数学物理方法作业

Charles Luo

2025 年 1 月 5 日

目录

1　第一章习题

习题 1. 计算下列表达式的值:

(1) $(\frac{1+i}{2-i})^2$;

(2) $(1+i)^n+(1-i)^n$, 其中 n 为整数.

解答.

(1) 原式 $=(\frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)})^2=(\frac{1+3i}{5})^2=\frac{-8+6i}{25}$.

(2) 由于 $1+i=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}i}$,$1-i=\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}i}$. 原式 $=2^{\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{\frac{n\pi}{4}i}+2^{\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{n\pi}{4}i}$ $=2^{\frac{n}{2}+1}\cos\frac{n\pi}{4}$.

习题 2. 写出下列复数的实部、虚部、模和辐角:

(1) $1+i\sqrt{3}$;

(2) $\mathrm{e}^{i\sin x}$, x 为实数;

(3) e^{iz} ;

(4) e^{z} ;

(5) $\mathrm{e}^{i\phi(x)}$, $\phi(x)$ 是实变数 x 的实函数;

(6) $1-\cos\alpha+i\sin\alpha$, $0\le\alpha<2\pi$.

解答.

习题 2 的注记. (3)(4) 中 x 是 z 的实部，y 是 z 的虚部。

习题 3. 把下列关系用几何图形表示出来:

(1) $|z|<2, |z|=2, |z|>2$;

(2) $\mathrm{Re}\, z>\frac{1}{2}$;

题号	实部	虚部	模	辐角
(1)	1	$\sqrt{3}$	2	$\frac{\pi}{3}+2k\pi$
(2)	$\cos\sin x$	$\sin\sin x$	1	$\sin x+2k\pi$
(3)	$\mathrm{e}^{-y}\cos x$	$\mathrm{e}^{-y}\sin x$	e^{-y}	$x+2k\pi$
(4)	$\mathrm{e}^{x}\cos y$	$\mathrm{e}^{x}\sin y$	e^{x}	$y+2k\pi$
(5)	$\cos\phi(x)$	$\sin\phi(x)$	1	$\phi(x)+2k\pi$
(6)	$1-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$2\sin\frac{\alpha}{2}$	$\frac{\pi-\alpha}{2}+2k\pi$

(3) $1<\operatorname{Im}z<2$;

(4) $0<\arg(1-z)<\frac{\pi}{4}$;

(5) $|z|+\operatorname{Re}z<1$;

(6) $0<\arg(\frac{z+1}{z-1})<\frac{\pi}{4}$;

(7) $|z-a|=|z-b|$, a,b 为常数;

(8) $|z-a|+|z-b|=c$, 其中 a,b,c 均为常数，$c>|a-b|$.

解答.

(1) 以原点为圆心画一个半径为 2 的圆，表示区域分别是圆内、圆上和圆外。

(2) 在实轴 $\frac{1}{2}$ 处画一条平行于虚轴的直线，所求为直线右边区域。

(3) 在虚轴 1 和 2 处分别画一条平行于实轴的直线，所求为两直线之间区域。

(4) 由于 $z=x+yi$ ，故 $1-z=(1-x)-yi$ ，根据题意有 $1-x>0$ ，$0<\frac{-y}{1-x}<1$ ，解 $x<1$ ，$x-1<y<0$。

(5) 由于 $z=x+yi$ ，根据题意 $x+\sqrt{x^2+y^2}<1$ ，化简得到 $y^2<1-2x$。

(6) 由于 $z=x+yi$ ，根据题意 $\frac{x+1+yi}{x-1+yi}$ 可以化简为 $\frac{x^2+y^2-1}{x^2-2x+y^2+1}-\frac{2yi}{x^2-2x+y^2+1}$ ，而辐角范围为 $(0,\frac{\pi}{4})$ ，有 $x^2+y^2-1>0$ ，$0<\frac{-2y}{x^2+y^2-1}<1$ ，画出来的图像是 $y<0$ 部分挖去以 $(0,-1)$ 为圆心，$\sqrt{2}$ 为半径的圆。

(7) 根据题意，点到 a,b 的距离相等，点在 ab 连线的中垂线上。

(8) 根据题意，点到 a,b 的距离和为定值，符合椭圆定义，故点在以 a,b 为焦点的椭圆上。

2 第二章习题

习题 4. 判断下列函数在何处可导（并求出其导函数)，在何处解析：

(1) $|z|$;

(2) z^* ;

(3) $z\text{Re } z$;

(4) $(x^2+2y)+i(x^2+y^2)$;

(5) $3x^2+2iy^2$;

(6) $(x-y)^2+2i(x+y)$.

解答.

(1) 由于 $z=x+iy,f(z)=\sqrt{x^2+y^2}$,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}=0$$
$$\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

若满足 C-R 方程，则 $x=y=0$，而沿着 $y=x$ 趋近原点时，

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\sqrt{2}}{2}\neq 0$$

故处处不可导，不解析。

(2) 若可导，则有 $\dfrac{\partial f}{\partial z^*}=0$，故处处不可导，不解析。

(3) 由于 $z=x+iy,f(z)=x^2+ixy$,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=0$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}=y$$
$$\frac{\partial v}{\partial y}=x$$

若满足 C-R 方程，则 $x=y=0$，现令 $x=\rho\sin\theta, y=\rho\cos\theta$，

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2\cos\theta^2+i\rho^2\sin\theta\cos\theta}{\rho\cos\theta+i\rho\sin\theta}=\rho\cos\theta=0$$

故仅在 $(0,0)$ 处可导，不解析。

(4) 由题可以得到

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=2$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}=2x$$
$$\frac{\partial v}{\partial y}=2y$$

若满足 C-R 方程，则 $y=x$,$x=-1$，现令 $x=\rho\sin\theta, y=\rho\cos\theta$，

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2\cos\theta^2-2\rho\cos\theta+2\rho\sin\theta+i\rho^2-2i\rho\cos\theta-2i\rho\sin\theta}{\rho\cos\theta+i\sin\theta}$$
$$=\lim_{\rho\to 0}\frac{-2\cos\theta+2\sin\theta-2i\cos\theta-2i\sin\theta}{\cos\theta+i\sin\theta}=-2-2i$$

故仅在 $(-1,1)$ 处可导，导数为 $-2-2i$ ，不解析。

(5) 由题可以得到

$$\frac{\partial u}{\partial x}=6x$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=0$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}=0$$
$$\frac{\partial v}{\partial y}=6y^2$$

若满足 C-R 方程，则 $x=y^2$，此时 $f(z)=3y^4+2iy^2$，

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=6y^2$$

故在 $x=y^2$ 上可导，导数为 $6y^2$，不解析。

(6) 由题可以得到

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x-2y$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=2y-2x$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}=2$$
$$\frac{\partial v}{\partial y}=2$$

若满足 C-R 方程，则 $2x-2y=2$ 即 $x=y+1$，此时 $f(z)=1+i(4y+2)$，

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=2+2i$$

故在 $x=y+1$ 上可导，导数为 $2+2i$，不解析。

习题 5. 设 $z=x+iy$，已知解析函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 的实部或虚部如下，试求 $f'(z)$：

(1) $u=x+y$；

(2) $u=\sin x\cosh y$.

解答.

(1) 由函数解析可知 C-R 方程成立，而 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=1$，故 $\frac{\partial v}{\partial x}=-1$，$\frac{\partial v}{\partial y}=1$.

于是可以求出 $v(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,0)}-\mathrm{d}x+\int_{(x,0)}^{(x,t)}\mathrm{d}y=-x+y+C$.

即 $f(z)=x+y+i(y-x)+iC=z-iz+iC$, $f'(z)=1-i$。

(2) 由函数解析可知 C-R 方程成立，而 $\frac{\partial u}{\partial x}=\cos x\cosh y$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\sin x\sinh y$,

故 $\frac{\partial v}{\partial x}=-\sin x\sinh y$,$\frac{\partial v}{\partial y}=\cos x\cosh y$ 。

于是可以求出 $v(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,0)}-\sin x\sinh 0\mathrm{d}x+\int_{(x,0)}^{(x,t)}\cos x\cosh y\mathrm{d}y=\cos x\sinh y+C$.

即 $f(z)=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y+iC$, $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}=\cos x\cosh y-\sin x\sinh y=\cos z$。

习题 5 的注记.

- $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$
- $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$
- $\sinh z = \dfrac{e^{z} - e^{-z}}{2}$
- $\cosh z = \dfrac{e^{z} + e^{-z}}{2}$
- $\sinh z = -i \sin iz$
- $\cosh z = \cos iz$

习题 6. 若 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ 解析，且 $u - v = (x-y)(x^2+4xy+y^2)$，试 $f(z)$.

解答. 由题，

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} = x^2 + 4xy + y^2 + (x-y)(2x+4y) \ ,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} = -(x^2 + 4xy + y^2) + (x-y)(4x+2y) \ .$$

解析函数满足 C-R 方程，即 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ ， $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x}$.

解出 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = 6xy$ ， $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x} = 3(x^2 - y^2)$.

$$u(x,y) = \int_{(0,0)}^{(x,0)} 0 \mathrm{d}x + \int_{(x,0)}^{(x,t)} 3(x^2 - y^2) \mathrm{d}y = 3x^2 y - y^2 + C_1.$$

$$v(x,y) = \int_{(0,0)}^{(x,0)} -3x^2 \mathrm{d}x + \int_{(x,0)}^{(x,t)} 6xy \mathrm{d}y = -x^3 + 3xy^2 + C_2.$$

而 $u - v$ 中不含常数，故 $C_1 = C_2 = C$ ，

$$f(z) = u + iv = 3x^2 y - y^3 + i(3xy^2 - x^3) + (1+i)C = iz^3 + (1+i)C$$

习题 7. 判断下列哪些是函数，哪些是多值函数：

(1) $\sqrt{z^2-1}$;

(2) $z+\sqrt{z-1}$;

(3) $\sin\sqrt{z}$;

(4) $\cos\sqrt{z}$;

(5) $\dfrac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$;

(6) $\dfrac{\cos\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$;

(7) $\ln\sin z$;

(8) $\sin(i\ln z)$;

解答.

(1) 多值函数。

(2) 多值函数。

(3) 已知 $\sqrt{z}=\pm\omega$, 且 $\sin\omega\neq\sin-\omega$, 故为多值函数。

(4) 虽然 $\sqrt{z}=\pm\omega$, 但是 $\cos\omega=\cos-\omega$, 故为单值函数。

(5) 虽然 $\sqrt{z}=\pm\omega$, 但是 $\dfrac{\sin\omega}{\omega}=\dfrac{\sin(-\omega)}{-\omega}$, 故为单值函数。

(6) 已知 $\sqrt{z}=\pm\omega$, 且 $\dfrac{\cos\omega}{\omega}\neq\dfrac{\cos(-\omega)}{-\omega}$, 故为多值函数。

(7) 多值函数。

(8) 已知 $\ln z$ 是多值函数，对应的函数值满足关系的是值相同，幅角相差 2π 的整数倍，而正弦函数又以 2π 为周期，故为单值函数。

习题 8. 找出下列多值函数的分支点，并讨论 z 绕一个分支点移动一周回到原点处后多值函数值的变化。如果同时绕两个、三个乃至更多个分支点一周，多值函数的值又如何变化?

(1) $\sqrt{(z-a)(z-b)}$, $a \neq b$;

(2) $\sqrt[3]{(z-a)(z-b)}$, $a \neq b$;

(3) $\sqrt{1-z^3}$;

(4) $\sqrt[3]{1-z^3}$;

(5) $\ln(z^2+1)$;

(6) $\ln\cos z$;

解答.

(1) 枝点可能为 a, b, ∞ , 逐一验证:

- 令 $z = a + \epsilon e^{i\varphi}, \quad \epsilon \to 0,\ \varphi \in (0, 2\pi)$，此时 $f(z) = e^{\frac{1}{2}i\varphi}\sqrt{(a-b)\epsilon}$.
  显然 $\varphi = 0$ 和 $\varphi = 2\pi$ 时函数值不等，故 a 为枝点。
- 同理，b 也为枝点。
- 现考虑 ∞，做变换 $t = \dfrac{1}{z}$，令 $t = \epsilon e^{i\varphi}, \quad \epsilon \to 0,\ \varphi \in (0, 2\pi)$，此时 $f(\infty) = e^{-i\varphi}\sqrt{\dfrac{1}{\epsilon^2}}$.
  显然 $\varphi = 0$ 和 $\varphi = 2\pi$ 时函数值相等，故 ∞ 不是枝点。

故枝点为 a, b。

(2) 枝点可能为 a, b, ∞ , 逐一验证:

- 令 $z = a + \epsilon e^{i\varphi}, \quad \epsilon \to 0,\ \varphi \in (0, 2\pi)$，此时 $f(z) = e^{\frac{1}{3}i\varphi}\sqrt[3]{(a-b)\epsilon}$.
  显然 $\varphi = 0$ 和 $\varphi = 2\pi$ 时函数值不等，故 a 为枝点。
- 同理，b 也为枝点。
- 现考虑 ∞，做变换 $t = \dfrac{1}{z}$，令 $t = \epsilon e^{i\varphi}, \quad \epsilon \to 0,\ \varphi \in (0, 2\pi)$，此时 $f(\infty) = e^{-\frac{2}{3}i\varphi}\sqrt[3]{\dfrac{1}{\epsilon^2}}$.
  显然 $\varphi = 0$ 和 $\varphi = 2\pi$ 时函数值不等，故 ∞ 为枝点。

故枝点为 a, b, ∞。

(3) 因式分解得 $\sqrt{(1-z)(z-\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}})(z-\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{3}})}$，故猜测枝点为 $1, \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}, \mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{3}}, \infty$，逐一验证:

- 令 $z=1+\epsilon\mathrm{e}^{i\varphi},\quad \epsilon\to 0,\ \varphi\in(0,2\pi)$，此时 $f(z)=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}i\varphi}\sqrt{(1-\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}})(1-\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{3}})\epsilon}$.
  显然 $\varphi=0$ 和 $\varphi=2\pi$ 时函数值不等，故 1 为枝点。
- 同理，$\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$ 也为枝点。
- 同理，$\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{3}}$ 也为枝点。
- 现考虑 ∞，做变换 $t=\dfrac{1}{z}$，令 $t=\epsilon\mathrm{e}^{i\varphi},\quad \epsilon\to 0,\ \varphi\in(0,2\pi)$，此时 $f(\infty)=\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}i\varphi}\sqrt{\dfrac{1}{\epsilon^3}}$.
  显然 $\varphi=0$ 和 $\varphi=2\pi$ 时函数值不等，故 ∞ 为枝点。

故枝点为 $1, \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}, \mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{3}}, \infty$。

(4) 因式分解得 $\sqrt[3]{(1-z)(z-\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}})(z-\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{3}})}$，故猜测枝点为 $1, \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}, \mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{3}}, \infty$，逐一验证:

- 令 $z=1+\epsilon\mathrm{e}^{i\varphi},\quad \epsilon\to 0,\ \varphi\in(0,2\pi)$，此时 $f(z)=\mathrm{e}^{\frac{1}{3}i\varphi}\sqrt[3]{(1-\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}})(1-\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{3}})\epsilon}$.
  显然 $\varphi=0$ 和 $\varphi=2\pi$ 时函数值不等，故 1 为枝点。
- 同理，$\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$ 也为枝点。
- 同理，$\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{3}}$ 也为枝点。
- 现考虑 ∞，做变换 $t=\dfrac{1}{z}$，令 $t=\epsilon\mathrm{e}^{i\varphi},\quad \epsilon\to 0,\ \varphi\in(0,2\pi)$，此时 $f(\infty)=\mathrm{e}^{-i\varphi}\sqrt[3]{\dfrac{1}{\epsilon^3}}$.
  显然 $\varphi=0$ 和 $\varphi=2\pi$ 时函数值相等，故 ∞ 不是枝点。

故枝点为 $1, \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}, \mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{3}}$。

(5) 枝点可能为 $i, -i, \infty$，逐一验证:

- 令 $z=i+\epsilon\mathrm{e}^{i\varphi},\quad \epsilon\to 0,\ \varphi\in(0,2\pi)$，此时 $f(z)=\ln 2i\epsilon\mathrm{e}^{i\varphi}=i\varphi+\ln 2i\epsilon$.
  显然 $\varphi=0$ 和 $\varphi=2\pi$ 时函数值不等，故 i 为枝点。
- 同理，$-i$ 也为枝点。
- 现考虑 ∞，做变换 $t=\dfrac{1}{z}$，令 $t=\epsilon\mathrm{e}^{i\varphi},\quad \epsilon\to 0,\ \varphi\in(0,2\pi)$，此时 $f(\infty)=-i\varphi+\ln\dfrac{1}{\epsilon}$.
  显然 $\varphi=0$ 和 $\varphi=2\pi$ 时函数值不等，故 ∞ 为枝点。故枝点为 $i, -i, \infty$ 。

(6) 由 $\cos z=0$ 可以解出 $z=\pm\dfrac{2n+1}{2}\pi,\quad n\in\mathbb{N}$，猜测这些根都是枝点。不妨以 $\dfrac{\pi}{2}$ 为例，令 $z=\dfrac{\pi}{2}+\epsilon\mathrm{e}^{i\varphi},\quad \epsilon\to 0,\ \varphi\in(0,2\pi)$，此时 $f(z)=\ln\dfrac{\mathrm{e}^{i(\frac{\pi}{2}+\epsilon\mathrm{e}^{i\varphi})}+\mathrm{e}^{-i(\frac{\pi}{2}+\epsilon\mathrm{e}^{i\varphi})}}{2}=\ln\epsilon+i\varphi$.
显然 $\varphi=0$ 和 $\varphi=2\pi$ 时函数值不等，故 ∞ 为枝点。
故枝点为 $z=\pm\dfrac{2n+1}{2}\pi,\quad n\in\mathbb{N}$ 。

3 第三章习题

习题 9. 试按给定的路径计算下列积分：

(1) $\displaystyle\int_0^{2+i} \mathrm{Re}\ z\mathrm{d}z$，积分路径为：

(i) 线段 $[0,2]$ 和 $[2,2+2i]$ 组成的折线.

