Линейная Алгебра

Латыпов Владимир

20 сентября 2021 г.

Содержание

1. Введение

Преподаватель: Кучерук Е. А. EMail: kucheruk.e.a@gmail.com

Литература по линейной алгебры:

Геометрия Александров Ильин Позняк Линейная алгебра

2. Ключевые определения

- Векторное произведение векторов
- Определение определителя

3. Векторы

Вектор - класс направленных отрезков, определён с точностью до точки приложения.

Линейные операции:

- $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \vec(a) \times \alpha$

Свойства линейных операций/аксиомы линейного пространства:

1. Коммутативность
2. Ассоциативность
3. Существование нулевого элемента (нуль-вектор)
4. Существование противоположного элемента для каждого $\forall \vec{A} : \exists \vec{\overline{A}} : \vec{A} + \vec{\overline{A}} = 0$
5. Ассоциативность умножения вектора на скаляр: $\beta \times (\vec{A} \times \alpha) = \beta \times (\vec{A} \times \alpha)$
6. Дистрибутивность умножения на скаляр относительно сложения чисел: $(\alpha + \beta) \times \vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$
7. Дистрибутивность умножения на скаляр относительно сложения векторов: $(\vec{a} + \vec{b}) \times \alpha = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$

Два вектора коллинеарны $\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \ldots$

Линейная комбинация векторов:

$$\overleftarrow{combination} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \times \vec{v}_i \tag{1}$$

Комбинация векторов тривиальна, если $\forall \alpha_i = 0$ Иначе -- нетривиальная система.

Система векторов линейно независима, если любая нулевая линейная комбинация тривиальна. Иначе система линейно зависима (например, если есть коллинеарные).

Если есть хотя бы один нуль-вектор, система тоже линейно зависима (берём коэффициент 0 при нём).

Если объединить линейно зависимую с любой, получится линейно зависимая.

Если система линейно зависима, один из векторов - линейная комбинация каких-то других.

$$] \ \alpha_n \neq 0 \tag{2}$$
$$\exists x_i : \tag{3}$$
$$\vec{v}_n = \sum \vec{v}_i = \frac{1}{\alpha_n} \tag{4}$$

Пусть есть прямая. На ней: Базис - любой ненулевой вектор.

Пусть есть плоскость. На ней: Базис - любая упорядоченная пара неколлинеарных векторов.

Пусть есть пространствао. На ней: Базис - упорядоченная тройка некомплананых векторов.

α_i - координаты вектора в базисе.

Теорема: Любой вектор пространства может быть разложен по базису, причём единственным образом. Как в пространстве, так и на прямой с полскостью.

Доказательство: Базис - векторы $\vec{e}_i$ Добавим к ним вектор x. Так как была

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i \times \vec{e}_i$$

x. Тогда полученная система векторов будет линейно зависимой и вектор x может быть линейно выражен через векторы формула: формула, где формула - некоторые числа. Так мы получили разложение вектора x по базису. Осталось доказать, что это разложение единственно.

Докажем несколько теорем, далее работать будем с координатами.

Следствия теоремы о единственности разложения:

- $\vec{a} = \vec{b} \Longleftrightarrow \forall i < n : \vec{a}_i = \vec{b}_i$
- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} \Longleftrightarrow \forall i < n : \vec{a}_i + \vec{b}_i = \vec{c}_i$, доказываетсчя через аксиомы линейного пространства
- $\vec{b} = \alpha \times \vec{a}, \alpha \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \vec{b}_i = \alpha \times \vec{b}_i$
- $\vec{a} \parallel \vec{b}, \vec{a} \neq \vec{0} \Longleftrightarrow \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3} = ... = \alpha \in \mathbb{R}$
- Система коллинеарных векторов ($\geq n + 1$) всегда линейно зависимая (для плоскости либо все коллинеарны, либо 2 неколлинеарных, тогда можно ввести базис, выразив один через другие, для пространства аналогично, только 3 и некомпларнарные)

$\vec{l_1}, \vec{l_2}, \vec{l_3}$ базис V_3 $\forall v \in V_3 \exists! \forall i \in \{\ 1,\ 2,\ 3\ \} \alpha_i \in \mathbb{R} : \vec{}$

4. (

nСистема координат на плоскости и в пространстве) говорят, что в V_3 введена д.с.к (декартова сис коорд), если в пространстве есть точка O (начало системы коордтнат), зафиксирован базис $\vec{l_1}, \vec{l_2}, \vec{l_3}$ некомпланарные.

