

Заметки практики по матанализу (самые разные семестры)

Латыпов Владимир (конспектор)

t.me/donRumata03, github.com/donRumata03, donrumata03@gmail.com

Семёнова Ольга Львовна (препод)

17 октября 2022 г.

Содержание

1	Пределы	4
1.1	Таблица эквивалентности	4
2	Дифференциальное исчисление одной переменной	4
2.1	Использование первой и второй производной для построения картины функции и её поведения у себя в голове и последующего её перенесения на бумагу	4
2.2	Оптимизация функций через поиск и проверку критических точек с помощью производной, например, параметры геометрических фигур	4
3	Интегральное исчисление одной переменной	4
3.1	Символьное вычисление неопределённых интегралов . .	4
3.2	Определённые интегралы	6
3.3	Несобственные интегралы	6
4	Числовые ряды	7
5	Функциональные ряды	7
5.1	Исследуем равномерную сходимость	7
5.2	Доказываем отсутствие равномерной сходимости	8
5.3	Свойства равномерно сходящихся	9
5.4	Степенные ряды	9
6	Функции нескольких переменных	11
6.1	Берём пределы	11
6.2	Разница между повторным и двойным пределом	11
6.3	Дифференцирование, частные производные	13

Здесь можно вспомнить, чем мы всё это время занимались на практике.

«Стенограмма» практик в виде серии фотографий доски (насколько возможно оперативных) есть в телеграм «чатике с домашкамм» начиная с этого сообщения: <https://t.me/c/1512041988/198>.

В этом же документе содержится список методов, подходов и трюков, которые мы учимся применять на практике.

Крайне полезного освежать его в памяти перед контрольной по отношению к актуальной теме, а также в любой момент по отношению к давнему материалу.

Контрибьютинг всячески приветствуется, благо на Github делать это максимально удобно. Если вы решили, например, в какой-то момент пролистать свой конспект и вспомнить былое — добавьте в этот конспект то, чего нет здесь — помогите товарищам. Или, если что-то написанное здесь настолько вопиюще неверное, что режет ваши глаза и вызывает желание как можно быстрее это пофиксить — вперёд.

Насчёт технических деталей — в README описано по шагам, что надо установить, чтобы компилировать конспект у себя на компьютере, однако ничего не мешает дописать сюда в обычном текстовом редакторе нечто отдалённо напоминающее латех и послать Pull Request — я исправлю, если что-то не будет компилироваться.

Конспект организован по темам, в том порядке, в котором мы их проходим на практиках. Кроме того, примерно расставлены разделения, где заканчивается предыдущая практика и начинается следующая, но могут быть неточности, так как отдаётся приоритет организации по темам.

На данный момент такая картина готовности тем:

- Пределы — почти ничего
- Производные — совсем мало
- Интегралы — довольно полно, но тезисно
- Числовые ряды — вообще ничего
- Функциональные ряды — подробно
- Функции нескольких переменных — сами практики в процессе

1. Пределы

1.1. Таблица эквивалентности

Отличная ссылка на таблицу эквивалентности с нужными доказательствами: <http://mathserfer.narod.ru/node22.html>

Альтернативный вариант: <https://ib.mazurok.com/2013/05/19/table-equ/>

2. Дифференциальное исчисление одной переменной

2.1. Использование первой и второй производной для построения картины функции и её поведения у себя в голове и последующего её перенесения на бумагу

А именно:

- Находим область определения
- Смотрим поведение на границах области определения (значения, предел, асимптоты)
- Первая производная \implies делаем вывод о промежутках возрастания/убывания, экстремумах
- Вторая производная \implies выпуклость, точки перегиба

2.2. Оптимизация функций через поиск и проверку критических точек с помощью производной, например, параметры геометрических фигур

3. Интегральное исчисление одной переменной

3.1. Символьное вычисление неопределённых интегралов

- Таблица интегрирования основных элементарных функций
- Базовые приёмы интегрирования: замена переменной, интегрирование по частям

