Лекция 9. Полезные инструменты

14 апреля 2022 г.

На этой лекции мы пройдем разные неравенства, которые позволяют нам делать некоторые выводы о с.в., когда информация об этих с.в. ограничена

1 Неравенство Маркова

Самый простой случай — когда мы знаем только матожидание с.в. В этом случае нам может помочь неравенство Маркова. Если с.в. X неотрицательна, тогда для всех $a \in \mathbb{R}^+$ верно, что

$$\boxed{\Pr(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}}$$

Трактовка: X вряд ли сильно больше своего матожидания. Заметим, что это неравенство несет хоть какую-то смысловую нагрузку только для $a \geq E[X]$.

Докажем это неравенство. Для этого рассмотрим другую с.в. Y, такую, что

$$Y = \begin{cases} 0, & \text{если } X < a \\ a, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Заметим, что так как $Y \leq X$, то и $E[Y] \leq E[X]$.

Поэтому

$$E[X] \geq E[Y] = a\Pr(Y = a) + 0 = a\Pr(X \geq a).$$

Разделим обе части на a, получим неравнество Маркова.

Посмотрим теперь, насколько оно точное. Возьмем с.в. $X \sim \mathrm{Exp}(1)$ и вспомним, что $E[X] = 1$ и $\Pr(X \geq a) = e^{-a}$. Неравенство Маркова дает нам куда более слабую оценку: $\Pr(X \geq a) \leq \frac{1}{a}$.

Посмотрим также, как применять это неравенство на другом примере. Пусть $X \sim U(-4, 4)$. Эта с.в. не неотрицательная, поэтому к ней нельзя применить неравнество

Маркова. Однако есть три способа его использовать. Попробуем вычислить вероятность того, что $X \geq 3$. Из простых соображений она равна $\frac{1}{8}$

Первый способ. Возьмем с.в. $Y = |X|$. Несложными вычислениями можно показать, что $Y \sim U(0,4)$. (Для этого рассмотрим $F_Y(y) = F_X(x) - F_X(-x)$ и возьмем производную). Теперь заметим, что событие $Y \geq 3$ есть надсобытие для $X \geq 3$, поэтому

$$\Pr(X \geq 3) \leq \Pr(Y \geq 3) \leq \frac{E[Y]}{3} = \frac{2}{3}.$$

Второй способ. Возьмем точно такой же $Y = |X|$. Заметим, что так как X симметричен относительно нуля, то $\Pr(Y \geq 3) = \Pr(X \leq -3) + \Pr(X \geq 3) = 2\Pr(X \geq 3)$, поэтому оценка уменьшается в два раза.

$$\Pr(X \geq 3) = \frac{\Pr(Y \geq 3)}{2} \leq \frac{E[Y]}{6} = \frac{1}{3}.$$

Третий способ. Снова преобразуем X, но теперь просто сдвинем его в неотрицательную часть. Возьмем $Y = X + 4 \geq 0$. Теперь

$$\Pr(X \geq 3) = \Pr(Y \geq 7) \leq \frac{E[Y]}{7} = \frac{E[X] + 4}{7} = \frac{4}{7}.$$

Заметим, что второй способ дал наилучшую оценку, третий — похуже, и первый — самую плохую. Однако все оценки получились весьма неточными. Причина этому — мы используем очень мало информации о с.в., а именно — только знаем про ее матожидание. Если мы имеем только эту информацию, то можно легко построить с.в., для которой неравенство Маркова будет строгим (а именно ту, которую мы использовали в доказательстве неравенства).

2 Неравенства для целочисленных с.в.

