

数学物理方法作业

Charles Luo

2024 年 12 月 24 日

目录

1	第一章习题	3
2	第二章习题	6
3	第三章习题	13
4	第四章习题	18
5	第五章习题	22
6	第六章习题	29
7	第七章习题	42
8	第八章习题	44
9	第九章习题	47
10	第十章习题	49
11	第十一章习题	50
12	第十三章习题	51
13	第十五章习题	53

1 第一章习题

习题 1. 计算下列表达式的值：

(1) $(\frac{1+i}{2-i})^2$;

(2) $(1+i)^n + (1-i)^n$, 其中 n 为整数.

解答.

(1) 原式 $= (\frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)})^2 = (\frac{1+3i}{5})^2 = \frac{-8+6i}{25}$.

(2) 由于 $1+i = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$, $1-i = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$. 原式 $= 2^{\frac{n}{2}}e^{\frac{n\pi}{4}i} + 2^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{n\pi}{4}i} = 2^{\frac{n}{2}+1} \cos \frac{n\pi}{4}$.

习题 2. 写出下列复数的实部、虚部、模和辐角：

(1) $1+i\sqrt{3}$;

(2) $e^{i \sin x}$, x 为实数;

(3) e^{iz} ;

(4) e^z ;

(5) $e^{i\phi(x)}$, $\phi(x)$ 是实变数 x 的实函数;

(6) $1 - \cos \alpha + i \sin \alpha$, $0 \leq \alpha < 2\pi$.

解答.

习题 2 的注记. (3)(4) 中 x 是 z 的实部, y 是 z 的虚部。

习题 3. 把下列关系用几何图形表示出来：

(1) $|z| < 2, |z| = 2, |z| > 2$;

(2) $\operatorname{Re} z > \frac{1}{2}$;

题号	实部	虚部	模	辐角
(1)	1	$\sqrt{3}$	2	$\frac{\pi}{3} + 2k\pi$
(2)	$\cos \sin x$	$\sin \sin x$	1	$\sin x + 2k\pi$
(3)	$e^{-y} \cos x$	$e^{-y} \sin x$	e^{-y}	$x + 2k\pi$
(4)	$e^x \cos y$	$e^x \sin y$	e^x	$y + 2k\pi$
(5)	$\cos \phi(x)$	$\sin \phi(x)$	1	$\phi(x) + 2k\pi$
(6)	$1 - \cos \alpha$	$\sin \alpha$	$2 \sin \frac{\alpha}{2}$	$\frac{\pi - \alpha}{2} + 2k\pi$

(3) $1 < \operatorname{Im} z < 2$;

(4) $0 < \arg(1 - z) < \frac{\pi}{4}$;

(5) $|z| + \operatorname{Re} z < 1$;

(6) $0 < \arg\left(\frac{z+1}{z-1}\right) < \frac{\pi}{4}$;

(7) $|z - a| = |z - b|$, a, b 为常数;

(8) $|z - a| + |z - b| = c$, 其中 a, b, c 均为常数, $c > |a - b|$.

解答.

(1) 以原点为圆心画一个半径为 2 的圆, 表示区域分别是圆内、圆上和圆外。

(2) 在实轴 $\frac{1}{2}$ 处画一条平行于虚轴的直线, 所求为直线右边区域。

(3) 在虚轴 1 和 2 处分别画一条平行于实轴的直线, 所求为两直线之间区域。

(4) 由于 $z = x + yi$, 故 $1 - z = (1 - x) - yi$, 根据题意有 $1 - x > 0$, $0 < \frac{-y}{1 - x} < 1$, 解 $x < 1$, $x - 1 < y < 0$ 。

(5) 由于 $z = x + yi$, 根据题意 $x + \sqrt{x^2 + y^2} < 1$, 化简得到 $y^2 < 1 - 2x$ 。

(6) 由于 $z = x + yi$, 根据题意 $\frac{x+1+yi}{x-1+yi}$ 可以化简为 $\frac{x^2+y^2-1}{x^2-2x+y^2+1} - \frac{2yi}{x^2-2x+y^2+1}$, 而辐角范围为 $(0, \frac{\pi}{4})$, 有 $x^2 + y^2 - 1 > 0$, $0 < \frac{-2y}{x^2 + y^2 - 1} < 1$, 画出来的图像是 $y < 0$ 部分挖去以 $(0, -1)$ 为圆心, $\sqrt{2}$ 为半径的圆。

- (7) 根据题意，点到 a, b 的距离相等，点在 ab 连线的中垂线上。
- (8) 根据题意，点到 a, b 的距离和为定值，符合椭圆定义，故点在以 a, b 为焦点的椭圆上。

2 第二章习题

习题 4. 判断下列函数在何处可导（并求出其导函数），在何处解析：

(1) $|z|$;

(2) z^* ;

(3) $z \operatorname{Re} z$;

(4) $(x^2 + 2y) + i(x^2 + y^2)$;

(5) $3x^2 + 2iy^2$;

(6) $(x - y)^2 + 2i(x + y)$.

解答.

(1) 由于 $z = x + iy, f(z) = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

若满足 C-R 方程，则 $x = y = 0$ ，而沿着 $y = x$ 趋近原点时，

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0$$

故处处不可导，不解析。

(2) 若可导，则有 $\frac{\partial f}{\partial z^*} = 0$ ，故处处不可导，不解析。

(3) 由于 $z = x + iy, f(z) = x^2 + ixy$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = y$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = x$$

若满足 C-R 方程，则 $x = y = 0$ ，现令 $x = \rho \sin \theta, y = \rho \cos \theta$,

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2 \cos \theta^2 + i \rho^2 \sin \theta \cos \theta}{\rho \cos \theta + i \rho \sin \theta} = \rho \cos \theta = 0$$

故仅在 $(0, 0)$ 处可导，不解析。

(4) 由题可以得到

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2y$$

若满足 C-R 方程，则 $y = x, x = -1$ ，现令 $x = \rho \sin \theta, y = \rho \cos \theta$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2 \cos \theta^2 - 2\rho \cos \theta + 2\rho \sin \theta + i\rho^2 - 2i\rho \cos \theta - 2i\rho \sin \theta}{\rho \cos \theta + i \sin \theta} \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{-2 \cos \theta + 2 \sin \theta - 2i \cos \theta - 2i \sin \theta}{\cos \theta + i \sin \theta} = -2 - 2i \end{aligned}$$

故仅在 $(-1, 1)$ 处可导，导数为 $-2 - 2i$ ，不解析。

(5) 由题可以得到

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 6x$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 6y^2$$

若满足 C-R 方程，则 $x = y^2$ ，此时 $f(z) = 3y^4 + 2iy^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = 6y^2$$

故在 $x = y^2$ 上可导，导数为 $6y^2$ ，不解析。

(6) 由题可以得到

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 2y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y - 2x$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2$$

若满足 C-R 方程, 则 $2x - 2y = 2$ 即 $x = y + 1$, 此时 $f(z) = 1 + i(4y + 2)$,

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = 2 + 2i$$

故在 $x = y + 1$ 上可导, 导数为 $2 + 2i$, 不解析。

习题 5. 设 $z = x + iy$, 已知解析函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 的实部或虚部如下, 试求 $f'(z)$:

(1) $u = x + y$;

(2) $u = \sin x \cosh y$.

解答.

(1) 由函数解析可知 C-R 方程成立, 而 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 1$, 故 $\frac{\partial v}{\partial x} = -1$, $\frac{\partial v}{\partial y} = 1$.

$$\text{于是可以求出 } v(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,0)} -dx + \int_{(x,0)}^{(x,t)} dy = -x + y + C.$$

$$\text{即 } f(z) = x + y + i(y - x) + iC = z - iz + iC, f'(z) = 1 - i.$$

(2) 由函数解析可知 C-R 方程成立, 而 $\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x \cosh y$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \sin x \sinh y$,

$$\text{故 } \frac{\partial v}{\partial x} = -\sin x \sinh y, \frac{\partial v}{\partial y} = \cos x \cosh y.$$

$$\text{于是可以求出 } v(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,0)} -\sin x \sinh 0 dx + \int_{(x,0)}^{(x,t)} \cos x \cosh y dy = \cos x \sinh y + C.$$

$$\text{即 } f(z) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y + iC, f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = \cos x \cosh y - \sin x \sinh y = \cos z.$$

习题 5 的注记.

- $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$
- $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$
- $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$
- $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$
- $\sinh z = -i \sin iz$
- $\cosh z = \cos iz$

习题 6. 若 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 解析, 且 $u - v = (x - y)(x^2 + 4xy + y^2)$, 试 $f(z)$.

解答. 由题,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} &= x^2 + 4xy + y^2 + (x - y)(2x + 4y), \\ \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} &= -(x^2 + 4xy + y^2) + (x - y)(4x + 2y).\end{aligned}$$

解析函数满足 C-R 方程, 即 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

解出 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 6xy$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = 3(x^2 - y^2)$.

$$u(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,0)} 0dx + \int_{(x,0)}^{(x,t)} 3(x^2 - y^2)dy = 3x^2y - y^2 + C_1.$$

$$v(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,0)} -3x^2dx + \int_{(x,0)}^{(x,t)} 6xydy = -x^3 + 3xy^2 + C_2.$$

而 $u - v$ 中不含常数, 故 $C_1 = C_2 = C$,

$$f(z) = u + iv = 3x^2y - y^2 + i(3xy^2 - x^3) + (1 + i)C = iz^3 + (1 + i)C$$

习题 7. 判断下列哪些是函数，哪些是多值函数：

(1) $\sqrt{z^2 - 1}$;

(2) $z + \sqrt{z - 1}$;

(3) $\sin \sqrt{z}$;

(4) $\cos \sqrt{z}$;

(5) $\frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}}$;

(6) $\frac{\cos \sqrt{z}}{\sqrt{z}}$;

(7) $\ln \sin z$;

(8) $\sin(i \ln z)$;

解答.

(1) 多值函数。

(2) 多值函数。

(3) 已知 $\sqrt{z} = \pm \omega$, 且 $\sin \omega \neq \sin -\omega$, 故为多值函数。

(4) 虽然 $\sqrt{z} = \pm \omega$, 但是 $\cos \omega = \cos -\omega$, 故为单值函数。

(5) 虽然 $\sqrt{z} = \pm \omega$, 但是 $\frac{\sin \omega}{\omega} = \frac{\sin(-\omega)}{-\omega}$, 故为单值函数。

(6) 已知 $\sqrt{z} = \pm \omega$, 且 $\frac{\cos \omega}{\omega} \neq \frac{\cos(-\omega)}{-\omega}$, 故为多值函数。

(7) 多值函数。

(8) 已知 $\ln z$ 是多值函数，对应的函数值满足关系的是值相同，幅角相差 2π 的整数倍，而正弦函数又以 2π 为周期，故为单值函数。

习题 8. 找出下列多值函数的分支点，并讨论 z 绕一个分支点移动一周回到原点处后多值函数值的变化。如果同时绕两个、三个乃至更多个分支点一周，多值函数的值又如何变化？

(1) $\sqrt{(z-a)(z-b)}$, $a \neq b$;

(2) $\sqrt[3]{(z-a)(z-b)}$, $a \neq b$;

(3) $\sqrt{1-z^3}$;

(4) $\sqrt[3]{1-z^3}$;

(5) $\ln(z^2+1)$;

(6) $\ln \cos z$;

解答.

(1) 枝点可能为 a, b, ∞ , 逐一验证:

- 令 $z = a + \epsilon e^{i\varphi}$, $\epsilon \rightarrow 0$, $\varphi \in (0, 2\pi)$, 此时 $f(z) = e^{\frac{1}{2}i\varphi} \sqrt{(a-b)\epsilon}$.

显然 $\varphi = 0$ 和 $\varphi = 2\pi$ 时函数值不等, 故 a 为枝点。

- 同理, b 也为枝点。

- 现考虑 ∞ , 做变换 $t = \frac{1}{z}$, 令 $t = \epsilon e^{i\varphi}$, $\epsilon \rightarrow 0$, $\varphi \in (0, 2\pi)$, 此时 $f(\infty) = e^{-i\varphi} \sqrt{\frac{1}{\epsilon^2}}$.

显然 $\varphi = 0$ 和 $\varphi = 2\pi$ 时函数值相等, 故 ∞ 不是枝点。

故枝点为 a, b 。

(2) 枝点可能为 a, b, ∞ , 逐一验证:

- 令 $z = a + \epsilon e^{i\varphi}$, $\epsilon \rightarrow 0$, $\varphi \in (0, 2\pi)$, 此时 $f(z) = e^{\frac{1}{3}i\varphi} \sqrt[3]{(a-b)\epsilon}$.

