厦門大學

本 科 毕 业 论 文 （设 计）

（主修 / 辅修专业）

面向非结构化企业指标信息的智能处理和可视分析

Indicators of the Unstructured Enterprise Information for Intelligence Processing and Visualization

姓 名：

学 号：

学 院：

专 业：

年 级：

校内指导教师： （姓名） （职称）

校外指导教师： （姓名） （职务）

二〇 年 月 日

厦门大学本科学位论文诚信承诺书

本人呈交的学位论文是在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考其他个人或集体已经发表的研究成果，均在文中以适当方式明确标明，并符合相关法律规范及《厦门大学本科毕业论文（设计）规范》。

该学位论文为（   ）课题（组）的研究成果，获得（   ）课题（组）经费或实验室的资助，在（   ）实验室完成（请在以上括号内填写课题或课题组负责人或实验室名称，未有此项声明内容的，可以不作特别声明）。

本人承诺辅修专业毕业论文（设计）（如有）的内容与主修专业不存在相同与相近情况。

学生声明（签名）：

年　　月　　日

致谢

本学位论文

摘要　本文

关键词　一；二；三

Abstract This thesis

Keywords one; two; three

Contents

第1章　引言

在19 世纪末，Henri Poincare（庞加莱）引入了一个原创性的深刻思想，即在复平面单位圆盘上面构造一个度量，使其在全纯双射下是不变量的思想。可以说庞加莱度量是对于圆盘的特殊化度量。事实上，我们感兴趣的是对于圆盘上面的任意一个连通开集，构造一个共形的或双全纯的不变度量。有多重方法来构造这个度量。其中最典型的方法是采用单值化原理。早期的一个方法是由Stefan bergman （伯格曼）在1923 年给出的。Caratheodory 在1927 年给出了另一个方法。近年来的一个方法是由Kobayashi（小林昭七）在1967 年发展起来的。本文将着重研究Kobayashi 度量的性质和应用，并研究其和Caratheodory 度量、庞加莱度量的关系。

第2章　预备知识

2.1　复平面上的度量

$U\subseteq C$ 是复平面上面的开集，连续函数$\rho(z)$ 被称为Ω 上的一个度量，如果它满足：

(1) $\rho(z)\geq 0$

(2) $\rho(z)$ 在$\{z\in\Omega:\rho(z)>0\}$ 上面二次连续可微。

对$\xi\in C$,$z\in\Omega$ 我们定义ξ 在z 点的长度为：

$$||\xi||_{\rho,z}=\rho(z)\cdot|\xi|$$

例1：当$\rho(z)\equiv 1$ 时:

$$||\xi||_{\rho,z}=\rho(z)\cdot|\xi|=|\xi|$$

例2：当$\Omega=\{z\in C:|z|<1\},\rho(z)=\frac{1}{1-|z|^2}$ 时:

$$||\xi||_{\rho,z}=\frac{|z|}{1-|z|^2}$$

复平面上的庞加莱度量

用D 表示复平面上的单位圆盘。定义D 上的度量：

$$\rho(z)=\frac{1}{1-|z|^2}$$

该度量称为单位圆盘D 上的庞加莱度量。

2.2　复平面上两点之间的距离

$\Omega\subseteq C$ 是复平面上面的开集，$\rho(z)$ 为Ω 上的一个度量。P,Q 是Ω 中的两个点，定义$C_\Omega(P,Q)$ 为所有分段连续可微曲线$\gamma:[0,1]\to\Omega,\gamma(0)=P,\gamma(1)=Q$ 构成的集合。

P,Q 两点之间的距离定义为：

$$d_\rho(P,Q)=inf\{l_\rho(\gamma):\gamma\in C_\Omega(P,Q)\}$$

等距变换

$\Omega_1\Omega_2$ 是复平面上面的开集，ρ_1,ρ_2 分别为Ω_1,Ω_2 上的度量。函数：

$$f:\Omega_1\to\Omega_2$$

连续可微并且仅有孤立零点。对$z\in\Omega_1$ 定义ρ_2 在函数f 诱导下的拉回映射：

$$f*\rho_2(z)=\rho_2(f(z))\cdot\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|$$

