

# Домашнее задание. Практика 3

27 февраля 2023

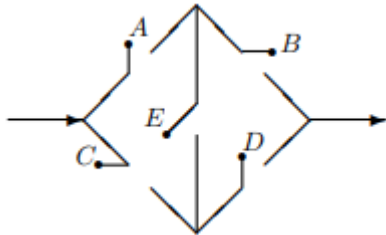
## 1 Каким идти на экзамен

Среди  $N$  экзаменационных билетов  $n$  «счастливых». Студенты подходят за билетами один за другим. У кого больше вероятность взять «счастливый» билет: у того, кто подошел первым или у того, кто подошел вторым? Или у того, кто подошел третьим?

## 2 Случайное копирование

В урне  $m$  белых и  $n$  черных шаров. Наудачу извлекается шар; он возвращается обратно и, кроме того, в урну добавляется  $k$  шаров одного с ним цвета. Эта процедура повторяется несколько раз. Чему равна вероятность того, что в  $s$ -й раз будет извлечен белый шар?

## 3 Случайный диодный мост с замыканием



Каждое из реле  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  и  $E$ , работающих независимо, открывается и закрывается с вероятностями  $p$  и  $1 - p$  соответственно. Какова вероятность того, что сигнал, поданный на вход, будет получен на выходе? Какова условная вероятность того, что реле  $E$  было открыто, если на выходе был получен сигнал?

## 4 Диффуз потребления

К линии электропередачи подключено  $n$  механизмов. Вероятность того, что механизм, потребляющий энергию в момент времени  $t$ , прекратит её потребление до момента  $t + \Delta t$ , равна  $\alpha\Delta t + o(\Delta t)$  при  $\Delta t \rightarrow 0$ . Если в момент времени  $t$  механизм не потребляет энергии, то вероятность того, что он станет её потреблять до момента  $t + \Delta t$ , равна  $\beta\Delta t + o(\Delta t)$ . Составить дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют вероятности  $P_r(t)$  того, что в момент времени  $t$  энергию потребляют  $r$  механизмов.

## 5

Пусть  $\Omega_n$  — отрезок  $[0, 1]$  с борелевской  $\sigma$ -алгеброй  $F$  и мерой Лебега  $\mathbf{P}$ . Рассмотрим случайные величины  $\xi(\omega) = \sin \omega$  и  $\nu(\omega) = \cos \omega$ . Являются ли они независимыми?

## 6

Есть три заключённых, один из которых случайным образом был выбран для помилования. Решение ещё не объявлено. Один из заключённых попросил стражника назвать непомилованного человека (не его). Стражник назвал имя. Заключённый решил, что с учётом дополнительной информации он может оценить свою вероятность помилования как  $\frac{1}{2}$ . Но его рассуждения не зависят от ответа стражника, что нехорошо, так как сам факт вопроса на вероятность помилования не мог повлиять. Где ошибка в его рассуждениях и что он на самом деле должен был понять про вероятности помилования для трёх заключённых?

*Доп. вопрос.* При каких условиях  $\xi$  и  $\xi^2$  независимы?

## 7 Выпускной

Из ВУЗа выпускаются  $k$  студентов, и они хотят это отметить. В городе есть  $n$  различных заведений, где это можно сделать (театры, музеи и т.д.), но вместимость каждого заведения — не более  $r$  человек. Каждый студент случайным образом равновероятно выбирает одно из заведений и направляется в него. Если оно оказывается заполненным — студента не пускают, и он идет домой отмечать с друзьями онлайн. Определите матожидание числа студентов, отмечавших выпускной дома. Считайте, что другие жители города выбираться в этот день в те же заведения не рискуют.

## 8

Имеются 3 попарно независимых события, которые, однако, все вместе произойти не могут. Предполагая, что все они имеют одну и ту же вероятность

$p$ , определить наибольшее возможное значение  $p$ .

## 9

Доказать, что если события  $A$  и  $B$  несовместны,  $P(A) > 0$  и  $P(B) > 0$ , то события  $A$  и  $B$  зависимы.

Выяснить, какими должны быть события  $A$  и  $B$ , чтобы события  $AB$  и  $A \cup B$  были независимы?