# Конспект по линейной алгебре (1-й семестр)

Латыпов Владимир (конспектор)
donrumata03@gmail.com

Виноградов Олег Леонидович (лектор)
olvin@math.spbu.ru

25 сентября 2021 г.

# Содержание

# 1. Введение

Преподаватель: Кучерук Е. А. EMail: kucheruk.e.a@gmail.com

Литература по линейной алгебры:

Геометрия Александров Ильин Позняк Линейная алгебра

# 2. Ключевые определения: обязательно помнить на зачёте

- Векторное произведение векторов
- Определение определителя

# 3. Векторы

Вектор - класс направленных отрезков, определён с точностью до точки приложения.

Линейные операции:

- $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \vec(a) \times \alpha$

Свойства линейных операций/аксиомы линейного пространства:

1. Коммутативность
2. Ассоциативность
3. Существование нулевого элемента (нуль-вектор )
4. Существование противоположного элемента для каждого $\forall \vec{A}$ : $\exists \vec{\vec{A}} : \vec{A} + \vec{\vec{A}} = 0$
5. Ассоциативность умножения вектора на скаляр: $\beta \times (\vec{A} \times \alpha) = \beta \times (\vec{A} \times \alpha)$
6. Дистрибутивность умножения на скаляр относительно сложения чисел: $(\alpha + \beta) \times \vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$
7. Дистрибутивность умножения на скаляр относительно сложения векторов: $(\vec{a} + \vec{b}) \times \alpha = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$

Два вектора коллинеарны $\vec{a} \parallel \vec{b} \Longleftrightarrow \ldots$

Линейная комбинация векторов:

$$\overleftarrow{combination} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \times \vec{v}_i \tag{1}$$

Комбинация векторов тривиальна, если $\forall \alpha_i = 0$ Иначе -- нетривиальная система.

Система векторов линейно независима, если любая нулевая линейная комбинация тривиальна. Иначе система линейно зависима (например, если есть коллинеарные).

Если есть хотя бы один нуль-вектор, система тоже линейно зависима (берём коэффициент 0 при нём).

Если объединить линейно зависимую с любой, получится линейно зависимая.

Если система линейно зависима, один из векторов - линейная комбинация каких-то других.

$$] \ \alpha_n \neq 0 \tag{2}$$

$$\exists x_i : \tag{3}$$

$$\vec{v}_n = \sum \vec{v}_i = \frac{1}{\alpha_n} \tag{4}$$

Пусть есть прямая. На ней: Базис - любой ненулевой вектор.

Пусть есть плоскость. На ней: Базис - любая упорядоченная пара неколлинеарных векторов.

Пусть есть пространствао. На ней: Базис - упорядоченная тройка некомплананых векторов.

$\alpha_i$ - координаты вектора в базисе.

Теорема: Любой вектор пространства может быть разложен по базису, причём единственным образом. Как в пространстве, так и на прямой с полскостью.

Доказательство: Базис - векторы $\vec{e}_i$ Добавим к ним вектор $x$. Так как была

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i \times \vec{e}_i$$

x. Тогда полученная система векторов будет линейно зависимой и вектор x может быть линейно выражен через векторы формула: формула, где формула - некоторые числа. Так мы получили разложение вектора x по базису. Осталось доказать, что это разложение единственно.

Докажем несколько теорем, далее работать будем с координатами.

Следствия теоремы о единственности разложения:

- $\vec{a} = \vec{b} \iff \forall i < n : \vec{a}_i = \vec{b}_i$
- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} \iff \forall i < n : \vec{a}_i + \vec{b}_i = \vec{c}_i$, доказываетсчя через аксиомы линейного пространства
- $\vec{b} = \alpha \times \vec{a}, \alpha \in \mathbb{R} \iff \vec{b}_i = \alpha \times \vec{b}_i$
- $\vec{a} \parallel \vec{b}, \vec{a} \neq \vec{0} \iff \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3} = ... = \alpha \in \mathbb{R}$
- Система коллинеарных векторов ($\geq n + 1$) всегда линейно зависимая (для плоскости либо все коллинеарны, либо 2 неколлинеарных, тогда можно ввести базис, выразив один через другие, для пространства аналогично, только 3 и некомпларнарные)

$\vec{l_1}, \vec{l_2}, \vec{l_3}$ базис $V_3$ $\forall v \in V_3 \exists ! \forall i \in \{\ 1,\ 2,\ 3\ \} \alpha_i \in \mathbb{R} : \vec{}$

## 4. (

nСистема координат на плоскости и в пространстве) говорят, что в $V_3$ введена д.с.к (декартова сис коорд), если в пространстве есть точка O (начало системы коордтнат), зафиксирован базис $\vec{l_1}, \vec{l_2}, \vec{l_3}$ некомпланарные.

Оси кординат - прямые, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов.

Координаты точки - всё равно что координаты радиус-вектора. Геометрически - для нахождения координат проводим (правило параллелограмма) плоскости или вектора параллельные тому, чему нужно.

Координаты вектора = кординаты конца - координаты начала

Задача: Пусть есть вектор, заданный координатами конца и начала ($A = (a_1, a_2, a_3), B = (b_{1,2}, b_3)$). Нужно найти точку $M = (m_1, m_2, m_3)$ : $\frac{AM}{MB} = \frac{\lambda}{\mu}$

Распишем, тогда:

$$m_i = \frac{\lambda b_i + \mu a_i}{\lambda + \mu}$$

Для середины - понятно, что.

В дальнейшем будем рассматривать ортонормированную декартовую систему координат (о.н.д.с.к.). Все единичной длины.

Будем обозначать $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \tag{5}$$

$$a_0 = \frac{\vec{a}}{|a|} = (\frac{a_1}{\sqrt{\cdots}}, \frac{a_2}{\sqrt{\cdots}}, \frac{a_3}{\sqrt{\cdots}}) = (\cos(\alpha), \cos(\beta), \cos(\gamma)) \tag{6}$$

Направляющие коснусы (углов вектора с осями координат)

$$\cos(\gamma) + cos(\beta) + \cos(\alpha) = 1 \tag{7}$$

# 5. Полярная и сферическая система координат

ПСК определяется точкой и **полярным** лучём отсчёта из этой точки.

Связь между полярной и декартовой системой координат.

1. $r = \varphi$ - задаёт спираль Архимеда
2. Лемниската Бернулли:

$$(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2) \tag{8}$$

$$r^4 = r^2(cos^2(\varphi) - sin(\varphi)) = r^2(cos(2\varphi)) \tag{9}$$

$$r = \sqrt{2\varphi} \tag{10}$$

3. ...

# 6. Преобразования координат

## 6.1. Параллельный перенос, сдвиг

Происходит лишь перенос точки приложения

$$\begin{cases} O' = (x_0, y_0, z_0) \ in \ old \ system \\ M = \vec{OM} = (x, y, z) \\ M = \vec{O'M} = (x', y', z') \\ \begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \\ z = z' + z_0 \end{cases} \end{cases} \tag{11}$$

## 6.2. Поворот на плоскости

$$\begin{cases} Old \ - \ OXY \\ New \ - \ OX'Y' \\ M = (x, y) \\ M = (x', y') \\ \begin{cases} x' = r\cos(\varphi) \\ y' = r\sin(\varphi) \end{cases} \\ \begin{cases} x = r\cos(\varphi + \alpha) = ... = x'\cos(\alpha) - y'\sin(\alpha) \\ y = r\sin(\varphi + \alpha) = ... = x'\sin(\alpha) + y'\cos(\alpha) \end{cases} \end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \tag{13}$$

## 6.3. Поворот координат в пространстве

$$\vec{e_1} = (\cos(\alpha_1), \cos(\beta_1), \cos(\gamma_1)) \tag{14}$$

$$\vec{e_2} = (\cos(\alpha_2), \cos(\beta_2), \cos(\gamma_2)) \tag{15}$$

$$\vec{e_1} = (\cos(\alpha_3), \cos(\beta_3), \cos(\gamma_3)) \tag{16}$$

$$x'\vec{e_1} + y'\vec{e_2} + y'\vec{e_3} = x'(\cos(alpha_1)\vec{i} + \cos(alpha_1)\vec{j} + ...) + \tag{17}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_1) & \cos(\alpha_2) & \cos(\alpha_3) \\ \cos(\beta_1) & \cos(\beta_2) & \cos(\beta_3) \\ \cos(\gamma_1) & \cos(\gamma_2) & \cos(\gamma_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \tag{18}$$

# 7. Операции над векторами

## 7.1. Скалярное произведение

**Определение 1** (Скалярное произведение).

$$(a, b) = a \cdot b = |a||b| \cdot cos(ab) \tag{19}$$

**Свойство 1** (Аксиомы скалярного произведения).

1. Симметрия
2. Аддитивное по обоим аргеументам: $|a||b| \cdot cos(ab)$
3. Однородное по обоим аргеументам: $(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \lambda(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \lambda\vec{b})$
4. $(1), (2) \Rightarrow$ линейное по обоим аргументам
5. Положительна определённость: произведение на самого себя всегда $\geq 0$, причём равенство достигается только для нуль-вектора.

## 7.2. Проекция вектора на вектор

**Определение 2** (Проекция вектора на вектор).

$$a, b - vectors \tag{20}$$

$$a_b = a \cdot \cos ab \tag{21}$$

**Замечание.** Скалярное произведение имеет знак!

Чтобы найти кородивнату вектора в прямоугольной системе координат достаточно умножить его модуль на меня.

**Теорема 1** (Аддитивность скалярного произведения).

$$(!)(\vec{a}_1 + \vec{a}_1) \cdot \vec{b} = \vec{a}_1 \cdot \vec{b} + \vec{a}_2 \cdot \vec{b} \tag{22}$$

*Доказательство.* Введём базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ вдоль вектора $\vec{b}$: . ■

Если операция удовлетворяет всем четырём аксиомам, это скалярное произведение.

**Теорема 2.**

$$(\vec{a}, \vec{b}) = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b \tag{23}$$

*Доказательство.* Просто распишем произведение, прдставляя векторы через $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ■

### 7.3. Векторное произведение векторов

**Определение 3.** Упорядоченная тройка векторов - правая, если при вращении первого ко второму буравчик двигается к третьему.

**Определение 4.**

$$vec\_product : (\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \mapsto \mathbb{R}^2 \tag{24}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \overset{\text{def}}{\iff} \tag{25}$$

$|\vec{c}| = |\vec{c}| \cdot |\vec{c}| \cdot \sin(\varphi)$

- $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{a}$
- $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\} -$

**Свойство 2.** $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

$[a; a] = \vec{0}$

$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = 0$

Линейность по обоим аргументам

Длина скалярного произведения - площадь параллелограмма, натянутого на аргументы.

**Теорема 3** (Векторное произмедение в координатах).

$$[\vec{a},\ \vec{b}] = (a_y b_z - a_z b_y,\ a_z b_x - a_x b_z,\ a_x b_y - a_y b_x) \tag{26}$$

Иначе говоря:

$$[\vec{a},\ \vec{b}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \tag{27}$$

*Доказательство.* Заметим, что векторные проивзведения базисных векторов в правом ортонормированном базисе такие:

$$[\vec{i}, \vec{j}] = \vec{k} \tag{28}$$

$$[\vec{j}, \vec{k}] = \vec{i} \tag{29}$$

$$[\vec{k}, \vec{i}] = \vec{j} \tag{30}$$

То есть плюс получается, когда обыный порядок,возможно - со сдвигом

■

## 7.4. Смешанное произведение векторов

**Определение 5** (Смешанное произведение векторов).

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) \tag{31}$$

**Свойство 3** (Свойства смешанного произведения векторов).

1. Произведение равно объёму параллелепипеда со знаком (добавляем минус, если вдруг левая тройка).
2. Смешанное произведение не меняется при циклической перетановке векторов. В противном случае знак меняется на противоположный.
3. $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}])$
4. Аддитивность
5. Однородность
6. $\Rightarrow$ Линейность по любому аргументу (за счёт циклической перестановки - линейность по любому аргументу)

*Доказательство.*
(1) доказывается через нахождение модуля $Sh$
(2) Все тройки либо правые, либо левые одновременно, а модуль - через объём однгого и того же параллелограмма
(3-4) Линейность: ...
■

**Теорема 4.** Смешанное произведение:

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \tag{32}$$

**Теорема 5.** Смешанное произведене = 0 ⇔ векторы компланарны.

*Доказательство.* Так как строчки матрицы - координаты векторов, то равенство определителя нулю соответствует возможности выразить одну из строк, а значит, и один из векторов, через остальные. ■

**Теорема 6.** Вектроное произведение линейно относительно обоих аргументов.

*Доказательство.* Докажем через скалярное произведение самого на себя вектора $\vec{c} = [a_1 + a_2, b] - [a_1, b] - [a_2, b]$, которое равно нулю ...Ass - we can! ■

## 7.5. Двойное векторное произведение

**Определение 6.**
$$[a, b, c] = [a, [b, c]] \tag{33}$$

**Теорема 7.**
$$[a, [b, c]] = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, vecb) \tag{34}$$
Бац минус цаб!

*Доказательство.* Распишем через определители левую часть и по определениям - правую. ■

# 8. Задание прямой и плоскости в декартовой системе координат

**Теорема 8.** Прямая задаётся в линейным уравнением в декартовой системе координат

*Доказательство.* Сначала рассмотрим ту, для которой прямая совпадает с одной из осей. Затем через линейные преобразования перейдём в любую другую. Линейность не испорчена. Профит. ∎

**Теорема 9.** Любое линейное уравнение вида $Ax+By+c=0$ задаёт некую прямую на плоскости.

**Определение 7** (Вектор нормали)**.** Вектор нормали - любой ненулевой вектор, перпендикулярный прямой.

Произвольная точка плоскости $M(x, y)$ принадлежит прямой $\iff$ скалярное проихведение её радиус-вектора и вектора нормали = 0.

Полезная ссылка о видахз уравнения прямой на плоскости: `http://www.cleverstudents.ru/line_and_plane/forms_of_equation_of_line_on_plane.html`

| | Прямая на плоскости | Плоскость | Прямая в пространстве |
|---|---|---|---|
| 1. Общее уравнение | $Ax+By+C=0$ | $Ax+By+Cz+D=0$ | |
| 2. Уравнение в отрезках | $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ | $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ | |
| 3. Через точку и вектор нормали | $(\vec{r}-\vec{r_0})\cdot\vec{N}=0$, если раскрыть, то будет общее | $(\vec{r}-\vec{r_0})\cdot\vec{N}=0$ | |
| 4.1 Параметрическое | $\vec{p}=\vec{M}+t\cdot\vec{S}\Leftrightarrow \begin{cases} x=M_x+t\cdot S_x \\ y=M_y+t\cdot S_y \end{cases}$ | | $\vec{p}=\vec{M}+t\cdot\vec{S}\Leftrightarrow \begin{cases} x=M_x+t\cdot S_x \\ y=M_y+t\cdot S_y \\ z=M_z+t\cdot S_z \end{cases}$ |
| 4.2 Каноническое | $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=t\in\mathbb{R}$ | | $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=t\in\mathbb{R}$ |
| 5. Пересечение двух плоскостей | | | $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ |
| 6. Нормальное уравнение прямой | $n=(\cos(\alpha),\sin(\alpha))$, $\vec{r}\cdot\vec{n_0}=p\Leftrightarrow x\cos(\alpha)+y\sin(\alpha)-p=0$ | $n=(\cos(\alpha),\cos(\beta),z\cos(\gamma))$, $\vec{r}\cdot\vec{n_0}=p\Leftrightarrow x\cos(\alpha)+y\cos(\beta)+z\cos(\gamma)-p=0$ | По факту, нормальное - это когда вектор нормализован, а свобоный член отрицателен - это минус расстояние до начала координат |
| 7. Полярное уравнение | $r-\frac{p}{cos(\varphi-\alpha)}$, где $p$ - расстояние до прямой, $\alpha$ - угол нормали с осью $OX$ | | |

**Замечание.** В случае канонического уравнения все кроме одного параметра типа направляющего вектора могут быть нулями.

**Пример.** Нужно найти уравнение плоскости по двум точкам и прямой, ей параллельной.

Спопоб 1. Вектор нормали - векторное произведение разности точек и вектора прямой. Далее находим смещение $D$ классическим спсобом и получаем общее уравнение плоскости. Способ 2. Когда векторы $\vec{M_1M_2}, \vec{M_1M}, \vec{a}$ компланарны? Когда смешанное произведение = 0. Приравняем определитель соответствубщей матрицы к нулю.

Нас интересуют переоды между типами уравнений.

- Между 4.1 и 4.2 - очевидно
- $5 \to 4$: Находим направляющий вектор через векторное произведение векторов нормали. Далее нужна точка. Для этого найдём пересечение прямой с $z = 0$. $M_0 = (x_0, y_0, 0)$. Решим систему:

$$A_1x_0 + B_1y_0 + D_1 = 0A_2x_0 + B_2y_0 + D_2 = 0 \tag{35}$$

- $1 \to 6$: $\vec{n} = \pm\frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$
  $x \cdot \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} + y\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} + z\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0.$

$$\begin{cases} cos(\alpha) = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \\ sin(\alpha) = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \\ -p = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \end{cases} \tag{36}$$

  , причём +, если $C < 0$, иначе -- минус.

**Пример.** Нужно найти уравнение плоскости по двум точкам и прямой, ей параллельной.

Спопоб 1. Вектор нормали - векторное произведение разности точек и вектора прямой. Далее находим смещение $D$ классическим спсобом и получаем общее уравнение плоскости. Способ 2. Когда векторы $\vec{M_1M_2}, \vec{M_1M}, \vec{a}$ компланарны? Когда смешанное произведение = 0. Приравняем определитель соответствубщей матрицы к нулю.

# 9. Нахождение расстояний в координатах

## 9.1. Расстояние от точки до прямой/плоскости

### 9.1.1. Общее уравнение

Удобно использовать нормальное уравнение, выводим формулу:

$$\rho(p, L) = \text{distance}(ax + by + c = 0, (x_0, y_0)) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{37}$$

#### 9.1.2. По направляющему вектору

$$d = h_{parallelogram} = \frac{|\vec{s} \times \overrightarrow{MM_0}|}{|\vec{s}|} \tag{38}$$

# 10. Взаимные расположения некоторых объектов

## 10.1. Взаимное расположение прямой и плоскости

### 10.1.1. Параллельность или лежание прямой в плоскости

$$\left[\begin{array}{l} L \parallel \alpha \\ L \subset \alpha \end{array}\right. \Leftrightarrow \vec{N} \perp \vec{S} \tag{39}$$

Расстояние в этом случае равно расстоянию от любой точки прямой до плоскости.

### 10.1.2. Пересечение

$$L \cap \alpha = Q \Leftrightarrow \vec{N} \not\perp \vec{S} \tag{40}$$

Для нахождения пересечения:

- Через параметрическое уравнение: решим уравнение, чтобы найти такое $t$, что точка удовлетворяет уравнению плоскости.
- Через уравнение по двум плоскостям. Тогда придётся решать систему из трёх уравнений методом Крамера (4 определителя...)

$$sin(\alpha) = cos(\angle(\vec{N}, \vec{S})) = ... \tag{41}$$

## 10.2. Взаимное расположение прямых на плоскости

### 10.2.1. Параллельность

Пропорциональность направлящих векторов или, что то же самое, параллельность векторов нормали

В этом случае можно искать расстояние, это всё равно что расстояние от одной прямой до любой из точек другой

#### 10.2.2. Некое пересечение

Это всё равно что НЕ параллельность. Можно найти точку пересечения. Способ нахождения зависит от того, как заданы, но всегда очевидный.

Ещё можно найти угол. Находим угол между нормалями или направляющими.

$$cos(\alpha) = cos(\vec{N}_1, \vec{N}_2) = cos(\vec{S}_1, \vec{S}_2) = ... \tag{42}$$

**Замечание.**

#### 10.2.3. Перпендикулярность

Если угол равен $\frac{\pi}{2}$, то есть скалярное произведение соответствущих векторов = 0.

### 10.3. Взаимное расположение плоскостей

#### 10.3.1. Параллельны или равны

Это значит, что векторы нормали пропорциональны

#### 10.3.2. Пересекание

Это значит, что векторы нормали НЕ пропорциональны

### 10.4. Перпендикулярны

Ну, перпендикулярны и перпендикулярны, чего кричишь-то?

$$cos(\angle(\alpha_1, \alpha_2)) = cos(\vec{N}_1, \vec{N}_2) = cos(\varphi) = ... \tag{43}$$

## 10.5. Взаимное расположение прямых в пространстве

### 10.5.1. Параллельность или совпадение

### 10.5.2. Пересечение

### 10.5.3. Скрещивание

## 10.6. Перпендикулярны

Ну, перпендикулярны и перпендикулярны, чего кричишь-то?