厦門大學

本　科　毕　业　论　文　（设　计）

（主修 / 辅修专业）

复平面上的 Kobayashi 度量浅析

姓　　名：

学　　号：

学　　院：

专　　业：

年　　级：

校内指导教师：　　　　（姓名）　　　（职称）

校外指导教师：　　　　（姓名）　　　（职称）

二〇一八 年　月　日

厦门大学本科学位论文诚信承诺书

本人呈交的学位论文是在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考其他个人或集体已经发表的研究成果，均在文中以适当方式明确标明，并符合相关法律规范及《厦门大学本科毕业论文（设计）规范》。

该学位论文为（　　　　　　　　　　　　　　）课题（组）的研究成果，获得（　　　　　　　　）课题（组）经费或实验室的资助，在（　　　　　　　）实验室完成（请在以上括号内填写课题或课题组负责人或实验室名称，未有此项声明内容的，可以不作特别声明）。

本人承诺辅修专业毕业论文（设计）（如有）的内容与主修专业不存在相同与相近情况。

学生声明（签名）：

年　月　日

致谢

本学位论文

摘要

本文讨论复平面上的几个重要度量：Poincare 度量、Caratheodory 度量、Kobayashi 度量。在第二章中主要讨论了复变函数中的几何性质，复平面上的度量、复平面上的两点的距离、复平面上的曲率公式以及正规族理论，在第三章中讨论了Kobayashi 度量的定义和性质，并讨论了Kobayashi 度量和Poincare 度量的关系。在第四章中研究了Kobayashi 度量的应用，主要讨论了Kobayashi 度量与全纯映射的关系、Kobayashi 度量与双曲流形的关系、Kobayashi 度量与Picard 定理的关系。

论文的第三章研究Kobayashi 度量的性质。本章首先研究了Kobayashi 度量与Caratheodory 度量的比较关系，研究了Kobayashi 度量在全纯映射下的等距性质。并讨论了Kobayashi 度量与Poincare 度量的关系，证明了Kobayashi 度量作为单位圆盘上的度量就是Poincare 度量。

论文的第三章研究了Kobayashi 度量的应用。一是研究Kobayashi 度量与全纯映射的关系，只要Kobayashi 度量在全纯映射f 下在某一点保持等距，那么f 就是一个全纯双射。二是研究了Kobayashi 度量和双曲流形的关系，证明了具有平凡Kobayashi 度量的流形不能被非常值的全纯映射映射为双曲流形。第三部分利用Kobayashi 度量给出了Picard 定理的几何解释及其推广。

关键词　Kobayashi 度量；双曲流形；Picard 定理

Abstract

In this thesis, we study important concepts of metric on a domain :the Poincare metric,the Caratheodory metric and the Kobayashi metric。In chapter 2 we consider the geometry viewpoint of complex analysis,the metric on a domain,the distance between two points, the curvature and the normal familly.In chapter 3 we consider the definition of the Kobayashi metric and its properties. And we study the relationship between the Kobayashi metric and the Poincare metric.In chapter 4 we study some applications of Kobayashi metric on entire function, hyperbolic surface and the Picard theorem.

In chapter 3, we study some properties of the Kobayashi metric on a domain.First, we consider the relationship between the Kobayashi metric and the Caratheodory metric.Second we study the isometries of the Kobayashi metric under a conformal map.Last we study the relationship between the Kobayashi metric and the Poincare metric.

In chapter 4, we study some applications of the Kobayashi metric on a domain.First,we prove that the global condition that f map U to U,together with differential condition at P, forces f to be one-to-one and onto.Second we discuss the hyperbolic surface equipped with the Kobayashi metric.Finally we prove the Picard theorem.

