

Типовик по линейной алгебре
«Канонический вид матрицы. Часть 5»

Латыпов Владимир Витальевич,
ИТМО КТ М3138, **вариант 10**

25 марта 2022 г.

1. Формулировка условия

Утверждение 1. Условие можно найти здесь: <https://drive.google.com/file/d/1P3jq8GpC8nHcOVT-v3L68j10DZkMxxWw/view?usp=sharing>

Data section:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -10 & 3 & -5 \\ -4 & 12 & -6 & 4 \\ 4 & 20 & -4 & 10 \\ 12 & 0 & 6 & 4 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$G = \begin{pmatrix} -22 & 20 & 4 & -36 \\ 22 & 4 & 10 & 12 \\ 5 & -19 & -9 & 24 \\ 27 & -13 & 3 & 34 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$P = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & -3 & -2 \\ -3 & 5 & 2 & 2 \\ -6 & 11 & 6 & 4 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$Q = \begin{pmatrix} -26 & -39 & 65 & 13 \\ -18 & -27 & 45 & 9 \\ -16 & -24 & 40 & 8 \\ -26 & -39 & 65 & 13 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$V = \begin{pmatrix} -5 & 8 & 4 & -10 \\ 5 & -7 & 8 & -5 \\ 0 & -4 & -7 & 4 \\ 2 & 8 & 4 & -17 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 10 & -1 & 10 & 8 \\ -2 & 2 & -1 & -4 \\ 4 & -4 & 10 & 11 \end{pmatrix} \quad (6)$$

2. Проверяем формулу Фробениуса на практике...

Проверим, например, что $\text{rg } B^{m-1} = d_m$. Действительно,

$$\text{rg} \left(\begin{pmatrix} -4 & 6 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & -3 & -2 \\ -3 & 5 & 2 & 2 \\ -6 & 11 & 6 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^2 = 1 \quad (7)$$

3. Нахождение функции от матрицы.

Как известно, можно найти функцию, разложенную в степенной ряд, от Жордановой клетки так:

$$\begin{pmatrix} f(x)|_{x=t\lambda} & \frac{t}{1!} f'(x)|_{x=t\lambda} & \frac{t^2}{2!} f''(x)|_{x=t\lambda} & \cdots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k-1)}(x)|_{x=t\lambda} \\ 0 & f(x)|_{x=t\lambda} & \frac{t}{1!} f'(x)|_{x=t\lambda} & \cdots & \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} f^{(k-2)}(x)|_{x=t\lambda} \\ 0 & 0 & f(x)|_{x=t\lambda} & \cdots & \frac{t^{k-3}}{(k-3)!} f^{(k-3)}(x)|_{x=t\lambda} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(x)|_{x=t\lambda} \end{pmatrix} \quad (8)$$

А потом посчитаем для всей блочной матрицы J , ведь каждый блок возводится независимо.

Найдём, например, $\cos(Pt)$. Для начала:

$$\cos(-t) = (\cos(-t)) \quad (9)$$

Далее — $\cos'(x) = -\sin(x)$, $\cos''(x) = -\cos(x)$, $\cos'''(x) = \sin(x)$

$$\cos \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} \cos -t & -t \sin -t & -\frac{t^2}{2} \cos -t \\ 0 & \cos -t & -t \sin -t \\ 0 & 0 & \cos -t \end{pmatrix} \quad (10)$$

Осталось выписать формулу.

$$\begin{aligned}
\cos(Pt) &= T \cos(Jt) T^{-1} = \\
&T \begin{pmatrix} \cos(-t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos -t & -t \sin -t & -\frac{t^2}{2} \cos -t \\ 0 & 0 & \cos -t & -t \sin -t \\ 0 & 0 & 0 & \cos -t \end{pmatrix} T^{-1} = \\
&\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos -t & -t \sin -t & -\frac{t^2}{2} \cos -t \\ 0 & 0 & \cos -t & -t \sin -t \\ 0 & 0 & 0 & \cos -t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \\
&\hspace{15em} (11)
\end{aligned}$$