Сжатый конспект по линейной алгебре (2-й семестр)

Латыпов Владимир (конспектор)
t.me/donRumata03, github.com/donRumata03, donrumata03@gmail.com
Кучерук Елена Аркадьевна (лектор)

14 июня 2022 г.

Содержание

1. Введение

Конспект старается быть максимальнго краткой выжимкой из того, что нужно знать для успешной сдачи экзамена по Линейной Алгебре во втором семестре.

Если кто-то сдаёт часть про линейные операторы и говтов по них написать, welcome.

2. Сопряжённое пространство

V^* пространство линейных форм над V.

Вычисление формы на коордлинатном столбце $f(x) = \mathrm{x}^j a_j$, где строка a_j размера n изоморфно сопоставляется форме.

— Координатные функции относительно базиса, $\omega^i(e_j) = \delta^i_j$.

Они базис V^*, так как их как раз n, а породить любую f можно, предъявив коэффициенты a_j.

По e мы научились находить сопряжённый базис, теперь научимся в обратную сторону находить по базису $V*$ такой базис V, чтобы исходный был к нему сопряжён: возьмём любую сопряжённую пару e, ω и через это получим $\omega' \to (e', \omega')$

Если назвать $S = T^T_{\omega \to \omega'}$, утверждается, что можем получить e' так: $T_{e \to e'} = S^{-1}$

Чтобы доказать — проверим, что ω' — координатные функции e'. То есть что координаты преобразуются правильно: $x' = Sx$.

Элементы V^* КОвариантные, так как преобразуются (получение новых из старых) с матрицей $T_{e \to e'}$, а элементы V — контравариантные, так как с матрицей $S = T^{-1}$

Доказывам, что можно получить изоморфизм

$$\varphi : V \to (V^*)^*, x \to "x" \quad \text{where} "x"(f) = f(x) \tag{1}$$

Кстати, $\varphi \in \mathrm{Aut}(V \to (V^*)^*)$.

Линйеность φ очевидна, для биективности в силу линейности достаточно проверить, что базис переходиь в базис (что $\mathrm{rg}\, \varphi = n$). Действительно, "$e_j$" — координатные функции базиса координатных функций, так как, "e_j"$(f) = f(e_j) = (a_f)_j$.

Отличие от $V \leftrightarrow V^*$ — в том, что теперь оно не зависит от выбора базиса.

— Умеем считать сопряжённый базис через обратную матрицу и матрицы проекторов через сопряжённый базис.

3. Тензоры

3.1. Два определения, смена базиса

Это функция $V^p \times (V^*)^q \to \mathcal{K}$.

То, что «из векторов» — ковариантное, «из форм» — контрвариантное.

$T_{(p;q)}$ — линейное пространство размерности $n^(p+q)$

За счёт линейности при вычислении на наборе векторов, разложенных по базису, можно вынести $p+q$ сумм с координатами, остаются значения тензора на разных размещениях базиса, их мы назовём компонентами относительно базисов e, ω.

$\alpha^{j_1,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p}$ Сверху пишется q «контравариантных индекса» — из форм. Снизу — p ковариантные индексы — из векторов.

Это можно записать в $p+q$-мерную матрицу.

Смена базиса. Выразив старые координаты через новые ($\xi^i = t^i_k {\xi'}^k, \eta_j = s^m_j {\eta'}_m$), подставим в формулу вычисления на наборе векторов, сгруппируем t, s, α скажем, что это новый компонент, а новые координаты как раз останутся.

Другое определение тензора: это многомерная матрица, в которой выделены «ковариантные» и «контравариантные» координаты и которая пересчитывается при смене базиса по той же формуле, что и выше.

Определения эквивалентны.

3.2. Тензорное произведение, свёртка, транспонирование

Тензорное произведение: вводим через второе определение (многомерная матрица), проверяем вариантность.

Говорим, что в терминах линейных форм мы берём каждую от своей части координат и перемножаем результаты.

Базис вводим базис $T_{(p;q)}$ из n^{p+q} тензорных произведений всех размещений e_i, ω_j, помня, что

$$\omega_j : (V)^1 \to \mathcal{K}$$
$$e_i \cong "e_i" : (V^*)^1 \to \mathcal{K}$$

Доказываем, что это базис, так как количество n^{p+q} и порождающее: за коэффициенты для порождения берём компоненты относительно базиса, доказываем через формулу вычисления на наборе векторов.

Заметим, что матрица тензора из базиса будет содержать одну единицу на соответствующих индексах и все остальные нули.

Вводим свёртку как матрицу, доказываем, что это тензор, помня, что $t_{\tilde{\kappa}}^{\kappa_2} s_{\kappa_1}^{\tilde{\kappa}} = \delta_{\kappa_1}^{\kappa_2}$ и оставляя в сумме только слагаемые, где $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$.

Транспонирование: $\beta = \sigma(\alpha), \beta_{j_1 \cdots j_p}^{i_1 \cdots i_q} = \alpha_{j_{\sigma_1} \cdots j_{\sigma_p}}^{i_1 \cdots i_q}$.

То есть набор индексов α переходит в индексы β под действием обратной к σ перестановки.

Доказываем, что тензор (достаточно доказать про транспозиции, так как перестановка раскладывается на композицию транспозиций)

Заметим, что в терминах функций мы переставлем аргументы, тоже с обратной перестановкой.

Транспонирование — изоморфизм, ассоциативно, но коммутаитвно (как и группа перестановок).

Если при любом транспонировании тензора он не меняется, он симметричен, если умножается на $(-1)^{\varepsilon(\sigma)}$, то кососимметричен.

Кососимметричен $\Leftrightarrow$ равен нулю при повторяющихся аргументах.

3.3. Симметрирование, альтенирование

Оба перестановочны относительно перестановки, причём для симметрирования получается просто симметрирование, а для альтенирования — оно умножить на знак перестановки. (доказывается, используя, что если все перестановки S_n, по которым мы суммируем, пропустить через одну перестановку, получим тоже все перестановки, но в другом порядке — таблица Кэли, иначе не группа)

α симметричен $\Leftrightarrow \alpha = \operatorname{Sim}\alpha$. α КОСОсимметричен $\Leftrightarrow \alpha = \operatorname{Alt}\alpha$.

Обе идемпотентны, причём $\operatorname{Sim}\operatorname{Alt}\alpha = 0$ (то есть симметрирование любого кососимметричного — ноль, ведь можно подставить кососимметричный $\beta = \operatorname{Alt}\beta$, тогда $\operatorname{Sim}\beta = \operatorname{Sim}\operatorname{Alt}\beta = 0$).

Доказывается, заметив, что сумма чётностей по всем перестановкам — это ноль, так как это определитель матрицы со всеми единицами.

Заметим, что пересечение подпространств симметричных и антисимметричных тензоров — тривиально. Более того, если транспозиция одна (по двум индексам), то пространство всех тензоров заданного типа раскладвыаются в дизъюнктную сумму симметричных и антисимметричных (по этим индексам), где $\alpha = \operatorname{Sim}\alpha + \operatorname{Alt}\alpha$

3.4. p-формы

p-формы — антисимметричные ковариантные тензоры, Если от одного аргумента, отождествляют с V^*.

Внешнее произведение: $f \wedge g = \frac{(p_f+p_g)!}{p_f!p_g!}\operatorname{Alt}(f \otimes g)$.

Есть свойства, можно через них раскрывать скобки.

1. $f \wedge g = (-1)^{p_1 p_2} g \wedge f$. 2. $(f+g)\wedge h = f \wedge h + g \wedge h$ и $f \wedge (g+h) = f \wedge g + f \wedge h$.
3. $\lambda \cdot (f \wedge g) = (\lambda f) \wedge g = f \wedge (\lambda g)$. 4. $\mathbb{D}_{\Lambda^{p_1}V^*} \wedge g = f \wedge \mathbb{D}_{\Lambda^{p_2}V^*} = \mathbb{D}_{\Lambda^{p_1+p_2}V^*}$.
5. $(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h) = \frac{(p_1+p_2+p_3)!}{p_1!p_2!p_3!}\operatorname{Alt}(f \otimes g \otimes h)$.

2, 3, 4 — очевидно.

1 — записываем по определению, сопоставляем у сумм слагаемые, смотрим на количество инверсий между ними, оно как раз $p_f p_g$.

5 — по определению, доказываем, что $\operatorname{Alt}(\operatorname{Alt}(f \otimes g) \otimes h) = \operatorname{Alt}(f \otimes \operatorname{Alt}(g \otimes h)) = \operatorname{Alt}(f \otimes g \otimes h)$. По линейности заносим второе тензорное произведение под внутреннюю сумму, потом создаём перестановку, работающую на всех трёх наборах индексов, но переставляющую только первые два как σ, по линейности альтенирования заносим его под сумму, замечаем альтенирование от перестановки, сокращаем (-1), конец.

По индукции можно обобщить формулу для внешнего произведения на несколько векторов.

Есть базис пространства антисимметричных p-форм (антисимметричных тензоров) размера $\binom{n}{p}$ из врешних произведений упорядоченных комбинаций кординатных функций. Координаты в нём называют существенными, они численно совпадают с координатой для того же набора в пространстве всех тензоров.

Можно вычислить значение внешнего произведения 1-форм на наборе векторов через определитель матрицы применения каждой функции к каждому вектору.

Также можно найти координаты внешнего произведения в базисе внешних произведений, если знаем разложение самих функций по базису пространства линейных форм.

Комбинируя, можно через сумму произведений двух соответствующих опредеителей вычислить функцию, заданную произведением 1-форм, заданных координатами, на наборе векторов, заданных координатами.

4. Евклидовы пространства

4.1. Аксиомы, КБШ

Скалярное (линейные пространства над вещественными числами) — функция от двух векторов: симметричность, линейность по первому ($\Rightarrow$ каждому) аргументу, положительная определённость.

Псевдоскалярное (линейные пространства над комплексными числами): то же самое, только симметричность — эрмитова и по второму аргменту становится «эрмитова» однородность, хотя и нормальная аддитивность.

Евклидова норма — корень из скалярного квадрата.

КБШ: $|\langle x, y\rangle| \leqslant ||x||||y||$, причём равенство только при линейной зависимости. Доказываем так: берём положительное $\langle \alpha x+\beta y, \alpha x+\beta y\rangle$, раскрываем, подставляем $\alpha =< y, y >, \beta = - < x, y >$, выносим $||y||$, получаем, что искомое положительно. Из равенства в КБШ сдедует зависимость, так как мы берём вот эти альфа и бета, получаем скалярный квадрат ноль. Из зависимости следует равенство: берём $\alpha x + \beta y = 0$ по определению л.з., рассматриваем $\langle \alpha x + \beta y, x\rangle = 0$; $\langle \alpha x + \beta y, y\rangle = 0$, раскрываем, перемножаем равенства, конец.

Проверка свойств норм для Евклидовой нормы: Положительная определённость, однородность — очевидно. Нер-во треугольника: доказываем про квадраты норм, раскрывая $||x+y||^2$, замечая сумму сопряжённых, применяя КБШ и получая полный квадрат.

Ортогональая система — линейно независима. Доказвается, скалярно умножая нулевую линейную комибнацию на базисный вектор, по ортогональности остаётся толко его компонент.

4.2. Грам-Шмидт, примеры

Грам-Шмидт: систему векторов можно заменить на ортогональную систему не большего размера с сохранением линейной оболочки. Процессируя очередной вектор, будем вычитать линейную комбинацию предыдущих, уже ортогональных. Так, чтобы новый стал ортогонален каждому. Если на каком-то шаге получится ноль, выкинем его.

Ортонормированную систему можно дополнить до ОНБ.

Примеры: коэффициенты Фурье, полиномы Лежандра.

Формула Родрига: $\tilde{e_k} = \lambda_k \left((x^2-1)^k\right)^(k)$.

Доказываем, что $\tilde{e_k} \perp x^m \forall m < k$. Берём интегралл, много раз интегрируя по частям, уменьшая степень x^m и уменьшая количество дифференцирований у $\tilde{e_k}$ каждый раз подстановка обнуляется, так как *Если полином имеет корень кратности k, этот корень — кратности $k-1$ у производной*.

Общая формула Родрига (хотя почему общая?...). Если взять $\lambda_k = \frac{1}{2^k k!}$, то $\tilde{e_k}(1) = 1$. Для доказательства вычислим $\tilde{e_k}(1)$ по формуле Лейбница для произведения $(x-1)^k(x+1)^k$, где слагаемые для $i! = k$ обнуляются.

Квадрат нормы полиномов будет $\frac{2}{2k+1}$ (опять интегрируеим по частям, уменьшая степень у одного и поднимая у другого).

Полиномы Чёбышева. Скалярное произведение — с весом $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, получаем $T_n = \cos(n \cos^{-1}(x))$. Доказываем, что это полиномы по индукции, что $T_{n+1} + T_{n-1} = 2xT_n$.

Полиномы Эрмита. Скалярное произведение — от нуля до $+\infty$ с весом e^{-x^2}. $H_n = e^{x^2}\left(e^{-x^2}\right)^(n)$.

4.3. Матрица Грама, её определитель

Скалярное произведение в коorинатах: через матрицу Грама для базиса, $\langle x, y\rangle = x^T\Gamma\overline{y}$. Для ортонормированного — матрица единичная.

Матрица Грама сомосопряжена.

Теорема об определителе матрицы Грама: если система зависима, он равен нулю, иначе — произведению скалярных квадратов векторов, получающихся ортогонализацией Грама-Шмидта.

Доказывается, вычитанием в определителе $g(..., a_i, ...)$ соответствующих линейных комбинаций одновременно из строк и столбцов $\rightsquigarrow$ на каждом шаге все a_i в матрице заменяются на b_i. Получаем определитель ортогональной системы, то есть $|\operatorname{diag}(b_i)|$.

Можем посчитать норму ортогонализации нового вектора через отношение матриц нового и старого определителя, если исходная система независима.

Объём параллелепипеда — корень из определителя Грама.

Можно вычислить матрицу Грама системы так: $G(a_1, ..., a_i) = A^T\Gamma\overline{A}$. Для ОНБ, понятно, Γ убирается.

Причём, если количество векторов равно размерности пространства, а $\Gamma = E$, объём — это просто определитель матрицы координат.

Объём под действием оператора изменяется в $\det\mathcal{B}$ раз (как определитель системы векторов при применении оператора). Например, при повороте объём сохраняется, а при гомотетии растёт в λ раз.

Матрица Грама базиса положительно определённая, её угловые миноры больше нуля. Она преобразуется при смене базиса: $\Gamma' = T^T\Gamma\overline{T}$. (Доказывается через смену координат в формуле для скалярного произведения и подстановку $x' = e_i, y' = e'_j$, ведь мы уже получили, что скалярное произведение элементов считается через эту матрицу, а значит, и для базисных векторов это тоже верно).

4.4. Изометрическая матрица

Изометрическая матрица: обратна сопряжению.

Свойства:

1. Изометричность равносильна ортонормированности столбцов, как и строк ($\Gamma = E$). Доказывается через $Q^T\overline{Q} = E$, что соответствует $\langle q_i, q_j \rangle = \delta^i_j$
2. Q — изометрично $\Leftrightarrow$ Q^{-1} — изометрично
3. Произведение изометричных изометрично
4. $|\det Q| = 1$
5. Матрица перехода между ОНБ — изометрична (по формуле для Γ').

4.5. Ортогональное дополнения, расстояния

$L^\perp$ — ортогональное дополнение L — мн-во векторов, ортогональным всем векторам L.

Это линейное подпространство, $L \cap L^\perp = \{\mathbb{0}\}$, причём $L \oplus L^\perp = V$. (Для док-ва дополним онб L до онб V. Подпространство, натянутое на добавленные векторы является прямым дополнением L, причём в сумме — онб, то есть любой вектор из дополнения ортогонален L, то есть полученное дополнение содержится в $L^\perp$, причём $\dim L^\perp \leqslant \dim V - \dim L$, так как иначе бы их пересечение было нетривиально)

${L^\perp}^\perp = L$ — доказываем подмножественность и равенство размерностей.

$(L_1 + L_2)^\perp = L_1^\perp \cap L_2 \perp; (L_1 \cap L_2)^\perp = L_1^\perp + L_2 \perp$. Доказываем прямое и обратное включение, подставляя нули в качестве некоторых векторов. Второе следует из первого.

Единственность представления вектора как сумму составляющих из L и $L^\perp$: $x = y + z$. (Едиственность и так известна из дизъюнктности, но здесь есть хороший способ поиска). Найдём разложение составляющей из L по базису L. Составим СНЛУ, что $\langle x, l_i \rangle = \langle y, l_i \rangle$, раскрыв это по разложению с кроэффициентами c_i и линейности. Получим СЛНУ с единственным решением за счёт $detG \neq 0$:

$$G(l_1, ..., l_{\dim L})^T \mathbb{c} = \langle \mathbb{x}, \mathbb{l} \rangle \tag{2}$$

Теорема Пифагора: для перпендикулярных векторов квадрат суммы — это сумма квадратов, так как смешанные слагаемые обнуляются. Можно также обобщить на n перпендикулярных векторов.

Теорема о наилучшем приближении: ортогональная проекция — самый близкий элемент L к исходному вектору. (Из Пифагора)

Расстояния между точкой и линейным пространством, точкой и многообразием, двумя многообразиями.

$dist^2(x, L) = \frac{g(\ldots,x)}{g(\ldots)}$, так как при ортогонализации в числителе x превратится в компоненту относительно $L^\perp$

Для многообразия $\rho(x, [P = x_0 + L]) = \rho(x - x_0, L)$, доказывается через резложение $x - x_0 = y + z$ и примерение теоремы Пифагора.

$\rho([P_1 = x_1 + L_1], [P_2 = x_2 + L_2]) = \rho(x_1 - x_2, L_1 + L_2)$, так как

$$\min_{\substack{l_1 \in L_1 \\ l_2 \in L_2}} \|x_1 - x_2 + l_1 - l_2\| = \min_{l \in L_1 + L_2} \|x_1 - x_2 + l\| \tag{3}$$

Пространство можно разложить в прямую сумму попорно ортогональных подпространств. Если они все размерности 1, можно найти коэффициенты по Формуде Фурье: $x_i = \frac{\langle x, e_i \rangle}{\langle e_i, e_i \rangle}$ (просто скалярно домножили разложение в ОБ на e_i).

Тождество Парсеваля: в ортогоналном базисе $||x||^2 = \sum |x_i| ||e_i||^2$ (по теореме Пифагора) (Для бесконечномерных будет только неравенство БесселяЖ будет знак $\leqslant$)

Мы также можем строить проекторы на одномерные ортогональные пространства через склярные произведения с элементами базиса (коэффициенты Фурье).

4.6. Изометрия V и V^*

Пространства изометричны — существует изоморфизм с сохранением скалярного произведения.

На любых евкл/унит простренствах одной размерности можно ввести изометрию: сопоставляем векторы с одинаковыми коэффициентами в разложениях фиксированных **ОНБ**. Понятно, что такая изометрия зависит от выбора базисов.

Теорема Рисса.

4.7. Метрические тензоры, взаимные базисы

5. Операторы в Евкливых пространствах

5.1. Сопряжённый

Матрица $\overline{\Gamma^{-1}}A^*\overline{\Gamma}$, в онб — просто A^* Сопряжение — взаимообратно. Отнсительно компоиции — как транспонирование. Аддитивность, псевдоОднородность. Перестановочность относительно $(.)^{-1}$

Ядро оператора и образ сопряжённого — ортогональные дополнения друг друга, как и образ оператора и ядро сопряжённого.

Собственные числа — сопряжения друг друга. Для не соответствующих — собственные векторы ортогональны, для соответствующих — одинаковые.

Если подпространство инвариантно относительно A, то его ортогональное дополнение — относительно A*.

5.2. Нормальный

$\iff$ Перестановочен с сопряжённым $\iff \langle Ax, Ay\rangle = \langle A^*x, A^*y\rangle \iff$ В некотором базисе матрицы перестановочны $\iff$ ОПС + собственные пространства ортогональны $\iff$ Существует какой-нибудь ОНБ, что матрица имеет понятно какой блочно-диагональный вид

Не перестанет быть нормальным, если вычесть сколько-то id.

У нормального оператора ядро и образ — ортогональные дополнения друг друга (если удалось получить собственные числа из того же поля, то потому, что это собственное подпространство нуля и все остальные).

Причём ядро не меняется при возведении в степень. И $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} A*$.

Лемма о комплексификации (оператора):

— Собственные числа сохранются, собственные пропртанства будут комплексификацией соответствующих — Комлексные собственные числа и простанства будут разбиваться на пары сопряжённых. — Нормальность сохраняется — Сопряжённость — перестановочная с комплексификацией

(Лемма очевидна, если учесть, что любое полиномиальное уравнение, верное в подполе, верно и в самом поле)

Канонический вид: — В унитарном: находим ОНБ из собственных подпространств, получаем собственные числа на диаонали

— В евклидовом: если все СЧ — вещ. — аналогично. Иначе — добавляем ещё блоки для пар комплексно-сопряжённых. Матрица перехода всё ещё должна быть ортогональная. Как её найти? Для вещественных собственных чисел — просто собственные векторы. Для пар КС разделяем какой-нибудь вектор на пару вещественной и комплексной части и запишем в таком порядке.

5.3. Самосопряжённый

(симметричный/эрмитов)

Равносильное определение через скалярное произведение: применить можно как к первому, так и ко второму аргументу, получится то же самое. И в обратную сторону.

Если A и B САМОсопряжены и перестановочны, то произведение самосопряжено.

Самосопряжён <=> нормален + имеет вещественный спектр <=> существует ОНБ, в котором матрица самосопряжена

Если подпространство инвариантно относительно A, то и ортогональное дополнение — тоже.

В каноническом виде просто пропадут блоки, останутся просто (и в унитарном, и в Евклидовом)

5.4. Изометричный

Унитарный/ортогональный

Равносильное определение через скалярное произведение, что если применить к обоим аргументам, скалярное проиведение не изменится.

... $\Longleftrightarrow$ нормален + собственные числа по модулю = 1 $\Longleftrightarrow$ существует ОНБ, в котором матрица изометрична $\Longleftrightarrow$ Q^{-1} — изометр.

Если подпространство инвариантно относительно Q, то орт. дополнение — тоже.

Каноничечкий вид — В Евклидовом на диагонали останутся только ± 1 — В Унтарном в блоках будут $a^2 + b^2 = 1$

Матрица изометрична $\Longleftrightarrow$ её (стобцы $\Longleftrightarrow$ строки) ортонормированы.

6. Разложения матриц

$L(D)U$ — нижне-унитреугольная * (Диагональная без нулей на диагонали кроме, возможно, последнего) * верхне-унитреугольная; Существует $\Longleftrightarrow$ Все угловые миноры матрицы A, кроме (возможно) Δ_n не равны нулю.

Кстати, здесь $\det L = \det U = 1$, то есть $\prod^k d_i = \Delta_k$, то есть $d_k = \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}$.

