Теоретический конспект по теорверу

Владимир Латыпов
donrumata03@gmail.com

Содержание

1 Об инегралах

Можно рассматривать функции от случайных векторов. Если $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, то $g(X)$ — случайная величина.

Более того, можно интегрировать эту штуку по вероятностному пространству Ω:

$$\int_\Omega g(X(\omega))P(\,\mathrm{d}\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)P_X(\,\mathrm{d}x)$$

Forward measure — мера при отображении.

Теорема 1.1 (Фубини): Пусть X — случайный вектор в $\mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — борелевская функция. Тогда

$$\int g(x,y)P_{X,Y}(\,\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = \int \left[\int g(x,y)\,\mathrm{d}F_Y(y)\right] \mathrm{d}F_X(x) =$$
$$= \int \left[\int g(x,y)\,\mathrm{d}F_X(x)\right] \mathrm{d}F_Y(y)$$

(один интеграл — по Forward measure, другой — по мере Лебега-Стилтьеса)

2 Числовые характеристики случайных величин

Определение 2.1: Пусть X — случайная величина. Тогда её математическим ожиданием называется число

$$\mathbb{E}X = \int_{\mathbb{R}} x\,\mathrm{d}F_X(x)$$

(интеграл Лебега-Стилтьеса)

Замечание: Если X — дискретная случайная величина, то

$$\mathbb{E}X = \sum_{x \in \mathbb{R}} x P_X(x)$$

Замечание: Если X — абсолютно непрерывная случайная величина, то

$$\mathbb{E}X = \int_{\mathbb{R}} x p_X(x)\,\mathrm{d}x$$

Свойство 2.1.1 (Функция от случайной величины): $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — борелевская функция, X — случайный вектор. Тогда

$$\mathbb{E}\underbrace{g(X_1, ..., X_n)}_{Y} = \int y\,\mathrm{d}F_Y(y) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x_1, ..., x_n)P_{\mathrm{d}x_1, ..., \mathrm{d}x_n}$$

Свойство 2.1.2 (Линейность): $\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}X + b\mathbb{E}Y$

Свойство 2.1.3 (Неотрицательность):
- $X \geq 0$ почти наверное $\Rightarrow \mathbb{E}X \geq 0$.
- $X \geq 0, \mathbb{E}X = 0 \Rightarrow X = 0$ почти наверное.

Свойство 2.1.4 (Монотонность): $X \leq Y$ почти наверное, то $\mathbb{E}X \leq \mathbb{E}Y$

Свойство 2.1.5 (Матожидание произведения независимых случайных величин): $\mathbb{E}XY = \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$

Теорема 2.1 (Неравенство Маркова): Пусть X — неотрицательная случайная величина, $\exists \mathbb{E}X$, $a > 0$. Тогда

$$P(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}X}{a}$$

Доказательство:

$$\mathbb{E}X = \int_0^\infty x p_X(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^\infty a p_X(x)\,\mathrm{d}x \geq a \int_a^\infty p_X(x)\,\mathrm{d}x = aP(X \geq a)$$

□

Свойство 2.1.6: $\mathbb{E}X = \int_0^\infty P(X \geq x)\,\mathrm{d}x$ для абсолютно непрерывных случайных величин.

$\mathbb{E}X = \sum_{x \in \mathbb{R}} P(X \geq x)$ для дискретных случайных величин.

Определение 2.2: Пусть X — случайная величина. Тогда её дисперсией называется число

$$\operatorname{Var} X = \mathbb{D}X = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2$$

Стандартным отклонением случайной величины X называется число $\sigma_X = \sqrt{\operatorname{Var} X}$. Она часто используется вместо дисперсии, потому что она имеет ту же размерность, что и X.

