Конспект к экзамену по билетам (математический анализ) (3-й семестр)

Латыпов Владимир (конспектор)
t.me/donRumata03, github.com/donRumata03, donrumata03@gmail.com

Лимар Иван Александрович (лектор)
https://t.me/limvan

22 февраля 2023 г.

Оглавление

0.1. Как работать с этим сжатым конспектом

Составлено в соответствии с лекциями весны 2023

0.2. Определения

Определение (Веростностное пространство). Это пространство с *вероятностной* (то есть $P(X) = 1$) мерой: мера должна быть счётно-аддитивной функцией $2^X \to [0, \infty)$ на σ-алгебре.

Используется «птичий язык»:

$$AB \overset{\text{def}}{=} A \cap B$$
$$A + B \overset{\text{def}}{=} A \cup B$$
$$\overline{A} \overset{\text{def}}{=} A^{\complement}$$

Почему определяем на какой-то странной сигма-алгебре, а не на полной (2^X)?

В случае с $\mathbb{R}^n$ — на всём не получится сделать адекватную меру, так как, например, если в $\mathbb{R}$ объявим $\mu[0, 1] = 1$, то множество Витали будет неизмеримо.

(Вспомним из матана, что вообще любая мера, инвариантая относительно сдвига, на той же сигма-алгебре — в константу раз отличается от меры Лебега).

Определение (Вероятностное пространство *в широком смысле*). Теперь работаем в алгебре, а мера — счётно-дизъюнктно аддитивна на множествах, объединение которых уже лежит в алгебре.

Теорема 1 (Единственность стандартного распространения). *...веростностной меры с веростностного пространства в широком смысле на вероятностное пространство в обычном, а именно — на .*

Доказательство. Как легко видеть, $\left|\bigoplus_{k\in S}\left(\mathfrak{K}^{\mathbb{F}^{\alpha}(i)}\right)_{i\in\mathcal{U}_k}\right| \preccurlyeq \aleph_1$ при $[\mathfrak{H}]_{\mathcal{W}} \cap \mathbb{F}^{\alpha}(\mathbb{N}) \neq \emptyset$. ∎

Замечание. Из матана известно, что достаточно потребовать первоначальное задание меры на полукольце и сигма-конечности, чтобы она совпадала со стандартным распространением на сигма-алгебре измеримых.

Пример. Примеры веростностных пространств:

1. Дискретное: состоит из элементарных исходов, у каждого вес. $\mathbb{A} = 2^{\Omega}$, $P(A) = \sum_{w\in A} w$
   a) Броски монеты до первого орла
   b) Модель классической вероятности: $\forall i : w_i = \frac{1}{n}$. *Колчичество* элементарных исходов в событии считается комбинаторикой.

      Пример: шарики и перегородки кодируют k-элементные мультимножества n объектов или же n-кортежи длины k.

2. Геометрическая вероятность. $\Omega \subset \mathbb{R}^n, \Omega \in \mathbb{A}_n$, $P(A) = \frac{P(A)}{P(\Omega)}$. Пример: вычисление π Монте-Карловскими бросками иголки (считаем меру допустимого множества, интегрируя его сечение по проекции).

Свойство 0.2.1 (Элементарные свойства веростности).

- *Монотонность*
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- *Включения-исключения*
- *Полуаддитивность*

Лекция 2

Теорема 2 (Равносильность непрерывности и счётной аддитивности объёма). *Утверждения равносильны:*

1. *P — мера*
2. *P — объём, непрерывный снизу*
3. *P — объём, непрерывный сверху*

Доказательство. $2 \Leftrightarrow 3$: инвертируем.

$(2, 3) \Leftrightarrow 1$: разбиваем на кольца, остаток сходящегося ряда $\to 0$. ∎

Теорема 3 (Формула полной вероятности). *Пусть $\{A_i\}^n$ дизъюнктны, $B \in \bigcup_i A_i$.*

Тогда $P(B) = \sum_i P(A_i)P(B|A_i)$.

Теорема 4 (Байеса).

$$\underbrace{P(A|B)}_{\text{likelihood}} = \frac{\overbrace{P(A)}^{\text{prior}}\,\overbrace{P(B|A)}^{\text{likelihood}}}{\underbrace{P(B)}_{\text{marginal}}} \tag{0.2.1}$$

Можно переписать в виде:

$\{A_i\}$ — система дизъюнктных событий, $B \in \bigcup A_i$. (((Каждое из них „могло вызвать“ B и какое-то точно вызвало))). Вопрос — какое:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_i P(A_i)P(B|A_i)} \tag{0.2.2}$$

То есть при получении информации, что произошло B, ожидания событий скейлятся пропорционально тому, насколько вероятно они вызывают B.