Типовик по линейной алгебре модуль 3: Задание 1 «Алгебраические операции с матрицами»

Латыпов Владимир Витальевич,
ИТМО КТ M3138, ***вариант 12***

26 сентября 2022 г.

1. Формулировка условия

Утверждение 1. Условие таково:

Даны две квадратные матрицы A и B.

1. Вычислить коммутатор матриц $[A, B] = A \cdot B - B \cdot A$
2. Найти матрицу A^{-1} методом Гаусса. Проверить, что $A \cdot A^{-1} = E$.
3. Найти матрицу B^{-1} методом методом Гаусса.
4. Найти значение полинома $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ от матрицы A.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

2. Решение

2.1. Подзадача 1

$$[A, B] = A \cdot B - B \cdot A \tag{2}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 3 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 & 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 7 & 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\ -1 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 3 & -1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 7 & -1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 7 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 12 & 9 \\ 6 & 15 & 0 \\ 7 & 8 & 5 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 2 & 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 2 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ 3 \cdot 3 + 7 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 7 \cdot 0 + 1 \cdot 2 & 3 \cdot 2 + 7 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 6 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 21 \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$[A,B] = \begin{pmatrix} 8 & 12 & 9 \\ 6 & 15 & 0 \\ 7 & 8 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 6 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 9 \\ 0 & 11 & -7 \\ 4 & 3 & -16 \end{pmatrix} \tag{5}$$

2.2. Подзадача 2

Найдём A^{-1} методом Гаусса. С помощью элементарных преобразований над строками добьемся того, чтобы слева оказалась единичная матрица.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\equiv \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\equiv \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{8}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\equiv \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right)$$
$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -13 & -2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\equiv \left(\begin{array}{ccc|ccc} 13 & 0 & 0 & 4 & -3 & -2 \\ 0 & 13 & 0 & -3 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 13 & 2 & 5 & -1 \end{array}\right) \tag{6}$$

Тогда:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{13} & \frac{-3}{13} & \frac{-2}{13} \\ \frac{-3}{13} & \frac{-1}{13} & \frac{8}{13} \\ \frac{2}{13} & \frac{5}{13} & \frac{-1}{13} \end{pmatrix} \tag{7}$$

Проверим — подходит:

$$
AA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{13} & \frac{-3}{13} & \frac{-2}{13} \\ \frac{-3}{13} & \frac{-1}{13} & \frac{8}{13} \\ \frac{2}{13} & \frac{5}{13} & \frac{-1}{13} \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 3 \cdot \left(\frac{4}{13}\right) + 1 \cdot \left(\frac{-3}{13}\right) + 2 \cdot \left(\frac{2}{13}\right) & 3 \cdot \left(\frac{-3}{13}\right) + 1 \cdot \left(\frac{-1}{13}\right) + 2 \cdot \left(\frac{5}{13}\right) & 3 \cdot \left(\frac{-2}{13}\right) + 1 \cdot \left(\frac{8}{13}\right) + 2 \cdot \bigl(\\ -1 \cdot \left(\frac{4}{13}\right) + 0 \cdot \left(\frac{-3}{13}\right) + 2 \cdot \left(\frac{2}{13}\right) & -1 \cdot \left(\frac{-3}{13}\right) + 0 \cdot \left(\frac{-1}{13}\right) + 2 \cdot \left(\frac{5}{13}\right) & -1 \cdot \left(\frac{-2}{13}\right) + 0 \cdot \left(\frac{8}{13}\right) + 2 \cdot \bigl(\\ 1 \cdot \left(\frac{4}{13}\right) + 2 \cdot \left(\frac{-3}{13}\right) + 1 \cdot \left(\frac{2}{13}\right) & 1 \cdot \left(\frac{-3}{13}\right) + 2 \cdot \left(\frac{-1}{13}\right) + 1 \cdot \left(\frac{5}{13}\right) & 1 \cdot \left(\frac{-2}{13}\right) + 2 \cdot \left(\frac{8}{13}\right) + 1 \cdot \bigl(\end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8)
$$

3. Подзадача 3

Найдём обратную матрицу к B (тоже методом Гаусса).

4. Подзадача 4

Найдём сначала A^2:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 & 3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \\ -1 \cdot 3 + 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 & -1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 2 & -1 \cdot 2 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \\ 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 10 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \tag{9}$$

Тогда:

$$f(A) = 2\begin{pmatrix} 10 & 7 & 10 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 & -19 & -26 \\ 1 & -4 & 4 \\ -4 & -5 & -14 \end{pmatrix} \tag{10}$$