Типовик по линейной алгебре «Канонический вид матрицы. Часть 4»

Латыпов Владимир Витальевич,
ИТМО КТ M3138, ***вариант 10***

26 сентября 2022 г.

1. Формулировка условия

Утверждение 1. Условие можно найти здесь: https://drive.google.com/file/d/1S739UJN5bLqxEaGsPdMDfRmLOZEzdFg7/view?usp=sharing

Data section:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -10 & 3 & -5 \\ -4 & 12 & -6 & 4 \\ 4 & 20 & -4 & 10 \\ 12 & 0 & 6 & 4 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$G = \begin{pmatrix} -22 & 20 & 4 & -36 \\ 22 & 4 & 10 & 12 \\ 5 & -19 & -9 & 24 \\ 27 & -13 & 3 & 34 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$P = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & -3 & -2 \\ -3 & 5 & 2 & 2 \\ -6 & 11 & 6 & 4 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$Q = \begin{pmatrix} -26 & -39 & 65 & 13 \\ -18 & -27 & 45 & 9 \\ -16 & -24 & 40 & 8 \\ -26 & -39 & 65 & 13 \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$V = \begin{pmatrix} -5 & 8 & 4 & -10 \\ 5 & -7 & 8 & -5 \\ 0 & -4 & -7 & 4 \\ 2 & 8 & 4 & -17 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 10 & -1 & 10 & 8 \\ -2 & 2 & -1 & -4 \\ 4 & -4 & 10 & 11 \end{pmatrix} \tag{6}$$

2. Нахождение жордановой формы матрицы

Для матриц F и G жорданова форма просто совпадает с диагональной. Остальные сейчас поймём, как выглядят.

3. Матрица P

Для P у нас одно собственное число, и это -1. Так как геометрическая кратность 2, будет две клетки, причём кратность в минимальном многочлене — 3, а это максимальная высота башни. То есть будут клетки размером 1 и 3.

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

4. Матрица Q

Одно собственное число, и это 0. Так как геометрическая кратность 3, будет три клетки, причём кратность в минимальном многочлене — 2, а это максимальная высота башни. То есть будут клетки размером 1, 1 и 2.

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

5. Матрица V

Собственные числа — $-11, -7$. Для каждого кратности в характеристическом и минимальном многочленах 2, а геометрическая — 1, то есть для каждого будет одна башня высотой 2.

$$J = \begin{pmatrix} -11 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \tag{9}$$

6. Матрица W

Собственные числа — $-1, 3, 5$. Для -1 и 5 просто одна единичная клетка, а вот $m(3) = 2$, то есть будет башня высотой 2.

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \tag{10}$$

7. Построение жорданового базиса

Для рассматриваемых матриц построим цепочки из подпространств $\mathfrak{K}_r$. Затем найдём циклические базисы и запишем их в столбцы матрицы перехода.

8. Матрица P

Рассматриваем единственный корень.

$$V_{-1} = \mathfrak{K}_1 = \text{Lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \tag{11}$$

$$\mathfrak{K}_2 = \text{Ker}(\mathcal{P} - (-1)\mathcal{E})^2 = \text{Lin}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \tag{12}$$

$$K_{-1} = \mathfrak{K}_3 = \mathrm{Lin}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\} \tag{13}$$

У нас будет один циклический базис, начинающийся с $\mathfrak{K}_3$, то есть длины три, один — начинающийскя с собственного длины один.

Выписывая векторы $\mathfrak{K}_2$ в матрицу и добавляя к ним векторы канонического базиса из $\mathfrak{K}_3$, считая ранг, поймём, какого вектора не хватает.

В целом очевидно, что не хватает $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$.

Будем применять к нему оператор $(\mathcal{P} - (-1)\mathcal{E})$.

Получим, что

$$(j_4, j_3, j_2) = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\3\\-3\\-6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-3\\3\\3\end{pmatrix}\right) \tag{14}$$

Заметим, что если действовать дальше, будет обнуляться.

j_1 получаем из собственного пространства, чтобы он не лежал в найденной башне. Например, $j_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$

Запишем $T = (j_1, j_2, j_3, j_4)$ Получим

$$T_{canonical \to j} = \begin{pmatrix}1 & 0 & -3 & 1\\0 & -3 & 3 & 0\\1 & 3 & -3 & 0\\0 & 3 & -6 & 0\end{pmatrix} \tag{15}$$

Проверим, что

$$T \cdot J \cdot T^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & -3 & -2 \\ -3 & 5 & 2 & 2 \\ -6 & 11 & 6 & 4 \end{pmatrix} = P \tag{16}$$

Это определённо успех.

9. Отступление

Далее будем использовать нескльно более надёжный способ, чем метод тыка. Будем пропалывать базис из конкатенации базисов $\mathfrak{B}K, \{K_i\}_{i=1}^m$ и получать $\{\overline{K_i}\}_{i=1}^m$. Ну а дальнше просто применять оператор к векторам из $\{\overline{K_i}\}_{i=1}^m$ соответствующее количество раз $(i-1)$.

