作业 2

（如无特殊说明，不含下标的范数记号 $\|\cdot\|$ 表示矩阵/向量 2 范数）

1. 证明：若 U_A 为矩阵 A 的一个 (α, a, ϵ)-block-encoding，那么对于任意的 $\beta > 0$，都存在一个 ϵ' 使得 U_A 为矩阵 A/β 的一个 $(\alpha/\beta, a, \epsilon')$-block-encoding. 并给出 ϵ' 的表达式.

2.

(1) 设 u, v 为两个非零向量，试证明
$$\left\| \frac{u}{\|u\|} - \frac{v}{\|v\|} \right\| \leq 2\frac{\|u - v\|}{\|u\|}.$$

(2) 设 $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^{2^n}$ 是一个量子态，O_ψ 是 $|\psi\rangle$ 的态制备 oracle，$A \in \mathbb{C}^{2^n \times 2^n}$ 是一个矩阵，U_A 是 A 的 (α, a, ϵ)-block-encoding. 请设计一个以 $|0^a\rangle |0^n\rangle$ 为初始状态的近似计算 $A|\psi\rangle / \|A|\psi\rangle\|$ 的量子算法，并给出误差估计（即算法成功时实际输出的量子态与 $A|\psi\rangle / \|A|\psi\rangle\|$ 的距离的上界）.

3. 设 $A = (A_{ij}) \in \mathbb{C}^{N \times N}$ 是一个稀疏度为 s 的稀疏矩阵. 定义 $\|A\|_{\max} = \max_{i,j} |A_{ij}|$. 试证明
$$\|A\| \leq s\|A\|_{\max}.$$

4. 设 $a_j (0 \leq j \leq N-1)$ 为 N 个模长不大于 1 的复数，并假设我们已知一个酉变换 U_a 满足
$$U_a : |j\rangle |0\rangle \mapsto |j\rangle |a_j\rangle.$$
试构造对角矩阵 $A = \mathrm{diag}(a_0, a_1, \cdots, a_{N-1})$ 的一个 block-encoding. （提示：考虑正交基的复制操作，并参考构造稀疏矩阵 block-encoding 的方法）

5. 考虑 Fig. 1 中的量子线路，其中 $|\psi\rangle$ 是一个量子态，U 是一个酉矩阵.

(1) 试说明如何利用该线路估计 $\mathrm{Im}\langle\psi|U|\psi\rangle$.

(2) 如果我们想要以不低于 $1-\delta$ 的概率得到 $\mathrm{Im}\langle\psi|U|\psi\rangle$ 的一个误差不超过 ϵ 的估计（其中 δ 和 ϵ 为两个很小的正参数），试估计需要重复 Fig. 1 的次数.

6. 给定 J 个酉矩阵 U_j 和 J 个复数 c_j. 记
$$O_L : |0\rangle \mapsto \frac{1}{\sqrt{\|\vec{c}\|_1}} \sum_{j=0}^{J-1} \overline{\sqrt{c_j}} |j\rangle, \quad O_R : |0\rangle \mapsto \frac{1}{\sqrt{\|\vec{c}\|_1}} \sum_{j=0}^{J-1} \sqrt{c_j} |j\rangle,$$
$$O_{\mathrm{sel}} = \sum_{j=0}^{J-1} |j\rangle\langle j| \otimes U_j,$$
其中 $\sqrt{z}$ 为复数的根号函数主值分支，$\bar{z}$ 表示复数的共轭. 考虑 Fig. 2 中的量子线路. 试说明该线路给出了 $\sum_{j=0}^{J-1} c_j U_j$ 的一个 (α, a, ϵ)-block-encoding，并说明 α, a, ϵ 的值.

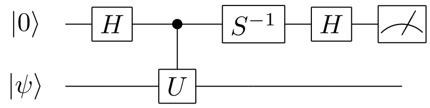

Figure 1:

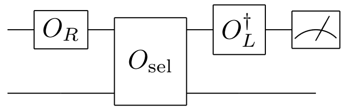

Figure 2:

7. 在本题中我们将尝试构造一个矩阵指数的量子算法，并分析其计算复杂度. 为了简单起见，我们考虑一个酉变换 U，并考虑它的矩阵指数

$$\exp(U)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}U^k.$$

算法的核心思想为，我们采用 LCU 实现

$$\sum_{k=0}^{K-1}\frac{1}{k!}U^k,$$

其中 K 是一个正整数. 当 K 充分大时，这会是 $\exp(U)$ 的一个足够好的逼近（为了简单起见，我们可以取 K 是 2 的幂次，这总可以通过进一步增大 K 来实现）

(1)（Prepare oracle）试写出 $\vec{c}=(1,1/2!,1/3!,\cdots,1/(K-1)!)^T$ 对应的量子态制备 oracle 的定义（注意归一化参数）. 在本题目的剩余部分我们将这一 oracle 记为 O_{prep}.

(2)（Select oracle）记

$$O_{\text{sel}}=\sum_{k=0}^{K-1}|k\rangle\langle k|\otimes U^k.$$

对于任意的指标 k，我们记它的二进制表示为 $k=(d_{\log_2 K-1}\cdots d_1d_0)_2=\sum_{i=0}^{\log_2 K-1}d_i2^i$，同样对应的量子计算基态为 $|k\rangle=|d_{\log_2 K-1}\rangle\cdots|d_1\rangle|d_0\rangle$. 试证明 Fig. 3 中的量子线路恰好实现了 O_{sel}，并计算该线路关于 U 的访问复杂度.

(3)（LCU）基于 O_{prep} 和 O_{sel}，试构造一个实现 $\sum_{k=0}^{K-1}\frac{1}{k!}U^k$ 的 $(\alpha,a,0)$-block-encoding 的量子线路，并指出对应的 α 和 a 的取值.

(4)（误差估计）对于任意给定的 $\epsilon>0$，K 至少要取多大才能保证在第 (3) 问中构造的量子线路是 $\exp(U)$ 的一个 (α,a,ϵ)-block-encoding（提示：考虑建立 $\left\|\exp(U)-\sum_{k=0}^{K-1}\frac{1}{k!}U^k\right\|$ 的一个上界）?

(5)（复杂度分析）整个算法关于 U 的访问复杂度是多少（结果用 ϵ 表示）?

至此，我们构造了一个计算 $\exp(U)$ 的量子算法. 一些额外的思考题（仅作为思维拓展，无需在作业中回答下面这些问题）:

(1)* 一般来说，Prepare oracle O_{prep} 可以通过 $\mathcal{O}(K)$ 的计算复杂度来实现. 这是为什么? $\mathcal{O}(K)$ 的计算复杂度是否可以进一步改进?

(2)* 对于一个厄米矩阵 H 满足 $\|H\|\leq 1$，以及一个正实数 $T>1/\|H\|$，$\exp(-iHT)$ 要如何实现? 如果直接采用类似本题目中的方法，总的计算复杂度是如何依赖于 T 的?

(3)* 对于一个一般的矩阵 A 和正实数 $T>0$，$\exp(AT)$ 要如何实现? 它的计算复杂度如何?

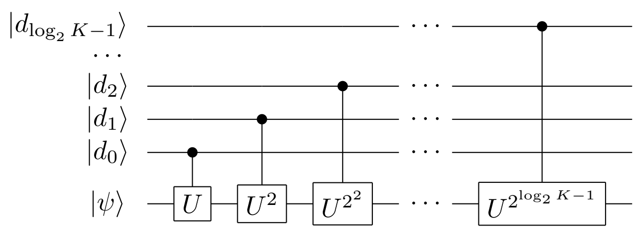
$|d_{\log_2 K-1}\rangle$
$\cdots$
$|d_2\rangle$
$|d_1\rangle$
$|d_0\rangle$
$|\psi\rangle$
U
U^2
U^{2^2}
$U^{2^{\log_2 K-1}}$

Figure 3: