



UNIDOS^{a la} **U**
Programa semestre cero

Razonamiento lógico

Módulo
04

01

Unidad

Lenguaje Matemático

Lógica matemática I.

Una proposición es un enunciado al que se le puede asignar un valor de verdad, el cual está definido por: verdadero (V) o Falso (F).

Comentario: Comúnmente las proposiciones se representan mediante letras latinas.

Ejemplo:

- La expresión $2+3=5$, es una proposición que se puede expresar de la forma:
 $p: 2+3=5$, la cual tiene un valor de verdad verdadero.
- La proposición:** Medellín es la capital de Colombia, se puede expresar como:

q : "Medellín es la capital de Colombia", la cual tiene un valor de verdad falso.

Nota: Las proposiciones pueden ser simples o compuestas, estas últimas constan de dos o más enunciados simples.

Ejemplo:

Sea la proposición: "Euclides era griego y era geómetra". Esta proposición está formada por dos proposiciones simples las cuales se pueden definir como, r : "Euclides era griego" y q : "Euclides era geómetra".

Conectores lógicos

Para formar proposiciones compuestas se utilizan los siguientes conectores lógicos:

Negación: Una proposición se puede negar y por tanto su valor de verdad cambia, es decir, si es p una proposición verdadera (falsa), entonces $\neg p$ representa la negación de p y su valor de verdad será falso (verdadero). Por medio de una tabla se pueden representar los diferentes valores de verdad que toma la negación:

p	$\neg p$
V	F
F	V

Ejemplo:

la negación de la proposición q : "Medellín es la capital de Colombia", es $\neg q$: "Medellín no es la capital de Colombia" la cual, tiene un valor de verdad verdadero dado que la capital de Colombia es Bogotá.

Conjunción: Dadas dos proposiciones p y q , se define la conjunción entre estas proposiciones a la proposición compuesta $p \wedge q$ la cual se lee de la forma " p y q ", la tabla de verdad se representada de la siguiente manera:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disyunción: Dadas dos proposiciones p y q , se define la disyunción entre estas proposiciones a la proposición compuesta $p \vee q$ la cual se lee de la forma " p o q ", la tabla de verdad es representada de la siguiente manera:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Implicación: Dadas dos proposiciones p y q , se define la implicación entre estas proposiciones a la proposición compuesta $p \rightarrow q$ la cual se lee de la forma “ p implica q ”, la tabla de verdad es representada de la siguiente manera:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Nota: En la implicación, a la proposición p se llama antecedente, y la proposición q se llama consecuente. Se puede observar en la tabla que la implicación solo es falsa si el antecedente es verdadero y el consecuente es falso.

Doble Implicación o equivalencia: Dadas dos proposiciones p y q , se define la equivalencia entre estas proposiciones a la proposición compuesta $p \leftrightarrow q$ la cual se lee de la forma “ p equivale a q ”, la tabla de verdad es representada de la siguiente manera:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Nota: La equivalencia sólo es verdadera si ambas proposiciones tienen el mismo valor de verdad.

Actividad 1

1. Si la proposición p es falsa entonces $\neg p$ es:

- a. Falsa
- b. Verdadera
- c. No se puede establecer
- d. Una proposición compuesta

2. Sobre la proposición $\neg p$ se puede afirmar con certeza que:

- a. Siempre es verdadera
- b. Siempre es falsa
- c. Su valor depende de p
- d. No se puede determinar

3. Si la proposición p es falsa entonces $p \vee q$ es:

- a. Falsa
- b. Verdadera
- c. No se puede establecer
- d. Depende del valor de q

4. Si la proposición p es verdadera entonces $p \vee q$ es:

- a. Falsa
- b. Verdadera
- c. No se puede establecer
- d. Depende del valor de q

5. Si la proposición q es falsa entonces $p \rightarrow q$ es:

- a. Falsa
- b. Verdadera
- c. No se puede establecer
- d. Depende del valor de p

6. Si la proposición p es verdadera entonces $p \rightarrow q$ es:

- a. Falsa
- b. Verdadera
- c. No se puede establecer
- d. Depende del valor de q



7. Si la proposición p es falsa entonces $p \rightarrow q$ es:

- a. Falsa
- b. Verdadera
- c. No se puede establecer
- d. Depende del valor de q

8. Si p es falsa, entonces la proposición $q \rightarrow \neg p$ es:

- a. Falsa
- b. Verdadera
- c. No se puede determinar
- d. Depende del valor de q

9. El enunciado equivalente a la proposición: "Si Pedro es matemático entonces trabaja en la coordinación de servicios académicos" es:

- a. Si Pedro trabaja en la coordinación de servicios académicos entonces, Pedro no es matemático.
- b. Si Pedro no trabaja en la coordinación de servicios académicos entonces, Pedro no es matemático.
- c. Pedro no es matemático o trabaja en la coordinación de servicios académicos.
- d. Pedro trabaja en la coordinación de servicios académicos y no es matemático.

10. Si la proposición $(p \rightarrow q) \vee r$ es falsa, entonces los valores de verdad de p , q y r son respectivamente:

- a. V,V,F
- b. V,F,V
- c. F,F,V
- d. F,V,F

11. La negación de la proposición "3 es un número primo" es:

- a. 3 es un número negativo.
- b. 3 es un número impar.
- c. 3 no es un número primo.
- d. 3 no es un número impar.

12. Si la proposición $p \rightarrow q$ es falsa entonces la proposición p es

- a. Verdadera
- b. Falsa
- c. Simple
- d. Compuesta

13. El enunciado equivalente a la proposición "No es verdad que, iremos al estadio o al cine" es:

- a. No iremos al estadio o al cine
- a. No iremos al estadio y al cine.
- a. No iremos al estadio y no iremos al cine
- a. No iremos al estadio o no iremos al cine.

14. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones tiene la forma $(p \wedge q) \rightarrow r$ es una

- a. Si no vas a estudiar o no haces tus tareas, entonces reprobaras el año escolar.
- b. Si José es pintor, entonces su hijo también es pintor.
- c. María llegará en el vuelo de las 6:00 o en el vuelo de las 8:00, si llega en el primero, entonces tendrá tiempo para visitarnos.
- d. Si el precio del petróleo sube y el precio de oro baja, entonces el valor del dólar aumenta.

15. La expresión que representa la proposición "María llegará en el vuelo de las 6:00 o en el vuelo de las 8:00, si llega en el primero, entonces tendrá tiempo para visitarnos" es:

- a. $\neg p \rightarrow (q \vee r)$
- b. $(p \vee q) \rightarrow r$
- c. $(p \vee \neg q) \rightarrow r$
- d. $(p \vee q) \rightarrow (q \vee r)$



Lógica matemática II.

Según los valores de verdad que se presenten en la tabla de verdad de una proposición compuesta, podemos considerar las siguientes definiciones:

Tautología: una proposición compuesta es una tautología cuando es verdadera bajo todos los valores de verdad que pueden tomar proposiciones simples.

Contradicción: Una proposición compuesta es una contradicción cuando esta es falsa bajo todos los valores de verdad que pueden tomar las proposiciones simples.

Nota: cuando una proposición no es tautología ni contradicción se denomina contingencia.

Ejemplo:

verificar que la tabla de verdad de la proposición compuesta.

$(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$
representa una **tautología**.

Solución:

Primero asignamos los valores de verdad a las proposiciones p y q

p	q	$(p \rightarrow q)$	$(q \rightarrow p)$	$(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

Ejemplo:

verificar que la tabla de verdad de la proposición compuesta

$(p \rightarrow q) \wedge (p \wedge \neg q)$

es una contradicción.

Solución:

Primero asignamos los valores de verdad a las proposiciones p y q

p	q	$(p \rightarrow q)$	$(q \wedge \neg p)$	$(q \rightarrow p) \wedge (q \wedge \neg p)$
V	V	V	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	F	F

Nota: Las tautologías fundamentan el proceso que permite construir a partir de proposiciones verdaderas, nuevas proposiciones verdaderas. Algunas tautologías son:

Leyes de la lógica	Equivalencias
Implicación y disyunción	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg p \vee q$
Doble negación	$\neg \neg p \leftrightarrow p$
De Morgan	$\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
Contrarrecíproco	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg p \rightarrow \neg q$

Ahora, las siguientes reglas de inferencia nos permitirán obtener conclusiones de proposiciones compuestas.

Reglas de inferencia	Premisas	Conclusión
Modus Ponens	$p \rightarrow q, p$	q
Modus Tollens	$p \rightarrow q, \neg q$	$\neg p$
Silogismo disyuntivo	$p \vee q, \neg p$	q
Silogismo hipotético	$p \rightarrow q, q \rightarrow r$	$p \rightarrow r$
Adjunción	p, q	$p \wedge q$
Simplificación	$p \wedge q$	p, q
Adición	p q (cualquier proposición)	$p \vee q$

Ejemplo:

"Si la orquesta no puede tocar salsa o las bebidas no llega a tiempo, la fiesta tiene que cancelarse y Marcela se enojaría. Si la fiesta se cancela, se tiene que devolver el dinero. No se devolvió el dinero". ¿Qué se puede concluir?



Solución:

Consideremos las siguientes proposiciones

P : La orquesta pudo tocar salsa

Q : Las bebidas llegaron a tiempo

R : La fiesta se canceló

S : Marcela estaba enojada

T : Hubo que devolver el dinero

Convirtiéndolas en premisas se tiene que

$$1. (\neg P \vee \neg Q) \rightarrow (R \wedge S)$$

$$2. R \rightarrow T$$

$$3. \neg T$$

Ahora, de 2 y 3 por la regla modus tollens se tiene que $\neg R$, es verdadera. Por adición y ley de Morgan se tiene

$$4. \neg R \vee \neg S = \neg (R \wedge S)$$

Además, por 1 y 4 y la regla modus tollens se tiene

$$5. \neg(\neg P \vee \neg Q) = P \wedge Q$$

Así por simplificación se puede concluir que P es una proposición verdadera, es decir, la banda pudo tocar salsa.

Actividad 2

1. Si quiero llegar rápido a la universidad, entonces debo tomar el metro. Llegue temprano a la universidad. Por tanto

- a. Tome el bus
- b. Tome el metro
- c. No llegue rápido
- d. No se puede saber

2. Si duermo, entonces, no estudio. Estudio o repruebo el curso de razonamiento lógico. Aprobé el curso. Por tanto:

- a. Trabajo
- b. Duermo
- c. Repruebo el curso
- d. Estudio

3. Carlos se encontró con su amigo Johnny que pasea sus perros y le hace el siguiente comentario: "Todos tus perros son blancos". Johnny le contesta: "No es cierto, estás equivocado". De acuerdo con lo dicho por Johnny, se puede afirmar con certeza que:

- a. Johnny tiene al menos un perro negro
- b. Johnny tiene al menos un perro que no es blanco
- c. Algunos de los perros de Johnny son blancos
- d. Johnny tiene al menos un perro blanco

4. Si no me baño, entonces, me quedaré en casa. Voy a la universidad. Por tanto:

- a. Me bañe
- b. Me quede en casa
- c. No me bañe
- d. Fui a la universidad

5. La negación de la proposición: "Carlos sabe Álgebra y sabe Cálculo" es:

- a. "Carlos no sabe Álgebra y no sabe Cálculo"
- b. "Carlos sabe Álgebra o sabe calculo"
- c. "Carlos no sabe algebra o no sabe Cálculo"
- d. "Carlos no sabe Álgebra entonces no sabe Cálculo"



6. Si hace frío, entonces, iré al teatro. Hace frío, por tanto

- a. Iré al teatro
- b. No hace frío
- c. No iré al teatro
- d. No se puede saber

7. Si me accidento en la motocicleta, utilizare el SOAT. Utilice el SOAT; por tanto:

- a. Me golpee
- b. No me accidente en la motocicleta
- c. No utilizo el SOAT
- d. Me accidente en la motocicleta

8. El contrarrecíproco de "Si Carlos obtiene 100 puntos en su examen final, entonces se gradúa" es:

- a. Si Carlos no obtiene 100 puntos en su examen final entonces no se gradúa.
- b. Si Carlos obtiene 100 puntos en su examen final entonces no se gradúa.
- c. Si Carlos no se gradúa, entonces no obtiene 100 puntos en su examen final.
- d. Si Carlos se graduó, entonces obtuvo 100 puntos en su examen final.

9. Si trabajo durante la semana entonces descansaré el domingo. No descanse el domingo. Por tanto:

- a. No trabaje durante semana
- b. Trabaje durante la semana
- c. Descanse el sábado
- d. Descanse el domingo

10. Voy al cine o me quedo en casa. Si voy al cine, entonces, dormiré en la casa de mi hermano. No me quedé en casa. Por tanto:

- a. Dormí en la casa de mi hermano
- b. No fui al cine
- c. Me quede en casa
- d. Fui al cine

11. "He ido al cine o me he ido a comer". No he ido a comer. Por tanto

- a. He ido a comer
- b. No fui al cine
- c. Fui al cine
- d. No he ido a comer

12. María trabaja. Si llueve en la madrugada, entonces: si María trabaja, llegará tarde. No es cierto que: No llueve en la madrugada o hace calor. Por tanto:

- a. Llueve en la madrugada
- b. María llegará tarde
- c. María no trabaja.
- d. Hace calor.

13. De los siguientes enunciados: "Todos los investigadores son creativos" y "Algunos investigadores son matemáticos", la proposición que lógicamente puede deducirse es:

- a. Los matemáticos son creativos.
- b. los matemáticos son investigadores.
- c. Hay matemáticos que son creativos.
- d. Hay matemáticos que no son creativos.

14. Si la selección Nacional de baloncesto ganó el sábado, podrá jugar en Francia y jugará en Francia sólo si ha contratado a un nuevo técnico. O la selección Nacional de baloncesto no ha contratado a un nuevo técnico, o ha quedado eliminada. Pero no ha quedado eliminada. Por tanto:

- a. La selección Nacional de baloncesto no ganó el sábado.
- b. La selección Nacional de baloncesto contratará un técnico nuevo
- c. La selección Nacional de baloncesto jugará en Francia.
- d. La selección Nacional de baloncesto no ha quedado eliminada.

