

Типовик по линейной алгебре модуль 1:
Задание 7 «Каноническая форма
кривых второго порядка»

Латыпов Владимир Витальевич,
ИТМО КТ М3138, **вариант 12**

26 сентября 2022 г.

Содержание

1	Формулировка условия	3
2	Решение	3
2.1	Поворот системы координат	3
2.2	Параллельный перенос	7
3	Малювание в системе координат два штриха	8
4	Итоговое преобразование координат	10
5	Итоговая иллюстрация	12

1. Формулировка условия

Утверждение 1. Условие таково:

Выполнив последовательно преобразования координат: поворот, а затем параллельный перенос координатных осей, преобразовать к каноническому виду уравнение кривой второго порядка и построить ее в канонической и исходной системе координат, а также найти параметры кривой.

$$12. 7\sqrt{5}x^2 + \sqrt{5}y^2 + 8\sqrt{5}xy + 72x + 36y + 27\sqrt{5} = 0$$

2. Решение

2.1. Поворот системы координат

Для начала найдём такой поворот, чтобы член $x'y'$ исчез.

$$\begin{cases} x = \cos(\alpha)x' - \sin(\alpha)y' \\ y = \sin(\alpha)x' + \cos(\alpha)y' \end{cases} \quad (1)$$

Тогда уравнение превращается в:

$$\begin{aligned} & 7\sqrt{5}(\cos(\alpha)x' - \sin(\alpha)y')^2 \\ & \quad + \sqrt{5}(\sin(\alpha)x' + \cos(\alpha)y')^2 \\ & + 8\sqrt{5}(\cos(\alpha)x' - \sin(\alpha)y')(\sin(\alpha)x' + \cos(\alpha)y') \\ & \quad + 72(\cos(\alpha)x' - \sin(\alpha)y') \\ & \quad + 36(\sin(\alpha)x' + \cos(\alpha)y') \\ & \quad + 27\sqrt{5} \end{aligned} \quad (2)$$

После expansion получается:

$$\begin{aligned}
& 7\sqrt{5}x'^2 \cos^2(\alpha) \\
& \quad + \sqrt{5}x'^2 \sin^2(\alpha) \\
& + 8\sqrt{5}x'^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) \\
& \quad + 8\sqrt{5}x'y' \cos^2(\alpha) \\
& \quad - 8\sqrt{5}x'y' \sin^2(\alpha) \\
& - 12\sqrt{5}x'y' \sin(\alpha) \cos(\alpha) \\
& \quad + 72x' \cos(\alpha) \\
& \quad + 36x' \sin(\alpha) \\
& \quad + 7\sqrt{5}y'^2 \sin^2(\alpha) \\
& \quad + \sqrt{5}y'^2 \cos^2(\alpha) \\
& - 8\sqrt{5}y'^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \\
& \quad - 72y' \sin(\alpha) \\
& \quad + 36y' \cos(\alpha) \\
& \qquad \qquad \qquad + 27\sqrt{5} \quad (3)
\end{aligned}$$

Выделяем члены с $x'y'$:

$$+8\sqrt{5}x'y' \cos^2(\alpha) - 8\sqrt{5}x'y' \sin^2(\alpha) - 12\sqrt{5}x'y' \sin(\alpha) \cos(\alpha) \quad (4)$$

Тогда коэффициент перед $x'y'$ будет:

$$\begin{aligned}
& 7\sqrt{5}(-2\cos(\alpha)\sin(\alpha)) + 8\sqrt{5}(\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)) + \sqrt{5}(2\cos(\alpha)\sin(\alpha)) = \\
& \sqrt{5}(\cos(\alpha)\sin(\alpha)(7 \cdot -2 + 2) + 8\cos^2(\alpha) - 8\sin^2(\alpha)) \quad (5)
\end{aligned}$$

Этот коэффициент должен быть равен нулю. Тогда:

$$-12\cos(\alpha)\sin(\alpha) + 8\cos^2(\alpha) - 8\sin^2(\alpha) = 0 \quad (6)$$

$$-12tg(\alpha) + 8 - 8tg^2(\alpha) = 0 \quad (7)$$

$$4\xi^2 + 6\xi - 4 = 0 \quad (8)$$

$$\xi_{1,2} = \left\{-2, \frac{1}{2}\right\} \quad (9)$$

Для любого α с одним из этих тангенсов (таких α всего 4) исчезнет перекрёстный член в новой системе координат.

