Конспект по математическому анализу (1-й семестр)

Латыпов Владимир (конспектор)
donrumata03@gmail.com

Виноградов Олег Леонидович (лектор)
olvin@math.spbu.ru

September 13, 2021

Contents

1 Введение

1.1 Множества

Kurale, **Kurale**, *Kurale*, ***Kurale***

1.1.1 Определения

Определение 1 (Множество). X - множество, это аксиома, его метафизическая сущность не подлежит обсуждению.

$$\begin{cases} x \in X \\ x' \notin X \end{cases} \tag{1}$$

Пример. Задания множества:

$$set = \{1, 2, 3\} \tag{2}$$

$$set = \{x | x \in \mathbb{N}\} \tag{3}$$

$$set = \{\{1, 4\}, 898\} \tag{4}$$

Определение 2 (Подмножество).

$$A \subset B \iff \forall a \in A : a \in B \tag{5}$$

2 Вещественные числа

Множество вещестыенных чисел - множество, удовлетворяющее 16-и аксиомам.

1. Аксиомы поля (9 штук)

3 Оторбражения

Определение 3 (Отображение). $]\exists X, Y - sets, f - rule$ Говорят, что задано оторбражение, если $f: X \longrightarrow !Y$
(сопоставляет единстыенный Y каждому $x \in X$)

Отображение называют f, но оно включает как f, так и X, Y

$$f: X \longrightarrow Y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} f: X \mapsto Y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} X \xrightarrow{f} Y \tag{6}$$

Если X, Y - числовые множества, то f - функция. Если Y - числовое множество, X - любое, то это "функционал".

X - область задания, область отправления. Y - множество значений, область прибытия.

$x \in X$ - аргумент, независимая переменная.

Определение 4 (Последовательности). Последовательность - функция натурального аргумента.
Если при этом Y - число, то f - числовая последовательность.
А если $\forall y \in Y : y \in \mathbb{Z}$, то это двусторонняя последовательность.

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \tag{7}$$

Определение 5. Семейство - это то же, что и отображение.

Определение 6 (Естественная область определения). Естественная область определения: то, где выражение имеет смысл.

Определение 7.

$$id_X : X \mapsto X \tag{8}$$

$$f^{-1} \circ \; = id_X \tag{9}$$

Определение 8 (Образ).

$$B = f(A) = \{y \in Y : \exists x \in A : f(x) = y\} \tag{10}$$

Определение 9 (Прообраз). Прообраз множества B:

$$A = f^-1(B) = \{x \in X : f(x) \in B\} \tag{11}$$

Определение 10 (Композиция). ...

3.0.1 Инъекция, сюрьекция, биекция...

$\vartriangleleft \ f : X \longrightarrow Y$

Определение 11 (Инъективное оторбражение). Если $\forall x_1, x_2 \in X$: $f(x_1) \neq f(x_2)$, то отображение инъективно, *обратимо*.

Определение 12 (Обратимое отображение).

$$f\ is\ reversable \iff \exists f^{-1} : \ldots \tag{12}$$

Определение 13 (Сюрьективное оторбражение). Если f(X) = Y, то f сюрьективно или *отображение на*.

Определение 14. Если f одновременно и инективно, и сюрьективно, то f - взаимно-однозначное соответствие или *биективно*.

3.1 Графики

Определение 15 (График оторбражения).

$$\Gamma_f = \{(x, y) : x \in X, y = f(x)\} \subset X \times Y \tag{13}$$

Теорема 1.

$$\Gamma_f \iff f \tag{14}$$

Определение 16. Отображение, сопоставляющее каждому

$y \in f(X) \longrightarrow y \in Y$, для которого

$$f^{-1}(x) : f(X) \mapsto X \tag{15}$$

Но что такое f^{-1}? Прообраз или обратное отображение?

Если обратимо, и имеет значение, то они совпадают

Определение 17 (Сужение, распространение, расширение, привЕдение).

$$]f : X \mapsto Y, X_0 \subset X \tag{16}$$
$$f|_{X_0} \tag{17}$$

3.2 Операции над функциями

- Сложение: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
- Умножение: ...
- Деление: ...
- Вычитание: ...
- ...

3.2.1 Многомерные отображения

f_i - Координатные функции отображения f

3.3 Счётные множества

Если множества конечны, легко сравнить количество элементов. Если одно конечно, другое - бес, то понятно.

А вот вопрос - одинаковы ли бесконечности?!

Определение 18 (Равномощные множества). Множества называют *равномощными*
или *эквивалентными (по мощности)*, если $\exists$ биекция
(взаимно однозначное соответствие) между ними

Определение 19 (Бесконечное множество)**.** Не равномощно никакому подотрезку натурального ряда $\iff$ никогда не исчерпается.

