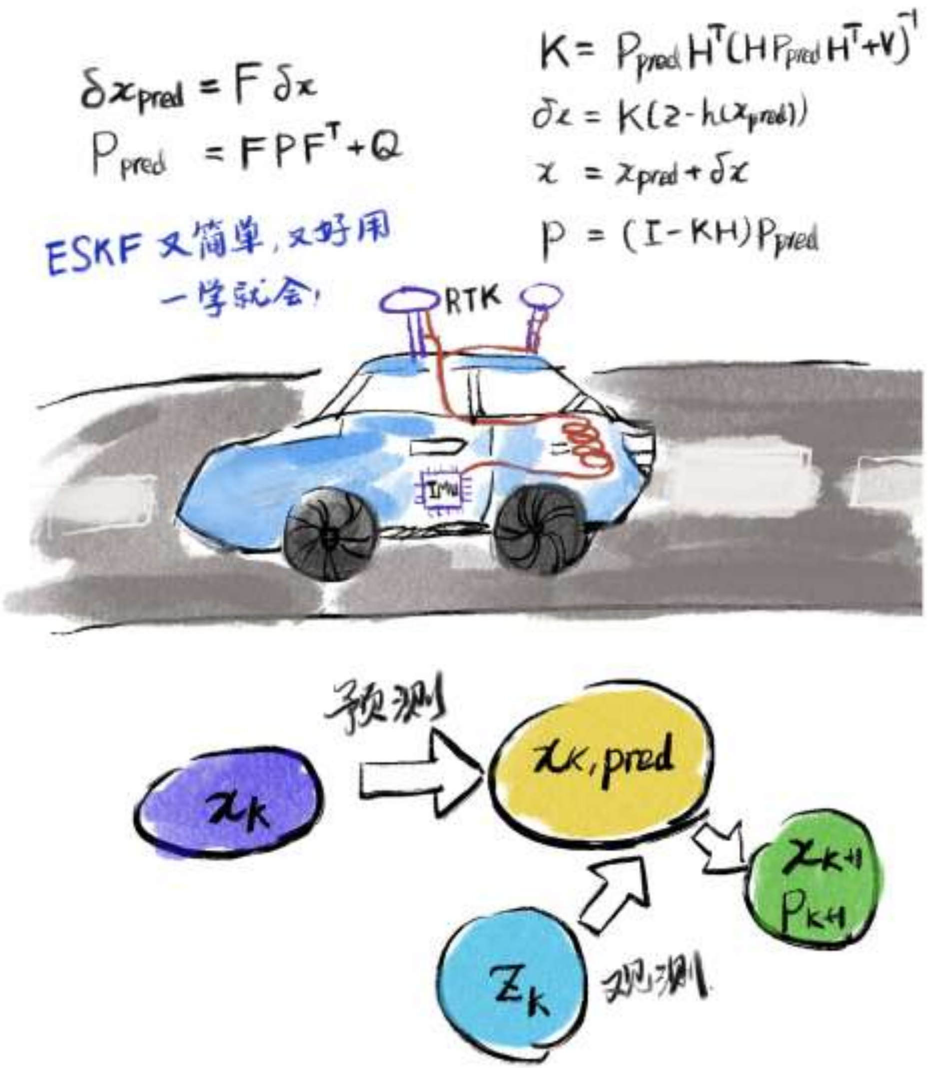
深蓝学院
shenlanxueyuan.com

惯性导航与组合导航

高翔

章节内容

- IMU系统运动学
- 使用IMU进行航迹推算
- 卫星导航
- ESKF理论推导
- ESKF的实现



1. IMU系统运动学

IMU系统运动学

在开始本节课程内容之前，我们先回答一个问题

- 人类是如何驾驭复杂系统的？

IMU系统运动学

从原理上说，汽车是一个相当复杂的系统。但驾驶汽车的人需要完全理解汽车工作原理吗？

实际上只需要知道：

- 踩下油门=汽车会前进
- 踩下刹车=汽车会停止
- 转动方向盘=汽车会转向

计算机也是一样：

- 编程人员：int a = 0; 函数声明、调用；向服务器读取网页；
- 计算机：读写内存、读写寄存器，调用CPU指令；
- 电路：高低电平变换、控制、通讯。

无论是电机、发动机，还是机械、电子或者
其他控制机构，给用户的接口永远是最简单的！

复杂系统永远需要向它的用户封装实现细节。

IMU系统运动学

传感器也需要封装这些内容：

- 温度计向用户输出温度，用户不在意内部是用水银测量还是电阻测量；
- 摄像头向用户输出视频，用户不必在意内部使用什么样的控制电路。

同理，站在惯性导航使用者角度来说，我们应该关心：

- IMU测量什么物理量？
- GNSS/GPS/RTK测量什么物理量？
- 它们的噪声是什么形式？

希望传感器能够封装它的细节：

- 不需要了解GNSS如何跟卫星或基站通信；
- 不需要了解IMU内部如何测量这些物理量。

IMU系统运动学

系统运动学

$$\dot{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{\omega}^{\wedge}, \quad \text{或 } \dot{\boldsymbol{q}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{q}\boldsymbol{\omega},$$
$$\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{v},$$
$$\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{a}.$$

注：

- 本课程统一使用wb右侧下标，故大部分公式可以省略下标；
- 速度和加速度默认取世界坐标系；
- 此处没有考虑重力，假设在宇宙或者虚拟空间。

IMU测量角速度与车体的加速度

$$\tilde{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{R}^{\top}\boldsymbol{a},$$
$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega}.$$

注：

- 上波浪表示测量值（有确定的数值）

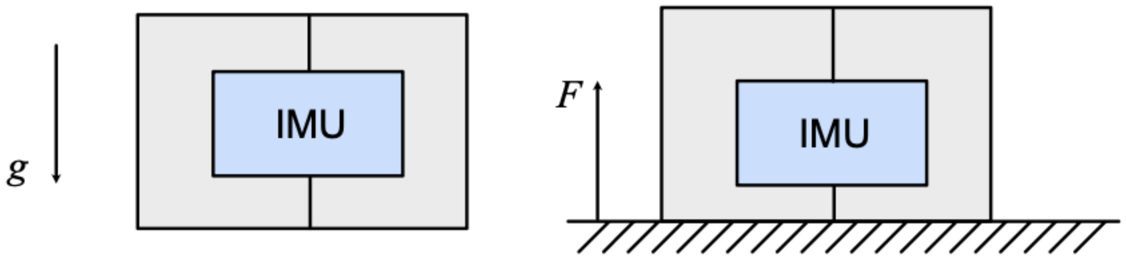
这就是IMU的观测方程（连续时间）。

IMU系统运动学

- IMU测量角速度与车体的加速度

地球表面受重力影响，所以实际测量值多一个重力：

$$\tilde{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{R}^{\top}(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{g}),$$
$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega}.$$



一些解释：

1. 车辆默认XYZ=前左上，Z指向上，所以g指向$-Z$方向；
2. 在地球上：物体自由落体时，IMU测不到加速度；物体静止时，IMU测到向上的支持力；
3. 因此：
   - 自由落体时，测到的加速度为零，实际$a = g$；
   - 水平静止时，测到的加速度为$-g$，实际$a = 0$；
4. 部分书籍使用的坐标系方向、符号都可能不同，所以测量方程也可能写成$a + g$形式，同时g取反向；
5. 有些实际的IMU会事先把g去掉，此时公式里就不含g。

IMU系统运动学

IMU噪声模型

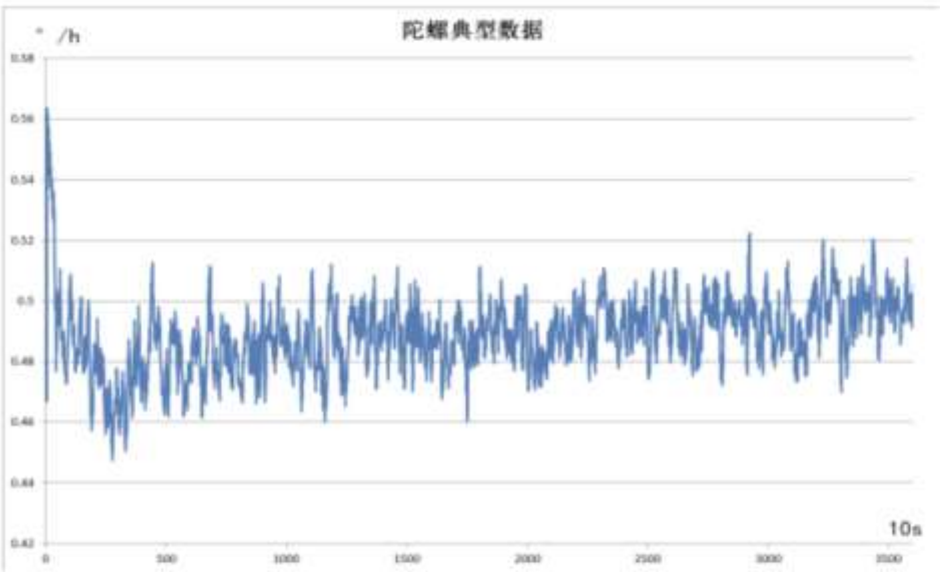
- IMU除了受测量噪声影响以外，还受零偏的影响；
- 零偏：实际角速度、加速度=0时，传感器仍有非零值。

$$\tilde{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{R}^\top(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{g}) + \boldsymbol{b}_a + \boldsymbol{\eta}_a,$$

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{b}_g + \boldsymbol{\eta}_g.$$

零偏为 $\boldsymbol{b}_g, \boldsymbol{b}_a$

测量噪声分别为 $\boldsymbol{\eta}_g, \boldsymbol{\eta}_a$



IMU系统运动学

IMU噪声模型

$$\tilde{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{R}^{\top}(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{g}) + \boldsymbol{b}_a + \boldsymbol{\eta}_a,$$

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{b}_g + \boldsymbol{\eta}_g.$$

零偏为 $\boldsymbol{b}_g, \boldsymbol{b}_a$

测量噪声分别为 $\boldsymbol{\eta}_g, \boldsymbol{\eta}_a$

连续时间下，测量噪声$\boldsymbol{\eta}_g, \boldsymbol{\eta}_a$为零均值高斯过程，零偏$\boldsymbol{b}_g, \boldsymbol{b}_a$为布朗运动。

噪声为零均值高斯过程：

$$\boldsymbol{w}(t) \sim \mathcal{GP}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}\delta(t - t')),$$

能量谱密度矩阵

零偏为布朗运动：

$$\dot{\boldsymbol{b}}(t) = \boldsymbol{\eta}_b(t),$$

一阶导数为高斯过程

$$\dot{\boldsymbol{b}}_a(t) = \boldsymbol{\eta}_{ba}(t) \sim \mathcal{GP}(\mathbf{0}, \mathrm{Cov}(\boldsymbol{b}_a)\delta(t - t')),$$

$$\dot{\boldsymbol{b}}_g(t) = \boldsymbol{\eta}_{bg}(t) \sim \mathcal{GP}(\mathbf{0}, \mathrm{Cov}(\boldsymbol{b}_g)\delta(t - t')).$$

注：

1. 由于角速度、加速度亦是角度、速度的导数，所以也可以将角速度、加速度测量噪声称为角度随机游走、速度随机游走；
2. 零偏并不是客观存在的物理量，而是一种数学模型，没有什么测量零偏的仪器；
3. 平时更实用的是离散时间模型，连续时间模型了解其定义即可。

IMU系统运动学

IMU噪声模型

$$\tilde{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{R}^\top(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{g}) + \boldsymbol{b}_a + \boldsymbol{\eta}_a,$$
$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{b}_g + \boldsymbol{\eta}_g.$$

零偏为 $\boldsymbol{b}_g, \boldsymbol{b}_a$

测量噪声分别为 $\boldsymbol{\eta}_g, \boldsymbol{\eta}_a$

我们平时处理的是离散时间下的测量值

$$\dot{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{\omega}^\wedge \qquad \boldsymbol{R}(t) = \boldsymbol{R}(t_0)\exp(\boldsymbol{\omega}^\wedge(t - t_0)).$$

离散时间噪声:

$$\boldsymbol{\eta}_g(k) \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{\Delta t}\mathrm{Cov}(\boldsymbol{\eta}_g)), \qquad \boldsymbol{b}_g(k+1) - \boldsymbol{b}_g(k) \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Delta t\, \mathrm{Cov}(\boldsymbol{b}_g)),$$
$$\boldsymbol{\eta}_a(k) \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{\Delta t}\mathrm{Cov}(\boldsymbol{\eta}_a)). \qquad \boldsymbol{b}_a(k+1) - \boldsymbol{b}_a(k) \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Delta t\, \mathrm{Cov}(\boldsymbol{b}_a)).$$

实际中甚至不使用协方差矩阵，而是用对角线上的标准差:

$$\sigma_g(k) = \frac{1}{\sqrt{\Delta t}}\sigma_g, \quad \sigma_a(k) = \frac{1}{\sqrt{\Delta t}}\sigma_a,$$
$$\sigma_{bg}(k) = \sqrt{\Delta t}\sigma_{bg}, \quad \sigma_{ba}(k) = \sqrt{\Delta t}\sigma_{ba}.$$

离散 连续

它们的物理量纲:

$$\sigma_g \to \frac{rad}{\sqrt{s}}, \quad \sigma_a \to \frac{m}{s\sqrt{s}}, \quad \sigma_{bg} \to \frac{rad}{s\sqrt{s}}, \quad \sigma_{ba} \to \frac{m}{s^2\sqrt{s}}.$$

$$\sigma_g(k) \to \frac{rad}{s}, \quad \sigma_a(k) \to \frac{m}{s^2}, \quad \sigma_{bg}(k) \to \frac{rad}{s}, \quad \sigma_{ba}(k) \to \frac{m}{s^2}.$$

IMU系统运动学

实际手册中的参数

- 角速度测量噪声=角度随机游动
- 加速度测量噪声=速度随机游动
- 零偏噪声=偏置稳定度

各领域称呼存在微小差别

- 有些量以离散形式给出，有些量则以连续形式给出，注意用量纲来区分

ADIS16448

技术规格

除非另有说明，T_A = 25°C，VDD = 3.3 V，角速率 = 0°/秒，动态范围 = ±1000°/秒 ± 1 *g*。

表1.

参数	测试条件/注释	最小值	典型值	最大值	单位
陀螺仪					
动态范围		±1000	±1200		°/sec
初始灵敏度	±1000°/s，参见表12		0.04		°/sec/LSB
	±500°/s，参见表12		0.02		°/sec/LSB
	±250°/s，参见表12		0.01		°/sec/LSB
可重复性[1]	−40°C ≤ T_A ≤ +70°C			1	%
灵敏度温度系数	−40°C ≤ T_A ≤ +70°C		±40		ppm/°C
对准误差	轴到轴		±0.05		度
	轴到框架(封装)		±0.5		度
非线性度	最佳拟合直线		±0.1		% of FS
偏置可重复性[1,2]	−40°C ≤ T_A ≤ +70°C, 1 σ		0.5		°/sec
运动中偏置稳定度	1 σ, SMPL_PRD = 0x0001		14.5		°/hr
角度随机游动	1 σ, SMPL_PRD = 0x0001		0.66		°/√hr
偏置温度系数	−40°C ≤ T_A ≤ +70°C		0.005		°/sec/°C
线性加速度对偏置的影响	任意轴，1 σ(MSC_CTRL[6] = 1)		0.015		°/sec/*g*
偏置电源灵敏度	−40°C ≤ T_A ≤ +70°C		0.2		°/sec/V
输出噪声	±1000°/s范围，无滤波		0.27		°/sec rms
速率噪声密度	f = 25 Hz，±1000°/s范围，无滤波		0.0135		°/sec/√Hz rms
−3 dB带宽			330		Hz
传感器谐振频率			17.5		kHz
加速度计	各轴				
动态范围		±18			*g*
灵敏度	数据格式参见表16		0.833		m*g*/LSB
可重复性[1]	−40°C ≤ T_A ≤ +70°C			1	%
灵敏度温度系数	−40°C ≤ T_A ≤ +70°C		±40		ppm/°C
对准误差	轴到轴		0.2		度
	轴到框架(封装)		±0.5		度
非线性度	最佳拟合直线		0.2		% of FS
偏置可重复性[1,2]	−40°C ≤ T_A ≤ +70°C, 1 σ		20		m*g*
运动中偏置稳定度	1 σ, SMPL_PRD = 0x0001		0.25		m*g*
速度随机游动	1 σ, SMPL_PRD = 0x0001		0.11		m/sec/√hr
偏置温度系数	−40°C ≤ T_A ≤ +70°C		±0.15		m*g*/°C
偏置电源灵敏度	−40°C ≤ T_A ≤ +70°C		5		m*g*/V
输出噪声	无滤波		5.1		m*g* rms
噪声密度	无滤波		0.23		m*g*/√Hz rms
−3 dB带宽			330		Hz
传感器谐振频率			5.5		kHz

IMU系统运动学

- 是否可以直接使用IMU测量值来推算运动轨迹?
  - 原则上可以，但受噪声影响太大。

下面通过理论和实验证明,

将IMU测量值代入运动学方程:

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{R}} &= \boldsymbol{R}(\tilde{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{b}_g)^\wedge, \quad \text{或 } \dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{q}\left[0, \frac{1}{2}(\tilde{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{b}_g)\right], \\
\dot{\boldsymbol{p}} &= \boldsymbol{v}, \\
\dot{\boldsymbol{v}} &= \boldsymbol{R}(\tilde{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{b}_a) + \boldsymbol{g}.
\end{aligned}
$$

连续时间形式

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{R}(t+\Delta t) &= \boldsymbol{R}(t)\mathrm{Exp}\left((\tilde{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{b}_g)\Delta t\right), \quad \text{或 } \boldsymbol{q}(t+\Delta t) = \boldsymbol{q}(t)\left[1, \frac{1}{2}(\tilde{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{b}_g)\Delta t\right], \\
\boldsymbol{p}(t+\Delta t) &= \boldsymbol{p}(t) + \boldsymbol{v}\Delta t + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{R}(t)(\tilde{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{b}_a)\right)\Delta t^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{g}\Delta t^2, \\
\boldsymbol{v}(t+\Delta t) &= \boldsymbol{v}(t) + \boldsymbol{R}(t)(\tilde{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{b}_a)\Delta t + \boldsymbol{g}\Delta t.
\end{aligned}
$$

离散时间形式

注:

- $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$表示IMU测量角速度，$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$表示车体的加速度
- 上波浪表示测量值（有确定的数值）

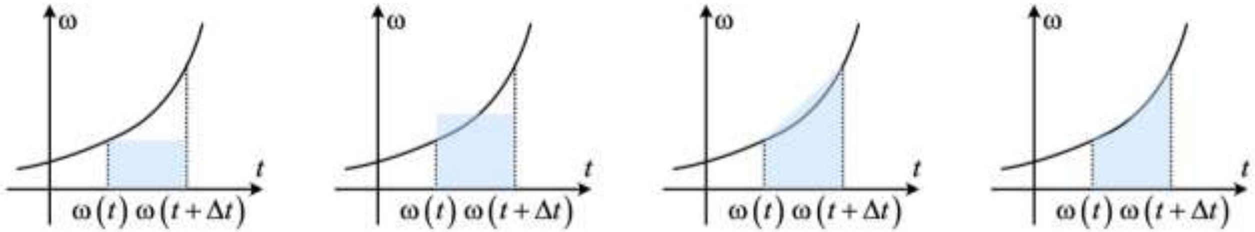
IMU系统运动学

IMU系统的递推方程式

$$\boldsymbol{R}(t+\Delta t)=\boldsymbol{R}(t)\mathrm{Exp}\left((\tilde{\boldsymbol{\omega}}-\boldsymbol{b}_g)\Delta t\right),\quad 或\ \boldsymbol{q}(t+\Delta t)=\boldsymbol{q}(t)\left[1,\frac{1}{2}\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}-\boldsymbol{b}_g\right)\Delta t\right],$$

$$\boldsymbol{p}(t+\Delta t)=\boldsymbol{p}(t)+\boldsymbol{v}\Delta t+\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{R}(t)(\tilde{\boldsymbol{a}}-\boldsymbol{b}_a)\right)\Delta t^2+\frac{1}{2}\boldsymbol{g}\Delta t^2,$$

$$\boldsymbol{v}(t+\Delta t)=\boldsymbol{v}(t)+\boldsymbol{R}(t)(\tilde{\boldsymbol{a}}-\boldsymbol{b}_a)\Delta t+\boldsymbol{g}\Delta t.$$



需要假设离散时刻之间的角速度固定

累计形式:

$$\boldsymbol{R}_j=\boldsymbol{R}_i\prod_{k=i}^{j-1}\mathrm{Exp}\left(\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k-\boldsymbol{b}_{g,k}\right)\Delta t\right)\quad 或\ \boldsymbol{q}_j=\boldsymbol{q}_i\prod_{k=i}^{j-1}\left[1,\frac{1}{2}\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k-\boldsymbol{b}_{g,k}\right)\Delta t\right],$$

该式可以处理多个IMU数据

$$\boldsymbol{p}_j=\boldsymbol{p}_k+\sum_{k=i}^{j-1}\left[\boldsymbol{v}_k\Delta t+\frac{1}{2}\boldsymbol{g}\Delta t^2\right]+\frac{1}{2}\sum_{k=i}^{j-1}\boldsymbol{R}_k\left(\tilde{\boldsymbol{a}}_k-\boldsymbol{b}_{a,k}\right)\Delta t^2,$$

$$\boldsymbol{v}_j=\boldsymbol{v}_i+\sum_{k=i}^{j-1}\left[\boldsymbol{R}_k\left(\tilde{\boldsymbol{a}}_k-\boldsymbol{b}_{a,k}\right)\Delta t+\boldsymbol{g}\Delta t\right].$$

2. 使用IMU进行航迹推算

使用IMU进行航迹推算

- 代码实验

3. 卫星导航

卫星导航

☐ 单纯依靠IMU进行递推，状态会很快发散

- 实际上，主要是平移部分会快速发散，因为没有速度观测；
- 通常IMU都会和其他传感器进行融合，GNSS是最为常见的一种；

- GNSS本身的输出非常简单：世界坐标系下的$\boldsymbol{R}, \boldsymbol{t}$ 。

卫星导航

常用的GNSS

- 单点定位：常用于手机等手持设备，提供10m级别的定位能力；
- RTK（real time kinematics）：载波相位差分，提供厘米级定位能力，需要和基站通信。

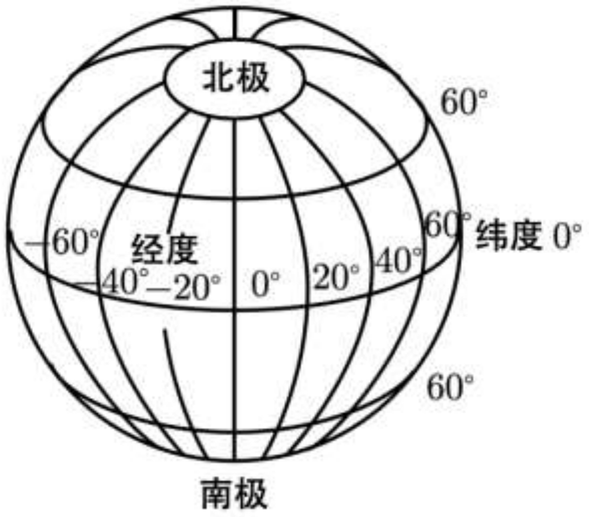
RTK接收器：蘑菇头

- 通常由两个接收器来测量车头和车尾位置，从而得到车辆姿态，称为双天线方案。其中一个称为主天线，一个称为副天线。

卫星导航

RTK的地理信息

- RTK输出的全局坐标通常在地球上的某个固定坐标系中



地理坐标系：经度、纬度、高度

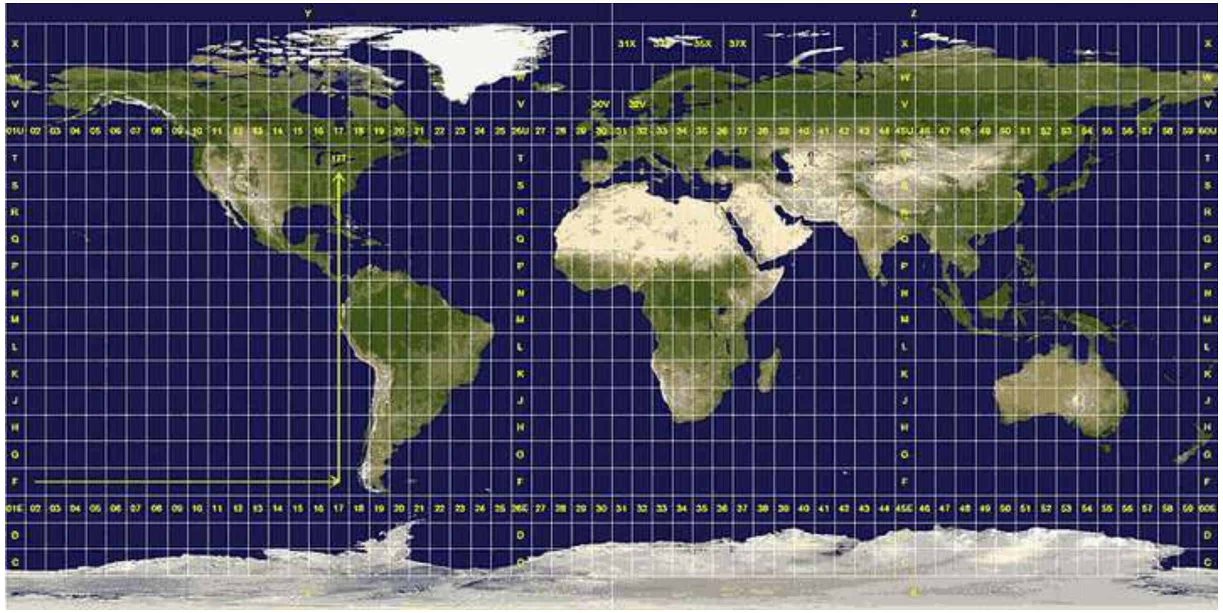
优点：全球唯一，表达方式简单

缺点：与米制坐标不兼容，两极有奇异点，实际使用时有效数字位较多

卫星导航

UTM坐标系

- 将地球表面投影，展开
- 经度分为60个区，纬度分为20个度
- 每个区内x为东，y为北
- 每个区的中心线取$x = 500000$



UTM优点

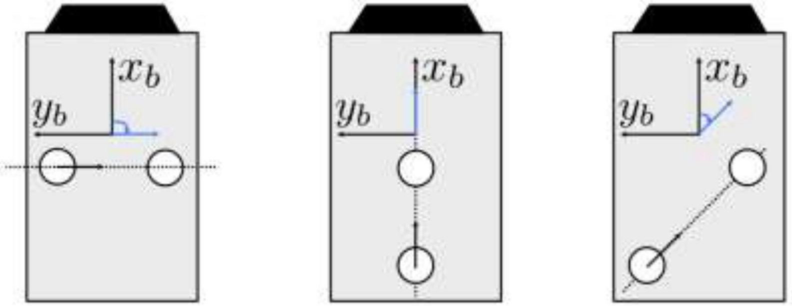
- 兼容米制坐标
- 兼容东北天的右手系

UTM缺点

- 表达时要带上区号
- 跨区要单独处理
- 两极畸变较大

卫星导航

□ 使用双天线RTK测量车体坐标



可以自由定义两个天线的安装方式

- 通常称两个天线的夹角为**安装偏角**，平移为**安装偏移**，简单来说就是外参。

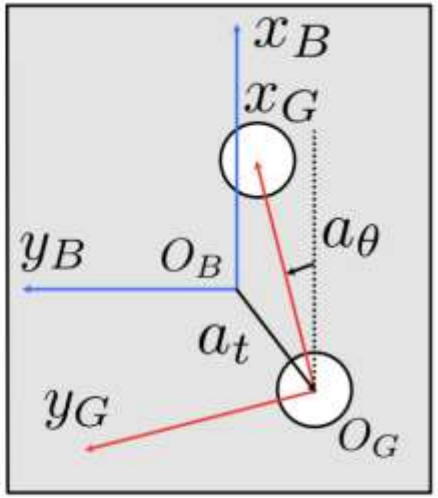
双天线RTK的例子

记G为GPS系，B为车体系，那么外参写为$\boldsymbol{T}_{BG}$，RTK读数记为$\boldsymbol{T}_{WG}$，那么车辆的实际位姿为：

$$\boldsymbol{T}_{WB} = \boldsymbol{T}_{WG}\boldsymbol{T}_{GB}.$$

或 $$\boldsymbol{R}_{WB} = \boldsymbol{R}_{WG}\boldsymbol{R}_{GB}, \quad \boldsymbol{t}_{WB} = \boldsymbol{R}_{WG}\boldsymbol{t}_{GB} + \boldsymbol{t}_{WG}.$$

$$\boldsymbol{T}_{BG} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_Z(a_\theta) & \boldsymbol{a}_t \\ \boldsymbol{0}^\top & 1 \end{bmatrix}$$



卫星导航

注意：如果车辆的姿态未知（双天线不一定都有效），此时会发生什么？

$$\boldsymbol{R}_{WB} = \boldsymbol{R}_{WG}\boldsymbol{R}_{GB}, \quad \boldsymbol{t}_{WB} = \boldsymbol{R}_{WG}\boldsymbol{t}_{GB} + \boldsymbol{t}_{WG}.$$

即使另一根天线有效，即$\boldsymbol{t}_{WG}$有效，但车辆的平移依然无法测出。此时我们不能直接将GNSS的平移观测视为车辆的平移观测

❑ 结论

- 如果双天线均有效，则车辆位姿观测有效；
- 如果单天线有效，但RTK与车体存在平移，则车辆位置和姿态观测均不能拿到，但此时可以使用估计出来的车辆姿态来推测RTK的平移。

卫星导航

- 实践：读取、转换RTK轨迹并显示

4. ESKF推导

ESKF推导

GNSS+IMU=GINS，是常见的组合导航形态，其原理相对简单，可以使用卡尔曼滤波器来实现。

下面推导一种流形上的误差卡尔曼滤波器（on Manifold Error state Kalman Filter），其形式比传统滤波器简单一些。

组合导航接收机

ESKF推导

滤波器状态变量： $\boldsymbol{x}=[\boldsymbol{p},\boldsymbol{v},\boldsymbol{R},\boldsymbol{b}_g,\boldsymbol{b}_a,\boldsymbol{g}]^\top,$

