Geometría: Perímetros, Áreas y Volúmenes Definiciones.

Definiciones

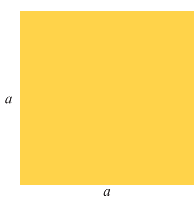
Perímetro: En un polígono, es la suma de las medidas de sus lados.

Área o superficie: Es la región del plano limitada por una figura plana.

Volumen: El volumen de un poliedro es la medida del espacio que en tres dimensiones es ocupado por un cuerpo.

Perímetros y áreas de algunas figuras planas

Cuadrado

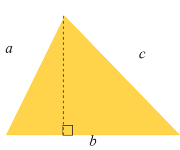


$A = a \cdot a = a^2$
$P = a+a+a+a = 4^2$

Rectángulo

$A = a \cdot b$
$P = a+a+b+b = 2a + 2b$

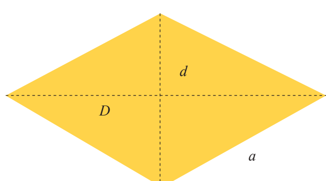
Triángulo



$A = \frac{b \cdot h}{2}$

$P = a+b+c$

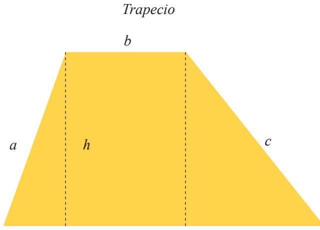
Rombo

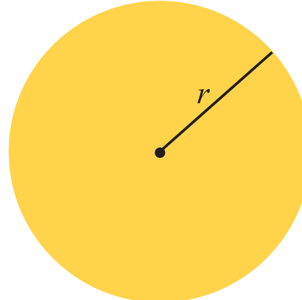


$A = \frac{D \cdot d}{2}$

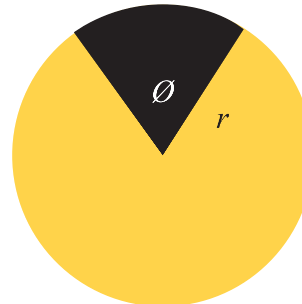
$P = a+a+a+a = 4a$

Trapecio





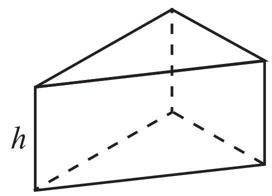
$A = \pi \cdot r^2$
$P = 2\pi \cdot r$



$A = \frac{r^2 \cdot Ø}{2}$

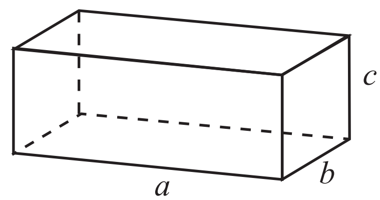
Volúmenes de algunos cuerpos

Prisma triangular



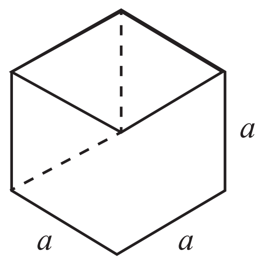
$V = A_b \cdot h$

Paralelepípedo rectangular



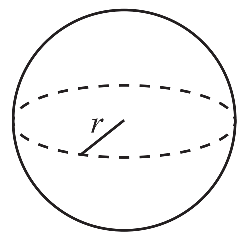
$V = a \cdot b \cdot c$

Cubo



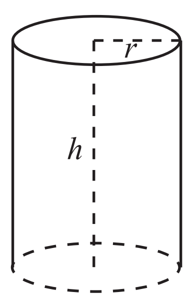
$V = a \cdot a \cdot a = a^3$

Esfera



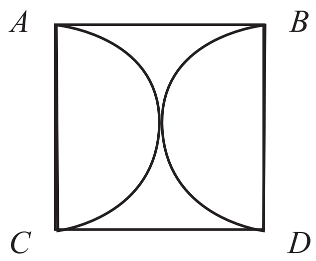
$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$

Cubo



$V = \pi r^2 \cdot h$

Ejemplo:
en un cuadrado ABCD de lado 10 cm se inscriben dos semicircunferencias como se muestra en la figura. Determinar el área de la región sombreada.



Solución:

Calculemos primero el área del cuadrado (A_1):

$$A\_^1=(10\ cm)^\wedge2=100\ cm^\wedge2$$

El área de una semicircunferencia $(A\_^2)$ es la mitad del área de un círculo, es decir, $A\_^2=(\pi r^\wedge 2)/2$. Para determinar el radio basta con observar que el centro de estas semicircunferencias coincide con el punto medio de cada lado vertical del cuadrado, así $r=10/2=5\ cm$ y el área de cada semicircunferencia es:

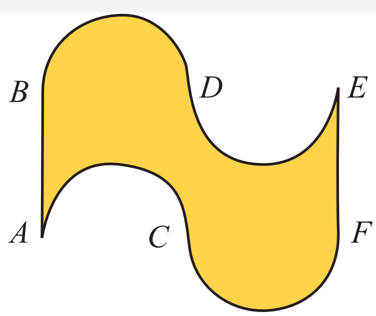
$$A_2=\frac{\pi\ (5\ \mathrm{cm})^2}{2}=\frac{25}{2}\ \pi\ \mathrm{cm}^2$$

