3.4 定积分的分部积分法与换元法

安冬

北京大学北京国际数学研究中心（BICMR）

andong@bicmr.pku.edu.cn

25-26 学年第 1 学期

微积分基本定理

设 $F(x), f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 (a, b) 上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$$

定积分的分部积分法与换元法

分部积分：设 $u(x), v(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续的导数，则

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

换元：设 $f(x)$ 在 $[A, B]$ 上连续，$\varphi(t) : [\alpha, \beta] \mapsto [A, B]$ 有连续的导数，若

$$\varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b,$$

则

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

- 不需要 $\varphi(t)$ 有反函数

定积分的分部积分法与换元法

例 1: 求

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx, \quad \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$$

例 2: 求

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{1+e^x} dx$$

定积分的分部积分法与换元法

例 3: 求

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$$

奇/偶函数的积分

- 若 $f(x)$ 是偶函数，则
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$
- 若 $f(x)$ 是奇函数，则
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

例：
$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{1+x^4}}dx, \quad \int_{-2}^{2} (x\sin(x^2) + x^3 - x^4)dx$$

周期函数的积分

设 $f(x)$ 是一个以 T 为周期的连续函数，则

1. $$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+T}^{b+T} f(x)dx$$
2. $$\int_0^T f(x)dx = \int_a^{a+T} f(x)dx$$
3. $$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$

作业

习题 3.4： 18, 21, 22, 25, 26