Università degli Studi della Basilicata

Appunti rielaborati di Analisi II 2024/2025

Donato Martinelli

October 22, 2025

1 Topologia di $\mathbb{R}^n$

Passiamo ora a introdurre dei concetti importanti per strutturare una topologia di $\mathbb{R}^n$.

Norma di una n-upla

Definizione 1.1. Sia $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Si definisce **norma** di $\mathbf{x}$ il numero reale

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Proprietà della norma

Teorema 1.1. *Sia* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$*, allora*

- $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ *e* $\|\mathbf{x}\| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$;
- *Se* $\alpha \in \mathbb{R}, \|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{x}\|$;
- *Se* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$*,* $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$;
- *Se* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$*,* $\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$.

Nota 1. Se $x \in \mathbb{R}$,

$$\|x\| = \sqrt{x^2} = |x|.$$

Quindi nei reali la norma coincide con il valore assoluto

Prodotto scalare

Definizione 1.2. Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, si definisce **prodotto scalare** di $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ il numero reale

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Nota 2. Se $x \in \mathbb{R}$,

$$x \cdot y = xy.$$

Quindi nei reali il prodotto scalare coincide con l'operazione di prodotto ordinaria.

Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz

Proposizione 1.2. *Se* $x, y \in \mathbb{R}^n$*,*

$$|x \cdot y| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Cerchio e collezione dei cerchi di un punto

Definizione 1.3. Siano $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\delta \in \mathbb{R}^+$. Si chiama **cerchio** in $\mathbb{R}^n$ di centro $\overline{x}$ e raggio δ l'insieme

$$C_{\overline{x}}(\delta) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - \overline{x}\| < \delta\}.$$

L'insieme

$$\mathcal{C}_{\overline{x}} = \{C_{\overline{x}}(\delta) \mid \delta > 0\}$$

è detto **collezione dei cerchi di** $\overline{x}$.

Esercizio 1.1. Se prendiamo $n = 2$, avremo $\overline{x} = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Dunque l'insieme $C_{\overline{x}}(\delta)$ sarà

$$C_{\overline{x}}(\delta) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta\}.$$

Dalla definizione di differenza in $\mathbb{R}^2$ e di norma, abbiamo:

$$\|(x, y) - (x_0, y_0)\| = \|(x - x_0, y - y_0)\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

Perciò

$$C_{\overline{x}}(\delta) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\}.$$

Possiamo dire dunque che, dato $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e $\delta \in \mathbb{R}^+$, il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ tale che:

- $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \delta$ rappresenta la circonferenza;
- $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ rappresenta il cerchio, diremo anche **cerchio aperto**;
- $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \leq \delta$ rappresenta il cerchio e circonferenza, diremo anche **cerchio chiuso**;
- $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} > \delta$ rappresenta la parte esterna a cerchio e circonferenza;
- $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \geq \delta$ rappresenta la parte esterna a cerchio.

Intervallo o rettangolo

Definizione 1.4. Si chiama **intervallo** o **rettangolo** in $\mathbb{R}^n$ ogni sottoinsieme

$$I \subseteq \mathbb{R}^n \ : \ \exists\, n \text{ intervalli reali } [a_1, b_1], ..., [a_n, b_n] \ : \ I = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n].$$

Nota 3. Se

$$I = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n],$$

allora

$$I = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ \forall\, i \leq n, \ x_i \in [a_i, b_i]\} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ \forall\, i \leq n, \ a_i \leq x_i \leq b_i\}.$$

- Se $n = 1$, $I = [a_1, b_1]$ è un intervallo reale;
- Se $n = 2$,
$$I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a_1 \leq x \leq b_1 \ \text{ e } \ a_2 \leq y \leq b_2\}$$
si chiama rettangolo.
- Se $n = 3$, $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ si chiama parallelepipedo.

Rettangolo centrato

Definizione 1.5. Si dice che $I \subseteq \mathbb{R}^n$ è un rettangolo di centro $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ se esistono n numeri reali positivi $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tali che

$$I = [\overline{x}_1 - \alpha_1, \overline{x}_1 + \alpha_1] \times [\overline{x}_2 - \alpha_2, \overline{x}_2 + \alpha_2] \times \ldots \times [\overline{x}_n - \alpha_n, \overline{x}_n + \alpha_n]$$

Un intervallo di $\mathbb{R}^2$ di centro $\overline{x}$ è del tipo $I = [x_0 - \alpha_1, x_0 + \alpha_1] \times [y_0 - \alpha_2, y_0 + \alpha_2]$

Segmento

Definizione 1.6. Siano $y, z \in \mathbb{R}^n$. Si chiama **segmento** in $\mathbb{R}^n$ di estremi y e z l'insieme

$$\overline{yz} = \{x \in \mathbb{R}^n \, : \, \exists\, t \in [0,1] \, : \, x = y + t(z - y)\}.$$

Nel caso $n = 2$, dati $y = (y_1, y_2)$ e $z = (z_1, z_2)$, il segmento $\overline{yz}$ è l'insieme dei punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tali che

$$\exists\, t \in [0,1] \, : \, (x, y) = (y_1, y_2) + t((z_1, z_2) - (y_1, y_2)).$$

Dunque abbiamo che

$$(x, y) = (y_1, y_2) + t((z_1 - y_1, z_2 - y_2)) = (y_1, y_2) + (t(z_1 - y_1), t(z_2 - y_2)) = (y_1 + t(z_1 - y_1), y_2 + t(z_2 - y_2))$$

e quindi $x = y_1 + t(z_1 - y_1)$ e $y = y_2 + t(z_2 - y_2)$, cosicchè possiamo riscrivere

$$\overline{yz} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, \exists\, t \in [0,1] \, : \, x = y_1 + t(z_1 - y_1) \, \wedge \, y = y_2 + t(z_2 - y_2)\}.$$

Poligonale

Definizione 1.7. Siano $x_1, \ldots, x_n$ punti di $\mathbb{R}^n$. Si chiama **poligonale aperta** di vertici $x_1, \ldots, x_n$ l'insieme

$$\mathcal{P} = \bigcup_{i=1}^{n-1} \overline{x_i x_{i+1}}$$

dove x_1 e x_n sono detti **estremi** di P.
Se si aggiunge il segmento $\overline{x_n x_1}$, si ottiene una **poligonale chiusa**:

$$\mathcal{P} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{x_i x_{i+1}}, \quad \text{dove } x_{n+1} := x_1.$$

In entrambi i casi, una poligonale è l'unione di un numero finito di segmenti consecutivi.

Ricordiamo la definizione di successione.

Successione numerica reale

Definizione 1.8. Si definisce **successione numerica reale** una successione a valori in $\mathbb{R}$.

$$s : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \quad k \mapsto y_k.$$

Scriveremo

$$(y_k)_{k \in \mathbb{N}}.$$

Successioni in $\mathbb{R}^n$

Definizione 1.9. Si definisce **successione vettoriale** o **successione a valori in** $\mathbb{R}^n$ un'applicazione dalla forma

$$s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n, \quad k \mapsto x_k = (x_{k1}, \ldots, x_{kn}),$$

dove ogni componente x_{ki} è un numero reale. La successione si indica con $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ o semplicemente (x_k).

Riprendiamo allo stesso modo la definizione di limite di una successione reale per poi ampliarla a quella di successione vettoriale.

Definizione 1.10. Sia $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali. Si dice che

$$\lim_{k\to+\infty} y_k = y \in \mathbb{R}$$

se

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, u \in \mathbb{N} \,:\, \forall\, k > u, \quad |y_k - y| < \varepsilon.$$

Limite di una successione vettoriale

Definizione 1.11. Sia $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di elementi in $\mathbb{R}^n$, dove

$$x_k = (x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kn}).$$

Si dice che

$$\lim_{k\to+\infty} x_k = x \in \mathbb{R}^n$$

se

$$\forall\, \varepsilon > 0\,,\ \exists\, u \in \mathbb{N} \,:\, \forall\, k > u, \quad \|x_k - x\| < \varepsilon.$$

Mettiamo a confronto le due definizioni di limite. Innanzitutto ricordiamo che la scrittura $|y_k - y| < \varepsilon$ equivale a $y_k \in]y-\varepsilon,\ y+\varepsilon[$. E dunque la definizione di limite per una successione reale diventa

$$\forall\, I \in \mathcal{I}_y,\ \exists\, u \in \mathbb{N} \,:\, \forall\, k > u,\ y_k \in I.$$

In altre parole, per k sufficientemente grande, i termini y_k si avvicinano arbitrariamente a y, ovvero $y_k \sim y$ asintoticamente. Nel caso di successione vettoriale, si ha che la scrittura $\|x_k - x\| < \varepsilon$ $\|x_k - x\| < \varepsilon$ vuol dire $x_k \in C_x(\varepsilon)$, dove $C_x(\varepsilon)$ denota il cerchio aperto di centro x e raggio ε. E dunque la definizione di limite per una successione vettoriale diventa

$$\forall\, C \in \mathcal{C}_x,\ \exists\, u \in \mathbb{N} \,:\, \forall\, k > u,\ x_k \in C.$$

Ciò significa che, per k sufficientemente grande, l'elemento x_k è arbitrariamente prossimo a x, ovvero $x_k \sim x$. In entrambi i casi diciamo la stessa cosa, cioè che, se k è sufficientemente grande, allora $y_k \sim y$ o $x_k \sim x$.

