Типовик по линейной алгебре «Канонический вид матрицы. Часть 3»

Латыпов Владимир Витальевич,
ИТМО КТ М3138, ***вариант 10***

26 сентября 2022 г.

1. Формулировка условия

Утверждение 1. Условие можно найти здесь: https://drive.google.com/file/d/1yLuU3nt1vEcIRbmDE4mNnO6OZ2JXiAAu/view?usp=sharing

Data section:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -10 & 3 & -5 \\ -4 & 12 & -6 & 4 \\ 4 & 20 & -4 & 10 \\ 12 & 0 & 6 & 4 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$G = \begin{pmatrix} -22 & 20 & 4 & -36 \\ 22 & 4 & 10 & 12 \\ 5 & -19 & -9 & 24 \\ 27 & -13 & 3 & 34 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$P = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & -3 & -2 \\ -3 & 5 & 2 & 2 \\ -6 & 11 & 6 & 4 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$Q = \begin{pmatrix} -26 & -39 & 65 & 13 \\ -18 & -27 & 45 & 9 \\ -16 & -24 & 40 & 8 \\ -26 & -39 & 65 & 13 \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$V = \begin{pmatrix} -5 & 8 & 4 & -10 \\ 5 & -7 & 8 & -5 \\ 0 & -4 & -7 & 4 \\ 2 & 8 & 4 & -17 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 10 & -1 & 10 & 8 \\ -2 & 2 & -1 & -4 \\ 4 & -4 & 10 & 11 \end{pmatrix} \tag{6}$$

2. Построение спектральных проекторов

2.1. Полиномиальное разлжение единицы

2.1.1. Матрица F

Строим полиномиальное разлжение 1-цы на многочлены из идеалов, порождённых минимальным многочленом.

$\varphi(t) = (t-2)(t-4)$, тогда можно представить:

$$\frac{1}{\varphi(t)} = \frac{A}{t-2} + \frac{B}{t-4} \tag{7}$$

У нас здесь и везде далее не будет неразложимых множителей, все просто линейные в какой-то степени, поэтому везде сработает Лагранж:

Если A_β — коэффициент перед $\frac{1}{(t-a)^\beta}$, то

$$A_\beta = \beta! \frac{P(t)}{Q^{(\beta)}(t)}\Big|_{t=a} \tag{8}$$

У нас $P(t) = 1$, $Q = \varphi$.

Например, A для матрицы F:

$$A = 1\frac{1}{2(2-3)} = -\frac{1}{2} \tag{9}$$

$$\frac{1}{(t-2)(t-4)} = \frac{1}{2(t-4)} - \frac{1}{2(t-2)} \tag{10}$$

$$1 = \frac{1}{2}(t-2) - \frac{1}{2}(t-4) \tag{11}$$

2.1.2. Матрица G

$$\frac{1}{(t+6)(t+2)(t-5)(t-10)} = \\ -\frac{1}{385(t-5)} + \frac{1}{336(t+2)} - \frac{1}{704(t+6)} + \frac{1}{960(t-10)} \tag{12}$$

$$1 = -\frac{1}{385}(t+6)(t+2)(t-10) + \frac{1}{336}(t+6)(t-5)(t-10) - \frac{1}{704}(t+2)(t-5)(t-10) + \frac{1}{960}(t+6)(t+2)(t-5) \quad (13)$$

2.1.3. Матрица P

$$\frac{1}{(t+1)^3} = \frac{1}{(t+1)^3} \quad (14)$$

$$1 = 1 \quad (15)$$

2.1.4. Матрица Q

$$\frac{1}{t^2} = \frac{1}{t^2} \quad (16)$$

$$1 = 1 \quad (17)$$

2.1.5. Матрица V

$$\frac{1}{(t+7)^2(t+11)^2} = \frac{1}{32(t+11)} + \frac{1}{16(t+11)^2} - \frac{1}{32(t+7)} + \frac{1}{16(t+7)^2} \quad (18)$$

$$1 = \frac{1}{32}(t+7)^2(t+11) + \frac{1}{16}(t+7)^2 - \frac{1}{32}(t+7)(t+11)^2 + \frac{1}{16}(t+11)^2 = (t+7)^2\frac{t+13}{32} + (t+11)^2\frac{-t-5}{32} \quad (19)$$

2.1.6. Матрица W

$$\frac{1}{(t-5)(t+1)(t-3)^2} = \\ -\frac{1}{32(t-3)} - \frac{1}{96(t+1)} - \frac{1}{8(t-3)^2} + \frac{1}{24(t-5)} \quad (20)$$

$$1 = \\ -\frac{1}{32}\left((t-5)(t+1)\right)(t+1) - \frac{1}{96}(t-5)(t-3)^2 + \frac{1}{24}(t+1)(t-3)^2 \quad (21)$$

2.2. Спекртальные проекторы через многочлены от матриц

2.2.1. Матрица F

$$P_4 = \frac{1}{2}(F-2E) = \begin{pmatrix} -2 & -10 & 3 & -5 \\ -4 & 10 & -6 & 4 \\ 4 & 20 & -6 & 10 \\ 12 & 0 & 6 & 2 \end{pmatrix} \quad (22)$$

$$P_2 = -\frac{1}{2}(F-4E) = \begin{pmatrix} 2 & 5 & \frac{-3}{2} & \frac{5}{2} \\ 2 & -4 & 3 & -2 \\ -2 & -10 & 4 & -5 \\ -6 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad (23)$$

Заметим, что для F и G это обычные проекторы, на собственные подпространства.

Проверим, что проекоры в сумме дают единичнцю матрицу:

$P_4 + P_2 =$

$$\begin{pmatrix} -2 & -10 & 3 & -5 \\ -4 & 10 & -6 & 4 \\ 4 & 20 & -6 & 10 \\ 12 & 0 & 6 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 5 & \frac{-3}{2} & \frac{5}{2} \\ 2 & -4 & 3 & -2 \\ -2 & -10 & 4 & -5 \\ -6 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (24)$$

2.2.2. Матрица $\mathcal{G}$

$$P_5 = -\frac{1}{385}(G+6E)(G+2E)(G-10E) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (25)$$

$$P_{-2} = -\frac{1}{385}(G+6E)(G-5E)(G-10E) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad (26)$$

$$P_{-6} = -\frac{1}{385}(G+2E)(G-5E)(G-10E) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad (27)$$

$$P_{10} = -\frac{1}{385}(G+2E)(G-5E)(G+6E) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (28)$$

Они совпадают с проекторами на собственные, а мы их уже проверяли.

2.2.3. Матрица P

Тут просто одно собственное число (помним, что алгебраической кратности 4), то есть всё пространство — корневое, так что не удивительно, что

$$P_{-1} = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{29}$$

2.2.4. Матрица Q

Ничего нового:

$$P_{0} = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{30}$$

Проверять нечего...

2.2.5. Матрица V

$$P_{-11} = \frac{1}{32}(V + 7E)^2(V + 13E) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -4 & 2 \\ -3 & 2 & -4 & 1 \\ \frac{3}{4} & 0 & 1 & \frac{-3}{4} \\ -3 & 1 & -4 & 2 \end{pmatrix} \tag{31}$$

$$P_{-7} = \frac{1}{32}(V + 11E)^2(-V - 5E) = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 4 & -1 \\ \frac{-3}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 3 & -1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \tag{32}$$

Проверка: `https://matrixcalc.org/#1/32*(%7B%7B-5,8,4,-10%7D,%7B5,-7,8,-5%7D,%7B0,-4,-7,4%7D,%7B2,8,4,-17%7D%7D+11%2e*%7B%7B1,0,0,0%7D,%7B0,1,0,0%7D,%7B0,0,1,0%7D,%7B0,0,0,1%7D%7D)%5E2*(-%7B%7B-5,8,4,-10%7D,%7B5,-7,8,-5%7D,%7B0,-4,-7,4%7D,%7B2,8,4,-17%7D%7D-5%2e*%7B%7B1,0,0,0%7D,%7B0,1,0,0%7D,%7B0,0,1,0%7D,%7B0,0,0,1%7D%7D)+1/32*(%7B%`

7B-5,8,4,-10%7D,%7B5,-7,8,-5%7D,%7B0,-4,-7,4%7D,%7B2,8,4,-17%7D%7D+7%2e*%7B%7B1,0,0,0%7D,%7B0,1,0,0%7D,%7B0,0,1,0%7D,%7B0,0,0,1%7D%7D)%5E2*(%7B%7B-5,8,4,-10%7D,%7B5,-7,8,-5%7D,%7B0,-4,-7,4%7D,%7B2,8,4,-17%7D%7D+13%2e*%7B%7B1,0,0,0%7D,%7B0,1,0,0%7D,%7B0,0,1,0%7D,%7B0,0,0,1%7D%7D)

