

Линейная Алгебра

Латыпов Владимир

September 15, 2021

Contents

1	Введение	3
2	α	3
3	(5
4	Полярная и сферическая система координат	6
5	Преобразования координат	6
5.1	Параллельный перенос, сдвиг	6
5.2	Поворот на плоскости	7
5.3	Поворот координат в пространстве	7

1 Введение

Преподаватель: Кучерук Е. А. EMail: kucheruk.e.a@gmail.com

Литература по линейной алгебры:

Геометрия Александров Ильин Позняк Линейная алгебра

2 as

Вектор - класс направленных отрезков, определён с точностью до точки приложения.

Линейные операции:

- $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R} : (\vec{a}) \times \alpha$

Свойства линейных операций/аксиомы линейного пространства:

1. Коммутативность
2. Ассоциативность
3. Существование нулевого элемента (нуль-вектор)
4. Существование противоположного элемента для каждого $\forall \vec{A} : \exists \vec{\bar{A}} : \vec{A} + \vec{\bar{A}} = 0$
5. Ассоциативность умножения вектора на скаляр: $\beta \times (\vec{A} \times \alpha) = \beta \times (\vec{A} \times \alpha)$
6. Дистрибутивность умножения на скаляр относительно сложения чисел: $(\alpha + \beta) \times \vec{v} = \alpha \vec{v} + \beta \vec{v}$
7. Дистрибутивность умножения на скаляр относительно сложения векторов: $(\vec{a} + \vec{b}) \times \alpha = \alpha \vec{a} + \alpha \vec{b}$

Два вектора коллинеарны $\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \dots$

Линейная комбинация векторов:

$$\overleftarrow{\text{combination}} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \times \vec{v}_i \quad (1)$$

Комбинация векторов тривиальна, если $\forall \alpha_i = 0$ Иначе – нетривиальная система.

Система векторов линейно независима, если любая нулевая линейная комбинация тривиальна. Иначе система линейно зависима (например, если есть коллинеарные).

Если есть хотя бы один нуль-вектор, система тоже линейно зависима (берём коэффициент 0 при нём).

Если объединить линейно зависимую с любой, получится линейно зависима.

Если система линейно зависима, один из векторов - линейная комбинация каких-то других.

$$\exists \alpha_n \neq 0 \quad (2)$$

$$\exists x_i : \quad (3)$$

$$\vec{v}_n = \sum \vec{v}_i = \frac{1}{\alpha_n} \quad (4)$$

Пусть есть прямая. На ней: Базис - любой ненулевой вектор.

Пусть есть плоскость. На ней: Базис - любая упорядоченная пара неколлинеарных векторов.

Пусть есть пространство. На ней: Базис - упорядоченная тройка некопланарных векторов.

α_i - координаты вектора в базисе.

Теорема: Любой вектор пространства может быть разложен по базису, причём единственным образом. Как в пространстве, так и на прямой и плоскости.

Доказательство: Базис - векторы \vec{e}_i . Добавим к ним вектор x . Так как была

$$x = \sum_{i=1}^n x_i \times \vec{e}_i$$

х. Тогда полученная система векторов будет линейно зависимой и вектор x может быть линейно выражен через векторы формула: формула, где формула - некоторые числа. Так мы получили разложение вектора x по базису. Осталось доказать, что это разложение единственно.

Докажем несколько теорем, далее работать будем с координатами.

Следствия теоремы о единственности разложения:

- $\vec{a} = \vec{b} \iff \forall i < n : \vec{a}_i = \vec{b}_i$
- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} \iff \forall i < n : \vec{a}_i + \vec{b}_i = \vec{c}_i$, доказывается через аксиомы линейного пространства
- $\vec{b} = \alpha \times \vec{a}, \alpha \in \mathbb{R} \iff \vec{b}_i = \alpha \times \vec{a}_i$
- $\vec{a} \parallel \vec{b}, \vec{a} \neq \vec{0} \iff \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3} = \dots = \alpha \in \mathbb{R}$
- Система коллинеарных векторов ($\geq n+1$) всегда линейно зависима (для плоскости либо все коллинеарны, либо 2 неколлинеарных, тогда можно ввести базис, выразив один через другие, для пространства аналогично, только 3 и некопланарные)

$\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$ базис $V_3 \forall v \in V_3 \exists! \forall i \in \{1, 2, 3\} \alpha_i \in \mathbb{R} : \vec{v} =$

3 (

Система координат на плоскости и в пространстве) говорят, что в V_3 введена д.с.к (декартова сис коорд), если в пространстве есть точка O (начало системы координат), зафиксирован базис $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$ некопланарные.

