Практика 9
(тупые задачи про интегрирование)

Владимир Латыпов
donrumata03@gmail.com

Vladimir Latypov
donrumata03@gmail.com

Содержание

4 Нормальные величины в эллипсоиде

> **Определение 4.1** *(Нормальные величины в эллипсоиде)* Нормальные величины в эллипсоиде — это величины, которые подчиняются нормальному закону распределения, но только внутри эллипсоида. Это как, спросите вы, такое возможно? А вот так: если величина подчиняется нормальному закону распределения, то она подчиняется нормальному закону распределения в любом эллипсоиде. Но вот если величина подчиняется нормальному закону распределения в любом эллипсоиде, то она подчиняется нормальному закону распределения. Так что нормальные величины в эллипсоиде — это величины, которые подчиняются нормальному закону распределения в любом эллипсоиде.

Теорема 4.2 *(Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do.)* Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri tamen permagna accessio potest, si aliquod aeternum et infinitum impendere malum nobis opinemur. Quod idem licet transferre in voluptatem, ut.

Координаты точки A в пространстве (X, Y, Z) подчинены нормальному закону

$$f(x, y, z) = \frac{\rho^3}{\pi^{\frac{3}{2}} \sigma_x \sigma_y \sigma_z} e^{-\rho^2 \left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} + \frac{z^2}{\sigma_z^2} \right)}$$

Определить вероятность того, что точка A окажется внутри эллипсоида с главными полудиаметрами $k\sigma_x, k\sigma_y, k\sigma_z$.

То есть $E \subset \mathbb{R}^3$, $E : \frac{A_x^2}{(k\sigma_x)^2} + \frac{A_y^2}{(k\sigma_y)^2} + \frac{A_z^2}{(k\sigma_z)^2} \leq 1$

$$\int_E f(x, y, z) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \left[u = \frac{x}{\sigma_x}, v = \frac{y}{\sigma_y}, w = \frac{z}{\sigma_z} \right] = \frac{\rho^3}{\pi^{\frac{3}{2}} \sigma_x \sigma_y \sigma_z} \int_{u^2+v^2+w^2 \leq k^2} e^{-\rho^2 (u^2+v^2+w^2)} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}w =$$

$$= \begin{bmatrix} r^2 = u^2 + v^2 + w^2 \\ u = r \cos\psi \cos\varphi \\ v = r \cos\psi \sin\varphi \\ w = r \sin\psi \end{bmatrix} =$$

$$\frac{\rho^3}{\pi^{\frac{3}{2}} \sigma_x \sigma_y \sigma_z} \int_{0 \leq r \leq k} r^2 e^{-\rho^2 r^2} \, \mathrm{d}r \int_{-\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}} \cos\psi \, \mathrm{d}\psi \int_{-\pi \leq \varphi \leq \pi} \mathrm{d}\varphi =$$

$$= 2\pi \frac{\rho^3}{\pi^{\frac{3}{2}} \sigma_x \sigma_y \sigma_z} \int_{0 \leq r \leq k} r^2 e^{-\rho^2 r^2} \, \mathrm{d}r \int_{-\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}} \cos\psi \, \mathrm{d}\psi =$$

$$= 2 \cdot 2\pi \frac{\rho^3}{\pi^{\frac{3}{2}} \sigma_x \sigma_y \sigma_z} \int_{0 \leq r \leq k} r^2 e^{-\rho^2 r^2} \, \mathrm{d}r =$$

$$2 \cdot 2\pi \frac{\rho^3}{\pi^{\frac{3}{2}} \sigma_x \sigma_y \sigma_z} \cdot \frac{\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(k\rho) - 2k\rho e^{-k^2 \rho^2}}{4\rho^3}$$

Стремится к 1 при $k \to \infty$. Скорость сходимости — как у $\operatorname{erf}(k)$:

$$1 - v \propto e^{-k^2} \left(c_1 k + O\left(\frac{1}{k} \right) \right)$$

Bern