Возьмём, например, $tg(\alpha) = \frac{1}{2}$ и $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$. Будет $\alpha = arctg(\frac{1}{2})$ Тогда $sin, cos > 0$

$$sin(\alpha) = \frac{tg(\alpha)}{\sqrt{1 + tg^2(\alpha)}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad (10)$$

$$cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2(\alpha)}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \quad (11)$$

Тогда старые координаты так выражаются через новые:

$$\begin{cases} x = \frac{2\sqrt{5}}{5}x' - \frac{\sqrt{5}}{5}y' \\ y = \frac{\sqrt{5}}{5}x' + \frac{2\sqrt{5}}{5}y' \end{cases} \quad (12)$$

И новая система координат будет выглядеть вот так относительно старой:

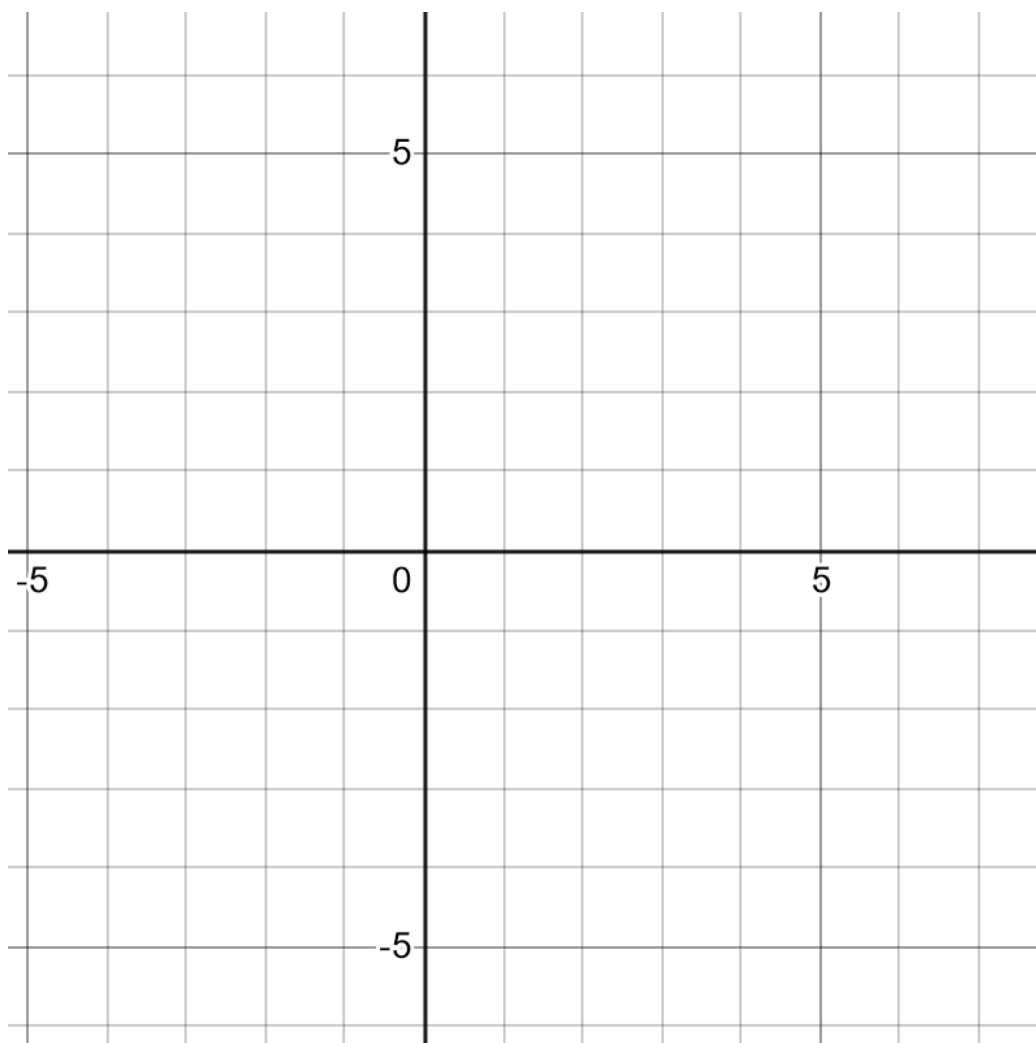


Рис. 1: Система координат (X', Y') относительно исходной

Тогда перепишем уравнение в новой системе координат:

$$\begin{aligned}
 &7\sqrt{5} \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}x' - \frac{\sqrt{5}}{5}y' \right)^2 + \\
 &\quad \sqrt{5} \left(\frac{\sqrt{5}}{5}x' + \frac{2\sqrt{5}}{5}y' \right)^2 + \\
 &8\sqrt{5} \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}x' - \frac{\sqrt{5}}{5}y' \right) \left(\frac{\sqrt{5}}{5}x' + \frac{2\sqrt{5}}{5}y' \right) + \\
 &\quad 72 \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}x' - \frac{\sqrt{5}}{5}y' \right) + \\
 &\quad 36 \left(\frac{\sqrt{5}}{5}x' + \frac{2\sqrt{5}}{5}y' \right) + \\
 &\quad 27\sqrt{5} \\
 &= 0 \quad (13)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{28x'^2}{\sqrt{5}} - \frac{28x'y'}{\sqrt{5}} + \frac{7y'^2}{\sqrt{5}} + \\
& \quad \frac{x'^2}{\sqrt{5}} + \frac{4x'y'}{\sqrt{5}} + \frac{4y'^2}{\sqrt{5}} + \\
& \quad \frac{16x'^2}{\sqrt{5}} + \frac{24x'y'}{\sqrt{5}} - \frac{16y'^2}{\sqrt{5}} + \\
& \quad \frac{144x'}{\sqrt{5}} - \frac{72y'}{\sqrt{5}} + \\
& \quad \frac{36x'}{\sqrt{5}} + \frac{72y'}{\sqrt{5}} + \\
& \quad 27\sqrt{5} \\
& = 0 \quad (14)
\end{aligned}$$

Получили:

$$9x'^2 + 36x' - y'^2 + 27 = 0 \quad (15)$$

2.2. Параллельный перенос

Выделим полные квадраты:

$$9x'^2 + 36x' - y'^2 + 27 = 9(x'^2 + 4x' + 4) - y'^2 - 9 = 9(x' + 2)^2 - y'^2 - 9 = 0 \quad (16)$$

Назовём, получив выражение координат системы (X', Y') через (X'', Y'') и наоборот:

$$\begin{cases} x'' = x' + 2 \\ y'' = y' \end{cases} \quad \begin{cases} x' = x'' - 2 \\ y' = y'' \end{cases} \quad (17)$$

