Конспект по линейной алгебре (1-й семестр)

Латыпов Владимир (конспектор)
t.me/donRumata03, github.com/donRumata03, donrumata03@gmail.com

Екатерина Аркадьевна **Кучерук** (лектор)
kucheruk.e.a@gmail.com

18 февраля 2022 г.

Содержание

1. Введение

Литература по линейной алгебре:

Геометрия Александров Ильин Позняк Линейная алгебра

Все ресурсы будут на Google диске: `https://drive.google.com/drive/folders/1-AMHZZyJ90mlqPfCZLuLfeA8Clyy7W99`

Также доступны конспекты от другого лектора по ссылке: http://mathdep.ifmo.ru/mmtp/

2. Ключевые определения: обязательно помнить на зачёте

- Векторное произведение векторов
- Определение определителя

3. Векторы

Вектор - класс направленных отрезков, определён с точностью до точки приложения.

Линейные операции:

- $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \vec(a) \times \alpha$

Свойства линейных операций/аксиомы линейного пространства:

1. Коммутативность
2. Ассоциативность
3. Существование нулевого элемента (нуль-вектор)
4. Существование противоположного элемента для каждого $\forall \vec{A}$: $\exists \vec{\overline{A}} : \vec{A} + \vec{\overline{A}} = 0$
5. Ассоциативность умножения вектора на скаляр: $\beta \times (\vec{A} \times \alpha) = \beta \times (\vec{A} \times \alpha)$
6. Дистрибутивность умножения на скаляр относительно сложения чисел: $(\alpha + \beta) \times \vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$

7. Дистрибутивность умножения на скаляр относительно сложения векторов: $(\vec{a} + \vec{b}) \times \alpha = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$

Два вектора коллинеарны $\vec{a} \parallel \vec{b} \iff ...$

Линейная комбинация векторов:

$$\overleftarrow{combination} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \times \vec{v}_i \tag{1}$$

Комбинация векторов тривиальна, если $\forall \alpha_i = 0$ Иначе - нетривиальная система.

Система векторов линейно независима, если любая нулевая линейная комбинация тривиальна. Иначе система линейно зависима (например, если есть коллинеарные).

Если есть хотя бы один нуль-вектор, система тоже линейно зависима (берём коэффициент 0 при нём).

Если объединить линейно зависимую с любой, получится линейно зависимая.

Если система линейно зависима, один из векторов - линейная комбинация каких-то других.

$$] \; \alpha_n \neq 0 \tag{2}$$

$$\exists x_i : \tag{3}$$

$$\vec{v}_n = \sum \vec{v}_i = \frac{1}{\alpha_n} \tag{4}$$

Пусть есть прямая. На ней: Базис - любой ненулевой вектор.

Пусть есть плоскость. На ней: Базис - любая упорядоченная пара неколлинеарных векторов.

Пусть есть пространствао. На ней: Базис - упорядоченная тройка некомплананых векторов.

α_i - координаты вектора в базисе.

Теорема: Любой вектор пространства может быть разложен по базису, причём единственным образом. Как в пространстве, так и на прямой с полскостью.

Доказательство: Базис - векторы $\vec{e}_i$ Добавим к ним вектор x. Так как была

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i \times \vec{e}_i$$

x. Тогда полученная система векторов будет линейно зависимой и вектор x может быть линейно выражен через векторы формула: формула, где формула - некоторые числа. Так мы получили разложение вектора x по базису. Осталось доказать, что это разложение единственно.

Докажем несколько теорем, далее работать будем с координатами.

Следствия теоремы о единственности разложения:

- $\vec{a} = \vec{b} \Longleftrightarrow \forall i < n : \vec{a}_i = \vec{b}_i$
- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} \Longleftrightarrow \forall i < n : \vec{a}_i + \vec{b}_i = \vec{c}_i$, доказываетсчя через аксиомы линейного пространства
- $\vec{b} = \alpha \times \vec{a}, \alpha \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \vec{b}_i = \alpha \times \vec{b}_i$
- $\vec{a} \parallel \vec{b}, \vec{a} \neq \vec{0} \Longleftrightarrow \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3} = ... = \alpha \in \mathbb{R}$
- Система коллинеарных векторов ($\geq n + 1$) всегда линейно зависимая (для плоскости либо все коллинеарны, либо 2 неколлинеарных, тогда можно ввести базис, выразив один через другие, для пространства аналогично, только 3 и некомпларнарные)

$\vec{l_1}, \vec{l_2}, \vec{l_3}$ базис V_3 $\forall v \in V_3 \exists ! \forall i \in \{ \ 1, \ 2, \ 3 \ \} \alpha_i \in \mathbb{R} : \vec{}$

4. (

nСистема координат на плоскости и в пространстве) говорят, что в V_3 введена д.с.к (декартова сис коорд), если в пространстве есть точка O (начало системы коордтнат), зафиксирован базис $\vec{l_1}, \vec{l_2}, \vec{l_3}$ некомпланарные.

Оси кординат - прямые, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов.

Координаты точки - всё равно что координаты радиус-вектора. Геометрически - для нахождения координат проводим (правило параллелограмма) плоскости или вектора параллельные тому, чему нужно.

Координаты вектора = кординаты конца - координаты начала

Задача: Пусть есть вектор, заданный координатами конца и начала ($A = (a_1, a_2, a_3), B = (b_1,_2, b_3)$). Нужно найти точку $M = (m_1, m_2, m_3)$: $\frac{AM}{MB} = \frac{\lambda}{\mu}$

Распишем, тогда:

$$m_i = \frac{\lambda b_i + \mu a_i}{\lambda + \mu}$$

Для середины - понятно, что.

В дальнейшем будем рассматривать ортонормированную декартовую систему координат (о.н.д.с.к.). Все единичной длины.

Будем обозначать $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \tag{5}$$

$$a_0 = \frac{\vec{a}}{|a|} = (\frac{a_1}{\sqrt{\cdots}}, \frac{a_2}{\sqrt{\cdots}}, \frac{a_3}{\sqrt{\cdots}}) = (\cos(\alpha), \cos(\beta), \cos(\gamma)) \tag{6}$$

Направляющие коснусы (углов вектора с осями координат)

$$\cos(\gamma) + cos(\beta) + \cos(\alpha) = 1 \tag{7}$$

5. Полярная и сферическая система координат

ПСК определяется точкой и **полярным** лучём отсчёта из этой точки.

Связь между полярной и декартовой системой координат.

1. $r = \varphi$ - задаёт спираль Архимеда
2. Лемниската Бернулли:

$$(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2) \tag{8}$$

$$r^4 = r^2(cos^2(\varphi) - sin(\varphi)) = r^2(cos(2\varphi)) \tag{9}$$

$$r = \sqrt{2\varphi} \tag{10}$$

3. ...

6. Преобразования координат

6.1. Параллельный перенос, сдвиг

Происходит лишь перенос точки приложения

$$\begin{cases} O' = (x_0, y_0, z_0)\ in\ old\ system \\ M = \vec{OM} = (x, y, z) \\ M = \vec{O'M} = (x', y', z') \\ \begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \\ z = z' + z_0 \end{cases} \end{cases} \tag{11}$$

6.2. Поворот на плоскости

$$\begin{cases} Old\ -\ OXY \\ New\ -\ OX'Y' \\ M = (x, y) \\ M = (x', y') \\ \begin{cases} x' = r\cos(\varphi) \\ y' = r\sin(\varphi) \end{cases} \\ \begin{cases} x = r\cos(\varphi + \alpha) = ... = x'\cos(\alpha) - y'\sin(\alpha) \\ y = r\sin(\varphi + \alpha) = ... = x'\sin(\alpha) + y'\cos(\alpha) \end{cases} \end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \tag{13}$$

6.3. Поворот координат в пространстве

$$\vec{e_1} = (\cos(\alpha_1), \cos(\beta_1), \cos(\gamma_1)) \tag{14}$$

$$\vec{e_2} = (\cos(\alpha_2), \cos(\beta_2), \cos(\gamma_2)) \tag{15}$$

$$\vec{e_1} = (\cos(\alpha_3), \cos(\beta_3), \cos(\gamma_3)) \tag{16}$$

$$x'\vec{e_1} + y'\vec{e_2} + y'\vec{e_3} = x'(\cos(alpha_1)\vec{i} + \cos(alpha_1)\vec{j} + ...) + \tag{17}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_1) & \cos(\alpha_2) & \cos(\alpha_3) \\ \cos(\beta_1) & \cos(\beta_2) & \cos(\beta_3) \\ \cos(\gamma_1) & \cos(\gamma_2) & \cos(\gamma_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \tag{18}$$

7. Операции над векторами

7.1. Скалярное произведение

Определение 1 (Скалярное произведение).

$$(a, b) = a \cdot b = |a||b| \cdot cos(ab) \tag{19}$$

Свойство 1 (Аксиомы скалярного произведения). 1. Симметрия

2. Аддитивное по обоим аргументам: $|a||b| \cdot cos(ab)$
3. Однородное по обоим аргументам: $(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \lambda(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \lambda\vec{b})$
4. $(1), (2) \Rightarrow$ линейное по обоим аргументам
5. Положительна определённость: произведение на самого себя всегда ≥ 0, причём равенство достигается только для нуль-вектора.

7.2. Проекция вектора на вектор

Определение 2 (Проекция вектора на вектор).

$$a, b - vectors \tag{20}$$

$$a_b = a \cdot \cos ab \tag{21}$$

Замечание. Скалярное произведение имеет знак!

Чтобы найти randдинату вектора в прямоугольной системе координат достаточно умножить его модуль на меня.

Теорема 1 (Аддитивность скалярного произведения).

$$(!)(\vec{a}_1 + \vec{a}_1) \cdot \vec{b} = \vec{a}_1 \cdot \vec{b} + \vec{a}_2 \cdot \vec{b} \tag{22}$$

Доказательство. Введём базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ вдоль вектора $\vec{b}$: . ■

Если операция удовлетворяет всем четырём аксиомам, это скалярное произведение.

Теорема 2.
$$(\vec{a}, \vec{b}) = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b \quad (23)$$

Доказательство. Просто распишем произведение, прдставляя векторы через $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ■

7.3. Векторное произведение векторов

Определение 3. Упорядоченная тройка векторов - правая, если при вращении первого ко второму буравчик двигается к третьему.

Определение 4.
$$vec\_product : (\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \mapsto \mathbb{R}^2 \quad (24)$$
$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \overset{\text{def}}{\iff} \quad (25)$$

$|\vec{c}| = |\vec{c}| \cdot |\vec{c}| \cdot \sin(\varphi)$

- $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{a}$
- $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ –

Свойство 2. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

$[a; a] = \vec{0}$

$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = 0$

Линейность по обоим аргументам

Длина скалярного произведения - площадь параллелограмма, натянутого на аргументы.

Теорема 3 (Векторное произмедение в координатах).

$$[\vec{a},\ \vec{b}] = (a_y b_z - a_z b_y,\ a_z b_x - a_x b_z,\ a_x b_y - a_y b_x) \tag{26}$$

Иначе говоря:

$$[\vec{a},\ \vec{b}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \tag{27}$$

Доказательство. Заметим, что векторные проивзведения базисных векторов в правом ортонормированном базисе такие:

$$[\vec{i}, \vec{j}] = \vec{k} \tag{28}$$

$$[\vec{j}, \vec{k}] = \vec{i} \tag{29}$$

$$[\vec{k}, \vec{i}] = \vec{j} \tag{30}$$

То есть плюс получается, когда обыный порядок,возможно - со сдвигом

■

7.4. Смешанное произведение векторов

Определение 5 (Смешанное произведение векторов).

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) \tag{31}$$

Свойство 3 (Свойства смешанного произведения векторов).

1. Произведение равно объёму параллелепипеда со знаком (добавляем минус, если вдруг левая тройка).
2. Смешанное произведение не меняется при циклической перетановке векторов. В противном случае знак меняется на противоположный.
3. $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}])$
4. Аддитивность
5. Однородность
6. $\Rightarrow$ Линейность по любому аргументу (за счёт циклической перестановки - линейность по любому аргументу)

Доказательство.
(1) доказывается через нахождение модуля Sh
(2) Все тройки либо правые, либо левые одновременно, а модуль - через объём однгого и того же параллелограмма
(3-4) Линейность: ...
■

Теорема 4. Смешанное произведение:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \tag{32}$$

Теорема 5. Смешанное произведене = 0 ⇔ векторы компланарны.

Доказательство. Так как строчки матрицы - координаты векторов, то равенство определителя нулю соответствует возможности выразить одну из строк, а значит, и один из векторов, через остальные. ■

Теорема 6. Вектроное произведение линейно относительно обоих аргументов.

Доказательство. Докажем через скалярное произведение самого на себя вектора $\vec{c} = [a_1 + a_2, b] - [a_1, b] - [a_2, b]$, которое равно нулю ...Ass - we can! ■

7.5. Двойное векторное произведение

Определение 6.

$$[a, b, c] = [a, [b, c]] \tag{33}$$

Теорема 7.

$$[a, [b, c]] = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, vecb) \tag{34}$$

Бац минус цаб!

Доказательство. Распишем через определители левую часть и по определениям - правую. ■

8. Задание прямой и плоскости в декартовой системе координат

Теорема 8. Прямая задаётся в линейным уравнением в декартовой системе координат

Доказательство. Сначала рассмотрим ту, для которой прямая совпадает с одной из осей. Затем через линейные преобразования перейдём в любую другую. Линейность не испорчена. Профит. ∎

Теорема 9. Любое линейное уравнение вида $Ax+By+c=0$ задаёт некую прямую на плоскости.

Определение 7 (Вектор нормали)**.** Вектор нормали - любой ненулевой вектор, перпендикулярный прямой.

Произвольная точка плоскости $M(x,y)$ принадлежит прямой $\iff$ скалярное произведение её радиус-вектора и вектора нормали = 0.

