ДЗ 12
(Непротиворечивая трансфинитность)

Владимир Латыпов
donrumata03@gmail.com

Содержание

1 Распространение противоречия 3
2 Перенос индукции из метатеории в $\mathcal{S}_\infty$ 3
3 Бесконечное доказательство 4
4 Modus Ponens 5

1 Распространение противоречия

Условие 1: Покажите, что, если $\underset{\infty}{\vdash} \neg(\alpha \vee \neg\alpha)$, то $\underset{\infty}{\vdash} 1 = 0$.

α и $\neg\alpha$ получаем через обращение правила Де Моргана.

Показаваем с помощью схемы аксиом 10и которая доказуема в ФА, а значит её аналог из $\mathcal{S}_\infty$:

$$\frac{\alpha \quad \neg\alpha}{\beta}$$

доказуем в $\mathcal{S}_\infty$.

Теперь применим это правило к α и $\neg\alpha$, и $\beta = „1 = 0“$

2 Перенос индукции из метатеории в $\mathcal{S}_\infty$

Условие 2: Покажите $\underset{\infty}{\vdash} \forall a.\forall b.a + b = b + a$.

Сначала покажем, что при каждом $a \equiv \overline{x}$,

$$\underset{\infty}{\vdash} \forall b.\overline{x} + b = b + \overline{x}$$

.

Для этого докажем для всех y утверждения вида $\underset{\infty}{\vdash} \overline{x} + \overline{y} = \overline{y} + \overline{x}$. И воспользуемся бесконечной индукцией для формулы $\varphi_{x(y)} = \overline{x} + \overline{y} = \overline{y} + \overline{x}$.

Теперь воспользуемся бесконечной индукцией ещё раз — по a: получим требуемое.

3 Бесконечное доказательство

НЕПРАВИЛЬНО: может быть доказательство конечного порядка с бесконечной индукцией (так как посылки могут иметь одинаковый номер)!

Идея от Штукена: использовать ту же формулу, но сказать, что раз мы хотим перебрать все доказательства, получив квантор всеобщности, нужно следовать за ходом каждого и опровергнуть его, а доказательства могут быть неограниченной длины. $\longrightarrow$ суммарная длина будет бесконечна.

Условие 3: Постройте утверждение, доказательство которого не может иметь порядок, меньший ω.

То есть нужно утверждение, которое не докать без бесконечной индукции.

Заметим, что доказательство, использующее только остальные, легко передалать в доказательство в формальной арифметике:

- Каждое из верных арифметических (предметных) выражений легко доказывается за конечное число шагов.
- $$\frac{\neg\alpha[x := \theta] \vee \delta}{(\neg\forall x.\alpha) \vee \delta}$$

  — транслируется в

  $$\frac{\alpha[x := \theta] \rightarrow \delta}{(\forall x.\alpha) \rightarrow \delta}$$

  или

  $$\frac{\neg\delta \rightarrow \neg\alpha[x := \theta]}{\neg\delta \rightarrow \neg(\forall x.\alpha)}$$

  , а тут — дедукция + дедукция обратно + контрапозиция + схема аксиом 11.
- Слабые правила, сечение, ... — полнота КИВ.

Тогда возьмём утверждение $\forall x.\neg\omega(x, \overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$.

Оно не доказуемо в формальной арифметике, так как она непротиворечива.

4 Modus Ponens

Условие 4: Покажите, что если $\underset{\infty}{\vdash} \alpha$ и $\underset{\infty}{\vdash} \neg\alpha \vee \beta$, то $\underset{\infty}{\vdash} \beta$. (правило Modus Ponens — источник появления сечений в перенесённых доказательствах из формальной арифметики).

$$\frac{\frac{\alpha}{a \vee \alpha} \qquad \neg\alpha \vee \beta}{a \vee \beta}$$