



Tecnológico
de Monterrey

TECNOLÓGICO DE MONTERREY

F3020

FÍSICA EXPERIMENTAL 1

Difracción y transformada de Fourier

Autor:

*Sebastián Sánchez Bernal
Donaldo Alfredo Garrido
Itamar Casais Ponce de
León*

Matrícula:

*A01339431
A01275416
A01021272*

*Dr. Raúl Hernández
Fecha: 16 de Abril de 2020*

Contents

Problema 1	2
Parte (a)	2
Parte (b)	4
Parte (c)	4
Problema 2	5
Problema 3	6
Problema 4	7
Parte (a)	8
Parte (b)	9
Problema 5	11
Parte (a)	11
Parte (b)	14
Problema 6	14
Problema 7	16

Problema 1

(a) Calcula analíticamente el patrón de difracción de Fresnel para una apertura rectangular que tiene anchuras D_x y D_y respectivamente, y que es iluminada por una onda plana de amplitud unitaria. La onda incidente puede escribirse de la siguiente forma

$$U(x_0, y_0, 0) = \text{rect}\left(\frac{x_0}{D_x}\right) \text{rect}\left(\frac{y_0}{D_y}\right) \quad (1)$$

donde la función rectangulo está dada por

$$\text{rect}\left(\frac{x}{D}\right) = \begin{cases} 1, & |x| \leq D \\ 0, & |x| > D \end{cases} \quad (2)$$

En este problema aparecen las integrales conocidas como integrales de Fresnel. Consideren la siguiente definición

$$C(v) = \int_0^v \cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) dv \quad (3)$$

$$S(v) = \int_0^v \sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) dv \quad (4)$$

y utilicen las funciones C y S en su desarrollo.

Solución:

Considerando:

$$U = \frac{e^{ik_0 z}}{i\lambda_0 z} \int \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{x_0}{D_x}\right) \text{rect}\left(\frac{y_0}{D_y}\right) e^{i\frac{k_0}{z\lambda_0}(x_0-x)^2} e^{\frac{k_0}{z\lambda_0}(y_0-y)^2} dx_0 dy_0 \quad (5)$$

$$= \frac{e^{ik_0 z}}{i\lambda_0 z} \int_{-D_x}^{D_x} \int_{-D_y}^{D_y} e^{i\frac{k_0}{2z}(x_0^2 + y_0^2 - 2x_0 x - 2y_0 y + x^2 + y^2)} dy_0 dx_0 \quad (6)$$

$$= \frac{e^{ik_0 z}}{i\lambda_0 z} \int_{-D_x}^{D_x} \int_{-D_y}^{D_y} e^{i\frac{\pi}{z\lambda_0}(x_0-x)^2} e^{i\frac{\pi}{z\lambda_0}(y_0-y)^2} dy_0 dx_0 \quad (7)$$

Haciendo las sustituciones:

$$\sqrt{\frac{\lambda_0 z}{2}} u = x_0 - x \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{\lambda_0 z}{2}} du = dx_0$$

$$\sqrt{\frac{\lambda_0 z}{2}} v = y_0 - y \quad \implies \quad \sqrt{\frac{\lambda_0 z}{2}} dv = dy_0$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
U(\mathbf{r}) &= \frac{e^{ik_0 z}}{i\lambda_0 z} \int_{-D_x}^{D_x} \int_{-D_y}^{D_y} e^{i\frac{\pi}{2} u^2} e^{i\frac{\pi}{2} v^2} dy_0 dx_0 \\
&= \frac{e^{ik_0 z}}{i} \int_{-D_x}^{D_x} \int_{-D_y}^{D_y} \left(\cos\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) \right) \left(\cos\left(\frac{\pi v^2}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi v^2}{2}\right) \right) dy_0 dx_0 \\
&= 2 \frac{e^{ik_0 z}}{i} \left(\int_0^{D_x} \cos\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) dx_0 \int_0^{D_y} \cos\left(\frac{\pi v^2}{2}\right) dy_0 + i \int_0^{D_x} \cos\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) dx_0 \int_0^{D_y} \sin\left(\frac{\pi v^2}{2}\right) dy_0 \right. \\
&\quad \left. + i \int_0^{D_x} \sin\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) dx_0 \int_0^{D_y} \cos\left(\frac{\pi v^2}{2}\right) dy_0 - \int_0^{D_x} \sin\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) dx_0 \int_0^{D_y} \sin\left(\frac{\pi v^2}{2}\right) dy_0 \right) \\
&= \boxed{2e^{ik_0 z} [C(x_0)S(y_0) + S(x_0)C(y_0) + iS(x_0)S(y_0) - iC(x_0)C(y_0)]}
\end{aligned}$$

(b) Con su resultado anterior, consideren ahora el caso de una apertura rectangular, es decir $D_x = D_y$. La cantidad definida como $N_F = D^2/4\lambda_z$ se conoce como el número de Fresnel. Utilicen MATLAB para obtener las gráficas del perfil transversal de difracción para los valores de $N_F = [10, 5, 1, 0.1]$.

Solución:

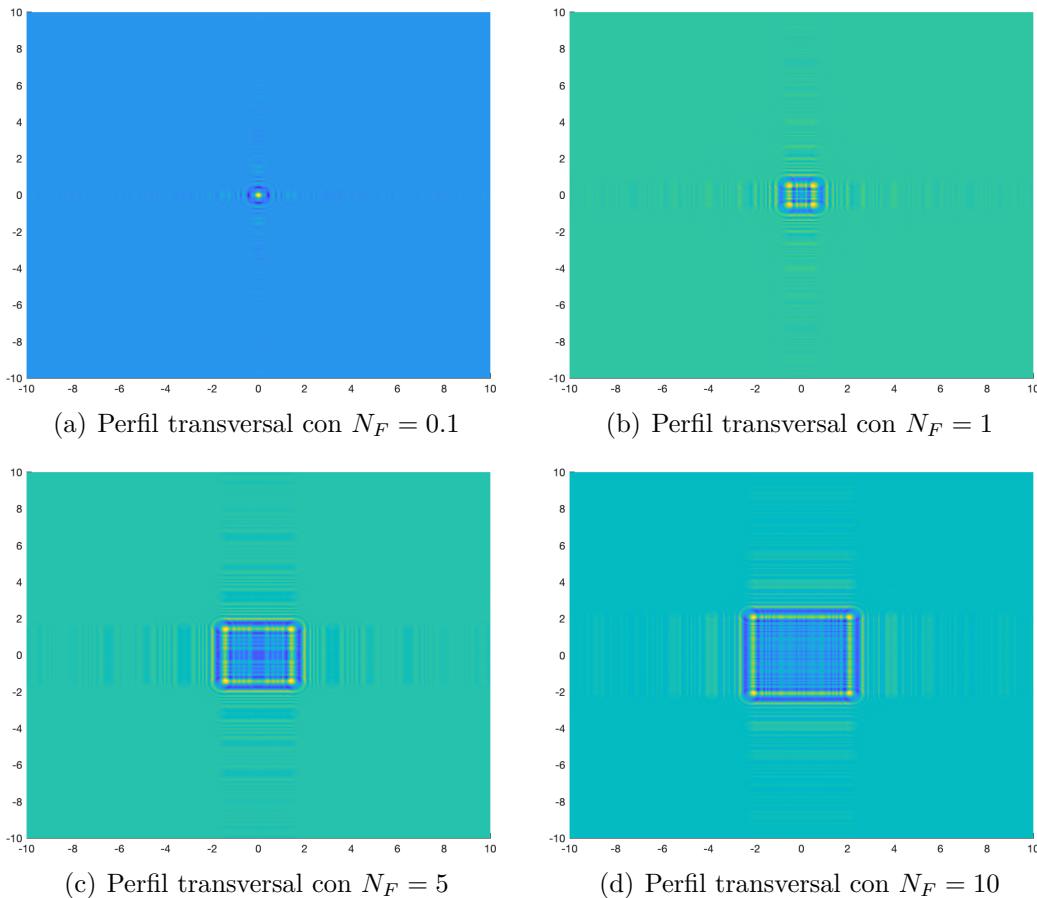


Figure 1: Perfil transversal de difracción con diferentes valores de N_F

(c) Demuestren analíticamente que para valores de z pequeños la intensidad del haz difractado se asemeja a la forma de la apertura rectangular.

