2025 年循人中学高三期末考兼统考预试

高中组

高级数学 (III)

(SC007)

训练集

采题: 李冬恒

January 7, 2026

前言

此训练集的雏形要追溯到 2019 年, 依稀记得为当时的备赛爬了大量的 AMC 历届考题, 创了“AMC 10 精选”的文档, 其中我认为是属于统考范围的难题, 便收录于另一个文档。

尘封已久, 直到今年 5 月, 我在整理电脑资料时偶然翻出, 看着当年的内容, 心想: 读了一个数学系, 难免觉得发展空间实属不少。在这几个月内, 我随性地在网络上寻找、采集、整理更有趣 (恶心)、更值得深思 (烧脑) 的题目, 于是诞生了——高级数学 (III) 训练集。

起初, 我并没想过要为每一题整理出解析, 但发现到不少当年的题目只附答案没附解法。可惜的是, 我的脑袋算是停止运作了一年, 发现有一些题目对于现在的我实在是难以下咽。好吧, 此乃下下策, 但我决定用 LaTeX 开始动手为每一题补上解法、重写排版、增加新的内容。也好, 既是备忘录, 也是为了防止未来的我看到这些题目时会再次怀疑人生:「咦? 是不是百尺竿头, 更蠢一步?」

依据统考范围, 我把训练集大致分为代数、组合数学、几何及微积分。若你想自行动手尝试, 可以在 `preamble` 中将 `\printanswers` 这行注释掉。

绝大部分解法都由官方或我提供, 只有某些是 `ChatGpt` 生成后由我再校对, 之中一定会有纰漏, 欢迎批评指正, 也希望这份训练集能助你一路披荆斩棘、越战越勇!

——冬恒

目录

代数

组合数学

几何

微积分

代数

一元二次方程、多项式

1. 已知方程

$$x^2-mx-m+3=0$$

的两根满足下列条件, 求 m 的取值范围:

(a) 一根大于 1, 另一根小于 1

设 $f(x)=x^2-mx-m+3$, 所求即

$$f(1)=1-m-m+3<0 \Rightarrow m>2$$

(b) 一根小于 0, 另一根大于 2

即

$$\begin{cases} f(0)=-m+3<0 \\ f(2)=4-2m-m+3<0 \end{cases} \Rightarrow m>3$$

(c) 一根在 0 与 1 之间, 另一根在 1 与 2 之间

即

$$\begin{cases} f(0)=-m+3>0 \\ f(1)=1-m-m+3<0 \\ f(2)=4-2m-m+3>0 \end{cases} \Rightarrow 2<m<\frac{7}{3}$$

(d) 两根都在 -4 与 0 之间

即

$$\begin{cases} f(-4)=16+4m-m+3>0 \\ f(0)=-m+3>0 \\ -4<\dfrac{m}{2}<0 \\ f\left(\dfrac{m}{2}\right)=\dfrac{m^2}{4}-\dfrac{m^2}{2}-m+3\leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{19}{3}<m<-6$$

(e) 两根都大于 -5

即

$$\begin{cases} f(-5) = 25 + 5m - m + 3 > 0 \\ \dfrac{m}{2} > -5 \\ f\left(\dfrac{m}{2}\right) = \dfrac{m^2}{4} - \dfrac{m^2}{2} - m + 3 \leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow -7 < m \leqslant -6 \quad \text{或} \quad m \geqslant 2$$

(f) 有且仅有一根在 0 与 2 之间

即

$$\begin{cases} 0 < \dfrac{m}{2} < 2, \\ f\left(\dfrac{m}{2}\right) = \dfrac{m^2}{4} - \dfrac{m^2}{2} - m + 3 = 0 \end{cases}$$

或

$$f(0) \cdot f(2) = (-m+3)(4 - 2m - m + 3) < 0$$

解得

$$m = 2 \quad \text{或} \quad \frac{7}{3} < m < 3$$

2. 已知 $y = x^3 - x^2 + 3x - 4$ 与 $y = ax^2 - x - 4$ 恰好相交于两点, 求 a 的可能值。

联立方程得

$$x[x^2 - (a+1)x + 4] = 0$$

已知两线交于恰好两点, 其中一点为 $(0,4)$, 则意味

$$x^2 - (a+1)x + 4 = 0$$

有重根, 其判别式为零:

$$[-(a+1)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$$

解得 $a = 3, -5$

3. 已知由 $f(x) = -x^2 + 4x + 1$ 和 $g(x) = -x + 5$ 所围成的封闭区域 A, 若作一直线 L 垂直于 x 轴, 分别与封闭区域 A 的边界交于 P, Q 两点, 求在封闭区域内的 $\overline{PQ}$ 长的最大值为多少?

令 $f(x)=g(x)$, 则

$$-x^2+4x+1=-x+5 \Rightarrow (x-1)(x-4)=0 \Rightarrow x=1,\ 4$$

所以封闭区域的 x 范围为 $[1,4]$, 而 $\overline{PQ}$ 即

$$f(x)-g(x)=(-x^2+4x+1)-(-x+5)=-x^2+5x-4=-\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$$

在 $x=\dfrac{5}{2}$ 时有最大值 $\dfrac{9}{4}$

4. 已知 k 为有理数, 且使得方程式 $kx^2+(k-1)x+(k+1)=0$ 只有整数解, 求 k 的所有可能值。

情况一:$k=0$, 则原方程式为 $-x+1=0 \Rightarrow x=1\in\mathbb{Z}$

情况二:$k\neq 0$, 原方程式变为

$$k(x^2+x+1)=x-1 \Rightarrow k=\frac{x-1}{x^2+x+1} \tag{1}$$

设 α,β 为 $kx^2+(k-1)x+(k+1)=0$ 的两根, 则

$$\alpha+\beta=\frac{1-k}{k}=\frac{1}{k}-1$$

将 (1) 代入上式,

$$\alpha+\beta=\frac{x^2+x+1}{x-1}-1=x+1+\frac{3}{x-1}\in\mathbb{Z}$$

解得

$$x-1=\pm1,\pm3 \Rightarrow \begin{cases} x=2,4 \Rightarrow k=\dfrac{1}{7} \\ x=0,-2 \Rightarrow k=-1 \end{cases}$$

故 k 的所有可能值为 $-1,0,\dfrac{1}{7}$

5. 若抛物线 $y=mx^2-1$ 上必存在相异两点对称于直线 $x+y=0$, 求 m 的范围。

设 A,B 在抛物线 $\Gamma: y=mx^2-1$ 上且对称于直线 $L_1: x+y=0$, 则 A,B 同在直线

$$L_2: y=x+k$$

上, 其中 $L_1 \perp L_2$, 抛物线与 L_2 联立得

$$mx^2 - x - 1 - k = 0 \tag{1}$$

设 (1) 的解为 a, b, 则 $A(a, a+k), B(b, b+k)$ 的中点 $C\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}+k\right)$ 在 L_1 上, 得

$$\frac{a+b}{2} + \frac{a+b}{2} + k = 0 \Rightarrow k = -(a+b)$$

由韦达定理,

$$k = -(a+b) = -\frac{1}{m}$$

且两实根相异, 则判别式大于 0:

$$\Delta = (-1)^2 - 4m(-\frac{1}{m}+1) > 0 \Rightarrow m > \frac{3}{4}$$

6. 实系数二次多项方程 $f(x)=0$ 有一根为 2, 且方程 $f(f(x))=0$ 恰只有一实根为 5, 求 $f(0)$。

设

$$f(x) = a(x-2)(x-b)$$

则

$$\begin{aligned} g(x) = f(f(x)) &= a\left[a(x-2)(x-b)-2\right]\left[a(x-2)(x-b)-b\right] \\ &= a^3\left(x^2-(b+2)x+2b-\frac{2}{a}\right)\left(x^2-(b+2)x+2b-\frac{b}{a}\right) \equiv a^3 f_1(x) f_2(x) \end{aligned}$$