- Тригонометрические и гиперболические подстановки
- Интегрирование по индукции, если функция содержит целочисленный параметр
- Сведение интеграла самого к себе, например, $\sqrt{x^2 + a^2} \rightarrow \frac{t}{\sqrt{x^2 + a^2}}t + \dots \rightarrow$ по частям.
- Выделение полного квадрата под корнем или не под корнем в знаменателе, избавление от линейного члена
- Если есть подвыражения вида $x + a$, замена переменной $t = \frac{1}{x+a}$
- Выделение в числителе производной знаменателя, например, https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%98%D0%BD%D1%82%D0%B5%D0%B3%D1%80%D0%B8%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5_%D1%80%D0%B0%D1%86%D0%B8%D0%BE%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D1%85_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B9#%D0%98%D0%BD%D1%82%D0%B5%D0%B3%D1%80%D0%B8%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5_%D0%B4%D1%80%D0%BE%D0%B1%D0%B5%D0%B9_%D0%B2%D0%B8%D0%B4%D0%B0_%7F'%22%60UNIQ--postMath-0000007E-QINU%60%22'%7F.
- Рациональные функции: разложение на простейшие, далее элементарно, больше второй степени не получится
- Функции вида $R\left(x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}\right)$ через замену переменной на весь корень.
- Подстановки Эйлера: $R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)$. В зависимости от коэффициентов нужно выбрать правильное t . Случаи могут быть пересекаться. Для функции подходят все те случаи, под условия которых она подходит:
 1. При $a > 0$: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm t \pm \sqrt{ax}$
 2. При $c > 0$: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm t \pm \sqrt{ax}$
 3. При наличии двух вещественных корней: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm t(x - \lambda)$, где λ — один из корней
- Интегрирование дифференциальных биномов

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx = \left[\begin{array}{l} z = x^n \\ dx = \frac{1}{n} z^{\frac{1-n}{n}} dz \end{array} \right] = \frac{1}{n} \int z^{\frac{m}{n} + \frac{1-n}{n}} (a + bz)^p dz \quad (1)$$

$$q = \frac{m}{n} + \frac{1-n}{n} \quad (2)$$

3 случая интегрируемости:

1. $p \in \mathbb{Z}, q = \frac{M}{N}: t = z^{\frac{1}{N}}$, выражаем получаем $R(t)$. Профит.
- Тригонометрические подстановки в рациональных функциях $R(\cos x, \sin x)$:
 - Если $R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x, \sin x)$ (нечётно относительно \cos), можно $t = \sin x$
 - Если $R(\cos x, -\sin x) = -R(\cos x, \sin x)$ (нечётно относительно \sin), можно $t = \cos x$
 - Если $R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x)$ (чётно по обоим вместе), можно $t = \operatorname{tg} x$
 - Наконец, универсальное, $t = \tan \frac{x}{2}$ работает всегда, через неё легко выражаются $\sin, \cos, \frac{dt}{dx}$.
 - Похожая шняга получается и с $R(\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x)$
 - Линейное выражение числителя через знаменатель и его производную, решение системы уравнений

3.2. Определённые интегралы

- Формула Ньютона-Лейбница
- Замена переменной, если особые точки не появляются, ничего не портит
- При интегрировании по частям надо смотреть, чтобы сумма частей имела смысл в $\overline{\mathbb{R}}$.

3.3. Несобственные интегралы

- Взятие предела для несобственных интегралов, если получается сделать это в явном виде
- Рассмотрение «особенных» точек, их может быть несколько
- Анализ сходимости: сначала проверяем абсолютную, потом относительную

- Критерий Коши (если любое значение после некоторого A не превышаете ни на каком промежутке в \mathbb{R}).
- Разбиение промежутка на несколько
- Использование асимптотического анализа для определения абсолютной сходимости
- Дирихле и Абель — позволяют сделать вывод об абсолютной сходимости функции, представленной произведением
 - Дирихле: первая имеет ограниченную первообразную, вторая — монотонно $\searrow 0$, тогда сходится
 - Абель: первый интеграл сходится, вторая монотонна и ограничена, тогда тоже сходится
- Разложение подинтегральной функции в ряд Тейлора: спросить у кого-то

4. Числовые ряды

5. Функциональные ряды

🌀 Практика 5 сентября 2022 🌀

Фотоотчёт за практику: <https://t.me/c/1512041988/198>

Pro tip: для $\alpha < \frac{\pi}{2}$ — $\sin \alpha > \alpha \frac{2}{\pi}$ за счёт выпуклости.