Solución:

En este caso, vamos a escribir el resultado anterior como función de x, D_x, y, D_y , que resulta de evaluar los límites D_x y D_y :

$$U(\mathbf{r}) = 2e^{ik_0z} \left[C\left(\frac{\sqrt{2}}{z\lambda}(x + D_x)\right)S\left(\frac{\sqrt{2}}{z\lambda}(y + D_y)\right) + S\left(\frac{\sqrt{2}}{z\lambda}(x + D_x)\right)C\left(\frac{\sqrt{2}}{z\lambda}(y + D_y)\right) \right. \\ \left. + iS\left(\frac{\sqrt{2}}{z\lambda}(x + D_x)\right)S\left(\frac{\sqrt{2}}{z\lambda}(y + D_y)\right) - iC\left(\frac{\sqrt{2}}{z\lambda}(y + D_y)\right)C\left(\frac{\sqrt{2}}{z\lambda}(y + D_y)\right) \right]$$

Cuando tenemos esa configuración, si z se acerca a 0, es necesario que se integre de 0 a ∞ para que la integral sea de 1. Para que eso suceda, tenemos las condiciones:

$$|x| \leq D_x$$

$$|y| \leq D_y$$

si estas condiciones no se cumplen, entonces la integral no da 1. Pero las condiciones escritas son equivalentes a una función rectángulo, como se requería.

Problema 2

Calcúlen el patrón de difracción de Fraunhofer de la apertura rectangular del problema 1. Hagan una gráfica del perfil transversal del campo difractado.

Solución:

Considerando la integral de difracción de Fraunhofer

$$U(\vec{r}) = \frac{e^{ik_0z}}{i\lambda_0 z} e^{\frac{ik_0}{2z}(x^2+y^2)} \int \int_{-\infty}^{\infty} U(x_0, y_0, 0) e^{-\frac{ik_0}{z}(x_0x+y_0y)} dx_0 dy_0 \\ U(\vec{r}) = \frac{e^{ik_0z}}{i\lambda_0 z} e^{\frac{ik_0}{2z}(x^2+y^2)} \int_{-D_x}^{D_y} e^{\frac{ik_0}{z}x_0x} dx_0 \int_{-D_y}^{D_y} e^{\frac{ik_0}{z}y_0y} dy_0 \\ = \frac{e^{ik_0z}}{i\lambda_0 z} e^{\frac{ik_0}{2z}(x^2+y^2)} \left[\frac{z}{ik_0x} e^{\frac{ik_0}{z}x_0x} \right]_{-D_x}^{D_x} \cdot \left[\frac{z}{ik_0y} e^{\frac{ik_0}{z}y_0y} \right]_{-D_y}^{D_y} \\ = \frac{e^{ik_0z}}{i\lambda_0 z} e^{\frac{ik_0}{2z}(x^2+y^2)} 2D_x \cdot \frac{1}{2i} \frac{z}{D_x k_0 x} \left[e^{\frac{ik_0}{z}D_x x} - e^{-\frac{ik_0}{2}D_x x} \right] \cdot 2D_y \frac{1}{2i} \frac{z}{D_y k_0 y} \left[e^{\frac{ik_0}{z}D_y y} - e^{-\frac{ik_0}{2}D_y y} \right] \\ = \frac{e^{ik_0z}}{i\lambda_0 z} e^{\frac{ik_0}{2z}(x^2+y^2)} \cdot 4D_x D_y \frac{z}{D_x k_0 x} \sin\left(\frac{k_0 D_x x}{z}\right) \cdot \frac{z}{D_y k_0 y} \sin\left(\frac{k_0 D_y y}{z}\right)$$

$$\therefore \boxed{\frac{e^{ik_0 z}}{i\lambda_0 z} e^{\frac{ik_0}{2z}(x^2+y^2)} \cdot 4D_x D_y \text{sinc}\left(\frac{k_0 D_x x}{z}\right) \cdot \text{sinc}\left(\frac{k_0 D_y y}{z}\right)}$$

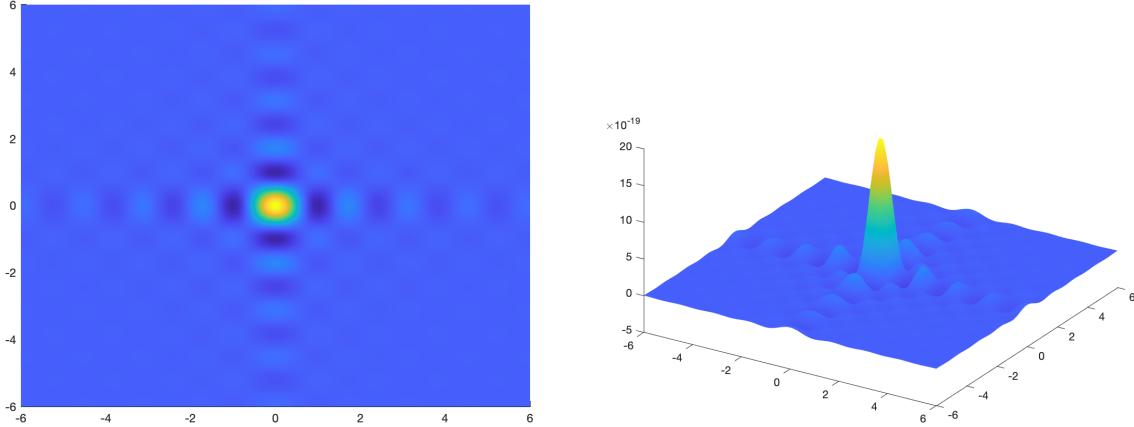


Figure 2: Patrón de difracción de una rendija rectangular

Problema 3

Calculen el patrón de difracción en la aproximación de Fraunhofer para el caso de una apertura circular de diámetro D, que es iluminada con una onda plana de amplitud unitaria. El campo inicial puede escribirse como

$$U(x_0, y_0, 0) = \text{circ}\left(\frac{r_0}{D}\right) \quad (8)$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, y la función círculo está definida como

$$\text{circ}\left(\frac{r}{D}\right) = \begin{cases} 1, & |r| \leq D \\ 0, & |r| > D \end{cases} \quad (9)$$

Hagan gráficas del patrón de difracción para distintos valores del diámetro de la apertura. Recuerden utilizar un número de puntos adecuado en sus simulaciones para que puedan obtener buenos perfiles.

Solución:

Considerando

$$U(\vec{r}) = \frac{e^{ik_0 z}}{i\lambda_0 z} e^{\frac{ik_0}{2z}(x^2+y^2)} \int \int_{-\infty}^{\infty} U(x_0, y_0, 0) e^{-\frac{ik_0}{z}(x_0 x + y_0 y)} dx_0 dy_0$$

Podemos parametrizar en polares

$$x_0 = r \cos \theta_0$$

$$y_0 = r \sin \theta_0$$

$$\therefore U(\theta_0, r_0) = \frac{e^{ik_0 z}}{i\lambda_0 z} e^{\frac{ik_0}{2z} r^2} \int_0^D \int_0^{2\pi} e^{\frac{-ik_0 r_0}{z} (\cos \theta_0 x + \sin \theta_0 y)} r_0 d\theta_0 dr_0$$

El resultado de la transformada de esta función es una Bessel de orden 1

$$\therefore = \frac{z}{k_0 D} J_1 \left(\frac{k_0 D}{z} \right)$$

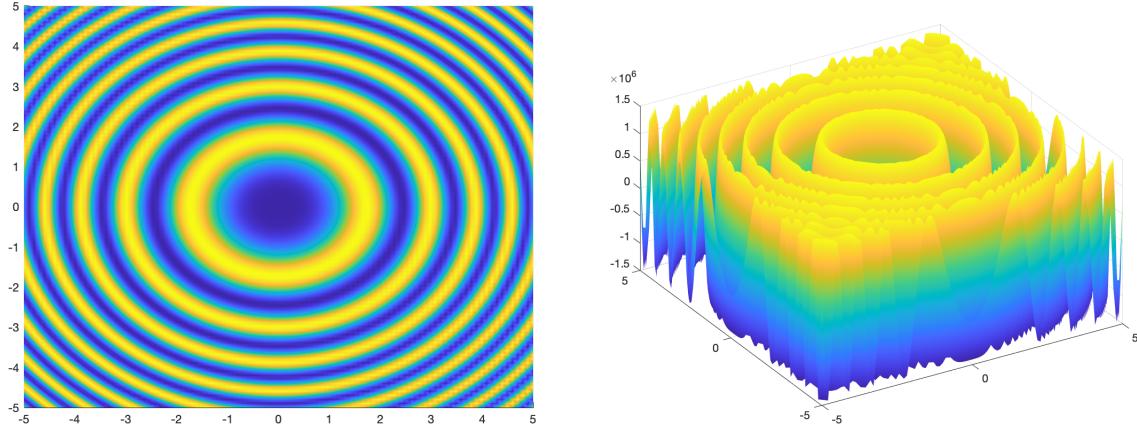


Figure 3: Patrón de difracción de una rendija circular

Problema 4

Una lente delgada tiene una función de transmitancia dada por

$$t_l = \exp \left[-i \frac{k}{2f} (x^2 + y^2) \right] \quad (10)$$

esta función nos dice el efecto que tiene una lente delgada sobre una distribución incidente. La expresión no considera la extensión transversal finita de la lente, sin embargo si la extensión física de la distribución de entrada a la lente es menor que el diámetro de la apertura de la lente, entonces podemos ignorar los efectos de la apertura. La convención que adoptamos es que si la lente tiene una distancia focal positiva $f > 0$, decimos que la lente es convergente, y si esta distancia es negativa la lente es divergente. La figura 1 muestra una lente convergente.

