# Заметки практики по матанализу (самые разные семестры)

Латыпов Владимир (конспектор)
t.me/donRumata03, github.com/donRumata03, donrumata03@gmail.com
Семёнова Ольга Львовна (препод)

27 ноября 2022 г.

# Содержание

Здесь можно вспомнить, чем мы всё это время занимались на практике.

«Стенограмма» практик в виде серии фотографий доски (насколько возможно оперативных) есть в телеграм «чатике с домашкамм» начиная с этого сообщения: `https://t.me/c/1512041988/198`.

В этом же документе содержится список методов, подходов и трюков, которые мы учимся применять на практике.

Крайне полезного освежать его в памяти перед контрольной по отношению к актуальной теме, а также в любой момент по отношению к давнему материалу.

Контрибьютинг всячески приветствуется, благо на Github делать это максимально удобно. Если вы решили, например, в какой-то момент пролистать свой конспект и вспомнить былое — добавьте в этот конспект то, чего нет здесь — помогите товарицам. Или, если что-то написанное здесь настолько вопиюще неверное, что режет ваши глаза и вызывает желание как можно быстрее это пофиксить — вперёд.

Насчёт технических деталей — в README описано по шагам, что надо установить, чтобы компилировать конспект у себя на компьютере, однако ничего не мешает дописать сюда в обычном текстовом редакторе нечто отдалённо напоминающее латех и послать Pull Request — я исправлю, если что-то не будет компилироваться.

Конспект организован по темам, в том порядке, в котором мы их проходим на практиках. Кроме того, примерно расставлены разделения, где заканчивается предыдущая практика и начинается следующая, но могут быть неточности, так как отдаётся приоритет организации по темам.

На данный момент такая картина готовности тем:

- Пределы — почти ничего
- Производные — совсем мало
- Интегралы — довольно полно, но тезисно
- Числовые ряды — вообще ничего
- Функциональные ряды — подробно
- Функции нескольких переменных — сами практики в процессе

# 1. Пределы

## 1.1. Таблица эквивалантности

Отличная ссылка на таблицу эквивалентности с нужными доказательствами: `http://mathserfer.narod.ru/node22.html`

Альтернативный вариант: `https://ib.mazurok.com/2013/05/19/table-equ/`

# 2. Дифференциальное исчисление одной переменной

## 2.1. Использование первой и второй производной для построения картины функции и её поведения у себя в голове и последующего её перенесения на бумагу

А именно:

- Находим область определения
- Смотрим поведение на границах области определения (значения, предел, асимптоты)
- Первая производная $\implies$ делаем вывод о промежутках возрастания/убывания, экстремумах
- Вторая производная $\implies$ выпуклость, точки перегиба

## 2.2. Оптимизация функций через поиск и проверку критических точек с помощью производной, например, параметры геометрических фигур

# 3. Интегральное исчисление одной переменной

## 3.1. Символьное вычисление неопределённых интегралов

- Таблица интегрирования основных элементарных функций
- Базовые приёмы интегрирования: замена переменной, ингегрирование по частям

- Тригонометрические и гиперболические подстановки
- Интегрирование по индукции, если функция содержит целочисленный параметр
- Сведение интеграла самого к себе, например, $\sqrt{x^2+a^2} \to \frac{t}{\sqrt{x^2+a^2}} t+$ $\ldots \to$ по частям.
- Выделение полного квадрата под корнем или не под корнем в знаменателе, избавление от линейного члена
- Если есть подвыражения вида $x + a$, замена переменной $t = \frac{1}{x+a}$
- Выделение в числителе производной знаменателя, например, `https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%98%D0%BD%D1%82%D0%B5%D0%B3%D1%80%D0%B8%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5_%D1%80%D0%B0%D1%86%D0%B8%D0%BE%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D1%85_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B9#%D0%98%D0%BD%D1%82%D0%B5%D0%B3%D1%80%D0%B8%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5_%D0%B4%D1%80%D0%BE%D0%B1%D0%B5%D0%B9_%D0%B2%D0%B8%D0%B4%D0%B0_%7F'%22%60UNIQ--postMath-0000007E-QINU` `60%22'%7F`.
- Рациональные функции: разложение на простейшие, далее элементарно, больше второй степени не получится
- Функции вида $R\left(x,\ \sqrt[N]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)$ через замену переменной на весь корень.
- Подстановки Эйлера: $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$. В зависимости от коэффициентов нужно выбрать правильное $t$. Случаи могут быть пересекаться. Для функции подходят все те случаи, под условия которых она подходит:
  1. При $a > 0$: $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm t \pm \sqrt{a}x$
  2. При $c > 0$: $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm t \pm \sqrt{a}x$
  3. При наличии двух вещественных корней: $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm t(x-\lambda)$, где $\lambda$ — один из корней
- Интегрирование дифференциальных биномов

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} z = x^n \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{n}z^{\frac{1-n}{n}}\mathrm{d}z \end{bmatrix} = \frac{1}{n}\int z^{\frac{m}{n}+\frac{1-n}{n}}(a+bz)^p\,\mathrm{d}z \tag{1}$$

$$q = \frac{m}{n} + \frac{1-n}{n} \tag{2}$$

3 случая интегрируемости:

1. $p \in \mathbb{Z}, q = \frac{M}{N}$: $t = z^{\frac{1}{N}}$, выражаем получаем $R(t)$. Профит.

- Тригонометрические подстановки в рациональных функциях $R(\cos x, \sin x)$:
  - Если $R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x, \sin x)$ (нечётно относительно cos), можно $t = \sin x$
  - Если $R(\cos x, -\sin x) = -R(\cos x, \sin x)$ (нечётно относительно sin), можно $t = \cos x$
  - Если $R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x)$ (чётно по обеим вместе), можно $t = \operatorname{tg} x$
  - Наконец, универсальное, $t = \tan\frac{x}{2}$ работает всегда, через неё легко выражаются sin, cos, $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$.
- Похожая шняга получается и с $R(ch\,x, sh\,x)$
- Линейное выражение числителя через знаменатель и его производную, решение системы уравнений

## 3.2. Определённые интегралы

- Формула Ньютона-Лейбница
- Замена переменной, если особые точки не появляются, ничего не портит
- При интегрировании по частями надо смотреть, чтобы сумма частей имела смысл в $\overline{\mathbb{R}}$.

## 3.3. Несобственные интегралы

- Взятие предела для несобстыенных интегралов, если получается сделать это в явном виде

- Рассмотрение «особенных» точек, их может быть несколько
- Анализ сходимости: сначала проверяем абсолютную, потом относительную
- Критерий Коши (если любое значение после некоторого $A$ не превышается ни на каком промежутке в $\mathbb{R}$).
- Разбиение промежутка на несколько
- Использование асимптотического анализа для определения абсолютной сходимости
- Дирихле и Абель — позволяют сделать вывод об абсолютной сходимости функции, представленной произведения
  - Дирихле: первая имеет ограниченную первообразную, вторая — монотонно □ 0, тогда сходится
  - Абель: первый интеграл сходится, вторая монотонна и ограничена, тогда тоже сходится
- Разложение подинтегральной функции в ряд Тейлора: спросить у кого-то

# 4. Числовые ряды

# 5. Функциональные ряды

*Практика 5 сентября 2022*

Фотоотчёт за практику: `https://t.me/c/1512041988/198`

Pro tip: для $\alpha < \frac{\pi}{2}$ — $\sin\alpha > \alpha\frac{2}{\pi}$ за счёт выпуклости.

## 5.1. Исследуем равномерную сходимость

- Если можем посчитать «колебание» (супремум отколнеиня на всём множестве $E$ при фиксированном $n$), то проанализируем, стремится ли оно к нулю при $n \to \infty$.
- Признак Вейерштрасса (мажорантная сходимость для рядов): находим равномерную норму каждого члена, если ряд норм сходиться, то анализируемый ряд — тоже.

- Критерий Больцано-Коши (равносильно равномерной сходимости). Сходимость в себе, работает для
- Признак Дирихле (равномерная сходимость ряда произведений). У одного частичные суммы **равномерно огранчиены**, другой стремится к нулю и монотонен по $n$ с некоторого номера при каждом фиксированном $x$. (Теперь везде не забываем добавлять «равномерно»).
- Признак Абеля (равномерная сходимость ряда произведений). Тут у первого частичные суммы должны быть **не равномерно *огранчиены*, а равномерно *сходиться***, но зато второму достаточно просто быть равномерно ограниченным (и всё ещё монотонным).
- Следствие: Лейбниц — сумма знакопеременного, монотонно равномерно сходящегося к 0 ряда со знакочередованием ряда — равномерно сходится.

Ещё pro tip:

$$\left|\sum_{k=1}^{N} \sin k\alpha\right| \leqslant \frac{1}{|\sin \frac{\alpha}{2}|} \tag{3}$$

$$\left|\sum_{k=1}^{N} \cos k\alpha\right| \leqslant \frac{1}{|\sin \frac{\alpha}{2}|} \tag{4}$$

## 5.2. Доказывем отсутствие равномерной сходимости

Если не сходится поточечно где-то, рассматривать не интересно.

- Не на компакте: если замыкание не сходится даже поточечно (на границах)
- Если не выполняется хотя бы одно необходимое условие из секции 5.3 при выполнении остальных предпосылок теоремы
- Если можно посчитать в явном виде
- Можно оценить остаток через интеграл, если есть монотонность по $n$ и момент, с которой она начинается, не зависит от $x$ — и сказать через него, что найдётся $\varepsilon$, что для любого $n$ найдётся плохой $x$.
- Можно сделать то же через критерий Больцано-Коши.

*Практика 12 сентября 2022*

Фотоотчёт за практику: <отсутствует>.

## 5.3. Свойства равномерно сходящихся

При равномерной сходимости можно производить перестановку пределов, из неё получаем возможность заключить непрерывность предела, получаем перестановочность интегрирования и дифференцирования.

Однако это всё получается и при более вольных условиях, но они более сложные, мы их не изучали.

*Практика 19 сентября 2022*

Фотоотчёт за практику: `https://t.me/c/1512041988/208`.

## 5.4. Степенные ряды

Ряды вида $\sum_{i=1}^{\infty} c_i(z - z_0)^i$.

Умеем искать радиус сходимости (это шар, внутри гарантированно сходится, снаружи — не менее гарантированно расходится, а на границе — надо думать, анализировать дальше).

- Коши (база, работает всегда): $R = \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$
- Даламбер (иногда работает и он, если существует): $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|$

Потом можем использовать степенные ряды как составные части для анализа произвольных рядов.

Раскладываем в ряд Тейлора:

Разложить можем, чтобы в пределе все производные совпадали, но когда она будет совпадать с самой функцией на каком-то промежутке?

Оказывается, что достаточно комплексной дифференцируемости в $B_R(z_0)$ — тогда существует единственный набор коэффициентов степенного ряда с заданным центром, с пределом которого функция совпадает — и коэффициенты тогда находятся через Тейлора.

Note: для комплексной дифференцироемости выполняются все естественнные свойства обычной: замкнутость относительно арифметических операций, дифференцируемость элементарных функций, производная локальной обратимой функции и т.д.

Разложение элементарных функций в степенной ряд было на доске..

Как раскладывать в степенные ряды?

- Честно, через производные по Тейлору
- Раскладывать в произведение — перемножать ряды
- В круге сходимости дифференцировать можно почленно — замечаем, что ряд является интегралом чего-то хорошего — и дифферегнцирем его ряд.
- Аналогично — если является производной чего-то хорошего
- Можно пользоваться тем, что сумма ряда равна функции в круге сходимости. Например,

$$\frac{1}{x-x_0} = \frac{1}{-x_0}\left(\frac{1}{1-\frac{x}{x_0}}\right) = -\frac{1}{x_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{x_0}\right)^k \tag{5}$$

## *Практика 26 сентября 2022*

Фотоотчёт за практику: `https://t.me/c/1512041988/216`

Если у нас уже есть ряд, и надо проанализировать, какую функцию он описывает или его свойства.

- Для анализа схоимости можно посмотреть на коэффициент, как всегда.
- Можно применить метод божественного озарения и, например, продифференцировать, умножить на какую-то сдвигающщую скобку и заметить, что получилось нечто содержащее исходный ряд, получив диффуру...

