DM - De Mathématiques Financières

Audric Dongfack

Avril 2020

1 Sur la structure des prix de Calls

Question 1 : Bornes des prix de calls

Soit $T, K \in \mathbb{R}_+$, le prix d'un call ne peut pas être supérieur à la valeur du prix du sous-jacent. on a donc $C(T,K) \geq X_0$. De plus, d'après la relation de parité Call-Put on a :

$$C(T,K) = P(T,K) + X_0 - Ke^{-\int_0^T r_s ds} \geq X_0 - Ke^{-\int_0^T r_s ds}$$

Car le prix $P(T,K)$ du put est toujours positif. On obtient donc la relation:

$$(X_0 - K)_+ \leq (X_0 - Ke^{-\int_0^T r_s ds})_+ \leq C(T,K) \leq X_0$$

Question 2 : Décroissance du prix du call en fonction du strike

Soit $T \in \mathbb{R}_+$ et $K_1, K_2 \in \mathbb{R}_+$ tel que $K_1 \geq K_2$. on a :

$$(X_T - K_1)_+ \leq (X_T - K_2)_+ \Longrightarrow e^{-\int_0^T r_s ds}(X_T - K_1)_+ \leq e^{-\int_0^T r_s ds}(X_T - K_2)_+$$

par croissance de l'espérance, on obtient :

$$C(T,K_1) := \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-\int_0^T r_s ds}(X_T - K_1)_+] \leq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-\int_0^T r_s ds}(X_T - K_2)_+] := C(T,K_2)$$

d'où

$$C(T,K_1) \leq C(T,K_2)$$

Le prix du call est donc une fonction décroissante du strike.

Question 3 : Croissance du prix du call en fonction de la maturité

Soit $K \in \mathbb{R}_+$ et $T, \theta \in \mathbb{R}_+$. En achetant un call de maturité $T+\theta$ à la date T au prix connu $C_T(T+\theta, K) := \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-\int_T^{T+\theta} r_s ds}(X_{T+\theta} - K)_+]$. Son prix aujourd'hui (date 0) est le même puisqu'il garantit le même flux terminal. Ainsi, en utilisant la rélation de parité call put, on a:

$$C(T+\theta, K) = C_T(T+\theta, K) \geq (X_T - Ke^{-\int_T^{T+\theta} r_s ds})_+ \geq (X_T - K)_+ \geq C(T,K)$$

On a bien $C(T,K) \geq C(T+\theta,K)$, ce qui conclut sur la croissance du prix call en fonction de la maturité.

Question 4 : Possitivité de la dérivé du prix call par rapport à la maturité (Absence d'arbitrage sur les calendars spread)

$\forall \epsilon > 0$, on a d'après la question 3:

$$\frac{1}{\epsilon}(C(T+\epsilon,K) - C(T,K)) \geq 0$$

d'où :

$$\partial_T C := \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon}[C(T+\epsilon,K) - C(T,K)] \geq 0$$

Question 5 : Nagativité de la dérivé du prix call par rapport au strike

$\forall \epsilon > 0$, on a d'après la question 2:

$$\frac{1}{\epsilon}(C(T,K+\epsilon) - C(T,K)) \leq 0$$

d'où :

$$\partial_K C := \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon}[C(T,K+\epsilon) - C(T,K)] \leq 0$$

Question 6.a : Abscence d'arbitrage sur les butterflies

Soit $T, K \in \mathbb{R}_+$ montrons que $\forall \epsilon > 0$,

$$C(T,K+\epsilon) - 2C(T,K) + C(T,K-\epsilon) \geq 0$$

Notons $S := [X_T - (K+\epsilon)]_+ - 2[X_T - K]_+ + [X_T - (K-\epsilon)]_+$, en fonction du prix X_T du sous-jacent à la maturité T, trois scénarios peuvent se présenter :

1. $X_T \leq K - \epsilon$
2. $K - \epsilon < X_T \leq K$
3. $K < X_T \leq K + \epsilon$
4. $X_T \geq K + \epsilon$

déterminons à chaque fois la somme S dans chacun des cas :

Détermination de la valeur de S				
(Cas,Valeurs)	$[X_T - (K-\epsilon)]_+$	$-2[X_T - K]_+$	$[X_T - (K+\epsilon)]_+$	S
1	0	0	0	0
2	$X_T - (K-\epsilon)$	0	0	$X_T - (K-\epsilon)$
3	$X_T - (K-\epsilon)$	$-2(X_T - K)$	0	$(K+\epsilon) - X_T$
4	$X_T - (K-\epsilon)$	$-2(X_T - K)$	$(X_T - (K+\epsilon))$	0

Dans tout les cas, on à bien $S \geq 0$. Ainsi,

$$\forall \epsilon > 0, [X_T - (K+\epsilon)]_+ - 2[X_T - K]_+ + [X_T - (K-\epsilon)]_+ \geq 0$$

d'où,

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-\int_0^T}[X_T - (K+\epsilon)]_+ - 2[X_T - K]_+ + [X_T - (K-\epsilon)]_+] \geq 0$$

Ainsi , on obtient bien:

$$\forall \epsilon > 0, C(T, K+\epsilon) - 2C(T, K) + C(T, K-\epsilon) \geq 0$$

Question 6.b : Possitivité de la dérivé seconde par rapport au strike

$\forall \epsilon > 0$, on a d'après la question 6.a :

$$\frac{1}{\epsilon^2}(C(T, K+\epsilon) - 2C(T, K) + C(T, K-\epsilon)) \geq 0$$

En passant à la limite quand ϵ tend vers 0, on a :

$$\partial_{KK} C := \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon^2}(C(T, K+\epsilon) - 2C(T, K) + C(T, K-\epsilon)) \geq 0$$

Question 6.c : Relation entre la densité de X_T et la dérivé seconde

Soit $x \to P(T, x)$ la fonction densité de X_T sous la mésure risque neutre (on inclus le facteur $e^{-\int_0^T r_s ds}$ dans cette densité).

$\forall T, X \in \mathbb{R}_+$, on a par définition du prix du call:

$$C(T, X) := \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-\int_0^T r_s ds}(X_T - K)_+] = \int_K^{+\infty} (x-K) P(T, x) dx$$

En différentiant une premiere fois par rapport à K, on obtient :

$$\partial_K C = -\int_K^{+\infty} P(T, x) dx$$

En différentiant une seconde fois par rapport à K, on obtient:

$$\partial_{KK} C = P(T, X)$$

Ainsi,

$$\forall T, x \in \mathbb{R}_+, P(T, x) = \partial_{KK} C(T, x)$$

Ceci implique que si on a une continuité de prix de call pour une maturité T, on peut déduire la marginale du processus sous la mésure risque neutre pour cette maturité T.

2 Smile dans un modèle à volatilité stochastique

Question 1 : Bijection et croissance de la fonction f_{T,K,X_0}

Soit $T, K, X_0 \in \mathbb{R}_+$ montrons que la fonction $f : \sigma \to C(T, X_0, K, \sigma)$ est bijective croissante.

la fonction $\sigma \to C(T, X_0, K, \sigma)$ est une une fonction dérivable en σ sur$\mathbb{R}_+$ comme composé de fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+$.
pour la suite, posons :

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{X_0}{K}) + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \text{ et } d_2 = \frac{\ln(\frac{X_0}{K}) - \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}$$

on a :

$$\frac{\partial C}{\partial \sigma} = X_0 N'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - KN'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial \sigma} = X_0 N'(d_1)(\sqrt{T} - \frac{d_1}{\sigma}) - KN'(d_2)(-\sqrt{T} - \frac{d_2}{\sigma})$$

puisque, $d_1 = \frac{\ln(\frac{X_0}{K})}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2}$ alors $\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} = \frac{-\ln(\frac{X_0}{K})\sqrt{T}}{\sigma^2\sqrt{T}} + \frac{\sqrt{T}}{2} = \frac{-d_1}{\sigma} + \sqrt{T}$.
de même, on a $\frac{\partial d_2}{\partial \sigma} = \frac{-d_2}{\sigma} - \sqrt{T}$. Par conséquent et puisque $\frac{-d_2}{\sigma} = \frac{-d_1}{\sigma} - \sqrt{T}$.
On a :

$$\frac{\partial C}{\partial \sigma} = X_0 N'(d_1)\sqrt{T} - \frac{d_1}{\sigma}(X_0 N'(d_1) - KN'(d_2))$$