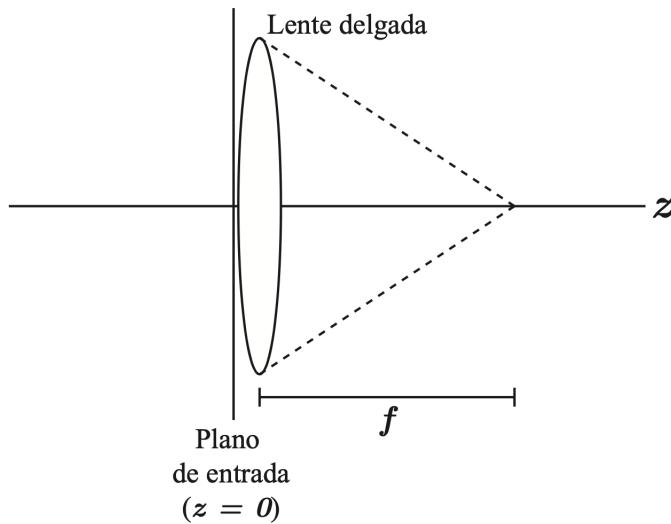


Figure 4: Lente convergente

(a) La distribución de amplitud de un campo incidente en la lente mostrada en Fig. 1, en un plano inmediatamente después de la lente está dada por la expresión

$$U'(x_0, y_0) = U(x_0, y_0) \exp \left[-i \frac{k}{2f} (x_0^2 + y_0^2) \right] \quad (11)$$

demuestra que la distribución del campo en el plano focal de la lente es proporcional a la transformada de Fourier bidimensional.

Solución:

$$\begin{aligned}
U(\mathbf{r}) &= \frac{e^{ik_0 z}}{i\lambda_0 z} \iint_{-\infty}^{\infty} U(0, y_0, 0) e^{-i\frac{k}{2f}((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2)} dx_0 dy_0 \\
&= \frac{e^{ik_0 z}}{i\lambda_0 z} \iint_{-\infty}^{\infty} U(0, y_0, 0) e^{i\frac{k}{2z}x^2 - 2x_0 x + x_0^2 + y^2 - 2y_0 y + y_0^2} dx_0 dy_0 \\
&= \frac{e^{ik_0 z}}{i\lambda_0 z} e^{\frac{ik_0}{2z}(x^2 + y^2)} \underbrace{\iint_{-\infty}^{\infty} U(0, y_0, 0) e^{i\frac{k_0}{2z}(x_0^2 + y_0^2)} e^{-i\frac{k_0}{z}(x_0 x + y_0 y)} dx_0 dy_0}_{\text{Término obtenido}}
\end{aligned}$$

Del término obtenido, podemos ver la condición requerida

$$U(x_0, y_0, 0) e^{-i\frac{k_0}{2f}(x_0^2 + y_0^2)} \propto U(x_0, y_0, 0) e^{i\frac{k_0}{2z}(x_0^2 + y_0^2)}$$

(b) Asume que el campo incidente en la lente está dado por un haz gaussiano de la forma

$$U(x_0, y_0, z=0) = U_0 \exp \left[-\frac{(x_0^2 + y_0^2)}{2w_0^2} \right] \quad (12)$$

donde U_0 es una constante, y ω_0 se conoce como el ancho de la gaussiana en la cintura. Calcula la distribución del campo en el plano focal de la lente. Qué puedes decir de la distribución del campo en el plano focal cuando $\omega_0 \rightarrow \infty$.

Solución: El planteamiento es:

$$U(\mathbf{r}) = \frac{e^{ik_0 z}}{i\lambda_0 z} e^{\frac{ik_0}{2z}(x^2 + y^2)} U_0 \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x_0^2 + y_0^2}{2\omega_0^2}} e^{i\frac{k_0}{2z}(x_0^2 + y_0^2)} e^{-i\frac{k_0}{z}(x_0 x + y_0 y)} dx_0 dy_0$$

Sea $A = \frac{e^{ik_0 z}}{i\lambda_0 z} e^{\frac{ik_0}{2z}(x^2 + y^2)} U_0$, obtenemos

$$U(\mathbf{r}) = A e^{(-\frac{1}{2\omega_0^2} + \frac{ik_0}{2z})(x_0^2 + y_0^2) - i\frac{k_0}{z}(x_0 x + y_0 y)} dx_0 dy_0$$

Podemos separar las integrales para x_0 , que será la integral I_1 , y para y_0 , que será la integral I_2 :

$$A \int_{-\infty}^{\infty} e^{(-\frac{1}{2\omega_0^2} + \frac{ik_0}{2z})x_0^2 - i\frac{k_0}{z}x_0 x} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{(-\frac{1}{2\omega_0^2} + \frac{ik_0}{2z})y_0^2 - i\frac{k_0}{z}y_0 y} dy_0$$

Trabajamos con el integrando de I_1 :

$$e^{(-\frac{1}{2\omega_0^2} + \frac{ik_0}{2z})x_0^2 - i\frac{k_0}{z}x_0 x}$$

Sea $c = \left(-\frac{1}{2\omega_0} + \frac{ik_0}{2z}\right)$. Completamos al cuadrado (de la forma $(a+b)^2$) el argumento de la exponencial:

$$a = \sqrt{c}x_0 \quad 2ab = -i\frac{k_0}{z}x_0x, \implies \therefore b = \frac{-ik_0x}{2z\sqrt{c}}$$

Agrupando y acomodando un signo menos, el integrando queda:

$$e^{-(\sqrt{c}x_0 + i\frac{k_0}{2z\sqrt{c}}x)^2} e^{\frac{k_0^2}{4z^2c}x^2}$$

Haciendo el cambio de variable $u = -\sqrt{c}x_0 + i\frac{k_0}{2z\sqrt{c}}x$, obtenemos la integral

$$I_1 = -\frac{1}{\sqrt{c}}e^{\frac{k_0^2}{4z^2c}x^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du$$

La integral resultante es una gaussiana evaluada en todo el espacio, que como sabemos tiene como resultado $\sqrt{\pi}$, obtenemos el resultado

$$I_1 = -\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{-\frac{1}{2\omega_0} + \frac{ik_0}{2z}}} e^{\frac{k_0^2}{4z^2(-\frac{1}{2\omega_0} + \frac{ik_0}{2z})}x^2}$$

Con un proceso análogo, para I_2 , se obtiene:

$$I_2 = -\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{-\frac{1}{2\omega_0} + \frac{ik_0}{2z}}} e^{\frac{k_0^2}{4z^2(-\frac{1}{2\omega_0} + \frac{ik_0}{2z})}y^2}$$

El campo será el producto AI_1I_2 :

$$U(\mathbf{r}) = \boxed{\frac{U_0\pi e^{ik_0z}}{i\lambda_0 z(-\frac{1}{2\omega_0} + \frac{ik_0}{2z})} e^{(x^2+y^2)\left(\frac{ik_0}{2z} - \frac{k_0^2}{4z^2(\frac{ik_0}{2z} - \frac{1}{2\omega_0})}\right)}}$$

Para saber qué pasa cuando $\omega_0 \rightarrow \infty$, calculamos el límite:

$$\lim_{\omega_0 \rightarrow \infty} U(\mathbf{r}) = \frac{2U_0\pi e^{ik_0z}}{\lambda_0 k_0} e^{(x^2+y^2)(\frac{ik_0}{2z} + \frac{ik_0}{2z})}$$

Reacomodando, obtenemos:

$$\boxed{\lim_{\omega_0 \rightarrow \infty} U(\mathbf{r}) = -U_0 e^{ik_0z} e^{i\frac{k_0}{z}(x^2+y^2)}}$$

Que es justamente el factor de escala de Fraunhofer.

Problema 5

Considera la función de transmitancia de una rejilla de amplitud cuadrada que está dada por

$$t_A(x, y) = \left[\frac{1}{2} + \frac{m}{2} \cos(2\pi f_0 x) \right] \operatorname{rect}\left(\frac{x}{D}\right) \operatorname{rect}\left(\frac{y}{D}\right) \quad (13)$$

(a) Obtengan el patrón de difracción en la región de Fresnel para esta rejilla, y hagan gráficas en MATLAB del perfil de intensidad considerando los números de Fresnel del problema 1.

Solución:

Para calcular Fresnel, es necesario agregar el término $e^{i\frac{k(x_0^2+y_0^2)}{2z}}$:

$$U(\mathbf{r}) = \mathcal{F} \left\{ \underbrace{\left[\frac{1}{2} + \frac{m}{2} \cos(2\pi f_0 x_0) \right]}_{f(x_0, y_0)} \underbrace{\operatorname{rect}\left(\frac{x_0}{D}\right) \operatorname{rect}\left(\frac{y_0}{D}\right)}_{g(x_0, y_0)} \underbrace{e^{i\frac{k(x_0^2+y_0^2)}{2z}}}_{h(x_0, y_0)} \right\}$$

Podemos usar el teorema de convolución extendido a tres funciones:

$$\mathcal{F}\{f(x_0, y_0)g(x_0, y_0)h(x_0, y_0)\} = \underbrace{\mathcal{F}\{f(x_0, y_0)\}}_{T1} * \underbrace{\mathcal{F}\{g(x_0, y_0)\}}_{T2} * \underbrace{\mathcal{F}\{h(x_0, y_0)\}}_{T3}$$

Para T1:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(x_0, y_0)\} &= \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2} + \frac{m}{2} \cos(2\pi f_0 x_0)\right\} & 2005/06/28ver : 1 \\ &= \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2} + \frac{m}{4} e^{i2\pi f_0 x_0} + \frac{m}{4} e^{-i2\pi f_0 x_0}\right\} \\ &= \frac{1}{2} \delta(f_x, f_y) + \frac{m}{4} \delta(f_x + f_0, f_y) + \frac{m}{4} \delta(f_x - f_0, f_y) \end{aligned}$$

Para T2:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{g(x_0, y_0)\} &= \mathcal{F}_{x0} \left\{ \operatorname{rect}\left(\frac{x_0}{D}\right) \right\} \mathcal{F}_{y0} \left\{ \operatorname{rect}\left(\frac{y_0}{D}\right) \right\} \\ &= D^2 \operatorname{sinc}(Df_x) \operatorname{sinc}(Df_y) \end{aligned}$$

Ahora, podemos calcular

$$\begin{aligned}\mathcal{F} = \{f(x_0, y_0)\} * \mathcal{F}\{g(x_0, y_0)\} &= \left[\frac{1}{2} \delta(f_x, f_y) + \frac{m}{4} \delta(f_x + f_0, f_y) + \frac{m}{4} \delta(f_x - f_0, f_y) \right] \\ &\quad * D^2 \text{sinc}(Df_x) \text{sinc}(Df_y) \\ &= \frac{D^2}{2} \text{sinc}(Df_y) \left[\text{sinc}(Df_x) + \frac{m}{2} \text{sinc}(D(f_x - f_0)) + \frac{m}{2} \text{sinc}(D(f_x + f_0)) \right]\end{aligned}$$

Por último, para T3:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{h(x_0, y_0)\} &= \mathcal{F} \left\{ e^{i \frac{k(x_0^2 + y_0^2)}{2z}} \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{i \frac{k(x_0^2 + y_0^2)}{2z}} e^{i(f_x x_0 + f_y y_0)} dx_0 dy_0 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i((k/2z)x_0^2 + f_x x_0)} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{i((k/2z)y_0^2 + f_y y_0)} dy_0\end{aligned}$$

Estos términos son muy similares a los tratados en el problema 1, completamos al cuadrado $(a + b)^2$:

$$a^2 = \frac{k}{2z} x_0^2, \quad 2ab = f_x x_0, \quad \therefore b^2 = \frac{z}{2k} f_x^2$$

Así, obtenemos la transformada:

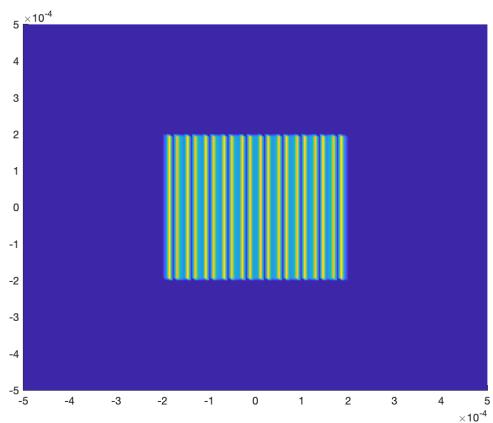
$$\mathcal{F}\{h(x_0, y_0)\} = \frac{e^{-\frac{z}{2k} f_x^2}}{2\pi} [C(x_0)S(y_0) + S(x_0)C(y_0) + iS(x_0)S(y_0) - iC(x_0)C(y_0)]$$

Recordamos que el campo es:

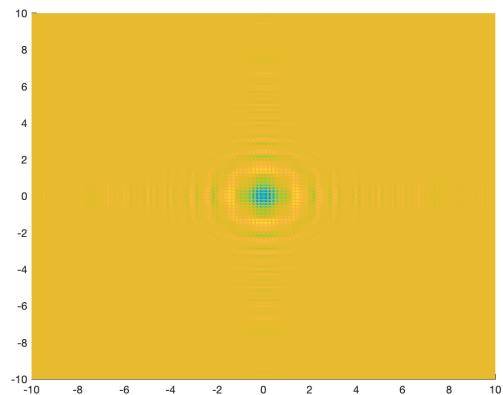
$$U(\mathbf{r}) \mathcal{F}\{f(x_0, y_0)g(x_0, y_0)h(x_0, y_0)\}$$

Y por tanto:

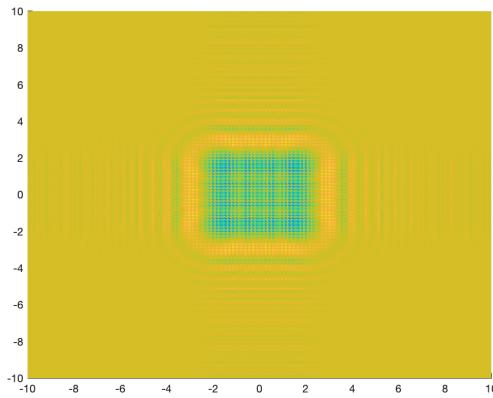
$$U\mathbf{r} = \frac{D^2 e^{-\frac{z}{2k} f_x^2}}{4\pi} \text{sinc}(Df_y) \left[\text{sinc}(Df_x) + \frac{m}{2} \text{sinc}(D(f_x - f_0)) + \frac{m}{2} \text{sinc}(D(f_x + f_0)) \right] \\ * [C(x_0)S(y_0) + S(x_0)C(y_0) + iS(x_0)S(y_0) - iC(x_0)C(y_0)]$$



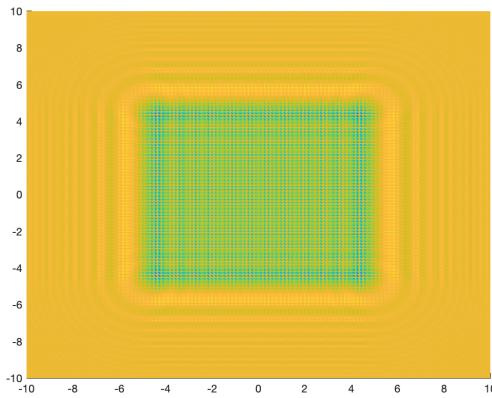
(a) Rejilla



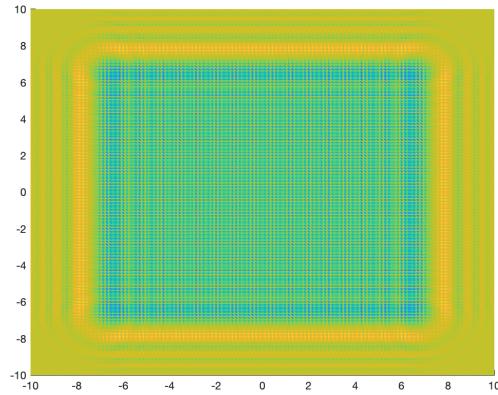
(b) Perfil transversal con $N_F = 0.1$



(c) Perfil transversal con $N_F = 1$



(d) Perfil transversal con $N_F = 5$



(e) Perfil transversal con $N_F = 10$

Figure 5: Rejilla y perfil transversal de difracción con diferentes valores de N_F

(b) Determinen la intensidad del patrón de difracción a una determinada distancia z que satisface la condición

$$z = \frac{2n}{\lambda f_0^2} \quad (14)$$

donde n es un número entero. Las distancias que cumplen con esta condición dan origen a las imágenes de Talbot.

Solución:

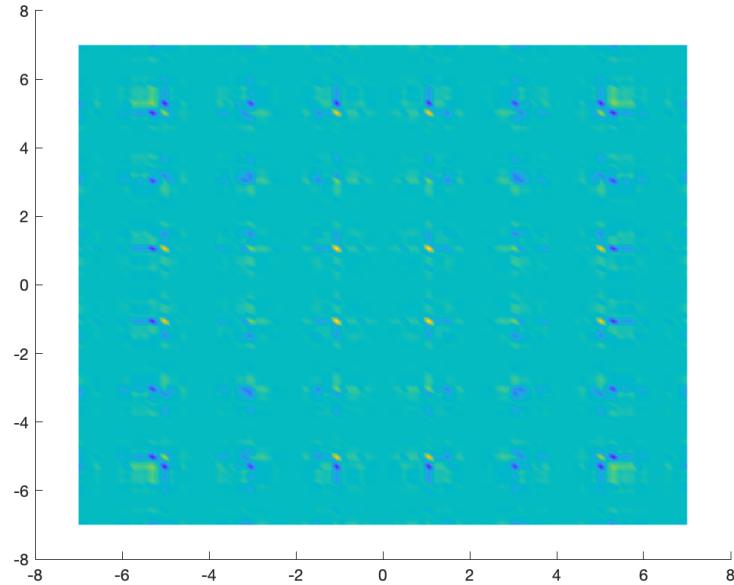


Figure 6: Efecto de Talbot

Problema 6

Calculen el patrón de difracción de Fraunhofer para una rejilla de fase limitada por una apertura cuadrada, y que es iluminada por una onda plana de amplitud unitaria. La función de transmitancia de la rejilla está dada por

$$t_A(x, y) = \exp \left[i \frac{m}{2} \sin(2\pi f_0 x) \right] \text{rect} \left(\frac{x}{D} \right) \text{rect} \left(\frac{y}{D} \right) \quad (15)$$

Hagan una gráfica del perfil de intensidad usando MATLAB, y comenten cómo está distribuida la energía del campo en los distintos órdenes de difracción.

Solución:

Podemos definir la función de transmitancia de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 t_A(x_0, y_0) &= \underbrace{e^{i\frac{m}{2} \sin 2\pi f_0 x_0}}_{g(x_0, y_0)} \underbrace{\text{rect}\left(\frac{x_0}{D}\right) \text{rect}\left(\frac{y_0}{D}\right)}_{h(x_0, y_0)} \\
 \mathcal{F}\{t_a(x_0, y_0)\} &= \mathcal{F}\{g(x_0, y_0)h(x_0, y_0)\} \\
 &= \mathcal{F}\{g(x_0, y_0)\} * \mathcal{F}\{h(x_0, y_0)\} \\
 \therefore \mathcal{F}\{g(x_0, y_0)\} &= \mathcal{F}\left\{\text{rect}\left(\frac{x_0}{D}\right) \text{rect}\left(\frac{y_0}{D}\right)\right\} = D^2 \text{sinc}(Df_x) \text{sinc}(Df_y) \\
 \therefore \mathcal{F}\{g(x_0, y_0)\} &= \mathcal{F}\{e^{i\frac{m}{2} \sin 2\pi f_0 x_0}\} = \frac{1}{2\pi} \int \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{m}{2} \sin 2\pi f_0 x_0} e^{i(k_x x_0 + k_y y_0)} dx_0 dy_0 \\
 &\quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_y y_0} dy_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{m}{2} \sin(2\pi f_0 x_0) + ik_x x_0} dx_0 \\
 &= \frac{\delta(f_y)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{m}{2} \sin(2\pi f_0 x_0) + ik_x x_0} dx_0
 \end{aligned}$$

De esta forma podemos definir el campo $U(\vec{r})$

$$\boxed{\therefore U(\vec{r}) = \delta(f_y) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{m}{2} \sin(2\pi f_0 x_0) + ik_x x_0} dx_0 * \frac{D^2}{2\pi} \text{sinc}(Df_x) \text{sinc}(Df_y)}$$

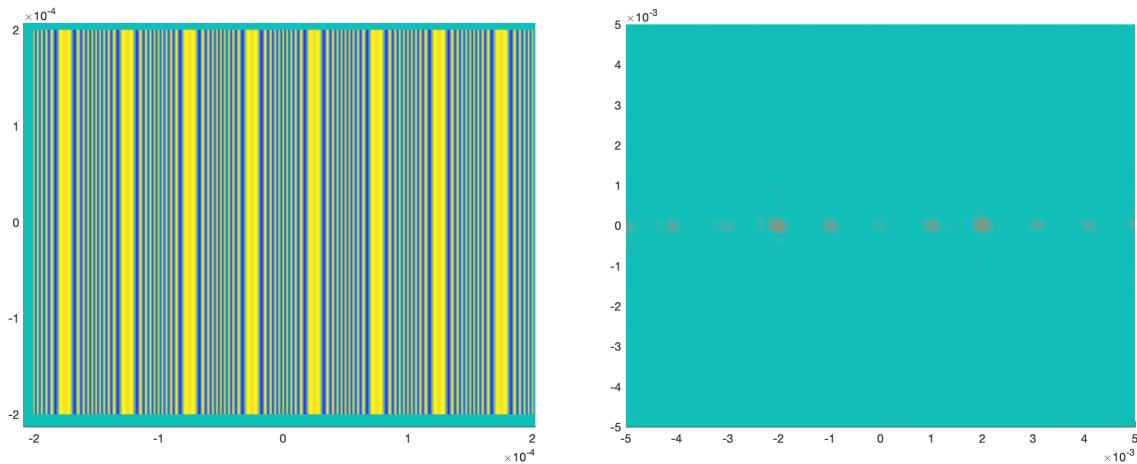


Figure 7: Rejilla y patrón de difracción

Problema 7

Calculen el patrón de difracción de Fraunhofer para las siguientes dos aperturas que se muestran. Obtengan además las gráficas en MATLAB de los perfiles de intensidad en las zonas de Fresnel y de Fraunhofer de cada uno de los patrones, y presenten patrones de difracción para distintos casos, en particular estudien cómo se comporta el perfil conforme el grosor de la apertura disminuye, de tal manera que la diferencia entre D_1 y D_2 es pequeña.

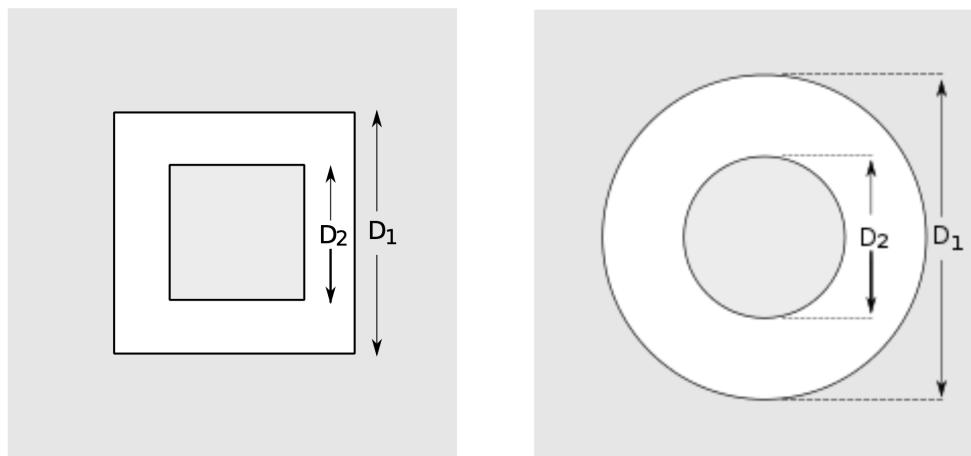


Figure 8: Apertura rectangular y circular

Solución:

(a) Podemos obtener el resultado analítico de este problema a partir del resultado del problema 2. Para el caso de D_1 podemos escribir la siguiente expresión

$$U(\vec{r}_1) = \frac{e^{ik_0 z}}{i\lambda_0 z} e^{\frac{ik_0}{2z}(x^2+y^2)} \cdot 4D_1^2 \operatorname{sinc}\left(\frac{k_0 D_1 x}{z}\right) \cdot \operatorname{sinc}\left(\frac{k_0 D_1 y}{z}\right)$$

Y para el caso de D_2 la expresión es la siguiente

$$U(\vec{r}_2) = \frac{e^{ik_0 z}}{i\lambda_0 z} e^{\frac{ik_0}{2z}(x^2+y^2)} \cdot 4D_2^2 \operatorname{sinc}\left(\frac{k_0 D_2 x}{z}\right) \cdot \operatorname{sinc}\left(\frac{k_0 D_2 y}{z}\right)$$

Donde $D_2 < D_1$

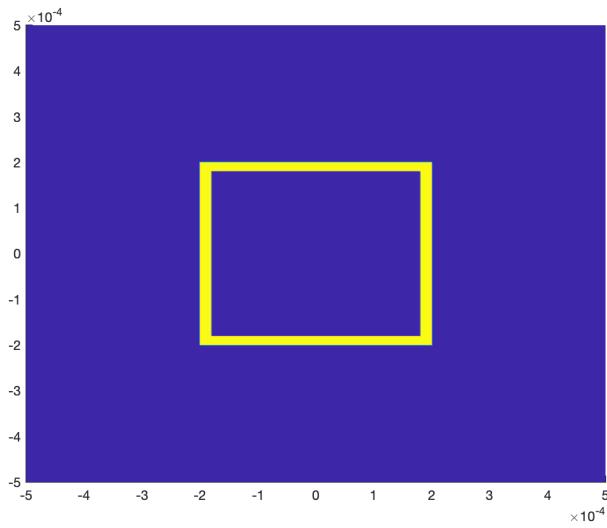
$$\therefore U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2) =$$

$$\boxed{\frac{e^{ik_0 z}}{i\lambda_0 z} e^{\frac{ik_0}{2z}(x^2+y^2)} \cdot 4 \left[D_1^2 \operatorname{sinc}\left(\frac{k_0 D_1 x}{z}\right) \cdot \operatorname{sinc}\left(\frac{k_0 D_1 y}{z}\right) - D_2^2 \operatorname{sinc}\left(\frac{k_0 D_2 x}{z}\right) \cdot \operatorname{sinc}\left(\frac{k_0 D_2 y}{z}\right) \right]}$$

