Tecnológico de Monterrey

F3020

Física Experimental 1

Propagación a través de medios ABCD

Autor:	*Matrícula:*
Sebastián Sánchez Bernal	*A01339431*
Donaldo Alfredo Garrido Islas	*A01275416*
Itamar Casais Ponce de León	*A01021272*

Equipo: SDI

Dr. Raúl Hernández

Fecha: 12 de junio de 2020

Problema 1

En clase vimos que si buscamos soluciones de la ecuación paraxial de onda que sean circularmente simétricas, podemos escribir la ecuación en coordenadas cilíndricas de la siguiente forma

$$\Big[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r}) + 2ik\frac{\partial}{\partial z}\Big]\psi(\mathbf{r}) = 0 \tag{1}$$

y propusimos una solución de la forma

$$\psi(\mathbf{r}) = exp\Big[i(p(z) + \frac{kr^2}{2q(z)})\Big]. \tag{2}$$

Si introducimos una longitud característica definida como

$$w_0^2 = \frac{2z_R}{k}, \tag{3}$$

se puede demostrar que la solución final de la ecuación paraxial de onda puede escribirse como

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{w_0}{w(z)}exp\Big[-\frac{r^2}{w^2(z)}\Big]exp\Big[i(kz - tan^{-1}(\frac{z}{z_R}))\Big]exp\Big[i\frac{kr^2}{2R(z)}\Big]. \tag{4}$$

donde

$$w^2(z) = w_0^2\Big[1 + (\tfrac{z}{z_R})^2\Big].$$

$$R(z) = z\Big[1 + (\tfrac{z_R}{z})^2\Big].$$

La ecuación (11) representa un haz Gaussiano y en z_R es la distancia de Rayleigh. Como primer ejercicio deben obtener la expresión analítica para la descripción de un haz Gaussiano que se ha propagado a través de un medio ABCD. Una vez hecho esto deberán realizar una comparación numérica entre los perfiles del haz propagado utilizando el método de propagación del espectro angular (propagador de Fourier) y la expresión analítica que ustedes obtuvieron.

Consideren inicialmente un haz gaussiano de la forma

$$U_1(\mathbf{r}_1) = exp(-\tfrac{r_1^2}{w_0^2})$$

propagándose en (a) un segmento de espacio libre de longitud $1.5z_R$, donde z_R es la distancia de Rayleigh, y (b) durante la misma distancia pero ahora el haz es enfocado desde el inicio por una lente delgada y convergente, de distancia focal $f = 5cm$.

First, we can write the integral

$$U_2(\mathbf{r_2}) = \frac{ke^{ikL}}{i2\pi B}\iint_{-\infty}^{\infty} e^{-r_1^2/\omega_0^2} e^{\left[\frac{ik}{2B}(Ar_1^2 - 2(x_2x_1 + y_2y_1) + Sr_2^2)\right]} dx_1 dy_1 \tag{5}$$

Let $\dfrac{ke^{ikL}}{i2\pi B} = \gamma$,

$$U_2(\mathbf{r_2}) = \gamma \iint_{-\infty\infty} e^{-\left[r_1^2\left(\frac{1}{\omega_0} - \frac{ikA}{2B}\right) + \frac{ik}{2B}(\mathbf{r_1}\cdot\mathbf{r_2})\right] + \frac{ik}{2B}Dr_2^2} dx_1 dx_2 \tag{6}$$

Now, let $\lambda^2 = \frac{1}{\omega_0} - \frac{ikA}{2B}$ we can try to complete the squared binomial $a^2 + 2ab + b^2$,

$$a = \lambda r_1, \qquad 2\lambda r_1 b = \frac{ik}{B}(\mathbf{r_1}\cdot\mathbf{r_2})$$

$$\therefore b = \frac{ik}{2\lambda B}\mathbf{r_2}, \qquad b^2 = -\frac{k^2}{4\lambda^2 B}r_2^2$$

Now, we have

$$U_2(\mathbf{r_2}) = \gamma \iint_{-\infty\infty} e^{-\left[r_1^2\lambda^2 + \frac{ik}{2B}(\mathbf{r_1}\cdot\mathbf{r_2}) - \frac{k^2}{4\lambda^2 B}r_2^2 + \frac{k^2}{4\lambda^2 B}r_2^2\right] + \frac{ik}{2B}Dr_2^2} dx_1 dx_2 \tag{7}$$

$$= \gamma e^{-r_2^2\left(\frac{k^2}{4\lambda^2 B} - \frac{ik}{2B}\right)} \int_0^\infty e^{-\left(\lambda\mathbf{r_1} + \frac{ik}{4\lambda B}\mathbf{r_2}\right)} dr_1 \tag{8}$$

$$= \boxed{\frac{k\sqrt{\pi}e^{ikL}}{(i2\pi B)\sqrt{\frac{1}{\omega_0} - \frac{ikA}{2B}}} e^{-r_2^2\left(\frac{k^2}{4B^2\left(\frac{1}{\omega_0} - \frac{ikD}{2B}\right)} - \frac{ikD}{2B}\right)}} \tag{9}$$

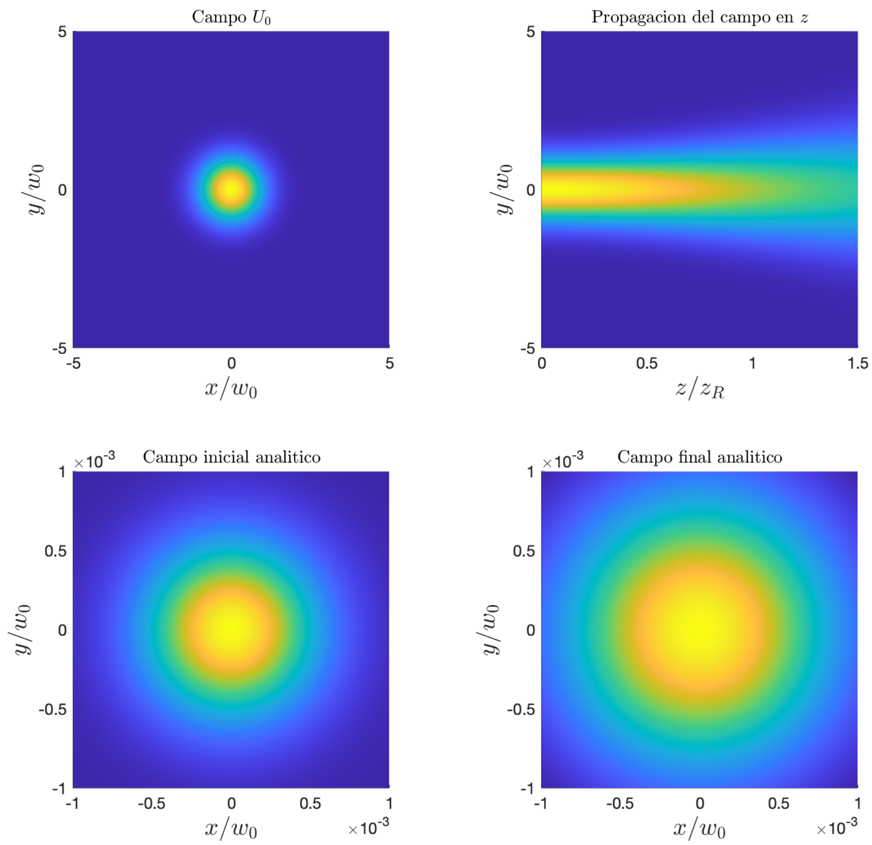

Figure 1: Resultados del problema 1

Problema 2

El objetivo de este problema es estudiar la propagación de los haces Helmholtz-Gauss (HzG) generalizados, que son aproximaciones a los haces adifraccionales, a través de medios $ABCD$. La distribución transversal de un haz HzG generalizado en un plan $z = z_R$ está dada por el producto de un factor gaussiano y una función escalar W, que es una solución adifraccional de la Ec. de Helmholtz, esto es

$$U_1(\mathbf{r}_1) = exp\left(\frac{ikr_1^2}{2q_1}\right) W(\mathbf{r}_1 : \kappa_1) \tag{10}$$

donde q_1 es en general una cantidad compleja, y $Im q_1 < 0$. La constante k es el número de onda, y $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1)$, y κ_1 es la componente transversal del vector de onda.

La función $W(\mathbf{r}_1; \kappa_1)$ es una solución adifraccional de la ecuación de Helmholtz, y puede ser expresada de la siguiente forma

$$W(\mathbf{r}_1; \kappa_1) = \int_{-\pi}^{\pi} g(\phi) exp[i\kappa_1(x_1 cos\phi + y_1 sin\phi)] d\phi \tag{11}$$

La propagación de esta distribución de un plano z_1 al plano z_2 a través de un sistema óptico $ABCD$ se puede hacer utilizando la integral de difracción generalizada

$$U_2(\mathbf{r}_2) = \frac{kexp(ikL)}{i2\pi B} \int\int_{-\infty}^{\infty} U_1(\mathbf{r}_2) exp\Big[\frac{ik}{2B}(Ar_1^2 - 2(x_2x_1 + y_2y_1) + Dr_2^2\Big] dx_1 dy_1 \tag{12}$$

donde $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2)$, y L es la longitud de camino óptico desde el plano z_1 al plano z_2 medida a lo largo del eje óptico.

PROBLEMA: Utilizando las definiciones anteriores, demuestren que la distribución transversal del haz en el plano $z = z_2$ está dada por la expresión

$$U_2(\mathbf{r}_2) = exp\left(\frac{\kappa_1\kappa_2 B}{i2k}\right) GB(\mathbf{r}_2, q_2) W(\mathbf{r}_2, \kappa_2), \tag{13}$$

donde

$$GB(\mathbf{r}_2, q_2) = \frac{exp(ikL)}{A + B/q_1} exp\left(\frac{ikr_2^2}{2q_2}\right) \tag{14}$$

y los parámetros q_1 y κ_1 del plano z_1 al plano z_2 se transforman de acuerdo a

$$q_2 = \tfrac{Aq_1+B}{Cq_1+D}, \kappa_2 = \tfrac{\kappa_1}{A+B/q_1}$$

Observen que, con excepción de un factor de fase, el haz conserva la misma estructura matemática. Las expresiones anteriores nos permiten propagar un haz HzG a través de cualquier sistema $ABCD$, real o complejo, de una forma similar a la que se propaga un haz gaussiano a través de estos sistemas.

Usen el método numérico que programaron para propagar el siguiente perfil inicial a través de sistemas ABCD.

Un haz Bessel-Gauss que se propaga en el espacio libre durante una distancia $z = 1.5z_R$ de la forma

$$U_1(\mathbf{r}_1) = exp(-\frac{r_1^2}{w_0^2}) J_m(\kappa_1 r_1) exp(im\phi) \tag{15}$$

donde m toma los valores 0 y 1, y $J_m()$ es la función Bessel de orden m.

Comparen sus resultados numéricos con las expresiones analíticas y hagan gráficas de comparación de perfiles unidimensionales en cada caso. Además grafiquen la evolución del perfil a lo largo de la coordenada z. Para esto pueden ir guardando un vector con el perfil del campo correspondiente a *U(0,y)* para cada plano z, y después hacer la gráfica del perfil *U(0,y,z)*. Consideren los siguientes parámetros de simulación: $w_0 = [0.5, 1.5, 3]mm$, $\lambda = 632.8nm$, $\kappa_t = 8665m^{-1}$. Utilicen una ventana de simulación con dimensiones adecuadas que les permita hacer una buena visualización del campo en los distintos planos (inicial, final), y la evolución en z.

Podemos escribir explicitamente una expresión para $U_2\mathbf{r_2}$

$$U_2\mathbf{r_2} = \frac{ke^{ikL}}{i2\pi B}\iint_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{ikr_2}{2q_1}} e^{\frac{ik}{2B}(Ar_1^2 - 2(x_2x_1 + y_2y_1) + Dr_2^2)} \int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi)e^{ik_1(x_1\cos\varphi + y_1\sin\varphi)}d\varphi \tag{16}$$

$$= \frac{ke^{ikL}}{i2\pi B}\iint_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{ik}{2}r_1^2\left(\frac{1}{q_1}+\frac{A}{B}\right)} e^{-\frac{ik}{q_1}(x_2x_1+y_2y_1)} e^{Dr_2^2} g(\varphi)e^{ik_1(x_1\cos\varphi + y_1\sin\varphi)}d\varphi \tag{17}$$

Ahora, nos podemos centrar en la integral I sobre y_1 y x_1:

$$I = \iint_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{kr_1^2}{2}\left(\frac{1}{q_1}+\frac{A}{B}\right) - \frac{ik}{B}\mathbf{r_1}\cdot\mathbf{r_2} + ik_1(x_1\cos\varphi + y_1\sin\varphi)} dy_1 dx_1 \tag{18}$$

Por conveniencia, podemos definir el vector $\mathbf{S} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ y reescribir la integral como

$$I = \iint_{0}^{\infty} e^{i\frac{kr_1^2}{2}\left(\frac{1}{q_1}+\frac{A}{B}\right) - \frac{ik}{B}(\mathbf{r_1}\cdot\mathbf{r_2}) + ik_1(\mathbf{r_1}\cdot\mathbf{s})} r_1 dr_1 \tag{19}$$

Podemos definir $c = \sqrt{\frac{ik}{2}\left(\frac{1}{q_1}+\frac{A}{B}\right)}$.

Para completar el binomio al cuadrado $(a+n)^2$ calculemos:

$$a = cr_1, \qquad 2ab\frac{i}{B}r_1(k\mathbf{r_2} + k_1\mathbf{s})$$

$$b = \frac{ik}{2cB}(kr_2 + k_1\mathbf{s}), \qquad b^2 = -\frac{k^2}{4c^2B^2}(k\mathbf{r_2} + k_1\mathbf{s})^2$$

Y obtenemos

$$I = e^{b2}\int_0^{\infty} e^{(c\mathbf{r_1} - b)^2} r_1 dr_1$$

Podemos hacer el cambio de variable $u = cr_1 - b$. Después de hacer los cálculos,obtenemos

$$I = -\frac{1}{2c}e^{b^2}$$

Por lo tanto,

$$I = -\frac{1}{\sqrt{\frac{ik}{2}\left(\frac{1}{q_1}+\frac{A}{B}\right)}} e^{-\frac{1}{4B^2\frac{k}{2i}\left(\frac{1}{q_1}+\frac{A}{B}\right)}[(k_1 B\cos\varphi - kx_2)^2 + (k_1 B\sin\varphi - ky_2^2)^2]} \tag{20}$$

Si trabajamos la parte de φ:

$$(k_1 B\cos\varphi - kx_2)^2 + (k_1 B\sin\varphi - ky_2^2)^2 = k_1^2 - \frac{k_1 k}{B} x_2 \cos\varphi - \frac{k_1 k}{B} y_2 \sin\varphi + \frac{k^2}{B^2} r_2^2$$

Y regresando a la expressión $U_2(\mathbf{r_2})$, tenemos:

$$U_2(\mathbf{r_2}) = \frac{1}{\sqrt{\frac{ik}{2}\left(\frac{1}{q_1}+\frac{A}{B}\right)}} e^{-\frac{1}{4B^2\frac{k}{2i}\left(\frac{1}{q_1}+\frac{A}{B}\right)}} e^{k_1^2} e^{\frac{k^2}{B^2} r_2^2} \int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi) \frac{k_1 k}{B} x_2 \cos\varphi + \frac{k_1 k}{B} y_2 \sin\varphi d\varphi \tag{21}$$

Comparando con las defınciones:

$$W(\mathbf{r}_2;\kappa_2) = \int_{-\pi}^{\pi} g(\phi) exp[i\kappa_2(x_2 cos\phi + y_1 sin\phi)]d\phi$$

$$GB(\mathbf{r}_2, q_2) = \frac{exp(ikL)}{A + B/q_1} exp\left(\frac{ikr_2^2}{2q_2}\right)$$

Obetenemos, finalmente

$$\boxed{U_2(\mathbf{r}_2) = exp\left(\frac{\kappa_1\kappa_2 B}{i2k}\right) GB(\mathbf{r}_2, q_2) W(\mathbf{r}_2, \kappa_2)} \tag{22}$$

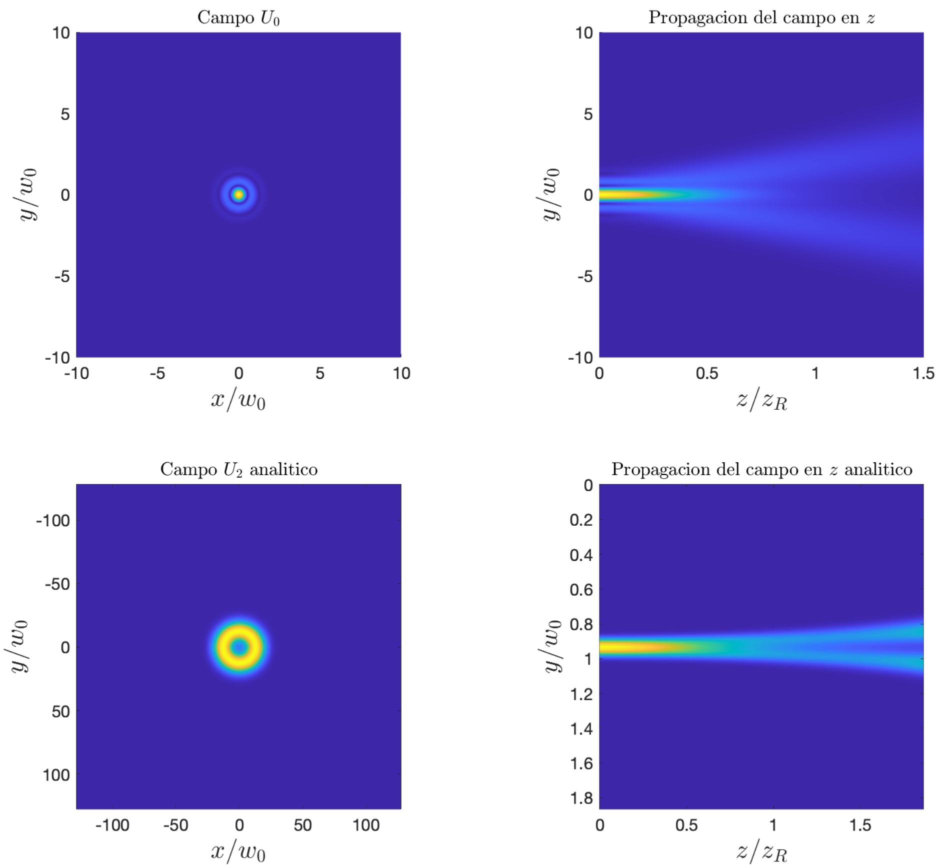

Figure 2: Resultados m=0

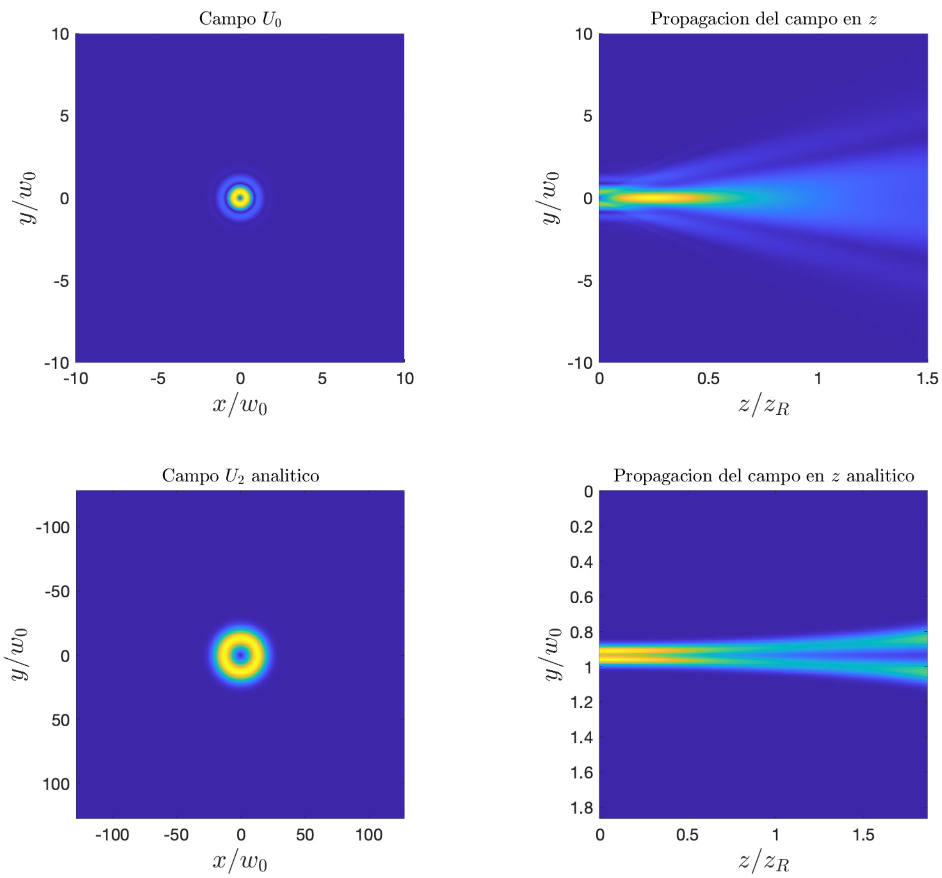

Figure 3: Resultados m=1