Решения **теоретических („малых“) домашних заданий**

Математическая логика, ИТМО, M3232-M3239, весна 2023 года

Латыпов Владимир (конспектор)
t.me/donRumata03, github.com/donRumata03, donrumata03@gmail.com

21 февраля 2023 г.

Содержание

При решении заданий вам может потребоваться теорема о дедукции (будет доказана на второй лекции): $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ тогда и только тогда, когда $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$. Например, если было показано существование вывода $A \vdash A$, то тогда теорема гарантирует и существование вывода $\vdash A \rightarrow A$.

3. Доказать или опровергнуть

Доказать или опровергнуть

(a) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow (C \rightarrow A)$

(b) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ *(правило контрапозиции)*

(c) $\vdash A \,\&\, B \rightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$

(d) $\vdash \neg(\neg A \vee \neg B) \rightarrow (A \,\&\, B)$

(e) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B)$

(f) $\vdash A \,\&\, B \rightarrow A \vee B$

(g) $\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$ *(закон Пирса)*

Решение:

(a) $\vdash \alpha = (A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow (C \rightarrow A)$

Если оно выводимо в исчислении высказываний, значит, по теореме о корректности, общезначимо.

Опровергнем это, приведя оценку, переменных, при которой оценка высказывания ложна.

Ищем, чтобы $\begin{cases} A \rightarrow C \\ C \not\rightarrow A \end{cases}$. То есть $\begin{cases} A = \text{Л} \\ C = \text{И} \end{cases}$. Остаётся, например, положить $B = \text{Л}$.

Итого: $[\![\alpha]\!]^{A:=\text{Л}, B:=\text{Л}, C:=\text{И}} = \text{Л}$

(b) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ *(правило контрапозиции)*

За счёт теоремы о дедукции достаточно показать, что $(A \rightarrow B) \vdash \neg B \rightarrow \neg A$ или даже $A \rightarrow B, \neg B \vdash \neg A$.

(1)	$A \to B$	Гипотеза 1
(2)	$\neg B$	Гипотеза 2
(3)	$\neg B \to (A \to \neg B)$	Аксиома ослабления (1)
(4)	$A \to \neg B$	(MP 3, 2)
(5)	$(A \to B) \to (A \to \neg B) \to \neg A$	~~Апология~~ Аксиома проитвности (9)
(6)	$(A \to \neg B) \to \neg A$	MP 5, 1
(7)	$\neg A$	MP 6, 4

(c) $\vdash A\&B \to \neg(\neg A \vee \neg B)$. По теореме о дедукции достаточно показать $A\&B \vdash \neg(\neg A \vee \neg B)$

(1)	$A\&B$	Гипотеза
(2)	$A\&B \to A$	Аксиома избавления от $\&$ №1
(3)	$A\&B \to B$	Аксиома избавления от $\&$ №2
(4)	A	(MP 2, 1)
(5)	B	(MP 3, 1)
(6)	$A \to \neg\neg A$	2a
(7)	$B \to \neg\neg B$	2a
(8)	$\neg\neg A$	(MP 6, 4)
(9)	$\neg\neg B$	(MP 7, 5)
(10)	$\neg\neg A \to \neg\neg B \to \neg(\neg A \vee \neg B)$	2c для $\neg A, \neg B$
(11)	$\neg(\neg A \vee \neg B)$	ДваждыМодусПоненс! (10, 8; 10.5, 9)

(d) $\vdash \neg(\neg A \vee \neg B) \to (A \,\&\, B)$

(1)	$\neg(\neg A \vee \neg B)$	Гипотеза
(x - 1)	$(\neg A \to ?) \to (\neg A \to ?) \to \neg\neg A$	
(x)	A	MP
(7)	$A\&B$	MP ...

(e) $\vdash (A \to B) \to (\neg A \vee B)$

(1)	$A \to B$	Гипотеза
(7)	$\neg A \vee B$	MP ...

(f) $\vdash A \,\&\, B \to A \vee B$

(1)	$A\&B$	Гипотеза
(2)	$A\&B \to A$	Аксиома избавления от $\&$ №1
(3)	A	(MP 2, 1)
(4)	$A \to (A \vee B)$	Аксиома получения $\vee$
(5)	$A \vee B$	MP 4, 3

(g) $\vdash ((A \to B) \to A) \to A$ *(закон Пирса)*

?

4. АссоциативностИ импликации

Следует ли какая-нибудь расстановка скобок из другой: $(A \to B) \to C$ и $A \to (B \to C)$? Предложите вывод в исчислении высказываний или докажите, что его не существует (например, воспользовавшись теоремой о корректности, предложив соответствующую оценку)

Левая: $l : (A \to B) \to C$. Утверждает, что мы можем получить C, если выполнено $A \to B$ (есть 3 варианта оценок).

Правая: $r : A \to (B \to C)$. Утверждает лишь, что C можно получить, если выполнено одновременно и A, и B. Очевидно, более «слабое» условие (за счёт того, что его опредпосылка сильнее).

Покажем, что $l \vdash r$:

(1)	$(A \to B) \to C$	Гипотеза 1
(2)	A	Гипотеза 2
(3)	B	Гипотеза 3
(4)	$B \to A \to B$	Ослабление
(5)	$A \to B$	MP
(7)	C	MP 1, 5

Покажем, что $r \nvdash l$. Если бы можно было, для любой оценки было бы верно $r \to l$, но это не выполняется (то есть $[\![r]\!] = \text{И}, [\![l]\!] = \text{Л}$) при $A = \text{Л}, B = \text{Л}, C = \text{Л}$.

5. Новые связки

Предложите схемы аксиом, позволяющие добавить следующие новые связки к исчислению

(a) связка <<и-не>> (<<штрих шеффера>>, ``|"): $A \mid B$ истинно, когда один из аргументов ложен. Новые схемы аксиом должны давать возможность исключить конъюнкцию и отрицание из исчисления.

Поясним, что мы понимаем под словами <<исключить связку>>. Как вы знаете, конъюнкция и отрицание выражаются через <<и-не>> ($\neg\alpha := \alpha \mid \alpha$ и т.п.). При такой замене все схемы аксиом для конъюнкции и отрицания должны стать теоремами. При этом исчисление должно остаться корректным относительно классической модели исчисления высказываний.

(b) связка <<или-не>> (<<стрелка пирса>>, ``$\downarrow$"): $A \downarrow B$ истинно, когда оба аргумента ложны. Новые схемы аксиом должны давать возможность исключить дизъюнкцию и отрицание из исчисления.

(c) Нуль-местная связка <<ложь>> (``$\perp$"). Мы ожидаем вот такую замену: $\neg A := A \perp$. Аналогично, аксиомы для отрицания в новом исчислении должны превратиться в теоремы.

6. Неполная система

Достаточно ли лжи и <<исключённого или>> ($A \oplus B$ истинно, когда $A \neq B$) для выражения всех остальных связок?

Заметим, что в булевой логике для выражения произвольной функции этого недостаточно (критерий Поста, обе функции линейные, значит, и композиции тоже будут линейными).

В частности, оценка связки „$\&$“ (которая таблица истинности) задаёт нелинейную функцию. *То, что таблица истинности будет такая — следует из леммы о таблицах истинности к теореме о полноте.*

Если мы попробуем выразить её через имеющиеся, получится формула вида $f(\alpha, \beta) = \text{Const}[\oplus\alpha][\oplus\beta]$

Но f обязана иметь такую же таблицу истинности, как и „$\&$“ (иначе мы не «**выразили**»).

P.S. Там вообще ложь, так что они ещё и ноль сохраняют.

7. Тетраграмматон

Даны высказывания α и β, причём $\vdash \alpha \to \beta$ и $\nvdash \beta \to \alpha$. Укажите способ построения высказывания γ, такого, что $\vdash \alpha \to \gamma$ и $\vdash \gamma \to \beta$, причём $\nvdash \gamma \to \alpha$ и $\nvdash \beta \to \gamma$

8. Вывод из противоположных предпосылок

Покажите, что если $\alpha \vdash \beta$ и $\neg\alpha \vdash \beta$, то $\vdash \beta$

Первые два вывода преобразуем в форму $\vdash \alpha\beta$ и $\vdash \neg\alpha \to \beta$ и скопипастим в доказательство.

(1)	$\alpha \to \beta$	Гипотеза
(2)	$\neg\alpha \to \beta$	Гипотеза
(3)	$\neg\beta \to \neg\alpha$	1 + контрапозиция + MP
(4)	$\neg\beta \to \neg\neg\alpha$	2 + контрапозиция + MP
(3)	$(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\neg\beta \to \neg\neg\alpha) \to \neg\neg\beta$	Аксиома противности
(7)	β	Дважды MP + акс.10 + MP