Конспект к экзамену по билетам (математический анализ) (1-й семестр)

Латыпов Владимир (конспектор)
t.me/donRumata03, github.com/donRumata03, donrumata03@gmail.com

Виноградов Олег Леонидович (лектор)
olvin@math.spbu.ru

19 января 2022 г.

Содержание

1. Введение

Максимально сжатый матанал: для каждого билета будет списко сущностей (определений, теорем, замечаний, следствий и т.д.), о которых надо рассказать, а также указания к доказательствам (в тех случаях, когда это не очевидно).

2. Названия билетов (ровно как в оригинале)

1. Множества и операции над ними.
2. Аксиомы вещественных чисел.
3. Метод математической индукции. Бином Ньютона.
4. Существование максимума и минимума конечного множества, следствия.
5. Целая часть числа. Плотность множества рациональных чисел.
6. Две теоремы о „бедности" счетных множеств.
7. Теорема об объединении не более чем счетных множеств (с леммой).
8. Счетность множества рациональных чисел.
9. Несчетность отрезка.
10. Единственность предела последовательности. Ограниченность сходящейся последовательности.
11. Предельный переход в неравенстве. Теорема о сжатой последовательности.
12. Бесконечно малые. Арифметические действия над сходящимися последовательностями.
13. Свойства скалярного произведения. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца. Норма, порожденная скалярным произведением.
14. Неравенства Коши-Буняковского в $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$. Сходимость и покоординатная сходимость.
15. Бесконечно большие и бесконечно малые. Арифметические действия над бесконечно большими.

16. Свойства открытых множеств. Открытость шара. Внутренность.
17. Предельные точки. Связь открытости и замкнутости. Свойства замкнутых множеств. Замыкание.
18. Открытость и замкнутость относительно пространства и подпространства.
19. Компактность относительно пространства и подпространства.
20. Компактность, замкнутость и ограниченность.
21. Две леммы о подпоследовательностях.
22. Лемма о вложенных параллелепипедах. Компактность куба.
23. Характеристика компактов в $\mathbb{R}^m$. Принцип выбора.
24. Сходимость и сходимость в себе. Полнота $\mathbb{R}^m$.
25. Теорема о стягивающихся отрезках. Существование точной верхней границы.
26. Предел монотонной последовательности.
27. Неравенство Я. Бернулли, $limz^n$, число e^n.
28. Верхний и нижний пределы последовательности.
29. Равносильность определений предела отображения по Коши и по Рейне.
30. Простейшие свойства отображений, имеющих предел (единственность предела, локальная ограниченность, арифметические действия).
31. Предельный переход в неравенстве для функций. Теорема о сжатой функции.
32. Предел монотонной функции.
33. Критерий Больцано - Коши для отображений.
34. Двойной и повторные пределы, примеры.
35. Непрерывность. Точки разрыва и их классификация, примеры.
36. Арифметические действия над непрерывными отображениями. Стабилизация знака непрерывной функции.
37. Непрерывность и предел композиции.

38. Характеристика непрерывности отображения с помощью прообразов.
39. Теорема Вейерштрасса о непрерывных отображениях, следствия.
40. Теорема Кантора.
41. Теорема Больцано-Коши о непрерывных функциях.
42. Сохранение промежутка (с леммой о характеристике промежутков). Сохранение отрезка.
43. Теорема Больцано-Коши о непрерывных отображениях.
44. Разрывы и непрерывность монотонной функции.
45. Существование и непрерывность обратной функции.
46. Степень с произвольным показателем.
47. Свойства показательной функции и логарифма.
48. Непрерывность тригонометрических и обратных тригонометрических функций.
49. Замечательные пределы.
50. Замена на эквивалентную при вычислении пределов. Асимптоты.
51. Единственность асимптотического разложения.
52. Дифференцируемость и производная. Равносильность определений, примеры.
53. Геометрический и физический смысл производной.
54. Арифметические действия и производная.
55. Производная композиции.
56. Производная обратной функции и функции, заданной параметрически.
57. Производные элементарных функций.
58. Теорема Ферма.
59. Теорема Ролля.
60. Формулы Лагранжа и Коши, следствия.

61. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей вида примеры.
62. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей вида примеры.
63. Теорема Дарбу, следствия.
64. Вычисление старших производных: линейность, правило Лейбница, примеры.
65. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.
66. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.
67. Тейлоровские разложения функций ....
68. Иррациональность числа е.
69. Применение формулы Тейлора к раскрытию неопределенностей.
70. Критерий монотонности функции.
71. Доказательство неравенств с помощью производной, примеры.
72. Необходимое условие экстремума. Первое правило исследования критических точек.
73. Второе правило исследования критических точек. Производные функции
74. Лемма о трех хордах и односторонняя дифференцируемость выпуклой функции.
75. Выпуклость и касательные. Опорная прямая.
76. Критерии выпуклости функции.
77. Неравенство Иенсена.
78. Неравенства Юнга и Гёльдера.
79. Неравенство Минковского и неравенство Коши между средними.
80. Метод касательных.

3. Термины, незнание которых приводит к неуду по экзамену

1. Виды отображений (инъекция, сюръекция, биекция), образ, прообраз, обратное отображение

2. Предел последовательности, функции, отображения (в разных ситуациях и на разных языках)
3. Метрическое, векторное, нормированное пространства, неравенство Коши - Буняковского
4. Внутренние и предельные точки, открытые, замкнутые и компактные множества, компактность в евклидовом пространстве;
5. Сходимость в себе, полнота метрического пространства
6. Ограниченность множества, точные границы
7. О-символика
8. Непрерывность, теоремы Больцано - Коши и Вейерштрасса о непрерывных функциях, равномерная непрерывность, теорема Кантора
9. Замечательные пределы
10. Дифференцируемость и производная
11. Формулы и правила дифференцирования
12. Формула Лагранжа, формула Тейлора с остатками в форме Пеано и Лагранжа, основные тейлоровские разложения
13. Сравнение логарифмической, степенной и показательной функций
14. Точки экстремума и их отыскание, определение и критерии выпуклости
15. *Умение дифференцировать обязательно*

4. Указания к билетам

Укзания составлены в соответствии с учебником Виноградова

4.1. Множества и операции над ними.

Задание множеств, обозначения, подмножества, обозначния числовых множеств

Утверждения, кванторы

Семейства множеств, пересечения, объединения, разность, универсум, дополнение

Законы Де-Моргана (вычесть объединение $\Leftrightarrow$ пересечь частичные разности и то же для пересечение $\leftrightarrow$ объединение)

Ещё теорема: пересечение с объединением $\Leftrightarrow$ объединенние пересечений и наоборот

4.2. Аксиомы вещественных чисел.

Поле: абелева группа по сложению, абелева группа по умножению (кроме обратимости нуля)

Добавляем аксиомы для упорядоченности: 3 для линейного порядка + можно прибавлять к неравенствам + умножать неравенства с нулём (Вводим значки $>, <, \geqslant$ через $\leqslant$)

Вводим промежутки, отрезки, интервалы, полуинтервалы, лучи.

Вводим $\overline{\mathbb{R}}$, добавляя $\pm\infty$

Добавляем аксиому Архимеда (но всё ещё $\mathbb{Q}$ удовлетворяет)

Аксиома Кантора о вложенных отрезках (пересечение даже бесконечного количества в $\mathbb{R}$ непусто, но только для замкнутых) Пример: в $\mathbb{Q}$ можно сделать, чтобы они сходились в $\sqrt{2}$.

4.3. Метод математической индукции. Бином Ньютона.

Определение ММИ для последовательдьности утверждений (следствие следующего утверждения из предыдущего)

Индуктивное подмножество $\mathbb{R}$

Определение $\mathbb{N}$ как минимального по включению индуктивного.

Доказываем Бином Ньютона по индукции.

4.4. Существование максимума и минимума конечного множества, следствия.

Ограниченность сверху, снизу $M \subset \mathbb{R}$, $\Leftrightarrow$ ограниченность по модулю

Верхняя граница, минимум, максимум

Существование минимума и максимума конечного множества по индукции по количеству элементов.

Полная упорядоченность $\mathbb{N}$ по отношению $\leqslant$

4.5. Целая часть числа. Плотность множества рациональных чисел.

Через аксиому Архимеда, $c = \frac{[na]+1}{n}$.

$\Rightarrow$ в любом промежутке найдётся ∞ рациональных.

4.6. Две теоремы о „бедности" счетных множеств.

Эквивалентность по мощности: существует биекция (это отношение эквивалентности)

Счётное, если $\mathbb{N}$.

Сами теоремы о бедности:

- Любое бесконечное подмножество сожержит счётное подмножество
- Бесконечное подмножество счётного — счётно (расположим в виде последовательности, нумеруем в порядке появления)

4.7. Теорема об объединении не более чем счетных множеств (с леммой).

Счётное, если $\mathbb{N} \Leftrightarrow$ можно расположить в виде последовательности $\Leftrightarrow$ в виде таблицы $\Leftrightarrow$ можно составить биекцию с $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Не более чем счётно объединение не более чем счётных не более чем счётно

4.8. Счетность множества рациональных чисел.

Счётность рациональных как таблицы (отдельно рассматреть отрицательные и ноль)

4.9. Несчетность отрезка.

Несчётность отрезка $[0;1]$ (по аксиоме Кантора: пусть расположили в виде последовательности, бесконечное деление на 3 части, последовательность вложенных, не содержащих n-ную точку $\Leftarrow$ пересечение не пусто $\Leftarrow$ она не занумерована. Противоречие), гипотеза Континуума.

4.10. Единственность предела последовательности. Ограниченность сходящейся последовательности.

По определению (обе — в произвольных метрических пространствах).

4.11. Предельный переход в неравенстве. Теорема о сжатой последовательности.

Обе — для $\mathbb{R}$

При переходе важно не забыть про неверность в случае перехода от строгого к строгому.

Про двух милиционеров — по определению.

4.12. Бесконечно малые. Арифметические действия над сходящимися последовательностями.

Бесконечно малые — в нормированном ($\Rightarrow$ линейном) пространстве.

Note: метрика может быть не «равномерной» $\Rightarrow \rho(x, \mathbb{0})$ может быть не нормой.

Арифметические действия:

для нормированного пространства: сумма, умножение на последовательность скаляров, разность, сходимость нормы к норме предела. для числовых последовательностей: ещё и частное последовательностей (если знаметель не принимает ноль и его предел не ноль) через предел $\frac{1}{y_n}$ через ограниченность $\frac{1}{y_n}$.

4.13. Свойства скалярного произведения. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца. Норма, порожденная скалярным произведением.

Метрика: тождественность (ноль только у равных), симметричность, неравенство треугольника

Норма (в векторных): положительная определённость (ноль у нуля и только), положительная однородность, неравенство треугольника.

Скалярное произведение (в векторных): Линейность по первому аргументу, Эрмитова симметричность (то есть $\langle x, x\rangle \in \mathbb{R}$), положительная определённость (для одинаковых не меньше нуля, ноль у нуля и только).

Свойства: аддитичность по второму аргументу, «эрмитова» (но не положительная) однородность по второму аргументу, хотя бы при одном нуле — ноль.

КБШ:

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leqslant \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \tag{1}$$

Доказываем, отдельно рассмотрев $y = \mathbb{0}$, иначе $\lambda = -\frac{<x,x>}{<y,y>}$.

Раскладываем по линейности и $\lambda\overline{\lambda} = |\lambda|^2$:

$$\langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle$$

Получаем: $\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle - |\langle x, y\rangle|^2 = \langle y, y\rangle\langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle \geqslant 0$

Обращается в равенство только для коллинеарных векторов.

