

# Конспект по математическому анализу (1-й семестр)

Латыпов Владимир (конспектор)  
donrumata03@gmail.com

Виноградов Олег Леонидович (лектор)  
olvin@math.spbu.ru

20 сентября 2021 г.

## **Содержание**

# 1. Введение

## 1.1. Множества

*Kurale, Kurale, Kurale, Kurale*

### 1.1.1. Определения

**Определение 1** (Множество).  $X$  - множество, это аксиома, его метафизическая сущность не подлежит обсуждению.

$$\begin{cases} x \in X \\ x' \notin X \end{cases} \quad (1)$$

**Пример.** Задания множества:

$$set = \{1, 2, 3\} \quad (2)$$

$$set = \{x | x \in \mathbb{N}\} \quad (3)$$

$$set = \{\{1, 4\}, 898\} \quad (4)$$

**Определение 2** (Подмножество).

$$A \subset B \iff \forall a \in A : a \in B \quad (5)$$

## 2. Вещественные числа

Множество вещественных чисел - множество, удовлетворяющее 16-и аксиомам.

1. Аксиомы поля (9 штук)

## 3. Отображения

**Определение 3** (Отображение).  $\exists X, Y - sets, f - rule$  Говорят, что задано отображение, если  $f : X \rightarrow Y$  (сопоставляет единственный  $Y$  каждому  $x \in X$ )

Отображение называют  $f$ , но оно включает как  $f$ , так и  $X, Y$

$$f : X \longrightarrow Y \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} f : X \mapsto Y \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} X \xrightarrow{f} Y \quad (6)$$

Если  $X, Y$  - числовые множества, то  $f$  - функция. Если  $Y$  - числовое множество,  $X$  - любое, то это "функционал".

$X$  - область задания, область отправления.  $Y$  - множество значений, область прибытия.

$x \in X$  - аргумент, независимая переменная.

**Определение 4** (Последовательности). Последовательность - функция натурального аргумента.

Если при этом  $Y$  - число, то  $f$  - числовая последовательность.

А если  $\forall y \in Y : y \in \mathbb{Z}$ , то это двусторонняя последовательность.

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \quad (7)$$

**Определение 5.** Семейство - это то же, что и отображение.

**Определение 6** (Естественная область определения). Естественная область определения: то, где выражение имеет смысл.

**Определение 7.**

$$id_X : X \mapsto X \quad (8)$$

$$f^{-1} \circ = id_X \quad (9)$$

**Определение 8** (Образ).

$$B = f(A) = \{y \in Y : \exists x \in A : f(x) = y\} \quad (10)$$

**Определение 9** (Прообраз). Прообраз множества  $B$ :

$$A = f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\} \quad (11)$$

**Определение 10** (Композиция). ...

### 3.0.1. Инъекция, сюръекция, биекция...

$\hookrightarrow f : X \longrightarrow Y$

**Определение 11** (Инъективное отображение). Если  $\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) \neq f(x_2)$ , то отображение инъективно, *обратимо*.

**Определение 12** (Обратимое отображение).

$$f \text{ is reversable} \iff \exists f^{-1} : \dots \quad (12)$$

**Определение 13** (Сюръективное отображение). Если  $f(X) = Y$ , то  $f$  сюръективно или *отображение на*.

**Определение 14.** Если  $f$  одновременно и инъективно, и сюръективно, то  $f$  - взаимно-однозначное соответствие или *биективно*.

### 3.1. Графики

**Определение 15** (График отображения).

$$\Gamma_f = \{(x, y) : x \in X, y = f(x)\} \subset X \times Y \quad (13)$$

**Теорема 1.**

$$\Gamma_f \iff f \quad (14)$$

**Определение 16.** Отображение, сопоставляющее каждому  $y \in f(X) \longrightarrow y \in Y$ , для которого

$$f^{-1}(x) : f(X) \mapsto X \quad (15)$$

Но что такое  $f^{-1}$ ? Прообраз или обратное отображение?

Если обратимо, и имеет значение, то они совпадают

**Определение 17** (Сужение, распространение, расширение, приведение).

$$]f : X \mapsto Y, X_0 \subset X \quad (16)$$

$$f|_{X_0} \quad (17)$$

### 3.2. Операции над функциями

- Сложение:  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- Умножение: ...
- Деление: ...
- Вычитание: ...
- ...

#### 3.2.1. Многомерные отображения

$f_i$  - Координатные функции отображения  $f$

### 3.3. Счётные множества

Если множества конечны, легко сравнить количество элементов. Если одно конечно, другое - бес, то понятно.

А вот вопрос - одинаковы ли бесконечности?!

**Определение 18** (Равномощные множества). Множества называют *равномощными* или *эквивалентными (по мощности)*, если  $\exists$  биекция (взаимно однозначное соответствие) между ними

**Определение 19** (Бесконечное множество). Не равномощно никакому подотрезку натурального ряда  $\iff$  никогда не исчерпается.