Признак сходимости обычных, положительных рядов, обобщающий признак Д'Аламбера — признак Гаусса:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right), \varepsilon > 0 \tag{6}$$

Тогда при $\lambda > 1$ — сходится, если $\lambda < 1$ — расходится, иначе (при $\lambda = 1$) — $\mu > 1$ — сходится, $\mu \leqslant 1$ — расходится.

# 6. Функции нескольких переменных

## 6.1. Берём пределы

Какие механизмы?

- По Коши/окрестностям: для окрестности результатов найдётся окрестность аргументов, такая что каждый студент знает, какая.
- По Гейне — вдоль любой последовательности, стремящейся к $x_0$ по $D$
  $\{x_0\}$ $f(x_n) \to$ $A$
- Эквивалентно (тривиально — про Коши) — $\sup_{x \in \dot{V}_\delta(x_0) \cap D} |f(x) - A| \underset{\delta \to 0}{\longrightarrow} 0$

## 6.2. Разница между повторным и двойным пределом

У «хороших» функций, конечно, их существование эквивалентно и они равны. Наверное, Липшицевости достаточно. Также, (по теореме о двойном пределе) если существует конечный или бесконечный двойной предел, а также для каждого фиксированного $x'$ в окрестности существует конечный предел сужения $\varphi(y) = f(x', y)$, то пределы равны. Но вообще могут быть такие варианты:

- Двойной существует, а $\forall x \neq x_0$ не существует даже внутрення часть повторного предела
- Может не сущетствовать двойной, и это можно доказать по Гейне, показав две последовательности, вдоль которых пределы не равны
- Может стремиться к $0$ вдоль любого луча от 0 к ∞, но не быть бесконечно малой на $x, y \to +\infty$. Например, $f(x, y) = x^2 e^{-(x^2 - y)}$

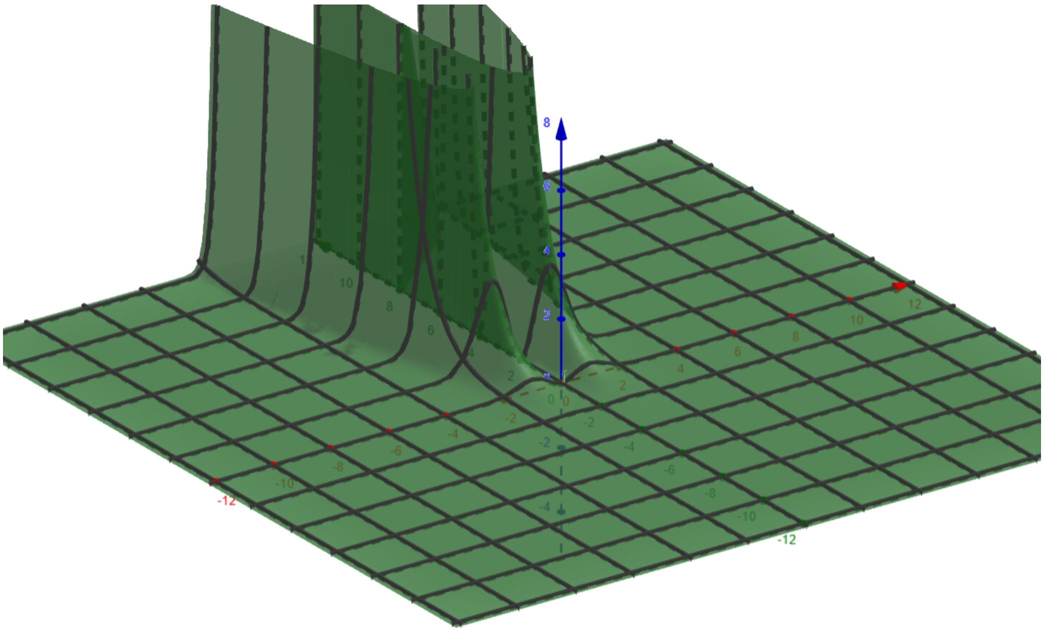

Рис. 1: Та самая $f(x,y) = x^2 e^{-(x^2-y)}$

Примеры с разбором есть в фотоотчёте практики 26.09: `https://t.me/c/1512041988/216`.

## *Практика 10 октября 2022*

Фотоотчёт за практику: ...

Как доказать существование предела функции, например, на $+\inf, +\inf$?

В определении предела фигурирует окрестность точки $+\inf, +\inf$, то есть

$$\begin{cases} x > \varepsilon \\ y > \varepsilon \end{cases} \tag{7}$$

В отличие от просто $||x, y|| \to \ \inf$, когда .

- Нужно оценить супремум отклонения от предела при $x > \varepsilon, y > \varepsilon$.
- К полянрым координатам и оценить супремум по некоторой части сферы (для $+\inf, +\inf$, казалось бы — по $\varphi \in (0, \pi/2)$). Но по идее, это будет корректно, так как там $x$ может быть сколь угодно малым. Наверное, надо сузить угол до компактного подмноже-

ства $[\alpha, \beta] \subset (0, \pi/2)$. И оценить зависимость супремума по $\varphi$ от $r$. Особые извращенцы будут искать супремум через Лагранжа.

## 6.3. Дифференцирование, частные производные

Дифференцируема $\overset{\text{def}}{\iff}$ представима в виде $f(x_0) + Ah + o(|h|)$, где $A$ — линейный оператор ($A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m)$). Частная производная — производная направлению вектора-орта.

Иногда вектор частных производных равен вектору производному оператора.

Есть необходимое и достаточное условия.

**Теорема 1** (Базированная теорема о производных). У нормальных функций всё будет нормально.

Если быть точнее — для дифференцируемости достаточно существования в окрестноти и непрерывности в точке частных производных по каждой переменной. Но не необходимо, так как, например, у функции $f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & (x \in \mathbb{Q}) \operatorname{xor} (y \in \mathbb{Q}) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ частные производные вообще не определены ни в каких точках кроме нуля, что уж там говорить о непрерывности.

А для равенства частных производных по разным перестановкам одной и той же последовательности переменных достаточно (но не необходимо) существования и непрерывности всех *рассматриваемых* частных производных в окрестности. (Фактически, в теореме было про $r$ раз непрерывную дифференцируемость, то есть вообще по любой последовательности из $r$ переменных).

Как искать частные производные? Если функция представлена в виде композиций элементарных функций, считаем по формулам, фиксируя остальные переменные — воспринимая их как параметры.

Если мы уже посчитали частные производные по всем переменным, то проверить дифференцируемость самой функции можно так:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - \langle \nabla f, h \rangle}{\|h\|} \to 0 \tag{8}$$

Но вообще — частная производная всё ещё может сущетвовать, даже если по формулам посчитать не получается (формулы-то применимы только там, где всё определено). Если нет — тогда можем находить их как производные по направлению. Пример:

$$f(x, y) = \sqrt[3]{xy} \tag{9}$$

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0 \tag{10}$$

Попробуем применить критерий выше: вдруг этот градиент $(0, 0)$ — и есть производная?

$$\frac{\sqrt[3]{xy} - 0 - 0}{\sqrt{x^2 + y^2}} \to ?0 \tag{11}$$

Для $x = y$ — стремится к бесконечности, хотя по лучу $x = 0$ или $y = 0$ и ноль, ни о каком стремлении к нулю говорить не приходится.

Для более сложных функций можно представлять их как композицию, заводя переменную для одной из её частей.

Например,

$$u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, u'_{x,y} \text{— } ?, u'_{xx,xy,yy} \text{— } ? \tag{12}$$

(в нижних индексах через запятую — все частные производные, которые требуется найти).

Обозначим $r = \sqrt{x^2 + y^2}, u = r^{-1}x$.

Находим $r'_x, r'_y$. Тогда $u'_x = (r^{-1})'_x x + r^{-1}\cancelto{1}{x'_x} = \ldots$

Если у нас какая-то большая функция, то частная производная композиции выражается через сумму — как элемемент произведения матриц Якоби.

Хозяйке на заметку: $\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right) = \mathrm{d}\left(\frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{y^2}\right)$.

Ещё на заметку: важно отличать $d^2t$ от $dt^2$ (последнее является обозначением для $(dt)^2$).

Первое — второй дифференциал функции (для независимой переменной — это просто ноль, для них никто так не пишет). Второе — приращение переменной, возведённой в квадрат.

Как искать полные дифференциалы разных порядков?

