Линейная Алгебра. Заметки по практике

Латыпов Владимир

12 июня 2022 г.

Содержание

Что, собственно, интересного мы умеем делать?

1. Тензоры

1.1. p-формы

p-формы. Есть свойства, можно через них раскрывать скобки.

Есть базис пространства антисимметричных p-форм (антисимметричных тензоров) размера $\binom{n}{p}$ из врешних произведений упорядоченных комбинаций ккординатных функций.

Можно вычислить значение внешнего произведения на наборе векторов через определитель матрицы применения каждой функции к каждому вектору.

Также можно найти координаты внешнего произведения в этом базисе, если знаем разложение самих функций по базису пространства линейных форм.

И можно через сумму произведений двух соответствующих определителей вычислить функцию, заданную произведением 1-форм, заданных координатами, на наборе векторов, заданных координатами.

2. Евклидовы пространства

Практика по ЛинАлу 22 апреля (Евклидовы пространства): Ортогонализируем (`https://www.symbolab.com/solver/gram-schmidt-calculator/gram-schmidt%20%5Cleft(1%2C%20%202%2C%20%200%5Cright)%2C%20%20%5Cleft(0%2C%20%203%2C%20%201%5Cright)?or=input`) базисы (Проскуряков 1361)

Ещё лучше — `https://www.dcode.fr/gram-schmidt-orthonormalization` (поддерживает комплексные)

Дополняем векторами канонического, потом ортогонализируем (Проскуряков 1357)

Составить СЛАУ на новые векторы, т.ч. скалярные произведения новых векторов друг с другом будут нулями. Размерность пространства решений как раз будет n - k. Но нужно ещё будет ортогонализовать ФСУ (а будут автоматически ортогональны имеющимся векторам, так как всё пространство ортогонально, ведь линейная комбинация ортогональных — ортогональна). Система СЛНУ будет выглядеть как векторы, записанные в матрицу строками

Ортогональное дополнение к подпространству: как раз то, что мы находили в предыдущем задании, только ФСУ можно не ортогонализовывать. То есть перемножение матрицы системы на X будет давать столбик скалярных произведений X с изначальными векторами, и это должно быть ноль для ортогональности

Задаём L через СЛАУ, то есть через равенство нулям скалярных произведений, то есть получается, что это базис ортогонального дополнения После нахождения базиса ортогонального дополнения преобразуем базис так, чтобы получить нули в разных местах, а потом выражаем координаты решения уравнения через

Разложение в прямую сумму (но теперь ортогональные) «Задача о поиске перпендикуляра». Номер 1370. $x = y + z$, СЛОУ будет утверждать, что $(x, a_j) = (y, a_j) = (\sum c_i a_i, a_j)$. То есть транспонированная матрица Грама * коэффициенты = столбцу из скалярных произведений (x, a_j). Важно не забыть убрать лишние векторы, чтобы было линейно независимо

Расстояние от точки до линейного многообразия. Через отношение определителей матриц Грама. Задание 1374

Ортогональное дополнение (для комплексных работает неправильно): `https://wims.univ-cotedazur.fr/wims/en_tool~linear~vector.en.html`

3. Расстояние до многообразия

Можно найти используя отношения определителей матрицы Грама.

Матрица грамма в новом базисе: $\Gamma' = T^T \Gamma \overline{T}$

Между многообразиями: $dist(x_1 - x_2; L_1 + L_2)$.

$dist^2(x, L) = \frac{g(\ldots, x)}{g(\ldots)}$

4. Страсти по операторам

4.1. Сопряжённый

Матрица $\overline{\Gamma^{-1}}A^*\overline{\Gamma}$, в онб — просто A^* Сопряжение — взаимообратно. Отнсительно компоиции — как транспонирование. Аддитивность, псевдоОднородность. Перестановочность относительно $(.)^{-1}$

Ядро оператора и образ сопряжённого — ортогональные дополнения друг друга, как и образ оператора и ядро сопряжённого.

Собственные числа — сопряжения друг друга. Для не соответствующих — собственные векторы ортогональны, для соответствующих — одинаковые.