10. Матрица Q

Тут у нас единственное собственное число — 0, то есть корневым пространством для него является всё $\mathbb{R}^4$. Найдём $\mathfrak{B}K$ для этого выделим базу столбцов характеристического оператора ($\mathfrak{Q} - 0\mathcal{E} = \mathfrak{Q}$)

$$\mathfrak{B}K = \mathrm{Lin}\left\{ \begin{pmatrix} 13 \\ 9 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix} \right\} \tag{17}$$

$$K_1 = V = \mathrm{Lin}\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \tag{18}$$

$$K_2 = \mathrm{Ker}\,\mathfrak{B}^2 = \mathrm{Ker}\,\mathbb{O} = K = \mathrm{Lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \tag{19}$$

Теперь прополем базис

$$\mathrm{Lin}\left\{\begin{pmatrix}13\\9\\8\\13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\2\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\0\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}= \\ =\mathrm{Lin}\left\{\begin{pmatrix}13\\9\\8\\13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\2\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\0\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\} \tag{20}$$

То есть

$$\overline{K_1}=\mathrm{Lin}\left\{\begin{pmatrix}-3\\2\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\0\\2\\0\end{pmatrix}\right\} \tag{21}$$

$$\overline{K_2}=\mathrm{Lin}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\} \tag{22}$$

То есть у нас есть два циклических базиса высоты 1 и один — высоты 2.

$$j_1=\begin{pmatrix}-3\\2\\0\\0\end{pmatrix} \tag{23}$$

$$j_2=\begin{pmatrix}5\\0\\2\\0\end{pmatrix} \tag{24}$$

$$(j_4,j_3)=\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\mathfrak{B}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-26\\-18\\-16\\-26\end{pmatrix}\right) \tag{25}$$

Получим матрицу перехода к Жорданову базису

$$T = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -26 & 1 \\ 2 & 0 & -18 & 0 \\ 0 & 2 & -16 & 0 \\ 0 & 0 & -26 & 0 \end{pmatrix} \tag{26}$$

Проверим, что $Q = TJT^{-1}$:

`https://matrixcalc.org/#%7B%7B-3,5,-26,1%7D,%7B2,0,-18,0%7D,%7B0,2,-16,0%7D,%7B0,0,-26,0%7D%7D*%7B%7B0,0,0,0%7D,%7B0,0,0,0%7D,%7B0,0,0,1%7D,%7B0,0,0,0%7D%7D*%7B%7B-3,5,-26,1%7D,%7B2,0,-18,0%7D,%7B0,2,-16,0%7D,%7B0,0,-26,0%7D%7D%5E(-1)`

11. Матрица V

Заметим, что тут есть два корневых пространства, и топология каждого очевидна: одна башня высоты 2. Нижние векторы у нас есть, а верхние можно найти из условия $j_{k+1} : \mathfrak{B} j_{k+1} = j_k$ Заметим, что j_{k+1}, найденный так, будет гарантированно лежать в нужном ядре и в нужной башне, так как $\mathfrak{B}$, применённое к нему, будет давать наш вектор j_k.

Начнём с $\lambda_1 = -11$

$$B = V + 11E = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 4 & -10 \\ 5 & 4 & 8 & -5 \\ 0 & -4 & 4 & 4 \\ 2 & 8 & 4 & -6 \end{pmatrix} \tag{27}$$

$$j_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{28}$$

j_2 найдём через уравнение выше. Например, $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{12} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Однако можно умножить обе штуки на 12. Тогда получим

$$(j_1, j_2) = \left(\begin{pmatrix} 36 \\ 24 \\ -12 \\ 36 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \tag{29}$$

Теперь на повестке дня $\lambda_2 = -7$

$$B = V + 7E = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 & -10 \\ 5 & 0 & 8 & -5 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \\ 2 & 8 & 4 & -10 \end{pmatrix} \tag{30}$$

$$j_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{31}$$

j_2 найдём через уравнение выше. Например, $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{3}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Можно умножить обе штуки на 4. Тогда получим

$$(j_3, j_4) = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \tag{32}$$

Запишем, наконец, матрицу перехода к Жорданову базису:

$$T = \begin{pmatrix} 36 & 0 & 4 & -4 \\ 24 & 4 & 4 & 0 \\ -12 & 1 & 0 & 3 \\ 36 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \tag{33}$$

И проверим, что всё сошлось: $V = TJT^{-1}$:

```
https://matrixcalc.org/#%7B%7B36,0,4,-4%7D,%7B24,4,4,0%
7D,%7B-12,1,0,3%7D,%7B36,0,4,0%7D%7D*%7B%7B-11,1,0,0%7D,
%7B0,-11,0,0%7D,%7B0,0,-7,1%7D,%7B0,0,0,-7%7D%7D*%7B%7B36,
0,4,-4%7D,%7B24,4,4,0%7D,%7B-12,1,0,3%7D,%7B36,0,4,0%7D%
7D%5E(-1)
```

12. Матрица W

Здесь опять вырисовываетс простой случай: есть толко один дополнительный элемент циклических базисов, который нужно найти. Сделаем это из условия $j_{k+1} : \mathfrak{B} j_{k+1} = j_k$.

Для $\lambda_1 = -1 : j_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Для $\lambda_3 = 5 : j_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Для $\lambda_2 = 3 : j_2 = k \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Тогда, решив уравнение, получим:

$$j_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{34}$$

$$j_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \tag{35}$$

Запишем матрицу перехода:

$$T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & -1 \\ 8 & 12 & 7 & -2 \\ -2 & 0 & 3 & -1 \\ 5 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{36}$$

Проведём проверку, сошлось: `https://matrixcalc.org/#%7B%7B-2,0,1,-1%7D,%7B8,12,7,-2%7D,%7B-2,0,3,-1%7D,%7B5,6,0,1%7D%7D*%7B%7B-1,0,0,0%7D,%7B0,3,1,0%7D,%7B0,0,3,0%7D,%7B0,0,0,5%7D%7D*%7B%7B-2,0,1,-1%7D,%7B8,12,7,-2%7D,%7B-2,0,3,-1%7D,%7B5,6,0,1%7D%7D%5E(-1)`.