

# 数学物理方法作业

Charles Luo

2024 年 12 月 22 日

## 目录

1	第一章习题	3
2	第二章习题	6
3	第三章习题	13
4	第四章习题	18
5	第五章习题	22
6	第六章习题	29
7	第七章习题	42
8	第八章习题	43
9	第九章习题	44
10	第十章习题	45
11	第十一章习题	46
12	第十三章习题	47
13	第十五章习题	49

## 1 第一章习题

习题 1. 计算下列表达式的值：

(1)  $(\frac{1+i}{2-i})^2$  ;

(2)  $(1+i)^n + (1-i)^n$  , 其中  $n$  为整数.

解答.

(1) 原式  $= (\frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)})^2 = (\frac{1+3i}{5})^2 = \frac{-8+6i}{25}$ .

(2) 由于  $1+i = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$  ,  $1-i = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$  . 原式  $= 2^{\frac{n}{2}}e^{\frac{n\pi}{4}i} + 2^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{n\pi}{4}i} = 2^{\frac{n}{2}+1} \cos \frac{n\pi}{4}$  .

习题 2. 写出下列复数的实部、虚部、模和辐角：

(1)  $1+i\sqrt{3}$  ;

(2)  $e^{i \sin x}$  ,  $x$  为实数;

(3)  $e^{iz}$  ;

(4)  $e^z$  ;

(5)  $e^{i\phi(x)}$  ,  $\phi(x)$  是实变数  $x$  的实函数;

(6)  $1 - \cos \alpha + i \sin \alpha$  ,  $0 \leq \alpha < 2\pi$  .

解答.

习题 2 的注记. (3)(4) 中  $x$  是  $z$  的实部,  $y$  是  $z$  的虚部。

习题 3. 把下列关系用几何图形表示出来：

(1)  $|z| < 2, |z| = 2, |z| > 2$ ;

(2)  $\operatorname{Re} z > \frac{1}{2}$ ;

题号	实部	虚部	模	辐角
(1)	1	$\sqrt{3}$	2	$\frac{\pi}{3} + 2k\pi$
(2)	$\cos \sin x$	$\sin \sin x$	1	$\sin x + 2k\pi$
(3)	$e^{-y} \cos x$	$e^{-y} \sin x$	$e^{-y}$	$x + 2k\pi$
(4)	$e^x \cos y$	$e^x \sin y$	$e^x$	$y + 2k\pi$
(5)	$\cos \phi(x)$	$\sin \phi(x)$	1	$\phi(x) + 2k\pi$
(6)	$1 - \cos \alpha$	$\sin \alpha$	$2 \sin \frac{\alpha}{2}$	$\frac{\pi - \alpha}{2} + 2k\pi$

(3)  $1 < \operatorname{Im} z < 2$ ;

(4)  $0 < \arg(1 - z) < \frac{\pi}{4}$ ;

(5)  $|z| + \operatorname{Re} z < 1$ ;

(6)  $0 < \arg\left(\frac{z+1}{z-1}\right) < \frac{\pi}{4}$ ;

(7)  $|z - a| = |z - b|$ ,  $a, b$  为常数;

(8)  $|z - a| + |z - b| = c$ , 其中  $a, b, c$  均为常数,  $c > |a - b|$ .

解答.

(1) 以原点为圆心画一个半径为 2 的圆, 表示区域分别是圆内、圆上和圆外。

(2) 在实轴  $\frac{1}{2}$  处画一条平行于虚轴的直线, 所求为直线右边区域。

(3) 在虚轴 1 和 2 处分别画一条平行于实轴的直线, 所求为两直线之间区域。

(4) 由于  $z = x + yi$ , 故  $1 - z = (1 - x) - yi$ , 根据题意有  $1 - x > 0$ ,  $0 < \frac{-y}{1 - x} < 1$ , 解  $x < 1$ ,  $x - 1 < y < 0$ 。

(5) 由于  $z = x + yi$ , 根据题意  $x + \sqrt{x^2 + y^2} < 1$ , 化简得到  $y^2 < 1 - 2x$ 。

(6) 由于  $z = x + yi$ , 根据题意  $\frac{x+1+yi}{x-1+yi}$  可以化简为  $\frac{x^2+y^2-1}{x^2-2x+y^2+1} - \frac{2yi}{x^2-2x+y^2+1}$ , 而辐角范围为  $(0, \frac{\pi}{4})$ , 有  $x^2+y^2-1 > 0$ ,  $0 < \frac{-2y}{x^2+y^2-1} < 1$ , 画出来的图像是  $y < 0$  部分挖去以  $(0, -1)$  为圆心,  $\sqrt{2}$  为半径的圆。

- (7) 根据题意，点到  $a, b$  的距离相等，点在  $ab$  连线的中垂线上。
- (8) 根据题意，点到  $a, b$  的距离和为定值，符合椭圆定义，故点在以  $a, b$  为焦点的椭圆上。

## 2 第二章习题

习题 4. 判断下列函数在何处可导（并求出其导函数），在何处解析：

(1)  $|z|$  ;

(2)  $z^*$  ;

(3)  $z \operatorname{Re} z$  ;

(4)  $(x^2 + 2y) + i(x^2 + y^2)$  ;

(5)  $3x^2 + 2iy^2$  ;

(6)  $(x - y)^2 + 2i(x + y)$  .

解答.

(1) 由于  $z = x + iy, f(z) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

若满足 C-R 方程，则  $x = y = 0$ ，而沿着  $y = x$  趋近原点时，

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0$$

故处处不可导，不解析。

(2) 若可导，则有  $\frac{\partial f}{\partial z^*} = 0$ ，故处处不可导，不解析。

(3) 由于  $z = x + iy, f(z) = x^2 + ixy$ ,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = y$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = x$$

若满足 C-R 方程, 则  $x = y = 0$ , 现令  $x = \rho \sin \theta, y = \rho \cos \theta$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2 \cos \theta^2 + i \rho^2 \sin \theta \cos \theta}{\rho \cos \theta + i \rho \sin \theta} = \rho \cos \theta = 0$$

故仅在  $(0, 0)$  处可导, 不解析。

(4) 由题可以得到

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2y$$

若满足 C-R 方程, 则  $y = x, x = -1$ , 现令  $x = \rho \sin \theta, y = \rho \cos \theta$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2 \cos \theta^2 - 2\rho \cos \theta + 2\rho \sin \theta + i\rho^2 - 2i\rho \cos \theta - 2i\rho \sin \theta}{\rho \cos \theta + i \sin \theta} \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{-2 \cos \theta + 2 \sin \theta - 2i \cos \theta - 2i \sin \theta}{\cos \theta + i \sin \theta} = -2 - 2i \end{aligned}$$

故仅在  $(-1, 1)$  处可导, 导数为  $-2 - 2i$ , 不解析。

(5) 由题可以得到

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 6x$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 6y^2$$

若满足 C-R 方程, 则  $x = y^2$ , 此时  $f(z) = 3y^4 + 2iy^2$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = 6y^2$$

故在  $x = y^2$  上可导, 导数为  $6y^2$ , 不解析。

(6) 由题可以得到

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 2y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y - 2x$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2$$

若满足 C-R 方程, 则  $2x - 2y = 2$  即  $x = y + 1$ , 此时  $f(z) = 1 + i(4y + 2)$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = 2 + 2i$$

故在  $x = y + 1$  上可导, 导数为  $2 + 2i$ , 不解析。

**习题 5.** 设  $z = x + iy$ , 已知解析函数  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  的实部或虚部如下, 试求  $f'(z)$  :

(1)  $u = x + y$  ;

(2)  $u = \sin x \cosh y$  .

**解答.**

(1) 由函数解析可知 C-R 方程成立, 而  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 1$ , 故  $\frac{\partial v}{\partial x} = -1$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y} = 1$ .

$$\text{于是可以求出 } v(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,0)} -dx + \int_{(x,0)}^{(x,t)} dy = -x + y + C.$$

$$\text{即 } f(z) = x + y + i(y - x) + iC = z - iz + iC, f'(z) = 1 - i.$$

(2) 由函数解析可知 C-R 方程成立, 而  $\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x \cosh y$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = \sin x \sinh y$ ,

$$\text{故 } \frac{\partial v}{\partial x} = -\sin x \sinh y, \frac{\partial v}{\partial y} = \cos x \cosh y.$$

$$\text{于是可以求出 } v(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,0)} -\sin x \sinh 0 dx + \int_{(x,0)}^{(x,t)} \cos x \cosh y dy = \cos x \sinh y + C.$$

$$\text{即 } f(z) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y + iC, f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = \cos x \cosh y - \sin x \sinh y = \cos z.$$



习题 5 的注记.

- $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$
- $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$
- $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$
- $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$
- $\sinh z = -i \sin iz$
- $\cosh z = \cos iz$

习题 6. 若  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  解析, 且  $u - v = (x - y)(x^2 + 4xy + y^2)$ , 试  $f(z)$ .

解答. 由题,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} &= x^2 + 4xy + y^2 + (x - y)(2x + 4y), \\ \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} &= -(x^2 + 4xy + y^2) + (x - y)(4x + 2y).\end{aligned}$$

解析函数满足 C-R 方程, 即  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ .

解出  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 6xy$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = 3(x^2 - y^2)$ .

$$u(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,0)} 0dx + \int_{(x,0)}^{(x,t)} 3(x^2 - y^2)dy = 3x^2y - y^2 + C_1.$$

$$v(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,0)} -3x^2dx + \int_{(x,0)}^{(x,t)} 6xydy = -x^3 + 3xy^2 + C_2.$$

而  $u - v$  中不含常数, 故  $C_1 = C_2 = C$ ,

$$f(z) = u + iv = 3x^2y - y^2 + i(3xy^2 - x^3) + (1 + i)C = iz^3 + (1 + i)C$$

习题 7. 判断下列哪些是函数，哪些是多值函数：

(1)  $\sqrt{z^2 - 1}$  ;

(2)  $z + \sqrt{z - 1}$  ;

(3)  $\sin \sqrt{z}$  ;

(4)  $\cos \sqrt{z}$  ;

(5)  $\frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}}$  ;

(6)  $\frac{\cos \sqrt{z}}{\sqrt{z}}$  ;

(7)  $\ln \sin z$  ;

(8)  $\sin(i \ln z)$  ;

解答.

(1) 多值函数。

(2) 多值函数。

(3) 已知  $\sqrt{z} = \pm \omega$  , 且  $\sin \omega \neq \sin -\omega$  , 故为多值函数。

(4) 虽然  $\sqrt{z} = \pm \omega$  , 但是  $\cos \omega = \cos -\omega$  , 故为单值函数。

(5) 虽然  $\sqrt{z} = \pm \omega$  , 但是  $\frac{\sin \omega}{\omega} = \frac{\sin(-\omega)}{-\omega}$  , 故为单值函数。

(6) 已知  $\sqrt{z} = \pm \omega$  , 且  $\frac{\cos \omega}{\omega} \neq \frac{\cos(-\omega)}{-\omega}$  , 故为多值函数。

(7) 多值函数。

(8) 已知  $\ln z$  是多值函数，对应的函数值满足关系的是值相同，幅角相差  $2\pi$  的整数倍，而正弦函数又以  $2\pi$  为周期，故为单值函数。

**习题 8.** 找出下列多值函数的分支点，并讨论  $z$  绕一个分支点移动一周回到原点处后多值函数值的变化。如果同时绕两个、三个乃至更多个分支点一周，多值函数的值又如何变化？

(1)  $\sqrt{(z-a)(z-b)}$ ,  $a \neq b$ ;

(2)  $\sqrt[3]{(z-a)(z-b)}$ ,  $a \neq b$ ;

(3)  $\sqrt{1-z^3}$ ;

(4)  $\sqrt[3]{1-z^3}$ ;

(5)  $\ln(z^2+1)$ ;

(6)  $\ln \cos z$ ;

**解答.**

(1) 枝点可能为  $a, b, \infty$ , 逐一验证:

- 令  $z = a + \epsilon e^{i\varphi}$ ,  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $\varphi \in (0, 2\pi)$ , 此时  $f(z) = e^{\frac{1}{2}i\varphi} \sqrt{(a-b)\epsilon}$ .

显然  $\varphi = 0$  和  $\varphi = 2\pi$  时函数值不等, 故  $a$  为枝点。

- 同理,  $b$  也为枝点。

- 现考虑  $\infty$ , 做变换  $t = \frac{1}{z}$ , 令  $t = \epsilon e^{i\varphi}$ ,  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $\varphi \in (0, 2\pi)$ , 此时  $f(\infty) = e^{-i\varphi} \sqrt{\frac{1}{\epsilon^2}}$ .

显然  $\varphi = 0$  和  $\varphi = 2\pi$  时函数值相等, 故  $\infty$  不是枝点。

故枝点为  $a, b$ 。

(2) 枝点可能为  $a, b, \infty$ , 逐一验证:

- 令  $z = a + \epsilon e^{i\varphi}$ ,  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $\varphi \in (0, 2\pi)$ , 此时  $f(z) = e^{\frac{1}{3}i\varphi} \sqrt[3]{(a-b)\epsilon}$ .

显然  $\varphi = 0$  和  $\varphi = 2\pi$  时函数值不等, 故  $a$  为枝点。

- 同理,  $b$  也为枝点。

- 现考虑  $\infty$ , 做变换  $t = \frac{1}{z}$ , 令  $t = \epsilon e^{i\varphi}$ ,  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $\varphi \in (0, 2\pi)$ , 此时  $f(\infty) = e^{-\frac{2}{3}i\varphi} \sqrt[3]{\frac{1}{\epsilon^2}}$ .

显然  $\varphi = 0$  和  $\varphi = 2\pi$  时函数值不等, 故  $\infty$  为枝点。

故枝点为  $a, b, \infty$ 。

(3) 因式分解得  $\sqrt{(1-z)(z-e^{i\frac{2\pi}{3}})(z-e^{-i\frac{2\pi}{3}})}$ , 故猜测枝点为  $1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{-i\frac{2\pi}{3}}, \infty$ , 逐一验证:

- 令  $z = 1 + \epsilon e^{i\varphi}$ ,  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $\varphi \in (0, 2\pi)$ , 此时  $f(z) = e^{\frac{1}{2}i\varphi} \sqrt{(1-e^{i\frac{2\pi}{3}})(1-e^{-i\frac{2\pi}{3}})\epsilon}$ .  
显然  $\varphi = 0$  和  $\varphi = 2\pi$  时函数值不等, 故  $1$  为枝点。
- 同理,  $e^{i\frac{2\pi}{3}}$  也为枝点。
- 同理,  $e^{-i\frac{2\pi}{3}}$  也为枝点。
- 现考虑  $\infty$ , 做变换  $t = \frac{1}{z}$ , 令  $t = \epsilon e^{i\varphi}$ ,  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $\varphi \in (0, 2\pi)$ , 此时  $f(\infty) = e^{-\frac{3}{2}i\varphi} \sqrt{\frac{1}{\epsilon^3}}$ .  
显然  $\varphi = 0$  和  $\varphi = 2\pi$  时函数值不等, 故  $\infty$  为枝点。

故枝点为  $1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{-i\frac{2\pi}{3}}, \infty$ 。

(4) 因式分解得  $\sqrt[3]{(1-z)(z-e^{i\frac{2\pi}{3}})(z-e^{-i\frac{2\pi}{3}})}$ , 故猜测枝点为  $1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{-i\frac{2\pi}{3}}, \infty$ , 逐一验证:

- 令  $z = 1 + \epsilon e^{i\varphi}$ ,  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $\varphi \in (0, 2\pi)$ , 此时  $f(z) = e^{\frac{1}{3}i\varphi} \sqrt[3]{(1-e^{i\frac{2\pi}{3}})(1-e^{-i\frac{2\pi}{3}})\epsilon}$ .  
显然  $\varphi = 0$  和  $\varphi = 2\pi$  时函数值不等, 故  $1$  为枝点。
- 同理,  $e^{i\frac{2\pi}{3}}$  也为枝点。
- 同理,  $e^{-i\frac{2\pi}{3}}$  也为枝点。
- 现考虑  $\infty$ , 做变换  $t = \frac{1}{z}$ , 令  $t = \epsilon e^{i\varphi}$ ,  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $\varphi \in (0, 2\pi)$ , 此时  $f(\infty) = e^{-i\varphi} \sqrt[3]{\frac{1}{\epsilon^3}}$ .  
显然  $\varphi = 0$  和  $\varphi = 2\pi$  时函数值相等, 故  $\infty$  不是枝点。

故枝点为  $1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ 。

(5) 枝点可能为  $i, -i, \infty$ , 逐一验证:

- 令  $z = i + \epsilon e^{i\varphi}$ ,  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $\varphi \in (0, 2\pi)$ , 此时  $f(z) = \ln 2i\epsilon e^{i\varphi} = i\varphi + \ln 2i\epsilon$ .  
显然  $\varphi = 0$  和  $\varphi = 2\pi$  时函数值不等, 故  $i$  为枝点。
- 同理,  $-i$  也为枝点。
- 现考虑  $\infty$ , 做变换  $t = \frac{1}{z}$ , 令  $t = \epsilon e^{i\varphi}$ ,  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $\varphi \in (0, 2\pi)$ , 此时  $f(\infty) = -i\varphi + \ln \frac{1}{\epsilon}$ .  
显然  $\varphi = 0$  和  $\varphi = 2\pi$  时函数值不等, 故  $\infty$  为枝点。故枝点为  $i, -i, \infty$ 。

(6) 由  $\cos z = 0$  可以解出  $z = \pm \frac{2n+1}{2}\pi$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , 猜测这些根都是枝点。不妨以  $\frac{\pi}{2}$  为例, 令

$$z = \frac{\pi}{2} + \epsilon e^{i\varphi}, \quad \epsilon \rightarrow 0, \quad \varphi \in (0, 2\pi), \quad \text{此时 } f(z) = \ln \frac{e^{i(\frac{\pi}{2} + \epsilon e^{i\varphi})} + e^{-i(\frac{\pi}{2} + \epsilon e^{i\varphi})}}{2} = \ln \epsilon + i\varphi.$$

显然  $\varphi = 0$  和  $\varphi = 2\pi$  时函数值不等, 故  $\infty$  为枝点。

故枝点为  $z = \pm \frac{2n+1}{2}\pi$ ,  $n \in \mathbb{N}$ 。

## 3 第三章习题

习题 9. 试按给定的路径计算下列积分：

- (1)  $\int_0^{2+i} \operatorname{Re} z dz$ , 积分路径为：
- (i) 线段  $[0, 2]$  和  $[2, 2+2i]$  组成的折线.
  - (ii) 线段  $z = (2+i)t$ ,  $0 < t \leq 1$ .
- (2)  $\int_C \frac{dz}{\sqrt{z}}$ , 规定  $\sqrt{z}|_{z=1} = 1$ , 积分路径为由  $z = 1$  出发的：
- (i) 单位圆的上半周.
  - (ii) 单位圆的下半周.

解答.

- (1) (i) 由于  $z = x + iy$ ,  $dz = dx + i dy$ , 故有
- $$\int_0^{2+i} \operatorname{Re} z dz = \int_0^2 x dx + \int_0^1 2i dy = 2 + 2i.$$
- (ii) 此时  $x = 2t$ ,  $y = t$ ,  $dz = (2+i)dt$ , 故有
- $$\int_0^{2+i} \operatorname{Re} z dz = \int_0^{2+i} 2t(2+i)dt = \int_0^1 (4t + 2it)dt = 2 + i.$$
- (2) 已知  $z = e^{i\theta}$ ,  $dz = ie^{i\theta}d\theta$ ,  $\sqrt{z} = e^{\frac{i\theta}{2}}$
- (i)  $\int_C \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_0^\pi e^{-\frac{i\theta}{2}} ie^{i\theta} d\theta = 2 \int_0^\pi e^{\frac{i\theta}{2}} d(\frac{i\theta}{2}) = 2e^{\frac{i\theta}{2}} \Big|_0^\pi = 2i - 2.$
- (ii)  $\int_C \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_0^\pi e^{-\frac{i\theta}{2}} ie^{i\theta} d\theta = 2 \int_0^{-\pi} e^{\frac{i\theta}{2}} d(\frac{i\theta}{2}) = 2e^{\frac{i\theta}{2}} \Big|_0^{-\pi} = -2i - 2.$

习题 10. 计算下列积分：

- (1)  $\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z};$
- (2)  $\oint_{|z|=1} \frac{|dz|}{z};$
- (3)  $\oint_{|z|=1} \frac{dz}{|z|};$

$$(4) \oint_{|z|=1} \left| \frac{dz}{z} \right|;$$

解答. 在单位圆上, 有  $z = e^{i\theta}$ ,  $dz = ie^{i\theta}d\theta$ .

$$(1) \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} ie^{i\theta} d\theta = 2\pi i;$$

$$(2) \text{ 此时 } |dz| = d\theta, \text{ 故 } \oint_{|z|=1} \frac{|dz|}{z} = \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} d\theta = -\frac{1}{i} \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} d(-i\theta) = -\frac{1}{i} e^{i\theta} \Big|_0^{2\pi} = 0;$$

$$(3) \text{ 此时 } |z| = 1, \text{ 故 } \oint_{|z|=1} \frac{dz}{|z|} = \int_0^{2\pi} ie^{i\theta} d\theta = e^{i\theta} \Big|_0^{2\pi} = 0;$$

$$(4) \oint_{|z|=1} \left| \frac{dz}{z} \right| = \int_0^{2\pi} |e^{-i\theta} ie^{i\theta} d\theta| = 2\pi.$$

习题 11. 计算下列积分:

$$(1) \oint_C \frac{1}{z^2 - 1} \sin \frac{\pi z}{4} dz, C \text{ 分别为:}$$

$$(i) |z| = \frac{1}{2}.$$

$$(ii) |z| = 3.$$

$$(2) \oint_C \frac{1}{z^2 + 1} e^{iz} dz, C \text{ 分别为:}$$

$$(i) |z - i| = 1.$$

$$(ii) |z + i| + |z - i| = 2\sqrt{2}.$$

解答.

$$(1) \text{ 对被积函数分析, } f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-1)} \sin \frac{\pi z}{4}, \text{ 故奇点为 } 1 \text{ 和 } -1.$$

