

# Практическое руководство по дифференциальным уравнениям

Латыпов Владимир (конспектор)

[t.me/donRumata03](https://t.me/donRumata03), [github.com/donRumata03](https://github.com/donRumata03), [donrumata03@gmail.com](mailto:donrumata03@gmail.com)

20 декабря 2022 г.

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение, постановка задачи, визуальные представления</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Уравнения, интегрируемые в квадратурах</b>	<b>4</b>
2.1	С разделёнными переменными . . . . .	4
2.2	С разделяЮЩИМИСЯ переменными . . . . .	4
2.3	Однородные . . . . .	5
2.4	Линейное первого порядка . . . . .	5
2.5	Бернулли . . . . .	5
2.6	Рикатти . . . . .	5
2.7	В полных дифференциалах . . . . .	6
2.7.1	Интегрирующий множитель . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Ненормальные уравнения</b>	<b>6</b>
3.1	Разрешимое . . . . .	6
3.2	Параметризация . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Уравнения высшего порядка, методы понижения порядка</b>	<b>7</b>
4.1	Не присутствуют функция и производные низких порядков . . . . .	7
4.2	Без символа $x$ . . . . .	7
4.3	Однородное относительно функции и производных . . . . .	7
4.4	В точных производных . . . . .	7
<b>5</b>	<b>Системы уравнений, теоремы о единственности, существовании и продолжимости</b>	<b>7</b>
<b>6</b>	<b>Линейные системы и уравнения</b>	<b>8</b>
<b>7</b>	<b>Решение с постоянными коэффициентами</b>	<b>9</b>
7.1	Метод неопределённых коэффициентов для ЛСУ . . . . .	10
7.2	Метод вариации постоянной для ЛСУ . . . . .	10
7.3	Задача Коши . . . . .	10
<b>8</b>	<b>Линейные уравнения высших порядков</b>	<b>11</b>
8.1	Метод неопределённых коэффициентов для ЛУВП . . . . .	11
8.2	Метод вариации постоянной . . . . .	11
8.3	Метод «божественного озарения» — угадай и подгони . . . . .	12
8.4	Решение с помощью рядов . . . . .	12
<b>9</b>	<b>Теория устойчивости</b>	<b>12</b>

Состоит из разобранных в курсе методов решения (и определения границ применимости) и комментариев-концептуализаций.

## 1. Введение, постановка задачи, визуальные представления

Дифференциальное уравнение — условие на функцию, записанное с использованием дифференциальных операторов. Возможно, ещё дана кастомная область, в которой уравнение рассматривается и точка, через которую требуется проходить.

Решить дифференциальное уравнение — описать класс всех функций, удовлетворяющих уравнению. Pro tip: мы в основном рассматриваем уравнения, для которых «в большей части точек» выполняются условия Коши о единственности, так что решения обычно параметризуются  $n$  константами (где  $n$  — подядок уравнения).

Также в курсе рассматриваются системы уравнений (которые фактически диффуры для векторной переменной). Теория в основном выводится сначала для них, а потом переносится на уравнения высшего порядка через сведение их к системе.

В общем случае диффуры формулируются как  $F(\dots) = 0$ , где  $\dots$  — все символы, которые нам разрешено использовать

Важный тип уравнений: нормальные (для систем и для уравнений первого порядка) и (с той же сутью, но для уравнений высшего порядка) канонический — когда уравнение разрешено относительно производных (самого высокого порядка для УВП). Тогда запись будет  $y^{(n)} = f(\dots)$ , где « $\dots$ » — всё остальное.

Для них мы как бы в каждой точке знаем, в какую сторону надо идти. Направление, в котором надо двигаться (вектор-значение функции  $f$ ), можно изобразить в виде векторного поля (на плоскости или в пространстве  $\mathbb{R}_{t,r}$ ).

Мы можем построить ломанную Эйлера.

Но тупо проинтегрировать мы не можем (так как есть зависимость от самого  $y$ , не только  $x$ ).

А этот «метод решения диффузов» — вычислительно нестабильный (то есть малая погрешность в начале накапливается и может приве-

сти к очень сильно отличающемуся результату в итоге) — в отличие от интегрирования. ...так что решать диффуры (даже в нормальной форме) хочется по-честному...

Иногда предоставить решение в явном виде (т.е.  $y(x)$  или  $r(t)$ ) не получается, тогда можно предъявить в параметрическом виде или в виде т.н. «общего интеграла» — неявного отображения.

Иногда записывают уравнения в дифференциалах:  $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$  — это позволяет удобно говорить о решениях как  $y(x)$ , так и  $x(y)$  — и даже  $\begin{cases} x(t), \\ y(t) \end{cases}$ .

Причём если изобразить векторное поле формы  $\omega = P dx + Q dy$ , получится, что в каждой точке решение ( $\stackrel{\text{def}}{=}$  вектор — его дифференциал) должно быть перпендикулярно вектору  $(P, Q)$ , потому что требование — равенство скалярного произведения нулю.

## 2. Уравнения, интегрируемые в квадратурах

Для узкого класса уравнений, можем через элементарные функции и операции интегрирования неявно выразить ответ. Иногда даже получается явно.

### 2.1. С разделёнными переменными

$P(x) dx + Q(y) dy = 0$  — коэффициенты формы зависят только от «своей» переменной.

Общий интеграл:  $\int P(x) dx + \int Q(y) dy = C, \quad C \in \mathbb{R}.$

### 2.2. С разделяющимися переменными

$p_1(x)q_1(y) dx + p_2(x)q_2(y) dy = 0$  — коэффициенты формы представимы в виде произведения функций, зависящих только от одной переменной.

Метод решения: разделяем область задания на прямоугольники, в которых функции  $q_1, p_2$  принимают ноль, рассматриваем в каждой отдельно, поделив на них  $\frac{p_1(x)}{p_2(x)} dx + \frac{q_2(y)}{q_1(y)} dy = 0$ , затем — склеиваем решения, чтобы они получились гладкими (то есть совпадать в месте склейки должны пределы самих  $y$  и пределы  $y'$ ).

### 2.3. Однородные

$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ , где коэффициенты — однородные функции  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  степени  $p$ , то есть  $f(\alpha x, \alpha y) = \alpha^p f(x, y)$ .

Тогда замена

$$\begin{cases} x = x, \\ z = \frac{y}{x} \end{cases} \quad (1)$$

...приводит к УРП.

Обычно замена производится тривиально.

### 2.4. Линейное первого порядка

$$y' = p(x)y + q(x).$$

Решения такие и только такие (покрывают всю область + теорема о единственности):

$$y = \left( C + \int q e^{-\int p} \right) e^{\int p}, \quad C \in \mathbb{R} \quad (2)$$

(Здесь и далее интеграл будет значить «какая-нибудь первообразная» (причём здесь, кажись, должна быть одна и та же в  $\pm \int p$ ) — константу дописываем при необходимости)

### 2.5. Бернулли

$$y' = p(x)y + q(x)y^\alpha, \quad \alpha \neq 0, 1.$$

Сводится делением на  $y^\alpha$  и переходу к переменной  $z(x) = y^{1-\alpha}$ .

### 2.6. Рикатти

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x).$$

В общем случае в квадратурах не интегрируется, но, если известно какое-нибудь решение  $\varphi$ , подстановкой  $y = z + \varphi$  к Бернулли.

## 2.7. В полных дифференциалах

Если форма  $\omega P dx + Q dy$  интегрируема, то есть  $du = \omega$ , называется «в полных дифференциалах». (То есть  $u$  — такая, что  $u'_x = P$ ,  $u'_y = Q$ )

Общий интеграл:  $u(x, y) = C$ ,  $C \in \mathbb{R}$ .

Если живём в односвязной области, точность формы проверяется через  $P'_y \stackrel{?}{=} Q'_x$ .

Получать  $u$  можно зафиксировав и проинтегрировав от неё по пути.

А можно сначала зафиксировать  $y$ , найти поведение вдоль прямой через частную производную  $u'_x$ , а потом — учесть изменение вдоль  $y$ .  $C(y)$  находится через уравнение для  $u'_y$ .

### 2.7.1. Интегрирующий множитель

Если условие  $P'_y = Q'_x$  не выполнено, можно попробовать угадать такое  $\mu$ , чтобы уравнение  $\mu(x, y)\omega = 0$  было в полных дифференциалах.

Для этого необходимо  $\mu'_y P + \mu'_x Q = (Q'_x - P'_y)\mu$ .

## 3. Ненормальные уравнения

### 3.1. Разрешимое

Если можно разрешить локально, делаем это потом склеиваем.

### 3.2. Параметризация

Если какого-то символа из  $x, y, y'$  нет — можно параметризовать кривую решения уравнения  $F(\dots, \dots)$  как для независимых переменных, а потом — воспользоваться основным соотношением:  $dy = y'_x dx$  (неизвестны всегда разные штуки).

Если все символы есть, параметризуем поверхность (двумя параметрами  $u, v$ )  $F(x, y, y') = 0$  как для независимых переменных. Запишем то же соотношение и получим диффуру на  $u, v$ . Если смогли решить в виде  $v = \phi(u, C)$ , выражаем через один параметр параметрически  $x, y$ .

## 4. Уравнения высшего порядка, методы понижения порядка

### 4.1. Не присутствуют функция и производные низких порядков

То есть  $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots)$ .

