Теорвер. Домашнее задание №2
Условная вероятность

Латыпов Владимир

22 февраля 2023 г.

1. Независимость в подпространстве

1. Выберем такое p_A, что $\forall B, C \subset A : p_A(B|C) = p_\Omega(B|C)$.

$$p_A(B|C) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{p_A(BC)}{p_A(C)} \tag{1.1}$$
$$p_\Omega(B|C) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{p(BC)}{p(C)} \tag{1.2}$$

   Если мы возьмём $p_A(D) = p(D|A) = \frac{p(DA)}{p(A)} = \frac{p(D)}{p(A)}, D \subset A$, то аксиомы будут, тривиально, выполнены, а числитель и знаменатель дроби $\frac{p_A(BC)}{p_A(C)}$ отнормируется в $p(A)$ раз, значит, требуемое соотношение тоже выполнено.

2. Пусть $p(A) = 1$. Докажем, что $\forall B \in \Omega p(B|A) = p(B)$.

$$p(B|A) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{p(AB)}{p(A)} = p(AB) =$$
$$p((\Omega \backslash (\Omega \backslash A))B) =$$
$$p(\Omega B + \backslash (\Omega \backslash A)B) \underset{disj}{=}$$
$$p(B) - p((\Omega \backslash A)B) = p(B) \tag{1.3}$$

3. (a) Верно ли, что независимость в подпространстве влечёт независимость во всём пространстве?

   Если $B, C \subset A$ независимы, $p(BC) = p(B)p(C)$.

$$p_A(BC) = \frac{p(BC)}{p(A)} \tag{1.4}$$
$$p_A(B)p_A(C) = \frac{p(B)p(C)}{p^2(A)} = \frac{p(BC)}{p^2(A)} \tag{1.5}$$

   Что верно только если $p(A) = 1$ или кто-то из B, C — пустой: только в паталогическом случае.

   Берём контрпример от балды: B, C: в Питере, Москве идёт дождь. $A = B \cup C$.

(b) Верна ли обратная импликация? Ровно те же формулы.

(c) Выполняется ли такая хрень для попарно независимых событий.

$p_A(AB \cdot AC) = p_A(ABC) = \frac{p(ABC)}{p(A)} ?= p_A(AB)p_A(AC) = \frac{p(AB)p(AC)}{p^2(A)} = p(B)p(C).$

То есть требование задачи — чтобы не были зависимы в совокупности, а условие — лишь попарная зависимость.

Контрпример:

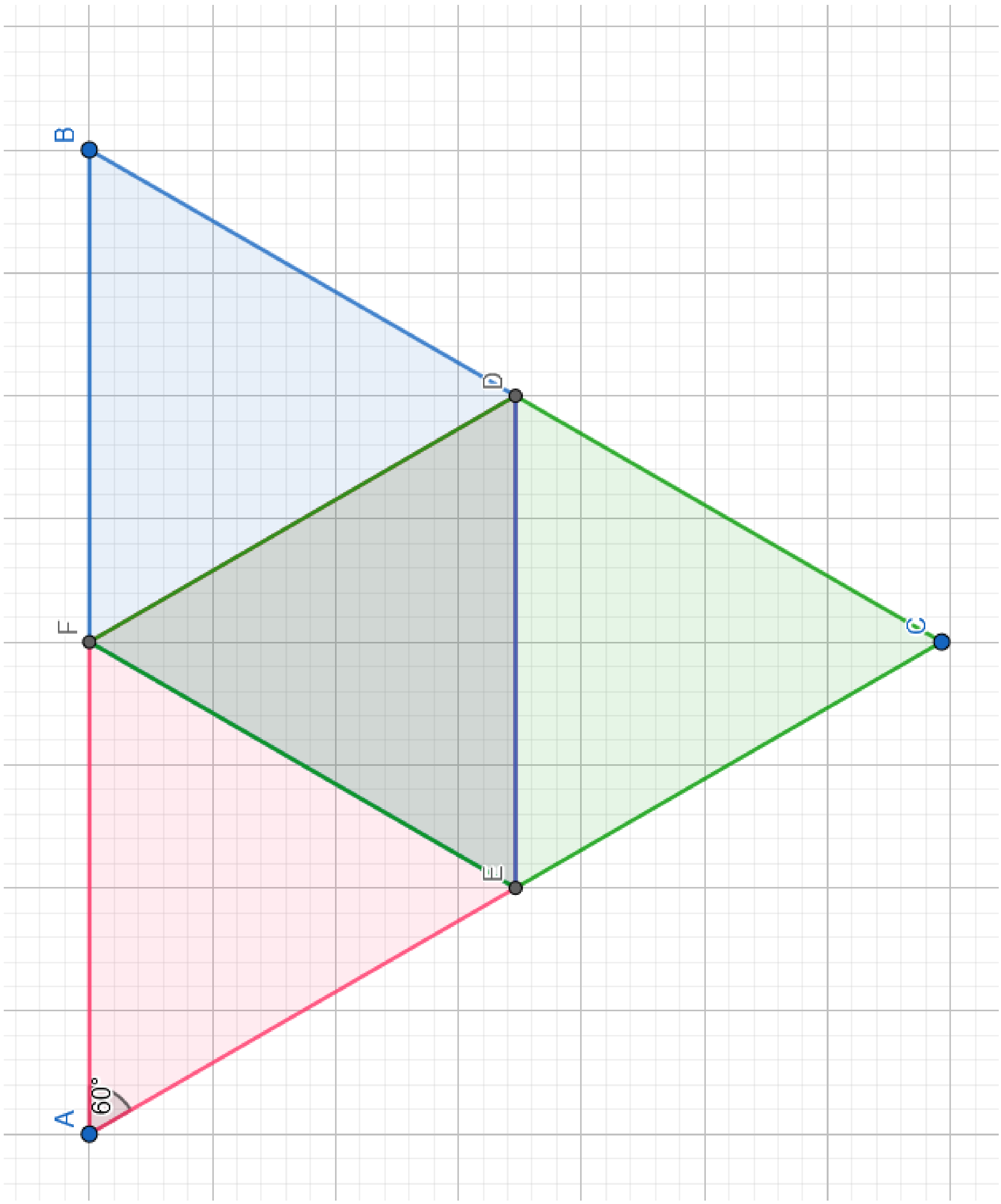

Рис. 1: Контрпример

2. *Простая* задача

$p(k) = a^{k-1}\underbrace{\frac{1-a}{1-a^6}}_{c}$

Чётные: $E = \{2, 4, 6\}$.

Не простые: $N = \{1, 4, 6\}$.

$$P(EN) = P(\{4, 6\}) = p(N) - p_1 = p(E) - p_2 = c(a^3 + a^5) \tag{2.1}$$

$$p(E)p(N) = c(a^1 + a^3 + a^5) \cdot c(a^0 + a^3 + a^5) = (ca + P(EN))(c + P(EN)) \tag{2.2}$$

E, N независимы $\Leftrightarrow$

$$P(EN) = r = (ca + r)(c + r) = c^2 a + r(c + ca) + r^2 \tag{2.3}$$

То есть должно быть: $r^2 + r(ca + c - 1) + c^2 a = 0$.

1. $a = \sqrt{\frac{-2+\sqrt{7}}{2}}$.

$$c = \frac{1 - \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{7}-2)}}{1 - \frac{1}{8}(\sqrt{7}-2)^3} \tag{2.4}$$

$$r = c(a^3 + a^5) = \frac{\left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{7}-2)}\right)\left(\frac{(\sqrt{7}-2)^{3/2}}{2\sqrt{2}} + \frac{(\sqrt{7}-2)^{5/2}}{4\sqrt{2}}\right)}{1 - \frac{1}{8}(\sqrt{7}-2)^3} \tag{2.5}$$

   Получим гадость (не ноль): `https://www.wolframalpha.com/input?i=find+r%5E2+%2B+r+%28ca+%2B+c+-+1%29+%2B+c%5E2+a+for+a%3Dsqrt%281%2F2+%28sqrt%287%29+-+2%29%29%2C+c%3D%281+-+a%29%2F%281+-+a%5E6%29%2C+r+%3D+c*+%28a%5E3+%2B+a%5E5%29`.

2. Получим ноль: `https://www.wolframalpha.com/input?i=find+r%5E2+%2B+r+%28ca+%2B+c+-+1%29+%2B+c%5E2+a+for+a%3Dsqrt%281%2F2+%28sqrt%285%29+-+1%29%29%2C+c%3D%281+-+a%29%2F%281+-+a%5E6%29%2C+r+%3D+c*+%28a%5E3+%2B+a%5E5%29`.

3. Контрпримеры

- Да, $A = \emptyset$.
- $B : 2 \times 2 = 4$, A — злая воля сумасшедшего диктатора.
- $A = B :$ Я сегодня пойду гулять.

4. Неравенства

1. Буль:

- Буль1 [aka Полуаддитивность меры]: $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P\left(A_i\right)$.

  Заведём $B_i = A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j$. Тогда они дизъюнктны, $B_i \subset A_i$ и имеют то же объединение.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(B_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P\left(A_i\right) \tag{4.1}$$

- Буль2: $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \geqslant 1 - \sum_{i=1}^{n} P\left(\bar{A}_i\right)$.

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(\overline{\bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}}\right) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right) \geqslant 1 - \sum_{i=1}^{n} P\left(\overline{A_i}\right) \tag{4.2}$$

2. Буль-Буль

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \geqslant 1 - \sum_{i=1}^{n} P\left(\overline{A_i}\right) = 1 - \left(n - \sum_{i=1}^{n} P\left(A_i\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(A_i\right) - (n-1) \tag{4.3}$$

3. Буль-Буль-Буль [Куниасс]

$$(!)\forall k P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P\left(A_i\right) - \sum_{i \neq k} P\left(A_i \cap A_k\right) \tag{4.4}$$

   НУО, $k = 1$.

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(\left(A_1 \setminus \bigcup_{i=2}^{n} A_i\right) \cup \bigcup_{i=2}^{n} A_i\right) \leqslant \\ P(A_1) - \sum_{i \neq k} P\left(A_i \cap A_k\right) + \sum_{i=2}^{n} P\left(A_i\right) = \\ \sum_{i=1}^{n} P\left(A_i\right) - \sum_{i \neq k} P\left(A_i \cap A_k\right) \end{aligned} \tag{4.5}$$

5. Априорные шары

Заметим, что по определению условной вероятности, $P(B_j|A_k) = \frac{p(B_j \cap A_k)}{p(A_k)}$, а это ровно числа, фигурирующие в подсказке. Если поделить одно на другое, получится роавно то, что надо.

Равенства из подсказки получаются, если сначала *выбрать* позиции белых шаров, а потом расставить (с возвратом или без) конкретные белые/цветные шары на них. В первом случае вылезает обычная степень, втором — убывающая.

6. „Добавленный“ белый шар

A — оставшийся шар — белый. B — вытащили белый.

W — добавили белый шар.

$$P(A|B) = \frac{p(AB)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{2}}{p(W)p(B|W) + p(\overline{W})p(B|\overline{W})} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \tag{6.1}$$

7. А было ли письмо?

A — письмо есть. B — письмо есть в первых 7-и.

$$p(A|\overline{B}) = p(A)\frac{p(\overline{B}|A)}{p(\overline{B})} = p\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{7}{8}p} = \frac{p}{8-7p} \tag{7.1}$$

Заметим, что без дополниельной информации, вероятность найти письмо в последнем ящике была бы $\frac{p}{8}$, а так она повышается, причём при больших p повышается сильнее.

8. Совисимая незакупность

Разобъём на 2^n дизъюнктных событий $\bigcap A_i^{[C]}$, каждое из которых непусто, тем самым покажем, что как минимум 2^n различных элементов пространства точно есть.

Лемма 1. *Если события $\{B_i\}_{i=0}^n$ независимы в совокупности, то события $B_1, ...\overline{B_k}, ...B_n$ — тоже независимы в совокупности.*

Доказательство. Если $k \notin I \subset [1;n]$, $p\left(\bigcap_{i\in I} B_i'\right) = p\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \prod_{i\in I} p(B_i)$ (ничего не меняется).

Если $k \in I \subset [1;n]$,

$$\begin{aligned} p\left(\bigcap_{i\in I} B_i'\right) = p\left(\overline{B_i} \cap \bigcap_{i\in(I\setminus\{k\})} B_i\right) = p\left(\bigcap_{i\in(I\setminus\{k\})} B_i\right) - p\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) \\ = \prod_{i\in(I\setminus\{k\})} B_i - \prod_{i\in I} B_i \\ = (1-p(B_i)) \prod_{i\in(I\setminus\{k\})} B_i = \prod_{i\in I} p(B_i') \end{aligned} \tag{8.1}$$

■

А значит, для любой битовой маски окажется, что событие $\bigcap A_i^{[C]}$, где дополнения стоят на местах нулей, имеет ненулевую вероятность (каждый из сомножителетей не ноль по условию):

$$\prod_{i=0}^{n} \begin{cases} p(A_i) & i \in I \\ 1-p(A_i) & i \notin I \end{cases} \tag{8.2}$$

Итак, получили 2^n дизъюнктных непустых событий $\bigcap A_i^{[C]}$

Замечание. Почему эти пересечения событий дизъюнктно разбивают Ω?

Доказательство. Возьмём точку $x \in \Omega$ и докажем, что что существует единственная битовая маска, содержащая её.

∃ Выберем такое $I(x)$, что $i \in I$ при $x \in A_i$. Тогда $x \in \bigcap_{i=0}^n \begin{cases} p(A_i) & i \in I \\ 1-p(A_i) & i \notin I \end{cases}$.

(!) Никакому другому пересечению такого вида x не принадлежит, так как у другого найдётся место, в котором требование противоположно таковому в $I(x)$ тогда x ему не удовлетворяет. ■

Пример для 2^n — гиперкуб с событиями A_i: i-й бит = 1.