

Типовик по линейной алгебре
«Дополнительное ДЗ №2»

Латыпов Владимир Витальевич,
ИТМО КТ М3138, **вариант 10**

26 сентября 2022 г.

1. Формулировка условия

Утверждение 1. Условие таково: Линейные подпространства L_1, L_2 заданы системами линейных уравнений.

1. Найти матрицы операторов (в каноническом базисе) проектирования P_1, P_2 , на линейные подпространства L_1, L_2 соответственно.
2. Проверить, что $P_1^2 = P_1, P_2^2 = P_2, P_1 P_2 = 0, P_1 + P_2 = E$
3. Найти $\text{Ker } P_i, \text{Im } P_i \forall i \in \{1, 2\}$. Проверить, что $\text{Ker } P_1 = L_2, \text{Ker } P_2 = L_1, \text{Im } P_1 = L_1, \text{Im } P_2 = L_2$
4. Найти проекции x_1, x_2 , вектора $x = (2 \ 4 \ -2 \ 5 \ -3)^T$ на подпространство L_1 параллельно L_2 и на подпространство L_2 параллельно L_1 соответственно с помощью операторов проектирования P_1 и P_2 . Сравнить с результатами, полученными в доп.д.з.No1

Data section:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases} \text{ и } 2x_1 = x_2 = 4x_3 + 2x_4,$$

соответственно (1)

2. Нахождение матриц операторов

Во-первых заметим, что обе матрицы — из канонического в канонический базис.

Вспомним, что у нас были матрицы перехода между каноническим базисом и базисом из объединения $L_1 \cap L_2$. (сами базисы мы тоже нашли).

$$L_1 = x_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$L_2 = x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$T_{E \rightarrow L} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$T_{L \rightarrow E} = \begin{pmatrix} -32 & 17 & -4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Заметим, что в базисе L матрица проектора на L_1 , например, — это всего лишь

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

А матрица проектора в каноническом базисе — это

$$T_{E \rightarrow L} \cdot P_{1L} \cdot T_{L \rightarrow E} \quad (7)$$

Так найдём же их!

$$\begin{aligned}
P_{1E} &= T_{E \rightarrow L} \cdot P_{1L} \cdot T_{L \rightarrow E} = \\
&\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -32 & 17 & -4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
&\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -32 & 17 & -4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
&\begin{pmatrix} -15 & 8 & -2 & -1 & 0 \\ -32 & 17 & -4 & -2 & 0 \\ -8 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{2E} &= T_{E \rightarrow L} \cdot P_{2L} \cdot T_{L \rightarrow E} = \\
&\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -32 & 17 & -4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
&\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -32 & 17 & -4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
&\begin{pmatrix} 16 & -8 & 0 & 1 & 0 \\ 32 & -16 & 0 & 2 & 0 \\ 8 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9)
\end{aligned}$$

3. Проверка

$$P_1^2 = \begin{pmatrix} -15 & 8 & -2 & -1 & 0 \\ -32 & 17 & -4 & -2 & 0 \\ -8 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -15 & 8 & -2 & -1 & 0 \\ -32 & 17 & -4 & -2 & 0 \\ -8 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 8 & -2 & -1 & 0 \\ -32 & 17 & -4 & -2 & 0 \\ -8 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$P_2^2 = \begin{pmatrix} 16 & -8 & 0 & 1 & 0 \\ 32 & -16 & 0 & 2 & 0 \\ 8 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 16 & -8 & 0 & 1 & 0 \\ 32 & -16 & 0 & 2 & 0 \\ 8 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -8 & 0 & 1 & 0 \\ 32 & -16 & 0 & 2 & 0 \\ 8 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$P_1 P_2 = \begin{pmatrix} -15 & 8 & -2 & -1 & 0 \\ -32 & 17 & -4 & -2 & 0 \\ -8 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 16 & -8 & 0 & 1 & 0 \\ 32 & -16 & 0 & 2 & 0 \\ 8 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$P_1 + P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

4. Разложение вектора

Теперь спроектируем вектор x на эти пространства.

$$P_1 x = \begin{pmatrix} -15 & 8 & -2 & -1 & 0 \\ -32 & 17 & -4 & -2 & 0 \\ -8 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

Сходится с первым ДЗ.

$$P_2 x = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \quad (15)$$

Не совсем сходится с первым ДЗ...