**Замечание.** Равномощность множеств - отношение эквивалентности. Существуют классы эквивалентности по мощности.

**Пример.** Пример равномощных множеств:

- Отрезки (возможно, разных длин)

- Концентрические (и не только) окружности
- ...
- Плоскость и сфера
- Отрезок и плоскость
- Полуинтервал и окружность

**Определение 20.**  $A$  - счётно  $\Leftrightarrow A \sim \mathbb{N}$

Эквивалентное определение: можно занумеровать натуральными числами, то есть расположить в виде последовательности

**Пример.** Положительные, чётные, квадраты натуральных, целые, ... - всё счётные

**Теорема 2.** Всякое бесконечное множество содержит счётное подмножество

*Доказательство.* Есть хотя бы один элемент. Обозначим его  $a_1$ , удалим его.  
*induction* ... ■

**Теорема 3.** Всякое подмножество счётного множества - счётно.

*Доказательство.*  $b_{n+1} = A_{\min(\{n | n \in A_{\text{indexes}}\})}$ , *induction* ... ■

Предыдущие 2 теоремы - о бедности натурального ряда.

**Определение 21** (Не более, чем счётное (НБЧС)). = пустое, конечное или счётное.

**Лемма 1.**  $\mathbb{N}^n, n \in \mathbb{N}$  - счётное множество

*Доказательство.* Заполняем матрицу змейкой по диагонали. Для  $n$  измерений: *induction* ... ■

**Теорема 4.** Не более чем счётное объединение (множество индексов НБЧС) не более чем счётных множеств - не более чем счётное.

*Доказательство.*

$$B = \bigcup_{k=1}^n A_k \quad or \quad B = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \quad (18)$$

Запишем в матрицу:  $A_1, A_2, A_1, \dots$  Получили не более чем множество  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ . ■

**Теорема 5.** Множество  $\mathbb{Q}$  - счётно.

*Доказательство.* Догадайтесь! ■

**Теорема 6.** Множество  $\mathbb{R} \cap [0, 1]$  - несчётно.

*Доказательство.* Пусть несчётно.

$$[0, 1] = \{x_1, x_2, \dots\} \quad (19)$$

Разобьём отрезок на три части:  $[0, \frac{1}{3}]$ ,  $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ ,  $[\frac{2}{3}, 1]$  Рассмотрим отрезок, в котором нет точки  $x_1$ , затем - тот, в котором нет  $x_2$ , деля на три до бесконечности. Получим последовательность вложенных отрезков  $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ . Тогда по аксиоме о вложенных отрезках  $\exists x^* : \forall n : x^* \in [a_n, b_n]$ . Если пронумеровали, значит, был некий  $m$ , который Но, по построению, мы строили такой подотрезок ■

**Следствие 1** (Некоторые множества тоже несчётны).  $\mathbb{R}$  - несчётно, так как иначе его бесконечное подмножество было счётно.

- Любого невырожденный отрезок несчётен
- Любого невырожденный интервал, полуинтервал несчётен

Как строить биекцию, если выколотые точки?

**Утверждение 1.** Если  $A$  - бесконечно, а  $B$  - не более чем счётно, то  $A \sim B$



**Свойство 1** (Характеристическое свойство бесконечных множеств).  
Если

**Определение 22** ( $|A| < |B|$ ).  $|A| < |B| \stackrel{\text{def}}{\iff} (\exists \text{bijection } A \leftrightarrow \text{part}(B) \wedge \nexists \text{bijection } A \leftrightarrow B)$

**Теорема 7** (Теорема Кантора-Берштейна). Если  $A \sim \text{part}(B) \&\& B \sim \text{part}(A)$ , то  $A \sim B$   
(Теорема о том, что мощности можно сравнивать: либо )

**Утверждение 2.** Множество всех подмножеств имеют мощность бóльшую, чем само множество.

## 4. Последовательности в метрических пространствах

### 4.1. Предел последовательности

**Определение 23.**

$$A = \lim x_n \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0 : \exists N_0 : \forall n > N_0 : |A - x_n| < \varepsilon \quad (20)$$

**Определение 24** (Сходящиеся, расходящиеся последовательности).

**Пример.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad (21)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A = A \quad (22)$$

**Пример.**

$$(!) \quad \forall A : \lim \{-1, 1, -1, \dots\} \neq A \quad (23)$$

Предъявим  $\varepsilon = 0.1$ :  $\exists n_1, n_2 : \forall n > n_1 : |A - a_n| < \varepsilon$

**Замечание.** Если проверено малое эpsilon, можно не проверять большие эpsilon. Например, достаточно проверять для всех  $|\varepsilon| < 1$

**Замечание.** Не обязательно находить самый маленький номер, для данного  $\varepsilon$ .

**Замечание.** Одно или оба (из 2, 3) строгих неравенства можно заменить на нестрогие, это не сложно доказать.

**Замечание.** Если заменить конечное число членов, то сходимость не нарушится и предел не изменится.

**Замечание.** Последнее неравенство с модулем можно переписать как двойное. Это может быть полезно при некоторых доказательствах. Интервал  $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$  -  $\varepsilon$ -окрестность точки  $A$ . Тогда можно записать предел словами: Для любой окрестности точки все члены за исключением конечного множества принадлежат этой окрестности.