

# 科学计算中的量子算法：量子数值线性代数基本算法

安冬

北京大学北京国际数学研究中心 (BICMR)

*andong@bicmr.pku.edu.cn*

24-25 学年第 2 学期

# 大纲

- ▶ 矩阵向量乘
- ▶ 向量内积：SWAP 测试与 Hadamard 测试
- ▶ 矩阵/向量加法：线性酉组合 (LCU)
- ▶ 矩阵乘法

## 回顾：向量与矩阵的量子表示

**向量：**  $|u\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} u_j |j\rangle = (u_0, u_1, \dots, u_{N-1})^\top$ ,  $\| |u\rangle \| = 1$

$$O_u : |0\rangle \mapsto |u\rangle$$

**矩阵：**  $A \in \mathbb{C}^{2^n \times 2^n}$  的  $(\alpha, a, \epsilon)$ -block-encoding 为酉矩阵  $U_A \in \mathbb{C}^{2^{n+a} \times 2^{n+a}}$ ：

$$\|A - \alpha (|0\rangle^{\otimes a} \otimes I) U_A (|0\rangle^{\otimes a} \otimes I)\| \leq \epsilon$$

$$U_A \approx \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} A & * \\ * & * \end{pmatrix}.$$

## 回顾：矩阵向量乘

Input:

Block-encoding of A:

$$A \approx \alpha (|0\rangle\langle 0| \otimes I) U_A (|0\rangle\langle 0| \otimes I)$$

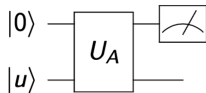
$$U_A \approx \begin{pmatrix} |0\rangle\langle 0| & |1\rangle\langle 0| \\ \frac{1}{\alpha} A & * \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |0\rangle \\ |1\rangle \end{pmatrix}$$

$$\text{or } U_A \approx |0\rangle\langle 0| \otimes \frac{A}{\alpha} + |0\rangle\langle 1| \otimes * \\ + |1\rangle\langle 0| \otimes * + |1\rangle\langle 1| \otimes *$$

Quantum state:

$$|u\rangle = \sum_{j=0}^{2^n-1} u_j |j\rangle$$

'Algorithm': applying block-encoding



or

$$U_A |0\rangle |u\rangle \approx \frac{1}{\alpha} |0\rangle A |u\rangle + c |1\rangle |*\rangle$$

or

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} A & * \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} A u \\ * \end{pmatrix}$$

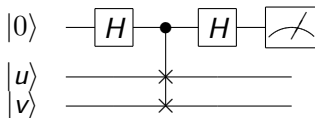
Need to measure the first ancilla qubit

Success probability:  $(\|A |u\rangle\|/\alpha)^2$

Number of repeats (after amplitude amplification):  $\mathcal{O}(\alpha/\|A |u\rangle\|)$

## 向量内积：SWAP 测试

目标：计算  $|\langle u|v\rangle|$



$$\begin{aligned} |0\rangle |u\rangle |v\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle |u\rangle |v\rangle + |1\rangle |u\rangle |v\rangle) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle |u\rangle |v\rangle + |1\rangle |v\rangle |u\rangle) \\ &\rightarrow \frac{1}{2} |0\rangle (|u\rangle |v\rangle + |v\rangle |u\rangle) + \frac{1}{2} |1\rangle (|u\rangle |v\rangle - |v\rangle |u\rangle) \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(\text{第一个量子比特} = 1) = \left\| \frac{1}{2} (|u\rangle |v\rangle - |v\rangle |u\rangle) \right\|^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} |\langle u|v\rangle|^2$$

## 向量内积：SWAP 测试

随机变量  $X$ : 与第一个量子比特的结果一致 (用  $|1\rangle\langle 1|$  测量)

$$\mathbb{E}X = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}|\langle u|v\rangle|^2$$

用  $\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M X_m$  来估计  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}|\langle u|v\rangle|^2$ .

Q:  $M$  需要取多大?

## 向量内积：SWAP 测试

### Lemma (Hoeffding 不等式)

设  $X_m$  为相互独立的随机变量，几乎确定满足  $a_m \leq X_m \leq b_m$ . 令  $S_M = X_1 + \cdots + X_M$ , 那么

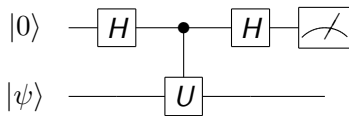
$$\mathbb{P}(|S_M - \mathbb{E}S_M| \geq t) \leq 2 \exp\left(-\frac{2t^2}{\sum_{m=1}^M (b_m - a_m)^2}\right)$$

在 SWAP 测试中：

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{M} \sum X_m - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}|\langle u|v \rangle|^2\right)\right| \geq \epsilon\right) &\leq 2 \exp(-2M\epsilon^2) \\ \implies M &= \mathcal{O}(1/\epsilon^2) \end{aligned}$$

## 酉矩阵的期望：Hadamard 测试

目标：计算  $\langle \psi | U | \psi \rangle$ ，其中  $U$  是一个酉矩阵



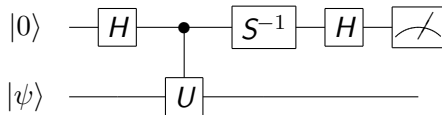
$$\begin{aligned} |0\rangle |\psi\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) |\psi\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle |\psi\rangle + |1\rangle U|\psi\rangle) \\ &\rightarrow \frac{1}{2} |0\rangle (I + U) |\psi\rangle + \frac{1}{2} (I - U) |\psi\rangle \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(\text{第一个量子比特} = 0) = \left\| \frac{1}{2} (I + U) |\psi\rangle \right\|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{Re}(\langle \psi | U | \psi \rangle)$$



## 酉矩阵的期望：Hadamard 测试

虚部：

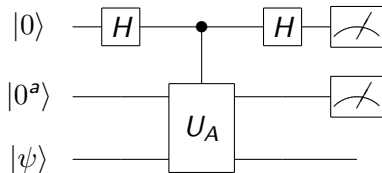


## 酉矩阵的期望：Hadamard 测试

与内积的关系：取  $U = U_\phi U_\psi^\dagger$  (注意实际量子线路可以简化)

$$\langle \psi | U | \psi \rangle = \langle \psi | \phi \rangle$$

一般矩阵的期望：计算  $\langle \psi | A | \psi \rangle$ ，其中  $A$  是一个一般的矩阵， $U_A$  是它的  $(\alpha, a, 0)$ -block-encoding



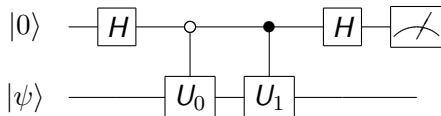
## 矩阵/向量加法：线性酉组合 (Linear Combination of Unitaries)

目标：给定一组酉变换  $U_j$  和一组正实数  $c_j > 0$ ，计算  $\sum_{j=0}^{J-1} c_j U_j$

- ▶ 一般来说不是酉变换

## LCU: 例子

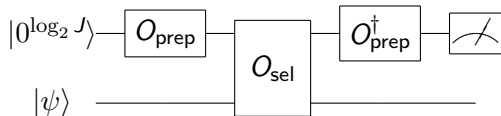
目标: 计算  $\frac{1}{2}(U_0 + U_1)$



- ▶  $(1, 1, 0)$ -block-encoding
- ▶ 成功概率:  $\left\| \frac{1}{2}(U_0 + U_1) |\psi\rangle \right\|^2$

## LCU: 一般形式

目标: 给定一组酉变换  $U_j$  和一组正实数  $c_j > 0$ , 计算  $\sum_{j=0}^{J-1} c_j U_j$



$$O_{\text{prep}} : |0\rangle \mapsto \frac{1}{\sqrt{\|\vec{c}\|_1}} \sum_{j=0}^{J-1} \sqrt{c_j} |j\rangle, \quad O_{\text{sel}} = \sum_{j=0}^{J-1} |j\rangle \langle j| \otimes U_j$$

- ▶  $(\|\vec{c}\|_1, \log_2 J, 0)$ -block-encoding
- ▶ 成功概率:  $\left\| \left( \sum_j c_j U_j \right) |\psi\rangle / \|\vec{c}\|_1 \right\|^2$

# 向量加法

目标：给定一组量子态  $|u_j\rangle$  和一组正实数  $c_j > 0$ ，计算  $\sum_{j=0}^{J-1} c_j |u_j\rangle$

输入：量子态的态制备 oracle  $U_j : |0\rangle \mapsto |u_j\rangle$

$$\sum_{j=0}^{J-1} c_j |u_j\rangle = \left( \sum_{j=0}^{J-1} c_j U_j \right) |0\rangle$$

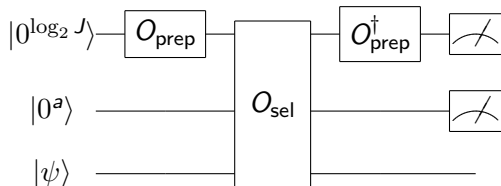
# 矩阵加法

目标：给定一组矩阵  $A_j$  和一组正实数  $c_j > 0$ ，计算  $\sum_{j=0}^{J-1} c_j A_j$

- ▶ 输入：矩阵  $A_j$  的  $(\alpha_j, a, 0)$ -block-encoding  $U_j$  (等价于矩阵  $A_j/\alpha_j$  的  $(1, a, 0)$ -block-encoding )

$$\sum_{j=0}^{J-1} c_j A_j = \sum_{j=0}^{J-1} \alpha_j c_j (A_j / \alpha_j)$$

# 矩阵加法

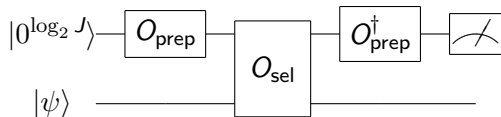


$$O_{\text{prep}} : |0\rangle \mapsto \frac{1}{\sqrt{\sum \alpha_j c_j}} \sum_{j=0}^{J-1} \sqrt{\alpha_j c_j} |j\rangle, \quad O_{\text{sel}} = \sum_{j=0}^{J-1} |j\rangle \langle j| \otimes U_j$$

- ▶  $(\sum \alpha_j c_j, a + \log_2 J, 0)$ -block-encoding
- ▶ 成功概率:  $\left\| \left( \sum_j c_j A_j \right) |\psi\rangle / \left( \sum \alpha_j c_j \right) \right\|^2$



## LCU 的计算复杂度与局限性



$$O_{\text{prep}} : |0\rangle \mapsto \frac{1}{\sqrt{\|\vec{c}\|_1}} \sum_{j=0}^{J-1} \sqrt{c_j} |j\rangle,$$

$$O_{\text{sel}} = \sum_{j=0}^{J-1} |j\rangle \langle j| \otimes U_j$$

访问复杂度:  $\mathcal{O}\left(\|\vec{c}\|_1^2 / \left\|\left(\sum_j c_j U_j\right) |\psi\rangle\right\|^2\right)$  次  $O_{\text{prep}}$  和  $O_{\text{sel}}$

- ▶  $O_{\text{sel}}$  的计算复杂度
  - ▶ 最坏的情况为构造每个  $U_j$  复杂度之和
  - ▶ 如果  $U_j$  之间有一些联系, 那么  $O_{\text{sel}}$  的计算复杂度可能会更低
- ▶ 需要控制版本的  $U_j$  与额外的辅助量子比特
- ▶ 线路深度较深

## LCU 的混合实现

目标: 计算  $\psi^* H \psi$ , 其中向量  $\psi = \sum_j c_j U_j |\psi_0\rangle$ ,  $H$  是一个厄米矩阵

$$\psi^* H \psi = \sum_{j,j'} c_j c_{j'} \langle \psi_0 | U_j^\dagger H U_{j'} | \psi_0 \rangle$$

混合算法:

1. (经典计算机上) 以概率  $c_j c_{j'} / \|\vec{c}\|_1^2$  概率取样  $(j, j')$
2. (量子计算机上) 对每一个  $(j, j')$  的样本, 分别计算  $\langle \psi_0 | U_j^\dagger H U_{j'} | \psi_0 \rangle$
3. (经典计算机上) 对所有的样本观测值取平均

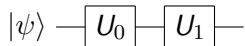
## LCU: 量子实现 vs 混合实现

	计算任务	总计算复杂度	辅助比特数量	控制操作	线路深度
量子实现	block-encoding	低	多	复杂	深
混合实现	测量值	高	少	简单	浅

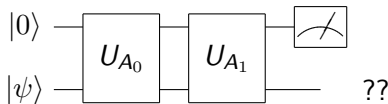
# 矩阵乘法

考虑两个矩阵的矩阵乘法

- ▶ 两个酉矩阵  $U_1 U_0$



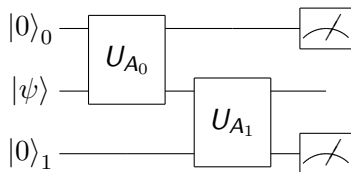
- ▶ 两个一般矩阵  $A_0$  和  $A_1$ , 已知它们的 block-encodings  $U_{A_0}$  和  $U_{A_1}$ . 尝试:



- ▶ 该线路是不对的, 因为  $U_{A_1}$  会将作用了  $U_{A_0}$  之后的一些“垃圾”部分带回  $|0\rangle$  对应的子空间

# 矩阵乘法

思想：使用多份独立的辅助量子比特

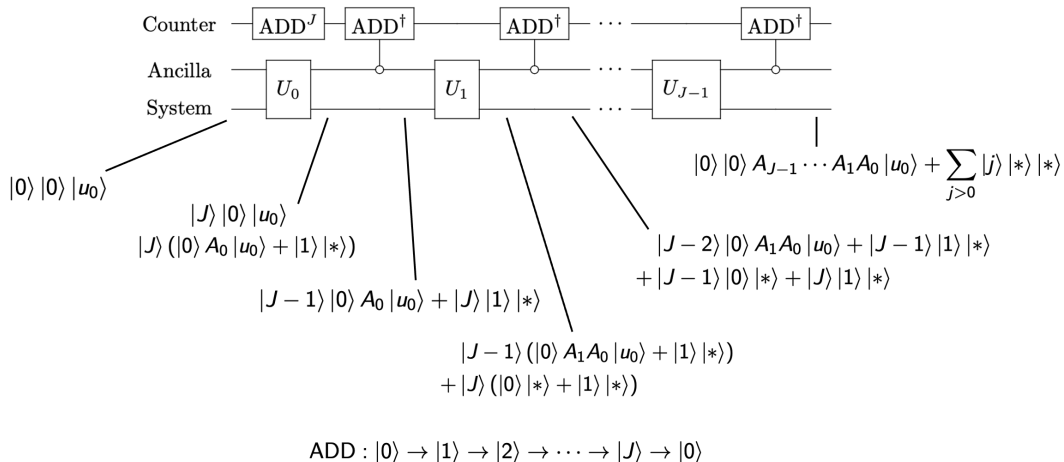


$$\begin{aligned} |0\rangle_1 |0\rangle_0 |\psi\rangle &\xrightarrow{U_{A_0}} |0\rangle_1 (|0\rangle_0 A_0 |\psi\rangle + |1\rangle_0 |*\rangle) \\ &= |0\rangle_0 |0\rangle_1 A_0 |\psi\rangle + |1\rangle_0 |0\rangle_1 |*\rangle \\ &\xrightarrow{U_{A_1}} |0\rangle_0 (|0\rangle_1 A_1 A_0 |\psi\rangle + |1\rangle_1 |*\rangle) + |1\rangle_0 |0\rangle_1 |*\rangle + |1\rangle_0 |1\rangle_1 |*\rangle \end{aligned}$$

$J$  个矩阵的乘法：需要  $\mathcal{O}(Ja)$  额外的辅助量子比特

► 更好的方法：compression gadget

## 矩阵乘法: compression gadget



►  $a + \log_2 J$  额外的辅助量子比特

# 阅读

阅读:

- ▶ LL: Chapter 3.1, 7.3