Можно найти одновременным Гауссом A и E без замены строк и столбцов. Слева будет DU, справа — L^{-1}. Доказывается через преобразования элементарной нижне-унитриугольной матрицей слева, то есть добавляния к j-й строке i-ую строку с коэффициентом. (Много таких умножений обеих частей — это и есть метод Гаусса). Пользуемся единственностью, получаем, что нашли то, что нужно.

Если к требованиям левой части добавить сомосопряжённость матрицы, будет $A = LDL^* = U^*DU$. Причём все d вещественные. Доказывается через LDU разложения для исходной и сопряжённой матриц (которые равны); $D = \overline{D}$

Положительная/отрицаельная определённость операторов и матриц:

1. Положительно/отрицательно определён, если $\langle \mathcal{A}u, u \rangle$ для всех $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ больше нуля.
2. Положительно/отрицательно **полу**определён, если эта величина всегда больше или равна/меньше или равна нуля. (Требование, что для какого-то должна быть равна нулю не предъявляется!)
3. Не определён, если где-то меньше нуля, где-то — больше.

Это равносильно соотвтствующему утверждению про собственные числа. Доказательство: вспомним, что у самосопряжённого оператора собственные числа вещественны, а собственные подпространства ортогональны (по нормальности). Разложив и посчитав скалярное произведение разложения любого вектора и убрав перекрёстные слагаемые по ортогональности, получим $\sum_\lambda \lambda \langle u_\lambda, u_\lambda \rangle$

Разложение Холецкого: самосопряжённая положительно определённая ($\Rightarrow$ невырожденная), все угловые миноры — не нули $\Longleftrightarrow$ можно в LDU «размазать» D, разложив на треугольные с положительными элементами на диагонали: $A = LL^* = U^*U$.

Доказательство: по версии LDU для самопряряжённых, $\exists!L, !U, !D, d_k \in \mathbb{R} : A = LDL^* = U^*DU$. $A > 0 \Rightarrow \langle U^*DUx, x\rangle = \langle DUx, Ux\rangle > 0$, так как U — невырожденный, Ux пробегает всё пространство, то есть $\forall y \langle Dy, y\rangle > 0$, то есть D получился положительно определённым, то есть пололжительные собственные числа, размажем его между U^* и U: берём $\sqrt{D}$, $(U')* = U^*\sqrt{D}; U' = \sqrt{D}U$.

QR разложение: для невырожденной можно представить как произведение ортогональной на правую. Или же левой на ортогональную (через разложение транспонирования A). Q находится ортонормированием столбцов исходной. За R^{-1} берём матрицу коэффициентов при ортогонализации (она обьратима, так как на диагонали не нули).

Теорема: можно взять корень из оператора, если он ОПС и с.ч. неотрицаительны. Сделаем это классическим способом через спектральные проекторы. Единственность следует из единственнсти спектрального разложения.

Полярное (QS или SQ) разложение: на самосопряжённую (H) положительно определённую и изометричную (U).

Док-во: AA^* всегда самосопряжённый, причём положительно определённый, как и A^*A.

Нужно взять $\sqrt{AA^*}$ (левый модуль) для получения ортогонального. Далее — через обратную.

Можно также UH, получается из HU разложения через взятие обычного от матрицы A^* и $H' = H^*, U' = U^*$, в случае невырожденности берём $H = \sqrt{A^*A}$ (правый модуль).

7. Квадратичные формы

Кваlратичная — билинейная симметричная (в $\mathbb{C}$ — полуторалинейная), в которую подставлены одинаковые аргументы: $f(x) = \alpha(x, x)$.

В матричной форме: x^TAx. Ранг формы — ранг её матрицы.

При смене координат $x = Qy$ матрица в новых кородинатах будет $Q^T AQ$.

Если элементы вне диагонали нулевые — канонический вид.

Для формы в каноническом виде положительный, отрицательный индексы инерции и количество нулей — количество соответствующих элементов на диагонали.

