Практикум 9. Комплексні числа

Вища математика 3

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Математика в технічному університеті

Зміст

Зміст

Довідник I

- Алгебрична форма комплексного числа

$$\boxed{z = x + iy, \quad i^2 = -1.}$$

- Дійсна частина $\operatorname{Re} z = x$
- Уявна частина $\operatorname{Im} z = y$
- Спряжене до числа $z = x + iy$

$$\bar{z} = x - iy$$

Довідник II

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2$$

- Рівність
$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2. \end{cases}$$
- Сума.
$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$
- Різниця.
$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$
- Добуток.
$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Довідник III

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2$$

- Натуральний степінь

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdots z}_{n}.$$

- Частка

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}, \quad z_2 \neq 0$$

Навчальні задачі I

Навчальна задача 1 (3.4.2).

Знайти дійсні розв'язки рівняння

$$(2x + y) + (x + 3y)i = 3 - i.$$

Розв'язання.

$$(2x + y) + (x + 3y)i = 3 - i \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 3, \\ x + 3y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = -1. \end{cases}$$

Приклад (дії над комплексними числами в алгебричній формі)

$$z_1 = 2 + 3i, \quad z_2 = -1 + 2i.$$

$$z_1 + z_2 = 2 + 3i + (-1 + 2i) = 1 + 5i;$$

$$z_1 - z_2 = 2 + 3i - (-1 + 2i) = 3 + i;$$

$$z_1 z_2 = (2+3i)(-1+2i) = -2-3i+4i+6i^2 = -2+i-6 = -8+i;$$

$$(z_1)^2 = (2+3i)^2 = 2^2 + 2\cdot 2\cdot 3i + (3i)^2 = 4 + 12i - 9 = -5 + 12i;$$

$$\bar{z}_2 = \overline{-1 + 2i} = -1 - 2i;$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(2+3i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)} = \frac{(2+3i)(-1-2i)}{(-1)^2 - (2i)^2} =$$

$$= \frac{-2-3i-4i-6i^2}{1+4} = \frac{4-7i}{5} = \frac{4}{5} - \frac{7}{5}i.$$

Задачі

Задача 1 (3.4.9.2).

Знайдіть дійсні числа x та y з рівняння

$$(x - 5y) + (x - 2y)i = -17 - 8i.$$

Задачі

Задача 1 (3.4.9.2).

Знайдіть дійсні числа x та y з рівняння

$$(x-5y)+(x-2y)i=-17-8i.$$

$$x=-2, y=3.$$

Задача 2 (3.4.9.2).

Задано числа $z_1 = 3 + 4i, z_2 = 2 - 3i$. Знайдіть

$$z_1 + z_2, z_1 z_2, z_2 - z_1, \bar{z}_2, \frac{z_1}{z_2}, (z_1)^2.$$

Задача 2 (3.4.9.2).

Задано числа $z_1 = 3 + 4i, z_2 = 2 - 3i$. Знайдіть

$$z_1 + z_2, z_1 z_2, z_2 - z_1, \bar{z}_2, \frac{z_1}{z_2}, (z_1)^2.$$

$$z_1 + z_2 = 5 + i,\ \ z_1 z_2 = 18 - i,$$

$$z_2 - z_1 = -1 - 7i,\ \ \bar{z}_2 = 2 + 3i,\ \ \frac{z_1}{z_2} = -\frac{6}{13} + \frac{17}{13}i,$$

$$(z_1)^2 = -7 + 24i.$$

Задача 3 (3.4.13.3).
Обчисліть
$$i^4 + i^{14} + i^{24} + i^{34} + i^{44} + i^{45}.$$

Задача 3 (3.4.13.3).
Обчисліть
$$i^4 + i^{14} + i^{24} + i^{34} + i^{44} + i^{45}.$$

$$1 + i$$

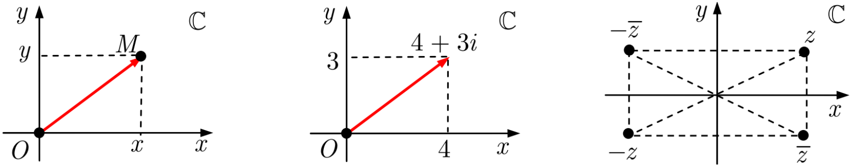
Зміст

Довідник

- Комплексне число $z = x + iy$ зображують на площині Oxy точкою $M(x;y)$ або радіусом-вектором

$$\overline{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- Комплексна площина $\mathbb{C} \leftrightarrow Oxy$: Ox — дійсна вісь; Oy — уявна вісь.



