Università degli Studi della Basilicata

Dipartimento di Scienze di Base e Applicate - DISBA

Calcolo Scientifico

Esercitazioni

Studente:
Donato Martinelli
Matr. 69060

Docente:
Prof.ssa **Maria Carmela De Bonis**

Anno Accademico 2025/2026

Contents

1 Risoluzione di un Sistema Lineare Quadrato

1.1 Tracce

1. Scrivere una function Matlab che verifichi che una matrice è simmetrica.
2. Scrivere una function Matlab che verifichi che una matrice simmetrica è definita positiva usando il criterio di Sylvester.
3. Scrivere una function Matlab che verifichi che una matrice è a diagonale dominante per righe.
4. Si consideri la matrice
$$A = rand(10), \quad A = A * {}^t A.$$
   - Verificare se è simmetrica;
   - Verificare se è simmetrica e definita positiva;
5. Si consideri la matrice
$$A = rand(10) + 100 * diag(ones(1, 10)).$$
   Verificare se è a diagonale dominante per righe.
6. Scrivere una function Matlab che verifichi che una matrice è a diagonale dominante per colonne.
7. Si consideri la matrice
$$A(i,j) = \begin{cases} -1 & i > j \\ 0 & i < j, \\ 100 & i = j \end{cases} \qquad i, j \in \{1, \ldots, n\}$$
   con $n = 15$.
   - Verificare se è a diagonale dominante per colonne;
   - Verificare se è a diagonale dominante per righe.
8. Scrivere una function Matlab che implementi il metodo di sostituzione in avanti.
9. scrivere una function Matlab che implementi il metodo di sostituzione all'indietro.
10. scrivere una function Matlab che implementi opportunamente il metodo di sostituzione all'indietro per calcolare l'inversa di una matrice triangolare superiore
11. Si consideri il sistema lineare $Ax = b$ con
$$A = tril(rand(10)), \quad b = sum(A, 2).$$
    Risolvere il sistema con il metodo di sostituzione in avanti.
12. Si consideri il sistema lineare $Ax = b$ con
$$A = triu(rand(10)), \quad b = sum(A, 2).$$
    - Risolvere il sistema con il metodo di sostituzione all'indietro;
    - calcolare l'inversa di A.
13. Scrivere una function Matlab che risolvi un sistema diagonale.
14. Risolvere il sistema lineare $Ax = b$ con
$$A = diag(diag(rand(10))), \quad b = sum(A, 2).$$
15. Scrivere una function Matlab che implementi opportunamente il metodo di sostituzione in avanti per calcolare l'inversa di una matrice triangolare inferiore
16. Calcolare l'inversa della matrice
$$A = tril(rand(20)).$$

17. Scrivere una function Matlab che implementi il metodo di eliminazione di Gauss.

18. Si consideri il sistema lineare $Ax = b$ con

$$A = rand(100), \quad b = sum(A, 2).$$

Risolvere il sistema con il metodo di Gauss.

19. Si consideri il sistema di equazioni lineari $Ax = b$ di ordine $n = 15$, con

$$A(i,j) = \begin{cases} -1 & i > j \\ 0 & i < j, \\ 100 & i = j \end{cases} \qquad i,j \in \{1,\dots,n\}$$

e

$$b = [1, 1, \dots, 1]^T.$$

- Calcolare l'indice di condizionamento e il numero massimo di cifre significative corrette che ci si può aspettare nel calcolo della soluzione approssimata.
- Calcolare il vettore soluzione con il metodo di sostituzione in avanti e riportarne le prime due componenti con le cifre significative che si possono certamente ritenere corrette.
- Confrontare la soluzione ottenuta (vettore x) con la soluzione che si ottiene usando la function predefinita del Matlab (vettore y). Di quanto differiscono al massimo?

20. Si consideri il sistema di equazioni lineari $Ax = b$ di ordine $n = 10$, con

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 & 4 & 4 & \dots & 4 & 4 \\ 1 & \frac{1}{3} & 2 & 4 & \dots & & 4 \\ 2 & 1 & \frac{1}{4} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 2 & \ddots & \ddots & \ddots & 4 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 & 4 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 1 & \frac{1}{n} & 2 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 2 & 1 & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}$$

e

$$b = (b_i)_{i \in \{1,\dots,n\}}, \quad b(i) = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j}.$$

- Calcolare l'indice di condizionamento e il numero massimo di cifre significative corrette che ci si può aspettare nel calcolo della soluzione approssimata.
- Calcolare il vettore soluzione con il metodo di eliminazione di Gauss e riportarne le prime due componenti con le cifre significative che si possono certamente ritenere corrette.
- Confrontare la soluzione ottenuta (vettore x) con la soluzione che si ottiene usando la function predefinita del Matlab (vettore y). Di quanto differiscono al massimo?
- Confrontare la soluzione ottenuta (vettore x) con il vettore $t = [1, \dots, 1]^T$ che rappresenta la soluzione esatta del sistema. Di quanto differiscono al massimo?

21. Si consideri il sistema di equazioni lineari Ax=b di ordine n=100, con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 1 & 4 & \ddots & & 0 \\ 0 & 6 & 5 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 4 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 4 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 6 & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 6 & 2n-1 \end{pmatrix}$$

e

$$b = (b_i)_{i \in \{1,\dots,n\}}, \quad b(i) = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j}.$$

- Calcolare l'indice di condizionamento e il numero massimo di cifre significative corrette che ci si può aspettare nel calcolo della soluzione approssimata.
- Calcolare il vettore soluzione con il metodo di eliminazione di Gauss e riportare le prime due componenti del vettore soluzione con le cifre significative che si possono certamente ritenere corrette.
- Confrontare la soluzione ottenuta (vettore x) con il vettore $t = [1, \dots, 1]^T$ che rappresenta la soluzione esatta del sistema. Di quanto differiscono al massimo?

22. Scrivere una function Matlab che implementi il metodo di eliminazione di Gauss con la strategia del pivoting parziale.

23. Scrivere una function Matlab che prende in input una matrice A e restituisce in output le matrici L e U tali che $A = LU$.

24. Consideriamo il sistema lineare $Ax = b$ di ordine $n = 18$, dove

$$A_{i,j} = \cos\left((j-1)\frac{2i-1}{2n}\pi\right), \quad i, j \in \{1, \dots, n\},$$

e

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j}, \quad i \in \{1, \dots, n\},$$

la cui soluzione esatta è $x = [1, \dots, 1]^T$.

- Calcolare l'indice di condizionamento e il numero di cifre significative corrette che ci si può aspettare nel calcolo della soluzione approssimata.
- Calcolare la soluzione approssimata del sistema utilizzando il metodo di Gauss e calcolare l'errore relativo. Quante sono le cifre significative corrette?
- Calcolare la soluzione approssimata del sistema utilizzando il metodo di Gauss con pivoting parziale e calcolare l'errore relativo. Quante sono le cifre significative corrette?
- Qual è il metodo più stabile?

25. Consideriamo il sistema lineare $Ax = b$ di ordine $n = 50$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 6 \\ 2 & \frac{5}{2} & 2 & 2 & \ddots & & 2 \\ 2 & 2 & \frac{7}{3} & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \ddots & \ddots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 2+\frac{1}{n-1} & 2 \\ 6 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 2+\frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

e

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j}, \quad i \in \{1, \dots, n\},$$

la cui soluzione esatta è $x = [1, \dots, 1]^T$.

- Calcolare l'indice di condizionamento e il numero di cifre significative corrette che ci si può aspettare nel calcolo della soluzione approssimata.
- Calcolare la soluzione approssimata del sistema utilizzando il metodo di Gauss e calcolare l'errore relativo. Quante sono le cifre significative corrette?
- Calcolare la soluzione approssimata del sistema utilizzando il metodo di Gauss con pivoting parziale e calcolare l'errore relativo. Quante sono le cifre significative corrette?
- Qual è il metodo più stabile?

26. Consideriamo il problema di $n = 80$

$$AX = B, \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, X \in \mathbb{R}^{n\times 3}, B \in \mathbb{R}^{n\times 3},$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 9 & 0 & \frac{1}{3} & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & 13 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{3} & \ddots & 0 & \dots & 4(n-1)+1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \dots & 0 & 4n+1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & n-1 \\ 1 & 2 & n \end{pmatrix}.$$

(In questa la trascrizione è corretta ma confrontare meglio con pdf esercitazioni per conferma sulla struttura.)