Keywords Kobayashi Metric; Hyperbolicity; Picard Theorem

Contents

第1章　引言

复数是16 世纪人们在求解导数方程时候引入的。在17世纪和18世纪，随着微积分的发明与发展，人们研究了复变函数，特别是把实初等函数推广到复变的情形，得到了一些重要成果。因为复数最初是单纯地从形式上推广而引进的，并且在18 世纪以前，由于人们对复数的有关概念了解的不够清楚，用它们进行计算得到的一些矛盾，所以复数在历史上长期不能为人们所接受。复变函数的理论基础是在19世纪奠定的。A.L 柯西（1789-1857）、K.魏尔斯特拉斯（1815-1897）和C.F.B.黎曼（1826-1866）是这一时期的三位代表人物。柯西和魏尔斯特拉斯分别应用积分和级数研究复变函数，黎曼开始研究函数的映射性质。

复变函数论随着它的领域不断扩大而发展成为一门庞大的数学分支。在复变函数的解析性质、映射性质、多值性质、随机性质、函数空间以及多复变函数等方面，都取得了重大的成果。这些问题有些是在复变函数论本身发展中提出的，有些是由实际问题或其他学科中提出的。例如保形映射的研究就是超音速飞机的设计中提出的。对于自然科学的其他部门（如空气动力学、流体力学、电学、热学、理论物理等）以及数学中的其他分支（如微分方程、积分方程、概率论、数论等），复变函数都有重要的应用。

在19 世纪末，Henri Poincare（庞加莱）引入了一个原创性的深刻思想，即在复平面单位圆盘上面构造一个度量，使其在全纯双射下是不变量的思想。可以说庞加莱度量是对于圆盘的特殊化度量。事实上，我们感兴趣的是对于圆盘上面的任意一个连通开集，构造一个共形的或双全纯的不变度量。有多重方法来构造这个度量。其中最典型的方法是采用单值化原理。早期的一个方法是由Stefan bergman （伯格曼）在1923 年给出的。Caratheodory 在1927 年给出了另一个方法。近年来的一个方法是由Kobayashi（小林昭七）在1967 年发展起来的。本文将着重研究Kobayashi 度量的性质和应用，并研究其和Caratheodory 度量、庞加莱度量的关系。

第2章　预备知识

2.1　复平面上的度量

$U \subseteq C$ 是复平面上面的开集，连续函数$\rho(z)$ 被称为Ω 上的一个度量，如果它满足：

(1) $\rho(z) \geq 0$

(2) $\rho(z)$ 在$\{z \in \Omega : \rho(z) > 0\}$ 上面二次连续可微。

对$\xi \in C$,$z \in \Omega$ 我们定义ξ 在z 点的长度为：

$$||\xi||_{\rho,z} = \rho(z) \cdot |\xi|$$

例1：当$\rho(z) \equiv 1$ 时:

$$||\xi||_{\rho,z} = \rho(z) \cdot |\xi| = |\xi|$$

例2：当$\Omega = \{z \in C : |z| < 1\}, \rho(z) = \frac{1}{1-|z|^2}$ 时:

$$||\xi||_{\rho,z} = \frac{|z|}{1 - |z|^2}$$

复平面上的庞加莱度量

用D 表示复平面上的单位圆盘。定义D 上的度量：

$$\rho(z) = \frac{1}{1 - |z|^2}$$

该度量称为单位圆盘D 上的庞加莱度量。

2.2　复平面上两点之间的距离

$\Omega \subseteq C$ 是复平面上面的开集，$\rho(z)$ 为Ω 上的一个度量。P, Q 是Ω 中的两个点，定义$C_\Omega(P, Q)$ 为所有分段连续可微曲线:

$$\gamma : [0, 1] \to \Omega. \quad \gamma(0) = P, \gamma(1) = Q$$

构成的集合。

P, Q 两点之间的距离定义为：

$$d_\rho(P, Q) = inf\{l_\rho(\gamma) : \gamma \in C_\Omega(P, Q)\}$$

等距变换

$\Omega_1\Omega_2$ 是复平面上面的开集，ρ_1,ρ_2 分别为Ω_1,Ω_2 上的度量。函数：

$$f:\Omega_1\to\Omega_2$$

连续可微并且仅有孤立零点。对$z\in\Omega_1$ 定义ρ_2 在函数f 诱导下的拉回映射：

$$f*\rho_2(z)=\rho_2(f(z))\cdot\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|$$

如果$f*\rho_2=\rho_1$ 对一切$z\in\Omega_1$ 都成立，那么f 称为等距变换。

曲线长度

$\Omega\subseteq C$ 是复平面上面的开集，$\rho(z)$ 为Ω 上的一个度量。如果：

$$\gamma:[a,b]\to\Omega$$

是连续可微曲线。那么它的长度被定义为：

$$l_\rho(\gamma)=\int_a^b||\dot{\gamma}(t)||_{\rho,\gamma(t)}dt$$

2.3　复平面上的曲率公式

$U\subseteq C$ 是复平面上的开集，$\rho(z)$ 为U 上的一个度量。对$\forall z\in U$ ，U 在度量ρ 下在z 点的曲率定义为：

$$\kappa_{U,\rho}(z)=\kappa(z)=\frac{-\triangle\, log(\rho(z))}{\rho(z)^2}$$

(κ 在$\rho(z)=0$的点没有定义。)

可以证明，该定义和微分几何中曲率的定义是等价的。

2.4　正规族理论

设$\mathcal{F}$ 是区域$D(\subseteq\mathbf{C})$ 内的一族解析函数。如果$\mathcal{F}$ 中的任何函数序列都有一个子序列，在D 内内闭一致收敛，那么我们说$\mathcal{F}$ 是一个正规族。对于D 内任何有界闭集K，如果存在正数$M=M(K)$，使得$\forall f(z)\in\mathcal{F},\forall z\in K,|f(z)|\le M$，那么就说$\mathcal{F}$ 在D 内内闭一致有界。如果$\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\delta(\varepsilon,K)$ ，使得$\forall f(z)\in\mathcal{F},\forall z',z''\in K$ 满足$|z'-z''|<\delta,|f(z')-f(z'')|<\varepsilon$ ，那么就说$\mathcal{F}$ 在D 内内闭等度连续。

定理1. 设$\mathcal{F}$ 是区域$D(\subseteq\mathbf{C})$ 内的一族解析函数。如果$\mathcal{F}$ 在D 内内闭一致有界，那么它在D 内等度连续。

定理2. 设$\mathcal{F}$ 是区域$D(\subseteq\mathbf{C})$ 内的一族解析函数。如果$\mathcal{F}$ 在D 内内闭一致有界，那么$\mathcal{F}$ 是一个正规族。

定义3. $U \subseteq C$ 是复平面上的开集。$\{g_j\}$ 是定义在U 上的函数序列。如果对$\forall \varepsilon > 0$ 和U 中的任意一个紧集$K \subseteq U$，存在正数$J > 0 s.t.$ 对$\forall j > J, z \in K$ 都有：

$$|g_j(z) - g(z)| < \varepsilon$$

则称$\{g_j\}$ 在U 上正规收敛于g。

第 3 章　Kobayashi 度量的定义和性质

3.1　Kobayashi 度量的定义

$U \subseteq C$ 是复平面上的开集，$D \subseteq C$ 是复平面上的单位圆盘。

定义1.对$P \in U$ 定义：

$$(U, D)_P = \{f : f\text{为}D\text{到}U\text{的全纯函数}, f(0) = P\}$$

对$P \in U$ 定义U 上的Kobayashi 度量：

$$F_K^U(P) = inf\{\frac{1}{|\phi'(0)|} : \phi \in (U, D)_P\}$$

定义2.

$$(D, U)_P = \{f : f\text{为}U\text{到}D\text{的全纯函数}, f(P) = 0\}$$

对$P \in U$ 定义U 上的Caratheodory 度量：

$$F_C^U(P) = sup\{|\phi^{'}(P)| : \phi \in (D, U)_P\}$$

回顾现代标准的黎曼映射定理的证明，对于一个给定的单连通开集Ω（不是整个平面）。可以构造一个Ω 到单位圆盘的共形映射。即固定一个点$P \in \Omega$，考虑由全纯映射$\phi : D \to \Omega$且$\phi(0) = P$组成的集合。根据正规族理论可以知道存在一个元素ϕ^*，使其在0处的导数的模取到最大值。这个函数ϕ^*就是我们要找的共形映射了。

现在来看Kobayashi 度量的定义。在P点的ξ方向的度量是$\frac{|\xi|}{|f^{'}(0)|}$关于圆盘到Ω的所有的全纯映射的下确界。这说明和极大化$|f^{'}(0)|$相同。从中我们也可以看到黎曼映射定理的证明和Kobayashi度量的紧密联系。

3.2　Kobayashi 度量的性质

性质1. 对一切$P \in U$都有：

$$F_C^U(P) \leq F_K^U(P)$$

证明：

对$\phi \in (D, U)_P$和$\psi \in (U, D)_P$。我们有$\phi \circ \psi : D \to D$ 并且$(\phi \circ \psi)(0) = 0$。从而根据Schwarz's 定理：

$$|(\phi \circ \psi)^{'}(0)| \leq 1$$

从而得到：

$$|\phi^{'}(P)| \le \frac{1}{|\psi'(0)|}$$

对一切ϕ取上确界得到：

$$F_C^U(P) \le \frac{1}{|\psi'(0)|}$$

对一切ψ取下确界得到：

$$F_C^U(P) \le F_K^U(P)$$

性质2. U_1, U_2 是复平面上面的开集，ρ_1, ρ_2 分别为U_1, U_2 上的Kobayashi 度量。如果映射: $h : U_1 \to U_2$全纯。那么h使得距离不增，即：

$$h * \rho_2(z) \le \rho_1(z), \forall z \in U_1$$

证明：

固定$P \in U_1$令$Q = h(P)$。对$\forall \phi \in (U_1, D)_P$ 有：$h \circ \phi \in (U_2, D)_Q$。根据Kobayashi 度量的定义：

$$\begin{aligned} F_K^{U_2}(Q) &\le \frac{1}{|(h \circ \phi)'(0)|} \\ &\le \frac{1}{|h'(P)||\phi'(0)|} \end{aligned}$$

对ϕ取下确界我们得到：

$$F_K^{U_2}(Q) \le \frac{1}{|h'(P)|} F_K^{U_1}(P)$$

两边乘以$|h^{'}(P)|$得到:

$$|h^{'}(P)| \cdot F_K^{U_2}(Q) \le F_K^{U_1}(P)$$

即：

$$h * \rho_2(P) \le \rho_1(P)$$

由P 的任意性就得到了我们的结论。

性质3. 如果$\gamma : [0, 1] \to U_1$ 是分段连续可微曲线，则：

$$l_{\rho_2}(h * \gamma) \le l_{\rho_1}(\gamma)$$

证明：

$$\begin{aligned}
l_{\rho_2}(h*\gamma) &= \int_a^b ||(f*\gamma)'(t)||_{\rho_2, f*\gamma(t)}dt \\
&= \int_a^b ||\frac{\partial f}{\partial z}(\gamma(t))\dot{\gamma(t)}||_{\rho_2, f*\gamma(t)}dt \\
&= \int_a^b \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| \cdot |\dot{\gamma(t)}| \cdot \rho_2(f*\gamma(t))dt \\
&\leq \int_a^b \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| \cdot |\dot{\gamma(t)}| \cdot \rho_1(\gamma(t))dt \\
&= l_{\rho_1}(\gamma)
\end{aligned}$$

性质4. 如果$P_1, P_2 \in U_1$ 那么有：

$$d_{\rho_2}(h(P_1), h(P_2)) \leq d_{\rho_1}(P_1, P_2)$$

特别的，如果h是U_1 到U_2 的保形双射，那么h是U_1 到U_2 的等距变换：

$$d_{\rho_2}(h(P_1), h(P_2)) = d_{\rho_1}(P_1, P_2)$$

从以上四个性质我们可以看出，性质1刻画了Kobayashi 度量和Caratheodory 度量的比较关系。性质2,3,4 则反映了Kobayashi 度量在全纯映射下的点与点之间的距离关系、曲线与曲线之间的比较关系。最后，作为本章节的结束，我们要证明一个更加精彩的结论：当Kobayashi 度量定义中的$U \equiv D$ 时候，Kobayashi 度量作为D 上的度量就是庞加莱度量！

3.3　Kobayashi 度量与庞加莱度量

性质5. Kobayashi 度量作为D 上的度量就是庞加莱度量。

证明：

为了给出命题的证明，我们先证明如下的引理：

引理6. 设$\rho(z)$ 是定义在单位圆盘上面的度量。如果对任意的保形双射$h : D \to D$，在度量$\rho(z)$ 下，h 也是等距变换，那么$\rho(z)$ 和庞加莱度量仅仅相差一个倍数。

