

Типовик по линейной алгебре
«Дополнительное ДЗ №1»

Латыпов Владимир Витальевич,
ИТМО КТ М3138, **вариант 12**

7 января 2022 г.

1. Формулировка условия

Утверждение 1. Условие таково: Линейные подпространства L_1, L_2 заданы системами линейных уравнений.

1. Найти базисы линейных подпространств
2. Доказать, что являются прямыми дополнениями друг друга до \mathbb{R}^5
3. Матрица перехода от канонического базиса к базису суммы
4. Разложить вектор $x = (2 \ 4 \ -2 \ 5 \ -3)^T$ по L_1, L_2

2. Нахождение базисных векторов

Для начала решим системы:

$$L_1 = x_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$L_2 = x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

3. Доказательство прямодополняемости

Заметим, что ранг сконкатенированной матрицы, то есть размерность суммы, равен $5 = 2 + 3$, а значит, пересечение — $\{0\}$, то есть они действительно дизъюнкты и в сумме дают \mathbb{R}^5 .

$$\text{rg} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 5 \quad (3)$$

4. Матрица перехода от канонического базиса к базису суммы

Если действительно имеется в виду от канонического базиса к базису суммы, то мы просто запишем ту матрицу базиса суммы и профит.

Если наоборот нужно, тогда, зная, что матрица перехода в обратную сторону — это обратная матрица, а матрица перехода из базиса суммы в канонический базис — это просто наша сконкатенированная матрица, поймём, что всё, что нужно сделать — это её инвертировать.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -32 & 17 & -4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Это и будет матрицей перехода.

5. Разложение вектора

Раз уж у нас есть матрицы перехода, перейдём в базис суммы подпространств, тогда первые две координаты будут коэффициентами при разложении x_1 по базису L_1 , а оставшиеся три — x_2 по L_2 .

Переходить будем простым домножением:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -32 & 17 & -4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$x_1 = 2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$x_2 = -2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Заметим, что

$$x_1 + x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = x \quad (8)$$