Università degli Studi della Basilicata

Tracce dell'esame di Geometria

Donato Martinelli

November 25, 2025

Contents

1 Tracce

1.1 Sistemi con parametro

Exercise 1.1. Risolvere il seguente sistema di equazioni lineari al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} (\lambda+1)X_1 + X_2 + X_3 - X_4 = 0 \\ (2-\lambda)X_1 + (2+\lambda)X_2 + 2X_3 - (\lambda+1)X_4 = \lambda \\ -X_1 - X_2 - (\lambda+1)^2 X_3 + X_4 = 1-\lambda \end{cases} .$$

Exercise 1.2. Risolvere il seguente sistema di equazioni lineari al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 + X_3 = \lambda \\ 2X_1 + 2X_2 + 2X_3 = -\lambda \\ X_1 + \lambda X_2 + X_3 = 0 \\ 3X_1 - X_2 = 1 \end{cases} .$$

Exercise 1.3. Risolvere il seguente sistema di equazioni lineari al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 1 \\ 2X_1 + X_2 + X_3 - X_4 = -2 \\ -\lambda X_1 + \lambda X_2 + \lambda X_3 + \lambda X_4 = -1 \\ X_1 + X_2 + X_4 = 3 \\ X_2 + X_3 + (1-\lambda)X_4 = 5 \end{cases} .$$

Exercise 1.4. Risolvere il seguente sistema di equazioni lineari al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} X_1 + (\lambda-1)X_2 + (\lambda-2)X_3 = \lambda+3 \\ 3X_1 + (\lambda-2)X_3 - 2X_4 = 4\lambda+1 \\ X_1 + 2X_4 = 3 \\ X_1 + (3\lambda-3)X_2 + 2X_4 = 9 \\ 2X_1 + (3\lambda-3)X_2 + 4X_4 = 12 \\ X_1 + (2-2\lambda)X_2 + (2-\lambda)X_3 - 2X_4 = 2\lambda-5 \end{cases} .$$

1.2 Operatori Lineari

Exercise 1.5. Si consideri l'operatore lineare

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-y+2z \\ 2x-z \\ 3x-y+z \end{pmatrix} .$$

i) Verificare se F è diagonalizzabile;

ii) determinare una base di $\mathrm{Im}(F)$. Determinare una base di $\ker(F)$;

iii) verificare se risulta $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}(F) \oplus \ker(F)$;

iv) dato $\mathbf{W} = \langle (1,2,3) \rangle$, determinare una base del sottospazio vettoriale $F^{-1}(\mathbf{W})$.

Exercise 1.6. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo che, rispetto alla base canonica $\mathbf{E}$, ha matrice :

$$M_{\mathbf{E},\mathbf{E}}(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

i) Determinare gli autovalori e autovettori di F e verificare che F non è diagonalizzabile;

ii) determinare una base $\mathbf{B}$ di $\mathbb{R}^3$ contenente due autovettori di F e calcolare $M_{\mathbf{B},\mathbf{B}}(F)$;

iii) determinare un endomorfismo $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ diagonalizzabile che abbia tra i suoi autovettori quelli di F (relativi ai medesimi autovalori).

Exercise 1.7. Si consideri l'operatore lineare

$$F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{x}{2} - \frac{y}{2} - z \\ y + z \\ z \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{2} \end{pmatrix} \quad .$$

i) Verificare se F è diagonalizzabile;

ii) determinare una base di $F^{-1}(\mathbf{W})$, essendo $\mathbf{W} = \langle (0,1,0,1) \rangle$;

iii) verificare se risulta $\mathbb{R}^4 = \mathrm{Im}(F) \oplus \ker(F)$;

iv) determinare una base di $F(\mathrm{Im}(F))$.

Exercise 1.8. Si consideri l'operatore lineare

$$F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z + t \\ z + t \\ z + t \\ -z - t \end{pmatrix} \quad .$$

i) Scrivere la matrice di F rispetto alle basi canoniche;

ii) determinare una base e la dimensione di $\mathrm{Im}(F)$ e $\ker(F)$;

iii) provare che la somma di $\mathrm{Im}(F)$ e $\ker(F)$ non è diretta;

iv) provare che ogni vettore di $\mathrm{Im}(F) \cap \ker(F)$ è un autovettore di F.

1.3 Forme bilineari e quadratiche

Exercise 1.9. Rispetto alla base canonica sia data la forma quadratica

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x^2 + 2hxy + y^2 \quad h \in \mathbb{R}.$$

i) Dire per quali valori di h tale forma è definita positiva;

ii) posto $h = 3$, determinare una forma canonica per Φ, precisando la base rispetto a cui essa si realizza.

Exercise 1.10. Rispetto alla base canonica sia data la forma quadratica

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz \quad h \in \mathbb{R}.$$

i) Determinare la forma polare associata alla forma quadratica Φ;

ii) scrivere la matrice della forma quadratica Φ e determinarne il rango;

iii) determinare una forma canonica della forma quadratica Φ e la sua segnatura.

Exercise 1.11. Rispetto alla base canonica sia data la forma quadratica

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \mapsto 2x^2 + y^2 - 4xy - 4yz \quad h \in \mathbb{R},$$

e sia b la forma bilineare polare di Φ.

i) Calcolare la segnatura di b;

ii) calcolare la forma canonica (possibilmente in due modi distinti);

iii) motivare e dimostrare in due modi il teorema principale.

Exercise 1.12. Rispetto alla base canonica sia data la forma quadratica

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \mapsto xz + xy + yz \quad h \in \mathbb{R}.$$

i) Determinare la forma polare associata alla forma quadratica Φ;

ii) scrivere la matrice della forma quadratica Φ e determinarne il rango;

iii) determinare una forma canonica della forma quadratica Φ e la sua segnatura.

1.4 Geometria

Exercise 1.13. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ dotato di un fissato riferimento cartesiano ortogonale monometrico, sia r la retta congiungente i punti $A = (1, -1, 1)$, $B = (2, 0, -1)$ e sia π il piano di equazione cartesiana $2X - T + Z + 1 = 0$.

i) Determinare la proiezione ortogonale r' di r su π.

ii) Determinare il piano τ contenente r' ed il punto $R = (0, 0, 1)$.

iii) Determinare la retta t passante per R, contenuta in τ e ortogonale a r'.

iv) Determinare il piano contenente la retta t e parallelo alla retta r.

Exercise 1.14. Sia $\mathbb{E}^3$ uno spazio euclideo di dimensione 3 in cui è fissato un riferimento euclideo R . Sia l la retta di equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} 2X - Y + Z + 12 = 0 \\ X - Y + Z - \sqrt{5} = 0 \end{cases}$$

i) Determinare i piani α_1 e α_2 passanti per l'origine, paralleli ad l ed aventi distanza 1 da $P(1, -1, 1)$.

ii) Determinare il piano ρ passante per P ed ortogonale sia ad α_1 che α_2

iii) Posto $r_1 = \rho \cap \alpha_1$ ed $r_2 = \rho \cap \alpha_2$, dette R_1 ed R_2 le proiezioni ortogonali di P sulle rette r_1 ed r_2 rispettivamente, calcolare la distanza tra R_1 ed R_2.

Exercise 1.15. In $\mathbb{R}^5$ sia $p : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ l'operatore di proiezione ortogonale sul sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di equazioni cartesiane, rispetto alla base canonica $\mathbf{E}$ di $\mathbb{R}^5$

$$\begin{cases} X_2 - X_3 = 0 \\ X_2 + X_4 - X_5 = 0 \end{cases}$$

i) Determinare la matrice di p (rispetto ad $\mathbf{E}$);

ii) Determinare una base ortonormale di $\mathbf{U}$ e completarla sino ad ottenere una base ortonormale $\mathbf{F}$ di $\mathbb{R}^5$;

iii) Scrivere la matrice di p rispetto ad $\mathbf{F}$.

Exercise 1.16. Nello spazio euclideo $\mathbf{E}^3$ dotato di un fissato riferimento cartesiano ortogonale monometrico: Dire per quali valori del parametro k le rette r_k e s_k di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane:

$$r_k : \begin{cases} x - y + z = k \\ x + 2y - z = 2 \end{cases} \qquad s_k : \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y - 2kz - 1 \end{cases}$$

sono coincidenti, incidenti in un punto o sghembe.

Exercise 1.17. Sia $\mathbf{V} = (\mathbf{V}^2_{\mathbb{R}}, \cdot)$ un piano vettoriale euclideo e sia $\mathbf{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ una base di $\mathbf{V}$ tale che $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 2, \quad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = 1$. Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ l'operatore lineare definito da

$$T(\mathbf{e}_1) = -\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2, \quad T(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2.$$

Determinare una base ortonormale $\mathbf{F}$ di $\mathbf{V}$. Verificare che T è autoaggiunto e scriverne la matrice nella base $\mathbf{F}$. Calcolare una base ortonormale di autovettori di T. Veriricare che T non è unitario.

Exercise 1.18. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ dotato di un fissato riferimento euclideo R. Sia δ il piano contenente i punti $A = (0, -1, 0)$, $B = (0, 0, \frac{1}{3})$, $C = (\frac{1}{5}, 0, 0)$.

i) Determinare la retta r passante per il punto $P = (1, -1, 3)$, parallela al piano δ ed ortogonale alla retta s di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} 2X - Y + Z = 1 \\ X - 3Y + Z = 3 \end{cases}.$$

ii) Determinare la distanza di r da δ.

iii) Determinare la proiezione ortogonale r' di r su δ.

iv) Determinare il piano ρ contenente r ed r'.

2 Soluzioni

2.1 Sistema con parametro

1.1 Scriviamo la matrice orlata associata al sistema.

$$A|b = \begin{pmatrix} (\lambda+1) & 1 & 1 & -1 & 0 \\ (2-\lambda) & (2+\lambda) & 2 & -(\lambda+1) & \lambda \\ -1 & -1 & -(\lambda+1)^2 & 1 & (1-\lambda) \end{pmatrix} \qquad A \in M_{3,4}(\mathbb{R}), A|b \in M_{3,5}(\mathbb{R}).$$

Caso generale Per verificare se il sistema è compatibile, utilizziamo il teorema di Kronecker-Rouche-Capelli. Notiamo che $1 \leq r(A), r(A|b) \leq 3$. Procediamo con il metodo dei minori orlati. Calcoliamo il minore di $M = A|b(1\,3\,|1\,2)$:

$$\begin{vmatrix} \lambda+1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -(\lambda+1)+1 = -\lambda,$$

Segue immediatamente che $\det(M) \neq 0 \iff \lambda \neq 0$, perciò $2 \leq r(A), r(A|b) \leq 3$. Procediamo con l'orlare M,

$$\begin{cases} M_1 = A|b(1\,2\,3\,|\,1\,2\,3) \\ M_2 = A|b(1\,2\,3\,|\,1\,2\,4) \\ M_3 = A|b(1\,2\,3\,|\,1\,2\,5) \end{cases}, \quad M_1, M_2 \in \{A, A|b\},\ M_3 \notin A,\ M_3 \in A|b,$$

se riusciamo a provare che un minore non nullo appartiene sia ad A che a $A|b$, allora $r(A) = r(A|b) = 3$, altrimenti $r(A) = r(A|b) = 2$. Abbiamo dunque

$$M_1 = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 1 & 1 \\ 2-\lambda & 2+\lambda & 2 \\ -1 & -1 & -(\lambda+1)^2 \end{vmatrix}, \quad M_2 = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 1 & -1 \\ 2-\lambda & 2+\lambda & -(\lambda+1) \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad M_3 = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 1 & 0 \\ 2.\lambda & 2+\lambda & \lambda \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}.$$

Calcoliamo il secondo minore:

I riga

$$\det(M_2) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 1 & -1 \\ 2-\lambda & 2+\lambda & -(\lambda+1) \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\cdot(\lambda+1)\cdot\begin{vmatrix} 2+\lambda & -(\lambda+1) \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}\cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & -(\lambda+1) \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2+\lambda \\ -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda+1)\cdot\begin{vmatrix} 2+\lambda & -(\lambda+1) \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2-\lambda & -(\lambda+1) \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2+\lambda \\ -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda+1)\left[2+\lambda-(\lambda+1)\right] - \left[2-\lambda-(\lambda+1)\right] - \left[-(2-\lambda)+2+\lambda\right] =$$

$$= (\lambda+1)\left[2+\lambda-\lambda-1\right] - \left[2-\lambda-\lambda-1\right] - \left[-2+\lambda+2+\lambda\right] =$$

$$= (\lambda+1) - (1-2\lambda) - 2\lambda = \lambda+1-1+2\lambda-2\lambda = \lambda.$$

