

Типовик по линейной алгебре  
«Канонический вид матрицы. Часть 4»

Латыпов Владимир Витальевич,  
ИТМО КТ М3138, **вариант 10**

25 марта 2022 г.

## 1. Формулировка условия

**Утверждение 1.** Условие можно найти здесь: <https://drive.google.com/file/d/1S739UJN5bLqxEaGsPdMDfRmLOZEzdFg7/view?usp=sharing>

Data section:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -10 & 3 & -5 \\ -4 & 12 & -6 & 4 \\ 4 & 20 & -4 & 10 \\ 12 & 0 & 6 & 4 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$G = \begin{pmatrix} -22 & 20 & 4 & -36 \\ 22 & 4 & 10 & 12 \\ 5 & -19 & -9 & 24 \\ 27 & -13 & 3 & 34 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$P = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & -3 & -2 \\ -3 & 5 & 2 & 2 \\ -6 & 11 & 6 & 4 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$Q = \begin{pmatrix} -26 & -39 & 65 & 13 \\ -18 & -27 & 45 & 9 \\ -16 & -24 & 40 & 8 \\ -26 & -39 & 65 & 13 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$V = \begin{pmatrix} -5 & 8 & 4 & -10 \\ 5 & -7 & 8 & -5 \\ 0 & -4 & -7 & 4 \\ 2 & 8 & 4 & -17 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 10 & -1 & 10 & 8 \\ -2 & 2 & -1 & -4 \\ 4 & -4 & 10 & 11 \end{pmatrix} \quad (6)$$

## 2. Нахождение жордановой формы матрицы

Для матриц  $F$  и  $G$  жорданова форма просто совпадает с диагональной. Остальные сейчас поймём, как выглядят.

## 3. Матрица $P$

Для  $P$  у нас одно собственное число, и это  $-1$ . Так как геометрическая кратность 2, будет две клетки, причём кратность в минимальном многочлене — 3, а это максимальная высота башни. То есть будут клетки размером 1 и 3.

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

## 4. Матрица $Q$

Одно собственное число, и это 0. Так как геометрическая кратность 3, будет три клетки, причём кратность в минимальном многочлене — 2, а это максимальная высота башни. То есть будут клетки размером 1, 1 и 2.

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

## 5. Матрица $V$

Собственные числа —  $-11, -7$ . Для каждого кратности в характеристическом и минимальном многочленах 2, а геометрическая — 1, то есть для каждого будет одна башня высотой 2.

$$J = \begin{pmatrix} -11 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \quad (9)$$

## 6. Матрица W

Собственные числа —  $-1, 3, 5$ . Для  $-1$  и  $5$  просто одна единичная клетка, а вот  $m(3) = 2$ , то есть будет башня высотой 2.

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad (10)$$

## 7. Построение жорданового базиса

Для рассматриваемых матриц построим цепочки из подпространств  $\mathfrak{K}_r$ . Затем найдём циклические базисы и запишем их в столбцы матрицы перехода.

## 8. Матрица P

Рассматриваем единственный корень.

$$V_{-1} = \mathfrak{K}_1 = \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (11)$$

$$\mathfrak{K}_2 = \text{Ker}(\mathcal{P} - (-1)\mathcal{E})^2 = \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (12)$$

$$K_{-1} = \mathfrak{K}_3 = \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (13)$$

У нас будет один циклический базис, начинающийся с  $\mathfrak{K}_3$ , то есть длины три, один — начинающийся с собственного длины один.

Выписывая векторы  $\mathfrak{K}_2$  в матрицу и добавляя к ним векторы канонического базиса из  $\mathfrak{K}_3$ , считая ранг, поймём, какого вектора не хватает.

В целом очевидно, что не хватает  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Будем применять к нему оператор  $(\mathcal{P} - (-1)\mathcal{E})$ .

Получим, что

$$(j_4, j_3, j_2) = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \quad (14)$$

Заметим, что если действовать дальше, будет обнуляться.

$j_1$  получаем из собственного пространства, чтобы он не лежал в най-

денной башне. Например,  $j_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Запишем  $T = (j_1, j_2, j_3, j_4)$  Получим

$$T_{canonical \rightarrow j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

Проверим, что

$$T \cdot J \cdot T^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & -3 & -2 \\ -3 & 5 & 2 & 2 \\ -6 & 11 & 6 & 4 \end{pmatrix} = P \quad (16)$$

Это определённо успех.