

# Конспект по математическому анализу (1-й семестр)

Латыпов Владимир (конспектор)

[t.me/donRumata03](https://t.me/donRumata03), [github.com/donRumata03](https://github.com/donRumata03), [donrumata03@gmail.com](mailto:donrumata03@gmail.com)

Виноградов Олег Леонидович (лектор)

[olvin@math.spbu.ru](mailto:olvin@math.spbu.ru)

18 октября 2021 г.

## Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
1.1	Множества . . . . .	3
1.1.1	Определения . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Вещественные числа</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Отображения</b>	<b>3</b>
3.0.1	Инъекция, сюръекция, биекция... . . . .	5
3.1	Графики . . . . .	5
3.2	Операции над функциями . . . . .	6
3.2.1	Многомерные отображения . . . . .	6
3.3	Счётные множества . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Последовательности в метрических пространствах</b>	<b>9</b>
4.1	Предел последовательности . . . . .	9
<b>5</b>	<b>Метрические пространства</b>	<b>10</b>
<b>6</b>	<b>Предел в метрических пространствах</b>	<b>12</b>
6.1	Арифметические действия над сходящимися последовательностями . . . . .	13
6.1.1	Бесконечно малые последовательности . . . . .	13
6.2	Нормы и полунормы . . . . .	14

# 1. Введение

...

**Caution:** В рамках курса будут производиться МатАнализы.

## 1.1. Множества

### 1.1.1. Определения

**Определение 1** (Множество).  $X$  - множество, это аксиома, его метафизическая сущность не подлежит обсуждению.

$$\begin{cases} x \in X \\ x' \notin X \end{cases} \quad (1)$$

**Пример.** Задания множества:

$$set = \{1, 2, 3\} \quad (2)$$

$$set = \{x | x \in \mathbb{N}\} \quad (3)$$

$$set = \{\{1, 4\}, 898\} \quad (4)$$

**Определение 2** (Подмножество).

$$A \subset B \iff \forall a \in A : a \in B \quad (5)$$

## 2. Вещественные числа

Множество вещественных чисел - множество, удовлетворяющее 16-и аксиомам.

1. Аксиомы поля (9 штук)

## 3. Отображения

**Определение 3** (Отображение).  $\exists X, Y - sets, f - rule$  Говорят, что задано отображение, если  $f : X \rightarrow Y$   
(сопоставляет единственный  $Y$  каждому  $x \in X$ )

Отображение называют  $f$ , но оно включает как  $f$ , так и  $X, Y$

$$f : X \rightarrow Y \stackrel{\text{def}}{\iff} f : X \mapsto Y \stackrel{\text{def}}{\iff} X \xrightarrow{f} Y \quad (6)$$

Если  $X, Y$  - числовые множества, то  $f$  - функция. Если  $Y$  - числовое множество,  $X$  - любое, то это "функционал".

$X$  - область задания, область отправления.  $Y$  - множество значений, область прибытия.

$x \in X$  - аргумент, независимая переменная.

**Определение 4** (Последовательности). Последовательность - функция натурального аргумента.  
Если при этом  $Y$  - число, то  $f$  - числовая последовательность.  
А если  $\forall y \in Y : y \in \mathbb{Z}$ , то это двусторонняя последовательность.

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \quad (7)$$

**Определение 5.** Семейство - это то же, что и отображение.

**Определение 6** (Естественная область определения). Естественная область определения: то, где выражение имеет смысл.

**Определение 7.**

$$id_X : X \mapsto X \quad (8)$$

$$f^{-1} \circ = id_X \quad (9)$$

**Определение 8** (Образ).

$$B = f(A) = \{y \in Y : \exists x \in A : f(x) = y\} \quad (10)$$

**Определение 9** (Прообраз). Прообраз множества  $B$ :

$$A = f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\} \quad (11)$$

**Определение 10** (Композиция). ...

### 3.0.1. Инъекция, сюръекция, биекция...

$$\Leftarrow f : X \longrightarrow Y$$

**Определение 11** (Инъективное отображение). Если  $\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) \neq f(x_2)$ , то отображение инъективно, *обратимо*.