引理证明：

对$\forall z_0 \in D$, 构造莫比乌斯变换：

$$h(z) = \frac{z + z_0}{1 + \overline{z_0}z}$$

则h 是等距变换，由此我们得到：

$$h * \rho(0) = \rho(0)$$

即：

$$|h^{'}(0)|\rho(h(0)) = \rho(0)$$

所以：

$$\rho(z_0) = \frac{1}{1-|z_0|^2} \cdot \rho(0)$$

上式表明，$\rho(z)$ 和庞加莱度量只相差一个倍数$\rho(0)$。

再回到命题的证明：我们先计算Caratheodory 度量在0 处的值。一方面，注意到对$\forall \phi \in (D,D)_0$, 根据Schwarz 定理: $|\phi^{'}(0)| \leq 1$, 根据Caratheodory 度量的定义得到：

$$F_C^D(0) \leq 1$$

另一方面，映射：

$$\phi(\xi) = \xi$$

满足$\phi \in (D,D)_0$ 并且$\phi^{'}(0) = 1$, 所以我们得到：

$$F_C^D(0) \geq 1$$

所以：

$$F_C^D(0) = 1$$

根据性质1得到：

$$F_K^D(0) \geq F_C^D(0) = 1$$

又由于映射：

$$\phi(\xi) = \xi$$

满足$\phi \in (D,D)_0$ 并且$\phi^{'}(0) = 1$, 所以我们得到：

$$F_K^D(0) \leq 1$$

所以：

$$F_K^D(0) = 1$$

又根据引理6,单位圆盘D 上的庞加莱度量和Kobayashi 度量仅仅相差一个倍数，所以我们可以断定：Kobayashi 度量作为D 上的度量就是庞加莱度量。这就证明了我们需要的命题。

在本章中，Caratheodory 度量和Kobayashi 度量实际上是可以互换的，任意一个Kobayashi 度量的性质，Caratheodory 度量都存在与其相同的性质，他们以共轭的形式被定义，而且一个总是大于等于另一个。

第 4 章　Kobayashi 度量的应用

本章节我们主要研究的是Kobayashi 度量的三个应用。首先我们刻画的是Kobayashi 度量与全纯映射的关系。

4.1　Kobayashi 度量与全纯映射

命题1. $U \subseteq C$ 是复平面上的开集。U 与单位圆盘D 全纯等价当且仅当$\exists P \in Ust$:

$$F_C^U(P) = F_K^U(P) \neq 0$$

证明：

如果U 与单位圆盘D 全纯等价，那么存在解析双射：

$$h : U \to D$$

对任意$P \in U$,根据性质2可以得到：

$$h * F_C^D(P) \leq F_C^U(P)$$

同样的有：

$$(h^{-1}) * F_C^U(h(P)) \leq F_C^D(h(P))$$

化简得到：

$$F_C^U(P) \leq h * F_C^D(P)$$

所以有：

$$F_C^U(P) = h * F_C^D(P)$$

又因为（ρ 为单位圆盘上面的庞加莱度量）：

$$\begin{aligned}(h * F_C^D)(P) &= (h * \rho)(P) \\ &= (h * F_K^D)(P) \\ &= F_K^U(P)\end{aligned}$$

即：

$$F_C^U(P) = F_K^U(P)$$

反过来，选择$\phi_j \in (D, U)_P$ 使得：

$$|\phi_j'(P)| \to F_C^U(P)$$

选择$\psi_j \in (U, D)_P$ 使得：

$$\frac{1}{|\psi_j'(0)|} \to F_K^U(P)$$

由于$\{\phi_j\}$ 一致有界，可以选择子列$\{\phi_{j_k}\}$ 收敛于$\{\phi_{j_k}\}$。令：

$$h_{j_k} = \phi_{j_k} \circ \psi_{j_k}$$

同样的我们可以h_{j_k} 的收敛子列，不妨假设该子列收敛于h_0。显然有：$h_0(0) = 0$。记该子列为$\{h_l\}$ ，由于$\{h_l\}$正规收敛，所以它的导数也是正规收敛的：

$$\begin{aligned}
h_0'(0) &= \lim_{l \to \infty} |(\phi_l \circ \psi_l)'(0)| \\
&= \lim_{l \to \infty} |\phi_l'(P)||\psi_l'(0)| \\
&= F_C^U(P) \cdot \frac{1}{F_K^U(P)} \\
&= 1
\end{aligned}$$

根据Schwarz's 定理，$h_0(\xi) = \mu \cdot \xi$,其中μ 为非零常数。因此我们有:

$$\mu \cdot \xi = h_0(\xi) = \lim_{l \to \infty} (\phi_l \circ \psi_l(\xi)).$$

对ϕ_l 进行一个旋转以后，可以使得$\mu = 1$。于是：

$$\begin{aligned}
\xi &= h_0(\xi) \\
&= \lim_{l \to \infty} (\phi_l \circ \psi_l(\xi)) \\
&= \phi_0 \circ \psi_0(\xi)
\end{aligned}$$

至此，ϕ_0 就是我们要找的映射。

上述定理刻画了复平面上一个开集U 和单位圆盘全纯等价的充分必要条件。回顾整个定理的条件，我们可以看到：复平面上开集U 在一个点的特殊性态：$F_C^U(P) = F_K^U(P) \neq 0$ 可以影响到U 全局的形态：全纯等价于单位圆盘。类比我们学习过的最大模原理，如果解析函数f 在区域D 内具有局部性质：$|f(z)|$ 在D 内某一点达到最大值。那么可以导出f 的全局性质：f 为常值映射。我们可以看到：复平面中的区域在一个点的性态，竟然可以影响到与之相关的一个函数、整个区域的性态！这些精彩的结论都是复变函数所特有的，也是复变函区别于实变函数的精彩之处！作为本章的结束，我们不加证明地给出如下更为加强的命题。

命题4. $U \subseteq C$ 是复平面上的开集，Kobayashi 度量作为U 上的度量不恒为零。全纯映射:

$$f : U \to U$$

存在不动点：$f(P)=P$,并且f 在P 点保持等距：

$$f*F_C^U(P)=F_C^U(P)$$

那么f 是一个双射。

4.2　Kobayashi 度量与双曲流形

这一小章节将着重讨论Kobayashi 度量和曲率、双曲流形的紧密联系。我们将证明：无论是在复平面$\mathbf{C}$ 上还是在$\mathbf{C}_0(\mathbf{C}\backslash\{0\})$ 上，都无法定义一个具有严格负曲率的度量。这是本章节最为直接也是最为精彩的结果，从中也可以看到其与Picard 定理的紧密联系。

命题1. 设ρ 为定义在单位圆盘上面的庞加莱度量，$U\subseteq C$ 是复平面上的开集，σ 是U 上的一个度量。如果对于任意的全纯映射：$f:D\to U$。f 保持从(D,ρ) 到(U,σ) 的距离不增。那么：

$$\sigma\leq F_K^U$$

证明：

对于$\forall z\in U$。对于映射：$\phi:D\to U$且$\phi(0)=z$。根据题目的条件：

$$\phi*\sigma(0)\leq\rho(0)$$

化简得到：

$$\frac{1}{|\phi'(0)|}\geq\frac{\sigma(z)}{\rho(0)}=\sigma(z)$$

对所有这样的ϕ 取下确界我们得到：

$$\parallel\xi\parallel_{F_K^U,z}=\inf_{\phi\in(U,D)_z}\frac{|\xi|}{|\phi'(0)|}\geq|\xi|\cdot\sigma(z)=\parallel\xi\parallel_{\sigma,z}$$

该定理表明：F_K^U是可以定义的保持从(D,ρ) 到(U,σ) 的距离不增的最大度量。

定义2. $U\subseteq C$ 是复平面上的开集。如果对U 中任意的两个不同的点P,Q 都有：

$$d_{Kob}(P,Q)>0$$

那么U 被称为双曲流形。

为了给出我们的定理4，先给出如下一个引理：

引理3. 设$f(z)$ 为定义在D 上的全纯函数，ρ 是定义在单位圆盘上面的庞加莱度量。f 将D 映射成U。σ 是定义在U 上的度量，具有严格的负曲率：$\kappa_\sigma\leq-4$。如果：

$$f:D\to U$$

是全纯映射，那么：

$$f*\sigma(z)\leq\rho(z),\forall z\in D$$

证明： 对于$0<r<1$。定义圆盘$D(0,r)$ 上的度量：

$$\rho_r(z)=\frac{r}{r^2-|z|^2}$$

通过直接计算得到：$\kappa_{\rho_r}=-4$

定义函数：

$$v=\frac{f*\sigma}{\rho_r}$$

显然v 是定义在$D(0,r)$ 上面的非负连续函数。当$|z|\to r$ 时，$v\to 0$。所以v 在圆盘$D(0,r)$的内部取到最大值M。我们只要证明$M\leq 1$，再令$r\to 1^-$，就得到了我们的结论。