(ii) 线段 $z=(2+i)t,\quad 0<t\leq 1$.

(2) $\displaystyle\int_C \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}}$, 规定 $\sqrt{z}|_{z=1}=1$，积分路径为由 $z=1$ 出发的：

(i) 单位圆的上半周.

(ii) 单位圆的下半周.

解答.

(1) (i) 由于 $z=x+iy$，$\mathrm{d}z=\mathrm{d}x+i\mathrm{d}y$，故有
$$\int_0^{2+i} \mathrm{Re}\ z\mathrm{d}z=\int_0^2 x\mathrm{d}x+\int_0^1 2i\mathrm{d}y=2+2i.$$

(ii) 此时 $x=2t$, $y=t$, $\mathrm{d}z=(2+i)\mathrm{d}t$，故有
$$\int_0^{2+i} \mathrm{Re}\ z\mathrm{d}z=\int_0^{2+i} 2t(2+i)\mathrm{d}t=\int_0^1(4t+2it)\mathrm{d}t=2+i.$$

(2) 已知 $z=\mathrm{e}^{i\theta}$, $\mathrm{d}z=i\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{d}\theta$, $\sqrt{z}=\mathrm{e}^{\frac{i\theta}{2}}$

(i) $$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}}=\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-\frac{i\theta}{2}}i\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{d}\theta=2\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{\frac{i\theta}{2}}\mathrm{d}(\tfrac{i\theta}{2})=2\mathrm{e}^{\frac{i\theta}{2}}|_0^{\pi}=2i-2.$$

(ii) $$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}}=\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-\frac{i\theta}{2}}i\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{d}\theta=2\int_0^{-\pi}\mathrm{e}^{\frac{i\theta}{2}}\mathrm{d}(\tfrac{i\theta}{2})=2\mathrm{e}^{\frac{i\theta}{2}}|_0^{-\pi}=-2i-2.$$

习题 10. 计算下列积分：

(1) $\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z}$;

(2) $\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{|\mathrm{d}z|}{z}$;

(3) $\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{|z|}$;

(4) $\oint_{|z|=1}\left|\frac{\mathrm{d}z}{z}\right|$;

解答. 在单位圆上，有 $z=\mathrm{e}^{i\theta}$ ，$\mathrm{d}z=i\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{d}\theta$.

(1) $\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z}=\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-i\theta}i\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{d}\theta=2\pi i$;

(2) 此时 $|\mathrm{d}z|=\mathrm{d}\theta$，故 $\oint_{|z|=1}\frac{|\mathrm{d}z|}{z}=\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-i\theta}\mathrm{d}\theta=-\frac{1}{i}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-i\theta}\mathrm{d}(-i\theta)=-\frac{1}{i}\mathrm{e}^{i\theta}|_0^{2\pi}=0$;

(3) 此时 $|z|=1$，故 $\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{|z|}=\int_0^{2\pi}i\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{d}\theta=\mathrm{e}^{i\theta}|_0^{2\pi}=0$;

(4) $\oint_{|z|=1}\left|\frac{\mathrm{d}z}{z}\right|=\int_0^{2\pi}\left|\mathrm{e}^{-i\theta}i\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{d}\theta\right|=2\pi$.

习题 11. 计算下列积分：

(1) $\oint_C\frac{1}{z^2-1}\sin\frac{\pi z}{4}\mathrm{d}z$, C 分别为：

(i) $|z|=\frac{1}{2}$.

(ii) $|z|=3$.

(2) $\oint_C\frac{1}{z^2+1}\mathrm{e}^{iz}\mathrm{d}z$, C 分别为：

(i) $|z-i|=1$.

(ii) $|z+i|+|z-i|=2\sqrt{2}$.

解答.

(1) 对被积函数分析，$f(z)=\frac{1}{(z+1)(z-1)}\sin\frac{\pi z}{4}$，故奇点为 1 和 -1.

(i) 显然此时的围道不包含奇点，由 Cauchy 定理，积分结果为 0。

(ii) 此时积分积分围道包含奇点 1 和 -1，由 Cauchy 积分公式，有

$$\oint_C\frac{1}{(z+1)(z-1)}\sin\frac{\pi z}{4}\mathrm{d}z=2\pi i(\frac{1}{z+1}\sin\frac{\pi z}{4})|_{z=1}+2\pi i(\frac{1}{z-1}\sin\frac{\pi z}{4})|_{z=-1}=\sqrt{2}\pi i.$$

(2) 对被积函数分析，$f(z)=\frac{1}{(z+i)(z-i)}\mathrm{e}^{iz}$，故奇点为 i 和 $-i$.

(i) 此时包含奇点 i，由 Cauchy 积分公式，有

$$\oint_C \frac{1}{(z+i)(z-i)}\mathrm{e}^{iz}\mathrm{d}z = 2\pi i(\frac{1}{z+i}\mathrm{e}^{iz})|_{z=i} = \frac{\pi}{\mathrm{e}}.$$

(ii) 此时包含奇点 i 和 $-i$，由 Cauchy 积分公式，有

$$\oint_C \frac{1}{(z+i)(z-i)}\mathrm{e}^{iz}\mathrm{d}z = 2\pi i(\frac{1}{z+i}\mathrm{e}^{iz})|_{z=i} + 2\pi i(\frac{1}{z-i}\mathrm{e}^{iz})|_{z=-i} = \frac{\pi}{\mathrm{e}} - \pi\mathrm{e} = -2\pi\sinh 1.$$

习题 12. 计算下列积分：

1. $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{\cos z}{z}\mathrm{d}z;$
2. $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{z^2-1}{z^2+1}\mathrm{d}z;$
3. $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{\sin \mathrm{e}^z}{z}\mathrm{d}z;$
4. $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{\mathrm{e}^z}{\cosh z}\mathrm{d}z;$
5. $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^2}\mathrm{d}z;$
6. $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{|z|\,\mathrm{e}^z}{z^2}\mathrm{d}z;$
7. $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^4}\mathrm{d}z;$
8. $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{\mathrm{d}z}{z^2(z^2+16)}.$

解答.

(1) 奇点为原点，在围道内，由 Cauchy 积分公式，有

$$\oint_{|z|=2} \frac{\cos z}{z}\mathrm{d}z = 2\pi i(\cos z)|_{z=0} = 2\pi i;$$

(2) 对被积函数分析，$f(z) = \dfrac{z^2-1}{(z+i)(z-i)}$，故奇点为 i 和 $-i$，均在围道内，由 Cauchy 积分公式，有

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^2-1}{z^2+1}\mathrm{d}z = 2\pi i(\frac{z^2-1}{z+i})|_{z=i} + 2\pi i(\frac{z^2-1}{z-i})|_{z=-i} = -2\pi + 2\pi = 0;$$

(3) 奇点为原点，在围道内，由 Cauchy 积分公式，有
$\oint_{|z|=2}\dfrac{\sin \mathrm{e}^z}{z}\mathrm{d}z = 2\pi i(\sin \mathrm{e}^z)|_{z=0} = 2\pi\sin 1;$

(4) 对被积函数分析，$f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^z}{\cos iz}$，奇点为 $\dfrac{\pi}{2}i+2k\pi i$，$k\in\mathbb{Z}$，其中 $\pm\dfrac{\pi i}{2}$ 在围道内，但此时不满足 Cauchy 积分公式所需表达形式，故应根据 Cauchy 定理，将原积分围道转化为两个围绕奇点的围道再求和，在 $\dfrac{\pi i}{2}$ 点附近选取一半径为 ρ 的圆为围道 C_1，在 $-\dfrac{\pi i}{2}$ 点附近选取一半径为 ρ 的圆为围道 C_2，先考虑 $\oint_{C_1}\dfrac{\mathrm{e}^z}{\cosh z}\mathrm{d}z$，不妨取 $z=\dfrac{\pi i}{2}+\rho\mathrm{e}^{i\theta}$，此时 $\mathrm{d}z=i\rho\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{d}\theta$，则有

$$\oint_{C_1}\frac{\mathrm{e}^z}{\cosh z}\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{2}+\rho\mathrm{e}^{i\theta}}}{\cosh\left(\frac{\pi i}{2}+\rho\mathrm{e}^{i\theta}\right)}i\rho\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{d}\theta$$

当 $\rho\to 0$ 时，且 $\cosh z=\cos iz$，可以化简得到

$$\oint_{C_1}\frac{\mathrm{e}^z}{\cosh z}\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{2}}}{\cos\left(-\frac{\pi}{2}+i\rho\mathrm{e}^{i\theta}\right)}i\rho\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{2}}}{i\rho\mathrm{e}^{i\theta}}i\rho\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{d}\theta=2\pi i$$

再考虑 $\oint_{C_2}\dfrac{\mathrm{e}^z}{\cosh z}\mathrm{d}z$，不妨取 $z=-\dfrac{\pi i}{2}+\rho\mathrm{e}^{i\theta}$，此时 $\mathrm{d}z=i\rho\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{d}\theta$，则有

$$\oint_{C_2}\frac{\mathrm{e}^z}{\cosh z}\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\pi i}{2}+\rho\mathrm{e}^{i\theta}}}{\cosh\left(-\frac{\pi i}{2}+\rho\mathrm{e}^{i\theta}\right)}i\rho\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{d}\theta$$

当 $\rho\to 0$ 时，且 $\cosh z=\cos iz$，可以化简得到

$$\oint_{C_2}\frac{\mathrm{e}^z}{\cosh z}\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\pi i}{2}}}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+i\rho\mathrm{e}^{i\theta}\right)}i\rho\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\pi i}{2}}}{-i\rho\mathrm{e}^{i\theta}}i\rho\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{d}\theta=2\pi i$$

综上，最终得到

$$\oint_{|z|=2}\frac{\mathrm{e}^z}{\cosh z}\mathrm{d}z=\oint_{C_1}\frac{\mathrm{e}^z}{\cosh z}\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\frac{\mathrm{e}^z}{\cosh z}\mathrm{d}z=4\pi i.$$

(5) 奇点为原点，在围道内，但不可以直接使用 Cauchy 积分公式，应根据 Cauchy 定理，将原积分围道转化为围绕原点的围道再求，在原点附近选取一半径为 ρ 的圆为围道，不妨取 $z=\rho\mathrm{e}^{i\theta}$，此时 $\mathrm{d}z=i\rho\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{d}\theta$，则有

$$\oint_{|z|=2}\frac{\sin z}{z^2}\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\frac{\sin\left(\rho\mathrm{e}^{i\theta}\right)}{\rho^2\mathrm{e}^{2i\theta}}i\rho\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\frac{\sin\left(\rho\mathrm{e}^{i\theta}\right)}{\rho\mathrm{e}^{i\theta}}\mathrm{i}\mathrm{d}\theta$$

当 $\rho\to 0$ 时，可以化简得到

$$\oint_{|z|=2}\frac{\sin z}{z^2}\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\frac{\rho\mathrm{e}^{i\theta}}{\rho\mathrm{e}^{i\theta}}\mathrm{i}\mathrm{d}\theta=2\pi i.$$

(6) 奇点为原点，在围道内，但不可以直接使用 Cauchy 积分公式，应根据 Cauchy 定理，将原积分围道转化为围绕原点的围道再求，在原点附近选取一半径为 ρ 的圆为围道，不妨取 $z=\rho e^{i\theta}$，此时 $dz = i\rho e^{i\theta}d\theta$，则有

$$\oint_{|z|=2}\frac{|z|\,e^z}{z^2}dz=\int_0^{2\pi}\frac{2e^{\rho e^{i\theta}}}{\rho^2 e^{2i\theta}}i\rho e^{i\theta}d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{2e^{\rho e^{i\theta}}}{\rho e^{i\theta}}id\theta$$

当 $\rho\to 0$ 时，可以化简得到

$$\oint_{|z|=2}\frac{|z|\,e^z}{z^2}dz=\int_0^{2\pi}2id\theta=4\pi i.$$

(7) 由解析函数高阶导数公式 $f^{(n)}(z)=\dfrac{n!}{2\pi i}\displaystyle\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{(n+1)}}d\zeta$，

$$\oint_{|z|=2}\frac{\sin z}{z^4}dz=\frac{2\pi i}{3!}\frac{d^3}{dz^3}(\sin z)|_{z=0}=-\frac{\pi i}{3}.$$

(8) 对被积函数分析，奇点为原点，对原式子进行拆分，得到

$$f(z)=\frac{1}{z^2(z^2+16)}=\frac{1}{z^2}-\frac{15}{z^2+16}$$

显然拆分后后面分式无奇点，积分结果为 0，前面分式积分结果也为 0，故原积分结果为 0.

习题 12 的注记.

- (4) 需要注意，也可以用留数定理做，但不可以使用 Cauchy 积分公式。
- (5) 也可以用解析函数高阶导数公式做，$2\pi i\dfrac{d}{dz}(\sin z)|_{z=0}=2\pi i$。
- (6) 也可以用解析函数高阶导数公式做，$2\pi i\dfrac{d}{dz}(2e^z)|_{z=0}=4\pi i$。
- 疑问：(7) 如果按照缩小围道方法做，似乎无法得到正确答案?
- (8) 也可以用解析函数高阶导数公式做，$2\pi i\dfrac{d}{dz}(\dfrac{1}{z^2+16})|_{z=0}=0$。

4　第四章习题

习题 13. 判断下列级数的收敛性与绝对收敛性：

(1) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{i^n}{\ln n}$;

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$.

解答.

(1) 对原级数进行拆分，

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{i^n}{\ln n}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\ln 2k}+i\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\ln 2k+1}$$

由 Leibnitz 判别法可知，拆分后的两个交错级数都收敛，故原级数收敛，现判断是否绝对收敛：

$$\left|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{i^n}{\ln n}\right|=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}>\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$$

调和级数发散，故 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{i^n}{\ln n}$ 收敛但不绝对收敛。

(2) 同 (1) 对原级数进行拆分

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k}+i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

由 Leibnitz 判别法可知，拆分后的两个交错级数都收敛，故原级数收敛，现判断是否绝对收敛：

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

调和级数发散，故 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$ 收敛但不绝对收敛。

习题 14. 试确定下列级数的收敛区域：

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}z^{n!}$;

2. $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{z}{1+z})^n$;

3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-)^n(z^2+2z+2)^n$;

4. $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{z}{3^n}$.

解答.

(1) 对幂级数分析，有

$$c_n=\begin{cases}1 & n=k!,k=1,2,3,\cdots\\ 0 & others\end{cases}$$

根据 Cauchy-Hadamard 公式，收敛半径为

$$R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|c_n|^{\frac{1}{n}}}=1$$

收敛区域为 $|z|<1$;

(2) 进行换元，$t=\dfrac{z}{1+z}$，这时 $c_n=1$，由 Cauchy-Hadamard 公式，收敛半径为 1，故 $\left|\dfrac{z}{1+z}\right|<1$，解出收敛区域为 $\mathrm{Re}z>-\dfrac{1}{z}$;

(3) 进行换元，$t=z^2+2z+2$，这时 $c_n=(-)^n$，由 Cauchy—Hadamard 公式，收敛半径为 1，故收敛区域为 $\left|z^2+2z+2\right|<1$，

(4) 当 $n\to\infty$ 时，$\dfrac{z}{3^n}\to 0$ 在全平面成立，故该级数在全平面收敛。

习题 14 的注记. (3) 收敛区域的数值求解没解出来。

习题 15. 试求下列幂级数的收敛半径:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}z^n$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^nn^n}z^n$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}z^n$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^n}{2^{2n}(n!)^2}z^n$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}n^{\ln n}z^n$;

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}z^{2n}$;

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n^n}{n!}z^n$;

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{n})^n z^n$.

解答.

(1) $c_n=\frac{1}{n^n}$，根据 Cauchy-Hadamard 公式，收敛半径为

$$R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|c_n|^{\frac{1}{n}}}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{c_n}\right|^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}|n^n|^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}n=\infty;$$

(2) $c_n=\frac{1}{2^n n^n}$，根据 Cauchy-Hadamard 公式，收敛半径为

$$R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|c_n|^{\frac{1}{n}}}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{c_n}\right|^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}|2^n n^n|^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}2n=\infty;$$

(3) $c_n=\frac{n!}{n^n}$，根据 d'Alembert 公式，收敛半径为

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!n^n}{(n+1)!(n+1)^{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e;$$

(4) $c_n=\frac{(-)^n}{2^{2n}(n!)^2}$, 根据 d'Alembert 公式，收敛半径为

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|-\frac{2^{2(n+1)}[(n+1)!]^2}{2^{2n}(n!)^2}\right|=\lim_{n\to\infty}4(n+1)^2=\infty;$$

(5) $c_n = n^{\ln n}$，根据 Cauchy-Hadamard 公式，收敛半径为

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |c_n|^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |n^{\ln n}|^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{\ln n}{n}} = 1;$$

(6) 换元 $t = z^2$，此时

$$c_n = \begin{cases} 0 & n = 2k+1, k \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{2^{2n}} & n = 2k, k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

根据 Cauchy-Hadamard 公式，对于 t 收敛半径为

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |c_n|^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |2^{-2}|} = 4$$

故 z 的收敛半径为 2;

(7) $c_n = \dfrac{n \ln n}{n!}$, 根据 d'Alembert 公式，收敛半径为

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| -\frac{n \ln n}{\ln{(n+1)}} \right| = \infty;$$

(8) $c_n = (1 - \dfrac{1}{n})^n$，根据 Cauchy-Hadamard 公式，收敛半径为

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |c_n|^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left|(1 - \frac{1}{n})^n\right|^{\frac{1}{n}}} = \lim_{t\to\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1.$$

5 第五章习题

习题 16. 将下列函数在指定点展开为 Taylor 级数，并给出其收敛半径:

(1) $1-z^2$，在 $z=1$ 展开;

(2) $\sin z$，在 $z=n\pi$ 展开;

(3) $\dfrac{1}{1+z+z^2}$，在 $z=0$ 展开;

(4) $\dfrac{\sin z}{1-z}$，在 $z=0$ 展开;

(5) $\mathrm{e}^{\frac{1}{1-z}}$，在 $z=0$ 展开 (可只求前四项).

解答.

(1) $1-z^2=(1+z)(1-z)=(z-1)[-(z-1)-2]=-(z-1)^2-2(z-1)$，在全平面收敛。

(2) 不妨取 $t=z-n\pi$，有 $\sin z=\sin(t+n\pi)$，

已知 $\sin t=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-)^n}{(2n+1)!}t^{2n+1}$，故 $\sin(t+n\pi)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-)^{n+k}}{(2k+1)!}t^{2k+1}$，

即展开结果为 $\sin z=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-)^{n+k}}{(2k+1)!}(z-n\pi)^{2k+1}$，在全平面收敛。

(3) 因式分解得 $\dfrac{1}{1+z+z^2}=\dfrac{1}{(z-\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}i})(z-\mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{3}i})}=\dfrac{1}{\sqrt{3}i}\Big(\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}i}}{1-\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}i}z}-\dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{3}i}}{1-\mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{3}i}z}\Big)$，

即展开结果为 $\dfrac{1}{\sqrt{3}i}\sum\limits_{n=0}^{\infty}[\mathrm{e}^{\frac{2(n+1)\pi}{3}}-\mathrm{e}^{-\frac{2(n+1)\pi}{3}}]z^n=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sin[\dfrac{2}{3}(n+1)\pi]\cdot z^n$，收敛半径为 1。

(4) $\dfrac{\sin z}{1-z}=\sin z\cdot\dfrac{1}{1-z}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1}\cdot\sum\limits_{l=0}^{\infty}z^l=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\sum\limits_{l=0}^{\infty}\dfrac{(-)^k}{(2k+1)!}z^{2k+l+1}$，

即展开结果为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big(\sum\limits_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}\dfrac{(-)^k}{(2k+1)!}\Big)z^n$，收敛半径为 1（公共区域)。

(5) 根据 Taylor 级数的定义，分别求出函数 $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{1-z}}$ 在 $z=0$ 处的各阶导数，$f(0)=e$，$f'(0)=e$，$f^{(2)}(0)=3e$，$f^{(3)}(0)=13e$，$f^{(4)}(0)=73e$，故 Taylor 展开为 $e+ez+\frac{3e}{2}z^2+\frac{13e}{6}z^3+\frac{73e}{24}z^4+\cdots$，收敛半径为 1（最近的奇点为 1）。

习题 16 的注记.

- (3)$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{2(n+1)\pi}{3}}{\sin\frac{2\pi}{3}}z^n.$
- (5)$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^n(z^{n-1}\mathrm{e}^z)}{\mathrm{d}z^n}\bigg|_{z=1}z^n.$

习题 17. 将下列函数在指定点展开为 Taylor 级数，并给出其收敛半径：

(1) $\ln z$，在 $z=i$ 展开，规定 $0\le\arg z<2\pi$;

(2) $\ln z$，在 $z=i$ 展开，规定 $\ln z|_{z=i}=-\dfrac{3}{2}\pi i$;

(3) $\arctan z$ 的主值，在 $z=0$ 展开;

(4) $\ln\dfrac{1+z}{1-z}$，在 $z=\infty$ 展开，规定 $\ln\dfrac{1+z}{1-z}|_{z=\infty}=(2k+1)\pi i$.

解答.

(1) 在 $z=i$ 处展开，则展开式形式应为 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-i)^n$，有

$$\ln z=\int_i^z\frac{1}{t}\mathrm{d}t+\ln i=i\int_i^z\frac{1}{1-(1-it)}\mathrm{d}(1-it)+\ln i$$

$$=i\int_i^z\sum_{n=0}^{\infty}(1-it)^n\mathrm{d}(1-it)+\frac{\pi i}{2}=i\sum_{n=0}^{\infty}\int_i^z(1-it)^n\mathrm{d}(1-it)+\frac{\pi i}{2}$$

$$=i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n+1}(t-i)^{n+1}\bigg|_i^z+\frac{\pi i}{2}=\frac{\pi i}{2}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^{n+1}}{n+1}(z-i)^{n+1}.$$

收敛区域为 $|z-i|<1$.

(2) 同上，结果为 $-\dfrac{3\pi i}{2}-\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^{n+1}}{n+1}(z-i)^{n+1}$.

收敛区域为 $|z-i|<1$.

(3) $\arctan z = \int_0^z \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty}(-)^n t^{2n}\mathrm{d}t = (-)^n \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^z t^{2n}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{2n+1}t^{2n+1}.$

收敛区域为 $|z| < 1$.

(4) 做代换 $t = \frac{1}{z}$，则所求为 $t = 0$ 处 $\ln\frac{t+1}{t-1} = \ln(t+1) - \ln(t-1)$ 的 Taylor 展开，

$$\ln(t+1) = \ln(t+1)\big|_{t=0} + \int_0^t \frac{1}{u+1}\mathrm{d}u = \ln(t+1)\big|_{t=0} + \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty}(-u)^n\mathrm{d}u$$

$$= \ln(t+1)\big|_{t=0} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{n+1}t^{n+1}.$$

同理，可得 $\ln(t-1) = \ln(t-1)\big|_{t=0} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}t^{n+1}$.

故 $\ln\frac{t+1}{t-1} = \ln\frac{t+1}{t-1}\Big|_{t=0} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}t^{2n+1}, |t| < 1$. 代换 $z = \frac{1}{t}$ 有

$$\ln\frac{1+z}{1-z} = \ln\frac{1+z}{1-z}\Big|_{z=\infty} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}z^{-(2n+1)} = (2k+1)\pi i + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}z^{-(2n+1)}.$$

收敛区域为 $|z| > 1$.

习题 18. 求下列无穷级数之和，注意给出相应的收敛区域:

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}z^{2n+1}$;

(2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}z^{2n}$;

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(n+m)!}{n!\ m!}(\frac{z}{2})^{n+m}$;

(4) $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(n+m+p)!}{n!\ m!\ p!}(\frac{z}{3})^{n+m+p}$.

解答.

(1) 记 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}z^{2n+1}$，有 $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty}z^{2n} = \frac{1}{1-z^2}$, $|z| < 1$.

故 $f(z)=f(0)+\int_0^z \frac{1}{1-t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}$. 由 $f(0)=0$ 知 $\ln\frac{1+z}{1-z}\Big|_{z=0}=0$.

收敛区域为 $|z|<1$.

(2) 由 $\mathrm{e}^z=\sum\limits_{z=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$，可知 $\sum\limits_{z=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}z^{2n}=\frac{\mathrm{e}^z+\mathrm{e}^{-z}}{2}$（只剩下偶数项）.

收敛区域为 $|z|<\infty$.

(3) 令 $l=m+n$，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{(n+m)!}{n!\ m!}(\frac{z}{2})^{n+m}=\sum\limits_{l=0}^{\infty}(\frac{z}{2})^l\sum\limits_{n=0}^{l}\frac{l!}{n!(l-n)!}$.

由二项式展开定理有$\sum\limits_{n=0}^{l}\frac{l!}{n!(l-n)!}=(1+1)^l=2^l$.

故原式等于 $\sum\limits_{l=0}^{\infty}2^l(\frac{z}{2})^l=\sum\limits_{l=0}^{\infty}z^l=\frac{1}{1-z}$.

收敛区域为 $|z|<2$.

(4) 同上，看成 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}[(1+1)+1]^k z^k$ 的两次二项式展开，故原式等于 $\frac{1}{1-z}$.

收敛区域为 $|z|<3$.

习题 18 的注记.

- (3) 的收敛区域应为 $|z|<2$ 与 $\mathrm{Re}\ z<1$ 的公共区域?
- (4) 的收敛区域应为 $|z|<3$ 与 $\mathrm{Re}\ z<\frac{3}{2}$ 及 $|z-2|<1$ 的公共区域?

习题 19. 求下列函数的 Laurent 展开:

(1) $\frac{1}{z^2(z-1)}$，在 $z=1$ 附近展开;

(2) $\frac{1}{z^2(z-1)}$，展开区域为 $1<|z|<\infty$;

(3) $\frac{1}{z^2-3z+2}$，展开区域为 $1<|z|<2$;

(4) $\frac{1}{z^2-3z+2}$，展开区域为 $2<|z|<\infty$;

(5) $\dfrac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)}$，展开区域为 $3<|z|<4$;

(6) $\dfrac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)}$，展开区域为 $4<|z|<\infty$;

解答.

(1) 在 $z=1$ 附近展开，故 Laurent 展开形式为 $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-1)^n$.

$$\frac{1}{z^2(z-1)}=\frac{1}{z-1}\frac{1}{[1+(z-1)]^2}=-\frac{1}{z-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{1}{1+(z-1)}\right]=-\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n n(z-1)^{n-1}.$$

整理得 $\displaystyle\sum_{n=-1}^{\infty}(-)^{n+1}(n+2)(z-1)^n$.

收敛区域为 $0<|z|<1$.

(2) 环形区域为 $1<|z|<\infty$，故 Laurent 展开形式为 $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$. 做代换 $t=\dfrac{1}{z}$ 有

$$\frac{1}{z^2(z-1)}=t^3\frac{1}{1-t}=t^3\sum_{n=0}^{\infty}t^n=\sum_{n=0}^{\infty}t^{n+3}.$$

整理得 $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{-3} z^n=\sum_{n=3}^{\infty}z^{-n}$.

(3) 环形区域为 $1<|z|<2$，故 Laurent 展开形式为 $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$. 做代换 $t=\dfrac{1}{z}$ 有

$$\frac{1}{z^2-3z+2}=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}-\frac{t}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}t^{n+1}.$$

整理得 $-\displaystyle\sum_{n=-1}^{\infty} z^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$.

(4) 环形区域为 $2<|z|<\infty$，故 Laurent 展开形式为 $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$. 做代换 $t=\dfrac{1}{z}$ 有

$$\frac{1}{z^2-3z+2}=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{t}{1-2t}-\frac{t}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}2^n t^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}t^{n+1}.$$

整理得 $\sum_{n=0}^{\infty}(2^n-1)t^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}(2^{n-1}-1)z^{-n}=\sum_{n=2}^{\infty}(2^{n-1}-1)z^{-n}$.

(5) 环形区域为 $3<|z|<4$，故 Laurent 展开形式为 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_nz^n$. 做代换 $t=\dfrac{1}{z}$ 有

$$\frac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)}=1-\frac{2}{z-3}+\frac{6}{z-4}=1-\frac{2t}{1-3t}-\frac{3}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{4}}=1-\sum_{n=0}^{\infty}2t\cdot(3t)^n-\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{4^n}.$$

整理得 $1-2\sum_{n=-1}^{-\infty}\dfrac{z^n}{3^{n+1}}-\dfrac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{4^n}$.

(6) 环形区域为 $4<|z|<\infty$，故 Laurent 展开形式为 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_nz^n$. 做代换 $t=\dfrac{1}{z}$ 有

$$\frac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)}=1-\frac{2}{z-3}+\frac{6}{z-4}=1-\frac{2t}{1-3t}+\frac{6t}{1-4t}=1-\sum_{n=0}^{\infty}2t\cdot(3t)^n+\sum_{n=0}^{\infty}6t\cdot(4t)^n.$$

整理得 $1-2\sum_{n=-1}^{-\infty}\dfrac{z^n}{3^{n+1}}+6\sum_{n=-\infty}^{-\infty}\dfrac{z^n}{4^{n+1}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(3\cdot 2^{2n-1}-2\cdot 3^{n-1})z^{-n}$.

习题 20. 判断下列函数孤立奇点的性质，如果是极点，确定其阶数：

(1) $\dfrac{1}{z^2+a^2}$, $a\neq 0$;

(2) $\dfrac{\cos az}{z^2}$;

(3) $\dfrac{\cos az-\cos bz}{z^2}$, $a^2\neq b^2$;

(4) $\dfrac{\sin z}{z^2}-\dfrac{1}{z}$;

(5) $\cos\dfrac{1}{\sqrt{z}}$;

(6) $\dfrac{\sqrt{z}}{\sin\sqrt{z}}$;

(7) $\dfrac{1}{(z-1)\ln z}$;

(8) $\displaystyle\int_0^z\frac{\sinh\sqrt{\zeta}}{\sqrt{\zeta}}\mathrm{d}\zeta$.

解答.

(1) 孤立奇点 $z=\pm ai$，$\lim\limits_{z\to\pm ai} f(x)=\infty$，$\dfrac{1}{f(z)}=z^2+a^2$，均为二阶极点。

(2) 孤立奇点 $z=0$，$\lim\limits_{z\to 0} f(z)=\infty$，$\dfrac{1}{f(z)}=\dfrac{z^2}{\cos az}$，为一阶极点。

(3) 孤立奇点 $z=0$，$\lim\limits_{z\to 0} f(z)=\dfrac{-2\sin\frac{(a+b)z}{2}\sin\frac{(a-b)z}{2}}{z^2}=-(a^2-b^2)$，故为可去奇点。

(4) 孤立奇点 $z=0$，$\lim\limits_{z\to 0} f(z)=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z-z}{z^2}=0$，故为可去奇点。

(5) 孤立奇点 $z=0$，令 $t=\sqrt{z}$，当 $z\to 0$ 时，$t\to\infty$，$\cos t$ 取值不定，故为本性奇点。

(6) 孤立奇点 $z=0$，令 $t=\sqrt{z}$，当 $z\to 0$ 时，$t\to\infty$，$\dfrac{\sin t}{t}=1$，故为可去奇点。
孤立奇点 $z=(n\pi)^2$，一阶奇点。

(7) 孤立奇点 $z=1$，在 $\ln z|_{z=1}=0$ 单值分支内为二阶极点，其他分支内为一阶极点。

(8) 令 $t=\sqrt{\zeta}$，有 $f(z)=\displaystyle\int_0^{z^2} 2\sinh t\mathrm{d}t$，$z=\infty$ 为本性奇点。

习题 20 的注记.

- (2) $z=\infty$ 为本性奇点。
- (3) $z=\infty$ 为本性奇点。
- (4) $z=\infty$ 为本性奇点。
- (6) $z=\infty$ 为非孤立奇点。。

6 第六章习题

习题 21. 求下列函数在指定点 z_0 处的留数:

(1) $\dfrac{1}{z-1}\mathrm{e}^{z^2}$, $z_0=1$;

(2) $(\dfrac{z}{1-\cos z})^2$, $z_0=0$;

(3) $\dfrac{\mathrm{e}^z}{(z^2-1)^2}$, $z_0=1$.

解答.

(1) $z_0=1$ 是一阶极点，故 $\operatorname{res} f(1)=\lim\limits_{z\to1}(z-1)\dfrac{\mathrm{e}^{z^2}}{z-1}=\mathrm{e}$.

(2) 函数是偶函数，展开不含 z^{-1} 项，故 $\operatorname{res} f(0)=0$.

(3) $f(z)=\dfrac{\frac{\mathrm{e}^z}{(z+1)^2}}{(z-1)^2}$，故 $\operatorname{res} f(1)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\dfrac{\mathrm{e}^z}{(z+1)^2}\Big|_{z=1}=0$.

习题 22. 求下列函数在复平面 $\mathbb{C}$ 内每一个孤立奇点处的留数:

(1) $\dfrac{1}{z^3-z^5}$;

(2) $\dfrac{z}{1-\cos z}$;

(3) $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(z-\frac{1}{z})}$;

(4) $\dfrac{1}{(z-1)\ln z}$.

解答.

(1) $f(z)=\dfrac{1}{z^3(1+z)(1-z)}$，孤立奇点 $z=0$（三阶极点），$z=\pm1$（一阶极点）。

$$\operatorname{res} f(0)=\frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\frac{1}{1-z^2}\Big|_{z=0}=1.$$

$$\operatorname{res} f(1)=\lim_{z\to1}\frac{z-1}{z^3(1+z)(1-z)}=-\frac{1}{2}.$$

$$\text{res } f(1) = \lim_{z\to -1} \frac{z+1}{z^3(1+z)(1-z)} = -\frac{1}{2}.$$

(2) 孤立奇点 $z = 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$，$z = 0$ 为一阶奇点，其余为二阶奇点。

$$\text{res } f(0) = \lim_{z\to 0} \frac{z^2}{1-\cos z} = 2.$$

$$\frac{z}{1-\cos z} = (z-2n\pi)[1-\cos(z-2n\pi)]^{-1} + 2n\pi[1-\cos(z-2n\pi)]^{-1}$$

$$= 2(z-2n\pi)^{-1}[1+\frac{1}{12}(z-2n\pi)^2+\mathcal{O}(z-2n\pi)^4]+4n\pi(z-2n\pi)^{-2}[1+\frac{1}{12}(z-2n\pi)^2+\mathcal{O}(z-2n\pi)^4]$$

$$= 4n\pi(z-2n\pi)^{-2} + 2(z-2n\pi)^{-1} + \frac{n\pi}{3} + \frac{1}{6}(z-2n\pi) + \cdots.$$

故 $\text{res } f(2n\pi) = 2.$

(3) $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(z-\frac{1}{z})} = \mathrm{e}^{\frac{z}{2}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!2^n} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-)^m}{m!2^m z^m} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-)^m}{n!m!2^{m+n}} z^{n-m}.$

由书上 P75 例 5.9 知，$\text{res } f(0) = -\mathrm{J}_1(1)$，$\text{res } f(\infty) = \mathrm{J}_1(1)$.

(4) 孤立奇点 $z = 1$。

- 若 $\ln z|_{z=1} = 0$ 为二阶极点，

  $$\text{res } f(1) = \lim_{z\to 1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{z-1}{\ln z} = \lim_{z\to 1} \frac{z\ln z - z + 1}{z(\ln z)^2} = \lim_{z\to 1} \frac{1}{\ln z + 2} [L'Hospital] = \frac{1}{2}.$$

- 其他情况为一阶极点，$\ln z|_{z=1} = 2k\pi i$，

  $$\text{res } f(1) = \lim_{z\to 1} \frac{1}{\ln z} = \frac{1}{2k\pi i}$$

习题 23. 求下列函数在 ∞ 点处的留数:

(1) $\dfrac{\cos z}{z}$;

(2) $(z^2+1)\mathrm{e}^z$;

(3) $\sqrt{(z-1)(z-2)}$.

解答.

(1) 令 $t=\dfrac{1}{z}$，而 $\cos z=1-\dfrac{1}{2}z^2+\mathcal{O}(z^2)$，

故展开式为 $t\cdot\left(1-\dfrac{1}{2}t^{-2}+\mathcal{O}(z^2)\right)=t-t^{-1}+\dfrac{1}{\mathcal{O}(t^1)}$, ∞ 为本性奇点,

即 $\operatorname{res} f(\infty)=-a_1=-1.$

(2) 令 $t=\dfrac{1}{z}$，而 $\mathrm{e}^z=1+z+\dfrac{1}{2}z^2+\dfrac{1}{3!}z^3+\mathcal{O}(z^3)$,

故展开式为 $\left(\dfrac{1}{t^2}+1\right)\left(1+\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{t^2}+\cdots\right)$, ∞ 为本性奇点,

即 $\operatorname{res} f(\infty)=-a_1=0.$

(3) 令 $t=\dfrac{1}{z}$，原式可化为 $\dfrac{\sqrt{(1-t)(1-2t)}}{t}$.

不妨取 $\arg\,(1-t)|_{t=0}=2m\pi$，$\arg\,(1-2t)|_{t=0}=2n\pi$，

故展开式为 $t^{-1}\cdot(-1)^m\left(1-\dfrac{1}{2}t-\dfrac{1}{8}t^2+\cdots\right)\cdot(-1)^n\left(1-t-\dfrac{1}{2}t^2+\cdots\right)$.

整理得到 $(-1)^{m+n}\left(t^{-1}-\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{8}t-\dfrac{7}{16}t^2+\cdots\right)$. ∞ 为一阶奇点,

即 $\operatorname{res} f(\infty)=-a_1=(-1)^{m+n}\cdot\dfrac{1}{8}$.

习题 24. 计算下列积分值:

(1) $\displaystyle\oint_{|z-1|=1}\frac{1}{1+z^4}\,\mathrm{d}z$;

(2) $\displaystyle\oint_{|z-1|=1}\frac{1}{z^2-1}\sin\frac{\pi z}{4}\,\mathrm{d}z$;

(3) $\displaystyle\oint_{|z|=n}\tan\pi z\,\mathrm{d}z$,$n$ 为正整数;

(4) $\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{e}^z}{z^3}\,\mathrm{d}z$.

解答.

(1) 在围道内的奇点有 $z=\mathrm{e}^{\pm\frac{\pi}{4}}$，均为一阶奇点。

$$\oint_{|z-1|=1}\frac{1}{1+z^4}\,\mathrm{d}z=2\pi i\left[\mathrm{res}f(\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{4}})+\mathrm{res}f(\mathrm{e}^{-\frac{\pi i}{4}})\right]=2\pi i\left[\lim_{z\to\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{4}}}\frac{z-\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{4}}}{1+z^4}+\lim_{z\to\mathrm{e}^{-\frac{\pi i}{4}}}\frac{z-\mathrm{e}^{-\frac{\pi i}{4}}}{1+z^4}\right]$$

$$=2\pi i\left[-\frac{1}{4\sqrt{2}}(1+i)+\frac{1}{4\sqrt{2}}(-1+i)\right]=-\frac{\sqrt{2}}{2}\pi i.$$

(2) 在围道内的奇点只有 $z=1$，为一阶奇点。

$$\oint_{|z-1|=1}\frac{1}{z^2-1}\sin\frac{\pi z}{4}\,\mathrm{d}z=2\pi i\cdot\mathrm{res}\ f(1)=2\pi i\lim_{z\to1}\frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi i.$$

(3) 在围道内的奇点有 $2n$ 个，均为一阶极点，可表示为 $z=k+\dfrac{1}{2}$ $(k=-n,\cdots,0,1,\cdots,n-1)$.

$$\mathrm{res}\ f(k+\frac{1}{2})=\lim_{z\to k+\frac{1}{2}}\frac{\left(z-k-\frac{1}{2}\right)\sin\pi z}{\cos\pi z}=-\frac{1}{\pi}[L'Hospital].$$

故 $\displaystyle\oint_{|z|=n}\tan\pi z\,\mathrm{d}z=2\pi i\left[2n\cdot\left(-\frac{1}{\pi}\right)\right]=-4ni.$

(4) 在围道内的奇点只有 $z=0$，为三阶极点。

$$\mathrm{res}\ f(0)=\frac{1}{2}\lim_{z\to0}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\mathrm{e}^z=\frac{1}{2}.$$

$$\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{e}^z}{z^3}\,\mathrm{d}z=2\pi i\cdot\mathrm{res}\ f(0)=2\pi i\cdot\frac{1}{2}=\pi i.$$

习题 25. 计算下列积分：

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos^{2n}\theta\,\mathrm{d}\theta$，$n$ 为正整数;

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\sin^2\theta}$.

解答.

(1) 作变换 $z=e^{i\theta}$，有 $\cos\theta=\dfrac{z^2+1}{2z}$，$\mathrm{d}\theta=\dfrac{\mathrm{d}z}{iz}$.

$$\int_0^{2\pi}\cos^{2n}\theta\,\mathrm{d}\theta=\oint_{|z|=1}\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)^{2n}\frac{\mathrm{d}z}{iz}.$$

$$\mathrm{res}\left\{\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)^{2n}\cdot z^{-1}\right\}=\left\{\left(\frac{z+1}{2}+\frac{1}{2z}\right)^{2n}\cdot z^{-1}\right\}=\binom{n}{2n}\frac{1}{2^{2n}}=\frac{(2n)!}{(n!)^2}\cdot\frac{1}{2^{2n}},$$

故积分结果为 $2\pi i\cdot\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}\cdot\dfrac{1}{2^{2n}}\cdot\dfrac{1}{i}=\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}\dfrac{\pi}{2^{2n-1}}$.

(2) 对原积分进行化简得到 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{3-\cos\theta}$.

作变换 $z=e^{i\theta}$，有 $\cos\theta=\dfrac{z^2+1}{2z}$，$\mathrm{d}\theta=\dfrac{\mathrm{d}z}{iz}$.

$$\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\sin^2\theta}=\oint_{|z|=1}\frac{1}{3-\frac{z^2+1}{2z}}\frac{\mathrm{d}z}{iz}.$$

由 $f(z)=\dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{1}{3-\frac{z^2+1}{2z}}=\dfrac{-2}{(z-3-2\sqrt{2})(z-3+2\sqrt{2})}$,

知在单位圆内只有一阶极点 $z=3-2\sqrt{2}$.

故原积分结果为 $2\pi i\cdot\operatorname{res}\left\{f(3-2\sqrt{2})\right\}\cdot\dfrac{1}{i}=\dfrac{\sqrt{2}\pi}{2}$.

习题 26. 计算下列积分：

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)\cosh\frac{\pi x}{2}}$.

解答.

(1) 考虑 $\displaystyle\oint_{-\infty}^{\infty}\frac{z^2}{1+z^4}\mathrm{d}z$，积分围道为上半平面半径趋于无穷的半圆。根据留数定理，有

$$\oint_{-\infty}^{\infty}\frac{z^2}{1+z^4}\mathrm{d}z=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x+\int_{C_R}\frac{z^2}{1+z^4}\mathrm{d}z$$

$$=2\pi i\cdot\left[\operatorname{res}\left\{\frac{z^2}{1+z^4}\right\}\bigg|_{z=\mathrm{e}^{\frac{1}{4}\pi}}+\operatorname{res}\left\{\frac{z^2}{1+z^4}\right\}\bigg|_{z=\mathrm{e}^{\frac{3}{4}\pi}}\right]^{1}$$

$$=2\pi i\cdot\left[\frac{1}{4\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}i}}+\frac{1}{4\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}i}}\right]$$

$$=2\pi i\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

[1] 均为一阶极点

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$$

由于 $\lim\limits_{z\to\infty} z\cdot\dfrac{z^2}{1+z^4} = 0$ 以及大圆弧引理，知 $\displaystyle\int_{C_R} \frac{z^2}{1+z^4}\mathrm{d}z = 0.$

故原积分结果为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi.$

(2) 考虑 $\displaystyle\oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}z}{(1+z^2)\cosh\frac{\pi z}{2}}$，积分围道为上半平面半径趋于无穷的半圆。

记 $f(z) = \dfrac{1}{(1+z^2)\cosh\frac{\pi z}{2}}$，分析分母 $(1+z^2)\cosh\dfrac{\pi z}{2}.$

零点为 $z = (2k+1)i,\ k\in\mathbb{Z}.$ 除了 $z = i$ 是二阶极点外，其他的都是一阶极点。

$$\mathrm{res}\ f(i) = \lim_{z\to i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z-i)^2 f(z) = \frac{1}{2\pi i}.$$

$$\mathrm{res}\ f\left[(2k+1)i\right] = \lim_{z\to(2k+1)\pi} \frac{\frac{1}{1+z^2}}{\frac{\pi}{2}\sinh\frac{\pi z}{2}} = \frac{(-1)^{k+1}}{2\pi i}\frac{1}{k(k+1)},\ (k\neq 0).$$

$$\oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}z}{(1+z^2)\cosh\frac{\pi z}{2}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)\cosh\frac{\pi x}{2}} + \int_{C_R} \frac{\mathrm{d}z}{(1+z^2)\cosh\frac{\pi z}{2}}$$

$$= 2\pi i\left\{\mathrm{res}\ f(i) + \sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{res}\ f\left[(2k+1)i\right]\right\} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)}.$$

由于 $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{1}{(1+z^2)\cosh\frac{\pi z}{2}} = 0$ 以及大圆弧引理，知 $\displaystyle\int_{C_R} \frac{\mathrm{d}z}{(1+z^2)\cosh\frac{\pi z}{2}} = 0.$

故原积分结果为 $1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)}.$

习题 26 的注记. (2) 的结果可以化简。

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{k+1} = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}[1]$$

$$= 2\ln 2.$$

[1] $\ln 1 + x = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k$

习题 27. 计算下列积分：

(1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^4}\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{(1+x^2)^3}\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x\sin x}{x^2-2x+2}\mathrm{d}z$.

解答.

(1) 记 $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{iz}}{1+z^4}$，考虑 $\displaystyle\oint_{-\infty}^{\infty} f(z)\mathrm{d}z$，积分围道为上半平面半径趋于无穷的半圆。

在积分区域内有一阶极点 $z=\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{4}}$ 和 $z=\mathrm{e}^{\frac{3\pi i}{4}}$，计算其留数。

$$\mathrm{res}\ f(\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{4}})=\mathrm{res}\ f(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i))=\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}}{4i}\mathrm{e}^{i\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}\right)}.$$

$$\mathrm{res}\ f(\mathrm{e}^{\frac{3\pi i}{4}})=\mathrm{res}\ f(\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i))=\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}}{4i}\mathrm{e}^{-i\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}\right)}.$$

故 $\displaystyle\oint_{-\infty}^{\infty} f(z)\mathrm{d}z=2\pi i\left[\mathrm{res}\ f(\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{4}})+\mathrm{res}\ f(\mathrm{e}^{\frac{3\pi i}{4}})\right]=2\pi i\cdot\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}}{4i}\cdot 2\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}\right).$

其实部的一半（偶函数）即为 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^4}\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}\pi}{2}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}\right).$

(2) 记 $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{iz}}{(1+z^2)^3}$，考虑 $\displaystyle\oint_{-\infty}^{\infty} f(z)\mathrm{d}z$，积分围道为上半平面半径趋于无穷的半圆。

在积分区域内有三阶极点 $z=i$，$\mathrm{res}\ f(i)=\displaystyle\lim_{z\to i}\frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}(z-i)^2f(z)=\lim_{z\to i}\frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\frac{(z-i)^2\mathrm{e}^{iz}}{(z+i)^3}.$

故 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{(1+x^2)^3}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[2\pi i\cdot\mathrm{res}\ f(i)\right]=\frac{7\pi}{16}.$

(3) 记 $f(z)=\dfrac{z\mathrm{e}^{iz}}{z^2-2z+2}$，考虑 $\displaystyle\oint_{-\infty}^{\infty} f(z)\mathrm{d}z$，积分围道为上半平面半径趋于无穷的半圆。

在积分区域内有一阶极点 $z=1+i$，$\mathrm{res}\ f(1+i)=\displaystyle\lim_{z\to(1+i)}\frac{z\mathrm{e}^{iz}}{z-1+i}=\frac{(1+i)\mathrm{e}^{i}}{2i\mathrm{e}}.$

故 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2-2x+2}\mathrm{d}z=\mathrm{Im}\left[2\pi i\cdot\frac{(1+i)\mathrm{e}^{i}}{2i\mathrm{e}}\right]=\pi\mathrm{e}^{i-1}$.

