Содержание

Часть I
Функциональные последовательности и ряды.

Замечание. В этом разделе будут изучаться последовательности вида $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, где каждая $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ или $f_n\colon X \to \mathbb{C}$.

1 Определение и признаки равномерной сходимости.

Определение 1. Пусть $f_n, f\colon X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Говорят, что последовательность f_n **поточечно сходится** к f на множестве X, если $\forall x \in X$ числовая последовательность $f_n(x)$ сходится к $f(x)$.
На ε-языке:

$$\forall x \in X\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Замечание. Обычно нас интересуют вопросы вида: если все f_n обладают некоторым свойством, обладает ли этим свойством f? А точнее

1. Если каждая f_n непрерывна, непрерывна ли f?
2. Если каждая f_n дифференцируема, дифференцируема ли f? А если так, то стремится ли предел производных к производной предела?
3. Если каждая f_n интегрируема, интегрируема ли f? А если так, то стремится ли предел интегралов к интегралу предела?

На все три вопроса ответ отрицательный, а чтобы утверждения были верны, приходится требовать какую-то более сильную сходимость.

Пример. Контрпример для непрерывности мы можем привести уже сейчас:

$$f_n(x) = x^n \quad x \in [0;1]$$

Тогда $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & x \in [0;1) \\ 1 & x = 1 \end{cases} \notin C[0;1]$

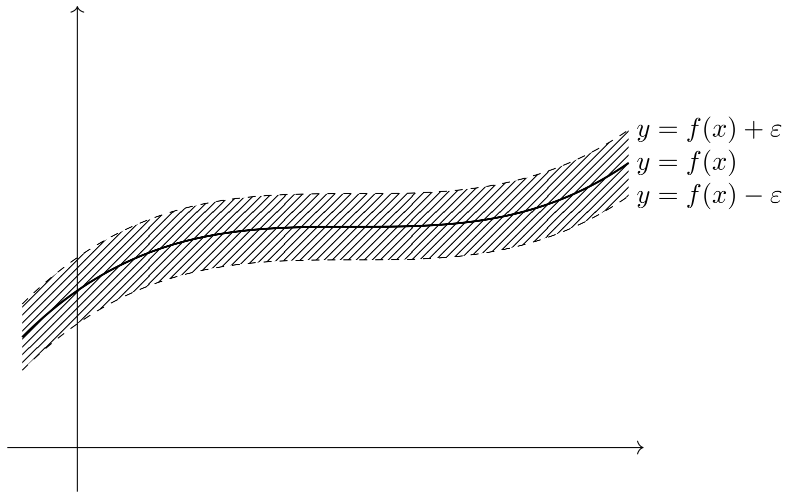
Определение 2. Пусть $f_n, f\colon X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Говорят, что f_n **равномерно сходится** к f, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ \forall x \in X\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

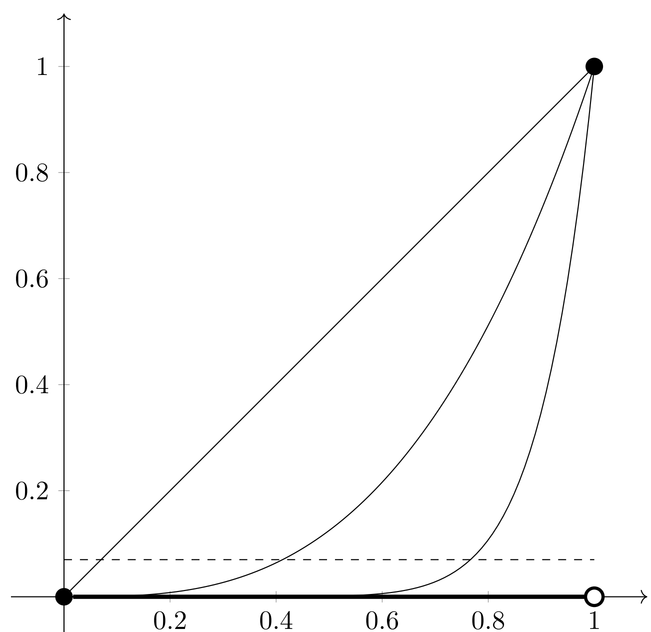
Пишут $f_n \rightrightarrows f$.

Утверждение. *Очевидно, если $f_n \rightrightarrows f$, то $f \to n$. Обратное неверно (примером является пример выше).*

Замечание. Давайте посмотрим, как выглядит условие равномерной сходимости на графике. У нас есть график $y = f(x)$, и есть два подобных ему: $y = f(x) \pm \varepsilon$. Утверждение говорит нам, что для любого ε начиная с некоторого N графики всех функций $f_{n\geqslant N}$ будут **полностью** лежать в этой области.



В нашем же случае с $f_n(x) = x^n$ у функций f_n вблизи единицы (а не в самой единице) происходит резкий рост. И какое бы ε мы не выбрали, любая f_n (даже с достаточно большим номером) рано или поздно вырвется из области $y = f(x) + \varepsilon$.



Пример. Пусть $f_n(x) = \alpha_n$. Тогда, как несложно заметить, что поточечная сходимости, что равномерная равносильны обычной сходимости числового ряда $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Утверждение.

$$f_n \rightrightarrows f \Leftrightarrow \begin{cases} \Re f_n \rightrightarrows \Re f \\ \Im f_n \rightrightarrows \Im f \end{cases}$$

Доказательство оставляется читателю.

Определение 3. Пусть $f_n \colon X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ называется **функциональным рядом**.

Определение 4. Множество $E = \left\{ x \in X \;\middle|\; \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ сходится} \right\}$ называется **множеством сходимости ряда** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$.

Определение 5. Функции $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_n$ называются **частичными суммами функционального ряда** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$.

Определение 6. **Суммой функционального ряда** называется предел частичных сумм.

Определение 7. Если частичные суммы равномерно сходятся к сумме ряда, то говорят, что ряд **равномерно сходится** к своей сумме.
На ε-языке:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n > N \ \forall x \in X \ \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| < \varepsilon$$

Утверждение. *Из предыдущего функциональный ряд равномерно сходится тогда и только тогда, когда его остаток равномерно стремится к нулю.*

Определение 8. Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Тогда равномерной (чебышёвской) нормой f называется величина

$$\|f\| = \|f\|_X = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

Свойство 8.1. *Это действительно норма.*

Доказательство.
1. $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$. Тривиально.
2. $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$. Тривиально, если принять соглашение $0 \cdot \infty = 0$.
3. $\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$. Рассмотрим $x \in X$.

$$|f(x) + g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| \leqslant \|f\| + \|g\|$$

Если перейти в этом неравенстве к супремуму, получится то, что требуется доказать.

□

Замечание. Равномерную норму называют нормой несмотря на то, что норма в наших определениях была функцией с конечными значениями. Вместо того, чтобы не считать её нормой, рассматривают конкретное множество, на котором она принимает конечные значения. Среди них

- $l_\infty(X)$ — множество функций, ограниченных на X с равномерной нормой. Но его рассматривают не так часто, оно не очень интересно.
- Пусть $\mathcal{K}$ — компакт. Тогда рассматривают $C(\mathcal{K})$ — пространство непрерывных на $\mathcal{K}$ функций с равномерной нормой. Тогда
$$\|f\| = \max_{\mathcal{K}} |f|$$

Утверждение.

$$\|fg\| \leqslant \|f\| \|g\|$$

Доказательство. Рассмотрим $x \in X$.

$$|f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| \leqslant \|f\| \|g\|$$

Осталось перейти к супремуму. □

Утверждение.

$$f_n \rightrightarrows f \Leftrightarrow \|f_n - f\| \to 0$$

Иначе говоря, равномерная сходимость равносильна сходимости по равномерной норме.

Замечание. Это позволяет нам не доказывать простейшие свойства равномерной сходимости.

Замечание. Также это позволяет нам легко определять равномерную сходимость. Если мы нашли поточечный предел функциональной последовательности, то можно рассмотреть числовую последовательность $\|f_n - f\|$. Наш поточечный предел является равномерным пределом тогда и только тогда, когда эта числовая последовательность бесконечно мала.

Замечание. Если $f_n, f\colon X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ и $X_0 \subset X$, то

$$f_n \rightrightarrows f(X) \Rightarrow f_n \rightrightarrows f(X_0)$$

В частности, если последовательность не является равномерно сходящейся на подмножестве X, то и на X тоже.

Пример.

a) Рассмотрим уже знакомый нам пример $f_n(x) = x^n$ на $[0;1)$. Тогда поточечный предел равен 0, а предел нормы разностей

$$\|f_n - f\| = \sup_{x\in[0;1)} x^n = 1 \not\to 0$$

b) Отсюда на множестве $[0;1]$ также нет равномерной сходимости

c) А вот на множестве $[0;q] \mid q < 1$ равномерная сходимость есть:

$$\|f_n - f\| = \sup_{x\in[0;q]} x^n = q^n \to 0$$

Свойство 8.1. *Тривиально проверить, что если $f_n \rightrightarrows f$, $g_n \rightrightarrows g$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, то $\alpha f_n + \beta g_n \rightrightarrows \alpha f + \beta g$.*

Свойство 8.2. *Если $f_n \rightrightarrows f$, g ограничена, то $f_n g \rightrightarrows fg$.*

Доказательство.

$$\|f_n g - fg\| = \|(f_n - f)g\| \leqslant \|f_n - f\|\|g\|$$

Это произведение бесконечно малой на ограниченную. □

Теорема 1 (Критерий Больцано-Коши равномерности функциональных последовательностей)**.** *Пусть X — множество, $f_n\colon X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Тогда $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится на X тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n, l > N\ \forall x \in X\ |f_n - f_l| < \varepsilon$$

Определение 9. Последняя формулировка называется **равномерной сходимостью в себе** и обозначается также

$$\|f_n - f_l\| \underset{n,l\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Доказательство.

$\Rightarrow$. Пусть $f_n \rightrightarrows f$. Тогда для $\varepsilon > 0$ подберём $N(\frac{\varepsilon}{2})$, то есть такое N, что

$$\forall n > N\ \forall x \in X\ |f_n - f| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Тогда это N подойдёт для равномерной сходимости в себе.

$\Leftarrow$. Если $\forall x\ \{f_n(x)\}$ сходится в себе, то и просто сходится (по полноте $\mathbb{R}(\mathbb{C})$). Обозначим предел через $f(x)$. Осталось доказать, что эта поточечная сходимость также равномерная.
А для этого можно взять определение равномерной сходимости в себе и устремить $l \to \infty$. Получим как равномерную сходимость к f.

□

Теорема 2 (Критерий Больцано — Коши равномерной сходимости функциональных рядов)**.** *Пусть* $f\colon X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$*. Тогда ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ *равномерно сходится на* X *тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in X\ \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| < \varepsilon$$

Доказательство. Очевидно из предыдущего. □

Следствие 0.1. *Если ряд равномерно сходится, то его общий член равномерно стремится к нулю.*

Доказательство. Возьмите в теореме 2 $p = 1$. □

Пример.

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \mid |x| < 1$$

При этом на $[0;1)$ и тем более, на $(-1;1)$ сходимость неравномерна по следствию 0.1.

Теорема 3. *Пространство* $l_\infty(X)$ *полно.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset l_\infty(X)$. Она сходится в себе, а следовательно равномерно сходится в себе. По теореме 1, $\{f_n\}$ равномерно сходится к некоторому пределу f. Если f ограничена, то мы докажем полноту.
Последовательность $\{f_n\}$ сходится в себе, значит ограничена, то есть $\exists K \in (0; +\infty)\ \forall n \in \mathbb{N}\ \|f_n\| \leqslant K$. Отсюда

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in X\ \|f_n(x)\| \leqslant K$$

Перейдя к пределу по n, получим ограниченность $f(x)$. □

Теорема 4 (Признак Вейерштрасса равномерной сходимости рядов)**.** *Пусть* $f_n\colon X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|f_n\| < +\infty$*. Тогда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_n$ *равномерно сходится на* X*.*

Доказательство. Возьмём $\varepsilon > 0$ и из критерия Больцано-Коши для числовых рядов подберём N такое, что

$$\forall n > N\ \forall p \in \mathbb{N}\ \sum_{k=n+1}^{n+p} \|f_k\| < \varepsilon$$

Утверждается, что это же N подойдёт нам и сюда. Рассмотрим $x \in X$.

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} \|f_k\| < \varepsilon$$

□

Следствие 0.1. *Пусть* $f_n\colon X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $a_k \in \mathbb{R}$*. Тогда, если выполнено*

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \forall x \in X\ |f_k(x)| \leqslant a_k \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty$$

то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ *равномерно сходится на* X*.*

Доказательство. Несложно заметить, что $\|f_k\| \leqslant a_k$. В таком случае в силу признака сравнения $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|f_k\| < +\infty$. □

Замечание. Вообще следствие также называют признаком Вейерштрасса.

Замечание. В частности, в качестве наименьших возможных a_k подходят $\|f_k\|$.

Пример.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^\alpha} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k^\alpha} \quad \alpha > 1$$

равномерно сходятся на $\mathbb{R}$ так как

$$\left\|\frac{\cos kx}{k^\alpha}\right\| < \frac{1}{k^\alpha} \quad \left\|\frac{\sin kx}{k^\alpha}\right\| < \frac{1}{k^\alpha}$$

А ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^\alpha}$, как известно, сходится.

Определение 10. Сходимость по признаку Вейерштрасса называется **мажорированной** или **мажорантной**.

Определение 11. Говорят, что ряд **абсолютно сходится**, если сходится ряд его норм.

Замечание. В условиях признака Вейерштрасса ряд $\sum f_k$ сходится абсолютно, и даже $\sum |f_k|$ сходится равномерно.

Утверждение. *Абсолютная сходимость не влечёт равномерной, а равномерная — абсолютной.*

Доказательство. Для доказательства первого можно взять уже известный нам ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}x^k$, а для доказательства второго — $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{k}$. □

Утверждение. *Более того, существует ряд, сходящийся равномерно, абсолютно, но такой, что ряд из модулей сходится неравномерно.*
Также существует ряд, сходящийся равномерно, абсолютно, с равномерно сходящимися модулями, но при этом сам ряд сходится не мажорируемо.

Утверждение (Ряды в нормированных пространствах). *В полном нормированном пространстве X всякий абсолютно сходящийся ряд сходится.*

Определение 12. Для подобных (полных нормированных пространств) существует название: **банахово пространство**.

Доказательство. Доказательство аналогично такому в признаке Вейерштрасса. □

Утверждение. *Пусть $f_n\colon X \to Y$, где Y — нормированное пространство. Определения равномерной сходимости и равномерной нормы остаются прежними (кроме замены модуля на $\|\cdot\|_Y$). Тогда, если Y полно, все доказанные теоремы остаются верными.*

Утверждение. *Если вместо функциональной последовательности взять функциональное семейство $\{f_t\}_{t\in T}$ и $t_0 \in T$ — предельная точка, то, очевидно*

$$f_t \underset{t\to t_0}{\rightrightarrows} f \text{ на } X \Leftrightarrow \sum_{x\in X}|f_t(x) - f(x)| \xrightarrow[t\to t_0]{} 0$$

Определение 13. Последовательность $\{f_n\}$, $f_n\colon X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ называется равномерно ограниченной, если

$$\exists K \in (0;+\infty)\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in X\ |f_n(x)| \leqslant K$$

или, равносильно

$$\exists K \in (0;+\infty)\ \forall n \in \mathbb{N}\ \|f_n\| \leqslant K$$

Замечание. И является это преобразование по сути своей дискретным вариантом интегрирования по частям.

Лемма 1 (Преобразование Абеля)**.** *Пусть* $a_k, b_k \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $A_k = \sum\limits_{j=1}^{k} a_j + A_0$, $n, m \in \mathbb{Z}_+$, $n < m$. *Тогда*

$$\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k = A_m b_m - A_n b_{n+1} + \sum_{k=n+1}^{m-1} A_k (b_k - b_{k+1})$$

Пусть вдобавок $b_k \in \mathbb{R}$, $\{b_k\}$ *монотонна. Тогда*

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k \right| \leqslant 4 \max_{n \leqslant k \leqslant m} |A_k| \max\{|b_{n+1}|; |b_m|\}$$

Доказательство. Первое утверждение:

$$\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{m} (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=n+1}^{m} A_k b_k - \sum_{k=n+1}^{m} A_{k-1} b_k = \sum_{k=n+1}^{m} A_k b_k - \sum_{k=n}^{m-1} A_k b_k =$$
$$= A_m b_m - A_n b_{n+1} + \sum_{k=n+1}^{m-1} A_k (b_k - b_{k+1})$$

Второе утверждение:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k \right| \leqslant |A_m b_m| + |A_n b_{n+1}| + \sum_{k=n+1}^{m-1} |A_k| |b_k - b_{k+1}| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{n \leqslant k \leqslant m} |A_k| \left(|b_m| + |b_{n+1}| + \sum_{k=n+1}^{m-1} |b_k - b_{k+1}| \right) \leqslant$$
$$\leqslant 4 \max_{n \leqslant k \leqslant m} |A_k| \max\{|b_{n+1}|; |b_m|\}$$

□

Теорема 5 (Признаки Дирихле и Абеля равномерной сходимости рядов)**.** *Пусть* $f_k \colon X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $g_k \colon X \to \mathbb{R}$, $\forall x \in X$ $\{g_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *монотонна.*

Дирихле *Если* $F_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_n$, $\{F_n\}$ *равномерно ограничена на* X, $g \rightrightarrows 0$ *на* X, *то* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k g_k$ *равномерно сходится на* X.

Абель *Если* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ *равномерно сходится на* X, $\{g_n\}$ *равномерно ограничена на* X, *то выполнено то же самое.*

Замечание. Признаки сходимости числовых рядов следуют из этого.

Доказательство признака Дирихле. Пусть $A_0 = 0$. Тогда $A_k = F_k(x)$. Как известно,

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(x) g_k(x) \right\| \leqslant 4 \max_{n \leqslant k \leqslant m} |F_k(x)| \max\{|g_{n+1}(x)|; g_m(x)\}$$

Первое условие признака Дирихле выглядит так:

$$\exists K > 0 \ \forall k \in \mathbb{N} \ \forall x \in X \ |F_k(x)| \leqslant K$$

Выберем $\varepsilon > 0$. По второму условию признака подберём такое N, что

$$\forall n > N\ \forall x \in X\ |f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{4K}$$

Отсюда

$$\forall n, m > N\ \forall x \in X\ \left|\sum_{n=1}^{m} f_k(x)g_k(x)\right| < 4K\frac{\varepsilon}{4K} = \varepsilon$$

□

Доказательство признака Абеля. Сделаем то же самое, но в качестве A_0 возьмём $-\sum\limits_{j=1}^{\infty} f_j(x)$. Тогда $A_k = -\sum\limits_{j=k+1}^{\infty} f_j(x) = -R_k(x)$. Тогда из второго условия признака Абеля

$$\exists L > 0\ \forall k \in \mathbb{N}\ \forall x \in X\ |g_k(x)| \leqslant L$$

Выберем $\varepsilon > 0$. Из первого подберём такое N, что

$$\forall k > N\ \forall x \in X\ |R_k(x)| < \frac{\varepsilon}{4L}$$

Отсюда то же самое, что и раньше. □

Следствие 1.1 (Признак Лейбница)**.** *Пусть X — множество, $g\colon X \to \mathbb{R}$, $\forall x \in X$ $\{g_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ монотонна, $g_n \rightrightarrows 0$ на X. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} g_k$ равномерно сходится на X*

Доказательство. Следствие признака Дирихле с $f_k(x) = (-1)^k$. □

Пример.

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k e^{\mathbf{i}kx} \quad b_k \in \mathbb{R}, b_k \to 0, b_k \text{ убывает}$$

Если $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k < +\infty$, то $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k e^{\mathbf{i}kx}$ сходится на $\mathbb{R}$ по Вейерштрассу. (Даже без монотонности b_k.)
В противном случае воспользуемся признаком Дирихле для $g_k(x) = b_k$, $f_k = e^{\mathbf{i}kx}$. То что $g_k \rightrightarrows 0$, очевидно, а равномерную ограниченность частичных сумм f_k надо проверять. Пусть $x \neq 2\pi m \mid m \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\sum_{k=0}^{n} e^{\mathbf{i}kx} = \sum_{k=0}^{n} (e^{\mathbf{i}x})^k = \frac{1 - e^{\mathbf{i}(n+1)x}}{1 - e^{\mathbf{i}x}}$$

То есть

$$|F_n(x)| \leqslant \frac{2}{|1 - e^{\mathbf{i}x}|} = \frac{2}{|e^{\mathbf{i}x/2}||e^{-\mathbf{i}x/2} - e^{\mathbf{i}x/2}|} = \frac{2}{|\sin\frac{x}{2}|}$$

Пусть мы рассматриваем сходимость на $[a; b] \subset (2m\pi; 2(m+1)\pi) \mid m \in \mathbb{N}$. Тогда из предыдущего $|F_n(x)| \leqslant \frac{1}{\rho}$, где $\rho = \min_{x \in [a;b]} \left|\sin\frac{x}{2}\right| > 0$, а значит можно применить Дирихле, а значит нужные нам суммы равномерно сходятся на $[a; b]$. Но, вообще говоря, не на $(2m\pi; 2(m+1)\pi)$.
А на подобном интервале надо применить утверждение ниже. Если бы на нём была бы равномерная сходимость, то была бы равномерная сходимость на $[2m\pi; 2(m+1)\pi]$, а это просто не правда, тут он и поточечно не сходится.

Утверждение. *Пусть X — метрическое пространство, $D \subset X$, $f_n \in C(\overline{D})$, $\{f_n\}$ равномерно сходится на D. Тогда $\{f_n\}$ равномерно сходится на $\overline{D}$. Аналогично для рядов.*

Доказательство.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n, l > N\ \forall x \in D\ |f_n(x) - f_l(x)| < \varepsilon$$

Тогда рассмотрим осталось рассмотреть, что с $x_0 \in \overline{D}$. Ну, по определению $\overline{D}$, $\exists \{x_\nu\} \subset D : x_\nu \to x_0$. По написанному выше $|f_n(x_\nu) - f_l(x_\nu)| < \varepsilon$, а значит, устремив $\nu \to \infty$, получим $|f_n(x_0) - f_l(x_0)| \leqslant \varepsilon$, что не совсем то, что нам надо, но тоже сойдёт. □

Пример. Равномерно ли сходится $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}$ на $(1; +\infty)$. Разумеется, нет, в единице он расходится. На любом луче $[\alpha; +\infty] \mid \alpha > 1$ вполне себе равномерно сходится по Вейерштрассу.

Пример. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} x^k$ на $[0; 1)$ сходится равномерно по Абелю:

$$f_k(x) = \frac{(-1)^k}{k} \qquad g_k(x) = x^k$$

С другой же стороны, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^k}{k} x^k\right| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ равномерно на $[0; 1)$ не сходится (иначе должен сходиться в единице).

Вот он, равномерно абсолютно сходящийся ряд с неравномерно сходящимися модулями.

Пример.

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x}{1 + (xk \ln k)^2} \quad x \in \mathbb{R}_+$$

Обозначим $k \ln k$ за A, а Ax обозначим за t. Несложно заметить, что $t > 0$. Тогда

$$\frac{x}{1 + (xk \ln k)^2} = \frac{x}{1 + (Ax)^2} = \frac{1}{A} \frac{Ax}{1 + (Ax)^2} = \frac{1}{A} \frac{t}{1 + t^2}$$

Нам, как известно, нужно найти супремум (супремум — лучшая мажорантная оценка), а для этого возьмём производную $\frac{t}{1+t^2}$:

$$\left(\frac{t}{1 + t^2}\right)' = \frac{1 + t^2 - 2t^2}{(1 + t^2)^2} = \frac{1 - t^2}{(1 + t^2)^2}$$

Нулю это равно в $t = 1$ ($t > 0$, напомню), а значит в этой точке достигается экстремум. Несложно проверить, что это минимум, а значит

$$\frac{x}{1 + (xk \ln k)^2} = \frac{1}{A} \frac{t}{1 + t^2} \leqslant \frac{1}{A} \frac{1}{1 + 1^2} = \frac{1}{2A}$$

Также значение $\frac{1}{2A}$ достигается (в $x = \frac{1}{A}$, очевидно), а значит это и есть супремум. То есть

$$\sup_{x \geqslant 0} \frac{x}{1 + (xk \ln k)^2} = \frac{1}{2k \ln k}$$

Но есть один нюанс:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2k \ln k} = +\infty$$

То есть расходится ряд и мажорант, а значит ряд, если и сходится, то не мажорируемо.

Теперь почему же он сходится? А давайте оценим остаток чем-то, что, как мы впоследствие узнаем, стремится к нулю. А именно оценим интегралом:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x}{1 + (xk \ln k)^2} \leqslant \int\limits_{n}^{+\infty} \frac{x}{1 + (xt \ln t)^2}\ \mathrm{d}t \leqslant \int\limits_{n}^{+\infty} \frac{x}{1 + (xt \ln n)^2}\ \mathrm{d}t = \left.\frac{\tan^{\text{-}1}(xt \ln n)}{\ln n}\right|_{t=n}^{+\infty} \leqslant \frac{\pi}{2 \ln n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

То есть ряд сходится (на $\mathbb{R}_+$), да ещё и равномерно. А поскольку это положительный ряд, то ещё и абсолютно, и его модули сходятся равномерно. Но не сходится мажорантно.

2 Приложения равномерной сходимости.

Замечание. Задача была поставлена выше: хочется узнавать свойства функции, равной пределу функционального ряда.

Теорема 1 (Перестановка пределов)**.** *Пусть X — метрическое пространство, $D \subset X$, x_0 — предельная точка D, $f_n, f\colon D \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$.*
Пусть $f_n \rightrightarrows f$ на D и $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = A_n \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$.
Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ оба существуют и равны. Равенство также можно записать как

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

Доказательство. Сначала докажем, что первый предел существует и конечен. Нам известно, что Выберем $\varepsilon > 0$ и подберём для него такое N, что

$$\forall n, m > N\ \forall x \in D\ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Если в последнем неравенстве устремить x к x_0, получим, что

$$\forall n, m > N\ |A_n - A_m| < \varepsilon$$

А из этого следует существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$, назовём его A.
Теперь нам осталось доказать, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Из равномерной сходимости знаем следующее:

$$\exists L\ \forall l > L\ \forall x \in D\ |f_l(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Также из определения A

$$\exists K\ \forall k > K\ |A_k - A| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Тогда, если взять $M = \max\{K; L\}$, то

$$|f(x) - A| \leqslant |f(x) - f_M(x)| + |f_M(x) - A_M| + |A_M - A|$$

Первое и третье меньше $\frac{\varepsilon}{3}$, осталось что-то сделать со вторым. Ну, а с ним всё легко, ведь существует окрестность $\dot{V}_{x_0}$, в которой $\forall x \in \dot{V}_{x_0} \cap D\ |f_M(x) - A_M| < \frac{\varepsilon}{3}$. Эта же окрестность подойдёт тут. □

Теорема 2 (Перестановка пределов для рядов)**.** *Пусть X — метрическое пространство, $D \subset X$, x_0 — предельная точка D, $f_k\colon D \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$.*
Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ равномерно сходится к S на D и $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists \lim\limits_{x\to x_0} f_k(x) = a_k \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$.
Тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится и $\exists \lim\limits_{x\to x_0} S(x)$, а также $\lim\limits_{x\to x_0} S(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. Равенство можно записать как

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{k=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x)$$

Доказательство. Примените предыдущую теорему к последовательности частичных сумм. □

Замечание. Напоминание: фраза «x_0 — предельная точка D» не имеет противоречий с бесконечно удалённой точкой (∞ или $\pm\infty$ для $\mathbb{R}$). (Именно поэтому, кстати, доказательство велось на языке окрестностей.)

Следствие 0.1 (Непрерывность предельной функции в точке)**.** *Пусть X — метрическое пространство, $D \subset X$, $x_0 \in D$, $f_n, f\colon D \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$.*
Пусть $f_n \rightrightarrows f$ на D и $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n непрерывна в x_0.
Тогда f непрерывна в x_0.

Следствие 0.2 (Непрерывность суммы ряда в точке)**.** *Пусть X — метрическое пространство, $D \subset X$, $x_0 \in D$, $f_k \colon D \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$.*
$\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ равномерно сходится к S на D и $\forall k \in \mathbb{N}$ f_k непрерывна в x_0.
Тогда S непрерывна в x_0.

Следствие 0.3 (Непрерывность предельной функции на множестве)**.** *Пусть X — метрическое пространство, $D \subset X$, $x_0 \in D$, $f_n, f \colon D \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$.*
Пусть $f_n \rightrightarrows f$ на D и $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n \in C(D)$.
Тогда $f \in C(D)$.

Следствие 0.4 (Непрерывность суммы ряда на множестве)**.** *Пусть X — метрическое пространство, $D \subset X$, $x_0 \in D$, $f_k \colon D \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$.*
$\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ равномерно сходится к S на D и $\forall k \in \mathbb{N}$ $f_k \in C(D)$.
Тогда $S \in C(D)$.

Замечание. Все следствия суммарно называют теоремой **Стокса — Зейделя**.

Утверждение (Равномерная непрерывность предельной функции/суммы ряда)**.** *В следствиях 0.3 и 0.4 поточечную сходимость можно заменить на равномерную.*

Доказательство. Замените конец доказательства теоремы 1 на

$$\exists \delta > 0\ \forall x, x_0 \in D : \rho(x, x_0) < \delta\ |f_M(x) - f_M(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

□

Теорема 3. *Пространстве $C(K)$ полно.*

Доказательство. Пусть нам дана сходящаяся в себе последовательность $\{f_n\} \subset C(K)$. А пространстве $C(K)$ это значит она равномерно сходится в себе. А тогда по критерию Больцано — Коши она равномерно сходится к некоторой функции f, которая, по теореме Стокса — Зейделя, непрерывна. □

Лемма 1. *Пусть X — полное метрическое пространство, X_0 замкнуто в X. Тогда X_0 полно.*

Доказательство. Рассмотрим сходящуюся в себе последовательность $\{x_n\} \subset X_0$. Рассмотрев её как $\{x_n\} \subset X$, получим, что по полноте X она сходится. А по замкнутости X_0 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in X_0$, то есть в X_0 последовательность тоже сходится. □

Замечание. Альтернативным доказательством теоремы 3 могло бы быть следующее рассуждение: l_∞ полно, а $C(K)$ замкнуто в l_∞.

Замечание. Теоремы 1 и 3 вместо со следствиями и замечаниями верны для произвольных отображений со значениями в **полном** нормированном пространстве.

Пример. В теореме 1 равномерная сходимость существенна:

$$\lim_{x\to 1-} \lim_{n\to\infty} x^n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 1-} x^n = 1$$

Пример. Равномерная сходимость является достаточной, но отнюдь не необходимой.

$$f_n(x) = \sqrt{n}x(1-x^2)^n \quad x \in [0;1]$$

Поточечный предел этого чуда равен тождественному нулю. Равномерной же сходимости нет, потому что

$$\|f_n\| \geqslant f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{e} \neq 0$$

Но, тем не менее, предела функций непрерывен

Замечание. Возникает резонный вопрос: а что там с необходимым и достаточным условием для сохранения непрерывности? Эту задачу решили, но критерий там совершенно не удобен, поэтому им не пользуются. Если вам зачем-то интересно, почитайте второй том Фихтенгольца, там это есть.

Замечание. Непрерывность — свойство локальное. Поэтому в следствиях 0.1 и 0.2 нам достаточно проверить равномерную сходимость не на всём множестве D, а в некоторой окрестности x_0, а в следствиях 0.3 и 0.4 достаточно равномерной сходимости в окрестности каждой точки D. Это формально более слабое свойство, нежели на всём D, но мы пока не понимаем, почему это существенно. Впрочем, ещё поймём.

Теорема 4 (Теорема Дини для последовательностей)**.** *Пусть K — компакт, $f_n \in C(K \to \mathbb{R})$, $f_n \leqslant f_{n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n \in C(K)$. Тогда f_n равномерно сходится.*

Теорема 5 (Теорема Дини для рядов)**.** *Пусть K — компакт, $f_k \in C(K)$, $f_k \geqslant 0$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ сходится на K к непрерывной функции. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ равномерно сходится.*

Доказательство. Без доказательства. Желающие могут почитать второй том Фихтенгольца. □

Теорема 6 (Равномерная сходимость и предельный переход под знаком интеграла)**.** *Пусть $f_n \in C[a;b]$, $f_n \rightrightarrows f$ на $[a;b]$. Тогда*

$$\int\limits_a^b f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int\limits_a^b f$$

Или

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n = \int\limits_a^b \lim_{n\to\infty} f_n$$

Доказательство. Для начала, по теореме Стокса —Зейделя $\int\limits_a^b f$ имеет смысл.

Теперь рассмотрим $\varepsilon > 0$ и подберём такое N, что $\forall n > N\ \forall x \in [a;b]\ |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Тогда

$$\left|\int\limits_a^b f_n - \int\limits_a^b f\right| = \left|\int\limits_a^b (f_n - f)\right| \leqslant \int\limits_a^b |f_n - f| < \varepsilon$$

□

Теорема 7 (Почленное интегрирование равномерно сходящихся рядов)**.** *Пусть $f_k \in C[a;b]$, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ равномерно сходится на $[a;b]$. Тогда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_a^b f_k = \int\limits_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k$$

Доказательство. Примените предыдущее. □

Замечание. Вообще говоря теоремы 6 и 7 верны и для $f_n \in R[a;b]$. Для доказательства этого нужно узнать свойство, аналогичное теореме Стокса — Зейделя, но для интегрируемости. Его проще всего доказать, используя критерий Лебега.

Замечание. Иногда возникает необходимость делать предельный переход под знаком интеграла даже когда равномерной сходимости нет, но тут нам нужно узнать про интегрируемость по мере, чтобы изучить, когда так можно.

Пример. Равномерная сходимость существенна для предельного перехода под знаком интеграла.

$$f_n(x) = n^2x(1-x^2)^n \quad x \in [0;1]$$

Как мы знаем, $f_n \to 0$ и $f_n \not\rightrightarrows 0$. Тогда давайте посчитаем интеграл:

$$\int\limits_0^1 n^2x(1-x^2)^n \, \mathrm{d}x = n^2 \int\limits_0^1 x(1-x^2)^n \, \mathrm{d}x = n^2 \frac{(1-x^2)^{n+1}}{(-2)(n+1)}\bigg|_0^1 = \frac{n^2}{2(n+1)} \to \infty$$

Тут ряд интегралов расходится.
А может и сходится:

$$f_n(x) = nx(1-x^2)^n \quad x \in [0;1]$$

Тут сходится к $\frac{1}{2}$.
Пример. Впрочем, тут также равномерной сходимости может быть много. Да что там, поточечной тоже

$$\int\limits_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k \, \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \ln 2$$

В то же время

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_0^1 (-1)^k x^k \, \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2$$

А ряд расходится в $x = 1$.

Теорема 8 (Предельный переход под знаком производной)**.** *Пусть E — ограниченный промежуток. Пусть $f_n, \varphi\colon R \to \mathbb{R}$, f_n дифференцируемы на E и $f_n' \rightrightarrows \varphi$ на E. Пусть $\exists c \in E$ $\{f_n(c)\}$ сходится. Тогда выполнено следующее:*

1. *f_n равномерно сходится на E (к некоторой функции f).*
2. *f дифференцируема на E.*
3. *$f' = \varphi$.*

Последнее равенство можно переписать так:

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'$$

Теорема 9 (Почленное дифференцирование рядов)**.** *Пусть E — ограниченный промежуток. Пусть $f_k\colon R \to \mathbb{R}$, f_k дифференцируемы на E и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k'$ равномерно сходится на E. Пусть $\exists c \in E$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(c)$ сходится.*
Тогда выполнено следующее:

1. *$\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ равномерно сходится на E к некоторой функции S.*
2. *S дифференцируема на E.*
3. *$S' = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k'$.*

Последнее равенство можно переписать так:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'$$

Доказательство. Как обычно, докажем для последовательностей, для рядов получим из частных сумм.
Давайте рассмотрим $x_0 \in E$ и введём последовательность функций $g_n(x) = \frac{f_n(x)-f_n(x_0)}{x-x_0} \mid x \in E \setminus \{x_0\}$. Докажем, что $\{g_n\}$ равномерно сходится в себе:

$$g_n(x) - g_l(x) = \frac{(f_n - f_l)(x) - (f_n - f_l)(x_0)}{x - x_0} \overset{\text{Формула Лагранжа}}{=} (f_n - f_l)'(t) = (f_n' - f_l')(t)$$

То есть

$$\|g_n(x) - g_l(x)\|_{E\setminus\{x_0\}} = \|f_n' - f_l'\|_E \underset{n,l\to 0}{\longrightarrow} 0$$

$\{g_n\}$ действительно равномерно сходится в себе (на $E \setminus \{x_0\}$), а значит равномерно сходится.
А нам-то хочется равномерной сходимости $\{f_n\}$. Ну так пусть $x_0 = c$. Тогда

$$g(x) = \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} \Rightarrow f_n(x) = (x - c)g_n(x) + f_n(c)$$

Известно, что $g_n(x)$ равномерно сходится на $E \setminus \{c\}$, эту равномерную сходимость не нарушает умножение на ограниченную функцию $x - c$, а значит $(x - c)g_n(x)$ равномерно сходится на $E \setminus \{c\}$, более того равномерно сходится на E, ведь в точке c эта функция равна нулю. Хорошо, то есть $f_n(x)$ — сумма двух равномерно сходящихся функций.
О'кей, теперь перейдём ко второму и третему пункту, про дифференцируемость f. Известно, что g_n равномерно сходится. Только теперь мы уже знаем, к чему:

$$\frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

А теперь мы можем воспользоваться теоремой 1. Мы знаем, что

$$\frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} f_n'(x_0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(x_0)$$

Ну, значит и $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(x_0)$. Существует и равно. □

Замечание. Вопрос на внимательность: где тут ограниченность E? В том, что $x-c$ ограничено. Поэтому даже без ограниченности пункты 2 и 3 верны, а пункт 1 остаётся верным на любом ограниченном интервале, лежащем в E.

Пример.

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1 \text{ расходится} \quad \sum_{k=1}^{\infty} 1' = \sum_{k=1}^{\infty} 0 \text{ равномерно сходится}$$

Это то, зачем нужно $\exists c \in E \ \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(c)$.

Пример.

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{n} \quad x \in \mathbb{R}$$

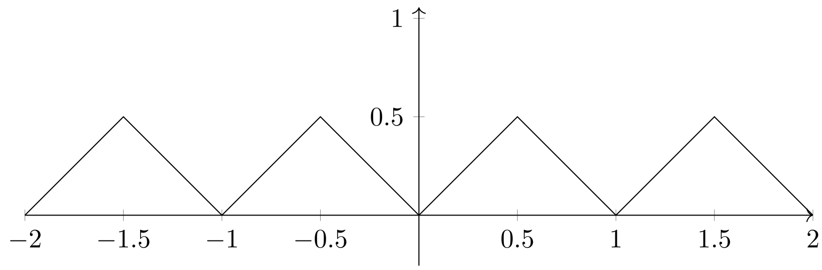
Поскольку $\|f_n\| = \frac{1}{n}$, $f_n \rightrightarrows 0$. Однако, $f_n(x) = \cos nx$, что расходится почти везде. Поэтому равномерной сходимости самих функций не достаточно: последовательность производных может расходиться (как тут), а может и сходиться не туда:

$$f_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad x \in [0;1]$$

$\|f_n\| = \frac{1}{n+1}$, потому $f_n \rightrightarrows 0$. Однако

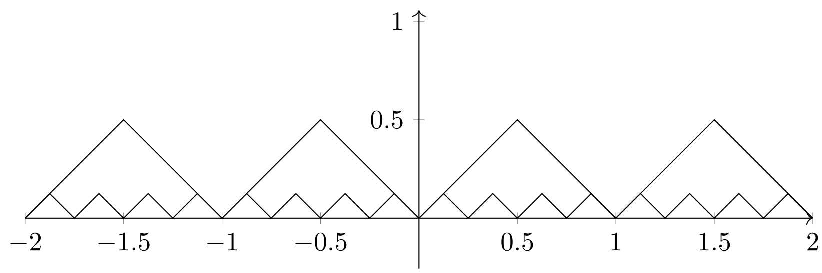
$$f_n'(x) = x^n \to \begin{cases} 1 & x = 1 \\ 0 & x \in [0;1) \end{cases} \neq 0'$$

Пример. Непрерывная нигде не дифференцируемая функция.
Начнём вот с такой функции:



$$f_0(x) = \begin{cases} x & x \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \\ 1 - x & x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right] \end{cases} \quad \text{В остальных точках } \pi\text{-периодична}$$

Теперь давайте возьмём $f_k(x) = \frac{1}{4^k} f_0(4^k x)$. Вот рисунок f_1 под f_0:



Искомая функция равна $f = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k$. Для начала докажем, что эта сумма равномерно сходится:

$$\|f_k\|_{\mathbb{R}} = \frac{1}{2 \cdot 4^k} \text{ отсюда } \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\| < +\infty$$

Что по признаку Вейерштрасса значит, что $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k$ равномерно сходится на $\mathbb{R}$. А отсюда f непрерывна.
Осталось доказать её недифференцируемость ни в одной точке. Рассмотрим $a \in \mathbb{R}$. Заметим, что

$$\forall n \in \mathbb{Z}\ \exists q_n \in \mathbb{Z}\ a \in \left[\frac{q_n - 1}{2 \cdot 4^n}; \frac{q_n}{2 \cdot 4^n}\right] = \Delta_n$$

Почему такой отрезок бывает? Ну, очевидно, они все вместе покрывают всю прямую, а значит в каком-то любая точка лежит (может, лежит в двух, возьмём любой).
Заметим, что $|\Delta_n| = \frac{1}{2 \cdot 4^n}$. Тогда $\exists x_n \in \Delta_n\ |x_n - a| = \frac{1}{4^{n+1}}$. Так вот

$$\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(x_k) - f(a)}{x_k - a} \underset{\text{и } |x_n - a| = \frac{1}{4^{n+1}}}{\overset{\frac{1}{4^k}\text{-периодичность}}{=}} \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k) - f(a)}{x_k - a} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_{kn} = A_n$$

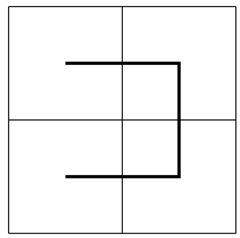
При этом $\varepsilon_{kn} = \pm 1$ (Δ_n — промежуток монотонности любой из функций $f_{k \leqslant n}$), а A_n и A_{n+1} — целые числа разной чётности (мы сложили соотвественно n и $n+1$ нечётных чисел ε_{nk}), а значит предела $\lim A_n$ не бывает. А должен бы бывать, потому что x_n — последовательность, стремящаяся к a, а A_n тогда — подпоследовательность последовательности из определения производной.

Замечание. На самом деле тут дело не в том, что мы брали функцию с большим количеством изломов. Ведь на самом деле для любой липшицевой и периодической функции f_0 существуют такие достаточно малое q и достаточно большое Q, что

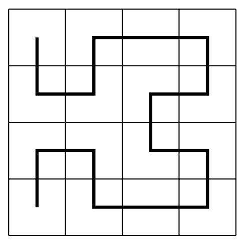
$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q^k f_0(Q^k x)$$

непрерывна и нигде не дифференцируема. То есть дело тут не в большом количестве изломов, а в сильном сжатии. Именно оно портит дифференцируемость на самом деле.

Пример. Кривые Пеано.
Нам хочется построить путь на плоскости, носитель которого — квадрат $[0;1]^2$. давайте строить его так: Возьмём квадрат и поделим его на 4 равные части. На этих частях построим вот такую ломаную:



Это множество значений некоторого пути. Например, давайте наш путь будет таким: на отрезке $\left[0;\frac{1}{4}\right]$ он будет равномерно обходить нижнюю левую часть квадрата, на отрезке $\left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]$ — правую нижнюю, на $\left[\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right]$ — правую верхнюю, на $\left[\frac{3}{4};1\right]$ — левую верхнюю.
Это было на первом шаге. На втором мы делим каждый квадратик на 4 части и обходим так:



И тут мы тоже каждую четверть времени проводим в правильном большом квадрате, но ещё и отрезок $\left[0;\frac{1}{4}\right]$, например, также делится на 4 части, чтобы в каждой из них пройти нужную часть пути в маленьком квадрате.
Понятно, что так можно умельчать разбиение сколько угодно раз, а знчит это последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$. Утверждается, что f_n равномерно сходится в себе. Почему? Пусть $n < m$, тогда оценим $\|f_m - f_n\|$. Ну, на каждом подотрезке $[0;1]$ все значения обеих этих функций располагаются в одном квадрате n-ного уровня, а значит

$$\|f_m - f_n\| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2^n} \underset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

А значит f_n равномерно сходится к какому-то пределу f. f, объективно, непрерывное отображение $[0;1] \to [0;1]^2$. То есть, действительно, путь.
Осталось объяснить, что множество значений f — весь квадрат. Ну, смотрите. Каждая точка $[0;1]$ находится в каком-то квадрате $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, в каком-то квадрате $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$ и так далее, то есть каждую точку квадрата можно сколь угодно близко приблизить точками $f([0;1])$. Но также из теоремы Вейерштрасса непрерывный образ компакта компакт, а значит замкнутое множество, то есть содержащее все свои предельные точки. Тогда деваться некуда, получается весь квадрат.

Замечание. Функция f всем хороша, кроме того, что она не взаимооднозначна. Если бы мы смогли построить непрерывную биекцию между отрезком и квадратом, у нас бы начались фундаментальные топологические проблемы.

3 Степенные ряды.

Определение 1. Ряд вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \tag{3.1}$$

называется **степенным рядом**. $z, z_0, c \in \mathbb{C}$. z_0 называется центром, а c_k — коэффициентами.

Замечание. В вещественном степенном ряде обозначения обычно x_0, x и a_k.

Замечание. Встретившись со степенным рядом, обычно задаются следующими вопросами:

- Какова область сходимости?
- Какими свойствами обладает сумма?

Ещё есть третий вопрос: если есть функция, можно ли разложить её в степенной ряд и как?

Замечание. При $z = z_0$ ряд сходится к c_0.

Определение 2. Величина $R \in [0; +\infty]$ называется радиусом сходимости ряда 3.1, если

$$\begin{gathered} \forall z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R \text{ ряд 3.1 сходится} \\ \forall z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > R \text{ ряд 3.1 расходится} \end{gathered}$$

Лемма 1. *Пусть $\{x_n\}, \{y_n\}$ — вещественные последовательности, $\exists \lim x_k \in (0; +\infty)$. Тогда*

$$\limsup x_n y_n = \lim x_n \limsup y_n$$

Доказательство. Давайте обозначим пределы буквами:

$$\underbrace{\limsup x_n y_n}_{C} = \underbrace{\lim x_n}_{A} \underbrace{\limsup y_n}_{B}$$

Напоминается: верхний предел — наибольший из частичных пределов.
О'кей, $y_{n_k} \to B$, также $x_{n_k} \to A$ (как подпоследовательность сходящейся последовательности), тогда $x_{n_k} y_{n_k} \to AB$, то есть $AB \leqslant C$.
Теперь пусть $x_{m_l} y_{m_l} \to C$. Тогда $x_{m_l} \to A$. Начиная с определённого номера x_{m_l} больше нуля, а значит с этого самого места $y_{m_l} \to \frac{C}{A}$, отсюда $\frac{C}{A} \leqslant B$. □

Теорема 1 (Формула Коши — Адамара)**.** *У любого ряда есть радиус сходимости, равный*

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|c_n|}}$$

Доказательство. Что говорил нам признак Коши? Он говорил нам, что ряд расходится, если $\limsup \sqrt[n]{|c_n(z - z_0)^n|} > 1$, и абсолютно сходится, если $\limsup \sqrt[n]{|c_n(z - z_0)^n|} < 1$. Хорошо:

$$\limsup \sqrt[n]{|c_n(z - z_0)^n|} = \limsup(|z - z_0| \sqrt[n]{|c_n|}) = |z - z_0| \limsup \sqrt[n]{|c_n|}$$

Ну, и, тут всё, что нам надо, поскольку $|z - z_0|$ — это, по сути, радиус. □

Определение 3. **Круг сходимости** степенного ряда — $B(z_0; R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}$.

