深蓝学院

shenlanxueyuan.com

自动驾驶中的SLAM技术
第二章作业思路讲解

主讲人 Changxin

作业题目

1. 证明：若某个高斯随机变量为零均值，协方差为对角线矩阵且大小相同（各向同性），那么在乘任意旋转矩阵以后，其均值仍为零，且协方差不变；

2. 在运动过程代码中，将$\boldsymbol{F}$矩阵拆开，分别为每种状态变量实现运动方程。请给出公式和代码实现的说明。

3. 推导左乘模型下的ESKF运动方程、噪声方程，并给出代码实现。

第一题

- 协方差定义

若实数随机变量 X 与 Y 期望值分别为 $E(X)=\mu$ 与 $E(Y)=\nu$，则两者间的**协方差**定义为：

$$\operatorname{cov}(X,Y)=\mathrm{E}[(X-\mu)(Y-\nu)]$$

已知：

$$\mathbb{E}(\boldsymbol{X})=\mathbf{0}, \qquad \mathbb{C}ov(\boldsymbol{X})=\sigma^2\boldsymbol{I}$$

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{X}$$

$$\mathbb{C}ov(\boldsymbol{Y})=\mathbb{E}\left[(\boldsymbol{Y}-\mathbb{E}(\boldsymbol{Y}))(\boldsymbol{Y}-\mathbb{E}(\boldsymbol{Y}))^\top\right]$$

基于上述定义和等式可求解。

第二题

➢理论参考SAD书79页公式

$$\begin{aligned}
\delta \boldsymbol{p}(t+\Delta t) &= \delta \boldsymbol{p} + \delta \boldsymbol{v} \Delta t, && (3.42\text{a}) \\
\delta \boldsymbol{v}(t+\Delta t) &= \delta \boldsymbol{v} + \left(-\boldsymbol{R}(\tilde{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{b}_a)^\wedge \delta \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{R}\delta \boldsymbol{b}_a + \delta \boldsymbol{g}\right) \Delta t - \boldsymbol{\eta}_v, && (3.42\text{b}) \\
\delta \boldsymbol{\theta}(t+\Delta t) &= \operatorname{Exp}\left(-(\tilde{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{b}_g)\Delta t\right) \delta \boldsymbol{\theta} - \delta \boldsymbol{b}_g \Delta t - \boldsymbol{\eta}_\theta, && (3.42\text{c}) \\
\delta \boldsymbol{b}_g(t+\Delta t) &= \delta \boldsymbol{b}_g + \boldsymbol{\eta}_{bg}, && (3.42\text{d}) \\
\delta \boldsymbol{b}_a(t+\Delta t) &= \delta \boldsymbol{b}_a + \boldsymbol{\eta}_{ba}, && (3.42\text{e}) \\
\delta \boldsymbol{g}(t+\Delta t) &= \delta \boldsymbol{g}. && (3.42\text{f})
\end{aligned}$$

第二题

➢代码修改位置

src > ch3 > eskf.hpp > {} sad > Predict(const IMU &)

```cpp
        dx.template block<3, 1>(12, 0) = dba_prep;
        dx.template block<3, 1>(15, 0) = dg_prep;
    };

    // mean and cov prediction
    // ! 1. 以F矩阵更新
    if (FLAGS_with_F_update_error_state)
        dx_ = F * dx_;
    // ! 2. 分别更新
    else
        dx_update(dx_);        zhiwei chen, 5 days ago • update h
    cov_ = F * cov_.eval() * F.transpose() + Q_;
    current_time_ = imu.timestamp_;

    return true;
}
```

相关文件：

eskf.cpp

run_eskf_gins.cc

本题的修改对于轨迹无实质影响，但是可以对比矩阵计算和拆分计算的耗时

第三题

➢左乘（小量）公式

$$\boldsymbol{R}_t = \delta \boldsymbol{R}\boldsymbol{R} = \mathrm{Exp}(\delta\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{R}$$

dx_ = F * dx_

第三题

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

➤Review：误差变量的运动学方程（右乘形式）

至此，我们可以把误差变量的运动学方程整理如下：

$$\delta \dot{\boldsymbol{p}} = \delta \boldsymbol{v}, \tag{3.40a}$$

$$\delta \dot{\boldsymbol{v}} = -\boldsymbol{R}(\tilde{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{b}_a)^\wedge \delta \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{R}\delta \boldsymbol{b}_a - \boldsymbol{\eta}_a + \delta \boldsymbol{g}, \tag{3.40b}$$

$$\delta \dot{\boldsymbol{\theta}} = -(\tilde{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{b}_g)^\wedge \delta \boldsymbol{\theta} - \delta \boldsymbol{b}_g - \boldsymbol{\eta}_g, \tag{3.40c}$$

$$\delta \dot{\boldsymbol{b}}_g = \boldsymbol{\eta}_{bg}, \tag{3.40d}$$

$$\delta \dot{\boldsymbol{b}}_a = \boldsymbol{\eta}_{ba}, \tag{3.40e}$$

$$\delta \dot{\boldsymbol{g}} = \boldsymbol{0}. \tag{3.40f}$$

SAD：公式3.40

参考公式
SAD 3.28 – 3.40

问题：
误差变量是如何引入的？

第三题

➢推导细节

1、δv 的相关证明：

$$
\begin{aligned}
\dot{v}_t &= R_t\left(\tilde{a}-b_{at}-\eta_a\right)+g_t \\
&= Exp(\delta\theta)R\left(\tilde{a}-b_a-\delta b_a-\eta_a\right)+g+\delta g \\
&\approx \left(I+\delta\theta^{\wedge}\right)R\left(\tilde{a}-b_a-\delta b_a-\eta_a\right)+g+\delta g \\
&= \left(R+\delta\theta^{\wedge}R\right)\left(\tilde{a}-b_a-\delta b_a-\eta_a\right)+g+\delta g \\
&\approx R\tilde{a}-Rb_a-R\delta b_a-R\eta_a+\delta\theta^{\wedge}R\tilde{a}-\delta\theta^{\wedge}Rb_a+g+\delta g \\
&= R\tilde{a}-Rb_a-R\delta b_a-R\eta_a-(R\tilde{a})^{\wedge}\delta\theta+(Rb_a)^{\wedge}\delta\theta+g+\delta g
\end{aligned}
$$

另一方面，等式右侧为：

$$
\dot{v}_t=\dot{v}+\dot{\delta v}=R(\tilde{a}-b_a)+g+\dot{\delta v}
$$

得到：

$$
\begin{aligned}
\dot{\delta v} &= -[R(\tilde{a}-b_a)]^{\wedge}\delta\theta-R\delta b_a-R\eta_a+\delta g \\
&= -[R(\tilde{a}-b_a)]^{\wedge}\delta\theta-R\delta b_a-\eta_a+\delta g
\end{aligned}
$$

第三题

➢推导细节

$$
\begin{aligned}
\dot{\delta\theta}^{\wedge} &= \left(R(\tilde{\omega}-b_{gt}-\eta_g)\right)^{\wedge} - \left(R(\tilde{\omega}-b_g)\right)^{\wedge} \\
&= \left(R(\tilde{\omega}-b_{gt}-\eta_g) - R(\tilde{\omega}-b_g)\right)^{\wedge} \\
&= \left(R(\tilde{\omega}-b_{gt}-\eta_g-\tilde{\omega}+b_g)\right)^{\wedge} \\
&= \left(R(-\delta b_g-\eta_g)\right)^{\wedge} \\
&= \left(-R(\delta b_g+\eta_g)\right)^{\wedge}
\end{aligned}
$$

所以，

$$
\begin{aligned}
\dot{\delta\theta} &= -R(\delta b_g+\eta_g) \\
&= -R\delta b_g - \eta_g
\end{aligned}
$$

第三题

➢推导细节

1、δv的相关证明：

$$
\begin{aligned}
\dot{v}_t &= R_t\left(\tilde{a}-b_{at}-\eta_a\right)+g_t \\
&= Exp(\delta\theta)R\left(\tilde{a}-b_a-\delta b_a-\eta_a\right)+g+\delta g \\
&\approx \left(I+\delta\theta^\wedge\right)R\left(\tilde{a}-b_a-\delta b_a-\eta_a\right)+g+\delta g \\
&= \left(R+\delta\theta^\wedge R\right)\left(\tilde{a}-b_a-\delta b_a-\eta_a\right)+g+\delta g \\
&\approx R\tilde{a}-Rb_a-R\delta b_a-R\eta_a+\delta\theta^\wedge R\tilde{a}-\delta\theta^\wedge Rb_a+g+\delta g \\
&= R\tilde{a}-Rb_a-R\delta b_a-R\eta_a-(R\tilde{a})^\wedge\delta\theta+(Rb_a)^\wedge\delta\theta+g+\delta g
\end{aligned}
$$

另一方面，等式右侧为：

$$
\dot{v}_t=\dot{v}+\dot{\delta v}=R(\tilde{a}-b_a)+g+\dot{\delta v}
$$

得到：

$$
\begin{aligned}
\dot{\delta v} &= -[R(\tilde{a}-b_a)]^\wedge\delta\theta-R\delta b_a-R\eta_a+\delta g \\
&= -[R(\tilde{a}-b_a)]^\wedge\delta\theta-R\delta b_a-\eta_a+\delta g
\end{aligned}
$$

在线问答

Q&A

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

感谢各位聆听！

Thanks for Listening