Università degli Studi della Basilicata

Appunti rielaborati delle lezioni di Analisi I 2023/2024

Donato Martinelli

October 9, 2025

Contents

Part I
Insiemi e Numeri

1 I Numeri Reali

1.1 Il sistema dei numeri reali

Gli assiomi dei numeri reali si possono classificare in tre gruppi:

(a) **Assiomi di campo**, riguardanti le operazioni che si possono eseguire tra numeri reali;

(b) **Assiomi di ordine**, relative alla possibilità di confrontare tra loro i numeri reali per identificarne il "maggiore";

(c) **Assioma di completezza**.

A partire da questi assiomi dedurremo tutte le altre proprietà dei numeri reali.

Assiomi di campo Nell'insieme $\mathbb{R}$ sono definite due operazioni, l'addizione e la moltiplicazione definite rispettivamente al seguente modo:

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad (a, b) \mapsto a + b \qquad \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad (a, b) \mapsto a \cdot b = ab.$$

tali che valgono i seguenti assiomi:

Assioma 1 (Associatività)

$$\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}, \quad (a + b) + c = a + (b + c) \quad \wedge \quad (ab)c = a(bc);$$

Assioma 2 (Commutatività)

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R}, \quad a + b = b + a \quad \wedge \quad ab = ba;$$

Assioma 3 (Distributività)

$$\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a(b + c) = ab + ac;$$

Assioma 4 (Esistenza degli elementi neutri)

$$\exists\, z, v \in \mathbb{R}\,(z \neq v) \,:\, \forall\, a \in \mathbb{R}, \quad a + z = a \quad \wedge \quad a \cdot v = a$$

Assioma 5 (Esistenza dell'opposto)

$$\forall\, a \in \mathbb{R},\ \exists\, \bar{a} \in \mathbb{R} \,:\, a + \bar{a} = 0$$

Assioma 6 (Esistenza dell'inverso)

$$\forall\, a \in \mathbb{R} - \{0\},\ \exists\, \tilde{a} \in \mathbb{R} \,:\, a \cdot \tilde{a} = 1$$

con

$$\tilde{a} = a^{-1} = \frac{1}{a}.$$

Unicità dell'elemento neutro per l'addizione

Proposizione 1.1. *L'elemento neutro per l'addizione z di cui all'assioma 4, è unico e lo chiamiamo 0.*

Proof. Siano $z', z'' \in \mathbb{R}$ tali che

1. $\forall\, a \in \mathbb{R}, \quad a + z' = a$
2. $\forall\, a \in \mathbb{R}, \quad a + z'' = a$

Da (1), ponendo $a = z''$, abbiamo che

$$z'' + z' = z''$$

mentre da (2), ponendo $a = z'$ abbiamo che

$$z' + z'' = z'.$$

Per la commutatività dell'addizione, abbiamo

$$z' = z' + z'' = z'' + z' = z''$$

da cui ricaviamo

$$z' = z''.$$

□

Unicità dell'elemento opposto per l'addizione

Proposizione 1.2. *Per ogni $a \in \mathbb{R}$, l'elemento opposto $\bar{a}$ di cui all'assioma 5, è unico e lo chiamiamo $-a$.*

Proof. Siano $\bar{a}, \bar{\bar{a}} \in \mathbb{R}$ tali che

$$\forall\, a \in \mathbb{R}, \quad a + \bar{a} = 0 \ \wedge \ a + \bar{\bar{a}} = 0$$

allora abbiamo

$$\bar{a} = \bar{a} + 0 = \bar{a} + (a + \bar{\bar{a}}) = (\bar{a} + a) + \bar{\bar{a}} = 0 + \bar{\bar{a}} = \bar{\bar{a}}.$$

□

Legge di annullamento del prodotto

Proposizione 1.3.

$$\forall\, a \in \mathbb{R}, \quad a \cdot 0 = 0.$$

Proof.

$$a \cdot 0 = a \cdot 0 + (a \cdot 0 + (-a \cdot 0)) = (a \cdot 0 + a \cdot 0) + (-a \cdot 0) = a \cdot (0 + 0) + (-a \cdot 0) = a \cdot 0 + (-a \cdot 0) = 0.$$

□

Assiomi di ordine Su $\mathbb{R}$ si introduce una relazione d'ordine a partire dal concetto non definito di *positività*. Esiste $\mathbb{R}^+ \subseteq \mathbb{R}$, detto insieme dei numeri reali *positivi* che soddisfa i due assiomi seguenti:

Assioma 7

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R}^+, \quad a + b,\ ab \in \mathbb{R}^+;$$

Assioma 8

$$\forall\, a \in \mathbb{R}, \quad a = 0 \ \vee \ a \in \mathbb{R}^+ \ \vee \ -a \in \mathbb{R}^+;$$

Definizione 1.1. Definiamo una relazione $<$ in $\mathbb{R}$ ponendo

$$x < y \ \vee \ y > x \iff \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \, : \, x + \varepsilon = y;$$
$$x \leq y \ \vee \ y \geq x \iff x < y \ \vee \ x = y.$$

Possiamo dunque definire i seguenti insiemi

$$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \, : \, x > 0\} \quad \mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} \, : \, x < 0\}.$$

Teorema 1.4. *La relazione $\leq$ è una relazione d'ordine totale su $\mathbb{R}$. In altri termini essa soddisfa le seguenti proprietà:*

a riflessività:

$$\forall \, a \in \mathbb{R}, \quad a \leq a,$$

b antisimmetria:

$$\forall \, a, b \in \mathbb{R}, \quad a \leq b \ \wedge \ b \leq a \implies a = b,$$

c transitività:

$$\forall \, a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \leq b \ \wedge \ b \leq c \implies a \leq c,$$

d totalità:

$$\forall \, a, b \in \mathbb{R}, \quad a \leq b \ \vee \ b \leq a.$$

La relazione $<$ soddisfa le seguenti proprietà di compatibilità con la somma e il prodotto:

e monotonia rispetto alla somma:

$$\forall \, a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a < b \implies a + c < b + c,$$

f monotonia rispetto al prodotto

$$\forall \, a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a < b \ \wedge \ c \in \mathbb{R}^+ \implies ca < cb.$$

Proposizione 1.5. *Se $a \cdot b = 0$, almeno una tra a e b è 0.*

Proposizione 1.6.

1. $-b \cdot a = -(b \cdot a)$*;*
2. $-1 \cdot a = -a$ *;*
3. *L'opposto dell'opposto di a è a, cioè*
$$-(-a) = a;$$
4. *Il reciproco del reciproco di a è a, cioè*
$$\frac{1}{\frac{1}{a}} = a;$$
5. *Se un numero è positivo, il suo opposto è negativo ;*
6. $$\forall \, a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad a < c \quad \wedge \quad b < d \quad \implies \quad a + b < c + d.$$

Proof. 6) Da $a < c$ e $b < d$ ricaviamo

$$a < c \quad \implies \quad a + b < c + b$$

e

$$b < d \quad \Longrightarrow \quad c + b < c + d,$$

da cui

$$a + b < c + b < c + d \quad \Longrightarrow \quad a + b < c + d.$$

□

L'assioma di continuità Gli assiomi **1-8** non sono prerogativa esclusiva di $\mathbb{R}$, dato che sono ugualmente vere nell'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$. Ciò che davvero caratterizza $\mathbb{R}$ è la **proprietà di continuità**, che si caratterizza con il corrispondente **assioma di continuità**, detto anche **assioma di completezza**. Prima di enunciarlo in una delle sue numerose formulazioni equivalenti, conviene dare alcune definizioni.

Maggioranti e minoranti, massimo e minimo

Definizione 1.2. Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{R}$. Diciamo che m

- è **maggiorante** per A se
$$\forall x \in A,\ x \leq m$$
- è **minorante** per A se
$$\forall x \in A,\ x \geq m$$
- è **massimo** per A se
  1. m è maggiorante per A
  2. $m \in A$
- è **minimo** per A se
  1. m è minorante per A
  2. $m \in A$

Unicità del massimo

Teorema 1.7. *Il massimo di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ (se esiste), è unico.*

Proof. Supponiamo che m' e $m'' \in \mathbb{R}$ verifichino entrambi la definizione di massimo per A. Per la 1) applicata a m' e la 2) applicata a m'' si ha $m'' \leq m'$ e $m' \leq m''$, da cui segue $m' = m''$. □

Nota 1. Sia $A = \{\mu\}$ un singoletto di $\mathbb{R}$ e m un suo maggiorante, allora esistono infiniti maggioranti. Ad esempio possiamo prendere $m + 1$ e più in generale $\forall\, n \in \mathbb{N},\ m + n$. Inoltre, se A è limitato superiormente e m è un maggiorante di A, allora ogni numero reale $x \geq m$ è ancora un maggiorante di A; analogamente, se A è limitato inferiormente e μ è un minorante di A, allora ogni numero reale $x \leq \mu$ è ancora un minorante di A.

Proposizione 1.8. *Sia $m \in \mathbb{R}$. Allora*

- *m è maggiorante per $\emptyset$, e*
- *m non è maggiorante per $A \subseteq \mathbb{R} \iff \exists\, x \in A : x > m$.*

Proposizione 1.9. *L'insieme $\mathbb{R}$ non ha maggiorante né minorante.*

Proof. Dimostriamo per assurdo che $\mathbb{R}$ ha un maggiorante. Se $\mathbb{R}$ ha un maggiorante, allora

$$\exists\, m \in \mathbb{R} : \ \forall\, x \in \mathbb{R}, \ x \leq m.$$

Sia $x = m + 1$, allora

$$m + 1 \leq m \implies 1 \leq 0.$$

Il che è una contraddizione, dunque $\mathbb{R}$ non ha maggiorante. Allo stesso modo dimostriamo che non esiste un minorante.

$$\exists\, m \in \mathbb{R} : \ \forall\, x \in \mathbb{R}, \ x \geq m$$

Sia $x = m - 1$, allora

$$m - 1 \geq m \implies -1 \geq 0$$

Il che è una contraddizione, dunque $\mathbb{R}$ non ha minorante. □

1.2 Complesso dei maggioranti e dei minoranti

Definizione 1.3. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, A limitato.

- Il massimo di A si indica con $\max A$.
- Il minimo di A si indica con $\min A$.

Inoltre,

- Il **complesso dei maggioranti** di A è l'insieme di tutti i numeri reali maggiori o uguali a tutti gli elementi di A. Si indica con $A^{\leq}$.

  $$A^{\leq} = \{m \in \mathbb{R} \,|\, \forall\, x \in A, \, x \leq m\}$$

  Se A ha massimo, possiamo anche intendere $A^{\leq}$ come l'insieme di tutti i numeri reali maggiori o uguali a $\max A$,

  $$A^{\leq} = \{m \in \mathbb{R} \,|\, m \geq \max A\} = [\max A; +\infty[$$

- Il **complesso dei minoranti** di A è l'insieme di tutti i numeri reali minori o uguali a tutti gli elementi di A. Si indica con $A^{\geq}$.

  $$A^{\geq} = \{m \in \mathbb{R} \,|\, \forall\, x \in A, \, x \geq m\}$$

  Se A ha minimo, possiamo anche intendere $A^{\geq}$ come l'insieme di tutti i numeri reali minori o uguali a $\min A$,

  $$A^{\geq} = \{m \in \mathbb{R} \,|\, m \leq \min A\} =]-\infty; \min A]$$

Estremo superiore ed estremo inferiore

Definizione 1.4.

- Chiamo **estremo superiore** per A il numero reale

  $$\min A^{\leq}$$

  se esiste è unico e si indica con

  $$\sup A$$

- Chiamo **estremo inferiore** per A il numero reale

  $$\max A^{\geq}$$

se esiste è unico e si indica con
$$\inf A$$

Proposizione 1.10. *Sia* $A \subseteq \mathbb{R}$

1. *se esiste* $m = \max A$*, allora* $m = \sup A$
2. *se esiste* $s = \min A$*, allora* $s = \inf A$

Caratterizzazione dell'estremo superiore

Teorema 1.11. *Siano* $A \subseteq \mathbb{R}$ *e* $m \in \mathbb{R}$*. È equivalente affermare che:*

(a) $m = \sup A$

(b) valgono le seguenti due proprietà contemporaneamente

  (a) $\forall x \in A,\, x \leq m$;
  (b) $\forall \varepsilon > 0,\, \exists x \in A : x > m - \varepsilon$.

Proof.

$a \implies b$ Sia $m = \sup A$, abbiamo che $m = \min A^{\leq} \implies m \in A^{\leq}$ dunque m è maggiorante per A (a). Sia $\varepsilon > 0$, abbiamo che
$$m - \varepsilon < m \implies m - \varepsilon \notin A^{\leq}$$
poichè minore del più piccolo dei maggioranti, perciò
$$\exists x \in A : x > m - \varepsilon.$$

$b \implies a$ $\forall x \in A,\, x \leq m \implies m \in A^{\leq}$.
Sia $t \in A^{\leq} : t < m$, allora
$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R} : t + \varepsilon = m.$$
Scriviamo $m - \varepsilon = t$.
Essendo t maggiorante, scriviamo
$$\forall x \in A,\, x \leq t$$
cioè
$$\forall x \in A,\, x \leq m - \varepsilon$$
che è in contrasto con la seconda ipotesi, dunque otterremo $m = \min A^{\leq}$, quindi $m = \sup A$.

□

Insiemi limitati e illimitati inferiormente e superiormente

Definizione 1.5. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, diciamo che A è:

- **Limitato superiormente** se $A^{\leq} \neq \emptyset$;
- **Limitato inferiormente** se $A^{\geq} \neq \emptyset$;
- **Illimitato superiormente** se $A^{\leq} = \emptyset$;
- **Illimitato inferiormente** se $A^{\geq} = \emptyset$;
- **Limitato** se A è limitato sia superiormente che inferiormente;
- **Illimitato** se A è illimitato sia superiormente che inferiormente.

Insiemi separati

Definizione 1.6. Due sottoinsiemi non vuoti $A, B \subset \mathbb{R}$ si dicono **separati** se

$$\forall\, a \in A,\ \forall\, b \in B, \quad a \leq b.$$

Osserviamo inoltre che:

- se A, B sono insiemi separati, allora ogni elemento $b \in B$ è un maggiorante di A e ogni elemento $a \in A$ è un minorante di B;
- se A è non vuoto e limitato superiormente, e se M è l'insieme dei maggioranti di A, allora A e M sono separati;
- similmente, se A è non vuoto e limitato inferiormente, e se N è l'insieme dei minoranti di A, allora N ed A sono separati.

L'assioma di completezza di $\mathbb{R}$ asserisce la possibilità di interporre un numero reale fra gli elementi di qualunque coppia di insiemi separati: in sostanza, esso ci dice che i numeri reali sono in quantità sufficiente a riempire tutti i "buchi" fra coppie di insiemi separati. L'enunciato preciso è il seguente:

Assioma 9 (Completezza) Per ogni coppia A, B di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ non vuoti e separati,

$$\exists\, \xi \in \mathbb{R} \, : \, \forall\, a \in A,\ \forall\, b \in B, \quad a \leq \xi \leq b.$$

Si osservi che in generale l'elemento separatore fra due insiemi separati A e B non è unico: se $A = \{0\}$ e $B = \{1\}$, sono elementi separatori fra A e B tutti i punti dell'intervallo $[0, 1]$. Però se A è un insieme non vuoto limitato superiormente e scegliamo come B l'insieme dei maggioranti di A, allora vi è un unico elemento separatore fra A e B. Infatti ogni elemento separatore ξ deve soddisfare la relazione

$$\forall\, a \in A,\ \forall\, b \in B, \quad a \leq \xi \leq b;$$

in particolare, la prima disuguaglianza dice che ξ è maggiorante per A, ossia $\xi \in B$, e la seconda ci dice allora che $\xi = \min B$. Poichè il minimo di B è unico, ne segue l'unicità dell'elemento separatore. In modo analogo, se $B \neq \emptyset$ limitato inferiormente e prendiamo come A l'insieme dei minoranti di B, allora vi è un unico elemento separatore fra A e B: il massimo dei minoranti di B.

Principio dell'estremo superiore

Teorema 1.12. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ con $A \neq \emptyset$. Condizione necessaria e sufficiente affinchè esista $s \in \mathbb{R}$ con $s = \sup(A)$ è che*

$$A^{\leq} \neq \emptyset.$$

Proof. Dato $A \neq \emptyset$, sia $B = A^{\leq}$. Abbiamo che

$$\forall\, a \in A, \forall\, b \in B,\ a \leq b,$$

Dunque A e B sono separati, quindi per l'assioma di continuità esiste $s \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall\, a \in A, \forall\, b \in B,\ a \leq s \leq b$$

quindi s è estremo superiore. □

Nota 2. Ogni $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ e limitato superiormente ha un estremo superiore. Allo stesso modo, ogni $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ e limitato inferiormente ha un estremo inferiore.

1.3 I reali estesi

Reali estesi

Definizione 1.7. Con insieme dei **reali estesi** identifichiamo l'insieme

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

Sia $a \in \mathbb{R}$. Allora abbiamo

1. $$-\infty < a < +\infty$$

2. $$-\infty + a = -\infty - \infty = -\infty \quad \wedge \quad +\infty - a = +\infty + \infty = +\infty$$

3. $$\forall\, a > 0, \quad a \cdot (+\infty) = +\infty \quad \wedge \quad a \cdot (-\infty) = -\infty$$

4. $$\forall\, a < 0, \quad a \cdot (+\infty) = -\infty \quad \wedge \quad a \cdot (-\infty) = +\infty$$

5. $$\frac{a}{+\infty} = \frac{a}{-\infty} = 0$$

1.4 Operazioni tra insiemi

Insieme somma di due insiemi

Definizione 1.8. Siano A,B due insiemi. Definiamo **somma di** A **e** B, e scriviamo $A + B$, l'insieme

$$A + B = \{\, a + b \,|\, a \in A \,\wedge\, b \in B\}.$$

Nota 3. Se $A = B = \emptyset$, allora $A + B = \emptyset$.

Insieme prodotto di due insiemi

Definizione 1.9. Siano A,B due insiemi. Definiamo **prodotto di** A **e** B, e scriviamo $A \cdot B$, l'insieme

$$A \cdot B = \{\, a \cdot b \,|\, a \in A \,\wedge\, b \in B\}.$$

Nota 4. Se $A = \emptyset \,\vee\, B = \emptyset$, allora $A \cdot B = \emptyset$. Inoltre, abbiamo che:

- $a \cdot B = \{a\} \cdot B = \{a \cdot b \,|\, b \in B\}$ es. $0 \cdot B = 0$
- $-B = -1 \cdot B$ insieme degli opposti degli elementi di B
- se $0 \notin A$ possiamo definire $A^{-1} = \{a^{-1} \,|\, a \in A\}$

1.5 Operazioni con estremi superiori e inferiori

Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$, non vuoti. Si hanno i seguenti teoremi:

Teorema 1.13.
$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$$

Proof. Siano
$$s = \sup(A),\ t = \sup(B),\ u = \max\{s, t\}.$$
Sia A è illimitato superiormente e sia $m \in \mathbb{R}$ maggiorante di $A \cup B$, allora
$$\forall\, y \in A \cup B, \quad y \le m.$$
In particolare
$$\forall\, y \in A, \quad y \le m,$$
che è impossibile perchè A non ha maggioranti. Analogamente si tratta il caso in cui B è illimitato superiormente. Rimane il caso in cui A e B sono limitati superiormente, ciò implica
$$s, t \in \mathbb{R} \implies u \in \mathbb{R},$$
da cui segue che
$$\left.\begin{array}{l} \forall\, a \in A,\ a \le s \\ \forall\, b \in B,\ b \le t \end{array}\right\} \implies a \le u \ \wedge\ b \le u.$$
Quindi
$$\forall\, y \in A \cup B, \quad y \le u.$$
Sia ora $\varepsilon > 0$ e consideriamo $u - \varepsilon$, allora abbiamo che:

- $u = s \implies \exists\, a \in A:\ a > s - \varepsilon;$
- $u = t \implies \exists\, b \in B:\ b > t - \varepsilon.$

In ogni caso
$$\exists\, y \in A \cup B\ :\ y > u - \varepsilon.$$
□

Teorema 1.14.
$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$$

Proof. Fissiamo $\alpha \in A$ e $\beta \in B$. Sia $m \in (A+B)^{\le}$, allora
$$\forall\, a + b \in A + B, \quad a + b \le m,$$
in particolare
$$\alpha + \beta \le m,$$
da cui ricaviamo
$$m - \alpha \in B^{\le} \quad \text{e} \quad m - \beta \in A^{\le}.$$
Siano infatti $a \in A$ e $b \in B$:

- poichè $\alpha + b \in (A + B)$, abbiamo che $\alpha + b \le m$ il che implica $b \le m - \alpha$, cioè $m - \alpha \in B^{\le}$;
- poichè $a + \beta \in (A + B)$, abbiamo che $a + \beta \le m$ il che implica $a \le m - \beta$, cioè $m - \beta \in A^{\le}$.

Pertanto se almeno una tra A e B è illimitato superiormente anche $A + B$ è illimitato superiormente quindi vale l'uguaglianza. Siano ora A e B limitati superiormente, abbiamo che
$$\sup A = s \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \sup B = t \in \mathbb{R},$$
ciò comporta che
$$\forall\, a \in A,\ a \le s \quad \wedge \quad \forall\, b \in B,\ b \le t$$
da cui, per la (1.6.6), ricaviamo
$$a + b \le s + t,$$

perciò

$$\sup(A+B) = M \leq s+t.$$

Per quanto già visto,

$$\forall\, \alpha \in A, \quad M-\alpha \in B^{\leq},$$

quindi $M-\alpha \geq t$, da cui $\alpha \leq M-t$. Per arbitrarietà di α, concludiamo

$$\sup(A) = s \leq M-t,$$

cioè $M \geq s+t$ dunque $M = s+t$. □

Teorema 1.15. *Per ogni $a \in A$ e per ogni $b \in B$ con a, b positivi, abbiamo*

$$\sup(A \cdot B) = \sup(A) \cdot \sup(B).$$

Teorema 1.16. *Sia $c > 0$, allora*

$$\sup(c \cdot A) = c \cdot \sup(A).$$

Proof. Sia $m \in \mathbb{R}$, vediamo che

$$m \in A^{\leq} \quad \iff \quad c \cdot m \in (c \cdot A)^{\leq}.$$

Infatti se

$$\forall\, a \in A, \quad a \leq m,$$

abbiamo anche

$$c \cdot a \leq c \cdot m,$$

quindi

$$c \cdot m \in (c \cdot A)^{\leq}.$$

Viceversa se fosse $c \cdot m \in (c \cdot A)^{\leq}$ avremo che

$$\forall\, c \cdot a \in (c \cdot A), \quad c \cdot a \leq c \cdot m.$$

e quindi moltiplicando per $c^{-1} > 0$ si avrà $a \leq m$, quindi $m \in A^{\leq}$. Se dunque $\sup(A) = +\infty$, anche

$$\sup(c \cdot A) = c \cdot (+\infty) = +\infty.$$

Se invece $\sup(A) = s$, allora

$$S = \sup(c \cdot A) \leq c \cdot s.$$

Ora bisogna dimostrare che

$$c^{-1} \cdot S \in A^{\leq},$$

ma questo segue dal fatto che

$$c(c^{-1} \cdot S) = S \in (c \cdot A)^{\leq}$$

se

$$S \in (c \cdot A)^{\leq}.$$

In conclusione $s \leq c^{-1} \cdot S$, cioè $c \cdot s \leq S$. Unendo le condizioni precedenti, si ha

$$S = c \cdot s.$$

□

Teorema 1.17.
$$\sup(-A) = -\inf(A)$$

Proof. Sia $m \in \mathbb{R}$. Supponiamo $m \in (-A)^{\leq}$, che comporta
$$\forall -a \in -A, \quad -a \leq m.$$
Ciò equivale a dire che
$$\forall\, a \in A, \quad a \geq -m$$
cioè che $-m \in A^{\geq}$. Infatti
$$\forall\, a \in A, \quad a \leq m \iff -a \geq -m.$$
Se dunque
$$\sup(-A) = s \in \mathbb{R},$$
allora
$$-s \in A^{\geq},$$
cioè
$$\inf(A) = S \geq -s,$$
ma $-(-S) \in A^{\geq}$ implica $-S \in (-A^{\leq})$, quindi $-S \geq s$, cioè $S \leq -s$. Si può capire da questo ragionamento che se $\inf A > 0$, allora
$$\sup A^{-1} = \frac{1}{\inf(A)}.$$
□

Teorema 1.18. *Sia $a > 0$, allora*
$$\forall\, a \in A, \quad inf(A^{-1}) = \frac{1}{\sup(A)}, \quad \inf(A) > 0 \implies \sup A^{-1} = \frac{1}{\inf A}$$

2 I Numeri Naturali

2.1 L'insieme dei numeri naturali

Insieme induttivo

Definizione 2.1. Un'insieme $I \subseteq \mathbb{R}$ si dice **induttivo** se:

1. $1 \in I$;
2. $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad x \in I \implies x + 1 \in I$

La collezione degli insiemi induttivi è indicata con $\mathcal{J}$.

Insieme dei numeri naturali

Definizione 2.2. Chiameremo **insieme dei numeri naturali** e lo indicheremo con $\mathbb{N}$, l'intersezione di tutti gli insiemi induttivi. In simboli:

$$\mathbb{N} = \bigcap_{I \in \mathcal{J}} I = \{\, x \in \mathbb{R} \,|\, \forall\, I \in \mathcal{J},\, x \in I \,\}.$$

Ponendo $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, notiamo che $\mathbb{N}$ soddisfa i postulati di Peano per i numeri naturali.

Assiomi di Peano

Peano definisce i numeri naturali come un sistema costituito da un insieme $\mathbb{N}$ in cui è definita l'operazione di "successivo" e da un elemento 1, verificante i seguenti assiomi:

1. 1 è un numero.
2. il successivo di un numero è un numero,
3. 1 non è successivo di nessun numero,
4. numeri diversi hanno successivi diversi,
5. Se $A \subseteq \mathbb{N}$ contiene 1 e il successivo di ogni suo elemento, allora $A = \mathbb{N}$.

Il primo assioma ci assicura che $\mathbb{N}$ non è vuoto, in quanto contiene almeno il numero 1, che è il primo elemento di $\mathbb{N}$. Il secondo garantisce che in $\mathbb{N}$ si può contare, prendendo sempre il successivo. Il terzo assioma ci dice che contando non si torna mai a 1. Il quarto che non si torna mai a un numero già incontrato. Possiamo scrivere in termini formali gli assiomi, introducendo $\sigma(n)$ per indicare il successivo di n:

1. $1 \in \mathbb{N}$.
2. $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \sigma(n) \in \mathbb{N}$,
3. $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \sigma(n) \neq 1$,
4. $\forall\, n, m \in \mathbb{N},\ \sigma(n) = \sigma(m) \implies n = m$,
5. $\forall\, A \subseteq \mathbb{N},\ \{(1 \in A) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}, n \in A \implies \sigma(n) \in A)\} \implies A = \mathbb{N}$

Induttività di $\mathbb{N}$

Proposizione 2.1. *$\mathbb{N}$ è induttivo.*

Proof. $1 \in \mathbb{N}$ infatti $\forall\, I \in \mathcal{J},\ 1 \in I$. Sia $n \in \mathbb{N}$ allora $\forall\, I \in \mathcal{J}$ è $n \in I$, quindi anche $n + 1 \in I$. Pertanto $n + 1 \in \mathbb{N}$. □

Ciò comporta che ogni sottoinsieme induttivo di $\mathbb{N}$ coincide con $\mathbb{N}$, quindi $\mathbb{N}$ è il più piccolo insieme induttivo possibile.

2.2 Principio di induzione

Prima forma del principio di induzione

Teorema 2.2. *Se una proprietà $P(n)$ vale per $n = 1$, e se, supposta vera per n, risulta vera per $n + 1$,* *allora $P(n)$ è vera per ogni n. In simboli:*

$$P(1) \wedge (\forall n,\ P(n) \implies P(n+1)) \implies \forall n, P(n).$$

Proof. Consideriamo l'insieme A dei numeri naturali n per i quali $P(n)$ è vera:

$$A = \{\, n \in \mathbb{N} \,|\, P(n) \,\}.$$

Siccome per ipotesi $P(1)$ è vera, si ha $1 \in A$. Inoltre se $P(n)$ è vera (cioè se $n \in A$) allora lo è anche $P(n+1)$, e quindi $n+1 \in A$. Per l'assioma 5, $A = \mathbb{N}$, ossia $P(n)$ è vera per ogni n.

□

Seconda forma del principio di induzione

Teorema 2.3. *Sia $A \subseteq \mathbb{N}$, supponiamo che:*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall m < n, \quad m \in A \implies n \in A$$

Allora $A = \mathbb{N}$.

2.3 Definizioni per ricorrenza

Costruzione per ricorrenza

Definizione 2.3. Dovendo costruire E_n per ogni $n \in \mathbb{N}$, posso procedere nel seguente modo:

1. Costruisco E_1
2. Stabilisco un procedimento che da E_n mi dia E_{n+1} per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esempi di costruzioni per ricorrenza

Potenza a esponente naturale

Definizione 2.4. a^n dove $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$.

1. $a^1 = a$
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ a^{n+1} = a^n \cdot a$

Sommatoria

Definizione 2.5. Siano $a_1, a_2, ..., a_n$, n numeri reali e $i \in \mathbb{N}$. La loro somma

$$a_1 + a_2 + ... + a_n$$

si può indicare in forma compatta col simbolo di *sommatoria*:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i$$

che si legge: "sommatoria per i da 1 a n di a_i". Il simbolo i si dice *indice di sommatoria*. Ponendo le seguenti,

1.
$$\sum_{i=1}^{1} a_i = a_1$$

2.
$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1}$$

Fattoriale

Definizione 2.6. Si chiama n *fattoriale*, e si indica con il simbolo $n!$, il prodotto dei numeri interi da 1 a n compreso:
$$n! = 1 \times 2 \times ... \times (n-2) \times (n-1) \times n.$$
Ponendo le seguenti,

1.
$$1! = 1$$

2.
$$n! = n(n-1)!$$

2.4 Buon ordinamento dei numeri naturali

Buon ordinamento dei numeri naturali

Teorema 2.4. *Ogni sottoinsieme non vuoto di* $\mathbb{N}$ *ha minimo.*

Proof. Sia $T \subseteq \mathbb{N}$ privo di minimo; dimostriamo che $T = \emptyset$. Consideriamo il complementare $A = \mathbb{N} \setminus T$. Utilizzando il secondo principio di induzione, mostriamo che
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall m < n, \quad m \in A \implies n \in A.$$
Siccome A è complementare di T,
$$\forall m < n,\ m \notin T$$
allora anche $n \notin T$, dunque $T = \emptyset$. $\square$

2.5 Proprietà di Archimede

Proprietà di Archimede

Teorema 2.5. $\mathbb{N}$ *è illimitato superiormente, cioè* $\sup(\mathbb{N}) = +\infty$*. In simboli:*
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N} : n > x,$$
dunque $\mathbb{N}$ *non ha maggioranti.*

Proof. Supponiamo che $\sup(\mathbb{N}) = s \in \mathbb{R}$. Per il teorema (1.11), avremo che:
$$s = \sup(\mathbb{N}) \quad \implies \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \leq s\ (s \in \mathbb{N}^{\leq}) \quad \wedge \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists n \in \mathbb{N} : n > s - \varepsilon.$$
Allora
$$s - 1 \notin \mathbb{N}^{\leq}$$
cioè
$$\exists m \in \mathbb{N} : m > s - 1$$

e

$$m+1>s,$$

il che è impossibile. $\square$

2.6 Disuguaglianza di Bernoulli

Disuguaglianza di Bernoulli

Proposizione 2.6.

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, b \geq -1, \quad (1+b)^n \geq 1+nb.$$

Proof. Dimostriamo per induzione su n.

$n=1$
- $(1+b)^1 = (1+b)$
- $1+1\cdot b = 1+b$

Siccome $1+b=1+b$ allora $p(1)$ è verificata

$n \rightsquigarrow n+1$

$$(1+b)^{n+1} = (1+b)^n(1+b) \implies (1+nb)(1+b)$$

$$(1+b)^n(1+b) \geq (1+nb)(1+b)$$

$$(1+b)^n(1+b) \geq 1+b+nb+nb^2$$

Dal fatto che

$$1+b+nb+nb^2 \geq 1+nb+b = 1+(n+1)b$$

segue

$$(1+b)^n(1+b) \geq 1+(n+1)b$$

e quindi è verificato anche per $n+1$.

$\square$

Proposizione 2.7. *Sia $x>1$, allora*

$$\sup\{x^n \mid n \in \mathbb{N}\} = +\infty$$

Proof. Procedendo per assurdo, supponiamo che $\sup\{x^n \mid n \in \mathbb{N}\} = s \in \mathbb{N}$, dunque l'insieme è limitato superiormente. Sia

$$b = \frac{s}{n} > 0 \geq -1,$$

utilizzando Bernoulli

$$\left(1+\frac{s}{n}\right)^n = (1+b)^n \geq 1+nb \geq 1+s > s$$

Sia ora n tale che $x \geq 1+\dfrac{s}{n}$ cioè

$$n \geq \frac{s}{x-1} \iff \frac{1}{n} \leq \frac{x-1}{s} \iff \frac{s}{n} \leq x-1 \iff \frac{s}{n}+1 \leq x.$$

Si ha $x^n > s$, il che è impossibile, dunque l'insieme è illimitato. $\square$

3 I Numeri Interi

3.1 Insieme dei numeri interi

Insieme dei numeri interi

Definizione 3.1.
$$\mathbb{Z} = \mathbb{N}_0 \cup (-\mathbb{N}) = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$$

Massimo di insieme non vuoto di interi e limitato superiormente

Proposizione 3.1. *Ogni insieme di interi non vuoto e limitato superiormente ha massimo.*

Proof. Sia $E \subseteq \mathbb{Z}$ non vuoto e limitato superiormente. Per la proprietà di Archimede
$$\exists\, n \in \mathbb{N} \ : \ \forall\, k \in E, \quad k < n.$$
Ponendo $T = \{n - k \,|\, k \in E\}$, troviamo che $T \subseteq \mathbb{N}$, e
$$T \neq \emptyset \ \because \ E \neq \emptyset.$$
Dunque per il teorema (2.4),
$$\exists\, h \in \mathbb{N} \ : \ h = \min(T).$$
Ponendo allora $m = n - h$ si ha
$$m \in E \ \text{ e } \ \forall\, j \in E, \ j \leq m,$$
dunque $n - j \geq h$ e
$$j = n - (n - j) \leq n - h = m,$$
pertanto $m = \max E$. □

Esistenza di massimo intero che non supera ogni numero reale

Corollario 1. $\forall\, x \in \mathbb{R}$, *esiste sempre massimo intero che non supera* x.