Замечание. Итого, мы получили бо́льшую часть ответа на вопрос «Когда ряд сходится?» Когда $z \in B(z_0; R)$. Возможно, с какими-то точками на границе круга.

Утверждение. *Иногда проще посчитать радиус сходимости по признаку Д'Аламбера, а не по Коши:*

$$R = \lim \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$$

Замечание. Но этот предел, разумеется, может не существовать. В отличие от верхнего предела из Коши.

Пример. Примеры о том, что на границе может быть всё, что угодно:

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k = \frac{1}{1-z}, |z| < 1$$

Тут $R = 1$, а при $|z| = 1$ ряд расходится.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}$$

Тут $R = 1$, а в $|z| = 1$ ряд абсолютно сходится.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$$

Тут $R = 1$, а при $z = 1$ ряд расходится, а при $|z| = 1, z \neq 1$ — сходится по Д'Аламберу (в случае $z = -1$ проще использовать Лейбница).

Пример. Радиус бывает бесконечным:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

Для вещественных чисел мы знаем, что это везде сходится, а значит на комплексной плоскости (в силу того, что сходимость должна быть в круге) — тоже везде, то есть $R = +\infty$.

Пример. Радиус бывает нулевым:

$$\sum_{k=0}^{\infty} k! z^k$$

Когда радиус нулевой, кстати, мы знаем про круг сходимости информацию о его границе: его граница — это точка $z = z_0$, а в ней, как известно, ряд всегда сходится.

Замечание. Если сделать замену $z - z_0 = w$, то получится ряд с центром в нуле, а поскольку сдвиг никак не влияет на непрерывность, дифференцируемость и прочие интересные свойства функций, не умаляя общности очень часть можно считать, что все степенные ряды имеют центр в нуле.

Теорема 2 (Равномерная сходимость степенных рядов)**.** *Пусть дан степенной ряд 3.1 и его радиус сходимости $R \in (0; +\infty]$. Тогда $\forall r \in (0; R)$ ряд 3.1 равномерно сходится в $\overline{B}(z_0; r)$.*

Доказательство. Если $|z - z_0| \leqslant r$, то $|c_k(z - z_0)^k| \leqslant |c_k| r^k$, потому что в круге сходимости степенной ряд сходится абсолютно. Тогда из признака Вейерштрасса мы получаем то, что нам надо. □

Следствие 1.1. *Сумма степенного ряда непрерывна в круге сходимости.*

Доказательство. Пусть $z_1 \in B(z_0; r)$. Тогда $\exists r\ |z_1 - z_0| < r < R$. А поскольку степенной ряд равномерно сходится в $B(z_0; r)$, а значит сумма непрерывна на $B(z_0; r)$, то есть непрерывна в точке z_1. □

Замечание. Следствие временное. Ведь скоро мы докажем, что сумма не только непрерывна, а бесконечно дифференцируема.

Теорема 3 (Теорема Абеля о степенных рядах)**.** *Пусть $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ — вещественный степенно ряд, $R \in (0; +\infty)$ — его радиус сходимости. Пусть ряд сходится в $x = x_0 + R$ (или, симметрично, в $x = x_0 - R$). Тогда он сходится равномерно на $[x_0; x_0 + R]$ (или, соотвественно, $[x_0; x_0 - R]$).*
В частности, его сумма непрерывна в $x_0 + R$ слева (соответственно, в точке $x_0 - R$ справа).

Замечание. Это верно и для комплексных рядов, у нас просто нет обозначения для отрезка длины R в случайном направлении.

Доказательство. Не умаляя общности, пусть $x_0 = 0$. Тогда

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k R^k \left(\frac{x}{R}\right)^k$$

Воспользуемся признаком Абеля:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k R^k \qquad \text{равомерно сходится}$$

$$0 \leqslant \left(\frac{x}{R}\right)^{k+1} \leqslant \left(\frac{x}{R}\right)^{k} \leqslant 1$$

□

Следствие 1.1 (Интегрирование степенных рядов.)**.** *Пусть* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ *— вещественный степенной ряд,* $R > 0$ *— его радиус сходимости. Тогда* $\forall [a;b] \subset (x_0 - R; x_0 + R)$ *ряд можно интегрировать по* $[a;b]$ *почленно.*
Если же ряд сходится на каком-нибудь из концов, на отрезке, содержащем этот конец, тоже можно.

Замечание. Теорему Абеля иногда называют второй теоремой Абеля. Первой теоремой Абеля считают утверждение, что любой степенной ряд имеет радиус сходимости (без опоры на формулу Коши — Адамара).

Замечание. Здесь, также как и в теореме Абеля, вещественность ряда не нужна, просто мы не умеем интегрировать комплексные ряды. Однако скоро научимся.

Утверждение. *Посмотрим на формулу:*

$$\int\limits_0^x \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \ \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

Мы знаем, что она верна в условиях следствия 1.1.
Но также верно следующее: если $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{R^{k+1}}{k+1}$ *сходится, то*

$$\int\limits_0^{\to R} \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \ \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{R^{k+1}}{k+1}$$

Доказательство. Из следствия теоремы 2 о непрерывности в круге сходимости. □

Определение 4. Пусть $f\colon \underset{\subset\mathbb{C}}{D} \to \mathbb{C}$, $z_0 \in \operatorname{Int} D$. Если $\exists A \in \mathbb{C}\ f(z) = f(z_0) + A(z - z_0) + o(z - z_0)$, то f называется **дифференцируемой в точке** z_0, а A называется её **производной в точке** z_0.

Утверждение.

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Замечание. Доказывается это также, как и в вещественном случае, и также как там, доказываются дифференцируемость арифметический операций и композиции.

Замечание. Несмотря на то, что это чудо выглядит как вещественная производная, на самом деле это определение очень сильное (из-за того, что z может стремиться к z_0 любым способом). Причём даже сильнее, чем дифференцируемость f как $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (к определению последней надо ещё одно уравнение (Коши — Римана) добавить, чтобы получилось равносильно). И это влечёт интересные эффекты.

Пример. Давайте сделаем пару примеров дифференцируемых функций.

$$(z^n)' = nz^{n-1} \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Отсюда вытекает непрерывность многочленов и дробно-рациональных функций. А дальше ни композиция, ни арифметические действия не выводят из класса дробно-рациональных функций. Больше так сходу примеров мы не приведём.

Лемма 2. *Ряды*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k k (z - z_0)^{k-1} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \qquad \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{(z - z_0)^k}{k+1}$$

имеют одинаковый радиус сходимости.

Доказательство. Напрямую из формулы Коши — Адамара. □

Теорема 4 (Дифференцирование степенных рядов)**.** *Пусть*

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k \qquad |z-z_0|<R$$

Тогда $f\in C^{(\infty)}(B(z_0;R))$ *и ряд можно дифференцировать почленно любое количество раз:*

$$f^{(m)}(z)=\sum_{k=m}^{\infty}c_k k\cdot(k-1)\cdot\dots\cdot(k-m+1)(z-z_0)^{k-m} \qquad |z-z_0|<R$$

Доказательство. По предыдущей лемме надо лишь доказать формулу для первой производной. И поскольку сдвиг с производной коммутирует, не уменьшая общности можно считать $z_0=0$. Итого надо проверить, что

$$f'(z)=\sum_{k=m}^{\infty}c_k k z^{k-1} \qquad |z|<R$$

Ну, что ж, возьмём точку $z_1\in B(0;R)$ и докажем, что в ней есть производная и что она равна тому, чему надо. Очевидно, $\exists\rho\ |z_1|<\rho<R$. Что ж.

$$\frac{f(z)-f(z_1)}{z-z_1}=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\frac{z^k-z_1^k}{z-z_1}=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\left(z^{k-1}+z_1z^{k-2}+\dots+z_1^{k-2}z+z_1^{k-1}\right)$$

Хочется почленно перейти к пределу при $z\to z_1$. Ну,

$$|c_k\left(z^{k-1}+z_1z^{k-2}+\dots+z_1^{k-2}z+z_1^{k-1}\right)|\leqslant k|c_k|\rho^{k-1}$$

При этом $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k|c_k|\rho^{k-1}$ сходится по лемме, а значит сходится равномерно в $B(0;\rho)$. Отсюда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k\frac{z^k-z_1^k}{z-z_1}$ сходится равномерно в $B(0;\rho)\setminus\{z_1\}$. А отсюда по теореме о почленном переходе к пределу

$$\exists\lim_{z\to z_1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f(z)-f(z_1)}{z-z_1}=\sum_{k=1}^{\infty}\lim_{z\to z_1}\frac{f(z)-f(z_1)}{z-z_1}=\sum_{k=1}^{\infty}kc_kz_1^{k-1}$$

То есть существует $f'(z_1)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}kc_kz_1^{k-1}$. □

Теорема 5 (Единственность разложения в степенной ряд)**.** *Пусть* $R\in(0;+\infty]$, *пусть*

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k \qquad |z-z_0|<R$$

Тогда коэффициенты c_k *определяются единственным образом функцией* $\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$.

Определение 5. Пусть f бесконечно дифференцируема в окрестности z_0. Тогда $\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$ называются **коэффициентами Тейлора**, а ряд $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$ — её **рядом Тейлора**.

Доказательство. Очевидно, $\frac{f^{(0)}(z_0)}{0!}=f(z_0)=c_0$. Для остальных подставим $z=z_0$ в формулу для m-той производной. Очевидно, получится то, что нам и надо. □

Замечание. Теоремы 4 и 5 с доказательством верны и для вещественных рядов.

Замечание. Итого для разложения в ряд есть следующий алгоритм:
Пусть $f \in C^{(\infty)}\langle x_0 - R; x_0 + R\rangle$. Мы можем составить её ряд Тейлора:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Как этот ряд может себя вести? Есть варианты, что дальше: ряд сходится к $f(x)$ или расходится. Или, что более странно, может сходиться не туда.

Пример.

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

Пример для замечания выше, который (для $|x| < 1$) сходится к $f(x)$.

Пример. Пример же для расходящегося ряда тейлора можно взять такой

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$$

Он расходится при $|x| > 1$ (это легко понять, если рассмотреть эту функцию как функцию комплексной переменной; у знаменателя корни имеют модуль 1).

Пример. А вот что по поводу ряда Тейлора, которых сходится не туда? Ну, вот:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ e^{-1/x^2} & x \neq 0 \end{cases}$$

Как мы знаем, в нуле все производные этой функции равны нулю. А значит и ряд Тейлора её состоит только из нулей. Тривиально, везде, кроме нуля ряд Тейлора сходится не туда.

Замечание. На самом деле проблема тут в том, что эта функция не дифференцируема на комплексной плоскости, как бы её не продолжить там.

Утверждение. *Примем без доказательства тот факт, что дифференцируемая в комплексном круге функция раскладывается в ряд.*

Следствие 2.1. *А отсюда, если функция комплексно дифференцируема, то* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ *всегда сходится, да ещё и в правильное место.*

Теорема 6 (Признак разложимости функции в ряд Тейлора)**.** *Пусть* $f \in C^{(\infty)}\langle a; b\rangle$, $\exists M > 0\ \forall k \in \mathbb{N}\ \forall t \in \langle a; b\rangle\ |f^{(k)}(t)| \leqslant M$. *Тогда*

$$\forall x, x_0 \in \langle a; b\rangle\ f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Доказательство. См. доказательство формулы Тейлора с остатком в форме Лагранжа. □

Определение 6. Пусть $f\colon \underset{\subset \mathbb{C}}{D} \to \mathbb{C}$, $z_0 \in \operatorname{Int} D$. Функция называется **аналитической в точке** z_0, если она раскладывается в степенной ряд в некоторой окрестности z_0.
f называется **аналитической на открытом множестве**, если она аналитична в любой его точке. Класс аналитический функций на D обозначается $\mathcal{A}(D)$.

Определение 7. Пусть $f\colon \underset{\subset \mathbb{R}}{D} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \operatorname{Int} D$. Функция называется **аналитической в точке** x_0, если она раскладывается в степенной ряд в некоторой окрестности x_0.
f называется **аналитической на открытом множестве**, если она аналитична в любой его точке.

Замечание. Поскольку мы знаем, что аналитические функции дифференцируемы сколько угодно раз, можно продолжить ряд:

$$C(a;b) \supsetneqq C^{(1)}(a;b) \supsetneqq C^{(2)}(a;b) \supsetneqq \cdots \supsetneqq C^{(m-1)}(a;b) \supsetneqq C^{(m)}(a;b) \supsetneqq \cdots \supsetneqq C^{(\infty)}(a;b) \supsetneqq \mathcal{A}(a;b)$$

На комплексной плоскости всё не так, а вот так:

$$C(D) \supsetneq C^{(1)}(D) = C^{(2)}(a;b) = \cdots = C^{(m-1)}(D) = C^{(m)}(D) = \cdots = C^{(\infty)}(D) = \mathcal{A}(a;b)$$

Потому что аналитичность, как мы уже обсудили, следует из наличия одной (даже необязательно непрерывной) производной.

4 Разложение элементарных функций.

Пусть

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \qquad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k \qquad |z| < R$$

Тогда, очевидно,

- $$(f+g)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (c_k + d_k) z^k$$
- $$(\lambda f)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda c_k) z^k$$
- $$(fg)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{k} c_l d_{k-1} \right) z^k$$
- $$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k z^{k-1}$$
- $$\int\limits_0^x f(z)\ \mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

Экспонента, косинус и синус.

Определение 1.

- $$e^z = \exp z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$
- $$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}$$
- $$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}$$

Радиус сходимости этих рядов бесконечен, таким образом они сходятся на комплексной плоскости. Их суммы и назовём **экспонентой**, **косинусом** и **синусом комплексной переменной**. Для $z \in \mathbb{R}$ определение согласуется с вещественным.

Свойство 1.1. $\exp' z = \exp z \qquad \sin' z = \cos z \qquad \cos' z = -\sin z$

Доказательство. Возьмите да и продифференцируйте, лол. Ряды сходятся везде, значит можно. □

Свойство 1.2.

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$$

Доказательство.

$$e^{z_1}e^{z_2} = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z_1^k}{k!}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{z_2^j}{j!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{k}\frac{z_1^j}{j!}\frac{z_2^{k-j}}{(k-j)!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\sum_{k=0}^{k}\binom{k}{j}z_1^j z_2^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(z_1+z_2)^k$$

□

Свойство 1.3. $\cos$ *чётна,* $\sin$ *нечётна*

Доказательство. На определение посмотрите, лол. □

Свойство 1.4.

- $$e^{\mathbf{i}z} = \cos z + \mathbf{i}\sin z$$
- $$\cos z = \frac{e^{\mathbf{i}z} + e^{-\mathbf{i}z}}{2}$$
- $$\sin z = \frac{e^{\mathbf{i}z} - e^{-\mathbf{i}z}}{2\mathbf{i}}$$

Доказательство.

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}z^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mathbf{i}z)^{2k}}{(2k)!} \qquad \mathbf{i}\sin z = \mathbf{i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mathbf{i}z)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Ну, всё, отсюда выводится первая формула, и из неё — остальные. □

Свойство 1.5. *Все школьные тригонометрические формулы остаются верными.*

Доказательство. Доказывается из предыдущего и свойств экспоненты. Рассмотрим только одно доказательство, скажем вот такой формулы:

$$\cos(z_1 - z_2) = \cos z_1 \cos z_2 + \sin z_1 \sin z_2$$

Докажем:

$$\cos z_1\cos z_2 + \sin z_1 \sin z_2 = \frac{e^{\mathbf{i}z_1} + e^{-\mathbf{i}z_1}}{2}\frac{e^{\mathbf{i}z_2} + e^{-\mathbf{i}z_2}}{2} + \frac{e^{\mathbf{i}z_1} - e^{-\mathbf{i}z_1}}{2\mathbf{i}}\frac{e^{\mathbf{i}z_2} - e^{-\mathbf{i}z_2}}{2\mathbf{i}} = \frac{1}{4}\left(e^{\mathbf{i}(z_1+z_2)} + e^{\mathbf{i}(z_1-z_2)} + e^{\mathbf{i}(z_2-z_1)} + e^{-\mathbf{i}(z_1+\cdots}\right.$$

□

Определение 2.

- $$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$
- $$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

Свойство 2.1.

- $$\cosh z = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

- $$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

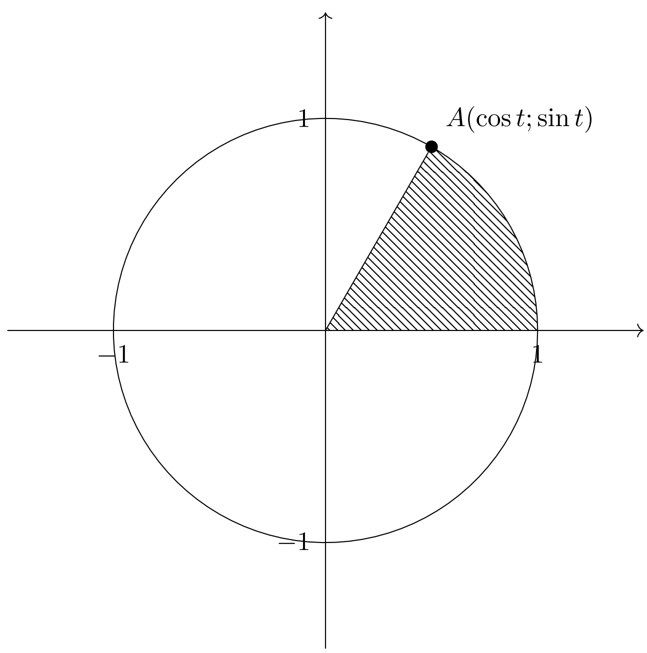
Доказательство. Из определения и ряда Тейлора экспоненты. □

Свойство 2.2.

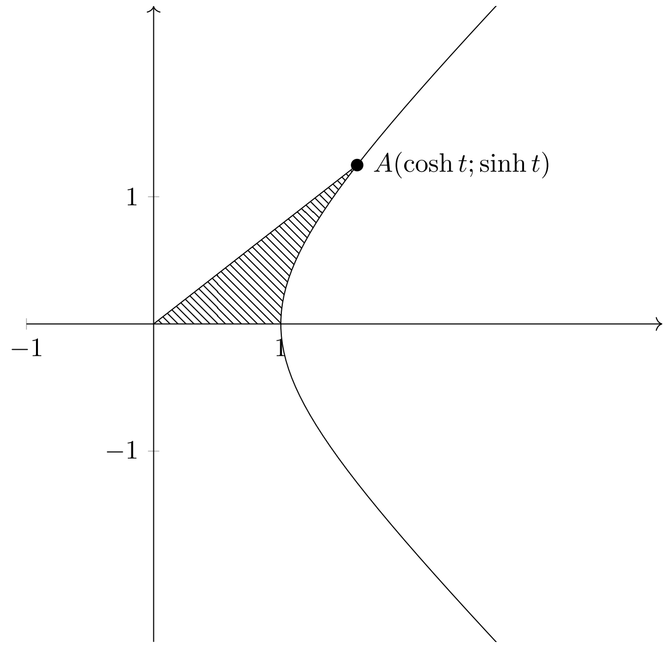
- $$\cos z = \cosh(\mathbf{i}z)$$
- $$\sin z = \mathbf{i}\sinh(\mathbf{i}z)$$
- $$\cosh z = \cos(\mathbf{i}z)$$
- $$\sinh z = \mathbf{i}\sin(\mathbf{i}z)$$

Доказательство. Подставьте в формулу Эйлера. □

Замечание (Геометрический смысл гиперболических функций.). Сначала посмотрим на тригонометрические функции. Если мы выберем точку $(\cos t; \sin t)$, то t можно рассматривать как полярный угол, а можно — как удвоенную площадь сектора.



А теперь посмотрим на гиперболу $x^2 - y^2 = 1$:



Тогда аргумент t равен удвоенной закрашенной площади.

Определение 3. Обратные гиперболические функции:

$$\sinh t = u \Leftrightarrow e^t - e^{-t} = 2u \Leftrightarrow (e^t)^2 - 2u(e^t) - 1 = 0 \Leftrightarrow e^t = u \pm \sqrt{1+u^2}$$

То есть $\sinh^{\text{-1}} t = \ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right)$, $\cosh^{\text{-1}} t = \ln\left(u + \sqrt{u^2-1}\right)$

Замечание. Надо понимать, что в комплексной плоскости есть существенные проблемы с обеими этими функциями (как и с обратными тригонометрическими функциями, как и даже с логарифмом). Они совершенно неоднозначные.

Свойство 3.1. *Синус и косинус неограничены на комплексной плоскости.*

Доказательство. Из неограниченности cosh и sinh и связи тригонометрических и гиперболических функций. □

Свойство 3.2. *Экспонента не имеет нулей, а* sin *и* cos *не имеют невещественных нулей.*

Доказательство. Экспонента не имеет нулей вот почему:

$$e^z = e^x e^{\mathbf{i}y} \Rightarrow |e^z| = e^x > 0$$

Теперь к синусу:

$$\sin(x + \mathbf{i}y) = 0 \Leftrightarrow \sin x \cosh y + \mathbf{i} \cos x \sinh y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \sinh y = 0 \\ \sin x \cosh y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Косинус через формулу приведения. □

Свойство 3.3. *Экспонента имеет периоды* $2k\pi\mathbf{i} \mid k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ *и никаких других. Синус и косинус имеют периоды* $2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ *и никаких других*

Доказательство. Пусть T — период exp. Тогда $e^{z+T} = e^z$ или $e^T = 1$. Это бывает только в случае $T = 2k\pi i$ (распишите $T = \alpha + \mathbf{i}\beta$).
Для синуса и косинуса — либо аналогично, либо напрямую отсюда. □

Определение 4.

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \qquad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

Свойство 4.1. *Эти функции определены и аналитичны там, где знаменатель не разлагается в ноль.*

Доказательство. Про их бесконечную дифференцируемость мы знаем, а из недоказанного нами утверждения они аналитичны. □

Логарифм и арктангенс.

Замечание. Здесь пока ограничимся вещественной переменной.

Утверждение. *Начнём с того, что*

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^k \quad t \in (-1;1)$$

А теперь возьмём $x \in (-1;1)$ и проинтегрируем это от 0 до x:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \quad x \in (-1;1)$$

При $x = 1$ равенство также верно (по теореме Абеля), при $x = -1$ — очевидно, нет. Тут, кстати, можно проиллюстрировать, как теорема Абеля применяется. При $x = 1$ ряд сходится, значит его сумма непрерывна слева в $x = 1$. И левая часть (логарифм) также непрерывен в $x = 1$. Значит у нас две функции, которые равны слева единицы, там же обе непрерывны, а значит в единице они равны.

Утверждение.

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k} \quad x \in [-1;1)$$

Утверждение.

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^{2l+1}}{2l+1} \quad x \in (-1;1)$$

Доказательство. Это мы вычли две предыдущие формулы друг из друга. □

Утверждение. *Пусть $n \in \mathbb{N}$.*

$$\frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)(2n+1)^{2l+1}}$$

Доказательство. Из предыдущего, $x = \frac{1}{2n+1}$. □

Замечание. Эта формула бывает применимее, нежели $\ln(1+x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$, ведь если вы решили посчитать $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, то общая формула будет сходиться гораздо медленнее.

Утверждение (Формула Стирлинга)**.**

$$n! = \sqrt{2\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta}{12n}} \qquad \theta \in (0;1)$$

Доказательство. Из предыдущего

$$\left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)(2n+1)^{2l}} = 1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)(2n+1)^{2l}}$$

Отсюда оценим левую часть:

$$1 < \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1+\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^{2l}} = 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1/(2n+1)^2}{1-1/(2n+1)^2} = 1+\frac{1}{12n(n+1)}$$

И к этому чуду применим экспоненту:

$$e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} < e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}}$$

Теперь введём такую последовательность

$$a_n = \frac{n!e^n}{n^{n+1/2}}$$

Мы хотим исследовать её монотонность. Чему равно $\frac{a_n}{a_{n+1}}$? Ну,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n!e^n}{n^{n+1/2}}\frac{(n+1)^{n+3/2}}{(n+1)!e^{n+1}} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} > 1$$

То есть $a_n\downarrow$. Поскольку a_n ограничены снизу нулём, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, равный, скажем, $a\in[0;+\infty)$.
Мы хотим понять, что $a>0$, и для этого рассмотрим последовательность $a_ne^{-\frac{1}{12n}}$. Для неё

$$\frac{a_ne^{-\frac{1}{12n}}}{a_{n+1}e^{-\frac{1}{12(n+1)}}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}}} < 1$$

То есть $a_ne^{-\frac{1}{12n}}\uparrow$. При этом сходится эта штука также к a, и отсюда $a>0$. Тогда $a<a_n<ae^{\frac{1}{12n}}$ или $a_n = ae^{\frac{\theta}{12n}} \mid \theta\in(0;1)$, где θ — какое-то число, зависящее от n. Раскрыв a_n, получим

$$n! = a\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta}{12n}}$$

Это уже почти формула Стирлинга, но нам надо лишь понять, что $a=\sqrt{2n}$. Искать будем при помощи формулы Валлиса, которая, если кто забыл, звучит как

$$\frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \longrightarrow \pi$$

При этом

$$\frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 = \frac{1}{n}\left(\frac{((2n)!!)^2}{(2n)!}\right)^2 = \frac{1}{n}\left(\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\right)^2 = \frac{1}{n}\left(\frac{2^{2n}a^2n\frac{n^{2n}}{e^{2n}}e^{\frac{\theta}{6n}}}{a\sqrt{2n}\frac{(2n)^{2n}}{e^{2n}}e^{\frac{\tau}{24n}}}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{\cancel{2^{2n}}a^2n\frac{n^{2n}}{e^{2n}}e^{\frac{\theta}{6n}}}{a\sqrt{2n}\frac{(\cancel{2}n)^{2n}}{e^{2n}}e^{\frac{\tau}{24n}}}\right)^2 = \frac{1}{n}\left(\frac{a^2n\cancel{\frac{n^{2n}}{e^{2n}}}e^{\frac{\theta}{6n}}}{a\sqrt{2n}\cancel{\frac{n^{2n}}{e^{2n}}}e^{\frac{\tau}{24n}}}\right)^2 = \cancel{\frac{1}{n}}\left(\frac{a^{\cancel{2}}\cancel{n}e^{\frac{\theta}{6n}}}{\cancel{a}\sqrt{2\cancel{n}}e^{\frac{\tau}{24n}}}\right)^2 \to \frac{a^2}{2}$$

Отсюда $\frac{a^2}{2}=\pi$, то есть $a=\sqrt{2\pi}$. □

Замечание. Вернёмся к комплексным переменным.

Определение 5. Как мы уже знаем,

$$\ln z = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(z-1)^k \quad |z-1|\in(-1;1)$$

Как определить логарифм на всей остальной плоскости, мы пока не знаем, но на самом деле для аналитический функций верно, что если они совпадают в некотором круге, то они совпадают везде. Поэтому любую функцию можно единственным образом продолжить на всю плоскость. И Вейерштрасс придумал способ, каким можно продолжить функцию: берём произвольную точку круга сходимости z_0 и перераскладываем в ряд относительно $(z - z_0)$. Получаем новый ряд с новым радиусом, и круг сходимости этого ряда может вылезти за исходный круг. Делаем так до посинения, и если аналитическое продолжение существует, то у нас получится замостить такими кругами всю плоскости.
При этом, если мы так сделаем с логарифмом, то мы получим особую точку 0, обойдя которую мы получим приращение аргумента на 2π. И отсюда возникают многозначные функции.

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + \mathbf{i}\operatorname{Arg} z$$

Если в качестве $\operatorname{Arg} z$ взять главное значение аргумента из $(-\pi;\pi]$, получим **главное значение логарифма**.

Замечание. Теперь вернёмся к вещественным аргументам и рассмотрим арктангенс.

Утверждение. *Рассмотрим*

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \qquad z \in (-1;1)$$

И подставим $z = -t^2$. Получим

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k} \qquad t \in (-1;1)$$

Проинтегрировав это от 0 до x, получим

$$\tan^{-1} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \qquad x \in [-1;1]$$

При $x = \pm 1$ выполнено по теореме Абеля.

Утверждение. *В частности,*

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Замечание. Степенные ряды раньше очень любили применять для вычисления числа π с большой точностью. Конкретно этот ряд для этого очень сложно использовать, он очень медленно сходится, а вот взяв $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, получим

$$\frac{\pi}{6} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \frac{1}{3^k} \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Потом придумали комбинировать ряды, чтобы получать ещё более быстро сходящиеся ряды, но потом вывели рекуррентные формулы, которые сходятся ещё быстрее, и дела с рядами заглохли.

Степенная функция.

Замечание. Напоминание:

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha \cdot \dots \cdot (\alpha - k + 1)}{k!} \qquad k \in \mathbb{Z}_+, \alpha \in \mathbb{C}$$

Теорема 1 (Биномиальный ряд Ньютона)**.** *Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, тогда*

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \qquad x \in (-1;1)$$

Замечание. Если $\alpha \in \mathbb{Z}_+$, ряд обрывается ($\begin{pmatrix}\alpha\\k\end{pmatrix} = 0$ при $k > \alpha$). В таком случае

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix} x^k$$

для любого $x \in \mathbb{C}$.

Доказательство. Мы будем рассматривать только $\alpha \notin \mathbb{Z}_+$. Тогда докажем, что радиус сходимости в точности единица. Доказывать будем до Д'Аламберу.

$$\left|\frac{\begin{pmatrix}\alpha\\k\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}\alpha\\k+1\end{pmatrix}}\right| = \left|\frac{\frac{\alpha\cdot\dots\cdot(\alpha-k+1)}{k!}}{\frac{\alpha\cdot\dots\cdot(\alpha-k)}{(k+1)!}}\right| = \left|\frac{k+1}{\alpha-k}\right| \to 1$$

Теперь докажем, что сумма этого ряда равна тому, чему хочется. Ну, пусть

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix}\alpha\\k\end{pmatrix} x^k$$

Давайте запишем $S'(x)$:

$$S'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix}\alpha\\k\end{pmatrix} kx^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix}\alpha\\k+1\end{pmatrix} (k+1)x^k$$

А ещё запишем $xS'(x)$:

$$xS'(x) = x\sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix}\alpha\\k\end{pmatrix} kx^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix}\alpha\\k\end{pmatrix} kx^k$$

Теперь сложим эти два равенства:

$$(1+x)S'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\begin{pmatrix}\alpha\\k\end{pmatrix} k + \begin{pmatrix}\alpha\\k+1\end{pmatrix}(k+1)\right) x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha\cdot\dots\cdot(\alpha-k)}{(k+1)!}(k+1) + \frac{\alpha\cdot\dots\cdot(\alpha-k+1)}{k!}k\right) x^k =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha\cdot\dots\cdot(\alpha-k+1)\cdot(\alpha-k+k)}{k!}\right) x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha \begin{pmatrix}\alpha\\k\end{pmatrix} x^k = \alpha S(x)$$

То есть $(1+x)S'(x) = \alpha S(x)$. Чтобы решить это уравнение, введём $g(x) = \frac{S(x)}{(1+x)^\alpha}$. Тогда

$$g'(x) = \frac{(1+x)^\alpha S'(x) - \alpha(1+x)^{\alpha-1}S(x)}{(1+x)^{2\alpha}} = 0$$

То есть $g(x) = \mathrm{const}$. Поскольку $g(0) = S(0) = 1$, $g(x) \equiv 1$, то есть $S(x) = (1+x)^\alpha$. □

Замечание. Исследовать поведение степенного ряда на концах — задание читателю. Мы же только обговорим, что если ряд сходится при $x = 1$ или $x = -1$, то сходится к правильному значению по теореме Абеля. А вот когда сходится, решайте сами.

Замечание. Частные случаи:

0. $$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\alpha} \begin{pmatrix}\alpha\\k\end{pmatrix} x^k \qquad \alpha \in \mathbb{Z}_+$$

1. $$\alpha = -1 \qquad \frac{1}{x+1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k \qquad x \in (-1;1)$$

2.
$$\alpha = -n, n \in \mathbb{N} \qquad \binom{-n}{k} = \frac{(-n)\cdot\dots\cdot(-n-k+1)}{k!} = (-1)^k \frac{n\cdot\dots\cdot(n+k-1)}{k!}$$
$$\frac{1}{(1+x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \binom{n+k-1}{k} x^k \qquad x \in (-1;1)$$

Замечание. Эту формулу на самом деле можно получить и проще. Например, возвести ряд $\frac{1}{1+x}$ в n-ную степень по Коши или продифференцировать его $n-1$ раз.
Только на самом деле проще сделать это для ряда $\frac{1}{1-x}$, а не $\frac{1}{1+x}$, потому что в его разложении нет $(-1)^k$.

3.
$$\alpha = \frac{1}{2} \qquad \binom{1/2}{k} = \frac{(1/2)\cdot(-1/2)\cdot\dots\cdot(1/2-k+1)}{k!} = \frac{1\cdot(-1)\cdot\dots\cdot(3-2k)}{2^k k!} = (-1)^{k-1}\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}$$
$$\sqrt{1+x} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}x^k$$

Но теперь мы можем узнать, что происходит на концах. Для этого воспользуемся формулой Валлиса.
$$\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!} = \frac{1}{2k-1}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \sim \frac{1}{2k\sqrt{\pi n}}$$
И отсюда ряд на концах сходится абсолютно.

4.
$$\alpha = -\frac{1}{2} \qquad \binom{-1/2}{k} = \frac{(-1/2)\cdot\dots\cdot(-1/2-k+1)}{k!} = (-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}$$
$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}x^k \qquad x \in (-1;1]$$

Следствие 0.1. *Подставим в предыдущую формулу $x = -t^2$. Получим*
$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}t^{2k} \qquad t \in (-1;1)$$
Проинтегрируем от 0 до x, получим
$$\sin^{-1} x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{t^{2k}}{2k+1} \qquad t \in [-1;1]$$
На краях есть равенство по Абелю.

Следствие 0.2 (Свёртка Вандермонда)**.**
$$\sum_{l=0}^{k}\binom{\alpha}{l}\binom{\beta}{k-l} = \binom{\alpha+\beta}{k}$$

Доказательство.
$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k \qquad (1+x)^\beta = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\beta}{k}x^k \qquad (1+x)^{\alpha+\beta} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha+\beta}{k}x^k$$
Также
$$(1+x)^{\alpha+\beta} = (1+x)^\alpha\cdot(1+x)^\beta = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{k}\binom{\alpha}{l}\binom{\beta}{k-l}\right)x^k$$
Отсюда получаем то, что хотим получить. ☐

5 Числа и многочлены Бернулли.

Замечание. здесь пойдёт речь о некоторой последовательности, которая удивительно много когда встречается в анализе.

Замечание. Пусть

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k \qquad |z| < R$$

Пусть $g(0) = b_0 \neq 0$. Тогда $h = \frac{1}{g}$ аналитична в некоторой окрестности нуля и

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \qquad |z| < r$$

Тогда c_k можно найти методом неопределённых коэффициентов.

$$1 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k\right)$$

Определение 1. Пусть

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k \qquad |z| < 2\pi$$

Числа B_k называют **числами Бернулли**.

Свойство 1.1. $B_0 = 1$,

$$\sum_{l=0}^{k} \frac{B_l}{l!(k-l+1)!}$$

Доказательство.

$$\frac{e^z - 1}{z} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{k!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{(j+1)!}$$

Тогда

$$1 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{(j+1)!}\right)$$

И отсюда то, что нам надо получить. □

Замечание. Предыдущую формулу проще всего запоминать так:

$$B_{k+1} = \sum_{l=0}^{k+1} \binom{k+1}{l} B_l$$

И ещё её упорото записывают вот так:

$$B_{k+1} = (B+1)_{k+1}$$

Её понимать так: поднимем индекс вверх, раскроем по биному Ньютона, опустим у всех B индексы вниз.
При этом надо понимать, что их этого уравнения мы находим B_k, а не B_{k+1}.

Пример. 0. $B_0 = 1$.

1. $\frac{B_0}{2} + B_1 = 0 \Rightarrow B_1 = -\frac{1}{2}$.
2. $\frac{B_0}{6} + \frac{B_1}{2} + \frac{B_2}{2} = 0 \Rightarrow B_2 = \frac{1}{6}$.

3. $\frac{B_0}{24}+\frac{B_1}{6}+\frac{B_2}{4}+\frac{B_3}{6}=0 \Rightarrow B_3=0$.
4. $\frac{B_0}{120}+\frac{B_1}{24}+\frac{B_2}{12}+\frac{B_3}{12}+\frac{B_4}{24}=0 \Rightarrow B_4=-\frac{1}{30}$.
5. $B_5=0$.
6. $B_6=\frac{1}{42}$.
7. $B_7=0$.
8. $B_8=-\frac{1}{30}$.
9. $B_9=0$.
10. $B_{10}=\frac{5}{66}$.
12. $B_{12}=-\frac{691}{2730}$.
14. $B_{14}=\frac{7}{6}$.
16. $B_{16}=-\frac{3617}{510}$

Замечание. Красивой и простой формулы для этих чисел нет, но у них есть некоторые свойства.

Свойство 1.2. *Тривиально,* $B_k \in \mathbb{Q}$.

Свойство 1.3. *Без доказательства,* $(-1)^k B_{2k} > 0$.

Свойство 1.4. $B_{2k+1}=0$.

Лемма 1. *Тривиально:*
Если $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k$. *Тогда* f *чётная тогда и только тогда, когда* $\forall k \in \mathbb{Z}_+ \ f^{(k)}(0)=0$

Доказательство. Давайте ещё раз запишем разложение:

$$\frac{z}{e^z-1}=1-\frac{z}{2}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{B_k}{k!}z^k$$

Если мы докажем, что $\frac{z}{e^z-1}+\frac{z}{2}$ — чётная функция, то мы получим то, что мы хотим.

$$\frac{z}{e^z-1}+\frac{z}{2}=\frac{2z+ze^z-z}{2e^z-2}=\frac{z}{2}\cdot\frac{e^z+1}{e^z-1}=\frac{z}{2}\coth\frac{z}{2}$$

$\frac{z}{2}$ — нечётная функция, coth — тоже. □

Следствие 1.1.

$$\frac{z}{2}\coth\frac{z}{2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}z^{2k} \qquad |z|<2\pi$$

Или

$$z\coth z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{2k}B_{2k}}{(2k)!}z^{2k} \qquad |z|<\pi$$

Следствие 1.2.

$$z\cot z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^{2k}B_{2k}}{(2k)!}z^{2k}=1-\frac{z^2}{3}-\frac{z^2}{3}-\frac{z^4}{45}-\frac{2z^6}{945}-\cdots \qquad |z|<\pi$$

Утверждение.

$$\tan z=\cot z-2\cot 2z$$

Следствие 1.3.

$$\tan z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}(2^{2k}-1)2^{2k}B_{2k}}{(2k)!} z^{2k-1} = z + \frac{z^3}{3} + \frac{2z^5}{15} + \frac{17z^7}{315} + \cdots \qquad |z| < \frac{\pi}{2}$$

Доказательство.

$$\tan z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} z^{2k-1} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{4k} B_{2k}}{(2k)!} z^{2k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k}(1-2^{2k}) B_{2k}}{(2k)!} z^{2k-1}$$

□

Замечание. Также отсюда можно вывести разложение котангенса из вот такой формулы:

$$\frac{z}{\sin z} = z \cot z + z \tan \frac{z}{2}$$

Разложение синуса в бесконечное произведение. Гармонический ряд.

Замечание. Теперь мы хотим вычислить $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^2}$. Делать мы это будем также, как делал в своё время Эйлер. И вывел он ответ из другой формулы.

Пусть $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_0 \mid a_n \neq 0$. Тогда $P(z) = a_n \prod\limits_{k=1}^{n-m} (z - z_k)$, где z_k — корни P. Но это удобнее переписать так:

$$P(z) = Az^m \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right)$$

z^m — это то, что у P могут быть несколько корней, равных нулю, вот это они. На остальные можно делить. При этом изменение коэффициентов войдёт в A.

Теперь, смотрите, что хочется (и что сделал Эйлер). Хочется сделать то же самое для синуса, получив

$$\sin z = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)$$

Что делать, имея эту формулу? Ну, разложить обе части в степенной ряд. Слева получим

$$\sin z = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120}$$

Откуда мы справа берём z, понятно. А откуда у нас $-\frac{z^3}{6}$? Ну,

$$-\frac{1}{6} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2\pi^2}$$

И отсюда мы как минимум догадываемся до

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Определение 2. Бесконечное произведение — вот что такое:

$$\prod_{k=1}^{\infty} p_k = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} p_k$$

Говорят, что бесконечное произведение **сходится**, если предел существует, конечен и отличен от нуля.

Свойство 2.1. *Если произведение сходится, то общий множитель стремится к 1.*

Доказательство. Пусть $P_n = \prod\limits_{k=1}^{n} p_k$ — частичные произведения.
Тогда
$$p_n = \frac{P_n}{P_{n-1}} \to \frac{P}{P} = 1$$
□

Замечание. Начиная с этого момента, $p_k \in \mathbb{R}$. Тогда если произведение сходится, то $\exists N\ \forall k > N\ p_k > 0$. Начиная с этого момента все p_k у сходящегося произведения положительны. А значит...

Свойство 2.2. $\prod\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ *сходится тогда и только тогда, когда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \ln p_k$ *сходится. При этом*
$$\prod_{k=1}^{\infty} p_k = e^{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \ln p_k}$$

Доказательство. Рассмотрите частичное произведение и частичную сумму, и получите то, что хотите.
□

Замечание. Для комплексных то же самое работает, но нужно вам главное значение комплексного логарифма.

Замечание. Именно из-за этого свойства принято считать, что бесконечное произведение расходится к нулю, а не сходится к нулю.

Теорема 1 (Теорема Эйлера)**.**
$$\sin z = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)$$

Доказательство. Докажем мы эту теорему для $z = x \in \mathbb{R}$, чтобы не возиться с главным значением логарифма.
Если $x = l\pi \mid l \in \mathbb{Z}$, то неравенство принимает вид $0 = 0$. Дальше $\sin x \neq 0$.
По формуле Муавра
$$\cos m\varphi + \mathbf{i} \sin m\varphi = (\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \cos^k \varphi \mathbf{i}^{m-k} \sin^{m-k}\varphi$$

Отсюда
$$\sin m\varphi = m\cos^{m-1}\varphi\sin\varphi - \binom{m}{m-3} m\cos^{m-3}\varphi\sin^3\varphi + \cdots$$

Пусть $m = 2n+1$. Тогда $\sin(2n+1)\varphi = \sin\varphi P(\sin^2\varphi)$, где P — некоторый многочлен степени $\leqslant n$. При этом n его корней мы знаем:
$$u_k = \sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}$$

Отсюда
$$P(u) = A\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{u}{u_k}\right)$$

У нас тут какое-то непонятное A, давайте его найдём.
$$A = P(0) = \lim_{\varphi\to 0} \frac{\sin(2n+1)\varphi}{\sin\varphi} = 2n+1$$

То есть
$$\sin(2n+1)\varphi = (2n+1)\sin\varphi \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{\sin^2\varphi}{\sin\frac{k\pi}{2n+1}}\right)$$
Очень хорошо, давайте положим $\varphi = \frac{x}{2n+1}$. Тогда что получим?
$$\sin x = (2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}\right)$$
Нам очень хочется сделать здесь предельный переход $n\to\infty$. Но нельзя, у нас произведение переменного количества множителей.
Давайте зафиксируем $M > |x|$, и возьмём $n > M$. Тогда
$$(2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}\prod_{k=1}^{M}\left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x\prod_{k=1}^{M}\left(1 - \frac{x^2}{k\pi}\right)$$
Осталось лишь рассмотреть остаток и доказать, что он стремится к нулю. А для этого прологарифмируем его. Пусть
$$\ln\prod_{k=M+1}^{n}\left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}\right) = \sum_{k=M+1}^{\infty} f_k(n) \qquad f_k(n) = \begin{cases}\ln\left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}\right) & M+1\leqslant k\leqslant n\\ 0 & k > n\end{cases}$$
Мы хотим доказать, что $\sum\limits_{k=M+1}^{\infty} f_k(n) \to \sum\limits_{k=M+1}^{\infty}\ln\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$. А для этого мы докажем, что $\sum\limits_{k=M+1}^{\infty} f_k(n)$ равномерно сходится по n.
Это делается по признаку Вейерштрасса.
$$0 < \frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}} \overset{\sin t\geqslant\frac{2}{\pi}t|t\in[0;\pi/2]}{\leqslant} \frac{\frac{x^2}{(2n+1)^2}}{\frac{4}{\pi^2}\frac{k^2\pi^2}{(2n+1)^2}} = \frac{x^2}{4k^2} \leqslant \frac{1}{4}$$
Заметим вот какое неравенство: для любого $u\in\left[0;\frac{1}{4}\right]$ верно $|\ln(1-u)|\leqslant Cu$. Почему? Потому что $\frac{\ln(1-u)}{u}$ непрерывно на $[1;1/4]$, а значит ограничено. Обозначим то, чем оно ограничено за C.
Теперь в качестве u подставим $\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}$. Получим $|f_k(n)|\leqslant\frac{Cx^2}{4} = \frac{C_x}{4}$. И по признаку Вейерштрасса ряд равномерно сходится на множестве $\{n\in\mathbb{N}\mid n > M\}$. То есть
$$\sum_{k=M+1}^{\infty} f_k(n) \to \sum_{k=M+1}^{\infty}\ln\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$$
А отсюда, потенцированием обеих частей, получаем то, что получить хотели. □

Следствие 1.1. *Пусть $x = \frac{\pi}{2}$. Тогда*
$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) = \frac{2}{\pi}$$
Это формула Валлиса, если расписать множители.

Следствие 1.2.
$$\cos z = \prod_{m=0}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}\right)$$
Доказательство. Проще всего вывести эту формулу из синуса двойного угла:
$$\cos z = \frac{\sin 2z}{2\sin z}$$
□

Следствие 1.3. *Упражнение читателю: написать, как раскладываются гиперболические синус и косинус.*

Разложение котангенса на простые дроби.

Теорема 2.

$$\cot x = \frac{1}{x} - \text{v.p.} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x - k\pi}$$

Доказательство. Известно, что

$$|\sin x| = |x| \prod_{k=1}^{\infty} \left|1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right|$$

Прологарифмируем это:

$$\ln|\sin x| = \ln|x| + \sum_{k=1}^{\infty} \ln\left|1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right| \qquad x \neq m\pi, m \in \mathbb{Z}$$

А теперь мы хотим продифференцировать это:

$$\cot x = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-\frac{2x}{k^2\pi^2}}{1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}} = \frac{1}{x} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2x}{k^2\pi^2 - x^2}$$

Но надо показать, что дифференцирование легально, то есть что ряд справа равномерно сходится хотя бы в окрестности каждой точки, где определён. То есть пусть $m\pi < a < x < b < (m+1)\pi$, и нам надо доказать, что ряд равномерно сходится на $[a; b]$. Для этого докажем, что остаток этого ряда равномерно сходится. Возьмём такое M, что $M\pi > \max\{|a|, |b|\} = A$, тогда все знаменатели положительны. Отсюда для $k > M$

$$\left|\frac{2x}{k^2\pi^2 - x^2}\right| \leqslant \frac{2A}{k^2\pi^2 - A^2}$$

А

$$\sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{2A}{k^2\pi^2 - A^2} < +\infty$$

А отсюда остаток продифференцированного ряда сходится на $[a; b]$ по признаку Вейерштрасса. Правда, наша формула не содержит простых дробей, давайте упростим её:

$$\cot x = \frac{1}{x} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2x}{k^2\pi^2 - x^2} = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x - k\pi} + \frac{1}{x + k\pi}\right) = \text{v.p.} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x - k\pi}$$

□

Следствие 1.1. *Продифференцировав разложение котангенса, получим*

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x - k\pi)^2}$$

Дифференцировать можно по тем же причинам, что и можно было в доказательстве теоремы.

