Сжатый конспект по линейной алгебре (2-й семестр)

Латыпов Владимир (конспектор)
t.me/donRumata03, github.com/donRumata03, donrumata03@gmail.com

Кучерук Елена Аркадьевна (лектор)

13 июня 2022 г.

Содержание

1. Введение

Конспект старается быть максимальнго краткой выжимкой из того, что нужно знать для успешной сдачи экзамена по Линейной Алгебре во втором семестре.

Если кто-то сдаёт часть про линейные операторы и говтов по них написать, welcome.

2. Сопряжённое пространство

V^* пространство линейных форм над V.

Вычисление формы на коордлинатном столбце $f(x) = \text{x}^j a_j$, где строка a_j размера n изоморфно сопоставляется форме.

— Координатные функции относительно базиса, $\omega^i(e_j) = \delta^i_j$.

Они базис V^*, так как их как раз n, а породить любую f можно, предъявив коэффициенты a_j.

По e мы научились находить сопряжённый базис, теперь научимся в обратную сторону находить по базису $V*$ такой базис V, чтобы исходный был к нему сопряжён: возьмём любую сопряжённую пару e, ω и через это получим $\omega' \to (e', \omega')$

Если назвать $S = T^T_{\omega \to \omega'}$, утверждается, что можем получить e' так: $T_{e \to e'} = S^{-1}$

Чтобы доказать — проверим, что ω' — координатные функции e'. То есть что координаты преобразуются правильно: $x' = Sx$.

Элементы V^* КОвариантные, так как преобразуются (получение новых из старых) с матрицей $T_{e \to e'}$, а элементы V — контравариантные, так как с матрицей $S = T^{-1}$

Доказывам, что можно получить изоморфизм

$$\varphi : V \to (V^*)^*, x \to "x" \quad \text{where} "x"(f) = f(x) \tag{1}$$

Кстати, $\varphi \in \text{Aut}(V \to (V^*)^*)$.

Линйеность φ очевидна, для биективности в силу линейности достаточно проверить, что базис переходиь в базис (что $\text{rg}\, \varphi = n$). Действительно, "e_j" — координатные функции базиса координатных функций, так как, "e_j"$(f) = f(e_j) = (a_f)_j$.

Отличие от $V \leftrightarrow V^*$ — в том, что теперь оно не зависит от выбора базиса.

— Умеем считать сопряжённый базис через обратную матрицу и матрицы проекторов через сопряжённый базис.

3. Тензоры

Это функция $V^p \times (V^*)^q \to \mathcal{K}$.

То, что «из векторов» — ковариантное, «из форм» — контрвариантное.

$T_{(p;q)}$ — линейное пространство размерности $n^(p+q)$

За счёт линейности при вычислении на наборе векторов, разложенных по базису, можно вынести $p+q$ сумм с координатами, остаются значения тензора на разных размещениях базиса, их мы назовём компонентами относительно базисов e, ω.

$\alpha_{i_1,\dots,i_p}^{j_1,\dots,j_q}$ Сверху пишется q «контравариантных индекса» — из форм. Снизу — p ковариантные индексы — из векторов.

Это можно записать в $p+q$-мерную матрицу.

Смена базиса. Выразив старые координаты через новые ($\xi^i = t_k^i {\xi'}^k, \eta_j = s_j^m {\eta'}_m$), подставим в формулу вычисления на наборе векторов, сгруппируем t, s, α скажем, что это новый компонент, а новые координаты как раз останутся.

Другое определение тензора: это многомерная матрица, в которой выделены «ковариантные» и «контравариантные» координаты и которая пересчитывается при смене базиса по той же формуле, что и выше.

Определения эквивалентны.

Тензорное произведение: вводим через второе определение (многомерная матрица), проверяем вариантность.

Говорим, что в терминах линейных форм мы берём каждую от своей части координат и перемножаем результаты.

Базис вводим базис $T_{(p;q)}$ из n^{p+q} тензорных произведений всех размещений e_i, ω_j, помня, что

$$\omega_j : (V)^1 \to \mathcal{K}$$
$$e_i \cong "e_i" : (V^*)^1 \to \mathcal{K}$$

Доказываем, что это базис, так как количество n^{p+q} и порождающее: за коэффициенты для порождения берём компоненты относительно базиса, доказываем через формулу вычисления на наборе векторов.

Заметим, что матрица тензора из базиса будет содержать одну единицу на соответствующих индексах и все остальные нули.

Вводим свёртку как матрицу, доказываем, что это тензор, помня, что $t^{\kappa_2}_{\tilde{\kappa}} s^{\tilde{\kappa}}_{\kappa_1} = \delta^{\kappa_2}_{\kappa_1}$ и оставляя в сумме только слагаемые, где $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$.

Транспонирование: $\beta = \sigma(\alpha), \beta^{i_1 \cdots i_q}_{j_1 \cdots j_p} = \alpha^{i_1 \cdots i_q}_{j_{\sigma_1} \cdots j_{\sigma_p}}$.

То есть набор индексов α переходит в индексы β под действием обратной к σ перестановки.

Доказываем, что тензор (достаточно доказать про транспозиции, так как перестановка раскладывается на композицию транспозиций)

Заметим, что в терминах функций мы переставлем аргументы, тоже с обратной перестановкой.

Транспонирование — изоморфизм, ассоциативно, но коммутаитвно (как и группа перестановок).

Если при любом транспонировании тензора он не меняется, он симметричен, если умножается на $(-1)^{\varepsilon(\sigma)}$, то кососимметричен.

Кососимметричен $\Leftrightarrow$ равен нулю при повторяющихся аргументах.

Вводим симметрирование, альтенирование.

Оба перестановочны относительно перестановки, причём для симметрирования получается просто симметрирование, а для альтенирования — оно умножить на знак перестановки. (доказывается, используя, что если все перестановки S_n, по которым мы суммируем, пропустить через одну перестановку, получим тоже все перестановки, но в другом порядке — таблица Кэли, иначе не группа)

α симметричен $\Leftrightarrow \alpha = \operatorname{Sim} \alpha$. α КОСОсимметричен $\Leftrightarrow \alpha = \operatorname{Alt} \alpha$.

Обе идемпотентны, причём $\operatorname{Sim}\operatorname{Alt}\alpha = 0$ (то есть симметрирование любого кососимметричного — ноль, ведь можно подставить кососимметричный $\beta = \operatorname{Alt}\beta$, тогда $\operatorname{Sim}\beta = \operatorname{Sim}\operatorname{Alt}\beta = 0$).

Доказывается, заметив, что сумма чётностей по всем перестановкам — это ноль, так как это определитель матрицы со всеми единицами.

Заметим, что пересечение подпространств симметричных и антисимметричных тензоров — тривиально. Более того, если транспозиция одна (по двум индексам), то пространство всех тензоров заданного типа раскладвыаются в дизъюнктную сумму симметричных и антисимметричных (по этим индексам), где $\alpha = \operatorname{Sim}\alpha + \operatorname{Alt}\alpha$

3.1. p-формы

p-формы — антисимметричные ковариантные тензоры, Если от одного аргумента, отождествляют с V^*.

Внешнее произведение: $f \wedge g = \frac{(p_f+p_g)!}{p_f!p_g!}\operatorname{Alt}(f \otimes g)$.

Есть свойства, можно через них раскрывать скобки.

1. $f\wedge g = (-1)^{p_1p_2} g\wedge f$. 2. $(f+g)\wedge h = f\wedge h+g\wedge h$ и $f\wedge(g+h) = f\wedge g+f\wedge h$.
3. $\lambda\cdot(f\wedge g) = (\lambda f)\wedge g = f\wedge(\lambda g)$. 4. $\mathbb{D}_{\Lambda^{p_1}V^*}\wedge g = f\wedge \mathbb{D}_{\Lambda^{p_2}V^*} = \mathbb{D}_{\Lambda^{p_1+p_2}V^*}$.
5. $(f\wedge g)\wedge h = f\wedge(g\wedge h) = \frac{(p_1+p_2+p_3)!}{p_1!p_2!p_3!}\operatorname{Alt}(f\otimes g\otimes h)$.

2, 3, 4 — очевидно.

