Теория чисел (практика)

Владимир Латыпов
donrumata03@gmail.com

Vladimir Latypov
donrumata03@gmail.com

Содержание

1 Разбор ДЗ 1

1.1 Поле

Теорема 1.1.1 $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$ — поле из p элементов

Доказательство Решим уравнение $\overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{c} \cdot \overline{d} = 1$ алгоритмом Евклида, тогда $\overline{a} \cdot \overline{b} = 1$.
□

1.2 Корректность определения локализации $S^{-1}R$

Показываем, что отношение из определения $S^{-1}R$ — отношение эквивалентности: $(a_1, s_1) \sim (a_2, s_2) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (a_1 s_2 - a_2 s_1) \cdot s$ для некоторого s.

Без s тразитивность для не областей целостности не докажется.

Д: домножим накрест равенства, вынесем за скобку.

1.3 Пример, где условие $\cdot\, s$ существено: $\mathbb{Z}$

$S = \{1, 2, 4\}$

$S^{-1}R \cong \mathbb{F}_3$

Разберём 18 случаев, расположим в 3 ряда, 6 колонок.

1.4 Прообраз идеала при гомоморфизме — тоже идеал

Замечание 1.4.2 Уже доказали для ядра (прообраза $\{\mathbb{0}\}$)

Доказательство Для начала покажем, что это □

2 Гауссовы числа

Определение 2.1 $Z[i]$ — целые Гауссовы числа ($\mathfrak{R}, \mathfrak{I} \in \mathbb{Z}$)

Поле частных $Z[i]$ ($\cong \mathbb{Q}[i] = Z[i] + iZ[i]$) вкладывается в $\mathbb{C}$.

Евклидова норма определяется почти как для копексных: $d(a + bi) = a^2 + b^2$.

Целые гауссовы числа — тоже Евклидово кольцо: для деления с остатком
- делим как комплексные числа
- берём ближайшее из $\mathbb{Z}[i]$

3 Практика 2

3.1 Раскладываем на простые множители в кольце Гауссовых чисел

От 1 до 10-и

- 1
- $2 = (1 + i)(1 - i) = -i(1 + i)^2$
- 3
- $5 = (2 - i)(2 + i)$
- 7

Замечание 3.1.1 Если сумма квардатов частей — простое число, то и само Гауссово число простое ($a^2 + b^2$— простое $\Rightarrow a + bi$— простое + в силу мультипликативности нормы «$\|a + bi\| = a^2 + b^2$» имеем $N(a + bi) = N(x) + N(y)$)

$1 + 3i = (1 + i)(2 + i)$

Нарисовали на координатах схемку 5×5 простых гауссовых чисел.

Теорема 3.1.2

$$\mathbb{Z}[i]/(a + bi) \cong \mathbb{Z}/(a^2 + b^2)$$

Доказательство

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r, "f"] \arrow[d] & \mathbb{Z}[i]/(a + bi) \\
\mathbb{Z}/(a^2 + b^2) \arrow[ur, dashed, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

$\mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}[i]/(a + bi)$.

Покажем, что $a^2 + b^2 \ni \ker f = \mathbb{Z} \cap_{\text{внутри } Z[i]} (a + bi)$.

$\square$

Замечание 3.1.3 $a, b \neq 0$ $a + bi$ — простое $\Leftrightarrow a^2 + b^2$ — простое

Пример 3.1.4

Easy to learn	Great output	Intuitive
Our best Typst yet	Responsive design in print for everyone	One more thing...

$\mathbb{Z}[i]/(2) = \mathbb{Z}[i]/(1 + i)^2 = \mathbb{F}_2[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ (где ε — нильпотент)

dfgdsfg dfgdsfg dfgdsfgdfgdsfg dfgdsfg dfgdsfg dfgdsfg dfgdsfg dfgdsfgdfgdsfg dfgdsfg dfgdsfg

dfgdsfg dfgdsfg dfgdsfgdfgdsfg dfgdsfg dfgdsfg

dfgdsfg dfgdsfg dfgdsfgdfgdsfg dfgdsfg dfgdsfg

dfgdsfg dfgdsfg dfgdsfgdfgdsfg dfgdsfg dfgdsfg

Теорема 3.1.5 *(Китайская теорема об остатках)* $\gcd(m, n) = 1$ $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$