Segue che $\det(M_2) \neq 0 \iff \lambda \neq 0$, e quindi abbiamo che $r(A) = r(A|b) = 3$. Perciò per Kronecker-Rouche-Capelli il sistema è compatibile e ammette $\infty^{4-3} = \infty^1$ soluzioni. Poniamo dunque $X_3 = t\ t \in \mathbb{R}$ e risolviamo in funzione del parametro posto:

$$\begin{cases} (\lambda+1)X_1 + X_2 - X_4 = -t \\ (2-\lambda)X_1 + (2+\lambda)X_2 - (\lambda+1)X_4 = \lambda - 2t \\ -X_1 - X_2 + X_4 = 1 - \lambda + (\lambda+1)^2 t \end{cases} \qquad \lambda, t \in \mathbb{R}.$$

Le soluzioni del sistema sono del tipo (x_1, x_2, t, x_4) e sono calcolabili mediante il metodo di Cramer, dunque avremo:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -t & 1 & -1 \\ \lambda-2t & 2+\lambda & -(\lambda+1) \\ 1-\lambda+(\lambda+1)^2 t & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\lambda}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} \lambda+1 & -t & -1 \\ 2-\lambda & \lambda-2t & -(\lambda+1) \\ -1 & 1-\lambda+(\lambda+1)^2 t & 1 \end{vmatrix}}{\lambda}$$

$$x_4 = \frac{\begin{vmatrix} \lambda+1 & 1 & -t \\ 2-\lambda & 2+\lambda & \lambda-2t \\ -1 & -1 & 1-\lambda+(\lambda+1)^2 t \end{vmatrix}}{\lambda}$$

Procediamo con i calcoli.

x_1)

$$\begin{vmatrix} -t & 1 & -1 \\ \lambda-2t & 2+\lambda & -(\lambda+1) \\ 1-\lambda+(\lambda+1)^2 t & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{1^\circ \text{riga}}{=} (-1)^{1+1} \cdot (-t) \cdot \begin{vmatrix} 2+\lambda & -(\lambda+1) \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} \lambda-2t & -(\lambda+1) \\ 1-\lambda+(\lambda+1)^2 t & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+3} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} \lambda-2t & 2+\lambda \\ 1-\lambda+(\lambda+1)^2 t & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-t) \cdot \begin{vmatrix} 2+\lambda & -(\lambda+1) \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \lambda-2t & -(\lambda+1) \\ 1-\lambda+(\lambda+1)^2 t & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \lambda-2t & 2+\lambda \\ 1-\lambda+(\lambda+1)^2 t & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -t\left[2+\lambda-(\lambda+1)\right] - \left[\lambda-2t+(\lambda+1)(1-\lambda+(\lambda+1)^2 t)\right] - \left[-(\lambda-2t)-(2+\lambda)(1-\lambda+(\lambda+1)^2 t)\right] =$$

$$= -t\left[2+\lambda-\lambda-1)\right] - \left[\lambda-2t-\lambda^2+\lambda^3 t+3\lambda^2 t+1+t+3\lambda t\right] - \left[-\lambda+2t-2+\lambda-4\lambda^2 t-5\lambda t-2t+\lambda^2-\lambda^3 t\right] =$$

$$= -t - \left[\lambda-2t-\lambda^2+\lambda^3 t+3\lambda^2 t+1+t+3\lambda t\right] - \left[-\lambda+2t-2+\lambda-4\lambda^2 t-5\lambda t-2t+\lambda^2-\lambda^3 t\right] =$$

$$= -t-\lambda+2t+\lambda^2-\lambda^3 t-3\lambda^2 t-1-t-3\lambda t+\lambda-2t+2-\lambda+4\lambda^2 t+5\lambda t+2t-\lambda^2+\lambda^3 t =$$

$$= 1-\lambda+\lambda^2 t+2\lambda t.$$

Dunque

$$x_1 = \frac{\lambda^2 t + 2\lambda t - \lambda + 1}{\lambda}.$$

x_2)

$$\begin{vmatrix} \lambda+1 & -t & -1 \\ 2-\lambda & \lambda-2t & -(\lambda+1) \\ -1 & 1-\lambda+(\lambda+1)^2t & 1 \end{vmatrix} \overset{3^\circ \text{colonna}}{\underset{\downarrow}{=}} (-1)^{1+3}\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} 2-\lambda & \lambda-2t \\ -1 & 1-\lambda+(\lambda+1)^2t \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{2+3}\cdot[-(\lambda+1)]\cdot\begin{vmatrix} \lambda+1 & -t \\ -1 & 1-\lambda+(\lambda+1)^2t \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}\cdot(1)\cdot\begin{vmatrix} \lambda+1 & -t \\ 2-\lambda & \lambda-2t \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 2-\lambda & \lambda-2t \\ -1 & 1-\lambda+(\lambda+1)^2t \end{vmatrix} + (\lambda+1)\cdot\begin{vmatrix} \lambda+1 & -t \\ -1 & 1-\lambda+(\lambda+1)^2t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda+1 & -t \\ 2-\lambda & \lambda-2t \end{vmatrix} =$$

$$= -\left[(2-\lambda)(1-\lambda+(\lambda+1)^2t)+\lambda-2t\right]+(\lambda+1)\left[(\lambda+1)(1-\lambda+(\lambda+1)^2t)-t\right]+(\lambda+1)(\lambda-2t)+t(2-\lambda) =$$

$$= -\left[(2-\lambda)(1-\lambda+\lambda^2t+t+2\lambda t)+\lambda-2t\right]+(\lambda+1)\left[(\lambda+1)(1-\lambda+\lambda^2t+t+2\lambda t)-t\right]+\lambda^2-2\lambda t+\lambda-2t+2t-\lambda t =$$

$$= -\left[2-2\lambda+2\lambda^2t+2t+4\lambda t-\lambda+\lambda^2-\lambda^3t-\lambda t-2\lambda^2t+\lambda-2t\right]+$$

$$(\lambda+1)\left[\lambda-\lambda^2+\lambda^3t+\lambda t+2\lambda^2t+1-\lambda+\lambda^2t+t+2\lambda t-t\right]+\lambda^2-3\lambda t+\lambda =$$

$$= -\left[2-2\lambda+3\lambda t+\lambda^2-\lambda^3t\right]+(\lambda+1)\left[-\lambda^2+\lambda^3t+3\lambda^2t+1+3\lambda t\right]+\lambda^2-3\lambda t+\lambda =$$

$$= -2+2\lambda-3\lambda t-\lambda^2+\lambda^3t-\lambda^3+\lambda^4t+3\lambda^3t+\lambda+3\lambda^2t-\lambda^2+\lambda^3t+3\lambda^2t+1+3\lambda t+\lambda^2-3\lambda t+\lambda =$$

$$= \lambda^4t-\lambda^3+5\lambda^3t+6\lambda^2t-\lambda^2-1+4\lambda-3\lambda t.$$

Dunque

$$x_2 = \frac{\lambda^4t+5\lambda^3+6\lambda^2t-3\lambda t-\lambda^3-\lambda^2+4\lambda-1}{\lambda}.$$

x_4)

$$\begin{vmatrix} \lambda+1 & 1 & -t \\ 2-\lambda & 2+\lambda & \lambda-2t \\ -1 & -1 & 1-\lambda+(\lambda+1)^2t \end{vmatrix} = (-1)^{1+2}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} 2-\lambda & \lambda-2t \\ -1 & 1-\lambda+(\lambda+1)^2t \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}\cdot(2+\lambda)\cdot\begin{vmatrix} \lambda+1 & -t \\ -1 & 1-\lambda+(\lambda+1)^2t \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} \lambda+1 & -t \\ 2-\lambda & \lambda-2t \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 2-\lambda & \lambda-2t \\ -1 & 1-\lambda+(\lambda+1)^2t \end{vmatrix} + (2+\lambda)\cdot\begin{vmatrix} \lambda+1 & -t \\ -1 & 1-\lambda+(\lambda+1)^2t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda+1 & -t \\ 2-\lambda & \lambda-2t \end{vmatrix}$$

$$= -\left[(2-\lambda)[1-\lambda+(\lambda+1)^2t]+(\lambda-2t)\right]+(2+\lambda)\left[(\lambda+1)(1-\lambda+(\lambda+1)^2t)-t\right]+(\lambda+1)(\lambda-2t)+t(2-\lambda)$$

$$= -\left[(2-\lambda)[1-\lambda+(\lambda+1)^2t]+(\lambda-2t)\right]+(2+\lambda)\left[(\lambda+1)(1-\lambda+(\lambda+1)^2t)-t\right]+(\lambda+1)(\lambda-2t)+t(2-\lambda)$$

$$= -\left[(2-\lambda)(1-\lambda+\lambda^2t+t+2\lambda t)+\lambda-2t\right]+(2+\lambda)\left[(\lambda+1)(1-\lambda+\lambda^2t+t+2\lambda t)-t\right]+\lambda^2-2\lambda t+\lambda-2t+2t-\lambda t =$$

$$= -\left[2-2\lambda+2\lambda^2t+2t+4\lambda t-\lambda+\lambda^2-\lambda^3t-\lambda t-2\lambda^2t+\lambda-2t\right]+(2+\lambda)\left[\lambda-\lambda^2+\lambda^3t+\lambda t+2\lambda^2t+1-\lambda+\lambda^2t+t+2\lambda t-t\right]+\lambda^2-3\lambda t+\lambda =$$

$$= -\left[2-2\lambda+3\lambda t+\lambda^2-\lambda^3t\right]+(2+\lambda)\left[-\lambda^2+\lambda^3t+3\lambda^2t+1+3\lambda t\right]+\lambda^2-3\lambda t+\lambda =$$

$$= -2+2\lambda-3\lambda t-\lambda^2+\lambda^3t-\lambda^3+\lambda^4t+3\lambda^3t+\lambda+3\lambda^2t-2\lambda^2+2\lambda^3t+6\lambda^2t+2+6\lambda t+\lambda^2-3\lambda t+\lambda =$$

$$= \lambda^4t-\lambda^3+6\lambda^3t+9\lambda^2t+4\lambda-2\lambda^2 = \lambda(\lambda^3t-\lambda^2+6\lambda^2t+9\lambda t+4-2\lambda)$$

Dunque

$$x_4 = \frac{\cancel{\lambda}(\lambda^3t-\lambda^2+6\lambda^2t+9\lambda t+4-2\lambda)}{\cancel{\lambda}} = \lambda^3t-\lambda^2+6\lambda^2t+9\lambda t+4-2\lambda.$$

E quindi:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{\lambda^2 t + 2\lambda t + 1 - \lambda}{\lambda}, \frac{\lambda^4 t + 5\lambda^3 + 6\lambda^2 t - 3\lambda t - \lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda - 1}{\lambda}, t, \lambda^3 t - \lambda^2 + 6\lambda^2 t + 9\lambda t + 4 - 2\lambda \right) \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Casi particolari Se $\lambda = 0$, avremo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

Moltiplicando la terza riga per -1, otteniamo il che primo membro di entrambi è uguale, ma non possiamo dire lo stesso per il secondo, dunque il sistema è incompatibile.

1.2 Scriviamo la matrice orlata associata al sistema

$$A|b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \lambda \\ 2 & 2 & 2 & -\lambda \\ 1 & \lambda & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A \in M_{4,3}(\mathbb{R}), B = A|b \in M_4(\mathbb{R}).$$

Caso generale Per verificare se il sistema è compatibile, utilizziamo il teorema di Kronecker-Rouche-Capelli. Notiamo che $1 \leq r(A) \leq 3$ e $1 \leq r(B) \leq 4$, quindi essendo B quadrata, se $\det(B) \neq 0$, allora $r(B) = 4$. Calcoliamo dunque $\det(B)$ mediante Laplace:

3° colonna

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & \lambda \\ 2 & 2 & 2 & -\lambda \\ 1 & \lambda & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & -\lambda \\ 1 & \lambda & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & \lambda & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 2 & 2 & -\lambda \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 2 & -\lambda \\ 1 & \lambda & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & \lambda & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 2 & 2 & -\lambda \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

2° riga

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -\lambda \\ 1 & \lambda & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -\lambda \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot \lambda \cdot \begin{vmatrix} 2 & -\lambda \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & -\lambda \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} 2 & -\lambda \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -(2-\lambda) + \lambda(2+3\lambda) = -2 + \lambda + 2\lambda + 3\lambda^2 = 3\lambda^2 + 3\lambda - 2$$

3° colonna

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & \lambda & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \cdot \lambda \cdot \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda(-1-3\lambda) + (\lambda - 2) = -\lambda - 3\lambda^2 + \lambda - 2 = -3\lambda^2 - 2$$