15. Si Johanna programa bien, entonces Andrés o Felipa entregaran el algoritmo a tiempo. Pero Johanna programo bien y Andrés no entregó el algoritmo a tiempo. Por tanto:

- a. Felipe no entregó el Algoritmo a tiempo
- b. Felipe entregó el algoritmo a tiempo
- c. Johanna no entregó el algoritmo a tiempo.
- d. Felipe también programo el algoritmo



Teoría de Conjuntos.

Un conjunto es una colección de elementos (cosas u objetos) con características definidas. Comúnmente los conjuntos se representan con letras latinas mayúsculas y sus elementos se delimitan con llaves y se separan con comas.

Ejemplo:

El conjunto de las vocales:

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

El conjunto de los dígitos:

$$D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

El conjunto de los números naturales:

$$N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Ejemplo:

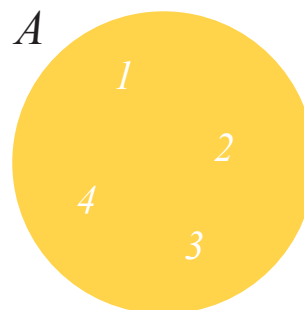
si S es el conjunto $S = \{x \mid x \text{ es dígito}\}$, entonces $A = \{2, 4, 6, 8\}$ y $B = \{0, 1, 9\}$ son algunos subconjuntos de S , y en cada caso escribimos $A \subseteq S$ y $B \subseteq S$ respectivamente.

Diagramas de Venn

Los diagramas de Venn son otra forma de representar los conjuntos y sus operaciones; generalmente se utilizan figuras como círculos o rectángulos.

Ejemplo:

La representación en diagramas de Venn del conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ es



Comentarios:

- Los puntos suspensivos indican que el conjunto continúa y que los elementos siguientes conservan la misma característica.

- En el conjunto A , notamos que la letra e pertenece a este conjunto, esto se representa como: $e \in A$. Así mismo, observe que la letra x no pertenece a este conjunto, esto se representa así: $x \notin A$.

Representación de conjuntos

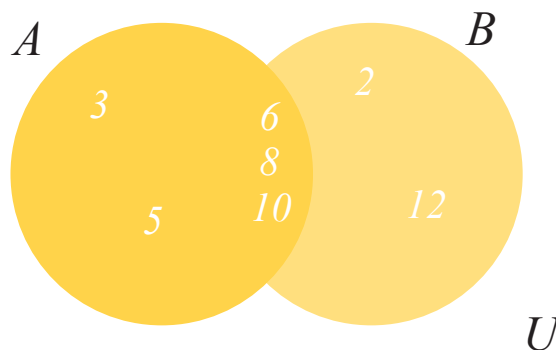
Los conjuntos se pueden representar por comprensión y por extensión. Por comprensión: se referencia la característica de principal de los elementos del conjunto, por ejemplo: $P = \{x \mid x \in \mathbb{N} \mid x \text{ es un número par}\}$ esto se lee así: x pertenece al conjunto de los números naturales tal que x es un número par. Por extensión: se enlistan los (o algunos) elementos del conjunto, por ejemplo: $P = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$

Subconjuntos

Dado un conjunto S se dice que A es subconjunto de S , si todos los elementos de A están contenidos en el conjunto S y se denota por $A \subseteq S$. El conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto. Por

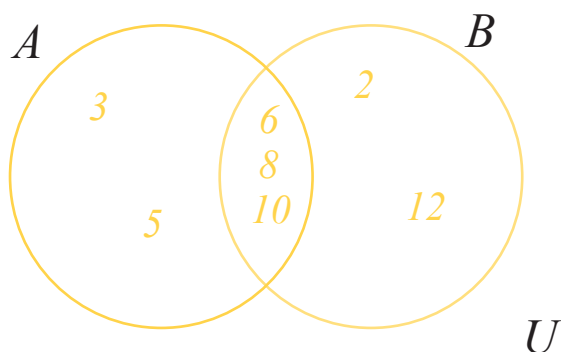
Algunas operaciones entre conjuntos

Unión: Sean A y B dos conjuntos no vacíos, entonces la unión de A y B , se define: $A \cup B = \{x \in A \text{ o } x \in B\}$. Por ejemplo, si $A = \{3, 5, 6, 8, 10\}$ y $B = \{2, 6, 8, 10, 12\}$, entonces el conjunto unión está dado por $A \cup B = \{2, 3, 5, 6, 8, 10, 12\}$.



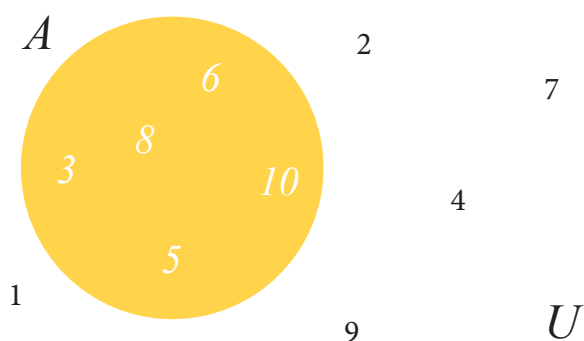
Intersección: Sean A y B dos conjuntos no vacíos, entonces la intersección de A y B , se define como: $A \cap B = \{x \in A \text{ y } x \in B\}$. Por ejemplo, si $A = \{3, 5, 6, 8, 10\}$ y $B = \{2, 6, 8, 10, 12\}$, entonces $A \cap B = \{6, 8, 10\}$.





Conjunto complemento

En algunos casos es posible identificar un conjunto que contiene a otros conjuntos (subconjuntos), a este conjunto se le llama conjunto universo. Sea U el conjunto universo y A un subconjunto de U , el complemento de A se denota como A^c y se define así: $A^c = \{x \mid x \in U \text{ y } x \notin A\}$, es decir, el conjunto A^c contiene a los elementos que pertenecen a U y que no pertenecen al conjunto A . Por ejemplo, sea A el conjunto $A = \{3, 5, 6, 8, 10\}$, si el conjunto universo es $U = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 10\}$, entonces el conjunto complemento de A es: $A^c = \{1, 2, 4, 7, 9\}$. Note que el conjunto U escrito por extensión es $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.



Diferencia de Conjuntos

Sean A y B conjuntos no vacíos, se define la diferencia entre conjuntos como el conjunto que contiene a los elementos que pertenecen al conjunto A y que no pertenecen al conjunto B . La diferencia se representa como $A - B$, donde $A - B = A \cap B^c = \{x \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}$. Por ejemplo, si $A = \{3, 5, 6, 8, 10\}$ y $B = \{2, 6, 8, 10, 12\}$, entonces el conjunto $A - B$ está dado por $A - B = \{3, 5\}$.

Actividad 3

1. De un grupo de 65 alumnos se sabe que 30 prefieren inglés 40, prefieren razonamiento lógico y 5 prefieren otros cursos ¿Cuántos alumnos prefieren razonamiento lógico e inglés?

- a. 15
- b. 10
- c. 12
- d. 20

2. Un conjunto M tiene 24 elementos y otro conjunto N tiene 40 elementos; si $M \cap N$ tienen 52 elementos. ¿Cuántos elementos tiene $M \cup N$?

- a. 10
- b. 16
- c. 12
- d. 8

Ejercicios 3 – 5

De un grupo de 90 estudiantes se sabe que 65 aprobaron el curso de Razonamiento Lógico, 25 aprobaron el curso Razonamiento lógico y el curso de Comprensión Lectora, 15 aprobaron solamente el curso de Comprensión Lectora.

3. ¿Cuántos estudiantes no aprobaron ninguno de los dos cursos?

- a. 90
- b. 20
- c. 10
- d. 15

4. ¿Cuántos estudiantes aprobaron solo el curso de Comprensión Lectora?

- a. 20
- b. 90
- c. 10
- d. 15

5. ¿Cuántos estudiantes aprobaron el curso de Razonamiento Lógico o el curso de Comprensión Lectora?

- a. 90
- b. 20
- c. 10
- d. 15



6. De 75 estudiantes de una Universidad se sabe que $\frac{1}{3}$ de estos sólo usa Tablet, $\frac{3}{5}$ usa de estos usan celular y $\frac{2}{5}$ de estos usan Tablet y celular. ¿Cuántos estudiantes no usan Tablet ni celular

- a. 10
- a. 5
- a. 3
- a. 2

7. En una ciudad, al 60% de sus habitantes le gusta la carne de res, al 65% de la población le gusta la carne de cerdo y al 10% no le gusta ninguno de estos dos tipos de carnes. ¿A qué porcentaje de la población le gusta la carne de res y la carne de cerdo?

- a. 20%
- b. 15%
- c. 5%
- d. 35%

Ejercicios 8 – 10

De 40 jóvenes que fueron encuestados sobre el deporte que practican se encontro que 8 practican sólo tenis, 12 practican tenis y natación, 10 no practican ninguno de estos dos deportes.

8. ¿Cuántos jóvenes practican natación?

- a. 30
- b. 10
- c. 12
- d. 22

9. ¿Cuántos jóvenes practican sólo natación?

- a. 20
- b. 10
- c. 30
- d. 22

10. ¿Cuántos jóvenes practican tenis o natación?

- a. 30
- b. 10
- c. 20
- d. 22

Ejercicios 11 – 15

A un grupo de 100 personas de la ciudad de Medellín, se le realizo una encuesta que arrojó los siguientes resultado:

- a. 43 personas saben cocina
- b. 47 personas saben panadería
- c. 58 personas saben repostería
- d. 19 personas saben cocina y panadería
- f. 28 personas saben cocina y repostería
- e. 30 personas saben panadería y repostería
- g. 11 personas saben de las tres especialidades

11. ¿Cuántas personas saben sólo repostería?

- a. 13
- b. 14
- c. 11
- d. 12

12. ¿Cuántas personas saben sólo cocina?

- a. 6
- b. 4
- c. 5
- d. 7

13. ¿Cuántas personas saben sólo panadería?

- a. 6
- b. 7
- c. 8
- d. 9

14. ¿Cuántas personas no sabe ninguna de las tres especialidades?

- a. 0
- a. 12
- a. 10
- a. 18

15. ¿Cuántas personas saben alguna de las 3 especialidades?

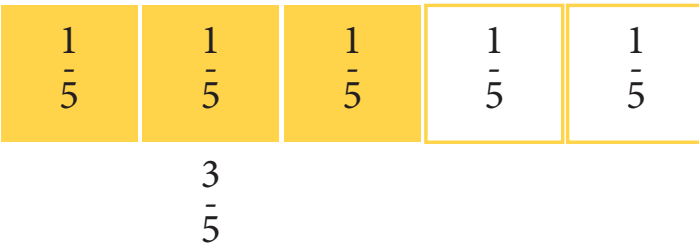
- a. 88
- b. 90
- c. 82
- d. 100

02

Herramientas de conteo

Fracciones, proporciones y reglas de tres.

Recordemos que un número racional es de un número de la forma a/b donde $a, b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0$, a estos números también se les denomina como números fraccionarios, pero ¿qué es una unidad fraccionaria? Una unidad fraccionaria es cada una de las partes en que se ha dividido la *unidad*, por ejemplo:



esta unidad se ha dividido en 5 partes iguales, así la unidad fraccionaria es $1/5$ y la cantidad fraccionaria es el número de unidades fraccionarias que se toman, en este caso $3/5$, es decir, 3 unidades fraccionarias de $1/5$ son $3/5$.

En toda fracción $(a)/b$ podemos diferenciar los números que la conforman:

- **El numerador, a:** indica el número de unidades fraccionarias que contiene la fracción.
- **El denominador, b:** indica el número de partes iguales en que se ha dividido la unidad.

Operaciones básicas con fracciones

1. Para sumar o restar dos fracciones que tienen distinto denominador se realiza la siguiente operación:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{m}{n} = \frac{a \cdot n \pm d \cdot m}{b \cdot n}$$

Ejemplo:

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{4} = \frac{2 \cdot 4 + 3 \cdot 5}{3 \cdot 4} = \frac{8 + 15}{12} = \frac{23}{12}$$

$$\frac{2}{3} - \frac{5}{4} = \frac{2 \cdot 4 - 3 \cdot 5}{3 \cdot 4} = \frac{8 - 15}{12} = \frac{-7}{12} = -\frac{7}{12}$$

2. Para sumar o restar dos fracciones que tienen igual denominador se realiza la siguiente operación:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$$

Ejemplo:

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{4} = \frac{2 + 5}{3} = \frac{7}{3}$$

$$\frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{4 - 2}{3} = \frac{2}{3}$$

3. Para multiplicar un número entero por una fracción: se multiplica el número entero por el numerador de la fracción y se escribe el mismo denominador.

Ejemplo:

$$5 \cdot \frac{3}{7} = \frac{5 \cdot 3}{7} = \frac{15}{7}$$

4. Para multiplicar dos fracciones: se multiplican numeradores y denominadores entre sí.

Ejemplo:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{7} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 7} = \frac{8}{21}$$

$$- \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{7} = \frac{(-2) \cdot 4}{3 \cdot 7} = \frac{-8}{21} = -\frac{8}{21}$$

5. Para dividir dos fracciones: primero se invierte la fracción divisor y se realiza la multiplicación entre las fracciones resultantes.

Ejemplo:

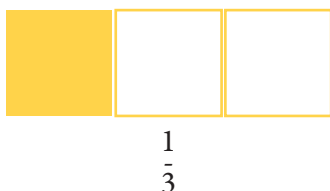
$$\frac{2}{3} \div \frac{7}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}$$

$$- \frac{2}{5} \div \frac{7}{6} = - \frac{2}{5} \cdot \frac{6}{7} = \frac{(-2) \cdot 6}{5 \cdot 7} = \frac{-12}{35} = -\frac{12}{35}$$

6. Una fracción se denomina propia cuando el numerador es menor que el denominador, por ejemplo,

$$\frac{1}{3} \quad - \frac{2}{5} \quad \frac{15}{17}$$

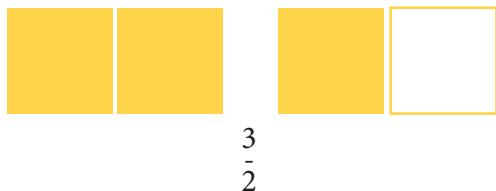
Para representar una fracción propia se divide la unidad en el número de partes iguales según el denominador y se toma la cantidad de éstas partes según en numerador, por ejemplo representemos la fracción $1/3$:



7. Una fracción se denomina impropia cuando el numerador es mayor que el denominador, por ejemplo,

$$\frac{5}{2} \quad - \frac{15}{7} \quad \frac{7}{6}$$

Para representar una fracción impropia se divide la unidad en el número de partes iguales según el denominador y se genera la cantidad de unidades necesarias para para poder tomar la cantidad de éstas partes según en numerador, por ejemplo, para representar la fracción $3/2$ se divide la unidad en 2 partes iguales y generamos dos de estas unidades para tomar 3 partes de ellas:



8. La representación decimal de una fracción consta de dos partes separadas por una coma o un punto: la parte entera es la que esta antes de la coma y la parte decimal esta después de la coma.