1 — записываем по определению, сопоставляем у сумм слагаемые, смотрим на количество инверсий между ними, оно как раз $p_f p_g$.

5 — по определению, доказываем, что $\operatorname{Alt}(\operatorname{Alt}(f\otimes g)\otimes h) = \operatorname{Alt}(f\otimes\operatorname{Alt}(g\otimes h)) = \operatorname{Alt}(f\otimes g\otimes h)$. По линейности заносим второе тензорное произведение под внутреннюю сумму, потом создаём перестановку, работающую на всех трёх наборах индексов, но переставляющую только первые два как σ, по линейности альтенирования заносим его под сумму, замечаем альтенирование от перестановки, сокращаем (-1), конец.

По индукции можно обобщить формулу для внешнего произведения на несколько векторов.

Есть базис пространства антисимметричных p-форм (антисимметричных тензоров) размера $\binom{n}{p}$ из врешних произведений упорядоченных комбинаций кординатных функций. Координаты в нём называют существенными, они численно совпадают с координатой для того же набора в пространстве всех тензоров.

Можно вычислить значение внешнего произведения 1-форм на наборе векторов через определитель матрицы применения каждой функции к каждому вектору.

Также можно найти координаты внешнего произведения в базисе внешних произведений, если знаем разложение самих функций по базису пространства линейных форм.

Комбинируя, можно через сумму произведений двух соответствующих опредеителей вычислить функцию, заданную произведением 1-форм, заданных координатами, на наборе векторов, заданных координатами.

4. Евклидовы пространства

Скалярное (линейные пространства над вещественными числами) — функция от двух векторов: симметричность, линейность по первому ($\Rightarrow$ каждому) аргументу, положительная определённость.

Псевдоскалярное (линейные пространства над комплексными числами): то же самое, только симметричность — эрмитова и по второму аргументу становится «эрмитова» однородность, хотя и нормальная аддитивность.

Евклидова норма — корень из скалярного квадрата.

КБШ: $|\langle x, y\rangle| \leqslant ||x||||y||$, причём равенство только при линейной зависимости. Доказываем так: берём положительное $\langle \alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y\rangle$, раскрываем, подставляем $\alpha =< y, y >, \beta = -< x, y >$, выносим $||y||$, получаем, что искомое положительно. Из равенства в КБШ сдедует зависимость, так как мы берём вот эти альфа и бета, получаем скалярный квадрат ноль. Из зависимости следует равенство: берём $\alpha x + \beta y = 0$ по определению л.з., рассматриваем $\langle \alpha x + \beta y, x\rangle = 0$; $\langle \alpha x + \beta y, y\rangle = 0$, раскрываем, перемножаем равенства, конец.

Проверка свойств норм для Евклидовой нормы: Положительная определённость, однородность — очевидно. Нер-во треугольника: доказываем про квадраты норм, раскрывая $||x + y||^2$, замечая сумму сопряжённых, применяя КБШ и получая полный квадрат.

Ортогональая система — линейно независима. Доказвается, скалярно умножая нулевую линейную комибнацию на базисный вектор, по ортогональности остаётся толко его компонент.

Грам-Шмидт: систему векторов можно заменить на ортогональную систему не большего размера с сохранением линейной оболочки. Процессируя очередной вектор, будем вычитать линейную комбинацию предыдущих, уже ортогональных. Так, чтобы новый стал ортогонален каждому. Если на каком-то шаге получится ноль, выкинем его.

Ортонормированную систему можно дополнить до ОНБ.

Примеры: коэффициенты Фурье, полиномы Лежандра.

Формула Родрига: $\tilde{e_k} = \lambda_k \left((x^2-1)^k\right)^(k)$.

Доказываем, что $\tilde{e_k} \perp x^m \forall m < k$. Берём интеграл, много раз интегрируя по частям, уменьшая степень x^m и уменьшая количество дифференцирований у $\tilde{e_k}$ каждый раз подстановка обнуляется, так как *Если полином имеет корень кратности k, этот корень — кратности $k-1$ у производной*.

Общая формула Родрига (хотя почему общая?...). Если взять $\lambda_k = \frac{1}{2^k k!}$, то $\tilde{e_k}(1) = 1$. Для доказательства вычислим $\tilde{e_k}(1)$ по формуле Лейбница для произведения $(x-1)^k(x+1)^k$, где слагаемые для $i! = k$ обнуляются.

