Типовик по линейной алгебре 3, Задание 3
«Тензоры в линейном пространстве. Преобразование координат.»

Латыпов Владимир Витальевич,
ИТМО КТ M3138, ***вариант 10***

12 июня 2022 г.

1. Формулировка условия

Утверждение 1. Тензор $\alpha_{kl}^{ij} \in T_{(2,2)}$ задан четырехмерной матрицей второго порядка $A = \alpha_{kl}^{ij}$. Задана матрица перехода T от старого базиса $\{e_i\}_{i=1}^2$ к новому базису $\{\tilde{e}_i\}_{i=1}^2$

- Вычислить элемент $\tilde{\alpha}_{kl}^{ij}$ матрицы тензора в новом базисе
- Вычислить следующие свертки тензора (в старом базисе): $\alpha_{ki}^{ij}, \alpha_{kj}^{ij}, \alpha_{ij}^{ij}, \alpha_{ji}^{ij}$.

Data section:

$$T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$A = \left\| \begin{array}{cc|cc} -1 & -3 & -4 & -1 \\ 5 & 2 & 4 & 6 \\ \hline 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right\| \tag{2}$$

2. Вычисление элемента матрицы

Как известнго из формулы перехода матрицы тензора к новому базису,

$$\tilde{\alpha}_{k_1 \cdots k_p}^{m_1 \cdots m_q} = \alpha_{j_1 \cdots j_p}^{i_1 \cdots i_q} t_{k_1}^{j_1} t_{k_2}^{j_2} \cdots t_{k_p}^{j_p} s_{i_1}^{m_1} s_{i_2}^{m_2} \cdots s_{i_q}^{m_q} \tag{3}$$

В нашем случае:

$$\tilde{\alpha}_{12}^{21} = \sigma_k^2 \sigma_l^1 \tau_1^m \tau_2^n \alpha_{mn}^{kl} \tag{4}$$

, где σ — элементы матрицы S, а τ — матрицы T.

$$S = T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Переставим суммы и вычислим промежуточно матрицу B тензора $b_{mn} = \sigma_k^2 \sigma_l^1 \alpha_{mn}^{kl}$. Матрица станет разменрности 2×2. σ_k^2 и σ_l^1 — срезы матрицы S по строке. Причём в случае σ_k^2 — k сопадает с номером строки, а l — с номером столбца, а значит, σ_k^2 будет слева, а σ_l^1 — справа:

$$B_{mn} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} A_{mn} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Получим

$$B = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Теперь применим к этим частичным суммам умножение на T. (Теперь будет постоянен номер столбца для обеих, причём слева надо умножать на τ_1^m номер строки совпадает именно у него)

$$\tilde{\alpha}_{12}^{21} = \tau_1^m \tau_2^n b_{mn} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} B_{mn} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \tag{8}$$

3. Вычисление свёрток

На повестке дня $\alpha_{ki}^{ij}, \alpha_{kj}^{ij}, \alpha_{ij}^{ij}, \alpha_{ji}^{ij}$.

У α_{ki}^{ij} (2×2) вторая и третья координата определяются первой и второй координатой матрицы, а по первой и четвёртой координате берётся сумма по таким, чтобы они совпадали.

То есть фиксирован для элемента матрицы слой (и равен номеру строки матрицы), а также фиксирован номер внутреннего столбца (и равен номеру столбца матрицы):

$$\alpha_{ki}^{ij} = \beta_k^j = \begin{pmatrix} -1+4 & 0+0 \\ -3+6 & -2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

У α_{kj}^{ij} (2×2) первая и третья координата определяются первой и второй координатой матрицы, а по второй и четвёртой координате берётся сумма по таким, чтобы они совпадали.

$$\alpha_{kj}^{ij} = \gamma_k^i = \begin{pmatrix} -1-1 & 0+0 \\ 5+6 & 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 11 & 3 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Следующие два тензора можно посчитать используя первые два:

$$\alpha_{ij}^{ij} = \gamma_k^k = \operatorname{tr}\Gamma = -2+3 = 1 \tag{11}$$

$$\alpha_{ji}^{ij} = \beta_k^k = \operatorname{tr} B = 3+0 = 3 \tag{12}$$