А.Г. КОРЯНОВ, А.А. ПРОКОФЬЕВ

Готовим к ЕГЭ хорошистов и отличников

Лекции 5–8

Предисловие

Начиная с № 14/2011 в рубрике «Повышение квалификации/ Лекторий», мы публикуем курс лекций «Готовим к ЕГЭ хорошистов и отличников», авторы А. Корянов, А. Прокофьев. В предлагаемом курсе авторы рассмотрели различные способы проверки и отбора корней, выяснили причины появления посторонних корней; показали способы решения неравенств с использованием свойств, входящих в них, функций и с применением производной. Выделили причины, ведущие к неоднозначной трактовке условия задачи типа С4, провели классификацию подобных задач и дали методические указания. Данный курс может помочь учителю не только совершенствовать свои умения в решении заданий повышенной сложности, но и грамотно планировать работу по подготовке к ЕГЭ учеников.

Курс состоит из восьми лекций: лекции 1 – 4 опубликованы в № 14-17/2011, лекции 5 – 8 представлены в электронной версии на диске к №1/2012.

Вы можете пройти обучение по данному курсу, подав заявку на дистанционные курсы повышения квалификации Педагогического университета «Первое сентября» (http://edu.1september.ru/). Дистанционная форма обучения удобна тем, что взаимодействие со слушателями происходит посредством обычной почты; работать над материалами вы можете столько, сколько требуется, в своем режиме, в своем темпе; выполнять контрольные работы в спокойной домашней обстановке, используя любую литературу. Итоговым документом является удостоверение установленного образца о краткосрочном повышении квалификации, выдаваемое Педагогическим университетом «Первое сентября» и Факультетом педагогического образования МГУ им. М.В. Ломоносова. В удостоверении указываются фамилия, имя, отчество слушателя, название курса, нормативный срок освоения (72 часа), тема итоговой работы.

Учебный план

№ брошюры	Название лекции
1	**Лекция 1.** *Арифметический и алгебраический способы отбора корней в тригонометрических уравнениях.* Основные теоретические сведения. Методические указания по использованию арифметического и алгебраического способов отбора корней. Примеры решения заданий повышенного уровня сложности
1	**Лекция 2.** *Геометрический и функционально-графический способы отбора корней в тригонометрических уравнениях.* Основные теоретические сведения. Методические указания по использованию геометрического и функционально-графического способов отбора корней. Примеры решения заданий повышенного уровня сложности
1	**Лекция 3.** *Решение неравенств алгебраическими методами.* Классификация неравенств. Использование основных схем равносильных переходов к рациональным неравенствам или их системам. Разбор типичных ошибок. Методические указания по обучению алгебраическим методам. Примеры решения заданий повышенного уровня сложности
1	**Лекция 4.** *Решение неравенств функционально-графическими методами.* Методические указания по обучению и устранению ошибок в применении функционально-графических методов. Примеры решения заданий повышенного уровня сложности ***Контрольная работа № 1***
2	**Лекция 5. *Использование вычислительного метода для решения задач С2.* Основные теоретические сведения и формулы, набор опорных задач. Методические указания по обучению. Примеры решения заданий повышенного уровня сложности**
2	**Лекция 6. *Использование координатного и векторного методов для решения задач С2.* Основные теоретические сведения и формулы, набор опорных задач. Методические указания по обучению. Примеры решения заданий повышенного уровня сложности.** ***Контрольная работа № 2***
2	**Лекция 7. *Многовариантные планиметрические задачи: взаимное расположение элементов фигуры.* Основные теоретические сведения и формулы. Методические указания по обучению. Примеры решения заданий повышенного уровня сложности**
2	**Лекция 8. *Многовариантные планиметрические задачи: взаимное расположение фигур.* Основные теоретические сведения и формулы. Методические указания по обучению. Примеры решения заданий повышенного уровня сложности.** ***Итоговая работа***

Лекция 5
Использование вычислительного метода для решения задач С2

Задание С2 Единого государственного экзамена вот уже два года представляло стереометрическую задачу на определение расстояний или углов в пространстве между объектами, связанными с некоторым многогранником.

Решение задания С2 оценивается 2 баллами. Один бал начисляется за правильное построение или описание искомого угла или расстояния. Еще один бал начислялся за правильно проведенные вычисления и верный ответ.

По итогам ЕГЭ-2010 только около 4% представленных решений были оценены в два балла. Основные проблемы: неумение строить линейные углы и проекции, ошибки в определении вида треугольника, вычислительные ошибки. Многие выпускники демонстрировали непонимание нахождения угла между прямой и плоскостью.

При решении заданий выпускники показали недостаточное представление о расположении перпендикуляра при нахождении расстояния от точки до прямой.

Все отмеченное указывает на то, что учащиеся испытывают большие трудности при решении стереометрических задач. В отличие от планиметрии в стереометрии они не могут опереться на наглядность. Выходом из этого положения является использование чертежей многогранников, на которых можно показать все теоремы стереометрии. Модели или чертежи многогранников, обладающие конкретностью и содержательностью, являются инструментом для развития пространственного воображения школьников и успешного изучения стереометрии. По принципу «от простого — к сложному» следует рассматривать решения задач, придерживаясь такой последовательности многогранников: куб, правильная призма (треугольная, четырехугольная, шестиугольная), прямая призма, правильный тетраэдр, правильная пирамида (треугольная, четырехугольная, шестиугольная).

Решение задач на многогранниках имеет и обратную связь — раскрытие свойств самих многогранников, например:

— диагональ куба перпендикулярна плоскости, проведенной через концы трех ребер куба, выходящих из той же вершины, что и диагональ;

— в правильной треугольной пирамиде скрещивающиеся ребра перпендикулярны.

Во многих разделах лекции выделены подготовительные задачи. Рассмотрение задач одного типа, связанных с разными ситуациями, формирует навыки решения этих простейших задач. В дальнейшем навыки закрепляются при решении более сложных задач.

При решении задач на расстояния и углы в стереометрии обычно используют поэтапно вычислительный или координатно-векторный методы. В данной лекции основное внимание уделено использованию поэтапно вычислительного метода. Этот метод решения задач является традиционным, опирается на определения расстояния или угла и требует от учащихся развитого пространственного воображения.

Каждая задача, рассмотренная в лекциях, может быть решена не единственным способом, поэтому учениками и учителями могут быть найдены более рациональные решения этих задач.

Расстояние от точки до прямой

> Расстояние от точки до прямой, не содержащей эту точку, есть длина отрезка перпендикуляра, проведенного из этой точки на данную прямую.

Использование определения

Расстояние от точки M до прямой AB, обозначаемое $\rho(M; AB)$, вычисляют как длину высоты, опущенной из точки M на основание AB (или его продолжение) треугольника ABM.

Систему подготовительных задач можно связать с единичным кубом $A...D_1$.

1. Построить перпендикуляр (дать этому обоснование), опущенный из точки A на прямую: а) DC; б) DD_1; в) DC_1; г) D_1C_1; д) CC_1; е) A_1B; ж) BC_1; з) B_1C.

2. Найти расстояние от точки A до прямой: а) B_1D_1; б) A_1C; в) BD_1.

Пример 1. В единичном кубе $A...D_1$ на диагоналях граней AD_1 и D_1B_1 взяты точки E и F так, что $D_1E = \frac{1}{3}AD_1$, $D_1F = \frac{2}{3}D_1B_1$. Найти расстояние от точки D_1 до прямой EF.

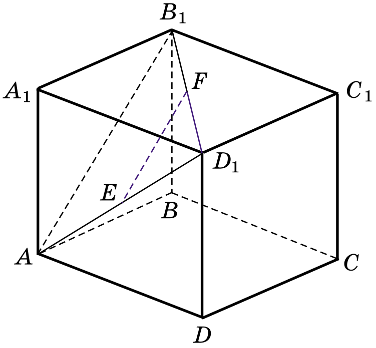

Рис. 5.1

Решение. Длину отрезка EF найдем по теореме косинусов из треугольника D_1EF (рис. 5.1), в котором

$$D_1E=\frac{\sqrt{2}}{3},\quad D_1F=\frac{2\sqrt{2}}{3},\quad \angle\, ED_1E=\frac{\pi}{3}$$

(треугольник AB_1D_1 — равносторонний). Имеем:

$$EF^2=\frac{2}{9}+\frac{8}{9}-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2},$$

откуда $EF=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Пусть h — длина высоты треугольника D_1EF, опущенной из точки D_1. Найдем h, используя метод площадей для треугольника D_1EF:

$$\frac{1}{2}D_1F\cdot D_1E\cdot\sin\angle\, FD_1E=\frac{1}{2}FE\cdot h,$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{6}h.$$

Отсюда находим расстояние $h=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Замечание. Можно заметить, что выполняется равенство $FE^2+D_1E^2=D_1F^2$, то есть угол D_1EF прямой, и длина отрезка D_1E является искомым расстоянием.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Метод параллельных прямых

Данный метод связан с утверждением о том, что расстояние от точки M до прямой a равно расстоянию до прямой a от произвольной точки P прямой b, проходящей через точку M и параллельной прямой a. Метод удобен, если искомый перпендикуляр выходит за пределы многогранника. В этом случае его можно заменить перпендикуляром, расположенным внутри многогранника, либо перпендикуляром, длина которого известна.

Пример 2. В правильной шестиугольной призме $A\ldots F_1$, ребра которой равны 1, найти расстояние от точки A до прямой BC_1.

Решение. В квадрате BCC_1B_1 диагональ BC_1 равна $\sqrt{2}$ (рис. 5.2). Пусть O и O_1 — центры нижнего и верхнего оснований соответственно. Так как $AB \parallel O_1C_1$ и $AB = O_1C_1$, то ABC_1O_1 — параллелограмм. Отсюда $AO_1 \parallel BC_1$, поэтому расстояние $\rho(A;\ BC_1) = \rho(O_1;\ BC_1)$. Из прямоугольного треугольника BOO_1 находим $BO_1 = \sqrt{2}$.

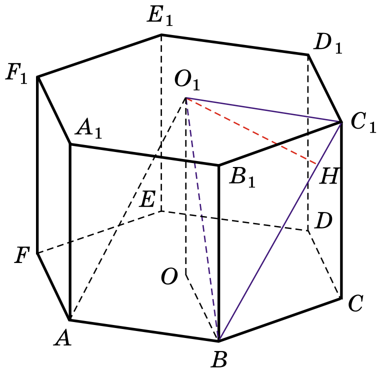

Рис. 5.2

В треугольнике BO_1C_1, используя теорему косинусов, получаем:

$$\cos\angle O_1C_1B = \frac{1^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2}{2\cdot 1\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Находим $\sin\angle O_1C_1B = \frac{\sqrt{14}}{4}$, а из треугольника O_1C_1H находим высоту:

$$O_1H = O_1C_1 \sin\angle O_1C_1B = 1\cdot\frac{\sqrt{14}}{4} = \frac{\sqrt{14}}{4}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{14}}{4}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Высота правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 1, а сторона основания равна 2. Найдите расстояние от точки A_1 до прямой BC_1.

2. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой: а) DE; б) D_1E_1; в) B_1C_1; г) BE_1; д) BC_1; е) CE_1; ж) CF_1; з) CB_1.

3. В тетраэдре $ABCD$ все ребра равны 1. Найдите расстояние от точки A до прямой, проходящей через точку B и середину ребра CD.

4. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ стороны оснований равны 1, а боковые ребра равны 2. Найдите расстояние от точки C до прямой SA.

Расстояние от точки до плоскости

Расстояние от точки до плоскости, не содержащей эту точку, есть длина отрезка перпендикуляра, опущенного из этой точки на данную плоскость.

Использование определения

При геометрическом решении задач, опирающемся на определение расстояния от точки до плоскости, учащимся необходимо повторить теоремы, связанные с перпендикулярностью прямых и плоскостей. Кроме того, следует вспомнить свойства правильного шестиугольника, которые будут использованы в задачах с правильными шестиугольными призмами и пирамидами.

Пример 3. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найти расстояние от точки A до плоскости A_1B_1C.

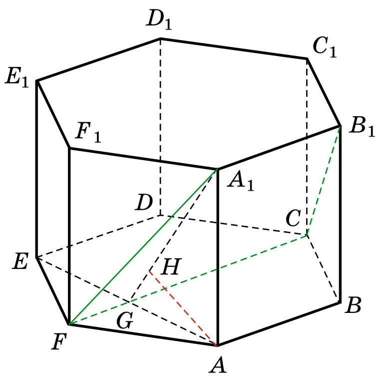

Рис. 5.3

Решение. Прямая FC перпендикулярна AE и AA_1 (объясните), поэтому перпендикулярна плоскости A_1AE (рис. 5.3). Пусть $FC \cap AE = G$. Плоскость A_1AE перпендикулярна плоскости A_1B_1C, содержащей прямую FC, и пересекает ее по прямой A_1G. Пусть AH — высота в треугольнике AA_1G, то есть прямая AH перпендикулярна прямой A_1G, значит, $AH \perp A_1B_1C$. Найдем высоту AH. Так как в прямоугольном треугольнике ADE

$$AE = \sqrt{AD^2 - ED^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3},$$

то $AG = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Из прямоугольного треугольника AGA_1 находим

$$GA_1 = \sqrt{\frac{3}{4} + 1} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Высота AH равна:

$$AH = \frac{AG \cdot AA_1}{GA_1} = \sqrt{\frac{3}{7}}.$$

Ответ: $\sqrt{\dfrac{3}{7}}$.

Метод параллельных прямых и плоскостей

Данный метод опирается на следующие два утверждения.

Расстояние от точки M до плоскости α:
равно расстоянию до плоскости α от произвольной точки P на прямой l, которая проходит через точку M и параллельна плоскости α;

равно расстоянию до плоскости α от произвольной точки P на плоскости β, которая проходит через точку M и параллельна плоскости α.

Пример 4. В единичном кубе $A...D_1$ найти расстояние от точки C_1 до плоскости AB_1C.

Решение. Так как прямая A_1C_1 параллельна AC, то прямая A_1C_1 параллельна плоскости AB_1C (рис. 5.4). Поэтому искомое расстояние h равно расстоянию от произвольной точки прямой A_1C_1 до плоскости AB_1C. Обозначим расстояние от центра O_1 квадрата $A_1B_1C_1D_1$ до плоскости AB_1C через h.

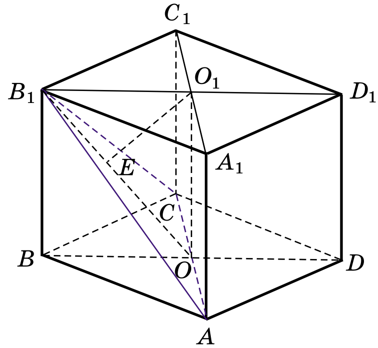

Рис. 5.4

Пусть E — основание перпендикуляра, опущенного из точки O_1 на прямую B_1O, где O — центр квадрата $ABCD$. Покажем, что $O_1E \perp AB_1C$. Прямая O_1E лежит в плоскости BB_1D_1D, а прямая AC перпендикулярна этой плоскости (объясните). Поэтому $O_1E \perp AC$ и O_1E — перпендикуляр к плоскости AB_1C, а $O_1E = h$.

Так как $B_1O_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $O_1O = 1$, то из прямоугольного треугольника OB_1O_1 найдем

$$OB_1 = \sqrt{\frac{1}{2} + 1} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Искомое расстояние равно

$$h = \frac{B_1O_1 \cdot O_1O}{OB_1} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Метод объемов

Если объем пирамиды $ABCM$ равен V, то расстояние от точки M до плоскости, содержащей треугольник ABC, вычисляют по формуле

$$\rho(M;\ ABC) = \frac{3V}{S_{ABC}}.$$

В общем случае рассматривают равенство объемов одной фигуры, выраженных двумя независимыми способами.

Отметим, что при данном методе нет необходимости в проведении перпендикуляра из точки на плоскость и его обоснования.

Пример 5. Ребро куба $A\ldots D_1$ равно a. Найти расстояние от точки C до плоскости BDC_1.

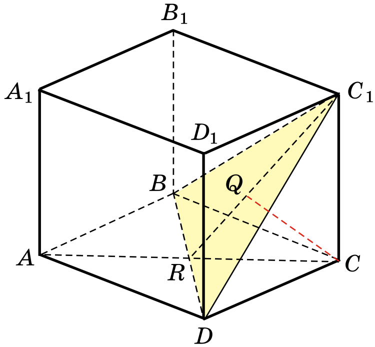

Рис. 5.5

Решение. Искомое расстояние равно высоте CQ (рис. 5.5), опущенной в пирамиде $BCDC_1$ из вершины C на основание BDC_1. Объем этой пирамиды равен

$$\frac{1}{3}S_{BCD}\cdot CC_1=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot BC\cdot CD\cdot CC_1=\frac{a^3}{6}.$$

С другой стороны, так как треугольник BDC_1 равносторонний со стороной $a\sqrt{2}$, то объем пирамиды $BCDC_1$ равен

$$\frac{1}{3}S_{BC_1D}\cdot CQ=\frac{1}{3}\cdot\frac{\left(a\sqrt{2}\right)^2\sqrt{3}}{4}\cdot CQ=\frac{a^2\sqrt{3}}{6}\cdot CQ.$$

Приравнивая объемы: $\dfrac{a^3}{6}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{6}\cdot CQ$, находим: $CQ=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Метод подобия

Пусть прямая MM_1 пересекает плоскость α в точке O, тогда расстояния от точек M и M_1 до плоскости α связаны пропорцией

$$\frac{\rho}{\rho_1}=\frac{r}{r_1},$$

где $\rho = \rho(M;\alpha)$, $\rho_1 = \rho(M_1;\alpha)$, $OM = r$, $OM_1 = r_1$. В частности, если $r = r_1$, то $\rho = \rho_1$ (рис. 5.6, *а* и *б*).

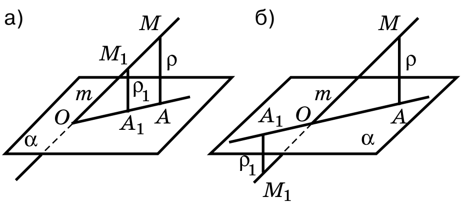

Рис. 5.6

Отсюда легко находить искомое расстояние $\rho=\rho_1\dfrac{r}{r_1}$ от точки M до плоскости α по известному другому расстоянию ρ_1.

В общем случае подобные треугольники могут быть расположены в разных плоскостях, которые перпендикулярны плоскости α.

Пример 6. В правильной шестиугольной пирамиде $MABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 4, найти расстояние от середины ребра BC до плоскости грани EMD.

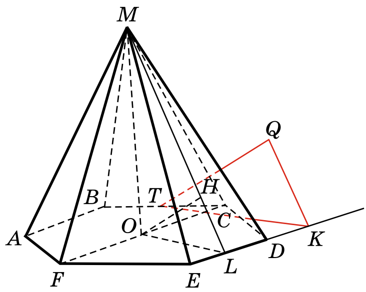

Рис. 5.7

Решение. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ $BD \perp DE$ и $BD = \sqrt{3}$. Пусть O — центр $ABCDEF$ (рис. 5.7). Тогда MO — высота пирамиды. Из прямоугольного треугольника MOD получаем $MO = \sqrt{15}$. Из прямоугольного треугольника MDL находим апофему ML:

$$ML = \sqrt{MD^2 - \left(\frac{DE}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{7}}{2}.$$

Высота пирамиды MO перпендикулярна плоскости основания, поэтому $MO \perp DE$. Апофема $ML \perp DE$, значит, $DE \perp MOL$. По признаку перпендикулярности плоскостей $MOL \perp DME$. Поэтому высота OH треугольника MOL перпендикулярна плоскости DME.

Из прямоугольного треугольника MOL, в котором $OL = \frac{BD}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, получаем:

$$OH = \frac{MO \cdot OL}{ML} = \sqrt{15} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{3\sqrt{7}}{2} = \sqrt{\frac{5}{7}}.$$

Пусть T — середина BC. Опустим из точки T перпендикуляры TK и TQ на прямую DE и плоскость MDE соответственно. Прямоугольные треугольники TKQ и OLH подобны (объясните), поэтому $\frac{TQ}{OH} = \frac{TK}{OL}$. Расстояние от точки T до прямой DE равно

$$TK = \frac{3}{4} \cdot BD = \frac{3}{2} \cdot OL,$$

поэтому расстояние от точки T до плоскости EMD равно

$$\rho(T;\ EMD) = \frac{TK}{OL} \cdot OH = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{5}{7}} = \sqrt{\frac{45}{28}}.$$

Ответ: $\sqrt{\frac{45}{28}}$.

Задачи для самостоятельного решения

5. В кубе $A...D_1$, ребро которого равно 4, точки E и F — середины ребер AB и B_1C_1 соответственно, а точка P лежит на ребре CD и $CP = 3PD$. Найдите расстояние от точки A_1 до плоскости треугольника EPF.

6. Дан правильный тетраэдр $ABCD$ с ребром $\sqrt{6}$. Найдите расстояние от вершины A до плоскости BDC.

7. В правильной четырехугольной пирамиде $PABCD$ сторона основания равна 3, высота 2. Найдите расстояние от вершины A до грани PCD.

Расстояние между скрещивающимися прямыми

Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми равно длине отрезка их общего перпендикуляра.

Использование определения

Первый способ нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми состоит в построении их общего перпендикуляра и вычислении его длины.

Здесь уместно напомнить учащимся определение и теоремы, связанные с перпендикулярностью прямой и плоскости.

Для выработки умений и навыков в решении задач данного типа удобно использовать изображение единичного куба $A...D_1$. Можно использовать систему подготовительных задач, при этом следует обратить внимание на случаи, когда скрещивающиеся прямые перпендикулярны и не перпендикулярны.

1. Указать для прямой AA_1 скрещивающиеся прямые.

2. Найти общий перпендикуляр и дать этому обоснование для прямых: а) AA_1 и BC; б) AA_1 и BD; в) AB и DD_1; г) AB и DC_1.

3. Найти расстояние от прямой AA_1 до прямой: а) CD; б) C_1D_1; в) B_1C_1; г) DC_1; д) D_1C; е) BD.

В этот перечень простейших задач о нахождении расстояния полезно включать параллельные прямые и пересекающиеся прямые.

Пример 7. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найти расстояние между прямыми BD и SA.

Решение. Пусть E — основание перпендикуляра (рис. 5.8), опущенного из точки O на ребро SA. Так как $BD \perp AOS$ (объясните), то $BD \perp OE$.

Таким образом, OE — общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым BD и SA. Найдем его длину как высоту OE прямоугольного треугольника AOS. Так как $AO=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $AS = 1$, $SO=\frac{\sqrt{2}}{2}$, то $OE = 0{,}5$.

Ответ: 0,5.

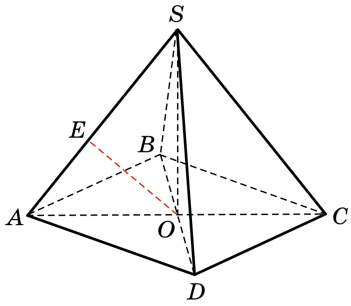

Рис. 5.8

Метод параллельных прямой и плоскости

В общем случае необязательно строить общий перпендикуляр, но можно применить один из предложенных ниже методов.

Воспользуемся утверждением:

> если одна из двух скрещивающихся прямых лежит в плоскости, а другая — параллельна этой плоскости, то расстояние между данными прямыми равно расстоянию между прямой и плоскостью.

В свою очередь последнюю задачу можно свести к задаче о расстоянии от точки прямой до плоскости.

Пример 8. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найти расстояние между прямыми AA_1 и B_1C.

Решение. Прямая B_1C лежит в плоскости BCC_1 (рис. 5.9). Так как $AA_1 \parallel CC_1$, то $AA_1 \parallel BCC_1$. Для нахождения искомого расстояния достаточно найти расстояние от точки A прямой AA_1 до плоскости BCC_1. Плоскости ABC и BCC_1 перпендикулярны и пересекаются по прямой BC. В равностороннем треугольнике ABC высота $AD \perp BC$, поэтому $AD \perp BCC_1$. Отсюда следует, что $AD=\frac{\sqrt{3}}{2}$ — искомое расстояние.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

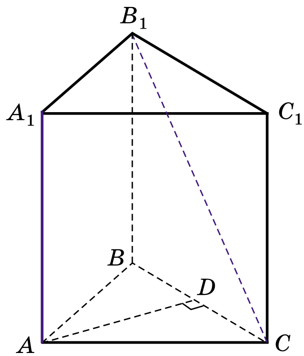

Рис. 5.9

Метод параллельных плоскостей

В основе данного метода лежит утверждение:

> расстояние между двумя скрещивающимися прямыми равно расстоянию между параллельными плоскостями, проходящими через эти прямые.

В свою очередь последнюю задачу можно свести к задаче о нахождении расстояния от точки до плоскости.

Система подготовительных задач, связанная с данным или предыдущим методами, относится к упражнениям 8–11, приведенным в разделе «Задачи для самостоятельного решения» на с. 16, определить параллельные плоскости, содержащие данные прямые; заключить одну прямую в плоскость, которая параллельна второй прямой.

Пример 9. В единичном кубе $A...D_1$ найти расстояние между прямыми AB_1 и A_1D.

Решение. Данные прямые AB_1 и A_1D лежат в плоскостях AB_1C и A_1DC_1 соответственно (рис. 5.10). Так как

$$AB_1 \parallel DC_1 \text{ и } B_1C \parallel A_1D,$$

то плоскости AB_1C и A_1DC_1 параллельны. Расстояние между этими плоскостями равно расстоянию от точки O_1 ($O_1 = A_1C_1 \cap B_1D_1$) плоскости A_1DC_1 до плоскости AB_1C. Итак,

$$\rho\left(AB_1;\ A_1D\right) = \rho\left(O_1;\ AB_1C\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

(см. пример 4).

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

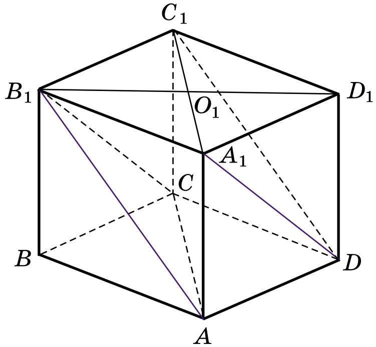

Рис. 5.10

Метод ортогонального проектирования

Приведем алгоритм решения задачи для скрещивающихся прямых l_1 и l_2 данным методом.

1. Построить плоскость α, перпендикулярную прямой l_1, и отметить точку A их пересечения (рис. 5.11).

2. Построить на этой плоскости ортогональную проекцию BC_1 второй прямой l_2.

3. Вычислить расстояние от точки A до прямой BC_1:

$$\rho(l_1;\ l_2) = \rho(A;\ BC_1) = AH,$$

где H — основание перпендикуляра, опущенного из A на BC_1.

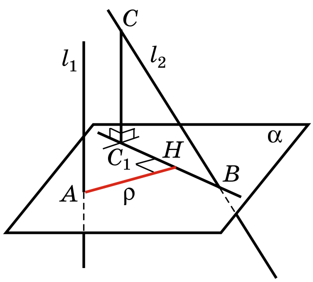

Рис. 5.11

В качестве подготовительных задач можно предложить учащимся в упражнениях 8–11, приведенным в разделе

«Задачи для самостоятельного решения» на с. 16, найти плоскость, перпендикулярную одной из предложенных прямых, и затем определить ортогональную проекцию второй прямой на эту плоскость.

Пример 10. В правильной усеченной четырехугольной пирамиде $A...D_1$ со сторонами оснований a и b ($a > b$) и высотой h найти расстояние между диагональю BD_1 и диагональю большего основания AC.