Оси кординат - прямые, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов.

Координаты точки - всё равно что координаты радиус-вектора. Геометрически - для нахождения координат проводим (правило параллелограмма) плоскости или вектора параллельные тому, чему нужно.

Координаты вектора = кординаты конца - координаты начала

Задача: Пусть есть вектор, заданный координатами конца и начала ($A = (a_1, a_2, a_3), B = (b_{1,2}, b_3)$). Нужно найти точку $M = (m_1, m_2, m_3)$: $\frac{AM}{MB} = \frac{\lambda}{\mu}$

Распишем, тогда:

$$m_i = \frac{\lambda b_i + \mu a_i}{\lambda + \mu}$$

Для середины - понятно, что.

В дальнейшем будем рассматривать ортонормированную декартовую систему координат (о.н.д.с.к.). Все единичной длины.

Будем обозначать $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \tag{5}$$

$$a_0 = \frac{\vec{a}}{|a|} = (\frac{a_1}{\sqrt{\cdots}}, \frac{a_2}{\sqrt{\cdots}}, \frac{a_3}{\sqrt{\cdots}}) = (\cos(\alpha), \cos(\beta), \cos(\gamma)) \tag{6}$$

Направляющие коснусы (углов вектора с осями координат)

$$\cos(\gamma) + cos(\beta) + \cos(\alpha) = 1 \tag{7}$$

5. Полярная и сферическая система координат

ПСК определяется точкой и **полярным** лучём отсчёта из этой точки.

Связь между полярной и декартовой системой координат.

1. $r = \varphi$ - задаёт спираль Архимеда
2. Лемниската Бернулли:

$$(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2) \tag{8}$$

$$r^4 = r^2(cos^2(\varphi) - sin(\varphi)) = r^2(cos(2\varphi)) \tag{9}$$

$$r = \sqrt{2\varphi} \tag{10}$$

3. ...

6. Преобразования координат

6.1. Параллельный перенос, сдвиг

Происходит лишь перенос точки приложения

$$\begin{cases} O' = (x_0, y_0, z_0) \ in \ old \ system \\ M = \vec{OM} = (x, y, z) \\ M = \vec{O'M} = (x', y', z') \\ \begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \\ z = z' + z_0 \end{cases} \end{cases} \tag{11}$$

6.2. Поворот на плоскости

$$\begin{cases} Old \ - \ OXY \\ New \ - \ OX'Y' \\ M = (x, y) \\ M = (x', y') \\ \begin{cases} x' = r\cos(\varphi) \\ y' = r\sin(\varphi) \end{cases} \\ \begin{cases} x = r\cos(\varphi + \alpha) = ... = x'\cos(\alpha) - y'\sin(\alpha) \\ y = r\sin(\varphi + \alpha) = ... = x'\sin(\alpha) + y'\cos(\alpha) \end{cases} \end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \tag{13}$$

6.3. Поворот координат в пространстве

$$\vec{e_1} = (\cos(\alpha_1), \cos(\beta_1), \cos(\gamma_1)) \tag{14}$$

$$\vec{e_2} = (\cos(\alpha_2), \cos(\beta_2), \cos(\gamma_2)) \tag{15}$$

$$\vec{e_1} = (\cos(\alpha_3), \cos(\beta_3), \cos(\gamma_3)) \tag{16}$$

$$x'\vec{e_1} + y'\vec{e_2} + y'\vec{e_3} = x'(\cos(alpha_1)\vec{i} + \cos(alpha_1)\vec{j} + ...) + \tag{17}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_1) & \cos(\alpha_2) & \cos(\alpha_3) \\ \cos(\beta_1) & \cos(\beta_2) & \cos(\beta_3) \\ \cos(\gamma_1) & \cos(\gamma_2) & \cos(\gamma_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \tag{18}$$

7. Операции

7.1. Скалярное произведение

Определение 1 (Скалярное произведение).

$$(a,b) = a \cdot b = |a||b| \cdot cos(ab) \tag{19}$$

Свойство 1 (Аксиомы скалярного произведения). 1. Симметрия

2. Аддитивное по обоим аргеументам: $|a||b| \cdot cos(ab)$
3. Однородное по обоим аргеументам: $(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \lambda(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \lambda\vec{b})$
4. $(1), (2) \Rightarrow$ линейное по обоим аргеументам
5. Положительна определённость: произведение на самого себя всегда ≥ 0, причём равенство достигается только для нуль-вектора.

