

6.3 多元函数的连续性

安冬

北京大学北京国际数学研究中心 (BICMR)

andong@bicmr.pku.edu.cn

25-26 学年第 1 学期

连续性的定义

定义 (连续性): 设 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的一个邻域内有定义. 若

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0),$$

则称 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续

- ▶ 连续性: 极限存在 + 等于该点函数值
- ▶ 写成 $\epsilon - \delta$ 语言: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得 $\forall d((x, y), (x_0, y_0)) < \delta$ (或写成 $\forall x \in U_\delta((x_0, y_0))$), 都有

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \epsilon$$

- ▶ 局部性质
- ▶ 区域上连续: 区域中每一个点处都连续

连续性的定义

例 1：证明 $f(x, y) = \sin(x + y) + |x + y + 1|$ 在 \mathbb{R}^2 上连续

连续函数的性质

性质：

1. 连续函数的四则运算是连续的（除法要求分母不为 0）
2. 连续函数的复合是连续的

二元初等函数：从 x 和 y 出发，进行有限次四则运算或复合以一元初等函数的结果

- ▶ 二元初等函数在其有定义的区域内是连续的

映射的连续性

二元函数连续：考虑二元函数 $f(x, y)$ ，定义 f 在 (x_0, y_0) 处连续，有以下三种等价的方式

- ▶ $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$
- ▶ $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得 $\forall d((x, y), (x_0, y_0)) < \delta$, 都有 $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \epsilon$
- ▶ $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得 $\forall (x, y) \in U_\delta((x_0, y_0))$, 都有 $f(x, y) \in U_\epsilon(f(x_0, y_0))$

映射的连续性： f 是 $D \subset \mathbb{R}^n$ 到 \mathbb{R}^m 的一个映射， $P_0 \in D$. 定义 f 在 P_0 处连续，有以下三种等价的方式：

- ▶ $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0)$
- ▶ $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得 $\forall d(P, P_0) < \delta$, 都有 $d(f(P), f(P_0)) < \epsilon$
- ▶ $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得 $\forall P \in U_\delta(P_0)$, 都有 $f(P) \in U_\epsilon(f(P_0))$

定理：映射 f 连续的充分必要条件是它的每个分量都是连续函数

有界闭区域上连续函数的性质

设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 中的一个区域, f 在 $\bar{D} = D \cup \partial D$ 上有定义

定义 (边界点的连续性): 设 P_0 是一个边界点, 称 f 在 P_0 点连续, 如果 $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得 $\forall P \in U_\delta(P_0) \cup \bar{D}$, 都有 $|f(P) - f(P_0)| < \epsilon$

闭区域 \bar{D} 上连续: f 在 \bar{D} 上的每一点都连续

有界闭区域上连续函数的性质

设 f 在有界闭区域 \bar{D} 上连续，则

1. (有界定理): f 是一个有界函数
 2. (最值定理): f 能取到最大值和最小值
 3. (介值定理): 设 $P_1, P_2 \in D$, 则对于任意一个介于 $f(P_1)$ 和 $f(P_2)$ 中的值 η , 都存在 $P \in D$ 使得 $f(P) = \eta$
-
- ▶ 推论: 有界闭区域上的连续函数的值域为 $[m, M]$, 其中 m 是最小值, M 是最大值
 - ▶ (开) 区域的连续函数可能无界, 即使有界也不一定有最大/最小值

作业

习题 6.3: 2, 3, 4