2.9 变上限的定积分
2.10 微积分基本定理

安冬

北京大学北京国际数学研究中心（BICMR）

andong@bicmr.pku.edu.cn

25-26 学年第 1 学期

不定积分/定积分

不定积分和定积分的关系是什么？

变上限积分函数

设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的一个可积函数

定义（变上限积分函数）:

$$F_0(x) = \int_a^x f(t)dt$$

- 为避免记号混淆，被积变量换为了 t
- 对于 $f(x)$，通常我们会假设更强的连续性条件

变上限积分函数

定理（积分中值定理）：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则存在一点 $c \in [a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

变上限积分函数

定理：设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则变上限积分函数

$$F_0(x) = \int_a^x f(t)dt$$

在 $[a, b]$ 上连续，(a, b) 上可导，且 $F_0{}'(x) = f(x)$

变限积分函数

定义（变下限积分函数）:

$$G_0(x) = \int_x^b f(t)dt$$

可以证明:

$$G_0{}'(x) = -f(x)$$

一般地，只要 $f(x)$ 在对应区间上连续，无论 x 与 a, b 的大小关系，都有

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x), \quad \left(\int_x^b f(t)dt\right)' = -f(x)$$

定义（变限积分函数）:

$$\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$$

变限积分函数

例 1: 求函数 $F(x) = \int_0^{2x+1} e^t \sin 5t dt$ 的导数

例 2: 求函数 $F(x) = \int_1^x x f(t) dt$ 的导数，其中 $f(x)$ 是一个连续函数

变限积分函数

例 3: 求函数 $F(x) = \int_{x^2}^{x} \sqrt{1+t}dt$ 的导数

例 4: 求函数 $F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$ 的导数，其中 $f(x)$ 连续，$u(x), v(x)$ 可导

微积分基本定理

定理（微积分基本定理）：设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，$F(x)$ 是 $f(x)$ 在 (a, b) 上的一个原函数，即

$$F'(x) = f(x),$$

又设 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，这时我们有

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

- 牛顿-莱布尼兹公式
- 其他写法：$\int_a^b \frac{dF}{dx}dx = F(b) - F(a)$, $\int_a^b dF = F(x)\Big|_a^b$
- 注意应用条件：$f(x)$ 和 $F(x)$ 需要在闭区间上连续，$F'(x) = f(x)$ 需要在开区间上点点成立

微积分基本定理

例 1: 求 $\int_0^1 (e^x + x)dx$

例 2: 求 $\int_{-1}^2 |x|[x]dx$

微积分基本定理

例 3: **求** $\lim_{n\to\infty}(\frac{k}{n}+1)^3\frac{1}{n}$

微积分基本定理

例 4: 求曲线 $y = x^2$ 和 $y = \sqrt{x}$ 围成的面积

例 5: 求曲线 $y^2 = 4x$ 和 $4x - 3y = 4$ 围成的面积

作业

习题 2.9： 1(4), 5

习题 2.10： 2, 3(3), 4(5)