Типовик по линейной алгебре модуль 2: Задание 1 «Системы линейных алгебраических уравнений»

Латыпов Владимир Витальевич,
ИТМО КТ M3138, ***вариант 12***

12 января 2022 г.

1. Формулировка условия

Утверждение 1. Условие таково:

Решить неоднородную систему линейных уравнений.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = -9 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 4 \\ x_1 + x_3 = 4 \\ 4x_1 - 6x_2 + 4x_3 - 6x_4 + 3x_5 = 4 \end{cases} \tag{1}$$

2. Решение

Приведём расширенную матрицу коэффициентов к трапецевидной форме:

(напоминаю, что $\equiv$ — значок эквивалентности в latex)

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & -1 & 1 & 0 & -9 \\ 2 & -2 & 2 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & -6 & 4 & -6 & 3 & 4 \end{array}\right) \equiv$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 5 & -2 & -9 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right) \equiv$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 5 & -2 & -9 \end{array}\right) \equiv$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -6 & 3 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 5 & -2 & -9 \end{array}\right) \equiv$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 0 & 0 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 5 & -2 & -9 \end{array}\right) \equiv$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 3 - 5t_1 + 2t_2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 - 2t_1 + t_2 \\ 0 & 0 & -3 & -9 - 5t_1 + 2t_2 \end{array}\right) \equiv$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 - \frac{5}{3}t_1 + \frac{2}{3}t_2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 - t_1 + \frac{1}{2}t_2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 + \frac{5}{3}t_1 - \frac{2}{3}t_2 \end{array}\right) \tag{2}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ -1 \\ \frac{5}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Получили частное решение системы плюс линейную оболочку фср — общее решение однородной системы, то есть в сумме общее решение НЕоднородной системы.

$$dim(L) = n - rg(A) \tag{4}$$

$rg(A)$ мы уже попутно вывели, как раз получается, что $2 = 5 - 3$

Проверим, подставив для нескольких значений параметров в уравнение. (умножив матрицы)

1. $t_1 = t_2 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 4 & -6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{5}$$

2. $t_1 = 1, t_2 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 4 & -6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 8 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{6}$$

3. $t_1 = 0, t_2 = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 4 & -6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7/2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{7}$$