Конспект к экзамену по матану

Владимир Латыпов
donrumata03@gmail.com

Содержание

1 Теория меры

2 Многообразия

2.1 Разбиение единицы

Лемма 2.1.1: Открытое множество в $\mathbb{R}^n$ представимо как объединение шаров с рациональными ценрами и радиусам, в нём содержащихся.

Теорема 2 (Теорема Линдлёфа): Из открытого покрытия множества в $\mathbb{R}^n$ можно выделить счётное подпокрытие.

Доказательство:
- Не важно, открыто ли покрытие в $\mathbb{R}^n$ или в M, т.ч. считаем, что множество представлено в виде объединения.
- Рассмотрим все шары, содержащиеся хотя бы в одном элементе покрытия $\longrightarrow$ достаточно их объединить (занумеруем).

$\square$

Теорема 3 (Теорема Лебега (о компакте)): Для открытого покрытия метрического компакта существует ε, что любое пересекающееся с K множество диаметра $\leq \varepsilon$ содержится в каком-то элементе покрытия.

Доказательство: От противного — построим последовательность для $\varepsilon = \frac{1}{n}$. По секвенциальной компактности выделим сходящуюся подпоследовательность. Её предел — в элементе покрытия. Тогда множества с какого-то момента содержатся в нём. Противоречие. $\square$

Теорема 4 (Разбиение единицы): Для открытого покрытия компакта в $\mathbb{R}^n$ существует разбиение единицы, отвечающее ему, т.е.
- конечный набор финитных функций $C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n \to [0,1])$, тч:
- supp каждой $\in$ какому-то элементу покрытия.
- Сумма набора ≤ 1 всегда
- На компакте в точности равна 1

Доказательство: Фнукция $\tau(x) = e^{-\frac{1}{(t+1)^2}-\frac{1}{(t-1)^2}}$ (на $[0,1]$, иначе — 0). Периодизируем, поделим на период, получим θ. Тогда $\widetilde{\theta}$ (периодизированная θ) $\equiv 1$. Через ε из леммы Лебега возьмём малое h и получим для точки m из $\mathbb{Z}^n$ перемноженную и промасштабированную штуку $\theta_{m(x)} = \prod_{i=1}^n \theta(\frac{x_i}{h} - m_i)$. Тогда возьмём в набор те, которые содержатся в каком-либо элементе покрытия. $\square$

Теорема 5 (Равносильность существования локального и глобального гладкого продолжения): Если для каждой точки множества существует окрестность и r —гладкое продолжение отображения, то существует таковое и на объединении окрестностей.

2.2 Гладкие многообразия

Определение 2.2.1: Регулярное оторбражение на произвольном множестве — существует регулярное продолжение на открытое.

Определение 2.2.2: $\mathbb{M}_{kn}^{(r)}$ (k-мерное многобразие в $\mathbb{R}^n$ класса r) — множество в $\mathbb{R}^n$, тч для каждой точки существует локальная параметризация — окрестность (открытое в M множество, содержащее это точку) и регулярный класса r гомеоморфизм $\varphi : \Pi_k \to U$, где Π_k — стандартный куб или полукуб, причём $\varphi(\mathbb{0}) = x$. Точки, где это куб — внутренние, где полукуб — краевые.

∂M — край — множество краевых точек. Не завит от параметризации (следствие из теоремы о регулярности перехода).

Определение 2.2.3: Нуль-мерное многообразие — *дискретное* множество точек, то есть никакая — не предельная.

Пример: Многообразия:
- Открытое множество в $\mathbb{R}^n$ — многообразие без края класса ∞ (тождественная параметризация)
- Путь (простой, незамкнутый, регулярный, на $[0, 1]$).
- Образ открытого в $\mathbb{R}^k$ множества при регулярном гомеоморфизме. Частный случай — график отображения, где $\varphi : (u, f(u))$.
- Поверхность вращения в $\mathbb{R}^3$ (параметризуем, решая уравнения)
- Сфера (локальная параметризация — через сферические коодринаты, иначе — вращаем)
- Цилиндрическая поверхность — то же самое, но переходим к сферическим координатам только по первым $l - 1$ переменным.
- Тор — параметризуем через угол на центральной окружности и на подвешенной к ней

Теорема 1 (Задание многообразия через систему уравнений): Подмножество открытого, где r —гладкое регулярное отображение $\Phi : G \subset \mathbb{R}^{k+m} \to \mathbb{R}^m$ равно нулю, — $\mathbb{M}_{k,k+m}^{(r)}$.

Доказательство: НУО, нелулевой минор — по последним координатам (y). По Т. о неявном отображении возьмём куб с ребром $a \to$ шар с радусом b и неявное отображение: последние координаты по первым. Тогда параметризация:

$$\varphi(u) = (x_0 + au, f(x_0 + au))$$

□

Определение 2.2.4: Переход от параметризации φ к ψ — $L : \begin{pmatrix} W_1 \to W_2 \\ \psi^{-1} \circ \varphi \end{pmatrix}$, то есть по φ-параметру точки из пересечения стандартных окрестностей даёт ψ-параметр.

Теорема 2 (Регулярность перехода): $L \in C^{(r)}$ и регулярно.

3 Ряды Фурье и приближение функций

3.1 Пространства Лебега

Определение 3.1.1: Програнство Лебега $L_{p(E,\mu)}, p \in [1, \infty]$ — множество функций п. в.$_\mu E \to \overline{\mathbb{R}}$ или $\overline{\mathbb{C}}$, для которых

$$\begin{cases} \|f\|_p = \left(\int_E |f|^p d\mu\right)^{1/p} < \infty & p \in [1, \infty) \\ \|f\|_\infty = \operatorname{ess}\sup\limits_{E}^{\text{п. в.}_\mu} |f| < \infty & p = \infty \end{cases}$$

Определение 3.1.2: Пространство L_p (обозначается без указания множества и меры) — множество 2π-периодических функций п. в. $\mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ или $\overline{\mathbb{C}}$, для которых $\|f\| = \|f\|_{L_{p([-\pi,\pi],\mu_1)}} < \infty$.

Теорема 1: Полнота

3.2 Гильбертовы пространства

Определение 3.2.1: Гильбертово пространство — *полное* линейное пространство со скалярным произведением и нормой, им порождённой.

Пример: Пространство $L_2(E, \mu)$ со скалярным произведением:

$$\langle f, g\rangle = \int_E f\overline{g}\mathrm{d}\mu$$

(суммируемость $f\overline{g}$ — за счёт неравенства Гёлдера для $p = q = 2$)

Полнота доказана в Теореме 3.1.1

Частные случаи:
- ℓ_2^m — Евклидово пространство
- ℓ_2 — последовательности
- $\ell_2(\mathbb{Z})$ — двусторонние последовательности

Лемма 3.2.1: Сходящийся в $\mathcal{H}$ ряд можно скалярно умножать на вектор почленно

Теорема 2 (Критерий сходимости ортогонального ряда): Сходимость ряда в $\mathcal{H}$ равносильна сходимости $\sum \|x\|^2$, причём

$$\left\|\sum_{i=1}^{\infty} x\right\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|x\|^2$$

Следствие 2.1: Перестановка сходящейся в $\mathcal{H}$ последовательности тоже сходится и имеет тот же предел

Теорема 3 (Вычисление коэфициентов ортогонального ряда): Если $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ОС, а $\sum_{i=1}^{\infty} c_k e_k \to x$, то коэфициенты однозначно вычислаются по формуле

$$c_k = \frac{\langle x, e_k\rangle}{\|e_k\|^2}$$

Теорема 4 (Свойства частичных сумм Фурье):
1. S_n — ортогональная проекция x на $\mathcal{L}(\{e_k\})$
2. S_n — элемент наилучшего приближения к x из $\mathcal{L}(\{e_k\})$, причём равенство достигается только при $y = S_n$
3. $\|S_n\| \leq \|x\|$

Следствие 4.1 (Неравенство Бесселя): Сумма квадратов норм Ряда Фурье x не больше $\|x\|^2$.

Теорема 5 (Рисс, Фишер):
1. Ряд Фурье вектора x сходится
2. Сумма ряда Фурье — ортогональная проекция x на $\mathcal{L}(\{e_k\})$
3. Сходится именно к $x \iff$ выполняется *уравнение замкнутости* (то есть в нер-ве Бесселя достигается равенство).

Определение 3.2.2: Базис: любой вектор раскладывается по этой системе

Определение 3.2.3: Полная система: не существует отличного от нуля вектора, ортогонального всем вектора (то есть нельзя добавить ещё однин вектор, чтобы осталвалась ОС)

Определение 3.2.4: Замкнутая система: для любого вектора выполнено *уравнение замкнутости*

Теорема 6 (Характеристика базиса): Утверждения эквивалентны для ОС $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$:
1. $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — базис
2. $\forall x, y$ выполнено обобщённое уравнение замкнутости:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} c_{k(x)} \overline{c_{k(y)}} \|e_k\|^2$$

3. $\{e_k\}$ — полная система
4. $\{e_k\}$ — замкнутая система
5. $\mathcal{L}(\{e_k\})$ плотна в $\mathcal{H}$

Теорема 7 (Грамм, Шмидт): систему можно ортонормировать, не изменяя линейную оболочку никакого префикса, притом единственным с точностью до коэфициентов ± 1 образом

Пример (Ортогональные базисы многочленов) : Весовая функция $\to$ вводим скалярное произведение

Теорема 8 (Существование элемента наилучшего приближения):