Calcolo Scientifico - Modulo A

Esercitazione n. 1

(1) Scrivere una function Matlab che verifichi che una matrice è simmetrica.
(2) Scrivere una function Matlab che verifichi che una matrice simmetrica è definita positiva usando il criterio di Sylvester.
(3) Scrivere una function Matlab che verifichi che una matrice è a diagonale dominante per righe.
(4) Si consideri la matrice

$$A = rand(10), \quad A = A * A'.$$

- Verificare se è simmetrica;
- Verificare se è simmetrica e definita positiva;

(5) Si consideri la matrice

$$A = rand(10) + 100 * diag(ones(1, 10)).$$

Verificare se è a diagonale dominante per righe.

Esercizi per casa

(1) Scrivere una function Matlab che verifichi che una matrice è a diagonale dominante per colonne.
(2) Si consideri la matrice

$$A(i,j) = \begin{cases} -1 & i > j \\ 0 & i < j \\ 100 & i = j \end{cases}, \qquad i, j = 1, \ldots, n$$

con $n = 15$.

- Verificare se è a diagonale dominante per colonne;
- Verificare se è a diagonale dominante per righe.

Calcolo Scientifico - Modulo A

Esercitazione n. 2

(1) Scrivere una function Matlab che implementi il metodo di sostituzione in avanti.
(2) scrivere una function Matlab che implementi il metodo di sostituzione all'indietro.
(3) scrivere una function Matlab che implementi opportunamente il metodo di sostituzione all'indietro per calcolare l'inversa di una matrice triagolare superiore
(4) Si consideri il sistema lineare $Ax = b$ con
$$A = tril(rand(10)), \quad b = sum(A, 2).$$
Risolvere il sistema con il metodo di sostituzione in avanti.
(5) Si consideri il sistema lineare $Ax = b$ con
$$A = triu(rand(10)), \quad b = sum(A, 2).$$
- Risolvere il sistema con il metodo di sostituzione all'indietro;
- calcolare l'inversa di A.

Esercizi per casa

(1) Scrivere una function Matlab che risolvi un sistema diagonale.
(2) Risolvere il sistema lineare $Ax = b$ con
$$A = diag(diag(rand(10))), \quad b = sum(A, 2).$$
(3) Scrivere una function Matlab che implementi opportunamente il metodo di sostituzione in avanti per calcolare l'inversa di una matrice triagolare inferiore
(4) Calcolare l'inversa della matrice
$$A = tril(rand(20)).$$

Calcolo Scientifico - Modulo A

Esercitazione n. 3

(1) Scrivere una function Matlab che implementi il metodo di eliminazione di Gauss.

(2) Si consideri il sistema lineare $Ax = b$ con

$$A = rand(100), \quad b = sum(A, 2).$$

Risolvere il sistema con il metodo di Gauss.

(3) Si consideri il sistema di equazioni lineari Ax=b di ordine n=15, con

$$A(i,j) = \begin{cases} -1 & i > j \\ 0 & i < j \\ 100 & i = j \end{cases}, \qquad i,j = 1, \dots, n$$

e

$$b = [1, 1, .., 1]^T.$$

- Calcolare l'indice di condizionamento e il numero massimo di cifre significative corrette che ci si può aspettare nel calcolo della soluzione approssimata.
- Calcolare il vettore soluzione con il metodo di sostituzione in avanti e riportarne le prime due componenti con le cifre significative che si possono certamente ritenere corrette.
- Confrontare la soluzione ottenuta (vettore x) con la soluzione che si ottiene usando la function predefinita del Matlab (vettore y). Di quanto differiscono al massimo?

(4) Si consideri il sistema di equazioni lineari Ax=b di ordine n=10, con

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 & 4 & 4 & \cdots & 4 & 4 \\ 1 & \frac{1}{3} & 2 & 4 & \dots & & 4 \\ 2 & 1 & \frac{1}{4} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 2 & \ddots & \ddots & \ddots & 4 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 & 4 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 1 & \frac{1}{n} & 2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 2 & 1 & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}$$

e

$$b = (b_i)_{i=1,\dots,n}, \quad b(i) = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j}.$$

- Calcolare l'indice di condizionamento e il numero massimo di cifre significative corrette che ci si può aspettare nel calcolo della soluzione approssimata.
- Calcolare il vettore soluzione con il metodo di eliminazione di Gauss e riportarne le prime due componenti con le cifre significative che si possono certamente ritenere corrette.
- Confrontare la soluzione ottenuta (vettore x) con la soluzione che si ottiene usando la function predefinita del Matlab (vettore y). Di quanto differiscono al massimo?
- Confrontare la soluzione ottenuta (vettore x) con il vettore $t = [1, \dots, 1]^T$ che rappresenta la soluzione esatta del sistema. Di quanto differiscono al massimo?

(5) Si consideri il sistema di equazioni lineari Ax=b di ordine n=100, con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 1 & 4 & \ddots & & 0 \\ 0 & 6 & 5 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 4 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 4 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 6 & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 6 & 2n-1 \end{pmatrix}$$

e

$$b = (b_i)_{i=1,\dots,n}, \quad b(i) = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j}.$$

- Calcolare l'indice di condizionamento e il numero massimo di cifre significative corrette che ci si può aspettare nel calcolo della soluzione approssimata.
- Calcolare il vettore soluzione con il metodo di eliminazione di Gauss e riportare le prime due componenti del vettore soluzione con le cifre significative che si possono certamente ritenere corrette.
- Confrontare la soluzione ottenuta (vettore x) con il vettore $t = [1, \dots, 1]^T$ che rappresenta la soluzione esatta del sistema. Di quanto differiscono al massimo?

Calcolo Scientifico - Modulo A

Esercitazione n. 4

(1) Scrivere una function Matlab che implementi il metodo di eliminazione di Gauss con la strategia del pivoting parziale.
(2) Scrivere una function Matlab che prende in input una matrice A e restituisce in output le matrici L e U tali che $A = LU$.
(3) Consideriamo il sistema lineare $Ax = b$ di ordine $n = 18$, dove

$$A_{i,j} = \cos\left((j-1)\frac{2i-1}{2n}\pi\right), \quad i, j = 1, \dots, n,$$

e

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j}, \quad i = 1, \dots, n,$$

la cui soluzione esatta è $x = [1, \dots, 1]^T$.
- Calcolare l'indice di condizionamento e il numero di cifre significative corrette che ci si può aspettare nel calcolo della soluzione approssimata.
- Calcolare la soluzione approssimata del sistema utilizzando il metodo di Gauss e calcolare l'errore relativo. Quante sono le cifre significative corrette?
- Calcolare la soluzione approssimata del sistema utilizzando il metodo di Gauss con pivoting parziale e calcolare l'errore relativo. Quante sono le cifre significative corrette?
- Qual è il metodo più stabile?

(4) Consideriamo il sistema lineare $Ax = b$ di ordine $n = 50$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 6 \\ 2 & \frac{5}{2} & 2 & 2 & \ddots & & 2 \\ 2 & 2 & \frac{7}{3} & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \ddots & \ddots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 2 + \frac{1}{n-1} & 2 \\ 6 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 2 + \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

e

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j}, \quad i = 1, \dots, n,$$

la cui soluzione esatta è $x = [1, \dots, 1]^T$.

- Calcolare l'indice di condizionamento e il numero di cifre significative corrette che ci si può aspettare nel calcolo della soluzione approssimata.
- Calcolare la soluzione approssimata del sistema utilizzando il metodo di Gauss e calcolare l'errore relativo. Quante sono le cifre significative corrette?
- Calcolare la soluzione approssimata del sistema utilizzando il metodo di Gauss con pivoting parziale e calcolare l'errore relativo. Quante sono le cifre significative corrette?
- Qual è il metodo più stabile?

(5) Consideriamo il problema di $n = 80$

$$AX = B, \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ X \in \mathbb{R}^{n\times 3},\ B \in \mathbb{R}^{n\times 3},$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 9 & 0 & \frac{1}{3} & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & 13 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{3} & \ddots & & 0 & 4(n-1)+1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \dots & 0 & 4n+1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & n-1 \\ 1 & 2 & n \end{pmatrix}.$$

- Calcolare l'indice di condizionamento e il numero di cifre significative corrette che ci si può aspettare nel calcolo della matrice soluzione X.
- Calcolare la soluzione approssimata Y utilizzando opportunamente la fattorizzazione LU della matrice A. Riportare le componenti della prima riga della matrice Y con le cifre che si possono ritenere corrette.
- Calcolare il residuo relativo in norma infinito.

Esercizi per casa

(1) Scrivere una function Matlab che implementi opportunamente il metodo di eliminazione di Gauss per risolvere un sistema a matrice tridiagonale.

(2) Scrivere una function Matlab che implementi opportunamente il metodo di eliminazione di Gauss per risolvere un sistema a matrice di Hessemberg superiore.

Calcolo Scientifico - Modulo A

Esercitazione n. 4 (2)

(1) Scrivere una function Matlab che prende in input una matrice A e restituisce in output le matrici L, U e P tali che $PA = LU$ e il numero s degli scambi effettuati.

(2) Consideriamo il sistema lineare $Ax = b$ di ordine $n = 80$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 8 \\ 4 & \frac{7}{2} & 2 & 2 & \ddots & & 2 \\ 4 & 4 & \frac{10}{3} & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 4 & 4 & 4 & \ddots & \ddots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 & 2 \\ 4 & 4 & \cdots & 4 & 4 & 3+\frac{1}{n-1} & 2 \\ 10 & 4 & 4 & \cdots & 4 & 4 & 3+\frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

e

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j}, \quad i = 1, \dots, n,$$

la cui soluzione esatta è $x = [1, \dots, 1]^T$.

- Calcolare l'indice di condizionamento e il numero di cifre significative corrette che ci si può aspettare nel calcolo della soluzione approssimata.
- Calcolare la soluzione approssimata del sistema utilizzando opportunamente il metodo di Gauss e calcolare l'errore relativo. Quante sono le cifre significative corrette?
- Calcolare il Determinante della matrice A.
- Calcolare l'inversa della matrice A.

(3) Data la matrice di ordine $n = 40$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \frac{1}{10} & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \ddots & & 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix},$$

Calcolare l'indice di condizionamento e il numero di cifre significative corrette che ci si può aspettare nel calcolarne:

- il determinante;
- l'inversa.

Esercizi per casa

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & \frac{1}{2} & 3 & \dots & 3 & 3 \\ 0 & 10 & 1 & \frac{1}{3} & \ddots & & 3 \\ 2 & 0 & 10 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 2 & 0 & \ddots & \ddots & \frac{1}{n-2} & 3 \\ 2 & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{2} & \ddots & & 2 & 0 & 10 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 2 & \cdots & 2 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

e

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j}, \quad i = 1, \dots, n,$$

la cui soluzione esatta è $x = [1, \dots, 1]^T$.

- Calcolare l'indice di condizionamento e il numero di cifre significative corrette che ci si può aspettare nel calcolo della soluzione approssimata.
- Calcolare la soluzione approssimata del sistema utilizzando opportunamente il metodo di Gauss e calcolare l'errore relativo. Quante sono le cifre significative corrette?
- Calcolare il Determinante della matrice A.
- Calcolare l'inversa della matrice A.

Calcolo Scientifico - Modulo A

Esercitazione n. 5

(1) Scrivere una function Matlab che implementi il metodo di Cholesky.