- Calcolare l'indice di condizionamento e il numero di cifre significative corrette che ci si può aspettare nel calcolo della matrice soluzione X.
- Calcolare la soluzione approssimata Y utilizzando opportunamente la fattorizzazione LU della matrice A. Riportare le componenti della prima riga della matrice Y con le cifre che si possono ritenere corrette.
- Calcolare il residuo relativo in norma infinito.

27. Scrivere una function Matlab che implementi opportunamente il metodo di eliminazione di Gauss per risolvere un sistema a matrice tridiagonale.

28. Scrivere una function Matlab che implementi opportunamente il metodo di eliminazione di Gauss per risolvere un sistema a matrice di Hessemberg superiore.

29. Scrivere una function Matlab che prende in input una matrice A e restituisce in output le matrici L, U e P tali che $PA = LU$ e il numero s degli scambi effettuati.

30. Consideriamo il sistema lineare $Ax = b$ di ordine $n = 80$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 8 \\ 4 & \frac{7}{2} & 2 & 2 & \ddots & & 2 \\ 4 & 4 & \frac{10}{3} & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 4 & 4 & 4 & \ddots & \ddots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 & 2 \\ 4 & 4 & \dots & 4 & 4 & 3+\frac{1}{n-1} & 2 \\ 10 & 4 & 4 & \dots & 4 & 4 & 3+\frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

e

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j}, \quad i \in \{1, \dots, n\},$$

la cui soluzione esatta è $x = [1, \dots, 1]^T$.

- Calcolare l'indice di condizionamento e il numero di cifre significative corrette che ci si può aspettare nel calcolo della soluzione approssimata.
- Calcolare la soluzione approssimata del sistema utilizzando opportunamente il metodo di Gauss e calcolare l'errore relativo. Quante sono le cifre significative corrette?
- Calcolare il Determinante della matrice A.
- Calcolare l'inversa della matrice A.

31. Data la matrice di ordine $n = 40$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \frac{1}{10} & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \ddots & 0 & \dots & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix},$$

Calcolare l'indice di condizionamento e il numero di cifre significative corrette che ci si può aspettare nel calcolarne:

- il determinante;
- l'inversa.

32. Data la matrice di ordine $n = 40(?)$

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & \frac{1}{2} & 3 & \dots & 3 & 3 \\ 0 & 10 & 1 & \frac{1}{3} & \ddots & & 3 \\ 2 & 0 & 10 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 2 & 0 & \ddots & \ddots & \frac{1}{n-2} & 3 \\ 2 & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{2} & \ddots & & 2 & 0 & 10 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 2 & \dots & 2 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

e

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j}, \quad i \in \{1, \dots, n\},$$

la cui soluzione esatta è $x = [1, \dots, 1]^T$.

- Calcolare l'indice di condizionamento e il numero di cifre significative corrette che ci si può aspettare nel calcolo della soluzione approssimata.
- Calcolare la soluzione approssimata del sistema utilizzando opportunamente il metodo di Gauss e calcolare l'errore relativo. Quante sono le cifre significative corrette?
- Calcolare il Determinante della matrice A.
- Calcolare l'inversa della matrice A.

1.2 Soluzioni

2 Metodi Numerici per la Risoluzione di un Sistema Lineare Rettangolare nel Senso dei Minimi Quadrati

2.1 Tracce

2.2 Soluzioni

3 Metodi Numerici per la Risoluzione di una Equazione non Lineare

3.1 Tracce

1. Scrivere una function Matlab che implementi il metodo di bisezione.
2. Scrivere una function Matlab che implementi il metodo di Newton.
3. Scrivere una function Matlab che implementi il metodo combinato bisezione-Newton.
4. Data l'equazione
$$F(x) = \cos(x) - 4x.$$
   - Individuare un intervallo che contenga lo zero della funzione.
   - Approssimare lo zero con la precisione di macchina utilizzando il metodo di Bisezione. Riportare il valore approssimato dello zero e il numero di iterazioni effettuate dal metodo.
   - Approssimare lo zero con la precisione di macchina utilizzando il metodo di Newton. Riportare il valore approssimato dello zero e il numero di iterazioni effettuate dal metodo.
   - Approssimare lo zero con la precisione di macchina utilizzando il metodo combinato di bisezione-Newton. Riportare il valore approssimato dello zero e il numero di iterazioni effettuate dai metodi.
5. Data l'equazione
$$F(x) = e^x + \frac{x}{10}.$$
   - Individuare un intervallo che contenga lo zero della funzione.
   - Approssimare lo zero con la precisione di macchina utilizzando il metodo di Bisezione. Riportare il valore approssimato dello zero e il numero di iterazioni effettuate dal metodo.
   - Approssimare lo zero con la precisione di macchina utilizzando il metodo di Newton. Riportare il valore approssimato dello zero e il numero di iterazioni effettuate dal metodo.
   - Approssimare lo zero con la precisione di macchina utilizzando il metodo combinato di bisezione-Newton. Riportare il valore approssimato dello zero e il numero di iterazioni effettuate dai metodi.
6. Data l'equazione
$$F(x) = x + \log(x^3).$$
   - Individuare un intervallo che contenga lo zero della funzione.
   - Approssimare lo zero con la precisione di macchina utilizzando il metodo di Bisezione. Riportare il valore approssimato dello zero e il numero di iterazioni effettuate dal metodo.
   - Approssimare lo zero con la precisione di macchina utilizzando il metodo di Newton. Riportare il valore approssimato dello zero e il numero di iterazioni effettuate dal metodo.
   - Approssimare lo zero con la precisione di macchina utilizzando il metodo combinato di bisezione-Newton. Riportare il valore approssimato dello zero e il numero di iterazioni effettuate dai metodi.
7. Supponiamo che una reazione chimica origini ad un certo istante t una concentrazione di un particolare ione data dalla legge:
$$c(t) = 7e^{-5t} + 3e^{-2t}.$$
Se all'istante iniziale la concentrazione iniziale è $c(0) = 10$, a quale istante $\bar{t}$ la concentrazione iniziale si sarà dimezzata, ossia
$$c(\bar{t}) = 5?$$
   - Tenendo conto che il problema è equivalente a quello di determinare lo zero dell'equazione
$$F(t) = 7e^{-5t} + 3e^{-2t} - 5 = 0,$$
individuare un intervallo del semiasse positivo che contenga lo zero della funzione F.
   - Approssimare lo zero con la precisione di macchina utilizzando il metodo combinato di bisezione-Newton. Riportare il valore approssimato dello zero e il numero di iterazioni effettuate dai metodi.
8. Calcolare $\sqrt{33}$ con la precisione di macchina utilizzando il metodo combinato di bisezione-Newton.
9. Calcolare $1/43$ con la precisione di macchina utilizzando il metodo combinato di bisezione-Newton.

10. Scrivere una function Matlab che implementi il metodo di bisezione per equazioni algebriche.
11. Scrivere una function Matlab che implementi il metodo di Newton per equazioni algebriche.
12. Scrivere una function Matlab che implementi il metodo combinato bisezione-Newton per equazioni algebriche.
13. Scrivere una function Matlab che implementi l'algoritmo di Horner per il calcolo del valore di un polinomio e della sua derivata in un punto.
14. Scrivere una function Matlab che calcoli gli indici di condizionamento delle radici semplici e multiple.
15. Sia
$$P(x) = x^6 - x - 1.$$
    - Approssimare le radici reali di P con la precisione di macchina utilizzando il metodo combinato di bisezione-Newton. Qual è il numero di iterazioni del metodo di bisezione? Qual è il numero di iterazioni del metodo di Newton?
    - Studiare il condizionamento delle radici reali di P. Riportare il valore delle radici con le cifre che si possono ritenere corrette.
16. Sia
$$P(x) = x^9 + 2x^8 - 3x^7 + x^6 + x^4 - 2x^2 + x - 1$$
    - Approssimare le radici reali di P con la precisione di macchina utilizzando il metodo combinato di bisezione-Newton. Qual è il numero di iterazioni del metodo di bisezione? Qual è il numero di iterazioni del metodo di Newton?
    - Studiare il condizionamento delle radici reali di P. Riportare il valore delle radici con le cifre che si possono ritenere corrette.
17. Sia
$$P(x) = 2x^9 - 3x^8 + 4x^5 + \frac{1}{2}x^4 - x^3 + x - \frac{1}{2}$$
    - Individuare l'intervallo che contiene tutte le radici reali.
    - Quante sono le radici reali? Che molteplicità hanno? Trovare per ciasuna radice reale un intervallo che la contiene.
    - Approssimare le radici reali di P con la precisione di macchina utilizzando il metodo combinato di bisezione-Newton. Qual è il numero di iterazioni del metodo di bisezione? Qual è il numero di iterazioni del metodo di Newton?
    - Studiare il condizionamento delle radici reali di P. Riportare il valore delle radici con le cifre che si possono ritenere corrette.
18. Sia
$$P(x) = x^7 - 3x^6 + 2.25x^5 - x^3 + 3.5x^2 - 3.75x + 1.125.$$
    - Il polinomio P ha $x = \frac{3}{2}$ come radice doppia. Calcolarne il condizionamento.
    - Approssimarla con la precisione di macchina utilizzando il metodo Newton. Qual è il numero di iterazioni?
    - Approssimarla con la precisione di macchina utilizzando il metodo Newton opportunamente modificato. Qual è il numero di iterazioni?
    - Approssimarla con la function roots del MatLab.
19. Sia
$$P(x) = x^5 + 0.631x^4 + 0.676387x^3 - 0.325473867x^2 + 0.04352613299999995x - 0.001860867$$
    - Individuare l'intervallo che contiene tutte le radici reali di P.
    - Quante sono le radici reali? Che molteplicità hanno? Trovare per ciasuna radice reale un intervallo che la contiene.
    - Approssimare le radici reali di P con la precisione di macchina utilizzando opportunamente i metodi studiati. Qual è il numero di iterazioni del metodo utilizzato?

- Studiare il condizionamento delle radici reali di P. Riportare il valore delle radici con le cifre che si possono ritenere corrette.

20. Sia
$$P(x) = x^8 - 4.01x^7 + 4.02x^6 + x^3 - 3.01x^2 + 0.01x + 4.02.$$

- Individuare l'intervallo che contiene tutte le radici reali di P.
- Quante sono le radici reali? Che molteplicità hanno? Trovare per ciasuna radice reale un intervallo che la contiene.
- Approssimare le radici reali di P con la precisione di macchina utilizzando opportunamente i metodi studiati. Qual è il numero di iterazioni del metodo utilizzato?
- Studiare il condizionamento delle radici reali di P. Riportare il valore delle radici con le cifre che si possono ritenere corrette.

21. Sia
$$P(x) = 2x^8 - 8.02x^7 + 8.04x^6 + x^3 - 3.01x^2 + 0.001x + 4.02$$

- Individuare l'intervallo che contiene tutte le radici reali.
- Quante sono le radici reali? Che molteplicità hanno? Trovare per ciasuna radice reale un intervallo che la contiene.
- Approssimare le radici reali di P con la precisione di macchina utilizzando opportunamente i metodi studiati. Qual è il numero di iterazioni del metodo utilizzato?
- Studiare il condizionamento delle radici reali di P. Riportare il valore delle radici con le cifre che si possono ritenere corrette.

22. Sia
$$P(x) = x^{10} - 55x^9 + 1320x^8 - 18150x^7 + 157773x^6 - 902055x^5 + 3416930x^4 - 8409500x^3 + 12753576x^2 - 10628640x + 3628800.$$

- Individuare l'intervallo che contiene tutte le radici reali di P.
- Quante sono le radici reali? Che molteplicità hanno? Trovare per ciasuna radice reale un intervallo che la contiene.
- Approssimare le radici reali di P con la precisione di macchina utilizzando opportunamente i metodi studiati. Qual è il numero di iterazioni del metodo utilizzato?
- Studiare il condizionamento delle radici reali di P. Riportare il valore delle radici con le cifre che si possono ritenere corrette.

23. Sia
$$P(x) = x^6 - 2x^5 - 4x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 4x - 4$$

- Individuare l'intervallo che contiene tutte le radici reali di P.
- Quante sono le radici reali? Che molteplicità hanno? Trovare per ciasuna radice reale un intervallo che la contiene.
- Approssimare le radici reali di P con la precisione di macchina utilizzando opportunamente i metodi studiati. Qual è il numero di iterazioni del metodo utilizzato?
- Studiare il condizionamento delle radici reali di P. Riportare il valore delle radici con le cifre che si possono ritenere corrette.

3.2 Soluzioni