

1.1 实数

安冬

北京大学北京国际数学研究中心 (BICMR)

andong@bicmr.pku.edu.cn

25-26 学年第 1 学期

有理数与无理数

- ▶ 自然数: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
- ▶ 整数: $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$
- ▶ 有理数:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n > 0, \gcd(m, n) = 1 \right\}$$

- ▶ $\gcd(m, n)$: m 和 n 的最大公约数
- ▶ 关于四则运算封闭 (数域)

有理数与无理数

定理 $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

- ▶ 无理数：无限不循环小数
- ▶ $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \pi, e, \dots$

实数集的基本性质

- ▶ 实数：有理数 + 无理数， \mathbb{R}
- ▶ 基本性质：
 1. \mathbb{R} 是一个数域
 2. 对加法和乘法满足交换律、结合律和分配律
 3. \mathbb{R} 是一个有序数域
 4. \mathbb{R} 具有完备性：单调有界实数列必有在实数域内的极限

数轴与区间

数轴：直线上取定一个原点 O , 一个单位长度和方向

- ▶ 数轴上的点与 \mathbb{R} 中的元素一一对应
- ▶ 有序性的几何意义

数轴与区间

给定两个实数 $a < b$:

- ▶ 开区间: $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$
- ▶ 闭区间: $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$
- ▶ 半开半闭区间: $(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$, $[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$
- ▶ $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
- ▶ 无穷区间: $(a, +\infty) = \{x \mid x > a\}$, $(-\infty, b)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$

数轴与区间

对于区间 (a, b) :

- ▶ 长度: $b - a$
- ▶ 中心: $\frac{a+b}{2}$
- ▶ 半径: $\frac{b-a}{2}$
- ▶ 其中必有有理数和无理数

绝对值不等式

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

- 数轴上 x 到原点的距离

绝对值不等式

基本性质：对于 $x, y \in \mathbb{R}$ ，我们有：

1. $|x| \geq 0$ ，等号成立当且仅当 $x = 0$
2. $|x| = |-x|$
3. $|x + y| \leq |x| + |y|$
4. $|xy| = |x||y|$

基本性质：对于 $a, b, c \in \mathbb{R}$ ，我们有：

1. $|a - b| \geq 0$ ，等号成立当且仅当 $a = b$
2. $|a - b| = |b - a|$
3. 三角不等式： $|a - c| \leq |a - b| + |b - c|$

绝对值不等式

命题 对于 $a \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}_+$, 我们有

$$|x - a| < r \iff a - r < x < a + r$$

- ▶ 点 a 的 r 邻域: $U_r(a) = (a - r, a + r)$
- ▶ 点 a 的空心 r 邻域: $U_r(a) \setminus \{a\}$

绝对值不等式

命题 对于 $x, y \in \mathbb{R}$, 我们有

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

作业

习题 1.1: 2, 4, 6, 8