Типовик по линейной алгебре «Дополнительное ДЗ №1»

Латыпов Владимир Витальевич,
ИТМО КТ M3138, ***вариант 12***

26 сентября 2022 г.

1. Формулировка условия

Утверждение 1. Условие таково: Линейные подпространства L_1, L_2 заданы системами линейных уравнений.

1. Найти базисы линейных подпространств
2. Доказать, что являются прямыми дополнениями друг друга до $\mathbb{R}^5$
3. Марица перехода от канонического базиса к базису суммы
4. Разложить вектор $x = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}^T$ по L_1, L_2

2. Нахождение базисных векторов

Для начала решим системы:

$$L_1 = x_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$L_2 = x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

3. Доказательство прямодополняемости

Заметим, что ранг сконкатенированной матрицы, то есть размерность суммы, равен $5 = 2 + 3$, а значит, пересечение — $\{\mathbb{0}\}$, то есть они действительно дизъюнктны и в сумме дают $\mathbb{R}^5$.

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 5 \tag{3}$$

4. Матрица перехода от канонического базиса к базису суммы

Если действительно имеется в виду **от** канонического базиса **к** базису суммы, то мы просто запишем ту матрицу базиса суммы и профит.

Если наоборот нужно, тогда, зная, что матрица перехода в обратную сторону — это обратная матрица, а матрица перехода из базиса суммы в канонический базис — это просто наша сконкатенированная матрица, поймём, что всё, что нужно сделать — это её инвертировать.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -32 & 17 & -4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Это и будет матрицей перехода.

5. Разложение вектора

Раз уж у нас есть матрицы перехода, перейдём в базис суммы подпространств, тогда первые две координаты будут коэффициентами при разложении x_1 по базису L_1, а оставшиеся три — x_2 по L_2.

Переходить будем простым домножением:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -32 & 17 & -4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$x_1 = 2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$x_2 = -2\begin{pmatrix}2\\4\\1\\0\\0\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\\0\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\-2\\5\\-3\end{pmatrix} \tag{7}$$

Заметим, что

$$x_1 + x_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\\-2\\5\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\\-2\\5\\-3\end{pmatrix} = x \tag{8}$$