2.2.6. Матрица W

$$P_3 = -\frac{1}{32}(W-5E)(W+1E)(W+1E) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 4 \\ \frac{-3}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{11}{4} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{4} & 2 \end{pmatrix} \qquad (33)$$

$$P_{-1} = -\frac{1}{96}(W-5E)(W-3E)^2 = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{-10}{3} & \frac{4}{3} & -2 & \frac{-8}{3} \\ \frac{5}{6} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{-25}{12} & \frac{5}{6} & \frac{-5}{4} & \frac{-5}{3} \end{pmatrix} \qquad (34)$$

$$P_5 = \frac{1}{24}(W+1E)(W-3E)^2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -1 & \frac{-2}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -2 & \frac{-4}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -1 & \frac{-2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} & 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \qquad (35)$$

Проверка прошла успешно: https://matrixcalc.org/#-(1/32)*(%7B%7B1,2,-4,-4%7D,%7B10,-1,10,8%7D,%7B-2,2,-1,-4%7D,%7B4,-4,10,11%7D%7D-5%2e*%7B%7B1,0,0,0%7D,%7B0,1,0,0%7D,%7B0,0,1,0%7D,%7B0,0,0,1%7D%7D)*(%7B%7B1,2,-4,-4%7D,%7B10,-1,10,8%7D,%7B-2,2,-1,-4%7D,%7B4,-4,10,11%7D%7D+1%2e*%7B%7B1,0,0,0%7D,%7B0,1,0,0%7D,%7B0,0,1,0%7D,%7B0,0,0,1%7D%7D)*(%7B%7B1,2,-4,-4%7D,%7B10,-1,10,8%7D,%7B-2,2,-1,-4%7D,%7B4,-4,10,11%7D%7D+1%2e*%7B%7B1,0,0,0%7D,%7B0,1,0,0%7D,%7B0,0,1,0%7D,%7B0,0,0,1%7D%7D)-1/96*(%7B%7B1,2,-4,-4%7D,%7B10,-1,10,8%7D,%7B-2,2,-1,-4%7D,%7B4,-4,10,11%7D%7D-5%2e*%7B%7B1,0,0,0%7D,%7B0,1,0,0%7D,%7B0,0,1,0%7D,%7B0,0,0,1%7D%7D)*(%7B%7B1,2,-4,-4%7D,%7B10,-1,10,8%7D,%7B-2,2,-1,-4%7D,%7B4,-4,10,11%7D%7D-3%2e*%7B%7B1,0,0,0%7D,%7B0,1,0,0%7D,%7B0,0,1,0%7D,%7B0,0,0,1%7D%7D)%5E2+1/24*(%7B%7B1,2,-4,-4%7D,%7B10,-1,10,8%7D,%7B-2,2,-1,-4%7D,%7B4,-4,10,11%7D%7D+1%2e*%7B%7B1,0,0,0%7D,%7B0,1,0,

```
0%7D,%7B0,0,1,0%7D,%7B0,0,0,1%7D%7D)*(%7B%7B1,2,-4,-4%
7D,%7B10,-1,10,8%7D,%7B-2,2,-1,-4%7D,%7B4,-4,10,11%7D%
7D-3%2e*%7B%7B1,0,0,0%7D,%7B0,1,0,0%7D,%7B0,0,1,0%7D,%7B0,
0,0,1%7D%7D)%5E2
```

2.3. Нахождение спектральных подпространств

Теперь для каждом матрицы-проектора выделим базу столбцов, найдя её образ. Мы можем проверить ранг на матричном калькуляторе, а потом предъявить сколько нужно независимых столбцов. Ранг должен быть равен алгебраической кратности собственного числа.

2.3.1. Матрица F

$$\operatorname{Im} P_4 = \operatorname{Lin}\left\{\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\2\\0\end{pmatrix},\right\} \tag{36}$$

$$\operatorname{Im} P_2 = \operatorname{Lin}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\-4\\-10\\0\end{pmatrix},\right\} \tag{37}$$

2.3.2. Матрица G

$$\operatorname{Im} P_5 = \operatorname{Lin}\left\{\begin{pmatrix}0\\2\\-1\\1\end{pmatrix},\right\} \tag{38}$$

$$\operatorname{Im} P_{-2} = \operatorname{Lin}\left\{\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\-2\end{pmatrix},\right\} \tag{39}$$

$$\operatorname{Im} P_{-6} = \operatorname{Lin}\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix},\right\} \tag{40}$$

$$\operatorname{Im} P_{10} = \operatorname{Lin}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \right\} \tag{41}$$

2.3.3. Матрица P

$$\operatorname{Im} P_{-1} = \operatorname{Lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \right\} = \mathbb{R}^4 \tag{42}$$

2.3.4. Матрица Q

$$\operatorname{Im} P_{0} = \operatorname{Lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \right\} = \mathbb{R}^4 \tag{43}$$

2.3.5. Матрица V

$$\operatorname{Im} P_{-11} = \operatorname{Lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \right\} \tag{44}$$

$$\operatorname{Im} P_{-7} = \operatorname{Lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \right\} \tag{45}$$

2.3.6. Матрица W

$$\operatorname{Im} P_{3} = \operatorname{Lin}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 16 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \right\} \tag{46}$$

$$\operatorname{Im} P_{-1} = \operatorname{Lin}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix},\right\} \tag{47}$$

$$\operatorname{Im} P_{5} = \operatorname{Lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\right\} \tag{48}$$

3. Разложение Жордана

Для матриц F и G оно просто будет сама матрица плюс ноль. (в этом убедились выше) Для остальных построим оператор простой структуры с собственными подпространствами из корневых подпространств нашего оператора.

3.1. Матрица P

$$\mathfrak{D} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{49}$$

Тогда

$$\mathfrak{B} = P - \mathfrak{D} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 3 & 3 \\ 3 & -5 & -3 & -2 \\ -3 & 5 & 3 & 2 \\ -6 & 11 & 6 & 5 \end{pmatrix} \tag{50}$$

Проверим, что $\mathfrak{B}$ нильпотентно с индексом $max\{3\} = 3$.

$$\mathfrak{B}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & -3 & -3 \\ 3 & -6 & -3 & -3 \end{pmatrix} \neq \mathbb{0} \tag{51}$$

$$\mathfrak{B}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{0} \tag{52}$$

Проверка прошла успешно.

3.2. Матрица Q

$$\mathfrak{D} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{53}$$

Тогда

$$\mathfrak{B} = Q - \mathfrak{D} = Q = \begin{pmatrix} -26 & -39 & 65 & 13 \\ -18 & -27 & 45 & 9 \\ -16 & -24 & 40 & 8 \\ -26 & -39 & 65 & 13 \end{pmatrix} \tag{54}$$

Проверим, что $\mathfrak{B}$ нильпотентно с индексом $max\{2\} = 2$.

$$\mathfrak{B}^1 = Q \neq \mathbb{0} \tag{55}$$

$$\mathfrak{B}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{0} \tag{56}$$

Проверка прошла успешно.

3.3. Матрица V

$$\mathfrak{D} = -11 \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & -4 & 2 \\ -3 & 2 & -4 & 1 \\ \frac{3}{4} & 0 & 1 & \frac{-3}{4} \\ -3 & 1 & -4 & 2 \end{pmatrix} - 7 \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 4 & -1 \\ \frac{-3}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 3 & -1 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 16 & -8 \\ 12 & -15 & 16 & -4 \\ -3 & 0 & -11 & 3 \\ 12 & -4 & 16 & -15 \end{pmatrix} \tag{57}$$

Тогда

$$\mathfrak{B} = V - \mathfrak{D} = \begin{pmatrix} -10 & 12 & -12 & -2 \\ -7 & 8 & -8 & -1 \\ 3 & -4 & 4 & 1 \\ -10 & 12 & -12 & -2 \end{pmatrix} \tag{58}$$

Проверим, что $\mathfrak{B}$ нильпотентно с индексом $max\{2, 2\} = 2$.

$$\mathfrak{B}^1 = \mathfrak{B} \neq \mathbb{0} \tag{59}$$

$$\mathfrak{B}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{0} \tag{60}$$

Проверка прошла успешно.

3.4. Матрица W

$$\mathfrak{D} = 3\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 4 \\ \frac{-3}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{11}{4} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{4} & 2 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{-10}{3} & \frac{4}{3} & -2 & \frac{-8}{3} \\ \frac{5}{6} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{-25}{12} & \frac{5}{6} & \frac{-5}{4} & \frac{-5}{3} \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -1 & \frac{-2}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -2 & \frac{-4}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -1 & \frac{-2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} & 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 16 & -1 & 4 & 8 \\ -2 & 2 & -1 & -4 \\ 7 & -4 & 7 & 11 \end{pmatrix} \quad (61)$$

Тогда

$$\mathfrak{B} = W - \mathfrak{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad (62)$$

Проверим, что $\mathfrak{B}$ нильпотентно с индексом $max\{1, 1, 2\} = 2$.

$$\mathfrak{B}^1 = \mathfrak{B} \neq \mathbb{0} \quad (63)$$

$$\mathfrak{B}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{0} \quad (64)$$

Проверка прошла успешно.

4. Корневые подпространства

Будем находить Ker$(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}$ для каждого собственного числа и матрицы

Для этого достаточно решить систему уравнений $(A - \lambda E)^{m(\lambda)} x = \mathbb{0}$.

Там, где $m(\lambda) = 1$, переиспользуем собственные подпространства.

Для каждом матрицы попутно будем сверять, одинаковы ли образы спектральных проекторов и полученные корневые пространства.

4.1. Матрица F

$$K_2 : \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -14 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix} \right\} \tag{65}$$

$$K_4 : \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \tag{66}$$

4.2. Матрица G

$$K_{-6} : \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \tag{67}$$

$$K_{-2} : \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \tag{68}$$

$$K_{5} : \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \tag{69}$$

$$K_{10} : \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \tag{70}$$

4.3. Матрица P

Здесь уже посчитаем $\mathrm{Ker}(\mathcal{P} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}$

СЛОУ:

$$(\mathcal{P}+E)^3 = \left(\begin{pmatrix} -4 & 6 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & -3 & -2 \\ -3 & 5 & 2 & 2 \\ -6 & 11 & 6 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{71}$$

Впрочем, никто не сомневался, что тут всё пространство — корневое.

Базис K_{-1} берём канонический:

$$K_{-1} = \mathrm{Lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \tag{72}$$

4.4. Матрица Q

Аналогично с матрицей Q, у которой одно собственнок число с алгебраической кратностью 4:

$$K_0 = \mathrm{Lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \tag{73}$$

4.5. Матрица V

Для начала — $\lambda_1 = -11$

$$(V+11E)^2 = \begin{pmatrix} 56 & -16 & 64 & -24 \\ 40 & -16 & 64 & -8 \\ -12 & 0 & 0 & 12 \\ 40 & -16 & 64 & -8 \end{pmatrix} \tag{74}$$

Получим, что

$$K_{-11} = \text{Lin}\left\{\begin{pmatrix}0\\4\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}\right\} \tag{75}$$

Вот так это получили: `https://matrixcalc.org/slu.html#solve-using-Gaussian` `7B56,-16,64,-24,0%7D,%7B40,-16,64,-8,0%7D,%7B-12,0,0,` `12,0%7D,%7B40,-16,64,-8,0%7D%7D`).

Заметим, что собстыенное подпространство из части 1 содержится в нём, проверя ранг, если записать всё в матрицу (он равен двум).

Далее — $\lambda_1 = -7$

$$(V + 7E)^2 = \begin{pmatrix} 24 & -80 & 32 & 56 \\ 0 & -32 & 0 & 32 \\ -12 & 32 & -16 & -20 \\ 24 & -80 & 32 & 56 \end{pmatrix} \tag{76}$$

$$K_{-7} = \text{Lin}\left\{\begin{pmatrix}-4\\0\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\} \tag{77}$$

4.6. Матрица W

Начнём с $\lambda_1 = -1$.

Кратность один, поэтому переиспользуем собственное.

$$K_{-1} = \text{Lin}\left\{\begin{pmatrix}-2\\8\\-2\\5\end{pmatrix}\right\} \tag{78}$$

Далее $\lambda_2 = 3$.

$$(W - 3E)^2 = \begin{pmatrix} 16 & -4 & 4 & 8 \\ -48 & 24 & -40 & -48 \\ 16 & -4 & 4 & 8 \\ -36 & 12 & -16 & -24 \end{pmatrix} \tag{79}$$

$$K_3 = \mathrm{Lin}\left\{\begin{pmatrix}1\\7\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\\1\end{pmatrix}\right\} \tag{80}$$

Для $\lambda_3 = 5$ переиспользуем собственное.

$$K_5 = \mathrm{Lin}\left\{\begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\\1\end{pmatrix}\right\} \tag{81}$$

Для всех матриц проверили и получили, что корневые подпространства совпадают с образами спектральных проекторов.