若 $f_1 = (x-5)^2$, f_2的判别式 <0, 可得

$$a = -\frac{2}{9},\ b = 8$$

若 $f_2 = (x-5)^2$, f_1的判别式 <0, 可得

$$a = -\frac{8}{9},\ b = 8$$

但 f_1 判别式 >0, 故舍去; 因此

$$f(0) = 2ab = 2\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)\cdot 8 = -\frac{32}{9}$$

7. 求所有实数 c, 使得 $f(x)=x^2+4x+c$ 满足 $f(f(x))$ 恰好有三个相异实根。

若 f 的根为重根, 则 $f\circ f$ 至多只有两个相异根, 因此 f 必须有两个相异根。设 r 为其中一根使得 $f(x)=r$ 有重根, 解

$$x^2+4x+c-r=(x+2)^2$$

得 $r=c-4$ 是 f 的根, 故

$$(c-4)^2+4(c-4)+c=0 \Rightarrow c=0 \text{ 或} c=3.$$

当 $c=0$, 解 $x^2+4x=0$ 及 $x^2+4x=-4$ 得

$$x=0,-4,-2,$$

当 $c=3$, 解 $x^2+4x+3=-3$ 及 $x^2+4x+3=-1$, 发现其中

$$x^2+4x+6$$

判别式为负, 故唯一满足条件的 c 为 0。

8. 求非零实数三元组 (a,b,c), 使得

$$(x^2+2ax+b)^2+2a(x^2+2ax+b)-b=(x-c)^4$$

是多项式恒等式。

设

$$P(x)=x^2+2ax+b, Q(x)=x^2+2ax-b,$$

且 $Q(P(x))$ 的根满足 $P(x)=r_1$ 或 $P(x)=r_2$, 其中 r_1,r_2 是 Q 的根。欲使 $Q(P(x))$ 只有一个四重根,Q 必须有重根, 因此判别式为

$$4a^2+4b=0 \Rightarrow b=-a^2,$$

其中根为 $-a$, 此时 $P(x)=-a$ 也必须有重根, 因此 $P(x)+a=x^2+2ax+b+a=0$ 的判别式为

$$4a^2-4(a+b)=0.$$

代入 $b=-a^2$ 解得

$$a=\frac{1}{2},\quad b=-\frac{1}{4}.$$

c 是 $P(x)+a=0$ 的解, 即 $c=-a=-\frac{1}{2}$, 所以三元组为

$$(a,b,c)=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4},-\frac{1}{2}\right)$$

9. 求所有实数 k, 使方程

$$4x^2+4(2-k)x-k^2=0$$

有两个实数解 x_1,x_2 满足 $|x_1|=2+|x_2|$。

由韦达定理,

$$x_1+x_2=k-2,\quad x_1x_2=-\frac{k^2}{4}\leqslant 0$$

条件 $|x_1|=2+|x_2|$ 等价于

$$4=(|x_1|-|x_2|)^2=x_1^2+x_2^2-2|x_1x_2|=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2+2x_1x_2$$

解得

$$k=0 \text{ 或 } 4$$

10. 解方程

$$(x+1)(x+2)(x+3)^2(x+4)(x+5)=360$$

排版后有

$$(x+1)(x+5)(x+2)(x+4)(x+3)(x+3)=360$$
$$(x^2+6x+5)(x^2+6x+8)(x^2+6x+9)=360$$

设 $y=x^2+6x$, 变为

$$(y+5)(y+8)(y+9)=360$$
$$y(y^2+22y+157)=0$$

其中 $y^2+22y+157=0$ 无实数解。解 $x^2+6x=0$ 可得 $x=0,-6$

11. 解方程

$$9x^4-24x^3-2x^2-24x+9=0,\quad x\in\mathbb{R}$$

此方程是对称四次方程, 设 $x \neq 0$, 两边除以 x^2:

$$9x^2 - 24x - 2 - \frac{24}{x} + \frac{9}{x^2} = 0$$
$$9\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 24\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2 = 0$$

设 $V = x + \frac{1}{x}$, 则

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = V^2 - 2$$

代入方程得

$$\begin{aligned} 9(V^2 - 2) - 24V - 2 &= 0 \\ 9V^2 - 18 - 24V - 2 &= 0 \\ 9V^2 - 24V - 20 &= 0 \\ (3V - 10)(3V + 2) &= 0 \end{aligned}$$

$$V = \frac{10}{3}, \quad V = -\frac{2}{3}$$

分别解 $x + \frac{1}{x} = V$:

1. $x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3}$

$$\begin{aligned} 3x^2 - 10x + 3 &= 0 \\ (3x - 1)(x - 3) &= 0 \\ x = \frac{1}{3}, \quad x = 3 \end{aligned}$$

2. $x + \frac{1}{x} = -\frac{2}{3}$

$$3x^2 + 2x + 3 = 0$$

判别式 $b^2 - 4ac = 4 - 36 = -32 < 0$, 无实根

因此实根为

$$x = 3, \quad x = \frac{1}{3}$$

12. 解

$$\frac{x^2 + 16x + 54}{x^2 + 11x + 35} = \frac{x^2 + 13x + 35}{x^2 + 14x + 54}$$

使得原式交叉相乘时能顺利平方差, 写成

$$\frac{x^2+15x+54+x}{x^2+12x+35-x}=\frac{x^2+12x+35+x}{x^2+15x+54-x}$$

$$(x^2+15x+54)^2-x^2=(x^2+12x+35)^2-x^2$$

$$(x^2+15x+54)^2-(x^2+12x+35)^2=0$$

再平方差得

$$(3x+19)(2x^2+27x+89)=0$$

经检验, 原方程的解为 $x=-\dfrac{19}{3},\dfrac{-27\pm\sqrt{17}}{4}$

13. 在 $\mathbb{C}$ 内解

$$(x+1)^5+(x+1)^4(x-1)+\cdots+(x-1)^5=0$$

利用恒等式

$$\frac{a^6-b^6}{a-b}=a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5$$

令

$$a=x+1,\quad b=x-1$$

则原式可写为

$$\frac{(x+1)^6-(x-1)^6}{(x+1)-(x-1)}=0$$

由于

$$(x+1)-(x-1)=2$$

因此

$$(x+1)^6-(x-1)^6=0$$

展开并化简得

$$x(3x^4+10x^2+3)=0$$

进一步分解

$$x(3x^2+1)(x^2+3)=0$$

解得

$$x=0,\quad x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}i,\quad x=\pm\sqrt{3}i$$

14. 已知 α 和 β 是方程

$$x^2+(m-2)x+1=0$$

的根, 求

$$(1+m\alpha+\alpha^2)(1+m\beta+\beta^2)$$

将原方程重写为

$$x^2+mx-2x+1=0$$

$$x^2+mx+1=2x$$

因为 α 和 β 是根, 满足

$$\alpha^2+m\alpha+1=2\alpha$$

$$\beta^2+m\beta+1=2\beta$$

于是

$$(1+m\alpha+\alpha^2)(1+m\beta+\beta^2)=(\alpha^2+m\alpha+1)(\beta^2+m\beta+1)=(2\alpha)(2\beta)=4\alpha\beta$$

由原方程, 根的乘积 $\alpha\beta=1$, 因此

$$(1+m\alpha+\alpha^2)(1+m\beta+\beta^2)=4\cdot 1=4$$

15. 若三次多项式 $x^3+3x-2=0$ 的根为 a,b,c, 求以 $(a-b)^2,(b-c)^2,(c-a)^2$ 为根且首项系数为 1 的三次多项式。

由韦达定理,

$$a+b+c=0,\quad ab+bc+ca=3,\quad abc=2.$$

且有

$$a^3+3a=b^3+3b=c^3+3c=2.$$

因此

$$a^3-b^3+3(a-b)=0 \Rightarrow (a-b)\big(a^2+ab+b^2+3\big)=0 \Rightarrow a^2+ab+b^2=-3$$

于是

$$(a-b)^2=-3-3ab=-3(ab+1)$$

同理,

$$(b-c)^2=-3(bc+1), \quad (c-a)^2=-3(ca+1)$$

故

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=-3(3+ab+bc+ca)=-18$$

$$\begin{aligned}
&(a-b)^2(b-c)^2+(b-c)^2(c-a)^2+(c-a)^2(a-b)^2\\
&=9\big((ab+1)(bc+1)+(bc+1)(ca+1)+(ca+1)(ab+1)\big)\\
&=9\big(2(a+b+c)+2(ab+bc+ca)+3\big)=81
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2&=-27(ab+1)(bc+1)(ca+1)\\
&=-27\big(abc(a+b+c)+(abc)^2+ab+bc+ca+1\big)=-216
\end{aligned}$$

所求三次多项式为

$$x^3+18x^2+81x+216$$

16. 设 $a,b,c\in\mathbb{R}$, 证明方程式

$$\frac{b+c}{x-a}+\frac{c+a}{x-b}+\frac{a+b}{x-c}=3$$

的根都是实根。

有

$$\begin{aligned}
\frac{b+c}{x-a}+\frac{c+a}{x-b}+\frac{a+b}{x-c}&=3\\
1-\frac{b+c}{x-a}+1-\frac{c+a}{x-b}+1-\frac{a+b}{x-c}&=0\\
\frac{x-a-b-c}{x-a}+\frac{x-a-b-c}{x-b}+\frac{x-a-b-c}{x-c}&=0\\
(x-a-b-c)\left(\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}\right)&=0
\end{aligned}$$

$$(x-a-b-c)\frac{x^2-(b+c)x+bc+x^2-(a+c)x+ac+x^2-(a+b)x+ab}{(x-a)(x-b)(x-c)}=0$$

$$(x-a-b-c)\left(3x^2-2(a+b+c)x+ab+bc+ca\right)=0$$

故方程式

$$\frac{b+c}{x-a}+\frac{c+a}{x-b}+\frac{a+b}{x-c}=3$$

有一实根 $x=a+b+c$, 现探讨另两根, 方程式

$$3x^2-2(a+b+c)x+ab+bc+ca=0.$$

的判别式为

$$\Delta=4(a+b+c)^2-12(ab+bc+ca)=4\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right).$$

由 AM-GM 不等式,

$$ab+bc+ca\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2+c^2}{2}+\frac{c^2+a^2}{2}=a^2+b^2+c^2.$$

故判别式为非负, 于是方程式 $3x^2-2(a+b+c)x+ab+bc+ca=0$ 的根都是实根, 得证原方程式的根都是实根。

17. 设 $f(x)=x^3+4x^2+8x+16$, 计算

$$f(x+7)-f(x+6)-f(x+5)+f(x+4)-f(x+3)+f(x+2)+f(x+1)-f(x).$$

设 $g(x)=f(x+1)-f(x)$, 则

$$g(x)=3x^2+10x+12$$

同理设 $h(x)=g(x+2)-g(x)=12x+24$, 原式可写成

$$g(x+6)-g(x+4)-g(x+2)+g(x)=h(x+4)-h(x)=12(x+4)-12x=48$$

18. 已知关于 x 的方程 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 的三个非零实数根成等比数列, 求 a^3c-b^3 的值。

设方程 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 的三根为 $\dfrac{\alpha}{r},\alpha,\alpha r,\alpha\neq 0$, 由韦达定理,

$$-a=\frac{\alpha}{r}+\alpha+\alpha r=\alpha(\frac{1}{r}+1+r) \tag{1}$$
$$b=\frac{\alpha^2}{r}+\alpha^2+\alpha^2 r=\alpha^2(\frac{1}{r}+1+r) \tag{2}$$
$$-c=\alpha^3 \tag{3}$$

由 (1),(2) 得 $-\dfrac{b}{a}=\alpha$, 代入 (3) 得

$$-c=-\frac{b^3}{a^3}\Rightarrow a^3c-b^3=0$$

19. 已知 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=3$, 求

$$x^{63}+x^{44}+x^{37}+x^{31}+x^{26}+x^9+6$$

的值。

由已知得

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=x^3+\frac{1}{x^3}+3(1)(\sqrt{3})=3\sqrt{3}$$

给出

$$x^3+\frac{1}{x^3}=0$$

同理可得,

$$x^9+\frac{1}{x^9}=0,\quad x^{27}+\frac{1}{x^{27}}=0$$

故

$$\begin{aligned}&x^{63}+x^{44}+x^{37}+x^{31}+x^{26}+x^9+6\\&=x^{36}\left(x^{27}+\frac{1}{x^{27}}\right)+x^{35}\left(x^9+\frac{1}{x^9}\right)+x^{34}\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+6=6\end{aligned}$$

20. 已知

$$x^3+\frac{1}{x^3}=18$$

求

$$x^{11}+\frac{1}{x^{11}}$$

设
$$a=x+\frac{1}{x}$$
利用恒等式
$$x^3+\frac{1}{x^3}=a^3-3a$$
得
$$a^3-3a=18$$
$$a^3-3a-18=0$$
因式分解
$$(a-3)(a^2+3a+6)=0$$
所以
$$a=x+\frac{1}{x}=3$$
则
$$x^2+\frac{1}{x^2}=3^2-2=7,\quad x^4+\frac{1}{x^4}=47,\quad x^8+\frac{1}{x^8}=2207$$
于是
$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)=x^5+\frac{1}{x^5}+x+\frac{1}{x}=126\Rightarrow x^5+\frac{1}{x^5}=123$$
且
$$\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)\left(x^8+\frac{1}{x^8}\right)=x^{11}+\frac{1}{x^{11}}+x^5+\frac{1}{x^5}=39726\Rightarrow x^{11}+\frac{1}{x^{11}}=39726-123=39603$$

21. 已知 α,β,γ 是方程
$$x^3-x-1=0$$
的三根, 计算
$$\frac{1-\alpha}{1+\alpha}+\frac{1-\beta}{1+\beta}+\frac{1-\gamma}{1+\gamma}$$
的值。

由韦达定理, $\alpha+\beta+\gamma=0,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-1,\ \alpha\beta\gamma=1$, 故

$$\begin{aligned}
\frac{1-\alpha}{1+\alpha}+\frac{1-\alpha}{1+\beta}+\frac{1-\gamma}{1+\gamma} &= \frac{2}{1+\alpha}+\frac{2}{1+\beta}+\frac{2}{1+\gamma}-3 \\
&= 2\cdot\frac{(1+\alpha)(1+\beta)+(1+\beta)(1+\gamma)+(1+\gamma)(1+\alpha)}{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)}-3 \\
&= 2\cdot\frac{3+2(\alpha+\beta+\gamma)+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{1+\alpha+\beta+\gamma+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta\gamma}-3 \\
&= 2\cdot\frac{3-1}{1-1+1}-3 \\
&= 1
\end{aligned}$$

22. 已知 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 为 $x^4+2x^3+x^2+2x+1=0$ 的四根, 试求

$$(\alpha^2+\alpha+1)(\beta^2+\beta+1)(\gamma^2+\gamma+1)(\delta^2+\delta+1)$$

的值。

α 是方程

$$x^4+2x^3+x^2+2x+1=0$$

的根, 则

$$\alpha^4+2\alpha^3+\alpha^2+2\alpha+1=0 \Rightarrow (\alpha^2+\alpha+1)^2=2\alpha^2 \Rightarrow \alpha^2+\alpha+1=\sqrt{2}\alpha$$

同理可得

$$\beta^2+\beta+1=\sqrt{2}\beta,\quad \gamma^2+\gamma+1=\sqrt{2}\gamma,\quad \delta^2+\delta+1=\sqrt{2}\delta$$

由韦达定理,

$$(\alpha^2+\alpha+1)(\beta^2+\beta+1)(\gamma^2+\gamma+1)(\delta^2+\delta+1)=(\sqrt{2})^4\cdot\alpha\beta\gamma\delta=4\cdot 1=4$$

23. 设方程 $x^3-4x+1=0$ 的三个相异复数根为 a,b,c, 求

$$\frac{a+1}{(a-1)^4}+\frac{b+1}{(b-1)^4}+\frac{c+1}{(c-1)^4}$$

的值。

发现

$$\frac{a+1}{(a-1)^4}=\frac{1}{(a-1)^3}+\frac{2}{(a-1)^4}$$

, 因此欲求以 $\dfrac{1}{a-1},\dfrac{1}{b-1},\dfrac{1}{c-1}$ 为三根的多项式, 令 $x_1=x-1$ 代入原方程式

$$(x_1+1)^3-4(x_1+1)+1=0\Rightarrow x_1^3+3x_1^2-x_1-2=0$$

再令 $x_2=\frac{1}{x_1}$ 代入可得

$$\frac{1}{x_2^3}+\frac{3}{x_2^2}-\frac{1}{x_2}-2=0\Rightarrow x_2^3+\frac{1}{2}x_2^2-\frac{3}{2}x_2-\frac{1}{2}=0$$

故

$$\frac{a+1}{(a-1)^4}+\frac{b+1}{(b-1)^4}+\frac{c+1}{(c-1)^4}=(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)+2(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4) \tag{1}$$

设 $f(x)=x^3+\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{2}$, 则 $f'(x)=3x^2+x-\dfrac{3}{2}$, 利用长除法计算 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{3}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{13}{4}\cdot\frac{1}{x^3}-\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{x^4}+\frac{81}{16}\cdot\frac{1}{x^5}+\cdots$$

由系数比较得

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=-\frac{7}{8},\quad \alpha^4+\beta^4+\gamma^4=\frac{81}{16}$$

故所求为

$$-\frac{7}{8}+2\cdot\frac{81}{16}=\frac{37}{4}$$

24. 已知 $f(x)=x^4+px^3+qx^2+rx+s$ 且 $f(1)=59,f(2)=118,f(3)=177$, 求 $f(9)+f(-5)$ 。

考虑函数 $g(x)=59x$, 则

$$f(1)=g(1)=59,\quad f(2)=g(2)=118,\quad f(3)=g(3)=177$$

定义 $h(x)=f(x)-g(x)$, 则 $x=1,2,3$ 为 $h(x)$ 的根且 $h(x)$ 首项系数为 1, 所以设

$$h(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-a)$$

其中 a 是一实数, 于是

$$\begin{aligned}f(9)+f(-5)&=h(9)+g(9)+h(-5)+g(-5)\\&=336(9-a)+9\cdot59+336(5+a)-5\cdot59\\&=4940\end{aligned}$$

25. 已知 x_1, x_2, x_3 是方程

$$x^3 - 6x^2 + ax - a = 0$$

的根, 且满足

$$(x_1 - 3)^3 + (x_2 - 3)^3 + (x_3 - 3)^3 = 0,$$

求 a 的值。

令 $r_i = x_i - 3$, 则 r_1, r_2, r_3 是方程

$$(x + 3)^3 - 6(x + 3)^2 + a(x + 3) - a = 0$$

即方程

$$x^3 + 3x^2 + (a - 9)x + (2a - 27) = 0$$

的根, 由韦达定理,

$$r_1 + r_2 + r_3 = -3, \quad r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1 = a - 9, \quad r_1r_2r_3 = 27 - 2a$$

由立方和公式,

$$r_1^3 + r_2^3 + r_3^3 = -3(9 - 3(a - 9)) + 3(27 - 2a) = 0$$

解得

$$a = 9$$

26. 已知 x_1, x_2, x_3 为方程 $\sqrt{123}x^3 - 247x^2 + 2 = 0$ 的相异实根, 且 $x_1 < x_2 < x_3$, 求 $x_2(x_3^2 - x_1^2)$ 的值。

设 $\sqrt{123} = a$, 则方程 $\sqrt{123}x^3 - 247x^2 + 2 = 0$ 化为

$$ax^3 - (2a^2 + 1)x^2 + 2 = 0 \Rightarrow (ax - 1)(x^2 - 2ax - 2) = 0$$

所以方程的 3 个实数根为

$$\frac{1}{a}, a + \sqrt{a^2 + 2}, a - \sqrt{a^2 + 2}$$

因为 $a = \sqrt{123} > 1$, 所以

$$a - \sqrt{a^2 + 2} < 0 < \frac{1}{a} < 1 < a + \sqrt{a^2 + 2}$$

因此 $x_1 = a - \sqrt{a^2 + 2}, x_2 = \dfrac{1}{a}, x_3 = a + \sqrt{a^2 + 2}$, 而

$$x_2(x_3^2 - x_1^2) = \frac{1}{a} \cdot 2\sqrt{a^2 + 2} \cdot 2a = 20\sqrt{5}$$

27. 已知正整数 m,n 满足 $m^2-n=32$, 且 $\sqrt[5]{m+\sqrt{n}}+\sqrt[5]{m-\sqrt{n}}$ 是方程

$$x^5-10x^3+20x-40=0$$

的一个实根, 求 m,n 的值。

令 $a=\sqrt[5]{m+\sqrt{n}},b=\sqrt[5]{m-\sqrt{n}}$, 则 $x=a+b$ 是该方程的一个实根, 且

$$a^5+b^5=2m,\quad a^5b^5=m^2-n=32\Rightarrow ab=2$$

考虑 $(a+b)^5$ 的展开式:

$$x^5=a^5+b^5+5ab(a^3+b^3)+10a^2b^2(a+b)$$

由 $a^3+b^3=(a+b)\left[(a+b)^2-3ab\right]=x(x^2-6)$, 得

$$x^5=2m+10x(x^2-6)+40x$$

整理得:

$$x^5-10x^3+20x-2m=0$$

对比原方程式得

$$m=20,n=368$$

28. 设方程式 $x^5+x^4-x^2+1=0$ 的五个根为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$, 若 $P(x)=x^4-1$, 求

$$P(\alpha_1)P(\alpha_2)P(\alpha_3)P(\alpha_4)P(\alpha_5)$$

的值。

设

$$f(x)=x^5+x^4-x^2+1=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)(x-\alpha_5)$$

令 $x=1$ 得

$$f(1)=(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)(1-\alpha_4)(1-\alpha_5)=0$$

由于

$$P(x)=x^4-1=(x^2+1)(x-1)(x+1)$$

故

$$
\begin{aligned}
&P(\alpha_1)P(\alpha_2)P(\alpha_3)P(\alpha_4)P(\alpha_5)\\
&=-(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)(1-\alpha_4)(1-\alpha_5)\prod_{k=1}^{5}(\alpha_k^2+1)(\alpha_k+1)\\
&=0
\end{aligned}
$$

29. 已知 $p(x)$ 是一个整系数多项式, 定义 $q(x)=\dfrac{p(x)}{x(1-x)}$, 若对所有 $x\neq 0,1$ 都有

$$q(x)=q\left(\frac{1}{1-x}\right),$$

且 $p(2)=p(3)=5$, 求 $p(4)$ 的值。

由 $q(x)=q\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$ 可得

$$\frac{p(x)}{x(1-x)}=\frac{p\left(\frac{1}{1-x}\right)}{\frac{1}{1-x}\left(1-\frac{1}{1-x}\right)}\Rightarrow p(x)=(1-x)^3p\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

这说明 $\deg(p)\leqslant 3$, 设 $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, 则

$$(1-x)^3p\left(\frac{1}{1-x}\right)=d(1-x)^3+c(1-x)^2+b(1-x)+a$$

比较 x^3,x^2 系数得

$$a=d,\quad b=-c-3d$$

且由 $p(2)=p(3)=5$ 得

$$-3a-2c=a-6c=5\Rightarrow a=c=-1$$

于是

$$p(x)=-x^3+4x^2-x-1\Rightarrow p(4)=-5$$

30. 已知多项式 x^7-5 的七个相异根为 $r_1,\ldots,r_7$, 求

$$\prod_{1\leqslant i<j\leqslant 7}(r_i+r_j)^2$$

的值。

设所求乘积为 P, 由韦达定理, 考虑

$$\begin{aligned}2^7\cdot 5\cdot P&=\prod_{i=1}^{7}2r_i\prod_{1\leqslant i<j\leqslant 7}(r_i+r_j)^2\\&=\prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant 7}(r_i+r_j)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant 7}(r_i+r_j)\prod_{1\leqslant j<i\leqslant 7}(r_i+r_j)\\&=\prod_{i=1}^{7}\prod_{j=1}^{7}(r_i+r_j)\end{aligned}$$

且注意到

$$\prod_{j=1}^{7}(x-r_j)=x^7-5\Rightarrow\prod_{j=1}^{7}(x+r_j)=x^7+5,$$

故

$$\prod_{j=1}^{7}(r_i+r_j)=r_i^7+5=10$$

因此

$$2^7\cdot 5\cdot P=10^7\Rightarrow P=5^6$$

31. 设 $P(x)$ 为次数为 10 的多项式, 且满足

$$P(2^i)=i,0\leqslant i\leqslant 10,$$

求 $P(x)$ 中 x 项的系数。

令 $Q(x)=P(2x)-P(x)-1$, 则 $Q(2^i)=0,0\leqslant i\leqslant 9$, 所以

$$Q(x)=\alpha\prod_{k=0}^{9}(x-2^k)$$

其中 α 为一常数, 又 $Q(0)=P(0)-P(0)-1=-1$, 且

$$\prod_{k=0}^{9}(0-2^k)=2^{45},$$

因此 $\alpha=-\dfrac{1}{2^{45}}$, 记

$$R(x)=\prod_{k=0}^{9}(x-2^k),$$

其 x 项系数为

$$\mathrm{coef}_x(R) = -\left(\prod_{k=0}^{9} 2^k\right) \sum_{k=0}^{9} \frac{1}{2^k} = -2^{45}\left(2 - \frac{1}{2^9}\right)$$

因为 $P(2x) - P(x) - 1$ 的 x 项系数恰好等于 $P(x)$ 的 x 项系数, 故

$$\mathrm{coef}_x(Q) = \alpha \cdot \mathrm{coef}_x(R) = -\frac{1}{2^{45}} \cdot \left(-2^{45} \cdot \frac{1023}{512}\right) = \frac{1023}{512}$$

32. 已知 $x_1, x_2, \ldots, x_{2015}$ 是方程

$$x^{2015} + x^{2014} + \cdots + x^2 + x + 1 = 0$$

的根, 求

$$\frac{1}{1-x_1} + \frac{1}{1-x_2} + \cdots + \frac{1}{1-x_{2015}}.$$

设

$$a_k = \frac{1}{1-x_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, 2015.$$

则

$$x_k = \frac{a_k - 1}{a_k}.$$

代入原方程, 得到

$$\frac{(a_k-1)^{2015}}{a_k^{2015}} + \frac{(a_k-1)^{2014}}{a_k^{2014}} + \cdots + \frac{a_k - 1}{a_k} + 1 = 0.$$

两边同时乘以 a_k^{2015}, 得

$$(a_k-1)^{2015} + a_k(a_k-1)^{2014} + \cdots + a_k^{2014}(a_k-1) + a_k^{2015} = 0.$$

因此

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2015} = \frac{{}^{2015}C_1 + {}^{2014}C_1 + {}^{1}C_1}{2016} = \frac{2015}{2}$$

而当 $k = 1, 2, \ldots, n, a_1 + a_2 + \cdots + a_{2015} = \dfrac{n}{2}$

设

$$f(x)=x^{2015}+x^{2014}+\cdots+x+1,$$

则

$$f(x)=\prod_{k=1}^{2015}(x-x_k)\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\sum_{k=1}^{2015}\frac{1}{x-x_k}.$$

取 $x=1$, 得到

$$\sum_{k=1}^{2015}\frac{1}{1-x_k}=\frac{f'(1)}{f(1)}=\frac{2015}{2}$$

其中

$$f(1)=2016,\quad f'(1)=2015+2014+\cdots+1=\frac{2015\cdot 2016}{2}$$

33. (a) 已知 α,β,γ 为三实数, 设 $t=-(\alpha+\beta+\gamma),v=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, 且满足

$$\alpha\beta\gamma=-1,\quad t+v=-3,$$

试证

$$\alpha^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{1}{3}}+\gamma^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{(-t-6)+3\sqrt[3]{t^2+3t+9}}.$$

设

$$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=x^3+tx^2+vx+1,$$
$$g(y)=(y-\alpha^{\frac{1}{3}})(y-\beta^{\frac{1}{3}})(y-\gamma^{\frac{1}{3}})=y^3+ay^2+by+1$$

由 $g(y)=0$ 得 $y^3+1=-y(ay+b)$, 于是

$$(y^3+1)^3=-y^3\left(a^3y^3+b^3+3aby(ay+b)\right)=-y^3\left(a^3y^3+b^3-3ab(y^3+1)\right)$$

令 $x=y^3$, 展开整理得

$$x^3+(a^3-3ab+3)x^2+(b^3-3ab+3)x+1=0$$

于是 $a^3-3ab+3=t,b^3-3ab+3=v$, 令 $z=ab$, 则

$$\begin{aligned}z^3&=(t+3z-3)(v+3z-3)\\&=tv+3z(t+v)-3(t+v)+9z^2-18z+9\\&=t(-3-t)+3z(-3)-3(-3)+9z^2-18z+9\\&=9z^2-27z+(-t^2-3t+18)\end{aligned}$$

即

$$(z-3)^3=-t^2-3t-9\Rightarrow z=3-\sqrt[3]{t^2+3t+9}$$

由韦达定理,

$$\alpha^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{1}{3}}+\gamma^{\frac{1}{3}}=-a=-\sqrt[3]{t+3z-3}=\sqrt[3]{(-t-6)+3\sqrt[3]{t^2+3t+9}}$$

故证毕。

(b) 据此, 试证

$$\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{9}}+\sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{9}}+\sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{9}}=\sqrt[3]{\frac{3}{2}(\sqrt[3]{9}-2)}$$

考虑

$$\alpha=2\cos\frac{2\pi}{9},\quad \beta=2\cos\frac{4\pi}{9},\quad \gamma=2\cos\frac{8\pi}{9}.$$

则由

$$\begin{aligned}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}\cos\frac{8\pi}{9}&=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{6\pi}{9}+\cos\frac{2\pi}{9}\right)\cos\frac{8\pi}{9}\\&=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+\cos\frac{2\pi}{9}\right)\cos\frac{8\pi}{9}\\&=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos\frac{8\pi}{9}+\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{8\pi}{9}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos\frac{8\pi}{9}+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{10\pi}{9}+\cos\frac{6\pi}{9}\right)\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{9}-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{9}-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{8}\end{aligned}$$

满足已知 $\alpha\beta\gamma=-1$, 此时

$$\begin{aligned}t=-(\alpha+\beta+\gamma)&=-2\left(\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{8\pi}{9}\right)\\&=-2\left(2\cos\frac{3\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{8\pi}{9}\right)\\&=-2\left(\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{8\pi}{9}\right)\\&=-2\cdot2\cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{7\pi}{18}=0\end{aligned}$$

故

$$\alpha^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{1}{3}}+\gamma^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{-6+3\sqrt[3]{9}}$$

且
$$\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{9}}+\sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{9}}+\sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{9}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}(\alpha^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{1}{3}}+\gamma^{\frac{1}{3}})=\sqrt[3]{\frac{3}{2}(\sqrt[3]{9}-2)}.$$
证毕。

34. 求
$$\frac{(1^4+18^2)(11^4+18^2)(23^4+18^2)(35^4+18^2)(47^4+18^2)}{(5^4+18^2)(7^4+18^2)(17^4+18^2)(29^4+18^2)(41^4+18^2)}$$
的值。

因式分解给出
$$a^4+18^2=(a^2+18)^2-(6a)^2=(a^2+6a+18)(a^2-6a+18)=((a+3)^2+9)((a-3)^2+9)$$
故
$$\begin{aligned}&\frac{(1^4+18^2)(11^4+18^2)(23^4+18^2)(35^4+18^2)(47^4+18^2)}{(5^4+18^2)(7^4+18^2)(17^4+18^2)(29^4+18^2)(41^4+18^2)}\\&=\frac{(4^2+9)(2^2+9)(14^2+9)(8^2+9)(26^2+9)(20^2+9)(38^2+9)(32^2+9)(50^2+9)(44^2+9)}{(8^2+9)(2^2+9)(10^2+9)(4^2+9)(20^2+9)(14^2+9)(32^2+9)(26^2+9)(44^2+9)(38^2+9)}\\&=\frac{50^2+9}{10^2+9}=\frac{2509}{109}\end{aligned}$$

35. 已知三实数 a,b,c 满足 $\sqrt{3}(a-b)+3(b-c)+(c-a)=0$, 且 $b\neq c$, 求
$$\frac{(a-b)(a-c)}{(b-c)^2}$$
的值。

令 $\alpha=a-b,\beta=b-c,\gamma=c-a$, 则
$$\alpha+\beta+\gamma=\sqrt{3}\alpha+3\beta+\gamma=0$$
由此得
$$\gamma=-(\alpha+\beta),\quad \alpha+\beta=\sqrt{3}\alpha+3\beta\Rightarrow\beta=\frac{1-\sqrt{3}}{2}\alpha$$
因此
$$\frac{(a-b)(a-c)}{(b-c)^2}=\frac{-\alpha\gamma}{\beta^2}=\frac{\alpha(\alpha+\beta)}{\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2\alpha^2}=\frac{\frac{3-\sqrt{3}}{2}\alpha^2}{\frac{4-2\sqrt{3}}{4}\alpha^2}=\frac{3-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\cdot\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=3+\sqrt{3}$$

36. 26) 已知 $a+b+c=6, \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=2$, 求

$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}$$

设

$$S=\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}$$

两边同时加 3, 得

$$S+3=\left(\frac{b+c}{a}+1\right)+\left(\frac{c+a}{b}+1\right)+\left(\frac{a+b}{c}+1\right)$$

化简得

$$S+3=\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c}$$

提取公因式

$$S+3=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

代入已知条件

$$S+3=6\times 2=12$$

因此

$$S=9$$

37. 已知 a, b, c 皆为实数, 若

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1$$

求

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}$$

的值。

有

$$\frac{a(a+b+c)}{b+c}+\frac{b(a+b+c)}{c+a}+\frac{c(a+b+c)}{a+b}=a+b+c$$

于是

$$\frac{a^2}{b+c}+a+\frac{b^2}{c+a}+b+\frac{c^2}{a+b}+c=a+b+c$$

即

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}=0$$

38. 已知 $abc=1$, 证明

(a)

$$\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ca+c+1}=1$$

由 $abc=1$,

$$\begin{aligned}\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ca+c+1}&=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{ab}{abc+ab+a}+\frac{abc}{abca+abc+ab}\\&=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{ab}{1+ab+a}+\frac{1}{a+1+ab}\\&=\frac{a+ab+1}{ab+a+1}=1\end{aligned}$$

(b)

$$\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+c+1}=1$$

由 $abc=1$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+c+1}&=\frac{1}{ab+a+abc}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+c+1}\\&=\frac{a(b+1+bc)}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+c+1}\\&=\frac{a(b+1+bc)}{1+a}+\frac{1}{ca+c+1}\\&=\frac{a(b+abc+bc)}{1+a}+\frac{1}{ca+c+1}\\&=\frac{ab(1+ac+c)}{1+a+ab}+\frac{1}{ca+c+1}\\&=\frac{ab(1+ac+c)}{1+a+ab}\\&=\frac{ab+a^2bc+abc}{1+a+ab}\\&=\frac{1+a+ab}{ab+a+1}=1\end{aligned}$$

$$\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ac+c+1}=\frac{c}{abc+ac+c}+\frac{a}{abc+ab+a}+\frac{b}{abc+bc+b}$$

39. 若相异三数 a, b, c 均不为 0，且 $a+b+c=0$，求下式的值：

$$\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\right)\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)$$

首先，我们处理第一个括号内的通分：

$$\begin{aligned}\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c} &= \frac{b^2c-bc^2+ac^2-a^2c+a^2b-ab^2}{abc}\\ &= \frac{c^2(a-b)+ab(a-b)-(ac+bc)(a-b)}{abc}\\ &= \frac{(a-b)(c^2+ab-ac-bc)}{abc}\\ &= \frac{(a-b)[c(c-a)-b(c-a)]}{abc}\\ &= \frac{(a-b)(c-b)(c-a)}{abc}\\ &= -\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}\end{aligned}$$

接下来处理第二个括号。令 $a'=b-c$，$b'=c-a$，$c'=a-b$。观察 $b'-c'$ 的关系：

$$b'-c'=(c-a)-(a-b)=b+c-2a$$

根据条件 $a+b+c=0$，可知 $b+c=-a$，代入上式得：

$$b'-c'=-a-2a=-3a$$

由此可得 $a=-\frac{b'-c'}{3}$。同理可得：

$$b=-\frac{c'-a'}{3},\quad c=-\frac{a'-b'}{3}$$

代入第二个括号的各项中：

$$\begin{aligned}\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b} &= \frac{a}{a'}+\frac{b}{b'}+\frac{c}{c'}\\ &= -\frac{1}{3}\left(\frac{b'-c'}{a'}+\frac{c'-a'}{b'}+\frac{a'-b'}{c'}\right)\end{aligned}$$

