5.3 空间中平面与直线的方程

安冬

北京大学北京国际数学研究中心（BICMR）

andong@bicmr.pku.edu.cn

25-26 学年第 1 学期

平面的方程

如何唯一的确定一个平面？

平面的方程

法向量：垂直于平面的非零向量

- 一个给定平面的法向量都共线

点法式方程：一个平面可由它的法向量和它上面一个点确定. 设法向量 $\mathbf{n}=(A,B,C)$，平面上一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，则平面上任意一点 $P(x,y,z)$ 都满足

$$\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{P_0P}=0$$
$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

- 方程本质上不依赖于 $\mathbf{n}$ 和 P_0 的具体选取

一般方程：

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (A^2+B^2+C^2\neq 0)$$

- 平面与三元一次方程有一一对应关系
- (A,B,C) 为平面的一个法向量

平面的方程

例 1：将 $3x+4y+6z=1$ 化成点法式方程

例 2：求点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离

平面的方程

三个不在同一直线上的点确定一个平面

设平面上的三个点

$$P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2), P_3(x_3, y_3, z_3)$$

$P(x, y, z)$ 是平面上的一个点，当且仅当

$$\vec{P_1P} \cdot (\vec{P_1P_2} \times \vec{P_1P_3}) = 0$$

三点式方程：

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

平面的方程

如何确定平面的位置？

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

1. A, B, C 中两个为 0：垂直于某坐标轴（或平行于某坐标平面）的平面
2. A, B, C 中一个为 0：平行于某坐标轴的平面
   - 以 $Bx + Cy + D = 0$ 为例，先在 Oyz 平面上画出该直线，再沿 x 轴平移
3. A, B, C 都不为 0，但 D 为 0：过原点的直线
   - 找平面与两个坐标平面的交线
4. A, B, C, D 都不为 0：
   - 截距式方程：
   $$\frac{x}{-D/A} + \frac{y}{-D/B} + \frac{z}{-D/C} = 1$$
   - x,y,z 轴上的截距：$-D/A, -D/B, -D/C$
   - 截距式方程不能表示所有平面

平面的位置关系

给定两个平面

$$
\begin{aligned}
A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\
A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0
\end{aligned}
$$

1. 平行：(A_1, B_1, C_1) 和 (A_2, B_2, C_2) 共线
2. 重合：A_1, B_1, C_1, D_1 和 A_2, B_2, C_2, D_2 成比例
3. 垂直：(A_1, B_1, C_1) 和 (A_2, B_2, C_2) 垂直
4. 平面的夹角 θ：

$$
\cos\theta = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|}, \quad \mathbf{n}_1 = (A_1, B_1, C_1), \quad \mathbf{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)
$$

平面的位置关系

例：设两个平行平面为

$$
\begin{aligned}
Ax + By + Cz + D_1 &= 0 \\
Ax + By + Cz + D_2 &= 0
\end{aligned}
$$

求它们的距离

直线的方程

两个不平行的平面相交为一条直线

一般方程/两面式方程：

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

- 方向向量：平行于该直线的一个非零向量，可以是 $(A_1, B_1, C_1) \times (A_2, B_2, C_2)$

直线的方程

直线可以由一个点和一个方向向量确定

参数方程：设直线上一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$，方向向量 $\mathbf{e} = (a, b, c)$，则对于直线上任意一点 $P(x, y, z)$，都有 $\overrightarrow{P_0P}$ 与 $\mathbf{e}$ 共线

$$\begin{cases} x - x_0 = ta \\ y - y_0 = tb \\ z - z_0 = tc \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

标准方程：

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

- 若分母为 0，则约定对应的分子也为 0

直线的方程

例 1：将直线的一般方程化为标准方程

$$\begin{cases} x-y+z-1=0 \\ 2x+y-3z=0 \end{cases}$$

例 2：求点 $P(x,y,z)$ 到直线 $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$ 的距离

直线的位置关系

两直线的位置关系：

1. 垂直：方向向量垂直
2. 平行：方向向量共线

直线与平面的位置关系：

1. 垂直：直线的方向向量与平面的法向量共线
2. 平行：直线的方向向量与平面的法向量垂直

计算夹角转化为方向向量和/或法向量的点/叉乘来算

作业

习题 5.3： 2(3), 8, 12(1), 16, 20