Экзамен по матлогике (Билет 13)

Владимир Латыпов

donrumata03@gmail.com

Содержание

Условие 1:

- Непротиворечивость (эквивалентные определения, доказательство эквивалентности), ω-непротиворечивость.
- Первая теорема Гёделя о неполноте арифметики.
- Формулировка первой теоремы Гёделя о неполноте арифметики в форме Россера.
- Синтаксическая и семантическая неполнота арифметики.
- Ослабленные варианты ФА: арифметика Пресбургера, система Робинсона.

1 Противоречивости

Определение 1.1 (Противоречивая теория): Для некоторой формулы α:

$$\underset{\mathcal{T}}{\vdash} \alpha \& \neg\alpha$$

Определение 1.2 (Противоречивая теория): Для некоторой формулы α:

$$\underset{\mathcal{T}}{\vdash} \alpha \quad \text{и} \quad \underset{\mathcal{T}}{\vdash} \neg\alpha$$

Определение 1.3 (Противоречивая теория):

$$\underset{\mathcal{T}}{\vdash} A \& \neg A$$

Определение 1.4 (Противоречивая теория): Любая формула доказуема в $\mathcal{T}$

Теорема 1: Определения эквивалентны

Доказательство:

$(1) \Rightarrow (2)$: удаление конъюнкции

$(2) \Rightarrow (1)$: добавление конъюнкции

$(2) \Rightarrow (3, 4)$: По 10и: $\alpha \to \neg\alpha \to \beta$, где β — требуемое.

$(3) \Rightarrow (1)$: Положим $\alpha = A$.

$(4) \Rightarrow (*)$: положим β нужной формулой. Она доказуема. □

Определение 1.5 (ω-непротиворечивая теория): Если для формулы $\varphi(x)$ при $\vdash \varphi(\overline{x})$ для всех $x \in \mathbb{N}_0$ будет:

$$\nvdash \exists x.\neg\varphi(x)$$

2 Первая теорема Гёделя

Формула $\omega_1(\xi, p)$: представление в ФА рекурсивного отношения, в которое входят пары, т.ч. второй элемент — гёделев номер доказательства самоприменимости первого $\vdash \xi(\overline{\ulcorner\xi\urcorner})$.

$\sigma(x) \equiv \forall p.\neg\omega_1(x, p)$ — никто не доказывает самоприменимость x.

Теорема 1:
1. Если ФА непротиворечива, то $\nvdash \sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$
2. Если ФА ω-непротиворечива, то $\nvdash \neg\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$

Доказательство:
- Пусть $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. Возьмём p — ГН этого доказательства. Тогда $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, \overline{p})$ (такое уловие представимости отношение в ФА). По сх. акс. 12: $\vdash \exists p.\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$. А это отрицание $\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$, которое доказуемо. Тогда получится, что ФА противоречива, а мы предположили, что нет. ?!.
- Пусть $\vdash \neg\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. $\Rightarrow \vdash \exists p.\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$.
  - Покажем, что из метатеории можно вытащить конкретный p, который «существует» (т.ч. $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, \overline{p})$).
  - Пусть не так. Тогда для всех доказуемо отрицание, а по ω-непротиворечивости вносим квантор $\exists$ в формулу из метатеории: $\nvdash \exists p.\neg\neg\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$, но оно доказуемо по предположению.

  Тогда это p — ГН доказаетельство самоприменения σ, но тогда доказуемо одновременно $\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$ и $\neg\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. ?!.

□

3 Форма Россера

Избавимся от предположения [ω-]непортиворечивости.

Определение 3.1: ω_2 — как первый, только теперь доказательство само***не***применимости.

Теорема 1: $\rho(x) = \forall p.\omega_1(x,p) \to \exists q.q \le p \& \omega_2(x,q)$. (т.е. если самоприменимость и доказуема, то номер доказательства само***не***применимости — меньше).

Тогда

$$\nvdash \rho(\overline{\ulcorner\rho\urcorner})$$
$$\nvdash \neg\rho(\overline{\ulcorner\rho\urcorner})$$

4 Синтаксическая и семантическая неполнота арифметики.