习题 27 的注记.

- (2) 难算，直接写答案。
- 根据 Jordan 引理，三题均有 $|z|\to\infty$ 时，$Q(z)\to0$，故 $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}Q(z)\mathrm{e}^{ipz}\mathrm{d}z=0$.

习题 28. 计算下列积分：

(1) $\displaystyle\mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(x-1)(x-2)}$;

(2) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x-\sin x}{x^3(1+x^2)}\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{px}-\mathrm{e}^{qx}}{1-\mathrm{e}^{x}}\mathrm{d}x,\ 0<p<1,0<q<1$.

解答.

(1) 记 $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)(z-2)}$，考虑 $\displaystyle\oint_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}z}{z(z-1)(z-2)}$，积分围道绕开三个一阶极点 $z=0,1,2$。

积分区域内无奇点，故 $\displaystyle\oint_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}z}{z(z-1)(z-2)}=0$.

$$\oint_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}z}{z(z-1)(z-2)}=\left[\int_{-\infty}^{-\delta}+\int_{C_{\delta0}}+\int_{\delta}^{1-\delta}+\int_{C_{\delta1}}+\int_{1+\delta}^{2-\delta}+\int_{C_{\delta2}}+\int_{2+\delta}^{\infty}+\int_{C_R}\right]f(z)\mathrm{d}z.$$

由小圆弧引理，$\displaystyle\int_{C_{\delta0}}f(z)\mathrm{d}z=i\cdot(0-\pi)\lim_{z\to0}zf(z)=-\frac{\pi}{2}$.

$$\int_{C_{\delta1}}f(z)\mathrm{d}z=i\cdot(0-\pi)\lim_{z\to1}zf(z)=\pi.$$

$$\int_{C_{\delta2}}f(z)\mathrm{d}z=i\cdot(0-\pi)\lim_{z\to2}zf(z)=-\frac{\pi}{2}.$$

由大圆弧引理，$\displaystyle\int_{C_R}f(z)\mathrm{d}z=i\cdot(\pi-0)\lim_{z\to\infty}zf(z)=0$.

故 $\displaystyle\mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(x-1)(x-2)}=\left[\int_{-\infty}^{-\delta}+\int_{\delta}^{1-\delta}+\int_{1+\delta}^{2-\delta}+\int_{2+\delta}^{\infty}\right]f(z)\mathrm{d}z=0.$

(2) 记 $f(z)=\dfrac{z-\sin z}{z^3(1+z^2)}$，考虑 $\displaystyle\oint_{-\infty}^{\infty}\frac{z-\sin z}{z^3(1+z^2)}\mathrm{d}z$，积分围道绕开一阶极点 $z=0$。

积分区域内有一阶极点 $z=i$，$\operatorname{res} f(i)=\left[\dfrac{z-\sin z}{z^3(z+i)}\right]\bigg|_{z=i}=\dfrac{i-\sin i}{2}$.

故 $\displaystyle\oint_{-\infty}^{\infty}\frac{z-\sin z}{z^3(1+z^2)}\mathrm{d}z=2\pi i\cdot\operatorname{res} f(i)=-\pi-\pi i\sin i.$

又 $\displaystyle\oint_{-\infty}^{\infty}\frac{x-\sin x}{z^3(1+z^2)}\mathrm{d}z=\left[\int_{-\infty}^{-\delta}+\int_{C_{\delta 0}}+\int_{\delta}^{\infty}+\int_{C_R}\right]f(z)\mathrm{d}z.$

由小圆弧引理，$\displaystyle\int_{C_{\delta 0}}f(z)\mathrm{d}z=i\cdot(0-\pi)\lim_{z\to 0}zf(z)=0.$

由大圆弧引理，$\displaystyle\int_{C_R}f(z)\mathrm{d}z=i\cdot(\pi-0)\lim_{z\to\infty}zf(z)=0.$

故 $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x-\sin x}{x^3(1+x^2)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{-\delta}+\int_{\delta}^{\infty}\right]f(x)\mathrm{d}z=-\pi-\pi i\sin i=-\pi-\frac{\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}}{2}\pi.$

错误，∞ 是 $\sin z$ 的本性奇点，正确解答见注记。

(3) 记 $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{pz}}{1-\mathrm{e}^z}$，考虑 $\displaystyle\oint_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{pz}}{1-\mathrm{e}^z}\mathrm{d}z$，应取宽为 2π 的矩形围道，绕开 $z=0$ 和 $z=2\pi i$。

积分区域内无奇点，积分结果为 0。

而 $\displaystyle\oint_{-\infty}^{\infty}f(z)\mathrm{d}z=\left[\int_{-\infty}^{-\delta}+\int_{C_{\delta 1}}+\int_{\delta}^{\infty}+\int_{L_1}+\int_{L_2}+\int_{C_{\delta 2}}+\int_{L_3}+\int_{L_4}\right].$

由于 $\displaystyle\left[\int_{L_2}+\int_{L_3}\right]f(z)\mathrm{d}z=-\mathrm{e}^{2p\pi i}\left[\int_{-\infty}^{-\delta}+\int_{\delta}^{\infty}\right]f(z)\mathrm{d}z,$

$$\int_{L_1}f(z)\mathrm{d}z=\lim_{R\to\infty}\left[\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{p(R+iy)}}{1-\mathrm{e}^{R+iy}}i\mathrm{d}y\right]=0,\quad \int_{L_4}f(z)\mathrm{d}z=\lim_{R\to\infty}\left[\int_{2\pi}^{0}\frac{\mathrm{e}^{p(-R+iy)}}{1-\mathrm{e}^{-R+iy}}i\mathrm{d}y\right]=0,$$

由小圆弧引理，

$$\int_{C_{\delta 1}}f(z)=-\pi i\left[\lim_{z\to 0}\frac{z\mathrm{e}^{pz}}{1-\mathrm{e}^z}\right]=\pi i,\ \int_{C_{\delta 2}}f(z)=-\pi i\left[\lim_{z\to 2\pi i}\frac{(z-2\pi i)\mathrm{e}^{pz}}{1-\mathrm{e}^z}\right]=\pi i\mathrm{e}^{2p\pi i},$$

故 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{px}}{1-\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\left[\int_{-\infty}^{-\delta}+\int_{\delta}^{\infty}\right]f(z)\mathrm{d}z=-\frac{\pi+\pi i\mathrm{e}^{2p\pi i}}{1-\mathrm{e}^{2p\pi i}}=\pi\cot p\pi.$

故 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{px}-\mathrm{e}^{qx}}{1-\mathrm{e}^{x}}\mathrm{d}x = \pi\left[\cot p\pi - \cot q\pi\right]$.

习题 28 的注记.

- (2) 记 $f(z) = \dfrac{z-\sin z}{z^3(1+z^2)}$，考虑 $\displaystyle\oint_{-\infty}^{\infty} \frac{z-\sin z}{z^3(1+z^2)}\mathrm{d}z$，积分围道绕开一阶极点 $z=0$。

  积分区域内有一阶极点 $z=i$，$\operatorname{res} f(i) = \left[\dfrac{z-\sin z}{z^3(z+i)}\right]\Bigg|_{z=i} = \dfrac{i-\sin i}{2}$.

  故 $\displaystyle\oint_{-\infty}^{\infty} \frac{z-\sin z}{z^3(1+z^2)}\mathrm{d}z = 2\pi i\cdot \operatorname{res} f(i) = -\pi - \pi i \sin i$.

  又 $\displaystyle\oint_{-\infty}^{\infty} \frac{x-\sin x}{z^3(1+z^2)}\mathrm{d}z = \left[\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{C_{\delta 0}} + \int_{\delta}^{\infty} + \int_{C_R}\right] f(z)\mathrm{d}z$.

  由小圆弧引理，$\displaystyle\int_{C_{\delta 0}} f(z)\mathrm{d}z = i\cdot(0-\pi)\lim_{z\to 0} z f(z) = 0$.

  此时不可以直接使用大圆弧引理，应在 ∞ 处利用 $\sin z = \dfrac{\mathrm{e}^{iz}-\mathrm{e}^{-iz}}{2i}$ 将 $f(x)$ 展开。

  $$\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_R}\left[\frac{1}{z^2(1+z^2)} - \frac{1}{2i}\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z^3(z+z^2)} + \frac{1}{2i}\frac{\mathrm{e}^{-iz}}{z^3(z+z^2)}\right]\mathrm{d}z.$$

  由大圆弧引理和 Jordan 引理可以得到前两项结果为零。

  根据 Jordan 引理的补充引理，$\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} Q(z)\mathrm{e}^{-ipz}\mathrm{d}z = 2\pi i\cdot\sum_{\text{全平面}} \operatorname{res}\left\{Q(z)\mathrm{e}^{-ipz}\right\}$.

  奇点有 $z=0$，i，$-i$，分别计算其留数为 $-\dfrac{3}{2}$,[1] $\dfrac{\mathrm{e}}{2}$，$\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$.

  即 $\displaystyle\int_{C_R} \frac{1}{2i}\frac{\mathrm{e}^{-iz}}{z^3(z+z^2)}\mathrm{d}z = \pi\left(-\frac{3}{2}+\frac{\mathrm{e}}{2}+\frac{1}{2\mathrm{e}}\right)$.

  故 $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x-\sin x}{x^3(1+x^2)}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\infty}\right] f(z)\mathrm{d}z$

  $$= \frac{1}{2}\left[-\pi - \frac{\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}}{2}\pi - \pi\left(-\frac{3}{2}+\frac{\mathrm{e}}{2}+\frac{1}{2\mathrm{e}}\right)\right] = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{e}\right).$$

- 水平有限，等有时间学了 TikZ 再补充围道图。

[1]级数展开，$\dfrac{1}{z^3}\left[\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n z^{2n}\right]\left(1-iz+\dfrac{(iz)^2}{2!}+\cdots\right)$，$z^{-1}$ 项系数为 $-\dfrac{3}{2}$.

习题 29. 计算下列积分：

(1) $\text{v.p.}\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{1-x}\mathrm{d}x,\ 0<s<1;$

(2) $\int_0^\infty \frac{x^s}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x,\ -1<s<3;$

(3) $\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}\ln x}{1+x}\mathrm{d}x,\ 0<\alpha<1;$

(4) $\int_0^\infty \frac{\ln x}{(x+a)(x+b)}\mathrm{d}x,\ b>a>0.$

解答.

(1) 考虑积分 $\oint_0^\infty \frac{z^{s-1}}{1-z}\mathrm{d}z$，取块型积分围道，绕开一阶极点 $z=1$，$0\le\arg\le 2\pi$。

积分围道内无奇点，故

$$(1-\mathrm{e}^{2\pi is})\left(\int_\delta^{1-\delta}+\int_{1+\delta}^\infty\right)f(x)\mathrm{d}x+\left[\int_{C_R}+\int_{C_{\delta1}}+\int_{C_{\delta2}}+\int_{C_{\delta3}}\right]f(z)\mathrm{d}z=0.$$

由大圆弧引理，$\int_{C_R}f(z)\mathrm{d}z=0$，由小圆弧引理，$\int_{C_{\delta1}}f(z)\mathrm{d}z=0$，

$$\int_{C_{\delta2}}f(z)\mathrm{d}z=i\cdot\left[\lim_{z\to1}\frac{(z-1)z^{s-1}}{1-z}\right](0-\pi)=\pi i.$$

$$\int_{C_{\delta2}}f(z)\mathrm{d}z=i\cdot\left[\lim_{z\to\mathrm{e}^{2\pi i}}\frac{(z-1)z^{s-1}}{1-z}\right](2\pi-3\pi)=\pi i\mathrm{e}^{2\pi is}.$$

故 $\text{v.p.}\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{1-x}\mathrm{d}x=\pi i\frac{\mathrm{e}^{2\pi is}+1}{\mathrm{e}^{2\pi is}-1}=\pi\cot\pi s.$

(2) 考虑积分 $\oint_0^\infty \frac{z^s}{(1+z^2)^2}\mathrm{d}z$，取块型积分围道，$0\le\arg\le2\pi$。

积分围道内有奇点 $z=\pm i$，均为二阶极点，

$$\text{res }f(i)=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{z^s}{(z+i)^2}\right]_{z=i}=-\frac{s-1}{4i}\mathrm{e}^{\frac{\pi is}{2}}.\ \text{res }f(-i)=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{z^s}{(z-i)^2}\right]_{z=-i}=\frac{s-1}{4i}\mathrm{e}^{\frac{3\pi is}{2}}.$$

故 $\oint_0^\infty \frac{z^s}{(1+z^2)^2}\mathrm{d}z=2\pi i\left[\text{res }f(i)+\text{res}f(-i)\right]=\pi i(s-1)\sin\frac{\pi s}{2}.$

即 $\left(1-\mathrm{e}^{2\pi is}\right)\left(\int_{\delta}^{1-\delta}+\int_{1+\delta}^{\infty}\right)f(x)\mathrm{d}x+\left[\int_{C_R}+\int_{C_\delta}\right]f(z)\mathrm{d}z=\pi i(s-1)\sin\dfrac{\pi s}{2}$.

由大圆弧引理有 $\displaystyle\int_{C_R}f(z)\mathrm{d}z=0$，由小圆弧引理有 $\displaystyle\int_{C_\delta}f(z)\mathrm{d}z=0$，

故 $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^s}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi i(s-1)\sin\frac{\pi s}{2}}{1-\mathrm{e}^{2\pi is}}=\frac{\pi}{4}\frac{1-s}{\cos\frac{\pi s}{2}}$.

(3) 考虑积分 $\displaystyle\oint_0^{\infty}\frac{z^{\alpha-1}\ln^2 z}{1+z}\mathrm{d}z$，[1] 取块型积分围道，$0\le\arg\le 2\pi$。

积分围道内有一阶极点 $z=-1$，res $f(-1)=\pi^2\mathrm{e}^{\pi i\alpha}$.

故 $\displaystyle\oint_0^{\infty}\frac{z^{\alpha-1}\ln^2 x}{1+z}\mathrm{d}z=2\pi^3 i\mathrm{e}^{\pi i\alpha}$.

即 $\displaystyle\left[\int_{C_\delta}+\int_{C_R}\right]f(z)\mathrm{d}z+\int_{\delta}^{\infty}\frac{x^{\alpha-1}\ln^2 x}{1+x}\mathrm{d}x-\int_{\delta}^{\infty}\frac{\left(x\cdot\mathrm{e}^{2\pi i}\right)^{\alpha-1}\ln^2\left(x\cdot\mathrm{e}^{2\pi i}\right)}{1+x\cdot\mathrm{e}^{2\pi i}}\mathrm{d}x=2\pi^3 i\mathrm{e}^{\pi i\alpha}$.

由大圆弧引理有 $\displaystyle\int_{C_R}f(z)\mathrm{d}z=0$，由小圆弧引理有 $\displaystyle\int_{C_\delta}f(z)\mathrm{d}z=0$，

按照现在的取法，$\ln^2 z$ 项无法抵消，正确解答见注记

(4) 考虑积分 $\displaystyle\oint_0^{\infty}\frac{\ln^2 z}{(z+a)(z+b)}\mathrm{d}z$，取块型积分围道，$0\le\arg\le 2\pi$。

积分围道内有一阶极点 $z=-a$ 和 $z=-b$，res $f(-a)=\dfrac{(\ln a+\pi i)^2}{b-a}$，res $f(-b)=\dfrac{(\ln b+\pi i)^2}{a-b}$.

故 $\displaystyle\oint_0^{\infty}\frac{\ln^2 z}{(z+a)(z+b)}\mathrm{d}z=2\pi i\cdot\frac{\ln^2 a-\ln^2 b+2\pi i\left(\ln a-\ln b\right)}{b-a}$.

由大圆弧引理，$\displaystyle\int_{C_R}f(z)\mathrm{d}z=0$. 由小圆弧引理，$\displaystyle\int_{C_\delta}f(z)\mathrm{d}z=0$.

故 $\displaystyle\int_{\delta}^{\infty}f(z)\mathrm{d}z-\int_{\delta}^{\infty}f(z\mathrm{e}^{2\pi i})\mathrm{d}z=-4\pi i\int_{\delta}^{\infty}\frac{\ln x}{(x-a)(x-b)}\mathrm{d}x+4\pi^2\int_{\delta}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)(x-b)}$

$\displaystyle=2\pi i\cdot\frac{\ln^2 a-\ln^2 b+2\pi i\left(\ln a-\ln b\right)}{b-a}=-4\pi i\left(\frac{1}{2}\frac{\ln^2 b-\ln^2 a}{b-a}\right)+4\pi^2\left(\frac{\ln b-\ln a}{b-a}\right)$.