Esempio 1.2. Consideriamo la successione vettoriale

$$x_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{n}{n+1}\right).$$

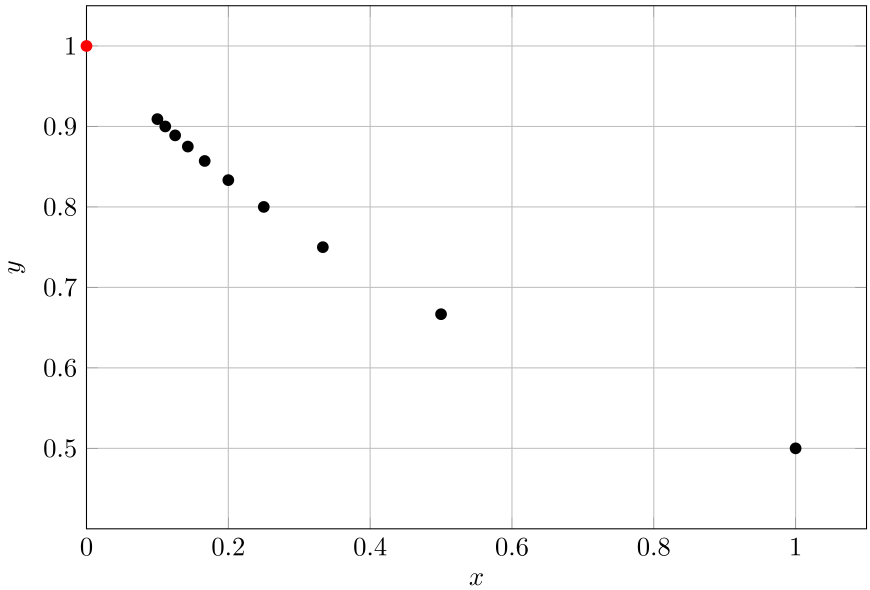
Osserviamo che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Pertanto,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = (0, 1).$$

Per visualizzare graficamente la successione, riportiamo i primi dieci termini:



Punto interno

Definizione 1.12. Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\overline{x} \in A$. Si dice che $\overline{x}$ è **interno** ad A se

$$\exists\, C \in \mathcal{C}_{\overline{x}} \;:\; C \subseteq A.$$

I punti appartenenti al bordo del rettangolo non sono punti interni, poiché non esiste alcun cerchio con centro in un punto del bordo che sia interamente contenuto nel rettangolo. Al contrario, tutti i punti del rettangolo che non appartengono al bordo, sono punti interni, in quanto per ciascuno di essi è sempre possibile trovare un cerchio centrato nel punto stesso e completamente incluso nel rettangolo.

Proposizione 1.3. *Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in A$. Allora x_0 è interno ad A se e solo se esiste un rettangolo di centro x_0 tale che $I \subseteq A$.*

Proof.

$\Longrightarrow$ Per ipotesi, x_0 è interno ad A. Quindi

$$\exists\, C \in \mathcal{C}_{x_0} \;:\; C \subseteq A.$$

Allora esiste un rettangolo I di $\mathbb{R}^n$ di centro x_0 tale che $I \subseteq C$. Poichè $C \subseteq A$, anche $I \subseteq A$.

$\Longleftarrow$ Per ipotesi, esiste un rettangolo I di centro x_0 tale che $I \subseteq A$. Allora

$$\exists\, C \in \mathcal{C}_{x_0} \;:\; C \subseteq I.$$

Poichè $I \subseteq A$, anche $C \subseteq A$. Allora x_0 è interno ad A.

□

Interno di un insieme

Definizione 1.13. L'insieme dei punti interni ad A si chiama **interno** di A e si indica con $\dot{A}$

Insieme aperto

Definizione 1.14. Si dice che A è **aperto** se $A = \dot{A}$.

Proposizione 1.4. *Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è aperto se e solo se ogni punto di A è interno ad A.*

Proof.

$\implies$ $\dot{A} \subseteq A$ perchè ogni punto interno ad A appartiene ad A per definizione.

$\impliedby$ A è aperto se e solo se $A \subseteq \dot{A}$ se e solo se ogni punto di A è interno ad A.

□

Proof.

$\implies$ Se A è aperto, per definizione si ha $A = \dot{A}$; dunque ogni punto di A è interno ad A.

$\impliedby$ Se ogni punto di A è interno ad A, cioè $A \subseteq \dot{A}$, e poiché per definizione $\dot{A} \subseteq A$, ne consegue che $A = \dot{A}$. Perciò, A è aperto.

□

Esempio 1.3. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x > 0 \wedge y > 0\}$ $\dot{A} = A$, A è aperto perchè tutti i punti di A sono interni ad A.

Punto di frontiera

Definizione 1.15. Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Allora si dice che x_0 è un punto di **frontiera** per A se per ogni cerchio di x_0, esistono sia punti di A sia punti non appartenenti ad A. In simboli:

$$\forall C \in \mathcal{C}_{x_0}, \quad C \cap A \neq \varnothing \quad \wedge \quad C \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \varnothing.$$

Esempio 1.4. Tutti i punti sul bordo di un rettangolo sono di frontiera perchè in ogni cerchio di centro un punto del bordo ci sono sia punti del rettangolo sia punti non appartenenti al rettangolo.

Esempio 1.5. Se si consideri l'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ e } y > 0\},$$

allora i punti appartenenti al semiasse definito da $x > 0$ e quelli appartenenti al semiasse definito da $y > 0$ costituiscono punti di frontiera per A. Infatti, per ogni punto di tali semiasse, ogni intorno (ossia, ogni cerchio centrato in quel punto) interseca sia l'insieme A sia il suo complementare.

Frontiera di un insieme

Definizione 1.16. L'insieme dei punti di frontiera per A è detto **frontiera** di A e si indica con $\mathrm{Fr}(A)$ o ∂A.

Esempio 1.6. Consideriamo un rettangolo definito come

$$A = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2.$$

La frontiera di A è data dall'unione dei segmenti che costituiscono i lati del rettangolo.

Esempio 1.7. Per quanto riguarda un segmento chiuso $A = [a, b] \subset \mathbb{R}$ (inteso come sottoinsieme dei reali), ogni punto del segmento risulta essere di frontiera, cioè

$$\partial A = A.$$

Esempio 1.8. Infine, considerando il primo quadrante

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ e } y > 0\},$$

la frontiera di A coincide con l'unione dei due semiasse positivi, formalmente espressa come

$$\partial A = \{(x, 0) : x > 0\} \cup \{(0, y) : y > 0\}.$$

Chiusura di un insieme

Definizione 1.17. Si chiama **chiusura** di $A \subseteq \mathbb{R}^n$ l'insieme $\overline{A} = A \cup \partial A$.

Insieme chiuso

Definizione 1.18. Si dice che $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è **chiuso** se $A = \overline{A}$.

Proposizione 1.5. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora*

$$A = \overline{A} \iff \forall\, x \in \overline{A},\ x \in A.$$

o alternativamente

$$A = \overline{A} \iff \overline{A} \subseteq A.$$

Proof. Da

$$\overline{A} = A \cup \partial A,$$

segue che

$$A = \overline{A} \iff A = A \cup \partial A \iff \partial A \subseteq A.$$

□

Esempio 1.9. Consideriamo i seguenti due insiemi in $\mathbb{R}^2$:

1. Sia
$$A = [a, b] \times [c, d], \quad a, b, c, d \in \mathbb{R},\ a < b,\ c < d.$$
Poiché per definizione l'intervallo chiuso $[a, b]$ contiene i suoi estremi, si ha
$$\partial A \subset A,$$
ovvero ogni punto di frontiera di A appartiene ad A. Pertanto
$$\overline{A} = A \quad \text{e } A \text{ è chiuso.}$$

2. Sia
$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ e } y > 0\},$$
che rappresenta il primo quadrante aperto. L'insieme dei punti di frontiera di B è
$$\partial B = \{(x, 0) : x > 0\} \cup \{(0, y) : y > 0\}.$$
Poichè nessun punto di ∂B appartiene a B, si ha
$$\partial B \not\subset B \quad \implies \quad \overline{B} = B \cup \partial B \neq B.$$
Di conseguenza, l'insieme B non è chiuso.

Un altro concetto che ci serve è quello di punto di accumulazione e quello di punto isolato.

Punto di accumulazione e punto isolato

Definizione 1.19. Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Diciamo che x_0 è un **punto di accumulazione** per A se

$$\forall\, C \in \mathcal{C}_{x_0},\ A \cap C \setminus \{x_0\} \neq \emptyset.$$

L'insieme dei punti di accumulazione si indica con

$$\mathcal{D}(A) = \{\, x_0 \in \mathbb{R} \mid x_0 \text{ è di accumulazione per } A \,\}.$$

Se $x_0 \in A$ non è di accumulazione per A, cioè se

$$\exists\, C \in \mathcal{C}_{x_0}\ :\ A \cap C = \{x_0\} \quad (\text{o } A \cap C \setminus \{x_0\} = \emptyset),$$

allora si dice che x_0 è **isolato**.

