

Типовик по линейной алгебре
«Канонический вид матрицы. Часть 3»

Латыпов Владимир Витальевич,
ИТМО КТ М3138, **вариант 10**

25 марта 2022 г.

1. Формулировка условия

Утверждение 1. Условие можно найти здесь: <https://drive.google.com/file/d/1yLuU3nt1vEcIRbmDE4mNn060Z2JXiAAu/view?usp=sharing>

Data section:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -10 & 3 & -5 \\ -4 & 12 & -6 & 4 \\ 4 & 20 & -4 & 10 \\ 12 & 0 & 6 & 4 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$G = \begin{pmatrix} -22 & 20 & 4 & -36 \\ 22 & 4 & 10 & 12 \\ 5 & -19 & -9 & 24 \\ 27 & -13 & 3 & 34 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$P = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & -3 & -2 \\ -3 & 5 & 2 & 2 \\ -6 & 11 & 6 & 4 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$Q = \begin{pmatrix} -26 & -39 & 65 & 13 \\ -18 & -27 & 45 & 9 \\ -16 & -24 & 40 & 8 \\ -26 & -39 & 65 & 13 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$V = \begin{pmatrix} -5 & 8 & 4 & -10 \\ 5 & -7 & 8 & -5 \\ 0 & -4 & -7 & 4 \\ 2 & 8 & 4 & -17 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 10 & -1 & 10 & 8 \\ -2 & 2 & -1 & -4 \\ 4 & -4 & 10 & 11 \end{pmatrix} \quad (6)$$

2. Построение спектральных проекторов

2.1. Полиномиальное разложение единицы

2.1.1. Матрица F

Строим полиномиальное разложение 1-цы на многочлены из идеалов, порождённых минимальным многочленом.

$\varphi(t) = (t - 2)(t - 4)$, тогда можно представить:

$$\frac{1}{\varphi(t)} = \frac{A}{t - 2} + \frac{B}{t - 4} \quad (7)$$

У нас здесь и везде далее не будет неразложимых множителей, все просто линейные в какой-то степени, поэтому везде работает Лагранж:

Если A_β — коэффициент перед $\frac{1}{(t-a)^\beta}$, то

$$A_\beta = \beta! \frac{P(t)}{Q^{(\beta)}(t)} \Big|_{t=a} \quad (8)$$

У нас $P(t) = 1$, $Q = \varphi$.

Например, A для матрицы F:

$$A = 1 \frac{1}{2(2-3)} = -\frac{1}{2} \quad (9)$$

$$\frac{1}{(t-2)(t-4)} = \frac{1}{2(t-4)} - \frac{1}{2(t-2)} \quad (10)$$

$$1 = \frac{1}{2}(t-2) - \frac{1}{2}(t-4) \quad (11)$$

2.1.2. Матрица G

$$\begin{aligned} \frac{1}{(t+6)(t+2)(t-5)(t-10)} = \\ -\frac{1}{385(t-5)} + \frac{1}{336(t+2)} - \frac{1}{704(t+6)} + \frac{1}{960(t-10)} \end{aligned} \quad (12)$$

$$1 = -\frac{1}{385}(t+6)(t+2)(t-10) + \frac{1}{336}(t+6)(t-5)(t-10) - \frac{1}{704}(t+2)(t-5)(t-10) + \frac{1}{960}(t+6)(t+2)(t-5) \quad (13)$$

2.1.3. Матрица P

$$\frac{1}{(t+1)^3} = \frac{1}{(t+1)^3} \quad (14)$$

$$1 = 1 \quad (15)$$

2.1.4. Матрица Q

$$\frac{1}{t^2} = \frac{1}{t^2} \quad (16)$$

$$1 = 1 \quad (17)$$

2.1.5. Матрица V

$$\frac{1}{(t+7)^2(t+11)^2} = \frac{1}{32(t+11)} + \frac{1}{16(t+11)^2} - \frac{1}{32(t+7)} + \frac{1}{16(t+7)^2} \quad (18)$$

$$1 = \frac{1}{32}(t+7)^2(t+11) + \frac{1}{16}(t+7)^2 - \frac{1}{32}(t+7)(t+11)^2 + \frac{1}{16}(t+11)^2 = (t+7)^2 \frac{t+13}{32} + (t+11)^2 \frac{-t-5}{32} \quad (19)$$

