

**Решения теоретических („малых“) домашних
заданий**

*Математическая логика, ИТМО,
М3232-М3239, весна 2023 года*

Латыпов Владимир (конспектор)

t.me/donRumata03, github.com/donRumata03, donrumata03@gmail.com

13 апреля 2023 г.

Содержание

1	Равенства в аксиоматике Пеано	3
4	Вывод в формальной арифметике	4
4.1	Единственность нуля	4
5	Двухместные отношения	5

1. Равенства в аксиоматике Пеано

(а) $a \cdot b = b \cdot a$ (коммутативность умножения)

Как вводится умножение в аксиоматике Пеано?

$$a \cdot b = \begin{cases} 0 & b = 0 \\ a \cdot c + a & b = c' \end{cases} \quad (1.1)$$

Лемма 1. $a \cdot 0 = 0 \cdot a$

Доказательство. Индукция.

База: функциональная экстенциональность. ■

Теорема 1.

$$a \cdot b = b \cdot a \quad (1.2)$$

Доказательство. Докажем по индукции по b при фиксированном a .

$P(b) = a \cdot 0 = 0 \cdot a$ — лемма 1

База: $a \cdot b = b \cdot a$

Покажем ■

(b) ...

4. Вывод в формальной арифметике

4.1. Единственность нуля

Введём „предикат“ (не предикат в смысле КИП) ψ (выражение со свободной переменной x):

$$(\exists q.q' = x) \vee x = 0 \quad (4.1)$$

$\vdash \psi[x := 0]$, так как это $(\exists q.q' = 0) \vee 0 = 0$, что доказуемо через схему 11: $(\forall a.a = a)[x := a]$.

Теперь доказательство $\forall x.\psi \rightarrow \psi[x := x']$, то есть что

$$\forall x.(\exists q.q' = x) \vee x = 0 \rightarrow (\exists q.q' = x') \vee x' = 0$$

$\exists q.q' = x'$ докажем так:

(n)	$x' = x'$	Генерализованное $a = a$
(n + 1)	$(q' = x')[q := x] \rightarrow \exists q.q' = x'$	схема 12
(n + 2)	$\exists q.q' = x'$	MP предыдущих

Последний штрих: применим аксиому об индукции:

$$\psi[x := 0] \& (\forall x.\psi \rightarrow \psi[x := x']) \rightarrow \psi.$$

и дважды MP: ψ , то есть $(\exists q.q' = x) \vee x = 0$.

Генерализуем, применим к x : $(\exists q.q' = p) \vee p = 0$. ■

5. Двухместные отношения

- (а) Полное отношение на \mathbb{N}^2 : формула $(x_1 = x_1) \& (x_2 = x_2)$ (некая заготовка на тавтологию, но со свободными переменными).

Если $\langle a_1, a_2 \rangle \in \mathbb{N}$ (то есть всегда), покажем, что $\rho[x_1 := \overline{a_1}][x_2 := \overline{a_2}]$ доказуема.

На лекции мы доказали, что $a = a$. Не можем просто сказать, что на самом деле доказали для α , а не для a , так как у нас не схемы аксиом, а просто аксиомы. Зато можем воспользоваться выразительностью исчисления предикатов.

Допишем доказательство:

(n)	$a = a$	С лекции
(n + 1)	$B \vee \neg B \rightarrow a = a$	Ослабление
(...)	$B \vee \neg B \rightarrow \forall a. a = a$	Правило вывода для \forall
(...)	$B \vee \neg B$	Тавтология из полноты КИВ
(...)	$\forall a. a = a$	МР двух предыдущих
(...)	$(\forall a. a = a) \rightarrow \overline{a_1} = \overline{a_1}$	Схема аксиом 11
(...)	$\overline{a_1} = \overline{a_1}$	МР двух предыдущих
(...)	$\overline{a_2} = \overline{a_2}$	Аналогично для $\overline{a_2}$
(...)	$(\overline{a_1} = \overline{a_1}) \rightarrow (\overline{a_2} = \overline{a_2}) \rightarrow (\overline{a_1} = \overline{a_1}) \& (\overline{a_2} = \overline{a_2})$	Введение $\&$
(...)	$(\overline{a_1} = \overline{a_1}) \& (\overline{a_2} = \overline{a_2})$	Дважды МР

Для пустого множества пар, не входящих в отношение, верно всё, что угодно. ■

- (b) Удивительно: выражение равенства — равенство.

Что для $a_1 = a_2 \vdash \overline{a_1} = \overline{a_2}$ — доказали на лекции + генерализация.

Покажем, что для $a_1 \neq a_2 \vdash \neg(\overline{a_1} = \overline{a_2})$.

Для этого достаточно прийти к противоречию из $\overline{a_1} = \overline{a_2}$.

Будем получать равенства с меньшим количеством штрихов по аксиоме АЗ, пока меньшее не станет нулём. То есть для каждого $i \in [1; \min(a_1, a_2)]$ будем добавлять такие строчки:

(k)	$\overline{a_1 - (i - 1)} = \overline{a_2 - (i - 1)}$	Уже имеем это утверждение
(k + 1)	$\overline{a_1 - i'} = \overline{a_2 - i'} \rightarrow \overline{a_1 - i} = \overline{a_2 - i}$	АЗ
(k + 2)	$\overline{a_1 - i} = \overline{a_2 - i}$	МР k, k + 1

Теперь получили либо $(...)' = 0$, либо $0 = (...)'$. В первом случае пришли к противоречию с А4 ($\neg a' = 0$), во втором — ещё

применим аксиому $\alpha = \forall p. \forall q. p = q \rightarrow q = p$, подставив в неё $\alpha[p := 0][q := (...)]$

(с) Отношение «хотя бы один аргумент = 0»

Отношение такое: $x_1 \cdot x_2 = 0$.

• Для пары, где $a_2 = 0$, доказуемо, что $\overline{a_1} \cdot \overline{0} = 0$:

(n) $x_1 \cdot 0 = 0$ Генерализованная A7

Для пары, где $a_1 = 0$, воспользуемся перестановочностью a и 0 при умножении.

• Если оба аргумента $\neq 0$, то по A3: $\overline{\neg a_1 - 1}' = 0$ и $\overline{\neg a_2 - 1}' = 0$.

Для доказательства $\neg \overline{a_1} \cdot \overline{a_2} = 0$ достаточно прийти к противоречию из $\overline{a_1} \cdot \overline{a_2} = 0$.

Выведем по 4с, что $p \cdot q = 0 \rightarrow p = 0 \vee q = 0$. Тогда по МР с предположением: $p = 0 \vee q = 0$

Получим неверную формулу