Proposizione 1.6. *Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Allora $x_0 \in \mathcal{D}(A)$ se e solo se $\forall\, C \in \mathcal{C}_{x_0}$, esistono infiniti punti di A.*

Esempio 1.10. Consideriamo un cerchio nel piano. In esso, ogni punto del cerchio è un punto di accumulazione, sia che esso si trovi sul bordo sia che esso sia interno al cerchio. Allo stesso modo, in un segmento ogni punto è di accumulazione. Infine, nel caso del primo quadrante, i punti interni così come quelli appartenenti al bordo costituiscono punti di accumulazione.

Proposizione 1.7. *A è chiuso se e solo se contiene tutti i propri punti di accumulazione. Inoltre $x_0 \in \partial A$ non implica che x_0 è di accumulazione, x_0 è di accumulazione non implica che $x_0 \in \partial A$*

Proposizione 1.8.

1. A è chiuso $\iff \forall\, x \in \mathcal{D}(A),\ x \in A \iff \mathcal{D}(A) \subseteq A$;
2. $x_0 \in \partial A \not\Longrightarrow x_0 \in \mathcal{D}(A)$;
3. $x_0 \in \mathcal{D}(A) \not\Longrightarrow x_0 \in \partial A$.

Osservazione 1. Consideriamo due casi:

1. **Il caso del rettangolo.** Se A è un rettangolo (cioè un prodotto di intervalli chiusi) in $\mathbb{R}^n$, ogni punto interno (cioè ogni punto che non appartiene al bordo) gode della proprietà che esiste un intorno interamente contenuto in A. In particolare, questo implica che:
   - Ogni punto interno è un **punto di accumulazione** per A, poiché in ogni intorno esso si trova insieme ad altri punti di A.
   - Tuttavia, questi punti non sono punti di frontiera, perché non si ha l'intersezione dell'intorno con $\mathbb{R}^n \setminus A$.
2. **Il caso degli isolati.** Consideriamo l'insieme

   $$A = \{(n, 0)\ :\ n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

   In questo insieme ogni punto $x_0 = (n, 0)$ è **isolato**, cioè esiste un cerchio $C \in \mathcal{C}_{(n,0)}$, con raggio sufficientemente piccolo da non includere né il punto precedente $(n-1, 0)$ né il successivo $(n+1, 0)$, tale che

   $$C \cap A = \{(n, 0)\}.$$

   In questo caso:

- Poiché il punto è isolato, per definizione non può essere di accumulazione.
- Tuttavia, per ogni n, il punto $(n, 0)$ appartiene comunque alla frontiera ∂A, poiché in ogni cerchio centrato in $(n, 0)$ vi sono anche punti al di fuori di A.

Questi esempi evidenziano alcune differenze chiave:

- Un **punto interno** possiede intorni interamente contenuti in A ed è automaticamente di accumulazione, ma non rientra nella frontiera.
- Un **punto di accumulazione** richiede che ogni intorno contenga altri punti di A, mentre questo non implica che il punto sia di frontiera (dato che, se è interno, non si incontrano punti esterni).
- Un **punto isolato** è tale che esiste almeno un intorno in cui non vi sono altri punti di A. Tali punti possono comunque appartenere alla frontiera, perché in ogni intorno del punto si trovano anche punti di $\mathbb{R}^n \setminus A$, ma non sono di accumulazione.

Proposizione 1.9. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora A è chiuso se e solo se per ogni successione $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tale che*

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ x_k \in A \quad \wedge \quad \lim_{k\to+\infty} x_k = x,$$

si ha che il limite x appartiene ad A. In altre parole, A contiene tutti i limiti delle successioni di punti in A.

Insieme limitato

Definizione 1.20. Si dice che $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è **limitato** se $\exists$ un cerchio C tale che $A \subseteq C$.

Proposizione 1.10. *A è limitato se e solo se*

$$\exists c > 0\ :\ \forall\, x \in A, \quad (\|x\| \leq c\ \wedge\ \|x\| - \|\overline{x}\| \leq \|x - \overline{x}\|).$$

Proof.

$\Longrightarrow$ Dalle ipotesi esiste un cerchio C tale che $A \subseteq C$. Sia $\overline{x}$ il centro di C e r il suo raggio, avremo allora

$$C_{\overline{x}}(r) = \{x \in \mathbb{R}^n\ :\ \|x - \overline{x}\| < r\}.$$

Poichè $A \subseteq C$, segue immediatamente che

$$\forall\, x \in A, \quad \|x - \overline{x}\| < r.$$

Dalla disuguaglianza triangolare

$$\|x\| - \|\overline{x}\| \leq \|x - \overline{x}\| < r \implies \|x\| - \|\overline{x}\| < r \implies \|x\| < \|\overline{x}\| + r.$$

Ponendo $\|\overline{x}\| + r = r$, ci troviamo con

$$\forall x \in A, \|x\| < c.$$

$\Longleftarrow$ Dall'ipotesi si ha che esiste $c > 0$ tale che

$$\forall\, x \in A, \quad \|x\| \leq c.$$

Consideriamo il cerchio chiuso centrato nell'origine di raggio c, definito da

$$C_0(c) = \{x \in \mathbb{R}^n\ :\ \|x\| \leq c\}.$$

Essendo che ogni elemento di A ha norma minore o uguale a c, segue

$$A \subseteq C_0(c),$$

cioè A è limitato.

$\square$

Nota 4. La prima parte della proposizione esprime la definizione classica di insieme limitato: esiste una costante $c > 0$ tale che per ogni elemento $x \in A$ la sua norma soddisfa $\|x\| \leq c$, cioè A è contenuto in una palla centrata nell'origine di raggio c. La seconda disuguaglianza, $\|x\| - \|\overline{x}\| \leq \|x - \overline{x}\|$, è una conseguenza della disuguaglianza triangolare (nella sua forma inversa) e indica che la differenza tra la norma di x e quella di un punto fisso $\overline{x}$ è sempre minore o uguale alla distanza tra x e $\overline{x}$. Questo fatto evidenzia come la "variazione" della norma, rispetto ad un punto fisso, sia controllata dalla distanza effettiva in $\mathbb{R}^n$. Insieme, queste condizioni garantiscono che gli elementi di A non "si allontanano" indefinitamente, cioè A risulta limitato.

Insieme compatto

Definizione 1.21. Si dice che $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è **compatto** se è chiuso e limitato.

Insieme convesso

Definizione 1.22. Si dice che $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è **convesso** se

$$\forall\, x, y \in A, \quad \overline{xy} \subseteq A.$$

Insieme convesso per poligonali

Definizione 1.23. Si dice che $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è **convesso per poligonali** se per ogni coppia di punti x, y di A esiste una poligonale P di estremi x e y tale che $P \subseteq A$.

Nota 5. Ogni insieme convesso possiede la proprietà che, per ogni coppia di punti al suo interno, il segmento che li unisce è contenuto in esso; pertanto, essendo il segmento un caso particolare di poligonale, risulta che ogni insieme convesso è convesso per poligonale. Tuttavia, la condizione inversa non è sempre verificata, come si nota nell'esempio della corona circolare, la quale ammette connessioni tramite poligonali contenute nell'insieme pur non essendo convessa.

Insieme sconnesso

Definizione 1.24. Si dice che $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è **sconnesso** se esistono due insiemi aperti $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ tali che

1. $A_1 \cap A \neq \emptyset$ e $A_2 \cap A \neq \emptyset$;
2. $(A_1 \cap A) \cap (A_2 \cap A) = \emptyset$;
3. $A = (A_1 \cap A) \cup (A_2 \cap A)$.

Insieme connesso

Definizione 1.25. Si dice che $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è **connesso** se non è sconnesso.

Proposizione 1.11. *Ogni insieme convesso per poligonale è anche connesso*

Proposizione 1.12. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Allora A è sconnesso se e solo se esistono due aperti A_1 e A_2 disgiunti e non vuoti tali che $A = A_1 \cup A_2$.*

Teorema 1.13. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Allora A è connesso se e solo se è convesso per poligonale.*

Alla luce di quanto esposto, definiamo una funzione reale di due variabili come un'applicazione

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y).$$

Analogamente, una funzione di tre variabili è data da

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \mapsto f(x, y, z),$$

mentre nel caso generale di una funzione di n variabili si scrive

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x).$$

Sia ad esempio

$$f(x, y) = \sqrt{y - x}\,.$$

Per garantire il significato dell'espressione (cioè, che la radice quadrata sia definita nel campo dei numeri reali) è necessario richiedere

$$y - x \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad y \geq x.$$

Pertanto la funzione

$$f \colon A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x, y) = \sqrt{y - x},$$

è definita sull'insieme

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \geq x\right\}.$$

Sia invece

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}\,.$$

L'espressione sotto radice deve essere strettamente positiva; notiamo che

$$x^2 + y^2 - 1 > 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 + y^2 > 1\,.$$

Quindi, la funzione è definita in

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 > 1\right\},$$

escludendo la frontiera del cerchio (ossia il luogo in cui $x^2 + y^2 = 1$).