2.1.6. Матрица W

$$\frac{1}{(t-5)(t+1)(t-3)^2} = -\frac{1}{32(t-3)} - \frac{1}{96(t+1)} - \frac{1}{8(t-3)^2} + \frac{1}{24(t-5)} \quad (20)$$

$$1 = -\frac{1}{32}((t-5)(t+1))(t+1) - \frac{1}{96}(t-5)(t-3)^2 + \frac{1}{24}(t+1)(t-3)^2 \quad (21)$$

2.2. Спектральные проекторы через многочлены от матриц

2.2.1. Матрица F

$$P_4 = \frac{1}{2}(F - 2E) = \begin{pmatrix} -2 & -10 & 3 & -5 \\ -4 & 10 & -6 & 4 \\ 4 & 20 & -6 & 10 \\ 12 & 0 & 6 & 2 \end{pmatrix} \quad (22)$$

$$P_2 = -\frac{1}{2}(F - 4E) = \begin{pmatrix} 2 & 5 & \frac{-3}{2} & \frac{5}{2} \\ 2 & -4 & 3 & -2 \\ -2 & -10 & 4 & -5 \\ -6 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad (23)$$

Заметим, что для F и G это обычные проекторы, на собственные подпространства.

Проверим, что проекторы в сумме дают единичную матрицу:

$$P_4 + P_2 = \begin{pmatrix} -2 & -10 & 3 & -5 \\ -4 & 10 & -6 & 4 \\ 4 & 20 & -6 & 10 \\ 12 & 0 & 6 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 5 & \frac{-3}{2} & \frac{5}{2} \\ 2 & -4 & 3 & -2 \\ -2 & -10 & 4 & -5 \\ -6 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (24)$$

2.2.2. Матрица \mathfrak{G}

$$P_5 = -\frac{1}{385}(G + 6E)(G + 2E)(G - 10E) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (25)$$

$$P_{-2} = -\frac{1}{385}(G + 6E)(G - 5E)(G - 10E) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad (26)$$

$$P_{-6} = -\frac{1}{385}(G + 2E)(G - 5E)(G - 10E) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad (27)$$

$$P_{10} = -\frac{1}{385}(G + 2E)(G - 5E)(G + 6E) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (28)$$

Они совпадают с проекторами на собственные, а мы их уже проверяли.

2.2.3. Матрица P

Тут просто одно собственное число (помним, что алгебраической кратности 4), то есть всё пространство — корневое, так что не удивительно, что

$$P_{-1} = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (29)$$

2.2.4. Матрица Q

Ничего нового:

$$P_0 = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (30)$$

Проверять нечего...

2.2.5. Матрица V

$$P_{-11} = \frac{1}{32}(V + 7E)^2(V + 13E) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -4 & 2 \\ -3 & 2 & -4 & 1 \\ \frac{3}{4} & 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ -3 & 1 & -4 & 2 \end{pmatrix} \quad (31)$$

$$P_{-7} = \frac{1}{32}(V + 11E)^2(-V - 5E) = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 4 & -1 \\ -\frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 3 & -1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad (32)$$

Проверка: [`https://matrixcalc.org/#1/32*\(%7B%7B-5,8,4,-10%7D,%7B5,-7,8,-5%7D,%7B0,-4,-7,4%7D,%7B2,8,4,-17%7D%7D+11%2e*%7B%7B1,0,0,0%7D,%7B0,1,0,0%7D,%7B0,0,1,0%7D,%7B0,0,0,1%7D%7D\)%5E2*\(-%7B%7B-5,8,4,-10%7D,%7B5,-7,8,-5%7D,%7B0,-4,-7,4%7D,%7B2,8,4,-17%7D%7D-5%2e*%7B%7B1,0,0,0%7D,%7B0,1,0,0%7D,%7B0,0,1,0%7D,%7B0,0,0,1%7D%7D\)`](https://matrixcalc.org/#1/32*(%7B%7B-5,8,4,-10%7D,%7B5,-7,8,-5%7D,%7B0,-4,-7,4%7D,%7B2,8,4,-17%7D%7D+11%2e*%7B%7B1,0,0,0%7D,%7B0,1,0,0%7D,%7B0,0,1,0%7D,%7B0,0,0,1%7D%7D)%5E2*(-%7B%7B-5,8,4,-10%7D,%7B5,-7,8,-5%7D,%7B0,-4,-7,4%7D,%7B2,8,4,-17%7D%7D-5%2e*%7B%7B1,0,0,0%7D,%7B0,1,0,0%7D,%7B0,0,1,0%7D,%7B0,0,0,1%7D%7D))

$$+1/32*(\%7B\%7B-5,8,4,-10\%7D,\%7B5,-7,8,-5\%7D,\%7B0,-4,-7,4\%7D,\%7B2,8,4,-17\%7D\%7D+7\%2e*\%7B\%7B1,0,0,0\%7D,\%7B0,1,0,0\%7D,\%7B0,0,1,0\%7D,\%7B0,0,0,1\%7D\%7D)\%5E2*(\%7B\%7B-5,8,4,-10\%7D,\%7B5,-7,8,-5\%7D,\%7B0,-4,-7,4\%7D,\%7B2,8,4,-17\%7D\%7D+13\%2e*\%7B\%7B1,0,0,0\%7D,\%7B0,1,0,0\%7D,\%7B0,0,1,0\%7D,\%7B0,0,0,1\%7D\%7D)$$

2.2.6. Матрица W

$$P_3 = -\frac{1}{32}(W - 5E)(W + 1E)(W + 1E) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 4 \\ \frac{-3}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{11}{4} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{4} & 2 \end{pmatrix} \quad (33)$$

$$P_{-1} = -\frac{1}{96}(W - 5E)(W - 3E)^2 = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{-10}{3} & \frac{4}{3} & -2 & \frac{-8}{3} \\ \frac{5}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{-25}{12} & \frac{5}{6} & \frac{2}{4} & \frac{3}{3} \end{pmatrix} \quad (34)$$

$$P_5 = \frac{1}{24}(W + 1E)(W - 3E)^2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -1 & \frac{-2}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{2}{3} & -2 & \frac{-4}{3} \\ \frac{3}{3} & \frac{1}{3} & -1 & \frac{-2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} & 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad (35)$$

Проверка прошла успешно: [8](https://matrixcalc.org/#-(1/32)*(%7B%7B1,2,-4,-4%7D,%7B10,-1,10,8%7D,%7B-2,2,-1,-4%7D,%7B4,-4,10,11%7D%7D-5%2e*\%7B%7B1,0,0,0%7D,%7B0,1,0,0%7D,%7B0,0,1,0%7D,%7B0,0,0,1%7D%7D)*(%7B%7B1,2,-4,-4%7D,%7B10,-1,10,8%7D,%7B-2,2,-1,-4%7D,%7B4,-4,10,11%7D%7D+1%2e*\%7B%7B1,0,0,0%7D,%7B0,1,0,0%7D,%7B0,0,1,0%7D,%7B0,0,0,1%7D%7D)*(%7B%7B1,2,-4,-4%7D,%7B10,-1,10,8%7D,%7B-2,2,-1,-4%7D,%7B4,-4,10,11%7D%7D+1%2e*\%7B%7B1,0,0,0%7D,%7B0,1,0,0%7D,%7B0,0,1,0%7D,%7B0,0,0,1%7D%7D)-1/96*(%7B%7B1,2,-4,-4%7D,%7B10,-1,10,8%7D,%7B-2,2,-1,-4%7D,%7B4,-4,10,11%7D%7D-5%2e*\%7B%7B1,0,0,0%7D,%7B0,1,0,0%7D,%7B0,0,1,0%7D,%7B0,0,0,1%7D%7D)*(%7B%7B1,2,-4,-4%7D,%7B10,-1,10,8%7D,%7B-2,2,-1,-4%7D,%7B4,-4,10,11%7D%7D-3%2e*\%7B%7B1,0,0,0%7D,%7B0,1,0,0%7D,%7B0,0,1,0%7D,%7B0,0,0,1%7D%7D)\%5E2+1/24*(%7B%7B1,2,-4,-4%7D,%7B10,-1,10,8%7D,%7B-2,2,-1,-4%7D,%7B4,-4,10,11%7D%7D+1%2e*</math>
</p>
</div>
<div data-bbox=)

$7B7B1, 0, 0, 07D, 7B0, 1, 0, 07D, 7B0, 0, 1, 07D, 7B0, 0, 0, 17D7D) * (7B7B1, 2, -4, -47D, 7B10, -1, 10, 87D, 7B-2, 2, -1, -47D, 7B4, -4, 10, 117D7D-32e*7B7B1, 0, 0, 07D, 7B0, 1, 0, 07D, 7B0, 0, 1, 07D, 7B0, 0, 0, 17D7D)5E2$

2.3. Нахождение спектральных подпространств

Теперь для каждой матрицы-проектора выделим базу столбцов, найдя её образ. Мы можем проверить ранг на матричном калькуляторе, а потом предъявить сколько нужно независимых столбцов. Ранг должен быть равен алгебраической кратности собственного числа.

2.3.1. Матрица F

$$\text{Im } P_4 = \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \right\} \quad (36)$$

$$\text{Im } P_2 = \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}, \right\} \quad (37)$$

2.3.2. Матрица G

$$\text{Im } P_5 = \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \right\} \quad (38)$$

$$\text{Im } P_{-2} = \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \right\} \quad (39)$$

$$\text{Im } P_{-6} = \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \right\} \quad (40)$$

$$\text{Im } P_{10} = \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \right\} \quad (41)$$

2.3.3. Матрица P

$$\text{Im } P_{-1} = \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \right\} = \mathbb{R}^4 \quad (42)$$

2.3.4. Матрица Q

$$\text{Im } P_0 = \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \right\} = \mathbb{R}^4 \quad (43)$$

2.3.5. Матрица V

$$\text{Im } P_{-11} = \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \right\} \quad (44)$$

$$\text{Im } P_{-7} = \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \right\} \quad (45)$$

2.3.6. Матрица W

$$\text{Im } P_3 = \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 16 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \right\} \quad (46)$$

$$\operatorname{Im} P_{-1} = \operatorname{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \right\} \quad (47)$$

$$\operatorname{Im} P_5 = \operatorname{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \right\} \quad (48)$$

3. Разложение Жордана

Для матриц F и G оно просто будет сама матрица плюс ноль. (в этом убедились выше) Для остальных построим оператор простой структуры с собственными подпространствами из корневых подпространств нашего оператора.

3.1. Матрица P

$$\mathfrak{D} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (49)$$

Тогда

$$\mathfrak{B} = P - \mathfrak{D} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 3 & 3 \\ 3 & -5 & -3 & -2 \\ -3 & 5 & 3 & 2 \\ -6 & 11 & 6 & 5 \end{pmatrix} \quad (50)$$

Проверим, что \mathfrak{B} нильпотентно с индексом $\max\{3\} = 3$.

$$\mathfrak{B}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & -3 & -3 \\ 3 & -6 & -3 & -3 \end{pmatrix} \neq 0 \quad (51)$$

$$\mathfrak{B}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (52)$$

Проверка прошла успешно.

3.2. Матрица Q

$$\mathfrak{D} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (53)$$

Тогда

$$\mathfrak{B} = Q - \mathfrak{D} = Q = \begin{pmatrix} -26 & -39 & 65 & 13 \\ -18 & -27 & 45 & 9 \\ -16 & -24 & 40 & 8 \\ -26 & -39 & 65 & 13 \end{pmatrix} \quad (54)$$

Проверим, что \mathfrak{B} нильпотентно с индексом $\max\{2\} = 2$.

$$\mathfrak{B}^1 = Q \neq 0 \quad (55)$$

$$\mathfrak{B}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (56)$$

Проверка прошла успешно.

3.3. Матрица V

$$\mathfrak{D} = -11 \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & -4 & 2 \\ -3 & 2 & -4 & 1 \\ \frac{3}{4} & 0 & 1 & \frac{-3}{4} \\ -3 & 1 & -4 & 2 \end{pmatrix} - 7 \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 4 & -1 \\ \frac{-3}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 3 & -1 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 16 & -8 \\ 12 & -15 & 16 & -4 \\ -3 & 0 & -11 & 3 \\ 12 & -4 & 16 & -15 \end{pmatrix} \quad (57)$$

Тогда

$$\mathfrak{B} = V - \mathfrak{D} = \begin{pmatrix} -10 & 12 & -12 & -2 \\ -7 & 8 & -8 & -1 \\ 3 & -4 & 4 & 1 \\ -10 & 12 & -12 & -2 \end{pmatrix} \quad (58)$$

Проверим, что \mathfrak{B} нильпотентно с индексом $\max\{2, 2\} = 2$.

$$\mathfrak{B}^1 = \mathfrak{B} \neq \mathbb{0} \quad (59)$$

$$\mathfrak{B}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{0} \quad (60)$$

Проверка прошла успешно.

3.4. Матрица W

$$\begin{aligned} \mathfrak{D} = & 3 \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 4 \\ \frac{-3}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{11}{4} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{4} & 2 \end{pmatrix} \\ & - 1 \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{-10}{3} & \frac{3}{4} & -2 & \frac{-3}{8} \\ \frac{3}{5} & \frac{3}{-1} & \frac{1}{2} & \frac{3}{3} \\ \frac{-25}{12} & \frac{5}{6} & \frac{-5}{4} & \frac{-5}{3} \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -1 & \frac{-2}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{2} & -2 & \frac{-4}{3} \\ \frac{3}{3} & \frac{1}{3} & -1 & \frac{-2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} & 1 & \frac{3}{3} \end{pmatrix} = \\ & \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 16 & -1 & 4 & 8 \\ -2 & 2 & -1 & -4 \\ 7 & -4 & 7 & 11 \end{pmatrix} \quad (61) \end{aligned}$$

Тогда

$$\mathfrak{B} = W - \mathfrak{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad (62)$$

Проверим, что \mathfrak{B} нильпотентно с индексом $\max\{1, 1, 2\} = 2$.

$$\mathfrak{B}^1 = \mathfrak{B} \neq \mathbb{0} \quad (63)$$

$$\mathfrak{B}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{0} \quad (64)$$

Проверка прошла успешно.

4. Корневые подпространства

Будем находить $\text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)}$ для каждого собственного числа и матрицы

Для этого достаточно решить систему уравнений $(A - \lambda E)^{m(\lambda)}x = 0$.

Там, где $m(\lambda) = 1$, переиспользуем собственные подпространства.

Для каждой матрицы попутно будем сверять, одинаковы ли образы спектральных проекторов и полученные корневые пространства.

4.1. Матрица F

$$K_2 : \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -14 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix} \right\} \quad (65)$$

$$K_4 : \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \quad (66)$$

4.2. Матрица G

$$K_{-6} : \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (67)$$

$$K_{-2} : \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \quad (68)$$

$$K_5 : \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (69)$$

$$K_{10} : \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (70)$$

4.3. Матрица Р

Здесь уже посчитаем $\text{Ker}(\mathcal{P} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}$

СЛОУ:

$$(\mathcal{P} + E)^3 = \left(\begin{pmatrix} -4 & 6 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & -3 & -2 \\ -3 & 5 & 2 & 2 \\ -6 & 11 & 6 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (71)$$

Впрочем, никто не сомневался, что тут всё пространство — корневое.

Базис K_{-1} берём канонический:

$$K_{-1} = \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (72)$$

4.4. Матрица Q

Аналогично с матрицей Q, у которой одно собственное число с алгебраической кратностью 4:

$$K_0 = \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (73)$$

4.5. Матрица V

Для начала — $\lambda_1 = -11$

$$(V + 11E)^2 = \begin{pmatrix} 56 & -16 & 64 & -24 \\ 40 & -16 & 64 & -8 \\ -12 & 0 & 0 & 12 \\ 40 & -16 & 64 & -8 \end{pmatrix} \quad (74)$$

Получим, что

$$K_{-11} = \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (75)$$

Вот так это получили: <https://matrixcalc.org/slu.html#solve-using-Gaussian-elimination>
 $7B56, -16, 64, -24, 0, 7B40, -16, 64, -8, 0, 7B-12, 0, 0, 12, 0, 7B40, -16, 64, -8, 0, 7D\%$

Заметим, что собственное подпространство из части 1 содержится в нём, проверяя ранг, если записать всё в матрицу (он равен двум).

Далее — $\lambda_1 = -7$

$$(V + 7E)^2 = \begin{pmatrix} 24 & -80 & 32 & 56 \\ 0 & -32 & 0 & 32 \\ -12 & 32 & -16 & -20 \\ 24 & -80 & 32 & 56 \end{pmatrix} \quad (76)$$

$$K_{-7} = \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (77)$$

4.6. Матрица W

Начнём с $\lambda_1 = -1$.

Кратность один, поэтому переиспользуем собственное.

$$K_{-1} = \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} \quad (78)$$

Далее $\lambda_2 = 3$.

$$(W - 3E)^2 = \begin{pmatrix} 16 & -4 & 4 & 8 \\ -48 & 24 & -40 & -48 \\ 16 & -4 & 4 & 8 \\ -36 & 12 & -16 & -24 \end{pmatrix} \quad (79)$$

$$K_3 = \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (80)$$

Для $\lambda_3 = 5$ переиспользуем собственное.

$$K_5 = \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (81)$$

Для всех матриц проверили и получили, что корневые подпространства совпадают с образами спектральных проекторов.