Конспект к экзамену по билетам (математический анализ) (3-й семестр)

Латыпов Владимир (конспектор)
t.me/donRumata03, github.com/donRumata03, donrumata03@gmail.com

Лимар Иван Александрович (лектор)
https://t.me/limvan

11 апреля 2023 г.

Содержание

1. Как работать с этим сжатым конспектом

Составлено в соответствии с лекциями весны 2023

2. Определения

Определение (Веростностное пространство). Это пространство с *вероятностной* (то есть $P(X) = 1$) мерой: мера должна быть счётно-аддитивной функцией $2^X \to [0, \infty)$ на σ-алгебре.

Используется «птичий язык»:

$$AB \overset{\text{def}}{=} A \cap B$$
$$A + B \overset{\text{def}}{=} A \cup B$$
$$\overline{A} \overset{\text{def}}{=} A^{\complement}$$

Почему определяем на какой-то странной сигма-алгебре, а не на полной (2^X)?

В случае с $\mathbb{R}^n$ — на всём не получится сделать адекватную меру, так как, например, если в $\mathbb{R}$ объявим $\mu[0, 1] = 1$, то множество Витали будет неизмеримо.

(Вспомним из матана, что вообще любая мера, инвариантая относительно сдвига, на той же сигма-алгебре — в константу раз отличается от меры Лебега).

Определение (Вероятностное пространство *в широком смысле*). Теперь работаем в алгебре, а мера — счётно-дизъюнктно аддитивна на множествах, объединение которых уже лежит в алгебре.

Теорема 1 (Единственность стандартного распространения). *...веростностной меры с веростностного пространства в широком смысле на вероятностное пространство в обычном, а именно — на .*

Доказательство. Как легко видеть, $\left|\bigoplus_{k \in S} \left(\mathfrak{K}^{\mathbb{F}^{\alpha}(i)}\right)_{i \in \mathcal{U}_k}\right| \preccurlyeq \aleph_1$ при $[\mathfrak{H}]_{\mathcal{W}} \cap \mathbb{F}^{\alpha}(\mathbb{N}) \neq \emptyset$. ■

Замечание. Из матана известно, что достаточно потребовать первоначальное задание меры на полукольце и сигма-конечности, чтобы она совпадала со стандартным распространением на сигма-алгебре измеримых.

Пример. Примеры веростностных пространств:

1. Дискретное: состоит из элементарных исходов, у каждого вес. $\mathbb{A} = 2^{\Omega}$, $P(A) = \sum_{w \in A} w$
   (a) Броски монеты до первого орла
   (b) Модель классической вероятности: $\forall i : w_i = \frac{1}{n}$. *Колчичество* элементарных исходов в событии считается комбинаторикой.

      Пример: шарики и перегородки кодируют k-элементные мультимножества n объектов или же n-кортежи длины k.
2. Геометрическая вероятность. $\Omega \subset \mathbb{R}^n, \Omega \in \mathbb{A}_n$, $P(A) = \frac{P(A)}{P(\Omega)}$. Пример: вычисление π Монте-Карловскими бросками иголки (считаем меру допустимого множества, интегрируя его сечение по проекции).

Свойство 2.1 (Элементарные свойства веростности).

- *Монотонность*
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- *Включения-исключения*
- *Полуаддитивность*

Лекция 2

Теорема 2 (Равносильность непрерывности и счётной аддитивности объёма). *Утверждения равносильны:*

1. *P — мера*
2. *P — объём, непрерывный снизу*
3. *P — объём, непрерывный сверху*

Доказательство. $2 \Leftrightarrow 3$: инвертируем.

$(2, 3) \Leftrightarrow 1$: разбиваем на кольца, остаток сходящегося ряда $\to 0$. ∎

Теорема 3 (Формула полной вероятности). *Пусть* $\{A_i\}^n$ *дизъюнктны,* $B \in \bigcup_i A_i$*.*

Тогда $P(B) = \sum_i P(A_i)P(B|A_i)$*.*

Теорема 4 (Байеса).

$$\underbrace{P(A|B)}_{\text{likelihood}} = \frac{\overbrace{P(A)}^{\text{prior}}\,\overbrace{P(B|A)}^{\text{likelihood}}}{\underbrace{P(B)}_{\text{marginal}}} \tag{2.1}$$

Можно переписать в виде:

$\{A_i\}$ — система дизъюнктных событий, $B \in \bigcup A_i$. (((Каждое из них „могло вызвать“ B и какое-то точно вызвало))). Вопрос — какое:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_i P(A_i)P(B|A_i)} \tag{2.2}$$

То есть при получении информации, что произошло B, ожидания событий скейлятся пропорционально тому, насколько вероятно они вызывают B.

3. Процесс Бернулли, предельные теоремы

Процесс Бернулли: серия экспериментов подбрасывания p-монетки (p может как меняться, так и не меняться).

Предельными теоремами можно аппроксимировать биномиальное (или более извращённое, но порождённое процессом Бернулли) распределение

Теорема Пуассона: аппроксимация $P(S_n = k)$ для $p_n\ \frac{\lambda}{n}$ распределением Пуассона: $e^{\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.

(Локальная) теорема Муавра-Лапласа: асимптотическое поведение $P(S_n = k)$ при $n, (n-k) \to \infty$.

Интегральная теорема Муавра-Лапласа (частный случай ЦПТ): аппроксимация биномиального распределения нормальным ($F_{\text{Bin}} \approx \text{erf}$).

4. Переход вероятностному пространству распределения

Случайная величина — $\in \mathcal{B}\left(\Omega \to \mathbb{R}\right)$ (измерима относительно сигма-алгебры этого в.п.).

Распределение с.в.: $P_X : \mathcal{B}_1 \to \mathbb{R}$.

$$P_X(B) \overset{\text{def}}{=} P\left(\{\omega | X\left(\omega\right) \in B\} = P\left(X^{-1}(B)\right) \overset{\text{def}}{=} P\left(X \in B\right)\right) \tag{4.1}$$

Получили веростностную меру на борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}_1$.

Вроде и существует какое-то вероятностное пространство с каким-то множеством исходов, но часто будем говорить о некоей «проекции» этой информации — о функции распределения случайной величины: $P_X\left(A\right) = P$

Абсолютно непрерывная с.в., если найдётся p_X, т.ч.: $P_X\left(A\right) = \int_A p_X \,\mathrm{d}\mu$

5. Примеры дискретных распределений

- Одноточечное $I_c : P\left(I_c = c\right) = 1$
- Бернулли: X $\text{Bern}\left(p\right) \Leftrightarrow \begin{cases} P(X=0) = 1-p \\ P(X=1) = p \end{cases}$
- Бионмиальное: X $\text{Bin}\left(n,p\right) \Leftrightarrow P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$
- Обратное биномиальное (вероятность, что продолбаем k лишних шагов до достижения r-того успеха): X $\text{NB}\left(r,p\right) \Leftrightarrow X = \min\{n | S_n \geqslant r\} - r; P(X=k) = \binom{r-1}{k+r-1} p^r q^k$...
- Частный случай — геометрическое распределение: количество неудач до первого выпадения удачи:

6. Примеры непрерывных распределений

Юниформа, автомат и противогаз

Намаааа

Гамма

Пуассон

Экспоненциальное