Grafico di una funzione di una variabile: funzione reale di una sola variabile Sia $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di una sola variabile. Il grafico di f è definito dall'insieme

$$G_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in I \text{ e } y = f(x)\right\}.$$

Grafico di una funzione di due variabili: funzione reale di due variabili, grafico in $\mathbb{R}^3$ Sia ora $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di due variabili. Il relativo grafico è

$$G_f = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x, y) \in A \text{ e } z = f(x, y)\right\}.$$

Grafico in dimensione maggiore: funzione di n variabili Generalmente, per una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (con

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x)),$$

il grafico di f è definito come

$$G_f = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, z) \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ x = (x_1, \dots, x_n) \in A \text{ e } z = f(x)\}.$$

In particolare, quando $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, il grafico G_f si considera un sottoinsieme di $\mathbb{R}^4$.

Definizione formale di limite per una funzione di una variabile Sia $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione e sia x_0 un punto di accumulazione di I. Si dice che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

se

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \text{ tale che } \forall x \in I \text{ con } 0 < |x - x_0| < \delta, \quad |f(x) - l| < \varepsilon.$$

In altre parole, per ogni intorno di l (cioè, per ogni intervallo aperto centrato in l di ampiezza ε), si può trovare un intorno di x_0 (cioè un intervallo aperto centrato in x_0 di raggio δ) tale che ogni $x \neq x_0$ in tale intorno soddisfi $f(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$.

Un'alternativa sintetica per esprimere la definizione è:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \quad \iff \quad x \sim x_0, \implies f(x) \sim l.$$

Questa espressione evidenzia il fatto che, avvicinandosi a x_0, i valori di f si avvicinano ad l.

Limite per una funzione a n variabili

Definizione 1.26. Siano $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathcal{D}(A)$. Si dice che

$$\lim_{x \to x_0} = l \in \mathbb{R}$$

se

$$\forall \varepsilon > 0\,, \ \exists \delta > 0 \ : \ \forall x \in A, \quad 0 < \|x - x_0\| < \delta \implies |f(x) - l| < \varepsilon.$$

$$0 < \|x - x_0\| < \delta \quad \iff \quad x \in C_{x_0}(\delta) \setminus \{x_0\},$$

dove $C_{x_0}(\delta)$ è un cerchio di centro x_0 e raggio δ.

Definiamo il limite di f in x_0 nel seguente modo:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \quad \iff \quad \forall J \in \mathcal{I}_l, \ \exists \delta > 0 \ : \ \forall x \in A, \quad 0 < \|x - x_0\| < \delta \implies f(x) \in J.$$

In altre parole, se x si avvicina a x_0 (ovvero $x \sim x_0$), allora $f(x)$ si avvicina a l (cioè $f(x) \sim l$).

Si dice che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \quad \iff \quad \forall M > 0, \ \exists \delta > 0 \ : \ \forall x \in A, \ 0 < \|x - x_0\| < \delta \implies f(x) > M.$$

Analogamente, si dice che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \quad \iff \quad \forall M < 0, \ \exists \delta > 0 \ : \ \forall x \in A, \ 0 < \|x - x_0\| < \delta \implies f(x) < M.$$

Funzione continua in un punto

Definizione 1.27. Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in A$. Si dice che f è **continua** in x_0 se

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \ : \ \forall x \in A, \quad \|x - x_0\| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Alternativamente,

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists C \in \mathcal{C}_{x_0} \ : \ \forall x \in A \cap C, \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Nota 6. f è continua in $x_0 \iff \forall \varepsilon > 0, \exists$ un cerchio C di centro x_0: $\forall x \in A \cap C, |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Se $x \sim x_0$, $f(x) \sim f(x_0)$

Proposizione 1.14.

1. *Se x_0 è un punto isolato per A, ogni funzione è continua in x_0;*
2. *Se x_0 è un punto di accumulazione per A, f è continua in $x_0 \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

Proof.

1. Sia x_0 un punto isolato. Allora
$$\exists \overline{C} \in \mathcal{C}_{x_0} \, : \, \overline{C} \cap A = \{x_0\}.$$
Siano $\varepsilon > 0$ e $C = \overline{C}$. Poichè $C \cap A = \{x_0\}$, avremo che $|f(x_0) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$.
2. Sia x_0 di accumulazione per A. Allora
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \iff \forall \varepsilon > 0, \, \exists \delta > 0 \, : \, \forall x \in A, \quad 0 < \|x - x_0\| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$
La condizione $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ vale $\forall x \in A$ con $\|x - x_0\| < \delta$, cioè f è continua in x_0.

□

Funzione continua

Definizione 1.28. Si dice che f è continua in A se è continua in ogni punto di A. In simboli,
$$\forall x_0 \in A, \, \forall \varepsilon > 0, \, \exists \delta > 0 \, : \, \forall x \in A, \quad \|x - x_0\| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Funzione uniformemente continua

Definizione 1.29. Si dice che f è uniformemente continua in A se
$$\forall \varepsilon > 0, \, \exists \delta > 0 \, : \, \forall x, y \in A, \quad \|x - y\| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Nota 7. Questa definizione è più forte della normale continuità poichè la implica, mentre non è vero il contrario.

Teorema di Cantor

Teorema 1.15. *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua con A compatto. Allora f è uniformemente continua.*

Teorema di Weierstrass

Teorema 1.16. *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua con A compatto. Allora f ha minimo e massimo. In simboli*
$$\exists \, x_1, x_2 \in A \, : \, \forall x \in A, \; f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2).$$

Teorema della permanenza del segno

Teorema 1.17. *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua con $f(x_0) > 0$. Allora*

$$\exists\, C \in \mathcal{C}_{x_0} \,:\, \forall x \in A \cap C,\ f(x) > 0.$$

Teorema dei valori intermedi

Teorema 1.18. *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua con A limitato e connesso. Allora f assume tutti i valori compresi tra l'estremo inferiore e l'estremo superiore. Cioè ponendo $m = \inf\{f(x) : x \in A\}$ e $M = \sup\{f(x) : x \in A\}$, avremo che*

$$\forall\, \alpha \in]m, M[\,,\ \exists\, \overline{x} \in A \,:\, f(\overline{x}) = \alpha.$$

2 Coordinate polari

Fissiamo un'unità di misura per le lunghezze, una per gli angoli, e un verso di percorrenza per gli angoli. Sia P un punto nel piano diverso dal polo P_0. Allora si definisce **modulo** ρ di P la lunghezza del segmento $\overline{P_0P}$, e **anomalia** θ di P la misura dell'angolo che la semiretta r forma con la semiretta $\overline{P_0P}$. Chiamiamo ρ e θ **coordinate polari** di P. Se $P = P_0$, allora diciamo che il modulo è uguale a zero e l'anomalia non è definita. ρ ci dice che P si trova nella circonferenza di centro P_0 e raggio ρ.

Passaggio da coordinate cartesiane a polari e viceversa Ci sono delle formule che permettono di passare dalle coordinate polari a quelle cartesiane e viceversa. Per ottenre queste formule prendiamo un riferimento cartesiano in cui la semiretta r coincide con il semiasse x positivo e quindi il polo P_0 coinciderà con l'origine delle coordinate.

Poichè ρ è la lunghezza del segmento $\overline{P_0P}$, ρ coincide con la distanza di P da $(0,0)$. Se denotiamo con x e y le coordinate cartesiane del punto P, la distanza di P dall'origine è $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$. Per le formule trigonometriche, abbiamo

$$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \end{cases} \tag{1}$$

Se conosciamo ρ e ϑ, ci ricaviamo x e y da 1. Viceversa, se conosciamo x e y, seguirà $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ e da 1

$$\cos v = \frac{x}{\rho} \quad \sin x = \frac{y}{\rho}.$$

Esempio 2.1. Sia $P = (1,1)$. Allora $\rho = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$. Da cui

$$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \end{cases} = \begin{cases} 1 = \sqrt{2}\cos\vartheta \\ 1 = \sqrt{2}\sin\vartheta \end{cases} \implies \cos\vartheta = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\vartheta \implies \vartheta = \frac{\pi}{4}.$$

Sia $P = (2, \frac{\pi}{3})$.

Caso in cui $P_0 \neq (0,0)$ Prendiamo un riferimento cartesiano in cui la semiretta r sia parallela al semiasse x positivo, e $P_0 = (x_0, y_0) \neq (0,0)$. Dato un $P(x,y) \neq P_0$, avremo che $\rho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$, dunque

$$\begin{cases} x - x_0 = \rho\cos\vartheta \\ y - y_0 = \rho\sin\vartheta \end{cases} = \begin{cases} x = \rho\cos\vartheta + x_0 \\ y = \rho\sin\vartheta + y_0 \end{cases}.$$

Ogni volta che si assegna un valore a una variabile in una funzione a due variabili, si ottiene una funzione che dipende solo dall'altra variabile (l'altra è diventata un parametro) rispetto a un punto fisso. Ad esempio, data $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, troviamo che per $y = 1$, abbiamo $f(x) = x^2 + 1$. Questo ci permette di introdurre le funzioni parziali.

