

# Сжатый конспект по линейной алгебре (2-й семестр)

Латыпов Владимир (конспектор)

[t.me/donRumata03](https://t.me/donRumata03), [github.com/donRumata03](https://github.com/donRumata03), [donrumata03@gmail.com](mailto:donrumata03@gmail.com)

Кучерук Елена Аркадьевна (лектор)

12 июня 2022 г.

## Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Сопряжённое пространство</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Тензоры</b>	<b>4</b>
3.1	р-формы . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Евклидовы пространства</b>	<b>7</b>
<b>5</b>	<b>Расстояние до многообразия</b>	<b>7</b>
<b>6</b>	<b>Страсти по операторам</b>	<b>7</b>
6.1	Сопряжённый . . . . .	7
6.2	Нормальный . . . . .	8
<b>7</b>	<b>Самосопряжённый</b>	<b>9</b>
<b>8</b>	<b>Изометричный</b>	<b>9</b>
<b>9</b>	<b>Разложения</b>	<b>9</b>

## 1. Введение

Конспект старается быть максимального краткой выжимкой из того, что нужно знать для успешной сдачи экзамена по Линейной Алгебре во втором семестре.

Если кто-то сдаёт часть про линейные операторы и готов по ним написать, welcome.

## 2. Сопряжённое пространство

$V^*$  пространство линейных форм над  $V$ .

Вычисление формы на координатном столбце  $f(x) = x^j a_j$ , где строка  $a_j$  размера  $n$  изоморфно сопоставляется форме.

— Координатные функции относительно базиса,  $\omega^i(e_j) = \delta_j^i$ .

Они базис  $V^*$ , так как их как раз  $n$ , а породить любую  $f$  можно, предъявив коэффициенты  $a_j$ .

По  $e$  мы научились находить сопряжённый базис, теперь научимся в обратную сторону находить по базису  $V^*$  такой базис  $V$ , чтобы исходный был к нему сопряжён: возьмём любую сопряжённую пару  $e, \omega$  и через это получим  $\omega' \rightarrow (e', \omega')$

Если назвать  $S = T_{\omega \rightarrow \omega'}^T$ , утверждается, что можем получить  $e'$  так:  $T_{e \rightarrow e'} = S^{-1}$

Чтобы доказать — проверим, что  $\omega'$  — координатные функции  $e'$ . То есть что координаты преобразуются правильно:  $x' = Sx$ .

Элементы  $V^*$  Ковариантные, так как преобразуются (получение новых из старых) с матрицей  $T_{e \rightarrow e'}$ , а элементы  $V$  — контравариантные, так как с матрицей  $S = T^{-1}$

Доказываю, что можно получить изоморфизм

$$\varphi : V \rightarrow (V^*)^*, x \rightarrow "x" \quad \text{where } "x"(f) = f(x) \quad (1)$$

Кстати,  $\varphi \in \text{Aut}(V \rightarrow (V^*)^*)$ .

Линейность  $\varphi$  очевидна, для биективности в силу линейности достаточно проверить, что базис переходит в базис (что  $\text{rg } \varphi = n$ ). Действи-

тельно, " $e_j$ " — координатные функции базиса координатных функций, так как, " $e_j$ "( $f$ ) =  $f(e_j) = (a_f)_j$ .

Отличие от  $V \leftrightarrow V^*$  — в том, что теперь оно не зависит от выбора базиса.

— Умеем считать сопряжённый базис через обратную матрицу и матрицы проекторов через сопряжённый базис.

### 3. Тензоры

Это функция  $V^p \times (V^*)^q \rightarrow \mathcal{K}$ .

То, что «из векторов» — ковариантное, «из форм» — контрвариантное.

$T_{(p;q)}$  — линейное пространство размерности  $n^{(p+q)}$

За счёт линейности при вычислении на наборе векторов, разложенных по базису, можно вынести  $p+q$  сумм с координатами, остаются значения тензора на разных размещениях базиса, их мы назовём компонентами относительно базисов  $e, \omega$ .

$\alpha_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q}$  Сверху пишется  $q$  «контравариантных индекса» — из форм. Снизу —  $p$  ковариантные индексы — из векторов.

Это можно записать в  $p+q$ -мерную матрицу.

Смена базиса. Выразив старые координаты через новые ( $\xi^i = t_k^i \xi'^k, \eta_j = s_j^m \eta'_m$ ), подставим в формулу вычисления на наборе векторов, сгруппируем  $t, s, \alpha$  скажем, что это новый компонент, а новые координаты как раз останутся.

Другое определение тензора: это многомерная матрица, в которой выделены «ковариантные» и «контравариантные» координаты и которая пересчитывается при смене базиса по той же формуле, что и выше.

Определения эквивалентны.

Тензорное произведение: вводим через второе определение (многомерная матрица), проверяем вариантность.

Говорим, что в терминах линейных форм мы берём каждую от своей части координат и перемножаем результаты.

Базис вводим базис  $T_{(p;q)}$  из  $n^{p+q}$  тензорных произведений всех размещений  $e_i, \omega_j$ , помня, что

$$\omega_j : (V)^1 \rightarrow \mathcal{K}$$

$$e_i \cong "e_i" : (V^*)^1 \rightarrow \mathcal{K}$$

Доказываем, что это базис, так как количество  $n^{p+q}$  и порождающее: за коэффициенты для порождения берём компоненты относительно базиса, доказываем через формулу вычисления на наборе векторов.

Заметим, что матрица тензора из базиса будет содержать одну единицу на соответствующих индексах и все остальные нули.

Вводим свёртку как матрицу, доказываем, что это тензор, помня, что  $t_{\tilde{\kappa}}^{\kappa_2} s_{\kappa_1}^{\tilde{\kappa}} = \delta_{\kappa_1}^{\kappa_2}$  и оставляя в сумме только слагаемые, где  $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$ .

Транспонирование:  $\beta = \sigma(\alpha)$ ,  $\beta_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q} = \alpha_{j_{\sigma_1} \dots j_{\sigma_p}}^{i_1 \dots i_q}$ .

То есть набор индексов  $\alpha$  переходит в индексы  $\beta$  под действием обратной к  $\sigma$  перестановки.

Доказываем, что тензор (достаточно доказать про транспозиции, так как перестановка раскладывается на композицию транспозиций)

Заметим, что в терминах функций мы переставляем аргументы, тоже с обратной перестановкой.

Транспонирование — изоморфизм, ассоциативно, но коммутативно (как и группа перестановок).

Если при любом транспонировании тензора он не меняется, он симметричен, если умножается на  $(-1)^{\varepsilon(\sigma)}$ , то кососимметричен.

Кососимметричен  $\Leftrightarrow$  равен нулю при повторяющихся аргументах.

Вводим симметрирование, альтенирование.

Оба перестановочны относительно перестановки, причём для симметрирования получается просто симметрирование, а для альтенирования — оно умножить на знак перестановки. (доказывается, используя, что если все перестановки  $S_n$ , по которым мы суммируем, пропустить через одну перестановку, получим тоже все перестановки, но в другом порядке — таблица Кэли, иначе не группа)

$\alpha$  симметричен  $\Leftrightarrow \alpha = \text{Sim } \alpha$ .  $\alpha$  КОСОсимметричен  $\Leftrightarrow \alpha = \text{Alt } \alpha$ .

Обе идемпотентны, причём  $\text{Sim Alt } \alpha = 0$  (то есть симметрирование любого кососимметричного — ноль, ведь можно подставить кососимметричный  $\beta = \text{Alt } \beta$ , тогда  $\text{Sim } \beta = \text{Sim Alt } \beta = 0$ ).

Доказывается, заметив, что сумма чётностей по всем перестановкам — это ноль, так как это определитель матрицы со всеми единицами.

Заметим, что пересечение подпространств симметричных и антисимметричных тензоров — тривиально. Более того, если транспозиция одна (по двум индексам), то пространство всех тензоров заданного типа раскладывается в дизъюнктивную сумму симметричных и антисимметричных (по этим индексам), где  $\alpha = \text{Sim } \alpha + \text{Alt } \alpha$

### 3.1. $p$ -формы

$p$ -формы — антисимметричные ковариантные тензоры, Если от одного аргумента, отождествляют с  $V^*$ .

Внешнее произведение:  $f \wedge g = \frac{(p_f + p_g)!}{p_f! p_g!} \text{Alt}(f \otimes g)$ .

Есть свойства, можно через них раскрывать скобки.

1.  $f \wedge g = (-1)^{p_1 p_2} g \wedge f$ .
2.  $(f + g) \wedge h = f \wedge h + g \wedge h$  и  $f \wedge (g + h) = f \wedge g + f \wedge h$ .
3.  $\lambda \cdot (f \wedge g) = (\lambda f) \wedge g = f \wedge (\lambda g)$ .
4.  $\mathbb{D}_{\Lambda^{p_1} V^*} \wedge g = f \wedge \mathbb{D}_{\Lambda^{p_2} V^*} = \mathbb{D}_{\Lambda^{p_1 + p_2} V^*}$ .
5.  $(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h) = \frac{(p_1 + p_2 + p_3)!}{p_1! p_2! p_3!} \text{Alt}(f \otimes g \otimes h)$ .

2, 3, 4 — очевидно.

1 — записываем по определению, сопоставляем у сумм слагаемые, смотрим на количество инверсий между ними, оно как раз  $p_f p_g$ .

5 — по определению, доказываем, что  $\text{Alt}(\text{Alt}(f \otimes g) \otimes h) = \text{Alt}(f \otimes \text{Alt}(g \otimes h)) = \text{Alt}(f \otimes g \otimes h)$ . По линейности заносим второе тензорное произведение под внутреннюю сумму, потом создаём перестановку, работающую на всех трёх наборах индексов, но переставляющую только первые два как  $\sigma$ , по линейности альтенирования заносим его под сумму, замечаем альтенирование от перестановки, сокращаем  $(-1)$ , конец.

По индукции можно обобщить формулу для внешнего произведения на несколько векторов.

Есть базис пространства антисимметричных  $p$ -форм (антисимметричных тензоров) размера  $\binom{n}{p}$  из врёшних произведений упорядоченных комбинаций координатных функций. Координаты в нём называют

существенными, они численно совпадают с координатой для того же набора в пространстве всех тензоров.

Можно вычислить значение внешнего произведения 1-форм на наборе векторов через определитель матрицы применения каждой функции к каждому вектору.

Также можно найти координаты внешнего произведения в базисе внешних произведений, если знаем разложение самих функций по базису пространства линейных форм.

Комбинируя, можно через сумму произведений двух соответствующих определителей вычислить функцию, заданную произведением 1-форм, заданных координатами, на наборе векторов, заданных координатами.

## 4. Евклидовы пространства

Ортогональное дополнение

Расстояние от точки до линейного многообразия. Через отношение определителей матриц Грама. Задание 1374

## 5. Расстояние до многообразия

Можно найти используя отношения определителей матрицы Грама.

Матрица грама в новом базисе:  $\Gamma' = T^T \Gamma \bar{T}$

Между многообразиями:  $dist(x_1 - x_2; L_1 + L_2)$ .

$$dist^2(x, L) = \frac{g(\dots, x)}{g(\dots)}$$

## 6. Страсти по операторам

### 6.1. Сопряжённый

Матрица  $\overline{\Gamma^{-1} A^* \Gamma}$ , в онб — просто  $A^*$  Сопряжение — взаимнообратно. Относительно композиции — как транспонирование. Аддитивность, псевдооднородность. Перестановочность относительно  $(\cdot)^{-1}$

Ядро оператора и образ сопряжённого — ортогональные дополнения друг друга, как и образ оператора и ядро сопряжённого.

Собственные числа — сопряжения друг друга. Для не соответствующих — собственные векторы ортогональны, для соответствующих — одинаковые.

Если подпространство инвариантно относительно  $A$ , то его ортогональное дополнение — относительно  $A^*$ .

## 6.2. Нормальный

$\Leftrightarrow$  Перестановочен с сопряжённым  $\Leftrightarrow \langle Ax, Ay \rangle = \langle A^*x, A^*y \rangle \Leftrightarrow$  В некотором базисе матрицы перестановочны  $\Leftrightarrow$  ОПС + собственные пространства ортогональны  $\Leftrightarrow$  Существует какой-нибудь ОНБ, что матрица имеет понятно какой блочно-диагональный вид

Не перестанет быть нормальным, если вычесть сколько-то  $\text{id}$ .

У нормального оператора ядро и образ — ортогональные дополнения друг друга (если удалось получить собственные числа из того же поля, то потому, что это собственное подпространство нуля и все остальные).

Причём ядро не меняется при возведении в степень. И  $\text{Ker } A = \text{Ker } A^*$ .

Лемма о комплексификации (оператора):

— Собственные числа сохраняются, собственные пространства будут комплексификацией соответствующих — Комплексные собственные числа и пространства будут разбиваться на пары сопряжённых. — Нормальность сохраняется — Сопряжённость — перестановочная с комплексификацией

(Лемма очевидна, если учесть, что любое полиномиальное уравнение, верное в подполе, верно и в самом поле)

Канонический вид: — В унитарном: находим ОНБ из собственных подпространств, получаем собственные числа на диагонали

— В евклидовом: если все СЧ — вещ. — аналогично. Иначе — добавляем ещё блоки для пар комплексно-сопряжённых. Матрица перехода всё ещё должна быть ортогональной. Как её найти? Для вещественных собственных чисел — просто собственные векторы. Для пар КС разделяем какой-нибудь вектор на пару вещественной и комплексной части и запишем в таком порядке.



## 7. Самосопряжённый

(симметричный/эрмитов)

Равносильное определение через скалярное произведение: применить можно как к первому, так и ко второму аргументу, получится то же самое. И в обратную сторону.

Если  $A$  и  $B$  самосопряжены и перестановочны, то произведение самосопряжено.

Самосопряжён  $\Leftrightarrow$  нормален + имеет вещественный спектр  $\Leftrightarrow$  существует ОНБ, в котором матрица самосопряжена

Если подпространство инвариантно относительно  $A$ , то и ортогональное дополнение — тоже.

В каноническом виде просто пропадут блоки, останутся просто (и в унитарном, и в Евклидовом)

## 8. Изометричный

Унитарный/ортогональный

Равносильное определение через скалярное произведение, что если применить к обоим аргументам, скалярное произведение не изменится.

...  $\Leftrightarrow$  нормален + собственные числа по модулю = 1  $\Leftrightarrow$  существует ОНБ, в котором матрица изометрична  $\Leftrightarrow Q^{-1}$  — изометр.

Если подпространство инвариантно относительно  $Q$ , то орт. дополнение — тоже.

Канонический вид — В Евклидовом на диагонали останутся только  $\pm 1$   
— В Унитарном в блоках будут  $a^2 + b^2 = 1$

Матрица изометрична  $\Leftrightarrow$  её (столбцы  $\Leftrightarrow$  строки) ортонормированы.

## 9. Разложения

$L(D)U$  — нижне-унитреугольная \* (Диагональная без нулей на диагонали) \* верхне-унитреугольная; Существует  $\Leftrightarrow$  Все угловые миноры матрицы  $A$ , кроме (возможно)  $\Delta_n$  не равны нулю. Можно найти одно-

временным Гауссом  $A$  и  $E$  без замены строк и столбцов. Слева будет  $DU$ , справа —  $L^{-1}$

Если матрица самосопряжённая, будет  $A = LDL^* = U^*DU$ . Причём все  $d$  вещественные.

Положительная/отрицательная определённость, то же самое про собственные числа

Разложение Холецкого: самосопряжённая положительно определённая, все угловые миноры кроме, возможно, последнего, не нули  $\iff$  можно убрать  $D$ , разложить на треугольные с положительными элементами на диагонали.

$QR$  разложение: для невырожденной можно представить как произведение ортогональной на правую. Или же левой на ортогональную.  $Q$  находится ортонормированием столбцов исходной.

Полярное ( $QS$  или  $SQ$ ) разложение: на самосопряжённую ( $H$ ) положительно определённую и ортогональную ( $U$ ). Нужно взять  $\sqrt{AA^*}$  (левый модуль) для получения ортогонального. Далее — через обратную.

Можно также  $UH$ , тогда берём  $H = \sqrt{A^*A}$  (правый модуль).