1° riga

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 2 & 2 & -\lambda \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -\lambda \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -\lambda \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot \lambda \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -\lambda \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -\lambda \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \lambda \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 - \lambda - 2 \cdot (2 + 3\lambda) + \lambda \cdot (-2-6) = 2 - \lambda - 4 - 6\lambda - 8\lambda = -15\lambda - 2$$

$$\Rightarrow 3\lambda^2 + 3\lambda - 2 - 2(-3\lambda^2 - 2) - 15\lambda - 2 = 3\lambda^2 + 3\lambda - 2 + 6\lambda^2 + 4 - 15\lambda - 2 =$$

$$= 9\lambda^2 - 12\lambda = 3\lambda(3\lambda - 4)$$

Poniamo $\det(B) \neq 0$ e otteniamo

$$3\lambda(3\lambda - 4) \neq 0 \implies \lambda \neq 0 \ \wedge \ \lambda \neq \frac{4}{3}.$$

Dunque $\forall\, \lambda \neq 0, \frac{4}{3}$, abbiamo che $r(B) = 4$. Ora però il fatto che $1 \leq r(A) \leq 3$ ci impedisce di applicare KRC poichè $r(A) \neq r(B)$, e dunque per valori di λ diversi da quelli verificati, il sistema è incompatibile.

Casi particolari Adesso studiamo i casi per cui $\lambda = 0$ e $\lambda = \frac{4}{3}$. Per $\lambda = 0$ il sistema diventa

$$A|b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A \in M_{4,3}(\mathbb{R}), B = A|b \in M_4(\mathbb{R}).$$

Riduco tale matrice a gradini mediante Gauss-Jordan:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \\ II' = \frac{II}{2} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \\ II' = II - I \\ III' = III - I \\ IV' = IV - 3I \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -3 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \\ II' = -II \\ \\ \\ \end{matrix}$$

e cancello la III perchè proporzionale alla II

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -3 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \\ \\ III' = III + 7II \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \\ \\ III' = -\frac{III}{3} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{matrix}$$

Ora scriviamo il sistema associato a tale matrice:

$$\begin{cases} X + 2Y + Z = 0 \\ Y = 0 \\ Z = -\frac{1}{3} \end{cases} = \begin{cases} X = \frac{1}{3} \\ Y = 0 \\ Z = -\frac{1}{3} \end{cases}.$$

Quindi l'unica soluzione del sistema per $\lambda = 0$ è data da $(x, y, z) = (\frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{3})$. Per $\lambda = \frac{4}{3}$ il sistema diventa

$$A|b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \frac{4}{3} \\ 2 & 2 & 2 & -\frac{4}{3} \\ 1 & \frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A \in M_{4,3}(\mathbb{R}), A|b \in M_4(\mathbb{R}).$$

Riduco tale matrice a gradini mediante Gauss-Jordan:

$$
\begin{array}{cccc|l}
1 & 2 & 1 & \frac{4}{3} & \\
2 & 2 & 2 & -\frac{4}{3} & II' = II - 2I \\
1 & \frac{4}{3} & 1 & 0 & III' = III - I \\
3 & -1 & 0 & 1 & IV' = IV - 3I \\
\hline
1 & 2 & 1 & \frac{4}{3} & \\
0 & -2 & 0 & -4 & II' = -\frac{II}{2} \\
0 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{4}{3} & \text{Poiché } III = \frac{II}{3} \text{, annullo } III \\
0 & -7 & -3 & -3 & IV' = -IV
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccc|l}
1 & 2 & 1 & \frac{4}{3} & \\
0 & 1 & 0 & 2 & \\
0 & 7 & 3 & 3 & III' = III - 7II \\
\hline
1 & 2 & 1 & \frac{4}{3} & \\
0 & 1 & 0 & 2 & \\
0 & 0 & 3 & -11 & III' = \frac{III}{3} \\
\hline
1 & 2 & 1 & \frac{4}{3} & \\
0 & 1 & 0 & 2 & \\
0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} &
\end{array}
$$

Ora scriviamo il sistema associato a tale matrice:

$$
\begin{cases} X + 2Y + Z = \frac{4}{3} \\ Y = 2 \\ Z = -\frac{11}{3} \end{cases} = \begin{cases} X = \frac{4}{3} + \frac{11}{3} - 4 \\ Y = 2 \\ Z = -\frac{11}{3} \end{cases} = \begin{cases} X = 1 \\ Y = 2 \\ Z = -\frac{11}{3} \end{cases} .
$$

Dunque l'unica soluzione del sistema per $\lambda = \frac{4}{3}$ è data da $(x, y, z) = (1, 2, -\frac{11}{3})$.

1.3 Scriviamo la matrice orlata associata al sistema

$$
A|b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ -\lambda & \lambda & \lambda & \lambda & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1-\lambda & 5 \end{pmatrix} \quad A \in M_{5,4}(\mathbb{R}), B = A|b \in M_5(\mathbb{R}).
$$

Caso generale Applichiamo il metodo di Gauss-Jordan per ridurre questo sistema a gradini:

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ -\lambda & \lambda & \lambda & \lambda & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1-\lambda & 5 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ II' = II - 2I \\ III' = \frac{III}{\lambda} \quad \lambda \neq 0 \\ IV' = IV - I \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -\frac{1}{\lambda} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1-\lambda & 5 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ II' = -II \\ III' = III + I \\ IV' = -IV \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1-\frac{1}{\lambda} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1-\lambda & 5 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \\ III' = III - 2II \\ \\ V' = V - II \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -7-\frac{1}{\lambda} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2-\lambda & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \\ III' = -III \\ \\ V' = -V \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \frac{7\lambda+1}{\lambda} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2+\lambda & -1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \frac{7\lambda+1}{\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & 2+\lambda & -1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ IV' = \frac{IV}{4} \\ V' = \frac{V}{2+\lambda} \quad \lambda \neq -2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{7\lambda+1}{4\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2+\lambda} \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ V' = V - IV \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{7\lambda+1}{4\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(7\lambda^2+19\lambda+2)}{4\lambda(2+\lambda)} \end{array}\right)$$

Se $7\lambda^2 + 19\lambda + 2 \neq 0$, allora il sistema è incompatibile.

