Практикум 4. Функціональні ряди

Вища математика 3

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Математика в технічному університеті

Зміст

Зміст

Довідник

Функціональним рядом називають ряд вигляду

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x),$$

де $u_n(x)$ — функції, означені на деякій множині X.
Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ називають збіжним у точці x_0, якщо для $x_0 \in X$ числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ збігається.
Множину $D \subset X$ значень $x \in X$, для яких функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ збігається, називають областю збіжності ряду.
Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ називають абсолютно збіжним, якщо збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$. Область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ називають областю абсолютної збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Схема знаходження області збіжності функціонального ряду.

1. Знаходять область означення ряду $D(\Sigma)$.
2. Знаходять область абсолютної збіжності функціонального ряду.
3. Якщо функціональний ряд знакозмінний, то знаходять точки його збіжності за межами області абсолютної збіжності.
4. Записують відповідь.

Навчальні задачі I

Навчальна задача 1 (13.4.1.1*).

Знайти область збіжності функціонального ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^{n-1}}.$$

Розв'язання.

[***Крок 1.*** *Знаходимо область означення ряду* $D(\Sigma)$.]

$$u_n(x) = \frac{n}{x^{n-1}}.$$

$$D(\Sigma) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty).$$

Навчальні задачі II

[***Крок 2.*** *Знаходимо область абсолютної збіжності функціонального ряду.*]
[*Використовуємо радикальну ознаку Коші.*]

$$|u_n(x)| = \left|\frac{n}{x^{n-1}}\right| = \frac{n\,|x|}{|x|^n}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n\,|x|}{|x|^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n\,|x|}}{|x|} =$$
$$= \left[\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1, a > 0\right] = \frac{1}{|x|}.$$

Навчальні задачі III

Ряд збігається для всіх x таких, що:

$$\frac{1}{|x|} < 1 \Leftrightarrow |x| > 1.$$

Ряд розбігається для всіх таких, що:

$$\frac{1}{|x|} > 1 \Leftrightarrow |x| < 1.$$

Окремо досліджуємо збіжність ряду для x таких, що

$$|x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Для $x = 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n$ розбігається;

Навчальні задачі IV

для $x = -1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n$ — розбігається, оскільки не виконано необхідну умову збіжності ряду.
Область абсолютної збіжності ряду: $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.
[**Крок 3.** *Досліджуємо функціональний ряд за межами області абсолютної збіжності.*]
Оскільки для будь-якого $x \in [-1; 0) \cup (0; 1]$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{x^{n-1}} = \infty \neq 0,$$

то на цій множині функціональний ряд розбігається (не виконано необхідну умову збіжності ряду).
[**Крок 4.** *Записуємо відповідь.*]
Область збіжності ряду: $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Навчальна задача 2 (13.3.1.3).

Знайти область збіжності функціонального ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}.$$

Розв'язання.

1. $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^x}$. $D(\Sigma) = \mathbb{R}$.
2. $|u_n(x)| = \left| \frac{(-1)^n}{n^x} \right| = \frac{1}{n^x}$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ є узагальненим гармонічним. Він збігається для $x > 1$ і розбігається для $x \leq 1$.

Область абсолютної збіжності ряду: $(1; +\infty)$.

3. Оскільки для $x \in (0;1]$

$$|u_n(x)| = \frac{1}{n^x} > \frac{1}{(n+1)^x} = |u_{n+1}(x)|, \quad \lim_{n\to\infty} |u_n(x)| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^x} = 0,$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$ збігається умовно за Ляйбніцевою ознакою.
4. Область збіжності ряду: $(0;+\infty)$.

Навчальна задача 3 (13.3.1.4).

Знайти область збіжності функціонального ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}2^{nx}.$$

Розв'язання.

