

6.1 多元函数

安冬

北京大学北京国际数学研究中心 (BICMR)

andong@bicmr.pku.edu.cn

25-26 学年第 1 学期

多元函数

多元函数：含有两个或两个以上自变量的函数

例：

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}, \quad y = w/h^2, \quad y = (1 + e^{2x_1 - x_2 + x_3 + 1})^{-1}$$

描述自变量：有序数组 $(a, b, \theta), (w, h), (x_1, x_2, x_3)$

几何解释：

- ▶ 二元函数：平面上某个点集合到实数集的一个映射
- ▶ 三元函数：空间中某个点集合到实数集的一个映射

多元函数

$$\mathbb{R}, \quad \mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}, \quad \mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

► (x_1, x_2, \dots, x_n) 称作 \mathbb{R}^n 中的一个点

多元函数

定义 (多元函数): 设有一个集合 $D \subset \mathbb{R}^n$, 若对于 D 中的每一点 (x_1, x_2, \dots, x_n) , 按照一定的法则 f , 都有唯一确定的数 $u \in \mathbb{R}$ 与之对应, 则称 f 是定义在 D 上的一个 n 元函数

- ▶ 与 (x_1, x_2, \dots, x_n) 对应的数 u 称为 f 在该点处的值或像, 并记为 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
 - ▶ 自变量: (x_1, x_2, \dots, x_n)
 - ▶ 因变量: u
 - ▶ 也称 u 是 (x_1, x_2, \dots, x_n) 的函数, 记为 $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 也写作

$$f: D \mapsto \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

- ▶ 定义域: D
- ▶ 值域: 全体函数值的集合 $f(D) = \{f(x_1, x_2, \dots, x_n) : (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D\}$

多元函数

函数的图像：

- ▶ 一元函数： $y = f(x)$ ，它的图像是平面 \mathbb{R}^2 上的一个集合

$$\{(x, y) : y = f(x), x \in D\}$$

- ▶ 二元函数： $z = f(x, y)$ ，它的图像是空间 \mathbb{R}^3 中的一个集合

$$\{(x, y, z) : z = f(x, y), (x, y) \in D\}$$

- ▶ n 元函数： $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ，它的图像是 \mathbb{R}^{n+1} 中的一个集合

$$\{(x_1, \dots, x_n, u) : u = f(x_1, x_2, \dots, x_n), (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D\}$$

多元函数

例 1: $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$, 其中 r 为常数

例 2: $z = \sqrt{y - x^2} + \ln(4 - x^2 - y^2)$

映射

映射：称 $f: E \mapsto F$ 是集合 E 到 F 的一个映射，如果对于每个元素 $x \in E$ ，都有唯一确定的元素 $y \in F$ 与之相对应.

n 元函数： \mathbb{R}^n 到 \mathbb{R} 的一个映射

可一般化到 \mathbb{R}^n 到 \mathbb{R}^m 的映射

例：

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} u = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ v = x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases}$$

映射

定义 (\mathbb{R}^n 中的集合到 \mathbb{R}^m 的映射): 设有一个集合 $D \subset \mathbb{R}^n$, 若对于 D 中的每一点 (x_1, x_2, \dots, x_n) , 按照一定的法则 f , 都有唯一确定的点 $(y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ 与之对应, 则称 f 是 D 到 \mathbb{R}^m 的一个映射

► 相当于 m 个 n 元函数

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_m = f_m(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

► f_j 称为映射 f 的第 j 个分量

距离

一元函数极限与微积分中重要的概念：距离、邻域、区间

距离

欧式距离:

- ▶ 数轴 \mathbb{R} : 点 $P(x), Q(y)$

$$d(P, Q) = |x - y| = \sqrt{(x - y)^2}$$

- ▶ 平面 \mathbb{R}^2 : 点 $P(x_1, x_2), Q(y_1, y_2)$

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

- ▶ 空间 \mathbb{R}^3 : 点 $P(x_1, x_2, x_3), Q(y_1, y_2, y_3)$

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$$

- ▶ \mathbb{R}^n : 点 $P(x_1, \dots, x_n), Q(y_1, \dots, y_n)$

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

距离

距离 $d(P, Q)$ 满足下列条件:

1. $d(P, Q) \geq 0$, 当且仅当 $P = Q$ 时等号成立
2. $d(P, Q) = d(Q, P)$
3. $d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q)$ (三角不等式)

► 距离的定义并非唯一, 以 \mathbb{R}^2 为例, 点 $P(x_1, x_2), Q(y_1, y_2)$

$$d_1(P, Q) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$
$$d_\infty(P, Q) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

邻域

定义 (邻域): 设 $P_0 \in \mathbb{R}^n$ 为给定的一点, r 是给定的正数. 定义点 P_0 的 r 邻域为

$$U_r(P_0) = \{P \in \mathbb{R}^n : d(P, P_0) < r\}$$

- ▶ $n = 1$ 时为开区间
- ▶ $n = 2$ 时为圆的内部 (开圆)
- ▶ $n = 3$ 时为球的内部 (开球)
- ▶ 空心邻域: $U_r(P_0) \setminus \{P_0\}$

开集和区域

定义：设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是一个集合，将 \mathbb{R}^n 中的点 P 分为三类：

1. 内点：存在一个正数 r ，使得

$$U_r(P) \subset E$$

2. 外点：存在一个正数 r ，使得

$$U_r(P) \cap E = \emptyset$$

3. 边界点：既非内点也非外点的点

► 对于边界点 P ，它的任意一个邻域 $U_r(P)$ 既有属于 E 的点，又有不属于 E 的点

定义（边界）： E 的全体边界点组成的集合，记为 ∂E

开集和区域

例：

$$E_1 = \{(x, y) : -a < x < a, -b < y < b\}$$

$$E_2 = \{(x, y) : -a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b\}$$

$$E_3 = \{(x, y) : -a \leq x < a, -b \leq y \leq b\}$$

$$E_4 = \mathbb{Q}$$

开集和区域

集合 E 一般由内点 + 可能的边界点组成

- ▶ 内点属于 E
- ▶ 外点不属于 E
- ▶ 边界点自身可能属于 E ，也可能不属于 E

定义：

- ▶ 开集：每一点都是内点的集合
 - ▶ 等价条件：集合中没有边界点
- ▶ 闭集：包含全部边界点的集合

开集和区域

定义 (连通): 设 E 是 \mathbb{R}^n 中的一个开集, 如果 E 中任意两点, 都可以用一条落在 E 中的曲线相连接, 则称 E 是连通的

定义 (区域): \mathbb{R}^n 中的连通非空开集称为区域

► 区域是数轴上开区间的推广

定义 (闭区域): 设 G 是一个区域, 记 $\overline{G} = G \cup \partial G$, 并称之为闭区域

开集和区域

定义：

1. 有界集合：存在一个正数 r ，使得 $E \subset U_r(O)$ ，其中 O 是坐标原点
2. 无界集合
 - ▶ 区域和闭区域可能是无界的
 - ▶ 有界闭区域是数轴上闭区间的推广

作业

习题 6.1: $1(1), 2(2)(3)(4)$