

# Теорвер. Домашнее задание №2

## Условная вероятность

Латыпов Владимир

22 февраля 2023 г.

# 1. Независимость в подпространстве

1. Выберем такое  $p_A$ , что  $\forall B, C \subset A : p_A(B|C) = p_\Omega(B|C)$ .

$$p_A(B|C) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{p_A(BC)}{p_A(C)} \quad (1.1)$$

$$p_\Omega(B|C) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{p(BC)}{p(C)} \quad (1.2)$$

Если мы возьмём  $p_A(D) = p(D|A) = \frac{p(DA)}{p(A)} = \frac{p(D)}{p(A)}$ ,  $D \subset A$ , то аксиомы будут, тривиально, выполнены, а числитель и знаменатель дроби  $\frac{p_A(BC)}{p_A(C)}$  отнормируется в  $p(A)$  раз, значит, требуемое соотношение тоже выполнено.

2. Пусть  $p(A) = 1$ . Докажем, что  $\forall B \in \Omega p(B|A) = p(B)$ .

$$p(B|A) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{p(AB)}{p(A)} = p(AB) =$$

$$p((\Omega \setminus (\Omega \setminus A))B) =$$

$$p(\Omega B + \setminus (\Omega \setminus A)B) \underset{disj}{=} p(B) - p((\Omega \setminus A)B) = p(B) \quad (1.3)$$

3. (a) Верно ли, что независимость в подпространстве влечёт независимость во всём пространстве?

Если  $B, C \subset A$  независимы,  $p(BC) = p(B)p(C)$ .

$$p_A(BC) = \frac{p(BC)}{p(A)} \quad (1.4)$$

$$p_A(B)p_A(C) = \frac{p(B)p(C)}{p^2(A)} = \frac{p(BC)}{p^2(A)} \quad (1.5)$$

Что верно только если  $p(A) = 1$  или кто-то из  $B, C$  — пустой: только в паталогическом случае.

Берём контрпример от балды:  $B, C$ : в Питере, Москве идёт дождь.  $A = B \cup C$ .

(b) Верна ли обратная импликация? Ровно те же формулы.

(c) Выполняется ли такая хрень для попарно независимых событий.

$$p_A(AB \cdot AC) = p_A(ABC) = \frac{p(ABC)}{p(A)} \stackrel{?}{=} p_A(AB)p_A(AC) = \frac{p(AB)p(AC)}{p^2(A)} = p(B)p(C).$$

То есть требование задачи — чтобы не были зависимы в совокупности, а условие — лишь попарная зависимость.

Контрпример:

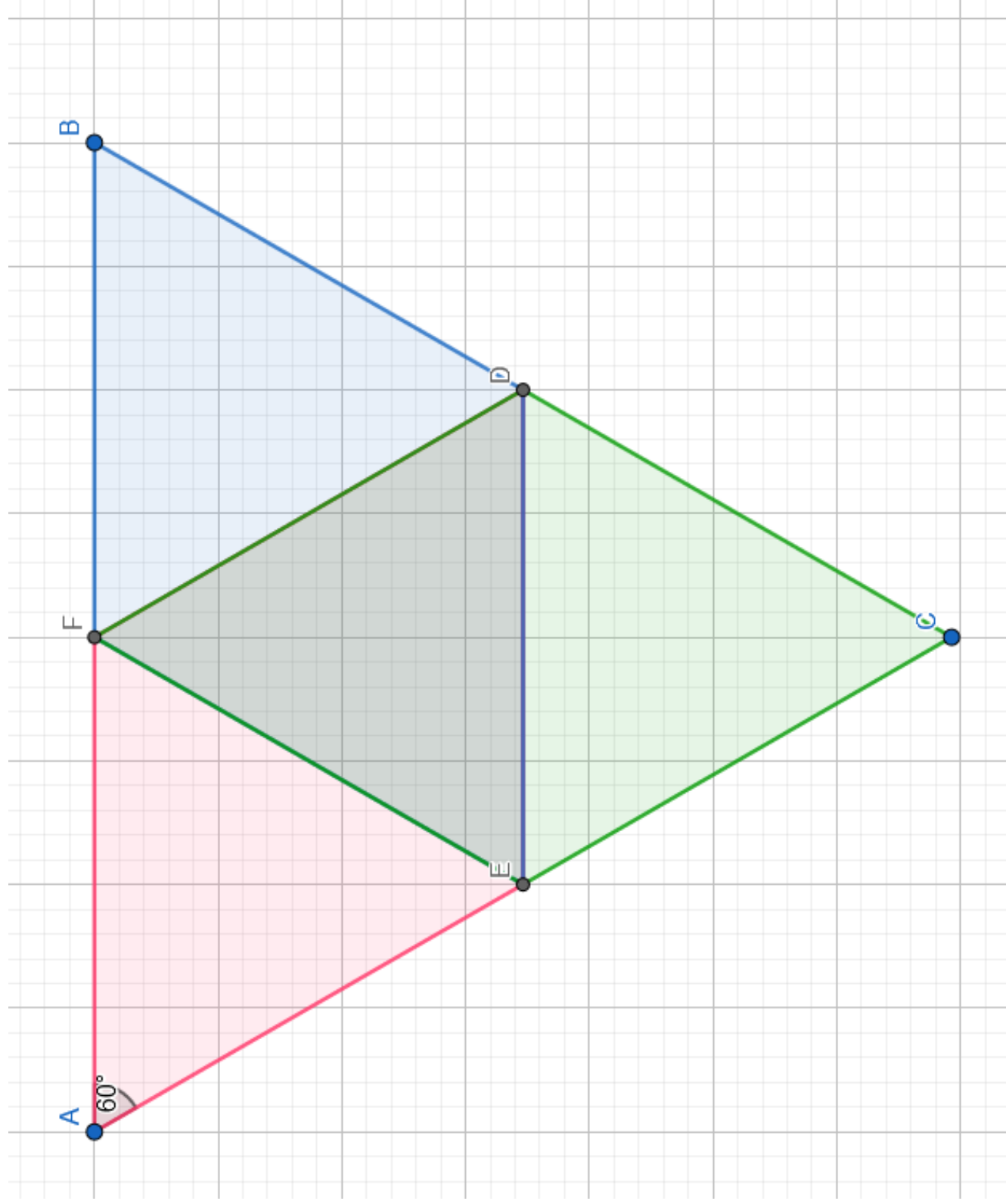


Рис. 1: Контрпример

## 2. Простая задача

$$p(k) = a^{k-1} \underbrace{\frac{1-a}{1-a^6}}_c$$

Чётные:  $E = \{2, 4, 6\}$ .

Не простые:  $N = \{1, 4, 6\}$ .

$$P(EN) = P(\{4, 6\}) = p(N) - p_1 = p(E) - p_2 = c(a^3 + a^5) \quad (2.1)$$

$$p(E)p(N) = c(a^1 + a^3 + a^5) \cdot c(a^0 + a^3 + a^5) = (ca + P(EN))(c + P(EN)) \quad (2.2)$$

$E, N$  независимы  $\Leftrightarrow$

$$P(EN) = r = (ca + r)(c + r) = c^2a + r(c + ca) + r^2 \quad (2.3)$$

То есть должно быть:  $r^2 + r(ca + c - 1) + c^2a = 0$ .

1.  $a = \sqrt{\frac{-2+\sqrt{7}}{2}}.$

$$c = \frac{1 - \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{7} - 2)}}{1 - \frac{1}{8}(\sqrt{7} - 2)^3} \quad (2.4)$$

$$r = c(a^3 + a^5) = \frac{\left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{7} - 2)}\right) \left(\frac{(\sqrt{7}-2)^{3/2}}{2\sqrt{2}} + \frac{(\sqrt{7}-2)^{5/2}}{4\sqrt{2}}\right)}{1 - \frac{1}{8}(\sqrt{7} - 2)^3} \quad (2.5)$$

Получим гадость (не ноль): [https://www.wolframalpha.com/input?i=find+r%5E2+%2B+r+%28ca+%2B+c+-+1%29+%2B+c%5E2+a+for+a%3Dsqrt%281%2F2+%28sqrt%287%29+-+2%29%29%2C+c%3D%281+-+a%29%2F%281+-+a%5E6%29%2C+r+%3D+c\\*+%28a%5E3+%2B+a%5E5%29](https://www.wolframalpha.com/input?i=find+r%5E2+%2B+r+%28ca+%2B+c+-+1%29+%2B+c%5E2+a+for+a%3Dsqrt%281%2F2+%28sqrt%287%29+-+2%29%29%2C+c%3D%281+-+a%29%2F%281+-+a%5E6%29%2C+r+%3D+c*+%28a%5E3+%2B+a%5E5%29)

2. Получим ноль: [https://www.wolframalpha.com/input?i=find+r%5E2+%2B+r+%28ca+%2B+c+-+1%29+%2B+c%5E2+a+for+a%3Dsqrt%281%2F2+%28sqrt%285%29+-+1%29%29%2C+c%3D%281+-+a%29%2F%281+-+a%5E6%29%2C+r+%3D+c\\*+%28a%5E3+%2B+a%5E5%29](https://www.wolframalpha.com/input?i=find+r%5E2+%2B+r+%28ca+%2B+c+-+1%29+%2B+c%5E2+a+for+a%3Dsqrt%281%2F2+%28sqrt%285%29+-+1%29%29%2C+c%3D%281+-+a%29%2F%281+-+a%5E6%29%2C+r+%3D+c*+%28a%5E3+%2B+a%5E5%29)

## 3. Контрпримеры

- Да,  $A = \emptyset$ .
- $B : 2 \times 2 = 4$ ,  $A$  — злая воля сумасшедшего диктатора.
- $A = B$  : Я сегодня пойду гулять.

## 4. Неравенства

1. Буль:

- Буль1 [aka Полуаддитивность меры]:  $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i)$ .

