В матане как на войне

Учебное пособие о том как затащить у Кохася К. П.

@irdkwmnsb - Альжанов Максим
@JelluSandro - Никита Шемякин
@Dalvikk - Владислав Ковальчук
@Turukmokto - Евгений Бессонницын
@Onexx7 - Илья Зайцев
@NULL3301 - Вадим Нагибин
@DimaUtyuz - Дмитрий Утюжников
@RahimHakimov - Рахим Хакимов
@Shady712 - Данил Крайнов
@Moroness - Михаил Галибов
@abramkht - Хетаг Дзестелов
@whicha - Иван Алексеев
@maksimShekhunov - Максим Шехунов

December 2020

Содержание

Как это редактировать?

Таблицу можно сделать так:
Распределение вариантов

Строчки в табличке Кохася	Кто
3 – 7	Шемякин
8 – 12	Зайцев
13 – 17	Бессонницын
18 – 22	Крайнов
23 – 27	Ковальчук
28 – 32	Утюжников
33 – 37	Нагибин
38 – 42 + 59	Алексеев
43 – 47 + 60	Галибов
48 – 52 + 61	Хакимов
53 – 57 + 62	Дзестелов

Формулы вы делать умеете, АИСД сдаете же как-то

Картинки можно вставлять так:

Внизу в левом углу вы видите File outline, в нем содержатся ссылки на заголовки, чтобы можно было быстро перейти к своей части

Пожалуйста, следите за тем чтобы после вашего кода не возникало кучу ошибок при компиляции!

Если что то похерилось — писать Владу или Максиму (@Dalvikk, @irdkwmnsb)

$a\,b$ — маленький пробел в режиме набора мат формул

$a\quad b$ — средний

$a\qquad b$ — большой

Лайфхак: дважды нажмите на текст в пдфке и ваш курсор переместится на ее латех код

Комент

Как написать комент: В правом верхнем углу есть кнопка Review, после ее нажатия откроется поле где видны комментарии + выделив текст можно можно добавить новый тыкнув на Add comment

1 Теоремы

1.3 Законы Де Моргана

Теорема.

$$Y \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in A} (Y \setminus X_\alpha) \tag{1}$$

$$Y \setminus \left(\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in A} (Y \setminus X_\alpha) \tag{2}$$

$$Y \bigcap \left(\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in A} \left(Y \bigcap X_\alpha\right) \tag{3}$$

$$Y \bigcup \left(\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in A} \left(Y \bigcup X_\alpha\right) \tag{4}$$

Доказательство. Докажем (1), остальные аналогично (см. фото)

$$x \in \text{левой части} \Leftrightarrow (x \in Y) \text{ и } \left(x \notin \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \right) \Leftrightarrow x \in Y \text{ и } \forall \alpha \in A \ \ x \notin X_\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall \alpha \in A \ \ (x \notin X_\alpha \text{ и } x \in Y) \Leftrightarrow \forall \alpha \in A \ \ x \in (Y \setminus X_\alpha) \Leftrightarrow \bigcap_{\alpha \in A} (Y \setminus X_\alpha)$$

$\square$

Законы Де Моргана

$(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ – семейство множеств, Y – множество

Тогда

1) $Y \setminus \bigcup\limits_{\alpha\in A} X_\alpha = \bigcap\limits_{\alpha\in A} (Y \setminus X_\alpha)$

2) $Y \setminus \bigcap\limits_{\alpha\in A} X_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha\in A} (Y \setminus X_\alpha)$

3) $Y \cap \left(\bigcup\limits_{\alpha\in A} X_\alpha\right) = \bigcup\limits_{\alpha\in A} (Y \cap X_\alpha)$

4) $Y \cup \left(\bigcap\limits_{\alpha\in A} X_\alpha\right) = \bigcap\limits_{\alpha\in A} (Y \cup X_\alpha)$

Доказательство:

1) $\exists$ x лежит в левой части, то есть $x \in Y \setminus \bigcup\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$,

$\Leftrightarrow$ $x \in Y$ & $x \notin \bigcup\limits_{\alpha\in A} X_\alpha \Leftrightarrow x \in Y$ и $\forall \alpha$ $x \notin X_\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\forall \alpha\, (x \in X_\alpha$ и $x \in Y) \Leftrightarrow \forall \alpha$ $x \in Y \setminus X_\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $x \in \bigcap\limits_{\alpha\in A} (Y \setminus X_\alpha)$. Доказательство правой части

кванторг $\Rightarrow$ заменяется на $\Leftarrow$, идём с конца.

2) $Y \setminus \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (Y \setminus X_\alpha)$

Доказательство $\exists x$ лежит в левой части, $x \in Y \setminus \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha$, $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in Y$ и $x \notin \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha \Leftrightarrow x \in Y$ и $\exists \alpha : x \notin X_\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists \alpha (x \in Y$ и $x \notin X_\alpha) \Leftrightarrow \bigcup_{\alpha \in A} (Y \setminus X_\alpha)$

3) $Y \cap (\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in A} (Y \cap X_\alpha)$

Доказательство $\exists x$ лежит в левой части, $x \in Y \cap (\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha)$

$\Leftrightarrow x \in Y$ и $x \in \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \Leftrightarrow x \in Y$ и $\exists \alpha\ x \in X_\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists \alpha (x \in Y$ и $x \in X_\alpha) \Leftrightarrow \bigcup_{\alpha \in A} (Y \cap X_\alpha)$

4) $Y \cup (\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in A} (Y \cup X_\alpha)$

Доказательство $\exists x$ лежит в левой части, $x \in Y \cup (\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha)$

$\Leftrightarrow x \in Y$ или $x \in \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha \Leftrightarrow x \in Y$ или $\forall \alpha\ x \in X_\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall \alpha (x \in Y$ или $x \in X_\alpha) \Leftrightarrow \bigcap_{\alpha \in A} (Y \cup X_\alpha)$

1.4 Единственность предела и ограниченность сходящейся последовательности

Определение. Последовательность $(x_n)_{n\varepsilon N}$ - семейство, заиндексированное натуральными числами.

Теорема. *(О единственности предела) x_n- последовательность в метрическом пространстве (X, ρ)*

$a, b \in X,\ x_n \to a,\ x_n \to b \Rightarrow a = b$

Доказательство. Предположим $a \neq b$, следовательно существуют окрестности точек a и b, что они не пересекаются:

$U(a) = B_1(a, \frac{1}{2}r) \quad V(b) = B_2(b, \frac{1}{2}r)$

$r = \rho(a, b)$

Докажем от противного, что эти шары B_1 и B_2 не пересекаются.

Пусть $z \in B_1$ и $z \in B_2$ - точка пересечения

$\rho(a, z) < \frac{1}{2}r$

$\rho(b, z) < \frac{1}{2}r$

$\rho(a, b) = r > \rho(a, z) + \rho(z, b) \Rightarrow \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}r < r$ — противоречие по неравенству треугольников $\Rightarrow$ шары не пересекаются

Рассмотрим непересекающиеся окрестности $U(a), V(b)$. Вне $U(a)$ конечное число членов последовательности $\Longrightarrow$ в $V(b)$ конечное число членов последовательности. Получили противоречие. □

Теорема. *(Об ограничености сходящейся последовательности) В метрическом пространстве сходящаяся последовательность ограниченна.*

Последовательность x_n ограниченна, если множество ее значений ограниченно.

Доказательство. Для $\varepsilon = 1\ \ \exists N\ \forall n > N\ \ q(x_n, a) < 1$ определение предела для $\varepsilon = 1$

$R = max(q(x_i, a))$ Берем конечные точки и расширяем шар до максимального среди них радиуса. Откуда $x_n \subset B(a, R)$. □

1.5 Теорема о предельном переходе в неравенствах для последовательностей и для функций

Теорема. *x_n, y_n - вещественные последовательности.*
$a, b \in X$, $x_n \to a$, $x_n \to b$. Если $\forall n \in N \quad x_n \leqslant y_n \Rightarrow a \leqslant b$.

Доказательство. Докажем от противного.
Пусть $b < a$
$\varepsilon = \frac{a-b}{2}$ растояние от a до $b \Rightarrow b + \varepsilon = a - \varepsilon$
Для этого же $\varepsilon \ \exists \ N_1 \ \ \forall n > N_1 \, |x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < x_n$
Для этого же $\varepsilon \ \exists \ N_2 \ \ \forall n > N_2 \, |y_n - b| < \varepsilon \Rightarrow y_n < b + \varepsilon$
Тогда при $n > max(N_1, N_2)$
$y_n < b + \varepsilon = a - \varepsilon < x_n$
$y_n < x_n$ — противоречие ☐

Примечание. $x_n = -\frac{1}{n} \quad y_n = \frac{1}{n} \quad x_n < y_n$
Знак не может быть строгим $0 \leqslant 0$
Верны варианты теорем с одной последовательностью $\forall n \; x_n \leq b$
$x_n \to a$
Тогда $a \leqslant b$
Если $x_n \in [a; b]$, $x_n \longrightarrow \alpha$ тогда $\alpha \in [a; b]$

1.6 Теорема о двух городовых

Теорема. *Пусть есть 3 последовательности* $(x_n), (y_n), (z_n)$ *- вещественные последовательности*

$\forall\ n\ x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ *Пусть* $x_n \longrightarrow a, z_n \longrightarrow a$ *Тогда,* $\exists$ *предел* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ *и это предел* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$

Доказательство. $\forall\ \ \varepsilon > 0\ \ \exists N_1\ \ \forall\ \ n > N_1 \quad |x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < x_n$

$\forall\ \ \varepsilon > 0\ \ \exists N_2\ \ \forall\ \ n > N_2 \quad z_n < a + \varepsilon$

$N = max(N_1, N_2), \forall n > N$

$a - \varepsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < a + \varepsilon$

$a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$ □

Примечание. $\forall n\ \ x_n < y_n$ и $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$

$\exists\ \ k\ \ \forall n > k$ неравенство с некоторго номера k выполняется

Частный случай $(x_n), (y_n), \forall\ \ n\ \ \ |x_n| \leqslant y_n$ и $y_n \longrightarrow 0$

Тогда $x_n \longrightarrow 0$, $-y_n \leqslant x_n \leqslant y_n$, $y_n \longrightarrow 0$, $-y_n \longrightarrow 0$

Для комплексного x_n и $y_n \in R$, $Re(x_n) \leqslant |x_n| \leqslant y_n$

$-y_n \leqslant -|x_n| \leqslant Re(x_n) \leqslant |x_n| \leqslant y_n$

1.7 Бесконечно малая последовательность

Вещественная последовательность, называется бесконечно малой, если она стремится к 0, т. е. $x_n \longrightarrow 0$

Примечание. Бесконечно малых чисел не бывает (Аксиома Архимеда), поэтому записать стремление к нулю в предыдущих терминах не очень содержательно.

Теорема. $(x_n), (y_n)$ *— вещественные последовательности*
x_n *— бесконечно малая,* y_n *— ограниченная*
Тогда $z_n = x_n \cdot y_n$ *бесконечно малая.*

Доказательство. $\exists M\ \forall n\ \ |y_n| \leqslant M$, так как y_n - ограниченна.
$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ \ |x_n| < \varepsilon$ заменяем на $|x_n \cdot y_n| < M\varepsilon$
$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ \ |x_n| \cdot |y_n| = |z_n| < M\varepsilon$
Заменим $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{M}$ (Китайский фокус)
Тогда $\forall \varepsilon'\ \exists N\ \ \forall n > N\ \ |z_n| < \varepsilon'$

$\square$

1.8 Теорема об арифметических свойствах предела последовательности в нормированном пространстве и в $\mathbb{R}$

Теорема. *Об арифметических свойствах предела последовательности в нормированном пространстве.*

Пусть даны:
$(X, ||\cdot||)$ — *нормированное пространство*
$(x_n), (y_n)$ — *последовательности элементов* X
λ_n — *последовательность скаляров* $x_n \to x, y_n \to y, \lambda_n \to \lambda, x \in X, y \in X, \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$
Тогда утверждается несколько свойств:

1. $x_n \pm y_n \to x \pm y$
2. $\lambda_n x_n \to \lambda x$
3. $||x_n|| \to ||x||$

Доказательство.

1. $\forall \varepsilon > 0$
   $\exists N_1\ \forall n > N_1 \quad ||x_n - x|| < \frac{\varepsilon}{2}$
   $\exists N_2\ \forall n > N_2 \quad ||y_n - y|| < \frac{\varepsilon}{2}$
   Тогда при $n > max(N_1, N_2)$ выполняется
   $||x_n + y_n - (x+y)|| \leq ||x_n - x|| + ||y_n - y|| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$
2. $||\lambda_n x_n - \lambda x|| = ||(\lambda_n x_n - \lambda_n x) + (\lambda_n x - \lambda x)|| \leq ||\lambda_n (x_n - x)|| + ||(\lambda_n - \lambda) x|| = |\lambda_n| \cdot ||x_n - x|| + |\lambda_n - \lambda| \cdot ||x||$
   $|\lambda_n|$ — ограничено
   $||x_n - x||$ — бесконечно малое
   $|\lambda_n - \lambda|$ — бесконечно малое
   $||x||$ — ограничено
   б.м. $\cdot$ огр. $+$ огр. $\cdot$ б.м. $\Rightarrow$ все выражение бесконечно малое по теореме о бесконечно малой последовательности (пункт 1.7)
3. $\Big| ||x_n|| - ||x|| \Big| \leq ||x_n - x|| \to 0$

$\square$

Арифметические свойства предела в $\mathbb{R}$
$(x_n), (y_n)$ — вещественные последовательности
$x_n \to x, y_n \to y, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$
Тогда утверждается несколько свойств:

1. $x_n \pm y_n \to x \pm y$
2. $x_n y_n \to xy$
3. $|x_n| \to |x|$
4. Если $y \neq 0$ и $\forall n\ y_n \neq 0$ то $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{x}{y}$

$\mathbb{R}$ — нормированное пространство, следовательно, 1-3 — доказаны
Доказательство 4:
Заметим $\frac{x_n}{y_n} = x_n \cdot \frac{1}{y_n}$
Достаточно проверить $\frac{1}{y_n} \to \frac{1}{y}$ (далее по свойству 2)
$|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y}| = |y_n - y| \cdot |\frac{1}{y}| \cdot |\frac{1}{y_n}|$
$|y_n - y|$ — бесконечно малое
$|\frac{1}{y}|$ — ограничено
Докажем, что $|\frac{1}{y_n}|$ — ограничено
$y_n \to y \neq 0$
Для $\varepsilon = |y| \cdot \frac{1}{2} \quad \exists N \; \forall n > N$
Для случая $y > 0$
$\frac{y}{2} < y_n < \frac{3}{2}y$
$\frac{2}{3y} < \frac{1}{y_n} < \frac{2}{y}$
В общем случае $|\frac{2}{3y}| < |\frac{1}{y_n}| < |\frac{2}{y}|$
Тогда число $M = max(\frac{1}{|y_1|}, \frac{1}{|y_2|} ... \frac{1}{|y_N|}, \frac{2}{|y|}) + 1$ — верхняя граница последовательности $\frac{1}{y_n}$, т. е. $\forall n \in \mathbb{N} \;\; 0 \leq |\frac{1}{y_n}| \leq M$, следовательно, $\left|\frac{1}{y_n}\right|$ ограничена.
Из этого следует, что $|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y}| = |y_n - y| \cdot |\frac{1}{y}| \cdot |\frac{1}{y_n}| \longrightarrow 0$, следвательно, $\frac{1}{y_n} \to \frac{1}{y}$, что и требовалось проверить.

1.9 Неравенство Коши-Буняковского в линейном пространстве, норма, порожденная скалярным произведением

Неравенство Коши-Буняковского в линейном пространстве
$\forall x, y \quad |\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$ — нер-во Коши-Буняковского в линейном пространстве
Доказательство:
$0 \leq \langle x + ty, x + ty\rangle = \langle x, x\rangle + t\langle y, x\rangle + \bar{t}\langle x, y\rangle + t \cdot \bar{t}\langle y, y\rangle$ по свойствам скалярного произведения.
Подставим $t = \frac{-\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$ (при $y = 0$ изначальное неравенство тривиально, рассматриваем $y \neq 0$)
$\langle x, x\rangle - \frac{\langle x,y\rangle\langle y,x\rangle}{\langle y,y\rangle} - \frac{\overline{\langle x,y\rangle}\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle} + \frac{\langle x,y\rangle\langle y,x\rangle}{\langle y,y\rangle} = \langle x, x\rangle - \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle} \geq 0$ (пояснение: $\overline{\langle x, y\rangle} = \langle y, x\rangle$ и $\overline{\langle x, y\rangle}\langle x, y\rangle = |\langle x, y\rangle|^2$)
Преобразуя финальное неравенство можно получить исходное $\Rightarrow$ доказано.
Пример:
$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$
$(x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2) \cdot (y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2)$
$\Leftrightarrow |x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n| \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2}$
Норма, порожденная скалярным произведением
X — линейное пространство со скалярным произведением
Тогда функция $\rho(x) := \sqrt{\langle x, x\rangle}$ - норма в X
Свойства нормы:

1. $\rho(x) \geq 0 \qquad \rho(x) = 0 \leftrightarrow x = 0$
2. $\rho(\alpha x) = |\alpha|\rho(x)$
   Доказательство: $\rho(\alpha x) = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x\rangle} = \sqrt{\alpha\overline{\alpha}\langle x, x\rangle} = |\alpha|\rho(x)$
3. $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$
   Доказательство:
   Возведем обе части в квадрат
   $\langle x + y, x + y\rangle \leq_? \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + 2\sqrt{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle}$
   Используем часть из доказательства неравенства Коши-Буняковского
   $\langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle \leq_? \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + 2\sqrt{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle}$
   Сокращаем
   $\langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle \leq_? 2\sqrt{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle}$
   Верно по неравенству Коши-Буняковского
   $2\operatorname{Re}\langle x, y\rangle \leq 2|\langle x, y\rangle| \leq 2\sqrt{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle}$

1.10 Леммы о непрерывности скалярного произведения и покоординатной сходимости в $\mathbb{R}^n$

Лемма о непрерывности скалярного произведения
X - пространство со скалярным произведением
Зададим с помощью скалярного произведения норму на X
$x_n \to x, y_n \to y, x \in X, y \in X$
Тогда $\langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle$
Доказательство
$|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| = |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y\rangle + \langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle| \leq |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y\rangle| + |\langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle| =$
$|\langle x_n, y_n - y\rangle| + |\langle x_n - x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x_n, x_n\rangle}\sqrt{\langle y_n - y, y_n - y\rangle} + \sqrt{\langle x_n - x, x_n - x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle} \leq$
$||x_n|| \cdot ||y_n - y|| + ||x_n - x|| \cdot ||y||$ (согласно неравенству Коши-Буняковского (взять под корень) и тому факту, что норма задана скалярным произведением)
$||x_n||$ — ограничено
$||y_n - y||$ — бесконечно малое
$||x_n - x||$ — бесконечно малое
$||y||$ — ограничено
$\Rightarrow ||x_n|| \cdot ||y_n - y|| + ||x_n - x|| \cdot ||y|| \to 0$

Лемма о покоординатной сходимости в $\mathbb{R}^n$
Будем нумеровать рисуя индекс последовательности сверху
$(x^{(n)})$ — последовательность векторов из $\mathbb{R}^m$
$(x^{(10)}) = (x_1^{(10)}, x_2^{(10)}, ..., x_m^{(10)}) \in \mathbb{R}^m$ — координаты этого вектора
Собственно сама лемма
В качестве нормы используется Евклидова норма
Если $x^{(n)}$ — последовательность векторов в $\mathbb{R}^m$, тогда эквивалентны два утверждения:
1) $x^{(n)} \to a$ (по Евклидовой норме)
2) $\forall k \in \{1, 2, \ ... \ m\} \quad x_k^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} a_k$
Доказательство:

- $1 \Rightarrow 2$
  Берём сумму по Евклидовой норме, в сумме есть в том числе и k-тый элемент $\Rightarrow$ имеет место неравенство, от чего из условия следует покоординатная сходимость:
  $|x_k^{(n)} - a_k| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m |x_i^{(n)} - a_i|^2} = ||x^{(n)} - a|| \to 0$
  Следовательно $|x_k^{(n)} - a_k| \to 0 \Rightarrow \forall k \in \{1, 2, \ ... \ m\} \quad x_k^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} a_k$.

