Ecuaciones de primer grado

Adaptado de: https://www.lifeder.com/ecuaciones-primer-grado/

Las **ecuaciones de primer grado o lineales** con una incógnita son aquellas que pueden expresarse como la suma de dos términos, en la forma siguiente:

$$ax + b = 0,$$

donde a y b, con $a \neq 0$, son números reales (pertenecen al conjunto **R**).

Para resolverla se transponen términos, lo que significa cambiar términos de un lado a otro de la igualdad.

El primer paso es el siguiente:

$$ax = -b.$$

Para despejar la incógnita se transpone el término +b, que debe ir al lado derecho de la igualdad *con signo cambiado*.

Después se despeja el valor de x, de esta forma:

$$x = -b/a.$$

A modo de ejemplo vamos a resolver la siguiente ecuación:

$$6x - 5 = 4.$$

Transponemos el término –5 hacia el lado derecho con signo cambiado:

$$6x = 4 + 5.$$

Esto equivale a sumar 5 a ambos lados de la ecuación original:

$$6x - 5 + 5 = 4 + 5 \Rightarrow 6x = 9.$$

Y ahora despejamos la incógnita x:

$$x = 9/6 = 3/2,$$

que equivale a dividir a ambos lados de la igualdad por 6. Así que podemos valernos de lo siguiente para obtener la solución:

- Se puede sumar o restar la misma cantidad a ambos lados de la igualdad en una ecuación, sin alterarla.

- También se puede multiplicar (o dividir) por la misma cantidad *diferente de 0* a todos los términos, tanto a la izquierda como a la derecha de la ecuación.
- Si ambos miembros de una ecuación se elevan a la misma potencia, la igualdad tampoco se altera.

Cómo resolver ecuaciones de primer grado

La solución de una ecuación de primer grado también se conoce como **raíz** de la misma. Es el valor de x que convierte la expresión original en una igualdad. Por ejemplo, en:

$$5x = 8x - 15,$$

si sustituimos $x = 5$ en esta ecuación, se obtiene:

$$5 \cdot 5 = 8 \cdot 5 - 15,$$

$$25 = 40 - 15,$$

$$25 = 25.$$

Como las ecuaciones lineales de primer grado vienen en muchas formas, que a veces no son evidentes, hay una serie de reglas generales que comprenden varias manipulaciones algebraicas, con la finalidad de encontrar el valor de la incógnita:

- En primer lugar, si hay operaciones indicadas, estas deben llevarse a cabo.
- Los símbolos de agrupación como paréntesis, corchetes y llaves, en caso de existir, deben suprimirse manteniendo los signos adecuados.
- Los términos se transponen para colocar todos los que contienen la incógnita a un solo lado de la igualdad, y los que no la contienen al otro.
- Seguidamente se reducen todos los términos semejantes, para llegar a la forma

$$ax = -b.$$

- Y el último paso es despejar la incógnita.

Interpretación gráfica (opcional)

La ecuación de primer grado planteada al comienzo se puede derivar de la ecuación de la recta $y = mx+c$ haciendo $y = 0$. El valor de x que resulta corresponde a la intersección de la recta con el eje horizontal.

En la siguiente figura se tienen tres rectas. Comenzando por la recta de color verde, cuya ecuación es:

$$y = 2x - 6.$$

Haciendo y = 0 en la ecuación de la recta se obtiene la ecuación de primer grado:

$$2x - 6 = 0,$$

cuya solución es x = 6/2 = 3.

Ahora, cuando detallamos la gráfica, es fácil darse cuenta de que, en efecto, la recta corta al eje horizontal en x = 3.

La recta de color azul interseca al eje x en x = 5, que es la solución a la ecuación

$$-x + 5 = 0.$$

Por último, la recta cuya ecuación es y = 0.5x + 2 corta al eje x en x = –4, lo cual se advierte fácilmente de la ecuación de primer grado:

$$0.5\,x + 2 = 0,$$

$$x = 2/0.5 = 4.$$

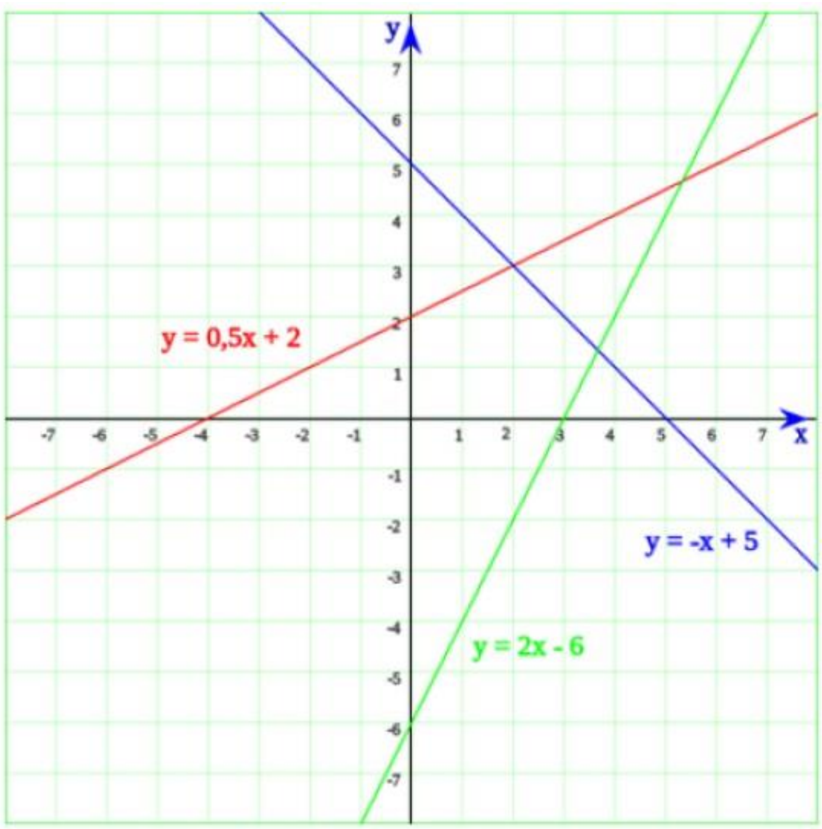

Figura. Tres rectas cuyas intersecciones con el eje horizontal corresponden a ecuaciones lineales. Fuente: Wikimedia Commons.

Ejemplos de ecuaciones lineales sencillas

Ecuaciones enteras

Son aquellas en cuyos términos *no hay denominadores*, por ejemplo:

$$21 – 6x = 27 – 8x.$$

Su solución es:

$$–6x + 8x = 27 – 21,$$

$$2x = 6,$$

$$X = 3.$$

Ecuaciones fraccionarias

Estas ecuaciones contienen *al menos un denominador diferente de 1*. Para resolverlas es recomendable *multiplicar todos los términos por el mínimo común múltiplo (mcm)* de los denominadores, a fin de suprimirlos.

La siguiente ecuación es de tipo fraccionario:

$$\frac{x+5}{6} - \frac{2x+3}{8} = \frac{1-5x}{12}$$

Los denominadores son 6, 8 y 12 y su mínimo común múltiplo, denotado como

m.c.m(6, 8,12)

es el menor de los números que contiene a dichos denominadores.

Como estos números son pequeños, no es difícil ver que

m.c.m(6, 8,12) = 24.

Este resultado se obtiene fácilmente al expresar los números como producto de números primos o sus potencias, veamos:

$$6 = 3.2,$$

$$8 = 2^3,$$

$$12 = 2^2 \cdot 3.$$

El mínimo común múltiplo se determina al multiplicar los factores comunes y no comunes de 6, 8 y 12 con su mayor exponente, entonces:

$$\text{mcm}(6,8,12) = 2^3 \cdot 3 = 8 \times 3 = 24.$$

Ya que se cuenta con el mínimo común múltiplo hay que multiplicarlo por cada uno de los términos de la ecuación:

$$24\left(\frac{x+5}{6}\right) - 24\left(\frac{2x+3}{8}\right) = 24\left(\frac{1-5x}{12}\right)$$

De esta manera los denominadores se suprimen y queda una ecuación con productos, más fácil de resolver:

$$4(x+5) - 3(2x+3) = 2(1-5x).$$

Hacemos uso de la propiedad distributiva:

$$4x + 20 - 6x - 9 = 2 - 10x.$$

Se agrupan todos los términos que contienen la incógnita x al lado izquierdo de la igualdad, dejando los términos independientes o numéricos del lado derecho:

$$4x - 6x + 10x = 2 + 9 - 20,$$

$$8x = -9,$$

$$x = -9/8.$$

Sistemas de ecuaciones de primer grado

Los sistemas de ecuaciones constan de *un conjunto de ecuaciones* con <u>dos o más incógnitas</u>.

La solución del sistema consiste en valores que satisfacen las ecuaciones *simultáneamente* y para determinarla de manera inequívoca, debe haber una ecuación por cada incógnita.

La forma general de un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas es:

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ a_{1n}x_n = b_{1,} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ a_{2n}x_n = b_{2,} \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ a_{mn}x_n = b_{m.} \end{array}$$

Si el sistema tiene solución se dice que es compatible **determinado**, cuando existe un conjunto infinito de valores que lo satisfacen es compatible **indeterminado**, y finalmente, si no tiene solución, entonces es **incompatible**.

En la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales se emplean varios métodos.

Un ejemplo de sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas es:

$$8x – 5 = 7y – 9,$$
$$6x = 3y + 6.$$

La solución de este sistema se presenta más adelante en la sección de ejercicios resueltos.

Ejercicios resueltos

Ejercicio 1

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$8x – 5 = 7y –9,$$
$$6x = 3y + 6.$$

Solución

Tal como está planteado, este sistema es idóneo para emplear el **método de sustitución**, ya que en la segunda ecuación la incógnita x está casi lista para el despeje:

$$x = (3y + 6) / 6.$$

Y se puede *sustituir* de inmediato en la primera ecuación la expresión que hemos encontrado para x. La primera ecuación, entonces, se convierte en una ecuación de primer grado con incógnita y:

$$8 \cdot [(3y + 6)/6] – 5 = 7y – 9.$$

El denominador se puede suprimir si se multiplica cada término por 6:

$$6 \cdot 8 \cdot [(3y + 6)/6] – 6\cdot 5 = 6 \cdot 7y – 6 \cdot 9,$$

$$8 \cdot (3y + 6) – 30 = 42y – 54.$$

Aplicando la propiedad distributiva en el primer término a la derecha de la igualdad:

$$24y + 48 –30 = 42y – 54 \Rightarrow 24y + 18 = 42y – 54.$$

La ecuación se puede simplificar, ya que todos los coeficientes son múltiplos de 6:

$$4y + 3 = 7y – 9,$$

$$–3y = –12,$$

$$y = 4.$$

Con este resultado vamos al despeje de x:

$$x = (3y + 6) / 6 \Rightarrow x = (12+6) / 6 = 3.$$

Ejercicio 2

Resolver la siguiente ecuación:

Solución

En esta ecuación aparecen productos, y siguiendo las instrucciones dadas al comienzo, hay que desarrollarlos en primer lugar:

$$3x – 10x + 14 = 5x + 36x + 12$$

Luego se llevan todos los términos que contienen las incógnitas al lado izquierdo de la igualdad, y al lado derecho estarán los términos independientes:

$$3x – 10x – 5x – 36x = 12 – 14,$$

$$–48x = –2,$$

$$x = 1/24.$$

Ejercicio 3

Al sumar los tres ángulos interiores de un triángulo se obtiene 180º. El mayor excede al menor en 35º, y este a su vez excede en 20º la diferencia existente entre el mayor y el mediano. ¿Cuáles son los ángulos?

Solución

Llamaremos x al ángulo mayor, y al del medio y z al menor. Cuando el enunciado afirma que la suma de ellos es 180º se puede escribir:

$$x + y + z = 180.$$

Después sabemos que el mayor excede al menor en 35º, esto lo podemos escribir así:

$$x = z + 35.$$

Por último, el menor excede en 20 º a la diferencia que hay entre el mayor y el mediano:

$$z = x – y + 20.$$

Tenemos un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas:

$$x + y + z = 180,$$

$$x = z + 35,$$

$$z = x - y + 20.$$

Al despejar z de la primera ecuación se tiene:

$$z = 180 - x - y.$$

Igualando con la tercera:

$$180 - x - y = x - y + 20.$$

Pasando las incógnitas al lado izquierdo como siempre:

$$-x - y - x + y = 20 - 180.$$

La y se cancela y queda:

$$-2x = -160,$$

o sea: $x = 80^{\circ}$.

De la segunda ecuación se halla el valor de z:

$$z = x - 35 = 80 - 35 = 45^{\circ}.$$

Y el valor de y se encuentra de la primera o la tercera:

$$y = 180 - x - z = 180 - 80 - 45 = 55^{\circ}.$$

Referencias

Lifeder. (22 de mayo de 2020). *Ecuaciones de primer grado: fórmula, cómo resolverlas, ejemplo, ejercicios*. Recuperado de: https://www.lifeder.com/ecuaciones-primer-grado/.

Baldor. (1977). *Álgebra Elemental*. Ediciones Cultural Venezolana.

Hoffman, J. (s.f.). *Selección de temas de Matemática*. Volumen 2.

Jiménez, R. (2008). *Álgebra*. Prentice Hall.

Zill, D. (1984). *Álgebra y Trigonometría*. McGraw Hill.