

Типовик по линейной алгебре модуль 1:  
Задание 7 «Каноническая форма  
кривых второго порядка»

Латыпов Владимир Витальевич,  
ИТМО КТ М3138, **вариант 12**

4 ноября 2021 г.

## Содержание

<b>1</b>	<b>Формулировка условия</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Решение</b>	<b>3</b>
2.1	Поворот системы координат . . . . .	3
2.2	Параллельный перенос . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Иллюстрации</b>	<b>5</b>

## 1. Формулировка условия

**Утверждение 1.** Условие таково:

Выполнив последовательно преобразования координат: поворот, а затем параллельный перенос координатных осей, преобразовать к каноническому виду уравнение кривой второго порядка и построить ее в канонической и исходной системе координат, а также найти параметры кривой.

$$12. 7\sqrt{5}x^2 + \sqrt{5}y^2 + 8\sqrt{5}xy + 72x + 36y + 27\sqrt{5} = 0$$

## 2. Решение

### 2.1. Поворот системы координат

Для начала найдём такой поворот, чтобы член  $x'y'$  исчез.

$$\begin{cases} x = \cos(\alpha)x' - \sin(\alpha)y' \\ y = \sin(\alpha)x' + \cos(\alpha)y' \end{cases} \quad (1)$$

Тогда коэффициент перед  $x'y'$  будет:

$$7\sqrt{5}(-2\cos(\alpha)\sin(\alpha)) + 8\sqrt{5}(\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)) + \sqrt{5}(2\cos(\alpha)\sin(\alpha)) = \sqrt{5}(\cos(\alpha)\sin(\alpha)(7 \cdot -2 + 2) + 8\cos^2(\alpha) - 8\sin^2(\alpha)) \quad (2)$$

Этот коэффициент должен быть равен нулю. Тогда:

$$-12\cos(\alpha)\sin(\alpha) + 8\cos^2(\alpha) - 8\sin^2(\alpha) = 0 \quad (3)$$

$$-12\operatorname{tg}(\alpha) + 8 - 8\operatorname{tg}^2(\alpha) = 0 \quad (4)$$

$$4\xi^2 + 6\xi - 4 = 0 \quad (5)$$

$$\xi_{1,2} = \left\{-2, \frac{1}{2}\right\} \quad (6)$$

Возьмём  $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{1}{2}$  и  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Тогда  $\sin, \cos > 0$

$$\sin(\alpha) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha)}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad (7)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha)}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \quad (8)$$

Тогда старые координаты так выражаются через новые:

$$\begin{cases} x = \frac{2\sqrt{5}}{5}x' - \frac{\sqrt{5}}{5}y' \\ y = \frac{\sqrt{5}}{5}x' + \frac{2\sqrt{5}}{5}y' \end{cases} \quad (9)$$

Тогда перепишем уравнение в новой системе координат:

$$\begin{aligned} & 7\sqrt{5} \left( \frac{2\sqrt{5}}{5}x' - \frac{\sqrt{5}}{5}y' \right)^2 + \\ & \quad \sqrt{5} \left( \frac{\sqrt{5}}{5}x' + \frac{2\sqrt{5}}{5}y' \right)^2 + \\ & \quad 8\sqrt{5} \left( \frac{2\sqrt{5}}{5}x' - \frac{\sqrt{5}}{5}y' \right) \left( \frac{\sqrt{5}}{5}x' + \frac{2\sqrt{5}}{5}y' \right) + \\ & \quad 72 \left( \frac{2\sqrt{5}}{5}x' - \frac{\sqrt{5}}{5}y' \right) + \\ & \quad 36 \left( \frac{\sqrt{5}}{5}x' + \frac{2\sqrt{5}}{5}y' \right) + \\ & \quad 27\sqrt{5} \\ & = 0 \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{28x'^2}{\sqrt{5}} - \frac{28x'y'}{\sqrt{5}} + \frac{7y'^2}{\sqrt{5}} + \\ & \quad \frac{x'^2}{\sqrt{5}} + \frac{4x'y'}{\sqrt{5}} + \frac{4y'^2}{\sqrt{5}} + \\ & \quad \frac{16x'^2}{\sqrt{5}} + \frac{24x'y'}{\sqrt{5}} - \frac{16y'^2}{\sqrt{5}} + \\ & \quad \frac{144x'}{\sqrt{5}} - \frac{72y'}{\sqrt{5}} + \\ & \quad \frac{36x'}{\sqrt{5}} + \frac{72y'}{\sqrt{5}} + \\ & \quad 27\sqrt{5} \\ & = 0 \quad (11) \end{aligned}$$