显然 $\varphi = 0$ 和 $\varphi = 2\pi$ 时函数值不等, 故 a 为枝点。

- 同理, b 也为枝点。

- 现考虑 ∞ , 做变换 $t = \frac{1}{z}$, 令 $t = \epsilon e^{i\varphi}$, $\epsilon \rightarrow 0$, $\varphi \in (0, 2\pi)$, 此时 $f(\infty) = e^{-\frac{2}{3}i\varphi} \sqrt[3]{\frac{1}{\epsilon^2}}$.

显然 $\varphi = 0$ 和 $\varphi = 2\pi$ 时函数值不等, 故 ∞ 为枝点。

故枝点为 a, b, ∞ 。

(3) 因式分解得 $\sqrt{(1-z)(z-e^{i\frac{2\pi}{3}})(z-e^{-i\frac{2\pi}{3}})}$, 故猜测枝点为 $1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{-i\frac{2\pi}{3}}, \infty$, 逐一验证:

- 令 $z = 1 + \epsilon e^{i\varphi}$, $\epsilon \rightarrow 0$, $\varphi \in (0, 2\pi)$, 此时 $f(z) = e^{\frac{1}{2}i\varphi} \sqrt{(1-e^{i\frac{2\pi}{3}})(1-e^{-i\frac{2\pi}{3}})\epsilon}$.
显然 $\varphi = 0$ 和 $\varphi = 2\pi$ 时函数值不等, 故 1 为枝点。
- 同理, $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ 也为枝点。
- 同理, $e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ 也为枝点。
- 现考虑 ∞ , 做变换 $t = \frac{1}{z}$, 令 $t = \epsilon e^{i\varphi}$, $\epsilon \rightarrow 0$, $\varphi \in (0, 2\pi)$, 此时 $f(\infty) = e^{-\frac{3}{2}i\varphi} \sqrt{\frac{1}{\epsilon^3}}$.
显然 $\varphi = 0$ 和 $\varphi = 2\pi$ 时函数值不等, 故 ∞ 为枝点。

故枝点为 $1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{-i\frac{2\pi}{3}}, \infty$ 。

(4) 因式分解得 $\sqrt[3]{(1-z)(z-e^{i\frac{2\pi}{3}})(z-e^{-i\frac{2\pi}{3}})}$, 故猜测枝点为 $1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{-i\frac{2\pi}{3}}, \infty$, 逐一验证:

- 令 $z = 1 + \epsilon e^{i\varphi}$, $\epsilon \rightarrow 0$, $\varphi \in (0, 2\pi)$, 此时 $f(z) = e^{\frac{1}{3}i\varphi} \sqrt[3]{(1-e^{i\frac{2\pi}{3}})(1-e^{-i\frac{2\pi}{3}})\epsilon}$.
显然 $\varphi = 0$ 和 $\varphi = 2\pi$ 时函数值不等, 故 1 为枝点。
- 同理, $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ 也为枝点。
- 同理, $e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ 也为枝点。
- 现考虑 ∞ , 做变换 $t = \frac{1}{z}$, 令 $t = \epsilon e^{i\varphi}$, $\epsilon \rightarrow 0$, $\varphi \in (0, 2\pi)$, 此时 $f(\infty) = e^{-i\varphi} \sqrt[3]{\frac{1}{\epsilon^3}}$.
显然 $\varphi = 0$ 和 $\varphi = 2\pi$ 时函数值相等, 故 ∞ 不是枝点。

故枝点为 $1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ 。

(5) 枝点可能为 $i, -i, \infty$, 逐一验证:

- 令 $z = i + \epsilon e^{i\varphi}$, $\epsilon \rightarrow 0$, $\varphi \in (0, 2\pi)$, 此时 $f(z) = \ln 2i\epsilon e^{i\varphi} = i\varphi + \ln 2i\epsilon$.
显然 $\varphi = 0$ 和 $\varphi = 2\pi$ 时函数值不等, 故 i 为枝点。
- 同理, $-i$ 也为枝点。
- 现考虑 ∞ , 做变换 $t = \frac{1}{z}$, 令 $t = \epsilon e^{i\varphi}$, $\epsilon \rightarrow 0$, $\varphi \in (0, 2\pi)$, 此时 $f(\infty) = -i\varphi + \ln \frac{1}{\epsilon}$.
显然 $\varphi = 0$ 和 $\varphi = 2\pi$ 时函数值不等, 故 ∞ 为枝点。故枝点为 $i, -i, \infty$ 。

(6) 由 $\cos z = 0$ 可以解出 $z = \pm \frac{2n+1}{2}\pi$, $n \in \mathbb{N}$, 猜测这些根都是枝点。不妨以 $\frac{\pi}{2}$ 为例, 令

$$z = \frac{\pi}{2} + \epsilon e^{i\varphi}, \quad \epsilon \rightarrow 0, \quad \varphi \in (0, 2\pi), \quad \text{此时 } f(z) = \ln \frac{e^{i(\frac{\pi}{2} + \epsilon e^{i\varphi})} + e^{-i(\frac{\pi}{2} + \epsilon e^{i\varphi})}}{2} = \ln \epsilon + i\varphi.$$

显然 $\varphi = 0$ 和 $\varphi = 2\pi$ 时函数值不等, 故 ∞ 为枝点。

故枝点为 $z = \pm \frac{2n+1}{2}\pi$, $n \in \mathbb{N}$ 。

3 第三章习题

习题 9. 试按给定的路径计算下列积分：

- (1) $\int_0^{2+i} \operatorname{Re} z dz$, 积分路径为:
- (i) 线段 $[0, 2]$ 和 $[2, 2+2i]$ 组成的折线.
 - (ii) 线段 $z = (2+i)t$, $0 < t \leq 1$.
- (2) $\int_C \frac{dz}{\sqrt{z}}$, 规定 $\sqrt{z}|_{z=1} = 1$, 积分路径为由 $z = 1$ 出发的:
- (i) 单位圆的上半周.
 - (ii) 单位圆的下半周.

解答.

- (1) (i) 由于 $z = x + iy$, $dz = dx + i dy$, 故有
- $$\int_0^{2+i} \operatorname{Re} z dz = \int_0^2 x dx + \int_0^1 2i dy = 2 + 2i.$$
- (ii) 此时 $x = 2t$, $y = t$, $dz = (2+i)dt$, 故有
- $$\int_0^{2+i} \operatorname{Re} z dz = \int_0^{2+i} 2t(2+i)dt = \int_0^1 (4t + 2it)dt = 2 + i.$$
- (2) 已知 $z = e^{i\theta}$, $dz = ie^{i\theta}d\theta$, $\sqrt{z} = e^{\frac{i\theta}{2}}$
- (i) $\int_C \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_0^\pi e^{-\frac{i\theta}{2}} ie^{i\theta} d\theta = 2 \int_0^\pi e^{\frac{i\theta}{2}} d(\frac{i\theta}{2}) = 2e^{\frac{i\theta}{2}} \Big|_0^\pi = 2i - 2.$
- (ii) $\int_C \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_0^\pi e^{-\frac{i\theta}{2}} ie^{i\theta} d\theta = 2 \int_0^{-\pi} e^{\frac{i\theta}{2}} d(\frac{i\theta}{2}) = 2e^{\frac{i\theta}{2}} \Big|_0^{-\pi} = -2i - 2.$

习题 10. 计算下列积分：

- (1) $\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z};$
- (2) $\oint_{|z|=1} \frac{|dz|}{z};$
- (3) $\oint_{|z|=1} \frac{dz}{|z|};$

$$(4) \oint_{|z|=1} \left| \frac{dz}{z} \right|;$$

解答. 在单位圆上, 有 $z = e^{i\theta}$, $dz = ie^{i\theta}d\theta$.

$$(1) \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} ie^{i\theta} d\theta = 2\pi i;$$

$$(2) \text{ 此时 } |dz| = d\theta, \text{ 故 } \oint_{|z|=1} \frac{|dz|}{z} = \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} d\theta = -\frac{1}{i} \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} d(-i\theta) = -\frac{1}{i} e^{i\theta} \Big|_0^{2\pi} = 0;$$

$$(3) \text{ 此时 } |z| = 1, \text{ 故 } \oint_{|z|=1} \frac{dz}{|z|} = \int_0^{2\pi} ie^{i\theta} d\theta = e^{i\theta} \Big|_0^{2\pi} = 0;$$

$$(4) \oint_{|z|=1} \left| \frac{dz}{z} \right| = \int_0^{2\pi} |e^{-i\theta} ie^{i\theta} d\theta| = 2\pi.$$

习题 11. 计算下列积分:

$$(1) \oint_C \frac{1}{z^2 - 1} \sin \frac{\pi z}{4} dz, C \text{ 分别为:}$$

$$(i) |z| = \frac{1}{2}.$$

$$(ii) |z| = 3.$$

$$(2) \oint_C \frac{1}{z^2 + 1} e^{iz} dz, C \text{ 分别为:}$$

$$(i) |z - i| = 1.$$

$$(ii) |z + i| + |z - i| = 2\sqrt{2}.$$

解答.

$$(1) \text{ 对被积函数分析, } f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-1)} \sin \frac{\pi z}{4}, \text{ 故奇点为 } 1 \text{ 和 } -1.$$

(i) 显然此时的围道不包含奇点, 由 Cauchy 定理, 积分结果为 0。

(ii) 此时积分围道包含奇点 1 和 -1, 由 Cauchy 积分公式, 有

$$\oint_C \frac{1}{(z+1)(z-1)} \sin \frac{\pi z}{4} dz = 2\pi i \left(\frac{1}{z+1} \sin \frac{\pi z}{4} \right) \Big|_{z=1} + 2\pi i \left(\frac{1}{z-1} \sin \frac{\pi z}{4} \right) \Big|_{z=-1} = \sqrt{2}\pi i.$$

$$(2) \text{ 对被积函数分析, } f(z) = \frac{1}{(z+i)(z-i)} e^{iz}, \text{ 故奇点为 } i \text{ 和 } -i.$$

(i) 此时包含奇点 i ，由 Cauchy 积分公式，有

$$\oint_C \frac{1}{(z+i)(z-i)} e^{iz} dz = 2\pi i \left(\frac{1}{z+i} e^{iz} \right) \Big|_{z=i} = \frac{\pi}{e}.$$

(ii) 此时包含奇点 i 和 $-i$ ，由 Cauchy 积分公式，有

$$\oint_C \frac{1}{(z+i)(z-i)} e^{iz} dz = 2\pi i \left(\frac{1}{z+i} e^{iz} \right) \Big|_{z=i} + 2\pi i \left(\frac{1}{z-i} e^{iz} \right) \Big|_{z=-i} = \frac{\pi}{e} - \pi e = -2\pi \sinh 1.$$

习题 12. 计算下列积分：

$$1. \oint_{|z|=2} \frac{\cos z}{z} dz;$$

$$2. \oint_{|z|=2} \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1} dz;$$

$$3. \oint_{|z|=2} \frac{\sin e^z}{z} dz;$$

$$4. \oint_{|z|=2} \frac{e^z}{\cosh z} dz;$$

$$5. \oint_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^2} dz;$$

$$6. \oint_{|z|=2} \frac{|z| e^z}{z^2} dz;$$

$$7. \oint_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^4} dz;$$

$$8. \oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^2(z^2 + 16)}.$$

解答.