Умеем порождать норму как $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$

Проверяем аксиомы, треугольник:

$$\|x+y\| = \langle x, x\rangle + 2\operatorname{Re}\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \leqslant \langle x, x\rangle + 2|\langle x, y\rangle| + \langle y, y\rangle \leqslant\leqslant p^2(x) + 2p(x)p(y) + p^2(y) = \|p(x)$$

Нер-во треугольника обращается в равенство только для **сонаправленных** векторов.

4.14. Неравенства Коши-Буняковского в $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$. Сходимость и покоординатная сходимость.

Нер-ва КБШ и треугольника просто приводим в частом случае для евклидовой нормы.

Покоординатная сходимость равносильна в $\mathbb{R}^m$ сходимости по Евклидовой норме. (ограничиваем друг друга с обеих сторон (разность по любой координате меньше нормы меньше корня из размерности на максимальную разность), производим поредельный переход)

4.15. Бесконечно большие и бесконечно малые. Арифметические действия над бесконечно большими.

Определеяем стремление к просто бесконечности (если с какого-то момента норма всегда больше любого заданного значения)

Для $\mathbb{R}$ также определяем для $+\infty$ и $-\infty$.

NOTE: НЕограниченная — не обязательно бесконечно большая.

Предел в $\overline{\mathbb{R}}$ единственен.

Бесконечно большая $\Leftrightarrow \frac{1}{x_n}$ бесконечно малая и не равна нулю никогда.

Арифметические действия с ББ (некоторые можно и в $\mathbb{C}$):

1. Можно суммировать с огранмиченными правильным образом (3 штуки).
2. Можно умножать на отделимую от нуля правильным образом (3 штуки).
3. Можно делить на бесконечно малую и бесконечно большую, а ещё стремящуюся к обычному пределу делить на ББ (ещё 3 штуки).

4.16. Свойства открытых множеств. Открытость шара. Внутренность.

Внутренняя точка: найдётся окрестность, целиком содержащаяся во множестве.

Открытое: все точки множества — внутренние.

1. *Объединение* **любого** количества открытых множеств открыто

2. *Пересечение* **конечного** количества открытых множеств открыто.

Первое очевидно, вотороe доказывается через минимум множества радиусов.

Внутренность — множество внутренних точек ($\mathring{D}$ или $\operatorname{Int} D$).

Также это:

- Объединение всех открытых подмножеств
- Максимальное по включению открытое подмножество

Доказывается: рассмотрим множество G в виде объединения всех открытых подмножеств. Оно удовлетворяет второму критерию, открыто (как объединение открытых). Докажем, что любая внутренняя точка принадлежит G (действительно, внутреняя $\Rightarrow$ есть окрестность, содержащаяся в D, но она открытое мн-во $\Rightarrow x \in V_x \subset G$) и что все точки G — внутренние (очевидно).

«Открытый шар» является открытым множеством. Доказывается через неравенство треугольника.

4.17. Предельные точки. Связь открытости и замкнутости. Свойства замкнутых множеств. Замыкание.

Предельная точка = точка сгущения множества: в любой **проколотой** окрестности найдётся точка ($\Rightarrow$ найдётся и бесконечное количество точек). Можно также переформутировать как «предельная, если существует последовательность точек множества, **отличных** от a стремящаяся к a». (Равносильность очевидна).

Изолированная точка: принадлежит множеству, но не является точкой сгущения.

Точка прикосновения: В любой ***не проколотой*** окрестности точки найдётся точка множества. «коснулось как-то: возможно — за счёт густоты, возможно — за счёт наличия в себе». Можно переформулировать как «существует последовательность точек множества (может быть и просто стационаная последовательность из a), стремащаяся к a».

Замкнутое множество: Содерджит все свои точки сгущения

Теорема: Множество замкнуто $\iff$ его дополнение открыто Доказывается легко по определениям.

Можно и сформулировать как «множество открыто $\iff$ его дополнение замкнуто».

Свойства

1. *Пересечение* **любого** количества замкнутых множеств замкнуто.
2. *Объединение* **конечного** количества замкнутых множеств замкнуто

(Доказывается через соответствующие свойства открытых множеств, по предыдущей теореме, а также — через законы Де-Моргана)

Замыкание: все точки прикосновения ($\overline{D}$ или $\operatorname{Cl} D$)

Замыкание множества — это также (теорема):

- Пересечение всех замкнутых **над**множеств
- Минимальное по включению замкнутое **над**множество

Доказательство: Берём пересечение всех замкнутых **над**множеств. (Конечно, оно соответствет второму критерию). Оно замкнуто по предыдущей теореме.

Если $x \in D$, то есть x - точка прикосповепия D, то тем более x — точка прикосповепия F, а тогда $x \in F$ в силу замкпутости F. С другой стороны, если $x \notin \bar{D}$, то у точки x существует окрестпость V_x, содержащаяся в D^c. Тогда ее дополпепие V_x^c замкпуто и содержит D, поэтому $F \subset V_x^c$, то есть $V_x \subset F^c$ и, в частпости, $x \notin F$.

Множество замкнуто $\iff$ оно совпадает со своим замыканием.

4.18. Открытость и замкнутость относительно пространства и подпространства.

Пусть $D \subset Y \subset X$.

1. D открыто в $Y \iff \exists G$, открытое в X, такое, что $D = G \cap Y$.
2. D закрыто в $Y \iff \exists F$, закрытое в X, такое, что $D = G \cap Y$.

4.19. Компактность относительно пространства и подпространства.

Свойства компактности равносильны в метрическом пространстве и в его подпространстве.

4.20. Компактность, замкнутость и ограниченность.

1. Компактность $\Rightarrow$ замкнутость и ограниченность.
2. X компактно, $K \subset X$, K - замкнуто $\Rightarrow$ K - компактно.

4.21. Две леммы о подпоследовательностях.

4.22. Лемма о вложенных параллелепипедах. Компактность куба.

4.23. Характеристика компактов в $\mathbb{R}^m$. Принцип выбора.

4.24. Сходимость и сходимость в себе. Полнота $\mathbb{R}^m$.

4.25. Теорема о стягивающихся отрезках. Существование точной верхней границы.

4.26. Предел монотонной последовательности.

4.27. Неравенство Я. Бернулли, $lim z^n$, число e^n.

4.28. Верхний и нижний пределы последовательности.

4.29. Равносильность определений предела отображения по Коши и по Рейне.

4.30. Простейшие свойства отображений, имеющих предел (единственность предела, локальная ограниченность, арифметические действия).

4.31. Предельный переход в неравенстве для функций. Теорема о сжатой функции.

4.32. Предел монотонной функции.

4.33. Критерий Больцано - Коши для отображений.

4.34. Двойной и повторные пределы, примеры.

4.35. Непрерывность. Точки разрыва и их классификация, примеры.

4.36. Арифметические действия над непрерывными отображениями. Стабилизация знака непрерывной функции.

4.37. Непрерывность и предел композиции.

4.38. Характеристика непрерывности отображения с помощью прообразов.

4.39. Теорема Вейерштрасса о непрерывных отображениях, следствия.

4.40. Теорема Кантора.

Первая и вторая производные сохраняют знак. Рассматриваем 4 случая, какой, чтобы не разойтись.

Подбираемся всегда с одной стороны.

Квадратичную сходимость доказываем через тейлоровское разложение функции и ограничность $\left|\frac{f''}{f'}\right|$ или же $|f''|$ и отделимость от нуля $|f'|$

Количество гарантированно правильных знаков увеличивается каждый раз в 2 раза (при $\to \infty$), причём можно пост-фактум определять правильность, имея информацию о новых знаках.

Был пример с нахождением $\frac{1}{7}$, умея лишь складывать и умножать.