可以得到 $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\ln x}{(x+a)(x+b)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\frac{\ln^2 b-\ln^2 a}{b-a}$.

[1] 这里不需要取 $\displaystyle\oint_0^{\infty}\frac{z^{\alpha-1}\ln^2 z}{1+z}\mathrm{d}z$，$z^\alpha$ 是多值函数，可以直接取 $\displaystyle\oint_0^{\infty}\frac{z^{\alpha-1}\ln z}{1+z}\mathrm{d}z$ 分析，不用担心 $\ln z$ 抵消。

习题 29 的注记.

- (3) 考虑积分 $\oint_0^\infty \dfrac{z^{\alpha-1}\ln z}{1+z}\mathrm{d}z$，取块型积分围道，$0 \le \arg \le 2\pi$。

  积分围道内有一阶极点 $z=-1$，$\operatorname{res} f(-1) = -\pi i \mathrm{e}^{\pi i\alpha}$.

  故 $\oint_0^\infty \dfrac{z^{\alpha-1}\ln x}{1+z}\mathrm{d}z = 2\pi^2\mathrm{e}^{\pi i\alpha}$.

  即 $\left[\int_{C_\delta} + \int_{C_R}\right] f(z)\mathrm{d}z + \int_\delta^\infty \dfrac{x^{\alpha-1}\ln x}{1+x}\mathrm{d}x - \int_\delta^\infty \dfrac{(x\cdot\mathrm{e}^{2\pi i})^{\alpha-1}\ln\left(x\cdot\mathrm{e}^{2\pi i}\right)}{1+x\cdot\mathrm{e}^{2\pi i}}\mathrm{d}x = 2\pi^2\mathrm{e}^{\pi i\alpha}$.

  由大圆弧引理有 $\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = 0$，由小圆弧引理有 $\int_{C_\delta} f(z)\mathrm{d}z = 0$，

  故 $\left(1-\mathrm{e}^{2\pi i\alpha}\right)\int_0^\infty \dfrac{x^{\alpha-1}\ln x}{1+x}\mathrm{d}x - \int_0^\infty \dfrac{\mathrm{e}^{2\pi i\alpha}\cdot x^{\alpha-1}\cdot 2\pi i}{1+x}\mathrm{d}x = 2\pi^2\mathrm{e}^{\pi i\alpha}$.

  现计算积分 $\mathrm{e}^{2\pi i\alpha}\cdot 2\pi i\cdot\int_0^\infty \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x$，考虑 $\mathrm{e}^{2\pi i\alpha}\cdot 2\pi i\cdot\int_0^\infty \dfrac{z^{\alpha-1}}{1+z}\mathrm{d}z$，

  仍然取块型积分围道，围道内有一阶极点 $z=-1$，$\operatorname{res} f(-1) = -\mathrm{e}^{\pi i\alpha}$.

  故 $\mathrm{e}^{2\pi i\alpha}\cdot 2\pi i\cdot\left(1-\mathrm{e}^{2\pi i\alpha}\right)\int_0^\infty \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x = 4\pi^2\mathrm{e}^{3\pi i\alpha}$. 即 $\mathrm{e}^{2\pi i\alpha}\cdot 2\pi i\cdot\int_0^\infty \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x = \dfrac{4\pi^2\mathrm{e}^{3\pi i\alpha}}{1-\mathrm{e}^{2\pi i\alpha}}$.

  也就是说，$\int_0^\infty \dfrac{x^{\alpha-1}\ln x}{1+x}\mathrm{d}x = \dfrac{2\pi^2\mathrm{e}^{\pi i\alpha}}{1-\mathrm{e}^{2\pi i\alpha}} + \dfrac{4\pi^2\mathrm{e}^{3\pi i\alpha}}{\left(1-\mathrm{e}^{2\pi i\alpha}\right)^2} = -\pi^2\dfrac{\sin\pi\alpha}{\cos^2\pi\alpha}?$

- 其他解法：[1]

  注意到 $\dfrac{\partial}{\partial\alpha}\left(\dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}\right) = \dfrac{x^{\alpha-1}\ln x}{1+x} = \dfrac{\partial}{\partial\alpha}f(x)$.

  故 $I = \int_0^\infty \dfrac{\partial}{\partial\alpha}f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{\partial}{\partial\alpha}\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x$.

  现分析 $\int_0^\infty \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x$，容易得到其结果为 $\dfrac{\pi}{\sin\pi\alpha}$.

  故原积分结果为 $\dfrac{\partial}{\partial\alpha}\left(\dfrac{\pi}{\sin\pi\alpha}\right) = \dfrac{\sin\pi\alpha}{\cos^2\pi\alpha}$.

[1] 该解法来源于陈靖元同学。

7 第七章习题

习题 30. 将下列连乘积用 Γ 函数表示出来：

(1) $(2n)!!$;

(2) $(2n-1)!!$.

解答.

(1) $(2n)!! = (2n)(2n-2)(2n-4)\cdots 6\cdot 4\cdot 2 \ = 2^n\cdot n\cdot(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 \ = 2^n\Gamma(n+1)$.

(2) $(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots 5\cdot 3\cdot 1 \ = \dfrac{(2n)!}{(2n)!!} \ = \dfrac{\Gamma(2n+1)}{2^n\Gamma(n+1)}$.

习题 31. 计算下列积分：

$\displaystyle\int_0^\infty x^{-\alpha}\sin x\mathrm{d}x$, $0<\alpha<2$;

$\displaystyle\int_0^\infty x^{-\alpha}\cos x\mathrm{d}x$, $0<\alpha<1$.

解答. 考虑积分 $\displaystyle\oint_L z^{-\alpha}\mathrm{e}^{-z}\mathrm{d}z$，积分围道为第一象限的扇形，绕开原点，围道内无奇点。

$$\oint_0^\infty z^{-\alpha}\mathrm{e}^{-z}\mathrm{d}z = \int_\delta^\infty x^{-\alpha}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x + \int_{C_R} z^{-\alpha}\mathrm{e}^{-z}\mathrm{d}z + \int_\infty^\delta \left(y\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{2}}\right)^{-\alpha}\mathrm{e}^{-yi}i\mathrm{d}y + \int_{C_\delta} z^{-\alpha}\mathrm{e}^{-z}\mathrm{d}z = 0.$$

由小圆弧引理及 Jordan 引理有

$$\int_{C_\delta} z^{-\alpha}\mathrm{e}^{-z}\mathrm{d}z = 0, \quad \int_{C_R} z^{-\alpha}\mathrm{e}^{-z}\mathrm{d}z = 0.$$

故

$$\mathrm{e}^{\frac{\pi i(1-\alpha)}{2}}\int_0^\infty y^{-\alpha}\mathrm{e}^{-yi}\mathrm{d}y = \int_0^\infty x^{-\alpha}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \Gamma(1-\alpha).$$

于是可以得到，

$$\int_0^\infty x^{-\alpha}(\cos x - i\sin x)\mathrm{d}x = \left[\cos\frac{(1-\alpha)\pi}{2} - i\sin\frac{(1-\alpha)\pi}{2}\right]\Gamma(1-\alpha).$$

即

$$\int_0^\infty x^{-\alpha}\sin x\mathrm{d}x=\cos\frac{\pi\alpha}{2}\Gamma(1-\alpha),\quad \int_0^\infty x^{-\alpha}\cos x\mathrm{d}x=\sin\frac{\pi\alpha}{2}\Gamma(1-\alpha).$$

习题 32. 计算积分：$\displaystyle\int_{-1}^1(1-x)^p(1+x)^q\mathrm{d}x$, $\mathrm{Re}p>-1$, $\mathrm{Re}q>-1$.

解答. 做代换 $2u=1+x$，有 $1-x=2(1-u)$，故

$$\int_{-1}^1(1-x)^p(1+x)^q\mathrm{d}x=2^{p+q+1}\int_0^1(1-u)^pu^q\mathrm{d}u=2^{p+q+1}B(p+1,q+1).$$

8 第八章习题

习题 33. 求下列函数的 Laplace 换式：

(1) t^n,$n=0,1,2,\cdots$;

(2) t^α,$\mathrm{Re}\alpha>-1$;

(3) $\mathrm{e}^{\lambda t}\sin\omega t$,$\lambda>0,\ \omega>0$;

(4) $\displaystyle\int_t^\infty\frac{\cos\tau}{\tau}\mathrm{d}\tau$.

解答.

(1) $F(p)=\displaystyle\int_0^\infty t^n\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t=\frac{1}{p^{n+1}}\int_0^\infty(pt)^n\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}(pt)=\frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}}=\frac{n!}{p^{n+1}}$.

(2) $F(p)=\displaystyle\int_0^\infty t^\alpha\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t=\frac{1}{p^{n+1}}\int_0^\infty(pt)^\alpha\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}(pt)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{n+1}}$.

(3) $\sin\omega t=\dfrac{\mathrm{e}^{i\omega t}-\mathrm{e}^{-i\omega t}}{2i}$，故 $\mathrm{e}^{\lambda t}\sin\omega t=\dfrac{\mathrm{e}^{(i\omega+\lambda)t}-\mathrm{e}^{(-i\omega+\lambda)t}}{2i}=\dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{1}{p-i\omega-\lambda}-\dfrac{1}{p+i\omega-\lambda}\right)$,

即 $\dfrac{\omega}{(p+\lambda)^2+\omega^2}$.

(4) 由 $\displaystyle\int_0^\infty\frac{f(\tau)}{\tau}\mathrm{d}\tau\risingdotseq\frac{1}{p}\int_0^p F(q)\mathrm{d}q$ [1] 及 $\cos t=\dfrac{p}{p^2+1}$ 知

$$\int_t^\infty\frac{\cos\tau}{\tau}\mathrm{d}\tau\risingdotseq\frac{1}{p}\int_0^p F(q)\mathrm{d}q=\frac{1}{p}\int_0^p\frac{q}{q^2+1}\mathrm{d}q=\frac{1}{2p}\ln\left(p^2+1\right).$$

习题 33 的注记.

- $\displaystyle\int_0^\infty\frac{f(\tau)}{\tau}\mathrm{d}\tau\risingdotseq\int_0^\infty\mathrm{e}^{-pt}\left[\int_t^\infty\frac{f(\tau)}{\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}t$

  $\displaystyle=\int_0^\infty\frac{f(\tau)}{\tau}\left[\int_0^\tau\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\tau=\int_0^\infty\frac{f(\tau)}{\tau}\frac{1-\mathrm{e}^{-pt}}{p}\mathrm{d}\tau$

  $\displaystyle=\frac{1}{p}\int_0^\infty f(\tau)\int_0^p\mathrm{e}^{-qt}\mathrm{d}q\mathrm{d}\tau=\frac{1}{p}\int_0^p\int_0^\infty f(\tau)\mathrm{e}^{-qt}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}q=\frac{1}{p}\int_0^p F(q)\mathrm{d}q.$

[1] 证明见注记。

习题 34. 求下列 Laplace 换式的原函数:

(1) $\dfrac{a^3}{p(p+a)^3}$;

(2) $\dfrac{p^2+\omega^2}{(p^2-\omega^2)^2}$,$\omega>0$;

(3) $\dfrac{\mathrm{e}^{-p\tau}}{p^2}$,$\tau>0$.

解答.

(1) 对分式进行拆分有 $\dfrac{1}{p}-\dfrac{a^2}{(p+a)^3}-\dfrac{a}{(p+a)^2}-\dfrac{1}{p+a}$，又 $1\risingdotseq\dfrac{1}{p}$，$\mathrm{e}^{-at}\risingdotseq\dfrac{1}{p+a}$,

$F^{(n)}(p)\fallingdotseq(-t)^n f(t)$. 故原函数为 $1-\left(1+at+\dfrac{1}{2}a^2t^2\right)\mathrm{e}^{-at}$.

(2) $\dfrac{p^2+\omega^2}{(p^2-\omega^2)^2}=-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(\dfrac{p}{p^2+\omega^2}\right)$，又 $\cos\omega t\risingdotseq\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$，$F^{(n)}(p)\fallingdotseq(-t)^n f(t)$，

故原函数为 $t\cos\omega t$.

(3) 由延迟定理 $f(t-\tau)\risingdotseq\mathrm{e}^{-p\tau}F(p)$，$t>\tau$ 及 $t\risingdotseq\dfrac{1}{p}$，有 $\dfrac{\mathrm{e}^{-p\tau}}{p^2}\fallingdotseq t-\tau$，$t>\tau$.

习题 35. 利用 Laplace 变换计算积分: $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\cos cx\mathrm{d}x$, $a>0$, $b>0$, $c>0$.

解答. 由 $\cos cx=\dfrac{\mathrm{e}^{icx}+\mathrm{e}^{-icx}}{2}$，故原积分可化为

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{(-a+ic)x}+\mathrm{e}^{(-a-ic)x}-\mathrm{e}^{(-b+ic)x}-\mathrm{e}^{(-b-ic)x}}{x}\mathrm{d}x.$$

根据 $\displaystyle\int_0^\infty F(p)\mathrm{d}p=\int_0^\infty\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$，而且 $\mathrm{e}^{\alpha t}\risingdotseq\dfrac{1}{p-a}$. 有

$$\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\cos cx\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^\infty\left[\frac{1}{p+a-ic}+\frac{1}{p+a+ic}-\frac{1}{p+b-ic}-\frac{1}{p+b+ic}\right]\mathrm{d}p.$$

即

$$\frac{1}{2}\left[\ln\frac{(p+a)^2+c^2}{(p+b)^2+c^2}\right]\Bigg|_0^\infty=\frac{1}{2}\ln\frac{b^2+c^2}{a^2+c^2}.$$

习题 36. 用普遍反演公式求 Laplace 换式的原函数：$\dfrac{\mathrm{e}^{-p\tau}}{p^4+4\omega^4}$, $\tau>0$, $\omega>0$.

解答. 普遍反演公式 $f(t)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{s-i\infty}^{s+i\infty}F(p)\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p.$

选取 $p=s$ 划分的左边大半个圆为积分路径，补上 $\displaystyle\int_{C_R}\frac{1}{p^4+4\omega^4}\mathrm{d}p.$

由补充的 Jordan 引理，

$$\int_{C_R}\frac{\mathrm{e}^{p(t-\tau)}}{p^4+4\omega^4}\mathrm{d}p=0.$$

故

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty}\frac{\mathrm{e}^{p(t-\tau)}}{p^4+4\omega^4}\mathrm{d}p=\frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{\mathrm{e}^{p(t-\tau)}}{p^4+4\omega^4}\mathrm{d}p=\sum\mathrm{res}\left[\frac{\mathrm{e}^{p(t-\tau)}}{p^4+4\omega^4}\right].$$

积分区域内有一阶极点 $p=-\sqrt{2}\omega\mathrm{e}^{-\frac{\pi i}{4}}$，$p=\sqrt{2}\omega\mathrm{e}^{-\frac{\pi i}{4}}$，$p=-\sqrt{2}\omega\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{4}}$，$p=\sqrt{2}\omega\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{4}}$.

故原函数为

$$\frac{1}{4\omega^3}\left[\cosh\omega(t-\tau)\sin\omega(t-\tau)-\sinh\omega(t-\tau)\cos\omega(t-\tau)\right]\eta(t-\tau).$$

9 第九章习题

习题 37. 求方程 $w''-z^2w=0$ 在 $z=0$ 领域内的两个幂级数解。

解答. 显然 $z=0$ 是方程的常点，故解的形式为 Taylor 级数，设 $w=\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^k$, $|z|<1$.

代入方程有

$$\sum_{n=0}^{\infty}(k+1)(k+2)c_{k+2}z^k-\sum_{n=0}^{\infty}c_kz^{k+2}=0.$$

即

$$2c_2+6c_3z+\sum_{k=2}^{\infty}\left[(k+1)(k+2)c_{k+2}-c_{k-2}\right]z^k=0.$$

故 $c_2=c_3=0$, $(k+1)(k+2)c_{k+2}-c_{k-2}=0$.

$$c_{4n}=\frac{1}{4n(4n-1)}\frac{1}{[4(n-1)][4(n-1)-1]}\cdots\frac{1}{4*(4-1)}c_0=\frac{1}{4^{2n}}\frac{1}{n!}\frac{1}{\left(n-\frac{1}{4}\right)\left[(n-1)-\frac{1}{4}\right]\cdots\left(1-\frac{1}{4}\right)}c_0.$$

类似地，得到 $c_{4n+1}=\dfrac{\Gamma(\frac{5}{4})}{n!\Gamma(n+\frac{5}{4})}c_1$，$c_{4n+2}=c_{4n+3}=0$.

