Типовик по линейной алгебре №3, задание 4 «Алгебраические операции с тензорами.»

Латыпов Владимир Витальевич,
ИТМО КТ M3138, ***вариант 10***

10 июня 2022 г.

1. Формулировка условия

Утверждение 1. Условие таково:

Тензор α^{ijk} (3 раза контравариантный) задан трехмерной матрицей третьего порядка $A = \|\alpha^{ijk}\|$.

- Вычислить матрицу транспонированного тензора $\beta^{ijk} = \alpha^{kji}$.
- Вычислить матрицу полностью симметричного тензора $\alpha^{(ijk)}$.
- Вычислить матрицу полностью антисимметричного тензора $\alpha^{[ijk]}$.
- Вычислить матрицу тензора $\alpha^{(i|j|k)}$, симметризованного по индексам i и k.
- Вычислить матрицу тензора $\alpha^{i[jk]}$, антисимметризованного по индексам j и k.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} -2 & 3 & 4 & 3 & 6 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -4 & 2 & 4 & -6 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right) \tag{1}$$

2. Транспонируем

Заметим, что для применения перестановки достаточно совершить одну транспозицию, поменяв первую координату с третьей (для матрицы это строчка и слой соответственно), то есть фиксируя вторую (столбец).

Тогда выпишем двухмерные матрицы, имеющие константный столбец и, транпонировав их, вернём на место.

Для надёжности будем испольовать `matrixcalc.org`.

$$\alpha^{?1?} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\alpha^{?2?} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 6 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$\alpha^{?3?} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ -4 & -6 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 0 & -6 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \tag{4}$$

И, собственно, записываем полученную новую гадость назад, причём в том же порядке, в котором вынимали старую...

$$B = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} -2 & 3 & 4 & 3 & -1 & -4 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 0 & 2 & 4 & -6 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 4 \end{array} \right) \tag{5}$$

3. Симметрирование

Здесь посчитаем по определению, в прошлом варианте была программа, которую на самом деле, было дольше писать, чем посчитать всё вручную, но я сначала её написал, а потом только полностью прочилал учловие и понял, что вычислять здесь нужно не так много.

В этом пункте у нас 6 слагаемых из по всем возможным перестановкам, все со знаком плюс:

$\alpha^{(ijk)} = \frac{1}{6} \left(\alpha^{ijk} + \alpha^{ikj} + \alpha^{kji} + \alpha^{kij} + \alpha^{jik} + \alpha^{jki} \right)$

Причём элементы разбиваются на группы, внутри которой всё результаты оддинаковы, да ещё и для вычисления этого результата нужны только исходные значения внутри этой группы.

Итого получим:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} -2 & 3 & \frac{5}{3} & 3 & \frac{7}{3} & \frac{1}{6} & \frac{5}{3} & \frac{1}{6} & 2 \\ 3 & \frac{7}{3} & \frac{1}{6} & \frac{7}{3} & 4 & -\frac{8}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{8}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} & \frac{1}{6} & 2 & \frac{1}{6} & -\frac{8}{3} & \frac{5}{3} & 2 & \frac{5}{3} & 4 \end{array} \right) \tag{6}$$

4. Альтенирование

Формула по определению такая:

$$\beta^{123} = \frac{1}{6} \left(\alpha^{123} - \alpha^{132} + \alpha^{231} - \alpha^{213} + \alpha^{312} - \alpha^{321} \right) \tag{7}$$

Достаточно найти значение для одного элемента (например, 123), индексы которого — перестановка, а потом поставить нули везде, где не она и полученное значение со знаком $(-1)^{\varepsilon(\sigma_1)+\varepsilon(\sigma_2)}$, где вторая — чётной очередной перестановки, а первая — исходной.

Например, найдём $\beta^{123} = -\frac{5}{6}$

Тогда рзультат альтенирования:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & 0 & \frac{-5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-5}{6} & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} & 0 & \frac{-5}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{8}$$

5. Симметрирование по части индексов

Симметрируем всего по паре индексов, то есть перестановки всего две.

$$\beta^{ijk} = \frac{1}{2}\left(\alpha^{ijk} + \alpha^{kji}\right) \tag{9}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} -2 & 3 & 4 & 3 & \frac{5}{2} & -2 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 3 & \frac{5}{2} & -2 & 2 & 4 & -6 & 1 & -1 & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 1 & -1 & \frac{5}{2} & 1 & 0 & 4 \end{array}\right) \tag{10}$$

6. Альтенирование по части индексов

Опять же — перестановки две

$$\beta^{ijk} = \frac{1}{2}\left(\alpha^{ijk} - \alpha^{kji}\right) \tag{11}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-3}{2} & \frac{-5}{2} & \frac{3}{2} & 0 & -3 & \frac{5}{2} & 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} & 0 \end{array}\right) \tag{12}$$