Следствие 1.2.

$$\tan x = -\cot\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\text{v.p.} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x - \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi}$$

Замечание. Всё вышеописанное верно и для $x \in \mathbb{C}$.

Определение 3. Функция

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad s > 1$$

называется **ζ-функцией Римана** (и вообще она определена для $\Re s > 1$), но это нам не важно.

Теорема 3.
$$-\frac{2\zeta(2k)}{\pi^{2k}}=(-1)^k\frac{2^{2k}B_{2k}}{(2k)!}$$

Доказательство.
$$z\cot z=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z^2}{n^2\pi^2-z^2}$$

Но мы же уже получали разложение $z\cot z$ в ряд с числами Бернулли. Давайте вот это чудо разложим честно в степенной ряд и увидим, что получится.

$$z\cot z=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z^2}{n^2\pi^2-z^2}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{z^2}{n^2\pi^2}}{1-\left(\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)}\underset{|z|<\pi}{=}2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{z}{n\pi}\right)^{2k}=2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{n\pi}\right)^{2k}=2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}\right)\frac{z^{2k}}{\pi^{2k}}$$

Почему мы можем менять порядок суммирования? А потому что это можно интерпретировать как сумму семейства. А сумма модулей семейства у нас получается конечной, а значит всё можно.
Итак, два разложения
$$1-\sum_{k=1}^{\infty}2\zeta(2k)\frac{z^{2k}}{\pi^{2k}}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2^{2k}B_{2k}}{(2k)!}z^{2k}$$

А отсюда
$$-\frac{2\zeta(2k)}{\pi^{2k}}=(-1)^k\frac{2^{2k}B_{2k}}{(2k)!}$$

□

Следствие 1.1.
$$B_{2k}=(-1)^{k-1}\frac{(2k)!\zeta(2k)}{2^{2k-1}\pi^{2k}}$$
А отсюда, во-первых, B_{2k} чередуют знак, а, во-вторых, $B_{2k}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}\infty$ (из того, что $\zeta(2k)\to 1$).

Следствие 1.2.
$$\zeta(2k)=(-1)^k\frac{2^{2k-1}\pi^{2k}B_{2k}}{(2k)!}$$

Следствие 1.3. *Зная $B_2=\frac{1}{6}$, $B_4=-\frac{1}{30}$, $B_6=\frac{1}{42}$, получим*
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{\pi^6}{945}$$

Следствие 1.4.
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}=\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

Замечание. Способ, которым мы доказали знакочередование B_{2k} явно не самый простой. Проще было бы взять $y=\tan x$ и решить диффур $y'=1+y^2$, рекуррентно выясняя его коэффициенты разложения в ряд.

Утверждение (Связь ζ-функции и простых чисел)**.** *Пусть p_k — k-тое простое число. (Т.е. $p_1=2$, $p_2=3$ и т.д.)*

Доказательство. Рассмотрим

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-p_k^{-s}} \qquad s>1$$

При $s>1$ произведение сойдётся. Для доказательства этого перейдём к логарифму:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{-\ln\left(1-\frac{1}{p_k^s}\right)}_{\sim \frac{1}{p_k^s} \leqslant \frac{1}{k^s}}$$

Поскольку

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \qquad |z|<1$$

верно следующее:

$$\frac{1}{1-p_k^{-s}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} p_k^{-s\nu}$$

Рассмотрим частичные произведения

$$\prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-p_k^{-s}} = \prod_{k=1}^{N} \sum_{\nu=0}^{\infty} p_k^{-s\nu}$$

Теперь что это такое вообще? Если взять это произведение из сумм и раскрыть в нём скобки, то получится сумма слагаемых какого-то такого вида:

$$\frac{1}{(p_1^{\nu_1} \cdot \dots \cdot p_N^{\nu_N})^s}$$

То есть сюда входят такие числа, что в их разложении на простые есть только первые N простых (в каких-то степенях). Это как минимум первые N натуральных чисел и ещё какие-то. То есть получим

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} + \underbrace{\sum_{n=N+1}^{\infty}{}^{*} \frac{1}{n^s}}_{\text{какие-то слагаемые пропущены}} \quad \xrightarrow[N\to\infty]{} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

А что при $s=1$? Там $\sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s}$ стремится к $+\infty$, а значит, $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-p_k^{-1}}$, как строко больший его, расходится к $+\infty$, а отсюда и ряд обратных простых чисел расходится к $+\infty$. $\square$

Замечание. Отсюда можно сделать вывод, что простые числа достаточно часто встречаются в натуральном ряде. Но как это «достаточно часто» оценить?

Определение 4. $\pi(x)$ — количество простых чисел меньше либо равных x.

Теорема 4.

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$$

Замечание. Вот эта теорема уже совсем сложная. Первый, кто что-то с этим сделал, был Чебышёв (он доказал, что $\pi(x) = \Theta\left(\frac{x}{\ln x}\right)$). А равносильность была доказана существенна позднее.

Замечание. Вернёмся к $\zeta(s)$. Мы знаем, что

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Мы знаем это для $s>1$, когда определим комплексную степень, выясним, что это верно при $\Re s > 1$, а дальше она аналитически продолжается на $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.
После продолжения оказывается, что в точках $-2, -4, \dots$ эта функция имеет нули (они называются **тривиальными нулями**), а гипотеза Римана заключается в том, что все нетривиальные нули лежат на прямой $\Re z = \frac{1}{2}$.

Многочлены Бернулли.

Определение 5.

$$\frac{ze^{xz}}{e^z-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathcal{B}_k(x)}{k!}z^k \qquad |z|<2\pi$$

Здесь $\mathcal{B}$ называются **многочленами Бернулли**.

Теорема 5. *Многочлены Бернулли действительно являются многочленами*

Доказательство.

$$\frac{ze^{xz}}{e^z-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathcal{B}_k(x)}{k!}z^k \qquad |z|<2\pi$$

Что равносильно

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^kz^k}{k!}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{B_j}{j!}z^j\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathcal{B}_k(x)}{k!}z^k \qquad |z|<2\pi$$

А отсюда

$$\sum_{l=0}^{k}\frac{x^l}{l!}\frac{B_{k-l}}{(k-l)!}=\frac{\mathcal{B}_k(x)}{k!}$$

И это правда многочлены:

$$\mathcal{B}_k(x)=\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}B_{k-l}x^l$$

□

Свойство 5.1.

$$\mathcal{B}_k(0)=B_k$$

Свойство 5.2.

$$\mathcal{B}_k'(x)=k\mathcal{B}_{k-1}(x) \qquad k\in\mathbb{N}$$

Доказательство.

$$\mathcal{B}_k'(x)=\sum_{l=1}^{k}\binom{k}{l}B_{k-l}lx^{l-1}\overset{l=j+1}{=}\sum_{l=1}^{k}\binom{k}{j+1}B_{k-j-1}(j+1)x^j$$

При этом $(j+1)\binom{k}{j+1}=k\binom{k-1}{j}$, а значит

$$\mathcal{B}_k'(x)=\sum_{l=1}^{k}k\binom{k-1}{j}B_{k-j-1}x^j=k\mathcal{B}_{k-1}(x)$$

□

Следствие 1.1.

$$\mathcal{B}_k(x)=B_k+k\int_0^x\mathcal{B}_{k-1}(t)\ \mathrm{d}t$$

Пример.

- $\mathcal{B}_0(x)=1$.
- $\mathcal{B}_1(x)=x-\frac{1}{2}$.
- $\mathcal{B}_2(x)=x^2-x+\frac{1}{6}$.

- $\mathcal{B}_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$.
- $\mathcal{B}_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}$.
- $\mathcal{B}_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x$.
- $\mathcal{B}_6(x) = x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42}$.

Свойство 5.3.

$$\mathcal{B}_k(1-x) = (-1)^k \mathcal{B}_k(x)$$

Доказательство.

$$\frac{ze^{(1-x)z}}{e^z-1} = e^{-xz}\frac{z}{1-e^{-z}} = \frac{(-z)e^{x(-z)}}{e^{-z}-1}$$

Запишем равенство коэффициентов при x^k:

$$\frac{\mathcal{B}_k(1-z)}{k!} = \frac{\mathcal{B}_k(x)}{k!}(-1)^k$$

□

Свойство 5.4.

$$\mathcal{B}_k(1/2) = -\left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right) B_k \qquad k \in \mathbb{Z}_+$$

Доказательство.

$$\frac{ze^{z/2}}{e^z-1} = \frac{z(e^{z/2}+1)}{e^z-1} - \frac{z}{e^z-1} = \frac{z}{e^{z/2}-1} - \frac{z}{e^z-1} = 2\frac{z/2}{e^{z/2}-1} - \frac{z}{e^z-1}$$

Это (без учёта факториалов)

$$\mathcal{B}_k(1/2) = 2B_k\frac{1}{2^k} - B_k = -\left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right) B_k$$

□

Свойство 5.5 (Нули и знаки $\mathcal{B}_{2m+1}$)**.**

$$(-1)^m \mathcal{B}_{2m+1}(x) \begin{cases} < 0 & x \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \\ > 0 & x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right) \end{cases} \qquad m \in \mathbb{Z}_+$$

При этом если $m \in \mathbb{N}$, то $\mathcal{B}_{2m+1}$ имеет своими нулями 0, $\frac{1}{2}$ и 1 (и только их).

Доказательство. Всё про нули следует из свойств 1, 3 и 4.
Знаки докажем по индукции. База ($m = 0$) — ясно. Переход $m-1 \mapsto m \in \mathbb{N}$: продифференцируем $(-1)^m \mathcal{B}_{2m+1}(x)$ дважды:

$$(-1)^m (2m+1)2m\mathcal{B}_{2m-1}(x) \begin{cases} > 0 & x \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \\ < 0 & x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right) \end{cases}$$

Также мы уже знаем про нули, а значит нами получено, что $(-1)^m \mathcal{B}_{2m+1}$ выпукла вниз на $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ и выпукла вверх $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$. При этом на концах 0, а определение выпуклости — график ниже/выше хорды. □

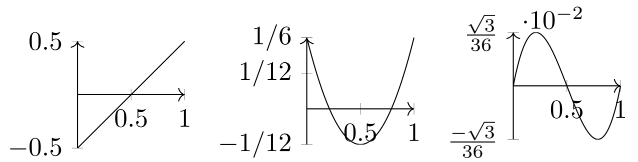
Свойство 5.6 (Нули и знаки $Y_{2m}(x) = \mathcal{B}_{2m}(x) - B_{2m}$)**.**

$$Y_{2m}(0) = Y_{2m}(1) = 0 \qquad \forall x \in (0; 1)\ (-1)^m Y_{2m}(x) > 0$$

Доказательство. Нули — из свойств 1 и 3.
Положительность: ну, давайте продиффаем что-ли.

$$((-1)^m Y_{2m}(x))' = (-1)^m 2m\mathcal{B}_{2m-1}(x) \begin{cases} > 0 & x \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \\ < 0 & x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right) \end{cases}$$

Ну, так и всё, как надо, она санчала возрастает, потом убывает. А на концах 0. □



Пример.

Свойство 5.7. *Без доказательства*

$$\mathcal{B}_k(mx) = m^{k-1} \sum_{j=0}^{m-1} B_k\left(x + \frac{j}{m}\right) \qquad k \in \mathbb{Z}_+, m \in \mathbb{N}$$

Свойство 5.8.

$$\mathcal{B}_k(x+1) - \mathcal{B}_k(x) = kx^{k-1} \qquad k \in \mathbb{Z}_+$$

Доказательство.

$$\frac{ze^{(x+1)z}}{e^z - 1} - \frac{ze^{xz}}{e^z - 1} = ze^{xz} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} z^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1} \frac{z^k}{k!}$$

□

Замечание. Теперь к чему вообще Бернулли свои числа и многочлены придумал? А к тому, чтобы считать суммы степеней первых n натуральных чисел.

Свойство 5.9.

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \nu^p = \frac{\mathcal{B}_{p+1}(n) - B_{p+1}}{p+1}$$

Доказательство.

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \nu^p = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\mathcal{B}_{p+1}(\nu+1) - \mathcal{B}_{p+1}(\nu)}{p+1} = \frac{\mathcal{B}_{p+1}(n) - B_{p+1}}{p+1}$$

□

Свойство 5.10.

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \nu^p = \frac{1}{p+1} \sum_{k=1}^{p+1} \binom{p+1}{k} B_{p+1-k} n^k$$

Теорема 6 (Разложение функции по многочленам Бернулли)**.** *Пусть* $r \in \mathbb{N}$, $f \in C^{(r)}[a;b]$, $x \in [a;b]$. *Тогда*

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f + \sum_{k=1}^{r} \frac{(b-a)^{k-1}}{k!} f^{(k-1)}\Big|_a^b \mathcal{B}_k\left(\frac{x-a}{b-a}\right) - \frac{(b-a)^{r-1}}{r!} \int_a^b f^{(r)}(t) \mathcal{B}_r^*\left(\frac{x-t}{b-a}\right) \,\mathrm{d}t$$

где $\mathcal{B}_r^*$ *— 1-периодическая функция, совпадающая с* $\mathcal{B}_r$ *на* $(0;1)$. *(Как она определена на концах, не важно, ведь мы интегрируем.)*

Доказательство. Для начала сделаем линейную замену переменной, сведя $[a;b]$ к $[0;1]$. Была f, стала φ, была x, стала ξ, была t, стала τ:

$$x = a + (b-a)\xi \qquad \xi = \frac{x-a}{b-a}$$

$$t = a + (b-a)\tau \qquad \tau = \frac{t-a}{b-a} \qquad \mathrm{d}t = (b-a)\mathrm{d}\tau$$

$$f(x) = \varphi(\xi)$$

Итого:

$$\varphi(\xi) = \overbrace{\frac{1}{b-a}}^{\text{уходит из замены в интеграле}} \int\limits_a^b f + \sum_{k=1}^r \frac{\overbrace{(b-a)^{k-1}}^{\text{уходит от производных}}}{k!} \varphi^{(k-1)}\Big|_0^1 \mathcal{B}_k(\xi) - \frac{\overbrace{(b-a)^{r-1}}^{\substack{\text{уходит от производной,}\\ \text{лишнее } (b-a) \text{ уходит в интеграл}}}}{r!} \int\limits_0^1 f^{(r)}(\tau)\mathcal{B}_r^*(\xi-\tau)\ \mathrm{d}\tau$$

Вернём обозначения:

$$f(x) = \int\limits_0^1 f + \sum_{k=1}^r \frac{1}{k!} f^{(k-1)}\Big|_0^1 \mathcal{B}_k(x) - \frac{1}{r!}\int\limits_0^1 f^{(r)}(t)\mathcal{B}_r^*(x-t)\ \mathrm{d}t$$

Пусть $r \geqslant 2$. Пусть

$$\rho_r = \frac{1}{r!}\int\limits_0^1 f^{(r)}(t)\mathcal{B}_r^*(x-t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{r!} f^{(r-1)}(t)\mathcal{B}_r^*(x-t)\Big|_{t=0}^1 - \frac{1}{r!}\int\limits_0^1 f^{(r-1)}(t)(\mathcal{B}_r^*(x-t))'_t\ \mathrm{d}t = \frac{1}{r!} f^{(r-1)}\Big|_0^1 \mathcal{B}_r(x) + \rho_{r-1}$$

Сделав это ещё кучу раз, получим

$$\rho_r = \sum_{k=2}^r \frac{1}{k!} f^{(k-1)}\Big|_0^1 \mathcal{B}_k(x) + \rho_1$$

Осталось посчитать ρ_1.

$$\rho_1 = \int\limits_0^1 f'(t)\mathcal{B}_1^*(x-t)\ \mathrm{d}t = \int\limits_0^x f'(t)\mathcal{B}_1(x-t)\ \mathrm{d}t + \int\limits_x^1 f'(t)\mathcal{B}_1(x-t+1)\ \mathrm{d}t \overset{\mathcal{B}_1(u) = u - \frac{1}{2}}{=}$$

$$= f(t)\mathcal{B}_1(x-t)\Big|_{t=0}^x + \int\limits_0^x f + f(t)\mathcal{B}_1(x-t+1)\Big|_{t=x}^1 + \int\limits_x^1 f$$

Чтобы это красиво посчитать, надо подставлять в $\mathcal{B}_1$ в одном месте 0, в другом — 1 (это даст нам $f\big|_0^1$), в потом в одном и в другом месте x. Итого

$$\rho_1 = f\Big|_0^1 \mathcal{B}_1(x) - f(x) + \int\limits_0^1 f$$

□

Замечание. r-тое слагаемое в сумме можно включить в остаток, но это бывает удобно с переменным успехом. Получится:

$$f(x) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f + \sum_{k=1}^{r-1} \frac{(b-a)^{k-1}}{k!} f^{(k-1)}\Big|_a^b \mathcal{B}_k\left(\frac{x-a}{b-a}\right) - \frac{(b-a)^{r-1}}{r!}\int\limits_a^b f^{(r)}(t)\left(\mathcal{B}_r^*\left(\frac{x-t}{b-a}\right) - \mathcal{B}_r\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right)\ \mathrm{d}t$$

Замечание. Начальное слагаемое можно включить в сумму (в сумме получится двойная подстановка минус первой производной; не интеграл ли это). Опять же, не всегда нужно.

Следствие 1.1. *В условиях теоремы 6 при $r-1 \in \mathbb{N}$. При $x = a$ формула обращается в*

$$\int_a^b f = (b-a)\frac{f(b)+f(a)}{2} - \sum_{k=2}^{r-1} \frac{(b-a)^k B_k}{k!} f^{(k-1)}\Big|_a^b + \frac{(b-a)^r}{r!}\int_a^b f^{(r)}(t)\left(\mathcal{B}_r\left(\frac{b-t}{b-a}\right) - B_r\right)\,\mathrm{d}t$$

Замечание. Настало время говорить о численном интегрировании. Самый простой способ — взять $x \in [a;b]$ и взять прямоугольник $f(x)(b-a)$. Но вот насколько это будет точно — мы можем посмотреть посмотреть на нашу формулу. В равенство это обращается для левого и правого прямоугольника на константах, а для среднего прямоугольника — на линейных функциях.
Есть способ с трапецией: $(b-a)\frac{f(b)+f(a)}{2}$ (это уже то, что написано в следствии). И опять же оно обращается в равенство на линейный функциях. А значит остаток выражается через вторую производную (и мы даже видим, что это согласуется с формулой).
А как бы построить формулу, которая обращается в равенство на многочленах более высокой степени? Первый способ — увеличить количество узлов и подбирать коэффициенты. Но у нас тут получился второй способ: не увеличивая количество узлов мы добавили что-то, зависящее от производной. И результат тот же: точная формула для многочленов r-той степени.

Замечание. Остаток можно записать в виде

$$\frac{(b-a)^{r+1}}{r!}\int_0^1 f^{(r)}(a+(b-a)\tau)(\mathcal{B}_r(1-\tau) - B_r)\,\mathrm{d}\tau$$

Теорема 7 (Формула Эйлера — Маклорена)**.** *Пусть $r-1 \in \mathbb{N}$, $f \in C^{(r)}[a;b]$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть $h = \frac{b-a}{n}$. Тогда*

$$\int_a^b f = h\left(\frac{f(a)}{2} + \sum_{\nu=1}^{n-1} f(a+\nu h) + \frac{f(b)}{2}\right) - \sum_{k=2}^{r-1}\frac{h^k B_k}{k!} f^{(k-1)}\Big|_a^b + \frac{h^{r+1}}{r!}\int_0^1 (\mathcal{B}_r(1-\tau) - B_r)\sum_{\nu=0}^{n-1} f^{(r)}(a+\nu h + h\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Доказательство. Применить следствие **??** с записью остатка из замечания выше выше к отрезам $[a+\nu h; a+(\nu+1)h]$ и сложить по $\nu \in [0:n-1]$. ☐

Замечание. Это — уточнение формулы трапеции.

Замечание. Это чудо тоже позволяет приближённо вычислять интегралы. Но с другой стороны, мы можем прочитать равенство с обратной стороны. Это формула приближённого вычисления сумм: интеграл ведь проще суммы:

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} f(a+\nu h) = \frac{1}{h}\int_a^b f + \sum_{k=1}^{r-1}\frac{h^{k-1}}{k!}B_k f^{(k-1)}\Big|_a^b \underbrace{- \frac{h^r}{r!}\int_0^1 (\mathcal{B}_r(1-\tau) - B_r)\sum_{\nu=0}^{n-1} f^{(r)}(a+\nu h + h\tau)\,\mathrm{d}\tau}_{R_r}$$

Это чудо отличается от предыдущего тем, что мы добавили $\frac{f(a)}{2}$ и вычли $\frac{f(b)}{2}$, и оно дошло до $B_1 h$.

Замечание. Обычно это применяется при $r \,\vdots\, 2$. Как мы знаем, при таких r функция $\mathcal{B}_r(1-\tau) - B_r$ сохраняет знак, и с ней легче работать. Но давайте всё же полностью перепишем формулу при $r = 2q$:

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} f(a+\nu h) = \frac{1}{h}\int_a^b f - \frac{f(b)-f(a)}{2} + \sum_{k=1}^{q-1}\frac{h^{2k-1}}{k!}B_{2k} f^{(2k-1)}\Big|_a^b - R_{2q}$$

Следствие 1.1. *Пусть, $q \in \mathbb{N}$, $f \in C^{(2q+2)}[a;b]$. Пусть $f^{(2q)}$ и $f^{(2q+2)}$ нестрого одного знака. Тогда остаток совпадает по знаку с первом отброшенным членом и не превосходит его по модулю:*

$$\operatorname{sign}(-R_{2q}) = (-1)^{q-1}\operatorname{sign} f^{(2q-1)}\Big|_a^b \qquad \text{и} \qquad |R_{2q}| \leqslant \frac{h^{2q-1}|B_{2q}|}{(2q)!}\left|f^{(2q-1)}\Big|_a^b\right|$$

Доказательство. Почему так? Мы выводили, что

$$\mathcal{B}_{2q}(1-\tau) - B_{2q} = B_{2q}(\tau) - B_{2q} = Y_{2q}(\tau)$$

А $(-1)^q Y_{2q}(\tau) > 0$ на $(0;1)$. Отсюда знаки R_{2q} и R_{2q+2} противоположны. При этом

$$-R_{2q} + R_{2q+2} = \frac{h^{2q-1}B_{2q}}{(2q)!}f^{(2q-1)}\Big|_a^b$$

И отсюда, из-за того, что знаки R_{2q+2} и $-R_{2q}$ совпадают, каждое по модулю не больше правой части. □

Пример.

$$\pi^2 = 6\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}$$

Пусть $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $h = 1$, $n, a \in \mathbb{N}$, их мы выберем какие-то потом, $b = a + n$. Тогда

$$f^{(l)} = \frac{(-1)^l(l+1)!}{x^{l+2}}$$

Действительно, все чётные производные положительны. То есть

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{1}{(a+\nu)^2} = \int\limits_a^{a+n}\frac{\mathrm{d}x}{x^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(a+n)^2} - \frac{1}{a^2}\right) + \sum_{k=1}^{q-1}\frac{B_{2k}}{(2k)!}(-(2k)!)\left(\frac{1}{(a+n)^{2k+1}} - \frac{1}{a^{2k+1}}\right) + \theta_n B_{2q}\left(\frac{-1}{(a+n)^{2q+1}} + \frac{1}{a^{2q+1}}\right)$$

Где θ_n — какое-то число $\in [0;1]$. Теперь устремим n у бесконечности. И пусть θ_n имеет своим пределом $\theta \in [0;1]$. Что будет, когда устремим?

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(a+\nu)^2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{2a^2} + \sum_{k=1}^{q-1}\frac{B_{2k}}{a^{2k+1}} + \theta\frac{B_{2q}}{a^{2q+1}}$$

Пусть $a = q = 10$. Получим

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^2} = \sum_{l=1}^{9}\frac{1}{l^2} + \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(10+\nu)^2}$$

Оценив правую штуку 20 слагаемыми, получим, что точность у нас

$$6\left|\frac{B_{2q}}{10^{2q+1}}\right| < \frac{1}{2}\times 10^{-17}$$

Чтобы получить такую же точность, считая сумму ряда в лоб, надо взять сколько слагаемых? Ну, пусть N. Тогда

$$6\sum_{\nu=N+1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2} < \frac{1}{2}\times 10^{-17}$$

Но при этом

$$6\sum_{\nu=N+1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2} > 6\int\limits_{N+1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{6}{N+1}$$

$N > 10^{18}$ получится.

Следствие 1.2. *Пусть* $f \in C^{(2q+2)}[a;+\infty)$, $f^{(2k)}$ *все одного знака,* $f^{(2k-1)}(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. *Тогда*

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} f(a+\nu h) = \frac{1}{h}\int\limits_a^b f + C(a,h) - \frac{f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{q-1} \frac{h^{2k-1}}{B_{2k}} k! f^{(2k-1)}(b) - \widetilde{R_{2q}}$$

Где

$$C(a;h) = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{n-1} f(a+\nu h) - \frac{1}{h}\int\limits_a^b f + \frac{f(b)}{2}$$

При этом

$$|\widetilde{R_{2q}}| \leqslant \frac{h^{2q-1}|B_{2q}|}{(2q)!}\left|f^{(2q-1)}(b)\right|$$

Доказательство. Вспомним выражение

$$R_{2q} = \frac{h^{2q}}{(2q)!}\int\limits_0^1 Y_{2q}(\tau)\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} - \sum_{\nu=n}^{\infty}\right) f^{(2q)}(a+\nu h+h\tau)\ \mathrm{d}\tau$$

А давайте возьмём нашу запись

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} f(a+\nu h) = \frac{1}{h}\int\limits_a^b f - \frac{f(b)-f(a)}{2} + \sum_{k=1}^{q-1} \frac{h^{2k-1}}{B_{2k}} k! f^{(2k-1)}\Big|_a^b - R_{2q}$$

и в этой записи сгруппируем отдельно слагаемые с a и слагаемые с b. Получим

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} f(a+\nu h) = \frac{1}{h}\int\limits_a^b f + C_{2q}(a,h) - \frac{f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{q-1} \frac{h^{2k-1}}{B_{2k}} k! f^{(2k-1)}(b) - \widetilde{R_{2q}}$$

$$\widetilde{R_{2q}} = \frac{h^{2q}}{(2q)!}\int\limits_0^1 Y_{2q}(\tau)\sum_{\nu=0}^{\infty} f^{(2q)}(b+\nu h+h\tau)\ \mathrm{d}\tau$$

И теперь в этой формулке тоже устремим n к ∞ (оно же b к ∞). Всё, что правее $\frac{f(b)}{2}$ устремилось к нулю. А отсюда $C_{2q}(a;h)$ — предел $\sum\limits_{\nu=0}^{n-1} f(a+\nu h) - \frac{1}{h}\int\limits_a^b f + \frac{f(b)}{2}$. При этом $C_{2q}(a;h)$ не зависит от q (потому что это предал чего-то, не зависящего от q).
Тогда для $\widetilde{R_{2q}}$ сохраняется Лейбницевское свойство:

$$\operatorname{sign}\widetilde{R_{2q}} = (-1)^{q-1}\operatorname{sign} f^{(2k-1)}(b)$$

$$|\widetilde{R_{2q}}| \leqslant \frac{h^{2q-1}|B_{2q}|}{(2q)!}\left|f^{(2q-1)}(b)\right|$$

$\square$

Пример. Рассмотрим $f(x) = \ln x$, $a = 1 = h$. И ещё вместо n возьмём $n-1$. Тогда

$$\ln n! = \sum_{\nu=1}^{n} \ln\nu = \sum_{\nu=0}^{n-2} \ln(1+\nu) + \ln n = \underbrace{n\ln n - n}_{\int_1^n \ln x \mathrm{d}x - 1} + C_1 + \frac{1}{2}\ln n + \sum_{k=1}^{q-1} \frac{B_{2k}}{(2k)!}\frac{(2k-2)!}{n^{2k-1}} + \widetilde{R_{2q}}$$

То есть

$$\ln n! = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n - n + \ln\sqrt{2n} + \sum_{k=1}^{q-1}\frac{B_{2k}}{2k(2k-1)}\frac{1}{n^{2k-1}} + \widetilde{R_{2q}}$$

$$\widetilde{R_{2q}} = \theta\frac{B_{2q}}{2q(2q-1)}\frac{1}{n^{2q-1}} \qquad \theta\in[0;1]$$

Это чудо называется рядом Стирлинга, и если применить к этому чуду экспоненту, получится разложение факториала по какой-то ебале. И частным случаем этого является формула Стирлинга. И, кстати, в неё у нас откуда-то вылезала $\frac{1}{12}$, и это $\frac{B_2}{2}$.

6 Криволинейные интегралы на плоскости.

Определение, простейшие свойства криволинейных интегралов.

Интеграл комплекснозначной функции.

Замечание. Везде дальше $z = x + \mathbf{i}y$ обозначает $x = \Re z$, $y = \Im z$ и для функции $f\colon D\to\mathbb{C}$, $f = u + \mathbf{i}v$ обозначает $u = \Re f$, $v = \Im f$.

Определение 1. Пусть $f\colon [a;b]\to\mathbb{C}$. Положим

$$\int\limits_a^b f = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(\theta_k)\Delta t_k$$

где $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ — дробление $[a;b]$, $\theta_k\in[t_k;t_{k+1}]$ — оснащение t_k, $\lambda = \max\limits_{0<k<n-1}\Delta t_k$, $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$.
Говорят, что $f\in R[a;b]$, если предел существует и конечен.
Также считаем $\int\limits_a^a f = 0$, $\int\limits_b^a f = -\int_a^b f$.

Свойство 1.1. *Функция интегрируема тогда и только тогда, когда обе её координатные функции интегрируемы. При этом*

$$\int\limits_a^b f = \int\limits_a^b u + \mathbf{i}\int\limits_a^b v$$

Доказательство. Смотри свойства предела. $\square$

Свойство 1.2. *Переносятся свойства: линейность, аддитивность по отрезку, формула Ньютона — Лейбница, теорема Барроу, арифметические действия, интегрируемость модуля, формула* $|\int_a^b f| \leqslant \int_a^b |f|$.

Свойство 1.3. *Теорема о среднем не обязательно верна.*

Пример.

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{\mathbf{i}t}\,\mathrm{d}t = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos t + \mathbf{i}\sin t\,\mathrm{d}t = 0$$

Что не равно $2\pi e^{\mathbf{i}c}$ ни для какого c.

Замечание. Определение не имело никакой специфики комплексных чисел, можно было точно также определить интеграл функции $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$:

$$\int\limits_a^b f = \left(\int\limits_a^b f_1;\dots;\int\limits_a^b f_n\right)$$

Определение 2. Пусть $P, Q\colon \underset{D}{\subset}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Тогда функция $\omega\colon \substack{D\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}(\mathbb{C}) \\ ((x;y);(\mathrm{d}x;\mathrm{d}y))\mapsto P(x;y)\mathrm{d}x+Q(x;y)\mathrm{d}y}$ называется **вещественной дифференциальной формой**.

Замечание. На то, что вторая пара аргументов обозначена $(\mathrm{d}x;\mathrm{d}y)$? Да просто так! Но потом мы поймём, почему это удобно.
Также впоследствии краткости записи ради мы будем писать $\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$.

Определение 3. Пусть $f\colon \underset{D}{\subset}\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Тогда $\omega\colon \substack{D\times\mathbb{C}\to\mathbb{C} \\ (z;\mathrm{d}z)\mapsto f(z)\mathrm{d}z}$

Утверждение. *Всякая комплексная форма можем быть записана в вещественном виде:*

$$f\mathrm{d}z = (u + \mathbf{i}v)\mathrm{d}x + (\mathbf{i}u - v)\mathrm{d}y$$

Обратное неверно.

Замечание. Что такое линейная комплексная переменная? Это $z \mapsto Az$, где $z = x + \mathbf{i}y$, $A = a + \mathbf{i}b$, и $Az = (a+\mathbf{i}b)x + (\mathbf{i}a - b)y = \underbrace{ax - by}_{\alpha} + \mathbf{i}\underbrace{(bx + ay)}_{\beta}$. Пы получили, что у нас преобразование — это матрица $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. А произвольная вещественная форма — рандомная матрица, а не конкретно такого вида.

Определение 4. Пусть $\gamma(\varphi;\psi)$ — путь $[a;b] \to \mathbb{R}^2(\mathbb{C})$. Пусть $\gamma^* = \gamma([a;b])$. Пусть $P, Q\colon \gamma^* \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Пусть $\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$. Тогда **криволинейным интегралом второго рода** от формы ω по пути γ называется

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\left(P(\xi_k;\eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k;\eta_k)\Delta y_k\right)$$

Где

$$a < t_0 < \cdots < t_n = b \qquad \Delta t_k = t_{k+1} - t_k \qquad \lambda = \max_{0<k<n-1}\Delta t_k$$

$$x_k = \varphi(t_k) \qquad y_k = \psi(t_k) \qquad \Delta x_k = x_{k+1} - x_k \qquad \Delta y_k = y_{k+1} - y_k$$

$$\theta_k \in [t_k; t_{k+1}] \qquad \xi_k = \varphi(\theta_k) \qquad \eta_k = \psi(\theta_k)$$

Обозначения:

$$\int_\gamma \omega \qquad \int_\gamma P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y \qquad \int_\gamma P(x;y)\mathrm{d}x + Q(x;y)\mathrm{d}y$$

Определение 5. Пусть γ — путь $[a;b] \to C$. Пусть $f\colon \gamma^* \to \mathbb{C}$. Пусть $\omega = f\mathrm{d}z$. Тогда **криволинейным интегралом второго рода** от формы ω по пути γ называется

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)\Delta z_k$$

Где

$$a < t_0 < \cdots < t_n = b \qquad \Delta t_k = t_{k+1} - t_k \qquad \lambda = \max_{0<k<n-1}\Delta t_k$$

$$z_k = \gamma(t_k) \qquad \Delta z_k = z_{k+1} - z_k$$

$$\theta_k \in [t_k; t_{k+1}] \qquad \zeta_k = \gamma(\theta_k)$$

Обозначения:

$$\int_\gamma \omega \qquad \int_\gamma f \qquad \int_\gamma f\mathrm{d}z \qquad \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$$

Определение 6. Пусть $\gamma = (\varphi;\psi)\colon [a;b] \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $\gamma \in C^{(1)}[a;b]$. Пусть $P, Q\colon \gamma^*\colon \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $P, Q \in C(\gamma^*)$, $\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$. Положим

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b P(\varphi;\psi)\varphi' + Q(\varphi;\psi)\psi'$$

Определение 7. Пусть $\gamma\colon [a;b]\to\mathbb{C}$, $\gamma\in C^{(1)}[a;b]$. Пусть $f\colon \gamma^*\colon \mathbb{C}$, $f\in C(\gamma^*\to\mathbb{C})$, $\omega = f\mathrm{d}z$. Положим

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma f = \int_a^b (f\circ\gamma)\gamma'$$

Замечание. Некоторое время мы будем жить с этими определениями, потом расширим их на кусочно-гладкие функции, а затем докажем, что второе определения является расширением первого.

Пример.

$$\int_\gamma \mathrm{d}z = \int\limits_a^b \gamma' = \gamma(b)-\gamma(a)$$

Пример. Пусть $z_0\in\mathbb{C}$, $R>0$, $\gamma(t)=\gamma_{r,z_0}(t)=\gamma_r = re^{\mathbf{i}t}+z_0 \mid t\in[-\pi;\pi]$.
Пусть $f(z)=(z-z_0)^n \mid n\in\mathbb{Z}$.

$$\int_{\gamma_{r,z_0}} (z-z_0)^n\ \mathrm{d}z = \int\limits_{-\pi}^{\pi} r^n e^{\mathbf{i}nt} r\mathbf{i}e^{\mathbf{i}t}\ \mathrm{d}t = \mathbf{i}r^{n+1}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{\mathbf{i}(n+1)t}\ \mathrm{d}t = \begin{cases}0 & n\neq -1\\ 2\pi\mathbf{i} & n=-1\end{cases}$$

Свойство 7.1.

$$\int_{\gamma^-}\omega = -\int_\gamma \omega$$

Где $\gamma^-(t)=\gamma(a+b-t)$

Доказательство.

$$\int_{\gamma^-} f(z)\ \mathrm{d}z = \int\limits_a^b f(\gamma(a+b-t))(-1)\gamma'(a+b-t)\ \mathrm{d}t \overset{a+b-t=\tau}{=} -\int\limits_a^b f(\gamma(\tau))\gamma'(\tau)\ \mathrm{d}t - \int_\gamma \omega$$

□

Свойство 7.2 (Линейность)**.**

$$\int_\gamma \alpha\omega_1+\beta\omega_2 = \alpha\int_\gamma\omega_1 + \beta\int_\gamma\omega_2$$

Доказательство остаётся читателю.

Свойство 7.3 (Независимость от параметризации)**.** *Пусть* $u\in C^{(1)}([a;b]\to[\alpha;\beta])$ *— возрастающая сюръекция. Пусть* $\gamma=\tilde\gamma\circ u$*. Тогда*

$$\int_\gamma\omega = \int_{\tilde\gamma}\omega$$

В частности, интегралы по $C^{(1)}$*-эквивалентным путям равны.*

Замечание. Они по просто эквивалентным путям тоже равны, мы просто не хотим доказывать через интегральные суммы.

Доказательство.

$$\int_{\tilde\gamma} f(z)\mathrm{d}z = \int\limits_\alpha^\beta f(\tilde\gamma(\tau))\tilde\gamma'(\tau)\ \mathrm{d}\tau \overset{\tau=u(t)}{=} \int\limits_a^b f(\gamma(t))\tilde\gamma'(u(t))u'(t)\ \mathrm{d}t = \int\limits_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\ \mathrm{d}t = \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$$

□

Замечание. Поскольку мы теперь занем, что интеграл не зависит от параметризации, мы можем определить интеграл от кривой.
В частности, можно считать, что все пути заданы на отрезке $[0;1]$, и интегралы всегда можно считать заданными на таких путях.

Свойство 7.4 (Аддитивность по пути)**.** *Пусть $a < c < b$, $\gamma_1 = \gamma\big|_{[a;c]}$, $\gamma_2 = \gamma\big|_{[c;b]}$. Тогда*

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega$$

Замечание. Во-первых, свойство также распространяется на любое количество подотрезков. Во-вторых, определения 4 и 5 также теперь распространяются на кусочно-гладкие пути.

Определение 8. Пусть $a < c < b$, γ_1, γ_2 заданы на $[a;c]$ и $[c;b]$ соотвественно. И пусть $\gamma_1(c) = \gamma_2(c)$. Тогда **соединением путей** γ_1 и γ_2 называется путь

$$\gamma_1 \vee \gamma_2(t) = \gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in [a;c] \\ \gamma_2(t) & t \in [c;b] \end{cases}$$

Пусть γ_1, γ_2 заданы на $[a;c]$ и $[d;b]$ соотвественно и $\gamma_1(c) = \gamma_2(d)$. Соединением таких путей называется

$$\gamma_1 \vee \gamma_2(t) = \gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in [a;c] \\ \gamma_2(t - c + d) & t \in [c;c + b - d] \end{cases}$$

Замечание. Если γ_1 и γ_2 кусочно-гладкие, то $\gamma_1 \vee \gamma_2$ тоже обладает этим свойством.

Определение 9. Кусочно-гладкий замкнутый путь называется **контуром**.

Свойство 9.1 (Интеграл по контуру)**.** *Интеграл по контуру не зависит от выбора начальной (она же конечная) точки контура.*
Более формально: пусть $a < c < b$, γ задан на $[a;b]$, $\gamma_1 = \gamma\big|_{[a;c]}$, $\gamma_1 = \gamma\big|_{[c;b]}$. Тогда $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$, пусть $\tilde{\gamma} = \gamma_2 \vee \gamma_1$. В таком случае

$$\int_\gamma \omega = \int_{\tilde{\gamma}} \omega$$

Доказательство. Напрямую следует из аддитивности. □

Пример. Пусть $[a;b] \times [c;d]$ — прямоугольничек. Рассмотрим его контур. Тогда γ — путь по этому контуру — можно представить как соединение 4 путей: γ_1 по нижней стороне вправо, γ_2 — по правой стороне вверх, γ_3 — по верней стороне влево, γ_4 — по лево стороне вниз. Или

$$\gamma_1 \colon \varphi(x) = x, \psi(y) = c, x \in [a;b] \qquad \gamma_2 \colon \varphi(x) = b, \psi(y) = y, y \in [c;d]$$

$$\gamma_3^- \colon \varphi(x) = x, \psi(y) = d, y \in [a;b] \qquad \gamma_4^- \colon \varphi(x) = d, \psi(y) = y, y \in [c;d]$$

Тогда

$$\int_\gamma P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int\limits_a^b P(x;c)\mathrm{d}x + \int\limits_c^d P(b;y)\mathrm{d}y - \int\limits_a^b P(x;d)\mathrm{d}x - \int\limits_c^d P(a;y)\mathrm{d}y$$

Замечание. Мы обычно будем выбирать такое направление обхода, когда ограничиваемая область всё время находится «слева» от кривой.

Свойство 9.2 (Предельный переход и почленное интегрирование рядов)**.** *Пусть $f_n \in C(\gamma^*)$, $f_n \rightrightarrows f$ на γ^*. Тогда*

$$\int_\gamma f_n \to \int_\gamma f$$

Равномерно сходящийся ряд непрерывных на γ^* функций можно интегрировать почленно.

Доказательство. Надо доказать лишь то, что

$$(f_n \circ \gamma)\gamma' \rightrightarrows (f \circ \gamma)\gamma'$$

Но это верно, поскольку γ' ограничена. □

Определение 10. Пусть γ — кусочно гладкий путь в $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{C}$, заданный на $[a;b]$, $f \in C(\gamma^*)$. Криволинейным интегралом первого рода f по пути γ — это

$$\int\limits_a^b (f \circ \gamma)|\gamma'| \qquad\qquad \text{где } |\gamma'| = \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}$$

Обозначения

$$\int_\gamma f \ \mathrm{d}s \qquad\qquad \int_\gamma f(z) \ |\mathrm{d}z|$$

Замечание. Сочетанию букв ds мы не придаём специального смысла. Но вообще мы используем s, потому что такой буквой мы обозначали длину пути.

Свойство 10.1.

$$\int_{\gamma^-} f \ \mathrm{d}s = \int_\gamma f \ \mathrm{d}s$$

Свойство 10.2. *Остальные свойства интеграла 1 рода совпадают со свойствами интеграла 2 рода.*

Свойство 10.3. $\int_\gamma 1 \ \mathrm{d}s = s_\gamma$

Свойство 10.4 (Оценка интеграла)**.**

$$\left|\int_\gamma f(z) \ \mathrm{d}z\right| \leqslant \int_\gamma |f(z)| \ |\mathrm{d}z| \leqslant \max_{\gamma^*}|f| \cdot s_\gamma$$

Доказательство.

$$\left|\int_\gamma f(z) \ \mathrm{d}z\right| = \left|\int\limits_a^b (f\circ\gamma)\gamma'\right| \leqslant \int\limits_a^b |f\circ\gamma||\gamma'| = \int_\gamma |f(z)| \ |\mathrm{d}z|$$

И

$$\int_\gamma |f(z)| \ |\mathrm{d}z| = \int\limits_a^b |f\circ\gamma||\gamma'| \leqslant \max_{\gamma^*}|f| \int\limits_a^b |\gamma'| = \max_{\gamma^*}|f| \cdot s_\gamma$$

□

Свойство 10.5.

$$\int_\gamma f(z) \ \mathrm{d}z = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)\Delta z_k$$

Доказательство. Докажем, что

$$\int_\gamma f(z) \ \mathrm{d}z - \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)\Delta z_k \longrightarrow 0$$

Пусть $\gamma_k = \gamma\big|_{[t_k;t_{k+1}]}$. Тогда

$$\int_\gamma f(z) \ \mathrm{d}z - \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)\Delta z_k = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\gamma_k} f(z) - f(\zeta_k) \ \mathrm{d}z = \sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} f(\gamma(t)) - f(\gamma(\theta_k))\gamma'(t) \ \mathrm{d}t$$

Теперь хотим доказать, что это стремится у нулю на ε-языке. Выберем $\varepsilon > 0$. По теореме Кантора известно, что $f\circ\gamma$ равномерно непрерывна на $[a;b]$, а значит

$$\exists\delta > 0 \ \forall t', t'' \in [a;b] : |t' - t''| < \delta \ |f(\gamma(t')) - f(\gamma(t''))| < \frac{\varepsilon}{s_\gamma}$$

Это верно, если $s_\gamma \neq 0$. Если $s_\gamma = 0$, всё и так понятно, $\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z = 0 = \sum \cdots$.
Возьмём это самое δ как ранг дробления для ε. Тогда $\forall \tau : \lambda_\tau < \delta$ верно, что наша разность по модулю не больше

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{s_\gamma} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} |\gamma'| = \frac{\varepsilon}{s_\gamma} \int\limits_a^b |\gamma'| = \varepsilon$$

□

Замечание. Аналогичное доказывается для $\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ и для интегралов первого рода:

$$\int_\gamma f\ \mathrm{d}s = \lim_{\gamma\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_z)\Delta s_k \qquad \text{где } \Delta s_k = s_{\gamma_k}$$

Замечание. Предел интегральных сумм существует и конечен для интегралов от непрерывных функций по спрямляемым путям.
Это мы доказывать не будем, это сложно.

Замечание. Предыдущее свойство позволяет избавиться от гладкости допустимого преобразования параметра в свойстве **??**. Из этого следует, что интегралы C-эквивалентных путей равны.
Это доказывать уже не так сложно, но мы всё равно не будем.

Точные и замкнутые формы.

Замечание. Интеграл зависит от двух аргументов: дифференциальной формы и от пути. И как именно он зависит от каждого из них, мы и будем разбираться.

Определение 11. Напоминание. **Область** — открытое линейно связное множество.

Лемма 1 (Признак совпадения подобласти с областью)**.** *Пусть X — метрическое пространство, D — область в X, $E \subset D$. Пусть*

1. *$E \neq \varnothing$.*
2. *E открыто в X.*
3. *E замкнуто в D.*

Тогда $E = D$.

Замечание. Так. Что такое условие 3? E содержит все свои предельные точки из множества D. Может не содержать предельные точки их $X \setminus D$, но из D — обязано.
Во втором свойстве не важно, где E открыто: в D ли или в X. Они (в условии того, что D открыто в X) равносильны.

Доказательство. Докажем от противного. Пусть $D \neq E$. Тогда у нас $E \neq \varnothing$ и $D \setminus E \neq \varnothing$.
Рассмотрим $A \in E$, $B \in D \setminus E$. Соединим их путём γ, раз уж они в D. Тогда $\gamma(a) = A$, $\gamma(b) = B$. Пусть $e = \gamma^{-1}(E) \subset [a;b]$. Заметим, что $a \in e$, $b \notin e$. Также нетрудно заметить, что e открыто в $[a;b]$, поскольку E открыто в D. Но в таком случае и $\gamma^{-1}(D \setminus E) = [a;b] \setminus e$ открыто в $[a;b]$. То есть e открыто и замкнуто в $[a;b]$.
Почему такого не бывает? Ну, пусть $c = \sup e \in [a;b]$. Поскольку e замкнуто, $c \in e$, следовательно $c < b$. Но тогда c содержится в e без своей окрестности, что противоречит с открытостью e. □

Определение 12. Метрическое пространство X называется **связным**, если его нельзя разбить на два непустых открытых множества.

Замечание. Разумеется, слово «открытое» можно заменить на слово «замкнутое». Или можно переформулировать определение так: связное пространство — такое пространство, в котором нет открытого замкнутого непустого подпространства, не совпадающего с самим пространством.

Замечание. Лемма 1 говорит нам о том, что линейно связное пространство связно.

Утверждение. *Обратное утверждение не верно (не всякое связное множество линейно связно).*

Доказательство. Пусть

$$D = \left\{(x;y) \mid 0 < x \leqslant 1, y = \sin\frac{1}{x}\right\} \cup \{(0;y) \mid -1 \leqslant y \leqslant 1\}$$

Оно связно, но не линейно связно. Про второе ясно, а разбить его на два открытых непустых множества вы не сможете. □

Определение 13. Компонентой связности пространства называется максимальное по включению связное множество.
Компонентой линейной связности пространства называется максимальное по включению линейно связное множество.

