

Домашнее задание. Практика 4. Черновик

4 марта 2023

1 Парадокс шевалье де Мере

Что вероятнее: при бросании четырех игральных костей хотя бы на одной получить единицу или при 24 бросаниях двух костей хотя бы один раз получить две единицы?

2 Задача Банаха о спичечных коробках

Некий математик носит с собой два коробка спичек, в каждом из которых первоначально было по N спичек. Когда ему нужна спичка, он выбирает наугад один из коробков. Найти вероятность того, что когда математик вынет в первый раз пустой коробок, в другом будет $г$ спичек.

3 Продолжение задачи Банаха о спичечных коробках

Некто носит с собой два коробка спичек A и B , в которых первоначально было M и N спичек соответственно. Когда ему нужна спичка, он берет её из коробка A с вероятностью p или из коробка B с вероятностью $1 - p$. Найти вероятность того, что когда математик вынет в первый раз пустой коробок, в другом будет $г$ спичек.

4

Технический контроль проверяет изделия, каждое из которых независимо от других изделий может с вероятностью p оказаться дефектным. а) Какова вероятность того, что из 10 проверенных изделий только одно оказалось дефектным? б) Найти вероятность того, что первым дефектным оказалось k -е проверенное изделие. в) Найти вероятность того, что последующие 10 изделий окажутся годными, при условии, что предыдущие $l = 5$ изделий были также годными. Зависит ли эта вероятность от l ? г) Найти распределение числа обнаруженных при проверке годных изделий между двумя последовательными дефектными.

5

На отрезок АВ длины a брошены наудачу, независимо одна от другой, шесть точек. Найти вероятность того, что: а) две точки будут находиться от точки А на расстоянии, меньшем b , а четыре — на расстоянии, большем b ; б) две точки будут находиться от А на расстоянии, меньшем c , одна — на расстоянии, не меньшем c и не большем b , а три точки — на расстоянии, большем b .

6 Ставки на монетку

Происходят подбрасывания симметричной монетки до первого выпадения орла. За каждое выпадение решки платят вдвое больше, чем за предыдущее, начиная с 1 рубля. Какое математическое ожидание выплаченной суммы? Сколько разумно заплатить за то, чтобы эти выплаты (в одной серии подбрасываний) делались в Вашу пользу?

7

Какое условие на последовательность влечёт большую априорную вероятность: то, что вся она составлена из двоичных записей простых чисел, больших 100, или то, что в каждом отрезке длины 3 количество нулей и единиц различается ровно на 1?

8 Сходимость у Пуассона

Доказать, что в теореме Пуассона имеет место скорость сходимости $\sup_k |P_n(k) - \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}| \leq \frac{2\lambda^2}{n}$

9 Теорема Берри-Эссеена

$$F_n(x) = P_n(-\infty, x); (= P(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq x).$$

Из интегральной теоремы Муавра-Лапласа вывести, что $\sup_{-\infty \leq x \leq \infty} |F_n(x) - \Phi(x)| \leq \frac{p^2 + q^2}{\sqrt{npq}}$.

10 Число превышений над нулями

$$p = 1/2, Z_n = 2S_n - n, \sup_i |\sqrt{\pi n} P(Z_{2n} = i) - e^{-i^2/4n}| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

11 Оценка Бернштейна

Независимые бернуллиевские с.в. $P(\xi_i = 1) = p > 0, P(\xi_i = 0) = 1 - p$:
 $\exists a > 0 : P(|\frac{S_n}{n} - (2p - 1)| \geq \epsilon) \leq 2e^{-a\epsilon^2 n}$

12 Первый и единственный успех

Найти условную вероятность того, что первая единица («успех») появится на m -м шаге, при условии, что на всех n шагах «успех» произошел только один раз.

13 Задачи на медианы

Пусть ξ — дискретная случайная величина. Рассмотрим следующие три способа определения медианы $\mu = \mu(\xi)$ этой случайной величины:

- (a) $\max(P(\xi > \mu), P(\xi < \mu)) \leq 1/2$;
- (b) $P(\xi < \mu) \leq 1/2 \leq P(\xi \leq \mu)$;
- (c) $\mu = \inf\{x \in R : P(\xi \leq x) \geq 1/2\}$.

Пусть M_a, M_b и M_c — множества медиан по каждому из определений (a), (b) и (c) соответственно. В каком взаимоотношении находятся эти множества?