Типовик по линейной алгебре модуль 1: Задание 5 «Аналитическая геометрия в пространстве»

Латыпов Владимир Витальевич,
ИТМО КТ М3138, ***вариант 12***

22 октября 2021 г.

Содержание

1. Формулировка условия

Утверждение 1. Условие таково:

12. Найти общий перепендикуляр к двум скрещивающимся прямым: $x = y = z$ и

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2} \tag{1}$$

Сделать рисунок.

2. Решение

Сначала найдём направляющий вектор искомой прямой: он перпендикулярен обеим направляющим векторам исходных прямых, поэтому равен векторному произведению:

$$\vec{s_h} = \vec{s_1} \times \vec{s_2} = \{1, 1, 1\} \times \{1, -1, 2\} = \{2+1, -(2-1), -1-1\} = \{3, -1, -2\} \tag{2}$$

Теперь для каждой из исходных прямых построим полскость, прохоядщую через неё и содержащую направляющий вектор перпендикуляра.

Для получения нормальных векторов этих плоскостей находим векторное произведение соответствующих пар векторов, которые должны лежать в них:

$$\vec{n_1} = \vec{s_n} \times \vec{s_1} = \{3, -1, -2\} \times \{1, 1, 1\} = \{-1, 5, -4\} \tag{3}$$
$$\vec{n_2} = \vec{s_n} \times \vec{s_2} = \{3, -1, -2\} \times \{1, -1, 2\} = \{4, 8, 2\} \sim \{2, 4, 1\} \tag{4}$$

Затем семплируем точку из каждой прямой и построим через неё и вектор нормали соответствующую плоскость.

Для первой поямой — берём точку $\{0, 0, 0\}$. Для второй — $\{1, 0, 0\}$.

Построим уравнение для первой плоскости:

$$\alpha_1 = plane(n_1, \{0, 0, 0\}) \tag{5}$$
$$D = 0 \tag{6}$$
$$\Rightarrow \alpha_1 : -x + 5y - 4z = 0 \tag{7}$$

…и для второй плоскости:

$$\alpha_2 = plane(n_2, \{1, 0, 0\}) \tag{8}$$

$$\begin{cases} A = 2 \\ B = 4 \\ C = 1 \\ D : A \cdot 1 + B \cdot 0 + C \cdot 0 + D = 0 \Longrightarrow D = -A = -2 \end{cases} \tag{9}$$

$$\Rightarrow \alpha_2 : 2x + 4y + z - 2 = 0 \tag{10}$$

Очевидно, обе полученные плоскости сожержат искомый общий перпендикуляр, поэтому, если пересечение этих плоскостей непусто, то ответ существует, причём он и является этим пересечением.

Пересечём плоскости. Направляющий вектор искомой прямой уже известен (s_h). Осталось найти точку. Для этого найдём хотя бы одно решение системы из уравнений плоскостей.

$$\begin{cases} 2x + 4y + z - 2 = 0 \\ -x + 5y - 4z = 0 \end{cases} \tag{11}$$

Воспользуемся трюком: пересечём одну из плоскостей с противоположной прямой.

$$\begin{cases} 2x + 4y + z - 2 = 0 \\ x = y = z = \xi \end{cases} \tag{12}$$

$$2\xi + 4\xi + \xi - 2 = 0 \tag{13}$$

$$7\xi = 2 \tag{14}$$

$$\xi = \frac{2}{7} \tag{15}$$

Тогда ответом будет прямая, проходящая через эту точку и имеющая направляющий вектор s_h:

$$\begin{cases} x = \frac{2}{7} + 3t \\ y = \frac{2}{7} - 1t \\ z = \frac{2}{7} - 2t \end{cases} \tag{16}$$

3. Иллюстрация

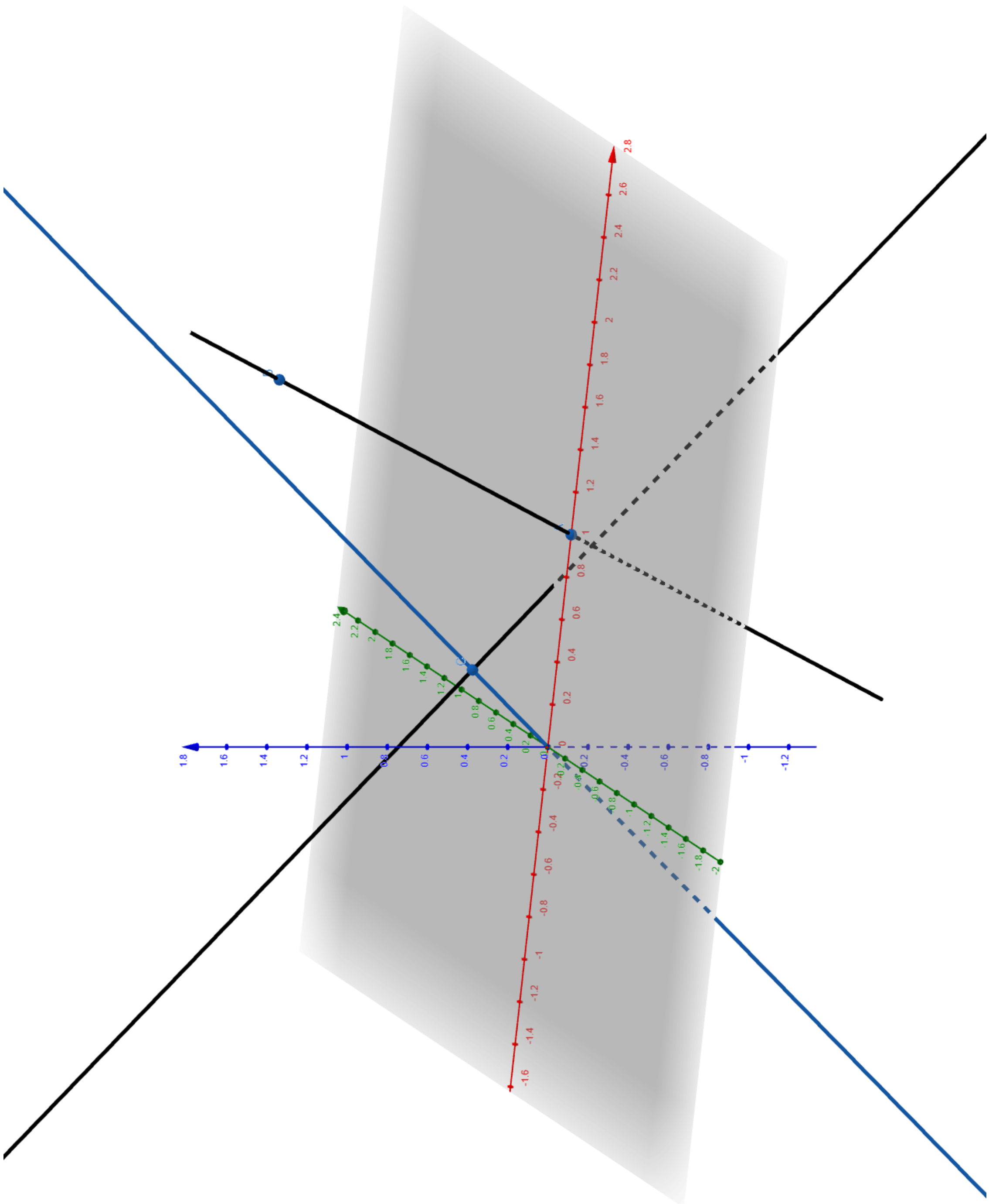

Рис. 1: Чертёж