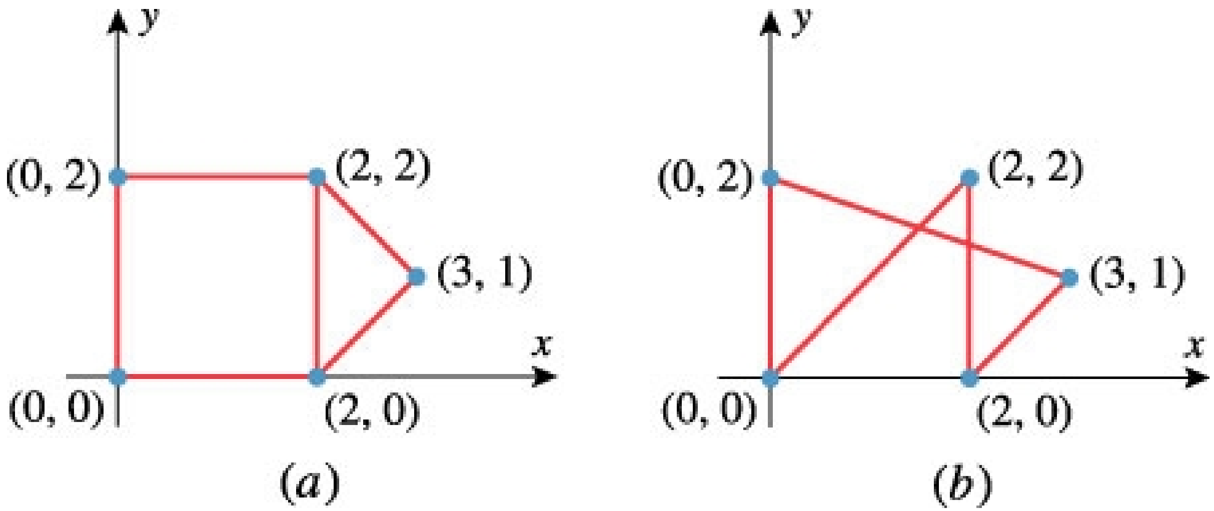
< 컴퓨터 그래픽 보충>

철사구조



철사구조의 행렬표현

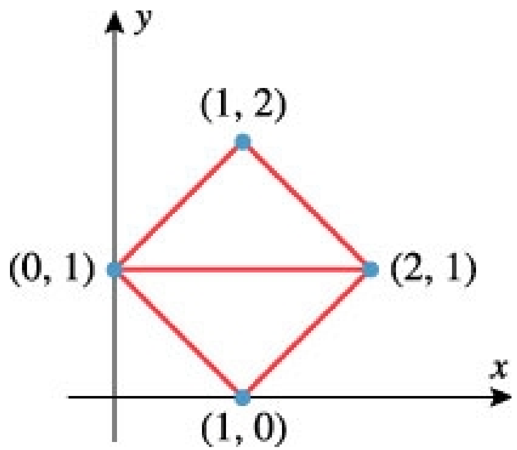
그림 6.5.1의 철사구조의 꼭지점, $V=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

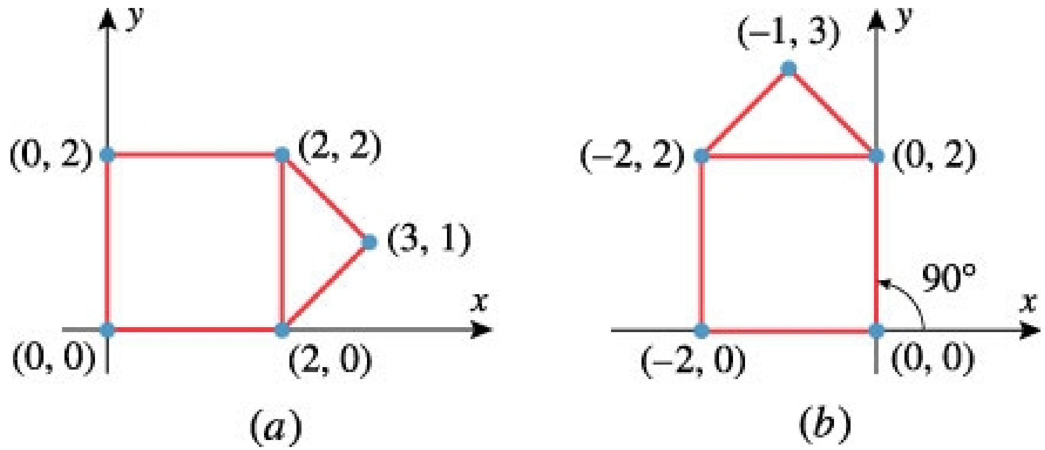
그림 6.5.1a의 집에 대한 연결성 정보, $C=\begin{bmatrix}1&1&0&0&1\\1&1&1&1&0\\0&1&1&1&0\\0&1&1&1&1\\1&0&0&1&1\end{bmatrix}$

예제 1 철사구조의 구축

꼭지점과 연결성행렬이 다음과 같은 철사구조

$V=\begin{bmatrix}1&2&1&0\\0&1&2&1\end{bmatrix}$ 와 $C=\begin{bmatrix}1&1&0&1\\1&1&1&1\\0&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$





철사구조를 변환하기

예제 2

넘어진 집은 꼭지점행렬 안의 벡터들은 90° 시계반대방향으로 회전하여

$$R = \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(1)의 꼭지점행렬 V의 왼쪽에 R을 곱하여 한번에 모든 회전

회전된 집에 대한 꼭지점행렬 V_1

$$V_1 = RV = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

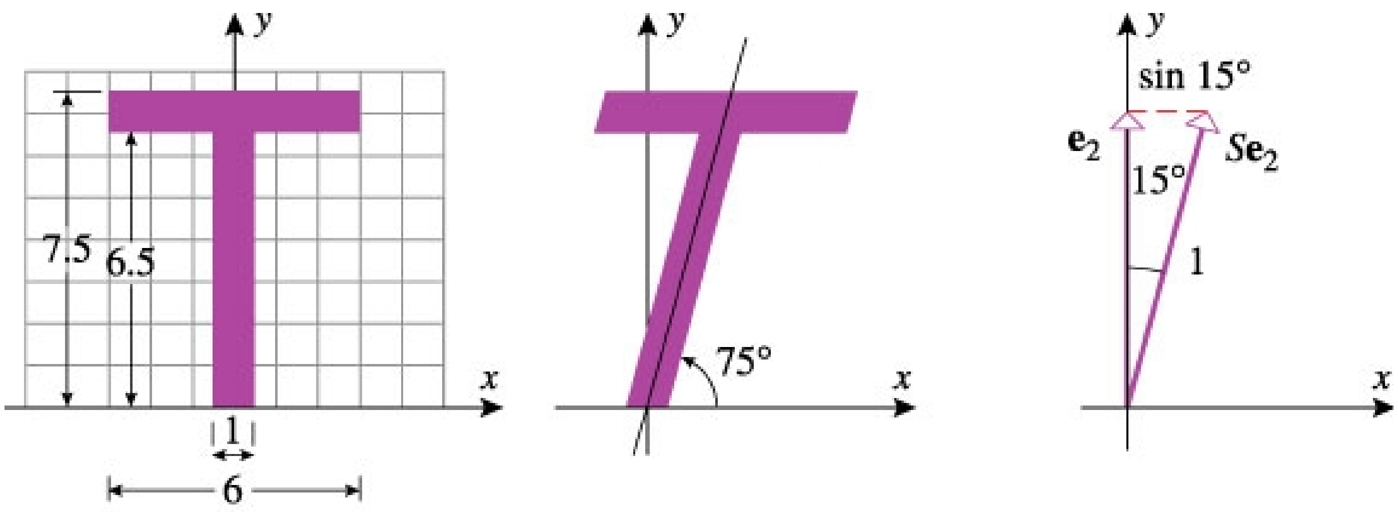
예제 3

로만체(roman font) T를 위한 철사구조, 로만체를 수직에서 15° 벗어난 양의 x축 방향으로 로만체로 층밀림변환하여 구한 이탤릭체(italic font)에 대한 철사구조

이탤릭체 T의 꼭지점을 소수 두 번째 자리

풀이 로만체 T에 대한 꼭지점행렬

$$V=\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 3 & 3 & -3 & -3 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 6.5 & 6.5 & 7.5 & 7.5 & 6.5 & 6.5 & 0 \end{bmatrix}$$



(a) (b)

$$Se_1 = e_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \text{ 과 } Se_2 = \begin{bmatrix}\sin 15^\circ\\1\end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix}0.26\\1\end{bmatrix}$$

층밀림변환된 T에 대한 꼭지점행렬

$$SV \approx \begin{bmatrix}1 & 0.26\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.5 & 0.5 & 3 & 3 & -3 & -3 & -0.5 & -0.5\\0 & 6.5 & 6.5 & 7.5 & 7.5 & 6.5 & 6.5 & 0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}0.5 & 2.19 & 4.69 & 4.95 & -1.05 & -1.31 & 1.19 & -0.5\\0 & 6.5 & 6.5 & 7.5 & 7.5 & 6.5 & 6.5 & 0\end{bmatrix}$$

동차좌표를 사용한 평행이동

평행이동은 컴퓨터 그래픽에 있어서 중요한 연산

선형연산자가 아니므로 행렬연산자가 아닌 문제점

행렬 곱셈에 의해 R^2의 평행이동을 표현하는 어떤 2×2 행렬도 없고

R^3의 평행이동을 표현하는 어떤 3×3 행렬도 없다

정리 6.5.1 x와 x_0이 R^n의 벡터이고, I_n이 $\mathrm{n} \times \mathrm{n}$ 항등행렬이라면, 다음이 성립한다.

$$\begin{bmatrix} \mathrm{I_n} & \mathbf{x}_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 + \mathbf{x} \\ 1 \end{bmatrix}$$

예제 4 행렬곱셈에 의한 평행이동

$\mathrm{x} = (x, y)$를 $\mathrm{x}_0 = (h, k)$만큼 평행이동시키면, ㅓ터 $\mathrm{x} + \mathrm{x}_0 = (x+h, y+k)$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & k \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x \\ y \\ \hline 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} x+h \\ y+k \\ \hline 1 \end{array}\right]$$

평행이동한 벡터는 마지막 1을 삭제하면 얻어진다.

예제 5 행렬곱셈에 의해 철사구조 평행이동하기

행렬곱셈을 사용하여 그림 6.5.5a의 바로 선 집을 그림 6.5.5b와 같은 위치로 평행이동

풀이 바로 선 집에 대한 꼭지점행렬

$$V_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

집을 평행이동시키기 위해서 V_1의 모든 열벡터를 다음 $\mathbf{x}_0$만큼 평행이동

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

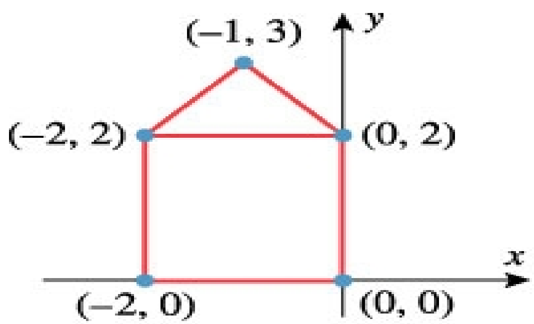
$$T = \begin{bmatrix} I_2 & \mathbf{x}_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

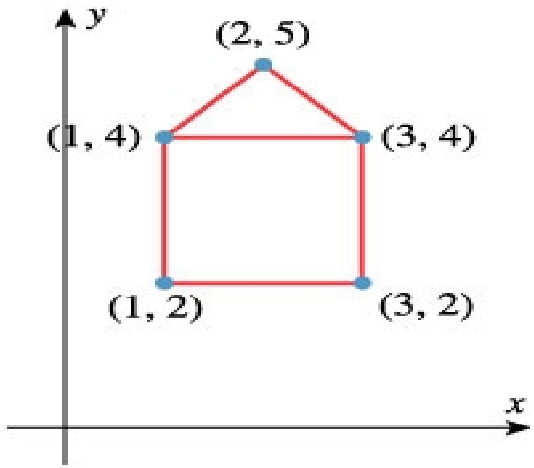
곱한 결과의 3번째 행의 1을 삭제

평행이동한 집에 대한 꼭지점행렬 V_2

$$V_2 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$



(a)



(b)

정리 6.5.2

A가 $n \times n$행렬이고, **x**가 열형식으로 표현된 R^n의 벡터라면 다음이 성립한다.

$$\begin{bmatrix} A & \mathbf{x}_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}\mathbf{x} \\ 1 \end{bmatrix}$$

예제 6 동차좌표에서의 회전

벡터 x=(x,y)가 원점에 관해 각도 θ만큼 회전하면, 열형식으로 얻어진 벡터

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\theta - ysin\theta \\ xsin\theta + ycos\theta \end{bmatrix} \tag{7}$$

동차좌표계에서 수행

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\theta - ysin\theta \\ xsin\theta + ycos\theta \\ 1 \end{bmatrix}$$

예제 7 동차좌표에서의 합성

넘어진 집을 우선 바로 선 위치로 90° 회전시키고, ,
동차좌표에서 한 번의 행렬곱셈으로 합성을 실행, ㅣ 번째로 다음과 같이 예제 2 ㅣ 회전행렬R을 표현

$$R' = \begin{bmatrix} R & x_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

동차좌표에서 평행이동에 대한 행렬

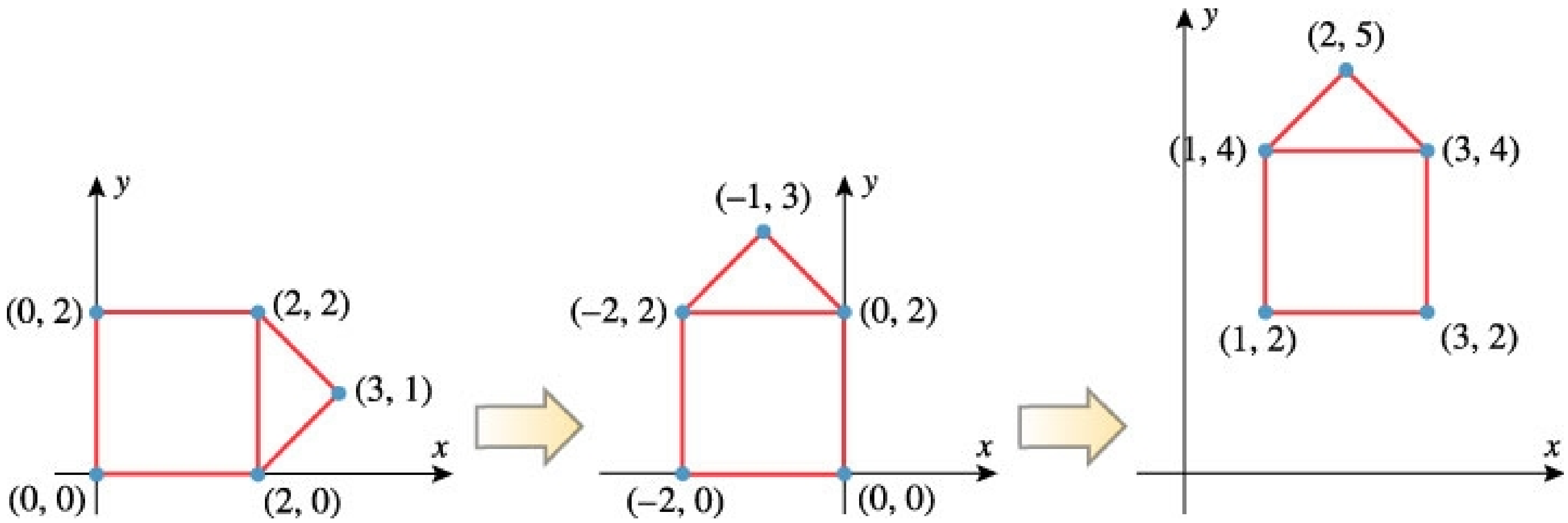
$$T = \begin{bmatrix} I_2 & \mathbf{x}_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

회전과 평행이동의 합성은 동차좌표로 표현된 꼭지점행렬에 다음 행렬을 곱함으로써 동차좌표

$$TR' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$TR'V = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

마지막 1 .



<행렬 인수분해 및 LU−분해>

인수분해로 선형계 풀기

정사각행렬 A를 하부행렬 L과 상부행렬 U의 곱의 형

$$A = LU$$

다음과정을 거쳐 선형계 Ax=b를 풀 수 있다.

1단계. 선형계 Ax=b를 다음과 같이 쓴다.

$$LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

2단계. 새로운 미지수 y를

$$U\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

로 정의하고 (2)를 Ly=b로 쓴다.

3단계. 선형계 Ly=b를 미지수 y에 관하여 풀라.

4단계. 이제 구한 벡터y를 (3)에 대입하여 x에 관하여 풀라.

LU−**분해**(LU−decomposition)방법

Ax=b를 푸는 문제를 두 개의 선형계 Ly=b와 $U\mathbf{x}=\mathbf{y}$ 를 푸는 문제

예제1 Ax=b를 LU−분해를 사용하여 풀기

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \qquad = \qquad L \qquad U$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A \qquad \mathbf{x} \quad = \quad \mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$L \qquad U \qquad \mathbf{x} \quad = \quad \mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$U \quad \mathbf{x} = \mathbf{y}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$L \quad \mathbf{y} = \mathbf{b}$$

$$\begin{aligned} 2y_1 \qquad\qquad &= 2 \\ -3y_1 + y_2 \qquad &= 2 \\ 4y_1 - 3y_2 + 7y_3 &= 3 \end{aligned}$$

전진대입(forward substitution)

$$y_1 = 1, \quad y_2 = 5, \quad y_3 = 2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ x_2 + 3x_3 &= 5 \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

$x_1 = 2, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 2$

$LU-$분해 찾기

정의 3.7.1 정사각행렬 A가 하부삼각행렬 L과 상부삼각행렬 U의 곱 A=LU를 $LU-$**분해** 또는 $LU-$**인수분해**($LU-$factorization).

A의 $LU-$분해를 구하는 과정

1단계. 선행 1 을 만들기 위해 사용한 곱하는 수와 선행 1 아래 성분을 0으로 만들기 위해 사용한 곱하는 수를 이용하여, 행을 바꾸지 않고 A를 행사다리꼴 U로 변환시킨다.

2단계. L의 주대각선 위치에는 U의 같은 위치에 있는 성분을 선행 1로 만들기 위하여 곱하는 수의 역수를 넣으라.

3단계. L의 주대각선 아래 위치에는 U의 같은 위치에 있는 성분을 0으로 만들기 위하여 선행 1에 곱하는 수의 음수를 넣으라.

4단계. $A = LU$ 분해를 구성하라.

예제2 $LU-$분해 구성

$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 9 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix}$의 $LU-$분해

풀이

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 9 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \bullet & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix}$$

•은 L의 알려지지 않은 성분을 표시한다.

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 9 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \longleftarrow \text{곱수} = \frac{1}{6} \\ \\ \\ \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \longleftarrow \text{곱수} = -9 \\ \longleftarrow \text{곱수} = -3 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 9 & \bullet & 0 \\ 3 & \bullet & \bullet \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 8 & 5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \longleftarrow \text{곱수} = \frac{1}{2} \\ \\ \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 9 & 2 & 0 \\ 3 & \bullet & \bullet \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \longleftarrow \text{곱수} = -8 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 9 & 2 & 0 \\ 3 & 8 & \bullet \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \longleftarrow \text{곱수} = 1 \end{array} \qquad L = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 9 & 2 & 0 \\ 3 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

셋째 행에는 선행 1이 이미 있기 때문에 여기서는 실질 연산이 행하여지지 않는다.

$$A = LU = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 9 & 2 & 0 \\ 3 & 8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

< Gauss-Seidel과 Jacobi 반복법>

희박한 계수행렬을 가진 선형계의 풀이에 유용한 2가지 방법

반복법

$A\mathrm{x}=\mathrm{b}$는 가역 계수행렬 A를 갖고 n개의 미지수를 갖는 n개의 방정식 시스템을 푸는 반복법

$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_k, \dots$을 발생시키는 반복법.

반복법을 설계하는 기본과정은 $A\mathrm{x}=\mathrm{b}$를

$$\mathbf{x} = B\mathbf{x} + \mathbf{c} \tag{1}$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = B\mathbf{x}_k + \mathbf{c} \tag{2}$$

1단계. 임의의 초기 근사 $\mathbf{x}_0$ 를 선택

2단계. $\mathbf{x}_0$를 식(2)의 우변에 대입하고 첫 번째 반복을 계산

$$\mathbf{x}_1 = B\mathbf{x}_0 + \mathbf{c}$$

3단계. $\mathbf{x}_1$을 식(2)의 우변에 대입하고 두 번째 반복을 계산한다.

$$\mathbf{x}_2 = B\mathbf{x}_1 + \mathbf{c}$$

4단계. 2, 3 단계의 과정을 반복, 설정한 정확도에 도달하기까지 반복

JACOBI 반복법

$A\mathrm{x} = \mathrm{b}$는 A가 가역이고 영이 아닌 대각 성분을 가지며, n개의 미지수를 갖는 n개의 방정식으로 이루어진 선형계

$A\mathrm{x} = \mathrm{b}$

$$(A - D)\mathbf{x} + D\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$D\mathbf{x} = (D - A)\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} = D^{-1}(D - A)\mathbf{x} + D^{-1}\mathbf{b} \qquad (3)$$

식(3)은 $B = D^{-1}(D - A)$ 와 $\mathrm{c} = C^{-1}\mathrm{b}$를 가진 식(1)

$$\mathbf{x}_{k+1} = D^{-1}(D - A)\mathbf{x}_k + D^{-1}\mathbf{b} \qquad (4)$$

이 공식을 사용하는 반복 알고리즘을 Jacobi 반복법 또는 동시변위방법

$A\mathrm{x} = \mathrm{b}$가 선형계

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \quad &\quad \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned} \tag{5}
$$

식(3)의 각 방정식은

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n) \\
x_2 &= \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n) \\
\vdots & \qquad\qquad\qquad \vdots \\
x_n &= \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{n(n-1)}x_{n-1})
\end{aligned} \tag{6}
$$

Jacobi 반복법

1단계. 시스템 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$를 식(6)의 형태 열벡터 $\mathbf{x}_0$는 초기 근사, 적절한 값을 설정할 수 없다면 $\mathbf{x}_0=0$을 사용

$$x_1=0, \quad x_2=0, \ \ldots, \quad x_n=0$$

2단계. 식(6)의 좌변에서 $x_1, x_2, \ldots, x_n$의 새로운 값을 구하기 위해 초기 근사 성분을 우변에 대입

3단계. 식(6)의 좌변에서 $x_1, x_2, \ldots, x_n$의 새로운 값을 구하기 위해 첫 번째 반복 성분을 우변에 대입

4단계. 세 번째 반복 $\mathbf{x}_3$를 구하기 위해 두 번째 반복성분을 식(6)의 우변에 대입하고 설정한 정확도를 충족할 때까지 반복 과정을 계속

예제 1 다음 시스템의 해를 Jacobi 반복법을 사용하여 근사화

$$\begin{aligned} 20x_1 + x_2 - x_3 &= 17 \\ x_1 - 10x_2 + x_3 &= 13 \\ -x_1 + x_2 + 10x_3 &= 18 \end{aligned} \tag{7}$$

두 번의 연속적 반복결과 값이 소수 네 자리에서 반올림했을 때 서로 같으면 과정을 종료

풀이

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{17}{20} - \tfrac{1}{20}x_2 + \tfrac{1}{20}x_3 & & & x_1 &= 0.85 - 0.05x_2 + 0.05x_3 \\ x_2 &= -\tfrac{13}{10} + \tfrac{1}{10}x_1 + \tfrac{1}{10}x_3 & &\text{또는} & x_2 &= -1.3 + 0.1x_1 + 0.1x_3 \\ x_3 &= \tfrac{18}{10} + \tfrac{1}{10}x_1 - \tfrac{1}{10}x_2 & & & x_3 &= 1.8 + 0.1x_1 - 0.1x_2 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.05 & 0.05 \\ 0.1 & 0 & 0.1 \\ 0.1 & -0.1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.85 \\ -1.3 \\ 1.8 \end{bmatrix} \tag{9}$$

초기 근사를 $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

첫 번째 반복

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0.85 \\ -1.3 \\ 1.8 \end{bmatrix}$$

두 번째 반복

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.05 & 0.05 \\ 0.1 & 0 & 0.1 \\ 0.1 & -0.1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.85 \\ -1.3 \\ 1.8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.85 \\ -1.3 \\ 1.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.005 \\ -1.035 \\ 2.015 \end{bmatrix}$$

	$\mathbf{x}_0$	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_4$	$\mathbf{x}_5$	$\mathbf{x}_6$	$\mathbf{x}_7$
x_1	0	0.8500	1.0050	1.0025	1.0001	1.0000	1.0000	1.0000
x_2	0	−1.3000	−1.0350	−0.9980	−0.9994	−1.0000	−1.0000	−1.0000
x_3	0	1.8000	2.0150	2.0040	2.0000	1.9999	2.0000	2.0000

GAUSS-SEIDEL 반복법

Jacobi 반복법은 소형 선형계의 응용에는 적당하지만 대형 시스템에 대해서는 수렴 속도가 매우 느린 단점

Gauss-Seidel 반복법 또는 축차변위법

예제2 Gauss-Seidel 반복법

예제1에서 Gauss-Seidel 반복법을 사용하여 소수 넷째 자리까지 선형계의 근사해

풀이

초기 근사는 $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

$x_2 = 0$, $x_3 = 0$를 식(8)의 첫 번째 방정식 우변에 대입

새로운 x_1을 구한 후, $x_3 = 0$과 새로운 x_1을 두 번째 방정식 우변에 대입

하여 새로운 x_2를 구하여

새로운 x_1과 x_2를 세 번째 방정식의 우변에 대입하여 x_3를 구한다.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0.85 - (0.05)(0) + (0.05)(0) = 0.85 \\
x_2 &= -1.3 + (0.1)(0.85) + (0.1)(0) = -1.215 \\
x_3 &= 1.8 + (0.1)(0.85) - (0.1)(-1.215) = 2.0065
\end{aligned}
$$

첫 번째 Gauss-Seidel 반복

$$
\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0.8500 \\ -1.2150 \\ 2.0065 \end{bmatrix}
$$

두 번째 반복에 대한 계산

$$x_1 = 0.85 - (0.05)(-1.215) + (0.05)(2.0065) = 1.011075$$
$$x_2 = -1.3 + (0.1)(1.011075) + (0.1)(2.0065) = -0.9982425$$
$$x_3 = 1.8 + (0.1)(1.011075) - (0.1)(-0.9982425) = 2.00093175$$

소수 넷째 자리인 두 번째 Gauss-Seidel 반복

$$\mathbf{x}_2 \approx \begin{bmatrix} 1.0111 \\ -0.9982 \\ 2.0009 \end{bmatrix}$$

	$\mathbf{x_0}$	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$
x_1	0	0.8500	1.0111	1.0000	1.0000
x_2	0	−1.2150	−0.9982	−0.9999	−1.0000
x_3	0	2.0065	2.0009	2.0000	2.0000

수렴

Jacobi 와 Gauss-Seidel 방법에 의해 구한 반복이 시스템의 해에 수렴하지 않는 경우

정방 행렬

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

각 대각 성분의 절대값이 같은 행의 다른 성분들의 절대값의 합보다 크면 순대각우세행렬

$$\begin{aligned} |a_{11}| &> |a_{12}| + |a_{13}| + \cdots + |a_{1n}| \\ |a_{22}| &> |a_{21}| + |a_{23}| + \cdots + |a_{2n}| \\ &\vdots \\ |a_{nn}| &> |a_{n1}| + |a_{n2}| + \cdots + |a_{n(n-1)}| \end{aligned} \tag{11}$$

예제 3. 순대각우세행렬

$$\begin{bmatrix} 7 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -6 \\ 5 & 12 & -4 \end{bmatrix}$$

순대각우세행렬이 아니다.

두 번째와 세 번째 행을 서로 교환한다면 결과 행렬

$\begin{bmatrix} 7 & -2 & 3 \\ 5 & 12 & -4 \\ 4 & 1 & -6 \end{bmatrix}$은 순대각우세행렬

$$|7| > |-2| + |3|$$
$$|12| > |5| + |-4|$$
$$|-6| > |4| + |1|$$

정리5.3.1 A가 순대각우세행렬이면 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$는 유일 해를 가지며 초기 근사의 어떤 값에 대해서도 Gauss-Seidel과 Jacobi 방법의 반복 결과는 그 해에 수렴한다.