Типовик по линейной алгебре «Линейные операторы в евклидовом пространстве»

Латыпов Владимир Витальевич,
ИТМО КТ M3138, ***вариант 10***

10 июня 2022 г.

1. Формулировка условия

В пространстве многочленов степени не выше второй $P_{\leq 2} = \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2\}$

введено скалярное произведение по формуле: $(p, q) = \int_a^b p(t)q(t)\alpha(t)dt$,
где $\alpha(t)$— заданная весовая функция

и действует линейный дифференциальный оператор второго порядка $\mathcal{A} = k(t)\frac{d^2}{dt^2} + l(t)\frac{d}{dt} + m(t)$.

№	a	b	$\alpha(\mathbf{t})$	$\mathbf{k}(\mathbf{t})$	$\mathbf{l}(\mathbf{t})$	$\mathbf{m}(\mathbf{t})$
1	-1	1	$\lvert t\rvert$	t	$-(t+5)$	3
2	-1	1	$1+t$	$(t+1)^2$	$-2(t+1)$	2
3	-1	1	$1-t$	$t-1$	$-(t+1)$	2
4	-1	1	$1-t$	t^2-3t	$6-t^2$	$2t-6$
5	-1	1	$1-t^2$	t^2-1	0	-6
6	-1	1	1	$(2t+1)^2$	$-2(2t+1)$	4
7	-1	1	$2-t$	$(t-2)^2$	$-3(t-2)$	4
8	-1	1	1	$2t+1$	$4t-2$	-8
9	-1	1	$\lvert t\rvert(1-t)$	t^2-t	$2t-3$	-2
10	-1	1	$1-t$	$t-1$	$-t$	1
11	-1	1	$1+t$	t	$-(t+1)$	1
12	-1	1	$1+t^2$	1	$-2t$	4
13	-1	1	$\lvert t\rvert$	t	$-(t+2)$	1
14	-1	1	$1-t^2$	$1-t^2$	$-2t$	12
15	-1	1	$1-t$	t^2-1	$t-3$	-1
16	-1	1	$1+t$	t	$-(2t+1)$	2
17	-1	1	$3(1+t)$	$2t+1$	$2t-1$	-2
18	-1	1	$\lvert t\rvert$	$1-t^2$	$-3t$	0
19	-1	1	$1-t^2$	t^2-1	0	-6
20	-1	1	$3(1+t)$	$2t+1$	$2t-1$	-2

1. (a) Применяя процесс ортогонализации Грама - Шмидта к каноническому базису пространства $P_{\leq 2} e_1 = 1, e_2 = t, e_3 = t^2$ построить ортонормированный базис пространства $P_{\leq 2} e_1', e_2', e_3'$.

   (b) Построить матрицу Грама Γ для канонического базиса пространства $P_{\leq 2} e_1 = 1$, $e_2 = t, e_3 = t^2$. Записать формулу для скалярного произведения в координатном представлении, где координаты многочленов записываются относительно канонического базиса e.

   (c) Используя матрицу Γ и координатное представление многочленов e'_1, e'_2, e'_3 в каноническом базисе пространства $P_{\leq 2}$ проверить ортонормированность полученного базиса.

(d) Выписать матрицу $\mathrm{T} = \mathrm{T}_{e \to e}$ перехода от базиса e к базису e'. Проверить формулу связи матриц Грама для базисов e и e'.

2. (a) Найти матрицы A и A' оператора $\mathcal{A}$ в базисах e и e', соответственно, по определению матрицы оператора. Проверить полученные результаты, используя формулу связи матрицы оператора в разных базисах.

   (b) Найти матрицу $A^{\circledast}$ оператора $\mathcal{A}^*$, сопряжённого к $\mathcal{A}$ в базисе e. Найти матрицу оператора $\mathcal{A}^*$ в базисе e' двумя способами:

   - по формуле матрицы сопряженного оператора
   - используя формулу связи матрицы оператора $\mathcal{A}^*$ в разных базисах.

   (c) Найти $\operatorname{Ker} A^{\circledast}, (\operatorname{Im} A)^{\perp}$. Убедиться, что выполняется соотношение: $\operatorname{Ker}^{\circ} = (\operatorname{Im} A)^{\perp}$. Найти $\operatorname{Ker} \mathcal{A}^*$, выразив $K\,\mathrm{er}\, A^{\circledast}$ через элементы исходного пространства.

3. (a) Зная матрицу A° оператора $\mathcal{A}^*$ в базисе e построить линейный дифференциальный оператор второго порядка, равный оператору $\mathcal{A}^*$.

   (b) Проверить, что найденное в п.2.2 $\operatorname{Ker}_{\mathcal{A}^*}$, действительно, является ядром построенного дифференциального оператора $\mathcal{A}^*$ непосредственным применением $\mathcal{A}^*$ к базису $\operatorname{Ker}^* \mathcal{A}^*$.

   (c) Для многочленов $p(t) = t^2 + 2$ и $q(t) = -t - 1$ проверить непосредственной подстановкой что $(\mathcal{A}p, q) = (p, \mathcal{A}^*q)$.

4. (a) 4.1. Ответить на вопросы. Является ли оператор $\mathcal{A}$ нормальным оператором? Является ли оператор $\mathcal{A}$ симметричным оператором? Является ли оператор $\mathcal{A}$ ортогональным оператором? Ответы обосновать.

   (b) Можно ли в пространстве $P_{\leq 2}$ ввести скалярное произведение таким образом, чтобы в полученном евклидовом пространстве заданный оператор $\mathcal{A}$ был симметричным? Если можно, то получить формулу для его вычисления. Проверить, что при таком задании скалярного произведения в пространстве $P_{\leq 2}$, оператор будет симметричным $\mathcal{A} = \mathcal{A}*$.

2. Получение формул скалярного произведения и оператора

Вариант 10-й, поэтому:

$$
\begin{gathered}
a = -1 \\
b = 1 \\
\alpha(t) = 1 - t \\
k(t) = t - 1 \\
l(t) = -t \\
m(t) = 1
\end{gathered}
$$

Начнём со скалярного произведения.

$]p(t) = p_3 t^2 + p_2 t + p_1, q(t) = q_3 t^2 + q_2 t + q_1$

$$
p \leftrightarrow \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}, q \leftrightarrow \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \tag{1}
$$

$$
\begin{gathered}
\langle p, q \rangle = \\
\int_{-1}^{1} (p_3 t^2 + p_2 t + p_1)(q_3 t^2 + q_2 t + q_1)(1 - t)\mathrm{d}t = \\
2p_1 q_1 - \frac{2}{3} p_2 q_1 + \frac{2}{3} p_3 q_1 - \frac{2}{3} p_1 q_2 + \frac{2}{3} p_2 q_2 - \frac{2}{5} p_3 q_2 + \frac{2}{3} p_1 q_3 - \frac{2}{5} p_2 q_3 + \frac{2}{5} p_3 q_3
\end{gathered} \tag{2}
$$

Получаем матрицу Грама:

$$
\Gamma = \begin{pmatrix} 2 & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-2}{5} \\ \frac{2}{3} & \frac{-2}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \tag{3}
$$

Теперь разберёмся с оператором.

$$
\begin{gathered}
\mathcal{A}(p_3t^2+p_2t+p_1) = \\
\left(k(t)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}+l(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+m(t)\right)(p) = \\
(t-1)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(p_3t^2+p_2t+p_1)-t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p_3t^2+p_2t+p_1)+1\cdot(p_3t^2+p_2t+p_1) = \\
-p_3t^2+2p_3t+p_1-2p_3 \\
\leftrightarrow \begin{pmatrix} p_1-2p_3 \\ 2p_3 \\ -p_3 \end{pmatrix}
\end{gathered} \tag{4}
$$

Замечаем, что это эндоморфизм на $P_{\leqslant 2}$.

Тогда матрица A оператора $\mathcal{A}$ в каноническом базисе $\{1, t, t^2\}$:

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{5}
$$

3. Ортогонализация

$$
e_1'' = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6}
$$

$$
\begin{gathered}
e_2'' \rightsquigarrow e_2 - \frac{\langle e_1'', e_2\rangle}{\langle e_1'', e_1''\rangle} e_1'' = \\
e_2 - \frac{-\frac{2}{3}}{2} e_1'' = e_2 + \frac{1}{3} e_1'' \\
\rightsquigarrow 3e_2 + e_1'' \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{gathered} \tag{7}
$$

$$
\begin{aligned}
e_3'' \rightsquigarrow e_3 - \frac{\langle e_1'', e_3\rangle}{\langle e_1'', e_1''\rangle} e_1'' - \frac{\langle e_2'', e_3\rangle}{\langle e_2'', e_2'\rangle} e_2'' = \\
e_3 - \frac{\frac{2}{3}}{2} e_1'' - \frac{-\frac{8}{15}}{4} e_2'' = e_3 - \frac{1}{3} e_1'' + \frac{2}{15} e_2'' \\
\rightsquigarrow 15e_3 - 5e_1'' + 2e_2'' \leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{8}
$$

(Проверил на матричном калькуляторе — действителльно, получилась система ортогональная для этой матрицы Грама и базис)

Теперь вспомним, что нам нужна не просто какая-то там $\{e_i''\}_{i=1}^3$, а самая настоящая $\{e_i'\}_{i=1}^3$!

Поэтому заменим векторы на их орты (важно, что скалярное произведение и, соответственно, норма — не стандартные, а получаются через матрицу Грамма):

$$
e_1' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3' = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \tag{9}
$$

Теперь получим матрицу перехода между базисами, для этого просто запишем координаты нового базиса, которые мы получили.

$$
T = E' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{2\cdot\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{5\cdot\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{10}
$$

Можно посчитать матрицу Грамма для базиса e'. Это $E'^T \Gamma E'$.

$$
G(e_1', e_2', e_3') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{11}
$$

(как раз заметили, что оно ортонормированное)

А что должно получаться по формуле из теории?

$$\Gamma' = T^T \Gamma T = G(e'_1, e'_2, e'_3) \tag{12}$$

Удивительно, но это одно и то же!

Кстати, матрица T в данном случае не ортогональна, так как канонический базис не является ортогональным с данным скалярным произведением.

4. Матрица оператора $\mathcal{A}$

Найдём матрицы A и A' оператора $\mathcal{A}$ в базисах e и e', соответственно, по определению матрицы оператора.

Хм. Мы уже нашли матрицу A оператора по определению (через действие на элементы базиса) в самом начале.

Далее план такой:

1. Найдём матрицу A' по определению.
2. Проверим через формулу связи матрицы оператора в разных базисах.

Чтобы найти матрицу A' по определению, будем применять её к e'_i в координатах канонического базиса, а потом раскладывать по базису $\{e'_i\}_{i=1}^3$.

Мы знаем про оператор A, как он действует на многочлен:

$$\mathcal{A}(p) = -2p_3t^2 - p_2t + 2p_3t - 2p_3 + 1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} p_1 - 2p_3 \\ 2p_3 \\ -p_3 \end{pmatrix} \tag{13}$$

Нужно сопоставить результатам действия оператора на новые базисные векторы разложение по новому же базису.

$$\mathcal{A}e'_i \underset{e}{\longleftrightarrow} \ldots \underset{e'}{\longleftrightarrow} \ldots \tag{14}$$

Первое преобразование мы умеем делать, умножив координаты вектора в исходном базисе на матрицу A.

Со вторым сложнее — если делать «в лоб», придётся представлять результат в виде линейной комбинации многочленов, что делать не хочется.

У нас линейная алгебра, поэтому мы знаем, как можно сделать это эффективно (заметим, что мы всё ещё находим по определению).

Для начала сопоставим матрицу из столбцов-разложений действий вектора на элементы нового базиса в старом.

Для этого просто умножим матрицу A на E'.

$$AE' = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-11*\sqrt{6}}{4} \\ 0 & 0 & \frac{5*\sqrt{6}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-5*\sqrt{6}}{4} \end{pmatrix} \tag{15}$$

Теперь каждый столбец нужно разложить по базису E'. А это легко сделать через матрицу сопряжённого базиса — достаточно слева умножить на неё, Матрица сопряжённого базиса равна обратной матрицы самого базиса.

$$A' = W(AE') = E'^{-1}AE' = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -8*\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 2*\sqrt{6} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

Теперь проверим через формулу для смены базиса матрицы оператора. Так как переходим из канонического базиса, матрица перехода $T_{e\to e'} = E'$, То есть всё сошлось: $T_{e\to e'} = E' \Rightarrow T^{-1}AT = E'^{-1}AE' = A'$.

5. Матрица сопряжённого оператора

Сначала — просто матрица $A^{\circledast}$ — в каноническом базисе. (Забудем про сопряжения к.ч., у нас Евклидово)

$$A^{\circledast} = \Gamma^{-1}A^*\Gamma = \Gamma^{-1}A^T\Gamma = \begin{pmatrix} \frac{27}{2} & \frac{-13}{2} & \frac{11}{2} \\ \frac{-45}{2} & \frac{23}{2} & \frac{-19}{2} \\ -60 & 30 & -25 \end{pmatrix} \tag{17}$$

Теперь найдём матрицу сопряжённого оператора в новом (ОНБ) базисе. Найдём её двумя способами:

5.1. По формуле матрицы сопряжённого оператора

В базисе e' у нас есть матрица Грама, да и A' мы знаем, так что — Что нам мешает найти аналогичным образом? Вопрос риторический.

(У нас должно получиться, что она = $A^{*'}$, так как ОНБ)

$$A^{\circledast'} = \Gamma'^{-1} A^{*'} \Gamma' = E^{-1} A'^{T} E = A'^{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ -8 * \sqrt{3} & 2 * \sqrt{6} & -1 \end{pmatrix} \tag{18}$$

5.2. По формуле связи матрицы сопряжённого оператора в разных базисах

Однако можно проверить себя и получить то же, сменив базис у $A_e^{\circledast}$

$$A^{\circledast'} = T^{-1} A^{\circledast} T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ -8 * \sqrt{3} & 2 * \sqrt{6} & -1 \end{pmatrix} \tag{19}$$

Сошлось.

6. Связь ядра сопряжённого оператора и образа исходного оператора

Для $\operatorname{Ker} A^{\circledast}$, как всегда, решаем СЛОУ с этой матрицей:

$$\operatorname{Ker} A^{\circledast} = \operatorname{span} \begin{pmatrix} \frac{-1}{6} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \operatorname{span} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \tag{20}$$

Теперь найдём образ A (образ оператора и ядро сопряжённого являются ортогональными дополнениями друг друга).

Для нахождения ортгонального дополнения образа нужно решить систему, что скалярное произведение с векторами-столбцами матрицы A будет ноль.

$$A^T \Gamma x = \mathbb{0} \tag{21}$$

$$\operatorname{Im} \mathcal{A} = \operatorname{span} \begin{pmatrix} \frac{-1}{6} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \operatorname{span} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \tag{22}$$

То есть сошлось.

7. Венёмся к многочленам

У нас канонический базис из $\{1, t, t^2\}$, то есть для нахождения самих многочленов из $\operatorname{Ker} \mathcal{A}^*$ в символьной форме достаточно записать линейные комбинации базиса ядра в виде многочленов. У нас только один параметр, назовём его c.

$$\operatorname{Ker} \mathcal{A}^* = \{c(-1 + 3t + 6t^2) | c \in \mathbb{R}\} \tag{23}$$

8. Построение дифференциального оператора второго порядка по матрице

Требуется представить оператор $\mathcal{B} = \mathcal{A}^*$ в виде:

$$\mathcal{B} = \alpha(t)\frac{d^2}{dt^2} + \beta(t)\frac{d}{dt} + \gamma(t) \tag{24}$$

То есть нужно найти три многочлена-вектора.

Давайте применим оператор $\mathcal{B}$ к векторам базиса.