Proof. Sia
$$E = \{\, k \in \mathbb{Z} \,|\, k \leq x \,\},$$
allora E è non vuoto e limitato superiormente. È non vuoto perchè se $n > -x$ allora $-n < x$ e $-n \in \mathbb{Z}$. □

Parte intera e frazionaria di un numero reale

Definizione 3.2. La parte **intera** di $x \in \mathbb{R}$ è il massimo intero che non supera x. Lo indicheremo con
$$\operatorname{int} x \quad \text{o} \quad \lfloor x \rfloor$$
La parte **frazionaria** con
$$\operatorname{frac} x = x - \lfloor x \rfloor.$$

Nota 5. Abbiamo, ovviamente, che

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \operatorname{frac} x < 1.$$

Inoltre, se $n = \operatorname{int} x$, allora

- $$n \leq x < n + 1;$$
- $$x - 1 < n \leq x;$$
- $$x = \operatorname{int} x \quad \iff \quad x \in \mathbb{Z}.$$

4 I Numeri Razionali

4.1 Insieme dei numeri razionali

Insieme dei numeri razionali

Definizione 4.1.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \,|\, m \in \mathbb{Z} \,\wedge\, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Esistenza e irrazionalità della radice quadrata di 2 Consideriamo gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \wedge x^2 < 2\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \wedge x^2 > 2\}.$$

Osserviamo che $A \neq \emptyset$ (perchè $1 \in A$) e $B \neq \emptyset$ (perchè $2 \in B$), da cui ricaviamo

$$\left.\begin{array}{ll} \forall\, a \in A, & a^2 < 2 \\ \forall\, b \in B, & b^2 > 2 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad a^2 < 2 < b^2 \,\wedge\, a + b > 0.$$

segue

$$b - a = \frac{(b-a)\cancel{(b+a)}}{\cancel{b+a}} = \frac{b^2 - a^2}{b + a} > 0,$$

cioè $a < b$. Per l'assioma di continuità

$$\exists\, s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \,:\, \forall\, a \in A,\, \forall\, b \in B,\, a \leq s \leq b.$$

Per dimostrare che $s^2 = 2$, bisogna dimostrare che

$$s^2 \not> 2 \,\wedge\, s^2 \not< 2.$$

1. Se fosse $s^2 > 2$, poniamo

   $$z = \frac{s^2 + 2}{2s} = \frac{s + \frac{2}{s}}{2}$$

   si ha

   $$z - s = \frac{s^2 + 2}{2s} - s = \frac{s^2 + 2 - 2s^2}{2s} = \frac{2 - s^2}{2s} < 0 \quad \Longrightarrow \quad z < s.$$

   Ora

   $$z^2 = \left(\frac{s^2 + 2}{2s}\right)^2 = \frac{(s^2 + 2)^2}{(2s)^2} = \frac{s^4 + 4s^2 + 4}{4s^2}$$

quindi

$$z^2 - 2 = \frac{s^4+4s^2+4}{4s^2} - 2 = \frac{s^4+4s^2+4-8s^2}{4s^2} = \frac{s^4-4s^2+4}{4s^2} = \frac{(s^2-2)^2}{4s^2} > 0$$

cioè $z^2 > 2$. Pertanto abbiamo uno $z \in B$, ma $z < s$ è impossibile perchè

$$\forall\, b \in B,\ s \leq b.$$

2. Se fosse $s^2 < 2$, poniamo

$$y = \frac{4s}{s^2+2}$$

Si ha

$$y - s = \frac{4s}{s^2+2} - s = \frac{4s - s^3 - 2s}{s^2+2} = \frac{2s-s^3}{s^2+2} = \frac{s(2-s^2)}{s^2+2} > 0$$

cioè $y > s$, ma

$$2 - y^2 = 2 - \frac{16s^2}{s^4+4s^2+4} = \frac{2s^4+8s^2+8-16s^2}{(s^2+2)^2} = \frac{2s^4-8s^2+8}{(s^2+2)^2} = \frac{2(s^2-2)^2}{(s^2+2)^2} > 0$$

cioè $y^2 < 2$. In conclusione, abbiamo che $y \in A$, ma $y > s$ è impossibile perchè

$$\forall\, a \in A,\ a \leq s.$$

Supponiamo che

$$\exists\, s \in \mathbb{Q} \,:\, s^2 = 2 \quad \text{con } (s > 0).$$

Allora avremo

$$s^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$$

in cui possiamo supporre che $\frac{m}{n}$ è ridotta ai minimi termini. Avremo dunque $m^2 = 2n^2$, cioè è pari e possiamo riscrivere $m = 2h$ con $h \in \mathbb{N}$. Quindi $m^2 = 4h^2$ ma ciò comporta che $2n^2 = 4h^2$, il che implica $n^2 = 2h^2$, che vuol dire che anche n^2 è pari e quindi possiamo riscrivere n come $n = 2k$. Dunque avremo che

$$\frac{m}{n} = \frac{2h}{2k} = \frac{h}{k},$$

il chè è assurdo poichè abbiamo già supposto che la frazione fosse ridotta ai minimi termini. Dunque il numero il cui quadrato è 2 è reale ma non razionale.

4.2 Radice n-esima di un numero reale

Radice n-esima aritmetica di un numero reale

Teorema 4.1. *Sia $n \in \mathbb{N}$ e sia $a > 1$ e consideriamo l'insieme*

$$E = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0 \ \wedge\ x^n < a\}.$$

Poichè $E \neq \emptyset$ e limitato superiormente, esiste $s = \sup(E) \in \mathbb{R}$. Avremo che s risulta essere l'unico numero positivo per il quale si ha che $s^n = a$. Tale numero si chiama radice n-esima aritmetica di a e si indica con uno dei simboli

$$\sqrt[n]{a} \quad \text{o} \quad a^{\frac{1}{n}}.$$

Radice n-esima di un numero reale

Definizione 4.2. Sia $n \in \mathbb{N}$ e sia $a \geq 0$, definiamo la **radice n-esima** di a come segue

$$\sqrt[n]{a} = \begin{cases} 0 & a = 0 \\ 1 & a = 1 \\ 1/s & 0 < a < 1 \\ \text{il numero } s \text{ del teorema precedente} & a > 1 \end{cases}$$

In questo modo $\sqrt[n]{a}$ è l'unico reale ≥ 0 la cui n-esima potenza è a.

4.3 I logaritmi

Logaritmo

Definizione 4.3. Siano $x, b > 0$ e $b \neq 1$. Diciamo che il numero $\xi \in \mathbb{R}$ è il **logaritmo in base b di x** se $b^\xi = x$. Tale numero, se esiste, è unico e scriviamo:

$$\xi = \log_b x.$$

Nota 6. Quindi, per definizione:

$$b^{\log_b x} = x.$$

Proprietà dei logaritmi

Proposizione 4.2. *Le proprietà dei logaritmi, che si deducono da quelle degli esponenziali, prendendo $x, y, a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$, sono:*

1. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$;
2. $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$;
3. $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$;
4. $\log_a x = \dfrac{1}{\log_x a} = -\log_{\frac{1}{a}} x \quad (x \neq 1)$;
5. $\log_a a = 1 \quad \log_a 1 = 0$.

Formula del cambiamento di base

Proposizione 4.3. *Siano $a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. Allora*

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

Proof. Siano

$$\xi = \log_b x \text{ con } x = b^\xi, \quad \alpha = \log_b a \text{ con } a = b^\alpha.$$

Abbiamo

$$\alpha \log_a x = \log_a x^\alpha = \log_a (b^\xi)^\alpha = \log_a (b^\alpha)^\xi = \log_a a^\xi = \xi \log_a a = \xi.$$

Dunque abbiamo

$$\alpha \log_a x = \xi,$$

dividendo entrambi i membri per α, otteniamo

$$\log_a x = \frac{\xi}{\alpha} = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

□

4.4 Numero di Nepéro

Proposizione 4.4. *Sia*

$$e = \inf \left\{ x \in \mathbb{R} \,|\, \exists\, n \in \mathbb{N} \,:\, x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \right\},$$

allora

$$2 \leq e \leq 4.$$

Proof. Sia

$$E = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \,|\, n \in \mathbb{N} \right\}$$

così $e = \inf E$. Allora abbiamo che

$$\forall\, x \in E,\ \exists\, n \in \mathbb{N} \,:\, x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Per la disuguaglianza di Bernoulli

$$(1+b)^n \geq 1 + nb \implies b = \frac{1}{n}$$

$$x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \geq 1 + (n+1)\frac{1}{n} = 1 + 1 + \frac{1}{n} = 2 + \frac{1}{n} > 2 \qquad \implies \qquad e \geq 2$$

Inoltre

$$4 \in E \ \because\ 4 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^{1+1} \quad \therefore \quad e \leq 4.$$

Si ha quindi che $2 \leq e \leq 4$. □

Variazione della disuguaglianza di Bernoulli

Proposizione 4.5.

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, b \geq 0, \quad (1+b)^n \geq 1 + nb + \frac{n(n-1)}{2}b^2.$$

Proof. Per induzione su n

$n = 1$

$$(1+b)^1 = 1 + b \geq 1 + 1 \cdot b + \frac{1 \cdot (1-1)}{2}b^2 = 1 + b + 0 = 1 + b$$

$n \rightsquigarrow n+1$ Abbiamo

$$(1+b)^{n+1} = (1+b)^n(1+b),$$

dunque

$$\begin{aligned}
\left(1 + nb + \frac{n(n-1)}{2}b^2\right)(1+b) &= 1 + nb + \frac{n(n-1)}{2}b^2 + b + nb^2 + \frac{n(n-1)}{2}b^3 \\
&= 1 + nb + b + \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)b^2 + nb^2 + \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)b^3 \\
&= 1 + (n+1)b + \left(\frac{n(n-1)}{2} + n\right)b^2 + \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)b^3 \\
&= 1 + (n+1)b + \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)b^2 + \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)b^3 \\
&\geq 1 + (n+1)b + \left(\frac{(n+1)n}{2}\right)b^2
\end{aligned}$$

□

Ora sia $b = \dfrac{1}{n}$, avremo dunque

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \geq 1+(n+1)\frac{1}{n}+\frac{(n+1)n}{n}\frac{1}{n^2} = 1+1+\frac{1}{n}+\frac{n+1}{2n}$$

$$= 2+\frac{1}{2}+\frac{3}{2n} \; > \; \frac{5}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad e \geq \frac{5}{2}$$

4.5 Densità dei razionali

Densità dei razionali

Teorema 4.6.

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R}\ (a < b),\ \exists\, q \in \mathbb{R}\ :\ a < q < b.$$

Proof. Prendiamo $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > \dfrac{1}{b-a}$, avremo dunque

$$n \cdot (b-a) = nb - na > 1 \qquad \Longrightarrow \qquad nb > 1 + na.$$

Dalle proprietà della parte intera di un numero reale, abbiamo:

$$na - 1 < \lfloor na \rfloor \leq na,$$

che ci porta a

$$na < \lfloor na \rfloor + 1 \leq na + 1 < nb.$$

Pertanto, ponendo

$$m = 1 + \lfloor na \rfloor \in \mathbb{Z},$$

avremo

$$na < m < nb \qquad \Longrightarrow \qquad a < \frac{m}{n} < b$$

ossia $a < q < b$ con $q = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$. □

4.6 Densità degli irrazionali

Densità degli irrazionali

Corollario 2.

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R}\ (a < b),\ \exists\, r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\ :\ a < r < b.$$

Proof. Sia $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ tale che $a < q_1 < q_2 < b$. Sarà

$$q_1 = \frac{m_1}{n_1}\ \wedge\ q_2 = \frac{m_2}{n_2}$$

quindi moltiplicando tutto per n_2 e n_1

$$q_1 = \frac{m_1 n_2}{n_1 n_2} < \frac{n_1 m_2}{n_1 n_2} = q_2$$

pertanto $m_1 n_2 < n_1 m_2$ da cui (essendo interi)

$$1 + m_1 n_2 \leq n_1 m_2.$$

Se $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ positivo e $s < 1$

$$m_1 n_2 < m_1 n_2 + s < m_1 n_2 + 1 \leq n_1 m_2$$

Pertanto dividiamo
$$q_1 = \frac{m_1 n_2}{n_1 n_2} < \frac{m_1 n_2 + s}{n_1 n_2} < \frac{n_1 m_2}{n_1 n_2} = q_2$$
ossia
$$q_1 < M < q_2$$
dove
$$M = \frac{m_1 n_2 + s}{n_1 n_2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

□

4.7 Intervalli

Intervallo

Definizione 4.4. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$. Diremo che I è un **intervallo** se
$$\forall\, a, b \in I\ (a < b),\ \forall\, c \in \mathbb{R}\ (a < c < b), \quad c \in I.$$
Ogni $E \subseteq \mathbb{R}$ con meno di due elementi è un intervallo, detto **degenere**.

Nota 7.

- Se I è una collezione non vuota di intervalli, allora anche l'intersezione $\bigcap I$ è un intervallo.
- L'unione di due o più intervalli non è, in generale, un intervallo.

Intervalli aperti, chiusi, e semiaperti

Proposizione 4.7. *Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Allora sono intervalli i seguenti insiemi:*

1. $]-\infty, \alpha] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \alpha\}$
2. $]-\infty, \alpha[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < \alpha\}$
3. $[\alpha, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \alpha\}$
4. $]\alpha, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > \alpha\}$
5. $]\,\alpha, \beta\,[= \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha < x \wedge x < \beta\}$
   Se $\alpha = -\infty$ e $\beta = +\infty$, allora $]-\infty, +\infty[= \overline{\mathbb{R}}$.
6. $[\alpha, \beta] = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha \leq x \wedge x \leq \beta\}$
7. $]\alpha, \beta] = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha < x \wedge x \leq \beta\}$
8. $[\alpha, \beta[= \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha \leq x \wedge x < \beta\}$

Proof.

1. Siano $a, b \in \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq r\}$ con $a < b$. Se $c \in \mathbb{R}$ è tale che $a < c < b$, poiché $b \leq r$, allora $c < r$.

□

Nota 8. Gli ultimi 4 intervalli sono non degeneri se e solo se $\alpha < \beta$.

Part II
Funzioni

5 Funzioni

Funzione, dominio e codominio

Definizione 5.1. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto, diciamo che $f \subseteq A \times \mathbb{R}$ è una **funzione** (reale di variabile reale) se:

$$\forall\, x \in A,\ \exists!\, y \in \mathbb{R} \,:\, (x, y) \in f,$$

e scriveremo:

$$\forall\, x \in A,\ y = f(x).$$

L'insieme A si dice **dominio** di f e scriveremo :

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in A \,|\, \exists\, y \in \mathbb{R} \,:\, y = f(x)\}.$$

Allo stesso tempo, definiamo l' **immagine** di f (oppure **codominio** di f) al seguente modo:

$$\mathrm{Imm}(f) = \{y \in \mathbb{R} \,|\, \exists\, x \in A \,:\, y = f(x)\}.$$

Nota 9. $y = f(x)$ e $(x, y) \in f$ sono scritture equivalenti. Inoltre, Scriveremo $f : A \to B$, a significare che $\mathrm{Imm}(f) \subseteq B$ e che $A = \mathrm{Dom}(f)$.

Restrizione di una funzione

Definizione 5.2. Sia $f : A \to \mathbb{R}$, con $B \subseteq A$ e $A, B \neq \emptyset$. Diciamo che $g : B \to \mathbb{R}$ è la **restrizione** di f a B se

$$\forall\, x \in B,\ g(x) = f(x).$$

Scriveremo

$$g = f_{\upharpoonright\, B}.$$

Estensione di una funzione

Definizione 5.3. Sia $g : B \to \mathbb{R}$, con $A \supseteq B$ e $A, B \neq \emptyset$. Diciamo che $f : A \to \mathbb{R}$ è **estensione** di g ad A se

$$\forall\, x \in B,\ f(x) = g(x).$$

Operazioni con le funzioni

Definizione 5.4. Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$:

- La **funzione somma** di f e g è definita come

$$f + g : A \to \mathbb{R} \quad x \mapsto f(x) + g(x);$$

- La **funzione prodotto** di f e g è definita come

$$f \cdot g : A \to \mathbb{R} \quad x \mapsto f(x) \cdot g(x).$$

Composizione di funzioni

Definizione 5.5. Siano $f : A \to B$ e $g : B \to \mathbb{R}$ tali che $\mathrm{Imm}(f) = \mathrm{Dom}(g)$. Definiamo la **composizione** di f e g come segue

$$g \circ f : A \to \mathbb{R} \quad x \mapsto g(f(x))$$

Associatività della composizione

Proposizione 5.1. *Siano $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to \mathbb{R}$, allora:*

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Proof.

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)) = h((g \circ f)(x)) = (h \circ (g \circ f))(x).$$

□

Inversa di una funzione

Definizione 5.6. Siano $f : A \to B$ e $g : B \to A$. Se $g \circ f = \iota_A$ e $f \circ g = \iota_B$, diciamo che g è l'**inversa** di f e scriveremo

$$g = f^{-1}.$$

Nota 10. Se esiste, l'inversa è unica, e segue che se f è l'inversa di g, allora g è l'inversa di f.

Teorema 5.2. *Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ è invertibile se e solo se è iniettiva.*

Immagine e controimmagine di una parte del dominio

Definizione 5.7. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ e $E \subseteq A$, chiameremo **immagine** (tramite f) di E, l'insieme

$$f(E) = \{y \in \mathbb{R} \,|\, \exists\, x \in E \,:\, y = f(x)\}.$$

Definizione 5.8. Sia $f : A \to B$ e $E \subseteq B$, chiameremo **controimmagine** (tramite f) di E, l'insieme

$$f^{-1}(E) = \{x \in A \,|\, f(x) \in E\}.$$

Nota 11. Siano $A \subseteq R$, $f : A \to \mathbb{R}$, $E \subseteq A$, allora dalle definizioni date, segue che:

1. $\mathrm{Imm}(f) = f(A)$
2. $\mathrm{Dom}(f) = f^{-1}(f(A))$
3. Se $f \neq \emptyset$, allora $f(E) = \mathrm{Imm}(f_{\restriction E})$.

Estremo superiore, estremo inferiore, minimo e massimo di una funzione

Definizione 5.9. Sia $f : A \to \mathbb{R}$, avremo i seguenti:

- Estremo superiore: $\sup f(A)$;
- Estremo inferiore: $\inf f(A)$;
- Massimo: $\max f(A)$;
- Minimo: $\min f(A)$.

Punti di massimo e punti di minimo di una funzione

Definizione 5.10. Se $\exists \max f(A)$, allora

$$\exists\, q \in A \,:\, \forall\, x \in A,\; f(x) \leq f(q).$$

Esiste cioè un punto q in cui la funzione è maggiore di tutti gli altri punti. Tale q non è necessariamente unico, e si chiama **punto di massimo**. Alternativamente, se $\exists \min f(A)$, allora

$$\exists\, p \in A \,:\, \forall\, x \in A,\; f(x) \geq f(p).$$

Valgono le medesime considerazioni.

5.1 Funzioni monotòne e strettamente monotòne

Funzioni monotòne e strettamente monotòne

Definizione 5.11. Sia $f : A \to \mathbb{R}$. Allora $\forall\, x_1, x_2 \in A$ $(x_1 < x_2)$ diciamo che f è

- **crescente:** se $f(x_1) \leq f(x_2)$;
- **strettamente crescente:** se $f(x_1) < f(x_2)$;
- **decrescente:** se $f(x_1) \geq f(x_2)$;
- **strettamente decrescente:** se $f(x_1) > f(x_2)$.

La funzione f si dice:

- **monotòna** se è crescente o decrescente;
- **strettamente monotòna** se è strettamente crescente o strettamente decrescente.

Invertibilità delle funzioni strettamente monotòne

Teorema 5.3.

(a) Ogni funzione strettamente monotòna è invertibile, e

(b) la sua inversa è ancora strettamente monotòna con lo stesso tipo di monotònia.

Proof.

(a) Sia $f : A \to \mathbb{R}$ strettamente monotòna. Prendiamo $x_1, x_2 \in A$ distinti, supponiamo $x_1 < x_2$. Allora avremo

$$f(x_1) < f(x_2) \quad \vee \quad f(x_1) > f(x_2);$$

In ogni caso,

$$f(x_1) \neq f(x_2) \implies f \text{ iniettiva } \implies f \text{ invertibile .}$$

(b) Supponendo che f sia strettamente crescente, sia $g : B \to A$ l'inversa di f, siano $y_1, y_2 \in B$ distinti e supponiamo $y_1 < y_2$. Così, $x_1 = g(y_1)$ è diverso da $x_2 = g(y_2)$. Se fosse $x_1 > x_2$, avremo che $y_1 = f(x_1) > f(x_2) = y_2$, ciò implicherebbe $y_1 > y_2$, il che è impossibile. Pertanto, $x_1 < x_2 \implies g$ è strettamente crescente.

□

Nota 12. Sia $E = \text{Imm}(f)$ con f invertibile, allora $f^{-1}(E)$ è sia l'immagine tramite f^{-1} di E e anche la controimmagine tramite f di E.

Caratterizzazione della monotònia

Teorema 5.4. *Per una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ sono equivalenti:*

1. *f è monotòna;*
2. *Dati $p, q, r \in A$, con $p < q < r$, si ha che $f(q)$ è compreso tra $f(p)$ e $f(r)$;*
3. *Dati $p, r \in A$, con $p < r$, la restrizione di f a $[p, r] \cap A$ ha in p e in r un punto di massimo e un punto di minimo.*

Proof.

(1) $\implies$ (2) Sia f monotòna, e siano $p, q, r \in A$ con $p < q < r$. Se f è crescente si ha $f(p) \leq f(q) \leq f(r)$; se f è decrescente si ha $f(p) \geq f(q) \geq f(r)$: in ogni caso $f(q)$ è compreso tra $f(p)$ e $f(r)$.

(2) $\implies$ (3) Siano $p, r \in A$ con $p < r$.

- Supponendo che $f(p) \leq f(r)$, abbiamo che

$$q \in]p, r[\cap A \implies f(p) \leq f(q) \leq f(r)$$

dunque $f_{\restriction\, [p,r]\cap A}$ assume il minimo in p e il massimo in r;

- Supponendo che $f(p) \geq f(r)$, abbiamo che

$$q \in]p, r[\cap A \implies f(p) \geq f(q) \geq f(r)$$

dunque $f_{\restriction\, [p,r]\cap A}$ assume il minimo in r e il massimo in p.

(3) $\implies$ (1) Supponiamo ovviamente f non costante.

Fissiamo $a, b \in A$ con $a < b$ e $f(a) \neq f(b)$, mostriamo che f è crescente se $f(a) < f(b)$, mentre è decrescente se $f(a) > f(b)$.

Prendiamo allora $x', x'' \in A$, con $x' < x''$, e verifichiamo che $f(x') \leq f(x'')$.

Distinguiamo due casi.

– Caso I. $x' \leq a$
$f_{\restriction [x',b] \cap A}$ ha minimo in x', poichè $a \in [x', b]$ e $f(a) < f(b)$ quindi $f(b)$ non può essere il minimo; in particolare $f(x') \leq f(a)$.
  - Se ora $x'' < b$, anche $x'' \in [x', b]$, quindi $f(x') \leq f(x'')$;
  - Se invece $x'' \geq b$, poichè $b \in [a, x'']$, si ha che $\max f_{\restriction [a,x''] \cap A} = x''$, pertanto $f(a) \leq f(x'')$; essendo, come abbiamo visto, $f(x') \leq f(a)$, si conclude che $f(x') \leq f(x'')$.

– Caso II. $x' > a$
  - Se $x'' < b$, allora $x' \in [a, b]$ e $\max f_{\restriction [a,b] \cap A} = b$, in quanto $f(a) < f(b)$; quindi $f(x') \leq f(b)$, il che implica che $\min f_{\restriction [x',b] \cap A} = x'$; ma $x'' \in [x', b]$, e pertanto $f(x') \leq f(x'')$.
  - Se $x'' \geq b$, poichè $b \in [a, x'']$, si ha che $\max f_{\restriction [a,x''] \cap A} = x''$, in quanto $f(a) < f(b)$ quindi $f(a)$ non può essere il massimo; essendo $x' \in [a, x'']$, si conclude che $f(x') \leq f(x'')$.

□

5.2 Funzioni periodiche

Funzioni periodiche, e periodo di una funzione

Definizione 5.12. Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$. Diremo che f è **periodica** se

$$\exists\, T \in \mathbb{R}^+ \,:\, \forall\, x \in A, \quad x + T \in A \quad \wedge \quad f(x + T) = f(x).$$

Equivalentemente

$$\exists\, T \in \mathbb{R}^+ \,:\, \forall\, x \in A,\, \exists\, k \in \mathbb{Z} : \quad x + kT \in A \quad \wedge \quad f(x + kT) = f(x).$$

Diciamo che T è un **periodo**.
Se esiste

$$t = \min\{T > 0 \mid T \text{ è un periodo per } f\},$$

allora diciamo che t è il **periodo** di f, o che f è **periodica** di periodo t.

Funzione di Dirichlet

Definizione 5.13. La funzione di Dirichlet ψ è definita come segue:

$$\psi : \mathbb{R} \to \{0, 1\} \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases},$$

dove $\mathbb{Q}$ rappresenta l'insieme dei numeri razionali. La funzione ψ assegna il valore 1 a ogni numero razionale e il valore 0 a ogni numero irrazionale.

5.3 Funzioni trigonometriche inverse

Le funzioni trigonometriche, essendo periodiche, non sono iniettive e quindi nemmeno invertibili. È però possibile trovare degli intervalli su cui le restrizioni delle funzioni trigonometriche sono iniettive e quindi invertibili.

Funzione arcoseno

Definizione 5.14. La restrizione di $\sin(x)$ all'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ha immagine $[-1, 1]$, è strettamente crescente e quindi invertibile. La sua funzione inversa ha dominio $[-1, 1]$ ed immagine $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. La funzione inversa della restrizione di $\sin x$ all'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ si chiama **arcoseno** e si indica col simbolo $\arcsin x$.

Funzione arcocoseno

Definizione 5.15. La restrizione di $\cos(x)$ all'intervallo $[0, \pi]$ ha immagine $[-1, 1]$, è strettamente decrescente e quindi invertibile. La sua funzione inversa ha dominio $[-1, 1]$ ed immagine $[0, \pi]$. La funzione inversa della restrizione di $\cos x$ all'intervallo $[0, \pi]$ si chiama **arcocoseno** e si indica col simbolo $\arccos x$.

Funzione arcotangente

Definizione 5.16. La restrizione di $\tan(x)$ all'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ha immagine $\mathbb{R}$, è strettamente crescente e quindi invertibile. La sua funzione inversa ha dominio $\mathbb{R}$ ed immagine $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. La funzione inversa della restrizione di $\tan x$ all'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ si chiama **arcotangente** e si indica col simbolo $\arctan x$.

Funzione arcocotangente

Definizione 5.17. La restrizione di $\cot(x)$ all'intervallo $(0, \pi)$ ha immagine $\mathbb{R}$, è strettamente decrescente e quindi invertibile. La sua funzione inversa ha dominio $\mathbb{R}$ ed immagine $(0, \pi)$. La funzione inversa della restrizione di $\cot x$ all'intervallo $(0, \pi)$ si chiama **arcocotangente** e si indica col simbolo $\mathrm{arccot} x$.

$$\begin{aligned}
\sin &: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1], \quad x \mapsto \sin(x) = y \\
\arcsin &: [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad y \mapsto x \,:\, \sin(x) = y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos &: [0, \pi] \to [-1, 1], \quad x \mapsto \cos(x) = y \\
\arccos &: [-1, 1] \to [0, \pi], \quad y \mapsto x \,:\, \cos(x) = y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tan &: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \tan(x) = y \\
\arctan &: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad y \mapsto x \,:\, \tan(x) = y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cot &: (0, \pi) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \mathrm{arccot}(x) = y \\
\mathrm{arccot} &: \mathbb{R} \to (0, \pi), \quad y \mapsto x \,:\, \mathrm{arccot}(x) = y
\end{aligned}$$

5.4 Funzioni elementari

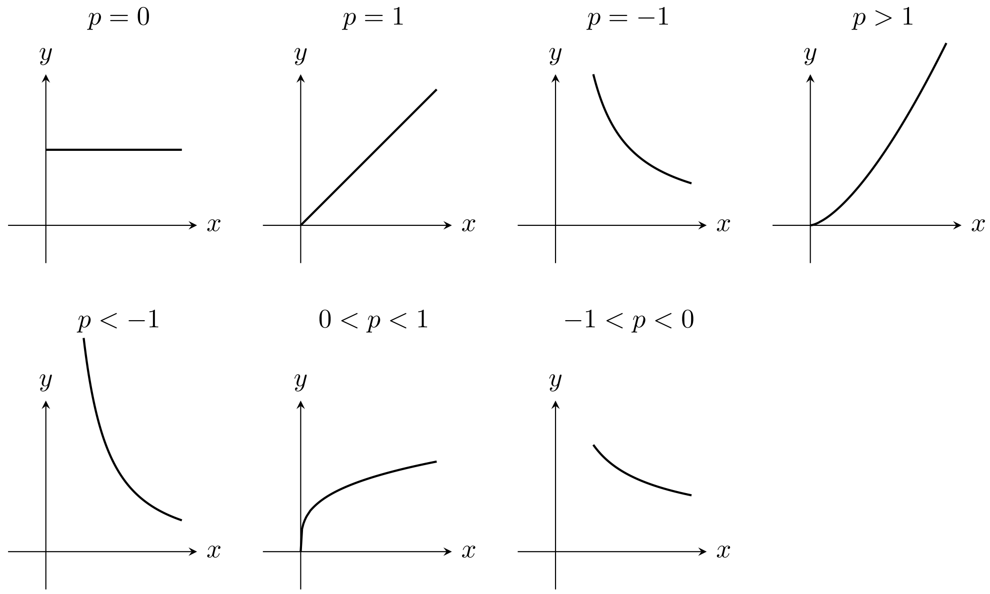
5.4.1 Funzione potenza

Funzione potenza

Definizione 5.18. Definiamo la seguente funzione:

$$f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}^+ \quad x \mapsto x^p \quad p \in \mathbb{R}.$$

La funzione di potenze è quindi espressa come la base x elevata alla potenza p. Ci sono diversi casi



5.4.2 Funzione esponenziale

Funzione esponenziale

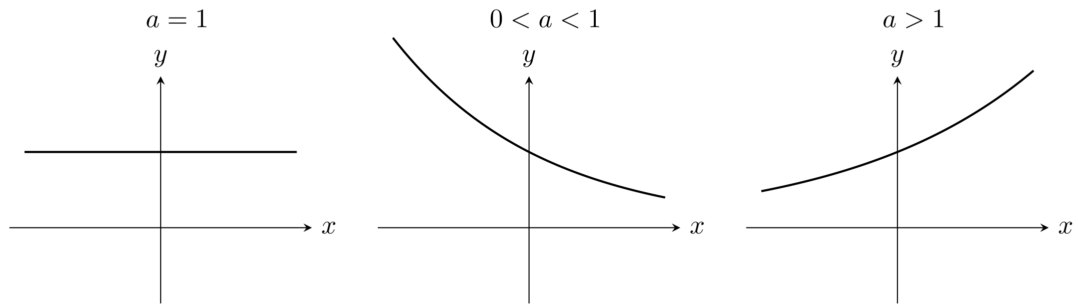
Definizione 5.19. Sia $a \in \mathbb{R}^+$. La funzione esponenziale di base a è definita come segue:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \quad x \mapsto a^x = y.$$

Abbiamo che:

- a è la base della funzione esponenziale;
- x è l'esponente che determina il numero di volte che la base viene moltiplicata per sè stessa.

La funzione esponenziale è strettamente crescente se $a > 1$, strettamente decrescente se $0 < a < 1$, e costante se $a = 1$.

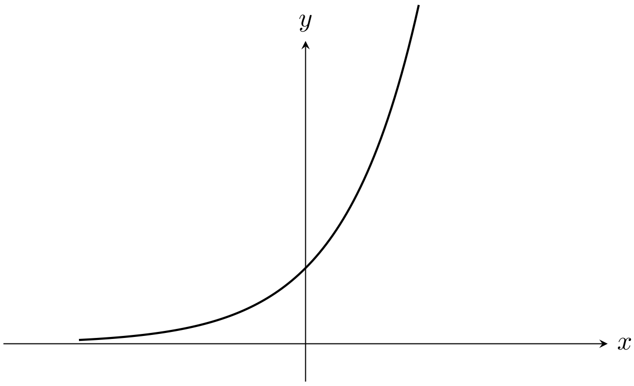


Nota 13. Le funzioni esponenziali sono simmetriche rispetto all'asse x.

Esponenziale naturale

Definizione 5.20.

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \quad x \mapsto e^x$$

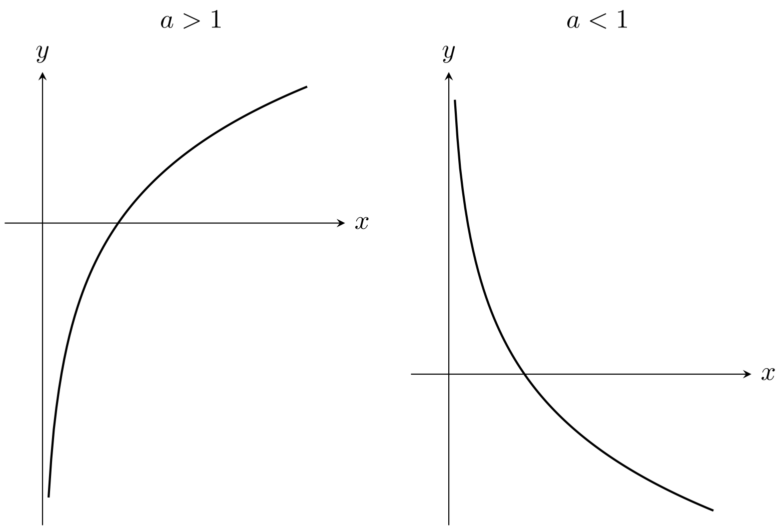


5.4.3 Funzione logaritmica

Funzione logaritmica

Definizione 5.21. Sia $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$. La funzione logaritmica di base a è definita come segue:

$$\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \quad y \mapsto \log_a(y) = x$$



5.4.4 Funzione valore assoluto

Funzione valore assoluto

Definizione 5.22. Definiamo la funzione valore assoluto al seguente modo

$$|| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ \quad x \mapsto |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} .$$

Alternativamente, possiamo dire

$$|x| = \sqrt{x^2} \quad \text{o} \quad |x| = \max\{x, -x\}.$$

Proprietà del valore assoluto

Proposizione 5.5. *Siano $a, b \in \mathbb{R}$, allora valgono le seguenti proprietà:*

1. $|ab| = |a| \cdot |b|$;
2. $|a + b| \leq |a| + |b| \quad |a - b| \geq |a| - |b|$;
3. $||a| - |b|| \leq |a - b|$;
4. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$;
5. $|-a| = |a|$.

Proof.

1. $$|ab| = \sqrt{(ab)^2} = \sqrt{a^2b^2} = \sqrt{a^2}\sqrt{b^2} = |a| \cdot |b|$$

2. (a) Dalle relazioni $a \leq |a|$ e $b \leq |b|$ segue $a + b \leq |a| + |b|$. Analogamente, da $-a \leq |a|$ e $-b \leq |b|$ segue $-a - b = -(a + b) \leq |a| + |b|$, e dunque

$$|a + b| = \max\{a + b, -(a + b)\} \leq |a| + |b|.$$

   (b) Abbiamo che

$$\begin{aligned} |a| &= |a - b + b| \leq |a - b| + |b| \\ |b| &= |b - a + a| \leq |b - a| + |a| \; (= |a - b| + |a|); \end{aligned}$$

   da cui segue

$$\begin{aligned} |a| - |b| &\leq |a - b| \\ |b| - |a| = -(|a| - |b|) &\leq |a - b|. \end{aligned}$$

3. Dalla (2) segue che

$$||a| - |b|| = \max\{-(|a| - |b|), |a| - |b|\} \leq |a - b|.$$

4. $$\left|\frac{a}{b}\right| = \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{b^2}} = \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b^2}} = \frac{|a|}{|b|}$$

5. $$|-a| = \max\{-a, -(-a)\} = \max\{-a, a\} = |a|$$

□

Corollario 3. *Sia $f : A \to \mathbb{R}$. Supponiamo che*

$$\exists\, \mu > 0 \, : \, \forall\, x \in A, \quad |f(x)| \leq \mu \quad (-\mu \leq f(x) \leq \mu),$$

allora

$$\forall\, x', x'' \in A, \; |f(x') - f(x'')| \leq 2\mu.$$

Proof. Sia $E = \mathrm{Imm}(f)$, allora abbiamo che

$$|f(x') - f(x'')| \leq \sup E - \inf E.$$

Ora

$$\sup E \leq \mu \quad \text{e} \quad \inf E \geq -\mu,$$

cioè

$$-\inf E \leq \mu,$$

da cui segue

$$\sup E - \inf E \leq 2\mu.$$

□

Proposizione 5.6. *Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e limitato. Allora*

$$\sup\{|y' - y''| \ : \ y', y'' \in E\} = \sup(E - E) = \sup E - \inf E.$$

Proof. Siano

$$t = \sup\{|y' - y''| \ : \ y', y'' \in E\} \quad s = \sup(E) \quad i = \inf(E),$$

bisogna dimostrare che $t = s - i$.

$$\forall\, z \in \{|y' - y''| \ : \ y', y'' \in E\},\ \exists\, a, b \in E \ : \ z = |a - b| = \begin{cases} a - b & a \geq b \\ b - a & b > a \end{cases}$$

Quindi $z \in E - E$, pertanto

$$\{|y' - y''| : y', y'' \in E\} \subseteq E - E$$

quindi $t \leq \sup(E - E)$. D'altra parte se $y', y'' \in E$ allora

$$y' - y'' \leq |y' - y''| \leq t.$$

Pertanto $\sup(E - E) \leq t$. In conclusione $t = \sup(E - E)$. □

5.5 Funzioni pari e funzioni dispari

Funzioni pari e funzioni dispari

Definizione 5.23. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ con $-A = A$. Diciamo che f è

- **Pari:** se $\forall\, x \in A,\ f(-x) = f(x)$;
- **Dispari:** se $\forall\, x \in A,\ f(-x) = -f(x)$.