Решение. Прямые BD_1 и AC — скрещивающиеся прямые (рис. 5.12,*а*). Точки O и O_1 — точки пересечения диагоналей оснований пирамиды. $OO_1 \perp AC$ и $OO_1 \perp BD$, как отрезок, соединяющий середины оснований равнобедренных трапеций BB_1D_1D и AA_1C_1C.

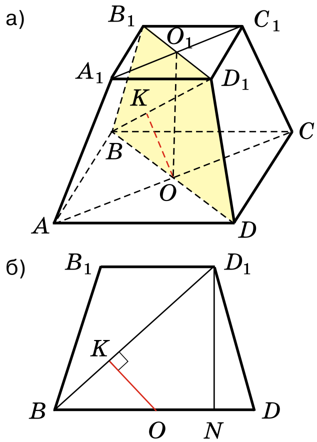

Рис.5.12

Так как $AC \perp BD$ ($ABCD$ — квадрат) и $AC \perp OO_1$, то $AC \perp BB_1D_1$. Прямая BD_1 лежит в плоскости BB_1D_1. Пусть OK — перпендикуляр, опущенный из точки O на BD_1. Тогда $OK \perp AC$, и OK — общий перпендикуляр прямых BD_1 и AC. Найдем OK из подобия прямоугольных треугольников BD_1N и BOK, имеющих общий острый угол (рис. 5.12,*б*). В треугольнике BD_1N:

$$D_1N = h,$$

$$BN = BD - ND = a\sqrt{2} - \frac{(a-b)\sqrt{2}}{2} = \frac{(a+b)\sqrt{2}}{2},$$

$$BD_1 = \sqrt{D_1N^2 + BN^2} = \sqrt{h^2 + \frac{(a+b)^2}{2}}.$$

В треугольнике BKO

$$BO = \frac{BD}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Тогда $\dfrac{OK}{D_1N} = \dfrac{BO}{BD_1}$ и $OK = \dfrac{ah}{\sqrt{2h^2 + (a+b)^2}}$.

Ответ: $\dfrac{ah}{\sqrt{2h^2 + (a+b)^2}}$.

Задачи для самостоятельного решения

8. В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние между прямыми AB_1 и A_1C_1.

9. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AB и A_1C.

10. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC_1.

11. Сторона основания ABC правильной треугольной пирамиды $ABCD$ равна $8\sqrt{3}$, высота пирамиды $DO = 6$. Точки A_1, C_1 — середины ребер AD и CD соответственно. Найдите расстояние между прямыми BA_1 и AC_1.

Угол между двумя прямыми

Углом между двумя пересекающимися прямыми называется наименьший из углов, образованных при пересечении прямых.
Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным скрещивающимся.

Для нахождении угла φ между прямыми используют формулу

$$\cos\varphi = \frac{\left| a^2 + b^2 - c^2 \right|}{2ab},$$

где a и b — длины сторон треугольника ABC, соответственно параллельных этим прямым.

В список простейших задач целесообразно включить задачи с заранее известным результатом.

1. Доказать, что непересекающиеся ребра правильной треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны.

2. Доказать, что диагональ основания правильной четырехугольной пирамиды и не пересекающее ее боковое ребро взаимно перпендикулярны.

3. Доказать, что диагональ правильной четырехугольной призмы и непересекающая ее диагональ основания взаимно перпендикулярны.

Отметим одно *полезное замечание*. Если все линейные элементы конфигурации зависят от одного параметра, то можно принимать значение этого параметра равным какому-нибудь числу. В частности, в кубе при нахождении угловых величин часто полагают длину его ребра равной единице.

Пример 11. В кубе $A...D_1$ найти угол между прямыми A_1D и D_1E, где E — середина ребра CC_1.

Решение. Пусть ребро куба равно 1, F — середина ребра BB_1 (рис. 5.13).

Так как $A_1F \parallel D_1E$, то искомый угол φ — угол при вершине A_1 в треугольнике A_1FD. Найдем стороны треугольника A_1FD. Из треугольника BFD имеем:

$$FD^2 = BD^2 + BF^2 = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}.$$

Из треугольника A_1B_1F получаем:

$$A_1F^2 = A_1B_1^2 + B_1F^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}.$$

Из треугольника A_1AD имеем:

$$A_1D^2 = A_1A^2 + AD^2 = 1 + 1 = 2$$

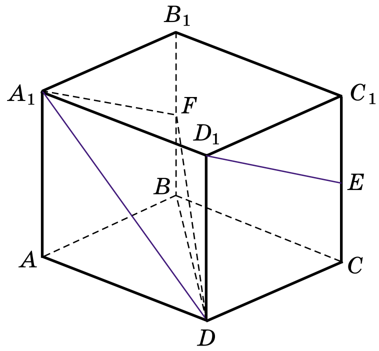

Рис. 5.13

В треугольнике A_1FD используем теорему косинусов:

$$FD^2 = A_1D^2 + A_1F^2 - 2A_1D \cdot A_1F\cos\varphi,$$

$$\frac{9}{4} = 2 + \frac{5}{4} - 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}\cos\varphi,$$

откуда

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{10}} \text{ и } \varphi = \arccos\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Ответ: $\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Пример 12. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны, найти угол между прямыми AC_1 и B_1C.

Решение. Пусть ребро призмы равно 1. Проведем $CM \parallel AC_1$ (рис. 5.14). Тогда

$\angle(AC_1; B_1C) = \angle(CM; B_1C) = \varphi$.

Из треугольника MC_1B_1, в котором $MC_1 = AC = B_1C_1 = 1$ и $\angle MC_1B_1 = 120°$, по теореме косинусов находим:

$MB_1^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-0{,}5) = 3.$

Далее из треугольника MCB_1, где $MC = B_1C = \sqrt{2}$, используя теорему косинусов,

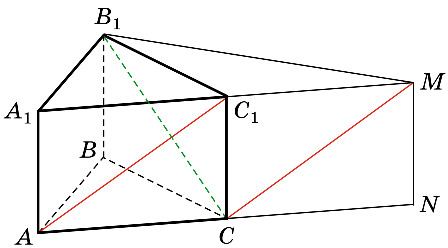

Рис. 5.14

получаем:

$$\cos\varphi = \frac{2+2-3}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{4} \text{ и } \varphi = \arccos\frac{1}{4}.$$

Ответ: $\arccos\frac{1}{4}$.

Задачи для самостоятельного решения

При решении упражнений 12–15 с учащимися необходимо предварительно отработать параллельный перенос одной из прямых до пересечения с другой прямой на готовых чертежах. При этом иногда удобнее перенести первую прямую, иногда — вторую прямую, чтобы пересечение прямых происходило внутри или вне многогранника.

12. В кубе $A...D_1$ точки E и F — середины ребер A_1B_1 и B_1C_1 соответственно. Найдите косинус угла между прямыми AE и BF.

13. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1.

14. В тетраэдре $ABCD$ известно, что $AC = BD = 14$, $BC = AD = 13$, $AB = CD = 15$. Найдите угол между прямыми AC и BD.

15. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны, точки E, F — середины ребер SB и SC соответственно. Найдите косинус угла между прямыми AE и BF.

Угол между прямой и плоскостью

Углом между плоскостью и не перпендикулярной ей прямой называется угол между этой прямой и ее проекцией на данную плоскость.

Использование определения

Угол между прямой и плоскостью можно вычислить, если этот угол удается включить в прямоугольный треугольник в качестве одного из его острых углов.

Следующие задачи могут составить систему подготовительных задач в построении угла между прямой и плоскостью.

1. В правильной треугольной призме построить угол наклона диагонали боковой грани к другой боковой грани.

2. В правильной четырехугольной призме построить угол между диагональю основания и боковой гранью.

3. В правильной треугольной пирамиде построить угол наклона высоты пирамиды к боковой грани.

4. В правильной четырехугольной пирамиде построить угол наклона бокового ребра к плоскости диагонального сечения.

Выделим два случая: прямая и плоскость имеют общую точку на данном многограннике либо вне многогранника.

Во втором случае, решая с учащимися на готовых чертежах упражнения 16–19, приведенные в разделе «Задачи для самостоятельного решения» на с. 22, необходимо предварительно отработать параллельный перенос прямой до пересечения с плоскостью либо параллельный перенос плоскости до пересечения с прямой, чтобы общая точка стала «видимой» на данном многограннике.

Пример 13. В правильной шестиугольной пирамиде $MABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 4, найти синус угла между прямой BC и плоскостью EMD.

Решение. Так как $AD \parallel BC$ (рис. 5.15), то $\angle(BC; EMD) = \angle(AD; EMD)$.

Пусть O — центр основания и ML — апофема боковой грани EMD. Тогда по теореме о трех перпендикулярах $OL \perp ED$ и $ED \perp MOL$. Значит, $MED \perp \perp MOL$ по признаку перпендикулярности плоскостей. Отсюда следует, что высота OH треугольника MOL перпендикулярна плоскости EMD, и прямая HD — ортогональная проекция прямой AD на плоскость EMD.

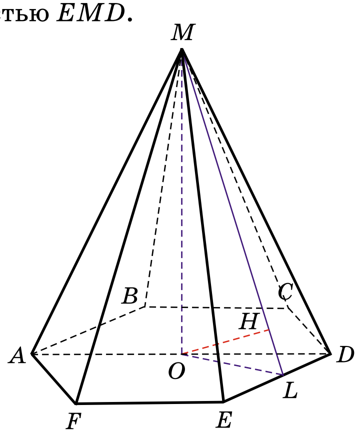

Рис. 5.15

Высота OL равностороннего треугольника EOD равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Из прямоугольных треугольников MOD и MLD найдем соответственно $MO = \sqrt{15}$ и $ML = \frac{\sqrt{63}}{2}$, затем

$$OH = \frac{OM \cdot OL}{ML} = \sqrt{\frac{5}{7}}.$$

Из прямоугольного треугольника OHD получаем:

$$\sin\angle(AD; EMD) = \frac{OH}{OD} = \sqrt{\frac{5}{7}} : 1 = \sqrt{\frac{5}{7}}.$$

Ответ: $\sqrt{\frac{5}{7}}$.

Использование дополнительного угла

Угол φ между прямой l и плоскостью α и угол ψ между прямой l и перпендикуляром к плоскости α удовлетворяют соотношению $\varphi + \psi = 90°$. Поэтому в некоторых случаях через дополнительный угол ψ легко найти искомый угол φ.

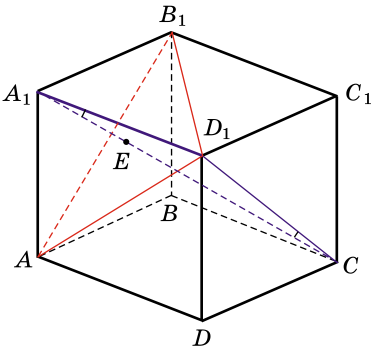

Рис. 5.16

Пример 14. В единичном кубе $A...D_1$ найти угол между прямой CD_1 и плоскостью AB_1D_1.

Решение. Прямая $A_1C_1 \perp B_1D_1$ ($A_1B_1C_1D_1$ — квадрат), тогда по теореме о трех перпендикулярах $A_1C \perp B_1D_1$ (рис. 5.16). Аналогично, $A_1C \perp AD_1$. Следовательно, прямая A_1C перпендикулярна плоскости AB_1D_1. Так как $A_1D_1 \perp D_1C_1C$, то $A_1D_1 \perp D_1C$. Поэтому в прямоугольном треугольнике A_1D_1C $\angle D_1CA_1 = \psi$ есть угол между данной прямой CD_1 и перпендикуляром A_1C к данной плоскости, а $\angle D_1A_1C = \varphi$, как дополнительный угол до $90°$ для $\angle D_1CA_1$, является искомым углом.

Имеем:

$$\cos\varphi = \frac{A_1D_1}{A_1C} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ или } \varphi = \arccos\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Использование расстояний

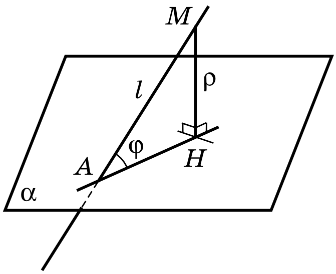

Рис. 5.17

Пусть прямая l пересекает плоскость α в точке A, точка M лежит на прямой l (рис. 5.17). Тогда угол φ между прямой l и плоскостью α можно вычислить, используя формулу

$$\sin\varphi = \sin\angle(l;\alpha) = \frac{\rho(M;\alpha)}{AM}.$$

Пример 15. В кубе $A...D_1$ найти угол между прямой A_1B_1 и плоскостью BDC_1.

Решение. Так как $A_1B_1 \parallel D_1C_1$, то

$$\angle(A_1B_1;BDC_1) = \angle(D_1C_1;BDC_1)$$

(рис. 5.18). Точки D_1 и O_1 лежат на прямой D_1B_1, параллельной плоскости BDC_1, значит,

$$\rho(D_1;BDC_1) = \rho(O_1;BDC_1) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

(см. пример 2). Таким образом, получаем:

$$\sin\angle(A_1B_1;\, BDC_1) =$$
$$= \sin\angle(D_1C_1;\, BDC_1) =$$
$$= \frac{\rho\left(D_1;\, BDC_1\right)}{D_1C_1} = \frac{\rho\left(O_1;\, BDC_1\right)}{D_1C_1} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Отсюда

$$\angle\left(A_1B_1;\, BDC_1\right) = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$.

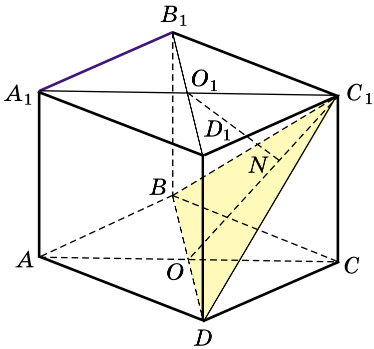

Рис. 5.18

Задачи для самостоятельного решения

16. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны, точка D — середина ребра A_1B_1. Найдите синус угла между прямой AD и плоскостью BCC_1.

17. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны, точка G — середина ребра A_1B_1. Найдите синус угла между прямой AG и плоскостью BCC_1.

18. (*ЕГЭ-2010*) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC известны ребра: $AB = 12\sqrt{3}$, $SC = 13$. Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой AM, где M — точка пересечения медиан грани SBC.

19. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны, найдите косинус угла между прямой AB и плоскостью SAD.

Угол между плоскостями

Двугранный угол, образованный полуплоскостями измеряется величиной его линейного угла, получаемого при пересечении двугранного угла плоскостью, перпендикулярной его ребру.

Величина двугранного угла принадлежит промежутку (0; 180°).

Величина угла между пересекающимися плоскостями принадлежит промежутку (0; 90°].

Построение линейного угла двугранного угла

Решение задач этим методом сводится к построению линейного угла с помощью двух перпендикуляров, проведенных в указанных плоскостях к прямой их пересечения, а его величина в дальнейшем находится либо из прямоугольного треугольника, либо из некоторого треугольника с применением теоремы косинусов.

Выделим подготовительные задачи.

1. Построить линейный угол двугранного угла при стороне основания:

а) в правильной треугольной пирамиде;

б) в правильной четырехугольной пирамиде.

2. Изобразить линейный угол двугранного угла при боковом ребре:

а) в правильной треугольной пирамиде;

б) в правильной четырехугольной пирамиде.

Пример 16. В правильной шестиугольной пирамиде, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найти косинусы двугранных углов при основании и при боковом ребре.

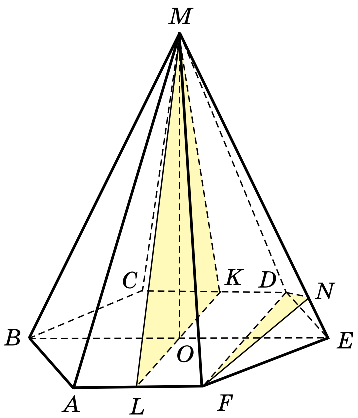

Рис. 5.19

Решение. Рассмотрим пирамиду $MABCDEF$. Поскольку она правильная, то все ее двугранные углы при основании и равны все углы между любыми ее смежными боковыми гранями. Найдем, например, угол между плоскостью основания и боковой гранью MAF и угол между боковыми гранями FME и DME (рис. 5.19).

Прямая AF — ребро двугранного угла $MAFE$. Пусть MO — высота пирамиды, ML — апофема грани AMF,

$$ML = \sqrt{AM^2 - AL^2} = \sqrt{4 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{2}.$$

По теореме о трех перпендикулярах $LO \perp AF$. Следовательно, $\angle MLO$ — линейный угол двугранного угла $MAFE$. $LO = \frac{\sqrt{3}}{2}$, так как является высотой правильного треугольника AOF со стороной 1. Из прямоугольного треугольника LMO находим:

$$\cos \angle MLO = \frac{LO}{ML} = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{\sqrt{15}}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Прямая ME — ребро двугранного угла $FMED$. В треугольниках FME и DME проведем высоты к стороне ME из точек F и D соответственно. Так как треугольники FME и DME равны, то эти высоты «сойдутся» в одной точке N. Следовательно, угол DNF — линейный угол двугранного угла $FMED$.

Из равенства треугольников FME и DME следует равенство высот FN и DN. Найдем FN. Площадь треугольника FME

$$S_{FME} = S_{AMF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{15}}{2} \cdot 1 = \frac{\sqrt{15}}{4},$$

тогда высота FN, опущенная на ME, равна

$$FN = \frac{2S_{FME}}{ME} = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Далее рассмотрим равнобедренный треугольник FDN. В нем $FD = 2LO = \sqrt{3}$. Косинус угла DNF найдем, используя теорему косинусов для стороны DF:

$$\cos \angle FND = \frac{FN^2 + DN^2 - FD^2}{2 \cdot FN \cdot DN} = -\frac{3}{5}.$$

Таким образом, искомые косинусы двугранных углов при основании и при боковом ребре равны $\frac{\sqrt{5}}{5}$ и $-\frac{3}{5}$ соответственно.

Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{5}$ и $-\frac{3}{5}$.

Использование параллельных прямых

В некоторых задачах построение линейного угла затруднительно. Поэтому вместо линейного угла можно рассмотреть угол с соответственно параллельными сторонами по отношению к линейному углу.

Пример 17. В кубе $A...D_1$ с ребром a через точки M на ребре BB_1 и N на DD_1 такие, что $BM = \frac{3a}{4}$ и $DN = \frac{a}{4}$, параллельно AC проведена секущая плоскость. Определить угол между секущей плоскостью и плоскостью ABC.

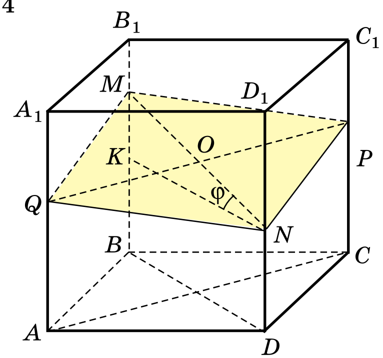

Рис. 5.20

Решение. Построим сечение куба плоскостью, проходящей через точки M и N параллельно AC (рис. 5.20).

С этой целью рассмотрим диагональную плоскость AA_1C_1. Соединим точки M и N, тогда $AA_1C_1 \cap MN = O$. Поскольку, согласно условию, секущая плоскость параллельна AC, то прямая ее пересечения с плоскостью AA_1C_1 также будет параллельна AC. Поэтому проведем через точку O отрезок QP ($QP \parallel AC$). Соединив последовательно отрезками точки Q, M, P и N, получим сечение $QMPN$. Так как секущая плоскость пересекает параллельные грани куба по параллельным прямым, то четырехугольник $QMPN$ является параллелограммом.

В квадрате $ABCD$ диагонали перпендикулярны ($BD \perp AC$), значит, $BD \perp QP$. Проведем в плоскости BDD_1 прямую KN, параллельную BD. Тогда $KN \perp QP$. Прямая BD является проекцией наклонной MN на плоскость ABC, поэтому по теореме о трех перпендикулярах $MN \perp QP$. Прямая MN лежит в плоскости $MPNQ$, а прямая KN параллельна плоскости ABC. Следовательно, угол KNM равен линейному углу искомого двугранного угла (как углы с соответственно параллельными сторонами).

Пусть $\angle MNK = \varphi$, тогда

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{MB - ND}{BD} = \frac{a}{2} : a\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Использование параллельных плоскостей

В некоторых задачах эффективным является подход, при котором вместо угла между пересекающимися плоскостями α и β ищут угол между плоскостями, параллельными рассматриваемым (или между одной из данных плоскостей и плоскостью, параллельной другой из них).

Пример 18. В кубе $A...D_1$ найти угол между плоскостью грани AA_1B_1B и плоскостью BC_1D.

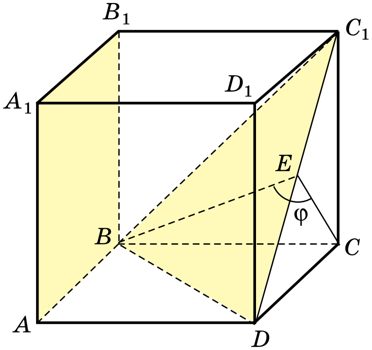

Рис. 5.21

Решение. Так как плоскость AA_1B_1 параллельна плоскости DD_1C_1, то искомый угол равен углу между плоскостями BC_1D и DD_1C_1 (рис. 5.21). Диагонали грани куба перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам. Поэтому $EC \perp DC_1$, где точка E — середина отрезка DC_1. Также $BE \perp DC_1$, как высота равностороннего треугольника BC_1D. Следовательно, угол BEC есть линейный угол φ двугранного угла BDC_1C. В треугольнике

BEC угол BCE — прямой ($BC \perp DD_1C_1$). Пусть ребро куба равно 1, тогда $BC = 1$, $EC = \dfrac{D_1C}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Следовательно,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{BC}{EC} = 1 : \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

Отсюда $\varphi = \operatorname{arctg} \sqrt{2}$.

Ответ: $\operatorname{arctg} \sqrt{2}$.

Использование перпендикуляров к плоскостям

Пусть прямые l_α и l_β лежат в плоскости γ и перпендикулярны плоскостям α и β соответственно (рис. 5.22). Тогда угол между ними равен углу между плоскостями α и β. В общем случае прямые l_α и l_β могут быть скрещивающимися.

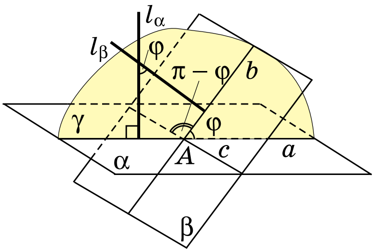

Рис. 5.22

Пример 19. В кубе $A...D_1$ найти угол между плоскостями AB_1C и BC_1D.

Решение. Диагональ куба A_1C перпендикулярна плоскости BC_1D (рис. 5.23). Аналогично $BD_1 \perp AB_1C$. Таким образом, задача сводится к нахождению острого угла между диагоналями A_1C и BD_1 прямоугольника BCD_1A_1.

Пусть O — точка пересечения диагоналей и ребро куба равно 1. Тогда

$$A_1C = BD_1 = \sqrt{3}, \quad OC = OB = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

В треугольнике OBC применим теорему косинусов:

$$\cos \angle BOC = \frac{OB^2 + OC^2 - BC^2}{2 \cdot OB \cdot OC} = \frac{1}{2} : \frac{3}{2} = \frac{1}{3},$$

то есть $\angle BOC = \arccos \dfrac{1}{3}$.

Ответ: $\arccos \dfrac{1}{3}$.

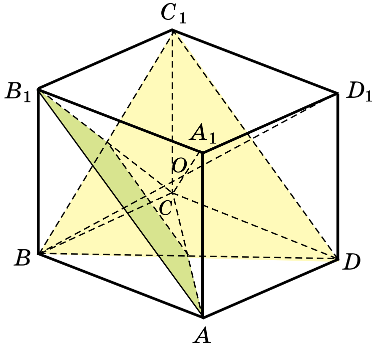

Рис. 5.23

Применение теоремы о площади ортогональной проекции многоугольника

При применении этого метода угол φ между плоскостями α и β можно вычислить, используя формулу

$$\cos\varphi = \frac{S_{\text{пр}}}{S},$$

где S — площадь многоугольника, лежащего в одной из плоскостей, $S_{\text{пр}}$ — площадь его ортогональной проекции на другую плоскость.

Этот метод обычно применяют при вычислении угла между плоскостью сечения и плоскостью какой-либо грани многогранника (часто в качестве такой грани выступает основание пирамиды или призмы).

Пример 20. В кубе $A...D_1$ найти угол между плоскостью грани AA_1B_1B и плоскостью BC_1D.

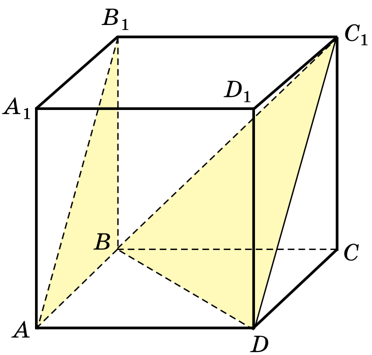

Рис. 5.24

Решение. Пусть ребро куба равно 1. Ортогональной проекцией треугольника BC_1D на плоскость AA_1B_1 является треугольник AB_1B, площадь которого равна 0,5 (рис. 5.24).

Поскольку $BD = BC_1 = C_1D = \sqrt{2}$ (как диагонали граней куба), то

$$S_{BC_1D} = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Получаем:

$$\cos\angle\left(AA_1B_1;\ BC_1D\right) = \frac{S_{AB_1B}}{S_{BC_1D}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Отсюда $\angle\left(AA_1B_1;\ BC_1D\right) = \arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}.$

Ответ: $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}.$

Пример 21. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найти угол между плоскостями BA_1D_1 и AA_1E_1.

Решение. Четырехугольники BA_1D_1C и AA_1E_1E — сечения данной призмы этими плоскостями (рис. 5.25). Так как BA, D_1E_1 и CF перпендикулярны плоскости AA_1E_1 (они перпендикулярны AA_1 и AE), то трапеция AA_1E_1G, где G — середина отрезка AE, есть ортогональная проекция трапеции BA_1D_1C на плоскость сечения AA_1E_1E.

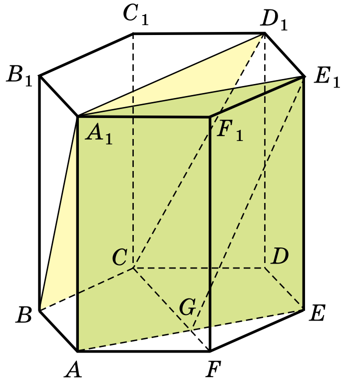

Рис. 5.25

Трапеция BA_1D_1C — равнобедренная с основаниями $A_1D_1 = 2$, $BC = 1$ и боковыми сторонами $BA_1 = CD_1 = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$. Ее высота h равна

$$h = \sqrt{CD_1^2 - \left(\frac{A_1D_1 - BC}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{19}}{2},$$

а площадь равна

$$S_{BA_1D_1C} = \frac{A_1D_1 + BC}{2} \cdot h = \frac{3\sqrt{19}}{4}.$$

В прямоугольной трапеции AA_1E_1G основания равны $A_1E_1 = \sqrt{3}$ (из прямоугольного треугольника $A_1E_1D_1$), $AG = \frac{\sqrt{3}}{2}$, а высота $AA_1 = 2$. Ее площадь равна

$$S_{AA_1E_1G} = \frac{A_1E_1 + AG}{2} \cdot AA_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Далее находим:

$$\cos\angle\left(BA_1D_1;\ AA_1E_1\right) = \frac{S_{AA_1E_1G}}{S_{BA_1D_1C}} = \sqrt{\frac{12}{19}}.$$

Значит, искомый угол равен $\arccos\sqrt{\frac{12}{19}}$.

