

Типовик по линейной алгебре модуль 1:
Задание 6 «Кривые второго порядка»

Латыпов Владимир Витальевич,
ИТМО КТ М3138, **вариант 12**

26 сентября 2022 г.

Содержание

1	Формулировка условия	3
2	Решение	3
2.1	Случай 1	3
2.2	Случай 2	4
3	Иллюстрация	5

1. Формулировка условия

Утверждение 1. Условие таково:

12. Оси гиперболы совпадают с осями координат. Гипербола проходит через точки пересечения параболы $x^2 = 2y$ с прямой $x - 2y + 6 = 0$.

Составить уравнение этой гиперболы.

Сделать рисунок.

2. Решение

☞ Что исправлено? Раньше не учитывалось, что, исходя из формулировки задачи оси гиперболы могут «совпадать с осями координат» двумя разными способами ☞

Для начала найдём эти точки пересечения, решив квадратное уравнение (для обоих случаев они совпадают):

$$\begin{cases} x^2 = 2y \\ x - 2y + 6 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} y = \frac{x^2}{2} \\ x - 2 \cdot \frac{x^2}{2} + 6 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$x^2 - x - 6 = 0 \quad (3)$$

$$\begin{cases} x = -2, y = \frac{2^2}{2} = 2 \\ x = 3, y = \frac{3^2}{2} = 4.5 \end{cases} \quad (4)$$

То есть гипербола должна проходить через точки $(-2, 2)$ и $(3, 4.5)$.

У параболы, указанной в условии, остаётся только два параметра — главная и мнимая полуоси. Причём есть два варианта их ориентации:

1. Главная полуось совпадает с осью OX , мнимая — с осью OY .
2. Наоборот: Главная полуось совпадает с осью OY , мнимая — с осью OX .

.

Рассмотрим оба случая.

2.1. Случай 1

Найдём их значения, потребовав, что гипербола проходит там, где надо.

$$\begin{cases} \frac{(-2)^2}{a^2} - \frac{2^2}{b^2} = 1 \\ \frac{3^2}{a^2} - \frac{(\frac{9}{2})^2}{b^2} = 1 \end{cases} \quad (5)$$

За α обозначим a^2 , за β — b^2 , помним, что оба параметра больше нуля.

$$\begin{cases} 4\beta - 4\alpha = \alpha\beta \\ 9\beta - \frac{81}{4}\alpha = \alpha\beta \end{cases} \quad (6)$$

$$4\beta - 4\alpha = 9\beta - \frac{81}{4}\alpha \quad (7)$$

$$\frac{65}{4}\alpha = 5\beta \quad (8)$$

$$\beta = \frac{13}{4}\alpha \quad (9)$$

$$4\left(\frac{13}{4}\alpha\right) - 4\alpha = \alpha \cdot \frac{13}{4}\alpha \quad (10)$$

$$13 - 4 = \frac{13}{4}\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{9 \cdot 4}{13} \Rightarrow a = \sqrt{\alpha} = \frac{6}{\sqrt{13}} \quad (11)$$

$$\beta = \frac{13}{4}\alpha = \frac{13}{4} \cdot \frac{9 \cdot 4}{13} = 9 \Rightarrow b = \sqrt{\beta} = 3 \quad (12)$$

Таким образом, уравнение гиперболы в этом случае:

$$\frac{13}{36}x^2 - \frac{y^2}{9} = 1 \quad (13)$$

2.2. Случай 2

Аналогичные уравнения, но с переменной главной и мнимой полуосей места-ми гарантируют нам прохождение через точки пересечения:

$$\begin{cases} \frac{(-2)^2}{b^2} - \frac{2^2}{a^2} = 1 \\ \frac{3^2}{b^2} - \frac{(\frac{9}{2})^2}{a^2} = 1 \end{cases} \quad (14)$$

Всё ещё за α обозначим a^2 , за β — b^2 . И всё ещё помним, что оба параметра больше нуля.

$$\begin{cases} 4\alpha - 4\beta = \alpha\beta \\ 9\alpha - \frac{81}{4}\beta = \alpha\beta \end{cases} \quad (15)$$

$$4\alpha - 4\beta = 9\alpha - \frac{81}{4}\beta \quad (16)$$

$$\beta \left(\frac{81}{4} - 4 \right) = 5\alpha \quad (17)$$

$$\beta \left(\frac{65}{4} \right) = 5\alpha \quad (18)$$

$$\begin{cases} \alpha = \beta \left(\frac{65}{20} \right) \\ 4\alpha - 4\beta = \alpha\beta \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} \alpha = \beta \left(\frac{65}{20} \right) \\ 4\beta \left(\frac{65}{20} \right) - 4\beta = \beta \left(\frac{65}{20} \right) \beta \end{cases} \quad (20)$$

$$4 \left(\frac{65}{20} \right) - 4 = \frac{65}{20} \beta \quad (21)$$

$$\beta = \frac{4 \left(\frac{65}{20} \right) - 4}{\frac{65}{20}} = \frac{36}{13} \quad (22)$$

$$\alpha = \frac{65}{20} \times \frac{36}{13} = 9 \quad (23)$$

Кто бы мог подумать: мы решили то же уравнение, только с α и β изменёнными местами. И получили тот же самый ответ. Следовательно, он уж точно верный.