5.1. Исследуем равномерную сходимость

- Если можем посчитать «колебание» (супремум отклонения на всём множестве E при фиксированном n), то проанализируем, стремится ли оно к нулю при $n \rightarrow \infty$.
- Признак Вейерштрасса (мажорантная сходимость для рядов): находим равномерную норму каждого члена, если ряд норм сходится, то анализируемый ряд — тоже.
- Критерий Больцано-Коши (равносильно равномерной сходимости). Сходимость в себе, работает для

- Признак Дирихле (равномерная сходимость ряда произведений). У одного частичные суммы **равномерно ограничены**, другой стремится к нулю и монотонен по n с некоторого номера при каждом фиксированном x . (Теперь везде не забываем добавлять «равномерно»).
- Признак Абеля (равномерная сходимость ряда произведений). Тут у первого частичные суммы должны быть **не равномерно ограничены, а равномерно сходятся**, но зато второму достаточно просто быть равномерно ограниченным (и всё ещё монотонным).
- Следствие: Лейбниц — сумма знакопеременного, монотонно равномерно сходящегося к 0 ряда со знакопеременением ряда — равномерно сходится.

Ещё pro tip:

$$\left| \sum_{k=1}^N \sin k\alpha \right| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{\alpha}{2} \right|} \quad (3)$$

$$\left| \sum_{k=1}^N \cos k\alpha \right| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{\alpha}{2} \right|} \quad (4)$$

5.2. Доказываем отсутствие равномерной сходимости

Если не сходится поточечно где-то, рассматривать не интересно.

- Не на компакте: если замыкание не сходится даже поточечно (на границах)
- Если не выполняется хотя бы одно необходимое условие из секции 5.3 при выполнении остальных предпосылок теоремы
- Если можно посчитать в явном виде
- Можно оценить остаток через интеграл, если есть монотонность по n и момент, с которой она начинается, не зависит от x — и сказать через него, что найдётся ε , что для любого n найдётся плохой x .
- Можно сделать то же через критерий Больцано-Коши.

🌀 Практика 12 сентября 2022 🌀

Фотоотчёт за практику: <отсутствует>.

5.3. Свойства равномерно сходящихся

При равномерной сходимости можно производить перестановку пределов, из неё получаем возможность заключить непрерывность предела, получаем перестановочность интегрирования и дифференцирования.

Однако это всё получается и при более вольных условиях, но они более сложные, мы их не изучали.

☞ Практика 19 сентября 2022 ☞

Фотоотчёт за практику: <https://t.me/c/1512041988/208>.

5.4. Степенные ряды

Ряды вида $\sum_{i=1}^{\infty} c_i (z - z_0)^i$.

Умеем искать радиус сходимости (это шар, внутри гарантированно сходится, снаружи — не менее гарантированно расходится, а на границе — надо думать, анализировать дальше).

- Коши (база, работает всегда): $R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$
- Даламбер (иногда работает и он, если существует): $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$

Потом можем использовать степенные ряды как составные части для анализа произвольных рядов.

Раскладываем в ряд Тейлора:

Разложить можем, чтобы в пределе все производные совпадали, но когда она будет совпадать с самой функцией на каком-то промежутке?

Оказывается, что достаточно комплексной дифференцируемости в $B_R(z_0)$ — тогда существует единственный набор коэффициентов степенного ряда с заданным центром, с пределом которого функция совпадает — и коэффициенты тогда находятся через Тейлора.

Note: для комплексной дифференцируемости выполняются все естественные свойства обычной: замкнутость относительно арифметических операций, дифференцируемость элементарных функций, производная локальной обратимой функции и т.д.