Для с.в. X, которая принимает значения только из $\mathbb{N}$ мы можем использовать следующую полезную формулу:

$$\boxed{E[X] = \sum_{i=1}^{+\infty} \Pr(X \geq i)}$$

Выводится она очень просто:

$$E[X] = \sum_{j=1}^{+\infty} j \Pr(X = j) = \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^{j} \Pr(X = j) = \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=i}^{+\infty} \Pr(X = j) = \sum_{i=1}^{+\infty} \Pr(X \geq i)$$

При этом для любой с.в. X, принимающей значения в $(-\infty, 0] \cup \mathbb{N}$ выполняется следующее неравенство:

$$E[X] \le \sum_{i=1}^{+\infty} \Pr(X \ge i).$$

Доказывается по аналогии:

$$E[X] = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} j \Pr(X = j) \le \sum_{j=1}^{+\infty} j \Pr(X = j) = \sum_{i=1}^{+\infty} \Pr(X \ge i).$$

С ее помощью можно производить оценки матожидания, когда мы уже имеем какие-то оценки на вероятность того, что с.в. больше или меньше какого-то числа. Это довольно частый случай, так как матожидание с.в. бывает не так легко найти.

Пусть есть какие-то $\alpha, \beta > 0$ и $T \in \mathbb{N}_0$. Пусть также X — какая-то целочисленная с.в.. Тогда верны следующие утверждения.

- Если для всех $\lambda \in \mathbb{N}$ верно $\Pr(X \ge T + \lambda) \le \alpha \exp(-\frac{\lambda}{\beta})$, то $E[X] \le T + \alpha\beta$.
- Если $X \ge 0$ и для всех $\lambda \in [1..T]$ верно $\Pr(X \le T - \lambda) \le \alpha \exp(-\frac{\lambda}{\beta})$, то $E[X] \ge T - \alpha\beta$.
- Если для всех $\varepsilon > 0$ верно $\Pr(X \ge (1+\varepsilon)T) \le \alpha \exp(-\frac{\varepsilon}{\beta})$, то $E[X] \le (1 + \alpha\beta)T$.
- Если для всех $\varepsilon \in (0, 1]$ верно $\Pr(X \le (1-\varepsilon)T) \le \alpha \exp(-\frac{\varepsilon}{\beta})$, то $E[X] \ge (1-\alpha\beta)T$.

Докажем первые два, остальные аналогично. Так как $X \in (-\infty, 0] \cup \mathbb{N}$, то можем применить неравенство:

$$\begin{aligned} E[X] &\le \sum_{i=1}^{+\infty} \Pr(X \ge i) \le T + \sum_{i=T+1}^{+\infty} \alpha \exp\left(-\frac{i-T}{\beta}\right) \\ &= T + \alpha \frac{e^{-1/\beta}}{1 - e^{-1/\beta}} = T + \alpha \frac{1}{e^{1/\beta} - 1} \le T + \alpha\beta, \end{aligned}$$

где последнее неравенство следует из того, что $e^x - 1 \ge x$ для любого x.

Во втором случае $X \in \mathbb{N}$, поэтому

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{i=1}^{+\infty} \Pr(X \ge i) \ge \sum_{i=1}^{T} \Pr(X \ge i) \\ &= \sum_{i=1}^{T} (1 - \Pr(X \le i - 1)) \ge T - \sum_{i=1}^{T} \alpha \exp\left(-\frac{T - i + 1}{\beta}\right) \\ &= T - \alpha e^{-1/\beta} \frac{1 - e^{-T/\beta}}{1 - e^{-1/\beta}} \ge T - \alpha\beta. \end{aligned}$$

3 Неравенство Чебышева

Допустим, у нас есть еще чуть больше информации про с.в., а именно мы знаем ее матожидание и дисперсию. Рассмотрим вероятность события $(|X-E(X)| \geq a)$. Данное событие эквивалентно событию $((X-E(X))^2 \geq a^2)$, поэтому их вероятности равны. Заметим также, что $Y = (X-E(X))^2$ — неотрицательная с.в., то есть к ней можно применить неравнество Маркова.

$$\Pr(|X-E(X)| \geq a) = \Pr((X-E(X))^2 \geq a^2) \leq \frac{E((X-E(X))^2)}{a^2} = \frac{\mathrm{Var}(X)}{a^2} = \frac{\sigma^2}{a^2}.$$

$$\Pr(|X-E(X)| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2}$$

Или, если вместо a поставить $a\sigma$, получим

$$\Pr(|X-E(X)| \geq a\sigma) \leq \frac{1}{a^2}$$

Проверим, что оно нам дает на том же экспоненциальном распределении, на котором мы тестили неравенство Маркова. Пусть $X \sim \mathrm{Exp}(1)$, тогда $E[X] = \mathrm{Var}[X] = 1$. Возьмем какой-нибудь $a > 2$ и посчитаем

$$\Pr(X \geq a) = \Pr((X-1) \geq (a-1)) = \Pr(|X-E(X)| \geq a-1) \leq \frac{1}{(a-1)^2}.$$

Оценка, конечно, получше, но до e^{-a} все равно не дотягивает.