$3/2=1,5$ 1: parte entera 5: parte decimal

9. Todo número entero se puede representar como un número decimal.

$$5=5,0 \quad -8=-8,0$$

10. Para simplificar una fracción se divide cada parte de la fracción (numerador y denominador)

por el divisor que sea común a ambos, por ejemplo:

$$\frac{5}{4} = \frac{30 \div 3}{42 \div 3} = \frac{10}{14} = \frac{10 \div 2}{14 \div 2} = \frac{5}{7}$$

11. Para amplificar una fracción se multiplica cada parte de la fracción (numerador y denominador) por el mismo factor (diferente de cero), por ejemplo:

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{9 \times 3}{12 \times 3} = \frac{18}{24}$$

Razones, proporciones y porcentajes

Una razón es una relación multiplicativa entre dos números racionales diferentes de cero.

Por ejemplo, si en un grupo de personas hay 18 hombres y 27 mujeres, entonces la razón entre el número de hombres y el número de mujeres es de 2 a 3, es decir, hay dos hombres por cada tres mujeres, pero, ¿cómo se obtiene esta relación? Veamos:

$$\frac{18}{27} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Una proporción es un conjunto de dos razones iguales. Por ejemplo:

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

Esta proporción se lee así: "2 es a 3 como 4 es a 6". También se puede expresar como "2:3 como 4:6"

Propiedad de proporcionalidad

En toda proporción, $a/b=m/n$ se cumple que $a.n=m.b$ Por ejemplo, en la proporción anterior, $2.6=4.3$.

Nota: dos cantidades pueden estar en una relación de proporcionalidad directa o inversa.



Cantidades Directamente Proporcionales

Cuando dos cantidades están relacionadas, forman una razón a/b y esta fracción nos da como resultado

un cociente que corresponde a la división entre a y b . Ahora, dos magnitudes serán directamente proporcionales si los cocientes de las cantidades correspondientes son el mismo valor.

Ejemplo:

si un lápiz cuesta \$1500, ¿cuánto cuestan 7 lápices?

Solución:

Primero identificamos las cantidades que intervienen en esta situación, estas son: número de lápices y el precio de costo de los lápices, denotemos con x el valor de los 7 lápices, ya que esta cantidad es la es la incógnita del problema. Esta información la podemos registrar en la siguiente tabla:

Nº lápices	Precio lápices (\$)
1	1500
7	x

La información de esta tabla esta consignada de manera tal que se han formado dos razones, la razón para la cantidad de lápices y la razón para el precio. Estas razones están en una relación de proporcionalidad directa, ya que, a más cantidad de lápices, el precio de esta cantidad aumentará. Por tanto, la proporción se forma tal cual se formaron las razones en la tabla:

$$\frac{1}{7} = \frac{1500}{x}$$

Aplicando la propiedad de proporcionalidad tenemos:

$$1 \cdot x = 1500 \cdot 7$$

De donde concluimos que: $x = 10500$. Por tanto, los siete lápices tienen un costo de \$10500.

Cantidades Inversamente Proporcionales

Decimos que dos cantidades están en una relación de proporcionalidad inversa o que dos cantidades

son inversamente proporcionales cuando los productos de las cantidades correspondientes son el mismo valor.

Ejemplo:

un automóvil que viaja en promedio a 60 km/h tarda 12 horas en ir desde la ciudad A hasta la ciudad B. Existe una iniciativa que busca construir un ferrocarril que conecte a ambas ciudades, el cual podría viajar a 180 km/h. De acuerdo a esta iniciativa, ¿cuánto tiempo tardaría una persona que va desde la ciudad A hasta la ciudad B en ferrocarril?

Solución:

Primero identificamos las cantidades que intervienen en esta situación, estas son: la velocidad y el tiempo que tarda el recorrido desde la ciudad A hasta la ciudad B, denotemos con x el tiempo que tardaría el viaje en ferrocarril. Esta información la podemos registrar en la siguiente tabla:

Velocidad (km/h)	Tiempo (h)
60	12
180	x

La información de esta tabla esta consignada de manera tal que se han formado dos razones, la razón para la velocidad y la razón para el tiempo. Estas razones están en una relación de proporcionalidad inversa, ya que, a más velocidad en el recorrido, el tiempo de viaje disminuirá. Para formar la proporción conservamos una de las dos razones e invertimos la otra:

$$\frac{60}{180} = \frac{x}{12}$$

Aplicando la propiedad de proporcionalidad tenemos:

$$60 \cdot 12 = x \cdot 180$$

$$\frac{60 \cdot 12}{180} = x$$

$$4 = x$$

Por tanto, una persona tardaría cuatro horas viajando en ferrocarril.

Nota: las situaciones descritas en los ejemplos anteriores también se conocen como problemas de reglas de tres.

Porcentajes

Un porcentaje es una forma de expresar una cantidad como una fracción cuyo denominador es 100. Estas cantidades se denotan con el símbolo %, por ejemplo, “30 por ciento” se expresa como 30% y representa 30 partes tomadas de 100:

$$30\% = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$$

Ejemplo:

si se aplica un descuento del 25% al precio de un libro que cuesta \$25600, ¿cuál es el nuevo precio del libro?

Solución:

Esta situación se puede interpretar como una relación de proporcionalidad donde las cantidades involucradas son el precio del libro y el porcentaje, teniendo en cuenta que el precio del libro sin descuento corresponde al 100%, entonces denotemos con x al precio del libro después de aplicar el descuento, así se tiene que:

Precio (\$)	Porcentaje (%)
25600	100
x	25

la información de esta tabla esta consignada de manera tal que se han formado dos razones, la razón los porcentajes y la razón para el precio. Estas razones están en una relación de proporcionalidad directa, ya que, a menos porcentaje, el precio del libro disminuirá. Por tanto, la proporción se forma tal cual se formaron las razones en la tabla:

$$\frac{25600}{x} = \frac{100}{25}$$

Aplicando la propiedad de proporcionalidad tenemos:

$$25600.25 = 100.x$$

$$\frac{25600.25}{100} = x$$

$6400 = x$ Así se tiene que el descuento para el precio del libro es de \$6400, luego el nuevo precio del libro será $\$25600 - \$6400 = \$19200$.

Nota: en el ejemplo anterior al considerar que el precio del libro sin descuento corresponde al 100%, también se puede hallar el nuevo precio del libro asumiendo que este equivale al 75% del precio sin descuento.

Actividad 4

1. Pedro realiza una rutina diaria de en la que recorre 90 km en su bicicleta durante 3 horas. Si hoy Pedro extendió su tiempo diario a dos horas más, ¿cuántos kilómetros recorrió Pedro el día de hoy?

- a. 250 km
- b. 180 km
- c. 100 km
- d. 150 km

2. En la construcción de un edificio 12 obreros tardan 30 días en instalar todas las ventanas. ¿Cuántos obreros se necesitan para instalar todas las ventanas en 24 días?

- a. 15
- b. 20
- c. 25
- d. 18

3. ¿Qué porcentaje es 51 de 170?

- a. 20%
- b. 25%
- c. 30%
- d. 40%

4. Un camión que tiene capacidad para transportar 3 toneladas necesita 15 viajes para transportar una cierta cantidad de arena. ¿Cuántos viajes son necesarios para transportar la misma cantidad de arena con otro camión que tiene capacidad para transportar 5 toneladas?

- a. 5
- b. 3
- c. 9
- d. 7



5. Un porcicultor requiere 294 kilos de comida para alimentar a 15 cerdos durante una semana. ¿Cuántos kilos de comida necesita el porcicultor para alimentar a 10 cerdos durante 30 días?

- a. 650 kg
- b. 500 kg
- c. 840 kg
- d. 440 kg

6. Un grupo de trabajadores puede construir un muro de 400 m² en 15 días trabajando durante 8 horas diarias. ¿Cuántos días tardará este mismo grupo de trabajadores en construir un muro de 600 m², si trabajan 10 horas todos los días?

- a. 15
- b. 20
- c. 13
- d. 18

7. Un grupo de 10 operarios de manufactura textil trabajando durante 8 horas diarias tarda 15 días para finalizar un pedido. ¿Cuántos operarios trabajando la mitad de esta jornada se necesitarán para hacer el mismo pedido en 10 días?

- a. 10
- b. 20
- c. 30
- d. 40

8. En la siguiente tabla se sabe que los valores de la fila F_1 son inversamente proporcionales a los valores de la fila F_2

F_1	4	60	a
F_2	7.5	b	12

El valor de $a+b$ es:

- a. 3
- b. $5/2$
- c. $3/2$
- d. 2

Ejercicios 9 – 10

El tiempo necesario (t) para que los clientes de un restaurante reciban sus pedidos es inversamente

proporcional al cuadrado de la cantidad de personal (p) en servicio. Los pedidos de los clientes

tardan 20 minutos en tomarse cuando hay 4 miembros del personal en servicio.

9. La ecuación para t en términos de p es:

- a. $t=80/p^2$
- b. $t=180/p^2$
- c. $t=160/(p^2)$
- d. $t=320/p^2$

10. Si el número de personal en servicio se duplica, ¿Cuántas veces más rápido recibirán los clientes su pedido?

- a. 2
- b. 4
- c. 3
- d. 5

Ejercicios 11 – 12

Una fábrica de bombillos produce 600 unidades en 9 días utilizando 20 máquinas. Se sabe además que, por cada 4 bombillos producidos, tres son de luz convencional y uno es led.

11. ¿Cuántas unidades de bombillos se pueden producir en 12 días con utilizando 18 máquinas?

- a. 800
- b. 650
- c. 720
- d. 960

12. Si un cliente requiere 240 bombillos led, ¿Cuántos bombillos se deben producir?

- a. 400
- b. 360
- c. 480
- d. 320

Ejercicios 13 – 15

Una fábrica de jabones tiene tres máquinas de producción, M_1 , M_2 y M_3 . Por cada 7 jabones que produce M_1 , M_2 produce 5 y por cada 3 jabones que produce M_2 , M_3 produce 2 jabones.

13. Si en 8 horas, M_1 produjo 550 jabones más que M_3 , ¿Cuántos jabones produjo M_3 en estas 8 horas?

- a. 600
- b. 750
- c. 860
- d. 920

14. La producción total de jabones en la fábrica en estas 8 horas es:

- a. 2500
- b. 3800
- c. 2300
- d. 3200

15. ¿Qué porcentaje representa la producción de M_2 respecto a las producciones de M_1 y M_3 ?

- a. 16%
- b. 74%
- c. 84%
- d. 66%



Principios de Conteo.

Las técnicas de conteo son usadas en matemáticas para enumerar eventos difíciles de cuantificar.

Existen dos técnicas de conteo fundamentales, combinaciones y permutaciones, pero para entenderlas a plenitud, se debe tener claro los principios aditivo y multiplicativo, los cuales serán las bases para comprender estas técnicas de conteo.

Principio aditivo: si se desea llevar a cabo una actividad, la cual tiene múltiples alternativas de realizarse pero ninguna de estas en conjunto, entonces dicha actividad puede hacerse de $n_1 + n_2 + \dots + n_r$ maneras diferentes, donde n_1, n_2, \dots, n_r representa la cantidad de maneras diferentes en que se pueden realizar cada una de las alternativas.

Ejemplo:

¿De cuántas maneras distintas se puede cruzar un lago, si se dispone de 5 botes y 3 barcos?

Para cruzar el lago se tienen dos alternativas, en bote o en barco; si se elige cruzar el lago en bote, entonces se tienen 5 maneras distintas de hacerlo, una por cada barco, así $n_1 = 5$. De manera análoga, si se elige cruzar el lago en barco, se tiene que $n_2 = 3$, por tanto, el número total de maneras distintas que se tiene para cruzar el lago es

$$n_1 + n_2 = 5 + 3 = 8.$$

Principio multiplicativo: si se desea realizar una actividad que consta de r pasos que pueden ser realizados en conjunto, en cual el primer paso de la operación puede ser realizado de n_1 maneras, el segundo paso de n_2 maneras y el r -ésimo paso de n_r maneras, entonces esta actividad puede ser llevada a cabo de $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_r$ maneras.

Comentario: el principio multiplicativo implica que cada uno de los pasos pueden ser llevados a cabo, uno tras otro.

Ejemplo:

una empresa desea construir un edificio, para lo cual considera que puede construir los cimientos del edificio de dos maneras concreto o placas de cemento, mientras que las paredes del edificio pueden hacerse de adobe o de ladrillo y los techos de concreto, lámina galvanizada o madera. ¿Cuántas maneras diferentes tiene esta empresa para construir el edificio?

Solución:

En este caso la actividad es la construcción del edificio y los pasos serán los cimientos, las paredes y los techos, así $r = 3$. Ahora, cada uno de estos pasos se puede realizar de maneras diferentes:

Los cimientos se pueden realizar de 2 maneras diferentes (concreto o placas de cemento), es decir, $n_1 = 2$.

Las paredes se pueden realizar de 2 maneras diferentes (adobe o ladrillo), es decir, $n_2 = 2$.

Los techos se pueden realizar de 3 maneras diferentes (concreto, lámina galvanizada o madera), es decir, $n_3 = 3$.

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$

maneras diferentes de construir el edificio.

Factorial de un número: el factorial de un número n es el producto de los n primeros números naturales menores e iguales que n . Se simboliza por $n!$ y es tal que

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$$

donde $0! = 1$ y $1! = 1$.