利用之前对第一部分推导的结论，将 a', b', c' 代回：

$$\begin{aligned}\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b} &= -\frac{1}{3}\left[-\frac{(a'-b')(b'-c')(c'-a')}{a'b'c'}\right]\\ &= \frac{1}{3}\frac{(-3c)(-3a)(-3b)}{(b-c)(c-a)(a-b)}\\ &= -9\frac{abc}{(a-b)(b-c)(c-a)}\end{aligned}$$

最后，将两部分相乘：

$$\begin{aligned}&\left[-\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}\right]\left[-9\frac{abc}{(a-b)(b-c)(c-a)}\right]\\&=9\end{aligned}$$

因此，原式的值为 9。

40. 已知 $x^5=1$ 且 $x\neq 1$，求

$$\frac{x}{1+x^2}+\frac{x^2}{1+x^4}+\frac{x^3}{1+x}+\frac{x^4}{1+x^3}$$

的值。

由 $x^5=1$，

$$\begin{aligned}\frac{x}{1+x^2}+\frac{x^2}{1+x^4}+\frac{x^3}{1+x}+\frac{x^4}{1+x^3}&=\frac{x}{1+x^2}+\frac{x^3}{x+1}+\frac{x^3}{1+x}+\frac{x}{x^2+1}\\&=2\left(\frac{x}{1+x^2}+\frac{x^3}{x+1}\right)\\&=2\left(\frac{x+x^2+x^3+x^5}{1+x+x^2+x^3}\right)\\&=2\end{aligned}$$

41. 设 $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ 且 $abcd\neq 0$，又 $a+b+c+d=0$，求

$$S=a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+d\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

的值。

由 $a+b+c+d=0$，得

$$\begin{aligned}S&=a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+d\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\\&=-(b+c+d)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)-(a+c+d)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{a}\right)\\&\quad-(a+b+d)\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)-(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\\&=-12-\frac{2(b+c+d)}{a}-\frac{2(a+c+d)}{b}-\frac{2(a+b+d)}{c}-\frac{2(a+b+c)}{d}\\&=-12-\frac{-2a}{a}-\frac{-2b}{b}-\frac{-2c}{c}-\frac{-2d}{d}\\&=-4\end{aligned}$$

42. 设 a,b,c 满足 $a+b+c=a^3+b^3+c^3=0$, n 为任意实数, 求 $a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}$ 的值。

由恒等式

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

将已知代入得

$$0-3abc=0 \Rightarrow abc=0.$$

若 $c=0$, 由 $a+b+c=0$ 可得 $b=-a$, 则

$$a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}=a^{2n+1}+(-a)^{2n+1}+0=0$$

同理若 $a=0$ 或 $b=0$, $a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}=0$

43. 已知 x,y,p,q 为实数, 且满足 $2x^2+3p^2=2y^2+3q^2=(xq-yp)^2=6$, 求

$$(x^2+y^2)(p^2+q^2)$$

的值。

(待另三种解)

解法一:

设

$$x=\sqrt{3}\cos\alpha, \quad p=\sqrt{2}\sin\alpha, \quad y=\sqrt{3}\cos\beta, \quad q=\sqrt{2}\sin\beta$$

则

$$6=(xq-yp)^2=(\sqrt{6}(\cos\alpha\sin\beta-\cos\beta\sin\alpha))^2=6\sin^2(\beta-\alpha)$$

于是 $\sin^2(\beta-\alpha)=1 \Rightarrow \beta-\alpha=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi$, 因此有

$$\cos\beta=\mp\sin\alpha, \quad \sin\beta=\pm\cos\alpha$$

故

$$(x^2+y^2)(p^2+q^2)=(\underbrace{3\cos^2\alpha+3\cos^2\beta}_{=3(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=3})(\underbrace{2\sin^2\alpha+2\sin^2\beta}_{=2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=2})=6$$

44. 解方程

$$3(x+1)^6-2(x-1)^6=(x^2-1)^3$$

方法 A

原方程化为

$$(x+1)^6-2(x-1)^6=(x^2-1)^3=(x+1)^3(x-1)^3$$

除以 $(x-1)^6$（$x\neq 1$）:

$$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^6-2=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$$

设 $y=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$, 得到二次方程:

$$y^2-y-2=0 \implies (y-2)(y+1)=0$$

$$y=2 \quad 或 \quad y=-1$$

分别解得 x:

$$\frac{x+1}{x-1}=2^{\frac{1}{3}} \implies x=\frac{1+2^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}-1}=3+2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{x+1}{x-1}=-1 \implies x=0$$

方法 B

设 $a=(x+1)^3$, $b=(x-1)^3$, 原方程化为

$$a^2-2b^2=ab \implies a^2-ab-2b^2=0 \implies (a-2b)(a+b)=0$$

解每个因式:

$$a+b=0 \implies (x+1)^3+(x-1)^3=0 \implies x=0$$

$$a-2b=0 \implies (x+1)^3=2(x-1)^3 \implies x=3+2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}$$

结论:

$$x=0 \quad 或 \quad x=3+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}$$

45. 解方程
$$(a+b)(ax+b)(a-bx)=(a^2x-b^2)(a+bx),\quad x\in\mathbb{R}.$$

整理方程并展开

$$\begin{aligned}
&0=(a^2x-b^2)(a+bx)-(a+b)(ax+b)(a-bx)\\
&0=a^3x+a^2bx^2-a^2b-b^3x-(a+b)(a^2x-abx^2+ab-b^2x)\\
&0=a^3x+a^2bx^2-a^2b-b^3x-(a^3x-a^2bx^2+a^2b-ab^2x+a^2bx-ab^2x^2+ab^2-b^3x)\\
&0=(2a^2b+ab^2)x^2+(ab^2-a^2b)x-(a^2b+ab^2)
\end{aligned}$$

除以 ab 得二次方程
$$(2a+b)x^2+(b-a)x-(a+2b)=0$$

判别式

$$\begin{aligned}
\Delta&=(b-a)^2+4(2a+b)(a+2b)\\
&=b^2-2ab+a^2+4(2a^2+5ab+2b^2)\\
&=b^2-2ab+a^2+8a^2+20ab+8b^2\\
&=9a^2+18ab+9b^2\\
&=9(a+b)^2
\end{aligned}$$

使用二次公式
$$x=\frac{-(b-a)\pm\sqrt{9(a+b)^2}}{2(2a+b)}=\frac{a-b\pm3(a+b)}{2(2a+b)}$$

求两根

第一根：
$$x=\frac{a-b+3(a+b)}{2(2a+b)}=\frac{4a+2b}{2(2a+b)}=1$$

第二根：
$$x=\frac{a-b-3(a+b)}{2(2a+b)}=\frac{-2a-4b}{2(2a+b)}=-\frac{a+2b}{2a+b}$$

结论：
$$x=1\quad\text{或}\quad x=-\frac{a+2b}{2a+b}$$

因式定理、余式定理

1. 设 $f(x)=ax^3+bx^2-18x+3, g(x)=ax^3+9x^2+bx-9$。当 $f(x)$ 和 $g(x)$ 除以 $2x-1$ 时所得余数相同，且当 $f(x)$ 除以 $x-2$ 时余数是 -5。

   (a) 求 a, b 的值。

   令 $x=\frac{1}{2}$, 有:

   $$f\left(\frac{1}{2}\right)=g\left(\frac{1}{2}\right)\Rightarrow a\cdot\frac{1}{8}+b\cdot\frac{1}{4}-9+3=a\cdot\frac{1}{8}+\frac{9}{4}+\frac{b}{2}-9\Rightarrow b=3$$

