Конспект к экзамену по билетам (математический анализ) (3-й семестр)

Латыпов Владимир (конспектор)
t.me/donRumata03, github.com/donRumata03, donrumata03@gmail.com

Виноградов Олег Леонидович (лектор)
olvin@math.spbu.ru

7 января 2023 г.

Оглавление

0.1 Как работать с этим сжатым конспектом 4
0.2 Названия билетов (ровно как в оригинале) 4
0.3 Термины, незнание которых приводит к неуду по экзамену 9

1 Криволинейные интегралы на плоскости 11
1.1 Простейшие свойства криволинейных интегавлов 11
1.1.1 Определения сущностей, вводимых в параграфе 11
1.1.2 Билет 24: Простейшие свойства криволинейных интегралов 13

0.1. Как работать с этим сжатым конспектом

Составлено в соответствии с лекциями, а также учебником проф. О. Л. Виноградова

Максимально сжатый матанал: для каждого параграфа сначала сначала вводится список сущностей, а потом описания билетов, относящиеся к параграфу — там указания о том, как доказывсать теоремы.

0.2. Названия билетов (ровно как в оригинале)

1. Критерий Больцано —- Коши равномерной сходимости. Полнота пространства ограниченных функций.
2. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости рядов (с примерами).
3. Преобразование Абеля. Признаки Абеля, Дирихле и Лейбница равномерной сходимости рядов (с примерами).
4. Перестановка пределов и почленный переход к пределу.
5. Равномерная сходимость и непрерывность (с примерами). Полнота пространтва непрерывных на компакте функций.
6. Равномерная сходимость и предельный переход под знаком интеграла (с примерами).
7. Предельный переход под знаком производной (с примерами).
8. Пример всюду непрерывной нигде не дифференцируемой функции. Кривые Пеано.
9. Радиус сходимости степенного ряда: формула Коши - Адамара, примеры.
10. Равномерная сходимость степенных рядов. Теорема Абеля. Интегрирование степенных рядов.
11. Дифференцирование степенных рядов.
12. Единственность степенного ряда. Примеры различного поведения рядов Тейлора. Достаточные условия разложимости функции в ряд Тейлора.
13. Синус, косинус и экспонента комплексного аргумента.

14. Разложения логарифма и арктангенса в степенной ряд. Ряд Лейбница.
15. Формула Стирлинга.
16. Биномиальный ряд Ньютона, частные случаи. Разложение арксинуса.
17. Числа Бернулли. Разложения функций 2 +; 2сез изн» фе 2 в степенные ряды.
18. Разложение синуса в бесконечное произведение.
19. Разложение котангенса на простые дроби. Вычисление сумм
20. Многочлены Бернулли. Вычисление сумм
21. Разложение функции по многочленам Бернулли.
22. Формула Эйлера — Маклорена.
23. Приложения формулы Эйлера — Маклорена с оценкой остатка.
24. Простейшие свойства криволинейных интегралов.
25. Оценка криволинейного интеграла. Криволинейный интеграл как предел интегральных сумм.
26. Признак совпадения подобласти с областью. Соединение точек области ломаной.
27. Формула Ньютона — Лейбница для криволинейных интегралов. Единственность первообразной.
28. Точность формы и независимость интеграла от пути. Условие точности формы в круге.
29. Точность формы, замкнутой в круге.
30. Правило Лейбница дифференцирования интегралов.
31. Дифференциальные условия замкнутости формы. Пример замкнутой, но неточной формы.
32. Расстояние между множествами.
33. Первообразная формы вдоль пути. Формула Ньютона — Лейбница для первообразной вдоль пути.
34. Равенство интегралов по гомотопным путям.

35. Точность формы, замкнутой в односвязной области. Интеграл по ориентированной границе области.

36. Условия комплексной дифференцируемости (с примерами).

37. Голоморфные функции с постоянной вещественной частью, мнимой частью, модулем.

38. Различные формулировки интегральной теоремы Коши. Первое доказательство (для непрерывной производной).

39. Различные формулировки интегральной теоремы Коши. Второе доказательство (лемма Гурса).

40. Интегральная формула Коши.

41. Аналитичность голоморфной функции.

42. Следствия из аналитичности голоморфной функции. Теорема Мореры. Свойства, равносильные голоморфности.

43. Неравенства Коши для коэффициентов степенного ряда. Теорема Лиувилля.

44. Основная теорема высшей алгебры.

45. Изолированность нулей голоморфной функции (с леммой). Кратность нулей.

46. Теорема единственности для голоморфных функций (с примерами).

47. Теорема о среднем. Принцип максимума модуля.

48. Свойства рядов Лорана.

49. Разложение голоморфной функции в ряд Лорана.

50. Устранимые особые точки.

51. Полюса. Мероморфные функции.

52. Существенно особые точки: теорема Сохоцкого (с доказательством), теорема Пикара (без доказательства).

53. Теорема Коши о вычетах.

