

# Типовик по линейной алгебре 2, задание 7»

Латыпов Владимир Витальевич,  
ИТМО КТ М3138, **вариант 10**

26 сентября 2022 г.

## 1. Формулировка условия

**Утверждение 1.** Задача. Заданы три линейные формы, определенные на векторах  $x(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$  пространства .

$$\begin{cases} (f^1, x) = -8\xi^1 + \xi^2 - 8\xi^3 \\ (f^2, x) = 9\xi^1 + \xi^2 + 4\xi^3 \\ (f^3, x) = -9\xi^1 - 3\xi^2 - 2\xi^3 \end{cases} \quad (1)$$

1. Доказать, что они образуют базис в пространстве  $(\mathbb{R}^3)^*$  линейных форм;
2. Найти базис  $\{e_1, e_2, e_3\}$  пространства  $\mathbb{R}^3$ , сопряженный к базису  $\{f^1, f^2, f^3\}$ .
3. С помощью теории линейных форм найти координаты вектора  $x = (4, -2, 13)^\top$  в этом базисе и проверить вычисления прямым разложением вектора  $x$  по базису  $\{e_1, e_2, e_3\}$  пространства  $\mathbb{R}^3$ .
4. Найти коэффициенты формы  $(f, x) = 5\xi^1 - 4\xi^2 + 2\xi^3$  относительно базиса  $\{e_1, e_2, e_3\}$  пространства  $\mathbb{R}^3$ . Вычисления проверить прямым разложением формы  $f$  по базису  $\{f^1, f^2, f^3\}$  пространства  $(\mathbb{R}^3)^*$ .

## 2. Проверка базовости

Так как их и так  $3 = \dim \mathbb{R}^3$ , достаточно проверить линейную независимость. Для этого заметим, что в каноническом базисе

$$\begin{cases} f^1 = (a_1^1, a_2^1, a_3^1) = (-8, 1, -8) \\ f^2 = (a_1^2, a_2^2, a_3^2) = (9, 1, 4) \\ f^3 = (a_1^3, a_2^3, a_3^3) = (-9, -3, -2) \end{cases} \quad (2)$$

Тогда достаточно проверить ранг матрицы  $\begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \\ f^3 \end{pmatrix}$ .

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} -8 & 1 & -8 \\ 9 & 1 & 4 \\ -9 & -3 & -2 \end{pmatrix} = 3 \quad (3)$$

То есть они ЛН  $\Rightarrow$  получаем успех, это базис.

### 3. Нахождение сопряжённого базиса

Необходимое и достаточное условие сопряжённости — чтобы  $f^i(e_j) = \delta_j^i$ , то есть чтобы одни друг другу действительно были координатными функциями. То есть нужно решить матричное уравнение  $F \cdot E = \Delta$ . (За  $\Delta$  считаем матрицу символов Кронекера).

$$F = \begin{pmatrix} -8 & 1 & -8 \\ 9 & 1 & 4 \\ -9 & -3 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{23} & \frac{13}{23} & \frac{6}{23} \\ \frac{-9}{23} & \frac{-28}{23} & \frac{-20}{23} \\ \frac{-9}{23} & \frac{-33}{46} & \frac{-17}{46} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Тогда

$$e_1 = \begin{pmatrix} \frac{5}{23} \\ \frac{-9}{23} \\ \frac{-9}{23} \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} \frac{13}{23} \\ \frac{-28}{23} \\ \frac{-33}{46} \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} \frac{6}{23} \\ \frac{-20}{23} \\ \frac{-17}{46} \end{pmatrix} \quad (5)$$

## 4. Раскладываем контрвектор по базису двумя способами

### 4.1. Через ковекторы

Для нахождения очередной координаты достаточно применить очередную координатную функцию из сопряжённого базиса.