Caso particolare Per $\lambda = 0$, il sistema diventa

$$A|b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad A \in M_{5,4}(\mathbb{R}), B = A|b \in M_5(\mathbb{R}),$$

è evidente constatare l'incompatibilità dalla terza riga. Per $7\lambda^2 + 19\lambda + 2 = 0$ si ha, partendo dalla matrice già ridotta a gradini nel caso generale,

$$A|b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{7\lambda+1}{4\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A \in M_{5,4}(\mathbb{R}), B = A|b \in M_5(\mathbb{R}),$$

cancelliamo la quinta riga e poichè $n = m$, il sistema è compatibile. Scriviamo il sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 4 \\ x_3 = -2 \\ x_4 = \frac{7\lambda+1}{4\lambda} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 1 - x_2 - x_3 - x_4 \\ x_2 = 4 - x_3 - 3x_4 \\ x_3 = -2 \\ x_4 = \frac{7\lambda+1}{4\lambda} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_2 + 2 - \frac{7\lambda+1}{4\lambda} \\ x_2 = 4 + 2 - 3\frac{7\lambda+1}{4\lambda} \\ x_3 = -2 \\ x_4 = \frac{7\lambda+1}{4\lambda} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \frac{\lambda+1}{2\lambda} \\ x_2 = \frac{3\lambda-3}{4\lambda} \\ x_3 = -2 \\ x_4 = \frac{7\lambda+1}{4\lambda} \end{cases}$$

Dunque il sistema è risolto dalla seguente quadrupla $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{\lambda+1}{2\lambda}, \frac{3(\lambda-1)}{4\lambda}, -2, \frac{7\lambda+1}{4\lambda}\right)$.

1.4 Scriviamo la matrice orlata associata al sistema

$$A|b = \begin{pmatrix} 1 & \lambda-1 & \lambda-2 & 0 & \lambda+3 \\ 3 & 0 & \lambda-2 & -2 & 4\lambda+1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3\lambda-3 & 0 & 2 & 9 \\ 2 & 3\lambda-3 & 0 & 4 & 12 \\ 1 & -2(\lambda-1) & -(\lambda-2) & -2 & 2\lambda-5 \end{pmatrix} \qquad A \in M_{6,4}(\mathbb{R}), B = A|b \in M_{6,5}(\mathbb{R}).$$

Caso generale Applichiamo il metodo di Gauss-Jordan per ridurre questo sistema a gradini:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \lambda-1 & \lambda-2 & 0 & \lambda+3 \\ 3 & 0 & \lambda-2 & -2 & 4\lambda+1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3(\lambda-1) & 0 & 2 & 9 \\ 2 & 3(\lambda-1) & 0 & 4 & 12 \\ 1 & -2(\lambda-1) & -(\lambda-2) & -2 & 2\lambda-5 \end{array} \quad \mathrm{V} = \mathrm{III} + \mathrm{IV} \text{ dunque la eliminiamo}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \lambda-1 & \lambda-2 & 0 & \lambda+3 \\ 3 & 0 & \lambda-2 & -2 & 4\lambda+1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3(\lambda-1) & 0 & 2 & 9 \\ 1 & -2(\lambda-1) & -(\lambda-2) & -2 & 2\lambda-5 \end{array} \quad \mathrm{V}' = \mathrm{V} + 2\mathrm{I}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \lambda-1 & \lambda-2 & 0 & \lambda+3 \\ 3 & 0 & \lambda-2 & -2 & 4\lambda+1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3(\lambda-1) & 0 & 2 & 9 \\ 3 & 0 & \lambda-2 & -2 & 4\lambda+1 \end{array} \quad \mathrm{II} = \mathrm{V} \text{ quindi la elimino}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \lambda-1 & \lambda-2 & 0 & \lambda+3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3(\lambda-1) & 0 & 2 & 9 \\ 3 & 0 & \lambda-2 & -2 & 4\lambda+1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \mathrm{II}' = \mathrm{II} - \mathrm{I} \\ \mathrm{III}' = \mathrm{III} - \mathrm{I} \\ \mathrm{IV}' = -(\mathrm{IV} - 3\mathrm{I}) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \lambda-1 & \lambda-2 & 0 & \lambda+3 \\ 0 & -(\lambda-1) & -(\lambda-2) & 2 & -\lambda \\ 0 & 2(\lambda-1) & -(\lambda-2) & 2 & -(\lambda-6) \\ 0 & 3(\lambda-1) & 2(\lambda-2) & 2 & 8-\lambda \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{III}' = \mathrm{III} + 2\mathrm{II} \\ \mathrm{IV}' = \mathrm{IV} + 3\mathrm{II} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \lambda-1 & \lambda-2 & 0 & \lambda+3 \\ 0 & -(\lambda-1) & -(\lambda-2) & 2 & -\lambda \\ 0 & 0 & -3(\lambda-2) & 6 & 6-3\lambda \\ 0 & 0 & -(\lambda-2) & 8 & 8-4\lambda \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{III}' = \mathrm{III} \cdot -\frac{1}{3} \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \lambda-1 & \lambda-2 & 0 & \lambda+3 \\ 0 & -(\lambda-1) & -(\lambda-2) & 2 & -\lambda \\ 0 & 0 & (\lambda-2) & -2 & \lambda-2 \\ 0 & 0 & -(\lambda-2) & 8 & 8-4\lambda \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ \mathrm{IV}' = \mathrm{IV} + \mathrm{III} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \lambda-1 & \lambda-2 & 0 & \lambda+3 \\ 0 & -(\lambda-1) & -(\lambda-2) & 2 & -\lambda \\ 0 & 0 & (\lambda-2) & -2 & \lambda-2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -3(\lambda-2) \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \mathrm{II}' = \mathrm{II} \cdot -\frac{1}{\lambda-1} \leftarrow \lambda \neq 1 \\ \mathrm{III}' = \mathrm{III} \cdot \frac{1}{\lambda-2} \leftarrow \lambda \neq 2 \\ \mathrm{IV}' = \frac{1}{6} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \lambda-1 & \lambda-2 & 0 & \lambda+3 \\ 0 & 1 & \frac{\lambda-2}{\lambda-1} & -\frac{2}{\lambda-1} & \frac{\lambda}{\lambda-1} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{\lambda-2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{\lambda-2}{2} \end{array}$$

