ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ 37. МОДЕЛЬ АТОМА БОРА

№1

> Пучок лазерного излучения с длиной волны λ = 550 нм и мощностью P = 10 Вт падает по нормали на зеркало. Площадь пучка S = 0,1 см2. Определите создаваемое излучением давление на зеркало.

Давление — сила на единичную площадь, то есть импульс на единичную площадь в единицу времени.

$$pressure = \frac{p}{S \cdot \Delta t} \tag{1}$$

Мощность

$$P = \frac{E}{\Delta t} \tag{2}$$

Частота в пучке

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \tag{3}$$

Энергия одного фотона:

$$E_\gamma = 2\pi\hbar \cdot \omega = h \cdot \nu = h \cdot \frac{c}{\lambda} \tag{4}$$

Рассмотрим отрезок времени Δt:

За это время прошло передалась энергия

$$dE(\Delta t) = P\Delta t \tag{5}$$

То есть количество фотонов:

$$dN(\Delta t) = \frac{dE(\Delta t)}{E_\gamma} \tag{6}$$

Найдём импульс фотона

$$E = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} \tag{7}$$

Так как $m_\gamma = 0$,

$$E_\gamma = p_\gamma c \Rightarrow p_\gamma = \frac{E_\gamma}{c} \tag{8}$$

То есть импульс фотонов за время Δt:

$$dp(\Delta t) = dN(\Delta t) \cdot p_\gamma = \frac{dE(\Delta t)}{E_\gamma} \cdot \frac{E_\gamma}{c} = \frac{P\Delta t}{c} \tag{9}$$

То есть

> Ответ:

$$pressure = \frac{p}{S \cdot \Delta t} = \frac{P\Delta t}{c \cdot S \cdot \Delta t} = \frac{P}{c \cdot S} \approx 3.3 \times 10^{-3}\ Pascal \tag{10}$$

№2

> Электрон, имеющий импульс $p = 2 \cdot 10 - 24$ кг $\cdot$ м/с, сталкивается с покоящимся протоном, образуя атом водорода в первом возбужденном состоянии (с энергией E_2). В процессе образования атома излучается фотон. Найдите частоту ν этого фотона.

Заметим, что по массе никаких изменений нет. Просто, судя по тому, что выделился фотон, кинетическая энергия электрона частично выделяется в виде него, а частично идёт на кручения в 1м возбуждённом состоянии (H^{*_1}). Ещё часть идёт на кинетическую энергию всего атома, скорость которого будет в соответствии с законом сохранения импульса.

Проведём нехитрые вычисления и поймём, что делать поправку на СТО тут нее имеет смысла, так как скорость электрона, посчитанная традиционным путём мала

$$v_{e_{traditional}} = \frac{p_e}{m_e} = c \times 0.0074 = 0.74\%\ c \approx 0\%\ c \tag{11}$$

Из ЗСИ найдём скорость атома:

$$m_e \cdot v_e = m_H \cdot v_H \Rightarrow v_H = \frac{m_e \cdot v_e}{m_H} \tag{12}$$

Такую форму принимает ЗСЭ:

$$h\nu = \frac{m_e v^2}{2} - E_{\text{кин}_H} - E_2 = \frac{m_e v^2}{2} - \frac{m_H \cdot \left(\frac{m_e \cdot v_e}{m_H}\right)^2}{2} + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{k^2 e^4 \cdot m_e}{2\hbar^2} \tag{13}$$

$$\nu = \frac{m_e v_e^2 - \frac{m_e}{m_H}\left(m_e v_e^2\right) + \frac{k^2 e^4 \cdot m_e}{\hbar^2}}{2h} \approx 3 \times 10^{15}\ Hz \tag{14}$$

№3

> Определите наибольшую длину волны в ультрафиолетовой серии атома водорода.

Заметим, что только первая серия (когда происходит переход на первый энергетический уровень) находится в УФ диапазоне, остальные имеют меньшую энергию, то есть бОльшую длину волны, что плохо.

Вспомним, что

$$\frac{1}{\lambda} = R_{H_2}\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_0^2}\right) \tag{15}$$

Причём $n_1 = 1$

А $n_0 \in \{2,\ 3,\ \ldots\}$

Рассмотрим сначала **min** λ: оно достигается при

$$max\left(R_{H_2}\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_0^2}\right)\right) \tag{16}$$

То есть при

$$min\left(\frac{1}{n_0^2}\right) \tag{17}$$

То есть при $max(n_0)$

$n_0 \to \infty$, $\frac{1}{n_0^2} \to 0$:

$$\lambda_{min} = \frac{1}{R_{H_2}\left(1 - \frac{1}{\infty^2}\right)} = \frac{1}{R_{H_2}} \approx 91\,nm \tag{18}$$

Теперь причитаем условия задачи и поймём, что надо было найти $max(\lambda)$.

$$max(\lambda) \Longleftrightarrow min\left(R_{H_2}\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_0^2}\right)\right) \Longleftrightarrow max\left(\frac{1}{n_0^2}\right) \Longleftrightarrow min(n_0) \Longrightarrow n_0 = 2 \tag{19}$$

$$\lambda_{max} = \frac{1}{R_{H_2}\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)} = \frac{4}{3}\frac{1}{R_{H_2}} \approx 121.6\,nm \tag{20}$$

№4

> Вычислить в модели атома Бора энергию электрона в ионе Li++

Модель Бора: электроны всё ещё по старой, классической привычке движутся по орбитам, а не находятся в электронных облаках.

Из движения по окружности:

(теперь притягивающиеся заряды: $-e$ и $2e$)

$$k\frac{2 \cdot e^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \tag{21}$$

$$k\frac{2 \cdot e^2}{r} = mv^2 \tag{22}$$

$$mv^2 = \frac{m^2v^2r^2}{mr^2} = \frac{(n\hbar)^2}{mr^2} \tag{23}$$

$$r = \frac{n^2 \cdot \hbar^2}{2ke^2 \cdot m} \tag{24}$$

$$E_n = \frac{mv^2}{2} - k\frac{2e^2}{r} \tag{25}$$

Вспомнив, что $mv^2 = k\frac{2 \cdot e^2}{r}$, получим, что

$$E_n = k\frac{e^2}{r} - k\frac{2e^2}{r} = -k\frac{e^2}{r} \tag{26}$$

(Всё ещё не учитываем СТО, так как атом маленький, как и энергетические уровни)

$$E_n = -k\frac{e^2}{r} = -k\frac{e^2}{\frac{n^2 \cdot \hbar^2}{2ke^2 \cdot m}} = -k\frac{e^2 \cdot 2ke^2 \cdot m}{n^2 \cdot \hbar^2} = -\frac{2 \cdot k^2 e^4 \cdot m}{n^2 \cdot \hbar^2} \tag{27}$$

$$E_n = \frac{1}{n^2} \cdot \left(-\frac{2 \cdot k^2 e^4 \cdot m}{\hbar^2}\right) \blacksquare \tag{28}$$