Teoría de conjuntos

Adaptado de: https://www.lifeder.com/teoria-de-conjuntos/

La **teoría de conjuntos** es una rama de la lógica-matemática que se encarga del estudio de las relaciones entre entidades denominadas *conjuntos*. Los conjuntos se caracterizan por ser colecciones de objetos. Dichos objetos son llamados los *elementos* del conjunto y pueden ser: números, letras, figuras geométricas, palabras que representan objetos, los objetos mismos y otros.

Fue Georg Cantor, hacia finales del siglo XIX, quien propuso la teoría de conjuntos. Otros notables matemáticos en el siglo XX hicieron su formalización: Gottlob Frege, Ernst Zermelo, Bertrand Russell, Adolf Fraenkel entre otros.

La **paradoja de Russell** o **paradoja del barbero**, acreditada a Bertrand Russell, demuestra que la teoría original de conjuntos formulada por Cantor y Frege es contradictoria.

Russell preguntaba (en carta escrita a Frege en 1902), si el conjunto de los conjuntos que no forman parte de sí mismos (es decir, aquel conjunto que engloba a todos aquellos conjuntos que no están incluidos en sí mismos, como el de "libros" en el ejemplo anterior) forma parte de sí mismo.

La paradoja de Russell ha sido expresada en varios términos más cotidianos, el más conocido es la *paradoja del barbero* que se puede enunciar de la siguiente manera:

> En un lejano poblado de un antiguo emirato había un barbero llamado As-Samet *diestro en afeitar cabezas y barbas, maestro en escamondar pies y en poner sanguijuelas*. Un día el emir se dio cuenta de la falta de barberos en el emirato, y ordenó que los barberos solo afeitaran a aquellas personas que no pudieran afeitarse a sí mismos. ¡Ah! e impuso la norma de que todo el mundo estuviera afeitado, (no se sabe si por higiene, por estética, o por demostrar que podía imponer su santa voluntad y mostrar así su poder). Cierto día el emir llamó a As-Samet para que lo afeitara y él le contó sus angustias:
>
> —En mi pueblo soy el único barbero. No puedo afeitar al barbero de mi pueblo, ¡que soy yo!, ya que si lo hago, entonces puedo afeitarme por mí mismo, por lo tanto ¡no debería afeitarme! pues desobedecería vuestra orden. Pero, si por el contrario no me afeito, entonces algún barbero debería afeitarme, ¡pero como yo soy el único barbero de allí!, no puedo hacerlo y también así desobedecería a vos mi señor, oh emir de los creyentes, ¡que Allah os tenga en su gloria!
>
> El emir pensó que sus pensamientos eran tan profundos, que lo premió con la mano de la más hermosa de sus concubinas. Así, el barbero As-Samet vivió para siempre feliz y barbón.

[Adaptado de: https://es.wikipedia.org/wiki/Paradoja_de_Russell]

Definición

El conjunto es un *concepto primitivo* como lo es en geometría el concepto de punto, recta o plano. Esto quiere decir que no se logra brindar una definición precisa de conjunto. No hay mejor manera de expresar el concepto que señalando ejemplos.

Definiciones por comprensión y por extensión

El conjunto E formado por los colores de la bandera de España. Esta forma de expresar el conjunto se llama *por comprensión*.

El mismo conjunto E escrito *por extensión* es:

$$E = \{ \text{rojo}, \text{amarillo} \}.$$

En este caso, “rojo” y “amarillo” son elementos del conjunto E. Debe notarse que los elementos se enumeran entre llaves y *no se repiten*. En el caso de la bandera española hay tres franjas de colores (rojo, amarillo, rojo) dos de los cuales se repiten, pero *los elementos no se repiten cuando se expresa el conjunto*.

A veces se expresa un conjunto de la siguiente manera:

$$A = \{ a, b, c, d, e, f, g, \ldots, z \}.$$

Aquí es claro el patrón que define el conjunto: estamos listando las letras del alfabeto. Los tres puntos indican a quien lee que tiene que seguir añadiendo elementos con el mismo método indicado.

Subconjuntos

Consideramos el conjunto de las letras del alfabeto,

$$A = \{ a, b, c, d, e, f, g, \ldots, z \},$$

y el conjunto de las vocales,

$$V = \{ a, e, i, o, u \}.$$

Claramente, cada elemento del conjunto V pertenece también al conjunto A. En este caso, se dice que V es un **subconjunto** de A y se indica con símbolos:

$$V \subset A.$$

Cuando un conjunto B no es subconjunto de otro conjunto A, se escribe con símbolos

$$B \not\subset A.$$

Pertenencia

Un elemento de un conjunto se dice pertenecer al conjunto mismo. Por ejemplo, siempre considerando

V = { a, e, i, o, u },

el elemento a pertenece al conjunto V. Se escribe entonces a ∈ V. Pero hay también el caso en que un elemento no pertenezca a un conjunto. Un ejemplo es la letra v, que no pertenece al conjunto V. En esta situación, se escribe con símbolos

$$v \notin V.$$

Cardinalidad

El número de elementos de un conjunto finito se le llama su **cardinalidad**.