如果$f * \rho_2 = \rho_1$ 对一切$z \in \Omega_1$ 都成立，那么f 称为等距变换。

曲线长度

$\Omega \subseteq C$ 是复平面上面的开集，$\rho(z)$ 为Ω 上的一个度量。如果：

$$\gamma : [a, b] \to \Omega$$

是连续可微曲线。那么它的长度被定义为：

$$l_\rho(\gamma) = \int_a^b ||\dot{\gamma}(t)||_{\rho,\gamma(t)} dt$$

2.3　复平面上的曲率公式

$U \subseteq C$ 是复平面上的开集，$\rho(z)$ 为U 上的一个度量。对$z \in U$ U 在度量ρ 下在z 点的曲率定义为：

$$\kappa_{U,\rho}(z) = \kappa(z) = \frac{- \triangle \, log(\rho(z))}{\rho(z)^2}$$

(κ 在$\rho(z) = 0$的点没有定义。)

2.4　正规族理论

设$\mathcal{F}$ 是区域$D(\subseteq \mathbf{C})$ 内的一族解析函数。如果$\mathcal{F}$ 中的任何函数序列都有一个子序列，在D 内内闭一致收敛，那么我们说$\mathcal{F}$ 是一个正规族。对于D 内任何有界闭集K，如果存在正数$M = M(K)$，使得$\forall f(z) \in \mathcal{F}, \forall z \in K, |f(z)| \leq M$，那么就说$\mathcal{F}$ 在D 内内闭一致有界。如果$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon, K)$ ，使得$\forall f(z) \in \mathcal{F}, \forall z', z'' \in K$ 满足$|z' - z''| < \delta, |f(z') - f(z'')| < \varepsilon$，那么就说$\mathcal{F}$ 在D 内内闭等度连续。

定理1. 设$\mathcal{F}$ 是区域$D(\subseteq \mathbf{C})$ 内的一族解析函数。如果$\mathcal{F}$ 在D 内内闭一致有界，那么它在D 内等度连续。

定理2. 设$\mathcal{F}$ 是区域$D(\subseteq \mathbf{C})$ 内的一族解析函数。如果$\mathcal{F}$ 在D 内内闭一致有界，那么$\mathcal{F}$ 是一个正规族。

定义3. $U \subseteq C$ 是复平面上的开集。$\{g_j\}$ 是定义在U 上的函数序列。如果对$\forall \varepsilon > 0$ 和U 中的任意一个紧集$K \subseteq U$，存在正数$J > 0 s.t.$ 对$\forall j > J, z \in K$ 都有：

$$|g_j(z) - g(z)| < \varepsilon$$

则称$\{g_j\}$ 在U 上正规收敛于g。

第3章　Kobayashi 度量的定义和性质

3.1　Kobayashi 度量的定义

$U \subseteq C$ 是复平面上的开集，$D \subseteq C$ 是复平面上的单位圆盘。

定义1.对$P \in U$ 定义：

$$(U, D)_P = \{f : f\text{为}D\text{到}U\text{的全纯函数}, f(0) = P\}$$

对$P \in U$ 定义U 上的Kobayashi 度量：

$$F_K^U(P) = inf\{\frac{1}{|\phi'(0)|} : \phi \in (U, D)_P\}$$

定义2.

$$(D, U)_P = \{f : f\text{为}U\text{到}D\text{的全纯函数}, f(P) = 0\}$$

对$P \in U$ 定义U 上的Caratheodory 度量：

$$F_C^U(P) = sup\{|\phi'(P)| : \phi \in (D, U)_P\}$$

回顾现代标准的黎曼映射定理的证明，对于一个给定的单连通开集Ω（不是整个平面）。可以构造一个Ω 到单位圆盘的共形映射。即固定一个点$P \in \Omega$，考虑由全纯映射$\phi : D \to \Omega$且$\phi(0) = P$组成的集合。根据正规族理论可以知道存在一个元素ϕ^*，使其在0处的导数的模取到最大值。这个函数ϕ^*就是我们要找的共形映射了。

现在来看Kobayashi 度量的定义。在P点的ξ方向的度量是$\frac{|\xi|}{|f'(0)|}$关于圆盘到Ω的所有的全纯映射的下确界。这说明和极大化$|f'(0)|$相同。从中我们也可以看到黎曼映射定理的证明和Kobayashi度量的紧密联系。

3.2　Kobayashi 度量的性质

性质1. 对一切$P \in U$都有：

$$F_C^U(P) \leq F_K^U(P)$$

证明：

对$\phi \in (D, U)_P$和$\psi \in (U, D)_P$。我们有$\phi \circ \psi : D \to D$ 并且$\phi \circ \psi = 0$。从而根据Schwarz's 定理：

$$|(\phi \circ \psi)'(0)| \leq 1$$

从而得到：

$$|\phi^{'}(P)| \leq \frac{1}{|\psi'(0)|}$$

对一切ϕ取上确界得到：

$$F_C^U(P) \leq \frac{1}{|\psi'(0)|}$$

对一切ψ取下确界得到：

$$F_C^U(P) \leq F_K^U(P)$$

性质2. U_1, U_2 是复平面上面的开集，ρ_1, ρ_2 分别为U_1, U_2 上的Kobayashi 度量。如果映射: $h : U_1 \to U_2$全纯。那么h使得距离不增，即：

$$h * \rho_2(z) \leq \rho_1(z), \forall z \in U_1$$

证明：

固定$P \in U_1$令$Q = h(P)$。对$\forall \phi \in (U_1, D)_P$ 有：$h * \phi \in (U_2, D)_Q$。根据Kobayashi 度量的定义：

$$\begin{aligned} F_K^{U_2}(Q) &\leq \frac{1}{|(h \circ \phi)'(0)|} \\ &\leq \frac{1}{|h'(P)||\phi'(0)|} \end{aligned}$$

对ϕ取下确界我们得到：

$$F_K^{U_2}(Q) \leq \frac{1}{|h'(P)|} F_K^{U_1}(P)$$

两边乘以$|h^{'}(P)|$得到:

$$|h^{'}(P)| \cdot F_K^{U_2}(Q) \leq F_K^{U_1}(P)$$

即：

$$h * \rho_2(P) \leq \rho_1(P)$$

由P 的任意性就得到了我们的结论。

性质3. 如果$\gamma : [0, 1] \to U_1$ 是分段连续可微曲线，则：

$$l_{\rho_2}(h * \gamma) \leq l_{\rho_1}(\gamma)$$

证明：

$$
\begin{aligned}
l_{\rho_2}(h*\gamma) &= \int_a^b ||(f*\gamma)'(t)||_{\rho_2, f*\gamma(t)}dt \\
&= \int_a^b ||\frac{\partial f}{\partial z}(\gamma(t))\dot{\gamma(t)}||_{\rho_2, f*\gamma(t)}dt \\
&= \int_a^b \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| \cdot |\dot{\gamma(t)}| \cdot \rho_2(f*\gamma(t))dt \\
&\leq \int_a^b \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| \cdot |\dot{\gamma(t)}| \cdot \rho_1(\gamma(t))dt \\
&\leq l_{\rho_1}(\gamma)
\end{aligned}
$$

性质4. 如果$P_1, P_2 \in U_1$ 那么有：

$$d_{\rho_2}(h(P_1), h(P_2)) \leq d_{\rho_1}(P_1, P_2)$$

特别的，如果h是U_1 到U_2 的保形双射，那么h是U_1 到U_2 的等距变换：

$$d_{\rho_2}(h(P_1), h(P_2)) = d_{\rho_1}(P_1, P_2)$$

从以上四个性质我们可以看出，性质1刻画了Kobayashi 度量和Caratheodory 度量的比较关系。性质2,3,4 则反映了Kobayashi 度量在全纯映射下的点与点之间的距离关系。作为本小节的结束，我们要证明一个更加精彩的结论：当Kobayashi 度量定义中的$U \equiv D$ 时候，Kobayashi 度量作为D 上的度量就是庞加莱度量！

3.3 Kobayashi 度量与庞加莱度量

性质5. Kobayashi 度量作为D 上的度量就是庞加莱度量。

证明：

为了给出命题的证明，我们先证明如下的引理：

引理6. 设$\rho(z)$ 是定义在单位圆盘上面的度量。如果对任意的保形双射$h: D \to D$，在度量$\rho(z)$ 下，h 也是等距变换，那么$\rho(z)$ 和庞加莱度量仅仅相差一个倍数。

引理证明：

对$\forall z_0 \in D$, 构造莫比乌斯变换：

$$h(z) = \frac{z + z_0}{1 + \overline{z_0}z}$$

则h 是等距变换，由此我们得到：

$$h * \rho(0) = \rho(0)$$

即：

$$|h^{'}(0)|\rho(h(0)) = \rho(0)$$

所以：

$$\rho(z_0) = \frac{1}{1-|z_0|^2} \cdot \rho(0)$$

上式表明，$\rho(z)$ 和庞加莱度量只相差一个倍数$\rho(0)$。

再回到命题的证明：我们先计算Caratheodory 度量在0 处的值。一方面，注意到对$\forall \phi \in (D,D)_0$, 根据Schwarz 定理: $|\phi^{'}(0)| \leq 1$, 根据Caratheodory 度量的定义得到：

$$F_C^D(0) \leq 1$$

另一方面，映射：

$$\phi(\xi) = \xi$$

满足$\phi \in (D,D)_0$ 并且$\phi^{'}(0) = 1$, 所以我们得到：

$$F_C^D(0) \geq 1$$

所以：

$$F_C^D(0) = 1$$

根据性质1得到：

$$F_K^D(0) \geq F_C^D(0) = 1$$

又由于映射：

$$\phi(\xi) = \xi$$

满足$\phi \in (D,D)_0$ 并且$\phi^{'}(0) = 1$, 所以我们得到：

$$F_K^D(0) \leq 1$$

所以：

$$F_K^D(0) = 1$$

又根据引理6,单位圆盘D 上的庞加莱度量和Kobayashi 度量仅仅相差一个倍数，所以我们可以断定：Kobayashi 度量作为D 上的度量就是庞加莱度量。这就证明了我们需要的命题。

在本章中，Caratheodory 度量和Kobayashi 度量实际上是可以互换的，任意一个Kobayashi 度量的性质，Caratheodory 度量都存在与其相同的性质，他们以共轭的形式被定义，而且一个总是大于等于另一个。

第4章　Kobayashi 度量的应用

本章节我们主要研究的是Kobayashi 度量的三个应用。首先我们刻画的是Kobayashi 度量与全纯映射的关系。

4.1　Kobayashi 度量与全纯映射

命题1. $U \subseteq C$ 是复平面上的开集。U 与单位圆盘D 全纯等价当且仅当$\exists P \in U st$:

$$F_C^U(P) = F_K^U(P) \neq 0$$

证明：

如果U 与单位圆盘D 全纯等价，那么存在解析双射：

$$h : U \to D$$

对任意$P \in U$,根据性质2可以得到：

$$h * F_C^D(P) \leq F_C^U(P)$$

同样的有：

$$(h^{-1}) * F_C^U(h(P)) \leq F_C^D(h(P))$$

化简得到：

$$F_C^U(P) \leq h * F_C^D(P)$$

所以有：

$$F_C^U(P) = h * F_C^D(P)$$

又因为（ρ 为单位圆盘上面的庞加莱度量）：

$$\begin{aligned}(h * F_C^D)(P) &= (h * \rho)(P) \\ &= (h * \rho)(P) \\ &= (h * F_K^D)(P) \\ &= F_K^U(P)\end{aligned}$$

即：

$$F_C^U(P) = F_K^U(P)$$

上述定理刻画了复平面上一个开集U 和单位圆盘全纯等价的充分必要条件。回顾整个定理的条件，我们可以看到：复平面上开集U 在一个点的特殊性态：$F_C^U(P) =$

$F_K^U(P) \neq 0$ 可以影响到U 全局的形态：全纯等价于单位圆盘。类比我们学习过的最大模原理，如果解析函数f 在区域D 内具有局部性质：$|f(z)|$ 在D 内某一点达到最大值。那么可以导出f 的全局性质：f 为常值映射。我们可以看到：复平面中的区域在一个点的性态，竟然可以影响到与之相关的一个函数、整个区域的性态！这些精彩的结论都是复变函数所特有的，也是复变函区别于实变函数的精彩之处！作为本章的结束，我们不加证明地给出如下更为加强的命题。

命题4. $U \subseteq C$ 是复平面上的开集，Kobayashi 度量作为U 上的度量不恒为零。全纯映射:

$$f : U \to U$$

存在不动点：$f(P) = P$,并且f 在P 点保持等距：

$$f * F_C^U(P) = F_C^U(P)$$

那么f 是一个双射。

4.2　Kobayashi 度量与双曲流型

这一小章节将着重讨论Kobayashi 度量和曲率、双曲流型的紧密联系。我们将证明：无论是在复平面$\mathbf{C}$ 上还是在$\mathbf{C}_0(\mathbf{C}\backslash\{0\})$ 上，都无法定义一个具有严格负曲率的度量。这是本章节最为直接也是最为精彩的结果，从中也可以看到其与Picard 定理的紧密联系。

命题1. 设ρ 为定义在单位圆盘上面的庞加莱度量，$U \subseteq C$ 是复平面上的开集，σ 是U 上的一个度量。如果对于任意的全纯映射：$f : D \to U$。f 保持从(D, ρ) 到(U, σ) 的距离不增。那么：

$$\sigma \leq F_K^U$$

证明：

对于$\forall z \in U$。对于映射：$\phi : D \to U$且$\phi(0) = z$。根据题目的条件：

$$\phi * \sigma(0) \leq \rho(0)$$

化简得到：

$$\frac{1}{|\phi'(0)|} \geq \frac{\sigma(z)}{\rho(0)} = \sigma(z)$$

对所有这样的ϕ 取下确界我们得到：

$$\| \xi \|_{F_K^U, z} = \inf_{\phi \in (U,D)_z} \frac{|\xi|}{|\phi'(0)|} \geq |\xi| \cdot \sigma(z) = \| \xi \|_{\sigma, z}$$

该定理表明：F_K^U是可以定义的保持从(D,ρ) 到(U,σ) 的距离不增的最大度量。

定义2. $U \subseteq C$ 是复平面上的开集。如果对U 中任意的两个不同的点P,Q 都有：

$$d_{Kob}(P,Q) > 0$$

那么U 被称为双曲流型。

为了给出我们的定理4，先给出如下一个引理：

引理3. 设$f(z)$ 为定义在D 上的全纯函数，ρ 是定义在单位圆盘上面的庞加莱度量。f 将D 映射成U。σ 是定义在U 上的度量，具有严格的负曲率：$\kappa_\sigma \leq -4$。如果$f: D \to U$ 是全纯映射，那么：

$$f*\sigma(z) \leq \rho(z), \forall z \in D$$

证明： 对于$0 < r < 1$。定义圆盘$D(0,r)$ 上的度量：

$$\rho_r(z) = \frac{r}{r^2 - |z|^2}$$

通过直接计算得到：$\kappa_{\rho_r} = -4$

定义函数：

$$v = \frac{f*\sigma}{\rho_r}$$

显然v 是定义在$D(0,r)$ 上面的非负连续函数。当$|z| \to r$ 时，$v \to 0$。所以v 在圆盘$D(0,r)$的内部取到最大值M。我们只要证明$M \leq 1$，再令$r \to 1^-$，就得到了我们的结论。