(2) Modificare le functions che implementano le fattorizzazioni $A = LU$ e $PA = LU$ in modo da fornire in output anche il corrispondente fattore di crescita ρ per la valutazione della loro stabilità numerica.

(3) Consideriamo il sistema lineare $Ax = b$ di ordine $n = 100$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 4 & 0 & 5 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 5 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad A = A * A^T$$

e

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j}, \quad i = 1, \dots, n,$$

la cui soluzione esatta è $x = [1, \dots, 1]^T$.

- Calcolare l'indice di condizionamento e il numero di cifre significative corrette che ci si può aspettare nel calcolo della soluzione approssimata.
- Proporre uno o più metodi numerici per calcolare la soluzione del sistema $Ax = b$ con la massima precisione possibile. Calcolare l'errore relativo in norma infinito. Quante sono le cifre significative corrette della soluzione calcolata?
- Motivare la scelta del metodo effettuata e commentare i risultati ottenuti.
- Calcolare il determinante di A.
- Calcolare l'inversa di A.
- Verificare che il fattore di crescita ρ relativo alla fattorizzazione LU è uguale a 1.

(4) Consideriamo il sistema lineare $Ax = b$ di ordine $n = 100$, dove

$$A(i,j) = \begin{cases} -7, & i = j \\ -2, & |i-j| = 1 \\ 1, & |i-j| = 4 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

la cui soluzione esatta è $x = [1, \ldots, 1]^T$.

- Calcolare l'indice di condizionamento e il numero di cifre significative corrette che ci si può aspettare nel calcolo della soluzione approssimata.
- Proporre uno o più metodi numerici per calcolare la soluzione del sistema $Ax = b$ con la massima precisione possibile. Calcolare l'errore relativo in norma infinito. Quante sono le cifre significative corrette della soluzione calcolata?
- Valutare la stabilità dei metodi proposti mediante il calcolo del fattore di crescita ρ.
- Motivare la scelta del metodo effettuata e commentare i risultati ottenuti.
- Calcolare il determinante di A.
- Calcolare l'inversa di A.
- Verificare che il fattore di crescita ρ relativo alla fattorizzazione LU è minore di 2.

(5) Consideriamo il sistema lineare $Ax = b$ di ordine $n = 80$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 15 & -3 & -3 & -3 & \ldots & -3 \\ 2 & 15 & -3 & -3 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 15 & \ddots & \ddots & -3 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & -3 \\ \vdots & \ddots & & 2 & 15 & -3 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

e

$$b = [1, \ldots, 1]^T.$$

- Calcolare l'indice di condizionamento e il numero di cifre significative corrette che ci si può aspettare nel calcolo della soluzione approssimata.
- Calcolare la soluzione approssimata y del sistema utilizzando opportunamente il metodo di Gauss. Riportare le prime 2 componenti del vettore y con le cifre che si possono ritenere corrette.
- Verificare la stabilità del metodo di Gauss usato, valutando il suo fattore di crescita ρ.
- Calcolare la norma infinito del residuo $Ay - b$.
- Calcolare il determinante di A.

- Calcolare l'inversa di A.

(6) Consideriamo il sistema lineare $Ax = b$ di ordine $n = 60$, con A matrice di Wilkinson

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & & \vdots & 1 \\ -1 & -1 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & -1 & \ddots & \ddots & 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e $b(i) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}, \quad i = 1 : n$

- Calcolare l'indice di condizionamento e il numero di cifre significative corrette che ci si può aspettare nel calcolo della soluzione approssimata.
- Stabilire in base a proprietà eventuali della matrice quale variante del metodo di Gauss o fattorizzazione è più conveniente usare per garantire la massima stabilità al minimo costo.
- Calcolare il fattore di crescita ρ se si usa il GE.
- Calcolare la soluzione e l'errore relativo commesso.
- Calcolare il fattore di crescita ρ se si usa il GEPP.
- Calcolare la soluzione e l'errore relativo commesso.
- Fare opportune considerazioni sui risultati ottenuti
- Calcolare la soluzione con il GETP e l'errore relativo commesso. Utilizzare opportunamente la function predefinita del Matlab `lu`.
- Fare opportune considerazioni sui risultati ottenuti
- Ripetere lo stesso esercizio con $n = 50$.

Calcolo Scientifico - Modulo A

Esercitazione n. 5 (2)

(1) Scrivere una function Matlab che calcoli il fattore ρ di crescita per la valutazione dell'errore algoritmico in GE e GEPP.

(2) Scrivere una function Matlab per la determinazione delle matrici L, U, P, Q tali che $PAQ = LU$ con pivoting totale.

(3) Consideriamo il sistema lineare $Ax = b$ di ordine $n = 60$, con A matrice di Wilkinson

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & & \vdots & 1 \\ -1 & -1 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & -1 & \ddots & \ddots & 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e $b(i) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}, \quad i = 1 : n$

- Calcolare l'indice di condizionamento e il numero di cifre significative corrette che ci si può aspettare nel calcolo della soluzione approssimata.
- Stabilire in base a proprietà eventuali della matrice quale variante del metodo di Gauss o fattorizzazione è più conveniente usare per garantire la massima stabilità al minimo costo.
- Calcolare il fattore di crescita ρ se si usa il GEPP.
- Calcolare la soluzione e l'errore relativo commesso.
- Fare opportune considerazioni sui risultati ottenuti
- Calcolare la soluzione con il GETP e l'errore relativo commesso.
- Fare opportune considerazioni sui risultati ottenuti
- Ripetere lo stesso esercizio con $n = 50$.

(4) Consideriamo il sistema lineare $Ax = b$ di ordine $n = 60$, con $b(i) = i \quad i = 1, 2 \dots, n$ ed $A = G * G'$, essendo

$$
\begin{array}{rcl}
G(i,i+1) & = & \cos(2i+1), \quad i=1,2,..,n-1 \\
G(i,i) & = & n+1, \quad i=1,2,\ldots,n \\
G(i,1) & = & 1, \quad i\geq 2 \\
0 & & altrove
\end{array}
$$

- Calcolare l'indice di condizionamento e il numero di cifre significative corrette che ci si può aspettare nel calcolo della soluzione approssimata.
- Stabilire in base a proprietà eventuali della matrice quale variante del metodo di Gauss o fattorizzazione è più conveniente usare per garantire la massima stabilità al minimo costo.
- Calcolare il fattore di crescita ρ se si usa il GEPP.
- Calcolare la soluzione e l'errore relativo commesso.
- Fare opportune considerazioni sui risultati ottenuti

(5) Consideriamo i sistemi lineari

$$Gx = c$$

$$Gy = d$$

con $G = (g_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}$ matrice dell'esercizio precedente e con

$$c(i) = \sum_{j=1}^{n} g_{i,j}, \quad i=1,\ldots,n,$$

$$d(i) = 1, \quad i = 1:n$$

- Calcolare l'indice di condizionamento e il numero di cifre significative corrette che ci si può aspettare nel calcolo della soluzione approssimata.
- Stabilire in base a proprietà eventuali della matrice quale variante del metodo di Gauss o fattorizzazione è più conveniente usare per garantire la massima stabilità al minimo costo.
- Calcolare il fattore di crescita ρ se si usa il GEPP.
- Calcolare la soluzione e l'errore relativo commesso.
- Fare opportune considerazioni sui risultati ottenuti

(6) Consideriamo il sistema lineare $Ax = b$ di ordine $n = 80$ con

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 200 \\ 1 & 10 & 2 & \ddots & & \ddots & 2 \\ 0 & 1 & 10 & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & n-2 & 0 \\ 2 & \ddots & & \ddots & 1 & 10 & n-1 \\ 100 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

e

$$b = \{b_i\}^T_{i=1,\ldots,n}, \quad b_i = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

- Riportare le istruzioni Matlab utilizzate per la costruzione di A e b.
- Calcolare la soluzione approssimata del sistema con la massima precisione possibile usando una opportuna procedura numerica. Riportare le istruzioni Matlab utilizzate e le prime 2 componenti del vettore soluzione con le cifre che si possono ritenere corrette.
- Motivare la scelta del metodo.
- Qual è il costo computazionale del metodo numerico utilizzato?
- Poichè è noto che la soluzione è $x = (1, 1, \ldots, 1)^T$, calcolare l'errore relativo. Riportarne il valore e le istruzioni Matlab utilizzate. Quante sono le cifre significative corrette?
- Commentare i risultati ottenuti.

(7) Determinare la matrice inversa della matrice data nell'esercizio precedente. Indicare:
- la procedura utilizzata
- la fattorizzazione più adeguata per garantire stabilità
- il costo computazionale.

Calcolo Scientifico - Modulo A

Esercitazione n. 8

(1) Consideriamo il sistema lineare $Ax = b$ di ordine $n = 100$ con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 6 & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & 2 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 2 & \vdots & \ddots & \ddots & 2n-2 & 0 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 & 0 & 2n \end{pmatrix}$$

e

$$b = \{b_i\}^T_{i=1,\ldots,n}, \quad b_i = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

- Riportare le istruzioni Matlab utilizzate per la costruzione di A e b.
- Calcolare la soluzione approssimata del sistema con la massima precisione possibile usando una opportuna procedura numerica. Riportare le istruzioni Matlab utilizzate e le prime 2 componenti del vettore soluzione con le cifre che si possono ritenere corrette.
- Motivare la scelta del metodo.
- Qual è il costo computazionale del metodo numerico utilizzato?
- Poichè è noto che la soluzione è $x = (1, 1, \ldots, 1)^T$, calcolare l'errore relativo. Riportarne il valore e le istruzioni Matlab utilizzate. Quante sono le cifre significative corrette?
- Commentare i risultati ottenuti.

(2) Consideriamo il sistema lineare $AX = B$ di ordine $n = 80$ con

$$A = (a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n} = \left(\sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin\left(\frac{\pi i j}{n+1}\right) \right)_{i,j=1,\ldots,n}$$

e

$$b = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} A_{1,j} & 1 & 2 \\ \sum_{j=1}^{n} A_{2,j} & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} A_{n,j} & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Riportare le istruzioni Matlab utilizzate per la costruzione di A e b.
- Calcolare la soluzione approssimata del sistema con la massima precisione possibile usando una opportuna procedura numerica. Riportare le istruzioni Matlab utilizzate e le prime 2 righe della matrice soluzione con le cifre che si possono ritenere corrette.
- Motivare la scelta del metodo.
- Qual è il costo computazionale del metodo numerico utilizzato?
- Calcolare il residuo relativo. Riportarne il valore e le istruzioni Matlab utilizzate. Quante sono le cifre significative corrette?
- Commentare i risultati ottenuti.

(3) Consideriamo il sistema lineare $Ax = b$ di ordine $n = 110$ con

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

e

$$b = \{b_i\}_{i=1,\dots,n}^T, \quad b_i = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j}, \quad i = 1, \dots, n.$$

- Riportare le istruzioni Matlab utilizzate per la costruzione di A e b.
- Calcolare la soluzione approssimata del sistema con la massima precisione possibile usando una opportuna procedura numerica. Riportare le istruzioni Matlab utilizzate e le prime 2 componenti del vettore soluzione con le cifre che si possono ritenere corrette.
- Motivare la scelta del metodo.
- Qual è il costo computazionale del metodo numerico utilizzato?
- Poichè è noto che la soluzione è $x = (1, 1, \dots, 1)^T$, calcolare l'errore relativo. Riportarne il valore e le istruzioni Matlab utilizzate. Quante sono le cifre significative corrette?
- Commentare i risultati ottenuti.

