

3.2 不定积分的分部积分法

安冬

北京大学北京国际数学研究中心 (BICMR)

andong@bicmr.pku.edu.cn

25-26 学年第 1 学期

分部积分

求导的乘法法则：

$$u(x)v'(x) = (u(x)v(x))' - u'(x)v(x)$$

两边积分，得到

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

或写成

$$\int u dv = uv - \int v du$$

- ▶ 将不定积分 $\int u dv$ 转化成 $\int v du$
- ▶ 核心：选取合适的 u 和 v

分部积分

例 1: 求 $\int x e^x dx$

分部积分

$$\int u dv = uv - \int v du$$

- ▶ 经验规律：反对幂三指，前面的优先选为 u
 - ▶ 越往前的，求导后化简得更多
 - ▶ 越往后的，自身的积分越简单
- ▶ 更一般地：求导简单的选为 u ，积分简单的选为 v'

分部积分

例 2: 求 $\int x^3 \ln x dx$

分部积分

例 3: 求 $\int x^2 \cos x dx$

分部积分

例 4: 求 $\int \arctan x dx$

分部积分

例 5: 求 $\int e^{ax} \cos bxdx$, 其中 $a, b > 0$

分部积分

例 6: 求 $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$, 其中 $a > 0$

分部积分

例 7: 求 $\int \sqrt{a^2 + x^2} dx$, 其中 $a > 0$

分部积分

例 8: 求 $\int \sqrt{x^2 - a^2} dx$, 其中 $a > 0$

不定积分表 (续)

$$\begin{aligned}\int \tan x dx &= -\ln |\cos x| + C, & \int \cot x dx &= \ln |\sin x| + C, \\ \int \sec x dx &= \ln |\sec x + \tan x| + C, & \int \csc x dx &= \ln |\csc x - \cot x| + C, \\ \int \frac{dx}{x^2 + a^2} &= \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C, & \int \frac{dx}{x^2 - a^2} &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, \\ \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} &= \arcsin \frac{x}{a} + C, & \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} &= \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C\end{aligned}$$

并非所有初等函数的原函数都是初等函数:

$$\frac{\sin x}{x}, \quad e^{-x^2}, \quad \sin x^2, \quad \frac{1}{\ln x}, \quad \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}}, \quad \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} \quad (0 < k < 1)$$

分部积分

例 9: 求 $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$, 其中 $a > 0$

分部积分：总结

$$\int u dv = uv - \int v du$$

- ▶ 核心：选取合适的 u 和 v
- ▶ 经验规律：反对幂三指
- ▶ 一般规律：通过求导可化简的选为 u
- ▶ 有时需要多次分部积分、解方程或迭代

作业

习题 3.2: 2, 8, 14, 15, 16