p-adic Numbers 강의록

Donghyun Park

January 20, 2026

Exponential을 살펴봅시다.

$$exp(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}$$

Region of convergence?

Lemma 1 ([Gou20] Lemma 5.7.4)**.** *Let p be a prime, then*

$$v_p(n!) = \sum_{i=1}^{\infty} \lfloor \frac{n}{p^i} \rfloor < \frac{n}{p-1}$$

Lemma 2 ([Gou20] Lemma 5.7.5)**.** *Let $g(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}$ then $g(x)$ converges if and only if $|x| < p^{-1/(p-1)}$*

Proof. By previous lemma, $\rho \geq p^{-1/(p-1)}$ so series converges for $|x| < p^{-1/(p-1)}$.
For $|x| = p^{-1/(p-1)}$, $n = p^m$ then

$$v_p(n!) = \frac{p^m - 1}{p-1}$$

$$v_p(\frac{x^n}{n!}) = \frac{p^m}{p-1} - \frac{p^m-1}{p-1} = \frac{1}{p-1}$$

so does not tend to zero, do not converges □

For $p \neq 2$, above is equivalent to $|x| < 1$ so $p\mathbb{Z}_p$. But for $p = 2$, above region is $|x| < 1/2$, so $4\mathbb{Z}_2$.
We define $exp_p : D \to \mathbb{Q}_p$ as above for $D = B(0, p^{-1/(p-1)})$.

Proposition 1 ([Gou20] Proposition 5.7.7)**.** *If $x, y \in D$ we have $x + y \in D$ and*

$$\exp_p(x+y) = \exp_p(x)\exp_p(y)$$

Proof. Double seires의 교환으로부터

$$\begin{aligned}\exp_p(x+y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!k!} x^{n-k}y^k \\ &= \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!}\right)\end{aligned}$$

□

마지막으로, log와 exp에 대해 저희가 기대하는 그 것도 성립합니다.

Proposition 2 ([Gou20] Proposition 5.7.8)**.** *Let $x \in \mathbb{Z}_p$, $|x| < p^{-1/(p-1)}$ then we have*

$$|\exp_p(x) - 1| < 1$$

and

$$\log_p(\exp_p(x)) = x$$

Conversely, if $|x| < p^{-1/(p-1)}$ we have

$$|\log_p(1+x)| < p^{-1/(p-1)}$$

and

$$\exp_p(\log_p(1+x)) = 1 + x$$

Proof. 합성함수에 대한 정리. $x = 0$은 자명하게 성립한다.

$$|\frac{x^n}{n!}| = |x|^n \cdot p^{v_p(n!)} < |x|^n p^{n/(p-1)}$$

만약 $|x| < p^{-1/(p-1)}$,

$$|\exp_p(x) - 1| = |\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}| < 1$$

조금 더 좋은 estimate으로, $n \geq 2$일 때

$$v_p(\frac{x^{n-1}}{n!}) = (n-1)v_p(x) - v_p(n!) > \frac{n-1}{p-1} - \frac{n-s}{p-1} = \frac{s-1}{p-1} \geq 0$$

where if $n = a_0 + a_1 p + \cdots + a_k p^k$, $s = a_0 + a_1 + \cdots a_k$...
(In fact, $v_p(n!) = \frac{n-s}{p-1}$)
Thus, $|x^n/n!| < |x|$ for $n \geq 2$, $|\exp_p(x) - 1| = |x|$. 이제 Theorem 1 (혹은 Theorem 5.4.3)에서 $f(X) = \log_p(1+X)$, $g(X) = \exp_p(X) - 1$이라 둘 때 (a), (b)와 더불어 (c)의

$$|\frac{x^n}{n!}| \leq |\exp_p(x) - 1| = |x|$$

가 성립하므로, $\log_p(\exp_p(x)) = x$

반대 방향.. $f(X) = \exp_p(X)$, $g(X) = \log_p(1+X)$를 적용시키려 한다.
$|\frac{x^n}{n}| \leq |\frac{x^n}{n!}| < |x|$ for $n \geq 2$
따라서 $|\log_p(1+x)| = |x| < p^{-1/(p-1)}$이 성립하고, (a),(b),(c)가 모두 만족되므로

$$\exp_p(\log_p(1+x)) = 1 + x$$

□

0.1 Application : Multiplicative Structure of $\mathbb{Z}_p^\times$

$\mathbb{Z}_p^\times$를 분석하고 싶다. Hensel Lemma로부터 $\mathbb{Z}_p^\times$ contains the $(p-1)$ the roots of unity.

$$U_1 = \{x \in \mathbb{Z}_p^\times : |x - 1| < 1\} = 1 + p\mathbb{Z}_p$$

$$U_p = \{x \in \mathbb{Z}_p^\times : |x - 1| < p^{-1/(p-1)}\} = 1 + q\mathbb{Z}_p$$

$q = 4$ if $p = 2$, $q = p$ if p odd.
- U_1, U_p are subgroups of $\mathbb{Z}_p^\times$

Proposition 3 ([Gou20] Proposition 5.8.1). *Let $\mathbb{Z}_p^+ = (\mathbb{Z}_p, +)$ additive group and*

$$W = \{x \in \mathbb{Z}_p : |x| < p^{-1/(p-1)}\} = q\mathbb{Z}_p$$

considered as a subgroup of $\mathbb{Z}_p^+$
(a) p-adic logarithm defines homomorphism of groups

$$\log_p : U_1 \to \mathbb{Z}_p^+$$

and the image is contained in $p\mathbb{Z}_p$
(b) p-adic logarithm defines an isometric isomorphism of groups

$$\log_p : U_p \to W$$

with inverse $\exp_p$. In particular U_p is torsion-free

Proof. $\log_p$가 homomorphism인 것은... 우리가 알고.. $\exp_p$ 역시 homomorphism... (b)의 isomorphism 역시 이미 한 내용이다...
$p \neq 2$이면, $W = p\mathbb{Z}_p$이므로 (a),(b)는 동치다.
$p = 2$ 이면, $\log_2(U_1) = W = 4\mathbb{Z}_2$인 것을 보일 수 있다.
마지막으로 torsion-free까지... □

Corollary 1 ([Gou20] Corollary 5.8.2). *For any prime p, we have an isomorphism*

$$\mathbb{Z}_p^\times \cong V \times U_p$$

(a) V is the set of roots of unity in $\mathbb{Q}_p$ which forms a subgroup of $\mathbb{Z}_p^\times$
(b) $V \cong (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$ so cyclic group of order $\varphi(q)$
We also know that U_p is torsion-free group and V is the torsion part.

Proof. $\mathbb{Z}_p^\times$ 가 roots of unity를 포함하는 것은 알고 있다. (Cyclic group of order $p-1$ when p is odd, order 2 when $p = 2$) 그리고 각 root of unity는 modulo q 로 Noncongruent ($p = 2$: $-1, 1$이었고, $p \neq 2$: 각 $1, 2, \cdots, p-1$마다 하나씩..
따라서 $\mathbb{Z}_p^\times$의 각 원소는 $U_p \times V$ 꼴로 unique하게 적힘. 그리고 곱셈구조를 보존하므로... isomorphic하다. □

즉, logarithm을 통하여 $\mathbb{Z}_p^\times$의 구조는 roots of unity에 U_p를 곱한 형태인데,
roots of unity는 cyclic group을 이루고
U_p 라 불리우는 것은 사실은 $\mathbb{Z}_p^+$, 즉 덧셈 구조와 똑같은 모습으로 생겼다고 결론지을 수 있겠습니다.

1 7강. Vector Spaces and Field Extensions

1.1 Field Extension

Field Extension이 무엇일까요? 간단하게 말하면, 두 field E, F가 있고, $E \supset F$일 때 E가 F-vector space이면 field extension이라 합니다.

Vector field revisit. 우리가 가지는 Vector space에 대한 intuition은 $\mathbb{R}^n$ 공간. $\mathbb{R}, \mathbb{C}$-vector space의 이미지가 가장 익숙합니다.

하지만, linear algebra는 임의의 field에 대해 vector space를 정의하고, 그에 대한 정리들을 증명하는 것이기도 합니다.
예시를 들어보면, $\mathbb{F}_2$-vector space를 생각하죠. $\mathbb{F}_2^3$ 이 생긴 모양을 상상해보면, cube와 같음을 알 수 있을 것입니다. cube의 각 꼭짓점이 원소가 되는 것이죠.

실제로, 임의의 field에 대해서 Linear algebra에 관한 많은 정리들이 성립합니다.

- Definition of Linearly independency, Basis
- Dimension theorem : V a vector space over F and $\dim V = n$ then V and $\mathbb{F}^n$ are vector space isomorphic
- Every Linear map $L : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ can be expressed as a matrix (This matrix, every element lie in $\mathbb{F}$)
- For matrices, the definition of determinant is still valid
- Rank is well defined, rank theorem (row rank = col rank) holds
- Primary Decomposition Theorem, Cyclic Decomposition Theorem holds...
- Jordan Canonical Form **Does not hold**. 각 characteristic polynomial이 일차식의 곱으로 이루어져있다는 가정이 증명 과정에 쓰이므로..
- Dual space에 관한 내용들도 많이 성립합니다.

Field Extension을 다른 식으로 서술하면, F라는 field가 있을 때, F-vector space E 에 '곱셈 구조'를 정의하는 것으로도 볼 수 있습니다 (덧셈 구조는 아주 잘 정의되어있으므로...)
E가 F의 field extension일 때 E를 F-vector space로 고려하여 dimension을 $[E : F]$으로 표기합니다.
가장 elementary 한 정리로

Proposition 4. *Consider fields $L \subset E \subset F$. Then L/F is of finite degree iff L/E and E/F are both of finite degree, and*

$$[L : F] = [L : E][E : F]$$

Proof. L/E, E/F finite degree: $(e_i)_{1 \leq i \leq m}$ basis for E/F, $(l_j)_{1 \leq j \leq n}$ basis for L/E
$(e_i l_j)$ is basis for L over F.
- Spanning
- Linearly independent □

다음으로, E/F가 Field extension일 때 S 가 subset of E에 대해 $F(S)$가 smallest subfield of E containing both F, S.
$F(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ if $S = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$.
Example. $\mathbb{Q}(i) = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Q}\}$

1.2 Normed Vector Spaces over Complete Valued Fields

Definition: Let $\Bbbk$ a complete valued field of characteristic zero with a nontrivial absolute value $|\cdot|$. A norm on a $\Bbbk$-vector space V is

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_+$$

satisfying
- $\|v\| = 0$ iff $v = 0$
- For any $v, w \in V$, we have $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$
- $v \in V$ and $\lambda \in \Bbbk$ then $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$

Model: $\mathbb{R}, \mathbb{Q}_p$

Examples
- $\Bbbk = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$

$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\|(x, y)\|_{\sup} = \max(|x|, |y|)$$

$$\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|$$

- $\Bbbk = \mathbb{Q}_p$, $V = \mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p$

$$\|(x, y)\| = \sqrt{|x|_p^2 + |y|_p^2}$$

마찬가지로, normed vector space에 자연스러운 거리를 정의할 수 있습니다.

$$d(v, w) = \|v - w\|$$

이제, 임의의 finite dimensional vector space over $\Bbbk$에 norm을 정의하는 방법이 있습니다. V basis $\{v_1, \cdots, v_n\}$. Any vector can be written as $a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$, $a_i \in \Bbbk$.

$$\|a_1v_1 + \cdots + a_nv_n\|_{\sup} = \max_{1\le i\le n} |a_i|$$

$r \geq 1$에 대해서

$$\|a_1v_1 + \cdots + a_nv_n\|_r = (|a_1|^r + \cdots + |a_n|^r)^{1/r}$$

그리고, Equivalence of norm을 정의할 텐데, 이는 우리가 field에서 equivalence of absolute value를 정의했던 것과 완전히 동일한 방식입니다. Open set들이 서로 같은가? (fancy하게는 topology를 같게 주는가?)
Definition. We say two norms $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ on a $\Bbbk$-vector space V are equivalent if there exists $C, D > 0$ such that

$$\|v\|_1 \leq C\|v\|_2$$

$$\|v\|_2 \leq D\|v\|_1$$

Example. $\mathbb{R}^2$에 대해 $\|\cdot\|, \|\cdot\|_{\sup}, \|\cdot\|_1$은 모두 equivalent.

Proposition 5 ([Gou20] Proposition 6.1.4). *V be a finite-dimensional vector space over a complete valued field $\Bbbk$. Choose a basis $\{v_1, \cdots, v_m\}$ for V, and $\|\cdot\|$ be the sup-norm w.r.t this basis. Then V is complete.*
(w_n) sequence in V is Cauchy if and only if for $w_n = a_{1n}v_1 + \cdots + a_{mn}v_m$, the coefficients $(a_{1n}), (a_{2n}), \cdots, (a_{mn})$ are Cauchy sequences in $\Bbbk$. The limit is

$$\lim_{n\to\infty} w_n = (\lim_{n\to\infty} a_{1n})v_1 + \cdots + (\lim_{n\to\infty} a_{mn})v_m$$

이제 finite dimensional normed vector space에 대한 fundamental한 정리를 증명해봅시다.

Theorem 1 ([Gou20] Theorem 6.2.1). *V be a finite dimensional vector space over a complete valued field $\Bbbk$. Then any two norms on V are equivalent. Moreover, V is complete w.r.t. the metric induced by any norm.*

우선 basis가 고정된 경우 sup-norm을 하나 고정하고 ($\|\cdot\|_0 = \|\cdot\|_{\sup}$ for fixed basis $\{v_1, \cdots, v_n\}$) 다른 norm이 equivalent 함을 보입시다.
$\|\cdot\|_1$ be any other norm.

Proposition 6 ([Gou20] Proposition 6.2.2). *Let $C = n \cdot \max_{1\le i\le n} \|v_i\|_1$. Then we have*

$$\|v\|_1 \leq C\|v\|_0$$

Proof. $v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$ then

$$\begin{aligned}\|v\|_1 &\leq |a_1|\|v_1\|_1 + \cdots + |a_n|\|v_n\|_1 \\ &\leq n \max_i |a_i| \max_i \|v_i\|_1 = C \max_i |a_i| = C\|v\|_0\end{aligned}$$

□

이제 반대 방향을 보여야합니다.

Proposition 7 ([Gou20] Proposition 6.2.3). *There exists a positive real number D such that*

$$\|v\|_0 \leq D\|v\|_1$$

In particular, V is complete with respect to $\|\cdot\|_1$

Proof. Induction on dimension of V.
Dimension 1인 경우는 굉장히 trivial합니다.
Inductive step...
V가 dimension n이고, $\{v_1, \cdots, v_n\}$ 이 fixed basis라 둡시다. 만일 $\|w\|_0 \leq D\|w\|_1$이 성립하도록 하는 D가 존재하지 않는다면... 우리는 w_m sequence satisfying

$$\|w_m\|_1 < \frac{1}{m}\|w_m\|_0$$

을 잡을 수 있습니다. 그리고 이 수열에서 subsequence를 잡아서 어떤 v_{i_0} coefficient가 sup norm이 되게 하도록 할 수 있습니다. $w_{m_1}, \cdots, w_{m_k}, \cdots$ such that

$$\|w_{m_i}\|_0 = |\beta_k|$$

that β_k 가 w_{m_k}의 i_0-coordinate.

이제 $\beta_k^{-1}w_{m_k}$을 고려해보면,
- $\beta_k^{-1}w_{m_k} = u_k + v_{i_0}$ for $u_k \in W \subset V$ spanned by $v_1, \cdots, \hat{v}_{i_0}, \cdots v_n$.
- $\|u_k + v_{i_0}\|_1 = \|\beta_k^{-1}w_{m_k}\|_1 = \frac{\|w_{m_k}\|_1}{\|w_{m_k}\|_0} < \frac{1}{m_k}$

두 성질을 만족하고, u_k는 따라서 Cauchy sequence가 됩니다,

$$\|u_{k'} - u_k\|_1 < \frac{1}{m_{k'}} + \frac{1}{m_k}$$

Inductive hypothesis, W가 complete하므로, $u \in W$ such that $u_k \to u$ 가 존재.

$$\|u + v_{i_0}\|_1 = \lim_k \|u_k + v_{i_0}\|_1 = 0$$

이므로 $u = -v_{i_0} = 0$이라는 결론이 나오데, 이는 모순. □

Remark 1. *이 정리는 infinite dimensional space에서는 성립하지 않습니다... infinite dimension에서 성질을 보는 학문이 바로 함수해석학*

1.3 Extending the p-adic Absolute value

Can we construct a p-adic absolute value on any finite extension K of $\mathbb{Q}_p$?
K a finite field extension of $\mathbb{Q}_p$. We want $|\cdot| : K \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ that
- $|x| = 0$ iff $x = 0$
- $|xy| = |x||y|$
- $|x + y| \leq |x| + |y|$
- $|\lambda| = |\lambda|_p$ for $\lambda \in \mathbb{Q}_p$

Proposition 8 ([Gou20] Proposition 6.3.1). *K be a finite extension of $\mathbb{Q}_p$. If there exists an absolute value $|\cdot|$ on K extending the p-adic absolute value on $\mathbb{Q}_p$, then*
(a) K is complete w.r.t. $|\cdot|$
(b) We can take a limit of a sequence in K by taking the limits of the coefficients w.r.t. given basis $\{x_1, \cdots, x_n\}$ of K as a $\mathbb{Q}_p$ vector space

Proof. Norm이 모두 equivalent하므로... □

Corollary 2 ([Gou20] Corollary 6.3.2). *There is at most one absolute value on K extending the p-adic absolute value on $\mathbb{Q}_p$*

Proof. $|\cdot|, \|\cdot\|$ two absolute values on K.
Claim : They are equivalent

$$|x| < 1 \Leftrightarrow \|x\| < 1$$

그리고, 이것은 $x^n \to 0$ in $|\cdot|$ iff $\|\cdot\|$와 같은것. 하지만, equivalence in norm은 open set이 서로 같음. 따라서 equivalence. $|x| = \|x\|^\alpha$ for every $x \in K$. $x \in \mathbb{Q}_p$에 대해서 생각해보면. $\alpha = 1$ □

Uniqueness에 의한 따름정리로, $\mathbb{Q}_p \subset L \subset K$ two extension 이라 하면, $|\cdot|_K$는 $|\cdot|_L$을 extend한다.

$F \subset K$가 field extension (Characteristic 0) 이 normal이라 함은 C an algebraic closed field containing F에 대해 field homomorphism $\sigma : K \hookrightarrow C$ that is identity on F always sends K to K.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r] & C \\ K \arrow[u] \arrow[r, "\sigma"] & K \arrow[u] \\ F \arrow[u] \arrow[r, "id"] & F \arrow[u] \end{tikzcd}$$

그리고 그러한 automorphism의 개수는 정확하게 $[K : F]$ 만큼 있음. 이를 Galois group이라 부른다.

Example. $\mathbb{Q}(i)/\mathbb{Q}$ normal
Example. $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$ not normal. $C = \mathbb{C}$, σ를 어떻게 잡으면 될까요.

Fact. K/F finite extension there exists a finite normal extension of F containing K. Smallest one is called normal closure.

K/F가 field extension일 때 다음 함수를 정의할 수 있다 (norm이라 부르는)

$$N_{K/F} : K \to F$$

Definition 1. $\alpha \in K$, the map $\alpha : K \to K$, sending $x \mapsto \alpha x$, the determinant of this linear map is $N_{K/F}(\alpha)$
Definition 2. $\alpha \in K$, $F(\alpha)$가 subextension. $r = [K : F(\alpha)]$ 라 두고, α를 근으로 갖는 최소 다항식

$$f(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 \in F[X]$$

일 때 $N_{K/F}(\alpha) = (-1)^{nr}a_0^r$
Definition 3(If K/F normal). Product of all $\sigma(\alpha)$

Equivalence checking.
1 and 2 : 우선 $K = F(\alpha)$라면, $\{1, \alpha, \alpha^2, \cdots, \alpha^{n-1}\}$이 basis를 이룬다. 다음으로 $K \neq F(\alpha)$이면 $\{\alpha^i b_j\}$꼴의 basis를 잡을 수 있다. ($K/F(\alpha)$ basis $b_1, \cdots, b_r$)

2 and 3 : $K = F(\alpha)$: $\sigma(\alpha)$는 $f(X)$의 근. 반대로 $f(X)$의 다른 근 β (in C)에 대해, $K = F(\alpha) \to F(\beta)$ sending α to β가 존재. Normal에 의해 $\beta \in K$, $\beta = \sigma(\alpha)$. 따라서 이 경우 2,3 동치. $K \neq F(\alpha)$라면 $[K : F(\alpha)]$ 만큼의 중복.

몇가지 성질을 살펴보면
- $\alpha \in F$, $N_{K/F}(\alpha) = \alpha^n$
- $N_{K/F}(\alpha\beta) = N_{K/F}(\alpha)N_{K/F}(\beta)$
- $N_{L/F}(N_{K/L}(\alpha)) = N_{K/F}(\alpha)$ if $F \subset L \subset K$

Example. $\mathbb{Q}_5(\sqrt{2})/\mathbb{Q}_5$ calculate $N_{K/F}(a + b\sqrt{2})$
Definition 1. Basis를 $\{1, \sqrt{2}\}$로 잡으면 행렬표현

$$\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Determinant $a^2 - 2b^2$
Definition 2. $b = 0$ 이면 $r = 1$, $X - a$가 minimal polynomial 이므로 a^2. $b \neq 0$ 이면 $r = 2$, minimal polynomial $X^2 - 2aX + (a^2 - 2b^2)$ 따라서 $a^2 - 2b^2$
Definition 3. $\sigma : a + b\sqrt{2} \mapsto a - b\sqrt{2}$가 automorphism.

$$(a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2$$

이제, Norm을 도입한 이유를 들여다봅시다. $K/\mathbb{Q}_p$ field extension and normal이고 absolute value on K가 있다면, $x \to |\sigma(x)|$도 absolute value. 따라서 $|x| = |\sigma(x)|$.

$$|\prod_\sigma \sigma(x)| = |x|^n$$

따라서 $|x| = \sqrt[n]{|N_{K/\mathbb{Q}_p}(x)|}$로 정의되어야 한다.

Lemma 3 ([Gou20] Lemma 6.3.3)**.** *L, K be finite extensions of $\mathbb{Q}_p$ which $\mathbb{Q}_p \subset L \subset K$. $x \in L$, $m = [L : \mathbb{Q}_p], n = [K : \mathbb{Q}_p]$ then*

$$\sqrt[m]{|N_{L/\mathbb{Q}_p}(x)|_p} = \sqrt[n]{|N_{K/\mathbb{Q}_p}(x)|_p}$$

Proof. $N_{K/F}(x) = N_{L/\mathbb{Q}_p}(N_{K/L}(x))$, $N_{K/L}(x) = x^{[K:L]}$ □

따라서 normal이 아니더라도 normal closure로 가서 정의한 것과 definition이 똑같고,

Proposition 9 ([Gou20] Proposition 6.3.4)**.** *If there is an absolute value on K extending the p-adic absolute value, then it must be given by the formula*

$$|x| = \sqrt[n]{|N_{K/\mathbb{Q}_p}(x)|_p}$$

where $n = [K : \mathbb{Q}_p]$

References

[Gou20] Fernando Q. Gouvêa. *p-adic Numbers: An Introduction*. 3rd. Universitext. Springer, 2020. ISBN: 978-3-030-47295-5. DOI: 10.1007/978-3-030-47295-5.