Заведём  $B_i = A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j$ . Тогда они дизъюнктны,  $B_i \subset A_i$  и имеют то же объединение.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = P\left(\bigsqcup_{i=1}^n B_i\right) = \sum_{i=1}^n P(B_i) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i) \quad (4.1)$$

- Буль2:  $P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^n P(\bar{A}_i)$ .

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P\left(\overline{\bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i}\right) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^n P(\bar{A}_i) \quad (4.2)$$

## 2. Буль-Буль

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^n P(\bar{A}_i) = 1 - \left(n - \sum_{i=1}^n P(A_i)\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - (n-1) \quad (4.3)$$

## 3. Буль-Буль-Буль [Куниасс]

$$(!)\forall k P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i \neq k} P(A_i \cap A_k) \quad (4.4)$$

НУО,  $k = 1$ .

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= P\left(\left(A_1 \setminus \bigcup_{i=2}^n A_i\right) \cup \bigcup_{i=2}^n A_i\right) \leq \\ &P(A_1) - \sum_{i \neq 1} P(A_1 \cap A_i) + \sum_{i=2}^n P(A_i) = \\ &\sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i \neq 1} P(A_1 \cap A_i) \end{aligned} \quad (4.5)$$

## 5. Априорные шары

Заметим, что по определению условной вероятности,  $P(B_j|A_k) = \frac{p(B_j \cap A_k)}{p(A_k)}$ , а это ровно числа, фигурирующие в подсказке. Если поделить одно на другое, получится ровно то, что надо.

Равенства из подсказки получаются, если сначала *выбрать* позиции белых шаров, а потом расставить (с возвратом или без) конкретные белые/цветные шары на них. В первом случае вылезает обычная степень, втором — убывающая.

## 6. „Добавленный“ белый шар

$A$  — оставшийся шар — белый.  $B$  — вытащили белый.

$W$  — добавили белый шар.

$$P(A|B) = \frac{p(AB)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{2}}{p(W)p(B|W) + p(\overline{W})p(B|\overline{W})} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad (6.1)$$

## 7. А было ли письмо?

$A$  — письмо есть.  $B$  — письмо есть в первых 7-и.

$$p(A|\overline{B}) = p(A) \frac{p(\overline{B}|A)}{p(\overline{B})} = p \frac{\frac{1}{8}}{1 - \frac{7}{8}p} = \frac{p}{8 - 7p} \quad (7.1)$$

Заметим, что без дополнительной информации, вероятность найти письмо в последнем ящике была бы  $\frac{p}{8}$ , а так она повышается, причём при больших  $p$  повышается сильнее.

## 8. Совисимая незакупность

Разобьём на  $2^n$  дизъюнктивных событий  $\bigcap A_i^{[C]}$ , каждое из которых непусто, тем самым покажем, что как минимум  $2^n$  различных элементов пространства точно есть.

**Лемма 1.** Если события  $\{B_i\}_{i=0}^n$  независимы в совокупности, то события  $B_1, \dots, \overline{B_k}, \dots, B_n$  — тоже независимы в совокупности.

*Доказательство.* Если  $k \notin I \subset [1; n]$ ,  $p\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = p\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \prod_{i \in I} p(B_i)$  (ничего не меняется).

Если  $k \in I \subset [1; n]$ ,

$$\begin{aligned} p\left(\bigcap_{i \in I} B'_i\right) &= p\left(\overline{B}_k \cap \bigcap_{i \in (I \setminus \{k\})} B_i\right) = p\left(\bigcap_{i \in (I \setminus \{k\})} B_i\right) - p\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) \\ &= \prod_{i \in (I \setminus \{k\})} B_i - \prod_{i \in I} B_i \\ &= (1 - p(B_k)) \prod_{i \in (I \setminus \{k\})} B_i = \prod_{i \in I} p(B'_i) \quad (8.1) \end{aligned}$$

■

А значит, для любой битовой маски окажется, что событие  $\bigcap A_i^{[C]}$ , где дополнения стоят на местах нулей, имеет ненулевую вероятность (каждый из сомножителей не ноль по условию):

$$\prod_{i=0}^n \begin{cases} p(A_i) & i \in I \\ 1 - p(A_i) & i \notin I \end{cases} \quad (8.2)$$

Итак, получили  $2^n$  дизъюнктивных непустых событий  $\bigcap A_i^{[C]}$

*Замечание.* Почему эти пересечения событий дизъюнктивно разбивают  $\Omega$ ?

*Доказательство.* Возьмём точку  $x \in \Omega$  и докажем, что существует единственная битовая маска, содержащая её.

⊕ Выберем такое  $I(x)$ , что  $i \in I$  при  $x \in A_i$ . Тогда  $x \in \bigcap_{i=0}^n \begin{cases} p(A_i) & i \in I \\ 1 - p(A_i) & i \notin I \end{cases}$

⊕ Никакому другому пересечению такого вида  $x$  не принадлежит, так как у другого найдётся место, в котором требование противоположно таковому в  $I(x)$  тогда  $x$  ему не удовлетворяет. ■

Пример для  $2^n$  — гиперкуб с событиями  $A_i$ :  $i$ -й бит = 1.