# Заметки практики по матанализу (самые разные семестры)

Латыпов Владимир (конспектор)
t.me/donRumata03, github.com/donRumata03, donrumata03@gmail.com
Семёнова Ольга Львовна (препод)

10 октября 2022 г.

# Содержание

Здесь можно вспомнить, чем мы всё это время занимались на практике.

«Стенограмма» практик в виде серии фотографий доски (насколько возможно оперативных) есть в телеграм «чатике с домашкамм» начиная с этого сообщения: `https://t.me/c/1512041988/198`.

В этом же документе содержится список методов, подходов и трюков, которые мы учимся применять на практике.

Крайне полезного освежать его в памяти перед контрольной по отношению к актуальной теме, а также в любой момент по отношению к давнему материалу.

Контрибьютинг всячески приветствуется, благо на Github делать это максимально удобно. Если вы решили, например, в какой-то момент пролистать свой конспект и вспомнить былое — добавьте в этот конспект то, чего нет здесь — помогите товарицам. Или, если что-то написанное здесь настолько вопиюще неверное, что режет ваши глаза и вызывает желание как можно быстрее это пофиксить — вперёд.

Насчёт технических деталей — в README описано по шагам, что надо установить, чтобы компилировать конспект у себя на компьютере, однако ничего не мешает дописать сюда в обычном текстовом редакторе нечто отдалённо напоминающее латех и послать Pull Request — я исправлю, если что-то не будет компилироваться.

Конспект организован по темам, в том порядке, в котором мы их проходим на практиках. Кроме того, примерно расставлены разделения, где заканчивается предыдущая практика и начинается следующая, но могут быть неточности, так как отдаётся приоритет организации по темам.

На данный момент такая картина готовности тем:

- Пределы — почти ничего
- Производные — совсем мало
- Интегралы — довольно полно, но тезисно
- Числовые ряды — вообще ничего
- Функциональные ряды — подробно
- Функции нескольких переменных — сами практики в процессе

# 1. Пределы

## 1.1. Таблица эквивалантности

Отличная ссылка на таблицу эквивалентности с нужными доказательствами: `http://mathserfer.narod.ru/node22.html`

Альтернативный вариант: `https://ib.mazurok.com/2013/05/19/table-equ/`

# 2. Дифференциальное исчисление одной переменной

## 2.1. Использование первой и второй производной для построения картины функции и её поведения у себя в голове и последующего её перенесения на бумагу

А именно:

- Находим область определения
- Смотрим поведение на границах области определения (значения, предел, асимптоты)
- Первая производная $\Longrightarrow$ делаем вывод о промежутках возрастания/убывания, экстремумах
- Вторая производная $\Longrightarrow$ выпуклость, точки перегиба

## 2.2. Оптимизация функций через поиск и проверку критических точек с помощью производной, например, параметры геометрических фигур

# 3. Интегральное исчисление одной переменной

## 3.1. Символьное вычисление неопределённых интегралов

- Таблица интегрирования основных элементарных функций
- Базовые приёмы интегрирования: замена переменной, ингегрирование по частям

- Тригонометрические и гиперболические подстановки
- Интегрирование по индукции, если функция содержит целочисленный параметр
- Сведение интеграла самого к себе, например, $\sqrt{x^2+a^2} \to \frac{t}{\sqrt{x^2+a^2}}t + \ldots \to$ по частям.
- Выделение полного квадрата под корнем или не под корнем в знаменателе, избавление от линейного члена
- Если есть подвыражения вида $x+a$, замена переменной $t = \frac{1}{x+a}$
- Выделение в числителе производной знаменателя, например, `https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%98%D0%BD%D1%82%D0%B5%D0%B3%D1%80%D0%B8%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5_%D1%80%D0%B0%D1%86%D0%B8%D0%BE%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D1%85_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B9#%D0%98%D0%BD%D1%82%D0%B5%D0%B3%D1%80%D0%B8%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5_%D0%B4%D1%80%D0%BE%D0%B1%D0%B5%D0%B9_%D0%B2%D0%B8%D0%B4%D0%B0_%7F'%22%60UNIQ--postMath-0000007E-QINU%60%22'%7F`.
- Рациональные функции: разложение на простейшие, далее элементарно, больше второй степени не получится
- Функции вида $R\left(x,\ \sqrt[N]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)$ через замену переменной на весь корень.
- Подстановки Эйлера: $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$. В зависимости от коэффициентов нужно выбрать правильное $t$. Случаи могут быть пересекаться. Для функции подходят все те случаи, под условия которых она подходит:
  1. При $a > 0$: $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm t \pm \sqrt{a}x$
  2. При $c > 0$: $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm t \pm \sqrt{a}x$
  3. При наличии двух вещественных корней: $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm t(x-\lambda)$, где $\lambda$ — один из корней
- Интегрирование дифференциальных биномов

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} z = x^n \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{n}z^{\frac{1-n}{n}}\,\mathrm{d}z \end{bmatrix} = \frac{1}{n}\int z^{\frac{m}{n}+\frac{1-n}{n}}(a+bz)^p\,\mathrm{d}z \tag{1}$$

$$q = \frac{m}{n} + \frac{1-n}{n} \tag{2}$$

3 случая интегрируемости:

1. $p \in \mathbb{Z}, q = \frac{M}{N}$: $t = z^{\frac{1}{N}}$, выражаем получаем $R(t)$. Профит.

- Тригонометрические подстановки в рациональных функциях $R(\cos x, \sin x)$:
  - Если $R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x, \sin x)$ (нечётно относительно cos), можно $t = \sin x$
  - Если $R(\cos x, -\sin x) = -R(\cos x, \sin x)$ (нечётно относительно sin), можно $t = \cos x$
  - Если $R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x)$ (чётно по обеим вместе), можно $t = \operatorname{tg} x$
  - Наконец, универсальное, $t = \tan \frac{x}{2}$ работает всегда, через неё легко выражаются $\sin, \cos, \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$.
- Похожая шняга получается и с $R(ch\, x, sh\, x)$
- Линейное выражение числителя через знаменатель и его производную, решение системы уравнений

## 3.2. Определённые интегралы

- Формула Ньютона-Лейбница
- Замена переменной, если особые точки не появляются, ничего не портит
- При интегрировании по частями надо смотреть, чтобы сумма частей имела смысл в $\overline{\mathbb{R}}$.

## 3.3. Несобственные интегралы

- Взятие предела для несобстыенных интегралов, если получается сделать это в явном виде
- Рассмотрение «особенных» точек, их может быть несколько
- Анализ сходимости: сначала проверяем абсолютную, потом относительную

- Критерий Коши (если любое значение после некоторого $A$ не превышается ни на каком промежутке в $\mathbb{R}$).
- Разбиение промежутка на несколько
- Использование асимптотического анализа для определения абсолютной сходимости
- Дирихле и Абель — позволяют сделать вывод об абсолютной сходимости функции, представленной произведения
  - Дирихле: первая имеет ограниченную первообразную, вторая — монотонно □ 0, тогда сходится
  - Абель: первый интеграл сходится, вторая монотонна и ограничена, тогда тоже сходится
- Разложение подинтегральной функции в ряд Тейлора: спросить у кого-то

# 4. Числовые ряды

# 5. Функциональные ряды

*Практика 5 сентября 2022*

Фотоотчёт за практику: `https://t.me/c/1512041988/198`

Pro tip: для $\alpha < \frac{\pi}{2}$ — $\sin\alpha > \alpha\frac{2}{\pi}$ за счёт выпуклости.

## 5.1. Исследуем равномерную сходимость

- Если можем посчитать «колебание» (супремум отколнеиня на всём множестве $E$ при фиксированном $n$), то проанализируем, стремится ли оно к нулю при $n \to \infty$.
- Признак Вейерштрасса (мажорантная сходимость для рядов): находим равномерную норму каждого члена, если ряд норм сходиться, то анализируемый ряд — тоже.
- Критерий Больцано-Коши (равносильно равномерной сходимости). Сходимость в себе, работает для

- Признак Дирихле (равномерная сходимость ряда произведений). У одного частичные суммы **равномерно огранчиены**, другой стремится к нулю и монотонен по $n$ с некоторого номера при каждом фиксированном $x$. (Теперь везде не забываем добавлять «равномерно»).
- Признак Абеля (равномерная сходимость ряда произведений). Тут у первого частичные суммы должны быть **не равномерно *ограничиены*, а равномерно *сходиться***, но зато второму достаточно просто быть равномерно ограниченным (и всё ещё монотонным).
- Следствие: Лейбниц — сумма знакопеременного, монотонно равномерно сходящегося к 0 ряда со знакочередованием ряда — равномерно сходится.

Ещё pro tip:

$$\left|\sum_{k=1}^{N} \sin k\alpha\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|} \tag{3}$$

$$\left|\sum_{k=1}^{N} \cos k\alpha\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|} \tag{4}$$

## 5.2. Доказывем отсутствие равномерной сходимости

Если не сходится поточечно где-то, рассматривать не интересно.

