Конспект к экзамену по билетам (математический анализ) (3-й семестр)

Латыпов Владимир (конспектор)
t.me/donRumata03, github.com/donRumata03, donrumata03@gmail.com

Виноградов Олег Леонидович (лектор)
olvin@math.spbu.ru

18 января 2023 г.

Оглавление

0.1. Как работать с этим сжатым конспектом

Составлено в соответствии с лекциями, а также учебником проф. О. Л. Виноградова

Максимально *сжатый* (как в анекдоте про работорговца) матанал: для каждого параграфа сначала сначала вводится список сущностей, а потом описания билетов, относящхся к параграфу — там указания о том, как доказывсать теоремы и в отдельных случаях — специфические определения.

0.2. Названия билетов (ровно как в оригинале)

1. Критерий Больцано —- Коши равномерной сходимости. Полнота пространства ограниченных функций.
2. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости рядов (с примерами).
3. Преобразование Абеля. Признаки Абеля, Дирихле и Лейбница равномерной сходимости рядов (с примерами).
4. Перестановка пределов и почленный переход к пределу.
5. Равномерная сходимость и непрерывность (с примерами). Полнота пространтва непрерывных на компакте функций.
6. Равномерная сходимость и предельный переход под знаком интеграла (с примерами).
7. Предельный переход под знаком производной (с примерами).
8. Пример всюду непрерывной нигде не дифференцируемой функции. Кривые Пеано.
9. Радиус сходимости степенного ряда: формула Коши - Адамара, примеры.
10. Равномерная сходимость степенных рядов. Теорема Абеля. Интегрирование степенных рядов.
11. Дифференцирование степенных рядов.
12. Единственность степенного ряда. Примеры различного поведения рядов Тейлора. Достаточные условия разложимости функции в ряд Тейлора.
13. Синус, косинус и экспонента комплексного аргумента.
14. Разложения логарифма и арктангенса в степенной ряд. Ряд Лейбница.
15. Формула Стирлинга.
16. Биномиальный ряд Ньютона, частные случаи. Разложение арксинуса.
17. Числа Бернулли. Разложения функций ... в степенные ряды.
18. Разложение синуса в бесконечное произведение.

90. Неравенство Чебышева и его следствия: конечность суммируемой функции почти везде, неотрицательная функция с нулевым интегралом.

91. Счетная аддитивность интеграла по множеству. Приближение интеграла интегралом по множеству конечной меры.

92. Теорема Фату.

93. Теорема, Лебега о мажорированной сходимости.

94. Абсолютная непрерывность интеграла.

95. Функции Бэра: теорема Бэра, лемма о последовательности дроблений, измеримость функций Бэра.

96. Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману. Сравнение интегралов Римана и Лебега.

97. Восстановление меры множества по мерам сечений (часть 1: случаи ячейки, открытого множества и множества типа жэсигма конечной меры).

98. Восстановление меры множества по мерам сечений (часть 2: случай множества нулевой меры и переход к произвольному множеству).

99. Меры n-мерных шара и конуса.

100. Мера декартова произведения.

0.3. Термины, незнание которых приводит к неуду по экзамену

1. <Дофига всего> (Будет здесь + надо раскидать по всем параграфам в секции «Определения»)

Глава 1

Криволинейные интегралы на плоскости

1.1. Простейшие свойства криволинейных интегавлов

Определения сущностей, вводимых в параграфе

Определение (Интеграл вектор функции). Простой, не криволинейный интеграл вектор функции ($\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, причём можно рассматривать как $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$).

Эквивалентные определения:

- Предел интегральной суммы (с операцией умножения скаляра на вектор) про ранге дроблений $\to 0$. (Основное определение)
- Вектор интегралов координат (практически полезное определение).

Определение (Дифференциальная форма). Бывает вещественная, бывает — комплексная.

Дифференциальная форма ω — это функция от двух точек на плоскости (первая — «центр», вторая — «приращение»), линейная по последним двум плоскостям.

Следовательно, она представима в виде:

$$\omega(x, y, \mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y \tag{1.1.1}$$

Применяя каррирование, представляем w как векторное поле (то есть в каждой точке плоскости определён вектор), где значение функции — скалярное произведение этого вектора и вектора приращения:

$$\omega = \left\langle \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{pmatrix} \right\rangle \tag{1.1.2}$$

Комплексная форма — лишь способ записать (инстанциировать) некое подмножество де-факто вещественных форм — записать в виде комплексной функции (фактические — обе действуют $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$):

Криволинейный интеграл второго рода

По умолчанию под криволинейный интегралом на плоскости подразумеваем его.

Определения, не предполагающие непраерывность/гладкость пути/функции:

$$\int_\gamma \omega = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \left(P\left(\xi_k, \eta_k\right) \Delta x_k + Q\left(\xi_k, \eta_k\right) \Delta y_k \right) \tag{1.1.3}$$

Для комплексного случая:

$$\int_\gamma \omega = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\zeta_k\right) \Delta z_k \tag{1.1.4}$$

Будем пользоваться более удобным определением, требующем гладкость пути и непрерывность функции (потом докажем, что при этих ограничениях определения эквивалентны):

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \left(P(\varphi, \psi)\varphi' + Q(\varphi, \psi)\psi' \right) \tag{1.1.5}$$

И для комплексного случая:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t \tag{1.1.6}$$

Замечание. Для кусочно гладкого пути всё определяем по аддитивности, все свойства сохраняются.