(4) Consideriamo il sistema lineare $Ax = b$ di ordine $n = 120$ con

$$A = \begin{pmatrix} 2(n+1) & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2(n+1) & 4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2(n+1) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & -1 & 2(n+1) & 2(n-1) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2(n+1) \end{pmatrix}.$$

e

$$b = \{b_i\}_{i=1,\dots,n}^T, \quad b_i = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j}, \quad i = 1, \dots, n.$$

- Riportare le istruzioni Matlab utilizzate per la costruzione di A e b.
- Calcolare la soluzione approssimata del sistema con la massima precisione possibile usando una opportuna procedura numerica. Riportare le istruzioni Matlab utilizzate e le prime 2 componenti del vettore soluzione con le cifre che si possono ritenere corrette.
- Motivare la scelta del metodo.
- Qual è il costo computazionale del metodo numerico utilizzato?
- Poichè è noto che la soluzione è $x = (1, 1, \dots, 1)^T$, calcolare l'errore relativo. Riportarne il valore e le istruzioni Matlab utilizzate. Quante sono le cifre significative corrette?
- Calcolare l'inversa B della matrice A con la massima precisione possibile usando una opportuna procedura numerica. Riportare le istruzioni Matlab utilizzate e il valore delle componenti $B(3,4)$ e $B(4,4)$ con le cifre che si possono ritenere corrette.
- Commentare i risultati ottenuti.

(5) Data la matrice di ordine $n = 80$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -2 & -2 & \dots & -2 & 5 \\ 2 & \frac{1}{8} & -2 & \ddots & & -2 \\ 2 & 2 & \frac{1}{12} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -2 & -2 \\ 2 & & \ddots & \ddots & \frac{1}{4n-4} & -2 \\ 9 & 2 & \cdots & 2 & 2 & \frac{1}{4n} \end{pmatrix}.$$

- Riportare le istruzioni Matlab utilizzate per la sua costruzione.
- Calcolare il determinante della matrice A con la massima precisione possibile usando una opportuna procedura numerica. Riportare le istruzioni Matlab utilizzate e il valore del determinante con le cifre che si possono ritenere corrette.
- Motivare la scelta del metodo.
- Qual è il costo computazionale del metodo numerico utilizzato?

(6) Consideriamo il sistema lineare $Ax = b$ di ordine $n = 80$ con

$$A = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n} \quad \text{con} \quad a_{i,j} = \min\{i, j\}$$

e

$$b = \{b_i\}^T_{i=1,\dots,n}, \quad b_i = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j}, \quad i = 1, \dots, n.$$

- Riportare le istruzioni Matlab utilizzate per la costruzione di A e b.
- Calcolare la soluzione approssimata del sistema con la massima precisione possibile usando una opportuna procedura numerica. Riportare le istruzioni Matlab utilizzate e le prime 2 componenti del vettore soluzione con le cifre che si possono ritenere corrette.
- Motivare la scelta del metodo.
- Qual è il costo computazionale del metodo numerico utilizzato?
- Poichè è noto che la soluzione è $x = (1, 1, \dots, 1)^T$, calcolare l'errore relativo. Riportarne il valore e le istruzioni Matlab utilizzate. Quante sono le cifre significative corrette?
- Calcolare il determinante della matrice A con la massima precisione possibile usando una opportuna procedura numerica. Riportare le istruzioni Matlab utilizzate e il valore del determinante con le cifre che si possono ritenere corrette.
- Commentare i risultati ottenuti.

Calcolo Scientifico - Modulo A

Esercitazione n. 9

(1) Considerare la matrice test A definita mediante i comandi Matlab

$$B = gallery('kahan', 80);$$
$$A = B(:, 1:30).$$

- Determinare le dimensioni della matrice e stabilire se è o meno a rango massimo.
- Considerare il sistema $Ax = b$ con $b(i) = \sum_{j=1}^{n}, a_{ij},\ i = 1, \ldots, m$ nel senso dei minimi quadrati. Studiare l'esistenza e l'unicità della soluzione del sistema, il condizionamento del problema e determinare la stima dell'errore teorico a priori.
- Scegliere il metodo che conviene applicare e giustificare la scelta.
- È noto che in questo caso la soluzione è data da $\overline{x} = (1, 1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$. Calcolare quindi l'errore commesso e confrontare il risultato ottenuto con la stima a priori.

(2) Considerare la matrice test A definita mediante il comando Matlab

$$A = gallery('chebvand', 350, 60).$$

- Determinare le dimensioni della matrice e stabilire se è o meno a rango massimo.
- Considerare il sistema $Ax = b$ con $b(i) = \sum_{j=1}^{n}, a_{ij},\ i = 1, \ldots, m$ nel senso dei minimi quadrati. Studiare l'esistenza e l'unicità della soluzione del sistema, il condizionamento del problema e determinare la stima dell'errore teorico a priori.
- Scegliere il metodo che conviene applicare e giustificare la scelta.
- È noto che in questo caso la soluzione è data da $\overline{x} = (1, 1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$. Calcolare quindi l'errore commesso e confrontare il risultato ottenuto con la stima a priori.

(3) Considerare la matrice test A definita mediante i comandi Matlab

$$B = gallery('kms', 100, .1);$$
$$A = B(:, 1:30).$$

- Determinare le dimensioni della matrice e stabilire se è o meno a rango massimo.