Finalmente, el área sombreada (A_s) de la figura es:

$$A\_S=A\_1\text{-}2\ .\ A\_2$$

$$A_s=(100\text{-}2.\frac{25}{2}\pi\ )\mathrm{cm}^2=25(4\text{-}\pi)\mathrm{cm}^{2.}$$

Ejemplo:
hallar el perímetro de la siguiente figura, si ABCD y DCFE son cuadrados de lado a cm



Solución:

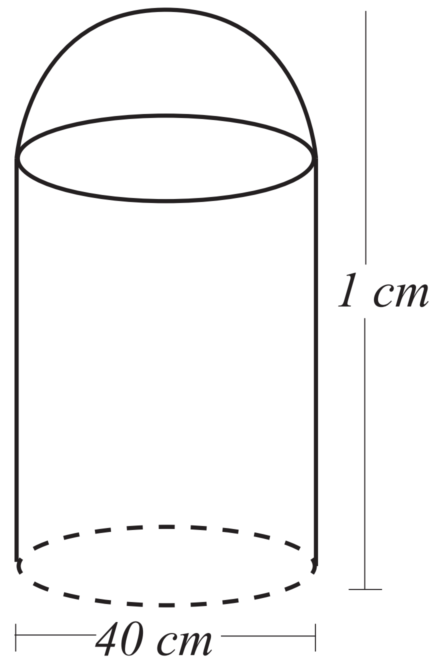
Para determinar el perímetro de la figura se debe hallar la medida de los segmentos $(AB)^{\overline{}}$ y $(EF)^{\overline{}}$ y las medidas de las longitudes de las semicircunferencias $(AC)^{\smile}, (BD)^{\smile}, (DE)^{\smile}$ y $(CF)^{\smile}$.

$$(AB)^{\overline{}}=(EF)^{\overline{}}=a\ cm$$
$$(AC)^{\smile}=(BD)^{\smile}=(DE)^{\smile}=(CF)^{\smile}=(2\pi.a)/2=a\pi\ cm$$

Así se tiene que el perímetro de la figura es:

$$P=(2a+4a\pi)cm=2a(1+\pi)cm.$$

Ejemplo:
hallar el volumen de un tanque cilíndrico de agua que tiene una altura de 1 m, un diámetro de 40 cm y cuya sección superior es semiesférica.



Solución

En este caso, la parte superior del tanque es una semiesfera de radio $r=20$ cm (la mitad del diámetro), por lo tanto el volumen V_1 de esta sección será el volumen de la mitad de una esfera:

$$V_1=\frac{\frac{4}{3}\pi\ r3}{2}=\frac{\frac{4}{3}\pi\ (20)^3}{2}=\frac{16000}{3}\ \pi cm^3$$

Ahora, el volumen de un cilindro es el área de la base por su altura. En este caso, la altura del cilindro es la altura total menos el radio de la semiesfera, es decir, $1\ m - 20\ cm = 80\ cm$ y el área de la base es $\pi r^2=\pi(20)^2\ cm^2$, así el volumen V_2 de la sección cilíndrica es:

$$V\_^2=\pi(20)^2\ .(80)=32000\pi\ cm^3$$

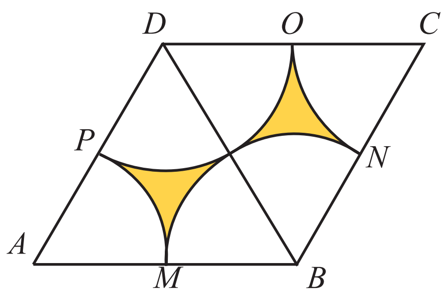
finalmente, el volumen de este tanque es:

$$V=\frac{16000}{3}\pi+32000\pi=\frac{112000}{3}\pi\ cm^3$$

Actividad 9

Ejercicios 1 – 3

En la siguiente figura los triángulos ABD y BCD son equiláteros de lado $8\ cm$; $\overset{\frown}{OP}$, $\overset{\frown}{MP}$, $\overset{\frown}{MN}$ y $\overset{\frown}{ON}$ son arcos de circunferencias tangentes entre sí; M, N, O y P son los puntos medios de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$ respectivamente.



1. El área de la región sombreada es:

a. $8(\sqrt{3}-2\pi)cm^2$
b. $16(2\sqrt{3}-\pi)cm^2$
c. $8(2\sqrt{3}-\pi)cm^2$
d. $16(\sqrt{3}-2\pi)cm^2$

---

2. El perímetro de la región sombreada es:

a. $8\pi\ cm$
b. $16\pi\ cm$
c. $4\pi\ cm$
d. $12\pi\ cm$

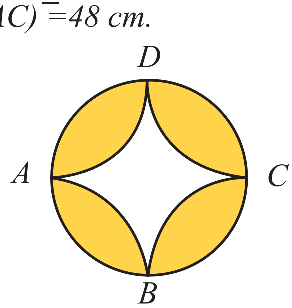
---

3. El área de la región no sombreada en el cuadrilátero $ABCD$ es:

a. $8\pi\ cm^2$
b. $16(\pi+1)\ cm^2$
c. $8(\pi+2)\ cm^2$
d. $16\pi\ cm^2$

Ejercicios 4 – 6

En la siguiente los arcos $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$ y $\overset{\frown}{AD}$ son cuartos de circunferencias tangentes entre sí y el segmento $\overline{AC}=48\ cm$.



4. El área de la región sombreada es:

a. $2304(\pi-1)\ cm^2$
b. $2304(\pi-2)\ cm^2$
c. $1152(\pi-2)\ cm^2$
d. $1152(\pi-1)\ cm^2$

---

5. El perímetro que limita la región no sombreada es:

a. $96\pi\ cm$
b. $12\pi\ cm$
c. $60\pi\ cm$
d. $48\pi\ cm$

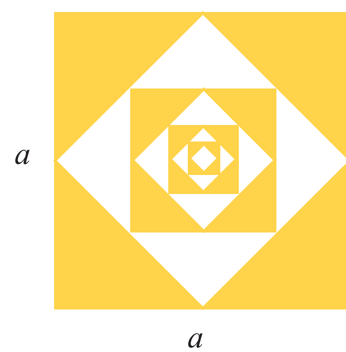
---

6. El área de la región no sombreada es:

a. $1152(2-\pi)\ cm^2$
b. $576(4-\pi)\ cm^2$
c. $576(2-\pi)\ cm^2$
d. $1152(4-\pi)\ cm^2$

Ejercicios 7 – 10

Al unir los puntos medios de un cuadrado de lado a cm se forma otro cuadrado, continuándose este proceso como se muestra en la siguiente figura.



7. El área de la región sombreada es:

a. $25/32\ a^2\ cm^2$
b. $55/64\ a^2\ cm^2$
c. $85/128\ a^2\ cm^2$
d. $105/256\ a^2\ cm^2$

---

8. El perímetro del menor cuadrado resultante en la figura es:

a. $\sqrt{2}/4\ a\ cm$
b. $\sqrt{2}/8\ a\ cm$
c. $4\sqrt{2}\ a\ cm$
d. $8\sqrt{2}\ a\ cm$

9. El área del menor cuadrado resultante en la figura es:

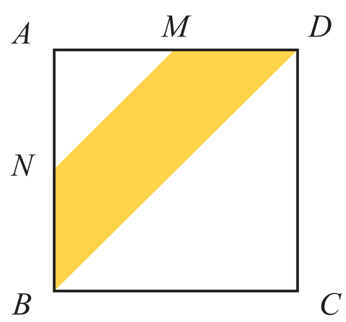
a. *1/32 a^2 cm^2*
b. *1/64 a^2 cm^2*
c. *1/128 a^2 cm^2*
d. *1/256 a^2 cm^2*

10. El área de la región no sombreada es:

a. *23/32 a^2 cm^2*
b. *53/64 a^2 cm^2*
c. *43/128 a^2 cm^2*
d. *83/256 a^2 cm^2*

Ejercicios 11 – 13

Los puntos M y N que se muestran en la siguiente figura son puntos medios de los lados AD y AB del cuadrado $ABCD$; $\overline{(AM)} = 3\ cm$.



11. El área de la región sombreada es:

a. *27/2 cm^2*
b. *51/2 cm^2*
c. *81/2 cm^2*
d. *63/2 cm^2*

12. El perímetro que limita la región sombreada es:

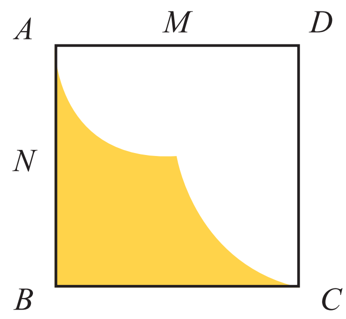
a. *$(9+\sqrt{2})$ cm*
b. *$2(3+\sqrt{2})$ cm*
c. *$3(2+3\sqrt{2})$ cm*
d. *$(2+3\sqrt{2})$ cm*

13. La altura del trapecio BDMN es:

a. *$(3\sqrt{2})/2$ cm*
b. *$\sqrt{2}/2$ cm*
c. *$\sqrt{2}/3$ cm*
d. *$(2\sqrt{2})/3$ cm*

Ejercicios 14 – 15

En la siguiente figura se muestra un cuadrado ABCD cuyo perímetro es a cm.



14. El área de la región sombreada es:

a. *$a^2/128(4-\pi)$ cm^2*
b. *$a^2/64(4-\pi)$ cm^2*
c. *$a^2/64(6-\pi)$ cm^2*
d. *$a^2/128(6-\pi)$ cm^2*

15. El perímetro que limita la región sombreada es:

a. *$a/2\ \pi$ cm*
b. *$a/8\ \pi$ cm*
c. *$2a\pi$ cm*
d. *$4a\pi$ cm*