科学计算中的量子算法：量子算法基础 2

安冬

北京大学北京国际数学研究中心（BICMR）

andong@bicmr.pku.edu.cn

24-25 学年第 2 学期

大纲

- 量子态不可复制定理
- 量子线路的误差累计
- 可逆计算

量子态不可复制定理

Q: 是否存在一个量子算法，可以有效地复制任意一个未知的量子态？

- “有效”
- 迭代法的基础

Theorem

不存在一个酉变换 $U \in \mathbb{C}^{2^{2n} \times 2^{2n}}$，使得对于任意的一个量子态 $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^{2^n}$，都有

$$U|\psi\rangle |0\rangle^{\otimes n} = |\psi\rangle |\psi\rangle .$$

量子态不可复制定理

Proof.
假设存在这样的 U，任取两个量子态 $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$，

$$U|\psi_1\rangle|0\rangle = |\psi_1\rangle|\psi_1\rangle, \quad U|\psi_2\rangle|0\rangle = |\psi_2\rangle|\psi_2\rangle.$$

取内积：

$$\begin{aligned}(\langle 0|\langle\psi_1|U^\dagger)U|\psi_2\rangle|0\rangle &= (\langle\psi_2|\langle\psi_2|)(|\psi_2\rangle|\psi_2\rangle) \\ \langle\psi_1|\psi_2\rangle &= (\langle\psi_1|\psi_2\rangle)^2 \\ \implies \langle\psi_1|\psi_2\rangle &= 0, 1.\end{aligned}$$

□

量子态不可复制定理

- 态依赖的复制
- 正交基的复制

量子线路的误差累计

Q: 一系列 $U_1, U_2, \cdots, U_K$，每一个 U_j 都有误差 ϵ，总量子线路 $U = U_K \cdots U_2 U_1$ 的误差？

Theorem

设 U_j, V_j 为酉变换。若 $\|V_j - U_j\| \leq \epsilon$，那么

$$\|V_K \cdots V_2 V_1 - U_K \cdots U_2 U_1\| \leq K\epsilon.$$

Proof.

三角不等式 □

可逆计算

Q: 量子计算是否比经典计算更高效？

Q: 量子计算是否至少与经典计算相当？

可逆计算

$$x \mapsto f(x), \quad x \in \{0,1\}^n, \quad f(x) \in \{0,1\}^m$$

可逆化:

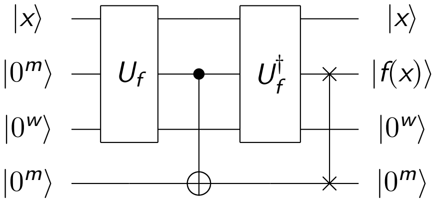
$$(x, z) \mapsto (x, z \oplus f(x))$$

Theorem

任意包含 $\mathcal{O}(poly(n))$ 经典门的经典线路可以被包含 $\mathcal{O}(poly(n))$ 简单量子门和额外 $\mathcal{O}(poly(n))$ 量子比特的量子线路模拟

$$U_f : |x\rangle\,|0^m\rangle\,|0^w\rangle \mapsto |x\rangle\,|f(x)\rangle\,|g(x)\rangle$$

Uncomputation



$$\begin{aligned}
|x\rangle\,|0^m\rangle\,|0^w\rangle\,|0^m\rangle &\to |x\rangle\,|f(x)\rangle\,|g(x)\rangle\,|0^m\rangle \\
&\to |x\rangle\,|f(x)\rangle\,|g(x)\rangle\,|f(x)\rangle \\
&\to |x\rangle\,|0^m\rangle\,|0^w\rangle\,|f(x)\rangle \\
&\to |x\rangle\,|f(x)\rangle\,|0^w\rangle\,|0^m\rangle
\end{aligned}$$

$$\widetilde{U}_f : |x\rangle\,|0^m\rangle \mapsto |x\rangle\,|f(x)\rangle$$