Ejemplo:

- $2! = 1 \cdot 2 = 2$
- $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$
- $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

Nota: por propiedad $n! = n \cdot (n-1)!$

Ejemplo:

- $8!=8.7!$
- $20!=20.19!$

Permutación: una permutación de n elementos tomados de r en r se define por las diferentes agrupaciones con r elementos distintos. El número

de variaciones que se pueden construir se puede calcular mediante la fórmula:

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

donde $0 < r \leq n$ e influye la colocación de los elementos.

Ejemplo:

8 automóviles disputan una carrera en la cual solo premia el primero, el segundo y el tercero puesto. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden elegir los 3 primeros lugares en esta carrera?

Solución:

En este caso tenemos que el número total de elementos es 8 (total de automóviles en la carrera), es decir, $n=8$ y se requieren formar grupos (primer puesto, segundo puesto y tercer puesto) de 3 elementos, es decir, $r=3$, por tanto, se tiene una

$$P_3^8 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{(5)!} = \frac{8.7.6.5!}{5!} = 8.7.6=336$$

Así, en esta carrera se tienen 336 formas diferentes de que se elijan los tres primeros lugares de un grupo de 8 automóviles.

Combinación: si se dispone de un conjunto de n elementos diferentes y se le quiere agrupar (combinar) de r formas diferentes. Entonces el número de combinaciones se representa por medio de la expresión:

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

donde $0 < r \leq n$ y no influye la colocación de los elementos.

Ejemplo:

hallar el número de formas en que se pueden mezclar cinco colores: azul (a), verde (v), rojo (r), blanco (b) y negro (n), tomándolos de tres en tres.

Solución:

Como se tienen 5 colores, entonces, $n=5$ y como se requiere mezclar grupos de tres colores, entonces, $r=3$; en este experimento el orden no se tiene en cuenta ya que da el mismo resultado

combinar los colores azules, verde y el negro, que, si se toma primero el verde, luego el negro y por último el azul. Así se tiene una combinación de la forma:

$$C_3^5 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{120}{12} = 10$$

Por lo tanto, hay 10 formas diferentes de mezclar los cinco colores tomando grupos de a tres.

Actividad 5

1. Si se desea hacer una rifa de una nevera en la que cada boleta tiene un número de tres cifras, ¿cuántas boletas se deben imprimir?

- a. 300
- b. 1000
- c. 3000
- d. 100

2. Se quiere construir un domino con los números del 0 al 6. ¿Cuántas fichas tendrá este juego?

- a. 21
- b. 28
- c. 14
- d. 17

3. Un grupo de universitarios formado por 12 mujeres y 10 hombres desea elegir un representante estudiantil. ¿De cuántas maneras puede ser elegido este representante?

- a. 22
- b. 120
- c. 122
- d. 10

4. Pedro posee 4 camisas, 3 pantalones y 5 pares de zapatos, todas las prendas son diferentes. ¿De cuántas maneras distintas se puede vestir Pedro?

- a. 12
- b. 11
- c. 60
- d. 35

5. Cuántas representaciones diferentes será posible formar con un sindicato de 20 miembros de una



universidad, si se desea que cada representación conste de un presidente, un secretario y un tesorero.

- a. 6804
- b. 6840
- c. 8628
- d. 8640

6. ¿De cuántas maneras se pueden sentar cinco personas en cinco sillas dispuestas en fila?

- a. 220
- b. 120
- c. 60
- d. 40

7. ¿De cuántas maneras se pueden sentar 5 personas en 5 sillas dispuestas en fila si una de estas personas ocupa siempre el mismo lugar?

- a. 24
- b. 720
- c. 120
- d. 12

8. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden distribuir 4 personas en dos equipos A y B?

- a. 3
- b. 4
- c. 5
- d. 6

9. ¿Cuántos números de 5 cifras se pueden formar con los dígitos 3,4,5,6,7 y 8 si no se pueden repetir?

- a. 720
- b. 200
- c. 160
- d. 120

10. El encargado de una sala de cine en un centro comercial tiene que escoger 2 películas de acción de 8 posibles, para proyectarlas el viernes en la noche, ¿Cuántas combinaciones tiene para escoger?

- a. 20
- b. 25
- c. 28
- d. 10

11. Al último examen de razonamiento lógico llegaron 16 estudiantes tarde, de los cuales el profesor solo puede dejar ingresar 3. ¿De cuantas maneras diferentes el profesor puede escoger 3 estudiantes, sin que importe el orden en que lo decida?

- a. 560
- b. 240
- c. 300
- d. 650

12. ¿Cuántos equipos de futbol de 6 jugadores se pueden formar de un grupo de 9 personas?

- a. 80
- b. 50
- c. 10
- d. 84

13. Una organización estudiantil tiene que elegir un representante y un suplente. Hay 6 candidatos. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden elegir los dos candidatos?

- a. 21
- b. 30
- c. 24
- d. 36

14. En una competición de atletismo para la final han quedado cinco atletas que se disputan las medallas de oro, plata y bronce. ¿De cuántas formas distintas se pueden repartir estas medallas?

- a. 60
- b. 13
- c. 125
- d. 50

15. A las semifinales del campeonato del fútbol colombiano clasificaron 4 equipos. Para definir los dos equipos finalistas, cada uno se debe enfrentar con los otros 3 sólo una vez, ¿cuántas formas hay para organizar los partidos en la semifinal del fútbol colombiano?

- a. 6
- b. 5
- c. 4
- d. 7



Progresiones.

Una sucesión es un conjunto de números que están ordenados en cierta forma. Por ejemplo, el conjunto

$$\{2, 4, 6, 8, 10\}$$

es una sucesión cuyos elementos (o términos) son los primeros cinco números enteros positivos pares. El número 2 es el primer término, el número 4 es el segundo término, y así sucesivamente.

Progresiones aritméticas

La sucesión $1, 4, 7, 10, 13, 16, \dots$ tiene la propiedad de que cada término (excepto el primero) puede obtenerse del término anterior sumando 3, es decir,

$$4=1+3 \quad 7=4+3 \quad 10=7+3 \quad 13=10+3$$

y en general, si denotamos con a_n el término n -ésimo término (o término general) de la sucesión se tiene que $a_n = a_{n-1} + 3$ donde $n > 0, n \in \mathbb{Z}$. Una sucesión con esta propiedad se denomina progresión aritmética. En estas sucesiones todo par de términos consecutivos tiene una diferencia común d .

Propiedades:

- El término n -ésimo de una progresión aritmética cuyo primer término es a_1 se determina mediante la fórmula

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

- La suma S_n de los primeros n términos de una progresión aritmética es:

$$S_n = n/2 [2a_1 + (n-1) \cdot d] = n/2 (a_1 + a_n)$$

Ejemplo:

un deportista sabe que puede disminuir su tiempo para correr 100 metros planos en 0.05 segundos por cada mes de entrenamiento continuo. ¿Cuántos meses de practica necesita este deportista para reducir su tiempo actual de 17.50 segundos a 16.25 segundos?

Solución:

Primero identificamos los tiempos que va obteniendo el deportista por cada mes de práctica, $17.50, 17.45, 17.40, \dots$

Estos tiempos forman una progresión aritmética ya que dos términos consecutivos están a una misma diferencia,

$$17.45 - 17.50 = -0.05 \quad 17.40 - 17.45 = -0.05$$

así $d = -0.05$ y aplicando la propiedad para el término n -ésimo de una progresión aritmética, tenemos:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1) \cdot d \\ 16.25 &= 17.50 + (n-1) \cdot (-0.05) \\ 16.25 - 17.50 &= (n-1) \cdot (-0.05) \\ -1.25 &= (n-1) \cdot (-0.05) \\ (-1.25) / (-0.05) &= n-1 \\ 25 &= n-1 \\ n &= 26 \end{aligned}$$

Por tanto, el deportista debe practicar durante 26 meses para alcanzar el tiempo deseado.

Progresiones geométricas

La sucesión $2, 8, 32, 128, 512, \dots$ tiene la propiedad de que cada término (excepto el primero) puede obtenerse del término anterior multiplicando por 4, es decir,

$$8=2 \times 4 \quad 32=8 \times 4 \quad 128=32 \times 4$$

y en general, si denotamos con a_n el término n -ésimo término (o término general) de la sucesión se tiene que $a_n = a_{n-1} \times 4$ donde $n > 0, n \in \mathbb{Z}$.

Una sucesión con esta propiedad se denomina progresión geométrica. En estas sucesiones todo par de términos consecutivos tiene una razón común r .

Propiedades:

- El término n -ésimo de una progresión geométrica cuyo primer término es a_1 se determina mediante la fórmula.

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$



- La suma S_n de los primeros n términos de una progresión geométrica es:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

Ejemplo:

Hallar el valor de la siguiente suma

$$2+6+18+\dots+39366$$

Solución:

Los términos de esta suma forman una progresión geométrica

$$\frac{6}{2}=3 \quad \frac{18}{6}=3$$

Para hallar el valor de la suma necesitamos hallar el número de términos que la forman, es decir, que posición (n) ocupa el número 39366

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 \cdot r^{n-1} \\ 39366 &= 2 \cdot 3^{n-1} \\ 39366 &= 2 \cdot 3^n / 3 \\ 59049 &= 3^n \\ 3^{10} &= 3^n \\ n &= 10 \end{aligned}$$

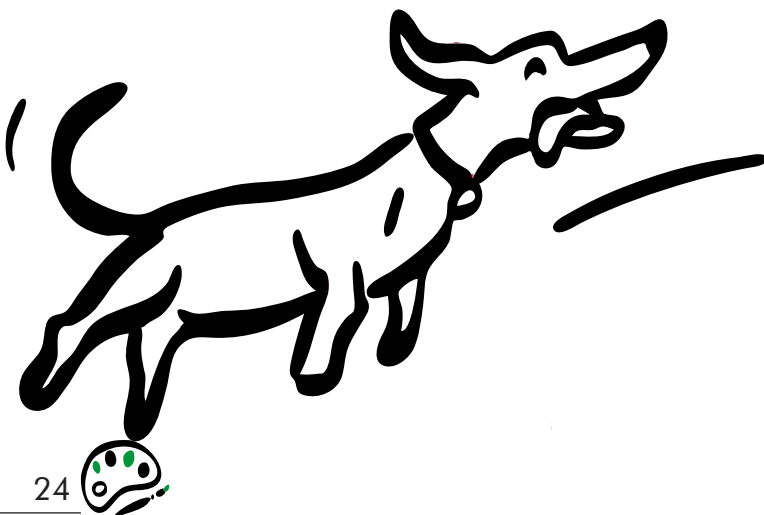
Así se tiene que la suma está formada por 10 términos y su valor es

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

$$S_{10} = \frac{2(1-3^{10})}{1-3}$$

$$S_{10} = 59048$$

Por tanto, el valor de la suma es 59048.



Actividad 5

1. En la sucesión 2,8,32,128... el número 2048 es el término

- a. a_6
- b. a_9
- c. a_{12}
- d. a_{10}

2. El decimoquinto término de una progresión geométrica de razón común 2 y que tiene a 192 como octavo término, es:

- a. 16384
- b. 3072
- c. 24576
- d. 12288

3. Los términos de la progresión aritmética tal que $a_5 + a_9 = 72$ y $a_7 + a_{12} = 97$ son:

- a. 5,10,15,...
- b. 7,11,15,...
- c. 6,11,16,...
- d. 9,13,17,...

4. Si en una progresión aritmética $a_r = m$ y $a_m = r$, entonces a_n es:

- a. $m-r+n$
- b. $m+r-n$
- c. $m+r+n$
- d. $m-r-n$

5. Si $(a-b), (b-c), (c-a)$, son tres términos consecutivos de una progresión geométrica, entonces el valor de $(a+b+c)^2$ es:

- a. $abc(a+b+c)$
- b. $2(a^2+b^2+c^2)$
- c. $3(ab+bc+ac)$
- d. $a^2 b^2 + b^2 c^2 + a^2 c^2$

6. La suma de todos los números divisibles por 7 comprendidos entre 80 y 500 es:

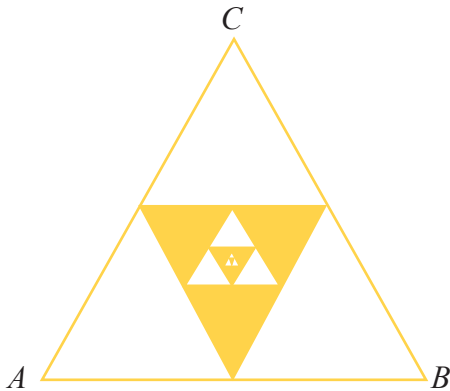
- a. 15780
- b. 17430
- c. 19350
- d. 18960

7. ¿Cuántos términos de la sucesión 12,-9,-6,-3,... deben tomarse para que la suma de estos términos sea 54?

- a. 17
- b. 15
- c. 10
- d. 12

Ejercicios 8 – 10

El triángulo ABC que se muestra en la siguiente figura es un triángulo equilátero de lado l_1 cm. Los puntos medios de sus lados se unen para formar otro triángulo de lado l_2 cm cuyos puntos medios, a su vez, se unen para formar otro triángulo de lado l_3 cm, continuando este proceso como se indica en la figura:



8. El número total de triángulos que presenta la figura es:

- a. 17
- b. 25
- c. 21
- d. 13

9. Si $l_1 = 10$ cm, entonces el valor de l_6 es:

- a. $5/16$ cm
- b. $25/16$ cm
- c. $5/32$ cm
- d. $1/16$ cm

10. Si $l_1 = 10$ cm y el proceso se hace hasta formar el triángulo de lado l_{10} cm, entonces, sobre el valor de $l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_{10}$ se puede afirmar con certeza que:

- a. Es un número racional mayor que 20
- b. Es un número entero menor que 20
- c. Es un número racional menor que 20
- d. Es un número entero mayor que 20

Ejercicios 11 – 13

Al unir los puntos medios de un cuadrado ABCD se forma otro cuadrado, continuándose este proceso como se muestra en la siguiente figura:



11. El número total de triángulos que presenta la figura es:

- a. 36
- b. 28
- c. 32
- d. 24

12. Para obtener 100 triángulos sombreados a partir de la figura dada, ¿Cuántos cuadrados más se deben adicionar?

- a. 33
- b. 21
- c. 17
- d. 25

13. La expresión que determina el número de total de triángulos (T) en función de la cantidad de cuadrados (C) es:

- a. $T = 4C + 1$
- b. $T = 4C - 1$
- c. $T = 4C + 4$
- d. $T = 4C - 4$

Ejercicios 14 – 15

Parte de una pared rectangular se va a decorar con baldosas cuadradas de 12 cm de lado de tal manera que cada línea tenga sólo una baldosa menos que la anterior.