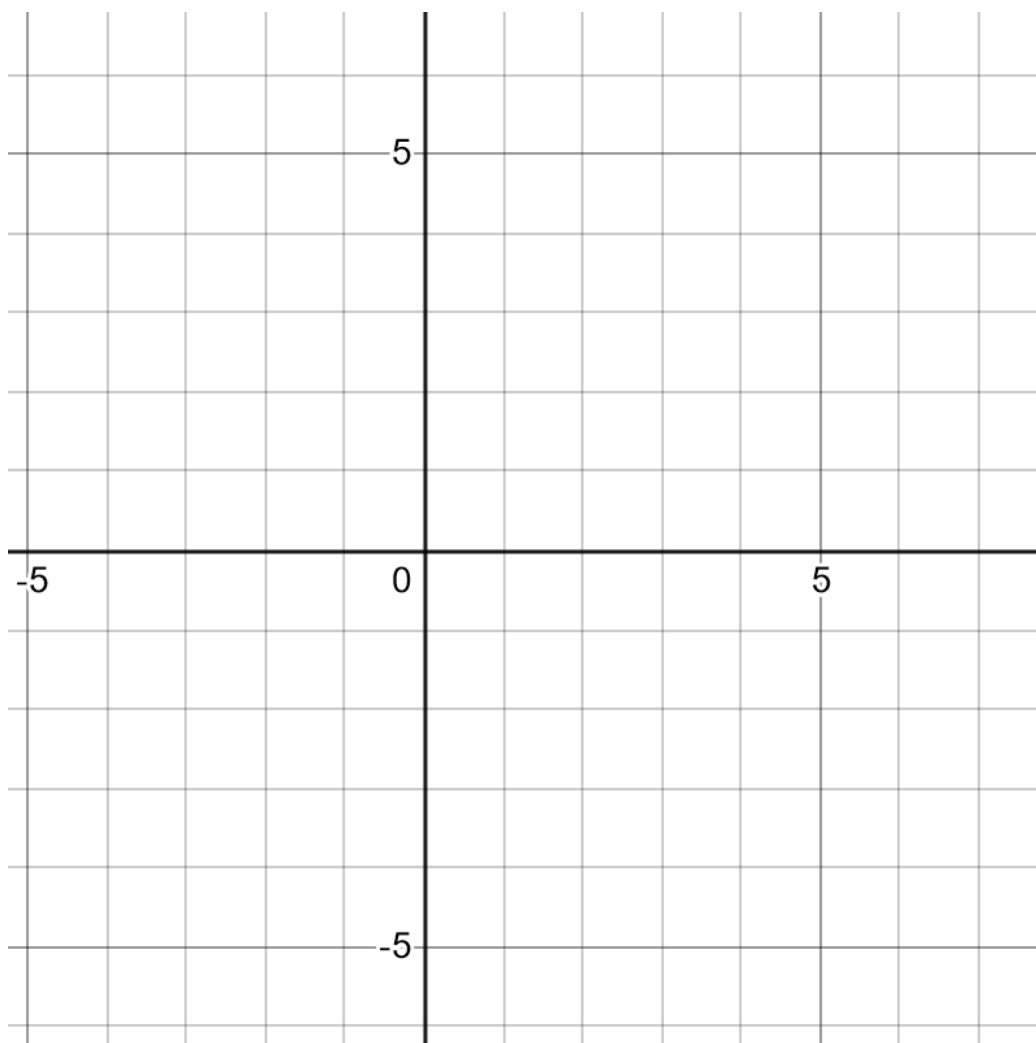


Рис. 2: Система координат (O'', X'', Y'') относительно СК (O', X', Y')

3. Малювание в системе координат два штриха

Тогда уравнение в системе координат «два штриха» будет таким:

$$9x''^2 - y'^2 = 9 \quad (18)$$

$$\frac{x''^2}{1^2} - \frac{y'^2}{3^2} = 1 \quad (19)$$

То есть это гипербола, главная полуось: $a = 1$, мнимая полуось: $b = 3$,

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$. Ещё параметры гиперболы:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{10}}{1} = \sqrt{10} \quad (20)$$

$$F_l, F_r = (\mp c; 0) = (\mp \sqrt{10}; 0) \quad (21)$$

$$V_l, V_r = (\mp a; 0) D_l, D_r : x'' = \mp \frac{a}{\varepsilon} = \mp \frac{1}{\sqrt{10}} = \mp \frac{\sqrt{10}}{10} \quad (22)$$

И выглядеть она будет:

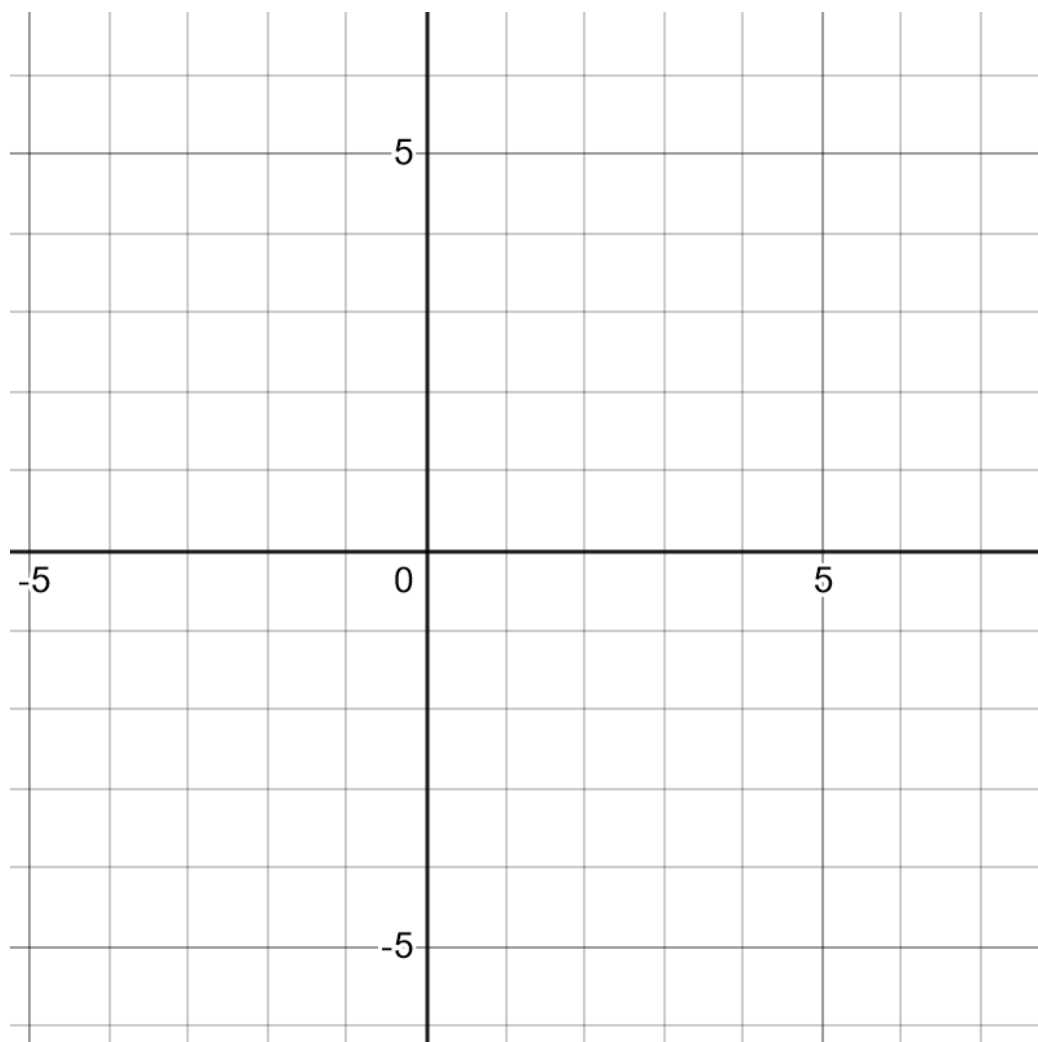


Рис. 3: Гипербола в системе координат (O'', X'', Y'')

4. Итоговое преобразование координат

Таким образом, координаты для системы «один штрих» будут выражаться как:

$$\begin{cases} x' = x'' - 2 \\ y' = y'' \end{cases} \quad (23)$$

(То есть сдвиг влево относительно двух штрихов на 2)

А для изначальной СК:

$$\begin{cases} x = \cos(\alpha)x' - \sin(\alpha)y' = \cos(\alpha)(x'' - 2) - \sin(\alpha)y'' = \frac{2\sqrt{5}}{5}(x'' - 2) - \frac{\sqrt{5}}{5}y'' \\ y = \sin(\alpha)x' + \cos(\alpha)y' = \frac{\sqrt{5}}{5}(x'' - 2) + \frac{2\sqrt{5}}{5}y'' \end{cases} \quad (24)$$

$$\begin{cases} x = \frac{2\sqrt{5}}{5}x'' - \frac{\sqrt{5}}{5}y'' - \frac{4\sqrt{5}}{5} \\ y = \frac{\sqrt{5}}{5}x'' + \frac{2\sqrt{5}}{5}y'' - \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases} \quad (25)$$

Пользуясь этим, мы можем найти координаты ключевых характеристических фигур нашей гиперболы.

Во-первых — O'' в исходной СК: $\left(-\frac{4\sqrt{5}}{5}; -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \approx (-1.8; -0.9)$.

