Типовик по линейной алгебре «Канонический вид матрицы. Часть 4»

Латыпов Владимир Витальевич,
ИТМО КТ M3138, ***вариант 10***

25 марта 2022 г.

1. Формулировка условия

Утверждение 1. Условие можно найти здесь: https://drive.google.com/file/d/1S739UJN5bLqxEaGsPdMDfRmLOZEzdFg7/view?usp=sharing

Data section:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -10 & 3 & -5 \\ -4 & 12 & -6 & 4 \\ 4 & 20 & -4 & 10 \\ 12 & 0 & 6 & 4 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$G = \begin{pmatrix} -22 & 20 & 4 & -36 \\ 22 & 4 & 10 & 12 \\ 5 & -19 & -9 & 24 \\ 27 & -13 & 3 & 34 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$P = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & -3 & -2 \\ -3 & 5 & 2 & 2 \\ -6 & 11 & 6 & 4 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$Q = \begin{pmatrix} -26 & -39 & 65 & 13 \\ -18 & -27 & 45 & 9 \\ -16 & -24 & 40 & 8 \\ -26 & -39 & 65 & 13 \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$V = \begin{pmatrix} -5 & 8 & 4 & -10 \\ 5 & -7 & 8 & -5 \\ 0 & -4 & -7 & 4 \\ 2 & 8 & 4 & -17 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 10 & -1 & 10 & 8 \\ -2 & 2 & -1 & -4 \\ 4 & -4 & 10 & 11 \end{pmatrix} \tag{6}$$

2. Нахождение жордановой формы матрицы

Для матриц F и G жорданова форма просто совпадает с диагональной. Остальные сейчас поймём, как выглядят.

3. Матрица P

Для P у нас одно собственное число, и это -1. Так как геометрическая кратность 2, будет две клетки, причём кратность в минимальном многочлене — 3, а это максимальная высота башни. То есть будут клетки размером 1 и 3.

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

4. Матрица Q

Одно собственное число, и это 0. Так как геометрическая кратность 3, будет три клетки, причём кратность в минимальном многочлене — 2, а это максимальная высота башни. То есть будут клетки размером 1, 1 и 2.

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

5. Матрица V

Собственные числа — $-11, -7$. Для каждого кратности в характеристическом и минимальном многочленах 2, а геометрическая — 1, то есть для каждого будет одна башня высотой 2.

$$J = \begin{pmatrix} -11 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \tag{9}$$

6. Матрица W

Собственные числа — $-1, 3, 5$. Для -1 и 5 просто одна единичная клетка, а вот $m(3) = 2$, то есть будет башня высотой 2.

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \tag{10}$$

7. Построение жорданового базиса

Для рассматриваемых матриц построим цепочки из подпространств $\mathfrak{K}_r$. Затем найдём циклические базисы и запишем их в столбцы матрицы перехода.

8. Матрица P

Рассматриваем единственный корень.

$$V_{-1} = \mathfrak{K}_1 = \text{Lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \tag{11}$$

$$\mathfrak{K}_2 = \text{Ker}(\mathcal{P} - (-1)\mathcal{E})^2 = \text{Lin}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \tag{12}$$

$$K_{-1} = \mathfrak{K}_3 = \text{Lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \tag{13}$$

У нас будет один циклический базис, начинающийся с $\mathfrak{K}_3$, то есть длины три, один — начинающийскя с собственного длины один.

Выписывая векторы $\mathfrak{K}_2$ в матрицу и добавляя к ним векторы канонического базиса из $\mathfrak{K}_3$, считая ранг, поймём, какого вектора не хватает.

В целом очевидно, что не хватает $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$.

Будем применять к нему оператор $(\mathcal{P} - (-1)\mathcal{E})$.

Получим, что

$$(j_4, j_3, j_2) = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\3\\-3\\-6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-3\\3\\3\end{pmatrix}\right) \tag{14}$$

Заметим, что если действовать дальше, будет обнуляться.

j_1 получаем из собственного пространства, чтобы он не лежал в найденной башне. Например, $j_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$

Запишем $T = (j_1, j_2, j_3, j_4)$ Получим

$$T_{canonical \to j} = \begin{pmatrix}1 & 0 & -3 & 1\\0 & -3 & 3 & 0\\1 & 3 & -3 & 0\\0 & 3 & -6 & 0\end{pmatrix} \tag{15}$$

Проверим, что

$$T \cdot J \cdot T^{-1} = \begin{pmatrix}-4 & 6 & 3 & 3\\3 & -6 & -3 & -2\\-3 & 5 & 2 & 2\\-6 & 11 & 6 & 4\end{pmatrix} = P \tag{16}$$

Это определённо успех.