(i) 显然此时的围道不包含奇点, 由 Cauchy 定理, 积分结果为 0。

(ii) 此时积分围道包含奇点 1 和 -1, 由 Cauchy 积分公式, 有

$$\oint_C \frac{1}{(z+1)(z-1)} \sin \frac{\pi z}{4} dz = 2\pi i \left( \frac{1}{z+1} \sin \frac{\pi z}{4} \right) \Big|_{z=1} + 2\pi i \left( \frac{1}{z-1} \sin \frac{\pi z}{4} \right) \Big|_{z=-1} = \sqrt{2}\pi i.$$

$$(2) \text{ 对被积函数分析, } f(z) = \frac{1}{(z+i)(z-i)} e^{iz}, \text{ 故奇点为 } i \text{ 和 } -i.$$

(i) 此时包含奇点  $i$ ，由 Cauchy 积分公式，有

$$\oint_C \frac{1}{(z+i)(z-i)} e^{iz} dz = 2\pi i \left( \frac{1}{z+i} e^{iz} \right) \Big|_{z=i} = \frac{\pi}{e}.$$

(ii) 此时包含奇点  $i$  和  $-i$ ，由 Cauchy 积分公式，有

$$\oint_C \frac{1}{(z+i)(z-i)} e^{iz} dz = 2\pi i \left( \frac{1}{z+i} e^{iz} \right) \Big|_{z=i} + 2\pi i \left( \frac{1}{z-i} e^{iz} \right) \Big|_{z=-i} = \frac{\pi}{e} - \pi e = -2\pi \sinh 1.$$

习题 12. 计算下列积分：

$$1. \oint_{|z|=2} \frac{\cos z}{z} dz;$$

$$2. \oint_{|z|=2} \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1} dz;$$

$$3. \oint_{|z|=2} \frac{\sin e^z}{z} dz;$$

$$4. \oint_{|z|=2} \frac{e^z}{\cosh z} dz;$$

$$5. \oint_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^2} dz;$$

$$6. \oint_{|z|=2} \frac{|z| e^z}{z^2} dz;$$

$$7. \oint_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^4} dz;$$

$$8. \oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^2(z^2 + 16)}.$$

解答.

(1) 奇点为原点，在围道内，由 Cauchy 积分公式，有

$$\oint_{|z|=2} \frac{\cos z}{z} dz = 2\pi i (\cos z) \Big|_{z=0} = 2\pi i;$$

(2) 对被积函数分析， $f(z) = \frac{z^2 - 1}{(z+i)(z-i)}$ ，故奇点为  $i$  和  $-i$ ，均在围道内，由 Cauchy 积分公式，

有

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1} dz = 2\pi i \left( \frac{z^2 - 1}{z+i} \right) \Big|_{z=i} + 2\pi i \left( \frac{z^2 - 1}{z-i} \right) \Big|_{z=-i} = -2\pi + 2\pi = 0;$$

(3) 奇点为原点，在围道内，由 Cauchy 积分公式，有

$$\oint_{|z|=2} \frac{\sin e^z}{z} dz = 2\pi i (\sin e^z)|_{z=0} = 2\pi \sin 1;$$

(4) 对被积函数分析， $f(z) = \frac{e^z}{\cos iz}$ ，奇点为  $\frac{\pi}{2}i + 2k\pi i$ ， $k \in \mathbb{Z}$ ，其中  $\pm \frac{\pi}{2}i$  在围道内，但此时不满足 Cauchy 积分公式所需表达形式，故应根据 Cauchy 定理，将原积分围道转化为两个围绕奇点的围道再求和，在  $\frac{\pi}{2}i$  点附近选取一半径为  $\rho$  的圆为围道  $C_1$ ，在  $-\frac{\pi}{2}i$  点附近选取一半径为  $\rho$  的圆为围道  $C_2$ ，先考虑  $\oint_{C_1} \frac{e^z}{\cosh z} dz$ ，不妨取  $z = \frac{\pi}{2}i + \rho e^{i\theta}$ ，此时  $dz = i\rho e^{i\theta} d\theta$ ，则有

$$\oint_{C_1} \frac{e^z}{\cosh z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{e^{\frac{\pi}{2}i + \rho e^{i\theta}}}{\cosh(\frac{\pi}{2}i + \rho e^{i\theta})} i\rho e^{i\theta} d\theta$$

当  $\rho \rightarrow 0$  时，且  $\cosh z = \cos iz$ ，可以化简得到

$$\oint_{C_1} \frac{e^z}{\cosh z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{e^{\frac{\pi}{2}i}}{\cos(-\frac{\pi}{2} + i\rho e^{i\theta})} i\rho e^{i\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{e^{\frac{\pi}{2}i}}{i\rho e^{i\theta}} i\rho e^{i\theta} d\theta = 2\pi i$$

再考虑  $\oint_{C_2} \frac{e^z}{\cosh z} dz$ ，不妨取  $z = -\frac{\pi}{2}i + \rho e^{i\theta}$ ，此时  $dz = i\rho e^{i\theta} d\theta$ ，则有

$$\oint_{C_2} \frac{e^z}{\cosh z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{e^{-\frac{\pi}{2}i + \rho e^{i\theta}}}{\cosh(-\frac{\pi}{2}i + \rho e^{i\theta})} i\rho e^{i\theta} d\theta$$

当  $\rho \rightarrow 0$  时，且  $\cosh z = \cos iz$ ，可以化简得到

$$\oint_{C_2} \frac{e^z}{\cosh z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{e^{-\frac{\pi}{2}i}}{\cos(\frac{\pi}{2} + i\rho e^{i\theta})} i\rho e^{i\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{e^{-\frac{\pi}{2}i}}{-i\rho e^{i\theta}} i\rho e^{i\theta} d\theta = 2\pi i$$

综上，最终得到

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{\cosh z} dz = \oint_{C_1} \frac{e^z}{\cosh z} dz + \oint_{C_2} \frac{e^z}{\cosh z} dz = 4\pi i.$$

(5) 奇点为原点，在围道内，但不可以直接使用 Cauchy 积分公式，应根据 Cauchy 定理，将原积分围道转化为围绕原点的围道再求，在原点附近选取一半径为  $\rho$  的圆为围道，不妨取  $z = \rho e^{i\theta}$ ，此时  $dz = i\rho e^{i\theta} d\theta$ ，则有

$$\oint_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^2} dz = \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\rho e^{i\theta})}{\rho^2 e^{2i\theta}} i\rho e^{i\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\rho e^{i\theta})}{\rho e^{i\theta}} i d\theta$$

当  $\rho \rightarrow 0$  时，可以化简得到

$$\oint_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^2} dz = \int_0^{2\pi} \frac{\rho e^{i\theta}}{\rho e^{i\theta}} i d\theta = 2\pi i.$$



- (6) 奇点为原点，在围道内，但不可以直接使用 Cauchy 积分公式，应根据 Cauchy 定理，将原积分围道转化为围绕原点的围道再求，在原点附近选取一半径为  $\rho$  的圆为围道，不妨取  $z = \rho e^{i\theta}$ ，此时  $dz = i\rho e^{i\theta} d\theta$ ，则有

$$\oint_{|z|=2} \frac{|z|e^z}{z^2} dz = \int_0^{2\pi} \frac{2e^{\rho e^{i\theta}}}{\rho^2 e^{2i\theta}} i\rho e^{i\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{2e^{\rho e^{i\theta}}}{\rho e^{i\theta}} i d\theta$$

当  $\rho \rightarrow 0$  时，可以化简得到

$$\oint_{|z|=2} \frac{|z|e^z}{z^2} dz = \int_0^{2\pi} 2i d\theta = 4\pi i.$$

- (7) 由解析函数高阶导数公式  $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{(n+1)}} d\zeta$ ,

$$\oint_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^4} dz = \frac{2\pi i}{3!} \frac{d^3}{dz^3} (\sin z)|_{z=0} = -\frac{\pi i}{3}.$$

- (8) 对被积函数分析，奇点为原点，对原式子进行拆分，得到

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z^2 + 16)} = \frac{1}{z^2} - \frac{15}{z^2 + 16}$$

显然拆分后后面分式无奇点，积分结果为 0，前面分式积分结果也为 0，故原积分结果为 0。

### 习题 12 的注记.

- (4) 需要注意，也可以用留数定理做，但不可以使用 Cauchy 积分公式。
- (5) 也可以用解析函数高阶导数公式做， $2\pi i \frac{d}{dz} (\sin z)|_{z=0} = 2\pi i$ 。
- (6) 也可以用解析函数高阶导数公式做， $2\pi i \frac{d}{dz} (2e^z)|_{z=0} = 4\pi i$ 。
- 疑问：(7) 如果按照缩小围道方法做，似乎无法得到正确答案？
- (8) 也可以用解析函数高阶导数公式做， $2\pi i \frac{d}{dz} (\frac{1}{z^2 + 16})|_{z=0} = 0$ 。

## 4 第四章习题

习题 13. 判断下列级数的收敛性与绝对收敛性：

$$(1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^n}{\ln n};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}.$$

解答.

(1) 对原级数进行拆分,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^n}{\ln n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\ln 2k} + i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\ln 2k+1}$$

由 Leibnitz 判别法可知, 拆分后的两个交错级数都收敛, 故原级数收敛, 现判断是否绝对收敛:

$$\left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^n}{\ln n} \right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} > \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$$

调和级数发散, 故  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^n}{\ln n}$  收敛但不绝对收敛。

(2) 同 (1) 对原级数进行拆分

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

由 Leibnitz 判别法可知, 拆分后的两个交错级数都收敛, 故原级数收敛, 现判断是否绝对收敛:

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

调和级数发散, 故  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$  收敛但不绝对收敛。

习题 14. 试确定下列级数的收敛区域:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} z^{n!};$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{1+z}\right)^n;$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (z^2 + 2z + 2)^n;$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{z}{3^n}.$$

解答.

(1) 对幂级数分析, 有

$$c_n = \begin{cases} 1 & n = k!, k = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{others} \end{cases}$$

根据 Cauchy-Hadamard 公式, 收敛半径为

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}} = 1$$

收敛区域为  $|z| < 1$ ;

(2) 进行换元,  $t = \frac{z}{1+z}$ , 这时  $c_n = 1$ , 由 Cauchy-Hadamard 公式, 收敛半径为 1, 故  $\left| \frac{z}{1+z} \right| < 1$ , 解出收敛区域为  $\operatorname{Re} z > -\frac{1}{z}$ ;

(3) 进行换元,  $t = z^2 + 2z + 2$ , 这时  $c_n = (-1)^n$ , 由 Cauchy-Hadamard 公式, 收敛半径为 1, 故收敛区域为  $|z^2 + 2z + 2| < 1$ ,

(4) 当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\frac{z}{3^n} \rightarrow 0$  在全平面成立, 故该级数在全平面收敛。

**习题 14 的注记.** (3) 收敛区域的数值求解没解出来。

**习题 15.** 试求下列幂级数的收敛半径:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} z^n;$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^n} z^n;$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n;$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^n}{2^{2n}(n!)^2} z^n;$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} n^{\ln n} z^n;$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} z^{2n};$$

$$(7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n^n}{n!} z^n;$$

$$(8) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n z^n.$$

解答.

