Fracciones, proporciones y reglas de tres.

Recordemos que un número racional es de un número de la forma *a/b* donde *a,b EZ* y *b≠0, a* estos números también se les denomina como números fraccionarios, pero ¿qué es una unidad fraccionaria? Una unidad fraccionaria es cada una de las partes en que se ha dividido la *unidad*, por ejemplo:

$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

$$\frac{3}{5}$$

esta unidad se ha dividido en *5* partes iguales, así la unidad fraccionaria es *1/5* y la cantidad fraccionaria es el número de unidades fraccionarias que se toman, en este caso *3/5*, es decir, *3* unidades fraccionarias de *1/5* son *3/5*.

En toda fracción *(a)/b* podemos diferenciar los números que la conforman:

- **El numerador, a:** indica el número de unidades fraccionarias que contiene la fracción.
- **El denominador, b:** indica el número de partes iguales en que se ha dividido la unidad.

Operaciones básicas con fracciones

1. Para sumar o restar dos fracciones que tienen distinto denominador se realiza la siguiente operación:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{m}{n} = \frac{a.\,n \pm d\,.\,m}{b.\,n}$$

Ejemplo:

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{4} = \frac{2\,.\,4 + 3\,.\,5}{3.\,4} = \frac{8+15}{12} = \frac{23}{12}$$

$$\frac{2}{3} - \frac{5}{4} = \frac{2\,.\,4 - 3\,.\,5}{3.\,4} = \frac{8-15}{12} = \frac{-7}{12} = -\frac{7}{12}$$

2. Para sumar o restar dos fracciones que tienen igual denominador se realiza la siguiente operación:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$$

Ejemplo:

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{4} = \frac{2+5}{3} = \frac{7}{3}$$

$$\frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{4-2}{3} = \frac{2}{3}$$

3. Para multiplicar un número entero por una fracción: se multiplica el número entero por el numerador de la fracción y se escribe el mismo denominador.

Ejemplo:

$$5.\ \frac{3}{7} = \frac{5\,.\,3}{7} = \frac{15}{7}$$

4. Para multiplicar dos fracciones: se multiplican numeradores y denominadores entre sí.

Ejemplo:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{7} = \frac{2\,.\,4}{3\,.\,7} = \frac{8}{21}$$

$$-\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{7} = \frac{(-2)\,.\,4}{3\,.\,7} = \frac{-8}{21} = -\frac{8}{21}$$

5. Para dividir dos fracciones: primero se invierte la fracción divisor y se realiza la multiplicación entre las fracciones resultantes.

Ejemplo:

$$\frac{2}{3} \div \frac{7}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{2\,.\,7}{3\,.\,5} = \frac{14}{15}$$

$$-\frac{2}{5} \div \frac{7}{6} = -\frac{2}{5} \cdot \frac{6}{7} = \frac{(-2)\,.\,6}{5\,.\,7} = \frac{-12}{35} = -\frac{12}{35}$$

6. Una fracción se denomina propia cuando el numerador es menor que el denominador, por ejemplo,

$$\frac{1}{3} \qquad -\frac{2}{5} \qquad \frac{15}{17}$$

Para representar una fracción propia se divide la unidad en el número de partes iguales según el denominador y se toma la cantidad de éstas partes según en numerador, por ejemplo representemos la fracción *1/3:*

$$\frac{1}{3}$$

7. Una fracción se denomina impropia cuando el numerador es mayor que el denominador, por ejemplo,

$$\frac{5}{2} \qquad -\frac{15}{7} \qquad \frac{7}{6}$$

Para representar una fracción impropia se divide la unidad en el número de partes iguales según el denominador y se genera la cantidad de unidades necesarias para para poder tomar la cantidad de éstas partes según en numerador, por ejemplo, para representar la fracción *3/2* se divide la unidad en *2* partes iguales y generamos dos de estas unidades para tomar *3* partes de ellas:

$$\frac{3}{2}$$

8. La representación decimal de una fracción consta de dos partes separadas por una coma o un punto: la parte entera es la que esta antes de la coma y la parte decimal esta después de la coma.

3/2=1,5 1: parte entera 5: parte decimal

9. Todo número entero se puede representar como un número decimal.

5=5,0 *-8=-8,0*

10. Para simplificar una fracción se divide cada parte de la fracción (numerador y denominador) por el divisor que sea común a ambos, por ejemplo:

$$\frac{5}{4} = \frac{30 \div 3}{42 \div 3} = \frac{10}{14} = \frac{10 \div 2}{41 \div 2} = \frac{5}{7}$$

11. Para amplificar una fracción se multiplica cada parte de la fracción (numerador y denominador) por el mismo factor (diferente de cero), por ejemplo:

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{9 \times 3}{12 \times 2} = \frac{18}{24}$$

Razones, proporciones y porcentajes

Una razón es una relación multiplicativa entre dos números racionales diferentes de cero.

