Практика 11. Характеристические функции

13 мая 2022 г.

Характеристической функцией с.в. X называется матожидание функции e^{itX}, где $t \in \mathbb{R}$:

$$\phi_X(t) = M(e^{itX}) = \int_{\mathbb{R}} e^{itX} f(X) dX$$

Докажем, что если момент случайной величины существует и конечен, то $M(X^n) = (-i)^n \frac{d^n}{dt^n}\phi_X(0)$. Заметим, что $\frac{d^n}{dt^n}\phi_X(t) = M(e^{itX}(iX)^n)$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{\phi(h) - \phi(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ith} - 1}{h} f(X) dX = \int_{\mathbb{R}} \lim_{h\to 0} \frac{e^{ith} - 1}{h} f(X) dX = \int_{\mathbb{R}} iXf(X) dX$$

Найдём харфункцию нормально распределенной с.в.: $\phi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}(2\pi)^{-1/2}e^{-x^2/2}dx = \int_{\mathbb{R}} \cos(tx)(2\pi)^{-1/2}e^{-x^2/2}dx$. Из полученного равенства составим дифференциальное уравнение и решим его:

$$\phi'(t) = \int_{\mathbb{R}} x\sin(tx)(2\pi)^{-1/2}e^{-x^2/2}dx = -\int_{\mathbb{R}} t\cos(tx)(2\pi)^{-1/2}e^{-x^2/2}dx = -t\phi(t)$$

Определим харфункцию для системы с.в. $\mathbf{X}$: $\phi_{\mathbf{X}}(T) = M(e^{i\mathbf{TX}})$. В том случае, когда начальные моменты системы с.в. соответствующего порядка существуют,

$$M(X_1^{r_1}, X_2^{r_2}, \dots, X_n^{r_n}) = i^{-\sum_{k=1}^n r_k} \frac{\partial^{r_1+r_2+\dots+r_n} E_{x_1,x_2,\dots}(t_1,t_2,\dots)}{\partial t_1^{r_1}\partial t_2^{r_2}\dots}(t_1 = t_2 = \dots = 0).$$