

# **Теоретический конспект по теорверу**

**Владимир Латыпов**

donrumata03@gmail.com

## **Содержание**

1 Об интегралах .....	3
2 Числовые характеристики случайных величин .....	3

## 1 Об интегралах

Можно рассматривать функции от случайных векторов. Если  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , то  $g(X)$  — случайная величина.

Более того, можно интегрировать эту штуку по вероятностному пространству  $\Omega$ :

$$\int_{\Omega} g(X(\omega)) P(d\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) P_X(dx)$$

Forward measure — мера при отображении.

**Теорема 1 (Фубини):** Пусть  $X$  — случайный вектор в  $\mathbb{R}^n$ ,  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  — борелевская функция. Тогда

$$\begin{aligned} \int g(x, y) P_{X,Y}(dx, dy) &= \int \left[ \int g(x, y) dF_Y(y) \right] dF_X(x) = \\ &= \int \left[ \int g(x, y) dF_X(x) \right] dF_Y(y) \end{aligned}$$

(один интеграл — по Forward measure, другой — по мере Лебега-Стилтьеса)

## 2 Числовые характеристики случайных величин

**Определение 2.1:** Пусть  $X$  — случайная величина. Тогда её математическим ожиданием называется число

$$\mathbb{E}X = \int_{\mathbb{R}} x dF_X(x)$$

(интеграл Лебега-Стилтьеса)

*Замечание:* Если  $X$  — дискретная случайная величина, то

$$\mathbb{E}X = \sum_{x \in \mathbb{R}} x P_X(x)$$

*Замечание:* Если  $X$  — абсолютно непрерывная случайная величина, то

$$\mathbb{E}X = \int_{\mathbb{R}} x p_X(x) dx$$

**Свойство 2.1.1** (Функция от случайной величины):  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — борелевская функция,  $X$  — случайный вектор. Тогда

$$\mathbb{E} \underbrace{g(X_1, \dots, X_n)}_Y = \int y \, dF_Y(y) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x_1, \dots, x_n) P_{dx_1, \dots, dx_n}$$

**Свойство 2.1.2** (Линейность):  $\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}X + b\mathbb{E}Y$

**Свойство 2.1.3** (Неотрицательность):

- $X \geq 0$  почти наверное  $\Rightarrow \mathbb{E}X \geq 0$ .
- $X \geq 0, \mathbb{E}X = 0 \Rightarrow X = 0$  почти наверное.

**Свойство 2.1.4** (Монотонность):  $X \leq Y$  почти наверное, то  $\mathbb{E}X \leq \mathbb{E}Y$

**Свойство 2.1.5** (Матожидание произведения независимых случайных величин):  $\mathbb{E}XY = \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$

**Теорема 1** (Неравенство Маркова): Пусть  $X$  — неотрицательная случайная величина,  $\exists \mathbb{E}X, a > 0$ . Тогда

$$P(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}X}{a}$$

*Доказательство:*

$$\mathbb{E}X = \int_0^\infty x p_X(x) \, dx \geq \int_a^\infty a p_X(x) \, dx \geq a \int_a^\infty p_X(x) \, dx = aP(X \geq a)$$

□

**Свойство 2.1.6:**  $\mathbb{E}X = \int_0^\infty P(X \geq x) dx$  для абсолютно непрерывных случайных величин.

$\mathbb{E}X = \sum_{x \in \mathbb{R}} P(X \geq x)$  для дискретных случайных величин.

**Определение 2.2:** Пусть  $X$  — случайная величина. Тогда её дисперсией называется число

$$\text{Var } X = \mathbb{D}X = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2$$

Стандартным отклонением случайной величины  $X$  называется число  $\sigma_X = \sqrt{\text{Var } X}$ . Она часто используется вместо дисперсии, потому что она имеет ту же размерность, что и  $X$ .

