

Заметки практики по матанализу (самые разные семестры)

Латыпов Владимир (конспектор)

t.me/donRumata03, github.com/donRumata03, donrumata03@gmail.com

Семёнова Ольга Львовна (препод)

15 марта 2023 г.

Содержание

1	Пределы	5
1.1	Таблица эквивалентности	5
2	Дифференциальное исчисление одной переменной	5
2.1	Использование первой и второй производной для построения картины функции и её поведения у себя в голове и последующего её перенесения на бумагу	5
2.2	Оптимизация функций через поиск и проверку критических точек с помощью производной, например, параметры геометрических фигур	5
3	Интегральное исчисление одной переменной	5
3.1	Символьное вычисление неопределённых интегралов . .	5
3.2	Определённые интегралы	7
3.3	Несобственные интегралы	7
4	Числовые ряды	8
5	Функциональные ряды	8
5.1	Исследуем равномерную сходимость	8
5.2	Доказываем отсутствие равномерной сходимости	9
5.3	Свойства равномерно сходящихся	10
5.4	Степенные ряды	10
6	Функции нескольких переменных	12
6.1	Берём пределы	12
6.2	Разница между повторным и двойным пределом	12
6.3	Дифференцирование, частные производные	14
6.4	Дифференцируем неявно заданные отображения	17
6.5	Дифференцируем системы-неявно заданные отображения	18
6.6	Замена переменной в дифференциальных уравнениях .	19
6.7	Поиск экстремумов	19
7	Теория функции комплексной переменной	20
7.1	Интегральная формула Коши	21
7.2	Интегрирование по частям, разложение в ряд и замена переменной	21
7.3	Вычисление вычетов, теорема Коши о сумме вычетов . .	21
7.4	Вычеты на бесконечности	22

7.5	Сведение интегралов вещественных функций к комплексным интегралам по контуру	23
8	Интегралы Лебега в \mathbb{R}	25
8.1	Приёмы вычисления	25
8.1.1	Теоремы Тонелли и Фубини	25
8.1.2	Замена переменной	25
8.1.3	Граница задана параметрически	26
8.2	Вычисление площадей, объёмов	26
8.3	Тройные интегралы	27
8.4	4-х и более, но const- кратные интегралы	27
8.5	n-кратные интегралы	27

Здесь можно вспомнить, чем мы всё это время занимались на практике.

«Стенограмма» практик в виде серии фотографий доски (насколько возможно оперативных) есть в телеграм «чатике с домашкамм» начиная с этого сообщения: <https://t.me/c/1512041988/198>.

В этом же документе содержится список методов, подходов и трюков, которые мы учимся применять на практике.

Крайне полезного освежать его в памяти перед контрольной по отношению к актуальной теме, а также в любой момент по отношению к давнему материалу.

Контрибьютинг всячески приветствуется, благо на Github делать это максимально удобно. Если вы решили, например, в какой-то момент пролистать свой конспект и вспомнить былое — добавьте в этот конспект то, чего нет здесь — помогите товарищам. Или, если что-то написанное здесь настолько вопиюще неверное, что режет ваши глаза и вызывает желание как можно быстрее это пофиксить — вперёд.

Насчёт технических деталей — в README описано по шагам, что надо установить, чтобы компилировать конспект у себя на компьютере, однако ничего не мешает дописать сюда в обычном текстовом редакторе нечто отдалённо напоминающее латех и послать Pull Request — я исправлю, если что-то не будет компилироваться.

Конспект организован по темам, в том порядке, в котором мы их проходим на практиках. Кроме того, примерно расставлены разделения, где заканчивается предыдущая практика и начинается следующая, но могут быть неточности, так как отдаётся приоритет организации по темам.

На данный момент такая картина готовности тем:

- Пределы — почти ничего
- Производные — совсем мало
- Интегралы — довольно полно, но тезисно
- Числовые ряды — вообще ничего
- Функциональные ряды — подробно
- Функции нескольких переменных — сами практики в процессе

1. Пределы

1.1. Таблица эквивалентности

Отличная ссылка на таблицу эквивалентности с нужными доказательствами: <http://mathserfer.narod.ru/node22.html>

Альтернативный вариант: <https://ib.mazurok.com/2013/05/19/table-equ/>

2. Дифференциальное исчисление одной переменной

2.1. Использование первой и второй производной для построения картины функции и её поведения у себя в голове и последующего её перенесения на бумагу

А именно:

- Находим область определения
- Смотрим поведение на границах области определения (значения, предел, асимптоты)
- Первая производная \implies делаем вывод о промежутках возрастания/убывания, экстремумах
- Вторая производная \implies выпуклость, точки перегиба

2.2. Оптимизация функций через поиск и проверку критических точек с помощью производной, например, параметры геометрических фигур

3. Интегральное исчисление одной переменной

3.1. Символьное вычисление неопределённых интегралов

- Таблица интегрирования основных элементарных функций
- Базовые приёмы интегрирования: замена переменной, интегрирование по частям

