Типовик по линейной алгебре «Дизъюнктные подпространства»

Латыпов Владимир Витальевич,
ИТМО КТ M3138, ***вариант 12***

24 декабря 2021 г.

1. Формулировка условия

Утверждение 1. Условие таково:

1. Найдите общее решение с.л.о.у. — линейное подпространство L.
2. Для линейного подпространства L постройте какое-либо прямое дополнение L', дополнив ф.с.р. с.л.о.у. до базиса всего пространства векторами канонического базиса.
3. Найдите проекции x_1 и x_2 вектора x на подпространство L параллельно L', и на подпространство L' параллельно L, соответственно.
4. Убедитесь, что x_1 + x_2 = x. Выполните проверку, подставив x_1 в исходную СЛОУ.

В п.3 и п.4 можно использовать матричный калькулятор для решения с.л.н.у. и проверки, предварительно выписав все системы, для которых он будет использован.

Задано L через СЛОУ с матрицей коэффициентов:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 12 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & -10 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

А также

$$x = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -5 & 13 & 1 \end{pmatrix}^T \tag{2}$$

2. Нахождение L

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -1 & 12 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & -10 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 12 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 3 & -34 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 3 & -34 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 12 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-3}{8} & \frac{17}{4} & \frac{-3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

В конце концов, за параметры берём

$$\begin{cases} t_1 = x_3 \\ t_2 = x_4 \\ t_3 = x_5 \end{cases} \tag{4}$$

И тогда

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} \frac{-1}{8} \\ \frac{3}{8} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{-17}{4} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} \frac{-1}{8} \\ \frac{3}{8} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\equiv t_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -17 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \tag{5}$$

3. Нахождение прямого дополнения $L^{'}$ к L

Можно дописать к этим векторам все векторы базиса и найти ранг, попутно определяя базис. Но можно заметить, что

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 8 & 0 & 0 \\ 3 & -17 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 5 \tag{6}$$

И тогда:

$$L' = span(b_1, b_2) \tag{7}$$
$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$
$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

4. Разложить вектор x по L и $L^{'}$

То есть

$$x = y_1A_1 + y_2A_2 + y_3A_3 + z_1B_1 + z_2B_2 \tag{10}$$

И тогда

$$x_1 = y_1A_1 + y_2A_2 + y_3A_3 \tag{11}$$

$$x_2 = z_1B_1 + z_2B_2 \tag{12}$$

Ну, давайте решим систему для разложения:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -17 & 3 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -5 \\ 13 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-5}{8} \\ \frac{13}{4} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{-33}{4} \\ \frac{219}{4} \end{pmatrix} \tag{14}$$

Тогда:

$$x_1 = y_1A_1 + y_2A_2 + y_3A_3 = \begin{pmatrix} \frac{41}{4} \\ -\frac{227}{4} \\ -5 \\ 13 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{15}$$

$$x_2 = z_1B_1 + z_2B_2 = \begin{pmatrix} \frac{-33}{4} \\ \frac{219}{4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{16}$$

Проверяем

$$x_1 + x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -5 \\ 13 \\ 1 \end{pmatrix} = x \tag{17}$$

Подставив x_1 в систему, заметим, что он является решением, а x_2 — нет. Проверка успешна.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 12 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & -10 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{41}{4} \\ \frac{-227}{4} \\ -5 \\ 13 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbb{0} \tag{18}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 12 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & -10 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-33}{4} \\ \frac{219}{4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 156 \\ -126 \\ 30 \end{pmatrix} \neq \mathbb{0} \tag{19}$$