Типовик по линейной алгебре модуль 1: Задание 6 «Кривые второго порядка»

Латыпов Владимир Витальевич,
ИТМО КТ М3138, ***вариант 12***

23 октября 2021 г.

Содержание

1. Формулировка условия

Утверждение 1. Условие таково:

Выполнив последовательно преобразования координат: поворот, а затем параллельный перенос координатных осей, преобразовать к каноническому виду уравнение кривой второго порядка и построить ее в канонической и исходной системе координат, а также найти параметры кривой.

12. $7\sqrt{5}x^2 + \sqrt{5}y^2 + 8\sqrt{5}xy + 72x + 36y + 27\sqrt{5} = 0$

2. Решение

2.1. Поворот системы координат

Для начала найдём такой поворот, чтобы член $x'y'$ исчез.

$$\begin{cases} x = cos(\alpha)x' - sin(\alpha)y' \\ y = sin(\alpha)x' + cos(\alpha)y' \end{cases} \tag{1}$$

Тогда коэффициент перед $x'y'$ будет:

$$7\sqrt{5}\left(-2cos(\alpha)sin(\alpha)\right)+8\sqrt{5}\left(cos^2(\alpha) - sin^2(\alpha)\right)+\sqrt{5}\left(2cos(\alpha)sin(\alpha)\right) = \sqrt{5}(cos(\alpha)sin(\alpha)(7 \cdot -2 + 2) + 8cos^2(\alpha) - 8sin^2(\alpha)) \tag{2}$$

Этот коэффициент должен быть равен нулю. Тогда:

$$-12cos(\alpha)sin(\alpha) + 8cos^2(\alpha) - 8sin^2(\alpha) = 0 \tag{3}$$

$$-12tg(\alpha) + 8 - 8tg^2(\alpha) = 0 \tag{4}$$

$$4\xi^2 + 6\xi - 4 = 0 \tag{5}$$

$$\xi_{1,2} = \{-2, \frac{1}{2}\} \tag{6}$$

Возьмём $tg(\alpha) = \frac{1}{2}$ и $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$. Тогда $sin, cos > 0$

$$sin(\alpha) = \frac{tg(\alpha)}{\sqrt{1 + tg^2(\alpha)}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \tag{7}$$

$$cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2(\alpha)}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \tag{8}$$

Тогда старые координаты так выражаются через новые:

$$\begin{cases} x = \frac{2\sqrt{5}}{5}x' - \frac{\sqrt{5}}{5}y' \\ y = \frac{\sqrt{5}}{5}x' + \frac{2\sqrt{5}}{5}y' \end{cases} \tag{9}$$

Тогда перепишем уравнение в новой системе коодинат:

$$\begin{multline} 7\sqrt{5}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}x' - \frac{\sqrt{5}}{5}y'\right)^2 + \\ \sqrt{5}\left(\frac{\sqrt{5}}{5}x' + \frac{2\sqrt{5}}{5}y'\right)^2 + \\ 8\sqrt{5}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}x' - \frac{\sqrt{5}}{5}y'\right)\left(\frac{\sqrt{5}}{5}x' + \frac{2\sqrt{5}}{5}y'\right) + \\ 72\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}x' - \frac{\sqrt{5}}{5}y'\right) + \\ 36\left(\frac{\sqrt{5}}{5}x' + \frac{2\sqrt{5}}{5}y'\right) + \\ 27\sqrt{5} \\ = 0 \end{multline} \tag{10}$$

$$\begin{multline} \frac{28x'^2}{\sqrt{5}} - \frac{28x'y'}{\sqrt{5}} + \frac{7y'^2}{\sqrt{5}} + \\ \frac{x'^2}{\sqrt{5}} + \frac{4x'y'}{\sqrt{5}} + \frac{4y'^2}{\sqrt{5}} + \\ \frac{16x'^2}{\sqrt{5}} + \frac{24x'y'}{\sqrt{5}} - \frac{16y'^2}{\sqrt{5}} + \\ \frac{144x'}{\sqrt{5}} - \frac{72y'}{\sqrt{5}} + \\ \frac{36x'}{\sqrt{5}} + \frac{72y'}{\sqrt{5}} + \\ 27\sqrt{5} \\ = 0 \end{multline} \tag{11}$$

$$9x'^2 + 36'x - y'^2 + 27 = 0 \tag{12}$$

2.2. Параллельный перенос

Выделим полные квадраты:

$$9x'^2 + 36x' - y'^2 + 27 = 9(x'^2 + 4x' + 4) - y'^2 - 9 = 9(x' + 2)^2 - y'^2 - 9 = 0 \tag{13}$$

Назовём:

$$\begin{cases} x'' = x' + 2 \\ y'' = y' \end{cases} \quad \begin{cases} x' = x'' - 2 \\ y' = y'' \end{cases} \tag{14}$$

Тогда уравнение в системе координат «два штриха» будет таким:

$$9x''^2 - y'^2 = 9 \tag{15}$$

$$\frac{x''^2}{1} - \frac{y'^2}{9} = 1 \tag{16}$$