Por ejemplo, si en un grupo de personas hay *18* hombres y *27* mujeres, entonces la razón entre el número de hombres y el número de mujeres es de *2* a *3*, es decir, hay dos hombres por cada tres mujeres, pero, ¿cómo se obtiene esta relación? Veamos:

$$\frac{18}{27} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Una proporción es un conjunto de dos razones iguales. Por ejemplo:

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

Esta proporción se lee así: "2 es a 3 como 4 es a 6". También se puede expresar como "2:3 como 4:6"

Propiedad de proporcionalidad

En toda proporción, $a/b=m/n$ se cumple que $a.n=m.b$ Por ejemplo, en la proporción anterior, $2.6=4.3$.

Nota: dos cantidades pueden estar en una relación de proporcionalidad directa o inversa.

Cantidades Directamente Proporcionales

Cuando dos cantidades están relacionadas, forman una razón a/b y esta fracción nos da como resultado

un cociente que corresponde a la división entre a y b. Ahora, dos magnitudes serán directamente proporcionales si los cocientes de las cantidades correspondientes son el mismo valor.

Ejemplo:
si un lápiz cuesta $1500, ¿cuánto cuestan 7 lápices?

Solución:
Primero identificamos las cantidades que intervienen en esta situación, estas son: número de lápices y el precio de costo de los lápices, denotemos con x el valor de los 7 lápices, ya que esta cantidad es la es la incógnita del problema. Esta información la podemos registrar en la siguiente tabla:

Nº lápices	Precio lápices ($)
1	1500
7	x

La información de esta tabla esta consignada de manera tal que se han formado dos razones, la razón para la cantidad de lápices y la razón para el precio. Estas razones están en una relación de proporcionalidad directa, ya que, a más cantidad de lápices, el precio de esta cantidad aumentará. Por tanto, la proporción se forma tal cual se formaron las razones en la tabla:

$$\frac{1}{7} = \frac{1500}{x}$$

Aplicando la propiedad de proporcionalidad tenemos:

$$1.x=1500.7$$

De donde concluimos que: $x=10500$. Por tanto, los siete lápices tienen un costo de $\$10500$.

Cantidades Inversamente Proporcionales

Decimos que dos cantidades están en una relación de proporcionalidad inversa o que dos cantidades son inversamente proporcionales cuando los productos de las cantidades correspondientes son el mismo valor.

Ejemplo:
un automóvil que viaja en promedio a 60 km/h tarda 12 horas en ir desde la ciudad A hasta la ciudad B. Existe una iniciativa que busca construir un ferrocarril que conecte a ambas ciudades, el cual podría viajar a 180 km/h. De acuerdo a esta iniciativa, ¿cuánto tiempo tardaría una persona que va desde la ciudad A hasta la ciudad B en ferrocarril?

Solución:
Primero identificamos las cantidades que intervienen en esta situación, estas son: la velocidad y el tiempo que tarda el recorrido desde la ciudad A hasta la ciudad B, denotemos con x el tiempo que tardaría el viaje en ferrocarril. Esta información la podemos registran en la siguiente tabla:

Velocidad (km/h)	Tiempo (h)
60	12
180	x

La información de esta tabla esta consignada de manera tal que se han formado dos razones, la razón para la velocidad y la razón para el tiempo. Estas razones están en una relación de proporcionalidad inversa, ya que, a más velocidad en el recorrido, el tiempo de viaje disminuirá. Para formar la proporción conservamos una de las dos razones e invertimos la otra:

$$\frac{60}{180} = \frac{x}{12}$$

Aplicando la propiedad de proporcionalidad tenemos:

$$60.12=x.180$$

$$\frac{60.12}{180} = x$$

$$4= x$$

Por tanto, una persona tardaría cuatro horas viajando en ferrocarril.

Nota: las situaciones descritas en los ejemplos anteriores también se conocen como problemas de reglas de tres.

Porcentajes

Un porcentaje es una forma de expresar una cantidad como una fracción cuyo denominador es *100.* Estas cantidades se denotan con el símbolo *%*, por ejemplo, *"30 por ciento"* se expresa como *30%* y representa *30* partes tomadas de *100:*

$$30\% = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$$

Ejemplo:
si se aplica un descuento del 25% al precio de un libro que cuesta $25600, ¿cuál es el nuevo precio del libro?

