Типовик по линейной алгебре «Канонический вид матрицы. Часть 5»

Латыпов Владимир Витальевич,
ИТМО КТ M3138, ***вариант 10***

26 сентября 2022 г.

1. Формулировка условия

Утверждение 1. Условие можно найти здесь: `https://drive.google.com/file/d/1P3jq8GpC8nHcOVT-v3L68j10DZkMxxWw/view?usp=sharing`

Data section:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -10 & 3 & -5 \\ -4 & 12 & -6 & 4 \\ 4 & 20 & -4 & 10 \\ 12 & 0 & 6 & 4 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$G = \begin{pmatrix} -22 & 20 & 4 & -36 \\ 22 & 4 & 10 & 12 \\ 5 & -19 & -9 & 24 \\ 27 & -13 & 3 & 34 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$P = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & -3 & -2 \\ -3 & 5 & 2 & 2 \\ -6 & 11 & 6 & 4 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$Q = \begin{pmatrix} -26 & -39 & 65 & 13 \\ -18 & -27 & 45 & 9 \\ -16 & -24 & 40 & 8 \\ -26 & -39 & 65 & 13 \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$V = \begin{pmatrix} -5 & 8 & 4 & -10 \\ 5 & -7 & 8 & -5 \\ 0 & -4 & -7 & 4 \\ 2 & 8 & 4 & -17 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 10 & -1 & 10 & 8 \\ -2 & 2 & -1 & -4 \\ 4 & -4 & 10 & 11 \end{pmatrix} \tag{6}$$

2. Построение Жордановой формы матрицы через формулу Фробениуса

Для нахождения самой формы (но не базиса) достаточно для каждого с.ч. знать, ширину башни для каждой высоты и добавить соответствующие клетки. А это можно как раз сделать через формулу Фробениуса.

$$\forall r \in [1 : m-1]\ d_r = \operatorname{rg} \mathfrak{B}^{r-1} - 2 \operatorname{rg} \mathfrak{B}^r + \operatorname{rg} \mathfrak{B}^{r+1}. \tag{7}$$

А $d_m = \operatorname{rg} \mathfrak{B}^{m-1}$.

То есть для каждого $r \in [1 : m]$ требуется найти $\operatorname{rg} \mathfrak{B}^r$ и сделать немного арифметических действий со скалярами.

2.1. Матрицы F и G

Тут у нас $m = 1$ для кажэдого с.ч. и одна единственная башня высоты 1 и ширины 1 на каждое с.ч.: $\forall \lambda : d_1 = \operatorname{rg} B^0 = 1$.

И Жорданова форма получается как диагональная.

2.2. Матрица P

Автоматизируем нахождение ранга сужения. Для этого применим оператор ко всем элементам базиса корневого подпространств (умножим их на матрицу) и посчитаем ранг результата.

Причём можно даже записать всё это дело (базис и результат) в один матрицу.

```
def restriction_rank(operator, basis):
    return np.linalg.matrix_rank(
        np.matmul(np.array(operator), np.array(basis))
        )

def compute_restriction_ranks_for_powers(operator, basis, ma
    ranks = [restriction_rank(
        numpy.linalg.matrix_power(operator, p), basis)
        for p in range(max_power)
    ]
```

```
for p in range(max_power):
    print(f"\\rg \\mathfrak{{B}}^{{{p}}} = {ranks[p]}")
for r in range(1, max_power - 1):
    print(
        f"d_{r} = {ranks[r - 1] - 2 * ranks[r] + ranks[r
    )
```

$$\operatorname{rg}\mathfrak{B}^0 = 4 \tag{8}$$
$$\operatorname{rg}\mathfrak{B}^1 = 2 \tag{9}$$
$$\operatorname{rg}\mathfrak{B}^2 = 1 \tag{10}$$
$$\operatorname{rg}\mathfrak{B}^3 = 0 \tag{11}$$

Тогда

$$d_1 = 1 \tag{12}$$
$$d_2 = 0 \tag{13}$$
$$d_3 = 1 \tag{14}$$

То есть есть по одному блоку размеров 1 и 3, как в и в типовике 4. Сошлось.

2.3. Матрица Q

$$\operatorname{rg}\mathfrak{B}^0 = 4 \tag{15}$$
$$\operatorname{rg}\mathfrak{B}^1 = 1 \tag{16}$$
$$\operatorname{rg}\mathfrak{B}^2 = 0 \tag{17}$$
$$d_1 = 2 \tag{18}$$
$$d_2 = 1 \tag{19}$$
$$d_3 = 0 \tag{20}$$
$$d_4 = 0 \tag{21}$$

Одна башня высоты 2 и две — высоты 1. Опять сошлось.