Оси координат - прямые, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов.

Координаты точки - всё равно что координаты радиус-вектора. Геометрически - для нахождения координат проводим (правило параллелограмма) плоскости или вектора параллельные тому, чему нужно.

Координаты вектора = координаты конца - координаты начала

Задача: Пусть есть вектор, заданный координатами конца и начала ($A = (a_1, a_2, a_3), B = (b_1, b_2, b_3)$). Нужно найти точку $M = (m_1, m_2, m_3) : \frac{AM}{MB} = \frac{\lambda}{\mu}$

Распишем, тогда:

$$m_i = \frac{\lambda b_i + \mu a_i}{\lambda + \mu}$$

Для середины - понятно, что.

В дальнейшем будем рассматривать ортонормированную декартову систему координат (о.н.д.с.к.). Все единичной длины.

Будем обозначать $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \quad (5)$$

$$a_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(\frac{a_1}{\sqrt{\dots}}, \frac{a_2}{\sqrt{\dots}}, \frac{a_3}{\sqrt{\dots}} \right) = (\cos(\alpha), \cos(\beta), \cos(\gamma)) \quad (6)$$

Направляющие косинусы (углов вектора с осями координат)

$$\cos(\gamma) + \cos(\beta) + \cos(\alpha) = 1 \quad (7)$$

4 Полярная и сферическая система координат

ПСК определяется точкой и **полярным** лучём отсчёта из этой точки.

Связь между полярной и декартовой системой координат.

1. $r = \varphi$ - задаёт спираль Архимеда

2. Лемниската Бернулли:

$$(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2) \quad (8)$$

$$r^4 = r^2(\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)) = r^2(\cos(2\varphi)) \quad (9)$$

$$r = \sqrt{2\varphi} \quad (10)$$

3. ...

5 Преобразования координат

5.1 Параллельный перенос, сдвиг

Происходит лишь перенос точки приложения

$$\left\{ \begin{array}{l} O' = (x_0, y_0, z_0) \text{ in old system} \\ M = \vec{O'M} = (x, y, z) \\ M = \vec{O'M} = (x', y', z') \end{array} \right. \quad (11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \\ z = z' + z_0 \end{array} \right.$$

5.2 Поворот на плоскости

$$\left\{ \begin{array}{l} Old - OXY \\ New - OX'Y' \\ M = (x, y) \\ M = (x', y') \\ \left\{ \begin{array}{l} x' = r \cos(\varphi) \\ y' = r \sin(\varphi) \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos(\varphi + \alpha) = \dots = x' \cos(\alpha) - y' \sin(\alpha) \\ y = r \sin(\varphi + \alpha) = \dots = x' \sin(\alpha) + y' \cos(\alpha) \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (12)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad (13)$$

5.3 Поворот координат в пространстве

$$\vec{e}_1 = (\cos(\alpha_1), \cos(\beta_1), \cos(\gamma_1)) \quad (14)$$

$$\vec{e}_2 = (\cos(\alpha_2), \cos(\beta_2), \cos(\gamma_2)) \quad (15)$$

$$\vec{e}_3 = (\cos(\alpha_3), \cos(\beta_3), \cos(\gamma_3)) \quad (16)$$

$$x' \vec{e}_1 + y' \vec{e}_2 + z' \vec{e}_3 = x' (\cos(\alpha_1) \vec{i} + \cos(\beta_1) \vec{j} + \cos(\gamma_1) \vec{k}) + \dots \quad (17)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_1) & \cos(\alpha_2) & \cos(\alpha_3) \\ \cos(\beta_1) & \cos(\beta_2) & \cos(\beta_3) \\ \cos(\gamma_1) & \cos(\gamma_2) & \cos(\gamma_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad (18)$$