

**Решения теоретических („малых“) домашних  
заданий**

*Математическая логика, ИТМО,  
М3232-М3239, весна 2023 года*

Латыпов Владимир (конспектор)

[t.me/donRumata03](https://t.me/donRumata03), [github.com/donRumata03](https://github.com/donRumata03), [donrumata03@gmail.com](mailto:donrumata03@gmail.com)

30 апреля 2023 г.

## **Содержание**

|          |  |          |
|----------|--|----------|
| <b>1</b> | <b>Непротиворечивость омега-непротиворечивой теории</b>      | <b>3</b> |
| <b>2</b> | <b>Омега-протеворечивое расширение формальной арифметики</b> | <b>3</b> |

## 1. Непротиворечивость омега-непротиворечивой теории

**Определение** ( $\omega$ -непротиворечивая теория). Такая  $\mathcal{T}$ , что для любой формулы  $\phi$  из  $\vdash_{\mathcal{T}} \phi(\bar{i})$  для любого  $i \in \mathbb{N}$  следует  $\nvdash_{\mathcal{T}} \exists x. \neg \phi(x)$ .

То есть в  $\omega$ -непротиворечивой теории существует недоказуемая формула, например, для  $\phi \equiv x = x$  имеем  $\nvdash \exists x. \neg (x = x)$ .

Однако в противоречивой теории все формулы доказуемы:  $\alpha \rightarrow \neg \alpha \rightarrow \beta$  (аксиома 10и, в КИВ — она выводится для любых  $\alpha, \beta$ ).

Значит,  $\omega$ -непротиворечивая теория непротиворечива. ■

## 2. Омега-протеворечивое расширение формальной арифметики

**Определение** (Расширение теории). Теория  $\mathcal{S}$  расширяет теорию  $\mathcal{T}$ , если из  $\vdash_{\mathcal{S}} \alpha$  следует  $\vdash_{\mathcal{T}} \alpha$  для любой формулы  $\alpha$ .

Добавим аксиому  $A \& \neg A$ . Тогда новая теория противоречива, а значит расширяет (неслыханно расширяет!) формальную арифметику (так как правая часть импликации выполнена всегда).

Тогда по (1) она тем более  $\omega$ -противоречива. ■