Заметки практики по матанализу (самые разные семестры)

Латыпов Владимир (конспектор)
t.me/donRumata03, github.com/donRumata03, donrumata03@gmail.com
Семёнова Ольга Львовна (препод)

27 ноября 2022 г.

Содержание

Здесь можно вспомнить, чем мы всё это время занимались на практике.

«Стенограмма» практик в виде серии фотографий доски (насколько возможно оперативных) есть в телеграм «чатике с домашкамм» начиная с этого сообщения: `https://t.me/c/1512041988/198`.

В этом же документе содержится список методов, подходов и трюков, которые мы учимся применять на практике.

Крайне полезного освежать его в памяти перед контрольной по отношению к актуальной теме, а также в любой момент по отношению к давнему материалу.

Контрибьютинг всячески приветствуется, благо на Github делать это максимально удобно. Если вы решили, например, в какой-то момент пролистать свой конспект и вспомнить былое — добавьте в этот конспект то, чего нет здесь — помогите товарицам. Или, если что-то написанное здесь настолько вопиюще неверное, что режет ваши глаза и вызывает желание как можно быстрее это пофиксить — вперёд.

Насчёт технических деталей — в README описано по шагам, что надо установить, чтобы компилировать конспект у себя на компьютере, однако ничего не мешает дописать сюда в обычном текстовом редакторе нечто отдалённо напоминающее латех и послать Pull Request — я исправлю, если что-то не будет компилироваться.

Конспект организован по темам, в том порядке, в котором мы их проходим на практиках. Кроме того, примерно расставлены разделения, где заканчивается предыдущая практика и начинается следующая, но могут быть неточности, так как отдаётся приоритет организации по темам.

На данный момент такая картина готовности тем:

- Пределы — почти ничего
- Производные — совсем мало
- Интегралы — довольно полно, но тезисно
- Числовые ряды — вообще ничего
- Функциональные ряды — подробно
- Функции нескольких переменных — сами практики в процессе

1. Пределы

1.1. Таблица эквивалантности

Отличная ссылка на таблицу эквивалентности с нужными доказательствами: `http://mathserfer.narod.ru/node22.html`

Альтернативный вариант: `https://ib.mazurok.com/2013/05/19/table-equ/`

2. Дифференциальное исчисление одной переменной

2.1. Использование первой и второй производной для построения картины функции и её поведения у себя в голове и последующего её перенесения на бумагу

А именно:

- Находим область определения
- Смотрим поведение на границах области определения (значения, предел, асимптоты)
- Первая производная $\Longrightarrow$ делаем вывод о промежутках возрастания/убывания, экстремумах
- Вторая производная $\Longrightarrow$ выпуклость, точки перегиба

2.2. Оптимизация функций через поиск и проверку критических точек с помощью производной, например, параметры геометрических фигур

3. Интегральное исчисление одной переменной

3.1. Символьное вычисление неопределённых интегралов

- Таблица интегрирования основных элементарных функций
- Базовые приёмы интегрирования: замена переменной, ингегрирование по частям

- Тригонометрические и гиперболические подстановки
- Интегрирование по индукции, если функция содержит целочисленный параметр
- Сведение интеграла самого к себе, например, $\sqrt{x^2+a^2} \to \frac{t}{\sqrt{x^2+a^2}}t +$ $\ldots \to$ по частям.
- Выделение полного квадрата под корнем или не под корнем в знаменателе, избавление от линейного члена
- Если есть подвыражения вида $x+a$, замена переменной $t = \frac{1}{x+a}$
- Выделение в числителе производной знаменателя, например, `https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%98%D0%BD%D1%82%D0%B5%D0%B3%D1%80%D0%B8%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5_%D1%80%D0%B0%D1%86%D0%B8%D0%BE%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D1%85_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B9#%D0%98%D0%BD%D1%82%D0%B5%D0%B3%D1%80%D0%B8%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5_%D0%B4%D1%80%D0%BE%D0%B1%D0%B5%D0%B9_%D0%B2%D0%B8%D0%B4%D0%B0_%7F'%22%60UNIQ--postMath-0000007E-QINU60%22'%7F`.
- Рациональные функции: разложение на простейшие, далее элементарно, больше второй степени не получится
- Функции вида $R\left(x,\ \sqrt[N]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)$ через замену переменной на весь корень.
- Подстановки Эйлера: $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$. В зависимости от коэффициентов нужно выбрать правильное t. Случаи могут быть пересекаться. Для функции подходят все те случаи, под условия которых она подходит:
  1. При $a > 0$: $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm t \pm \sqrt{a}x$
  2. При $c > 0$: $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm t \pm \sqrt{a}x$
  3. При наличии двух вещественных корней: $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm t(x-\lambda)$, где λ — один из корней
- Интегрирование дифференциальных биномов