故原方程的级数解为

$$w_1=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\frac{3}{4})}{n!\Gamma(n+\frac{3}{4})}\left(\frac{z}{2}\right)^{4n},\quad w_2=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\frac{5}{4})}{n!\Gamma(n+\frac{5}{4})}\left(\frac{z}{2}\right)^{4n+1}.$$

习题 38. 求方程 $z^2(1-z)w''+z(1-3z)w'-(1+z)w=0$ 在 $z=0$ 领域内的两个幂级数解。

解答. $z=0$ 是正则奇点，解的形式为

$$w_1(z)=z^{\rho_1}\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^k,\quad w_2(z)=gw_1(z)\ln z+z^{\rho_2}\sum_{k=0}^{\infty}d_kz^k.$$

将 $w_1(z)$ 代入方程有

$$\left(z^2-z^3\right)\sum_{k=0}^{\infty}(k+\rho)(k+\rho-1)c_kz^{k+\rho-2}+\left(z-3z^2\right)\sum_{k=0}^{\infty}(k+\rho)c_kz^{k+\rho-1}-(1+z)\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^{k+\rho}=0.$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+\rho)(k+\rho-1)+(k+\rho)-1\right]c_kz^{k+\rho}-\sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+\rho)(k+\rho-1)+3(k+\rho)+1\right]c_kz^{k+\rho+1}=0.$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[k^2+2k\rho+\rho^2-1\right]c_k z^{k+\rho}-\sum_{k=0}^{\infty}\left[k^2+2k\rho+\rho^2+2k+2\rho+1\right]c_k z^{k+\rho+1}=0.$$

消去 z^ρ 项有

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[k^2+2k\rho+\rho^2-1\right]c_k z^{k}-\sum_{k=0}^{\infty}\left[k^2+2k\rho+\rho^2+2k+2\rho+1\right]c_k z^{k+1}=0.$$

令 $k=0$，比较 z^0 系数可得 $\rho=\pm 1$.

再比较 z^m 项系数有

$$\left[m^2+2m\rho+\rho^2-1\right]c_m-\left[(m-1)^2+2(m-1)\rho+\rho^2+2(m-1)+2\rho+1\right]c_{m-1}=0.$$

即

$$c_m=\frac{(m-1)^2+2(m-1)\rho+\rho^2+2(m-1)+2\rho+1}{m^2+2m\rho+\rho^2-1}c_{m-1}$$

当 $\rho=1$ 时，$c_m=\dfrac{(m+1)^2}{m(m+2)}c_{m-1}$，故 $c_k=\dfrac{2\left[(k+1)!\right]^2}{k!(k+2)!}c_0=\dfrac{2k+2}{k+2}c_0$.

当 $\rho=-1$ 时，$c_m=\dfrac{(m-1)^2}{m(m-2)}c_{m-1}$，故 $c_k=0,\ k\neq 0$.

故

$$w_1(z)=\frac{1}{z},\quad w_2(z)=\frac{1}{z}\ln(1-z)+\frac{1}{1-z}.$$

习题 38 的注记. 其实不是很懂为什么只取 $\rho=-1$。

10 第十章习题

习题 39. 证明 δ 函数的下列性质：

(1) $\delta(x)=\delta(-x)$;

(2) $x\delta(x)=0$;

(3) $g(x)\delta(x)=g(0)\delta(x)$;

(4) $x\delta'(x)=-\delta(x)$;

(5) $\delta(ax)=\dfrac{1}{a}\delta(x)$, $a>0$;

(6) $g(x)\delta'(x)=g(0)\delta'(x)-g'(x)\delta(x)$;

(7) $\delta(x^2-a^2)=\dfrac{1}{2a}[\delta(x-a)+\delta(x+a)]$, $a>0$.

解答. δ 函数应该在积分意义下去理解。

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(-x)\mathrm{d}x=f(0)$，故 $\delta(x)=\delta(-x)$.

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\delta(x)\mathrm{d}x=xf(x)|_{x=0}=0$，故 $x\delta(x)=0$.

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\delta(x)\mathrm{d}x=g(x)f(x)|_{x=0}=g(0)f(0)$，故 $g(x)\delta(x)=g(0)\delta(x)$.

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x\delta'(x)\mathrm{d}x=x\delta(x)\Big|_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\mathrm{d}x=-f(0)$，故 $x\delta'(x)=-\delta(x)$.

(5) 令 $t=ax$，有 $x=\dfrac{1}{a}t$，故 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(ax)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{a}f(0)$，即 $\delta(ax)=\dfrac{1}{a}\delta(x)$.

(6) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\delta'(x)\mathrm{d}x=\delta(x)g(x)f(x)\Big|_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty} g'(x)f(x)\delta(x)\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f'(x)\delta(x)\mathrm{d}x$，

故 $g(x)\delta'(x)=g(0)\delta'(x)-g'(x)\delta(x)$.

(7) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x^2-a^2)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0} f(x)\delta(x^2-a^2)\mathrm{d}x+\int_{0}^{\infty} f(x)\delta(x^2-a^2)\mathrm{d}x$

$$= -\frac{1}{2}\int_{\infty}^{0}\delta(u-a^2)f(-\sqrt{u})\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}} + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}\delta(u-a^2)f(\sqrt{u})\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}}$$

$$= \frac{1}{2a}\left[f(-a)+f(a)\right]$$

$$= \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\delta(x+a)+\delta(x-a)\right]f(x)\mathrm{d}x.$$

故 $\delta(x^2-a^2) = \dfrac{1}{2a}[\delta(x-a)+\delta(x+a)]$.

11 第十一章习题

习题 40. 在弦的横振动问题中，若弦受到一与速度成正比（比例系数为 $-\alpha$）的阻尼，试导出弦的有阻尼振动方程。又若除了阻尼力之外，弦还受到与弦的位移成正比（比例系数为 $-k$）的回复力，则此时弦的振动满足的方程是什么?

解答. 自由弦振动方程为

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0.$$

存在阻尼时，方程应为

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\alpha\frac{\partial u}{\partial t}.$$

在考虑弹性回复力，方程变为

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\alpha\frac{\partial u}{\partial t}+ku.$$

习题 41. 一长为 l、横截面积为 S 的均匀弹性杆，已知一端（$x=0$）固定，另一端（$x=l$) 在杆轴方向上受拉力 F 的作用而达到平衡。在 $t=0$ 时，撤去外力 F。试列出杆的纵振动所满足的方程、边界条件和初始条件。

解答. 假设在垂直杆长方向的任一截面上各点的振动情况相同 $u(x,t)$ 表示杆上 x 处在 t 时刻相对于平衡位置的位移。取杆上长为 dx 的一小段，用 $P(x,t)$ 表示应力，由牛顿第二定律，

$$\left[P(x+dx,t)-P(x,t)\right]S=dm\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\quad \text{代入}\quad dm=\rho S dx\quad \text{得}\quad \frac{\partial P}{\partial x}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

由 Hooke 定律 $P=E\frac{\partial u}{\partial x}$ 可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0,\quad \text{其中}\quad a=\sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

取右端长为 ε 的一小段，由牛顿第二定律有

$$F(t)-ES\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l-\varepsilon}=\rho\varepsilon S\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{x=l-\alpha\varepsilon}\quad (0<\alpha<1),$$

令 $\varepsilon \to 0$ 有 $F(t) - ES\,\frac{\partial u}{\partial x}\big|_{x=l} = 0$。当 $t > 0$ 时 $F(t) = 0$，所以 $\frac{\partial u}{\partial x}\big|_{x=l} = 0$。由于左端点固定，故有 $u|_{x=0} = 0$。令 (a) 式中 $t = 0$ 有 $F - ES\,\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{\substack{x=l\\t=0}} = 0$。因为平衡时应力处处相等，所以该式对于任意 $x \in [0, l]$ 都成立，即

$$F - ES\,\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{t=0} = 0, \quad \text{对} \quad x \quad \text{积分可得} \quad u|_{t=0} = \frac{F}{ES}x \quad (\text{注意到 } \frac{F}{ES}x \ (\text{注意到 } u|_{x=0} = 0)$$

初始时处于平衡状态，各处速度为 0，即 $\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$。综上该定解问题为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \\ u|_{x=0} = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = 0 \\ u|_{t=0} = \dfrac{F}{ES}x,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

习题 42. 一长为 l 的金属细杆（可近似地看成是一维的），通有稳定电流 I。如果杆的两端（$x = 0$ 和 $x = l$）均按 Newton 冷却定律与外界交换热量。外界温度为 u_0，初始时杆的温度为 $u_0(1 - \dfrac{2x}{l})^2$。试写出杆上温度场所满足的方程、边界条件和初始条件，设金属的电阻为 R。

解答. 由于热功率为 I^2R，所以单位时间单位体积产生热量 $\dfrac{I^2R}{lS}$。所以热传导方程为

$$\rho c\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{I^2R}{lS},$$

其中 ρ 为体密度，c 为比热。若用 λ 表示线密度，则有 $\rho = \dfrac{\lambda}{S}$，所以方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\kappa S}{\lambda c}\nabla^2 u = \frac{I^2R}{\lambda cl}.$$

该定解问题为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\kappa S}{\lambda c}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{I^2R}{\lambda cl} \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = u_0, \quad u|_{t=0} = u_0(1 - \dfrac{2x}{l})^2 \end{cases}$$

习题 43. 在铀块中，除了中子的扩散运动外，还存在中子的吸收和增值过程。设在单位时间内、单位体积中吸收和增值的中子数均正比于该时刻、该处的中子浓度 $u(\boldsymbol{r}, t)$，因而净增中子数可表为 $\alpha u(\boldsymbol{r}, t)$，$\alpha$ 为比例常数。试导出 $u(\boldsymbol{r}, t)$ 所满足的偏微分方程。

解答. 用 q 表示单位时间流过某单位面积的中子数，有 $q=-D\nabla u$。

取一个六面体 $[x,x+\Delta x]\times[y,y+\Delta y]\times[z,z+\Delta z]$,

Δt时间内沿x方向流入该六面体的中子数为

$$\left(q_x\bigg|_x-q_x\bigg|_{x+\Delta x}\right)\Delta y\Delta z\Delta t=D\left(\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x+\Delta x}-\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_x\right)\Delta y\Delta z\Delta t=D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t,$$

同样可得沿 y,z 方向流入该六面体的中子数分别为 $D\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t$ 和 $D\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t$。

六面体内中子数一共增加 $\Delta u\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t$，增加数应等于流入中子数加上净增中子数，即

$$\Delta u\Delta x\Delta y\Delta z=D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t+\alpha u\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t.$$

两边同除 $\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t$，令 $\Delta t\to 0$ 得

$$\frac{\partial u}{\partial t}=D\nabla^2 u+\alpha u.$$

12　第十三章习题

习题 44. 一长为 l、横截面积为 S 的均匀弹性杆，已知一端（$x=0$）固定，另一端（$x=l$) 在杆轴方向上受拉力 F 的作用而达到平衡。在 $t=0$ 时，撤去外力 F。试列出杆的纵振动所满足的方程、边界条件和初始条件并求解。

解答. 由习题 41 知

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \\ u\big|_{x=0} = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = 0 \\ u\big|_{t=0} = \dfrac{F}{ES}x,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

分离变量法，设 $u(x,t)=X(x)T(t)$, 代入方程有 $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = \dfrac{1}{a^2}\dfrac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda.$

本征值问题为

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0,\ X'(l) = 0 \end{cases}$$

解出该本征值问题:

$$\lambda_n = \left(\frac{2n+1}{2l}\pi\right)^2, \quad X_n(x) = \sin\left(\frac{2n+1}{2l}\pi x\right)$$

解出 $T_n(t) = A_n \sin\left(\dfrac{2n+1}{2l}a\pi t\right) + B_n \cos\left(\dfrac{2n+1}{2l}a\pi t\right)$,

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \sin\left(\frac{2n+1}{2l}a\pi t\right) + B_n\cos\left(\frac{2n+1}{2l}a\pi t\right)\right)\sin\left(\frac{2n+1}{2l}\pi x\right)$$

由 $u|_{t=0} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{2n+1}{2l}\pi x\right) = \frac{F}{ES}x$ 可定出

$$B_n = \frac{2F}{lES}\int_0^l x\sin\left(\frac{2n+1}{l}\pi x\right)dx = \frac{8Fl}{ES\pi^2}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

由 $\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{2n+1}{2l}a\pi \sin\left(\frac{2n+1}{2l}\pi x\right) = 0$ 可定出 $A_n = 0$.

所以 $u(x,t) = \dfrac{8Fl}{ES\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\cos\left(\frac{2n+1}{2l}a\pi t\right)\sin\left(\frac{2n+1}{2l}\pi x\right)$.

习题 45. 求解细杆的导热问题:
杆长 l，两端 $(x=0,\ l)$ 均保持为零度，初始温度分布为 $u|_{t=0}=b\dfrac{x(l-x)}{l^2}$.

解答. 可得本征函数 $X_n(x)=\sin\left(\dfrac{n\pi}{l}x\right)$,

解出 $T_n(t)=A_ne^{-\kappa\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2t}$，$u=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\mathrm{e}^{-\kappa\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2t}$.

代入初始条件，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)=\frac{b}{l^2}x(l-x)$,

所以

$$A_n=\frac{2b}{l^3}\int_0^l x(l-x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\mathrm{d}x=\frac{4b}{\pi^3n^3}\left[1-(-1)^n\right].$$

则 $A_{2k}=0$，$A_{2k+1}=\dfrac{8b}{\pi^3(2k+1)^3}$.

所以 $u(x,t)=\dfrac{8b}{\pi^3}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{l}x\right)e^{-\kappa\frac{(2k+1)^2\pi^2}{l^2}t}$.

习题 46. 求解:

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=bx(l-x),$$

$$u|_{x=0}=0,\ u|_{x=l}=0,$$

$$u|_{t=0}=0,\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=0.$$

解答. 设方程一个特解为 $v(x)$，则 $v''=-\dfrac{b}{a^2}x(l-x)$，使之满足齐次边界条件，解之得

$$v=\frac{b}{12a^2}x(x^3-2lx^2+l^3).$$

设 $u=v+w$，则 w 满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2w}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2w}{\partial x^2}=0\\ w|_{x=0}=0,\quad w|_{x=l}=0\\ w|_{t=0}=-\dfrac{b}{12a^2}x(x^3-2lx^2+l^3),\quad \left.\dfrac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0}=0\end{cases}$$

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\sin\left(\frac{n\pi}{l}at\right)+B_n\cos\left(\frac{n\pi}{l}at\right)\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

其中 $A_n=0,\quad B_n=-\dfrac{b}{6a^2l}\displaystyle\int_0^l x(x^3-2lx^2+l^3)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\mathrm{d}x=\frac{4l^4b}{n^5\pi^5a^2}[(-1)^n-1],$

故

$$u(x,t)=\frac{b}{12a^2}x(x^3-2lx^2+l^3)-\frac{8l^4b}{\pi^5a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^5}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{l}at\right)\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{l}x\right).$$

习题 47. 一细长杆，$x=0$ 端固定，$x=l$ 端受周期力 $A\sin\omega t$ 作用。设初位移和初速度均为零，求解此杆的纵振动问题。

解答. 据题，列出微分方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}=0\\ u|_{x=0}=0,\quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=\dfrac{A}{ES}\sin\omega t\\ u|_{t=0}=0,\quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0\end{cases}$$

设 $v(x,t)=f(x)\sin\omega t$ 满足方程和边界条件，则

$$\begin{cases}f''(x)+\dfrac{\omega^2}{a^2}f(x)=0\\ f(0)=0,\quad f'(l)=\dfrac{A}{ES}\end{cases}$$

解得

$$v(x,t)=\frac{Aa}{ES\omega}\frac{\sin\frac{\omega}{a}x}{\cos\frac{\omega}{a}l}\sin\omega t.$$

令 $u=v+w$，则 w 满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2w}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2w}{\partial x^2}=0\\ w|_{x=0}=0,\quad \left.\dfrac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=l}=0\\ w|_{t=0}=0,\quad \left.\dfrac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0}=-\dfrac{Aa}{ES\cos\frac{\omega}{a}l}\sin\frac{\omega}{a}x\end{cases}$$

可得 $w=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n\sin\frac{(2n+1)}{2l}a\pi t+B_n\cos\frac{(2n+1)}{2l}a\pi t\right)\sin\frac{(2n+1)}{2l}\pi x,$

