6.10 曲面论初步

安冬

北京大学北京国际数学研究中心（BICMR）

andong@bicmr.pku.edu.cn

25-26 学年第 1 学期

曲面

曲面：平面区域 D 到 $\mathbb{R}^3$ 的一个（一对一，C^1）映射的像

- 一般方程：

$$F(x, y, z) = 0$$

- 参数方程：

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}, \qquad \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

- 正则曲面：$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq \mathbf{0}$
  - 正则曲面处处有切平面

切平面与法向量

切平面：曲面上通过点 P_0 的所有曲线在点 P_0 处的切线所构成的平面

法向量：切平面的法向量

法线：与切平面垂直的直线

切平面与法向量

$$F(x, y, z) = 0$$

- 法向量:

$$\mathbf{n} = (F_x(x_0, y_0, z_0), F_y(x_0, y_0, z_0), F_z(x_0, y_0, z_0))$$

- 切平面:

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

- 法线:

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$$

切平面与法向量

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

- 法向量：
$$\mathbf{n} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r_v}$$
- 切平面：
$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$$
- 法线：
$$\mathbf{r} = \mathbf{r_0} + t\mathbf{n}$$

切平面与法向量

例 1： **曲面** $z = f(x, y)$

切平面与法向量

例 2： **球面** $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$