

Конспект по математическому анализу (1-й семестр)

Латыпов Владимир (конспектор)
donrumata03@gmail.com

Виноградов Олег Леонидович (лектор)
olvin@math.spbu.ru

23 сентября 2021 г.

Содержание

1	Введение	3
1.1	Множества	3
1.1.1	Определения	3
2	Вещественные числа	3
3	Отображения	3
3.0.1	Инъекция, сюръекция, биекция...	5
3.1	Графики	5
3.2	Операции над функциями	6
3.2.1	Многомерные отображения	6
3.3	Счётные множества	6
4	Последовательности в метрических пространствах	9
4.1	Предел последовательности	9

1. Введение

1.1. Множества

Kurale, Kurale, Kurale, Kurale

1.1.1. Определения

Определение 1 (Множество). X - множество, это аксиома, его метафизическая сущность не подлежит обсуждению.

$$\begin{cases} x \in X \\ x' \notin X \end{cases} \quad (1)$$

Пример. Задания множества:

$$set = \{1, 2, 3\} \quad (2)$$

$$set = \{x | x \in \mathbb{N}\} \quad (3)$$

$$set = \{\{1, 4\}, 898\} \quad (4)$$

Определение 2 (Подмножество).

$$A \subset B \iff \forall a \in A : a \in B \quad (5)$$

2. Вещественные числа

Множество вещественных чисел - множество, удовлетворяющее 16-и аксиомам.

1. Аксиомы поля (9 штук)

3. Отображения

Определение 3 (Отображение). $\exists X, Y - sets, f - rule$ Говорят, что задано отображение, если $f : X \rightarrow Y$ (сопоставляет единственный Y каждому $x \in X$)

Отображение называют f , но оно включает как f , так и X, Y

$$f : X \longrightarrow Y \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} f : X \mapsto Y \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} X \xrightarrow{f} Y \quad (6)$$

Если X, Y - числовые множества, то f - функция. Если Y - числовое множество, X - любое, то это "функционал".

X - область задания, область отправления. Y - множество значений, область прибытия.

$x \in X$ - аргумент, независимая переменная.

Определение 4 (Последовательности). Последовательность - функция натурального аргумента.

Если при этом Y - число, то f - числовая последовательность.

А если $\forall y \in Y : y \in \mathbb{Z}$, то это двусторонняя последовательность.

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \quad (7)$$

Определение 5. Семейство - это то же, что и отображение.

Определение 6 (Естественная область определения). Естественная область определения: то, где выражение имеет смысл.

Определение 7.

$$id_X : X \mapsto X \quad (8)$$

$$f^{-1} \circ = id_X \quad (9)$$

Определение 8 (Образ).

$$B = f(A) = \{y \in Y : \exists x \in A : f(x) = y\} \quad (10)$$

Определение 9 (Прообраз). Прообраз множества B :

$$A = f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\} \quad (11)$$

Определение 10 (Композиция). ...

3.0.1. Инъекция, сюръекция, биекция...

$\hookrightarrow f : X \longrightarrow Y$

Определение 11 (Инъективное отображение). Если $\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) \neq f(x_2)$, то отображение инъективно, *обратимо*.

Определение 12 (Обратимое отображение).

$$f \text{ is reversable} \iff \exists f^{-1} : \dots \quad (12)$$

Определение 13 (Сюръективное отображение). Если $f(X) = Y$, то f сюръективно или *отображение на*.

Определение 14. Если f одновременно и инъективно, и сюръективно, то f - взаимно-однозначное соответствие или *биективно*.

3.1. Графики

Определение 15 (График отображения).

$$\Gamma_f = \{(x, y) : x \in X, y = f(x)\} \subset X \times Y \quad (13)$$

Теорема 1.

$$\Gamma_f \iff f \quad (14)$$

Определение 16. Отображение, сопоставляющее каждому $y \in f(X) \longrightarrow y \in Y$, для которого

$$f^{-1}(x) : f(X) \mapsto X \quad (15)$$

Но что такое f^{-1} ? Прообраз или обратное отображение?

Если обратимо, и имеет значение, то они совпадают

Определение 17 (Сужение, распространение, расширение, приведение).

$$]f : X \mapsto Y, X_0 \subset X \quad (16)$$

$$f|_{X_0} \quad (17)$$

3.2. Операции над функциями

- Сложение: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- Умножение: ...
- Деление: ...
- Вычитание: ...
- ...

3.2.1. Многомерные отображения

f_i - Координатные функции отображения f

3.3. Счётные множества

Если множества конечны, легко сравнить количество элементов. Если одно конечно, другое - бес, то понятно.

А вот вопрос - одинаковы ли бесконечности?!

Определение 18 (Равномощные множества). Множества называют *равномощными* или *эквивалентными (по мощности)*, если \exists биекция (взаимно однозначное соответствие) между ними

Определение 19 (Бесконечное множество). Не равномощно никакому подотрезку натурального ряда \iff никогда не исчерпается.

Замечание. Равномощность множеств - отношение эквивалентности. Существуют классы эквивалентности по мощности.

Пример. Пример равномощных множеств:

- Отрезки (возможно, разных длин)

- Концентрические (и не только) окружности
- ...
- Плоскость и сфера
- Отрезок и плоскость
- Полуинтервал и окружность

Определение 20. A - счётно $\Leftrightarrow A \sim \mathbb{N}$

Эквивалентное определение: можно занумеровать натуральными числами, то есть расположить в виде последовательности

Пример. Положительные, чётные, квадраты натуральных, целые, ... - всё счётные

Теорема 2. Всякое бесконечное множество содержит счётное подмножество

Доказательство. Есть хотя бы один элемент. Обозначим его a_1 , удалим его.
induction ... ■

Теорема 3. Всякое подмножество счётного множества - счётно.

Доказательство. $b_{n+1} = A_{\min(\{n | n \in A_{\text{indexes}}\})}$, *induction* ... ■

Предыдущие 2 теоремы - о бедности натурального ряда.

Определение 21 (Не более, чем счётное (НБЧС)). = пустое, конечное или счётное.

Лемма 1. $\mathbb{N}^n, n \in \mathbb{N}$ - счётное множество

Доказательство. Заполняем матрицу змейкой по диагонали. Для n измерений: *induction* ... ■

Теорема 4. Не более чем счётное объединение (множество индексов НБЧС) не более чем счётных множеств - не более чем счётное.

Доказательство.

$$B = \bigcup_{k=1}^n A_k \quad \text{or} \quad B = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \quad (18)$$

Запишем в матрицу: A_1, A_2, A_1, \dots Получили не более чем множество $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. ■

Теорема 5. Множество \mathbb{Q} - счётно.

Доказательство. Догадайтесь! ■

Теорема 6. Множество $\mathbb{R} \cap [0, 1]$ - несчётно.

Доказательство. Пусть несчётно.

$$[0, 1] = \{x_1, x_2, \dots\} \quad (19)$$

Разобьём отрезок на три части: $[0, \frac{1}{3}]$, $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, $[\frac{2}{3}, 1]$ Рассмотрим отрезок, в котором нет точки x_1 , затем - тот, в котором нет x_2 , деля на три до бесконечности. Получим последовательность вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда по аксиоме о вложенных отрезках $\exists x^* : \forall n : x^* \in [a_n, b_n]$. Если пронумеровали, значит, был некий m , который Но, по построению, мы строили такой подотрезок ■

Следствие 1 (Некоторые множества тоже несчётны). \mathbb{R} - несчётно, так как иначе его бесконечное подмножество было счётно.

- Любого невырожденный отрезок несчётен
- Любого невырожденный интервал, полуинтервал несчётен

Как строить биекцию, если выколотые точки?

Утверждение 1. Если A - бесконечно, а B - не более чем счётно, то $A \sim B$

Свойство 1 (Характеристическое свойство бесконечных множеств).
Если

Определение 22 ($|A| < |B|$). $|A| < |B| \stackrel{\text{def}}{\iff} (\exists \text{bijection } A \leftrightarrow \text{part}(B) \wedge \nexists \text{bijection } A \leftrightarrow B)$

Теорема 7 (Теорема Кантора-Берштейна). Если $A \sim \text{part}(B) \wedge B \sim \text{part}(A)$, то $A \sim B$
(Теорема о том, что мощности можно сравнивать: либо)

Утверждение 2. Множество всех подмножеств имеют мощность бóльшую, чем само множество.

4. Последовательности в метрических пространствах

4.1. Предел последовательности

Определение 23.

$$A = \lim x_n \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0 : \exists N_0 : \forall n > N_0 : |A - x_n| < \varepsilon \quad (20)$$

Определение 24 (Сходящиеся, расходящиеся последовательности).

Пример.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad (21)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A = A \quad (22)$$

Пример.

$$(!) \quad \forall A : \lim \{-1, 1, -1, \dots\} \neq A \quad (23)$$

Предъявим $\varepsilon = 0.1$: $\exists n_1, n_2 : \forall n > n_1 : |A - a_n| < \varepsilon$

Замечание. Если проверено малое эpsilon, можно не проверять большие эpsilon. Например, достаточно проверять для всех $|\varepsilon| < 1$

Замечание. Не обязательно находить самый маленький номер, для данного ε .

Замечание. Одно или оба (из 2, 3) строгих неравенства можно заменить на нестрогие, это не сложно доказать.

Замечание. Если заменить конечное число членов, то сходимость не нарушится и предел не изменится.

Замечание. Последнее неравенство с модулем можно переписать как двойное. Это может быть полезно при некоторых доказательствах. Интервал $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ - ε -окрестность точки A . Тогда можно записать предел словами: Для любой окрестности точки все члены за исключением конечного множества принадлежат этой окрестности.