Решения **теоретических („малых“) домашних заданий**

Математическая логика, ИТМО, M3232-M3239, весна 2023 года

Латыпов Владимир (конспектор)

`t.me/donRumata03`, `github.com/donRumata03`, `donrumata03@gmail.com`

6 марта 2023 г.

Содержание

1. Условная полнота

«Верностью формулы» будем назвывать верность оценки, если значения переменных понятны из контекста.

$\Gamma \vDash \alpha \Rightarrow \Gamma \vdash \alpha$.

Первое, по определению, значит, что «при любой оценке переменных, при которое верны все предпосылки из Γ, верно и α».

Покажем, что тогда $\vDash \gamma_1 \to \gamma_n \to \alpha$.

Действительно, перетаскиваем переменную γ_n направо. Для верности новой формулы достаточно, чтобы при верности $\gamma_1 ... \gamma_{n-1}$ выполнялось $\gamma_n \to \beta$, что верно, так как при ещё и γ_n верно ещё и β.

Тогда, по полноте, существует вывод этой штуки: $\vdash \gamma_1 \to \gamma_n \to \alpha$.

А значит, по теореме о дедукции в простую сторону, существует вывод и $\Gamma \vdash \alpha$.

2. Недоказуемость неинтуитивных высказываний

(a) $\neg\neg A \to A$

$A = \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

$\neg A = \text{Int}\{0\} = \emptyset$.

$\neg\neg A = \text{Int}\,\mathbb{R} = \mathbb{R}$

$\neg\neg A \to A = \text{Int}(\emptyset \cup \mathbb{R}\backslash\{0\}) = \mathbb{R}\backslash\{0\} \neq \mathbb{R}$

(e) $\bigvee_{i=0,n-1} A_i \to A_{(i+1)\%n}$ (эквивалентно $\bigvee_{i=0,n-1} \alpha_i \to \alpha_{(i+1)\%n}$ — такой же вывод)

Если оно выводимо, то выводимо и $(A \to B) \vee (B \to A)$ (выведем для $A, A, ...B$, выведем $A \to A$, применим кучу моенсов, останутся эти две скобки), а эта одна из тех самых штук, от которых мы хотели избавиться.

Было на практике: $A = (0; 1), B = (-inf; 0)|(1; inf)$.

Тогда $A- > B = (-inf; 0)|(1; inf) = B$

$B- > A = (0; 1) = A$

Однако $A \cup B \neq \mathbb{R}$.

3.

...

4. Пропадение полноты

a-c — нужно думать про топологию, хотя бы на $\mathbb{R}$. (можно заметить, что $\begin{cases} \alpha \to \beta \\ \beta \to \alpha \end{cases} \Leftrightarrow$ в топологической интерпретации и на любых множествах (оценках проп. переменных) (достаточно $\mathbb{R}$) оценки импликаций равны $\overset{\text{topology}}{\iff}$ оценки равны).

То есть для опровержения нужно показать, что для любой формулы *найдутся* множества, на которых она ошибается — даёт не то, что эмулируемая связка.

Как? Придумать какие-то инварианты, как в критерии Поста? «Особые» точки (граница) остаются, какие бы формулы мы не предъявляли. Если их конечное число, можно рассматривать конечное количество сегментов между особыми точками (но ведут они себя не как конечные битовые векторы).

Но отрицание из такой системы нельзя исключать даже имея закон исключённого третьего (в некотором виде).

Для опровержения существования такой формулы достаточно показать, что не существует даже выводимой формулы, для которой $\phi(A) \to \neg A$.

Из корректности в топологической модели, для выводимости необходима общезначимость в топологической модели.

Заметим, что оставшиеся функции сохраняют единицу, так что нам не нужен континуальный битовый вектор: просто предъявим $A = \mathbb{R}$, тогда на каждом этапе будет вся прямая и пустого множества никак не получится.