Соответственно, уравнение второй гиперболы:

$$\frac{13}{36}y^2 - \frac{x^2}{9} = 1 \quad (24)$$

3. Иллюстрация

(здесь будет нарисован чертёж)

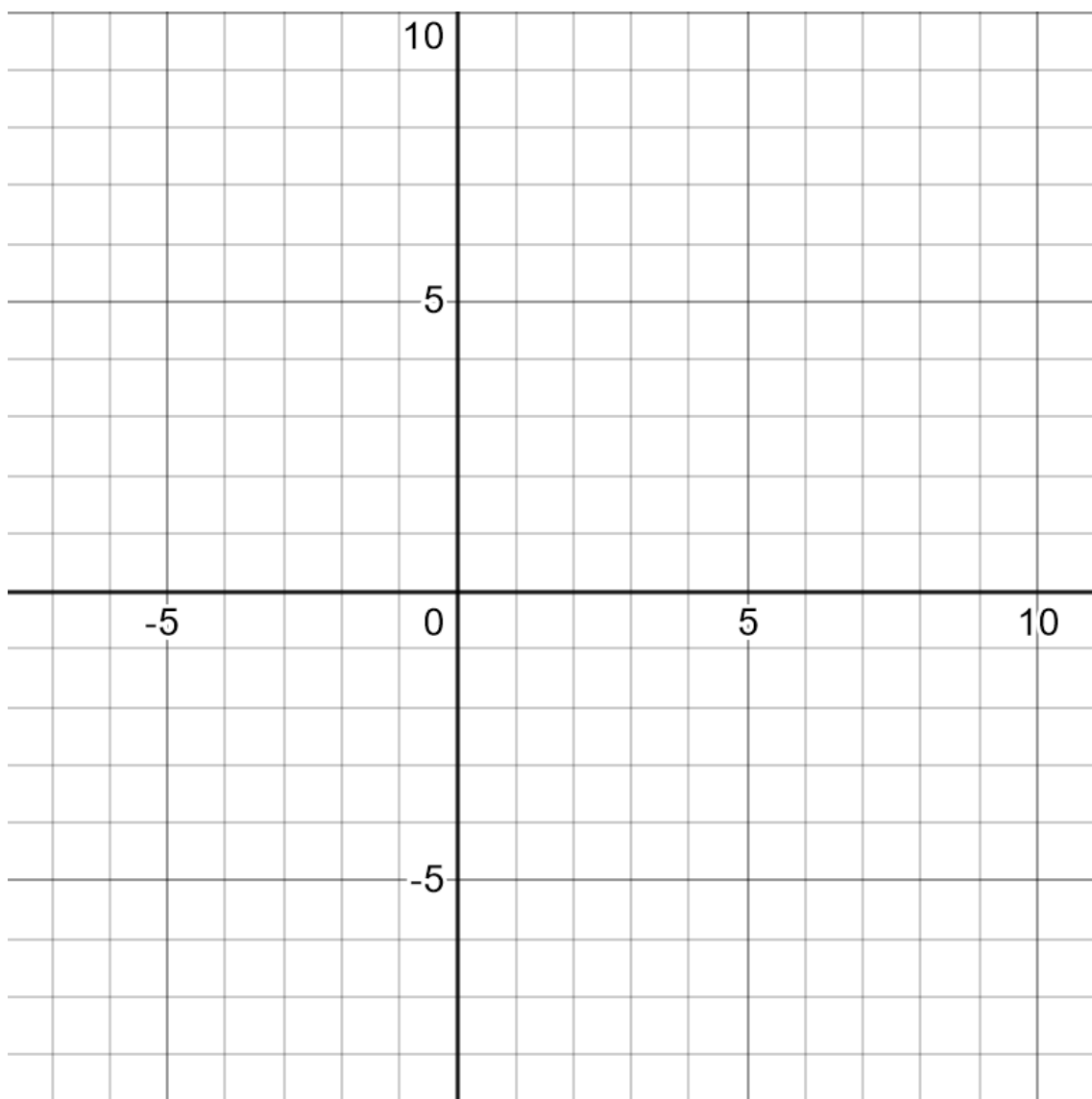


Рис. 1: Чертёж