$$\int x^m (a+bx^n)^p \,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} z = x^n \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{n} z^{\frac{1-n}{n}} \mathrm{d}z \end{bmatrix} = \frac{1}{n} \int z^{\frac{m}{n}+\frac{1-n}{n}} (a+bz)^p \,\mathrm{d}z \tag{1}$$

$$q = \frac{m}{n} + \frac{1-n}{n} \tag{2}$$

3 случая интегрируемости:

1. $p \in \mathbb{Z}, q = \frac{M}{N}$: $t = z^{\frac{1}{N}}$, выражаем получаем $R(t)$. Профит.

- Тригонометрические подстановки в рациональных функциях $R(\cos x, \sin x)$:
  - Если $R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x, \sin x)$ (нечётно относительно cos), можно $t = \sin x$
  - Если $R(\cos x, -\sin x) = -R(\cos x, \sin x)$ (нечётно относительно sin), можно $t = \cos x$
  - Если $R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x)$ (чётно по обеим вместе), можно $t = \operatorname{tg} x$
  - Наконец, универсальное, $t = \tan \frac{x}{2}$ работает всегда, через неё легко выражаются sin, cos, $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$.
- Похожая шняга получается и с $R(ch\, x, sh\, x)$
- Линейное выражение числителя через знаменатель и его производную, решение системы уравнений

3.2. Определённые интегралы

- Формула Ньютона-Лейбница
- Замена переменной, если особые точки не появляются, ничего не портит
- При интегрировании по частями надо смотреть, чтобы сумма частей имела смысл в $\overline{\mathbb{R}}$.

3.3. Несобственные интегралы

- Взятие предела для несобстыенных интегралов, если получается сделать это в явном виде

- Рассмотрение «особенных» точек, их может быть несколько
- Анализ сходимости: сначала проверяем абсолютную, потом относительную
- Критерий Коши (если любое значение после некоторого A не превышается ни на каком промежутке в $\mathbb{R}$).
- Разбиение промежутка на несколько
- Использование асимптотического анализа для определения абсолютной сходимости
- Дирихле и Абель — позволяют сделать вывод об абсолютной сходимости функции, представленной произведения
  - Дирихле: первая имеет ограниченную первообразную, вторая — монотонно □ 0, тогда сходится
  - Абель: первый интеграл сходится, вторая монотонна и ограничена, тогда тоже сходится
- Разложение подинтегральной функции в ряд Тейлора: спросить у кого-то

4. Числовые ряды

5. Функциональные ряды

Практика 5 сентября 2022

Фотоотчёт за практику: `https://t.me/c/1512041988/198`

Pro tip: для $\alpha < \frac{\pi}{2}$ — $\sin\alpha > \alpha\frac{2}{\pi}$ за счёт выпуклости.

5.1. Исследуем равномерную сходимость

- Если можем посчитать «колебание» (супремум отколнеиня на всём множестве E при фиксированном n), то проанализируем, стремится ли оно к нулю при $n \to \infty$.
- Признак Вейерштрасса (мажорантная сходимость для рядов): находим равномерную норму каждого члена, если ряд норм сходиться, то анализируемый ряд — тоже.