Тогда делаем замену  $z = y^{(k)}$ .

### 4.2. Без символа $x$

То есть  $F(y, y', y'', \dots) = 0$ .

Отдельно рассмотрим константные решения. Иначе — область задания разбивается на промежутки обратимости. В них  $z(y) = y'(x(y))$ , возьмём  $y$  за переменную, а  $z$  — за функцию. Получим уравнение меньшего порядка.

Производные высших порядков легко выражаются через  $y, z, z', z'', \dots$

### 4.3. Однородное относительно функции и производных

Делаем замену:  $z = \frac{y'}{y}$ .

### 4.4. В точных производных

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = \frac{d}{dx} \Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

Тогда сводимся к  $\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = C$ .

## 5. Системы уравнений, теоремы о единственности, существовании и продолжимости

Нормальная система. Можно рассмотреть равносильное интегральное уравнение. Можно построить ломанную Эйлера.

Теорема Пеано: Если  $f \in C(G \rightarrow \mathbb{R}^n)$ , то существует решение на отрезке Пеано.

Теорема Пикара: Если она ещё и локально Липшицева по  $r$  (равномерно по  $t$ ), то решение задачи Коши единственно на всём отрезке, на котором существует.

Приближения Пикара, получающиеся в процессе доказательства:

$$\varphi_0(t) = r_0 \quad (3)$$

$$\varphi_k(t) = r_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi_{k-1}(\tau)) \, d\tau \quad (4)$$

Продолжимость решений: для локально липшицевых существует единственное максимальное решение, являющееся продолжением остальных.

Максимальное решение всегда выходит за любой компакт, содержащийся в области.

Если  $G = (a, b) \times \mathbb{R}^n$ , а система сравнима с линейной, максимальное решение определено на всём  $(a, b)$ .

Общие методы решения: их особо нет, может быть, получится сделать удачную замену, чтобы взаимозависимость пропала. Иногда можно свести к уравнению высшего порядка.

Pro tip: если хочется проанализировать нормальное уравнение высшего порядка, можно в голове свести его к системе, но фактически нужно проанализировать непрерывность/липшицевость функции  $f$ .

## 6. Линейные системы и уравнения

$$r' = P(t)r + Q(t) \quad (5)$$

Где  $P$  — матричная, а  $Q$  — вектор- функция. Обе не обязаны быть линейными по  $t$ .

Выделяют виды: однородные/неоднородные, с постоянными/непостоянными коэффициентами.

Решение однородной — линейное пространство (так как подпространство непрерывных функций, замкнутое относительно умножения на



коэффициент и сложения). Размерность —  $n$ . Матрица-базис — «фундаментальная матрица системы». Тогда решения системы — для любого вектора коэффициентов  $C$ :  $\varphi(t) = \Phi(t)C$

Общее решение неоднородной — частное решение + решение однородного уравнения.

Pro tip: Вронскиан (не) ноль однажды — Вронскиан (не) ноль навсегда (если функции — *решения*). Его можно вычислить через Остроградского-Ливулла как начальное значение умножить на экспоненту интеграла следа матрицы коэффициентов.

## 7. Решение с постоянными коэффициентами

Если коэффициенты матрицы постоянны, общее решение получается через разложение Жордана: для каждого числа  $\lambda$  и цепочки Жордана будут решения  $e^{\lambda t} \cdot h_1$ ,  $e^{\lambda t} \cdot (\frac{t^1}{1!}h_1 + h_2)$ , ...

Фактически, получаем  $e^{Pt}$  с точностью до умножения на обратимую матрицу справа.

Другой способ получить фундаментальную матрицу: найти матричную экспоненту от матрицы системы, умноженной на  $t$ .

Тут нужно помнить, как потенцировать ячейку Жордана... И как строить башни.

Pro tip для поиска корней (тык). То есть в случае характеристического многочлена рациональные корни — целые и делят свободный член.

Башни строить, если они небольшие, можно уравнениями, начиная с собственных векторов:  $Ah_{i+1} = h_i$ .

Ультимативный способ — пропалывать корневые пространства, но вряд ли это понадобится.

Главное — не забывать, в каком порядке писать в матрице перехода к Жорданову базису векторы — «в обратном»: слева пишутся верхние этажи башни Жордана, а затем — направо по очереди применение оператора)

Рецепта решения однородного уравнения с непостоянными коэффициентами — не будет...

### 7.1. Метод неопределённых коэффициентов для ЛСУ

Для поиска частного решения неоднородной системы. Работает только для постоянных коэффициентов.

Если в правой части  $p_k(t)e^{\gamma t}$ , то решением будет некий тоже некий квази-вектор-многочлен (pen-pineapple-apple-pen...):  $e^{t\gamma}q_{k+s}(t)$ , где  $s$  — максимальный размер клетки Жордана для собственного числа  $\gamma$  (также известен как высота замка, самая длинная Жорданова цепочка) — или ноль, если это не собственное число.

