计数1

例题

- 有a个硬币，初始全部正面朝上。
- 现在有n次操作，每次把编号是x的倍数的硬币翻面。
- n<=20。
- 问多少个硬币被翻过。
- 问多少个硬币正面朝上。
- 对于每个i，求被翻过i次的硬币的个数。

第一问大家都知道答案是
至少是一个数的倍数的个数-两个的+三个的-四个的……

大家都知道容斥，想过容斥的原理吗？
这是组合数型容斥，即容易发现
如果一个数是其中n个数的倍数，那么这个数被计算的次数是：

$$\sum_{i=1}^{n} C_n^i * (-1)^{i+1}$$

这个式子等于[n>0]
简单证明：
显然n=0时该式子为0，接下来我们说明n>=1时该式子为1。

$$\sum_{i=1}^{n} C_n^i * (-1)^{i+1}$$
$$=\sum_{i=1}^{n} (C_{n-1}^i + C_{n-1}^{i-1}) * (-1)^{i+1}$$
$$=\sum_{i=1}^{n-1} C_{n-1}^i * (-1)^{i+1} + \sum_{i=1}^{n} C_{n-1}^{i-1} * (-1)^{i+1}$$
$$=\sum_{i=1}^{n-1} C_{n-1}^i * (-1)^{i+1} + \sum_{i=1}^{n-1} C_{n-1}^i * (-1)^{i+2} + C_{n-1}^0$$
$$=1$$

在第一问中，因为

$$\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i} * (-1)^{i+1} = [n>0]$$

所以容斥系数是(-1)^(i+1)

在第二问中
我们要求的是被翻过偶数次的硬币，假设容斥系数是f[i]
那么就是要求

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} * f(i) = [n\%2==0]$$

注意这里是从0开始因为翻0次也是合法的
转化一下就是

$$f(n) = [n\%2 == 0] - \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i} * f(i)$$

这样就可以求容斥系数了

第三问同理

对于每个k我们可以设计容斥系数f(i)满足

$$\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i} * f(i) = [n==k]$$

这样就可以求出被翻过k次的硬币的个数了。

容斥原理

- 通过对限制的更改使其变成容易计算的计数问题，再通过配以正确的容斥系数，使得最终得到的结果和原问题一致。
- 什么是配以正确的容斥系数呢？那么就是在设计容斥时，对每个需要计数的情况应该被计数多少次的考虑！
- 一般容斥问题都是这样：
- 要满足n个条件：……
- 而我们只满足或不满足其中一些条件，其余条件不管，然后进行容斥。
- 这就是把限制更改来变得更容易计算。

斯特林数

- 第一类斯特林数s(n,m)表示将n个可区分元素划分成m个圆排列的方案数。
- 第二类斯特林数S(n,m)表示将n个可区分元素划分成m个集合的方案数。
- 且有以下递推公式:
- $s(n,m)=s(n-1,m-1)+(n-1)*s(n,m-1)$
- $S(n,m)=S(n-1,m-1)+m*S(n-1,m)$

斯特林容斥

- bzoj异或图
- 定义两个结点数相同的图 G1 与图 G2 的异或为一个新的图 G, 其中如果 (u, v) 在 G1 与
- G2 中的出现次数之和为 1, 那么边 (u, v) 在 G 中, 否则这条边不在 G 中.
- 现在给定 s 个结点数相同的图 G1⋯s, 设 S = {G1, G2, ⋯ , Gs}, 请问 S 有多少个子集的异或为一个连通图?
- 点数n<=10,s<=60。

做法

连通图表示只有一个连通块的方案
枚举一个划分，强制不同的集合之间没有边，集合内部不考虑。
我们只需要异或高斯消元就可以求出其中的方案数。

容斥系数?
对于一个n个连通块的图，有S(n,i)种方法划分成i个两两之间没有边的点集
S(n,i)是第二类斯特林数，将n个元素划分成i个集合的方案数

$$\sum_{i=1}^{n} S(n,i) * f(i) = [n==1]$$

对于这道题来说容斥系数就是

$$f(i) = (-1)^{i-1} * (i-1)!$$

证明

- 我们可以来证明一下

$$\sum_{m=1}^{n} S(n,m) * (-1)^{m-1} * (m-1)! = [n=1]$$

- n=1显然成立， 然后我们说明n>=2成立。

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{n} S(n,m) * (-1)^{m-1} * (m-1)! \\
&=\sum_{m=1}^{n} [S(n-1,m-1) + S(n-1,m) * m] * (-1)^{m-1} * (m-1)! \\
&=\sum_{m=1}^{n} S(n-1,m-1) * (-1)^{m-1} * (m-1)! + \sum_{m=1}^{n-1} S(n-1,m) * (-1)^{m-1} * m! \\
&=\sum_{m=1}^{n-1} S(n-1,m) * (-1)^{m} * m! + S(n-1,0) * (-1)^{0} * 0! + \sum_{m=1}^{n-1} S(n-1,m) * (-1)^{m-1} * m! \\
&=0
\end{aligned}$$

