Lógica matemática I.

Una proposición es un enunciado al que se le puede asignar un valor de verdad, el cual está definido por: verdadero (V) o Falso (F).

Comentario: Comúnmente las proposiciones se representan mediante letras latinas.

Ejemplo:

- La expresión $2+3=5$, es una proposición que se puede expresar de la forma: p:2+3=5, la cual tiene un valor de verdad verdadero.

- **La proposición:** Medellín es la capital de Colombia, se puede expresar como:

  q: "Medellín es la capital de Colombia", la cual tiene un valor de verdad falso.

Nota: Las proposiciones pueden ser simples o compuestas, estas últimas constan de dos o más enunciados simples.

Ejemplo:

Sea la proposición: "Euclides era griego y era geómetra". Esta proposición está formada por dos proposiciones simples las cuales se pueden definir como, r: "Euclides era griego" y q: "Euclides era geómetra".

Conectores lógicos

Para formar proposiciones compuestas se utilizan los siguientes conectores lógicos:

Negación: Una proposición se puede negar y por tanto su valor de verdad cambia, es decir, si es p una proposición verdadera (falsa), entonces ¬ p representa la negación de p y su valor de verdad será falso (verdadero). Por medio de una tabla se pueden representar los diferentes valores de verdad que toma la negación:

p	$\neg p$
V	F
F	V

Ejemplo:

la negación de la proposición q: "Medellín es la capital de Colombia", es ¬q: "Medellín no es la capital de Colombia" la cual, tiene un valor de verdad verdadero dado que la capital de Colombia es Bogotá.

Conjunción: Dadas dos proposiciones p y q, se define la conjunción entre estas proposiciones a la proposición compuesta $p \wedge q$ la cual se lee de la forma "p y q", la tabla de verdad se representada de la siguiente manera:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disyunción: Dadas dos proposiciones p y q, se define la disyunción entre estas proposiciones a la proposición compuesta $p \vee q$ la cual se lee de la forma "p o q", la tabla de verdad es representada de la siguiente manera:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Implicación: Dadas dos proposiciones p y q, se define la implicación entre estas proposiciones a la proposición compuesta $p \rightarrow q$ la cual se lee de la forma "p implica q", la tabla de verdad es representada de la siguiente manera:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	F

Nota: En la implicación, a la proposición p se llama antecedente, y la proposición q se llama consecuente. Se puede observar en la tabla que la implicación solo es falsa si el antecedente es verdadero y el consecuente es falso.

Doble Implicación o equivalencia: Dadas dos proposiciones p y q, se define la equivalencia entre estas proposiciones a la proposición compuesta $p \leftrightarrow q$ la cual se lee de la forma "p equivale a q", la tabla de verdad es representada de la siguiente manera:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Nota: La equivalencia sólo es verdadera si ambas proposiciones tienen el mismo valor de verdad.

Actividad 1

1. Si la proposición p es falsa entonces $\neg p$ es:

a. Falsa
b. Verdadera
c. No se puede establecer
d. Una proposición compuesta

---

2. Sobre la proposición $\neg p$ se puede afirmar con certeza que:

a. Siempre es verdadera
b. Siempre es falsa
c. Su valor depende de p
d. No se puede determinar

---

3. Si la proposición p es falsa entonces $p \vee q$ es:

a. Falsa
b. Verdadera
c. No se puede establecer
d. Depende del valor de q

---

4. Si la proposición p es verdadera entonces $p \vee q$ es:

a. Falsa
b. Verdadera
c. No se puede establecer
d. Depende del valor de q

---

5. Si la proposición q es falsa entonces $p \rightarrow q$ es:

a. Falsa
b. Verdadera
c. No se puede establecer
d. Depende del valor de p

---

6. Si la proposición p es verdadera entonces $p \rightarrow q$ es:

a. Falsa
b. Verdadera
c. No se puede establecer
d. Depende del valor de q

7. Si la proposición p es falsa entonces $p \rightarrow q$ es:

a. Falsa
b. Verdadera
c. No se puede establecer
d. Depende del valor de q

8. Si p es falsa, entonces la proposición $q \rightarrow \neg p$ es:

a. Falsa
b. Verdadera
c. No se puede determinar
d. Depende del valor de q

9. El enunciado equivalente a la proposición: "Si Pedro es matemático entonces trabaja en la coordinación de servicios académicos" es:

a. Si Pedro trabaja en la coordinación de servicios académicos entonces, Pedro no es matemático.
b. Si Pedro no trabaja en la coordinación de servicios académicos entonces, Pedro no es matemático.
c. Pedro no es matemático o trabaja en la coordinación de servicios académicos.
d. Pedro trabaja en la coordinación de servicios académicos y no es matemático.

10. Si la proposición $(p \rightarrow q) \vee r$ es falsa, entonces los valores de verdad de p, q y r son respectivamente:

a. V,V,F
b. V,F,V
c. F,F,V
d. F,V,F

11. La negación de la proposición "3 es un numero primo" es:

a. 3 es un número negativo.
b. 3 es un número impar.
c. 3 no es un número primo.
d. 3 no es un número impar.

12. Si la proposición $p \rightarrow q$ es falsa entonces la proposición p es

a. Verdadera
b. Falsa
c. Simple
d. Compuesta

13. El enunciado equivalente a la proposición "No es verdad que, iremos al estadio o al cine" es:

a. No iremos al estadio o al cine
a. No iremos al estadio y al cine.
a. No iremos al estadio y no iremos al cine
a. No iremos al estadio o no iremos al cine.

14. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones tiene la forma $(p \wedge q) \rightarrow r$ es una

a. Si no vas a estudiar o no haces tus tareas, entonces reprobaras el año escolar.
b. Si José es pintor, entonces su hijo también es pintor.
c. María llegará en el vuelo de las 6:00 o en el vuelo de las 8:00, si llega en el primero, entonces tendrá tiempo para visitarnos.
d. Si el precio del petróleo sube y el precio de oro baja, entonces el valor del dólar aumenta.

15. La expresión que representa la proposición "María llegará en el vuelo de las 6:00 o en el vuelo de las 8:00, si llega en el primero, entonces tendrá tiempo para visitarnos" es:

a. $\neg p \rightarrow (q \vee r)$
b. $(p \vee q) \rightarrow r$
c. $(p \vee \neg q) \rightarrow r$
d. $(p \vee q) \rightarrow (q \vee r)$

Lógica matemática II.

Según los valores de verdad que se presenten en la tabla de verdad de una proposición compuesta, podemos considerar las siguientes definiciones:
Tautología: una proposición compuesta es una tautología cuando es verdadera bajo todos los valores de verdad que pueden tomar proposiciones simples.

Contradicción: Una proposición compuesta es una contradicción cuando estas es falsa bajo toso los valores de verdad que pueden tomar las proposiciones simples.

Nota: cuando una proposición no es tautología ni contradicción se denomina contingencia.

Ejemplo:
verificar que la tabla de verdad de la proposición compuesta.

$(p \to q) \vee (q \to p)$
representa una **tautología.**

Solución:
Primero asignamos los valores de verdad a las proposiciones p y q

p	q	$(p\to q)$	$(q\to p)$	$(q\to p)\vee(q\to p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

Ejemplo:
verificar que la tabla de verdad de la proposición compuesta
$(p \to q) \wedge (p \wedge \neg q)$

es una contradicción.

Solución:
Primero asignamos los valores de verdad a las proposiciones p y q

p	q	$(p\to q)$	$(q\wedge\neg p)$	$(q\to p)\wedge(q\wedge\neg p)$
V	V	V	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	F	F

Nota: Las tautologías fundamentan el proceso que permite construir a partir de proposiciones verdaderas, nuevas proposiciones verdaderas.
Algunas tautologías son:

Leyes de la lógica	Equivalencias
Implicación y disyunción	$(p\to q)\leftrightarrow\neg p\vee q$
Doble negación	$\neg\neg p\leftrightarrow p$
De Morgan	$\neg(p\vee q)\leftrightarrow \neg p\wedge\neg q$ $\neg(p\wedge q)\leftrightarrow \neg p\vee\neg q$
Contrarrecíproco	$(p\to q)\leftrightarrow\neg p\to\neg q$

Ahora, las siguientes reglas de inferencia nos permitirán obtener conclusiones de proposiciones compuesta.

Reglas de inferenica	Premisas	Conclusión
Modus Ponens	$p\to q\ ,p$	q
Modus Tollens	$p\to q\ ,\neg q$	$\neg p$
Silogismo disyuntivo	$p\vee q\ ,\neg p$	q
Silogismo hipotético	$p\to q\ ,q\to r$	$p\to r$
Adjunción	$p\ ,q$	$p\wedge q$
Simplificación	$p\wedge q$	$p\ ,q$
Adición	p q (cualquier proposición)	$p\vee q$

Ejemplo:
"Si la orquesta no puede tocar salsa o las bebidas no llega a tiempo, la fiesta tiene que cancelarse y Marcela se enojaría. Si la fiesta se cancela, se tiene que devolver el dinero. No se devolvió el dinero". ¿Qué se puede concluir?

Solución:

Consideremos las siguientes proposiciones

P: La orquesta pudo tocar salsa
Q: Las bebidas llegaron a tiempo
R: La fiesta se canceló
S: Marcela estaba enojada
T: Hubo que devolver el dinero

Convirtiéndolas en premisas se tiene que

1. $(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow (R \wedge S)$
2. $R \rightarrow T$
3. $\neg T$

Ahora, de 2 y 3 por la regla modus tollens se tiene que ¬R, es verdadera. Por adición y ley de Morgan se tiene

4. $\neg R \vee \neg S = \neg(R \wedge S)$

Además, por 1 y 4 y la regla modus tollens se tiene

5. $\neg(\neg P \vee \neg Q) = P \wedge Q$

Así por simplificación se puede concluir que P es una proposición verdadera, es decir, la banda pudo tocar salsa.

Actividad 2

1. Si quiero llegar rápido a la universidad, entonces debo tomar el metro. Llegue temprano a la universidad. Por tanto

a. Tome el bus
b. Tome el metro
c. No llegue rápido
d. No se puede saber

2. Si duermo, entonces, no estudio. Estudio o repruebo el curso de razonamiento lógico. Aprobé el curso. Por tanto:

a. Trabajo
b. Duermo
c. Repruebo el curso
d. Estudio

3. Carlos se encontró con su amigo Johnny que pasea sus perros y le hace el siguiente comentario: "Todos tus perros son blancos". Johnny le contesta: "No es cierto, estás equivocado". De acuerdo con lo dicho por Johnny, se puede afirmar con certeza que:

a. Johnny tiene al menos un perro negro
b. Johnny tiene al menos un perro que no es blanco
c. Algunos de los perros de Johnny son blancos
d. Johnny tiene al menos un perro blanco

4. Si no me baño, entonces, me quedaré en casa. Voy a la universidad. Por tanto:

a. Me bañe
b. Me quede en casa
c. No me bañe
d. Fui a la universidad

5. La negación de la proposición: "Carlos sabe Álgebra y sabe Cálculo" es:

a. "Carlos no sabe Álgebra y no sabe Cálculo"
b. "Carlos sabe Álgebra o sabe calculo"
c. "Carlos no sabe algebra o no sabe Cálculo"
d. "Carlos no sabe Álgebra entonces no sabe Cálculo"

6. Si hace frio, entonces, iré al teatro. Hace frio, por tanto

a. Iré al teatro
b. No hace frio
c. No iré al teatro
d. No se puede saber

7. Si me accidento en la motocicleta, utilizare el SOAT. Utilice el SOAT; por tanto:

a. Me golpee
b. No me accidente en la motocicleta
c. No utilizo el SOAT
d. Me accidente en la motocicleta

8. El contrarrecíproco de "Si Carlos obtiene 100 puntos en su examen final, entonces se gradúa" es:

a. Si Carlos no obtiene 100 puntos en su examen final entonces no se gradúa.
b. Si Carlos obtiene 100 puntos en su examen final entonces no se gradúa.
c. Si Carlos no se gradúa, entonces no obtiene 100 puntos en su examen final.
d. Si Carlos se graduó, entonces obtuvo 100 puntos en su examen final.

9. Si trabajo durante la semana entonces descansaré el domingo. No descanse el domingo. Por tanto:

a. No trabaje durante semana
b. Trabaje durante la semana
c. Descanse el sábado
d. Descanse el domingo

10. Voy al cine o me quedo en casa. Si voy al cine, entonces, dormiré en la casa de mi hermano. No me quedé en casa. Por tanto:

a. Dormí en la casa de mi hermano
b. No fui al cine
c. Me quede en casa
d. Fui al cine

11. "He ido al cine o me he ido a comer". No he ido a comer. Por tanto

a. He ido a comer
b. No fui al cine
c. Fui al cine
d. No he ido a comer

12. María trabaja. Si llueve en la madrugada, entonces: si María trabaja, llegará tarde. No es cierto que: No llueve en la madrugada o hace calor. Por tanto:

a. Llueve en la madrugada
b. María llegará tarde
c. María no trabaja.
d. Hace calor.

13. De los siguientes enunciados: "Todos los investigadores son creativos" y "Algunos investigadores son matemáticos", la proposición que lógicamente puede deducirse es:

a. Los matemáticos son creativos.
b. los matemáticos son investigadores.
c. Hay matemáticos que son creativos.
d. Hay matemáticos que no son creativos.

14. Si la selección Nacional de baloncesto ganó el sábado, podrá jugar en Francia y jugará en Francia sólo si ha contratado a un nuevo técnico. O la selección Nacional de baloncesto no ha contratado a un nuevo técnico, o ha quedado eliminada. Pero no ha quedado eliminada. Por tanto:

a. La selección Nacional de baloncesto no ganó el sábado.
b. La selección Nacional de baloncesto contratará un técnico nuevo
c. La selección Nacional de baloncesto jugará en Francia.
d. La selección Nacional de baloncesto no ha quedado eliminada.

15. Si Johanna programa bien, entonces Andrés o Felipa entregaran el algoritmo a tiempo. Pero Johanna programo bien y Andrés no entregó el algoritmo a tiempo. Por tanto:

a. Felipe no entregó el Algoritmo a tiempo
b. Felipe entregó el algoritmo a tiempo
c. Johanna no entregó el algoritmo a tiempo.
d. Felipe también programo el algoritmo