- Considerare il sistema $Ax = b$ con $b(i) = \sum_{j=1}^{n}, a_{ij},\ i = 1, \ldots, m$ nel senso dei minimi quadrati. Studiare l'esistenza e l'unicità della soluzione del sistema, il condizionamento del problema e determinare la stima dell'errore teorico a priori.
- Scegliere il metodo che conviene applicare e giustificare la scelta.
- È noto che in questo caso la soluzione è data da $\overline{x} = (1, 1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$. Calcolare quindi l'errore commesso e confrontare il risultato ottenuto con la stima a priori.

(4) Considerare la matrice test A definita mediante i comandi Matlab

$$A = gallery('lauchli', 100) * gallery('lehmer', 100);$$

- Determinare le dimensioni della matrice e stabilire se è o meno a rango massimo.
- Considerare il sistema $Ax = b$ con $b(i) = \sum_{j=1}^{n}, a_{ij},\ i = 1, \ldots, m$ nel senso dei minimi quadrati. Studiare l'esistenza e l'unicità della soluzione del sistema, il condizionamento del problema e determinare la stima dell'errore teorico a priori.
- Scegliere il metodo che conviene applicare e giustificare la scelta.
- Calcolare l'errore commesso confrontando la soluzione ottenuta con quella che si ottiene utilizzando la function \ del MatLab. Confrontare tale errore con la stima a priori.

(5) Data la matrice di ordine $n = 100$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & \ldots & \ldots & -1 \\ 4 & 2 & -2 & \ldots & \ldots & -2 \\ 4 & 4 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -2 & -2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & n-1 & -2 \\ 5 & 4 & \cdots & 4 & 4 & n \end{pmatrix},$$

considerare la matrice $A = B(:, 1:7)$.

- Determinare le dimensioni della matrice e stabilire se è o meno a rango massimo.
- Considerare il sistema $Ax = b$ con $b = 2 * sum(A, 2)$, nel senso dei minimi quadrati. Studiare l'esistenza e l'unicità della soluzione del sistema, il condizionamento del problema e determinare la stima dell'errore teorico a priori.

- Scegliere il metodo che conviene applicare e giustificare la scelta.
- Commentare i risultati ottenuti.

(6) Considerare la seguente matrice test
$$A = gallery('lauchli', 10).$$

- Determinare le dimensioni della matrice e stabilire se è o meno a rango massimo.
- Considerare il sistema $Ax = b$ con $b(i) = \sum_{j=1}^{n}, a_{ij}$, $i = 1, \ldots, m$ nel senso dei minimi quadrati. Studiare l'esistenza e l'unicità della soluzione del sistema, il condizionamento del problema e determinare la stima dell'errore teorico a priori.
- Scegliere il metodo che conviene applicare e giustificare la scelta. Qual è il suo costo computazionale?
- È noto che in questo caso la soluzione è data da $\overline{x} = (1, 1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$. Calcolare quindi l'errore commesso e confrontare il risultato ottenuto con la stima a priori.

(7) Sia $m = 90$. Consideriamo il sistema $Ax = b$ nel senso dei minimi quadrati, dove
$$A = (a_{i,j})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,\frac{m}{3}}}, \quad a_{i,j} = \begin{cases} \sin(i + 2j) + 1, & i = j \\ \cos(2i + j - 5), & i \neq j \end{cases},$$
$$b = \{b_i\}^T_{i=1,\ldots,m}, \quad b_i = \sum_{j=1}^{\frac{m}{3}} a_{i,j}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

- Riportare le istruzioni Matlab utilizzate per la costruzione di A e b.
- Determinare le dimensioni della matrice e stabilire se è o meno a rango massimo.
- Studiare l'esistenza e l'unicità della soluzione del sistema, il condizionamento del problema e determinare la stima dell'errore teorico a priori.
- Scegliere il metodo che conviene applicare e giustificare la scelta. Qual è il suo costo computazionale?
- È noto che in questo caso la soluzione è data da $\overline{x} = (1, 1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^{\frac{m}{4}}$. Calcolare quindi l'errore commesso e confrontare il risultato ottenuto con la stima a priori.

Calcolo Scientifico - Modulo A

Esercitazione n. 9 (2)

(1) Considerare la seguente matrice test

$$A = gallery('lauchli', 10).$$

- Determinare le dimensioni della matrice e stabilire se è o meno a rango massimo.
- Considerare il sistema $Ax = b$ con $b(i) = \sum_{j=1}^{n}, a_{ij}$, $i = 1, \ldots, m$ nel senso dei minimi quadrati. Studiare l'esistenza e l'unicità della soluzione del sistema, il condizionamento del problema e determinare la stima dell'errore teorico a priori.
- Scegliere il metodo che conviene applicare e giustificare la scelta. Qual è il suo costo computazionale?
- È noto che in questo caso la soluzione è data da $\overline{x} = (1, 1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$. Calcolare quindi l'errore commesso e confrontare il risultato ottenuto con la stima a priori.

(2) Sia $m = 90$. Consideriamo il sistema $Ax = b$ nel senso dei minimi quadrati, dove

$$A = (a_{i,j})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,\frac{m}{3}}}, \quad a_{i,j} = \begin{cases} \sin(i+2j)+1, & i = j \\ \cos(2i+j-5), & i \neq j \end{cases},$$

$$b = \{b_i\}_{i=1,\ldots,m}^T, \quad b_i = \sum_{j=1}^{\frac{m}{3}} a_{i,j}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

- Riportare le istruzioni Matlab utilizzate per la costruzione di A e b.
- Determinare le dimensioni della matrice e stabilire se è o meno a rango massimo.
- Studiare l'esistenza e l'unicità della soluzione del sistema, il condizionamento del problema e determinare la stima dell'errore teorico a priori.
- Scegliere il metodo che conviene applicare e giustificare la scelta. Qual è il suo costo computazionale?
- È noto che in questo caso la soluzione è data da $\overline{x} = (1, 1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^{\frac{m}{4}}$. Calcolare quindi l'errore commesso e confrontare il risultato ottenuto con la stima a priori.

(3) Consideriamo il sistema lineare $Ax = b$ di ordine $n = 90$ con

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & & & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \ddots & 3 & n-1 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & (n-1)+3 & n \\ 2 & 3 & \cdots & \cdots & n-1 & n & n+3 \end{pmatrix}$$

$$b = \{b_i\}^T_{i=1,\ldots,n}, \quad b_i = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

- Calcolare la soluzione approssimata del sistema con la massima precisione possibile usando una opportuna procedura numerica. Riportare le prime 2 componenti del vettore soluzione con le cifre che si possono ritenere corrette.
- Motivare la scelta del metodo.
- Qual è il costo computazionale del metodo numerico utilizzato?
- Poichè è noto che la soluzione è $x = (1, 1, \ldots, 1)^T$, calcolare l'errore relativo. Quante sono le cifre significative corrette?
- Commentare i risultati ottenuti.

(4) Consideriamo il sistema lineare $Ax = b$ di ordine $n = 90$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & & 2 \\ 2 & 2 & 5 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 2 & \ddots & \ddots & 2 & 2 \\ 2 & & \ddots & 2 & 2n-3 & 2 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 2n-1 \end{pmatrix}$$

$$b = \{b_i\}^T_{i=1,\ldots,n}, \quad b_i = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

- Calcolare la soluzione approssimata del sistema con la massima precisione possibile usando una opportuna procedura numerica. Riportare le prime 2 componenti del vettore soluzione con le cifre che si possono ritenere corrette.
- Motivare la scelta del metodo.
- Qual è il costo computazionale del metodo numerico utilizzato?
- Poichè è noto che la soluzione è $x = (1, 1, \ldots, 1)^T$, calcolare l'errore relativo. Quante sono le cifre significative corrette?
- Commentare i risultati ottenuti.

Calcolo Scientifico - Modulo A

Esercitazione n. 10

(1) Scrivere una function Matlab che implementi il metodo di bisezione.
(2) Scrivere una function Matlab che implementi il metodo di Newton.
(3) Scrivere una function Matlab che implementi il metodo combinato bisezione-Newton.
(4) Data l'equazione

$$F(x) = \cos(x) - 4x.$$

- Individuare un intervallo che contenga lo zero della funzione.
- Approssimare lo zero con la precisione di macchina utilizzando il metodo di Bisezione. Riportare il valore approssimato dello zero e il numero di iterazioni effettuate dal metodo.
- Approssimare lo zero con la precisione di macchina utilizzando il metodo di Newton. Riportare il valore approssimato dello zero e il numero di iterazioni effettuate dal metodo.
- Approssimare lo zero con la precisione di macchina utilizzando il metodo combinato di bisezione-Newton. Riportare il valore approssimato dello zero e il numero di iterazioni effettuate dai metodi.

(5) Data l'equazione

$$F(x) = e^x + \frac{x}{10}.$$

- Individuare un intervallo che contenga lo zero della funzione.
- Approssimare lo zero con la precisione di macchina utilizzando il metodo di Bisezione. Riportare il valore approssimato dello zero e il numero di iterazioni effettuate dal metodo.
- Approssimare lo zero con la precisione di macchina utilizzando il metodo di Newton. Riportare il valore approssimato dello zero e il numero di iterazioni effettuate dal metodo.
- Approssimare lo zero con la precisione di macchina utilizzando il metodo combinato di bisezione-Newton. Riportare il valore approssimato dello zero e il numero di iterazioni effettuate dai metodi.

(6) Data l'equazione

$$F(x) = x + \log(x^3).$$

- Individuare un intervallo che contenga lo zero della funzione.
- Approssimare lo zero con la precisione di macchina utilizzando il metodo di Bisezione. Riportare il valore approssimato dello zero e il numero di iterazioni effettuate dal metodo.
- Approssimare lo zero con la precisione di macchina utilizzando il metodo di Newton. Riportare il valore approssimato dello zero e il numero di iterazioni effettuate dal metodo.
- Approssimare lo zero con la precisione di macchina utilizzando il metodo combinato di bisezione-Newton. Riportare il valore approssimato dello zero e il numero di iterazioni effettuate dai metodi.

(7) Supponiamo che una reazione chimica origini ad un certo istante t una concentrazione di un particolare ione data dalla legge:

$$c(t) = 7e^{-5t} + 3e^{-2t}.$$

Se all'istante iniziale la concentrazione iniziale è $c(0) = 10$, a quale istante $\bar{t}$ la concentrazione iniziale si sarà dimezzata, ossia

$$c(\bar{t}) = 5?$$

- Tenendo conto che il problema è equivalente a quello di determinare lo zero dell'equazione

  $$F(t) = 7e^{-5t} + 3e^{-2t} - 5 = 0,$$

  individuare un intervallo del semiasse positivo che contenga lo zero della funzione F.
- Approssimare lo zero con la precisione di macchina utilizzando il metodo combinato di bisezione-Newton. Riportare il valore approssimato dello zero e il numero di iterazioni effettuate dai metodi.

Esercizi per casa

(1) Calcolare $\sqrt{33}$ con la precisione di macchina utilizzando il metodo combinato di bisezione-Newton.

(2) Calcolare $1/43$ con la precisione di macchina utilizzando il metodo combinato di bisezione-Newton.

