

Типовик по линейной алгебре
«Дизъюнктные подпространства»

Латыпов Владимир Витальевич,
ИТМО КТ М3138, **вариант 12**

24 декабря 2021 г.

1. Формулировка условия

Утверждение 1. Условие таково:

1. Найдите общее решение с.л.о.у. — линейное подпространство L .
2. Для линейного подпространства L постройте какое-либо прямое дополнение L' , дополнив ф.с.р. с.л.о.у. до базиса всего пространства векторами канонического базиса.
3. Найдите проекции x_1 и x_2 вектора x на подпространство L параллельно L' , и на подпространство L' параллельно L , соответственно.
4. Убедитесь, что $x_1 + x_2 = x$. Выполните проверку, подставив x_1 в исходную СЛОУ.

В п.3 и п.4 можно использовать матричный калькулятор для решения с.л.н.у. и проверки, предварительно выписав все системы, для которых он будет использован.

Задано L через СЛОУ с матрицей коэффициентов:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 12 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & -10 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

А также

$$x = (2 \quad -2 \quad -5 \quad 13 \quad 1)^T \quad (2)$$

2. Нахождение L

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 12 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & -10 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 12 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 3 & -34 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 3 & -34 & 3 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 12 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-3}{8} & \frac{17}{4} & \frac{-3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

В конце концов, за параметры берём

$$\begin{cases} t_1 = x_3 \\ t_2 = x_4 \\ t_3 = x_5 \end{cases} \quad (4)$$

И тогда

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} \frac{-1}{8} \\ \frac{3}{8} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{-17}{4} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} \frac{-1}{8} \\ \frac{3}{8} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \equiv t_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -17 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \quad (5)$$

3. Нахождение прямого дополнения L' к L

Можно дописать к этим векторам все векторы базиса и найти ранг, попутно определяя базис. Но можно заметить, что

$$\text{rg} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 8 & 0 & 0 \\ 3 & -17 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 5 \quad (6)$$

И тогда:

$$L' = \text{span}(b_1, b_2) \quad (7)$$

$$B_1 = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) \quad (8)$$

$$B_2 = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0) \quad (9)$$

4. Разложить вектор x по L и L'

То есть

$$x = y_1 A_1 + y_2 A_2 + y_3 A_3 + z_1 B_1 + z_2 B_2 \quad (10)$$

И тогда

$$x_1 = y_1 A_1 + y_2 A_2 + y_3 A_3 \quad (11)$$

$$x_2 = z_1 B_1 + z_2 B_2 \quad (12)$$

Ну, давайте решим систему для разложения:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -17 & 3 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -5 \\ 13 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-5}{8} \\ \frac{13}{4} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{-33}{4} \\ \frac{219}{4} \end{pmatrix} \quad (14)$$

Тогда:

$$x_1 = y_1 A_1 + y_2 A_2 + y_3 A_3 = \begin{pmatrix} \frac{41}{4} \\ -\frac{227}{4} \\ -5 \\ 13 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$x_2 = z_1 B_1 + z_2 B_2 = \begin{pmatrix} \frac{-33}{4} \\ \frac{219}{4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

Проверяем

$$x_1 + x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -5 \\ 13 \\ 1 \end{pmatrix} = x \quad (17)$$

Подставив x_1 в систему, заметим, что он является решением, а x_2 — нет. Проверка успешна.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 12 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & -10 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{41}{4} \\ \frac{-227}{4} \\ -5 \\ 13 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbb{0} \quad (18)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 12 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & -10 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-33}{4} \\ \frac{219}{4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 156 \\ -126 \\ 30 \end{pmatrix} \neq \mathbb{0} \quad (19)$$