

Типовик по линейной алгебре
«Канонический вид матрицы. Часть 2»

Латыпов Владимир Витальевич,
ИТМО КТ М3138, **вариант 10**

25 марта 2022 г.

1. Формулировка условия

Утверждение 1. Условие можно найти здесь: <https://drive.google.com/file/d/19M3w84tZ1nYPQF2CHLARb3ID0w2Tka6w/view?usp=sharing>

Data section:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -10 & 3 & -5 \\ -4 & 12 & -6 & 4 \\ 4 & 20 & -4 & 10 \\ 12 & 0 & 6 & 4 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$G = \begin{pmatrix} -22 & 20 & 4 & -36 \\ 22 & 4 & 10 & 12 \\ 5 & -19 & -9 & 24 \\ 27 & -13 & 3 & 34 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$P = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & -3 & -2 \\ -3 & 5 & 2 & 2 \\ -6 & 11 & 6 & 4 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$Q = \begin{pmatrix} -26 & -39 & 65 & 13 \\ -18 & -27 & 45 & 9 \\ -16 & -24 & 40 & 8 \\ -26 & -39 & 65 & 13 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$V = \begin{pmatrix} -5 & 8 & 4 & -10 \\ 5 & -7 & 8 & -5 \\ 0 & -4 & -7 & 4 \\ 2 & 8 & 4 & -17 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 10 & -1 & 10 & 8 \\ -2 & 2 & -1 & -4 \\ 4 & -4 & 10 & 11 \end{pmatrix} \quad (6)$$

2.2. Матрица \mathfrak{G}

$$\begin{aligned}
 P_{-6} &= T_G \cdot \mathcal{P}_{-6_v} \cdot T_G^{-1} = \\
 &T_G \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot T_G^{-1} = \\
 &\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad (10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{-2} &= T_G \cdot \mathcal{P}_{-2_v} \cdot T_G^{-1} = \\
 &T_G \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot T_G^{-1} = \\
 &\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad (11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_5 &= T_G \cdot \mathcal{P}_{5_v} \cdot T_G^{-1} = \\
 &T_G \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot T_G^{-1} = \\
 &\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (12)
 \end{aligned}$$

$$P_{10} = T_G \cdot \mathcal{P}_{10_v} \cdot T_G^{-1} =$$

$$T_G \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot T_G^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (13)$$

Кто бы мог подумать, но

$$-6P_{-6} + -2P_{-2} + 5P_5 + 10P_{10} = G \quad (14)$$

Не верите? Проверьте, вот ссылка!

[https://matrixcalc.org/#%7B%7B2,-2,-1,3%7D,%7B-2,2,1,-3%7D,%7B0,0,0,0%7D,%7B-2,2,1,-3%7D%7D*\(-6\)+%7B%7B0,1,1,-1%7D,%7B0,-3,-3,3%7D,%7B0,2,2,-2%7D,%7B0,-2,-2,2%7D%7D*\(-2\)+%7B%7B0,0,0,0%7D,%7B2,2,2,0%7D,%7B-1,-1,-1,0%7D,%7B1,1,1,0%7D%7D*5+%7B%7B-1,1,0,-2%7D,%7B0,0,0,0%7D,%7B1,-1,0,2%7D,%7B1,-1,0,2%7D%7D*10](https://matrixcalc.org/#%7B%7B2,-2,-1,3%7D,%7B-2,2,1,-3%7D,%7B0,0,0,0%7D,%7B-2,2,1,-3%7D%7D*(-6)+%7B%7B0,1,1,-1%7D,%7B0,-3,-3,3%7D,%7B0,2,2,-2%7D,%7B0,-2,-2,2%7D%7D*(-2)+%7B%7B0,0,0,0%7D,%7B2,2,2,0%7D,%7B-1,-1,-1,0%7D,%7B1,1,1,0%7D%7D*5+%7B%7B-1,1,0,-2%7D,%7B0,0,0,0%7D,%7B1,-1,0,2%7D,%7B1,-1,0,2%7D%7D*10)

3. Вычисление функции от диагонализированной матрицы

Сделаем это для матриц F и G двумя способами:

$$f(tM) = \sum f(t\lambda)P_\lambda = T f(\mathcal{L}) \quad (15)$$

3.1. Экспонента

$$e^{tF} = T_F \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{4t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{4t} \end{pmatrix} T_F^{-1} = \begin{pmatrix} -e^4 + 2 * e^2 & -5 * e^4 + 5 * e^2 & \frac{3 * e^4 - 3 * e^2}{2} & 2 * e^4 - 2 * e^2 \\ -2 * e^4 + 2 * e^2 & 5 * e^4 - 4 * e^2 & -3 * e^4 + 3 * e^2 & 2 * e^4 - 2 * e^2 \\ 2 * e^4 - 2 * e^2 & 10 * e^4 - 10 * e^2 & -3 * e^4 + 4 * e^2 & 5 * e^4 - 5 * e^2 \\ 6 * e^4 - 6 * e^2 & 0 & 3 * e^4 - 3 * e^2 & 2 * e^4 - 2 * e^2 \end{pmatrix} \quad (16)$$

Посчитаем также через проекторы.

$$\begin{aligned}
e^{tF} &= e^{2t}P_2 + e^{4t}P_4 = \\
&= e^2 \begin{pmatrix} 2 & 5 & \frac{-3}{2} & \frac{5}{2} \\ 2 & -4 & 3 & -2 \\ -2 & -10 & 4 & -5 \\ -6 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} + e^4 \begin{pmatrix} -1 & -5 & \frac{3}{2} & \frac{-5}{2} \\ -2 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 10 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} -e^4 + 2 * e^2 & -5 * e^4 + 5 * e^2 & \frac{3 * e^4 - 3 * e^2}{2} & \frac{-5 * e^4 + 5 * e^2}{2} \\ -2 * e^4 + 2 * e^2 & 5 * e^4 - 4 * e^2 & -3 * e^4 + 3 * e^2 & 2 * e^4 - 2 * e^2 \\ 2 * e^4 - 2 * e^2 & 10 * e^4 - 10 * e^2 & -3 * e^4 + 4 * e^2 & 5 * e^4 - 5 * e^2 \\ 6 * e^4 - 6 * e^2 & 0 & 3 * e^4 - 3 * e^2 & e^4 \end{pmatrix} \quad (17)
\end{aligned}$$

Проверили, сошлось.

То же самое для G .

$$\begin{aligned}
e^{tG} &= T_G \begin{pmatrix} e^{-6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{10} \end{pmatrix} T_G^{-1} = \\
&= \begin{pmatrix} \frac{-e^{16}+2}{e^6} & \frac{e^{16}+e^4-2}{e^6} & \frac{e^4-1}{e^6} & \frac{-2 * e^{16}-e^4+3}{e^6} \\ \frac{2 * e^{11}-2}{e^6} & \frac{2 * e^{11}-3 * e^4+2}{e^6} & \frac{2 * e^{11}-3 * e^4+1}{e^6} & \frac{3 * e^4-3}{e^6} \\ e^{10} - e^5 & \frac{-e^{12}-e^7+2}{e^2} & \frac{-e^7+2}{e^2} & \frac{2 * e^{12}-2}{e^2} \\ \frac{e^{16}+e^{11}-2}{e^6} & \frac{-e^{16}+e^{11}-2 * e^4+2}{e^6} & \frac{e^{11}-2 * e^4+1}{e^6} & \frac{2 * e^{16}+2 * e^4-3}{e^6} \end{pmatrix} \quad (18)
\end{aligned}$$

Посчитаем также через проекторы.

$$\begin{aligned}
e^{tG} &= e^{-6t}P_{-6} + e^{-2t}P_{-2} + e^{5t}P_5 + e^{10t}P_{10} = \\
&e^{-6t} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} + e^{-2t} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} + \\
&e^{5t} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + e^{10t} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \\
&\begin{pmatrix} \frac{-e^{16}+2}{e^6} & \frac{e^{16}+e^4-2}{e^6} & \frac{e^4-1}{e^6} & \frac{-2*e^{16}-e^4+3}{e^6} \\ \frac{2*e^{11}-2}{e^6} & \frac{2*e^{11}-3*e^4+2}{e^6} & \frac{2*e^{11}-3*e^4+1}{e^6} & \frac{3*e^4-3}{e^6} \\ e^{10}-e^5 & \frac{-e^{12}-e^7+2}{e^2} & \frac{-e^7+2}{e^2} & \frac{2*e^{12}-2}{e^2} \\ \frac{e^{16}+e^{11}-2}{e^6} & \frac{-e^{16}+e^{11}-2*e^4+2}{e^6} & \frac{e^{11}-2*e^4+1}{e^6} & \frac{2*e^{16}+2*e^4-3}{e^6} \end{pmatrix} \quad (19)
\end{aligned}$$