- $2 \Rightarrow 1$
  $||x^{(n)} - a|| \leq \sqrt{m} \cdot \max\limits_{k\in[1...m]} |x_k^{(n)} - a_k| \to 0$
  $\sqrt{\sum_{i=1}^m |x_i^{(n)} - a_i|^2} \leq \sqrt{m \cdot (\text{максимальное слагаемое})^2}$
  Следовательно $||x^{(n)} - a|| \to 0 \Rightarrow x^{(n)} \to a$

1.11 Аксиома Архимеда. Плотность множества рациональных чисел в $\mathbb{R}$

Аксиома Архимеда
$\forall x, y \in \mathbb{R}, x > 0, y > 0 \ \ \exists n \in \mathbb{N} \quad : nx > y$

Сомнительное упарывание от Кохася
было скрыто, см. исходник.

Плотность множества рациональных чисел в $\mathbb{R}$
Множество $A \subset \mathbb{R}$ — всюду плотно в $\mathbb{R}$, если
$\forall x, y,\ x < y\ (x, y) \cap A \neq \varnothing$ — в любом промежутке имеются точки из множества A

$\mathbb{Q}$ плотно в $\mathbb{R}$
Доказательство:
$\forall x, y\ x < y\ ?\exists\ q \in (x, y)$ — ищем такое q
Будем рассматривать только случай $x, y > 0$ тк, если $x, y < 0$, то это симметрично нашему случаю, а если $x < 0, y > 0$ то просто возьмем новый $x > 0, x < y$
Возьмем $n > \frac{1}{y-x}$ — возможно по аксиоме Архимеда
$\frac{1}{n} < y - x$
Возьмем $q := \frac{[nx]+1}{n}$
Проверяем
$q \leq \frac{nx+1}{n} = x + \frac{1}{n} < x + (y - x) = y$
$q > \frac{(nx-1)+1}{n} = x$
$x < q < y \Rightarrow q \in (x, y)$ — мы доказали, что $\forall x, y,\ x < y\ \exists\ q \in (x, y)$.

1.12 Неравенство Бернулли (Якоба)

Лайт-версия: при $x > -1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1+x)^n \geq 1 + nx$
Продвинутая версия: при $x > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n+1)}{2}x^2$
(Продвинутую версию Кохась не доказывал)
Доказательство лайт-версии:
По индукции
База: $n = 1 \quad 1 + x \geq 1 + x$ — верно
Переход:
Дано: $(1+x)^n \geq 1 + nx$
Доказать: $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$
$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1 + x + nx + nx^2 \geq 1 + (n+1)x \iff$
$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$ — чтд

1.13 Открытость открытого шара

Определения:

$a-$ внутренная точка $D \Rightarrow$

$$\exists\ U(a): \quad U(a) \subset D(a)$$
$$\exists\ r: \quad B(a,r) \subset D(a)$$

$a-$ не внутренная точка $D \Rightarrow$

$$\forall\ U(a)\ \exists\ y \notin D: \quad y \in U(a)$$

$D-$ открытое множество, если все его точки внутренние.

$X-$ открыто

$\varnothing$ - открыто

Теорема. *Открытый шар — открытое множество*

Доказательство. $B(a,r) = \{x \in X : q(x,a) < r\}$

$\forall b \in B(a,r) : B(b, r - q(a,b)) \subset B(a,r)$ — это $r - q(a,b)$ по определению, т. к. $b \in B(a,r)$, докажем этот факт:

$x \in B(b, r - q(a,b)) \Rightarrow$

$q(x,b) < r - q(a,b)$

$q(a,b) + q(b,x) < r$

$q(a,x) \leqslant q(a,b) + q(b,x) < r$

$q(a,x) < r$

Мы доказали, что $\forall b \in B(a,r) : B(b, r - q(a,b)) \subset B(a,r) \Rightarrow \exists B(b,r') \subset B(a,r)$, следовательно, все точки открытого шара — внутренние, следовательно, открытый шар — открытое множество. □

1.14 Теорема о свойствах открытых множеств

$X-$ метрическое пространство

$(G_\alpha)_{\alpha \in A}-$ семейство открытых в X множеств

Теорема 1. $\bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha-$ *открыто в* X

Доказательство. $x \in D = \bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha$

$x-$ внутренняя точка?

$\forall x \in \bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha =>$

$\exists d_0 : x \in G_{d_0} =>$

$\exists U(x) \subset G_{d_0} =>$

Тогда $U(x) \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha = D \Rightarrow$ x — внутрення точка $D \Rightarrow D-$открыто □

Теорема 2. $A-$ *конечное, тогда* $\bigcap\limits_{\alpha \in A} G_\alpha-$ *открыто в* X

Доказательство. $D = \bigcap\limits_{\alpha \in A} G_\alpha = \bigcap\limits_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}-$ открытое?

$x \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} G_{\alpha_i} \Rightarrow \forall i \in \{1, 2, ...n\}$

$x \in G_{\alpha_i}-$ открытое, следовательно

$\exists B(x, r_i) \subset G_{\alpha_i}$

Пусть $r_0 := \min\limits_{i=1}^{n}(r_i)$, тогда

$\forall i : B(x, r_0) \subset B(x, r_i) \Rightarrow$

$\forall i : B(x, r_0) \subset G_{\alpha_i} \Rightarrow$

$\forall i : B(x, r_0) \subset \bigcap\limits_{i=1}^{n} G_{\alpha_i} \Rightarrow$

$x-$ внутренняя точка, следовательно

$\bigcap\limits_{i=1}^{n} G_\alpha-$ открыто □

1.15 Теорема о связи открытых и замкнутых множеств, свойства замкнутых множеств

Теорема 1. *О связи открытых и замкнутых множеств: X — метрическое пространство; $D \subset X \Rightarrow$*
D — замкнуто $\Leftrightarrow D^c = X \setminus D$ — открыто
D^c— дополнение D

Доказательство.
В ту сторону($\Rightarrow$):
$D-$ замкнутое, D^c-открытое?
$\forall x \in D^c$: $?x-$внутренняя точка D^c
$x \in D^c \Rightarrow x \notin D$
x — не предельная точка D (т.к. все предельные точки D в D) $\Rightarrow$
$\exists U(x) : U(x) \cap D = \emptyset \Rightarrow$
$U(x) \subset D^c$
В обратную сторону($\Leftarrow$):
D^c-открытое, $D-$ замкнутое?
$\forall x-$ предельная точка D :$?x \in D$
Если это не так, то $x \in D^c \Rightarrow$
$\exists U(x) : U(x) \subset D^c \Rightarrow U(x) \cap D = \emptyset$
Это противоречит тому, что x - предельная точка $D \Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow D-$замкнуто. ☐

Примечание. $A \subset X$, A — не открыто $\not\Rightarrow A$ — замкнуто!!!

Теорема 2. *О свойствах замкнутого множества*
$X-$ метрическое пространство $(F_\alpha)_{\alpha \in A}-$ семейство замкнутых в X множеств.
1) $\bigcap\limits_{\alpha \in A} F_\alpha-$замкнуто в X
2) $\bigcup\limits_{\alpha \in A} F_\alpha-$замкнуто в X ($A-$конечно)

Доказательство. $D = \bigcap\limits_{\alpha \in A} F_\alpha$
$D^c = X \setminus \bigcap\limits_{\alpha \in A} F_\alpha =$ (по законам де моргана) $\bigcup\limits_{\alpha \in A} (X \setminus F_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha \in A} F_\alpha^c$ — открыто
D^c — открыто $\Rightarrow D$ — замкнуто.
Пункт 2 аналогично. ☐

1.16 Теорема об арифметических свойствах предела последовательности (в $\bar{\mathbb{R}}$). Неопределенности.

Теорема 1. $(x_n), (y_n)$ — *вещественные последовательности:* $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$ $\;x_n \to a \;\; y_n \to b$

1. $x_n \pm y_n \to a \pm b$
2. $x_n \cdot y_n \to a \cdot b$ *(* $0 \cdot \inf, \inf \cdot 0$ *— не определены)*
3. *Если* $\forall n \;\; y_n \neq 0 \;\; b \neq 0$*, то* $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{a}{b}$ *при условии, что правые части имеют смысл.*

Доказательство.
$1) x_n \to a \in \mathbb{R}, y_n \to +\inf$
$x_n + y_n \to +\inf?$
$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N_1 \forall n > N_1 : a - \epsilon < x_n < a + \epsilon$
$\forall E > 0 \;\; \exists N_2 \forall n > N_2 : E < y_n$
$N = max(N_1, N_2)$
$\forall n > N : x_n + y_n > E + a - \epsilon$

$3) x_n \to a \in \mathbb{R}, y_n \to +\inf$
$\frac{x_n}{y_n} \to \frac{a}{+\inf} = 0?$
Если y_n–бесконечно большая, то $\frac{1}{y_n}$– бесконечно малая.
$\forall E > 0 \exists N \forall n > N : E < y_n$ ∎

1.17 Теорема Кантора о стягивающихся отрезках

Теорема. *Пусть дана убывающая система:* $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots$

Пусть $(b_n - a_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, *тогда:*

$\exists! c \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k]$ *и при этом* $b_n \to c$ *и* $a_n \to c$

Доказательство.

По аксиоме Кантора: $\exists c \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k] \Rightarrow$

$\forall n : c \in [a_n, b_n] \Rightarrow$

$0 \leqslant b_n - c \leqslant b_n - a_n$

$b_n - a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow b_n \to c$ по теореме о двух городовых.

Аналогично $a_n \to c$.

c — однозначно заданно в силу единственности предела. $\square$

1.18 Теорема о существовании супремума

Теорема. *Если X — непустое подмножество $\mathbb{R}$, ограниченное сверху, то $\exists\ supX < \infty$*

Доказательство. Строим систему вложенных отрезков $[a_i, b_i]$. Берём $a_1 \in E$, берём b_1 — любую верхнюю границу множества E верхних границ:

Найдём следующий вложенный отрезок (бинпоиском).

Для этого возьмём центр - $c_i = \frac{a_i+b_i}{2}$. Если не существует $x \in X$, что $c_i <= x$ (справа нет элементов множества), то мы должны сместить a_{i+1} в c_i. Если такой $x \in X$ существует и он $x <= c_i$, то мы должны сместить b_{i+1} в c_i.

Таким образом мы каждый раз уменьшаем наш отрезок и все отрезки вложенные.

При этом на каждом шагу «алгоритма» поддерживается требуемый инвариант, наш искомый супремум находится внутри нашего отрезка, т.к. если мы отрезаем левый отрезок, то в нём нет потенциальных супремумов, а если мы отрезаем правый отрезок, то мы берём центр - верхнюю точку, значит потенциальный супремум остаётся в наших отрезках, т. е. результирующее единственное число c будет являться супремумом. □

Примечание. Возможно, Кохась потребует доказать теорему о существовании infimum, хотя ее нет в списке вопросов. По сути, это та же теорема, что и о существовании supremum. Вам нужно просто поменять знаки в неравенствах и заявить о победе :)

1.19 Лемма о свойствах супремума

1. $D \subset E \subset \mathbb{R} \Rightarrow supD \leq supE$

Доказательство:
Заметим, что $supE$ — верхняя граница множества D (так как это верхняя граница множества E, содержащего в себе D). Тогда $supD \leq supE$, что и требовалось доказать.

2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}: \ \lambda > 0$ выполняется $sup(\lambda E) = \lambda supE$

Доказательство:
$\forall x \in E$ верно $x \leq supE$. Значит $\lambda x \leq \lambda supE$. Отсюда непосредственно следует, что $sup(\lambda E) = \lambda supE$, что и требовалось доказать.

3. $sup(-1 \cdot E) = -1 \cdot infE$

Доказательство:
Найдем $M: \ \forall x \in (-E): \ x \leq M$. Тогда $\forall -x \in E: \ -x \geq -M$. Значит $-M$ — нижняя граница E. Тогда $-sup(-E) = infE \Rightarrow sup(-E) = -infE$, что и требовалось доказать.

Примечание:
Первое свойство верно для infimum со знаком $\geq$.
Второе свойство верно для infimum.

1.20 Теорема о пределе монотонной последовательности (Теорема Виерштрасса)

Если x_n монотонна и ограниченна, то существует конечный $\lim_{n\to\infty} x_n$.

Доказательство (рассмотрим случай для возрастающей ограниченной сверху последовательности):
Рассмотрим $M = sup(x_n)$. Вспомним техническое определение супремума:
$\forall\epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ M - \epsilon < x_n$.
То, что последовательность возрастающая, означает, что $\forall n > N:\ x_N \leq x_n$
Воспользуемся двумя неравенствами и свойством supremum сразу:
$\forall\epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n > N:\ M - \epsilon < x_N \leq x_n \leq M < M + \epsilon$
Получили, что в эпсилон-окрестности точки M лежит бесконечно много элементов из последовательности x_n. Значит, $\lim_{n\to\infty} x_n = M = sup(x_n)$. То есть существует конечный предел, что и требовалось доказать.

Случай с убывающей последовательностью, ограниченной снизу, доказывается аналогично через infinum.
Предел возрастающей последовательности, неограниченной сверху, равен, очевидно, $+\infty$. Аналогично для убывающей, неограниченной снизу.

1.21 Определение числа e, соответствующий замечательный предел

Рассмотрим последовательности $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$ и $y_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$. Утверждается, что их пределы совпадают и равны e.

Доказательство:

Очевидно, что $y_n \geq 1$
Заметим, что y_n — убывающая последовательность, так как:

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{(\frac{n}{n-1})^n}{(\frac{n+1}{n})^{n+1}} = (1+\frac{1}{n^2-1})^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} \geq$$

(По неравенству Бернулли)

$$(1+\frac{n+1}{n^2-1}) \cdot (\frac{n-1}{n}) = (1+\frac{1}{n-1}) \cdot (\frac{n-1}{n}) = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n} = 1$$

Получили, что y_n — убывающая последовательность, ограниченная снизу, а значит имеет предел.

Заметим, что x_n — возрастающая последовательность, так как:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(\frac{n+2}{n+1})^{n+1}}{(\frac{n+1}{n})^n} = (1+\frac{1}{n+1}) \cdot (1-\frac{1}{(n+1)^2}) \geq$$

(По неравенству Бернулли)

$$(1+\frac{1}{n+1}) \cdot (1-\frac{n}{(n+1)^2}) = 1 - \frac{n}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{n}{(n+1)^3} = 1 + \frac{1}{(n+1)^3} > 1$$

Покажем, что x_n ограничено сверху. Сделаем это методом от противного:
Пусть x_n не ограничена сверху. Значит $\forall c \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n > N\ x_n > c$
Возьмем $c = 1000$. Тогда неравенство $(1+\frac{1}{n})^n > 1000$ имеет бесконечно много решений.

$$1 + \frac{1}{n} > \sqrt[n]{1000} = (1+999)^{\frac{1}{n}}$$

(По неравенству Бернулли)

$$1 + \frac{1}{n} > 1 + \frac{999}{n}$$

$$\frac{998}{n} < 0$$

У неравенства нет решений. Получили противоречие. Значит x_n ограничена сверху. x_n также возрастает, а значит имеет предел.

Путь $\lim x_n = e$. Покажем, что $\lim y_n = e$:

$$\lim y_n = \lim (x_n \cdot (1 + \frac{1}{n})) = e \cdot 1 = e$$

Получили, что две этих последовательности имеют одинаковый замечательный предел, равный e.

1.22 Теорема об открытых и замкнутых множествах в пространстве и в подпространстве

Пусть X — метрическое пространство, $Y \subset X$, Y — подпространство X (имеет ту же метрику $\rho_y(y_1, y_2) = \rho_x(y_1, y_2)$), $D \subset Y \subset X$

Теорема.

1. *D — открыто в пространстве $Y \;\Leftrightarrow\; \exists G$ — открытое в X: $D = G \cap Y$*
2. *D — замкнуто в пространстве $Y \;\Leftrightarrow\; \exists F$ — замкнутое в X: $D = F \cap Y$*

(Заметим, что $\forall a \in Y, B^y(a,r) = B^x(a,r) \cap Y$)

Доказательство:

1.

- $\Rightarrow$

  D открыто в Y. Значит $\forall a \in D \;\exists r_a : B^y(a, r_a) \subset D$
  Пусть $G := \bigcup\limits_{a\in D} B^x(a, r_a)$ — открыто в X (объединение открытых множеств)
  Тогда:

  $$G \cap Y = (\bigcup_{a\in D} B^x(a, r_a)) \cap Y = \bigcup_{a\in D}(B^x(a, r_a) \cap Y) = \bigcup_{a\in D} B^y(a, r_a) = D$$

  Получили, что $G \cap Y = D$, что и требовалось доказать.

- $\Leftarrow$

  G — открыто в X, $G \cap Y = D$.
  Пусть $a \in D \Rightarrow a \in G \Rightarrow \exists r : B^x(a, r) \subset G$ (следует из того, что G открыто в X)
  Рассмотрим пересечение с Y:

  $$\exists r : B^x(a, r) \subset G$$
  $$\exists r : B^x(a, r) \cap Y \subset G \cap Y$$
  $$\exists r : B^y(a, r) \subset G \cap Y$$
  $$\exists r : B^y(a, r) \subset D$$

  То есть $\forall a \in D$ $\exists$окрестность a, также принадлежащая D. Значит D — открыто, что и требовалось доказать.

2.

- $\Rightarrow$

  Рассмотрим дополнение:
  D — замкнуто в $Y \;\Rightarrow D^c = Y \backslash D$ — открыто в $Y \Rightarrow \exists G$ — открытое в X : $\;D^c =$

$G \cap Y$ (по пункту 1)
Тогда $\exists F = G^c = X \backslash G$ — замкнуто в X.
$D^c = G \cap Y \Rightarrow D = Y \setminus (G \cap Y) = (Y \setminus G) \cup (Y \setminus Y) = Y \setminus G = G^c \cap Y$.
Получили $D = F \cap Y$, что и требовалось доказать.

- $\Leftarrow$

  $\exists F$ — замкнутое в X. $F^c = X \backslash F$ — открыто в X
  $F^c \cap Y$ — открыто в Y
  $Y \setminus (F^c \cap Y)$ — замкнуто в Y
  Применим закон Де-Моргана:
  $Y \setminus (F^c \cap Y) = (Y \setminus F^c) \cup (Y \setminus Y) = Y \setminus F^c = Y \cap F = D$
  Получили, что $F \cap Y = D$ — замкнуто, что и требовалось доказать.

1.23 Теорема о компактности в пространстве и в подпространстве

Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $Y \subset X$ — подпространство, $K \subset Y$
Тогда K — компактно в $Y \Leftrightarrow K$ — компактно в X.

Доказательство.

- $\Rightarrow$

  Пусть $K \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha$, где G_α — открытые в X

  Тогда так как $K \subset Y : K \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} (G_\alpha \cap Y) \Rightarrow \exists \alpha_1, \dots \alpha_n : K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} (G_{\alpha_i} \cap Y)$ (т.е. существует конечное подмножество, так как K компактно в Y). И раз $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} (G_{\alpha_i} \cap Y)$, то тем более $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$

- $\Leftarrow$

  Дано: K — компактно в X, правда ли что K — компактно в Y?

  $$K \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha, G_\alpha \text{ — открытые в } Y$$

  $\exists \tilde{G}_\alpha$ — *открыто в* $X : G_\alpha = \tilde{G}_\alpha \cap Y \Rightarrow$ [по Т. об открытых и замкнутых множествах] $\Rightarrow$

  $$K \subset \bigcup \tilde{G}_\alpha \Rightarrow [\text{по компактности в } X] \Rightarrow$$

  $$\Rightarrow K \subset \bigcup_{i=1}^{n} \tilde{G}_\alpha \Rightarrow K \subset \bigcup_{i=1}^{n} G_\alpha$$

□

1.24 Простейшие свойства компактных множеств

Пусть X—метрическое пространство, $K \subset X$. Тогда:

1. K— компактно $\Rightarrow$ замкнуто + ограничено
2. $Y \subset X, Y$—компактно, K замкнуто в $Y \Rightarrow K$—компактно (замкнутое подмножество компактного множества компактно)

Доказательство.

1. (a) Замкнуто ли K? Для этого достаточно проверить что $K^c = X \setminus K$ — открыто
   Пусть $a \in K^c$. Окружим каждую точку K каким нибудь шаром, не задевая a. Тогда $K \in \bigcup\limits_{x \in K} B\left(x, \frac{1}{2}\rho(x, a)\right)$ — открытое покрытие $\Rightarrow$ [по компактности]
   $\exists x_1, \dots x_n : K = \bigcup\limits_{i=1}^{n} B(x_i, \frac{1}{2}\rho(x_i, a))$
   Возьмем $R := \min\{\frac{1}{2}\rho(x_i, a) : 1 \leq i \leq n\} \Rightarrow$ очевидно, что $B(a, R) \subset K^c$. Таким образом каждая точка K^c входит вместе с некоторым шаром $\Rightarrow K^c$ — открыто

(b) Ограничено ли K? Пусть $a \in X$— любая точка, $K \subset \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} B(a,n)$ [формально это открытое подпокрытие, тогда по компактности] $\Rightarrow \exists n_1 \dots n_l : K \subset \bigcup\limits_{n=1}^{l} B(a,n_l)$
Ну и тут написано что a содержится в каком то шаре большого радиуса, если взять наибольший

2. Проверим, компактно ли K в Y
$K \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha$ — открытые в Y
K — замкнуто, значит K^c открыто $\Rightarrow Y \subset$ (на самом деле $=$) $K^c \cup \bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha$ (это открытое покрытие) $\Rightarrow \exists$ конечное открытое подпокрытие Y:
$Y \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$, и, возможно, $\cup K^c$. Тогда
$K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$

□

Примечание. В $X = \mathbb{R}^m$ K — компактно $\Leftrightarrow$ замкнуто + ограниченно, но в любом X (и даже подпространстве $\mathbb{R}^m$) это неверно!

Пример. $X = (0,1)$ — ограничено и замкнуто (в X), но некомпактно, так как можем взять следующее открытое покрытие:

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k+2}; \frac{1}{k} \right)$$

Примечание. $K \subset X, K$ — конечное множество, тогда очевидно, что K — компактно

1.25 Лемма о вложенных параллелепипедах

Параллелепипед: $[a,b] = \{x \in \mathbb{R}^m : \forall i : a_i \le x_i \le b_i\}$
$[a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \supset [a_3,b_3] \dots$
Тогда $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} [a_i,b_i]$ — непусто

Доказательство. Рассмотрим покоординатно:
$\forall i = 1 \dots m, [(a_k)_i,(b_k)_i] \supset [(a_{k+1})_i,(b_{k+1})_i] \dots$ —к этой системе вложенных промежутков применим аксиому Кантора.
$\exists c_i \subset \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} [(a_k)_i,(b_k)_i]$
Тогда, очевидно, $c = (c_1 \dots c_m) \subset \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} [a_i,b_i]$, так как $\forall i : (a_k)_i \le c_i \le (b_k)_i$ □

1.26 Компактность замкнутого параллелепипеда в $\mathbb{R}^m$

Пусть $K = [a,b]$ — замкнутый параллелепипед в $\mathbb{R}^m$. Тогда K — компактно

Доказательство. $[(a,b)] \subset \bigcup G_\alpha$ — открытое покрытие в $\mathbb{R}^m$
Допустим из этого открытого покрытия невозможно выбрать конечное подпокрытие. Тогда осуществляем половинное деление. Тогда обязательно (так как мы предположили что конечного покрытия не существует) будет существовать четвертинка (в двумерном случае, в произвольном $\frac{1}{2^m}$ часть) которую нельзя накрыть конечным покрытием множеств. Запускаем такой алгоритм, изначально $a_1 = a, b_1 = b$
Получилась цепочка вложенных параллелепипедах. Тогда лемма о вложенных параллелепипедах:
$\exists c \in \bigcap [a_k, b_k]$.
$diam[a_k, b_k] = \frac{diam[a_1,b_1]}{2^{k-1}}$, очевидно, длина диаметра стремится к нулю
Тогда $\exists G_\alpha : c \in G_\alpha$, и так как G_α открытое, то c входит с некоторой окрестностью $\Rightarrow \exists B(c,r) \subset G_\alpha$, и когда диаметр параллелепипеда станет меньше r, мы получим что весь параллелепипед вместе с точкой c содержится в этом одном шаре G_α, но мы ведь строили параллелепипеды так, чтобы их нельзя было накрыть конечным подпокрытием. Мы получили противоречие. □

1.27 Теорема о характеристике компактов в $\mathbb{R}^m$

Дано множество K лежащее в $R^m : K \subset R^m$. Тогда следующие утверждения эквивалетны:

1. K — замкнуто и ограничено (Мы доказывали что компактное множество обязательно замкнуто и ограничено, но в R^m это работает еще в обратную сторону)
2. K — компактно
3. K — секвенциально компактно. Это значит, что $\forall (x_n) \in K \; \exists n_k$ — строго возрастающая последовательность номеров, $\exists x \in K : x_{n_k} \to x$ (у любой последовательности имеется сходящаяся подпоследовательность, причем x тоже должен лежать в K)

Доказательство.

- $1 \Rightarrow 2$
  K — замкнуто и (ограничено, значит можем заключить в шаре, да и не только в шаре, давайте в параллелепипеде) содержится в параллелепипеде. Замкнутое подмножество компактного множества компактно (по теореме о простейших свойствах) $\Rightarrow K$— компактно

- $2 \Rightarrow 3$
  Пусть дана последовательность x_n. Можем ли мы найти такую подпоследовательность x_{n_k}? Разберем два случая:

  1. Множество значений x_n конечно. Очевидно, можем. Допустим у нас есть 10 значений x_n, а самих номеров бесконечно много. Значит одному из значений отвечает бесконечно много номеров. Берем эти номера, это и будут n_k, значит $\exists$ бесконечная стационарная подпоследовательность.

2. Множество значений x_n бесконечно. $D = \{x_n\}$.
   Предположим что у D нет предельных точек в K, тогда построим покрытие:
   $K = \bigcup\limits_{x \in K} B(x, \varepsilon_x)$
   $x \in K$ не предельная точка для $D \Rightarrow$ можем окружить таким шаром, что там нет точек $D : \exists \varepsilon_x : \dot{B}(x, \varepsilon_x)$ не пересекается с D.
   Тогда это открытое покрытие. У этого открытого покрытия нет конечного подпокрытия, потому что множество D бесконечно и не может быть покрыто конечным количеством шаров. Но это противоречие, так как K компактно и значит у любого открытого покрытия есть конечно подпокрытие $\Rightarrow$ у D есть предельные точки

   Тогда пусть x — предельная точка. Значит $\exists x_{m_k} \to x$, где $x_{m_k} \in D, x_{m_k} \neq x$ (ко всякой предельной точке можно подойти не наступая на саму точку)
   Последовательность номеров должна быть возрастающей, поэтому отсортируем последовательность m_k и удалим повторы

   Рассмотрим $x_{m_1} : \exists K\ \forall k > K : |x_{m_k} - x| < \underbrace{|x_{m_1} - x|}_{\varepsilon}$

   То есть при $k > K$ $m_k \neq m_1 \Rightarrow m_1$ встретится конечное число раз Аналогично $\forall i : m_i$ встречается в последовательности (m_k) конечное число раз
   Итого, алгоритм построения n_k: Берем m_1, при $k > K_1$ выбираем наименьшее значение m_l
   Обозначим $n_1 = 1, n_2 = l$. Аналогично запускаем выше проделанное наблюдение
   $\exists K_1$ при $k > K_1 : m_i \neq m_l$, берем наименьшее значение m_i, обозначим $n_2 \ldots$

- $3 \Rightarrow 1$
  Может ли K быть неограниченно?
  Тогда $\forall n\ \exists x_n \in K : \|x_n\| > n$. Возьмем шар радиусом n в нуле, K из него вылезает. Возьмем x_n за пределами шара и так при каждом n. Получили какую то последовательность. Но тут нет сходящейся подпоследовательности, потому что если $x_n \to x$, то $\|x_{n_k}\| \to \|x\|$, а у нас $\|x_{n_k}\| \to +\infty \Rightarrow K$ — ограниченно
  Замкнуто ли K? А что если $\exists a$ — предельная точка $K, a \notin K$
  К предельной точке всегда можно подойти сколько угодно близко $\Rightarrow \exists x_n \to a, x_n \in K$. Любая подпоследовательность должна стремится к a, но согласно секвенциальной компактности, $a \in K$, но у нас $a \notin K \Rightarrow$ противоречие. Значит все предельные точки лежат в K.

□

Примечание. Утверждение 2 равносильно утверждению 3 в любом метрическом пространстве. Из 2 следует 1 по теореме о простейших свойствах компактов. Но из 1, к сожалению, не следует 2:
Рассмотрим интервал (0,1). Он не компактен, ограничен и замкнут если мы его рассматриваем в себе (как самостоятельное пространство).

1.28 Эквивалентность определений Гейне и Коши

1) Определение на ε-языке, или по Коши: $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in D \setminus \{a\} : \rho(x, a) < \delta$ $\rho(f(x), A) < \varepsilon$.

2) Определение на языке последовательностей, или по Гейне: $\forall\{x_n\} : x_n \in D \setminus \{a\}$, $x_n \to a\ f(x_n) \to A$.

Теорема: определения предела отображения по Коши и по Гейне равносильны.

Доказательство:

Слева направо. Дано (1).
Берём $x_n \to a$, $x_n \in D$, $x_n \neq a$. $?f(x_n) \to A$.

$\forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ \rho(f(x_n), A) < \varepsilon$.

$\exists\delta > 0$(из (1)), $x_n \to a \Rightarrow \exists N\ \forall n > N\ \rho(x_n, a) < \delta \Rightarrow \rho(f(x_n), A) < \varepsilon$(из (1)).

Справа налево. Пусть A - не есть предел по Коши:

Тогда $\exists\varepsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \exists x \in D\ 0 < \rho(x, a) < \delta\ \rho(f(x), A) \geq \varepsilon$

$\delta = 1\ \exists x_1$ ... $\rho(f(x_1), A) \geq \varepsilon$

$\delta = \frac{1}{2}\ \exists x_2$ ... $\rho(f(x_2), A) \geq \varepsilon$

$\delta = \frac{1}{n}\ \exists x_n \in D\ 0 < \rho(x_n, a) < \frac{1}{n} : \rho(f(x_n), A) \geq \varepsilon$

$x_n \in D\ x_n \neq a\ x_n \to a\ \rho(f(x_n), A) \nrightarrow 0$, то есть $f(x_n) \nrightarrow A$. Противоречие.

1.29 Единственность предела, локальная ограниченность отображения, имеющего предел, теорема о стабилизации знака

Теорема: если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = B$, то $A = B$.

Доказательство:

По Гейне. По единственности предела последовательности $A = B$.

Теорема: локальная ограниченность отображения, имеющего предел.

Пусть X и Y - метрические пространства, $f : D \subset X \to Y$, a - предельная точка D, $A \in Y$, $f(n) \to A$ при $x \to a$. Тогда $\exists V_a$ точки a, что f ограничено в $V_a \bigcup D$.

Доказательство:

Для $\varepsilon = 1$: $\exists U_a\ \forall x \in U_a \bigcap D\ f(x) \in B(a, 1)$. Если $a \in D$ увеличим радиус шара до $R = \rho(f(x), A) + 1$. (*)

Тогда $\forall x \in U_a \bigcap D\ f(x) \in B(A, R)$.

Теорема: о стабилизации знака: Дано (*). Тогда $\forall L \neq A(L \in Y)\ \exists U_a\ f(x) \neq L$ при $x \in U_a \bigcap D$.

Доказательство:

Берём $0 < \varepsilon < \rho(L, a)\ \exists U_a\ \forall U_a \bigcap D$: $\rho(f(x), A) < \varepsilon < \rho(L, a)$, то есть $f(x) \neq L$, $f(x) > 0$ (для $\mathbb{R}$).

1.30 Арифметические свойства предела отображений. Формулировка для R с чертой

Теорема: об арифметических свойствах предела в $\mathbb{R}$. X - метрическое пространство, $D \subset X$, a - предельная точка D, $f, g : D \to Y$, $A, B \in Y$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}$: $f(x) \to A$, $g(x) \to B$, $\lambda(x) \to \lambda_0$ при $x \to a$. Тогда $\lambda : D \to \mathbb{R}$.

1) $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm g(x) = A \pm B$. 2) $\exists \lim\limits_{x\to a} \lambda(x)g(x) = \lambda_0 A$. 3) $\exists \lim\limits_{x\to a} ||f(x)|| = ||A||$. 4) Для $Y = \mathbb{R}$, если $B \neq 0$, то $\exists \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$. Замечание: аналогичная теорема верна для $Y = \mathbb{R}$ и/или $X = \mathbb{R}$. /возможно $a, A, B, \lambda_0 = \pm\infty$/. Тогда утверждения 1-4 верны, если правые части имеют смысл.

Доказательство:

3) $x_n \to a$, $x_n \neq a$, $x_n \in D$ $?||f(x)|| \to ||A||$. Да, так как $f(x_n) \to A$ по Гейне.

4) ? $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \frac{A}{B}$. $x_n \to a$, берём U_a из замечания $\exists N\ \forall n > N\ x_n \in U_a$.

1.31 Принцип выбора Больцано–Вейерштрасса

Теорема. *Из всякой ограниченной последовательности* $\mathbb{R}^m$ *можно извлечь сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. В силу ограниченности все члены последовательности принадлежат некоторому замкнутому кубу I. Поскольку I компактен, из этой последовательности можно извлечь подпоследовательность, имеющую предел, принадлежащий I. □

1.32 Сходимость в себе и ее свойства

Лемма 1. *Сходящаяся в себе последовательность ограничена.*

Доказательство. $\{x_n\}$ сходится в себе, тогда $\exists N$, что $\forall n, l > N$ будет $\rho(x_n, x_l) < 1$. То есть $\rho(x_n, x_{N+1}) < 1$.

Пусть $b \in X$. Тогда по неравенству треугольника $\rho(x_n, b) < 1 + \rho(x_{N+1}, b)$.

Пусть $R = max\{\rho(x_1, b), \ldots, \rho(x_{n+1}, b), 1 + \rho(x_{N+1}, b)\}$, тогда $\rho(x_n, b) \leq R$ для всех номеров n. □

Лемма 2. *Если у сходящейся в себе последовательности есть сходящаяся подпоследовательность, то сама последовательность сходится.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ сходится в себе и $\exists x_{n_k} \to a$.

Возьмём $\varepsilon > 0$. По определению предела $\exists K\ \forall k > K$: $\rho(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2}$, а по определению сходимости в себе $\exists N\ \forall n, l > N$: $\rho(x_n, x_l) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Покажем, что найденное N - требуемое для ε из определения предела. Пусть $n > N$. Положим $M = max\{N+1, K+1\}$, тогда $n_M \geq n_{N+1} > n_N \geq N$ и, аналогично $n_M > K$. Следовательно, $\rho(x_n, a) \leq \rho(x_n, x_{n_M}) + \rho(x_{n_M}, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

В силу произвольности ε это означает, что $x_n \to a$. □

Теорема 1. *Во всяком метрическом пространстве любая сходящаяся последовательность сходится в себе.*

Доказательство. Обозначим $\lim x_n = a$. Тогда $\exists N\ \forall n > N$: $\rho(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда $\forall n, m > N$: $\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, a) + \rho(a, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. В силу произвольности ε это означает, что $\{x_n\}$ сходится в себе. □

Теорема 2. *В R^m любая сходящаяся в себе последовательность сходится.*

Доказательство. Пусть $\{x^{(n)}\}$ - сходящаяся в себе последовательность в $\mathbb{R}^m$. По пункту 1 леммы она ограничена. По принципу выбора Больцано-Вейерштрасса из неё можно извлечь сходящуюся подпоследовательность, а тогда по пункту 2 леммы она сама сходится. □

1.33 Критерий Больцано-Коши для последовательностей и отображений

Определение. X — м. п., X — полное $\Leftrightarrow \forall\{x_n\}$ фундаментальная сходится в X

Теорема. *Пусть $f : D \subset X \to Y$, Y — полное, a — предельная точка D:*

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists V(a)\ \forall x_1, x_2 \in V(a)\ \rho(x_1, x_2) < \varepsilon$$

Доказательство. ($\Rightarrow$) Доказывается аналогично переходу от предела к сходимости к себе (по факту, это абсолютно тоже самое), т. е. достаточно записать определение и проявить волю к победе!

($\Leftarrow$) По Гейне. □

Примечание. Теорема записана для отображений в терминах окрестностей, для последовательностей утверждение тривиальнее в силу полноты образа отображения.

1.34 Теорема о пределе монотонной функции

Теорема 1. *Пусть* $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *и монотонная,* a *— предельная точка,* $D_1 = D \cup (-\infty; a)$ *тогда:*

1. f *— возрастает и ограничено сверху на* $D_1 \Rightarrow \exists$ *предел —* $f(x-a)$
2. f *— убывает и ограничено снизу на* $D_1 \Rightarrow \exists$ *предел —* $f(x-a)$

Доказательство. Положим $A := \underset{x\in D_1}{sup} f(x)$. Осталось проверить $f(x) \to A \in \mathbb{R}$.

По техническому определению супремума $\forall \varepsilon > 0\ \exists x_1 \in D_1 : A - \varepsilon < f(x_1) \leq A$. Берём $\delta = a - x_1 \Rightarrow \forall x \in D_1 : a - \delta < x < a \Rightarrow x_1 < x < a$ отсюда в силу монотонности $A - \varepsilon < f(x_1) \leq f(x) \leq A$ □

1.35 Теорема о замене на эквивалентную при вычислении пределов. Таблица эквивалентных

Теорема. *Пусть* X *— м. п,* $f, \widehat{f}, g, \widehat{g} : D \subset X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$*,* x_0 *— предельная точка* D*,* $f(x) \sim \widehat{f}(x)$*,* $g(x) \sim \widehat{g}(x)$ *при* $x \to x_0$*. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1.
$$\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \to x_0} \widehat{f}(x)\widehat{g}(x)$$

2. *Если* x_0 *— предельная точка области определения* $\dfrac{f}{g}$*,* $g(x) \neq 0$ *и* $\widehat{g}(x) \neq 0$*, то*
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\widehat{f}(x)}{\widehat{g}(x)}$$

Доказательство. Доказывается, раскладывая обе функции по определению эквивалентных функци. □

1.36 Теорема единственности асимптотического разложения

Теорема. *Пусть* $f, g_k : D \subset X \to \mathbb{R}$, x_0 *— предельная точка* D, $\forall k\ g_{k+1} = o(g_k)$, $\exists U(x_0)\ \forall k\ g_k \neq 0$ *для* $x \in \dot{U}(x_0) \cap D$. *Если*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k g_k + o(g_n)$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} d_k g_k + o(g_n)$$

Тогда $\forall k\ c_k = d_k$.

Доказательство. Возьмём первый индекс, на котором соответсвующие коэффиценты различаются и обозначим его за m, далее вычтем одно выражение из другого:

$$0 = (c_m - d_m)g_m + \sum_{k=m+1}^{n} (c_k - d_k)g_k + o(g_n) = (c_m - d_m)g_m + o(g_m) \Rightarrow 0 = (c_m - d_m) + \frac{o(g_m)}{g_m}$$

Отсюда, используя предельный переход, получаем, что такого индекса не существует, а значит все коэффиценты совпадают. □

1.37 Арифметические свойства непрерывных отображений, теорема о стабилизация знака

Теорема 1. *(Арифметические свойсвта непрерывных отображений) Пусть* $f, g : D \subset X \to Y$ *(нормаированное пространство),* $x_0 \in D$, $\lambda : D \to \mathbb{R}$, f, g, λ *— непрерывны в* x_0. *Тогда* $f \pm g, \lambda f, ||f||$ *— непрерывны в* x_0.

Примечание. Если к тому же $g(x_0) \neq 0 \Rightarrow \dfrac{f(x)}{g(x)}$ — непрерывна в x_0.

Доказательство. Если x_0 является изолированной точкой D, то всё выполняется, в противном случае пользуемся арифметическими свойсвтами предела и получаем аналогичный результат. □

Теорема 2. *(О стабилизации знака) Пусть* $f : D \subset X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, f *— непрерывна в* x_0 *и* $f(x_0) \neq 0$. *Тогда* $\exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0)\ \operatorname{sign}(x) = \operatorname{sign}(x_0)$

Доказательство. Тривиально по определению предела. □

1.38 Непрерывность композиции и соответствующая теорема для пределов

Теорема. *(о непрерывности композиции)*

$$f:\ D\subset X\to Y,\quad g:\ E\subset Y\to Z,\quad f(D)\subset E,$$

f — непрерывно в $x_0\in D$, g - непрерывно в $f(x_0)$,
Тогда $g\circ f$ непрерывно в x_0

Доказательство. Воспользуемся определением непрерывности по Гейне:
Так как f — непрерывно в x_0, то выберем последовательность x_n такую, что $x_n\to x_0$, $x_n\in D$, $x_n\neq x_0$, тогда по определению непрерывности $f(x_n)\to f(x_0)$, при этом $f(x_n)\in E$, $f(x_n)\neq f(x_0)$. Так как g — непрерывно, то по определению получаем $g(f(x_n))\to g(f(x_0))$ □

Теорема. *(о пределе композиции)*

$$f:\ D\subset X\to Y,\quad g:\ E\subset Y\to Z,\quad f(D)\subset E$$

1. *a — предельная точка D, $\lim_{x\to a}f(x)=A$,*
2. *A — предельная точка E, $\lim_{y\to A}g(y)=B$,*
3. *$\exists U(a):\ f(x)\neq A$ в этой окрестности,*

Тогда $\lim_{x\to a}g(f(x))=B$

Доказательство. Воспользуемся определением предела отображения по Гейне:
Так как f имеет предел в x_0, то выберем последовательность x_n такую, что $x_n\to a$, $x_n\in D$, $x_n\neq a$, тогда по определению предела $y_n=f(x_n)\to A$, при этом $y_n\in E$, $y_n\neq A$, тогда, так как g имеет предел в точке A, то $g(y_n)\to B$ □

Примечание.

$$f:\ D\subset X\to\overset{m}{\mathbb{R}},\quad x\mapsto\{f_1(x),f_2(x),\dots,f_m(x)\},$$

Тогда f — непрерывно в x_0 (или на $E\subset D$) $\Leftrightarrow\forall i\quad f_i$ — непрерывно

Доказательство. По принципу покоординатной сходимости:
$x^{(n)}$ — последовательность в $\mathbb{R}^m$, $a\in\mathbb{R}^m$
$x^{(n)}\to a\Leftrightarrow\forall i=1\dots m\quad x_i^{(n)}\to a_i$
f — непрерывно в $x_0\Leftrightarrow$

$$\left.\begin{array}{r}\forall x^{(n)}\to x_0\\ x^{(n)}\in D\\ x^{(n)}\neq x_0\end{array}\right|\Rightarrow f(x^{(n)})\to f(x_0)$$

Тогда $\forall i\quad f_i(x^{(n)})\to f_i(x_0)$ □

1.39 Теорема о топологическом определении непрерывности

Теорема. *Y — метрическое пространство, $f: X \to Y$*
Тогда f непрерывно на X тогда и только тогда, когда для любого открытого $G \subset Y$, $f^{-1}(G)$ — открытое в X

Доказательство. ($\Rightarrow$) Если $f^{-1}(G) = \varnothing$, то оно открытое, что и надо. Иначе пусть $x_0 \in f^{-1}(G)$, $f(x_0) = y \in G$, тогда, так как G — открытое, $\exists V(y) \subset G$. Тогда по определению непрерывности f в точке x_0 для $V(y)$ $\exists U(x_0): \quad \forall x \in U(x_0) \quad f(x) \in V(y)$, то есть $\forall x_0 \quad U(x_0) \subset f^{-1}(V(y)) \subset f^{-1}(G)$, тогда $f^{-1}(G)$ — открытое

($\Leftarrow$) Пусть $f(x_0) = y$, тогда $\forall V(y)$ — открытое множество. $\Rightarrow f^{-1}(V(y))$ — открытое и содержит x_0. То есть $\exists U(x_0) \in f^{-1}(V(y))$, тогда $\forall x \in U(x_0)$ $f(x) \in V(y)$, значит f — непрерывно. □

1.40 Теорема Вейерштрасса о непрерывном образе компакта. Следствия

Теорема. *(Теорема Вейерштрасса)*
X, Y — метрические пространства, $f: X \to Y$, f — непрерывно на X
Тогда если X — компактное множество, то $f(X)$ — тоже компактное.

Доказательство. Пусть $f(X) \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha$, где G_α - открыто в Y. По теореме о топологическом определении непрерывности $\forall \alpha \quad f^{-1}(G_\alpha)$ — открытое множество. Тогда $X \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} f^{-1}(G_\alpha)$. Так как X — компакт, то существует конечный набор $\alpha_1 \ldots \alpha_n$: $X \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} f^{-1}(G_{\alpha_i})$. Тогда $f(X) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_{\alpha_i} \Rightarrow f(X)$ - компакт. □

Следствие. 1. Непрерывный образ компакта замкнут и ограничен.

2. **1 теорема Вейерштрасса.**
   $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, f - непрерывна на $[a, b]$, тогда f — ограниченна.

3. X — компактно, $f: X \to \mathbb{R}$, f — непрерывна на X, тогда $\exists \max f(x), \ \min f(x)$

   Доказательство. По теореме $f(X)$ — компактно, значит f замкнута в $\mathbb{R}$. Тогда $\sup f(x) \in f(X) \Rightarrow \max f(X) = \sup f(X)$ □

4. **2 теорема Вейерштрасса.**
   $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, f — непрерывна на $[a, b] \to \exists \max f(x), \ \min f(x)$

1.41 Теорема о вписанном n-угольнике максимальной площади

Теорема. *Пусть дана окружность фиксированного радиуса R. Тогда для любого n наибольшим по площади вписанным n-угольником будет правильный многоугольник.*

Доказательство. Пусть какие-либо две соседних стороны не равны. Тогда заменим их на отрезки к самой далекой от хорды точке окружности (то есть сделаем эти отрезки равными). При этом площадь многоугольника вырастет. Таким образом, мы доказали, что не бывает площади многоугольника больше, но теперь надо проверить, достигается ли максимум. Рассмотрим площадь многоугольника как функцию от вектора центральных углов треугольника.

$$S(x) = S(\alpha_1 \dots \alpha_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} R^2 \sin \alpha_i,$$

где $0 \leqslant \alpha_i \leqslant \pi$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 2\pi$ При этом данная функция непрерывна по теоремам об арифметических свойствах и композиции непрерывных функций ($\alpha \mapsto \sin \alpha \mapsto \frac{1}{2} R^2 \sin \alpha \mapsto \sum \frac{1}{2} R^2 \sin \alpha$). Заметим, что множество векторов-аргументов ограниченно (очевидно) и замкнуто (все ограничения на α либо равенства, либо нестрогие неравенства). Тогда оно компактно. По следствию из теоремы Вейерштрасса функция, непрерывная на компакте, имеет максимум. □

1.42 Лемма о связности отрезка

Определение. Множество $A \subset X$ — связное, если его нельзя представить в виде объединения двух непересекающихся открытых множеств.

Лемма 1. *Пусть $\langle a, b\rangle \subset \mathbb{R}$. $\langle a, b\rangle$ — связное множество, то есть не существует открытых в $\mathbb{R}$, непустых и непересекающихся G_1, G_2 таких, что $\langle a, b\rangle \subset G_1 \cup G_2$, $\langle a, b\rangle \cap G_1$ и $\langle a, b\rangle \cap G_2$ — непустые.*

Доказательство. Пусть $\alpha \in \langle a,\ b\rangle \cap G_1, \beta \in \langle a, b\rangle \cap G_2$ Не умаляя общности пусть $\alpha < \beta$ Пусть $t = \sup\{x : [\alpha, x) \subset G_1\}$. Заметим, что это множество непустое (так как G_1 - открытое, то $\exists U(\alpha) \subset G_1$, значит есть значения больше α) и ограниченное ($x \in G_1,\ G_1 \cap G_2 = \varnothing \Rightarrow x < \beta$), поэтому супремум существует. При этом $t \in [\alpha, \beta)$, а значит $t \in \langle a, b\rangle$. Если $t \in G_1$, тогда, так как G_1 — открытое, $\exists U(t) \subset G_1$, что противоречит тому, как было выбрано t. Если $t \in G_2$, тогда $\exists U(t) \subset G_2$. Тогда не весь промежуток $[\alpha, \beta)$ попадает в G_1. Значит существует точка на $\langle a, b\rangle$, которая не покрывается ни одним из отрезков. $\square$

1.43 Теорема Больцано–Коши о промежуточном значении

Теорема (Больцано–Коши о промежут. значении)

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, непр $[a, b]$, $f(a) \neq f(b)$

Тогда $\forall t$ между $f(a)$ и $f(b)$ $\exists x \in [a, b] : f(x) = t$.

Д-во иначе $[a, b] = \underbrace{f^{-1}(-\infty, t)}_{\text{откр.}} \cup \underbrace{f^{-1}(t, +\infty)}_{\text{откр.}}$.

Зам. Т. обр. Если непр. ф-ция принимает два каких-то значения, то она принимает и все значения между ними.

1.44 Теорема о бутерброде

$A, B \subset \mathbb{R}^2$ — многоугольники
Тогда $\exists$ прямая l, кот. разбивает оба многоугольника на часть равной площади.

Доказательство:

Лемма:
$A \subset R^2$, V - произвольный вектор. Тогда $\exists$ прямая с направлением вектора V, делящая фигуру на части одинаковой площади.

Доказательство Леммы:

Пусть $A \subset [a, b] \times [c, d]$. Не умоляя общности пусть $[a, b] \nparallel V$. Где $[a, b]$ - часть оси OX. Рассмотрим координату на оси OX $\forall t$ $f(t) = S_l(t) - S_r(t)$ $f(a) = -S$, а $f(b) = S$. f - непрерывна: $|f(t_1) - f(t_2)| \leq 2$ * площадь слоя фигуры между t_1 и $t_2 \leq 2 * (d - c) * |t_1 - t_2|$ По теореме Больцано-Коши о промежуточном значении $\exists t_0 : f(t_0) = 0$

Доказательство Теоремы:

$\forall \phi \in [0, 2 * \pi]$ построим по лемме прямую направленную под углом ϕ к оси OX. Она делит A на равновеликие части. $g(\phi) = S_l^B(\phi) - S_r^B(\phi)$. (Площади фигуры B).

1 утверждение (очевидное) (для получения периодичности)
$g(\phi + \pi) = -g(\phi)$
2 утверждение (g - непрерывно)
$g(\phi_1) - g(\phi_2) \leq 4 * 1/2 * d^2 * |sin(\phi_1 - \phi_2)|$, где d - диагональ стола. По теореме Больцано-Коши о промежуточном значении все получается.

1.45 Теорема о сохранении промежутка

$f: \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, непр.

Тогда $f(\langle a,b\rangle)$ – промежуток.

<u>Д-во</u> $m := \inf\limits_{\langle a,b\rangle} f$, $\sup\limits_{\langle a,b\rangle} f := M$

Дост. проверить $(m, M) \subset f(\langle a,b\rangle)$

$\forall t \in (m, M) \quad ? \exists x : f(x) = t$

Если нет, то $f^{-1}(-\infty, t) \cap (m,M)$, $f^{-1}(t, +\infty) \cap (m,M)$ – д[в]а непустых, откр., непересекающихся мн-ва, дающих в объединении (m,M). ∎

↳ по опр sup, inf

<u>Зам.</u> Вид промежутка не сохраняется.

$\sin : (0, 2\pi) \to [-1, 1]$

$(0, \pi) \to (0, 1]$ и т.п.

1.46 Теорема Больцано–Коши о сохранении линейной связности

Определение: Пусть Y - метрическое пространство и $E \subset Y$.

E - линейно связное если $\forall A, B \in E$ $\exists$ путь $c : [a, b] \to E$ - непрерывный, такой что $c(a) = A, c(b) = B$.

Пример 1 - круг в $\mathbb{R}^2$ - линейно связный потому что выпуклый.
$g : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$
$t \to A + t(B - A)$

Пример 2 - $A \subset \mathbb{R}^2$ $A = (0 \times [-1, 1]) \cup \{(x, sin\frac{1}{x}) : x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$

Теорема :

X - линейное связное множество. $f : X \to Y$ (на Y - сюрьекция) - непрерывно. Тогда Y - линейное связно.

Доказательство :

$A, B \in Y$ подберем $U, V \in X : f(U) = A, f(V) = B$;

Соединим U и V путем c (т.е. возьмем $c : [a, b] \to X, c(a) = U, c(b) = V$). Тогда композиция f и c соединяет точки A и B.

1.47 Описание линейно связных множеств в $\mathbb{R}$

Определение: Пусть Y - метрическое пространство и $E \subset Y$.

Е - линейно связное если $\forall A, B \in E \exists$ путь $c : [a, b]\ toE$ - непрерывный, такой что $c(a) = A, c(b) = B$.

Пример 1 - круг в $\mathbb{R}^2$ - линейно связный потому что выпуклый.
$g : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$
$t \to A + t(B - A)$

Пример 2 - $A \subset \mathbb{R}^2$ $A = (0 * [-1, 1]) \cup (x, sin\frac{1}{2} : x \in \mathbb{R}, x \neq 0)$

Теорема :
В $\mathbb{R}^1$ линейно связыми множествами являются только промежутки.

Доказательство :
В утверждении спрятана $\leftrightarrow$. Е - промежуток $\to$ Е - линейно связно. Очевидно. Е - линейно связно. $m = \inf E, M = \sup E$. Проверим, что $(m, M) \subset E$. Пусть $t \in (m, M)$: $t \notin E$. Возьмем $A \in E : A < t$, $B \in E : t < B$

Тогда $\nexists$ пути из А в В. (Если бы существовал такой путь, то в некоторой точке $d \in (a, b) : c(d) = t$).

1.48 Теорема о непрерывности монотонной функции. Следствие о множестве точек разрыва

Теорема о непрерывности монотонной функции
Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, f монотонна. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. f не может иметь разрывов второго рода.
2. Непрерывность f равносильна тому, что её множество значений - промежуток.

Доказательство. Пусть f возрастает(для других случаев доказывается аналогично).

1. Пусть $x_0 \in (a, b\rangle, x_1 \in \langle a, b)$. Тогда $f(x_1) \le f(x) \le f(x_0)$ для всех $x \in (x_1, x_0)$, поэтому f возрастает и ограниченна сверху на $\langle a, x_0)$. По теореме о пределе монотонной функции существует конечный предел $f(x_0-)$, причём по теореме о предельном переходе в неравенстве $f(x_1) \le f(x_0-) \le f(x_0)$. Аналогично доказывается, что для любой точки $x_0 \in \langle a, b)$ существует конечный предел $f(x_0+)$, причём $f(x_0) \le f(x_0+) \le f(x_2)$ для всех $x_2 \in (x_0, b\rangle$.
2. Ввиду следствия, остаётся доказать только достаточность.
   Пусть $f(\langle a, b\rangle)$ — промежуток. Докажем непрерывность f слева в любой точке $x_0 \in (a, b\rangle$ от противного. Пусть $f(x_0-) < f(x_0)$ (мы уже доказали, что существует конечный левосторонний предел). Возьмём $y \in (f(x_0-), f(x_0))$. Тогда если $a < x_1 < x_0$, то $y \in [f(x_1), f(x_0)]$. Следовательно, $y \in f(\langle a, b\rangle)$, т.е. y - значение функции. С другой стороны
   $$\forall x \in \langle a, x_0) \Rightarrow f(x) \le f(x_0-) < y,$$
   а
   $$\forall x \in [x_0, b\rangle \Rightarrow f(x) \ge f(x_0) > y,$$
   т.е. функция не принимает значение y. Получаем противоречие. Т.е. $f(x_0-) = f(x_0)$. Аналогично f непрерывна справа в любой точке $x_0' \in \langle a, b)$.

1.49 Теорема о существовании и непрерывности обратной функции

Теорема о существовании и непрерывности обратной функции
Пусть $f \in C(\langle a, b\rangle \to \mathbb{R})$, f строго монотонна,

$$m = \inf_{x\in\langle a,b\rangle} f(x), \quad M = \sup_{x\in\langle a,b\rangle} f(x).$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

1. f обратима, $f^{-1} : \langle m, M\rangle \to \langle a, b\rangle$ - биекция.
2. f^{-1} строго монотонна одноимённо с f.

3. f^{-1} непрерывна.

Доказательство. Пусть для определённости f строго возрастает.
Если $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle, x_1 < x_2$, то $f(x_1) < f(x_2)$; следовательно, f обратима. По теореме о сохранении промежутка $f(\langle a, b\rangle) = \langle m, M\rangle$. По общим свойствам обратного отображения f^{-1} – биекция $\langle m, M\rangle$ и $\langle a, b\rangle$.
Докажем, что f^{-1} строго возрастает. Если $y_1,\ y_2 \in \langle m, M\rangle,\ y_1 < y_2$, то $y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2)$, где $x_1,\ x_2 \in \langle a, b\rangle,\ x1 = f^{-1}(y_1),\ x_2 = f^{-1}(y_2)$ При этом $x_1 < x_2$, так как возможность $x_1 \geq x_2$ исключена в силу строгого возрастания f.
Возрастающая функция f^{-1} задана на промежутке $\langle m, M\rangle$, а её множество значений - промежуток $\langle a, b\rangle$. По теореме о непрерывности монотонной функции она непрерывна.

1.50 Счетность множества рациональных чисел.

Множество рациональных чисел счётно
Доказательство. Обозначим

$$Q_+ = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}, \quad Q_- = \{x \in \mathbb{Q}\}$$

При всех $q \in \mathbb{N}$ множество $Q_q = \{\frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \frac{3}{q}, ...\}$ счётно. По теореме об объединении не более чем счётных множеств и $Q_+ = \cup_{q=1}^{\infty} Q_q$ счётно. Очевидно, что Q_- Q_+. Снова по той же теореме множество

$$\mathbb{Q} = Q_+ \cup Q_- \cup \{0\}$$

счётно.

1.51 Несчетность отрезка.

Несчетность отрезка Отрезок $[0, 1]$ несчетен
Доказательство. Допустим противное: пусть отрезок $[0, 1]$ счетен, т.е. все числа отрезка $[0, 1]$ можно расположить в виде последовательности:

$$[0, 1] = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, ...\}$$

Разобьем отрезок $[0, 1]$ на три равных отрезка $[0, \frac{1}{3}],\ [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], [\frac{2}{3}, 1]$ и обозначим через $[a_1, b_1]$ тот из них, который не содержит точки x_1(если таких два, то всё равно, какой). Далее разобьём отрезок $[a_1, b_1]$ на три равных отрезка и обозначим через $[a_2, b_2]$ тот из них, который не содержит x_2 (если таких более одного, то всё равно, какой). Этот процесс продолжим неограниченно. В результате мы построим последовательность вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$, причём $x_n \notin [a_n, b_n]$ для любого n. По аксиоме о вложенных отрезках существует точка x^*, принадлежащая одновременно всем отрезкам $[a_n, b_n]$. Тем более, $x^* \in [0, 1]$. Но тогда x^* имеет номер: $x^* = x_m$ при некотором m. По построению $x^* \notin [a_m, b_m]$, что противоречит принадлежности x^* всем отрезкам $[a_n, b_n]$.

1.52 Континуальность множества бинарных последовательностей

Зам. Bin = мн-во беск. бинарных посл.

Утв. $Bin \sim [0,1]$

$a \in Bin$ $\quad a = 0110\ldots \mapsto \underbrace{0{,}0110\ldots}_{f(a)}$ — запись в дв. системе

$\left.\begin{matrix} 0{,}1000\ldots \\ 0{,}0111\ldots \end{matrix}\right]$ одно и то же

Bin_0 = мн-во кон. бинарных посл.

$a = a_1 \ldots \underset{1}{\underset{\shortparallel}{a_k}} 000\ldots \mapsto \underbrace{a_1 \ldots a_k}_{h(a)}$

$\varphi : Bin \to [0,1] \cup Bin_0$

$$\varphi : a \mapsto \left[\begin{array}{l} h(a) \in Bin_0, \text{ если } a \text{ — н.с.н.м. сост из нулей} \\ f(a) \in [0,1] \end{array}\right.$$

1.53 Замечательные пределы

Утверждение. Из геом. соображений верно следующее неравенство $\sin x < x < \tan x$ для $0 < x < \pi/2$

Замечательные переделы

1.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Доказательство. Для $0 < x < \pi/2$ $\quad x < \tan x \Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$, откуда по теореме о двух городовых имеем замечательный предел.

. . . .

2.
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Доказательство. (Кохась взял кредит, док-во не требуется)

. . . .

3.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Доказательство. Положим $t = \ln(1+x) \Rightarrow e^t = 1 + x \Rightarrow x = e^t - 1 \Rightarrow$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$$

Подстановка t справедлива по пределу композиции, т. к. $\ln(1+x)$ непрерывная функция

. . . .

4.
$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Доказательство. $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} \to e^1 = e$

. . . .

5.
$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

Доказательство. Положим $f(x) = (1+x)^\alpha - 1 \Rightarrow \ln(f(x)+1) = \alpha \ln(1+x)$. Тогда при $x \to 0$ по двум замечательным пределам:

$$\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \frac{f(x)}{x} = \frac{f(x)\alpha\ln(1+x)}{x\ln(f(x)+1)} = \frac{f(x)}{\ln(f(x)+1)} \cdot \alpha \cdot \frac{\ln(x+1)}{x} \to 1 \cdot \alpha \cdot 1 = \alpha$$

1.54 Равносильность двух определений производной. Правила дифференцирования.

Пусть функция f действует из отрезка $[a,b] \to \mathbb{R}, x_0 \in (a,b)$.

. . . .

Определение производной №1

Если $\exists A \in \mathbb{R} : f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0), x \to x_0$, тогда f - дифф. в x_0, а A - производная в этой точке.

. . . .

Определение производной №2

Если $\exists \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = A \in \mathbb{R}$, тогда f - дифф. в x_0, а A - производная в этой точке.

. . . .

Эквивалентность определений

Определение №1 эквивалентно определению №2.

Доказательство.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A + \frac{o(x - x_0)}{x - x_0} \Leftrightarrow (\lim_{x\to x_0} \frac{o(x - x_0)}{x - x_0} = 0) \Leftrightarrow (2)$$

. . . .

Правила дифференцирования

Пусть функции f, g действут из отрезка $[a,b] \to \mathbb{R}, x_0 \in (a,b)$, дифф. в $x_0 \Rightarrow \varphi$ дифф. в x_0 и справедливо:

1. $\varphi'(x_0) = (f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ *Доказательство.* По определению.
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \varphi'(x_0) = (\alpha f(x_0))' = \alpha f'(x_0)$

   Доказательство. По определению.
3. $\varphi'(x_0) = (fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ *Доказательство.*

$$(fg)' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f\Delta g}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0} \frac{g\Delta f}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x\to 0} \Delta g =$$

$$= f \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} + g \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x\to 0} \Delta g = fg' + gf' + f' \cdot 0 = f'g + fg'.$$

(optional)

$$(f(x)\cdot g(x))' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta(f(x)\cdot g(x))}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x) - f(x)\cdot g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(f(x)+\Delta f(x))\cdot(g(x)+\Delta g(x)) - f(x)\cdot g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x)\cdot g(x) + g(x)\cdot\Delta f(x) + f(x)\cdot\Delta g(x) + \Delta f(x)\cdot\Delta g(x) - f(x)\cdot g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{g(x)\cdot\Delta f(x) + f(x)\cdot\Delta g(x) + \Delta f(x)\cdot\Delta g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{g(x)\cdot\Delta f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x)\cdot\Delta g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x\to 0} \Delta g(x) =$$

$$= g(x)\cdot \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} + f(x)\cdot \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} + f'(x)\cdot 0 =$$

$$= f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

. . . .

4. $g(x_0) \neq 0 \Rightarrow \varphi'(x_0) = (\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) \cdot g(x) - g(x+\Delta x) \cdot f(x)}{\Delta x \cdot g(x+\Delta x) \cdot g(x)} =$$

$$= \frac{1}{g^2(x)} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f(x)+\Delta f(x)) \cdot g(x) - (g(x)+\Delta g(x)) \cdot f(x)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{1}{g^2(x)} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) \cdot g(x) + g(x) \cdot \Delta f(x) - f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot \Delta g(x)}{\Delta x} =$$

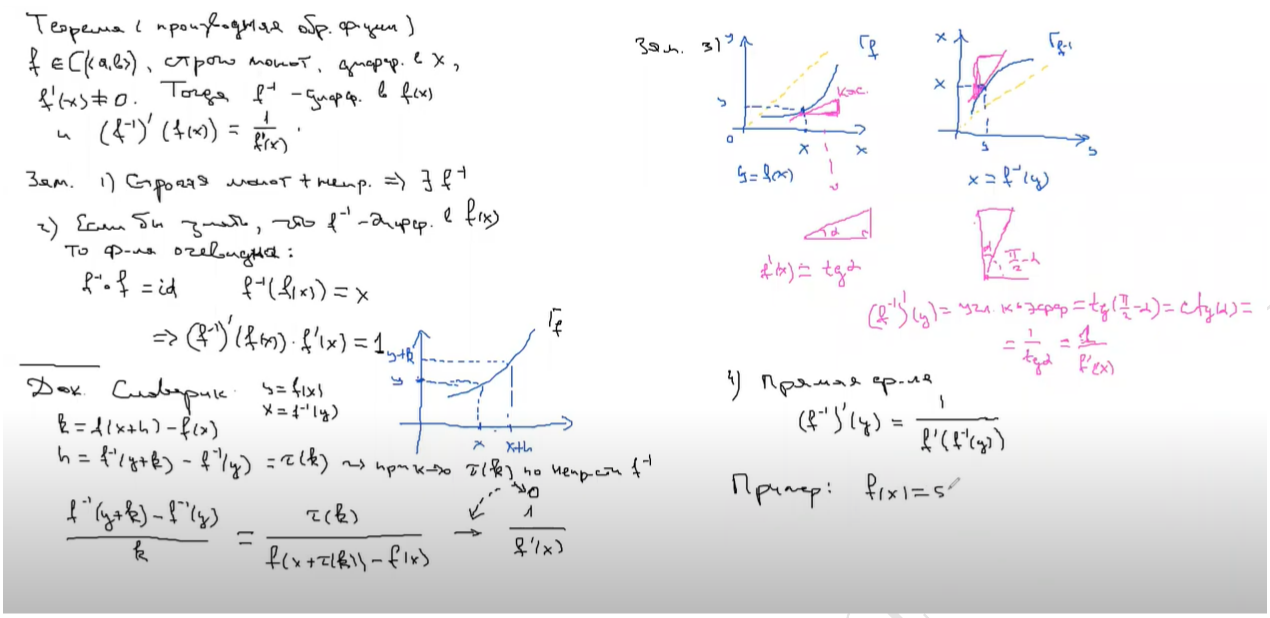
$$= \frac{1}{g^2(x)} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x) \cdot \Delta f(x) - f(x) \cdot \Delta g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{1}{g^2(x)} \cdot \left(g(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} - f(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} \right) =$$

Доказательство.

$$= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

1.55 Дифференцирование композиции и обратной функции



Теорема (производная обр. функции)
$f \in C(\langle a,b\rangle)$, строго монот., дифф. в x, $f'(x) \neq 0$. Тогда f^{-1} – дифф. в $f(x)$
и $(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$.

Зам. 1) Строгая монот + непр. $\Rightarrow \exists f^{-1}$

2) Если бы знали, что f^{-1} – дифф. в $f(x)$
то ф-ла очевидна:
$f^{-1} \circ f = id \qquad f^{-1}(f(x)) = x$
$\Rightarrow (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$

Док. Словарик $y = f(x)$
$x = f^{-1}(y)$
$k = f(x+h) - f(x)$
$h = f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y) = \tau(k)$ ⤳ при $k \to 0$ $\tau(k) \to 0$ по непр-сти f^{-1}

$$\frac{f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)}{k} = \frac{\tau(k)}{f(x+\tau(k)) - f(x)} \to \frac{1}{f'(x)}$$

Зам. 3)

$f'(x) = \operatorname{tg}\alpha$

$(f^{-1})'(y) =$ угл. к-т граф $= \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \operatorname{ctg}(\alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{f'(x)}$

4) Прямая ф-ла
$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Пример: $f(x) = s$

1.56 Теорема о свойствах показательной функции

Положим что $f(a) = (a_{x_1})^{r_1} \cdot (a_{x_2})^{r_2} \cdot \ldots \cdot (a_{x_n})^{r_n}$

Опред: Показат. функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ это нетривиальное решение $(*)$

Th: f – показ. функция. Тогда:

1) $\forall x \in \mathbb{R}: f(x) > 0, f(0) = 1$
2) $\forall r \in \mathbb{Q}\ \forall x \in \mathbb{R}: f(rx) = (f(x))^r$
3) f – строго монот, точнее: пусть $a = f(1)$. Тогда $a \neq 1$
   при $a > 1$ – f – строго возр.
   $a < 1$ – f – строго убыв.
4) Мн-во зн. $f = (0; +\infty)$
5) Пусть $\tilde{f}$ – еще одна показ. ф.
   $f(1) = \tilde{f}(1)$. Тогда $f \equiv \tilde{f}$

Док-во: 1) $f \not\equiv 0$ $\exists x_0: f(x_0) \neq 0$

1.57 Выражение произвольной показательной функции через экспоненту. Два следствия

1.58 Показательная функция от произведения

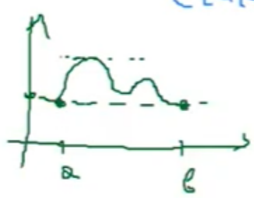
1.59 Теорема Ферма (с леммой)

1.60 Теорема Ролля. Вещественность корней многочлена Лежандра

Теорема Ролля

$f \in C[a,b]$, дифф. (a,b)

$f(a)=f(b)$ Тогда $\exists c \in (a,b)$ $f'(c)=0$



$C[a,b]$ – мн-во непр. на $[a,b]$

Док. f-непр. $\Rightarrow \exists \max f, \min f$

т. Вейерштрасса

Если $\max f$ и $\min f$ достигаются на концах $[a,b]$

то $f = const$ Тогда годится любое c.

Если $\exists c \in (a,b)$ $f(c)$ – max или min $\Rightarrow f'(c)=0$

по т. Ферма.

f – многочлен

$f(a)=0$

$f=(x-a)g(x)$

Сл. Пусть $L_n(x) = \left((x^2-1)^n\right)^{(n)}$ (n-я производная)

– многочлен степени n. (многочлены Лежандра)

Тогда $L_n(x)$ имеет n разл. вещ. корней на $(-1,1)$.

1.61 Теоремы Лагранжа и Коши. Следствия об оценке приращения и о пределе производной

Теорема Лагранжа. Пусть функция f непрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема на (a,b). Тогда найдётся такая точка $c \in (a,b)$, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

Теорема Коши. Пусть функции f и g непрерывны на $[a,b]$ и дифференцируемы на (a,b), $g'(x) \neq 0$ для любого $x \in (a,b)$. Тогда найдётся такая точка $c \in (a,b)$, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

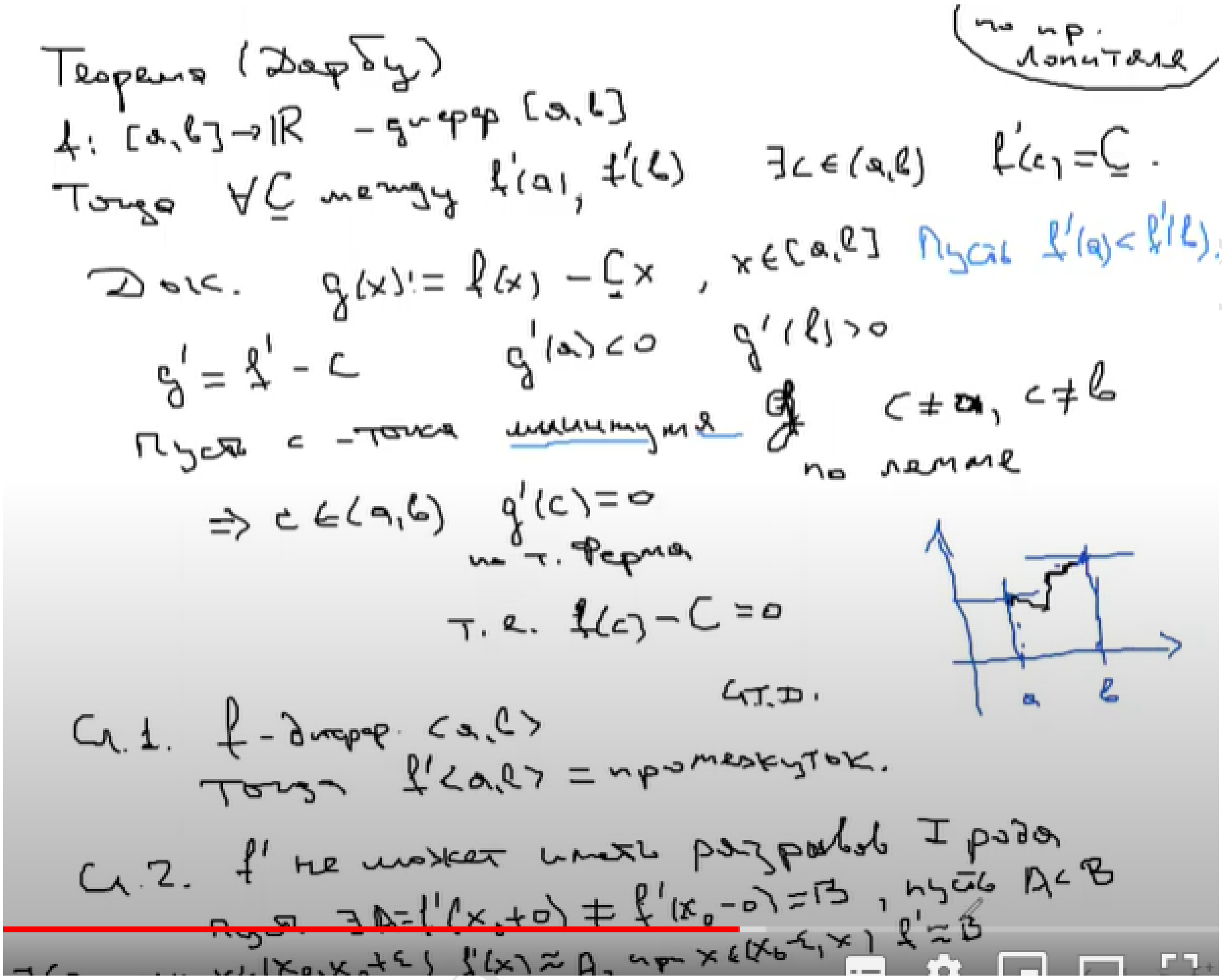
Замечание. Теорема Лагранжа - частный случай теоремы Коши, где $g(x) = x$. Поэтому достаточно доказать теорему Коши.

Доказательство теоремы Коши. Заметим, что $g(a) \neq g(b)$, так как инчае по теореме Ролля нашлась бы точка $t \in (a,b)$, в которой $g'(t) = 0$. Положим $h = f - Kg$, где $K = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$, т.е. $h(a) = h(b)$. Тогда h удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Поэтому найдётся такая точка $c \in (a,b)$, что $h'(c) = 0$, т.е. $f'(c) = Kg'(c)$. Что и требовалось доказать.

Следствие. Оценка приращения функции. Пусть функция f непрерывна на $\langle a,b\rangle$, дифференцируема на (a,b), а число $M > 0$ таково, что $|f'(t)| \leq M$ для всех $t \in (a,b)$. Тогда для любых точек x и $x + \Delta x$ из $\langle a,b\rangle$

$$|f(x+\Delta x) - f(x)| \leq M|\Delta x|.$$

1.62 Теорема Дарбу. Следствия



1.63 Формула Тейлора с остатком в форме Пеано

Пусть в точке x_0 функция $f(x)$ имеет производную n-го порядка, $P_n(x)$ - её многочлен Тейлора степени n в точке x_0 $(n \geq 1)$. $\mathbf{f(x) = P_n(x) + o(x - x_0)^n}$, *при $x \to x_0$*

Доказательство.

Напомним **основное свойство многочлена Тейлора**: *Функция $f(x)$ и её многочлен Тейлора $P(x)$ степени n в точке x_0, а так же все их производные до n-го порядка включительно имеют равные значения.*

Обозначим $R(x) = f(x) - P_n(x)$ Из основного свойства многочлена Тейлора следует $R(x_0) = R'(x_0) = R''(x_0) = \cdots = R^{(n)}(x_0) = 0$

Из непрерывности в точке x_0 функций $R(x), R'(x), \ldots, R^{(n-1)}(x)$ следует, что:

$$\lim_{x \to x_0} R(x) = \lim_{x \to x_0} R'(x) = \cdots = \lim_{x \to x_0} R^{(n-1)}(x) = 0$$

Нам надо доказать, что $R(x) = o(x - x_0)$ при $x \to x_0 \iff \lim_{\mathbf{x \to x_0}} \frac{\mathbf{R(x)}}{\mathbf{(x - x_0)^n}} = \mathbf{0}$

Применим $n - 1$ раз правило Лопиталя:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{(x - x_0)^n} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to x_0} \frac{R'(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to x_0} \frac{R''(x)}{n(n-1)(x - x_0)^{n-2}} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \cdots = \lim_{x \to x_0} \frac{R^{(n-1)}(x)}{n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot (x - x_0)} = \frac{1}{n!} \lim_{x \to x_0} \frac{R^{(n-1)}(x) - R^{(n-1)}(x_0)}{(x - x_0)} =$$

$$= \frac{1}{n!} (R^{(n-1)}(x_0))' = \frac{1}{n!} R^{(n)}(x_0) = 0$$

На последнем этапе мы получили по определению производную функции $R^{(n-1)}(x)$ в точке x_0. □

1.64 Теорема о разложении рациональной функции на простейшие дроби

Теорема 1. *$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ несократимая дробь, P, Q — многочлены, такие что степень многочлена $P <$ степени многочлена Q, ($deg\ P < deg\ Q$)*

$Q(x)$ разлагается на множители.

$Q(x) = (x-\alpha_1)^{k_1} \cdot (x-\alpha_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (x-\alpha_m)^{k_m}$, α - вещественные

Тогда $\exists A_1, \dots A_{k_1}$; $B_1, \dots B_{k_2}$; $\dots$; $D_1, \dots D_{k_m} \in$, где $A, B, \dots, D$ — для каждого корня соответственно, такие что:

$$\frac{P(x)}{Q(X)} = \left(\frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{(x-\alpha_1)^2} + \dots + \frac{A_{k_1}}{(x-\alpha_1)^{k_1}}\right) +$$
$$\left(\frac{B_1}{x-\alpha_1} + \dots + \frac{B_{k_2}}{(x-\alpha_1)^{k_1}}\right) + \dots + \left(\frac{D_1}{x-\alpha_1} + \dots + \frac{D_{k_m}}{(x-\alpha_1)^{k_1}}\right) \quad (\star)$$

Доказательство. Для α_1:

$Q(1) = (x-\alpha_2)^{k_2} \dots (x-\alpha_m)^{k_m}$

$\dfrac{P}{Q} = \dfrac{1}{(x-\alpha)^{k_1}} \cdot \dfrac{P}{Q_1}$

$Q_1^{(\alpha_1)} \neq 0 \Rightarrow \dfrac{P}{Q_1}$ — бесконечно дифферинциируема в окрестности точки α_1 (из опыта дифференциируемости)

Воспользуется формулой Тейлора:

$x_0 = \alpha_1$

$\dfrac{P}{Q_1} = A_{k_1} + A_{k_1-1} \cdot (x-\alpha_1) + \dots + A_1(k-\alpha_1)^{k_1-1} + A_0(k-\alpha_1)^{k_1} + o((x-\alpha_1)^{k_1})$, $x \to \alpha_1$‘

$\dfrac{P}{Q} = \dfrac{A_{k-1}}{(x-\alpha_1)^{k_1}} + \dots + \dfrac{A_1}{x-\alpha_1} + A_0 + o(1)$, $x \to \alpha_1$

Аналогично получаем $B, \dots D$

Проверим, что равно предположению:

$$\frac{P}{Q} - (\star) = \left(\frac{P}{Q} - \left(\frac{A_{k_1}}{(x-\alpha_1)^{k_1}} + \dots + \frac{A_1}{x-\alpha_1}\right)\right) - \left(\frac{B_1}{x-\alpha_1} + \dots\right) - \dots$$

Из этой разности при "упрощении выражения"сокращаются все множители знаменателя, значит останется многочлен (или константа)

$\dfrac{P}{Q} - (\star) \xrightarrow[x \to \infty]{} 0 \Rightarrow$ это $\equiv 0$

□

1.65 Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа

Теорема. *$f \in C^n(a;b)$ - дифф. n раз на отрезке $(a;b)$; $(n+1)$ раз дифф. на $(a;\ b)$; $x_\alpha,\ x_0 \in (a;b)$*

Тогда $\exists c \in (x_0, x)$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Доказательство.

$$\varphi(t) := f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$$

$$\varphi'(t) = -f'(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}$$

$$= -f'(t) - \left(-f'(t) + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\right) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

$$\varphi(x_0) = f(x) - T_n(f, x_0)(x) = R_n(f, x_0)(x)$$

$$\psi(t) := (x-t)^{n+1}$$

По Т. Коши: $\exists c$:

$$\frac{-R_n}{-(x-k_0)^{n+1}} = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\psi(x) - \psi(x_0)} = \frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)} = \frac{-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}}{-(n+1)(x-c)^n}$$

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

□

1.66 Метод Ньютона

Находит приблежённое решение уравнения

Так же называют метод Касательных.

Берём "хорошее"начало прибл. x_1. Какое для нас будет хорошее - выяним потом.

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Оценим скорость сходимости.

Пусть ξ — это корень

$\xi - x_{n+1} = \xi - x_n + \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \dfrac{f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n)}{f'(x_n)} =$ - в числителе кусок формулы тейлора. Напомним: $f(\xi) = f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n) + \dfrac{1}{2}f''(c)(\xi - x_n)^2$, c - межуд x_n и ξ

$= -\frac{1}{2}\frac{f''(c)}{f'(x_n)}(\xi - x_n)^2$

Пусть $\max|f''| = M$, а $\min|f'| = m > 0$,

Теперь мы можем сказать, что

$|\xi - x_n + 1| \leqslant \dfrac{M}{2m} - |\xi - x_n|^2 \leqslant \dfrac{M}{2m} \cdot (\dfrac{M}{2m} |\xi - x_{n-1}|^2)^2 \leqslant (\dfrac{M}{2m})^{1+2} \cdot (\dfrac{M}{2m} |\xi - x_{n-2}|^2)^2 \leqslant$
$\dots \leqslant (\dfrac{M}{2m})^{1+2+4+\dots+2^{n-1}} \cdot |\xi \cdot x_1|^{2^n} = \dfrac{2m}{M} \cdot (\dfrac{M}{2m} |\xi - x_1|)^{2^n}$

Теперь можем составить "хорошее"определение для $x1$:
$\dfrac{M}{2m} |\xi - x1| < 1$

1.67 Иррациональность числа e^2

Теорема. e^2 - *иррационально*

Доказательство. От противного.
Пусть $e = \frac{2k}{n}$ (м.б. n - чётно)

$$en = 2k \cdot e^{-1} \Rightarrow en \cdot (2k-1)! = (2k)! e^{-1}$$

$e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(2k-1)!} + \frac{e^c}{(2k)!}$ - по формуле Тейлора. $x_0 = 0, x = 1, 0 < c < 1$

Левая часть: $e(2k-1)! = \underbrace{n(2k-1)!(1 + 1 + \dfrac{1}{2!} + \dots + \dfrac{1}{(2k-1)!})}_{\text{Целое число}} + \underbrace{\dfrac{n}{2k} \cdot e^c}_{\frac{e^c}{e^2} = e^{c-2} < \frac{1}{e}}$

Получаем, что левая часть чуть больше целого числа.
Так же распишем e^{-1} используя ф. Тейлора $x_0 = 0, x = -1, -1 < c_1 < 0$
$e^{-1} = 1 - 1 + \dfrac{1}{2!} - \dfrac{1}{3!} + \dots + \dfrac{1}{(2k)!} - \dfrac{e^{c_1}}{(2k+1)!}$

Правая часть: $\underbrace{(2k)! \left(1 - 1 + \dfrac{1}{2!} - \dfrac{1}{3!} + \dots + \dfrac{1}{(2k)!}\right)}_{\text{Целое число}} - \underbrace{(2k)! \cdot \dfrac{e^{c_1}}{(2k+1)!}}_{\frac{e^{c_1}}{2k+1} < \frac{1}{3}}$

Получилось, что правая часть чуть меньше целого
Получили противоречие, следовательно e^2 - иррационально □

1.68 Следствие об оценке сходимости многочленов Тейлора к функции. Примеры

F

1.69 Критерий монотонности функции. Следствия

Теорема.

1.70 Теорема о необходимом и достаточном условиях экстремума

1.71 Теорема Кантора о равномерной непрерывности

2 Определения и формулировки

2.3 Упорядоченная пара

Упорядоченная пара — двухэлементное семейство, где множеством индексов является $\{1,2\}$.

Множество — набор различных элементов. Неопределяемое понятие.

Семейство — мультимножество, индексированное элементами другого множества

2.4 Декартово произведение

Декартовым или прямым произведением множеств X и Y называется множество всех упорядоченных пар, таких, что первый элемент пары принадлежит X, а второй — Y: $X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$

2.5 Аксиомы вещественных чисел

I Аксиомы Поля

Множество R действительных чисел, в котором введены операции $+$ и $*$ и отношения порядка, если выполняются следующие аксиомы
$+$ 1. Коммутативность $\forall a, b \in R : a + b = b + a$
$+$ 2. Ассоциативность $(a + b) + c = a + (b + c)$
$+$ 3. Существование нейтрального элемента по сложению: $\exists \mathbb{0} : \forall a : a + \mathbb{0} = a$
$+$ 4. Существование обратного элемента по сложению: $\forall a\ \exists(-a) : a + (-a) = 0$

$\cdot$ 1. Коммутативность $a \cdot b = b \cdot a$
$\cdot$ 2. Ассоциативность $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
$\cdot$ 3. Существование нейтрального элемента по умножению: $\exists \mathbb{1} \neq 0 : \forall a \quad a \cdot \mathbb{1} = a$
$\cdot$ 4. Существование обратного элемента по умножению: $\forall x \neq 0 \quad \exists x^{-1} : \quad x \cdot x^{-1} = 1$

$+ \cdot$ 1. Дистрибутивность $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

Примечание. Нетривиальность поля $1 \neq 0$

Определение. Поле — множество в котором введены операции "$+$"и "$\cdot$"удовлетворяющие I группе аксиом. Например, $\mathbb{R}, \mathbb{Q}$

II Аксиомы порядка

Примечание. На элементах должно быть введено отношение порядка : $a \in x, b \in x \quad a \prec b$, $\prec$ — неравенство

1. Рефлексивность: $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leq y$ или $y \leq x$
2. Транзитивность: $x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$
3. Антисимметричность: $x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y$
4. Связь сложения и порядка $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$
5. Связь умножения и порядка $0 \leq x, \ 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq xy$

Определение. Поле, удовлетворяющие аксиомам I - II называется **упорядоченным полем**. Например, $\mathbb{R}, \mathbb{Q}$ — упорядоченное поле, $\mathbb{C}$ — нет.

Упражнение. Докажите что $0 < 1$, используя аксиомы I - II

(Если спросит - гугли. Есть в зориче, лучше прочитать заранее. *Добавил док-во.*)

Докажем, что $(-1) * (-1) = 1$. $(-1) * (-1) + (-1) = (-1) * (-1) + (-1) * 1 = (-1) * ((-1) + 1) = (-1) * 0 = 0$. Так как обратный элемент по сложению единственен, то $(-1) * (-1) = 1$. Теперь предположим, что $1 \leq 0$. Тогда $1 \leq 0 \Rightarrow 0 \leq -1$. Но так как $0 \leq -1$ и $0 \leq -1$, то $0 \leq (-1) * (-1) = 1$, противоречие. Значит $0 \leq 1$. Так как по аксиоме $1 \neq 0$, то $0 < 1$.

Примечание.

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$
$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$
$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$
$$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

Луч: $[a,+\infty) = \{x : a \leq x\}$

Аксиома Архимеда и Полноты читать далее.

2.6 Аксиома Кантора, аксиома Архимеда

III Аксиома Архимеда

$\forall x, y \in \mathbb{R}\ \ x > 0, y > 0\ \exists n \in \mathbb{N} \quad nx > y$

Следствие. Существуют сколько угодно большие числа

Пример. Здесь был пример но он такой хуевый что мы его закоментили. Оставь надежду всяк его читающий.

Аксиома Кантора

Пусть у нас есть последовательность вложенных отрезков $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \dots$ Тогда для любой бесконечной последовательности вложенных отрезков их пересечение не пусто: $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k] \neq \varnothing$

Примечание. Аксиома Кантора не выполняется для последовательности вложенных промежутков. $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k) = \varnothing$

Например, $(a_k, b_k) = (0, \frac{1}{k})$. Тогда $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} = \varnothing$

Доказательство. От противного. Пусть существует $\alpha > 0 (\alpha \leq 0$ очевидно, не подходит), что $\alpha \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (0, \frac{1}{k})$

$$\forall k : \alpha < \frac{1}{k}$$
$$\forall k : ak < 1$$

— Противоречие аксиоме Архимеда □

2.7 Пополненное множество вещественных чисел, операции и порядок в нем

Операции над множествами

Пусть $(x_n)_{\alpha\in A}$— семейство множеств. Объединением семейства $(x_n)_{\alpha\in A}$ называется множество всех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств X_α:

$\bigcup\limits_{\alpha\in A} X_\alpha = \{x : \exists\alpha\in A \quad x\in X_\alpha\}$

Пусть $(x_n)_{\alpha\in A}$ — семейство множеств. Пересечением семейства $(x_n)_{\alpha\in A}$ называется множество всех элементов, которые принадлежат каждому из множеств X_α:

$\bigcap\limits_{\alpha\in A} X_\alpha = \{x : \forall\alpha\in A \quad x\in X_\alpha\}$

Разностью множеств X и Y называется множество всех элементов, которые принадлежат X, но не принадлежат Y:

$X\setminus Y = \{x : x\in X, x\notin Y\}$

Дополнение множества: $\bar{A} = A^c = \{x\in\mathbb{U} : x\notin A\}, \quad \mathbb{U}$ —универсум

$A\setminus B = A\cap B^c$

Пополненное множество вещественных чисел, операции и порядок в нем

Множество $\bar{R} = R\bigcup\{-\infty,\infty\}$ называется расширенной числовой прямой. Множество $E\subset R$ называется ограниченным сверху, если существует такое число $M\in R$, что $x\leqslant M$ для всех $x\in E$. Число M называется верхней границей множества.

Множество $E\subset R$ называется ограниченным снизу, если существует такое число $m\in R$, что $x\geqslant m$ для всех $x\in E$. Число m называется нижней границей множества.

Множество $E\subset R$ называется ограниченным, если оно ограничено и сверху, и снизу.

