Теория чисел (теория)

Владимир Латыпов
donrumata03@gmail.com

Vladimir Latypov
donrumata03@gmail.com

Содержание

1 Базовые определения

Кодер источника — убирает избыточность (например, архиватор или jpeg), может быть с потерями.

Кодер канала — вносит контроллируемую избыточность.

Канал — вероятностная модель передачи данных, определяется $P(Y \mid X)$, где X — данные, непосредственно передающиеся, Y — принимаемые данные на выходе канала.

1.1 Декодирование

- По критерию идеального наблюдателя: минимизация P_e за счёт выбора в каждой точке x, наиболее вероятного при условии y (т.е. $\max_x p(x \mid y)$).
- По максимуму правдоподобия — выбор для x области, где его правдоподобие $p(y \mid x)$ выше других x: $\max_x p(y \mid x)$.

При $P(x) = \text{const}$ критерии эквивалентны.

1.2 Отношение сигнал-шум

$E_s = \alpha^2$

$P_{\text{noise}} \sim \sigma^2 = \frac{N_0}{2}$ (N_0 — спектральная плотность мощности шума, берём половину, т.к. комплексная часть не интересует)

На символ: $\frac{E_s}{N_0}$

На бит: $\frac{E_b}{N_0} = \frac{E_s}{N_0 R}$

Принято измерять в децибелах: $10 \log_{10}\left(\frac{E_b}{N_0}\right)$

Для 2-АМ: $P_e = Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right)$

1.3 Код

> **Определение 1.3.1** *(Код)* Множество $\mathcal{C}$ допустимых кодовых последедвоательностей алфавита X (на практике — они блоковые)

> **Определение 1.3.2** *(Кодер)* Отображение $\mathcal{B}^n \hookrightarrow \mathcal{C}$

> **Определение 1.3.3** *(Скорость кода)* Отношение длины кодовой и исходной последовательностей

1.4 Дублирование

Если m раз продублировать каждый символ, то $P_e = Q\left(\sqrt{2m\frac{E_b}{N_0}}\right)$, но $R = \frac{1}{m}$, т.ч. если смотреть в пересчёте на бит — прироста нет.

1.5 Теоремы Шеннона

Есть трейдофф между скоростью и ошибками.

Теорема 1.5.4 *(Прямая теорема Шеннона)* Оказывается, что со скоростью, сколь угодно близкой к C, но меньшей C можно достигать сколь угодно малые P_e начиная с некоторой длина блока кода.

Теорема 1.5.5 *(Обратная теорема Шеннона)* Если $R > C$, то P_e ограничена снизу.

т.е. теоретический результат идеален. Теорема не конструктивна, но знаем, как достичь. Но:
- декодеры неэффективны
- конкретные (не асимптотические) вероятности ошибок плохие

btw случайные коды реализуют теорему Шеннона ;)

Пропускная способность канала —

$$C = \max_{P(x)} I(X;Y)$$

, где $I(X;Y) = H(Y) - H(Y \mid X)$ — *определяется через свойства канала.*

Источники субоптимальности:
- конечность длины блока
- несовершенство кода
- субоптимальность декодера
- дискретизация выхода канала

1.6 Жёсткое vs мягкое декодирование

Жёсткое — декодер использует жёсткие оценки для каждого символа.
- Тогда АБГШ $\longrightarrow$ BSC

Мягкое — декодер использует вероятности для каждого символа/напрямую принятое значение.

1.7 Спектральная эффективность

$\beta = \frac{R}{W}$ — число бит на Гц ширины спектра.