7.2. Проекция вектора на вектор

Определение 2 (Проекция вектора на вектор).

$$a, b - vectors \tag{20}$$

$$a_b = a \cdot \cos ab \tag{21}$$

Замечание. Скалярное произведение имеет знак!

Чтобы найти кородивнату вектора в прямоугольной системе координат достаточно умножить его модуль на меня.

Теорема 1 (Аддитивность скалярного произведения).

$$(!)(\vec{a}_1 + \vec{a}_1) \cdot \vec{b} = \vec{a}_1 \cdot \vec{b} + \vec{a}_2 \cdot \vec{b} \tag{22}$$

Доказательство. Введём базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ вдоль вектора $\vec{b}$: . ■

Если операция удовлетворяет всем четырём аксиомам, это скалярное произведение.

Теорема 2.

$$(\vec{a}, \vec{b}) = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b \tag{23}$$

Доказательство. Просто распишем произведение, прдставляя векторы через $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ■

7.3. Векторное произведение векторов

Определение 3. Упорядоченная тройка векторов - правая, если при вращении первого ко второму буравчик двигается к третьему.

Определение 4.

$$vec\_product : (\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \mapsto \mathbb{R}^2 \tag{24}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \tag{25}$$

$|\vec{c}| = |\vec{c}| \cdot |\vec{c}| \cdot \sin(\varphi)$

- $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{a}$
- $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\} -$

Свойство 2. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

$[a; a] = \vec{0}$

$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = 0$

Линейность по обоим аргументам

Длина скалярного произведения - площадь параллелограмма, натянутого на аргументы.

Теорема 3 (Векторное произмедение в координатах).

$$[\vec{a},\ \vec{b}] = (a_y b_z - a_z b_y,\ a_z b_x - a_x b_z,\ a_x b_y - a_y b_x) \tag{26}$$

Иначе говоря:

$$[\vec{a},\ \vec{b}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \tag{27}$$

Доказательство. Заметим, что векторные проивзведения базисных векторов в правом ортонормированном базисе такие:

$$[\vec{i}, \vec{j}] = \vec{k} \tag{28}$$

$$[\vec{j}, \vec{k}] = \vec{i} \tag{29}$$

$$[\vec{k}, \vec{i}] = \vec{j} \tag{30}$$

То есть плюс получается, когда обыный порядок,возможно - со сдвигом

■

7.4. Смешанное произведение векторов

Определение 5 (Смешанное произведение векторов).

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) \tag{31}$$

Свойство 3 (Свойства смешанного произведения векторов).

1. Произведение равно объёму параллелепипеда со знаком (добавляем минус, если вдруг левая тройка).
2. Смешанное произведение не меняется при циклической перетановке векторов. В противном случае знак меняется на противоположный.
3. $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}])$
4. Аддитивность
5. Однородность
6. $\Rightarrow$ Линейность по любому аргументу (за счёт циклической перестановки - линейность по любому аргументу)

Доказательство.
(1) доказывается через нахождение модуля Sh
(2) Все тройки либо правые, либо левые одновременно, а модуль - через объём однгого и того же параллелограмма
(3-4) Линейность: ...
■

Теорема 4. Смешанное произведение:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \quad (32)$$

Теорема 5. Смешанное произведене = 0 ⇔ векторы компланарны.

Доказательство. Так как строчки матрицы - координаты векторов, то равенство определителя нулю соответствует возможности выразить одну из строк, а значит, и один из векторов, через остальные. ■

Теорема 6. Вектроное произведение линейно относительно обоих аргументов.

Доказательство. Докажем через скалярное произведение самого на себя вектора $\vec{c} = [a_1 + a_2, b] - [a_1, b] - [a_2, b]$, которое равно нулю ...Ass - we can! ■

7.5. Двойное векторное произведение

Определение 6.

$$[a, b, c] = [a, [b, c]] \quad (33)$$

Теорема 7.

$$[a, [b, c]] = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, vecb) \quad (34)$$

Бац минус цаб!

Доказательство. Распишем через определители левую часть и по определениям - правую. ■