Funzioni parziali

Definizione 2.1. Siano $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Definiamo le seguenti

$$\varphi : x \to f(x, y_0) \quad \psi : y \to f(x_0, y).$$

φ e ψ si chiamano **funzioni parziali** generate da f rispetto a (x_0, y_0). Geometricamente, φ (ψ) può essere vista come f calcolata lungo la retta $y = y_0$ ($x = x_0$). Non è detto che φ e ψ siano ben definiti. φ è definita in

$$A_\varphi = \{x \,|\, (x, y_0) \in A\},$$

mentre ψ è definita in

$$A_\psi = \{y \,|\, (x_0, y) \in A\}.$$

Inoltre,

$$(x_0, y_0) \in A \implies x_0 \in A_\varphi \ \wedge \ y_0 \in A_\psi.$$

Teorema 2.1. *Se (x_0, y_0) è interno ad A, allora x_0 è interno ad A_φ e y_0 è interno ad A_ψ. In simboli:*

$$(x_0, y_0) \in \dot{A} \implies \exists\, r > 0 \,:\, [x_0 - r, x_0 + r] \subseteq A_\varphi \ \wedge \ [y_0 - r, y_0 + r] \subseteq A_\psi.$$

Proof. Poichè $(x_0, y_0) \in \dot{A}$, $\exists$ un cerchio C di centro (x_0, y_0) tale che $C \subseteq A$. Sia r il raggio di C. Dimostriamo che $[x_0 - r, x_0 + r] \subseteq A_\varphi$. Da $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$ abbiamo $|x - x_0| \leq r$. Dimostriamo che $(x, y_0) \in C$.

$$\|(x, y_0) - (x_0, y_0)\| = \|(x - x_0, 0)\| = \sqrt{(x - x_0)^2} = |x - x_0| \leq r \implies (x, y_0) \in C.$$

Poichè $C \subseteq A$, avremo che $(x, y_0) \in A$ da cui $x \in A_\varphi$. In maniera analoga si dimostra che $[y_0 - r, y_0 + r] \subseteq A_\psi$. □

Nota 8. Se $(x_0, y_0) \in \partial A$, φ e ψ potrebbero essere definite solo in un punto. Siano ad esempio

$$A = C_{(0,0)}(1), \quad (x_0, y_0) = (0, 1), \quad \varphi(x) = f(x, 1).$$

I punti $(x, 1)$ sono i punti della retta $y = 1$, che incontra A solo nel punto $(0, 1)$.

Teorema sui limiti delle funzioni parziali

Teorema 2.2. *Siano $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}(A)$. Supponiamo che*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = l \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Allora

$$x_0 \in \mathcal{D}(A_\varphi) \implies \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = l \quad \wedge \quad y_0 \in \mathcal{D}(A_\psi) \implies \lim_{y\to y_0} \psi(y) = l.$$

Proof. Sia $l \in \mathbb{R}$, per $\pm\infty$ la dimostrazione è analoga. Sia $x_0 \in \mathcal{D}(A_\varphi)$. Vogliamo dimostrare che $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = l$, cioè che

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \,:\, \forall x \in A_\varphi, \quad 0 < |x - x_0| < \delta \implies |\varphi(x) - l| < \varepsilon.$$

Per ipotesi,

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \,:\, \forall (x, y) \in A, \quad 0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta \implies |f(x, y) - l| < \varepsilon.$$

Prendiamo $\varepsilon > 0$ e δ come nell'ipotesi. Sia $x \in A_\varphi$ con $0 < |x - x_0| < \delta$ e ricordiamo che $x \in A_\varphi \implies (x, y_0) \in A$. Abbiamo dunque

$$\|(x, y_0) - (x_0, y_0)\| = \|(x - x_0)\| = \sqrt{(x - x_0)^2} = |x - x_0| \implies 0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta.$$

In conclusione,

$$((x, y_0) \in A \ \wedge \ 0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta) \implies |f(x, y_0) - l| < \varepsilon \implies |\varphi(x) - l| < \varepsilon \implies f(x, y_0) = \varphi(x).$$

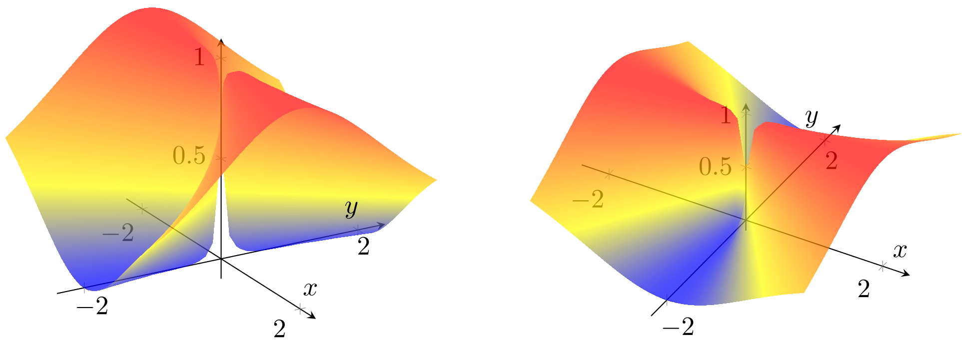
□

Il teorema dice che se f ha un limite l in un punto (x_0, y_0), f ha lo stesso limite lungo la retta $y = y_0$ e lungo la retta $x = x_0$. Segue ovviamente che

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) \neq \lim_{y \to y_0} \psi(y) \implies \nexists \lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y).$$

Esempio 2.2. Sia ad esempio la seguente funzione

$$f : A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \frac{x^2}{x^2 + y^2}.$$



Abbiamo che $(0,0) \in \mathcal{D}(A)$. Calcoliamo i limiti delle funzioni parziali nell'origine:

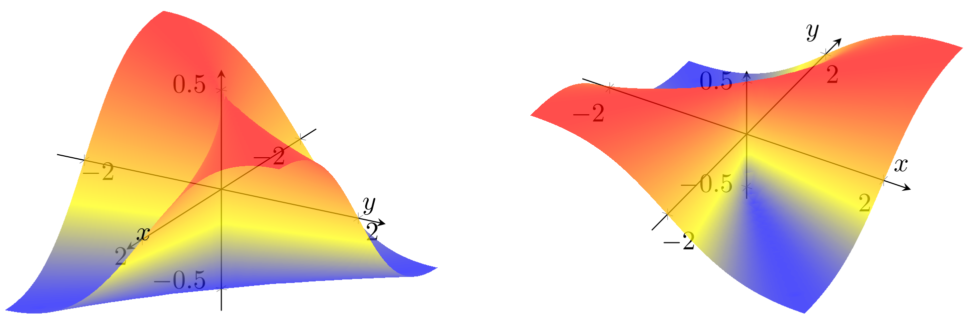
$$\varphi(x) = f(x, 0) = \frac{x^2}{x^2 + 0} = \frac{x^2}{x^2} = 1, \quad \psi(y) = f(0, y) = \frac{0}{0 + y^2} = 0,$$

i due limiti differiscono, dunque possiamo concludere che $\nexists \lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y)$.

Non vale però il viceversa del teorema, cioè se $\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim_{y \to y_0} \psi(y)$, non possiamo concludere che $\exists \lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y)$.

Esempio 2.3. Sia ad esempio la seguente funzione

$$f : A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$



Calcoliamo i limiti delle funzioni parziali nell'origine:

$$\varphi(x) = f(x, 0) = \frac{x \cdot 0}{x^2 + 0} = 0, \quad \psi(y) = f(0, y) = \frac{0 \cdot y}{0 + y^2} = 0,$$

φ e ψ sono definite in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e hanno limite 0 in 0, dunque secondo il teorema precedente dovremo avere $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} = 0$, ma non è così perchè il limite non esiste. Dire che

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = 0$$

equivale a dire che

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists C \in \mathcal{C}_{(0,0)} \ : \ \forall (x, y) \in C \cap A \setminus \{(0,0)\}, \quad \left| \frac{xy}{x^2 + y^2} \right| < \varepsilon.$$

Per dimostrare che
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \neq 0,$$
dobbiamo negare la proposizione sudetta, ossia dimostrare che
$$\exists\, \varepsilon > 0 \ : \ \forall\, C \in \mathcal{C}_{(0,0)},\ \exists\, (x,y) \in C \cap A \setminus \{(0,0)\} \ : \ \left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| \geq \varepsilon.$$
Sulla bisettrice $y = x$, f diventa $\dfrac{x^2}{x^2+x^2} = \dfrac{1}{2}$. In ogni cerchio di centro $(0,0)$, esistono punti della bisettrice in cui $f = \frac{1}{2}$. Sia $0 < \varepsilon \leq \dfrac{1}{2}$. Se C è un cerchio di centro $(0,0)$, in C $\exists$ punti in cui $f = \dfrac{1}{2} \geq \varepsilon$
$$\implies \lim_{(x,y)\to(0,0)} \neq 0 \implies \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Corollario 1. *Se $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è continua in un punto $(x_0, y_0) \in A$, φ è continua in x_0 e ψ è continua in y_0. Se φ è continua in x_0 e ψ è continua in y_0, si dice che f è* ***separatamente continua*** *in (x_0, y_0).*

Proof. Come primo passo, dimostriamo che se (x_0, y_0) è isolato per A, allora x_0 è isolato per A_φ e y_0 è isolato per A_ψ. Se (x_0, y_0) è isolato per A, allora $\exists\, C \in \mathcal{C}_{(x_0,y_0)} \ : \ C \cap A = \{(x_0, y_0)\}$. Sia dunque r il raggio di C. Dal teorema abbiamo che
$$[x_0 - r, x_0 + r] \cap A_\varphi = \{x_0\} \quad \wedge \quad [y_0 - r, y_0 + r] \cap A_\psi = \{y_0\},$$
da cui possiamo estrarre
$$\{x_0\} \subseteq [x_0 - r, x_0 + r] \cap A_\varphi.$$
Sia ora $x \in [x_0 - r, x_0 + r] \cap A_\varphi$, da 2.1 sappiamo che $x \in A_\varphi \implies (x, y_0) \in A$. Poichè $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$, avremo che $\|(x, y_0) - (x_0, y_0)\| = \|(x - x_0, 0)\| = |x - x_0| \leq r$. Dunque $(x, y_0) \in C \implies x = x_0$. $\square$

Nota 9. Dunque se f è continua in (x_0, y_0), allora è anche separatamente continua in (x_0, y_0), mentre il viceversa non vale.