Далее — в расход идут вершины и фокусы. В новой системе:

$$V_1, V_2 = \left(\frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot (\mp 1) - \frac{4\sqrt{5}}{5}; \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot (\mp 1) - \frac{2\sqrt{5}}{5} \right) \quad (26)$$

$$V_1, V_2 = \left(\frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot (\mp 1) - \frac{4\sqrt{5}}{5}; \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot (\mp 1) - \frac{2\sqrt{5}}{5} \right) \quad (27)$$

$$V_1 \approx (-2.7; -1.3) \quad (28)$$

$$V_2 \approx (-0.9; -0.5) \quad (29)$$

$$F_1, F_2 = \left(\frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot (\mp \sqrt{10}) - \frac{4\sqrt{5}}{5}; \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot (\mp \sqrt{10}) - \frac{2\sqrt{5}}{5} \right) \quad (30)$$

$$F_l \approx (-4.6; -2.3) \quad (31)$$

$$F_r \approx (1.; .5) \quad (32)$$

Выразим наоборот — новые координаты через старые.

$$\begin{cases} x = \frac{2\sqrt{5}}{5}x'' - \frac{\sqrt{5}}{5}y'' - \frac{4\sqrt{5}}{5} \\ y = \frac{\sqrt{5}}{5}x'' + \frac{2\sqrt{5}}{5}y'' - \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases} \quad (33)$$

$$\begin{cases} x = \frac{2\sqrt{5}}{5}x'' - \frac{\sqrt{5}}{5}y'' - \frac{4\sqrt{5}}{5} \\ 2y = \frac{2\sqrt{5}}{5}x'' + \frac{4\sqrt{5}}{5}y'' - \frac{4\sqrt{5}}{5} \end{cases} \quad (34)$$

$$\begin{cases} x - 2y = (-\frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{4\sqrt{5}}{5})y'' = -\frac{5\sqrt{5}}{5}y'' = -\sqrt{5}y'' \\ 2y = \frac{2\sqrt{5}}{5}x'' + \frac{4\sqrt{5}}{5}y'' - \frac{4\sqrt{5}}{5} \end{cases} \quad (35)$$

$$\begin{cases} y'' = \frac{2y-x}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}y - \frac{\sqrt{5}}{5}x \\ x = \frac{2\sqrt{5}}{5}x'' - \frac{\sqrt{5}}{5}(\frac{2\sqrt{5}}{5}y - \frac{\sqrt{5}}{5}x) - \frac{4\sqrt{5}}{5} \end{cases} \quad (36)$$

$$\frac{2\sqrt{5}}{5}x'' = x + \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}y - \frac{\sqrt{5}}{5}x \right) + \frac{4\sqrt{5}}{5} \quad (37)$$

$$\frac{2\sqrt{5}}{5}x'' = x + \frac{2}{5}y - \frac{1}{5}x + \frac{4\sqrt{5}}{5} = \frac{4}{5}x + \frac{2}{5}y + \frac{4\sqrt{5}}{5} \quad (38)$$

$$x'' = \frac{\sqrt{5}}{2} \left(\frac{4}{5}x + \frac{2}{5}y + \frac{4\sqrt{5}}{5} \right) = \frac{2\sqrt{5}}{5}x + \frac{\sqrt{5}}{5}y + 2 \quad (39)$$

$$\begin{cases} x'' = \frac{2\sqrt{5}}{10}x + \frac{\sqrt{5}}{5}y + 2 \\ y'' = -\frac{\sqrt{5}}{5}x + \frac{2\sqrt{5}}{5}y \end{cases} \quad (40)$$

Теперь тяжёлая артиллерия: оси координат.

$$O''Y'' : x'' \equiv 0$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{5}}{5}x + \frac{\sqrt{5}}{5}y + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{5}}{5}y = -2 - \frac{2\sqrt{5}}{5}x \\ &\Leftrightarrow y = -2\sqrt{5} - \frac{2\sqrt{5} \times \sqrt{5}}{5}x = -2\sqrt{5} - 2x \end{aligned} \quad (41)$$

$$O''X'' : y'' \equiv 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{5}}{5}x + \frac{2\sqrt{5}}{5}y = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{5}}{5}y = \frac{\sqrt{5}}{5}x$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{5}}{5} \times \frac{\sqrt{5}}{2}x = \frac{1}{2}x \quad (42)$$

И, наконец, директриссы:

$$D_l : x'' = -\frac{\sqrt{10}}{10} \quad (43)$$

$$\frac{2\sqrt{5}}{5}x + \frac{\sqrt{5}}{5}y + 2 = -\frac{\sqrt{10}}{10} \quad (44)$$

$$y = -2x - 2\sqrt{5} - \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (45)$$

$$D_r : x'' = +\frac{\sqrt{10}}{10} \quad (46)$$

$$\frac{2\sqrt{5}}{5}x + \frac{\sqrt{5}}{5}y + 2 = +\frac{\sqrt{10}}{10} \quad (47)$$

$$y = -2x - 2\sqrt{5} + \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (48)$$

5. Итоговая иллюстрация

Теперь мы можем изобразить гиперболу в исходной системе координат.