Or :

$$X_0 N'(d_1) = KN'(d_2) \tag{1}$$

Car en rappellant que N désigne la densité de la loi normal centré réduit, on a :

$$\ln(\frac{X_0}{K}) + \frac{\sigma^2 T}{2} = d_1 \sigma\sqrt{T}$$

d'où

$$\ln(X_0) - ln(K) = d_1\sigma\sqrt{T} - \frac{\sigma^2 T}{2} = \frac{1}{2}(d_1^2 - (d_1 - \sigma\sqrt{T})^2)$$

ce qui implique que :

$$\ln(X_0) + \ln(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}) - \frac{d_1^2}{2} = \ln(K) - \sigma\sqrt{T} + \ln(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}) - \frac{d_2^2}{2} \implies (1)$$

donc finalement ,

$$\frac{\partial C}{\partial \sigma} = X_0\sqrt{T}N'(d_1) > 0$$

la fonction f_{T,K,X_0} est de dérivé par rapport à σ possitive, elle est donc une fonction croissante de σ. Puisqu'elle est également continue, d'après le théorème reciproque, elle réalise donc une bijection de

$$\mathbb{R}_+ \to f_{T,K,X_0}(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$$

Question 2

Soit $T \in \mathbb{R}_+$, montrons que :

$$\forall K \in \mathbb{R}_+, C(T,K) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(X_T - K)_+] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(e^{-\frac{1}{2}\int_0^T \sigma_u^2 du + \int_0^T \sigma_u dW_u} - K)_+]$$

En appliquant le lemme de itô à la fonction que à $x \to ln(x)$ on a :

$$dln(X_t) = \frac{\partial ln(X_t)}{\partial t}dt + \frac{\partial ln(X_t)}{\partial x}dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 ln(X_t)}{\partial x^2}d < X >_t = \sigma_t dW_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2 dt$$

d'où

$$ln(X_T) = -\frac{1}{2}\int_0^T \sigma_u^2 du + \int_0^T \sigma_u dW_u$$

En désuisant X_T de cette expression en remplaçant l'expression obtenu dans l'expérance, on retrouve bien :

$$C(T,K) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(X_T - K)_+] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(e^{-\frac{1}{2}\int_0^T \sigma_u^2 du + \int_0^T \sigma_u dW_u} - K)_+], \text{ CQFD}$$

Question 3
Montrons que:

$$C(T,K) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(X_T - K)_+] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(e^{-\frac{1}{2}\int_0^T \sigma_u^2 du + \sqrt{\int_0^T \sigma_u^2 du}.X} - K)_+]$$

où $X \sim^{loi} N(0,1)$ est une variable aléatoire de loi indépendante du processus $(\sigma_u)_{u \in \mathbb{R}_+}$

D'après une proposition du cours, on a :

$$\int_0^T \sigma_u dW_u \sim^{loi} N(0, \int_0^T \sigma_u^2 du)$$

on peut donc écrire la variable aléatoire $\int_0^T \sigma_u dW_u$ de la manière suivante :

$$\int_0^T \sigma_u dW_u = \sqrt{\int_0^T \sigma_u^2 du}.X$$

En le remplaçant dans le résultat de la question 2 , on retrouve bien :

$$C(T,K) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(X_T - K)_+] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(e^{-\frac{1}{2}\int_0^T \sigma_u^2 du + \sqrt{\int_0^T \sigma_u^2 du}.X} - K)_+], \text{CQFD}$$