1. $u_n(x)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}2^{nx}$. $D(\Sigma)=\mathbb{R}$.
2.

$$|u_n(x)|=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}2^{nx}=u_n(x).$$

[*Досліджуємо ряд за радикальною ознакою Коші.*]

$$\lim_{n\to\infty}|u_n(x)|=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}2^{nx}}=2^{x}.$$

Ряд збігається для таких x, що

$$2^x < 1 \Leftrightarrow x < 0.$$

Ряд розбігається для таких x, що

$$2^x > 1 \Leftrightarrow x > 0.$$

3. Для $x = 0$ маємо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Оскільки

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0,$$

то ряд розбігається за достатньою ознакою розбіжності ряду.
4. Область збіжності ряду: $(-\infty; 0)$.

Задачі

Задача 1 (13.4.7.1).

Знайдіть область збіжності функціонального ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\sqrt{x-1}e^{-\frac{n}{x}}.$$

Задачі

Задача 1 (13.4.7.1).

Знайдіть область збіжності функціонального ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\sqrt{x-1}e^{-\frac{n}{x}}.$$

$[1;+\infty)$.

Задача 2 (13.4.7.3).

Знайдіть область збіжності функціонального ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} (3 - x^2)^n.$$

Задача 2 (13.4.7.3).

Знайдіть область збіжності функціонального ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} (3 - x^2)^n.$$

$(-2; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; 2).$

Задача 3 (13.4.7.5).

Знайдіть область збіжності функціонального ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}.$$

Задача 3 (13.4.7.5).

Знайдіть область збіжності функціонального ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}.$$

$(-2; 2)$.

Задача 4 (13.4.7.7).

Знайдіть область збіжності функціонального ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n + 1}.$$

Задача 4 (13.4.7.7).

Знайдіть область збіжності функціонального ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n + 1}.$$

$(-\infty; -1) \cup (1; +\infty).$

Задача 5 (13.4.7.11).

Знайдіть область збіжності функціонального ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lg^n x.$$

Задача 5 (13.4.7.11).

Знайдіть область збіжності функціонального ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lg^n x.$$

$\left(\frac{1}{10}; 10\right)$.

Зміст

Довідник I

Означення (рівномірно збіжного на множині ряду).

Функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ називають рівномірно збіжним на множині D, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \;\; \forall n > N \;\; \forall x \in D : \\ |S(x) - S_n(x)| = |R_n(x)| < \varepsilon.$$

Означення (правильно збіжного на множині ряду.

Функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, називають правильно збіжним на D, якщо існує збіжний ряд з додатними членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ такий, що для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ та всіх $x \in D$ виконано нерівність

$$|u_n(x)| \leq a_n.$$

Довідник II

Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називають мажорантою функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Ознака Ваєрштраса.

Якщо існує збіжний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0$, такий, що для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ та $x \in D$ виконано нерівність

$$|u_n(x)| \leq a_n.$$

то функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ збігається абсолютно і рівномірно на множині D.

Правильно збіжний ряд — це рівномірний збіжний ряд, для якого існує знакододатна мажоранта (який справджує ознаку Ваєрштраса).

Навчальні задачі I

Навчальна задача 4 (13.4.2).

Довести, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+x^2}$ збігається рівномірно (правильно) на $\mathbb{R}$.

Розв'язання.

[*Будуємо збіжну мажоранту для функціонального ряду.*]

Для всіх значень $x \in \mathbb{R}$ маємо

$$|u_n(x)| = \frac{1}{n^3 + x^2} \leq \frac{1}{n^3} = a_n.$$

Отже, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ є мажорантою заданого ряду.

Навчальні задачі II

Оскільки мажоранта збігається як узагальнений гармонічний ряд з показником $3 > 1$, то ряд збігається рівномірно (правильно) на всій числовій осі $(-\infty; +\infty)$.

Задачі

Задача 6 (13.4.8.1).

Знайдіть область рівномірної (правильної) збіжності функціонального ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}.$$

Задачі

Задача 6 (13.4.8.1).

Знайдіть область рівномірної (правильної) збіжності функціонального ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}.$$

$\mathbb{R}$.

Задачі

Задача 7 (13.4.8.3).

Знайдіть область рівномірної (правильної) збіжності функціонального ряду

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \cos nx}.$$

Задачі

Задача 7 (13.4.8.3).

Знайдіть область рівномірної (правильної) збіжності функціонального ряду

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \cos nx}.$$

$\mathbb{R}$.

Задачі

Задача 8 (13.4.9.1).

Доведіть, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nx}{\sqrt{n^3+1}}$ збігається рівномірно (правильно) на $\mathbb{R}$.

Задачі

Задача 9 (13.4.9.3).

Доведіть, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$ збігається рівномірно (правильно) на проміжку $[0; +\infty)$.

Зміст

Довідник

Властивості рівномірно (правильно) збіжних рядів.

1. Якщо члени функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ неперервні функції і ряд на множині D збігається рівномірно (правильно), то сума ряду неперервна на цій множині.
2. Якщо функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ з неперервними членами рівномірно (правильно) збігається на відрізку $[a; b]$, то його можна почленно інтегрувати на цьому відрізку.
3. Якщо функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ з неперервно диференційовними членами збігається на відрізку $[a; b]$, а ряд, утворений з похідних його членів, рівномірно (правильно) збігається на $[a; b]$, то заданий ряд можна почленно диференціювати в точках цього відрізку.

Навчальні задачі I

Навчальна задача 5 (13.4.3).

Показати, що:

1) функція $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^4}$ неперервна на всій числовій осі;

2) ряд можна інтегрувати на будь-якому відрізку $[0; x]$.

Розв'язання.

Для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконано нерівність

$$|u_n(x)| = \left|\frac{\sin nx}{n^4}\right| \leq \frac{1}{n^4} = a_n.$$

Навчальні задачі II

Оскільки мажоранта $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ збігається як узагальнений гармонічний ряд, то заданий функціональний ряд збігається рівномірно (правильно) на всій числовій осі.
Оскільки члени функціонального ряду неперервні на всій осі функції, то сума ряду $f(x)$ неперервна на $\mathbb{R}$ і ряд можна почленно інтегрувати на будь-якому відрізку:

$$\int\limits_0^x f(t)dt = \int\limits_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n^4} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^x \frac{\sin nt}{n^4} dt =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \int\limits_0^x \sin nt dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \cdot \left. \frac{-\cos nt}{n} \right|_0^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos nx}{n^5}.$$

Навчальна задача 6

Знайти суму ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(1-x)^n, \ 0 \leq x \leq 1.$$

Розв'язання. Нехай $S(x)$ — сума заданого ряду.
Маємо, що $S(0) = S(1) = 0$.
Для фіксованого $x \in (0;1)$ заданий ряд є геометричним з першим членом x та знаменником $1-x$, тобто

$$S(x) = \frac{x}{1-(1-x)} = 1, \ 0 < x < 1.$$

Отже,

$$S(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, x = 1, \\ 1, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Кожна з функцій $u_n(x) = x(1-x)^n$ неперервна на відрізку $[0;1]$, але сума ряду $S(x)$ виявилась розривною!

Навчальна задача 7 (13.4.4).

Дослідити властивості суми ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2^n \pi x}{2^n}.$$

Розв'язання. Для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконано нерівність

$$\left| \frac{\sin 2^n \pi x}{2^n} \right| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Оскільки мажоранта $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ збігається як геометричний ряд, то функціональний ряд збігається рівномірно (правильно) на $\mathbb{R}$.

1. Сума ряду $S(x)$ — функція неперервна.

2. Ряд можна інтегрувати почленно на довільному проміжку:

$$\int\limits_0^x S(t)dt = \int\limits_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2^n \pi t}{2^n} dt =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^x \frac{\sin 2^n \pi t}{2^n} dt = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2^n \pi t}{4^n \pi}\Big|_0^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos 2^n \pi x}{4^n \pi}.$$

3. Утворюємо ряд з похідних

$$\pi \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2^n \pi x).$$

Оскільки він розбігається за достатньою ознакою розбіжності, то вихідний ряд не можна почленно диференціювати.

Список джерел

У презентації використано матеріал підручника:
Алєксєєва, І. В., Гайдей, В. О., Диховичний, О. О., Федорова, Л. Б. (2020). *Математика в технічному університеті.* (Т. 4). Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського.