Propuesta proyecto: Librería en R para la aproximación de la solución de ecuaciones diferenciales de primer orden mediante métodos numéricos.

Análisis Numérico

Laura Donado y Jhonny Parra

La propuesta consiste en implementar tres funciones basadas en métodos numéricos de la familia de métodos Runge-Kutta para la aproximación de la solución de ecuaciones diferenciales de primer orden: el método de Euler, el método de Dormand-Prince y el método de Runge-Kutta de cuarto orden. A continuación se muestra el diseño inicial para la implementación de las funciones en R:

- **Método de Euler:**

  Descripción: El método de Euler es un método de integración numérica para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) a partir de un valor inicial dado. Es el método más simple de todos los métodos numéricos para resolver problemas de valor inicial y el más simple de los métodos Runge-Kutta, es decir, de primer orden.

  El método de Euler es iterativo y consiste en encontrar la solución de una ecuación diferencial de primer orden y valores iniciales conocidos para un rango de valores. Partiendo de un valor inicial x0 y avanzando con un paso h, se pueden obtener los valores de la solución de la siguiente manera:

  $$y_k = y_{k-1} + h * f(x_{k-1},\, y_{k-1})$$

  Donde h representa el ancho de los pasos, y se calcula de la siguiente manera:

  $$h = \frac{x_n - x_{n-1}}{n}$$

  Uso:

  ```
  euler(f, ti, tf, y0, n)
  ```

  Argumentos de entrada:

  - f: Función en la forma diferencial $y' = f(x, y)$
  - ti, tf: Punto inicial y final del intervalo.
  - y0: Valor inicial en ti.
  - n: número de puntos o número de pasos de ti a tf.

  Salida:

Tabla con:

- x: Lista de valores en x calculados a partir de la definición del número de puntos y el intervalo establecido.
- y: Lista de valores aproximados de la función solución en los puntos de x usando el método de Euler.
- error: Errores absolutos entre el valor aproximado y la solución exacta en los puntos de x.

- gráfica: Gráfica que permita comparar la solución aproximada con la solución exacta.

Error: El método de Euler es un método de primer orden, lo que significa que el error local es proporcional al cuadrado del tamaño del paso, y el error global es proporcional al tamaño del paso.

- **Método Dormand-Prince:**

Descripción: El método de Dormand-Prince es un método para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO). Además, pertenece a la familia de métodos Runge-Kutta. Específicamente, este método evalúa seis veces la función para calcular las soluciones de cuarto y quinto orden.

La diferencia de este método es que calcula hasta la séptima derivada de y, mientras que los otros métodos utilizan combinaciones lineales de y y y'. En este método, el siguiente valor se calcula sumando el presente valor (y_n) con el promedio de los seis incrementos, los cuales son el producto del ancho de los pasos y una pendiente aproximada por la función $f(x,y)$.

Dichos incrementos se calculan con los coeficientes de la tabla a continuación. La primera fila describe k_0, la segunda k_1, en adelante. La penúltima fila describe los coeficientes para el cálculo de y_{k+1}, que es la solución de orden cuatro. La última fila describe los coeficientes para el cálculo de z_{k+1}, que es la solución de orden cinco.

- K1 es el incremento basado en la pendiente al comienzo del intervalo. Utiliza el método de euler.
- K2 a k5 son los incrementos basados en la pendiente en 0.2, 0.3, 0.8 y 0.9 del intervalo, respectivamente.
- K6 es el incremento basado en la pendiente al final.

0							
1/5	1/5						
3/10	3/40	9/40					
4/5	44/45	−56/15	32/9				
8/9	19372/6561	−25360/2187	64448/6561	−212/729			
1	9017/3168	−355/33	46732/5247	49/176	−5103/18656		
1	35/384	0	500/1113	125/192	−2187/6784	11/84	
	35/384	0	500/1113	125/192	−2187/6784	11/84	0
	5179/57600	0	7571/16695	393/640	−92097/339200	187/2100	1/40

Es decir,

$k_1 = h * f(t_k, y_k)$

$k_2 = h * f(t_k + \frac{1}{5}h,\ y_k + \frac{1}{5}k_1)$

$k_3 = h * f(t_k + \frac{3}{10}h,\ y_k + \frac{3}{40}k_1 + \frac{9}{40}k_2)$

…

$y_{k+1} = y_k + \frac{35}{384}k_1 + \frac{500}{1113}k_3 + \frac{125}{192}k_4 - \frac{2187}{6784}k_5 + \frac{11}{40}\ k_6$

$z_{k+1} = y_k + \frac{5179}{57600}k_1 + \frac{7571}{16695}k_3 + \frac{393}{640}k_4 - \frac{92097}{339200}k_5 + \frac{187}{2100}k_6 + \frac{1}{40}k_7$

Uso:

```
dormand_prince(f, ti, tf, y0, h)
```

Argumentos de entrada:

- f: Función en la forma diferencial $y' = f(x, y)$
- ti, tf: Punto inicial y final del intervalo.
- y0: Valor inicial en ti.
- n: número de puntos o número de pasos de ti a tf.