Полезная ссылка о видахз уравнения прямой на плоскости: `http://www.cleverstudents.ru/line_and_plane/forms_of_equation_of_line_on_plane.html`

	Прямая на плоскости	Плоскость	Прямая в пространстве
1. Общее уравнение	$Ax+By+C=0$	$Ax+By+Cz+D=0$	
2. Уравнение в отрезках	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$	
3. Через точку и вектор нормали	$(\vec{r}-\vec{r_0})\cdot\vec{N}=0$, если раскрыть, то будет общее	$(\vec{r}-\vec{r_0})\cdot\vec{N}=0$	
4.1 Параметрическое	$\vec{p}=\vec{M}+t\cdot\vec{S}\Leftrightarrow \begin{cases}x=M_x+t\cdot S_x\\ y=M_y+t\cdot S_y\end{cases}$		$\vec{p}=\vec{M}+t\cdot\vec{S}\Leftrightarrow \begin{cases}x=M_x+t\cdot S_x\\ y=M_y+t\cdot S_y\\ z=M_z+t\cdot S_z\end{cases}$
4.2 Каноническое	$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=t\in\mathbb{R}$		$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=t\in\mathbb{R}$
5. Пересечение двух плоскостей			$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$
6. Нормальное уравнение прямой	$n=(\cos(\alpha),\sin(\alpha))$, $\vec{r}\cdot\vec{n_0}=p\Leftrightarrow x\cos(\alpha)+y\sin(\alpha)-p=0$	$n=(\cos(\alpha),\cos(\beta),z\cos(\gamma))$, $\vec{r}\cdot\vec{n_0}=p\Leftrightarrow x\cos(\alpha)+y\cos(\beta)+z\cos(\gamma)-p=0$	По факту, нормальное - это когда вектор нормализован, а свобоный член отрицателен - это минус расстояние до начала координат
7. Полярное уравнение	$r-\frac{p}{cos(\varphi-\alpha)}$, где p - расстояние до прямой, α - угол нормали с осью OX		

Замечание. В случае канонического уравнения все кроме одного параметра типа направляющего вектора могут быть нулями.

Пример. Нужно найти уравнение плоскости по двум точкам и прямой, ей параллельной.

Спопоб 1. Вектор нормали - векторное произведение разности точек и вектора прямой. Далее находим смещение D классическим спсобом и получаем общее уравнение плоскости. Способ 2. Когда векторы $\vec{M_1M_2}, \vec{M_1M}, \vec{a}$ компланарны? Когда смешанное произведение = 0. Приравняем определитель соответствубщей матрицы к нулю.

Нас интересуют пероды между типами уравнений.

- Между 4.1 и 4.2 - очевидно
- $5 \to 4$: Находим направляющий вектор через векторное произведение векторов нормали. Далее нужна точка. Для этого найдём пересечение прямой с $z = 0$. $M_0 = (x_0, y_0, 0)$. Решим систему:

$$A_1x_0 + B_1y_0 + D_1 = 0A_2x_0 + B_2y_0 + D_2 = 0 \tag{35}$$

- $1 \to 6$: $\vec{n} = \pm\frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$
  $x \cdot \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} + y\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} + z\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0.$

$$\begin{cases} cos(\alpha) = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \\ sin(\alpha) = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \\ -p = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \end{cases} \tag{36}$$

  , причём +, если $C < 0$, иначе -- минус.

Пример. Нужно найти уравнение плоскости по двум точкам и прямой, ей параллельной.

Спопоб 1. Вектор нормали - векторное произведение разности точек и вектора прямой. Далее находим смещение D классическим спсобом и получаем общее уравнение плоскости. Способ 2. Когда векторы $\vec{M_1M_2}, \vec{M_1M}, \vec{a}$ компланарны? Когда смешанное произведение = 0. Приравняем определитель соответствубщей матрицы к нулю.

9. Нахождение расстояний в координатах

9.1. Расстояние от точки до прямой/плоскости

9.1.1. Общее уравнение

Удобно использовать нормальное уравнение, выводим формулу:

$$\rho(p, L) = \text{distance}(ax + by + c = 0, (x_0, y_0)) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{37}$$

9.1.2. По направляющему вектору

$$d = h_{parallelogram} = \frac{|\vec{s} \times \overrightarrow{MM_0}|}{|\vec{s}|} \tag{38}$$

10. Взаимные расположения некоторых объектов

10.1. Взаимное расположение прямой и плоскости

10.1.1. Параллельность или лежание прямой в плоскости

$$\left[\begin{array}{l} L \parallel \alpha \\ L \subset \alpha \end{array}\right. \Leftrightarrow \vec{N} \perp \vec{S} \tag{39}$$

Расстояние в этом случае равно расстоянию от любой точки прямой до плоскости.