- Тригонометрические и гиперболические подстановки
- Интегрирование по индукции, если функция содержит целочисленный параметр
- Сведение интеграла самого к себе, например, $\sqrt{x^2 + a^2} \rightarrow \frac{t}{\sqrt{x^2 + a^2}}t + \dots \rightarrow$ по частям.
- Выделение полного квадрата под корнем или не под корнем в знаменателе, избавление от линейного члена
- Если есть подвыражения вида $x + a$, замена переменной $t = \frac{1}{x+a}$
- Выделение в числителе производной знаменателя, например, https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%98%D0%BD%D1%82%D0%B5%D0%B3%D1%80%D0%B8%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5_%D1%80%D0%B0%D1%86%D0%B8%D0%BE%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D1%85_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B9#%D0%98%D0%BD%D1%82%D0%B5%D0%B3%D1%80%D0%B8%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5_%D0%B4%D1%80%D0%BE%D0%B1%D0%B5%D0%B9_%D0%B2%D0%B8%D0%B4%D0%B0_%7F'%22%60UNIQ--postMath-0000007E-QINU60%22'%7F.
- Рациональные функции: разложение на простейшие, далее элементарно, больше второй степени не получится
- Функции вида $R\left(x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}\right)$ через замену переменной на весь корень.
- Подстановки Эйлера: $R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)$. В зависимости от коэффициентов нужно выбрать правильное t . Случаи могут быть пересекаться. Для функции подходят все те случаи, под условия которых она подходит:
 1. При $a > 0$: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm t \pm \sqrt{a}x$
 2. При $c > 0$: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm t \pm \sqrt{a}x$
 3. При наличии двух вещественных корней: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm t(x - \lambda)$, где λ — один из корней
- Интегрирование дифференциальных биномов

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx = \left[\begin{array}{l} z = x^n \\ dx = \frac{1}{n} z^{\frac{1-n}{n}} dz \end{array} \right] = \frac{1}{n} \int z^{\frac{m}{n} + \frac{1-n}{n}} (a + bz)^p dz \quad (3.1)$$

$$q = \frac{m}{n} + \frac{1-n}{n} \quad (3.2)$$

3 случая интегрируемости:

1. $p \in \mathbb{Z}, q = \frac{1}{N}$: $t = z^{\frac{1}{N}}$, выражаем получаем $R(t)$. Профит.
- Тригонометрические подстановки в рациональных функциях $R(\cos x, \sin x)$:
 - Если $R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x, \sin x)$ (нечётно относительно \cos), можно $t = \sin x$
 - Если $R(\cos x, -\sin x) = -R(\cos x, \sin x)$ (нечётно относительно \sin), можно $t = \cos x$
 - Если $R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x)$ (чётно по обоим вместе), можно $t = \tan x$
 - Наконец, универсальное, $t = \tan \frac{x}{2}$ работает всегда, через неё легко выражаются $\sin, \cos, \frac{dt}{dx}$.
- Похожая шняга получается и с $R(\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x)$
- Линейное выражение числителя через знаменатель и его производную, решение системы уравнений

3.2. Определённые интегралы

- Формула Ньютона-Лейбница
- Замена переменной, если особые точки не появляются, ничего не портит
- При интегрировании по частям надо смотреть, чтобы сумма частей имела смысл в \mathbb{R} .

3.3. Несобственные интегралы

- Взятие предела для несобственных интегралов, если получается сделать это в явном виде

- Рассмотрение «особенных» точек, их может быть несколько
- Анализ сходимости: сначала проверяем абсолютную, потом относительную
- Критерий Коши (если любое значение после некоторого A не превышаете ни на каком промежутке в \mathbb{R}).
- Разбиение промежутка на несколько
- Использование асимптотического анализа для определения абсолютной сходимости
- Дирихле и Абель — позволяют сделать вывод об абсолютной сходимости функции, представленной произведением
 - Дирихле: первая имеет ограниченную первообразную, вторая — монотонно $\square 0$, тогда сходится
 - Абель: первый интеграл сходится, вторая монотонна и ограничена, тогда тоже сходится
- Разложение подинтегральной функции в ряд Тейлора: спросить у кого-то

4. Числовые ряды

5. Функциональные ряды

🌀 Практика 5 сентября 2022 🌀

Фотоотчёт за практику: <https://t.me/c/1512041988/198>

Pro tip: для $\alpha < \frac{\pi}{2}$ — $\sin \alpha > \alpha \frac{2}{\pi}$ за счёт выпуклости.

5.1. Исследуем равномерную сходимость

- Если можем посчитать «колебание» (супремум отклонения на всём множестве E при фиксированном n), то проанализируем, стремится ли оно к нулю при $n \rightarrow \infty$.
- Признак Вейерштрасса (мажорантная сходимость для рядов): находим равномерную норму каждого члена, если ряд норм сходится, то анализируемый ряд — тоже.

- Критерий Больцано-Коши (равносильно равномерной сходимости). Сходимость в себе, работает для
- Признак Дирихле (равномерная сходимость ряда произведений). У одного частичные суммы **равномерно ограничены**, другой стремится к нулю и монотонен по n с некоторого номера при каждом фиксированном x . (Теперь везде не забываем добавлять «равномерно»).
- Признак Абеля (равномерная сходимость ряда произведений). Тут у первого частичные суммы должны быть **не равномерно ограничены, а равномерно сходиться**, но зато второму достаточно просто быть равномерно ограниченным (и всё ещё монотонным).
- Следствие: Лейбниц — сумма знакопеременного, монотонно равномерно сходящегося к 0 ряда со знакопеременанием ряда — равномерно сходится.

Ещё pro tip:

$$\left| \sum_{k=1}^N \sin k\alpha \right| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{\alpha}{2} \right|} \quad (5.1)$$

$$\left| \sum_{k=1}^N \cos k\alpha \right| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{\alpha}{2} \right|} \quad (5.2)$$

5.2. Доказываем отсутствие равномерной сходимости

Если не сходится поточечно где-то, рассматривать не интересно.

