Конспект к экзамену по матану

Владимир Латыпов

donrumata03@gmail.com

Содержание

1 Теория меры

2 Многообразия

3 Ряды Фурье и приближение функций

3.1 Проаранства Лебега

Определение 3.1.1: Програнство Лебега $L_p(E, \mu), p \in [1, \infty]$ — множество функций п. в.$_\mu E \to \overline{\mathbb{R}}$ или $\overline{\mathbb{C}}$, для которых

$$\begin{cases} \|f\|_p = \left(\int_E |f|^p d\mu\right)^{1/p} < \infty & p \in [1, \infty) \\ \|f\|_\infty = \text{ess sup}_E^{\text{п. в.}_\mu} |f| < \infty & p = \infty \end{cases}$$

Определение 3.1.2: Пространство L_p (обозначается без указания множества и меры) — множество 2π-периодических функций п. в. $\mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ или $\overline{\mathbb{C}}$, для которых $\|f\| = \|f\|_{L_p\left([-\pi,\pi],\mu_1\right)} < \infty$.

Теорема 1: Полнота

3.2 Гильбертовы пространства

Определение 3.2.1: Гильбертово пространство — *полное* линейное пространство со скалярным произведением и нормой, им порождённой.

Пример: Пространство $L_2(E, \mu)$ со скалярным произведением:

$$\langle f, g \rangle = \int_E f\overline{g} \,\mathrm{d}\mu$$

(суммируемость $f\overline{g}$ — за счёт неравенства Гёлдера для $p = q = 2$)

Полнота доказана в Теореме 3.1.1

Частные случаи:
- ℓ_2^m — Евклидово пространство
- ℓ_2 — последовательности

- $\ell_2(\mathbb{Z})$ — двусторонние последовательности

Лемма 3.2.1: Сходящийся в $\mathcal{H}$ ряд можно скалярно умножать на вектор почленно

Теорема 2 (Критерий сходимости ортогонального ряда): Сходимость ряда в $\mathcal{H}$ равносильна сходимости $\sum \|x\|^2$, причём

$$\left\|\sum_{i=1}^{\infty} x\right\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|x\|^2$$

Следствие 2.1: Перестановка сходящейся в $\mathcal{H}$ последовательности тоже сходится и имеет тот же предел

Теорема 3 (Вычисление коэфициентов ортогонального ряда): Если $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ОС, а $\sum_{i=1}^{\infty} c_k e_k \to x$, то коэфициенты однозначно вычислаются по формуле

$$c_k = \frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|^2}$$

Теорема 4 (Свойства частичных сумм Фурье):

1. S_n — ортогональная проекция x на $\mathcal{L}(\{e_k\})$
2. S_n — элемент наилучшего приближения к x из $\mathcal{L}(\{e_k\})$, причём равенство достигается только при $y = S_n$
3. $\|S_n\| \leq \|x\|$

Следствие 4.1 (Неравенство Бесселя): Сумма квадратов норм Ряда Фурье x не больше $\|x\|^2$.

Теорема 5 (Рисс, Фишер):

1. Ряд Фурье вектора x сходится
2. Сумма ряда Фурье — ортогональная проекция x на $\mathcal{L}(\{e_k\})$
3. Сходится именно к $x \iff$ выполняется *уравнение замкнутости* (то есть в нер-ве Бесселя достигается равенство).

Определение 3.2.2: Базис: любой вектор раскладывается по этой системе

Определение 3.2.3: Полная система: не существует отличного от нуля вектора, ортогонального всем вектора (то есть нельзя добавить ещё однин вектор, чтобы осталвалась ОС)

Определение 3.2.4: Замкнутая система: для любого вектора выполнено *уравнение замкнутости*

Теорема 6 (Характеристика базиса): Утверждения эквивалентны для ОС $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$:

1. $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — базис
2. $\forall x, y$ выполнено обобщённое уравнение замкнутости:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} c_k(x)\overline{c_k(y)}\|e_k\|^2$$

3. $\{e_k\}$ — полная система
4. $\{e_k\}$ — замкнутая система
5. $\mathcal{L}(\{e_k\})$ плотна в $\mathcal{H}$

Теорема 7 (Грамм, Шмидт): систему можно ортонормировать, не изменяя линейную оболочку никакого префикса, притом единственным с точностью до коэфициентов ± 1 образом

Пример (Ортогональные базисы многочленов) : Весовая функция → вводим скалярное произведение

Теорема 8 (Существование элемента наилучшего приближения):