设v 在τ 处取到极大值。如果$f*\sigma(\tau) = 0$,那么$v \equiv 0$。所以我们不妨假定$f*\sigma(\tau) > 0$。因此$\kappa_{f*\sigma}$在该点有定义。并且:

$$\kappa_{f*\sigma}(\tau) = \kappa_\sigma(f(\tau)) \leq -4$$

由于$logv$ 在τ 处取到极大值，所以我们有：

$$\begin{aligned} 0 \geq \Delta logv(\tau) &= \Delta f*\sigma(\tau) - \Delta log\rho_r(\tau) \\ &= -\kappa_{f*\sigma}(\tau)\cdot(f*\sigma(\tau))^2 + \kappa_{\rho_r}(\tau)\cdot(\rho_r(\tau))^2 \\ &\geq 4(f*\sigma(\tau))^2 - 4(\rho_r(\tau))^2 \end{aligned}$$

移项化简得到：

$$\frac{f*\sigma(\tau)}{\rho_r(\tau)} \leq 1$$

即：

$$M \leq 1$$

这就证明了我们的结论。还可以将性质4改成更具有一般的结论。

在$D(0,\alpha)$ 上定义度量（$\alpha > 0, A > 0$）

$$\rho_\alpha^A(z) = \frac{2\alpha}{\sqrt{A}(\alpha^2 - |z|^2)}$$

直接计算得到其曲率有$-A$。

引理3*. 假设$f(z)$ 为定义在$D(0,\alpha)$ 上的全纯函数，将$D(0,\alpha)$ 映射成为U。σ 是定义在U 上的度量，具有严格的负曲率：

$$\kappa_\sigma \leq -B$$

则：

$$f * \sigma(z) \leq \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} \rho_\alpha^A(z)$$

对每个$z \in D(0,\alpha)$ 都成立，这里B 为正常数。

命题4. $U \subseteq C$ 是复平面上的开集。如果存在U 上的一个非负度量σ，使得U 在此度量下具有严格负曲率：

$$\kappa_\sigma \leq -B < 0$$

其中B 是大于0 的常数，那么U 是双曲的。

证明：

设ρ 为单位圆盘上面的庞加莱度量，设f 是单位圆盘D 到U 的全纯映射，根据引理3：

$$f * \sigma \leq \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{B}} \rho$$

令$\widetilde{\sigma} = (\sqrt{B}/\sqrt{4}) \cdot \sigma$，那么不等式可以写为：

$$f * \widetilde{\sigma} \leq \rho$$

因此，f 保持从度量空间(D,ρ) 到$(U,\widetilde{\sigma})$ 距离不增。所以根据定理1.我们得到:

$$\widetilde{\sigma} \leq F_K^U$$

即：

$$C \cdot \sigma \leq F_K^U$$

其中$C=\sqrt{B}/\sqrt{4}>0$。由于σ 非负，所以F_K^U 也是严格大于0的。这就证明了我们的命题。

命题5. 如果$U=\mathbf{C}\setminus\{P_1,\ldots,P_k\},k\geq 2$,那么$U$ 是双曲的，但是复平面$\mathbf{C}$ 和$\mathbf{C}\setminus\{0\}$ 都不是双曲的。

证明：

我们先证明$\mathbf{C}_{0,1}$ 是双曲的。定义如下的函数：

$$\mu(z)=\left[\frac{(1+|z|^{1/3})^{1/2}}{|z|^{5/6}}\right]\cdot\left[\frac{(1+|z-1|^{1/3})^{1/2}}{|z-1|^{5/6}}\right]$$

