

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ 37. МОДЕЛЬ АТОМА БОРА

№1

Пучок лазерного излучения с длиной волны $\lambda = 550$ нм и мощностью $P = 10$ Вт падает по нормали на зеркало. Площадь пучка $S = 0,1$ см².
Определите создаваемое излучением давление на зеркало.

Давление — сила на единичную площадь, то есть импульс на единичную площадь в единицу времени.

$$pressure = \frac{p}{S \cdot \Delta t} \quad (1)$$

Мощность

$$P = \frac{E}{\Delta t} \quad (2)$$

Частота в пучке

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \quad (3)$$

Энергия одного фотона:

$$E_\gamma = 2\pi\hbar \cdot \omega = h \cdot \nu = h \cdot \frac{c}{\lambda} \quad (4)$$

Рассмотрим отрезок времени Δt :

За это время прошло передалась энергия

$$dE(\Delta t) = P\Delta t \quad (5)$$

То есть количество фотонов:

$$dN(\Delta t) = \frac{dE(\Delta t)}{E_\gamma} \quad (6)$$

Найдём импульс фотона

$$E = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} \quad (7)$$

Так как $m_\gamma = 0$,

$$E_\gamma = p_\gamma c \Rightarrow p_\gamma = \frac{E_\gamma}{c} \quad (8)$$

То есть импульс фотонов за время Δt :

$$dp(\Delta t) = dN(\Delta t) \cdot p_\gamma = \frac{dE(\Delta t)}{E_\gamma} \cdot \frac{E_\gamma}{c} = \frac{P\Delta t}{c} \quad (9)$$

То есть

Ответ:

$$pressure = \frac{p}{S \cdot \Delta t} = \frac{P\Delta t}{c \cdot S \cdot \Delta t} = \frac{P}{c \cdot S} \approx 3.3 \times 10^{-3} \text{ Pascal} \quad (10)$$

№2

Электрон, имеющий импульс $p = 2 \cdot 10^{-24} \text{ кг} \cdot \text{м/с}$, сталкивается с покоящимся протоном, образуя атом водорода в первом возбужденном состоянии (с энергией E_2). В процессе образования атома излучается фотон. Найдите частоту ν этого фотона.

Заметим, что по массе никаких изменений нет. Просто, судя по тому, что выделился фотон, кинетическая энергия электрона частично выделяется в виде него, а частично идёт на кручения в 1м возбуждённом состоянии (H^{*1}).

Проведём нехитрые вычисления и поймём, что делать поправку на СТО тут не имеет смысла, так как скорость электрона, посчитанная традиционным путём мала

$$v_{\text{traditional}} = \frac{p_e}{m_e} = c \times 0.0074 = 0.74\% c \approx 0\% c \quad (11)$$

Такую форму принимает ЗСЭ:

$$h\nu = \frac{m_e v^2}{2} - E_2 = \frac{m_e v^2}{2} + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{k^2 e^4 \cdot m_e}{2\hbar^2} \quad (12)$$

$$\nu = \frac{m_e v^2 + \frac{k^2 e^4 \cdot m_e}{\hbar^2}}{2h} \approx 3'353'791'461'246'939 \text{ Hz} \approx 3 \times 10^{15} \text{ Hz (WTF???...)} \quad (13)$$

3 ПЕТА, Карл, Герца. Тут точно достаточно одного фотона?...

№3

Определите наибольшую длину волны в ультрафиолетовой серии атома водорода.

Заметим, что только первая серия (когда происходит переход на первый энергетический уровень) находится в УФ диапазоне, остальные имеют меньшую энергию, то есть БОльшую длину волны, что плохо.

Вспомним, что

$$\frac{1}{\lambda} = R_{H_2} \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_0^2} \right) \quad (14)$$

Причём $n_1 = 1$

А $n_0 \in \{2, 3, \dots\}$

Рассмотрим сначала **min** λ : оно достигается при

$$\max \left(R_{H_2} \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_0^2} \right) \right) \quad (15)$$

То есть при

$$\min \left(\frac{1}{n_0^2} \right) \quad (16)$$

То есть при $\max(n_0)$

$n_0 \rightarrow \infty, \frac{1}{n_0^2} \rightarrow 0$:

$$\lambda_{min} = \frac{1}{R_{H_2} \left(1 - \frac{1}{\infty^2}\right)} = \frac{1}{R_{H_2}} \approx 91 \text{ nm} \quad (17)$$

Теперь причитаем условия задачи и поймём, что надо было найти $\max(\lambda)$.

$$\max(\lambda) \iff \min \left(R_{H_2} \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_0^2} \right) \right) \iff \max \left(\frac{1}{n_0^2} \right) \iff \min(n_0) \implies n_0 = 2 \quad (18)$$

$$\lambda_{max} = \frac{1}{R_{H_2} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)} = \frac{4}{3} \frac{1}{R_{H_2}} \approx 121.6 \text{ nm} \quad (19)$$

№4

Вычислить в модели атома Бора энергию электрона в ионе Li^{++}

Модель Бора: электроны всё ещё по старой, классической привычке движутся по орбитам, а не находятся в электронных облаках.

Из движения по окружности:

(теперь притягивающиеся заряды: $-e$ и $2e$)

$$k \frac{2 \cdot e^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad (20)$$

$$k \frac{2 \cdot e^2}{r} = mv^2 \quad (21)$$

$$mv^2 = \frac{m^2 v^2 r^2}{mr^2} = \frac{(n\hbar)^2}{mr^2} \quad (22)$$

$$r = \frac{n^2 \cdot \hbar^2}{2ke^2 \cdot m} \quad (23)$$

$$E_n = \frac{mv^2}{2} - k \frac{2e^2}{r} \quad (24)$$

Вспомнив, что $mv^2 = k \frac{2 \cdot e^2}{r}$, получим, что

$$E_n = k \frac{e^2}{r} - k \frac{2e^2}{r} = -k \frac{e^2}{r} \quad (25)$$

(Всё ещё не учитываем СТО, так как атом маленький, как и энергетические уровни)

$$E_n = -k \frac{e^2}{r} = -k \frac{e^2}{\frac{n^2 \cdot \hbar^2}{2ke^2 \cdot m}} = -k \frac{e^2 \cdot 2ke^2 \cdot m}{n^2 \cdot \hbar^2} = -\frac{2 \cdot k^2 e^4 \cdot m}{n^2 \cdot \hbar^2} \quad (26)$$

$$E_n = \frac{1}{n^2} \cdot \left(-\frac{2 \cdot k^2 e^4 \cdot m}{\hbar^2} \right) \blacksquare \quad (27)$$