Типовик по линейной алгебре модуль 2: Задания 3 «Функции комплексного переменного» и 4 «Нахождение корней многочлена»

Латыпов Владимир Витальевич,
ИТМО КТ M3138, ***вариант 12***

26 сентября 2022 г.

1. Формулировка условия задания 3

Утверждение 1. Условие таково:

Найти все значения функции в указанной точке:

12. $sin(1-5i)$

2. Решение задания 3

Заметим, что функция однозначна. По нашем определению синуса комплексного числа:

$$sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{i(x+yi)}-e^{-i(x+yi)}}{2i} = \frac{e^{-y+ix}-e^{y-ix}}{2i} = \frac{e^{-y}e^{ix}-e^{y}e^{-ix}}{2i} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} sin(1-5i) = \frac{e^5e^i - e^{-5}e^{-i}}{2i} = \\ -\frac{i}{2}\left(e^5(\cos 1 + i\sin 1) - e^{-5}(\cos 1 - i\sin 1)\right) = \\ -\frac{i}{2}\left(\cos 1(e^5 - e^{-5}) + i\sin 1(e^5 + e^{-5})\right) = \\ \frac{1}{2}\sin 1(e^5 + e^{-5}) + \frac{1}{2}i\cos 1(e^{-5} - e^5) \end{aligned} \tag{2}$$

3. Формулировка условия задания 4

Утверждение 2. Условие таково:

Найти корни многочлена и изобразить их на комплексной плоскости.

12. z^4+z^2-2

4. Решение задания 4

Положим $t = z^2$.

$$t^2 + t - 2 = 0 \tag{3}$$

$$t_{1,2} = \{-2, 1\} \tag{4}$$

Для каждого значения t есть два решения уравнения $z^2 = t$ (то есть $z = \sqrt{t}$):

$$\begin{cases} z = 1 \\ z = e^{i\pi} = -1 \\ z \in \sqrt{-2} = \sqrt{2e^{i\pi}} = \{\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{2}}, \sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{2}}\} \end{cases} \tag{5}$$

То есть значения:

$$\{1, -1, i\sqrt{2}, -i\sqrt{2}\} \tag{6}$$

5. Иллюстрация к заданию 4