该函数的构造来自龚升老师的《简明复分析》，书中证明了该函数在$\mathbf{C}_{0,1}$上面具有严格的负曲率，所以$\mathbf{C}_{0,1}$ 是双曲的。同理，$\mathbf{C}\setminus\{P_1,\ldots,P_k\},k\geq 2$是双曲的。

当U 是整个复平面$\mathbf{C}$时，对$\forall f\in(D,\mathbf{C})_P$，$f$ 只能是常值映射。所以$F_C^U\equiv 0$。对于$U=\mathbf{C}_0$，对$\forall f\in(D,\mathbf{C_0})_P$，$f$ 可以延拓到整个复平面上，所以f 只能是常值映射。所以$F_C^U\equiv 0$。所以复平面$\mathbf{C}$ 和$\mathbf{C}\setminus\{0\}$ 都不是双曲的。

从上述的结果上我们可以看到。复平面C 与$U=\mathbf{C}\setminus\{P_1,\ldots,P_k\},k\geq 2$ 在几何上有着本质的区别。后者是可以定义具有严格负曲率的度量，而前者是不可能的。这也从另一个角度揭示了了Picard 定理的本质内涵，也为后续Picard 定理的推广奠定了基础。

4.3 Kobayashi 度量与Picard定理的推广

在上一个章节中，我们刻画了复平面$\mathbf{C}$ 与$\mathbf{C}\setminus\{P_1,\ldots,P_k\},k\geq 2$ 在内蕴几何上的区别。本章节，我们将利用这个区别证明Picard 定理，并且由之导出Picard 的推广。

命题1. $U\subseteq C$ 是复平面上的开集。如果U 是双曲的，那么任何全纯映射:

$$f:\mathbf{C}\to U$$

只能是常数。

证明： 由于U 是双曲的，所以可以定义U 上具有严格负曲率的度量σ。即存在正数$B>0$ 使得：

$$\kappa_\sigma\leq -B<0$$

对任意的$\alpha>0$，考虑映射：

$$f:D(0,\alpha)\to U$$

其中$D(0,\alpha)$ 表示复平面上以0为中心，以α 为半径的开圆盘。定义$D(0,\alpha)$ 上的度量:

$$\rho_\alpha^A=\frac{2\alpha}{\sqrt{A}(\alpha^2-|z|^2)}$$

根据4.2引理3，对$\forall z > 0$ 当$\alpha > |z|$ 时有：

$$f * \sigma(z) \leq \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} \rho_{\alpha}^{A}(z)$$

令$\alpha \to +\infty$ 得到：

$$f * \sigma(z) \leq 0$$

因此：

$$f * \sigma(z) \equiv 0$$

这只能有：

$$f^{'}(z) \equiv 0$$

由z 的任意性，f 只能是常数。

证明了上述的命题以后，我们就容易证明Picard 小定理了。

Picard 小定理 设U 为全纯函数f 的值域，如果$\mathbf{C} \setminus U$ 包含了至少两个点，那么f 是常值映射。

证明： 如果$\mathbf{C} \setminus U$ 包含了至少两个点，根据4.2的命题4，U 是双曲的，又根据命题1，f 只能是常值映射。

Picard小定理的条件事实上保证了f 在复平面$\mathbf{C}$ 上具有平凡的Kobayashi 度量。因此，不难对Picard 小定理做出如下的推广：

Picard 小定理的推广 如果N 为具有平凡Kobayashi 度量的流型，而M 为双曲流型，那么任意全纯映射：

$$f : N \to M$$

只能是常数。

特别的，任意的全纯映射:

$$f : \mathbb{C}^m \to M$$

在M 为双曲流型时为常值。而当$m = 1$ 时，就是我们熟知的Picard 定理了。

[1] 参考文献1.
[2] 参考文献2.

附录

代码、详细证明等。