Решения **теоретических („малых“) домашних заданий**

Математическая логика, ИТМО, M3232-M3239, весна 2023 года

Латыпов Владимир (конспектор)
`t.me/donRumata03`, `github.com/donRumata03`, `donrumata03@gmail.com`

9 марта 2023 г.

Содержание

1 Внешность — лишь дополнение внутренности 3

2 Связность 4

3 Примеры топологий 4

1. Внешность — лишь дополнение внутренности

(a)
- $A \in \Omega \Leftrightarrow$ все точки — внутренние.

  $\Rightarrow$ Возьмём A в качестве окрестности

  $\Leftarrow$ A — объединение (возможно, бесконечное) каких-нибудь окрестностей всех своих точек $\to A \in \Omega$.

  (Так как множество — объединение { своих точек }, а у открытого множества все точки внутренние, второе утверждение для откркты множеств доказано).

- Покажем, что $A^\circ = \{x \mid x \in A \& x -$ внутренняя точка $\}$ для произвольного.

  С лекции: $A^\circ = \bigcup_{B \in \Omega \cap A} B$.

  Так как каждое множество B открыто, все точки B внетренние для B, а тем более для A. $\bigcup_{B \in \Omega \cap A} B = \bigcup_{B \in \Omega \cap A} \{x \mid x \in B \& x -$ внутренняя точка $B\}$

  В правой части каждый элемент — внутренняя точка A. С другой стороны, любая внутренняя точка лежит внутри какой-то окрестности, поэтому будет включена в объединение. ■

(b) ...

(c) Внутренность: удаляем такие вершины, для которых в поддереве хотя бы одна вершина не в множестве.

Закрытые множества $\Leftrightarrow$ для любой вершины: вершина НЕ принадлжит $\to$ НЕ принадлжит и поддерево.

Открытое множество декомпозируется на множество корней. Закрытое — то дерево, которое останется после удаления поддеревьев с этими корнями.

Тогда замыкание: добавляем всех предков хотя бы одной вершины.

Граничные точки: вершины, поддерево которых

(d) Точка, внутренняя для A, внутренняя и для $B \Rightarrow A^\circ \subseteq B^\circ$.

Если точка граничная для A, у неё есть окрестность, пересекающаяся с $A \to$ она пересекается и с B тем паче $\to$ эта точка внутренняя или граничная для $B \to$ лежит в $\overline{B}$.

Итого: $\overline{A} \subseteq \overline{B}$

2. Связность

(a) $\mathbb{Q} = (\mathbb{R}_{<\sqrt{2}} \cap \mathbb{Q}) \cup (\mathbb{R}_{>\sqrt{2}} \cap \mathbb{Q})$;

$\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} = (\mathbb{R}_- \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})) \cup (\mathbb{R}_+ \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}))$.

(b) Пусть $(0, 1) = A \cup B$, где $A, B \in \Omega$; $A, B \neq \emptyset$; $A \cap B = \emptyset$.

Получим, что A, B и открыты, и замкнуты в $(0, 1)$.

Рассмотрим какие-нибудь точки A и B. НУО, $a < b$. В некоторая окрестность a будет $\subset A$, рассмотрим $x = \inf B_{>a}$

$x \leqslant b$. Определим, принадлежит x A или B.

С одной стороны, это граничная точка B, так что должна принадлежать B, с другой — граничная точка A, так что должна принадлежать A. Противоречие.

3. Примеры топологий

(a) Зарисского (замкнутые — конечные либо $\mathbb{R}$):

- $\mathbb{R}, \emptyset \in \Omega$
- $$\cap_{i=0}^{n}(\mathbb{R} \backslash A_i) = \mathbb{R} \backslash \cup_{i=0}^{n} A_i = \mathbb{R} \backslash B, |B| \leqslant \sum_{i=0}^{n} |A_i| \in \mathbb{N}. \quad (3.1)$$
- $\mathbb{R} \backslash (\cup_{\alpha \in \mathcal{A}'} \mathbb{R} \backslash A_\alpha) = \mathbb{R} \backslash (\mathbb{R} \backslash \cap_{\alpha \in \mathcal{A}'} A_\alpha) = \cap_{\alpha \in \mathcal{A}'} A_\alpha$, а эта штука замкнута.

Окрестности: ничего особенного не сказать: просто множества, содержащие данную точку, дополнения которых конечны (пустое множество данную точку всё равно не содержит)...

Пространство связно: покажем, что множества, одновременно и открытые, и замкнутые — это только $\mathbb{R}$ и $\emptyset$. Если нашлось другое открытое и замкнутое, оно, как и его дополнение, конечно, что в объединении не даст $\mathbb{R}$.