Решения **теоретических („малых“) домашних заданий**

Математическая логика, ИТМО, M3232-M3239, весна 2023 года

Латыпов Владимир (конспектор)
t.me/donRumata03, github.com/donRumata03, donrumata03@gmail.com

3 мая 2023 г.

Содержание

1. Равенства в аксиоматике Пеано

(a) $a \cdot b = b \cdot a$ (коммутативность умножения)

Как вводится умножение в аксиоматике Пеано?

$$a \cdot b = \begin{cases} 0 & b = 0 \\ a \cdot c + a & b = c' \end{cases} \tag{1.1}$$

Лемма 1. $a \cdot 0 = 0 \cdot a$

Доказательство. Индукция.

База: функциональная экстенсиональность. ■

Теорема 1.

$$a \cdot b = b \cdot a \tag{1.2}$$

Доказательство. Докажем по индукции по b при фиксированном a.

$P(b) = a \cdot 0 = 0 \cdot a$ — лемма 1

База: $a \cdot b = b \cdot a$

Покажем ■

(b) ...

4. Вывод в формальной арифметике

4.1. Единственность нуля

Введём „предикат“ (не предикат в смысле КИП) ψ (выражение со свободной переменной x):

$$(\exists q.q' = x) \vee x = 0 \tag{4.1}$$

$\vdash \psi[x := 0]$, так как это $(\exists q.q' = 0) \vee 0 = 0$, что доказуемо через схему 11: $(\forall a.a = a)[x := a]$.

Теперь доказательство $\forall x.\psi \to \psi[x := x']$, то есть что

$\forall x. (\exists q.q' = x) \vee x = 0 \to (\exists q.q' = x') \vee x' = 0$

$\exists q.q' = x'$ докажем так:

(n)	$x' = x'$	Генерализованное $a = a$
(n + 1)	$(q' = x')[q := x] \to \exists q.q' = x'$	схема 12
(n + 2)	$\exists q.q' = x'$	MP предыдущих

Последний штрих: применим аксиому об индукции:

$\psi[x := 0] \& (\forall x.\psi \to \psi[x := x']) \to \psi$.

и дважды MP: ψ, то есть $(\exists q.q' = x) \vee x = 0$.

Генерализуем, применим к x: $(\exists q.q' = p) \vee p = 0$. ■

5. Двухместные отношения

(a) Полное отношение на $\mathbb{N}^2$: формула $(x_1 = x_1)\&(x_2 = x_2)$ (некая заготовка на тавтологию, но *со свободными переменными*).

Если $\langle a_1, a_2 \rangle \in \mathbb{N}$ (то есть всегда), покажем, что $\rho[x_1 := \overline{a_1}][x_2 := \overline{a_2}]$ доказуема.

На лекции мы доказали, что $a = a$. Не можем просто сказать, что на самом деле доказали для α, а не для a, так как у нас не схемы аксиом, а просто аксиомы. Зато можем воспользоваться выразительностью исчисления предикатов.

Допишем доказательство:

(n)	$a = a$	С лекции
(n + 1)	$B \vee \neg B \to a = a$	Ослабление
(...)	$B \vee \neg B \to \forall a.a = a$	Правило вывода для $\forall$
(...)	$B \vee \neg B$	Тавтология из полноты КИВ
(...)	$\forall a.a = a$	MP двух предыдущих
(...)	$(\forall a.a = a) \to \overline{a_1} = \overline{a_1}$	Схема аксиом 11
(...)	$\overline{a_1} = \overline{a_1}$	MP двух предыдущих
(...)	$\overline{a_2} = \overline{a_2}$	Аналогично для $\overline{a_2}$
(...)	$(\overline{a_1} = \overline{a_1}) \to (\overline{a_2} = \overline{a_2}) \to (\overline{a_1} = \overline{a_1})\&(\overline{a_2} = \overline{a_2})$	Введение &
(...)	$(\overline{a_1} = \overline{a_1})\&(\overline{a_2} = \overline{a_2})$	Дважды MP

Для пустого множества пар, не входящих в отношение, верно всё, что угодно. ■

(b) Удивительно: выражение равенства — равенство.

Что для $a_1 = a_2 \vdash \overline{a_1} = \overline{a_2}$ — доказали на лекции + генерализация.

Покажем, что для $a_1 \neq a_2 \vdash \neg\,(\overline{a_1} = \overline{a_2})$.

Для этого достаточно прийти к противоречию из $\overline{a_1} = \overline{a_2}$.

Будем получать равенства с мЕньшим количеством штрихов по аксиоме A3, пока меньшее не станет нулём. То есть для каждого $i \in [1; \min{(a_1, a_2)}]$ будем добавлять такие строчки:

(k)	$\overline{a_1 - (i-1)} = \overline{a_2 - (i-1)}$	Уже имеем это утверждение
(k + 1)	$\overline{a_1 - i}' = \overline{a_2 - i}' \to \overline{a_1 - i} = \overline{a_2 - i}$	A3
(k + 2)	$\overline{a_1 - i} = \overline{a_2 - i}$	MP k, k + 1

Теперь получили либо $(...)' = 0$, либо $0 = (...)'$. В первом случае пришли к противоречию с A4 ($\neg a' = 0$), во втором — ещё применим аксиому $\alpha = \forall p.\forall q.p = q \to q = p$, подставив в неё $\alpha[p := 0][q := (...)']$

(c) Отношение «хотя бы один аргумент $= 0$»

Отношение такое: $x_1 \cdot x_2 = 0$.

- Для пары, где $a_2 = 0$, доказуемо, что $\overline{a_1} \cdot \overline{0} = 0$:

  (n) $x_1 \cdot 0 = 0$ Генерализованная A7

  Для пары, где $a_1 = 0$, воспользуемся перестановочностью a и 0 при умножении.

- Если оба аргумента $\neq 0$, то по $A3$: $\neg\overline{a_1 - 1}' = 0$ и $\neg\overline{a_2 - 1}' = 0$.

  Для доказательства $\neg\overline{a_1} \cdot \overline{a_2} = 0$ достаточно прийти к противоречию из $\overline{a_1} \cdot \overline{a_2} = 0$.

  Выведем по $4c$, что $p \cdot q = 0 \to p = 0 \vee q = 0$. Тогда по MP с предположением: $p = 0 \vee q = 0$

  Получим неверную формулу