Если подпространство инвариантно относительно A, то его ортогональное дополнение — относительно A*.

4.2. Нормальный

$\iff$ Перестановочен с сопряжённым $\iff$ $\langle Ax, Ay\rangle = \langle A^*x, A^*y\rangle$ $\iff$ В некотором базисе матрицы перестановочны $\iff$ ОПС + собственные пространства ортогональны $\iff$ Существует какой-нибудь ОНБ, что матрица имеет понятно какой блочно-диагональный вид

Не перестанет быть нормальным, если вычесть сколько-то id.

У нормального оператора ядро и образ — ортогональные дополнения друг друга (если удалось получить собственные числа из того же поля, то потому, что это собственное подпространство нуля и все остальные).

Причём ядро не меняется при возведении в степень. И $\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Ker}\, A*$.

Лемма о комплексификации (оператора):

— Собственные числа сохранются, собственные пропртанства будут комплексификацией соответствующих — Комлексные собственные числа и простанства будут разбиваться на пары сопряжённых. — Нормальность сохраняется — Сопряжённость — перестановочная с комплексификацией

(Лемма очевидна, если учесть, что любое полиномиальное уравнение, верное в подполе, верно и в самом поле)

Канонический вид: — В унитарном: находим ОНБ из собственных подпространств, получаем собственные числа на диаонали

— В евклидовом: если все СЧ — вещ. — аналогично. Иначе — добавляем ещё блоки для пар комплексно-сопряжённых. Матрица перехода всё ещё должна быть ортогональная. Как её найти? Для вещественных собственных чисел — просто собственные векторы. Для пар КС разделяем какой-нибудь вектор на пару вещественной и комплексной части и запишем в таком порядке.

5. Самосопряжённый

(симметричный/эрмитов)

Равносильное определение через скалярное произведение: применить можно как к первому, так и ко второму аргументу, получится то же самое. И в обратную сторону.

Если A и B САМОсопряжены и перестановочны, то произведение самосопряжено.

Самосопряжён <=> нормален + имеет вещественный спектр <=> существует ОНБ, в котором матрица самосопряжена

Если подпространство инвариантно относительно A, то и ортогональное дополнение — тоже.

В каноническом виде просто пропадут блоки, останутся просто (и в унитарном, и в Евклидовом)

6. Изометричный

Унитарный/ортогональный

Равносильное определение через скалярное произведение, что если применить к обоим аргументам, скалярное проиведение не изменится.

... $\iff$ нормален + собственные числа по модулю = 1 $\iff$ существует ОНБ, в котором матрица изометрична $\iff$ Q^{-1} — изометр.

Если подпространство инвариантно относительно Q, то орт. дополнение — тоже.

Каноничечкий вид — В Евклидовом на диагонали останутся только ± 1 — В Унтарном в блоках будут $a^2 + b^2 = 1$

Матрица изометрична $\iff$ её (стобцы $\iff$ строки) ортонормированы.

7. Разложения

$L(D)U$ — нижне-унитреугольная * (Диагональная без нулей на диагонали) * верхне-унитреугольная; Существует $\iff$ Все угловые миноры матрицы A, кроме (возможно) Δ_n не равны нулю. Можно найти одновременным Гауссом A и E без замены строк и столбцов. Слева будет DU, справа — L^{-1}

Если матрица сомосопряжённая, будет $A = LDL^* = U^*DU$. Причём все d вещественные.

Положительная/отрицаельная определённость, то же самое про собственные числа

Разложение Холецкого: самосопряжённая положительно определённая, все угловые миноры кроме, возможно, последнего, не нули $\iff$ можно убрать D, разложить на треугольные с положительными элементами на диагонали.

QR разложение: для невырожденной можно представить как произведение ортогональной на правую. Или же левой на ортогональную. Q находится ортонормированием столбцов исходной.

Полярное (QS или SQ) разлжение: на самосопряжённую (H) положительно определённую и ортогональную (U). Нужно взять $\sqrt{AA*}$ (левый модуль) для получения ортогонального. Далее — через обратную.

Можно также UH, тогда берём $H = \sqrt{A * A}$ (правый модуль).