

ДЗ 11

(кардинальное)

Владимир Латыпов
donrumata03@gmail.com

Содержание

1 Существенность для ординальности	3
2 Никто не принадлежит себе	3
3 Равенство элементов множеств из одного элемента	3
7	3
8	3
9	3
10 (Кардинальная)	4
10.1 Непрерывные функции	4
10.2 Произвольные вещественнозначные функции	4
11 Тёмный кардинал	5
11.1 Приложение: континуальность \mathbb{R}	5

1 Существенность для ординальности

Пример (Вполне упорядоченное отношением \in , но не транзитивное): $A = \{\{\emptyset\}\}$.

С одной стороны, у любого непустого подмножества (то есть самого A) есть минимальный элемент $\{\emptyset\}$.

Однако $\{\emptyset\} \in A$, $\emptyset \in \{\emptyset\}$, но $\{\emptyset\} \notin A$, что противоречит определению транзитивности.

Пример (Транзитивное, но не вполне упорядоченное): $B = \{\{\{\emptyset\}\}, \emptyset\}$,
 $C = \{\{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}\}$

2 Никто не принадлежит себе

Аксиома фундирования: непустое множество A содержит элемент, не пересекается с A .

Но если $x \in x$, то для $\{x\}$ должно быть $x \cap \{x\} = \emptyset$, однако $x \cap \{x\} = x \neq \emptyset$.

3 Равенство элементов множеств из одного элемента

7

Определение биективности

8 ...

$$\begin{aligned} & \exists b_0 \in b \\ & \forall x. x \in A \rightarrow \exists! y. \langle x, y \rangle \in b \end{aligned}$$

Возьмём отношение, где второй элемент константен (который существует, так как b непусто), а первый любой. Существует, так как фильтруем декартово произведение (существует по задаче) по предикату $\langle x, y \rangle \rightarrow y = b_0$.

Оно функционально.

Первая часть (существование)

9 ...

10 (Кадинальная)

10.1 Неперерывные функции

Лемма 10.1.1: $|\mathbb{R}| \leq |C(\mathbb{R})|$

Доказательство: Инъекируем $x \mapsto \lambda y. x$, все функции такого виде для разных x — разные. \square

Теорема 10.1.2: $|C(\mathbb{R})| \leq |\mathbb{R}|$

Доказательство:

- $|C(\mathbb{R})| = |C(\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R})|$, отображение:
 1. в сторону $C(\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R})$: доопределяем по непрерывности
 2. в сторону $C(\mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R})$: сужаем
- $|C(\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R})| \leq |\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}| = |\mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$, так как возьмём $(\mathbb{P} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}) : \langle p, s \rangle \rightarrow \text{map } (\lambda y. p^y) s$

\square

Теорема 10.1.3: $|\mathbb{R}| = |C(\mathbb{R})|$

Доказательство: Теорема об антисимметричности. \square

10.2 Произвольные вещественнозначные функции

Лемма 10.2.1: $|\mathcal{P}(\mathbb{R})| \leq |\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}|$

Доказательство: $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow (\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}) : s \rightarrow \chi_s$ \square

Обратно:

Лемма 10.2.2: $|\mathcal{P}(\mathbb{R})| \geq |\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}|$

Доказательство: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}$, так как кривая Гильберта.

$$|\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}| \leq \mathcal{P}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) = \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

\square

Теорема 10.2.3: $|\mathcal{P}(\mathbb{R})| = |\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}|$

Доказательство: Теорема об антисимметричности. □

11 Тёмный кардинал

- $|\mathbb{R}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$, так как множество натуральных чисел — суть битовый вектор записи вещественного в двоичной системе счисления.
- $|\mathbb{R}| \geq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$, так как возьмём десятичную запись и множества, где из каждого десятка есть все, кроме 1 и 9.
- Второе: частный случай пункта 1 номера 10
- Третье: Непрерывные $|Q \rightarrow Q|$ — хотя бы континуально, так как $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}) : s \rightarrow \chi_s$

Итого: все континуальны.

11.1 Приложение: континуальность \mathbb{R}

Теорема 11.1.1: $|\mathbb{R}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$

Доказательство: Число x на отрезке $[0, 1]$ сопоставим какое-то, например, минимальное как битовый вектор его (бесконечное) представление в двоичной системе счисления (легко делается итеративным алгоритмом и индукцией), а ему — множество $\{n \in \mathbb{N} \mid x_2[n] = 1\}$. Это инъекция, так как разные числа отличаются хотя бы □

Теорема 11.1.2: $|\mathbb{R}| \geq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$

Доказательство:

Построим инъекцию $B \rightarrow \mathbb{R}$, где

$$B = \left\{ S \subset \mathbb{N} \mid \forall i \in \mathbb{N}_0 : \left| S \Big|_{[10i, 10i+10)} \right| = 1 \wedge 10i + 0 \notin S \wedge 10i + 9 \notin S \right\}.$$

$|B| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ (\geq , так как $f : |\mathcal{P}(\mathbb{N})| \rightarrow |B|$, $s \mapsto \text{map } (\lambda x. x \cdot 10 + 5) s$ — инъекция).

Итак, финальная, давно анонсированная инъекция: $S \mapsto \{S\}_{10}$ — представление в десятичной системе счисления, где i -й разряд — тот единственный $d \in S \Big|_{[10i, 10i+10)}$.

Покажем, что это инъекция. Пусть у числа $\in [0, 1]$ два представления в таком виде. Тогда посмотрим на первый разряд k , в котором они отличаются. Тогда $0 = |\{S\}_{10} - \{S\}_{10}| \geq 10^{-k-1}$, что неверно. \square

Лемма 11.1.3: Разные бинарные представления допускают только рациональные числа.

Доказательство: Пусть есть два разных вектора a_i, b_i , сходящихся к одному и тому же числу, то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{[1,n]})_{\mathbb{R}} = a = b = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_{[1,n]})_{\mathbb{R}}$. Покажем, что одно из них с какого-то момента $\equiv 1$, а другое $\equiv 0$.

Рассмотрим минимальный индекс i , в котором они отличаются (имеем право в силу вполне упорядоченности \mathbb{N}). НУО, $a_i = 0, b_i = 1$. Покажем, что $\forall j > i : a_j = 1, b_j = 0$. Действительно, если найдётся $j^* : a_{j^*} = 0 \vee b_{j^*} = 1$, то $b - a \geq 2^{-j^*-1}$, что противоречит определению предела.

Таким образом, если число допускает несколько представлений, оно рационально как конечная двоичная дробь. \square

Доказательство: (альтернативное, теоремы 2). Иррациональные числа биективно соответствуют представлениям себя в двоичной системе счисления. А рациональные — счётны. Тогда их объединение равномощно битовым векторам. \square