- Не на компакте: если замыкание не сходится даже поточечно (на границах)
- Если не выполняется хотя бы одно необходимое условие из секции 5.3 при выполнении остальных предпосылок теоремы
- Если можно посчитать в явном виде
- Можно оценить остаток через интеграл, если есть монотонность по n и момент, с которой она начинается, не зависит от x — и сказать через него, что найдётся ε , что для любого n найдётся плохой x .
- Можно сделать то же через критерий Больцано-Коши.

☞ Практика 12 сентября 2022 ☞

Фотоотчёт за практику: <отсутствует>.

5.3. Свойства равномерно сходящихся

При равномерной сходимости можно производить перестановку пределов, из неё получаем возможность заключить непрерывность предела, получаем перестановочность интегрирования и дифференцирования.

Однако это всё получается и при более вольных условиях, но они более сложные, мы их не изучали.

☞ Практика 19 сентября 2022 ☞

Фотоотчёт за практику: <https://t.me/c/1512041988/208>.

5.4. Степенные ряды

Ряды вида $\sum_{i=1}^{\infty} c_i (z - z_0)^i$.

Умеем искать радиус сходимости (это шар, внутри гарантированно сходится, снаружи — не менее гарантированно расходится, а на границе — надо думать, анализировать дальше).

- Коши (база, работает всегда): $R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$
- Даламбер (иногда работает и он, если существует): $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$

Потом можем использовать степенные ряды как составные части для анализа произвольных рядов.

Раскладываем в ряд Тейлора:

Разложить можем, чтобы в пределе все производные совпадали, но когда она будет совпадать с самой функцией на каком-то промежутке?

Оказывается, что достаточно комплексной дифференцируемости в $B_R(z_0)$ — тогда существует единственный набор коэффициентов степенного ряда с заданным центром, с пределом которого функция совпадает — и коэффициенты тогда находятся через Тейлора.

Note: для комплексной дифференцируемости выполняются все естественные свойства обычной: замкнутость относительно арифметических операций, дифференцируемость элементарных функций, производная локальной обратимой функции и т.д.

Разложение элементарных функций в степенной ряд было на доске..

Как раскладывать в степенные ряды?

- Честно, через производные по Тейлору
- Раскладывать в произведение — перемножать ряды
- В круге сходимости дифференцировать можно почленно — замечаем, что ряд является интегралом чего-то хорошего — и дифференцируем его ряд.
- Аналогично — если является производной чего-то хорошего
- Можно пользоваться тем, что сумма ряда равна функции в круге сходимости. Например,

$$\frac{1}{x - x_0} = \frac{1}{-x_0} \left(\frac{1}{1 - \frac{x}{x_0}} \right) = -\frac{1}{x_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{x_0} \right)^k \quad (5.3)$$

❧ Практика 26 сентября 2022 ❧

Фотоотчёт за практику: <https://t.me/c/1512041988/216>

Если у нас уже есть ряд, и надо проанализировать, какую функцию он описывает или его свойства.

- Для анализа сходимости можно посмотреть на коэффициент, как всегда.
- Можно применить метод божественного озарения и, например, продифференцировать, умножить на какую-то сдвигающую скобку и заметить, что получилось нечто содержащее исходный ряд, получив диффуру...

Признак сходимости обычных, положительных рядов, обобщающий признак Д'Аламбера — признак Гаусса:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right), \varepsilon > 0 \quad (5.4)$$

Тогда при $\lambda > 1$ — сходится, если $\lambda < 1$ — расходится, иначе (при $\lambda = 1$) — $\mu > 1$ — сходится, $\mu \leq 1$ — расходится.

6. Функции нескольких переменных

6.1. Берём пределы

Какие механизмы?

- По Коши/окрестностям: для окрестности результатов найдётся окрестность аргументов, такая что каждый студент знает, какая.
- По Гейне — вдоль любой последовательности, стремящейся к x_0 по D
 $\{x_n\} f(x_n) \rightarrow A$
- Эквивалентно (тривиально — про Коши) — $\sup_{x \in \dot{V}_\delta(x_0) \cap D} |f(x) - A| \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$

6.2. Разница между повторным и двойным пределом

У «хороших» функций, конечно, их существование эквивалентно и они равны. Наверное, Липшицевости достаточно. Также, (по теореме о двойном пределе) если существует конечный или бесконечный двойной предел, а также для каждого фиксированного x' в окрестности существует конечный предел сужения $\varphi(y) = f(x', y)$, то пределы равны. Но вообще могут быть такие варианты:

- Двойной существует, а $\forall x \neq x_0$ не существует даже внутренняя часть повторного предела
- Может не существовать двойной, и это можно доказать по Гейне, показав две последовательности, вдоль которых пределы не равны
- Может стремиться к 0 вдоль любого луча от 0 к ∞ , но не быть бесконечно малой на $x, y \rightarrow +\infty$. Например, $f(x, y) = x^2 e^{-(x^2 - y)}$

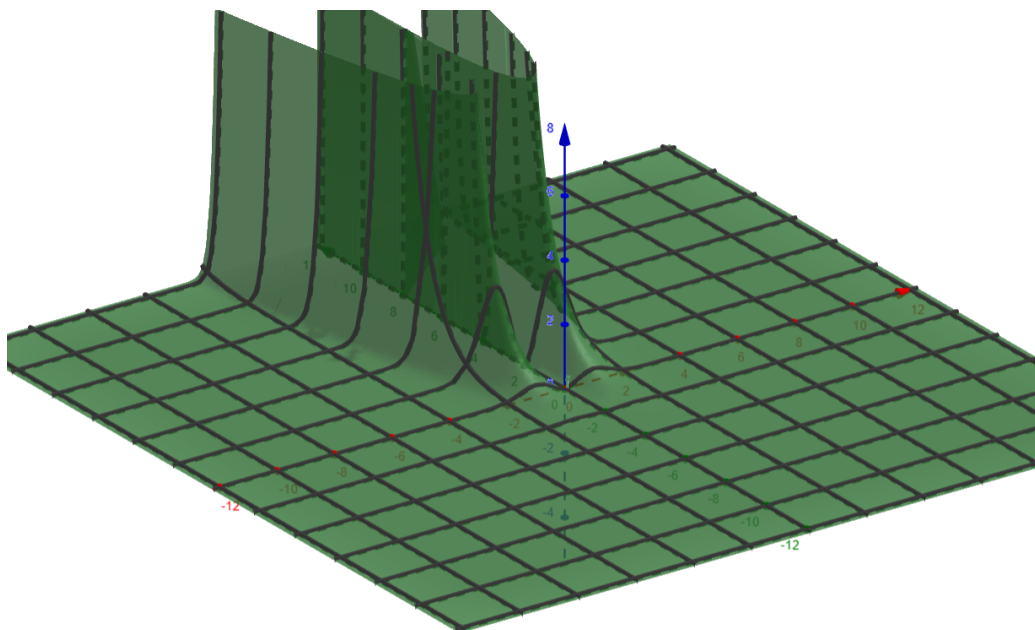


Рис. 1: Та самая $f(x, y) = x^2 e^{-(x^2 - y)}$

Примеры с разбором есть в фотоотчёте практики 26.09: <https://t.me/c/1512041988/216>.

🌀 Практика 10 октября 2022 🌀

Фотоотчёт за практику: ...

Как доказать существование предела функции, например, на $+\infty, +\infty$?

В определении предела фигурирует окрестность точки $+\infty, +\infty$, то есть

$$\begin{cases} x > \varepsilon \\ y > \varepsilon \end{cases} \quad (6.1)$$

В отличие от просто $\|x, y\| \rightarrow \infty$, когда .

- Нужно оценить супремум отклонения от предела при $x > \varepsilon, y > \varepsilon$.
- К полярным координатам и оценить супремум по некоторой части сферы (для $+\infty, +\infty$, казалось бы — по $\varphi \in (0, \pi/2)$). Но по идее, это будет корректно, так как там x может быть сколь угодно

малым. Наверное, надо сузить угол до компактного подмножества $[\alpha, \beta] \subset (0, \pi/2)$. И оценить зависимость супремума по φ от r . Особые извращения будут искать супремум через Лагранжа.

6.3. Дифференцирование, частные производные

Дифференцируема $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ представима в виде $f(x_0) + Ah + o(|h|)$, где A — линейный оператор ($A \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m)$). Частная производная — производная направлению вектора-орта.

Иногда вектор частных производных равен вектору производному оператора.

Есть необходимое и достаточное условия.

Теорема 1 (Базированная теорема о производных). *У нормальных функций всё будет нормально.*

Если быть точнее — для дифференцируемости достаточно существования в окрестности и непрерывности в точке частных производных по каждой переменной. Но не необходимо, так как, например, у функции $f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & (x \in \mathbb{Q}) \text{ xor } (y \in \mathbb{Q}) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ частные производные вообще не определены ни в каких точках кроме нуля, что уж там говорить о непрерывности.

А для равенства частных производных по разным перестановкам одной и той же последовательности переменных достаточно (но не необходимо) существования и непрерывности всех рассматриваемых частных производных в окрестности. (Фактически, в теореме было про r раз непрерывную дифференцируемость, то есть вообще по любой последовательности из r переменных).

Как искать частные производные? Если функция представлена в виде композиций элементарных функций, считаем по формулам, фиксируя остальные переменные — воспринимая их как параметры.

Если мы уже посчитали частные производные по всем переменным, то проверить дифференцируемость самой функции можно так:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - \langle \nabla f, h \rangle}{\|h\|} \rightarrow 0 \quad (6.2)$$

Но вообще — частная производная всё ещё может существовать, даже если по формулам посчитать не получается (формулы-то применимы только там, где всё определено). Если нет — тогда можем находить их как производные по направлению. Пример:

$$f(x, y) = \sqrt[3]{xy} \quad (6.3)$$

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0 \quad (6.4)$$

Попробуем применить критерий выше: вдруг этот градиент $(0, 0)$ — и есть производная?

$$\frac{\sqrt[3]{xy} - 0 - 0}{\sqrt{x^2 + y^2}} \rightarrow ? 0 \quad (6.5)$$

Для $x = y$ — стремится к бесконечности, хотя по лучу $x = 0$ или $y = 0$ и ноль, ни о каком стремлении к нулю говорить не приходится.

Для более сложных функций можно представлять их как композицию, заводя переменную для одной из её частей.

Например,

$$u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, u'_{x,y} \text{ — ?}, u'_{xx,xy,yy} \text{ — ?} \quad (6.6)$$

(в нижних индексах через запятую — все частные производные, которые требуется найти).

Обозначим $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $u = r^{-1}x$.

Находим r'_x, r'_y . Тогда $u'_x = (r^{-1})'_x x + r^{-1} \overset{1}{x}'_x = \dots$

Если у нас какая-то большая функция, то частная производная композиции выражается через сумму — как элемент произведения матриц Якоби.

Хозяйке на заметку: $d\left(\frac{x}{y}\right) = d\left(\frac{ydx - xdy}{y^2}\right)$.

Ещё на заметку: важно отличать d^2t от dt^2 (последнее является обозначением для $(dt)^2$).

Первое — второй дифференциал функции (для независимой переменной — это просто ноль, для них никто так не пишет). Второе — приращение переменной, возведённой в квадрат.

Как искать полные дифференциалы разных порядков?

Можно воспользоваться определением, возникшим из Тейлора — там сумма по всем мультииндексом k порядка l .

Для двумерной переменной достаточно перебирать в суммировании степень вхождения приращения одной из переменных:

$$d^n f = \sum_{k=0}^n \frac{n! f'_{x^k y^{n-k}}}{k!(n-k)!} (dx)^k (dy)^{n-k} \quad (6.7)$$

Например, $df = f'_x dx + f'_y dy$,

$$d^2 f = f''_{x^2} dx^2 + 2f''_{xy} dx dy + f''_{y^2} dy^2$$

Но на практиках матанализа дифференциалы первого-второго порядка так не считают, а в «символьном» виде, имея полный дифференциал предыдущего порядка и применяя втупую формулу дифференцирования, получают желаемую формулу.

При этом первый дифференциал рассматривают как отображение с той же сигнатурой, что и исходная функция, считая, что dx_i берётся то же самое.

Причём

$$\begin{aligned} d(g(x, y) dx + h(x, y) dy) &= (g(x, y) d(dx) + dg(x, y) dx) + (h(x, y) d(dy) + dh(x, y) dy) = \\ &= \left[d(dx) = d^2 x = (dx)'_x dx + (dx)'_y dy = 0 \leftarrow dx = \text{const everywhere} \Rightarrow (dx)'_x = 0 \right] = \\ &= \left[\begin{aligned} dx dx &= (dx)^2 \stackrel{\text{def}}{=} dx^2 \\ dg(x, y) dx + dh(x, y) dy &= (g'_x dx + g'_y dy) dx + (h'_x dx + h'_y dy) dy \end{aligned} \right] \quad (6.8) \end{aligned}$$

Частные производные функций g и h считаем самостоятельно. Иногда получится, что какие-то из слагаемых нули, когда что-то не зависит от чего-то. И потом приведём подобные слагаемые (например, $dx dy = dy dx$).

Всё это работает для независимых переменных. Но рассмотрим хитрую композицию:

$$u = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right) \quad (6.9)$$

И мы считаем, что знаем «всё, что нужно» про функцию f .

Хотим найти полные дифференциалы du, d^2u (полагая x, y независимыми переменными).

И тут у нас получается, что $d^2s \neq 0$, так как это более не независимая переменная, а функция.

Так что теперь:

$$d^2u = f''_{s^2} ds^2 + (f''_{st} + f''_{ts}) ds dt + f''_{t^2} dt^2 + f'_s d^2s + f'_t d^2t \quad (6.10)$$

Где d^2s — это квадратичная форма (если замена, например, была линейная, она обнуляется).

То есть при $s = \alpha x + \beta y$: $ds = \alpha dx + \beta dy$, тогда:

$$d^2s = d^2xs''_{x^2} + 2 dx dy s''_{xy} + d^2ys''_{y^2} \quad (6.11)$$

И здесь второе слагаемое уже не обнуляется, и в результате получается не ноль, в отличие от независимых переменных.

❧ Практика 17.10.2022 ❧

6.4. Дифференцируем неявно заданные отображения

Есть теорема о неявно заданном отображении: если функция достаточно гладкая и в точке $(x|y)$ оператор Φ'_y , можно найти окрестность, в которой последние переменные (y) выражаются через первые. Более того, через оператор можем выразить производную $\varphi'(x)$ неявно заданного отображения $y = \varphi(x)$ в этой окрестности через матричные выражения.

Однако, если мы знаем что-то о функции и хотим записать короче, без лишних нулей или просто не хотим возиться с матрицами, можем получить частные производные (причём и высших порядков тоже) отображения по новым переменным. Для этого надо дифференцировать тождество $\Phi(x, \varphi(x)) \equiv 0$ по разным переменным, выражая все частные производные очередного порядка по очереди.

Можно оформить это через дифференциалы очередного порядка. Главное — не забыть, что в тождествах $d^k(\Phi(x, \varphi(x))) \equiv 0$ переменные, y_i надо рассматривать как функции, а не независимые переменные, у которых есть ненулевые дифференциалы высших порядков.

WARNING: Простые равенства дифференцировать нельзя, только тождества (равенство должно выполняться в окрестности, чтобы все производные совпадали — они обладают свойством локальности, но требуют, чтобы точка была точкой сочленения... кхм внутренней).

Например, $F(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2) = 0$, найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

6.5. Дифференцируем системы-неявно заданные отображения

Фактически — это всё ещё неявные отображения, просто со значениями в \mathbb{R}^{n+m} , где .

Мы можем захотеть выразить дифференциал какого-то порядка одной части через дифференциалы других (ну или найти производные одних по другим) — из предположения, что вторая часть — взяты за независимые переменные.

«Инвариантность дифференциалов первого порядка относительно изменения зависимых и независимых переменных»: то есть не важно, какие переменные выбраны за независимые, дифференциалы удовлетворяют одному и тому же отношению. Например, $\psi(x, y, z) = 0$; $z = \varphi(x, y)$ — неявное отображение, $dz = \varphi'_x dx + \varphi'_y dy$ — соотношение дифференциалов. Если будет $x = \xi(y, z)$ удовлетворяет — тому же самому неявному отображению, но теперь зависимая переменная — x , то соотношение $dx = \xi'_y dy + \xi'_z dz$ — будет то же самое. (из теоремы о неявном отображении $\varphi'(x) = -(\Phi'_y(x, y))^{-1} \Phi'_x(x, y) \Big|_{y=\varphi(x)}$)

А вот для дифференциалов высшего порядка — такого нет. Дифференциалы высших порядков от зависимой переменной могут быть $\neq 0$. Например

☞ Практика 24.10.2022 ☞

Параметризация сферы через два угла:

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \theta. \end{cases} \quad (6.12)$$

, где $r \geq 0$, $\Theta \in [0, \pi]$, $\Theta \in [0, 2\pi)$

6.6. Замена переменной в дифференциальных уравнениях

Если хотим взять за переменную y вместо x , нужно выразить $y^{(n)}$ через $x^{(k)}$ и, возможно, y . Раньше искали $f(x) = y$, теперь будем $f^{-1}(y) = x$. Исходим из соотношения $\langle y \rangle (\langle x \rangle (y)) = y$. То есть $\langle y \rangle \circ \langle x \rangle = id_y$.

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}$$

Можно до посинения дифференцировать это тождество и поочерёдно получать производные $x_y^{(n)}$ всё более старших порядков.

Если у нас уравнения с частными производными (а значит есть несколько независимых переменных), выражаем дифференциалы новых переменных через дифференциалы старых. Затем записываем полный дифференциал зависимых переменных и подставляем туда, например, $dx_i =$

6.7. Поиск экстремумов

Необходимое условие — стационарна точка. Может быть

1. Локальный min
2. Локальный max
3. Седловая точка

Если представлена в виде композиции, ...

Регулярная точка — когда ранг производной максимален (то есть сколько уравнений, такой и ранг).

В точке условного экстремума градиент можно представить в виде линейной комбинации градиентов функций-уравнений.

По этому поводу составляют функции Лагранжа: большую и малую.

— Большая — из переменных и уравнений связи в \mathbb{R} . Нужно, чтобы было $\mathcal{L}'(x^*) = 0$ и $\Phi(x) = 0$ — Малая — то же самое, но зависит она только от

7. Теория функции комплексной переменной

- Полная аналитическая функция — класс эквивалентности над парами областей и голоморфных в них функций по отношению аналитической продолжимости вдоль каких-либо компонент связности какой-то цепочки областей, вдоль которой продолжаем.
- Ветви — элементы ПАФ (те самые пары). Наблюдения:
 - максимальные по включению ветви логарифма (как и аргумента) — образы инъективных отображений прямой в плоскость в виде полосы шириной 2π , где $x \in (-\infty, +\infty)$. В частности — полосы шириной 2π .
 - В области существует голоморфная ветвь логарифма, аргумента и *плохой* степенной функции \Leftrightarrow в ней нельзя обойти ноль по контуру. То есть должен быть какой-то «разрез». Этот разрез может быть максимально кривой, петлять, но он должен быть.
- Риманова поверхность (функция на ней непрерывна, непрерывно отображается на плоскость, ПАФ на ней однозначна):
 - При переходе между ветвями ЛОГАРИФМА против часовой стрелки прибавляется $2\pi i$. Причём переход между ветвями может быть в любом месте. При фиксированной области ветви в ней — это $f + 2\pi i k$ и только они, где f — какая-то ветвь в области. $\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z$. Формулы логарифма произведения и частного работают, если все в одной ветви (по крайней мере, в главной ветви точно работают...).
 - ---"---СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИИ против часовой стрелки умножается на $e^{2\pi i k \alpha}$
 - ---"---Аргумента — просто добавляется 2π

☞ На первой практике ещё было про традиционный подход к комплексным интегралам «в лоб» (через параметризацию и производную пути), но это скучно и на контрольной не пригодится ☞

7.1. Интегральная формула Коши

(Не путать с *интегральной теоремой Коши*, у которой 6 формулировок, все про замкнутость формы с голоморфным коэффициентом).

Позволяет вычислять интегралы по границе ограниченной области вида

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} 0, & z \notin \overline{G} \\ f(z), & z \in G \end{cases} \quad (7.1)$$

Формула показывает, что значения в области полностью определяются значениями по контуру, из неё ещё много важных следствий, но можно применять и напрямую для вычисления интегралов такого вида.

7.2. Интегрирование по частям, разложение в ряд и замена переменной

Всё это можно применять к комплексным интегралам, правда, если функции многозначны, то с осторожностью.

При интегрировании рядов (можно делать это почленно в области сходимости) по кругу (и гомотопным ему путям) все слагаемые кроме -1 -го (то есть $c_{-1} \frac{1}{z}$) уничтожаются, остаётся $2\pi i c_{-1}$.

...но не всегда можно явно разложить в ряд. Тогда на помощь приходят:

7.3. Вычисление вычетов, теорема Коши о сумме вычетов

Вычеты — это база, ведь ряд интегрируют почленно, а остальные степени по окружности — ноль. На этом можно и остановиться, но я продолжу.

Основной подход при интегрировании с помощью вычетов: Теорема Коши — $\int_{\partial G} f = 2\pi i \sum \text{res}$. Смотрим все особые точки внутри области, считаем вычеты. На границе (по ней мы интегрируем) особенностей быть не должно.

