

# Конспект к экзамену по билетам (математический анализ) (3-й семестр)

Латыпов Владимир (конспектор)

[t.me/donRumata03](https://t.me/donRumata03), [github.com/donRumata03](https://github.com/donRumata03), [donrumata03@gmail.com](mailto:donrumata03@gmail.com)

Лимар Иван Александрович (лектор)

<https://t.me/limvan>

13 апреля 2023 г.

## **Содержание**

<b>1</b>	<b>Как работать с этим сжатым конспектом</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Определения</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Процесс Бернулли, предельные теоремы</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Переход вероятностному пространству распределения</b>	<b>6</b>
<b>5</b>	<b>Примеры дискретных распределений</b>	<b>6</b>
<b>6</b>	<b>Примеры непрерывных распределений</b>	<b>6</b>

## 1. Как работать с этим сжатым конспектом

☞ Составлено в соответствии с лекциями весны 2023

## 2. Определения

**Определение** (Вероятностное пространство). Это пространство с вероятностной (то есть  $P(X) = 1$ ) мерой: мера должна быть счётно-аддитивной функцией  $2^X \rightarrow [0, \infty)$  на  $\sigma$ -алгебре.

Используется «птичий язык»:

$$\begin{aligned} AB &\stackrel{\text{def}}{=} A \cap B \\ A + B &\stackrel{\text{def}}{=} A \cup B \\ \overline{A} &\stackrel{\text{def}}{=} A^c \end{aligned}$$

Почему определяем на какой-то странной сигма-алгебре, а не на полной ( $2^X$ )?

В случае с  $\mathbb{R}^n$  — на всём не получится сделать адекватную меру, так как, например, если в  $\mathbb{R}$  объявим  $\mu[0, 1] = 1$ , то множество Витали будет неизмеримо.

(Вспомним из матана, что вообще любая мера, инвариантная относительно сдвига, на той же сигма-алгебре — в константу раз отличается от меры Лебега).

**Определение** (Вероятностное пространство в широком смысле). Теперь работаем в алгебре, а мера — счётно-дизъюнктивно аддитивна на множествах, объединение которых уже лежит в алгебре.

**Теорема 1** (Единственность стандартного распространения). ...вероятностной меры с вероятностного пространства в широком смысле на вероятностное пространство в обычном, а именно — на .

**Доказательство.** Как легко видеть,  $\left| \bigoplus_{k \in S} (\mathfrak{K}^{\mathbb{F}^\alpha(i)})_{i \in \mathcal{U}_k} \right| \preccurlyeq \aleph_1$  при  $[\mathfrak{H}]_{\mathcal{W}} \cap \mathbb{F}^\alpha(\mathbb{N}) \neq \emptyset$ . ■

*Замечание.* Из матана известно, что достаточно потребовать первоначальное задание меры на полукольце и сигма-конечности, чтобы она совпадала со стандартным распространением на сигма-алгебре измеримых.

*Пример.* Примеры вероятностных пространств:

1. Дискретное: состоит из элементарных исходов, у каждого вес.  $\mathbb{A} = 2^\Omega$ ,  $P(A) = \sum_{w \in A} w$

(a) Броски монеты до первого орла

(b) Модель классической вероятности:  $\forall i : w_i = \frac{1}{n}$ . Колличество элементарных исходов в событии считается комбинаторикой.

Пример: шарики и перегородки кодируют  $k$ -элементные мультимножества  $n$  объектов или же  $n$ -кортежи длины  $k$ .

2. Геометрическая вероятность.  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\Omega \in \mathbb{A}_n$ ,  $P(A) = \frac{P(A)}{P(\Omega)}$ . Пример: вычисление  $\pi$  Монте-Карловскими бросками иголки (считаем меру допустимого множества, интегрируя его сечение по проекции).

**Свойство 2.1** (Элементарные свойства вероятности). • *Монотонность*

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- *Включения-исключения*
- *Полуаддитивность*

## 🌀 Лекция 2 🌀

**Теорема 2** (Равносильность непрерывности и счётной аддитивности объёма). Утверждения равносильны:

1.  $P$  — мера
2.  $P$  — объём, непрерывный снизу
3.  $P$  — объём, непрерывный сверху

*Доказательство.*  $2 \Leftrightarrow 3$ : инвертируем.

$(2, 3) \Leftrightarrow 1$ : разбиваем на кольца, остаток сходящегося ряда  $\rightarrow 0$ . ■

**Теорема 3** (Формула полной вероятности). Пусть  $\{A_i\}^n$  дизъюнк-  
тны,  $B \in \bigcup_i A_i$ .

Тогда  $P(B) = \sum_i P(A_i)P(B|A_i)$ .

**Теорема 4** (Байеса).

$$\underbrace{P(A|B)}_{\text{likelihood}} = \frac{\overbrace{P(A)}^{\text{prior}} \overbrace{P(B|A)}^{\text{likelihood}}}{\underbrace{P(B)}_{\text{marginal}}} \quad (2.1)$$

Можно переписать в виде:

$\{A_i\}$  — система дизъюнктивных событий,  $B \in \bigcup_i A_i$ . (((Каждое из них „могло вызвать“  $B$  и какое-то точно вызвало))). Вопрос — какое:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_i P(A_i)P(B|A_i)} \quad (2.2)$$

То есть при получении информации, что произошло  $B$ , ожидания событий скейлятся пропорционально тому, насколько вероятно они вызывают  $B$ .

### 3. Процесс Бернулли, предельные теоремы

Процесс Бернулли: серия экспериментов подбрасывания  $p$ -монетки ( $p$  может как меняться, так и не меняться).

Предельными теоремами можно аппроксимировать биномиальное (или более извращённое, но порождённое процессом Бернулли) распределение

Теорема Пуассона: аппроксимация  $P(S_n = k)$  для  $p_n \xrightarrow{\lambda} \frac{\lambda}{n}$  распределением Пуассона:  $e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ .

(Локальная) теорема Муавра-Лапласа: асимптотическое поведение  $P(S_n = k)$  при  $n, (n - k) \rightarrow \infty$ .

Интегральная теорема Муавра-Лапласа (частный случай ЦПТ): аппроксимация биномиального распределения нормальным ( $F_{\text{Bin}} \approx \text{erf}$ ).

## 4. Переход вероятностному пространству распределения

Случайная величина  $X \in \mathcal{B}(\Omega \rightarrow \mathbb{R})$  (измерима относительно сигма-алгебры этого в.п.).

Распределение с.в.:  $P_X : \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$P_X(B) \stackrel{\text{def}}{=} P(\{\omega | X(\omega) \in B\}) = P(X^{-1}(B)) \stackrel{\text{def}}{=} P(X \in B) \quad (4.1)$$

Получили вероятностную меру на борелевской  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{B}_1$ .

Вроде и существует какое-то вероятностное пространство с каким-то множеством исходов, но часто будем говорить о некоей «проекции» этой информации — о функции распределения случайной величины:  $P_X(A) = P$

Абсолютно непрерывная с.в., если найдётся  $p_X$ , т.ч.:  $P_X(A) = \int_A p_X d\mu$

## 5. Примеры дискретных распределений

- Одноточечное  $I_c : P(I_c = c) = 1$
- Бернулли:  $X \sim \text{Bern}(p) \Leftrightarrow \begin{cases} P(X = 0) = 1 - p \\ P(X = 1) = p \end{cases}$
- Биномиальное:  $X \sim \text{Bin}(n, p) \Leftrightarrow P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$
- Обратное биномиальное (вероятность, что продолбаем  $k$  лишних шагов до достижения  $r$ -того успеха):  $X \sim \text{NB}(r, p) \Leftrightarrow X = \min\{n | S_n \geq r\} - r; P(X = k) = \binom{r-1}{k+r-1} p^r q^k \dots$
- Частный случай — геометрическое распределение: количество неудач до первого выпадения удачи:

## 6. Примеры непрерывных распределений

Юниформа, автомат и противогаз

Намаааа

Гамма

Пуассон

Экспоненциальное