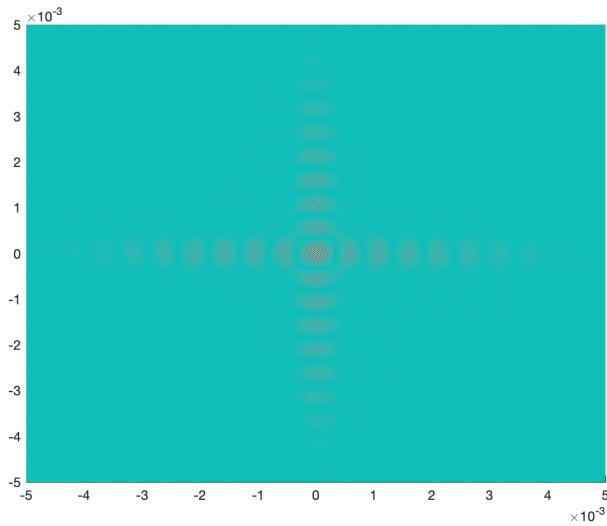
(b) De manera similar se puede obtener un resultado para el caso circular

$$\boxed{\frac{z}{k_0 \frac{D_1}{2}} J_1\left(\frac{k_0 \frac{D_1}{2}}{z}\right) - \frac{z}{k_0 \frac{D_2}{2}} J_1\left(\frac{k_0 \frac{D_2}{2}}{z}\right)}$$

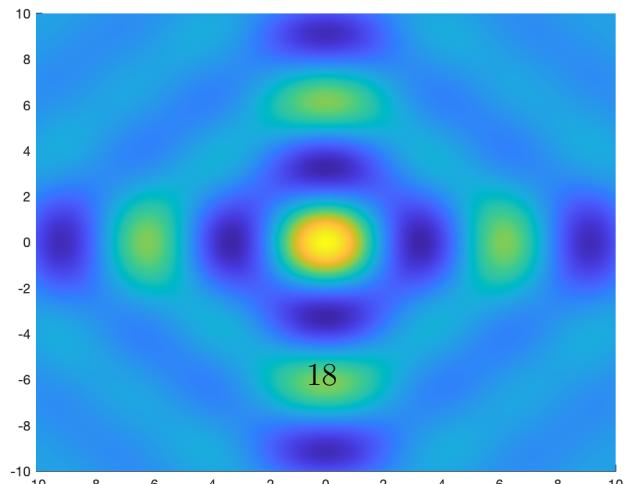
A continuación se muestran los perfiles de intensidad dependiendo del ancho de la rendija



(a) Rejilla

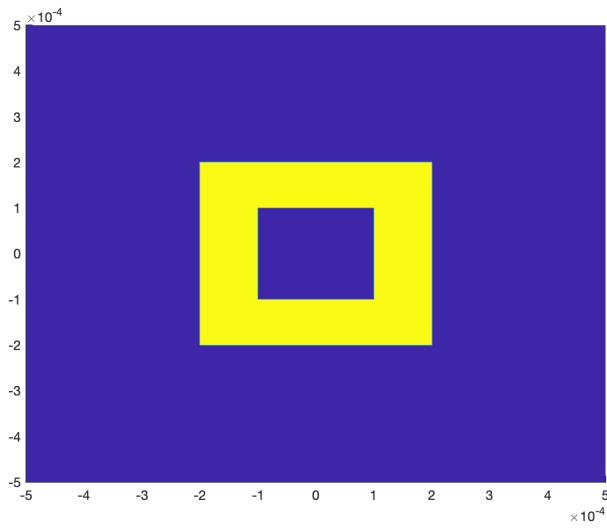


(b) Fresnel ($D_1 = 1, D_2 = 0.9$)

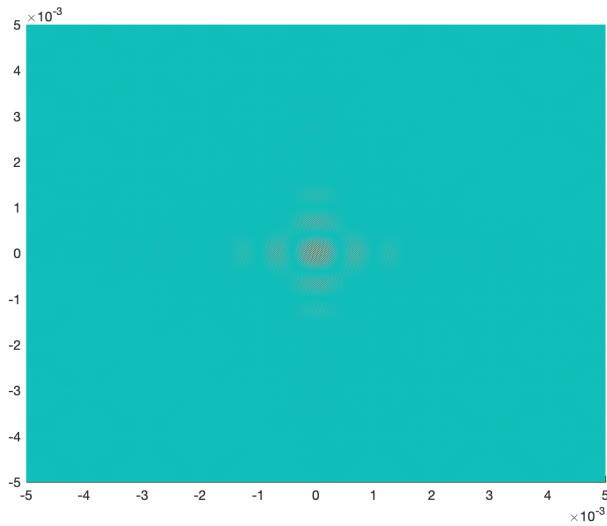


(c) Fraunhofer ($D_1 = 1, D_2 = 0.9$)

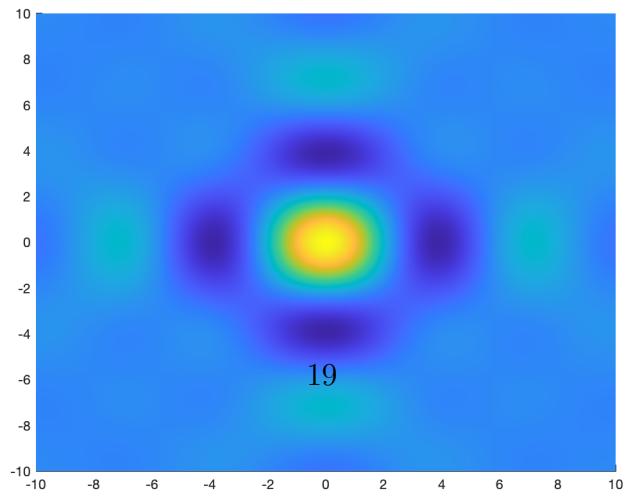
Figure 9: Rejilla y perfil transversal de difracción



(a) Rejilla

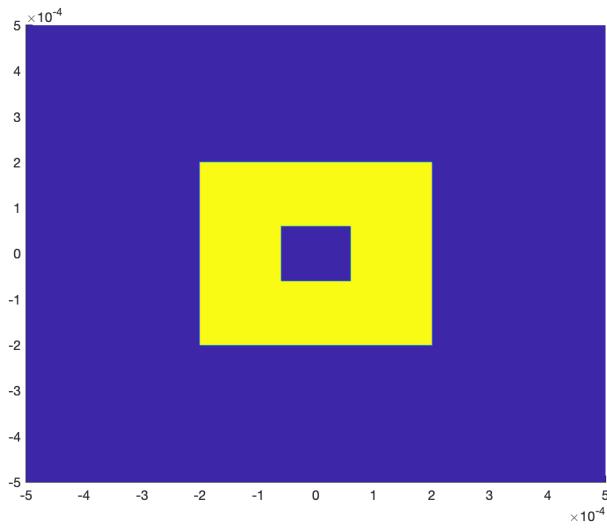


(b) Fresnel ($D_1 = 1, D_2 = 0.5$)

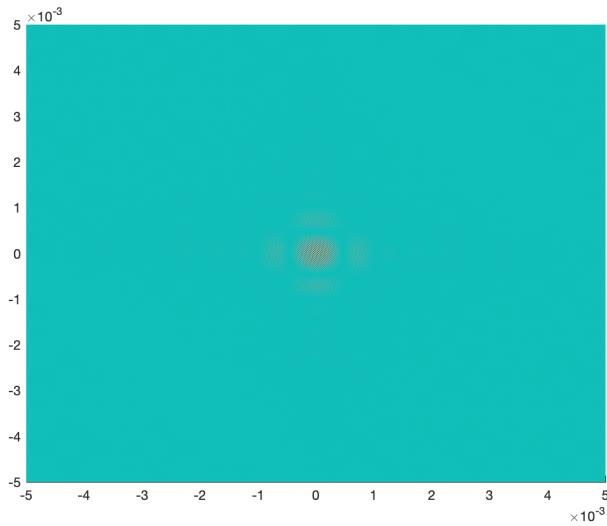


(c) Fraunhofer ($D_1 = 1, D_2 = 0.5$)