Пример. Интеграл степенной комплексной функции по окружности

$$\int_{\gamma_r} \left(z - z_0\right)^n dz = \begin{cases} 0, & n \neq -1, \\ 2\pi i, & n = -1 \end{cases} \tag{1.1.7}$$

Определение (Криволинейный интеграл **первого** рода)**.** Теперь интегрируем вещественнозначной функции по кривой на плоскости (как $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{C}$):

$$\int_\gamma f ds = \int_a^b f \circ \gamma(t) |\gamma'| \tag{1.1.8}$$

Билет 24: Простейшие свойства криволинейных интегралов

- При инвертировании получаем отрицание интеграла
- Линейность по коэфициентам формы
- Независимость от параметризации
- Аддитивность по пути
- Интеграл по контуру не зависит от выбора начальной точки
- Предельный переход и почленное интегрирование рядов непрерывных функций
- Для интеграла первого рода — всё то же самое за исключением первого свойства: там не противоположны, а равны

Билет 25: Оценка криволинейного интеграла. Криволинейный интеграл как предел интегральных сумм

Теорема 1 (Оценка модуля интеграла). *Через интеграл первого рода, а его — через максиум модуля по пути и длину пути.*

,

Теорема 2 (Криволинейный интеграл как предел интегральных сумм). *Доказательство.* Доказываем, что модуль разности $\to 0$, преобразуя через неравенство треугольника и оценку интеграла. Добиваем равномерной непрерывностью. ■

1.2. Точные и замкнутые формы

Определения и основные результаты

Определение (Линейно связное подмножество нормированного линейного пространства). Любые две точки можно соеднить путём, целиком лежащим во множестве. (путь — непрерывное отображение из отрезка в пространство)

Определение (Звёздное подмножество линейного пространства относительно точки). Отрезок от любой точки множества до центра лежит в множестве

Определение (Область). Открытое линейно связное множество

Определение (Связное (просто, не линейно) метрическое пространство (или подмножество МП)). Нельзя разбить на два непустых открытых подмножества ($\Leftrightarrow$ одновременно открытые и замкнутые подмножества — X и $\emptyset$).

Определение (Регулярный кусочно-гладкий путь). Производная нигде не обращается в ноль.

Определение (Первообразная формы). функция $D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, т.ч. её частные производные — коэфициенты формы (коэфициенты в *этом* определении непрерывны). Другими словами, $\mathrm{d}F = \omega$. *Первообразная существует далеко не у всех... Ведь нужно описать вектор-функцию сразу из двух координат частными производными одной*

Определение (Точная в области форма). Существует первообразная на всей области.

Определение (Замкнутая в области форма). Локально точна: У каждой точки существует окрестность, где точна.

У локальной точности есть простой дифференциальный критерий. И в односвязных областей замкнутые формы точны.

Определение (Первообразная формы вдоль пути). Такая $\Phi \in C[a,b]$, что для любой точки отрезка τ существует окрестность плоскости и локальная первообразная в ней, т.ч. $\Phi \equiv F \circ \gamma$ в некоторой окрестности τ.

Замечание. За счёт самопересечений первообразная — не обязательно функция на носителе пути.

Замечание. Обратим внимание на то, в каком порядке и для каких случаев мы вводим понятия и как связываем:

1. Интеграл первого и второго рода как предел интегральных сумм
2. ---"---как интеграл вектор-функции с производной пути
3. Первообразная точной формы
4. Первообразная замкнутой формы вдоль пути (определение через локальные первообразные + теорема о конструировании + Ньютона-Лейница)

1 и 2 связаны теоремой билета 25
(1-2) и 3 — Ньютон-Лейбниц для точных форм (Билет 27)
3 и 4 — определение и построение интеграла вдоль пути
(1-2) и 4 — Ньютон-Лейбниц для интеграла вдоль пути (Билет 33)

Билет 26: Признак совпадения подобласти с областью. Соединение точек области ломаной

Лемма 1 (Признак совпадения подобласти с областью). *Подобласть области — пустое множество, но открыто и замкнуто в этой области. Что это, детишки? Вся область!*

Доказательство. ... ■

Теорема 1 (Соединение точек области ломаной). *Любые две точки области можно соединить ломанной (а это, отметим, носитель кусочно-гладкого пути).*

...в учебнике ещё вывод теорем о факторизации по отношению эквивалетности для частного случая (линейной)связности (про то, что это факторизация), но можно просто сказать, что это было на линале...

Лемма: к. лин. св. открытого — открытые ($\to$ области).

По 1

Билет 27: Формула Ньютона — Лейбница для криволинейных интегралов. Единственность первообразной

Формула Ньютона — Лейбница для криволинейных интегралов Выводится из определения и соответствующей формулы для интеграла по отрезку. (потом по аддитивности для кусочно гладких)

Следствие 1.1. *Если* $\mathrm{d}F \equiv 0$, *то* $F = \mathrm{const}$

Единственность первообразной Первообразные отличаются на константу и только на неё.

Билет 28: Точность формы и независимость интеграла от пути. Условие точности формы в круге

Точность формы и независимость интеграла от пути Точна $\Leftrightarrow$ интеграл не зависит от пути $\Leftrightarrow$ интеграл по *любому* контуру $= 0$.

Условие точности формы в круге Точна $\Leftrightarrow$ интеграл по любому *прямоугольному* контуру $= 0$.

Билет 29: Точность формы, замкнутой в круге

Форма замкнута в круге $\to$ точна в нём (на самом деле, это верно не только для круга, но и вообще для любой односвязной области — это будет доказано позднее)

Билет 30: Правило Лейбница дифференцирования интегралов

Производная интеграла по параметру — это интеграл частной производной самой функции по параметру.

Билет 31: Дифференциальные условия замкнутости формы. Пример замкнутой, но неточной формы

Теорема 2 (Дифференциальные условия замкнутости формы). *$P'y, Q'_x$ существуют и непрерывны. Тогда форма замкнута $\Leftrightarrow$ $P'y = Q'_x$.*

Доказательство. Очевидно. ■

Пример (Пример замкнутой, но неточной формы). Мнимая часть комплексной формы: $\frac{1}{z}$

Билет 32: Расстояние между множествами

Определение (расстояние между множествами). инфинум расстояний между точками множеств

Теорема 3 (О достижении расстояния). *Расстояние между множествами достигается расстоянием между некоей парой точек. Оба непустые подмножества $\mathbb{R}^n$, одно (F) замкнуто, второе (K) — обязательно компактно.*

Доказательство. 1. Сначала доказываем для случая двух компактных — получаем секвенциальную компактность $K \times F$. Функция расстояния непрерывна $\Rightarrow$ inf достигается.

2. Если F не ограничено, покажем, что расстояние достигается на компактном F', полученным ограничением сферой радиуса $R_K + \rho(K, F) + 1$. ■

Следствие 1.1. *Если ещё и $K \cap F = \emptyset$, то $\rho(K, F) > 0$*

Доказательство. Иначе бы достигалось, то есть была бы общая точка. ■

Следствие 1.2. *Те же условия:* $\rho(K, F) = \rho(K, \partial F)$

Доказательство. Если бы достигалось во внутренней точке, на отрезке между «достигаторами» была бы точка ближе. ■

Билет 33: Первообразная формы вдоль пути. Формула Ньютона — Лейбница для первообразной вдоль пути

Теорема 4 (Существование и единственность* первообразной замкнутой формы вдоль пути). **С точностью до постоянного слагаемого*

Доказательство. ! Доказываем локальную постоянность $F_1 - F_2$ на отрезке, используя определение и соответствующее свойство для обычных первообразных.

∃ $\rho\left(\gamma^*, D^{\complement}\right) [= \sigma] > 0$ по 1.1 За счёт равномерной непрерывности γ берём дробление ранга $< 2\delta$, где $\omega(\gamma, \delta)_{[a,b]} < \sigma$.

Рассмотрим края и центры отрезков дроблений. $\gamma([t_j, t_{j+\frac{1}{2}}]) \subset B(z_j, \sigma)[= B_j] \subset D$. Замкнутая в круге ($B_j$) форма имеет первообразную. Пересечения соседних — круговые луночки — *непустые области* (т.к. открыто и выпукло (пересечение таких), непусто — т.к. содержит срединное z). В пересечении соседние локальные первообразные отличаются на константу $\Rightarrow$ стыкуем со сдвигом на $C_2 - C_1$. $\to$ завершаем конструкцию за конечное число шагов.

Определение интеграла вдоль пути выполнено по построению + потому что объединение окрестностей — открытое множество. ■

Следствие 1.1 (Формула Ньютона-Лейбница для интегралов вдоль пути). *Интеграл (второго рода) замкнутой формы по пути (не обязательно гладкому) — разность первообразной вдоль пути.*

Доказательство. Рассматриваем то же дробление, что и в теореме, расписываем ■

1.3. Гомотопные пути

Определения

Определение (Гомотопные пути). Два пути γ_1, γ_2 гомотопны (либо как с фиксированными концами, либо как замкнутые), если существует такое непрерывное преобразование $\Gamma : I \times I \to D$, т.ч.:

1. $\text{partial}\,\Gamma 0 \equiv s, \text{partial}\,\Gamma 1 \equiv t$
2. При каждом уровне смешения: (Для фиксированных концов — они сохраняются), а (Для замкнутых — остаются замкнутыми)

Замечание. То есть аргументы Γ имеют смысл «доли первого пути в смеси» и «процента пробегания аргумента пути», при этом при каждом уровне смешения частичное применение будет путём того же типа, что и преобразуемые.

Замечание. Гомотопность — отношение эквивалентности

Определение (Односвязная область). Любой замкнутый путь в ней стягивается в точку (интуитивно нет «дырок», которые этому мешают)

Пример. Например, звёздная (в частности, выпклая и круговая)

Определение (Открытое и замкнутое кольцо). $K_{r,R}(z_0)$ или $\overline{K}_{r,R}(z_0)$ — расстояние до центра — между r и R

Определение (Ориентированная граница области). Если ∂G представима в виде конечного объединения регулярных простых контуров, т.ч. при обходе G остаётся слева, это ориентированная граница области.

«Остаётся слева»: какая-то часть (не включая начало) направленного отрезка из пути в сторону производной, повёрнутой на $90°$ против часовой, лежит в области.

Билет 34: Равенство интегралов по гомотопным путям

Теорема 1 (Равенство интегралов по гомотопным путям). *От формы требуется лишь замкнутость.*

Доказательство. $\rho\left(\Gamma(I \times I), D^{\complement}\right)[=\ \sigma]\ >\ 0$ по 1.1 Используя равномерную непрерывность Γ, докажем через локальную постоянность $h(s)$. ■

Билет 35: Точность формы, замкнутой в односвязной области. Интеграл по ориентированной границе области

Лемма 1. *В односвязной области любые пути с общими концами гомотопны.*

Доказательство. Конструируем из их объединения контур, стягиваем в точку. Гомотопия: сначала превращаемся в точку, потом в партнёра. ■

Теорема 2 (Форма замкнута в односвязной области $\to$ точна). *Интеграл по любому контуру — ноль, так как он стягивается в точку. $\to$ точна по теореме параграфа 2.*

Теорема 3 (Интеграл замкнутой формы по ориентированной границе области). *...равен нулю, если G **ограничена** и вместе с границей лежит в D.*

Доказательство. Составим контур, стягивающийся в точку: обойдём все дыры, соединяя их простыми непересекающимися путями (почему есть такие пути — б/д) — по каждому пути пройдём туда и сюда (не забываем обойти внешнюю границу). Он стягивается в точку (б/д) $\to$ интеграл по границе равен нулю (перемычки проходим туда-сюда $\to$ они самоуничтожаются). ■

Глава 2

Теория функции комплексной переменной

2.1. Комплексная дифференцируемость

Определения и основные результаты

Определение (Функция комплексно дифференцируема). Если аппроксимируема комплексно-линейной

Важно, что далеко не любая дифференцируемая $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — КД: мы обязаны описать поведение функции в окрестности не матрицей 2×2, а лишь двумя координатами, которые подставляются в умножение комплексных чисел. И выполняться это должно в окрестности (эквивалентно, по любому направлению).

Замечание. Эквивалентное определение: существование конечного предела разностных отношений при $z \to z_0$.

Определение (Функция голоморфна/аналитична). Комплексно дифференцируема в некоторой окрестности каждой точки. Для открытого множества — эквивалентно просто комплексной дифференцируемости на множестве.

Билет 36: Условия комплексной дифференцируемости (с примерами)

Теорема 1 (Критерий комплексной дифференцируемости Коши-Римана). *f дифференцируемо $\Leftrightarrow$ u, v — дифференцируемы и $\begin{cases} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{cases}$. (То есть по своей переменной — равны, по чужой — противоположны)*

Доказательство. $\Rightarrow$ ...

$\Leftarrow$ ... ■

Замечание. Эквивалентно тому, что матрица Якоби имеет вид: $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. То есть антисимметричная и с равными элементами на диагонали.

Замечание. Краткая запись: $f'_x + if_y = 0$

Замечание. Ещё одна, ещё более краткая запись — для извращенцев:
$\tilde{f}'_{\overline{z}} = 0$

Билет 37: Голоморфные функции с постоянной вещественной частью, мнимой частью, модулем

Теорема 2. *Постоянство голоморфной функции $f \in \mathcal{A}(D)$ следует из постоянства:*

1. $\Re f$
2. $\Im f$
3. $|f|$

Доказательство. 1, 2: критерий Коши-Римана + признак постоянства в области (следствие Ньютона-Лейбница).

3: заметим, что частные производные $|f|^2$ — нули, распишем их. Переписав через Коши-Римана и решив это как систему уравнений относительно частных производных. Определитель — не ноль, значит решение для частных производных только нулевое f — постоянна. ■

Билет 38: Различные формулировки интегральной теоремы Коши. Первое доказательство (для непрерывной производной)

Теорема 3 (Интегральная теорема Коши)**.** *Голоморфная функция задаёт замкнутую форму.*

Эквивалентные утверждения (тоже называют интегральной теоремой Коши):

1. Равенство интегралов по гомотопным путям
2. Равенство нулю интеграла по контуру, стягивающемуся в точку.
3. Равенство нулю интеграла по контуру в обносвязной области
4. Локальная точность
5. Равенство нулю интеграла по ориентированной границе (тут достаточно, чтобы $f \in \mathcal{A}G, C(\overline{G})$. Доказательство: строим приближающую последовательность $\leftarrow$ то, что так можно — без доказательства).

Первое доказательство: требующее непрерывной дифференцируемости. (требующее — так как коэфициенты формы здесь должны быть непрерывными)

Запишем коэфициенты формы в вещественном выражении, а равенства Коши-Римана — в виде $P'_y = Q'_x$. Получим дифференциальные условия точности формы. ■

Замечание. Первообразная формы в вещественном и комплексном смысле — совпадает.

Доказательство. $\Leftarrow$ ...

$\Rightarrow$ Те же рассуждения, но в обратном порядке ■

Билет 39: Различные формулировки интегральной теоремы Коши. Второе доказательство (лемма Гурса)

Лемма 1 (Э. Гурс). *Интеграл формы с голоморфным коэффициентом по прямоугольному контуру, лежащему в области вместе со внутренностью, равен нулю.*

Доказательство. Пусть $\left|\int_{\gamma_0} f(z)\,\mathrm{d}z\right| [= M] > 0$.

Итеративно представляем интеграл по контуру как сумму интегралов четырёх прямоугольников, на которые разбиваем, выбираем наибольший модуль интеграла. Получим последовательность прямоугольников, $\int \geqslant \frac{M}{4^k}$.

По лемме о вложенных прямоугольниках, существует точка, принадлежащая всем. Рассморим прямоугольник внутри радиуса, где погрешность производной мала.

Прийдём к противоречию, оценивая интеграл через супремум функции и длину контура. ■

Второе доказательство. интегральной теоремы Коши.

По лемме Гурса, точна в любом круге, значит, замкнута. ■

2.2. Интегральная *формула* Коши и её следствия

Билет 40: Интегральная формула Коши

Теорема 1 (Интегральная формула Коши). *Доказательство.* 1. Если не принадлежит области, просто по теореме для интегралу формы, замкнутой в области, это ноль.

2. Иначе — обойдём её по вокруг. Он константа (за счёт голоморфности). Тогда доказательство стремления к нулю даст нам постоянную нулёвость. ■

Следствие 0.1 (Теорема о среднем). *Значение голоморфной функции в центре круга — среднее значение по окружности.*

Доказательство. Применим формулу Коши и параметризуем окружность как $\zeta = z_0 + re^{it}, t \in [-\pi, \pi]$. ■

Билет 41: Аналитичность голоморфной функции

Теорема 2 (Аналитичность голоморфной функции). *Комплексно дифференцируемая в круге функция расклазывается в степенной ряд в этом круге с центром в центре круга.*

$$11 \tag{2.2.1}$$

Билет 42: Следствия из аналитичности голоморфной функции. Теорема Мореры. Свойства, равносильные голоморфности

Билет 43: Неравенства Коши для коэффициентов степенного ряда. Теорема Лиувилля

Билет 44: Основная теорема высшей алгебры

2.3. Теорема единственности, аналитическое продолжение и многозначные функции

Билет 45: Изолированность нулей голоморфной функции (с леммой). Кратность нулей

Билет 46: Теорема единственности для голоморфных функций (с примерами)

Билет 47: Теорема о среднем. Принцип максимума модуля

2.4. Ряды Лорана и вычеты

Билет 48: Свойства рядов Лорана

Билет 49: Разложение голоморфной функции в ряд Лорана

Билет 50: Устранимые особые точки

Билет 51: Полюса. Мероморфные функции

Билет 52: Существенно особые точки: теорема Сохоцкого (с доказательством), теорема Пикара (без доказательства)

Билет 53: Теорема Коши о вычетах

Билет 54: Правила вычисления вычетов. Вычисление опасного интеграла <данные удалены

Билет 55: Лемма Жордана. Интегралы Лапласа. Вычисление опасного интеграла <данные удалены> (спойлер: здесь замешан Си)

Билет 56: Вычет в бесконечности. Теорема о полной сумме вычетов

Глава 3

Мера и интеграл

3.1. Мера в абстрактных множествах

Определения

Определение (Полукольцо множеств). Семейство $\mathbb{P}$ подмножеств X, удовлетворяющее аксиомам 1-3:

1. $\emptyset \in \mathbb{P}$
2. $\forall A, B \in \mathbb{P} A \cap B \in \mathbb{P}$ (замкнутость относительно бинарного пересечения)
3. $\forall A, B \in \mathbb{P} B \subset A \exists \{C\}_{k=1}^{n} \in \mathbb{P} : A \quad B = \bigsqcup_{k=1}^{n} C_k$ (разность разложима на конечное дизъюнктное объединение множеств полукольца)

Определение (σ-алгебра множеств). *Непустое* семейство $\mathbb{A}$ подмножеств X, удовлетворяющее аксиомам 1-2:

1. $\forall A \in \mathbb{A} : A^{\complement} \in \mathbb{A}$
2. $\forall C_1 ... C_n \in \mathbb{A} : \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k \in \mathbb{A}$ (замкнтутость относительно счётного объединения)

Замечание. Если замкнтутость только относительно счётного объединения, то это алгебра множеств (но не σ-алгебра).

Простейшие свойства полуколец и сигма-алгебр

Полуколец:

1. Вычесть конечное количество — разложимо на конечное дизъюнктное объединение (доказывается по индукции)
2. Не обязательно дизъюнктное не более, чем счётное объединение — разложимо не более чем, счётное объединение конечных дизюнктных объединений (доказывается, полагая новые множества — разложения $B_k \quad \bigcup_{i=1}^{k-1} B_i$ по первому пункту).

Сигма-агебр:

1. Не более чем счётное пересечение — тоже в сигма алгебре (через де-Моргана)
2. Третья аксиома полукольца о дизъюнктной разложимости на объединение из алгебры
3. $\rightarrow$ это полукольцо (так ка непусто и $A \cap A^{\complement}$)

Простейшие свойства объема и меры

1. Усиленная монотонность. Если $\bigsqcup A_i \subset A$, то $\sum \nu A_i \leqslant \nu A$ (в обеих случаях для счётного набора). Доказательство: предсталяем, что осталось, как конечное объединение, пользуемся аддитивностью, устремляем к бесконечности.
2. Полуаддитивность. Если $A \subset \bigcup A_i$, то $\sum \nu A_i \geqslant \nu A$ (для счётного — только у меры). Доказательство: рассматриваем пересечения множеств с A, представляем A как объединение объединений, дальше усиленная монотонность.

Непрерывность меры

Снизу: цепочка вложенных подмножеств, содержащихся в A, в бесконечном объединении дающая A.

Сверху: теперь они все содержат A и с какого-то момента не бесконечной меры.

В обоих случаях мера стремится к мере A.

Доказательство. Представляем A (в первом случае) или A_1 (во втором) как объединение самого первого и разностей соседних (добавок). Добавки расклыдваем на объединения.

В итоге вычисляем телескопическую сумму ряда. ■

Внешняя мера

Аксиоматически определяется как равное нулю на пустом множестве и счётно-полуаддитивно.

(но счётно-аддитивной и даже аддитивной может не быть)

Другой способ ввести: внешняя мера, порождённая олбычной — инфинум по покрытиям множествами полукольца (тут раскрывается его название).

Тогда равенство исходной мере на множествах полукольца (доказывается так: само является разбиением, а лучше нет — по полуаддитивности) и счётно-полуаддитивность (покроем каждое с зазором не больше $\frac{\varepsilon}{2^k}$, устремим $\varepsilon \to 0$) — её свойства.

Если множество A аддитивно разбивает любое $\subset X$, оно «τ-измеримо».

Мера, порожденная внешней мерой

Теорема 1 (Мера, порожденная внешней мерой). *Все измеримые подмножества — σ-алгебра, а сужение внешней меры на неё — мера.*

Доказательство. Для замкнутости относительно бинарного (значит, и конечного) пересечения: аддитивно разбиваем два раза, потом де-морган.

Для (двух и конечного) дизъюнктных измеримых ещё и мера пересечения с ними — сумма мер пересечений.

Для счётных дизъюнктных: ...

Замкнутость для любых счётных: ...

Счётная аддитивность: ... ■

Теорема Каратеодори о стандартном распространении меры

То же самое, что и пред билет, но ещё и полукольцо в этой сигма алгебре и на нём внешняя мера равна исходной.

Свойства стандартного распространения меры. Единственность стандартного распространения (без доказательства, с примером существенности сигма-конечности)

Критерий измеримости и нулёвости меры через зажатие.

Единственность: если продолжение на какую-то ещё сигма алгебру $\mathbb{B}$, а мера сигма-конечная, то на $\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$ они совпадают. Если, кроме того, мера полна, то $\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$.

Существенность сигма-конечности: в полукольце только один элемент из двух. В стандартном продолжении второго и мера всего множества будет бесконечна. Но можно назначить второму вес, и тоже будет другое продолжение.

3.2. Мера Лебега

Полукольцо ячеек. Конечная аддитивность классического объема

Полукольцо: для 3-й аксиомы разбиаем ячейку на 3^n штук (по каждой координате до вычитамеого отркезка, внутри и после).

Конечная аддитивность: сначала разбиваем чисто по сетке.

Потом — проводим разрезы по всем важным координатам, получаем сетку.

Счетная аддитивность классического объема

Лемма: существует ячейки $\Delta^{(+\varepsilon)}, \Delta^{(-\varepsilon)}$ Содержатся вместе с замыканием в Δ или наоборот.

Усиленная монотонность: по свойствам объёма $\leftarrow$ работает даже для бесконечных объединений.

Обратное неравенство. Гомотетией уменьшим объём исходного на ε и возьмём замыкание, а объём составных ячеек — увеличим на $\frac{\varepsilon}{2^i}$ и возьмём внутренность.

Извлечём из открытого покрытия компакта конечное подпокрытие. Для него применим конечную полуаддитивность объёма и устремим $\varepsilon \to 0$.

Мера параллелепипеда. Мера не более чем счетного множества

Теорема 1. *Мера любого параллелепипеда — произведение длин рёбер.*

Доказательство. 1. Для конечных рёбер, но не обязательно полуоткрытый: зажат между открытым и закрытым, а они — представимы в виде бесконечного объединения/пересечения ячеек. Применяем теорему о зажатии и меры предела.

2. Для бесконечного — либо ноль, либо бескоенечность. Представляем его как счётное объединение его пересечений с $[-p\mathbb{1}, p\mathbb{1})$ ■

Мера не более чем счетного множества — ноль, так как оно представимо как не более, чем счётное объединение точек, каждая с нулевой мерой. $\rightarrow$ Аксиома меры.

Представление открытого множества в виде объединения ячеек. Измеримость борелевских множеств по Лебегу

Теорема 2 (Представление открытого множества в виде объединения ячеек). *Доказательст*
Дизъюнктно разбиваем простанство на кубические ячейки порядка $\frac{1}{2^k}$, начиная с $\frac{x}{2^k}$, где $x \in \mathbb{Z}^n \rightarrow$ х в сумме счётное количество

Ячейки либо дизъюнктны, либо одна содержит другую.

В объединение берём те ячейки, для которых все «родители» содержат точку не в G.

Тогда $H \subset G$ тривиально, обратно — любая точка вместе с собой включает окрестность, поэтому первый ранг, для которого ячейка, соответствующая точке, помещается в окрестность (а такой есть) — будет в объединении. ■

Следствие 0.1. *Борелевские множества измеримы по Лебегу (так как каждое представимо в виде счётного объединения множеств предыдущего проядка).*

Приближение измеримых множеств открытыми и замкнутыми. Регулярность меры Лебега

Теорема 3. *Внешняя мера множества (не обязательно измеримого по Лебегу!) в $\mathbb{R}^n$ может быть представлена как инфинум мер открытых надмножеств или же как супремум замкнутых надмножеств.*

Доказываем для открытых, закрытые — так как дополнения открытых.

Доказательство. Нижняя граница — так как монотонность внешней меры.

Максимальная н.г.: для бесконечности — тривиально. Иначе подберём разбиение из множеств полукольца из определения внешней меры. Уменьшим ячейки на $\frac{\varepsilon}{2^k}$, возьмём внутренность, устремим ε к нулю. ■

Следствие 0.1. *Для каждого ε будет приближение сверху открытыМ множетвОМ. То есть такое надмножество, что мера разности будет не больше ε.*

Если мера конечна, следует из теоремы. Иначе: по σ-конечности разобьём на счётное объединение конечных множеств.

Для каждого подберём приближение с точностью $\frac{\varepsilon}{2^k}$, просуммируем.

Следствие 0.2. *Можно приблизить замкнутыми снизу. (доказываем через дополнение открытого)*

Следствие 0.3. *Меру измеримого можно представить как супремум меры замкнутых или компактных.*

Доказательство. В одну сторону — так как подмножества. Равенство для замкнутых — по предыдущему следствию. Для компактных результат не меньше замкнутых — так как представляем замкнутое как бесконечное объединение компактных ограничений — его пересечений с $[-p\mathbb{1}, p\mathbb{1}]$ ■

Регулярность: меру можно представить в виде инфинума и в виде супремума.

Приближение измеримых множеств борелевскими. Общий вид измеримого множества

Теорема 4 (Приближение измеримых множеств борелевскими.). *Измеримое можно зажать счётным пересечением открытых и счётным объединением закрытых , чтобы мера разности была не просто ε, а вообще ноль.*

Доказательство. Строим последовательность приближений $\frac{1}{m}$, берём объединения/пересечения соответственно. Устремляем к бесконечности. ■

Следствие 0.1 (Общий вид измеримого множества). *Оно представимо в виде бесконечного объединения вложенных компактных множеств и одного множества нулевой меры:*

$$E = \bigcup_{m=0}^{\infty} F_m \cup e, \quad \mu(e) = 0 \tag{3.2.1}$$

Доказательство. Представим каждое замкнутое как счётное объединение компактов, счётно перенумеруем, потом сделаем каждый новый компакт — конечное объединение предыдущих. ■

Сохранение измеримости при гладком отображении

Теорема 5 (Сохранение измеримости при гладком отображении). *Для гладкого отображения $G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, где G открыто:*

1. *Образ подмноджества G и по совместительству множества нулевой меры измерим и его мера равна нулю.*

2. *Образ измеримого подмноджества G измерим.*

Доказательство. 1.1. Если содержится в ячейке, лежащей в G вместе с замыканием. Покроем открытым подмножеством, $g = g \cap G$, $\mu g < \varepsilon$. Его представим как дизъюнктное объединение кубических ячеек. На компакте $\overline{P}$ — условие Липшица (вот тут пригодилось содержание), образ каждого параллделепипед размера не больше, чем $c\varepsilon$.

1.2. Теперь представим G как объединение ячеек. e — счётное объединение его пересечений с P_i, тогда для каждого применим пункт 1.1, будет измеримость и мера ноль.

2. Представим E как объединение компактов и множества нулевой меры. Применим Вейерштрасса. И сигма-алгебра замкнута относительно счётных объединений. ■

N-свойство Лузина и сохранение измеримости

N-свойство Лузина: если множество измеримое и ноль

Теорема 6. *Для непрерывных отображений $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Перевод измеримых в измеримые $\Leftrightarrow$ N-свойство Лузина.*

Доказательство. Влево — установили в теореме.

Если перевело нулевое e не в нулевое E, но измеримое, в образе есть неизмеримое подмножество E_1. Тогда $\mu\Phi^{-1} \cap e = 0$ по полноте меры Лебега (то есть измеримо), но его образ — это E_1, он неизмерим. Противоречие. ■

Канторово множество и канторова функция. Пример гомеоморфизма, не сохраняющего измеримость по Лебегу

Канторово множество — бесконечное пересечение, где на каждом шаге удаляем среднюю треть (удаляем интервал, не отрезок!).

Канторово множество замкнуто (так как бесконечное объединение замкнутых), имеет мощность континуума (троичная запись), измеримо и имеет меру 0 (так как покрывается множествами меры $\left(\frac{2}{3}\right)^n$).

Канторова функция — на каждом шаге вместо удаления определяем как среднее между концами. А на канторовом множестве — определяем как супремум по значениям в точках левее.

Получили монотонную непрерывную функцию. Но образ канторова множества — $[0;1]$ (меры 1).

Если ещё и добавить x, получится строгое возрастание.

Лемма о мере образа при известной мере образа ячейки. Инвариантность меры Лебеа относительно сдвига

Лемма 1 (Лемма о мере образа при известной мере образа ячейки). *Если на кубических ячейках мера ν в c раз больше меры Лебега, то для всей сигма-алгебры Лебега — тоже.*

Доказательство. 1. Открытое: представимо как счётное объединение ячеек.
2. Компакт: K — разность шара и его разности с K. Оба открытые.
3. Нулевая мера: инфинум открытых.
4. Общий случай: объединение компактов и нулевой меры. ■

Следствие 1.1. *Если на кубичесчких ячейках отображение увеличивает меру в c раз, то для всей сигма-алгебры Лебега — тоже.*

Доказательство. Достаточно показать, что $\nu \circ \Phi$ — мера.
Дизъюнктность во второй аксиоме будет из-за обрастимости. ■

Следствие 1.2. *Мера Лебега инвариатнта относительно сдвига*

Описание мер, инвариантных относительно сдвига

Теорема 7 (Описание мер, инвариантных относительно сдвига). *Все они (если заданы на $\mathbb{A}$) $\equiv c\mu$, c — конечно (иначе — считающая мера)!*

Доказательство. c берём из единичной ячейки.
1. Кубические ячейки ребра $\frac{1}{N}$
2. Рациональные рёбра
3. По непрерывности любой меры: для вещественных ячеек.
4. По лемме: для всего. ■

Существование неизмеримого по Лебегу множества

Аналог множества Виталя, но как подмножество любого множества положительной меры.

У такого есть ограничение шаром положительной меры.

Возьмём в множество по одному представителю каждого класса эквивалетности по отношению $x\ y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$.

Покажем, что их *немеренно*. Если раскопировать по всем $\mathbb{Q} \cap B(0, 2R)$, будет шарик в виде счётного *диъюнктного* объединения *одинаковых мер*. Но раз одинаковых, то это либо 0, либо ∞!

Мера Лебега при линейном отображении. Инвариантность меры Лебега относительно движений

Теорема 8 (Мера Лебега при линейном отображении). *Измеримость сохраняется, и мера увеличивается в $|\det A|$ раз.*

Доказательство. Измеримость — так как гладкое. Если $\det \neq 0$, обратимость, значит, мера по следствию. Инвриатна относительно сдвига, тогда осталось доказать конечность на ячейках и что $\mu[0, \mathbb{1}] = \det A$

1. Диагональный оператор с положительными с.ч.: выносим с.ч. за знак произведения в стандартном объёме, совпадает везде — по слдедствию леммы.

2. Ортогональный оператор (тогда $|\det A| = 1$): Единичный шар сохраняется на месте (так как оператор сохраняет норму). Тогда конечна на ячейках, а $c = 1$ (так как это верно доя шара).

3. Невырожденный представим в виде $U_1 D U_2$, где U_1, U_1 — ортогональны, а D — диагональный с положительными с.ч. (Это, как лююит говорить Виноградов, хорошо известно из курса алгебры).

4. Есть $\det A = 0$, размерность образа меньше размерности пространства. Тогда можно его ортогонально отобразить на вырожденный параллелепипед (через соответствие коэффициентов ортогональных базисов). Тогда мера равна нулю. ■

Определение. Движение — преобаразование, сохраняющее расстояния.

Замечание. Движение — композиция некоторого ортогонального оператора и сдвига

Следствие 1.1. *Мера Лебега инвариатнта относительно движений*

3.3. Измеримые функции

Определения

Измеримые функции (действуют из пространства с мерой в $\overline{\mathbb{R}}$): если все множества Лебега (то есть прообразы промежутков) измеримы.

Простейшие свойства измеримых функций

Утверждение. *Если функция измерима, то и множество — тоже. (так как оно представимо в виде счётного объединения: промежутков и бесконечности (которая счётное пересечение))*

Лемма 1. *Для измеримости на измеримом множестве достаточно измеримости Лебеговых множеств какого-то одного типа.*

Доказательство. Остальные выражаются через него ■

- Измеримость функции равносильна измеримости $-f$.
- Сужение измеримой не измеримое множество измеримо.

- Функция, измеримая на каждом множестве из счётного количества, измерима и на объединении.
- Константа на счётном дизъюнктном объединении $\to$ измеримо.
- Измеримость множества $\Leftrightarrow$ измеримось его характеристической функции.
- Прообраз вообще любого промежутка измерим (не только лучей)
- Прообраз ещё и борелевского множества измерим. (Доказательство: рассмотрим сигма-алгебру множеств, прообраз которых измерим. Но так как она содержит все открытые (так как содержит промежутки, а открытые — объединения ячеек), то и борелевские — тоже, а борелевская — пересечение всех таких)
- Функция на множестве меры ноль измерима, *если мера полная*.
- Непрерывная на измеримом подмножестве $\mathbb{R}$ измерима. (Доказательство: непрерывная $\to$ прообраз $\mathbb{R}_{<a}$ как открытого открыт в E, а значит, существует открытое множество G, т.ч. $E(f < a) = E \cap G$, получили измеримость)

Измеримость граней и пределов

Теорема 1 (Измеримость граней и пределов). *Для конечного или счётного семейства измеримых функций:*

1. *Инфинум и супрем измеримы*
2. *Верхние поточечные пределы измеримы*

Доказательство.

1. Лебеговы множества граней — просто счётные объединения/пересечения.
2. Последовательность супремумов остатков убывает, поэтому верхний предел — инфинум супремумов остатков. Дважды применим первое утверждение теоремы.

■

Приближение измеримых функций простыми и ступенчатыми

Определение (Простая функция). $X \to \mathbb{R}$, если измерима, неотрицательна и множество значений — *конечно*.

Если убрать требование неотрицаительности — будет «ступенчатая».

Их можно записать как суммы значений и дизъюнктных характеристических функций множеств, где значения принимаются. Множества в объединении дают X.

Замечание. Они замкнуты относительно сложения, разности, умножения, модуля, умножения на константу.

Теорема 2 (Приближение измеримых функций простыми). *Измеримую неотрицательную функцию можно представить как поточечный предел возрастающих простых.*

Доказательство. Дробим множество значений на

- Отезок $[0; n]$, его на 2^n частей, на каждой — определяем значение функции как левый конец промежутка (меньший).
- (n, ∞). Значение функции будет n.

Тогда формула для φ_n: сумма ступеней.
Ещё формула:

$$\varphi_n(x) = \min\{\frac{\lfloor 2^n f(x) \rfloor}{2^n}; n\} \tag{3.3.1}$$

Получаем возрастание последовательности.
Почему стремится? Начиная с $n > f(x)$ погрешность будет не больше $\frac{1}{2^n}$.
■

Следствие 1.1 (Приближение ступенчатыми). *Любая измеримая, поточечно стремится к f, модуль каждой не превосходит f.*

Посироим послеовательности для положительной и отрицательной частей (обе измеримы), вычтем. Проверим неравенства для случаев $f(x) \geqslant 0, f(x) < 0$.

Действия над измеримыми функциями

Теорема 3 (Арифметические действия над измеримыми функциями). *Замкнутость множества измеримых функций относительно: сложения, модуля, положительной степени, умножения, деления (на множестве $E(g \neq 0)$).*

Доказательство. Все кроме последнего: приближаем каждую ступенчатыми, получаем приближение итоговой ступенчатыми, переходим к пределу.

Деление: вручную расписываем Лебеговы множества $E\left(\frac{1}{g} > a\right)$ через соответствующие лебеговы множества функции g. ■

Непрерывность и измеримость по Лебегу. С-свойство Лузина (формулировка)

Теорема 4 (Непрерывность и измеримость по Лебегу). *Если $\forall\varepsilon$ f непрерывно на $E \in \mathbb{A}_n$ кроме множества меры $\leqslant \varepsilon$, то $f \in S(E)$*

Доказательство. 1. Если на всём измеримом: Непрерывная на измеримом подмножестве $\mathbb{R}$ измерима. Доказательство: непрерывная $\to$ прообраз $\mathbb{R}_{<a}$ как открытого открыт в E, а значит, существует открытое множество G, т.ч. $E(f < a) = E \cap G$, получили измеримость.

2. Рассморим последовательность множеств, где измеримо, для $\varepsilon = \frac{1}{m}$. Остаётся множество нулевой меры, а на нём мизмерима, так как мера Лебега полна. ■

Теорема 5 (С-свойство Лузина). *Если функция $E \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима и почти везде конечна, $\forall\varepsilon > 0 \exists\varphi_\varepsilon \in C(\mathbb{R}^n) : \mu E(f \neq \varphi_\varepsilon) < \varepsilon$*

Сходимость по мере и почти везде: определения, примеры, формулировки теорем Лебега и Ф.Рисса

Функциональная посдедовательность сходится по мере: $\forall\sigma$ мера множества, где погрешность $> \sigma$, $\underset{n\to 0}{\longrightarrow} 0$. При этом все участнки должны быть конечны почти везде и быть измеримыми.

Без доказательства: предел по мере единственен с точностью до эквивалентности.

Утверждение верно почти везде: за исключением множества меры ноль — верно. Для полных норм: просто «множество, где неверно, имеет меру ноль».

Сходимость почти везде:

Утверждение. *Последовательность измеримых, стремящихся почти всюду к пределу. Тогда предел измерим.*

На множестве меры ноль измерима по полноте меры. На остальном — как предел измеримых.

Сходимость по мере и почти везде не влекут друг друга.

Пример. Поточечная (даже вообще везде) не влечёт по мере:

Пример: характеристическая функция промежутка. Сходится поточечно везде, но не по мере.

Пример. По мере не влечёт почти везде:

Занумеруем харакретистические функции промежутков длины $\frac{1}{m}$, начинающихся откуда угодно в $[0, 1)$.

Получим продбегание отрезка бесконечность раз всё уменьшающимися подортезками.

Стремится по мере к нулю, но нигде — поточечно.

Тем не менее, при определённых условиях друг друга ±влекут.

Теорема 6 (Лебега). *Если на множестве меры $< +\infty$ измеримые стремятся к измеримой почти везде, все конечны почти везде, то стремятся по мере.*

Теорема 7 (Риса). *Если стремятся по мере, то существует подпоследовательность, сходящаяся почти всюду.*

3.4. Интеграл по мере

Определения

Определение интеграла по мере в три шага (функция должна быть измеримой).

1. Для простых (с конечными положительными коэффициентами)
2. Для неотрицаительных: супремум интегралов простых функций, которые мажорируются f.
3. Общий случай: разность интегралов положительной и отрицательной частей (хотя бы одна часть должна быть конечна).

Монотонность интеграла

Теорема 1 (Монотонность интеграла Лебега). *Если оба интеграла существуют, то интеграл от мажорирующей функции больше.*

Доказательство. Три шага.

1. Вводим множества $D_{ij} = A_i \cap B_j$, расписываем неравенство.
2. Один супремум — по *подмножествам* другого.
3. $f_- \leqslant g_- \wedge f_+ \geqslant g_+$

■

$\to$ Корректность определения: новый шаг даёт для функций предыдущего класса то же самое.

1. Разные представления простой функции дают одно и то же.

2. Для простой супремум — она сама

3. Для неотрицательной разность положительной и отрицательной частей — она сама.

Интеграл по множеству и его подмножеству

Теорема 2 (Интеграл по множеству и его подмножеству). *Если на разности множества и подмножества — нули, то интенгралы равны как Option<T>: существуют или не существуют одновременно и равны, если существуют.*

Доказательство.

1. Распишем сумму
2. Будем рассматривать супремум по простым функциям, где в $E \quad E_1$ ноль
3. Обе (положительная и отрицательная часть) равны

■

Следствие 0.1 (Монотонность интеграла по множеству). *Интеграл неотрицателной по подмножеству не больше, чем по множеству. (Так как интеграл по всему множеству равен интегралу произведения с характеристической)*

Теорема Леви

Теорема 3. *Интеграл поточечного предела мажорирующих каждая следующая предыдущую измеримых неотрицательных функций — это поточечный предел интегралов.*

Пренебрежение множествами нулевой меры при интегрировании. Интегралы от эквивалентных функций

Лемма 1 (Пренебрежение множествами нулевой меры при интегрировании). *Доказательст*
Для второго шага примеряем аппроксимацию простыми и теорему Леви. ■

Однородность интеграла

Аддитивность интеграла по функции

Теорема Леви для рядов. Суммируемость функции и ее модуля. Достаточные условия суммируемости

Неравенство Чебышева и его следствия: конечность суммируемой функции почти везде, неотрицательная функция с нулевым интегралом

Счетная аддитивность интеграла по множеству. Приближение интеграла интегралом по множеству конечной меры

Теорема Фату

Теорема, Лебега о мажорированной сходимости

Абсолютная непрерывность интеграла

Функции Бэра: теорема Бэра, лемма о последовательности дроблений, измеримость функций Бэра

Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману. Сравнение интегралов Римана и Лебега

3.5. Кратные и повторные интегралы

Восстановление меры множества по мерам сечений (часть 1: случаи ячейки, открытого множества и множества типа жэсигма конечной меры)

Восстановление меры множества по мерам сечений (часть 2: случай множества нулевой меры и переход к произвольному множеству)

Меры n-мерных шара и конуса

Мера декартова произведения

Произведение мер