Как считать вычеты:

- В устранимой особой точке $\text{res} = 0$ (где существует конечный предел, а значит, и прямое аналитическое продолжение)

- Для существенных особых точек простого пути нет — придётся честно полностью раскладывать в ряд и смотреть на коэффициент c_{-1} . Хотя нет, не придётся — на контрольной этого не будет.
- В полюсе m -того порядка (кажись, работает и для всех меньших порядков, то есть для «полюса порядка не больше m »): $\operatorname{res}_{z_0} f = \frac{1}{(m-1)!} ((z - z_0)^m f(z))^{(m-1)} \Big|_{z=z_0}$
- В частности, первого порядка: $\operatorname{res}_{z_0} f = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$.
- Для $f = \frac{P}{Q}$, где z_0 — ноль Q первого порядка, $P(z_0) \neq 0$, и $P, Q \in \mathcal{A}(V_{z_0})$, то $\operatorname{res}_{z_0} f = \frac{P}{Q'} \Big|_{z=z_0}$

Замечание. Вычеты чётных функций в противоположных точках антиравны, а нечётных — равны. Не перепутайте. В частности, в нуле и бесконечности для чётных функций вычеты равны нулю, так как антиравны сами себе.

7.4. Вычеты на бесконечности

Если голоморфна в окрестности бесконечности, в ней раскладывается в ряд Лорана (который перевёрнутый ряд Лорана функции $f \circ \frac{1}{z}$ в нуле), вычет определяется как $-c_{-1}$ нашего ряда, ведь тогда получится, что, как и всегда, вы вычисляем его, обходя бесконечность так, чтобы она оставалась слева: $\operatorname{res}_{\infty} f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^-} f$.

Теорема о полной сумме вычетов говорит, что если бесконечность — *изолированная* особая точка, то полная сумма вычетов (в конечных и. о. т. о. х. и в ∞) равна нулю. Это позволяет в некоторых случаях упростить вычисление суммы вычетов в некоторой области (вместо суммы в тех точках, которые в него входят, — минус сумма тех, которые НЕ входят (включая бесконечность)).

Как считать вычет в бесконечности?

Для простого полюса: $\lim_{z \rightarrow \infty} z(f(\infty) - f(z))$.

Для полюса порядка не больше m (согласно непроверенной информации с сайта: <http://www.pm298.ru/kfunction8.php>): $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \frac{(-1)^m}{(m+1)!} \lim_{z \rightarrow \infty} z^{m+2} f^{(m+1)}(z)$.

7.5. Сведение интегралов вещественных функций к комплексным интегралам по контуру

Симметричный вокруг нуля интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}$ по вещественной прямой (как и его главное значение) можно представить как $\lim_{R \rightarrow +\infty}$ часть интеграла по полуокружности. Остальная часть — стремится к нулю.

Стремление к нулю доказываем через лемму Жордана.

Интегралы с тригонометрическими функциями можно представить как вещественные или комплексные части интеграла с экспонентой (пример: интегралы Лапласа).

Интегралы вида $\int_0^{+\infty}$ чётной функции $= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty}$.

Особенности на вещественной прямой (например, 0) можно обходить по маленькой полуокружности и устремлять её радиус в ноль. В этом нам поможет мощная лемма, в учебнике и на лекциях вам это не расскажут! (у Виноградова каждый раз это выводилось ручками для частного случая полуокружности):

Теорема 1 (Лемма о полувывчете). Пусть a - полюс первого порядка у функции f .

$$C_r = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = r \quad \alpha \leq \arg(z - a) \leq \beta\}$$
$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} f(z) dz = i(\beta - \alpha) \operatorname{res}_{z=a} f \quad (7.2)$$

То есть если мы берём не весь интеграл в формуле для коэффициента c_{-1} ряда Лорена, а только часть, получаем пропорционально меньшую часть (но только в пределе, разумеется).

Доказательство. Легко получается из ряда Лорена и $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dz}{z}$. ■

Если интегрировать многозначные функции, выбираем те ветви, которые содержатся в области, которая нас интересует \rightarrow их продолжения по непрерывности совпадают друг с другом.

На практике вместо предела к продолжениям пишут интегралы уже продолженных функций (но юридически это оформляется как непрерывность интеграла с параметром по параметру). Короче, смотреть учебник Виноградова стр. 453-455, там самый крутой интеграл.

Для вещественных интегралов вида как ниже можно сделать такую замену (всё, что выражается через z , понятно, может присутствовать в формуле, но тогда никто не гарантирует, что функция будет рациональной и хорошо интегрируемой):

$$\int_{-\pi}^{\pi} R(\sin \varphi, \cos \varphi) d\varphi = \left[\begin{array}{l} z = e^{i\varphi} \\ dz = iz d\varphi \\ \cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2} \\ \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i} \end{array} \right] = \int_{|z|=1} R\left(\frac{z - \frac{1}{z}}{2i}, \frac{z + \frac{1}{z}}{2}\right) \frac{dz}{iz} \quad (7.3)$$

Заметим, что мы здесь неявно перешли от интегралов по «обычному», вещественному отрезку к интегралу по комплексному контуру. Это легально, так как если трактовать интеграл по отрезку как интеграл вдоль пути (γ' там как раз комплексный вектор $1 + 0i$). Также можно сказать, что мы заметили, что интеграл по отрезку представим в виде $\int_a^b (f \circ \gamma) \gamma'$ и воспользовались определением интеграла вдоль пути.

Замечание. Что делать, если интегралы не $\int_{-\pi}^{\pi}$, а какие-то случайные \int_{α}^{β} ? Всегда работающий способ — линейная замена переменной, приводящая ровно к интегралу по всей окружности.

Замечание. Другой способ для частного случая: если интегрируем по полуокружности и после приведения к интегралу по контуру получилась НЕчётная по z функция. Для неё интеграл по окружности — удвоенный интеграл по полуокружности (можно в этом убедиться, подставив в определение $\int_{\gamma} f = \int (f \circ \gamma) \gamma'$: $\gamma'(z)$ в противоположных точках противоположно, как и $f(z)$).

К тому же выводу можно прийти, если вспомнить, как соотносятся вычеты в противоположных точках для нечётной функции: 7.3.

Для чётной всё это бессмысленно, так как вычеты антиравны и интеграл по всей окружности превратится в ноль — из него не извлечь информации.

Замечание. Также частный случай: если исходная функция периодична, можем проинтегрировать по нескольким периодам и надеяться, что в сумме будет окружность.

Общее место: если мы хотим составить уравнение для двух выражений интеграла по контуру (через вычеты и сумму частей контура), но оказывается, что на контуре есть особые точки, обойдём их по окружности бесконечно малого радиуса (с любой стороны) и применим лемму о полувывчете.

8. Интегралы Лебега в \mathbb{R}

8.1. Приёмы вычисления

Очевидные приёмы: линейность по функции, аддитивность по множеству (разрезать множество интегрирования на несколько, в каждом из которых интеграл устроен в некотором смысле единообразно).

8.1.1. Теоремы Тонелли и Фубини

Представляем двойной/тройной/... интеграл по множеству как повторный интеграл по его сечениям и по проекции:

$$\int_E f d\mu_{n+m} = \int_{\text{Pr}_x E} d\mu_n \int_{E[x]} f(x, y) d\mu_m \quad (8.1)$$

Можно переставлять повторные интегралы в любом порядке, обычно некоторые из них выгоднее, резать не приходится.

8.1.2. Замена переменной

Рассматриваем случай, когда преобразование координат — диффеоморфизм.

Тогда $\nu A = \mu\Phi(A)$ — мера, её плотность относительно μ — $|\det \Phi'|$, то есть $\nu A = \mu\Phi(A) = \int_A |\det \Phi'(x)| d\mu$.

А значит, можно делать замену переменной: $\int_{\Phi(E)} f d\mu = \int_E (f \circ \Phi) |\det \Phi'| d\mu$.

Частные ситуации:

- Линейная замена
- полярная замена $\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$ (якобиан r)

- сферическая замена
$$\begin{cases} x = r \cos \psi \cos \varphi \\ y = r \cos \psi \sin \varphi \\ z = r \sin \psi \end{cases} \quad (\text{якобиан } r^2 \cos \psi)$$

- цилиндрическая замена
$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = h \end{cases} \quad (\text{якобиан } \rho)$$

- эллипсоидная замена (и аналогичная ей эллиптическая)
$$\begin{cases} x = a \rho \cos \psi \cos \varphi \\ y = b \rho \cos \psi \sin \varphi \\ z = c \rho \sin \psi \end{cases}$$

(якобиан $\rho^2 \cos \psi$). Для особых ценителей можно перейти в обобщённые э. координаты, возведя тригонометрические функции в какую-то степень

- замена
$$\begin{cases} u = y/x \\ v = xy \end{cases} \quad \text{— часто в новых координатах получится прямоугольник}$$

- Можно также сделать вариацию:
$$\begin{cases} u = \alpha x + \beta y \\ v = \frac{x}{y} \end{cases}$$

- При четырёхугольнике (проще, если при параллелограмме), ограниченном прямыми, вместо того, чтобы втупую его резать, можно сделать аффинную замену, переодящую его в прямоугольник.

8.1.3. Граница задана параметрически

В таком случае, на промежутках обратимости какой-то функции, при-
творяемся, что как-то получили явную зависимость для уравнение
границы ($y = f(x) = \psi \circ \varphi^{-1}(x)$), а потом, когда уже выписали ин-
теграл, делаем в нём замену переменной, чтобы вернуться к выража-
емым функциям.

Пример: <https://youtu.be/1V1ynMIvL9w?list=PLd7QXkfmSY7YKwk8J9t2CHvn05201>.

8.2. Вычисление площадей, объёмов

Площадь/объём, совпадающие с мерой, когда определены, вычисляются
как интегралы характеристической функции по объемлющему про-

странству (или, что эквивалентно, единицы по соответствующему множеству).

А дальше, после выписывания интеграла, можно уже использовать вышеописанные методы (кажется, ещё и интегрирование по частям, когда пройдем интегралы по многообразиям).

8.3. Тройные интегралы

Теперь ещё больше вариантов перестановок и сечений, а также появляются сферическая и цилиндрическая замены.

При смене порядка интегрирования зависимость дальше стоящих пределов от значений раньше стоящих переменных может выражаться разным образом для разных значений. Например, $y = \max(0, 1 - x)$ — можно разделить на сумму.

8.4. 4-х и более, но `const`- кратные интегралы

Часто удобно разделить переменные на пары/тройки, если внутри пары больше зависимость, чем между переменными из разных пар.

В каждой паре можно отдельно делать замены, просто считать и т.д.

8.5. n -кратные интегралы

Часто сводятся к себе, но с меньшим параметром порядка.

Полезно использовать, что мера Лебега множества трансформируется в R^n раз при диагональном операторе по всем измерениям.

Аналог для сведения к себе, если у нас произвольный интеграл (а не 1-ца, как при вычислении меры): замена переменных — если сечения множества получается аффинным преобразованием из самого множества из задачи меньшего порядка, это хороший знак: победа в кармане.