1 и нам надо будет еще ожидаемо столько же времени, как если бы мы начинали в состоянии 1. Отсюда получаем:

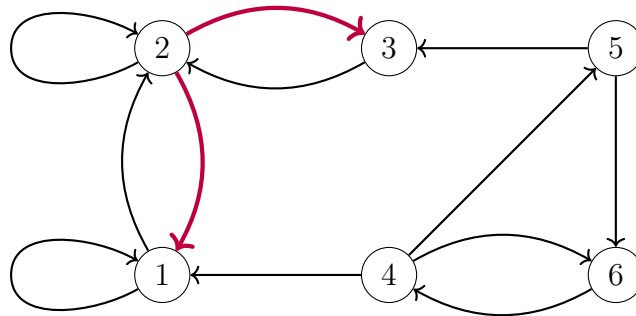
$$E[T_2] = 0.2 \cdot 1 + 0.8(1 + E[T_1]).$$

Повторив это для всех уравнений, получаем:

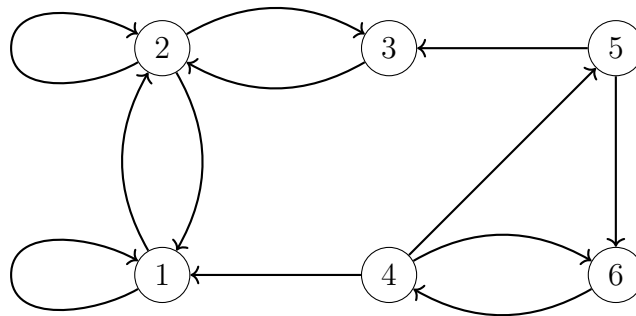
$$E[T_i] = \sum_{j=1}^m p_{ij}(1 + E[T_j]) = 1 + \sum_{j=1}^m p_{ij} E[T_j]$$

9.2 Время ближайшего посещения возвратного состояния

Допустим, нам интересно, как посчитать ближайшее время до того, как мы посетим какое-то возвратное состояние. Заметим, что эта задача имеет смысл только при наличии одного возвратного класса, так как иначе есть шанс, что мы закончим в другом классе, и тогда ожидаемое время будет бесконечностью. Например, на рисунке ниже мы хотим узнать, когда мы посетим состояние 2.



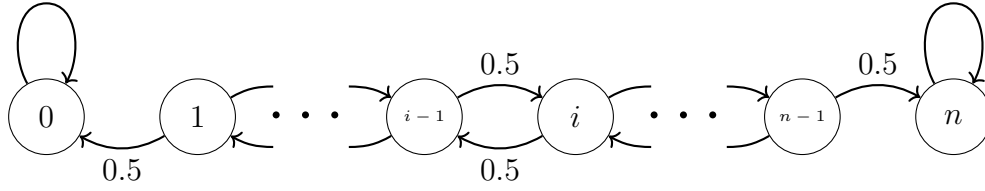
Заметим, что переходы, исходящие из состояния 2 никогда не встретятся на наших путях до него. Поэтому достаточно перенаправить все эти переходы в само состояние 2, то есть сделать его поглощающим. Тогда чтобы посчитать время до ближайшего посещения этого состояния, нам надо всего лишь посчитать время до поглощения этим состоянием.



9.3 Пример с игроком

Рассмотрим такую задачу. Игрок играет в честную игру, где вероятность выигрыша равна 0.5 и каждый раз он делает ставку в 1 доллар. Он заканчивает игру, когда он разорится или когда у него будет n долларов. Какова вероятность, что он закончит игру с n долларами?

Цепь Маркова, описывающая состояние игрока, выглядит так:



Можно составить такую систему уравнений.

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = 1 \\ a_i = 0.5a_{i-1} + 0.5a_{i+1} \end{cases}$$

Из соображений, что вероятности являются средними арифметическими своих соседей и что они растут от 0 до n , легко предположить и проверить, что $a_i = \frac{i}{n}$. То есть если мы начинаем игру с i долларов в кармане, мы можем сказать, что вероятность заработать n долларов есть $\frac{i}{n}$. Заметим, что это значит, что матожидание финального состояния игрока есть $0 \cdot (1 - \frac{i}{n}) + n \cdot \frac{i}{n} = i$. То есть причестной игре мы ожидаемо ничего не выиграем, сколько бы у нас ни было денег.

Как долго мы будем в игре? Объединим поглощающие состояния и посчитаем матожидание до поглощения из системы уравнений.

$$\begin{cases} T_0 = T_n = 0 \\ T_i = 1 + 0.5T_{i-1} + 0.5T_{i+1} \end{cases}$$

Решением будет $T_i = i(n - i)$.

Можем сделать все то же самое для нечестной игры, если вероятность выигрыша есть $p \neq 0.5$. Тогда обозначив $\rho = \frac{1-p}{p}$, получим:

$$a_i = \frac{1 - \rho^i}{1 - \rho^n}$$

$$T_i = \left(\frac{\rho + 1}{\rho - 1} \right) \left(i - n \frac{1 - \rho^i}{1 - \rho^n} \right).$$