### 7.2. Метод вариации постоянной для ЛСУ

Коэффициенты не обязаны быть постоянными.

Находим частное решение как линейную комбинацию базиса однородного, но теперь коэффициенты — любые функции, то есть таким образом покрываются все возможные непрерывные кандидаты на частное решение.

Находим коэффициенты из системы  $\Phi C' = q$ . И это гарантирует, что полученная штука — частное решение.

Найти  $C'$  в явном виде можем так:  $C' = \Phi^{-1}q$ , потом покомпонентно интегрируем и находим вектор коэффициентов-функций. Считаем линейную комбинацию, получаем частное решение.

Pro tip: если вронскиан хороший, удобно может быть считать обратную матрицу через союзную матрицу:  $A^{-1} = \frac{A^{*T}}{\det A}$ . (Не путать с сопряжённой матрицей, которая тоже со звёздочкой).

### 7.3. Задача Коши

Условие Коши  $\varphi(t_0) = r_0$ .

Получаем отсюда коэффициенты:

$C = \Phi^{-1}(t_0)(r_0 - \psi(t_0))$ , где  $\psi$  — частное решение неоднородного.

Если решали через матричную экспоненту — легко обращается и решением будет  $e^{A(t-t_0)}r_0$ .

## 8. Линейные уравнения высших порядков

В теории все выводы и формулы получаются через сведение к системам, однако формулы для частного случая — более красивые/приятные.

Базис решения (для постоянных коэффициентов) получается через корни характеристического уравнения, для каждого корня  $\lambda$  кратности  $m$  будут решения:  $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \dots, t^{m-1}e^{\lambda t}$ .

Причём, если коэффициенты вещественные, то комплексные корни разбиваются на пары комплексно сопряжённых, так что заменяем  $y, \bar{y}$  на  $\Re y, \Im y$ : пару  $t^k e^{(a \pm bi)t}$  комплексно сопряжённых можно заменить на вещественную:  $t^k e^{at} \cos bt, t^k e^{at} \sin bt$ .

### 8.1. Метод неопределённых коэффициентов для ЛУВП

Для нахождения частного решения. Работает только для постоянных коэффициентов.

Если  $f(x) = p_k(t)e^{\gamma t}$  (квазимногочлен степени  $k$ ), ищем частное решение системы в виде  $t^m q_k(t)e^{\gamma t}$ , где  $m$  кратность характеристического числа корня  $\gamma$  (0, если это не корень).

В частности, если справа линейная комбинация  $a \cos(\beta t) + b \sin(\beta t)$ , ищем тоже линейную комбинацию  $A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t)$ .

Подробнее: тут.

### 8.2. Метод вариации постоянной

Более обобщённый, но и более сложный.

Ищем линейную комбинацию решений однородной, но коэффициенты теперь — функции (так что, так как они базис при каждом  $t$ , так можно любую функцию выразить...).

Но ещё добавляем условие  $\alpha' y_1 + \beta' y_2 = 0$ . И из того, что решение после дифференцирования, подстановки и сокращения (с учётом того, что  $y_1, y_2$  — решения) получится уравнение:  $\alpha' y_1' + \beta' y_2' = f$

Это система относительно  $\alpha', \beta'$  в каждой точке разрешима, так как Вронскиан — как раз определитель её матрицы, а решения — линейно независимы.

Решим через Крамера, а потом проинтегрируем, чтобы получить сами  $\alpha, \beta$ .

Подробнее — на Вики или тут.

### 8.3. Метод «божественного озарения» — угадай и подгони

$n - 1$  решений угадываем, а оставшееся — находится, учитывая, что Вронскиан (вычисляющийся по Остроградскому-Ливулли и записывающийся как определитель — представляем  $\frac{W}{y_1^2} = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)'$ , интегрируем) везде отличен от нуля.

Для ЛУ теорема О-Л такая:  $W = W(t_0)e^{\int_{t_0}^t (-p_{n-1}(\tau)) d\tau}$ . ( $p_{n-1}$  — коэффициент перед старшей не-единичной степенью, то есть как раз перед  $y^{n-1}$ ).

Подробнее — здесь.

### 8.4. Решение с помощью рядов

Будем искать разложимые в ряд решения в виде ряда. Их легко дифференцировать и умножать на степени  $x$ .

Из равенства нулю полученного свёрнутого ряда нулю как функции получаем равенство нулю всех коэффициентов. А из него получаем рекуррентные соотношения на коэффициенты ряда (первые несколько обычно либо нули, либо любые — то есть можно взять их в качестве параметров).

## 9. Теория устойчивости

//TODO