2.4. Матрица V

Для $\lambda_1 = -11$:

$$\operatorname{rg} \mathfrak{B}^0 = 2 \tag{22}$$
$$\operatorname{rg} \mathfrak{B}^1 = 1 \tag{23}$$
$$\operatorname{rg} \mathfrak{B}^2 = 0 \tag{24}$$
$$d_1 = 0 \tag{25}$$
$$d_2 = 1 \tag{26}$$

Для $\lambda_2 = -7$:

$$\operatorname{rg} \mathfrak{B}^0 = 2 \tag{27}$$
$$\operatorname{rg} \mathfrak{B}^1 = 1 \tag{28}$$
$$\operatorname{rg} \mathfrak{B}^2 = 0 \tag{29}$$
$$d_1 = 0 \tag{30}$$
$$d_2 = 1 \tag{31}$$

Опять получаем по одной башне высоты 2 на каждое собственное число. Сошлось.

2.5. Матрица W

Для корневых подпространств рзмерности 1 уже обсудили. А вот для $\lambda_2 = 3$ получаем:

$$\operatorname{rg} \mathfrak{B}^0 = 2 \tag{32}$$
$$\operatorname{rg} \mathfrak{B}^1 = 1 \tag{33}$$
$$\operatorname{rg} \mathfrak{B}^2 = 0 \tag{34}$$
$$d_1 = 0 \tag{35}$$
$$d_2 = 1 \tag{36}$$

Опять же, для него одна башня высоты 2, как и в предудущем типовике. Всё сошлось.

3. Нахождение функции от матрицы.

Как известно, можно найти функцию, разложенную в степенной ряд, от Жордановой клетки так:

$$\begin{pmatrix} f(x)\Big|_{x=t\lambda} & \frac{t}{1!}f'(x)\Big|_{x=t\lambda} & \frac{t^2}{2!}f''(x)\Big|_{x=t\lambda} & \cdots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k-1)}(x)\Big|_{x=t\lambda} \\ 0 & f(x)\Big|_{x=t\lambda} & \frac{t}{1!}f'(x)\Big|_{x=t\lambda} & \cdots & \frac{t^{k-2}}{(k-2)!}f^{(k-2)}(x)\Big|_{x=t\lambda} \\ 0 & 0 & f(x)\Big|_{x=t\lambda} & \cdots & \frac{t^{k-3}}{(k-3)!}f^{(k-3)}(x)\Big|_{x=t\lambda} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(x)\Big|_{x=t\lambda} \end{pmatrix} \tag{37}$$

А потом посчитаем для всей блочной матрицы J, ведь каждый блок возводится независимо.

Найдём, например, $cos(Pt)$. Для начала:

$$\cos(-t) = (\cos(-t)) \tag{38}$$

Далее — $cos'(x) = -sin(x), cos''(x) = -cos(x), cos'''(x) = sin(x)$

$$\cos\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} \cos -t & -t\sin -t & -\frac{t^2}{2}\cos -t \\ 0 & \cos -t & -t\sin -t \\ 0 & 0 & \cos -t \end{pmatrix} \tag{39}$$

Осталось выписать формулу.

$$\begin{gathered} \cos(Pt) = T\cos(Jt)T^{-1} = \\ T\begin{pmatrix} \cos(-t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos -t & -t\sin -t & -\frac{t^2}{2}\cos -t \\ 0 & 0 & \cos -t & -t\sin -t \\ 0 & 0 & 0 & \cos -t \end{pmatrix} T^{-1} = \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos -t & -t\sin -t & -\frac{t^2}{2}\cos -t \\ 0 & 0 & \cos -t & -t\sin -t \\ 0 & 0 & 0 & \cos -t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \end{gathered} \tag{40}$$

Теперь найдём $exp(J_Q t)$. Тут всего одно собственное число, причём $\lambda = 0 \implies t\lambda = 0$. $f^{(n)}(0) = 1$.

Очевидно получаем, что

$$exp(J_Q t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{41}$$

Осталось расправиться с $exp(Qt)$. Ну, это

$$T\exp(J_Q t)T^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -26 & 1 \\ 2 & 0 & -18 & 0 \\ 0 & 2 & -16 & 0 \\ 0 & 0 & -26 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 5 & -26 & 1 \\ 2 & 0 & -18 & 0 \\ 0 & 2 & -16 & 0 \\ 0 & 0 & -26 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \tag{42}$$