Квадрат нормы полиномов будет $\frac{2}{2k+1}$ (опять интегрирyеим по частям, уменьшая степень у одного и поднимая у другого).

Полиномы Чёбышева. Скалярное произведение — с весом $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, получаем $T_n = \cos(n \cos^{-1}(x))$. Доказываем, что это полиномы по индукции, что $T_{n+1} + T_{n-1} = 2xT_n$.

Полиномы Эрмита. Скалярное произведение — от нуля до $+\infty$ с весом e^{-x^2}. $H_n = e^{x^2}\left(e^{-x^2}\right)^(n)$.

Скалярное произведение в кооринатах: через матрицу Грама для базиса, $\langle x, y\rangle = x^T \Gamma \overline{y}$. Для ортонормированного — матрица единичная.

Матрица Грама сомосопряжена.

Теорема об определителе матрицы Грама: если система зависима, он равен нулю, иначе — произведению скалярных квадратов векторов, получающихся ортогонализацией Грама-Шмидта.

Доказывается, вычитанием в определителе $g(..., a_i, ...)$ соответствующих линейных комбинаций одновременно из строк и столбцов $\rightsquigarrow$ на каждом шаге все a_i в матрице заменяются на b_i. Получаем определитель ортогональной системы, то есть $|\operatorname{diag}(b_i)|$.

Можем посчитать норму ортогонализации нового вектора через отношение матриц нового и старого определителя, если исходная система независима.

Объём параллелепипеда — корень из определителя Грама.

Можно вычислить матрицу Грама системы так: $G(a_1, ..., a_i) = A^T \Gamma \overline{A}$. Для ОНБ, понятно, Γ убирается.

Причём, если количество векторов равно размерности пространства, а $\Gamma = E$, объём — это просто определитель матрицы координат.

Объём под действием оператора изменяется в $\det \mathcal{B}$ раз (как определитель системы векторов при применении оператора). Например, при повороте объём сохраняется, а при гомотетии растёт в λ раз.

Матрица Грама базиса положительно определённая, её угловые миноры больше нуля. Она преобразуется при смене базиса: $\Gamma' = T^T \Gamma \overline{T}$. (Доказывается через смену координат в формуле для скалярного произведения и подстановку $x' = e_i, y' = e'_j$, ведь мы уже получили, что скалярное произведение элементов считается через эту матрицу, а значит, и для базисных векторов это тоже верно).

Изометрическая матрица: обратна сопряжению.

Свойства:

1. Изометричность равносильна ортонормированности столбцов, как и строк ($\Gamma = E$). Доказывается через $Q^T \overline{Q} = E$, что соответствует $\langle q_i, q_j \rangle = \delta^i_j$
2. Q — изометрично $\Leftrightarrow Q^{-1}$ — изометрично
3. Произведение изометричных изометрично
4. $|\det Q| = 1$
5. Матрица перехода между ОНБ — изометрична (по формуле для Γ').

Ортогональное дополнение

Почему $V = L \oplus L^{\perp}$

Расстояние от точки до линейного многообразия. Через отношение определителей матриц Грама. Задание 1374

5. Расстояние до многообразия

Можно найти используя отношения определителей матрицы Грама.

Матрица грамма в новом базисе: $\Gamma' = T^T \Gamma \overline{T}$

Между многообразиями: $dist(x_1 - x_2; L_1 + L_2)$.

$dist^2(x, L) = \frac{g(\dots,x)}{g(\dots)}$

6. Страсти по операторам

6.1. Сопряжённый

Матрица $\overline{\Gamma^{-1}} A^* \overline{\Gamma}$, в онб — просто A^* Сопряжение — взаимообратно. Отнсительно компоиции — как транспонирование. Аддитивность, псевдоОднородность. Перестановочность относительно $(.)^{-1}$

Ядро оператора и образ сопряжённого — ортогональные дополнения друг друга, как и образ оператора и ядро сопряжённого.

Собственные числа — сопряжения друг друга. Для не соответствующих — собственные векторы ортогональны, для соответствующих — одинаковые.

Если подпространство инвариантно относительно A, то его ортогональное дополнение — относительно A*.

6.2. Нормальный

$\iff$ Перестановочен с сопряжённым $\iff \langle Ax, Ay \rangle = \langle A^*x, A^*y \rangle \iff$ В некотором базисе матрицы перестановочны $\iff$ ОПС + собственные пространства ортогональны $\iff$ Существует какой-нибудь ОНБ, что матрица имеет понятно какой блочно-диагональный вид

Не перестанет быть нормальным, если вычесть сколько-то id.

У нормального оператора ядро и образ — ортогональные дополнения друг друга (если удалось получить собственные числа из того же поля, то потому, что это собственное подпространство нуля и все остальные).

Причём ядро не меняется при возведении в степень. И Ker $A = \text{Ker } A*$.

Лемма о комплексификации (оператора):

— Собственные числа сохранются, собственные пропртанства будут комплексификацией соответствующих — Комлексные собственные числа и простанства будут разбиваться на пары сопряжённых. — Нормальность сохраняется — Сопряжённость — перестановочная с комплексификацией

(Лемма очевидна, если учесть, что любое полиномиальное уравнение, верное в подполе, верно и в самом поле)

Канонический вид: — В унитарном: находим ОНБ из собственных подпространств, получаем собственные числа на диаонали

— В евклидовом: если все СЧ — вещ. — аналогично. Иначе — добавляем ещё блоки для пар комплексно-сопряжённых. Матрица перехода всё ещё должна быть ортогональная. Как её найти? Для вещественных собственных чисел — просто собственные векторы. Для пар КС разделяем какой-нибудь вектор на пару вещественной и комплексной части и запишем в таком порядке.

7. Самосопряжённый

(симметричный/эрмитов)

Равносильное определение через скалярное произведение: применить можно как к первому, так и ко второму аргументу, получится то же самое. И в обратную сторону.

Если A и B САМОсопряжены и перестановочны, то произведение самосопряжено.

Самосопряжён <=> нормален + имеет вещественный спектр <=> существует ОНБ, в котором матрица самосопряжена

Если подпространство инвариантно относительно A, то и ортогональное дополнение — тоже.

В каноническом виде просто пропадут блоки, останутся просто (и в унитарном, и в Евклидовом)

8. Изометричный

Унитарный/ортогональный

Равносильное определение через скалярное произведение, что если применить к обоим аргументам, скалярное проиведение не изменится.

... $\iff$ нормален + собственные числа по модулю = 1 $\iff$ существует ОНБ, в котором матрица изометрична $\iff$ Q^{-1} — изометр.

Если подпространство инвариантно относительно Q, то орт. дополнение — тоже.

Каноничечкий вид — В Евклидовом на диагонали останутся только ± 1 — В Унтарном в блоках будут $a^2 + b^2 = 1$

Матрица изометрична $\iff$ её (стобцы $\iff$ строки) ортонормированы.

9. Разложения

$L(D)U$ — нижне-унитреугольная * (Диагональная без нулей на диагонали) * верхне-унитреугольная; Существует $\iff$ Все угловые миноры матрицы A, кроме (возможно) Δ_n не равны нулю. Можно найти одновременным Гауссом A и E без замены строк и столбцов. Слева будет DU, справа — L^{-1}

Если матрица сомосопряжённая, будет $A = LDL^* = U^*DU$. Причём все d вещественные.

Положительная/отрицаельная определённость, то же самое про собственные числа

Разложение Холецкого: самосопряжённая положительно определённая, все угловые миноры кроме, возможно, последнего, не нули $\iff$ можно убрать D, разложить на треугольные с положительными элементами на диагонали.

QR разложение: для невырожденной можно представить как произведение ортогональной на правую. Или же левой на ортогональную. Q находится ортонормированием столбцов исходной.

Полярное (QS или SQ) разлжение: на самосопряжённую (H) положительно определённую и ортогональную (U). Нужно взять $\sqrt{AA*}$ (левый модуль) для получения ортогонального. Далее — через обратную.

Можно также UH, тогда берём $H = \sqrt{A * A}$ (правый модуль).