Разложение элементарных функций в степенной ряд было на доске..

Как раскладывать в степенные ряды?

- Честно, через производные по Тейлору
- Раскладывать в произведение — перемножать ряды
- В круге сходимости дифференцировать можно почленно — замечаем, что ряд является интегралом чего-то хорошего — и дифференцируем его ряд.
- Аналогично — если является производной чего-то хорошего
- Можно пользоваться тем, что сумма ряда равна функции в круге сходимости. Например,

$$\frac{1}{x - x_0} = \frac{1}{-x_0} \left(\frac{1}{1 - \frac{x}{x_0}} \right) = -\frac{1}{x_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{x_0} \right)^k \quad (5)$$

🎭 Практика 26 сентября 2022 🎭

Фотоотчёт за практику: <https://t.me/c/1512041988/216>

Если у нас уже есть ряд, и надо проанализировать, какую функцию он описывает или его свойства.

- Для анализа сходимости можно посмотреть на коэффициент, как всегда.
- Можно применить метод божественного озарения и, например, продифференцировать, умножить на какую-то сдвигающую скобку и заметить, что получилось нечто содержащее исходный ряд, получив диффуру...

Признак сходимости обычных, положительных рядов, обобщающий признак Д'Аламбера — признак Гаусса:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right), \varepsilon > 0 \quad (6)$$

Тогда при $\lambda > 1$ — сходится, если $\lambda < 1$ — расходится, иначе (при $\lambda = 1$) — $\mu > 1$ — сходится, $\mu \leq 1$ — расходится.

6. Функции нескольких переменных

6.1. Берём пределы

Какие механизмы?

- По Коши/окрестностям: для окрестности результатов найдётся окрестность аргументов, такая что каждый студент знает, какая.
- По Гейне — вдоль любой последовательности, стремящейся к x_0 по D
 $\{x_n\} f(x_n) \rightarrow A$
- Эквивалентно (тривиально — про Коши) — $\sup_{x \in \dot{V}_\delta(x_0) \cap D} |f(x) - A| \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$

6.2. Разница между повторным и двойным пределом

У «хороших» функций, конечно, их существование эквивалентно и они равны. Наверное, Липшицевости достаточно. Также, (по теореме о двойном пределе) если существует конечный или бесконечный двойной предел, а также для каждого фиксированного x' в окрестности существует конечный предел сужения $\varphi(y) = f(x', y)$, то пределы равны. Но вообще могут быть такие варианты:

- Двойной существует, а $\forall x \neq x_0$ не существует даже внутренняя часть повторного предела
- Может не существовать двойной, и это можно доказать по Гейне, показав две последовательности, вдоль которых пределы не равны
- Может стремиться к 0 вдоль любого луча от 0 к ∞ , но не быть бесконечно малой на $x, y \rightarrow +\infty$. Например, $f(x, y) = x^2 e^{-(x^2 - y)}$

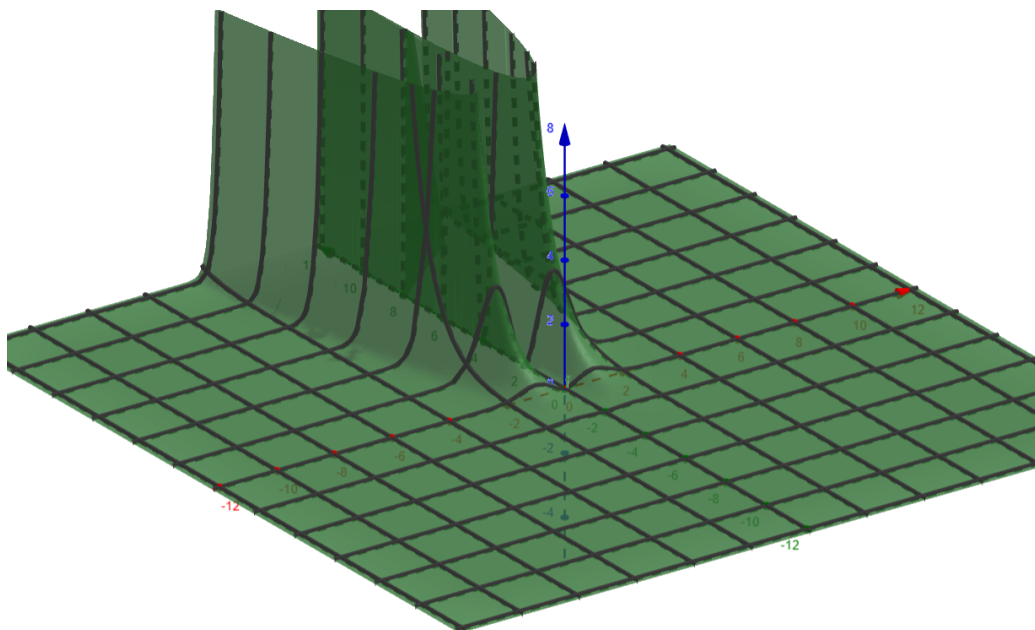


Рис. 1: Та самая $f(x, y) = x^2 e^{-(x^2 - y)}$

Примеры с разбором есть в фотоотчёте практики 26.09: <https://t.me/c/1512041988/216>.

🌀 Практика 10 октября 2022 🌀

Фотоотчёт за практику: ...

Как доказать существование предела функции, например, на $+\infty, +\infty$?

В определении предела фигурирует окрестность точки $+\infty, +\infty$, то есть

$$\begin{cases} x > \varepsilon \\ y > \varepsilon \end{cases} \quad (7)$$

В отличие от просто $\|x, y\| \rightarrow \infty$, когда .

- Нужно оценить супремум отклонения от предела при $x > \varepsilon, y > \varepsilon$.
- К полярным координатам и оценить супремум по некоторой части сферы (для $+\infty, +\infty$, казалось бы — по $\varphi \in (0, \pi/2)$). Но по идее, это будет корректно, так как там x может быть сколь угодно малым. Наверное, надо сузить угол до компактного подмноже-

ства $[\alpha, \beta] \subset (0, \pi/2)$. И оценить зависимость супремума по φ от r . Особые извращения будут искать супремум через Лагранжа.

6.3. Дифференцирование, частные производные

Дифференцируема $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ представима в виде $f(x_0) + Ah + o(|h|)$, где A — линейный оператор ($A \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m)$). Частная производная — производная направлению вектора-орта.

Иногда вектор частных производных равен вектору производному оператора.

Есть необходимое и достаточное условия.

Теорема 1 (Базированная теорема о производных). У нормальных функций всё будет нормально.

Если быть точнее — для дифференцируемости достаточно существования в окрестности и непрерывности в точке частных производных по каждой переменной. Но не необходимо, так как, например, у функции $f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & (x \in \mathbb{Q}) \text{ xor } (y \in \mathbb{Q}) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ частные производные вообще не определены ни в каких точках кроме нуля, что уж там говорить о непрерывности.

А для равенства частных производных по разным перестановкам одной и той же последовательности переменных достаточно (но не необходимо) существования и непрерывности всех рассматриваемых частных производных в окрестности. (Фактически, в теореме было про r раз непрерывную дифференцируемость, то есть вообще по любой последовательности из r переменных).

Как искать частные производные? Если функция представлена в виде композиций элементарных функций, считаем по формулам, фиксируя остальные переменные — воспринимая их как параметры.

Если мы уже посчитали частные производные по всем переменным, то проверить дифференцируемость самой функции можно так:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - \langle \nabla f, h \rangle}{\|h\|} \rightarrow 0 \quad (8)$$

Но вообще — частная производная всё ещё может существовать, даже если по формулам посчитать не получается (формулы-то применимы только там, где всё определено). Если нет — тогда можем находить их как производные по направлению. Пример:

$$f(x, y) = \sqrt[3]{xy} \quad (9)$$

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0 \quad (10)$$

Попробуем применить критерий выше: вдруг этот градиент $(0, 0)$ — и есть производная?

$$\frac{\sqrt[3]{xy} - 0 - 0}{\sqrt{x^2 + y^2}} \rightarrow ? 0 \quad (11)$$

Для $x = y$ — стремится к бесконечности, хотя по лучу $x = 0$ или $y = 0$ и ноль, ни о каком стремлении к нулю говорить не приходится.