Сигнатура — это тройка $(\sigma^+(f), \sigma^-(f), \sigma_0(f))$

Нормальный вид — канонический и все элементы $\in \{-1, 0, 1\}$

Приведение к каническому виду ортогональным преобразованием: так как A — симметричная, все с.ч. вещественны и можно, приведя к каноническому виду, получить:

$[V = Q^{-1} = Q^T], A = V^T \Lambda V$, где V ортонормированная.

Метод Лагранжа: Последовательные невырожденные преобразования для диагонализации. Если нет ненулувых квадратов, делаем первый шаг: не трогая остальные переменные, вводим $x_i = y_i + y_j, x_j = y_i - y_j$. Получам квадратный член и матрицу с квадратиком на диагонали из $1, 1, 1, -1$.

Если же квадрат есть, разделяем на только этот квадрат с коэффициентом и форму чисто от остальных аргументов. Для этого выеляем полный квадрат с первым членом, где коэффициенты для остальных берём из перекрёстных членов. Тогда в качестве новой переменной берём $y_i = \sum_j a_{ij} x_j$. Обратной матрицей преобразования будет, где в i-й строке стоит a_{ij}, а остальное — δ^i_j.

Метод Якоби (угловые миноры кроме последнего $\neq 0$): матрца формы самосопряжена, так что раскладываем в $A = U^* DU \Rightarrow \Lambda = (U^{-1})^T AU^{-1}$, причём будет состоять из отношений миноров. Тогда берём $Q = U^{-1}$. Существует единственное такое верхнее унитреугольное преобразование, причём его можно найти через $A_{k-1} q_i = -b_i$, где A_i — угловые матрицы A, q_i столбцы q, b_i — верхние части столбцов A.

Для n = 2 доказываем русками через разложение. Далее — по индукции через деление матрицы на 4 части.

Note: если ранг $n - 1$, а не n, проведём сначала невырожденное преобразование матрицей перестановки, получив все миноры кроме последнего не нули.

Критерий инерции квадратичный форм: любое невырожденное преобразование к каноническому виду, даёт одинаковую сигнатуру.

Докажем от противного. Во-первых, ранг не меняется при невырожденных преобразованиях. Запишем с два приведения формы к КВ с разным количеством положжительных и отрицательных (но $\sigma^+ + \sigma^- = \operatorname{rg} f$, то есть нулевых одинаково).

НУО, $p < s$. Для любого y, z системы $Q_1^{-1}\mathbb{x} = y$ и $Q_2^{-1}\mathbb{x} = z$ имеют единственное решение в силу невырожденности.

Сделаем y_0 — вектор из нулей в первых p позициях, в остальных — что угодно. И z_0 — с нулями в последних $n - s$, а в первых s — что угодно.

Сделаем однородную систему из $p + n - s < n$ уравнений, взяв первые p уравнений из $Q_1^{-1}\mathbb{x} = y$ и последние s из $Q_2^{-1}\mathbb{x} = z$. Тогда будет нетривиальное решение новой системы x^*. Обозначим $y^* = Q_1^{-1}\mathbb{x}^*$, $z^* = Q_2^{-1}\mathbb{x}^*$. С одной стороны, $y^* \neq 0 \neq z^*$, так как $x^* \neq 0$. С другой — первые p и последние s — нули, так как мы брали нужные уравнения из соответствующей системы. Тогда остальные элементы — не только нули.

Но тогда перейдём к координатам в обоих x, получив, что $f(x^*) = g(y^*) > 0$ и $= h(z^*) < 0$ одновременно.

Знакоопределённость формы — определяется как у матрицы.

Критерий Сильвестра: если все угловые миноры ненулевые, то: если все положительные, она положительно определённая, если чередуются начиная с отрицательного — отрицательно определённая, если всё это для предыдущих и последний минор равно нулю, то полуопределённая с соответствующим знаком. Иначе — НЕопределённая.

ПВП к каноническому виду: выделяем квадратичную форму, избавляемся от перекрёстных членов ортогональным преобразованием, заменяем координаты (меняются и линейные члены тоже). Затем делаем параллельный перенос, получаем