Типовик по линейной алгебре «Дополнительное домашнее задание №4»

Латыпов Владимир Витальевич, ИТМО КТ М3138, **Вариант 10**

26 мая 2022 г.

1. Формулировка условия

Утверждение 1. Условие можно найти здесь: https://drive.google.com/drive/folders/1SidXsfLaleNJ1MgryzOB-4zpUpHHtcAN

2. Ортогонализация и дополнение со скалярным произведением через матрицу Грама

Работаем с вещественым пространством, матрица Грама скалярного произведения будет симметрична.

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Через неё вычисляем $a_i \Gamma \overline{a_i} = a_i \Gamma a_i$:

https://matrixcalc.org/#%7B%7B1,0,1%7D%7D*%7B%7B2,-2, -1%7D,%7B-2,5,2%7D,%7B-1,2,2%7D%7D*%7B%7B1%7D,%7B0%7D, %7B1%7D%7D

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
 (2)

Тогда

$$\begin{split} \langle a_1, a_1 \rangle &= 2 \\ \langle a_1, a_2 \rangle &= 1 \\ \langle a_1, a_3 \rangle &= 1 \\ \langle a_2, a_2 \rangle &= 11 \\ \langle a_2, a_3 \rangle &= 4 \\ \langle a_3, a_3 \rangle &= 2 \end{split}$$

Можно через матричные операции получить сразу матрицу попарных скалярных произведений

https://matrixcalc.org/#%7B%7B1,0,1%7D,%7B0,1,1%7D,%7B0,0,1%7D%7D*%7B%7B2,-2,-1%7D,%7B-2,5,2%7D,%7B-1,2,2%7D%7D*%7B%7B1,0,0%7D,%7B0,1,0%7D,%7B1,1,1%7D%7D

Как раз получится, что

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 11 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$
(3)

$$b_1 = a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$b_2 \leftrightarrow a_2 - \frac{\langle b_1, a_2 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} b_1 = a_2 - \frac{1}{2} b_1 \rightsquigarrow 2a_2 - a_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$b_3 \leftarrow a_3 - \frac{\langle b_1, a_3 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} b_1 - \frac{\langle b_2, a_3 \rangle}{\langle b_2, b_2 \rangle} b_2 = a_3 - \frac{1}{2} b_1 - \frac{7}{42} b_2 = a_3 - \frac{3}{6} b_1 - \frac{1}{6} b_2$$

$$(6)$$

$$\rightsquigarrow 6a_3 - 3b_1 - b_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Теперь с системой.

Для попадения в L^{\perp} нужно, чтобы $\langle x, b_i \rangle$ был нулём. То есть

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Gamma \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{8}$$

Тогда матрица системы:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Gamma = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 3 \\ -4 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$
 (9)

Получаем, что $L^\perp=\operatorname{span}egin{pmatrix} 3 \ 0 \ 2 \end{pmatrix}$

Тогда система уравнений для L:

$$(3 \quad 0 \quad 2) \Gamma \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$
 (10)

Считая, получам:

$$(4 -2 1) x = 0$$
 (11)

3. Сопряжённый оператор

$$\Gamma=G(e_1,e_2)=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix} \tag{12}$$

Тогда

$$A^{\circledast} = \overline{\Gamma^{-1}} A^* \overline{\Gamma} = \Gamma^{-1} A^* \Gamma = \Gamma^{-1} \overline{A^T} \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -2 * i & 1 \end{pmatrix}$$
 (13)

Получили оператор, который, согласно matrixcale, как и сопряжённый, имеет собственные числа $1\pm\sqrt{2}i$. Понятно, что получилось их совпадение за счёт того, что они сопряжённы друг другу у самого оператора.

В общем же случае у сопряжённых операторов собственные числа сопряжённы соответственным с.ч. друг друга.