# Топологический анализ данных и операторы Ходжа (теория)

**Владимир Латыпов**
donrumata03@gmail.com

**Vladimir Latypov**
donrumata03@gmail.com

## Содержание

# 1 Общая топология

## 1.1 Сумма топологических пространств

## 1.2 Произведение топологических пространств

Произведение, поддерживающее бесконечный случай: элементы имеют вид

$$f : S \to \bigcup_{s \in S} X_s \quad f(s) \in X_s$$

Т.е. для каждого пространства выдаёт один элемент из него.

> **Определение 1.2.1** *(Произведение Тихонова)* Самая слабая топология, на которой проекторы непрерывны (предбаза $\{p^{-1}(U), U \in \tau_i\}$).
>
> Эквивалентно: Открытые множества — все наборы из открытых, $\{i \mid U_i \neq X_i\}$ — конечно.

Коробочная топология — более сильная, там нет требования про конечность количества не совпадающих со всем пространством множеств. Но для конечного случая они эквивалентны.

**Теорема 1.2.2** *(Тихонов)* Если пространства компактны, то их тихоновское произведение — тоже.

> **Определение 1.2.3** *(Универсальное свойство)* для класса пространств, обладающим свойством — пространство, обладающее свойством, т.ч. любое другое из этого класса вкладывается в него (вложение — непрерывная инъекция).

**Теорема 1.2.4** *(Тихоновский куб)* $[0, 1]^M$ — универсально для Тихоновских пространств с базой мощности $M$ (где $M$ — ординал).

## 1.3 Симплициальные гомологии

Абстрактный симплициальный комплекс — это как матроид без аксиомы замены. И частный случай гиперграфа.

- Тривиальная геометрическая реализация комплекса — в пространстве $\mathbb{R}^{|V|}$: $v_0 \mapsto \mathbb{0}, v_i \mapsto e_i$
- Т.: Можно уложить комплекс в $\mathbb{R}^{2k+1}$ без самопересечений

# 2 Гомологии

Интуитивное описание гомологичных циклов: https://math.stackexchange.com/questions/880841/motivation-behind-definition-of-homologous-cycles

$\Delta$-комплекс: обобщение триангуляции. Теперь симплексы могут быть не только треугольниками. Как и многообразие, набор отображений из тривиальных пространств (симплексов на сей раз). Теперь пространство строится как факторизация по совпадающим частям комплексов (тех, где образ ограничения симплекса на его *face* совпадает с образом другого отображения размерности на 1 меньше).

Сингулярные гомологии: берутся вообще все возможные симплициальные комплексы, а не только из триангуляции. И тоже факторизуются циклы по границам.

## 3 Декомпозиция Ходжа

- Коцепи — функционалы над комплексами. Коцепной оператор — переводит их в другую сторону.
- Размерность ядра Лапласиана — число Бетти.
- Разложение Ходжа: на градиентный (образ $c_0$ при $\delta_1^*$), гармонический (ядро полного Лапласиана) и соленоидный (образ $c_2$ при $\delta_2$) компоненты. У первого ротор = 0, зато дивергенция = полной дивергенции. У второго — ротор = 0, дивергенция = 0. У третьего — дивергенция = 0, ротор = полному ротору.
- На основе этих условий можно посчитать разложение. Находим потенциальную функцию.