Утверждение. *Нетрудно доказать, что в $\mathbb{R}$ связными являются промежутки и только они.*

Утверждение. *Также нетрудно доказать, что непрерывный образ связного множества связен.*

Утверждение. *В открытом подмножестве $\mathbb{R}^m$ связность равносильна линейной связности, а компоненты линейной связности совпадают с компонентами обычной.*

Теорема 1. *Любые две точки области в $\mathbb{R}^m$ можно соединить ломаной.*

Доказательство. Обозначим область буквой D, зафиксируем $A \in D$. Пусть E — множество точек E, которые можно соединить с A ломаной в D. Давайте по лемме докажем, что $E = D$.

1. $A \in E \Rightarrow E \neq \varnothing$.

2. Проверим, что E открыто. Рассмотрим $B \in E$. По открытости D, $\exists V_B \subset D$. Но тогда любую точку V_B можно соединить с B отрезком, а значит можно соединить с A ломаной.

3. Проверим, что E замкнуто в D. Рассмотрим последовательность точек $\{z_n\} \subset E : z_n \to z_0 \in D$. Хм-м, $z_0 \in D$, значит $\exists V_{z_0} \subset D$. Тогда начиная с некоторого $N \in \mathbb{N}$ все $z_{n \geqslant N} \in V_{z_0}$. Но на хватит и того, что $z_N \in E$, потому что тогда z_N можно соединить отрезком с z_0, а значит $z_0 \in E$.

□

Замечание. Можно добиться, чтобы звенья ломаной были параллельны координатным осям.

Следствие 1.1. *Любые две точки области можно соединить кусочно-гладким путём.*

Замечание. А знаете ли вы, что ломаную можно параметризовать гладкими функциями? Рассмотрим ломаную, которая имеет два звена: $(0;1) \to (0;0) \to (1,0)$. Смотрите, как это делается:

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & t \in [-1;0] \\ t^2 & t \in [0;1] \end{cases}$$

$$\psi(t) = \begin{cases} t^2 & t \in [-1;0] \\ 0 & t \in [0;1] \end{cases}$$

Отсюда $\gamma = (\varphi;\psi)$ гладкая.
Но мы же видим излом на ломаной. В чём тут дело? А дело в том, что при $t = 0$ обе производные обнуляются.

Определение 14. Путь называется **регулярным**, если $\forall t \in [a;b]\ \gamma'(t) \neq \mathbb{0}$

Утверждение. *Без доказательства: регулярный путь имеет носитель, в каждой точке которого есть касательная.*

Замечание. Напоминание: если $F = U + \mathbf{i}V$, то $F'_x = U'_x + \mathbf{i}V'_x$, $F'_y = U'_y + \mathbf{i}V'_y$.

Определение 15. Пусть D — открыто в $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{C}$, $P, Q \in C(D)$, $\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$.
Функция $F\colon D \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ называется первообразной ω, если $F'_x = P$, $F'_y = Q$.

Замечание. Везде дальше D — область, а не просто открытое множество.

Утверждение. *$F \in C^{(1)}$, поскольку $P, Q \in C$.*

Утверждение. *Два равенства $F'_x = P$, $F'_y = Q$ можно записать как*

$$\mathrm{d}F = \omega$$

Утверждение. *Если $f = u + \mathbf{i}v$, $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + \mathbf{i}\mathrm{d}y$,*

$$f\mathrm{d}z = (u + \mathbf{i}v)\mathrm{d}x + (-v + \mathbf{i}u)\mathrm{d}y$$

Тогда

$$\mathrm{d}F = \omega \Leftrightarrow \begin{cases} F'_x = u + \mathbf{i}v \\ F'_y = -v + \mathbf{i}u \end{cases}$$

Замечание. Без доказательства: штука справа равносильна комплексной дифференцируемости F и равенству $F' = f$.

Замечание. Как мы знаем, в одномерном случае всякая непрерывная на промежутке функция имеет первообразную на нём. В двумерном случае это не так.

Определение 16. Форма ω называется **точной** в D, если она имеет первообразную в D.

Теорема 2 (Формула Ньютона — Лейбница для криволинейных интегралов)**.** *Пусть D — область в $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{C}$, $F \in C^{(1)}(D)$, $\gamma \in [a; b] \to D$ — кусочно=гладкий путь. Тогда*

$$\int_\gamma \mathrm{d}F = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Доказательство.

$$\int_\gamma \mathrm{d}F = \int_\gamma F'_x\mathrm{d}x + F'_y\mathrm{d}y = \int\limits_a^b (F'_x \circ \gamma)\varphi' + (F'_y \circ \gamma)\psi' = \int\limits_a^b (F \circ \gamma)' = F \circ \gamma\Big|_a^b$$

□

Следствие 1.1 (Признак постоянства функции в области)**.** *Пусть D — область в $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{C}$.*

$$\mathrm{d}F \equiv 0 \text{ в } D \Rightarrow F \text{ постоянна в } D$$

Доказательство. Рассмотрим $A, B \in D$, соединим их кусочно-гладким путём γ в D. Тогда

$$0 = \int_\gamma \mathrm{d}F = F(B) - F(A) \Leftrightarrow F(A) = F(B)$$

□

Следствие 1.2 (Единственность первообразной)**.** *Пусть F — первообразная ω в D. Тогда*

1. *$\forall C \in \mathbb{R}$ $F + C$ — первообразная ω в D.*
2. *Первообразных другого вида у ω нет.*

Доказательство. 1. Очевидно.

2. Пусть Φ — первообразная ω. Тогда $\mathrm{d}(\Phi - F) = \omega - \omega = 0$, а тогда по следствию 1.1 $\Phi = F + \mathrm{const}$. □

Определение 17. Если для любых двух кусочно-гладких путей $\gamma_1, \gamma_2 \in D$ с общими концами

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

То говорят, что $\int_\gamma \omega$ **не зависит от пути**.

Теорема 3 (Точность формы и независимость интеграла от пути)**.** *Пусть D — область в $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{C}$, $P, Q \in C(D)$, $\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$. Тогда следующие утверждения равносильны*

1. ω точна в D.

2. $\int_\gamma \omega$ не зависит от пути в D.

3. $\forall \gamma$ — контур в D $\int_\gamma \omega = 0$.

Доказательство. $1 \to 2$ По формуле Ньютона — Лейбница.

$2 \to 1$ В одномерном случае мы строили интеграл с переменным верхним пределом. Тут будет некоторый его аналог. Пусть $A \in D$. Пусть $F(B) = \int_\gamma \omega$, где γ — произвольный кусочно-гладкий путь $A \to B$. Докажем, что F — искомая первообразная.
Докажем, что $F'_x = P$ в некоторой точке $B(x_0; y_0)$. Пусть γ_1 — горизонтальный отрезок из $(x_0; y_0)$ в $(x; y_0)$. И при этом $(x; y_0)$ лежит в той самой окрестности B, с которой она содержится в D. Тогда

$$F(x; y_0) = \int_{\gamma \wedge \gamma_1} \omega = F(B) + \int\limits_{x_0}^{x} P(t; y_0)\ \mathrm{d}t$$

По теореме Барроу $F'_x(x; y_0) = P(x; y_0)$ для всех $x \in V_{x_0}$ (в частности, $F'_x(B) = P(B)$). А поскольку B была произвольной точкой, равенство $F'_x(B) = P(B)$ выполнено на всей области D. Аналогично $F'_y = Q$.

$2 \to 3$ Интеграл по контуру в силу независимости от пути совпадает с интегралом по вырожденному контуру (по точке), а значит равен нулю.

$3 \to 2$ Пусть γ_1, γ_2 — два пути из A в B. Тогда $\gamma_1 \wedge \gamma_2^-$ — контур, а значит интеграл по нему равен нулю.

$$0 = \int_{\gamma_1 \wedge \gamma_2^-} \omega = \int_{\gamma_1} - \int_{\gamma_2} \omega$$

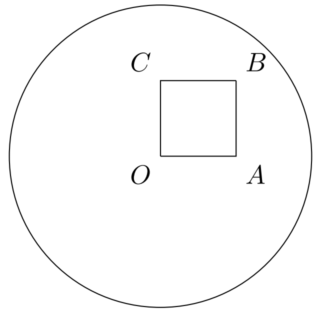
□

Замечание. Мы тут нашли формулу для первообразной. Вопрос лишь в том, насколько это удобно. Это зависит от D. Если область позволяет, берут отрезочек.

Замечание. Очень весёлые условия для проверки точности формы, фиг вы их проверите, у вас очень много путей.

Лемма 2. *Пусть D — открытый круг (например, плоскость). $P, Q \in C(D)$, $\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$. Тогда точность ω в D равносильно тому, что $\int_\gamma \omega = 0$ для любого прямоугольника γ со сторонами, параллельными координатным осям.*

Доказательство. Следствие вправо понятно, давайте обратно.
Пусть O — центр круга, $B \in D$. Положим A и C вот такими точками:



Положим $F(B) = \int_{OCB}\omega = \int_{OAB}\omega$. F — искомая первообразная. Почему? Чтобы проверить, что $F'_x = P$ надо делать приращение по горизонтали и пользоваться левым интегралом. Для проверки $F'_y = Q$ — по вертикали и пользоваться вторым. Тогда получается то же самое, что и раньше. □

Определение 18. Форма ω называется **замкнутой**, если она локально точна в D (у любой точки D есть окрестность, где ω точна).

Замечание. Возникает резонный вопрос: можно ли склеить локальные интегралы в глобальный? Ответ зависит от ω и D.

Теорема 4. *Замкнутая в круге форма точна в нём.*

Доказательство. Пусть не так. Тогда найдётся прямоугольник γ_0, по которому интеграл не равен нулю.
Побьём наш прямоугольник на 4 равных прямоугольника (каждая сторона делится пополам) и представим γ_0 как 4 контура: σ_1, σ_2, σ_3 и σ_4. Очевидно

$$\int_{\gamma_0}\omega = \sum_{j=1}^{4}\int_{\sigma_j}\omega$$

Интеграл по какой-то из σ_j не равен нулю. Возьмём любой из таких и повторим для него операцию. Получим последовательность $\{\gamma_k\}_{k=0}^{\infty}$. Пусть F_k — замкнутый прямоугольник, ограниченный γ_k. Тогда $F_{k+1} \subset F_k$, причём диагональ F_{k+1} вдвое меньше диагонали F_k. Тогда

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} F_k = \{z_0\} \qquad\qquad z_0 \in D$$

Но тогда $\exists r > 0\ B(z_0; r) \subset D$ и ω точна в $B(z_0; r)$. Ну, тогда уж $\exists N\ F_N \subset B(z_0; r)$. Но тогда $\int_{\gamma_N}\omega = 0$, противоречие. □

Лемма 3 (Правило Лейбница дифференцирования интеграла по параметру)**.** *Пусть* $f \in C([a;b] \times [c;d])$*,* f *дифференцируема по* y *и* $f'_y \in C([a;b] \times [c;b])$*. Пусть* $I(y) = \int\limits_a^b f(x;y)\,\mathrm{d}x$*. Тогда* I *дифференцируема на* $[c;d]$ *и*

$$\forall y \in [c;d]\ I'(y) = \int\limits_a^b f'_y(x;y)\,\mathrm{d}x$$

Доказательство. Будем считать, что f вещественна (иначе можно отдельно рассматривать $\Re f$ и $\Im f$). Пусть $y \in [c;d]$. Докажем, что

$$R = \frac{I(y+\Delta y) - I(y)}{\Delta y} - \int\limits_a^b f'_y(x;y)\,\mathrm{d}x \underset{\Delta y \to 0}{\longrightarrow} 0$$

Ну,

$$R = \int_a^b \left(\frac{f(x;y+\Delta y) - f(x;y)}{\Delta y} - f'_y(x;y) \right) \, \mathrm{d}x \overset{\text{теорема Лагранжа}}{=}$$

$$\overset{\exists\theta\in[0;1]}{=} \int_a^b \left(f'_y(x;y+\theta\Delta y) - f'_y(x;y) \right) \, \mathrm{d}x$$

Осталось доказать это на ε-языке. По теореме Кантора f'_y равномерно непрерывна на $[a;b] \times [c;d]$. То есть

$$\exists\delta > 0 \ \forall \overline{x}, \overline{\overline{x}} \in [a;b], \overline{y}, \overline{\overline{y}} \in [c;d] : |\overline{x} - \overline{\overline{x}}| < \delta, |\overline{y} - \overline{\overline{y}}| < \delta \ |f'_y(\overline{x};\overline{y}) - f'_y(\overline{\overline{x}};\overline{\overline{y}})| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Поскольку $0 < |\Delta y| < \delta$, верно $|R| < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} \, \mathrm{d}x = \varepsilon$. □

Теорема 5 (Дифференциальные условия замкнутости формы)**.** *Пусть D — область в $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{C}$. Пусть $P, Q \in C(D)$, $\exists P'_y, Q'_x \in C(D)$. Пусть $\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1. *ω замкнута в D.*
2. *$P'_y = Q'_x$ в D.*

Доказательство. 1 → 2 Рассмотрим $(x^0;y^0) \in D$ и возьмём окрестность $V_{(x^0;y^0)} \subset D$ и F — первообразная ω в этой окрестности. Тогда $F'_x = P$, $F'_y = Q$. Тогда $F''_{xy} = P'_y$ и $F''_{yx} = Q'_x$. Но подождите. По теореме о независимости смешанных производных от очерёдности дифференцирования если функция (F) имеет две смешанные производные в окрестности некоторой точки ($(x^0;y^0)$), которые непрерывны в самой точке, то они совпадают.

2 → 1 Нам достаточно проверить, что интеграл по любому прямоугольнику (лежащему в D вместе со внутренностью) равен нулю. Потому что тогда мы докажем, что в любом круге в D форма точна. Пусть γ ограничивает $[a;b] \times [c;d]$. Тогда

$$\int_\gamma P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_a^b P(x;c) \, \mathrm{d}x + \int_c^d Q(b;y) \, \mathrm{d}y - \int_a^b P(x;d) \, \mathrm{d}x - \int_c^d Q(a;y) \, \mathrm{d}y$$

Нам хочется доказать, что это ноль. Возьмём два слагаемых с Q и преобразуем:

$$\int_c^d Q(b;y) \, \mathrm{d}y - \int_c^d Q(a;y) \, \mathrm{d}y \overset{2}{=} \int_c^d \int_a^b Q'_x(x;y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y =$$

$$= \int_c^d \int_a^b P'_y(x;y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \overset{3}{=} \int_c^d \left(\int_a^b P(x;y) \, \mathrm{d}x \right)'_y \mathrm{d}y =$$

$$\overset{2}{=} \int_a^b P(x;c) \, \mathrm{d}x - \int_a^b P(x;d) \, \mathrm{d}x$$

Где-то мы это видели.

□

Пример. Пример замкнутой не точной формы.
Пусть

$$D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\} \qquad \omega = \frac{-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{x^2 + y^2}$$

Тогда

$$P = -\frac{y}{x^2+y^2} \qquad Q = \frac{x}{x^2+y^2}$$

Несложно заметить, что

$$P'_y = \frac{-x^2-y^2+y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = Q'_x$$

То есть ω замкнута в D. А теперь докажем, что ω не точна. Для этого предъявим контур, интеграл по которому не ноль:

$$\gamma_1(t) = (\cos t; \sin t)$$

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin t(-\sin t) + \cos t \cdot \cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t}\, \mathrm{d}t = 2\pi \neq 0$$

Замечание. Технически этот пример — это мнимая часть $\omega_0 = \frac{\mathrm{d}z}{z}$. И на самом деле ω_0 тоже замкнута, но не точна, а неё нет первообразной (хотя хочется логарифм).

Определение 19. Пусть $(X; \rho)$ — метрическое пространство, $E, F \subset X$. Тогда **расстоянием** между E и F называется величина

$$\rho(E; F) = \inf_{\substack{x\in E\\ y\in F}} \rho(x; y)$$

Лемма 4. *Пусть $K, F \subset \mathbb{R}^m$, K — компактно, F — замкнуто, $K \neq \varnothing \neq F$. Тогда*

$$\exists x^* \in K\ \exists y^* \in F\ \rho(K; F) = \rho(x^*; y^*)$$

Доказательство.

1. Для начала пусть F тоже компактно. Сначала докажем, что $K \times F$ — компакт в $\mathbb{R}^{2n}$.
   Рассмотрим последовательность $\{(x_n; y_n)\} \subset K \times F$. Поскольку K и F секвенциально компактны, извлечём подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся в K к $\tilde{x}$ и $\{y_{n_{k_j}}\}$, сходящуюся в F к $\tilde{y}$. Тогда и $\{x_{n_{k_j}}\}$ сходится к $\tilde{x}$, а значит $\{(x_n; y_n)\}$ стремится к $\{(\tilde{x}; \tilde{y})\}$ в $K \times F$, что означает секвенциальную компактность $K \times F$.
   Теперь докажем, что ρ непрерывна на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$:

   $$|\rho(x;y) - \rho(x_0;y_0)| \leqslant |\rho(x;y) - \rho(x_0;y)| + |\rho(x_0;y) - \rho(x_0;y_0)| \leqslant \rho(x;x_0) + \rho(y;y_0) \to 0$$

   Отсюда, по теореме Вейерштрасса ρ достигает наименьшего значения на компакте $K \times F$, а значит нижняя грань в определении достигается.

2. Пусть F — произвольное (непустое) замкнутое множество. Пусть $\rho(K; F) = \sigma < +\infty$. K в силу компактности содержится в некотором шаре $\overline{B}(\mathbb{0}_m; R)$. Тогда, если $x \in K, y \in F$ и $|y| > R + \sigma + 1$, то

   $$\rho(x; y) = |x - y| \geqslant R + \sigma + 1 - R > \sigma$$

   Поэтому

   $$\rho(K; F) = \rho(K; F \cap \overline{B}(\mathbb{0}_m; R + \sigma + 1))$$

   А тут справа уже компакт.

□

Следствие 4.1. *Пусть $K, R \subset \mathbb{R}^m$, K — компактно, F — замкнуто и $K \cap F = \varnothing$, то $\rho(K; F) > 0$.*

Следствие 4.2. *В условиях следствия выше $\rho(K; F) = \rho(K; \partial F)$.*

Пример. Между двумя замкнутыми множествами расстояние может быть равно нулю, даже если они не пересекаются.
Рассмотрим одно множество — гиперболу $y = \frac{1}{x}$, а второе — прямая $y = 0$.

Определение 20. Пусть D — область в $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{C}$, ω — замкнутая форма в D, $\gamma \in C([a;b] \to D)$. **Первообразной ω вдоль пути** γ называется такая $\Phi \in C[a;b]$, что

$$\forall \tau \in [a;b]\ \exists V_\zeta \subset D(\zeta = \gamma(\tau))\ \exists F_\zeta \colon V_\zeta \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

1. F_ζ — первообразная ω в V_ζ.
2. $\exists V_\tau$ — окрестность τ в $[a;b]$ $\forall t \in V_\tau$ $F_\zeta(\gamma(t)) = \Phi(t)$.

Замечание. Если F — первообразная ω, то $F \circ \gamma$ — первообразная ω вдоль γ.

Теорема 6. *Первообразная замкнутой формы вдоль пути существует и единственна с точностью до постоянного слагаемого.*

Доказательство. Начнём с единственности. Пусть есть Φ_1 и Φ_2. Тогда для любой $\tau \in [a;b]$ у нас найдутся

$$V_{\zeta,1}, V_{\zeta,2}, F_{\zeta,1}, F_{\zeta,2}, V_{\tau,1}, V_{\tau,2}$$

из определения. Тогда рассмотрим $V_{\zeta,1} \cup V_{\zeta,2}$. На этом множестве $F_{\zeta,1}$ и $F_{\zeta,2}$ отличаются на константу. Отсюда в $V_{\tau,1} \cap V_{\tau,2}$ Φ_1 отличается от Φ_2 на константу. То есть Φ_1 и Φ_2 отличаются на константу в окрестности каждой точки. И тут надо применить известный топологический факт о том, что наи связном множестве (отрезке) локально-постоянная функция равна константе. Но у нас отрезок, а значит мы можем вообще сказать, что в каждой точке $(\Phi_1 - \Phi_2)' = 0$, и отсюда различие на константу.
Теперь существование. Рассмотрим $D^\complement$ и γ^*. Первое замкнуто, второе компактно. А поскольку γ действует в D, $D^\complement \cap \gamma^* = \varnothing$. А значит $\sigma = \rho(\gamma^*; D^\complement) > 0$. По теореме Кантора

$$\exists \delta > 0\ \forall t', t'' \in [a;b] : |t' - t''| < \delta\ |\gamma(t') - \gamma(t'')| < \sigma$$

Тогда рассмотрим $\{t_k\}_{k=0}^n$ — дробление $[a;b]$ ранга $< 2\delta$. И возьмём ещё $t_{k+\frac{1}{2}} = \frac{t_k + t_{k+1}}{2}$. Пусть $z_j = \gamma(t_j)$.
Пусть $B_0 = B(z_0; \sigma) \subset D$. Тогда по выбору δ верно, что $\gamma([t_0; t_{1/2}]) \subset B_0$. Наша форма ω замкнута в D, а значит и в B_0, а в круге всякая замкнутая форма точна. Тогда у неё есть первообразная F_0. Тогда пусть $\Phi(t) = F_0(\gamma(t))$ на отрезке $t \in [t_0; t_{1/2}]$.
Дальше у нас где-то есть точка z_1. Тогда мы можем выбрать $B_1 = B(z_1; \sigma) \subset D$. Несложно заметить, что $[t_{1/2}; t_{3/2}] \subset B_1$. Но самое интересное, что $\gamma\left(t_{\frac{1}{2}}\right)$ лежит и в B_0, и в B_1. Тогда у неё есть первообразная $\tilde{F}_1$. Но у нас в $B_0 \cap B_1$ завелось две первообразных ω: F_0 и $\tilde{F}_1$, значит они на константу C отличаются, так и пусть F_1 — это $\tilde{F}_1 - C$. Тогда пусть $\Phi(t) = F_1(\gamma(t))$ на отрезке $t \in [t_{1/2}; t_{3/2}]$. И всё, сделав так ещё $n-1$ раз, построим первообразную функцию Φ. □

Следствие 4.1 (Формула Ньютона — Лейбница для первообразной вдоль пути)**.** *Пусть D — область в $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{C}$, ω — замкнутая форма в D, $\gamma \colon [a;b] \to D$ — гесочно-гладкий путь, Φ — первообразная ω вдоль γ. Тогда*

$$\int_\gamma \omega = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Доказательство. Это верно на $[t_0; t_{1/2}]$, на $[t_{1/2}; t_{3/2}]$, остаётся только просуммировать. □

Замечание. Формулой Ньютона — Лейбница определяется интеграл замкнутой формы по любому (не обязательно кусочно-гладкому) пути.

Гомотопные пути.

Замечание. В этом параграфе D — область в $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{C}$. Все пути заданы на отрезке $I = [0;1]$.

Определение 21. Два пути $\gamma_0, \gamma_1 \colon I \to D$ с общими концами ($\gamma_0(0) = \gamma_(0) = A$, $\gamma_0(1) = \gamma_(1) = B$) называются **гомотопными как пути в общими (неподвижными) концами**, если

$$\exists \Gamma \in C(I \times I \to D)$$

1.
$$\forall t \in I\ \Gamma(0,t) = \gamma_0(t) \land \Gamma(1,t) = \gamma_1(t)$$

2.
$$\forall s \in I\ \Gamma(s,0) = A \land \Gamma(s,1) = B$$

Отображение Γ называется **гомотопией** или **непрерывной деформацией**.

Определение 22. Два замкнутых пути $\gamma_0, \gamma_1 \colon I \to D$ называются **гомотопными как замкнутые пути**, если
$$\exists \Gamma \in C(I \times I \to D)$$

1.
$$\forall t \in I\ \Gamma(0,t) = \gamma_0(t) \land \Gamma(1,t) = \gamma_1(t)$$

2.
$$\forall s \in I\ \Gamma(s,0) = \Gamma(s,1)$$

Отображение Γ называется **гомотопией** или **непрерывной деформацией**.

Замечание. Как понять, что тут происходит? Ну, смотрите. Мы трансформируем один путь в другой. И $\Gamma(s;\cdot)$ — это путь в D, промежуточный между γ_0 и γ_1. Его обозначают даже γ_s.

Утверждение. *Нетрудно доказать, что гомотопность — отношение эквивалентности.*

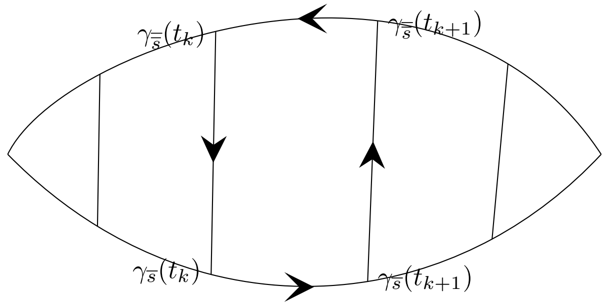
Утверждение. *Если $\gamma_1 = \gamma_0 \circ u$, где $u \in C(I \to I)$, то γ_1 гомотопно γ_0. В частности, эквивалентные пути гомотопны.*

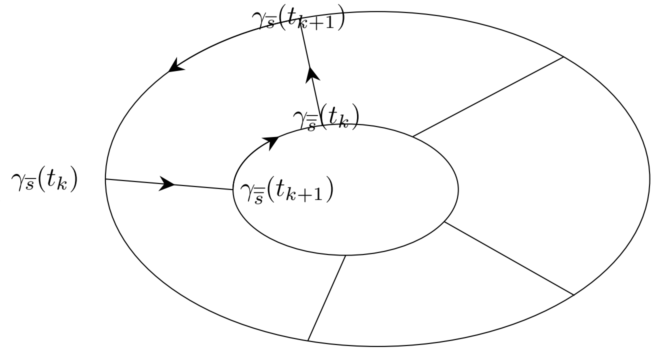
Доказательство. Предъявим промежуточные пути:
$$\gamma_s(t) = \gamma_0(s \cdot u(t) + (1-s)t)$$
Подходит для обоих определений. $\square$

Замечание. Всё вышенаписанное можно считать $D \subset \mathbb{R}^m$.

Теорема 7 (Равенство интегралов по гомотопным путям)**.** *Пусть ω — замкнутая форма в D, γ_0, γ_1 — не важно как гомотопные пути. Тогда*
$$\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$$

Доказательство. Пусть Γ — гомотопия. Введём
$$h(s) = \int_{\gamma_s} \omega$$
Докажем, что $h = \mathrm{const}$. А точнее докажем, что h локально постоянно, что даст нам тот же результат. $D^{\complement}$ замкнуто, $\Gamma(I \times I)$ — компакт (в силу непрерывности Γ по теореме Вейерштрасса). При этом $\Gamma(I \times I) \subset D$, а значит $\Gamma(I \times I) \cap D^{\complement} = \varnothing$. Значит
$$\sigma = \rho(D^{\complement}; \Gamma(I \times I)) > 0$$
Воспользуемся равномерной непрерывностью Γ и подберём такое $\delta > 0$, что
$$\forall \overline{t}, \overline{\overline{t}}, \overline{s}, \overline{\overline{s}} \in I : |\overline{t} - \overline{\overline{t}}| < \delta \land |\overline{s} - \overline{\overline{s}}| < \delta\ |\Gamma(\overline{t}; \overline{s}) - \Gamma(\overline{\overline{t}}; \overline{\overline{s}})| < \sigma$$
Давайте докажем, что если $|\overline{s} - \overline{\overline{s}}| < \delta$, то $h(\overline{s}) = h(\overline{\overline{s}})$. Для этого рассмотрим дробление $\{t_k\}_{k=0}^n$ отрезка I с рангом меньше δ. После этого для $k \in [0 : n-1]$ рассмотрим замкнутые пути
$$\delta_k = \gamma_{\overline{s}}\Big|_{[t_k, t_{k+1}]} \land \overline{\gamma_{\overline{s}}(t_{k+1}), \gamma_{\overline{\overline{s}}}(t_{k+1})} \land \gamma_{\overline{\overline{s}}}\Big|_{[t_k, t_{k+1}]} \land \overline{\gamma_{\overline{\overline{s}}}(t_k), \gamma_{\overline{s}}(t_k)}$$





Тогда круг $B(\gamma_{\overline{s}}(t_k);\sigma) \subset D$ и $\delta_k^* \subset B(\gamma_{\overline{s}}(t_k);\sigma)$ (в силу выбора δ и дробления ранга $< \delta$). В этом самом круге форма ω замкнута, следовательно, точна. То есть

$$\int_{\delta_k} \omega = 0$$

Сложив все интегралы, получим

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{\delta_k} \omega = 0$$

Теперь у нас уже различные ситуации для по-разному гомотопных путей. Для путей с общими концами все «перемычки» уничтожатся (крайние вырождаются в точку, а остальные проходятся по разу в разных направлениях). Остаётся только $\gamma_{\overline{s}}$ и $\gamma_{\overline{\overline{s}}}$, которые мы проходим в разные стороны, получаем ноль, а значит $\int_{\gamma_{\overline{s}}} \omega = \int_{\gamma_{\overline{\overline{s}}}} \omega$.
Для замкнутых путей получается то же самое (только нет крайних «перемычек», все «перемычки» проходятся в разных направлениях). □

Определение 23. Говорят, что замкнутый путь **стягивается в точку**, если он гомотопен постоянному пути (как замкнутый путь).

Определение 24. Область называется **односвязной**, если в ней всякий замкнутый путь в неё стягивается в точку. В противном случае область называется **многосвязной**.

Пример. Всякая звёздная область односвязна (в частности, выпуклое множество односвязно).
Почему? $\Gamma(s,t) = A + s(\gamma_1(t) - A)$ — центральное подобие относительно такой точки, относительно которой область звёздная.

Определение 25. Пусть

$$0 \leqslant r < R \leqslant +\infty \qquad z_0 \in \mathbb{C}$$

Тогда $K_{r,R}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$ называется **кольцом**. Замкнутое кольцо — то же самое, но неравенства нестрогие.

Пример. Кольцо (не замкнутое) многосвязно. Почему? Ну, возьмём $\rho \in (r;R)$ и возьмём интеграл по окружности с центром в z_0 и радиусом ρ от замкнутой формы $\frac{1}{z-z_0}$. Получим $2\pi\mathbf{i}$, а хочется ноль.

Утверждение. *В односвязной области любые два пути с общими концами гомотопны.*

Доказательство. Идея доказательства такая: возьмём два пути с общими концами (A и B), развернём второй, полученный замкнутый путь стянем в точку C. После этого проследим, как точка A движется к C, и как точка B это делает. Тогда понятно, что дальше использовать в качестве промежуточных путей: начало и конец идём по траекториям A и B, а серединку — по промежуточному пути между ними.
Точная формула достаточно непроста, и выводить нам её лень, желающие могут почитать учебник. □

Утверждение. *Нетрудно доказать, что верно и обратное.*

Утверждение. *Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{C}$. Тогда следующие утверждения равносильны.*

1. *D односвязна.*
2. *∂D связна.*
3. *$D^{\complement}$ связно.*

Это уже что-то глубоко топологическое и за рамки курса выходит, поэтому доказывать мы его не будем.

Теорема 8. *Замкнутая в односвязной области форма точна в ней.*

Доказательство. Поскольку форма замкнута в односвязной области, интеграл по любому замкнутому пути равен нулю. Всё. □

Утверждение. *Без доказательства: если в области D всякая замкнутая форма точна, то D односвязна.*

Определение 26. Пусть G — такая область в $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{C}$, что

$$\partial G = \bigsqcup_{k=0}^{m} \gamma_k^*$$

Где γ_k — простые регулярные контуры и при обходе каждого контура G остаётся слева. В таком случае

- набор $\{\gamma_k\}_{k=0}^m$ называется **ориентированной границей** G.
- G называется **областью с ориентированной границей**.
- **Интеграл по ориентированной границе** равен сумме интегралов по каждому контуру:

$$\int_{\partial G} \omega = \sum_{k=0}^{m} \int_{\gamma_k} \omega$$

Замечание. Что такое «область остаётся слева»?

$$\forall t \in [0;1] : \exists \gamma'(t)\ \exists \delta > 0\ \forall \tau \in (0;\delta)\ \gamma(t) + \mathbf{i}\tau\gamma'(t) \in G$$

Пример. Интеграл по границе невырожденного кольца есть разность двух интегралов: по большой окружности берётся с плюсом, по маленькой — с минусом.

Теорема 9 (Интеграл по ориентированной границе области)**.** *Пусть ω — замкнутая форма в области D. Пусть G — ограниченная область с ориентированной границей, $\overline{G} \subset D$. Тогда*

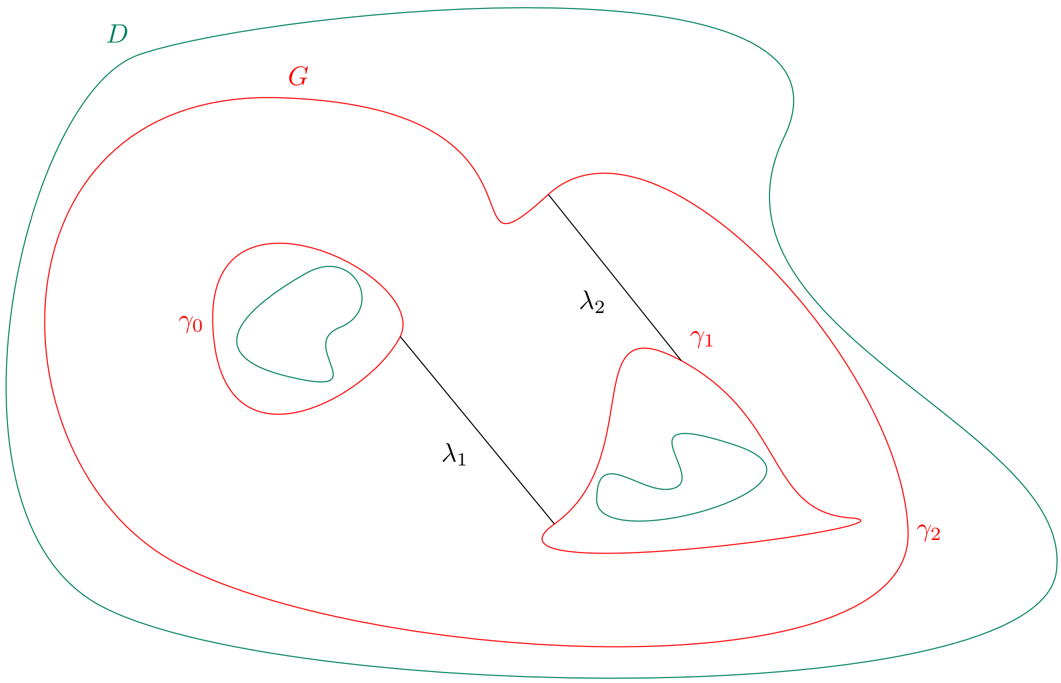
$$\int_{\partial G} \omega = 0$$

Доказательство. Идея доказательства:
Давайте в G проведём попарно непересекающиеся разрезы $\{\lambda_k^*\}_{k=1}^m$, соединяющие γ_0^* и γ_1^*, γ_1^* и γ_2^*, ..., γ_{m-1}^* и γ_m^*. Образовался новый контур

$$\Lambda = \bigwedge_{k=0}^{m} \gamma_k \wedge \bigwedge_{k=1}^{m} \lambda_k^{\pm}$$

С точностью до порядка слагаемых. Утверждается, что Λ стягивается в точку в D. (Доказывать это мы не будем.) А если так, то

$$0 = \int_{\Lambda} \omega = \sum_{k=0}^{m} \int_{\gamma_k} \omega + \cancel{\sum_{k=1}^{m} \int_{\lambda_k}} \omega + \cancel{\sum_{k=1}^{m} \int_{\lambda_k^-}} \omega = \int_{\partial G} \omega$$



Замечание. Эта теорема допускает обобщение, как и определение области с ориентированной границей (например, можно доопределить ориентированную границу для двух окружностей, касающихся внутренним образом). Несмотря на то, что наше определение имеет проблемы с тем, чтобы область «находилась слева», для такой области теорема верна.
эИ верна для намного более хитрых областей. Можно отрезок пройти в одну сторону, потом обратно, можно так сделать с более сложным множеством, можно отказаться от кусочной гладкости (но тогда будет непонятно, что такое «слева»).

$\square$

7 Функции комплексной переменной.

Комплексная дифференцируемость.

Определение 1. Пусть $f\colon \underset{\subset\mathbb{C}}{D} \to \mathbb{C}$, $z_0 \in \operatorname{Int} D$. Если

$$\exists A \in \mathbb{C}\ f(z) = f(z_0) + A(z - z_0) + o(z - z_0) \qquad z \to z_0$$

То f называется **дифференцируемой в точке** z_0, а A называется её **производной в точке** z_0 (и обозначается $f'(z_0)$).

Теорема 1 (Условия комплексной дифференцируемости)**.** $f\colon \underset{\subset\mathbb{C}}{D} \to \mathbb{C}$, $f = u + \mathbf{i}v$. $z_0 = x_0 + \mathbf{i}y_0 \in \operatorname{Int} D$.
Тогда дифференцируемость f в точке z_0 равносильна следующему утверждению:
u и v дифференцируемы в $(x_0; y_0)$ и $u'_x(x_0; y_0) = v'_y(x_0; y_0)$ и $u'_y(x_0; y_0) = -v'_x(x_0; y_0)$.

Замечание. Условия $u'_x(x_0; y_0) = v'_y(x_0; y_0)$ и $u'_y(x_0; y_0) = -v'_x(x_0; y_0)$ называются либо условиями Коши — Римана, либо условиями Д'Аламбера — Эйлера.
Условие «u и v дифференцируемы в $(x_0; y_0)$» называется вещественной дифференцируемостью f.

Доказательство. • Следствие «вниз»:

Пусть $A = a + \mathbf{i}b$, $z - z_0 = \Delta z = \Delta x + \mathbf{i}\Delta y$. Тогда перепишем определение дифференцируемости f:

$$f(z_0 + \Delta z) = f(z_0) + A\Delta z + \gamma(\Delta z)|\Delta z|, \qquad \gamma(\Delta z) \underset{\Delta z \to 0}{\longrightarrow} 0, \gamma = \alpha + \mathbf{i}\beta$$

Распишем это через вещественную и мнимую часть

$$\begin{aligned} &u(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) + \mathbf{i}v(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) = \\ &\quad = u(x_0; y_0) + \mathbf{i}v(x_0; y_0) + (a + \mathbf{i}b)(\Delta x + \mathbf{i}\Delta y) + (\alpha(\Delta x; \Delta y) + \mathbf{i}\beta(\Delta x; \Delta y))\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \end{aligned}$$

Запишем это как два равенства (отдельно вещественную и мнимую часть):

$$u(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) = u(x_0; y_0) + a\Delta x - b\Delta y + \alpha(\Delta x; \Delta y)\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

$$v(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) = v(x_0; y_0) + a\Delta y + b\Delta x + \beta(\Delta x; \Delta y)\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

Это и есть дифференцируемость u и v, причём мы ещё знаем что-то об их производных (у нас есть коэффициенты), которые и дают нам условия Коши — Римана.

- Следствие «вверх» — прочитайте то же самое в обратном направлении.

□

Пример.

$$f(z) = \overline{z}$$

Тогда $u = x$, $v = y$, $u'_x = 1$, $u'_y = 0$, $v'_x = 0$, $v'_y = -1$. Первое условие Коши — Римана не выполнено нигде, а значит $\overline{z}$ не дифференцируема нигде.

Пример.

$$f(z) = |z|$$

Тут $u = \sqrt{x^2 + y^2}$, $v = 0$, и мы получаем, что везде, кроме $z = 0$, не выполнено первое условие Коши — Римана, а в $z = 0$ вещественной дифференцируемости нет.

Пример.

$$f(z) = |z|^2$$

Тут $u = \sqrt{x^2 + y^2}$, $v = 0$, $u'_x = 2x$, $u'_y = 2y$, $v'_x = v'_y = 0$. Отсюда f' дифференцируемо только в нуле, и производная там равна нулю.

Замечание. Так сложилось, что в комплексном анализе дифференцируемые функции также называют голоморфными, аналитическими, регулярными и моногенными. Они имеют разное происхождение, и сейчас мы их обсудим.

Определение 2. Пусть $f\colon \underset{\subset\mathbb{C}}{D} \to \mathbb{C}$. f называется **дифференцируемой на открытом множестве** D, если она дифференцируема в каждой его точке.

Определение 3. $f\colon \underset{\subset\mathbb{C}}{D} \to \mathbb{C}$ называется **голоморфной в точке** $z_0 \in \operatorname{Int} D$, если она дифференцируема в некоторой окрестности z_0.

Определение 4. $f\colon \underset{\subset\mathbb{C}}{D} \to \mathbb{C}$ называется **голоморфной на открытом множестве** D, если она голоморфна в каждой его точке. Множество таки функций обозначается $\mathcal{A}(D)$

Замечание. Далее в той главе, если не оговорено обратное, D — область.

Теорема 2. *Пусть f голоморфна в D. Если $\Re f = \mathrm{const}$ ИЛИ $\Im f = \mathrm{const}$ ИЛИ $|f| = \mathrm{const}$, то $f = \mathrm{const}$.*

Доказательство. Пусть $f = u + iv$.

1. Известно, что $u'_x = u'_y = 0$, по условиям Коши — Римана $v'_x = v'_y = 0$, отсюда $v = \mathrm{const}$.

2. Аналогично предыдущему.

3. $|f|^2 = u^2 + v^2 = \mathrm{const}$. Если это равно нулю, ясно, иначе продифференцируем это по x и y и поделим на 2:
$$uu'_x + vv'_x = 0$$
$$uu'_y + vv'_y = 0$$
Подставим в условие Коши — Римана?
$$\begin{cases} uu'_x - vu'_y = 0 \\ uu'_y + vu'_x = 0 \end{cases}$$
Это система уравнений с неизвестными u'_x и u'_y. Определитель системы равен $u^2 + v^2 \neq 0$, значит они имеет только тривиальное решение: $u'_x = u'_y = 0$.

$\square$

Теорема 3 (Интегральная теорема Коши)**.** *Если $f \in \mathcal{A}(D)$, то форма $f\mathrm{d}z$ замкнута в D.*

Доказательство. Это доказательство будет при дополнительном условии: $f \in C^{(1)}(D)$. Тогда эта теорема нам уже известна, но сказана иначе.
Пусть $f = u + \mathbf{i}v$, $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + \mathbf{i}\mathrm{d}y$. Тогда
$$f\mathrm{d}z = (u + \mathbf{i}v)(\mathrm{d}x + \mathbf{i}\mathrm{d}y) = \underbrace{(u + \mathbf{i}v)}_{P}\mathrm{d}x + \underbrace{(-v + \mathbf{i}u)}_{Q}\mathrm{d}y$$
Тогда нам нужно проверить равенство $P'_y = Q'_x$, при этом $P'_y = u'_y + \mathbf{i}v'_y$, $Q'_y = -v'_x + \mathbf{i}u'_x$. Ну так это равенство совпадает с условиями Коши — Римана. $\square$

Утверждение. *F — первообразная формы $\omega = f\mathrm{d}z$ тогда и только тогда, когда F — первообразная f (в смысле комплексной дифференцируемости).*

Доказательство. Пусть $F = U + \mathbf{i}V$, $f = u + \mathbf{i}v$. Что значит, что F — первообразная ω? То, что
$$\begin{cases} F'_x = P \\ F'_y = Q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U'_x + \mathbf{i}V'_x = u + \mathbf{i}v \\ U'_y + \mathbf{i}V'_y = -v + \mathbf{i}u \end{cases}$$
Отсюда для F выполнены условия Коши — Римана, значит у неё есть производная, и она равна, разумеется, f. Верно и обратное. $\square$

Лемма 1 (Лемма Гурса)**.** *Если f голоморфна в D, то интеграл от неё по любому прямоугольнику, лежащему вместе с внутренностью в D, равен нулю.*

Доказательство. Пусть существует прямоугольник γ_0 (такой что условие выше), по которому интеграл не равен нулю. Пусть
$$M = \left|\int_{\gamma_0} f(z)\,\mathrm{d}z\right|$$
А дальше давайте поделим на прямоугольник на 4 равные части σ_1, σ_2, σ_3 и σ_4 (как мы делали в теореме **??**), и тогда в некотором прямоугольнике σ_j
$$\left|\int_{\sigma_j} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \geqslant \frac{M}{4}$$
Это самое σ_j обозначим за γ_1 и продолжим делать это бесконечно.
В итоге получим $\{\gamma_k\}_{k=0}^{\infty}$. Пусть F_k — замкнутый прямоугольник, ограниченный γ_k. Пусть p_k — длина

γ_k (или периметр F_k). У всех прямоугольников есть общая точка $z_0 \in D$.
Ну, хорошо. Запишем дифференцируемость f в z_0:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \alpha(z)(z - z_0)$$

Где α бесконечно мала при $z \to z_0$.
Ну, а раз бесконечно мала,

$$\exists r > 0 \ B(z_0; r) \subset D \wedge \forall z \in B(z_0; r) \ |\alpha(z)| < \frac{M}{2p_0^2}$$

Но тогда $\exists N \ F_N \subset B(z_0; r)$. Выпишем интеграл по γ_N:

$$\int_{\gamma_N} f(z) \ \mathrm{d}z = \int_{\gamma_N} f(z_0) \ \mathrm{d}z + \int_{\gamma_N} f'(z_0)(z - z_0) \ \mathrm{d}z + \int_{\gamma_N} \alpha(z)(z - z_0) \ \mathrm{d}z$$

Первые два интеграла — от точных форм, значит равны нулю. А значит

$$\left|\int_{\gamma_N} f(z) \ \mathrm{d}z\right| = \left|\int_{\gamma_N} \alpha(z)(z - z_0) \ \mathrm{d}z\right| \leqslant p_N \frac{M}{2p_0^2} p_N \overset{p_N = 2^{-N} p_0}{=} \frac{M}{2 \cdot 4^N}$$

А мы строили наши прямоугольники так, что

$$\left|\int_{\gamma_k} f(z) \ \mathrm{d}z\right| \geqslant \frac{M}{4^k}$$

Значит противоречие. □

Следствие 1.1. *Если $f \in \mathcal{A}(D)$, а γ_0 и γ_1 гомотопны в D, то*

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f$$

Следствие 1.2. *Если $f \in \mathcal{A}(D)$, а γ стягивается в точку в D, то*

$$\int_{\gamma} f = 0$$

Следствие 1.3. *Если $f \in \mathcal{A}(D)$, D односвязна, а γ — замкнутый путь в D, то*

$$\int_{\gamma} f = 0$$

Следствие 1.4. *Если $f \in \mathcal{A}(D)$, то локально f имеет первообразную в D.*

Следствие 1.5. *Если $f \in \mathcal{A}(D)$, D односвязна, то f имеет первообразную в D.*

Следствие 1.6. *Если $f \in \mathcal{A}(D)$, G — ограниченная область с ориентированной границей, $\overline{G} \subset D$. Тогда*

$$\int_{\partial G} f = 0$$

Замечание. В последнем достаточно $f \in \mathcal{A}(G)$ и $f \in C(\overline{G})$. Почему? Можно построить последовательность областей $G_n : \overline{G_n} \subset G$ так чтобы $\int_{\partial G_n} f \to \int_{\partial G} f$.

Доказательство. Второе доказательство интегральной теоремы Коши следует из леммы 1. Из леммы форма точна в любом круге в D, и тем самым замкнута в D. □

Интегральная формула Коши и её следствия.

Теорема 4 (Интегральная формула Коши)**.** *Пусть* $f \in \mathcal{A}(D)$*,* G *— ограниченная область с ориентированной границей,* $\overline{G} \subset D$*. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\partial G}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \begin{cases} f(z) & z \in G \\ 0 & z \notin \overline{G} \end{cases}$$

Замечание. Интеграл в левой части формулы называется интегралом Коши.

Замечание. Если $z \in \partial G$, то интеграл Коши теряет смысл (знаменатель обращается в ноль).

Замечание. В левой части участвуют значения функции только на границе, а справа имеется значение в области. И как бы да, так и должно быть, значения голоморфной функции в области определяется её значениями на границе.

Доказательство. Пусть

$$g(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

Где голоморфна g? Там же, где f, кроме, возможно, $\zeta = z$.
Итак, рассматриваем случаи

$z \notin \overline{G}$ Тогда $\overline{G} \subset D \setminus \{z\}$, и тогда просто работает интегральная теорема Коши.

$z \in G$ Возьмём круг достаточно малого радиуса и удалим его из G:

$$\exists r > 0\ \overline{B}(z;r) \subset G$$

Пусть $\rho \in (0;r]$, $G_\rho = G \backslash \overline{B}(z;\rho)$. G_ρ — это тоже область с ориентированной границей. И к области G_ρ можно применить интегральную теорему Коши:

$$0 = \int_{\partial G_\rho} g(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \int_{\partial G} g(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta - \int_{\gamma_{\rho,z}} g(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$

Ну, хорошо, тогда

$$\int_{\partial G} g(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \int_{\gamma_{\rho,z}} g(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \int_{\gamma_{\rho,z}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = f(z)\underbrace{\int_{\gamma_{\rho,z}}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}}_{2\pi i} + \int_{\gamma_{\rho,z}}\frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta$$

То есть нам надо доказать, что $\int_{\gamma_{\rho,z}}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = 0$. Обозначим подинтегральное выражение как $h(\zeta)$. И доопределим её по непрерывности:

$$h(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} & \zeta \in \dot{\overline{B}}(z;r) \\ f'(z) & \zeta = z \end{cases}$$

То есть h непрерывна в $\overline{B}(z;r)$, а значит по теореме Вейерштрасса ограничена:

$$\exists M > 0\ \forall \zeta \in \overline{B}(z;r)\ |h(\zeta)| \leqslant M$$

Тогда

$$\left|\int_{\gamma_{\rho,z}} h(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant 2\pi\rho M \underset{\rho\to 0+}{\longrightarrow} 0$$

При этом интеграл слева никак не зависит от ρ (так как равен разности $\int_{\partial G} g(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta - f(z)2\pi\mathbf{i}$), а значит тупо равен нулю.

$\square$

Следствие 1.1 (Теорема о среднем для голоморфных функций)**.** *Пусть $f \in \mathcal{A}(D)$, $z_0 \in \mathbb{C}$, $r \in (0;+\infty)$, $\overline{B}(z_0;r) \subset D$. Тогда*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(z_0 + re^{\mathbf{i}t})\ \mathrm{d}t$$

Доказательство.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\gamma_{r,z_0}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\ \mathrm{d}\zeta$$

Осталось параметризовать окружность γ_{r,z_0} как $\zeta = z_0 + re^{\mathbf{i}t}$, $\mathrm{d}\zeta = r\mathbf{i}e^{\mathbf{i}t}\ \mathrm{d}t$. Тогда распишем и получим то, что нам надо. □

Теорема 5 (Аналитичность голоморфной функции)**.** *Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$, $R \in (0;+\infty]$, $f \in \mathcal{A}(B(z_0;R))$. Тогда f в этом круге раскладывается в степенной ряд с центром в z_0.*

Доказательство. Рассмотрим $z \in B(z_0;R)$. Существует $r > 0$ $|z - z_0| < r < R$.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\gamma_{r,z}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\ \mathrm{d}\zeta$$

Давайте разложим подинтегральную функцию по степеням $z - z_0$, после чего проинтегрируем ряд почленно и получим искомое разложение:

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = f(\zeta)\frac{1}{\zeta - z_0}\frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta-z_0}}$$

В силу того, что $\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right| = \left|\frac{z-z_0}{r}\right| < 1$ штука сверху равна

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^k$$

По признаку Вейерштрасса ряд равномерно сходится $\gamma^*_{r;\zeta_0}$, а умножение на ограниченную функцию $\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}$ (знаменатель равен r, числитель непрерывен, следовательно, ограничен) не нарушает равномерной сходимости. Отсюда

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\gamma_{r,z_0}}\frac{f(\zeta)}{(z - z_0)^{k+1}}\ \mathrm{d}\zeta\right)}_{c_k}(z - z_0)^k$$

Нам нужно лишь доказать, что c_k не зависит от z. А по построению зависит, так как r зависит от z. Хм-м, ну, окружности с разными радиусами гомотопны в $\dot{B}(z_0;R)$, а $\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}$ голоморфна в $\dot{B}(z_0;R)$, значит коэффициенты равны. □

Следствие 1.1. *Пусть $f \in \mathcal{A}(D)$, $z \in D$. Тогда f раскладывается в степенной ряд в круге $B(z_0;\rho(z_0;\partial D))$.*

Замечание. Но вообще радиус сходимости может быть и больше.

Следствие 1.2. *Голоморфная функция бесконечно дифференцируема.*

Следствие 1.3. *Все производные голоморфной функции голоморфны.*

Следствие 1.4. *Если f имеет первообразную в D, то она голоморфна в D.*

Следствие 1.5. *Если $f\mathrm{d}z$ замкнута, то f голоморфна в D.*

Следствие 1.6 (Теорема Морера)**.** *Если $f \in C(D)$ и $\int_\gamma f = 0$ для любого прямоугольника γ, лежащего в D вместе с внутренностью, то $f \in \mathcal{A}(D)$.*

Замечание. Непрерывность f существенна, контрпример: $f = 0$ всюду, кроме одной точки, в которой $f = 1$.

Теорема 6 (Свойства, равносильные голоморфности)**.** *Пусть D — область в $\mathbb{C}$, $f\colon D \to \mathbb{C}$. Тогда следующие утверждения равносильны.*

1. *f голоморфна в D.*
2. *f аналитична в D.*
3. *Локально f имеет первообразную в D.*
4. *Форма $f\mathrm{d}z$ замкнута в D.*
5. *$f \in C(D)$ и $\int_\gamma f = 0$ для любого прямоугольника γ, лежащего в D вместе с внутренностью/*

Доказательство.$1 \to 2$ Аналитичность голоморфной функции.

$2 \to 1$ Дифференцирование степенных рядов.

$1 \to 4$ Интегральная теорема Коши.

$3 \leftrightarrow 4$ Замечание к теореме Коши.

$4 \to 1$ Следствие 1.5 из аналитичности голоморфной функции.

$1 \to 5$ Лемма Гурса.

$5 \to 1$ Теорема Морера.

□

Замечание.

$$c_k = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{\gamma_{r,z_0}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\ \mathrm{d}\zeta$$

При этом, из того, что $f \in \mathcal{A}(D)$, следует, что γ_{r,z_0} можно заменить на любой гомотопный уме путь в $D \setminus \{z_0\}$.

Утверждение.

$$c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$$

Отсюда

$$\frac{f^{(k)}(z)}{k!} = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{\gamma_{r,z}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\ \mathrm{d}\zeta$$

Утверждение. *$f \in \mathcal{A}(D)$, G — ограниченная область с ориентированной границей, $\overline{G} \subset D$, $z \in G$, $k \in \mathbb{Z}_+$*

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi\mathbf{i}} \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\ \mathrm{d}\zeta$$

Лемма 2 (Неравенства Коши для коэффициентов степенного ряда)**.** *Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$, $R \in (0; +\infty]$,*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \qquad |z - z_0| < R$$

Тогда

$$\forall k \in \mathbb{Z}\ \rho \in (0; R)\ |c_k| \leqslant \frac{M_f(\rho)}{\rho^k}$$

Где

$$M_f(\rho) = \max_{|z - z_0| = \rho} |f(z)|$$

Доказательство.

$$|c_k| = \left|\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\gamma_{r,z_0}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\ \mathrm{d}\zeta\right| \leqslant= \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi\rho\cdot\frac{M_f(\rho)}{\rho^{k+1}} = \frac{M_f(\rho)}{\rho^k}$$

□

Определение 5. Функция, голоморфная во всей $\mathbb{C}$, называется **целой**.

Теорема 7 (Теорема Лиувилля)**.** *Целая ограниченная функция постоянна.*

Доказательство. Пусть $M > 0$ — та константа, которой ограничена наша функция: $\forall z \in \mathbb{C}\ |f(z)| \leqslant M$. f целая, следовательно

$$\forall z \in \mathbb{C}\ f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

Оценим по Коши коэффициенты c_k:

$$\forall \rho \in (0; \infty)\ |c_k| \leqslant \frac{M_f(\rho)}{\rho^k} \leqslant \frac{M}{\rho^k}$$

Устремим ρ к $+\infty$. Тогда $\forall k \in \mathbb{N}\ c_k = 0$. То есть $f(z) = c_0 = \mathrm{const}$. □

Теорема 8 (Основная теорема высшей алгебры)**.** *Всякий многочлен положительной степени имеет корень в $\mathbb{C}$.*

Доказательство. Обозначим многочлен буквой p, а степень его — буквой n.
Пусть не так (т.е. $\forall z \in \mathbb{C}\ p(z) \neq 0$). Рассмотрим $f = \frac{1}{p}$. Получается целая функция. Также $p(z) \underset{z\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Отсюда f ограничена:

$$\exists R > 0\ \forall z : |z| > R\ |f(z)| < 1$$

А в круге $\overline{B}(0; R)$ f ограничена по теореме Вейерштрасса. Тогда f ограничена максимумом из R и 1. По теореме Лиувилля $f = \mathrm{const}$. Поскольку она стремится к 0 при $z \to \infty$, $f \equiv 0$, противоречие. □

Лемма 3. *Пусть $f \in \mathcal{A}(D)$. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1. $\exists z_0 \in D\ \forall k \in \mathbb{Z}_+\ f^{(k)}(z) = 0$.
2. $f \equiv 0$ *в некотором круге* $B \subset D$.
3. $f \equiv 0$ *в* D.

Доказательство.

$3 \to 2$ Очевидно.

$2 \to 1$ Очевидно.

$1 \to 3$ Пусть

$$E = \{z \in D \mid \exists V_z\ f \equiv 0 \text{ в } V_z\}$$

Хочется доказать, что $E = D$. Для этого хочется воспользоваться признаком совпадения подобласти с областью. Для этого надо доказать, что E не пусто, открыто и замкнуто в D.

$E \neq \varnothing$ $\forall z \in V_{z_0}$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}}{k!}(z - z_0)^k = 0$$

Отсюда $z_0 \in E$.

E открыто Тривиально.

E замкнуто в D Рассмотрим последовательность $\{z_n\} \subset D : z_n \to z^* \in D$. Проверим, что $z^* \in E$. Ну,

$$\forall k \in \mathbb{Z}_+ \ \forall n \in \mathbb{N} \ f^{(k)}(z_n) = 0$$

Устремив тут n к бесконечности, получим $f^{(k)}(z^*) = 0$, что значит $z^* \in E$ (аналогично $E \neq \varnothing$).

□

Теорема 9 (Изолированность нулей голоморфной функции)**.** *Пусть* $f \in \mathcal{A}(D)$, $f \not\equiv 0$. *Пусть* $z_0 \in D, f(z_0) = 0$. *Тогда*

$$\exists M \in \mathbb{N} \ \exists g \in \mathcal{A}(D) \ g(z_0) \neq 0 \land \forall z \in D \ f(z) = (z - z_0)^m g(z)$$

В частности, f *не обращается в ноль в некоторой проколотой окрестности* z_0.

Доказательство. Пусть

$$m = \min\{k \in \mathbb{N} \mid f^{(k)} \neq 0\}$$

Это определение m корректно (в силу леммы выше оно не пусто).
Теперь разложим f в степенной ряд в некоторой окрестности z_0:

$$f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k \underset{l=k-m}{=} (z - z_0)^m \underbrace{\sum_{l=0}^{\infty} \frac{f^{(m+l)}(z_0)}{(m+l)!}(z - z_0)^l}_{g(z)} \qquad z \in U_{z_0}$$

Пока что g определена (и голоморфна) в U_{z_0}. $g(z_0)$ не равно нулю, потому что $f^{(m)}(z_0)m! \neq 0$ в силу выбора m.
Положим $g(z) = \frac{f(z)}{(z-z_0)^m}$ при $z \in D \setminus U_{z_0}$. Тогда тождество будет выполнено на всём множестве D и g будет аналитично в D. □

Определение 6. Число m из теоремы 9 называется **кратностью/порядком нуля/корня** z_0.

Утверждение. *Пусть*

$$m = \min\{k \in \mathbb{N} \mid f^{(k)} \neq 0\}$$

$$M = \max\{l \in \mathbb{N} \mid \frac{f(z)}{(z - z_0)^l} \in \mathcal{A}(D)\}$$

Тогда $m = M$.

Доказательство. Из доказательства теоремы 9 мы уже знаем, что $m \leqslant M$. Докажем обратное неравенство.
Пусть

$$f(z) = (z - z_0)^l g(z)$$

По правилу Лейбница $\forall k \in [0 : l - 1] \ f^{(k)}(z_0) = 0$. Отсюда как раз $M \leqslant m$. □

Следствие 3.1. *Если* $fg \in \mathcal{A}(D)$ *и* $fg \equiv 0$, *то одна из функций тождественна равна нулю.*

Замечание. Для вещественных функций из $C^{(\infty)}$ это не так. Ведь там у нас есть весёлая функция, у которой все производные равны нулю, а сама она — не тождественный ноль.

Теорема 10 (Теорема единственности для голоморфных функций)**.** *Пусть* $f, g \in \mathcal{A}(D)$, *множество*

$$E = \{z \in D \mid f(z) = g(z)\}$$

имеет предельную точку. Тогда $f \equiv g$.

Доказательство. Пусть $h = f - g \in \mathcal{A}(D)$, $\{z_n\} \subset E$, $z_n \to z^* \in E$. Так, ну, $h(z_n) = 0$, а h голоморфна и тем более непрерывна, поэтому $h(z^*)$ — неизолированный ноль h в D. Значит $h \equiv 0$. □

Замечание. В качестве E может выступать промежуток на прямой, участок кривой и уж тем более область. Да и вообще любое несчётное множество годится (проверьте это сами).

Пример. $E \subset D$, E — невырожденный промежуток $\mathbb{R}$. Тогда $z \mapsto \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ — единственный способ продолжить экспоненту с $\mathbb{R}$ на $\mathbb{C}$ с сохранением дифференцируемости (аналогично sin и cos).

Пример. $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, что на $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ — теорема Пифагора. А во всех остальных точках — теорема о единственности, и можно ничего не делать: не манипулировать рядами и не раскладывать через экспоненту.

Пример. Функции, равные в счётном количестве точек, могут быть не равны ($\sin x$ и 0 равны в бесконечном количестве точек).
$\sin \frac{1}{z}$ имеет своими нулями $\{\frac{1}{k\pi} \mid k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$, и это множество уже имеет предельную точку (ноль), но тут тоже не работает теорема о единственности, потому что $\sin \frac{1}{z}$ не голоморфна в нуле.

Определение 7. Если $f(z_0) = A$, то z_0 называется **A-точкой** функции f.

Утверждение. *A-точки голоморфной функции $f \not\equiv A$ изолированы.*

Доказательство. Следствие из теоремы 9. □

Теорема 11 (Принцип максимума модуля)**.** *Пусть $f \in \mathcal{A}(D)$, $z_0 \in D$, $|f(z_0)| = \max\limits_{z \in D} |f(z)|$. Тогда $f = \mathrm{const}$.*

Доказательство. Пусть $M = |f(z_0)|$, $B(z_0; r) \subset D$, $\rho \in (0; \rho)$. Запишем теорему о среднем:

$$M = |f(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(z_0 + \rho e^{\mathrm{i}t})\, \mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(z_0 + \rho e^{\mathrm{i}t})|\, \mathrm{d}t \leqslant M$$

Значит везде по пути были равенства, а значит

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} M - |f(z_0 + \rho e^{\mathrm{i}t})|\, \mathrm{d}t = 0$$

А подинтегральная функция у нас всюду неотрицательна (и, разумеется, непрерывна). Значит она равна нулю. То есть

$$\forall t \in [-\pi; \pi]\ |f(z_0) + \rho e^{\mathrm{i}t}| = M$$

И в силу произвольности ρ $|f| = M$ на всём $B(z_0; r)$, а у нас была теорема о том, что если модуль голоморфной функции постоянен, то она тоже. А отсюда $f = \mathrm{const}$ в D. □

Следствие 3.1. *Если $f \in \mathcal{A}(D)$, $f \neq \mathrm{const}$, то $|f|$ не имеет максимума в D, даже локального.*

Следствие 3.2. *Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{C}$, $f \in C(\overline{D}) \cap \mathcal{A}(D)$. Тогда $\max\limits_{\overline{D}} |f| = \max\limits_{D} |f|$.*

Следствие 3.3. *Пусть $f \in \mathcal{A}(D)$, f не имеет нулей в D, $f \neq \mathrm{const}$. Тогда $|f|$ не имеет минимума в D (даже локального).*

Доказательство. Рассмотрим $\frac{1}{f}$. Всё. □

Ряды Лорана и вычеты.

Замечание. Договоримся, что $\sum\limits_{k=-\infty}^{-m} a_k$ равно $\sum\limits_{k=m}^{\infty} a_{-k}$.

Определение 8. **Рядом Лорана** называется ряд вида

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$$

При этом ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$$

называется **правильной частью** ряда Лорана, а ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k(z-z_0)^k$$

— **главной частью** ряда Лорана.
Тогда говорят, что **ряд Лорана сходится**, если сходятся его главная и правильная части. Ряду Лорана присваивается значение, равной сумме главной и правильной части.

Свойство 8.1 (Множество сходимости ряда Лорана)**.** *Существуют такие* $r, R \in [0; +\infty]$, *что*

1. $\forall z : r < |z - z_0| < R$ *ряд Лорана абсолютно сходится.*
2. $\forall z : |z - z_0| < r \vee |z - z_0| > R$ *ряд Лорана расходится.*

Доказательство. Пусть R — радиус сходимости правильной части. Теперь пусть $w = \frac{1}{z-z_0}$, тогда главная часть равна

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}w^k$$

У этого чуда есть радиус сходимости ρ. Тогда при $\left|\frac{1}{z-z_0}\right| < \rho$ ряд абсолютно сходится, при $\left|\frac{1}{z-z_0}\right| > \rho$ — расходится. Тогда в качестве r будет выступать $\frac{1}{\rho}$. □

Замечание. Итого имеем несколько случаев

1. $r > R$ — не интересно, везде расходится.
2. $r = R$ — вообще содержательный случай, но не в смысле комплексной дифференцируемости, так как мы получаем окружность (её часть, точнее), а мы хотим область.
3. $r < R$ — содержательный случай: ряд сходится в открытом кольце и, возможно, в каких-то точках его границы.

Свойство 8.2 (Равномерная сходимость ряда Лорана)**.** *Пусть* $0 \leqslant r < R \leqslant +\infty$. *Тогда*

$$\forall r_1, R_1 : r < r_1 < R_1 < R \text{ ряд Лорана равномерно сходится в замкнутом кольце } \overline{K}_{r_1,R_1}(z_0)$$

Доказательство. См. соответствующий результат о степенных рядах. □

Свойство 8.3 (Дифференцирование рядов Лорана)**.** *Пусть* $0 \leqslant r < R \leqslant +\infty$. $f(z) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$ *в* $r < |z - z_0| < R$. *Тогда* $f \in \mathcal{A}(K_{r,R}(z_0))$ *и ряд можно дифференцировать почленно любое число раз.*

Доказательство. Рассмотрим правильную и главную часть отдельно. Правильную можно дифференцировать в круге сходимости любое количество раз, это мы знаем. Поэтому разберёмся с главной частью:

$$g(z) = h(w) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}w^k \qquad w = \frac{1}{z-z_0}$$

Понятно, что h дифференцируемо в круге сходимости, а значит и g — тоже по правилу дифференцирования композиции:

$$g'(z) = h'(w)\frac{-1}{(z-z_0)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} kc_{-k}w^{k-1}\frac{-1}{(z-z_0)^2} = \sum_{k=1}^{\infty}(-k)c_{-k}(z-z_0)^{-k-1} = \sum_{k=-\infty}^{-1} kc_k(z-z_0)^{k-1}$$

□

Свойство 8.4 (Единственность коэффициентов Лорана). *Пусть* $0 \leqslant r < R \leqslant +\infty$,

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-z_0)^k \qquad r < |z-z_0| < R$$

Тогда c_k *определяется единственным образом формулой*

$$c_k = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\gamma_{\rho,z_0}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}\,\mathrm{d}\zeta$$

Где $\rho \in (r;R)$.

Доказательство. По свойству 8.2 на γ^*_{ρ,z_0} ряд равномерно сходится. Функция $\zeta \mapsto \frac{1}{(\zeta-z_0)^{k+1}}$ ограничена на γ^*_{ρ,z_0}, а значит равномерная сходимость сохраняется при умножении на неё:

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\gamma_{\rho,z_0}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}\,\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\gamma_{\rho,z_0}}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(\zeta-z_0)^{n-k-1}\,\mathrm{d}\zeta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \underbrace{\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\gamma_{\rho,z_0}}(\zeta-z_0)^{n-k-1}\,\mathrm{d}\zeta}_{\delta_{nk}} = c_k$$

□

Свойство 8.5 (Неравенства Коши для коэффициентов ряда Лорана). *Пусть* $0 \leqslant r < R \leqslant +\infty$,

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-z_0)^k \qquad r < |z-z_0| < R$$

Тогда

$$\forall k \in \mathbb{Z}\ \forall \rho \in (r;R)\ |c_k| \leqslant \frac{M_f(\rho)}{\rho^k}$$

Где

$$M_f = \max_{|z-z_0|=\rho}|f(z)|$$

Доказательство. Оценка интеграла как для степенного ряда. □

Теорема 12 (Теорема Лорана о разложении голоморфной функции в ряд Лорана). *Пусть* $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \leqslant r < R \leqslant +\infty$. $f \in \mathcal{A}(K_{r,R}(z_0))$. *Тогда* f *раскладывается в ряд Лорана в* $K_{r,R}(z_0)$.

Доказательство. Пусть $z \in K_{r,R}(z_0)$, пусть r_1, R_1 — такие числа, что

$$r < r_1 < |z-z_0| < R_1 < R$$

Тогда $\overline{K}_{r_1,R_1}(z_0) \subset K_{r,R}(z_0)$. По интегральной формуле Коши.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\partial K_{r_1,R_1}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta$$

Граница кольца состоит из двух окружностей:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\gamma_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta - \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta$$

Сейчас мы увидим, что первое нам даст правильную часть, а второе — главную. Ну, пусть $\zeta \in \gamma_{R_1}$. Тогда

$$\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right| = \frac{|z-z_0|}{R_1} < 1$$

$$\frac{1}{\zeta-z} = \frac{1}{\zeta-z_0-(z-z_0)} = \frac{1}{\zeta-z_0}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}} = \frac{1}{\zeta-z_0}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^k}{(\zeta-z_0)^k}$$

По признаку Вейерштрасса выше ряд равномерно сходится относительно ζ на $\gamma^*_{R_1}$, а $\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}$ ограничена. Тогда один из интегралов равен ровно тому,ч то мы хотели.
Теперь посмотрим на

$$-\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\gamma_{r_1}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta$$

Тут

$$\left|\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right| = \frac{r_1}{z-z_0} < 1$$

$$\frac{-1}{\zeta-z} = \frac{1}{\zeta-z_0-(z-z_0)} = \frac{1}{z-z_0}\frac{1}{1-\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\zeta-z_0)^k}{(z-z_0)^{k+1}} = \sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{(z-z_0)^k}{(\zeta-z_0)^{k+1}}$$

И опять получаем то, что хотели, по равномерной сходимости. □

Определение 9. Если $f \in \mathcal{A}(\dot{V}_{z_0})$, то z_0 называется **особой точкой** (или **изолированной особой точкой однозначного характера**) f.
При этом, если $\exists \lim\limits_{z\to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$, то z_0 называется **устранимой особой точкой** f, если $\exists \lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$, то z_0 называется **полюсом** f, а если $\nexists \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$, то z_0 называется **существенной особой точкой** f.

Теорема 13 (Характеристика устранимых особых точек)**.** *Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{A}(\dot{V}_{z_0})$. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1. *z_0 — устранимая особая точка f.*
2. *f ограничена в некоторой проколотой окрестности z_0 (U_{z_0}).*
3. *f аналитически продолжимо в V_{z_0} (т.е. $\exists g \in \mathcal{A}(V_{z_0})\ \forall z \in \dot{V}_{z_0}\ f(z) = g(z)$).*
4. *В главной части ряда Лорана f все коэффициенты равны нулю.*

Доказательство. $4 \to 3$ Очевидно (запишем разложение f в ряд Лорана, и там будет сумма начинаться с нуля, получится сумма степенного ряда, это и будет g).

$3 \to 1$ Очевидно ($\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \lim\limits_{z\to z_0} g(z) = g(z_0)$).

$1 \to 2$ Очевидно (если функция имеет в точке конечный предел, она ограничена в проколотой окрестности этой точки).

$2 \to 4$ Пусть $U_{z_0} = B(z_0; r)$. Тогда

$$\exists M > 0\ \forall z \in \dot{U}_{z_0}\ |f(z)| \leqslant M$$

Воспользуемся неравенствами Коши:

$$\forall \rho \in (0; r)\ \forall k \in \mathbb{Z}\ |c_k| \leqslant \frac{M_f(\rho)}{\rho^k} \leqslant \frac{M}{\rho^k}$$

Устремим ρ к $0+$. При $-k \in \mathbb{N}$ правая часть стремится к нулю.

□

Замечание. Далее можно не считать устранимые особые точки особыми, вместо этого будем их устранять , получая голоморфные функции.

Теорема 14 (Характеристика полюсов)**.** *Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{A}(\dot{V}_{z_0})$. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1. *z_0 — полюс f.*
2. *$\exists m \in \mathbb{N}\ \exists \varphi \in \mathcal{A}(V_{z_0})\ \varphi(z_0) \neq 0 \wedge \forall z \in \dot{V}_{z_0}\ f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$.*
3. *В главной части ряда Лорана f отлично от нуля натуральное число коэффициентов.*

Доказательство. $1 \to 2$ раз предел бесконечен, в некоторой $\dot{U}_{z_0}$ $\forall z \in \dot{U}_{z_0}$ $|f(z)| > 1$. Рассмотрим $g = \frac{1}{f}$. Тогда z_0 — устранимая особая точка g (предел равен нулю). Доопределим её там нулём. g в z_0 имеет изолированный ноль. По теореме об изолированности нулей голоморфной функции существуют такие $m \in \mathbb{N}$ и $\psi \in \mathcal{A}(U_{z_0})$ $\psi(z_0) \neq 0$, что $g(z) = (z-z_0)^m \psi(z)$. Обозначим $\varphi(z) = \frac{1}{\psi(z)}$. Получим $\varphi(z)$, но на окрестности U_{z_0}, а хочется V_{z_0}. Ну, в $V_{z_0} \setminus U_{z_0}$ положим $\varphi(z) = (z-z_0)^m f(z)$.

$2 \to 3$ Разложим φ в ряд Тейлора:

$$\varphi(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu (z-z_0)^\nu$$

Тогда

$$f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} d_{m+k}(z-z_0)^k$$

$3 \to 1$ Запишем разложение f в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$$

Где $c_{-m} \neq 0$. Тогда

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^m} \sum_{k=-m}^{\infty} c_k (z-z_0)^{k+m} = \frac{1}{(z-z_0)^m} \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu-m}(z-z_0)^\nu$$

Мы имеем произведение двух штук, первая стремится к ∞, вторая — к $c_{-m} \neq 0$.

□

Определение 10. Число m из теоремы 14 называется **характеристикой полюса**.

Замечание. m является одновременно кратностью нуля $\frac{1}{f}$ (доопределённого в z_0), числом m из утверждения 2 и $-\min\{k \in \mathbb{Z} \mid c_k \neq 0\}$.

Определение 11. Функция f называется **мероморфной** в области D, если она не имеет в D особенностей, кроме полюсов (то есть она голоморфна в множестве D без её полюсов).

Пример. Простейшие примеры — рациональные дроби (частное двух многочленов), tan, cot, а вот что не мероморфно в $\mathbb{C}$ — это $\frac{1}{\sin\frac{\pi}{z}}$. У неё в нуле не полюс, а кринж какой-то.

Свойство 11.1. *Если f и g мероморфны в D, то $f+g$, $f-g$, fg, $\frac{f}{g}$ (если $g \not\equiv 0$) и f' также мероморфны в D.*
Доказательство остаётся читателю как несложное упражнение.

Утверждение. *Частное двух голоморфных функций мероморфно, но, что более интересно (и не является несложным упражнением), верно и обратное: любая мероморфная функция представима как частное двух голоморфных.*

Следствие 3.1. *z_0 является существенно особой точкой f тогда и только тогда, когда в главной части f есть бесконечное число ненулевых слагаемых.*

Теорема 15 (Теорема Сахотского)**.** *Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{A}(\dot{V}_{z_0})$, z_0 — существенно особая точка f. Тогда*

$$\forall A \in \overline{\mathbb{C}}\ \exists \{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \dot{V}_{z_0}\ z_n \to z_0 \wedge f(z_n) \to A$$

Замечание. То есть для особой точки либо есть предел (конечный или бесконечный), либо частичные пределы могут давать всё $\overline{\mathbb{C}}$.

Доказательство. Для начала $A = \infty$. f не ограничена ни в какой окрестности U_{z_0} (иначе устранимая особая точка), а значит

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists z_n\ 0 < |z_n - z_0| < \frac{1}{n} \wedge |f(z_n)| > n$$

Теперь пусть $A \in \mathbb{C}$. Рассмотрим E — множество A-точек f — и зададимся вопросом: z_0 — предельная точка E или нет? Если да, можно построить искомую последовательность по определению. Если нет, то возьмём $g = \frac{1}{f-A} \in \mathcal{A}(\dot{U}_{z_0})$. z_0 — особая точка g. Какого типа? Ну, объективно, существенно особая, иначе был бы предел и $\lim f$ можно было бы выразить через $\lim g$. А тогда применим тот фрагмент доказательства, где $A = \infty$:

$$\exists \{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \dot{U}_{z_0}\ z_n \to z_0 \wedge g(z_n) \to \infty$$

А последнее просто равносильно тому, что $f(z_n) \to A$. $\square$

Теорема 16 (Теорема Пикара)**.** *Пусть $V_{z_0} = B(z_0; r)$, $f \in \mathcal{A}(\dot{V}_{z_0})$, z_0 — существенно особая точка f. Тогда*

$$\forall \delta \in (0; r)\ f(\dot{B}(z_0; \delta)) = \mathbb{C} \text{ или } \mathbb{C} \text{ без одной точки}$$

Без доказательства.

Определение 12. Пусть $f \in \mathcal{A}(\dot{V}_{z_0})$, тем самым раскладываясь в ряд Лорана на $\dot{V}_{z_0}$. **Вычетом** f в точке z_0 называется c_{-1}. Он обозначается $\operatorname{res}_{z_0} f$ или $\operatorname{res}_{z=z_0} f(z)$.

Замечание. Вычет f в z_0 равен

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{\gamma_{\rho, z_0}} f(\zeta)\ \mathrm{d}\zeta \qquad \dot{V}_{z_0} = \dot{B}(z_0; R), \rho \in (0; R)$$

Теорема 17 (Теорема Коши о вычетах)**.** *Пусть $f \in \mathcal{A}(D \setminus E)$, где E —множество изолированных особых точек f. Пусть G — ограниченная область с ориентированной границей, $\overline{G} \subset D$, $\partial G \cap E = \varnothing$. Тогда*

$$\int_{\partial G} f = 2\pi\mathbf{i} \sum_{z_k \in E \cap G} \operatorname*{res}_{z_k} f$$

Доказательство. Для начала докажем, что $E \cap G$ конечно. Ну, пусть это не так. $\overline{G}$ — компакт, а значит $\exists \{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E \cap G\ z_n \neq z^* \wedge z_n \to z^* \in \overline{G}$. Да это же неизолированная особая точка f в D!
Хорошо, пусть $E \cap G = \{z_1, \ldots, z_N\}$. Существует такое $r > 0$, что $\overline{B}(z_k, r)$ лежат в G и дизъюнктны. Пусть $\rho \in (0; r]$. Пусть $G_\rho = G \setminus \bigsqcup_{k=1}^{N} \overline{B}(z_k; \rho)$. Поскольку $\overline{G}_\rho \subset G \setminus E$, $f \in \mathcal{A}(\overline{G}_\rho)$, а значит по интегральной теореме Коши

$$0 = \int_{\partial G_\rho} f = \int_{\partial G} f - \sum_{k=1}^{N} \int_{\gamma_{\rho, z_k}} f = \int_{\partial G} f - 2\pi\mathbf{i} \sum_{k=1}^{N} \operatorname*{res}_{z_k} f$$

$\square$

Замечание. Правила вычисления вычетов:

1. В устранимой особой точке вычет равен нулю.
2. Для существенно особой точки рецепта не будет.

3. В полюсе кратности 1 (ещё говорят, простом полюсе) пишем

$$f(z) = c_{-1}(z - z_0)^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$$

И тут всё очень просто: умножим f на $z - z_0$ и перейдём к пределу $z \to z_0$.
Есть ещё вариация этой формулы. Пусть $f = \frac{P}{Q}$, $P(z_0) \neq 0$, $Q(z_0) = 0$, $Q'(z_0) \neq 0$. Тогда

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = \lim_{z \to z_0} P(z) \frac{z - z_0}{Q(z) - Q(z_0)} = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

4. А что делать в полюсах большей кратности? Ну,

$$f(z) = c_{-m}(z - z_0)^{-m} + \dots + c_{-1}(z - z_0)^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$$

Ну, тут что, возьмём $(z - z_0)^m f(z) \in \mathcal{A}(V_{z_0})$, после чего это надо дифференцировать $m - 1$ раз:

$$\operatorname*{res}_{z_0} f = \frac{1}{(m-1)!} \left((z - z_0)^m f(z)\right)^{(m-1)} \Big|_{z = z_0}$$

Пример. Пример формулы с $f = \frac{P}{Q}$ — котангенс, у него во всех полюсах вычет равен единице.

Пример.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{n+1}}$$

Пусть $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^{n+1}}$. Посчитать интеграл можно двумя способами. С одной стороны, это предел $\int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)^{n+1}}$ при $R \to \infty$. С другой, рассмотрим верхнюю полуокружность радиуса $R > 1$ с центром в нуле и посчитаем интеграл по ней.

$$\int_{C_R} \frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)^{n+1}}$$

Где C_R — полуокружность. Этот интеграл можно оценить:

$$\left|\int_{C_R} \frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)^{n+1}}\right| \leqslant \frac{\pi R}{(R^2-1)^{n+1}}$$

Это чудо стремится к нулю.
При этом если соединить полуокружность и отрезок $[-R; R]$, получится контур, в котором есть один полюс ($\mathbf{i}$) и можно воспользоваться вычетом для подсчёта интеграла по нему:

$$2\pi\mathbf{i} \operatorname*{res}_{z=i} \frac{1}{(z^2+1)^{n+1}} = 2\pi\mathbf{i} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{(z+\mathbf{i})^{n+1}}\right)^{(n)} \Bigg|_{z=\mathbf{i}} = 2\pi\mathbf{i} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(n+1)\cdot\ldots\cdot 2n}{(z+\mathbf{i})^{2n+1}}\Bigg|_{z=\mathbf{i}} =$$
$$= 2\pi \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n+1}} = \pi \frac{(2n)!}{((2n)!!)^2} = \pi \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

Отсюда $I = \pi \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$.

Замечание. Таким же способом можно посчитать интегралы дробно-рациональных функций (отношение многочленов), если они не имеют полюсов на вещественной прямой и степень числителя меньше степени знаменателя хотя бы на два. Ответом будет следующее:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P}{Q} = 2\pi\mathbf{i} \sum_{\substack{Q(z_k)=0 \\ \Im z_k > 0}} \operatorname*{res}_{z_k} \frac{P}{Q}$$

Лемма 4 (Лемма Жордана)**.** *Пусть* $\Delta > 0$, $f \in C\{z \in \mathbb{C} \mid \Im z \geqslant 0, |z| \geqslant \Delta\}$. *Пусть* $\lambda > 0$. *Пусть* $C_R(t) = Re^{\mathbf{i}t} \mid t \in [0;\pi]$, $f(z) \underset{z\to\infty}{\to} 0$. *Тогда*

$$\int_{C_R} f(z)e^{\mathbf{i}\lambda z}\ \mathrm{d}z \underset{z\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Замечание. Лемма тривиальна при $f = o\left(\frac{1}{z}\right)$. Пусть $z = x + \mathbf{i}y$, тогда

$$|e^{\mathbf{i}\lambda z}| = |e^{\mathbf{i}\lambda x}e^{-\lambda y}| < 1$$

А значит

$$\left|\int_{C_R} f(z)e^{\mathbf{i}\lambda z}\ \mathrm{d}z\right| < \pi R \max_{\substack{|z|=R\\ \Im z\geqslant 0}} |f(z)| = \pi R o\left(\frac{1}{R}\right) \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Доказательство. Пусть

$$M(R) = \max_{\substack{|z|=R\\ \Im z\geqslant 0}} |f(z)|$$

По условию $M(R)$ стремится к нулю при $R \to +\infty$. Теперь оценим интеграл

$$\left|\int_{C_R} f(z)e^{\mathbf{i}\lambda z}\ \mathrm{d}z\right| = \left|\int\limits_0^\pi f(Re^{\mathbf{i}t})Re^{\mathbf{i}\lambda}e^{\mathbf{i}\lambda(\cos t + \mathbf{i}\sin t)}\ \mathrm{d}z\right| \leqslant M(R)R\int\limits_0^\pi e^{-\lambda R\sin t}\ \mathrm{d}t = 2M(R)R\int\limits_0^{\pi/2} e^{-\lambda R\sin t}\ \mathrm{d}t$$

Поскольку $\sin t \geqslant \frac{2}{\pi}t$,

$$2M(R)R\int\limits_0^{\pi/2} e^{-\lambda R\sin t}\ \mathrm{d}t \leqslant 2M(R)R\int\limits_0^{+\infty} e^{\frac{\lambda R2}{\pi}r}\ \mathrm{d}t = \frac{2M(R)R\pi}{\lambda R2} = \frac{\pi M(R)}{\lambda}$$

Что стремится у нулю. □

Пример.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos\lambda x}{1+x^2}\ \mathrm{d}x$$

Обозначим это за I. При $\lambda = 0$ мы знаем $I = \frac{\pi}{2}$. А ещё этот интеграл чётен по λ, а значит можно рассматривать только $\lambda > 0$.
Рассмотрим тот же контур Γ_R, который сначала идёт из $R + 0\mathbf{i}$ в $-R + 0\mathbf{i}$ по полуокружности, а потом по отрезку возвращается.
Пусть $f(z) = \frac{e^{\mathbf{i}\lambda z}}{1+z^2}$. Тогда

$$\int\limits_{-R}^{R} \frac{e^{\mathbf{i}\lambda z}}{1+z^2}\ \mathrm{d}z = \int\limits_{-R}^{R} \frac{\cos\lambda z}{1+z^2}\ \mathrm{d}z \to 2I$$

$$\int_{C_R} \frac{e^{\mathbf{i}\lambda z}}{1+z^2}\ \mathrm{d}z \longrightarrow 0$$

А теперь посчитаем интеграл по Γ_R:

$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{\mathbf{i}\lambda z}}{1+z^2}\ \mathrm{d}z = 2\pi\mathbf{i}\operatorname*{res}_{z=i}\frac{e^{\mathbf{i}\lambda z}}{1+z^2} = 2\pi\mathbf{i}\frac{e^{-\lambda}}{2\mathbf{i}} = \pi e^{-\lambda}$$

Итого

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos\lambda x}{1+x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}e^{-|\lambda|}$$

Замечание. Аналогично считается интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x \sin \lambda x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}(\operatorname{sign}\lambda)e^{-|\lambda|}$$

Определение 13. Интегралы

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \int\limits_0^{+\infty} \frac{x \sin \lambda x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

называются **интегралами Лапласа**.

Замечание. Этим же способом обслуживаются интегралы

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}e^{\mathbf{i}\lambda x}\,\mathrm{d}x$$

Где $\frac{P}{Q}$ — правильная рациональная дробь без полюсов на $\mathbb{R}$, $\lambda > 0$.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}e^{\mathbf{i}\lambda x}\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathbf{i} \sum_{\substack{Q(z_k)=0 \\ \mathbf{i}z_k>0}} \operatorname*{res}_{z=z_k} \frac{P(z)}{Q(z)}e^{\mathbf{i}\lambda z}$$

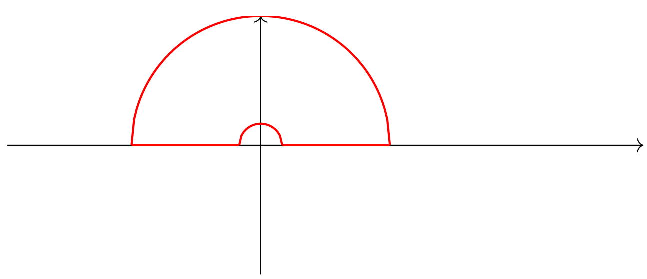
Пример.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

Обозначим интеграл за I. Пусть

$$f(z) = e^{\mathbf{i}z}2$$

Но при замене синуса на экспоненту получим особенность в нуле, и её надо обойти:



Пусть радиус большой полуокружности — R, малой — r, $0 < r < R$.

$$\left(\int\limits_{-R}^{-r} + \int\limits_r^R\right) \frac{e^{\mathbf{i}z}}{z}\,\mathrm{d}z = \left(\int\limits_{-R}^{-r} + \int\limits_r^R\right) \frac{\mathbf{i}\sin z}{z}\,\mathrm{d}z \longrightarrow 2\mathbf{i}I$$

$$\int_{C_R} \frac{e^{\mathbf{i}z}}{z}\,\mathrm{d}z \to 0$$

по лемме Жордана.

$$\int_\Gamma \frac{e^{\mathbf{i}z}}{z}\,\mathrm{d}z = 0$$

По интегральной теореме Коши или теореме Коши о вычетах.

$$\int_{C_r^-} \frac{e^{\mathbf{i}z}}{z}\,\mathrm{d}z = \int_{C_r^-} \frac{e^{\mathbf{i}z}-1}{z}\,\mathrm{d}z + \int_{C_r^-} \frac{\mathrm{d}z}{z}$$

Второе слагаемое:

$$\int_{C_r^-} \frac{\mathrm{d}z}{z} = -\int\limits_0^{\pi} \frac{r\mathbf{i}e^{\mathbf{i}t}}{re^{\mathbf{i}t}}\,\mathrm{d}t = -\pi\mathbf{i}$$

В первом функция $z \mapsto \frac{e^{\mathbf{i}z}-1}{z}$ голоморфна на $\mathbb{C}$, а значит ограничена в окрестности нуля. А значит

$$\exists M > 0\ \forall z : |z| \leqslant 1\ \left|\frac{e^{\mathbf{i}z}-1}{z}\right| \leqslant M$$

А тогда

$$\left|\int_{C_r^-} \frac{e^{\mathbf{i}z}-1}{z}\right| \leqslant M\pi r \to 0$$

Отсюда

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

Замечание. Напоминание:

$$\operatorname{Si} x = \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

называется **интегральным синусом**. Сейчас мы узнали, что

$$\operatorname{Si} x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$$

Пример.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{+\infty} \sin^2 x \mathrm{d}\left(-\frac{1}{x}\right) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{2\sin x\cos x}{x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x}\,\mathrm{d}x \underset{2x=t}{=} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

Определение 14. ∞ является **особой точкой** f, если $f \in \mathcal{A}(\dot{V}_\infty)$, где

$$\dot{V}_\infty = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\}$$

Классификация особых точек сохраняется.

Определение 15. В случае бесконечно удалённой точки в разложении в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k \qquad |z| > R$$

можно провести замену $z = \frac{1}{w}$,

$$g(w) = f\left(\frac{1}{w}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{-k} w^k \qquad 0 < |w| < \frac{1}{R}$$

Тогда **главной частью ряда Лорана для бесконечно удалённой точки** называется главная часть ряда для g:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$$

А **основной частью** — основная часть:

$$\sum_{k=-\infty}^{0} c_k z^k$$

Вычетом на ∞ называется $-c_{-1}$.

Замечание. Почему? Потому что

$$\operatorname*{res}_{\infty} f = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{\gamma_\rho^-} f(z)\ \mathrm{d}z$$

Короче, из-за того, что мы должны в другом направлении обходить окружность, чтобы *внешняя часть* оставалась слева.

Замечание. Из того, что ∞ — устранимая особая точка f не следует, что $\operatorname{res}_\infty f = 0$, простой пример: $f(z) = \frac{1}{z}$.

Теорема 18 (О полной сумме вычетов)**.** *Пусть $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C} \setminus E)$, $E \cup \{\infty\}$ — множество изолированных особых точек f. Тогда*

$$\sum_{z_k \in E\cup\{\infty\}} \operatorname*{res}_{z_k} f = 0$$

Доказательство. Возьмём круг настолько большого радиуса R, что в его внешности и на границе нет особых точек (кроме ∞). По теореме Коши о вычетах

$$\int_{\gamma_R} f = 2\pi\mathbf{i} \sum_{z_k \in E} \operatorname*{res}_{z_k} f$$

По определению вычета на бесконечности

$$\int_{\gamma_R} f = -2\pi\mathbf{i} \operatorname*{res}_{\infty} f$$

□

8 Мера и интеграл.

Мера в абстрактных множествах.

Замечание. Напоминание: 2^X — множество всех подмножеств X.

Замечание. В этом разделе периодически будут встречаться словосочетания вида «система множеств» или «семейство множество» и все они будут значит не более, чем «множество множеств», просто так говорить неудобно.

Определение 1. Семейство $\mathbb{P}$ подмножеств множества X (которое в данном разделе называется **пространством**) называется **полукольцом**, если выполнены **аксиомы полукольца**.

1. $\varnothing \in \mathbb{P}$.
2. Если $A, B \in \mathbb{P}$, то $A \cap B \in \mathbb{P}$.
3. Если $A, B \in \mathbb{P}$ и $B \subset A$, то $A \setminus B$ представляется в виде конечного количества дизъюнктных множеств из полукольца:

$$A \setminus B = \bigsqcup_{k=1}^{N} C_k \mid C_k \in \mathbb{P}$$

Замечание. Здесь и далее в обозначениях $\{A_k\}_k$, $\bigcup\limits_k A_k$, $\sum\limits_k A_k$ имеется ввиду конечное или счётное семейство (во втором и третьем обозначениях его объединение и сумма).

Пример. Например, $\{\varnothing\}$ или 2^X являются отличными полукольцами.

Пример. Множество ограниченных множеств в метрическом пространстве является полукольцом.

Пример. Множество промежутков в $\mathbb{R}$ также является полукольцом.

Свойство 1.1. *Если* $A, A_1, \dots, A_n \in \mathbb{P}$, *то* $A \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k = \bigsqcup\limits_{i=1}^{N} C_i \mid C_i \in \mathbb{P}$

Доказательство. Индукция по n. База: $n = 1$. Пусть $B = A \cup A_i \in \mathbb{P}$. Тогда по аксиоме 3 $A \setminus B$ представимо в требуемом виде.
Переход: $n \mapsto n + 1$.

$$A \setminus \bigcup_{k=1}^{n+1} A_k = \left(A \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \setminus A_{n+1} \overset{\text{и.п.}}{=} \left(\bigsqcup_{i=1}^{N} C_i\right) \setminus A_{n+1} = \bigsqcup_{i=1}^{N} (C_i \setminus A_{n+1}) \overset{\text{база}}{=} \bigcup_{i=1}^{N} \bigcup_{j=1}^{M_i} D_{ij}$$

При этом все D_{ij} также дизъюнктны ($D_{i_1 j}$ и $D_{i_2 j}$ непересекаются по сохранению этого свойства для C_{i_1} и C_{i_2}, а если отличается второй индекс, то изначально в базе индукции мы раскладывали на диъюнктные множества). $\square$

Свойство 1.2. *Если* $\{A_k\}_k$ *не более чем счётно,* $A_k \in \mathbb{P}$, *то*

$$\bigcup_k A_k = \bigcup_k \bigcup_{i=1}^{N_k} C_{ki}$$

Где C_{ki} *все дизъюнктны и лежат в* $\mathbb{P}$ *и* $C_{ki} \subset A_k$.

Доказательство. A_k сами не обязаны быть дизъюнктными, поэтому сначала добьёмся их дизъюнктности:

$$B_k = A_k \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j$$

B_k уже необязательно лежат в $\mathbb{P}$, но

$$\bigcup_k A_k = \bigsqcup_k B_k \overset{1}{=} \bigcup_k \bigcup_{i=1}^{N_k} C_{ki}$$

И вот C_{ki} уже $\in \mathbb{P}$ и дизъюнктны. $\square$

Определение 2. Непустое семейство $\mathbb{A}$ подмножеств X (которое тут также называется **пространством**) называется **σ-алгеброй**, если выполнены аксиомы σ-алгебры:

1. Если $A \in \mathbb{A}$, то $A^{\complement} \in \mathbb{A}$.
2. Если $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ — такое семейство, что $A_k \in \mathbb{A}$, то $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathbb{A}$.

Пример. Простейший пример: $\{\varnothing, X\}$. Ещё один простой пример: 2^X. И ещё: семейство не более чем счётных подмножеств X и их дополнений.

Замечание. Если есть полукольцо, то должно быть и кольцо. И если есть σ-алгебра, то должна быть и просто алгебра. И такие структуры и правда есть, но мы рассмотрим только алгебру.
σ — это про счётность. Просто алгебра должна быть не про счётной.

Определение 3. Если $\mathbb{A}$ — такое семейство подмножеств X, что для него выполнена первая аксиома σ-алгебры, а вторая аксиома верна только для конечных семейств (неизвестно, выполнена ли для счётных), то $\mathbb{A}$ называется **алгеброй**.

Пример. Существует алгебра, не являющаяся σ-алгеброй. Например, семейство ограниченных в $\mathbb{R}$ множеств. Объединение конечного количества ограниченных множеств ограничено, но

$$\bigcup_{k=0}^{\infty}[k;k+1)=\mathbb{R}_+$$

Свойство 3.1. *Пусть $\mathbb{A}$ — алгебра над X. Тогда*

$$\forall\{A_k\}_{k=1}^n\subset\mathbb{A}\ \bigcap_{k=1}^{n}A_k\in\mathbb{A}$$

Для σ-алгебр это верно и для счётных семейств

Доказательство.

$$\bigcap_{k=1}^{n}A_k=\left(\bigcap_{k=1}^{n}A_k^{\complement}\right)^{\complement}$$

Дальше сами □

Свойство 3.2. *Если $A,B\in\mathbb{A}$, то $A\setminus B\in\mathbb{A}$.*

Доказательство. Тривиально из первого. □

Свойство 3.3. *Всякая алгебра является полукольцом.*

Доказательство. Аксиомы 2 и 3 мы проверили выше, аксиома 1. Поскольку $\mathbb{A}$ непусто, в нём есть A. А значит есть и $A^{\complement}$. Тогда $A\cap A^{\complement}\in\mathbb{A}$. □

Утверждение. *Пусть X — пространство, $T\neq\varnothing$, $\{\mathbb{A}_t\}_{t\in T}$ — семейство σ-алгебр над X. Тогда*

$$\mathbb{A}=\bigcap_{t\in T}\mathbb{A}_t$$

также является σ-алгеброй.

Доказательство. Выше мы уже узнали, что $\varnothing\in\mathbb{A}_t$, а значит $\mathbb{A}\neq\varnothing$. Теперь давайте проверять аксиомы:

$$A\in\mathbb{A}\Leftrightarrow\forall t\in T\ A\in A_t\Leftrightarrow\forall t\in T\ A^{\complement}\in A_t\Leftrightarrow A^{\complement}\in\mathbb{A}$$

□

Замечание. Аналогично со счётным объединением.

Определение 4. Пусть M — семейство подмножеств X. Наименьшая по включению σ-алгебра, содержащая M, называется σ-алгеброй, **порождённой** M или **натянутой на** M или **борелевской оболочкой** M.

Замечание. Такое существует и равно пересечению всех σ-алгебр, содержащих M.

Определение 5. Пусть X — топологическое (для вас — метрической) пространство, σ-алгебра, порождённая топологической структурой (множеством всех открытых множеств) на нём называется **борелевской σ-алгебра**, а её элементы — **борелевскими множествами**.
$\mathbb{B}_n$ — борелевская σ-алгебра в $\mathbb{R}^n$.

Свойство 5.1. *Там есть все открытые множества, все открытые, счётные пересечения всех открытых и счётные объединения всех замкнутых. И ещё какой-то кринж.*

Определение 6. **Множеством типа** G_δ называется множество, являющееся счётным пересечением открытых множеств.
Множеством типа F_σ называется множество, являющееся счётным объединением замкнутых множеств.

Замечание. Но это не всё, что есть в борелевской σ-алгебре, потому что ещё же можно счётно объединять G_δ. Получатся множества типа $G_{\delta\sigma}$. И также можно получить $F_{\sigma\delta}$. Так можно сделать сколько угодно раз, но это всё равно не все множества борелевской σ-алгебры, ведь мы можем объединять и пересекать множества разных «уровней». Короче, много чего интересного есть в борелевской σ-алгебре.

Утверждение.

$$\operatorname{card}\mathbb{B}_n = \operatorname{card}\mathbb{R}^n$$

Без доказательства.

Утверждение. *Борелевская σ-алгебра равна σ-алгебре, порождённой замкнутыми множествами.*

Доказательство. Тривиально. □

Определение 7. **Мерой** называется неотрицательная счётно-аддитивная функция, заданная на полукольце и равная нулю на пустом множестве.
Иначе говоря, $\mu\colon \mathbb{P} \to [0; +\infty]$ называется мерой, если $\mu\varnothing = 0$ и

$$\{A_k\}_{k=1}^{\infty} : A_k \in \mathbb{P}, \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathbb{P} \Rightarrow \mu A = \sum_{k=1}^{\infty} \mu A_k$$

Определение 8. Если в определении меры заменить счётную аддитивность на конечную, получится функция, котрая называется **объёмом**.

Утверждение. *Если μ не равна тождественно $+\infty$ и конечно-аддитивна/счётно-аддитивна, то $\mu\varnothing = 0$.*

Доказательство. Рассмотрим множество $A \mid \mu A \neq +\infty$. Тогда

$$\mu A = \mu(A \sqcup \varnothing) = \mu A + \mu\varnothing \Rightarrow \mu\varnothing = 0$$

Это было для конечной аддитивности, вот для счётной:

$$\mu A = \mu\left(A \sqcup \bigsqcup_{k=1}^{\infty} \varnothing\right) = \mu A + \sum_{k=1}^{\infty} \mu\varnothing \Rightarrow \mu\varnothing = 0$$

□

Утверждение. *Счётная аддитивность влечёт конечную.*

Доказательство. Добавим к счётному семейству счётное количество пустых множеств. Тогда либо из предыдущего значение суммы μ не изменится, либо $\mu \equiv +\infty$, и мы суммируем несколько $+\infty$ а обоих случаях. □

Пример. Обратное неверно:

$$\mu\colon e^{\mathbb{R}^n} \to [0; +\infty]$$

$$\mu A = \begin{cases} 0 & A \text{ ограничено} \\ +\infty & \text{иначе} \end{cases}$$

Замечание. И дело тут не в том, что мы разрешили значение $+\infty$, просто пока нам лень приводить примеры, где $+\infty$ нет, там надо будет что-то доказывать.

Свойство 8.1 (Сильная монотонность). *Пусть μ — объём. Пусть $\{A_k\}_k$ — не более чем счётный набор дизъюнктных множеств полукольца, $A \in P$ и $\bigsqcup_k A_k \subset A$. Тогда*

$$\sum_k \mu A_k \leqslant \mu A$$

Доказательство. Сначала пусть набор конечен. Возьмём разность $A \setminus \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k$. Её по свойству 1.1 полукольца она представима в виде $\bigsqcup\limits_{i=1}^{N} C_i \mid C_i \in \mathbb{P}$. Тогда

$$A = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k \cup \bigsqcup_{i=1}^{N} C_i$$

Все множества справа непересекаются, а значит A мы представили в виде объединения дизъюнктных множеств полукольца. Отсюда по счётной аддитивности

$$\mu A = \sum_{k=1}^{n} \mu A_k + \sum_{i=1}^{N} \mu C_i \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mu A_k$$

Для счётных семейств. Устремим n к бесконечности в неравенстве

$$\mu A =\geqslant \sum_{k=1}^{n} \mu A_k$$

□

Свойство 8.2 (Конечная полуаддитивность)**.** *Пусть μ — объём. Пусть $\{A_k\}_{k=1}^{n} \subset \mathbb{P}$, $A \in \mathbb{P}$, $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$, тогда*

$$\mu A \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mu A_k$$

Свойство 8.3 (Счётная полуаддитивность)**.** *Пусть μ — мера. Пусть $\{A_k\}_k \subset \mathbb{P}$, $A \in \mathbb{P}$, $A \subset \bigcup\limits_{k} A_k$, тогда*

$$\mu A \leqslant \sum_{k} \mu A_k$$

Доказательство.

$$A = A \cap \bigsqcup_{k} A_k = \bigsqcup_{k} \underbrace{A \cap A_k}_{B_k \in \mathbb{P}} \overset{1.2}{=} \bigcup_{k} \bigcup_{i=1}^{N_k} C_{ki}$$

Где C_{kii} все дизъюнктны, лежат в $\mathbb{P}$ и $C_{ki} \subset A_k$.
Тогда

$$\mu A = \sum_{k} \sum_{i=1}^{N_k} \mu C_{ki} \overset{8.1}{\leqslant} \sum_{k} \mu B_k \overset{8.1}{\leqslant} \sum_{k} \mu A_k$$

□

Определение 9. Если $X \in \mathbb{P}$ и $\mu X < +\infty$, то мера μ называется **конечной**.
Если $\mu X = 1$, мера называется **вероятностной**.

Определение 10. Если X представляется в виде $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} X_k$, где $X_k \in \mathbb{P}$ и $\mu X_k < +\infty$, то μ называется **σ-конечной**.

Пример. $X = \mathbb{R}$, $\mathbb{P}$ — множество промежутков, μ — длина. То, что это мера, докажем позже (и сразу для многомерного случая). А сейчас заметим, что она σ-конечна:

$$\mathbb{R} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [k; k+1)$$

Пример. X — произвольное множество, $\mathbb{P} = 2^X$, $\nu A = |A|$. (Считающая мера.)

Пример. X — произвольное множество, $\mathbb{P} = 2^X$, $a \in X$. Тогда

$$\delta_a A = \begin{cases} 1 & a \in A \\ 0 & a \notin A \end{cases}$$

Так и называется, δ-мера. Или ещё называется единичной нагрузкой.
Кстати,

$$\chi_A a = \begin{cases} 1 & a \in A \\ 0 & a \notin A \end{cases}$$

называется характеристической функцией множества A.

Пример. X — произвольное множество, $\mathbb{P} = 2^X$. Пусть $h\colon X \to [0; +\infty]$. Мы будем называть эту функцию числовым семейством и писать $\{h_x\}_{x \in X}$. Тогда

$$\nu A = \sum_{x \in A} h_x$$

Дискретная мера, порождённая нагрузками h_x в точках x. Счётная аддитивность следует из свойств суммы семейства (о суммировании группами).
Она, кстати, через δ-меры выражается:

$$\mu A = \sum_{x \in X} h_x \delta_x A$$

μA получается конечной, когда $\{x \in A \mid h_x > 0\}$ не более чем счётно (опять же, по свойствам суммируемых семейств).
При $h \equiv 1$ получаем считающую меру.
Типичная ситуация, когда задано $\{a_k\} \subset X$ — не более чем счётный набор, $h_k \in (0; +\infty]$, $\mu A = \sum\limits_{k : a_k \in A} h_k$.

Теорема 1 (Непрерывность меры). *1. Пусть $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{P}$, $A_k \subset A_{k+1}$,*

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

И пусть $A \in \mathbb{P}$. Тогда

$$\mu A_n \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \mu A$$

2. Пусть $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{P}$, $A_k \supset A_{k+1}$,

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$$

Пусть $A \in \mathbb{P}$ и пусть $\mu A_1 < +\infty$. Тогда

$$\mu A_n \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \mu A$$

Первое свойство называется непрерывностью меры снизу, второе — сверху.

Доказательство. 1. Если с $\exists A_n$ с бесконечной мерой, то, тривиально, и предел и μA равны бесконечности. Далее рассмотрим иной случай.
Нарежем A на слои:

$$A = A_1 \sqcup \bigsqcup_{k=1}^{\infty} (A_{k+1} \setminus A_k)$$

Каждая разность по свойствам полукольца представляется как объединение:

$$A_{k+1} \setminus A_k = \bigsqcup_{i=1}^{N_k} C_{ki} \mid C_{ki} \in \mathbb{P}$$

отсюда

$$A_{k+1} = A_k \sqcup \bigsqcup_{i=1}^{N_k} C_{ki}$$

Следовательно

$$\mu A_{k+1} = \mu A_k + \sum_{i=1}^{N_k} \mu C_{ki}$$

Поскольку $\mu A_k < +\infty$,

$$\mu A_{k+1} - \mu A_k = \sum_{i=1}^{N_k} \mu C_{ki}$$

Итого

$$A = A_1 \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{N_k} C_{ki}$$

И всё тут дизъюнктно, то есть

$$\mu A = \mu A_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{N_k} \mu C_{ki} = \mu A_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (\mu A_{k+1} - \mu A_k) = \mu A_1 + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (\mu A_{k+1} - \mu A_k) = \lim_{n\to\infty} \mu A_n$$

2. Если $\mu A_1 < +\infty$, значит мера всех A_k конечна.
   Теперь нарежем слоями A_1, а не A.

$$A_1 = A \sqcup \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k \setminus A_{k+1}$$

Дальше в общем-то то же самое, что и раньше.

□

Замечание. Требовалось, чтобы μA_1 была конечна. Разумеется, достаточно, чтобы мера хотя бы какого-то из A_m была конечной.

Замечание. Условие на конечность μA_1 существенно.
Пусть $X = \mathbb{R}$, μ — долина, $A_k = [k; +\infty)$. Тогда $A = \varnothing$, и предел не равен μA.

Замечание. Посмотрим вот на что: у нас есть, скажем прямоугольники и мы знаем их площадь. А нам хочется измерять другие объекты. Как это можно сделать?

Определение 11. Пусть μ_0 — мера. Пусть $E \subset X$. **Внешней мерой** E, порождённой μ_0 называется такая величина:

$$\mu^* E = \inf_{\substack{\{A_k\} \subset \mathbb{P} \\ \bigcup_k A_k \supset E}} \sum_k \mu_0 A_k$$

Если таких $\{A_k\}$ не существует, $\mu^* E = +\infty$.

Свойство 11.1. *Если $A \in \mathbb{P}$, то $\mu^* A = \mu_0 A$.*

Доказательство. Докажем как систему двух неравенств.
Поскольку $A \subset A$ $\mu^* A \leqslant \mu_0 A$.
Если $A \subset \bigcup\limits_k A_k$, то по полуаддитивности μ_0

$$\mu_0 A \leqslant \sum_k \mu_0 A^k$$

То есть $\mu_0 A$ — какая-то нижняя граница $\sum\limits_k \mu_0 A^k$. А $\mu^* A$ — точная нижняя граница, то есть $\mu_0 A \leqslant \mu^* A$. □

Свойство 11.2. *Внешняя мера счётно-полуаддитивна:*

$$\forall \{E_k\} \subset X \ \forall E \subset \bigcup_k E_k \ \mu^* E \leqslant \sum_k \mu^k E_k$$

Доказательство. Если $\exists k$ $\mu^* E_k = +\infty$, то доказывать нечего.
Далее рассматриваем обратное. Докажем неравенство с точностью до ε, потом устремим его к нулю.
Для каждого k покроем E_k счётным набором множество полукольца, так что зазор будет меньше $\frac{\varepsilon}{2^k}$:

$$\forall k \ \exists \{A_{ki}\}_i \subset P : E_k \subset \bigcup_i A_{ki} \ \sum_i \mu_0 A_{ki} < \mu^* E_k + \frac{\varepsilon}{2^k}$$

Тогда $E \subset \bigcup\limits_k E_k \subset \bigcup\limits_{k,i} A_{ki}$. Тогда

$$\mu^* E \leqslant \sum_{k,i} \mu_0 A_{ki}$$

Второе можно записать как повторный предел, потому что семейство неотрицательное.

$$\mu^* E \leqslant \sum_k \sum_i \mu_0 A_{ki} \leqslant \sum_k \left(\mu^* E_k + \frac{\varepsilon}{2^k} \right) = \sum_k \mu^* E_k + \varepsilon$$

Устремив ε к $0+$, получим то, что хотим. □

Следствие 0.1 (Монотонность внешней меры)**.**

$$E \subset E_1 \Rightarrow \mu^* E \leqslant \mu^* E_1$$

Определение 12. Пусть X — множество. **Внешней мерой** в X называется функция $\tau \colon 2^X \to [0; +\infty]$, равная нулю на пустом множестве и счётно-полуаддитивная.

Замечание. Внешняя мера может быть не мерой (даже конечно-аддитивной она может не быть). И этого, конечно, не хочется. Поэтому откажемся от некоторых множеств так, чтобы на оставшихся внешняя мера была счётно-аддитивна.

Определение 13. Пусть τ — внешняя мера в X, $A, E \subset X$. Говорят, что A **аддитивно разбивает** E, если

$$\tau E = \tau(E \cap A) + \tau(E \cap A^{\complement})$$

Если A аддитивно разбивает всякое $E \subset X$, то A называется **τ-измеримым**.

Замечание. Неравенство

$$\tau E \leqslant \tau(E \cap A) + \tau(E \cap A^{\complement})$$

верно всегда, достаточно проверять обратное.

Замечание. Если $\tau E = +\infty$, неравенство вше верно автоматически (а значит и равенство тоже). А значит неравенство

$$\tau E \geqslant \tau(E \cap A) + \tau(E \cap A^{\complement})$$

Имеет смысл проверять только для множеств конечной внешней меры.

Утверждение. *Если $\tau A = 0$, то A τ-измеримо.*

Доказательство. Поскольку $E \cap A \subset A$, по монотонности внешней меры $\tau(E \cap A) = 0$.
Поскольку $E \cap A^{\complement} \subset A$, $\tau(E \cap A) \leqslant \tau E$. Всё. $\square$

Теорема 2 (Мера, порождённая внешней мерой)**.** *Пусть τ — внешняя мера в X. Пусть $\mathbb{A}$ — совокупность τ-измеримых подмножеств X. Тогда $\mathbb{A}$ — σ-алгебра и $\tau\big|_{\mathbb{A}}$ — мера.*

Доказательство. Проверим кучу свойств. Начнём с того, что $\mathbb{A}$ — алгебра.

0. $\varnothing \in \mathbb{A}$, поэтому $A \neq \varnothing$.
1. $A \in \mathbb{A} \Rightarrow A^{\complement} \in \mathbb{A}$ просто потому, что в определении измеримого множества A и $A^{\complement}$ участвуют равноправно.
2. Докажем, что $\forall A_1, A_2 \in \mathbb{A}$ $A_1 \cup A_2 \in \mathbb{A}$. Зафиксируем $E \subset X$.

$$\begin{aligned}\tau E = {}&\tau(E \cap A_1) + \tau(E \cap A_1^{\complement}) = \\ &= \tau(E \cap A_1) + \tau(E \cap A_1^{\complement} \cap A_2) + \tau(E \cap A_1^{\complement} \cap A_2^{\complement}) = \\ &= \tau(E \cap (A_1 \cup A_2) \cap A_1) + \tau(E \cap (A_1 \cup A_2) \cap^{\complement} \cap A_1^{\complement}) + \tau(E \cap (A_1 \cup A_2)^{\complement}) = \\ &= \tau(E \cap (A_1 \cup A_2)) + \tau(E \cap (A_1 \cup A_2)^{\complement})\end{aligned}$$

   По индукции получаем, что $\mathbb{A}$ — алгебра.

А что у нас, если A_1 и A_2 не только измеримы, но и дизъюнктны? Тогда

$$\tau(E \cap (A_1 \cup A_2)) = \tau(E \cap (A_1 \cup A_2) \cap A_1) + \tau(E \cap (A_1 \cup A_2) \cap A_1^{\complement}) = \tau(E \cap A_1) + \tau(E \cap A_2)$$

По индукции утверждение верно для n множеств.
Надо как-то переходить от конечных семейств к счётным. Сначала перейдём к дизъюнктным. Пусть $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ дизъюнктны, $A_k \in \mathbb{A}$. Докажем, что если $A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, то $A \in \mathbb{A}$ и $\forall E \in X$ $\tau(E \cap A) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \tau(E \cap A_k)$.
Пусть

$$B_n = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k$$

Тогда $B_n \in \mathbb{A}$, $B_n \subset A$ и $B_n^{\complement} \supset A^{\complement}$. Тогда

$$\begin{aligned}\tau E &= \tau(E \cap B_n) + \tau(E \cap B_n^{\complement}) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} \tau(E \cap A_n) + \tau(E \cap A_n^{\complement}) \geqslant \\ &\geqslant \sum_{k=1}^{n} \tau(E \cap A_k) + \tau(E \cap A^{\complement})\end{aligned}$$

Устремим n у бесконечности:

$$\tau E \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \tau(E \cap A_k) + \tau(E \cap A^{\complement})$$

По полуаддитивности правая часть больше либо равна $\tau(E \cap A) + \tau(E \cap A^{\complement})$. Отсюда A измеримо, а чтобы получить равенство $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \tau(E \cap A_k) = \tau(E \cap A)$ достаточно в уже доказанном выше заменить E на $E \cap A$:

$$\tau(E \cap A) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \tau(E \cap A \cap A_k) + \tau(E \cap A \cap A^{\complement})$$

Отсюда получите нужное утверждение сами.

Теперь пусть $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{A}$ уже не обязательно дизъюнктны, $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$. Ну, уже имеющийся приём:

$$A = A_1 \sqcup \bigsqcup_{k=1}^{\infty} (A_{k+1} \setminus A_k)$$

А то что $A_{k+1} \setminus A_k \in \mathbb{A}$ мы знаем, мы доказали, что $\mathbb{A}$ — алгебра.

Осталось доказать счётную аддитивность. Пусть $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{A}$, $A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty}$. Ну так положим $E = A$ в доказательстве факта, где $A \in \mathbb{A}$. $\square$

Определение 14. Пусть μ — мера в X. μ называется **полной**, если

$$A \in \mathbb{P}, \mu A = 0, e \subset A \to e \in \mathbb{P}$$

То есть если всякое подмножество множества нулевой меры лежит в полукольце.

Замечание. Тогда μe по монотонности равна нулю.

Замечание. Слово «полная» не стóит никак связывать со словосочетанием «полное пространство».

Следствие 0.1. *Для любой внешней меры τ $\tau\big|_{\mathbb{A}}$ — полная мера.*

Доказательство. По монотонности τ $\tau e = 0$, а у нас было замечание, что из этого следует измеримость e. $\square$

Теорема 3 (Теорема Каратеодори)**.** *Пусть μ_0 — мера X, μ^* — порождённая ей внешнюю меру, $\mathbb{A}$ — совокупность μ^*-измеримых подмножеств X.*

1. *$\mathbb{A}$ — σ-алгебра.*
2. *$\mu = \mu^*\big|_{\mathbb{A}}$ — мера.*
3. *$\mathbb{P} \subset \mathbb{A}$ и $\forall A \in \mathbb{P}$ $\mu A = \mu_0 A$.*

Определение 15. Мера μ из теоремы выше называется **стандартным продолжением**/**стандартным распространением**/**продолжением по Каратеодори** меры μ_0.

Доказательство. А что мы ещё не доказали? Только то, что $\mathbb{P} \subset \mathbb{A}$. Рассмотрим $A \in P$. надо доказать, что оно аддитивно разбивает всякое множество E.

Докажем сначала для $E \in \mathbb{P}$. Тогда $E \cap A \in \mathbb{P}$, а $E \cap A^{\complement} = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} C_k \mid C_k \in \mathbb{P}$. Тогда

$$\mu^* E = \mu_0 E = \mu_0(E \cap A) + \sum_k \mu_0 C_k = \mu^*(E \cup A) + \sum_k \mu^* C_k \geqslant \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^{\complement})$$

Теперь рассмотрим произвольное $E \subset X$. Если $\mu^* E = +\infty$, доказывать нечего, пусть меньше $+\infty$. Докажем с точностью до ε.

$$\forall \varepsilon 0\ \exists \{A_k\}_k \subset \mathbb{P} : E \subset \bigcup_k A_k, \sum_k \mu_0 A_k < \mu^* E + \varepsilon$$

$$\mu^* E + \varepsilon > \sum_k \mu_0 A_k = \sum_k \mu^* A_k = \sum_k \mu^*(A_k \cap A) + \sum_k \mu^*(A_k \cap A^{\complement}) \geqslant \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^{\complement})$$

Осталось лишь устремить ε к нулю. $\square$

Свойство 15.1. *Если $A \subset X$, $\mu^* A = 0$, то A измеримо и $\mu A = 0$.*
Это мы уже знаем.

Свойство 15.2. *Стандартное продолжение — полная мера.*
Это мы тоже уже знаем, на эту тему было следствие.

Свойство 15.3 (Критерий измеримости)**.** *Пусть $E \subset X$ и $\forall \varepsilon > 0\ \exists A_\varepsilon, B_\varepsilon \in \mathbb{A}\ A_\varepsilon \subset E \subset B_\varepsilon$ и $\mu(B_\varepsilon \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon$. Тогда E измеримо.*
Другими словами: если E можно заключить между измеримыми множествами произвольно малого «зазора» между ними, то E измеримо.

Доказательство. Будем брать $\varepsilon = \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}$. Пусть

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{1/n} \qquad B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{1/n}$$

Тогда $A, B \in \mathbb{A}$ и $A \subset E \subset B$. Осталось оценить меру разности:

$$\forall n\ \mu(B \setminus A) \leqslant \mu(B_{1/n} \setminus A_{1/n}) < \frac{1}{n}$$

Отсюда $\mu(B \setminus A) = 0$. А дальше понятно:

$$E \setminus A \subset B \setminus A$$

Тогда по полноте μ $E \setminus A \in \mathbb{A}$ и $\mu(E \setminus A) = 0$. Тогда

$$E = A \cup (E \setminus A) \in \mathbb{A}$$

□

Следствие 0.1. *Если $E \subset X$ и $\forall \varepsilon > 0\ \exists B_\varepsilon \in \mathbb{A}\ E \subset B_\varepsilon, \mu B_\varepsilon < \varepsilon$, то $E \in \mathbb{A}$ и $\mu E = 0$.*

Свойство 15.4 (σ-конечность μ_0 и μ равносильны)**.** *Напоминание: мера называется σ-конечной, если всё пространства представляется в виде счётного объединения множеств конечной меры.*

Доказательство. Пусть μ_0 σ-конечна. Тогда X представлен в виде не более чем счётного объединения A_k, где $A_k \in \mathbb{P}$ и $\mu A_k < +\infty$. Ну так блин, $\mathbb{P} \subset \mathbb{A}$, а значит в виде объединения множеств из $\mathbb{A}$ у нас уже есть, то есть μ тоже σ-конечна.
Теперь в обратную сторону.

$$X = \bigcup_k A_k \mid A_k \in \mathbb{A}, \mu A_k < +\infty$$

Тогда $\mu^* A_k = \mu A_k < +\infty$. А по определению внешней меры что такое $\mu^* A_k$? Это нам нужно разбить A_k на множества полукольца, взять меру от них и взять inf. Тогда

$$\forall k\ \exists \{A_{k,i}\}_i \subset \mathbb{P}\ \bigcup_i \underbrace{\mu_0 A_{k,i}}_{=\mu A_{k,i}} < \mu A_k + 1 < +\infty$$

Ну, вот и всё, у нас есть счётное количество счётных семейств $A_{k,i}$, то есть счётное количество элементов $\mathbb{P}$, дающих в объединении X. И у каждого конечная мера. □

Замечание. Критерий измеримости и его следствие верны для любой полной меры, заданной на σ-алгебре.

Замечание.

$$\mu A = \inf_{\substack{\{A_k\} \subset \mathbb{P} \\ \bigcup_k A_k \supset A}} \sum_k A_k$$

Утверждение. *Стандартное продолжение стандартного продолжения приводит к той же самой мере на той же самой σ-алгебре. Более того, μ_0 и μ порождают одну и ту же внешнюю меру.*
Без доказательства.

Утверждение. *$\mathbb{A}$ не обязано быть минимальной σ-алгеброй, содержащей $\mathbb{P}$.*
Без доказательства, но для меры Лебега, так и получится.

Теорема 4 (Единственность стандартного продолжения)**.** *Пусть $X, \mathbb{P}, \mu_0, \mu^*, \mathbb{A}, \mu$ — всё то, что мы уже знаем. И пусть у нас есть ещё какое-то продолжение μ_0 с $\mathbb{P}$ на какую-то σ-алгебру $\mathbb{B}$ (назовём его ν). Пусть ещё μ_0 σ-конечна.*
Тогда

$$\mu\Big|_{\mathbb{A}\cap\mathbb{B}} \equiv \nu\Big|_{\mathbb{A}\cap\mathbb{B}}$$

Если, кроме того ν — полная мера, то $\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$.
Без доказательства.

Следствие 0.1. *Получается $\mathbb{A}$ — минимальная σ-алгебра, на которую можно продолжить μ_0 до полной меры.*

Пример. Что за странное условие на σ-конечность μ^0? А вот оно необходимо.
$X = \{0, 1\}$, $\mathbb{P} = \{\varnothing, \{0\}\}$. $\mu_0\varnothing = 0$, $\mu_0\{0\} = 1$. Теперь посчитаем стандартное продолжение и приведём ещё одно.

$$\mu\{1\} = +\infty \qquad \mu X = +\infty$$

Теперь второе:

$$\nu\{1\} = 2 \qquad \nu X = 3$$

Мера Лебега в евклидовых пространствах.

Замечание. Напоминание: мы живём в $\mathbb{R}^n$, а также умеем сравнивать векторы:

$$a < b \Leftrightarrow \forall k \in [1:n]\ a_k < b_k$$

Слово «параллелепипед» значит прямоугольный параллелепипед со сторонами, параллельными осям.

Определение 16. Пусть $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a \leqslant b$. Тогда параллелепипед

$$[a; b) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a \leqslant x < b\}$$

называется **ячейкой**. Пустое множество также является ячейкой ($a = b$).
$\mathbb{P}_n$ — множество ячеек.

Замечание. Такие будут нам удобны, потому что ими можно замостить $\mathbb{R}^n$ без зазоров и пересечений.

Лемма 1. *$\mathbb{P}_n$ — полукольцо.*

Доказательство. Пустое множество мы назвали ячейкой, так что первая аксиома выполнена.
Пересечение: докажем, что $[a; b) \cap [c; d)$ — ячейка. Несложно заметить, что

$$[a; b) = \bigtimes_{k=1}^{n} [a_k; b_k)$$

Ну тогда

$$[a; b) \cap [c; d) = \bigtimes_{k=1}^{n} [a_k; b_k) \cap [c_k; d_k) = \bigtimes_{k=1}^{n} [\max\{a_k; c_k\}; \min\{b_k; d_k\})$$

А справа написана ячейка.
Теперь про разность. Пусть $[a; b) \subset [c; d)$. Отсюда следует, что

$$\forall k \in [1:n]\ a_k \leqslant c_k \leqslant d_k \leqslant b_k$$

Тогда

$$[a_k; b_k) = [a_k; c_k) \sqcup [c_k; d_k) \sqcup [d_k; b_k)$$

Отсюда $[a; b)$ представимо как дизъюнктное объединение 3^n множеств, а $[a; b) \setminus [c; d)$ — $3^n - 1$. ☐

Определение 17. **Классическим объёмом** ячейки $[a;b)$ называется

$$v[a;b) = \prod_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k)$$

Иногда v пишут как v_n.

Свойство 17.1. *Классический объём конечно-аддитивен.*

Доказательство. Пусть Δ^i — последовательность дизъюнктных n-мерных ячеек,

$$\Delta = \bigsqcup_{i=1}^{m}\Delta_i$$

Требуется доказать, что $v\Delta = \sum\limits_{i=1}^{m} v\Delta^i$.
Докажем это сначала для конкретного разбиения. Пусть $\Delta = [a;b)$. Рассмотрим

$$a_k = x_k^0 < x_k^1 < \dots < x_k^{m_k} = b_k$$

$$[a;b) = \bigtimes_{k=1}^{n}\bigsqcup_{i_k=0}^{m_k-1}[x_{i_k};x_{i_k+1}) = \bigsqcup_{i_1=0}^{m_k-1}\cdots\bigsqcup_{i_n=0}^{m_n-1}\bigtimes_{k=1}^{n}[x_{i_k};x_{i_k+1})$$

Такое разбиение называется сетчатым. И в таком классе разбиений аддитивность очевидна.
Но это же не все разбиения, не правда ли. Ну так понятно, что делать: дополнить его до сетчатого и воспользуемся тем, что уже доказали. Как это формально записать? Ну, берём все возможные концы рёбер, упорядочиваем этот набор по каждой координате, получаем сетчатое разбиение. $\square$

Замечание. Вообще что у этого следствия, что у леммы выше есть абстрактный вариант, потому что существует конструкции «произведение полуколец» и «произведение объёмов». Правда тут есть проблема в том, что полукольца у нас будут над разными пространствами, и с этим надо жить.

Определение 18. Пусть $\mathbb{P}$ и $\mathbb{Q}$ — полукольца над X и Y соотвественно. Тогда

$$\mathbb{R} = \{P \times Q \mid P \in \mathbb{P}, Q \in \mathbb{Q}\}$$

Тогда $\mathbb{R}$ является полукольцом над $X \times Y$ и называется **произведением полуколец** $\mathbb{P}$ и $\mathbb{Q}$.

Определение 19. Если u — объём на $\mathbb{P}$, v — объём на $\mathbb{Q}$, то

$$w\colon P \times Q \mapsto u(P)v(Q)$$

называется **произведением объёмов** u и v.

Замечание. Чтобы доказать, что произведение полуколец является полукольцом, а произведение объёмов — объёмом, воспользуемся уже произведёнными методиками.

Лемма 2. *Пусть $\Delta = [a;b)$ — ячейка. Тогда для любого ε существуют ячейки $\Delta^{\pm\varepsilon}$ со следующими свойствами:*

$$\overline{\Delta^{-\varepsilon}} \subset \mathring{\Delta} \subset \overline{\Delta} \subset \mathring{\Delta}^{+\varepsilon}$$

$$v\Delta^{+\varepsilon} - v\Delta < \varepsilon \qquad v\Delta - v\Delta^{-\varepsilon} < \varepsilon$$

Доказательство. Поскольку объём ячейки непрерывен относительно её вершин

$$\exists t > 0\ v[a - tI; b + tI) - v[a;b) < \varepsilon \qquad v[a;b) - v[a + tI; b - tI) < \varepsilon$$

Возьмём это t и скажем, что

$$\Delta^{+\varepsilon} = [a - tI; b + tI) \qquad \Delta^{-\varepsilon} = [a + tI; b - tI)$$

$\square$

Теорема 5. *Классический объём является мерой.*

Доказательство. Проверим счётную аддитивность объёма. Пусть

$$\{\Delta_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{P}_n \qquad \Delta = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} \Delta_i$$

По свойствам объёма он обладает усиленной монотонностью:

$$\sum_{i=1}^{\infty} v\Delta_i \leqslant v\Delta$$

Докажем противоположное неравенство. Возьмём $\varepsilon > 0$ и построим $\Delta^{-\varepsilon}$ из леммы выше. Также для каждого $i \in \mathbb{N}$ построим $D_i = \Delta_i^{+\varepsilon/2^i}$. Тогда

$$\overline{\Delta^{-\varepsilon}} \subset \Delta = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \overset{\circ}{D}_i$$

То есть $\{\overset{\circ}{D}_i\}_{i=1}^{\infty}$ — покрытие компакта $\overline{\Delta^{-\varepsilon}}$ открытыми множествами, а значит из него можно извлечь конечное подпокрытие $\{\overset{\circ}{D}_i\}_{i=1}^{N}$:

$$\Delta^{-\varepsilon} \subset \overline{\Delta^{-\varepsilon}} \subset \bigcup_{i=1}^{N} \overset{\circ}{D}_i \subset \bigcup_{i=1}^{N} D_i$$

В силу конечной полуаддитивности объёма

$$v\Delta^{-\varepsilon} \leqslant \sum_{i=1}^{N} vD_i \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} vD_i$$

Отсюда

$$v\Delta < v\Delta^{-\varepsilon} + \varepsilon \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} vD_i + \varepsilon < \sum_{i=1}^{\infty} \left(v\Delta_i + \frac{\varepsilon}{2^i}\right) + \varepsilon \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} v\Delta_i + 2\varepsilon$$

устремим ε к нулю. □

Определение 20. Стандартное распространение классического объема с полукольца ячеек $\mathbb{P}_n$ на некоторую σ-алгебру $\mathbb{A}_n$ называется **мерой Лебега** в $\mathbb{R}^n$, а элементы $\mathbb{A}_n$ — **измеримыми по Лебегу множествами**.
Мера Лебега будет обозначаться через μ_n, а внешняя мера, порожденная объемом (она называется **внешней мерой Лебега**), — через μ_n^*. Индекс n, указывающий на размерность пространства, часто опускается.
В этом параграфе, если не оговорено противное, μ — мера Лебега.

Утверждение. *Мера Лебега σ-конечна.*

Доказательство.

$$\mathbb{R}^n = \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}^n} [k; k+I) \qquad \mu[k; k+I) = 1$$

□

Замечание. До сих пор в определении параллелепипеда $\langle a; b\rangle$ мы полагали, что $a, b \in \mathbb{R}^n$. Расширим это определение и будем считать, что некоторые a могут равняться $-\infty$, а некоторые b — $+\infty$.

Теорема 6. *Вский параллелепипед измерим по Лебегу, а го мера равна произведению длин рёбер.*

Замечание. Как обычно, мы пользуемся соглашением $0 \cdot \infty = 0$. Таким образом, если у параллелепипеда есть вырожденное ребро, то его мера равна нулю, несмотря на то, что некоторые ребра могут быть бесконечны.

Доказательство. Пусть $a, b \in \mathbb{R}^n$, $\Pi = \langle a; b \rangle$ — параллелепипед с конечными рёбрами. Тогда

$$[a;b] = \bigcap_{p=1}^{\infty} \left[a; b + \frac{1}{p} I\right) \qquad (a;b) = \bigcup_{p=1}^{\infty} \left[a + \frac{1}{p} I; b\right)$$

По непрерывности меры

$$\mu[a;b] = \lim_{p\to\infty} \left[a; b + \frac{1}{p} I\right) = \lim_{p\to\infty} \prod_{k=1}^{\infty} \left(b_k + \frac{1}{p} - a_k\right) = \prod_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k)$$

$$\mu(a;b) = \lim_{p\to\infty} \left[a + \frac{1}{p} I; b\right) = \lim_{p\to\infty} \prod_{k=1}^{\infty} \left(b_k - a_k - \frac{1}{p}\right) = \prod_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k)$$

По критерию измеримости Π измерим, а по монотонности меры

$$\mu\Pi = \mu[a;b] = \prod_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k)$$

Теперь пусть $\exists j \ b_j - a_j = +\infty$. Пусть $\Delta_p = [-pI; pI)$. Тогда $\Delta_p \subset \Delta_{p+1}$ и $\mathbb{R}^n = \bigcup\limits_{p=1}^{\infty} \Delta_i$. Отсюда

$$\Pi \cap \Delta_p \subset \Pi \cap \Delta_{p+1}$$

И

$$\Pi = \bigcup_{p=1}^{\infty} (\Pi \cap \Delta_p)$$

Пересечение $\Pi \cap \Delta_p$ является параллелепипедом с конечными рёбрами: $\langle \max\{a_k; -p\}; \min\{b_k; p\} \rangle$. По доказанному выше он измерим, а значит и Π измерим как счётное объединение измеримых множеств. При этом если у Π есть вырожденное ребро, то $\forall p \ \mu(\Pi \cap \Delta_p) = 0$, а значит и $\mu\Pi = 0$, а если вырожденных рёбер нет, то по непрерывности меры

$$\mu\Pi = \lim_{p\to\infty} \mu(\Pi \cap \Delta_p) = \lim_{p\to\infty} \prod_{k=1}^{n} (\min\{b_k; -\} - \max\{a_k; -p\}) = +\infty$$

$\square$

Следствие 2.1. *Всякое не более чем счётное подмножество $\mathbb{R}^n$ измеримо по Лебегу и имеет нулевую меру.*

Доказательство. Всякое одноточечное множество измеримо и имеет нулевую меру как параллелепипед с вырожденными ребрами. Так как измеримые множества образуют σ-алгебру, не более чем счетное множество измеримо как не более чем счетное объединение одноточечных множеств. Его мера равна нулю по счетной аддитивности. $\square$

Следствие 2.2.

$$\mu\mathbb{Q} = 0$$

Теорема 7 (Представление открытого множества в виде объединения ячеек)**.** *Всякое открытое $G \subset \mathbb{R}^n$ представляется в виде*

$$G = \bigsqcup_k \Delta_k$$

Где Δ_k — кубические ячейки, $\overline{\Delta_k} \subset G$.

Доказательство. Пусть $m \in \mathbb{Z}_+$. Множества $\left[\frac{k}{2^m}; \frac{k+I}{2^m}\right)$ (где $k \in \mathbb{Z}_n$) будем называть двоичными n-мерными ячейками ранга m.
При каждом m ячейки ранга m образуют разбиение $\mathbb{R}^n$. Поэтому для любых $x \in \mathbb{R}^n$ и $m \in \mathbb{Z}_+$ существует ровно одна ячейка ранга m, содержащая x. Обозначим ее $\Delta_{m,x}$. Кроме того, любые две двоичные ячейки или дизъюнктны, или одна из них содержит другую, а множество всех двоичных ячеек счетно.
Обозначим через H_0 множество всех ячеек ранга 0, замыкание которых содержится в G. Пусть $m \in \mathbb{N}$, множества H_0, ..., H_{m-1} уже определены. Тогда обозначим через H_m множество всех ячеек ранга m, замыкание которых содержится в G, и которые не содержатся ни в одной ячейке из H_0, ..., H_{m-1}. Положим

$$H = \bigcup_{m=0}^{\infty} H_m$$

Тогда H не более чем счетное множество дизъюнктных ячеек.
Докажем, что

$$\bigsqcup_{\Delta \in H} \Delta = G$$

Включение левой части в правую очевидно. Проверим обратное включение. Пусть $x \in G$. Ввиду открытости G найдется такое $r > 0$, что $\overline{B}(x;r) \subset G$. Если m таково, что $\frac{\sqrt{n}}{2^m} < r$, то $\overline{\Delta}_{m,x} \subset \overline{B}(x,r) \subset G$. Поскольку такие m существуют,

$$\{m \in \mathbb{Z}_+ \mid \overline{\Delta}_{m,x} \subset G\} \neq \varnothing$$

Обозначим через m_0 его минимум, тогда для $m < m_0$ $\overline{\Delta}_{m,x} \not\subset G$, а $\overline{\Delta}_{m_0,x} \subset G$. Это по определению значит, что $\Delta_{m_0,x} \in H_{m_0}$, а значит $x \in \bigsqcup\limits_{\Delta \in H} \Delta$. ☐

Замечание. Если $G \neq \varnothing$, то объединение счётно. Иначе $G = \bigsqcup\limits_{k=1}^{N} \overline{\Delta}_k$, а значит G ограничено и замкнуто (а ещё открыто из условия). Такое множество не может быть непустым, это противоречит связности $\mathbb{R}^n$.

Следствие 2.1. *Всякое открытое подмножество $\mathbb{R}^n$ измеримо по Лебегу.*

Следствие 2.2. *Мера Лебега любого непустого открытого множества положительна.*

Следствие 2.3. *Всякое борелевское подмножество $\mathbb{R}^n$ измеримо по Лебегу.*

Утверждение. *Существуют неизмеримые по Лебегу подмножества $\mathbb{R}^n$. Более того, всякое множество положительной лебеговой меры имеет неизмеримое подмножество.*
Без доказательства.

Утверждение. *Существуют измеримые по Лебегу множества, не являющиеся борелевскими. Более того, σ-алгебры $\mathbb{A}_n$ и $\mathbb{B}_n$ не равномощны: $\mathbb{B}_n$ имеет мощность континуума, то есть равномощна $\mathbb{R}^n$, а $\mathbb{A}_n$ имеет ту же мощность, что и совокупность всех подмножеств $\mathbb{R}^n$.*
Без доказательства.

Теорема 8. *Если $E \subset \mathbb{R}^n$, то*

$$\mu^* E = \inf_{\substack{G \supset E \\ G \text{ открыто}}} \mu G$$

В частности это верно для $E \in \mathbb{A}^n$.

Доказательство. Обозначим правую часть за A. По монотонности внешней меры для любого открытого множества $G \supset E$ верно

$$\mu^* E \leqslant \mu^* G = \mu G$$

Переходя в правой части к инфимуму, получим $\mu^* E \leqslant A$.
Докажем в обратную сторону. Если $\mu^* E = +\infty$, мы победили. Иначе возьмём $\varepsilon > 0$, тогда по определению внешней меры

$$\exists \{\Delta_k\}_k \subset \mathbb{P}_n \; E \subset \bigcup_k \Delta_k \qquad \sum_k v\Delta_k < \mu^* E + \varepsilon$$

По лемме о существовании $\Delta^{\pm\varepsilon}$ подберём такой открытый параллелепипед $\Delta'_k \supset \Delta_k$, что $v\Delta'_k < v\Delta_k + \frac{\varepsilon}{2^k}$. Тогда $G = \bigcup\limits_k \Delta'_k$ открыто, $E \subset G$ и

$$\mu G \leqslant \sum_k \mu\Delta'_k < \sum_k \left(v\Delta_k + \frac{\varepsilon}{2^k}\right) \leqslant \sum_k v\Delta_k + \varepsilon < \mu^* E + 2\varepsilon$$

Отсюда по произвольности ε $A \leqslant \mu^* E$. □

Следствие 2.1. *Пусть $E \in \mathbb{A}_n$, $\varepsilon > 0$. Тогда существует такое открытое множество $G \supset E$, что $\mu(G \setminus E) < \varepsilon$.*

Доказательство. Если $\mu E < +\infty$, то утверждение напрямую следует из теоремы. Если $\mu E = +\infty$, то E можно представить в виде

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mid \mu E_k < +\infty$$

(следует из σ-конечности μ). Тогда по первому пункту для каждого E_k можно подобрать такое открытое множество $G_k \supset E_k$, что $\mu(G_k \setminus E_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$. Пусть $G = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G_k$. Тогда G открыто, $E \subset G$ и $G \setminus E \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (G_k \setminus E_k)$, а значит

$$\mu(G \setminus E) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(G_k \setminus E_k) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$$

Это ли не то, что нам надо. □

Следствие 2.2. *Пусть $E \subset \mathbb{A}_n$, $\varepsilon > 0$. Тогда существует такое замкнутое $F \subset E$, что $\mu(E \setminus F) < \varepsilon$.*

Доказательство. Примени следствие 1 к $E^{\complement}$, найдём там открытое множество $G \supset E^{\complement}$, для которого верно $\mu(G \setminus E^{\complement}) < \varepsilon$. Тогда $F = G^{\complement}$ (проверьте сами, что подходит). □

Следствие 2.3. *Пусть $E \in \mathbb{A}_n$. Тогда*

$$\mu E = \sup_{\substack{F \subset E \\ F \text{ замкнуто}}} \mu F = \sup_{\substack{F \subset E \\ F \text{ компактно}}} \mu F$$

Доказательство. Пусть

$$\sup_{\substack{F \subset E \\ F \text{ замкнуто}}} \mu F = B \qquad \sup_{\substack{F \subset E \\ F \text{ компактно}}} \mu F = C$$

Ясно, что $\mu E \geqslant B \geqslant C$. Первое неравенство обращается в равенство по следствию 2. Осталось доказать $B \leqslant C$.
Для произвольного замкнутого множества $F \subset E$ положим $F_p = F \cap [-pI; pI]$. Множества F_p компактны, $F_p \subset F_{p+1}$ и $F = \bigcup\limits_{p=1}^{\infty} F_p$. По теореме о непрерывности меры

$$\mu F = \lim_{p \to \infty} \mu F_p \leqslant C$$

Остаётся перейти к супремуму по F в левой части. □

Определение 21. Пусть X — метрическое пространство, мера μ задана на σ-алгебре $\mathbb{A}$, содержащей все открытые подмножества X. Мера μ называется **регулярной**, если для любого $E \in \mathbb{A}$

$$\mu E = \inf_{\substack{G \supset E \\ G \text{ открыто}}} \mu G = \sup_{\substack{F \subset E \\ F \text{ замкнуто}}} \mu F$$

Замечание. То есть мера Лебега регулярна.