**Определение 12** (Обратимое отображение).

$$f \text{ is reversible} \iff \exists f^{-1} : \dots \quad (12)$$

**Определение 13** (Сюръективное отображение). Если  $f(X) = Y$ , то  $f$  сюръективно или *отображение на*.

**Определение 14**. Если  $f$  одновременно и инъективно, и сюръективно, то  $f$  - взаимно-однозначное соответствие или *биективно*.

## 3.1. Графики

**Определение 15** (График отображения).

$$\Gamma_f = \{(x, y) : x \in X, y = f(x)\} \subset X \times Y \quad (13)$$

**Теорема 1.**

$$\Gamma_f \iff f \quad (14)$$

**Определение 16.** Отображение, сопоставляющее каждому  $y \in f(X) \longrightarrow y \in Y$ , для которого

$$f^{-1}(x) : f(X) \mapsto X \quad (15)$$

Но что такое  $f^{-1}$ ? Прообраз или обратное отображение?

Если обратимо, и имеет значение, то они совпадают

**Определение 17** (Сужение, распространение, расширение, приведение).

$$]f : X \mapsto Y, X_0 \subset X \quad (16)$$

$$f|_{X_0} \quad (17)$$

## 3.2. Операции над функциями

- Сложение:  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- Умножение: ...
- Деление: ...
- Вычитание: ...
- ...

### 3.2.1. Многомерные отображения

$f_i$  - Координатные функции отображения  $f$

## 3.3. Счётные множества

Если множества конечны, легко сравнить количество элементов. Если одно конечно, другое - бес, то понятно.

А вот вопрос - одинаковы ли бесконечности?!

**Определение 18** (Равномощные множества). Множества называют *равномощными* или *эквивалентными (по мощности)*, если  $\exists$  биекция (взаимно однозначное соответствие) между ними

**Определение 19** (Бесконечное множество). Не равномощно никакому подотрезку натурального ряда  $\iff$  никогда не исчерпается.

**Замечание.** Равномощность множеств - отношение эквивалентности. Существуют классы эквивалентности по мощности.

**Пример.** Пример равномощных множеств:

- Отрезки (возможно, разных длин)
- Концентрические (и не только) окружности
- ...
- Плоскость и сфера
- Отрезок и плоскость
- Полуинтервал и окружность

**Определение 20.**  $A$  - счётно  $\iff A \sim \mathbb{N}$

Эквивалентное определение: можно занумеровать натуральными числами, то есть расположить в виде последовательности

**Пример.** Положительные, чётные, квадраты натуральных, целые, ... - всё счётные

**Теорема 2.** Всякое бесконечное множество содержит счётное подмножество

*Доказательство.* Есть хотя бы один элемент. Обозначим его  $a_1$ , удалим его.  
*induction* ... ■

**Теорема 3.** Всякое подмножество счётного множества - счётно.

*Доказательство.*  $b_{n+1} = A_{\min(\{n|n \in A_{\text{indices}}\})}$ ,  $\dots$   $\blacksquare$  *induction*

Предыдущие 2 теоремы - о бедности натурального ряда.

**Определение 21** (Не более, чем счётное (НБЧС)). = пустое, конечное или счётное.

**Лемма 1.**  $\mathbb{N}^n, n \in \mathbb{N}$  - счётное множество

*Доказательство.* Заполняем матрицу змейкой по диагонали. Для  $n$  измерений:  $\dots$   $\blacksquare$  *induction*

**Теорема 4.** Не более чем счётное объединение (множество индексов НБЧС) не более чем счётных множеств - не более чем счётное.

*Доказательство.*

$$B = \bigcup_{k=1}^n A_k \quad \text{or} \quad B = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \quad (18)$$

Запишем в матрицу:  $A_1, A_2, A_1, \dots$  Получили не более чем множество  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ .  $\blacksquare$

**Теорема 5.** Множество  $\mathbb{Q}$  - счётно.

*Доказательство.* Догадайтесь!  $\blacksquare$

**Теорема 6.** Множество  $\mathbb{R} \cap [0, 1]$  - несчётно.

*Доказательство.* Пусть несчётно.

$$[0, 1] = \{x_1, x_2, \dots\} \quad (19)$$

Разобьём отрезок на три части:  $[0, \frac{1}{3}]$ ,  $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ ,  $[\frac{2}{3}, 1]$  Рассмотрим отрезок, в котором нет точки  $x_1$ , затем - тот, в котором нет  $x_2$ , деля на три до бесконечности. Получим последовательность вложенных отрезков  $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ . Тогда по аксиоме о вложенных отрезках  $\exists x^* : \forall n : x^* \in [a_n, b_n]$ . Если пронумеровали, значит, был некий  $m$ , который Но, по построению, мы строили такой подотрезок  $\blacksquare$



**Следствие 1** (Некоторые множества тоже несчётны).  $\mathbb{R}$  - несчётно, так как иначе его бесконечное подмножество было счётно.

- Любой невырожденный отрезок несчётен
- Любой невырожденный интервал, полуинтервал несчётен

Как строить биекцию, если выколотые точки?

**Утверждение 1.** Если  $A$  - бесконечно, а  $B$  - не более чем счётно, то  $A \sim B$

**Свойство 1** (Характеристическое свойство бесконечных множеств). Если

**Определение 22** ( $|A| < |B|$ ).  $|A| < |B| \stackrel{\text{def}}{\iff} (\exists \text{bijection } A \hookrightarrow \text{part}(B) \wedge \nexists \text{bijection } A \leftrightarrow B)$

**Теорема 7** (Теорема Кантора-Берштейна). Если  $A \sim \text{part}(B)$  и  $B \sim \text{part}(A)$ , то  $A \sim B$

(Теорема о том, что мощности можно сравнивать: либо )

**Утверждение 2.** Множество всех подмножеств имеют мощность больше, чем само множество.

## 4. Последовательности в метрических пространствах

### 4.1. Предел последовательности

**Определение 23.**

$$A = \lim x_n \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0 : \exists N_0 : \forall n > N_0 : |A - x_n| < \varepsilon \quad (20)$$

**Определение 24** (Сходящиеся, расходящиеся последовательности).

**Пример.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad (21)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A = A \quad (22)$$

**Пример.**

$$(!) \quad \forall A : \lim \{-1, 1, -1, \dots\} \neq A \quad (23)$$

Предъявим  $\varepsilon = 0.1$ :  $\exists n_1, n_2 : \forall n > n_1 : |A - a_n| < \varepsilon$

**Замечание.** Если проверено малое эpsilon, можно не проверять большие эpsilon. Например, достаточно проверять для всех  $|\varepsilon| < 1$

**Замечание.** Не обязательно находить самый маленький номер, для данного  $\varepsilon$ .

**Замечание.** Одно или оба (из 2, 3) строгих неравенства можно заменить на нестрогие, это не сложно доказать.

**Замечание.** Если заменить конечное число членов, то сходимость не нарушится и предел не изменится.

**Замечание.** Последнее неравенство с модулем можно переписать как двойное. Это может быть полезно при некоторых доказательствах. Интервал  $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$  -  $\varepsilon$ -окрестность точки  $A$ . Тогда можно записать предел словами: Для любой окрестности точки все члены за исключением конечного множества принадлежат этой окрестности.

## 5. Метрические пространства

**Определение 25.** Функция  $\rho : X \times X \mapsto \mathbb{R}_+$  называется метрикой или расстоянием в множестве  $X$ , если:

1.  $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2.  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3.  $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

**Определение 26** (Метрическое пространство). Пара  $(X, \rho)$  называется метрическим пространством, если выполняются свойства (1-3), а сами свойства - метрические пространства.

**Пример.** Если

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, x = y \\ 1, x \neq y \end{cases} \quad (24)$$

, то пространство/метрика дискретная

**Пример.**

$$X = \mathbb{R}, \rho(x, y) = |x - y| \quad (25)$$

**Пример.**

$$X = \mathbb{R}^m \text{ or } \mathbb{C}^m, \rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^m |x_k - y_k|^2} \quad (26)$$

- это Евклидовы расстояния и пространство

**Пример.**

$$X = \mathbb{R}^m \text{ or } \mathbb{C}^m, \rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^m |x_k - y_k|^2} \quad (27)$$

- это Евклидовы расстояния и пространство

**Пример.**

$$X = \mathbb{R}^m \text{ or } \mathbb{C}^m, \rho(x, y) = \sum_{k=1}^m |x_k - y_k| \quad (28)$$

- это Манхэттновские расстояния и пространство

**Пример.**

$$X = \mathbb{R}^m \text{ or } \mathbb{C}^m, \rho(x, y) = \max_{k=1}^m |x_k - y_k| \quad (29)$$

- это (КАКОЕ?) расстояния и пространство

**Пример.** Расстояние на сфере

$$\dots \text{smallest arc} \quad (30)$$

- это расстояние на сфере

**Замечание.** Метрические пространства - это пары множества и метрики, поэтому, если они различаются лишь одним, то это уже разные пространства.

