

Типовик по линейной алгебре  
«Линейные операторы в евклидовом  
пространстве»

Латыпов Владимир Витальевич,  
ИТМО КТ М3138, **вариант 10**

26 сентября 2022 г.

# 1. Формулировка условия

В пространстве многочленов степени не выше второй  $P_{\leq 2} = \{p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2\}$

введено скалярное произведение по формуле:  $(p, q) = \int_a^b p(t)q(t)\alpha(t)dt$ ,  
где  $\alpha(t)$ — заданная весовая функция

и действует линейный дифференциальный оператор второго порядка

$$\mathcal{A} = k(t)\frac{d^2}{dt^2} + l(t)\frac{d}{dt} + m(t).$$

№	$a$	$b$	$\alpha(t)$	$k(t)$	$l(t)$	$m(t)$
1	-1	1	$ t $	$t$	$-(t+5)$	3
2	-1	1	$1+t$	$(t+1)^2$	$-2(t+1)$	2
3	-1	1	$1-t$	$t-1$	$-(t+1)$	2
4	-1	1	$1-t$	$t^2-3t$	$6-t^2$	$2t-6$
5	-1	1	$1-t^2$	$t^2-1$	0	-6
6	-1	1	1	$(2t+1)^2$	$-2(2t+1)$	4
7	-1	1	$2-t$	$(t-2)^2$	$-3(t-2)$	4
8	-1	1	1	$2t+1$	$4t-2$	-8
9	-1	1	$ t (1-t)$	$t^2-t$	$2t-3$	-2
10	-1	1	$1-t$	$t-1$	$-t$	1
11	-1	1	$1+t$	$t$	$-(t+1)$	1
12	-1	1	$1+t^2$	1	$-2t$	4
13	-1	1	$ t $	$t$	$-(t+2)$	1
14	-1	1	$1-t^2$	$1-t^2$	$-2t$	12
15	-1	1	$1-t$	$t^2-1$	$t-3$	-1
16	-1	1	$1+t$	$t$	$-(2t+1)$	2
17	-1	1	$3(1+t)$	$2t+1$	$2t-1$	-2
18	-1	1	$ t $	$1-t^2$	$-3t$	0
19	-1	1	$1-t^2$	$t^2-1$	0	-6
20	-1	1	$3(1+t)$	$2t+1$	$2t-1$	-2

1. (a) Применяя процесс ортогонализации Грама - Шмидта к каноническому базису пространства  $P_{\leq 2}e_1 = 1, e_2 = t, e_3 = t^2$  построить ортонормированный базис пространства  $P_{\leq 2}e'_1, e'_2, e'_3$ .
- (b) Построить матрицу Грама  $\Gamma$  для канонического базиса пространства  $P_{\leq 2}e_1 = 1, e_2 = t, e_3 = t^2$ . Записать формулу для скалярного произведения в координатном представлении, где координаты многочленов записываются относительно канонического базиса  $e$ .
- (c) Используя матрицу  $\Gamma$  и координатное представление мно-

гочленов  $e'_1, e'_2, e'_3$  в каноническом базисе пространства  $P_{\leq 2}$  проверить ортонормированность полученного базиса.

