Конспект к экзамену по матану

Владимир Латыпов
donrumata03@gmail.com

Содержание

1 Теория меры

2 Многообразия

2.1 Разбиение единицы

Lemma 2.1.1 Открытое множество в $\mathbb{R}^n$ представимо как объединение шаров с рациональными ценрами и радиусам, в нём содержащихся.

Theorem 2.1.2 *(theorem 2: Теорема Линдлёфа)* Из открытого покрытия множества в $\mathbb{R}^n$ можно выделить счётное подпокрытие.

Proof

- Не важно, открыто ли покрытие в $\mathbb{R}^n$ или в M, т.ч. считаем, что множество представлено в виде объединения.
- Рассмотрим все шары, содержащиеся хотя бы в одном элементе покрытия $\longrightarrow$ достаточно их объединить (занумеруем).

$\square$

Theorem 2.1.3 *(theorem 3: Теорема Лебега (о компакте))* Для открытого покрытия метрического компакта существует ε, что любое пересекающееся с K множество диаметра $\leq \varepsilon$ содержится в каком-то элементе покрытия.

Proof От противного — построим последовательность для $\varepsilon = \frac{1}{n}$. По секвенциальной компактности выделим сходящуюся подпоследовательность. Её предел — в элементе покрытия. Тогда множества с какого-то момента содержатся в нём. Противоречие. $\square$

Theorem 2.1.4 *(theorem 4: Разбиение единицы)* Для открытого покрытия компакта в $\mathbb{R}^n$ существует разбиение единицы, отвечающее ему, т.е.

- конечный набор финитных функций $C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n \to [0,1])$, тч:
- supp каждой $\in$ какому-то элементу покрытия.
- Сумма набора ≤ 1 всегда
- На компакте в точности равна 1

Proof Фнукция $\tau(x) = e^{-\frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{(t-1)^2}}$ (на $[0,1]$, иначе $- 0$). Периодизируем, поделим на период, получим θ. Тогда $\widetilde{\theta}$ (периодизированная θ) $\equiv 1$. Через ε из леммы Лебега возьмём малое h и получим для точки m из $\mathbb{Z}^n$ перемноженную и промасштабированную штуку $\theta_{m(x)} = \prod_{i=1}^{n} \theta\left(\frac{x_i}{h} - m_i\right)$. Тогда возьмём в набор те, которые содержатся в каком-либо элементе покрытия. $\square$

Theorem 2.1.5 *(theorem 5: Равносильность существования локального и глобального гладкого продолжения)* Если для каждой точки множества существует окрестность и r —гладкое продолжение отображения, то существует таковое и на объединении окрестностей.

2.2 Гладкие многообразия

Definition 2.2.6 Регулярное оторбражение на произвольном множестве — существует регулярное продолжение на открытое.

Definition 2.2.7 $\mathbb{M}_{kn}^{(r)}$ (k-мерное многобразие в $\mathbb{R}^n$ класса r) — множество в $\mathbb{R}^n$, тч для каждой точки существует локальная параметризация — окрестность (открытое в M множество, содержащее это точку) и регулярный класса r гомеоморфизм $\varphi : \Pi_k \to U$, где Π_k — стандартный куб или полукуб, причём $\varphi(\mathbb{0}) = x$. Точки, где это куб — внутренние, где полукуб — краевые.

∂M — край — множество краевых точек. Не завит от параметризации (следствие из теоремы о регулярности перехода).

Definition 2.2.8 Нуль-мерное многообразие — *дискретное* множество точек, то есть никакая — не предельная.

Example 2.2.9 Многообразия:
- Открытое множество в $\mathbb{R}^n$ — многообразие без края класса ∞ (тождественная паараметризация)
- Путь (простой, незамкнутый, регулярный, на $[0, 1]$).
- Образ открытого в $\mathbb{R}^k$ множества при регулярном гомеоморфизме. Частный случай — график отображения, где $\varphi : (u, f(u))$.
- Поверхность вращения в $\mathbb{R}^3$ (параметризуем, решая уравнения)
- Сфера (локальная параметризация — через сферические кoодринаты, иначе — вращаем)
- Цилиндрическая поверхность — то же самое, но переходим к сферическим координатам только по первым $l - 1$ переменным.
- Тор — параметризуем через угол на центральной окружности и на подвешенной к ней

Theorem 2.2.10 *(theorem 10: Задание многообразия через систему уравнений)* Подмножество открытого, где r —гладкое регулярное отображение $\Phi : G \subset \mathbb{R}^{k+m} \to \mathbb{R}^m$ равно нулю, — $\mathbb{M}_{k,k+m}^{(r)}$.

Proof НУО, нелулевой минор — по последним координатам (y). По Т. о неявном отображении возьмём куб с ребром $a \longrightarrow$ шар с радусом b и неявное отображение: последние координаты по первым. Тогда параметризация:

$$\varphi(u) = (x_0 + au, f(x_0 + au))$$

$\square$

Definition 2.2.11 Переход от параметризации φ к ψ — $L : \binom{W_1 \to W_2}{\psi^{-1} \circ \varphi}$, то есть по φ-параметру точки из пересечения стандартных окрестностей даёт ψ-параметр.

Theorem 2.2.12 *(theorem 12: Регулярность перехода)* $L \in C^{(r)}$ и регулярно.

3 Ряды Фурье и приближение функций

3.1 Пространства Лебега

Definition 3.1.13 Програнство Лебега $L_{p(E,\mu)}, p \in [1, \infty]$ — множество функций п. в.$_\mu E \to \overline{\mathbb{R}}$ или $\overline{\mathbb{C}}$, для которых

$$\begin{cases} \| f\|_p = \left(\int_E |f|^p d\mu\right)^{1/p} < \infty & p \in [1, \infty) \\ \| f\|_\infty = \underset{E}{\overset{\text{п. в.}_\mu}{\operatorname{ess\,sup}}} |f| < \infty & p = \infty \end{cases}$$

Definition 3.1.14 Пространство L_p (обозначается без указания множества и меры) — множество 2π-периодических функций п. в. $\mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ или $\overline{\mathbb{C}}$, для которых $\|f\| = \|f\|_{L_{p([-\pi,\pi],\mu_1)}} < \infty$.

Theorem 3.1.15 Полнота

3.2 Гильбертовы пространства

Definition 3.2.16 Гильбертово пространство — *полное* линейное пространство со скалярным произведением и нормой, им порождённой.

Example 3.2.17 Пространство $L_2(E, \mu)$ со скалярным произведением:

$$\langle f, g\rangle = \int_E f\overline{g}\, \mathrm{d}\mu$$

(суммируемость $f\overline{g}$ — за счёт неравенства Гёлдера для $p = q = 2$)

Полнота доказана в Теореме 3.1.15

Частные случаи:
- ℓ_2^m — Евклидово пространство
- ℓ_2 — последовательности
- $\ell_2(\mathbb{Z})$ — двусторонние последовательности

Lemma 3.2.18 Сходящийся в $\mathcal{H}$ ряд можно скалярно умножать на вектор почленно

Theorem 3.2.19 *(theorem 19: Критерий сходимости ортогонального ряда)* Сходимость ряда в $\mathcal{H}$ равносильна сходимости $\sum\|x\|^2$, причём

$$\|\sum_{i=1}^{\infty} x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty}\|x\|^2$$

Corollary 3.2.20 Перестановка сходящейся в $\mathcal{H}$ последовательности тоже сходится и имеет тот же предел

Theorem 3.2.21 *(theorem 21: Вычисление коэфициентов ортогонального ряда)* Если $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ОС, а $\sum_{i=1}^{\infty} c_k e_k \to x$, то коэфициенты однозначно вычислаются по формуле

$$c_k = \frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|^2}$$

Theorem 3.2.22 *(theorem 22: Свойства частичных сумм Фурье)*
1. S_n — ортогональная проекция x на $\mathcal{L}(\{e_k\})$
2. S_n — элемент наилучшего приближения к x из $\mathcal{L}(\{e_k\})$, причём равенство достигается только при $y = S_n$
3. $\|S_n\| \leq \|x\|$

Corollary 3.2.23 *(corollary 23: Неравенство Бесселя)* Сумма квадратов норм Ряда Фурье x не больше $\|x\|^2$.

Theorem 3.2.24 *(theorem 24: Рисс, Фишер)*
1. Ряд Фурье вектора x сходится
2. Сумма ряда Фурье — ортогональная проекция x на $\mathcal{L}(\{e_k\})$
3. Сходится именно к $x \iff$ выполняется *уравнение замкнутости* (то есть в нер-ве Бесселя достигается равенство).

Definition 3.2.25 Базис: любой вектор раскладывается по этой системе

Definition 3.2.26 Полная система: не существует отличного от нуля вектора, ортогонального всем вектора (то есть нельзя добавить ещё однин вектор, чтобы осталвалась ОС)

Definition 3.2.27 Замкнутая система: для любого вектора выполнено *уравнение замкнутости*

Theorem 3.2.28 *(theorem 28: Характеристика базиса)* Утверждения эквивалентны для ОС $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$:
1. $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — базис
2. $\forall x, y$ выполнено обобщённое уравнение замкнутости:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} c_{k(x)} \overline{c_{k(y)}} \, \|e_k\|^2$$

3. $\{e_k\}$ — полная система
4. $\{e_k\}$ — замкнутая система
5. $\mathcal{L}(\{e_k\})$ плотна в $\mathcal{H}$

Theorem 3.2.29 *(theorem 29: Грамм, Шмидт)* систему можно ортонормировать, не изменяя линейную оболочку никакого префикса, притом единственным с точностью до коэфициентов ± 1 образом

Example 3.2.30 *(example 30: Ортогональные базисы многочленов)* Весовая функция → вводим скалярное произведение

Theorem 3.2.31 *(theorem 31: Существование элемента наилучшего приближения)*