Calcolo Scientifico - Modulo A

Esercitazione n. 11

(1) Scrivere una function Matlab che implementi il metodo di bisezione per equazioni algebriche.
(2) Scrivere una function Matlab che implementi il metodo di Newton per equazioni algebriche.
(3) Scrivere una function Matlab che implementi il metodo combinato bisezione-Newton per equazioni algebriche.
(4) Scrivere una function Matlab che implementi l'algoritmo di Horner per il calcolo del valore di un polinomio e della sua derivata in un punto.
(5) Scrivere una function Matlab che calcoli gli indici di condizionamento delle radici semplici e multiple.
(6) Sia

$$P(x) = x^6 - x - 1.$$

- Approssimare le radici reali di P con la precisione di macchina utilizzando il metodo combinato di bisezione-Newton. Qual è il numero di iterazioni del metodo di bisezione? Qual è il numero di iterazioni del metodo di Newton?
- Studiare il condizionamento delle radici reali di P. Riportare il valore delle radici con le cifre che si possono ritenere corrette.

(7) Sia

$$P(x) = x^9 + 2x^8 - 3x^7 + x^6 + x^4 - 2x^2 + x - 1$$

- Approssimare le radici reali di P con la precisione di macchina utilizzando il metodo combinato di bisezione-Newton. Qual è il numero di iterazioni del metodo di bisezione? Qual è il numero di iterazioni del metodo di Newton?
- Studiare il condizionamento delle radici reali di P. Riportare il valore delle radici con le cifre che si possono ritenere corrette.

(8) Sia

$$P(x) = 2x^9 - 3x^8 + 4x^5 + \frac{1}{2}x^4 - x^3 + x - \frac{1}{2}$$

- Individuare l'intervallo che contiene tutte le radici reali.
- Quante sono le radici reali? Che molteplicità hanno? Trovare per ciascuna radice reale un intervallo che la contiene.
- Approssimare le radici reali di P con la precisione di macchina utilizzando il metodo combinato di bisezione-Newton. Qual

è il numero di iterazioni del metodo di bisezione? Qual è il numero di iterazioni del metodo di Newton?

- Studiare il condizionamento delle radici reali di P. Riportare il valore delle radici con le cifre che si possono ritenere corrette.

Calcolo Scientifico I

Esercitazione n. 12

(1) Sia

$$P(x) = x^7 - 3x^6 + 2.25x^5 - x^3 + 3.5x^2 - 3.75x + 1.125.$$

- Il polinomio P ha $x = \frac{3}{2}$ come radice doppia. Calcolarne il condizionamento.
- Approssimarla con la precisione di macchina utilizzando il metodo Newton. Qual è il numero di iterazioni?
- Approssimarla con la precisione di macchina utilizzando il metodo Newton opportunamente modificato. Qual è il numero di iterazioni?
- Approssimarla con la function roots del MatLab.

(2) Sia

$$P(x) = x^5 + 0.631x^4 + 0.676387x^3 - 0.325473867x^2 + 0.043526132999999995x - 0.001860867$$

- Individuare l'intervallo che contiene tutte le radici reali di P.
- Quante sono le radici reali? Che molteplicità hanno? Trovare per ciascuna radice reale un intervallo che la contiene.
- Approssimare le radici reali di P con la precisione di macchina utilizzando opportunamente i metodi studiati. Qual è il numero di iterazioni del metodo utilizzato?
- Studiare il condizionamento delle radici reali di P. Riportare il valore delle radici con le cifre che si possono ritenere corrette.

(3) Sia

$$P(x) = x^8 - 4.01x^7 + 4.02x^6 + x^3 - 3.01x^2 + 0.01x + 4.02.$$

- Individuare l'intervallo che contiene tutte le radici reali di P.
- Quante sono le radici reali? Che molteplicità hanno? Trovare per ciascuna radice reale un intervallo che la contiene.
- Approssimare le radici reali di P con la precisione di macchina utilizzando opportunamente i metodi studiati. Qual è il numero di iterazioni del metodo utilizzato?
- Studiare il condizionamento delle radici reali di P. Riportare il valore delle radici con le cifre che si possono ritenere corrette.

(4) Sia

$$P(x) = 2x^8 - 8.02x^7 + 8.04x^6 + x^3 - 3.01x^2 + 0.001x + 4.02$$

- Individuare l'intervallo che contiene tutte le radici reali.
- Quante sono le radici reali? Che molteplicità hanno? Trovare per ciascuna radice reale un intervallo che la contiene.
- Approssimare le radici reali di P con la precisione di macchina utilizzando opportunamente i metodi studiati. Qual è il numero di iterazioni del metodo utilizzato?
- Studiare il condizionamento delle radici reali di P. Riportare il valore delle radici con le cifre che si possono ritenere corrette.

(5) Sia

$$P(x) = x^{10} - 55x^9 + 1320x^8 - 18150x^7 + 157773x^6 - 902055x^5 + 3416930x^4 - $$
$$- 8409500x^3 + 12753576x^2 - 10628640x + 3628800.$$

- Individuare l'intervallo che contiene tutte le radici reali di P.
- Quante sono le radici reali? Che molteplicità hanno? Trovare per ciascuna radice reale un intervallo che la contiene.
- Approssimare le radici reali di P con la precisione di macchina utilizzando opportunamente i metodi studiati. Qual è il numero di iterazioni del metodo utilizzato?
- Studiare il condizionamento delle radici reali di P. Riportare il valore delle radici con le cifre che si possono ritenere corrette.

(6) Sia

$$P(x) = x^6 - 2x^5 - 4x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 4x - 4$$

- Individuare l'intervallo che contiene tutte le radici reali di P.
- Quante sono le radici reali? Che molteplicità hanno? Trovare per ciascuna radice reale un intervallo che la contiene.
- Approssimare le radici reali di P con la precisione di macchina utilizzando opportunamente i metodi studiati. Qual è il numero di iterazioni del metodo utilizzato?
- Studiare il condizionamento delle radici reali di P. Riportare il valore delle radici con le cifre che si possono ritenere corrette.