14. Si la pared tiene una base de 2.4 m y una altura de 1.32 m, entonces el número de baldosas que utilizaran para esta decoración es:

- a. 150
- b. 155
- c. 160
- d. 165

15. La cantidad de baldosas que quedan en la última línea de la decoración es:

- a. 16
- b. 15
- c. 12
- d. 10



03

Probabilidad y
estadística

Probabilidad.

Probabilidad: la probabilidad permite medir la frecuencia con la que se da un resultado determinado al realizar un experimento.

Comentario: el experimento tiene que ser aleatorio, es decir, pueden presentarse diferentes resultados en un conjunto específico de soluciones, en el cual se realiza el experimento en las mismas condiciones.

Espacio muestral S: es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento. También es conocido como el universo del experimento.

Ejemplo:

Si tiramos un dado al aire solo una vez, el espacio muestral será los números del 1 al 6, es decir, $S=\{1,2,3,4,5,6\}$

Evento muestral E: Es un subconjunto del espacio muestral, es decir $E \subset S$.

Ejemplo:

hallar el evento de que, en el lanzamiento de un dado, el resultado sea un número par.

Solución:

Los números pares que aparecen en el lanzamiento de un dado son 2, 4 y 6, por tanto podemos definir el conjunto $E=\{2,4,6\}$.

Regla de Laplace: define la probabilidad de un evento como el cociente entre el número de casos favorables y el número de caso posibles, es decir si E es un subconjunto del espacio muestral S , entonces:

$$P(E) = \frac{\text{Nº de casos favorables}}{\text{Nº de casos probables}}$$

$$= \frac{\text{Cantidad de elementos de } E}{\text{Cantidad de elementos de } S}$$

Ejemplo:

En una bolsa hay tres bolas azules y cuatro rojas. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bola roja?

Solución:

Sea E el evento, "sacar una bola roja de la bolsa", así

$$P(E) = \frac{\text{Nº de elementos de } E}{\text{Nº de elementos de } S} = \frac{4}{7}$$

Note que el número de elementos de S es igual al total de posibilidades al sacar una bola de la bolsa y el número de elementos de E es el total de bolas rojas.

Comentarios:

- En el ejemplo anterior la probabilidad de sacar una bola verde sería cero dado que en la bolsa no hay bolas verdes. A este tipo de evento se le denomina evento nulo o de probabilidad imposible.

- La probabilidad de un evento A , siempre es mayor o igual a cero y menor o igual a uno, es decir,

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Probabilidad de la unión de dos eventos:

sean A y B dos eventos muestrales de un espacio muestral S . Entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Ejemplo:

se lanza un dado al aire y analizamos los siguientes eventos: A que resulte número impar, y B que resulte un número menor que 4. Hallar la probabilidad de la unión entre estos eventos.

Solución:

El evento unión, $A \cup B$ está formado por los siguientes resultados: el 1, el 2, el 3 y el 5. Así se tiene que:

$$P(A) = \frac{3}{6}, \quad P(B) = \frac{3}{6}$$

Ahora, $P(A \cap B) = 2/6$, dado que solo dos elementos cumplen con ser impar y menor que 4, estos son el 1 y el 3, por lo tanto,

$$P(A \cup B) = \left(\frac{3}{6} + \frac{3}{6} \right) - \frac{2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Probabilidad de eventos complementarios:

La probabilidad de un evento complementario (A^c) a un evento (A) es definido por:

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$



Probabilidad de eventos independiente:

Se dice que un evento A es independiente de un evento B, si en caso de que A ocurra no interesa si B ocurrió o no. Así para dos eventos independientes:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Probabilidad condicional: esta probabilidad se calcula una vez que se ha incorporado información adicional al experimento inicial. Así la probabilidad de un evento B dado que ya sucedió un evento A, se define como :

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Comentario: si A y B son eventos independientes, entonces la probabilidad de $P(B/A) = P(B)$

Actividad 6

1. Hallar la probabilidad que al lanzar un dado el resultado sea un número mayor a 4.

- a. 1
- b. 0
- c. 1/2
- d. 1/3

2. ¿Cuál es la probabilidad de obtener el número 5 al lanzar un dado?

- a. 20%
- b. 16.7%
- c. 30%
- d. 40%

Ejercicios 3 – 6

Una bolsa contiene 2 bolas negras, 3 bolas blancas, 4 bolas azules y 5 bolas amarillas.

3. La probabilidad de que al sacar una bola de la bolsa, esta sea de color azul, es:

- a. 2/7
- b. 3/14
- c. 0
- d. 1

4. La probabilidad de que, al sacar una bola de la bolsa, esta sea de color roja es:

- a. 0
- b. 1
- c. 1/14
- d. 13/14

5. La probabilidad de sacar de la bolsa una bola que no sea negra, es:

- a. 6/7
- b. 1
- c. 1/2
- d. 3/7

6. La probabilidad de sacar de la bolsa una bola blanca o amarilla es:

- a. 4/5
- b. 4/7
- c. 1/3
- d. 0

7. Una urna tiene ocho bolas negras, cinco azules y siete verdes. Si se extrae una bola al azar, la probabilidad de que esta sea negra es:

- a. 2/5
- b. 1/2
- c. 9/20
- d. 1

Ejercicios 8 – 11

Al curso de razonamiento lógico asisten 45 estudiantes donde hay 10 alumnas que tienen cabello rubio, 20 alumnas que tienen cabello negro, 5 hombres que tienen cabello rubio y 10 hombres que tienen el cabello negro.

8. La probabilidad de que un alumno sea hombre es:

- a. 1/3
- b. 2/3
- c. 3/4
- d. 1/2

9. La probabilidad de que una alumna tenga cabello negro es:

- a. 2/9
- b. 1/45
- c. 4/9
- d. 2/5

10. La probabilidad de que un estudiante tenga el cabello negro, es:

- a. 0,66
- b. 0,5
- c. 0,33
- d. 0,4



11. La probabilidad de que un estudiante sea hombre o mujer, es:

- a. 1
- b. 0,66
- c. 0,5
- d. 0,2

12. Dos estudiantes del curso de razonamiento lógico, tienen respectivamente las probabilidades de $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ de perder un examen. La probabilidad de que pierdan el examen simultáneamente es de $\frac{1}{5}$. La probabilidad de que al menos uno de los dos estudiantes pierda el examen, es:

- a. $\frac{19}{30}$
- b. $\frac{1}{15}$
- c. 0
- d. $\frac{1}{3}$

13. Una clase de matemáticas está conformada por 20 hombres y 20 mujeres; la mitad de las mujeres y la mitad de los hombres han elegido un examen como trabajo final en el curso. Hallar la probabilidad de que una persona elegida al azar sea hombre o haya elegido el examen como trabajo final.

- a. 0,75
- b. 0,5
- c. 0,25
- d. 1

Ejercicios 14 – 15

Se sortea un viaje a Cartagena entre los 120 mejores clientes de una agencia de seguros. De ellos, 65 son mujeres, 40 están solteros y 45 son mujeres casadas.

14. La probabilidad de que el viaje a Cartagena lo gane un hombre soltero es:

- a. $\frac{1}{8}$
- b. $\frac{1}{6}$
- c. $\frac{2}{5}$
- d. $\frac{55}{120}$

15. Si el ganador no es soltero, entonces la probabilidad de que el ganador sea una mujer, es:

- a. $\frac{45}{80}$
- b. $\frac{35}{80}$
- c. $\frac{55}{80}$
- d. $\frac{65}{80}$



Estadística descriptiva.

La estadística descriptiva es la parte de la estadística encargada de organizar y resumir conjuntos de datos numéricos en tablas o gráficos para poner en evidencia características y comportamientos que se puedan presentar como frecuencias, porcentajes, promedios, etc. sin extraer conclusiones (inferencias) sobre la población a la que pertenecen.

Se definirán algunas técnicas descriptivas básicas, con el fin de comprender la elaboración de tablas de frecuencias, la construcción de gráficos, las principales medidas de tendencia central y la forma que estas permitirán realizar la descripción de determinado conjunto de datos.

Por lo general, en cualquier análisis estadístico se pretende sacar conclusiones de un conjunto de interés llamado población; aunque a veces conocerla y analizarla totalmente es difícil por razones de costo y tiempo.

Población N: es el conjunto de todos los elementos que tienen una característica común para ser estudiados. La población puede estar definida por personas o cosas y también ser finita o infinita.

Muestra: es un subconjunto (representativo) de la población que se toma con el fin de extraer información.

Ejemplo:

Halle la población y una muestra de la siguiente información: Se desea realizar un estudio estadístico con algunas personas del municipio de Bello, acerca de la necesidad o no del pico y cédula, para las personas que deseen salir a comprar productos básicos.

Solución:

Dado que la población es el conjunto de estudio más general y grande posible, en este caso será representado por las personas del municipio de Bello que tienen cédula de ciudadanía y la muestra en este caso es un subconjunto de la población, es decir, personas del municipio de Bello (que tienen cédula de ciudadanía) con las que se realizó la encuesta sobre el pico y cédula.

Para poder aplicar alguna técnica estadística es necesario definir el tipo de variable con que se está trabajando.

Variable estadística: son las características consideradas con el propósito de describir cada uno de los individuos de la muestra.

Tipos de variables: se distinguen dos tipos de variables. Las cuantitativas y las cualitativas, las primeras hacen referencia aquellas que se pueden representar por medio de cantidades numéricas, por ejemplo, el peso, la estatura, el número asignaturas en una Universidad, entre otras. El segundo tipo de variable hace referencia a las categorías que no se pueden representar por medidas numéricas, por ejemplo, el sexo la raza, color de ojos, una calificación entre otras.

Distribuciones de frecuencia: son utilizadas para resumir la información a partir de una muestra de datos, su construcción es muy sencilla, pero en conjuntos de datos de gran tamaño el cálculo puede resultar tedioso.

Representaciones gráficas

En la estadística descriptiva existen diferentes graficas para representar la información de forma resumida e informativa en datos agrupados. El siguiente es un paso a paso, para elaborar una tabla de frecuencia, pero antes es importante tener en cuenta la terminología que se utilizará:

- N : tamaño de la población
- n : tamaño de la muestra
- x_i : característica cuantitativa observada en cada unidad investigada.
- f_i frecuencia absoluta: número de veces que se repite el valor de la variable.
- fr_i frecuencia relativa: se obtiene dividiendo cada frecuencia absoluta por el tamaño de la muestra o el tamaño de la población.
- F_i frecuencia absoluta acumulada: se hace por medio de sumas sucesivas de manera que la última frecuencia absoluta acumulada será igual a n .
- Fr_i : frecuencia relativa acumulada, para calcularla se procede igual que en frecuencia relativa.
- m : número de valores que toma la variable.



Ejemplo:

se tienen 300 cajas de madera en la bodega de una tienda y cada una de ellas contiene figuras en vidrio. El dueño del almacén le interesa examinar las cajas con el fin de saber el número de figuras que han sufrido alguna avería en el transporte desde la fábrica hasta la bodega. Pero por motivos de personal disponible, espacio físico y tiempo, se tomó la decisión de examinar una muestra equivalente al 10% de las cajas, por tal razón se tendrá 30 cajas de un total de 300. El siguiente recuadro contiene la información sobre dichas cajas, donde cada número indica la cantidad de figuras que han sufrido o no alguna avería:

1	2	1	2	2	2
2	3	2	3	2	3
1	1	3	0	1	2
0	2	0	3	4	1
3	4	2	2	2	3

Solución:

En este caso se puede definir x_i como el número de figuras que han sufrido o no alguna avería en cada caja, y dado que la cantidad de figuras que han sufrido o no alguna avería es 0, 1, 2, 3, o 4, entonces, $m=5$. Ahora, en función de esto armamos la tabla de frecuencia.

x_i	f_i	fr_i	F_i	Fr_i
0	3	$3/30 = 0,10$	3	0,10
1	6	$6/30 = 0,20$	9	0,30
2	12	$12/30 = 0,40$	21	0,70
3	7	$7/30 = 0,23$	28	0,93
4	2	$2/30 = 0,07$	30	1,00
Total	30	1,00		

A partir de la tabla de frecuencias construida se puede generalizar el resultado analizando las frecuencias relativas, donde la información indica que el 10% de las figuras no sufrieron averías.

Diagrama de barras o histograma: este tipo de gráfica es utilizado tanto para variables cuantitativas como cualitativas. Para construir este diagrama se utilizan dos ejes, en el eje horizontal se representan las categorías de la variable que se quiere representar y en el eje vertical se levantan las barras cuyas alturas son proporcionales a la frecuencia (absoluta o relativa) de cada dato.

Ejemplo:

Construir el diagrama de barras de acuerdo a la siguiente información: A un grupo de 20 personas se les preguntó acerca de su color favorito. Los resultados se muestran en la siguiente tabla de frecuencias:

Color	f_i
Negro	4
Azul	5
Amarillo	5
Rojo	6

Solución:

En este caso las variables del problema son de tipo cualitativo, para la elaboración del gráfico de barras se coloca en el eje horizontal los colores y en el eje vertical el valor de cada frecuencia absoluta, como se ilustra a continuación:

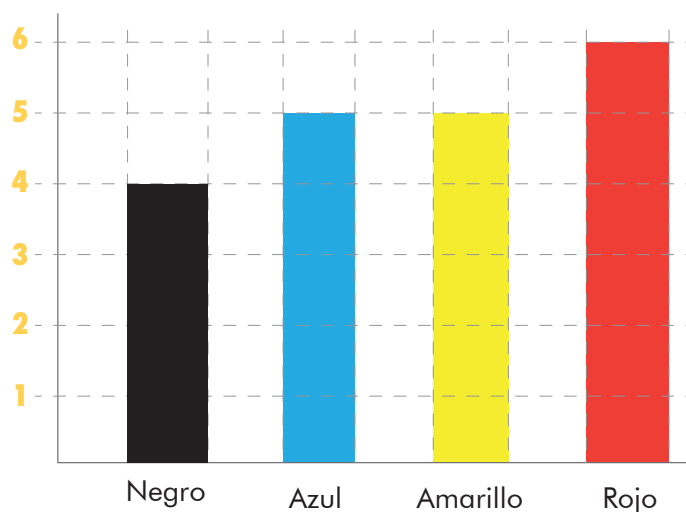


Diagrama de sectores: este diagrama también se utiliza para representar variables cuantitativas. En este se representan los datos y su frecuencia de manera que el círculo sea dividido de forma proporcional a la frecuencia de cada dato.