其中 $B_n=0$,

$$A_n=-\frac{4A}{\pi ES(2n+1)\cos\frac{\omega}{a}l}\int_0^l \sin\frac{\omega}{a}x\sin\frac{(2n+1)}{2l}\pi x\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2A}{\pi ES(2n+1)\cos\frac{\omega}{a}l}\int_0^l\left[\cos\left(\frac{\omega}{a}+\frac{(2n+1)}{2l}\pi\right)x-\cos\left(\frac{\omega}{a}-\frac{(2n+1)}{2l}\pi\right)x\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2A}{\pi ES(2n+1)\cos\frac{\omega}{a}l}\left[\frac{(-1)^n}{\frac{\omega}{a}+\frac{(2n+1)}{2l}\pi}\cos\frac{\omega}{a}l-\int_0^l\cos\left(\frac{\omega}{a}-\frac{(2n+1)}{2l}\pi\right)x\,\mathrm{d}x\right].$$

若不存在正整数 m，使得 $\dfrac{\omega}{a}=\dfrac{2m+1}{2l}\pi$，则

$$A_n=\frac{2A}{\pi ES(2n+1)\cos\frac{\omega}{a}l}\left[\frac{(-1)^n}{\frac{\omega}{a}+\frac{2n+1}{2l}\pi}\cos\frac{\omega}{a}l+\frac{(-1)^n}{\frac{\omega}{a}-\frac{2n+1}{2l}\pi}\cos\frac{\omega}{a}l\right]$$

$$=\frac{4A\omega}{\pi ESa(2n+1)}\frac{(-1)^n}{\left(\frac{\omega}{a}\right)^2-\left(\frac{2n+1}{2l}\pi\right)^2}.$$

所以

$$u(x,t)=\frac{Aa}{ES\omega}\frac{\sin\frac{\omega}{a}x}{\cos\frac{\omega}{a}l}\sin\omega t+\frac{4A\omega}{\pi ESa}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\frac{1}{\left(\frac{\omega}{a}\right)^2-\left(\frac{2n+1}{2l}\pi\right)^2}\sin\frac{2n+1}{2l}a\pi t\sin\frac{2n+1}{2l}\pi x.$$

若存在正整数 m，使得 $\dfrac{\omega}{a}=\dfrac{2m+1}{2l}\pi$,

则当 $n\neq m$ 时，仍有

$$A_n=\frac{4A\omega}{\pi ESa(2n+1)}\frac{(-1)^n}{\left(\frac{\omega}{a}\right)^2-\left(\frac{2n+1}{2l}\pi\right)^2}.$$

当 $n=m$ 时,

$$A_m=\frac{Aa}{ESl\omega\cos\frac{\omega}{a}l}\left[\frac{(-1)^m a}{2\omega}\cos\frac{\omega}{a}l-l\right].$$

故

$$u(x,t)=\frac{Aa}{ES\omega}\frac{\sin\frac{\omega}{a}x}{\cos\frac{\omega}{a}l}\sin\omega t+A_m\sin\omega t\sin\frac{\omega}{a}x+\sum_{\substack{n=0\\n\neq m}}^{\infty}A_n\sin\frac{2n+1}{2l}a\pi t\sin\frac{2n+1}{2l}\pi x$$

$$=\frac{Aa}{ES\omega}\frac{\sin\frac{\omega}{a}x}{\cos\frac{\omega}{a}l}\sin\omega t+\frac{Aa}{ESl\omega\cos\frac{\omega}{a}l}\left[\frac{(-1)^m a}{2\omega}\cos\frac{\omega}{a}l-l\right]\sin\frac{\omega}{a}x\sin\omega t$$

$$+\frac{4A\omega}{\pi ESa}\sum_{\substack{n=0\\n\neq m}}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\frac{1}{\left(\frac{\omega}{a}\right)^2-\left(\frac{2n+1}{2l}\pi\right)^2}\sin\frac{2n+1}{2l}a\pi t\sin\frac{2n+1}{2l}\pi x$$

$$= \frac{(-1)^m A a^2}{2ESl\omega^2}\sin\frac{\omega}{a}x\sin\omega t + \frac{4A\omega}{\pi ESa}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\frac{1}{\left(\frac{\omega}{a}\right)^2-\left(\frac{2n+1}{2l}\pi\right)^2}\sin\frac{2n+1}{2l}a\pi t\sin\frac{2n+1}{2l}\pi x.$$

习题 48. 求解下列定解问题:

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,$$

$$u|_{x=0}=A\mathrm{e}^{i\omega t},\ u|_{x=l}=0,$$

$$u|_{t=0}=0.$$

解答. 假设解的形式为 $u(x,t)=X(x)T(t)$, 代入偏微分方程得到

$$X(x)\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=\kappa T(t)\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}.$$

两边同时除以 $\kappa X(x)T(t)$ 得到:

$$\frac{1}{\kappa T(t)}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{X(x)}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}.$$

左边只依赖于 t，右边只依赖于 x，两边必须等于一个常数，记为 $-\lambda$

$$\frac{1}{\kappa T(t)}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=-\lambda,\quad \frac{1}{X(x)}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}=-\lambda.$$

得到两个常微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}+\lambda X=0.$$

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}+\kappa\lambda T=0.$$

首先解 $X(x)$, 边界条件 $u(0,t)=A\mathrm{e}^{i\omega t}$ 和 $u(l,t)=0$ 转化为 $X(0)=A$ 和 $X(l)=0$.

方程 $\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}+\lambda X=0$ 的一般解为:

$$X(x)=C_1\cos(\sqrt{\lambda}x)+C_2\sin(\sqrt{\lambda}x).$$

应用边界条件 $X(l)=0$，得到：$C_1\cos(\sqrt{\lambda}l)+C_2\sin(\sqrt{\lambda}l)=0$.

如果 $C_1\neq 0$，则 $\cos(\sqrt{\lambda}l)=0$，即 $\sqrt{\lambda}l=\frac{(2n-1)\pi}{2}$, $n=1,2,3,\cdots$. 因此，$\lambda=\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}\right)^2$.

如果 $C_1=0$，则 $C_2\neq 0$ 并且 $\sin(\sqrt{\lambda}l)=0$，即 $\sqrt{\lambda}l=n\pi$ 对于 $n=1,2,3,\cdots$. 因此,$\lambda=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$.

然而，$C_1 \neq 0$ 的情况不满足 $X(0) = A$，故排除。故

$$X_n(x) = C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

接下来解 $T(t)$ 的方程。方程 $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \kappa\lambda T = 0$ 的一般解为

$$T_n(t) = D_n e^{-\kappa\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}.$$

因此，热传导方程的一般解为

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) e^{-\kappa\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}.$$

若满足 C 满足初始条件 $u(x,0) = 0$，有：

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

即对于所有 n 有 $B_n = 0$ 。需要满足边界条件 $u(0,t) = A\mathrm{e}^{i\omega t}$. 使用非齐次边界条件的方法。假设解的形式为：

$$u(x,t) = Ae^{i\omega t} \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) e^{-\kappa\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}.$$

若满足初始条件 $u(x,0) = 0$，得到：

$$0 = A \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

即 $B_1 = -A$ 并且 $B_n = 0$ 对于 $n \neq 1$。故解为：

$$u(x,t) = Ae^{i\omega t} \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) - A \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) e^{-\kappa\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 t}.$$

简化后得到：

$$u(x,t) = A \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \left(e^{i\omega t} - e^{-\kappa\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 t}\right).$$

13　第十五章习题

习题 49. 证明：

$$\int_x^1 \mathrm{P}_k(x)\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x = (1-x^2)\frac{\mathrm{P}_k'(x)\mathrm{P}_l(x)-\mathrm{P}_l'(x)\mathrm{P}_k(x)}{k(k+1)-l(l+1)}, \quad k\neq l.$$

解答.　由于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\left(1-t^2\right)\left[\mathrm{P}_k'(t)\mathrm{P}_l(t)-\mathrm{P}_l'(t)\mathrm{P}_k(t)\right]}{k(k+1)-l(l+1)}$$

$$=\frac{1}{k(k+1)-l(l+1)}\left\{-2t\left[\mathrm{P}'k(t)\mathrm{P}_l(t)-\mathrm{P}_l'(t)\mathrm{P}_k(t)\right]+\left(1-t^2\right)\left[\mathrm{P}_k''(t)\mathrm{P}_l(t)-\mathrm{P}_l''(t)\mathrm{P}_l(t)\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{k(k+1)-l(l+2)}\left\{\mathrm{P}_l(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-t^2\right)\mathrm{P}_k'(t)\right]-\mathrm{P}_k(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-t^2\right)\mathrm{P}_l'(t)\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{k(k+1)-l(l+1)}\left[-\mathrm{P}_l(t)k(k+1)\mathrm{P}_k(t)+\mathrm{P}_k(t)l(l+1)\mathrm{P}_l(t)\right]$$

$$=-\mathrm{P}_l(t)\mathrm{P}_k(t).$$

积分可得到

$$\int_x^1 \mathrm{P}_k(x)\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x = (1-x^2)\frac{\mathrm{P}_k'(x)\mathrm{P}_l(x)-\mathrm{P}_l'(x)\mathrm{P}_k(x)}{k(k+1)-l(l+1)}.$$

习题 50. 计算下列积分：

(1) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{P}_k(x)\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int_{-1}^1 x\mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_{l+1}(x)\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_{-1}^1 x^2\mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_{l+2}(x)\mathrm{d}x$.

解答.

(1) 当 $k+l$ 为偶数时，

$$\int_0^1 \mathrm{P}_k(x)\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \mathrm{P}_k(x)\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2l+1}\delta_{kl}.$$

当 $k+l$ 为奇数时，设 $k=2n$, $l=2m+1$，令习题 50 中 $x=0$ 得

$$\int_0^1 \mathrm{P}_k(t)\mathrm{P}_l(t)\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{P}'_{2n}(0)\mathrm{P}_{2m+1}(0)-\mathrm{P}'_{2m+1}(0)\mathrm{P}_{2n}(0)}{2n(2n+1)-(2m+1)(2m+2)}$$

$$= \frac{(-1)^{m+n}}{(2m+1)(2m+2)-2n(2n+1)}\frac{(2n)!(2m+1)!}{2^{2(m+n)}(m!)^2(n!)^2}.$$

(2) 由递推关系，$x\mathrm{P}_k(x) = \dfrac{k+1}{2k+1}\mathrm{P}_{k+1}(x) + \dfrac{k}{2k+1}\mathrm{P}_{k-1}(x)$，原积分

$$\int_{-1}^1 x\mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_{l+1}(x)\mathrm{d}x = \frac{k+1}{2k+1}\int_{-1}^1 \mathrm{P}^2_{k+1}(x)\mathrm{d}x + \frac{k}{2k+1}\int_{-1}^1 \mathrm{P}_{k-1}(x)\mathrm{P}_{k+1}(x)\mathrm{d}x = \frac{2(k+1)}{(2k+1)(2k+3)}.$$

(3) $x\mathrm{P}_{k+2}(x) = \dfrac{k+3}{2k+5}\mathrm{P}_{k+3}(x) + \dfrac{k+2}{2k+5}\mathrm{P}_{k+1}(x)$，原积分

$$\int_{-1}^1 x^2\mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_{l+2}(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \left[\frac{k+1}{2k+1}\mathrm{P}_{k+1}(x) + \frac{k}{2k+1}\mathrm{P}_{k-1}(x)\right]\left[\frac{k+3}{2k+5}\mathrm{P}_{k+3}(x) + \frac{k+2}{2k+5}\mathrm{P}_{k+1}(x)\right]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{(2k+1)(2k+5)}\int_{-1}^1 \mathrm{P}^2_{k+1}(x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2(k+1)(k+2)}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)}.$$

习题 51. 将下列定义在 $[-1,1]$ 上的函数按 Legendre 多项式展开：

(1) $f(x) = x^2$;

(2) $f(x) = \sqrt{1-2xt+t^2}$;

(3) $f(x) = |x|$;

(4) $f(x) = \dfrac{1}{2}(x+|x|)$.

解答.

(1) 设 $f(x) = a_2\mathrm{P}_2(x) + a_0\mathrm{P}_0(x)$, 有 $a_2 = \dfrac{5}{2}\displaystyle\int_{-1}^1 x^2\mathrm{P}_2(x)\mathrm{d}x = \dfrac{2}{3}$, $a_0 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^1 x^2\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}$,

故 $f(x)=\dfrac{2}{3}\mathrm{P}_2(x)+\dfrac{1}{3}\mathrm{P}_0(x)$.

(2) 记 $F(x,u)=\sqrt{1-2xu+u^2}$，则 $\dfrac{\partial F(x,u)}{\partial u}=\dfrac{u-x}{\sqrt{1-2xu+u^2}}=\sum\limits_{l=0}^{\infty}\mathrm{P}_l(x)u^{l+1}-\sum\limits_{l=0}^{\infty}x\mathrm{P}_l(x)u^l$

$$=\sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{P}_l(x)u^{l+1}-\mathrm{P}_1(x)-\sum_{l=1}^{\infty}\frac{l+1}{2l+1}\mathrm{P}_{l+1}(x)u^l-\sum_{l=0}^{\infty}\frac{l}{2l+1}\mathrm{P}_{l-1}(x)u^l$$

$$=\sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{P}_l(x)u^{l+1}-\mathrm{P}_1(x)-\sum_{l=2}^{\infty}\frac{l}{2l-1}\mathrm{P}_l(x)u^{l-1}-\sum_{l=0}^{\infty}\frac{l+1}{2l+3}\mathrm{P}_l(x)u^{l+1}$$

$$=\frac{2}{3}u\mathrm{P}_0(x)+\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{l+2}{2l+3}u^{l+1}-\frac{l}{2l-1}u^{l-1}\right)\mathrm{P}_l(x).$$

两边对 u 从 0 积到 t 得

$$f(x)=\left(\frac{1}{3}t^2+1\right)\mathrm{P}_0(x)+\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{t^{l+2}}{2l+3}-\frac{t^l}{2l-1}\right)\mathrm{P}_l(x)=\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{t^{l+2}}{2l+3}-\frac{t^l}{2l-1}\right)\mathrm{P}_l(x).$$

(3) $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_{2k}\mathrm{P}_{2k}(x)$.

$$a_{2k}=\frac{4k+1}{2}\int_{-1}^{1}|x|\mathrm{P}_{2k}(x)\mathrm{d}x=(4k+1)\int_0^1 x\mathrm{P}_{2k}(x)\mathrm{d}x=(4k+1)\int_0^1\mathrm{P}_1(x)\mathrm{P}_{2k}(x)\mathrm{d}x,$$

由题 50 得 $a_{2k}=\dfrac{(-1)^{k+1}(2k)!(4k+1)}{2^{2k+1}(k!)^2(k+1)(2k-1)}$.

即 $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-)^{k+1}(2k)!(4k+1)}{2^{2k+1}(k!)^2(k+1)(2k-1)}\mathrm{P}_{2k}(x)$.

(4) $f(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}|x|=\dfrac{1}{2}\mathrm{P}_1(x)+\dfrac{1}{2}|x|=\dfrac{1}{2}\mathrm{P}_1(x)+\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}(2k)!(4k+1)}{2^{2(k+1)}(k!)^2(k+1)(2k-1)}\mathrm{P}_{2k}(x)$.

习题 52. 求解空心球壳内的定解问题：

$$\nabla^2u=0,\ a<r<b,$$

$$u|_{r=a}=u_0,$$

$$u|_{r=b}=u_0\cos^2\theta.$$

解答. 球坐标下的通解形式有

$$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l+\frac{B_l}{r^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta),$$

$$u|_{r=a}=\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l a^l+\frac{B_l}{a^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta)=u_0P_0(\cos\theta),$$

$$u|_{r=b}=\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l b^l+\frac{B_l}{b^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta)=u_0\cos^2\theta=\frac{1}{3}u_0P_0(\cos\theta)+\frac{2}{3}u_0P_2(\cos\theta).$$

比较系数得 $A_0=\dfrac{b-3a}{3(b-a)}u_0$, $B_0=\dfrac{2ab}{3(b-a)}u_0$, $A_2=\dfrac{2b^3}{3(b^5-a^5)}u_0$, $B_2=\dfrac{2a^5b^3}{3(a^5-b^5)}u_0$.

其他 $A_l=0$, $B_l=0$, 所以

$$u(r,\theta)=\frac{b-3a}{3(b-a)}u_0+\frac{2b^3a}{3(b-a)}\frac{u_0}{r}+\frac{2b^3a^2u_0}{3(b^5-a^5)}\left[\left(\frac{r}{a}\right)^2-\left(\frac{a}{r}\right)^3\right]P_2(\cos\theta).$$