Salida:

Tabla con:

- x: Lista de valores en x calculados a partir de la definición del número de puntos y el intervalo establecido.
- y: Lista de valores aproximados de la función solución en los puntos de x usando el método de Euler.
- error: Errores absolutos entre el valor aproximado y la solución exacta en los puntos de x.

- gráfica: Gráfica que permita comparar la solución aproximada con la solución exacta.

Error: El error del presente método, para la solución de cuarto orden, se calcula como la diferencia entre la solución de cuarto y quinto orden.

- **Método Runge-Kutta:**

  Descripción: El método Runge-Kutta no es sólo un único método, sino una importante familia de métodos iterativos para aproximar las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias. El método de Runge-Kutta de cuarto orden es ampliamente utilizado por su exactitud, es referenciado como "RK4" o como el método "Runge-Kutta". Al igual que los anteriores métodos, ofrece una tabla de la función solución, con valores de "y" correspondientes a valores específicos de "x".

  Si se define un problema inicial como:

  $$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

  El método RK4 para este problema está dado por la ecuación:

  $$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}h\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)$$

  Donde

  $$\begin{cases} k_1 &= f\left(x_i, y_i\right) \\ k_2 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right) \\ k_3 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h\right) \\ k_4 &= f\left(x_i + h, y_i + k_3 h\right) \end{cases}$$

  Uso:

  ```
  runge_kutta(f, ti, tf, y0, n)
  ```

  Argumentos de entrada:

  - f: Función en la forma diferencial $y' = f(x, y)$
  - ti, tf: Punto inicial y final del intervalo.
  - y0: Valor inicial en ti.
  - n: número de puntos o número de pasos de ti a tf.

  Salida:

  Tabla con:

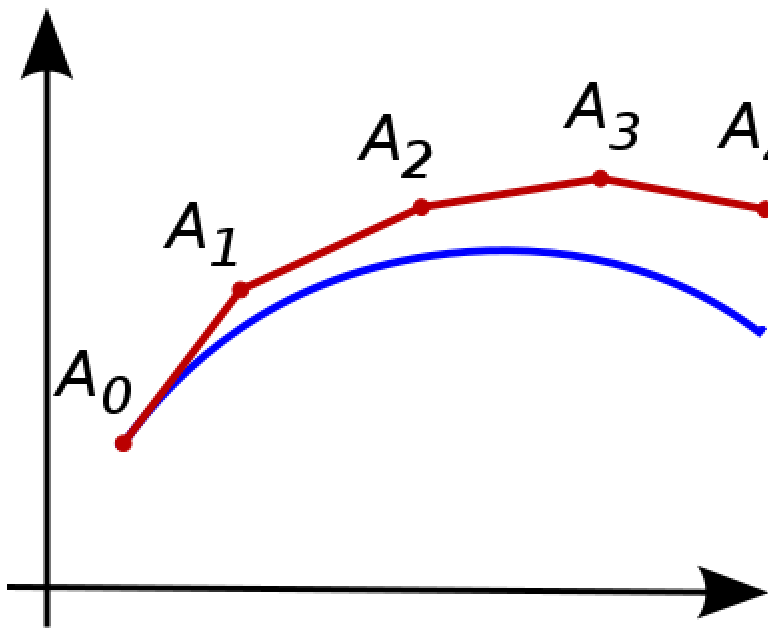
  - x: Lista de valores en x calculados a partir de la definición del número de puntos y el intervalo establecido.
  - y: Lista de valores aproximados de la función solución en los puntos de x usando el método de Runge-Kutta de cuarto orden.
  - error: Errores absolutos entre el valor aproximado y la solución exacta en los puntos de x.

  - gráfica: Gráfica que permita comparar la solución aproximada con la solución real.

Error: RK4 es un método de cuarto orden lo cual significa que el error por paso es del orden de $O(h^5)$ mientras que el error total acumulado es de orden $O(h^4)$.

Nota:

La gráfica que permita comparar la solución aproximada con la solución exacta cumple con la siguiente forma básica:



Donde los puntos Ai representan las soluciones aproximadas y la curva azul la función solución.

Bibliografía:
https://help.scilab.org/docs/6.0.1/en_US/DoPri.html
http://depa.fquim.unam.mx/amyd/archivero/DormandPrince_19856.pdf
https://cran.r-project.org/web/packages/pracma/pracma.pdf
https://www.intmath.com/differential-equations/11-eulers-method-des.php