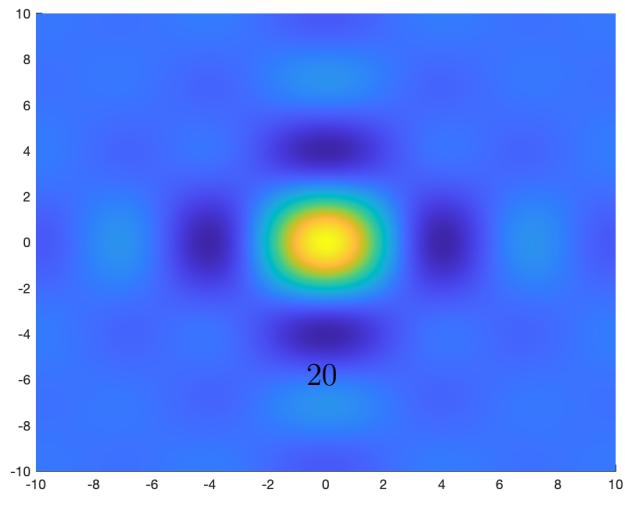
Figure 10: Rejilla y perfil transversal de difracción



(a) Rejilla

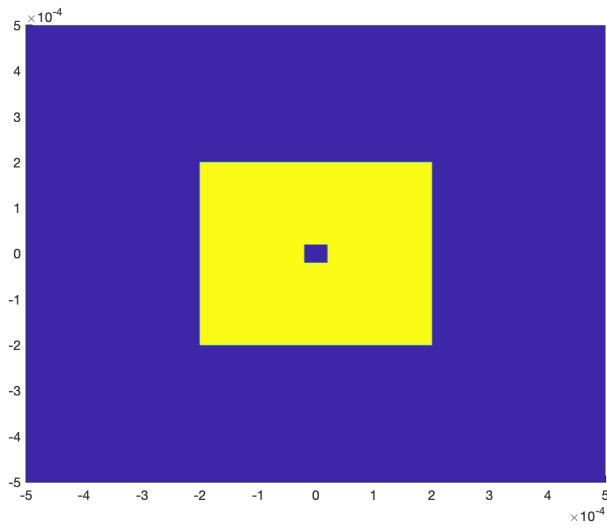


(b) Fresnel ($D_1 = 1, D_2 = 0.3$)

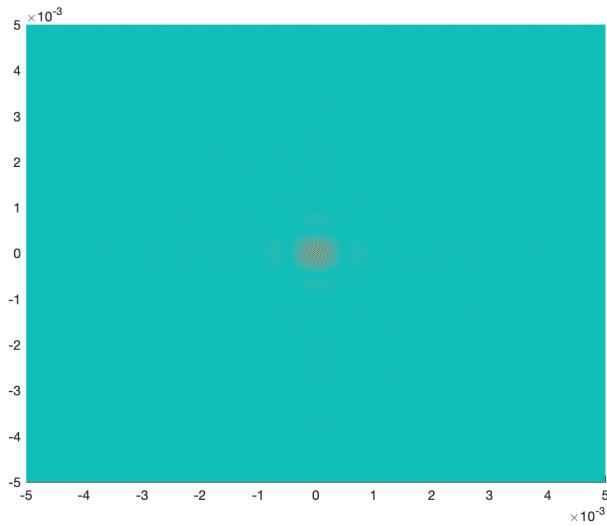


(c) Fraunhofer ($D_1 = 1, D_2 = 0.3$)

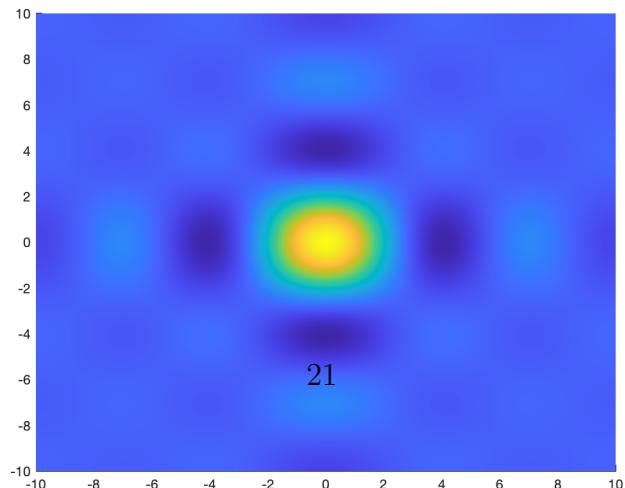
Figure 11: Rejilla y perfil transversal de difracción



(a) Rejilla

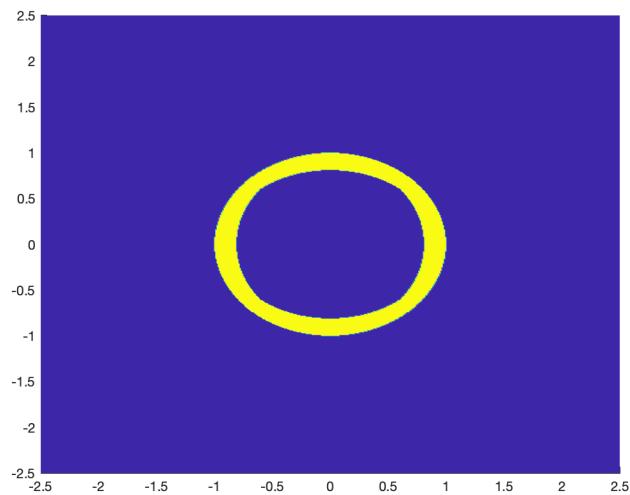


(b) Fresnel ($D_1 = 1, D_2 = 0.1$)

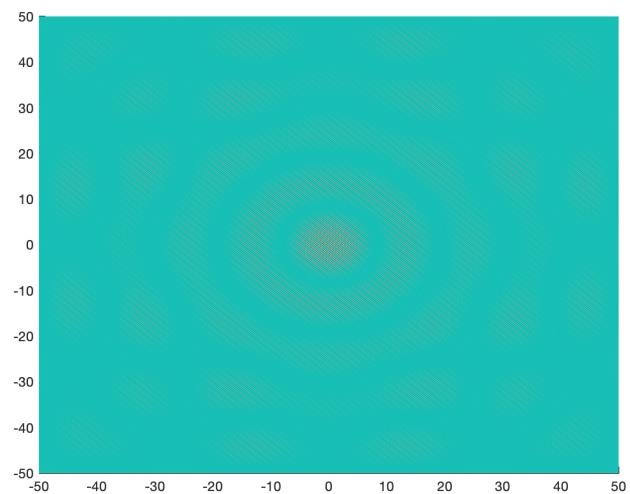


(c) Fraunhofer ($D_1 = 1, D_2 = 0.1$)

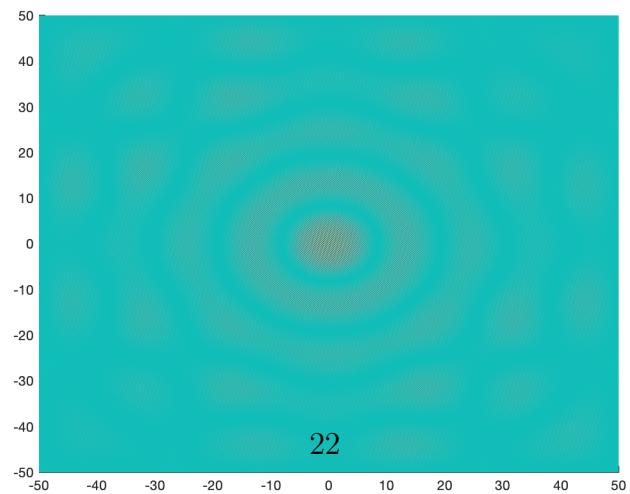
Figure 12: Rejilla y perfil transversal de difracción



(a) Rejilla

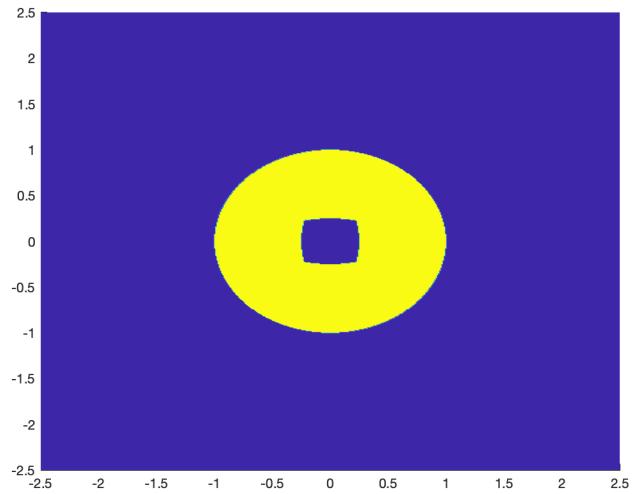


(b) Fresnel ($D_1 = 1, D_2 = 0.9$)

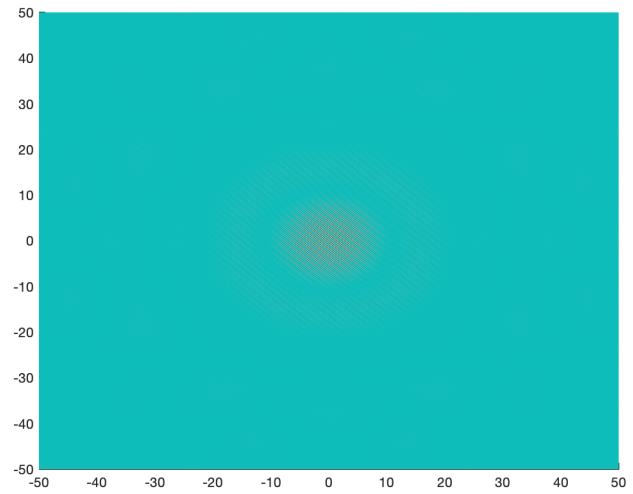


(c) Fraunhofer ($D_1 = 1, D_2 = 0.9$)

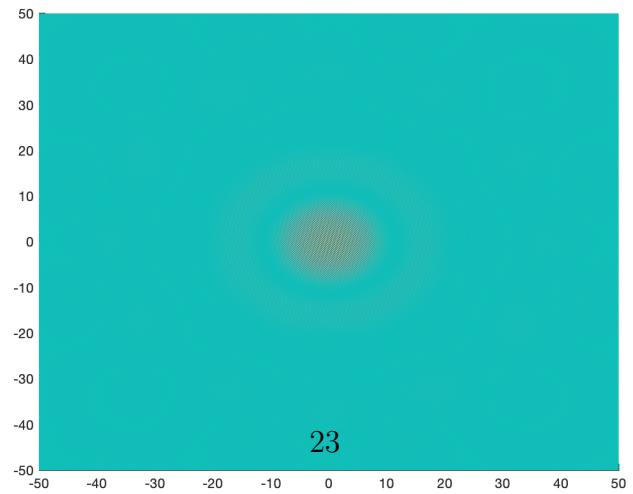
Figure 13: Rejilla y perfil transversal de difracción



(a) Rejilla

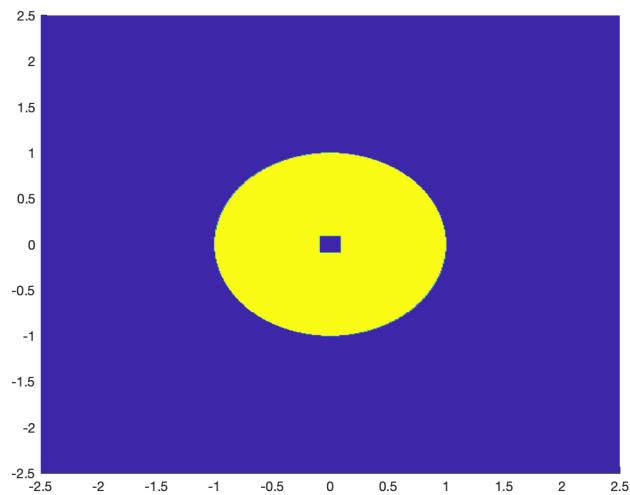


(b) Fresnel ($D_1 = 1, D_2 = 0.5$)

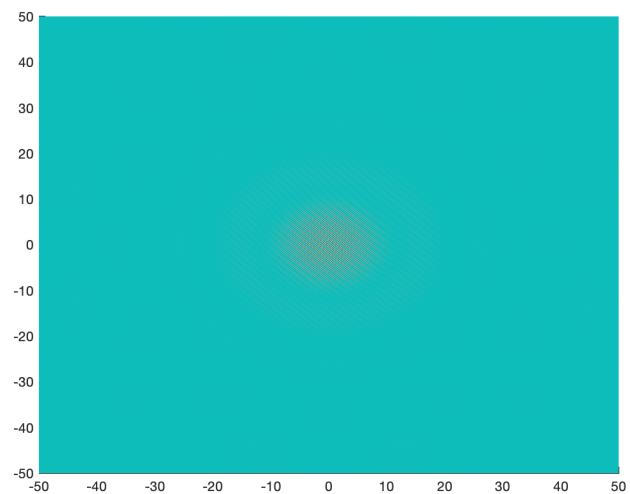


(c) Fraunhofer ($D_1 = 1, D_2 = 0.5$)

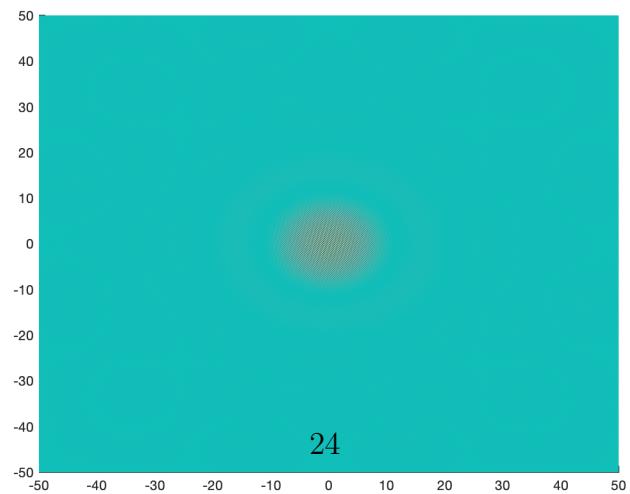
Figure 14: Rejilla y perfil transversal de difracción



(a) Rejilla

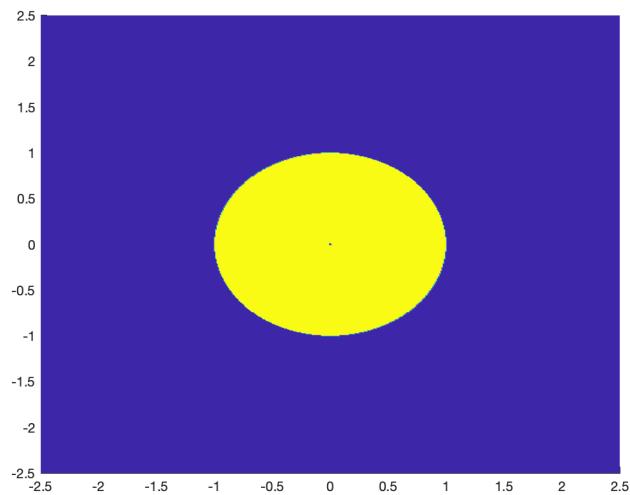


(b) Fresnel ($D_1 = 1, D_2 = 0.3$)

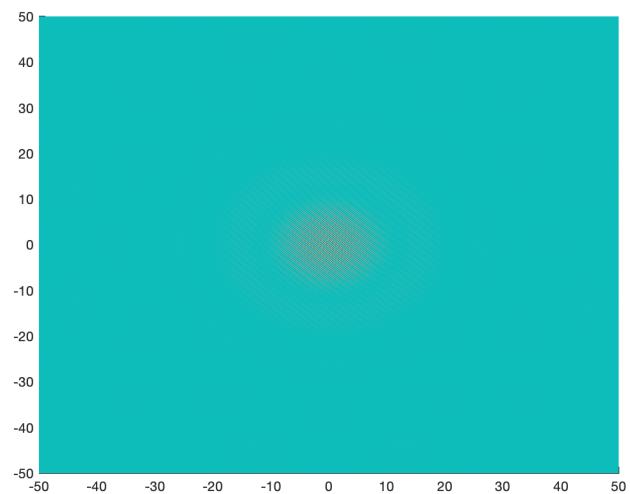


(c) Fraunhofer ($D_1 = 1, D_2 = 0.3$)

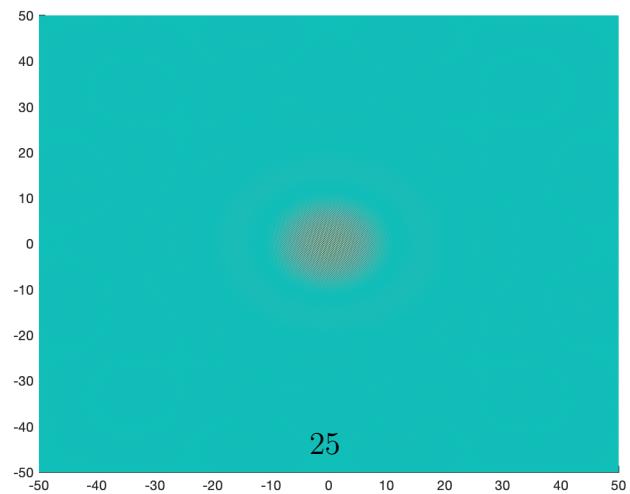
Figure 15: Rejilla y perfil transversal de difracción



(a) Rejilla



(b) Fresnel ($D_1 = 1, D_2 = 0.1$)



(c) Fraunhofer ($D_1 = 1, D_2 = 0.1$)

Figure 16: Rejilla y perfil transversal de difracción