Теорвер. Домашнее задание №3
Случайные величины

Латыпов Владимир

1 марта 2023 г.

1. Каким идти на экзамен

У первого: $\frac{n}{N}$.

У второго:

$$p_{\text{first is lucky}} \cdot \frac{n-1}{N-1} + p_{\text{first isn't lucky}} \cdot \frac{n}{N-1} = \frac{n}{N} \cdot \frac{n-1}{N-1} + \frac{N-n}{N} \cdot \frac{n}{N-1} = \frac{n}{N} \tag{1.1}$$

Аналогично — у третьего. Странно, если было бы иначе, ведь каждая перестановка равновероятна (обсуждали ещё на дискретке), а количество перестановок с хорошим билетом на месте: $n \cdot (N-1)!$ из всех $N(N-1)!$.

Note: частный случай следующей задачи для $k = -1$...

2. Случайное копирование

Исходное Ω — битовые векторы выборов (aka ветки в полном бинарном дереве выбора), у каждого своя вероятность, однако суммарная вероятность $= 1$.

Нужно найти суммарную вероятность тех веток длины s, в которых последний шаг равен нулю (белый шар).

Однако заметим, что, если знать матожидание *процента белых шаров* ***после*** *$s-1$-го шага* (назовём этот процент — случайную величину), то это и будет искомая вероятность.

$$E[W_{s-1}] = \sum_{\omega \in \Omega_{s-1}} W_{s-1}(\omega) p(\omega) \tag{2.1}$$

$$p(\text{s th is white}) = \sum_{\omega \in \Omega_s} [\omega_{n-1} = \text{White}] p(\omega) = \sum_{\omega' \in \Omega_{s-1}} 1 \cdot W_{s-1}(\omega') p(\omega') + 0 \cdot p(\omega')(1 - W_{s-1}(\omega')) \tag{2.2}$$

Попробуем выразить $E[W_s]$, зная $E[W_{s-1}]$.

По формуле полного матожидания (разделим все исходы на два события: выпал в s-ый раз белый шар или нет):

$$
\begin{aligned}
E[W_s] = \sum_{\omega\in\Omega_s} W_s(\omega)p(\omega) = \\
\sum_{\omega\in\Omega_s} \frac{M(\omega)}{N(\omega)+M(\omega)}p(\omega) = \\
\sum_{\omega\in\Omega_{s-1}} \frac{M(\omega\#\#0)}{N(\omega\#\#0)+M(\omega\#\#0)}p(\omega\#\#0) + \frac{M(\omega\#\#1)}{N(\omega\#\#1)+M(\omega\#\#1)}p(\omega\#\#1) = \\
\sum_{\omega\in\Omega_{s-1}} \frac{M(\omega)+k}{N(\omega)+M(\omega)+k}p(\omega)\frac{M(\omega)}{N(\omega)+M(\omega)} + \frac{M(\omega)+k}{N(\omega)+M(\omega)+k}p(\omega)\frac{N(\omega)}{N(\omega)+M(\omega)} = \\
\sum_{\omega\in\Omega_{s-1}} \frac{N(\omega)}{N(\omega)+M(\omega)}p(\omega) = \sum_{\omega\in\Omega_{s-1}} W_{s-1}(\omega)p(\omega) = E[W_{s-1}]
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

В предпредпоследнем переходе мы воспользовались `https://www.wolframalpha.com/input?i=%28m+%2B+k%29+%2F+%28n+%2B+m+%2B+k%29+m%2F%28n+%2B+m%29+%2B+%28m%29+%2F+%28n+%2B+m+%2B+k%29+n%2F%28n+%2B+m%29`.

$$p(\text{s th is white})E[W_s|\text{s th is white}]+(1-p(\text{s th is white}))E[W_s|\text{s th isn't white}] = E[W_{s-1}]E[W_s|\text{s th is white} \tag{2.4}$$

3. Случайный диодный мост с замыканием

Убьём двух зайцев, разделив Ω на события «E открыто» (E) и «E закрыто» ($\overline{E}$).

S — success.

$$P(S|E) = P(A\cup C)\cdot P(B\cup D) = (1-P(\overline{AC}))^2 = (1-(1-p)^2)^2 = 4p^2-4p^3+p^4 \tag{3.1}$$

$$P(S|\overline{E}) = P(AB\cup CD) = P(AB)+P(CD)-P(ABCD) = 2p^2-p^4 \tag{3.2}$$

$$P(S) = P(E)P(S|E)+P(\overline{E})P(S|\overline{E}) = p(4p^2-4p^3+p^4)+(1-p)(2p^2-p^4) = 2p^5-5p^4+2p^3+2p^2 \tag{3.3}$$

$$P(E|S) = \frac{P(E)P(S|E)}{P(S)} = \frac{p(4p^2-4p^3+p^4)}{2p^5-5p^4+2p^3+2p^2} \tag{3.4}$$

4. Диффур потребления

4.1. Для случая одного механизма

$p = P_1, (1-p) = P_0$.