Пусть $\overline{\mathbb{R}}$ — **расширенное множество** вещественных чисел. $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$ — не поле, так как некоторые операции не определены

$+$	$x\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$y\in\mathbb{R}$	$x+y$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	☹
$-\infty$	$-\infty$	☹	$-\infty$

$\cdot$	$x>0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$y<0$	xy	0	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	☺	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	☺	$-\infty$	$+\infty$

Примечание.

☹ — не определено

☺ — тоже не определено, но уже чуть лучше потому, что в некоторых случаях можно доопределить (например площадь прямоугольника со сторонами ∞ и 0 очевидно равна 0)

$\frac{0}{0}$ = неопределенность

$\frac{\infty}{\infty}$ = неопределенность

$0*\infty$ = неопределенность

$\infty-\infty$ = неопределенность

1^∞ = неопределенность

0^0 = неопределенность

∞^0 = неопределенность

$-\infty<\infty$

$\infty*\infty=\infty$

$-\infty*\infty=-\infty$

$-\infty*-\infty=\infty$

$-\infty<X<\infty$

$x+x=2x$

$x + \infty = \infty$
$x - \infty = -\infty$
$\infty + \infty = \infty$
$-\infty - \infty = -\infty$
$x * x = x^2$
$x * \infty = \infty$
$x * (-\infty) = -\infty$

2.8 Последовательность

Последовательность - частный случай отображения
$\mathbb{N} \to Y$
По натуральному номеру генерируем точку в пространстве
$n \mapsto x_n$
Числу n ставим в соответствие элемент из Y который называем x_n.

При желании можно считать последовательность функцией
Если выписать множество значений последовательности $(x_1, x_2, x_3...)$,
то можно воспринимать ее как список.

Отображение - Неопределяемое понятие.
Это тройка (X, Y, f):
X - область опредления
Y - множество на котором отображение принимает значения
f - правило которое по элементам множества X генерирует элементы множества Y
$f : X \to Y$
$x \mapsto f(x)$

Частные случаи отображения:

- Последовательность
- Функция:
  $f : X \to \mathbb{R}$
- Семейство:
  A - множество меток
  X - множество обьектов
  По каждой метке α из A генерируем x_α
  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$

2.9 Образ и прообраз множества при отображении

Пусть дано отображение $f : X \to Y$, тогда образом множества $A \subset X$ под действием f называется
$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$
Прообразом множества $B \subset Y$ относительно отображения f называется
$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$

2.10 Инъекция, сюръекция, биекция

Отображение f называется:

- Сюръекцией (отображением на):
  $\forall y \in Y \ \exists x \in X : f(x) = y$
  $\Leftrightarrow f(X) = Y$
  $\Leftrightarrow \forall y \in Y$ уравнение относительно x, $f(x) = y$ - имеет решение

- Инъекцией (отображением в):
  $\forall x_1 \in X \ \forall x_2 \neq x_1 \ f(x_1) \neq f(x_2)$
  $\Leftrightarrow \forall y \in Y$ уравнение $f(x) = y$ имеет не более одного решения (относительно x)

- Биекцией:
  Если обладает свойствами инъективности и сюръективности
  $\Leftrightarrow \forall y \in Y$ уравнение $f(x) = y$ имеет ровно одно решение

2.11 Векторнозначаная функция, ее координатные функции

Если отображение действует из X в $\mathbb{R}^n$, то его называют векторнозначной функцией
$f : X \to \mathbb{R}^n$ - векторнозначаная функция

$\mathbb{R}^n$ - декартово произведение n копий множества вещественных чисел $\mathbb{R}$, т.е. множество всевозможных наборов $(y_1 ... y_n)$, $y_i \in \mathbb{R}$

Отображение переводит x в вектор $f(x) \in \mathbb{R}^n$
$x \mapsto f(x) = (f_1(x), f_2(x), ... f_n(x))$

Вместе с этим появляются вспомогательные отображения $f_i(x)$
$x \mapsto f_i(x) \in \mathbb{R}$ - координатная функция отображения f

2.12 График отображения

Пусть дано отображение $f : X \to Y$, тогда графиком называется множество в декартовом произведении $X \times Y$
$\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}$

2.13 Композиция отображений

Композицией отображений $f : U \to V$ и $g : V \to W$ называется такое отображение $h : U \to W$
$h = g \circ f$, что $\forall u \in U \quad h(u) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$

2.14 Сужение и продолжение отображений

$F : X \to Y; A \subset X$

$F|_A : A \to Y-$ называется сужение на мн-во A: $F : X \to Y; X \subset f(a)-$ множество A

....

$F : x \to Y; X \subset B$

Продолжение отображения f на множество B :

$\tilde{f} : B \to Y$

$\forall x \in X : \tilde{f}(x) = f(x)$

$\tilde{f}|_x = f$

2.15 Предел последовательности (эпсилон-дельта определение)

Примечание. "Дельта— это байт. Кто скажет Кохасю что в определении фигурирует дельта — тому бан.

Определение. (x_n) — последовательность в метрическом пространстве $(X, q); a \in X$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N : q(a, x_n) < \varepsilon$$

Примечание. Чтобы не писать много обычно пишут $q(a, x_n) \to 0$

Примечание. Если x_n - вещественная последовательность в $\mathbb{R}$ с евклидовой нормой, то

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon$$

2.16 Окрестность точки, проколотая окрестность

Определение. (X, q) — метрическое пространство
$a \in X, r > 0$
$B(a, r) = \{x : q(a, x) < r\}$ — открытый шар
$B(a, r) = \{x : q(a, x) <= r\}$ — закрытый шар.
$U(a) = B(a, \varepsilon)$ — ε-окрестность точки a
$\dot{U}(a) = U(a) \setminus \{a\}$ — проколотая ε-окрестность точки a

2.17 Предел последовательности (определение на языке окрестностей)

Определение. (x_n) — последовательность в метрическом пространстве (X, q); $a \in X$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\forall U(a)\ \exists N\ \forall n > N\ x_n \in U(a)$$

Вне любой окрестности точки лежит конечное число членов последовательности

2.18 Метрика, метрическое пространство, подпространство

Определение. Метрика — это функция на парах элементов какого-либо множества, возвращающая расстояние между этими элементами. Пусть $\rho(x, y)$ — метрика. Тогда она обладает следующими свойствами:

- $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (аксиома тождества)
- $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (аксиома симметрии)
- $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (неравенство треугольника)

Определение. Метрическое пространство — это пара из множества и метрики (метрика определена на парах элементов множества). То есть это множество различных элементов, между которыми можно найти расстояние с помощью заданной функции — метрики. (X — множество, ρ — метрика, то (X, ρ) — метрическое пространство)

Определение. Метрическое пространство (M, ρ_M) называется подпространством метрического пространства (X, ρ), если $M \subset X$ и $\rho_M = \rho|_M$.

2.19 Шар, замкнутый шар, окрестность точки в метрическом пространстве

Определение. Шар с центром в точке a радиуса $r > 0$ — это множество всех точек, таких что расстояние от a до них меньше заданного r. То есть $B(a, r) = X$, где $\forall x \in X : \rho(a, x) < r$

Определение. $D(a, r)$ называют замкнутым шаром с центром a радиуса r, если $r > 0$ и $D(a, r) = X$, где $\forall x \in X : \rho(a, x) \leq r$

Определение. Окрестностью точки x_0 в метрическом пространстве (X, ρ) называют шар $B(x_0, \varepsilon)$. То есть это множество точек $Y \subset X$ такое что $\forall y \in Y : \rho(x_0, y) < \varepsilon$

2.20 Линейное пространство

Определение. (Строгое определение) Линейное пространство — это упорядоченная четверка $(V, F, +, \cdot)$, где V — множество векторов, F — поле скаляров, " $+$ " — определенная в пространстве операция сложения векторов, " $\cdot$ " — определенная операция умножения векторов на скаляры
(По сути) Линейное пространство — это множество векторов и поле скаляров, на которых определены операции сложения векторов и умножения их на скаляры

Заданные операции " $+$ " и " $\cdot$ " должны удовлетворять следующим аксиомам:

- $x + y = y + x$ (коммутативность сложения)
- $x + (y + z) = (x + y) + z$ (ассоциативность сложения)
- $\exists 0 \in V \,:\, 0 \cdot x = 0$ (существование нейтрального элемента относительно сложения)
- $\forall \alpha, \beta \in F$ выполняется $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ (ассоциативность умножения на скаляр)
- $\forall x \in V$ выполняется $1 \cdot x = x$ (умножение на нейтральный элемент поля F сохраняет вектор из V)
- $\forall \alpha, \beta \in F$ $\forall x \in V$ выполняется $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ (дистрибутивность умножения относительно сложения скаляров)
- $\forall \alpha \in F$ $\forall x, y \in V$ выполняется $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ (дистрибутивность умножения относительно сложения векторов)

2.21 Норма, нормированное пространство

Определение. Норма — это функция, которая каждому вектору сопоставляет число из $\mathbb{R}$.
$\rho: \ V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$
Норма обладает следующими свойствами (аксиомы нормированного пространства):

- $\rho(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ $(0 \in V)$
- $\forall x, y \in V$ выполняется $\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)$ (неравенство треугольника)
- $\forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall x \in V$ выполняется $\rho(\alpha x) = |\alpha|\rho(x)$

Определение. Нормированное пространство — это линейное пространство с заданной на нем нормой.
В нормированном пространстве $d(x, y) = ||x - y||$ определяет метрику.
Свойства метрики и связь с нормой:

- $d(x, y) = ||x - y|| = 0 \ \Rightarrow x = y$
- $d(x, y) = ||x - y|| = ||y - x|| = d(y, x)$
- $d(x, y) = ||x - y|| = ||(x - z) + (z - y)|| \leq ||x - z|| + ||z - y|| = d(x, z) + d(z, y)$ (неравенство треугольника)
- $d(x, y) = d(x + z, y + z)$ (инвариантность относительно сдвига)
- $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$ (положительная однородность)

2.22 Ограниченное множество в метрическом пространстве

Определение. Ограниченное множество в метрическом пространстве — это множество конечного диаметра. То есть:

Пусть (M, ρ) — метрика. Тогда множество $X \subset M$ является ограниченным, если $\exists$ шар U радиуса $r > 0$ с центром 0 такой, что $\forall x \in X : x \in U$, то есть $\rho(x, 0) < r$. То есть существует какой-то шар, в котором умещаются все элементы множества.

2.23 Скалярное произведение

Определение. $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, где X — линейное пространство над $\mathbb{R}(\mathbb{C})$, называется скалярным произведением, если соблюдаются аксиомы 1-3

Аксиомы скалярного произведения

1. $\forall x_1, x_2, y \in X \ \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) : \langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y\rangle \ = \alpha_1 \langle x_1, y\rangle + \alpha_2 \langle x_2, y\rangle$
2. Симметричность (эрмитовость) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$
3. $\forall x \in X : \langle x, x\rangle \ \geq 0$ и $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2.24 Максимум, верхняя граница, множество, ограниченное сверху

Определение. Число $x \in A$ — называется максимальным элементом A (максимум A): $\forall a \in A : a \leq x$

Определение. M — **верхняя граница** A, если : $\forall x \in A : x \leq M$

Определение. Множество A называется **ограниченным сверху**, если $\exists M : \forall x \in A : x \leq M$

Примечание. Пусть $A = (0, 1)$ (интервал). Максимальный элемент не существует

2.25 Внутренняя точка множества, открытое множество, внутренность

Пусть у нас есть (X, ρ) — метрическое пространство, $\alpha \in X, D \subset X$

Определение. α — **внутренняя** точка множества D, если $\exists U(a) : U(a) \subset D$

$$\exists r > 0 : B(a, r) \subset D$$

Определение. D — **открытое множество**, если $\forall a \in D : a$ — внутренняя точка D

Пример.

1. X
2. $\varnothing$
3. $B(a, r)$

   Доказательство. $x \in B(a, r)$, доказать: x — внутренняя точка. Возьмем $R < r - \rho(a, x)$. Докажем, что $B(x, R) \subset B(a, r)$ Возьмем $y \in B(x, R)$:

   $$\rho(y, a) \leq \rho(y, x) + \rho(x, a) < R + \rho(a, x) < r \Rightarrow y \in B(a, r)$$

   □

Определение. Внутренность $D : Int(D) = \{x \in D : x$ — внутренняя точка $D\}$

Примечание.

1. $IntD$ — открытое множество
2. $IntD = \bigcup\limits_{\substack{D \supset G, \\ G\text{— открыто}}}$ — максимальное открытое множество содержащееся в D
3. D — открыто в $X \Leftrightarrow D = IntD$

2.26 Предельная точка множества

Определение. α — **предельная точка** множества D, если:

$$\forall \dot{U}(a) \qquad \dot{U}(a) \cap D \neq \varnothing$$

Пример. Пусть $D = (0, 1) \quad X = \mathbb{R}$

α	IsLimitPoint
-1	False, $B(-1, \frac{1}{2}) \cap D = \varnothing$
$\frac{1}{2}$	True, $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \subset D$
1	True, $B(1, \frac{1}{2}) \cap D = (\frac{1}{2}, 1)$

2.27 Замкнутое множество, замыкание, граница

Определение. D — **замкнутое множество** в X, если все придельные точки D лежат в D.

Пример.

- $\mathbb{N}$ в $\mathbb{R}$ — замкнуто (нет предельных точек)
- $(0, 1)$ в $\mathbb{R}$ — незамкнуто, $1 \notin (0, 1)$ и 1 — предельная точка
- X — одновременно и замкнуто, и открыто
- $\varnothing$ — одновременно и замкнуто, и открыто

Определение. $D \subset X$, тогда **замыкание** $D : \overline{D} = D \cup$ (предельные точки D)

Примечание.

1. $a \in \overline{D} \Leftrightarrow \exists (x_n) : x_n \in D, x_n \to a$
2. $\overline{D} = \bigcap\limits_{\substack{F : F \text{ — замкнуто} \\ F \supset D}} F$ — мин. по включению замкнутое множество, содержащее D
3. D — замкнуто $\Leftrightarrow D = \overline{D}$

Определение. Граница D — множество граничных точек

Пример. Пусть у нас множество $\mathbb{Q}$ в пространстве $\mathbb{R}$, граница $\mathbb{Q} = \mathbb{R}$

2.28 Изолированная точка, граничная точка

Определение. Точка a называется изолированной точкой множества D, если существует такая выколотая окрестность этой точки, которая в пересечении с D, даёт пустое множество, т. е. для $a \in D\ \exists \dot{U}(a) : \dot{U}(a) \cap D = \emptyset$.

Определение. Точка a называется граничной точкой множества D, если в $\forall \mathcal{U}(a)$ найдётся точка как из D, так и не из D. Граница D - множество граничных точек.

2.29 Описание внутренности множества

Определение: точка a называется внутренней точкой множества D, если $\exists \mathcal{U}(a) \subset D$

Определение: множество D называется открытым, если все его точки внутренние.

Определение: Множество всех внутренних точек множества D называется внутренностью D.

Upd: Внутренности множества — объединение всех открытых множеств, содержащихся в нашем множестве D или это наибольшее по включению открытое множество, содержащееся в D

2.30 Описание замыкания множества в терминах пересечений

Определение: для $D \in X$ замыканием называется такое $\overline{D}$, что $\overline{D} = D \bigcup T$, где T - множество предельных точек D. $\overline{D}$ - замкнуто.

Замечание:

1) $a \in \overline{D} \leftrightarrow \exists (x_n) : x_n \in D, x_n \to a$

2) $\overline{D} = \bigcap F_i$, где F_i - замкнуто и $D \in F_i$.

3) D - замкнуто $\leftrightarrow D = \overline{D}$.

Пересечение всех замкнутых множеств, содержащих наше множество D или это наименьшее по включению замкнутое множество, содержащее наше множество D

2.31 Верхняя, нижняя границы; супремум, инфимум

Определение: $E \in \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$ - ограничена сверху: $\exists M$ $\forall x \in E$: $x \leq M$. M - верхняя граница.

Определение: $E \in \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$ - ограничена снизу: $\exists m$ $\forall x \in E$: $x \geq m$. m - нижняя граница.

Определение: E - ограничена сверху. Число $b \in \mathbb{R}$ - супремум множества E ($b = sup(E)$), если b - наименьшая из верхних границ.

Определение: E - ограничена снизу. Число $b \in \mathbb{R}$ - инфинум множества E ($b = inf(E)$), если b - наибольшая из нижних границ.

2.32 Техническое описание супремума

Определение: $b = supE$, если выполняется:
1) b - верхняя граница: $\forall x \in E : x \leq b$
2) b - самая маленькая верхняя граница: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x \in E$: $b - \varepsilon < x$

2.33 Последовательность, стремящаяся к бесконечности

Определение: Последовательность, стремящаяся к бесконечности называется бесконечно большой

2.34 Определения предела отображения (3 шт)

$$\lim_{x \to a} x = A$$

1) Определение на $\varepsilon - \delta$ -языке, или по Коши.

Для любого положительного числа ε существует такое положительное число δ, что для всех точек x множества D, отличных от a и удовлетворяющих неравенству $\rho_x(x, a) < \delta$, выполняется неравенство $0 < \rho_y(f(x), a) < \varepsilon$:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D : 0 < \rho_x(x, a) < \delta\ 0 < \rho_y(f(x), a) < \varepsilon$

2) Определение на языке окрестностей.

Для любой окрестности V_a точки A существует такая окрестность V_A точки a, что образ пересечения проколотой окрестности V_a с множеством D при отображении f содержится в окрестности V_A

3) Определение на языке последовательностей, или по Гейне

Для любой последовательности x_n точек множества D, отличных от a, стремящейся к a, последовательность $f(x_n)$ стремится к A:

$\forall (x_n) : 1) x_n \to a\ 2) x_n \in D\ 3) x_n! = a \implies f(x_n) \to A$

2.35 Определения пределов в R с чертой

Утверждение 2 из на прошлой странице прекрасно работает

Первое не подходит т.к. очень далеко.

$$\lim_{x \to \infty} = A$$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \Delta \forall x \in D, x > \Delta \, |f(x) - A| < \varepsilon$

2.36 Компактное множество

$K \subset X$ называется компактным если: $\forall$ открытое покрытие

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$$

$\exists$ конечный набор α_i :

$$\bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$$

2.37 Секвенциальная компактность

Пространство называется секвенциально компактным, если из любой последовательности в нём можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

K — секвенциально компактно. Это значит, что $\forall (x_n) \in K\ \exists n_k$ — строго возрастающая последовательность номеров, $\exists x \in K : x_{n_k} \to x$ (у любой последовательности имеется сходящаяся подпоследовательность, причем x тоже должен лежать в K)

2.38 Предел по множеству

$f : D \subset X \to Y, D_1 \subset D, x_0$ — пред. точка D_1

Тогда **предел по множеству** D_1 в точке x_0 — это $\lim\limits_{x \to x_0} f|_{D_1}(x)$

2.39 Односторонние пределы

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \to Y,\ a \in \mathbb{R}$.

