Типовик по линейной алгебре 3, Задание 3 «Тензоры в линейном пространстве. Преобразование координат.»

Латыпов Владимир Витальевич,
ИТМО КТ М3138, ***вариант 10***

22 апреля 2022 г.

1. Формулировка условия

Утверждение 1. Тензор $\alpha^{ij}_{kl} \in T_{(2,2)}$ задан четырехмерной матрицей второго порядка $A = \alpha^{ij}_{kl}$. Задана матрица перехода T от старого базиса $\{e_i\}^2_{i=1}$ к новому базису $\{\tilde{e}_i\}^2_{i=1}$

- Вычислить элемент $\tilde{\alpha}^{ij}_{kl}$ матрицы тензора в новом базисе
- Вычислить следующие свертки тензора (в старом базисе): $\alpha^{ij}_{ki}, \alpha^{ij}_{kj}, \alpha^{ij}_{ij}, \alpha^{ij}_{ji}$.

Data section:

$$T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$A = \left\| \begin{array}{cc|cc} -1 & -3 & -4 & -1 \\ 5 & 2 & 4 & 6 \\ \hline 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right\| \tag{2}$$

2. Вычисление элемента матрицы

Как известнго из формулы перехода матрицы тензора к новому базису,

$$\tilde{\alpha}^{m_1 \cdots m_q}_{k_1 \cdots k_p} = \alpha^{i_1 \cdots i_q}_{j_1 \cdots j_p} t^{j_1}_{k_1} t^{j_2}_{k_2} \cdots t^{j_p}_{k_p} s^{m_1}_{i_1} s^{m_2}_{i_2} \cdots s^{m_q}_{i_q} \tag{3}$$

В нашем случае:

$$\tilde{\alpha}^{21}_{12} = \sigma^2_k \sigma^1_l \tau^m_1 \tau^n_2 \alpha^{kl}_{mn} \tag{4}$$

, где σ — элементы матрицы S, а τ — матрицы T.

$$S = T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Переставим суммы и вычислим промежуточно матрицу B тензора $b_{mn} = \sigma^2_k \sigma^1_l \alpha^{kl}_{mn}$. Матрица станет разменрности 2×2. Причём так как и для σ^2_k, и для σ^1_l зафиксирован номер строки, можно получить нужное значение

$$B_{mn} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} A_{mn} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} A_{mn} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Получим

$$B = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 19 & 19 \\ 22 & 6 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Теперь применим к этим частичным суммам умножение на T. (Теперь будет постоянен номер столбца)

$$\tilde{\alpha}_{12}^{21} = \tau_1^m \tau_2^n b_{mn} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} B_{mn} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{16}{3} \tag{8}$$

3. Вычисление свёрток

На повестке дня $\alpha_{ki}^{ij}, \alpha_{kj}^{ij}, \alpha_{ij}^{ij}, \alpha_{ji}^{ij}$.

У α_{ki}^{ij} (2×2) вторая и третья координата определяются первой и второй координатой матрицы, а по первой и четвёртой координате берётся сумма по таким, чтобы они совпадали.

То есть фиксирован для элемента матрицы слой (и равен номеру строки матрицы), а также фиксирован номер внутреннего столбца (и равен номеру столбца матрицы):

$$\alpha_{ki}^{ij} = \beta_k^j = \begin{pmatrix} -1+4 & 0+0 \\ -3+6 & -2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

У α_{kj}^{ij} (2×2) первая и третья координата определяются первой и второй координатой матрицы, а по второй и четвёртой координате берётся сумма по таким, чтобы они совпадали.

$$\alpha_{kj}^{ij} = \gamma_k^i = \begin{pmatrix} -1-1 & 0+0 \\ 5+6 & 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 11 & 3 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Следующие два тензора можно посчитать используя первые два:

$$\alpha_{ij}^{ij} = \gamma_k^k = \operatorname{tr}\Gamma = -2+3 = 1 \tag{11}$$

$$\alpha_{ji}^{ij} = \beta_k^k = \operatorname{tr} B = 3+0 = 3 \tag{12}$$