ДОБРОТНОСТЬ RLC-ЦЕПИ

Владимир Латыпов && Серёжа Онищенко

ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Из данных элементов (резистор, конденсатор, катушка индуктивности) предлагается составить схему, подключив их последовательно соединённых к генератору синусоидальных колебаний напряжения, и, подключив щупы осциллографа к резистору, снять резонансную кривую. Также нужно узнать у преподавателя номиналы используемых элементов (он измеряет их с помощью *профессиональных* / любительских (псевдо)инструментов).

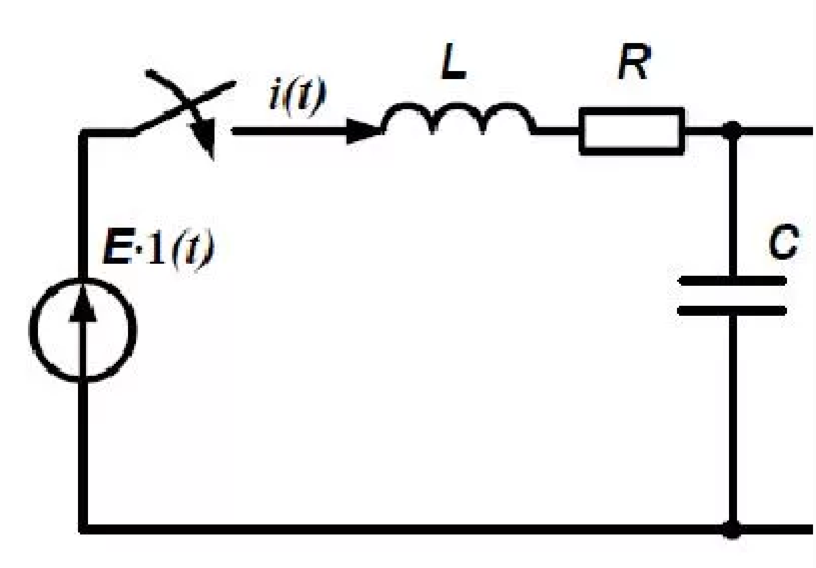
Затем следует:

1. Посчитать теоретическое значение добротности контура, зная все номиналы
2. Доказать, что существует эквивалентное определение добротности через график
3. Посчитать добротность из графика
4. Сравнить, сделать выводы

МЕТОДИКА

Всё также рассмотрим резонансную кривую, для этого промерим непустое множество точек в районе «ROI» — Region Of Interest, в именно — вокруг пика.

Подключим щупы осциллографа к резистору, собрав всё ту же схему:



Затем, крутя ручку генератора и записывая его частоту, будем также замечать амплитуду, которую показывает осциллограф. Был ещё вариант записывать всё на видео, но мы посчитали его нецелесообразным, например, потому что он мешает оценивать нашу работу в реальном времени и, соответственно, не даёт достаточной обратной связи.

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ

Напряжение на катушке и на конденсаторе противоположны по фазе, то есть сумма векторов — просто разность модулей. Проекции этой суммы, напряжения на резисторе и на источнике должны давать ноль, следовательно,

$$U_0^2 = U_{0R}^2 + (U_{0L} - U_{0C})^2 \tag{1}$$
$$U_0^2 = (RI)^2 + (L\frac{d^2q}{dt^2} - \frac{q}{C})^2$$

Так как

$$I_0 cos(wt) = \frac{dq}{dt} = \frac{d(CU_c)}{dt} = C\frac{dU_c}{dt} \tag{2}$$
$$\frac{dU_c}{dt} = \frac{1}{C} I_0 cos(wt)$$
$$U_C = \frac{1}{wC} I_0 sin(wt)$$
$$U_{0C} = \frac{1}{wC}$$

Аналогично для катушки

$$
\begin{gathered}
L\frac{d^2q}{dt^2} = U_L \\
L\frac{d(I_0 \cdot cos(wt))}{dt} = U_L \\
U_L = LwI_0 \cdot sin(wt) \\
U_{0L} = Lw \cdot I_0
\end{gathered} \tag{3}
$$

Тогда

$$
\begin{gathered}
U_0^2 = I^2R^2 + \left(\frac{1}{wC} - wL\right)^2 I^2 \\
I_0 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{wC} - wL\right)^2}}
\end{gathered} \tag{4}
$$

Добротность

Как известно, из теории добротность выражается так:

$$
Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{c}} \tag{5}
$$

Докажем, что есть эквивалентное определение:

> Если на резонансной кривой найти две точки, значения амплитуды тока в которых = $\frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$, то значение добротности контура будет $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$, где $\Delta\omega$ — разность частот в этих двух точках.

Напомним, что

$$
I_0 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{wC} - wL\right)^2}} \tag{6}
$$

Тогда

$$
I_{max} = \frac{\varepsilon}{R} \tag{7}
$$

Если

$$
\frac{\varepsilon}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{wC} - wL\right)^2}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2} \cdot R} \tag{8}
$$

То

$$\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{wC}-wL\right)^2}=\sqrt{2}\cdot R \tag{9}$$

$$R^2+\left(\frac{1}{wC}-wL\right)^2=2\cdot R^2 \tag{10}$$

$$\frac{1}{\omega C}-\omega L=\pm\sqrt{R^2}=\pm R \tag{11}$$

$$\frac{L}{\omega}\left(\omega_0^2-\omega^2\right)=\pm R\approx\frac{L}{\omega_0}\left(\omega_0^2-\omega^2\right) \tag{12}$$

$$\pm R\cdot\frac{\omega_0}{L}\approx(\omega_0-\omega)\cdot(\omega_0+\omega)\approx 2\omega_0\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)\qquad\left(\frac{\Delta\omega}{2}\text{— потому что }\Delta\omega\text{— это вся ширина «ворот»}\right) \tag{13}$$

(то же самое можно получить, если выразить сдвиг как дифференциал ($\frac{dx}{dy}=\frac{\Delta x}{f(x+\Delta x)-f(x)}=\frac{1}{f'}$, $(x^2)'=2x$))

$$\Delta\omega\approx\frac{R}{L} \tag{14}$$

$$Q=\frac{\omega_0}{\Delta\omega}=\frac{\omega_0}{\frac{R}{L}}=\frac{\omega_0 L}{R} \tag{15}$$

Вспомнив, что

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{16}$$

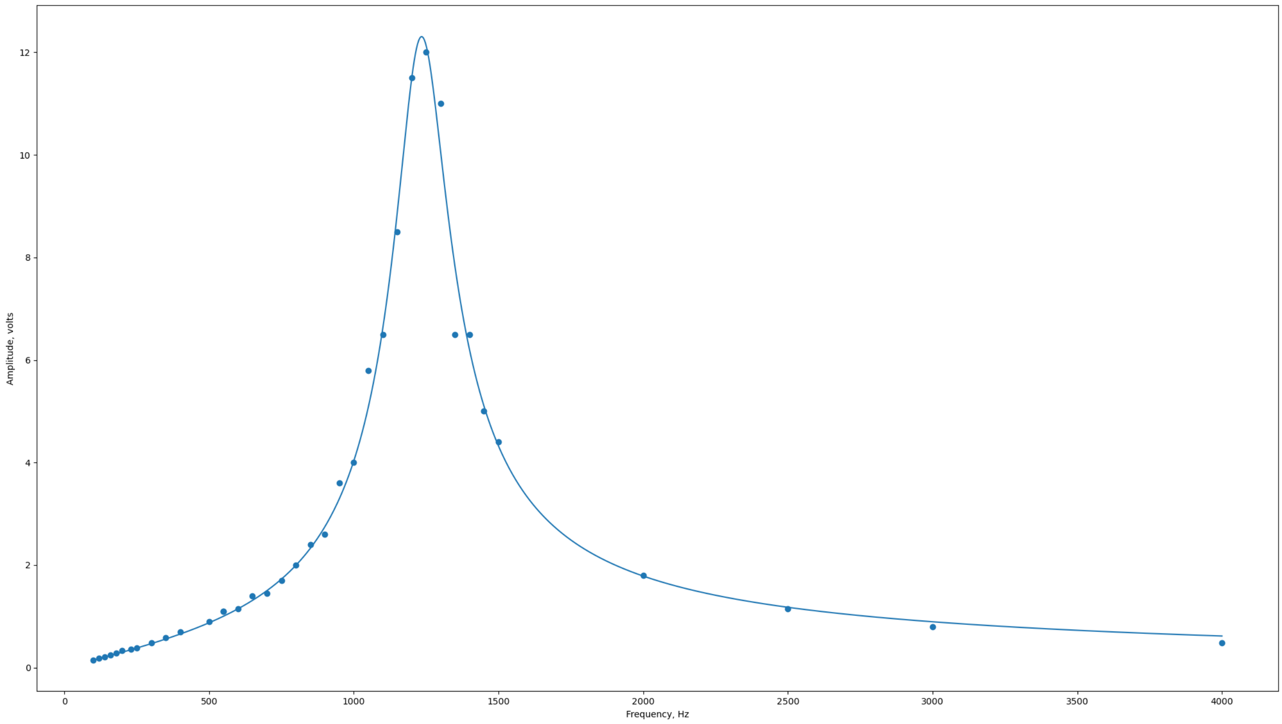
Получим, что

$$Q=\frac{\omega_0 L}{R}=\frac{L}{R\sqrt{LC}}=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\ \blacksquare\blacksquare\blacksquare \tag{17}$$

БЛИЖЕ К РЕАЛЬНОСТИ

Измерения

Вспомним, что в прошлый раз мы уже проводили измерения, получив аппроксимированный график резонансной:



Обработка данных

Напишем программу для автоматического поиска добротности цепи по заданной резонансной кривой в виде вызываемой функции.

Будем использовать n-арный поиск для нахождения необходимых значений частоты путём оптимизации разных функций:

```
def n_ary_search(function: Callable, depth_left: int, left: float, right: float, n_arity: int, ns : int, max_or_min: bool = True) -> float:
    if depth_left == 0:
        return (left + right) / 2

    step = (right - left) / n_arity
    offset = step * ns

    optimal_x = None
    optimal_value = None

    for step_index in range(n_arity + 1):
        this_x = left + step * step_index
        this_value = function(this_x)

        if optimal_x is None or (this_value > optimal_value if max_or_min else this_value < optimal_value):
            optimal_x = this_x
            optimal_value = this_value
```

```python
    return n_ary_search(
        function,
        depth_left - 1,
        max(left, optimal_x - offset),
        min(right, optimal_x + offset),
        n_arity, ns)
```

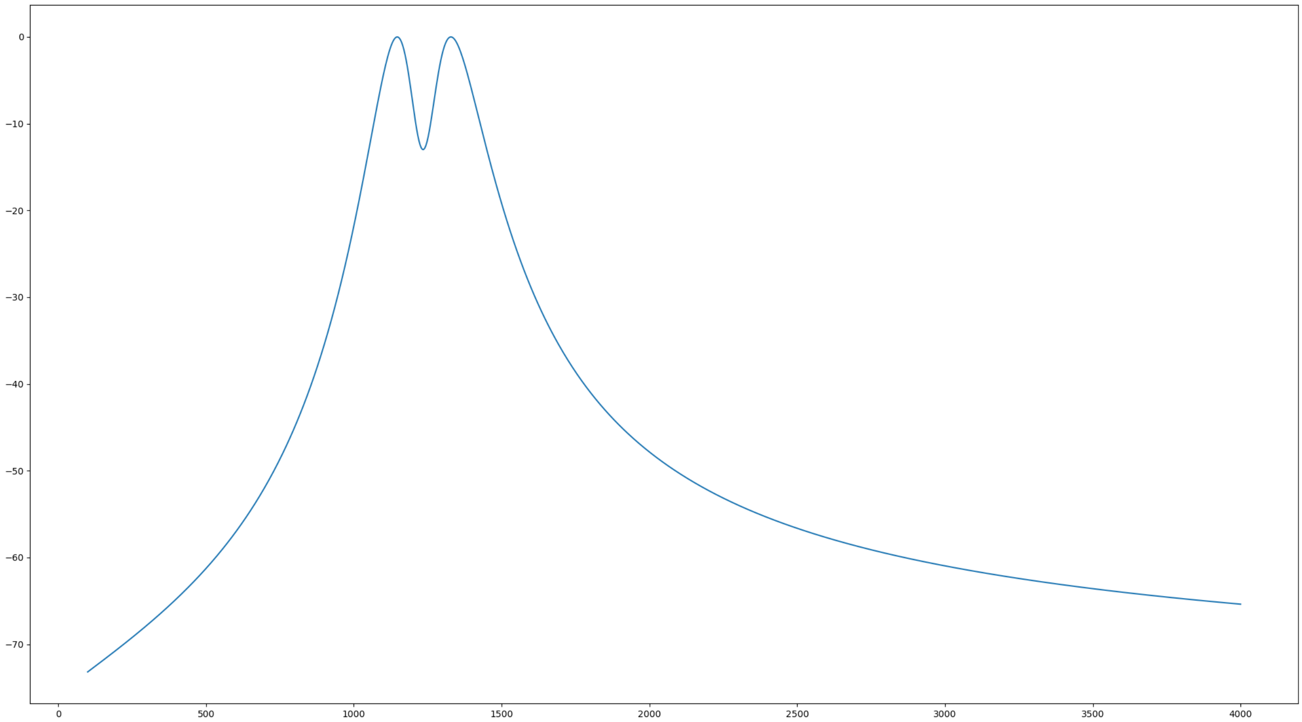
Для начала просто найдём её максимум. Для этого достаточно взять результат максимизации самой функции (аргумент максимума).

Далее по значению максимума найдём $\frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$ и для определения частот с амплитудой $\frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$ определим целевую функцию

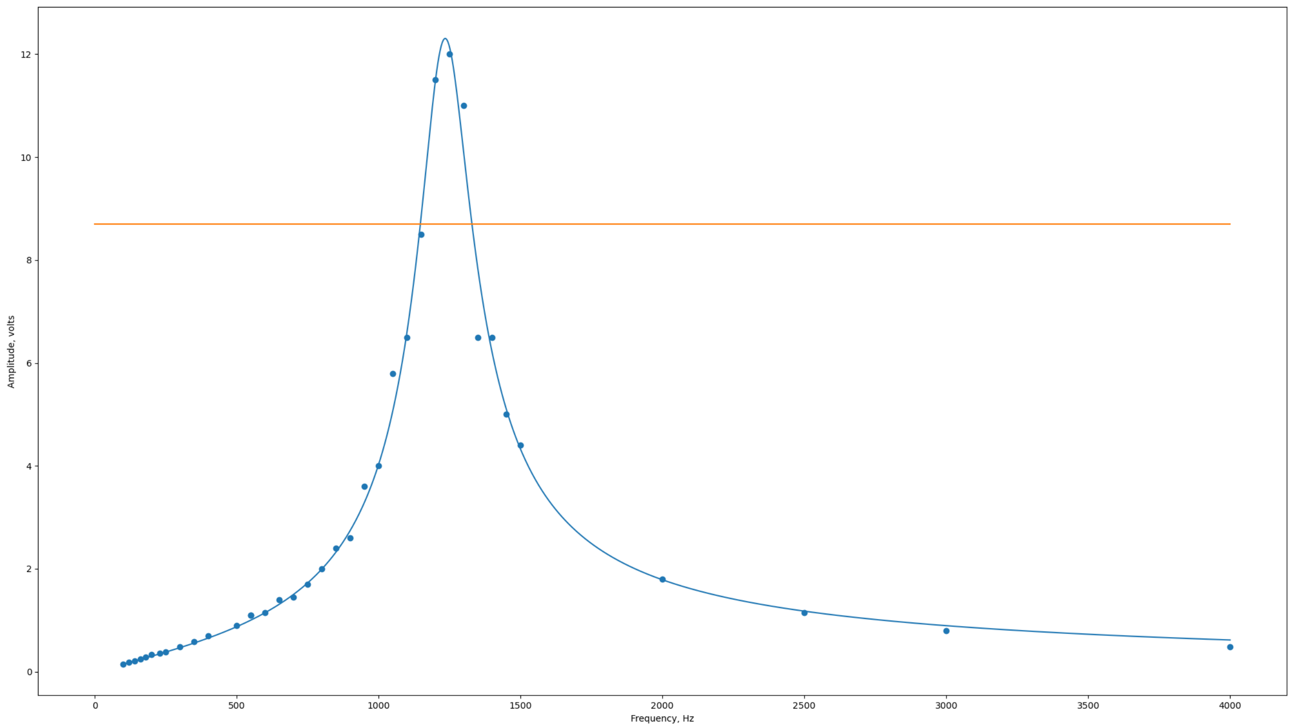
$$error(\omega) = -\left(resonance\_curve(\omega) - \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}\right)^2 \tag{18}$$

, при оптимизации которой на промежутках $(0, \omega_0]$ и $[\omega_0; +\infty)$ получим ω_{left} и ω_{right} соответственно.

Вот так выглядит эта функция:



А вот визуализация процесса поиска необходимой точки:



РЕЗУЛЬТАТЫ

Торжественное обвъявление результатов:

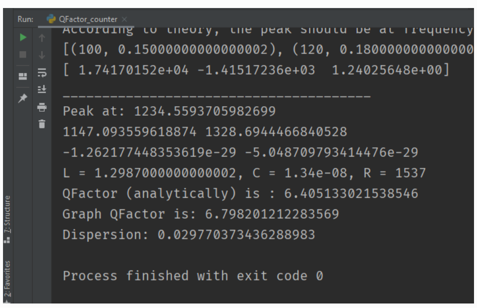
Результат, полученный аналитически через измерения параметров элементов:

$$Q_{anal} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \approx \frac{1}{1537\Omega} \cdot \sqrt{\frac{1.2987\ Henyy}{1.34 \times 10^{-8}\ Farad}} \approx 6.40\ pcs. \tag{19}$$

Результат, посчитанный с помощью резонансной кривой:

$$Q_{graph} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \approx \frac{1234.5593705982699}{1328.6944466840528 - 1147.093559618874} = 6.79\ pcs. \tag{20}$$

Числа специально даны столь «неокруглённо», чтобы было в духе настоящей работы программы:


```
According to theory, the peak should be at frequency
[(100, 0.15000000000000002), (120, 0.1800000000000000
[ 1.74170152e+04 -1.41517236e+03  1.24025648e+00]

---------------------------------------
Peak at: 1234.5593705982699
1147.093559618874 1328.6944466840528
-1.262177448353619e-29 -5.048709793414476e-29
L = 1.2987000000000002, C = 1.34e-08, R = 1537
QFactor (analytically) is : 6.405133021538546
Graph QFactor is: 6.798201212283569
Dispersion: 0.029770373436288983

Process finished with exit code 0
```

То есть отклонение:

$$\Delta Q = \frac{|Q_{anal} - Q_{graph}|}{Q_{anal} + Q_{graph}} \approx 0.02977 \approx 0.03 = 3\%, \ which\ is\ pretty\ cool. \tag{21}$$

ВЫВОД

Результаты, полученные разными методами, оказались очень даже близкими (3% — это вам не ***хухры-мухры***!). Более того, учитывая такое небольшие расхождение, ещё не факт, что оно в основном вызвано неточностью при аппроксимации резонансной кривой, а не погрешностью прибора для измерения характеристик элементов. Как минимум понятно, что если увеличить количество точек, а в идеале — вообще автоматизировать процесс получения точек, можно добиться гораздо большей точности, чем при напрашивающемся методе с измерением характеристик каждого элемента по отдельности.