Если a — предельная точка множества $D_1 = D \cap (-\infty, a)$, то предел отображения f в точке a по множеству D_1 называется **левосторонним пределом** отображения f в точке a и обозначается $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ или $f(a-0)$.

Если a — предельная точка множества $D_2 = D \cap (a, +\infty)$, то предел отображения f в точке a по множеству D_2 называется **правосторонним пределом** отображения f в точке a и обозначается $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ или $f(a+0)$.

2.40 Конечная эпсилон-сеть

(X, q) - м.п, $D \subset X$.

Говорят, что множество D имеет конечную эпсилон-сеть (в X), если $\exists N \subset X$, N - конечное и N — ϵ-сеть, т.е. $\forall x \in D \;\; \exists y \in N : q(x, y) < \epsilon$.

Определение: $D \subset X$ называется **сверхограниченным**, если $\forall \epsilon > 0$ D имеет конечную эпсилон-сеть.

Замечание:

1) Если D в X сверхограниченно, то и D в D сверхограниченно. В обе стороны.

Берем $\epsilon/2$ сеть в X, пусть точки будут $x_1, x_2, \ldots$. $\forall i$ отметим в $B(x_i, \epsilon/2)$ точку y_i. Тогда, докажем, что $y_1, y_2, \ldots$ конечная эпсилон-сеть в D. $\forall z \in D \; \exists x_k \;:\; q(z, x_k) < \epsilon/2$. Найдем расстояние от $q(z, y_k) \le q(z, x_k) + q(x_k, y_k) \le \epsilon$.

2) D сверхограниченно в X, тогда замыкание D тоже сверхограниченно в X.

3) Если D сверхограниченно, то D ограниченно.

2.41 Теорема о характеризации компактных множеств в терминах эпсилон-сетей

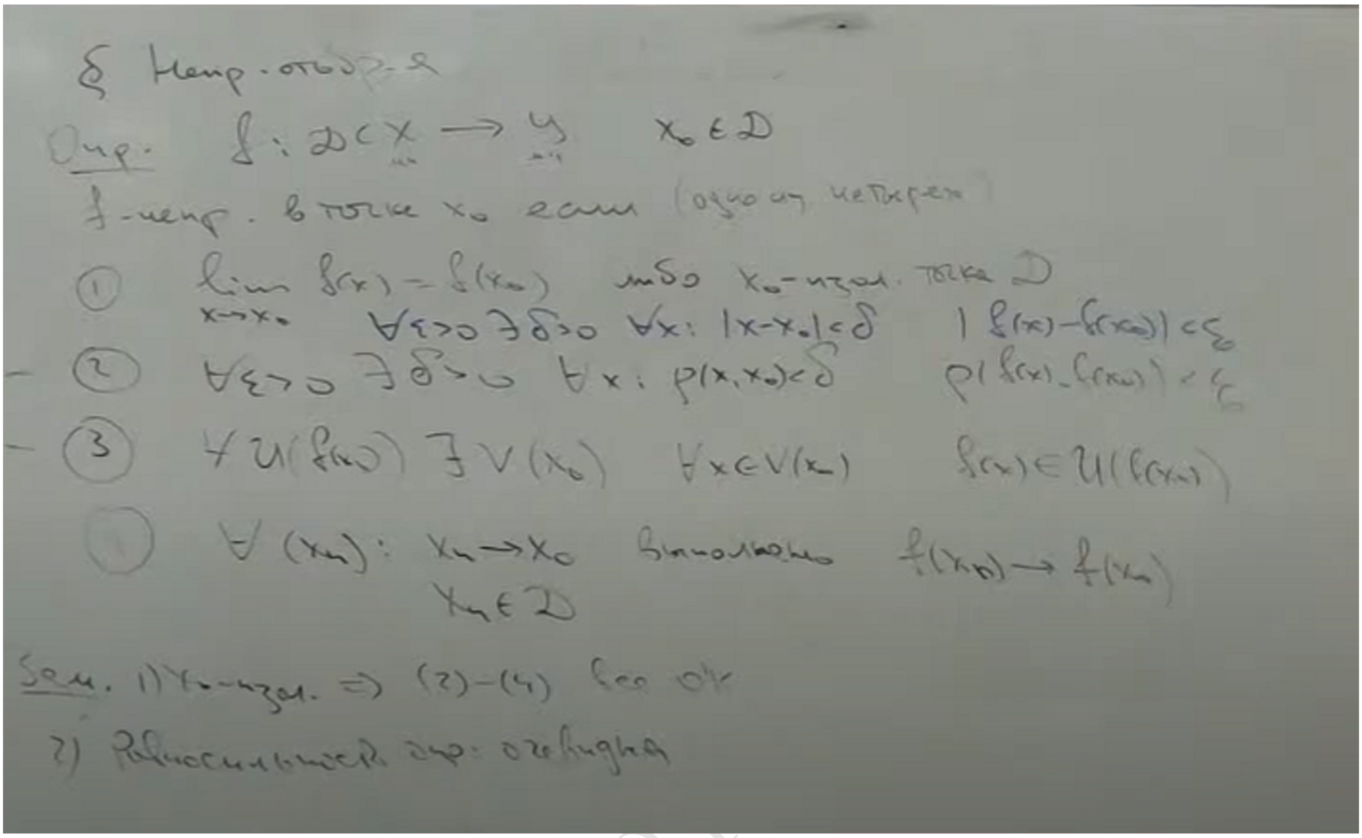
Лемма: Если D - сверхограниченно, то любая последовательность точек в D содержит в себе фундаментальную подпоследовательность.

Теорема: Если X - компактно $\Leftrightarrow$ X сверхограниченно и полно.

Замечание: Если X - полно, $D \subset X$, то если D - компактно $\Leftrightarrow$ D сверхограниченно и замкнуто.

Док-во: Слева направо. Пусть X - не полное. Значит $\exists (x_n)$ у которой нет фунд. подпоследовательности.

2.42 Непрерывное отображение (4 определения)



2.43 Непрерывность слева

Пусть Y — метрическое пространство, $f : D \subset \mathbb{R} \to Y$, $x_0 \in D$. Если сужение отображения f на множество $E_1 = D \cap (-\infty, x_0]$, $(E_2 = D \cap [x_0, +\infty))$ непрерывно в точке x_0, то говорят, что отображение f непрерывно слева (справа) в точке x_0.

2.44 Разрыв, разрывы первого и второго рода

Разрыв. Точки, в которых нарушается условие непрерывности, называют точками разрыва функции.
Разрыв 1 порядка. Точка разрыва x_0 называется точкой разрыва первого порядка, если существуют конечные односторонние пределы в этой точке.

Разрыв 2 порядка. Точка x_0 называется точкой разрыва второго порядка, если она не является точкой разрыва первого рода (если хотя бы один из односторонних пределов не существует или равен $+\infty$ или $-\infty$.

2.45 O большое

Пусть X - метрическое пространство, $D \subset X$, $f, g : D \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, x_0 - предельная точка D. Если существует функция $\phi : D \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ и окрестность V_{x_0} точки x_0, такие, что $f(x) = \phi(x)g(x)$ для всех $x \in V_{x_0} \cap D$.
ϕ ограничена на $V_{x_0} \cap D$, то говорят, что функция f ограничена по сравнению с g при $x \to x_0$.

2.46 o маленькое

Пусть X - метрическое пространство, $D \subset X$, $f, g : D \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, x_0 - предельная точка D. Если существует функция $\phi : D \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ и окрестность V_{x_0} точки x_0, такие, что $f(x) = \phi(x)g(x)$ для всех $x \in V_{x_0} \cap D$.
$\phi \to 0$, то говорят, что функция f беконечная малая по сравнению с g при $x \to x_0$.

2.47 Эквивалентные функции, таблица эквивалентных

Пусть X - метрическое пространство, $D \subset X$, $f, g : D \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, x_0 - предельная точка D. Если существует функция $\phi : D \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ и окрестность V_{x_0} точки x_0, такие, что $f(x) = \phi(x)g(x)$ для всех $x \in V_{x_0} \cap D$.

$\phi \to 1$, то говорят, что функция f и g эквивалентны при $x \to x_0$.
$\sin(x) \approx \arcsin(x) \approx \tan(x) \approx \arctan(x) \approx e^x - 1 \approx x$

2.48 Асимптотически равные (сравнимые) функции

Определение. Если $f(x) = O(g(x))$ и $g(x) = O(f(x))$ (при $x \to x_0$ или $x \in D$), то говорят, что функции f и g *сравнимы*(при $x \to x_0$ или $x \in D$ соответственно), и пишут $f \asymp g$

2.49 Асимптотическое разложение

Определение. Пусть X–метрическое пространство, $D \subset X$, x_0–предельная точка D, $f : D \to \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ и задана

конечная или счётная система функций $\{g_k\}_{k=0}^{N}$ ($N \in \mathbb{N}$) или $\{g_k\}_{k=0}^{\infty}$, $g_k : D \to \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, каждая из которых бесконечно мала по сравнению с предыдущей при всех $k \in [0 : N-1]$ или $k \in \mathbb{Z}_+$

$$g_{k+1}(x) = o(g_k(x)),\ x \to x_0.$$

Большую роль в анализе играют асимптотические формулы вида

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k g_k(x) + o(g_n(x)), \quad x \to x_0.$$

Это и есть асимптотическое разложение по заданной системе функций.

2.50 Наклонная асимптота графика

Определение. Пусть $\langle a, +\infty) \subset D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, A, $B \in \mathbb{R}$. Прямая

$y = ax + b$ называется *наклонной асимптотой* графика функции f при $x \to +\infty$, если

$$f(x) = Ax + B + o(1), \quad x \to +\infty.$$

2.51 Путь в метрическом пространстве

Определение. Пусть Y–метрическое пространство, $E \subset Y$. Непрерывное отображение отрезка в множество E:

$$\gamma\ : [a, b] \subset \mathbb{R} \to E$$

называется *путём* в E. Точка $\gamma(a)$ называется началом, $\gamma(b)$ – концом пути.

2.52 Линейно связное множество

Определение. Пусть Y–метрическое пространство, $E \subset Y$. Множество E называется *линейно связным*, если любые две его точки можно соединить путём в E:

$$\forall A, B \in E,\ \exists \gamma\ : [a, b] \subset \mathbb{R} \to E\ :\ \gamma(a) = A,\ \gamma(b) = B.$$

2.53 Счетное множество, эквивалентные множества

Определение. Множества A и B называют эквивалентными или равномощными, если между ними есть биекция, т. е. если между ними можно установить взаимооднозначное соответствие.

Определение. A — **счётное множество** $\Leftrightarrow$ равномощно/эквивалентно $\mathbb{N}$

2.54 Множество мощности континуума

Определение. A — **множество мощности континуума** $\Leftrightarrow$ равномощно/эквивалентно $[0;1]$ из $\mathbb{R}$.

Следствие. $\mathbb{R}^m, m \in \mathbb{N}$, "$\mathbb{R}^\infty$"— континуум (под $\mathbb{R}^\infty$ понимается все возможные последовательности, состоящие из чисел $\mathbb{R}$).

Примечание. На самом деле, обобщение континууальности на размерности $\mathbb{R}$ напрямую следует из того факта, что $\mathbb{R} \Leftrightarrow [0;1] \Leftrightarrow \mathrm{Bin}$ — множеству бинарных последовательностей. А т. к. декартово произведение двух последовательностей можно представить как последовательность, где на нечетных местах стоят элементы первой последовательности, а на четных элементы второй последовательности, то $\mathbb{R}^m$ для натуральных m тоже континууально.

2.55 Функция, дифференцируемая в точке

Пусть $f :< a, b >\to \mathbb{R}, x_0 \in (a, b)$, тогда имеют место быть два эквивалентных определения:

Определение. Если $\exists A \in \mathbb{R} : f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0), x \to x_0$, тогда f - дифф. в x_0, а A - производная в этой точке.

Определение. Если $\exists \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = A \in \mathbb{R}$, где $h = x - x_0$, тогда f - дифф. в x_0, а A - производная в этой точке.

Примечание. Функция, дифференцируемая в точке - это функция, которая имеет конечную производную в точке. На самом деле, функция может иметь бесконечную производную, тогда фактически говорят о наличии производной, однако не считают функцию дифференцируемой в этой точке.

2.56 Производная

Определение. Пусть $f : D \to \mathbb{R}, D_1 \in D$ — множество точек дифференцирования, тогда производной называется функция:

$$\phi : \ D_1 \xrightarrow[x \mapsto f'(x)]{} \mathbb{R} : f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0), \ x \to x_0$$

2.57 Касательная прямая к графику функции

Определение. Касательной к графику функции $f(x), f(x)$ — определена и дифф. в некоторой окрестности точки x_0, называется прямая $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Примечание. По второму определению производной угловой коэффицент касательной равен пределу угловых коэффицентов секущих.

2.58 Классы функций $C^n([a, b])$

Определение гладкой функции

Гладкая функция — функция имеющая непрерывную производную на всем множестве определения.

Рассматривают также гладкие функции высших порядков, а именно, функция с порядком гладкости $\mathbf{r}$ имеет непрерывную производную порядка $\mathbf{r}$.
Множество таких функций, определённых в области $\mathbf{\Omega}$ обозначается $\mathbf{C^r}(\mathbf{\Omega})$
$\mathbf{f} \in \mathbf{C}^\infty(\mathbf{\Omega})$ означает, что $\forall \mathbf{r} \in \mathbb{N} : \mathbf{f} \in \mathbf{C^r}(\mathbf{\Omega})$

2.59 Производная n-го порядка

$\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ - произвольные метрические пространства
Пусть функция $\mathbf{f} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ имеет конечную производную $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ в некотором интервале (a, b), $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ так же является функцией в этом интервале, если она дифференцируема, то мы так же можем вычислить от неё проивзодную: $\mathbf{f}''(\mathbf{x}) = (\mathbf{f}'(\mathbf{x}))' = ((\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}})' = \frac{\mathbf{d^2y}}{\mathbf{dx^2}}$
$\mathbf{f}''(\mathbf{x})$ так же обозночается как $\mathbf{f}^{(\mathbf{2})}(\mathbf{x})$ и называется производной второго порядка.
Аналогично мы можем вычислить производную третьего, четвертого ... порядков.

Таким образом понятие **производной n-го** порядка вводится индуктивно, через последовательное вычисление n производных, начиная с производной 1-го порядка.

2.60 Многочлен Тейлора n-го порядка

Пусть функция $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и n раз дифференцируема в точке x_0.
Данный многочлен называется многочленом Тейлора n-го порядка функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{x_0}$:

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}=0}^{\mathbf{n}} \frac{\mathbf{f}^{(\mathbf{k})}(\mathbf{x_0})}{\mathbf{k}!}(\mathbf{x} - \mathbf{x_0})^{\mathbf{k}}$$

Ф-ла Тейлора.

Наблюдение. $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$

Хотим записать в виде $P(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n$.

Тогда $c_0 = P(a)$ $\quad P' = c_1 + 2c_2(x-a) + \ldots + nc_n(x-a)^{n-1}$

$c_1 = P'(a)$ $\quad \vdots$

$P^{(k)} = k!\cdot c_k + (k+1)k(k-1)\ldots 2c_{k+1}(x-a)^1 + \ldots + n(n-1)\ldots(n-k+1)c_n(x-a)^{n-k}$

$(x-a)^k$

$k(x-a)^{k-1}$

$k(k-1)(x-a)^{k-2}$

$k(k-1)(k-2)(x-a)^{k-3}$

$$c_k = \frac{P^{(k)}(a)}{k!}$$

Т. обр. $P(x) = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(x-a) + \frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$. – ф-ла Тейлора для многочлена.

<u>Опр.</u> f – n раз дифф. в точке a

$T_n(f,a)(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ – многочлен Тейлора n-го пор. ф-ции f в точке a.

Обозн. $R_n(f,a)(x) = f(x) - T_n(f,a)(x)$

2.61 Разложения Тейлора основных элементарных функций

что то

$f(x)$ –

$\sin x = \sin 0 + \frac{\cos 0}{1!}(x-0) + \frac{-\sin 0}{2!}(x-0)^2 + \ldots =$

$= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1} + o(x^{2n})$

2) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$

3) $(e^x)^{(k)} = e^x \quad (e^x)^{(k)}\big|_{x=0} = 1$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),\ x \to 0$

4) $f = (1+x)^\sigma \quad f' = \sigma(1+x)^{\sigma-1} \quad f'' = \sigma(\sigma-1)(1+x)^{\sigma-2}$

при $x=0$: $1 \quad \sigma \quad \sigma(\sigma-1)$

$(1+x)^\sigma = 1 + \sigma\cdot x + \frac{\sigma(\sigma-1)}{2!}x^2 + \frac{\sigma(\sigma-1)(\sigma-2)}{3!}x^3 + \ldots + \binom{\sigma}{n}x^n + o(x^n)$

$\frac{\sigma(\sigma-1)\ldots(\sigma-k+1)}{k!} \stackrel{\text{обозн}}{=} \binom{\sigma}{k} \quad$ „C_σ^k"

ч. случаи $\sigma = -1$

$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n),\ x \to 0$

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + o(x^n),\ x \to 0$

$\sigma = \frac{1}{2} \quad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$

$\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2}$

5) $f(x) = \ln(1+x) \quad f'(x) = \frac{1}{1+x}$

Т.е. говоря формально

$\frac{d}{dx}\left(T_{n+1}(F, x_0)\right) = T_n(f, x_0)$

$\ln(1+x) = 0 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$

это $\ln(1+x)\big|_{x=0}$

Зам. Разложения Тейлора можно дифер. (и интегрировать)

$F \quad F' = f \quad F^{(k+1)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$

$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{k\text{-е слаг.}} + o((x-x_0)^n)$

$F = \sum_{j=0}^{n} \frac{F^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j + o((x-x_0)^n)$

берем $(k+1)$-е сл. $\frac{F^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1} \xrightarrow[\text{дифф. по } x \text{ исп. ф-лу}]{} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

Зам. А вообще дифф. асимпт. разл. нельзя:

$f(x) = x^2 + o(x^2),\ x \to 0 \stackrel{?}{\Rightarrow} f'(x) = 2x + o(x),\ x \to 0$

НЕТ: $f(x) = x^2 + x^{10}\cdot\sin\left(\frac{1}{x^{2021}}\right)$

б.м. огр.

$O(x^{10});\ o(x^9)$ и уж тем более $o(x^2)$

$f' = 2x + 10x^9\cdot\sin\ldots + \underbrace{\frac{-2021}{x^{2012}}\cdot\cos\left(\frac{1}{x^{2021}}\right)}_{\text{не } o(x^2)}$