**Свойство 2.2.1** (Неотрицательность):  $\text{Var } X \geq 0$

**Свойство 2.2.2** (Связь с матожиданием):  $\text{Var } X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$

**Свойство 2.2.3** (Квадратичная однородность):  $\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var } X$

**Свойство 2.2.4** (Дисперсия суммы (разности)):

$$\text{Var}(X \pm Y) = \text{Var } X + \text{Var } Y \pm 2 \text{Cov}(X, Y)$$

(для независимых случайных величин  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ )

**Свойство 2.2.5** (Нулевая дисперсия и константность):  $\text{Var } X = 0 \Leftrightarrow X = C$  почти наверное

**Теорема 2** (Неравенство Чебышёва): Пусть  $X$  — случайная величина,  $\exists \mathbb{E}X, \text{Var } X$ ,  $a > 0$ . Тогда

$$P(|X - \mathbb{E}X| \geq a) \leq \frac{\text{Var } X}{a^2}$$

*Доказательство:*

$$P(|X - \mathbb{E}X| \geq a) = P((X - \mathbb{E}X)^2 \geq a^2) \leq \frac{\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2}{a^2} = \frac{\text{Var } X}{a^2}$$

□

**Определение 2.3:** Пусть  $X$  — случайная величина. Тогда для  $\alpha \in (0, 1)$

$$q_\alpha \text{ — квантиль порядка } \alpha \text{ — число, такое что } \begin{cases} P(x \geq q_\alpha) \geq 1 - \alpha \\ P(x \leq q_\alpha) \geq \alpha \end{cases}$$

Для непрерывной случайной величины  $X$  квантиль порядка  $\alpha$  — это решение уравнения  $F_X(x) = \alpha$ . Если  $F_X$  строго возрастает, то  $q_\alpha = F_X^{-1}(\alpha)$ .

Для дискретной случайной величины  $X$  квантиль порядка  $\alpha$  — это минимальное  $x$ , такое что  $P_X(x) \geq \alpha$ .

**Определение 2.4:** Медиана случайной величины  $\text{med } X$  — это квантиль порядка  $\frac{1}{2}$ .

**Теорема 3:**

$$\text{med } X = \underset{x \in \mathbb{R}}{\text{argmin}} \mathbb{E}|X - x|$$

Матожидание тоже кое-что оптимизирует, но не так круто.

**Теорема 4:**

$$\mathbb{E}X = \underset{x \in \mathbb{R}}{\text{argmin}} \mathbb{E}(X - x)^2$$

Почему не так круто, спросите вы? Потому что матожидание — это не медиана, а среднее. А среднее — это для средних, посредственных людей. А медиана — это для лучших. © Copilot

**Определение 2.5:** Момент порядка  $k$  случайной величины  $X$  — это число  $\mathbb{E}X^k$ .

**Определение 2.6:** Центральный момент порядка  $k$  случайной величины  $X$  — это число  $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^k$ .

**Определение 2.7:** Абсолютный момент порядка  $k$  случайной величины  $X$  — это число  $\mathbb{E}|X|^k$ .

**Определение 2.8:** Абсолютный центральный момент порядка  $k$  случайной величины  $X$  — это число  $\mathbb{E}|X - \mathbb{E}X|^k$ .

*Пример:* Коэффициент асимметрии случайной величины  $X$  — это, с точностью до коэффициента, центральный момент порядка 3:  $\mathbb{E} \frac{(X - \mathbb{E}X)^3}{\sigma^3}$ .

Коэффициент эксцесса случайной величины  $X$  — это, с точностью до коэффициента, центральный момент порядка 4:  $\mathbb{E} \frac{(X - \mathbb{E}X)^4}{\sigma^4} - 3$ . Минус три потому что мы хотим, чтобы эксцесс нормального распределения был нулевой.

**Определение 2.9:** Мода случайной величины  $X$  — это число  $\operatorname{argmax}_{x \in \mathbb{R}} p_X(x)$ .

Если мода одна, то говорят, что случайная величина  $X$  унимодальна.

**Определение 2.10:** Ковариация случайных величин  $X$  и  $Y$  — это число  $\operatorname{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)$ .

**Свойство 2.10.1:**  $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$ , то есть для независимых случайных величин  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ . (Но обратное неверно: если  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ , то случайные величины могут быть зависимыми)

**Свойство 2.10.2:**  $\text{Cov}(X, X) = \text{Var } X$ .

**Свойство 2.10.3** (Симметричность):  $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$ .

**Свойство 2.10.4** (Билинейность):  $\text{Cov}(aX + b, Y) = a \text{Cov}(X, Y)$ .