Nota 14. Può anche verificarsi che entrambe non siano veri. Inoltre se sommo funzioni pari(dispari) ottengo funzione pari(dispari) e se il numero di funzioni dispari che moltiplico è pari, ottengo una funzione pari e viceversa.

5.6 Funzioni continue

Continuità di una funzione

Definizione 5.24. Sia $f : A \to \mathbb{R}$, e sia $w \in A$. Diciamo che:

- f è **continua in** w se

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \ : \ \forall\, x \in A,\ |x - w| < \delta \implies |f(x) - f(w)| < \varepsilon;$$

- f è **continua** se

$$\forall\, w \in A,\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0\ :\ \forall\, x \in A,\ |x - w| < \delta \implies |f(x) - f(w)| < \varepsilon;$$

- f è **uniformemente continua** (sempre continua) se

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0\ :\ \forall\, x, w \in A,\ |x - w| < \delta \implies |f(x) - f(w)| < \varepsilon.$$

Esempi di funzioni continue e non continue

Funzione costante

Proposizione 5.7. *Ogni funzione costante è uniformemente continua.*

Proof. Si può scegliere δ arbitrariamente perchè la funzione è sempre uguale, cioè abbiamo che

$$\forall\, x, w \in A, \quad |f(x) - f(w)| = 0 < \varepsilon.$$

□

Funzione identità

Proposizione 5.8. *Le identità sono uniformemente continue.*

Proof. Si può scegliere $\delta = \varepsilon$. Sia $f(x) = x$, allora abbiamo che

$$|x - w| < \varepsilon = \delta.$$

□

Funzione di Dirichlet

Proposizione 5.9. *La funzione di Dirichlet*

$$\psi : \mathbb{R} \to \{0, 1\} \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

non è continua in nessun punto $w \in \mathbb{R}$.

Proof. Prendiamo $\varepsilon = 1$, sia $\delta > 0$.

- Se $w \in \mathbb{Q}$, prendiamo $x \in]w - \delta, w + \delta[$ irrazionale, avremo

$$|f(x) - f(w)| = |-1| = 1 \not< \varepsilon$$

- Se $w \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, prendiamo $x \in]w - \delta, w + \delta[$ razionale, avremo

$$|f(x) - f(w)| = |1| = 1 \not< \varepsilon.$$

Dunque la funzione di Dirichlet non è continua in nessun punto anche essendo insieme di due funzioni continue.

□

Funzione parte intera

Proposizione 5.10. *La funzione parte intera è continua in ogni $w \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ e non è continua in ogni $n \in \mathbb{Z}$.*

Proof.

- Sia $w \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, abbiamo $\lfloor w \rfloor < w < 1 + \lfloor w \rfloor$. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Quindi ponendo
$$\delta = \min\{w - \lfloor w \rfloor, 1 + \lfloor w \rfloor - w\}$$
si ha che
$$\forall\, x \in]w - \delta, w + \delta[,\ x \in]\lfloor w \rfloor, 1 + \lfloor w \rfloor[.$$
Pertanto $\lfloor x \rfloor = \lfloor w \rfloor$ cioè
$$|\lfloor x \rfloor - \lfloor w \rfloor| = 0 < \varepsilon.$$
- Sia ora $n \in \mathbb{Z}$. Poniamo $\varepsilon = 1$. $\forall\, \delta > 0$, sia
$$x = \max\left\{n - 1, n - \frac{\delta}{2}\right\}$$
allora
$$x \in [n - \frac{\delta}{2}, n[\subseteq]n - \delta, n + \delta[$$
e $\lfloor x \rfloor = n - 1$.

Pertanto $|\lfloor x \rfloor - \lfloor n \rfloor| = 1 \not< \varepsilon$, cioè la funzione è continua in alcuni punti, in altri no. □

5.6.1 Operazioni con le funzioni continue

Continuità della somma di funzioni continue

Teorema 5.11. *Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$. Se f e g sono:*

- *continue in $w \in A$,*
- *continue;*
- *uniformemente continue.*

Anche $f + g$ lo è.

Proof. Siano $\varepsilon > 0$ e $w \in A$ un punto in cui f e g sono continue. Per f trovo $\delta' > 0$ tale che
$$\forall\, x \in A \cap]w - \delta', w + \delta'[, \quad |f(x) - f(w)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Per g trovo $\delta'' > 0$ tale che
$$\forall\, x \in A \cap]w - \delta'', w + \delta''[, \quad |g(x) - g(w)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Sia $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$, allora abbiamo che $\forall\, x \in A \cap]w - \delta, w + \delta[$
$$\begin{aligned}|(f+g)(x) - (f+g)(w)| &= |f(x) + g(x) - (f(w) + g(w))| = |f(x) + g(x) - f(w) - g(w)| \\ &= |f(x) - f(w) + g(x) - g(w)| \le |f(x) - f(w)| + |g(x) - g(w)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$
□

Continuità della composizione di due funzioni continue

Teorema 5.12. *Siano $f : A \to B$ e $g : B \to \mathbb{R}$. Se f è continua in $w \in A$ e g è continua in $z = f(w) \in B$, allora $g \circ f$ è continua in w.*

Proof. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Sia f continua in w e g continua. Per ipotesi, trovo $\eta > 0$ tale che

$$\forall\, y \in B \cap]z-\eta, z+\eta[, \quad |g(y) - g(z)| < \varepsilon.$$

Trovo dunque $\delta > 0$ tale che

$$\forall\, x \in A \cap]w-\delta, w+\delta[, \quad |f(x) - f(w)| < \eta.$$

cioè

$$\forall\, x \in A \cap]w-\delta, w+\delta[, \quad f(x) \in B \cap]z-\eta, z+\eta[$$

da cui

$$|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(w)| = |g(f(x)) - g(f(w))| = |g(y) - g(z)| < \varepsilon.$$

□

Nota 15. Lo stesso vale se f e g sono continue o uniformemente continue, avremo cioè $g \circ f$ rispettivamente con la stessa continuità.

Continuità del prodotto di una costante per una funzione continua

Teorema 5.13. *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ continua in $w \in A$ e sia $k \in \mathbb{R}$. Allora $k \cdot f$ è continua in $w \in A$.*

Proof. Supponiamo $k \neq 0$ e fissiamo $\varepsilon > 0$. Sia ora $\delta > 0$ tale che

$$\forall\, x \in A \cap]w-\delta, w+\delta[, \quad |f(x) - f(w)| < \frac{\varepsilon}{|k|}.$$

Per ognuno di tali x si ha

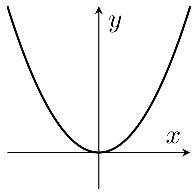
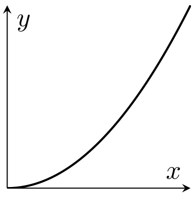
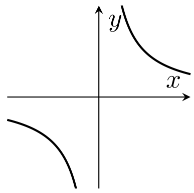
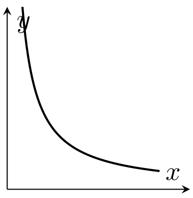
$$|kf(x) - kf(w)| = |k \cdot (f(x) - f(w))| = |k| \cdot |f(x) - f(w)| < \cancel{|k|} \cdot \frac{\varepsilon}{\cancel{|k|}} = \varepsilon,$$

da cui

$$|kf(x) - kf(w)| < \varepsilon.$$

□

Nota 16. Lo stesso vale se f è continua o uniformemente continua.

Funzione	Descrizione	Grafico
$\begin{aligned}\Psi: \quad & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \quad & \mapsto x^2\end{aligned}$	Continua	
$\begin{aligned}\Psi: \quad & [0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \quad & \mapsto x^2\end{aligned}$	Continua ma non uniformemente continua	
$\begin{aligned}\varphi: \quad & \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \\ x \quad & \mapsto \frac{1}{x}\end{aligned}$	Continua	
$\begin{aligned}\varphi: \quad &]0,1] \to \mathbb{R} \\ x \quad & \mapsto \frac{1}{x}\end{aligned}$	Continua ma non uniformemente continua	

Esempi di funzioni continue ma non uniformemente continue

Continuità della funzione seno

Proposizione 5.14. *La funzione seno è uniformemente continua.*

Proof. Sia $\varepsilon > 0$ e prendiamo $\delta = \varepsilon$. $\forall\, x, w \in \mathbb{R}$ con $|x - w| < \delta$ dimostriamo che $|\sin(x) - \sin(w)| < \varepsilon$.

$$\begin{aligned}|\sin(x) - \sin(w)| &= \left|2\sin\left(\frac{x-w}{2}\right)\cos\left(\frac{x+w}{2}\right)\right| = 2\left|\sin\left(\frac{x-w}{2}\right)\right| \cdot \left|\cos\left(\frac{x+w}{2}\right)\right| \\ &\leq 2\left|\sin\left(\frac{x-w}{2}\right)\right| \leq 2\left|\frac{x-w}{2}\right| = |x-w| < \delta = \varepsilon.\end{aligned}$$

□

Primo lemma del numero di Nepero

Lemma 5.15.

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad |e^t - 1| \leq e^{|t|} - 1$$

Proof.

- Se $t \geq 0$, allora avremo rispettivamente
  - $e^t \geq 1 \quad \Longrightarrow \quad e^t - 1 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad |e^t - 1| = e^t - 1;$
  - $|t| = t \quad \Longrightarrow \quad e^{|t|} - 1 = e^t - 1.$

  da cui ricaviamo
  $$e^t - 1 = e^t - 1.$$

- Se $t < 0$ allora $e^t < 1 \implies e^t - 1 < 0$ da cui
$$|e^t - 1| = -(e^t - 1) = 1 - e^t$$
da $1 = e^0 = e^{t-t}$, procediamo con
$$e^{t-t} - e^t = e^t(e^{-t} - 1) < e^{-t} - 1$$
da $t < 0$ abbiamo $|t| = -t$, per cui possiamo scrivere
$$e^{|t|} - 1 = e^{-t} - 1$$
quindi
$$|e^t - 1| < e^{-t} - 1 = e^{|t|} - 1 \implies |e^t - 1| < e^{|t|} - 1.$$

□

Secondo lemma del numero di Nepero

Lemma 5.16.
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad e^{\frac{1}{n}} - 1 \leq \frac{e-1}{n}.$$

Proof. Sia $b = e^{\frac{1}{n}} - 1$. Per la disuguaglianza di Bernoulli,
$$e = (1+b)^n \geq 1 + nb = 1 + n(e^{\frac{1}{n}} - 1).$$
Dunque
$$e \geq 1 + n(e^{\frac{1}{n}} - 1)$$
Ora, sottraendo -1 a entrambi i membri otteniamo
$$e - 1 \geq n(e^{\frac{1}{n}} - 1)$$
dividendo entrambi i membri per n, abbiamo
$$\frac{e-1}{n} \geq \frac{\cancel{n}(e^{\frac{1}{n}} - 1)}{\cancel{n}} = (e^{\frac{1}{n}} - 1).$$
Da cui ricaviamo
$$\frac{e-1}{n} \geq (e^{\frac{1}{n}} - 1).$$

□

Continuità della funzione esponenziale

Teorema 5.17. *La funzione esponenziale è continua.*

Proof. Sia $w \in \mathbb{R}$, allora $\forall \varepsilon > 0$, prendiamo un $n \in \mathbb{N}$ maggiore di $\dfrac{e^w(e-1)}{\varepsilon}$ e sia $\delta = \dfrac{1}{n}$ (> 0). Allora
$$\forall x \in \mathbb{R} : |x - w| < \delta, \quad |e^x - e^w| \ = \ e^w|e^{x-w} - 1| \ \leq \ e^w(e^{|x-w|} - 1).$$
Da $|x - w| < \delta$, abbiamo che
$$e^w(e^{|x-w|} - 1) < e^w(e^\delta - 1).$$
Ciò implica
$$e^w(e^\delta - 1) = e^w(e^{\frac{1}{n}} - 1) \implies e^w(e^{\frac{1}{n}} - 1) \leq \frac{e^w(e-1)}{n} < \varepsilon.$$

□

5.6.2 Continuità da destra e da sinistra

Continuità da destra e da sinistra

Definizione 5.25. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ e sia $w \in A$. Diciamo che f è **continua da sinistra** in w se

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \, : \, \forall x \in A \cap]w - \delta, w], \quad |f(x) - f(w)| < \varepsilon.$$

Mentre diciamo che f è **continua da destra** in w se

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \, : \, \forall x \in A \cap [w, w + \delta[, \quad |f(x) - f(w)| < \varepsilon.$$

Esempio 5.1. La funzione di Dirichlet non è continua nè da destra nè da sinistra, mentre la funzione parte intera è sempre continua da destra mentre nei numeri interi non è continua da sinistra.

Collegamento tra continuità e continuità da destra e da sinistra

Teorema 5.18. *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ e sia $w \in A$. Allora f è continua in w se e solo se lo è sia da destra sia da sinistra.*

Proof. Sia f continua in w, fissiamo un $\varepsilon > 0$. Per ipotesi

$$\exists \delta > 0 \, : \, \forall x \in A, \quad |x - w| < \delta \implies |f(x) - f(w)| < \varepsilon.$$

Quindi sia per le $x \in A \cap]w - \delta, w]$, sia per le $x \in A \cap [w, w + \delta[$ si avrà

$$|f(x) - f(w)| < \varepsilon.$$

Viceversa, sia f continua sia da destra sia da sinistra in w e fissiamo $\varepsilon > 0$, per la continuità da sinistra abbiamo che

$$\exists \delta' > 0 \, : \, \forall x \in A \cap]w - \delta', w], \quad |f(x) - f(w)| < \varepsilon.$$

Per la continuità da destra, abbiamo invece che

$$\exists \delta'' > 0 \, : \, \forall x \in A \cap [w, w + \delta''[, \quad |f(x) - f(w)| < \varepsilon.$$

Se dunque poniamo $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$, allora avremo che

$$\forall x \in A \cap]w - \delta, w + \delta[, \quad |f(x) - f(w)| < \varepsilon.$$

□

Continuità delle funzioni monotòne

Proposizione 5.19. *Siano $f : A \to \mathbb{R}$ monotòna e $w \in A$. Allora:*

1. *Se f è crescente e*
$$\exists\, f(w) = \sup\{\, f(x) \,|\, x \in A \wedge x < w \,\},$$
*allora f è **continua da sinistra** in w.*

2. *Se f è crescente e*
$$\exists\, f(w) = \inf\{\, f(x) \,|\, x \in A \wedge x > w \,\},$$
*allora f è **continua da destra** in w.*

3. *Se f è decrescente e*
$$\exists\, f(w) = \inf\{\, f(x) \,|\, x \in A \wedge x < w \,\},$$
*allora f è **continua da sinistra** in w.*

4. *Se f è decrescente e*
$$\exists\, f(w) = \sup\{\, f(x) \,|\, x \in A \wedge x > w \,\},$$

*allora f è **continua da destra** in w.*

Proof. Considerando la (1), le altre sono analoghe. Sia dunque f crescente e

$$f(w) = \sup\{\, f(x) \mid x \in A \,\land\, x < w \,\}.$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Per la caratterizzazione dell'estremo superiore esisterà $u \in A$, con $u < w$ tale che $f(u) > f(w) - \varepsilon$. Poniamo $\delta = w - u(> 0)$. Allora l'intervallo $A\cap]w-\delta, w]$ è riscrivibile come $A \cap]u, w]$. Abbiamo dunque che

$$\forall\, x \in A \cap]u, w], \quad f(w) - \varepsilon < f(u) \le f(x) \le f(w) < f(w) + \varepsilon$$

e cioè che

$$f(x) \in]f(w) - \varepsilon, f(w) + \varepsilon[\implies |f(x) - f(w)| < \varepsilon.$$

□

Continuità in una certa restrizione a sinistra

Proposizione 5.20. *La restrizione di f a $A_w^- = A \cap]-\infty, w]$, cioè la funzione $f_{\restriction\, A_w^-}(x)$, è continua da sinistra in w. Formalmente:*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \,:\, \forall\, x \in A_w^- \cap]w-\delta, w+\delta[,\ |f(x) - f(w)| < \varepsilon.$$

Proof. Infatti

$$A_w^- \cap]w-\delta, w+\delta[= (A \cap]-\infty, w]) \cap]w-\delta, w+\delta[= A \,\cap\, (\,]w-\delta, w+\delta[\cap]-\infty, w]\,) = A \cap]w-\delta, w].$$

I due insiemi sono uguali e le due condizioni sono equivalenti. □

Teorema 5.21. *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ monotòna. Se $f(A)$ è un intervallo, allora f è continua. (condizione sufficiente ma non necessaria).*

Proof. Prendiamo un qualunque $w \in A$ e dimostriamo che f è continua da sinistra e da destra in w. Ci limitiamo alla continuità da sinistra (analogamente da destra). Supponiamo f crescente. Se $w = \min A$ non c'è nulla da dimostrare perchè la funzione sarebbe automaticamente continua da sinistra (lo sarebbe perchè la restrizione ad $A \cap]-\infty, w]$ si ridurrebbe ad un singoletto). Altrimenti esiste almeno un $\nu \in A$ tale che $\nu < w$. Poniamo

$$s = \sup\{f(x) \mid x \in A \,\land\, x < w\},$$

essendo la funzione crescente è $s \le f(w)$ (dobbiamo dimostrare che $s = f(w)$). Supponiamo per assurdo $s < f(w)$ e sia $y \in]s, f(w)[$.

- **Caso 1:** $x \in A$ con $x < w \quad f(x) < s < y < f(w)$.
- **Caso 2:** $x \in A$ con $x \ge w \quad f(x) \ge f(w) > y$.

In ogni caso $y \notin f(A)$. D'altra parte, ricordiamo che c'è $\nu \in A$ con $\nu < w$, allora $f(\nu) \le s < y < f(w)$, per cui $y \in [f(\nu), f(w)[$ con $f(\nu), f(w) \in f(A)$. Quindi anche $y \in f(A)$, per cui si ha una contraddizione. y non può contemporaneamente appartenere e non appartenere a $f(A)$ □

Continuità dell'inversa di una funzione strettamente monotòna

Corollario 4. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ strettamente monotòna con I intervallo. Allora f è invertibile e la sua inversa è continua.*

Nota 17. Con ciò possiamo affermare che tutte le funzioni elementari sono continue nel loro dominio.

5.6.3 Classificazione dei punti di discontinuità

Discontinuità di prima e di seconda specie

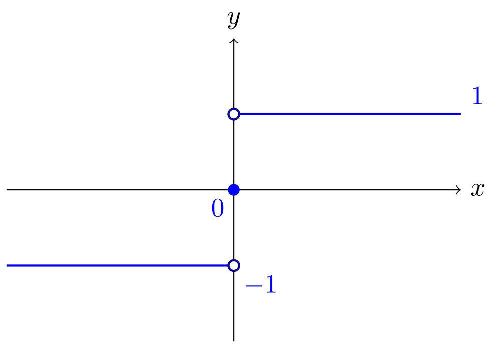
Definizione 5.26. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ e $w \in A$. Se f non è continua in w, diciamo che w è un **punto di discontinuità** per f. Un punto di discontinuità $w \in A$ per una $f : A \to \mathbb{R}$ si dice di 1° o 2° specie, a seconda che valgano o no le seguenti condizioni:

1. $\exists\, f_- : A \to \mathbb{R}$, continua da sinistra in w e tale che $\forall\, x \in A \setminus \{w\}$ si abbia $f_-(x) = f(x)$;
2. $\exists\, f_+ : A \to \mathbb{R}$, continua da destra in w e tale che $\forall\, x \in A \setminus \{w\}$ si abbia $f_+(x) = f(x)$.

Se entrambe queste condizioni sono soddisfatte, il punto di discontinuità è detto di prima specie. Se almeno una di queste condizioni non è soddisfatta, il punto di discontinuità è detto di seconda specie.

Esempio 5.2. La funzione segno definita con

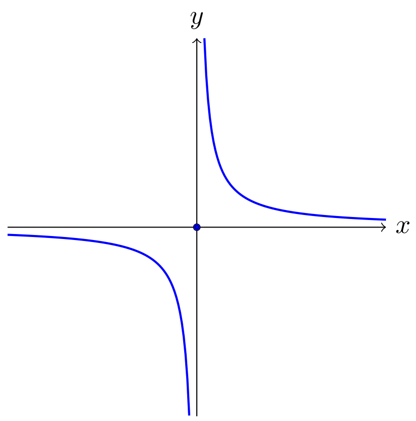
$$\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$



è una funzione che presenta una discontinuità di prima specie, la si può cioè rendere continua solo da destra o solo da sinistra)

Esempio 5.3. La funzione definita con

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



è una funzione che presenta una discontinuità di seconda specie. Non si riesce a rettificarla per farla diventare continua nè da destra nè da sinistra

Esempio 5.4. La funzione di Dirichlet è una funzione in cui non basta modificare il valore in un punto per farla diventare continua.

Discontinuità eliminabile

Definizione 5.27. Una discontinuità di 1° specie è **eliminabile** se $\exists\, f_\star : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che (1) e (2) siano verificate ed inoltre $f_- = f_\star$ e $f_+ = f_\star$ rispettivamente. Quindi $f_\star$ è continua in w e

$$\forall\, x \in A \setminus \{w\}, \quad f_\star(x) = f(x).$$

Discontinuità di una funzione monotòna

Teorema 5.22. *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ monotòna e discontinua in w. Allora tale discontinuità è di 1° specie.*

5.7 Intorni

Intorno e collezione di intorni di un punto

Definizione 5.28. Sia $a \in \mathbb{R}$. Si chiama **intorno** di centro a e raggio $\delta > 0$, l'insieme

$$I_a(\delta) =]a - \delta, a + \delta[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, |x - a| < \delta\}.$$

L'insieme

$$\mathcal{I}_a = \{I_a(\delta) \,|\, \delta > 0\}$$

è detto **collezione degli intorni di** a.

Intorno relativizzato

Definizione 5.29. Siano $a \in A \subseteq \mathbb{R}$ e $I \in \mathcal{I}_a$. Diciamo che $I \cap A$ è un **intorno relativo** (o **relativizzato**).

Caratterizzazione della continuità mediante intorni

Nota 18. Con queste definizioni si ha che una $f : A \to \mathbb{R}$ è continua in $w \in A$ se e solo se

$$\forall\, J \in \mathcal{I}_{f(w)},\ \exists\, I \in \mathcal{I}_w \ :\ f(I \cap A) \subseteq J.$$

Intorno destro e intorno sinistro

Definizione 5.30. Siano $a \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$, chiamiamo:

- **Intorno destro** di a l'intervallo
$$I_a^+(\delta) =]a, a + \delta[\ ;$$
- **Intorno sinistro** di a l'intervallo
$$I_a^-(\delta) =]a - \delta, a[\ .$$

Seguono rispettivamente i seguenti insiemi:

- **Collezione degli intorni destri di** a.
$$\mathcal{I}_a^+ = \{I_a^+(\delta) \,|\, \delta > 0\}$$

- **Collezione degli intorni sinistri di** a.

$$\mathcal{I}_a^- = \{I_a^-(\delta) \mid \delta > 0\}$$

Intorni infiniti

Definizione 5.31. Sia $a \in \mathbb{R}$, chiamiamo:

- **Intorno di più infinito** un qualsiasi intervallo aperto illimitato superiormente:

$$I_{+\infty}(a) =]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\} .$$

- **Intorno di meno infinito** un qualsiasi intervallo aperto illimitato inferiormente:

$$I_{-\infty}(a) =]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\} ;$$

Avremo dunque rispettivamente i seguenti insiemi:

- **Collezione degli intorni di più infinito**.

$$\mathcal{I}_{+\infty} = \{I_{+\infty}(a) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

- **Collezione degli intorni di meno infinito**.

$$\mathcal{I}_{-\infty} = \{I_{-\infty}(a) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

Dati $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, si definisce inoltre **intorno di infinito** l'unione tra un intorno di $-\infty$ e un intorno di $+\infty$, cioè:

$$I_\infty(a, b) = I_{-\infty}(a) \cup I_{+\infty}(b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a \vee x > b\}$$

Analogamente al caso di un punto reale a, possiamo parlare di **intorno circolare di infinito**:

$$I_\infty(a) =]-\infty, -a[\cup]a, +\infty[\quad a \in \mathbb{R}.$$

5.8 Teoremi importanti sulle funzioni

Teorema della permanenza del segno

Teorema 5.23. *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ continua in $w \in A$ con $f(w) > 0$ ($f(w) < 0$). Allora*

$$\exists\, I \in \mathcal{I}_w \,:\, \forall\, x \in I \cap A, \quad f(x) > 0 \quad (f(x) < 0).$$

Proof. Sia $\varepsilon = f(w) > 0$. Per la continuità abbiamo che

$$\exists\, \delta > 0 \,:\, f(I_w(\delta) \cap A) \subseteq I_{f(w)}(\varepsilon) =]f(w) - \varepsilon, f(w) + \varepsilon[=]0, 2f(w)[.$$

Quindi

$$\forall\, x \in I_w(\delta) \cap A, \quad f(x) \in]\, 0 \,,\, 2f(w)\, [\quad \therefore \quad f(x) > 0.$$

□

Teorema di esistenza degli zeri

Teorema 5.24. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua il cui dominio è un intervallo chiuso e limitato. Se $f(a) < 0$*

e $f(b) > 0$, allora

$$\exists\, c \in\,]a, b[\, :\; f(c) = 0.$$

Proof. Sia

$$E = \{x \in [a, b] \mid f(x) < 0\}$$

poichè $a \in E$ si ha $E \neq \emptyset$. Inoltre $E \subseteq [a, b]$ ed è perciò un insieme limitato, e quindi ponendo $\sup(E) = s \in [a, b]$, avremo $a \leq s \leq b$. Dimostriamo che non si può avere $f(s) < 0$, nè $f(s) > 0$ e perciò avremo $f(s) = 0$.

- Se $f(s) < 0$, anzitutto $s < b$ (perchè $f(b) > 0$).
  Per il teorema di permanenza del segno

  $$\exists\, \delta > 0 \;:\; \forall\, x \in\,]s - \delta, s + \delta[\, \cap [a, b], \quad f(x) < 0.$$

  Sia ora

  $$y = \min\left\{s + \frac{\delta}{2}, b\right\},$$

  allora $y > s$ e $[s, y]$ è un intervallo. Abbiamo dunque che

  $$\forall\, x \in\; [s, y],\; x \in\,]s - \delta, s + \delta[\, \cap [a, b]$$

  per cui $f(x) < 0$. Da ciò segue $f(y) < 0$, il che è assurdo poichè $y \notin E$ essendo y maggiore dell'estremo superiore di E.

- Se $f(s) > 0$, anzitutto $s > a$ (perchè $f(a) < 0$).
  Per il teorema di permanenza del segno,

  $$\exists\, \delta > 0 \;:\; \forall\, x \in\,]s - \delta, s + \delta[\, \cap [a, b], \quad f(x) > 0.$$

  Sia

  $$z = \max\left\{s - \frac{\delta}{2}, a\right\},$$

  allora $z < s$ e $[z, s]$ è un intervallo. Abbiamo dunque che

  $$\forall\, x \in\; [z, s],\; x \in\,]s - \delta, s + \delta[\, \cap [a, b]$$

  per cui $f(x) > 0$. Da cui $f(z) > 0$, per cui $z \notin E$, così come non appartengono ad E tutte le $x \in [z, s]$. Dunque $E \subseteq [a, z]$ e $\sup E \leq z$, il che è assurdo perchè $\sup E = s > z$.

□

Teorema dei valori intermedi

Teorema 5.25. *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Se $f : I \to \mathbb{R}$ è continua, anche $f(I)$ è un intervallo (eventualmente degenere). Equivalentemente, $\forall\, \alpha, \beta \in f(I)$ con $\alpha < \beta$ e $\forall\, y \in\,]\alpha, \beta[$, $y \in f(I)$. Cioè*

$$\exists\, x \in I : f(x) = y.$$

Proof. Siano $\alpha, \beta \in f(I)$ con $\alpha < \beta$, e possiamo prendere $a, b \in I$ tali che $f(a) = \alpha$ e $f(b) = \beta$. Possiamo supporre che $a < b$ (ovvero $a \neq b$). Sia ora $y \in\,]\alpha, \beta[$, diciamo che

$$\exists\, c \in\,]a, b[\, \subseteq I \;:\; f(c) = y.$$

Sia

$$\begin{aligned} g : I &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) - y \end{aligned}$$

avremo allora

$$\begin{aligned} g(a) &= f(a) - y = \alpha - y < 0 \\ g(b) &= f(b) - y = \beta - y > 0 \end{aligned}$$

Per il teorema degli zeri,

$$\exists\, c \in\,]a, b[\, :\; g(c) = 0$$

ossia $f(c) = y$. □

Caratterizzazione delle funzioni continue invertibili

Proposizione 5.26. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ continua con I intervallo. Allora f è invertibile se e solo se è strettamente monotòna.*

Proof. Sia f invertibile, e supponiamo non strettamente monotòna, allora abbiamo che

$$\exists\, p, q, r \in I \ (p < q < r) \ : \ f(q) \notin]f(p), f(r)[,$$

quindi

$$f(q) < \min\{f(p), f(r)\} \quad \vee \quad f(q) > \max\{f(p), f(r)\}.$$

Se $f(q) < f(p)$, allora $f(p) \in]f(q), f(r)[$. Per il teorema dei valori intermedi applicato a $f \in [q, r]$ troviamo

$$c \in]q, r[: \ f(c) = f(p).$$

Ma $c \neq p$, dunque è assurdo. □

Continuità dell'inversa di una funzione continua

Corollario 5. *Se $f : I \to \mathbb{R}$ è continua e invertibile con I intervallo, anche l'inversa di f è continua.*

Proof. Infatti f è strettamente monotòna per la proposizione precedente. □

Criterio di continuità per le funzioni monotòne

Teorema 5.27. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ monotòna con I intervallo. Allora*

$$f \text{ è continua} \quad \Longleftrightarrow \quad f(I) \text{ è un intervallo.}$$

5.9 Punti isolati, punti esterni e punti di accumulazione

Punti isolati, punti esterni e punti di accumulazione

Definizione 5.32. Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{R}$. Diciamo che:

- p è un punto **isolato** di A se ($p \in A$)
$$\exists\, I \in \mathcal{I}_p \ : \ I \cap A = \{p\};$$
- p è un punto **esterno** di A se ($p \notin A$)
$$\exists\, I \in \mathcal{I}_p \ : \ I \cap A = \emptyset;$$
- p è un punto **di accumulazione** per A se
$$\forall\, I \in \mathcal{I}_p,\ I \cap A \setminus \{p\} \neq \emptyset.$$
L'insieme dei punti di accumulazione si indica con
$$\mathcal{D}(A) = \{\, p \in \mathbb{R} \mid p \text{ è di accumulazione per } A \,\}.$$

Nota 19. Dalla definizione segue subito

$$p \in \mathcal{D}(A) \iff p \in \mathcal{D}(A \setminus \{p\}) \iff p \in \mathcal{D}(A \cup \{p\}).$$

Cioè che p può appartenere o no ad A.

Esempio 5.5.

1. $$p \in A, \quad p \in \mathcal{D}(A), \quad p = 0, \quad A = [0, 1]$$
   (in generale, se A intervallo non degenere).
2. $$p \in A, \quad p \notin \mathcal{D}(A), \quad p = 0, \quad A = \{0\}$$
   (anche se $A \subseteq \mathbb{Z}$ e $p \in A$).
3. $$p \notin A, \quad p \in \mathcal{D}(A), \quad p = 0, \quad A =]0, 1]$$
   anche $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $p \in \mathbb{Q}$ viceversa, $A = \mathbb{Q}$, $p \in \mathbb{Q}$.
4. $$p \notin A, \quad p \notin \mathcal{D}(A), \quad p = 0, \quad A = \emptyset \ \vee \ A = [1, +\infty[.$$
5. Se $p \notin \mathcal{D}(A)$, allora p è isolato in A se $p \in A$ ed esterno in A se $p \notin A$.

Continuità in un punto isolato

Proposizione 5.28. *Siano $f : A \to \mathbb{R}$ e p un punto isolato. Allora f è continua in p.*

Proof. Per ipotesi

$$\exists\, \delta > 0 \ : \ I_p(\delta) \cap A = \{p\}.$$

Sia $\varepsilon > 0$, allora

$$\forall\, x \in I_p(\delta) \cap A, \quad x = p,$$

quindi

$$|f(x) - f(p)| = 0 < \varepsilon.$$

□

Collegamento tra punti di discontinuità e punti di accumulazione

Corollario 6. *Sia $p \in A$ punto di discontinuità per $f : A \to \mathbb{R}$. Allora p è punto di accumulazione per A.*

Proposizione 5.29. *Siano $w \in A$ e*

$$f : A \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & x \neq w \\ y \neq 0 & x = w \end{cases} .$$

Allora $\forall\, y \neq 0$, f è discontinua in w se e solo se $w \in \mathcal{D}(A)$.

Proof.

$\Longrightarrow$ Se f è discontinua, allora $w \in \mathcal{D}(A)$ per il corollario (6).

$\Longleftarrow$ Viceversa, se f fosse continua allora per il teorema di permanenza del segno,

$$\exists\, I \in \mathcal{I}_w \,:\, \forall\, x \in A \cap I, \quad f(x) \neq 0.$$

Quindi $A \cap I = \{w\}$. Pertanto w è isolato in A, per cui $w \notin \mathcal{D}(A)$.

$\square$

Part III
Limiti e Successioni

6 Limiti

Limiti fondamentali delle funzioni elementari

$$\lim_{x\to\infty} c = c$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} x = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} \tan x = -\infty \qquad \lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+} \tan x = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \log x = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty$$

Limiti notevoli

Limiti notevoli di funzioni esponenziali e logaritmiche

Logaritmo Naturale

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{f(x)\to 0} \frac{\ln(1+f(x))}{f(x)} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\ln(1+x)} = \lim_{f(x)\to 0} \frac{f(x)}{\ln(1+f(x))} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+nx)}{mx} = \lim_{f(x)\to 0} \frac{\ln(1+nf(x))}{mf(x)} = \frac{n}{m}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{mx}{\ln(1+nx)} = \lim_{f(x)\to 0} \frac{mf(x)}{\ln(1+nf(x))} = \frac{m}{n}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)} = \frac{a}{b}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x - \ln a}{x-a} = \lim_{f(x)\to 0} \frac{\ln f(x) - \ln a}{f(x)-a} = \frac{1}{a}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-a}{\ln x - \ln a} = \lim_{f(x)\to 0} \frac{f(x)-a}{\ln f(x) - \ln a} = a$$

Logaritmo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{f(x)\to 0} \frac{\log_a(1+f(x))}{f(x)} = \frac{1}{\ln(a)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\log_a(1+x)} = \lim_{f(x)\to 0} \frac{f(x)}{\log_a(1+f(x))} = \ln(a)$$

Potenza

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^\alpha-1}{x-1}=\alpha$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n+a^{bx^n}}{x^n}=ab$$

Esponenziale Naturale

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{f(x)\to 0}\frac{e^{f(x)}-1}{f(x)}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}=\lim_{f(x)\to 0}\frac{f(x)}{e^{f(x)}-1}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{bx}=\lim_{f(x)\to 0}\frac{e^{af(x)}-1}{bf(x)}=\frac{a}{b}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{bx}{e^{ax}-1}=\lim_{f(x)\to 0}\frac{bf(x)}{e^{af(x)}-1}=\frac{b}{a}$$

Esponenziale con Base Arbitraria

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{f(x)\to 0}\frac{a^{f(x)}-1}{f(x)}=\ln(a)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{a^x-1}=\lim_{f(x)\to 0}\frac{f(x)}{a^{f(x)}-1}=\frac{1}{\ln(a)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^{mx}-1}{nx}=\lim_{f(x)\to 0}\frac{a^{mf(x)}-1}{nf(x)}=\frac{m\ln(a)}{n}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{nx}{a^{mx}-1}=\lim_{f(x)\to 0}\frac{nf(x)}{a^{mf(x)}-1}=\frac{n}{m\ln(a)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x-1}=a^x\ln(a)$$

Numero di Nepero

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{f(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+a}\right)^x \quad a\in\mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{nx}=e^{kn}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{e^x-e^a}{x-a}=e^a$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+cx^n)^{\frac{k}{cx^n}}=e^{kc}$$

Potenza con Differenza

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^c-1}{x}=\lim_{f(x)\to 0}\frac{(1+f(x))^c-1}{f(x)}=c$$

Limiti Notevoli di Funzioni Trigonometriche

Seno

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{f(x)\to 0}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^n x}{\sin x^n}=\lim_{f(x)\to 0}\frac{\sin^n f(x)}{\sin f^n(x)}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^n}{\sin^n x}=\lim_{f(x)\to 0}\frac{\sin f^n(x)}{\sin^n f(x)}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin nx}{mx}=\frac{n}{m}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{mx}{\sin nx}=\frac{m}{n}$$

Coseno

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{f(x)\to 0}\frac{1-\cos f(x)}{f^2(x)}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{f(x)\to 0}\frac{1-\cos f(x)}{f(x)}=0$$

Tangente

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{f(x)\to 0}\frac{\tan f(x)}{f(x)}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=\lim_{f(x)\to 0}\frac{f(x)}{\tan f(x)}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan^n x}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{x^n}{\tan^n x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan mx}{nx}=\frac{m}{n}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{nx}{\tan mx}=\frac{n}{m}$$

Arcoseno

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{f(x)\to 0}\frac{\arcsin f(x)}{f(x)}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\arcsin x}=\lim_{f(x)\to 0}\frac{f(x)}{\arcsin f(x)}=1$$

Arcocoseno

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arccos^2(1-x)}{x}=2$$

Arcotangente

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=\lim_{f(x)\to 0}\frac{\arctan f(x)}{f(x)}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\arctan x}=\lim_{f(x)\to 0}\frac{f(x)}{\arctan f(x)}=1$$

6.1 Limite finito per x che tende a p

Limite finito per x che tende a p

Definizione 6.1. Siano $f : A \to \mathbb{R}$ e $p \in \mathcal{D}(A)$. Diciamo che $l \in \mathbb{R}$ è **limite** di f in p se

$$\forall \varepsilon > 0, \; \exists \delta > 0 \, : \, \forall x \in A \cap I_p(\delta) \setminus \{p\}, \quad |\, f(x) - l \,| < \varepsilon$$

equivalentemente

$$\forall J \in \mathcal{I}_l, \; \exists I \in \mathcal{I}_p \, : \, f(A \cap I \setminus \{p\}) \subseteq J.$$

Se l esiste è unico e scriveremo

$$l = \lim_{x \to p} f(x).$$

Collegamento tra continuità e limiti di funzioni

Proposizione 6.1. *Se $p \in \mathcal{D}(A)$ allora*

$$f : A \to \mathbb{R} \;\text{ è continua in } p \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{x \to p} f(x) = f(p).$$

6.2 Limite infinito per x che tende a p

Limite $+\infty$ per x che tende a p

Definizione 6.2. Siano $f : A \to \mathbb{R}$ e $p \in \mathcal{D}(A)$. Diciamo che $+\infty$ è limite di f in p se:

$$\forall M > 0, \; \exists I \in \mathcal{I}_p \; : \, \forall x \in A \cap I \setminus \{p\}, \quad f(x) > M.$$

Scriveremo

$$\lim_{x \to p} f(x) = +\infty.$$

Nota 20. Si dice anche che la funzione f **diverge positivamente**.

Limite $-\infty$ per x che tende a p

Definizione 6.3. Siano $f : A \to \mathbb{R}$ e $p \in \mathcal{D}(A)$. Diciamo che $-\infty$ è limite di f in p se:

$$\forall M > 0, \; \exists I \in \mathcal{I}_p \; : \, \forall x \in A \cap I \setminus \{p\}, \quad f(x) < -M.$$

Scriveremo:

$$\lim_{x \to p} f(x) = -\infty.$$

Nota 21. Si dice anche che la funzione f **diverge negativamente**.

I limiti destro e sinistro infiniti

Nota 22. Anche per i limiti infiniti si possono distinguere limiti destri e limiti sinistri:

- $\lim_{x \to p^+} f(x) = +\infty$

$$\forall M > 0, \; \exists I \in \mathcal{I}_p^+ \; : \, \forall x \in A \cap I \setminus \{p\}, \quad f(x) > M;$$

- $\lim\limits_{x\to p^-} f(x) = +\infty$
$$\forall\, M > 0,\ \exists\, I \in \mathcal{I}_p^- \ :\ \forall\, x \in A \cap I \setminus \{p\}, \quad f(x) > M;$$
- $\lim\limits_{x\to p^+} f(x) = -\infty$
$$\forall\, M > 0,\ \exists\, I \in \mathcal{I}_p^+ \ :\ \forall\, x \in A \cap I \setminus \{p\}, \quad f(x) < -M;$$
- $\lim\limits_{x\to p^-} f(x) = -\infty$
$$\forall\, M > 0,\ \exists\, I \in \mathcal{I}_p^- \ :\ \forall\, x \in A \cap I \setminus \{p\}, \quad f(x) < -M.$$

6.3 Limite finito di una funzione per x che tende a infinito

Limite finito di una funzione per x che tende a ∞

Definizione 6.4. Sia $f : A \to \mathbb{R}$. Diciamo che

- $l \in \mathbb{R}$ è limite di f in $+\infty$, e scriviamo $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$, se
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, M > 0\ :\ \forall\, x > M, \quad |f(x) - l| < \varepsilon;$$
- $l \in \mathbb{R}$ è limite di f in $-\infty$, e scriviamo $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$, se
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, M > 0\ :\ \forall\, x < -M, \quad |f(x) - l| < \varepsilon.$$

6.4 Limite infinito di una funzione per x che tende a infinito

Limite ∞ di una funzione per x che tende a ∞

Definizione 6.5. Sia $f : A \to \mathbb{R}$. Diciamo che

- $+\infty$ è il limite di f in $+\infty$, e scriviamo $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, se
$$\forall\, M > 0,\ \exists\, c > 0\ :\ \forall\, x > c,\ f(x) > M;$$
- $+\infty$ è il limite di f in $-\infty$, e scriviamo $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, se
$$\forall\, M > 0,\ \exists\, c > 0\ :\ \forall\, x < -c,\ f(x) > M;$$
- $-\infty$ è il limite di f in $+\infty$, e scriviamo $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, se
$$\forall\, M > 0,\ \exists\, c > 0\ :\ \forall\, x > c,\ f(x) < -M;$$
- $-\infty$ è il limite di f in $-\infty$, e scriviamo $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, se
$$\forall\, M > 0,\ \exists\, c > 0\ :\ \forall\, x < -,\ f(x) < -M;$$

6.5 Punti di accumulazione in senso lato

Definizione 6.6. Siano $p \in \overline{\mathbb{R}}$ e $A \subseteq \mathbb{R}$. Diciamo che p è **punto di accumulazione in senso lato** per A e scriviamo $p \in \overline{\mathcal{D}}(A)$ se

$$\forall I \in \mathcal{I}_p, \quad A \cap I \setminus \{p\} \neq \emptyset.$$

Nota 23. In particolare :

$$+\infty \in \overline{\mathcal{D}}(A) \iff A \text{ è illimitato superiormente, e } -\infty \in \overline{\mathcal{D}}(A) \iff A \text{ è illimitato inferiormente.}$$

Proposizione 6.2. *Siano p, q punti distinti di $\overline{\mathbb{R}}$, allora*

$$\exists I \in \mathcal{I}_p,\ J \in \mathcal{I}_q \ :\ I \cap J = \emptyset.$$

Proof. Possiamo supporre $p < q$.

$p = -\infty,\ q \in \mathbb{R}$
Prendiamo $\varepsilon > 0$ e sia $k > 0$ con $k > -q + \varepsilon$, così $-k < q - \varepsilon$. Quindi gli intorni

$$I =]-\infty, -k[\quad \text{e} \quad J =]q - \varepsilon, q + \varepsilon[$$

sono disgiunti.

$p = -\infty,\ q = +\infty$

$$\forall k > 0,\ \forall M > 0, \quad I =]-\infty, -k[\quad \text{e} \quad J =]M, +\infty[$$

sono disgiunti.

$p \in \mathbb{R},\ q \in \mathbb{R}$
Poniamo

$$\varepsilon = \frac{q - p}{2} > 0,$$

allora

$$p + \varepsilon = q - \varepsilon = \frac{p + q}{2}.$$

Gli intorni

$$I =]p - \varepsilon, p + \varepsilon[\quad \text{e} \quad J =]q - \varepsilon, q + \varepsilon[.$$

sono disgiunti.

$p \in \mathbb{R},\ q = +\infty$
Prendiamo $\varepsilon > 0$ e $k > 0$ con $k > p + \varepsilon$. Gli intorni

$$I =]p - \varepsilon, p + \varepsilon[\quad \text{e} \quad J =]k, +\infty[$$

sono disgiunti.

□

6.6 Unicità del limite

Unicità del limite

Corollario 7. *Il limite di una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ in un punto $p \in \overline{\mathcal{D}}(A)$, se esiste è unico.*

Proof. Supponiamo per assurdo che l', l'' siano entrambi limiti di f in p con $l' \neq l''$. Per la proprietà precedente abbiamo che

$$\exists\, J' \in \mathcal{I}_{l'},\, J'' \in \mathcal{I}_{l''} \;:\; J' \cap J'' = \emptyset.$$

Per la definizione di limite, abbiamo che

$$\exists\, I', I'' \in \mathcal{I}_p \,:\, f(I' \cap A \setminus \{p\}) \subseteq J' \quad \wedge \quad f(I'' \cap A \setminus \{p\}) \subseteq J''.$$

Sia ora $I = I' \cap I'' \in \mathcal{I}_p$, si ha che

$$f(I \cap A \setminus \{p\}) \subseteq f(I' \cap A \setminus \{p\}) \quad \wedge \quad f(I \cap A \setminus \{p\}) \subseteq f(I'' \cap A \setminus \{p\}),$$

cioè

$$f(I \cap A \setminus \{p\}) \subseteq J' \cap J'' = \emptyset.$$

da cui $I \cap A \setminus \{p\} = \emptyset$, il che è impossibile con l'ipotesi che sia p punto di accumulazione. □

6.7 Operazioni con i limiti

Operazioni con i limiti

Teorema 6.3. *Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$ e $p \in \overline{\mathcal{D}}(A)$ e supponiamo che esistano*

$$\lim_{x \to p} f(x) = l \quad \text{e} \quad \lim_{x \to p} g(x) = m.$$

Allora

1. $\lim_{x \to p} (f + g)(x) = l + m$ *eccetto il caso in cui $l = -\infty$ e $m = +\infty$ (o viceversa);*
2. $\lim_{x \to p} (f \cdot g)(x) = l \cdot m$ *eccetto il caso in cui $l = \pm\infty$ e $m = 0$ (o viceversa).*

6.8 Limite della composizione di due funzioni

Primo teorema sul limite della composizione

Teorema 6.4. *Siano*

$$f : A \to B \text{ con } p \in \overline{\mathcal{D}}(A) \;\text{ e }\; g : B \to \mathbb{R} \text{ con } q \in \overline{\mathcal{D}}(B).$$

Supponiamo che

$$\lim_{x \to p} f(x) = q \quad \text{e che} \quad \lim_{y \to q} g(y) = l \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Allora possiamo dire che

$$p \notin \overline{\mathcal{D}}(f^{-1}(\{q\})) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to p} (g \circ f)(x) = l.$$

Proof. Sia $J \in \mathcal{I}_l$. Poichè $\lim_{y \to q} g(y) = l$, abbiamo che

$$\exists\, H \in \mathcal{I}_q \;:\; g(B \cap H \setminus \{q\}) \subseteq J.$$

In corrispondenza a H, trovo $I' \in \mathcal{I}_p$ tale che

$$f(A \cap I' \setminus \{p\}) \subseteq H \subseteq B.$$

Ora, poichè $p \notin \overline{\mathcal{D}}(f^{-1}(\{q\}))$, posso trovare $I'' \in \mathcal{I}_p$ tale che

$$f^{-1}(\{q\}) \cap I'' \setminus \{p\} = \emptyset$$

cioè tale che

$$\forall\, x \in A \cap I'' \setminus \{p\}, \quad f(x) \neq q.$$

In altri termini,

$$f(A \cap I'' \setminus \{p\}) \subseteq B \cap H \setminus \{q\},$$

e cioè

$$g(f(A \cap I'' \setminus \{p\})) \subseteq g(B \cap H \setminus \{q\}) \subseteq J.$$

□

Secondo teorema sul limite della composizione

Teorema 6.5. *Siano*

$$f : A \to B \text{ con } p \in \overline{\mathcal{D}}(A) \;\text{ e }\; g : B \to \mathbb{R} \text{ con } q \in \overline{\mathcal{D}}(B) \cap B.$$

Supponiamo che $\lim_{x \to p} f(x) = q$ *e che* g *sia continua in* q*. Allora*

$$\lim_{x \to p} (g \circ f)(x) = g(q) = g(\lim_{x \to p} f(x)).$$

Proof. Sia $J \in \mathcal{I}_{g(q)}$. Poichè g è continua in q,

$$\exists\, H \in \mathcal{I}_q \,:\, g(B \cap H) \subseteq J.$$

Sia ora $I \in \mathcal{I}_p$ tale che

$$f(A \cap I \setminus \{p\}) \subseteq H \subseteq B.$$

Quindi

$$g(f(A \cap I \setminus \{p\})) \subseteq g(B \cap H) \subseteq J.$$

□

Proposizione 6.6. *Sia* $E = \{z_1, ..., z_n\} \subseteq \mathbb{R}$*. Allora* $\overline{\mathcal{D}}(E) = \emptyset$*.*

Proof. Anzitutto $\pm\infty \notin \overline{\mathcal{D}}(E)$ perchè E è limitato. Sia poi $p \in \mathbb{R}$, allora se $E = \{p\}$, abbiamo che

$$\forall\, I \in \mathcal{I}_p, \quad E \cap I \setminus \{p\} = \{p\} \setminus \{p\} \cap I = \emptyset \cap I = \emptyset.$$

Altrimenti, sia

$$\delta = \min\{|x - p| \,:\, x \in E \setminus \{p\}\},$$

allora $\delta > 0$ e

$$E \cap I_p(\delta) \setminus \{p\} = \emptyset.$$

□

6.9 Limiti di restrizioni

Proposizione 6.7. *Siano* $f : A \to \mathbb{R}$ *con* $p \in \overline{\mathcal{D}}(A)$ *e* $B \subseteq A$ *tale che* $p \in \overline{\mathcal{D}}(B)$*. Allora*

$$\lim_{x \to p} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}} \implies \lim_{x \to p} f_{\restriction\, B}(x) = l.$$

Supponiamo inoltre che

$$\exists\, H \in \mathcal{I}_p \,:\, B \subseteq A \cap H \setminus \{p\},$$

allora

$$\lim_{x\to p} f(x) = l \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to p} f_{\restriction B}(x) = l.$$

6.10 Limite da destra e limite da sinistra

Definizione 6.7. Siano $f : A \to \mathbb{R}$ e $p \in \mathcal{D}(A)$. Consideriamo gli insiemi

$$A_p^+ = \{x \in A \,|\, x \geq p\} = A \cap [p, +\infty[\qquad \wedge \qquad A_p^- = \{x \in A \,|\, x \leq p\} = A \cap]-\infty, p].$$

Supponiamo che $p \in \mathcal{D}(A_p^+)$, in tal caso diremo che p è **punto di accumulazione da destra** per A e, se abbiamo che

$$\lim_{x\to p} f_{\restriction A_p^+}(x) = l \in \overline{\mathbb{R}},$$

allora chiameremo l **limite da destra** di f in p, e scriveremo

$$l = \lim_{x\to p^+} f(x).$$

Analogamente, sia $p \in \mathcal{D}(A_p^-)$, in tal caso diremo che p è **punto di accumulazione da sinistra** per A e, se abbiamo che

$$\lim_{x\to p} f_{\restriction A_p^-}(x) = l \in \overline{\mathbb{R}},$$

allora chiameremo l **limite da sinistra** di f in p, e scriveremo

$$l = \lim_{x\to p^-} f(x).$$

Nota 24. Se $p \in \mathcal{D}(A_p^-)$ scriveremo $p \in \mathcal{D}^-(A)$. Ciò signfica che

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \overbrace{A \cap]-\infty, p]}^{A_p^-} \cap \overbrace{]p-\varepsilon, p+\varepsilon[}^{I_p(\varepsilon)} \setminus \{p\} \neq \emptyset.$$

Ossia

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad A_p^- \cap I_p(\varepsilon) \setminus \{p\} = A \cap]-\infty, p] \cap]p-\varepsilon, p+\varepsilon[\setminus \{p\} = A \cap]p-\varepsilon, p[\neq \emptyset.$$

Teorema 6.8. *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ e supponiamo $p \in \mathcal{D}^+(A) \cap \mathcal{D}^-(A)$. Allora*

$$\lim_{x\to p} f(x) = l \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to p^+} f(x) = \lim_{x\to p^-} f(x) = l.$$

Proof.

$\Longrightarrow$ Necessità già vista.

$\Longleftarrow$ Sia $J \in \mathcal{I}_l$, per ipotesi

$$\exists\, \delta', \delta'' > 0 \,:\, f(A \cap]p-\delta', p[\,) \subseteq J \quad \text{e} \quad f(A \cap]p, p+\delta''[\,) \subseteq J.$$

Posto

$$\delta = \min\{\delta', \delta''\}$$

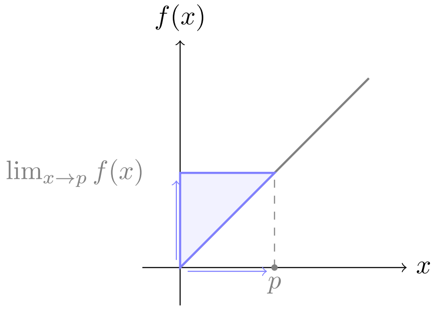
$$\begin{aligned} f(A \cap]p-\delta, p+\delta[\setminus \{p\}) &= f(A \cap (\,]p-\delta, p[\cup]p, p+\delta[\,)) = f((A \cap]p-\delta, p[\,) \cup (A \cap]p, p+\delta[\,)) \\ &= f(A \cap]p-\delta, p[\,) \cup f(A \cap]p, p+\delta[\,) \subseteq f(A \cap]p-\delta', p[\,) \cup f(A \cap]p, p+\delta''[\,) \subseteq J \cap J = J. \end{aligned}$$

□

6.11 Limiti delle funzioni monotòne

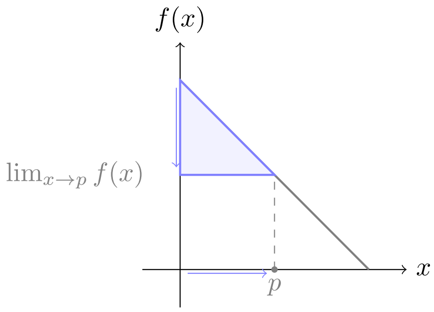
Teorema 6.9. *Siano $f : A \to \mathbb{R}$ monotòna e $p \in \overline{\mathcal{D}^-}(A)$. Allora il limite da sinistra di f in p esiste sempre. Più precisamente, se f è crescente si ha*

$$\lim_{x \to p^-} f(x) = \sup\{f(x) \,|\, x \in A \wedge x < p\}.$$



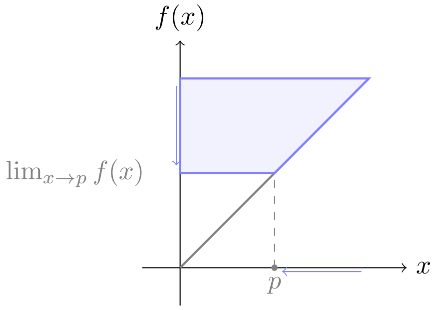
Se f è decrescente si ha

$$\lim_{x \to p^-} f(x) = \inf\{f(x) \,|\, x \in A \wedge x < p\}.$$



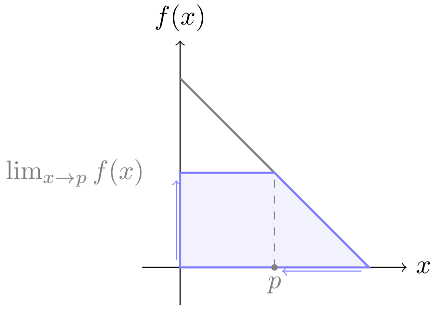
Teorema 6.10. *Siano $f : A \to \mathbb{R}$ monotòna e $p \in \overline{\mathcal{D}^+}(A)$. Allora il limite da destra di f in p esiste sempre. Più precisamente, se f è crescente, si ha*

$$\lim_{x \to p^+} f(x) = \inf\{f(x) \,|\, x \in A \wedge x > p\}.$$



Se f è decrescente si ha

$$\lim_{x \to p^+} f(x) = \sup\{f(x) \,|\, x \in A \wedge x > p\}.$$



6.12 Classificazione dei punti di discontinuità mediante i limiti

Definizione 6.8. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ discontinua in $w \in A$ con $w \in \mathcal{D}(A)$. Diciamo che la discontinuità è di 1° specie:

- **Eliminabile:** se
$$\lim_{x\to w} f(x) = l \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad l \neq f(w);$$
- **Non eliminabile:** se il limite non esiste, ma
$$w \in \mathcal{D}^-(A) \cap \mathcal{D}^+(A)$$
ed esistono e sono finiti i seguenti limiti:
$$\lim_{x\to w^-} f(x) = l' \in \mathbb{R} \text{ e } \lim_{x\to w^+} f(x) = l'' \in \mathbb{R} \quad \text{con } l' \neq l''.$$

6.13 Teorema della permanenza del segno per i limiti di funzioni

Teorema 6.11. *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ con $p \in \overline{\mathcal{D}}(A)$, e supponiamo che*
$$\lim_{x\to p} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$$
con $l > 0$ ($l < 0$). Allora
$$\exists\, I \in \mathcal{I}_p \,:\, \forall x \in A \cap I \setminus \{p\}, \quad f(x) > 0 \quad (f(x) < 0).$$

Proof. Sia $J \in \mathcal{I}_l$ contenuto in $]0, +\infty[$

- Se abbiamo $l \in \mathbb{R}$, allora prendiamo
$$J =]l - \varepsilon, l + \varepsilon[\text{ con } \varepsilon = l;$$
- Se abbiamo $l = +\infty$, allora ogni $J \in \mathcal{I}_l$ va bene.

Per ipotesi,
$$\exists\, I \in \mathcal{I}_p \,:\, f(A \cap I \setminus \{p\}) \subseteq J \subseteq]0, +\infty[,$$
pertanto
$$\forall x \in A \cap I \setminus \{p\}, \quad f(x) > 0.$$
□

6.14 Teorema del confronto

Teorema 6.12. *Siano* $f, g : A \to \mathbb{R}$ *e* $p \in \overline{\mathcal{D}}(A)$, *e supponiamo che esistano i limiti di* f *e* g *in* p. *Se l'insieme* $E = \{x \in A \,|\, f(x) \leq g(x)\}$ *ha* p *come punto di accumulazione, ovvero*

$$\exists\, H \in \mathcal{I}_p \,:\, \forall\, x \in A \cap H \setminus \{p\}, \quad f(x) \leq g(x),$$

allora

$$\lim_{x \to p} f(x) \;\leq\; \lim_{x \to p} g(x).$$

Proof. Sia

$$h : A \to \mathbb{R} \quad x \mapsto f(x) - g(x),$$

e supponiamo che

$$\lim_{x \to p} f(x) = l \quad \wedge \quad \lim_{x \to p} g(x) = m \quad \text{con } l > m,$$

allora

$$\lim_{x \to p} h(x) = l - m > 0,$$

quindi per il teorema precedente abbiamo che

$$\exists\, I \in \mathcal{I}_p \,:\, \forall\, x \in A \cap I \setminus \{p\}, \quad h(x) > 0$$

da cui

$$f(x) - g(x) > 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x) > g(x).$$

Pertanto

$$E \cap I \setminus \{p\} = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad p \notin \overline{\mathcal{D}}(E)$$

□

6.15 Teorema dei carabinieri

Teorema 6.13. *Siano* $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ *e* $p \in \overline{\mathcal{D}}(A)$. *Supponiamo che*

$$\lim_{x \to p} f(x) = \lim_{x \to p} h(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Se

$$\exists\, H \in \mathcal{I}_p \,:\, \forall\, x \in A \cap H \setminus \{p\}, \quad f(x) \leq g(x) \leq h(x),$$

Allora

$$\lim_{x \to p} g(x) = l.$$

Proof. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Per ipotesi trovo $I', I'' \in \mathcal{I}_p$ tali che

$$f(A \cap I' \setminus \{p\}) \subseteq \,]\, l - \varepsilon, l + \varepsilon\,[\quad \text{e} \quad h(A \cap I'' \setminus \{p\}) \subseteq \,]\, l - \varepsilon, l + \varepsilon\,[.$$

Sia $I = I' \cap I'' \cap H$, allora

$$\forall\, x \in A \cap I \setminus \{p\}, \quad l - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < l + \varepsilon,$$

cioè

$$g(A \cap I \setminus \{p\}) \subseteq \,]\, l - \varepsilon, l + \varepsilon\,[.$$

□

7 Successioni

7.1 Successioni

Successione

Definizione 7.1. Si definisce **successione** una funzione

$$s : \mathbb{N} \to A \subseteq \mathbb{R} \quad n \mapsto s(n).$$

Successione numerica reale

Definizione 7.2. Si definisce **successione numerica reale** una successione a valori in $\mathbb{R}$.

$$s : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \quad n \mapsto s(n).$$

Scriveremo

$$(s_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Nota 25. Le successioni si possono rappresentare anche in questo modo:

$$(1,1),\ (2,2),\ (3,3),\ \cdots,\ (n,n),\ \cdots$$

In cui ciascun elemento (coppia) viene chiamato **termine**, il primo elemento viene chiamato **indice** e il secondo elemento viene chiamato **valore**.

$$(1,s_1),\ (2,s_2),\ (3,s_3),\ \cdots,\ (n,s_n),\ \cdots$$

Oppure in quest'altro modo

$$(s_1, s_2, s_3, ..., s_n, ...) = (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

La differenza tra un'insieme e una successione è che nell'insieme gli elementi non si possono mai ripetere, nelle successioni invece può accadere.

Nota 26. Non esistono punti di accumulazione, perchè sono isolati. L'unico punto di accumulazione è il limite $+\infty$.

7.2 Limiti di successioni

Limite convergente di una successione

Definizione 7.3. Sia $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione numerica reale; diremo che il **limite** per $n \to +\infty$ di s_n vale $l \in \mathbb{R}$ e scriveremo

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = l$$

se

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists v \in \mathbb{N} \,|\, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > v \implies |s_n - l| < \varepsilon.$$

In questo caso la successione si dice **convergente**.

Limite divergente di una successione

Definizione 7.4. Sia $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione numerica reale; diremo che la successione

- **Diverge positivamente**, e scriveremo $\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$, se
$$\forall\, M > 0,\ \exists\, v \in \mathbb{N} : \forall\, n > v, \quad s_n > M$$
- **Diverge negativamente**, e scriveremo $\lim_{n\to+\infty} s_n = -\infty$ se
$$\forall\, M > 0,\ \exists\, v \in \mathbb{N} : \forall\, n > v, \quad s_n < -M$$
- **Oscilla**, e scriveremo $\lim_{n\to+\infty} s_n = \infty$ se
$$\forall\, M > 0,\ \exists\, v \in \mathbb{N} : \forall\, n > v, \quad |s_n| > M$$

Definitivamente

Definizione 7.5. Sia $P(n)$ una proprietà che dipende da $n \in \mathbb{N}$, diremo che $P(n)$ vale **definitivamente** se
$$\exists\, v \in \mathbb{N} :\ \forall\, n \geq v, \quad P(n) \text{ è vera.}$$

Teorema 7.1. *Sia s_n una successione numerica reale. Allora le seguenti scritture sono equivalenti.*

1. $\lim_{n\to+\infty} s_n = l$*;*
2. s_n *è definitivamente in ogni intorno di* l*.*

Proof. La scrittura $\lim_{n\to+\infty} s_n = l$ significa
$$\forall\, J \in \mathcal{I}_l,\ \exists\, M > 0 :\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (n > M \implies s_n \in J).$$
s_n è definitivamente in ogni intorno di l significa
$$\forall\, J \in \mathcal{I}_l,\ \exists\, v \in \mathbb{N} :\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq v \implies s_n \in J).$$
Dunque le due scritture si equivalgono se prendiamo
$$M = v - \frac{1}{2}.$$
□

Frequentemente

Definizione 7.6. Sia $P(n)$ una proprietà che dipende da $n \in \mathbb{N}$, diremo che $P(n)$ vale **frequentemente** se
$$\forall\, k \in \mathbb{N} :\ \exists\, n \geq k, \quad P(n) \text{ è vera.}$$

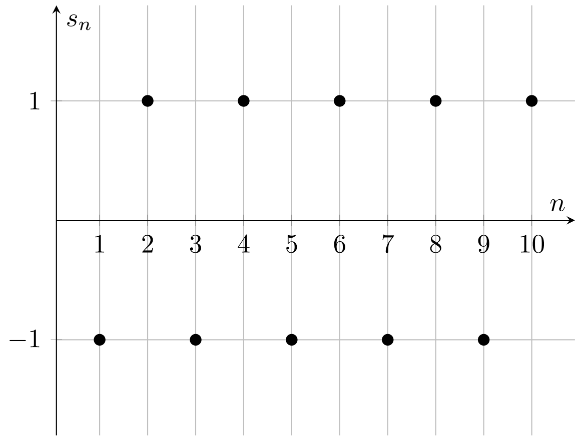
Esempio 7.1. Sia $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $s_n = (-1)^n$, allora $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è:

- **frequentemente** positiva perchè
$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \exists\, n \geq k :\ (s_n)_{n\in\mathbb{N}} > 0.$$
Ad esempio per $k = 3$, prendiamo $n = 4$ a cui corrisponde $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} = 1 > 0$ e così via per ogni k dispari.

- **frequentemente** negativa perchè

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \exists n \geq k \,:\, (s_n)_{n\in\mathbb{N}} < 0.$$

Ad esempio per $k = 4$, prendiamo $n = 5$ a cui corrisponde $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} = -1 < 0$ e così via per ogni k pari.



Caratterizzazione delle successioni monotòne

Teorema 7.2. $\forall n \in \mathbb{N}$, *una successione* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *è:*

- ***crescente*** *se e solo se*
$$s_n \leq s_{n+1}$$
- ***strettamente crescente*** *se e solo se*
$$s_n < s_{n+1}$$
- ***decrescente*** *se e solo se*
$$s_n \geq s_{n+1}$$
- ***strettamente decrescente*** *se e solo se*
$$s_n > s_{n+1}$$

Proof. La necessità è ovvia (perchè $n < n+1$). Supponiamo quindi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad s_n \leq s_{n+1},$$

e siano $n', n'' \in \mathbb{N}$ con $n' < n''$. Posto $h = n'' - n'$, si ha $h \in \mathbb{N}$, quindi possiamo procedere per induzione su h.

$h = 1$ Si ha

$$n'' = n' + h = n' + 1,$$

per cui

$$s_{n'} \leq s_{n'+1} = s_{n''}$$

$h \rightsquigarrow h + 1$ l'ipotesi induttiva è che

$$s_{n'+h} \geq s_{n'},$$

pertanto

$$s_{n'+h+1} = s_{(n'+h)+1} \geq s_{n'+h} \geq s_{n'}.$$

$\square$

Costruzione del numero e

Teorema 7.3.
$$e = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Proof. Sia
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$
Mostriamo che la successione $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è strettamente decrescente, e precisamente che
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \frac{b_n}{b_{n+1}} > 1$$

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{1}{\frac{n+2}{n+1}}\left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n+2}{n+1}}\right)^{n+1} = \frac{n+1}{n+2}\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1}$$

$$= \frac{n+1}{n+2}\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+1} = \frac{n+1}{n+2}\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1}$$

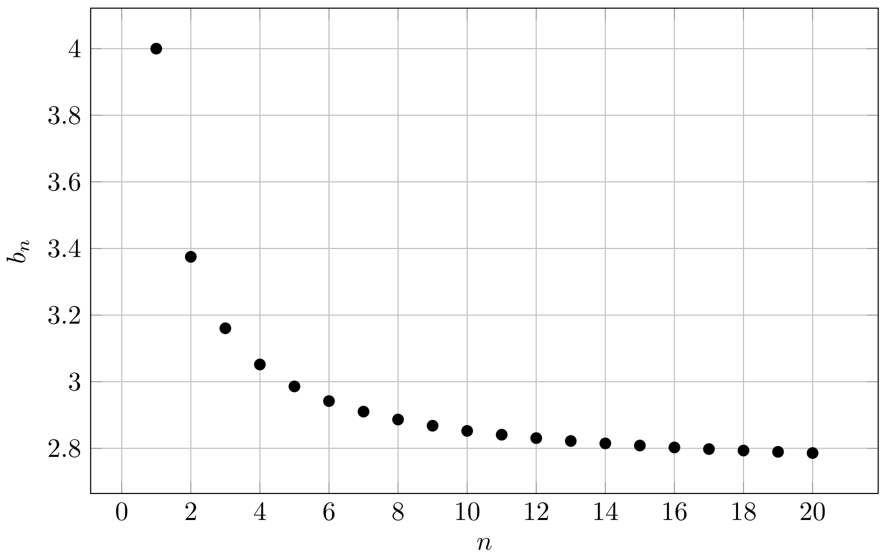
A questo punto poniamo $b = \dfrac{1}{n^2+2n}$ e $m = n+1$, per la disuguaglianza di Bernoulli avremo
$$\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1} = (1+b)^m \geq 1+mb = \left(1+(n+1)\frac{1}{n^2+2n}\right),$$
da cui
$$\frac{n+1}{n+2}\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1} \geq \frac{n+1}{n+2}\left(1+(n+1)\frac{1}{n^2+2n}\right) = \frac{n+1}{n+2}\left(1+\frac{n+1}{n^2+2n}\right)$$

$$= \frac{n+1}{n+2}\,\frac{n^2+3n+1}{n(n+2)} = \frac{(n+1)(n^2+3n+1)}{n(n+2)^2} = \frac{n^3+4n^2+4n+1}{n(n^2+4n+4)}$$

$$= \frac{n^3+4n^2+4n+1}{n^3+4n^2+4n} = \cancel{\frac{n^3+4n^2+4n}{n^3+4n^2+4n}} + \frac{1}{n^3+4n^2+4n} = 1+\frac{1}{n^3+4n^2+4n} > 1$$

$\square$

Grafico della successione $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$



Corollario 8.

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Proof. Sia

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Si ha

$$b_n = a_n\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

quindi

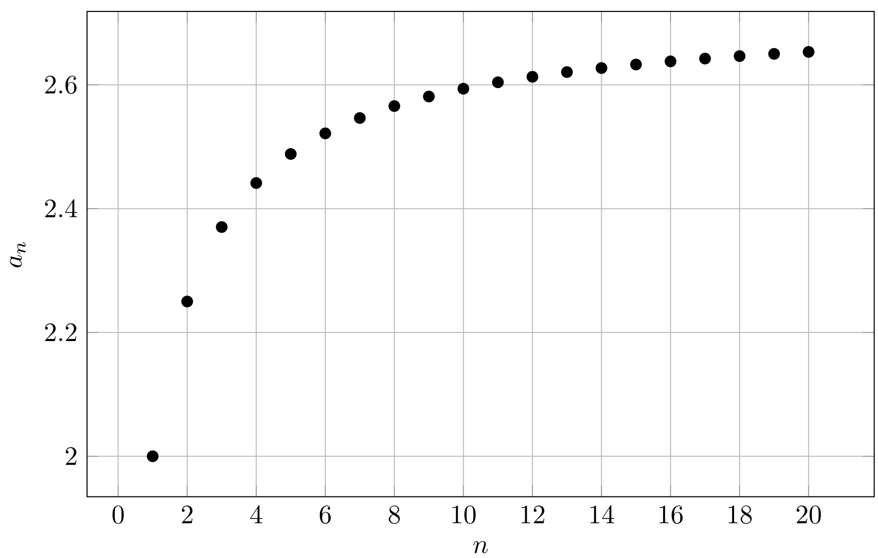
$$a_n = \frac{b_n}{1+\frac{1}{n}},$$

ma

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0 \quad \therefore \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{b_n}{1+\frac{1}{n}} = \frac{e}{1+0} = e.$$

□

Grafico della successione $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$



Teorema 7.4.
$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Proof. Sia $n=\lfloor x\rfloor$. Supponiamo $x\geq 1$ cosicchè $n\in\mathbb{N}$. Si ha $n\leq x<n+1$, pertanto
$$\frac{1}{n+1}<\frac{1}{x}\leq\frac{1}{n},$$
da cui
$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\leq\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^x<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\leq\left(1+\frac{1}{n}\right)^x<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$
Fissato $\varepsilon>0$, siano

- $\nu_1\in\mathbb{N}$ tale che, per $n\geq\nu_1$, si abbia
$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\in\,]e-\varepsilon,e+\varepsilon[$$
- $\nu_2\in\mathbb{N}$ tale che, per $n\geq\nu_2$, si abbia
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\in\,]e-\varepsilon,e+\varepsilon[.$$

Poniamo dunque
$$M=1+\max\{\nu_1,\nu_2\}\ (>0).$$
Se $x>M$, essendo
$$n>x-1>M-1=\max\{\nu_1,\nu_2\},$$
si ha
$$n>\nu_1\quad\text{e}\quad n>\nu_2.$$
Quindi
$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n>e-\varepsilon\quad\text{e}\quad\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}<e+\varepsilon.$$
Concludiamo che
$$e-\varepsilon<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<e+\varepsilon.$$
□

Dimostrazioni di alcuni limiti notevoli

1.
$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Proof. Per ogni $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, abbiamo che:
$$\sin x<x<\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}.$$
Dunque:
$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}\qquad\Longrightarrow\qquad\cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$
Da cui segue:
$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=1\quad\text{e}\quad\lim_{x\to0^-}\frac{\sin x}{x}=1.$$
Poniamo $t=-x$. Quando $x\to0^-$, si ha che $t\to0^+$. Pertanto:
$$\lim_{t\to0^+}\frac{\sin(-t)}{-t}=\lim_{t\to0^+}\frac{\sin t}{t}=1.$$
□

2.
$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Proof. Sia $t=-1-x$. Allora $x=-1-t$, e quando $x\to-\infty$, si ha che $t\to+\infty$. Dunque, abbiamo:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{-1-t}\right)^{-1-t}.$$

Questo si semplifica in:

$$\lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{1+t}\right)^{-(1+t)} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1+t-1}{1+t}\right)^{-(1+t)} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{1+t}\right)^{-(1+t)}.$$

Successivamente:

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1+t}{t}\right)^{(1+t)} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{(1+t)}.$$

Osserviamo che:

$$\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{(1+t)} = \lim_{t\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\left(1+\frac{1}{t}\right)\right].$$

Poiché $\left(1+\frac{1}{t}\right)^t \to e$ quando $t\to+\infty$, abbiamo:

$$\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e.$$

E dato che $\left(1+\frac{1}{t}\right) \to 1$ quando $t\to+\infty$, otteniamo:

$$\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right) = 1.$$

Pertanto:

$$\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{(1+t)} = e\cdot 1 = e.$$

□

3.
$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Proof. Consideriamo:

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}.$$

Questo si semplifica in:

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}.$$

Usando l'identità trigonometrica $1-\cos^2 x=\sin^2 x$, otteniamo:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}.$$

Questo si può scrivere come il prodotto di due limiti:

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{1+\cos x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x^2}.$$

Calcoliamo il primo limite:

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Calcoliamo il secondo limite usando $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\right)^2 = 1^2 = 1.$$

Moltiplicando i risultati, otteniamo:

$$\frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Pertanto:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

□

4.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Proof. Poniamo $t = \frac{1}{x}$. Allora

$$x = \frac{1}{t} \quad \therefore \quad \begin{cases} x \to 0^+ & \implies \quad t \to +\infty \\ x \to 0^- & \implies \quad t \to -\infty \end{cases}$$

Consideriamo il caso $x \to 0^+$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{t\to +\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)}{\frac{1}{t}}.$$

Questo si semplifica in:

$$\lim_{t\to +\infty} t \ln\left(1+\frac{1}{t}\right).$$

Applicando il limite, otteniamo:

$$\lim_{t\to +\infty} \ln\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right).$$

Poiché $\left(1+\frac{1}{t}\right)^t \to e$ quando $t \to +\infty$, abbiamo:

$$\ln\left(\lim_{t\to +\infty} \left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right) = \ln e = 1.$$

Consideriamo ora il caso $x \to 0^-$:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{t\to -\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)}{\frac{1}{t}}.$$

Questo si semplifica in:

$$\lim_{t\to -\infty} t \ln\left(1+\frac{1}{t}\right).$$

Applicando il limite, otteniamo:

$$\lim_{t\to -\infty} \ln\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right).$$

Poiché $\left(1+\frac{1}{t}\right)^t \to e$ quando $t \to -\infty$, abbiamo:

$$\ln\left(\lim_{t\to -\infty} \left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right) = \ln e = 1.$$

Pertanto, in entrambi i casi, otteniamo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

□

5.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$$

Proof.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot 1=1.$$
□

6.
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

Proof. Poniamo $t=e^x-1$. Allora $x=\ln(1+t)$, e quando $x\to 0$, si ha che $t\to 0$. Pertanto:
$$\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}.$$
Sappiamo che:
$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1.$$
Quindi:
$$\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}=\left(\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}\right)^{-1}=1^{-1}=1.$$
□

7.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$$

Proof. Poniamo $t=\arcsin x$. Allora $x=\sin t$, e quando $x\to 0$, si ha che $t\to 0$. Pertanto:
$$\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}.$$
Sappiamo che:
$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1.$$
Quindi:
$$\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=\left(\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\right)^{-1}=1^{-1}=1.$$
□

8.
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^\alpha-1}{x-1}=\alpha$$

Proof. Consideriamo:
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^\alpha-1}{x-1}.$$
Possiamo riscrivere x^α come $e^{\alpha\ln x}$. Allora:
$$\lim_{x\to 1}\frac{e^{\alpha\ln x}-1}{x-1}.$$
Moltiplichiamo numeratore e denominatore per $\alpha\ln x$:
$$\lim_{x\to 1}\frac{(e^{\alpha\ln x}-1)(\alpha\ln x)}{(x-1)(\alpha\ln x)}.$$
Sappiamo che $\lim_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\ln x}=1$, quindi:
$$\alpha\lim_{x\to 1}\frac{e^{\alpha\ln x}-1}{\alpha\ln x}\cdot\left(\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x}\right)^{-1}.$$

Poiché $\lim_{x\to 1} \dfrac{e^{\alpha \ln x} - 1}{\alpha \ln x} = 1$, otteniamo:
$$\alpha \cdot 1 \cdot 1 = \alpha.$$
Pertanto:
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^\alpha - 1}{x - 1} = \alpha.$$
□

7.3 Caratterizzazioni e collegamenti mediante successioni

Caratterizzazione dei punti di accumulazione mediante le successioni

Teorema 7.5. *Siano $p \in \overline{\mathbb{R}}$ e $A \subseteq \mathbb{R}$. Allora :*
$$p \in \overline{\mathcal{D}}(A) \iff \exists\, (s_n) \in A \setminus \{p\} \text{ con } \lim_{n\to+\infty} s_n = p.$$

Proof.

$\Longrightarrow$ Per ogni $n \in \mathbb{N}$, si scelga
$$s_n \in I_p\left(\frac{1}{n}\right) \cap A \setminus \{p\}$$
che è non vuoto, perchè $p \in \overline{\mathcal{D}}(A)$. La successione s_n ha limite p perchè per ogni $r > 0$, trovo $v \in \mathbb{N}$ con $v > \frac{1}{r}$ cosicchè $\frac{1}{v} < r$ e pertanto
$$I_p\left(\frac{1}{v}\right) \subseteq I_p(r).$$
Allora
$$\forall\, n \geq v, \quad s_n \in I_p\left(\frac{1}{n}\right) \subseteq I_p\left(\frac{1}{v}\right) \subseteq I_p(r).$$
Concludiamo
$$\lim_{n\to+\infty} s_n = p.$$

$\Longleftarrow$ Siano $(s_n) \in A \setminus \{p\}$ con $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = p$ e $I \in \mathcal{I}_p$. Per ipotesi
$$\exists\, v \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq v, \quad s_n \in I.$$
Ma $s_n \in A \setminus \{p\}$ quindi $I \cap A \setminus \{p\} \neq \emptyset$.

□

Insiemi chiusi, perfetti e discreti

Definizione 7.7. Sia $C \subseteq \mathbb{R}$, diciamo che

- C è **chiuso** se $\mathcal{D}(C) \subseteq C$;
- C è **perfetto** se $C \subseteq \mathcal{D}(C)$;
- C è **discreto** se $C \cap \mathcal{D}(C) = \emptyset$.

Nota 27. Un'intervallo aperto è un insieme perfetto, mentre un'intervallo chiuso è un insieme chiuso e perfetto.

Caratterizzazione degli insiemi chiusi mediante le successioni

Proposizione 7.6.

$$C \subseteq \mathbb{R} \text{ è chiuso} \iff \forall (s_n) \in C \text{ con } \lim_{n\to+\infty} s_n = p \in \mathbb{R}, \quad p \in C.$$

Collegamento tra limiti di funzioni e limiti di successioni

Teorema 7.7. *Siano $f : A \to \mathbb{R}$, $p \in \overline{\mathcal{D}}(A)$, e $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora*

(a) $\lim_{x\to p} f(x) = l$;

(b) $\forall (s_n) \in A \setminus \{p\}$ *con* $\lim_{n\to+\infty} s_n = p$, $\lim_{n\to+\infty} f(s_n) = l$.

Proof.

$\neg(a) \implies \neg(b)$ Per ipotesi

$$\exists\, J \in \mathcal{I}_l \,:\, \forall\, I \in \mathcal{I}_p, \quad f(A \cap I \setminus \{p\}) \not\subseteq J.$$

In particolare

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \exists\, s_n \in A \cap I_p\left(\frac{1}{n}\right) \setminus \{p\} \,:\, f(s_n) \not\subseteq J.$$

La successione (s_n) è in $A \setminus \{p\}$ e $\lim_{n\to+\infty} s_n = p$, ma non può essere $\lim_{x\to+\infty} f(s_n) = l$.

$(a) \implies (b)$ Si applica il primo teorema sul limite della composizione

□

Caratterizzazione della continuità mediante le successioni

Teorema 7.8. *Siano $f : A \to \mathbb{R}$ e $w \in A$. Sono equivalenti:*

(a) *f è continua in w;*

(b) $\forall (s_n) \in A$ *con* $\lim_{n\to+\infty} s_n = w$, $\lim_{n\to+\infty} f(s_n) = f(w)$.

Proof.

$(b) \implies (a)$ Possiamo supporre $w \in \mathcal{D}(A)$ (altrimenti non ci sarebbe nulla da dimostrare). In tal caso il teorema precedente ci dice

$$\lim_{x\to w} f(x) = f(w),$$

cioè f è continua in w.

$(a) \implies (b)$ Si applica il secondo teorema sul limite della composizione

□

7.4 Teoremi sulle successioni

Teorema della permanenza del segno per le successioni

Teorema 7.9. *Sia* $\lim_{n\to+\infty} s_n = l \in \overline{\mathbb{R}}$ con $l > 0$. *Allora $s_n > 0$ definitivamente.*

Teorema del confronto per le successioni

Teorema 7.10. *Siano*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a \quad \text{e} \quad \lim_{n\to+\infty} b_n = b.$$

Se $a_n \leq b_n$ *frequentemente, allora* $a \leq b$ *definitivamente.*

Teorema dei carabinieri per le successioni

Teorema 7.11. *Siano* $(a_n), (b_n), (c_n)$ *successioni tali che*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = l.$$

Se $a_n \leq b_n \leq c_n$ *definitivamente, allora*

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = l.$$

7.5 Sottosuccessioni

Sottosuccessione

Definizione 7.8. Sia $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione. Una **sottosuccessione** di (o una **successione estratta da**) $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è la composizione di $(s_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ dove $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è una successione di numeri naturali strettamente crescente.

Lemma 7.12. *Sia* $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *una successione di numeri naturali strettamente crescente. Allora*

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad m_k \geq k.$$

Proof. Per induzione su k:

- È ovvio che $m_1 \geq 1$
- Sia $m_k \geq k$ per un certo $k \in \mathbb{N}$ Si ha $m_{k+1} > m_k$, quindi $m_{k+1} \geq 1 + m_k \geq 1 + k = k + 1$

□

Nota 28. Nelle precedenti ipotesi

$$\lim_{k\to+\infty} m_k = +\infty.$$

Limite di una sottosuccessione

Proposizione 7.13. *Sia*

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = l \in \overline{\mathbb{R}},$$

allora

$$\forall\, (s_{n_k})_{k\in\mathbb{K}}, \quad \lim_{k\to+\infty} s_{n_k} = l.$$

Proof. Si applica il primo teorema della composizione □

Teorema 7.14. *Ogni successione ha un'estratta monotòna.*

Proof. Data la successione $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, poniamo

$$P = \{\, p \in \mathbb{N} \mid \forall\, n > p,\ s_n \leq s_p\}$$

e distinguiamo due casi.

1. P è finito, cioè limitato superiormente. Definiamo per ricorrenza una successione $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ di numeri naturali come segue:
$$\exists\, m_1 \in \mathbb{N} \,:\, \forall\, p \in P, \quad p < m_1.$$
Supponiamo ora di aver definito $m_k \in \mathbb{N}$ con $p < m_k\ \forall\, p \in P$, e prendiamo
$$m_{k+1} > m_k \text{ con } s_{m_{k+1}} > s_{m_k}.$$
Perchè $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è strettamente crescente, quindi (s_{m_k}) è una sottosuccessione di $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$, ed è monotòna, e precisamente strettamente crescente grazie a
$$s_{m_{k+1}} > s_{m_k}.$$

2. P è infinito, cioè illimitato superiormente. Definiamo per ricorrenza una successione $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ di numeri naturali come segue: $m_1 \in P$ (notiamo che $P \neq \emptyset$). Dato ora $m_k \in P$, sia $m_{k+1} \in P$ con $m_{k+1} > m_k$. Si ha che $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è strettamente crescente, quindi $(s_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ è una sottosuccessione di $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Inoltre $(s_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ è monotòna e precisamente decrescente, perchè
$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad (s_{m_{k+1}}) \leq (s_{m_k}),$$
in quanto $m_{k+1} > m_k$ ed entrambi appartengono a P.

□

Teorema di Bolzano-Weierstrass

Corollario 9. *Ogni successione limitata ha un'estratta convergente.*

Teorema di Heine-Cantor

Teorema 7.15. *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ continua, con A chiuso e limitato. Allora f è uniformemente continua.*

Proof. Sia per assurdo f non uniformemente continua, allora

$$\exists\, \varepsilon > 0 \,:\, \forall\, \delta > 0,\ \exists\, x, w \in A \,:\, |x - w| < \delta \ \wedge\ |f(x) - f(w)| \geq \varepsilon.$$

Consideriamo un $\varepsilon > 0$ per cui valga la condizione. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, possiamo trovare $x_n, w_n \in A$ con

$$|x_n - w_n| < \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad |f(x_n) - f(w_n)| \geq \varepsilon.$$

Sono dunque definite due successioni $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Per il teorema di Bolzano-Weierstrass posso trovare un'estratta $(w_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente a un $w \in \mathbb{R}$. (Infatti w_n è limitata, perchè a valori in A); in effetti $w \in A$, perchè A è chiuso. Poichè abbiamo che

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad w_n - \frac{1}{n} < x_n < w_n + \frac{1}{n},$$

allora avremo anche che

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad w_{m_k} - \frac{1}{m_k} < x_{m_k} < w_{m_k} + \frac{1}{m_k},$$

quindi

$$\lim_{k\to+\infty} x_{m_k} = w.$$

Per la continuità di f si ha

$$\lim_{k\to+\infty} |f(x_{m_k}) - f(w_{m_k})| = 0$$

ma

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad |f(x_{m_k}) - f(w_{m_k})| \geq \varepsilon,$$

che genera una contraddizione. Il teorema del confronto infatti ci darebbe $0 \geq \varepsilon$, che è impossibile. □

Teorema di Weierstrass

Teorema 7.16. *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ continua con A chiuso e limitato. Allora f ha minimo e massimo.*

Proof. Dimostriamo l'esistenza del minimo. Sia

$$\mu = \inf\{\, f(x) \mid x \in A \,\}.$$

Costruiamo una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A con

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \mu.$$

Distinguiamo due casi:

$\mu = -\infty$ Per ogni $n \in \mathbb{N}$ trovo $y_n \in f(A)$ con $y_n < -n$. Segue chiaramente che

$$\lim_{x\to-\infty} y_n = -\infty.$$

Ora basta prendere $\forall\, n \in \mathbb{N}$ un $x_n \in A$ tale che $f(x_n) = y_n$.

$\mu \in \mathbb{R}$ Per ogni $n \in \mathbb{N}$ trovo $y_n \in f(A)$ con $y_n < \mu + \frac{1}{n}$. Ora poichè

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\; \mu \leq y_n < \mu + \frac{1}{n},$$

si ha

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = \mu.$$

La successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata. Poichè ha valori in A, posso estrarre $(x_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente ad un certo w e, poichè A è chiuso, anche $w \in A$. Per la continuità, abbiamo

$$f(w) = f\left(\lim_{k\to+\infty} x_{m_k}\right) = \lim_{k\to+\infty} f(x_{m_k}) = \lim_{k\to+\infty} y_{m_k} = \mu.$$

□

7.6 Successioni di Cauchy

Successione di Cauchy

Definizione 7.9. Una successione $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy se

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, v \in \mathbb{N} : \forall\, m, n \geq v, \quad |s_n - s_m| < \varepsilon.$$

Criterio di convergenza di Cauchy

Proposizione 7.17. *Ogni successione convergente è di Cauchy.*

Proof. Sia
$$\lim_{n\to+\infty} s_n = l.$$
Fissato $\varepsilon > 0$, trovo $v \in \mathbb{N}$ tale che $\forall\, n \geq v$ si abbia
$$|s_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Se dunque $m, n \geq v$, abbiamo
$$|s_n - s_m| = |s_n - l + l - s_m| \geq |s_n - l| + |s_m - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$
□

Proposizione 7.18. *Ogni successione di Cauchy è limitata.*

Proof. Sia $v_1 \in \mathbb{N}$ tale che $\forall\, n \geq v_1$ si abbia $|s_n - s_{v_1}| < 1$. Abbiamo dunque $s_{v_1} < s_n < s_{v_1} + 1$. Se ora
$$m = \min\{s_n \,|\, n < v_1\} \cup \{s_{v_1} - 1\} \quad \text{e} \quad M = \max\{s_n \,|\, n < v_1\} \cup \{s_{v_1} + 1\}$$
si ha
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad m \leq s_n \leq M.$$
□

Proposizione 7.19. *Ogni successione di Cauchy è convergente.*

Proof. Sia (s_n) di Cauchy. Per la proposizione precedente posso trovare $(s_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ con $\lim_{k\to+\infty} s_{m_k} = l \in \mathbb{R}$. Fissato $\varepsilon > 0$, sia $v \in \mathbb{N}$ tale che $\forall\, m, n \geq v'$ sia $|s_n - s_m| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ e sia (?) sia $|s_{m_k} - l| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Se dunque $v = \max\{v', v''\}$, allora $\forall\, n \geq v$ poichè $m_n \geq n (= V)$ si ha
$$|s_n - l| = |s_n - s_{m_n} + s_{m_n} - l| \leq |s_n - s_{m_n}| + |s_{m_n} - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$
□

8 Confronto asintotico di funzioni

Notazione "O grande"

Definizione 8.1. Sia $f, g : A \to \mathbb{R}$, e sia $p \in \overline{\mathcal{D}}(A)$. Diciamo che f è O **grande** di g in p, o anche che $f(x)$ è O grande di $g(x)$ per $x \to p$, e scriviamo
$$f \in O(g) \quad \text{o} \quad f(x) = O(g(x)).$$
se
$$\exists\, I \in \mathcal{I}_p \,:\, \exists\, M > 0 \,:\, \forall\, x \in I \cap A \setminus \{p\}, \quad |f(x)| \leq M|g(x)|.$$

o, se g non si annulla,

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq M.$$

Nota 29. Osserviamo che se g non si annulla in $I \cap A \setminus \{p\}$ e se

$$\lim_{x \to p} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = l,$$

allora

$$f \in O(g) \quad \iff \quad l \in \mathbb{R}.$$

Notazione "o piccolo"

Definizione 8.2. Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$ e $p \in \overline{\mathcal{D}}(A)$. Supponiamo che

$$\exists\, H \in \mathcal{I}_p \,:\, \forall\, x \in H, \quad g(x) \neq 0.$$

Diciamo che f è o **piccolo** di g (in p) se

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Nota 30. Si nota subito che

$$f \in o(g) \quad \implies \quad f \in O(g).$$

Funzione asintotica rispetto a un'altra

Definizione 8.3. Diciamo che f è asintotica a g (o dello stesso ordine di g) se

$$f \in O(g) \quad \text{e} \quad g \in O(f),$$

scriviamo

$$f \asymp g.$$

Funzione equivalente rispetto a un'altra

Definizione 8.4. Diciamo che f e g sono equivalenti se il

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

scriviamo

$$f \sim g.$$

Infinitesimi e infiniti

Definizione 8.5.

- f è infinitesimo (in p) $=$ $f \in O(1)$.
- f è infinitesima di ordine superiore a g (con g infinitesima) $=$ $f \in o(g)$.

Ordine di infinitesimo e ordine di infinito

Definizione 8.6. Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$ entrambi infinitesimi per $x \to x_0$, allora :

1. Se
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = m \neq 0,$$
allora diremo che $f(x)$ è un'infinitesimo dello stesso ordine di $g(x)$

2. Se
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$
allora diremo che $f(x)$ è un'infinitesimo di ordine superiore a $g(x)$, cioè $f(x)$ raggiunge lo zero prima di $g(x)$.

3. Se
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty,$$
allora diremo che $f(x)$ è un'infinitesimo di ordine inferiore a $g(x)$, cioè $g(x)$ raggiunge lo zero prima di $f(x)$.

4. Se
$$\nexists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)},$$
allora diremo che le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ non sono confrontabili.

9 Massimo limite e minimo limite

Massimo e minimo limite

Definizione 9.1. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ e $p \in \bar{\mathcal{D}}(A)$. Per ogni $M > 0$, l'insieme
$$E_p^f(M) = \{\, f(x) \,|\, x \in A \cap I_p(M) \setminus \{p\}\,\}$$
è non vuoto; inoltre
$$E_p^f(M') \subseteq E_p^f(M'') \quad \text{se} \quad 0 < M' \leq M''.$$
Siano
$$\hat{f}_p(M) = \sup E_p^f(M) \quad \wedge \quad \check{f}_p(M) = \inf E_p^f(M).$$
Chiamiamo **massimo limite** di f in p
$$\max \lim_{x \to p} f(x) = \inf_{M>0} \hat{f}_p(M),$$
e **minimo limite** di f in p
$$\min \lim_{x \to p} f(x) = \sup_{M>0} \check{f}_p(M).$$

Si può anche dire che

$$\max \lim_{x\to p} f(x) = \lim_{r\to 0} \hat{f}_p(r) = \lim_{r\to 0} \sup\{\, f(x) \,|\, x \in A \cap I_p(M) \setminus \{p\} \,\}$$

e

$$\min \lim_{x\to p} f(x) = \lim_{r\to 0} \check{f}_p(r) = \lim_{r\to 0} \inf\{\, f(x) \,|\, x \in A \cap I_p(M) \setminus \{p\} \,\}.$$

Proposizione 9.1. *Siano* $\lambda = \min \lim_{x\to p} f(x)$ *e* $\Lambda = \max \lim_{x\to p} f(x)$*, allora*

$$\lim_{x\to p} f(x) = l \in \mathbb{R} \quad \iff \quad \lambda = \Lambda = l.$$

Funzione semicontinua inferiormente e superiormente

Definizione 9.2. Se $w \in A \cap \mathcal{D}(A)$, dico che f è **semicontinua inferiormente** (**semicontinua superiormente**) in w quando

$$f(w) \leq \min \lim_{x\to w} f(x) \quad (f(w) \geq \min \lim_{x\to w} f(x)).$$

Teorema 9.2. *Sia* $f : A \to \mathbb{R}$ *e sia* $p \in \bar{\mathcal{D}}(A)$*, per ogni* $M \in \mathbb{R}$ *si ha:*

$$\max \lim_{x\to p} f(x) \leq M$$

se e solo se

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, M > 0,\ :\ \forall\, x \in A \cap I_p(M) \setminus \{p\}, \quad f(x) < M + \varepsilon.$$

Nota 31. Per le successioni abbiamo

$$\max \lim_{n\to +\infty} s_n = \inf_{k\in\mathbb{N}} \sup_{n\geq k} s_n = \lim_{k\to +\infty} \sup_{n>k} s_n.$$

10 Punti interni e insiemi aperti

Punto interno

Definizione 10.1. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, diciamo che $p \in \mathbb{R}$ è **punto interno** ad A se

$$\exists\, \delta > 0\ :\ I_p(\delta) \subseteq A$$

Insieme aperto

Definizione 10.2. Un'insieme A si dice **aperto** se ogni $p \in A$ è interno.

Proposizione 10.1. *$A \subseteq \mathbb{R}$ è aperto se e solo se $\mathbb{R} \setminus A$ è chiuso.*

Proof. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, e sia $C = \mathbb{R} \setminus A$. Supponiamo A non aperto, esiste $p \in A$ non interno, cioè tale che

$$\exists\, \delta > 0 \,:\, I_p(\delta) \setminus A \neq \emptyset,$$

questo significa che

$$I_p(\delta) \cap C \neq \emptyset$$

e poichè $p \notin C$, ossia $C \setminus \{p\} = C$, si ha equivalentemente

$$I_p(\delta) \cap C \setminus \{p\} \neq \emptyset,$$

che è come dire $p \in \mathcal{D}(C)$. Concludiamo che C non è chiuso, essendo

$$p \in \mathcal{D} \setminus C.$$

Viceversa, sia C non chiuso, allora esiste $p \in \mathcal{D}(C) \setminus C$ (perchè C è chiuso), allora per ogni $\delta > 0$ si ha :

$$I_p(\delta) \setminus A = I_p(\delta) \cap C = I_p(\delta) \cap C \setminus \{p\} \neq \emptyset,$$

il che significa che

$$I_p(\delta) \not\subseteq A.$$

Pertanto A non è aperto, in quanto $p \in A$ ma non è interno. □

Part IV
Calcolo Differenziale

Notazioni per la derivata e il differenziale

Funzione	Derivata	Der 2^a	Der 3^a	Der 4^a	Der n-esima
f	f'	f''	f'''	f^{iv}	$f^{(n)}$
$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f^{iv}(x)$	$f^{(n)}(x)$
f	$\mathrm{D}\, f$	$\mathrm{D}^2 f$	$\mathrm{D}^3 f$	$\mathrm{D}^4 f$	$\mathrm{D}^n f$
$f(x)$	$\mathrm{D}\, f(x)$	$\mathrm{D}^2\, f(x)$	$\mathrm{D}^3\, f(x)$	$\mathrm{D}^4\, f(x)$	$\mathrm{D}^n\, f(x)$
$f(x)$	$\frac{d}{dx} f(x)$	$\frac{d^2}{dx^2} f(x)$	$\frac{d^3}{dx^3} f(x)$	$\frac{d^4}{dx^4} f(x)$	$\frac{d^n}{dx^n} f(x)$

Le derivate fondamentali

Potenze di x

$$\mathrm{D}\, k = 0$$
$$\mathrm{D}\, x^a = a x^{a-1}, \quad a \in \mathbb{R}$$
$$\mathrm{D}\, x = 1$$
$$\mathrm{D}\, \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0$$
$$\mathrm{D}\, \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}, \quad x > 0,\ n \in \mathbb{N}$$
$$\mathrm{D}\, \frac{1}{x} = -\tfrac{1}{x^2}$$

Funzioni logaritmiche ed esponenziali

$$\mathrm{D}\, a^x = a^x \ln a, \quad a > 0$$
$$\mathrm{D}\, e^x = e^x$$
$$\mathrm{D}\, \log_a x = \frac{\log_a e}{x}, \quad x > 0$$
$$\mathrm{D}\, \ln x = \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

Funzioni goniometriche

$$\mathrm{D}\, \sin x = \cos x$$
$$\mathrm{D}\, \cos x = -\sin x$$
$$\mathrm{D}\, \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$
$$\mathrm{D}\, \cot x = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$$

Inverse delle funzioni goniometriche

$$\mathrm{D}\, \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$
$$\mathrm{D}\, \mathrm{arccot}\, x = -\frac{1}{1+x^2}$$
$$\mathrm{D}\, \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\mathrm{D}\, \arccos x = -\frac{1}{1-x^2}$$

Le regole di derivazione

$$\mathrm{D}\, [k \cdot f(x)] = k \cdot f'(x)$$
$$\mathrm{D}\, [f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$$
$$\mathrm{D}\, [f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$
$$\mathrm{D}\, [f(x) \cdot g(x) \cdot z(x)] = f'(x) \cdot g(x) \cdot z(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot z(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot z'(x)$$
$$\mathrm{D}\, [f(x)]^a = a[f(x)]^{a-1} \cdot f'(x), \quad a \in \mathbb{R}$$
$$\mathrm{D}\, \left[\frac{1}{f(x)}\right] = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$$
$$\mathrm{D}\, \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$
$$\mathrm{D}\, [f(g(x))] = f'(z) \cdot g'(x), \quad z = g(x)$$
$$\mathrm{D}\, [f(g(z(x)))] = f'(u) \cdot g'(t) \cdot z'(x), \quad t = z(x),\ u = g(t)$$
$$\mathrm{D}\, [f(x)]^{g(x)} = [f(x)]^{g(x)} \left[g'(x) \ln f(x) + \frac{g(x) \cdot f'(x)}{f(x)}\right]$$
$$\mathrm{D}\, [f^{-1}(y)] = \frac{1}{f'(x)}, \quad x = f^{-1}(y)$$

11 Calcolo Differenziale

11.1 Funzione differenziabile e differenziale di una funzione

Funzione differenziabile in un punto, e differenziale di una funzione in un punto

Definizione 11.1. Siano $f : D \to \mathbb{R}$ e $w \in D$. Diciamo che f è **differenziabile** in w se esiste

$$L : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad h \mapsto L \cdot h,$$

cioè una funzione lineare (omogenea) tale che vale lo sviluppo asintotico

$$f(x) = f(w) + L(x - w) + o(x - w) \qquad \text{per } x \to w.$$

In tal caso $L(x - w)$ si chiama **differenziale** di f in w.

Unicità del Differenziale

Proposizione 11.1. *Se $f : D \to \mathbb{R}$ è differenziabile in $w \in D$, il differenziale di f in w è unico.*

Proof. Supponiamo che per $x \to w$, abbiamo

$$\begin{aligned} & f(x) = f(w) + L'(x - w) + o(x - w) \quad \wedge \quad f(x) = f(w) + L''(x - w) + o(x - w), \\ \implies & f(x) - f(w) = L'(x - w) + o(x - w) \quad \wedge \quad f(x) - f(w) = L''(x - w) + o(x - w), \end{aligned}$$

sottraendo membro a membro le equazioni, avremo

$$f(x) - f(w) - (f(x) - f(w)) = L'(x - w) + o(x - w) - (L''(x - w) + o(x - w))$$

da cui

$$L'(x - w) - L''(x - w) + o(x - w) - o(x - w) = L'(x - w) - L''(x - w) = 0$$

dividendo entrambi i membri per $(x - w)$ avremo

$$L' - L'' = 0, \quad \text{cioè} \quad L' = L''.$$

□

Funzione differenziabile, e differenziale di una funzione

Definizione 11.2. Se $f : D \to \mathbb{R}$ è differenziabile in ogni $x \in D$, allora diciamo che f è **differenziabile**. In tal caso chiamiamo **differenziale** di f l'applicazione df che ad ogni $x \in D$, associa il differenziale di f in x, che indichiamo con $df(x)$:

$$df : D \to \mathbb{R} \quad x \mapsto df(x).$$

Continuità delle funzioni differenziabili

Teorema 11.2. *Sia $f : D \to \mathbb{R}$ differenziabile in $w \in D$, allora f è continua in w.*

Proof. Infatti se $L(x - w)$ è il differenziale di f in w, si ha

$$\lim_{x \to w} f(x) = \lim_{x \to w} (f(w) + L(x - w) + o(x - w)) = f(w) \implies \lim_{x \to w} f(x) = f(w).$$

□

11.2 Funzione derivabile e derivata di una funzione

Funzione derivabile in un punto, e derivata di una funzione in un punto

Definizione 11.3. Siano $f : D \to \mathbb{R}$ e $w \in D$. Diciamo che f è **derivabile** in w se

$$\lim_{x \to w} \frac{f(x) - f(w)}{x - w} = l \in \mathbb{R}.$$

In tal caso il numero l si dirà **derivata** di f in w e si indica con $f'(w)$.

Funzione derivabile, e derivata di una funzione

Definizione 11.4. Diciamo che f è **derivabile** se lo è in ogni $x \in D$. In tal caso si definisce la **funzione derivata** (o **derivata**) di f come

$$f' : D \to \mathbb{R} \quad x \mapsto f'(x).$$

Equivalenza tra derivabilità e differenziabilità

Teorema 11.3. *Una funzione $f : D \to \mathbb{R}$ è differenziabile in un punto $w \in D$ se e solo se in quel punto è derivabile. In tal caso il differenziale in w è $f'(w) \cdot h$.*

Proof. Supponiamo f differenziabile in w, con differenziale dato da $h \mapsto Lh$. Allora

$$\lim_{x \to w} \frac{f(x) - f(w)}{x - w} = \lim_{x \to w} \frac{L(x - w)}{x - w} + \lim_{x \to w} \frac{o(x - w)}{x - w} = L.$$

Viceversa, sia f derivabile in w,

$$\lim_{x \to w} \frac{f(x) - f(w) - f'(w)(x - w)}{x - w} = \lim_{x \to w} \frac{f(x) - f(w)}{x - w} - f'(w) = f'(w) - f'(w) = 0.$$

□

Esempi di funzioni derivabili e non derivabili

Funzione costante

Esempio 11.1. Sia

$$c : D \to \mathbb{R} \quad x \mapsto c,$$

allora abbiamo che

$$\forall\, w \in D, \quad \frac{f(x) - f(w)}{x - w} = \frac{c - c}{x - w} = \frac{0}{x - w} = 0 \implies f'(w) = 0.$$

quindi la derivata è 0.

Funzione identità

Esempio 11.2. Sia

$$\iota_D : D \to \mathbb{R} \quad x \mapsto x,$$

allora abbiamo che

$$\forall\, w \in D, \quad \frac{f(x) - f(w)}{x - w} = \frac{x - w}{x - w} = 1 \implies f'(w) = 1.$$

Esempio 11.3. La funzione continua

$$r : [0, +\infty[\to \mathbb{R} \quad x \mapsto \sqrt{x}$$

non è derivabile in $w = 0$. Infatti

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

11.3 Operazioni con le derivate

Derivata della somma e del prodotto di funzioni derivabili

Teorema 11.4. *Siano $f, g : D \to \mathbb{R}$ derivabili in $w \in D$. Allora*

1. *$f + g$ è derivabile in w, con derivata $f'(w) + g'(w)$;*
2. *$f \cdot g$ è derivabile in w, con derivata $f'(w) \cdot g(w) + f(w) \cdot g'(w)$.*

Proof.

1.

$$\begin{aligned}\lim_{x \to w} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(w)}{x - w} &= \lim_{x \to w} \frac{f(x) + g(x) - f(w) - g(w)}{x - w} \\ &= \lim_{x \to w} \frac{f(x) - f(w)}{x - w} + \lim_{x \to w} \frac{g(x) - g(w)}{x - w} = f'(w) + g'(w);\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\lim_{x \to w} \frac{f(x)g(x) - f(w)g(w)}{x - w} &= \lim_{x \to w} \frac{f(x)g(x) - f(w)g(x) + f(w)g(x) - f(w)g(w)}{x - w} \\ &= \lim_{x \to w} \frac{f(x) - f(w)}{x - w} g(x) + \lim_{x \to w} f(w) \frac{g(x) - g(w)}{x - w} \\ &= \lim_{x \to w} \frac{f(x) - f(w)}{x - w} \cdot \lim_{x \to w} g(x) + \lim_{x \to w} f(w) \cdot \lim_{x \to w} \frac{g(x) - g(w)}{x - w} \\ &= f'(w)g(w) + f(w)g'(w).\end{aligned}$$

□

Derivata della composizione di funzioni derivabili

Proposizione 11.5. *Siano $f : D \to E$ e $g : E \to \mathbb{R}$ con f derivabile in $w \in D$ e g derivabile in $z = f(w) \in E$. Allora $g \circ f$ è derivabile in w, con derivata*

$$(g \circ f)'(w) = g'(z) f'(w).$$

Proof. Sia

$$\eta : E \to \mathbb{R} \quad y \mapsto \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(z)}{y - z} & y \neq z \\ \\ g'(z) & y = z \end{cases}.$$

La funzione η è continua in z; Inoltre

$$\forall\, y \in E, \quad g(y) - g(z) = \eta(y)(y - z).$$

Pertanto

$$\lim_{x \to w} \frac{g(f(x)) - g(f(w))}{x - w} = \lim_{x \to w} \frac{\eta(f(x))(f(x) - f(w))}{x - w} = \lim_{x \to w} \eta(f(x)) \cdot \lim_{x \to w} \frac{f(x) - f(w)}{x - w} = g'(z) f'(w).$$

□

Proposizione 11.6. *La funzione*
$$\phi : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{1}{x}$$
è derivabile con derivata
$$\phi' : x \mapsto -\frac{1}{x^2}.$$

Proof. Sia
$$\lim_{x \to w} \frac{\phi(x) - \phi(w)}{x - w},$$
effettuando la seguente sostituzione
$$h = x - w \quad \iff \quad x = w + h,$$
avremo
$$\lim_{h \to 0} \frac{\phi(w+h) - \phi(w)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{w+h} - \frac{1}{w}}{h} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{h} \cdot \frac{w - (w+h)}{(w+h)w} \right) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{\cancel{h}} \cdot \frac{-\cancel{h}}{(w+h)w} \right) = -\frac{1}{w^2}.$$
$\square$

Corollario 10. *Sia $f : D \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ derivabile. Allora f^{-1} è derivabile con derivata*
$$-\frac{f'(x)}{f^2(x)}.$$

Derivata del rapporto di due funzioni derivabili

Corollario 11. *Siano $f : D \to \mathbb{R}$ e $g : D \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ derivabili. Allora $\frac{f}{g}$ è derivabile con derivata*
$$\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Derivabilità dell'inversa di una funzione derivabile

Proposizione 11.7. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ continua e invertibile con I intervallo. Supponiamo f derivabile in $w \in I$. Allora l'inversa g di f è derivabile in $z = f(w)$ se e solo se $f'(w) \neq 0$. In tale caso*
$$g'(z) = \frac{1}{f'(w)} = \frac{1}{f'(g(z))} = \frac{1}{f'(f^{-1}(z))}.$$

Proof.

$\Longrightarrow$ Poichè g è l'inversa di f si ha si ha $g \circ f = \iota_I$, quindi se g fosse derivabile in $z = f(w)$ si avrebbe $f'(w)g'(z) = 1$, il che significa che $f'(w) \neq 0$ e che $g'(z) = \frac{1}{f'(w)}$.

$\Longleftarrow$ Viceversa supponiamo $f'(w) \neq 0$. Per le ipotesi fatte si ha che g è continua in z quindi
$$g'(z) = \lim_{y \to z} \frac{g(y) - g(z)}{y - z}$$
essendo $y = f(x)$, avremo
$$\lim_{x \to w} \frac{g(f(x)) - g(f(w))}{f(x) - f(w)} = \lim_{x \to w} \frac{x - w}{f(x) - f(w)} = \frac{1}{f'(w)}.$$

$\square$

11.4 Derivate delle funzioni elementari

Proposizione 11.8. *La funzione* $\sin(x)$ *è derivabile e la sua derivata è* $\cos(x)$.

Proof.

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\sin h\cos x-\sin x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x(\cos h-1)+\cos x\sin h}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left(\sin x\frac{\cos h-1}{h}+\cos x\frac{\sin h}{h}\right)=\cos x$$

□

Proposizione 11.9. *La funzione* $\cos(x)$ *è derivabile e la sua derivata è* $-\sin(x)$.

Proposizione 11.10. *La funzione arcoseno* $\arcsin(x)$ *è derivabile in* $]-1,1[$ *con derivata* $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Proposizione 11.11. *La funzione tangente* $\tan(x)$ *è derivabile, con derivata* $\frac{1}{\cos^2 x}$ *o* $1+\tan^2 x$.

Proposizione 11.12. *La funzione arcotangente* $\arctan(x)$ *è derivabile, con derivata* $\frac{1}{1+x^2}$.

Proposizione 11.13. *La funzione esponenziale naturale* e^x *è derivabile e ha come derivata sè stesso.*

Proof. Infatti
$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^xe^h-e^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^x(e^h-1)}{h}=e^x\lim_{h\to 0}\frac{(e^h-1)}{h}=e^x.$$

□

Proposizione 11.14. *La funzione logaritmo naturale* $\ln(x)$ *è derivabile, con derivata* $\frac{1}{x}$.

Proposizione 11.15. *Sia* $g(x)=c\cdot f(x)$ *con* c *costante e* f *derivabile, allora* g *è derivabile, con derivata* $g'(x)=c\cdot f'(x)$.

Proposizione 11.16. *La funzione esponenziale* a^x *con* $a>0$ *è derivabile con derivata* $a^x\ln a$.

Proof. Infatti, possiamo riscrivere a^x come $a^x = e^{x \ln a}$. Ora, deriviamo $e^{x \ln a}$ rispetto a x:

$$f(x) = e^{x \ln a} \implies f'(x) = \mathrm{D}\left(e^{x \ln a}\right).$$

Utilizzando la regola della catena per derivare $e^{x \ln a}$, otteniamo:

$$f'(x) = e^{x \ln a} \cdot \mathrm{D}\left(x \ln a\right) = e^{x \ln a} \cdot \ln a.$$

Poiché $e^{x \ln a} = a^x$, possiamo riscrivere il risultato come:

$$f'(x) = a^x \ln a.$$

□

Proposizione 11.17. *La funzione potenza x^α è derivabile con derivata $\alpha x^{\alpha-1}$.*

Proof. Se $f(x) = x^\alpha$, possiamo riscriverlo come $f(x) = e^{\alpha \ln(x)}$. Ora, deriviamo $e^{\alpha \ln(x)}$ rispetto a x:

$$f(x) = e^{\alpha \ln(x)} \implies f'(x) = \mathrm{D}\left(e^{\alpha \ln(x)}\right).$$

Utilizzando la regola della catena per derivare $e^{\alpha \ln(x)}$, otteniamo:

$$f'(x) = e^{\alpha \ln(x)} \cdot \mathrm{D}\left(\alpha \ln(x)\right) = e^{\alpha \ln(x)} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x}.$$

Poiché $e^{\alpha \ln(x)} = x^\alpha$, possiamo riscrivere il risultato come:

$$f'(x) = x^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

□

Proposizione 11.18. *La funzione radice quadrata $\sqrt{x}$ è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ con derivata $-\frac{1}{2\sqrt{x}}$.*

Proposizione 11.19. *La funzione valore assoluto $|x|$ è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ con derivata $\frac{|x|}{x}$.*

Proof. Sia $f(x) = |x|$, possiamo riscrivere ciò come $f(x) = \sqrt{x^2}$, quindi per $x \neq 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2}} \cdot \cancel{2}x = \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \frac{x}{|x|} \\ &= \frac{x \cdot x}{x \cdot |x|} = \frac{x^2}{x \cdot |x|} = \frac{|x|^2}{x \cdot |x|} = \frac{|x|}{x}. \end{aligned}$$

Dunque abbiamo che

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} \implies \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1 \ \vee \ \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1.$$

□

Proposizione 11.20. *La funzione $\ln|x|$ è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ con derivata $\frac{1}{x}$.*

Proof. Per derivare $f(x) = \ln|x|$, utilizziamo la definizione della derivata e la regola della catena. La funzione $\ln|x|$ può essere scritta come $\ln|x| = \ln(x)$ se $x > 0$ e $\ln|x| = \ln(-x)$ se $x < 0$. Deriviamo entrambe le parti:

- Per $x > 0$:
$$f(x) = \ln(x) \implies f'(x) = \frac{1}{x}.$$
- Per $x < 0$:
$$f(x) = \ln(-x) \implies f'(x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}.$$

Combinando i risultati, otteniamo:
$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad \text{per} \quad x \neq 0.$$
In modo alternativo, possiamo utilizzare la derivata della funzione composta $f(x) = \ln|x|$. Usando la regola della catena, otteniamo:
$$f'(x) = \mathrm{D}\, \ln|x| = \frac{1}{|x|} \cdot \mathrm{D}\,|x|.$$
Poiché $\mathrm{D}\,|x| = \frac{x}{|x|}$, possiamo scrivere:
$$f'(x) = \frac{1}{|x|} \cdot \frac{x}{|x|} = \frac{1}{x}.$$
□

11.5 Derivata di una funzione monotòna

Derivata di una funzione monotòna

Teorema 11.21. *Sia $f : D \to \mathbb{R}$ derivabile e crescente (decrescente). Allora*
$$\forall\, w \in D, \quad f'(w) \geq 0 \quad (f'(w) \leq 0).$$

Proof. Sia $w \in D$. Per ogni $x \in D$ diversa da w, essendo f crescente, avremo
$$f(x) \geq f(w) \quad \text{se } x > w \quad \text{e} \quad f(x) \leq f(w) \quad \text{se } x < w$$
in ogni caso
$$\frac{f(x) - f(w)}{x - w} \geq 0.$$
Ponendo il limite per $x \to w$ e applicando il teorema del confronto, si trova $f'(w) \geq 0$ □

Esempio 11.4. Sia
$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto -\frac{1}{x},$$
allora f è derivabile con
$$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0.$$
D'altra parte f non è monotòna, infatti
$$f(-1) = 1 \quad f(1) = -1 \quad f(2) = -\frac{1}{2}.$$

11.6 Punti di massimo e di minimo relativo

Punto di massimo relativo

Definizione 11.5. Siano $f : A \to \mathbb{R}$ e $w \in A$. Diciamo che w è punto di **massimo relativo** per f se
$$\exists\, \delta > 0 \,:\, \forall\, x \in A, \quad (\,|x - w| < \delta \implies f(x) \leq f(w)\,).$$
Cioè w è un punto di massimo per $f_{\restriction\, A \,\cap\,]w-\delta, w+\delta[}$.

Punto di minimo relativo

Definizione 11.6. Siano $f : A \to \mathbb{R}$ e $w \in A$. Diciamo che w è punto di **minimo relativo** per f se

$$\exists\, \delta > 0 \,:\, \forall\, x \in A, \quad (\,|x - w| < \delta \implies f(x) \geq f(w)\,).$$

Cioè w è un punto di minimo per $f_{\restriction\, A \cap]w-\delta, w+\delta[}$.

11.7 Teoremi importanti sulle derivate

Teorema di Fermat

Teorema 11.22. *Siano $f : A \to \mathbb{R}$ e $w \in A$. Supponiamo che:*

1. *w sia punto di massimo (o minimo) relativo per f;*
2. *w sia punto interno ad A;*
3. *f sia derivabile in w.*

Allora $f'(w) = 0$.

Proof. Dall'ipotesi (1), trovo

$$\delta' > 0 \,:\, \forall\, x \in A \cap]w - \delta', w + \delta'[, \quad f(x) \leq f(w).$$

Per l'ipotesi (2), trovo

$$\delta'' > 0 \,:]w - \delta'', w + \delta''[\subseteq A.$$

Preso $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$, avremo che nell'intervallo $]w - \delta, w]$ la funzione è crescente e nell'intervallo $[w, w + \delta[$, la funzione è decrescente. Da ciò, applicando il Teorema (11.21), ricaviamo che

$$\forall\, x \in]w - \delta, w[, \quad \frac{f(x) - f(w)}{x - w} \geq 0,$$

quindi

$$f'(w) = \lim_{x \to w^-} \frac{f(x) - f(w)}{x - w} \geq 0.$$

D'altra parte, se $x \in]w, w + \delta[$, si ha $\dfrac{f(x) - f(w)}{x - w} \leq 0$, quindi

$$f'(w) = \lim_{x \to w^+} \frac{f(x) - f(w)}{x - w} \leq 0.$$

In conclusione

$$\lim_{x \to w} \frac{f(x) - f(w)}{x - w} = 0.$$

□

Teorema di Rolle

Teorema 11.23. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua e derivabile in $]a, b[$. Se $f(a) = f(b)$, allora*

$$\exists\, c \in]a, b[:\, f'(c) = 0.$$

Proof. Per il teorema di Weierstrass,

$$\exists\, p, q \in [a,b] \,:\, \forall\, x \in [a,b], \quad f(p) \leq f(x) \leq f(q).$$

Distinguiamo due casi

1. Almeno uno tra p e q appartengono a $]a,b[$ allora ho $c \in]a,b[$ che è punto di massimo o di minimo. Applicando il teorema di Fermat, trovo $f'(c) = 0$.
2. Nessuno dei due punti p, q appartiene a $]a,b[$ cioè $p, q \in \{a, b\}$. In tal caso $f(p) = f(q)$, quindi

   $$\forall\, x \in [a,b], \quad f(x) = f(p) = f(q).$$

   Cioè f è costante. Pertanto $\forall\, c \in]a,b[, \quad f'(c) = 0$.

□

Teorema di Cauchy

Teorema 11.24. *Siano $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue e derivabili in $]a,b[$. Allora*

$$\exists\, c \in]a,b[: \; (f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

Cioè

$$\begin{vmatrix} f(b) - f(a) & f'(c) \\ g(b) - g(a) & g'(c) \end{vmatrix} = 0.$$

Nel caso in cui g' non si annulli in $]a,b[$ allora

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Proof. Poniamo, per $x \in [a,b]$

$$h(x) = \begin{vmatrix} f(b) - f(a) & f(x) \\ g(b) - g(a) & g(x) \end{vmatrix} = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$$

La funzione $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua, e in tutti i punti di $]a,b[$ è derivabile, con derivata

$$h'(x) = \begin{vmatrix} f(b) - f(a) & f'(x) \\ g(b) - g(a) & g'(x) \end{vmatrix} = (f(b) - f(a))g'(x) - (g(b) - g(a))f'(x)$$

Poichè $h(a) = h(b)$ possiamo applicare il teorema di Rolle. Infatti

$$h(a) = (f(b) - f(a))g(a) - (g(b) - g(a))f(a) = f(b)g(a) - \cancel{f(a)g(a)} - g(b)f(a) + \cancel{g(a)f(a)} = f(b)g(a) - g(b)f(a)$$

e

$$\begin{aligned} h(b) &= (f(b) - f(a))g(b) - (g(b) - g(a))f(b) = \cancel{f(b)g(b)} - f(a)g(b) - \cancel{g(b)f(b)} + g(a)f(b) \\ &= -f(a)g(b) + g(a)f(b) = f(b)g(a) - g(b)f(a). \end{aligned}$$

Concludiamo $h'(c) = 0$. □

Teorema di Lagrange

Teorema 11.25. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua e derivabile in $]a,b[$. Allora*

$$\exists\, c \in]a,b[: \; f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \quad \text{o} \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Teorema sull'andamento di una funzione

Teorema 11.26. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ con I intervallo. Supponiamo f derivabile nei punti interni di I. Se per ogni x interno a I si ha:*

1. $f'(x) \geq 0$, *allora f è crescente;*
2. $f'(x) > 0$, *allora f è strettamente crescente;*
3. $f'(x) \leq 0$, *allora f è decrescente;*
4. $f'(x) < 0$, *allora f è strettamente decrescente;*
5. $f'(x) = 0$, *allora f è costante.*

Proof. 2) Siano $x', x'' \in I$ con $x' < x''$. Applicando alla restrizione di f a $[x', x'']$ il teorema di Lagrange, trovo

$$\xi \in]x', x''[: \ \frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'} = f'(\xi) > 0.$$

□

11.8 Funzioni convesse

Funzione convessa

Definizione 11.7. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ con I intervallo. Diciamo che f è **convessa** se

$$\forall\, p, r \in I \ (p < r), \ \forall\, \lambda \in]0,1[, \quad f(p + \lambda(r - p)) \leq f(p) + \lambda(f(r) - f(p)).$$

Caratterizzazione delle funzioni convesse

Proposizione 11.27. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ con intervallo. Sono equivalenti le seguenti condizioni:*

1. *f è convessa;*
2. *$\forall\, p, q, r \in I$ con $p < q < r$ si ha*
$$\frac{f(q) - f(p)}{q - p} \leq \frac{f(r) - f(p)}{r - p};$$
3. *$\forall\, p, q, r \in I$ con $p < q < r$ si ha*
$$\frac{f(q) - f(p)}{q - p} \leq \frac{f(r) - f(q)}{r - q};$$
4. *$\forall\, p, q, r \in I$ con $p < q < r$ si ha*
$$\frac{f(r) - f(p)}{r - p} \leq \frac{f(r) - f(q)}{r - q};$$
5. $$pf(q) + qf(r) + rf(p) \geq qf(p) + rf(q) + pf(r);$$
6. $$\frac{f(q) - f(p)}{q - p} \leq \frac{f(r) - f(p)}{r - p} \leq \frac{f(r) - f(q)}{r - q}.$$

Proof. 5) Siano $p, r \in I$ con $p < r$, e sia $\lambda \in]0,1[$. Poniamo $q = p + \lambda(r - p)$, il che significa

$$\lambda = \frac{q - p}{r - p}.$$

La convessità di f implica che

$$f(p + \lambda(r - p)) \leq f(p) + \lambda(f(r) - f(p)),$$

cioè

$$f(q) \leq f(p) + \frac{q-p}{r-p}(f(r) - f(p)).$$

Equivalentemente, possiamo scrivere

$$\frac{f(q) - f(p)}{q-p} \leq \frac{f(r) - f(p)}{r-p}.$$

Espandendo quest'ultima disuguaglianza otteniamo:

$$f(q) - f(p) \leq \frac{q-p}{r-p}(f(r) - f(p)).$$

Moltiplicando entrambi i lati per $(r-p)$, si ha:

$$(f(q) - f(p))(r-p) \leq (f(r) - f(p))(q-p),$$

che si può riscrivere come:

$$rf(q) - rf(p) - pf(q) + pf(p) \leq qf(r) - qf(p) - pf(r) + pf(p).$$

Riorganizzando i termini, otteniamo:

$$pf(q) + qf(r) + rf(p) \geq qf(p) + rf(q) + pf(r).$$

□

Nota 32. Un'altra disuguaglianza utile nel contesto della convessità è:

$$\frac{f(q) - f(p)}{q-p} \leq \frac{f(r) - f(p)}{r-p} \leq \frac{f(t) - f(r)}{t-r} \leq \frac{f(t) - f(s)}{t-s}.$$

Inoltre, le funzioni convesse su intervalli aperti sono sempre continue.

Funzioni convesse derivabili

Nota 33. Siano $x' < x''$ tali che $f'(x') < f'(x'')$ e $x \in]x', x''[$. Per il teorema di Lagrange abbiamo che

$$\exists \xi' \in]x', x[: \exists \xi'' \in]x, x''[: \frac{f(x) - f(x')}{x - x'} = f'(\xi') \leq f'(\xi'') = \frac{f(x'') - f(x)}{x'' - x}.$$

11.9 Punti a tangente verticale, cuspidi e punti angolosi

1. $$\lim_{x \to w} \frac{f(x) - f(w)}{x - w} = \pm\infty,$$

2. $$\lim_{x \to w^-} \frac{f(x) - f(w)}{x - w} = +\infty \quad \vee \quad \lim_{x \to w^+} \frac{f(x) - f(w)}{x - w} = -\infty.$$

   Nel secondo caso si parla di **cuspide**.

Punti angolosi f non è derivabile, ma

$$\lim_{x \to w^-} \frac{f(x) - f(w)}{x - w} \quad \text{e} \quad \lim_{x \to w^+} \frac{f(x) - f(w)}{x - w}$$

esistono entrambi e sono distinti (e non entrambi infiniti).

11.10 Punti di flesso

Punto di flesso

Definizione 11.8. Siano $f : D \to \mathbb{R}$ e $w \in D$. Diciamo che w è **punto di flesso** per f se:

1. w è interno a D;
2. esistono $a, b \in D$ con $a < w < b$ tali che $f_{\restriction [a,w]}$ è convessa e $f_{\restriction [w,b]}$ è concava, o viceversa;
3. esiste $\lim_{x \to w} \frac{f(x) - f(w)}{x - w}$
   - Se lim > 0, si parla di **flesso ascendente**;
   - Se lim < 0, si parla di **flesso discendente**;
   - Se lim $= 0$, la derivata è nulla.

11.11 Asintoti

Asintoto verticale

Definizione 11.9. L'asintoto verticale è una retta di equazione $x = p$ dove $p \in \mathcal{D}(A)$ e $\lim_{x \to p} f(x) = \pm\infty$ (anche solo da destra o da sinistra)

Nota 34. Negli altri casi è una retta di equazione $y = mx + q$ tale che

$$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - (mx + q)) = 0.$$

Asintoto orizzontale

Definizione 11.10. L'asintoto orizzontale, cioè $m = 0$: significa $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = q$.

Asintoto obliquo

Definizione 11.11. L'asintoto obliquo, cioè $m \neq 0$ si ha (condizione necessaria e sufficiente)

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad \wedge \quad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - mx = q.$$

Nota 35. Consideriamo la condizione in cui:

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (mx + q)) = 0.$$

Questo significa che, per x che tende a infinito, la differenza tra $f(x)$ e la retta $mx + q$ diventa zero. Ora, possiamo manipolare questa espressione per ottenere informazioni su m. Se dividiamo tutto per x, otteniamo:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) - (mx + q)}{x} = \frac{0}{x} = 0.$$

Scomponiamo il numeratore:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - \frac{mx}{x} - \frac{q}{x} \right) = 0.$$

Questo si semplifica a:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - m - \frac{q}{x} \right) = 0$$

Notiamo che quando x tende a infinito, $\frac{q}{x}$ tende a zero. Quindi possiamo riscrivere l'espressione come:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-m\right)=0.$$

Per questa espressione essere vera, deve essere che:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=m.$$

Quindi, se l'asintoto obliquo esiste, il coefficiente angolare m è proprio il limite del rapporto $\frac{f(x)}{x}$ per x che tende a infinito. Infine, osserviamo che:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\pm\infty.$$

In altre parole, la funzione $f(x)$ cresce (o decresce) senza limiti mentre x tende a infinito.

Teorema 11.28. *Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ derivabile e supponiamo che negli estremi la derivata abbia valori di segno opposto, cioè $f'(a)<0$ e $f'(b)>0$ (o viceversa). Allora*

$$\exists\, c\in\,]a,b[:\ f'(c)=0.$$

Proof. La funzione f non può essere monotòna, dunque nemmeno invertibile. Pertanto

$$\exists\, x',x''\ (x'<x'')\ \in[a,b]\ :\ f(x')=f(x'').$$

Per il teorema di Rolle applicato $f_{\restriction\,[x',x'']}$, abbiamo che

$$\exists\, c\in\,]x',x''[\,\leq\,]a,b[:\ f'(c)=0.$$

□

Proprietà di Darboux della derivata

Corollario 12. *Sia $f:I\to\mathbb{R}$ con I intervallo. Allora $f'(I)$ è un intervallo.*

Proof. Siano $\alpha,\beta\in f'(I)$, con $\alpha<\beta$ e siano $a,b\in I$ tali che $f'(a)=\alpha$ e $f'(b)=\beta$. Possiamo supporre $a<b$ (l'altro caso è analogo). Sia $y\in\,]\alpha,\beta[$. Posto $g(x)=f(x)-xy$ per $x\in[a,b]$, la funzione g è derivabile, con derivata $f'(x)-y$ quindi $g'(a)<0$ e $g'(b)>0$. Pertanto

$$\exists\, c\in\,]a,b[\,\subseteq I\ :\ g'(c)=0,$$

cioè $f'(c)=y$. □

Teorema di De L'Hôpital

Teorema 11.29. *Siano $f,g:I\to\mathbb{R}$ continue con I intervallo, $g(x)\neq0$ per ogni $x\in I\setminus\{p\}$, e $p\in\overline{\mathcal{D}}(I)$. Supponiamo che*

1. $\lim_{x\to p}f(x)=\lim_{x\to p}g(x)=0$, *oppure*
2. $\lim_{x\to p}g(x)=\pm\infty$.

Supponiamo inoltre f e g derivabili in $I\setminus\{p\}$ con $g'(x)\neq0$ per ogni $x\in I\setminus\{p\}$. Allora, se

$$\lim_{x\to p}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l\in\overline{\mathbb{R}},\quad\text{anche}\quad\lim_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)}=l.$$

Proof. Possiamo limitarci al caso in cui $p \in \mathbb{R}$ e il limite è da destra.

Consideriamo l'eventualità (1), possiamo supporre che $p \in I$ e che

$$f(p) = g(p) = 0.$$

Fissato $q \in I$ con $q > p$, le funzioni verificano in $[p, q]$ le ipotesi del teorema di Cauchy. Dato un qualunque intorno H di l, dobbiamo dimostrare che esiste $\delta > 0$ tale che se $q < p + \delta$ si ha

$$\frac{f(q)}{g(q)} \in H.$$

Sia dunque $\delta > 0$ tale che

$$\forall\, x \in I \cap]p, p + \delta[, \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} \in H;$$

per il teorema di Cauchy

$$\exists\, c \in]p, q[: \ \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(q) - f(p)}{g(q) - g(p)} = \frac{f(q)}{g(q)}$$

perciò se $q < p + \delta$, poichè evidentemente $c \in]p, p + \delta[$, è

$$\frac{f(q)}{g(q)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \in H$$

come volevamo.

Consideriamo ora l'eventualità (2). Cambiando se occorre il segno a entrambe le funzioni, possiamo supporre che

$$\forall\, x \in I, \quad g'(x) < 0 \ \text{ e } \ g(x) > 0.$$

Ci basta dimostrare che

$$\min\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} \geq l \quad \text{ e che } \quad \max\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} \leq l.$$

Poniamo

$$\lambda = \min\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{e} \quad \Lambda = \max\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)},$$

e ragioniamo per assurdo supponendo che si abbia $\lambda < l$ oppure $\Lambda > l$.

Sia ad esempio $\lambda < l$ (se $\Lambda > l$ si ragiona in maniera analoga). Preso un qualunque $m \in]\lambda, l[$, poichè l'intervallo $]m, +\infty[$ contiene un intorno di l, esisterà $r > 0$ tale che $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} > m$ per ogni $x \in]p, p + r[$. Siano dunque $u, v \in]p, p + r[$ con $u < v$: per il Teorema di Cauchy esiste $\xi \in]u, v[$ tale che

$$\frac{f(v) - f(u)}{g(v) - g(u)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)};$$

essendo poi $]u, v[\subseteq]p, p + r[$, si ha

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} > m,$$

quindi

$$m < \frac{f(v) - f(u)}{g(v) - g(u)} = \frac{f(u) - f(v)}{g(u) - g(v)}.$$

Ora, poichè g è strettamente decrescente, $g(u) - g(v) > 0$ e dunque si ha $m(g(u) - g(v)) < f(u) - f(v)$; dividendo per $g(u)$ (che è positivo) otteniamo

$$m\left(1 - \frac{g(v)}{g(u)}\right) < \frac{f(u)}{g(u)} - \frac{f(v)}{g(u)} \quad \text{cioè} \quad \frac{f(u)}{g(u)} > \frac{f(v)}{g(u)} + m\left(1 - \frac{g(v)}{g(u)}\right)$$

e, passando al minimo limite per $u \to p$, si ottiene $\lambda \geq m$: che è assurdo. $\square$

Applicazioni del teorema di De L'Hôpital

Proposizione 11.30. *Siano $f : I \to \mathbb{R}$ con I intervallo e $p \in \overline{\mathcal{D}}(I)$. Supponiamo che f sia derivabile in $I \setminus \{p\}$ e che esista $\lim\limits_{x\to p} f'(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora l è anche il limite del rapporto incrementale in p. In particolare, se $l \in \mathbb{R}$, f è derivabile in p e f' è continua in p.*

Proof. Poichè f è continua, possiamo applicare il teorema di De L'Hopital

$$\lim_{x\to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

□

Funzione derivabile n volte in un punto

Definizione 11.12. Siano $n \in \mathbb{N}_0$ e $f : D \to \mathbb{R}$. Diciamo che f è derivabile n volte in $w \in D$ se

- $n = 0$ ed è continua in w, e scriveremo $f^0 = f$;
- $n > 0$ ed esiste un intorno I tale che $f^{(n-1)}$ è definito (almeno) in $I \cap D$ ed è derivabile in w.

Teorema 11.31. *Siano $n \in \mathbb{N}$ e $f : I \to \mathbb{R}$ con I intervallo derivabile n volte in $w \in I$. Sono equivalenti:*

1. *$f(x) = o((x - w)^n)$ per $x \to w$;*
2. *$f^{(k)}(w) = 0$ per $k \in \{0, ..., n\}$.*

Proof. Per induzione su n.

$n = 0$ La (1) significa $\lim_{x\to w} f(x) = 0$, mentre la (2) significa $f(w) = 0$. Pertanto l'equivalenza vale per la continuità di f.

$n - 1 \rightsquigarrow n$ Ora sia (1) che (2) implicano che

$$f^{(k)}(w) = 0 \text{ per } k \in \{0, ..., n - 1\}.$$

Pertanto basta dimostrare che $f(x) = o((x - w)^n)$ equivale a $f^{(n)}(w) = 0$:

$$\lim_{x\to w} \frac{f(x)}{(x - w)^n} = \lim_{x\to w} \frac{f^{(n-1)}(x)}{n!(x - w)} = \frac{1}{n!} \lim_{x\to w} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(w)}{x - w} = \frac{1}{n!} f^{(n)}(w).$$

□

Corollario 13. *Siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ con I intervallo derivabili n volte in $w \in I$ ($n \in \mathbb{N}_0$). Allora*

$$f(x) - g(x) = o((x - w)^n) \quad \iff \quad f^{(k)}(w) = g^{(k)}(w) \;\; \forall k \in \{0, ..., n\}.$$

Proof. Basta applicare il teorema precedente a $h = f - g$. □

Nota 36. Sia $n \in \mathbb{N}_0$, abbiamo che

$$\forall w \in \mathbb{R}, \forall d_0, ..., d_n \in \mathbb{R}, \exists! P(x) \text{ di grado } \leq n : \forall k \in \{0, ..., n\}, \quad P^{(k)}(w) = d_k.$$

Infatti

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{d_k}{k!}(x - w)^k.$$

11.12 Sviluppo di Taylor e resto nella forma di Lagrange

Formula di Taylor (di ordine $n \in \mathbb{N}$)

Definizione 11.13. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile n volte in $w \in I$ (I intervallo). Allora

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(w)}{k!}(x-w)^k + \underbrace{o((x-w)^n)}_{R_n(x) \text{ resto}}$$

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ (con I intervallo) dotata di derivata n-esima continua ($n \in \mathbb{N}_0$). Sia $w \in I$, e supponiamo che esiste $f^{(n+1)}$ in $I \setminus \{w\}$. Allora

$$\forall\, x \in I \setminus \{w\},\ \exists\, \xi$$

strettamente compreso tra w e x tale che

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(w)}{k!}(x-w) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-w)^{n+1}.$$

Fissato $x \in I \setminus \{w\}$, poniamo

$$R_w(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(w)}{k!}(x-w)^k.$$

Definiamo $\phi, \psi : I \to \mathbb{R}$ al seguente modo

$$\phi : t \mapsto f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k, \qquad \psi : t \mapsto (x-t)^{n+1}.$$

Nell'intervallo chiuso di estremi x e w, possiamo applicare il teorema di Cauchy. In effetti

$$\begin{aligned}
\phi'(t) &= -\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}k(x-t)^{k-1} = \\
&= \sum_{h=0}^{n-1} \frac{f^{(h-1)}(t)}{h!}(x-t)^h - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(h+1)}(t)}{k}(x-t)^k - \frac{f^{(h+1)}(t)}{n!}(x-t)^n = \\
&= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n
\end{aligned}$$

$$\psi'(t) = -(n+1)(x-t)^n$$

Quando esiste ξ intero a I tale che

$$\frac{\phi(x) - \phi(w)}{\psi(x) - \psi(w)} = \frac{\phi'(\xi)}{\psi'(\xi)},$$

nell'intervallo chiuso di estremi x e w, possiamo applicare il teorema di Cauchy. In effetti

$$\phi(x) = 0 \quad \phi(w) = R_w(x)$$

$$\phi(x) = 0 \quad \psi(w) = (x-w)^{n+1}$$

$$\frac{R_w(x)}{(x-w)^{n+1}} = \frac{\frac{f^{n+0}(\xi)}{n!}\cancel{(x-\xi)^n}}{(n+1)\cancel{(x-\xi)^n}} \qquad R_w(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-w)^{n+1}$$

Part V

Calcolo Integrale

12 Calcolo Integrale

12.1 L'integrale

Insieme delle funzioni limitate e suddivisioni di un intervallo

Definizione 12.1. Fissato un intervallo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$:

- chiamiamo $\mathcal{B}[a, b]$ l'insieme delle funzioni limitate di dominio $[a, b]$;
- chiamiamo **suddivisione** di $[a, b]$ ogni sottoinsieme finito dell'intervallo $[a, b]$ contenente $\{a, b\}$.

L'insieme di tale suddivisioni sarà indicato con $T[a, b]$. Per ogni $D \in T[a, b]$, converremo di indicare i punti di D con $x_0, x_1, \ldots, x_n$ dove,

$$\forall\, i, j \in \{0, 1, \ldots, n\}, \quad x_i < x_j \iff i < j,$$

in particolare $x_0 = a$ e $x_n = b$.

Somma superiore e somma inferiore di una funzione

Definizione 12.2. Siano $f \in \mathcal{B}[a, b]$ e $D \in T[a, b]$. Per ogni $k \in \{1, \ldots, n\}$, poniamo

$$m_k(f) = \inf\{f(x) \,|\, x \in [x_{k-1}, x_k]\} \quad \text{e} \quad M_k(f) = \sup\{f(x) \,|\, x \in [x_{k-1}, x_k]\}.$$

Definiamo dunque la somma superiore e inferiore di f al seguente modo

Somma superiore $S^D f = \sum_{k=1}^{n} M_k(f)(x_k - x_{k-1})$ e **Somma inferiore** $S_D f = \sum_{k=1}^{n} m_k(f)(x_k - x_{k-1})$

Integrale di una funzione

Definizione 12.3. Definiamo ora i seguenti :

Integrale superiore $\int^{*} f = \inf\{\, S^D f \,|\, D \in T[a, b]\,\}$

Integrale inferiore $\int_{*} f = \sup\{\, S_D f \,|\, D \in T[a, b]\,\}$

Se $\int_* f$ e $\int^* f$ coincidono, tale valore si dirà **integrale** di f e si indicherà con

$$\int f \quad \text{o} \quad \int\limits_{[a,b]} f(x)\,dx.$$

L'insieme delle funzioni integrabili su un intervallo $[a,b]$ sarà indicato con $I[a,b]$.

12.2 Proprietà dell'integrale

Proposizioni su somme e integrali superiori e inferiori

Proposizione 12.1. *Siano $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e $f \in \mathcal{B}[a,b]$. Valgono le seguenti proprietà:*

1. $\forall\, D \in T[a,b], \quad S_D f \leq S^D f$;
2. $\forall\, D \in T[a,b], \quad S_D f = -S^D(-f)$;
3. *Siano $D, E \in T[a,b]$ con $D \subseteq E$ ed $E \setminus D = \{y\}$. Allora*
$$S_D f \leq S_E f \quad \wedge \quad S^E f \leq S^D f;$$
4. *Siano $D, E \in T[a,b]$ con $D \subseteq E$. Allora*
$$S_D f \leq S_E f \quad \wedge \quad S^E f \leq S^D f.$$

Proof.

1. Infatti $\forall\, k \in \{1, \ldots, n\},\ m_k(f) \leq M_k(f)$.
2. Infatti $\forall\, k \in \{1, \ldots, n\},\ m_k(f) = -M_k(-f)$.
3. Sia $D = \{x_0, \ldots, x_n\}$, e sia j tale che $x_{j-1} < y < x_j$. Poniamo
$$\mu' = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{j-1}, y]\} \quad \wedge \quad \mu'' = \sup\{f(x) \mid x \in [y, x_j]\}.$$
Poichè $\mu', \mu'' \leq M_j(f)$, si ha
$$S^E f - S^D f = \mu'(y - x_{j-1}) + \mu''(x_j - y) - M_j(f)(x_j - x_{j-1}) \leq M_j(f)(y - x_{j-1}) = 0.$$
4. Sia $E \setminus D = \{y_1, \ldots, y_h\}$. Basta applicare il punto precedente h volte.

□

Proposizione 12.2.
$$\forall\, f \in \mathcal{B}[a,b], \quad \int_* f \leq \int^* f.$$

Proof. Infatti
$$\forall\, D, E \in T[a,b],\ S_D f \leq S_{D\cup E} f \leq S^{D\cup E} f \leq S^E f.$$

□

Criterio di integrabilità

Teorema 12.3. *Sia $f \in \mathcal{B}[a,b]$. Allora*
$$f \in I[a,b] \iff \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, D \in T[a,b] :\ S^D f - S_D f < \varepsilon.$$

Proof.

$\Longrightarrow$ Siano $f \in I[a,b]$ e $\varepsilon > 0$. Allora

$$\exists\, D', D'' \in T[a,b] : \quad S_{D''} f > \int f - \frac{\varepsilon}{2} \quad \wedge \quad S^{D'} f < \int f + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ponendo $D = D' \cup D''$, si ha

$$S_{D''} f \leq S_D f \quad \wedge \quad S^D f \leq S^{D'} f,$$

cioè

$$S^D f \leq S^{D'} f < \int f + \frac{\varepsilon}{2} \quad \wedge \quad S_D f \geq S_{D''} f > \int f - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Abbiamo che

$$-S_D f \leq -S_{D''} f < -\int f + \frac{\varepsilon}{2},$$

pertanto

$$S^D f - S_D f \;\leq\; S^{D'} f - S_{D''} f \;<\; \int f + \frac{\varepsilon}{2} - \int f + \frac{\varepsilon}{2} \;=\; \varepsilon,$$

e dunque

$$S^D f - S_D f \;<\; \varepsilon.$$

$\Longleftarrow$ Viceversa, supponiamo f non integrabile e chiamiamo $\varepsilon = \int^* f - \int_* f$, cosicchè $\varepsilon > 0$ per ogni $D \in T[a,b]$. Si ha $S_D f \leq \int_* f$ e $S^D f \geq \int^* f$ quindi

$$S^D f - S_D f \geq \int^* f - \int_* f = \varepsilon.$$

□

Integrabilità della funzione opposta

Proposizione 12.4. *Sia $f \in \mathcal{B}[a,b]$. Allora f è integrabile se e solo se lo è $-f$ e, in tal caso,*

$$\int (-f) = -\int f.$$

Proof. Infatti

$$\int_* f = -\int^* (-f).$$

□

Integrabilità della funzione somma Siano $f, g \in \mathcal{B}[a,b]$ e sia $D = \{x_0, ..., x_n\} \in T[a,b]$. Abbiamo che

$$M_k(f) = \sup\{\, f(x) \,|\, x \in [x_{k-1}, x_k] \,\} \quad \text{e} \quad M_k(g) = \sup\{\, g(y) \,|\, y \in [x_{k-1}, x_k] \,\}.$$

Poichè

$$\begin{aligned}\{\, f(x) + g(x) \,|\, x \in [x_{k-1}, x_k] \,\} &\subseteq \{\, f(x) + g(y) \,|\, x, y \in [x_{k-1}, x_k] \,\} \\ &= \{\, f(x) \,|\, x \in [x_{k-1}, x_k] \,\} + \{\, g(y) \,|\, y \in [x_{k-1}, x_k] \,\},\end{aligned}$$

si ha

$$\begin{aligned}M_k(f+g) &= \sup\{\, f(x) + g(x) \,|\, x \in [x_{k-1}, x_k] \,\} \\ &\leq \sup\{\, f(x) + g(y) \,|\, x, y \in [x_{k-1}, x_k] \,\} \\ &\leq M_k(f) + M_k(g).\end{aligned}$$

Analogamente
$$m_k(f+g) \geq m_k(f) + m_k(g).$$
Pertanto
$$S^D(f+g) \leq S^D f + S^D g,$$
da cui
$$\int^* (f+g) \leq S^D(f+g) \leq S^D f + S^D g$$
o anche
$$S_D(f+g) \geq S_D f + S_D g,$$
da cui
$$\int_* (f+g) \geq S_D(f+g) \geq S_D f + S_D g.$$
Date $D', D'' \in T[a,b]$, abbiamo, ponendo $D = D' \cup D''$,
$$S^{D'} f + S^{D''} g \ \geq \ S^D f + S^D g \ \geq \ \int^* (f+g),$$
così
$$\inf\{S^{D'} f + S^{D''} g \,|\, D', D'' \in T[a,b]\} \geq \int^* (f+g),$$
ma
$$\inf\{S^{D'} f + S^{D''} g \,|\, D', D'' \in T[a,b]\} = \inf(\{S^{D'} f \,|\, D' \in T[a,b]\} + \{S^{D''} f \,|\, D'' \in T[a,b]\})$$
$$= \inf\{S^{D'} f \,|\, D' \in T[a,b]\} + \inf\{S^{D''} g \,|\, D'' \in T[a,b]\} = \int^* f + \int^* g$$
e si conclude che
$$\int^* f + \int^* g \geq \int^* (f+g).$$
Similmente
$$\int_* f + \int_* g \leq \int_* (f+g).$$
Di conseguenza, se f, g sono integrabili, si ha
$$\int f + \int g \leq \int_* (f+g) \leq \int^* (f+g) \leq \int f + \int g$$
il che significa che $f+g$ è integrabile e
$$\int (f+g) = \int f + \int g$$

Linearità dell'integrale

Proposizione 12.5. *Siano $f \in I[a,b]$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora anche $\lambda f \in I[a,b]$ e*
$$\int \lambda f = \lambda \int f.$$

Proof. Possiamo supporre che $\lambda \neq 0$. Inoltre, poichè se $f \in I[a,b]$ lo è anche $-f$ e
$$\int (-f) = -\int f,$$
ci limiteremo al caso $\lambda > 0$. Ora abbiamo che
$$\forall\, D \in T[a,b], \quad M_k(\lambda f) = \lambda M_k(f) \quad \wedge \quad m_k(\lambda f) = \lambda m_k(f)$$
da cui
$$S^D \lambda f = \lambda S^D f \quad \wedge \quad S_D \lambda f = \lambda S_D f,$$

e quindi

$$\int^* \lambda f = \lambda \int^* f;$$

analogamente

$$\int_* \lambda f = \lambda \int_* f.$$

□

Nota 37. Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Scriviamo $f \le g$ quando

$$\forall\, x \in [a, b],\; f(x) \le g(x).$$

Integrale di una funzione non negativa

Proposizione 12.6. *Sia $f \in \mathcal{B}[a, b]$ non negativa. Allora si ha $\int_* f \ge 0$, da cui ovviamente segue anche $\int^* f \ge 0$.*

Proof. Infatti, se $m = \inf f$, e $m \ge 0$, e considerando $D = \{a, b\}$ si ha

$$S_D = m(b - a) \ge 0,$$

pertanto

$$\int_* f \ge m(b - a) \ge 0.$$

□

Corollario 14. *Siano $f \in I[a, b]$ e $f \ge 0$. Allora $\int f \ge 0$.*

Integrale di una funzione minore dell'altra

Proposizione 12.7. *Siano $f, g \in I[a, b]$ tali che $f \le g$. Allora $\int f \le \int g$.*

Proof. Infatti

$$h = g - f \in I[a, b] \quad \text{e} \quad h \ge 0,$$

quindi

$$\int g - \int f = \int h \;\ge\; 0.$$

□

Integrale di una funzione definita in un punto

Proposizione 12.8. *Siano $p \in [a, b]$ e*

$$u_p : [a, b] \to \{0, 1\} \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & x = p \\ 0 & x \in [a, b] \setminus \{p\} \end{cases} .$$

Allora $u_p \in I[a, b]$ e $\int u_p = 0$.

Proof. Basta dimostrare che
$$\int^* u_p = 0.$$
Supponiamo al contrario che
$$\int^* u_p = \delta > 0.$$
Costruiamo $D = \{a, x_1, x_2, b\}$ al seguente modo.

- Se $p = a$,
  prendiamo $x_1 = a$ e $x_2 \in]a, b]$ con $x_2 \leq a + \frac{\delta}{4}$;
- se $p = b$,
  prendiamo $x_2 = b$ e $x_1 \in [a, b[$ con $x_1 \geq b - \frac{\delta}{4}$;
- se $p \in]a, b[$,
  poniamo
$$x_1 \in [a, p[\quad \text{con} \quad x_1 \geq p - \frac{\delta}{4} \quad \text{e} \quad x_2 \in]p, b] \quad \text{con} \quad x_2 \leq p + \frac{\delta}{4}.$$

In ogni caso
$$x_2 > x_1 \quad \text{e} \quad x_2 - x_1 \leq \frac{\delta}{2},$$
ma
$$S^D u_p = x_2 - x_1 \leq \frac{\delta}{2} < \delta = \int^* u_p$$
il che è impossibile. □

Integrale di funzioni che differiscono per un numero finito di punti

Teorema 12.9. *Siano $f \in I[a, b]$ e $g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Supponiamo che g differisca da f in un numero finito di punti. Allora anche $g \in I[a, b]$ e $\int g = \int f$.*

Proof. Sia $h = g - f$, allora indicando con
$$Z = \{x \in [a, b] \mid f(x) \neq g(x)\},$$
possiamo scrivere $Z = \{p_1, ..., p_n\}$ con $p_i < p_j$ se $i < j$. Supponiamo $Z \neq \emptyset$, posto $\lambda_i = g(p_i) - f(p_i)$ per ogni $i \in \{1, ..., n\}$, si ha
$$h = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_{p_i}.$$
Per la proposizione precedente abbiamo che $h \in I[a, b]$ e $\int h = 0$, pertanto
$$g = f + h \in I[a, b] \quad \text{con} \quad \int g = \int f + \int h = \int f.$$
□

Restrizione di funzioni integrabili

Proposizione 12.10. *Siano $f \in I[a, b]$ e $[c, d] \subseteq [a, b]$. Allora $f_{\upharpoonright [c,d]} \in I[c, d]$.*

Proof. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Poichè $f \in I[a,b]$, allora

$$\exists\, D \in T[a,b] \,:\, S^D f - S_D f < \varepsilon.$$

Poniamo

$$\hat{D} = D \cup \{c,d\} \quad \text{e} \quad \check{D} = \hat{D} \cap [c,d] \in T[c,d].$$

Se $\hat{D} = \{x_1, \ldots, x_n\}$, allora $\check{D} = \{x_i, \ldots, x_j\}$. Siccome $\hat{D} \supseteq D$, si ha

$$S^{\hat{D}} f \leq S^D f \quad \text{e} \quad S_{\hat{D}} f \geq S_D f,$$

e quindi

$$S^{\hat{D}} f - S_{\hat{D}} f \leq S^D f - S_D f < \varepsilon.$$

Ora

$$\begin{aligned} S^{\check{D}} f_{\restriction\,[c,d]} - S_{\check{D}} f_{\restriction\,[c,d]} &= \sum_{k=i+1}^{j} (M_k(f_{\restriction\,[c,d]}) - m_k f_{\restriction\,[c,d]})(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=i+1}^{j} (M_k(f) - m_k(f))(x_k - x_{k-1}) \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} (M_k(f) - m_k(f))(x_k - x_{k-1}) = S^{\hat{D}} f - S_{\hat{D}} f < \varepsilon\,. \end{aligned}$$

□

Estensione di funzioni integrabili

Teorema 12.11. *Siano $f \in B[a,b]$, $[\alpha,\beta] \supseteq [a,b]$, e*

$$\tilde{f} : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} f(x) & x \in [a,b] \\ 0 & x \in [\alpha,\beta] \setminus [a,b] \end{cases}.$$

Allora

$$\tilde{f} \in I[\alpha,\beta] \quad \iff \quad f \in I[a,b],$$

e in tal caso

$$\int \tilde{f} = \int f.$$

Proof. Abbiamo già visto che

$$\tilde{f} \in [\alpha,\beta] \quad \Longrightarrow \quad f \in [a,b].$$

Sia ora $f \in I[a,b]$ e supponiamo $f(a) = f(b) = 0$. Sia $D \in T[a,b]$. Poniamo

$$\tilde{D} = D \cup \{\alpha,\beta\}.$$

Si ha $\tilde{D} \in T[\alpha,\beta]$, inoltre

$$S^{\tilde{D}} \tilde{f} = S^D f \quad \text{e} \quad S_{\tilde{D}} \tilde{f} = S_D f.$$

Quindi

$$\int^* \tilde{f} \;\leq S^{\tilde{D}} \tilde{f},$$

da cui

$$\int^* \tilde{f} \leq \int^* f = \int f,$$

per l'arbitrarietà di D. Analogamente

$$\int_* \check{f} \geq \int_* f = \int f.$$

Pertanto

$$\tilde{f} \in I[\alpha,\beta] \quad \text{e} \quad \int \tilde{f} = \int f.$$

□

Proprietà segmentaria dell'integrale

Teorema 12.12. *Siano $f \in \mathcal{B}[a,b]$ e $c \in]a,b[$. Allora*

$$f \in I[a,b] \quad \Longleftrightarrow \quad (\ f_{\restriction\ [a,c]} \in I[a,c] \quad \wedge \quad f_{\restriction\ [c,b]} \in I[c,b]\ ).$$

Proof. Anzitutto l'integrabilità di f implica quella delle restrizioni in virtù della proposizione (12.10). Supponiamo ora che $f_{\restriction\ [a,c]}$ e $f_{\restriction\ [c,b]}$ siano integrabili, e definiamo

$$f_1 : x \mapsto \begin{cases} f(x) & x \in [a,c] \\ 0, & x \in]c,b] \end{cases} \qquad f_2 : x \mapsto \begin{cases} f(x) & x \in [c,b] \\ 0, & x \in [a,c[. \end{cases}$$

Per il teorema (12.11) le funzioni f_1 e f_2 sono integrabili (su $[a,b]$), con

$$\int f_1 = \int f_{\restriction\ [a,c]} \quad \text{e} \quad \int f_2 = \int f_{\restriction\ [c,b]}.$$

Poichè f differisce da $f_1 + f_2$ al più nel punto c, segue dalla proprietà della somma degli integrali e dal teorema (12.9) che f è integrabile, e si ha

$$\int f = \int (f_1 + f_2) = \int f_1 + \int f_2 = \int f_{\restriction\ [a,c]} + \int f_{\restriction\ [c,b]}.$$

□

Collegamento tra integrabilità e successione di suddivisioni

Teorema 12.13. *Sia $f \in \mathcal{B}[a,b]$. Allora $f \in I[a,b]$ se e solo se esiste una successione $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di suddivisioni di $[a,b]$ con*

$$\lim_{n\to+\infty} (S^{D_n} f - S_{D_n} f) = 0.$$

In tal caso se

$$\lim_{n\to+\infty} S^{D_n} f = l$$

o, equivalentemente

$$\lim_{n\to+\infty} S_{D_n} f = l,$$

allora

$$l = \int f.$$

Proof. Supponiamo $f \in I[a,b]$. Allora

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \exists\, D_n \in T[a,b]\ :\ S^{D_n} f - S_{D_n} f < \frac{1}{n}.$$

Abbiamo così una successione

$$(D_n)_{n\in\mathbb{N}} \ \text{ con } \ \lim_{n\to+\infty} (S^{D_n} f - S_{D_n} f) = 0.$$

Viceversa, supponiamo che esista

$$(D_n)_{n\in\mathbb{N}} \ \text{ con } \ \lim_{n\to+\infty} (S^{D_n} f - S_{D_n} f) = 0.$$

Fissato $\varepsilon > 0$, troviamo $v \in \mathbb{N}$ tale che per $n > v$ si ha

$$S^{D_n} f - S_{D_n} f < \varepsilon,$$

pertanto

$$f \in I[a,b].$$

Sia infine

$$\lim_{n\to+\infty} S^{D_n} f = l.$$

Poichè
$$\int f = \int^* f \leq S^{D_n} f \leq M(b-a),$$
dove $M = \sup f$, abbiamo $l \in [\int f, M(b-a)]$, in particolare $l \in \mathbb{R}$. Così anche
$$\lim_{n \to +\infty} S_{D_n} f = l \leq \int f.$$
Concludiamo
$$l = \int f.$$
□

Integrabilità delle funzioni monotòne

Teorema 12.14. *Ogni $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monotòna è integrabile.*

Proof. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia
$$D_n = \left\{ a + k\frac{b-a}{n} \ : \ k \in \{0, 1, \ldots, n\} \right\}.$$
consideriamo solo il caso f crescente. Si ha
$$\begin{aligned}
S^{D_n} f - S_{D_n} f &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \\
&= (x_k - x_{k-1}) \left(\sum_{k=1}^{n} f(x_k) - \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) \right) \\
&= \left(a + k\frac{b-a}{n} - \left(a + (k-1)\frac{b-a}{n} \right) \right) \left(\sum_{k=1}^{n} f(x_k) - \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) \right) \\
&= \left(a + k\frac{b-a}{n} - \left(a + k\frac{b-a}{n} - \frac{b-a}{n} \right) \right) \left(\sum_{k=1}^{n} f(x_k) - \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) \right) \\
&= \frac{b-a}{n} \left(\sum_{k=1}^{n} f(x_k) - \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) \right) \\
&= \frac{b-a}{n} \left(\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b) - \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) - f(a) \right)
\end{aligned}$$

Siccome
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) = 0,$$
allora è dimostrato l'asserto. □

Integrabilità delle funzioni costanti

Proposizione 12.15. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ costante con $f(x) = c \quad \forall x \in [a,b]$. Allora f è integrabile e*
$$\int f = c(b-a).$$

Proof. Infatti, per ogni $D \in T[a,b]$, è
$$S_D f = S^D f = c(b-a).$$
□

Integrabilità delle funzioni composte

Teorema 12.16. *Siano $f \in I[a,b]$, m e M rispettivamente un minorante e un maggiorante per f con $m < M$, e $\varphi : [m,M] \to \mathbb{R}$ continua. Allora $g = \varphi \circ f$ è integrabile su $[a,b]$.*

Proof. Per il teorema di Weierstrass,

$$\exists\, \mu > 0 \,:\, \forall\, y \in [m,M], \quad |\varphi(y)| \leq \mu.$$

Fissato $\varepsilon > 0$, poniamo

$$\eta = \frac{\varepsilon}{b-a+2\mu}.$$

Troviamo applicando il teorema di Heine-Cantor, un $\delta > 0$ tale che

$$\forall\, y', y'' \in [m,M] \; (|y'-y''| < \delta), \quad |\varphi(y') - \varphi(y'')| < \eta.$$

Sia ora $D \in T[a,b]$ tale che $S^D f - S_D f < \delta\eta$. Dimostriamo che $S^D g - S_D g < \varepsilon$. Poniamo

$$I = \{i \in \{1,\dots,n\} \,:\, M_i(f) - m_i(f) < \delta\}\,, \quad J = \{i \in \{1,\dots,n\} \,:\, M_i(f) - m_i(f) \geq \delta\}.$$

Per ogni $i \in I$, se $x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]$, si ha

$$|f(x'') - f(x')| \leq M_i(f) - m_i(f) < \delta,$$

quindi

$$|g(x'') - g(x')| = |\varphi(f(x'')) - \varphi(f(x'))| < \eta,$$

da cui

$$M_i(g) - M_i(g) \leq \eta.$$

Inoltre

$$\begin{aligned}\sum_{i\in J}(x_i - x_{i-1}) &= \frac{1}{\delta}\sum_{i\in J}\delta(x_i - x_{i-1}) \leq \frac{1}{\delta}\sum_{i\in J}(M_i(f) - m_i(f))(x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \frac{1}{\delta}\sum_{i=1}^{n}(M_i(f) - m_i(f))(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{\delta}(S^D f - S_D f) < \eta.\end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}S^D g - S_D g &= \sum_{i=1}^{n}(M_i(g) - m_i(g))(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i\in I}(M_i(g) - m_i(g))(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i\in J}(M_i(g) - m_i(g))(x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i\in I}\eta(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i\in J}2\mu(x_i - x_{i-1}) < \eta(b-a) + 2\mu\eta = \varepsilon.\end{aligned}$$

□

Integrabilità delle funzioni continue

Corollario 15. *Ogni $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua è integrabile.*

Proof. Basta prendere come f l'identità su $[a,b]$ con $m = a$ e $M = b$ □

Corollario 16. *Se f è integrabile su $[a,b]$ lo è anche f^2.*

Integrabilità del prodotto di due funzioni integrabili

Corollario 17. *Siano $f, g \in I[a,b]$. Allora anche $f \cdot g \in I[a,b]$.*

Proof. Per il teorema (12.16), il quadrato di una funzione integrabile è integrabile. Ora, basta osservare che

$$f \cdot g = \frac{(f+g)^2 - (f-g)^2}{4}$$

e applicare i teoremi sulla somma degli integrali e del prodotto tra una costante e un'integrale. □

Integrabilità del valore assoluto di una funzione

Proposizione 12.17. *Sia $f \in I[a,b]$. Allora*

$$|f| \in I[a,b] \quad \text{e} \quad \left| \int f \right| \leq \int |f|.$$

Proof. Supponiamo già che $|f| \in I[a,b]$, inoltre

$$\int |f| \geq 0.$$

Ora poichè

$$-|f| \leq f \leq |f|,$$

abbiamo

$$-\int |f| = \int (-|f|) \leq \int f \leq \int |f|.$$

Da cui segue

$$\left| \int f \right| \leq \int |f|.$$

□

Funzioni continue a tratti

Definizione 12.4. Si dice che $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è **continua a tratti** se ha al più un numero finito di discontinuità tutte di prima specie.

Integrabilità delle funzioni continue a tratti

Teorema 12.18. *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua a tratti. Allora*

1. $\exists\, D = \{x_1, \dots, x_n\} \in T[a,b]$, *e* $\forall\, k \in \{1, \dots, n\}$ *una funzione*

$$f_k : [x_{k-1}, x_k] \to \mathbb{R}$$

   continua e tale che $f_k(x) = f(x)$ *per* $x_{k-1} < x < x_k$.

2. f *è integrabile e*

$$\int f = \sum_{k=1}^{n} \int f_k.$$

Proof. Sia E l'insieme dei punti di discontinuità di f, poniamo $D = E \cup \{a, b\}$, cosicchè $D \in T[a, b]$, e rappresentiamo D come $\{x_0, \dots, x_n\}$. Per ogni $k \in \{1, \dots, n\}$, definiamo

$$f_k : [x_{k-1}, x_k] \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} \lim\limits_{t \to x_{k-1}^-} f(t) & x = x_{k-1}; \\ \\ f(x) & x_{k-1} < x < x_k \\ \\ \lim\limits_{t \to x_k^+} f(t) & x = x_k. \end{cases}$$

Le funzioni f_k sono continue per costruzione, quindi abbiamo dimostrato (1). Ora, per ogni $k \in \{1, \dots, n\}$, la restrizione $f_{\restriction\ [x_{k-1}, x_k]}$ differisce da f_k al più nei punti x_{k-1} e x_k, quindi è integrabile, con

$$\int f_{\restriction\ [x_{k-1}, x_k]} = \int f_k.$$

Dunque si ottiene che f è integrabile e vale

$$\int f = \sum_{k=1}^{n} \int f_k.$$

□

Integrale di una funzione maggiore o uguale a zero

Proposizione 12.19. *Sia $f \in I[a, b]$, supponiamo che $f \geq 0$ e che inoltre esistano $x_1, x_2 \in [a, b]$ con $x_1 < x_2$ e con $\mu > 0$ tali che*

$$\forall\, x \in [x_1, x_2],\ f(x) \geq \mu.$$

Allora

$$\int f > 0.$$

Proof. Sia

$$g : [x_1, x_2] \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \mu,$$

e sia h l'estensione di g a $[a, b]$ (che vale 0 in $[a, b] \setminus [x_1, x_2]$). Sappiamo che g e h sono integrabili con

$$\int h = \int g = \mu(x_2 - x_1) > 0,$$

ma per ipotesi $f \geq h$, quindi

$$\int f \ \geq \int h > 0.$$

□

Corollario 18. *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua e non negativa. Si ha*

$$\int f = 0 \quad \iff \quad f = 0.$$

Proof. Supponiamo che f non sia identicamente 0, per cui esiste $p \in [a, b]$ con $f(p) > 0$. Per la permanenza del segno possiamo trovare $\delta > 0$ tale che

$$\forall\, x \in [a, b] \cap\,]p - \delta, p + \delta[, \quad f(x) > 0.$$

Siano

$$x_1 = \max\left\{a, p - \frac{\delta}{2}\right\} \quad \text{e} \quad x_2 = \min\left\{p + \frac{\delta}{2}, b\right\},$$

si ha $x_1, x_2 \in [a,b]$ e $x_1 < x_2$; inoltre

$$x_1, x_2 \in]p-\delta, p+\delta[\,,$$

quindi

$$[x_1, x_2] \subseteq [a,b] \cap]p-\delta, p+\delta[$$

e pertanto $f(x) > 0$ per ogni $x \in [x_1, x_2]$. Ora si applica la proposizione precedente con

$$\mu = \min f_{\restriction\, [x_1,x_2]}.$$

□

Media di una funzione

Definizione 12.5. La **media** su $[a,b]$ di una funzione $f \in I[a,b]$ è

$$\frac{\int f}{b-a}.$$

Media di una funzione costante

Proposizione 12.20. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ costante, con $f(x) = c$ per ogni $x \in [a,b]$. Allora la media di f è c.*

Proof. Infatti $\int f = c(b-a)$ e quindi la media sarà

$$\frac{c\cancel{(b-a)}}{\cancel{(b-a)}} = c.$$

□

Proposizione 12.21.

- *Se m, M sono rispettivamente un minorante e un maggiorante per f, allora*

$$m \leq \frac{\int f}{b-a} \leq M.$$

- *Se $f \leq g$ con $f, g \in I[a,b]$, allora*

$$\frac{\int f}{b-a} \leq \frac{\int g}{b-a}.$$

Teorema della media

Teorema 12.22. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Allora*

$$\exists\, c \in [a,b] \;:\; f(c) = \frac{\int f}{b-a}.$$

Teorema della media generalizzato

Teorema 12.23. *Siano $f, \varphi \in I[a,b]$ con f continua e $\varphi \geq 0$ tale che $\int \varphi > 0$. Allora*

$$\exists\, c \in [a,b] \,:\, f(c) = \frac{\int (f\varphi)}{\int \varphi}.$$

Proof. Siano m, M rispettivamente il minimo e il massimo di f. Poichè $\varphi \geq 0$ si ha

$$m\varphi \leq f\varphi \leq M\varphi,$$

segue che

$$m \int \varphi \leq \int (f\varphi) \leq M \int \varphi,$$

e quindi

$$m \leq \frac{\int f\varphi}{\int \varphi} \leq M.$$

Siano ora $m = f(p)$ e $M = f(q)$ per certi $p, q \in [a,b]$, avremo allora che per il teorema dei valori intermedi esisterà c compreso tra p e q, quindi $c \in [a,b]$, tale che

$$f(c) = \frac{\int f\varphi}{\int \varphi}\ .$$

□

Funzione localmente integrabile

Definizione 12.6. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ diciamo che f è **localmente integrabile** in A e scriveremo $f \in \mathcal{L}(A)$, se è integrabile la restrizione di f a ogni intervallo chiuso e limitato (non degenere) contenuto in A.

Proposizione 12.24.

1. *Ogni funzione monotòna è localmente integrabile;*
2. *Ogni funzione continua è localmente integrabile;*
3. *Se $A = [a,b]$ allora*

$$f \in \mathcal{L}(A) \;=\; \mathcal{L}([a,b]) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \in I[a,b].$$

Integrale definito

Definizione 12.7. Sia $f \in \mathcal{L}(I)$ con I intervallo e siano $a, b \in I$. L'**integrale definito** di f da a a b è

$$\int_a^b f(x)\,dx = \begin{cases} \int\limits_{[a,b]} f(x)\,dx & a < b \\[2ex] 0 \quad a = b \\[2ex] -\int\limits_{[b,a]} f(x)\,dx & b < a \end{cases}$$

Nota 38. Non è difficile estendere all'integrale definito alcune proprietà dell'integrale esteso a un'intervallo chiuso e limitato. Ad esempio dai teoremi di somma e prodotto per una costante discende facilmente che, date n funzioni

$$f_1, \dots, f_n \in \mathcal{L}(I) \text{ con } I \text{ intervallo.}$$

e dati n numeri reali $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, per ogni coppia di punti $a, b \in I$ si ha

$$\int_a^b \sum_{k=1}^n \lambda_k f_k(x)\ dx = \sum_{k=1}^n \lambda_k \int_a^b f_k(x)\ dx.$$

Abbiamo inoltre che

$$\forall\, a, b, c \in I,\ \int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$$

Confronto fra valori assoluti di funzioni localmente integrabili

Proposizione 12.25. *Siano f e g funzioni localmente integrabili in un intervallo I, con $0 \le f \le g$. Per ogni coppia di punti $a, b \in I$, si ha*

$$\left| \int_a^b f(x)\ dx \right| \le \left| \int_a^b g(x)\ dx \right|.$$

Proof. Se $a = b$, è ovvio; se $a < b$, segue immediatamente dalla proposizione (**??**); se infine $a > b$, applicando la (**??**), otteniamo:

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| = \int_b^a f(x)\, dx \le \int_b^a g(x)\, dx = \left| \int_a^b g(x)\, dx \right|.$$

□

Proposizione 12.26. *Sia $f \in \mathcal{L}(I)$, con I intervallo, e $a, b \in I$, allora*

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \le \left| \int_a^b |f(x)|\, dx \right|.$$

Proof. Siano p e q rispettivamente il minimo e il massimo di a, b. Per la proposizione (12.17) si ha:

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| = \left| \int_p^q f(x)\, dx \right| \le \int_p^q |f(x)|\, dx = \left| \int_a^b |f(x)|\, dx \right|.$$

□

Media tra due punti di una funzione

Definizione 12.8. Data $f \in \mathcal{L}(I)$ e $a, b \in I$ distinti, la **media** tra a e b di f è

$$\frac{\int_a^b f(x)\ dx}{b - a},$$

cioè la media (della restrizione) di f sull'intervallo chiuso non degenere di estremi a e b.

Confronto fra medie tra due punti di due funzioni

Proposizione 12.27. *Sia I un intervallo, e siano $f, g \in \mathcal{L}(I)$, con $f \leq g$. Per ogni coppia di punti distinti $a, b \in I$, si ha*

$$\frac{\int_a^b f(x)\ dx}{b-a} \leq \frac{\int_a^b g(x)\ dx}{b-a}.$$

Funzione integrale

Definizione 12.9. Se $f \in \mathcal{L}(I)$ con intervallo I, chiamiamo **funzione integrale di f di punto iniziale** $a \in I$ la seguente funzione:

$$F : I \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \int_a^x f(t)\ dt\ .$$

Differenza fra funzioni integrali aventi punti iniziali diversi

Proposizione 12.28. *Sia $f \in \mathcal{L}(I)$, con I intervallo. Dati $a, b \in I$, le funzioni integrali di f di punti iniziali a e b differiscono per una costante.*

Proof. Indichiamo con F_a e F_b le funzioni integrali di f di punti iniziali a e b, rispettivamente. Per ogni $x \in I$, applicando la proprietà segmentaria si ha

$$F_a(x) - F_b(x) = \int_a^x f(t)\,dt - \int_b^x f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt.$$

□

Lemma 12.29. *Sia I un intervallo non degenere. Dato un punto $w \in I$, esiste un $\eta > 0$ tale che*

$$[w-\eta, w+\eta] \cap I = [\alpha, \beta], \quad \text{con } \alpha < \beta.$$

Proof. Indichiamo l'estremo inferiore e l'estremo superiore di I con a e b, rispettivamente. Se $w = a$, poniamo $\alpha = a$; scelto poi $\beta \in I \setminus \{a\}$, sia $\eta = \beta - \alpha$: chiaramente abbiamo $\eta > 0$, e

$$[w-\eta, w+\eta] \cap I = [w, w+\eta] = [\alpha, \beta].$$

Similmente, se $w = b$, poniamo $\beta = b$, scegliamo $\alpha \in I \setminus \{a\}$ e di nuovo $\eta = \beta - \alpha$: anche in questo caso $\eta > 0$; inoltre

$$[w-\eta, w+\eta] \cap I = [w-\eta, w] = [\alpha, \beta].$$

Se infine w è interno a I, possiamo trovare $\varrho > 0$ tale che

$$]w-\varrho, w+\varrho[\subseteq I :$$

prendiamo allora come η un numero positivo minore di ϱ (ad esempio $\frac{\varrho}{2}$); ponendo $\alpha = w - \eta$ e $\beta = w + \eta$, si ha

$$[w-\eta, w+\eta] \cap I = [w-\eta, w+\eta] = [\alpha, \beta].$$

□

Continuità della funzione integrale

Teorema 12.30. *Sia $f \in \mathcal{L}(I)$, con I intervallo non degenere. La funzione integrale F di f è continua (indipendentemente dal punto iniziale $a \in I$).*

Proof. Fissiamo $w \in I$; applicando il lemma precedente troviamo un numero positivo η e un intervallo non degenere $[\alpha, \beta]$ tali che valga

$$[w-\eta, w+\eta] \cap I = [\alpha, \beta], \quad \text{con } \alpha < \beta.$$

Poichè la restrizione di f ad $[\alpha, \beta]$ è integrabile, e quindi limitata, possiamo trovare $\mu > 0$ tale che

$$\forall\, x \in [\alpha, \beta],\ |f(x)| \leq \mu.$$

Ciò premesso, sia $\varepsilon > 0$ e sia

$$\delta = \min\left\{\eta, \frac{\varepsilon}{\mu}\right\}.$$

Per ogni $x \in]w-\delta, w+\delta[\cap I$ si ha $x \in [\alpha, \beta]$, quindi $|f(x)| \leq \mu$. Ne segue che

$$|F(x) - F(w)| = \left|\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^w f(t)\,dt\right| = \left|\int_w^x f(t)\,dt\right| \leq \left|\int_w^x |f(t)|\,dt\right| \leq \left|\int_w^x \mu\,dt\right| = \mu|x-w < \mu\delta \leq \varepsilon.$$

□

Andamento della funzione integrale

Proposizione 12.31. *Sia f localmente integrabile su un intervallo I, e sia F la sua funzione integrale (di punto iniziale $a \in I$). Se per ogni $x \in I$ si ha $f(x) \geq 0$, allora F è crescente.*

Proof. Siano $x', x'' \in I$ con $x' < x''$. Avremo allora che

$$F(x'') - F(x') = \int_a^{x''} f(t)\,dt - \int_a^{x'} f(t)\,dt = \int_{x'}^{x''} f(t)\,dt \geq 0.$$

Analogamente si prova che se $f \leq 0$ per ogni $x \in I$, la funzione integrale F è decrescente. □

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Teorema 12.32. *Sia $f \in \mathcal{L}(I)$ con I intervallo e sia F la funzione integrale di f, di punto iniziale $a \in I$. Sia $w \in I$. Se f è continua in w, allora F è derivabile in w e $F'(w) = f(w)$.*

Proof. Fissato $\varepsilon > 0$, sia $\mu = \dfrac{\varepsilon}{2}$. Per la continuità,

$$\exists\, \delta > 0 \,:\, \forall\, t \in I \cap]w-\delta, w+\delta[, \quad f(w) - \mu < f(t) < f(w) + \mu.$$

Sia ora

$$x \in I \cap]w-\delta, w+\delta[\setminus \{w\},$$

allora per ogni t compresa tra w e x, si ha che

$$f(w) - \mu \leq \frac{\int_w^x f(t)\,dt}{x-w} \leq f(w) + \mu.$$

Ora

$$\int_w^x f(t)\,dt = F(x) - F(w).$$

Pertanto

$$\left|\frac{F(x) - F(w)}{x-w} - f(w)\right| \leq \mu < \varepsilon.$$

Segue che

$$\lim_{x \to w} \frac{F(x) - F(w)}{x-w} = f(w).$$

□

Corollario 19. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ continua, con I intervallo. La funzione integrale F di f è derivabile e $F' = f$ (indipendentemente dal punto iniziale $a \in I$).*

Proof. Segue immediatamente dal teorema precedente. □

12.3 Primitive di una funzione

Primitiva di una funzione

Definizione 12.10. Sia $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervallo. Diciamo che $G : I \to \mathbb{R}$ è **primitiva di** f se G è derivabile e $G' = f$.

Teorema 12.33. *Se G_1 e G_2 sono entrambe primitive della funzione $f : I \to \mathbb{R}$, dove I è un intervallo, allora la differenza $G_1 - G_2$ è costante.*

Proof. Infatti, poichè la derivata di $G_1 - G_2$ è la funzione nulla, la tesi segue dal corollario al Teorema di Lagrange. □

Nota 39.

- La tesi del teorema precedente non vale se il dominio di f non è un intervallo.
- Sommando a una costante una primitiva di f si ottiene sempre una primitiva di f.
- Il corollario del teorema fondamentale del calcolo integrale ci assicura che ogni funzione continua avente per dominio un intervallo è dotata di primitive.

Teorema 12.34. *Sia I un intervallo, e sia a un punto di I. Una funzione continua $f : I \to \mathbb{R}$ possiede infinite primitive, ognuna delle quali è definita da*

$$x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt + c$$

dove c è una costante.

Proof. Dal corollario del teorema fondamentale del calcolo integrale segue che la funzione integrale $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ è una primitiva di f, e per il teorema (12.33) ogni altra primitiva si ottiene aggiungendo a F una costante. □

Corollario 20. *Siano a, b due punti dell'intervallo I, e sia $f : I \to \mathbb{R}$ continua. Si ha*

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a),$$

dove G è una qualunque primitiva di f.

Proof. Infatti, per il teorema precedente esiste una costante c tale che

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt + c$$

per ogni $x \in I$; in particolare

$$G(b) = \int_a^b f(t)\,dt + c$$

e $G(a) = c$, da cui la tesi. □

Proposizione 12.35. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ continua e invertibile, con I intervallo e sia F una primitiva di f. Allora*
$$\int f^{-1}(x)\ dx = xf^{-1}(x) - F(f^{-1}(x)) + c.$$

Proof. Infatti
$$\frac{d}{dx}(xf^{-1}(x) - F(f^{-1}(x)) + c) = f^{-1}(x) + x\frac{1}{f'(f^{-1}(x=))} - x\frac{1}{f'(f^{-1}(x=))} = f^{-1}(x)$$
Ponendo
$$x = f(y) \quad \iff \quad y = f^{-1}(x),$$
abbiamo
$$f^{-1}(x)\ dx = \int yf'(y)\ dy = yf(y) - \int f(y)\ dy = yf(y) - F(y) + c = xf^{-1}(x) - F(f^{-1}(x)) + c.$$
□

12.4 L'integrale indefinito

Il corollario (20) fornisce un metodo pratico per il calcolo integrale, basato sulla conoscenza di una primitiva della funzione integranda. Per tale motivo la determinazione delle primitive di una funzione continua si chiama **integrazione indefinita**. Data una funzione continua f, il simbolo
$$\int f(x)\,dx$$
si chiama **integrale indefinito** di f e indica la totalità delle primitive di f: tale notazione è motivata dal teorema (12.34). Inoltre scriveremo:
$$\int f(x)\,dx = F(x) + c \quad \iff \quad F' = f,$$
dove c indica una costante. Se il dominio D di f non è un intervallo, si deve sostituire a f una opportuna restrizione; in alternativa possiamo interpretare la c come una funzione il cui dominio è D e la cui restrizione a ogni intervallo contenuto in I è costante.

12.5 Metodi di integrazione indefinita

Scopo dell'integrazione indefinita è trovare un'espressione esplicita per le primitive di una funzione continua. Si tratta di un compito non sempre agevole - ad esempio non esiste la grande varietà di regole di cui invece disponiamo se vogliamo calcolare la derivata - e talvolta persino impossibile. Si può infatti dimostrare che per certe funzioni elementari non è possibile scrivere esplicitamente una primitiva, il che, si badi bene, non significa affatto che tali funzioni non hanno primitive, ma solo che non se ne può scrivere l'espressione esplicita in termini delle funzioni già note; ciò non deve sorprendere, in quanto già per esprimere le primitive delle funzioni $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ e $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ dobbiamo uscire dall'ambito delle funzioni razionali.

Integrali immediati Un elenco di integrali indefiniti è riportato quì, si tratta dei cosiddetti **integrali immediati**, ottenuti in pratica leggendo da destra a sinistra la tabella delle derivate.

- Potenze di x

$$\int dx = x + c \qquad\qquad \int x^p\,dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + c \quad \forall\, p \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$$

$$\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$$

- Funzioni esponenziali e logaritmiche

$$\int e^x\,dx = e^x + c$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad \forall\, a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

- Funzioni goniometriche

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + c$$

$$\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + c$$

- Funzioni goniometriche inverse

$$\int \frac{1}{1+x^2} = \arctan(x) + c = -\mathrm{arccot}(x) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + c = -\arccos(x) + c$$

- Altri integrali immediati più complessi

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{|a|} + c$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \sqrt{x^2+a} + c$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = -\sqrt{a-x^2} + c$$

$$\int \frac{1}{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\,dx = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + c$$

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + c$$

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x - \sin x\cos x) + c$$

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x + \sin x\cos x) + c$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}(a^2\arcsin\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2-x^2}) + c$$

Per avere delle regole di integrazione indefinita si deve partire dalle corrispondenti regole di derivazione. Si ottengono tre teoremi, il primo dei quali è stato utilizzato anche per compilare la tabella precedente.

Primo teorema - Integrazione per scomposizione

Teorema 12.36. *Se f e g sono funzioni continue, aventi come dominio uno stesso intervallo, e k è una costante, si ha*

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx;$$

$$\int k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int f(x)\,dx.$$

Proof. Conseguenza immediata dei teoremi sulla Linearità della derivazione e del teorema (12.33). □

Esempio 12.1. Come prima applicazione possiamo osservare che la primitiva di una funzione polinomiale

$$x \mapsto p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

è ancora una funzione polinomiale della forma

$$x \mapsto P(x) = \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + \cdots + \frac{a_1}{2}x^2 + a_0 x + c;$$

dunque, se p non è il polinomio nullo, il grado di P è uguale al grado di p aumentato di 1.

Secondo teorema - Integrazione per sostituzione

Teorema 12.37. *Date le due funzioni $h : I \to \mathbb{R}$ continua e $\varphi : J \to \mathbb{R}$ dotata di derivata continua, dove I e J sono intervalli tali che $\varphi(J) \subset I$, si ha*

$$\int h(\varphi(\eta))\varphi'(\eta)\, d\eta = K(\eta) + c \tag{1}$$

se e solo se esiste una primitiva H di h tale che

$$K = H \circ \varphi.$$

Proof. Supponiamo dapprima che $K = H \circ \varphi$, dove H è una primitiva di h. Per il teorema di derivazione delle funzioni composte si ha

$$\forall\, \eta \in J, \quad K'(\eta) = H'(\varphi(\eta))\varphi'(\eta) = h(\varphi(\eta))\varphi'(\eta),$$

da cui la (1). □

Nota 40. Si noti che la (1) si ottiene formalmente dalla relazione

$$\int h(u)\, du = H(u) + c \tag{2}$$

ponendo $u = \varphi(\eta)$ e $H(\varphi(\eta)) = K(\eta)$, e interpretando il simbolo d proprio come differenziale.

Il teorema (12.37) ci dice in pratica che (2) e (1) sono due modi, in un certo senso equivalenti, di calcolare lo stesso integrale. Vi sono dunque due metodi differenti di applicare tale teorema al calcolo di

$$\int f(x)\, dx.$$

Primo metodo Il primo metodo è indicato nei casi in cui $f(x)$ si può scrivere nella forma $h(\varphi(x))\varphi'(x)$ dove h è una funzione che siamo in grado di integrare: le primitive di f saranno allora del tipo $H \circ \varphi$, con H primitiva di h.

Esempio 12.2. Ad esempio se f è la funzione tangente (o meglio una sua restrizione ad un intervallo J) è conveniente prendere come φ il coseno (ristretto a J), quindi

$$h : t \mapsto -\frac{1}{t} \quad \text{e} \quad H : t \mapsto -\ln|t|.$$

Nella pratica ciò si attua nel seguente modo: poniamo $t = \cos x$, per cui $dt = -\sin t\, dt$, e abbiamo

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = -\int \frac{1}{t}\, dt = -\ln|t| + c = -\ln|\cos x| + c.$$

Ciò significa, come abbiamo visto, che le primitive di f hanno la forma

$$x \mapsto -\ln\cos x + c \quad \text{oppure} \quad x \mapsto -\ln(-\cos x) + c \text{ con } c \text{ costante},$$

secondochè il coseno sia positivo o, rispettivamente, negativo nell'intervallo J, oppure si può dire che ogni funzione che ha come derivata la funzione tangente deve essere della forma

$$x \mapsto -\ln|\cos x| + c,$$

dove c è una funzione che ha lo stesso dominio della tangente ed è costante in ogni intervallo.

Secondo metodo Nel secondo metodo invece la f gioca il ruolo di h: si tratta di scegliere opportunamente la funzione φ in modo che il nuovo integrale sia, se possibile, più maneggevole di quello originario. Se quindi riusciamo a scrivere

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = K(x) + c,$$

possiamo anche, a patto che φ sia invertibile, risalire a un'espressione delle primitive di f: si ha infatti

$$\int f(x)\,dx = H(x) + c,$$

dove

$$H = K \circ \varphi^{-1}$$

in quanto

$$H \circ \varphi = K.$$

Esempio 12.3. Come esempio consideriamo il caso in cui f è definita da $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$. Prendiamo

$$\varphi : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R} \quad t \mapsto \sin\frac{t}{2}$$

(la cui funzione inversa è $x \mapsto 2\arcsin x$): poniamo, cioè, $x = \sin\frac{t}{2}$ e quindi

$$dx = \frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}\,dt,$$

ottenendo

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2}\,dx &= \frac{1}{2}\int \cos^2\frac{t}{2}\,dt = \frac{1}{4}\left(2\cos^2\frac{t}{2} - 1 + 1\right)\,dt \\ &= \frac{1}{4}\left(\int (\cos t + 1)\,dt\right) = \frac{1}{4}(\sin t + t) + c = \frac{1}{4}\left(2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2} + t\right) + c \\ &= \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x) + c\end{aligned}$$

Da quanto detto si possono dedurre generalizzazioni degli integrali riportati nella tabella degli integrali immediati, come evidenzia la seguente ulteriore tabella

- Funzioni goniometriche composte

$$\int f'(x)\cos f(x)\,dx = \sin f(x) + c$$

$$\int f'(x)\sin f(x)\,dx = -\cos f(x) + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}\,dx = \tan f(x) + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sin^2 f(x)}\,dx = -\cot f(x) + c$$

- Funzioni goniometriche inverse composte

$$\int \frac{f'(x)}{1 + [f(x)]^2}\,dx = \begin{cases}\arctan f(x) + c \\ -\mathrm{arccot} f(x) + c\end{cases}$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - [f(x)]^2}}\,dx = \begin{cases}\arcsin f(x) + c \\ -\arccos f(x) + c\end{cases}$$

- Potenze di x

$$\int f^\alpha(x) f'(x)\,dx = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad \forall\,\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$$

- Funzioni logaritmiche ed esponenziali composte

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$$

$$\int e^{f(x)} f'(x)\,dx = e^{f(x)} + c$$

$$\int a^{f(x)} f'(x)\,dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$$

- Funzioni trigonometriche inverse più complesse

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{a^2 - [f(x)]^2}}\,dx = \arcsin\frac{f(x)}{|a|} + c,\ a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{a^2 + [f(x)]^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{f(x)}{a} + c,\ a \neq 0$$

Terzo teorema - Integrazione per parti

Teorema 12.38. *Se f e g sono due funzioni dotate di derivata continua e aventi come dominio uno stesso intervallo, si ha derivata continua e aventi come dominio uno stesso intervallo, si ha*

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx. \tag{3}$$

Proof. Segue dal teorema sulla derivazione del prodotto e dal teorema (12.33). □

Ponendo $u = f(x)$ e $v = g(x)$ (e interpretando, al solito, il simbolo d come differenziale) la (3) assume la seguente, più concisa, forma:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \tag{4}$$

Con riferimento al primo membro della (4), u e dv si chiamano rispettivamente **fattore finito** e **fattore differenziale**.

Esempio 12.4. Applichiamo il metodo di integrazione per parti al calcolo delle primitive della funzione $x \mapsto x\cos x$, prendendo x come fattore finito e $\cos x\,dx$ come fattore differenziale (una cui primitiva è il seno).

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + c. \tag{5}$$

Analogamente si procede per $x \mapsto xe^x$.

Esempio 12.5. Un'altra funzione che conviene integrare per parti è il logaritmo. Ponendo $u = \log x$ e $v = x$, cioè $dv = dx$, si ottiene

$$\int \log x\,dx = x\log x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx = x\log x - \int dx = x\log x - x + c.$$

Esempio 12.6. Lo stesso metodo è applicabile all'arcotangente; invece per l'arcoseno, che non verifica le ipotesi del teorema (12.38) poichè non è derivabile in -1 e 1, si deve prima operare la sostituzione $x = \sin t$ (dove $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$) e poi utilizzare la (5):

$$\int \arcsin x\,dx = \int t\cos t\,dt = t\sin t + \cos t + c = x\arcsin x + \sqrt{a - x^2} + c.$$

Nell'applicazione della formula, una delle due funzioni, quella del fattore finito, viene soltanto derivata, mentre l'altra, quella del fattore differenziale, viene solo integrata. Occorre dunque scegliere opportunamente i due fattori. Al secondo membro della formula compare un altro integrale, quindi questo metodo di integrazione risulta utile se riusciamo a passare da un integrale più difficile a uno più facile da calcolare.

In generale, negli integrali del tipo

$$\int x^n \sin x\; dx \qquad \int x^n \cos x\; dx \qquad \int x^n e^x\; dx$$

x^n si considera come fattore finito, mentre negli integrali del tipo

$$\int x^n \ln x\; dx \qquad \int x^n \arctan x\; dx \qquad \int x^n \arcsin x\; dx$$

$x^n\ dx$ si considera come fattore differenziale. In particolare, negli integrali

$$\int \ln x\; dx \qquad \int \arctan x\; dx \qquad \int \arcsin x\; dx$$

si considera come fattore differenziale $x^0\ dx$, ossia $1 \cdot dx$.

12.6 Integrazione delle funzioni razionali

Di ogni funzione razionale si possono scrivere le primitive, purchè si conosca la scomposizione del polinomio a denominatore in fattori irriducibili. Tali primitive si esprimono per mezzo di funzioni razionali, del logaritmo e dell'arcotangente. Seguiranno alcuni teoremi utili per l'integrazione indefinita delle funzioni razionali. Sia dunque

$$f : x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)} \tag{6}$$

una funzione razionale. Anzitutto supporremo che il denominatore non sia costante, poichè in tal caso f è una funzione polinomiale, che già siamo in grado di integrare. Se $P(x)$ ha grado maggiore o uguale al grado di $Q(x)$, dividendo $P(x)$ per $Q(x)$ otteniamo

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

dove $T(x)$ è il polinomio quoziente e $R(x)$ è il resto, il cui grado (se non si tratta del polinomio nullo) è minore del grado di $Q(x)$.

Esempio 12.7. Ad esempio si ha

$$\frac{3x^3 + x^2 + x + 1}{x^2 + 1} = 3x + 1 - \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

Pertanto, per tutto il resto del presente paragrafo, quando considereremo una funzione della forma (6), supporremo che il polinomio a denominatore abbia grado $n > 1$ (e che il coefficiente di x^n sia 1); inoltre il polinomio a numeratore sarà sempre non nullo e di grado minore di n. Diremo allora che $\frac{P(x)}{Q(x)}$ è una **frazione propria**, o anche che f è una **funzione razionale in forma normale**.

Decomposizione in fratti semplici

Teorema 12.39. *Sia $f : x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ una funzione razionale in forma normale; supponiamo che $Q(x)$ sia il prodotto di due polinomi (non costanti) $Q_1(x)$ e $Q_2(x)$ privi di fattori comuni non costanti. Allora esistono un unico polinomio $P_1(x)$ ed un unico polinomio $P_2(x)$ tali che le funzioni razionali*

$$f_1 : x \mapsto \frac{P_1(x)}{Q_2(x)} \quad \text{e} \quad f_2 : x \mapsto \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$$

sono in forma normale e si ha

$$f_1 + f_2 = f.$$

I coefficienti di $P_1(x)$ e $P_2(x)$ sono le soluzioni di un sistema di equazioni lineari il cui ordine è uguale al grado di $Q(x)$.

Alcuni esempi:

Esempio 12.8.

$$\int \frac{1}{x^2 - 5x + 6}\, dx = \int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2} \right) dx = \log|x-3| - \log|x-2| + c;$$

$$\int \frac{2x^3 + x^2 + 2x - 1}{x^4 - 1}\, dx = \int \left(\frac{2x}{x^2 - 1} + \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx = \log|x^2 - 1| + \arctan x + c.$$

Applicando ripetutamente il teorema precedente possiamo decomporre la funzione f in una somma di funzioni razionali i cui denominatori sono del tipo $(q(x))^m$, dove $q(x)$ è un polinomio irriducibile non costante, quindi è della forma $x - \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$, oppure $x^2 + px + r$ con $p, r \in \mathbb{R}$ e $p^2 - 4r < 0$. A tali funzioni razionali possiamo poi applicare il risultato seguente.

Teorema 12.40.

1. *Ogni frazione propria*
$$\frac{P(x)}{(x-\alpha)^n}$$
si può scrivere in modo unico nella forma
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{(x-\alpha)^k};$$
i coefficienti A_k (per $k = 1, \dots, n$) si ottengono risolvendo un sistema di equazioni lineari di ordine n.

2. *Ogni frazione propria*
$$\frac{P(x)}{(x^2+px+r)^m}$$
si può scrivere in modo unico nella forma
$$\sum_{h=1}^{m} \frac{B_h x + C_h}{(x^2+px+r)^h};$$
i coefficienti B_h e C_h (per $h = 1, \dots, m$) si ottengono risolvendo un sistema di equazioni lineari di ordine $2m$.

Esempio 12.9. Ad esempio,
$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+4}{(x+2)^3}\,dx &= \int \left(\frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{(x+2)^2} + \frac{A_3}{(x+2)^3}\right) dx \\ &= A_1 \log|x+2| - \frac{A_2}{x+2} - \frac{A_3}{2(x+2)^2} + c.\end{aligned}$$
I numeri A_1,A_2 e A_3 si determinano nel seguente modo: dovendo essere
$$\frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{(x+2)^2} + \frac{A_3}{(x+2)^3} = \frac{x^2+4}{(x+2)^3},$$
risulta, effettuando i calcoli ed eliminando i denominatori,
$$A_1x^2 + (4A_1 + A_2)x + 4A_1 + 2A_2 + A_3 = x^2 + 4;$$
uguagliando i coefficienti dei due polinomi otteniamo il sistema
$$\begin{cases} A_1 & = 1 \\ 4A_1 + A_2 & = 0 \\ 4A_1 + 2A_2 + A_3 & = 4 \end{cases}$$
la cui soluzione è:
$$A_1 = 1,\ A_2 = -4,\ A_3 = 8.$$

Dunque applicando (se necessario più volte) il teorema 4 e poi eventualmente anche il teorema 5, si arriva a decomporre la frazione $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ nella somma di **fratti semplici**, cioè espressioni dei seguenti tipi:
$$\frac{A}{(x-\alpha)^k}, \tag{7}$$
$$\frac{Bx+C}{(x^2+px+r)^h} \quad \text{dove } p^2 - 4r < 0. \tag{8}$$

Le espressioni del tipo 7 si integrano immediatamente mentre, per quanto riguarda il tipo 8, notiamo dapprime che, se $B \neq 0$, possiamo scrivere

$$\int \frac{Bx + C}{(x^2 + px + r)^h}\, dx = \frac{B}{2} \int \frac{2x + p}{(x^2 + px + r)^h}\, dx + \Big(C - \frac{p}{2}B\Big) \int \frac{dx}{(x^2 + px + r)^h}.$$

Si ha poi

$$\int \frac{2x + p}{(x^2 + px + r)^h}\, dx = \begin{cases} \log|x^2 + px + r| + c & \text{se } h = 1 \\ -\dfrac{1}{(h-1)(x^2 + px + r)h - 1} + c & \text{se } h > 1. \end{cases}$$

mentre nell'altro integrale, cui direttamente si perviene nel caso $B = 0$, poichè $\delta = p^2 - 4r < 0$, si può effettuare la sostituzione

$$x = \frac{1}{2}(\sqrt{-\delta t} - p),$$

ottenendo

$$\int \frac{dx}{(x^2 + px + r)^h} = \Big(\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\Big)^{2h-1} \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^h}.$$

Ci siamo così ricondotti a integrali del tipo

$$\int \frac{dt}{(t^2 + 1)^h}.$$

Il caso $h = 1$ è immediato; se invece $h > 1$, si opera un'integrazione per parti nel modo seguente

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(t^2+1)^h}\, dt &= \int \frac{t^2 + 1 - t^2}{(t^2+1)^h}\, dt = \int \frac{1}{(t^2+1)^{h-1}}\, dt - \frac{1}{2} \int t \frac{2t\, dt}{(t^2+1)^h} \\ &= \int \frac{1}{(t^2+1)^{h-1}}\, dt + \frac{1}{2}\Big(t \frac{1}{(h-1)(t^2+1)^{h-1}} - \frac{1}{h-1} \int \frac{1}{(t^2+1)^{h-1}}\, dt\Big) \\ &= \frac{t}{(2h-2)(t^2+1)^{h-1}} + \frac{2h-3}{2h-2} \int \frac{1}{(t^2+1)^{h-1}}\, dt. \end{aligned}$$

A questo punto l'esponente si è ridotto di 1: dunque, iterando questo procedimento, si perviene infine a un integrale immediato. Nel caso in cui almeno uno dei fattori irriducibili del polinomio $Q(x)$ sia multiplo (cioè compaia con esponente maggiore di 1), l'integrazione di $\frac{P(x)}{Q(x)}$ può essere effettuata con un'altro procedimento, che si rivela meno laborioso di quello sin qui descritto, specialmente in presenza di fattori irriducibili multipli di secondo grado.

Formula di Hermite

Teorema 12.41. *Sia $\frac{P(x)}{Q(x)}$ una frazione propria. Supponiamo che il polinomio $Q(x)$ abbia fattori multipli, e scriviamo $Q(x) = Q_0(x) \cdot N(x)$, dove $Q_0(x)$ è il prodotto di tutti i fattori irriducibili di $Q(x)$. Vale la seguente decomposizione:*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_0(x)}{Q_0(x)} + \frac{d}{dx}\frac{M(x)}{N(x)} \tag{9}$$

dove le frazioni a secondo membro sono proprie, e i coefficienti dei polinomi $P_0(x)$ e $M(x)$ si determinando univocamente risolvendo un sistema lineare il cui ordine è uguale al grado di $Q(x)$.

Nella pratica non si determinano i coefficienti di $P_0(x)$, bensì quelli della decomposizione in fratti semplici di

$$\frac{P_0(x)}{Q_0(x)}.$$

12.7 Integrale in senso generalizzato

Variazione del teorema sulla continuità della funzione integrale

Teorema 12.42. *Sia f una funzione localmente integrabile in un intervallo I, e sia c un punto di I. La funzione integrale*

$$F : t \mapsto \int_c^t f(x)\,dx$$

è continua in I.

Proof. Fissiamo $x_0 \in I$ e dimostriamo che F è continua in x_0. Scegliamo un numero positivo r in modo tale che l'intervallo $I \cap [x_0 - r, x_0 + r]$ sia chiuso; indicheremo tale intervallo con $[a, b]$. Poichè f è limitata in $[a, b]$ (essendo integrabile su $[a, b]$) esiste un numero positivo M tale che

$$\forall\, t \in [a, b],\ -M \leq f(t) \leq M,$$

cosicchè

$$\left| \int_\alpha^\beta f(t)\,dt \right| \leq M|\beta - \alpha|$$

comunque si scelgano α e β in $[a, b]$. Dato ora $\varepsilon > 0$, poniamo $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{M}, r\right\}$; se $x \in I$ e $|x - x_0| < \delta$, sia x che x_0 appartengono ad $[a, b]$: dunque

$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_{x_0}^x f(t)\,dt \right| \leq M|x - x_0| < M\delta \leq \varepsilon.$$

□

Il precedente teorema ci dà lo spunto per una generalizzazione del concetto di integrale.

Integrale generalizzato di una funzione

Definizione 12.11. Data una funzione f localmente integrabile in un intervallo della forma $[a, b[$, supponiamo che esista il limite

$$\lim_{t \to b} \int_a^t f(x)\,dx = l :$$

diremo allora che l è l'**integrale generalizzato** di f, esteso all'intervallo $[a, b[$; esso sarà indicato con il solito simbolo $\int_a^b f(x)\,dx$. Se poi $\int_a^b f(x)\,dx$ è finito (cioè è un numero reale), diremo anche che f è **integrabile in senso generalizzato** (o, semplicemente, **integrabile**) su $[a, b[$.

Nota 41. Nel caso di un intervallo della forma $]a, b]$ valgono, con le ovvie modifiche, le stesse considerazioni, che non staremo dunque a ripetere.

Linearità di due funzioni integrabili in senso generalizzato

Teorema 12.43. *Se f_1 e f_2 sono integrabili in senso generalizzato su $[a, b[$ allora, comunque si scelgano le costanti k_1 e k_2, la funzione $k_1 f_1 + k_2 f_2$ è anch'essa integrabile su $[a, b[$, e si ha*

$$\int_a^b (k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x))\,dx = k_1 \int_a^b f_1(x)\,dx + k_2 \int_a^b f_2(x)\,dx.$$

Proof. Segue dalla linearità dell'integrale e dalla linearità del limite. □

Nel caso in cui a è maggiore di b, se f è integrabile in senso generalizzato su $[b, a[$ (o su $]b, a]$), converremo di dare al simbolo

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

il significato di
$$-\int_b^a f(x)\,dx.$$

Applicando il teorema sul limite della somma, si vede facilmente che l'uguaglianza
$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx;$$
vale anche se $c \in]a,b[$ e f integrabile in senso generalizzato su $[a,b[$ o su $]a,b]$, e se non sono uno $+\infty$ e l'altro $-\infty$, possiamo definire l'integrale in senso generalizzato di f su $]a,b[$ come
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx :$$
tale definizione, per quanto visto sopra, non dipende in alcun modo dalla scelta di c.

Corollario 21. *Nelle precedenti ipotesi,* $\int_a^b f(x)\,dx$ *coincide con l'estremo superiore dell'insieme*
$$\left\{\int_a^t f(x)\,dx \,|\, t \in [a,b[\right\}$$
(e quindi f è integrabile su $[a,b[$ se e solo se tale insieme è illimitato superiormente).

Proof. Basta applicare il teorema sul limite di una funzione monotòna. □

12.8 Funzioni sommabili

Funzione sommabile

Definizione 12.12. Data una funzione f, localmente integrabile in $[a,b[$, diciamo che f è **sommabile** (o **assolutamente integrabile**) su $[a,b[$ se la funzione
$$|f| : x \mapsto |f(x)|$$
è integrabile su $[a,b[$. In base al precedente corollario, ciò significa che l'insieme
$$\left\{\int_a^t |f(x)|\,dx \,|\, t \in [a,b[\right\}$$
è limitato superiormente o, equivalentemente, che
$$\int_a^b |f(x)|\,dx < +\infty.$$

Teorema 12.44. *Siano f e g due funzioni localmente integrabili in $[a,b[$ e tali che $|f(x)| \leq |g(x)|$ per ogni $x \in [a,b[$. Allora:*

1. *se g è sommabile su $[a,b[$, anche f è sommabile su $[a,b[$;*
2. *se f non è sommabile su $[a,b[$, anche g non è sommabile su $[a,b[$.*

Proof. Segue immediatamente precedente e dal corollario 21. □

Integrabilità delle funzioni sommabili

Teorema 12.45. *Se f è sommabile su $[a, b[$ allora è integrabile su $[a, b[$.*

Proof. Definiamo due funzioni f_+ e f_-, come segue

$$f_+ : x \mapsto \begin{cases} f(x) & f(x) \geq 0 \\ 0 & f(x) < 0 \end{cases} \qquad f_- : x \mapsto \begin{cases} -f(x) & f(x) \leq 0 \\ 0 & f(x) > 0 \end{cases}$$

equivalentemente

$$f_+ = \frac{|f| + f}{2} \quad \text{e} \quad f_- = \frac{|f| - f}{2},$$

cosicchè risulta

$$f_+ - f_- = f \quad \text{e} \quad f_+ + f_- = |f|.$$

Inoltre $f_+(x)$ e $f_-(x)$ sono maggiori o uguali a zero per ogni $x \in [a, b[$, quindi per le funzioni f_+, f_- e $|f|$ essere sommabili su $[a, b[$ equivale a essere integrabili. Poichè $f_+(x) \leq |f(x)|$ e $f_-(x) \leq |f(x)|$ per ogni $x \in [a, b[$, il teorema precedente ci dice che f_+ e f_- sono sommabili, cioè integrabili, su $[a, b[$. Per il teorema sul limite della somma si ha allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f_+(x)\,dx - \int_a^b f_-(x)\,dx,$$

dunque f è integrabile su $[a, b[$. □

Viceversa, una funzione integrabile non sempre è sommabile. Occorre fare qualche ulteriore ipotesi.

Teorema 12.46. *Sia f una funzione localmente integrabile in $[a, b[$, e supponiamo che esista $c \in [a, b[$ tale che $f(x) \geq 0$ (oppure $f(x) \leq 0$) per ogni $x \in [c, b[$. Allora f è sommabile se e solo se è integrabile.*

Proof. Infatti si calcola prima $\int_a^c f(x)\,dx$ (che non è un integrale generalizzato) e poi si ragiona solo sull'intervallo $[c, b[$: quì è chiaro che f è sommabile se e solo se è integrabile. □

Nei casi in cui non sappiamo scrivere esplicitamente una primitiva della funzione f, è usualmente più agevole verificare la sommabilità di f su un dato intervallo, piuttosto che la sua integrabilità. Dopodichè si fa uso eventualmente del teorema 12.46. Concludiamo dunque con un teorema che fornisce criteri di sommabilità.

Criteri di sommabilità

Teorema 12.47. *Consideriamo una funzione f localmente integrabile in un intervallo $[a, b[$.*

1. *Sia $b \in \mathbb{R}$, e supponiamo che $|f|$ sia infinita di ordine p in b. Allora f è sommabile su $[a, b[$ se e solo se $p < 1$.*
2. *Sia $b = +\infty$, e supponiamo che f sia infinitesima di ordine p in $+\infty$. Allora f è sommabile su $[a, b[= [a, +\infty[$ se e solo se $p > 1$.*

Proof.

1. La parte principale di $|f|$ in b è $\tilde{f} : x \mapsto l(b - x)^{-p}$ (con $l > 0$); poichè

$$\lim_{x \to b^-} \frac{|f(x)|}{\tilde{f}(x)} = 1,$$

esiste $c \in [a, b[$ tale che

$$\forall\, x \in [c, b[, \quad \frac{1}{2}\tilde{f}(x) \leq |f(x)| \leq \frac{3}{2}\tilde{f}(x).$$

Basterà dunque mostrare che $\tilde{f}$ è sommabile (cioè integrabile) su $[c,d[$ se e solo se $p<1$. Ora, per ogni $t \in [c,d[$, si ha

$$\int_c^t \tilde{f}(x)\,dx = \int_c^t l(b-x)^{-p}\,dx = \begin{cases} l\log\dfrac{b-c}{b-t} & p=1 \\ l\dfrac{(b-c)^{-p+1}-(b-t)^{-p+1}}{-p+1} & p\neq 1 \end{cases}$$

pertanto

$$\int_c^b \tilde{f}(x)\,dx = \lim_{t\to b^-}\int_c^t \tilde{f}(x)\,dx = \begin{cases} l\dfrac{(b-c)^{-p+1}}{-p+1} & p<1 \\ +\infty & p\geq 1 \end{cases}.$$

2. È chiaro che anche $|f|$ è infinitesima di ordine p in $+\infty$, e la parte principale di $|f|$ è $\tilde{f}: x \mapsto lx^{-p}$ (con $l>0$); poichè

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{|f(x)|}{\tilde{f}(x)} = 1,$$

esiste un numero positivo $c \in [a,+\infty[$ tale che

$$\frac{1}{2}\tilde{f}(x) \leq |f(x)| \leq \frac{3}{2}\tilde{f}(x)$$

per ogni $x \in [c,b[$. Basterà dunque mostrare che $\tilde{f}$ è sommabile (cioè integrabile) su $[c,+\infty[$ se e solo se $p>1$. Ora, per ogni $t \in [c,b[$, si ha

$$\int_c^t \tilde{f}(x)\,dx = \int_c^t lx^{-p}\,dx = \begin{cases} l\log\dfrac{t}{c} & p=1 \\ l\dfrac{t^{-p+1}-c^{-p+1}}{-p+1} & p\neq 1; \end{cases}$$

pertanto

$$\int_c^{+\infty} \tilde{f}(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_c^t \tilde{f}(x)\,dx = \begin{cases} l\dfrac{-c^{-p+1}}{-p+1} = \dfrac{l}{(p-1)c^{p-1}} & p>1 \\ +\infty & p\leq 1 \end{cases}.$$

□