- Критерий Больцано-Коши (равносильно равномерной сходимости). Сходимость в себе, работает для
- Признак Дирихле (равномерная сходимость ряда произведений). У одного частичные суммы **равномерно огранчиены**, другой стремится к нулю и монотонен по n с некоторого номера при каждом фиксированном x. (Теперь везде не забываем добавлять «равномерно»).
- Признак Абеля (равномерная сходимость ряда произведений). Тут у первого частичные суммы должны быть **не равномерно *огранчиены*, а равномерно *сходиться***, но зато второму достаточно просто быть равномерно ограниченным (и всё ещё монотонным).
- Следствие: Лейбниц — сумма знакопеременного, монотонно равномерно сходящегося к 0 ряда со знакочередованием ряда — равномерно сходится.

Ещё pro tip:

$$\left|\sum_{k=1}^{N} \sin k\alpha\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin \frac{\alpha}{2}\right|} \tag{3}$$

$$\left|\sum_{k=1}^{N} \cos k\alpha\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin \frac{\alpha}{2}\right|} \tag{4}$$

5.2. Доказывем отсутствие равномерной сходимости

Если не сходится поточечно где-то, рассматривать не интересно.

- Не на компакте: если замыкание не сходится даже поточечно (на границах)
- Если не выполняется хотя бы одно необходимое условие из секции 5.3 при выполнении остальных предпосылок теоремы
- Если можно посчитать в явном виде
- Можно оценить остаток через интеграл, если есть монотонность по n и момент, с которой она начинается, не зависит от x — и сказать через него, что найдётся ε, что для любого n найдётся плохой x.
- Можно сделать то же через критерий Больцано-Коши.

Практика 12 сентября 2022

Фотоотчёт за практику: <отсутствует>.

5.3. Свойства равномерно сходящихся

При равномерной сходимости можно производить перестановку пределов, из неё получаем возможность заключить непрерывность предела, получаем перестановочность интегрирования и дифференцирования.

Однако это всё получается и при более вольных условиях, но они более сложные, мы их не изучали.

Практика 19 сентября 2022

Фотоотчёт за практику: `https://t.me/c/1512041988/208`.

5.4. Степенные ряды

Ряды вида $\sum_{i=1}^{\infty} c_i(z - z_0)^i$.

Умеем искать радиус сходимости (это шар, внутри гарантированно сходится, снаружи — не менее гарантированно расходится, а на границе — надо думать, анализировать дальше).

- Коши (база, работает всегда): $R = \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$
- Даламбер (иногда работает и он, если существует): $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|$

Потом можем использовать степенные ряды как составные части для анализа произвольных рядов.

Раскладываем в ряд Тейлора:

Разложить можем, чтобы в пределе все производные совпадали, но когда она будет совпадать с самой функцией на каком-то промежутке?

Оказывается, что достаточно комплексной дифференцируемости в $B_R(z_0)$ — тогда существует единственный набор коэффициентов степенного ряда с заданным центром, с пределом которого функция совпадает — и коэффициенты тогда находятся через Тейлора.

Note: для комплексной дифференцироемости выполняются все естественнные свойства обычной: замкнутость относительно арифметических операций, дифференцируемость элементарных функций, производная локальной обратимой функции и т.д.

Разложение элементарных функций в степенной ряд было на доске..

Как раскладывать в степенные ряды?

- Честно, через производные по Тейлору
- Раскладывать в произведение — перемножать ряды
- В круге сходимости дифференцировать можно почленно — замечаем, что ряд является интегралом чего-то хорошего — и дифферегнцирем его ряд.
- Аналогично — если является производной чего-то хорошего
- Можно пользоваться тем, что сумма ряда равна функции в круге сходимости. Например,

$$\frac{1}{x-x_0} = \frac{1}{-x_0}\left(\frac{1}{1-\frac{x}{x_0}}\right) = -\frac{1}{x_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{x_0}\right)^k \tag{5}$$

Практика 26 сентября 2022

Фотоотчёт за практику: `https://t.me/c/1512041988/216`

Если у нас уже есть ряд, и надо проанализировать, какую функцию он описывает или его свойства.

- Для анализа схоимости можно посмотреть на коэффициент, как всегда.
- Можно применить метод божественного озарения и, например, продифференцировать, умножить на какую-то сдвигающую скобку и заметить, что получилось нечто содержащее исходный ряд, получив диффуру...

Признак сходимости обычных, положительных рядов, обобщающий признак Д'Аламбера — признак Гаусса:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right), \varepsilon > 0 \tag{6}$$

Тогда при $\lambda > 1$ — сходится, если $\lambda < 1$ — расходится, иначе (при $\lambda = 1$) — $\mu > 1$ — сходится, $\mu \leqslant 1$ — расходится.

6. Функции нескольких переменных

6.1. Берём пределы

Какие механизмы?

- По Коши/окрестностям: для окрестности результатов найдётся окрестность аргументов, такая что каждый студент знает, какая.
- По Гейне — вдоль любой последовательности, стремящейся к x_0 по D
  $\{x_0\}$ $f(x_n) \to \; A$
- Эквивалентно (тривиально — про Коши) — $\sup_{x \in \dot{V}_\delta(x_0) \cap D} |f(x) - A| \underset{\delta \to 0}{\longrightarrow} 0$

6.2. Разница между повторным и двойным пределом

У «хороших» функций, конечно, их существование эквивалентно и они равны. Наверное, Липшицевости достаточно. Также, (по теореме о двойном пределе) если существует конечный или бесконечный двойной предел, а также для каждого фиксированного x' в окрестности существует конечный предел сужения $\varphi(y) = f(x', y)$, то пределы равны. Но вообще могут быть такие варианты:

- Двойной существует, а $\forall x \neq x_0$ не существует даже внутренняя часть повторного предела
- Может не сущетствовать двойной, и это можно доказать по Гейне, показав две последовательности, вдоль которых пределы не равны
- Может стремиться к 0 вдоль любого луча от 0 к ∞, но не быть бесконечно малой на $x, y \to +\infty$. Например, $f(x, y) = x^2 e^{-(x^2 - y)}$

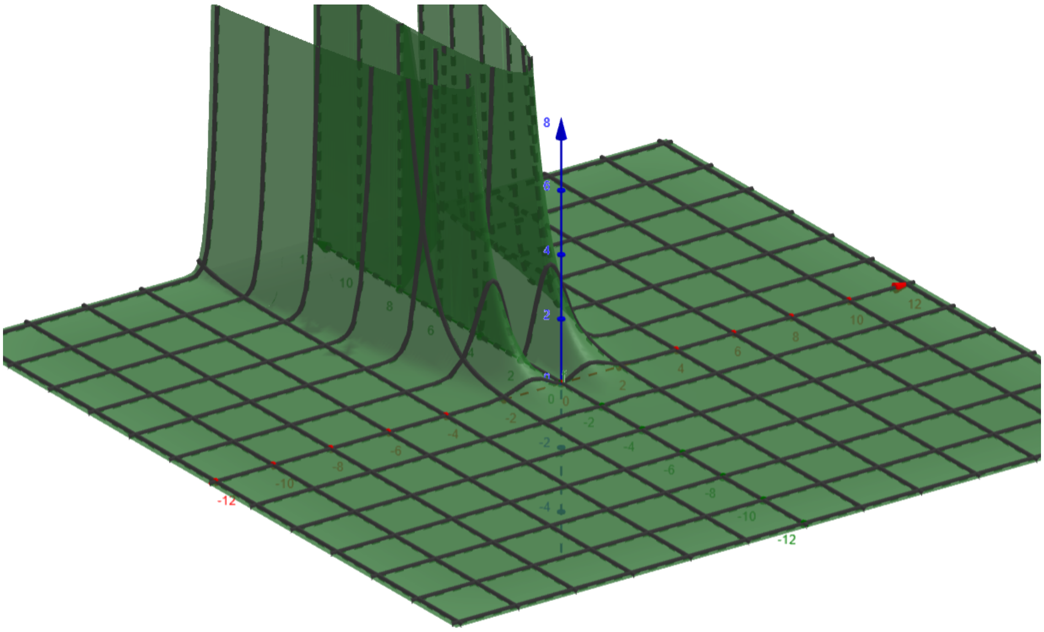

Рис. 1: Та самая $f(x,y) = x^2 e^{-(x^2-y)}$

Примеры с разбором есть в фотоотчёте практики 26.09: `https://t.me/c/1512041988/216`.

Практика 10 октября 2022

Фотоотчёт за практику: ...

Как доказать существование предела функции, например, на $+\inf, +\inf$?

В определении предела фигурирует окрестность точки $+\inf, +\inf$, то есть

$$\begin{cases} x > \varepsilon \\ y > \varepsilon \end{cases} \tag{7}$$

В отличие от просто $||x,y|| \to \ \inf$, когда .

- Нужно оценить супремум отклонения от предела при $x > \varepsilon, y > \varepsilon$.
- К полянрым координатам и оценить супремум по некоторой части сферы (для $+\inf, +\inf$, казалось бы — по $\varphi \in (0, \pi/2)$). Но по идее, это будет корректно, так как там x может быть сколь угодно малым. Наверное, надо сузить угол до компактного подмноже-

ства $[\alpha, \beta] \subset (0, \pi/2)$. И оценить зависимость супремума по φ от r. Особые извращенцы будут искать супремум через Лагранжа.

6.3. Дифференцирование, частные производные

Дифференцируема $\overset{\text{def}}{\iff}$ представима в виде $f(x_0) + Ah + o(|h|)$, где A — линейный оператор ($A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m)$). Частная производная — производная направлению вектора-орта.

Иногда вектор частных производных равен вектору производному оператора.

Есть необходимое и достаточное условия.

Теорема 1 (Базированная теорема о производных). У нормальных функций всё будет нормально.

Если быть точнее — для дифференцируемости достаточно сущетствования в окрестноти и непрерывности в точке частных производных по каждой переменной. Но не необходимо, так как, например, у функции $f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & (x \in \mathbb{Q}) \operatorname{xor} (y \in \mathbb{Q}) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ частные производные вообще не определены ни в каких точках кроме нуля, что уж там говорить о непрерывности.

А для равенства частных производных по разным перестановкам одной и той же последовательности переменных достаточно (но не необходимо) существования и непрерывности всех *рассматриваемых* частных производных в окрестности. (Фактически, в теореме было про r раз непрерывную дифференцируемость, то есть вообще по любой последовательности из r переменных).

Как искать частные производные? Если функция представлена в виде композиций элементарных функций, считаем по формулам, фиксируя остальные переменные — воспринимая их как параметры.

Если мы уже посчитали частные производные по всем переменным, то проверить дифференцируемость самой функции можно так:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - \langle \nabla f, h \rangle}{\|h\|} \to 0 \tag{8}$$

Но вообще — частная производная всё ещё может сущетвовать, даже если по формулам посчитать не получается (формулы-то применимы только там, где всё определено). Если нет — тогда можем находить их как производные по направлению. Пример:

$$f(x, y) = \sqrt[3]{xy} \tag{9}$$

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0 \tag{10}$$

Попробуем применить критерий выше: вдруг этот градиент $(0, 0)$ — и есть производная?

$$\frac{\sqrt[3]{xy} - 0 - 0}{\sqrt{x^2 + y^2}} \to ?0 \tag{11}$$

Для $x = y$ — стремится к бесконечности, хотя по лучу $x = 0$ или $y = 0$ и ноль, ни о каком стремлении к нулю говорить не приходится.

Для более сложных функций можно представлять их как композицию, заводя переменную для одной из её частей.

Например,

$$u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, u'_{x,y} — ?, u'_{xx,xy,yy} — ? \tag{12}$$

(в нижних индексах через запятую — все частные производные, которые требуется найти).

