

Линейная Алгебра

Латыпов Владимир

September 17, 2021

Contents

1	Введение	3
2	Ключевые определения	3
3	Векторы	3
4	(5
5	Полярная и сферическая система координат	6
6	Преобразования координат	6
6.1	Параллельный перенос, сдвиг	6
6.2	Поворот на плоскости	7
6.3	Поворот координат в пространстве	7
7	Операции	8
7.1	Скалярное произведение	8
7.2	Проекция вектора на вектор	8
7.3	Векторное произведение векторов	9
7.4	Смешанное произведение векторов	10
7.5	Двойное векторное произведение	11

1 Введение

Преподаватель: Кучерук Е. А. EMail: kucheruk.e.a@gmail.com

Литература по линейной алгебры:

Геометрия Александров Ильин Позняк Линейная алгебра

2 Ключевые определения

- Векторное произведение векторов
- Определение определителя

3 Векторы

Вектор - класс направленных отрезков, определён с точностью до точки приложения.

Линейные операции:

- $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R} : (\vec{a}) \times \alpha$

Свойства линейных операций/аксиомы линейного пространства:

1. Коммутативность
2. Ассоциативность
3. Существование нулевого элемента (нуль-вектор)
4. Существование противоположного элемента для каждого $\forall \vec{A} :$
 $\exists \vec{\bar{A}} : \vec{A} + \vec{\bar{A}} = 0$
5. Ассоциативность умножения вектора на скаляр: $\beta \times (\vec{A} \times \alpha) = \beta \times (\vec{A} \times \alpha)$
6. Дистрибутивность умножения на скаляр относительно сложения чисел: $(\alpha + \beta) \times \vec{v} = \alpha \vec{v} + \beta \vec{v}$
7. Дистрибутивность умножения на скаляр относительно сложения векторов: $(\vec{a} + \vec{b}) \times \alpha = \alpha \vec{a} + \alpha \vec{b}$

Два вектора коллинеарны $\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \dots$

Линейная комбинация векторов:

$$\overleftarrow{combination} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \times \vec{v}_i \quad (1)$$

Комбинация векторов тривиальна, если $\forall \alpha_i = 0$ Иначе – нетривиальная система.

Система векторов линейно независима, если любая нулевая линейная комбинация тривиальна. Иначе система линейно зависима (например, если есть коллинеарные).

Если есть хотя бы один нуль-вектор, система тоже линейно зависима (берём коэффициент 0 при нём).

Если объединить линейно зависимую с любой, получится линейно зависима.

Если система линейно зависима, один из векторов - линейная комбинация каких-то других.

$$\exists \alpha_n \neq 0 \quad (2)$$

$$\exists x_i : \quad (3)$$

$$\vec{v}_n = \sum \vec{v}_i = \frac{1}{\alpha_n} \quad (4)$$

Пусть есть прямая. На ней: Базис - любой ненулевой вектор.

Пусть есть плоскость. На ней: Базис - любая упорядоченная пара неколлинеарных векторов.

Пусть есть пространство. На ней: Базис - упорядоченная тройка некопланарных векторов.

α_i - координаты вектора в базисе.

Теорема: Любой вектор пространства может быть разложен по базису, причём единственным образом. Как в пространстве, так и на прямой с плоскостью.

Доказательство: Базис - векторы \vec{e}_i Добавим к ним вектор x . Так как была

$$x = \sum_{i=1}^n x_i \times \vec{e}_i$$

х. Тогда полученная система векторов будет линейно зависимой и вектор х может быть линейно выражен через векторы формула: формула, где формула - некоторые числа. Так мы получили разложение вектора х по базису. Осталось доказать, что это разложение единственно.

Докажем несколько теорем, далее работать будем с координатами.

Следствия теоремы о единственности разложения:

- $\vec{a} = \vec{b} \iff \forall i < n : \vec{a}_i = \vec{b}_i$
- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} \iff \forall i < n : \vec{a}_i + \vec{b}_i = \vec{c}_i$, доказывается через аксиомы линейного пространства
- $\vec{b} = \alpha \times \vec{a}, \alpha \in \mathbb{R} \iff \vec{b}_i = \alpha \times \vec{a}_i$
- $\vec{a} \parallel \vec{b}, \vec{a} \neq \vec{0} \iff \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3} = \dots = \alpha \in \mathbb{R}$
- Система коллинеарных векторов ($\geq n+1$) всегда линейно зависима (для плоскости либо все коллинеарны, либо 2 неколлинеарных, тогда можно ввести базис, выразив один через другие, для пространства аналогично, только 3 и некопланарные)

$\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$ базис $V_3 \forall v \in V_3 \exists! \forall i \in \{1, 2, 3\} \alpha_i \in \mathbb{R} : \vec{v} =$

4 (

нСистема координат на плоскости и в пространстве) говорят, что в V_3 введена д.с.к (декартова сис коорд), если в пространстве есть точка О (начало системы координат), зафиксирован базис $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$ некопланарные.

Оси координат - прямые, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов.

Координаты точки - всё равно что координаты радиус-вектора. Геометрически - для нахождения координат проводим (правило параллелограмма) плоскости или вектора параллельные тому, чему нужно.

Координаты вектора = координаты конца - координаты начала

Задача: Пусть есть вектор, заданный координатами конца и начала ($A = (a_1, a_2, a_3), B = (b_1, b_2, b_3)$). Нужно найти точку $M = (m_1, m_2, m_3) : \frac{AM}{MB} = \frac{\lambda}{\mu}$

Распишем, тогда:

$$m_i = \frac{\lambda b_i + \mu a_i}{\lambda + \mu}$$

Для середины - понятно, что.

В дальнейшем будем рассматривать ортонормированную декартовую систему координат (о.н.д.с.к.). Все единичной длины.

Будем обозначать $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \quad (5)$$

$$a_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(\frac{a_1}{\sqrt{\dots}}, \frac{a_2}{\sqrt{\dots}}, \frac{a_3}{\sqrt{\dots}} \right) = (\cos(\alpha), \cos(\beta), \cos(\gamma)) \quad (6)$$

Направляющие косинусы (углов вектора с осями координат)

$$\cos(\gamma) + \cos(\beta) + \cos(\alpha) = 1 \quad (7)$$

5 Полярная и сферическая система координат

ПСК определяется точкой и **полярным** лучём отсчёта из этой точки.

Связь между полярной и декартовой системой координат.

1. $r = \varphi$ - задаёт спираль Архимеда
2. Лемниската Бернулли:

$$(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2) \quad (8)$$

$$r^4 = r^2(\cos^2(\varphi) - \sin(\varphi)) = r^2(\cos(2\varphi)) \quad (9)$$

$$r = \sqrt{2\varphi} \quad (10)$$

3. ...

6 Преобразования координат

6.1 Параллельный перенос, сдвиг

Происходит лишь перенос точки приложения

$$\left\{ \begin{array}{l} O' = (x_0, y_0, z_0) \text{ in old system} \\ M = \vec{OM} = (x, y, z) \\ M = \vec{O'M} = (x', y', z') \\ \left\{ \begin{array}{l} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \\ z = z' + z_0 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (11)$$

6.2 Поворот на плоскости

$$\left\{ \begin{array}{l} Old - OXY \\ New - OX'Y' \\ M = (x, y) \\ M = (x', y') \\ \left\{ \begin{array}{l} x' = r \cos(\varphi) \\ y' = r \sin(\varphi) \\ \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos(\varphi + \alpha) = \dots = x' \cos(\alpha) - y' \sin(\alpha) \\ y = r \sin(\varphi + \alpha) = \dots = x' \sin(\alpha) + y' \cos(\alpha) \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (12)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad (13)$$

6.3 Поворот координат в пространстве

$$\vec{e}_1 = (\cos(\alpha_1), \cos(\beta_1), \cos(\gamma_1)) \quad (14)$$

$$\vec{e}_2 = (\cos(\alpha_2), \cos(\beta_2), \cos(\gamma_2)) \quad (15)$$

$$\vec{e}_3 = (\cos(\alpha_3), \cos(\beta_3), \cos(\gamma_3)) \quad (16)$$

$$x' \vec{e}_1 + y' \vec{e}_2 + z' \vec{e}_3 = x' (\cos(\alpha_1) \vec{i} + \cos(\beta_1) \vec{j} + \cos(\gamma_1) \vec{k}) + \dots + \quad (17)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_1) & \cos(\alpha_2) & \cos(\alpha_3) \\ \cos(\beta_1) & \cos(\beta_2) & \cos(\beta_3) \\ \cos(\gamma_1) & \cos(\gamma_2) & \cos(\gamma_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad (18)$$

7 Операции

7.1 Скалярное произведение

Определение 1 (Скалярное произведение).

$$(a, b) = a \cdot b = |a||b| \cdot \cos(ab) \quad (19)$$

Свойство 1 (Аксиомы скалярного произведения). 1. Симметрия

2. Аддитивное по обоим аргументам: $|a||b| \cdot \cos(ab)$

3. Однородное по обоим аргументам: $(\lambda \vec{a}, \vec{b}) = \lambda(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \lambda \vec{b})$

4. (1), (2) \Rightarrow линейное по обоим аргументам

5. Положительная определённость: произведение на самого себя всегда ≥ 0 , причём равенство достигается только для нуль-вектора.

7.2 Проекция вектора на вектор

Определение 2 (Проекция вектора на вектор).

$$a, b - \text{vectors} \quad (20)$$

$$a_b = a \cdot \cos ab \quad (21)$$

Замечание. Скалярное произведение имеет знак!

Чтобы найти координату вектора в прямоугольной системе координат достаточно умножить его модуль на \cos .

Теорема 1 (Аддитивность скалярного произведения).

$$(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \cdot \vec{b} = \vec{a}_1 \cdot \vec{b} + \vec{a}_2 \cdot \vec{b} \quad (22)$$

Proof. Введём базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ вдоль вектора \vec{b} : . ■

Если операция удовлетворяет всем четырём аксиомам, это скалярное произведение.

Теорема 2.

$$(\vec{a}, \vec{b}) = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b \quad (23)$$

Proof. Просто распишем произведение, представляя векторы через $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$
 ■

7.3 Векторное произведение векторов

Определение 3. Упорядоченная тройка векторов - правая, если при вращении первого ко второму буравчик движется к третьему.

Определение 4.

$$vec_product : (\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \mapsto \mathbb{R}^2 \quad (24)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \stackrel{\text{def}}{\iff} \quad (25)$$

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$$

$$\cdot \vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$$

$$\cdot \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\} -$$

Свойство 2. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

$$[a; a] = \vec{0}$$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \iff [\vec{a}, \vec{b}] = 0$$

Линейность по обоим аргументам

Длина скалярного произведения - площадь параллелограмма, натянутого на аргументы.

Теорема 3 (Векторное произведение в координатах).

$$[\vec{a}, \vec{b}] = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x) \quad (26)$$

Иначе говоря:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (27)$$

Proof. Заметим, что векторные произведения базисных векторов в правом ортонормированном базисе такие:

$$[\vec{i}, \vec{j}] = \vec{k} \quad (28)$$

$$[\vec{j}, \vec{k}] = \vec{i} \quad (29)$$

$$[\vec{k}, \vec{i}] = \vec{j} \quad (30)$$

То есть плюс получается, когда обычный порядок, возможно - со сдвигом



7.4 Смешанное произведение векторов

Определение 5 (Смешанное произведение векторов).

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) \quad (31)$$

Свойство 3 (Свойства смешанного произведения векторов). 1.

Произведение равно объёму параллелепипеда со знаком (добавляем минус, если вдруг левая тройка).

2. Смешанное произведение не меняется при циклической перестановке векторов. В противном случае знак меняется на противоположный.

3. $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}])$

4. Аддитивность

5. Однородность

6. \Rightarrow Линейность по любому аргументу (за счёт циклической перестановки - линейность по любому аргументу)

Proof.

(1) доказывается через нахождение модуля Sh

(2) Все тройки либо правые, либо левые одновременно, а модуль - через объём одного и того же параллелограмма

(3-4) Линейность: ...

■

Теорема 4. Смешанное произведение:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \quad (32)$$

Теорема 5. Смешанное произведение = 0 \Leftrightarrow векторы компланарны.

Proof. Так как строчки матрицы - координаты векторов, то равенство определителя нулю соответствует возможности выразить одну из строк, а значит, и один из векторов, через остальные. ■

Теорема 6. Векторное произведение линейно относительно обоих аргументов.

Proof. Докажем через скалярное произведение самого на себя вектора $\vec{c} = [a_1 + a_2, b] - [a_1, b] - [a_2, b]$, которое равно нулю ...Ass - we can! ■

7.5 Двойное векторное произведение

Определение 6.

$$[a, b, c] = [a, [b, c]] \quad (33)$$

Теорема 7.

$$[a, [b, c]] = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \text{vecb}) \quad (34)$$

Бац минус цаб!

Proof. Распишем через определители левую часть и по определениям - правую. ■