$$9x'^2 + 36x' - y'^2 + 27 = 0 \quad (12)$$

## 2.2. Параллельный перенос

Выделим полные квадраты:

$$9x'^2 + 36x' - y'^2 + 27 = 9(x'^2 + 4x' + 4) - y'^2 - 9 = 9(x' + 2)^2 - y'^2 - 9 = 0 \quad (13)$$

Назовём:

$$\begin{cases} x'' = x' + 2 \\ y'' = y' \end{cases} \quad \begin{cases} x' = x'' - 2 \\ y' = y'' \end{cases} \quad (14)$$

Тогда уравнение в системе координат «два штриха» будет таким:

$$9x''^2 - y''^2 = 9 \quad (15)$$

$$\frac{x''^2}{1^2} - \frac{y''^2}{3^2} = 1 \quad (16)$$

То есть это гипербола, полуось: 1, мнимая полуось: 3.

Таким образом, координаты для системы «один штрих» будут выражаться как:

$$\begin{cases} x' = x'' - 2 \\ y' = y'' \end{cases} \quad (17)$$

(То есть сдвиг влево относительно двух штрихов)

А для изначальной СК:

$$\begin{cases} x = \cos(\alpha)x' - \sin(\alpha)y' = \cos(\alpha)(x'' - 2) - \sin(\alpha)y'' \\ y = \sin(\alpha)x' + \cos(\alpha)y' = \sin(\alpha)(x'' - 2) + \cos(\alpha)y'' \end{cases} \quad (18)$$

## 3. Иллюстрации

Тогда нарисуем картинки (в обратном порядке):

(сейчас нет возможности сдать типовик в на руки, поэтому рисунки пока в электронном формате...)