运动学方程：
$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{p}} &= \boldsymbol{v},\\
\dot{\boldsymbol{v}} &= \boldsymbol{R}(\tilde{\boldsymbol{a}}-\boldsymbol{b}_a-\boldsymbol{\eta}_a)+\boldsymbol{g},\\
\dot{\boldsymbol{R}} &= \boldsymbol{R}\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}-\boldsymbol{b}_g-\boldsymbol{\eta}_g\right)^\wedge,\\
\dot{\boldsymbol{b}}_g &= \boldsymbol{\eta}_{bg},\\
\dot{\boldsymbol{b}}_a &= \boldsymbol{\eta}_{ba},\\
\dot{\boldsymbol{g}} &= \boldsymbol{0}.
\end{aligned}
$$

卡尔曼更新： $\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{x}_{k,\text{pred}}+\boldsymbol{K}_k\underbrace{\left(\boldsymbol{z}_k-\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{x}_{k,\text{pred}}\right)}_{\text{更新量}}.$

线性化： $\boldsymbol{x}(t+\mathrm{d}t)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))+\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}t+\boldsymbol{w},$

一些现实的问题：

1. 如果$\boldsymbol{x}$中的旋转以$\boldsymbol{R}$表示，如何来对$\boldsymbol{x}$求导？
2. 如果$\boldsymbol{x}$中的平移用UTM坐标表示，如何处理数值范围的有效性？
3. 更新量如何写成流形上的加法？

一种解决方案：

把整个滤波器的状态都设置为切空间上的矢量状态，算完以后再与流形上的状态进行合并。

ESKF推导

误差卡尔曼滤波器

- 将整个状态变量（真值）分成**名义状态变量（nominal state）**和**误差状态变量（error state）**；
- 名义状态变量不含噪声，误差状态变量含有噪声；
- 利用卡尔曼滤波器估计误差状态变量（和它的协方差），最后合并到下一轮的名义状态变量中。

流程

预测过程

1. 名义状态变量使用IMU递推；
2. 误差状态变量方差增大；

更新过程

1. 利用观测方程计算误差状态变量；
2. 利用卡尔曼增益将误差状态变量合并到名义状态变量中；
3. 更新误差状态变量的协方差矩阵。

ESKF推导

真值状态和先前表达一致:

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{p}}_t &= \boldsymbol{v}_t, \\
\dot{\boldsymbol{v}}_t &= \boldsymbol{R}_t(\tilde{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{b}_{at} - \boldsymbol{\eta}_a) + \boldsymbol{g}_t, \\
\dot{\boldsymbol{R}}_t &= \boldsymbol{R}_t \left(\tilde{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{b}_{gt} - \boldsymbol{\eta}_g\right)^{\wedge}, \\
\dot{\boldsymbol{b}}_{gt} &= \boldsymbol{\eta}_{bg}, \\
\dot{\boldsymbol{b}}_{at} &= \boldsymbol{\eta}_{ba}, \\
\dot{\boldsymbol{g}}_t &= \mathbf{0}.
\end{aligned}
$$

拆分:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{p}_t &= \boldsymbol{p} + \delta\boldsymbol{p}, \\
\boldsymbol{v}_t &= \boldsymbol{v} + \delta\boldsymbol{v}, \\
\boldsymbol{R}_t &= \boldsymbol{R}\delta\boldsymbol{R} \quad \text{或} \ \boldsymbol{q}_t = \boldsymbol{q}\delta\boldsymbol{q}, \quad \text{或者} \ \ \mathrm{Exp}(\delta\boldsymbol{\theta}) \\
\boldsymbol{b}_{gt} &= \boldsymbol{b}_g + \delta\boldsymbol{b}_g, \\
\boldsymbol{b}_{at} &= \boldsymbol{b}_a + \delta\boldsymbol{b}_a, \\
\boldsymbol{g}_t &= \boldsymbol{g} + \delta\boldsymbol{g}.
\end{aligned}
$$

现在我们要关心误差状态的时间导数（即它的运动学）：

ESKF推导

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{p}_t &= \boldsymbol{p} + \delta \boldsymbol{p}, \\
\boldsymbol{v}_t &= \boldsymbol{v} + \delta \boldsymbol{v}, \\
\boldsymbol{R}_t &= \boldsymbol{R}\delta \boldsymbol{R} \quad \text{或} \ \boldsymbol{q}_t = \boldsymbol{q}\delta \boldsymbol{q}, \\
\boldsymbol{b}_{gt} &= \boldsymbol{b}_g + \delta \boldsymbol{b}_g, \\
\boldsymbol{b}_{at} &= \boldsymbol{b}_a + \delta \boldsymbol{b}_a, \\
\boldsymbol{g}_t &= \boldsymbol{g} + \delta \boldsymbol{g}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{p}}_t &= \boldsymbol{v}_t, \\
\dot{\boldsymbol{v}}_t &= \boldsymbol{R}_t(\tilde{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{b}_{at} - \boldsymbol{\eta}_a) + \boldsymbol{g}_t, \\
\dot{\boldsymbol{R}}_t &= \boldsymbol{R}_t \left(\tilde{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{b}_{gt} - \boldsymbol{\eta}_g\right)^\wedge, \\
\dot{\boldsymbol{b}}_{gt} &= \boldsymbol{\eta}_{bg}, \\
\dot{\boldsymbol{b}}_{at} &= \boldsymbol{\eta}_{ba}, \\
\dot{\boldsymbol{g}}_t &= \boldsymbol{0}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta \dot{\boldsymbol{p}} &= \delta \boldsymbol{v}, \\
\delta \dot{\boldsymbol{b}}_g &= \boldsymbol{\eta}_{bg}, \\
\delta \dot{\boldsymbol{b}}_a &= \boldsymbol{\eta}_{ba}, \\
\delta \dot{\boldsymbol{g}} &= \boldsymbol{0}.
\end{aligned}
$$

真值状态=名义+误差

真值时间导数

误差的时间导数

$\boldsymbol{\delta R}, \boldsymbol{\delta v}$部分继续讨论

ESKF推导

旋转部分： $\dot{\boldsymbol{R}}_t = \dot{\boldsymbol{R}}\mathrm{Exp}(\delta\boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{R}\dot{\mathrm{Exp}}(\delta\boldsymbol{\theta}),$

$\overset{3.25(c)}{=} \boldsymbol{R}_t\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{b}_{gt} - \boldsymbol{\eta}_g\right)^\wedge.$

另一方面： $\dot{\mathrm{Exp}}(\delta\boldsymbol{\theta}) = \mathrm{Exp}(\delta\boldsymbol{\theta})\delta\dot{\boldsymbol{\theta}}^\wedge.$

$\Rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{R}}\mathrm{Exp}(\delta\boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{R}\dot{\mathrm{Exp}}(\delta\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{R}(\tilde{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{b}_g)^\wedge\mathrm{Exp}(\delta\boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{R}\mathrm{Exp}(\delta\boldsymbol{\theta})\delta\dot{\boldsymbol{\theta}}^\wedge.$

根据误差状态定义： $\boldsymbol{R}_t\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{b}_{gt} - \boldsymbol{\eta}_g\right)^\wedge = \boldsymbol{R}\mathrm{Exp}(\delta\boldsymbol{\theta})\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{b}_{gt} - \boldsymbol{\eta}_g\right)^\wedge.$

去掉$\boldsymbol{R}$，把Exp挪到左侧： $\mathrm{Exp}(\delta\boldsymbol{\theta})\delta\dot{\boldsymbol{\theta}}^\wedge = \mathrm{Exp}(\delta\boldsymbol{\theta})\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{b}_{gt} - \boldsymbol{\eta}_g\right)^\wedge - (\tilde{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{b}_g)^\wedge\mathrm{Exp}(\delta\boldsymbol{\theta}).$

整理右侧式子：

$$\begin{aligned}
\mathrm{Exp}(\delta\boldsymbol{\theta})\delta\dot{\boldsymbol{\theta}}^\wedge &= \mathrm{Exp}(\delta\boldsymbol{\theta})\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{b}_{gt} - \boldsymbol{\eta}_g\right)^\wedge - \mathrm{Exp}(\delta\boldsymbol{\theta})\left(\mathrm{Exp}(-\delta\boldsymbol{\theta})(\tilde{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{b}_g)\right)^\wedge \\
&= \mathrm{Exp}(\delta\boldsymbol{\theta})\left[(\tilde{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{b}_{gt} - \boldsymbol{\eta}_g)^\wedge - \left(\mathrm{Exp}(-\delta\boldsymbol{\theta})(\tilde{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{b}_g)\right)^\wedge\right] \\
&\approx \mathrm{Exp}(\delta\boldsymbol{\theta})\left[(\tilde{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{b}_{gt} - \boldsymbol{\eta}_g)^\wedge - \left((\boldsymbol{I} - \delta\boldsymbol{\theta}^\wedge)(\tilde{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{b}_g)\right)^\wedge\right] \\
&= \mathrm{Exp}(\delta\boldsymbol{\theta})\left[\boldsymbol{b}_g - \boldsymbol{b}_{gt} - \boldsymbol{\eta}_g + \delta\boldsymbol{\theta}^\wedge\tilde{\boldsymbol{\omega}} - \delta\boldsymbol{\theta}^\wedge\boldsymbol{b}_g\right]^\wedge \\
&= \mathrm{Exp}(\delta\boldsymbol{\theta})\left[(-\tilde{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{b}_g)^\wedge\delta\boldsymbol{\theta} - \delta\boldsymbol{b}_g - \boldsymbol{\eta}_g\right]^\wedge.
\end{aligned}$$

这里用到：

$$\boldsymbol{\phi}^\wedge\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{R}^\top\boldsymbol{\phi})^\wedge$$

约掉左侧Exp： $\delta\dot{\boldsymbol{\theta}} \approx -(\tilde{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{b}_g)^\wedge\delta\boldsymbol{\theta} - \delta\boldsymbol{b}_g - \boldsymbol{\eta}_g.$

即误差状态的旋转部分运动学。

ESKF推导

速度部分：

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{v}}_t &= \boldsymbol{R}_t(\tilde{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{b}_{at} - \boldsymbol{\eta}_a) + \boldsymbol{g}_t \\ &= \boldsymbol{R}\mathrm{Exp}(\delta\boldsymbol{\theta})(\tilde{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{b}_a - \delta\boldsymbol{b}_a - \boldsymbol{\eta}_a) + \boldsymbol{g} + \delta\boldsymbol{g} \\ &\approx \boldsymbol{R}(\boldsymbol{I} + \delta\boldsymbol{\theta}^\wedge)(\tilde{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{b}_a - \delta\boldsymbol{b}_a - \boldsymbol{\eta}_a) + \boldsymbol{g} + \delta\boldsymbol{g} \\ &\approx \boldsymbol{R}\tilde{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{R}\boldsymbol{b}_a - \boldsymbol{R}\delta\boldsymbol{b}_a - \boldsymbol{R}\boldsymbol{\eta}_a + \boldsymbol{R}\delta\boldsymbol{\theta}^\wedge\tilde{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{R}\delta\boldsymbol{\theta}^\wedge\boldsymbol{b}_a + \boldsymbol{g} + \delta\boldsymbol{g} \\ &= \boldsymbol{R}\tilde{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{R}\boldsymbol{b}_a - \boldsymbol{R}\delta\boldsymbol{b}_a - \boldsymbol{R}\boldsymbol{\eta}_a - \boldsymbol{R}\tilde{\boldsymbol{a}}^\wedge\delta\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{R}\boldsymbol{b}_a^\wedge\delta\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{g} + \delta\boldsymbol{g}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{p}}_t &= \boldsymbol{v}_t, \\ \dot{\boldsymbol{v}}_t &= \boldsymbol{R}_t(\tilde{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{b}_{at} - \boldsymbol{\eta}_a) + \boldsymbol{g}_t, \\ \dot{\boldsymbol{R}}_t &= \boldsymbol{R}_t\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{b}_{gt} - \boldsymbol{\eta}_g\right)^\wedge, \\ \dot{\boldsymbol{b}}_{gt} &= \boldsymbol{\eta}_{bg}, \\ \dot{\boldsymbol{b}}_{at} &= \boldsymbol{\eta}_{ba}, \\ \dot{\boldsymbol{g}}_t &= \boldsymbol{0}.\end{aligned}$$

同时有：

$$\dot{\boldsymbol{v}} + \delta\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{R}(\tilde{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{b}_a) + \boldsymbol{g} + \delta\dot{\boldsymbol{v}}.$$

因此：

$$\delta\dot{\boldsymbol{v}} = -\boldsymbol{R}(\tilde{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{b}_a)^\wedge\delta\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{R}\delta\boldsymbol{b}_a - \boldsymbol{R}\boldsymbol{\eta}_a + \delta\boldsymbol{g}.$$

对白噪声变量做旋转，不改变其均值和协方差大小，因此：

$$\delta\dot{\boldsymbol{v}} = -\boldsymbol{R}(\tilde{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{b}_a)^\wedge\delta\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{R}\delta\boldsymbol{b}_a - \boldsymbol{\eta}_a + \delta\boldsymbol{g}.$$

ESKF推导

$$\delta\dot{\boldsymbol{p}} = \delta\boldsymbol{v},$$

$$\delta\dot{\boldsymbol{b}}_g = \boldsymbol{\eta}_{bg},$$

$$\delta\dot{\boldsymbol{b}}_a = \boldsymbol{\eta}_{ba},$$

$$\delta\dot{\boldsymbol{g}} = \boldsymbol{0}.$$

$$\delta\dot{\boldsymbol{\theta}} \approx -(\tilde{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{b}_g)^\wedge \delta\boldsymbol{\theta} - \delta\boldsymbol{b}_g - \boldsymbol{\eta}_g.$$

$$\delta\dot{\boldsymbol{v}} = -\boldsymbol{R}(\tilde{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{b}_a)^\wedge \delta\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{R}\delta\boldsymbol{b}_a - \boldsymbol{R}\boldsymbol{\eta}_a + \delta\boldsymbol{g}.$$

整理:

$$\begin{aligned}
\delta\dot{\boldsymbol{p}} &= \delta\boldsymbol{v}, \\
\delta\dot{\boldsymbol{v}} &= -\boldsymbol{R}(\tilde{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{b}_a)^\wedge \delta\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{R}\delta\boldsymbol{b}_a - \boldsymbol{\eta}_a + \delta\boldsymbol{g}, \\
\delta\dot{\boldsymbol{\theta}} &= -(\tilde{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{b}_g)^\wedge \delta\boldsymbol{\theta} - \delta\boldsymbol{b}_g - \boldsymbol{\eta}_g, \\
\delta\dot{\boldsymbol{b}}_g &= \boldsymbol{\eta}_{bg}, \\
\delta\dot{\boldsymbol{b}}_a &= \boldsymbol{\eta}_{ba}, \\
\delta\dot{\boldsymbol{g}} &= \boldsymbol{0}.
\end{aligned}$$

该式即连续时间下的误差状态运动学,

下面考虑对它在离散时间下做线性化。

ESKF推导

$$\delta\dot{\boldsymbol{p}} = \delta\boldsymbol{v}, \qquad \delta\dot{\boldsymbol{b}}_g = \boldsymbol{\eta}_{bg},$$

$$\delta\dot{\boldsymbol{v}} = -\boldsymbol{R}(\tilde{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{b}_a)^\wedge\delta\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{R}\delta\boldsymbol{b}_a - \boldsymbol{\eta}_a + \delta\boldsymbol{g}, \qquad \delta\dot{\boldsymbol{b}}_a = \boldsymbol{\eta}_{ba},$$

$$\delta\dot{\boldsymbol{\theta}} = -(\tilde{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{b}_g)^\wedge\delta\boldsymbol{\theta} - \delta\boldsymbol{b}_g - \boldsymbol{\eta}_g, \qquad \delta\dot{\boldsymbol{g}} = \mathbf{0}.$$

离散时间：

名义状态

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{p}(t+\Delta t) &= \boldsymbol{p}(t) + \boldsymbol{v}\Delta t + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{R}(\tilde{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{b}_a)\right)\Delta t^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{g}\Delta t^2,\\
\boldsymbol{v}(t+\Delta t) &= \boldsymbol{v}(t) + \boldsymbol{R}(\tilde{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{b}_a)\Delta t + \boldsymbol{g}\Delta t,\\
\boldsymbol{R}(t+\Delta t) &= \boldsymbol{R}(t)\mathrm{Exp}\left((\tilde{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{b}_g)\Delta t\right),\\
\boldsymbol{b}_g(t+\Delta t) &= \boldsymbol{b}_g(t),\\
\boldsymbol{b}_a(t+\Delta t) &= \boldsymbol{b}_a(t),\\
\boldsymbol{g}(t+\Delta t) &= \boldsymbol{g}(t).
\end{aligned}$$

误差状态

$$\begin{aligned}
\delta\boldsymbol{p}(t+\Delta t) &= \delta\boldsymbol{p} + \delta\boldsymbol{v}\Delta t,\\
\delta\boldsymbol{v}(t+\Delta t) &= \delta\boldsymbol{v} + \left(-\boldsymbol{R}(\tilde{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{b}_a)^\wedge\delta\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{R}\delta\boldsymbol{b}_a + \delta\boldsymbol{g}\right)\Delta t - \boldsymbol{\eta}_v,\\
\delta\boldsymbol{\theta}(t+\Delta t) &= \mathrm{Exp}\left(-(\tilde{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{b}_g)\Delta t\right)\delta\boldsymbol{\theta} - \delta\boldsymbol{b}_g\Delta t - \boldsymbol{\eta}_\theta,\\
\delta\boldsymbol{b}_g(t+\Delta t) &= \delta\boldsymbol{b}_g + \boldsymbol{\eta}_{bg},\\
\delta\boldsymbol{b}_a(t+\Delta t) &= \delta\boldsymbol{b}_a + \boldsymbol{\eta}_{ba},\\
\delta\boldsymbol{g}(t+\Delta t) &= \delta\boldsymbol{g}.
\end{aligned}$$

离散噪声变量的标准差：

$$\sigma(\boldsymbol{\eta}_v) = \Delta t\sigma_a(k), \quad \sigma(\boldsymbol{\eta}_\theta) = \Delta t\sigma_g(k), \quad \sigma(\boldsymbol{\eta}_{bg}) = \sqrt{\Delta t}\sigma_{bg}, \quad \sigma(\boldsymbol{\eta}_{ba}) = \sqrt{\Delta t}\sigma_{ba},$$

ESKF推导

在ESKF中，需要对离散时间的误差状态变量求线性化：

连续时间： $\delta\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\delta\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w} \sim \mathcal{N}(0, \boldsymbol{Q}),$

离散时间：$\delta\boldsymbol{x}(t+\Delta t) = \boldsymbol{F}\delta\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{w},$

$$
\begin{aligned}
\delta\boldsymbol{p}(t+\Delta t) &= \delta\boldsymbol{p} + \delta\boldsymbol{v}\Delta t, \\
\delta\boldsymbol{v}(t+\Delta t) &= \delta\boldsymbol{v} + \left(-\boldsymbol{R}(\tilde{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{b}_a)^\wedge\delta\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{R}\delta\boldsymbol{b}_a + \delta\boldsymbol{g}\right)\Delta t - \boldsymbol{\eta}_v, \\
\delta\boldsymbol{\theta}(t+\Delta t) &= \mathrm{Exp}\left(-(\tilde{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{b}_g)\Delta t\right)\delta\boldsymbol{\theta} - \delta\boldsymbol{b}_g\Delta t - \boldsymbol{\eta}_\theta, \\
\delta\boldsymbol{b}_g(t+\Delta t) &= \delta\boldsymbol{b}_g + \boldsymbol{\eta}_{bg}, \\
\delta\boldsymbol{b}_a(t+\Delta t) &= \delta\boldsymbol{b}_a + \boldsymbol{\eta}_{ba}, \\
\delta\boldsymbol{g}(t+\Delta t) &= \delta\boldsymbol{g}.
\end{aligned}
$$

于是，预测过程具体化为：

$$
\begin{aligned}
\delta\boldsymbol{x}_{\text{pred}} &= \boldsymbol{F}\delta\boldsymbol{x}, \\
\boldsymbol{P}_{\text{pred}} &= \boldsymbol{F}\boldsymbol{P}\boldsymbol{F}^\top + \boldsymbol{Q}.
\end{aligned}
$$

上面已经是线性形式了，因此：$\boldsymbol{Q} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{0}_3, \mathrm{Cov}(\boldsymbol{\eta}_v), \mathrm{Cov}(\boldsymbol{\eta}_\theta), \mathrm{Cov}(\boldsymbol{\eta}_g), \mathrm{Cov}(\boldsymbol{\eta}_a), \boldsymbol{0}_3),$

$$
\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix}
\boldsymbol{I} & \boldsymbol{I}\Delta t & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\
\boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & -\boldsymbol{R}(\tilde{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{b}_a)^\wedge\Delta t & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{R}\Delta t & \boldsymbol{I}\Delta t \\
\boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \mathrm{Exp}\left(-(\tilde{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{b}_g)\Delta t\right) & -\boldsymbol{I}\Delta t & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\
\boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\
\boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\
\boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}
\end{bmatrix}.
$$

ESKF推导

预测过程为:

$$
\begin{aligned}
\delta \boldsymbol{x}_{\text{pred}} &= \boldsymbol{F} \delta \boldsymbol{x}, \\
\boldsymbol{P}_{\text{pred}} &= \boldsymbol{F} \boldsymbol{P} \boldsymbol{F}^{\top} + \boldsymbol{Q}.
\end{aligned}
$$

预测过程的直观解释:

1. 误差状态进行了线性变化，但由于观测时会把误差状态置零，所以第一式可以跳过;
2. 协方差部分进行了线性变化并增加了Q，直观上看是变大的，即误差状态变得更不确定了（因为IMU测量带有噪声）。

ESKF推导

ESKF的更新

抽象的观测方程： $$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \sim \mathcal{N}(0, \boldsymbol{V}),$$

线性化后： $$\boldsymbol{H} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial \delta \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}_{\text{pred}}},$$

观测的处理同EKF：
$$\begin{aligned}
\boldsymbol{K} &= \boldsymbol{P}_{\text{pred}} \boldsymbol{H}^\top (\boldsymbol{H} \boldsymbol{P}_{\text{pred}} \boldsymbol{H}^\top + \boldsymbol{V})^{-1}, \\
\delta \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{K}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_{\text{pred}})), \\
\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x}_{\text{pred}} + \delta \boldsymbol{x}, \\
\boldsymbol{P} &= (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}\boldsymbol{H}) \boldsymbol{P}_{\text{pred}}.
\end{aligned}$$

接下来，我们会讨论具体的观测方程实现。

ESKF推导

将修正的误差状态合入名义状态:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{p}_{k+1} &= \boldsymbol{p}_k + \delta \boldsymbol{p}_k, \\
\boldsymbol{v}_{k+1} &= \boldsymbol{v}_k + \delta \boldsymbol{v}_k, \\
\boldsymbol{R}_{k+1} &= \boldsymbol{R}_k \mathrm{Exp}(\delta \boldsymbol{\theta}_k), \\
\boldsymbol{b}_{g,k+1} &= \boldsymbol{b}_{g,k} + \delta \boldsymbol{b}_{g,k}, \\
\boldsymbol{b}_{a,k+1} &= \boldsymbol{b}_{a,k} + \delta \boldsymbol{b}_{a,k}, \\
\boldsymbol{g}_{k+1} &= \boldsymbol{g}_k + \delta \boldsymbol{g}_k.
\end{aligned}
$$

滤波器的状态变量 $\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{b}_g, \boldsymbol{b}_a, \boldsymbol{g}]^\top$

也可以写成: $\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k \oplus \delta \boldsymbol{x}_k,$

最后重置误差状态: $\delta \boldsymbol{x} = \mathbf{0}.$

协方差部分可以直接使用前面的协方差，或者仔细点的话，需要考虑切空间投影。

ESKF推导

为什么需要切空间投影?