Есть также односторонняя версия неравенства Чебышева, которая называется неравенстовом Кантелли, правда многие приписывают эти неравенства Чебышеву (в том числе Хёфдинг, чье неравенство мы посмотрим следующим). Пусть $a > 0$.

$$\Pr(X \geq E(X) + a\sigma) \leq \frac{1}{a^2+1}$$

$$\Pr(X \leq E(X) - a\sigma) \leq \frac{1}{a^2+1}$$

Докажем первое из них. Возьмем какое-нибудь число $u > 0$

$$\begin{aligned}\Pr(X \geq E(X) + a\sigma) &= \Pr(X - E(X) + u \geq a\sigma + u) \\ &\leq \Pr((X - E(X) + u)^2 \geq (a\sigma + u)^2) \\ &\leq \frac{E[(X - E(X) + u)^2]}{(a\sigma + u)^2} = \frac{\sigma^2 + u^2}{(a\sigma + u)^2}.\end{aligned}$$

И это верно для всех u, поэтому можем спокойно взять такой u, при котором получается самая строгая оценка. Возьмем $u = \frac{\sigma}{a}$ (можно получить это значение, продифференцировав по u).

$$\Pr(X \geq E(X) + a\sigma) \leq \frac{\sigma^2 + \frac{\sigma^2}{a^2}}{(a\sigma + \frac{\sigma}{a})^2} = \frac{1 + \frac{1}{a^2}}{\left(a + \frac{1}{a}\right)^2} = \frac{a^2 + 1}{(a^2 + 1)^2} = \frac{1}{a^2 + 1}.$$

4 Неравенство Хёфдинга

Это неравенство для оценки вероятности того, что сумма n независимых ограниченных случайных величин сильно отклоняется от своего матожидания. Выглядит оно так. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины, причем каждая из них ограничена. То есть для любого $i \in [1..n]$ есть такие $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, что $\Pr(X_i \in [a_i, b_i]) = 1$. Пусть также $X = \sum_{i=1}^n X_i$. Тогда

$$\boxed{\Pr(X - E[X] \geq t) \leq \exp\left(-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}\right)}$$

$$\boxed{\Pr(|X - E[X]| \geq t) \leq 2\exp\left(-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}\right)}$$

Чем полезно это неравенство? Во-первых, для с.в. $X_i \in [0, 1]$ оно выглядит куда милее (так как сумма в знаменателе экспоненты равна n):

$$\Pr(X - E[X] \geq t) \leq e^{-2t^2/n}$$
$$\Pr(|X - E[X]| \geq t) \leq 2e^{-2t^2/n}$$

Во-вторых, оно позволяет получить хорошую оценку на вероятность того, что с.в., следующая биномиальному распределению сильно отклоняетя от своего матожидания. Пусть $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$. Тогда его можно представить как сумму n независимых с.в., следующих распределению Бернулли, то есть ограниченных нулем и единицей. Раньше мы не могли ничего сделать с такой вероятностью:

$$\Pr(X \geq np + t) = \sum_{i=\lceil np+t \rceil}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

А теперь можем ее ограничить сверху:

$$\Pr(X \geq np + t) \leq e^{-2t^2/n}$$

Аналогично:

$$\Pr(X \leq np - t) = \Pr(n - X \geq n(1-p) + t) \leq e^{-2t^2/n}$$

Но последние два неравенства чаще представляют в мультипликативном виде:

$$\Pr(X \geq (p+\delta)n) \leq e^{-2\delta^2 n}$$
$$\Pr(X \geq (p-\delta)n) \leq e^{-2\delta^2 n}$$

Пробежимся по доказательству общего неравенства (без модуля). Оно основано на лемме Хёфдинга.

Лемма 1. *Пусть с.в. X такова, что $E[X] = \mu$ и $\Pr(X \in [a, b]) = 1$. Тогда для любого $s \in \mathbb{R}$*

$$E[e^{s(X-\mu)}] \leq \exp\left(\frac{1}{8}s^2(b-a)^2\right)$$

Ее доказательство основано на применение неравенства Йенсена к экспоненте (пока опустим его).

Вернемся к доказательству неравенства Хёфдинга. Возьмем какой-нибудь $s \in \mathbb{R}$ и применим неравенство Маркова

$$\begin{aligned}
\Pr(X - E[X] \geq t) &= \Pr(e^{s(X-E[X])} \geq e^{st}) \\
&\leq e^{-st} E[e^{s(X-E[X])}] \\
&= e^{-st} \prod_{i=1}^{n} E[e^{s(X_i - E[X_i])}] \\
&\leq e^{-st} \prod_{i=1}^{n} \exp\left(\frac{1}{8}s^2(b_i - a_i)^2\right) \\
&= \exp\left(-st + \frac{1}{8}s^2 \sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2\right)
\end{aligned}$$

Аргумент экспоненты – это квадратичная функция от s, поэтому легко найти ее минимум при $s = \frac{4t}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}$. Подставим и получим

$$\Pr(X - E[X] \geq t) \leq \exp\left(-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}\right).$$

5 Границы Чернова

Самая общая граница Чернова выглядит как просто преобразование события аналогично тому, что мы сделали в доказательстве неравенства Хёфдинга и применении неравенства Маркова. Для всех $t > 0$

$$\boxed{\Pr(X \geq a) \leq \frac{E[e^{tX}]}{e^{ta}}}$$

Для всех $t < 0$ аналогично имеем

$$\boxed{\Pr(X \leq a) \leq \frac{E[e^{tX}]}{e^{ta}}}$$

Однако гораздо чаще под границами Чернова понимаются следующие “хвостовые оценки” в мультипликативной форме.

Теорема 1 (Хёфдинг)**.** *Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимые с.в., причем для всех i верно $\Pr[X_i \in [0,1]] = 1$. Пусть $X = \sum_{i=1}^n X_i$ и $\mu = E[X]$. Тогда для любого $\delta \in (0, \frac{n-\mu}{\mu})$ выполняются следующие неравенства.*

$$\begin{aligned}
\Pr(X \geq (1+\delta)\mu) &\leq \left(\frac{1}{1+\delta}\right)^{(1+\delta)\mu} \left(\frac{n-\mu}{n-(1+\delta)\mu}\right)^{n-(1+\delta)\mu} \\
&\leq \left(\frac{e^\delta}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right)^\mu = \exp\left(-((1+\delta)\ln(1+\delta) - \delta)\mu\right) \\
&\leq \exp\left(-\frac{\delta^2\mu}{2 + \frac{2}{3}\delta}\right) \\
&\leq \exp\left(-\frac{\min\{\delta, \delta^2\}\mu}{3}\right).
\end{aligned}$$

Для $\delta = \frac{n-\mu}{\mu}$ левая часть есть $\Pr(X \geq n) = \prod_{i=1}^n \Pr(X_i = 1)$, а для еще больших значений δ левая часть равна нулю.

Последние утверждения для $\delta \geq \frac{n-\mu}{\mu}$ очевидны, поэтому докажем неравенства для $\delta < \frac{n-\mu}{\mu}$ (заметьте, что это подразумевает, что $(1+\delta)\mu < n$)). Сначала докажем первое неравенство, а потом кратко пробежимся по доказательству остальных. Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть X — с.в., такая, что* $\Pr[X \in [0,1]] = 1$. *Тогда для любого $t \in \mathbb{R}$*

$$E[e^{tX}] \leq 1 + (e^t - 1)E[X].$$

Доказательство. Так как экспонента — выпуклая вниз функция, то любое для любого $x \in [0,1]$ верно неравенство:

$$e^{tx} \leq e^{0t} + \frac{e^{1t} - e^{0t}}{1-0}x = 1 + (e^t - 1)x.$$

Подставим вместо x с.в. X и возьмем матожидание от обеих частей, неравенство останется верным, что и токазывает утверждение Леммы. □

Теперь мы готовы доказать верхнюю границу Чернова.

Доказательство Теоремы 1. Для всех i обозначим $\mu_i = E[X_i]$. Для любого $t > 0$ верно, что

$$\begin{aligned}
\Pr[X \geq (1+\delta)\mu] &\leq \frac{E[e^{tX}]}{e^{(1+\delta)\mu t}} \text{ (по обобщенным границам Чернова)} \\
&= e^{-(1+\delta)\mu t} \prod_{i=1}^{n} E[e^{tX_i}] \text{ (по независимости)} \\
&\leq e^{-(1+\delta)\mu t} \prod_{i=1}^{n} (1 + (e^t - 1)\mu_i) \text{ (по Лемме 2)} \\
&\leq e^{-(1+\delta)\mu t} \left(\frac{n + (e^t - 1)\mu}{n}\right)^n \text{ (среднее геом. $\leq$ среднее арифм.)} \\
&= e^{-(1+\delta)\mu t} \left(1 + (e^t - 1)\frac{\mu}{n}\right)^n.
\end{aligned}$$

Теперь мы хотим минимизировать это выражение, выбрав наилучший $t \in (0, +\infty)$. Для этого продифференцируем его по t.

$$\begin{aligned}
\left(e^{-(1+\delta)\mu t}\left(1 + (e^t - 1)\frac{\mu}{n}\right)^n\right)' &= -(1+\delta)\mu e^{-(1+\delta)\mu t}\left(1 + (e^t - 1)\frac{\mu}{n}\right)^n \\
&+ e^{-(1+\delta)\mu t} n \left(1 + (e^t - 1)\frac{\mu}{n}\right)^{n-1} \frac{\mu}{n} e^t \\
&= \left(-(1+\delta)(\left(1 + (e^t - 1)\frac{\mu}{n}\right)) + e^t\right) \cdot \mu e^{-(1+\delta)\mu t}\left(1 + (e^t - 1)\frac{\mu}{n}\right)^{n-1}.
\end{aligned}$$

Приравнивая это нулю и решая уравнение относительно e^t получаем, что единственный ноль производной в

$$e^{t_0} = \frac{(1+\delta)(n-\mu)}{n-(1+\delta)\mu},$$

причем при меньших значениях t производная отрицательная, а при больших — положительная. Значит, это точка минимума. Подставляя это значение в наше неравенство, получаем

$$\begin{aligned}\Pr[X \geq (1+\delta)\mu] &\leq \left(\frac{(1+\delta)(n-\mu)}{n-(1+\delta)\mu}\right)^{-(1+\delta)\mu} \cdot \left(1 + \left(\frac{(1+\delta)(n-\mu)}{n-(1+\delta)\mu} - 1\right)\frac{\mu}{n}\right)^n \\ &= \left(\frac{1}{1+\delta}\right)^{(1+\delta)\mu}\left(\frac{n-\mu}{n-(1+\delta)\mu}\right)^{n-(1+\delta)\mu}.\end{aligned}$$

Второе неравенство получается за счет наблюдения

$$\left(\frac{n-\mu}{n-(1+\delta)\mu}\right)^{n-(1+\delta)\mu} = \left(1 + \frac{\delta\mu}{n-(1+\delta)\mu}\right)^{\frac{n-(1+\delta)\mu}{\delta\mu}\cdot\delta\mu} \leq e^{\delta\mu}.$$

Следующее равенство получается путем логарифмирования: $x = e^{\ln(x)}$. Следующее неравенство – через неравенство, получаемое аккуратным анализом двух фукнций:

$$(1+\delta)\ln(1+\delta) - \delta \geq \frac{\delta^2}{2+\frac{2}{3}\delta},$$

и последнее неравенство — аккуратным рассмотрением двух случаев: $\delta \geq 1$ и $\delta < 1$. Мы опускаем все эти подробности, так как к теорверу они не имеют особого отношения, это больше про матан. $\square$