Проверим, что результаты сошлись: [https://matrixcalc.org/#%7B%7B2,-2,-1,3%7D,%7B-2,2,1,-3%7D,%7B0,0,0,0%7D,%7B-2,2,1,-3%7D%7D*e%5E\(-6*t\)+%7B%7B0,1,1,-1%7D,%7B0,-3,-3,3%7D,%7B0,2,2,-2%7D,%7B0,-2,-2,2%7D%7D*e%5E\(-2*t\)+%7B%7B0,0,0,0%7D,%7B2,2,2,0%7D,%7B-1,-1,-1,0%7D,%7B1,1,1,0%7D%7D*e%5E\(5*t\)+%7B%7B-1,1,0,-2%7D,%7B0,0,0,0%7D,%7B1,-1,0,2%7D,%7B1,-1,0,2%7D%7D*e%5E\(10*t\)=%7B%7B\(-e%5E\(16*t\)+2\)/e%5E\(6*t\),\(e%5E\(16*t\)+e%5E\(4*t\)-2\)/e%5E\(6*t\),\(e%5E\(4*t\)-1\)/e%5E\(6*t\),\(-2*e%5E\(16*t\)-e%5E\(4*t\)+3\)/e%5E\(6*t\)%7D,%7B\(2*e%5E\(11*t\)-2\)/e%5E\(6*t\),\(2*e%5E\(11*t\)-3*e%5E\(4*t\)+2\)/e%5E\(6*t\),\(2*e%5E\(11*t\)-3*e%5E\(4*t\)+1\)/e%5E\(6*t\),\(3*e%5E\(4*t\)-3\)/e%5E\(6*t\)%7D,%7Be%5E\(10*t\)-e%5E\(5*t\),\(-e%5E\(12*t\)-e%5E\(7*t\)+2\)/e%5E\(2*t\),\(-e%5E\(7*t\)+2\)/e%5E\(2*t\),\(2*e%5E\(12*t\)-2\)/e%5E\(2*t\)%7D,%7B\(e%5E\(16*t\)+e%5E\(11*t\)-2\)/e%5E\(6*t\),\(-e%5E\(16*t\)+e%5E\(11*t\)-2*e%5E\(4*t\)+2\)/e%5E\(6*t\),\(e%5E\(11*t\)-2*e%5E\(4*t\)+1\)/e%5E\(6*t\),\(2*e%5E\(16*t\)+2*e%5E\(4*t\)-3\)/e%5E\(6*t\)%7D%7D](https://matrixcalc.org/#%7B%7B2,-2,-1,3%7D,%7B-2,2,1,-3%7D,%7B0,0,0,0%7D,%7B-2,2,1,-3%7D%7D*e%5E(-6*t)+%7B%7B0,1,1,-1%7D,%7B0,-3,-3,3%7D,%7B0,2,2,-2%7D,%7B0,-2,-2,2%7D%7D*e%5E(-2*t)+%7B%7B0,0,0,0%7D,%7B2,2,2,0%7D,%7B-1,-1,-1,0%7D,%7B1,1,1,0%7D%7D*e%5E(5*t)+%7B%7B-1,1,0,-2%7D,%7B0,0,0,0%7D,%7B1,-1,0,2%7D,%7B1,-1,0,2%7D%7D*e%5E(10*t)=%7B%7B(-e%5E(16*t)+2)/e%5E(6*t),(e%5E(16*t)+e%5E(4*t)-2)/e%5E(6*t),(e%5E(4*t)-1)/e%5E(6*t),(-2*e%5E(16*t)-e%5E(4*t)+3)/e%5E(6*t)%7D,%7B(2*e%5E(11*t)-2)/e%5E(6*t),(2*e%5E(11*t)-3*e%5E(4*t)+2)/e%5E(6*t),(2*e%5E(11*t)-3*e%5E(4*t)+1)/e%5E(6*t),(3*e%5E(4*t)-3)/e%5E(6*t)%7D,%7Be%5E(10*t)-e%5E(5*t),(-e%5E(12*t)-e%5E(7*t)+2)/e%5E(2*t),(-e%5E(7*t)+2)/e%5E(2*t),(2*e%5E(12*t)-2)/e%5E(2*t)%7D,%7B(e%5E(16*t)+e%5E(11*t)-2)/e%5E(6*t),(-e%5E(16*t)+e%5E(11*t)-2*e%5E(4*t)+2)/e%5E(6*t),(e%5E(11*t)-2*e%5E(4*t)+1)/e%5E(6*t),(2*e%5E(16*t)+2*e%5E(4*t)-3)/e%5E(6*t)%7D%7D)