Свойство 2.2.1 (Неотрицательность): $\operatorname{Var} X \geq 0$

Свойство 2.2.2 (Связь с матожиданием): $\operatorname{Var} X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$

Свойство 2.2.3 (Квадратичная однородность): $\operatorname{Var}(aX + b) = a^2 \operatorname{Var} X$

Свойство 2.2.4 (Дисперсия суммы (разности)):

$$\operatorname{Var}(X \pm Y) = \operatorname{Var} X + \operatorname{Var} Y \pm 2 \operatorname{Cov}(X, Y)$$

(для независимых случайных величин $\operatorname{Cov}(X, Y) = 0$)

Свойство 2.2.5 (Нулевая дисперсия и константность): $\operatorname{Var} X = 0 \Leftrightarrow X = C$ почти наверное

Теорема 2.2 (Неравенство Чебышёва): Пусть X — случайная величина, $\exists \mathbb{E}X, \operatorname{Var} X$, $a > 0$. Тогда

$$P(|X - \mathbb{E}X| \geq a) \leq \frac{\operatorname{Var} X}{a^2}$$

Доказательство:

$$P(|X - \mathbb{E}X| \geq a) = P\Big((X - \mathbb{E}X)^2 \geq a^2\Big) \leq \frac{\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2}{a^2} = \frac{\operatorname{Var} X}{a^2}$$

□

Определение 2.3: Пусть X — случайная величина. Тогда для $\alpha \in (0, 1)$

$$q_\alpha \text{— квантиль порядка } \alpha \text{— число, такое что } \begin{cases} P(x \geq q_\alpha) \geq 1 - \alpha \\ P(x \leq q_\alpha) \geq \alpha \end{cases}$$

Для непрерывной случайной величины X квантиль порядка α — это решение уравнения $F_X(x) = \alpha$. Если F_X строго возрастает, то $q_\alpha = F_X^{-1}(\alpha)$.

Для дискретной случайной величины X квантиль порядка α — это минимальное x, такое что $P_X(x) \geq \alpha$.

Определение 2.4: Медиана случайной величины $\operatorname{med} X$ — это квантиль порядка $\frac{1}{2}$.

Теорема 2.3:

$$\operatorname{med} X = \underset{x \in \mathbb{R}}{\operatorname{argmin}} \mathbb{E}|X - x|$$

Матожидание тоже кое-что оптимизирует, но не так круто.

Теорема 2.4:

$$\mathbb{E}X = \underset{x \in \mathbb{R}}{\operatorname{argmin}} \mathbb{E}(X - x)^2$$

Почему не так круто, спросите вы? Потому что матожидание — это не медиана, а среднее. А среднее — это для средних, посредственных людей. А медиана — это для лучших. © Copilot

Определение 2.5: Момент порядка k случайной величины X — это число $\mathbb{E}X^k$.

Определение 2.6: Центральный момент порядка k случайной величины X — это число $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^k$.

Определение 2.7: Абсолютный момент порядка k случайной величины X — это число $\mathbb{E}|X|^k$.

Определение 2.8: Абсолютный центральный момент порядка k случайной величины X — это число $\mathbb{E}|X - \mathbb{E}X|^k$.

Пример: Коэфициент асимметрии случайной величины X — это, с точностью до коэфициента, центральный момент порядка 3: $\mathbb{E}\frac{(X-\mathbb{E}X)^3}{\sigma^3}$.

Коэфициент эксцесса случайной величины X — это, с точностью до коэфициента, центральный момент порядка 4: $\mathbb{E}\frac{(X-\mathbb{E}X)^4}{\sigma^4} - 3$. Минус три потому что мы хотим, чтобы эксцесс нормального распределения был нулевой.

Определение 2.9: Мода случайной величины X — это число $\operatorname{argmax}_{x \in \mathbb{R}} p_X(x)$.

Если мода одна, то говорят, что случайная величина X унимодальна.

Определение 2.10: Ковариация случайных величин X и Y — это число $\operatorname{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)$.

Свойство 2.10.1: $\operatorname{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$, то есть для независимых случайных величин $\operatorname{Cov}(X, Y) = 0$. (Но обратное неверно: если $\operatorname{Cov}(X, Y) = 0$, то случайные величины могут быть зависимыми)

Свойство 2.10.2: $\operatorname{Cov}(X, X) = \operatorname{Var} X$.

Свойство 2.10.3 (Симметричность): $\operatorname{Cov}(X, Y) = \operatorname{Cov}(Y, X)$.

Свойство 2.10.4 (Билинейность): $\operatorname{Cov}(aX + b, Y) = a \operatorname{Cov}(X, Y)$.