Теоретический конспект по теорверу

Владимир Латыпов

donrumata03@gmail.com

Содержание

1 Числовые характеристики случайных величин

Определение 1.1: Пусть X — случайная величина. Тогда её математическим ожиданием называется число

$$\mathbb{E}X = \int_{\mathbb{R}} x \,\mathrm{d}F_X(x)$$

(интеграл Лебега-Стилтьеса)

Замечание: Если X — дискретная случайная величина, то

$$\mathbb{E}X = \sum_{x \in \mathbb{R}} x P_X(x)$$

Замечание: Если X — абсолютно непрерывная случайная величина, то

$$\mathbb{E}X = \int_{\mathbb{R}} x p_X(x) \,\mathrm{d}x$$

Свойство 1.1.1:

Определение 1.2: Пусть X — случайная величина. Тогда её дисперсией называется число

$$\operatorname{Var} X = \mathbb{D}X = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2$$

Стандартным отклонением случайной величины X называется число $\sigma_X = \sqrt{\operatorname{Var} X}$. Она часто используется вместо дисперсии, потому что она имеет ту же размерность, что и X.

Определение 1.3: Пусть X — случайная величина. Тогда для $\alpha \in (0, 1)$

$$q_\alpha \text{— квантиль порядка } \alpha \text{— число, такое что } \begin{cases} P\left(x \geq q_\alpha\right) \geq 1 - \alpha \\ P\left(x \leq q_\alpha\right) \geq \alpha \end{cases}$$

Для непрерывной случайной величины X квантиль порядка α — это решение уравнения $F_X(x) = \alpha$. Если F_X строго возрастает, то $q_\alpha = F_X^{-1}(\alpha)$.

Для дискретной случайной величины X квантиль порядка α — это минимальное x, такое что $P_X(x) \geq \alpha$.

Определение 1.4: Медиана случайной величины $\operatorname{med} X$ — это квантиль порядка $\frac{1}{2}$.

Теорема 1.1:

$$\operatorname{med} X = \operatorname*{argmin}_{x \in \mathbb{R}} \mathbb{E}|X - x|$$

Матожидание тоже кое-что оптимизирует, но не так круто.

Теорема 1.2:

$$\mathbb{E}X = \operatorname*{argmin}_{x \in \mathbb{R}} \mathbb{E}(X - x)^2$$

Почему не так круто, спросите вы? Потому что матожидание — это не медиана, а среднее. А среднее — это для средних, посредственных людей. А медиана — это для лучших. © Copilot

Определение 1.5: Момент порядка k случайной величины X — это число $\mathbb{E}X^k$.

Определение 1.6: Центральный момент порядка k случайной величины X — это число $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^k$.

Определение 1.7: Абсолютный момент порядка k случайной величины X — это число $\mathbb{E}|X|^k$.

Определение 1.8: Абсолютный центральный момент порядка k случайной величины X — это число $\mathbb{E}|X - \mathbb{E}X|^k$.

Пример: Коэфициент асимметрии случайной величины X — это, с точностью до коэфициента, центральный момент порядка 3: $\mathbb{E}\frac{(X-\mathbb{E}X)^3}{\sigma^3}$.

Коэфициент эксцесса случайной величины X — это, с точностью до коэфициента, центральный момент порядка 4: $\mathbb{E}\frac{(X-\mathbb{E}X)^4}{\sigma^4} - 3$. Минус три потому что мы хотим, чтобы эксцесс нормального распределения был нулевой.

Определение 1.9: Мода случайной величины X — это число $\operatorname{argmax}_{x \in \mathbb{R}} p_X(x)$.