

# **Теория чисел (теория)**

**Владимир Латыпов**  
donrumata03@gmail.com

**Vladimir Latypov**  
donrumata03@gmail.com

## Содержание

1 Базовые определения .....	3
2 Идеалы .....	3
3 Евклидовы кольца .....	4

## 1 Базовые определения

**Определение 1.1** (группа): ...

**Определение 1.2** (кольцо): ...

*Замечание:* Будем работать с коммутативными кольцами, преимущественно — с областями целостности

*Пример (многочлены):*

**Определение 1.3** (поле): ...

**Определение 1.4** (область целостности): ...

## 2 Идеалы

**Определение 2.1** (идеал): ...

*Замечание:* Пошло из обобщения понятия делимости, «идеальные делители».

Простой идеал — обобщение простого числа.

**Определение 2.2** (Простой идеал):  $p \trianglelefteq R$  — простой  $\stackrel{\text{def}}{\iff} ab \in p \Rightarrow a \in p \vee b \in p$ .

Эквивалентно:  $ab \equiv_p 0 \Rightarrow a \equiv_p 0 \vee b \equiv_p 0$

**Определение 2.3** (факторкольцо по идеалу): ...

**Определение 2.4** (ОГИ): ...

**Определение 2.5** (нётерово кольцо): ...

**Теорема 1** (Гаусса о нётеровости кольца многочленов над Гауссовым полем): ...

### 3 Евклидовы кольца

**Определение 3.1** (Евклидово кольцо):  $d : R \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}_0$ , тч

1.  $d(ab) \geq d(a)$
2.  $\forall a, b, b \neq 0 \exists q, r : a = bq + r, r = 0 \vee d(r) < d(b)$

Пример:  $\mathbb{Z}, F[x]$

**Теорема 1:** Евклидово  $\rightarrow$  ОГИ

*Доказательство:* Находим  $a$  — минимальный по  $d$ , если нашёлся не кратный, делим с остатком на  $a$ , получаем меньший, противоречие  $\square$

**Определение 3.2** (Факториальное кольцо (UFD — Unique factorization domain)): Область целостности

- Существует разложение на неприводимые множители
- Единственно с точностью до  $R^*$ : если  $x = u \cdot a_1 \cdot \dots \cdot a_n = u \cdot b_1 \cdot \dots \cdot b_m \Rightarrow m = n \wedge a_i = b_{\sigma_i} \cdot w_i, w_i \in R^*$

**Определение 3.3** (Неприводимый элемент):  $a \neq 0, a \notin R^* \quad a = bc \Rightarrow b \in R^* \vee c \in R^*$

**Свойство 3.3.1:** Неприводимость сохраняется при домножении на обратимые ( $r \in R^*$ )

**Определение 3.4** (Простой элемент):  $a \mid bc \Rightarrow a \mid b \vee a \mid c (\Leftrightarrow aR — \text{простой идеал})$

**Теорема 2:** Простой  $\Rightarrow$  неприводимый

*Доказательство:*

! TODO !

□

**Теорема 3:** В факториальном кольце: Неприводимый  $\Rightarrow$  простой

*Доказательство:*

! TODO !

□

**Следствие 3.1:** В факториальном кольце простые идеалы высоты 1 (то есть  $0 \leq q \leq p \Rightarrow q = 0 \vee q = p$ ) являются главными

*Доказательство:* Элемент идеала раскладывается на множители, а по простоте какой-то  $— \in p$ , тогда  $0 \leq \underbrace{(a_i)}_{\text{прост.}} \leq p \rightarrow (a_i) = p$  □

! TODO !

Помечать разделение не лекции красивыми заголовками (как ornament header в latex)

**Теорема 4:** Евклидово  $\Rightarrow$  ОГИ  $\Rightarrow$  Факториальное

! TODO !

Перейти на lemmify

*Доказательство (Евклидово  $\rightarrow$  ОГИ): ...*

□

**Определение 3.5:**  $R^*$  — мультипликативная группа кольца (все, для которых есть обратный, с умножением)

*Доказательство (ОГИ  $\rightarrow$  факториальное):* Схема: следует из двух свойств, докажем оба для ОГИ.

**Лемма 3.5:** В ОГИ: неприводимый  $\rightarrow$  простой

Обобщение ОТА на произвольную ОГА с целых чисел.

Переформулируем: ...

Пусть есть такие элементы, возьмём цепочку максимальной длины, последний — приводим, представим как необратимые, тогда они сами представляются как ..., тогда и он тоже.

**! TODO !**

□

**Определение 3.6:** нснм — начиная с некоторого места

*Замечание:* Нётеровость: не можем бесконечно делить, так как при переходе к множителям идеалы расширяются, но в какой-то момент стабилизируются.

**Теорема 6:**  $R$  факториально  $\Rightarrow R[x]$  — тоже

*Пример:*  $F$  — поле.

$f \in F[x]$  — неприводим.

$\frac{F[x]}{(f)}$  — область целостности, но докажем, что поле.

- $\bar{g} \quad \deg g < \deg f$
- $(f, g) = 1$ , то есть  $1 = fp_1 + gp_2$ ,  $\bar{1} = \bar{f}\bar{p}_1 + \bar{g}\bar{p}_2$

$$\dim_F K = \deg f$$

Можем построить все конечные поля.

$$\mathbb{F}_{p[x]} \ni f, \deg f = m$$

$$\mathbb{F}_{p^m}[x] \ll \mathbb{F}_{p[m]} \frac{(f)}{(f)}$$

Над конечным полем существуют неприводимые многочлены любой степени.

...