ДЗ 11
(кардинальное)

Владимир Латыпов
donrumata03@gmail.com

Содержание

1 Существенность для ординальности

Пример (Вполне упорядоченное отношением $\in$, но не транзитивное): $A = \{\{\varnothing\}\}$. С одной стороны, у любого непустого подмножества (то есть самого A) есть минимальный элемент $\{\varnothing\}$.

Однако $\{\varnothing\} \in A$, $\varnothing \in \{\varnothing\}$, но $\{\varnothing\} \notin A$, что портиворечит определению транзитивности.

Пример (Транзитивное, но не вполне упорядоченное): $B = \{\{\{\varnothing\}\}, \varnothing\}$, $C = \{\{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing\}\}$

2 Никто не принадлежит себе

Аксиома фундирования: непустое множество A содежит элемент, не пересекается с A.

Но если $x \in x$, то для $\{x\}$ должно быть $x \cap \{x\} = \varnothing$, однако $x \cap \{x\} = x \neq \varnothing$.

3 Равенство элементов множеств из одного элемента

7

Определение биективности

8 …

$$\exists b_0 \in b$$
$$\forall x.x \in A \to \exists! y.\langle x, y\rangle \in b$$

Возьмём отношение, где второй элемент константен (который существует, так как b непусто), а первый любой. Существует, так как фильтруем декартово произведение (существует по задаче) по предикату $\langle x, y\rangle \to y = b_0$.

Оно функционально.

Первая часть (существование)

9 …

10 (Кадинальная)

10.1 Неперерывные функции

Лемма 10.1.1: $|\mathbb{R}| \le |C(\mathbb{R})|$

Доказательство: Инъектируем $x \mapsto \lambda y.x$, все функции такого виде для разных x — разные. □

Теорема 2: $|C(\mathbb{R})| \le |\mathbb{R}|$

Доказательство:
- $|C(\mathbb{R})| = |C(\mathbb{Q} \to \mathbb{R})|$, отображение:
  1. в сторону $C(\mathbb{Q} \to \mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$: доопределяем по непрерывности
  2. в сторону $C(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{Q} \to \mathbb{R})$: сужаем
- $|C(\mathbb{Q} \to \mathbb{R})| \le |\mathbb{Q} \to \mathbb{R}| = |\mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$, так как возьмём $(\mathbb{P} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})) \to \mathcal{P}(\mathbb{N}) : \langle p, s\rangle \to \mathrm{map}\ (\lambda y.p^y)\ s$

□

Теорема 3: $|\mathbb{R}| = |C(\mathbb{R})|$

Доказательство: Теорема об антисимметричности. □

10.2 Произвольные вещественнозначные функции

Лемма 10.2.1: $|\mathcal{P}(\mathbb{R})| \le |\mathbb{R} \to \mathbb{R}|$

Доказательство: $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \to (\mathbb{R} \to \mathbb{R}) : s \to \chi_s$ □

Обратно:

Лемма 10.2.2: $|\mathcal{P}(\mathbb{R})| \ge |\mathbb{R} \to \mathbb{R}|$

Доказательство: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}$, так как кривая Гильберта.

$|\mathbb{R} \to \mathbb{R}| \le \mathcal{P}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ □

Теорема 3: $|\mathcal{P}(\mathbb{R})| = |\mathbb{R} \to \mathbb{R}|$

Доказательство: Теорема об антисимметричности. □

11 Тёмный кардинал

- $|\mathbb{R}| \le |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$, так как множество натуральных чисел — суть битовый вектор записи вещественного в двоичной системе счисления.
- $|\mathbb{R}| \ge |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$, так как возьмём десятичную запись и множества, где из каждого десятка есть все, кроме 1 и 9.
- Второе: частный случай пункта 1 номера 10
- Третье: Непрерывные $|Q \to Q|$ — хотя бы континуально, так как $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \to (\mathbb{N} \to \mathbb{N}) : s \to \chi_s$

Итого: все континуальны.

11.1 Приложение: континуальность $\mathbb{R}$

Теорема 1: $|\mathbb{R}| \le |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$

Доказательство: Числу x на отрезке $[0, 1]$ сопоставим *какое-то*, например, минимальное как битовый вектор его (бесконечное) представление в двоичной системе счисления (легко делается итеративным алгоритмом и индукцией), а ему — множество $\{n \in \mathbb{N} \mid x_2[n] = 1)\}$. Это инъекция, так как разные числа отличаются хотя бы□

Теорема 2: $|\mathbb{R}| \ge |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$

Доказательство:

Построим инъекцию $B \to \mathbb{R}$, где

$$B = \left\{S \subset \mathbb{N} \mid \forall i \in \mathbb{N}_0 : \left|S\Big|_{[10i, 10i+10)}\right| = 1 \land 10i + 0 \notin S \land 10i + 9 \notin S\right\}.$$

$|B| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ ($\ge$, так как $f : |\mathcal{P}(\mathbb{N})| \to |B|$, $s \mapsto \operatorname{map}\ (\lambda x.x \cdot 10 + 5)\ s$ — инъекция).

Итак, финальная, давно анонсированная инъекция: $S \mapsto \{S\}_{10}$ — представление в десятичной системе счисления, где i-й разряд — тот единственный $d \in S\Big|_{[10i, 10i+10)}$.

Покажем, что это инъекция. Пусть у числа $\in [0, 1]$ два представления в таким виде. Тогда посмотрим на первый разряд k, в котором они отличаются. Тогда $0 = \left|\{S\}_{10} - \{S\}_{10}\right| \ge 10^{-k-1}$, что неверно. □

Лемма 11.1.3: Разные бинарные представления допускают только рациональные числа.

Доказательство: Пусть есть два разных вектора a_i, b_i, сходящихся к одному и тому же числу, то есть $\lim\left(a_{[1,n]}\right)_{\mathbb{R}} = a = b = \lim\left(b_{[1,n]}\right)_{\mathbb{R}}$. Покажем, что одно из них с какого-то момента $\equiv 1$, а другое — $\equiv 0$.

Рассмотрим минимальный индекс i, в котором они отличаются (имеем право в силу вполне упорядоченности $\mathbb{N}$). НУО, $a_i = 0, b_i = 1$. Покажем, что $\forall j > i : a_j = 1, b_j = 0$. Действительно, если найдётся $j^* : a_{j^*} = 0 \vee b_{j^*} = 1$, то $b - a \geq 2^{-j^*-1}$, что портиворечит определнию предела.

Таким образом, если число допускает несколько представлений, оно рационально как конечная двоичная дробь. $\square$

Доказательство: (альтернативное, теоремы 2). Иррациональные числа биективно соответствую представлениям себя в двоичной системе счисления. А рациональные — счётны. Тогда их объединение равномощно битовым векторам. $\square$