**Определение 27** (Подпространство).  $(X, \rho), Y \subset X, \Rightarrow \rho|_{Y \times Y}$  - расстояние в  $Y$ . Тогда  $Y$  - подпространство  $X$ .

**Определение 28** (Шары).  $a \in X$

$$\begin{cases} r > 0 & B(a, r) = \{x \in X : \rho(a, x) < r\} - \text{open ball} \\ r \geq 0 & \overline{B}(a, r) = \{x \in X : \rho(a, x) \leq r\} - \text{closed ball} \\ r \geq 0 & S(a, r) = \{x \in X : \rho(a, x) = r\} - \text{sphere} \end{cases} \quad (31)$$

## 6. Предел в метрических пространствах

**Определение 29** (Предел в метрических пространствах).  $a \in X$ , точка  $a$  - предел последовательности, если

$$\forall \varepsilon \exists N : \forall n > N : \rho(x_n, a) < \varepsilon \quad (32)$$

**Теорема 8** (Единственность предела последовательности в метрических пространствах). Предел последовательности в метрических пространствах единственен.

*Доказательство.* Запросим  $\varepsilon = \frac{1}{2}\rho(a, b)$ , возьмём  $\varepsilon$  окрестности обеих кандидатов на предел. Возьмём  $n = \max(N_1, N_2)$ , тогда для него значение одновременно принадлежит обоим шарам. И тогда  $\rho(a, b) \leq \rho(a, x_n) + \rho(x_n, b) < 2\varepsilon = \rho(a, b)$ , пришли к противоречию! (!!!) ■

**Определение 30.** Подмножество  $D$  некоего метрического пространства  $D$  является ограниченным, если оно содержится в некотором шаре.

**Замечание.** Заметим, что не важно, обязательно ли фиксировать конкретную точку и обязательно ли фиксировать открытую или нет сферу: ограниченная - она и в Африке ограниченная.

**Замечание.**  $x_n \rightarrow a \Leftrightarrow \rho(x_n, a) \rightarrow 0$

**Теорема 9.** Сходящаяся последовательность ограничена

*Доказательство.* Запросим номер для  $\varepsilon = 1$ , возьмём центр за предел,

а радиус - за максимум из всех расстояний до него и 1-цы (все последующие и так в шаре) ■

**Замечание.** Обратное, конечно, неверно: последовательность может быть ограниченной, но расходиться

**Теорема 10** (Предельный переход в неравенстве). Для сходящихся последовательностей: если одна всегда больше другой, то и предел у неё больше

*Доказательство.* Докажем от противного: возьмём половинную окрестность, придём к противоречию ■

**Замечание.** Строгое для элементов неравенство превращается в нестрогое для пределов в общем случае

**Определение 31** (Замкнутое множество).

**Теорема 11** (Теорема о двух милиционерах, также известная как теорема о сжатой последовательности). Если каждый элемент последовательности зажат между двумя соответствующими элементами двух других (милиционеров), и милиционеры стремятся в одно и то же, то и подсудимый стремится туда же (в участок)

*Доказательство.* Просто распишем по определению ■

**Замечание.** В теоремах о милиционерах и о предельном переходе достаточно потребовать, чтобы требуемое выполнялось лишь начиная с некоторого номера, так как изменение конечного числа членов не может повлиять на предел последовательности.