Определение 4.1 (Синтаксическая полнота теории): Для любой формулы доказуемо хотя бы что-то из её самой и её отрицания

Определение 4.2 (Семантическая полнота теории): Любая общезначимая формула доказуема (полнота в привычном понимании)

Теорема 1: ФА семантически неполна с моделью как для исчисления предикатов с арифметикой Пеано.

Доказательство: Предъявим верную, но недоказуемую формулу: $\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$.

- Недоказуемо по т. Гёделя. (непротиворечивость ФА — из $\mathcal{S}_\infty$ или формы Россера)
- Верность: Раз недоказуемо, то не существует номера доказательства. Тогда $[\![\forall p.\neg\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})]\!] = \text{И}$.

□

5 Ослабленные варианты ФА: арифметика Пресбургера, система Робинсона.

5.1 Система Робинсона

Взяли те утверждения, которые получены и требуются для доказательства теоремы Гёделя. Довольно слабая штука (даже нет индукции), но достаточно для неполноты.

Оставили $0, (+), (\cdot), (=)$.

Нет схем, количество аксиом конечно.

Аксиомы: https://en.wikipedia.org/wiki/Robinson_arithmetic

5.2 Арифметика Пресбургера

Ещё ослабили, теорема Гёделя недоказуема.

Оставили $0, 1, (+), (=)$.

Но она совсем слабая, нет даже умножения.

Зато разрешима и полна в обоих смыслах.

Аксиомы: https://en.wikipedia.org/wiki/Presburger_arithmetic

6 Задачка

Алгебра Линденбаума: множество высказываний, факторизована по равнодоказуемости в ИИВ.

Условие 2: Введём топологию на алгебре Линденбаума: открытые множества — те, для которых вместе с элементом $[\alpha]_{\mathcal{L}}$ содержатся все большие его, то есть $\alpha \vdash \beta$ (как топология на деревьях, но это будет не дерево, а DAG).

Компактно ли это топологическое пространство?

Замечание: Если берём все меньшие, то в каждом просто будет элемент $A \& \neg A$, оставим только одно множество, оно покрывает всё.

Теорема 1: Да. компактно

Доказательство: Чтобы было покрытие всех формул, в каком-то множестве должно содержаться $A \& \neg A$. Возьмём только его. Это будет подпокрытие из одного элемента. $\square$

Из множества можно выделить «сильные и задающие» — такие, которые не следуют ни из каких других элементов множества (то есть минимальные) — назовём корнями. В худшем случае — во множестве только один корень.

Покрытие такими множествами: любая формула содержится в каком-то элементе покрытия, то есть

Гливенко: α доказуемо в ИИВ $\leftrightarrow \neg\neg\alpha$ — в КИВ. Лемма перед Гливенко: если доказывать в предположении, что верны дизъюнкции $A_i \vee \neg A_i$.

Идея: Попробуем залить бесконечной таблицей истинности ($A_1 \& A_2 \& \ldots$).

Рассмотрим все формулы вида $\varphi_I = \bigvee \{[\neg]A_i\}_{i=1}^{n} \sim \bigvee \{(A_i \vee \neg A_i) \wedge [\neg]A_i\}_{i=1}^{n}$. (Индексируя A, будем получать все валидные символы для пропозициональных переменных).

Лемма 6.2: Ни одна из другой не следует

Какие таблицы истинности следуют из каких? Дизъюнкция следует из конъюнкции. Мы хотим, чтобы не так много следовало.

Доказательство:

Пусть сначала одинаковые множества переменных:

- $\alpha(\{A_i\}) \vdash \beta(\{A_i\})$, если для всех клеток, где верно A, верно и B, то есть сила убывает по множеству единиц.
- Если клетки все кроме одной — единицы, то из неё следует только штука с такой же таблицей истинности.

Есть разные множества формул — таблица распространяется на 0 и 1 аналогично. Возьмём множество переменных

$\square$

Возмём span каждой, то есть то, что следует из неё.

- получим все высказывания, так как для каждого $\neg\neg\alpha$ имеет таблицу истинности, а значит, доказуем для какого-то значения, тогда доказуем и α в ИИВ.
- Если возьмём конечное подпокрытие, то по лемме будет и конечное количество формул $\rightarrow$ будут имена переменных, которые там вообще не упоминаются, пусть такова X, тогда X не покрыли $\rightarrow$ это гарантированно не будет подпокрытием.