Домашнее задание. Практика 2

18 февраля 2023

1 Независимость в подпространстве (первые два пункта – одна задача)

1. Докажите, что в любом вероятностном пространстве Ω любое событие положительной вероятности A можно сделать вероятностным пространством так, что для любых двух событий в нём B, CA выполнено $p_A(B|C) = p_\Omega(B|C)$.
2. Докажите, что если в пространстве Ω событие A имеет вероятность 1, то для любого события B выполняется равенство $p(B|A) = p(B)$.
3. Верно ли, что если Ω — вероятностное пространство, $A \in \Omega$ — событие положительной вероятности, и $B, C \subset A$ — события, вложенные в A, причём в пространстве A они независимы, то и в пространстве Ω они независимы? Верно ли обратное? Верно ли, что если $p(A) > 0$ и A, B, C попарно независимы, то $B \cap A$ и $C \cap A$ независимы в пространстве A?

2

Рассмотрим $\Omega = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Рассмотрим следующее распределение вероятностей $p(k) = a^{k-1}\frac{1-a}{1-a^6}$, где $0 < a \neq 1$. Являются ли в нём независимыми события “k чётно” и “k не простое”, если $a = \sqrt{\frac{-2+\sqrt{7}}{2}}$? Если $a = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$?

3 Контрпримеры (суммарно одна задача)

- Пусть в некотором пространстве Ω фиксированы $A \subset B \subset \Omega, p(B \backslash A) \neq 0$. Могут ли A и B быть независимыми?
- Привести примеры, показывающие, что равенства

$$P(B|A) + P(B|\overline{A}) = 1,$$

$$P(B|A) + P(\overline{B}|\overline{A}) = 1$$

неверны.

4 Неравенства

Доказать неравенства Буля:

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i), P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} P(\overline{A}_i)$$

Показать также, что для любого n > 1 справедливо неравенство

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1)$$

и имеют место неравенство Куниаса

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}) \leq \min_k \{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i \neq k} P(A_i \cap A_k)\}$$

и неравенство Чжуна–Эрдеша

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\right)^2}{\sum_{i,j=1}^{n} P(A_i \cap A_j)}$$

5 Априорные шары

Урна содержит M шаров, из которых M_1 шаров белого цвета. Рассматривается выбор объема n. Пусть B_j — событие, состоящее в том, что извлеченный на j-м шаге шар имел белый цвет, а A_k — событие, состоящее в том, что в выборке объема n имеется в точности k белых шаров. Показать, что как для выбора с возвращением, так и для выбора без возвращения

$$P(B_j | A_k) = k/n.$$

Hint. Надо начать с доказательства того, что для выбора с возвращением

$$P(B_j \cap A_k) = \frac{C_{n-1}^{k-1} M_1^k (M - M_1)^{n-k}}{M^n},$$

$$P(A_k) = \frac{C_n^k M_1^k (M - M_1)^{n-k}}{M^n},$$

а для выбора без возвращения

$$P(B_j \cap A_k) = \frac{C_{n-1}^{k-1} (M_1)_k (M - M_1)_{n-k}}{(M)_n},$$

$$P(A_k) = \frac{C_n^k (M_1)_k (M - M_1)_{n-k}}{(M)_n}.$$

6 "Добавленный"белый шар

В урну, где находится один белый шар, добавили еще один «вслепую» выбранный шар — либо белый, либо черный (с одинаковыми вероятностями выбора). После этого «случайным» образом вытащили из урны один шар. Он оказался белым. Какова условная вероятность того, что оставшийся в урне шар тоже белый?

7 А было ли письмо?

Письмо находится в письменном столе с вероятностью p, причём с равной вероятностью оно может быть в любом из восьми ящиков стола. Мы просмотрели 7 ящиков и письма не нашли. Какова при этом вероятность, что письмо в восьмом ящике?

8

Какое минимальное число точек должно иметь конечное вероятностное пространство, чтобы на этом пространстве можно было задать n независимых в совокупности событий $A_1, \ldots, A_n$, вероятности которых отличны от нуля и единицы?