(1) 奇点为原点，在围道内，由 Cauchy 积分公式，有

$$\oint_{|z|=2} \frac{\cos z}{z} dz = 2\pi i (\cos z) \Big|_{z=0} = 2\pi i;$$

(2) 对被积函数分析， $f(z) = \frac{z^2 - 1}{(z+i)(z-i)}$ ，故奇点为 i 和 $-i$ ，均在围道内，由 Cauchy 积分公式，

有

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1} dz = 2\pi i \left(\frac{z^2 - 1}{z+i} \right) \Big|_{z=i} + 2\pi i \left(\frac{z^2 - 1}{z-i} \right) \Big|_{z=-i} = -2\pi + 2\pi = 0;$$

- (3) 奇点为原点，在围道内，由 Cauchy 积分公式，有

$$\oint_{|z|=2} \frac{\sin e^z}{z} dz = 2\pi i (\sin e^z)|_{z=0} = 2\pi \sin 1;$$

- (4) 对被积函数分析， $f(z) = \frac{e^z}{\cos iz}$ ，奇点为 $\frac{\pi}{2}i + 2k\pi i$ ， $k \in \mathbb{Z}$ ，其中 $\pm \frac{\pi}{2}i$ 在围道内，但此时不满足 Cauchy 积分公式所需表达形式，故应根据 Cauchy 定理，将原积分围道转化为两个围绕奇点的围道再求和，在 $\frac{\pi}{2}i$ 点附近选取一半径为 ρ 的圆为围道 C_1 ，在 $-\frac{\pi}{2}i$ 点附近选取一半径为 ρ 的圆为围道 C_2 ，先考虑 $\oint_{C_1} \frac{e^z}{\cosh z} dz$ ，不妨取 $z = \frac{\pi}{2}i + \rho e^{i\theta}$ ，此时 $dz = i\rho e^{i\theta} d\theta$ ，则有

$$\oint_{C_1} \frac{e^z}{\cosh z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{e^{\frac{\pi}{2}i + \rho e^{i\theta}}}{\cosh(\frac{\pi}{2}i + \rho e^{i\theta})} i\rho e^{i\theta} d\theta$$

当 $\rho \rightarrow 0$ 时，且 $\cosh z = \cos iz$ ，可以化简得到

$$\oint_{C_1} \frac{e^z}{\cosh z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{e^{\frac{\pi}{2}i}}{\cos(-\frac{\pi}{2} + i\rho e^{i\theta})} i\rho e^{i\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{e^{\frac{\pi}{2}i}}{i\rho e^{i\theta}} i\rho e^{i\theta} d\theta = 2\pi i$$

再考虑 $\oint_{C_2} \frac{e^z}{\cosh z} dz$ ，不妨取 $z = -\frac{\pi}{2}i + \rho e^{i\theta}$ ，此时 $dz = i\rho e^{i\theta} d\theta$ ，则有

$$\oint_{C_2} \frac{e^z}{\cosh z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{e^{-\frac{\pi}{2}i + \rho e^{i\theta}}}{\cosh(-\frac{\pi}{2}i + \rho e^{i\theta})} i\rho e^{i\theta} d\theta$$

当 $\rho \rightarrow 0$ 时，且 $\cosh z = \cos iz$ ，可以化简得到

$$\oint_{C_2} \frac{e^z}{\cosh z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{e^{-\frac{\pi}{2}i}}{\cos(\frac{\pi}{2} + i\rho e^{i\theta})} i\rho e^{i\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{e^{-\frac{\pi}{2}i}}{-i\rho e^{i\theta}} i\rho e^{i\theta} d\theta = 2\pi i$$

综上，最终得到

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{\cosh z} dz = \oint_{C_1} \frac{e^z}{\cosh z} dz + \oint_{C_2} \frac{e^z}{\cosh z} dz = 4\pi i.$$

- (5) 奇点为原点，在围道内，但不可以直接使用 Cauchy 积分公式，应根据 Cauchy 定理，将原积分围道转化为围绕原点的围道再求，在原点附近选取一半径为 ρ 的圆为围道，不妨取 $z = \rho e^{i\theta}$ ，此时 $dz = i\rho e^{i\theta} d\theta$ ，则有

$$\oint_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^2} dz = \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\rho e^{i\theta})}{\rho^2 e^{2i\theta}} i\rho e^{i\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\rho e^{i\theta})}{\rho e^{i\theta}} i d\theta$$

当 $\rho \rightarrow 0$ 时，可以化简得到

$$\oint_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^2} dz = \int_0^{2\pi} \frac{\rho e^{i\theta}}{\rho e^{i\theta}} i d\theta = 2\pi i.$$

- (6) 奇点为原点，在围道内，但不可以直接使用 Cauchy 积分公式，应根据 Cauchy 定理，将原积分围道转化为围绕原点的围道再求，在原点附近选取一半径为 ρ 的圆为围道，不妨取 $z = \rho e^{i\theta}$ ，此时 $dz = i\rho e^{i\theta} d\theta$ ，则有

$$\oint_{|z|=2} \frac{|z|e^z}{z^2} dz = \int_0^{2\pi} \frac{2e^{\rho e^{i\theta}}}{\rho^2 e^{2i\theta}} i\rho e^{i\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{2e^{\rho e^{i\theta}}}{\rho e^{i\theta}} i d\theta$$

当 $\rho \rightarrow 0$ 时，可以化简得到

$$\oint_{|z|=2} \frac{|z|e^z}{z^2} dz = \int_0^{2\pi} 2i d\theta = 4\pi i.$$

- (7) 由解析函数高阶导数公式 $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{(n+1)}} d\zeta$,

$$\oint_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^4} dz = \frac{2\pi i}{3!} \frac{d^3}{dz^3} (\sin z)|_{z=0} = -\frac{\pi i}{3}.$$

- (8) 对被积函数分析，奇点为原点，对原式子进行拆分，得到

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z^2 + 16)} = \frac{1}{z^2} - \frac{15}{z^2 + 16}$$

显然拆分后后面分式无奇点，积分结果为 0，前面分式积分结果也为 0，故原积分结果为 0。

习题 12 的注记.

- (4) 需要注意，也可以用留数定理做，但不可以使用 Cauchy 积分公式。
- (5) 也可以用解析函数高阶导数公式做， $2\pi i \frac{d}{dz} (\sin z)|_{z=0} = 2\pi i$ 。
- (6) 也可以用解析函数高阶导数公式做， $2\pi i \frac{d}{dz} (2e^z)|_{z=0} = 4\pi i$ 。
- 疑问：(7) 如果按照缩小围道方法做，似乎无法得到正确答案？
- (8) 也可以用解析函数高阶导数公式做， $2\pi i \frac{d}{dz} (\frac{1}{z^2 + 16})|_{z=0} = 0$ 。

4 第四章习题

习题 13. 判断下列级数的收敛性与绝对收敛性：

$$(1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^n}{\ln n};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}.$$

解答.

(1) 对原级数进行拆分，

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^n}{\ln n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\ln 2k} + i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\ln 2k+1}$$

由 Leibnitz 判别法可知，拆分后的两个交错级数都收敛，故原级数收敛，现判断是否绝对收敛：

$$\left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^n}{\ln n} \right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} > \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$$

调和级数发散，故 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^n}{\ln n}$ 收敛但不绝对收敛。

(2) 同 (1) 对原级数进行拆分

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

由 Leibnitz 判别法可知，拆分后的两个交错级数都收敛，故原级数收敛，现判断是否绝对收敛：

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

调和级数发散，故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$ 收敛但不绝对收敛。

习题 14. 试确定下列级数的收敛区域：

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} z^{n!};$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{1+z} \right)^n;$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (z^2 + 2z + 2)^n;$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{z}{3^n}.$$

解答.

(1) 对幂级数分析, 有

$$c_n = \begin{cases} 1 & n = k!, k = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{others} \end{cases}$$

根据 Cauchy-Hadamard 公式, 收敛半径为

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}} = 1$$

收敛区域为 $|z| < 1$;

(2) 进行换元, $t = \frac{z}{1+z}$, 这时 $c_n = 1$, 由 Cauchy-Hadamard 公式, 收敛半径为 1, 故 $\left| \frac{z}{1+z} \right| < 1$, 解出收敛区域为 $\operatorname{Re} z > -\frac{1}{z}$;

(3) 进行换元, $t = z^2 + 2z + 2$, 这时 $c_n = (-1)^n$, 由 Cauchy-Hadamard 公式, 收敛半径为 1, 故收敛区域为 $|z^2 + 2z + 2| < 1$,

(4) 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{z}{3^n} \rightarrow 0$ 在全平面成立, 故该级数在全平面收敛。

习题 14 的注记. (3) 收敛区域的数值求解没解出来。

习题 15. 试求下列幂级数的收敛半径:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} z^n;$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^n} z^n;$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n;$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^n}{2^{2n}(n!)^2} z^n;$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} n^{\ln n} z^n;$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} z^{2n};$$

$$(7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n^n}{n!} z^n;$$

$$(8) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n z^n.$$

解答.

(1) $c_n = \frac{1}{n^n}$, 根据 Cauchy-Hadamard 公式, 收敛半径为

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{c_n} \right|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} |n^n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty;$$

(2) $c_n = \frac{1}{2^n n^n}$, 根据 Cauchy-Hadamard 公式, 收敛半径为

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{c_n} \right|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} |2^n n^n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n = \infty;$$

(3) $c_n = \frac{n!}{n^n}$, 根据 d'Alembert 公式, 收敛半径为

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n! n^n}{(n+1)!(n+1)^{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e;$$

(4) $c_n = \frac{(-)^n}{2^{2n}(n!)^2}$, 根据 d'Alembert 公式, 收敛半径为

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| -\frac{2^{2(n+1)}[(n+1)!]^2}{2^{2n}(n!)^2} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} 4(n+1)^2 = \infty;$$

(5) $c_n = n^{\ln n}$, 根据 Cauchy-Hadamard 公式, 收敛半径为

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |n^{\ln n}|^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{\ln n}{n}} = 1;$$

(6) 换元 $t = z^2$, 此时

$$c_n = \begin{cases} 0 & n = 2k + 1, k \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{2^{2n}} & n = 2k, k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

根据 Cauchy-Hadamard 公式, 对于 t 收敛半径为

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |2^{-2}|} = 4$$

故 z 的收敛半径为 2;

(7) $c_n = \frac{n \ln n}{n!}$, 根据 d'Alembert 公式, 收敛半径为

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| -\frac{n \ln n}{\ln(n+1)} \right| = \infty;$$

(8) $c_n = (1 - \frac{1}{n})^n$, 根据 Cauchy-Hadamard 公式, 收敛半径为

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |(1 - \frac{1}{n})^n|^{\frac{1}{n}}} = \lim_{t \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{n} = 1.$$

5 第五章习题

习题 16. 将下列函数在指定点展开为 Taylor 级数, 并给出其收敛半径:

- (1) $1 - z^2$, 在 $z = 1$ 展开;
- (2) $\sin z$, 在 $z = n\pi$ 展开;
- (3) $\frac{1}{1 + z + z^2}$, 在 $z = 0$ 展开;
- (4) $\frac{\sin z}{1 - z}$, 在 $z = 0$ 展开;
- (5) $e^{\frac{1}{1-z}}$, 在 $z = 0$ 展开 (可只求前四项).

解答.

(1) $1 - z^2 = (1 + z)(1 - z) = (z - 1)[-(z - 1) - 2] = -(z - 1)^2 - 2(z - 1)$, 在全平面收敛。

(2) 不妨取 $t = z - n\pi$, 有 $\sin z = \sin(t + n\pi)$,

$$\text{已知 } \sin t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1}, \text{ 故 } \sin(t + n\pi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^{n+k}}{(2k+1)!} t^{2k+1},$$

$$\text{即展开结果为 } \sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^{n+k}}{(2k+1)!} (z - n\pi)^{2k+1}, \text{ 在全平面收敛。}$$

$$(3) \text{ 因式分解得 } \frac{1}{1 + z + z^2} = \frac{1}{(z - e^{\frac{2\pi}{3}i})(z - e^{-\frac{2\pi}{3}i})} = \frac{1}{\sqrt{3}i} \left(\frac{e^{\frac{2\pi}{3}i}}{1 - e^{\frac{2\pi}{3}i}z} - \frac{e^{-\frac{2\pi}{3}i}}{1 - e^{-\frac{2\pi}{3}i}z} \right),$$

$$\text{即展开结果为 } \frac{1}{\sqrt{3}i} \sum_{n=0}^{\infty} [e^{\frac{2(n+1)\pi}{3}} - e^{-\frac{2(n+1)\pi}{3}}] z^n = \frac{2}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \sin\left[\frac{2}{3}(n+1)\pi\right] \cdot z^n, \text{ 收敛半径为 } 1.$$

$$(4) \frac{\sin z}{1 - z} = \sin z \cdot \frac{1}{1 - z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} z^l = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{(2k+1)!} z^{2k+l+1},$$

$$\text{即展开结果为 } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \frac{(-)^k}{(2k+1)!} \right) z^n, \text{ 收敛半径为 } 1 \text{ (公共区域)}.$$

- (5) 根据 Taylor 级数的定义, 分别求出函数 $f(z) = e^{\frac{1}{1-z}}$ 在 $z = 0$ 处的各阶导数, $f(0) = e$, $f'(0) = e$, $f^{(2)}(0) = 3e$, $f^{(3)}(0) = 13e$, $f^{(4)}(0) = 73e$, 故 Taylor 展开为 $e + ez + \frac{3e}{2}z^2 + \frac{13e}{6}z^3 + \frac{73e}{24}z^4 + \dots$, 收敛半径为 1 (最近的奇点为 1)。

习题 16 的注记.