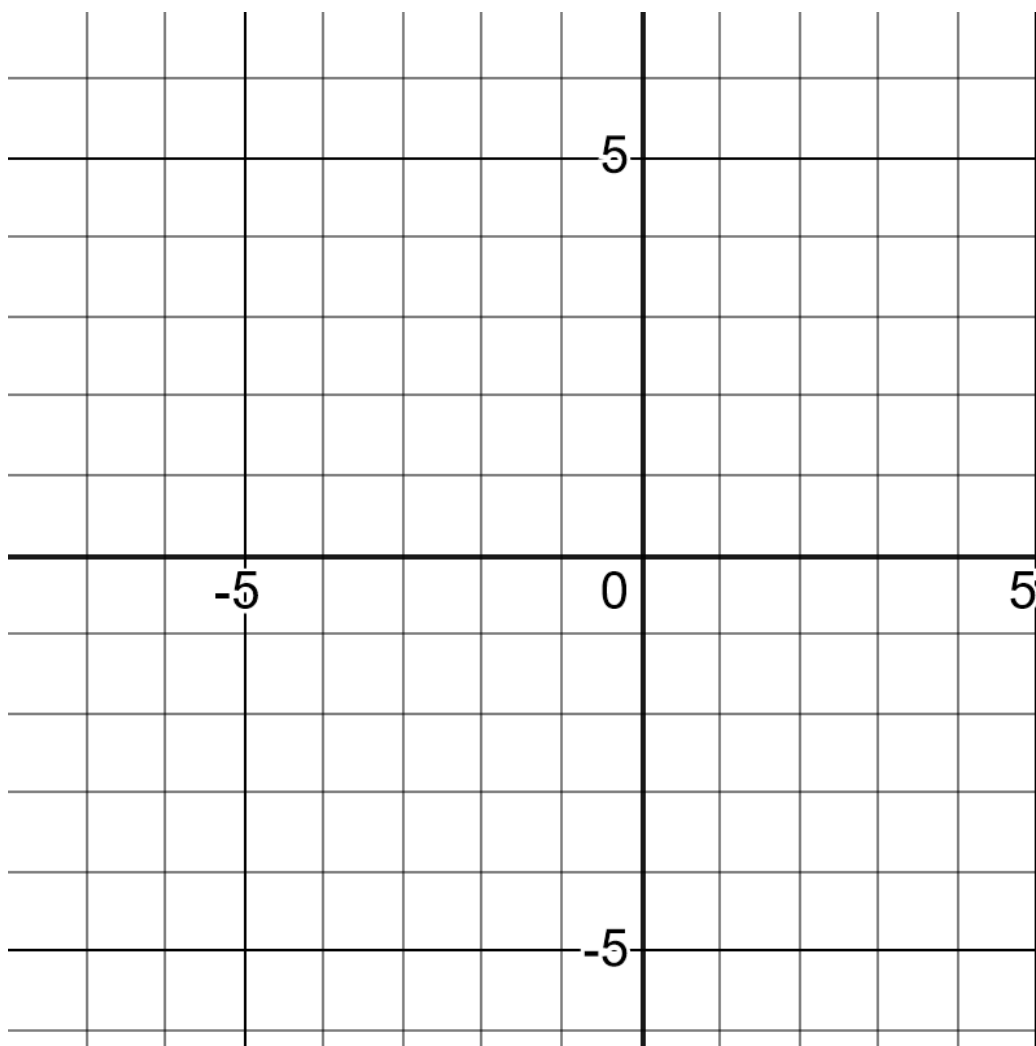


Рис. 4: Гипербола в системе координат (O, X, Y)