设v 在τ 处取到极大值。如果$f*\sigma(\tau)=0$,那么$v\equiv 0$。所以我们不妨假定$f*\sigma(\tau)>0$。因此$\kappa_{f*\sigma}$在该点有定义。并且:

$$\kappa_{f*\sigma}(\tau)=\kappa_\sigma(f(\tau))\leq -4$$

由于$logv$ 在τ 处取到极大值，所以我们有：

$$\begin{aligned}0\geq\Delta logv(\tau)&=\Delta f*\sigma(\tau)-\Delta log\rho_r(\tau)\\&=-\kappa_{f*\sigma}(\tau)\cdot(f*\sigma(\tau))^2+\kappa_{\rho_r}(\tau)\cdot(\rho_r(\tau))^2\\&\geq 4(f*\sigma(\tau))^2-4(\rho_r(\tau))^2\end{aligned}$$

移项化简得到：

$$\frac{f*\sigma(\tau)}{\rho_r(\tau)}\leq 1$$

即：

$$M\leq 1$$

这就证明了我们的结论。还可以将性质4改成更具有一般的结论。

在$D(0,\alpha)$ 上定义度量（$\alpha>0,A>0$）

$$\rho_\alpha^A(z)=\frac{2\alpha}{\sqrt{A}(\alpha^2-|z|^2)}$$

直接计算得到其曲率有$-A$。

引理3*. 假设$f(z)$ 为定义在$D(0,\alpha)$ 上的全纯函数，将$D(0,\alpha)$ 映射成为U。σ 是定义在U 上的度量，具有严格的负曲率：

$$\kappa_\sigma \leq -B$$

则：

$$f*\sigma(z) \leq \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}\rho_\alpha^A(z)$$

对每个$z \in D(0,\alpha)$ 都成立，这里B 为正常数。

命题4. $U \subseteq C$ 是复平面上的开集。如果存在U 上的一个非负度量σ，使得U 在此度量下具有严格负曲率：

$$\kappa_\sigma \leq -B < 0$$

其中B 是大于0 的常数，那么U 是双曲的。

证明：

设ρ 为单位圆盘上面的庞加莱度量，设f 是单位圆盘D 到U 的全纯映射，根据引理3：

$$f*\sigma \leq \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{B}}\rho$$

令$\widetilde{\sigma} = (\sqrt{B}/\sqrt{4})\cdot\sigma$，那么不等式可以写为：

$$f*\widetilde{\sigma} \leq \rho$$

因此，f 保持从度量空间(D,ρ) 到$(U,\widetilde{\sigma})$ 距离不增。所以根据定理1.我们得到:

$$\widetilde{\sigma} \leq F_K^U$$

即：

$$C\cdot\sigma \leq F_K^U$$

其中$C = \sqrt{B}/\sqrt{4} > 0$。由于$\sigma$ 非负，所以F_K^U 也是严格大于0的。这就证明了我们的命题。

命题5. 如果$U = \mathbf{C}\setminus\{P_1,\ldots,P_k\}, k \geq 2$,那么$U$ 是双曲的，但是复平面$\mathbf{C}$ 和$\mathbf{C}\setminus\{0\}$ 都不是双曲的。

证明：

我们先证明$\mathbf{C}_{0,1}$ 是双曲的。定义如下的函数：

$$\mu(z) = \left[\frac{(1+|z|^{1/3})^{1/2}}{|z|^{5/6}}\right]\cdot\left[\frac{(1+|z-1|^{1/3})^{1/2}}{|z-1|^{5/6}}\right]$$

该函数的构造来自龚升老师的《简明复分析》，书中证明了该函数在$\mathbf{C}_{0,1}$上面具有严格的负曲率，所以$\mathbf{C}_{0,1}$ 是双曲的。同理，$\mathbf{C}\setminus\{P_1,...,P_k\}, k\geq 2$是双曲的。