题

- 有k个硬币排成一列，每一个硬币可以是正面向上也可以是反面向上
- 有n个限制，第i个限制表示$[l_i, r_i]$区间存在正面朝上的硬币
- 有m个限制，第i个限制表示$[l_i, r_i]$区间存在反面朝上的硬币
- 求合法的硬币方案数模$1e9+7$
- $k \le 1e9, n, m \le 1e5$

考虑容斥：枚举哪些条件一定不满足，乘以容斥系数(-1)^I
显然2^n+m是一个不可接受的复杂度。
考虑dp
把区间按右端点排序，同一类型的区间如果存在包含就去掉大的。
记f0[i]/f1[i]为最后一个区间是“至少有一个朝上”/“至少有一个朝下”的第i个区间
即这个区间右端点之前的都已经确定了的带权方案数，权即为容斥系数。
转移就是枚举上一个一定不满足的区间，乘上中间数任意选的方案以及容斥系数(-1)
事实上这个东西可以通过线段树解决，离散化之后也可以直接前缀和做。

题

- 一张图，每条边的边权是一个[0,1]中均匀随机的实数。
- 求这张图的最小生成树的边权最大值。
- N<=10

记函数P(x)为答案小于x的概率。
答案就是P(x)在[0,1]上的定积分。
如何求P(x)
P(x)的含义即边权小于x的边组成连通图的概率。
容斥一个连通图:
枚举图的一个集合划分，规定不同集合之间的边权一定大于x，即令其不连通，概率是(1-x)^集合之间的边数，乘上容斥系数(-1)^(k-1)*(k-1)!，k是划分的集合个数。
复杂度Bell(n)*n^2

题

- 求出n个点m条边带标号无向连通图个数。
- m=O(n^2)
- 任何优于n^6的做法都可以分享

- n^6做法
- 设dp f[n][m]，无向图数量显然是组合数，然后减去不连通的方案，枚举编号最小点所在联通块的点数与边数即可。

运用斯特林容斥

我们设$dp(i,j)=\sum_{G\ is\ a\ graph,v(G)=i,e(G)=j}(-1)^{c(G)-1}*(c(G)-1)!$

其中$v(G)$表示图G的点数，$e(G)$表示图G每个联通块如果都是完全图，总边数是多少。$c(G)$表示图G的联通块数。

假如算出了dp，那么f很好算。

$f(n,m)=\sum_{i>=m}dp(n,i)*C_i^m$

我们先考虑如何计算dp，可以设一个g。

$g(i,j,k)=\sum_{G\ is\ a\ graph,v(G)=i,e(G)=j,c(G)=k}(-1)^{k-1}*(k-1)!$

这个g就很好转移了，可以枚举1号点所在联通块的点数。

复杂度是n*m*n*n=n^5。

然后有了g很好得到dp。

考虑用dp来得到f，可以用n*m*m=n^5时间来得出。

继续优化

$$dp(i,j) = \sum_{G \text{ is a graph}, v(G)=i, e(G)=j} (-1)^{c(G)-1} * (c(G)-1)!$$

观察这条式子，先想想如何计算一个图$(c(G)-1)!$次，我们可以每次枚举任意一个不包含1号点的联通块，因此这个问题迎刃而解。

dp的转移就是每次枚举任意一个不包含1号点的联通块，复杂度n*m*n=n^4。

题

- 求出长度为n，不包含长度为m连续子序列是公差为±1的等差数列的排列个数，模998244353
- Level1:n,m<=200
- Level2:n,m<=5000

Level1:
很容易想到的暴力dp:
首先我们知道对于一个排列可以唯一拆分成若干个极长的公差为±1的等差数列。
f[i][j][k]表示现在有i个数，有j个位置可以插入数字，有k个位置必须插入数字。
转移就是枚举下一个等差数列的长度，公差，然后考虑插入在某一个空位中（当然这会产生两个空位）。
转移时要注意不能与前一个等差数列接上，这可能需要再记一些东西。转移要用前缀和优化，复杂度O(n^3)。