Esempio 2.4. Sia ad esempio
$$f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$
Poichè $\varphi(x) = f(x, 0) = 0$ e $\psi(y) = f(0, y) = 0$, abbiamo che φ e ψ sono continue in 0, ma f non è continua in $(0,0)$ perchè
$$\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Osservazione 2. Se x_0 è un punto isolato per A_φ, φ è continua in x_0. Se x_0 è di accumulazione per A_φ, (x_0, y_0) è di accumulazione per A perchè, se (x_0, y_0) fosse isolata per A, anche x_0 sarebbe isolato per A_φ. Allora, poichè f è continua in (x_0, y_0), avremo che
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0).$$
Quindi, per il teorema precedente,
$$\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = f(x_0, y_0)$$
con $\varphi(x) = f(x, y_0)$ dunque
$$\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = f(x_0, y_0) = \varphi(x_0),$$
e dunque φ è continua in x_0. In maniera analoga si procede per ψ.

Equazione del grafico e curve cartesiane

Definizione 2.2. Se $\rho : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione di una sola variabile, l'equazione

$$y = \rho(x)$$

è l'**equazione del grafico** di ρ.

$$G_\rho = \{(x, \rho(x)) \,:\, x \in I\}.$$

I grafici delle funzioni continue di una variabile si chiamano **curve cartesiane**. Se $\rho : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, una curva cartesiana è $\{(x, \rho x) : x \in I\}$.

Teorema sui limiti lungo le curve

Teorema 2.3. *Siano $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}(A)$. Supponiamo che*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = l \in \mathbb{R}.$$

Sia $\rho : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua definita in un intervallo reale che contenga il punto x_0 tale che:

1. *$\rho(x_0) = y_0$, e*
2. *$\forall\, x \in I \setminus \{x_0\},\ (x, \rho(x)) \in A$.*

Allora

$$\lim_{x\to x_0} f(x, \rho(x)) = l.$$

Proof. Sia $l \in \mathbb{R}$. Per ipotesi

$$\forall\, \varepsilon > 0\,,\ \exists\, \delta > 0\ :\ \forall\, (x, y) \in A, \quad 0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta \implies |f(x, y) - l| < \varepsilon.$$

Dobbiamo dimostrare che

$$\forall\, \varepsilon > 0\,,\ \exists\, \delta > 0\ :\ \forall\, x \in I \setminus \{x_0\}, \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x, \rho(x)) - l| < \varepsilon.$$

Siano $\varepsilon > 0$ e δ il δ di $(*)$. Poichè ρ è continua nel punto x_0,

$$\exists\, \overline{\delta}\ (\overline{\delta} < \frac{\delta}{2})\ :\ \forall\, x \in I, \quad |x - x_0| < \overline{\delta} \implies |\rho(x) - \rho(x_0)| = |\rho(x) - y_0| < \frac{\delta}{2}.$$

Sia $x \in I \setminus \{x_0\}$ con $|x - x_0| < \overline{\delta}$. Per ipotesi, poichè $x \in I \setminus \{x_0\}$, allora $(x, \rho(x)) \in A$, e dunque

$$\|(x, \rho(x)) - (x_0, y_0)\| = \|(x - x_0, \rho(x) - y_0)\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (\rho(x) - y_0)^2}$$

Per $x \neq x_0$, sappiamo che

$$|x - x_0| < \overline{\delta} < \frac{\delta}{2} \quad \text{e} \quad |\rho(x) - y_0| < \frac{\delta}{2},$$

e dunque

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (\rho(x) - y_0)^2} < \sqrt{\frac{\delta^2}{4} + \frac{\delta^2}{4}} = \frac{\delta}{\sqrt{2}} < \delta.$$

In definitiva, abbiamo ottenuto che se $x \in I \setminus \{x_0\}$ con $|x - x_0| < \overline{\delta}$, $(x, \rho(x)) \in A$ e $0 < \|(x, \rho(x)) - (x_0, y_0)\| < \delta$, per (2) otteniamo che $|f(x, \rho(x)) - l| < \varepsilon$. □

Nota 10. L'ipotesi (2) garantisce che la funzione

$$x \in I \setminus \{x_0\} \mapsto f(x, \rho(x))$$

sia ben definita. Inoltre, poiché x_0 è un punto di accumulazione di $I \setminus \{x_0\}$, ha senso considerare il limite

$$\lim_{x\to x_0} f(x, \rho(x)).$$

Qui, l'equazione $y = \rho(x)$ rappresenta il grafico della funzione ρ, cioè la traiettoria lungo cui viene valutata f. In altre parole, l'espressione $f(x, \rho(x))$ indica il valore di f calcolato lungo la curva cartesiana $y = \rho(x)$.

Il teorema sui limiti lungo le curve afferma che se f ammette limite l nel punto (x_0, y_0), allora tale limite è lo stesso lungo ogni curva cartesiana passante per (x_0, y_0). Di conseguenza, se esistono almeno due curve (o rette) passanti per (x_0, y_0) lungo le quali il limite di f assume valori differenti, oppure se esiste una curva lungo la quale f non ha limite, allora

$$\nexists \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y).$$

Esempio 2.5. Ad esempio nella funzione $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, abbiamo che $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$. Per $y = 0$ abbiamo $f = 0$, ma per $y = x$, $f = 1/2$. $y = 0$ e $y = x$ sono 2 rette passanti per $(0, 0)$ lungo le quali f tende a limiti distinti.

Corollario 2. *Se*

$$\lim_{x\to x_0} f(x, y_0 + m(x - x_0))$$

dipende da m, allora

$$\nexists \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y).$$

$y = y_0 + m(x - x_0)$ rappresenta l'equazione generale della retta che passa per (x_0, y_0), dove m è il coefficiente angolare. Variare $m \in \mathbb{R}$ permette di ottenere tutte le rette passanti per (x_0, y_0). Di conseguenza, l'espressione $f(x, y_0 + m(x - x_0))$ indica il valore di f calcolato lungo la retta $y = y_0 + m(x - x_0)$. Affermare che

$$\lim_{x\to x_0} f(x,\, y_0 + m(x - x_0))$$

dipende dal parametro m significa che, variando m, esistono almeno due rette passanti per (x_0, y_0) lungo le quali la funzione f assume limiti differenti. Di conseguenza,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$$

non esiste. Se il limite lungo ogni retta passante per (x_0, y_0), cioè se

$$\lim_{x\to x_0} f\Big(x,\, y_0 + m(x - x_0)\Big)$$

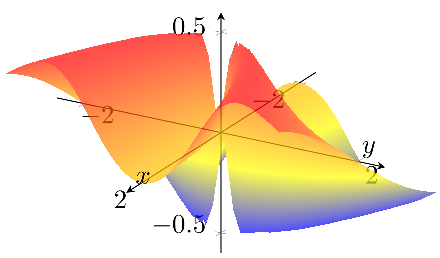
risulta indipendente dal parametro m, ciò non implica necessariamente che esista

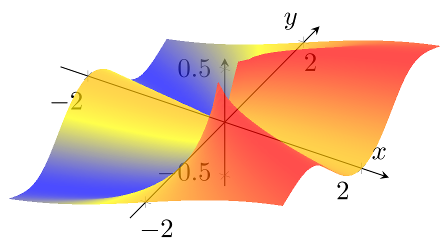
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y).$$

Esempio 2.6. Sia ad esempio la funzione

$$f\colon A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \frac{xy^2}{x^2 + y^4}\ .$$

Mostriamo graficamente la funzione e analizziamone il comportamento in prossimità di $(0, 0)$.





Osserviamo innanzitutto il comportamento lungo ogni retta passante per $(0,0)$. Poniamo $y = mx$ con $m \in \mathbb{R}$. Sostituendo nella funzione otteniamo:

$$f(x, mx) = \frac{x\,(mx)^2}{x^2 + (mx)^4} = \frac{m^2x^3}{x^2(1+m^4x^2)} = \frac{m^2x}{1+m^4x^2}\,.$$

Quindi, calcolando il limite per $x \to 0$, si ha:

$$\lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x\to 0} \frac{m^2x}{1+m^4x^2} = 0\,.$$

Pertanto, lungo ogni retta $y = mx$ il limite risulta essere 0.