- 在卡尔曼修正以后，均值与协方差实际上是预测点处的高斯分布：$\mathcal{N}(\delta \boldsymbol{x}, \boldsymbol{P})$
- 而在下一轮状态估计时，应该是 $\boldsymbol{x}_{\text{pred}} + \delta \boldsymbol{x}$ 处的：$\mathcal{N}(0, \boldsymbol{P}_{\text{reset}})$

注：严格来说，这两个工作点是不同的，这两个工作点是不同的，它们的切空间也是不同的，于是$\boldsymbol{P}$需要有一个重置的过程。主要影响旋转部分（流形处理）。

重置以前： $\boldsymbol{R}_k$ $\delta\boldsymbol{\theta}$ $\delta\boldsymbol{\theta}_k$

名义状态 误差状态 滤波器更新量（注意是数值）

重置以后： $\boldsymbol{R}_k \mathrm{Exp}(\delta\boldsymbol{\theta}_k) = \boldsymbol{R}^+$ $\delta\boldsymbol{\theta}^+ = \mathbf{0}$ 考虑两个误差状态的线性化关系（影响协方差的转换）

名义状态 误差状态

ESKF推导

重置前后: $$\boldsymbol{R}^{+}\mathrm{Exp}(\delta\boldsymbol{\theta}^{+}) = \boldsymbol{R}_k\mathrm{Exp}(\delta\boldsymbol{\theta}_k)\mathrm{Exp}(\delta\boldsymbol{\theta}^{+}) = \boldsymbol{R}_k\mathrm{Exp}(\delta\boldsymbol{\theta}).$$

得到: $$\mathrm{Exp}(\delta\boldsymbol{\theta}^{+}) = \mathrm{Exp}(-\delta\boldsymbol{\theta}_k)\mathrm{Exp}(\delta\boldsymbol{\theta}),$$

展开: $$\delta\boldsymbol{\theta}^{+} = -\delta\boldsymbol{\theta}_k + \delta\boldsymbol{\theta} - \frac{1}{2}\delta\boldsymbol{\theta}_k^{\wedge}\delta\boldsymbol{\theta} + o((\delta\boldsymbol{\theta})^2).$$

所以重置前后发生了近似的线性变换

于是得到重置前后的线性关系: $$\frac{\partial\delta\boldsymbol{\theta}^{+}}{\partial\delta\boldsymbol{\theta}} \approx \boldsymbol{I} - \frac{1}{2}\delta\boldsymbol{\theta}_k^{\wedge}.$$

记作: $\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{I} - \frac{1}{2}\delta\boldsymbol{\theta}_k^{\wedge}$

把其他变量块也放进来: $$\boldsymbol{J}_k = \mathrm{diag}(\boldsymbol{I}_3, \boldsymbol{I}_3, \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{I}_3, \boldsymbol{I}_3, \boldsymbol{I}_3),$$

故: $$\boldsymbol{P}_{\mathrm{reset}} = \boldsymbol{J}_k\boldsymbol{P}\boldsymbol{J}_k^{\top}.$$

实际上很接近单位阵，所以实现当中也可以不作处理。

ESKF推导

ESKF的代码实现

6DoF GNSS观测方程的处理： $\boldsymbol{R}_{\text{gnss}}, \boldsymbol{p}_{\text{gnss}}$

原本GNSS观测是对真值状态的观测： $\boldsymbol{R}_{\text{gnss}} = \boldsymbol{R}\mathrm{Exp}(\delta\boldsymbol{\theta}),$

但由于名义状态是确定的，也可以视作对误差状态的观测

此时： $\boldsymbol{z}_{\delta\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{h}(\delta\boldsymbol{\theta}) = \mathrm{Log}\left(\boldsymbol{R}^\top\boldsymbol{R}_{\text{gnss}}\right).$

那么雅可比矩阵简化为： $\frac{\partial \boldsymbol{z}_{\delta\boldsymbol{\theta}}}{\partial\delta\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{I}.$

平移部分比较简单： $\boldsymbol{p}_{\text{gnss}} = \boldsymbol{p} + \delta\boldsymbol{p}.$

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}_{\text{gnss}}}{\partial\delta\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{I}_{3\times 3}.$$

此时，更新量和更新方程实现为：

$$\boldsymbol{z} - \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{p}_{\text{gnss}} - \boldsymbol{p}, \mathrm{Log}(\boldsymbol{R}^\top\boldsymbol{R}_{\text{gnss}})]^\top.$$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_{\text{pred}} + \boldsymbol{K}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})).$$

ESKF推导

静止初始化:

1. 将 IMU 静止一段给定的时间（程序中设置为 10 秒）；静止检查由轮速计判定，当两轮的轮速均小于阈值时，认为车辆静止。在没有轮速测量的场合，也可以直接认为车辆静止，来测定相关变量；
2. 统计静止时间内的陀螺仪与加计读数均值，记为 $\bar{\boldsymbol{d}}_{\mathrm{gyr}}, \bar{\boldsymbol{d}}_{\mathrm{acc}}$；
3. 由于车辆并未发生转动，这段时间的陀螺均值可以取 $\boldsymbol{b}_g = \bar{\boldsymbol{d}}_{\mathrm{gyr}}$。
4. 加速度计的测量方程为：
$$\tilde{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{R}^\top(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{g}) + \boldsymbol{b}_a + \boldsymbol{\eta}_a. \tag{3.71}$$
当车辆实际加速度为零，旋转视为 $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I}$ 时[①]，加计实际测到 $\boldsymbol{b}_a - \boldsymbol{g}$，其中 $\boldsymbol{b}_a$ 为小量，$\boldsymbol{g}$ 的长度可视为固定值。在这些前提下，我们取方向为 $-\bar{\boldsymbol{d}}_{\mathrm{acc}}$，大小为 9.8 的矢量作为**重力矢量**。这一步确定了重力的朝向。
5. 现在将这段时间的加计读数去掉重力，重新计算 $\bar{\boldsymbol{d}}_{\mathrm{acc}}$；
6. 取 $\boldsymbol{b}_a = \bar{\boldsymbol{d}}_{\mathrm{acc}}$。
7. 同时，认为零偏不动，估计陀螺仪和加计的测量方差。该方差可用于 ESKF 的噪声参数。

ESKF推导

- 代码实现

ESKF推导

◻ 速度观测的处理

- 轮式编码器观测车辆在前进方向上的速度： $\boldsymbol{v}_{\text{wheel}} = [v_{\text{wheel}}, 0, 0]^\top.$
- 对应观测模型： $\boldsymbol{v}_{\text{wheel}} = \boldsymbol{R}^\top \boldsymbol{v},$
- 更常见的做法：固定R，将速度观测转到世界坐标系：

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{v}_{\text{wheel}} = \boldsymbol{v}.$$

- 此时雅可比矩阵显然为： $\dfrac{\partial \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} = [\boldsymbol{0}_{3\times3}, \boldsymbol{I}_{3\times3}, \boldsymbol{0}_{3\times12}].$

- 代码实现

习题

1. 证明：若某个高斯随机变量为零均值，协方差为对角线矩阵且大小相同（各向同性），那么在乘任意旋转矩阵以后，其均值仍为零，且协方差不变；

2. 在运动过程代码中，将$\boldsymbol{F}$矩阵拆开，分别为每种状态变量实现运动方程。请给出公式和代码实现的说明。

3. 推导左乘模型下的ESKF运动方程、噪声方程，并给出代码实现。