2.8 定积分

安冬

北京大学北京国际数学研究中心（BICMR）

andong@bicmr.pku.edu.cn

25-26 学年第 1 学期

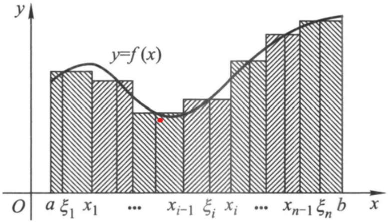
定积分

来源：曲边梯形的面积，考虑正函数 $y = f(x)$ 与 $y = 0$, $x = a$ 和 $x = b$ 围成的曲边梯形的面积

1. 分割：$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$
2. 近似：在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上，每个小曲边梯形面积 $\approx f(\xi_i)\Delta x_i$
   - $\xi_i : [x_{i-1}, x_i]$ 中的任意一点
   - $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$
3. 求和：总面积 $S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$
4. 取极限：分割越细，近似越准

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

   - $\lambda = \max\{\Delta x_i\}$



定义

分割：对区间 $[a,b]$ 插入 $n+1$ 个点 x_i $(i=0,1,\cdots,n)$，满足 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$, 称为 $[a,b]$ 的一种分割，记为 T.

- $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\lambda(T)=\max_i\{\Delta x_i\}$

定积分：若对于任意分割 T 和任意中间点 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，极限 $\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$ 都存在且相等，则称这个极限值为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分，记为

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$$

- $f(x)$：被积函数. a,b：积分下/上限. $[a,b]$：积分区间. x：积分变量
- $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$ 称为黎曼和
- 此积分也叫黎曼积分，函数称为黎曼可积
- 几何含义：有向面积

定义

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = I$$

对于任意的 $\epsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$，使得对于任意分割 T 以及任意的 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$，只要 $\lambda(T) < \delta$，都有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| < \epsilon$$

- 不是 $n \to \infty$：无法保证分割变细
- 不是均匀分割或取某个特定点

可积函数

并非所有函数都可积

- 连续一定可积
- 单调一定可积
- 可积一定有界

对于已经保证可积的函数，可以取特殊的分割/中间点来方便计算

可积函数

例：求 $\int_0^1 e^x dx$

性质

约定：

- 当 $a = b$ 时，$\int_a^b f(x)dx = 0$
- 当 $a > b$ 时，$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

性质

- 与被积变量记号无关：
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$
- 线性性：若 $f(x), g(x)$ 可积，则 $f(x) \pm g(x)$ 和 $cf(x)$ 都可积，且
$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx, \quad \int_a^b (cf(x))dx = c\int_a^b f(x)dx$$
- 保号性：若 $f(x) \geq 0$，$b \geq a$，则
$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$
- 保序性：若 $f(x) \geq g(x)$，$b \geq a$，则
$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

性质

- 区间可分割：
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$
- 有限个点不影响积分：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，又设 $g(x)$ 仅在有限个点处和 $f(x)$ 不同，则 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上也可积，且
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$$

性质

- 绝对值不等式：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上也可积，且

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

- 奇偶性：
  - 若 $f(x)$ 是偶函数，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$$

  - 若 $f(x)$ 是奇函数，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

作业

习题 2.8： 3, 5(2)