54. Правила вычисления вычетов. Вычисление опасного интеграла <данные удалены>

55. Лемма Жордана. Интегралы Лапласа. Вычисление опасного интеграла <данные удалены> (спойлер: здесь замешан Си).
56. Вычет в бесконечности. Теорема о полной сумме вычетов.
57. Простейшие свойства полуколец и сигма-алгебр.
58. Простейшие свойства объема и меры.
59. Непрерывность меры.
60. Внешняя мера.
61. Мера, порожденная внешней мерой.
62. Теорема Каратеодори о стандартном распространении меры.
63. Свойства стандартного распространения меры. Единственность стандартного распространения (без доказательства, с примером существенности сигма-конечности).
64. Полукольцо ячеек. Конечная аддитивность классического объема.
65. Счетная аддитивность классического объема.
66. Мера параллелепипеда. Мера не более чем счетного множества.
67. Представление открытого множества в виде объединения ячеек. Измеримость борелевских множеств по Лебегу.
68. Приближение измеримых множеств открытыми и замкнутыми. Регулярность меры Лебега.
69. Приближение измеримых множеств борелевскими. Общий вид измеримого множества.
70. Сохранение измеримости при гладком отображении.
71. N-свойство Лузина и сохранение измеримости.
72. Канторово множество и канторова функция. Пример гомеоморфизма, не сохраняющего измеримость по Лебегу.
73. Лемма о мере образа при известной мере образа ячейки. Инвариантность меры Лебега относительно сдвига.
74. Описание мер, инвариантных относительно сдвига.
75. Существование неизмеримого по Лебегу множества.

76. Мера Лебега, при линейном отображении. Инвариантность меры Лебега относительно движений.

77. Простейшие свойства измеримых функций.

78. Измеримость граней и пределов.

79. Приближение измеримых функций простыми и ступенчатыми.

80. Действия над измеримыми функциями.

81. Непрерывность и измеримость по Лебегу. С-свойство Лузина (формулировка).

82. Сходимость по мере и почти везде: определения, примеры, формулировки теорем Лебега и Ф.Рисса.

83. Монотонность интеграла.

84. Интеграл по множеству и его подмножеству.

85. Теорема Леви.

86. Пренебрежение множествами нулевой меры при интегрировании. Интегралы от эквивалентных функций.

87. Однородность интеграла.

88. Аддитивность интеграла по функции.

89. Теорема Леви для рядов. Суммируемость функции и ее модуля. Достаточные условия суммируемости.

90. Неравенство Чебышева и его следствия: конечность суммируемой функции почти везде, неотрицательная функция с нулевым интегралом.

91. Счетная аддитивность интеграла по множеству. Приближение интеграла интегралом по множеству конечной меры.

92. Теорема Фату.

93. Теорема, Лебега о мажорированной сходимости.

94. Абсолютная непрерывность интеграла.

95. Функции Бэра: теорема Бэра, лемма о последовательности дроблений, измеримость функций Бэра.

96. Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману. Сравнение интегралов Римана и Лебега.

97. Восстановление меры множества по мерам сечений (часть 1: случаи ячейки, открытого множества и множества типа жэсигма конечной меры).
98. Восстановление меры множества по мерам сечений (часть 2: случай множества нулевой меры и переход к произвольному множеству).
99. Меры n-мерных шара и конуса.
100. Мера декартова произведения.

0.3. Термины, незнание которых приводит к неуду по экзамену

1. <Дофига всего>

Глава 1

Криволинейные интегралы на плоскости

1.1. Простейшие свойства криволинейных интегавлов

1.1.1. Определения сущностей, вводимых в параграфе

Интеграл вектор функции

Простой, не криволинейный интеграл вектор функции ($\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, причём можно рассматривать как $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$).

Эквивалентные определения:

- Предел интегральной суммы (с операцией умножения скаляра на вектор) про ранге дроблений $\to 0$. (Основное определение)
- Вектор интегралов координат (практически полезное определение).

Дифференциальная форма

Бывает вещественная, бывает — комплексная.

Дифференциальная форма ω — это функция от двух точек на плоскости (первая — «центр», вторая — «приращение»), линейная по последним двум плоскостям.

Следовательно, она представима в виде:

$$\omega(x, y, \mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y \tag{1.1}$$

Применяя каррирование, представляем w как векторное поле (то есть в каждой точке плоскости определён вектор), где значение функции — скалярное произведение этого вектора и вектора приращения:

$$\omega = \left\langle \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{pmatrix} \right\rangle \tag{1.2}$$

Комплексная форма — лишь способ записать (инстанциировать) некое подмножество де-факто вещественных форм — записать в виде комплексной функции:

Криволинейный интеграл второго рода

По умолчанию под криволинейный интегралом на плоскости подразумеваем его.

Определения, не предполагающие непраерывность/гладкость пути/-функции:

$$\int_\gamma \omega = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \left(P\left(\xi_k, \eta_k\right) \Delta x_k + Q\left(\xi_k, \eta_k\right) \Delta y_k\right) \tag{1.3}$$

Для комплексного случая:

$$\int_\gamma \omega = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\zeta_k\right) \Delta z_k \tag{1.4}$$

Будем пользоваться более удобным опредедением, требующем гладкость пути и непрерывность функции (потом докажем, что при этих ограничениях определения эквивалентны):

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \left(P(\varphi, \psi)\varphi' + Q(\varphi, \psi)\psi'\right) \tag{1.5}$$

И для комплексного случая:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t \tag{1.6}$$

Замечание. Для кусочно гладкого пути всё определяем по аддитивности, все свойства сохраняются.

Пример. Интеграл степенной комплексной функции по окружности

$$\int_{\gamma_r} (z-z_0)^n\,dz = \begin{cases} 0, & n \neq -1, \\ 2\pi i, & n = -1 \end{cases} \tag{1.7}$$

Криволинейный интеграл первого рода

1.1.2. Билет 24: Простейшие свойства криволинейных интегралов

- При инвертировании получаем отрицание интеграла
- Линейность по коэфициентам формы
- Независимость от параметризации
- Аддитивность по пути
- Интеграл по контуру не зависит от выбора начальной точки
- Предельный переход и почленное интегрирование рядов непрерывных функций
- Для интеграла первого рода — всё то же самое за исключением первого свойства: там не противоположны, а равны