Замечание. Равномощность множеств - отношение эквивалентности. Существут классы эквивалентности по мощности.

Пример. Пример равномощных множеств:

- Отрезки (возможно, разных длин)
- Концентрические (и не только) окружности
- $\ldots$
- Плоскость и сфера
- Отрезок и плоскость
- Полуинтервал и окружность

Определение 20. A - счётно $\iff A \sim \mathbb{N}$

Эквивалетное определение: можно занумеровать натуральными числами, то есть расположить в виде последовательности

Пример. Положительные, чётные, квадраты натуральных, целые, ...- всё счётные

Теорема 2. Всякое бесконечное множество содержит счётное подмножество

Proof. Есть хотя бы один элемент. Обозначим его a_1, удалим его. $\overset{induction}{\cdots}$ ■

Теорема 3. Всякое подмножество счётного множества - счётно.

Proof. $b_{n+1} = A_{min(\{n|n \in A_{indexes}\})}$, $\overset{induction}{\cdots}$ ■

Предыдущие 2 теоремы - о бедности натурального ряда.

Определение 21 (Не более, чем счётное (НБЧС))**.** = пустое, конечное или счётное.

Лемма 1. $\mathbb{N}^n, n \in \mathbb{N}$ - счётное множество

Proof. Заполняем матрицу змейкой по диагонали. Для n измерений: $\overset{induction}{\cdots}$ ■

Теорема 4. Не более чем счётное объединение (множество индексов НБЧС) не более чем счётных множеств - не более чем счётное.

Proof.

$$B = \bigcup_{k=1}^{n} A_k \quad or \quad B = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \tag{18}$$

Запишем в матрицу: $A_1, A_2 \setminus A_1, \ldots$. Получили не более чем множество $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. ■

Теорема 5. Множество $\mathbb{Q}$ - счётно.

Proof. Догадайтесь! ■

Теорема 6. Множество $\mathbb{R} \cap [0, 1]$ - несчётно.

Proof. Пусть несчётно.

$$[0, 1] = \{x_1, x_2, \ldots\} \tag{19}$$

Разобьём орезок на три части: $\left[0, \frac{1}{3}\right], \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ Рассмотрим отрезок, в котором нет точки x_1, затем - тот, в котором нет x_2, деля на три до бесконечности. Получим последовательность вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда по аксиоме о вложенных отрезках $\exists x^* : \forall n : x^* \in [a_n, b_n]$. Если пронумеровали, значит, был некий m, который Но, по построению, мы строили такой подотрезок ■

Следствие 1 (Некоторые множества тоже несчётны).

- $\mathbb{R}$ - несчётно, так как иначе его бесконечное подмножество было счётно.
- Любой невырожденный отрезок несчётен
- Любой невырожденный интервал, полуинтервал несчётен

Как строить биекцию, если выколотые точки?

Утверждение 1. Если A - бесконечно, а B - не более чем счётно, то $A \setminus B$

Свойство 1 (Характеристическое свойство бесконечных множеств). Если

Определение 22 ($|A| < |B|$). $|A| < |B| \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\exists biection\ A \leftrightarrow part(B) \wedge \nexists biection\ A \leftrightarrow B)$

Теорема 7 (Теорема Кантора-Бершнейна). Если $A \sim part(B) \&\& B \sim part(A)$, то $A \sim B$

(Теорема о том, что мощности можно сравнивать: либо)

Утверждение 2. Множество всех подмножеств имеют мощность бо́льшую,чем само множнство.

4 Последовательности в метрических пространствах

4.1 Предел последовательности

Определение 23.

$$A = \lim x_n \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 : \exists N_0 : \forall n > N_0 : |A - x_n| < \varepsilon \tag{20}$$

Определение 24 (Сходящиеся, расходящиеся последовательности).

Пример.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \tag{21}$$

$$\lim_{n\to\infty} A = A \tag{22}$$

Пример.

$$(!) \quad \forall A : \lim \{-1, 1, -1, \ldots\} \neq A \tag{23}$$

Предъявим $\varepsilon = 0.1$: $\exists n_1, n_2 : \forall n > n_1 : |A - a_n| < \varepsilon$

Замечание. Если проверено малое эпсилон, можно не проверять большие эпсилон. Например, достаточно проверять для всех $|\varepsilon| < 1$

Замечание. Не обязательно находить самый маленький номер, для данного ε.

Замечание. Одно или оба (из 2, 3) строгих неравенства можно заменить на нестрогие, это непложно доказать.

Замечание. Если заменить конечное число членов, то сходимость не нарушится и предел не изменится.

Замечание. Последнее неравенство с модулем можно переписать как двойное. Это может быть полезно при некоторых доказательствах. Интервал $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ - ε-окресность точки A. Тогда можно записать предел словами: Для любой окресности точки все члены за исключением конечного множества принадлежат этой окрестности.