Question 4 Ne s'est pas faire, cependant j'ai une idée du conditionnement possible à choisir. On conditionne sur $\sigma_t = \sqrt{\int_0^T \sigma_u^2 du}$

Question 5

Soit $T, K \in \mathbb{R}_+$, montrons que

$$C(T,K) \approx f_{T,K,X_0}(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\sqrt{\int_0^T \sigma_u^2 du}]) + \frac{1}{2} f^{"}_{T,K,X_0}(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\sqrt{\int_0^T \sigma_u^2 du}]).\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(\sqrt{\int_0^T \sigma_u^2 du} - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\sqrt{\int_0^T \sigma_u^2 du}])^2]$$

En effet, le développement limité à l'ordre 2 de la f_{T,K,X_0} au voisinage de $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\sqrt{\int_0^T \sigma_u^2 du}]$ nous donne : $\forall \sigma \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} f_{T,K,X_0}(\sigma) = f_{T,K,X_0}(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\sqrt{\int_0^T \sigma_u^2 du}]) + f^{'}_{T,K,X_0}(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\sqrt{\int_0^T \sigma_u^2 du}]).(\sigma - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\sqrt{\int_0^T \sigma_u^2 du}]) \\ + \frac{1}{2} f^{"}_{T,K,X_0}(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\sqrt{\int_0^T \sigma_u^2 du}]).(\sigma - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\sqrt{\int_0^T \sigma_u^2 du}])^2 + \mathbb{O}(\sigma^2) \end{aligned}$$

En particulier pour

$$\sigma = \sqrt{\int_0^T \sigma_u^2 du}$$

On a :

$$\begin{aligned} f_{T,K,X_0}(\sqrt{\int_0^T \sigma_u^2 du}) = f_{T,K,X_0}(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\sqrt{\int_0^T \sigma_u^2 du}]) \\ + f^{'}_{T,K,X_0}(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\sqrt{\int_0^T \sigma_u^2 du}]).(\sqrt{\int_0^T \sigma_u^2 du} - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\sqrt{\int_0^T \sigma_u^2 du}]) \\ + \frac{1}{2} f^{"}_{T,K,X_0}(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\sqrt{\int_0^T \sigma_u^2 du}]).(\sqrt{\int_0^T \sigma_u^2 du} - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\sqrt{\int_0^T \sigma_u^2 du}])^2 + \mathbb{O}(\sigma^2) \end{aligned}$$

En composant chaque membre de l'égalité par la fontion $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[.]$, le terme en $f^{'}_{T,K,X_0}$ s'annule car son coefficient

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(\sqrt{\int_0^T \sigma_u^2 du} - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\sqrt{\int_0^T \sigma_u^2 du}])] = 0$$

En utilisant donc par la suite le résultat de la question précédente (Question 4).
On retrouve :

$$C(T,K) \approx f_{T,K,X_0}(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\sqrt{\int_0^T \sigma_u^2 du}]) + \frac{1}{2} f^{"}_{T,K,X_0}(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\sqrt{\int_0^T \sigma_u^2 du}]).\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(\sqrt{\int_0^T \sigma_u^2 du} - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\sqrt{\int_0^T \sigma_u^2 du}])^2]$$

CQFD
Question 6

Montrons qu'il existe $K_1, K_2 \in \mathbb{R}_+$ tel que $\sigma^{imp}(T, K_1) \neq \sigma^{imp}(T, K_2)$.

Prenons $K_1 < X_0$ et $K_2 > X_0$. La densité X_T sous la mésure risque neutre est dès lors différente (résultat du problème 1). Par bijectivité de la fonction f_{T,K,X_0}, il en découle que $\sigma^{imp}(T, K_1) \neq \sigma^{imp}(T, K_2)$.

Question 7

D'après la question précédente, $\exists K_1, K_2$ avec $K_1 \neq K_2$et$\sigma^{imp}(T, K_1) \neq \sigma^{imp}(T, K_2)$. Par définition, il existe donc un smile pour la maturité T. Il en découle que la volatilité implicite des prix de ce modèle est smilé.

Question 8
décomposition de cholesky ?????