6.1 多元函数

安冬

北京大学北京国际数学研究中心（BICMR）

andong@bicmr.pku.edu.cn

25-26 学年第 1 学期

多元函数

多元函数：含有两个或两个以上自变量的函数

例：

$$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}, \qquad y=w/h^2, \qquad y=(1+e^{2x_1-x_2+x_3+1})^{-1}$$

描述自变量：有序数组 $(a,b,\theta),(w,h),(x_1,x_2,x_3)$

几何解释：

- 二元函数：平面上某个点集合到实数集的一个映射
- 三元函数：空间中某个点集合到实数集的一个映射

多元函数

$$\mathbb{R}, \quad \mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}, \quad \mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) : x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

- $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称作 $\mathbb{R}^n$ 中的一个点

多元函数

定义（多元函数）：设有一个集合 $D \subset \mathbb{R}^n$，若对于 D 中的每一点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，按照一定的法则 f，都有唯一确定的数 $u \in \mathbb{R}$ 与之对应，则称 f 是定义在 D 上的一个 n 元函数

- 与 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 对应的数 u 称为 f 在该点处的值或像，并记为 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$
  - 自变量：$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$
  - 因变量：u
  - 也称 u 是 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的函数，记为 $u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，也写作

$$f : D \mapsto \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

- 定义域：D
- 值域：全体函数值的集合 $f(D) = \{f(x_1, x_2, \cdots, x_n) : (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D\}$

多元函数

函数的图像：

- 一元函数：$y = f(x)$，它的图像是平面 $\mathbb{R}^2$ 上的一个集合

$$\{(x, y) : y = f(x), x \in D\}$$

- 二元函数：$z = f(x, y)$，它的图像是空间 $\mathbb{R}^3$ 中的一个集合

$$\{(x, y, z) : z = f(x, y), (x, y) \in D\}$$

- n 元函数：$u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，它的图像是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的一个集合

$$\{(x_1, \cdots, x_n, u) : u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n), (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D\}$$

多元函数

例 1：$z=\sqrt{r^2-x^2-y^2}$，其中 r 为常数

例 2：$z=\sqrt{y-x^2}+\ln(4-x^2-y^2)$

映射

映射：称 $f\colon E \mapsto F$ 是集合 E 到 F 的一个映射，如果对于每个元素 $x \in E$，都有唯一确定的元素 $y \in F$ 与之相对应.

n 元函数：$\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}$ 的一个映射

可一般化到 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的映射

例：

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} u = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ v = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$

映射

定义（$\mathbb{R}^n$ 中的集合到 $\mathbb{R}^m$ 的映射）：设有一个集合 $D \subset \mathbb{R}^n$，若对于 D 中的每一点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，按照一定的法则 f，都有唯一确定的点 $(y_1, \cdots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ 与之对应，则称 f 是 D 到 $\mathbb{R}^m$ 的一个映射

- 相当于 m 个 n 元函数

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \cdots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, \cdots, x_n) \\ \qquad \vdots \\ y_m = f_m(x_1, \cdots, x_n) \end{cases}$$

- f_j 称为映射 f 的第 j 个分量

距离

一元函数极限与微积分中重要的概念：距离、邻域、区间

距离

欧式距离：

- 数轴 $\mathbb{R}$： 点 $P(x), Q(y)$

$$d(P,Q) = |x-y| = \sqrt{(x-y)^2}$$

- 平面 $\mathbb{R}^2$： 点 $P(x_1,x_2), Q(y_1,y_2)$

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$$

- 空间 $\mathbb{R}^3$： 点 $P(x_1,x_2,x_3), Q(y_1,y_2,y_3)$

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2}$$

- $\mathbb{R}^n$： 点 $P(x_1,\cdots,x_n), Q(y_1,\cdots,y_n)$

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2}$$

距离

距离 $d(P,Q)$ 满足下列条件：

1. $d(P,Q) \geq 0$，当且仅当 $P=Q$ 时等号成立
2. $d(P,Q) = d(Q,P)$
3. $d(P,Q) \leq d(P,R) + d(R,Q)$ （三角不等式）

- 距离的定义并非唯一，以 $\mathbb{R}^2$ 为例，点 $P(x_1,x_2), Q(y_1,y_2)$

$$d_1(P,Q) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$
$$d_\infty(P,Q) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

邻域

定义（邻域）：设 $P_0 \in \mathbb{R}^n$ 为给定的一点，r 是给定的正数. 定义点 P_0 的 r 邻域为

$$U_r(P_0) = \{P \in \mathbb{R}^n : d(P, P_0) < r\}$$

- $n = 1$ 时为开区间
- $n = 2$ 时为圆的内部（开圆）
- $n = 3$ 时为球的内部（开球）
- 空心邻域：$U_r(P_0) \backslash \{P_0\}$

开集和区域

定义：设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是一个集合，将 E 中的点 P 分为三类：

1. 内点：存在一个正数 r，使得
$$U_r(P) \subset E$$
2. 外点：存在一个正数 r，使得
$$U_r(P) \cap E = \emptyset$$
3. 边界点：既非内点也非外点的点
   - 对于边界点 P，它的任意一个邻域 $U_r(P)$ 与 E 的交集既有属于 E 的点，又有不属于 E 的点

定义（边界）：E 的全体边界点组成的集合，记为 ∂E

开集和区域

例:

$$
\begin{aligned}
E_1 &= \{(x, y) : -a < x < a, -b < x < b\} \\
E_2 &= \{(x, y) : -a \leq x \leq a, -b \leq x \leq b\} \\
E_3 &= \{(x, y) : -a \leq x < a, -b \leq x \leq b\} \\
E_4 &= \mathbb{Q}
\end{aligned}
$$

开集和区域

集合 E 一般由内点 $+$ 可能的边界点组成

- 内点属于 E
- 外点不属于 E
- 边界点自身可能属于 E，也可能不属于 E

定义：

- 开集：每一点都是内点的集合
  - 等价条件：集合中没有边界点
- 闭集：包含全部边界点的集合

开集和区域

定义（连通）：设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开集，如果 E 中任意两点，都可以用一条落在 E 中的曲线相连接，则称 E 是连通的

定义（区域）：$\mathbb{R}^n$ 中的连通非空开集称为区域

- 区域是数轴上开区间的推广

定义（闭区域）：设 G 是一个区域，记 $\overline{G} = G \cup \partial G$，并称之为闭区域

开集和区域

定义：

1. 有界集合：存在一个正数 r，使得 $E \subset U_r(O)$，其中 O 是坐标原点
2. 无界集合

- 区域和闭区域可能是无界的
- 有界闭区域是数轴上闭区间的推广

作业

习题 6.1： 1(1), 2(2)(3)(4)