Типовик по линейной алгебре «Канонический вид матрицы. Часть 5»

Латыпов Владимир Витальевич,
ИТМО КТ M3138, ***вариант 10***

15 апреля 2022 г.

1. Формулировка условия

Утверждение 1. Условие можно найти здесь: https://drive.google.com/file/d/1P3jq8GpC8nHcOVT-v3L68j10DZkMxxWw/view?usp=sharing

Data section:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -10 & 3 & -5 \\ -4 & 12 & -6 & 4 \\ 4 & 20 & -4 & 10 \\ 12 & 0 & 6 & 4 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$G = \begin{pmatrix} -22 & 20 & 4 & -36 \\ 22 & 4 & 10 & 12 \\ 5 & -19 & -9 & 24 \\ 27 & -13 & 3 & 34 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$P = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & -3 & -2 \\ -3 & 5 & 2 & 2 \\ -6 & 11 & 6 & 4 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$Q = \begin{pmatrix} -26 & -39 & 65 & 13 \\ -18 & -27 & 45 & 9 \\ -16 & -24 & 40 & 8 \\ -26 & -39 & 65 & 13 \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$V = \begin{pmatrix} -5 & 8 & 4 & -10 \\ 5 & -7 & 8 & -5 \\ 0 & -4 & -7 & 4 \\ 2 & 8 & 4 & -17 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 10 & -1 & 10 & 8 \\ -2 & 2 & -1 & -4 \\ 4 & -4 & 10 & 11 \end{pmatrix} \tag{6}$$

2. Проверяем формулу Фробениуса на практике...

Проверим, например, что rg $B^{m-1} = d_m$. Действительно,

$$\operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix}-4 & 6 & 3 & 3\\ 3 & -6 & -3 & -2\\ -3 & 5 & 2 & 2\\ -6 & 11 & 6 & 4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)^2 = 1 \tag{7}$$

3. Нахождение функции от матрицы.

Как известно, можно найти функцию, разложенную в степенной ряд, от Жордановой клетки так:

$$\begin{pmatrix}
f(x)\Big|_{x=t\lambda} & \frac{t}{1!}f'(x)\Big|_{x=t\lambda} & \frac{t^2}{2!}f''(x)\Big|_{x=t\lambda} & \cdots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k-1)}(x)\Big|_{x=t\lambda}\\
0 & f(x)\Big|_{x=t\lambda} & \frac{t}{1!}f'(x)\Big|_{x=t\lambda} & \cdots & \frac{t^{k-2}}{(k-2)!}f^{(k-2)}(x)\Big|_{x=t\lambda}\\
0 & 0 & f(x)\Big|_{x=t\lambda} & \cdots & \frac{t^{k-3}}{(k-3)!}f^{(k-3)}(x)\Big|_{x=t\lambda}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \cdots & f(x)\Big|_{x=t\lambda}
\end{pmatrix} \tag{8}$$

А потом посчитаем для всей блочной матрицы J, ведь каждый блок возводится независимо.

Найдём, например, $cos(Pt)$. Для начала:

$$\cos(-t) = (\cos(-t)) \tag{9}$$

Далее — $cos'(x) = -sin(x), cos''(x) = -cos(x), cos'''(x) = sin(x)$

$$\cos\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} t = \begin{pmatrix}\cos -t & -t\sin -t & -\frac{t^2}{2}\cos -t\\ 0 & \cos -t & -t\sin -t\\ 0 & 0 & \cos -t\end{pmatrix} \tag{10}$$

Осталось выписать формулу.

$$\cos(Pt) = T\cos(Jt)T^{-1} =$$
$$T\begin{pmatrix} \cos(-t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos -t & -t\sin -t & -\frac{t^2}{2}\cos -t \\ 0 & 0 & \cos -t & -t\sin -t \\ 0 & 0 & 0 & \cos -t \end{pmatrix} T^{-1} =$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(-t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos -t & -t\sin -t & -\frac{t^2}{2}\cos -t \\ 0 & 0 & \cos -t & -t\sin -t \\ 0 & 0 & 0 & \cos -t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \tag{11}$$

Теперь найдём $exp(J_Q t)$. Тут всего одно собственное число, причём $\lambda = 0 \implies t\lambda = 0$. $f^{(n)}(0) = 1$.

Очевидно получаем, что

$$exp(J_Q t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

Осталось расправиться с $exp(Qt)$. Ну, это

$$T\exp(J_Q t)T^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -26 & 1 \\ 2 & 0 & -18 & 0 \\ 0 & 2 & -16 & 0 \\ 0 & 0 & -26 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 5 & -26 & 1 \\ 2 & 0 & -18 & 0 \\ 0 & 2 & -16 & 0 \\ 0 & 0 & -26 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \tag{13}$$