$$\eta^1 = f^1(x) = \begin{pmatrix} -8 & 1 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 13 \end{pmatrix} = -138 \quad (6)$$

$$\eta^2 = f^2(x) = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 13 \end{pmatrix} = 86 \quad (7)$$

$$\eta^3 = f^3(x) = \begin{pmatrix} -9 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 13 \end{pmatrix} = -56 \quad (8)$$

Получим, что  $x$  в базисе  $e_i$  — это  $\begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \\ \eta^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -138 \\ 86 \\ -56 \end{pmatrix}$

## 4.2. Через решение системы

Альтернативный вариант — решить систему

$$E \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \\ \eta^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 13 \end{pmatrix} \quad (9)$$

Решая это через обратную матрицу (базис же), получаем:

$$\begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \\ \eta^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -138 \\ 86 \\ -56 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Решено через [matrixcalc.org](https://matrixcalc.org/slu.html#solve-using-inverse-matrix-method(%7B%7B5/23,13/23,6/23,4%7D,%7B-9/23,-28/23,-20/23,-2%7D,%7B-9/23,-33/46,-17/46,13%7D%7D)): `https://matrixcalc.org/slu.html#solve-using-inverse-matrix-method(%7B%7B5/23,13/23,6/23,4%7D,%7B-9/23,-28/23,-20/23,-2%7D,%7B-9/23,-33/46,-17/46,13%7D%7D)`

Символично, что в процессе возникла как раз та самая матрица  $F$  и что действия далее были такие же, что и в первом способе.

## 5. Раскладываем ковектор по базису двумя способами

### 5.1. Через контрвекторы

Для нахождения очередной координаты достаточно применить очередную координатную функцию из сопряжённого базиса.

$$\zeta_1 = e_1(f) = (5 \quad -4 \quad 2) \begin{pmatrix} \frac{5}{23} \\ \frac{-9}{23} \\ \frac{-9}{23} \end{pmatrix} = \frac{43}{23} \quad (11)$$

$$\zeta_2 = e_2(f) = (5 \quad -4 \quad 2) \begin{pmatrix} \frac{13}{23} \\ \frac{-28}{23} \\ \frac{-33}{46} \end{pmatrix} = \frac{144}{23} \quad (12)$$

$$\zeta_3 = e_3(f) = (5 \quad -4 \quad 2) \begin{pmatrix} \frac{6}{23} \\ \frac{-20}{23} \\ \frac{-17}{46} \end{pmatrix} = \frac{93}{23} \quad (13)$$

Получим, что  $f$  в базисе  $f^i$  — это  $(\zeta_1 \quad \zeta^2 \quad \zeta^3) = (\frac{43}{23} \quad \frac{144}{23} \quad \frac{93}{23})$

Как раз заметим, что

$$(\frac{43}{23} \quad \frac{144}{23} \quad \frac{93}{23}) F = (5 \quad -4 \quad 2) \quad (14)$$

### 5.2. Через решение системы

Альтернативный вариант — решить систему

$$(\zeta_1 \quad \zeta^2 \quad \zeta^3) F = (5 \quad -4 \quad 2) \quad (15)$$

То есть

$$F^\top \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta^2 \\ \zeta^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (16)$$

Решая это через обратную матрицу (базис же), получаем:

$$(\frac{43}{23} \quad \frac{144}{23} \quad \frac{93}{23}) \quad (17)$$

Решено через matrixcalc.org: [https://matrixcalc.org/slu.html#solve-using-inverse-matrix-method\(%7B%7B-8,9,-9,5%7D,%7B1,1,-3,-4%7D,%7B-8,4,-2,2%7D%7D\)](https://matrixcalc.org/slu.html#solve-using-inverse-matrix-method(%7B%7B-8,9,-9,5%7D,%7B1,1,-3,-4%7D,%7B-8,4,-2,2%7D%7D))

Символично, что в процессе возникла как раз та самая матрица  $E$  и что действия далее были такие же, что и в первом способе. А также то, что в обеих частях текст почти совпадает...