Progresiones.

Una sucesión es un conjunto de números que están ordenados en cierta forma. Por ejemplo, el conjunto

$$\{2,4,6,8,10\}$$

es una sucesión cuyos elementos (o términos) son los primeros cinco números enteros positivos pares. El número 2 es el primer término, el número 4 es el segundo término, y así sucesivamente.

Progresiones aritméticas

La sucesión $1,4,7,10,13,16\ldots$ tiene la propiedad de que cada término (excepto el primero) puede obtenerse del término anterior sumando 3, es decir,

$$4=1+3 \quad 7=4+3 \quad 10=7+3 \quad 13=10+3$$

y en general, si denotamos con a_n el término enésimo término (o término general) de la sucesión se tiene que $a\_n=a\_(n-1)+3$ donde $n>0$ $,n.Z$. Una sucesión con esta propiedad se denomina progresión aritmética. En estas sucesiones todo par de términos consecutivos tiene una diferencia común d.

Propiedades:

• El término n-ésimo de una progresión aritmética cuyo primer término es a_1 se determina mediante la fórmula

$$a\_n=a\_1+(n-1).d$$

• La suma S_n de los primeros n términos de una progresión aritmética es:

$$S\_n=n/2\ [2a\_1+(n-1).d]=n/2(a++a\_n)$$

Ejemplo:
un deportista sabe que puede disminuir su tiempo para correr 100 metros planos en 0.05 segundos por cada mes de enteramiento continuo. ¿Cuántos meses de practica necesita este deportista para reducir su tiempo actual de 17.50 segundos a 16.25 segundos?

Solución:

Primero identificamos los tiempos que va obteniendo el deportista por cada mes de práctica, $17.50,17.45,17.40,\ldots$

Estos tiempos forman una progresión aritmética ya que dos términos consecutivos están a una misma diferencia,

$$17,45-17.50=-0.05 \qquad 17.40-10.45=-0.05$$

así $d=-0.05$ y aplicando la propiedad para el término n-ésimo de una progresión aritmética, tenemos:

$$a\_n=a\_1+(n-1).d$$
$$16.25=17.50+(n-1).(-0.05)$$
$$16.25-17.25=(n-1).(-0.05)$$
$$-1.25=(n-1).(-0.05)$$
$$(-1.25)/(-0.05)=n-1$$
$$25=n-1$$
$$n=26$$

Por tanto, el deportista debe practicar durante 26 meses para alcanzar el tiempo deseado.
Progresiones geométricas

La sucesión $2,8,32,128,512,\ldots$ tiene la propiedad de que cada término (excepto el primero) puede obtenerse del término anterior multiplicando por 4, es decir,

$$8=2\times4 \qquad 32=8\times4 \qquad 128=32\times4$$

y en general, si denotamos con a_n el término enésimo término (o término general) de la sucesión se tiene que $a\_n=a\_(n-1)\times4$ donde $n>0$ $,nEZ$.

Una sucesión con esta propiedad se denomina progresión geométrica. En estas sucesiones todo par de términos consecutivos tiene una razón común r.

Propiedades:

• El término n-ésimo de una progresión geométrica cuyo primer término es a_1 se determina mediante la fórmula.

$$a\_{n}=a\_{1}.r^{n-1}$$

• La suma S_n de los primeros n términos de una progresión geométricas es:

$$s_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1 - r}$$

Ejemplo:
Hallar el valor de la siguiente suma

$$2+6+18+...+39366$$

Solución:
Los términos de esta suma forman una progresión geométrica

$$\frac{6}{2}=3 \qquad \frac{18}{6}=3$$

Para hallar el valor de la suma necesitamos hallar el número de términos que la forman, es decir, que posición (n) ocupa el número 39366

$$a_n=a_1.r^{n-1}$$
$$39366=2.3^{n-1}$$
$$39366=2.\ 3^n/3$$
$$59049=3^n$$
$$3^{10}=3^n$$
$$n=10$$

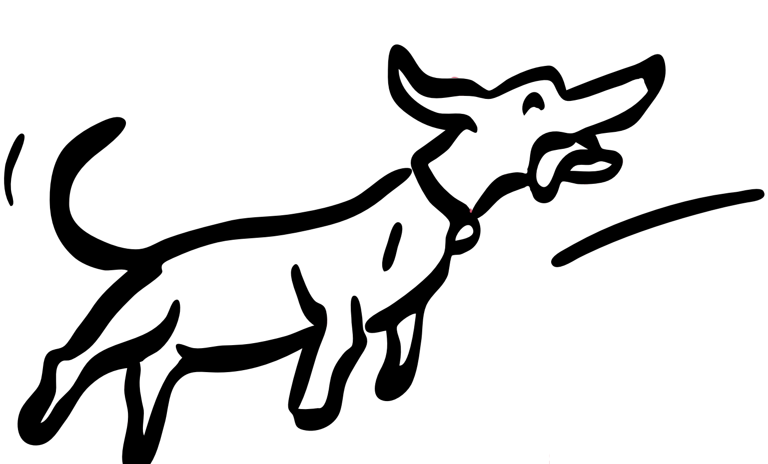
Así se tiene que la suma está formada por 10 términos y su valor es

$$s_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1 - r}$$

$$s_{10} = \frac{2(1-3^{10})}{1 - 3}$$

$$s_{10} = \quad 59048$$

Por tanto, el valor de la suma es 59048.



Actividad 5

1. En la sucesión $2,8,32,128...$ el número 2048 es el término

a. a_6
b. a_9
c. a_12
d. a_10

2. El decimoquinto término de una progresión geométrica de razón común 2 y que tiene a 192 como octavo término, es:

a. 16384
b. 3072
c. 24576
d. 12288

3. Los términos de la progresión aritmética tal que $a\_5+a\_9=72$ y $a\_7+a\_12=97$ son:

a. 5,10,15,...
b. 7,11,15,...
c. 6,11,16,...
d. 9,13,17,...

4. Si en una progresión aritmética $a\_r=m$ y $a\_m=r$, entonces a_n es:

a. $m-r+n$
b. $m+r-n$
c. $m+r+n$
d. $m-r-n$

5. Si $(a-b),(b-c),(c-a)$, son tres términos consecutivos de una progresión geométrica, entonces el valor de $(a+b+c)$^2 es:

a. $abc(a+b+c)$
b. $2(a^2+b^2+c^2)$
c. $3(ab+bc+ac)$
d. a^2 b^2+b^2 c^2+a^2 c^2

6. La suma de todos los números divisibles por 7 comprendidos entre 80 y 500 es:

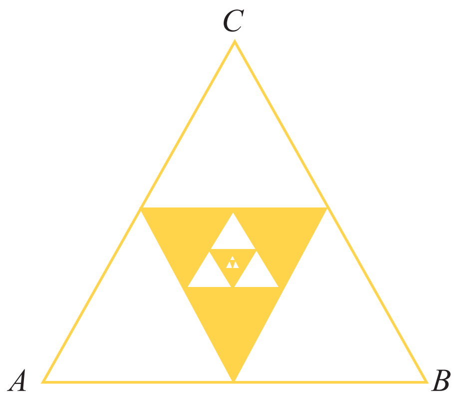
a. 15780
b. 17430
c. 19350
d. 18960

7. ¿Cuántos términos de la sucesión $12,-9,-6,-3,...$ deben tomarse para que la suma de estos términos sea 54?

a. 17
b. 15
c. 10
d. 12

Ejercicios 8 – 10

El triángulo ABC que se muestra en la siguiente figura es un triángulo equilátero de lado l_1 cm. Los puntos medios de sus lados se unen para formar otro triángulo de lado l_2 cm cuyos puntos medios, a su vez, se unen para formar otro triángulo de lado l_(3) cm, continuando este proceso como se indica en la figura:



8. El número total de triángulos que presenta la figura es:

a. 17
b. 25
c. 21
d. 13

9. Si $l_1=10\ cm$, entonces el valor de l_6 es:

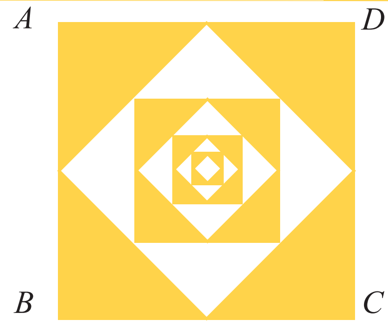
a. 5/16 cm
b. 25/16 cm
c. 5/32 cm
d. 1/16 cm

10. Si $l_1=10\ cm$ y el proceso se hace hasta formar el triángulo de lado $l_{10}\ cm$, entonces, sobre el valor de $l_1+l_2+l_3+...+l_{10}$ se puede afirmar con certeza que:

a. Es un número racional mayor que 20
b. Es un número entero menor que 20
c. Es un número racional menor que 20
d. Es un número entero mayor que 20

Ejercicios 11 – 13

Al unir los puntos medios de un cuadrado ABCD se forma otro cuadrado, continuándose este proceso como se muestra en la siguiente figura:



11. El número total de triángulos que presenta la figura es:

a. 36
B. 28
C. 32
D. 24

12. Para obtener 100 triángulos sombreados a partir de la figura dada, ¿Cuántos cuadrados más se deben adicionar?

a. 33
B. 21
C. 17
D. 25

13. La expresión que determina el número de total de triángulos (T) en función de la cantidad de cuadrados (C) es:

a. T=4C+1
B. T=4C-1
C. T=4C+4
D. T=4C-4

Ejercicios 14 – 15

Parte de una pared rectangular se va a decorar con baldosas cuadradas de 12 cm de lado de tal manera que cada línea tenga sólo una baldosa menos que la anterior.

14. Si la pared tiene una base de $2.4\ m$ y una altura de $1.32\ m$, entonces el número de baldosas que utilizaran para esta decoración es:

a. 150
B. 155
C. 160
D. 165

15. La cantidad de baldosas que quedan en la última línea de la decoración es:

a. 16
B. 15
C. 12
D. 10