С одной стороны, получим это через матрицу:

$$\begin{gathered}
\mathcal{B}e_1 = \frac{27}{2}e_1 - \frac{45}{2}e_2 - 60e_3 = \frac{27}{2} - \frac{45}{2}t - 60t^2 \\
\mathcal{B}e_2 = -\frac{13}{2}e_1 + \frac{23}{2}e_2 + 30e_3 = -\frac{13}{2} + \frac{23}{2}t + 30t^2 \\
\mathcal{B}e_3 = \frac{11}{2}e_1 - \frac{19}{2}e_2 - 25e_3 = \frac{11}{2} - \frac{19}{2}t - 25t^2
\end{gathered}$$

Но из представления оператора через дифференциальный:

$$\mathcal{B}e_1 = \gamma(t)$$
$$\mathcal{B}e_2 = \beta(t) + \gamma(t) \cdot t$$
$$\mathcal{B}e_3 = \alpha(t) \cdot 2 + \beta(t) \cdot 2t + \gamma(t) \cdot t^2$$

То есть задача свелась к решению системы уравнений.

К счастью, система «треугольная», поэтому решим её в один проход:

$$\gamma(t) = \frac{27}{2} - \frac{45}{2}t - 60t^2$$
$$\beta(t) = -\frac{13}{2} + \frac{23}{2}t + 30t^2 - \gamma(t) \cdot t = 60t^3 + \frac{105}{2}t^2 - 2t - \frac{13}{2}$$
$$\alpha(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{11}{2} - \frac{19}{2}t - 25t^2 - 2t\beta(t) - t^2\gamma(t)\right) =$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{11}{2} - \frac{19}{2}t - 25t^2 + (-60t^4 - \frac{165}{2}t^3 - \frac{19}{2}t^2 + 13t)\right) =$$
$$-30t^4 - \frac{165}{4}t^3 - \frac{69}{4}t^2 + \frac{7}{4}t + \frac{11}{4}$$

Итого представление $\mathcal{A}^*$ в виде дифференциального оператора:

$$\mathcal{A}^* = \left(-30t^4 - \frac{165}{4}t^3 - \frac{69}{4}t^2 + \frac{7}{4}t + \frac{11}{4}\right)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \left(60t^3 + \frac{105}{2}t^2 - 2t - \frac{13}{2}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{27}{2} - \frac{45}{2}t - 60t^2\right) \quad (25)$$

Пункт 3.2: проверим, что не добавили в ядро лишнее, применив к базису ядра, выраженном в виде многочлена наш оператор, который тоже выражен в формате многочленов.

$$A^*(c(-1+3t+6t^2)) = 0 \Leftrightarrow A^*(-1+3t+6t^2) = 0, A^*(-1+3t+6t^2) = \left(-30t^4 - \frac{165}{4}t^3 - \frac{69}{4}t^2 + \frac{7}{4}t + \frac{11}{4}\right)(12) + \left(60t^3 + \frac{105}{2}t^2 - 2t - \frac{13}{2}\right)(12t+3) + \left(\frac{27}{2} - \frac{45}{2}t - 60t^2\right)(-1+3t+6t^2) = 0 \quad (26)$$

, как и требовалось.

Пункт 3.3: Для многочленов $p(t) = t^2 + 2$ и $q(t) = -t - 1$ проверим непосредственной подстановкой что $\langle \mathcal{A}p, q\rangle = (p, \mathcal{A}^*q)$.

Окей, мы знаем символьное представление обеих операторов, а также формулу для вычисления скалярного произведения (задана через определённый интеграл в условии), брать его для многосленов мы умеем.

$$\mathcal{A}p = -p_3t^2 + 2p_3t + p_1 - 2p_3 = \begin{bmatrix} p_1 = 2 \\ p_2 = 0 \\ p_3 = 1 \end{bmatrix} = -t^2 + 2t + 2 - 2 = -t^2 + 2t \quad (27)$$

Для q можем найти через матрицу (знаем, какой многочлен сопоставляется, если известны коэффициенты исходного), а можем через полученный дифференциальный оператор — и сверимся.

$$\mathcal{A}^*q = \begin{bmatrix} q_1 = -1 \\ p_2 = -1 \\ p_3 = 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 11 \\ 30 \end{pmatrix} = 30t^2 + 11t - 7 \quad (28)$$

$$\mathcal{A}^*q = \mathcal{A}^*(-t-1) = \left(-30t^4 - \frac{165}{4}t^3 - \frac{69}{4}t^2 + \frac{7}{4}t + \frac{11}{4}\right)\cdot 0 + \left(60t^3 + \frac{105}{2}t^2 - 2t - \frac{13}{2}\right)\cdot(-1) + \left(\frac{27}{2} - \frac{45}{2}t - 60t^2\right)\cdot(-t-1) = 30t^2 + 11t - 7 \quad (29)$$

Действительно, сошлось.

Теперь посчитаем скалярное произведение. Проше было бы через матрицу Грамма, но можно и:

$$\langle \mathcal{A}p, q\rangle = \int_{-1}^{1}(-t^2+2t)(-t-1)(1-t)\mathrm{d}t = \frac{4}{15} \tag{30}$$

$$\langle p, \mathcal{A}^* q\rangle = \int_{-1}^{1}(t^2+2)(30t^2+11t-7)(1-t)\mathrm{d}t = \frac{4}{15} \tag{31}$$

Сошлось.

9. Нормальность, ортогональность, симметричность

В любом базисе проверим $AA^{\circledast} = A^{\circledast}A$, например, в e:

$$\begin{pmatrix} \frac{27}{2} & \frac{-13}{2} & \frac{11}{2} \\ \frac{-45}{2} & \frac{23}{2} & \frac{-19}{2} \\ -60 & 30 & -25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{27}{2} & 0 & \frac{-91}{2} \\ \frac{-45}{2} & 0 & \frac{155}{2} \\ -60 & 0 & 205 \end{pmatrix} \neq$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{27}{2} & \frac{-13}{2} & \frac{11}{2} \\ \frac{-45}{2} & \frac{23}{2} & \frac{-19}{2} \\ -60 & 30 & -25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{267}{2} & \frac{-133}{2} & \frac{111}{2} \\ -120 & 60 & -50 \\ 60 & -30 & 25 \end{pmatrix} \tag{32}$$

То есть он ненормальный. То же самое можно заключить, заметив, что его собственные подпространства, (хотя он и ОПС, то есть базис из СВ есть), не ортогональны друг другу (с.ч. $0, 1, -1$).

Таким образом, говорить об изометричности или самосопряжённости не приходится. (хотя там и собственные числа подходят под критерий самосопряжённости...)

10. Введение скалярного произведения для получения симметричности

Заметим, что ОПС-ность не зависит от скалярного произведения. $\mathcal{A}$ - действительно ОПС, его с.ч.: $0, 1, -1$. Собственные векторы (соответственно):

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{33}$$

Из теории известно, что (Оператор самосопряжён) $\Leftrightarrow$ нормален + имеет вещественный спектр.

Условие на с.ч. выполенено, а нормальность получим так: нужно, чтобы существовал ОНБ из с.в., но у нас уже есть базис из с.в. Тогда введём скалярное произведение так, чтобы этот базис стал ОНБ.

Итак, матрица Грама такого скалярного произведения в базисе $v = (v_1, v_2, v_3)$ — единична: $\Gamma_v = E$.

Найдём её в базисе e:

$$E = \Gamma_v = T_{e\to v}^T \Gamma_e T_{e\to v} \tag{34}$$

$$\Gamma_e = (T_{e\to v} T_{e\to v}^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \tag{35}$$

Формула в координатном представлении:

$$\langle x, y \rangle = x^T \Gamma_e y \tag{36}$$

, если координаты — относительно базиса $e = \{1, t, t^2\}$

Проверим, что станет симметричным, для этого достаточно проверить, что в некотором базисе будет совпадать матрицы A и $A^{\circledast}$.

В v уже проверили, но можем ещё проверить в e, чтобы понять, что с новой матрицей Грама не обманули:

$$A^{\circledast} = \Gamma_e^{-1} A^T \Gamma_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{37}$$

Отлично, сошлось!