D.M : Mathématiques financières.

Exercice 1 : Sur la structure des prix de calls.

Soit tout au long de cet exercice : $C : \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ (T,K) \rightsquigarrow C(T,K) \end{array}$

l'application qui pour chaque $(T,K) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ associe le prix de call sur un underlying $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$; $X_t > 0$ p.s $\forall t \in \mathbb{R}^+$

Soit Q la mesure risque neutre, C s'écrit sous la forme suivante :

$$\forall (T,K) \in {\mathbb{R}^+}^2 \quad C(T,K) = \mathbb{E}^Q\left[e^{-\int_0^T r_s ds}(X_T - K)_+\right].$$

où $(r_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est le taux sans risque.

1- Montrer que $\forall (T,K) \in {\mathbb{R}^+}^2$ $(X_0 - K)_+ \leq C(T,K) \leq X_0$.

2- Montrer que pour $T \in \mathbb{R}^+$ $\forall K_1, K_2 \in \mathbb{R}^+$

$$K_1 \geqslant K_2 \implies C(T,K_1) \leq C(T,K_2)$$

3- Montrer que pour $K \in \mathbb{R}^+$, $\forall T_1, T_2 \in \mathbb{R}^+$.

$$T_1 \geqslant T_2 \implies C(T_1,K) \geqslant C(T_2,K).$$

4- En déduire que $\partial_T C \geqslant 0$ $\rightarrow$ Absence d'arbitrage sur les calendars spread.

5- En déduire que $\partial_K C \leq 0$.

6- Soit $\begin{array}{l} \mathbb{R}^{+2} \longrightarrow \mathbb{R} \\ p(T,x) \rightsquigarrow p(T,x) \end{array}$ la densité de $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ sous $\mathbb{Q}$ à chaque instant t ; c'est à dire la fonction $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \rightsquigarrow p(T,x) \end{array}$ et la densité de X_T sous la mesure risque neutre $\mathbb{Q}$.

6-a. Soit $T\in\mathbb{R}^+$; $K\in\mathbb{R}^+$ Mq :

$$\forall \varepsilon \geqslant 0 \quad C(T,K+\varepsilon) - 2C(T,K) + C(T,K-\varepsilon) \geqslant 0.$$

(Absence d'arbitrage sur les butterflies)

6-b. En déduire que $\partial_{KK} C(T,K) \geqslant 0 \quad \forall (T,K)\in\mathbb{R}^{+2}$.

6-c Montrer que $p(T,x) = \partial_{KK} C(T,x) \quad \forall T,x\in\mathbb{R}^+$.

Ceci implique que si on a une continuité de prix de call pour une maturité T on peut déduire la marginale du processus sous la mesure risque neutre pour cette maturité T.

Exercice 2 : Smile dans un modèle à volatilité stochastique.

Supposons qu'il n'y a pas de taux d'intérêts.

Soit C la fonction de prix de call dans le modèle de Black-Scholes.

$$C(T, X_0, K, \sigma) = X_0 \, N\left(\frac{\ln\left(\frac{X_0}{K}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \right) - K \, N\left(\frac{\ln\left(\frac{X_0}{K}\right) - \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \right)$$

X_0 : le prix du sous-jacent à l'instant 0.

K : le strike.

T : la maturité

σ : la volatilité.

1- Soit $T \in \mathbb{R}^+$, $X_0 \in \mathbb{R}^+$, $K \in \mathbb{R}^+$, Montrer que :

$$f_{T,K,X_0} : \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ \sigma \longmapsto C(T, X_0, K, \sigma) \end{array}$$

la fonction f est bijective croissante.

la volatilité implicite est la fonction : $\sigma^{imp} : \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ \sigma(T, K) \longmapsto \sigma^{imp}(T, K) \end{array}$.

qui nous permet de retrouver le même prix qu'on observe sur le marché pour un call de maturité $(T, K) \in \mathbb{R}^{+2}$.

c'est-à-dire, j'observe ma prix de call pour $(T, K) \in \mathbb{R}^{+2}$: $PMC(T, K)$

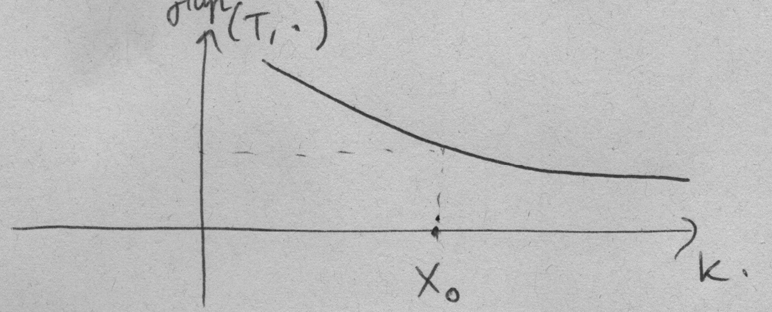
Je cherche la valeur $\sigma^{imp}(T, K)$ que je dois mettre dans la fonction C tq :

$$C(T, X_0, K, \sigma^{imp}(T, K)) = PMC(T, K)$$

PMC : prix marché du call.

On dit qu'il existe un smile pour une maturité T, si :

$$\exists K_1, K_2 \in \mathbb{R}^+ \quad K_1 \neq K_2 \text{ et } \sigma^{imp}(T, K_1) \neq \sigma^{imp}(T, K_2).$$



On s'intéresse dans la suite de cet énoncé à répondre à la question suivante : Pourquoi il y a un smile dans les modèles à volatilités stochastiques où $V[\sigma_t] > 0 \ \forall t \in \mathbb{R}^+$? V est la fonction variance.

Pour se faire on se met dans le modèle simple suivant :

$$\begin{cases} dX_t = \sigma_t X_t \, dW_t \\ d\sigma_t = \lambda \sigma_t \, dZ_t \end{cases} ; \ d\langle W, Z\rangle_t = \rho \, dt \cdot \mathbb{Q}.$$

le cas $\rho = 0$; $\lambda > 0$, $(W_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ sont deux mouvement browniens.

Soit $T, K \in \mathbb{R}^+$, soit $C \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (T, K) \longmapsto \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(X_T - K)_+] \end{array}$ le prix de call dans le modèle défini ci-dessus.

1. Fixons $T \in \mathbb{R}^+$; Montrer que $\forall K \in \mathbb{R}^+$.

$$C(T, K) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(X_T - K)_+] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\left(e^{-\frac{1}{2}\int_0^T \sigma_u^2 \, du + \int_0^T \sigma_u \, dW_u} - K\right)_+\right].$$

2. Montrer que :

$$C(T, K) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(X_T - K)_+] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\left(e^{-\frac{1}{2}\int_0^T \sigma_u^2 \, du + \sqrt{\int_0^T \sigma_u^2 \, du} \cdot X} - K\right)_+\right]$$

avec X une variable aléatoire $\overset{Loi}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$ indépendante du processus $(\sigma_u)_{u \in \mathbb{R}^+}$.

Hint : utiliser l'identité vu en cours $\int_0^T \sigma_u \, dW_u \Big| \underset{(\sigma_u)_{u \in (0, T)}}{\overset{\text{conditionné}}{\sim}} \mathcal{N}\left(0 ; \int_0^T \sigma_u^2 \, du\right)$

3. En choisissant le bon conditionnement et en exploitant le fait que $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ est indépendante de $(\sigma_u)_{u\in\mathbb{R}^+}$

. Montrer que:

$$C(T,K) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[C\left(T,K,x_0;\sqrt{\int_0^T \sigma_u^2\,du}\right)\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[f_{T,K,x_0}\left(\sqrt{\int_0^T \sigma_u^2\,du}\right)\right].$$

4. Montrer que: $\forall T,K \in \mathbb{R}^+$.

$$C(T,K) \simeq f_{T,K,x_0}\left(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\sqrt{\int_0^T \sigma_u^2\,du}\right]\right) + \frac{1}{2} f''_{T,K,x_0}\left(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\sqrt{\int_0^T \sigma_u^2\,du}\right]\right) \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\left(\sqrt{\int_0^T \sigma_u^2\,du} - \mathbb{E}\left(\sqrt{\int_0^T \sigma_u^2\,du}\right)\right)^2\right].$$

$$C(T,K) \simeq f_{T,K,x_0}\left(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\sqrt{\int_0^T \sigma_u^2\,du}\right]\right) + \frac{1}{2} f''_{T,K,x_0}\left(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\sqrt{\int_0^T \sigma_u^2\,du}\right]\right) \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\left(\sqrt{\int_0^T \sigma_u^2\,du} - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\sqrt{\int_0^T \sigma_u^2\,du}\right)\right)^2\right]$$

Hint: on peut utiliser un développement limité de la fonction f au voisinage de $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\sqrt{\int_0^T \sigma_u^2\,du}\right]$.

φ fixons $T \in \mathbb{R}^+$, $x_0 \in \mathbb{R}^+$.

5. En étudiant la fonction f_{T,K,x_0} ~~par~~ et sa deuxième dérivée par strike ;

Mq $\exists K_1, K_2 \in \mathbb{R}^+$ tq $\sigma^{imp}(T,K_1) \neq \sigma^{imp}(T,K_2)$.

6. En déduire que la volatilité implicite des prix de ce modèle est smilé (ça veut dire qu'il existe un smile).

Extra question:

Que fait-on quand $\rho \neq 0$?

Hint: Chloesky decomposition.