Por ejemplo, el conjunto E considerado arriba,

E = { rojo, amarillo },

tiene cardinalidad igual a 2. El conjunto V de las primeras vocales,

V = { a, e, i },

tiene cardinalidad 3.

Conjuntos finitos

Es un conjunto *finito* en el que sus elementos son numerables. Esto equivale a decir que su cardinalidad es un número finito.

Ejemplos de conjuntos finitos son las letras del abecedario español, las vocales del castellano, los planetas del sistema Solar entre otros.

Los conjuntos E y V considerados antecedentemente son igualmente finitos.

Conjuntos infinitos

Se entiende por conjunto *infinito* todo aquel que el número de sus elementos es infinito, ya que, sin importar lo grande que pueda ser el número de sus elementos, siempre es posible encontrar más elementos.

Un ejemplo de conjunto infinito es el **conjunto de los números naturales N**, el cual en forma extensiva se expresa de la siguiente manera

$$\mathbf{N} = \{ 1, 2, 3, 4, 5, \dots \}.$$

Esto es claramente un conjunto infinito, ya que no importa lo grande que pueda ser un número natural, siempre puede encontrarse el siguiente mayor, en un proceso sin fin. Claramente la cardinalidad de tal conjunto es ∞ (el símbolo "∞" se lee "infinito").

Conjunto vacío

Es el conjunto que no contiene elemento alguno. El conjunto vacío V se denota por Ø o mediante un par de llaves sin elementos en su interior:

$$V = \{\ \} = \varnothing.$$

El conjunto vacío es *único*, por lo tanto debe es incorrecto decir "un conjunto vacío", la forma correcta es decir "el conjunto vacío": hay uno no más.

Entre las propiedades del conjunto vacío se tiene que el mismo es subconjunto de cualquier conjunto:

$$\varnothing \subset A.$$

Conjunto universal

En teoría de conjuntos, un **conjunto universal** es un conjunto formado por todos los objetos de estudio en un contexto dado. Por ejemplo, en aritmética los objetos de estudio son los números naturales, por lo que el conjunto universal para este caso puede ser el conjunto de los números naturales **N**. Al conjunto universal también se le denomina **conjunto referencial**, **universo del discurso** o **clase universal**, según el contexto, y se denota habitualmente por U o V.

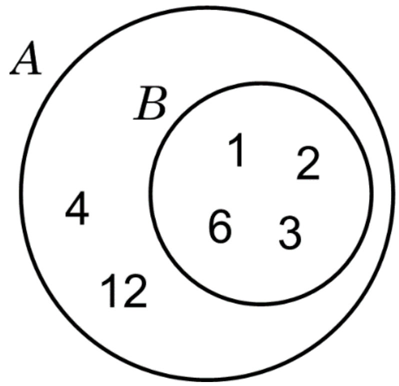
[Sacado de: https://es.wikipedia.org/wiki/Conjunto_universal]

Diagrama de Venn

Los diagramas de Venn (también diagramas de Venn-Euler) son la forma gráfica de representar a un conjunto consistente en dibujar el conjunto como una figura plana cerrada dentro de la cual están sus elementos.

Estos diagramas muestran colecciones (*conjuntos*) de cosas (*elementos*) por medio de líneas cerradas. La línea cerrada exterior abarca a todos los elementos bajo consideración, el conjunto universal *U*.

Los diagramas de Venn fueron ideados hacia 1880 por John Venn.



El diagrama precedente representa el conjunto

A = { 1, 2, 3, 4, 6, 12 }

y su subconjunto

B = { 1, 2, 3, 6 }.

[Adaptado de: https://es.wikipedia.org/wiki/Diagrama_de_Venn]

Operaciones entre conjuntos

Intersección

La **intersección** es una operación entre dos conjuntos que da lugar a un nuevo conjunto. El conjunto intersección contiene todos los elementos que pertenecen a los dos conjuntos al mismo tiempo, i.e. contiene los elementos comunes de los dos conjuntos.

Simbólicamente, la operación de intersección se formula así:

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ y } x \in B \}.$$

La condición para que un elemento pertenezca al conjunto intersección A ∩ B es que eso pertenezca a A y también pertenezca a B. La conjunción “y” aquí tiene un sentido muy importante: indica que el elemento pertenece *a los dos conjuntos al mismo tiempo*.

Por ejemplo, se consideren el conjunto A de las letras de en la palabra “elementos” y el conjunto B de las letras de la palabra “repetidos”: la intersección entre A y B se escribe así:

$$A \cap B = \{ e, l, m, n, t, s \} \cap \{ r, e, p, t, i, d, o, s \} = \{ e, t, s \}.$$

Unión

La **unión** de dos conjuntos es el conjunto formado por los elementos comunes a los dos conjuntos y los elementos no comunes de los dos conjuntos. En otras palabras, el conjunto unión está conformado de todos los elementos pertenecientes a al menos uno entre los dos conjuntos de partencia.

