

Типовик по линейной алгебре
«Дополнительное домашнее задание
№4»

Латыпов Владимир Витальевич,
ИТМО КТ М3138, **вариант 10**

26 мая 2022 г.

Как раз получится, что

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 11 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$b_1 = a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$b_2 \leftarrow a_2 - \frac{\langle b_1, a_2 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} b_1 = a_2 - \frac{1}{2} b_1 \rightsquigarrow 2a_2 - a_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$b_3 \leftarrow a_3 - \frac{\langle b_1, a_3 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} b_1 - \frac{\langle b_2, a_3 \rangle}{\langle b_2, b_2 \rangle} b_2 = a_3 - \frac{1}{2} b_1 - \frac{7}{42} b_2 = a_3 - \frac{3}{6} b_1 - \frac{1}{6} b_2 \quad (6)$$

$$\rightsquigarrow 6a_3 - 3b_1 - b_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Теперь с системой.

Для попадания в L^\perp нужно, чтобы $\langle x, b_i \rangle$ был нулём. То есть

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Gamma \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (8)$$

Тогда матрица системы:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Gamma = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 3 \\ -4 & 9 & 6 \end{pmatrix} \quad (9)$$

Получаем, что $L^\perp = \text{span} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Тогда система уравнений для L :

$$(3 \ 0 \ 2) \Gamma \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (10)$$

Считая, получам:

$$(4 \quad -2 \quad 1) x = 0 \quad (11)$$

3. Сопряжённый оператор

$$\Gamma = G(e_1, e_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Тогда

$$A^{\otimes} = \overline{\Gamma^{-1}} A^* \overline{\Gamma} = \Gamma^{-1} A^* \Gamma = \Gamma^{-1} \overline{A^T} \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -2 * i & 1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

Получили оператор, который, согласно matrixcalc, как и сопряжённый, имеет собственные числа $1 \pm \sqrt{2}i$. Понятно, что получилось их совпадение за счёт того, что они сопряжены друг другу у самого оператора.

В общем же случае у сопряжённых операторов собственные числа сопряжены соответственным с.ч. друг друга.