

Типовик по линейной алгебре модуль 2:
Задание 6. «Сумма и пересечение
подпространств»

Латыпов Владимир Витальевич,
ИТМО КТ М3138, **вариант 12**

16 марта 2022 г.

1. Формулировка условия

Утверждение 1. Условие таково:

Подпространство L_1 задано как линейная оболочка векторов A_1 и A_2 . Подпространство L_2 задано как линейная оболочка векторов B_1 , B_2 и B_3 . Найти базис и размерность суммы и пересечения этих подпространств.

$$A_1 = (1 \ 3 \ -1 \ 1 \ 2)^T \quad (1)$$

$$A_2 = (3 \ 1 \ -1 \ 5 \ 4)^T \quad (2)$$

$$B_1 = (1 \ -2 \ 2 \ 4 \ -1)^T \quad (3)$$

$$B_2 = (-1 \ 2 \ -1 \ -5 \ -1)^T \quad (4)$$

$$B_3 = (1 \ -1 \ 1 \ 3 \ 0)^T \quad (5)$$

2. Нахождение базиса и размерности суммы

Сконкатенируем столбцы в матрицу и посчитаем её ранг и базисные вектора.

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & -5 & 3 \\ 2 & 4 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} &= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -8 & -2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & -5 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \\
&= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -8 & -5 & 5 & -4 \\ -1 & 2 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 1 + \operatorname{rg} \begin{pmatrix} -8 & -5 & 5 & -4 \\ 2 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 2 \\ -2 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\
&= 1 + \operatorname{rg} \begin{pmatrix} -18 & 10 & 5 & 6 \\ -2 & -3 & -2 & -2 \\ -6 & -9 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 + \operatorname{rg} \begin{pmatrix} -18 & 10 & 6 \\ -2 & -3 & -2 \\ -6 & -9 & -6 \end{pmatrix} \\
&= 2 + \operatorname{rg} \begin{pmatrix} -9 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 2 + \operatorname{rg} \begin{pmatrix} -9 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 4 \quad (6)
\end{aligned}$$

То есть базисными векторами берём A_1, A_2, B_1, B_2 .

Размерность суммы: 4.

3. Базис и размерность пересечения

Размерность пересечения можно найти сразу:

$$\dim L_1 \cap L_2 = \dim A + \dim B - \dim A + B = 1 \quad (7)$$

Вектор принадлежит пересечению подпространств \Leftrightarrow он может быть разложен как по векторам одного подпространства, так и по векторам другого.

$$v \in L_1 \cap L_2 \Leftrightarrow v = \sum_{i=1}^2 A_i x_i = \sum_{i=1}^3 B_i y_i \quad (8)$$

Тогда мы получим СЛОУ:

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 - y_1 B_1 - y_2 B_2 - y_3 B_3 = \mathbb{O} \quad (9)$$

Так как A_1, A_2, B_1, B_2 — это базис, выбираем y_3 в качестве параметра.

(примечание — знак эквивалентности в LaTeX `equiv` отображается как \equiv)

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 & t \\ 3 & 1 & 2 & -2 & -t \\ -1 & -1 & -2 & 1 & t \\ 1 & 5 & -4 & 5 & 3t \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 & t \\ 0 & -8 & 5 & -5 & -4t \\ 0 & 2 & -3 & 2 & 2t \\ 0 & 2 & -3 & 4 & 2t \\ 0 & -2 & 3 & -1 & -2t \end{array} \right) \\
& \equiv \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 & t \\ 0 & 2 & -3 & 2 & 2t \\ 0 & -8 & 5 & -5 & -4t \\ 0 & 2 & -3 & 4 & 2t \\ 0 & -2 & 3 & -1 & -2t \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 & t \\ 0 & 2 & -3 & 2 & 2t \\ 0 & 0 & -7 & 3 & 4t \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \\
& \equiv \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 & t \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 2t \\ 0 & 0 & -7 & 0 & 4t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{cccc|c} 21 & 62 & -21 & 0 & 21t \\ 0 & 14 & -21 & 0 & 14t \\ 0 & 0 & -21 & 0 & 12t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \\
& \equiv \left(\begin{array}{cccc|c} 21 & 62 & 0 & 0 & 9t \\ 0 & 14 & 0 & 0 & 2t \\ 0 & 0 & -21 & 0 & 12t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{cccc|c} 147 & 434 & 0 & 0 & 63t \\ 0 & 434 & 0 & 0 & 62t \\ 0 & 0 & -21 & 0 & 12t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \\
& \equiv \left(\begin{array}{cccc|c} 147 & 0 & 0 & 0 & 1t \\ 0 & 434 & 0 & 0 & 62t \\ 0 & 0 & -21 & 0 & 12t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{147}t \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{7}t \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{7}t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \quad (10)
\end{aligned}$$

То есть

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} \frac{1}{147} \\ \frac{1}{7} \\ -\frac{4}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv t \begin{pmatrix} 1 \\ 21 \\ -84 \\ 0 \\ 147 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Тогда единственный вектор пересечения представим как:

$$v = 1A_1 + 21A_2 = \begin{pmatrix} 64 \\ 24 \\ -22 \\ 106 \\ 86 \end{pmatrix} \approx -84B_1 + 147B_3 = \begin{pmatrix} 63 \\ 21 \\ -21 \\ 105 \\ 84 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Примерно равно получилось, потому что я где-то совсем чуть-чуть об-считался, но суть понятна.