La operación de unión entre conjuntos se expresa simbólicamente así:

$$A \cup B = \{\, x \mid x \in A \text{ o } x \in B \,\}.$$

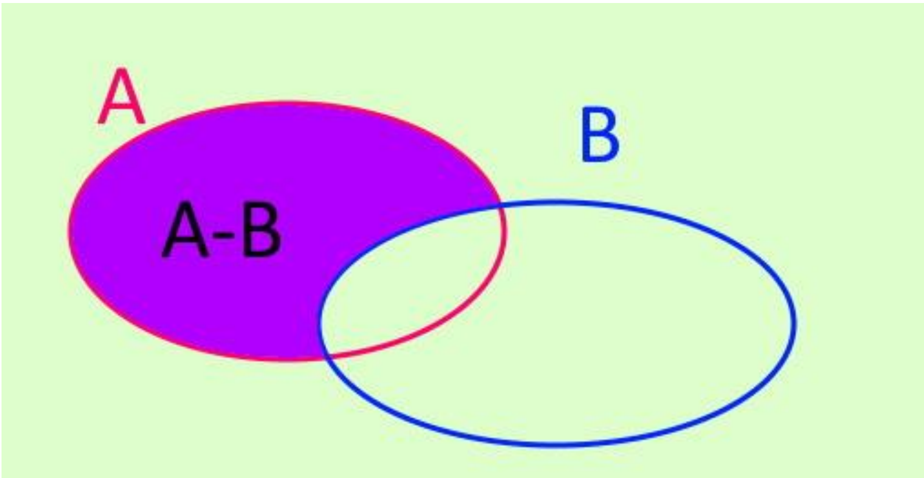
La condición para que un elemento pertenezca al conjunto unión A ∪ B es que eso pertenezca a A o si no pertenezca a B (o también pertenezca a los dos). La conjunción “o” aquí tiene un sentido muy importante: indica que el elemento pertenece *a al menos uno de los dos conjuntos*.

Diferencia

La operación de **diferencia** del conjunto A menos el conjunto B se denota por A – B. El conjunto A – B está formado por todos los elementos que están en A y que *no* pertenezcan a B.

Simbólicamente se escribe así:

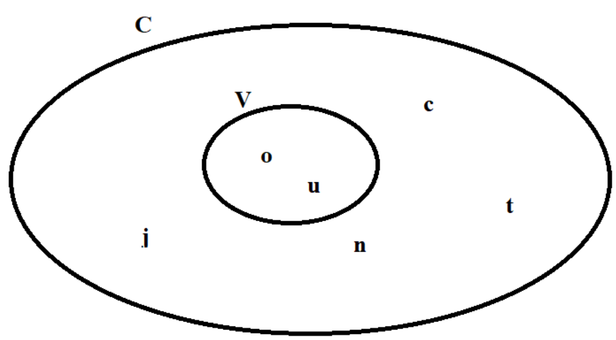
$$A - B = \{\, x \mid x \in A \text{ y } x \notin B \,\}.$$



Ejemplos

Ejemplo 1

A continuación se muestra mediante diagramas de Venn que, el conjunto de las vocales en la palabra “conjunto”, es un subconjunto del conjunto de las letras de la palabra “conjunto”.



Ejemplo 2

El conjunto **Ñ** de las letras del abecedario español es un conjunto finito, este conjunto por extensión se escribe así:

Ñ = { a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, ñ, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z }

y su cardinalidad es 27.

Ejemplo 3

El conjunto **V** de las vocales en español es un subconjunto del conjunto Ñ:

V ⊂ Ñ

y, por lo tanto, es un conjunto finito.

El conjunto finito **V** en forma extensiva se escribe así:

V = { a, e, i, o, u }

y su cardinalidad es 5.

Ejemplo 4

Dados los conjuntos

$$A = \{ 2, 4, 6, 8 \}$$

y

$$B = \{ 1, 2, 4, 7, 9 \},$$

se determinen A – B y B – A.

A – B son los elementos de A que no están en B:

$$A - B = \{ 6, 8 \}.$$

B – A son los elementos de B que no están en A:

$$B - A = \{ 1, 7, 9 \}.$$

Se represente esta situación con diagramas de Venn.

Referencias

Lifeder. (20 de diciembre de 2019). *Teoría de conjuntos: características, elementos, ejemplos, ejercicios*. Recuperado de: https://www.lifeder.com/teoria-de-conjuntos.

Wikipedia. (27 de marzo de 2023). *Teoría de Conjuntos*. Recuperado de: https://es.wikipedia.org/wiki/Teoría_de_conjuntos.

Wikipedia. (27 de marzo de 2023). *Paradoja de Russell*. Recuperado de: https://es.wikipedia.org/wiki/Paradoja_de_Russell.

Wikipedia. (27 de marzo de 2023). *Conjunto universal*. Recuperado de: https://es.wikipedia.org/wiki/Conjunto_universal.

Wikipedia. (27 de marzo de 2023). *Diagrama de Venn*. Recuperado de: https://es.wikipedia.org/wiki/Diagrama_de_Venn.