Ответ: $\arccos\sqrt{\frac{12}{19}}$.

Использование расстояний

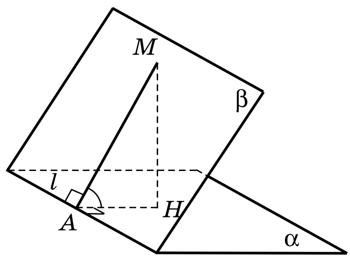

Рис. 5.26

Пусть даны две плоскости α и β (рис. 5.26), пересекающиеся по прямой l. Если известны расстояния от точки M, лежащей в плоскости β, до плоскости α и до прямой l, то угол между плоскостями α и β можно вычислить, используя формулу

$$\sin\angle(\alpha;\beta) = \frac{\rho(M;\alpha)}{\rho(M;l)}.$$

Пример 22. В кубе $A\ldots D_1$ найти угол между плоскостями AB_1C и A_1B_1C.

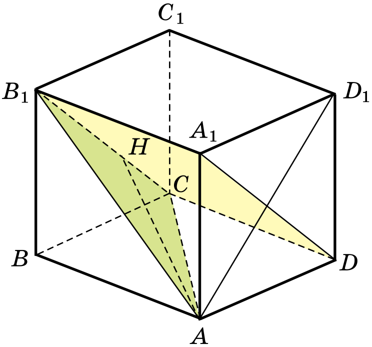

Рис. 5.27

Решение. Пусть ребро куба равно 1. Плоскости AB_1C и A_1B_1C пересекаются по прямой B_1C (рис. 5.27). Расстояние от точки A, принадлежащей плоскости AB_1C, до прямой B_1C равно длине высоты равностороннего треугольника AB_1C со стороной $\sqrt{2}$, то есть $\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$. Расстояние от точки A до плоскости A_1B_1C равно половине диагонали грани куба, то есть $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Имеем:

$$\sin\angle\left(AB_1C;\ A_1B_1C\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}:\frac{\sqrt{6}}{2}=\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Отсюда искомый угол равен $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Задачи для самостоятельного решения

20. Диагональ A_1C куба $A...D_1$ служит ребром двугранного угла, грани которого проходят через середины ребер AB и DD_1. Найдите величину этого угла.

21. (*ЕГЭ-2010*) В прямоугольном параллелепипеде $A...D_1$ известны ребра $AB=8$, $AD=6$, $CC_1=5$. Найдите угол между плоскостями BDD_1 и AD_1B_1.

22. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны, найдите угол между плоскостями ACB_1 и A_1C_1B.

23. Основание пирамиды $DABC$ — равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB=BC=13$, $AC=24$. Ребро DB перпендикулярно плоскости основания и равно 20. Найдите тангенс двугранного угла при ребре AC.

Ответы на задачи для самостоятельного решения

1. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$. **2.** а) $\sqrt{3}$; б) 2; в) $\frac{\sqrt{7}}{2}$; г) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$; д) $\frac{\sqrt{14}}{4}$; е) $\frac{\sqrt{39}}{4}$; ж) $\frac{\sqrt{30}}{5}$; з) $\frac{\sqrt{30}}{4}$. **3.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **4.** $\frac{\sqrt{39}}{4}$. **5.** $\frac{12\sqrt{93}}{31}$. **6.** 2. **7.** 2,4. **8.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **9.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

10. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **11.** $\frac{36\sqrt{259}}{259}$. **12.** 0,8. **13.** 0,75. **14.** $\arcsin\frac{3\sqrt{5}}{7}$. **15.** $\frac{1}{6}$.
16. $\frac{\sqrt{15}}{10}$. **17.** $\frac{\sqrt{15}}{10}$. **18.** $\operatorname{arctg}\frac{5}{48}$. **19.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **20.** 120°. **21.** $\operatorname{arctg}\frac{24}{25}$.
22. $\arccos\frac{1}{7}$. **23.** 4.

Литература

1. *Груденов Я.И., Колегаева Н.А, Макарова З.В., Хлабыстова Л.П.* Система элементарных задач по стереометрии // Математика в школе, 1980, № 3.

2. *Корянов А.Г., Прокофьев А.А.* Математика. ЕГЭ-2011. Типовые задания С2. Многогранники: виды задач и методы их решения. URL: http://alexlarin.net/ege/2011/C2-2011.pdf.

3. *Потоскуев Е.В.* Рекомендации по изучению стереометрии // Математика, 2008, № 2, 4, 5.

Лекция 6
Применение координатного и векторного методов для решения задач С2

При нахождении углов и расстояний в пространстве поэтапно вычислительным методом возникают трудности, связанные с дополнительными построениями и необходимыми обоснованиями, сопровождающими эти построения. Учащийся должен иметь хорошее пространственное воображение, помнить алгоритмы решения для каждого вида задач.

Координатный или векторный методы позволяют избежать такого рода трудностей. От учащегося требуются знания нескольких формул и навыки в решении простейших задач, основная нагрузка при решении задачи приходится на вычислительную часть.

Координатный метод

Практика показывает, что учащиеся быстро осваивают метод координат, так как при его использовании необходимо придерживаться общего алгоритма: вычислить координаты необходимых точек, расположенных на многогранниках, и применить соответствующую формулу. Для некоторых задач дополнительно требуется умение составлять уравнение плоскости.

Удачный выбор системы координат (некоторые вершины многогранника находятся на координатных осях) позволяет значительно упростить вычисления.

Первая группа подготовительных задач формулируется следующим образом.

Изобразите многогранник, указанную прямоугольную систему координат и определите координаты вершин многогранника **(1–6)**.

1. Куб $A...D_1$ с ребром a. Начало координат — в точке A; прямая AD — ось x; прямая AB — ось y; прямая AA_1 — ось z.

2. Правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, сторона основания которой равна a, а боковое ребро b. Начало координат — в точке A; прямая AC — ось x; прямая, проходящая через точку A в плоскости ABC перпендикулярно прямой AC, — ось y; прямая AA_1 — ось z.

3. Правильная шестиугольная призма $A...F_1$, сторона основания которой равна a, а боковое ребро b. Начало координат — в центре O шестиугольника $ABCDEF$; прямая CF — ось x; прямая, проходящая через точку O в плоскости ABC перпендикулярно прямой CF, — ось y; прямая OO_1 — ось z, где O_1 — центр шестиугольника $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$.

4. Правильная треугольная пирамида $MABC$, сторона основания которой равна a, а высота h. Начало координат — в точке A; прямая AC — ось x; прямая, проходящая через точку A в плоскости ABC перпендикулярно прямой AC, — ось y; прямая, проходящая через точку A перпендикулярно плоскости ABC, — ось z.

5. Правильная четырехугольная пирамида $MABCD$, сторона основания которой равна a, а высота h. Начало координат — в центре O квадрата $ABCD$; прямая, проходящая через точку O параллельно AD, — ось x; прямая OM — ось z.

6. Правильная шестиугольная пирамида $MABCDEF$, сторона основания которой равна a, а высота h. Начало координат — в центре O шестиугольника $ABCDEF$; прямая CF — ось x; прямая, проходящая через точку O в плоскости ABC перпендикулярно прямой CF, — ось y; прямая OM — ось z.

Другие группы опорных задач, связанных с отработкой навыков применения формул и составления уравнения плоскости, будут представлены ниже.

Векторный метод

Векторный метод не нашел распространения в школьной практике, хотя он может быть использован при решении широкого класса геометрических задач.

В частности, операция скалярного умножения двух векторов позволяет вычислять длины отрезков и величины углов. Если нужно найти длину отрезка, то в качестве базисных векторов выбирают векторы, для которых известны их длины и углы между ними. Если в задаче требуется найти величину угла между прямыми, то в качестве базисных выбирают векторы с известными отношениями их длин и известными углами между ними.

В общем случае для базисных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ таких, что $\left|\vec{a}\right| = a$, $\left|\vec{b}\right| = b$, $\left|\vec{c}\right| = c$ и $\angle\left(\vec{a}; \vec{b}\right) = \alpha$, $\angle\left(\vec{a}; \vec{c}\right) = \beta$, $\angle\left(\vec{b}; \vec{c}\right) = \gamma$, таблица скалярных произведений выглядит следующим образом (табл. 6.1):

Таблица 6.1

Скалярные произведения некоторых базисных векторов

	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
$\vec{a}$	a^2	$ab\cos\alpha$	$ac\cos\beta$
$\vec{b}$	$ab\cos\alpha$	b^2	$bc\cos\gamma$
$\vec{c}$	$ac\cos\beta$	$bc\cos\gamma$	c^2

Решение задачи упрощается, если использовать прямоугольную декартову систему координат, поэтому часто стараются использовать ортонормированные или ортогональные базисы.

Обычно при решении задач, в которых рассматриваются призма или пирамида, в качестве базисных векторов выбирают какую либо тройку векторов, выходящих из одной вершины и направленных вдоль ребер многогранника. Рассмотрим одну из подготовительных задач.

Пример 1. В параллелепипеде $A...D_1$ точка M — центр грани CC_1D_1D. Найти разложение вектора $\overrightarrow{B_1M}$ по векторам $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{AB}$, и $\overrightarrow{AD}$.

Решение. По правилу треугольника имеем:

$$\overrightarrow{B_1M} = \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{C_1M}$$

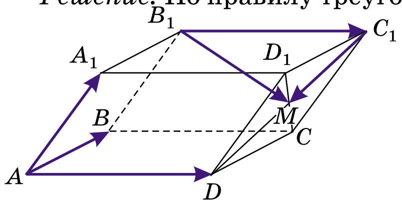

Рис. 6.1

(рис. 6.1). Так как $\overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{AD}$, а $\overrightarrow{C_1M} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{C_1D_1} + \overrightarrow{C_1C}\right)$ и $\overrightarrow{C_1D_1} = -\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{C_1C} = -\overrightarrow{AA_1}$, то получим:

$$\overrightarrow{C_1M} = -\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB}\right).$$

Следовательно, $\overrightarrow{B_1M} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Ответ: $\overrightarrow{B_1M} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. В основании четырехугольной пирамиды $MABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Точки N и P — середины ребер BM и DC соответственно. Найдите разложение вектора $\overrightarrow{NP}$ по векторам $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AM}$.

2. Дан параллелепипед $A...D_1$. Точки M, N, P — центры граней $A_1B_1C_1D_1$, CC_1D_1D, BB_1C_1C соответственно. Пусть $\vec{a} = \overrightarrow{AM}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AN}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AP}$. Найдите разложение вектора $\overrightarrow{AC_1}$ по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Расстояние от точки до прямой

Как было сказано в предыдущей лекции, задача о вычислении расстояния от точки до прямой сводится к нахождению высоты некоторого треугольника. Поэтому необходимо напомнить учащимся некоторые формулы.

Расстояние между точками A и B можно вычислить по формулам:

в общем случае

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}}, \qquad (1)$$

в декартовой прямоугольной системе координат

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{p^2+q^2+r^2}, \qquad (2)$$

где $\{p; q; r\}$ — координаты вектора $\overrightarrow{AB}$;

$$\rho(A;\ B) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-x_1)^2}, \qquad (3)$$

где $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$.

Координатный метод

Пример 2. В единичном кубе $A...D_1$ найти расстояние от точки D_1 до прямой PQ, где P и Q — середины соответственно ребер A_1B_1 и BC.

Решение. Рассмотрим прямоугольную систему координат с началом в точке A (рис. 6.2). Найдем координаты точек:

$$P\left(0; \frac{1}{2}; 1\right),\ Q\left(\frac{1}{2}; 1; 0\right),\ D_1(1; 0; 1).$$

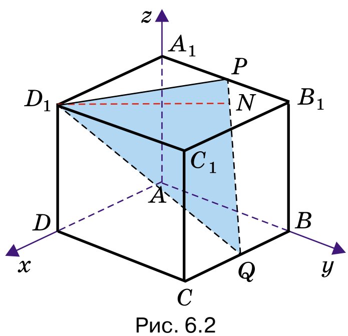

Рис. 6.2

Тогда

$$PQ = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1} = \sqrt{\frac{3}{2}},\quad D_1Q = \sqrt{\frac{1}{4}+1+1} = \frac{3}{2},$$

$$D_1P = \sqrt{1+\frac{1}{4}+0} = \sqrt{\frac{5}{4}}.$$

Из треугольника D_1PQ, используя формулу косинусов, находим:

$$\cos\angle D_1PQ=\frac{D_1P^2+PQ^2-D_1Q^2}{2\cdot D_1P\cdot PQ}=\sqrt{\frac{1}{30}}.$$

Значение $\cos\angle D_1PQ>0$, значит, угол D_1PQ острый. Далее получаем:

$$\sin\angle D_1PQ=\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{1}{30}}\right)^2}=\sqrt{\frac{29}{30}}.$$

Пусть $D_1N\perp PQ$, где $N\in PQ$. Тогда

$$D_1N=D_1P\cdot\sin\angle D_1PQ,$$

$$D_1N=\sqrt{\frac{5}{4}}\cdot\sqrt{\frac{29}{30}}=\sqrt{\frac{174}{144}}=\frac{\sqrt{174}}{12}.$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{174}}{12}$.

Векторный метод

Рассмотрим векторный подход к решению задач данного вида. Пусть дана прямая l с направляющим вектором $\vec{q}$, точка A лежит на прямой l, точка M — вне прямой l, $\overrightarrow{MA}=\vec{m}$ (рис. 6.3).

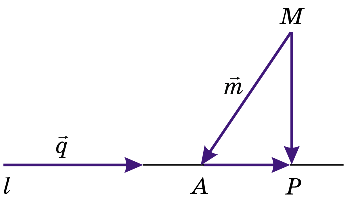

Рис. 6.3

Чтобы найти расстояние от точки M до прямой l, то есть длину перпендикуляра MP ($P\in l$), представим вектор $\overrightarrow{MP}$ в виде $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AP}=\vec{m}+x\cdot\vec{q}$.

Неизвестный коэффициент x находят из условия перпендикулярности вектора $\overrightarrow{MP}$ вектору $\vec{q}$:

$$\overrightarrow{MP}\cdot\vec{q}=0\Leftrightarrow(\vec{m}+x\cdot\vec{q})\cdot\vec{q}=0.$$

Искомое расстояние выражается следующим образом:

$$\left|\overrightarrow{MP}\right|=\sqrt{(\vec{m}+x\cdot\vec{q})^2}.$$

Пример 3. В треугольной пирамиде $ABCD$ при вершине D все плоские углы равны $\frac{\pi}{3}$, $AD=2$, $BD=4$, $CD=3$. Точки P, M и K являются серединами ребер AD, BD и BC соответственно. Найти расстояние от точки M до прямой PK.

Решение. Пусть $\overrightarrow{DA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{DB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{DC}=\vec{c}$ (рис. 6.4). Тогда имеем таблицу умножения координатных векторов (табл. 6.2):

Таблица 6.2

Произведение координат векторов

	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
$\vec{a}$	4	4	3
$\vec{b}$	4	16	6
$\vec{c}$	3	6	9

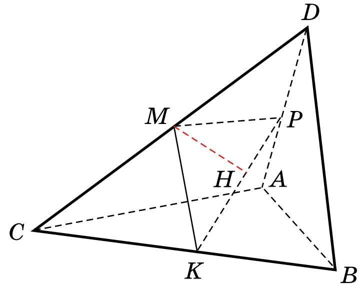

Рис. 6.4

Если $MH \perp PK$, где $H \in PK$, то в силу коллинеарности векторов $\overrightarrow{PH}$ и $\overrightarrow{PK}$ получаем: $\overrightarrow{PH} = x \cdot \overrightarrow{PK}$. Выразим вектор $\overrightarrow{PK}$ через базисные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, используя правило многоугольника:

$$\overrightarrow{PK} = \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MK} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c},$$

значит, $\overrightarrow{PH} = \frac{1}{2}x\left(-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)$. Теперь выразим вектор $\overrightarrow{MH}$:

$$\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PH} = \overrightarrow{DP} - \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{PH} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}x\left(-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right).$$

Из условия перпендикулярности векторов $\overrightarrow{MH}$ и $\overrightarrow{PK}$ имеем:

$$\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{PK} = 0, \text{ или } \left((1-x)\vec{a} + (x-1)\vec{b} + x\vec{c}\right)\left(-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right) = 0.$$

Используя таблицу умножения базисных векторов, получаем уравнение

$$(1 - x)(-4 + 4 + 3 + 4 - 16 - 6) + x(-3 + 6 + 9) = 0,$$

откуда $x = \frac{5}{9}$. Тогда

$$\overrightarrow{MH} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{9}\left(-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right) = \frac{2}{9}\vec{a} - \frac{2}{9}\vec{b} + \frac{5}{18}\vec{c} = \frac{1}{18}\left(4\vec{a} - 4\vec{b} + 5\vec{c}\right).$$

Отсюда

$$\left|\overrightarrow{MP}\right| = \frac{1}{18}\sqrt{\left(4\vec{a} - 4\vec{b} + 5\vec{c}\right)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{16\cdot4 + 16\cdot16 + 25\cdot9 - 32\cdot4 + 40\cdot3 - 40\cdot6}}{18} = \sqrt{\frac{297}{324}} = \sqrt{\frac{11}{12}}.$$

Ответ: $\sqrt{\frac{11}{12}}$.

Задачи для самостоятельного решения

3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ высота равна 1, сторона основания равна 2. Найдите расстояние от точки A_1 до прямой BC_1.

4. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны, найдите расстояние от точки A до прямой CB_1.

5. В правильной шестиугольной пирамиде $MABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки F до прямой BT, где T — середина ребра MC.

Расстояние от точки до плоскости

Как известно из предыдущей лекции, решение данной задачи позволяет решать задачи о нахождении расстояния между параллельными плоскостями, между параллельными прямой и плоскостью, между скрещивающимися прямыми. Поэтому необходимо подробнее остановиться на отработке учащимися навыков решения задач о нахождении расстояния от точки до плоскости.

Координатный метод

Пусть дана точка $M(x_0; y_0; z_0)$ и плоскость α, заданная уравнением $ax + by + cz + d = 0$ в прямоугольной декартовой системе координат.

Расстояние от точки M до плоскости α можно вычислить по формуле

$$\rho(M;\alpha) = \frac{|\,ax_0 + by_0 + cz_0 + d\,|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \qquad (4)$$

В данном разделе система подготовительных упражнений должна быть направлена на применение формулы (4) для данных точки и плоскости.

1. Найдите расстояние от точки $M(-3; 1; 2)$ до плоскости, заданной уравнением $3x + 4y - 12z + 2 = 0$.

2. Вычислите расстояние от начала координат до плоскости, заданной уравнением $2x + 3y - 6z + 14 = 0$.

3. Вычислите расстояние между параллельными плоскостями, заданными уравнениями $3x + 2y + 4z + 11 = 0$ и $9x + 6y + 12z - 5 = 0$.

Указание. Для этого достаточно выбрать точку первой плоскости, например $M\left(0; 0; -\frac{11}{4}\right)$.

4. Докажите, что в общем случае расстояние между параллельными плоскостями α и β:

$$ax + by + cz + d_1 = 0 \text{ и } ax + by + cz + d_2 = 0,$$

вычисляется по формуле

$$\rho(\alpha;\beta) = \frac{|\,d_1 - d_2\,|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Указание. Используйте алгоритм решения задачи 3.

Следующая система упражнений направлена на составление уравнения плоскости, проходящей через три точки. Приведем один из способов получения уравнения плоскости, если известны координаты трех ее точек: $M(x_M; y_M; z_M)$, $N(x_N; y_N; z_N)$, $P(x_P; y_P; z_P)$, не лежащих на одной прямой. Для этого нужно взять в общем виде уравнение плоскости $ax + by + cz + d = 0$, в котором a, b, c, d — неизвестные числа. Подставив в него координаты точек M, N, P, получим систему уравнений

$$\begin{cases} ax_M + by_M + cz_M + d = 0, \\ ax_N + by_N + cz_N + d = 0, \\ ax_P + by_P + cz_P + d = 0. \end{cases}$$

Решив ее, найдем $a = pd$, $b = qd$, $c = rd$ (если окажется, что $d = 0$, то $a = pc$, $b = qc$; если $d = c = 0$, то $a = pb$). Подставив в исходное уравнение и сократив на $d \neq 0$, получим уравнение

$$px + qy + rz + 1 = 0.$$

Иногда удобно использовать уравнение плоскости в отрезках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

если известны координаты точек $(a; 0; 0)$, $(0; b; 0)$, $(0; 0; c)$ пересечения данной плоскости с координатными осями Ox, Oy, Oz соответственно.

Пример 4. Напишите уравнение плоскости, проходящей через три точки, $M(0; 1; 0)$, $N(1; 0; 0)$, $P(1; 1; 1)$.

Решение. Записав в общем виде уравнение плоскости $ax + by + cz + d = 0$ и подставив в него координаты этих точек, получим:

$$\begin{cases} a \cdot 0 + b \cdot 1 + c \cdot 0 + d = 0 \text{ (для точки } M), \\ a \cdot 1 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d = 0 \text{ (для точки } N), \\ a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 1 + d = 0 \text{ (для точки } P). \end{cases}$$

Отсюда $b = -d$, $a = -d$ и $c = d$. Уравнение плоскости MNP имеет вид $-dx - dy + dz + d = 0$, или $x + y - z - 1 = 0$ после сокращения на $-d \neq 0$.

Пример 5. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найти расстояние от точки A до плоскости DEF_1.

Решение. Введем систему координат, как показано на рисунке 6.5, и найдем координаты точек:

$$A\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right),\ D\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right),\ E\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right), F_1(1; 0; 1).$$

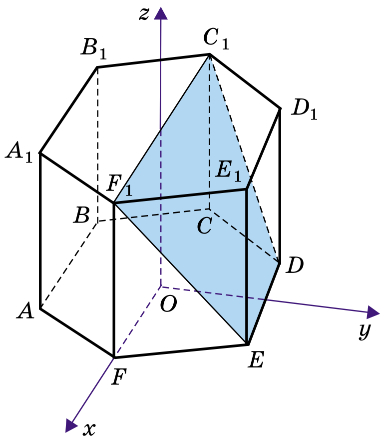

Рис. 6.5

Пусть $ax + by + cz + d = 0$ — уравнение плоскости DEF_1. Подставляя в него координаты точек D, E, F_1, получим:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b + d = 0 \text{ (для точки } D), \\ \frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b + d = 0 \text{ (для точки } E), \\ a + c + d = 0 \text{ (для точки } F_1). \end{cases}$$

Отсюда имеем:

$$a = 0,\ b = -\frac{2\sqrt{3}}{3}d,\ c = -d.$$

Уравнение плоскости DEF_1 примет вид $2\sqrt{3}y + 3z - 3 = 0$. Вычислим расстояние от точки A до плоскости DEF_1 по формуле (4):

$$\rho\left(A;\ DEF_1\right) = \frac{\left| 0 \cdot \frac{1}{2} - 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 \cdot 0 - 3 \right|}{\sqrt{0^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 + 3^2}} = \frac{6}{\sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{21}}{7}.$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{21}}{7}$.

Векторный метод

Пусть дана плоскость α, содержащая два неколлинеарных вектора $\vec{q}_1$ и $\vec{q}_2$, точка A принадлежит плоскости α, точка M вне плоскости α, $\overrightarrow{MA} = \vec{m}$ (рис. 6.6).

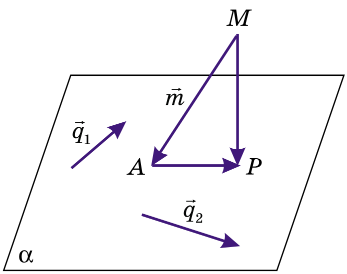

Рис. 6.6

Чтобы найти расстояние от точки M до плоскости α, то есть длину перпендикуляра MP ($P \in \alpha$), представим вектор $\overrightarrow{MP}$ в виде

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AP} = \vec{m} + x \cdot \vec{q}_1 + y \cdot \vec{q}_2.$$

Неизвестные коэффициенты x, y находятся из условия перпендикулярности вектора $\overrightarrow{MP}$ векторам $\vec{q}_1$ и $\vec{q}_2$:

$$\begin{cases} \overrightarrow{MP}\cdot\vec{q}_1=0, \\ \overrightarrow{MP}\cdot\vec{q}_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\vec{m}+x\cdot\vec{q}_1+y\cdot\vec{q}_2)\cdot\vec{q}_1=0, \\ (\vec{m}+x\cdot\vec{q}_1+y\cdot\vec{q}_2)\cdot\vec{q}_2=0. \end{cases}$$

Искомое расстояние выражается следующим образом:

$$\left|\ \overrightarrow{MP}\ \right| = \sqrt{(\vec{m}+x\cdot\vec{q}_1+y\cdot\vec{q}_2)^2}.$$

Пример 6. В кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки A_1 до плоскости BDC_1.

Решение. Пусть $\overrightarrow{AD}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$ и $\left|\ \vec{a}\ \right|=\left|\ \vec{b}\ \right|=\left|\ \vec{c}\ \right|=1$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}=0$ (рис. 6.7).

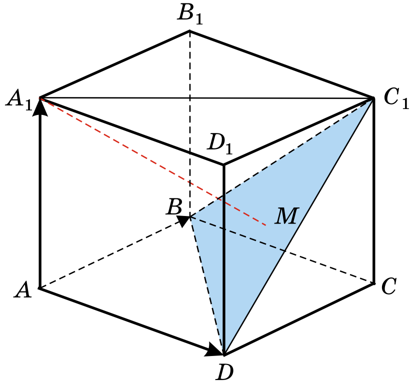

Рис. 6.7

Выразим некоторые векторы через векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$: $\overrightarrow{DB}=\vec{b}-\vec{a}$, $\overrightarrow{DC_1}=\vec{b}+\vec{c}$, $\overrightarrow{C_1A_1}=-\vec{a}-\vec{b}$.

Пусть $MA_1 \perp BDC_1$, где $M \in BDC_1$. Вектор $\overrightarrow{C_1M}=$ $=x\cdot\overrightarrow{DB}+y\cdot\overrightarrow{DC_1}$, поэтому

$$\overrightarrow{MA_1}=\overrightarrow{C_1A_1}-\overrightarrow{C_1M}=\overrightarrow{C_1A_1}-\left(x\cdot\overrightarrow{DB}+y\cdot\overrightarrow{DC_1}\right).$$

Далее имеем:

$$\begin{cases} \overrightarrow{MA_1}\perp\overrightarrow{DB}, \\ \overrightarrow{MA_1}\perp\overrightarrow{DC_1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MA_1}\cdot\overrightarrow{DB}=0, \\ \overrightarrow{MA_1}\cdot\overrightarrow{DC_1}=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{C_1A_1}\cdot\overrightarrow{DB}-\left(x\cdot\overrightarrow{DB}^2+y\cdot\overrightarrow{DC_1}\cdot\overrightarrow{DB}\right)=0, \\ \overrightarrow{C_1A_1}\cdot\overrightarrow{DC_1}-\left(x\cdot\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC_1}+y\cdot\overrightarrow{DC_1}^2\right)=0. \end{cases}$$

Так как

$$\overrightarrow{C_1A_1}\cdot\overrightarrow{DB}=\left(-\vec{a}-\vec{b}\right)\left(\vec{b}-\vec{a}\right)=\vec{a}^2-\vec{b}^2=0,$$

$$\overrightarrow{DC_1}\cdot\overrightarrow{DB}=\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\left(\vec{b}-\vec{a}\right)=\vec{b}^2=1,$$

$$\overrightarrow{C_1A_1}\cdot\overrightarrow{DC_1}=\left(-\vec{a}-\vec{b}\right)\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=-\vec{b}^2=-1,$$

$$\overrightarrow{DB}^2=\left(\vec{b}-\vec{a}\right)^2=\vec{b}^2+\vec{a}^2=2,$$

$$\overrightarrow{DC_1}^2=\left(\vec{b}+\vec{c}\right)^2=\vec{b}^2+\vec{c}^2=2,$$

то имеем:

$$\begin{cases} 0-(x\cdot 2+y\cdot 1)=0, \\ -1-(x\cdot 1+y\cdot 2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=0, \\ x+2y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{3}, \\ y=-\dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Отсюда получаем:

$$\overrightarrow{MA_1}=-\vec{a}-\vec{b}-\frac{1}{3}\left(\vec{b}-\vec{a}\right)+\frac{2}{3}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=-\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}.$$

Вектор $\overrightarrow{MA_1}$ в данном базисе (прямоугольная декартова система координат) имеет координаты $\left\{-\dfrac{2}{3};-\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3}\right\}$, поэтому длину этого вектора можно найти по формуле $\left|\overrightarrow{MA_1}\right|=\sqrt{p^2+q^2+r^2}$, то есть

$$\left|\overrightarrow{MA_1}\right|=\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Задачи для самостоятельного решения

6. В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки A до плоскости BDA_1.

7. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости BFE_1.

8. Известно, что в треугольной пирамиде все плоские углы при вершине — прямые. Найдите длину ее высоты, если длины ее боковых ребер равны a, b и c.

Расстояние между скрещивающимися прямыми

Задачу данного вида можно свести к задаче о вычислении расстояния от точки до плоскости, поэтому можно применить формулу расстояния от точки до плоскости, применяя координатный метод.

Координатный метод

Пример 7. В единичном кубе $A...D_1$ найти расстояние между прямыми AB_1 и BD.

Решение. Так как $DC_1 \parallel AB_1$, то $BDC_1 \parallel AB_1$. Поэтому расстояние

$$\rho(AB_1;\ BD) = \rho(AB_1;\ BDC_1) = \rho(A;\ BDC_1).$$

Введем систему координат, как показано на рисунке 6.8, и определим координаты точек: $A(0;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 1;\ 0)$, $D(1;\ 0;\ 0)$, $C_1(1;\ 1;\ 1;)$.

Плоскость, проходящая через точки B, D, C_1, имеет вид $x + y - z - 1 = 0$ (см. пример 4).

Расстояние между прямыми AB_1 и BD равно расстоянию от точки A до плоскости BDC_1:

$$\rho\left(A;\, BDC_1\right) = \frac{|\,1\cdot 0 + 1\cdot 0 - 1\cdot 0 - 1\,|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

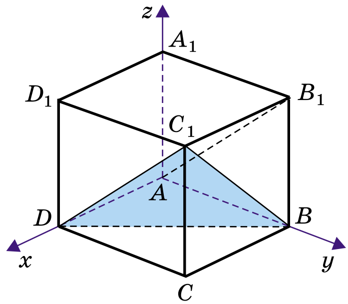

Рис. 6.8

Векторный метод

Рассмотрим векторный подход к решению задач данного вида. Пусть даны прямая l_1 с направляющим вектором $\vec{q}_1$ и l_2 с направляющим вектором $\vec{q}_2$. Точки A_1 и A_2 лежат на прямых l_1 и l_2 соответственно, $\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{m}$ (рис. 6.9).

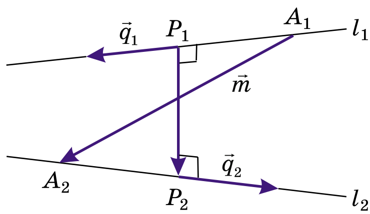

Рис. 6.9

Чтобы определить расстояние между прямыми l_1 и l_2, то есть длину их общего перпендикуляра P_1P_2 ($P_1 \in l_1$ и $P_2 \in l_2$), представим вектор $\overrightarrow{P_1P_2}$ в следующем виде:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_1A_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2P_2} = x\cdot\vec{q}_1 + \vec{m} + y\cdot\vec{q}_2.$$

Неизвестные коэффициенты x, y находятся из условия перпендикулярности вектора $\overrightarrow{P_1P_2}$ векторам $\vec{q}_1$ и $\vec{q}_2$:

$$\begin{cases} \overrightarrow{P_1P_2}\cdot\vec{q}_1 = 0, \\ \overrightarrow{P_1P_2}\cdot\vec{q}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x\cdot\vec{q}_1 + \vec{m} + y\cdot\vec{q}_2\right)\cdot\vec{q}_1 = 0, \\ \left(x\cdot\vec{q}_1 + \vec{m} + y\cdot\vec{q}_2\right)\cdot\vec{q}_2 = 0. \end{cases}$$

Искомое расстояние выражается следующим образом:

$$\left|\,\overrightarrow{P_1P_2}\,\right| = \sqrt{\left(x\cdot\vec{q}_1 + \vec{m} + y\cdot\vec{q}_2\right)^2}.$$

В большинстве случаев при решении подобных задач удобнее ввести декартову систему координат, выразить векторы $\vec{q}_1$, $\vec{q}_2$, $\vec{m}$ через ее базисные векторы и провести все вычисления в координатной форме.

Пример 8. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ с основанием $ABCD$ высота и сторона основания равны 4, точки E

и F — середины ребер AM и DC соответственно. Найти расстояние между прямыми BE и FM.

Решение. Введем декартову систему координат следующим образом. Пусть начало координат O находится в центре основания, ось x проходит через точку O параллельно ребру AD, ось y проходит через точку O параллельно ребру AB, ось z проходит через точку O перпендикулярно плоскости основания (рис. 6.10). Тогда вершины пирамиды имеют координаты:

$A(-2; -2; 0)$, $B(-2; 2; 0)$, $C(2; 2; 0)$, $D(2; -2; 0)$, $M(0; 0; 4)$.

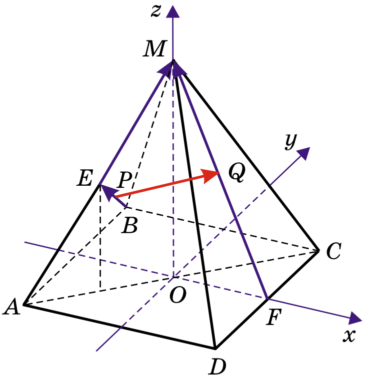

Рис. 6.10

В этой системе координат $E(-1; -1; 2)$ и $F(2; 0; 0)$. Введем векторы

$$\overrightarrow{BE} = \vec{q}_1 = \{1; -3; 2\},$$
$$\overrightarrow{FM} = \vec{q}_2 = \{-2; 0; 4\} \text{ и}$$
$$\overrightarrow{EM} = \vec{m} = \{1; 1; 2\}.$$

Тогда

$$\vec{q}_1^{\,2} = 1\cdot 1 + (-3)\cdot(-3) + 2\cdot 2 = 14,$$
$$\vec{q}_2^{\,2} = (-2)\cdot(-2) + 0\cdot 0 + 4\cdot 4 = 20,$$
$$\vec{m}\cdot\vec{m} = 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 2\cdot 2 = 6,$$
$$\vec{q}_1\cdot\vec{q}_2 = 1\cdot(-2) + (-3)\cdot 0 + 2\cdot 4 = 6,$$
$$\vec{q}_1\cdot\vec{m} = 1\cdot 1 + (-3)\cdot 1 + 2\cdot 2 = 2,$$
$$\vec{q}_2\cdot\vec{m} = (-2)\cdot 1 + 0\cdot 1 + 4\cdot 2 = 6.$$

Пусть отрезок PQ есть общий перпендикуляр скрещивающихся прямых BE и FM. Представим вектор $\overrightarrow{PQ}$ в виде:

$$\overrightarrow{PQ} = x\cdot\vec{q}_1 + \vec{m} + y\cdot\vec{q}_2.$$

Из условия перпендикулярности вектора $\overrightarrow{PQ}$ векторам $\vec{q}_1$ и $\vec{q}_2$ получаем:

$$\begin{cases}(x\cdot\vec{q}_1 + \vec{m} + y\cdot\vec{q}_2)\cdot\vec{q}_1 = 0,\\ (x\cdot\vec{q}_1 + \vec{m} + y\cdot\vec{q}_2)\cdot\vec{q}_2 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\cdot\vec{q}_1^{\,2} + \vec{m}\vec{q}_1 + y\cdot\vec{q}_1\vec{q}_2 = 0,\\ x\cdot\vec{q}_1\vec{q}_2 + \vec{m}\vec{q}_2 + y\cdot\vec{q}_2^{\,2} = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}14x + 2 + 6y = 0,\\ 6x + 6 + 20y = 0.\end{cases}$$

Отсюда $x = -\dfrac{1}{61}$, $y = -\dfrac{18}{61}$. Тогда

$$\overrightarrow{PQ} = -\frac{1}{61}\vec{q}_1 + \vec{m} - \frac{18}{61}\vec{q}_2 = -\frac{1}{61}\{1; -3; 2\} + \{1; 1; 2\} - \frac{18}{61}\{-2; 0; 4\} =$$
$$= \frac{1}{61}\{96; 64; 48\},$$
$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \frac{1}{61}\sqrt{96^2 + 64^2 + 48^2} = \frac{16\sqrt{61}}{61}.$$

Ответ: $\dfrac{16\sqrt{61}}{61}$.

Задачи для самостоятельного решения

9. В единичном кубе $A...D_1$ найти расстояние между диагональю куба BD_1 и диагональю грани AB_1.

10. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AB_1 и BC_1.

11. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми MA и BC.

Угол между двумя прямыми

При нахождении угла φ между прямыми m и l используют формулу

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{p}\cdot\vec{q}|}{|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|}, \qquad (5)$$

или в прямоугольной декартовой системе координат:

$$\cos\varphi = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}, \qquad (6)$$

где $\vec{p}=\{x_1;\, y_1;\, z_1\}$ и $\vec{q}=\{x_2;\, y_2;\, z_2\}$ — направляющие векторы прямых m и l; в частности, для того, чтобы прямые m и l были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы

$$\vec{p}\cdot\vec{q}=0, \text{ или } x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$$

Векторно-координатный метод

Пример 9. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB_1 и BF_1.

Решение. Введем прямоугольную систему координат, как указано на рисунке 6.11. Тогда

$$A\left(-\frac{1}{2};\, -\frac{\sqrt{3}}{2};\, 0\right),\quad B\left(\frac{1}{2};\, -\frac{\sqrt{3}}{2};\, 0\right),$$

$$B_1\left(\frac{1}{2};\, -\frac{\sqrt{3}}{2};\, 1\right),\quad F_1(-1;\, 0;\, 1),$$

$$\overrightarrow{AB_1}=\{1;\, 0;\, 1\},\quad \overrightarrow{BF_1}=\left\{-\frac{3}{2};\, \frac{\sqrt{3}}{2};\, 1\right\}.$$

Отсюда

$$\cos\varphi = \frac{|\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{BF_1}|}{|\overrightarrow{AB_1}|\cdot|\overrightarrow{BF_1}|} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2}\cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{8},$$

$\varphi = \arccos\dfrac{\sqrt{2}}{8}$, где φ — искомый угол.

Ответ: $\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{8}$.

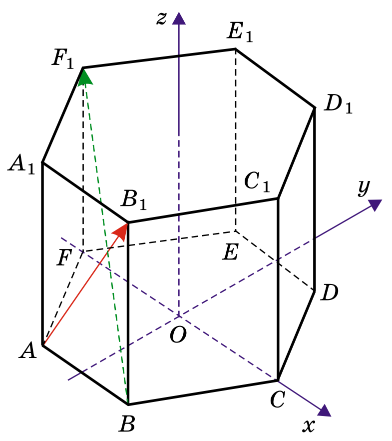

Рис. 6.11

Векторный метод

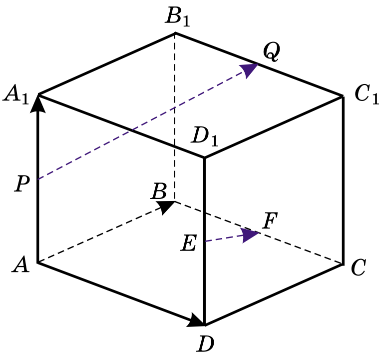

Рис. 6.12

Пример 10. В кубе $A...D_1$ найти угол между прямыми EF и PQ, где E, F, P, Q — середины ребер DD_1, BC, AA_1 и B_1C_1 соответственно.

Решение. Пусть $\overrightarrow{AD}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$, где $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}=0$ (рис. 6.12).

Тогда

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF}=-\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a},$$

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_1Q}=\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a},$$

откуда находим

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{EF}=\left(\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a}\right)\left(-\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)=\vec{b}^2-\frac{1}{4}\vec{c}^2-\frac{1}{4}\vec{a}^2=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

Так как

$\overrightarrow{PQ}\left\{\frac{1}{2};1;\frac{1}{2}\right\}$ и $\overrightarrow{EF}\left\{-\frac{1}{2};1;-\frac{1}{2}\right\}$ в ортонормированном базисе, то

$$|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{\frac{1}{4}+1+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{3}{2}},\quad |\overrightarrow{EF}|=\sqrt{\frac{1}{4}+1+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{3}{2}},$$

$$\cos\varphi=\frac{|\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{EF}|}{|\overrightarrow{PQ}|\cdot|\overrightarrow{EF}|}=\frac{1}{2}:\frac{3}{2}=\frac{1}{3}.$$

Отсюда $\varphi=\arccos\frac{1}{3}$, где φ — искомый угол.

Ответ: $\arccos\frac{1}{3}$.

Задачи для самостоятельного решения

12. В единичном кубе $A...D_1$ найти угол между прямыми AE и DF, где E и F — точки, расположенные на ребрах CD и C_1D_1 так, что $DE=\frac{1}{3}DC$, $C_1F=\frac{1}{3}C_1D_1$.

13. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, ребра которой равны l, найдите угол между прямыми AC_1 и B_1C.

14. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны, точки E, F — середины ребер соответственно SB и SC. Найдите косинус угла между прямыми AE и BF.

Угол между прямой и плоскостью

Угол между прямой l и плоскостью α можно вычислить по формуле
$$\sin\varphi=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{p}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{p}|},\qquad (7)$$
или в прямоугольной декартовой системе координат:
$$\sin\varphi=\frac{|x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}},\qquad (8)$$
где $\vec{n}=\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$ — вектор нормали плоскости α, $\vec{p}=\{x_2;\ y_2;\ z_2\}$ — направляющий вектор прямой l; в частности, прямая l и плоскость α параллельны тогда и только тогда, когда $x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$.

В задачах на вычисление угла между прямой и плоскостью или угла между пересекающимися плоскостями в общем случае уравнение плоскости находить не требуется. Координаты вектора нормали можно вывести, если известны координаты трех точек плоскости: M, N, P, не лежащих на одной прямой. Для этого находим координаты двух векторов плоскости:
$$\vec{a}=\overrightarrow{MN}=\{a_1;\ a_2;\ a_3\}\ \text{и}\ \vec{b}=\overrightarrow{MP}=\{b_1;\ b_2;\ b_3\}.$$

Предположим, что вектор с координатами $\vec{n}=\{p;\ q;\ r\}$ (здесь p, q, r — неизвестные числа, которые нужно найти) перпендикулярен любому вектору плоскости α, в том числе векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Его координаты ищутся из условий равенства нулю скалярных произведений $\vec{n}$ с векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ из следующей системы уравнений:
$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\vec{a}=0,\\ \vec{n}\cdot\vec{b}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1p+q_2q+a_3r=0,\\ b_1p+b_2q+b_3r=0.\end{cases}$$

Эта система имеет бесконечное множество решений, так как векторов, перпендикулярных плоскости α, бесконечно много. Выразив, например, из системы координаты p и q через r, выберем ненулевой вектор $\vec{n}=\{p(r);\ q(r);\ r\}$, взяв в качестве r какое-нибудь число (обычно берут такое число, чтобы в координатах не было дробей или радикалов).

Векторно-координатный метод

Пример 11. В единичном кубе $A\dots D_1$ найти угол между прямой AD_1 и плоскостью α, проходящей через точки A_1, E и F, где точка E — середина ребра C_1D_1, а точка F лежит на ребре DD_1 так, что $D_1F=2DF$.

Решение. Введем прямоугольную систему координат, как указано на рисунке 6.13. Тогда

$$A(0;\,0;\,0),\ A_1(0;\,0;\,1),\ D_1(1;\,0;\,1),\ E\left(1;\,\frac{1}{2};\,1\right),\ F\left(1;\,0;\,\frac{1}{3}\right),$$

$$\overrightarrow{AD_1}=\{1;\,0;\,1\},\ \overrightarrow{A_1E}=\left\{1;\,\frac{1}{2};\,0\right\},\ \overrightarrow{A_1F}=\left\{1;\,0;\,-\frac{2}{3}\right\}.$$

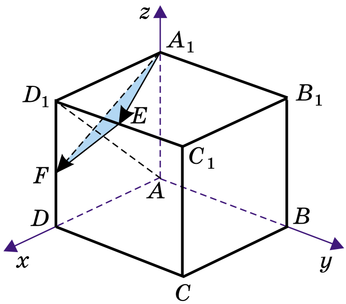

Рис. 6.13

Пусть $\vec{n}=\{x;\,y;\,z\}$ — вектор, перпендикулярный плоскости α.

Найдем его координаты из условий перпендикулярности этого вектора векторам $\overrightarrow{A_1E}$ и $\overrightarrow{A_1F}$, то есть из условий

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1E}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1F}=0\end{cases}\ \text{или}$$

$$\begin{cases}x+\dfrac{y}{2}=0,\\ x-\dfrac{2}{3}z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-2x,\\ z=1,5x.\end{cases}$$

Пусть $x=2$, тогда $y=-4$, $z=3$ и $\vec{n}=\{2;\,-4;\,3\}$, $\left|\vec{n}\right|=\sqrt{29}$.

Так как $\left|\overrightarrow{AD_1}\right|=\sqrt{2}$ и $\overrightarrow{AD_1}\cdot\vec{n}=1\cdot2+0\cdot(-4)+1\cdot3=5$, то

$$\sin\varphi=\frac{\left|\overrightarrow{AD_1}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{AD_1}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\frac{5}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{29}}=\frac{5}{\sqrt{58}}.$$

Отсюда $\varphi=\arcsin\dfrac{5}{\sqrt{58}}$.

Ответ: $\arcsin\dfrac{5}{\sqrt{58}}$.

Векторный метод

Пример 12. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны, найти угол между прямой DE, где E — середина апофемы SF грани ASB, и плоскостью ASC.

Решение. Так как прямая OD перпендикулярна плоскости ASC, то вектор $\overrightarrow{OD}$ является вектором нормали плоскости ASC.

Пусть $\overrightarrow{AD}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AS}=\vec{c}$, где $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|=1$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}=1\cdot1\cdot\cos 60^\circ=0,5$ (рис. 6.14). Тогда

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{a}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right),$$

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FE}=-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\left(\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{b}\right)=-\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c},$$

$$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{OD}=\left(-\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)\left(\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}\right)=-\frac{1}{2}\vec{a}^2-\frac{1}{8}\vec{b}^2+\frac{1}{4}\vec{a}\cdot\vec{c}-\frac{1}{4}\vec{b}\cdot\vec{c}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=-\frac{5}{8},$$

$$\left|\overrightarrow{DE}\right|=\sqrt{\left(-\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\vec{a}^2+\frac{1}{16}\vec{b}^2+\frac{1}{4}\vec{c}^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\vec{a}\cdot\vec{c}+2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}}=$$

$$=\sqrt{1+\frac{1}{16}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}}=\sqrt{\frac{15}{16}},$$

$$\left|\overrightarrow{OD}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

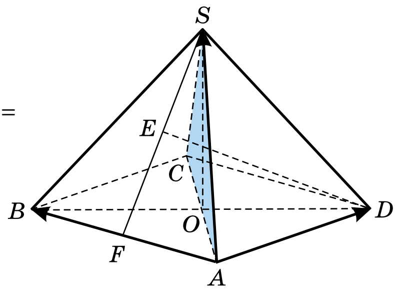

Рис. 6.14

Подставляя полученные значения в формулу $\sin\varphi=\dfrac{\left|\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{OD}\right|}{\left|\overrightarrow{DE}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OD}\right|}$, имеем:

$$\sin\varphi=\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{\sqrt{15}}\cdot\sqrt{2}=\frac{5}{\sqrt{30}}=\frac{\sqrt{30}}{6}.$$

Отсюда $\varphi=\arcsin\dfrac{\sqrt{30}}{6}$, где φ — искомый угол.

Ответ: $\arcsin\dfrac{\sqrt{30}}{6}$.

Задачи для самостоятельного решения

15. В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой A_1B_1 и плоскостью BDC_1.

16. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью ACE_1.

17. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$, все ребра которой равны, точка E — середина ребра MC. Найдите синус угла между прямой DE и плоскостью AMB.

18. В правильной шестиугольной пирамиде $MABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 4, найдите синус угла между прямой BC и плоскостью EMD.

Угол между плоскостями

Решение данной задачи сводят к задаче о нахождении угла между векторами нормалей данных плоскостей или угла между направляющими векторами скрещивающихся прямых a и b, лежащих в рассматриваемых плоскостях и перпендикулярных к их линии пересечения.

Использование векторов нормалей пересекающихся плоскостей

Задачу о нахождении угла между плоскостями α и β, заданными в прямоугольной декартовой системе координат уравнениями $p_1x + q_1y + r_1z + d_1 = 0$ и $p_2x + q_2y + r_2z + d_2 = 0$ соответственно, удобнее свести к задаче о нахождении угла между векторами их нормалей $\vec{n}_\alpha = \{p_1;\, q_1;\, r_1\}$ и $\vec{n}_\beta = \{p_2;\, q_2;\, r_2\}$, используя формулу

$$\cos\angle(\alpha;\beta) = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha|\cdot|\vec{n}_\beta|} = \frac{|p_1p_2 + q_1q_2 + r_1r_2|}{\sqrt{p_1^2+q_1^2+r_1^2}\cdot\sqrt{p_2^2+q_2^2+r_2^2}}. \qquad (9)$$

Прежде чем перейти к содержательным задачам, с учащимися необходимо рассмотреть простейшие задачи следующего вида: найти угол между плоскостями, заданными уравнениями

$$2x + 3y + 6z - 5 = 0 \text{ и } 4x + 4y + 2z - 7 = 0.$$

Отметим, что не всегда составляют уравнения плоскостей для определения векторов нормалей к ним. Иногда исходя из свойств многогранника легко найти вектор нормали данной плоскости. Затем остается выразить этот вектор через базисные векторы или найти его координаты относительно введенной декартовой системы координат.

В общем случае вектор нормали находят из других соображений (см. начало раздела «Угол между прямой и плоскостью»).

Пример 13. В кубе $A...D_1$ найти угол между плоскостями AB_1C и BC_1D.

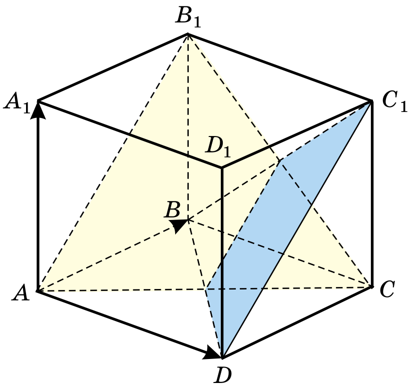

Рис. 6.15

Решение. Пусть

$$\overrightarrow{AD} = \vec{a},\ \ \overrightarrow{AB} = \vec{b},\ \ \overrightarrow{AA_1} = \vec{c},$$

где

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1,$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{c} = \vec{b}\cdot\vec{c} = 0$$

(рис. 6.15). Векторы $\overrightarrow{BD_1}$ и $\overrightarrow{CA_1}$ являются векторами нормали плоскостей AB_1C и BC_1D соответственно. Тогда

$$\overrightarrow{BD_1} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c};\ \overrightarrow{CA_1} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c};$$

$$\overrightarrow{BD_1}\cdot\overrightarrow{CA_1} = (\vec{a} - \vec{b} + \vec{c})(-\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) = -\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 = 1;$$

$$\overrightarrow{BD_1} = \{1;\ -1;\ 1\},\ \left|\overrightarrow{BD_1}\right| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3};$$

$$\overrightarrow{CA_1} = \{-1;\ -1;\ 1\},\ \left|\overrightarrow{CA_1}\right| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3};$$

$$\cos\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{BD_1}\cdot\overrightarrow{CA_1}\right|}{\left|\overrightarrow{BD_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CA_1}\right|} = \frac{1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{3}.$$

Откуда $\varphi = \arccos\frac{1}{3}$, где φ — искомый угол.

Ответ: $\arccos\frac{1}{3}$.

Пример 14. В правильной пирамиде $MABCD$ (M — вершина) высота и сторона основания равны 4. Точка F — середина ребра MC. Плоскость α проходит через середину ребра AM перпендикулярно прямой BF. Найти угол между плоскостью α и плоскостью основания.

Решение. Так как прямая $BF \perp \alpha$, то ее направляющий вектор $\overrightarrow{BF}$ является вектором нормали плоскости α. Пусть точка O — основание высоты MO, следовательно, вектор $\overrightarrow{OM}$ является вектором нормали плоскости ABC.

Введем систему координат следующим образом: начало координат находится в точке O, ось x проходит через точку O параллельно ребру AD, ось y проходит через точку O параллельно ребру AB, ось z проходит через точку O перпендикулярно плоскости основания (рис. 6.16).

Найдем координаты точек:

$O(0;\ 0;\ 0)$, $B(-2;\ 2;\ 0)$, $C(2;\ 2;\ 0)$, $M(0;\ 0;\ 4)$, $F(1;\ 1;\ 2)$, $D(2;\ -2;\ 0)$.

Тогда

$$\overrightarrow{BF} = \{3;\ -1;\ 2\},$$

$$\left|\overrightarrow{BF}\right| = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14};$$

$$\overrightarrow{OM} = \{0;\ 0;\ 4\},\ \left|\overrightarrow{OM}\right| = 4.$$

Получаем:

$$\cos\angle(\alpha;\ ABC) = \frac{\left|\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{OM}\right|}{\left|\overrightarrow{BF}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OM}\right|} =$$

$$= \frac{\left|3\cdot 0+(-1)\cdot 0+2\cdot 4\right|}{\sqrt{14}\cdot 4} = \frac{2}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{7}.$$

Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{14}}{7}$.

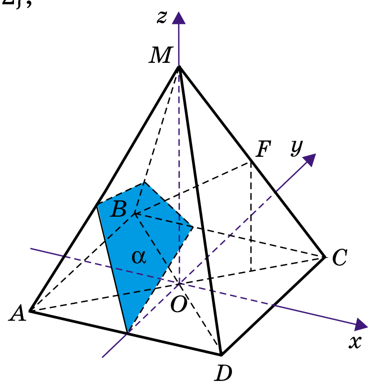

Рис. 6.16

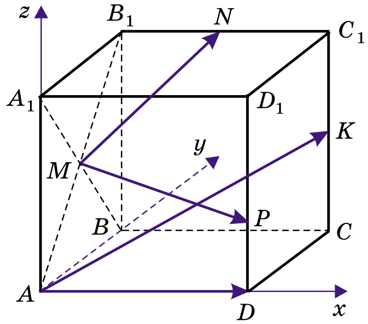

Рис. 6.17

Пример 15. Дан куб $A...D_1$. Найдите угол между плоскостями MNP и AKD, где точка M — центр грани AA_1B_1B, N — середина ребра B_1C_1, точка K — середина ребра CC_1, точка P делит ребро DD_1 в отношении $DP : PD_1 = 1 : 2$.

Решение. Введем систему координат: точка A — начало координат, оси Ax, Ay и Az направим вдоль ребер AD, AB и AA_1 соответственно (рис. 6.17). Пусть ребро куба равно 1. Найдем координаты точек:

$A(0; 0; 0)$, $D(1; 0; 0)$, $K(1; 1; 0{,}5)$, $M\left(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $N\left(\frac{1}{2}; 1; 1\right)$, $P\left(1; 0; \frac{1}{3}\right)$.

Найдем координаты векторов:

$$\overrightarrow{MN} = \left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}, \quad \overrightarrow{MP} = \left\{1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{6}\right\}, \quad \overrightarrow{AD} = \{1;\ 0;\ 0\}, \quad \overrightarrow{AK} = \{1;\ 1;\ 0{,}5\}.$$

Теперь найдем координаты векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$, перпендикулярных плоскостям MNP и AKD соответственно.

Начнем с вектора $\vec{n}_1 = \{p_1;\ q_1;\ r_1\}$. Его координаты найдем из условий равенства нулю скалярных произведений $\vec{n}_1$ с векторами $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{MP}$. Получаем систему:

$$\begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{MN} = 0, \\ \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{MP} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}5p_1 + 0{,}5q_1 + 0{,}5r_1 = 0, \\ p_1 - 0{,}5q_1 - \frac{1}{6}r_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow p_1 = -\frac{2}{9}r_1, \quad q_1 = -\frac{7}{9}r_1.$$

Эта система имеет бесконечное множество решений, так как векторов, перпендикулярных плоскости MNP, бесконечно много.

Выберем из данного множества ненулевой вектор $\vec{n}_1$, положив $r_1 = 9$. Тогда $\vec{n}_1 = \{-2;\ -7;\ 9\}$.

Найдем теперь координаты вектора $\vec{n}_2 = \{p_2;\ q_2;\ r_2\}$, перпендикулярного плоскости AKD. Его координаты найдем из условий равенства нулю скалярных произведений $\vec{n}_2$ с векторами $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AK}$. Получаем систему:

$$\begin{cases} \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{AD} = 0, \\ \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{AK} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_2 + 0 \cdot q_2 + 0 \cdot r_2 = 0, \\ p_2 + q_2 + 0{,}5r_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow p_2 = 0,\ q_2 = -0{,}5r_2.$$

Возьмем $r_2 = 2$. Тогда $\vec{n}_2 = \{0;\ -1;\ 2\}$.

Для нахождения угла между плоскостями MNP и AKD воспользуемся формулой (9):

$$\cos\angle(MNP;\ AKD)=\frac{\left|-2\cdot 0+(-7)(-1)+9\cdot 2\right|}{\sqrt{4+49+81}\cdot\sqrt{0+1+4}}=\sqrt{\frac{125}{134}}.$$

Отсюда $\angle(MNP;\ AKD)=\arccos\sqrt{\frac{125}{134}}$.

Ответ: $\arccos\sqrt{\frac{125}{134}}$.

Использование направляющих векторов скрещивающихся прямых

При вычислении угла между плоскостями линейный угол можно заменить углом между скрещивающимися прямыми a и b, лежащими в рассматриваемых плоскостях и перпендикулярных к их линии пересечения.

Пусть $\vec{p}=\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$ и $\vec{q}=\{x_2;\ y_2;\ z_2\}$ — направляющие векторы прямых a и b, тогда угол φ между этими прямыми находят по формулам (5) или (6).

Пример 16. В основании пирамиды $MABCD$ лежит прямоугольник с отношением сторон $AB : AD = 1 : 2$ (рис. 6.18). Каждое боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 60°. Точка R — середина ребра MC. Найти угол между плоскостями MAC и ADR.

Решение. Если считать, что $AB = a$, тогда $AD = 2a$, и все линейные элементы в пирамиде будут зависеть от одного параметра a. Поэтому, с точностью до подобия, можно принять $AB = 4$. Тогда $AD = 8$, $OM = 2\sqrt{15}$ (покажите самостоятельно), где O — точка пересечения диагоналей прямоугольника, лежащего в основании.

Вершина M пирамиды $MABCD$ проектируется в точку O. Введем систему координат следующим образом: точку O примем за начало координат, оси Ox и Oy направим параллельно сторонам основания, а ось Oz — вдоль высоты пирамиды OM.

Выразим координаты точек:

$A(-4;\ -2;\ 0)$, $B(-4;\ 2;\ 0)$, $C(4;\ 2;\ 0)$,

$D(4;\ -2;\ 0)$, $M\left(0;\ 0;\ 2\sqrt{15}\right)$,

$R\left(2;\ 1;\ \sqrt{15}\right)$.

Отрезок AR является высотой в равностороннем треугольнике

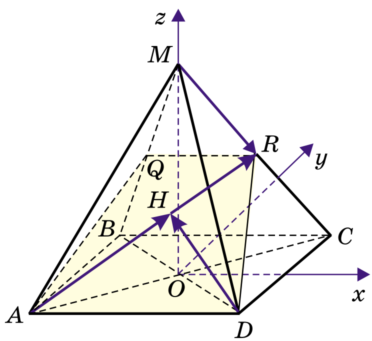

Рис. 6.18

AMC, поэтому прямая MR перпендикулярна ребру AR искомого двугранного угла. Проведем в треугольнике ADR высоту DH. Тогда задача сведется к нахождению угла между прямыми MR и DH.

Найдем координаты векторов:

$$\overrightarrow{MR} = \left\{2;\ 1;\ -\sqrt{15}\right\},\ \overrightarrow{AR} = \left\{6;\ 3;\ \sqrt{15}\right\},\ \overrightarrow{DA} = \{-8;\ 0;\ 0\}.$$

Так как векторы $\overrightarrow{AH}$ и $\overrightarrow{AR}$ коллинеарны, то

$$\overrightarrow{AH} = k \cdot \overrightarrow{AR} = = \left\{6k;\ 3k;\ \sqrt{15}k\right\}.$$

Далее из равенства $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AH}$ получаем

$$\overrightarrow{DH} = \left\{6k-8;\ 3k;\ \sqrt{15}k\right\}.$$

Теперь, используя условие $\overrightarrow{DH} \perp \overrightarrow{AR}$, имеем уравнение

$$6(6k-8) + 9k + 15k = 0.$$

Отсюда $k = 0{,}8$ и

$$\overrightarrow{DH} = \left\{-3{,}2;\ 2{,}4;\ 0{,}8\sqrt{15}\right\}.$$

Так как $\overrightarrow{MR}$ и $\overrightarrow{DH}$ — направляющие векторы прямых MR и DH соответственно, то для нахождения угла между этими прямыми воспользуемся формулой (6):

$$\cos\varphi = \frac{|-6{,}4+2{,}4-12|}{\sqrt{4+1+15}\cdot\sqrt{10{,}24+5{,}76+9{,}6}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Значит, угол между прямыми MR и DH и угол между данными плоскостями равен $\frac{\pi}{4}$.

Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

Задачи для самостоятельного решения

19. В кубе $A...D_1$ найдите угол между плоскостями сечений AB_1C_1D и CB_1A_1D.

20. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра которой равны, найдите косинус угла между плоскостями AB_1C и A_1B_1C.

21. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите угол между плоскостями BA_1D_1 и AA_1E_1.

22. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны, найдите двугранный угол между основанием и боковой гранью.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

1. $\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$. **2.** $\overrightarrow{AC_1}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$. **3.** $\frac{4\sqrt{5}}{5}$. **4.** $\frac{\sqrt{30}}{4}$. **5.** $\frac{\sqrt{42}}{4}$. **6.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **7.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **8.** $\frac{abc}{\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}$. *Указание.* Использовать уравнение плоскости в отрезках. **9.** $\frac{\sqrt{6}}{6}$. **10.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$. **11.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **12.** $\arccos\frac{\sqrt{130}}{65}$. **13.** $\arccos\frac{1}{4}$. **14.** $\frac{1}{6}$. **15.** $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$. **16.** $\arcsin\frac{2\sqrt{26}}{13}$. **17.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **18.** $\sqrt{\frac{5}{7}}$. **19.** $\frac{\pi}{3}$. **20.** $\frac{5}{7}$. **21.** $\arccos\sqrt{\frac{12}{19}}$. **22.** $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Литература

1. *Беликова И.* Задание С2: Решаем методом координат // Математика, 2010, № 20.

2. *Смирнов В.А.* ЕГЭ-2011. Математика. Задача С2. Геометрия. Стереометрия / под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. — М.: МЦНМО, 2011.

3. *Шабунин М.И.* Математика для поступающих в вузы: пособие. — 2-е изд., испр. и доп. — М.: БИНОМ, 2003.

4. *Шестаков С.А.* Векторы на экзаменах. Векторный метод в стереометрии. — М.: МЦНМО, 2005.

Лекция 7
Многовариантные планиметрические задачи: взаимное расположение элементов фигуры

Задачи С4 из экзаменационных работ ЕГЭ-2010 и ЕГЭ-2011 имеют характерную особенность. В отличие от практики единого экзамена прошлых лет и подавляющего большинства задач школьного учебника эти задачи содержат в условии некоторую неопределенность, которая позволяет трактовать условие неоднозначно. В результате удается построить несколько конфигураций, удовлетворяющих условию задачи. Подобные задачи называют *многовариантными*, и перебор вариантов является частью решения задач такого типа.

Рекомендуем ознакомиться со статьями *Д. Аверьянова* «Увидеть неочевидное!» (Математика, 2006, № 3 и № 4), посвященными вопросам организации перебора вариантов при решении многовариантных геометрических задач.

Геометрические задачи на вычисление в большинстве случаев представляют собой задачи на *реализованные* ситуации, то есть в них идет речь о некоторой *заданной* конфигурации и требуется вычислить какой-либо ее элемент. Реализованность ситуации в условии задачи подразумевает лишь существование соответствующей конфигурации, но не предопределяет ее единственность. В таких задачах какие-либо исследования соотношений между числовыми данными, доказывающие существование конфигурации, являются излишними.

В этой и следующей лекциях приведена классификация многовариантных планиметрических задач, не претендующая на отражение в полном объеме всего многообразия подобных задач, но включающая в себя большую часть, с которой придется столкнуться школьнику при подготовке к экзамену.

Настоящая лекция посвящена рассмотрению случаев неоднозначного описания взаимного расположения элементов фигуры.

Приведем пример подобной задачи из варианта ЕГЭ-2011.

Пример 1. Периметр равнобедренной трапеции равен 136. Известно, что в эту трапецию можно вписать окружность, причем боковая сторона делится точкой касания в отношении 9 : 25. Прямая, проходящая через центр окружности и вершину трапеции, отсекает от трапеции треугольник. Найти отношение площади этого треугольника к площади трапеции.

Решение. В условии задачи неоднозначность возникает в результате того, что не указано конкретно, через какую вершину трапеции проходит данная прямая.

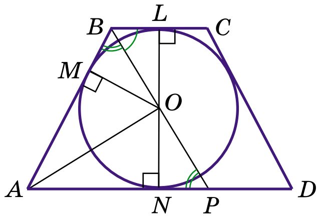

Рис. 7.1

Сама трапеция условием задачи задается однозначно. Действительно, поскольку в данную трапецию вписана окружность, то (рис. 7.1) $AB + CD = BC + AD = 68$. Так как по условию трапеция – равнобедренная, то $AB = CD = 34$. Тогда точка касания делит боковую сторону на отрезки, длины которых равны 9 и 25.

Пусть точки M, L и N — точки касания окружности боковой стороны AB и оснований BC и AD соответственно. Тогда $AM = 25$, $MB = 9$. Так как отрезок LN перпендикулярен основаниям трапеции и точки L и N — середины оснований BC и AD соответственно, а $MB = BL$ и $AM = AN$ (как касательные, проведенные из одной точки), то $BC = 2BL = 18$, $AD = 2AN = 50$.

Пусть высота трапеции равна h. Тогда

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot h = 34h.$$

Рассмотрим теперь возможные случаи расположения указанной в условии задачи прямой.

1. Пусть прямая проходит через центр окружности и вершину B (см. рис. 7.1) и пересекает прямую AD в точке P. Из равенства прямоугольных треугольников OBL и OPN следует, что $BL = NP = 9$:

$$S_{ABP} = \frac{1}{2}(AN + NP) \cdot h = 17h.$$

Следовательно,

$$\frac{S_{ABP}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{2}.$$

Поскольку трапеция равнобедренная, то для прямой, проходящей через вершину C, получим тот же результат.

2. Пусть теперь указанная в условии прямая проходит через центр окружности и вершину A (рис. 7.2) и пересекает прямую BC в точке E, а боковую сторону CD в точке Q. Треугольник ABE — равнобедренный ($\angle BEA = \angle BAE = \angle EAD$) и $AB = BE = 34$. Тогда

$$CE = BE - BC = 16.$$

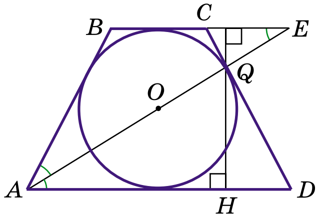

Рис. 7.2

Треугольники AQD и EQC подобны с коэффициентом подобия k, равным

$\frac{CE}{AD}=\frac{8}{25}$. Так как высоты этих треугольников, опущенные из точки Q, относятся друг к другу с коэффициентом k и в сумме равны h, то высота QH треугольника AQD равна $\frac{25}{33}h$. Тогда

$$S_{AQD}=\frac{1}{2}AD\cdot\frac{25}{33}h=\frac{625}{33}h.$$

Следовательно,

$$\frac{S_{AQD}}{S_{ABCD}}=\frac{625}{33\cdot 34}=\frac{625}{1122}.$$

Тот же результат получится и для прямой, проходящей через вершину D.

Ответ: $\frac{1}{2}$ или $\frac{625}{1122}$.

Методические указания. Анализ содержания задачной базы школьных учебников по геометрии показывает, что многовариантных задач практически нет, и поэтому они довольно непривычны для школьников. Следовательно, чтобы исключить ситуацию, когда выпускник впервые сталкивается с такой задачей непосредственно на экзамене, их нужно включать в учебный процесс. Причем делать это систематически, начав с достаточно простых задач, постепенно увеличивая их сложность.

Полезно при решении задач задавать вопросы. Например:

— Можно ли построить другую фигуру, неравную данной, но также удовлетворяющую условию задачи?

— При каких числовых значениях заданных элементов нельзя построить описанную в условии фигуру?

Ответы на подобные вопросы позволяют выявить различные ситуации, возникающие при решении задачи.

Проведем некоторую классификацию типов многовариантных задач, связанных с неоднозначностью описания взаимного расположения элементов фигуры, выделяя в каждом из них некоторые подготовительные задачи.

Расположение точек на прямой

В данном пункте рассмотрим расположение точек на одной прямой или на двух прямых.

В качестве подготовительных задач можно предложить учащимся следующие.

1. На прямой взяты точки A, B и C так, что расстояние между точками A и B равно 5, а между B и C равно 3. Найдите расстояние между точками A и C.

Комментарий. Неоднозначность формулировки состоит в том, что в условии не указано взаимное расположение точек A, B и C на прямой относительно друг друга. Можно записать шесть различных вариантов расположения этих точек: A, B, C или C, B, A; A, C, B или B, C, A; C, A, B или B, A, C (рис. 7.3).

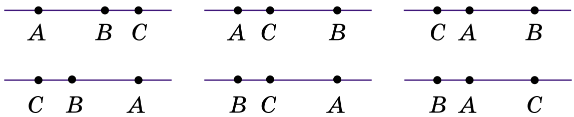

Рис. 7.3

Ответ: 8 или 2.

В следующей задаче наличие дополнительной информации о расположении точек на прямой (левее, правее, деление отрезка в заданном отношении) сокращает перебор случаев.

2. На прямой взяты точки A, B и C так, что точка B расположена правее точки A и $AB : BC = 3$. Найдите отношение $AC : AB$.

Комментарий. В данном случае необходимо рассмотреть только три различных варианта расположения этих точек: A, B, C; A, C, B; C, A, B.

Ответ: $\frac{4}{3}$ или $\frac{2}{3}$.

Как правило, в экзаменационных задачах точки «привязаны» к более сложной конфигурации и от их расположения зависит перебор вариантов для построения чертежа.

3. Вычислите площадь треугольника, если две его стороны равны 25 и 17, а высота, проведенная к третьей стороне, равна 15.

Комментарий. Неоднозначность формулировки состоит в том, что в условии не указано, лежит или нет основание высоты, проведенной к третьей стороне, на ней. Возможно два варианта чертежа (рис. 7.4).

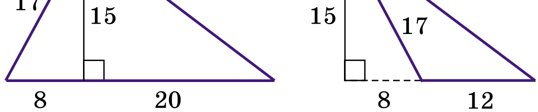

Рис. 7.4

Ответ: 210 или 90.

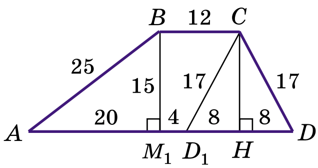

Рис. 7.5

4. Вычислите периметр трапеции, боковые стороны которой 25 и 17, высота 15, а одно из оснований равно 12.

Комментарий. В данном примере возможно только два варианта построения трапеции: $ABCD$ и $ABCD_1$ (рис. 7.5).

Ответ: 78 или 94.

Пример 2. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ выбрана точка E, делящая эту сторону в отношении 2 : 3. Отрезок DE пересекает диагональ AC в точке F. Какую часть площади параллелограмма $ABCD$ составляет площадь треугольника AFD?

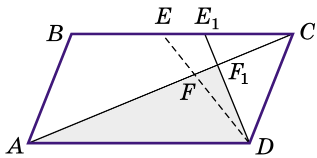

Рис. 7.6

Решение. Поскольку в условии задачи не указано, относительно какого из концов отрезка BC делится точкой E в отношении 2 : 3, то возможны два случая (на рис. 7.6 точки E и E_1 такие, что $BE : EC = 2 : 3$ и $E_1C : BE_1 = 2 : 3$).

1. Если $BE : EC = 2 : 3$, то

$$BE = \frac{2}{3}EC \text{ и } BC = EC + \frac{2}{3}EC = \frac{5}{3}EC.$$

Треугольники ECF и DAF подобны по двум углам и

$$\frac{AF}{FC} = \frac{AD}{EC} = \frac{BC}{EC} = \frac{5}{3}.$$

Тогда

$$FC = \frac{3}{5}AF \text{ и } AC = \frac{8}{5}AF.$$

Диагональ параллелограмма делит его на два равновеликих треугольника, тогда

$$S_{ACD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

Треугольники AFD и ACD имеют общую вершину D, и их основания лежат на одно прямой. Следовательно, их площади относятся как основания, то есть

$$\frac{S_{AFD}}{S_{ACD}} = \frac{AF}{AC} = \frac{5}{8}.$$

Отсюда

$$S_{AFD} = \frac{5}{8}S_{ACD} = \frac{5}{8}\cdot\frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{5}{16}S_{ABCD}.$$

2. В случае $E_1C : BE_1 = 2 : 3$, решая аналогичным образом, получим:

$$S_{AF_1D} = \frac{5}{14} S_{ABCD}.$$

Ответ: $\frac{5}{16}$ или $\frac{5}{14}$.

Пример 3. (*ЕГЭ-2010*) В треугольнике ABC $AB = 12$, $BC = 5$, $CA = 10$. Точка D лежит на прямой BC так, что $BD : DC = 4 : 9$. Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB, касаются стороны AD в точках E и F. Найти длину отрезка EF.

Комментарий. Перед решением данной задачи следует разобрать с учащимися следующую **опорную задачу**.

В треугольнике со сторонами a, b, c расстояние от вершины A до точек касания вписанной окружностью сторон, содержащих эту вершину, равно $\frac{b+c-a}{2}$.

Решение. Пусть $AD = d$, $BD = x$, $DC = y$. Тогда для окружности, вписанной в треугольник ADC, имеем:

$$DE = \frac{d+y-10}{2},$$

а для окружности, вписанной в треугольник ADB:

$$DF = \frac{d+x-12}{2}.$$

Поскольку в условии сказано, что точка D лежит на прямой BC, то существует два ее положения, при которых будет выполняться условие $BD : DC = 4 : 9$. Другими словами, имеется внутреннее и внешнее деление отрезка BC в отношении $4 : 9$. Соответственно, существуют две конфигурации, удовлетворяющие условию задачи.

1. Пусть точка D лежит на отрезке BC (рис. 7.7). Тогда

$$x = \frac{20}{13},\ \ y = \frac{45}{13}.$$

Значит,

$$EF = |\ DE - DF\ | = \left|\ \frac{d+y-10}{2} - \frac{d+x-12}{2}\ \right| = \frac{51}{26}.$$

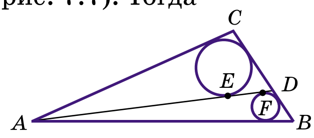

Рис. 7.7

2. Пусть точка D лежит вне отрезка BC (рис. 7.8). Тогда

$$x = 4,\ y = x + BC = 9.$$

Значит,

$$EF = |\ DE - DF\ | = \frac{7}{2}.$$

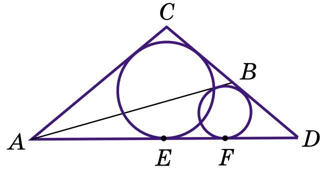

Рис. 7.8

Случай расположения точки D правее точки C невозможен.

Замечание. Так как в решении не исследовано расположение точек E и F на отрезке AD, то при вычислении длины отрезка EF *использован* знак модуля.

Ответ: $\frac{7}{2}$ и $\frac{51}{26}$.

Пример 4. (*МИОО, 2010*) В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 2$, $BC = \sqrt{3}$. Точка E на прямой AB выбрана так, что $\angle AED = \angle DEC$. Найти AE.

Решение. По свойству параллельных прямых $\angle AED = \angle EDC$. Следовательно, треугольник DEC равнобедренный и $EC = CD = 2$. Рассмотрим прямоугольный треугольник BEC с гипотенузой $EC = 2$ и катетом $BC = \sqrt{3}$. По теореме Пифагора $BE = 1$.

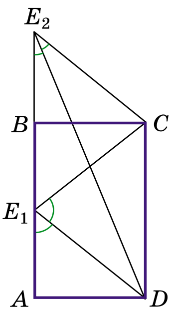

Рис. 7.9

Ключевым моментом этой задачи является расположение точки E на прямой относительно двух данных на ней точек A и B.

1. Если точка E лежит между A и B (точка E_1 на рис. 7.9), то $AE = 1$.

2. Если точка B лежит между A и E (точка E_2 на рис. 7.9), то $AE = 3$.

3. Положение точки A между B и E невозможно, так как в этом случае $\angle AED > \angle DEC$ (сделайте рисунок), то есть не выполняется условие задачи.

Ответ: 1 или 3.

Пример 5. (*МИОО, 2011*) Расстояние между параллельными прямыми равно 12. На одной из них лежит точка C, а на другой — точки A и B, причем треугольник ABC — остроугольный и равнобедренный и его боковая сторона равна 13. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

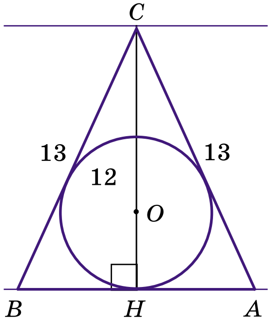

Рис. 7.10

Решение. Возможны два случая, удовлетворяющие условию задачи.

1. Боковые стороны — BC и AC (рис. 7.10), точка H — основание высоты CH треугольника ABC, $CH = 12$. Так как CH также является и медианой, то

$$AH = \sqrt{CA^2 - CH^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5,$$

$$BA = 2AH = 2 \cdot 5 = 10.$$

Тогда, используя формулу для радиуса r вписанной в треугольник ABC окружности, получаем:

$$r=\frac{S_{ABC}}{p}=\frac{0,5\cdot CH\cdot AB}{0,5\cdot(AB+BC+CA)}=\frac{10}{3}.$$

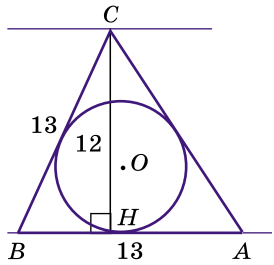

Рис. 7.11

2. Боковые стороны — AB и BC (рис. 7.11). Проведем высоту CH треугольника ABC. Если бы точка H лежала на продолжении стороны AB, то это означало бы, что треугольник ABC — тупоугольный. По условию он — остроугольный. Значит, точка H лежит на стороне AB.

Из прямоугольного треугольника BCH находим $BH = 5$. Тогда $HA = BA - BH = 13 - 5 = 8$. Из прямоугольного треугольника HCA находим $CA=4\sqrt{13}$.

Аналогично случаю 1 получаем:

$$r=\frac{S_{ABC}}{p}=\frac{0,5\cdot CH\cdot AB}{0,5\cdot(AB+BC+CA)}=\frac{6\cdot 13}{13+2\sqrt{13}}=\frac{26-4\sqrt{13}}{3}.$$

Ответ: $\frac{10}{3}$ или $\frac{26-4\sqrt{13}}{3}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. В треугольнике ABC отрезок MK с концами на сторонах AB и BC параллелен AC. Найдите длину отрезка MK, если известно, что $AC = 10$, а точка M делит сторону AB в отношении 2 : 3.

2. Дан параллелограмм $ABCD$. Точка M лежит на диагонали BD и делит ее в отношении 1 : 2. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если площадь четырехугольника $ABCM$ равна 60.

3. (*МИОО, 2010*) Через середину стороны AB квадрата $ABCD$ проведена прямая, пересекающая прямые CD и AD в точках M и T соответственно и образующая с прямой AB угол α, $\operatorname{tg}\alpha = 3$. Найдите площадь треугольника BMT, если сторона квадрата $ABCD$ равна 4.

Расположение точек вне прямой

В данном пункте рассмотрим примеры расположения прямой и точки; примеры расположения двух точек по одну сторону от прямой или по разные; примеры взаимного расположения одной или нескольких точек и двух параллельных прямых. При этом точки могут располагаться в одной или разных полуплоскостях и связаны некоторым условием (например, принадлежат одной окружности, лежат на одном перпендикуляре и т.д.).

В качестве подготовительных задач можно предложить следующие.

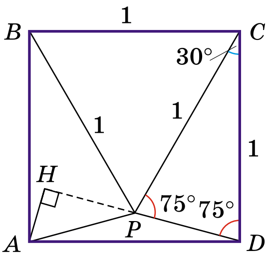

Рис. 7.12

1. На стороне BC квадрата $ABCD$ построен равносторонний треугольник BCP. Найдите высоту треугольника APD, проведенную из вершины A, если известно, что сторона квадрата равна 1.

Комментарий. Возможны два случая, удовлетворяющие условию задачи.

1. Точки P и A лежат по одну сторону от прямой BC (рис. 7.12). Тогда

$$AH = AD \cdot \sin \angle HDA = 1 \cdot \sin 15^\circ =$$

$$= \sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{8-4\sqrt{3}}{16}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2}{16}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

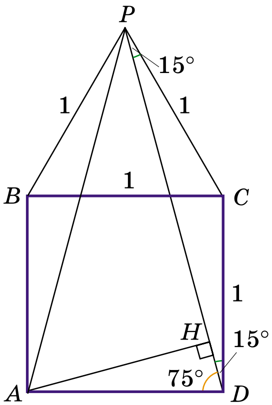

Рис. 7.13

2. Точки P и A лежат по разные стороны от прямой BC. Треугольник PCD — равнобедренный (рис. 7.13). Тогда

$$AH = AD \cdot \sin \angle HDA = 1 \cdot \sin 75^\circ =$$

$$= \sqrt{\frac{1-\cos 150^\circ}{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ или $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

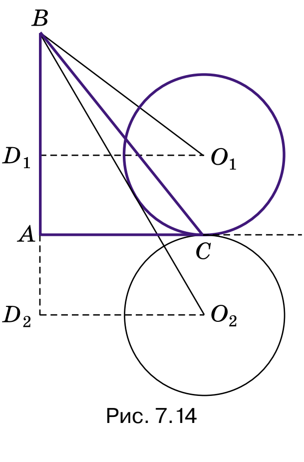

Рис. 7.14

2. Окружность радиуса 2 касается стороны AC прямоугольного треугольника ABC в точке C. Найдите расстояние от вершины B до центра окружности, если катеты AB и AC треугольника равны 5 и 4 соответственно.

Комментарий. В данном примере возможны два случая, удовлетворяющие условию задачи, так как центр окружности может лежать выше или ниже прямой AC (рис. 7.14).

Дальше, используя теорему Пифагора, нетрудно получить ответ.

Ответ: 5 или $\sqrt{65}$.

3. Концы отрезка отстоят от прямой на расстояние 6 и 14. Найдите расстояние от этой прямой до середины данного отрезка.

Комментарий. Неоднозначность условия в том, что не указано, лежат концы отрезка в одной или разных полуплоскостях относительно прямой. Возможны два случая (рис. 7.15).

Ответ: 10 или 4.

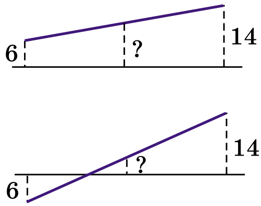

Рис. 7.15

Пример 6. Дан параллелограмм $ABCD$. Биссектрисы его углов A и D делят сторону BC на три равные части. Найти стороны параллелограмма, если его периметр равен 40.

Решение. Обозначим точку пересечения биссектрис через M, а точки пересечения биссектрис AM и DM со стороной BC через N и K соответственно. В зависимости от расположения точки M относительно прямой (отрезка) BC возможны два случая.

1. Точка M лежит вне параллелограмма. Так как биссектриса AM отсекает от параллелограмма равнобедренный треугольник ABN (рис. 7.16), то

$$AB = BN = NK = KC = x.$$

Периметр параллелограмма равен 40, поэтому из уравнения $2(x + 3x) = 40$ находим $x = 5$.

Значит, $AB = 5$, $BC = 15$.

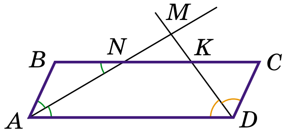

Рис. 7.16

2. Точка M лежит внутри параллелограмма (рис. 7.17), обозначив NC через y, получим: $AB = BN = 2y$.

Из уравнения $2(2y + 3y) = 40$ находим $y = 4$.

Значит, $AB = 8$ и $BC = 8 + 4 = 12$.

Ответ: 5, 15 или 8, 12.

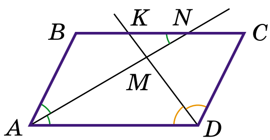

Рис. 7.17

Пример 7. Прямая отсекает от сторон прямого угла отрезки 3 и 4. Найти радиус окружности, касающейся этой прямой и сторон угла.

Решение. Пусть $AC = 3$, $BC = 4$, тогда $AB = 5$. Возможны два случая расположения центра указанной окружности относительно прямой (отрезка) AB (рис. 7.18 и 7.19). Отсюда получаем два вида

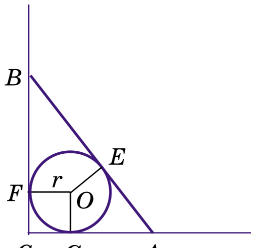

Рис. 7.18

окружностей для треугольника ABC: вписанную и вневписанную.

1. Окружность вписана в треугольник.

Способ I. Пусть r — радиус вписанной окружности. Так как $FOGC$ — квадрат и отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности, равны, то

$$AG = AE = b - r,\ BF = BE = a - r.$$

Тогда

$$c = AB = AE + BE = b - r + a - r.$$

Отсюда

$$r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{4+3-5}{2} = 1.$$

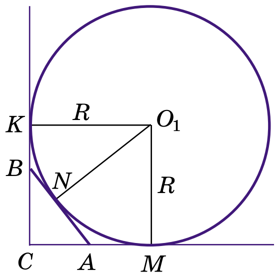

Рис. 7.19

Способ II. Выразим площадь прямоугольного треугольника двумя способами:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot BC\cdot AC = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3 = 6,\ S_{ABC} = pr,$$

где $p = \dfrac{3+4+5}{2} = 6.$

Тогда из равенства площадей получаем:

$$r = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{6}{6} = 1.$$

2. Окружность является вневписанной для треугольника ABC (см. рис. 7.19), R — ее радиус. $BK = BN$ и $NA = AM$, как отрезки касательных к окружности, проведенных из одной точки. Учитывая, что CKO_1M — квадрат, получим:

$$2R = KC + CM = BC + BN + AN + AC = P_{ABC}.$$

Отсюда $R = p_{ABC} = 6$.

Ответ: 1 или 6.

Пример 8. (*ЕГЭ-2011*) Прямая, перпендикулярная боковой стороне равнобедренного треугольника со сторонами 10, 10 и 12, отсекает от него четырехугольник, в который можно вписать окружность. Найти площадь этого четырехугольника.

Решение. Пусть ABC — данный треугольник, в котором $AC = 12$ — основание, $AB = BC = 10$, тогда полупериметр треугольника равен 16. Окружность, о которой говорится в условии, вписана в треугольник ABC. Пусть $\angle BCA = \gamma$, $\angle ABC = \beta$. Тогда

$$\cos\gamma = \frac{AC}{2BC} = \frac{3}{5},\quad \sin\gamma = \frac{4}{5},\quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{4}{3},$$

$$S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC \cdot \sin\gamma}{2} = 48,$$

$$\sin\beta = \frac{2S_{ABC}}{AB \cdot BC} = \frac{24}{25}, \quad \cos\beta = \frac{7}{25}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{24}{7}.$$

(угол ABC — острый, почему?)

Радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, находим по формуле

$$r = \frac{S_{ABC}}{p} = 3.$$

Так как треугольник ABC — равнобедренный, то окружность касается основания в его середине — точке L, а $CK = CL = 6$ по свойству касательных.

Возможны два случая, удовлетворяющие условию задачи.

1. Прямая, перпендикулярная BC, касается окружности и пересекает BC и AB в точках M и N соответственно (рис. 7.20). Опустив из точки O перпендикуляры OP и OK на NM и BC соответственно, получаем квадрат $OPMK$ (докажите). Отсюда получаем, что

$$MK = r = 3,$$
$$BM = BC - CK - MK = 10 - 6 - 3 = 1.$$

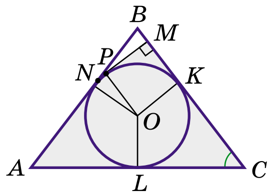

Рис. 7.20

В прямоугольном треугольнике NBM получаем:

$$MN = BM \cdot \operatorname{tg}\beta = \frac{24}{7},$$

$$S_{NBM} = \frac{1}{2} \cdot BM \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{24}{7} = \frac{12}{7}.$$

Тогда

$$S_{ANMC} = S_{ABC} - S_{NBM} = 48 - \frac{12}{7} = 46\frac{2}{7}.$$

2. Прямая, перпендикулярная BC, касается окружности и пересекает BC и AC в точках M и N соответственно (рис. 7.21). Аналогично предыдущему случаю получаем, что

$$KM = r = 3,$$
$$MC = CK - KM = 6 - 3 = 3.$$

В прямоугольном треугольнике NMC получаем:

$$MN = MC \cdot \operatorname{tg}\gamma = 3 \cdot \frac{4}{3} = 4,$$

$$S_{NMC} = \frac{1}{2} \cdot NM \cdot MC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6.$$

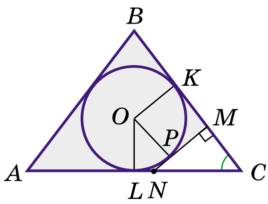

Рис. 7.21

Тогда

$$S_{ABMN} = S_{ABC} - S_{NMC} = 48 - 6 = 42.$$

Ответ: $46\frac{2}{7}$ или 42.

Пример 9. Около треугольника ABC описана окружность с центром O. Найти величину угла ACB, если угол OCB равен 10°, а угол AOC равен 40°.

Решение. Сделаем чертеж (рис. 7.22). Зафиксируем сторону BC. Проведем диаметр CC_1. Тогда дуга окружности BC_1, соответствующая центральному углу BOC_1, равна 20°.

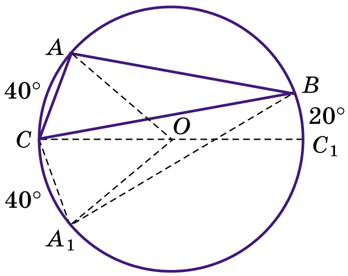

Рис. 7.22

В зависимости от расположения точек A и B относительно прямой OC можно построить два центральных угла, COA и COA_1 (см. рис. 7.22), равные 40°. Тогда возникает два треугольника, удовлетворяющие условиям задачи: ABC и A_1BC.

Угол ACB треугольника ABC опирается на дугу AB, равную $180° - 40° - 20° = 120°$. Значит, $\angle ACB = 60°$.

Угол A_1CB треугольника A_1BC опирается на дугу A_1C_1B, равную 160°. Значит, $\angle A_1CB = 80°$.

Ответ: 60° или 80°.

Пример 10. Трапеция с основаниями 14 и 40 вписана в окружность радиуса 25. Найти высоту трапеции.

Решение. Трапеция вписана в окружность, поэтому она равнобедренная. Пусть $BC = 14$ — хорда окружности радиуса 25. Существуют две хорды, параллельные BC и равные 40 (рис. 7.23).

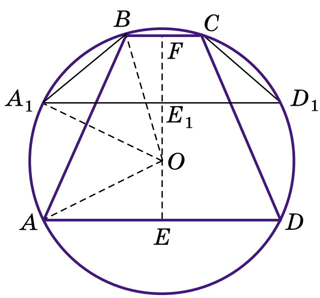

Рис. 7.23

Соответственно, в окружность можно вписать две трапеции с основаниями 14 и 40. Центр O лежит на серединном перпендикуляре к BC.

Рассмотрим два случая расположения центра O относительно параллельных прямых, на которых лежат основания трапеции.

1. В трапеции $ABCD$ центр O окружности лежит внутри трапеции. В этом

случае высота $EF = EO + OF$. Из прямоугольного треугольника AOE, в котором $AO = 25$, $AE = \frac{AD}{2} = \frac{40}{2} = 20$, получаем:

$$EO = \sqrt{AO^2 - AE^2} = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15.$$

Из прямоугольного треугольника BOF, в котором $BO = 25$, $BF = \frac{BC}{2} = 7$, получаем:

$$OF = \sqrt{BO^2 - BF^2} = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24.$$

Тогда

$$EF = EO + OF = 15 + 24 = 39.$$

2. В трапеции A_1BCD_1 центр O окружности лежит вне трапеции (см. рис. 23). Аналогично находим $E_1F = OF - E_1O = 24 - 15 = 9$.

Ответ: 39 или 9.

Задачи для самостоятельного решения

4. В окружность радиуса $2\sqrt{5}$ вписана трапеция с основаниями 8 и $2\sqrt{11}$. Найдите длину диагонали трапеции.

5. Окружность с диаметром, равным $\sqrt{10}$, проходит через соседние вершины A и B прямоугольника $ABCD$. Длина касательной, проведенной к окружности из точки C, равна 3. Найдите длину стороны BC, если известно, что $AB = 1$.

6. Дан параллелограмм $ABCD$, $AB = 2$, $BC = 3$, $\angle A = 60°$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырехугольника $ABOD$.

7. В трапеции длины боковых сторон равны 16 и 12, а длины оснований 30 и 10. Найдите радиус окружности, касающейся меньшего основания трапеции и прямых, содержащих ее боковые стороны.

8. (*МИОО, 2011*) Расстояние между параллельными прямыми равно 12. На одной из них лежит вершина C, на другой — основание AB равнобедренного треугольника ABC. Известно, что $AB = 10$. Найдите расстояние между центрами окружностей, одна из которых вписана в треугольник ABC, а вторая касается данных параллельных прямых и боковой стороны треугольника ABC.

Выбор обозначений вершин многоугольника

К задачам этого типа относят задачи, условие которых допускает различные решения в зависимости от варианта буквенного обозначения вершин многоугольника.

В качестве подготовительной задачи можно предложить следующую.

1. В параллелограмме $ABCD$ один из углов равен $60°$. Точки E и F являются серединами смежных сторон, образующих острый угол. Площадь треугольника, отсекаемого прямой EF от параллелограмма $ABCD$, равна S. Найдите площадь треугольника, вершинами которого служат точки E, F и C.

Комментарий. При решении данной задачи необходимо рассмотреть четыре случая (рис. 7.24).

Ответ: $3S$ или S.

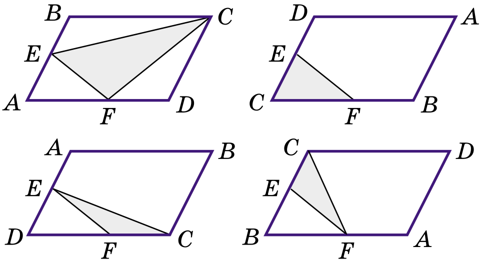

Рис. 7.24

Пример 11. Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке E. Найти площадь трапеции, если площадь треугольника AED равна 9, а точка E делит одну из диагоналей в отношении $1:3$.

Решение. При решении данной задачи неоднозначность, как и в предыдущем примере, состоит в выборе варианта буквенного обозначения вершин трапеции и, дополнительно к этому, в выборе большего основания. Пусть точка E делит каждую диагональ в отношении $1:3$, считая от вершины верхнего основания.

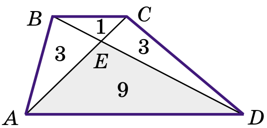

Рис. 7.25

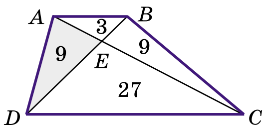

Рис. 7.26

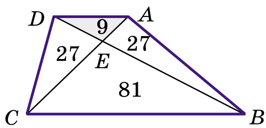

Рис. 7.27

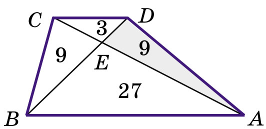

Рис. 7.28

1. Рассмотрим трапецию с основаниями BC и AD (рис. 7.25). Треугольники BEC и AED подобны (по двум углам) с коэффициентом подобия $k=\dfrac{EC}{AE}=\dfrac{1}{3}$. Значит,

$$\frac{S_{BEC}}{S_{AED}}=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}.$$

Отсюда

$$S_{BEC}=\frac{S_{AED}}{9}=1.$$

Треугольники ABE и BEC имеют общую высоту, поэтому

$$\frac{S_{ABE}}{S_{BEC}}=\frac{AE}{EC}=3\,,\ S_{ABE}=3\cdot S_{BEC}=3.$$

Аналогично $S_{DEC} = 3 \cdot S_{BEC} = 3$.

Следовательно, искомая площадь равна

$$S_{ABCD} = 1 + 3 + 3 + 9 = 16.$$

2. В остальных случаях, решая аналогично, получим:

$$S_{ABCD} = 3 + 9 + 9 + 27 = 48 \text{ (рис. 7.26 и 7.28);}$$

$$S_{ABCD} = 9 + 27 + 27 + 81 = 144 \text{ (рис. 27).}$$

Ответ: 16, 48, 144.

Пример 12. Площадь трапеции $ABCD$ равна 90, а одно из оснований трапеции вдвое больше другого. Диагонали пересекаются в точке O; отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C, пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N соответственно. Найти площадь четырехугольника $OMPN$.

Решение. Возможны два случая, удовлетворяющие условию задачи и получающиеся в результате обозначения вершин.

1. Пусть $BC = a$ — верхнее основание трапеции, тогда нижнее основание $AD = 2BC = 2a$ (рис. 7.29) и h — высота трапеции. Площадь трапеции

$$S_{ABCD} = \frac{a+2a}{2}h = \frac{3}{2}ah = 90.$$

Отсюда $ah = 60$.

Так как четырехугольники $ABCP$ и $BCDP$ — параллелограммы, то точки M и N являются точками пересечения их диагоналей. Тогда BN и CM — медианы треугольника BCP. Следовательно,

$$S_{OMPN} = \frac{1}{3}S_{BCP} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}ah = \frac{1}{6}\cdot 60 = 10.$$

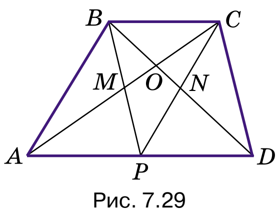

Рис. 7.29

2. Пусть $AD = a$ — верхнее основание, тогда $BC = 2AD = 2a$ (рис. 7.30).

Так как треугольники COB и AOD подобны с коэффициентом подобия, равным 2, то высота треугольника AOD составляет $\frac{1}{3}$ высоты трапеции $ABCD$ и

$$S_{AOD} = \frac{1}{2}a\cdot\frac{1}{3}h = \frac{1}{6}ah = \frac{1}{6}\cdot 60 = 10.$$

Соответственно, треугольники CMB и PAM подобны с коэффициентом подобия, равным 4. Тогда

$$S_{PAM} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}a\cdot\frac{1}{5}h = \frac{1}{20}ah = \frac{1}{20}\cdot 60 = 3.$$

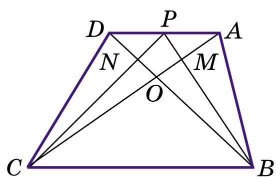

Рис. 7.30

Аналогично получаем, что $S_{DNP} = 3$. Тогда

$$S_{OMPN} = S_{AOD} - S_{PAM} - S_{PAM} = 10 - 3 - 3 = 4.$$

Ответ: 10 или 4.

Задача для самостоятельного решения

9. Высота CK параллелограмма $ABCD$ равна 12. Найдите диагональ AC, если известно, что $AD = 15$, $CD = 14$, а точка K лежит на прямой AB.

Выбор некоторого элемента фигуры

К задачам этого типа относят такие задачи, в условии которых дана числовая величина элемента фигуры, но не указано, какого конкретно из имеющихся. В случае линейного элемента это может быть, например, сторона многоугольника или длина отрезка перпендикуляра, опущенного на сторону фигуры, и т.д. В случае углового элемента это может быть, например, какой-то из углов фигуры.

В качестве подготовительных задач можно предложить следующие.

1. Найдите площадь равнобедренного треугольника, углы при основании которого равны 30°, если одна из его сторон равна 6.

Комментарий. Для получения ответа необходимо рассмотреть два случая. В первом случае равно 6 основание, во втором — боковая сторона.

Ответ: $3\sqrt{3}$ или $9\sqrt{3}$.

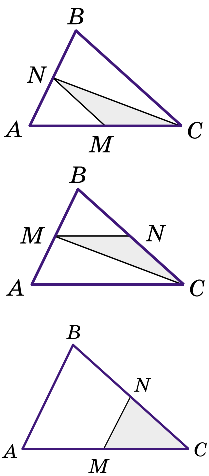

Рис. 7.31

2. Найдите площадь равнобедренного треугольника, боковые стороны которого равны 10, а один из углов равен 30°.

Комментарий. В этой задаче также необходимо рассмотреть два случая. В первом случае равен 30° угол при основании, во втором – при вершине.

Ответ: 25 или $25\sqrt{3}$.

3. Площадь треугольника ABC равна 8, MN — средняя линия. Найдите площадь треугольника CMN.

Комментарий. В данной задаче неоднозначность состоит в выборе средней линии. Необходимо рассмотреть три случая (рис. 7.31), даже если они приводят к одному ответу.

Ответ: 2.

Рассмотрим более сложные примеры.

При решении следующего примера необходимо предварительно напомнить и разобрать следующую **опорную задачу**.

Пусть в треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. Тогда треугольник A_1BC_1 подобен данному треугольнику с коэффициентом подобия, равным $|\cos B|$.

Пример 13. Точки A_1, B_1, C_1 — основания высот треугольника ABC. Углы треугольника $A_1B_1C_1$ равны 90°, 60° и 30°. Найти углы треугольника ABC.

Решение. Рассмотрим разные виды треугольника, связанные с выбором острого или тупого угла.

1. Треугольник ABC — остроугольный (рис. 7.32).

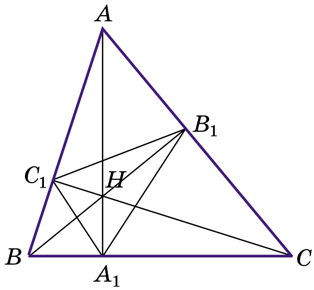

Рис. 7.32

Так как треугольник BC_1A_1 подобен треугольнику ABC, то $\angle BC_1A_1 = \angle BCA$. Аналогично, из подобия треугольников AB_1C_1 и ABC имеем $\angle AC_1B_1 = \angle BCA$. Развернутый угол при вершине C_1 составлен из углов BC_1A_1, AC_1B_1 и $B_1C_1A_1$. Отсюда получаем соотношение

$$2\angle C + \angle B_1C_1A_1 = 180°,\ \angle C = 90° - \frac{1}{2}\angle B_1C_1A_1.$$

Такие же равенства можно получить для других острых углов. Используем данные углы:

$$90° - \frac{1}{2}\cdot 90° = 45°,\ \ 90° - \frac{1}{2}\cdot 60° = 60°,\ \ 90° - \frac{1}{2}\cdot 30° = 75°.$$

Остальные случаи можно рекомендовать учащимся разобрать самостоятельно.

2. Угол ACB — тупой (рис. 7.33).

3. Угол ABC — тупой.

4. Угол BAC — тупой.

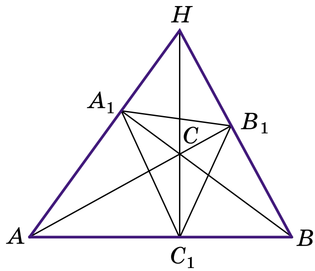

Рис. 7.33

Случаи, когда один из углов треугольника ABC прямой, невозможны.

Ответ: 45°, 75°, 60°, или 135°, 15°, 30°, или 120°, 15°, 45°, или 105°, 30°, 45°.

Пример 14. Треугольник ABC вписан в окружность радиуса 12. Известно, что $AB = 6$ и $BC = 4$. Найдите AC.

Решение. Используя обобщенную теорему синусов, найдем:

$$\sin A = \frac{BC}{2R} = \frac{4}{2\cdot 12} = \frac{1}{6},$$

$$\sin C = \frac{AB}{2R} = \frac{6}{2\cdot 12} = \frac{1}{4}.$$

Так как $\angle B = 180° - \angle A - \angle C$, то

$$\sin \angle B = \sin (180° - \angle A - \angle C) = \sin (\angle A + \angle C).$$

1. Если треугольник ABC — остроугольный, то

$$\cos \angle A = \frac{\sqrt{35}}{6}, \quad \cos \angle C = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Используя формулу синуса суммы, получим:

$$\sin \angle B = \sin\left(\angle A + \angle C\right) = \frac{1}{6}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4} + \frac{\sqrt{35}}{6}\cdot\frac{1}{4} = \frac{\sqrt{35}+\sqrt{15}}{24}.$$

Тогда можем найти искомую величину:

$$AC = 2R\sin \angle B = 24\cdot\frac{\sqrt{35}+\sqrt{15}}{24} = \sqrt{35}+\sqrt{15}.$$

2. Пусть угол C — тупой, тогда

$$\sin \angle B = \sin (\angle A + \angle C) = \frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right) + \frac{\sqrt{35}}{6}\cdot\frac{1}{4} = \frac{\sqrt{35}-\sqrt{15}}{24}.$$

Отсюда $AC = \sqrt{35} - \sqrt{15}.$

3. Случай, когда угол A — тупой, невозможен (почему?).

Ответ: $\sqrt{35} \pm \sqrt{15}.$

Рассмотрим пример, в котором имеются две точки, делящие окружность на две дуги, но не указано, какой из этих двух дуг касается другая окружность. В этом случае неоднозначность состоит в выборе кругового элемента (дуги).

Пример 15. Окружности с центрами O и B радиуса OB пересекаются в точке C. Радиус OA окружности с центром O перпендикулярен OB, причем точки A и C лежат по одну сторону от прямой OB. Окружность S_1 касается меньших дуг AB и OC этих окружностей, а также прямой OA, а окружность S_2 касается окружности с центром B, прямой OA и окружности S_1. Найти отношение радиуса окружности S_1 к радиусу окружности S_2.

Комментарий. С учащимися необходимо рассмотреть **опорную задачу.**

Отрезок общей внешней касательной к двум касающимся окружностям радиусов r и R равен $2\sqrt{Rr}$.

Решение. Пусть K и E — центры окружностей S_1 и S_2, I и J — точки касания этих окружностей с прямой OA соответственно. Так как окружность S_1 радиуса a и окружность с центром в точке B и радиуса R касаются друг друга и общей прямой OA, то имеем: $OI = 2\sqrt{Ra}$ (расстояние между точками касания окружностей общей касательной), $OK = R - a$.

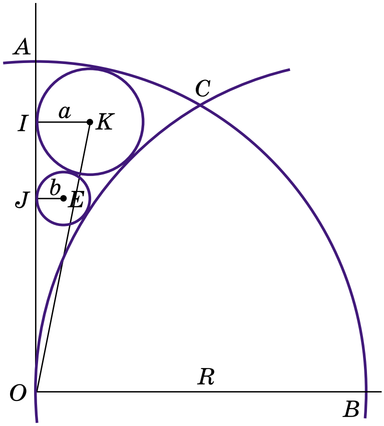

Рис. 7.34

Далее используем теорему Пифагора в треугольнике OKI:

$$(R-a)^2 = a^2 + \left(2\sqrt{Ra}\right)^2.$$

Отсюда получаем: $R = 6a$.

Рассмотрим первый случай касания окружности S_2 радиуса b (рис. 7.34). Тогда

$$OI = OJ + JI,$$
$$2\sqrt{aR} = 2\sqrt{bR} + 2\sqrt{ab},$$

откуда

$$\sqrt{6a^2} = \sqrt{6ab} + \sqrt{ab},$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{6}+1}{\sqrt{6}}, \quad \frac{a}{b} = \frac{7+2\sqrt{6}}{6}.$$

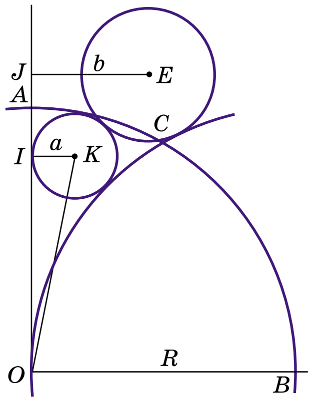

Рис. 7.35

Для второго случая (рис. 7.35) имеем:

$OJ = OI + IJ,\ 2\sqrt{bR} = 2\sqrt{aR} + 2\sqrt{ab}.$

Проводя вычисления аналогично предыдущему случаю, получим:

$$\frac{a}{b} = \frac{7-2\sqrt{6}}{6}.$$

Ответ: $\dfrac{7 \pm 2\sqrt{6}}{6}$.

Задачи для самостоятельного решения

10. (*МИОО, 2011*) Высота равнобедренного треугольника, опущенная на основание, равна 24. Точка касания вписанной окружности с боковой стороной делит эту сторону в отношении

5 : 8, считая от основания. Найдите радиус окружности, касающейся стороны треугольника и продолжений двух других его сторон.

11. В равнобедренный треугольник с основанием 12 и боковой стороной 10 вписана окружность. Вторая окружность касается двух сторон треугольника и первой окружности. Найдите радиус второй окружности.

12. В ромбе $ABCD$ со стороной 2 и углом 60° проведены высоты CM и DK. Найдите длину отрезка MK.

Выбор плоской фигуры

Задачи этого типа могут быть связаны с неопределенностью выбора отношения площадей фигур, выбором подобных треугольников и т.д.

Пример 16. Основания трапеции равны a и b. Прямая, параллельная основаниям, разбивает трапецию на две трапеции, площади которых относятся как 2 : 3. Найти длину отрезка этой прямой, заключенного внутри трапеции.

Решение. Обозначим искомый отрезок EF через x (рис. 7.36).

1. Пусть площади трапеций $BCFE$ и $AEFD$ относятся как 2 : 3, тогда имеем:

$$\frac{S_{BCFE}}{S_{AEFD}} = \frac{\frac{b+x}{2}\cdot h_1}{\frac{a+x}{2}\cdot h_2} = \frac{2}{3},$$

где h_1 и h_2 — высоты этих трапеций соответственно. Отсюда

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{2(a+x)}{3(b+x)}. \qquad (*)$$

Через точку F проведем отрезок PH параллельно AB. Тогда треугольники PFD и HFC подобны (докажите) и

$$\frac{CH}{PD} = \frac{x-b}{a-x} = \frac{h_1}{h_2}.$$

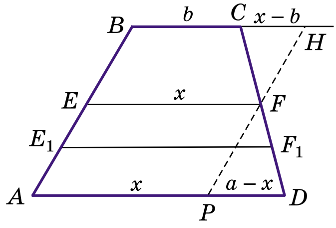

Рис. 7.36

Используем соотношение (*):

$$\frac{x-b}{a-x} = \frac{2(a+x)}{3(b+x)}.$$

Решая полученное уравнение относительно переменной x, получаем:

$$3(x^2 - b^2) = 2(a^2 - x^2),$$

$$5x^2 = 2a^2 + 3b^2,$$

$$x = \sqrt{\frac{2a^2 + 3b^2}{5}}.$$

2. Случай, когда площади трапеций $AEFD$ и $BCFE$ относятся как 2 : 3, решается аналогично. В этом случае площади трапеций $BCFE$ и $AEFD$ относятся как 3 : 2.

Ответ: $\sqrt{\frac{2a^2 + 3b^2}{5}}$ или $\sqrt{\frac{3a^2 + 2b^2}{5}}$.

Задачи для самостоятельного решения

13. (*ЕГЭ-2011*) Через вершину B правильного шестиугольника $ABCDEF$ проведена прямая, пересекающая диагональ CF в точке K. Известно, что эта прямая разбивает шестиугольник на части, площади которых относятся как 2 : 3. Найдите отношение $CK : KF$.

14. (*ФИПИ, 2011*) Точка H — основание высоты треугольника со сторонами 10, 12, 14, опущенной на сторону, равную 12. Через точку H проведена прямая, отсекающая от треугольника подобный ему треугольник и пересекающая сторону, равную 10, в точке M. Найдите HM.

Ответы на задачи для самостоятельного решения

1. 4 или 6. **2.** 180 или 90. **3.** 2 или 10. **4.** $2\sqrt{7+2\sqrt{11}}$ или $2\sqrt{13+2\sqrt{11}}$. **5.** $\frac{3\left(\sqrt{5}+1\right)}{2}$ или $\frac{3\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}$. **6.** $\frac{13\sqrt{3}}{6}$ или $\frac{5\sqrt{3}}{4}$. **7.** 2 или 12. **8.** $\frac{\sqrt{793}}{3}$ или $\frac{4\sqrt{13}}{3}$. **9.** $\sqrt{673}$ или 13. **10.** 15 или 24. **11.** 0,75 или $\frac{3\left(3-\sqrt{5}\right)}{2}$. **12.** 1, или 2, или $\sqrt{7}$. **13.** $\frac{17}{23}$ или $\frac{10}{7}$. **14.** $\frac{7}{3}$ или $\frac{14}{5}$.

Литература

1. *Гордин Р.К.* ЕГЭ-2011. Математика. Задача С4. Геометрия. Планиметрия / под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. — М.: МЦНМО, 2011.

2. *Кожухов С.К.* Планиметрические задачи с неоднозначным ответом // Математика в школе, 2011, № 5.

3. *Корянов А.Г., Прокофьев А.А.* Математика. ЕГЭ-2011 (типовые задания С4). Планиметрические задачи с неоднозначностью в условии (многовариантные задачи). URL: http://www.alexlarin.net/ege/2011/C4-2011.pdf

4. *Полонский В.Б., Рабинович Е.М., Якир М.С.* Учимся решать задачи по геометрии. Учеб.-метод. пособие. — К.: Магистр, 1996.

Лекция 8
Многовариантные планиметрические задачи: взаимное расположение фигур

При решении задач условие может трактоваться неоднозначно, если для рассматриваемых фигур не указано их взаимное расположение. Можно выделить, например, следующие случаи, приводящие к неоднозначной трактовке условия задачи и касающиеся:

- взаимного расположения прямолинейных фигур;
- взаимного расположения окружностей;
- интерпретации аналитического способа решения задачи.

Взаимное расположение прямолинейных фигур

При рассмотрении данного пункта учащимся можно предложить подготовительные задачи следующего вида.

1. Пусть дан произвольный треугольник ABC. Рассмотрите возможные варианты построения на стороне AB:

а) равностороннего треугольника ABP;

б) квадрата $ABPQ$.

2. Пусть дан произвольный треугольник ABC. Рассмотрите возможные варианты расположения параллелограмма, вписанного в данный треугольник, так, что одна из его вершин совпадает с вершиной треугольника, а три другие лежат на сторонах треугольника.

Пример 1. Дан равнобедренный треугольник ABC, $AB = BC = 10$ и $AC = 12$. Параллельно боковым сторонам треугольника на одинаковом расстоянии от них проведены прямые. Найти это расстояние, если площадь треугольника, образованного этими прямыми и основанием, лежащим на прямой AC, равна 12.

Решение. Проведем BD — высоту треугольника ABC — и продолжим ее за точку D. Проводя прямые, параллельные сторонам BA и BC, убеждаемся, что они могут образовывать треугольник с основанием, лежащим на прямой AC, расположенный в верхней или нижней полуплоскости относительно AC.

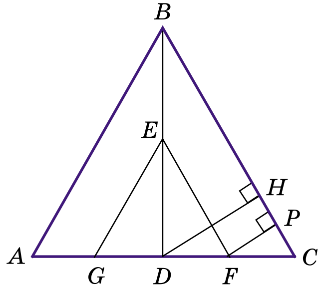

Рис. 8.1

1. Рассмотрим случай, когда прямые $EF \parallel BC$ и $EG \parallel AB$ (рис. 8.1).

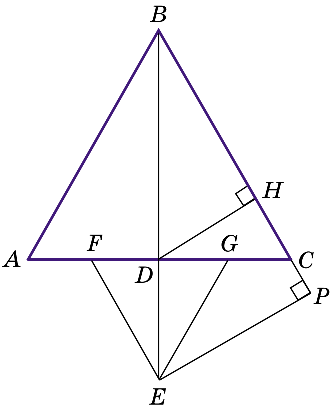

Рис. 8.2

Тогда $DC = 6$ и $BD = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$. Пусть $DF = x$, а $DE = y$. Используя подобие треугольников BDC и EDF и известное значение площади треугольника GFE, составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{8}{y} = \dfrac{6}{x}, \\ xy = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ y = 4. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $DF = 3$ и $FC = 3$.

Опустим перпендикуляры DH и FP на прямую BC. Так как DH — высота прямоугольного треугольника BDC, то

$$DH = \frac{BD \cdot DC}{BC} = \frac{8 \cdot 6}{10} = 4,8.$$

Из подобия треугольников DHC и FPC получаем:

$$FP = \frac{DH \cdot FC}{DC} = \frac{4,8 \cdot 3}{6} = 2,4.$$

2. Второй случай расположения прямых EF и EG (рис. 8.2) приводит к ответу 7,2.

Ответ: 2,4 или 7,2.

Пример 2. (*ЕГЭ-2011*) Точки M, K и N лежат на сторонах соответственно AB, BC и AC треугольника ABC, причем $AMKN$ — параллелограмм, площадь которого составляет $\frac{4}{9}$ площади треугольника ABC. Найти диагональ MN параллелограмма, если известно, что $AB = 21$, $AC = 12$ и $\angle BAC = 120°$.

Решение. Пусть площадь треугольника ABC равна S, а $\dfrac{BK}{BC} = k$. Тогда треугольники MBK и ABC подобны с коэффициентом подобия k, а треугольники NKC и ABC подобны с коэффициентом подобия $1 - k$. Поскольку

$$S_{ABC} = S_{AMKN} + S_{MBK} + S_{NKC},$$

то имеем:

$$S = \frac{4}{9}S + k^2 S + (1-k)^2 S,$$

$$k^2 - k + \frac{2}{9} = 0.$$

Отсюда получаем: $k = \dfrac{2}{3}$ или $k = \dfrac{1}{3}$.

1. Пусть $k=\frac{2}{3}$ (рис. 8.3), то есть

$$\frac{BK}{BC}=\frac{2}{3} \text{ и } \frac{KC}{BC}=\frac{1}{3}.$$

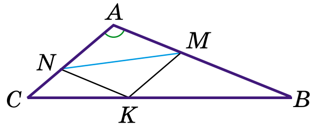

Рис. 8.3

Тогда

$$AM=NK=\frac{1}{3}AB=7, \quad AN=MK=\frac{2}{3}AC=8.$$

Используя теорему косинусов для треугольника NAM, получаем:

$$MN=\sqrt{7^2+8^2-2\cdot7\cdot8\cdot\cos120^\circ}=13.$$

2. Пусть $k=\frac{1}{3}$ (рис. 8.4), то есть

$$\frac{BK}{BC}=\frac{1}{3} \text{ и } \frac{KC}{BC}=\frac{2}{3}.$$

Тогда

$$AM=NK=\frac{2}{3}AB=14,$$

$$AN=MK=\frac{1}{3}AC=4,$$

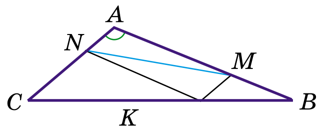

Рис. 8.4

$$MN=\sqrt{14^2+4^2-2\cdot14\cdot4\cdot\cos120^\circ}=2\sqrt{67}.$$

Ответ: 13 или $2\sqrt{67}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Ромб вписан в прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4 так, что одна из его вершин совпадает с вершиной острого угла треугольника, а три другие лежат на сторонах треугольника. Найдите площадь ромба.

2. (*ФЦТ, 2010*). На стороне CD квадрата $ABCD$ построен равносторонний треугольник CPD. Найдите высоту треугольника ABP, проведенную из вершины A, если известно, что сторона квадрата равна 1.

Взаимное расположение окружностей

Взаимное расположение окружностей можно различать по внешнему признаку (касающиеся, пересекающиеся, непересекающиеся) или по внутреннему (взаимное расположение центров окружностей относительно общей касательной, общей хорды и т.д.).

С учащимися полезно рассмотреть взаимное расположение окружностей с помощью динамической геометрической программы (например, «Живая геометрия» или «Wingeom»): двух окружностей, двух окружностей с общей касательной, двух окружностей с общей хордой. При перемещении одной окружности относительно другой учащиеся наглядно представляют наличие общих точек (одна, две, ни одной), возможные варианты касания окружностей (внешнее, внутреннее), варианты касательных (внешние, внутренние), расположение центров окружностей относительно общей хорды, общей касательной.

Из подготовительных задач можно предложить следующие.

1. К двум окружностям радиусов 6 и 3 проведена общая касательная. Найдите расстояние между точками касания, если расстояние между центрами окружностей равно 15.

Ответ: $6\sqrt{6}$ или 12.

2. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведены диаметры AC и AD этих окружностей. Найдите расстояние между центрами окружностей, если $BD = 7$, $BC = 13$.

Ответ: 3 или 10.

3. Окружности радиусов 3 и 8 касаются друг друга. Через центр одной из них проведены две прямые, каждая из которых касается другой окружности (точки A и B — точки касания). Найдите расстояние между точками A и B.

Ответ: $\dfrac{24\sqrt{7}}{11}$, или $\dfrac{16\sqrt{57}}{11}$, или 4,8.

Расположение центров окружностей относительно общей касательной

В условии задач этого типа фигурируют две окружности, касающиеся одной прямой, но не указано расположение центров этих окружностей относительно этой прямой. Соответственно, эта прямая является внутренней или внешней касательной для этих окружностей.

Пример 3. Прямая касается окружностей радиусов R и r. Известно, что расстояние между их центрами равно a, $R > r$ и $a > r + R$. Найти расстояние между точками касания.

Решение. Пусть O_1 — центр окружности радиуса R, O_2 — центр окружности радиуса r, A_1A_2 и B_1B_2 — внешняя и внутренняя касательные соответственно (рис. 8.5). Из центра меньшей окружности опустим перпендикуляры O_2K_1 и O_2K_2 на радиус O_1A_1 и продолжение радиуса O_1B_1 соответственно.

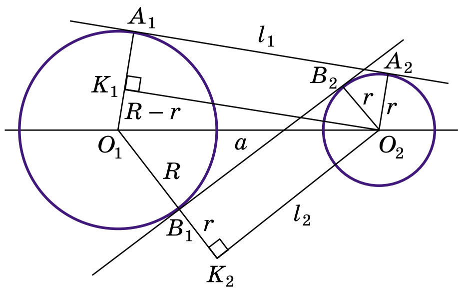

Рис. 8.5

Рассмотрим прямоугольные треугольники $O_1K_1O_2$ (гипотенуза $O_1O_2 = a$, катет $O_1K_1 = R - r$) и $O_1K_2O_2$ (гипотенуза $O_1O_2 = a$ катет $O_1K_2 = R + r$). Из теоремы Пифагора для этих треугольников получим:

$$l_1 = A_1A_2 = \sqrt{a^2 - (R-r)^2}$$

(длина внешней касательной);

$$l_2 = B_1B_2 = \sqrt{a^2 - (R+r)^2}$$

(длина внутренней касательной).

Ответ: $\sqrt{a^2 - (R-r)^2}$ или $\sqrt{a^2 - (R+r)^2}$.

Расположение центров окружностей относительно их общей точки касания

В условии задач этого типа фигурируют две окружности, но не указан тип касания (внешний или внутренний, рис. 8.6).

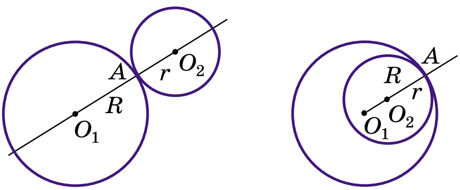

Рис. 8.6

При решении подобных задач полезно напомнить учащимся следующие факты.

> При любом способе касания точка касания и центры окружностей лежат на одной прямой.
> При внешнем касании центры окружностей расположены на линии центров по разные стороны от точки касания, при внутреннем — по одну сторону.
> Расстояние между центрами касающихся окружностей радиусов R и r $(R \geq r)$ равно $R + r$ при внешнем касании и $R - r$ при внутреннем.

Пример 4. (*ЕГЭ-2010*) Окружности радиусов 2 и 4 касаются в точке B. Через точку B проведена прямая, пересекающая второй раз меньшую окружность в точке A, а большую — в точке C. Известно, что $AC = 3\sqrt{2}$. Найти BC.

Решение. Поскольку в условии не сказано о типе касания окружностей (внешнее или внутреннее), то рассмотрим два случая.

1. Если окружности касаются внешним образом, то проведем через точку B общую касательную KK_1 (она перпендикулярна линии центров, рис. 8.7).

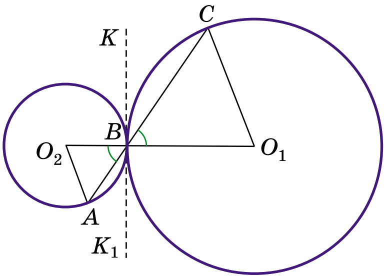

Рис. 8.7

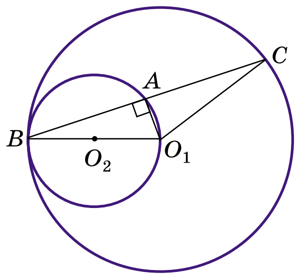

Рис. 8.8

Треугольники AO_2B и CO_1B подобны (объясните, почему).

Поэтому

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BO_2}{BO_1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Отсюда

$$BC = \frac{2}{3}AC = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$

2. Окружности касаются внутренним образом (рис. 8.8). В этом случае при исходных числовых данных задача не имеет решения (можно рекомендовать учащимся доказать это самостоятельно).

Ответ: $2\sqrt{2}$.

Пример 5. Окружности S_1 и S_2 радиусов R и r ($R > r$) соответственно касаются в точке A. Через точку B, лежащую на окружности S_1, проведена прямая, касающаяся окружности S_2 в точке M. Найти BM, если известно, что $AB = a$.

Решение. Возможны два случая расположения указанных окружностей в зависимости от типа касания.

1. Пусть окружности касаются внешним образом (рис. 8.9).

Способ I. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей S_1 и S_2 соответственно, а $\angle O_1AB = \varphi$. По теореме косинусов для треугольника O_1AB

$$O_1B^2 = O_1A^2 + AB^2 - 2O_1A \cdot AB\cos\varphi,$$
или
$$R^2 = R^2 + a^2 - 2Ra\cos\varphi.$$

Отсюда получим: $\cos\varphi = \dfrac{a}{2R}$.

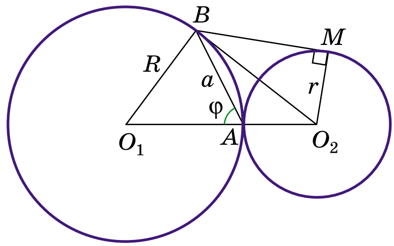

Рис. 8.9

Теперь используем теорему косинусов для треугольника O_2AB:
$$O_2B^2 = O_2A^2 + AB^2 + 2O_2A \cdot AB\cos\varphi,$$
или
$$O_2B^2 = r^2 + a^2 + 2ra\cos\varphi.$$

Подставив $\cos\varphi = \dfrac{a}{2R}$ в последнее равенство, получим:
$$O_2B^2 = r^2 + a^2 + \frac{a^2r}{R}.$$

В прямоугольном треугольнике O_2BM ($\angle BMO_2 = 90°$) по теореме Пифагора находим:
$$BM^2 = O_2B^2 - r^2 = r^2 + a^2 + \frac{a^2r}{R} - r^2 = a^2\left(1+\frac{r}{R}\right).$$

Отсюда $BM = a\cdot\sqrt{1+\dfrac{r}{R}}$.

Способ II. Продолжим AB до пересечения с окружностью S_2 в точке E (рис. 8.10). Треугольники AO_1B и AO_2E подобные. (Почему?) Следовательно,
$$\frac{AE}{AB} = \frac{r}{R} \text{ и } AE = \frac{ar}{R}.$$

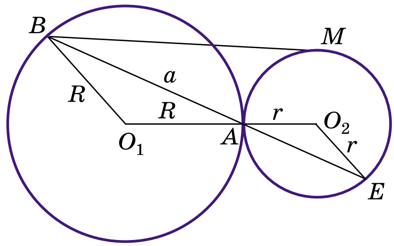

Рис. 8.10

По теореме о секущей и касательной имеем:
$$BM^2 = BA \cdot BE = BA \cdot (BA + AE),$$
$$BM^2 = a\cdot\left(a+\frac{ar}{R}\right),$$
$$BM = \sqrt{a\cdot\left(a+\frac{ar}{R}\right)} = a\cdot\sqrt{1+\frac{r}{R}}.$$

2. Пусть окружности касаются внутренним образом (рис. 8.11). Аналогично получим: $BM = a\cdot\sqrt{1-\dfrac{r}{R}}$.

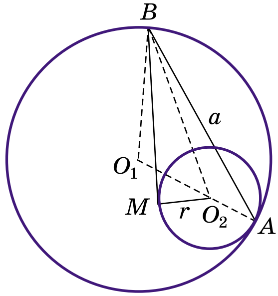

Рис. 8.11

Ответ: $a\cdot\sqrt{1\pm\dfrac{r}{R}}$.

Пример 6. Дана окружность радиуса 2 с центром O. Хорда AB пересекает радиус OC в точке D, причем $\angle CDA = 120°$. Найти радиус окружности, вписанной в угол ADC и касающейся дуги AC, если $OD=\sqrt{3}$.

Решение. Возможны два случая расположения указанной окружности в зависимости от типа касания с данной окружностью. В обоих случаях центры O_1 и O_2 этих окружностей будут лежать на биссектрисе угла ADC (рис. 8.12).

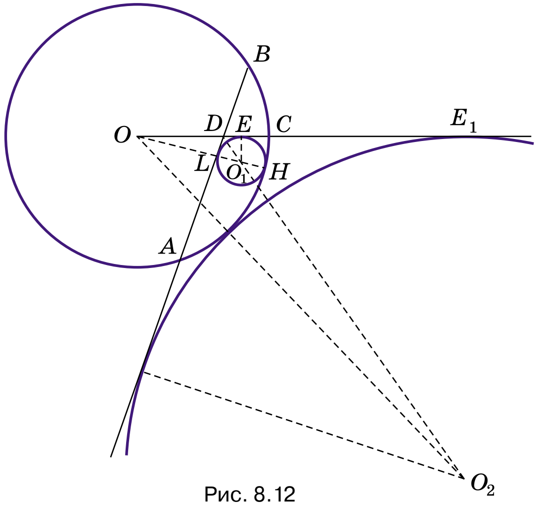

Рис. 8.12

1. Рассмотрим внутреннее касание окружностей. Пусть радиус искомой окружности с центром в точке O_1 равен r. E — точка касания этой окружности с радиусом OC. В прямоугольном треугольнике DEO_1 $\angle EDO_1 = 60°$ (O_1D — биссектриса угла ADC),

$$DE = r\cdot \operatorname{ctg} 60° = \frac{r}{\sqrt{3}}.$$

Используя теорему о секущей и касательной, получим:

$$OL \cdot OH = OE^2,$$

$$(2-2r)\cdot 2=\left(\sqrt{3}+\frac{r}{\sqrt{3}}\right)^2,$$

$$r^2 + 18r - 3 = 0.$$

Условию задачи удовлетворяет положительный корень $r=2\sqrt{21}-9$.

2. В случае внешнего касания искомая окружность радиуса R с центром в точке O_2 касается продолжений сторон DC и DA и данной окружности. Проводя аналогичные вычисления, получим: $R=3+2\sqrt{3}$.

Ответ: $2\sqrt{21}-9$ или $3+2\sqrt{3}$.

Расположение центров окружностей относительно общей хорды

В условии задач этого типа фигурируют две пересекающиеся окружности, но не указано расположение центров окружностей относительно их общей хорды (рис. 8.13 и 8.14).

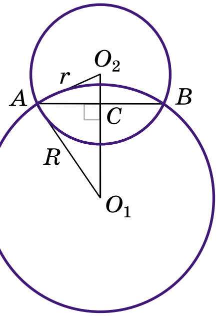

Рис. 8.13

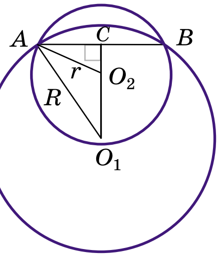

Рис. 8.14

При решении подобных задач полезно напомнить учащимся следующие факты.

Пересекающиеся окружности в точках A и B имеют общую хорду AB.

Общая хорда перпендикулярна линии центров и делится ею пополам.

Пример 7. Окружности радиусов 10 и 17 пересекаются в точках A и B. Найти расстояние между центрами окружностей, если $AB = 16$.

Решение. Отрезок AB — общая хорда данных окружностей. В условии не указано расположение центров окружностей относительно AB. Поэтому рассмотрим два случая.

1. Пусть центры окружностей лежат по разные стороны от их общей хорды AB (см. рис. 8.13). Линия центров O_1O_2 перпендикулярна хорде AB и делит ее в точке пересечения C пополам. Это следует из равенства треугольников O_1AO_2 и O_1BO_2 по трем сторонам и совпадения оснований высот, опущенных из точек A и B. Тогда из прямоугольных треугольников O_1AC и O_2AC соответственно получаем:

$$O_1C = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$$

и

$$O_2C = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6.$$

Искомое расстояние между центрами равно

$$O_1O_2 = O_1C + O_2C = 15 + 6 = 21.$$

2. Пусть центры окружностей лежат по одну сторону от хорды AB (см. рис. 8.14). Аналогично поступая, находим:

$$O_1O_2 = O_1C - O_2C = 15 - 6 = 9.$$

Ответ: 21 или 9.

Пример 8. Окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Известно, что $\angle AO_1B = 90°$, $\angle AO_2B = 60°$, $O_1O_2 = a$. Найти радиусы окружностей.

Решение. Отрезок AB — общая хорда данных окружностей. В условии не указано расположение центров окружностей относительно AB. Поэтому рассмотрим два случая.

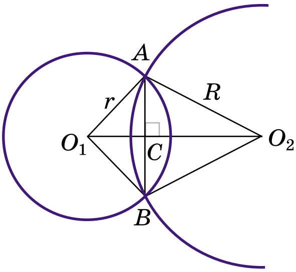

Рис. 8.15

1. Пусть центры окружностей лежат по разные стороны от их общей хорды AB (рис. 8.15). Линия центров является биссектрисой углов AO_1B и AO_2B. (Объясните, почему.) Получаем:

$$\angle AO_1C = 45°,\ \angle AO_2C = 30°.$$

Пусть $AC = x$. Треугольник AO_1C — прямоугольный, $\angle AO_1C = \angle CAO_1 = 45°$. Значит, $O_1C = AC = x$. Для треугольника AO_2C имеем:

$$O_2C = AC \cdot \operatorname{ctg} 30° = x\sqrt{3}.$$

Тогда

$$O_1O_2 = O_1C + O_2C, \text{ или } a = x + x\sqrt{3}.$$

Отсюда находим $x = \dfrac{a}{\sqrt{3}+1}$. Тогда

$$O_1A = x\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1},$$

$$O_2A = 2AC = 2x = \frac{2a}{\sqrt{3}+1}.$$

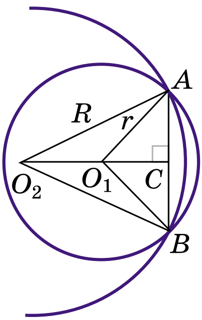

Рис. 8.16

2. Пусть центры окружностей лежат по одну сторону от хорды AB (рис. 8.16). Аналогично рассуждая, получим:

$$O_1A = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}, \quad O_2A = \frac{2a}{\sqrt{3}-1}.$$

Ответ: $\dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$, $\dfrac{2a}{\sqrt{3}+1}$ или $\dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}$, $\dfrac{2a}{\sqrt{3}-1}$.

Расположение центров окружностей относительно хорды большей окружности

В условиях этих задач фигурируют две окружности, одна из которых расположена внутри другой и касается хорды окружности большего радиуса (рис. 8.18).