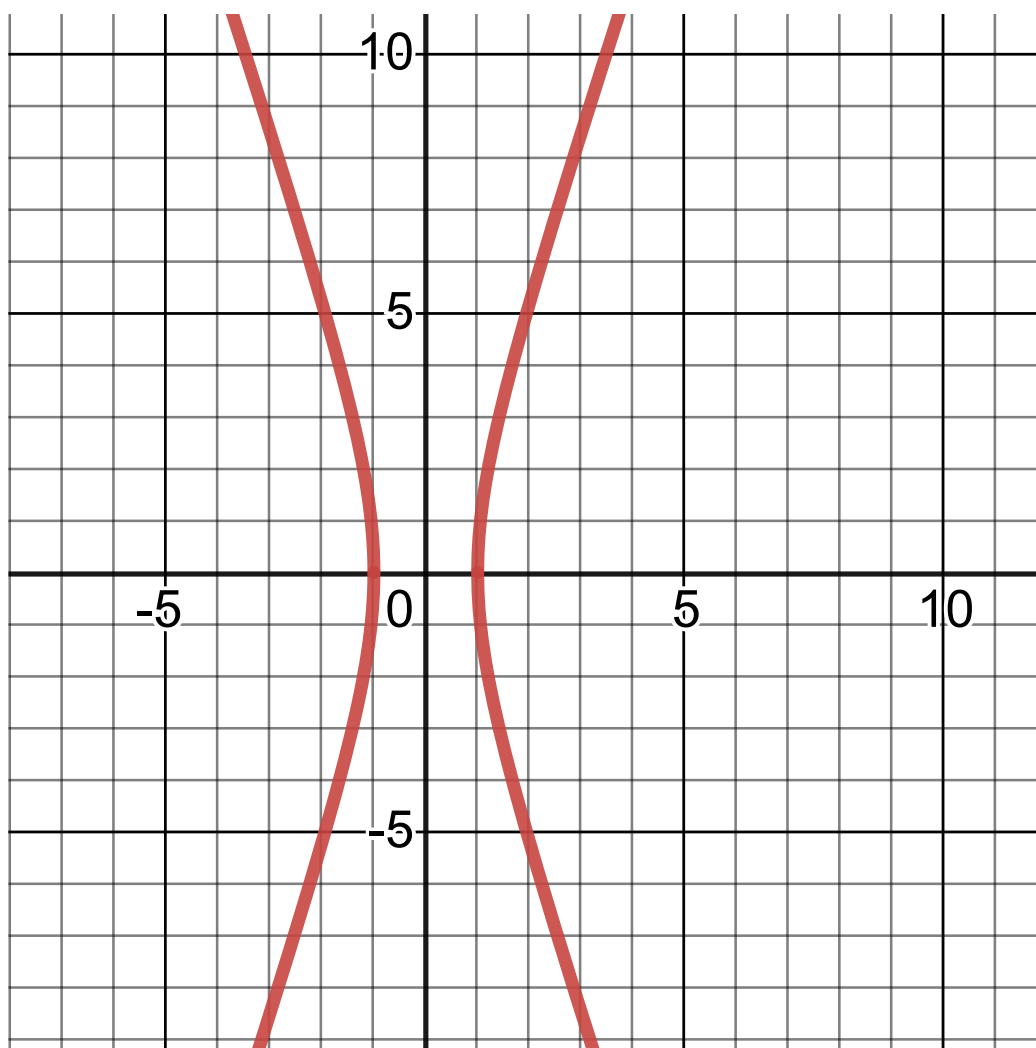


Рис. 1: Чертёж в системе координат 2 штриха

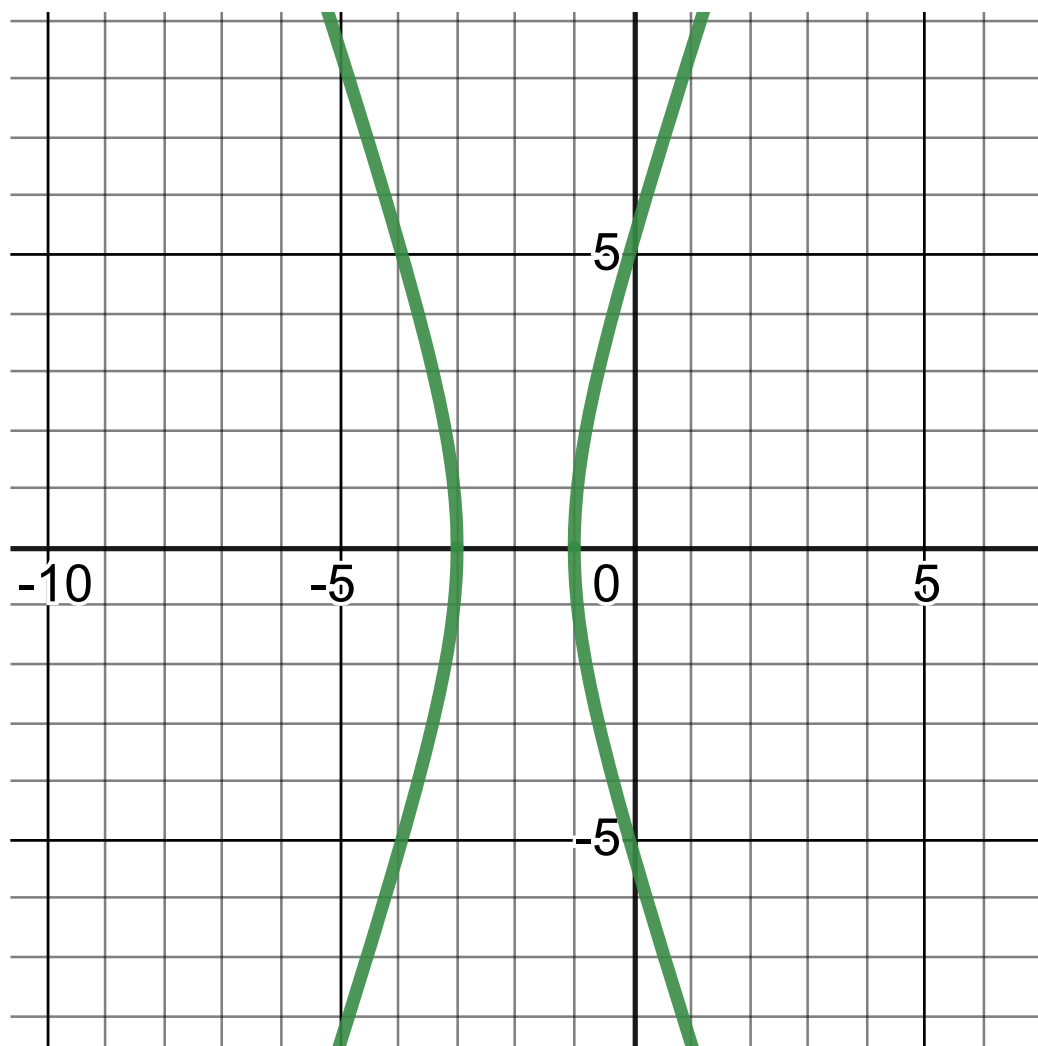


Рис. 2: Чертёж в системе координат 1 штрих

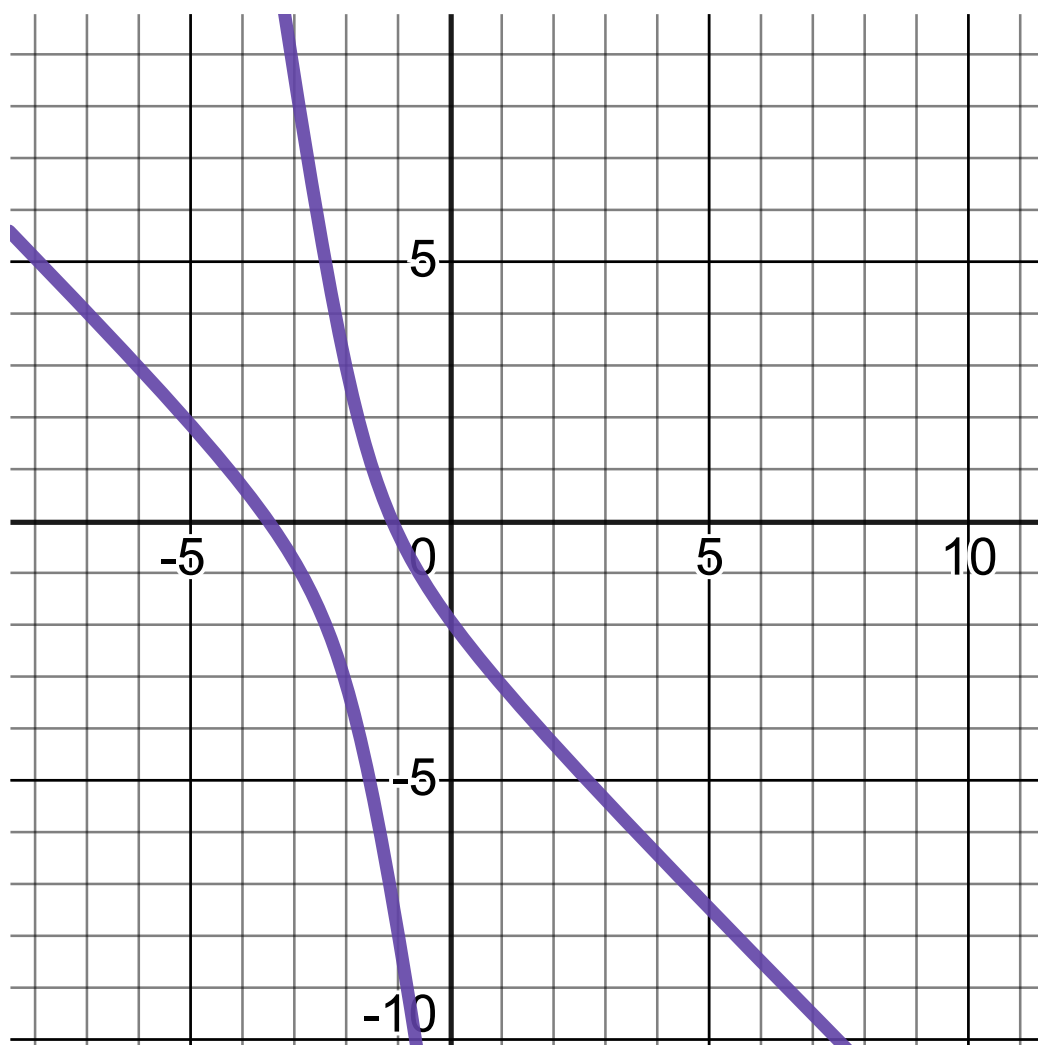


Рис. 3: Чертёж в изначальной системе координат