Типовик по линейной алгебре модуль 1: Задание 6 «Кривые второго порядка»

Латыпов Владимир Витальевич,
ИТМО КТ M3138, ***вариант 12***

22 октября 2021 г.

Содержание

1. Формулировка условия

Утверждение 1. Условие таково:

12. Оси гиперболы совпадают с осями координат. Гипербола проходит через точки пересечения параболы $x^2 = 2y$ с прямой $x - 2y + 6 = 0$.

Составить уравнение этой гиперболы.

Сделать рисунок.

2. Решение

Для начала найдём эти точки пересечения, решив квадратное уравнение:

$$\begin{cases} x^2 = 2y \\ x - 2y + 6 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} y = \frac{x^2}{2} \\ x - 2 \cdot \frac{x^2}{2} + 6 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

$$x^2 - x - 6 = 0 \tag{3}$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -2, y = \dfrac{2^2}{2} = 2 \\ x = 3, y = \dfrac{3^2}{2} = 4.5 \end{array} \right. \tag{4}$$

То есть гипербола должна проходить через точки $(-2, 2)$ и $(3, 4.5)$.

У параболы, указанной в условии, остаётся только два переметра — настоящая и мнимая полуоси. Найдём их значения, потровав, что гипербола проходит там, где надо.

$$\begin{cases} \frac{(-2)^2}{a^2} - \frac{2^2}{b^2} = 1 \\ \frac{3^2}{a^2} - \frac{\left(\frac{9}{2}\right)^2}{b^2} = 1 \end{cases} \tag{5}$$

За α обозначим a^2, за β — b^2, помним, что оба параметра больше нуля.

$$\begin{cases} 4\beta - 4\alpha = \alpha\beta \\ 9\beta - \frac{81}{4}\alpha = \alpha\beta \end{cases} \tag{6}$$

$$4\beta - 4\alpha = 9\beta - \frac{81}{4}\alpha \tag{7}$$

$$\frac{65}{4}\alpha = 5\beta \tag{8}$$

$$\beta = \frac{13}{4}\alpha \tag{9}$$

$$4\left(\frac{13}{4}\alpha\right) - 4\alpha = \alpha \cdot \frac{13}{4}\alpha \tag{10}$$

$$13 - 4 = \frac{13}{4}\alpha \Longrightarrow \alpha = \frac{9 \cdot 4}{13} \Longrightarrow a = \sqrt{\alpha} = \frac{6}{\sqrt{13}} \tag{11}$$

$$\beta = \frac{13}{4}\alpha = \frac{\cancel{13}}{\cancel{4}} \cdot \frac{9 \cdot \cancel{4}}{\cancel{13}} = 9 \Longrightarrow b = \sqrt{\beta} = 3 \tag{12}$$

Таким образом, уравнение гиперболы:

$$\frac{13}{36}x^2 - \frac{y^2}{9} = 1 \tag{13}$$

3. Иллюстрация

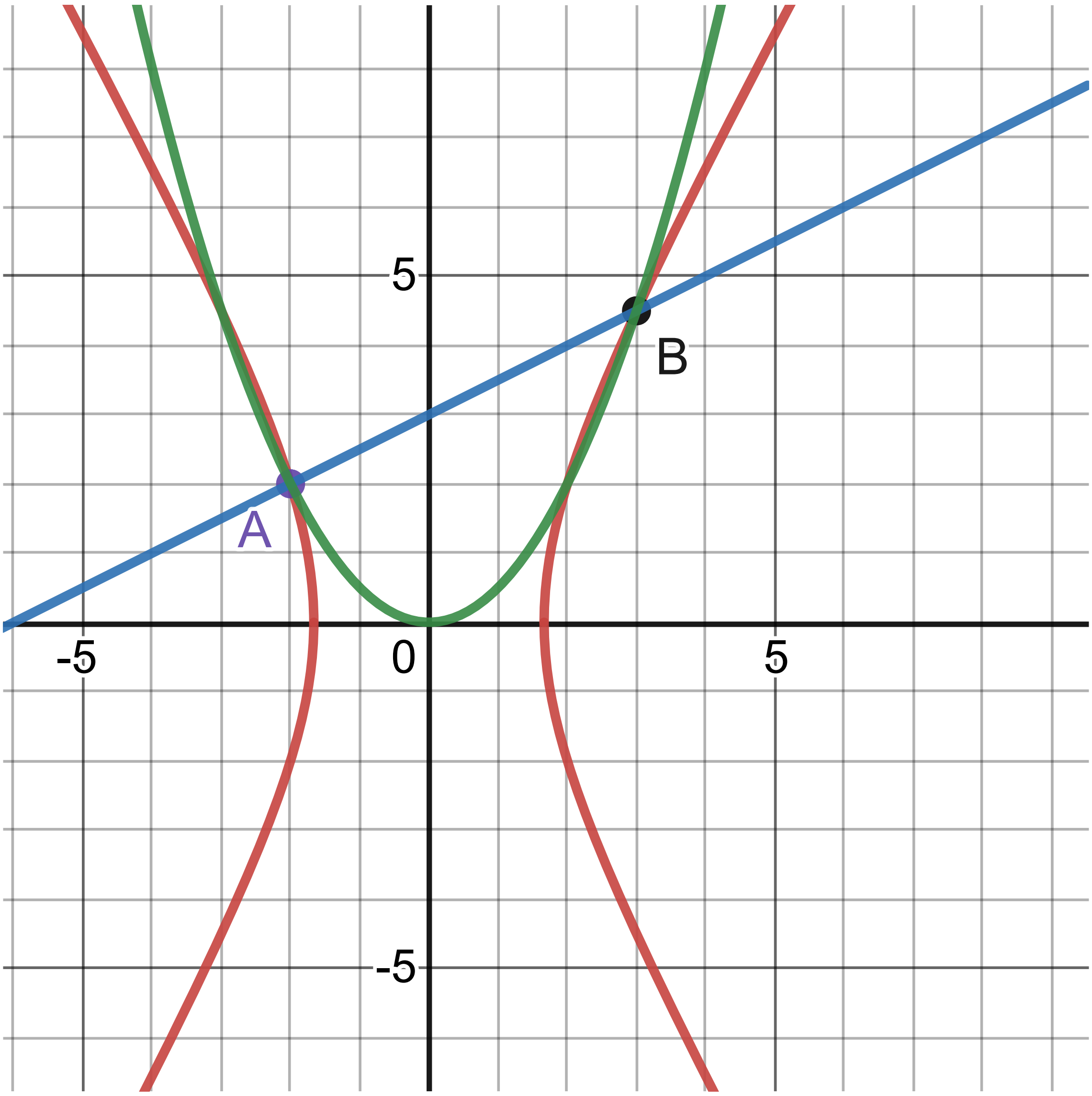

Рис. 1: Чертёж