Можно воспользоваться определением, возникшим из Тейлора — там сумма по всем мультииндексом $k$ порядка $l$.

Для двухмерной переменной достаточно перебирать в суммировании степень вхождения приращения одной из переменных:

$$\mathrm{d}^n f = \sum_{k=0}^{n} \frac{n! f'_{x^k y^{n-k}}}{k!(n-k)!} (\mathrm{d}x)^k (\mathrm{d}y)^{n-k} \tag{13}$$

Например, $\mathrm{d}f = f'_x \,\mathrm{d}x + f'_y \,\mathrm{d}y$,

$\mathrm{d}^2 f = f''_{x^2} \,\mathrm{d}x^2 + 2f''_{xy} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y + f''_{y^2} \,\mathrm{d}y^2$

Но на практиках матанализа дифференциалы первого-второго порядка так не считают, а в «символьном» виде, имея полный дифференциал предыдущего порядка и применяя втупую формулу дифференцирования, получают желаемую формулу.

При этом первый дифференциал рассматривают как отображение с той же сигнатурой, что и исходная функция, считая, что $\mathrm{d}x_i$ берётся то же самое.

Причём

$$\begin{gathered}\mathrm{d}(g(x,y)\,\mathrm{d}x + h(x,y)\,\mathrm{d}y) = (g(x,y)\,\mathrm{d}(\mathrm{d}x) + \mathrm{d}g(x,y)\,\mathrm{d}x) + (h(x,y)\,\mathrm{d}(\mathrm{d}y) + \mathrm{d}h(x,y)\,\mathrm{d}y) = \\ \begin{bmatrix} \mathrm{d}(\mathrm{d}x) = \mathrm{d}^2 x = (\mathrm{d}x)'_x \,\mathrm{d}x + (\mathrm{d}x)'_y \,\mathrm{d}y = 0 \leftarrow \ \ \mathrm{d}x = \text{const everywhere} \Rightarrow (\mathrm{d}x)'_x = 0 \\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}x = (dx)^2 \overset{\text{def}}{=} dx^2 \end{bmatrix} = \\ \mathrm{d}g(x,y)\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}h(x,y)\,\mathrm{d}y = (g'_x \,\mathrm{d}x + g'_y \,\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}x + (h'_x \,\mathrm{d}x + h'_y \,\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}y\end{gathered} \tag{14}$$

Частные производные функций $g$ и $h$ считаем самостоятельно. Иногда получится, что какие-то из слагаемых нули, когда что-то не зависит от чего-то. И потом приведём подобные слагаемые (например, $\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \mathrm{d}y \,\mathrm{d}x$).

Всё это работатет для независимых переменных. Но рассмотрим хитрую композицию:

$$u(x,y) = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right) = f(s,t) \tag{15}$$

И мы считаем, что знаем «всё, что нужно» про $f$.

Хотим найти полные диффенерциалы $\mathrm{d}u, \mathrm{d}^2u$ (полагая $x, y$ независимыми переменными).

И тут у нас получается, что $\mathrm{d}^2s \neq 0$, так как это более не независимая переменная, а функция.

Так что теперь:

$$\mathrm{d}^2u(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = f''_{s^2}\,\mathrm{d}s^2 + (f''_{st} + f''_{ts})\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t + f''_{t^2}\,\mathrm{d}t^2 + f'_s\,\mathrm{d}^2s + f'_t\,\mathrm{d}^2t \tag{16}$$

Где $\mathrm{d}^2s$ — это квадратичная форма от $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y$ (если замена, например, была линейная, она обнуляется), которую можно раскрыть и получить чЕстный второй дифференциал $u$ как функции $u(x,y)$.

То есть при $s = \alpha x + \beta y$: $\mathrm{d}s = \alpha\,\mathrm{d}x + \beta\,\mathrm{d}y$, тогда:

$$\mathrm{d}^2s = \mathrm{d}^2xs''_{x^2} + 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}ys''_{xy} + \mathrm{d}^2ys''_{y^2} \tag{17}$$

И здесь второе слагаемое уже не обнуляется, и в результате получается не ноль, в отличие от независимых переменных. Также видно, что для линейной замены второе слагаемое ноль за счёт частной производной.

*Практика 17.10 2022*

## 6.4. Дифференцируем неявно заданные образжения

Есть теорема о неявно заданном отображении: если функция достаточно гладкая и в точке $(x|y)$ оператор $\Phi'_y$, можно найти окрестность, в которой последние переменные ($y$) выражаются через первые. Более того, через оператор можем выразить производную $\varphi'(x)$ неявно заданного отображения $y = \varphi(x)$ в этой окрестности через матричные выражения.

Однако, если мы знаем что-то о функции и хотим записать короче, без лишних нулей или просто не хотим возиться с матрицами, можем получить частные производные (причём и высших порядков тоже) отображения по новым переменным. Для этого надо дифференцировать тождество $\Phi(x, \varphi(x)) \equiv 0$ по разным переменным, выражая все частные производные очередного порядка по очереди.

Можно оформить это через дифференциалы очередного порядка. Главное — не забыть, что в тождествах $\mathrm{d}^k\left(\Phi(x, \varphi(x))\right) \equiv 0$ переменные, $y_i$ надо рассматривать как функции, а не независимые переменные, у которых есть ненулевые дифференциалы высших порядков.

WARNING: Простые равенства дифференцировать нельзя, только тождества (равенство должно выполняться в окрестности, чтобы все производные совпадали — они обладают свойством лоакльности, но требуют, чтобы точка ~~была точкой сочленения... кхм~~ внутренней).

Например, $F(x+y+z, x^2+y^2+z^2) = 0$, найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

## 6.5. Дифференцируем системы-неявно заданные отображения

Фактически — это всё ещё неявные отображения, просто теперь со значениями в $\mathbb{R}^m$, где $m$ — количество уравнений.

Мы можем захотеть выразить дифференциал какого-то порядка одной части через дифференциалы других (ну или найти производные одних по другим) — из предположения, что вторая часть — взяты за независимые переменные.

«Инвариантность дифференциалов первого порядка относительно изменения зависимых и независимых переменных»: то есть не важно, какие переменные выбраны за независимые, дифференциалы удовлетворяют одному и тому же отношению. Например, $\psi(x, y, z) = 0$; $z = \varphi(x, y)$ — неявное отображение, $dz = \varphi'_x dx + \varphi'_y dy$ — соотношение дифференциалов. Если будет $x = \xi(y, z)$ удовлетворяет — тому же самому неявному отображению, но теперь зависимая переменная — $x$, то соотношение $\mathrm{d}x = \xi'_y\,\mathrm{d}y + \xi'_z\,\mathrm{d}z$ — будет то же самое. (из теоремы о неявном отображении $\varphi'(x) = -\left(\Phi'_y(x, y)\right)^{-1} \Phi'_x(x, y)\Big|_{y=\varphi(x)}$)

А вот для дифференциалов высшего порядка — такого нет. Например

*Практика 24.10.2022*

Параметризация сферы через два угла:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta. \end{cases} \tag{18}$$

, где $r \geq 0, \Theta \in [0, \pi], \Theta \in [0, 2\pi)$

# 7. Замена переменной в дифференциальных уравнениях

Подстановка определяется выражением старых переменных через новые диффеоморфизмом (чтобы можно было вернуться и была равносильность) Возможно, только локальным и, возможно, с особыми точками, где нет даже локальной обратимости, но тогда их надо учитывать отдельно.

Процесс применения подстановки — это попытка выразить старые символы, фигурируют в уравнении, через новые символы — которые разрешено использовать в ответе.

Например, если хотим взять за независимую переменную $y$, а $x$ сделать функцией, нужно выразить $y^{(n)}$ через $x^{(k)}$ и, возможно, $y$. Раньше искали $f(x) = y$, теперь будем $f^{-1}(y) = x$ Исходим из соотношения $«y»(«x»(y)) = y$ То есть $«y» \circ «x» = id_y$.

$y'_x = \frac{1}{x'_y}$

Можно до посинения дифференцировать это тождество и поочерёдно получать производные $x_y^{(n)}$ всё более старших порядков.

Если у нас уравнения с частными производными (а значит есть несколько независимых переменных), выражаем дифференциалы новых переменных через дифференциалы старых. Затем записываем полный дифференциал зависимых переменных и подставляем туда, например, $\mathrm{d}x_i =$