Полезно напомнить учащимся следующее.

Вычисления в этой задаче сводятся к применению теоремы Пифагора в треугольнике O_1O_2C, при этом расстояние O_1A находится из теоремы Пифагора для треугольника MAO_1 (рис. 8.17 и 8.18).

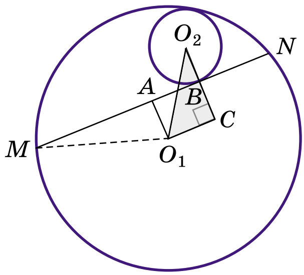

Рис. 8.17

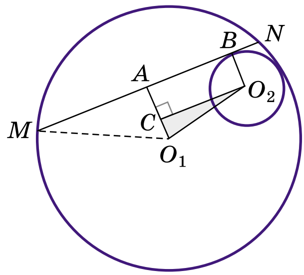

Рис. 8.18

Пример 9. Окружности радиусов 20 и 3 касаются внутренним образом. Хорда AB большей окружности касается меньшей окружности в точке M. Найти длины отрезков AM и MB, если $AB = 32$.

Решение. Пусть точка N — середина хорды AB, тогда расстояние от центра O окружности радиуса 20 до хорды AB равно

$$ON = \sqrt{OB^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12.$$

Рассмотрим два случая.

1. Центры O и O_1 окружностей расположены по разные стороны относительно хорды AB (рис. 8.19), $O_1M = 3$.

Продолжив перпендикуляр O_1M к хорде AB за точку M и опустив на него перпендикуляр из центра O, получим прямоугольный треугольник OO_1C, $OO_1 = 20 - 3 = 17$, $O_1C = O_1M + MC = O_1M + ON = 3 + 12 = 15$ и $OC = MN$. Тогда из теоремы Пифагора для треугольника OO_1C получаем:

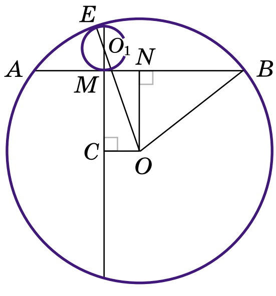

Рис. 8.19

$$OC = \sqrt{OO_1^2 - O_1C^2} = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8.$$

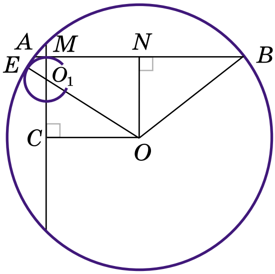

Рис. 8.20

Тогда
$$AM = AN - MN = 16 - 8 = 8$$
и
$$MB = MN + NB = 8 + 16 = 24.$$

2. Центры O и O_1 окружностей расположены по одну сторону относительно хорды AB (рис. 8.20). Из теоремы Пифагора для треугольника OO_1C получаем:
$$OC = \sqrt{OO_1^2 - O_1C^2} = \sqrt{17^2 - 9^2} = 4\sqrt{13}.$$

Тогда
$$AM = AN - MN = 16 - 4\sqrt{13}$$
и
$$MB = MN + NB = 4\sqrt{13} + 16.$$

Замечание. В данной задаче можно рассмотреть еще два случая, когда точка касания M расположена правее точки N. В этом случае ответы будут
$$AM = 24 \text{ и } MB = 8 \text{ или } AM = 16 + 4\sqrt{13} \text{ и } MB = 16 - 4\sqrt{13}.$$

Ответ: 24 и 8; $16 + 4\sqrt{13}$ и $16 - 4\sqrt{13}$.

Пример 10. Расстояние между центрами двух окружностей равно $5r$. Одна из окружностей имеет радиус r, а вторая — $7r$. Хорда большей окружности касается меньшей окружности и делится точкой касания в отношении 1 : 6. Найти длину этой хорды.

Решение. Воспользуемся рисунками 8.17 и 8.18. Пусть хорда $MN = 7x$. Тогда расстояние от центра O_1 до этой хорды равно
$$O_1A = \sqrt{MO_1^2 - \left(\frac{MN}{2}\right)^2} = 7\sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4}},$$

а
$$AB = AN - NB = \frac{7x}{2} - x = \frac{5x}{2}.$$

Рассмотрим два случая.

1. Центры O_1 и O_2 окружностей расположены по разные стороны относительно хорды MN. Так как $O_1O_2 = 5r$, $O_2B = r$, то, продолжив перпендикуляр O_2B к хорде MN за точку B и опустив на него перпендикуляр из O_1, получим прямоугольный треугольник O_1O_2C, в котором
$$O_2C = O_2B + BC = r + 7\sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4}} \text{ и } O_1C = AB.$$

Тогда из теоремы Пифагора для треугольника O_1O_2C получаем:

$$O_1C^2 = O_1O_2^2 - O_2C^2 \text{ или } \frac{25x^2}{4} = 25r^2 - \left(r + 7\sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4}}\right)^2.$$

Раскрывая скобки, получаем уравнение

$$6x^2 - 25r^2 = 14r\sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4}},$$

или

$$\begin{cases} 36x^4 - 251x^2r^2 + 429r^4 = 0, \\ 6x^2 - 25r^2 \ge 0. \end{cases}$$

Последняя система не имеет решений, так как корни уравнения $x_1 = r\sqrt{3}$ и $x_2 = \frac{\sqrt{143}}{6}r$ не удовлетворяют условию $6x^2 - 25r^2 \ge 0$.

Это значит, что такой случай невозможен.

2. Центры O_1 и O_2 окружностей расположены по одну сторону относительно хорды MN. Так как $O_1O_2 = 5r$, $O_2B = r$, то, опустив на отрезок O_1A перпендикуляр из центра O_2, получим прямоугольный треугольник O_1O_2C, в котором

$$O_1C = AO_1 - AC = 7\sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4}} - r \text{ и } O_2C = AB.$$

Тогда из теоремы Пифагора для треугольника O_1O_2C получаем:

$$CO_2^2 = O_1O_2^2 - O_1C^2, \text{ или } \frac{25x^2}{4} = 25r^2 - \left(7\sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4}} - r\right)^2.$$

Раскрывая скобки, получаем уравнение

$$25r^2 - 6x^2 = 14r\sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4}},$$

или

$$\begin{cases} 36x^4 - 251x^2r^2 + 429r^4 = 0, \\ 25r^2 - 6x^2 \ge 0. \end{cases}$$

Получаем два решения, $x_1 = r\sqrt{3}$ и $x_2 = \frac{\sqrt{143}}{6}r$. Отсюда находим два значения: $MN = 7\sqrt{3}r$ и $MN = \frac{7\sqrt{143}}{6}r$.

Ответ: $7\sqrt{3}r$ и $\frac{7\sqrt{143}}{6}r$.

Пример 11. (*ЕГЭ-2010*) В окружности, радиус которой равен 15, проведена хорда $AB = 24$. Точка C лежит на хорде AB так, что $AC : BC =$

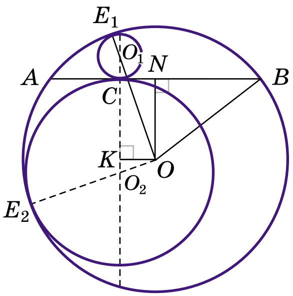

Рис. 8.21

$= 1 : 2$. Найти радиус окружности, касающейся данной окружности и касающейся хорды AB в точке C.

Решение. Возможны два случая расположения указанной окружности (рис. 8.21). Центры этих окружностей O_1 и O_2 будут лежать на перпендикуляре к хорде AB, проходящем через точку C.

1. Пусть точки O и O_1, где O — центр данной окружности, а O_1 — центр окружности, указанной в условии, лежат по разные стороны относительно прямой AB. Так как $AC : BC = 1 : 2$, то $AC = 8$.

Пусть N — середина хорды AB. Тогда из прямоугольного треугольника ONB получаем:

$$ON = \sqrt{OB^2 - NB^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9.$$

Пусть K — середина хорды, перпендикулярной AB и проходящей через точку C. Четырехугольник $KCNO$ — прямоугольник,

$$OK = CN = AN - AC = 12 - 8 = 4.$$

Пусть искомый радиус равен r. Так как центры O, O_1 и точка касания E_1 лежат на одной прямой, то

$$OO_1 = OE_1 - O_1E_1 = 15 - r.$$

Из теоремы Пифагора для прямоугольного треугольника KO_1O, в котором $OK = 4$, $OO_1 = 15 - r$ и $KO_1 = KC + CO_1 = 9 + r$, получаем:

$$OO_1^2 = OK^2 + KO_1^2,$$

или

$$(15 - r)^2 = 4^2 + (9 + r)^2.$$

Отсюда $r = \dfrac{8}{3}$.

2. Точки O и O_2 лежат по одну сторону относительно прямой AB (см. рис. 8.21). В этом случае из теоремы Пифагора для прямоугольного треугольника KO_2O, в котором $OK = 4$, $OO_2 = 15 - r$ и $KO_2 = CO_2 - KC = r - 9$, получаем: $r = \dfrac{32}{3}$.

Ответ: $\dfrac{8}{3}$ и $\dfrac{32}{3}$.

Расположение точек касания окружности и прямой

Перед решением задач этого типа полезно еще раз разобрать с учащимися **опорную задачу**, которая была использована в лекции 7.

Отрезок общей внешней касательной к двум касающимся окружностям радиусов r и R равен $2\sqrt{Rr}$.

Доказательство. Из прямоугольного треугольника O_1O_2E (рис. 8.22) получаем:

$$AB = O_1E = \sqrt{O_1O_2^2 - EO_2^2} =$$
$$= \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{Rr}.$$

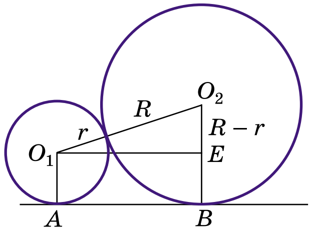

Рис. 8.22

Пример 12. На стороне BA угла ABC, равного $30°$, взята такая точка D, что $AD = 2$ и $BD = 1$. Найти радиус окружности, проходящей через точки A, D и касающейся прямой BC.

Решение. Центр искомой окружности O — точка пересечения серединного перпендикуляра к отрезку AD и перпендикуляра к прямой BC, восставленного из точки касания E (рис. 8.23) окружности и прямой. Возможны два варианта положения окружности. В первом случае окружность касается луча BC, во втором точка касания E_1 лежит на продолжении луча BC за точку B.

1. Пусть точка касания лежит на луче BC. Тогда по теореме о касательной и секущей имеем:

$$BE^2 = BD \cdot AB = 1 \cdot 3 = 3,$$

откуда $BE = \sqrt{3}$.

В треугольнике BDE $\angle DBE = 30°$, $BD = 1$, $BE = \sqrt{3}$. Тогда из теоремы косинусов получаем:

$$DE^2 = DB^2 + BE^2 - 2 \cdot DB \cdot BE \cdot \cos \angle ABE = 1,$$

то есть $DE = 1$. Так как $BD = DE$, то треугольник BDE — равнобедренный и $\angle BED = 30°$. Поскольку этот угол образован касательной BE и хордой DE, то дуга окружности DE равна $60°$. Следовательно, искомый радиус окружности равен хорде $DE = 1$. Тогда центр O окружности совпадает с серединой отрезка AD.

2. В случае, когда точка касания лежит на продолжении луча BC за точку B (см. рис. 8.23), также имеем:

$$BE_1^2 = BD \cdot AB = 1 \cdot 3 = 3,$$

откуда $BE_1 = \sqrt{3}$. Сравнивая прямоугольные треугольники BE_1G и BEO, находим: $BG = BO = 2$, $CE_1 = OE = 1$, $\angle BGE_1 = 60°$. Из прямоугольного треугольника GO_1O, в котором $\angle OGO_1 = 60°$, $GO = 4$, находим $GO_1 = 8$. Радиус второй окружности равен $GO_1 - GE_1 = 8 - 1 = 7$.

Ответ: 1 или 7.

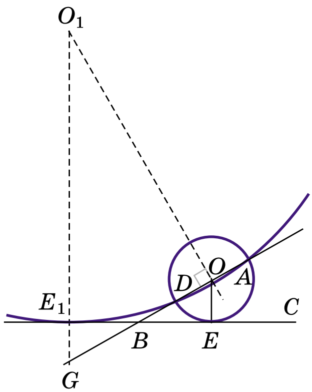

Рис. 8.23

Пример 13. Окружности радиусов 4 и 9 касаются внешним образом, лежат по одну сторону от некоторой прямой и касаются этой прямой. Найти радиус окружности, касающейся каждой из двух данных и той же прямой.

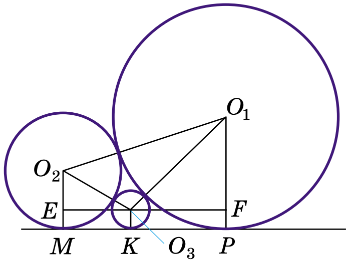

Рис. 8.24

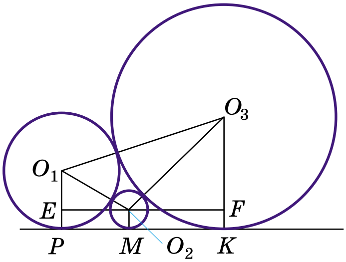

Рис. 8.25

Решение. Перебор вариантов в задаче зависит от расположения точки касания третьей окружности с прямой относительно точек касания первых двух окружностей с этой прямой. Рассмотрим первый случай касания искомой окружности с центром O_3 радиуса r_3 и двух данных окружностей (рис. 8.24). Тогда $MP = MK + KP$. Так как отрезок общей внешней касательной к двум касающимся окружностям радиусов r и R равен $2\sqrt{Rr}$ (см. опорную задачу), то имеем:

$$2\sqrt{4 \cdot 9} = 2\sqrt{4 \cdot r_3} + 2\sqrt{9 \cdot r_3},$$

откуда $6 = 2\sqrt{r_3} + 3\sqrt{r_3}$, или $r_3 = 1{,}44$.

Второй случай (рис. 8.25) решается аналогично.

Ответ: 1,44 или 36.

Пример 14. Точка O — центр окружности радиуса 2. На продолжении радиуса OM взята точка A. Через точку A проведена прямая, касающаяся окружности в точке K. Известно, что $\angle\, OAK = 60°$. Найти радиус окружности, вписанной в угол OAK и касающейся данной окружности внешним образом.

Решение. Центр O_1 искомой окружности лежит на биссектрисе угла A, поэтому $\angle\, O_1AK_1 = 30°$ (рис. 8.26). K_1 — точка касания этой окружности с прямой AK. Из треугольника O_1AK_1 находим $AK_1 = r \cdot \text{ctg } 30° = r\sqrt{3}$, где r — радиус искомой окружности. Из треугольника OAK находим:

$$AK = OK \cdot \text{ctg } 60° = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Рассмотрение случаев в данной задаче связано с расположением точки касания искомой окружности с прямой AK относительно точки касания Y (левее, правее).

Отрезок внешней касательной окружностей с центрами O и O_1 равен $2\sqrt{OK \cdot O_1K_1} = 2\sqrt{2r}$ (см. опорную задачу). Тогда получаем:

$AK = AK_1 + K_1K$, $\dfrac{2}{\sqrt{3}} = r\sqrt{3} + 2\sqrt{2r}$.

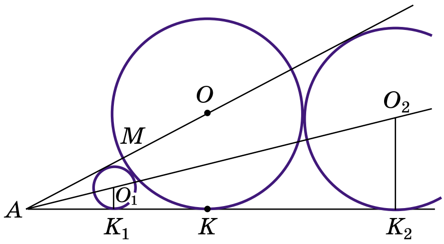

Рис. 8.26

Решаем квадратное уравнение

$$3t^2 + 2\sqrt{6}t - 2 = 0,$$

где $t = \sqrt{r}$. Получаем единственный положительный корень

$$t = \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{6}}{3}.$$

Тогда

$$r = \left(\frac{2\sqrt{3} - \sqrt{6}}{3}\right)^2 = \frac{6 - 4\sqrt{2}}{3}.$$

Еще один случай расположения окружностей рассмотрите самостоятельно.

Ответ: $2 \pm \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

Задачи для самостоятельного решения

3. Найти радиус окружности, вписанной в угол MKN, равный $2\arcsin 0{,}6$, и касающейся окружности радиуса 4, также вписанной в угол MKN.

4. Вершина равнобедренного треугольника с боковой стороной 5 и основанием 8 служит центром окружности радиуса 2. Найти радиус окружности, касающейся данной и проходящей через концы основания треугольника.

5. Расстояние между центрами двух окружностей равно $10r$. Одна из окружностей имеет радиус $5r$, другая $6r$. Некоторая прямая пересекает меньшую окружность в точках A и B и касается большей в точке C. Найдите длину хорды AB, если $AB = 2BC$.

6. Две окружности радиусов 1 и 4 касаются друг друга. Найдите радиус окружности, касающейся обеих данных окружностей и прямой, проходящей через их центры.

7. Угол ABC равен $60°$, причем $AB = BC = a$. Окружность S_1 касается AB в точке A, а окружность S_2 касается BC в точке C, кроме того, эти окружности касаются внешним образом. Найдите радиусы этих окружностей, если известно, что их отношение равно двум.

Интерпретация аналитического способа решения задачи

Применение аналитического способа решения геометрической задачи может привести к ее многовариантности. Наличие нескольких корней уравнения подсказывает о возможном существовании нескольких конфигураций, которые требуют дальнейшего исследования с целью реализации условия для каждого из полученных корней уравнения.

Интерпретация решения уравнения sin x = a

Если в составленном уравнении неизвестной является величина угла, то в конечном итоге решение его сводится к одному из простейших тригонометрических уравнений. Только одно уравнение вида $\sin x = a$, $0 < a < 1$, определенное на множестве чисел $(0; \pi)$, имеет два корня α или $\pi - \alpha$. На следующих простых задачах необходимо показать учащимся интерпретацию каждого из корней вышеприведенного уравнения.

1. Радиус окружности равен 1. Найдите величину вписанного угла, опирающегося на хорду, равную $\sqrt{2}$. Ответ дать в градусах.

Ответ: 45° или 135°.

2. Площадь треугольника равна 12. Две его стороны равны 6 и 8. Найдите угол между этими сторонами.

Ответ: 30° или 150°.

Пример 15. Около треугольника ABC описана окружность с центром O, угол AOC равен 60°. В треугольник ABC вписана окружность с центром M. Найти угол AMC.

Решение. В равнобедренном треугольнике AOC ($OC = OA = R$) угол при вершине равен 60°. Следовательно, треугольник AOC — равносторонний и $AC = R$.

Используя следствие из теоремы синусов, получаем:

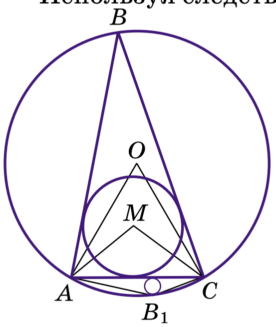

Рис. 8.27

$$AC = 2R\sin B,\ R = 2R\sin B,\ \sin B = \frac{1}{2}.$$

Отсюда $\angle B = 30°$ или $\angle B = 150°$.

1. Пусть $\angle B = 30°$ (рис. 8.27), тогда $\angle A + \angle C = 150°$. Центр вписанной окружности M лежит на пересечении биссектрис треугольника, значит,

$$\angle MAC + \angle MCA = 150° : 2 = 75°.$$

Тогда

$$\angle AMC = 180° - 75° = 105°.$$

2. Случай, когда $\angle B_1 = 150°$, решается аналогично.

Ответ: 165° или 105°.

Пример 16. Трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC вписана в окружность с центром O. Найти высоту трапеции, если ее средняя линия равна 3 и $\sin\angle AOB = \frac{3}{5}$.

При решении подобных задач полезно напомнить учащимся следующие факты.

Проекция боковой стороны равнобедренной трапеции на большее основание равна полуразности оснований, а проекция диагонали — полусумме оснований (средней линии).

Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.

Решение. Пусть $\angle AOB = \alpha$ (рис. 8.28).

Проведем высоту BH и диагональ BD. Отрезок HD равен средней линии. Так как вписанный угол BDA в два раза меньше центрального угла AOB, то $\angle ADB = \frac{\alpha}{2}$. Из прямоугольного треугольника BHD найдем высоту $BH = HD \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Используем формулу тангенса половинного угла $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$. Тогда $BH = \frac{3\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$.

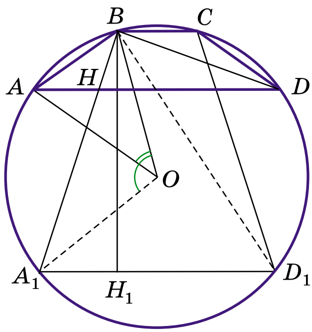

Рис. 8.28

1. Рассмотрим случай, когда $\angle AOB = \alpha$ — острый. Находим:

$$\cos\alpha = \frac{4}{5} \text{ и } BH = \frac{3\cdot\frac{3}{5}}{1+\frac{4}{5}} = 1.$$

2. Второй случай, когда $\angle AOB = \alpha$ — тупой, можно рекомендовать учащимся рассмотреть самостоятельно.

Ответ: 1 или 9.

Интерпретация решения алгебраического уравнения

Если в составленном уравнении неизвестной является длина отрезка, то составленное алгебраическое уравнение (чаще квадратное) может иметь два положительных корня, которые удовлетворяют условию задачи, то есть ситуация, реализованная в условии, не определяется однозначно (см. пример 2).

Интересным является появление отрицательного корня уравнения, интерпретация которого может быть проведена вполне разумно. Для заострения проблемы учителю необходимо предлагать учащимся задачи, в которых получаются посторонние на первый взгляд корни, но их появление можно и нужно объяснить.

Пример 17. Дана окружность радиуса 13. Точка M — середина радиуса OK. Хорда AC перпендикулярна радиусу OK. Найти расстояние BM, если известно, что $AB - BK = 4$ (рис. 8.29 и 8.30).

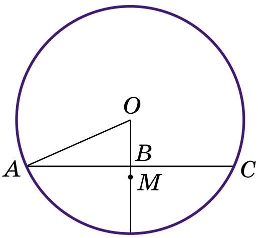

Рис. 8.29

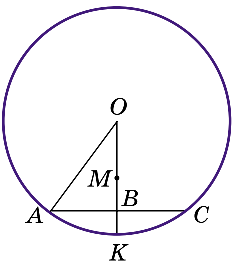

Рис. 8.30

Решение. Обозначим BM через x (рис. 8.29), тогда имеем:

$$OB = 6{,}5 - x,\ AB = \sqrt{169 - (6{,}5 - x)^2},$$
$$BK = 6{,}5 + x.$$

Используя теорему Пифагора для треугольника AOB, получаем уравнение

$$\sqrt{169 - (6{,}5 - x)^2} = 10{,}5 + x,$$

или

$$x^2 + 4x - 8{,}25 = 0.$$

Отсюда находим корни

$$x_1 = 1{,}5 \text{ и } x_2 = -5{,}5.$$

Положительный корень соответствует ситуации рисунка 8.29.

Интерпретируем отрицательный корень: точка B расположена между точками M и K, то есть отрезок MB с длиной 5,5 откладывается в противоположном направлении (рис. 8.30).

Ответ: 1,5 или 5,5.

Пример 18. (*ЕГЭ-2011*) Окружность, вписанная в треугольник ABC, площадь которого равна 36, касается средней линии, параллельной стороне BC. Известно, что $BC = 9$. Найти сторону AB.

Решение. Обозначим $AB = x$, $AC = y$, p — полупериметр треугольника ABC. Пусть точки M и N — середины сторон AB и AC соответственно (рис. 8.31). Тогда $MN = \frac{1}{2}BC = \frac{9}{2}$.

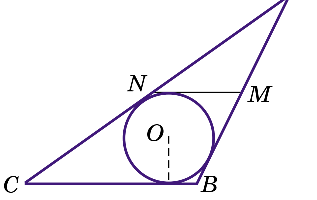

Рис. 8.31

В трапецию $BMNC$ вписана окружность, поэтому

$$BM + CN = BC + MN = 9 + \frac{9}{2} = \frac{27}{2}.$$

Значит,

$$x + y = AB + AC = 2BM + 2CN = 27,$$

$$p = \frac{AB + AC + BC}{2} = \frac{x + y + 9}{2} = 18.$$

По формуле Герона

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p - AB)(p - AC)(p - BC)} =$$

$$= \sqrt{18(18 - x)(18 - y)(18 - 9)} =$$

$$= 9\sqrt{2(18 - x)(18 - y)} = 36.$$

Получаем уравнение

$$\sqrt{2(18 - x)(18 - y)} = 4.$$

Возводя обе его части в квадрат и учитывая равенство $x + y = 27$, имеем:

$$(18 - x)(18 - y) = 8,$$

$$(18 - x)(18 - 27 + x) = 8,$$

$$x^2 - 27x + 170 = 0.$$

Отсюда находим, что $x = 10$ или $x = 17$.

Получаем $y = 17$ при $x = 10$ и $y = 10$ при $x = 17$. Это означает, что условию задачи соответствует треугольник со сторонами 10, 17, 9. Полученные значения x соответствуют двум способам обозначения вершин буквами.

Ответ: 10 или 17.

Задачи для самостоятельного решения

8. (*ЕГЭ-2011*) Диаметр окружности, вписанной в треугольник PQR, площадь которого равна 132, в три раза меньше высоты, проведенной из вершины P. Известно, что $QR = 11$. Найдите сторону PQ.

9. (*ЕГЭ-2011*) Окружность, вписанная в треугольник KLM, площадь которого равна 66, касается средней линии, параллельной стороне ML. Известно, что $ML = 11$. Найдите MK.

10. (*ЕГЭ-2011*) Дана трапеция $ABCD$ с боковыми сторонами $AB = 36$, $CD = 34$ и верхним основанием $BC = 10$. Известно, что $\cos \angle ABC = -\frac{1}{3}$. Найдите BD.

11. Медиана BM треугольника ABC равна его высоте AH. Найти угол MBC.

Ответы на задачи для самостоятельного решения

1. $\frac{45}{16}$ или $\frac{80}{27}$. **2.** $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ или $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. **3.** 1 и 16. **4.** $\frac{17}{2}$ или $\frac{41}{10}$. **5.** $2r\sqrt{21}$ или $6r$. **6.** $\frac{48}{25}$ или $\frac{80}{9}$. **7.** $\frac{\sqrt{35}-3\sqrt{3}}{4}a$ и $\frac{\sqrt{35}-3\sqrt{3}}{2}a$, или $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ и $\frac{a\sqrt{3}}{3}$, или $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ и $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$, или $\frac{\sqrt{35}+3\sqrt{3}}{4}a$ и $\frac{\sqrt{35}+3\sqrt{3}}{2}a$. **8.** 25 или 30. **9.** 13 или 20. **10.** 36 или $8\sqrt{19}$. **11.** $30°$ или $150°$.

Литература

1. *Гордин Р.К.* ЕГЭ-2011. Математика. Задача С4. Геометрия. Планиметрия / под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. — М.: МЦНМО, 2011.

2. *Корянов А.Г., Прокофьев А.А.* Математика. ЕГЭ-2011 (типовые задания С4). Планиметрические задачи с неоднозначностью в условии (многовариантные задачи). URL: http://www.alexlarin.net/ege/2011/C4-2011.pdf

3. *Полонский В.Б., Рабинович Е.М., Якир М.С.* Учимся решать задачи по геометрии. Учеб.-метод. пособие. — К.: Магистр, 1996 (глава IV «Многовариантные задачи»).

4. *Цукарь А.Я.* О полезности интерпретации решения задачи // Математика в школе, 2000, № 7.

Содержание