Замечание. Открытые и замкнутые множества в определении регулярности нельзя поменять ролями. Приведем примеры для меры Лебега μ_1 на прямой.
Единственное открытое подмножество множества $E_1 = [0;1] \cap \mathbb{Q}$ пусто, а наименьшее содержащее E_1 замкнутое множество — $[0;1]$. Аналогичными свойствами обладает множество $E_2 = [0;1] \setminus \mathbb{Q}$. При этом $\mu_1 E_1 = 0$, $\mu_1 E_2 = 1$.

Замечание. Можно определить внутреннюю меру $E \subset \mathbb{R}^n$ равенством

$$\mu_* E = \sup_{\substack{F \subset E \\ F \text{ замкнуто}}} \mu F$$

В силу регулярности меры Лебега измеримость E влечет равенство $\mu^* E = \mu_* E$. Это утверждение можно частично обратить: если $\mu_* E = \mu^* E < +\infty$, то E измеримо. Последнее свойство использовалось Лебегом в качестве определения измеримости ограниченного множества.

Теорема 9 (Приближение измеримых множеств борелевскими)**.** *Пусть $E \in \mathbb{A}_n$. Тогда существуют такие множества H и K типов F_σ и G_δ соотвественно, что*

$$H \subset E \subset K \qquad \mu(K \setminus H) = 0$$

Доказательство. По следствиям выше для любого $m \in \mathbb{N}$ существуют множества F_m и G_m такие что F_m замкнуто, F_m открыто, $F_m \subset E \subset G_m$, $\mu(E \setminus F_m) < \frac{1}{m}$ и $\mu(G_m \setminus E) < \frac{1}{m}$. Тогда пусть

$$H = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m \qquad K = \bigcap_{m=1}^{\infty} G_m$$

Эти множества по определению принадлежат указанным типам; очевидно, что $H \subset E \subset K$, а также для всех m

$$\mu(K \setminus H) \leqslant \mu(G_m \setminus F_m) = \mu(G_m \setminus E) + \mu(E \setminus F_m) < \frac{2}{m}$$

Устремляя $m \to \infty$, получим $\mu(H \setminus H) = 0$. □

Следствие 2.1. *Пусть $E \in \mathbb{A}_n$. Тогда E представимо в виде*

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \cup e$$

Где F_k компактны, $F_k \subset F_{k+1}$, $\mu e = 0$.

Доказательство. Положим $e = E \setminus H$. Тогда $e \subset K \setminus H$, откуда $\mu e = 0$. Далее мы знаем, что

$$H = \bigcup_{k=1}^{\infty}$$

(это ещё не те самые F_k), где F_k замкнуты. Каждое F_k представимо в виде счётного объединения компактов:

$$F_k = \bigcup_{j=1}^{\infty} (F_k \cap [-pI; pI])$$

А значит и H можно представить в виде объединения компактов. Перенумеруем их и назовём K_i:

$$H = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$$

Приняв $\widetilde{K}_l = \bigcup\limits_{i=1}^{l} K_i$, получим последовательность компактов $\widetilde{K}_l$, для которой верно $\widetilde{K}_l \subset \widetilde{K}_{l+1}$. Эти $\widetilde{K}_l$ подойдут под F_k в условии. □

Сохранение измеримости и преобразование меры Лебега при отображениях.

Утверждение. *Образ объединения равен объединению образов.*

Доказательство. Тривиально из определений. □

Теорема 10 (Сохранение измеримости при гладком отображении)**.** *Пусть G открыто в $\mathbb{R}^n$, $\Phi \in C^{(1)}(G \to \mathbb{R}^n)$. Тогда выполнены следующие утверждения:*

1. *Если $e \subset G$ и $\mu e = 0$, то $\Phi(e) \in \mathbb{A}_n$ и $\mu\Phi(e) = 0$.*
2. *Если $E \subset F$ и $E \in \mathbb{A}_n$, то $\Phi(E) \in \mathbb{A}_n$.*

Доказательство. 1. Разобьём на два случая: первый — когда e содержится в некоторой ячейке, которая лежит в G вместе с замыканием, второй — общий.

a. Итак, существует ячейка P такая что
$$e \subset P \subset \overline{P} \subset G \qquad P \in \mathbb{P}_n$$
Возьмём $\varepsilon > 0$ и, пользуясь регулярностью меры Лебега, подберём такое открытое множество g, что $e \subset g$ и $\mu g < \varepsilon$. Можно считать, что $g \subset G$, иначе заменим g на $g \cap G$ (оно также открыто). Тогда по теореме 7
$$g = \bigsqcup_k \Delta_k$$
Где Δ_k — кубические ячейки. Следовательно
$$\sum_k \mu\Delta_k = \mu g < \varepsilon \qquad e \subset \bigcup_k (\Delta_k \cap P) \qquad \Phi(e) \subset \bigcup_k \Phi(\Delta_k \cap P)$$
Пусть h_k — длина ребра Δ_k. Тогда
$$\forall x, y, \in \Delta_k \ |x - y| < h_k\sqrt{n}$$
Гладкое отображение Φ удовлетворяет условию Липшица на компакте $\overline{P}$:
$$\exists L \in (0; +\infty) \ \forall x, y \in \overline{P} \ |\Phi(x) - \Phi(y)| \leqslant L|x - y|$$
Отсюда
$$\forall x, y \in \Delta_k \cap P \ |\Phi(x) - \Phi(y)| \leqslant Lh_k\sqrt{n}$$
Последнее неравенство также тривиально верно для координатных функций Φ, а значит, если мы зафиксируем $x \in \Delta_k \cap P$, по получим, что $\forall y \in \Delta_k \cap P$
$$\Phi(y) \in [\Phi(x) - Lh_k\sqrt{n}I; \Phi(x) + Lh_k\sqrt{n}I]$$
Обозначим часть справа за Π_k. То есть имеем $\Phi(\Delta_k \cap P) \subset \Pi_k$. Следовательно $\Phi(e) \subset \bigcup\limits_k \Pi_k$. Давайте оценим меру правой части:
$$\mu\bigcup_k \Pi_k \leqslant \sum_k \mu\Pi_k = \sum_k (2Lh_k\sqrt{n})^n = (2L\sqrt{n})^n \sum_k h_k^n = (2L\sqrt{n})^n \sum_k \mu\Delta_k < (2L\sqrt{n})^n \varepsilon$$
По одному из свойств стандартного продолжения это значит, что $\Phi(e)$ измеримо и имеет нулевую меру.

b. Теперь рассмотрим общий случай. Мы по условию знаем, что $e \subset G$ и $\mu e = 0$. Тогда представим G в виде
$$G = \bigcup_k P_k \qquad P_k \in \mathbb{P}_n, \overline{P}_k \subset G$$
Тогда
$$e = \bigcup_k (e \cap P_k) \qquad \Phi(e) = \bigcup_k \Phi(e \cap P_k)$$
По первому случаю $\forall k \ \mu\Phi(e \cap P_k) = 0$, а значит и $\Phi(e) \in \mathbb{A}_n$ и $\mu\Phi(e) = 0$.

2. Теперь докажем второй пункт. По следствию теоремы 9

$$\Phi(E) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Phi(F_k) \cap \Phi(e)$$

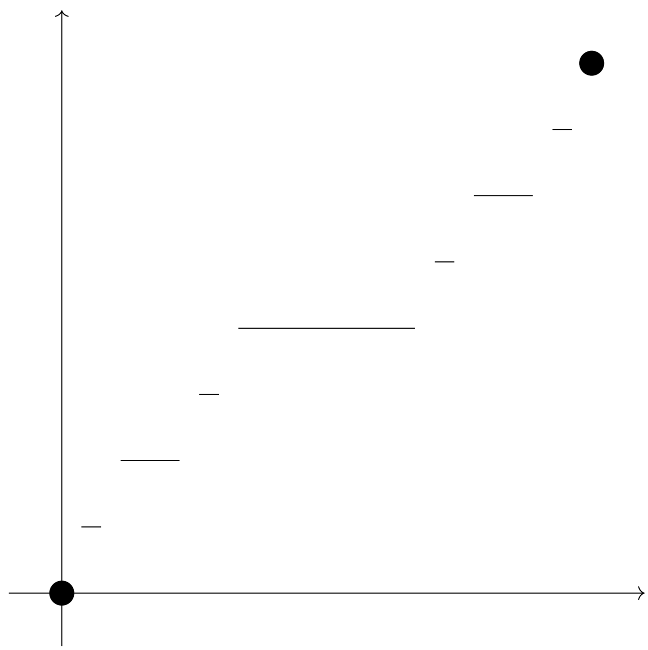
Где F_k компактны, а $\mu e = 0$. Тогда по теореме Вейерштрасса $\Phi(F_k)$ компактны, а $\Phi(e)$ измеримо по первому пункту.

□

Замечание. Как несложно заметить из доказательства, от Φ достаточно требовать липшицевости на каждом компакте в G (или, что равносильно, на каждом замкнутом кубе в G).

Замечание. Здесь дыра в сюжете, пока кто-нибудь не скинет мне конспект по матану за 28 ноября.

Пример. Непрерывности Φ не достаточно для сохранения измеримости.
Построим функцию $\theta\colon [0;1] \to [0;1]$. $\theta(0) = 0$, $\theta(1) = 1$. Дальше на средней трети положим $\theta \equiv \frac{1}{2}$. А дальше на средней трети каждого из отрезков положим θ равной среднему арифметическому значений на концах.



Так мы определили функцию θ на всём, кроме (почти всего) канторова множества, ещё в область определения θ входят концы отрезков. Назовём множество, где мы определили θ за D.
Как определить θ в оставшихся точках? Так, чтобы не испортить возрастание.

$$\theta(x) = \sup_{\substack{t<x\\ t\in D}} \theta(t)$$

Почему θ непрерывна на $[0;1]$? Ну, $\theta([0;1]) \subset \left\{\frac{k}{2^m}\right\}_{k,m\in\mathbb{Z}_+} \cap [0;1]$. А монотонная функция на промежутке не имеет разрывов второго рода. А множество значений ϕ плотно в $[0;1]$, и из этого монотонности следует $\theta([0;1]) = [0;1]$. Монотонная на промежутке функция непрерывна тогда и только тогда, когда множество её значений — промежуток.
Однако у этой функции образ канторова множества равен $[0;1]$. Мера Лебега канторова множества равна нулю, а мера $[0;1]$ — нет.

Пример. Если канторову функцию немного починить, получится гомеоморфизм.

$$g(x) = \theta(x) + x$$

Она уже не просто непрерывна, но возрастает строго, а значит гомеоморфизм между $[0;1]$ и $[0;2]$. Но посмотрим, куда переходит канторово множество. Ну, посмотрим: на интервалах, которые мы строили, $\theta(x)$ постоянна, а значит g переводит такие интервалы в интервалы той же длины. А значит мера g от дополнения Канторова множества равна 1. Следовательно и мера g от самого канторова множества также равно 1, потому что множество значений g имеет меру 2.

Утверждение. *Гомеоморфизм сохраняет измеримость по Борелю.*
Без доказательства.

Лемма 3. *Пусть ν — мера на $\mathbb{A}_n$ (на той же σ-алгебре, что и мера Лебега). Пусть $c \in [0;+\infty)$ — такое число, что для любой кубической ячейки Δ $\nu\Delta = c\mu\Delta$. Тогда $\forall E \in \mathbb{A}_n$ $\nu E = c\mu E$.*

Доказательство. Если $c = 0$, тривиально, иначе поделим на c, получим новую меру на той же σ-алгебре, которая на ячейках совпадает с мерой Лебега. Это же теорема о единственности стандартного продолжения. Но подождите, мы же его не доказывали... □

Доказательство. Будем постепенно усложнять множество.

1. Пусть G открыто. Тогда оно представимо в виде дизъюнктного объединения кубических ячеек.

$$G = \bigsqcup_k \Delta_k$$

   Тогда

$$\nu G = \sum_k \nu\Delta_k = \sum_k c\mu\Delta_k = c\sum_k \mu\Delta_k = c\mu G$$

2. Пусть F компакт. $\exists B$ — такой открытый шар, что $F \subset B$. Шар открыт, F замкнуто, значит $B \setminus F$ открыто. Мера обоих множеств B и $B \setminus F$ конечна (обе меры).

$$\nu F = \nu B - \nu(B \setminus F) = c\mu B - c\mu(B \setminus F) = c\mu F$$

3. Пусть $\mu e = 0$, докажем, что $\nu e = 0$. По регулярности меры Лебега

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists g \supset e \text{ открыто } \mu g < \varepsilon$$

   Тогда $\nu e \leqslant \nu g = c\mu g < c\varepsilon$. Устремляя ε к нулю, получим искомое.

4. Общий случай получаем по формуле о структуре произвольного измеримого множества.

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \cap e$$

   Где F_k — такие компактные множества, что $F_k \subset F_{k+1}$, $\mu e = 0$. Тогда

$$\nu E = \lim_{N\to\infty} \nu F_k = \lim_{N\to\infty} c\mu F_k = c\mu E$$

□

Следствие 3.1. *Пусть $\Phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ обратимо и переводит измеримое множество в измеримое. Пусть $c \in [0;+\infty)$, $\forall\Delta$ — кубическая ячейка $\mu\Phi(\Delta) = c\mu\Delta$. Тогда*

$$\forall E =\in \mathbb{A}_n\ \mu\Phi(E) = c\mu E$$

Доказательство. Ну так лол, пусть $\nu E = \mu\Phi E$, остаётся лишь проверить, что ν — мера.

1. $\nu\varnothing = 0$ тривиально.

2. $E = \bigsqcup\limits_k E_k$ где $E_k \in \mathbb{A}_n$. Тогда

$$\nu E = \mu\Phi E = \mu \bigsqcup_k \Phi E_k = \sum_k \mu\Phi E_k = \sum_k \nu E_k$$

Почему ΦE_k дизъюнктны? Ну, по обратимости Φ.

$\square$

Определение 22. Пусть $v \in \mathbb{R}^n$, тогда

$$T_v : \substack{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ x \mapsto x+v}$$

называется **сдвигом**. $T_v(E)$ также обозначается $E + v$.

Следствие 3.2. *Мера Лебега инвариантна относительно сдвига:*

$$\forall E \in \mathbb{A}_n \ \forall v \in \mathbb{R}^n \ \mu E = \mu(E + v)$$

Теорема 11 (Описание мер, инвариантных относительно сдвига)**.** *Пусть ν — инвариантная относительно сдвига мера на $\mathbb{A}_n$ и мера каждой ячейки конечна. Тогда $\exists c \in [0; +\infty)$ $\nu \equiv c\mu$.*

Доказательство. Пусть $c = \nu[\mathbb{0}; \mathbb{1})$. То есть на единичной ячейке это равенство выполняется, надо доказать для всех остальных множеств.

1. Сначала положим $c = 1$. Тогда нам надо доказать, что $\nu \equiv \mu$.
   (a) Сначала докажем это на кубических ячейках ребра $\frac{1}{N}$. Ну, из-за инвариантности относительно сдвига все они имеют одинаковую меру, а N^n ячеек образуют в дизъюнктном объединении единичную ячейку. Отсюда мера каждой маленькой ячейки равна $\frac{1}{N^n}$ для обеих мер.
   (b) Раз так, меры любой ячейки с рациональными координатами совпадают.
   (c) А значит μ и ν совпадают на всех ячейках по непрерывности меры (обеих мер).
   (d) По лемме $\nu \equiv \mu$.
2. Если $c > 0$, положим $\tilde{\nu} = \frac{\nu}{c}$, тогда по первому пункту $\tilde{\nu} \equiv \mu$.
3. $c = 0$ тривиально: $\nu \equiv 0$ на всех ячейках, а значит просто тождественна равна нулю.

$\square$

Замечание. Если ν — инвариантная относительно сдвига мера на σ-алгебре $\mathbb{A}'$ такой что $\mathbb{P}_n \subset \mathbb{A}' \subset \mathbb{A}_n$ и $\nu \equiv c\mu\big|_{\mathbb{A}'}$, то следствие теоремы также верно.

Замечание. Условие конечности на ячейках нельзя опустить (считающая мера — контрпример).

Теорема 12. *Всякое множество положительной меры имеет неизмеримое подмножество.*

Доказательство. Пусть $\mu A > 0$. Не умаляя общности можно считать A лежащем в некотором шаре (у A найдётся ограниченная часть положительной меры т.к. $\mu A = \lim\limits_{R\to\infty} A \cap B(\mathbb{0}, R)$). Тогда $\mu A < +\infty$. Обозначим радиус этого шара за R.
Введём на A отношение эквивалентности:

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}^n$$

Возьмём из каждого класса эквивалентности по одному элементу. Они образуют некое множество $E \subset A$. Оно искомое. Докажем его неизмеримость. Для этого поймём некоторые свойства E.

$$\{E + r\}_{r \in \mathbb{Q}^n} \text{ дизъюнктны}$$

Очевидно.
Также заметим, что
$$A \subset \bigsqcup_{\substack{r \in \mathbb{Q}^n \\ |r| < 2R}} E + r = W$$
Возьмём $x \in A$, тогда $\exists y \in E\ y \sim x$. Тогда $x - y = r \in \mathbb{Q}^n$. Также $|r| < 2R$, а значит вот оно, искомое r, что $x \in E + r$, отсюда $x \in W$
Теперь предположим, что E измеримо. Тогда все $E+r$ измеримы и имеют ту же меру. Заметим также, что W тоже измеримо как счётное объединение измеримых. Более того, $W \subset B(\mathbb{0}; 3R)$, а значит мера его конечна. И положительна так как $W \supset A$. Что ж.
$$\mu W = \sum_{\substack{r \in \mathbb{Q}^n \\ |r| < 2R}} \mu(E + r) = \sum_{\substack{r \in \mathbb{Q}^n \\ |r| < 2R}} \mu E$$
Подождите-ка, тут сумма бесконечного количества одного и того же. Это либо ноль, либо бесконечность. Противоречие. □

Замечание. Не существует меры, которая инвариантна относительно сдвига, конечна на ячейках и задана на всех подмножествах $\mathbb{R}^n$.
С. Банах: Если отказаться от счётной аддитивности (требовать только конечной), то объём со искомыми свойствами существует, но не единственный (даже если постановить $v[\mathbb{0}; \mathbb{1}) = 1$).
Но на самом деле $\mathbb{A}_n$ содержит все «хорошие» множества. Вы не найдёте неизмеримые множества, если целенаправленно не будете их искать. У вас просто нет мотивации приписывать меру всем множествам, неизмеримым по Лебегу.

Утверждение. *Мера Лебега инвариантна относительно движений.*

Доказательство. □

Замечание. С. Банах: при $n = 1$ и $n = 2$ существует объём, измеряющий все подмножества $\mathbb{R}^n$, равный единице на единичной ячейке и инвариантный относительно движений (опять же, не единственный).
Ф. Хаусдорф: при $n \geqslant 3$ такого объёма не существует.
Почему так? Потому что в $\mathbb{R}^3$ разных движений слишком много бывает, чтобы всё было хорошо.

Замечание. Помните наше наивное определение объёма? Там ещё был непонятный термин «квадрируемые множества». Так вот, пожалуйста, мы построили сейчас то, что хотели.
Хотя на самом деле математики во времена до Лебега имели ввиду не его меру, а, скорее, меру Жордана: множество измеримо, если его можно приблизить снаружи и изнутри **конечным** объединением многогранников. Это даже мера получается, правда задана она только не полукольце, а не σ-алгебре, но если расширить, получится мера Лебега. Есть даже теорема о том, что множество измеримо по Жордану тогда и только тогда, когда его граница имеет нулевую меру Лебега.

Теорема 13 (Мера Лебега при линейном отображении)**.** *Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор в $\mathbb{R}^n$. Тогда*
$$\forall E \in \mathbb{A}_n\ \mu\mathcal{A}(E) = |\det \mathcal{A}|\mu E$$

Доказательство. Для начала, заметим, что $\mathcal{A}$ — гладкое отображение, а значит оно переводит измеримые множества в измеримые.
Пусть $\nu E = \mu\mathcal{A}(E)$.

1. Первый случай: $\det \mathcal{A} \neq 0$. В силу обратимости $\mathcal{A}$ ν — мера, причём инвариантная относительно сдвига:
$$\mathcal{A}(E + v) = \mathcal{A}(E) + \mathcal{A}v$$
А мера Лебега инвариантна относительно сдвига на $\mathcal{A}v$.
Остаётся доказать, что ν — конечна на ячейках и что $\nu[\mathbb{0}; \mathbb{1}) = \det \mathcal{A}$.
Теперь будем постепенно усложнять оператор $\mathcal{A}$.

(a) Пусть $\mathcal{A}$ — диагональный оператор с положительными собственными числами. Для него

$$\mathcal{A}[\mathbb{0};\mathbb{1}) = \bigtimes_{k=1}^{n}[0;\lambda_k)$$

Значит $\nu[\mathbb{0};\mathbb{1})$ равно произведению собственных чисел т.е. $\det\mathcal{A}$.

(b) Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{U}$ ортогональный оператор. Тогда $|\det\mathcal{U}| = 1$. Поскольку ортогональный оператор сохраняет норму, он сохраняет на месте единичный шар, а значит

$$\mu\mathcal{U}(B) = \mu B$$

А значит $\mathcal{U}$ конечно на ячейках, значит ν пропорционально μ. А коэффициент пропорциональности равен единице.

(c) Общий случай невырожденного оператора. Всякий невырожденный линейный оператор представим в виде

$$\mathcal{A} = \mathcal{U}_1\mathcal{D}\mathcal{U}_2$$

Где $\mathcal{U}_1$,$\mathcal{U}_2$ ортогональны, $\mathcal{D}$ — диагональный с положительными собственными числами. Отсюда следует искомое.

2. А что если $\det\mathcal{A} = 0$? Тогда $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n) = L$ имеет размерность $l < n$. Докажем, что L имеет нулевую меру. Тогда по полноте $\forall E \in \mathbb{A}_n\ \mu\mathcal{A}(E) = 0$.
Рассмотрим специальное подпространство $L_l = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_{l+1} = \dots = x_n = 0\}$. Его мера тривиально равна нулю т.к. L_l — вырожденный параллелепипед. При этом L можно перевести в L_l ортогональным преобразованием так как они имеют одинаковую размерность.

□

Замечание. Напоминание: движение $\mathbb{R}^n$ — отображение $M\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, сохраняющее расстояние.

Замечание. Всякое движение $\mathbb{R}^n$ есть композиция ортогонального преобразования и сдвига.
Без доказательства.

Следствие 3.1. *Мера Лебега инвариантно относительно движений.*

Определение 23. Композиция линейного отображения и сдвига называется **аффинным отображением**. **Определитель аффинного отображения** считается равным определителю линейной части.

Следствие 3.2. *Если Φ — аффинное отображение, то*

$$\forall E \in \mathbb{A}_n\ \mu\Phi(E) = |\det\Phi|\mu E$$

Следствие 3.3. *Если $\lambda > 0$, то*

$$\forall E \in \mathbb{A}_n\ \mu(\lambda E) = \lambda^n\mu E$$

Измеримые функции.

Определение 24. Тройка объектов $(X;\mathbb{A};\mu)$, где μ — мера на $\mathbb{A}$, а $\mathbb{A}$ — σ-алгебра над X, называется **пространством с мерой**. Элементы $\mathbb{A}$ называются **измеримыми множествами**.

Определение 25. Если $\mathcal{P}(x)$ — одноместный предикат, то $E(\mathcal{P}) = \{x \in E \mid \mathcal{P}(x)\}$

Определение 26. Пусть $f\colon \underset{\subset X}{E} \to \overline{\mathbb{R}}$, $a \in \mathbb{R}$. Множества

$$E(f < a) \qquad E(f \leqslant a) \qquad E(f > a) \qquad E(f \geqslant a)$$

называются **Лебеговыми множествами** функции f (прообразы промежутков в $\overline{\mathbb{R}}$, короче).

Определение 27. $f\colon \underset{\subset X}{E} \to \overline{\mathbb{R}}$ называется **измеримой**, если $\forall a \in \mathbb{A}$ все её лебеговы множества (все 4 для всех a) измеримы.
Множество функций, измеримых на E обозначается $S(E)$.
Если $\mathbb{A} = \mathbb{A}_n$, f называется измеримой по Лебегу. Если $\mathbb{A} = \mathbb{B}_n$, то измеримой по Борелю.

Утверждение. *Если $f \in S(E)$, то E измеримо*

Доказательство.

$$E = E(f < +\infty) \cup E(f = +\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f < n) \cup \bigcap_{n=1}^{\infty} E(f > n)$$

□

Лемма 4. *Пусть $E \in \mathbb{A}$, $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$. Для измеримости f достаточно измеримости всех её лебеговых множеств одного типа.*

Доказательство.

$$E(f \leqslant a) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\left(f < a + \frac{1}{n}\right)$$
$$E(f > a) = E \setminus E(f \leqslant a)$$
$$E(f \geqslant a) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E\left(f > a - \frac{1}{n}\right)$$
$$E(f < a) = E \setminus E(f \geqslant a)$$

□

Замечание. Условие $E \in \mathbb{A}$ существенно. Пример: $f \equiv +\infty$ на неизмеримом E. Все множества $E(f < a)$ пусты.

Свойство 27.1. $f \in S(E) \Leftrightarrow -f \in S(E)$

Свойство 27.2. *Постоянная функция на измеримом множестве измерима.*
Очевидно.

Свойство 27.3. *Если $f \in S(E)$, $E_1 \subset E$, $E_1 \in \mathbb{A}$, то $f\big|_{E_1} \in S(E_1)$.*

Доказательство.
$$E_1(f < a) = E_1 \cap E(f < a)$$

□

Свойство 27.4. *Если $E = \bigcup\limits_k E_k$, $\forall k\ f \in S(E_k)$, то $f \in S(E)$.*

Доказательство.
$$E(f < a) = \bigcup_k E_k(f < a)$$

□

Свойство 27.5. *Пусть $E = \bigsqcup\limits_k E_k$, $E_k \in \mathbb{A}$, $f\big|_{E_k} = c_k = \mathrm{const}$. Тогда $f \in S(E)$.*
Из предыдущих.

Замечание. Напоминание:
$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$
χ_E — характеристическая функция.

Свойство 27.6.

$$E \in \mathbb{A} \Leftrightarrow \chi_E \in S(X)$$

Доказательство. Слева направо из предыдущего.
Обратно:

$$E = X\left(\chi_E > \frac{1}{2}\right)$$

□

Свойство 27.7. *Если $f \in S(E)$, то прообраз любого промежутка в $\overline{\mathbb{R}}$ измерим.*

Доказательство. Для лучей мы знаем, докажем для всех остальных промежутков.

$$E(f = +\infty) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E(f > n) \qquad E(f = -\infty) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E(f < -n)$$

С $E(f = \mathrm{const})$ и $E(a < f < b)$ понятно, если остались какие-то ещё промежутки, переберите их сами. □

Свойство 27.8. *Если $f \in S(E)$, то*

$$\forall B \in \mathbb{B}_1 \ f^{-1}(B) \in \mathbb{A}$$

Доказательство. Знаем для промежутков (в частности для ячеек). А значит знаем для открытых множеств.
Рассмотрим $\mathbb{D} = \{B \subset \mathbb{R} \mid f^{-1}(B) \in \mathbb{A}\}$. Это, очевидно, σ-алгебра, которая содержит все открытые множества (а значит содержит борелевскую σ-алгебру т.е. борелевская — минимальная, содержащая все открытые множества). □

Доказательство. Пусть μ — полная мера, $\mu e = 0$, $f\colon e \to \overline{\mathbb{R}}$. Тогда $f \in S(e)$. □

Доказательство.

$$e(f < a) \subset e$$

Значит мера первого равна нулю по полноте меры. □

Теорема 14 (Измеримость граней и пределов)**.**

1. *Пусть $\{f_n\}_n \subset S(E)$. Тогда $x \mapsto \sup\limits_n f_n(x) \in S(E)$ и $x \mapsto \inf\limits_n f_n(x) \in S(E)$.*
2. *Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S(E)$. Тогда $x \mapsto \limsup\limits_{n\to\infty} f_n(x) \in S(E)$, $x \mapsto \liminf\limits_{n\to\infty} f_n(x) \in S(E)$.*

В частности, если $\forall x \in E \ \exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, то $x \mapsto \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \in S(E)$. Никакая равномерная сходимость тут не нужна.

Доказательство. Пусть

$$g\colon x \mapsto \sup_n f_n(x) \in S(E) \qquad h\colon x \mapsto \inf_n f_n(x) \in S(E)$$

Тогда

$$E(g > a) = \bigcup_n E(f_n > a) \qquad E(h < a) = \bigcup_n E(f_n < a)$$

Теперь с пределами.

$$\limsup_{n\to\infty} f_n = \lim_{k\to\infty} \sup_{n \geqslant k} f_n = \inf_k \sup_{n\geqslant k} f_n$$

Пользуемся первым пунктом дважды. □

Определение 28. Если $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$, то

$$f_+(x) = \max\{f(x); 0\} \qquad f_-(x) = \max\{-f(x); 0\}$$

Свойство 28.1.

$$f_+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2} \qquad f(x) \neq -\infty$$
$$f_-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2} \qquad f(x) \neq +\infty$$

Свойство 28.2.

$$f_\pm \geqslant 0 \qquad f_+ + f_- = |f| \qquad f_+ - f_- = f$$

Свойство 28.3.

$$f \in S(E) \Leftrightarrow f_\pm \in S(E)$$

Доказательство. Слева направо по теореме 14, а справа налево придётся доказать.

$$E(f > a) = \begin{cases} E(f_+ > a) & a \geqslant 0 \\ E(-f_- > a) & a < 0 \end{cases}$$

□

Определение 29. Функция $\phi\colon X \to \mathbb{C}$ называется **ступенчатой**, если ϕ измерима, обладает конечным множеством значений.
Функция $\phi\colon X \to \mathbb{R}$ называется **простой**, если ϕ она ступенчатая и неотрицательна.

Свойство 29.1. *Очевидно, всякая простая функция может быть записана в виде*

$$\phi = \sum_{k=1}^{N} c_k \chi_{A_k} \mid c_k \in [0; +\infty) \text{ различны}, A_k \in \mathbb{A}, \bigsqcup_{k=1}^{N} A_k = X$$

Притом единственным образом.

Замечание. Если убрать условие $c_k \in [0; +\infty)$, получатся ступенчатые функции.
Если не следить за различностью c_k и дизъюнктностью A_k, представление всё равно породит простую/ступенчатую функцию, но это представление не будет единственным.

Свойство 29.2. *Если ϕ, ψ ступенчатые, то $\phi + \psi$, $\phi - \psi$, $\phi\psi$, $\alpha\phi$ и $|\phi|$ ступенчатые.*

Доказательство. Все аналогичны, докажем для суммы, например. Если

$$\phi = \sum_{k=1}^{N} c_k \chi_{A_k} \qquad \psi = \sum_{j=1}^{M} d_j \chi_{B_j}$$

То

$$\phi + \psi = \sum_{k=1}^{N} (c_k + d_j) \chi_{A_k \cap B_j}$$

тут как раз и потеряется различность и дизъюнктность, для этого и было сделано замечание выше. □

Теорема 15 (Приближение измеримой функции простыми)**.** *Если $f \in S(E \to [0; +\infty])$, то $\exists \{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — такие простые функции, что $\phi_n \leqslant \phi_{n+1}$ и $\forall x \in E\ \phi_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$.*

Доказательство. Пусть

$$E_{in} = \begin{cases} E\left(\frac{i}{2^n} \leqslant f < \frac{i+1}{2^n}\right) & i \in [0 : n2^n - 1] \\ E(f \geqslant n) & i = n2^n \end{cases}$$

Положим

$$\phi_n = \sum_{i=0}^{n2^n} \frac{i}{2^n} \chi_{E_{in}}$$

Заметим, что $E_{in} \in \mathbb{A}$ и дизъюнктны при фиксированном n. А значит ϕ_n действительно простые функции.
Проверим возрастание и поточечный предел. Для этого напишем ещё одну формулу для ϕ_n:

$$\phi_n(x) = \min\left\{\frac{\lfloor 2^n f(x)\rfloor}{2^n}, n\right\}$$

Отсюда докажем возрастание. Достаточно доказать, что

$$\frac{\lfloor 2^{n+1} f(x)\rfloor}{2^{n+1}} \geqslant \frac{\left\lfloor \overbrace{2^n f(x)}^{A} \right\rfloor}{2^n}$$

Это равносильно

$$\lfloor 2A\rfloor \geqslant 2\lfloor A\rfloor$$

Что очевидно верно.
Теперь докажем сходимость. Рассмотрим 2 случая: первый — $f(x) = +\infty$. Тогда $\forall n\ \phi_n(x) = n \to +\infty$. Второй — $f(x) < +\infty$. Тогда

$$\forall n > f(x)\ \exists i \in [0 : n2^n - 1]\ x \in E_{in}$$

Тогда

$$0 \leqslant f(x) - \phi_n(x) < \frac{1}{2^n}$$

□

Замечание. Что будет, если отказаться от неотрицательности функции? Функции из простых станут ступенчатыми и возрастание $\phi_n \leqslant \phi_{n+1}$. Но его можно чем-то заменить...

Следствие 4.1 (Приближение измеримой функции ступенчатыми)**.** *Если $f \in S(E)$, то $\exists\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — такие **ступенчатые** функции, что $|\psi_n| \leqslant |f|$ и $\forall x \in E\ \psi_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$.*

Доказательство. $f = f_+ - f_-$. Подберём две последовательности простых функций $\{\phi_n\}$ и $\{\varphi_n\}$, приближающих соответственно f_+ и f_-. Тогда

$$\phi_n \leqslant \phi_{n+1} \qquad \varphi_n \leqslant \varphi_{n+1} \qquad \phi_n \to f_+ \qquad \varphi_n \to f_-$$

Если взять $\psi = \phi + \varphi$, то получим все нужные нам условия, кроме $|\psi_n| \leqslant |f|$. Ну, если $f(x) \geqslant 0$, то $f(x) = f_+(x)$, а $f_-(x) = 0$. Тогда

$$\phi(x) \leqslant f_+(x) = |f(x)| \qquad \varphi(x) = 0$$

Если $f(x) < 0$ аналогично. □

Следствие 4.2. *Если в условиях теоремы 15 и следствия 4.1 f ограничена, то сходимость равномерна.*

Доказательство. Если в теореме 15 $f(x) \leqslant M$, то неравенство

$$0 \leqslant f(x) - \phi_n(x) < \frac{1}{2^n}$$

верно для всех $n > M$ и всех $x \in E$. Это и есть равномерная сходимость.
Переход к ступенчатым функциям вытекает из того, что разность двух равномерно сходящихся последовательностей равномерно сходится. □

Замечание. Теорема 15 и следствие 4.1 допускают обращение (передел последовательности простых/ступенчатых функций измерим).

Замечание. Пусть $f, g\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$. Где определена $f+g$? Пусть

$$e_1 = E(f = +\infty) \cap E(g = -\infty) e_2 = E(f = -\infty) \cap E(g = +\infty) E_1 = E \setminus (e_1 \cap e_2)$$

Тогда $f + g\colon E_1 \to \overline{\mathbb{R}}$.
Аналогичные приколы возникают и с $f - g$:

$$e_1' = E(f = +\infty) \cap E(g = +\infty) e_2' = E(f = -\infty) \cap E(g = -\infty) E_1' = E \setminus (e_1' \cap e_2')$$

Тогда $f - g\colon E_1' \to \overline{\mathbb{R}}$.
fg определено всюду на E так как $0 \cdot \infty = 0$.
С частным надо какое-то разумное доопределение. Давайте на ноль делить не будем, а $\frac{\infty}{\infty} = 0$, чтобы мы могли написать $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$. Тогда $\frac{f}{g}\colon E(g \neq 0) \to \overline{\mathbb{R}}$.

Теорема 16 (Арифметические действия над измеримыми функциями)**.** *Пусть $f, g \in S(E)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $p > 0$. Тогда*

1. $\alpha f \in S(E)$.
2. $|f| \in S(E)$.
3. *Если* $f \geqslant 0$, *то* $f^p \in S(E)$.
4. $f + g \in S(E_1)$.
5. $f - g \in S(E_1')$.
6. $fg \in S(E)$.
7. $\frac{f}{g} \in S(E(g \neq 0))$.

Доказательство. Первые 6 утверждений доказываются одним и тем же способом. Вот, например, первое

1. Возьмём последовательность ступенчатых функций ϕ_n, тогда $\alpha\psi_n$ сходится к αf.

6. Всё примерно то же самое, но у нас было доказательство произведения пределов с дополнительным условием. Так что проведём его честно:

$$\psi_n^* \to f \qquad \psi_n^{**} \to g \qquad |\psi_n^*| \leqslant |f| \qquad |\psi_n^{**}| \leqslant |g|$$

   Тогда ψ_n^* и ψ_n^{**} ограничены, тогда предел произведения равен произведению пределов.

7. Достаточно доказать для $f \equiv 1$. Давайте простоты записи считать, что $g \neq 0$, то есть $E(g \neq 0) = E$.
   По определению рассмотрим лебеговы множества. Пусть $a \in \mathbb{R}$.

$$E\left(\frac{1}{g} > a\right) = \begin{cases} E(g > 0) \cap E\left(g < \frac{1}{a}\right) & a > 0 \\ E(g > 0) \cap E\left(g < +\infty\right) & a = 0 \\ E(g > 0) \cup E\left(g < \frac{1}{a}\right) & a < 0 \end{cases}$$

□

Следствие 4.1. *Сумма ряда измеримых функций измерима:*
Если $f_k \in S(E)$, $F = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ *существует в* $\overline{\mathbb{R}}$, *то* $F \in S(E)$.

Следствие 4.2. *Если* $f, g \in S(E)$, *то множества*

$$E(f < g) \qquad E(f \leqslant g) \qquad E(f = g) \qquad E(f \neq g)$$

измеримы.

Доказательство. Например,
$$E(f < g) = E(f - g < 0)$$
Ещё например,
$$E(f = g) = E(f - g = 0) \cup e_1' \cup e_2'$$
Оставшиеся два множества тривиально из этих. □

Утверждение. *Композиция двух измеримых по Лебегу функций может быть не измерима, но если внутренняя функция непрерывна, то композиция измерима.*
Без доказательства.

Теорема 17 (Непрерывность и измеримость по Лебегу)**.** *Пусть* $E \in \mathbb{A}_n$, $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists E_\varepsilon \subset E \ \begin{cases} \mu(E \setminus E_\varepsilon) < \varepsilon \\ f\big|_{E_\varepsilon} \in C(E_\varepsilon) \end{cases}$$

Тогда $f \in S(E)$.

Доказательство. Сначала рассмотрим частный случай, когда $f \in C(E)$. Как устроены $E(f < a)$? Это прообраз открытого промежутка, а значит он открыт в E. То есть

$$E(f < a) = E \cap G_a \mid G_a \text{ открыто в } \mathbb{R}^n$$

Это пересечение двух измеримых, всё хорошо.
Теперь общий случай. Возьмём $\varepsilon = \frac{1}{m} \mid m \in \mathbb{N}$. Обозначим

$$e_{\frac{1}{m}} = E \setminus E_{\frac{1}{m}}$$

Пусть

$$e = \bigcap_{m=1}^{\infty} e_{\frac{1}{m}}$$

Тогда $\mu e = 0$. Теперь можно представить E как

$$E = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_{\frac{1}{m}} \cup e$$

Для любого m $f \in S(E_{1/m})$ по первому пункту, а на e измеримо так как мера Лебега полна (а для полной меры любая функция измерима на множестве нулевой меры). □

Следствие 4.1. *Если* $E \in \mathbb{A}_n$, $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$, *множество точек разрыва* f *имеет нулевую меру (Лебега), то* $f \in S(E)$.

Пример. Функция Дирихле: $\chi_{\mathbb{Q}}$. Она всюду разрывна, но её сужение на $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ тождественно равно нулю, а значит функция Дирихле измерима.
Эта функция обслуживается теоремой ($E_\varepsilon \equiv \mathbb{Q}$), но не следствием.

Определение 30. Пусть $(X; \mathbb{A}; \mu)$ — пространство с мерой, $E \subset X$, $\mathcal{P}(x)$ — одноместный предикат на E. Если $\exists e \in \mathbb{A} : \mu e = 0$ и $\forall x \in E \setminus e\ \mathcal{P}(x)$, то говорят, что $\mathcal{P}$ **выполнено почти всюду** на E относительно меры μ (также **μ-почти везде выполнено**).

Замечание. Если μ — полная мера, то определение сокращается до «мера множества истинности $\neg\mathcal{P}$ равна нулю».

Утверждение. *Представьте себе не более чем счётный набор утверждений $\{\mathcal{P}_k\}_k$. Если каждое $\mathcal{P}_k$ верно почти везде на E, то и все они одновременно почти везде на E.*

Доказательство. Если $\mathcal{P}_k$ верно вне e_k, то

$$\bigwedge_k \mathcal{P}_k \text{ верно вне } \bigcup_k e_k$$

А мера того, что справа, равно нулю. □

Определение 31. Функции называются **эквивалентными**, если они равны почти всюду.

Утверждение. *Если μ полна, то эквивалентные функции либо обе измеримы, либо обе — нет.*

Доказательство. Пусть $f, g \colon E \to \overline{\mathbb{R}}$, $f \sim g$.

$$E = E(f = g) \cup E(f \neq g)$$

Второе имеет меру ноль, E измеримо, а значит и $E(f = g) \in \mathbb{A}$. Тогда

$$g \in S(E(f = g)) \text{ как равная } f \qquad g \in S(E(f \neq g)) \text{ потому что множество нулевой меры}$$

□

Замечание. Можно говорить об измеримости функций, заданных почти везде на E (даже определение не поменяется).

Утверждение. *Пусть μ полна, $f_n \in S(E)$, $f_n \to f$ почти везде на E. Тогда $f \in S(E)$.*

Доказательство. Обозначим

$$E_1 = E \setminus E(f_n \nrightarrow f)$$

Правое имеет меру ноль (значим на нём измерима f), E_1 измеримо (и на нём f измеримо как предел последовательности измеримых), дальше как в утверждении выше. □

Определение 32. Пусть $(X; \mathbb{A}; \mu)$ — пространство с мерой, f_n, f заданы почти везде на E, измеримы на E и почти везде конечны на E. Говорят, что последовательность f_n **сходится** к f **по мере** μ, если

$$\forall \sigma > 0\ \mu E(|f_n - f| \geqslant \sigma) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Запись:

$$f_n \xrightarrow{\mu} f\ (E)$$

Свойство 32.1 (Единственность предела по мере)**.** *Предел по мере единственный с точностью до замены на эквивалентную.*
Остаётся на дом читателю.

Утверждение. *Поточечная сходимость и сходимость по мере не влекут друг друга.*

Пример. $\mu = \mu_1$, $E = [0; +\infty)$, $f_n = \chi_{[n;+\infty)}$. Тогда f_n поточечно стремится к нулю, но не сходится по мере:

$$\forall \sigma > 0\ \mu E(|f_n - 0| \geqslant \sigma) = +\infty$$

Пример. Над промежутком длины 1 бесконечное количество раз проплывает промежуток длины $\frac{1}{n}$ (n уменьшается).
$E = [0;1)$, $\phi_{m,k} = \chi_{\left[\frac{k}{m};\frac{k+1}{m}\right)}$, $k \in [0 : m-1]$. Если перенумеровать это одним индексом в таком порядке:

$$\phi_{1,0}; \phi_{2,0}; \phi_{2,1}; \phi_{3,0}; \phi_{3,1}; \phi_{3,2}; \ldots$$

Получим некую последовательность f_n. Тогда

$$\mu E(\phi_{m,k} \neq 0) = \frac{1}{m} \to 0$$

Поэтому $f_n \xrightarrow{\mu} 0$.
А поточечной сходимости нет т.к. f_n бесконечное количество раз принимают значения 0 и 1.

Теорема 18 (Теорема А. Лебега)**.** *Если $\mu E < +\infty$, $f_n, f \in S(E)$ и конечны почти везде на E и $f_n \to f$ почти везде на E, то $f_n \xrightarrow{\mu} f$ на E.*
Без доказательства.

Теорема 19 (Теорема Ф. Рисса)**.** *Если $f_n \xrightarrow{\mu} f$ то существует подпоследовательность f_{n_k}, которая сходится к f почти везде.*
Без доказательства.

Теорема 20 (С-свойство Лузина)**.** *Пусть $E \in \mathbb{A}_n$, $f \colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима и почти везде конечна. Тогда*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \varphi_\varepsilon \in C(\mathbb{R}^n) \ \mu E(f \neq \varphi_\varepsilon) < \varepsilon$$

Без доказательства.

Интеграл по мере.

Определение 33. Пусть $(X; \mathbb{A}; \mu)$ — пространство с мерой, $E \in \mathbb{A}$.
Интегралом простой функции $f = \sum\limits_{k=1}^{N} c_k \chi_{A_k}$, $A_k \in \mathbb{A}$ дизъюнктны, $c_k \in [0; +\infty)$ называется

$$\int_E f \ \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{N} c_k \mu(A_k \cap E)$$

Интегралом измеримой неотрицательной функции f называется

$$\int_E f \ \mathrm{d}\mu = \sup_{\substack{\phi \text{ простая} \\ \phi \leqslant f \text{ на } E}} \int_E \phi \ \mathrm{d}\mu$$

Интегралом произвольной измеримой функции f называется

$$\int_E f \ \mathrm{d}\mu = \int_E f_+ \ \mathrm{d}\mu - \int_E f_- \ \mathrm{d}\mu$$

Если хотя бы один из интегралов в правой части конечен. Иначе говорим, что f интеграла не имеет.
Если $\int_E f \ \mathrm{d}\mu$ конечен, f называется **суммируемой** на E **по мере** μ.
Класс суммируемых функций обозначается $L(E, \mu)$. Интеграл по мере также обозначается

$$\int_E f(x) \ \mu(x) \qquad \int_E f(x) \ \mu(\mathrm{d}x)$$

Если мера фиксирована, то её иногда не пишут.

Замечание. Доказательство корректности будет дано потом.

Утверждение. *Функция суммируема тогда и только тогда, когда конечны интегралы от её левой и правой части.*

Теорема 21 (Монотонность интеграла по функции)**.** *Если $f, g \in S(E)$ и $\exists \int f, \int g$ и $f \leqslant g$, то $\int_E f \, \mathrm{d}\mu \leqslant \int_E g \, \mathrm{d}\mu$.*

Доказательство. 1. Пусть f, g простые.

$$f = \sum_{k=1}^{N} c_k \chi_{A_k} \qquad g = \sum_{i=1}^{M} d_i \chi_{B_i}$$

Н.У.О. пусть $\bigcap\limits_k A_k = X = \bigcap\limits_i A_i$ (иначе добавим нулевые слагаемые).
Пусть $D_{ki} = A_k \cap B_i \in \mathbb{A}$ и дизъюнктны. Тогда

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \sum_k c_k \mu(A_k \cap E) = \sum_k c_k \mu\left(\bigcup_i (D_{ki} \cap E)\right) = \sum_{k,i} c_k \mu(D_{ki} \cap E)$$

Аналогично

$$\int_E g \, \mathrm{d}\mu = \sum_{k,i} d_i \mu(D_{ki} \cap E)$$

Рассмотрим такое D_{ki}, то $\mu(D_{ki} \cap E) > 0$. Тогда в $D_{ki} \cap E$ есть хоть один элемент x, а значит $c_k = f(x) \leqslant g(x) = d_i$. А если $\mu(D_{ki} \cap E) = 0$, то не важно, что умножать на ноль. Отсюда одна сумма меньше другой.

