Типовик по линейной алгебре 2, задание 7»

Латыпов Владимир Витальевич,
ИТМО КТ M3138, ***вариант 10***

8 апреля 2022 г.

1. Формулировка условия

Утверждение 1. Задача. Заданы три линейные формы, определенные на векторах $x(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ пространства .

$$\begin{cases} (f^1, x) = -8\xi^1 + \xi^2 - 8\xi^3 \\ (f^2, x) = 9\xi^1 + \xi^2 + 4\xi^3 \\ (f^3, x) = -9\xi^1 - 3\xi^2 - 2\xi^3 \end{cases} \tag{1}$$

1. Доказать, что они образуют базис в пространстве $\left(\mathbb{R}^3\right)^*$ линейных форм;
2. Найти базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ пространства $\mathbb{R}^3$, сопряженный к базису $\{f^1, f^2, f^3\}$.
3. С помощью теории линейных форм найти координаты вектора $x = (4, -2, 13)^\top$ в этом базисе и проверить вычисления прямым разложением вектора x по базису $\{e_1, e_2, e_3\}$ пространства $\mathbb{R}^3$.
4. Найти коэффициенты формы $(f, x) = 5\xi^1 - 4\xi^2 + 2\xi^3$ относительно базиса $\{e_1, e_2, e_3\}$ пространства $\mathbb{R}^3$. Вычисления проверить прямым разложением формы f по базису $\{f^1, f^2, f^3\}$ пространства $\left(\mathbb{R}^3\right)^*$.

2. Проверка базовости

Так как их и так $3 = \dim \mathbb{R}^3$, достаточно проверить линейную независимость. Для этого заметим, что в каноническом базисе

$$\begin{cases} f^1 = (a^1_1, a^1_2, a^1_3) = (-8, 1, -8) \\ f^2 = (a^2_1, a^2_2, a^2_3) = (9, 1, 4) \\ f^3 = (a^3_1, a^3_2, a^3_3) = (-9, -3, -2) \end{cases} \tag{2}$$

Тогда достаточно проверить ранг матрицы $\begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \\ f^3 \end{pmatrix}$.

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix}-8 & 1 & -8\\ 9 & 1 & 4\\ -9 & -3 & -2\end{pmatrix} = 3 \tag{3}$$

То есть они ЛН $\Rightarrow$ получаем успех, это базис.

3. Нахождение сопряжённого базиса

Необходимое и достаточное условие сопряжённости — чтобы $f^i(e_j) = \delta^i_j$, то есть чтобы одни друг другу действительно были координатными функциями. То есть нужно решить матричное уравнение $F \cdot E = \Delta$. (За Δ считаем матрицу символок Кронекера).

$$F = \begin{pmatrix}-8 & 1 & -8\\ 9 & 1 & 4\\ -9 & -3 & -2\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{5}{23} & \frac{13}{23} & \frac{6}{23}\\ \frac{-9}{23} & \frac{-28}{23} & \frac{-20}{23}\\ \frac{-9}{23} & \frac{-33}{46} & \frac{-17}{46}\end{pmatrix} \tag{4}$$

Тогда

$$e_1 = \begin{pmatrix}\frac{5}{23}\\ \frac{-9}{23}\\ \frac{-9}{23}\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}\frac{13}{23}\\ \frac{-28}{23}\\ \frac{-33}{46}\end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix}\frac{6}{23}\\ \frac{-20}{23}\\ \frac{-17}{46}\end{pmatrix} \tag{5}$$

4. Раскладываем контрвектор по базису двумя способами

4.1. Через ковекторы

Для нахождения очередной координаты достаточно применить очередную координатную функцию из сопряжённого базиса.

$$\eta^1 = f^1(x) = \begin{pmatrix}-8 & 1 & -8\end{pmatrix} \begin{pmatrix}4 \\ -2 \\ 13\end{pmatrix} = -138 \quad (6)$$

$$\eta^2 = f^2(x) = \begin{pmatrix}9 & 1 & 4\end{pmatrix} \begin{pmatrix}4 \\ -2 \\ 13\end{pmatrix} = 86 \quad (7)$$

$$\eta^3 = f^3(x) = \begin{pmatrix}-9 & -3 & -2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}4 \\ -2 \\ 13\end{pmatrix} = -56 \quad (8)$$

Получим, что x в базисе e_i — это $\begin{pmatrix}\eta^1 \\ \eta^2 \\ \eta^3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-138 \\ 86 \\ -56\end{pmatrix}$

4.2. Через решение системы

Альтернытивный вариант — решить систему

$$E \begin{pmatrix}\eta^1 \\ \eta^2 \\ \eta^3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 \\ -2 \\ 13\end{pmatrix} \quad (9)$$

Решая это через обратную матрицу (базис же), получаем:

$$\begin{pmatrix}\eta^1 \\ \eta^2 \\ \eta^3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-138 \\ 86 \\ -56\end{pmatrix} \quad (10)$$

Решено через matrixcalc.org: `https://matrixcalc.org/slu.html#solve-using-inverse-matrix-method(%7B%7B5/23,13/23,6/23,4%7D,%7B-9/23,-28/23,-20/23,-2%7D,%7B-9/23,-33/46,-17/46,13%7D%7D)`

Символично, что в процессе возникла как раз та самая матрица F и что действия далее были такие же, что и в первом способе.

5. Раскладываем ковектор по базису двумя способами

5.1. Через контрвекторы

Для нахождения очередной координаты достаточно применить очередную координатную функцию из сопряжённого базиса.

$$\zeta_1 = e_1(f) = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{23} \\ \frac{-9}{23} \\ \frac{-9}{23} \end{pmatrix} = \frac{43}{23} \tag{11}$$

$$\zeta_2 = e_2(f) = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{13}{23} \\ \frac{-28}{23} \\ \frac{-33}{46} \end{pmatrix} = \frac{144}{23} \tag{12}$$

$$\zeta_3 = e_3(f) = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{6}{23} \\ \frac{-20}{23} \\ \frac{-17}{46} \end{pmatrix} = \frac{93}{23} \tag{13}$$

Получим, что f в базисе f^i — это $\begin{pmatrix} \zeta_1 & \zeta^2 & \zeta^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{43}{23} & \frac{144}{23} & \frac{93}{23} \end{pmatrix}$

Как раз заметим, что

$$\begin{pmatrix} \frac{43}{23} & \frac{144}{23} & \frac{93}{23} \end{pmatrix} F = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \end{pmatrix} \tag{14}$$

5.2. Через решение системы

Альтернытивный вариант — решить систему

$$\begin{pmatrix} \zeta_1 & \zeta^2 & \zeta^3 \end{pmatrix} F = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \end{pmatrix} \tag{15}$$

То есть

$$F^\top \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta^2 \\ \zeta^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{16}$$

Решая это через обратную матрицу (базис же), получаем:

$$\begin{pmatrix} \frac{43}{23} & \frac{144}{23} & \frac{93}{23} \end{pmatrix} \tag{17}$$

Решено через matrixcalc.org: `https://matrixcalc.org/slu.html#solve-using-inverse-matrix-method(%7B%7B-8,9,-9,5%7D,%7B1,1,-3,-4%7D,%7B-8,4,-2,2%7D%7D)`

Символично, что в процессе возникла как раз та самая матрица E и что действия далее были такие же, что и в первом способе. А также то, что в обеих частях текст почти совпадает...