Задачі

Задача 4 (3.4.12*).

На комплексній площині зобразіть комплексні числа

$$z_1 = 2,\ z_2 = -2,\ z_3 = 2i,\ z_4 = -2i,\ z_5 = -1 + 2i.$$

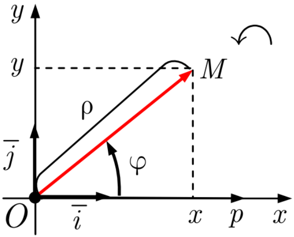
Зміст

Довідник

Прямокутні декартові координати x, y узгоджені з полярними координатами ρ, φ

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \end{cases}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi : \begin{cases} \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases}$$



$$\boxed{x^2 + y^2 = \rho^2.}$$

Задачі

Задача 5 (3.4.16*).

Побудуйте в полярній системі координат точки $(M = M(\rho; \varphi))$:

$$M_1\left(2; \frac{\pi}{4}\right), \ M_2\left(1; -\frac{2\pi}{3}\right), \ M_3(3; 0).$$

Задача 6 (3.4.17.1).

Зобразіть на площині множини чисел, модуль ρ та аргумент φ яких справджують умову

$$\rho = 1.$$

Задача 6 (3.4.17.1).

Зобразіть на площині множини чисел, модуль ρ та аргумент φ яких справджують умову
$$\rho = 1.$$

Коло радіусом 1 з центром у точці O.

Задача 7 (3.4.17.3).

Зобразіть на площині множини чисел, модуль ρ та аргумент φ яких справджують умову

$$\rho \le 3.$$

Задача 7 (3.4.17.3).

Зобразіть на площині множини чисел, модуль ρ та аргумент φ яких справджують умову
$$\rho \leq 3.$$

Круг радіусом 3 із центром у точці O.

Задача 8 (3.4.17.4).

Зобразіть на площині множини чисел, модуль ρ та аргумент φ яких справджують умову

$$\rho > 3.$$

Задача 8 (3.4.17.4).

Зобразіть на площині множини чисел, модуль ρ та аргумент φ яких справджують умову

$$\rho > 3.$$

Зовнішні точки круга радіусом 3 із центром у точці O.

Задача 9 (3.4.17.5).

Зобразіть на площині множини чисел, модуль ρ та аргумент φ яких справджують умову

$$2 < \rho < 3.$$

Задача 9 (3.4.17.5).

Зобразіть на площині множини чисел, модуль ρ та аргумент φ яких справджують умову

$$2 < \rho < 3.$$

Кільце без своїх меж.

Задача 10 (3.4.17.7).

Зобразіть на площині множини чисел, модуль ρ та аргумент φ яких справджують умову

$$\varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Задача 10 (3.4.17.7).

Зобразіть на площині множини чисел, модуль ρ та аргумент φ яких справджують умову

$$\varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Промінь.

Задача 11 (3.4.17.9).

Зобразіть на площині множини чисел, модуль ρ та аргумент φ яких справджують умову

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}.$$

Задача 11 (3.4.17.9).

Зобразіть на площині множини чисел, модуль ρ та аргумент φ яких справджують умову

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}.$$

Кут.

Зміст

Довідник I

- Модуль комплексного числа z

$$|z| = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- Головне значення аргументу

$$\arg z = \varphi_0 \in (-\pi; \pi]$$

- Аргумент z

$$\mathrm{Arg}\, z = \varphi$$

$$\mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2\pi k, \;\; k \in \mathbb{Z}.$$

- Тригонометрична форма комплексного числа

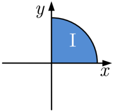
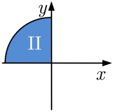
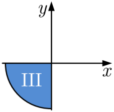
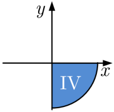
$$\boxed{z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi),}$$

- Показникова форма комплексного числа

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) \Leftrightarrow \boxed{z = \rho e^{i\varphi}}$$