Обозначим $r = \sqrt{x^2 + y^2}, u = r^{-1}x$.

Находим r'_x, r'_y. Тогда $u'_x = (r^{-1})'_x x + r^{-1} \cancelto{1}{x'_x} = \ldots$

Если у нас какая-то большая функция, то частная производная композиции выражается через сумму — как элемемент произведения матриц Якоби.

Хозяйке на заметку: $\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right) = \mathrm{d}\left(\frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{y^2}\right)$.

Ещё на заметку: важно отличать d^2t от dt^2 (последнее является обозначением для $(dt)^2$).

Первое — второй дифференциал функции (для независимой переменной — это просто ноль, для них никто так не пишет). Второе — приращение переменной, возведённой в квадрат.

Как искать полные дифференциалы разных порядков?

Можно воспользоваться определением, возникшим из Тейлора — там сумма по всем мультииндексом k порядка l.

Для двухмерной переменной достаточно перебирать в суммировании степень вхождения приращения одной из переменных:

$$\mathrm{d}^n f = \sum_{k=0}^{n} \frac{n! f'_{x^k y^{n-k}}}{k!(n-k)!} (\mathrm{d}x)^k (\mathrm{d}y)^{n-k} \tag{13}$$

Например, $\mathrm{d}f = f'_x \,\mathrm{d}x + f'_y \,\mathrm{d}y$,

$\mathrm{d}^2 f = f''_{x^2} \,\mathrm{d}x^2 + 2f''_{xy} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y + f''_{y^2} \,\mathrm{d}y^2$

Но на практиках матанализа дифференциалы первого-второго порядка так не считают, а в «символьном» виде, имея полный дифференциал предыдущего порядка и применяя втупую формулу дифференцирования, получают желаемую формулу.

При этом первый дифференциал рассматривают как отображение с той же сигнатурой, что и исходная функция, считая, что $\mathrm{d}x_i$ берётся то же самое.

Причём

$$\begin{gathered}
\mathrm{d}(g(x,y)\,\mathrm{d}x + h(x,y)\,\mathrm{d}y) = (g(x,y)\,\mathrm{d}(\mathrm{d}x) + \mathrm{d}g(x,y)\,\mathrm{d}x) + (h(x,y)\,\mathrm{d}(\mathrm{d}y) + \mathrm{d}h(x,y)\,\mathrm{d}y) = \\
\begin{bmatrix} \mathrm{d}(\mathrm{d}x) = \mathrm{d}^2 x = (\mathrm{d}x)'_x \,\mathrm{d}x + (\mathrm{d}x)'_y \,\mathrm{d}y = 0 \leftarrow \quad \mathrm{d}x = \text{const everywhere} \Rightarrow (\mathrm{d}x)'_x = 0 \\ \mathrm{d}x \,\mathrm{d}x = (dx)^2 \stackrel{\text{def}}{=} dx^2 \end{bmatrix} = \\
\mathrm{d}g(x,y)\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}h(x,y)\,\mathrm{d}y = (g'_x \,\mathrm{d}x + g'_y \,\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}x + (h'_x \,\mathrm{d}x + h'_y \,\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}y
\end{gathered} \tag{14}$$

Частные производные функций g и h считаем самостоятельно. Иногда получится, что какие-то из слагаемых нули, когда что-то не зависит от чего-то. И потом приведём подобные слагаемые (например, $\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \mathrm{d}y \,\mathrm{d}x$).

Всё это работатет для независимых переменных. Но рассмотрим хитрую композицию:

$$u(x,y) = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right) = f(s,t) \tag{15}$$

И мы считаем, что знаем «всё, что нужно» про f.

Хотим найти полные диффенерциалы $\mathrm{d}u, \mathrm{d}^2u$ (полагая x, y независимыми переменными).

И тут у нас получается, что $\mathrm{d}^2s \neq 0$, так как это более не независимая переменная, а функция.

