

# **ДЗ 11**

## **(кардинальное)**

**Владимир Латыпов**  
donrumata03@gmail.com

## Содержание

1 Существенность для ординальности .....	3
2 Никто не принадлежит себе .....	3
3 Равенство элементов множеств из одного элемента .....	3
7 .....	3
8 ... ..	3
9 ... ..	3
10 (Кардинальная) .....	4
10.1 Непрерывные функции .....	4
10.2 Произвольные вещественнозначные функции .....	4
11 Тёмный кардинал .....	5
11.1 Приложение: континуальность $\mathbb{R}$ .....	5

## 1 Существенность для ординальности

*Пример (Вполне упорядоченное отношением  $\in$ , но не транзитивное):*  $A = \{\{\emptyset\}\}$ . С одной стороны, у любого непустого подмножества (то есть самого  $A$ ) есть минимальный элемент  $\{\emptyset\}$ .

Однако  $\{\emptyset\} \in A$ ,  $\emptyset \in \{\emptyset\}$ , но  $\{\emptyset\} \notin A$ , что противоречит определению транзитивности.

*Пример (Транзитивное, но не вполне упорядоченное):*  $B = \{\{\{\emptyset\}\}, \emptyset\}$ ,  $C = \{\{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}\}$

## 2 Никто не принадлежит себе

Аксиома фундирования: непустое множество  $A$  содержит элемент, не пересекается с  $A$ .

Но если  $x \in x$ , то для  $\{x\}$  должно быть  $x \cap \{x\} = \emptyset$ , однако  $x \cap \{x\} = x \neq \emptyset$ .

## 3 Равенство элементов множеств из одного элемента

7

Определение биективности

8 ...

$$\begin{aligned} \exists b_0 \in b \\ \forall x. x \in A \rightarrow \exists! y. \langle x, y \rangle \in b \end{aligned}$$

Возьмём отношение, где второй элемент константен (который существует, так как  $b$  непусто), а первый любой. Существует, так как фильтруем декартово произведение (существует по задаче) по предикату  $\langle x, y \rangle \rightarrow y = b_0$ .

Оно функционально.

Первая часть (существование)

9 ...

## 10 (Кадинальная)

### 10.1 Неперерывные функции

**Лемма 10.1.1:**  $|\mathbb{R}| \leq |C(\mathbb{R})|$

*Доказательство:* Инъекируем  $x \mapsto \lambda y. x$ , все функции такого виде для разных  $x$  — разные.  $\square$

**Теорема 10.1.2:**  $|C(\mathbb{R})| \leq |\mathbb{R}|$

*Доказательство:*

- $|C(\mathbb{R})| = |C(\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R})|$ , отображение:
  1. в сторону  $C(\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R})$ : доопределяем по непрерывности
  2. в сторону  $C(\mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R})$ : сужаем
- $|C(\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R})| \leq |\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}| = |\mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ , так как возьмём  $(\mathbb{P} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}) : \langle p, s \rangle \rightarrow \text{map } (\lambda y. p^y) s$

$\square$

**Теорема 10.1.3:**  $|\mathbb{R}| = |C(\mathbb{R})|$

*Доказательство:* Теорема об антисимметричности.  $\square$

### 10.2 Произвольные вещественнозначные функции

**Лемма 10.2.1:**  $|\mathcal{P}(\mathbb{R})| \leq |\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}|$

*Доказательство:*  $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow (\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}) : s \rightarrow \chi_s$   $\square$

Обратно:

**Лемма 10.2.2:**  $|\mathcal{P}(\mathbb{R})| \geq |\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}|$

*Доказательство:*  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}$ , так как кривая Гильберта.

$|\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}| \leq \mathcal{P}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) = \mathcal{P}(\mathbb{R})$   $\square$

**Теорема 10.2.3:**  $|\mathcal{P}(\mathbb{R})| = |\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}|$

*Доказательство:* Теорема об антисимметричности. □

## 11 Тёмный кардинал

- $|\mathbb{R}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ , так как множество натуральных чисел — суть битовый вектор записи вещественного в двоичной системе счисления.
- $|\mathbb{R}| \geq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ , так как возьмём десятичную запись и множества, где из каждого десятка есть все, кроме 1 и 9.
- Второе: частный случай пункта 1 номера 10
- Третье: Непрерывные  $|Q \rightarrow Q|$  — хотя бы континуально, так как  $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}) : s \rightarrow \chi_s$

Итого: все континуальны.

### 11.1 Приложение: континуальность $\mathbb{R}$

**Теорема 11.1.1:**  $|\mathbb{R}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$

*Доказательство:* Число  $x$  на отрезке  $[0, 1]$  сопоставим *какое-то*, например, минимальное как битовый вектор его (бесконечное) представление в двоичной системе счисления (легко делается итеративным алгоритмом и индукцией), а ему — множество  $\{n \in \mathbb{N} \mid x_2[n] = 1\}$ . Это инъекция, так как разные числа отличаются хотя бы □

**Теорема 11.1.2:**  $|\mathbb{R}| \geq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$

*Доказательство:*

Построим инъекцию  $B \rightarrow \mathbb{R}$ , где

$$B = \left\{ S \subset \mathbb{N} \mid \forall i \in \mathbb{N}_0 : \left| S \Big|_{[10i, 10i+10)} \right| = 1 \wedge 10i + 0 \notin S \wedge 10i + 9 \notin S \right\}.$$

$|B| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$  ( $\geq$ , так как  $f : |\mathcal{P}(\mathbb{N})| \rightarrow |B|$ ,  $s \mapsto \text{map } (\lambda x. x \cdot 10 + 5) s$  — инъекция).

Итак, финальная, давно анонсированная инъекция:  $S \mapsto \{S\}_{10}$  — представление в десятичной системе счисления, где  $i$ -й разряд — тот единственный  $d \in S \Big|_{[10i, 10i+10)}$ .

Покажем, что это инъекция. Пусть у числа  $\in [0, 1]$  два представления в таком виде. Тогда посмотрим на первый разряд  $k$ , в котором они отличаются. Тогда  $0 = |\{S\}_{10} - \{S\}_{10}| \geq 10^{-k-1}$ , что неверно.  $\square$

**Лемма 11.1.3:** Разные бинарные представления допускают только рациональные числа.

*Доказательство:* Пусть есть два разных вектора  $a_i, b_i$ , сходящихся к одному и тому же числу, то есть  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{[1,n]})_{\mathbb{R}} = a = b = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_{[1,n]})_{\mathbb{R}}$ . Покажем, что одно из них с какого-то момента  $\equiv 1$ , а другое  $\equiv 0$ .

Рассмотрим минимальный индекс  $i$ , в котором они отличаются (имеем право в силу вполне упорядоченности  $\mathbb{N}$ ). Нуо,  $a_i = 0, b_i = 1$ . Покажем, что  $\forall j > i : a_j = 1, b_j = 0$ . Действительно, если найдётся  $j^* : a_{j^*} = 0 \vee b_{j^*} = 1$ , то  $b - a \geq 2^{-j^*-1}$ , что противоречит определению предела.

Таким образом, если число допускает несколько представлений, оно рационально как конечная двоичная дробь.  $\square$

*Доказательство:* (альтернативное, теоремы 2). Иррациональные числа биективно соответствуют представлениям себя в двоичной системе счисления. А рациональные — счётны. Тогда их объединение равномощно битовым векторам.  $\square$