Типовик по линейной алгебре «Канонический вид матрицы. Часть 2»

Латыпов Владимир Витальевич,
ИТМО КТ M3138, ***вариант 10***

24 марта 2022 г.

1. Формулировка условия

Утверждение 1. Условие можно найти здесь: `https://drive.google.com/drive/folders/1_B-ViudQ3-Y385yQO-gfcOkDFWMWNXK3`

Data section:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -10 & 3 & -5 \\ -4 & 12 & -6 & 4 \\ 4 & 20 & -4 & 10 \\ 12 & 0 & 6 & 4 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$G = \begin{pmatrix} -22 & 20 & 4 & -36 \\ 22 & 4 & 10 & 12 \\ 5 & -19 & -9 & 24 \\ 27 & -13 & 3 & 34 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$P = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & -3 & -2 \\ -3 & 5 & 2 & 2 \\ -6 & 11 & 6 & 4 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$Q = \begin{pmatrix} -26 & -39 & 65 & 13 \\ -18 & -27 & 45 & 9 \\ -16 & -24 & 40 & 8 \\ -26 & -39 & 65 & 13 \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$V = \begin{pmatrix} -5 & 8 & 4 & -10 \\ 5 & -7 & 8 & -5 \\ 0 & -4 & -7 & 4 \\ 2 & 8 & 4 & -17 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 10 & -1 & 10 & 8 \\ -2 & 2 & -1 & -4 \\ 4 & -4 & 10 & 11 \end{pmatrix} \tag{6}$$

2. Построение спектрального разложения диагонализируемой матрицы

План: строим проекторы в собственном базисе, потом переходим в канонический. (Всё это только для матриц F и G)

2.1. Матрица F

$$P_2 = T_F \cdot \mathcal{P}_{2_v} \cdot T_F^{-1} = \\ T_F \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot T_F^{-}1 = \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 & \frac{-3}{2} & \frac{5}{2} \\ 2 & -4 & 3 & -2 \\ -2 & -10 & 4 & -5 \\ -6 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

*** Прямо как у Маяковского... ***

$$P_4 = T_F \cdot \mathcal{P}_{4_v} \cdot T_F^{-1} = \\ T_F \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot T_F^{-}1 = \\ \begin{pmatrix} -1 & -5 & \frac{3}{2} & \frac{-5}{2} \\ -2 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 10 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Проверим, что

$$2P_2 + 4P_4 = F \tag{9}$$

`https://matrixcalc.org/#%7B%7B2,5,-3/2,5/2%7D,%7B2,-4,3,-2%7D,%7B-2,-10,4,-5%7D,%7B-6,0,-3,0%7D%7D*2+%7B%7B-1,-5,3/2,-5/2%7D,%7B-2,5,-3,2%7D,%7B2,10,-3,5%7D,%7B6,0,3,1%7D%7D*4`

2.2. Матрица G

$$P_{-6} = T_G \cdot \mathcal{P}_{-6_v} \cdot T_G^{-1} = T_G \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot T_G^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$P_{-2} = T_G \cdot \mathcal{P}_{-2_v} \cdot T_G^{-1} = T_G \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot T_G^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$P_{5} = T_G \cdot \mathcal{P}_{5_v} \cdot T_G^{-1} = T_G \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot T_G^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

$$P_{10} = T_G \cdot \mathcal{P}_{10_v} \cdot T_G^{-1} =$$

$$T_G \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot T_G^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{13}$$

Кто бы мог подумать, но

$$-6P_{-6} + -2P_{-2} + 5P_5 + 10P_{10} = G \tag{14}$$

Не верите? Проверьте, вот ссылка!

```
https://matrixcalc.org/#%7B%7B2,-2,-1,3%7D,%7B-2,2,1,
-3%7D,%7B0,0,0,0%7D,%7B-2,2,1,-3%7D%7D*(-6)+%7B%7B0,
1,1,-1%7D,%7B0,-3,-3,3%7D,%7B0,2,2,-2%7D,%7B0,-2,-2,
2%7D%7D*(-2)+%7B%7B0,0,0,0%7D,%7B2,2,2,0%7D,%7B-1,-1,
-1,0%7D,%7B1,1,1,0%7D%7D*5+%7B%7B-1,1,0,-2%7D,%7B0,0,
0,0%7D,%7B1,-1,0,2%7D,%7B1,-1,0,2%7D%7D*10
```

3. Вычисление функции от диагонализируемой матрицы

Сделаем это для матриц F и G двумя способами:

$$f(tM) = \sum f(t\lambda)P_\lambda = Tf(\mathfrak{L}) \tag{15}$$

3.1. Экспонента

$$e^{tF} = T_F \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{4t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{4t} \end{pmatrix} T_F^{-}1 = \left(\begin{matrix} -e^4 + 2 * e^2 & -5 * e^4 + 5 * e^2 & \frac{3*e^4-3*e^2}{2} & \\ -2 * e^4 + 2 * e^2 & 5 * e^4 - 4 * e^2 & -3 * e^4 + 3 * e^2 & 2 * \\ 2 * e^4 - 2 * e^2 & 10 * e^4 - 10 * e^2 & -3 * e^4 + 4 * e^2 & 5 * \\ 6 * e^4 - 6 * e^2 & 0 & 3 * e^4 - 3 * e^2 & \end{matrix} \right. \tag{16}$$

Посчитаем также через проекторы.

$$e^{tF} = e^{2t}P_2 + e^{4t}P_4 =$$
$$e^2\begin{pmatrix} 2 & 5 & \frac{-3}{2} & \frac{5}{2} \\ 2 & -4 & 3 & -2 \\ -2 & -10 & 4 & -5 \\ -6 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} + e^4\begin{pmatrix} -1 & -5 & \frac{3}{2} & \frac{-5}{2} \\ -2 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 10 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} -e^4 + 2*e^2 & -5*e^4 + 5*e^2 & \frac{3*e^4-3*e^2}{2} & \frac{-5*e^4+5*e^2}{2} \\ -2*e^4 + 2*e^2 & 5*e^4 - 4*e^2 & -3*e^4 + 3*e^2 & 2*e^4 - 2*e^2 \\ 2*e^4 - 2*e^2 & 10*e^4 - 10*e^2 & -3*e^4 + 4*e^2 & 5*e^4 - 5*e^2 \\ 6*e^4 - 6*e^2 & 0 & 3*e^4 - 3*e^2 & e^4 \end{pmatrix} \tag{17}$$

Проверили, сошлось.

То же самое для G.

$$e^{tG} = T_G\begin{pmatrix} e^{-6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{10} \end{pmatrix} T_G^-1 =$$
$$\begin{pmatrix} \frac{-e^{16}+2}{e^6} & \frac{e^{16}+e^4-2}{e^6} & \frac{e^4-1}{e^6} & \frac{-2*e^{16}-e^4+3}{e^6} \\ \frac{2*e^{11}-2}{e^6} & \frac{2*e^{11}-3*e^4+2}{e^6} & \frac{2*e^{11}-3*e^4+1}{e^6} & \frac{3*e^4-3}{e^6} \\ e^{10} - e^5 & \frac{-e^{12}-e^7+2}{e^2} & \frac{-e^7+2}{e^2} & \frac{2*e^{12}-2}{e^2} \\ \frac{e^{16}+e^{11}-2}{e^6} & \frac{-e^{16}+e^{11}-2*e^4+2}{e^6} & \frac{e^{11}-2*e^4+1}{e^6} & \frac{2*e^{16}+2*e^4-3}{e^6} \end{pmatrix} \tag{18}$$

Посчитаем также через проекторы.

$$
e^{tG} = e^{-6t}P_{-6} + e^{-2t}P{-2} + e^{5t}P_5 + e^{10t}P_{10} =
$$

$$
e^{-6t}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} + e^{-2t}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} +
$$

$$
e^{5t}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + e^{10t}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} =
$$

$$
\begin{pmatrix} \frac{-e^{16}+2}{e^6} & \frac{e^{16}+e^4-2}{e^6} & \frac{e^4-1}{e^6} & \frac{-2*e^{16}-e^4+3}{e^6} \\ \frac{2*e^{11}-2}{e^6} & \frac{2*e^{11}-3*e^4+2}{e^6} & \frac{2*e^{11}-3*e^4+1}{e^6} & \frac{3*e^4-3}{e^6} \\ e^{10}-e^5 & \frac{-e^{12}-e^7+2}{e^2} & \frac{-e^7+2}{e^2} & \frac{2*e^{12}-2}{e^2} \\ \frac{e^{16}+e^{11}-2}{e^6} & \frac{-e^{16}+e^{11}-2*e^4+2}{e^6} & \frac{e^{11}-2*e^4+1}{e^6} & \frac{2*e^{16}+2*e^4-3}{e^6} \end{pmatrix} \tag{19}
$$

Проверим, что результаты сошлись: `https://matrixcalc.org/#%7B%7B2,-2,-1,3%7D,%7B-2,2,1,-3%7D,%7B0,0,0,0%7D,%7B-2,2,1,-3%7D%7D*e%5E(-6*t)+%7B%7B0,1,1,-1%7D,%7B0,-3,-3,3%7D,%7B0,2,2,-2%7D,%7B0,-2,-2,2%7D%7D*e%5E(-2*t)+%7B%7B0,0,0,0%7D,%7B2,2,2,0%7D,%7B-1,-1,-1,0%7D,%7B1,1,1,0%7D%7D*e%5E(5*t)+%7B%7B-1,1,0,-2%7D,%7B0,0,0,0%7D,%7B1,-1,0,2%7D,%7B1,-1,0,2%7D%7D*e%5E(10*t)=%7B%7B(-e%5E(16*t)+2)/e%5E(6*t),(e%5E(16*t)+e%5E(4*t)-2)/e%5E(6*t),(e%5E(4*t)-1)/e%5E(6*t),(-2*e%5E(16*t)-e%5E(4*t)+3)/e%5E(6*t)%7D,%7B(2*e%5E(11*t)-2)/e%5E(6*t),(2*e%5E(11*t)-3*e%5E(4*t)+2)/e%5E(6*t),(2*e%5E(11*t)-3*e%5E(4*t)+1)/e%5E(6*t),(3*e%5E(4*t)-3)/e%5E(6*t)%7D,%7Be%5E(10*t)-e%5E(5*t),(-e%5E(12*t)-e%5E(7*t)+2)/e%5E(2*t),(-e%5E(7*t)+2)/e%5E(2*t),(2*e%5E(12*t)-2)/e%5E(2*t)%7D,%7B(e%5E(16*t)+e%5E(11*t)-2)/e%5E(6*t),(-e%5E(16*t)+e%5E(11*t)-2*e%5E(4*t)+2)/e%5E(6*t),(e%5E(11*t)-2*e%5E(4*t)+1)/e%5E(6*t),(2*e%5E(16*t)+2*e%5E(4*t)-3)/e%5E(6*t)%7D%7D`

3.2. Обращение

Очевидно, обе матрицы невырождены, так как в спектре нет нулей, обратим мы, конечно, F — меньше возни.

$$F^{-1} = T_F \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} T_F^{-}1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{4} & \frac{-3}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{-3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{-5}{2} & \frac{5}{4} & \frac{-5}{4} \\ \frac{-3}{2} & 0 & \frac{-3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \tag{20}$$

А вот — с помощью проекторов:

$$F^{-1} = \frac{1}{2}P_2 + \frac{1}{4}P_4 =$$
$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 5 & \frac{-3}{2} & \frac{5}{2} \\ 2 & -4 & 3 & -2 \\ -2 & -10 & 4 & -5 \\ -6 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -5 & \frac{3}{2} & \frac{-5}{2} & & & \\ -2 & 5 & -3 & 2 & & & \\ 6 & 0 & 3 & 12 & 10 & -3 & 5 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{4} & \frac{-3}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{-3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{-5}{2} & \frac{5}{4} & \frac{-5}{4} \\ \frac{-3}{2} & 0 & \frac{-3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \tag{21}$$

Калькулятор говорит нам, что

$$FF^{-}1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{4} & \frac{-3}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{-3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{-5}{2} & \frac{5}{4} & \frac{-5}{4} \\ \frac{-3}{2} & 0 & \frac{-3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -10 & 3 & -5 \\ -4 & 12 & -6 & 4 \\ 4 & 20 & -4 & 10 \\ 12 & 0 & 6 & 4 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4}*0+\frac{5}{4}*(-4)+\frac{-3}{8}*4+\frac{5}{8}*12 & \frac{3}{4}*(-10)+\frac{5}{4}*12+\frac{-3}{8}*20+\frac{5}{8}*0 & \frac{3}{4}*3+\frac{5}{4}*(- \\ \frac{1}{2}*0+\frac{-3}{4}*(-4)+\frac{3}{4}*4+\frac{-1}{2}*12 & \frac{1}{2}*(-10)+\frac{-3}{4}*12+\frac{3}{4}*20+\frac{-1}{2}*0 & \frac{1}{2}*3+\frac{-3}{4}*(- \\ \frac{-1}{2}*0+\frac{-5}{2}*(-4)+\frac{5}{4}*4+\frac{-5}{4}*12 & \frac{-1}{2}*(-10)+\frac{-5}{2}*12+\frac{5}{4}*20+\frac{-5}{4}*0 & \frac{-1}{2}*3+\frac{-5}{2}*(\\ \frac{-3}{2}*0+0*(-4)+\frac{-3}{4}*4+\frac{1}{4}*12 & \frac{-3}{2}*(-10)+0*12+\frac{-3}{4}*20+\frac{1}{4}*0 & \frac{-3}{2}*3+0*(- \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{22}$$

А значит, ответ получился верным.

4. Построение минимального многочлена

Для каждой матрицы сначала построим минималные аннуляторы векторов канонического базиса, попутно поддержживая НОК этих многочленов. Если на каком-то шагу его стапень совпала с размерностью пространства, пришло время остановиться, ведь минимальный многочлен всегда делит характеристический.

Имея НОК всех аннуляторов, то есть $\phi(t)$, проверим, что его корни совпадают с корнями $\chi(t)$, причём должно быть $m(\lambda) \leqslant \alpha(\lambda)$.

4.1. Матрица F

Для начала найдём аннулятор вектора $(1, 0, 0, 0)$.

Рассмотрим F^0x, Fx, F^2x, F^3x

Это будут:

$$v_0, v_1, v_2, v_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-4\\4\\12\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-8\\-24\\24\\72\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-48\\-112\\112\\336\end{pmatrix} \tag{23}$$

Проверим, когда векторы станут зависимыми. Очевидно, что v_0 и v_1 независимы. Проверим, можно ли представить v_3 как $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$? Чтобы ответить конкретно на этот вопрос, проверим ранг. Он оказался равен 2, так что представить можно, то есть решим систему:

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & -8\\0 & -4 & -24\\0 & 4 & 24\\0 & 12 & 72\end{array}\right) \tag{24}$$

`https://matrixcalc.org/slu.html#solve-using-Gaussian-elimination(%7B%7B1,0,-8%7D,%7B0,-4,-24%7D,%7B0,4,24%7D,%7B0,12,72%7D%7D)`

Тогда $v_2 = -8v_0 + 6v_1$. Действительно: `https://www.wolframalpha.com/input?i=%7B-8%2C+0%2C+0%2C+0%7D+%2B+6+%7B+0%2C+-4%2C+4%2C+12+%7D`.

Получим аннулятор этого элемента: $t^2 - 6t + 8 = (t-2)(t-4)$

Далее, написав скрипт на Python с использованием numpy (для линейной алебры) и sympy (операции с многочленами в символьном виде, как wolfram alpha, только в python), проделаем то же самое. Оно для каждого базисного вектора матрицы сначала находит интересующией в линейной зависимости векторы ($A^k e_i$), потом для каждого префикса проверяет ранг, когда получилось — решает, и поддерживает НОК (LCM) на данный момент.

Запустим на матрице F:

[1 0 0 0] [0 -4 4 12] [-8 -24 24 72]
Processed vector №1. Rank: 2
Got this coefficients: [1, -6, 8]
This polynom is: Poly $\left(t^2 - 6t + 8, t, domain = \mathbb{Z}\right)$
Current LCM is: Poly $\left(t^2 - 6t + 8, t, domain = \mathbb{Z}\right)$
Its degree is 2...

[0 1 0 0] [-10 12 20 0] [-60 64 120 0]
Processed vector №2. Rank: 2
Got this coefficients: [1, -6, 8]
This polynom is: Poly $\left(t^2 - 6t + 8, t, domain = \mathbb{Z}\right)$
Current LCM is: Poly $\left(t^2 - 6t + 8, t, domain = \mathbb{Z}\right)$
Its degree is 2...

[0 0 1 0] [3 -6 -4 6] [18 -36 -32 36]
Processed vector №3. Rank: 2
Got this coefficients: [1, -6, 8]
This polynom is: Poly $\left(t^2 - 6t + 8, t, domain = \mathbb{Z}\right)$
Current LCM is: Poly $\left(t^2 - 6t + 8, t, domain = \mathbb{Z}\right)$
Its degree is 2...

[0 0 0 1] [-5 4 10 4] [-30 24 60 16]
Processed vector №4. Rank: 2
Got this coefficients: [1, -6, 8]
This polynom is: Poly $\left(t^2 - 6t + 8, t, domain = \mathbb{Z}\right)$
Current LCM is: Poly $\left(t^2 - 6t + 8, t, domain = \mathbb{Z}\right)$
Its degree is 2...

$$\left(1,\ \left[\left(\text{Poly}\left(t - 4, t, domain = \mathbb{Z}\right),\ 1\right),\ \left(\text{Poly}\left(t - 2, t, domain = \mathbb{Z}\right),\ 1\right)\right]\right) \tag{25}$$

То есть получим $\phi(t) = (t-2)(t-4)$. Корни сошлись, замечательно. А также $m(\lambda) \leqslant \alpha(\lambda)$.

4.2. Матрица G

[1 0 0 0] [-22 22 5 27] [-28 -22 75 53] [-1432 682 875 1557]
Processed vector №1. Rank: 3
Got this coefficients: [1, -9, -40, 300]
This polynom is: Poly $\left(t^3 - 9t^2 - 40t + 300, t, domain = \mathbb{Z}\right)$
Current LCM is: Poly $\left(t^3 - 9t^2 - 40t + 300, t, domain = \mathbb{Z}\right)$
Its degree is 3...

[0 1 0 0] [20 4 -19 -13] [32 110 -117 -11] [1424 -158 -1141 -1291] [7424 3794 -10593 -6815]
Processed vector №2. Rank: 4
Got this coefficients: [1, -7, -58, 220, 600]
This polynom is: Poly $\left(t^4 - 7t^3 - 58t^2 + 220t + 600, t, domain = \mathbb{Z}\right)$
Current LCM is: Poly $\left(t^4 - 7t^3 - 58t^2 + 220t + 600, t, domain = \mathbb{Z}\right)$
Its degree is 4 $\Rightarrow$ stop!

$$\Big(1, \Big[(\text{Poly}\left(t - 10, t, domain = \mathbb{Z}\right),\ 1), (\text{Poly}\left(t - 5, t, domain = \mathbb{Z}\right),\ 1), (\text{Poly}\left(t + 2, t, domain = \mathbb{Z}\right),\ 1), (\text{Poly}\left(t + 6, t, domain = \mathbb{Z}\right),\ 1)\Big]\Big) \tag{26}$$

То есть $\phi(t) = (t+6)(t+2)(t-5)(t-10)$, всё сходится.

4.3. Матрица P

[1 0 0 0] [-4 3 -3 -6] [7 -9 9 15] [-10 18 -18 -27]
Processed vector №1. Rank: 3
Got this coefficients: [1, 3, 3, 1]
This polynom is: Poly $\left(t^3 + 3t^2 + 3t + 1, t, domain = \mathbb{Z}\right)$
Current LCM is: Poly $\left(t^3 + 3t^2 + 3t + 1, t, domain = \mathbb{Z}\right)$
Its degree is 3...

[0 1 0 0] [6 -6 5 11] [-12 17 -16 -28] [18 -34 33 51]
Processed vector №2. Rank: 3
Got this coefficients: [1, 3, 3, 1]

This polynom is: Poly $\left(t^3 + 3t^2 + 3t + 1, t, domain = \mathbb{Z}\right)$
Current LCM is: Poly $\left(t^3 + 3t^2 + 3t + 1, t, domain = \mathbb{Z}\right)$
Its degree is 3…

[0 0 1 0] [3 -3 2 6] [-6 9 -8 -15] [9 -18 17 27]
Processed vector №3. Rank: 3
Got this coefficients: [1, 3, 3, 1]
This polynom is: Poly $\left(t^3 + 3t^2 + 3t + 1, t, domain = \mathbb{Z}\right)$
Current LCM is: Poly $\left(t^3 + 3t^2 + 3t + 1, t, domain = \mathbb{Z}\right)$
Its degree is 3…

[0 0 0 1] [3 -2 2 4] [-6 7 -7 -12] [9 -15 15 23]
Processed vector №4. Rank: 3
Got this coefficients: [1, 3, 3, 1]
This polynom is: Poly $\left(t^3 + 3t^2 + 3t + 1, t, domain = \mathbb{Z}\right)$
Current LCM is: Poly $\left(t^3 + 3t^2 + 3t + 1, t, domain = \mathbb{Z}\right)$
Its degree is 3…

$$\left(1,\ \left[\left(\text{Poly}\left(t + 1, t, domain = \mathbb{Z}\right),\ 3\right)\right]\right) \tag{27}$$

Видим, то у всех аннулятор одинаковый, и $phi(t) = (t+1)^3$

4.4. Матрица Q

[1 0 0 0] [-26 -18 -16 -26] [0 0 0 0]
Processed vector №1. Rank: 2
Got this coefficients: [1, 0, 0]
This polynom is: Poly $\left(t^2, t, domain = \mathbb{Z}\right)$
Current LCM is: Poly $\left(t^2, t, domain = \mathbb{Z}\right)$
Its degree is 2…

[0 1 0 0] [-39 -27 -24 -39] [0 0 0 0]
Processed vector №2. Rank: 2
Got this coefficients: [1, 0, 0]
This polynom is: Poly $\left(t^2, t, domain = \mathbb{Z}\right)$
Current LCM is: Poly $\left(t^2, t, domain = \mathbb{Z}\right)$
Its degree is 2…

[0 0 1 0] [65 45 40 65] [0 0 0 0]
Processed vector №3. Rank: 2
Got this coefficients: [1, 0, 0]
This polynom is: Poly $\left(t^2, t, domain = \mathbb{Z}\right)$

Current LCM is: Poly $(t^2, t, domain = \mathbb{Z})$
Its degree is 2...

[0 0 0 1] [13 9 8 13] [0 0 0 0]
Processed vector №4. Rank: 2
Got this coefficients: [1, 0, 0]
This polynom is: Poly $(t^2, t, domain = \mathbb{Z})$
Current LCM is: Poly $(t^2, t, domain = \mathbb{Z})$
Its degree is 2...

$$(1,\ [(\text{Poly}\,(t, t, domain = \mathbb{Z}),\ 2)]) \tag{28}$$

То есть $\phi(t) = t^2$

4.5. Матрица V

[1 0 0 0] [-5 5 0 2] [45 -70 -12 -4] [-793 639 348 -450] [14969 -3404 -6792 12568]
Processed vector №1. Rank: 4
Got this coefficients: [1, 36, 478, 2772, 5929]
This polynom is: Poly $(t^4 + 36t^3 + 478t^2 + 2772t + 5929, t, domain = \mathbb{Z})$
Current LCM is: Poly $(t^4 + 36t^3 + 478t^2 + 2772t + 5929, t, domain = \mathbb{Z})$
Its degree is 4 $\Rightarrow$ stop!

$$(1,\ [(\text{Poly}\,(t+7, t, domain = \mathbb{Z}),\ 2)\,,\ (\text{Poly}\,(t+11, t, domain = \mathbb{Z}),\ 2)]) \tag{29}$$

Тут оказалось достаточно всего одного вектора. $\phi(t) = (t+7)^2(t+11)^2$

4.6. Матрица W

[1 0 0 0] [1 10 -2 4] [13 12 4 -12] [69 62 42 -88] [377 344 296 -520]
Processed vector №1. Rank: 4
Got this coefficients: [1, -10, 28, -6, -45]
This polynom is: Poly $(t^4 - 10t^3 + 28t^2 - 6t - 45, t, domain = \mathbb{Z})$
Current LCM is: Poly $(t^4 - 10t^3 + 28t^2 - 6t - 45, t, domain = \mathbb{Z})$
Its degree is 4 $\Rightarrow$ stop!

$$(1,\ [(\text{Poly}\,(t-5, t, domain = \mathbb{Z}),\ 1)\,,\ (\text{Poly}\,(t+1, t, domain = \mathbb{Z}),\ 1)\,,\ (\text{Poly}\,(t-3, t, domain = \tag{30}$$

Опять хватило одного. $\phi(t) = (t-5)(t+1)(t-3)^2$