- (d) Выписать матрицу  $T = T_{e \rightarrow e'}$  перехода от базиса  $e$  к базису  $e'$ . Проверить формулу связи матриц Грама для базисов  $e$  и  $e'$ .
2. (a) Найти матрицы  $A$  и  $A'$  оператора  $\mathcal{A}$  в базисах  $e$  и  $e'$ , соответственно, по определению матрицы оператора. Проверить полученные результаты, используя формулу связи матрицы оператора в разных базисах.
- (b) Найти матрицу  $A^{\circ}$  оператора  $\mathcal{A}^*$ , сопряжённого к  $\mathcal{A}$  в базисе  $e$ . Найти матрицу оператора  $\mathcal{A}^*$  в базисе  $e'$  двумя способами:
  - по формуле матрицы сопряженного оператора
  - используя формулу связи матрицы оператора  $\mathcal{A}^*$  в разных базисах.
- (c) Найти  $\text{Ker } A^{\circ}, (\text{Im } A)^{\perp}$ . Убедиться, что выполняется соотношение:  $\text{Ker } A^{\circ} = (\text{Im } A)^{\perp}$ . Найти  $\text{Ker } \mathcal{A}^*$ , выразив  $\text{Ker } A^{\circ}$  через элементы исходного пространства.
3. (a) Зная матрицу  $A^{\circ}$  оператора  $\mathcal{A}^*$  в базисе  $e$  построить линейный дифференциальный оператор второго порядка, равный оператору  $\mathcal{A}^*$ .
- (b) Проверить, что найденное в п.2.2  $\text{Ker } \mathcal{A}^*$ , действительно, является ядром построенного дифференциального оператора  $\mathcal{A}^*$  непосредственным применением  $\mathcal{A}^*$  к базису  $\text{Ker } \mathcal{A}^*$ .
- (c) Для многочленов  $p(t) = t^2 + 2$  и  $q(t) = -t - 1$  проверить непосредственной подстановкой что  $(\mathcal{A}p, q) = (p, \mathcal{A}^*q)$ .
4. (a) 4.1. Ответить на вопросы. Является ли оператор  $\mathcal{A}$  нормальным оператором? Является ли оператор  $\mathcal{A}$  симметричным оператором? Является ли оператор  $\mathcal{A}$  ортогональным оператором? Ответы обосновать.
- (b) Можно ли в пространстве  $P_{\leq 2}$  ввести скалярное произведение таким образом, чтобы в полученном евклидовом пространстве заданный оператор  $\mathcal{A}$  был симметричным? Если можно, то получить формулу для его вычисления. Проверить, что при таком задании скалярного произведения в пространстве  $P_{\leq 2}$ , оператор будет симметричным  $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$ .

## 2. Получение формул скалярного произведения и оператора

Вариант 10-й, поэтому:

$$\begin{aligned}a &= -1 \\b &= 1 \\\alpha(t) &= 1 - t \\k(t) &= t - 1 \\l(t) &= -t \\m(t) &= 1\end{aligned}$$

Начнём со скалярного произведения.

$$]p(t) = p_3 t^2 + p_2 t + p_1, q(t) = q_3 t^2 + q_2 t + q_1$$

$$p \leftrightarrow \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}, q \leftrightarrow \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}\langle p, q \rangle &= \int_{-1}^1 (p_3 t^2 + p_2 t + p_1)(q_3 t^2 + q_2 t + q_1)(1 - t) dt = \\&= 2p_1 q_1 - \frac{2}{3} p_2 q_1 + \frac{2}{3} p_3 q_1 - \frac{2}{3} p_1 q_2 + \frac{2}{3} p_2 q_2 - \frac{2}{5} p_3 q_2 + \frac{2}{3} p_1 q_3 - \frac{2}{5} p_2 q_3 + \frac{2}{5} p_3 q_3\end{aligned} \quad (2)$$

Получаем матрицу Грама:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 2 & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-2}{5} \\ \frac{2}{3} & \frac{-2}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Теперь разберёмся с оператором.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(p_3 t^2 + p_2 t + p_1) &= \\
&\left( k(t) \frac{d^2}{dt^2} + l(t) \frac{d}{dt} + m(t) \right) (p) = \\
(t-1) \frac{d^2}{dt^2} (p_3 t^2 + p_2 t + p_1) - t \frac{d}{dt} (p_3 t^2 + p_2 t + p_1) + 1 \cdot (p_3 t^2 + p_2 t + p_1) &= \\
&- p_3 t^2 + 2p_3 t + p_1 - 2p_3 \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} p_1 - 2p_3 \\ 2p_3 \\ -p_3 \end{pmatrix} \quad (4)
\end{aligned}$$

Замечаем, что это эндоморфизм на  $P_{\leq 2}$ .

Тогда матрица  $A$  оператора  $\mathcal{A}$  в каноническом базисе  $\{1, t, t^2\}$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

### 3. Ортогонализация

$$e_1'' = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
e_2'' \rightsquigarrow e_2 - \frac{\langle e_1'', e_2 \rangle}{\langle e_1'', e_1'' \rangle} e_1'' &= \\
e_2 - \frac{-\frac{2}{3}}{2} e_1'' = e_2 + \frac{1}{3} e_1'' & \\
\rightsquigarrow 3e_2 + e_1'' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} &\quad (7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_3'' &\rightsquigarrow e_3 - \frac{\langle e_1'', e_3 \rangle}{\langle e_1'', e_1'' \rangle} e_1'' - \frac{\langle e_2'', e_3 \rangle}{\langle e_2'', e_2'' \rangle} e_2'' = \\
&e_3 - \frac{\frac{2}{3}}{2} e_1'' - \frac{-\frac{8}{15}}{4} e_2'' = e_3 - \frac{1}{3} e_1'' + \frac{2}{15} e_2'' \\
&\rightsquigarrow 15e_3 - 5e_1'' + 2e_2'' \leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (8)
\end{aligned}$$

(Проверил на матричном калькуляторе — действительно, получилась система ортогональная для этой матрицы Грама и базис)

Теперь вспомним, что нам нужна не просто какая-то там  $\{e_i''\}_{i=1}^3$ , а самая настоящая  $\{e_i'\}_{i=1}^3$ !

Поэтому заменим векторы на их орты (важно, что скалярное произведение и, соответственно, норма — не стандартные, а получаются через матрицу Грама):

$$e_1' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3' = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (9)$$

Теперь получим матрицу перехода между базисами, для этого просто запишем координаты нового базиса, которые мы получили.

$$T = E' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (10)$$

Можно посчитать матрицу Грама для базиса  $e'$ . Это  $E'^T \Gamma E'$ .

$$G(e_1', e_2', e_3') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

(как раз заметили, что оно ортонормированное)

А что должно получаться по формуле из теории?

$$\Gamma' = T^T \Gamma T = G(e'_1, e'_2, e'_3) \quad (12)$$

Удивительно, но это одно и то же!

Кстати, матрица  $T$  в данном случае не ортогональна, так как канонический базис не является ортогональным с данным скалярным произведением.

## 4. Матрица оператора $\mathcal{A}$

Найдём матрицы  $A$  и  $A'$  оператора  $\mathcal{A}$  в базисах  $e$  и  $e'$ , соответственно, по определению матрицы оператора.

Хм. Мы уже нашли матрицу  $A$  оператора по определению (через действие на элементы базиса) в самом начале.

Далее план такой:

1. Найдём матрицу  $A'$  по определению.
2. Проверим через формулу связи матрицы оператора в разных базисах.

Чтобы найти матрицу  $A'$  по определению, будем применять её к  $e'_i$  в координатах канонического базиса, а потом раскладывать по базису  $\{e'_i\}_{i=1}^3$ .

Мы знаем про оператор  $\mathcal{A}$ , как он действует на многочлен:

$$\mathcal{A}(p) = -2p_3 t^2 - p_2 t + 2p_3 t - 2p_3 + 1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} p_1 - 2p_3 \\ 2p_3 \\ -p_3 \end{pmatrix} \quad (13)$$

Нужно сопоставить результатам действия оператора на новые базисные векторы разложение по новому же базису.

$$\mathcal{A}e'_i \xleftrightarrow{e} \dots \xleftrightarrow{e'} \dots \quad (14)$$

Первое преобразование мы умеем делать, умножив координаты вектора в исходном базисе на матрицу  $A$ .

Со вторым сложнее — если делать «в лоб», придётся представлять результат в виде линейной комбинации многочленов, что делать не хочется.

У нас линейная алгебра, поэтому мы знаем, как можно сделать это эффективно (заметим, что мы всё ещё находим по определению).

Для начала сопоставим матрицу из столбцов-разложений действий вектора на элементы нового базиса в старом.

Для этого просто умножим матрицу  $A$  на  $E'$ .

$$AE' = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-11*\sqrt{6}}{4} \\ 0 & 0 & \frac{5*\sqrt{6}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-5*\sqrt{6}}{4} \end{pmatrix} \quad (15)$$

Теперь каждый столбец нужно разложить по базису  $E'$ . А это легко сделать через матрицу сопряжённого базиса — достаточно слева умножить на неё, Матрица сопряжённого базиса равна обратной матрицы самого базиса.

$$A' = W(AE') = E'^{-1}AE' = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -8*\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 2*\sqrt{6} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

Теперь проверим через формулу для смены базиса матрицы оператора. Так как переходим из канонического базиса, матрица перехода  $T_{e \rightarrow e'} = E'$ , То есть всё сошлось:  $T_{e \rightarrow e'} = E' \Rightarrow T^{-1}AT = E'^{-1}AE' = A'$ .

## 5. Матрица сопряжённого оператора

Сначала — просто матрица  $A^{\otimes}$  — в каноническом базисе. (Забудем про сопряжения к.ч., у нас Евклидово)

$$A^{\otimes} = \Gamma^{-1}A^*\Gamma = \Gamma^{-1}A^T\Gamma = \begin{pmatrix} \frac{27}{2} & \frac{-13}{2} & \frac{11}{2} \\ \frac{-45}{2} & \frac{23}{2} & \frac{-19}{2} \\ -60 & 30 & -25 \end{pmatrix} \quad (17)$$

Теперь найдём матрицу сопряжённого оператора в новом (ОНБ) базисе. Найдём её двумя способами:



### 5.1. По формуле матрицы сопряжённого оператора

В базисе  $e'$  у нас есть матрица Грама, да и  $A'$  мы знаем, так что — Что нам мешает найти аналогичным образом? Вопрос риторический.

(У нас должно получиться, что она =  $A^{*'}$ , так как ОНБ)

$$A^{\otimes'} = \Gamma'^{-1} A^{*'} \Gamma' = E^{-1} A'^T E = A'^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ -8 * \sqrt{3} & 2 * \sqrt{6} & -1 \end{pmatrix} \quad (18)$$

### 5.2. По формуле связи матрицы сопряжённого оператора в разных базисах

Однако можно проверить себя и получить то же, сменив базис у  $A_e^{\otimes}$

$$A^{\otimes'} = T^{-1} A^{\otimes} T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ -8 * \sqrt{3} & 2 * \sqrt{6} & -1 \end{pmatrix} \quad (19)$$

Сошлось.

## 6. Связь ядра сопряжённого оператора и образа исходного оператора

Для  $\text{Ker } A^{\otimes}$ , как всегда, решаем СЛОУ с этой матрицей:

$$\text{Ker } A^{\otimes} = \text{span} \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \text{span} \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right) \quad (20)$$

Теперь найдём образ  $A$  (образ оператора и ядро сопряжённого являются ортогональными дополнениями друг друга).

Для нахождения ортогонального дополнения образа нужно решить систему, что скалярное произведение с векторами-столбцами матрицы  $A$  будет ноль.

$$A^T \Gamma x = \mathbb{O} \quad (21)$$

$$\text{Im } \mathcal{A} = \text{span} \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \text{span} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad (22)$$

То есть сошлось.

## 7. Венёмся к многочленам

У нас канонический базис из  $\{1, t, t^2\}$ , то есть для нахождения самих многочленов из  $\text{Ker } \mathcal{A}^*$  в символьной форме достаточно записать линейные комбинации базиса ядра в виде многочленов. У нас только один параметр, назовём его  $c$ .

$$\text{Ker } \mathcal{A}^* = \{c(-1 + 3t + 6t^2) | c \in \mathbb{R}\} \quad (23)$$

## 8. Построение дифференциального оператора второго порядка по матрице

Требуется представить оператор  $\mathcal{B} = \mathcal{A}^*$  в виде:

$$\mathcal{B} = \alpha(t) \frac{d^2}{dt^2} + \beta(t) \frac{d}{dt} + \gamma(t) \quad (24)$$

То есть нужно найти три многочлена-вектора.

Давайте применим оператор  $\mathcal{B}$  к векторам базиса.

С одной стороны, получим это через матрицу:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}e_1 &= \frac{27}{2}e_1 - \frac{45}{2}e_2 - 60e_3 = \frac{27}{2} - \frac{45}{2}t - 60t^2 \\ \mathcal{B}e_2 &= -\frac{13}{2}e_1 + \frac{23}{2}e_2 + 30e_3 = -\frac{13}{2} + \frac{23}{2}t + 30t^2 \\ \mathcal{B}e_3 &= \frac{11}{2}e_1 - \frac{19}{2}e_2 - 25e_3 = \frac{11}{2} - \frac{19}{2}t - 25t^2 \end{aligned}$$

Но из представления оператора через дифференциальный:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}e_1 &= \gamma(t) \\ \mathcal{B}e_2 &= \beta(t) + \gamma(t) \cdot t \\ \mathcal{B}e_3 &= \alpha(t) \cdot 2 + \beta(t) \cdot 2t + \gamma(t) \cdot t^2\end{aligned}$$

То есть задача свелась к решению системы уравнений.

К счастью, система «треугольная», поэтому решим её в один проход:

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= \frac{27}{2} - \frac{45}{2}t - 60t^2 \\ \beta(t) &= -\frac{13}{2} + \frac{23}{2}t + 30t^2 - \gamma(t) \cdot t = 60t^3 + \frac{105}{2}t^2 - 2t - \frac{13}{2} \\ \alpha(t) &= \frac{1}{2} \left( \frac{11}{2} - \frac{19}{2}t - 25t^2 - 2t\beta(t) - t^2\gamma(t) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{11}{2} - \frac{19}{2}t - 25t^2 + (-60t^4 - \frac{165}{2}t^3 - \frac{19}{2}t^2 + 13t) \right) = \\ &= -30t^4 - \frac{165}{4}t^3 - \frac{69}{4}t^2 + \frac{7}{4}t + \frac{11}{4}\end{aligned}$$

Итого представление  $\mathcal{A}^*$  в виде дифференциального оператора:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^* &= \left( -30t^4 - \frac{165}{4}t^3 - \frac{69}{4}t^2 + \frac{7}{4}t + \frac{11}{4} \right) \frac{d^2}{dt^2} \\ &+ \left( 60t^3 + \frac{105}{2}t^2 - 2t - \frac{13}{2} \right) \frac{d}{dt} \\ &+ \left( \frac{27}{2} - \frac{45}{2}t - 60t^2 \right) \quad (25)\end{aligned}$$

Пункт 3.2: проверим, что не добавили в ядро лишнее, применив к базису ядра, выраженном в виде многочлена наш оператор, который тоже выражен в формате многочленов.

$$\begin{aligned}
A^*(c(-1 + 3t + 6t^2)) = 0 &\Leftrightarrow A^*(-1 + 3t + 6t^2) = 0, A^*(-1 + 3t + 6t^2) = \\
&\left(-30t^4 - \frac{165}{4}t^3 - \frac{69}{4}t^2 + \frac{7}{4}t + \frac{11}{4}\right) (12) \\
&+ \left(60t^3 + \frac{105}{2}t^2 - 2t - \frac{13}{2}\right) (12t + 3) \\
&+ \left(\frac{27}{2} - \frac{45}{2}t - 60t^2\right) (-1 + 3t + 6t^2) = 0 \quad (26)
\end{aligned}$$

, как и требовалось.

Пункт 3.3: Для многочленов  $p(t) = t^2 + 2$  и  $q(t) = -t - 1$  проверим непосредственной подстановкой что  $\langle \mathcal{A}p, q \rangle = (p, \mathcal{A}^*q)$ .

Окей, мы знаем символьное представление обоих операторов, а также формулу для вычисления скалярного произведения (задана через определённый интеграл в условии), брать его для многочленов мы умеем.

$$\mathcal{A}p = -p_3t^2 + 2p_3t + p_1 - 2p_3 = \begin{bmatrix} p_1 = 2 \\ p_2 = 0 \\ p_3 = 1 \end{bmatrix} = -t^2 + 2t + 2 - 2 = -t^2 + 2t \quad (27)$$

Для  $q$  можем найти через матрицу (знаем, какой многочлен сопоставляется, если известны коэффициенты исходного), а можем через полученный дифференциальный оператор — и сверимся.

$$\mathcal{A}^*q = \begin{bmatrix} q_1 = -1 \\ p_2 = -1 \\ p_3 = 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 11 \\ 30 \end{pmatrix} = 30t^2 + 11t - 7 \quad (28)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^*q = \mathcal{A}^*(-t - 1) = \\
\left(-30t^4 - \frac{165}{4}t^3 - \frac{69}{4}t^2 + \frac{7}{4}t + \frac{11}{4}\right) \cdot 0 \\
+ \left(60t^3 + \frac{105}{2}t^2 - 2t - \frac{13}{2}\right) \cdot (-1) \\
+ \left(\frac{27}{2} - \frac{45}{2}t - 60t^2\right) \cdot (-t - 1) = 30t^2 + 11t - 7 \quad (29)
\end{aligned}$$

Действительно, сошлось.

Теперь посчитаем скалярное произведение. Проще было бы через матрицу Грамма, но можно и:

$$\langle \mathcal{A}p, q \rangle = \int_{-1}^1 (-t^2 + 2t)(-t - 1)(1 - t)dt = \frac{4}{15} \quad (30)$$

$$\langle p, \mathcal{A}^*q \rangle = \int_{-1}^1 (t^2 + 2)(30t^2 + 11t - 7)(1 - t)dt = \frac{4}{15} \quad (31)$$

Сошлось.

## 9. Нормальность, ортогональность, симметричность

В любом базисе проверим  $AA^{\circledast} = A^{\circledast}A$ , например, в  $e$ :

$$\begin{pmatrix} \frac{27}{2} & \frac{-13}{2} & \frac{11}{2} \\ \frac{-45}{2} & \frac{23}{2} & \frac{-19}{2} \\ -60 & 30 & -25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{27}{2} & 0 & \frac{-91}{2} \\ \frac{-45}{2} & 0 & \frac{155}{2} \\ -60 & 0 & 205 \end{pmatrix} \neq \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{27}{2} & \frac{-13}{2} & \frac{11}{2} \\ \frac{-45}{2} & \frac{23}{2} & \frac{-19}{2} \\ -60 & 30 & -25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{267}{2} & \frac{-133}{2} & \frac{111}{2} \\ -120 & 60 & -50 \\ 60 & -30 & 25 \end{pmatrix} \quad (32)$$

То есть он ненормальный. То же самое можно заключить, заметив, что его собственные подпространства, (хотя он и ОПС, то есть базис из СВ есть), не ортогональны друг другу (с.ч.  $0, 1, -1$ ).

Таким образом, говорить об изометричности или самосопряжённости не приходится. (хотя там и собственные числа подходят под критерий самосопряжённости...)

## 10. Введение скалярного произведения для получения симметричности

Заметим, что ОПС-ность не зависит от скалярного произведения.  $\mathcal{A}$  - действительно ОПС, его с.ч.:  $0, 1, -1$ . Собственные векторы (соответ-

ственно):

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (33)$$

Из теории известно, что (Оператор самосопряжён)  $\Leftrightarrow$  нормален + имеет вещественный спектр.

Условие на с.ч. выполнено, а нормальность получим так: нужно, чтобы существовал ОНБ из с.в., но у нас уже есть базис из с.в. Тогда введём скалярное произведение так, чтобы этот базис стал ОНБ.

Итак, матрица Грама такого скалярного произведения в базисе  $v = (v_1, v_2, v_3)$  — единична:  $\Gamma_v = E$ .

Найдём её в базисе  $e$ :

$$E = \Gamma_v = T_{e \rightarrow v}^T \Gamma_e T_{e \rightarrow v} \quad (34)$$

$$\Gamma_e = (T_{e \rightarrow v} T_{e \rightarrow v}^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad (35)$$

Формула в координатном представлении:

$$\langle x, y \rangle = x^T \Gamma_e y \quad (36)$$

, если координаты — относительно базиса  $e = \{1, t, t^2\}$

Проверим, что станет симметричным, для этого достаточно проверить, что в некотором базисе будет совпадать матрицы  $A$  и  $A^{\otimes}$ .

В  $v$  уже проверили, но можем ещё проверить в  $e$ , чтобы понять, что с новой матрицей Грама не обманули:

$$A^{\otimes} = \Gamma_e^{-1} A^T \Gamma_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (37)$$

Отлично, сошлось!