- Не на компакте: если замыкание не сходится даже поточечно (на границах)
- Если не выполняется хотя бы одно необходимое условие из секции 5.3 при выполнении остальных предпосылок теоремы
- Если можно посчитать в явном виде
- Можно оценить остаток через интеграл, если есть монотонность по $n$ и момент, с которой она начинается, не зависит от $x$ — и сказать через него, что найдётся $\varepsilon$, что для любого $n$ найдётся плохой $x$.
- Можно сделать то же через критерий Больцано-Коши.

*Практика 12 сентября 2022*

Фотоотчёт за практику: <отсутствует>.

## 5.3. Свойства равномерно сходящихся

При равномерной сходимости можно производить перестановку пределов, из неё получаем возможность заключить непрерывность предела, получаем перестановочность интегрирования и дифференцирования.

Однако это всё получается и при более вольных условиях, но они более сложные, мы их не изучали.

*Практика 19 сентября 2022*

Фотоотчёт за практику: `https://t.me/c/1512041988/208`.

## 5.4. Степенные ряды

Ряды вида $\sum_{i=1}^{\infty} c_i(z - z_0)^i$.

Умеем искать радиус сходимости (это шар, внутри гарантированно сходится, снаружи — не менее гарантированно расходится, а на границе — надо думать, анализировать дальше).

- Коши (база, работает всегда): $R = \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$
- Даламбер (иногда работает и он, если существует): $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|$

Потом можем использовать степенные ряды как составные части для анализа произвольных рядов.

Раскладываем в ряд Тейлора:

Разложить можем, чтобы в пределе все производные совпадали, но когда она будет совпадать с самой функцией на каком-то промежутке?

Оказывается, что достаточно комплексной дифференцируемости в $B_R(z_0)$ — тогда существует единственный набор коэффициентов степенного ряда с заданным центром, с пределом которого функция совпадает — и коэффициенты тогда находятся через Тейлора.

Note: для комплексной дифференцироемости выполняются все естественнные свойства обычной: замкнутость относительно арифметических операций, дифференцируемость элементарных функций, производная локальной обратимой функции и т.д.

Разложение элементарных функций в степенной ряд было на доске..

Как раскладывать в степенные ряды?

- Честно, через производные по Тейлору
- Раскладывать в произведение — перемножать ряды
- В круге сходимости дифференцировать можно почленно — замечаем, что ряд является интегралом чего-то хорошего — и дифферегнцирем его ряд.
- Аналогично — если является производной чего-то хорошего
- Можно пользоваться тем, что сумма ряда равна функции в круге сходимости. Например,

$$\frac{1}{x-x_0} = \frac{1}{-x_0}\left(\frac{1}{1-\frac{x}{x_0}}\right) = -\frac{1}{x_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{x_0}\right)^k \tag{5}$$

## *Практика 26 сентября 2022*

Фотоотчёт за практику: `https://t.me/c/1512041988/216`

Если у нас уже есть ряд, и надо проанализировать, какую функцию он описывает или его свойства.

- Для анализа схоимости можно посмотреть на коэффициент, как всегда.
- Можно применить метод божественного озарения и, например, продифференцировать, умножить на какую-то сдвигающую скобку и заметить, что получилось нечто содержащее исходный ряд, получив диффуру...

Признак сходимости обычных, положительных рядов, обобщающий признак Д'Аламбера — признак Гаусса:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right), \varepsilon > 0 \tag{6}$$

Тогда при $\lambda > 1$ — сходится, если $\lambda < 1$ — расходится, иначе (при $\lambda = 1$) — $\mu > 1$ — сходится, $\mu \leqslant 1$ — расходится.

# 6. Функции нескольких переменных

## 6.1. Берём пределы

Какие механизмы?

- По Коши/окрестностям: для окрестности результатов найдётся окрестность аргументов, такая что каждый студент знает, какая.
- По Гейне — вдоль любой последовательности, стремящейся к $x_0$ по $D$
  $\{x_0\}$ $f(x_n) \to\ A$
- Эквивалентно (тривиально — про Коши) — $\sup_{x \in \dot{V}_\delta(x_0) \cap D} |f(x) - A| \underset{\delta \to 0}{\longrightarrow} 0$

## 6.2. Разница между повторным и двойным пределом

У «хороших» функций, конечно, их существование эквивалентно и они равны. Наверное, Липшицевости достаточно. Также, (по теореме о двойном пределе) если существует конечный или бесконечный двойной предел, а также для каждого фиксированного $x'$ в окрестности существует конечный предел сужения $\varphi(y) = f(x', y)$, то пределы равны. Но вообще могут быть такие варианты:

- Двойной существует, а $\forall x \neq x_0$ не существует даже внутренняя часть повторного предела
- Может не сущетствовать двойной, и это можно доказать по Гейне, показав две последовательности, вдоль которых пределы не равны
- Может стремиться к $0$ вдоль любого луча от 0 к ∞, но не быть бесконечно малой на $x, y \to +\infty$. Например, $f(x, y) = x^2 e^{-(x^2 - y)}$

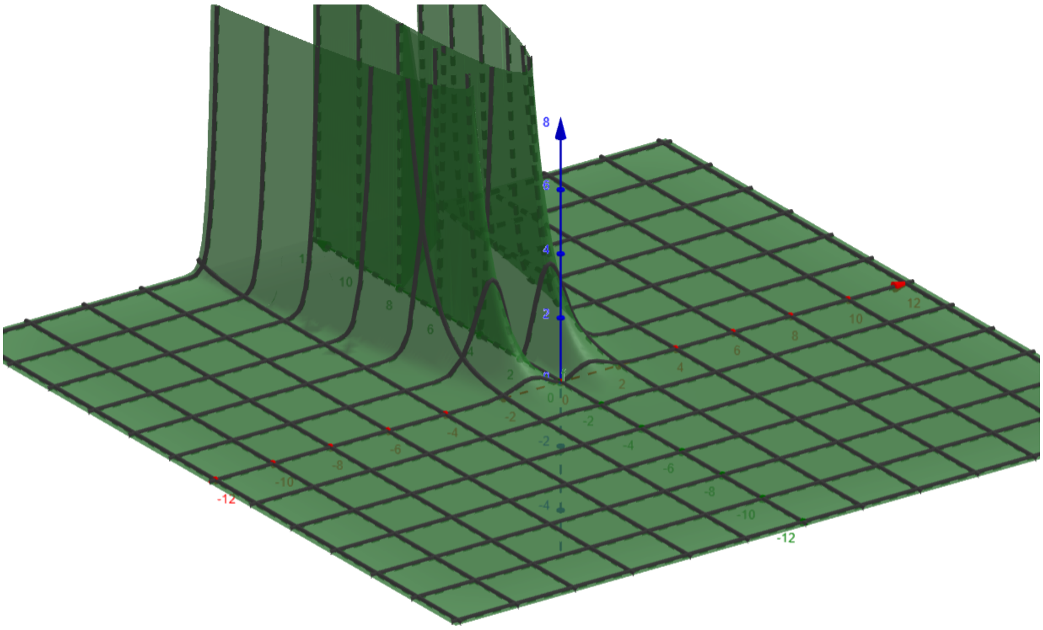

Рис. 1: Та самая $f(x, y) = x^2 e^{-(x^2 - y)}$

Примеры с разбором есть в фотоотчёте практики 26.09: `https://t.me/c/1512041988/216`.

## *Практика 10 октября 2022*

Фотоотчёт за практику: ...

Как доказать существование предела функции, например, на $+\inf, +\inf$?

В определении предела фигурирует окрестность точки $+\inf, +\inf$, то есть

$$\begin{cases} x > \varepsilon \\ y > \varepsilon \end{cases} \tag{7}$$

В отличие от просто $||x, y|| \to \inf$, когда .

- Нужно оценить супремум отклонения от предела при $x > \varepsilon, y > \varepsilon$.
- К полянрым координатам и оценить супремум по некоторой части сферы (для $+\inf, +\inf$, казалось бы — по $\varphi \in (0, \pi/2)$). Но по идее, это будет корректно, так как там $x$ может быть сколь угодно малым. Наверное, надо сузить угол до компактного подмноже-

ства $[\alpha, \beta] \subset (0, \pi/2)$. И оценить зависимость супремума по $\varphi$ от $r$. Особые извращенцы будут искать супремум через Лагранжа.

## 6.3. Дифференцирование, частные производные

Дифференцируема $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ представима в виде $f(x_0) + Ah + o(|h|)$, где $A$ — линейный оператор. Частная производная — производная направлению вектора-орта.

Иногда вектор частных производных равен вектору производному оператора. Есть необходимое и достаточное условие.

**Теорема 1** (Базированная теорема о производных)**.** У нормальных функций всё будет нормально.

Как искать частные производные? Если функция представлена в виде композиций элементарных функций, считаем по формулам. Но они не всегда применимы — производная всё ещё может существовать, тогда считаемм по определению.

Производная композиции выражается через матрицы Якоби, можно найти частные через суммирование.

$\mathrm{d}(\frac{x}{y}) = \mathrm{d}(\frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{y^2})$.