10.1.2. Пересечение

$$L \cap \alpha = Q \Leftrightarrow \vec{N} \not\perp \vec{S} \tag{40}$$

Для нахождения пересечения:

- Через параметрическое уравнение: решим уравнение, чтобы найти такое t, что точка удовлетворяет уравнению плоскости.
- Через уравнение по двум плоскостям. Тогда придётся решать систему из трёх уравнений методом Крамера (4 определителя...)

$$sin(\alpha) = cos(\angle(\vec{N}, \vec{S})) = ... \tag{41}$$

10.2. Взаимное расположение прямых на плоскости

10.2.1. Параллельность

Пропорциональность направлящих векторов или, что то же самое, параллельность векторов нормали

В этом случае можно искать расстояние, это всё равно что расстояние от одной прямой до любой из точек другой

10.2.2. Некое пересечение

Это всё равно что НЕ параллельность. Можно найти точку пересечения. Способ нахождения зависит от того, как заданы, но всегда очевидный.

Ещё можно найти угол. Находим угол между нормалями или направляющими.

$$cos(\alpha) = cos(\vec{N}_1, \vec{N}_2) = cos(\vec{S}_1, \vec{S}_2) = ... \tag{42}$$

Замечание.

10.2.3. Перпендикулярность

Если угол равен $\frac{\pi}{2}$, то есть скалярное произведение соответствущих векторов = 0.

10.3. Взаимное расположение плоскостей

10.3.1. Параллельны или равны

Это значит, что векторы нормали пропорциональны

10.3.2. Пересекание

Это значит, что векторы нормали НЕ пропорциональны

10.4. Перпендикулярны

Ну, перпендикулярны и перпендикулярны, чего кричишь-то?

$$cos(\angle(\alpha_1, \alpha_2)) = cos(\vec{N}_1, \vec{N}_2) = cos(\varphi) = ... \tag{43}$$

10.5. Взаимное расположение прямых в пространстве

10.5.1. Параллельность или совпадение

Направляющие векторы параллельны

10.5.2. Пересечение

Как найти угол? Через угол между векторами.

Как найти точку пересечения? Через решение системы параметричемких уравнений (обычно оно отсутствует).

Алтернативный способ проверки переекаются ли: проверить компланарность трёх векторов, затем - перoверить непараллельность векторов

10.5.3. Скрещивание

Близкородственное?

Как найти расстояние между скрещ. прямыми? По факту - это минимальное расстояние между точками прямых. Это также и расстояние от одной из прямых до пареллельной ей плоскости, постороенной через прямую.

Можно ещё построить параллелепипед на векторах: $\vec{s_1}, \vec{s_2}, M_1\vec{M}_2$ и найти его высоту.

Задача о поиске общего перпендикуляра между скрещивающимися прямыми. Для получения направляющего вектора достаточно найти векторное произведение направляющих векторов прямых. Чтобы найти плоскости, векторно умножаем точки берём по одной из Задаём прямую как пересечение двух плоскостей.

Альтернативный способ - минимизировать функцию расстояния $f(t_1, t_2) \to min$.

10.6. Перпендикулярны

Ну, перпендикулярны и перпендикулярны, чего кричишь-то?

11. Типичные задачи аналГеомы

11.1. Найти точку, симметричную данной относительно плоскости

$P' = 2Q - P, Q = PP' \cap \alpha$ Строим прямую через нормаль к плоскости и точку. Находим Q как пересечение этой прямой с полскостью. Точка.

12. Проекция точки на прямую; точка, симметричная данной относительно прямой

Как вариант - строим плоскость через направляющий вектор прямой как вектор нормали и точку. Затем - пересекаем её с прямой, находя основание перпендикуляра.

Другой вариант - найти такое t, что $\overrightarrow{f(t)P} \perp \vec{S}$.

13. Кривые второго порядка

Определение 8 (Кривые второго порядка). Геометрическое место точек, декартовы координаты которых удовлетворяют алшебраическому уравнению второго порядка на плоскости называется кривой второго порядка.

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{12}xy + 2a_1x + 2a_2y + a_0 \tag{44}$$
$$a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{12}^2 \neq 0 \tag{45}$$

Потом мы докажем, что существует только 8 потенциальных типов КВП.

- Эллипс
- Окружность
- Гипербола
- Парабола

13.1. Эллипс

Определение 9 (Эллипс). ГМТ, сумма расстояний от которых до фокусов есть $2a$.

Расстояние между фокусами оообозначают за $2c$. $\mathbf{a} > \mathbf{c}$!

Докажем, что при системе координат, где центр между фокусами, а ось OX проходит через них, уравнение будет таким:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{46}$$
$$b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow b < a \tag{47}$$

a - Большая полуось b - Малая полуось

По факту - эллипс - это сжатая в $\frac{b}{a}$ раз окружность (нетрудно понятнь, проведя преобразование плоскости)

Эксцентриситет: $\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$ - отношение расстояний между фокусами к длине большой полуоси $\varepsilon = 0 \Rightarrow$ окружность.