- (3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{2(n+1)\pi}{3}}{\sin \frac{2\pi}{3}} z^n.$
- (5) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n(z^{n-1}e^z)}{dz^n} \right|_{z=1} z^n.$

习题 17. 将下列函数在指定点展开为 Taylor 级数, 并给出其收敛半径:

- (1) $\ln z$, 在 $z = i$ 展开, 规定 $0 \leq \arg z < 2\pi$;
- (2) $\ln z$, 在 $z = i$ 展开, 规定 $\ln z|_{z=i} = -\frac{3}{2}\pi i$;
- (3) $\arctan z$ 的主值, 在 $z = 0$ 展开;
- (4) $\ln \frac{1+z}{1-z}$, 在 $z = \infty$ 展开, 规定 $\ln \frac{1+z}{1-z}|_{z=\infty} = (2k+1)\pi i$.

解答.

- (1) 在 $z = i$ 处展开, 则展开式形式应为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-i)^n$, 有

$$\begin{aligned} \ln z &= \int_i^z \frac{1}{t} dt + \ln i = i \int_i^z \frac{1}{1-(1-it)} d(1-it) + \ln i \\ &= i \int_i^z \sum_{n=0}^{\infty} (1-it)^n d(1-it) + \frac{\pi i}{2} = i \sum_{n=0}^{\infty} \int_i^z (1-it)^n d(1-it) + \frac{\pi i}{2} \\ &= i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n+1} (t-i)^{n+1} \Big|_i^z + \frac{\pi i}{2} = \frac{\pi i}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{n+1}}{n+1} (z-i)^{n+1}. \end{aligned}$$

收敛区域为 $|z-i| < 1$.

- (2) 同上, 结果为 $-\frac{3\pi i}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{n+1}}{n+1} (z-i)^{n+1}$.

收敛区域为 $|z-i| < 1$.

$$(3) \arctan z = \int_0^z \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt = (-1)^n \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^z t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} t^{2n+1}.$$

收敛区域为 $|z| < 1$.

(4) 做代换 $t = \frac{1}{z}$, 则所求为 $t = 0$ 处 $\ln \frac{t+1}{t-1} = \ln(t+1) - \ln(t-1)$ 的 Taylor 展开,

$$\ln(t+1) = \ln(t+1)|_{t=0} + \int_0^t \frac{1}{u+1} du = \ln(t+1)|_{t=0} + \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} (-u)^n du$$

$$= \ln(t+1)|_{t=0} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} t^{n+1}.$$

$$\text{同理, 可得 } \ln(t-1) = \ln(t-1)|_{t=0} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} t^{n+1}.$$

$$\text{故 } \ln \frac{t+1}{t-1} = \ln \frac{t+1}{t-1}|_{t=0} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} t^{2n+1}, |t| < 1. \text{ 代换 } z = \frac{1}{t} \text{ 有}$$

$$\ln \frac{1+z}{1-z} = \ln \frac{1+z}{1-z}|_{z=\infty} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} z^{-(2n+1)} = (2k+1)\pi i + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} z^{-(2n+1)}.$$

收敛区域为 $|z| > 1$.

习题 18. 求下列无穷级数之和, 注意给出相应的收敛区域:

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} z^{2n+1};$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n};$$

$$(3) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(n+m)!}{n! m!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+m};$$

$$(4) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(n+m+p)!}{n! m! p!} \left(\frac{z}{3}\right)^{n+m+p}.$$

解答.

$$(1) \text{ 记 } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} z^{2n+1}, \text{ 有 } f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} = \frac{1}{1-z^2}, |z| < 1.$$

故 $f(z) = f(0) + \int_0^z \frac{1}{1-t^2} dt = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}$. 由 $f(0) = 0$ 知 $\ln \frac{1+z}{1-z} \Big|_{z=0} = 0$.

收敛区域为 $|z| < 1$.

(2) 由 $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, 可知 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n} = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$ (只剩下偶数项).

收敛区域为 $|z| < \infty$.

(3) 令 $l = m + n$, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(n+m)!}{n! m!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+m} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^l \sum_{n=0}^l \frac{l!}{n!(l-n)!}$.

由二项式展开定理有 $\sum_{n=0}^l \frac{l!}{n!(l-n)!} = (1+1)^l = 2^l$.

故原式等于 $\sum_{l=0}^{\infty} 2^l \left(\frac{z}{2}\right)^l = \sum_{l=0}^{\infty} z^l = \frac{1}{1-z}$.

收敛区域为 $|z| < 2$.

(4) 同上, 看成 $\sum_{k=0}^{\infty} [(1+1) + 1]^k z^k$ 的两次二项式展开, 故原式等于 $\frac{1}{1-z}$.

收敛区域为 $|z| < 3$.

习题 18 的注记.

- (3) 的收敛区域应为 $|z| < 2$ 与 $\operatorname{Re} z < 1$ 的公共区域?
- (4) 的收敛区域应为 $|z| < 3$ 与 $\operatorname{Re} z < \frac{3}{2}$ 及 $|z-2| < 1$ 的公共区域?

习题 19. 求下列函数的 Laurent 展开:

- (1) $\frac{1}{z^2(z-1)}$, 在 $z=1$ 附近展开;
- (2) $\frac{1}{z^2(z-1)}$, 展开区域为 $1 < |z| < \infty$;
- (3) $\frac{1}{z^2-3z+2}$, 展开区域为 $1 < |z| < 2$;
- (4) $\frac{1}{z^2-3z+2}$, 展开区域为 $2 < |z| < \infty$;

(5) $\frac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)}$, 展开区域为 $3 < |z| < 4$;

(6) $\frac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)}$, 展开区域为 $4 < |z| < \infty$;

解答.

(1) 在 $z = 1$ 附近展开, 故 Laurent 展开形式为 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-1)^n$.

$$\frac{1}{z^2(z-1)} = \frac{1}{z-1} \frac{1}{[1+(z-1)]^2} = -\frac{1}{z-1} \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{1+(z-1)} \right] = -\frac{1}{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n n (z-1)^{n-1}.$$

$$\text{整理得 } \sum_{n=-1}^{\infty} (-)^{n+1} (n+2) (z-1)^n.$$

收敛区域为 $0 < |z| < 1$.

(2) 环形区域为 $1 < |z| < \infty$, 故 Laurent 展开形式为 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$. 做代换 $t = \frac{1}{z}$ 有

$$\frac{1}{z^2(z-1)} = t^3 \frac{1}{1-t} = t^3 \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} t^{n+3}.$$

$$\text{整理得 } \sum_{n=-\infty}^{-3} z^n = \sum_{n=3}^{\infty} z^{-n}.$$

(3) 环形区域为 $1 < |z| < 2$, 故 Laurent 展开形式为 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$. 做代换 $t = \frac{1}{z}$ 有

$$\frac{1}{z^2-3z+2} = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} - \frac{t}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} t^{n+1}.$$

$$\text{整理得 } -\sum_{n=-1}^{\infty} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

(4) 环形区域为 $2 < |z| < \infty$, 故 Laurent 展开形式为 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$. 做代换 $t = \frac{1}{z}$ 有

$$\frac{1}{z^2-3z+2} = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \frac{t}{1-2t} - \frac{t}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n t^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} t^{n+1}.$$

$$\text{整理得 } \sum_{n=0}^{\infty} (2^n - 1)t^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (2^{n-1} - 1)z^{-n} = \sum_{n=2}^{\infty} (2^{n-1} - 1)z^{-n}.$$

(5) 环形区域为 $3 < |z| < 4$, 故 Laurent 展开形式为 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$. 做代换 $t = \frac{1}{z}$ 有

$$\frac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)} = 1 - \frac{2}{z-3} + \frac{6}{z-4} = 1 - \frac{2t}{1-3t} - \frac{3}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{4}} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} 2t \cdot (3t)^n - \frac{3}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{4^n}.$$

$$\text{整理得 } 1 - 2 \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} - \frac{3}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{4^n}.$$

(6) 环形区域为 $4 < |z| < \infty$, 故 Laurent 展开形式为 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$. 做代换 $t = \frac{1}{z}$ 有

$$\frac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)} = 1 - \frac{2}{z-3} + \frac{6}{z-4} = 1 - \frac{2t}{1-3t} + \frac{6t}{1-4t} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} 2t \cdot (3t)^n + \sum_{n=0}^{\infty} 6t \cdot (4t)^n.$$

$$\text{整理得 } 1 - 2 \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} + 6 \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{z^n}{4^{n+1}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (3 \cdot 2^{2n-1} - 2 \cdot 3^{n-1}) z^{-n}.$$

习题 20. 判断下列函数孤立奇点的性质, 如果是极点, 确定其阶数:

(1) $\frac{1}{z^2 + a^2}, a \neq 0;$

(2) $\frac{\cos az}{z^2};$

(3) $\frac{\cos az - \cos bz}{z^2}, a^2 \neq b^2;$

(4) $\frac{\sin z}{z^2} - \frac{1}{z};$

(5) $\cos \frac{1}{\sqrt{z}};$

(6) $\frac{\sqrt{z}}{\sin \sqrt{z}};$

(7) $\frac{1}{(z-1) \ln z};$

(8) $\int_0^z \frac{\sinh \sqrt{\zeta}}{\sqrt{\zeta}} d\zeta.$

解答.

(1) 孤立奇点 $z = \pm ai$, $\lim_{z \rightarrow \pm ai} f(x) = \infty$, $\frac{1}{f(z)} = z^2 + a^2$, 均为二阶极点。

(2) 孤立奇点 $z = 0$, $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \infty$, $\frac{1}{f(z)} = \frac{z^2}{\cos az}$, 为一阶极点。

(3) 孤立奇点 $z = 0$, $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \frac{-2 \sin \frac{(a+b)z}{2} \sin \frac{(a-b)z}{2}}{z^2} = -(a^2 - b^2)$, 故为可去奇点。

(4) 孤立奇点 $z = 0$, $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z - z}{z^2} = 0$, 故为可去奇点。

(5) 孤立奇点 $z = 0$, 令 $t = \sqrt{z}$, 当 $z \rightarrow 0$ 时, $t \rightarrow \infty$, $\cos t$ 取值不定, 故为本性奇点。

(6) 孤立奇点 $z = 0$, 令 $t = \sqrt{z}$, 当 $z \rightarrow 0$ 时, $t \rightarrow \infty$, $\frac{\sin t}{t} = 1$, 故为可去奇点。

孤立奇点 $z = (n\pi)^2$, 一阶奇点。

(7) 孤立奇点 $z = 1$, 在 $\ln z|_{z=1} = 0$ 单值分支内为二阶极点, 其他分支内为一阶极点。

(8) 令 $t = \sqrt{z}$, 有 $f(z) = \int_0^{z^2} 2 \sinh t dt$, $z = \infty$ 为本性奇点。

习题 20 的注记.

- (2) $z = \infty$ 为本性奇点。
- (3) $z = \infty$ 为本性奇点。
- (4) $z = \infty$ 为本性奇点。
- (6) $z = \infty$ 为非孤立奇点。。

6 第六章习题

习题 21. 求下列函数在指定点 z_0 处的留数：

(1) $\frac{1}{z-1}e^{z^2}$, $z_0 = 1$;

(2) $\left(\frac{z}{1-\cos z}\right)^2$, $z_0 = 0$;

(3) $\frac{e^z}{(z^2-1)^2}$, $z_0 = 1$.

解答.

(1) $z_0 = 1$ 是一阶极点, 故 $\operatorname{res} f(1) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{e^{z^2}}{z-1} = e$.

(2) 函数是偶函数, 展开不含 z^{-1} 项, 故 $\operatorname{res} f(0) = 0$.

(3) $f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2}$, 故 $\operatorname{res} f(1) = \frac{d}{dz} \frac{e^z}{(z+1)^2} \Big|_{z=1} = 0$.

习题 22. 求下列函数在复平面 \mathbb{C} 内每一个孤立奇点处的留数：

(1) $\frac{1}{z^3 - z^5}$;

(2) $\frac{z}{1 - \cos z}$;

(3) $e^{\frac{1}{2}(z-\frac{1}{z})}$;

(4) $\frac{1}{(z-1)\ln z}$.

解答.

(1) $f(z) = \frac{1}{z^3(1+z)(1-z)}$, 孤立奇点 $z = 0$ (三阶极点), $z = \pm 1$ (一阶极点)。

$$\operatorname{res} f(0) = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \frac{1}{1-z^2} \Big|_{z=0} = 1.$$

$$\operatorname{res} f(1) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z^3(1+z)(1-z)} = -\frac{1}{2}.$$

$$\operatorname{res} f(1) = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{z+1}{z^3(1+z)(1-z)} = -\frac{1}{2}.$$

(2) 孤立奇点 $z = 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$, $z = 0$ 为一阶奇点, 其余为二阶奇点。

$$\operatorname{res} f(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2}{1 - \cos z} = 2.$$

$$\begin{aligned} \frac{z}{1 - \cos z} &= (z - 2n\pi)[1 - \cos(z - 2n\pi)]^{-1} + 2n\pi[1 - \cos(z - 2n\pi)]^{-1} \\ &= 2(z - 2n\pi)^{-1} \left[1 + \frac{1}{12}(z - 2n\pi)^2 + \mathcal{O}(z - 2n\pi)^4 \right] + 4n\pi(z - 2n\pi)^{-2} \left[1 + \frac{1}{12}(z - 2n\pi)^2 + \mathcal{O}(z - 2n\pi)^4 \right] \\ &= 4n\pi(z - 2n\pi)^{-2} + 2(z - 2n\pi)^{-1} + \frac{n\pi}{3} + \frac{1}{6}(z - 2n\pi) + \cdots \end{aligned}$$

故 $\operatorname{res} f(2n\pi) = 2$.

$$(3) \quad e^{\frac{1}{2}(z - \frac{1}{z})} = e^{\frac{z}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!2^n} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-)^m}{m!2^m z^m} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-)^m}{n!m!2^{m+n}} z^{n-m}.$$

由书上 P75 例 5.9 知, $\operatorname{res} f(0) = -J_1(1)$, $\operatorname{res} f(\infty) = J_1(1)$.

(4) 孤立奇点 $z = 1$ 。

- 若 $\ln z|_{z=1} = 0$ 为二阶极点,

$$\operatorname{res} f(1) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \frac{z-1}{\ln z} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z \ln z - z + 1}{z(\ln z)^2} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{\ln z + 2} [L'Hospital] = \frac{1}{2}.$$

- 其他情况为一阶极点, $\ln z|_{z=1} = 2k\pi i$,

$$\operatorname{res} f(1) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{\ln z} = \frac{1}{2k\pi i}$$

习题 23. 求下列函数在 ∞ 点处的留数:

$$(1) \quad \frac{\cos z}{z};$$

$$(2) \quad (z^2 + 1)e^z;$$

$$(3) \quad \sqrt{(z-1)(z-2)}.$$

解答.

(1) 令 $t = \frac{1}{z}$, 而 $\cos z = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \mathcal{O}(z^2)$,

故展开式为 $t \cdot \left(1 - \frac{1}{2}t^{-2} + \mathcal{O}(z^2)\right) = t - t^{-1} + \frac{1}{\mathcal{O}(t^1)}$, ∞ 为本性奇点,

即 $\text{res } f(\infty) = -a_1 = -1$.

(2) 令 $t = \frac{1}{z}$, 而 $e^z = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \mathcal{O}(z^3)$,

故展开式为 $\left(\frac{1}{t^2} + 1\right) \left(1 + \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t^2} + \cdots\right)$, ∞ 为本性奇点,

即 $\text{res } f(\infty) = -a_1 = 0$.

(3) 令 $t = \frac{1}{z}$, 原式可化为 $\frac{\sqrt{(1-t)(1-2t)}}{t}$.

不妨取 $\arg(1-t)|_{t=0} = 2m\pi$, $\arg(1-2t)|_{t=0} = 2n\pi$,

故展开式为 $t^{-1} \cdot (-1)^m \left(1 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + \cdots\right) \cdot (-1)^n \left(1 - t - \frac{1}{2}t^2 + \cdots\right)$.

整理得到 $(-1)^{m+n} \left(t^{-1} - \frac{3}{2} - \frac{1}{8}t - \frac{7}{16}t^2 + \cdots\right)$. ∞ 为一阶奇点,

即 $\text{res } f(\infty) = -a_1 = (-1)^{m+n} \cdot \frac{1}{8}$.

习题 24. 计算下列积分值:

(1) $\oint_{|z-1|=1} \frac{1}{1+z^4} dz$;

(2) $\oint_{|z-1|=1} \frac{1}{z^2-1} \sin \frac{\pi z}{4} dz$;

(3) $\oint_{|z|=n} \tan \pi z dz, n$ 为正整数;

(4) $\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^3} dz$.

解答.

(1) 在围道内的奇点有 $z = e^{\pm \frac{\pi}{4}}$, 均为一阶奇点。

$$\oint_{|z-1|=1} \frac{1}{1+z^4} dz = 2\pi i \left[\operatorname{res} f(e^{\frac{\pi i}{4}}) + \operatorname{res} f(e^{-\frac{\pi i}{4}}) \right] = 2\pi i \left[\lim_{z \rightarrow e^{\frac{\pi i}{4}}} \frac{z - e^{\frac{\pi i}{4}}}{1+z^4} + \lim_{z \rightarrow e^{-\frac{\pi i}{4}}} \frac{z - e^{-\frac{\pi i}{4}}}{1+z^4} \right]$$

$$= 2\pi i \left[-\frac{1}{4\sqrt{2}}(1+i) + \frac{1}{4\sqrt{2}}(-1+i) \right] = -\frac{\sqrt{2}}{2}\pi i.$$

(2) 在围道内的奇点只有 $z=1$ ，为一阶奇点。

$$\oint_{|z-1|=1} \frac{1}{z^2-1} \sin \frac{\pi z}{4} dz = 2\pi i \cdot \operatorname{res} f(1) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi i.$$

(3) 在围道内的奇点有 $2n$ 个，均为一阶极点，可表示为 $z = k + \frac{1}{2}$ ($k = -n, \dots, 0, 1, \dots, n-1$).

$$\operatorname{res} f\left(k + \frac{1}{2}\right) = \lim_{z \rightarrow k + \frac{1}{2}} \frac{(z - k - \frac{1}{2}) \sin \pi z}{\cos \pi z} = -\frac{1}{\pi} [L'Hospital].$$

$$\text{故 } \oint_{|z|=n} \tan \pi z dz = 2\pi i \left[2n \cdot \left(-\frac{1}{\pi}\right) \right] = -4ni.$$

(4) 在围道内的奇点只有 $z=0$ ，为三阶极点。

$$\operatorname{res} f(0) = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^2}{dz^2} e^z = \frac{1}{2}.$$

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^3} dz = 2\pi i \cdot \operatorname{res} f(0) = 2\pi i \cdot \frac{1}{2} = \pi i.$$

习题 25. 计算下列积分：

$$(1) \int_0^{2\pi} \cos^{2n} \theta d\theta, \quad n \text{ 为正整数};$$

$$(2) \int_0^\pi \frac{d\theta}{1 + \sin^2 \theta}.$$

解答.

$$(1) \text{ 作变换 } z = e^{i\theta}, \text{ 有 } \cos \theta = \frac{z^2 + 1}{2z}, \quad d\theta = \frac{dz}{iz}.$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n} \theta d\theta = \oint_{|z|=1} \left(\frac{z^2 + 1}{2z} \right)^{2n} \frac{dz}{iz}.$$

$$\operatorname{res} \left\{ \left(\frac{z^2 + 1}{2z} \right)^{2n} \cdot z^{-1} \right\} = \left\{ \left(\frac{z+1}{2} + \frac{1}{2z} \right)^{2n} \cdot z^{-1} \right\} = \binom{2n}{2n} \frac{1}{2^{2n}} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{1}{2^{2n}},$$

故积分结果为 $2\pi i \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{1}{i} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \frac{\pi}{2^{2n-1}}$.

(2) 对原积分进行化简得到 $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - \cos \theta}$.

作变换 $z = e^{i\theta}$, 有 $\cos \theta = \frac{z^2 + 1}{2z}$, $d\theta = \frac{dz}{iz}$.

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \sin^2 \theta} = \oint_{|z|=1} \frac{1}{3 - \frac{z^2+1}{2z}} \frac{dz}{iz}.$$

$$\text{由 } f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{3 - \frac{z^2+1}{2z}} = \frac{-2}{(z - 3 - 2\sqrt{2})(z - 3 + 2\sqrt{2})},$$

知在单位圆内只有一阶极点 $z = 3 - 2\sqrt{2}$.

故原积分结果为 $2\pi i \cdot \text{res} \left\{ f(3 - 2\sqrt{2}) \right\} \cdot \frac{1}{i} = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}$.

习题 26. 计算下列积分:

(1) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx;$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2) \cosh \frac{\pi x}{2}}.$

解答.

(1) 考虑 $\oint_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2}{1+z^4} dz$, 积分围道为上半平面半径趋于无穷的半圆。根据留数定理, 有

$$\begin{aligned} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2}{1+z^4} dz &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx + \int_{C_R} \frac{z^2}{1+z^4} dz \\ &= 2\pi i \cdot \left[\text{res} \left\{ \frac{z^2}{1+z^4} \right\} \Big|_{z=e^{\frac{1}{4}\pi}} + \text{res} \left\{ \frac{z^2}{1+z^4} \right\} \Big|_{z=e^{\frac{3}{4}\pi}} \right] \\ &= 2\pi i \cdot \left[\frac{1}{4e^{\frac{\pi}{4}i}} + \frac{1}{4e^{\frac{3\pi}{4}i}} \right] \\ &= 2\pi i \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{4} \right) \end{aligned}$$

¹ 均为一阶极点

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$$

由于 $\lim_{z \rightarrow \infty} z \cdot \frac{z^2}{1+z^4} = 0$ 以及大圆弧引理, 知 $\int_{C_R} \frac{z^2}{1+z^4} dz = 0$.

故原积分结果为 $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$.

(2) 考虑 $\oint_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(1+z^2) \cosh \frac{\pi z}{2}}$, 积分围道为上半平面半径趋于无穷的半圆。

记 $f(z) = \frac{1}{(1+z^2) \cosh \frac{\pi z}{2}}$, 分析分母 $(1+z^2) \cosh \frac{\pi z}{2}$.

零点为 $z = (2k+1)i$, $k \in \mathbb{Z}$. 除了 $z = i$ 是二阶极点外, 其他的都是一阶极点。

$$\text{res } f(i) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} (z-i)^2 f(z) = \frac{1}{2\pi i}.$$

$$\text{res } f[(2k+1)i] = \lim_{z \rightarrow (2k+1)i} \frac{\frac{1}{1+z^2}}{\frac{\pi}{2} \sinh \frac{\pi z}{2}} = \frac{(-1)^{k+1}}{2\pi i} \frac{1}{k(k+1)}, (k \neq 0).$$

$$\oint_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(1+z^2) \cosh \frac{\pi z}{2}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2) \cosh \frac{\pi x}{2}} + \int_{C_R} \frac{dz}{(1+z^2) \cosh \frac{\pi z}{2}}$$

$$= 2\pi i \left\{ \text{res } f(i) + \sum_{k=1}^{\infty} \text{res } f[(2k+1)i] \right\} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)}.$$

由于 $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+z^2) \cosh \frac{\pi z}{2}} = 0$ 以及大圆弧引理, 知 $\int_{C_R} \frac{dz}{(1+z^2) \cosh \frac{\pi z}{2}} = 0$.

故原积分结果为 $1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)}$.

习题 26 的注记. (2) 的结果可以化简。

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

$$= 2 \ln 2.$$

$${}_1\ln 1+x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$$

习题 27. 计算下列积分：

$$(1) \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^4} dx;$$

$$(2) \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^3} dx;$$

$$(3) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 - 2x + 2} dz.$$

解答.

(1) 记 $f(z) = \frac{e^{iz}}{1+z^4}$, 考虑 $\oint_{-\infty}^{\infty} f(z) dz$, 积分围道为上半平面半径趋于无穷的半圆。

在积分区域内有一阶极点 $z = e^{\frac{\pi i}{4}}$ 和 $z = e^{\frac{3\pi i}{4}}$, 计算其留数。

$$\text{res } f(e^{\frac{\pi i}{4}}) = \text{res } f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right) = \frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}}{4i} e^{i\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

$$\text{res } f(e^{\frac{3\pi i}{4}}) = \text{res } f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)\right) = \frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}}{4i} e^{-i\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

$$\text{故 } \oint_{-\infty}^{\infty} f(z) dz = 2\pi i \left[\text{res } f(e^{\frac{\pi i}{4}}) + \text{res } f(e^{\frac{3\pi i}{4}}) \right] = 2\pi i \cdot \frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}}{4i} \cdot 2 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}\right).$$

$$\text{其实部的一半 (偶函数) 即为 } \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^4} dx = \frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}\pi}{2} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}\right).$$

(2) 记 $f(z) = \frac{e^{iz}}{(1+z^2)^3}$, 考虑 $\oint_{-\infty}^{\infty} f(z) dz$, 积分围道为上半平面半径趋于无穷的半圆。

$$\text{在积分区域内有三阶极点 } z = i, \text{res } f(i) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} (z-i)^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \frac{(z-i)^2 e^{iz}}{(z+i)^3}.$$

$$\text{故 } \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^3} dx = \frac{1}{2} \text{Re} [2\pi i \cdot \text{res } f(i)] = \frac{7\pi}{16}.$$

(3) 记 $f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2 - 2z + 2}$, 考虑 $\oint_{-\infty}^{\infty} f(z) dz$, 积分围道为上半平面半径趋于无穷的半圆。

$$\text{在积分区域内有一阶极点 } z = 1+i, \text{res } f(1+i) = \lim_{z \rightarrow (1+i)} \frac{ze^{iz}}{z-1+i} = \frac{(1+i)e^i}{2ie}.$$

$$\text{故 } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 - 2x + 2} dx = \text{Im} \left[2\pi i \cdot \frac{(1+i)e^i}{2ie} \right] = \pi e^{i-1}.$$

习题 27 的注记.

- (2) 难算, 直接写答案。
- 根据 Jordan 引理, 三题均有 $|z| \rightarrow \infty$ 时, $Q(z) \rightarrow 0$, 故 $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} Q(z) e^{ipz} dz = 0$.

习题 28. 计算下列积分:

- (1) $\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x(x-1)(x-2)}$;
- (2) $\int_0^{\infty} \frac{x - \sin x}{x^3(1+x^2)} dx$;
- (3) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{px} - e^{qx}}{1 - e^x} dx, 0 < p < 1, 0 < q < 1$.

解答.

- (1) 记 $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$, 考虑 $\oint_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{z(z-1)(z-2)}$, 积分围道绕开三个一阶极点 $z = 0, 1, 2$.

积分区域内无奇点, 故 $\oint_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{z(z-1)(z-2)} = 0$.

$$\oint_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{z(z-1)(z-2)} = \left[\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{C_{\delta 0}} + \int_{\delta}^{1-\delta} + \int_{C_{\delta 1}} + \int_{1+\delta}^{2-\delta} + \int_{C_{\delta 2}} + \int_{2+\delta}^{\infty} + \int_{C_R} \right] f(z) dz.$$

$$\text{由小圆弧引理, } \int_{C_{\delta 0}} f(z) dz = i \cdot (0 - \pi) \lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = -\frac{\pi}{2}.$$

$$\int_{C_{\delta 1}} f(z) dz = i \cdot (0 - \pi) \lim_{z \rightarrow 1} z f(z) = \pi.$$

$$\int_{C_{\delta 2}} f(z) dz = i \cdot (0 - \pi) \lim_{z \rightarrow 2} z f(z) = -\frac{\pi}{2}.$$

$$\text{由大圆弧引理, } \int_{C_R} f(z) dz = i \cdot (\pi - 0) \lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0.$$

$$\text{故 v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x(x-1)(x-2)} = \left[\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{1-\delta} + \int_{1+\delta}^{2-\delta} + \int_{2+\delta}^{\infty} \right] f(z) dz = 0.$$

(2) 记 $f(z) = \frac{z - \sin z}{z^3(1+z^2)}$, 考虑 $\oint_{-\infty}^{\infty} \frac{z - \sin z}{z^3(1+z^2)} dz$, 积分围道绕开一阶极点 $z = 0$ 。

积分区域内有一阶极点 $z = i$, $\text{res } f(i) = \left[\frac{z - \sin z}{z^3(z+i)} \right] \Big|_{z=i} = \frac{i - \sin i}{2}$.

故 $\oint_{-\infty}^{\infty} \frac{z - \sin z}{z^3(1+z^2)} dz = 2\pi i \cdot \text{res } f(i) = -\pi - \pi i \sin i$.

又 $\oint_{-\infty}^{\infty} \frac{x - \sin x}{z^3(1+z^2)} dz = \left[\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{C_{\delta 0}} + \int_{\delta}^{\infty} + \int_{C_R} \right] f(z) dz$.

由小圆弧引理, $\int_{C_{\delta 0}} f(z) dz = i \cdot (0 - \pi) \lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = 0$.

由大圆弧引理, $\int_{C_R} f(z) dz = i \cdot (\pi - 0) \lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0$. ✖

故 $\int_0^{\infty} \frac{x - \sin x}{x^3(1+x^2)} dx = \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\infty} \right] f(x) dx = -\pi - \pi i \sin i = -\pi - \frac{e^{-1} - e}{2} \pi$.

错误, ∞ 是 $\sin z$ 的本性奇点, 正确解答见注记。

(3) 记 $f(z) = \frac{e^{pz}}{1 - e^z}$, 考虑 $\oint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{pz}}{1 - e^z} dz$, 应取宽为 2π 的矩形围道, 绕开 $z = 0$ 和 $z = 2\pi i$ 。

积分区域内无奇点, 积分结果为 0。

而 $\oint_{-\infty}^{\infty} f(z) dz = \left[\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{C_{\delta 1}} + \int_{\delta}^{\infty} + \int_{L_1} + \int_{L_2} + \int_{C_{\delta 2}} + \int_{L_3} + \int_{L_4} \right]$.

由于 $\left[\int_{L_2} + \int_{L_3} \right] f(z) dz = -e^{2p\pi i} \left[\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\infty} \right] f(z) dz$,

$\int_{L_1} f(z) dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_0^{2\pi} \frac{e^{p(R+iy)}}{1 - e^{R+iy}} i dy \right] = 0$, $\int_{L_4} f(z) dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_{2\pi}^0 \frac{e^{p(-R+iy)}}{1 - e^{-R+iy}} i dy \right] = 0$,

由小圆弧引理,

$\int_{C_{\delta 1}} f(z) dz = -\pi i \left[\lim_{z \rightarrow 0} \frac{ze^{pz}}{1 - e^z} \right] = \pi i$, $\int_{C_{\delta 2}} f(z) dz = -\pi i \left[\lim_{z \rightarrow 2\pi i} \frac{(z - 2\pi i)e^{pz}}{1 - e^z} \right] = \pi i e^{2p\pi i}$,

故 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{px}}{1 - e^x} dx = \left[\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\infty} \right] f(z) dz = -\frac{\pi + \pi i e^{2p\pi i}}{1 - e^{2p\pi i}} = \pi \cot p\pi$.

$$\text{故 } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{px} - e^{qx}}{1 - e^x} dx = \pi [\cot p\pi - \cot q\pi].$$

习题 28 的注记.

- (2) 记 $f(z) = \frac{z - \sin z}{z^3(1 + z^2)}$, 考虑 $\oint_{-\infty}^{\infty} \frac{z - \sin z}{z^3(1 + z^2)} dz$, 积分围道绕开一阶极点 $z = 0$.

$$\text{积分区域内有一阶极点 } z = i, \operatorname{res} f(i) = \left[\frac{z - \sin z}{z^3(z + i)} \right] \Big|_{z=i} = \frac{i - \sin i}{2}.$$

$$\text{故 } \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{z - \sin z}{z^3(1 + z^2)} dz = 2\pi i \cdot \operatorname{res} f(i) = -\pi - \pi i \sin i.$$

$$\text{又 } \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{x - \sin x}{z^3(1 + z^2)} dz = \left[\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{C_{\delta 0}} + \int_{\delta}^{\infty} + \int_{C_R} \right] f(z) dz.$$

$$\text{由小圆弧引理, } \int_{C_{\delta 0}} f(z) dz = i \cdot (0 - \pi) \lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = 0.$$

此时不可以直接使用大圆弧引理, 应在 ∞ 处利用 $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ 将 $f(x)$ 展开。

$$\int_{C_R} f(z) dz = \int_{C_R} \left[\frac{1}{z^2(1 + z^2)} - \frac{1}{2i} \frac{e^{iz}}{z^3(z + z^2)} + \frac{1}{2i} \frac{e^{-iz}}{z^3(z + z^2)} \right] dz.$$

由大圆弧引理和 Jordan 引理可以得到前两项结果为零。

$$\text{根据 Jordan 引理的补充引理, } \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} Q(z) e^{-ipz} dz = 2\pi i \cdot \sum_{\text{全平面}} \operatorname{res} \{Q(z) e^{-ipz}\}.$$

$$\text{奇点有 } z = 0, i, -i, \text{ 分别计算其留数为 } -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2e}.$$

$$\text{即 } \int_{C_R} \frac{1}{2i} \frac{e^{-iz}}{z^3(z + z^2)} dz = \pi \left(-\frac{3}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2e} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \int_0^{\infty} \frac{x - \sin x}{x^3(1 + x^2)} dx &= \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\infty} \right] f(z) dz \\ &= \frac{1}{2} \left[-\pi - \frac{e^{-1} - e}{2} \pi - \pi \left(-\frac{3}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2e} \right) \right] = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{e} \right). \end{aligned}$$

- 水平有限, 等有时间学了 TikZ 再补充围道图。

¹级数展开, $\frac{1}{z^3} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \right] \left(1 - iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \cdots \right)$, z^{-1} 项系数为 $-\frac{3}{2}$.

习题 29. 计算下列积分：

$$(1) \text{ v.p. } \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{1-x} dx, \quad 0 < s < 1;$$

$$(2) \int_0^\infty \frac{x^s}{(1+x^2)^2} dx, \quad -1 < s < 3;$$

$$(3) \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1} \ln x}{1+x} dx, \quad 0 < \alpha < 1;$$

$$(4) \int_0^\infty \frac{\ln x}{(x+a)(x+b)} dx, \quad b > a > 0.$$

解答.

$$(1) \text{ 考虑积分 } \oint_0^\infty \frac{z^{s-1}}{1-z} dz, \text{ 取袂型积分围道, 绕开一阶极点 } z=1, \quad 0 \leq \arg \leq 2\pi.$$

积分围道内无奇点, 故

$$(1 - e^{2\pi i s}) \left(\int_\delta^{1-\delta} + \int_{1+\delta}^\infty \right) f(x) dx + \left[\int_{C_R} + \int_{C_{\delta 1}} + \int_{C_{\delta 2}} + \int_{C_{\delta 3}} \right] f(z) dz = 0.$$

$$\text{由大圆弧引理, } \int_{C_R} f(z) dz = 0, \text{ 由小圆弧引理, } \int_{C_{\delta 1}} f(z) dz = 0,$$

$$\int_{C_{\delta 2}} f(z) dz = i \cdot \left[\lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)z^{s-1}}{1-z} \right] (0 - \pi) = \pi i.$$

$$\int_{C_{\delta 3}} f(z) dz = i \cdot \left[\lim_{z \rightarrow e^{2\pi i}} \frac{(z-1)z^{s-1}}{1-z} \right] (2\pi - 3\pi) = \pi i e^{2\pi i s}.$$

$$\text{故 v.p. } \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{1-x} dx = \pi i \frac{e^{2\pi i s} + 1}{e^{2\pi i s} - 1} = \pi \cot \pi s.$$

$$(2) \text{ 考虑积分 } \oint_0^\infty \frac{z^s}{(1+z^2)^2} dz, \text{ 取袂型积分围道, } 0 \leq \arg \leq 2\pi.$$

积分围道内有奇点 $z = \pm i$, 均为二阶极点,

$$\text{res } f(i) = \left[\frac{d}{dz} \frac{z^s}{(z+i)^2} \right]_{z=i} = -\frac{s-1}{4i} e^{\frac{\pi i s}{2}}, \quad \text{res } f(-i) = \left[\frac{d}{dz} \frac{z^s}{(z-i)^2} \right]_{z=-i} = \frac{s-1}{4i} e^{\frac{3\pi i s}{2}}.$$

$$\text{故 } \oint_0^\infty \frac{z^s}{(1+z^2)^2} dz = 2\pi i [\text{res } f(i) + \text{res } f(-i)] = \pi i (s-1) \sin \frac{\pi s}{2}.$$

$$\text{即 } (1 - e^{2\pi is}) \left(\int_{\delta}^{1-\delta} + \int_{1+\delta}^{\infty} \right) f(x) dx + \left[\int_{C_R} + \int_{C_{\delta}} \right] f(z) dz = \pi i (s-1) \sin \frac{\pi s}{2}.$$

$$\text{由大圆弧引理有 } \int_{C_R} f(z) dz = 0, \text{ 由小圆弧引理有 } \int_{C_{\delta}} f(z) dz = 0,$$

$$\text{故 } \int_0^{\infty} \frac{x^s}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi i (s-1) \sin \frac{\pi s}{2}}{1 - e^{2\pi is}} = \frac{\pi}{4} \frac{1-s}{\cos \frac{\pi s}{2}}.$$

(3) 考虑积分 $\oint_0^{\infty} \frac{z^{\alpha-1} \ln^2 z}{1+z} dz$, \times^1 取袂型积分围道, $0 \leq \arg \leq 2\pi$ 。

$$\text{积分围道内有一阶极点 } z = -1, \text{ res } f(-1) = \pi^2 e^{\pi i \alpha}.$$

$$\text{故 } \oint_0^{\infty} \frac{z^{\alpha-1} \ln^2 x}{1+z} dz = 2\pi^3 i e^{\pi i \alpha}.$$

$$\text{即 } \left[\int_{C_{\delta}} + \int_{C_R} \right] f(z) dz + \int_{\delta}^{\infty} \frac{x^{\alpha-1} \ln^2 x}{1+x} dx - \int_{\delta}^{\infty} \frac{(x \cdot e^{2\pi i})^{\alpha-1} \ln^2 (x \cdot e^{2\pi i})}{1+x \cdot e^{2\pi i}} dx = 2\pi^3 i e^{\pi i \alpha}.$$

$$\text{由大圆弧引理有 } \int_{C_R} f(z) dz = 0, \text{ 由小圆弧引理有 } \int_{C_{\delta}} f(z) dz = 0,$$

按照现在的取法, $\ln^2 z$ 项无法抵消, 正确解答见注记

(4) 考虑积分 $\oint_0^{\infty} \frac{\ln^2 z}{(z+a)(z+b)} dz$, 取袂型积分围道, $0 \leq \arg \leq 2\pi$ 。

$$\text{积分围道内有一阶极点 } z = -a \text{ 和 } z = -b, \text{ res } f(-a) = \frac{(\ln a + \pi i)^2}{b-a}, \text{ res } f(-b) = \frac{(\ln b + \pi i)^2}{a-b}.$$

$$\text{故 } \oint_0^{\infty} \frac{\ln^2 z}{(z+a)(z+b)} dz = 2\pi i \cdot \frac{\ln^2 a - \ln^2 b + 2\pi i (\ln a - \ln b)}{b-a}.$$

$$\text{由大圆弧引理, } \int_{C_R} f(z) dz = 0. \text{ 由小圆弧引理, } \int_{C_{\delta}} f(z) dz = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \int_{\delta}^{\infty} f(z) dz - \int_{\delta}^{\infty} f(ze^{2\pi i}) dz &= -4\pi i \int_{\delta}^{\infty} \frac{\ln x}{(x-a)(x-b)} dx + 4\pi^2 \int_{\delta}^{\infty} \frac{dx}{(x-a)(x-b)} \\ &= 2\pi i \cdot \frac{\ln^2 a - \ln^2 b + 2\pi i (\ln a - \ln b)}{b-a} = -4\pi i \left(\frac{1}{2} \frac{\ln^2 b - \ln^2 a}{b-a} \right) + 4\pi^2 \left(\frac{\ln b - \ln a}{b-a} \right). \end{aligned}$$

$$\text{可以得到 } \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(x+a)(x+b)} dx = \frac{1}{2} \frac{\ln^2 b - \ln^2 a}{b-a}.$$

¹这里不需要取 $\oint_0^{\infty} \frac{z^{\alpha-1} \ln^2 z}{1+z} dz$, z^{α} 是多值函数, 可以直接取 $\oint_0^{\infty} \frac{z^{\alpha-1} \ln z}{1+z} dz$ 分析, 不用担心 $\ln z$ 抵消。

习题 29 的注记.

- (3) 考虑积分 $\oint_0^\infty \frac{z^{\alpha-1} \ln z}{1+z} dz$, 取袂型积分围道, $0 \leq \arg \leq 2\pi$.

积分围道内有一阶极点 $z = -1$, $\text{res } f(-1) = -\pi i e^{\pi i \alpha}$.

$$\text{故 } \oint_0^\infty \frac{z^{\alpha-1} \ln x}{1+z} dz = 2\pi^2 e^{\pi i \alpha}.$$

$$\text{即 } \left[\int_{C_\delta} + \int_{C_R} \right] f(z) dz + \int_\delta^\infty \frac{x^{\alpha-1} \ln x}{1+x} dx - \int_\delta^\infty \frac{(x \cdot e^{2\pi i})^{\alpha-1} \ln(x \cdot e^{2\pi i})}{1+x \cdot e^{2\pi i}} dx = 2\pi^2 e^{\pi i \alpha}.$$

由大圆弧引理有 $\int_{C_R} f(z) dz = 0$, 由小圆弧引理有 $\int_{C_\delta} f(z) dz = 0$,

$$\text{故 } (1 - e^{2\pi i \alpha}) \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1} \ln x}{1+x} dx - \int_0^\infty \frac{e^{2\pi i \alpha} \cdot x^{\alpha-1} \cdot 2\pi i}{1+x} dx = 2\pi^2 e^{\pi i \alpha}.$$

现计算积分 $e^{2\pi i \alpha} \cdot 2\pi i \cdot \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx$, 考虑 $e^{2\pi i \alpha} \cdot 2\pi i \cdot \int_0^\infty \frac{z^{\alpha-1}}{1+z} dz$,

仍然取袂型积分围道, 围道内有一阶极点 $z = -1$, $\text{res } f(-1) = -e^{\pi i \alpha}$.

$$\text{故 } e^{2\pi i \alpha} \cdot 2\pi i \cdot (1 - e^{2\pi i \alpha}) \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = 4\pi^2 e^{3\pi i \alpha}. \text{ 即 } e^{2\pi i \alpha} \cdot 2\pi i \cdot \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{4\pi^2 e^{3\pi i \alpha}}{1 - e^{2\pi i \alpha}}.$$

$$\text{也就是说, } \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1} \ln x}{1+x} dx = \frac{2\pi^2 e^{\pi i \alpha}}{1 - e^{2\pi i \alpha}} + \frac{4\pi^2 e^{3\pi i \alpha}}{(1 - e^{2\pi i \alpha})^2} = -\pi^2 \frac{\sin \pi \alpha}{\cos^2 \pi \alpha}?$$

7 第七章习题

习题 30. 将下列连乘积用 Γ 函数表示出来：

(1) $(2n)!!$;

(2) $(2n-1)!!$.

解答.

$$(1) (2n)!! = (2n)(2n-2)(2n-4)\cdots 6\cdot 4\cdot 2 = 2^n \cdot n \cdot (n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = 2^n \Gamma(n+1).$$

$$(2) (2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots 5\cdot 3\cdot 1 = \frac{(2n)!}{(2n)!!} = \frac{\Gamma(2n+1)}{2^n \Gamma(n+1)}.$$

习题 31. 计算下列积分：

$$\int_0^\infty x^{-\alpha} \sin x dx, \quad 0 < \alpha < 2;$$

$$\int_0^\infty x^{-\alpha} \cos x dx, \quad 0 < \alpha < 1.$$

解答. 考虑积分 $\oint_L z^{-\alpha} e^{-z} dz$, 积分围道为第一象限的扇形, 绕开原点, 围道内无奇点。

$$\oint_0^\infty z^{-\alpha} e^{-z} dz = \int_\delta^\infty x^{-\alpha} e^{-x} dx + \int_{C_R} z^{-\alpha} e^{-z} dz + \int_\infty^\delta \left(y e^{\frac{\pi i}{2}}\right)^{-\alpha} e^{-y i} i dy + \int_{C_\delta} z^{-\alpha} e^{-z} dz = 0.$$

由小圆弧引理及 Jordan 引理有

$$\int_{C_\delta} z^{-\alpha} e^{-z} dz = 0, \quad \int_{C_R} z^{-\alpha} e^{-z} dz = 0.$$

故

$$e^{\frac{\pi i(1-\alpha)}{2}} \int_0^\infty y^{-\alpha} e^{-y i} dy = \int_0^\infty x^{-\alpha} e^{-x} dx = \Gamma(1-\alpha).$$

于是可以得到,

$$\int_0^\infty x^{-\alpha} (\cos x - i \sin x) dx = \left[\cos \frac{(1-\alpha)\pi}{2} - i \sin \frac{(1-\alpha)\pi}{2} \right] \Gamma(1-\alpha).$$

即

$$\int_0^{\infty} x^{-\alpha} \sin x dx = \cos \frac{\pi\alpha}{2} \Gamma(1-\alpha), \quad \int_0^{\infty} x^{-\alpha} \cos x dx = \sin \frac{\pi\alpha}{2} \Gamma(1-\alpha).$$

习题 32. 计算积分: $\int_{-1}^1 (1-x)^p (1+x)^q dx$, $\operatorname{Re} p > -1$, $\operatorname{Re} q > -1$.

解答. 做代换 $2u = 1+x$, 有 $1-x = 2(1-u)$, 故

$$\int_{-1}^1 (1-x)^p (1+x)^q dx = 2^{p+q+1} \int_0^1 (1-u)^p u^q du = 2^{p+q+1} B(p+1, q+1).$$

8 第八章习题

习题 33. 求下列函数的 Laplace 换式：

(1) $t^n, n = 0, 1, 2, \dots$;

(2) $t^\alpha, \operatorname{Re} \alpha > -1$;

(3) $e^{\lambda t} \sin \omega t, \lambda > 0, \omega > 0$;

(4) $\int_t^\infty \frac{\cos \tau}{\tau} d\tau$.

解答.

$$(1) F(p) = \int_0^\infty t^n e^{-pt} dt = \frac{1}{p^{n+1}} \int_0^\infty (pt)^n e^{-pt} d(pt) = \frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}} = \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

$$(2) F(p) = \int_0^\infty t^\alpha e^{-pt} dt = \frac{1}{p^{\alpha+1}} \int_0^\infty (pt)^\alpha e^{-pt} d(pt) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}.$$

$$(3) \sin \omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}, \text{ 故 } e^{\lambda t} \sin \omega t = \frac{e^{(i\omega+\lambda)t} - e^{(-i\omega+\lambda)t}}{2i} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{p - i\omega - \lambda} - \frac{1}{p + i\omega - \lambda} \right),$$

$$\text{即 } \frac{\omega}{(p + \lambda)^2 + \omega^2}.$$

$$(4) \text{ 由 } \int_0^\infty \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau \doteq \frac{1}{p} \int_0^p F(q) dq^1 \text{ 及 } \cos t = \frac{p}{p^2 + 1} \text{ 知}$$

$$\int_t^\infty \frac{\cos \tau}{\tau} d\tau \doteq \frac{1}{p} \int_0^p F(q) dq = \frac{1}{p} \int_0^p \frac{q}{q^2 + 1} dq = \frac{1}{2p} \ln(p^2 + 1).$$

习题 33 的注记.

$$\begin{aligned} \bullet \int_0^\infty \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau &\doteq \int_0^\infty e^{-pt} \left[\int_t^\infty \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau \right] dt \\ &= \int_0^\infty \frac{f(\tau)}{\tau} \left[\int_0^\tau e^{-pt} dt \right] d\tau = \int_0^\infty \frac{f(\tau)}{\tau} \frac{1 - e^{-p\tau}}{p} d\tau \\ &= \frac{1}{p} \int_0^\infty f(\tau) \int_0^p e^{-qt} dq d\tau = \frac{1}{p} \int_0^p \int_0^\infty f(\tau) e^{-qt} d\tau dq = \frac{1}{p} \int_0^p F(q) dq. \end{aligned}$$

¹证明见注记。

习题 34. 求下列 Laplace 换式的原函数：

$$(1) \frac{a^3}{p(p+a)^3};$$

$$(2) \frac{p^2 + \omega^2}{(p^2 - \omega^2)^2}, \omega > 0;$$

$$(3) \frac{e^{-p\tau}}{p^2}, \tau > 0.$$

解答.

$$(1) \text{ 对分式进行拆分有 } \frac{1}{p} - \frac{a^2}{(p+a)^3} - \frac{a}{(p+a)^2} - \frac{1}{p+a}, \text{ 又 } 1 \doteq \frac{1}{p}, e^{-at} \doteq \frac{1}{p+a},$$

$$F^{(n)}(p) \doteq (-t)^n f(t). \text{ 故原函数为 } 1 - \left(1 + at + \frac{1}{2}a^2t^2\right)e^{-at}.$$

$$(2) \frac{p^2 + \omega^2}{(p^2 - \omega^2)^2} = -\frac{d}{dp} \left(\frac{p}{p^2 + \omega^2} \right), \text{ 又 } \cos \omega t \doteq \frac{p}{p^2 + \omega^2}, F^{(n)}(p) \doteq (-t)^n f(t),$$

故原函数为 $t \cos \omega t$.

$$(3) \text{ 由延迟定理 } f(t - \tau) \doteq e^{-p\tau} F(p), t > \tau \text{ 及 } t \doteq \frac{1}{p}, \text{ 有 } \frac{e^{-p\tau}}{p^2} \doteq t - \tau, t > \tau.$$

习题 35. 利用 Laplace 变换计算积分： $\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \cos cx dx, a > 0, b > 0, c > 0.$

解答. 由 $\cos cx = \frac{e^{icx} + e^{-icx}}{2}$, 故原积分可化为

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{e^{(-a+ic)x} + e^{(-a-ic)x} - e^{(-b+ic)x} - e^{(-b-ic)x}}{x} dx.$$

根据 $\int_0^\infty F(p) dp = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} dt$, 而且 $e^{at} \doteq \frac{1}{p-a}$. 有

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \cos cx dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left[\frac{1}{p+a-ic} + \frac{1}{p+a+ic} - \frac{1}{p+b-ic} - \frac{1}{p+b+ic} \right] dp.$$

即

$$\frac{1}{2} \left[\ln \frac{(p+a)^2 + c^2}{(p+b)^2 + c^2} \right] \Big|_0^\infty = \frac{1}{2} \ln \frac{b^2 + c^2}{a^2 + c^2}.$$

习题 36. 用普遍反演公式求 Laplace 换式的原函数: $\frac{e^{-p\tau}}{p^4 + 4\omega^4}$, $\tau > 0$, $\omega > 0$.

解答. 普遍反演公式 $f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p)e^{pt} dp$.

选取 $p = s$ 划分的左边大半个圆为积分路径, 补上 $\int_{C_R} \frac{1}{p^4 + 4\omega^4} dp$.

由补充的 Jordan 引理,

$$\int_{C_R} \frac{e^{p(t-\tau)}}{p^4 + 4\omega^4} dp = 0.$$

故

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \frac{e^{p(t-\tau)}}{p^4 + 4\omega^4} dp = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{e^{p(t-\tau)}}{p^4 + 4\omega^4} dp = \sum \text{res} \left[\frac{e^{p(t-\tau)}}{p^4 + 4\omega^4} \right].$$

积分区域内有一阶极点 $p = -\sqrt{2}\omega e^{-\frac{\pi i}{4}}$, $p = \sqrt{2}\omega e^{-\frac{\pi i}{4}}$, $p = -\sqrt{2}\omega e^{\frac{\pi i}{4}}$, $p = \sqrt{2}\omega e^{\frac{\pi i}{4}}$.

故原函数为

$$\frac{1}{4\omega^3} [\cosh \omega(t-\tau) \sin \omega(t-\tau) - \sinh \omega(t-\tau) \cos \omega(t-\tau)] \eta(t-\tau).$$

9 第九章习题

习题 37. 求方程 $w'' - z^2 w = 0$ 在 $z = 0$ 域内的两个幂级数解。

解答. 显然 $z = 0$ 是方程的常点, 故解的形式为 Taylor 级数, 设 $w = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, $|z| < 1$.

代入方程有

$$\sum_{n=0}^{\infty} (k+1)(k+2)c_{k+2}z^k - \sum_{n=0}^{\infty} c_k z^{k+2} = 0.$$

即

$$2c_2 + 6c_3z + \sum_{k=2}^{\infty} [(k+1)(k+2)c_{k+2} - c_{k-2}] z^k = 0.$$

故 $c_2 = c_3 = 0$, $(k+1)(k+2)c_{k+2} - c_{k-2} = 0$.

$$c_{4n} = \frac{1}{4n(4n-1)} \frac{1}{[4(n-1)][4(n-1)-1]} \cdots \frac{1}{4 \cdot (4-1)} c_0 = \frac{1}{4^{2n}} \frac{1}{n!} \frac{1}{(n-\frac{1}{4})[(n-1)-\frac{1}{4}] \cdots (1-\frac{1}{4})} c_0.$$

类似地, 得到 $c_{4n+1} = \frac{\Gamma(\frac{5}{4})}{n!\Gamma(n+\frac{5}{4})} c_1$, $c_{4n+2} = c_{4n+3} = 0$.

故原方程的级数解为

$$w_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{3}{4})}{n!\Gamma(n+\frac{3}{4})} \left(\frac{z}{2}\right)^{4n}, \quad w_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{5}{4})}{n!\Gamma(n+\frac{5}{4})} \left(\frac{z}{2}\right)^{4n+1}.$$

习题 38. 求方程 $z^2(1-z)w'' + z(1-3z)w' - (1+z)w = 0$ 在 $z = 0$ 域内的两个幂级数解。

解答. $z = 0$ 是正则奇点, 解的形式为

$$w_1(z) = z^{\rho_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad w_2(z) = g w_1(z) \ln z + z^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k.$$

将 $w_1(z)$ 代入方程有

$$(z^2 - z^3) \sum_{k=0}^{\infty} (k+\rho)(k+\rho-1)c_k z^{k+\rho-2} + (z - 3z^2) \sum_{k=0}^{\infty} (k+\rho)c_k z^{k+\rho-1} - (1+z) \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+\rho} = 0.$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(k+\rho)(k+\rho-1) + (k+\rho) - 1] c_k z^{k+\rho} - \sum_{k=0}^{\infty} [(k+\rho)(k+\rho-1) + 3(k+\rho) + 1] c_k z^{k+\rho+1} = 0.$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} [k^2 + 2k\rho + \rho^2 - 1] c_k z^{k+\rho} - \sum_{k=0}^{\infty} [k^2 + 2k\rho + \rho^2 + 2k + 2\rho + 1] c_k z^{k+\rho+1} = 0.$$

消去 z^ρ 项有

$$\sum_{k=0}^{\infty} [k^2 + 2k\rho + \rho^2 - 1] c_k z^k - \sum_{k=0}^{\infty} [k^2 + 2k\rho + \rho^2 + 2k + 2\rho + 1] c_k z^{k+1} = 0.$$

令 $k = 0$ ，比较 z^0 系数可得 $\rho = \pm 1$.

再比较 z^m 项系数有

$$[m^2 + 2m\rho + \rho^2 - 1] c_m - [(m-1)^2 + 2(m-1)\rho + \rho^2 + 2(m-1) + 2\rho + 1] c_{m-1} = 0.$$

即

$$c_m = \frac{(m-1)^2 + 2(m-1)\rho + \rho^2 + 2(m-1) + 2\rho + 1}{m^2 + 2m\rho + \rho^2 - 1} c_{m-1}$$

当 $\rho = 1$ 时, $c_m = \frac{(m+1)^2}{m(m+2)} c_{m-1}$, 故 $c_k = \frac{2[(k+1)!]^2}{k!(k+2)!} c_0 = \frac{2k+2}{k+2} c_0$.

当 $\rho = -1$ 时, $c_m = \frac{(m-1)^2}{m(m-2)} c_{m-1}$, 故 $c_k = 0, k \neq 0$.

故

$$w_1(z) = \frac{1}{z}, \quad w_2(z) = \frac{1}{z} \ln(1-z) + \frac{1}{1-z}.$$

习题 38 的注记. 其实不是很懂为什么只取 $\rho = -1$ 。

10 第十章习题

习题 39. 证明 δ 函数的下列性质：

(1) $\delta(x) = \delta(-x)$;

(2) $x\delta(x) = 0$;

(3) $g(x)\delta(x) = g(0)\delta(x)$;

(4) $x\delta'(x) = -\delta(x)$;

(5) $\delta(ax) = \frac{1}{a}\delta(x)$, $a > 0$;

(6) $g(x)\delta'(x) = g(0)\delta'(x) - g'(x)\delta(x)$;

(7) $\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2a}[\delta(x - a) + \delta(x + a)]$, $a > 0$.

解答.

(1)

11 第十一章习题

习题 40. 在弦的横振动问题中, 若弦受到一与速度成正比 (比例系数为 $-\alpha$) 的阻尼, 试导出弦的有阻尼振动方程。又若除了阻尼力之外, 弦还受到与弦的位移成正比 (比例系数为 $-k$) 的回复力, 则此时弦的振动满足的方程是什么?

解答.

习题 41. 一长为 l 、横截面积为 S 的均匀弹性杆, 已知一端 ($x = 0$) 固定, 另一端 ($x = l$) 在杆轴方向上受拉力 F 的作用而达到平衡。在 $t = 0$ 时, 撤去外力 F 。试列出杆的纵振动所满足的方程、边界条件和初始条件。

解答.

习题 42. 一长为 l 的金属细杆 (可近似地看成是一维的), 通有稳定电流 I 。如果杆的两端 ($x = 0$ 和 $x = l$) 均按 Newton 冷却定律与外界交换热量。外界温度为 u_0 , 初始时杆的温度为 $u_0(1 - \frac{2x}{l})^2$ 。试写出杆上温度场所满足的方程、边界条件和初始条件, 设金属的电阻为 R 。

解答.

习题 43. 在铀块中, 除了中子的扩散运动外, 还存在中子的吸收和增值过程。设在单位时间内、单位体积中吸收和增值的中子数均正比于该时刻、该处的中子浓度 $u(\mathbf{r}, t)$, 因而净增中子数可表为 $\alpha u(\mathbf{r}, t)$, α 为比例常数。试导出 $u(\mathbf{r}, t)$ 所满足的偏微分方程。

解答.

12 第十三章习题

习题 44. 一长为 l 、横截面积为 S 的均匀弹性杆，已知一端 ($x = 0$) 固定，另一端 ($x = l$) 在杆轴方向上受拉力 F 的作用而达到平衡。在 $t = 0$ 时，撤去外力 F 。试列出杆的纵振动所满足的方程、边界条件和初始条件。

解答.

习题 45. 求解细杆的导热问题:

杆长 l ，两端 ($x = 0, l$) 均保持为零度，初始温度分布为 $u|_{t=0} = b \frac{x(l-x)}{l^2}$.

解答.

习题 46. 求解:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= bx(l-x), \\ u|_{x=0} &= 0, \quad u|_{x=l} = 0, \\ u|_{t=0} &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0.\end{aligned}$$

解答.

习题 47. 一细长杆， $x = 0$ 端固定， $x = l$ 端受周期力 $A \sin \omega t$ 作用。设初位移和初速度均为零，求解此杆的纵振动问题。

解答.

习题 48. 求解下列定解问题:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0, \\ u|_{x=0} &= Ae^{i\omega t}, \quad u|_{x=l} = 0, \\ u|_{t=0} &= 0.\end{aligned}$$

解答.

13 第十五章习题

习题 49. 证明：

$$\int_x^1 P_k(x)P_l(x)dx = (1-x^2)\frac{P'_k(x)P_l(x) - P'_l(x)P_k(x)}{k(k+1) - l(l+1)}, \quad k \neq l.$$

解答.

习题 50. 计算下列积分：

- (1) $\int_0^1 P_k(x)P_l(x)dx;$
- (2) $\int_{-1}^1 xP_l(x)P_{l+1}(x)dx;$
- (3) $\int_{-1}^1 x^2P_l(x)P_{l+2}(x)dx.$

解答.

习题 51. 将下列定义在 $[-1, 1]$ 上的函数按 Legendre 多项式展开：

- (1) $f(x) = x^2;$
- (2) $f(x) = \sqrt{1 - 2xt + t^2};$
- (3) $f(x) = |x|;$
- (4) $f(x) = \frac{1}{2}(x + |x|).$

解答.

习题 52. 求解空心球壳内的定解问题：

$$\nabla^2 u = 0, \quad a < r < b,$$

$$u|_{r=a} = u_0,$$

$$u|_{r=b} = u_0 \cos^2 \theta.$$

解答.