Ejemplo:
Representar en un diagrama circular la siguiente información:

En la siguiente tabla, se ilustra porcentualmente los fondos que destina la gobernación de cierto departamento anualmente en deporte, cultura, sociedad, tecnología, entre otros.

Sector	$fr_i(\%)$
Deporte	22.1
Cultura	20.3
Sociedad	19.9
Tecnología	17.9
Otros	19.8

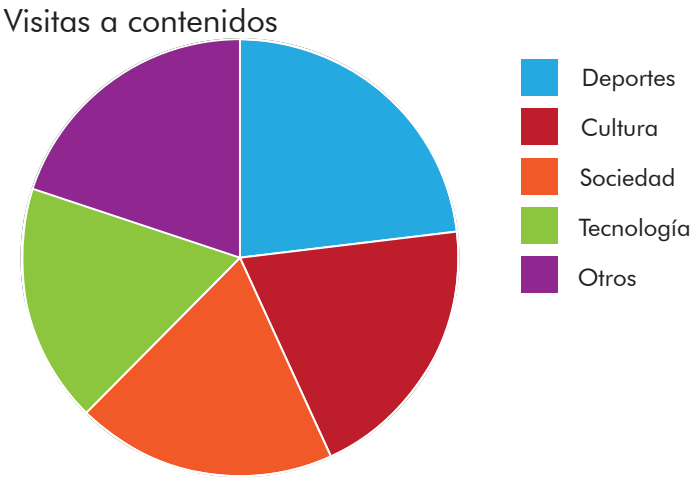
Solución:

Para construir el diagrama circular, se debe tomar el valor de cada frecuencia relativa, multiplicarla por 360 y dividirla por 100, para conocer el ángulo de cada sector circular

$$\frac{Fr_i \times 360}{100}$$

Sector	Angulo
Deporte	79,56°
Cultura	73,1°
Sociedad	71,6°
Tecnología	64,4°
Otros	71,2°

Así, el diagrama circular es de la forma:



Ojiva: también conocido como diagrama acumulativo de frecuencias, se construye tomando en el plano los puntos (c_i, N_i) y uniéndolos con segmentos horizontales y verticales, de forma que se obtiene una función escalonada.

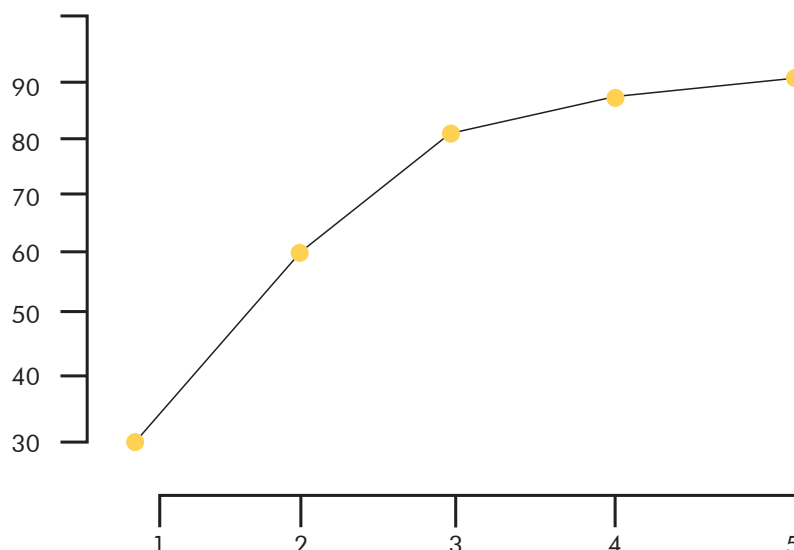
Comentario: si se utilizan las frecuencias relativas acumuladas, el valor máximo del diagrama es 1 y cuando se construye con las frecuencias absolutas acumuladas, el máximo será el total de datos de la muestra.

Ejemplo:
hallar el polígono de frecuencia de la siguiente información: El porcentaje de número de hijos por cada 100 familias en cierta ciudad se representa en la siguiente tabla:

Nº de hijos	$fr_i(\%)$	$FR_i(\%)$
1	30	30
2	35	65
3	15	80
4	10	90
5	10	100

Solución:

Para realizar la gráfica, se coloca en el eje horizontal el número de hijos y en el eje vertical el porcentaje de la frecuencia acumulada relativa. La representación gráfica queda de la siguiente manera:



Medidas de tendencia central: son las medidas que se ubican alrededor de los datos observados de la muestra, se distinguen la media aritmética, la mediana y la moda.

Media aritmética: es el promedio de todos los datos de la muestra

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

donde x_i es valor de cada dato y n es el tamaño de la muestra. En el caso de datos agrupados en tablas la media se puede calcular por medio de la expresión:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i \cdot x_i}{n}$$

donde x_i es valor de cada dato, f_i es la frecuencia absoluta de cada dato y n es el tamaño de la muestra.

Ejemplo:

Calcular la media de 8, 16, 4, 12 y 10.

Solución:

Se tienen 5 datos, así la media de estos datos es:

$$\bar{X} = \frac{8+16+4+12+10}{5} = 10$$

Mediana: si los datos están ordenados de mayor a menor, la mediana es el valor hasta el cual se

encuentran el 50 % de los casos, así la mediana dejará la mitad de las observaciones por debajo de su valor y la otra mitad por encima.

Ejemplo:

hallar la mediana del siguiente conjunto de datos:

1 3 3 4 1
2 2 2 5 1
4 5 1 5 3
5 1 4 1 2
2 1 2 3 5

Solución:

Organizando los datos de menor a mayor se tiene
1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 4 4 4 5 5 5 5 5
el elemento intermedio es 2, así que la mediana es de este conjunto de datos es 2

Moda: En un conjunto de datos, la moda es el dato de mayor frecuencia.

Ejemplo:

Hallar la moda en el siguiente conjunto de datos: 5, 3, 6, 5, 4, 5, 2, 4, 6, 4, 5

Solución:

Se organizan los datos en una tabla resumen de la siguiente manera:

N°	2	3	4		
frecuencia	1	1	3		

así el dato de mayor frecuencia en este conjunto de datos es el número 5, el cual se registra cuatro veces en la lista de números.



Actividad 7

1. En el siguiente conjunto de datos,
1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 4 4 4 5 5 5 5
la media es:

- a. 2,5
- b. 2,72
- c. 3
- d. 4

2. En el siguiente conjunto de datos,
18, 18, 19, 17, 23, 20, 21, 18 la mediana es:

- a. 17
- b. 18
- c. 18.5
- d. 23

3. En el siguiente conjunto de datos,
20, 21, 18, 19, 18, 17, 18 la moda es:

- a. 19
- b. 18
- c. 18.71
- d. 18.5

Ejercicios 4 – 5

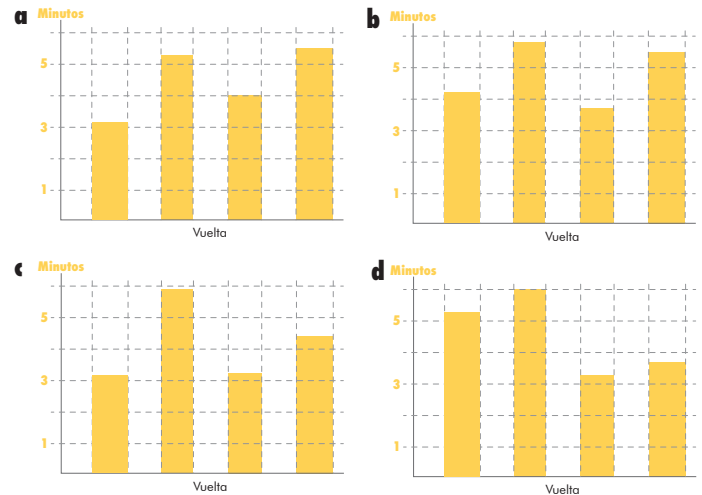
Felipe dio cuatro vueltas alrededor de una pista de automovilismo en su nuevo carro eléctrico. El tiempo que él empleó en dar cada vuelta se muestra a continuación:

Vuelta	Tiempo empleado
Vuelta #1	4 minutos y 15 segundos
Vuelta #2	5 minutos y 45 segundos
Vuelta #3	3 minutos y 30 segundos
Vuelta #4	4 minutos y 45 segundos

4. El tiempo total empleado por Felipe en dar las cuatro vueltas alrededor de la pista fue de:

- a. 16 minutos
- b. 16 minutos y 30 segundos
- c. 17 minutos
- d. 18 minutos y 15 segundos

5.Cuál de las siguientes graficas representa mejor el tiempo que Felipe tardó en cada vuelta:



Ejercicios 6 – 8

Una distribución estadística de datos viene dada por la siguiente tabla:

x_i	61	64	67	70	73
f_i	5	18	42	27	8

6. La moda de la distribución es:

- a. 67
- b. 64
- c. 42
- d. 73

7. La media de la distribución es:

- a. 68
- b. 67.5
- c. 69
- d. 68.5

8. La mediana de la distribución es:

- a. 67
- b. 68
- c. 69
- d. 65

Ejercicios 9 – 15

En una clínica dental observan el número de caries en 100 niños analizados. La información obtenida aparece resumida en la siguiente tabla



Nº de caries	f_i	f_i
0	25	0,25
1	20	0,2
2	x	z
3	15	0,15
4	15	0,15

9. El valor de x es:

- a. 35
- b. 30
- c. 40
- d. 25

10. El valor de z es:

- a. 0,25
- b. 0,30
- c. 0,35
- d. 0,4

11. El valor de y es:

- a. 5
- b. 10
- c. 0
- d. 15

12. El valor promedio de la información es:

- a. 2
- b. 1
- c. 1,55
- d. 0,5

13. La mediana de la información es:

- a. 15
- b. 35
- c. 40
- d. 30

14. La mediana de la información es:

- a. 15
- b. 35
- c. 40
- d. 30

15. La moda de la información es:

- a. 15
- b. 20
- c. 40
- d. 35



04

Lógica
Matemática

Razonamientos Lógicos.

El razonamiento matemático puede considerarse como el ejercicio de una combinación de dos facultades que podemos llamar intuición e ingenio. El ejercicio del ingenio en matemáticas consiste en ayudar a la intuición a través de arreglos adecuados de proposiciones, y quizás figuras geométricas o dibujos para que cuando estos estén realmente bien organizados, no se pueda dudar seriamente de la validez de los pasos intuitivos que se requieren.

Se pueden diferenciar diferentes tipos de razonamientos lógicos, como el razonamiento abstracto el cual se refiere a la capacidad para resolver problemas lógicos en los cuales es necesario abordar el proceso de manera independiente sobre cada elemento del conjunto, así como también sobre todo el conjunto; el razonamiento espacial, el cual se refiere a la capacidad de percibir de manera correcta el espacio, es decir, concebir, interpretar, visualizar e imaginar figuras en el espacio; el razonamiento numérico, el cual hace referencia a la capacidad para razonar y ejecutar operaciones aritméticas.

Ejemplo:
en la secuencia de figuras



la que debe reemplazar el signo de interrogación es:

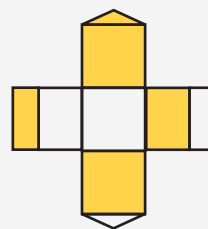


Solución:

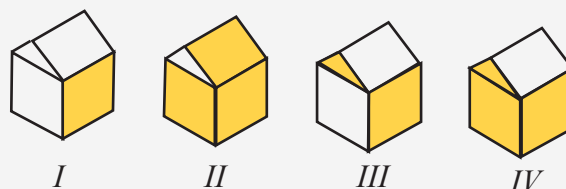
La secuencia se construye figura a figura agregando en cada paso una línea adicional que nunca toca la última línea agregada, así la figura que debe reemplazar el signo de interrogación es la figura III.

Ejemplo:

la forma sólida que se obtiene al unir las caras de la siguiente figura:



es:



Solución:

La forma I se puede descartar porque muestra una cara sin sombrear debajo de una cara triangular, ambas caras (debajo de la cara triangular) están sombreadas en la figura. La forma II se descarta ya que tiene un techo sombreado sobre el lado sombreado, que no aparece en la figura y la forma III se puede eliminar porque muestra una cara sin sombrear debajo de una cara triangular, ambas caras (debajo de la cara triangular) están sombreadas en la figura, así la forma que se obtiene al unir las caras de la figura es la que se muestra en la opción IV.

Ejemplo:
en la siguiente secuencia:

4, 3, 5, 9, 12, ?, 26

El número que debe reemplazar el signo de interrogación es:

I. 15 II. 17 III. 19 IV. 23

Solución:

Cada número es la suma del anterior y el número ubicado tres lugares a la izquierda, es decir,

$$5+4=9$$

$$9+3=12$$

$$12+5=17$$

$$17+9=26$$

así, el número que debe reemplazar el signo de interrogación es 17.



Actividad 8

1. En la siguiente secuencia:

54,49,?,39,34

el número que debe reemplazar el signo de interrogación es:

- a. 47
- b. 44
- c. 45
- d. 4

2. En la siguiente secuencia:

7,9,8,6,10,9,5,11,10,?,12

el número que debe reemplazar el signo de interrogación es:

- a. 4
- b. 3
- c. 13
- d. 29

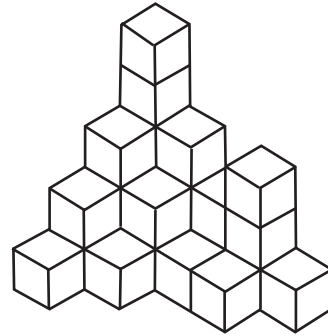
3. El número de estudiantes en el curso de razonamiento lógico es mayor de 30 pero menor de 60. Si los estudiantes se filan de a 2, de a 3, de a 4 o de a 6 siempre sobra un estudiante, pero si se filan de a 7 no sobran ni faltan estudiantes. Entonces, el número exacto de estudiantes en este curso es:

- a. 56
- b. 49
- c. 42
- d. 35

4. Pedro se ha ganado un premio el cual consiste en que recibirá durante 8 días cierta cantidad de dinero, así cada día se le dará el doble del día anterior. Si el primer día recibe 9 mil pesos, la cantidad (en miles de pesos) total que Pedro recibirá es:

- a. $9 \cdot 2^8$
- b. $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8$
- c. 2^8
- d. $2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9$

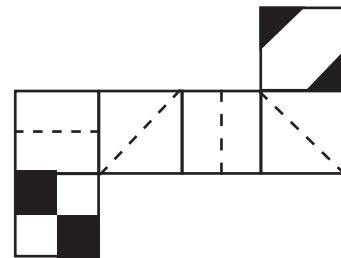
5. El número de cubos que forman la siguiente figura:



es:

- a. 23
- b. 25
- c. 26
- d. 28

6. La forma sólida que se obtiene al unir las caras de la siguiente figura:



es:

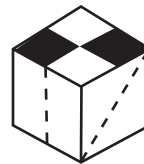
a.



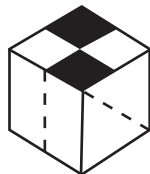
a.



c.



d.



7. Si se divide una carretera en tramos de 2 kilómetros, sobra 1 kilómetro, si se divide en tramos de 3 kilómetros sobran 2 kilómetros, y si se divide en tramos de 4 kilómetros sobran 3 kilómetros. Si se sabe que la longitud total de la carretera es de menos de 22 kilómetros, entonces la longitud total

en kilómetros de esta carretera, es:

- a. 19
- b. 17
- c. 13
- d. 11



Ejercicios 8 – 9

Con cerillas de fósforos se construyen figuras en forma de triángulos como se ilustra en la siguiente secuencia:



8. El número total de cerillas de fósforos que se requieren para construir una figura de 8 niveles es:

- a. 52
- b. 62
- c. 76
- d. 100

9. Si se tiene construido una figura de nueve niveles, el número de cerillas de fósforos que hay que agregar para construir el décimo nivel es:

- a. 20
- b. 23
- c. 27
- d. 29

10. Si x , y, z y w son dígitos diferentes tales que todos los dígitos en la suma

$$\begin{array}{r} 5x + \\ yz \\ \hline w43 \end{array}$$

son diferentes, entonces el valor de $x+y+z+w$ es:

- a. 16
- b. 18
- c. 22
- d. 23

11. El valor de $10(1-1/10)+9(1-1/9)+\dots+1(1-1/1)$ es:

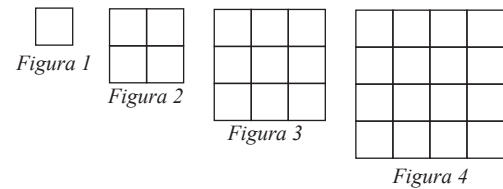
- a. $30+7/10$
- b. 45
- c. $60+9/5$
- d. 55

12. Con 97 cubos de cobre de 1 pulgada de lado cada uno, se construyó un cubo macizo de

mayor volumen posible, sin dividirlos. Entonces, la cantidad de cubos de cobre que no se utilizaron es:

- a. 19
- b. 27
- c. 33
- d. 41

13. Utilizando cerillas de fósforos de igual longitud se construyen cuadrados agregando cuadrados a la figura que ya se ha construido como lo muestra el siguiente esquema:

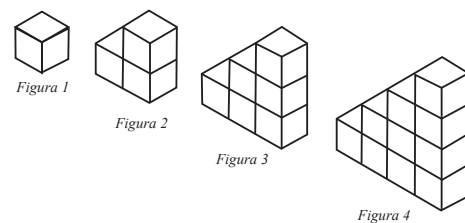


El número de cuadrados que se debe agregar a la figura número 35 para formar la figura número 36 es:

- a. 35
- b. 36
- c. 70
- d. 71

Ejercicios 14 – 15

Con cubos de madera se construye la siguiente secuencia de figuras:



14. El número de cubos que tiene la figura 15 es:

- a. 95
- b. 100
- c. 115
- d. 120

15. La figura que tiene 5050 cubos es:

- a. La figura 50
- b. La figura 55
- c. La figura 100
- d. La figura 105



Acertijos.

Un acertijo matemático está relacionado con situaciones cuya solución necesita argumentos o cálculos matemáticos. Es muy común que en la solución de algunos acertijos matemáticos se plantee una ecuación. Recordemos que una ecuación es la igualdad entre dos expresiones algebraicas, por ejemplo, $x+3+x+4=2x+7$. Las partes de una ecuación separadas por el signo de igualdad se llaman miembros de la ecuación y se pueden distinguir por primer miembro (parte que está a la izquierda del signo igual) y segundo miembro (parte que está a la derecha del signo igual), comúnmente se utilizan las letras del alfabeto para denotar la cantidad desconocida o incógnita de la ecuación y el valor que se obtiene para esta cantidad se denomina raíz o solución de la ecuación.

Ecuaciones lineales

Una ecuación lineal es una igualdad en la cual la variable solo puede tener como exponente a 1, es decir, el grado de la variable es siempre 1. Por ejemplo, $3x+1=2-3x+x$ es una ecuación lineal ya que la variable x , en todos sus términos es de grado 1. La ecuación $x^2+x=2+x^3$ no es una ecuación lineal ya que no todos los términos de la variable x son de grado 1. Algunas ecuaciones en su forma inicial no son lineales, pero después realizar algunas operaciones algebraicas se puede convertir en una ecuación lineal. El procedimiento para resolver una ecuación lineal consiste en generar a partir de la ecuación inicial, una serie de ecuaciones equivalentes (con forma más simple) hasta obtener una que se pueda resolver de manera inmediata. Para esto usamos las siguientes propiedades:

- Si a cantidades iguales se suman o se restan cantidades iguales, la igualdad no se altera.
- Si cantidades iguales se multiplican o dividen por otras cantidades (diferente de cero), la igualdad no se altera.

Ejemplo:
resolver la ecuación

$$3x-8=x+12$$

Solución:

Restando x de ambos miembros se obtiene:

$$3x-8-x=x+12-x$$

$$2x-8=12$$

sumando 8 a ambos miembros, se obtiene

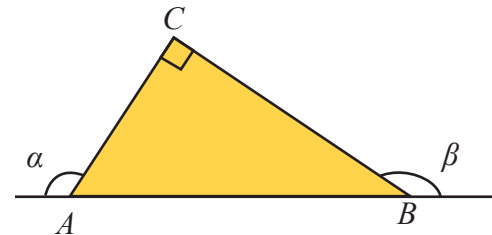
$$2x-8+8=12+8$$

$$2x=20$$

dividiendo por 2 ambos miembros,

$$2x/2=20/2$$

$$x=10$$



Solución:

Sea x la medida del ángulo CAB , así la medida del ángulo ABC será $90^\circ-x$. Ahora, los ángulos α y CAB son ángulos suplementarios así como también lo son los ángulos β y ABC , es decir,

$$\alpha+x=180^\circ \quad \text{y} \quad \beta+90^\circ-x=180^\circ$$

de donde se obtienen las relaciones

$$\alpha=180^\circ-x \quad \text{y} \quad \beta=90^\circ+x$$

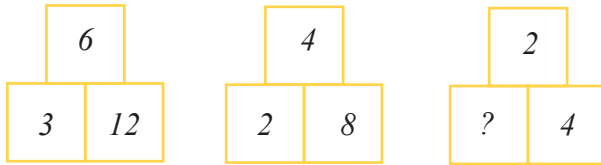
y dado que α y β están en razón de $11:16$, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{180^\circ-x}{90^\circ+x} &= \frac{11}{16} \\ 2880^\circ-16x &= 990^\circ+11x \\ 1890^\circ &= 27x \\ 70^\circ &= x \end{aligned}$$

Así se tiene que $\alpha=110^\circ$ y $\beta=160^\circ$.

Ejemplo:

¿Qué número debe reemplazar el signo de interrogación?

**Solución:**

En la figura se puede notar que:

$$\begin{aligned}\sqrt{3 \times 12} &= \sqrt{36} = 6 \\ \sqrt{2 \times 8} &= \sqrt{16} = 4 \\ \sqrt{1 \times 4} &= \sqrt{4} = 2\end{aligned}$$

así, el número que se debe reemplazar en signo de interrogación es el número 1.

Actividad 9

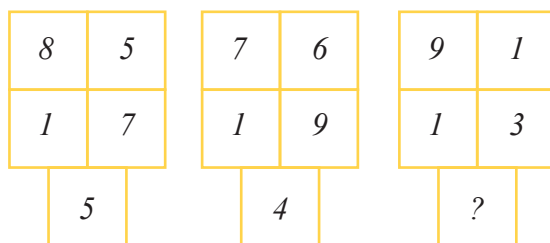
1. En la siguiente tabla

			14	
	22			
			34	
41				x
		53		

el número que debe estar en el lugar de x es:

- a. 43
- b. 35
- c. 45
- d. 54

2. El número que debe reemplazar el signo de interrogación en la siguiente figura es:



- a. 3
- b. 7
- c. 6
- d. 5

Ejercicios 3 – 4

Un número se descompone en dos partes, de tal manera que una parte es 10 más que la otra

3. Si las dos partes están en razón de 5:3, entonces el número es:

- a. 15
- a. 35
- a. 20
- a. 40

4. Una de las partes del número es :

- a. 5
- b. 10
- c. 15
- d. 20

5. Las edades de un padre y su hijo suman 66 años. La edad del padre es la edad del hijo invertida. ¿Cuántas soluciones posibles se pueden presentar?:

- a. 1
- b. 2
- c. 3
- d. 4

6. En un estanque hay 100 pares de peces. Nacen dos pares de peces por cada pez en el estanque. 350 de los peces que nacen se llevan a un río. ¿Cuántos peces quedarían en el estanque?

- a. 550
- b. 450
- c. 650
- d. 250

7. Usando solo la suma, ¿cuál es el mínimo número de ochos que se pueden emplear para formar el número mil?

- a. 7
- b. 8
- c. 9
- d. 10



8. Si tres quintos de un número es cuatro más que la mitad del número, entonces el número es:

- a. 45
- b. 35
- c. 40
- d. 55

9. En la siguiente tabla

20	19	18	17	16
31	28	a	22	19
26	21	16	b	6
26	22	18	14	c

el valor de $a+b+c$ es:

- a. 54
- b. 46
- c. 65
- d. 38

10. Pedro recibió una caja llena de huevos y al abrir la caja descubrió que varios huevos estaban quebrados. Luego los contó para presentar una queja formal en el supermercado y descubrió que 6 huevos estaban quebrados, lo que representaba el 15 por ciento del contenido total de la caja. ¿Cuántos huevos había en la caja?

- a. 20
- b. 30
- c. 40
- d. 50

11. Un centro de servicio al cliente recibió su mayor número de consultas vía telefónica entre las 3 p.m. y las 4 p.m., lo que fue un 60% más que las 600 consultas que recibió entre las 2 p.m. y las 3 p.m. En promedio, ¿cuántas consultas por minuto se recibieron entre las 3 p.m. y las 4 p.m.?

- a. 16
- b. 28
- c. 32
- d. 24

12. El promedio de tres números es 48. El promedio de dos de estos números es 56. ¿Cuál es el tercer número?

- a. 33
- b. 21
- c. 32
- d. 25

Ejercicios 13 – 14

La suma de las edades de cinco miembros de una familia es 107. Las edades de María y Sara suman 29, las edades de Sara y Juan suman 44, las edades de Juan y Lucas suman 57 y las edades de Lucas y Pedro suman 46.

13. La edad del menor miembro de esta familia es:

- a. 11
- b. 12
- c. 15
- d. 17

14. La edad del mayor miembro de esta familia es:

- a. 28
- b. 30
- c. 32
- d. 34

15. En 10 litros de un líquido L_1 se vierten 4 litros de un líquido L_2 y 6 litros de un líquido L_3 . De la mezcla obtenida L_4 , se extraen 3 litros, ¿cuántos litros del líquido L_3 quedan en la mezcla L_4 ?

- a. 3
- b. 3.5
- c. 5.1
- d. 2



05

Geometría

Geometría: Perímetros, Áreas y Volúmenes Definiciones.

Definiciones

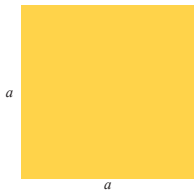
Perímetro: En un polígono, es la suma de las medidas de sus lados.

Área o superficie: Es la región del plano limitada por una figura plana.

Volumen: El volumen de un poliedro es la medida del espacio que en tres dimensiones es ocupado por un cuerpo.

Perímetros y áreas de algunas figuras planas

Cuadrado



$$A = a \cdot a = a^2$$

$$P = a + a + a + a = 4a$$

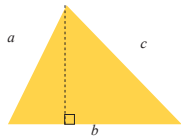
Rectángulo



$$A = a \cdot b$$

$$P = a + a + b + b = 2a + 2b$$

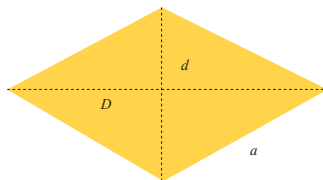
Triángulo



$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$P = a + b + c$$

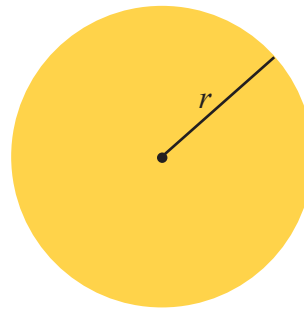
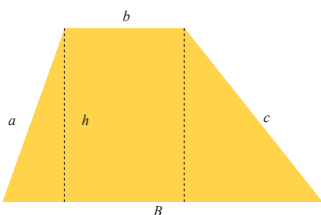
Rombo



$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

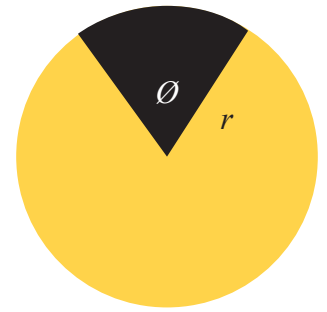
$$P = a + a + a + a = 4a$$

Trapezio



$$A = \pi \cdot r^2$$

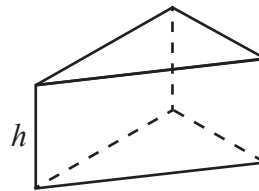
$$P = 2\pi \cdot r$$



$$A = \frac{r^2 \cdot \varnothing}{2}$$

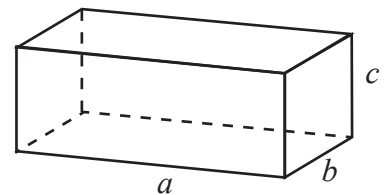
Volúmenes de algunos cuerpos

Prisma triangular



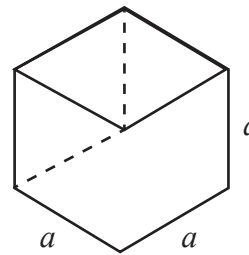
$$V = A_b \cdot h$$

Paralelepípedo rectangular



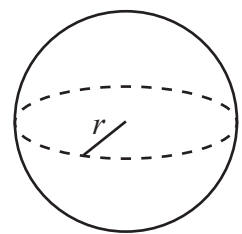
$$V = a \cdot b \cdot c$$

Cubo



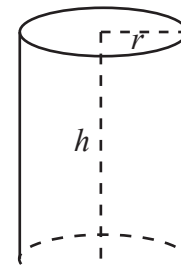
$$V = a \cdot a \cdot a = a^3$$

Esfera



$$V = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$$

Cubo

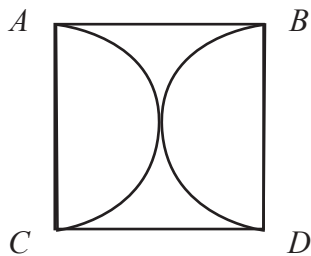


$$V = \pi r^2 \cdot h$$

Ejemplo:

en un cuadrado ABCD de lado 10 cm se inscriben dos semicircunferencias como se muestra en la figura. Determinar el área de la región sombreada.





Así se tiene que el perímetro de la figura es:

$$P=(2a+4a\pi)cm=2a(1+\pi)cm.$$

Ejemplo:

hallar el volumen de un tanque cilíndrico de agua que tiene una altura de 1 m, un diámetro de 40 cm y cuya sección superior es semiesférica.

Solución:

Calculemos primero el área del cuadrado (A_1):

$$A_1=(10\text{ cm})^2=100\text{ cm}^2$$

El área de una semicircunferencia (A_2) es la mitad del área de un círculo, es decir, $A_2=(\pi r^2)/2$. Para determinar el radio basta con observar que el centro de estas semicircunferencias coincide con el punto medio de cada lado vertical del cuadrado, así $r=10/2=5\text{ cm}$ y el área de cada semicircunferencia es:

$$A_2=\frac{\pi(5\text{ cm})^2}{2}=\frac{25}{2}\pi\text{ cm}^2$$

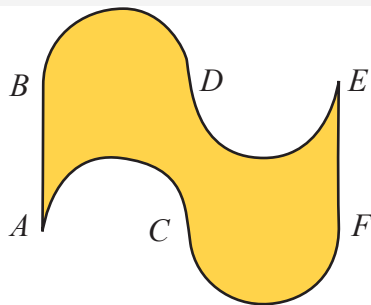
Finalmente, el área sombreada (A_s) de la figura es:

$$A_s=A_1-2\cdot A_2$$

$$A_s=(100-2\cdot\frac{25}{2}\pi)\text{ cm}^2=25(4-\pi)\text{ cm}^2$$

Ejemplo:

hallar el perímetro de la siguiente figura, si ABCD y DCFE son cuadrados de lado a cm

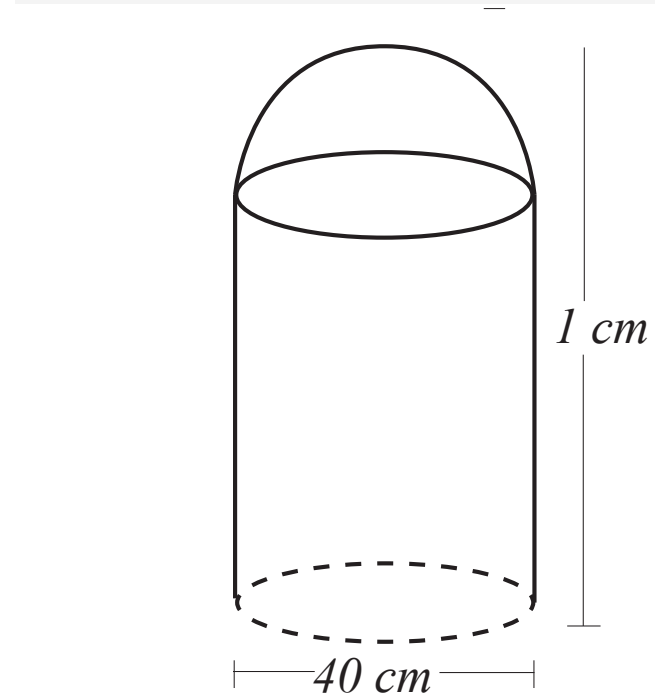


Solución:

Para determinar el perímetro de la figura se debe hallar la medida de los segmentos (AB) y (EF) y las medidas de las longitudes de las semicircunferencias (AC) , (BD) , (DE) y (CF) .

$$(AB)=(EF)=a\text{ cm}$$

$$(AC)=(BD)=(DE)=(CF)=(2\pi\cdot a)/2=\pi a\text{ cm}$$



Solución

En este caso, la parte superior del tanque es una semiesfera de radio $r=20\text{ cm}$ (la mitad del diámetro), por lo tanto el volumen V_1 de esta sección será el volumen de la mitad de una esfera:

$$V_1=\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2}=\frac{\frac{4}{3}\pi(20)^3}{2}=\frac{16000}{3}\pi\text{ cm}^3$$

Ahora, el volumen de un cilindro es el área de la base por su altura. En este caso, la altura del cilindro es la altura total menos el radio de la semiesfera, es decir, $1\text{ m} - 20\text{ cm} = 80\text{ cm}$ y el área de la base es $\pi r^2=\pi(20)^2\text{ cm}^2$, así el volumen V_2 de la sección cilíndrica es:

$$V_2=\pi(20)^2\cdot(80)=32000\pi\text{ cm}^3$$

finalmente, el volumen de este tanque es:

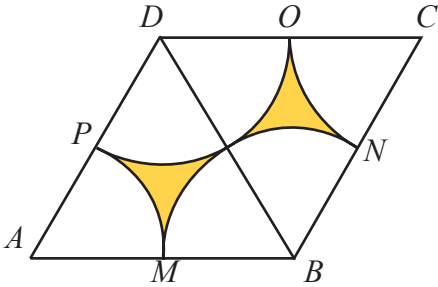
$$V=\frac{16000}{3}\pi+32000\pi=\frac{112000}{3}\pi\text{ cm}^3$$



Actividad 9

Ejercicios 1 – 3

En la siguiente figura los triángulos ABD y BCD son equiláteros de lado 8 cm ; (OP) , (MP) , (MN) y (ON) son arcos de circunferencias tangentes entre sí; M, N, O y P son los puntos medios de los segmentos (AB) , (BC) , (CD) y (AD) respectivamente.



1. El área de la región sombreada es:

- a. $8(\sqrt{3}-2\pi)\text{cm}^2$
- b. $16(2\sqrt{3}-\pi)\text{cm}^2$
- c. $8(2\sqrt{3}-\pi)\text{cm}^2$
- d. $16(\sqrt{3}-2\pi)\text{cm}^2$

2. El perímetro de la región sombreada es:

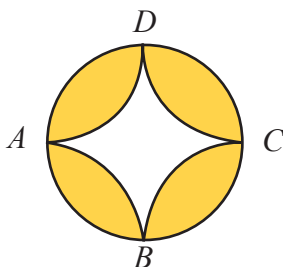
- a. $8\pi\text{ cm}$
- b. $16\pi\text{ cm}$
- c. $4\pi\text{ cm}$
- d. $12\pi\text{ cm}$

3. El área de la región no sombreada en el cuadrilátero $ABCD$ es:

- a. $8\pi\text{ cm}^2$
- b. $16(\pi+1)\text{ cm}^2$
- c. $8(\pi+2)\text{ cm}^2$
- d. $16\pi\text{ cm}^2$

Ejercicios 4 – 6

En la siguiente los arcos (AB) , (BC) , (CD) y (AD) son cuartos de circunferencias tangentes entre sí y el segmento $(AC) = 48\text{ cm}$.



4. El área de la región sombreada es:

- a. $2304(\pi-1)\text{ cm}^2$
- b. $2304(\pi-2)\text{ cm}^2$
- c. $1152(\pi-2)\text{ cm}^2$
- d. $1152(\pi-1)\text{ cm}^2$

5. El perímetro que limita la región no sombreada es:

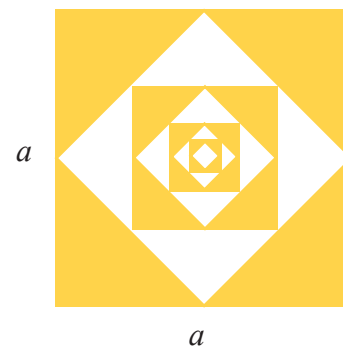
- a. $96\pi\text{ cm}$
- b. $12\pi\text{ cm}$
- c. $60\pi\text{ cm}$
- d. $48\pi\text{ cm}$

6. El área de la región no sombreada es:

- a. $1152(2-\pi)\text{ cm}^2$
- b. $576(4-\pi)\text{ cm}^2$
- c. $576(2-\pi)\text{ cm}^2$
- d. $1152(4-\pi)\text{ cm}^2$

Ejercicios 7 – 10

Al unir los puntos medios de un cuadrado de lado $a\text{ cm}$ se forma otro cuadrado, continuándose este proceso como se muestra en la siguiente figura.



7. El área de la región sombreada es:

- a. $25/32 a^2\text{ cm}^2$
- b. $55/64 a^2\text{ cm}^2$
- c. $85/128 a^2\text{ cm}^2$
- d. $105/256 a^2\text{ cm}^2$

8. El perímetro del menor cuadrado resultante en la figura es:

- a. $\sqrt{2}/4 a\text{ cm}$
- b. $\sqrt{2}/8 a\text{ cm}$
- c. $4\sqrt{2} a\text{ cm}$
- d. $8\sqrt{2} a\text{ cm}$



9. El área del menor cuadrado resultante en la figura es:

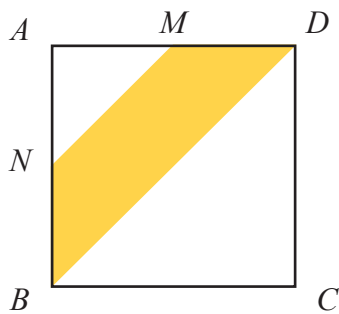
- a. $1/32 a^2 \text{ cm}^2$
- b. $1/64 a^2 \text{ cm}^2$
- c. $1/128 a^2 \text{ cm}^2$
- d. $1/256 a^2 \text{ cm}^2$

10. El área de la región no sombreada es:

- a. $23/32 a^2 \text{ cm}^2$
- b. $53/64 a^2 \text{ cm}^2$
- c. $43/128 a^2 \text{ cm}^2$
- d. $83/256 a^2 \text{ cm}^2$

Ejercicios 11 – 13

Los puntos M y N que se muestran en la siguiente figura son puntos medios de los lados AD y AB del cuadrado $ABCD$; $(AM) = 3 \text{ cm}$.



11. El área de la región sombreada es:

- a. $27/2 \text{ cm}^2$
- b. $51/2 \text{ cm}^2$
- c. $81/2 \text{ cm}^2$
- d. $63/2 \text{ cm}^2$

12. El perímetro que limita la región sombreada es:

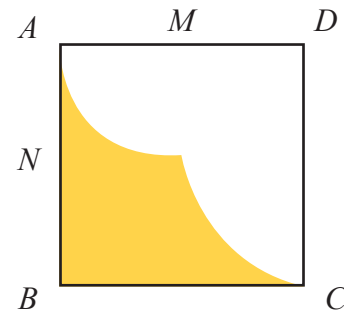
- a. $(9+\sqrt{2}) \text{ cm}$
- b. $2(3+\sqrt{2}) \text{ cm}$
- c. $3(2+3\sqrt{2}) \text{ cm}$
- d. $(2+3\sqrt{2}) \text{ cm}$

13. La altura del trapecio BDMN es:

- a. $(3\sqrt{2})/2 \text{ cm}$
- b. $\sqrt{2}/2 \text{ cm}$
- c. $\sqrt{2}/3 \text{ cm}$
- d. $(2\sqrt{2})/3 \text{ cm}$

Ejercicios 14 – 15

En la siguiente figura se muestra un cuadrado ABCD cuyo perímetro es $a \text{ cm}$.



14. El área de la región sombreada es:

- a. $a^2/128(4-\pi) \text{ cm}^2$
- b. $a^2/64(4-\pi) \text{ cm}^2$
- c. $a^2/64(6-\pi) \text{ cm}^2$
- d. $a^2/128(6-\pi) \text{ cm}^2$

15. El perímetro que limita la región sombreada es:

- a. $a/2 \pi \text{ cm}$
- b. $a/8 \pi \text{ cm}$
- c. $2a\pi \text{ cm}$
- d. $4a\pi \text{ cm}$





www.coporaciongilbertocheverrimejia.gov.co