4.2 洛必达法则

安冬

北京大学北京国际数学研究中心（BICMR）

andong@bicmr.pku.edu.cn

25-26 学年第 1 学期

$0/0$ 型未定式

$f(x)$ 和 $g(x)$ 在 a 附近有定义，且 $\lim_{x\to a} f(x)$ 和 $\lim_{x\to a} g(x)$ 存在，考虑

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

若 $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$，我们称它为 $0/0$ 型未定式

- $0/0$ 型极限可能存在，也可能不存在（震荡或无穷）

$0/0$ 型未定式

定理（洛必达法则）：若 $f(x), g(x)$ 满足

1. $f(x), g(x)$ 在点 a 的一个空心邻域内可导
2. 在该邻域内 $g'(x) \neq 0$
3. $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$
4. 极限 $\lim_{x\to a}(f'(x)/g'(x))$ 存在

则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- 单侧极限也成立
- 只对未定式成立
- 核心逻辑：导数比值极限存在 $\Longrightarrow$ 原比值极限存在且相等
- 实际题目中经常要多次洛必达，或与其它技巧结合使用

$0/0$ 型未定式

例：求

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2},\qquad \lim_{x\to 0+0}\frac{\sqrt{x}-\sin\sqrt{x}}{x^{3/2}}$$

$0/0$ 型未定式

a 可以是 $\infty, +\infty, -\infty$

定理（洛必达法则）：若 $f(x), g(x)$ 满足

1. $f(x), g(x)$ 在 $\mathbb{R}\backslash[-A, A]$ 可导
2. 在该区域内 $g'(x) \neq 0$
3. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$
4. 极限 $\lim_{x\to\infty}(f'(x)/g'(x))$ 存在

则

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$0/0$ 型未定式

例:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+1/x)}{\mathrm{arccot} x}$$

∞/∞ 型未定式

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

∞/∞ 型未定式： $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$

定理： 若 $f(x), g(x)$ 满足

1. $f(x), g(x)$ 在点 a 的一个空心邻域内可导
2. 在该邻域内 $g'(x) \neq 0$
3. $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$
4. 极限 $\lim_{x\to a}(f'(x)/g'(x))$ 存在

则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- 单侧极限或 a 为 $\infty, +\infty, -\infty$ 等情况均成立

∞/∞ 型未定式

例：求

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{\ln(\tan\frac{\pi x}{2})}{\ln(1-x)}$$

∞/∞ 型未定式

例：设 $\alpha > 0$，$P(x)$ 是一个多项式，求

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}}, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{P(x)}{e^{x}}$$

其他未定式

基本思路：恒等变形后转化为 $0/0$ 型或者 ∞/∞ 型，再用洛必达法则

1. $0\cdot\infty$ 型：$f(x)\to 0,\ g(x)\to\infty$，考虑 $f(x)g(x)$ 的极限
   - 考虑 $\frac{f(x)}{1/g(x)}$ 或 $\frac{g(x)}{1/f(x)}$
2. $\infty-\infty$ 型：$f(x)\to+\infty,\ g(x)\to+\infty$，考虑 $f(x)-g(x)$ 的极限
   - 尝试通分
3. 0^0 型：$f(x)\to 0+0,\ g(x)\to 0+0$，考虑 $f(x)^{g(x)}$ 的极限
   - 取对数
4. ∞^0 型：$f(x)\to+\infty,\ g(x)\to 0+0$，考虑 $f(x)^{g(x)}$ 的极限
   - 取对数
5. 1^∞ 型：$f(x)\to 1,\ g(x)\to+\infty$，考虑 $f(x)^{g(x)}$ 的极限
   - 取对数

其他未定式

例：求

$$\lim_{x\to 0+0} x\ln x, \qquad \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$$

其他未定式

例：求

$$\lim_{x\to 0+0} x^x, \qquad \lim_{x\to \pi/2-0} (\tan x)^{\cos x}, \qquad \lim_{x\to 0+0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$$

作业

习题 4.2： 3, 6, 7, 18