Trascriviamo in sistema

$$\begin{cases} x_1 + (\lambda-1)x_2 + (\lambda-2)x_3 = \lambda+3 \\ x_2 + \left(\frac{\lambda-2}{\lambda-1}\right)x_3 - \left(\frac{2}{\lambda-1}\right)x_4 = \frac{\lambda}{\lambda-1} \\ x_3 - \left(\frac{2}{\lambda-2}\right)x_4 = 1 \\ x_4 = -\frac{\lambda-2}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \lambda+3-(\lambda-1)x_2-(\lambda-2)x_3 \\ x_2 = \frac{\lambda}{\lambda-1} - \left(\frac{\lambda-2}{\lambda-1}\right)x_3 + \left(\frac{2}{\lambda-1}\right)x_4 \\ x_3 = 1 + \left(\frac{2}{\lambda-2}\right)x_4 \\ x_4 = -\frac{\lambda-2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \lambda+3-(\lambda-1)x_2-(\lambda-2)x_3 \\ x_2 = \frac{\lambda}{\lambda-1} - \left(\frac{\lambda-2}{\lambda-1}\right)x_3 - \frac{2}{\lambda-1}\frac{\lambda-2}{2} \\ x_3 = 1 - \frac{2}{\lambda-2}\frac{\lambda-2}{2} = 0 \\ x_4 = -\frac{\lambda-2}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \lambda+3-(\lambda-1)\frac{2}{\lambda-1} = \lambda+3-2 = \lambda+1 \\ x_2 = \frac{\lambda-\lambda+2}{\lambda-1} = \frac{2}{\lambda-1} \\ x_3 = 0 \\ x_4 = -\frac{\lambda-2}{2} = \frac{2-\lambda}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \lambda+1 \\ x_2 = \frac{2}{\lambda-1} \\ x_3 = 0 \\ x_4 = \frac{2-\lambda}{2} \end{cases}$$

Il sistema è quindi compatibile, e la soluzione per $\lambda \neq \{1,2\}$ è $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\lambda+1, \frac{2}{\lambda-1}, 0, \frac{2-\lambda}{2}\right) \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

Casi particolari Per $\lambda = 1$ il sistema diventa

$$A|b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & -1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & 0 & 4 & 12 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \qquad A \in M_{6,4}(\mathbb{R}), B = A|b \in M_{6,5}(\mathbb{R}).$$

Poichè terza e quarta riga mostrano delle incompatibilità, il sistema è incompatibile. Per $\lambda = 2$ il sistema diventa

$$\begin{array}{ccccc|l} 1 & 1 & 0 & 0 & 5 & \\ 3 & 0 & 0 & -2 & 9 & \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 9 & \\ 2 & 3 & 0 & 4 & 12 & V = III + IV \text{ quindi lo elimino} \\ 1 & -2 & 0 & -2 & -1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|l} 1 & 1 & 0 & 0 & 5 & \\ 3 & 0 & 0 & -2 & 9 & II' = II - 3III \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 9 & \\ 1 & -2 & 0 & -2 & -1 & V' = V + IV \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|l} 1 & 1 & 0 & 0 & 5 & \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 0 & II' = -\frac{II}{8} \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 9 & \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 8 & V' = V - I \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|l} 1 & 1 & 0 & 0 & 5 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & III' = III - V \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 9 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|l} 1 & 1 & 0 & 0 & 5 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & III' = III \cdot \frac{1}{2} \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 9 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|l} 1 & 1 & 0 & 0 & 5 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & II = III \text{ quindi la elimino} \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 9 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|l} 1 & 1 & 0 & 0 & 5 & I' = I - IV \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 9 & III' = III - I \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|l} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 4 & III' = \frac{III}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|l} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & III' = III - I \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|l} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & II = III \text{ quindi lo elimino} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}$$

Trascriviamo in sistema

$$\begin{cases} x_2 = 2 \\ x_4 = 0 \\ x_1 = 3 \end{cases}.$$

Poichè $m < n$, pongo $x_3 = k \in \mathbb{R}$, allora le ∞^1 soluzioni del sistema sono $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3, 2, k, 0)$.

2.2 Operatori lineari

1.5

i) Scriviamo la matrice associata ad F rispetto alla base canonica $\mathbf{E}$

$$F\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\qquad F\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}\qquad F\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

Otteniamo dunque

$$M_{\mathbf{EE}}(F)=\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&0&-1\\3&-1&1\end{pmatrix}=A.$$

Troviamo ora il polinomio caratteristico, ossia

$$|A-\lambda\mathbf{I}_3|=\begin{vmatrix}1-\lambda&-1&2\\2&-\lambda&-1\\3&-1&1-\lambda\end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&-1&2\\2&-\lambda&-1\\3&-1&1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{matrix}1-\lambda&-1&2\\2&-\lambda&-1\\3&-1&1-\lambda\end{matrix}\qquad(-1)^{2+1}\cdot2\cdot\begin{vmatrix}-1&2\\-1&1-\lambda\end{vmatrix}=-2\cdot(-1\cdot(1-\lambda)+2)=-2\lambda-2$$

$$\begin{matrix}1-\lambda&-1&2\\2&-\lambda&-1\\3&-1&1-\lambda\end{matrix}\qquad(-1)^{2+2}\cdot(-\lambda)\cdot\begin{vmatrix}1-\lambda&2\\3&1-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda\left((1-\lambda)^2-6\right)=-\lambda(\lambda^2-2\lambda-5)=-\lambda^3+2\lambda^2+5\lambda$$

$$\begin{matrix}1-\lambda&-1&2\\2&-\lambda&-1\\3&-1&1-\lambda\end{matrix}\qquad(-1)^{2+3}\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix}1-\lambda&-1\\3&-1\end{vmatrix}=-(1-\lambda)+3=\lambda+2$$

$$\Rightarrow -2\lambda-2-\lambda^3+2\lambda^2+5\lambda+\lambda+2$$

$$-2\lambda-2\qquad+5\lambda+\lambda+2$$

$$-\lambda^3+2\lambda^2+4\lambda=-(\lambda^3-2\lambda^2-4\lambda)$$
$$=-\lambda(\lambda^2-2\lambda-4)$$

Otteniamo

$$|A-\lambda\mathbf{I}_3|=-\lambda(\lambda^2-2\lambda-4).$$

Calcoliamo ora gli autovalori, ossia le radici del polinomio caratteristico. Lo spettro di F è $\{0,1-\sqrt{5},1+\sqrt{5}\}$. Poichè la dimensione dello spettro di F è 3, allora l'endomorfismo è diagonalizzabile.

