컴퓨터공학과 20211507 김동건

문제1) One Fire Station

우선, 문제의 상황은 트리이고, 말단 노드에 건물들이 있다. 가장 먼저 떠오르는 풀이는 O(N^2)풀이이다. N개의 각 정점마다 소방서를 세워보고, 그 소방서로부터 BFS를 돌아, 가장 먼 거리를 찾고, 그 N개 중 최솟값이 되는 위치가 소방서로 적합한 위치이다.

조금 고민을 해보니, 결국 소방서는 주어진 트리의 지름 위에 있을 수 밖에 없다는 것을 알 수 있다. 트리의 지름이란, 어떤 노드 사이의 거리 중 최댓값이다. 왜 트리의 지름 위에 있을 수 밖에 없을까? 만약, 최적 위치가 트리의 지름 위가 아니라고 해보자. 즉, 트리에서 뻗어나간 가지 위에 소방서를 두는 것이 최적인 경우라고 해보자. 예를 들어, 아래 그림에서 p와 q를 잇는 경로가 트리의 지름이라고 하자.

라인, 도표, 친필, 스케치이(가) 표시된 사진

자동 생성된 설명 이때, 지름은 u+v이고, w <= min(u, v)이다. w <= min(u, v)인 이유는 만약 그렇지 않다면, 저 경로가 트리의 지름이여야 하기 때문이다.

여기에서, 빨간 점에 소방서를 설치한다고 해보자. 그렇다면, 가장 먼 건물까지의 거리는 x + max(u, v)이다. 그리고 이 값은 y보다 무조건 크다. 일단, 가장 먼 건물은 지름위에 있을 수 밖에 없다. 그렇지 않다면 그 건물이 있는 곳이 지름이여야 하기 때문이다. 즉, p혹은 q까지 거리 중 최대값이 가장 먼 건물까지의 거리이다.

이제 소방서를 u, v, w의 교차로에 설치해보자. 그렇다면 가장 먼 건물까지의 거리는 max(u, v)로 줄어든다. 즉, 임의의 지름이 아닌 가지 위에 설치한 소방서는 지름위로 옮기면 원하는 값이 무조건 작아지기 때문에 항상 지름 위에 설치하는 것이 이득이다.

지름 위에 설치하는 것이 최적인 것은 증명하였다. 그럼 이제, 지름 위에서 어디에 설치하는지 하나씩 보면 된다. p와 q사이에 있는 모든 r에 대해, max(dist(p, r), dist(r, q))중 최솟값이 되는 위치에 소방서를 설치하는 것이 최적이다. 만약 길에도 설치가 가능하다면 p와 q의 중점에 설치하면 된다.

트리의 지름을 구하는 데에, O(N)이 들고, 지름이 구해졌으므로 p에서 q로 지름을 따라이동하면서 각각 답을 갱신해주는데에 O(N)이 들어 O(N)의 시간에 해결이 가능하다. 공간도 마찬가지로 간선들과 지름 정보만 저장해주면 되기 때문에 O(N)이다. 마지막으로, 트리의 지름을 O(N)에 구하는 방법에 대해 간단히 보이겠다.

1. 임의의 정점에서 가장 먼 정점을 dfs로 찾고, 이를 x라 하자.
2. x에서 가장 먼 정점을 dfs로 찾고, 이를 y라 하자.
3. x와 y를 잇는 경로가 트리의 지름이다.

위 방법으로 구한 경로가 트리의 지름인건 어떻게 알 수 있을까? x와 y를 잇는 것이 트리의 지름이라고 가정하자. 임의의 정점 a를 정하고, a에서 가장 먼 점 b를 찾자. 어떠한 a에 대해서도 a와 b의거리가 x와 y의 거리보다 작거나 같으면 증명이 완료된다.

아래 세 경우가 있다.

1. a가 x 혹은 y인 경우
2. b가 x 혹은 y인 경우
3. a, b, x, y가 모두 서로 다른 경우

1)과 2)는 구하는 과정을 생각해보면 자명하기 때문에 생략한다.

3-1) 경로 a, b와 지름 x, y가 한 점 이상 공유하는 경우

겹치는 구간을 한 점 t라고 생각하였다.

스케치, 그림, 화이트, 라인 아트이(가) 표시된 사진

자동 생성된 설명

x, y경로가 지름이기 때문에 d(t, b) = max(d(t, x), d(t, y))이다.

이유는 다음과 같다. b가 a에서 가장 먼 점이어야 하기 때문.. 만약 등호가 d(t, b) > d(t, x)라면 x에서 가장 먼 점이 y라는 것에 모순이고, d(t, b) > d(t, y)라면 y에서 가장 먼 점이 x라는 것에 모순이다. 또, d(t, b) < max(d(t, x), d(t, y))라면, a에서 가장 먼점이 b라는 것이 모순이다. 따라서 d(t, b) = max(d(t, x), d(t, y))이기 때문에 우리의 알고리즘이 트리의 지름을 올바르게 구한다.

3-2) 경로 a, b와 지름 x, y가 아무 점도 공유하지 않는 경우

친필, 그림, 도표, 스케치이(가) 표시된 사진

자동 생성된 설명즉, 불가능한 경우이다.

문제2) Two Fire Stations

우선, 지름의 두 끝점에서 같은 거리에 있는 두 곳에 소방서를 설치하는 것 중 하나가 최적해이다. 라인이(가) 표시된 사진

자동 생성된 설명

1. 만약, 같은 거리에 두는 것이 최적이 아니라고 해보자, 그렇다면, 끝과 더 가까운 소방서를 늘려서 지름 끝과의 거리를 같게 만들어도 최대 거리는 변하지 않는다.라인, 화이트이(가) 표시된 사진

   자동 생성된 설명왜냐하면, 이미 우리는 왼쪽에서 d만큼의 거리를 가졌기 때문에, d까지 늘려도 소방서까지의 최대거리는 변하지 않기 때문이다.
2. 만약, 지름 위에 설치하지 않는 것이 최적이라 해보자. 그렇다면, 그 소방서를 지름으로 옮겨도 소방서까지의 최대 거리는 늘어나지 않기때문에 지름 위에 설치하는 것이 최적이다.

친필, 라인, 폰트이(가) 표시된 사진

자동 생성된 설명

즉, 우리는 지름의 양 끝 점에서 같은 거리에 떨어진 두 곳에 소방서를 설치하는 것이 답 중 하나라는 것을 알 수 있다. 이제, 지름의 양 끝점에서 dfs를 한 번 씩 돌아 dist1, dist2 배열을 기록해두자. dist1[i]: 지름 왼쪽 끝에서 i노드까지 거리이다. dist2[i]는 오른쪽 끝 지름과의 노드 i와의 거리이다. 각 노드 i에 대해 dist1[i]<dist2[i]면 왼쪽 지름 끝과 같은 소방서의 영향을 받는 노드, dist1[i]<=dist2[i]라면 오른쪽 지름 끝과 같은 소방서의 영향을 받는 노드라고 생각할 수 있다. 따라서, 우리가 구하는 1)에서의 d는 dist1[u]/2중 최댓값, dist2[v]/2중 큰 값이다. (u는 왼쪽 소방서에 영향, v는 오른쪽 소방서에 영향을 받는 노드) 그래야 모든 리프노드들을 커버할 수 있기 때문이다.

지름을 찾는 것은 dfs 2번, dist배열을 채우는 것도 dfs 2번에 가능하다. 이때, 지름을 구하는 두 번째 dfs에서 dist1을 같이 구할 수 있으니 총 dfs는 3번에 가능하다. 따라서 전체 시간복잡도 O(N)에 해결가능하다.