# Конспект к экзамену по матану

**Владимир Латыпов**

donrumata03@gmail.com

## Содержание

# 1 Теория меры

# 2 Многообразия

## 2.1 Разбиение единицы

**Lemma 2.1.1** Открытое множество в $\mathbb{R}^n$ представимо как объединение шаров с рациональными ценрами и радиусам, в нём содержащихся.

**Theorem 2.1.2** *(Теорема Линдлёфа)* Из открытого покрытия множества в $\mathbb{R}^n$ можно выделить счётное подпокрытие.

**Proof**

- Не важно, открыто ли покрытие в $\mathbb{R}^n$ или в $M$, т.ч. считаем, что множество представлено в виде объединения.
- Рассмотрим все шары, содержащиеся хотя бы в одном элементе покрытия $\to$ достаточно их объединить (занумеруем).

$\square$

**Theorem 2.1.3** *(Теорема Лебега (о компакте))* Для открытого покрытия метрического компакта существует $\varepsilon$, что любое пересекающееся с $K$ множество диаметра $\leq \varepsilon$ содержится в каком-то элементе покрытия.

**Proof** От противного — построим последовательность для $\varepsilon = \frac{1}{n}$. По секвенциальной компактности выделим сходящуюся подпоследовательность. Её предел — в элементе покрытия. Тогда множества с какого-то момента содержатся в нём. Противоречие. $\square$

**Theorem 2.1.4** *(Разбиение единицы)* Для открытого покрытия компакта в $\mathbb{R}^n$ существует разбиение единицы, отвечающее ему, т.е.

- конечный набор финитных функций $C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n \to [0,1])$, тч:
- $\operatorname{supp}$ каждой $\in$ какому-то элементу покрытия.
- Сумма набора $\leq 1$ всегда
- На компакте в точности равна 1

**Proof** Фнукция $\tau(x) = e^{-\frac{1}{(t+1)^2}-\frac{1}{(t-1)^2}}$ (на $[0,1]$, иначе — $0$). Периодизируем, поделим на период, получим $\theta$. Тогда $\tilde{\theta}$ (периодизированная $\theta$) $\equiv 1$. Через $\varepsilon$ из леммы Лебега возьмём малое $h$ и получим для точки $m$ из $\mathbb{Z}^n$ перемноженную и промасштабированную штуку $\theta_{m(x)} = \prod_{i=1}^n \theta\big(\frac{x_i}{h} - m_i\big)$. Тогда возьмём в набор те, которые содержатся в каком-либо элементе покрытия. $\square$

**Theorem 2.1.5** *(Равносильность существования локального и глобального гладкого продолжения)* Если для каждой точки множества существует окрестность и $r$ — гладкое продолжение отображения, то существует таковое и на объединении окрестностей.

## 2.2 Гладкие многообразия

**Definition 2.2.6** Регулярное оторбражение на произвольном множестве — существует регулярное продолжение на открытое.

**Definition 2.2.7** $\mathbb{M}_{kn}^{(r)}$ ($k$-мерное многобразие в $\mathbb{R}^n$ класса $r$) — множество в $\mathbb{R}^n$, тч для каждой точки существует локальная параметризация — окрестность (открытое в $M$ множество, содержащее это точку) и регулярный класса $r$ гомеоморфизм $\varphi : \Pi_k \to U$, где $\Pi_k$ — стандартный куб или полукуб, причём $\varphi(\mathbb{0}) = x$. Точки, где это куб — внутренние, где полукуб — краевые.

$\partial M$ — край — множество краевых точек. Не завит от параметризации (следствие из теоремы о регулярности перехода).

**Definition 2.2.8** Нуль-мерное многообразие — *дискретное* множество точек, то есть никакая — не предельная.

**Example 2.2.9** Многообразия:

- Открытое множество в $\mathbb{R}^n$ — многообразие без края класса $\infty$ (тождественная па-параметризация)
- Путь (простой, незамкнутый, регулярный, на $[0,1]$).
- Образ открытого в $\mathbb{R}^k$ множества при регулярном гомеоморфизме. Частный случай — график отображения, где $\varphi : (u, f(u))$.
- Поверхность вращения в $\mathbb{R}^3$ (параметризуем, решая уравнения)
- Сфера (локальная параметризация — через сферические коодринаты, иначе — вращаем)
- Цилиндрическая поверхность — то же самое, но переходим к сферическим координатам только по первым $l-1$ переменным.
- Тор — параметризуем через угол на центральной окружности и на подвешенной к ней

**Theorem 2.2.10** *(Задание многообразия через систему уравнений)* Подмножество открытого, где $r$ —гладкое регулярное отображение $\Phi : G \subset \mathbb{R}^{k+m} \to \mathbb{R}^m$ равно нулю, — $\mathbb{M}_{k,k+m}^{(r)}$.

**Proof** НУО, нелулевой минор — по последним координатам ($y$). По Т. о неявном отображении возьмём куб с ребром $a \to$ шар с радусом $b$ и неявное отображение: последние координаты по первым. Тогда параметризация:

$$\varphi(u) = (x_0 + au, f(x_0 + au))$$

□

**Definition 2.2.11** Переход от параметризации $\varphi$ к $\psi$ — $L : \binom{W_1 \to W_2}{\psi^{-1} \circ \varphi}$, то есть по $\varphi$-параметру точки из пересечения стандартных окрестностей даёт $\psi$-параметр.

**Theorem 2.2.12** *(Регулярность перехода)* $L \in C^{(r)}$ и регулярно.

# 3 Ряды Фурье и приближение функций

## 3.1 Пространства Лебега

**Definition 3.1.13** Програнство Лебега $L_{p(E,\mu)}, p \in [1, \infty]$ — множество функций п. в.$_\mu E \to \overline{\mathbb{R}}$ или $\overline{\mathbb{C}}$, для которых

$$\begin{cases} \|f\|_p = \left(\int_E |f|^p d\mu\right)^{1/p} < \infty & p \in [1, \infty) \\ \|f\|_\infty = \operatorname{ess}\sup\limits_{E}^{\text{п. в.}_\mu} |f| < \infty & p = \infty \end{cases}$$

**Definition 3.1.14** Пространство $L_p$ (обозначается без указания множества и меры) — множество $2\pi$-периодических функций п. в. $\mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ или $\overline{\mathbb{C}}$, для которых $\|f\| = \|f\|_{L_{p([-\pi,\pi],\mu_1)}} < \infty$.

**Theorem 3.1.15** Полнота

## 3.2 Гильбертовы пространства

**Definition 3.2.16** Гильбертово пространство — *полное* линейное пространство со скалярным произведением и нормой, им порождённой.

**Example 3.2.17** Пространство $L_2(E, \mu)$ со скалярным произведением:

$$\langle f, g \rangle = \int_E f\overline{g} \mathrm{d}\mu$$

(суммируемость $f\overline{g}$ — за счёт неравенства Гёлдера для $p = q = 2$)

Полнота доказана в Теореме 3.1.15

Частные случаи:

- $\ell_2^m$ — Евклидово пространство
- $\ell_2$ — последовательности
- $\ell_2(\mathbb{Z})$ — двусторонние последовательности

**Lemma 3.2.18** Сходящийся в $\mathcal{H}$ ряд можно скалярно умножать на вектор почленно

**Theorem 3.2.19** *(Критерий сходимости ортогонального ряда)* Сходимость ряда в $\mathcal{H}$ равносильна сходимости $\sum \|x\|^2$, причём

$$\left\|\sum_{i=1}^{\infty} x\right\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|x\|^2$$

**Corollary 3.2.20** Перестановка сходящейся в $\mathcal{H}$ последовательности тоже сходится и имеет тот же предел

**Theorem 3.2.21** *(Вычисление коэфициентов ортогонального ряда)* Если $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ОС, а $\sum_{i=1}^{\infty} c_k e_k \to x$, то коэфициенты однозначно вычислаются по формуле

$$c_k = \frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|^2}$$

**Theorem 3.2.22** *(Свойства частичных сумм Фурье)*

1. $S_n$ — ортогональная проекция $x$ на $\mathcal{L}(\{e_k\})$
2. $S_n$ — элемент наилучшего приближения к $x$ из $\mathcal{L}(\{e_k\})$, причём равенство достигается только при $y = S_n$
3. $\|S_n\| \leq \|x\|$

**Corollary 3.2.23** *(Неравенство Бесселя)* Сумма квадратов норм Ряда Фурье $x$ не больше $\|x\|^2$.

**Theorem 3.2.24** *(Рисс, Фишер)*

1. Ряд Фурье вектора $x$ сходится
2. Сумма ряда Фурье — ортогональная проекция $x$ на $\mathcal{L}(\{e_k\})$
3. Сходится именно к $x \iff$ выполняется *уравнение замкнутости* (то есть в нер-ве Бесселя достигается равенство).

**Definition 3.2.25** Базис: любой вектор раскладывается по этой системе

**Definition 3.2.26** Полная система: не существует отличного от нуля вектора, ортогонального всем вектора (то есть нельзя добавить ещё однин вектор, чтобы осталвалась ОС)

**Definition 3.2.27** Замкнутая система: для любого вектора выполнено *уравнение замкнутости*

**Theorem 3.2.28** *(Харакетеристика базиса)* Утверждения эквивалентны для ОС $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$:

1. $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — базис
2. $\forall x, y$ выполнено обобщённое уравнение замкнутости:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} c_{k(x)}\overline{c_{k(y)}}\|e_k\|^2$$

3. $\{e_k\}$ — полная система
4. $\{e_k\}$ — замкнутая система
5. $\mathcal{L}(\{e_k\})$ плотна в $\mathcal{H}$

**Theorem 3.2.29** *(Грамм, Шмидт)* систему можно ортонормировать, не изменяя линейную оболочку никакого префикса, притом единственным с точностью до коэфициентов $\pm 1$ образом

**Example 3.2.30** *(Ортогональные базисы многочленов)* Весовая функция $\to$ вводим скалярное произведение

**Theorem 3.2.31** *(Существование элемента наилучшего приближения)*