Довідник II

Головне значення аргументу

	$x > 0, y = 0$	$\varphi = 0$
	$x > 0, y > 0$	$\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = \arccos\dfrac{x}{\rho}$
	$x = 0, y > 0$	$\varphi = \dfrac{\pi}{2}$
	$x < 0, y > 0$	$\varphi = \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = \arccos\dfrac{x}{\rho}$
	$x < 0, y = 0$	$\varphi = \pi$
	$x < 0, y < 0$	$\varphi = -\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = -\arccos\dfrac{x}{\rho}$
	$x = 0, y < 0$	$\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$
	$x > 0, y < 0$	$\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = -\arccos\dfrac{x}{\rho}$

Приклад (запис чисел у тригонометричній та показниковій формі)

$$z_1 = 2i, \;\; z_2 = -3, \;\; z_3 = 1 + i.$$

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{2}};$$

$$z_2 = 3\left(\cos\pi + i\sin\pi\right) = 3e^{i\pi};$$

$$z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Навчальні задачі I

Навчальна задача 2 (3.4.3.1).

Зобразити у тригонометричній та показниковій формі число $z = -1 + i$.

Розв'язання.

$$\rho = |z| = \left[\sqrt{x^2 + y^2}\right] = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2};$$

$$\varphi = \arg z = \left[\pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right] = \pi + \operatorname{arctg}(-1) = \frac{3\pi}{4};$$

$$z = [\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)] = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right);$$

$$z = \left[\rho e^{i\varphi}\right] = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

Задачі

Задача 12 (3.4.14.1).

Запишіть число $z = 1$ у тригонометричній і показниковій формах.

Задачі

Задача 12 (3.4.14.1).

Запишіть число $z = 1$ у тригонометричній і показниковій формах.

$$z = \cos 0 + i \sin 0.$$

Задача 13 (3.4.14.3).

Запишіть число $z = 2i$ у тригонометричній і показниковій формах.

Задача 13 (3.4.14.3).

Запишіть число $z = 2i$ у тригонометричній і показниковій формах.

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

Задача 14 (3.4.14.4).

Запишіть число $z = -3i$ у тригонометричній і показниковій формах.

Задача 14 (3.4.14.4).

Запишіть число $z = -3i$ у тригонометричній і показниковій формах.

$$z = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Задача 15 (3.4.14.7).

Запишіть число $z = -1 - i$ у тригонометричній і показниковій формах.

Задача 15 (3.4.14.7).

Запишіть число $z = -1 - i$ у тригонометричній і показниковій формах.

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

Задача 16 (3.4.14.8).

Запишіть число $z = 1 - i$ у тригонометричній і показниковій формах.

Задача 16 (3.4.14.8).

Запишіть число $z = 1 - i$ у тригонометричній і показниковій формах.

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Задача 17 (3.4.14.9).

Запишіть число $z = \sqrt{3} - i$ у тригонометричній і показниковій формах.

Задача 17 (3.4.14.9).

Запишіть число $z = \sqrt{3} - i$ у тригонометричній і показниковій формах.

$$z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

Задача 18 (3.4.14.11).

Запишіть число $z = -\cos\varphi + i\sin\varphi$ у тригонометричній і показниковій формах.

Задача 18 (3.4.14.11).

Запишіть число $z = -\cos\varphi + i\sin\varphi$ у тригонометричній і показниковій формах.

$$z = \cos(\pi - \varphi) + i\sin(\pi - \varphi)$$

Задача 19 (3.4.14.13).

Запишіть число $z = \sin\varphi + i\cos\varphi$ у тригонометричній і показниковій формах.

Задача 19 (3.4.14.13).

Запишіть число $z = \sin\varphi + i\cos\varphi$ у тригонометричній і показниковій формах.

$$z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

Зміст

Дії у тригонометрічній формі I

$$z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

- Рівність

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \rho_1 = \rho_2, \ \ \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k, \ \ k \in \mathbb{Z}$$

- Добуток

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

- Частка

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Дії у тригонометрічній формі II

- Цілий степінь (Муаврова формула)

$$z^n = [\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), n \in \mathbb{Z}$$

- Корінь n–го порядку

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \omega_k =$$

$$= \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right), \quad k = \overline{0, n-1}.$$

Приклад (дії над числами у тригонометричній формі)

$$z_1 = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right), \quad z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

$$z_1 z_2 = 4\cdot 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right) = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right);$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right);$$

$$(z_2)^{10} = 2^{10}\left(\cos\left(10\cdot\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(10\cdot\frac{\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= 1024\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 1024\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Задачі

Задача 20 (3.4.15.1).

