Сжатый гиперКонспект по математическому анализу (2-й семестр)

Латыпов Владимир (конспектор)
t.me/donRumata03, github.com/donRumata03, donrumata03@gmail.com

Виноградов Олег Леонидович (лектор)
olvin@math.spbu.ru

28 апреля 2022 г.

Содержание

1. Введение

Никогда не замечали, что при изучении нового материала по матанализу забываются не только доказательства теорем из прошлых разделов, но даже и их формулировки? Обидно, правда?

Даже если бы учебник «Математический анализ Винградов О. Л.» обладал системой гиперссылок, которые бы приводились при каждой отсылке на обсуждённый выше факт, это бы всё равно не решило бы проблему, так как эти ссылки указывали бы на подробно и формальную раскрытую тему и пришлось бы опять вникать в эти тонны текста и загагулины.

Нужен максимально сжатый конспект для запоминания пула изученных сущностей и упрощения ориентирования по материалу курса.

Именно его я и создаю. Работая с этим конспектом, вы будете ощущать весь материал как орёл, парящий над ним и больше не сможете сузить гордый взгляд до частностей!

Caution: В конспекте в немалом количестве могут встречаться МатАналЛизы, но в целом это безопасно, почти не страшно и даже приятно.

Изложение ведётся в порядке затрагивания тем в учебнике $\equiv$ на лекциях. Пока здесь только материал второго семестра: интегралы, ряды, дифференциальное исчисление в Евклидовых пространствах.

Также предусмотрен особый раздел Заметки с практики: там можно вспомить/узнать, чем мы/они занимались рано утром в 10:00 каждый понедельник.

2. Памятка

Инъекция — аккуратно, точечно — по каждому значению попали не более одного раза

Сюрьекция — некий сюр, всё вокруг летает, руки трясутся, и об...действовали... всю стену. То есть постреляли по всем, причём, возможно, по некоторым по нескольку раз.

3. Ингегральное исчисление

Первообразная f — функция F, т.ч. $F' = f$. Всё это на промежутке любого типа.

Легко доказать, что все первообразные отличаются друг от друга на константу, причём любую.

Первообразные функции имеют первообразную на каждом промежутке области определения, так как они непрерывны (что этого достаточно для интегрируемости, доказываем через определённый интеграл позже).

Неопределённый интеграл на промежутке — множество всех первообразных.

Нетрудно составить таблицу интегралов основных элементарных функций.

Вот некоторые предприимчивые люди и составили: `https://ru.onlinemschool.com/math/formula/integral_table/`.

4. Заметки с практики

Здесь можно вспомнить, чем мы всё это время занимались на практике.

- Использование первой и второй производной для построения картины функции и её поведения у себя в голове и последующего её перенесения на бумагу, а именно:
  - Находим область определения
  - Смотрим поведение на границах области определения (значения, предел, асимптоты)
  - Первая производная $\Longrightarrow$ делаем вывод о промежутках возрастания/убывания, экстремумах
  - Вторая производная $\Longrightarrow$ выпуклость, точки перегиба
- Оптимизация функций через поиск и проверку критических точек с помощью производной, например, параметры геометрических фигур
- Символьное вычисление неопределённых интегралов

- Таблица интегрирования основных элементарных функций
- Базовые приёмы интегрирования: замена переменной, ингегрирование по частям
- Тригонометрические и гиперболические подстановки
- Интегрирование по индукции, если функция содержит целочисленный параметр
- Сведение интеграла самого к себе, например, $\sqrt{x^2+a^2} \to \frac{t}{\sqrt{x^2+a^2}}t + \ldots \to$ по частям.
- Выделение полного квадрата под корнем или не под корнем в знаменателе, избавление от линейного члена
- Если есть подвыражения вида $x+a$, замена переменной $t = \frac{1}{x+a}$
- Выделение в числителе производной знаменателя, например, https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%98%D0%BD%D1%82%D0%B5%D0%B3%D1%80%D0%B8%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5_%D1%80%D0%B0%D1%86%D0%B8%D0%BE%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D1%85_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B9#%D0%98%D0%BD%D1%82%D0%B5%D0%B3%D1%80%D0%B8%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5_%D0%B4%D1%80%D0%BE%D0%B1%D0%B5%D0%B9_%D0%B2%D0%B8%D0%B4%D0%B0_%7F'%22%60UNIQ--postMath-0000007E-QINU%60%22'%7F.
- Рациональные функции: разложение на простейшие, далее элементарно, больше второй степени не получится
- Функции вида $R\left(x,\ \sqrt[N]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)$ через замену переменной на весь корень.
- Подстановки Эйлера: $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$. В зависимости от коэффициентов нужно выбрать правильное t. Случаи могут быть пересекаться. Для функции подходят все те случаи, под условия которых она подходит:
  1. При $a > 0$: $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm t \pm \sqrt{a}x$
  2. При $c > 0$: $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm t \pm \sqrt{a}x$

3. При наличии двух вещественных корней: $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm t(x-\lambda)$, где λ — один из корней

– Интегрирование дифференциальных биномов

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} z = x^n \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{n} z^{\frac{1-n}{n}}\,\mathrm{d}z \end{bmatrix} = \frac{1}{n}\int z^{\frac{m}{n}+\frac{1-n}{n}}(a+bz)^p\,\mathrm{d}z \tag{1}$$

$$q = \frac{m}{n} + \frac{1-n}{n} \tag{2}$$

3 случая интегрируемости:

1. $p \in \mathbb{Z}, q = \frac{M}{N}$: $t = z^{\frac{1}{N}}$, выражаем получаем $R(t)$. Профит.

– Тригонометрические подстановки в рациональных функциях $R(\cos x, \sin x)$:

  * Если $R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x, \sin x)$ (нечётно относительно cos), можно $t = \sin x$
  * Если $R(\cos x, -\sin x) = -R(\cos x, \sin x)$ (нечётно относительно sin), можно $t = \cos x$
  * Если $R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x)$ (чётно по обеим вместе), можно $t = \operatorname{tg} x$
  * Наконец, универсальное, $t = \tan\frac{x}{2}$ работает всегда, через неё легко выражаются $\sin, \cos, \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$.

– Похожая шняга получается и с $R(ch\,x, sh\,x)$

– Линейное выражение числителя через знаменатель и его производную, решение системы уравнений

· Определённые интегралы

  – Формула Ньютона-Лейбница
  – Взятие предела для несобстыенных интегралов
  – Рассмотрение «особенных» точек, их может быть несколько
  – Замена переменной, если особые точки не появляются, ничего не портит

  - При интегрировании по частями надо смотреть, чтобы сумма частей имела смысл в $\overline{\mathbb{R}}$.
  - Анализ сходимости: сначала проверяем абсолютную, потом относительную
  - Критерий Коши (если любое значение после некоторого A не превышается ни на каком промежутке в $\mathbb{R}$).
  - Разбиение промежутка на несколько
  - Использование асимптотического анализа для определения абсолютной сходимости
  - Дирихле и Абель — позволяют сделать вывод об абсолютной сходимости или расходимости
    * Дирихле:
- Разложение подинтегральной функции в ряд Тейлора: спросить у кого-то