3.2. Обращение

Очевидно, обе матрицы невырождены, так как в спектре нет нулей, обратим мы, конечно, F — меньше возни.

$$F^{-1} = T_F \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} T_F^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{4} & \frac{-3}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{-3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{-5}{2} & \frac{5}{4} & \frac{-5}{4} \\ \frac{-3}{2} & 0 & \frac{4}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad (20)$$

А вот — с помощью проекторов:

$$F^{-1} = \frac{1}{2}P_2 + \frac{1}{4}P_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 5 & \frac{-3}{2} & \frac{5}{2} \\ 2 & -4 & 3 & -2 \\ -2 & -10 & 4 & -5 \\ -6 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -5 & \frac{3}{2} & \frac{-5}{2} \\ -2 & 5 & -3 & 2 \\ 6 & 0 & 3 & 12 \\ 10 & -3 & 5 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{4} & \frac{-3}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{-3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{-5}{2} & \frac{5}{4} & \frac{-5}{4} \\ \frac{-3}{2} & 0 & \frac{4}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad (21)$$

Калькулятор говорит нам, что

$$FF^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{4} & \frac{-3}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{-3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{-5}{2} & \frac{5}{4} & \frac{-5}{4} \\ \frac{-3}{2} & 0 & \frac{4}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -10 & 3 & -5 \\ -4 & 12 & -6 & 4 \\ 4 & 20 & -4 & 10 \\ 12 & 0 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} * 0 + \frac{5}{4} * (-4) + \frac{-3}{8} * 4 + \frac{5}{8} * 12 & \frac{3}{4} * (-10) + \frac{5}{4} * 12 + \frac{-3}{8} * 20 + \frac{5}{8} * 0 & \frac{3}{4} * 3 + \frac{5}{4} * (-6) + \frac{-3}{8} * 4 + \frac{5}{8} * 10 & \frac{3}{4} * (-5) + \frac{5}{4} * 4 + \frac{-3}{8} * 12 + \frac{5}{8} * 4 \\ \frac{1}{2} * 0 + \frac{-3}{4} * (-4) + \frac{3}{4} * 4 + \frac{-1}{2} * 12 & \frac{1}{2} * (-10) + \frac{-3}{4} * 12 + \frac{3}{4} * 20 + \frac{-1}{2} * 0 & \frac{1}{2} * 3 + \frac{-3}{4} * (-6) + \frac{3}{4} * 4 + \frac{-1}{2} * 10 & \frac{1}{2} * (-5) + \frac{-3}{4} * 4 + \frac{3}{4} * 12 + \frac{-1}{2} * 4 \\ \frac{-1}{2} * 0 + \frac{-5}{2} * (-4) + \frac{5}{4} * 4 + \frac{-5}{4} * 12 & \frac{-1}{2} * (-10) + \frac{-5}{2} * 12 + \frac{5}{4} * 20 + \frac{-5}{4} * 0 & \frac{-1}{2} * 3 + \frac{-5}{2} * (-6) + \frac{5}{4} * 4 + \frac{-5}{4} * 10 & \frac{-1}{2} * (-5) + \frac{-5}{2} * 4 + \frac{5}{4} * 12 + \frac{-5}{4} * 4 \\ \frac{-3}{2} * 0 + 0 * (-4) + \frac{-3}{4} * 4 + \frac{1}{4} * 12 & \frac{-3}{2} * (-10) + 0 * 12 + \frac{-3}{4} * 20 + \frac{1}{4} * 0 & \frac{-3}{2} * 3 + 0 * (-6) + \frac{-3}{4} * 4 + \frac{1}{4} * 10 & \frac{-3}{2} * (-5) + 0 * 4 + \frac{-3}{4} * 12 + \frac{1}{4} * 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (22)$$

А значит, ответ получился верным.

4. Построение минимального многочлена

Для каждой матрицы сначала построим минимальные аннуляторы векторов канонического базиса, попутно поддерживая НОК этих мно-

гочленов. Если на каком-то шагу его степень совпала с размерностью пространства, пришло время остановиться, ведь минимальный многочлен всегда делит характеристический.

Имея НОК всех аннуляторов, то есть $\phi(t)$, проверим, что его корни совпадают с корнями $\chi(t)$, причём должно быть $m(\lambda) \leq \alpha(\lambda)$.

4.1. Матрица F

Для начала найдём аннулятор вектора $(1, 0, 0, 0)$.

Рассмотрим F^0x, Fx, F^2x, F^3x

Это будут:

$$v_0, v_1, v_2, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 \\ -24 \\ 24 \\ 72 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -48 \\ -112 \\ 112 \\ 336 \end{pmatrix} \quad (23)$$

Проверим, когда векторы станут зависимыми. Очевидно, что v_0 и v_1 независимы. Проверим, можно ли представить v_3 как $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$? Чтобы ответить конкретно на этот вопрос, проверим ранг. Он оказался равен 2, так что представить можно, то есть решим систему:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -8 \\ 0 & -4 & -24 \\ 0 & 4 & 24 \\ 0 & 12 & 72 \end{array} \right) \quad (24)$$

[https://matrixcalc.org/slu.html#solve-using-Gaussian-elimination\(%7B1,0,-8%7D,%7B0,-4,-24%7D,%7B0,4,24%7D,%7B0,12,72%7D%7D\)](https://matrixcalc.org/slu.html#solve-using-Gaussian-elimination(%7B1,0,-8%7D,%7B0,-4,-24%7D,%7B0,4,24%7D,%7B0,12,72%7D%7D))

Тогда $v_2 = -8v_0 + 6v_1$. Действительно: <https://www.wolframalpha.com/input?i=%7B-8%2C+0%2C+0%2C+0%7D+%2B+6+%7B+0%2C+-4%2C+4%2C+12+%7D>.

Получим аннулятор этого элемента: $t^2 - 6t + 8 = (t - 2)(t - 4)$

Далее, написав скрипт на Python с использованием numpy (для линейной алгебры) и sympy (операции с многочленами в символьном виде, как wolfram alpha, только в python), сделаем то же самое. Оно для каждого базисного вектора матрицы сначала находит интересующий

в линейной зависимости векторы $(A^k e_i)$, потом для каждого префикса проверяет ранг, когда получилось — решает, и поддерживает НОК (LCM) на данный момент.

Запустим на матрице F :

[1 0 0 0] [0 -4 4 12] [-8 -24 24 72]

Processed vector №1. Rank: 2

Got this coefficients: [1, -6, 8]

This polynom is: $\text{Poly}(t^2 - 6t + 8, t, \text{domain} = \mathbb{Z})$

Current LCM is: $\text{Poly}(t^2 - 6t + 8, t, \text{domain} = \mathbb{Z})$

Its degree is 2...

[0 1 0 0] [-10 12 20 0] [-60 64 120 0]

Processed vector №2. Rank: 2

Got this coefficients: [1, -6, 8]

This polynom is: $\text{Poly}(t^2 - 6t + 8, t, \text{domain} = \mathbb{Z})$

Current LCM is: $\text{Poly}(t^2 - 6t + 8, t, \text{domain} = \mathbb{Z})$

Its degree is 2...

[0 0 1 0] [3 -6 -4 6] [18 -36 -32 36]

Processed vector №3. Rank: 2

Got this coefficients: [1, -6, 8]

This polynom is: $\text{Poly}(t^2 - 6t + 8, t, \text{domain} = \mathbb{Z})$

Current LCM is: $\text{Poly}(t^2 - 6t + 8, t, \text{domain} = \mathbb{Z})$

Its degree is 2...

[0 0 0 1] [-5 4 10 4] [-30 24 60 16]

Processed vector №4. Rank: 2

Got this coefficients: [1, -6, 8]

This polynom is: $\text{Poly}(t^2 - 6t + 8, t, \text{domain} = \mathbb{Z})$

Current LCM is: $\text{Poly}(t^2 - 6t + 8, t, \text{domain} = \mathbb{Z})$

Its degree is 2...

$$(1, [(\text{Poly}(t - 4, t, \text{domain} = \mathbb{Z}), 1), (\text{Poly}(t - 2, t, \text{domain} = \mathbb{Z}), 1)]) \quad (25)$$

То есть получим $\varphi(t) = (t - 2)(t - 4)$. Корни сошлись, замечательно. А также $m(\lambda) \leq \alpha(\lambda)$.

4.2. Матрица G

[1 0 0 0] [-22 22 5 27] [-28 -22 75 53] [-1432 682 875 1557]

Processed vector №1. Rank: 3

Got this coefficients: [1, -9, -40, 300]

This polynom is: $\text{Poly}(t^3 - 9t^2 - 40t + 300, t, \text{domain} = \mathbb{Z})$

Current LCM is: $\text{Poly}(t^3 - 9t^2 - 40t + 300, t, \text{domain} = \mathbb{Z})$

Its degree is 3...

[0 1 0 0] [20 4 -19 -13] [32 110 -117 -11] [1424 -158 -1141 -1291] [7424 3794 -10593 -6815]

Processed vector №2. Rank: 4

Got this coefficients: [1, -7, -58, 220, 600]

This polynom is: $\text{Poly}(t^4 - 7t^3 - 58t^2 + 220t + 600, t, \text{domain} = \mathbb{Z})$

Current LCM is: $\text{Poly}(t^4 - 7t^3 - 58t^2 + 220t + 600, t, \text{domain} = \mathbb{Z})$

Its degree is 4 \Rightarrow stop!

$$\left(1, \left[\begin{array}{l} (\text{Poly}(t - 10, t, \text{domain} = \mathbb{Z}), 1), \\ (\text{Poly}(t - 5, t, \text{domain} = \mathbb{Z}), 1), \\ (\text{Poly}(t + 2, t, \text{domain} = \mathbb{Z}), 1), \\ (\text{Poly}(t + 6, t, \text{domain} = \mathbb{Z}), 1) \end{array} \right] \right) \quad (26)$$

То есть $\varphi(t) = (t + 6)(t + 2)(t - 5)(t - 10)$, всё сходится.

4.3. Матрица P

[1 0 0 0] [-4 3 -3 -6] [7 -9 9 15] [-10 18 -18 -27]

Processed vector №1. Rank: 3

Got this coefficients: [1, 3, 3, 1]

This polynom is: $\text{Poly}(t^3 + 3t^2 + 3t + 1, t, \text{domain} = \mathbb{Z})$

Current LCM is: $\text{Poly}(t^3 + 3t^2 + 3t + 1, t, \text{domain} = \mathbb{Z})$

Its degree is 3...

[0 1 0 0] [6 -6 5 11] [-12 17 -16 -28] [18 -34 33 51]

Processed vector №2. Rank: 3

Got this coefficients: [1, 3, 3, 1]

This polynom is: $\text{Poly}(t^3 + 3t^2 + 3t + 1, t, \text{domain} = \mathbb{Z})$
 Current LCM is: $\text{Poly}(t^3 + 3t^2 + 3t + 1, t, \text{domain} = \mathbb{Z})$
 Its degree is 3...

[0 0 1 0] [3 -3 2 6] [-6 9 -8 -15] [9 -18 17 27]

Processed vector №3. Rank: 3

Got this coefficients: [1, 3, 3, 1]

This polynom is: $\text{Poly}(t^3 + 3t^2 + 3t + 1, t, \text{domain} = \mathbb{Z})$

Current LCM is: $\text{Poly}(t^3 + 3t^2 + 3t + 1, t, \text{domain} = \mathbb{Z})$

Its degree is 3...

[0 0 0 1] [3 -2 2 4] [-6 7 -7 -12] [9 -15 15 23]

Processed vector №4. Rank: 3

Got this coefficients: [1, 3, 3, 1]

This polynom is: $\text{Poly}(t^3 + 3t^2 + 3t + 1, t, \text{domain} = \mathbb{Z})$

Current LCM is: $\text{Poly}(t^3 + 3t^2 + 3t + 1, t, \text{domain} = \mathbb{Z})$

Its degree is 3...

$$(1, [(\text{Poly}(t + 1, t, \text{domain} = \mathbb{Z}), 3)]) \quad (27)$$

Видим, то у всех аннулятор одинаковый, и $\varphi(t) = (t + 1)^3$

4.4. Матрица Q

[1 0 0 0] [-26 -18 -16 -26] [0 0 0 0]

Processed vector №1. Rank: 2

Got this coefficients: [1, 0, 0]

This polynom is: $\text{Poly}(t^2, t, \text{domain} = \mathbb{Z})$

Current LCM is: $\text{Poly}(t^2, t, \text{domain} = \mathbb{Z})$

Its degree is 2...

[0 1 0 0] [-39 -27 -24 -39] [0 0 0 0]

Processed vector №2. Rank: 2

Got this coefficients: [1, 0, 0]

This polynom is: $\text{Poly}(t^2, t, \text{domain} = \mathbb{Z})$

Current LCM is: $\text{Poly}(t^2, t, \text{domain} = \mathbb{Z})$

Its degree is 2...

[0 0 1 0] [65 45 40 65] [0 0 0 0]

Processed vector №3. Rank: 2

Got this coefficients: [1, 0, 0]

This polynom is: $\text{Poly}(t^2, t, \text{domain} = \mathbb{Z})$

Current LCM is: $\text{Poly}(t^2, t, \text{domain} = \mathbb{Z})$

Its degree is 2...

[0 0 0 1] [13 9 8 13] [0 0 0 0]

Processed vector №4. Rank: 2

Got this coefficients: [1, 0, 0]

This polynom is: $\text{Poly}(t^2, t, \text{domain} = \mathbb{Z})$

Current LCM is: $\text{Poly}(t^2, t, \text{domain} = \mathbb{Z})$

Its degree is 2...

$$(1, [(\text{Poly}(t, t, \text{domain} = \mathbb{Z}), 2)]) \quad (28)$$

То есть $\varphi(t) = t^2$

4.5. Матрица V

[1 0 0 0] [-5 5 0 2] [45 -70 -12 -4] [-793 639 348 -450] [14969 -3404 -6792 12568]

Processed vector №1. Rank: 4

Got this coefficients: [1, 36, 478, 2772, 5929]

This polynom is: $\text{Poly}(t^4 + 36t^3 + 478t^2 + 2772t + 5929, t, \text{domain} = \mathbb{Z})$

Current LCM is: $\text{Poly}(t^4 + 36t^3 + 478t^2 + 2772t + 5929, t, \text{domain} = \mathbb{Z})$

Its degree is 4 \Rightarrow stop!

$$(1, [(\text{Poly}(t + 7, t, \text{domain} = \mathbb{Z}), 2), (\text{Poly}(t + 11, t, \text{domain} = \mathbb{Z}), 2)]) \quad (29)$$

Тут оказалось достаточно всего одного вектора. $\varphi(t) = (t + 7)^2(t + 11)^2$

4.6. Матрица W

[1 0 0 0] [1 10 -2 4] [13 12 4 -12] [69 62 42 -88] [377 344 296 -520]

Processed vector №1. Rank: 4

Got this coefficients: [1, -10, 28, -6, -45]

This polynom is: $\text{Poly}(t^4 - 10t^3 + 28t^2 - 6t - 45, t, \text{domain} = \mathbb{Z})$

Current LCM is: $\text{Poly}(t^4 - 10t^3 + 28t^2 - 6t - 45, t, \text{domain} = \mathbb{Z})$

Its degree is 4 \Rightarrow stop!

$$(1, [(\text{Poly}(t - 5, t, \text{domain} = \mathbb{Z}), 1), (\text{Poly}(t + 1, t, \text{domain} = \mathbb{Z}), 1), (\text{Poly}(t - 3, t, \text{domain} = \mathbb{Z}), 1)]) \quad (30)$$

Опять хватило одного. $\varphi(t) = (t - 5)(t + 1)(t - 3)^2$