当U 是整个复平面$\mathbf{C}$时，对$\forall f\in(D,\mathbf{C})_P$，$f$ 只能是常值映射。所以$F_C^U\equiv 0$。对于$U=\mathbf{C}_0$，对$\forall f\in(D,\mathbf{C_0})_P$，$f$ 可以延拓到整个复平面上，所以f 只能是常值映射。所以$F_C^U\equiv 0$。所以复平面$\mathbf{C}$ 和$\mathbf{C}\setminus\{0\}$ 都不是双曲的。

从上述的结果上我们可以看到。复平面C 与$U=\mathbf{C}\setminus\{P_1,...,P_k\}, k\geq 2$ 在几何上有着本质的区别。后者是可以定义具有严格负曲率的度量，而前者是不可能的。这也从另一个角度揭示了了Picard 定理的本质内涵，也为后续Picard 定理的推广奠定了基础。

4.3 Kobayashi 度量与Picard 定理的推广

在上一个章节中，我们刻画了复平面$\mathbf{C}$ 与$\mathbf{C}\setminus\{P_1,...,P_k\}, k\geq 2$ 在内蕴几何上的区别。本章节，我们将利用这个区别证明Picard 定理，并且由之导出Picard 的推广。

命题1. $U\subseteq C$ 是复平面上的开集。如果U 是双曲的，那么任何全纯映射:

$$f:\mathbf{C}\to U$$

只能是常数。

证明： 由于U 是双曲的，所以可以定义U 上具有严格负曲率的度量σ。即存在正数$B>0$ 使得：

$$\kappa_\sigma\leq -B<0$$

对任意的$\alpha>0$，考虑映射：

$$f:D(0,\alpha)\to U$$

其中$D(0,\alpha)$ 表示复平面上以0为中心，以α 为半径的开圆盘。定义$D(0,\alpha)$ 上的度量：

$$\rho_\alpha^A=\frac{2\alpha}{\sqrt{A}(\alpha^2-|z|^2)}$$

根据4.2引理3，对$\forall z>0$ 当$\alpha>|z|$ 时有：

$$f*\sigma(z)\leq\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}\rho_\alpha^A(z)$$

令$\alpha\to+\infty$ 得到：

$$f*\sigma(z)\leq 0$$

因此：

$$f*\sigma(z)\equiv 0$$

这只能有：

$$f'(z) \equiv 0$$

由z 的任意性，f 只能是常数。

证明了上述的命题以后，我们就容易证明Picard 小定理了。

Picard 小定理 设U 为全纯函数f 的值域，如果$\mathbf{C} \setminus U$ 包含了至少两个点，那么f 是常值映射。

证明： 如果$\mathbf{C} \setminus U$ 包含了至少两个点，根据4.2的命题4，U 是双曲的，又根据命题1，f 只能是常值映射。

Picard小定理的条件事实上保证了f 在复平面$\mathbf{C}$ 上具有平凡的Kobayashi 度量。因此，不难对Picard 小定理做出如下的推广：

Picard 小定理的推广 如果N 为具有平凡Kobayashi 度量的流型，而M 为双曲流型，那么任意全纯映射：

$$f : N \to M$$

只能是常数。

特别的，任意的全纯映射:

$$f : \mathbb{C}^m \to M$$

在M 为双曲流型时为常值。而当$m = 1$ 时，就是我们熟知的Picard 定理了。

[1] B.沙巴特.复分析导论（单复变函数）[M].胥鸣伟,李振宇,译.北京：高等教育出版社，2011.1

[2] B.沙巴特.复分析导论（多复变函数）[M].胥鸣伟,李振宇,译.北京：高等教育出版社，2011.1

[3] 佩捷.许瓦茨引理[M].哈尔滨：哈尔冰工业大学出版社，2014.8

[4] 余家荣.复变函数[M].北京：北京大学出版社,1980

[5] 龚升.简明复分析[M].北京：北京大学出版社，2003

[6] Steven G.Krantz.The Caratheodory and Kobayashi Metric and Applications in Complex Analysis.Aim Preprint,2007

[7] Steven G.Krantz.Complex Analysis The Gemetric Viewpoint[M].MAA,1990

[8] Blank and S.G.Krantz,Calculus,Multivariable,Key College Press,Emeryville,CA,2006

[9] K Janich,Topology,Springer-Verlag,New York,1984

附录

代码、详细证明等。