Tuttavia, se consideriamo una curva diversa, per esempio la curva $y = \sqrt{x}$ (che passa per $(0,0)$), abbiamo:

$$f\Big(x, \sqrt{x}\Big) = \frac{x\,(\sqrt{x})^2}{x^2 + (\sqrt{x})^4} = \frac{x \cdot x}{x^2 + x^2} = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}\,.$$

Il limite lungo la curva $y = \sqrt{x}$ è quindi $\frac{1}{2}$, diverso dal limite lungo le rette.

Essendo il limite lungo differenti curve passanti per $(0,0)$ diverso (0 lungo le rette e $1/2$ lungo $y = \sqrt{x}$), possiamo concludere che

$$\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}\,.$$

Teorema 2.4. *Siano*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l \in \overline{\mathbb{R}}$$

e

$$\tau : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

una funzione continua definita in un intervallo I contenente y_0 tale che

1. $\tau(y_0) = x_0$, *e*
2. $\forall\, y \in I \setminus \{y_0\},\ (\tau(y), y) \in A$.

Allora

$$\lim_{y\to y_0} f(\tau(y), y) = l.$$

3 Calcolo dei limiti in due variabili

Siano $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}(A)$. L'obiettivo è calcolare il limite

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y).$$

Per facilitare tale analisi si introduce un opportuno cambio di variabili mediante coordinate polari centrate in (x_0, y_0). In particolare, si considerano le trasformazioni

$$\begin{cases} x = x_0 + \rho\cos\theta, \\ y = y_0 + \rho\sin\theta, \end{cases}$$

dove $\rho \in [0, +\infty[$ rappresenta la distanza tra il punto (x,y) e il centro (x_0, y_0), mentre $\theta \in [0, 2\pi]$ è l'angolo polare. In particolare, per definizione vale

$$\rho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}.$$

Sostituendo le relazioni precedenti nella funzione f, definiamo la funzione trasformata in coordinate polari

$$F(\rho, \theta) = f\big(x_0 + \rho\cos\theta,\ y_0 + \rho\sin\theta\big).$$

Il dominio $A^\star$ di $F(\rho,\theta)$ è ottenuto trasformando il dominio A in coordinate polari. In simboli:

$$A^\star = \{(\rho,\theta) \, : \, (x_0 + \rho\cos\theta, y_0 + \rho\sin\theta) \in A\}.$$

In questo modo, lo studio del limite di f per $(x,y) \to (x_0,y_0)$ si riduce all'analisi del comportamento di $F(\rho,\theta)$ per $\rho \to 0$ (con eventuale analisi uniforme rispetto al parametro θ).

Esempio 3.1. Siano

$$f : A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \frac{xy^3}{x^2+y^2}$$

e $(x_0,y_0) = (0,0)$. Vogliamo calcolare il limite di f per $(x,y) \to (0,0)$ mediante coordinate polari. Dalle ipotesi segue che

$$\begin{cases} x = p\cos\theta \\ y = p\sin\theta \end{cases} \qquad \wedge \quad \rho = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$F(\rho,\theta) = \frac{\rho\cos\theta\rho^3\sin^3\theta}{\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta} = \frac{\rho^4\cos\theta\sin^3\theta}{\rho^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)} = \frac{\rho^4\cos\theta\sin^3\theta}{\rho^2} = \rho^2\cos\theta\sin^3\theta$$

F è definita in

$$A^* = \{(\rho,\theta) \in [0,+\infty[\times[0,2\pi] \, : \, (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \in A\}.$$

Esempio 3.2. Sia

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, \sqrt{x^2+y^2} \leq r\}$$

il cerchio di centro $(0,0)$ e raggio r. Traducendo in coordinate polari, otteniamo:

$$C^\star = \{(\rho,\theta) \in [0,+\infty[\times[0,2\pi] \, : \, \sqrt{\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta} \leq r\}$$

la condizione $\sqrt{\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta} \leq r$ si traduce in $\rho \leq r$. Pertanto, il cerchio in coordinate polari è rappresentato dal prodotto cartesiano:

$$C^\star = [0,r] \times [0,2\pi]$$

Fissato $\theta \in [0,2\pi]$, definiamo la funzione $\varphi_\theta(\rho) = F(\rho,\theta)$, che rappresenta la funzione F lungo la semiretta con origine in $(0,0)$ e angolo θ. La funzione φ_θ è definita in

$$A_\theta = \{\rho \in [0,+\infty[\, : \, (\rho,\theta) \in A^*\}.$$

Vogliamo che A_θ abbia 0 come punto di accumulazione, perchè altrimenti non ha senso calcolare il limite $\lim_{\rho\to 0}\varphi_\theta(\rho)$. Supponiamo come ipotesi che

$$\exists\, C \in \mathcal{C}_{(x_0,y_0)} \, : \, C \setminus \{(x_0,y_0)\} \subseteq A.$$

Sia r il raggio di C e $\overline{C} = C \setminus \{(x_0,y_0)\}$. Traducendo $\overline{C}$ in coordinate polari, otteniamo l'insieme

$$\overline{C^\star} =]0,r] \times [0,2\pi] \subseteq A^\star$$

Poniamo $\rho \neq 0$ perchè il punto (x_0,y_0) è escluso. Essendo inoltre $\sin\theta$ e $\cos\theta$ periodiche, se ci trovassimo a lavorare sugli assi, dovremo escludere altri punti insieme a (x_0,y_0).

Proposizione 3.1. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ tale che esiste un cerchio C di centro (x_0,y_0) e raggio $r > 0$ con $C \setminus \{(x_0,y_0)\} \subseteq A$. Allora per ogni $\theta \in [0,2\pi]$, l'intervallo $]0,r]$ è contenuto in A_θ e quindi 0 è un punto di accumulazione per A_θ.*

Proof. Fissiamo $\theta \in [0,2\pi]$ arbitrario. Sia $\rho \in]0,r]$. Dobbiamo dimostrare che $\rho \in A_\theta$.

Per definizione di A_θ, questo equivale a dimostrare che $(\rho,\theta) \in A^*$.

Per la definizione di A^*, questo significa dimostrare che il punto $(x_0+\rho\cos\theta, y_0+\rho\sin\theta)$ appartiene ad A.

Osserviamo che:

- Il punto $(x_0+\rho\cos\theta, y_0+\rho\sin\theta)$ appartiene a $C \setminus \{(x_0,y_0)\}$ perché:

- La sua distanza da (x_0, y_0) è $\rho \leq r$
- È diverso da (x_0, y_0) perché $\rho > 0$

- Per ipotesi $C \setminus \{(x_0, y_0)\} \subseteq A$

Quindi $(x_0 + \rho \cos\theta, y_0 + \rho \sin\theta) \in A$, che implica $(\rho, \theta) \in A^*$ e di conseguenza $\rho \in A_\theta$.
Avendo dimostrato che $]0, r] \subseteq A_\theta$, ne segue immediatamente che 0 è un punto di accumulazione per A_θ. □

Dimostrazione originaria da rivedere

Poichè $0 \in \mathcal{D}(A_\theta)$, ha senso fare $\lim_{\rho\to 0} \varphi_\theta(\rho)$. Ma cosa vuol dire che

$$\forall\, \theta \in [0, 2\pi],\ \lim_{\rho\to 0} \varphi_\theta(\rho) = l \in \mathbb{R}\ ?$$

Vuol dire che

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \forall\, \theta \in [0, 2\pi],\ \exists\, \delta > 0\ (\delta \leq r)\ :\ 0 < \rho < \delta \implies |\varphi_\theta(\rho) - l| < \varepsilon.$$

Limite uniforme

Definizione 3.1. Si dice che $\lim_{\rho\to 0} \phi_\theta(\rho) = l \in \mathbb{R}$ è **uniforme** rispetto a θ se

$$\forall\, \theta \in [0, 2\pi],\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 :\quad 0 < \rho < \delta \implies |\varphi_\theta(\rho) - l| < \varepsilon.$$

Nota 11. Quando scriviamo che $\lim_{\rho\to 0} F(\rho, \theta) = l$ è uniforme rispetto a θ, stiamo parlando di φ_θ, infatti è il limite di una sola variabile ρ.

Limite infinito uniforme

Definizione 3.2. Si dice che $\lim_{\rho\to 0} F(\rho, \theta) = +\infty$ è uniforme rispetto a θ se

$$\forall\, \theta \in [0, 2\pi],\ \forall\, M > 0,\ \exists\, \delta > 0\ :\ 0 < \rho < \delta \implies F(\rho, \theta) \geq M.$$

Allo stesso modo abbiamo che $\lim_{\rho\to 0} F(\rho, \theta) = -\infty$ è uniforme rispetto a θ se

$$\forall\, \theta \in [0, 2\pi],\ \forall\, M < 0,\ \exists\, \delta > 0\ :\ 0 < \rho < \delta \implies F(\rho, \theta) \leq M.$$

Teorema sul calcolo dei limiti

Teorema 3.2. *Siano* $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}(A)$, *e supponiamo che*

$$\exists\, C \in \mathcal{C}_{(x_0, y_0)}\ :\ C \setminus \{(x_0, y_0)\} \subseteq A.$$

Allora

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = l \in \mathbb{R} \iff \lim_{\rho\to 0} F(\rho, \theta) = l \text{ è uniforme rispetto a } \theta.$$

Proof. Dimostriamo l'equivalenza per $l \in \mathbb{R}$ (il caso $l = \pm\infty$ si dimostra in modo analogo).

$\implies$ Supponiamo che esista $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = l$. Per definizione di limite, questo significa che:

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0\ :\ \forall\, (x, y) \in A,\quad 0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta \implies |f(x, y) - l| < \varepsilon.$$

Dobbiamo dimostrare che il limite in coordinate polari è uniforme rispetto a θ, ovvero:

$$\forall\, \theta \in [0, 2\pi],\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0\ (\delta \leq r) :\quad 0 < \rho < \delta \implies |F(\rho, \theta) - l| < \varepsilon.$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$ e sia $\delta > 0$ come nell'ipotesi. Consideriamo un punto arbitrario in coordinate polari con $0 < \rho < \delta$ e $\theta \in [0, 2\pi]$. Tale punto corrisponde in coordinate cartesiane a:

$$\begin{cases} x = x_0 + \rho \cos\theta \\ y = y_0 + \rho \sin\theta \end{cases}$$

Osserviamo che:

- $(x, y) \in A$ poiché $(\rho, \theta) \in A^*$
- La distanza di (x, y) da (x_0, y_0) è esattamente ρ:

$$\|(x, y) - (x_0, y_0)\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \rho$$

Poiché $0 < \rho < \delta$, le ipotesi del limite in coordinate cartesiane sono soddisfatte, quindi:

$$|f(x, y) - l| < \varepsilon$$

Ma $f(x, y) = F(\rho, \theta)$ in coordinate polari, quindi:

$$|F(\rho, \theta) - l| < \varepsilon$$

Questo prova l'uniformità del limite rispetto a θ.

$\Longleftarrow$ Supponiamo ora che il limite in coordinate polari sia uniforme, ovvero:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \ (\delta \leq r) \ : \ \forall \theta \in [0, 2\pi], \quad 0 < \rho < \delta \implies |F(\rho, \theta) - l| < \varepsilon$$

Dobbiamo dimostrare che esiste il limite in coordinate cartesiane.

Sia $\varepsilon > 0$ e sia $\delta > 0$ come nell'ipotesi di uniformità. Consideriamo un punto $(x, y) \in A$ tale che $0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta$.

Passando alle coordinate polari di questo punto:

- $\rho = \|(x, y) - (x_0, y_0)\|$ quindi $0 < \rho < \delta$
- Esiste $\theta \in [0, 2\pi]$ tale che:

$$\begin{cases} x = x_0 + \rho \cos\theta \\ y = y_0 + \rho \sin\theta \end{cases}$$

Per l'ipotesi di uniformità:

$$|F(\rho, \theta) - l| < \varepsilon$$

Tornando alle coordinate cartesiane:

$$|f(x, y) - l| < \varepsilon$$

Questo prova l'esistenza del limite in coordinate cartesiane.

□

Esempio 3.3. Calcoliamo il seguente limite:

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} (x^2 + y^2) e^{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Utilizziamo le coordinate polari:

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases} \qquad \text{con} \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Sostituendo otteniamo:

$$\begin{aligned} F(\rho, \theta) &= (\rho^2 \cos^2\theta + \rho^2 \sin^2\theta) e^{\rho} \\ &= \rho^2 (\cos^2\theta + \sin^2\theta) e^{\rho} \\ &= \rho^2 e^{\rho} \end{aligned}$$

Osserviamo che $F(\rho,\theta)$ non dipende da θ, quindi:

$$\lim_{\rho\to 0} F(\rho,\theta) = \lim_{\rho\to 0} \rho^2 e^{\rho} = 0$$

Poiché la funzione non dipende da θ, il limite è uniforme rispetto a θ e dunque possiamo concludere che:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)e^{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

Per calcolare $\lim_{\rho\to 0} F(\rho,\theta)$, serve che per ogni $\theta \in [0,2\pi]$, A_θ abbia 0 come punto di accumulazione. Supponiamo che $\forall\,\theta \in [0,2\pi]$ $A_\theta \neq \emptyset$ oppure $0 \notin \mathcal{D}(\mathcal{A})$.

θ ammissibile

Definizione 3.3. Si dice che $\theta \in [0,2\pi]$ è **ammissibile** se $0 \in \mathcal{D}(A_\theta)$.

Nota 12.

$$\varphi_\theta(\rho) = F(\rho,\theta) = f(x_0+\rho\cos\theta, y_0+\rho\sin\theta) \to f(x_0,y_0) \text{ per } \rho\to 0.$$

Esempio 3.4.

Sia

$$\lim_{\rho\to 0} F(\rho,\theta) = l \in \mathbb{R}.$$

Allora

$$\phi(\rho) = \sup\{| < F(\rho,\theta) - l| : \theta \in [0,2\pi]\}.$$

Teorema 3.3. $\lim_{\rho\to 0} F(\rho,\theta) = l \in \mathbb{R}$ *uniformemente rispetto a* $\theta \iff \lim_{\rho\to 0}\phi(\rho) = 0$.

Proof. Per ipotesi,

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 : 0 < \rho < \delta \implies |F(\rho,\theta) - l| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall\theta$$

$$\sup|F(\rho,\theta) - l| (= \phi(\rho)) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

$$\phi(\rho) \geq 0 \quad \phi(\rho) = |\phi(\rho)|$$

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 : se 0 < \rho < \delta, |\phi(\rho)| < \varepsilon \implies \lim_{\rho\to 0}\phi(\rho) = 0.$$

$\Longleftarrow$ Per ipotesi,

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 : se 0 < \rho < \delta, |\phi(\rho)| < \varepsilon.$$

$$\phi(\rho) < \varepsilon.$$

Finire dimostrazione. □

$$F(\rho,\theta) = \frac{\rho\cos\theta\rho^3\sin^2\theta}{\rho^2} = \rho^2\cos\theta\sin^3\theta.$$

$$\lim_{\rho\to 0} F(\rho,\theta) = 0.$$

Corollario 3.

$$\lim_{\rho\to 0} F(\rho,\theta) = l \in \mathbb{R}$$

uniformemente rispetto a $\theta \iff \exists$ *una funzione*

$$\psi(p) : \lim_{\rho\to 0}\psi(\rho) = 0$$

e

$$|F(\rho,\theta) - l| \leq \psi(\rho)\forall\theta$$

Proof. $\Longrightarrow$ Per il teorema precedente, $\lim_{\rho\to 0}\phi(\rho) = 0$. Per definizione di ϕ,

$$|F(\rho,\theta) - l| \le \phi(\rho)\forall\theta$$

$\psi = \phi$. $\psi\exists$ ed è la funzione ϕ $\Longleftarrow$

$$|F(\rho,\theta) - l| \le \psi(\rho)\forall\theta \implies 0 \le \phi(\rho) \le \psi(\rho)\forall\theta \implies \lim_{\rho\to 0}\phi(\rho) = 0$$

per il teorema dei carabinieri. □

Segue esempio che devi fare

$$\lim_{\rho\to 0} F(\rho,\theta) = +\infty \quad h(\rho) = \inf\{F(\rho,\theta) : \theta\}$$

Teorema 3.4. $\lim_{\rho\to 0} F(\rho,\theta) = +\infty$ *uniformemente rispetto a* $\theta \iff \lim_{\rho\to 0} h(\rho) = +\infty$

Corollario 4. $\lim_{\rho\to 0} F(\rho,\theta) = +\infty$ *uniformemente rispetto a* $\theta \iff \exists$ *una funzione* $k(\rho)$: $\lim_{\rho\to 0} k(\rho) = +\infty$ *e* $F(\rho,\theta) \ge k(\rho)\forall\theta$.

Ad esempio

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1 + x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

$F(\rho,\theta) = \dfrac{1 + \rho^2\cos^2\theta\sin^2\theta}{\rho^2}$ $\lim_{\rho\to 0} F(\rho,\theta) = +\infty$

$$1 + \rho^4\cos^2\theta\sin^2\theta \ge 1$$

$$F(\rho,\theta) \ge \frac{1}{\rho^4}\forall\theta$$

...

$$\lim_{\rho\to 0} F(\rho,\theta) = -\infty \qquad t(\rho) = \sup\{F(\rho,\theta) : \theta\}$$

Teorema 3.5. $\lim_{\rho\to 0} F(\rho,\theta) = -\infty$ *uniformemente rispetto a* $\theta \iff \lim_{\rho\to 0} t(\rho) = -\infty$.

Corollario 5. $\lim_{\rho\to 0} F(\rho,\theta) = -\infty$ *uniformemente rispetto a* $\theta \iff \exists$ *una funzione* $\theta(\rho)$: $\lim_{\rho\to 0}\theta(\rho) = -\infty$ *e* $F(\rho,\theta) \le \theta(\rho)\forall\theta$

Se $\exists 2$ rette e 2 curve passanti per (x_0,y_0) lungo le quali f tende a limiti distinti, $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)\nexists$. Se $\exists$ una retta e una curva passante per (x_0,y_0) lungo la quale f non ha limite, $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)\nexists$

Esercizio 3.5. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2-y^2)e^{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+2y^2}{(x^2+y^2)^4}$$