Записав условие задачи, получим определение дифференцируемости:

$$p(t+\Delta t) = p(t) - p(t)(\alpha\Delta t + o(\Delta t)) + (1-p(t))(\beta\Delta t + o(\Delta t)) \tag{4.1}$$

То есть диффур: $p' = -\alpha p + \beta(1-p) = (-\alpha - \beta)p + \beta$

4.2. Общий случай

Случаи, когда мутировало больше одного механизма случаются с вероятностью $o(\Delta t)$, их конечное количество, так что и сумма такова.

$$\begin{aligned} P_r(t+\Delta t) &= P_r(t) + \sum_{k=0}^{n} P_k(t)p_{kr} - P_r(t)\left(\alpha\binom{r}{1}\Delta t + o(\Delta t)\right) \\ &= P_r(t) - P_r(t)\alpha r\Delta t + P_{r-1}(t)\beta(n-r+1)\Delta t + P_{r+1}(t)\alpha(n-r+1)\Delta t + o(\Delta t) \end{aligned} \quad (4.2)$$

(Полагаем $P_i(t) = 0$ для $i \notin [0, n]$)

Получаем систему диффуров:

$$P_r'(t) = P_r(t)((n-r)\beta - r\alpha)\alpha r + P_{r-1}(t)\beta(n-r+1) + P_{r+1}(t)\alpha(n-r+1) \quad \forall r \in [0..n] \quad (4.3)$$

ЛОС с разреженной матрицей

5. Независимость случайных величин

Интуитивно: какие же они независимые, они чётко выражаются одна через другую, то есть одна даёт полную информацию о другой.

Проверим определение: $f_{\xi,\nu}(x,y) = f_\xi(x)f_\nu(y)$ (опять интуитивно: не-ноль на пути не представим в виде тензроного произведения).

Но это уже гарантированно неправда: например, для $x = \frac{1}{2}, y = \cos(1)$: $f_{\xi,\nu}(x,y) = 0$, ведь эти условия несовместны в окрестности.

С другой стороны, оба $f_\xi(x), f_\nu(y)$ не нули, так как в окрестности функции дифференцируемы, производная обратной функции не ноль, функция плотности очень даже не ноль.

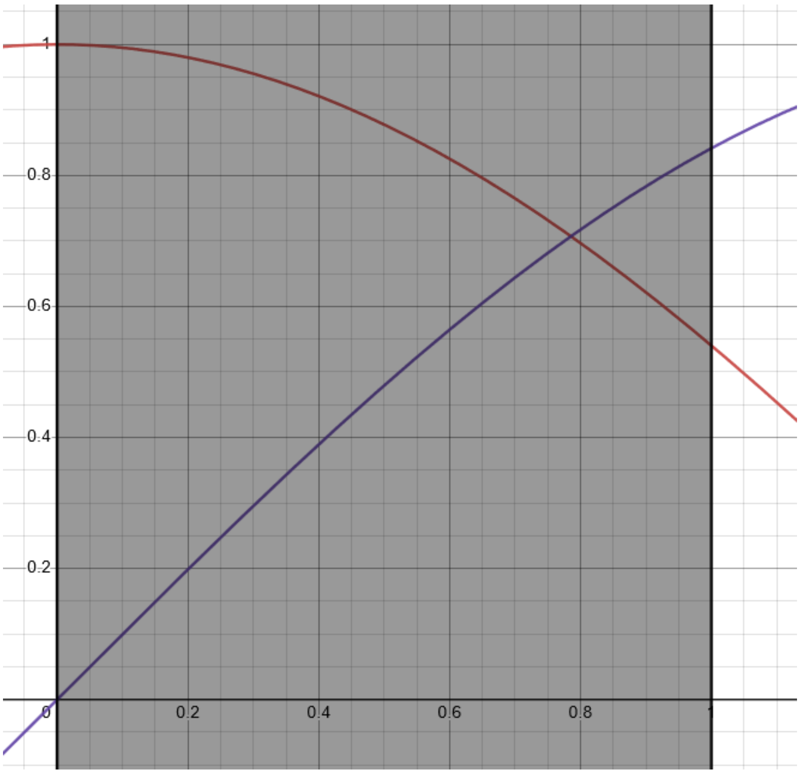

Рис. 1: Случайные величины

В силу возрастания синуса на Ω:

$$P(a \leqslant sin(\omega) \leqslant b) = P(\arcsin(a) \leqslant \omega \leqslant \arcsin(b)) \tag{5.1}$$

6. Парадокс Монти Холла

На самом деле, он должен был понять про апостериорные вероятности помилования для трёх заключённых следующее: у него — $1/3$, у названного — 0, у не названного $2/3$.

В терминах шоу — вопрошающему стоит сменить тело, а не оставаться в своём.

Если формально:

Назовём их R_1 (названный), R_2 (оставшийся), R_3 (он).

$\Omega = (R_i, S_j)$

$$p(R_2|S_1) = \frac{p(R_2S_1)}{p(S_1)} = \frac{p(R_2)p(S_1|R_2)}{p(R_2)p(S_1|R_2) + p(R_3)p(S_1|R_3)} = \frac{1/3 \cdot 1}{1/3 \cdot 1 + 1/3 \cdot 1/2} = \frac{2}{3} \tag{6.1}$$

В чём не прав заключённый? Почему он решил, что $1/2$? Если есть несколько событий, это ещё не значит, что они равновероятны.

Информации о себе он действительно не получил, так как в любом случае услышал бы неизвестную фамилию.

А вот об оставшемся человеке — информации добавилось: если бы он был помилован, вероятность, что стражник об этом скажет — 100%, а если помилован был автор, то лишь 50%. Вероятность помилования от обоих незнакомцев распределилась к нему.

Доп. вопрос Когда ξ и ξ^2 независимы?

$$p_{\xi,\xi^2}(x,y) = p_\xi(x)p_{\xi^2}(y) \tag{6.2}$$

Для отрицательных y это тривиально. Рассмотрим, например, положительные ξ. Упорядочим по возрастанию и занумеруем в этом порядке $\xi(\Omega) = x_1, ...x_n$.

Тогда $\xi^2(\Omega) = x_1^2, ...x_n^2$.

Совместный график будет выглядеть как парабола на прямоугольничке.

$$p_{\xi,\xi^2}(x,y) = \begin{cases} p_\xi(x) & x^2 = y \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{6.3}$$

Если найдутся два разных значения ξ^2: $y_1 = x_1^2, y_2 = x_2^2$, принимаемые с ненулевой вероятностью (на множестве ненулевой меры Лебега-Стилтьеса) то найдутся и два различных значения ξ с тем же свойством: x_1, x_2.

Тогда равенство 6.2 нарёшается при $x = x_1, y = y_2$.

Иначе (если все значения, принимаемые ξ с положительной вероятностью, одинаковы) ξ^2 независима с чем угодно.

7. Выпускной

Элементарные исходы: случайные векторы выборов — для каждого студента — то, куда он пошёл. Вероятность каждого: $\frac{1}{n^k}$.

По линейности матожидания достаточно посчитать матожидание количество пролетевших студентов в одном заведении:

$$E[N_{\text{fail}}] = E\left[\sum_{i=1}^{n} \text{failed}_i\right] = \sum_{s=1}^{n} E[\text{failed}_i] = nE[\text{failed}_i] \tag{7.1}$$

$$P([N_i = x]) = [\text{vec with N(i) = x}] = \frac{\binom{k}{x} \cdot (n-1)^{k-x}}{n^k} \tag{7.2}$$

$$E[\text{failed}_i] = E\left[\begin{cases} N_i - r & N_i \geqslant r, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}\right] = -r + \sum_{x=r}^{k} xP([N_i = x]) = -r + \sum_{x=r}^{k} xP([N_i = x]) = \\ -r + \frac{1}{n^r}\sum_{x=r}^{k} x\binom{k}{x} \cdot (n-1)^{k-x} \tag{7.3}$$

$$E[N_{\text{fail}}] = E\left[\sum_{i=1}^{n} \text{failed}_i\right] = \sum_{s=1}^{n} E[\text{failed}_i] = nE[\text{failed}_i] = -rn + \frac{1}{n^{r-1}}\sum_{x=r}^{k} x\binom{k}{x} \cdot (n-1)^{k-x} \tag{7.4}$$

Рассмотрим студента и заведение, которое он выбрал p_s — вероятность, что туда

8. Оптимизация

$$\begin{cases} 3(p - p^2) \leqslant 1 \\ 2p^2 \leqslant p \end{cases} \tag{8.1}$$

$1/2$ — достигается при $\{a, b, c, d\}; P(x) = 1/4; A = \{a, b\}, B = \{b, c\}, D = \{c, a\}$

9. Три вещи несовместные — как ты да я

$$0 = P(AB) \neq P(A)P(B) > 0 \tag{9.1}$$

Чтобы AB и $A \cup B$ были независимы:

$$p(AB \cap (A \cup B)) = p(ABA \cup ABB) = p(AB) = [\text{independence}] = p(AB)p(A \cup B) \tag{9.2}$$

То есть события должны быть либо несовместными, либо вместе составлять всё пространство.