

Экзамен по матлогике (Билет 13)

Владимир Латыпов

donrumata03@gmail.com

Содержание

1 Противоречивости	3
2 Первая теорема Гёделя	4
3 Форма Россера	4
4 Синтаксическая и семантическая неполнота арифметики.	5
5 Ослабленные варианты ФА: арифметика Пресбургера, система Робинсона.	6
5.1 Система Робинсона	6
5.2 Арифметика Пресбургера	6
6 Задача	6

Условие 1:

- Непротиворечивость (эквивалентные определения, доказательство эквивалентности), ω -непротиворечивость.
- Первая теорема Гёделя о неполноте арифметики.
- Формулировка первой теоремы Гёделя о неполноте арифметики в форме Россера.
- Синтаксическая и семантическая неполнота арифметики.
- Ослабленные варианты ФА: арифметика Пресбургера, система Робинсона.

1 Противоречивости

Определение 1.1 (Противоречивая теория): Для некоторой формулы α :

$$\vdash_{\mathcal{T}} \alpha \& \neg \alpha$$

Определение 1.2 (Противоречивая теория): Для некоторой формулы α :

$$\vdash_{\mathcal{T}} \alpha \quad \text{и} \quad \vdash_{\mathcal{T}} \neg \alpha$$

Определение 1.3 (Противоречивая теория):

$$\vdash_{\mathcal{T}} A \& \neg A$$

Определение 1.4 (Противоречивая теория): Любая формула доказуема в \mathcal{T}

Теорема 1: Определения эквивалентны

Доказательство:

(1) \Rightarrow (2): удаление конъюнкции

(2) \Rightarrow (1): добавление конъюнкции

(2) \Rightarrow (3, 4): По 10и: $\alpha \rightarrow \neg \alpha \rightarrow \beta$, где β — требуемое.

(3) \Rightarrow (1): Положим $\alpha = A$.

(4) \Rightarrow (*): положим β нужной формулой. Она доказуема. \square

Определение 1.5 (ω -непротиворечивая теория): Если для формулы $\varphi(x)$ при $\vdash \varphi(\bar{x})$ для всех $x \in \mathbb{N}_0$ будет:

$$\not\vdash \exists x. \neg \varphi(x)$$

2 Первая теорема Гёделя

Формула $\omega_1(\xi, p)$: представление в ФА рекурсивного отношения, в которое входят пары, т.ч. второй элемент — гёделев номер доказательства самоприменимости первого $\vdash \xi(\overline{\ulcorner \xi \urcorner})$.

$\sigma(x) \equiv \forall p. \neg \omega_1(x, p)$ — никто не доказывает самоприменимость x .

Теорема 1:

1. Если ФА непротиворечива, то $\not\vdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$
2. Если ФА ω -непротиворечива, то $\not\vdash \neg \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$

Доказательство:

- Пусть $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. Возьмём p — ГН этого доказательства. Тогда $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{p})$ (такое условие представимости отношение в ФА). По сх. акс. 12: $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$. А это отрицание $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$, которое доказуемо. Тогда получится, что ФА противоречива, а мы предположили, что нет. $(?!)$
- Пусть $\vdash \neg \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. $\Rightarrow \vdash \exists p. \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$.
 - Покажем, что из метатеории можно вытащить конкретный p , который «существует» (т.ч. $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{p})$).
 - Пусть не так. Тогда для всех доказуемо отрицание, а по ω -непротиворечивости вносим квантор \exists в формулу из метатеории: $\not\vdash \exists p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$, но оно доказуемо по предположению.

Тогда это p — ГН доказательства самоприменения σ , но тогда доказуемо одновременно $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ и $\neg \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. $(?!)$

\square

3 Форма Россера

Избавимся от предположения $[\omega]$ -непротиворечивости.

Определение 3.1: ω_2 — как первый, только теперь доказательство само**не**применимости.

Теорема 1: $\rho(x) = \forall p. \omega_1(x, p) \rightarrow \exists q. q \leq p \& \omega_2(x, q)$. (т.е. если самоприменимость и доказуема, то номер доказательства само**не**применимости — меньше).

Тогда

$$\begin{aligned} &\not\models \rho(\ulcorner \rho \urcorner) \\ &\not\models \neg \rho(\ulcorner \rho \urcorner) \end{aligned}$$

4 Синтаксическая и семантическая неполнота арифметики.

Определение 4.1 (Синтаксическая полнота теории): Для любой формулы доказуемо хотя бы что-то из её самой и её отрицания

Определение 4.2 (Семантическая полнота теории): Любая общезначимая формула доказуема (полнота в привычном понимании)

Теорема 1: ФА семантически неполна с моделью как для исчисления предикатов с арифметикой Пеано.

Доказательство: Предъявим верную, но недоказуемую формулу: $\sigma(\ulcorner \sigma \urcorner)$.

- Недоказуемо по т. Гёделя. (непротиворечивость ФА — из \mathcal{S}_∞ или формы Россера)
- Верность: Раз недоказуемо, то не существует номера доказательства. Тогда $\llbracket \forall p. \neg \omega_1(\ulcorner \sigma \urcorner) \rrbracket = \text{И.}$

□

5 Ослабленные варианты ФА: арифметика Пресбургера, система Робинсона.

5.1 Система Робинсона

Взяли те утверждения, которые получены и требуются для доказательства теоремы Гёделя. Довольно слабая штука (даже нет индукции), но достаточно для неполноты.

Оставили $0, (+), (\cdot), (=)$.

Нет схем, количество аксиом конечно.

Аксиомы: https://en.wikipedia.org/wiki/Robinson_arithmetic

5.2 Арифметика Пресбургера

Ещё ослабили, теорема Гёделя недоказуема.

Оставили $0, 1, (+), (=)$.

Но она совсем слабая, нет даже умножения.

Зато разрешима и полна в обоих смыслах.

Аксиомы: https://en.wikipedia.org/wiki/Presburger_arithmetic

6 Задача

Алгебра Линденбаума: множество высказываний, факторизована по равнодоказуемости в ИИВ.

Условие 2: Введём топологию на алгебре Линденбаума: открытые множества — те, для которых вместе с элементом $[\alpha]_{\sim}$ содержатся все большие его, то есть $\alpha \vdash \beta$ (как топология на деревьях, но это будет не дерево, а DAG).

Компактно ли это топологическое пространство?

Замечание: Если берём все меньшие, то в каждом просто будет элемент $A \& \neg A$, оставим только одно множество, оно покрывает всё.

Теорема 1: Да. компактно

Доказательство: Чтобы было покрытие всех формул, в каком-то множестве должно содержаться $A \& \neg A$. Возьмём только его. Это будет подпокрытие из одного элемента.
 \square

Из множества можно выделить «сильные и задающие» — такие, которые не следуют ни из каких других элементов множества (то есть минимальные) — назовём корнями. В худшем случае — во множестве только один корень.

Покрытие такими множествами: любая формула содержится в каком-то элементе покрытия, то есть

Гливенко: α доказуемо в ИИВ $\leftrightarrow \neg\neg\alpha$ — в КИВ. Лемма перед Гливенко: если доказывать в предположении, что верны дизъюнкции $A_i \vee \neg A_i$.

Идея: Попробуем залить бесконечной таблицей истинности $(A_1 \& A_2 \& \dots)$.

Рассмотрим все формулы вида $\varphi_I = \bigvee \{[\neg]A_i\}_{i=1}^n \sim \bigvee \{(A_i \vee \neg A_i) \wedge [\neg]A_i\}_{i=1}^n$. (Индексируя A , будем получать все валидные символы для пропозициональных переменных).

Лемма 6.2: Ни одна из другой не следует

Какие таблицы истинности следуют из каких? Дизъюнкция следует из конъюнкции. Мы хотим, чтобы не так много следовало.

Доказательство:

Пусть сначала одинаковые множества переменных:

- $\alpha(\{A_i\}) \vdash \beta(\{A_i\})$, если для всех клеток, где верно A , верно и B , то есть сила убывает по множеству единиц.
- Если клетки все кроме одной — единицы, то из неё следует только штука с такой же таблицей истинности.

Есть разные множества формул — таблица распространяется на 0 и 1 аналогично.

Возьмём множество переменных

□

Возьмём span каждой, то есть то, что следует из неё.

- получим все высказывания, так как для каждого $\neg\neg\alpha$ имеет таблицу истинности, а значит, доказуем для какого-то значения, тогда доказуем и α в ИИВ.
- Если возьмём конечное подпокрытие, то по лемме будет и конечное количество формул \rightarrow будут имена переменных, которые там вообще не упоминаются, пусть такова X , тогда X не покрыли \rightarrow это гарантированно не будет подпокрытием.