

Конспект к экзамену по матану

Владимир Латыпов

donrumata03@gmail.com

Содержание

1 Теория меры	3
2 Многообразия	3
2.1 Разбиение единицы	3
2.2 Гладкие многообразия	4
3 Ряды Фурье и приближение функций	5
3.1 Пространства Лебега	5
3.2 Гильбертовы пространства	6

1 Теория меры

2 Многообразия

2.1 Разбиение единицы

Лемма 2.1.1: Открытое множество в \mathbb{R}^n представимо как объединение шаров с рациональными центрами и радиусам, в нём содержащихся.

Теорема 2 (Теорема Линдлёфа): Из открытого покрытия множества в \mathbb{R}^n можно выделить счётное подпокрытие.

Доказательство:

- Не важно, открыто ли покрытие в \mathbb{R}^n или в M , т.ч. считаем, что множество представлено в виде объединения.
- Рассмотрим все шары, содержащиеся хотя бы в одном элементе покрытия \rightarrow достаточно их объединить (занумеруем).

□

Теорема 3 (Теорема Лебега (о компакте)): Для открытого покрытия метрического компакта существует ε , что любое пересекающееся с K множество диаметра $\leq \varepsilon$ содержится в каком-то элементе покрытия.

Доказательство: От противного — построим последовательность для $\varepsilon = \frac{1}{n}$. По секвенциальной компактности выделим сходящуюся подпоследовательность. Её предел — в элементе покрытия. Тогда множества с какого-то момента содержатся в нём. Противоречие.

□

Теорема 4 (Разбиение единицы): Для открытого покрытия компакта в \mathbb{R}^n существует разбиение единицы, отвечающее ему, т.е.

- конечный набор финитных функций $C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1])$, тч:
- \sup каждой \in какому-то элементу покрытия.
- Сумма набора ≤ 1 всегда
- На компакте в точности равна 1

Доказательство: Функция $\tau(x) = e^{-\frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{(t-1)^2}}$ (на $[0, 1]$, иначе — 0). Периодизируем, поделим на период, получим θ . Тогда $\tilde{\theta}$ (периодизированная θ) $\equiv 1$. Через ε из леммы Лебега возьмём малое h и получим для точки m из \mathbb{Z}^n перемноженную и промасштабированную штуку $\theta_m(x) = \prod_{i=1}^n \theta(\frac{x_i}{h} - m_i)$. Тогда возьмём в набор те, которые содержатся в каком-либо элементе покрытия. \square

Теорема 5 (Равносильность существования локального и глобального гладкого продолжения): Если для каждой точки множества существует окрестность и r — гладкое продолжение отображения, то существует таковое и на объединении окрестностей.

2.2 Гладкие многообразия

Определение 2.2.1: Регулярное отображение на произвольном множестве — существует регулярное продолжение на открытое.

Определение 2.2.2: $M_{kn}^{(r)}$ (k -мерное многообразие в \mathbb{R}^n класса r) — множество в \mathbb{R}^n , тч для каждой точки существует локальная параметризация — окрестность (открытое в M множество, содержащее эту точку) и регулярный класса r гомеоморфизм $\varphi : \Pi_k \rightarrow U$, где Π_k — стандартный куб или полукуб, причём $\varphi(0) = x$. Точки, где это куб — внутренние, где полукуб — краевые.

∂M — край — множество краевых точек. Не завит от параметризации (следствие из теоремы о регулярности перехода).

Определение 2.2.3: Нуль-мерное многообразие — дискретное множество точек, то есть никакая — не предельная.

Пример: Многообразия:

- Открытое множество в \mathbb{R}^n — многообразие без края класса ∞ (тождественная параметризация)
- Путь (простой, незамкнутый, регулярный, на $[0, 1]$).
- Образ открытого в \mathbb{R}^k множества при регулярном гомеоморфизме. Частный случай — график отображения, где $\varphi : (u, f(u))$.

- Поверхность вращения в \mathbb{R}^3 (параметризуем, решая уравнения)
- Сфера (локальная параметризация — через сферические координаты, иначе — вращаем)
- Цилиндрическая поверхность — то же самое, но переходим к сферическим координатам только по первым $l - 1$ переменным.
- Тор — параметризуем через угол на центральной окружности и на подвешенной к ней

Теорема 1 (Задание многообразия через систему уравнений): Подмножество открытого, где r — гладкое регулярное отображение $\Phi : G \subset \mathbb{R}^{k+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ равно нулю, — $\mathbb{M}_{k,k+m}^{(r)}$.