Так что теперь:

$$\mathrm{d}^2u(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = f''_{s^2}\,\mathrm{d}s^2 + (f''_{st} + f''_{ts})\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t + f''_{t^2}\,\mathrm{d}t^2 + f'_s\,\mathrm{d}^2s + f'_t\,\mathrm{d}^2t \tag{16}$$

Где d^2s — это квадратичная форма от $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y$ (если замена, например, была линейная, она обнуляется), которую можно раскрыть и получить чЕстный второй дифференциал u как функции $u(x,y)$.

То есть при $s = \alpha x + \beta y$: $\mathrm{d}s = \alpha\,\mathrm{d}x + \beta\,\mathrm{d}y$, тогда:

$$\mathrm{d}^2s = \mathrm{d}^2xs''_{x^2} + 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}ys''_{xy} + \mathrm{d}^2ys''_{y^2} \tag{17}$$

И здесь второе слагаемое уже не обнуляется, и в результате получается не ноль, в отличие от независимых переменных. Также видно, что для линейной замены второе слагаемое ноль за счёт частной производной.

Практика 17.10.2022

6.4. Дифференцируем неявно заданные ображения

Простые равенства дифференцировать нельзя, только тождества (равенство должно выполняться в окрестности, чтобы все производные совпадали — они обладают свойством лоакльности, но требуют, чтобы точка ~~была точкой сочленения… кхм~~ внутренней).

Например, $F(x+y+z, x^2+y^2+z^2) = 0$, найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

6.5. Дифференцируем системы-неявно заданные отображения

Фактически — это всё ещё неявные отображения, просто теперь со значениями в $\mathbb{R}^m$, где m — количество уравнений.

Мы можем захотеть выразить дифференциал какого-то порядка одной части через дифференциалы других (ну или найти производные одних по другим) — из предположения, что вторая часть — взяты за независимые переменные.

«Инвариантность дифференциалов первого порядка относительно изменения зависимых и независимых переменных»: то есть не важно, какие переменные выбраны за независимые, дифференциалы удовлетворяют одному и тому же отношению. Например, $\psi(x, y, z) = 0$; $z = \varphi(x, y)$ — неявное отображение, $dz = \varphi'_x dx + \varphi'_y dy$ — соотношение дифференциалов. Если будет $x = \xi(y, z)$ удовлетворяет — тому же самому неявному отображению, но теперь зависимая переменная — x, то соотношение $\mathrm{d}x = \xi'_y \,\mathrm{d}y + \xi'_z \,\mathrm{d}z$ — будет то же самое. (из теоремы о неявном отображении $\varphi'(x) = -\left(\Phi'_y(x, y)\right)^{-1} \Phi'_x(x, y)\Big|_{y=\varphi(x)}$)

А вот для дифференциалов высшего порядка — такого нет. Например

Практика 24.10.2022

Параметризация сферы через два угла: // TODO

7. Замена переменной в дифференциальных уравнениях

Подстановка определяется выражением старых переменных через новые диффеоморфизмом (чтобы можно было вернуться и была равносильность) Возможно, только локальным и, возможно, с особыми точками, где нет даже локальной обратимости, но тогда их надо учитывать отдельно.

Процесс применения подстановки — это попытка выразить старые символы, фигурируют в уравнении, через новые символы — которые разрешено использовать в ответе.

Например, если хотим взять за независимую переменную y, а x сделать функцией, нужно выразить $y^{(n)}$ через $x^{(k)}$ и, возможно, y. Раньше искали $f(x) = y$, теперь будем $f^{-1}(y) = x$ Исходим из соотношения $«y»(«x»(y)) = y$ То есть $«y» \circ «x» = id_y$.

$y'_x = \frac{1}{x'_y}$

Можно до посинения дифференцировать это тождество и поочерёдно получать производные $x_y^{(n)}$ всё более старших порядков.

Если у нас уравнения с частными производными (а значит есть несколько независимых переменных), выражаем дифференциалы новых переменных через дифференциалы старых. Затем записываем полный дифференциал зависимых переменных и подставляем туда, например, $\mathrm{d}x_i =$