Также есть аналогичные нижние границы Чернова, которые выглядят так (в том же сеттинге, что и верхние, только $\delta \in (0,1)$).

$$\begin{aligned}\Pr(X \leq (1-\delta)\mu) &\leq \left(\frac{1}{1-\delta}\right)^{(1-\delta)\mu}\left(\frac{n-\mu}{n-(1-\delta)\mu}\right)^{n-(1-\delta)\mu} \\ &\leq \left(\frac{e^{\delta}}{(1-\delta)^{1-\delta}}\right)^{\mu} \\ &\leq \exp\left(-\frac{\delta^2\mu}{2}\right).\end{aligned}$$

Первое неравенство доказывается тем, что мы рассматриваем $Y_i = 1 - X_i$ и $Y = n - X$. Тогда

$$\Pr(X \le (1-\delta)\mu) = \Pr((n-X) \ge n-(1-\delta)\mu) = \Pr\left(Y \ge (n-\mu)\left(1+\delta\frac{\mu}{n-\mu}\right)\right)$$
$$\le \left(\frac{1}{1+\delta\frac{\mu}{n-\mu}}\right)^{(1+\delta\frac{\mu}{n-\mu})(n-\mu)} \left(\frac{n-(n-\mu)}{n-\left(1+\delta\frac{\mu}{n-\mu}\right)(n-\mu)}\right)^{n-(1+\delta\frac{\mu}{n-\mu})(n-\mu)}$$
$$= \left(\frac{n-\mu}{n-(1-\delta)\mu}\right)^{n-(1-\delta)\mu} \left(\frac{1}{1-\delta}\right)^{(1-\delta)\mu}.$$

Последняя форма границ Чернова, которую мы рассмотрим — с использованием дисперсии. Пусть у нас есть независимые $X_1, \dots, X_n$, причем все они не превосходят свое матожидание более, чем на 1 с вероятностью 1 (то есть $\Pr(X_i \le E[X_i]+1) = 1$). Пусть X — их сумма, а $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$. Тогда для любой $\lambda > 0$

$$\Pr(X \ge E[X]+\lambda) \le \left(\left(1+\frac{\lambda}{\sigma^2}\right)^{-(1+\frac{\lambda}{\sigma^2})\frac{\sigma^2}{n+\sigma^2}} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-(1-\frac{\lambda}{n})\frac{n}{n+\sigma^2}}\right)^n$$
$$\le \exp\left(-\lambda\left(\left(1+\frac{\sigma^2}{\lambda}\right)\ln\left(1+\frac{\lambda}{\sigma^2}\right)-1\right)\right)$$
$$\le \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\sigma^2+\frac{2}{3}\lambda}\right)$$
$$\le \exp\left(-\frac{1}{3}\min\left\{\frac{\lambda^2}{\delta^2}, \lambda\right\}\right).$$

6 Еще пара неравенств

Неравенство Беннета

Пусть $X_1, \dots X_n$ — независимые с.в. с нулевыми матожиданиями ($\forall i \in [1..n] E[X_i] = 0$) и каждый X_i с вероятностью 1 не превосходит какое-то a. Пусть $X = \sum_{i=1}^n X_i$ и $\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$. Тогда для всех $t > 0$

$$\Pr(X > t) \le \exp\left(-\frac{\sigma^2}{a^2}h\left(\frac{at}{\sigma^2}\right)\right),$$

где $h(x) = (1+x)\ln(1+x) - x$ — возрастающая по x функция.

Неравенство Бернштейна

Те же условия, только требуем $|X_i| \le a$ с вероятностью 1. Тогда

$$\Pr(X > t) \le \exp\left(-\frac{t^2/2}{\sigma^2 + at/3}\right).$$

Очевидно, оба эти неравенства можно обобщить на X_i с ненулевыми ожиданиями и с разными границами путем линейных преобразований и приведению всех X_i к условиям неравенств. В таком случае оба этих неравенства сравнимы с неравенством Хёфдинга, но могут давать лучшие границы при высокой концентрации с.в. X_i (когда σ получается меньше, чем сумма длин допустимых интервалов для всех X_i).