Доказательство: НУО, ненулевой минор — по последним координатам (y). По Т. о неявном отображении возьмём куб с ребром $a \rightarrow$ шар с радиусом b и неявное отображение: последние координаты по первым. Тогда параметризация:

$$\varphi(u) = (x_0 + au, f(x_0 + au))$$

□

Определение 2.2.4: Переход от параметризации φ к ψ — $L : \begin{pmatrix} W_1 \rightarrow W_2 \\ \psi^{-1} \circ \varphi \end{pmatrix}$, то есть по φ -параметру точки из пересечения стандартных окрестностей даёт ψ -параметр.

Теорема 2 (Регулярность перехода): $L \in C^{(r)}$ и регулярно.

3 Ряды Фурье и приближение функций

3.1 Пространства Лебега

Определение 3.1.1: Пространство Лебега $L_p(E, \mu)$, $p \in [1, \infty]$ — множество функций п. в. $_{\mu} E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ или $\overline{\mathbb{C}}$, для которых

$$\begin{cases} \|f\|_p = \left(\int_E |f|^p d\mu \right)^{1/p} < \infty & p \in [1, \infty) \\ \|f\|_{\infty} = \operatorname{ess\,sup}_E^{\mu} |f| < \infty & p = \infty \end{cases}$$

Определение 3.1.2: Пространство L_p (обозначается без указания множества и меры) — множество 2π -периодических функций п. в. $\mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ или $\overline{\mathbb{C}}$, для которых $\|f\| = \|f\|_{L_p([-\pi, \pi], \mu_1)} < \infty$.

Теорема 1: Полнота

3.2 Гильбертовы пространства

Определение 3.2.1: Гильбертово пространство — *полное* линейное пространство со скалярным произведением и нормой, им порождённой.

Пример: Пространство $L_2(E, \mu)$ со скалярным произведением:

$$\langle f, g \rangle = \int_E f \bar{g} d\mu$$

(суммируемость $f\bar{g}$ — за счёт неравенства Гёлдера для $p = q = 2$)

Полнота доказана в Теореме 3.1.1

Частные случаи:

- ℓ_2^m — Евклидово пространство
- ℓ_2 — последовательности
- $\ell_2(\mathbb{Z})$ — двусторонние последовательности

Лемма 3.2.1: Сходящийся в \mathcal{H} ряд можно скалярно умножать на вектор почленно

Теорема 2 (Критерий сходимости ортогонального ряда): Сходимость ряда в \mathcal{H} равносильна сходимости $\sum \|x\|^2$, причём

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} x \right\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|x\|^2$$

Следствие 2.1: Перестановка сходящейся в \mathcal{H} последовательности тоже сходится и имеет тот же предел

Теорема 3 (Вычисление коэффициентов ортогонального ряда): Если $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ОС, а $\sum_{i=1}^{\infty} c_k e_k \rightarrow x$, то коэффициенты однозначно вычисляются по формуле

$$c_k = \frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|^2}$$

Теорема 4 (Свойства частичных сумм Фурье):

1. S_n — ортогональная проекция x на $\mathcal{L}(\{e_k\})$
2. S_n — элемент наилучшего приближения к x из $\mathcal{L}(\{e_k\})$, причём равенство достигается только при $y = S_n$
3. $\|S_n\| \leq \|x\|$

Следствие 4.1 (Неравенство Бесселя): Сумма квадратов норм Ряда Фурье x не больше $\|x\|^2$.

Теорема 5 (Рисс, Фишер):

1. Ряд Фурье вектора x сходится
2. Сумма ряда Фурье — ортогональная проекция x на $\mathcal{L}(\{e_k\})$
3. Сходится именно к $x \iff$ выполняется *уравнение замкнутости* (то есть в нер-ве Бесселя достигается равенство).

Определение 3.2.2: Базис: любой вектор раскладывается по этой системе

Определение 3.2.3: Полная система: не существует отличного от нуля вектора, ортогонального всем векторам (то есть нельзя добавить ещё один вектор, чтобы осталась ОС)

Определение 3.2.4: Замкнутая система: для любого вектора выполнено *уравнение замкнутости*

Теорема 6 (Характеристика базиса): Утверждения эквивалентны для ОС $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$:

1. $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — базис
2. $\forall x, y$ выполнено обобщённое уравнение замкнутости:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x) \overline{c_k(y)} \|e_k\|^2$$

3. $\{e_k\}$ — полная система
4. $\{e_k\}$ — замкнутая система
5. $\mathcal{L}(\{e_k\})$ плотна в \mathcal{H}

Теорема 7 (Грамм, Шмидт): систему можно ортонормировать, не изменяя линейную оболочку никакого префикса, причём единственным с точностью до коэффициентов ± 1 образом

Пример (Ортогональные базисы многочленов): Весовая функция \rightarrow вводим скалярное произведение

Теорема 8 (Существование элемента наилучшего приближения):