(1)  $c_n = \frac{1}{n^n}$ , 根据 Cauchy-Hadamard 公式, 收敛半径为

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{c_n} \right|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} |n^n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty;$$

(2)  $c_n = \frac{1}{2^n n^n}$ , 根据 Cauchy-Hadamard 公式, 收敛半径为

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{c_n} \right|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} |2^n n^n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n = \infty;$$

(3)  $c_n = \frac{n!}{n^n}$ , 根据 d'Alembert 公式, 收敛半径为

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n! n^n}{(n+1)!(n+1)^{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e;$$

(4)  $c_n = \frac{(-)^n}{2^{2n}(n!)^2}$ , 根据 d'Alembert 公式, 收敛半径为

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| -\frac{2^{2(n+1)}[(n+1)!]^2}{2^{2n}(n!)^2} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} 4(n+1)^2 = \infty;$$

(5)  $c_n = n^{\ln n}$ , 根据 Cauchy-Hadamard 公式, 收敛半径为

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |n^{\ln n}|^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{\ln n}{n}} = 1;$$

(6) 换元  $t = z^2$ , 此时

$$c_n = \begin{cases} 0 & n = 2k + 1, k \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{2^{2n}} & n = 2k, k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

根据 Cauchy-Hadamard 公式, 对于  $t$  收敛半径为

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |2^{-2}|} = 4$$

故  $z$  的收敛半径为 2;

(7)  $c_n = \frac{n \ln n}{n!}$ , 根据 d'Alembert 公式, 收敛半径为

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| -\frac{n \ln n}{\ln(n+1)} \right| = \infty;$$

(8)  $c_n = (1 - \frac{1}{n})^n$ , 根据 Cauchy-Hadamard 公式, 收敛半径为

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |(1 - \frac{1}{n})^n|^{\frac{1}{n}}} = \lim_{t \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{n} = 1.$$

## 5 第五章习题

习题 16. 将下列函数在指定点展开为 Taylor 级数, 并给出其收敛半径:

(1)  $1 - z^2$ , 在  $z = 1$  展开;

(2)  $\sin z$ , 在  $z = n\pi$  展开;

(3)  $\frac{1}{1+z+z^2}$ , 在  $z = 0$  展开;

(4)  $\frac{\sin z}{1-z}$ , 在  $z = 0$  展开;

(5)  $e^{\frac{1}{1-z}}$ , 在  $z = 0$  展开 (可只求前四项).

解答.

(1)  $1 - z^2 = (1+z)(1-z) = (z-1)[-(z-1)-2] = -(z-1)^2 - 2(z-1)$ , 在全平面收敛。

(2) 不妨取  $t = z - n\pi$ , 有  $\sin z = \sin(t + n\pi)$ ,

$$\text{已知 } \sin t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1}, \text{ 故 } \sin(t + n\pi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^{n+k}}{(2k+1)!} t^{2k+1},$$

$$\text{即展开结果为 } \sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^{n+k}}{(2k+1)!} (z - n\pi)^{2k+1}, \text{ 在全平面收敛。}$$

$$(3) \text{ 因式分解得 } \frac{1}{1+z+z^2} = \frac{1}{(z - e^{\frac{2\pi}{3}i})(z - e^{-\frac{2\pi}{3}i})} = \frac{1}{\sqrt{3}i} \left( \frac{e^{\frac{2\pi}{3}i}}{1 - e^{\frac{2\pi}{3}i}} z - \frac{e^{-\frac{2\pi}{3}i}}{1 - e^{-\frac{2\pi}{3}i}} z \right),$$

$$\text{即展开结果为 } \frac{1}{\sqrt{3}i} \sum_{n=0}^{\infty} [e^{\frac{2(n+1)\pi}{3}} - e^{-\frac{2(n+1)\pi}{3}}] z^n = \frac{2}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \sin\left[\frac{2}{3}(n+1)\pi\right] \cdot z^n, \text{ 收敛半径为 } 1.$$

$$(4) \frac{\sin z}{1-z} = \sin z \cdot \frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} z^l = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{(2k+1)!} z^{2k+l+1},$$

$$\text{即展开结果为 } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \frac{(-)^k}{(2k+1)!} \right) z^n, \text{ 收敛半径为 } 1 \text{ (公共区域)}.$$

- (5) 根据 Taylor 级数的定义, 分别求出函数  $f(z) = e^{\frac{1}{1-z}}$  在  $z = 0$  处的各阶导数,  $f(0) = e$ ,  $f'(0) = e$ ,  $f^{(2)}(0) = 3e$ ,  $f^{(3)}(0) = 13e$ ,  $f^{(4)}(0) = 73e$ , 故 Taylor 展开为  $e + ez + \frac{3e}{2}z^2 + \frac{13e}{6}z^3 + \frac{73e}{24}z^4 + \dots$ , 收敛半径为 1 (最近的奇点为 1)。

习题 16 的注记.

$$\begin{aligned} & \bullet (3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{2(n+1)\pi}{3}}{\sin \frac{2\pi}{3}} z^n. \\ & \bullet (5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n(z^{n-1}e^z)}{dz^n} \right|_{z=1} z^n. \end{aligned}$$

习题 17. 将下列函数在指定点展开为 Taylor 级数, 并给出其收敛半径:

- (1)  $\ln z$ , 在  $z = i$  展开, 规定  $0 \leq \arg z < 2\pi$ ;
- (2)  $\ln z$ , 在  $z = i$  展开, 规定  $\ln z|_{z=i} = -\frac{3}{2}\pi i$ ;
- (3)  $\arctan z$  的主值, 在  $z = 0$  展开;
- (4)  $\ln \frac{1+z}{1-z}$ , 在  $z = \infty$  展开, 规定  $\ln \frac{1+z}{1-z}|_{z=\infty} = (2k+1)\pi i$ .

解答.

- (1) 在  $z = i$  处展开, 则展开式形式应为  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-i)^n$ , 有

$$\begin{aligned} \ln z &= \int_i^z \frac{1}{t} dt + \ln i = i \int_i^z \frac{1}{1-(1-it)} d(1-it) + \ln i \\ &= i \int_i^z \sum_{n=0}^{\infty} (1-it)^n d(1-it) + \frac{\pi i}{2} = i \sum_{n=0}^{\infty} \int_i^z (1-it)^n d(1-it) + \frac{\pi i}{2} \\ &= i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n+1} (t-i)^{n+1} \Big|_i^z + \frac{\pi i}{2} = \frac{\pi i}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{n+1}}{n+1} (z-i)^{n+1}. \end{aligned}$$

收敛区域为  $|z-i| < 1$ .

- (2) 同上, 结果为  $-\frac{3\pi i}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{n+1}}{n+1} (z-i)^{n+1}$ .

收敛区域为  $|z-i| < 1$ .

$$(3) \arctan z = \int_0^z \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt = (-1)^n \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^z t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} t^{2n+1}.$$

收敛区域为  $|z| < 1$ .

(4) 做代换  $t = \frac{1}{z}$ , 则所求为  $t = 0$  处  $\ln \frac{t+1}{t-1} = \ln(t+1) - \ln(t-1)$  的 Taylor 展开,

$$\ln(t+1) = \ln(t+1)|_{t=0} + \int_0^t \frac{1}{u+1} du = \ln(t+1)|_{t=0} + \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} (-u)^n du$$

$$= \ln(t+1)|_{t=0} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} t^{n+1}.$$

$$\text{同理, 可得 } \ln(t-1) = \ln(t-1)|_{t=0} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} t^{n+1}.$$

$$\text{故 } \ln \frac{t+1}{t-1} = \ln \frac{t+1}{t-1}|_{t=0} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} t^{2n+1}, |t| < 1. \text{ 代换 } z = \frac{1}{t} \text{ 有}$$

$$\ln \frac{1+z}{1-z} = \ln \frac{1+z}{1-z}|_{z=\infty} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} z^{-(2n+1)} = (2k+1)\pi i + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} z^{-(2n+1)}.$$

收敛区域为  $|z| > 1$ .

**习题 18.** 求下列无穷级数之和, 注意给出相应的收敛区域:

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} z^{2n+1};$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n};$$

$$(3) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(n+m)!}{n! m!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+m};$$

$$(4) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(n+m+p)!}{n! m! p!} \left(\frac{z}{3}\right)^{n+m+p}.$$

**解答.**

$$(1) \text{ 记 } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} z^{2n+1}, \text{ 有 } f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} = \frac{1}{1-z^2}, |z| < 1.$$



故  $f(z) = f(0) + \int_0^z \frac{1}{1-t^2} dt = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}$ . 由  $f(0) = 0$  知  $\ln \frac{1+z}{1-z} \Big|_{z=0} = 0$ .

收敛区域为  $|z| < 1$ .

(2) 由  $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ , 可知  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n} = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$  (只剩下偶数项).

收敛区域为  $|z| < \infty$ .

(3) 令  $l = m + n$ , 则  $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(n+m)!}{n! m!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+m} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^l \sum_{n=0}^l \frac{l!}{n!(l-n)!}$ .

由二项式展开定理有  $\sum_{n=0}^l \frac{l!}{n!(l-n)!} = (1+1)^l = 2^l$ .

故原式等于  $\sum_{l=0}^{\infty} 2^l \left(\frac{z}{2}\right)^l = \sum_{l=0}^{\infty} z^l = \frac{1}{1-z}$ .

收敛区域为  $|z| < 2$ .

(4) 同上, 看成  $\sum_{k=0}^{\infty} [(1+1) + 1]^k z^k$  的两次二项式展开, 故原式等于  $\frac{1}{1-z}$ .

收敛区域为  $|z| < 3$ .

### 习题 18 的注记.

- (3) 的收敛区域应为  $|z| < 2$  与  $\operatorname{Re} z < 1$  的公共区域?
- (4) 的收敛区域应为  $|z| < 3$  与  $\operatorname{Re} z < \frac{3}{2}$  及  $|z-2| < 1$  的公共区域?

### 习题 19. 求下列函数的 Laurent 展开:

- (1)  $\frac{1}{z^2(z-1)}$ , 在  $z=1$  附近展开;
- (2)  $\frac{1}{z^2(z-1)}$ , 展开区域为  $1 < |z| < \infty$ ;
- (3)  $\frac{1}{z^2-3z+2}$ , 展开区域为  $1 < |z| < 2$ ;
- (4)  $\frac{1}{z^2-3z+2}$ , 展开区域为  $2 < |z| < \infty$ ;

(5)  $\frac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)}$ , 展开区域为  $3 < |z| < 4$ ;

(6)  $\frac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)}$ , 展开区域为  $4 < |z| < \infty$ ;

解答.

(1) 在  $z = 1$  附近展开, 故 Laurent 展开形式为  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-1)^n$ .

$$\frac{1}{z^2(z-1)} = \frac{1}{z-1} \frac{1}{[1+(z-1)]^2} = -\frac{1}{z-1} \frac{d}{dz} \left[ \frac{1}{1+(z-1)} \right] = -\frac{1}{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n n (z-1)^{n-1}.$$

$$\text{整理得 } \sum_{n=-1}^{\infty} (-)^{n+1} (n+2) (z-1)^n.$$

收敛区域为  $0 < |z| < 1$ .

(2) 环形区域为  $1 < |z| < \infty$ , 故 Laurent 展开形式为  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ . 做代换  $t = \frac{1}{z}$  有

$$\frac{1}{z^2(z-1)} = t^3 \frac{1}{1-t} = t^3 \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} t^{n+3}.$$

$$\text{整理得 } \sum_{n=-\infty}^{-3} z^n = \sum_{n=3}^{\infty} z^{-n}.$$

(3) 环形区域为  $1 < |z| < 2$ , 故 Laurent 展开形式为  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ . 做代换  $t = \frac{1}{z}$  有

$$\frac{1}{z^2-3z+2} = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} - \frac{t}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} t^{n+1}.$$

$$\text{整理得 } -\sum_{n=-1}^{\infty} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

(4) 环形区域为  $2 < |z| < \infty$ , 故 Laurent 展开形式为  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ . 做代换  $t = \frac{1}{z}$  有

$$\frac{1}{z^2-3z+2} = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \frac{t}{1-2t} - \frac{t}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n t^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} t^{n+1}.$$

$$\text{整理得 } \sum_{n=0}^{\infty} (2^n - 1)t^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (2^{n-1} - 1)z^{-n} = \sum_{n=2}^{\infty} (2^{n-1} - 1)z^{-n}.$$

(5) 环形区域为  $3 < |z| < 4$ , 故 Laurent 展开形式为  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ . 做代换  $t = \frac{1}{z}$  有

$$\frac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)} = 1 - \frac{2}{z-3} + \frac{6}{z-4} = 1 - \frac{2t}{1-3t} - \frac{3}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{4}} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} 2t \cdot (3t)^n - \frac{3}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{4^n}.$$

$$\text{整理得 } 1 - 2 \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} - \frac{3}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{4^n}.$$

(6) 环形区域为  $4 < |z| < \infty$ , 故 Laurent 展开形式为  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ . 做代换  $t = \frac{1}{z}$  有

$$\frac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)} = 1 - \frac{2}{z-3} + \frac{6}{z-4} = 1 - \frac{2t}{1-3t} + \frac{6t}{1-4t} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} 2t \cdot (3t)^n + \sum_{n=0}^{\infty} 6t \cdot (4t)^n.$$

$$\text{整理得 } 1 - 2 \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} + 6 \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{z^n}{4^{n+1}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (3 \cdot 2^{2n-1} - 2 \cdot 3^{n-1}) z^{-n}.$$

**习题 20.** 判断下列函数孤立奇点的性质, 如果是极点, 确定其阶数:

(1)  $\frac{1}{z^2 + a^2}, a \neq 0;$

(2)  $\frac{\cos az}{z^2};$

(3)  $\frac{\cos az - \cos bz}{z^2}, a^2 \neq b^2;$

(4)  $\frac{\sin z}{z^2} - \frac{1}{z};$

(5)  $\cos \frac{1}{\sqrt{z}};$

(6)  $\frac{\sqrt{z}}{\sin \sqrt{z}};$

(7)  $\frac{1}{(z-1) \ln z};$

(8)  $\int_0^z \frac{\sinh \sqrt{\zeta}}{\sqrt{\zeta}} d\zeta.$

解答.

(1) 孤立奇点  $z = \pm ai$ ,  $\lim_{z \rightarrow \pm ai} f(x) = \infty$ ,  $\frac{1}{f(z)} = z^2 + a^2$ , 均为二阶极点。

(2) 孤立奇点  $z = 0$ ,  $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \infty$ ,  $\frac{1}{f(z)} = \frac{z^2}{\cos az}$ , 为一阶极点。

(3) 孤立奇点  $z = 0$ ,  $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \frac{-2 \sin \frac{(a+b)z}{2} \sin \frac{(a-b)z}{2}}{z^2} = -(a^2 - b^2)$ , 故为可去奇点。

(4) 孤立奇点  $z = 0$ ,  $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z - z}{z^2} = 0$ , 故为可去奇点。

(5) 孤立奇点  $z = 0$ , 令  $t = \sqrt{z}$ , 当  $z \rightarrow 0$  时,  $t \rightarrow \infty$ ,  $\cos t$  取值不定, 故为本性奇点。

(6) 孤立奇点  $z = 0$ , 令  $t = \sqrt{z}$ , 当  $z \rightarrow 0$  时,  $t \rightarrow \infty$ ,  $\frac{\sin t}{t} = 1$ , 故为可去奇点。

孤立奇点  $z = (n\pi)^2$ , 一阶奇点。

(7) 孤立奇点  $z = 1$ , 在  $\ln z|_{z=1} = 0$  单值分支内为二阶极点, 其他分支内为一阶极点。

(8) 令  $t = \sqrt{z}$ , 有  $f(z) = \int_0^{z^2} 2 \sinh t dt$ ,  $z = \infty$  为本性奇点。

习题 20 的注记.

- (2)  $z = \infty$  为本性奇点。
- (3)  $z = \infty$  为本性奇点。
- (4)  $z = \infty$  为本性奇点。
- (6)  $z = \infty$  为非孤立奇点。

## 6 第六章习题

习题 21. 求下列函数在指定点  $z_0$  处的留数：

$$(1) \frac{1}{z-1}e^{z^2}, z_0 = 1;$$

$$(2) \left(\frac{z}{1-\cos z}\right)^2, z_0 = 0;$$

$$(3) \frac{e^z}{(z^2-1)^2}, z_0 = 1.$$

解答.

$$(1) z_0 = 1 \text{ 是一阶极点, 故 } \operatorname{res} f(1) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{e^{z^2}}{z-1} = e.$$

$$(2) \text{ 函数是偶函数, 展开不含 } z^{-1} \text{ 项, 故 } \operatorname{res} f(0) = 0.$$

$$(3) f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2}, \text{ 故 } \operatorname{res} f(1) = \frac{d}{dz} \frac{e^z}{(z+1)^2} \Big|_{z=1} = 0.$$

习题 22. 求下列函数在复平面  $\mathbb{C}$  内每一个孤立奇点处的留数：

$$(1) \frac{1}{z^3 - z^5};$$

$$(2) \frac{z}{1 - \cos z};$$

$$(3) e^{\frac{1}{2}(z-\frac{1}{z})};$$

$$(4) \frac{1}{(z-1)\ln z}.$$

解答.

$$(1) f(z) = \frac{1}{z^3(1+z)(1-z)}, \text{ 孤立奇点 } z = 0 \text{ (三阶极点), } z = \pm 1 \text{ (一阶极点).}$$

$$\operatorname{res} f(0) = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \frac{1}{1-z^2} \Big|_{z=0} = 1.$$

$$\operatorname{res} f(1) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z^3(1+z)(1-z)} = -\frac{1}{2}.$$

$$\operatorname{res} f(1) = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{z+1}{z^3(1+z)(1-z)} = -\frac{1}{2}.$$

(2) 孤立奇点  $z = 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$ ,  $z = 0$  为一阶奇点, 其余为二阶奇点。

$$\operatorname{res} f(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2}{1 - \cos z} = 2.$$

$$\begin{aligned} \frac{z}{1 - \cos z} &= (z - 2n\pi)[1 - \cos(z - 2n\pi)]^{-1} + 2n\pi[1 - \cos(z - 2n\pi)]^{-1} \\ &= 2(z - 2n\pi)^{-1} \left[ 1 + \frac{1}{12}(z - 2n\pi)^2 + \mathcal{O}(z - 2n\pi)^4 \right] + 4n\pi(z - 2n\pi)^{-2} \left[ 1 + \frac{1}{12}(z - 2n\pi)^2 + \mathcal{O}(z - 2n\pi)^4 \right] \\ &= 4n\pi(z - 2n\pi)^{-2} + 2(z - 2n\pi)^{-1} + \frac{n\pi}{3} + \frac{1}{6}(z - 2n\pi) + \cdots. \end{aligned}$$

故  $\operatorname{res} f(2n\pi) = 2$ .

$$(3) \quad e^{\frac{1}{2}(z - \frac{1}{z})} = e^{\frac{z}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!2^n} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-)^m}{m!2^m z^m} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-)^m}{n!m!2^{m+n}} z^{n-m}.$$

由书上 P75 例 5.9 知,  $\operatorname{res} f(0) = -J_1(1)$ ,  $\operatorname{res} f(\infty) = J_1(1)$ .

(4) 孤立奇点  $z = 1$ 。

- 若  $\ln z|_{z=1} = 0$  为二阶极点,

$$\operatorname{res} f(1) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \frac{z-1}{\ln z} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z \ln z - z + 1}{z(\ln z)^2} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{\ln z + 2} \text{ [L'Hospital]} = \frac{1}{2}.$$

- 其他情况为一阶极点,  $\ln z|_{z=1} = 2k\pi i$ ,

$$\operatorname{res} f(1) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{\ln z} = \frac{1}{2k\pi i}$$

习题 23. 求下列函数在  $\infty$  点处的留数:

$$(1) \quad \frac{\cos z}{z};$$

$$(2) \quad (z^2 + 1)e^z;$$

$$(3) \quad \sqrt{(z-1)(z-2)}.$$

解答.

(1) 令  $t = \frac{1}{z}$ , 而  $\cos z = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \mathcal{O}(z^2)$ ,

故展开式为  $t \cdot \left(1 - \frac{1}{2}t^{-2} + \mathcal{O}(z^2)\right) = t - t^{-1} + \frac{1}{\mathcal{O}(t^1)}$ ,  $\infty$  为本性奇点,

即  $\operatorname{res} f(\infty) = -a_1 = -1$ .

(2) 令  $t = \frac{1}{z}$ , 而  $e^z = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \mathcal{O}(z^3)$ ,

故展开式为  $\left(\frac{1}{t^2} + 1\right) \left(1 + \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t^2} + \cdots\right)$ ,  $\infty$  为本性奇点,

即  $\operatorname{res} f(\infty) = -a_1 = 0$ .

(3) 令  $t = \frac{1}{z}$ , 原式可化为  $\frac{\sqrt{(1-t)(1-2t)}}{t}$ .

不妨取  $\arg(1-t)|_{t=0} = 2m\pi$ ,  $\arg(1-2t)|_{t=0} = 2n\pi$ ,

故展开式为  $t^{-1} \cdot (-1)^m \left(1 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + \cdots\right) \cdot (-1)^n \left(1 - t - \frac{1}{2}t^2 + \cdots\right)$ .

整理得到  $(-1)^{m+n} \left(t^{-1} - \frac{3}{2} - \frac{1}{8}t - \frac{7}{16}t^2 + \cdots\right)$ .  $\infty$  为一阶奇点,

即  $\operatorname{res} f(\infty) = -a_1 = (-1)^{m+n} \cdot \frac{1}{8}$ .

**习题 24.** 计算下列积分值:

(1)  $\oint_{|z-1|=1} \frac{1}{1+z^4} dz;$

(2)  $\oint_{|z-1|=1} \frac{1}{z^2-1} \sin \frac{\pi z}{4} dz;$

(3)  $\oint_{|z|=n} \tan \pi z dz, n$  为正整数;

(4)  $\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^3} dz.$

**解答.**

(1) 在围道内的奇点有  $z = e^{\pm \frac{\pi}{4}}$ , 均为一阶奇点。

$$\oint_{|z-1|=1} \frac{1}{1+z^4} dz = 2\pi i \left[ \operatorname{res} f(e^{\frac{\pi i}{4}}) + \operatorname{res} f(e^{-\frac{\pi i}{4}}) \right] = 2\pi i \left[ \lim_{z \rightarrow e^{\frac{\pi i}{4}}} \frac{z - e^{\frac{\pi i}{4}}}{1+z^4} + \lim_{z \rightarrow e^{-\frac{\pi i}{4}}} \frac{z - e^{-\frac{\pi i}{4}}}{1+z^4} \right]$$

$$= 2\pi i \left[ -\frac{1}{4\sqrt{2}}(1+i) + \frac{1}{4\sqrt{2}}(-1+i) \right] = -\frac{\sqrt{2}}{2}\pi i.$$

(2) 在围道内的奇点只有  $z=1$ , 为一阶奇点。

$$\oint_{|z-1|=1} \frac{1}{z^2-1} \sin \frac{\pi z}{4} dz = 2\pi i \cdot \operatorname{res} f(1) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi i.$$

(3) 在围道内的奇点有  $2n$  个, 均为一阶极点, 可表示为  $z = k + \frac{1}{2}$  ( $k = -n, \dots, 0, 1, \dots, n-1$ ).

$$\operatorname{res} f\left(k + \frac{1}{2}\right) = \lim_{z \rightarrow k + \frac{1}{2}} \frac{(z - k - \frac{1}{2}) \sin \pi z}{\cos \pi z} = -\frac{1}{\pi} [L'Hospital].$$

$$\text{故 } \oint_{|z|=n} \tan \pi z dz = 2\pi i \left[ 2n \cdot \left(-\frac{1}{\pi}\right) \right] = -4ni.$$

(4) 在围道内的奇点只有  $z=0$ , 为三阶极点。

$$\operatorname{res} f(0) = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^2}{dz^2} e^z = \frac{1}{2}.$$

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^3} dz = 2\pi i \cdot \operatorname{res} f(0) = 2\pi i \cdot \frac{1}{2} = \pi i.$$

**习题 25.** 计算下列积分:

$$(1) \int_0^{2\pi} \cos^{2n} \theta d\theta, \quad n \text{ 为正整数};$$

$$(2) \int_0^\pi \frac{d\theta}{1 + \sin^2 \theta}.$$

**解答.**

$$(1) \text{ 作变换 } z = e^{i\theta}, \text{ 有 } \cos \theta = \frac{z^2 + 1}{2z}, \quad d\theta = \frac{dz}{iz}.$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n} \theta d\theta = \oint_{|z|=1} \left( \frac{z^2 + 1}{2z} \right)^{2n} \frac{dz}{iz}.$$

$$\operatorname{res} \left\{ \left( \frac{z^2 + 1}{2z} \right)^{2n} \cdot z^{-1} \right\} = \left\{ \left( \frac{z+1}{2} + \frac{1}{2z} \right)^{2n} \cdot z^{-1} \right\} = \binom{2n}{2n} \frac{1}{2^{2n}} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{1}{2^{2n}},$$



故积分结果为  $2\pi i \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{1}{i} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \frac{\pi}{2^{2n-1}}$ .

(2) 对原积分进行化简得到  $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - \cos \theta}$ .

作变换  $z = e^{i\theta}$ , 有  $\cos \theta = \frac{z^2 + 1}{2z}$ ,  $d\theta = \frac{dz}{iz}$ .

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \sin^2 \theta} = \oint_{|z|=1} \frac{1}{3 - \frac{z^2+1}{2z}} \frac{dz}{iz}.$$

$$\text{由 } f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{3 - \frac{z^2+1}{2z}} = \frac{-2}{(z - 3 - 2\sqrt{2})(z - 3 + 2\sqrt{2})},$$

知在单位圆内只有一阶极点  $z = 3 - 2\sqrt{2}$ .

故原积分结果为  $2\pi i \cdot \text{res} \left\{ f(3 - 2\sqrt{2}) \right\} \cdot \frac{1}{i} = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}$ .

**习题 26.** 计算下列积分:

(1)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx;$

(2)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2) \cosh \frac{\pi x}{2}}.$

**解答.**

(1) 考虑  $\oint_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2}{1+z^4} dz$ , 积分围道为上半平面半径趋于无穷的半圆。根据留数定理, 有

$$\begin{aligned} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2}{1+z^4} dz &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx + \int_{C_R} \frac{z^2}{1+z^4} dz \\ &= 2\pi i \cdot \left[ \text{res} \left\{ \frac{z^2}{1+z^4} \right\} \Big|_{z=e^{\frac{1}{4}\pi}} + \text{res} \left\{ \frac{z^2}{1+z^4} \right\} \Big|_{z=e^{\frac{3}{4}\pi}} \right] \\ &= 2\pi i \cdot \left[ \frac{1}{4e^{\frac{\pi}{4}i}} + \frac{1}{4e^{\frac{3\pi}{4}i}} \right] \\ &= 2\pi i \cdot \left( -\frac{\sqrt{2}}{4} \right) \end{aligned}$$

<sup>1</sup> 均为一阶极点

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$$

由于  $\lim_{z \rightarrow \infty} z \cdot \frac{z^2}{1+z^4} = 0$  以及大圆弧引理, 知  $\int_{C_R} \frac{z^2}{1+z^4} dz = 0$ .

故原积分结果为  $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$ .

(2) 考虑  $\oint_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(1+z^2) \cosh \frac{\pi z}{2}}$ , 积分围道为上半平面半径趋于无穷的半圆。

记  $f(z) = \frac{1}{(1+z^2) \cosh \frac{\pi z}{2}}$ , 分析分母  $(1+z^2) \cosh \frac{\pi z}{2}$ .

零点为  $z = (2k+1)i$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . 除了  $z = i$  是二阶极点外, 其他的都是一阶极点。

$$\operatorname{res} f(i) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} (z-i)^2 f(z) = \frac{1}{2\pi i}.$$

$$\operatorname{res} f[(2k+1)i] = \lim_{z \rightarrow (2k+1)i} \frac{\frac{1}{1+z^2}}{\frac{\pi}{2} \sinh \frac{\pi z}{2}} = \frac{(-1)^{k+1}}{2\pi i} \frac{1}{k(k+1)}, (k \neq 0).$$

$$\oint_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(1+z^2) \cosh \frac{\pi z}{2}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2) \cosh \frac{\pi x}{2}} + \int_{C_R} \frac{dz}{(1+z^2) \cosh \frac{\pi z}{2}}$$

$$= 2\pi i \left\{ \operatorname{res} f(i) + \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{res} f[(2k+1)i] \right\} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)}.$$

由于  $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+z^2) \cosh \frac{\pi z}{2}} = 0$  以及大圆弧引理, 知  $\int_{C_R} \frac{dz}{(1+z^2) \cosh \frac{\pi z}{2}} = 0$ .

故原积分结果为  $1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)}$ .

**习题 26 的注记.** (2) 的结果可以化简。

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

$$= 2 \ln 2.$$

---


$${}_1\ln 1+x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$$

习题 27. 计算下列积分：

$$(1) \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^4} dx;$$

$$(2) \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^3} dx;$$

$$(3) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 - 2x + 2} dz.$$

解答.

(1) 记  $f(z) = \frac{e^{iz}}{1+z^4}$ , 考虑  $\oint_{-\infty}^{\infty} f(z) dz$ , 积分围道为上半平面半径趋于无穷的半圆。

在积分区域内有一阶极点  $z = e^{\frac{\pi i}{4}}$  和  $z = e^{\frac{3\pi i}{4}}$ , 计算其留数。

$$\operatorname{res} f(e^{\frac{\pi i}{4}}) = \operatorname{res} f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right) = \frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}}{4i} e^{i\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

$$\operatorname{res} f(e^{\frac{3\pi i}{4}}) = \operatorname{res} f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)\right) = \frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}}{4i} e^{-i\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

$$\text{故 } \oint_{-\infty}^{\infty} f(z) dz = 2\pi i \left[ \operatorname{res} f(e^{\frac{\pi i}{4}}) + \operatorname{res} f(e^{\frac{3\pi i}{4}}) \right] = 2\pi i \cdot \frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}}{4i} \cdot 2 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}\right).$$

$$\text{其实部的一半 (偶函数) 即为 } \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^4} dx = \frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}\pi}{2} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}\right).$$

(2) 记  $f(z) = \frac{e^{iz}}{(1+z^2)^3}$ , 考虑  $\oint_{-\infty}^{\infty} f(z) dz$ , 积分围道为上半平面半径趋于无穷的半圆。

$$\text{在积分区域内有三阶极点 } z = i, \operatorname{res} f(i) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} (z-i)^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \frac{(z-i)^2 e^{iz}}{(z+i)^3}.$$

$$\text{故 } \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^3} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [2\pi i \cdot \operatorname{res} f(i)] = \frac{7\pi}{16}.$$

(3) 记  $f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2 - 2z + 2}$ , 考虑  $\oint_{-\infty}^{\infty} f(z) dz$ , 积分围道为上半平面半径趋于无穷的半圆。

$$\text{在积分区域内有一阶极点 } z = 1+i, \operatorname{res} f(1+i) = \lim_{z \rightarrow (1+i)} \frac{ze^{iz}}{z-1+i} = \frac{(1+i)e^i}{2ie}.$$

$$\text{故 } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 - 2x + 2} dx = \operatorname{Im} \left[ 2\pi i \cdot \frac{(1+i)e^i}{2ie} \right] = \pi e^{i-1}.$$

习题 27 的注记.

- (2) 难算, 直接写答案。
- 根据 Jordan 引理, 三题均有  $|z| \rightarrow \infty$  时,  $Q(z) \rightarrow 0$ , 故  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} Q(z) e^{ipz} dz = 0$ .

习题 28. 计算下列积分:

- (1)  $\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x(x-1)(x-2)}$ ;
- (2)  $\int_0^{\infty} \frac{x - \sin x}{x^3(1+x^2)} dx$ ;
- (3)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{px} - e^{qx}}{1 - e^x} dx, 0 < p < 1, 0 < q < 1$ .

解答.

- (1) 记  $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$ , 考虑  $\oint_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{z(z-1)(z-2)}$ , 积分围道绕开三个一阶极点  $z = 0, 1, 2$ .

积分区域内无奇点, 故  $\oint_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{z(z-1)(z-2)} = 0$ .

$$\oint_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{z(z-1)(z-2)} = \left[ \int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{C_{\delta 0}} + \int_{\delta}^{1-\delta} + \int_{C_{\delta 1}} + \int_{1+\delta}^{2-\delta} + \int_{C_{\delta 2}} + \int_{2+\delta}^{\infty} + \int_{C_R} \right] f(z) dz.$$

$$\text{由小圆弧引理, } \int_{C_{\delta 0}} f(z) dz = i \cdot (0 - \pi) \lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = -\frac{\pi}{2}.$$

$$\int_{C_{\delta 1}} f(z) dz = i \cdot (0 - \pi) \lim_{z \rightarrow 1} z f(z) = \pi.$$

$$\int_{C_{\delta 2}} f(z) dz = i \cdot (0 - \pi) \lim_{z \rightarrow 2} z f(z) = -\frac{\pi}{2}.$$

$$\text{由大圆弧引理, } \int_{C_R} f(z) dz = i \cdot (\pi - 0) \lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0.$$

$$\text{故 v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x(x-1)(x-2)} = \left[ \int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{1-\delta} + \int_{1+\delta}^{2-\delta} + \int_{2+\delta}^{\infty} \right] f(z) dz = 0.$$

(2) 记  $f(z) = \frac{z - \sin z}{z^3(1+z^2)}$ , 考虑  $\oint_{-\infty}^{\infty} \frac{z - \sin z}{z^3(1+z^2)} dz$ , 积分围道绕开一阶极点  $z = 0$ 。

积分区域内有一阶极点  $z = i$ ,  $\text{res } f(i) = \left[ \frac{z - \sin z}{z^3(z+i)} \right] \Big|_{z=i} = \frac{i - \sin i}{2}$ .

故  $\oint_{-\infty}^{\infty} \frac{z - \sin z}{z^3(1+z^2)} dz = 2\pi i \cdot \text{res } f(i) = -\pi - \pi i \sin i$ .

又  $\oint_{-\infty}^{\infty} \frac{x - \sin x}{z^3(1+z^2)} dz = \left[ \int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{C_{\delta 0}} + \int_{\delta}^{\infty} + \int_{C_R} \right] f(z) dz$ .

由小圆弧引理,  $\int_{C_{\delta 0}} f(z) dz = i \cdot (0 - \pi) \lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = 0$ .

由大圆弧引理,  $\int_{C_R} f(z) dz = i \cdot (\pi - 0) \lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0$ . ✖

故  $\int_0^{\infty} \frac{x - \sin x}{x^3(1+x^2)} dx = \frac{1}{2} \left[ \int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\infty} \right] f(x) dx = -\pi - \pi i \sin i = -\pi - \frac{e^{-1} - e}{2} \pi$ .

错误,  $\infty$  是  $\sin z$  的本性奇点, 正确解答见注记。

(3) 记  $f(z) = \frac{e^{pz}}{1 - e^z}$ , 考虑  $\oint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{pz}}{1 - e^z} dz$ , 应取宽为  $2\pi$  的矩形围道, 绕开  $z = 0$  和  $z = 2\pi i$ 。

积分区域内无奇点, 积分结果为 0。

而  $\oint_{-\infty}^{\infty} f(z) dz = \left[ \int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{C_{\delta 1}} + \int_{\delta}^{\infty} + \int_{L_1} + \int_{L_2} + \int_{C_{\delta 2}} + \int_{L_3} + \int_{L_4} \right]$ .

由于  $\left[ \int_{L_2} + \int_{L_3} \right] f(z) dz = -e^{2p\pi i} \left[ \int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\infty} \right] f(z) dz$ ,

$\int_{L_1} f(z) dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ \int_0^{2\pi} \frac{e^{p(R+iy)}}{1 - e^{R+iy}} i dy \right] = 0$ ,  $\int_{L_4} f(z) dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ \int_{2\pi}^0 \frac{e^{p(-R+iy)}}{1 - e^{-R+iy}} i dy \right] = 0$ ,

由小圆弧引理,

$\int_{C_{\delta 1}} f(z) dz = -\pi i \left[ \lim_{z \rightarrow 0} \frac{ze^{pz}}{1 - e^z} \right] = \pi i$ ,  $\int_{C_{\delta 2}} f(z) dz = -\pi i \left[ \lim_{z \rightarrow 2\pi i} \frac{(z - 2\pi i)e^{pz}}{1 - e^z} \right] = \pi i e^{2p\pi i}$ ,

故  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{px}}{1 - e^x} dx = \left[ \int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\infty} \right] f(z) dz = -\frac{\pi + \pi i e^{2p\pi i}}{1 - e^{2p\pi i}} = \pi \cot p\pi$ .

故  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{px} - e^{qx}}{1 - e^x} dx = \pi [\cot p\pi - \cot q\pi].$

习题 28 的注记.

- (2) 记  $f(z) = \frac{z - \sin z}{z^3(1 + z^2)}$ , 考虑  $\oint_{-\infty}^{\infty} \frac{z - \sin z}{z^3(1 + z^2)} dz$ , 积分围道绕开一阶极点  $z = 0$ .

积分区域内有一阶极点  $z = i$ ,  $\text{res } f(i) = \left[ \frac{z - \sin z}{z^3(z + i)} \right] \Big|_{z=i} = \frac{i - \sin i}{2}.$

故  $\oint_{-\infty}^{\infty} \frac{z - \sin z}{z^3(1 + z^2)} dz = 2\pi i \cdot \text{res } f(i) = -\pi - \pi i \sin i.$

又  $\oint_{-\infty}^{\infty} \frac{x - \sin x}{z^3(1 + z^2)} dz = \left[ \int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{C_{\delta 0}} + \int_{\delta}^{\infty} + \int_{C_R} \right] f(z) dz.$

由小圆弧引理,  $\int_{C_{\delta 0}} f(z) dz = i \cdot (0 - \pi) \lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = 0.$

此时不可以直接使用大圆弧引理, 应在  $\infty$  处利用  $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$  将  $f(x)$  展开。

$\int_{C_R} f(z) dz = \int_{C_R} \left[ \frac{1}{z^2(1 + z^2)} - \frac{1}{2i} \frac{e^{iz}}{z^3(z + z^2)} + \frac{1}{2i} \frac{e^{-iz}}{z^3(z + z^2)} \right] dz.$

由大圆弧引理和 Jordan 引理可以得到前两项结果为零。

根据 Jordan 引理的补充引理,  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} Q(z) e^{-ipz} dz = 2\pi i \cdot \sum_{\text{全平面}} \text{res} \{Q(z) e^{-ipz}\}.$

奇点有  $z = 0, i, -i$ , 分别计算其留数为  $-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2e}.$

即  $\int_{C_R} \frac{1}{2i} \frac{e^{-iz}}{z^3(z + z^2)} dz = \pi \left( -\frac{3}{2} + \frac{e}{2} + \frac{1}{2e} \right).$

故  $\int_0^{\infty} \frac{x - \sin x}{x^3(1 + x^2)} dx = \frac{1}{2} \left[ \int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\infty} \right] f(z) dz$   
 $= \frac{1}{2} \left[ -\pi - \frac{e^{-1} - e}{2} \pi - \pi \left( -\frac{3}{2} + \frac{e}{2} + \frac{1}{2e} \right) \right] = \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{e} \right).$

- 水平有限, 等有时间学了 TikZ 再补充围道图。

---

<sup>1</sup>级数展开,  $\frac{1}{z^3} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n z^{2n} \right] \left( 1 - iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \dots \right), z^{-1}$  项系数为  $-\frac{3}{2}.$

习题 29. 计算下列积分：

$$(1) \text{ v.p. } \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{1-x} dx, \quad 0 < s < 1;$$

$$(2) \int_0^\infty \frac{x^s}{(1+x^2)^2} dx, \quad -1 < s < 3;$$

$$(3) \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1} \ln x}{1+x} dx, \quad 0 < \alpha < 1;$$

$$(4) \int_0^\infty \frac{\ln x}{(x+a)(x+b)} dx, \quad b > a > 0.$$

解答.

$$(1) \text{ 考虑积分 } \oint_0^\infty \frac{z^{s-1}}{1-z} dz, \text{ 取袂型积分围道, 绕开一阶极点 } z=1, \quad 0 \leq \arg \leq 2\pi.$$

积分围道内无奇点, 故

$$(1 - e^{2\pi i s}) \left( \int_\delta^{1-\delta} + \int_{1+\delta}^\infty \right) f(x) dx + \left[ \int_{C_R} + \int_{C_{\delta 1}} + \int_{C_{\delta 2}} + \int_{C_{\delta 3}} \right] f(z) dz = 0.$$

$$\text{由大圆弧引理, } \int_{C_R} f(z) dz = 0, \text{ 由小圆弧引理, } \int_{C_{\delta 1}} f(z) dz = 0,$$

$$\int_{C_{\delta 2}} f(z) dz = i \cdot \left[ \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)z^{s-1}}{1-z} \right] (0 - \pi) = \pi i.$$

$$\int_{C_{\delta 3}} f(z) dz = i \cdot \left[ \lim_{z \rightarrow e^{2\pi i}} \frac{(z-1)z^{s-1}}{1-z} \right] (2\pi - 3\pi) = \pi i e^{2\pi i s}.$$

$$\text{故 v.p. } \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{1-x} dx = \pi i \frac{e^{2\pi i s} + 1}{e^{2\pi i s} - 1} = \pi \cot \pi s.$$

$$(2) \text{ 考虑积分 } \oint_0^\infty \frac{z^s}{(1+z^2)^2} dz, \text{ 取袂型积分围道, } 0 \leq \arg \leq 2\pi.$$

积分围道内有奇点  $z = \pm i$ , 均为二阶极点,

$$\text{res } f(i) = \left[ \frac{d}{dz} \frac{z^s}{(z+i)^2} \right]_{z=i} = -\frac{s-1}{4i} e^{\frac{\pi i s}{2}}, \quad \text{res } f(-i) = \left[ \frac{d}{dz} \frac{z^s}{(z-i)^2} \right]_{z=-i} = \frac{s-1}{4i} e^{\frac{3\pi i s}{2}}.$$

$$\text{故 } \oint_0^\infty \frac{z^s}{(1+z^2)^2} dz = 2\pi i [\text{res } f(i) + \text{res } f(-i)] = \pi i (s-1) \sin \frac{\pi s}{2}.$$

$$\text{即 } (1 - e^{2\pi is}) \left( \int_{\delta}^{1-\delta} + \int_{1+\delta}^{\infty} \right) f(x) dx + \left[ \int_{C_R} + \int_{C_{\delta}} \right] f(z) dz = \pi i (s-1) \sin \frac{\pi s}{2}.$$

$$\text{由大圆弧引理有 } \int_{C_R} f(z) dz = 0, \text{ 由小圆弧引理有 } \int_{C_{\delta}} f(z) dz = 0,$$

$$\text{故 } \int_0^{\infty} \frac{x^s}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi i (s-1) \sin \frac{\pi s}{2}}{1 - e^{2\pi is}} = \frac{\pi}{4} \frac{1-s}{\cos \frac{\pi s}{2}}.$$

(3) 考虑积分  $\oint_0^{\infty} \frac{z^{\alpha-1} \ln^2 z}{1+z} dz$ ,  $\times^1$  取袂型积分围道,  $0 \leq \arg \leq 2\pi$ .

$$\text{积分围道内有一阶极点 } z = -1, \operatorname{res} f(-1) = \pi^2 e^{\pi i \alpha}.$$

$$\text{故 } \oint_0^{\infty} \frac{z^{\alpha-1} \ln^2 x}{1+z} dz = 2\pi^3 i e^{\pi i \alpha}.$$

$$\text{即 } \left[ \int_{C_{\delta}} + \int_{C_R} \right] f(z) dz + \int_{\delta}^{\infty} \frac{x^{\alpha-1} \ln^2 x}{1+x} dx - \int_{\delta}^{\infty} \frac{(x \cdot e^{2\pi i})^{\alpha-1} \ln^2 (x \cdot e^{2\pi i})}{1+x \cdot e^{2\pi i}} dx = 2\pi^3 i e^{\pi i \alpha}.$$

$$\text{由大圆弧引理有 } \int_{C_R} f(z) dz = 0, \text{ 由小圆弧引理有 } \int_{C_{\delta}} f(z) dz = 0,$$

按照现在的取法,  $\ln^2 z$  项无法抵消, 正确解答见注记

(4) 考虑积分  $\oint_0^{\infty} \frac{\ln^2 z}{(z+a)(z+b)} dz$ , 取袂型积分围道,  $0 \leq \arg \leq 2\pi$ .

$$\text{积分围道内有一阶极点 } z = -a \text{ 和 } z = -b, \operatorname{res} f(-a) = \frac{(\ln a + \pi i)^2}{b-a}, \operatorname{res} f(-b) = \frac{(\ln b + \pi i)^2}{a-b}.$$

$$\text{故 } \oint_0^{\infty} \frac{\ln^2 z}{(z+a)(z+b)} dz = 2\pi i \cdot \frac{\ln^2 a - \ln^2 b + 2\pi i (\ln a - \ln b)}{b-a}.$$

$$\text{由大圆弧引理, } \int_{C_R} f(z) dz = 0. \text{ 由小圆弧引理, } \int_{C_{\delta}} f(z) dz = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \int_{\delta}^{\infty} f(z) dz - \int_{\delta}^{\infty} f(ze^{2\pi i}) dz &= -4\pi i \int_{\delta}^{\infty} \frac{\ln x}{(x-a)(x-b)} dx + 4\pi^2 \int_{\delta}^{\infty} \frac{dx}{(x-a)(x-b)} \\ &= 2\pi i \cdot \frac{\ln^2 a - \ln^2 b + 2\pi i (\ln a - \ln b)}{b-a} = -4\pi i \left( \frac{1}{2} \frac{\ln^2 b - \ln^2 a}{b-a} \right) + 4\pi^2 \left( \frac{\ln b - \ln a}{b-a} \right). \end{aligned}$$

$$\text{可以得到 } \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(x+a)(x+b)} dx = \frac{1}{2} \frac{\ln^2 b - \ln^2 a}{b-a}.$$

<sup>1</sup>这里不需要取  $\oint_0^{\infty} \frac{z^{\alpha-1} \ln^2 z}{1+z} dz$ ,  $z^{\alpha}$  是多值函数, 可以直接取  $\oint_0^{\infty} \frac{z^{\alpha-1} \ln z}{1+z} dz$  分析, 不用担心  $\ln z$  抵消。



## 习题 29 的注记.

- (3) 考虑积分  $\oint_0^\infty \frac{z^{\alpha-1} \ln z}{1+z} dz$ , 取袂型积分围道,  $0 \leq \arg \leq 2\pi$ .

积分围道内有一阶极点  $z = -1$ ,  $\text{res } f(-1) = -\pi i e^{\pi i \alpha}$ .

$$\text{故 } \oint_0^\infty \frac{z^{\alpha-1} \ln x}{1+z} dz = 2\pi^2 e^{\pi i \alpha}.$$

$$\text{即 } \left[ \int_{C_\delta} + \int_{C_R} \right] f(z) dz + \int_\delta^\infty \frac{x^{\alpha-1} \ln x}{1+x} dx - \int_\delta^\infty \frac{(x \cdot e^{2\pi i})^{\alpha-1} \ln(x \cdot e^{2\pi i})}{1+x \cdot e^{2\pi i}} dx = 2\pi^2 e^{\pi i \alpha}.$$

由大圆弧引理有  $\int_{C_R} f(z) dz = 0$ , 由小圆弧引理有  $\int_{C_\delta} f(z) dz = 0$ ,

$$\text{故 } (1 - e^{2\pi i \alpha}) \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1} \ln x}{1+x} dx - \int_0^\infty \frac{e^{2\pi i \alpha} \cdot x^{\alpha-1} \cdot 2\pi i}{1+x} dx = 2\pi^2 e^{\pi i \alpha}.$$

现计算积分  $e^{2\pi i \alpha} \cdot 2\pi i \cdot \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx$ , 考虑  $e^{2\pi i \alpha} \cdot 2\pi i \cdot \int_0^\infty \frac{z^{\alpha-1}}{1+z} dz$ ,

仍然取袂型积分围道, 围道内有一阶极点  $z = -1$ ,  $\text{res } f(-1) = -e^{\pi i \alpha}$ .

$$\text{故 } e^{2\pi i \alpha} \cdot 2\pi i \cdot (1 - e^{2\pi i \alpha}) \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = 4\pi^2 e^{3\pi i \alpha}. \text{ 即 } e^{2\pi i \alpha} \cdot 2\pi i \cdot \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{4\pi^2 e^{3\pi i \alpha}}{1 - e^{2\pi i \alpha}}.$$

$$\text{也就是说, } \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1} \ln x}{1+x} dx = \frac{2\pi^2 e^{\pi i \alpha}}{1 - e^{2\pi i \alpha}} + \frac{4\pi^2 e^{3\pi i \alpha}}{(1 - e^{2\pi i \alpha})^2} = -\pi^2 \frac{\sin \pi \alpha}{\cos^2 \pi \alpha}?$$

## 7 第七章习题

习题 30. 将下列连乘积用  $\Gamma$  函数表示出来：

(1)  $(2n)!!$ ;

(2)  $(2n-1)!!$ .

解答.

习题 31. 计算下列积分：

(1)  $\int_0^\infty x^{-\alpha} \sin x dx, 0 < \alpha < 2$ ;

(2)  $\int_0^\infty x^{-\alpha} \cos x dx, 0 < \alpha < 1$ .

解答.

习题 32. 计算积分： $\int_{-1}^1 (1-x)^p (1+x)^q dx, \operatorname{Re} p > -1, \operatorname{Re} q > -1$ .

解答.

## 8 第八章习题

习题 33. 求下列函数的 Laplace 换式：

(1)  $t^n, n = 0, 1, 2, \dots;$

(2)  $t^\alpha, \operatorname{Re} \alpha > -1;$

(3)  $e^{\lambda t} \sin \omega t, \lambda > 0, \omega > 0;$

(4)  $\int_t^\infty \frac{\cos \tau}{\tau} d\tau.$

解答.

习题 34. 求下列 Laplace 换式的原函数：

(1)  $\frac{a^3}{p(p+a)^3};$

(2)  $\frac{p^2 + \omega^2}{(p^2 - \omega^2)^2}, \omega > 0;$

(3)  $\frac{e^{-p\tau}}{p^2}, \tau > 0.$

解答.

习题 35. 利用 Laplace 变换计算积分： $\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \cos cx dx, a > 0, b > 0, c > 0.$

解答.

习题 36. 用普遍反演公式求 Laplace 换式的原函数： $\frac{e^{-p\tau}}{p^4 + 4\omega^4}, \tau > 0, \omega > 0.$

解答.

## 9 第九章习题

习题 37. 求方程  $w'' - z^2 w = 0$  在  $z = 0$  领域内的两个幂级数解。

解答.

习题 38. 求方程  $z^2(1-z)w'' + z(1-3z)w' - (1+z)w = 0$  在  $z = 0$  领域内的两个幂级数解。

解答.

## 10 第十章习题

习题 39. 证明  $\delta$  函数的下列性质：

(1)  $\delta(x) = \delta(-x)$ ;

(2)  $x\delta(x) = 0$ ;

(3)  $g(x)\delta(x) = g(0)\delta(x)$ ;

(4)  $x\delta'(x) = -\delta(x)$ ;

(5)  $\delta(ax) = \frac{1}{a}\delta(x)$ ,  $a > 0$ ;

(6)  $g(x)\delta'(x) = g(0)\delta'(x) - g'(x)\delta(x)$ ;

(7)  $\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2a}[\delta(x - a) + \delta(x + a)]$ ,  $a > 0$ .

解答.

## 11 第十一章习题

**习题 40.** 在弦的横振动问题中, 若弦受到一与速度成正比 (比例系数为  $-\alpha$ ) 的阻尼, 试导出弦的有阻尼振动方程。又若除了阻尼力之外, 弦还受到与弦的位移成正比 (比例系数为  $-k$ ) 的回复力, 则此时弦的振动满足的方程是什么?

解答.

**习题 41.** 一长为  $l$ 、横截面积为  $S$  的均匀弹性杆, 已知一端 ( $x = 0$ ) 固定, 另一端 ( $x = l$ ) 在杆轴方向上受拉力  $F$  的作用而达到平衡。在  $t = 0$  时, 撤去外力  $F$ 。试列出杆的纵振动所满足的方程、边界条件和初始条件。

解答.

**习题 42.** 一长为  $l$  的金属细杆 (可近似地看成是一维的), 通有稳定电流  $I$ 。如果杆的两端 ( $x = 0$  和  $x = l$ ) 均按 Newton 冷却定律与外界交换热量。外界温度为  $u_0$ , 初始时杆的温度为  $u_0(1 - \frac{2x}{l})^2$ 。试写出杆上温度场所满足的方程、边界条件和初始条件, 设金属的电阻为  $R$ 。

解答.

**习题 43.** 在铀块中, 除了中子的扩散运动外, 还存在中子的吸收和增值过程。设在单位时间内、单位体积中吸收和增值的中子数均正比于该时刻、该处的中子浓度  $u(\mathbf{r}, t)$ , 因而净增中子数可表为  $\alpha u(\mathbf{r}, t)$ ,  $\alpha$  为比例常数。试导出  $u(\mathbf{r}, t)$  所满足的偏微分方程。

解答.

## 12 第十三章习题

习题 44. 一长为  $l$ 、横截面积为  $S$  的均匀弹性杆，已知一端 ( $x = 0$ ) 固定，另一端 ( $x = l$ ) 在杆轴方向上受拉力  $F$  的作用而达到平衡。在  $t = 0$  时，撤去外力  $F$ 。试列出杆的纵振动所满足的方程、边界条件和初始条件。

解答.

习题 45. 求解细杆的导热问题:

杆长  $l$ ，两端 ( $x = 0, l$ ) 均保持为零度，初始温度分布为  $u|_{t=0} = b \frac{x(l-x)}{l^2}$ .

解答.

习题 46. 求解:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= bx(l-x), \\ u|_{x=0} &= 0, \quad u|_{x=l} = 0, \\ u|_{t=0} &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0.\end{aligned}$$

解答.

习题 47. 一细长杆， $x = 0$  端固定， $x = l$  端受周期力  $A \sin \omega t$  作用。设初位移和初速度均为零，求解此杆的纵振动问题。

解答.

习题 48. 求解下列定解问题:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0, \\ u|_{x=0} &= Ae^{i\omega t}, \quad u|_{x=l} = 0, \\ u|_{t=0} &= 0.\end{aligned}$$

解答.



## 13 第十五章习题

习题 49. 证明:

$$\int_x^1 P_k(x)P_l(x)dx = (1-x^2)\frac{P'_k(x)P_l(x) - P'_l(x)P_k(x)}{k(k+1) - l(l+1)}, \quad k \neq l.$$

解答.

习题 50. 计算下列积分:

- (1)  $\int_0^1 P_k(x)P_l(x)dx;$
- (2)  $\int_{-1}^1 xP_l(x)P_{l+1}(x)dx;$
- (3)  $\int_{-1}^1 x^2P_l(x)P_{l+2}(x)dx.$

解答.

习题 51. 将下列定义在  $[-1, 1]$  上的函数按 Legendre 多项式展开:

- (1)  $f(x) = x^2;$
- (2)  $f(x) = \sqrt{1 - 2xt + t^2};$
- (3)  $f(x) = |x|;$
- (4)  $f(x) = \frac{1}{2}(x + |x|).$

解答.

习题 52. 求解空心球壳内的定解问题：

$$\nabla^2 u = 0, \quad a < r < b,$$

$$u|_{r=a} = u_0,$$

$$u|_{r=b} = u_0 \cos^2 \theta.$$

解答.