## 6.1. Арифметические действия над сходящимися последовательностями

### 6.1.1. Бесконечно малые последовательности

**Определение 32** (Бесконечно малые последовательности). Такая, которая стремится к нулю, **Корректно лишь для вещественно- и комплексно-значных последовательностей**

**Лемма 2.** Произведение бесконечно малой и ограниченной - бесконечно малая

*Доказательство.* Очевидно (берём  $\frac{\varepsilon}{K}$ ) ■

**Замечание.** Следующей теореме нужны как поддержка операций, так и расстояние. Пространство, на котором определены *привычные* операции

**Определение 33** (Векторы). Это такие объекты, с которыми можно производить нужные операции

**Определение 34** (Векторные пространства).  $]K - pole, X - set$ , определены операции  $X \times X \xrightarrow{+} X, K \times X \xrightarrow{\cdot} X$

И выполняются следующие свойства:

- Ассоциативность сложения в  $X$
- Коммутативность сложения в  $X$
- Существует нулевой элемент

Тогда  $X$  называется векторным пространством или линейным множеством над полем  $K$

**Пример.** Простейший пример - просто пространства  $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$

**Пример.** Другой занятый пример - функции. В качестве нулевого элемента выступает тождественный ноль. Также примером будут являться векторнозначные функции

Так что **функции - тоже вектора**. Однако важнее будут не все функции, а функции с какими-то свойствами.

**Замечание.** Из полей мы будем рассматривать только вещественные и комплексные пространства

## 6.2. Нормы и полунормы

**Определение 35 (Норма).** Пусть  $X$  - векторное пространство над  $\mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ . Функция  $p : X \mapsto R_+$  называется нормой в  $X$ , если удовлетворяет этим условиям:

1.  $p(x) = 0 \iff x = \theta$  - положительная определённость
2.  $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$  - (положительная) однородность
3.  $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$  - неравенство треугольника

Обозначение:  $p(x) = \|x\|$

**Замечание.** Если отказаться от первого свойства, то получится полунорма (ноль может приниматься не только на нулевом векторе)

Пример полунормы - длина проекции на координатные оси

**Лемма 3 (Свойства полунорм).**

1.  $p(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k) \leq \sum_{k=1}^n |\lambda_k| p(x_k)$  (очевидно по индукции по  $n$ )
2.  $p(\theta) = 0$
3.  $p(-x) = p(x)$  (подставим  $\lambda = -1$ )
4.  $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$  (доказывается через неравенство треугольника)

Бывает Евклидова норма (понятно, какая)

**Замечание.** Метрическое пространство не обязано быть векторным!

**Определение 36 (Метрика порождена нормой).** Если  $\rho(x, y) = \|x - y\|$

**Определение 37.** Сходимость по норме - это сходимость по метрике, порождённой этой нормой

**Замечание.** "Многочлены степени не больше  $n$ " - векторное простран-

СТВО

$$N \in \mathbb{Z}_+ \quad (33)$$

$$P(z) = \sum_{k=0}^N c_k z^k \quad (34)$$

$$\|P\| = \sum |c_k| \quad (35)$$

$$\|P\| = \max \text{ at segment} \quad (36)$$

$$\|f\| = \sup_{x \in \mathcal{D}} |f(x)| \quad (37)$$

**Теорема 12** (Арифметические действия над сходящимися последовательностями в нормированном пространстве). Лямбда - обязательно числовая!

1.  $x_n + y_n \rightarrow x_0 + y_0$
2.  $\lambda_n x_n \rightarrow \lambda_0 x_0$
3.  $x_n - y_n \rightarrow x_0 - y_0$
4.  $\|x_n\| \rightarrow \|x_0\|$

**Теорема 13** (Арифметические действия над сходящимися числовыми последовательностями). (числовые - комплексные или вещественные)

1.  $|x_n| \rightarrow |x_0|$
2. если  $y_n \neq 0 \forall n \wedge y_0 \neq 0$ , то  $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow \frac{x_0}{y_0}$

**Следствие 2** (Неравенство КБШ и неравенство треугольника в  $\mathbb{R}^m$  и  $\mathbb{C}^m$ ).

**Определение 38** (Покоординатная сходимость). Покоординатная сходимость имеет место, если:

$$\forall j \in [1 : m] : \quad (38)$$



На матанале будем сравнивать векторы, но не все. Один вектор больше другого, если он доминатор.

**Определение 39** (Математик). Это такая сущность, которая будет решать задачу о вскипячивании чайника с водой, выливая воду из него, тем самым сводя задачу к уже решённой: "вскипятить чайник без воды". (В отличие от физика)