Solución:
Esta situación se puede interpretar como una relación de proporcionalidad donde las cantidades involucradas son el precio del libro y el porcentaje, teniendo en cuenta que el precio del libro sin descuento corresponde al 100%, entonces denotemos con x al precio del libro después de aplicar el descuento, así se tiene que:

Precio *($)*	Porcentaje *(%)*
25600	*100*
x	*25*

la información de esta tabla esta consignada de manera tal que se han formado dos razones, la razón los porcentajes y la razón para el precio. Estas razones están en una relación de proporcionalidad directa, ya que, a menos porcentaje, el precio del libro disminuirá. Por tanto, la proporción se forma tal cual se formaron las razones en la tabla:

$$\frac{25600}{x} = \frac{100}{25}$$

Aplicando la propiedad de proporcionalidad tenemos:

$$25560.25=100.x$$

$$\frac{25600.25}{100} = x$$

6400=x Así se tiene que el descuento para el precio del libro es de *$6400*, luego el nuevo precio del libro será *$25600-$6400=$19200*.

Nota: en el ejemplo anterior al considerar que el precio del libro sin descuento corresponde al 100%, también se puede hallar el nuevo precio del libro asumiendo que este equivale al 75% del precio sin descuento.

Actividad 4

1. Pedro realiza una rutina diaria de en la que recorre 90 km en su bicicleta durante 3 horas. Si hoy Pedro extendió su tiempo diario a dos horas más, ¿cuántos kilómetros recorrió Pedro el día de hoy?

a. 250 km
b. 180 km
c. 100 km
d. 150 km

---

2. En la construcción de un edificio 12 obreros tardan 30 días en instalar todas las ventanas. ¿Cuántos obreros se necesitan para instalar todas las ventanas en 24 días?

a. 15
b. 20
c. 25
d. 18

---

3. ¿Qué porcentaje es 51 de 170?

a. 20%
b. 25%
c. 30%
d. 40%

---

4. Un camión que tiene capacidad para transportar 3 toneladas necesita 15 viajes para transportar una cierta cantidad de arena. ¿Cuántos viajes son necesarios para transportar la misma cantidad de arena con otro camión que tiene capacidad para transportar 5 toneladas?

a. 5
b. 3
c. 9
d. 7

5. Un porcicultor requiere 294 kilos de comida para alimentar a 15 cerdos durante una semana. ¿Cuántos kilos de comida necesita el porcicultor para alimentar a 10 cerdos durante 30 días?

a. 650 kg
b. 500 kg
c. 840 kg
d. 440 kg

6. Un grupo de trabajadores puede construir un muro de 400 m2 en 15 días trabajando durante 8 horas diarias. ¿Cuántos días tardará este mismo grupo de trabajadores en construir un muro de 600 m2, si trabajan 10 horas todos los días?

a. 15
b. 20
c. 13
d. 18

7. Un grupo de 10 operarios de manufactura textil trabajando durante 8 horas diarias tarda 15 días para finalizar un pedido. ¿Cuántos operarios trabajando la mitad de esta jornada se necesitarán para hacer el mismo pedido en 10 días?

a. 10
b. 20
c. 30
d. 40

8. En la siguiente tabla se sabe que los valores de la fila F_1 son inversamente proporcionales a los valores de la fila F_2

F_1	4	60	a
F_2	7.5	b	12

El valor de a+b es:

a. 3
b. 5/2
c. 3/2
d. 2

Ejercicios 9 – 10

El tiempo necesario *(t)* para que los clientes de un restaurante reciban sus pedidos es inversamente

proporcional al cuadrado de la cantidad de personal *(p)* en servicio. Los pedidos de los clientes tardan 20 minutos en tomarse cuando hay 4 miembros del personal en servicio.

9. La ecuación para t en términos de p es:

a. $t=80/p^2$
b. $t=180/p^2$
c. $t=160/(p^2)$
d. $t=320/p^2$

10. Si el número de personal en servicio se duplica, ¿Cuántas veces más rápido recibirán los clientes su pedido?

a. 2
b. 4
c. 3
d. 5

Ejercicios 11 – 12

Una fábrica de bombillos produce 600 unidades en 9 días utilizando 20 máquinas. Se sabe además que, por cada 4 bombillos producidos, tres son de luz convencional y uno es led.

11. ¿Cuántas unidades de bombillos se pueden producir en 12 días con utilizando 18 máquinas?

a. 800
b. 650
c. 720
d. 960

12. Si un cliente requiere 240 bombillos led, ¿Cuántos bombillos se deben producir?

a. 400
b. 360
c. 480
d. 320

Ejercicios 13 – 15

Una fábrica de jabones tiene tres máquinas de producción, M_1, M_2 y M_3. Por cada *7* jabones que produce M_1, M_2 produce *5* y por cada *3* jabones que produce M_2, M_3 produce *2* jabones.

13. Si en 8 horas, M_1 produjo *550* jabones más que M_3, ¿Cuántos jabones produjo M_3 en estas 8 horas?

a. 600
b. 750
c. 860
d. 920

14. La producción total de jabones en la fábrica en estas 8 horas es:

a. 2500
b. 3800
c. 2300
d. 3200

15. ¿Qué porcentaje representa la producción de M_2 respecto a las producciones de M_1 y M_3?

a. 16%
b. 74%
c. 84%
d. 66%