ii) Una base e la dimensione di $\ker(F)$ coincidono con una base e una dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$. Applicando Gauss-Jordan arriviamo al fatto che il sistema possiede ∞^1 soluzioni date da $(x_1,x_2,x_3)=t(1,5,2)$. otteniamo dunque che $\ker(F)=\langle(1,5,2)\rangle$ e dunque $\mathrm{B}_{\ker(F)}=\{(1,5,2)\}$. e la sua dimensione è 1 per la cardinalità della base o anche da ∞^1. Poichè $\dim(\ker(F))$, per il teorema 4.15 avremo che $r(F)=3-\ker(F)=3-1=2$. $r(F)$ è anche uguale ad $r(A)$. Una sua base sarà costituita da due colonne di A

$$\mathrm{B}_{\mathrm{Im}(F)}=\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}\}.$$

iii) Due sottospazi sono supplementari se e solo se sono in somma diretta. In questo caso se

$$\mathrm{Im}(F)+\ker(F)=\mathbb{R}^3\quad\wedge\quad\mathrm{Im}(F)\cap\ker(F)=\emptyset.$$

Dunque uniamo le basi, verifichiamo che queste siano un sistema di generatori prendendo il sistema

$$\begin{cases}a-b+2c=x\\5a-c=y\\2a+b+c=z\end{cases}$$

La matrice dei coefficienti è
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Poichè $1 \leq r(A), r(B) \leq 3$, deduciamo che se $\det(A) \neq 0$, allora $r(A) = r(B)$, e quindi per Kronecker-Rouche-Capelli il sistema è compatibile, ciò significa che per ogni vettore in $\mathbb{R}^3$, esiste una terna tale per cui il vettore è uguale alla combinazione lineare della base. Oltre a ciò bisogna verificare che i tre vettori siano linearmente indipendenti, e dunque dobbiamo risolvere
$$\begin{cases} a - b + 2c = 0 \\ 5a - c = 0 \\ 2a + b + c = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a - b + 2c = 0 \\ c = 5a \\ b = -7a \end{cases} \implies \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases},$$
dunque lo sono e quindi l'insieme di vettori $\mathrm{B}_{\mathrm{Im}(F)} \cup \mathrm{B}_{\ker(F)}$ è una base di $\ker(F) + \mathrm{Im}(F)$, la sua dimensione è 3 che è uguale a $\dim(\mathbb{R}^3)$, segue dunque che $\mathrm{Im}(F) + \ker(F) = \mathbb{R}^3$. Per la formua di Grassmann si ha
$$\dim(\mathrm{Im}(F) \cap \ker(F)) = \dim(\mathrm{Im}(F)) + \dim(\ker(F)) - \dim(\mathrm{Im}(F) + \ker(F)) = 2 + 1 - 3 = 0,$$
e dunque $\mathrm{Im}(F) \oplus \ker(F) = \mathbb{R}^3$.

iv) Questo non tanto l'ho capito ma suppongo io debba fare più esercizi.

1.6

i) Determinare gli autovalori e autovettori di F e verificare che F non è diagonalizzabile; Determiniamo le radici del polinomio $P_A(\lambda)$ dove $A = M_{\mathbf{E},\mathbf{E}}(F)$.
$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -3 \\ 3 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}.$$
Sviluppo Laplace lungo la terza riga:
$$(-1)^{3+3} \cdot (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda)(1-\lambda) = -\lambda(1-\lambda)^2.$$
Ponendo $P_A(\lambda) = 0$ ottengo $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$.

ii) determinare una base $\mathbf{B}$ di $\mathbb{R}^3$ contenente due autovettori di F e calcolare $M_{\mathbf{B},\mathbf{B}}(F)$;

iii) determinare un endomorfismo $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ diagonalizzabile che abbia tra i suoi autovettori quelli di F (relativi ai medesimi autovalori).

2.3 Forme bilineari e quadratiche

2.4 Geometria

3 Considerazioni su risoluzione dei problemi

3.1 Sistemi con parametro

Per risolvere un sistema lineare con parametro, bisogna prima di tutto estrarre la matrice orlata associata al sistema. Poi determinare gli insiemi di appartenenza delle matrici A e Ab. Caso Generale In un altro caso ho applicato prima Gauss-Jordan ma era di ordine 5, perchè? Specificare che useremo il teorema di Kronecker-Rouche-Capelli. Vediamo il rango di entrambe le matrici in quale intervallo può esistere.

- Se Ab è una matrice quadrata di ordine n, calcolo direttamente $\det(Ab)$ mediante Laplace. Se $\det(Ab) \neq 0$, allora $r(Ab) = n$ e dunque inevitabilmente sarà incompatibile perchè $1 \leq r(A) \leq n - 1$.

Dopo aver analizzato il caso generale, passo ai casi particolari. Per quei valori che rendono incompatibile il caso generale, faccio vedere come diventa il sistema e faccio la matrice orlata associata, determino ancora una volta gli insiemi di appartenenza delle matrici A e b. Effettuo riduzione a gradini con il metodo di eliminazione di Gauss-Jordan. Notare che se non incontro incompatibilità nella riduzione a gradini, allora il sistema è compatibile. Una volta ridotto a gradini, riscrivo il sistema e dopo aver effettuato i dovuti calcoli, riscrivo la soluzione sotto forma di n-upla.

3.2 Operatori lineari

Dato un operatore lineare (scritto in forma di funzione), se devo verificare che è diagonalizzabile, anzitutto scrivo la matrice associata all'operatore mediante la base canonica; Poi calcoliamo gli autovalori, ossia le radici del polinomio caratteristico $A - \lambda\mathbf{I}_n$. Chiaramente il calcolo del determinante deve essere fatto mediante Laplace.

1.6 Nella traccia mi è stata data un amatrice che rappresenta l'endomorfismo F rispetto alla base canonica, siamo in R^3. Si chiede di determinare autovalori e autovettori di F e verificare che non è diagonalizzabile. Per trovare gli autovalori, devo determinare le radici del polinomio caratteristico. Fatto ciò, esplicito lo spettro dell'operatore F. Per ogni autovalore, sostituisco al posto λ nella matrice $A - \lambda\mathbf{I}_n$ e ne calcolo il rango, applicando se necessario Gauss-Jordan o Laplace. Estraggo lo spazio delle soluzioni, ossia l'autospazio relativo all'autovalore $(\mathbf{V}_\lambda(A))$. Estraggo le dimensioni di tutti gli autospazi, e li sommo. Se la somma è uguale a n, allora l'operatore è diagonalizzabile e una base diagonalizzante è ottenibile unendo le basi di tutti gli autospazi. QUì ci sono da fare delle modifiche, se devo solo trovare autovalori e autovettori allora devo seguire il metodo del libro a pagina 94, invece per trovare le molteplicità geometriche o algebriche, o verificare la diagonalizzabilità di un operatore, bisogna integrare altre cose e sono processi diversi.