Для более сложных функций можно представлять их как композицию, заводя переменную для одной из её частей.

Например,

$$u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, u'_{x,y} \text{ — ?}, u'_{xx,xy,yy} \text{ — ?} \quad (12)$$

(в нижних индексах через запятую — все частные производные, которые требуется найти).

Обозначим $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $u = r^{-1}x$.

Находим r'_x, r'_y . Тогда $u'_x = (r^{-1})'_x x + r^{-1} \overset{1}{x}'_x = \dots$

Если у нас какая-то большая функция, то частная производная композиции выражается через сумму — как элемент произведения матриц Якоби.

Хозяйке на заметку: $d\left(\frac{x}{y}\right) = d\left(\frac{ydx - xdy}{y^2}\right)$.

Ещё на заметку: важно отличать d^2t от dt^2 (последнее является обозначением для $(dt)^2$).

Первое — второй дифференциал функции (для независимой переменной — это просто ноль, для них никто так не пишет). Второе — приращение переменной, возведённой в квадрат.

Как искать полные дифференциалы разных порядков?

Можно воспользоваться определением, возникшим из Тейлора — там сумма по всем мультииндексом k порядка l .

Для двумерной переменной достаточно перебирать в суммировании степень вхождения приращения одной из переменных:

$$d^n f = \sum_{k=0}^n \frac{n! f'_{x^k y^{n-k}}}{k!(n-k)!} (dx)^k (dy)^{n-k} \quad (13)$$

Например, $df = f'_x dx + f'_y dy$,

$$d^2 f = f''_{x^2} dx^2 + 2f''_{xy} dx dy + f''_{y^2} dy^2$$

Но на практиках матанализа дифференциалы первого-второго порядка так не считают, а в «символьном» виде, имея полный дифференциал предыдущего порядка и применяя втупую формулу дифференцирования, получают желаемую формулу.

При этом первый дифференциал рассматривают как отображение с той же сигнатурой, что и исходная функция, считая, что dx_i берётся то же самое.

Причём

$$\begin{aligned} d(g(x, y) dx + h(x, y) dy) &= (g(x, y) d(dx) + dg(x, y) dx) + (h(x, y) d(dy) + dh(x, y) dy) = \\ &= \left[d(dx) = d^2 x = (dx)'_x dx + (dx)'_y dy = 0 \leftarrow dx = \text{const everywhere} \Rightarrow (dx)'_x = 0 \right] = \\ &\quad dx dx = (dx)^2 \stackrel{\text{def}}{=} dx^2 \\ d(g(x, y) dx + h(x, y) dy) &= (g'_x dx + g'_y dy) dx + (h'_x dx + h'_y dy) dy \quad (14) \end{aligned}$$

Частные производные функций g и h считаем самостоятельно. Иногда получится, что какие-то из слагаемых нули, когда что-то не зависит от чего-то. И потом приведём подобные слагаемые (например, $dx dy = dy dx$).

Всё это работатет для независимых переменных. Но рассмотрим хитрую композицию:

$$u = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right) \quad (15)$$

И мы считаем, что знаем «всё, что нужно» про функцию f .

Хотим найти полные дифференциалы du, d^2u (полагая x, y независимыми переменными).

И тут у нас получается, что $d^2s \neq 0$, так как это более не независимая переменная, а функция.

Так что теперь:

$$d^2u = f''_{s^2} ds^2 + (f''_{st} + f''_{ts}) ds dt + f''_{t^2} dt^2 + f'_s d^2s + f'_t d^2t \quad (16)$$

❧ Практика 17.10.2022 ❧

Дифференцируем неявно заданные отображения.

Например, $F(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2) = 0$, найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

Равенства дифференцировать нельзя, только тождества (так как гарантировать одинаковость поведения в окрестности можно только при равенстве в её надмножестве).