2. Теперь пусть f, g неотрицательны. Ну, интегралы f и g — это супремумы следующих множеств

$$\left\{\int_E \phi \mid \phi \leqslant f \text{ на } E, \phi \text{ простая}\right\} \qquad \left\{\int_E \phi \mid \phi \leqslant g \text{ на } E, \phi \text{ простая}\right\}$$

Ну, первое включено во второе, а значит супремум первого не больше супремума второго.

3.
$$f \leqslant g \Leftrightarrow f_+ \leqslant g_+ \wedge f_- \geqslant g_-$$

Запишем неравенства справа для интегралов, вычтем одно неравенство из другого.

□

Теорема 22 (Определение интеграла по мере корректно)**.** *1. Выбор c_k в пункте 1 не влияет на значение интеграла.*

2. Интеграл в смысле пункта 2 для простой функции совпадает с интегралом в смысле 1.

3. Интеграл в смысле пункта 3 для простой функции совпадает с интегралом в смысле 2.

Доказательство. Первое мы уже доказали выше. Второе и третье докажем сейчас. Возьмём простую функцию f. Поскольку $f \leqslant f$ интеграл в смысле 1 не больше интеграла в смысле 2. Также для любой простой $\varphi \leqslant f$ на E $\int_E f \leqslant \int_E f$ (оба интеграла в смысле 1). Перейдя к супремуму, получим, что интеграл в смысле 1 не меньше интеграла в смысле 2.
Теперь к третьему, но там всё понятно, $f = f_+$. □

Лемма 5. *Пусть $f \in S(E)$, $E_1 \subset E$, $E_1 \in \mathbb{A}$. Пусть $f = 0$ на $E \setminus E_1$. Тогда*

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \int_{E_1} f \, \mathrm{d}\mu$$

Интегралы в левой и правой части одновременно существуют или нет, и если существуют, то равны.

Доказательство. 1. Пусть $f = \sum\limits_{k=1}^{N} c_k \chi_{A_k}$, $A_k \in \mathbb{A}$ дизъюнктны, $c_k \in [0; +\infty)$.

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \sum_k c_k \mu(A_k \cap E)$$

Если $c_k \neq 0$, то $A_k \cap (E \setminus E_1) = \varnothing$. Тем самым $\mu(A_k \cap E) = \mu(A_k \cap E_1)$. Отсюда равны интегралы.

2. Если f неотрицательна.

$$\int_E f = \sup_{\substack{\phi \text{ простая} \\ \phi \leqslant f \text{ на } E}} \int_E \phi \, \mathrm{d}\mu$$

На множестве $E \setminus E_1$ f равна нулю, а значит и ϕ должны обнулиться.

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \sup_{\substack{\phi \text{ простая} \\ \phi \leqslant f \text{ на } E}} \int_E \phi \, \mathrm{d}\mu = \sup_{\substack{\phi \text{ простая} \\ \phi \leqslant f \text{ на } E \\ \phi(x) \equiv 0 \text{ на } E \setminus E_1}} \int_E \phi \, \mathrm{d}\mu = \sup_{\substack{\phi \text{ простая} \\ \phi \leqslant f \text{ на } E \\ \phi(x) \equiv 0 \text{ на } E \setminus E_1}} \int_{E_1} \phi \, \mathrm{d}\mu = \sup_{\substack{\phi \text{ простая} \\ \phi \leqslant f \text{ на } E_1}} \int_{E_1} \phi \, \mathrm{d}\mu = \int_{E_1} f \, \mathrm{d}\mu$$

3. f произвольная — вычтите из одного равенства другое.

□

Замечание. Можно интегрировать функции, заданные на X (доопределить f нулём вне E).

Следствие 5.1 (Монотонность интеграла по множеству)**.** *Пусть $f \in S(E)$, $f \geqslant 0$, $E_1 \subset E$, $E_1 \in \mathbb{A}$. Тогда*

$$\int_{E_1} f \, \mathrm{d}\mu \leqslant \int_E f \, \mathrm{d}\mu$$

Доказательство.

$$f\chi_{E_1} \leqslant f\chi_E$$

Тогда

$$\int_{E_1} f \overset{5}{=} \int_E f\chi_{E_1} \overset{21}{\leqslant} \int_E f\chi_E = \int_E f$$

□

Следствие 5.2. *$f \in L(E; \mu)$, $E_1 \subset E$, $E_1 \in \mathbb{A}$. Тогда $f \in L(E_1; \mu)$.*

Доказательство.

$$\int_{E_1} f_\pm \, \mathrm{d}\mu \leqslant \int_E f_\pm \, \mathrm{d}\mu < +\infty$$

□

Теорема 23 (Теорема Лéви)**.** *Пусть $f_n \geqslant 0$, $f_n \in S(E)$, $f_n \leqslant f_{n+1}$. Пусть $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$. Тогда*

$$\int_E f_n \, \mathrm{d}\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_E f \, \mathrm{d}\mu$$

Доказательство. $f \in S(E)$, $f \geqslant 0$, значит интеграл имеет смысл (интеграл от неотрицательной измеримой функции всегда существует).
Из $f_n \leqslant f$ имеем $\int_E f_n \leqslant \int_E f$, а из $f_n \leqslant f_{n+1}$ — $\int_E f_n \leqslant \int_E f_{n+1}$. Из второго $\exists \lim \int_E f_n = \alpha \in [0; +\infty]$. Из первого $\alpha \leqslant \int_E f$.
Надо доказать обратное неравенство. Докажем его с точностью до множителя меньше единицы. Пусть $q \in (0; 1)$. Рассмотрим произвольную просту функцию $\phi \leqslant f$ на E. Пусть $E_n = E(f_n \geqslant q\phi)$. Тогда $E_n \subset E_{n+1}$ (по возрастаемости f_n). Во-вторых, $E_n \in \mathbb{A}$. Проверим, что $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n = E$. Очевидно включение левого в правое, а обратно?

Пусть $x \in E$. Если $\phi(x) = 0$, то $\forall n\ x \in E_n$. Если $\phi(x) > 0$, то $q\phi(x) < \phi(x) \leqslant f(x) = \lim f_n(x)$. По определению предела начиная с некоторого номера $f_n(x)$ будет больше $q\phi(x)$.
Включение доказали, теперь

$$\int_E f_n \overset{5.1}{\geqslant} \int_{E_n} f_n \overset{21}{\geqslant} \int_{E_n} q\phi = \sum_k qc_k\mu(A_k \cap E_n)$$

Устремим n к бесконечности. Предел в левой части — α. Предел в правой части равен $\mu(A_k \cap E)$ так как $A_k \cap E_n \subset A_k \cap E_{n+1}$, а значит предел равен объединению:

$$\alpha \geqslant q\int_E \phi$$

Остаётся устремить q у единице. □

Лемма 6. *Пусть $E, E_1 \in \mathbb{A}$, $E_1 \subset E$, $\mu(E \subset E_1) = 0$. Пусть $f \in S(E)$. Тогда*

$$\int_{E_1} f\ \mathrm{d}\mu = \int_E f\ \mathrm{d}\mu$$

Интегралы одновременно существуют или нет, если существуют, то равны.

Доказательство.

1. Пусть f простая:
$$f = \sum_k c_k\chi_{A_k}$$
Тогда
$$\int_E f = \sum_k c_k\mu(A_k \cap E) = \sum_k c_k\mu(A_k \cap E_1) = \int_{E_1} f$$
2. Пусть f неотрицательная. Тогда искомое очевидно следует из теоремы Леви.
3. Очевидно.

□

Замечание. Если μ полная, то можно требовать $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$, $f \in S(E_1)$ (т.к. отсюда следует $f \in S(E)$).

Следствие 6.1. *Если $\mu e = 0$, $f \in S(e)$, то $\int_e f\ \mathrm{d}\mu = 0$. Если мера μ полная, то $f \in S(e)$ можно не требовать (это и так всегда верно).*

Замечание. Можно интегрировать функции, заданные почти всюду на E.

Определение 34. Пусть $E \in \mathbb{A}$, $f\colon E_1 \to \overline{\mathbb{R}}$, $f \in S(E_1)$, $E_1 \subset E$, $\mu(E \subset E_1) = 0$. Тогда f называется **измеримой** на E в **широком смысле**.

$$\int_E f\ \mathrm{d}\mu \overset{\text{def}}{=} \int_{E_1} f\ \mathrm{d}\mu$$

Если последний существует.

Следствие 6.2. *Если $f \sim g$, $f, g \in S(E)$, то*

$$\int_E f\ \mathrm{d}\mu = \int_E g\ \mathrm{d}\mu$$

Как обычно, интегралы существуют или нет одновременно, в первом случае равны.

Доказательство.

$$\int_E f\ \mathrm{d}\mu = \int_{\underbrace{E(f=g)}_{\in\mathbb{A}}} f\ \mathrm{d}\mu = \int_{E(f=g)} g\ \mathrm{d}\mu = \int_E g\ \mathrm{d}\mu$$

□

Теорема 24 (Однородность интеграла)**.** *Пусть E измеримо, $f\colon E\to\overline{\mathbb{R}}$, $\alpha\in\mathbb{R}$, существует $\int_E f\ \mathrm{d}\mu$. Тогда*

$$\exists\int_E \alpha f\ \mathrm{d}\mu=\alpha\int_E f\ \mathrm{d}\mu$$

Доказательство. Если $\alpha=0$, доказывать нечего. Иначе докажем теорему при $\alpha>0$ и при $\alpha<0$.

1. $\alpha>0$.
   (a) f простая:
   $$f=\sum_k c_k\chi_{A_k}$$
   Тогда αf тоже простая
   $$\alpha f=\sum_k \alpha c_k\chi_{A_k}$$
   Равенство интегралов очевидно следует, поскольку мы умеем выносить константу за знак суммы.
   (b) f неотрицательная. Тогда существуют ϕ_n простые, что $\phi_n\uparrow f$, а значит $\alpha\phi_n\uparrow\alpha f$. При этом
   $$\int_E \alpha\psi_n\ \mathrm{d}\mu=\alpha\int_E\psi_n\ \mathrm{d}\mu$$
   Из предыдущего.
   Тогда устремим n у бесконечности, получим требуемое по теореме Леви.
   (c) Общий случай
   $$(\alpha f)_+=\alpha f_+\qquad(\alpha f)_-=\alpha f_-$$
   Дальше понятно.
2. Поскольку положительное мы выносить умеем, остаётся научиться выносить -1.
   Заметим, что
   $$(-f)_+=\max\{-f;0\}=f_-\qquad(-f)_-=\max\{f;0\}=f_+$$
   Отсюда всё ясно.

□

Теорема 25 (Аддитивность интеграла по функции)**.** *Пусть $f,g\colon E\to\overline{\mathbb{R}}$, $\exists\int_E f\ \mathrm{d}\mu,\int_E g\ \mathrm{d}\mu$ и не обращаются в бесконечности разных знаков. Тогда*

$$\exists\int_E f+g\ \mathrm{d}\mu=\int_E f\ \mathrm{d}\mu+\int_E g\ \mathrm{d}\mu$$

Доказательство. 1. f,g простые.
$$f=\sum_k c_k\chi_{A_k}\qquad g=\sum_i d_i\chi_{B_i}$$
$$c_k,d_i\in[0;+\infty)\qquad A_k,B_i\text{ дизъюнктны}\qquad A_k,B_i\in\mathbb{A}$$
Можно считать, что $\bigsqcup\limits_k A_k=\bigsqcup\limits_i B_i=E$ (иначе добавим нулевые слагаемые). Пусть $D_{k,i}=A_k\cap B_i$, тогда $D_{k,i}$ измеримы и дизъюнктны,
$$\bigsqcup_k D_{k,i}=B_i\qquad\bigsqcup_i D_{k,i}=A_k$$
Отсюда
$$\int_E f=\sum_k c_k\mu A_k=\sum_{k,i}c_k\mu D_{k,i}\qquad\int_E g=\sum_i d_i\mu B_i=\sum_{k,i}d_i\mu D_{k,i}$$
$$\int_E f+g=\sum_{k,i}(c_k+d_i)\mu D_{k,i}$$

2. $f, g \geqslant 0$. Пусть $\phi_n \uparrow f, \psi_n \uparrow g$, тогда $\phi_n + \psi_n \uparrow f + g$ и опять из теоремы Леви следует то, что мы хотим.

3. Пусть $h = f + g$. Пусть h задано на

$$E_1 = E \setminus (e_1 \cup e_2) \qquad e_1 = E(f = +\infty) \cap E(g = -\infty), e_2 = E(f = -\infty) \cap E(g = +\infty)$$

Докажем, что h определена почти везде (т.е. $\mu e_1 = \mu e_2 = 0$). Докажем для e_1, для e_2 аналогично. Докажем от противного. Пусть $\mu e_1 > 0$. Тогда

$$\int_E f_+ \geqslant \int_{e_1} f_+ = +\infty$$

Аналогично

$$\int_E g_- = +\infty$$

Тогда из определения интеграла $\int_E f_-$ и $\int_E g_+$ конечны, а значит

$$\int_E g = +\infty \qquad \int_E g = -\infty$$

Противоречие с условием теоремы.
То есть h задана почти всюду на E, и интегрировать её на E можно. Тогда

$$h = h_+ - h_- = f_+ + g_+ - f_- - g_-$$

Это равенство не надо понимать так, что $h_- = f_- + g_-$, это в общем случае неправда. Но

$$h_+ \leqslant f_+ + g_+ \qquad f_- \leqslant f_- + f_-$$

По определению $(\cdot)_+$ и $(\cdot)_-$:

$$h_+ = \max\{f + g; 0\} \leqslant \max\{f; 0\} + \max\{g; 0\} = f_+ + g_+$$

Докажем, что $h_+ + f_- + g_- = f_+ + g_+ + h_-$. Будем рассуждать поточечно.

$$f_- + g_- < +\infty \Rightarrow h_- < +\infty, \text{ значит можно переносить члены}$$

$$f_- + g_- = +\infty \Rightarrow h_+ = +\infty \text{ и равенство верно}$$

Очень хорошо, тогда

$$\int_E h_+ + \int_E f_- + \int_E g_- = \int_E f_+ + \int_E g_+ + \int_E h_-$$

Хочется перенести члены вида $\int_E (\cdot)_-$ в другую сторону. Тогда получим то, что нам надо.
Ну,

$$\int_E f_- + \int_E g_- < +\infty \overset{h_- \leqslant f_- + g_-}{\Longrightarrow} \int_E h_- < +\infty, \text{ значит можно переносить члены}$$

А если $\int_E f_- + \int_E g_-$ бесконечен, то хотя бы один из этих двух интегралов бесконечен (пусть $\int_E f_- \infty$, тогда $\int_E f_+ < +\infty$). Поскольку существует сумма интегралов f и g, $\inf_E g < +\infty$, а значит $\int_E g_+ < +\infty$. Отсюда по неравенству $h_+ \leqslant f_+ + g_+$ $\int_E h_+ < +\infty$, а также из изначального равенства $\int_E h_- = +\infty$, а неравенство с перенесёнными слагаемыми верно.

□

Следствие 6.1 (Теорема Леви для рядов). *Ряд неотрицательных измеримых функций можно интегрировать почленно.*

Доказательство. Пусть $f_k \in S(E)$, $f_k \geqslant 0$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n}\int_E f_k = \int_E \sum_{k=1}^{n} f_k$$

Поскольку суммы неотрицательны, $\int_E \sum\limits_{k=1}^{n} f_k \uparrow \int_E \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$, а значит по теореме Леви

$$\lim_{n\to\infty}\int_E \sum_{k=1}^{n} f_k = \int_E \sum_{k=1}^{\infty} f_k$$

А

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_E f_k \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{\infty}\int_E f_k$$

□

Следствие 6.2 (Суммируемость функции и её модуля)**.** *1. Суммируемость f и $|f|$ равносильны.*

2. Если $\exists \int_E f \, \mathrm{d}\mu$, то

$$\left|\int_E f \, \mathrm{d}\mu\right| \leqslant \int_E |f| \, \mathrm{d}\mu$$

Доказательство. 1. Поскольку $f \in L(E;\mu)$, $f_\pm \in L(E;\mu)$, а значит $|f| \in L(E;\mu)$. То что $|f| \in S(E)$.

2.

$$\left|\int_E f\right| = \left|\int_E f_+ - \int_E f_-\right| \leqslant \int_E f_+ + \int_E f_- = \int_E |f|$$

□

Следствие 6.3. *Пусть $f \in S(E)$, $\Phi \in L(E;\mu)$, $|f| < \Phi$ почти везде. Тогда $f \in L(E;\mu)$*

Доказательство.

$$\int_E |f| \leqslant \int_E \Phi < +\infty$$

□

Следствие 6.4. *Ограниченная измеримая функция на множестве конечной меры суммируема.*

Лемма 7 (Неравенство Чебышёва)**.** *Пусть $f \in L(E;\mu)$, $t \in (0;+\infty)$. Тогда*

$$\mu E(|f| \geqslant t) \leqslant \frac{1}{t}\int_E |f| \, \mathrm{d}\mu$$

Доказательство.

$$\int_E |f| \, \mathrm{d}\mu \geqslant \int_{E(|f|\geqslant t)} |f| \, \mathrm{d}\mu \geqslant \int_{E(|f|\geqslant t)} t \, \mathrm{d}\mu = t\mu E(|f| \geqslant t)$$

□

Следствие 7.1. *Если $f \in L(E;\mu)$, то f почти везде конечна.*

Доказательство.

$$E(|f| = +\infty) = \bigcap_{k=1}^{\infty} E(|f| \geqslant n)$$

Но по неравенству Чебышёва:

$$\mu E(|f| \geqslant n) \leqslant \frac{1}{n}\int_E |f| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

□

Следствие 7.2. *Пусть $f \in L(E;\mu)$, $f \geqslant 0$ и $\inf_E f = 0$. Тогда $f \sim 0$ (почти везде равна нулю).*

Доказательство.

$$E(f > 0) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\left(f \geqslant \frac{1}{n}\right)$$

Каждое из множеств правой части имеет нулевую меру по неравенству Чебышёва:

$$\mu E(f \geqslant \frac{1}{n}) \leqslant n \int_E f = 0$$

□

Теорема 26 (Счётная аддитивность интеграла по множеству)**.** *Пусть $E = \bigsqcup\limits_k E_k \mid E_k \in \mathbb{A}$ и $\exists \int_E f \ \mathrm{d}\mu$. Тогда*

$$\int_E f \ \mathrm{d}\mu = \sum_k \int_{E_k} f \ \mathrm{d}\mu$$

Доказательство. 1. Пусть f неотрицательно. Поскольку E_k дизъюнктны,

$$\chi_E = \sum_k \chi_{E_k}$$

Тогда

$$f\chi_E = \sum_k f\chi_{E_k}$$

По теореме Леви для рядов это можно проинтегрировать по E, получив

$$\int_E f = \sum_k \int_E f\chi_{E_k} = \sum_k \int_{E_k} f$$

2. Общий случай:

$$\int_E f_+ = \sum_k \int_{E_k} f_+ \qquad \int_E f_- = \sum_k \int_{E_k} f_-$$

Нам дано, что $\int_E f$ существует, значит $\int_E f_+$ и $\int_E f_-$ одновременно в бесконечность не обращаются, а значит и не обращаются $\int_{E_k} f_+$ и $\int_{E_k} f_-$. Отсюда всё ясно.

□

Следствие 7.1. *Пусть $f \in S(X)$, $f \geqslant 0$. Пусть*

$$\nu A = \int_A f \ \mathrm{d}\mu \mid A \in \mathbb{A}$$

Тогда ν — мера на $\mathbb{A}$.

Доказательство. Тривиально из теоремы 26. □

Следствие 7.2 (Приближение интеграла интегралом по множеству конечной меры)**.** *Пусть $\mu E = +\infty$, $f \in S(E)$. Тогда*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists E_\varepsilon \subset E : \mu E_\varepsilon < +\infty \ \left| \int_E f \ \mathrm{d}\mu - \int_{E_\varepsilon} f \mathrm{d}\mu \right| < \varepsilon$$

Доказательство. Во-первых,

$$\left|\int_{E\setminus E_\varepsilon} f\right| \leqslant \int_{E\setminus E_\varepsilon} |f|$$

А значит можно считать, что $f \geqslant 0$.
Пусть

$$A_n = E\left(f \leqslant \frac{1}{n}\right) \qquad A = E(f = 0)$$

Тогда

$$A_{n+1} \subset A_n \qquad A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

Пусть $\nu A = \int_E f \mathrm{d}\mu$. Тогда

$$\nu A_n = \int_{A_n} f \mathrm{d}\mu \leqslant \int_E f \, \mathrm{d}\mu < +\infty \qquad \nu A = 0$$

По непрерывности меры $\nu A_n \to \nu A = 0$, а значит существует такое N, что $\nu A_N < \varepsilon$.
Положим $E_\varepsilon = E \setminus A_N$. Тогда

$$\int_{E\setminus E_\varepsilon} f = \nu A_N < \varepsilon$$

А поскольку $E_\varepsilon = E(f \geqslant \frac{1}{N})$

$$\mu E_\varepsilon \leqslant N \int_E f < +\infty$$

По неравенству Чебышёва. □

Теорема 27 (Теорема Фату)**.** *1. Если $f_n \in S(E)$, $f_n \geqslant 0$, то*

$$\int_E \liminf f_n \, \mathrm{d}\mu \leqslant \liminf \int_E f_n \, \mathrm{d}\mu$$

2. Если $f_n, f \in S(E)$, $f_n \geqslant 0$, $f_n \to f$ почти везде на E. Тогда

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu \leqslant \liminf \int_E f_n \, \mathrm{d}\mu$$

Доказательство. 1. Пусть $g_n = \inf\limits_{k \geqslant n} f_k$. Тогда $g_n \in S(E)$, $g_n \geqslant 0$, $g_n \uparrow$, $g_n \to \liminf f_n$ и $g_n \leqslant f_n$.
Последнее проинтегрируем:

$$\int_E g_n \leqslant \int_E f_n$$

Перейдём к нижнему пределу:

$$\liminf \int_E g_n \leqslant \liminf \int_E f_n$$

В левой части есть обычный предел по теореме Леви:

$$\liminf \int_E g_n = \lim \int_E g_n = \int_E \liminf f_n$$

2. Из первого

$$f = \lim f_n = \liminf f_n$$

□

Следствие 7.1. *$f_n, f \in S(E)$, $f \geqslant 0$, $f_n \to n$ почти везде на E и*

$$\forall n \int_E f_n \, \mathrm{d}\mu \leqslant K$$

То

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu \leqslant K$$

Доказательство. Посмотрите на доказательство теоремы Фату. □

Замечание. Вообще из этого следует теорема Фату, но пофиг.

Теорема 28 (Теорема Лебега о мажорированной сходимости)**.** *Пусть $f_n, f \in S(E)$, $f_n \to f$ почти везде на E, $\exists \Phi \in L(E;\mu)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $|f_n| < \Phi$ почти везде. Тогда*

$$\int_E f_n \, \mathrm{d}\mu \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_E f \, \mathrm{d}\mu$$

Замечание. Сначала про $\forall n \in \mathbb{N}$ $|f_n| < \Phi$ почти везде. Тут имеется ввиду, что существует множество нулевой меры своё для каждого n. Но поскольку тут число условий счётно, можно взять их объединие, получим одно большое множество нулевой меры для всех утверждений сразу.

Доказательство. Почти везде одновременно верны

$$|f_n| \leqslant \Phi \qquad f_n \to f$$

Отсюда $|f| \leqslant \Phi$ почти везде, а значит $f_n, f \in L(E;\mu)$.

$$\int_E \Phi + \int_E f = \int_E (\Phi + f) = \int_E \lim(\underbrace{\Phi + f_n}_{\geqslant 0}) \overset{27}{\leqslant} \liminf \int_E (\Phi + f_n) = \liminf \left(\int_E \Phi + \int_E f_n \right) = \int_E \Phi + \liminf \int_E f_n$$

Слева и справа вычтем $\int_E \Phi$, получим

$$\int_E f \leqslant \liminf \int_E f_n$$

Если мы докажем, что $\limsup \int_E f_n \leqslant \int_E f$, то получим искомое.
Рассмотрим

$$\int_E \Phi - \int_E f = \int_E (\Phi - f) = \int_E \lim(\underbrace{\Phi - f_n}_{\geqslant 0}) \overset{27}{\geqslant} \liminf \int_E (\Phi - f_n) = \liminf \left(\int_E \Phi - \int_E f_n \right) =$$

$$= \int_E \Phi + \liminf(-\int_E f_n) = \int_E \Phi - \limsup \int_E f_n$$

□

Следствие 7.1. *Пусть $\mu E < +\infty$, $f_n, f \in S(E)$, f_n равномерно ограничена на E и $f_n \to f$ почти везде на E. Тогда*

$$\int_E f_n \, \mathrm{d}\mu \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_E f \, \mathrm{d}\mu$$

Доказательство. В качестве мажоранты выступает константа. □

Замечание. Теорема Лебега и следствие 7.1 усиливают теорему о предельном переходе при условии равномерной сходимости.
По модулю, конечно, того, что мы пока не сказали ничего про связь интеграла Римана и Лебега.

Утверждение. *Сходимость почти везде в теоремах 27 и 28 можно заменить на сходимость по мере.*

Доказательство. Без доказательства, но это нетрудно, в доказательстве может помочь теорема Рисса. □

Утверждение. *Если μ полно, то в теоремах 27 и 28 измеримости f можно не требовать: она следует из остальных условий.*

Теорема 29 (Абсолютная непрерывность интеграла)**.** *Если $f \in L(E;\mu)$, то*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall e \subset E : \mu e < \delta\ \left|\int_e f\ \mathrm{d}\mu\right| < \varepsilon$$

Доказательство. Достаточно рассматривать неотрицательные функции.
Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Подберём простую функцию ϕ, которая приближает $\int f$ с точностью до $\frac{\varepsilon}{2}$:

$$\exists \phi \text{ простая} : \phi < f \text{ на } E\ \int_E f < \int_E \psi + \frac{\varepsilon}{2}$$

У простой функции конечное количество значений, а значит

$$\exists M \in (0; +\infty)\ \phi \leqslant M$$

Осталось лишь предъявить $\delta = \frac{\varepsilon}{2M}$. Почему такое подойдёт? Ну, рассмотрим $e \subset E : \mu e < \delta$. Тогда

$$\int_e f = \int_e f - \int_e \phi + \int_e \phi = \int_e (\underbrace{f - \phi}_{\geqslant 0 \text{ на } E}) + \int_e \phi \leqslant \int_E (f - \phi) + M\mu e < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

□

Сравнение интегралов Римана и Лебега.

Определение 35. Пусть $f\colon [a;b] \to \overline{\mathbb{R}}$, $\delta > 0$, $x_0 \in [a;b]$. Положим

$$M_\delta(x_0) = \sup_{(x_0-\delta;x_0+\delta)\cap[a;b]} f$$

$$m_\delta(x_0) = \inf_{(x_0-\delta;x_0+\delta)\cap[a;b]} f$$

Тогда M_δ возрастает по δ, а m_δ — убывает. Тогда пусть

$$M(x_0) = \lim_{\delta\to+0} M_\delta(x_0) \qquad m(x_0) = \lim_{\delta\to+0} m_\delta(x_0)$$

Функции $m, M\colon [a;b] \to \overline{\mathbb{R}}$ называются **функциями Бэра** f (соответственно, нижней и верхней).

Свойство 35.1.

$$m_\delta(x_0) \leqslant m(x_0) \leqslant f(x_0) \leqslant M(x_0) \leqslant M_\delta(x_0)$$

Теорема 30 (Теорема Бэра)**.** *Пусть $f\colon [a;b] \to \overline{\mathbb{R}}$, $x_0 \in [a;b]$, $f(x_0) < +\infty$. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1. $f \in C(x_0)$.
2. $M(x_0) = m(x_0)$.

Доказательство. $1 \to 2$ Запишем определение непрерывности:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \cap [a;b]\ f(x_0) \in (f(x_0) - \varepsilon; f(x_0) + \varepsilon)$$

Возьмём sup и inf по x:

$$f(x_0) - \varepsilon \leqslant m(x_0) \leqslant M(x_0) \leqslant f(x_0) + \varepsilon$$

Отсюда $m(x_0)$ и $M(x_0)$ конечны и $M(x_0) - m(x_0) < 2\varepsilon$. Устремим $\varepsilon \to +0$, получим $M(x_0) = m(x_0)$.

$2 \to 1$ Поскольку $m(x_0) \leqslant f(x_0) \leqslant M(x_0)$ и $m(x_0) = M(x_0)$, также верно $m(x_0) = f(x_0) = M(x_0) \in \mathbb{R}$. По определению M и m

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ m(x) - m_\delta(x) < \varepsilon, M_\delta(x) - M(x) < \varepsilon$$

Тогда

$$f(x_0) - \varepsilon = m(x_0) - \varepsilon < m_\delta(x_0) \leqslant M_\delta(x_0) < M(x_0) + \varepsilon < f(x_0) + \varepsilon$$

Если $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \cap [a; b]$, то $m_\delta(x_0) \leqslant f(x) \leqslant M_\delta(x_0)$ по определению $M_\delta(x_0)$ и $m_\delta(x_0)$. То есть

$$f(x_0) - \varepsilon < m_\delta(x_0) \leqslant f(x) \leqslant M_\delta(x_0) < f(x_0) + \varepsilon$$

Всё.

□

Лемма 8. *Пусть* $f\colon [a; b] \to \overline{\mathbb{R}}$. *Пусть* $\{\tau_i\}_{i=1}^{\infty} = \{\{x_k^{(i)}\}_{k=0}^{n_i}\}$ *— последовательность дроблений* $[a; b]$.

$$\lambda_i = \max_{0 \leqslant k \leqslant n_i - 1} (x_{k+1}^{(i)} - x_k^{(i)}) \underset{i \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

Пусть

$$M_k^{(i)} = \sup_{[x_k^{(i)}; x_{k+1}^{(i)}]} \qquad m_k^{(i)} = \inf_{[x_k^{(i)}; x_{k+1}^{(i)}]}$$

Пусть

$$\Phi_i = \sum_{k=0}^{n_i - 1} M_k^{(i)} \chi_{(x_k^{(i)}; x_{k+1}^{(i)})} \qquad \phi_i = \sum_{k=0}^{n_i - 1} m_k^{(i)} \chi_{(x_k^{(i)}; x_{k+1}^{(i)})}$$

Пусть $x_0 \in [a; b]$ *не совпадает ни с одной точкой ни одного дробления. Тогда*

$$\Phi_i(x_0) \underset{i \to \infty}{\longrightarrow} M(x_0) \qquad \phi_i(x_0) \underset{i \to \infty}{\longrightarrow} m(x_0)$$

Доказательство. Докажем для ϕ_i, для Φ_i аналогично.
При каждом i x_0 попадает между какими-то точками дробления. Пусть

$$x_0 \in (x_l^{(i)}; x_{l+1}^{(i)})$$

Обозначим l как $l(i)$.
Докажем, что $\phi_i(x_0) \leqslant m(x_0)$. Пусть $\sigma = \min\{x_0 - x_l^{(i)}, x_{l+1}^{(i)} - x_0\}$. Тогда $\forall \delta \in (0; \sigma)$ $(x - \delta; x + \delta) \subset (x_l^{(i)}; x_{l+1}^{(i)})$. Перейдя в этом неравенстве к инфимуму, получим

$$m_\delta(x_0) \geqslant m_l^{(i)} = \phi_i(x_0)$$

Устремив $\delta \to 0+$, получим неравенство

$$\phi_i(x_0) \leqslant m(x_0)$$

Таким образом мы доказали лемму в очень частном случае: $m(x_0) = -\infty$. Дальше мы будем считать, что $m(x_0) > -\infty$.
Возьмём $c < m(x_0)$ и докажем, что начиная с некоторого номера $\phi_i(x_0) > c$.
Существует такое $\gamma > 0$, что $m_\gamma(x_0) > c$. Существует такое $I \in \mathbb{N}$, что $\forall i > I$ $\lambda_i < \gamma$.

$$x_0 \in (x_l^{(i)}; x_{l+1}^{(i)}) \subset [x_l^{(i)}; x_{l+1}^{(i)}] \subset (x_0 - \gamma; x_0 + \gamma)$$

Перейдём тут к inf, получим

$$m_l^{(i)} = \phi_i(x_0) \geqslant m_\gamma(x_0) > c$$

Получили то, что хотели: $\phi_i(x_0) \in (c; m(x_0)]$ для любого $c < m(x_0)$. □

Следствие 8.1. *Функции Бэра любой $f\colon [a;b] \to \overline{\mathbb{R}}$ измеримы по Лебегу.*

Доказательство. Потому что функции Бэра — пределы последовательностей измеримых функций Φ_i и ϕ_i почти везде (везде, кроме точек дробления, а таких точек счётное число). ☐

Замечание. Далее интеграл Римана обозначается $(R)\int$, а интеграл Лебега — $(L)\int$.

Теорема 31 (Критерий Лебега)**.** *Пусть $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$. Тогда $f \in R[a;b]$ тогда и только тогда, когда f ограничена и множество её точек разрыва имеет нулевую меру.*

Теорема 32 (Сравнение интегралов Римана и Лебега)**.** *Если $f \in R[a;b]$, то $f \in L[a;b]$ и $(R)\int f = (L)\int f$.*

Замечание. Включение $R[a;b]$ в $L[a;b]$ строгое. Примером функции из второго, но не первого, может служить функция Дирихле.

Доказательство. Из всех посылок следует, что f ограничена. Пусть ограничена числом K. Тогда $|\phi_i|, |\Phi_i| \leqslant K$.

$$(L)\int\limits_a^b \phi_i = s_i \qquad (L)\int\limits_a^b \Phi_i = S_i$$

Где s_i, S_i — суммы Дарбу.
По лемме 8 и теореме Лебега

$$(L)\int\limits_a^b \phi_i \xrightarrow[i\to\infty]{} (L)\int\limits_a^b m \qquad (L)\int\limits_a^b \Phi_i \xrightarrow[i\to\infty]{} (L)\int\limits_a^b M$$

Тогда

$$S_i - s_i \xrightarrow[i\to\infty]{} (L)\int\limits_a^b (M-m)$$

Начинаем доказывать теоремы

1. Как мы знаем из свойств интеграла

$$f \in R[a;b] \Leftrightarrow f \text{ ограничена} \wedge S_i - s_i \to 0$$

   При этом второе равносильно тому, что f ограничена и $(L)\int\limits_a^b (M-m) = 0$, а это равносильно тому, что M и m совпадают почти везде, что равносильно непрерывности f почти везде.

2. $f \in R[a;b] \Rightarrow f = M = m$ почти везде, а значит f измеримо по Лебегу (а так как ещё верна ограниченность f, $f \in L[a;b]$).
   Осталось лишь доказать равенство интегралов.
   С одной стороны s_i стремится к $(R)\int\limits_a^b f$, а с другой — к $(L)\int_a^b m = (L)\int_a^b f$.

☐

Кратные и повторные интегралы.

Замечание. Напоминание: μ_n — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$. Также лень писать $\int_E f(x)\ \mu_n(x)$, вместо этого будем писать $\int_E f(x)$ x. Также последнее пишут так:

$$\int \cdots \int_E f(x_1; \ldots; x_n)\ \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$$

Также пишут вещи наподобие

$$\iiint\limits_E f(x; y; z)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Напоминание: сечением множества $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ элементом $x \in \mathbb{R}^n$ называется $E(x) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid x \in E\}$.

Теорема 33 (Восстановление меры множества по мерам сечений (оно же принцип Кавальери))**.** *Пусть $E \in \mathbb{A}_{n+m}$. Тогда*

1. *При почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ $E(x) \in \mathbb{A}_m$.*
2. *Функция, которая почти каждому x сопоставляет $\mu_m E(x)$ измерима в $\mathbb{R}^n$.*
3. *$\mu_{n+m}E = \int_{\mathbb{R}^n} \mu_m E(x)\ \mathrm{d}x$.*

Доказательство. Доказывать будем, постепенно усложняя E.

a. Пусть E — ячейка ($n+m$-мерная). Обозначим её буквой Δ. $\Delta = \Delta^{(n)} \times \Delta^{(m)} \mid \Delta^{(n)} \in \mathbb{R}_n, \Delta^{(m)} \in \mathbb{R}_m$. Здесь легко написать сечение.

$$\Delta(x) = \begin{cases} \Delta^{(m)} & x \in \Delta^{(n)} \\ \varnothing & x \in \Delta^{(n)} \end{cases}$$

Это множество измеримо при всех x,

$$\mu_m \Delta(x) = \mu_m \Delta^{(m)} \chi_{\Delta^{(n)}}(x)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mu_m \Delta(x)\ \mathrm{d}x = \mu_m \Delta^{(m)} \mu_n \Delta^{(n)} = \mu_{n+m}\Delta$$

b. Пусть E открыто (обозначим его буквой G). Тогда его можно представить в виде счётного объединения дизъюнктных кубических ячеек:

$$G = \bigsqcup_k \Delta_k$$

Заметим, что из определения сечения

$$G(x) = \bigsqcup_k \Delta_k(x)$$

$\Delta_k(x)$ измеримы, счётное их объединение измеримо.
Отсюда

$$\mu_m G(x) = \sum_k \mu_m \Delta_k(x)$$

Эта функция измерима как сумма ряда измеримых функций. Теперь проинтегрируем

$$\int_{\mathbb{R}^n} G(x)\ \mathrm{d}x \overset{6.1}{=} \sum_k \int_{\mathbb{R}^m} \mu_m \Delta_k(x)\ \mathrm{d}x = \sum_k \mu_{n+m}\Delta_k = \mu_{n+m}G$$

c. Пусть теперь $E = K$ — множество типа G_δ конечной меры. По определению типа G_δ

$$K = \bigcap_{k=i}^{\infty} G_k \mid G_k \text{ открыты}$$

Не уменьшая общности можно считать, что $G_{k+1} \subset G_k$ (иначе берём $\widetilde{G_k} = G_1 \cap G_2 \cap \dots \cap G_k$) и что $\mu_{n+m} G_1 < +\infty$ (иначе по регулярности меры Лебега подберём такое $G_0 \supset K : \mu_{n+m} G_0 < \mu_{n+m} K + 1$, после чего $\widetilde{G_k} = G_k \cap G_0$).

$$K(x) = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k(x)$$

Тогда

$$G_k(x) \in \mathbb{A}_m$$

Следовательно $K(x) \in \mathbb{A}_m$.
Хорошо. Тогда заметим, что $G_{k+1}(x) \subset G_k(x)$. Далее:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mu_m G_1(x) \, \mathrm{d}x = \mu_{n+m} G_1 < +\infty$$

Значит почти везде $\mu_m G_1(x) < +\infty$. То есть при почти всех x

$$\mu_m K(x) = \lim_{N \to \infty} \mu_m G_N(x)$$

То есть $K(x)$ измеримо как преде измеримых (по полноте меры Лебега).
Проверим формулу:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mu_m K(x) \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}_n} \lim_{N \to \infty} \mu_m G_n(x) \, \mathrm{d}x \overset{28}{=} \lim_{N \to \infty} \int_{\mathbb{R}_n} \mu_m G_N(x) \, \mathrm{d}x = \lim_{N \to \infty} \mu_{n+m} G_N \overset{1}{=} \mu_{n+m} K$$

d. Докажем теорему для множества нулевой меры $E = e$. Измеримое по Лебегу множество можно заключить в множество типа G_δ той же меры:

$$\exists K \ \mu_{n+m} K = 0, e \subset K$$

Тогда $e(x) \subset K(x)$. По предыдущему пункту $0 = \mu_{n+m} K = \int_{\mathbb{R}^n} \mu_m K(x) \, \mathbb{d}x$, следовательно почти везде $\mu_m K(x) = 0$. А значит и $\mu_m e(x)$ почти везде равно нулю. А значит $e(x) \in \mathbb{A}_n$ почти всегда равно нулю, а $x \mapsto \mu_m e(x)$ измерима как эквивалентная нулю. Остаётся проверить формулу интеграла

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mu_m e(x) \, \mathrm{d}x = 0 = \int_{\mathbb{R}^n} \mu_m K(x) = \mu_{n+m} K = 0 = \mu_{n+m} e$$

e. Рассмотрим произвольное множество E конечной меры. Поместим его в множество типа G_δ.

$$\exists K \text{ типа } G_\delta \ E \subset K, \mu_{n+m}(K \setminus E) = 0$$

Обозначим $K \setminus E = e$. Тогда $E(x) \subset K(x)$, $K(x) \setminus E(x) = e(x)$.
При почти всех x $\mu_{n+m} e(x)$ измеримо и имеет нулевую меру, отсюда $E(x) = K(x) \setminus e(x) \in \mathbb{A}_m$ при почти всех x. $\mu_n E(x) = \mu_n K(x)$ при почти всех x, а по доказанному ранее второе измеримо, а также

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mu_m E(x) \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \mu_m K(x) \, \mathrm{d}x = \mu_{n+m} K = \mu_{n_m} E$$

f. Пусть $\mu_{n+m} E = +\infty$. Представим E в виде счётного объединения множеств конечной меры:

$$E = \bigcup_{p=1}^{\infty} \underbrace{E \cap [-p\mathbb{1}; p\mathbb{1})}_{E_p}$$

Тогда $E_{p+1} \supset E_p$. Заметим, что

$$E(x) = \bigcup_{p=1}^{\infty} E_p(x)$$

А $E_p(x) \in \mathbb{A}_m$ при почти всех x (а значит при почти всех x все они $\in \mathbb{A}_m$), то есть и $E(x) \in \mathbb{A}_m$ почти всегда.
Второе:

$$\mu_m E(x) = \lim_{N\to\infty} \mu_m E_p(x)$$

А значит $E(x)$ измеримо как предел измеримых.

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mu_m E(x)\ \mathbb{R}^n = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{N\to\infty} \mu_m E_N(x)\ \mathrm{d}x \overset{23}{=} \lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \mu_m E_N(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty} \mu_{n+m} E_N \overset{1}{=} \mu_{n+m} E$$

□

Замечание. Если $\mu_{n+m}E(x) < +\infty$, то для почти всех точек $x \in \mathbb{R}^n$ $\mu_m E(x) < +\infty$.

Замечание. Словосочетание «почти везде» существенно.
Для подтверждения этого возьмём e — неизмеримое в $\mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда $\{x\} \times e$ имеет меру ноль, но $E(x)$ не измеримо.

Пример. Мера шара.
Пусть $\overline{B}_n(a, R) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x-a| \leqslant R\}$. $\mu_n \overline{B}_n(a; R)$. Поскольку мера Лебега инвариантна относительно сдвига, от a результат не зависит, а значит можно считать $a = \mathbb{0}$. Также мы знаем, как мера ведёт себе при гомотетии: $\mu_n \overline{B}_n(\mathbb{0}; R) = R^n \mu_n \overline{B}_n(\mathbb{0}; 1)$. Обозначим $V_n = \mu_n \overline{B}_n(\mathbb{0}_n; 1)$

$$B_n(x_n) = \begin{cases} \varnothing & |x_n| > 1 \\ \overline{B}_{n-1}(\mathbb{0}_{n-1}; 1) & |x_n| \leqslant 1 \end{cases}$$

То есть

$$V_n = \int\limits_{-1}^{1} \mu_{n-1}(\overline{B}_{n-1}(\mathbb{0}_{n-1}; \sqrt{1-x_n^2}))\ \mathrm{d}x_n = V_{n-1} \int\limits_{-1}^{1} (\sqrt{1-x^2})^{n-1}\ \mathrm{d}x = 2V_{n-1} \frac{(n-1)!!}{n!!} \begin{cases} 1 & n \not\vdots\, 2 \\ \frac{\pi}{2} & n \vdots\, 2 \end{cases}$$

Имеем рекуррентное соотношение $V_n = 2I_n V_{n-1}$. Умеем считать $V_1 = 2$. То есть

$$V_n = 2^{n-1} \left(\prod_{k=2}^{n} I_k \right) \cdot 2 = 2^n \frac{1}{n!!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

Замечание. Для открытого шара имеем тот же ответ.

Теорема 34. *Пусть $A \in \mathbb{A}_n$, $B \in \mathbb{A}_m$, тогда $A \times B \in \mathbb{A}_{n+m}$ и $\mu_{n+m} A \times B = \mu_n A \mu_m B$.*

Доказательство. Если измеримость была бы нам известна, то формула была бы понятна по принципу Кавальери:

$$(A \times B)(x) = \begin{cases} B & x \in A \\ \varnothing & x \notin A \end{cases}$$

Для открытых и для замкнутых A, B очевидно (произведение двух открытых открыто, произведение двух замкнутых замкнуто, произведение открытого на замкнутое: замкнутое — разность двух открытых).
Для всех остальных множеств будем приближать. Для начала пусть $\mu_n A < +\infty$, $\mu_m B < +\infty$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists G_1, G_2 \text{ открытые}, F_1, F_2 \text{ замкнутые } \mu_n(G_1 \setminus F_1) < \varepsilon, \mu_m(G_2 \setminus F_2) < \varepsilon, F_1 \subset A \subset G_1, F_2 \subset B \subset G_2$$

Тогда

$$F_1 \times F_2 \subset A \times B \subset G_1 \times G_2$$

А

$$E = G_1 \times G_2 \setminus F_1 \times F_2 = ((G_1 \setminus F_1) \times F_2) \cup (F_1 \times (G_2 \setminus F_2)) \cup ((G_1 \setminus F_1) \times (G_2 \setminus F_2))$$

Тогда

$$\mu_{n+m} E \leqslant \varepsilon \mu_m F_2 + \varepsilon \mu_n F_1 + \varepsilon^2 \leqslant \varepsilon \mu_m B + \varepsilon \mu_n A + \varepsilon^2$$

По критерию измеримости $A \times B \in \mathbb{A}_{n+m}$.
Для $\mu_n A = +\infty$ или $\mu_m B = +\infty$ пользуемся

$$A = \bigcup_i A_i, B = \bigcup_j B_j \qquad \mu_n A_i, \mu_m B_i < +\infty$$

Тогда

$$A \times B = \bigcup_{i,j} (A_i \times B_j)$$

Что измеримо по доказанному. □

Пример. Мера конуса.
Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ — основание конуса, h — высота конуса, $a = (\mathbb{0}_n; h)$ — вершина конуса. Тогда

$$K = \{(\lambda\xi; (1-\lambda)h) \mid \xi \in E, \lambda \in [0;1]\}$$

Хочется сказать, что если E измеримо в $\mathbb{R}^n$, то K измеримо в $\mathbb{R}^{n+1}$. $\Phi(\xi;\lambda) = (\lambda\xi; (1-\lambda)h)$ гладкое, $E \times [0;1]$ измеримо, отсюда и $K = \Phi(E \times [0;1])$ измеримо.

$$K(z) = \begin{cases} \left(1 - \frac{z}{h}\right) E & z \in [0;h] \\ \varnothing & z \notin [0;h] \end{cases}$$

$$\mu_{n+1} K = \int_{\mathbb{R}} \mu_n K(z)\, \mathrm{d}z = \int\limits_0^h \left(1 - \frac{z}{h}\right)^n \, \mathrm{d}z \mu_n E = h \int\limits_0^1 (1-t)^n \, \mathrm{d}t \mu_n E = \frac{h}{n+1} \mu_n E$$

Определение 36.

$$S_n(a) = \left\{ x \;\middle|\; x_k \geqslant 0, \sum_{k=1}^n x_k \leqslant a \right\}$$

При $a > 0$ называется n-мерным **стандартным симплексом**.

Свойство 36.1.

$$\mu_n S_n(a) = \frac{a^k}{n!}$$