Фокальные разиусы: $r_{1,2} = a \pm \varepsilon \times x$

Директрисса:

$$D_{1,2}: \quad x = \mp\frac{a}{\varepsilon} \tag{48}$$
$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon = \frac{r}{d} \tag{49}$$

($d_{1,2}$ - расстояния от точки до дисректрисс)

Замечание. Фокусы расположены на той оси, в знаменетале у которой число больше.

13.2. Гипербола

Определение 10 (Гипербола). ГМТ, разность расстояний от которых до фокусов есть $2a$.

Расстояние между фокасами оообозначают за $2c$. $\mathbf{a} < \mathbf{c}$!

Уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{50}$$
$$b^2 = a^2 - c^2 \tag{51}$$

Асимптоты: $y = \pm\frac{b}{a}x$

Эксцентриситет: $\varepsilon = 0$

Фокальные разиусы: $r_{1,2} = a \pm \varepsilon \times x$ - правая ветвь $r_{1,2} = -a \mp \varepsilon \times x$ - левая ветвь

13.3. Парабола

Определение 11 (Парабола). ГМТ, расстояния от которых до фокуса и прямой (директриссы) равны.

Уравнение:

$$y^2 = 2px \tag{52}$$

$$Diresctrissa(D) : x = -\frac{p}{2} \tag{53}$$

13.4. Эквивалентные определения

Видими, что етсь похожие паттерны Дадим тогда другие определения определение:

Определение 12 (Эллипс). Геометрическое место точек, отношения расстояний до которых от фиксированной точки до фиксированной прямой (дирестриссы) - есть величина прстоянная и **меньшая единицы**.

Определение 13 (Гипербола). Геометрическое место точек, отношения расстояний до которых от фиксированной точки до фиксированной прямой (дирестриссы) - есть величина прстоянная и **большая единицы**.

Определение 14 (Парабола). Геометрическое место точек, отношения расстояний до которых от фиксированной точки до фиксированной прямой (дирестриссы) - есть величина прстоянная и **равная единице**.

Тут ключевую роль приобретает директрисса.

13.5. Полярные уравнения

13.5.1. Эллипс

Построим уравнение в такой ПСК, что центр сопадает с фокусом, тогда радиус = полярный радиус. А ось - вдоль (большой) полуоси.

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon cos(\varphi)} \tag{54}$$

$$p = q\varepsilon = \frac{a}{b^2} \tag{55}$$

$$q = \frac{a}{\varepsilon} - c \tag{56}$$

13.6. Уравнения касательных

13.6.1. Эллипс

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1 \tag{57}$$

13.6.2. Гипербола

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1 \tag{58}$$

13.6.3. Гипербола

$$yy_0 = p(x - x_0) \tag{59}$$

13.7. Оптические свойства

13.7.1. Эллипс

Лучи света, выпускаемые из одного фокуса, собираются в другом.

13.8. Пришло время доказывать, сэр!

13.8.1. Каноническое уравнение эллипса

Рассморим точки $F_1(-c, 0); F_2(+c, 0)$, поймём, когда (x, y) лежит на эллипсе, то есть когда $r_1 + r_2 = 2a(> 2c)$

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \tag{60}$$

$$r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \tag{61}$$

$$r_1 + r_2 = 2a \tag{62}$$

$$\vdots \tag{63}$$

$$r_2 = a - \varepsilon x \,\vdots \tag{64}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1 \tag{65}$$

13.8.2. Директрисса

Хотим доказать, что расстояние от фокуса до соответствующей директриссы:

$$\mathfrak{D}_{1,2} \quad x = \pm\frac{a}{\varepsilon} \tag{66}$$

13.8.3. Докажем эквивалентность определений

13.8.4. Касательные к гиперьоле и её асимптоты

Рассмотрим часть кривой, для которой $x > 0, y > 0$, тогда можно представить её функцией.

Уравнение касательной в общем случае:

$$y = y_0 + (x - x_0)f'(x_0) \rightsquigarrow \\ \rightsquigarrow yy_0 = y_0^2 + (x - x_0)y_0 y'(x_0) \tag{67}$$

Замечание. Ассимптоты теоретически могут быть не только прямыми, но мы рассмотрим функцию $kx + b$

$x \to \infty, y \to \infty$ Наклонная ассимптота:

$$\begin{cases} k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \longleftarrow \exists, \neq \infty \\ b = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - kx \longleftarrow \exists, \neq \infty \end{cases} \tag{68}$$

13.8.5. Полярное уравнение

$$r = a - \varepsilon x \tag{69}$$

$$x = rcos(\varphi) + c \tag{70}$$

$$r = \dots = \frac{a - \varepsilon c}{1 + \varepsilon cos(\varphi)} = \frac{p}{1 + \varepsilon cos(\varphi)} \tag{71}$$

13.9. Оптические свойства

Докажем, что в случае эллипса улгы падения и отраженгия равны.

Рассмотрим касетельную, е вектор нормали. Чтобы углы были равны, биссектрисса радиус-векторов из фокусов должна быть коллинеарна вектору нормали.

Обнаружим, что это правда.

Замечание. На жкзамене может попасться, например, билет: выведете каноническое уравнение гиперболы из определения. Так что можно потренироваться дома.

13.10. Приведение кривой второго порядка к каноническому виду

Кроме 3-х нормальных кривых второго порядка можно получить ещё 5 вырожденных.

Рассмотрим преобразования плоскости и поймём, что с помощью этих уравнений можно получить только одну из восьми из этих конструкций.

Сначала повернём так, чтобы член $a_{12} \times xy$ - пропал (если его тем - тем проще - пропускае шаг). (такой поворот найти можно - достаточно расписать формулу поворота, получится даже два возмоных поворота)

Первый случай - коэффициенты перед квадратами - не нули.

$$a_{11}x^2 + 2a_1x = \dots = a_{11}\left(x + \frac{a_1}{a_{11}}\right)^2 - \frac{{a_1}^2}{a_{11}} \tag{72}$$

А это - параллельный перенос.

Получим такое выражение:

$$a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + a'_0 \tag{73}$$

Если $a_0 \neq 0$, варианты:

- Эллипс
- Гипербола
- $\emptyset$

Иначе:

- Точка
- Пара пересекающихся прямых

Второй случай - когда $min(a_{11}, a_{22}) = 0; max(a_{11}, a_{22}) = 1$

После параллеельного переноса:

$$a_{11}x'^2 + 2a_2y + a'_0 = 0 \tag{74}$$

Тут могут быть:

- Паралльеньные прямые
- Парабола
- ...

14. Поверхности второго порядка (ПВП)

Уравнение ПВП:

$$\sum_{i=0,j=0,k=0}^{2} a_{ijk}x^iy^jz^k, (i+j+k) \leqslant 2 = 0 \tag{75}$$

Замечание. КВП - это частный случай ПВП, но только прокопированная по всем z ("вытянутая")

14.1. Эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{76}$$

14.2. Гиперболоиды

$$\pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{77}$$

В зависимости от знаков может быть однополостной и двуполостной гиперболоид.

Двуполостной - две чашечки, в сечениях эллипсы и гиперболы. Однополостной - страшная конструкция, в сечениях тоже эллипсы и гиперболы.

Также существует конус: только в нём можно сечениями найти все невырожденные кривые второго порядка.

14.3. Параболоид

Замечание. В прямых сечениях парабола возникает лишь у параболоидов, причём в соответствующем может ещё возникнуть соответствующая кривая.

14.3.1. Эллиптический

$$\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z \tag{78}$$

Сечение при постоянном z - эллипс. Сечение при постоянном y или x - парабола.

14.3.2. Гиперболический

$$\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = z \tag{79}$$

14.4. Циллиндрические поверхности

Определение 15. ЦП - пов-то, образованная параллельными прямыми, проходящими через данную пространственную кривую.

l - направляющая кривая. Прямые - образующие. Она параллельны $\vec{a}$ - направляющему вектору.

Теорема 10. У любой ЦП есть плоская направляющая (то есть лежащая в плоскости).

Доказательство. Просто пересечём её с плоскостью ■

Теорема 11. Уравнение $F(x, y) = 0$ в пространстве задаёт некую циллиндрическую поверхность.

Доказательство. Очевидно - в качестве кривой возьмём для некоего z_0, а направляющий вектор равен $\{0, 0, 1\}$ ■

14.5. ЦП второго порядка

Это "вытянуютая" КВП.

$\pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{x^2}{a^2} = 1$

14.6. Другие, совсем уж вырожденные случаи

Пара пересакающихся или параллельных плоскостей, ещё прямая, точка и пустое множество.

15. Линейная алгебра

16. Одномерные алгебраические структуры

Определение 16. A, B, C - некие множества. $f : A \times B \mapsto C$. f - закон внешней контрапозиции $* : A \times A \mapsto A, a \in A; b \in A$ - закон внутренней контрапозиции = алгебраическая операция = бинарная операция.

Определение 17. $*$ называвается коммутативной, если $\forall a, b \in A$: $a * b = b * a$

Определение 18. $*$ назывваается ассоциативной, если $\forall a, b \in A$: $a * (b *) = (a *) *$

Если она ассойциативна, то для любого конечного числа элементов можно производить свёртку в нужном порядке.

Пример. Расмотрим множество $\mathbb{R}$:

- $+$ - $comm, \textbf{ass}$
- $\cdot$ - $comm, \textbf{ass}$
- $-$ - $\neg comm, \neg\textbf{ass}$
- $-, \frac{x}{y}, x^y$ - $\neg comm, \neg\textbf{ass}$

Определение 19. (A, Ω) - алгераическая структура. A - носитель Ω - множество алг. операций на A и множество отношений (сигнатура).

Если нет отношений, это алгебра. Если нет операций, это модель.

Определение 20. $(G, *)$ алгебраическая структура назыввается группой, если она удоблетворяет трвём аксиомам:

1. Ассоциативность $*$
2. Существование наейтрального элемента (бывает иногда только право-нейтральный или только лево-нейтральный, но мы будем рассматривать только оба свойства вместе)
3. Существование обратного элемента

Определение 21. Если для $(G, *)$ $*$ - коммутативно, то группу называют Абелевой.

Если $*$ записывают как плюсик $(+)$, то G называется аддитивной группой (если плюсик записали, то подразумевается именно Абелева группа).

Если $*$ записывают как значок умножения $(\cdot)$, то G называется мультипликативной группой (это можно и для не-Абелевых).

В случае аддитивной группы записываем нейтральный элемент как $\mathbb{0}$, обратный - как $-x$. В случае мультипликативной - записываем нейтральный элемент как $\mathbb{1}$, обратный - как $\frac{1}{x}$ или x^{-1}.

Определение 22 (Кольцо). $K, +, \cdot$ алгебраическая структара называется кольцом, если:

1. $+$ ассоциативен
2. $+$ коммутативен
3. Существование нейтралного элемента для сложения
4. Существование обратного элемента для сложения
5. Правая и левая дистрибутивность

Определение 23 (Поле). Если к этому всему добавляется выполнение аксиом [6-9], то это поле:

6. Ассоциативность умножения
7. Коммутативность умножения
8. Существования нейтрального элемента относительно умножения
9. Существования обратной операции относительно умножения для всех элементов кроме нулевого

Замечание. По факту - в поле есть пара Абелевых групп: аддитивная и мультипликативная.

Получается,

1-6 - ассоциативное кольцо

1-5 и 7 - коммтативное кольцо

1-5 и 8 - кольцо с единицей

- Поле - ассоциативное коммутативное кольцо с едицицей, у которого $\forall a \neq 0$ обратим

Замечание.
- Поле - для $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$
- $\mathbb{Z}$ - ассициативное коммутативное кольцо с нейтральным элементом, но не поле

- $(\mathbb{B}, \vee, \wedge)$ - поле!

17. Свойтва колец и полей

17.1. Аддитивная абелева группа

- $a + x = a + y \Longrightarrow a = y$
- $a + x = b \Longrightarrow \exists!$ решение уравнения $x = b + (-a)$ относительно x.
- Существует единственный нейтральный элемент

Доказательство. Долбёжка ∎

17.2. Кольцо

- $a \times \mathbb{0} = \mathbb{0}$

Доказательство. Долбёжка ∎

17.3. Кольцо с единицей

- Существует единственный нейтральный элемент

Доказательство. Долбёжка ∎

17.4. Облатсь целостности

Определение 24 (Область целостности)**.** Кольцо называетсчя областью целостности, если $\forall a, b : a \cdot b = \mathbb{0} \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$

Теорема 12. Поле является областью целостности

Но ей может являтьсчя не только поле, напнример, $\mathbb{Z}$.

18. Линейное пространство

Определение 25. $(V, +, \cdot\lambda)$, K - поле, тогда V является линейным пространством над полем K (скаляры), приёчём бдолжно было:

- +: $V \times V \mapsto V$
- +: $V \times K \mapsto V$

Элементы линейного пространства принято нпазывать векторами.

И ещё для алгебры можно ввести умножение векторов.

И всё это выполняется, если выполняются следующие аксиомы:

1. Ассоциативность умножения
2. Коммутативность умножения
3. Существования нейтрального элемента относительно умножения
4. Существования обратного элемента относительно сложения
5. Дистрибутивность умножения скаляра на сумму векторов
6. Дистрибутивность умножения суммы скаляров на вектор
7. Ассициативность умножения скаляров на вектор
8. Существование нейтрального скаляра
9. Левая и правая дистривутивность
10. $\alpha(a + b) = (\alpha a) + b = a + (\alpha b)$
11. Ассоциативность умножения
12. Коммутативность умножения
13. Нейтральный относительно умножения вектор
14. Существование обрат

Линейное пространство - первые восемь аксиом.

Алгебра - 1-10

Существует ещё хрен знает сколько каких-то алгебр, чётр ногу сломит, но мы где-то там...

18.1. Свойства

1-4 - смотреть предыдущие свойства

Далее:

6. $\vec{v} \cdot \mathbb{0} = \mathbb{0}$

7. $\vec{v} \cdot \mathbb{0} = \mathbb{0}$

Пример. Множество функций, непрерывных на $[a, b]$ (обозначается как $C_{[a,b]}$) - алгебра