Обчисліть

$$5\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)\cdot 2\left(\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}\right).$$

Задачі

Задача 20 (3.4.15.1).

Обчисліть

$$5\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)\cdot 2\left(\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}\right).$$

$$10i.$$

Задача 21 (3.4.15.3).

Обчисліть

$$\frac{4\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}.$$

Задача 21 (3.4.15.3).

Обчисліть

$$\frac{4\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}.$$

$$2i.$$

Задача 22 (3.4.19.1).

Обчисліть

$$\left(2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^{10}.$$

Задача 22 (3.4.19.1).
Обчисліть
$$\left(2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^{10}.$$

$$2^{10}i = 1024i.$$

Навчальні задачі I

Навчальна задача 3 (3.4.5.1).

Знайти всі значення

$$\sqrt[4]{-1}$$

і зобразіть їх на комплексній площині.

Розв'язання.

[*Записуємо число* -1 *у тригонометричній формі.*]

$$-1 = \cos\pi + i\sin\pi.$$

Навчальні задачі II

[*Записуємо спільну формулу для значень кореня.*]

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \omega_k =$$

$$= \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right), \quad k = \overline{0, n-1}.$$

$$\sqrt[4]{-1} = \omega_k = \cos\frac{\pi + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{4}, k = \overline{0, 3}.$$

Навчальні задачі III

[*Виписуємо всі окремі значення кореня.*]

$$\omega_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2};$$

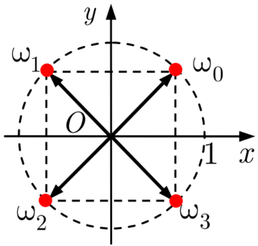
$$\omega_1 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\omega_2 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\omega_3 = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Навчальні задачі IV

[*Зображуємо знайдені значення на комплексній площині, використовуючи полярну систему координат.*]



Задачі

Задача 23 (3.4.20.1).

Знайдіть усі значення кореня

$$\sqrt{4\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)}.$$

Задачі

Задача 23 (3.4.20.1).

Знайдіть усі значення кореня

$$\sqrt{4\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)}.$$

$$\sqrt{2}+i\sqrt{2},\ -\sqrt{2}-i\sqrt{2}$$

Задача 24 (3.4.20.3).

Знайдіть усі значення кореня

$$\sqrt[3]{1}.$$

Задача 24 (3.4.20.3).

Знайдіть усі значення кореня

$$\sqrt[3]{1}.$$

$$1,\ -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Задача 25 (3.4.20.3).

Знайдіть усі значення кореня

$$\sqrt[4]{-8 + i8\sqrt{3}}.$$

Задача 25 (3.4.20.3).

Знайдіть усі значення кореня

$$\sqrt[4]{-8+i8\sqrt{3}}.$$

$$\sqrt{3}+i,\ -1+i\sqrt{3},\ -\sqrt{3}-i,\ 1-i\sqrt{3}.$$

Зміст

Задачі

Задача 26 (3.4.18.1).

Зобразіть на площині множини чисел, які справджують умову

$$\operatorname{Re} z > 0.$$

Задачі

Задача 27 (3.4.18.3).

Зобразіть на площині множини чисел, які справджують умову

$$|\operatorname{Re} z| < 1.$$

Задачі

Задача 28 (3.4.18.5).

Зобразіть на площині множини чисел, які справджують умову

$$|z| \leq 1.$$

Навчальні задачі I

Навчальна задача 4 (3.4.6.3).

Зобразити на площині $\mathbb{C}$ множини точок, що справджують умови:

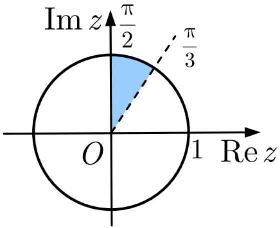
$$|z| \leq 1, \ \left(\frac{\pi}{3} < \arg z \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

Розв'язання.

[*Використовуємо геометричний зміст умови.*]

Навчальні задачі II

Множина точок, розташованих усередині круга з межею $|z| = 1$: $x^2 + y^2 = 1$ між променями $\varphi = \frac{\pi}{3}$ та $\varphi = \frac{\pi}{2}$.



Список джерел

У презентації використано матеріал підручника:
Алєксєєва, І. В., Гайдей, В. О., Диховичний, О. О., Федорова, Л. Б. (2018). *Математика в технічному університеті.* (Т. 1). Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського.