

ДЗ 12

(Непротиворечивая трансфинитность)

Владимир Латыпов
donrumata03@gmail.com

Содержание

1 Распространение противоречия	3
2 Перенос индукции из метатеории в \mathcal{S}_∞	3
3 Бесконечное доказательство	4
4 Modus Ponens	5

1 Распространение противоречия

Условие 1.1 Покажите, что, если $\vdash_{\infty} \neg(\alpha \vee \neg\alpha)$, то $\vdash_{\infty} 1 = 0$.

α и $\neg\alpha$ получаем через обращение правила Де Моргана.

Показываем с помощью схемы аксиом 10и которая доказуема в ФА, а значит её аналог из \mathcal{S}_{∞} :

$$\frac{\alpha \quad \neg\alpha}{\beta}$$

доказуем в \mathcal{S}_{∞} .

Теперь применим это правило к α и $\neg\alpha$, и $\beta = „1 = 0“$

2 Перенос индукции из метатеории в \mathcal{S}_{∞}

Условие 2.2 Покажите $\vdash_{\infty} \forall a. \forall b. a + b = b + a$.

Сначала покажем, что при каждом $a \equiv \bar{x}$,

$$\vdash_{\infty} \forall b. \bar{x} + b = b + \bar{x}$$

.

Для этого докажем для всех y утверждения вида $\vdash_{\infty} \bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$. И воспользуемся бесконечной индукцией для формулы $\varphi_{x(y)} = \bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$.

Теперь воспользуемся бесконечной индукцией ещё раз — по a : получим требуемое.

3 Бесконечное доказательство

НЕПРАВИЛЬНО: может быть доказательство конечного порядка с бесконечной индукцией (так как посылки могут иметь одинаковый номер)!

Идея от Штукена: использовать ту же формулу, но сказать, что раз мы хотим перебрать все доказательства, получив квантор всеобщности, нужно следовать за ходом каждого и опровергнуть его, а доказательства могут быть неограниченной длины. \rightarrow суммарная длина будет бесконечна.

Условие 3.3 Постройте утверждение, доказательство которого не может иметь порядок, меньший ω .

То есть нужно утверждение, которое не докать без бесконечной индукции.

Заметим, что доказательство, использующее только остальные, легко передать в доказательство в формальной арифметике:

- Каждое из верных арифметических (предметных) выражений легко доказывается за конечное число шагов.

•

$$\frac{\neg\alpha[x := \theta] \vee \delta}{(\neg\forall x.\alpha) \vee \delta}$$

— транслируется в

$$\frac{\alpha[x := \theta] \rightarrow \delta}{(\forall x.\alpha) \rightarrow \delta}$$

или

$$\frac{\neg\delta \rightarrow \neg\alpha[x := \theta]}{\neg\delta \rightarrow \neg(\forall x.\alpha)}$$

, а тут — дедукция + дедукция обратно + контрапозиция + схема аксиом 11.

- Слабые правила, сечение, ... — полнота КИВ.

Тогда возьмём утверждение $\forall x.\neg\omega(x, \overline{\sigma^1})$.

Оно не доказуемо в формальной арифметике, так как она непротиворечива.

4 Modus Ponens

Условие 4.4 Покажите, что если $\vdash_{\infty} \alpha$ и $\vdash_{\infty} \neg\alpha \vee \beta$, то $\vdash_{\infty} \beta$. (правило Modus Ponens — источник появления сечений в перенесённых доказательствах из формальной арифметики).

$$\frac{\frac{\alpha}{a \vee \alpha} \quad \neg\alpha \vee \beta}{a \vee \beta}$$