   又

   $$f(2)=8a+4b-36+3=-5\Rightarrow a=2$$

   $\therefore a=2,\ b=3$

   (b) 若 $x+4$ 整除 $f(x)+kg(x)$, 求 k。

   有

   $$f(-4)+kg(-4)=0\Rightarrow -128a+16b+72+3+k(-128a+144-4b-9)=0$$

   代入 $a=2,\ b=3$ 得:

   $$-133(1+k)=0\Rightarrow k=-1$$

2. 已知 $f(x)$ 为三次多项式，以 x^2+x+2 除之得余式 $x+3$, 以 x^2+x-2 除之得余式 $5x+7$, 求 $f(x)$。

   据题意有 $f(1)=5(1)+7=12, f(-2)=5(-2)+7=-3$, 设

   $$f(x)=(x^2+x+2)(ax+b)+x+3$$

   令 $x=1$,

   $$f(1)=(1+1+2)(a+b)+1+3=12\Rightarrow a+b=2$$

   令 $x=-2$,

   $$f(-2)=(4-2+2)(-2a+b)-2+3=-3\Rightarrow -2a+b=-1$$

解得 $a=1,\ b=1$, 所以

$$f(x)=(x^2+x+2)(x+1)+x+3=x^3+2x^2+4x+5$$

3. 若 $f(x)$ 以 x^2-1 除余 $3x+2$,$g(x)$ 以 x^2+2x-3 除余 $5x+2$, 求 $(x+3)f(x)+(5x^2+1)g(x)$ 除以 $x-1$ 的余式。

即求 $(1+3)f(1)+(5+1)g(1)=4f(1)+6g(1)$ 的值, 由已知

$$f(1)=3\cdot 1+2=5,\ g(1)=5\cdot 1+2=7$$

故 $(x+3)f(x)+(5x^2+1)g(x)$ 除以 $x-1$ 的余式为

$$4\cdot 5+6\cdot 7=62$$

4. 以 x^2+2x+3 除 $f(x)$ 余 $x+12$, 以 $(x+1)^2$ 除 $f(x)$ 余 $5x+4$, 求以 $(x+1)(x^2+2x+3)$ 除 $f(x)$ 的余式。

同上, 设

$$f(x)=(x+1)(x^2+2x+3)Q(x)+a(x^2+2x+3)+x+12$$

据题意 $f(-1)=-5+4=-1$, 现令 $x=-1$ 有

$$f(-1)=a(1-2+3)-1+12=-1\Rightarrow a=-6$$

$\therefore$ 以 $(x+1)(x^2+2x+3)$ 除 $f(x)$ 的余式为 $-6(x^2+2x+3)+x+12=-6x^2-11x-6$

5. $f(x)$ 以 $x(x-1)$ 除之, 余式为 $-x+3$; 以 $x(x+1)$ 除之, 余式为 $-3x+3$, 则 $f(x)$ 除以 $x(x^2-1)$ 的余式为?

设

$$f(x)=x(x^2-1)Q(x)+ax(x-1)-x+3$$

据题意 $f(-1)=3+3=6$, 令 $x=-1$ 有

$$f(-1)=a(-1)(-2)+1+3=6\Rightarrow a=1$$

$\therefore f(x)$ 除以 $x(x^2-1)$ 的余式为 $x(x-1)-x+3=x^2-2x+3$

6. 设多项式 $f(x)$ 除以 $(x+1)^3$ 得余式 $2x^2+8$, 除以 $(x-2)^2$ 得余式 $15x+40$, 且 $\deg f(x) \geqslant 4$, 则 $f(x)$ 除以 $(x+1)^3(x-2)$ 的余式为?

设

$$f(x) = (x+1)^3(x-2)Q(x) + a(x+1)^3 + 2x^2 + 8$$

据题意 $f(2) = 15 \cdot 2 + 40 = 70$, 令 $x = 2$ 有

$$f(2) = a(2+1)^3 + 2 \cdot 2^2 + 8 = 70 \Rightarrow a = 2$$

$\therefore$ $f(x)$ 除以 $(x+1)^3(x-2)$ 的余式为 $2(x+1)^3 + 2x^2 + 8 = 2x^3 + 8x^2 + 6x + 10$

7. 设 $\deg f(x) \geqslant 3$, 且 $f(x)$ 以 $(x-1)^2$ 除之余 $3x+2$, 以 $(x+2)^2$ 除之余 $5x-3$, 求:

   (a) 以 $x-1$ 除之的余式。

   即 $f(1) = 3 \cdot 1 + 2 = 5$

   (b) 以 $(x-1)(x+2)$ 除之的余式。

   设

   $$f(x) = (x-1)(x+2)Q(x) + ax + b$$

   令 $x = 1$,

   $$f(1) = a + b = 5$$

   令 $x = -2$,

   $$f(-2) = -2a + b = -13$$

   解得 $a = 6,\ b = -1$, 故余式为 $6x - 1$

   (c) 以 $(x-1)^2(x+2)$ 除之的余式。

   设

   $$f(x) = (x-1)^2(x+2)Q(x) + a(x-1)^2 + 3x + 2$$

   令 $x = -2$,

   $$f(-2) = 9a + -4 = -13$$

   解得 $a = -1$, 故余式为 $-x^2 + 5x + 1$

8. $f(x)$ 为一多项式, 若 $(x+1)f(x)$ 除以 x^2+x+1 的余式为 $5x+3$, 则 $f(x)$ 除以 x^2+x+1 的余式为何?

据题意有

$$(x+1)f(x)=(x+1)(x^2+x+1)Q(x)+a(x^2+x+1)+5x+3$$

且设

$$f(x)=(x^2+x+1)Q(x)+ax+b$$

两边乘 $x+1$ 有

$$(x+1)f(x)=(x+1)(x^2+x+1)Q(x)+(x+1)(ax+b)$$

比较得

$$a(x^2+x+1)+5x+3=(x+1)(ax+b)$$

即

$$ax^2+(a+b)x+b=ax^2+(a+5)x+a+3$$

得知 $a=2,\ b=5$, 余式为 $2x+5$

9. 以 $(x+1)^3$ 除 $f(x)$ 余式为 x^2-2x+3, 求以 $(x+1)^2$ 除 $f(x)$ 所得余式。

设

$$f(x)=Q(x)(x+1)^3+x^2-2x+3$$

有

$$f(x)=Q(x)(x+1)^3+(x+1)^2+(-4x+2)=(x+1)^2[Q(x)(x+1)+1]+(-4x+2)$$

轻而易举得知余式为 $-4x+2$.

10. 设 $f(x)$ 为实系数三次多项式, 若 $f(x)$ 除以 $x-2$ 的余式为 -5, 且 $(x+1)f(x)$ 除以 x^3-3 的余式为 $3x-1$, 求多项式 $f(x)$

设

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d,$$

则

$$(x+1)f(x)=ax^4+(a+b)x^3+(b+c)x^2+(c+d)x+d.$$

由题意,

$$f(2)=8a+4b+2c+d=-5 \tag{1}$$

且有

$$(x+1)f(x)=(x^3-3)(ax+(a+b))+3x-1,$$

比较系数得:

$$b+c=0 \tag{2}$$

$$3a+3b+d=-1 \tag{3}$$

$$3a+c+d=3 \tag{4}$$

由 $(1)-(4)$ 联立解得

$$a=-1,\quad b=-1,\quad c=1,\quad d=5$$

因此

$$f(x)=-x^3-x^2+x+5$$

11. 已知一多项式 $f(x)=x^{2025}(x^2+ax+b)$, 其中 a,b 为实数, 如果将 $f(x)$ 除以 $(x-2)^2$ 得余式 $2^{2025}(x-2)$, 求 a,b。

设

$$f(x)=x^{2025}(x^2+ax+b)=(x-2)^2p(x)+2^{2025}(x-2)$$

对 x 求导有

$$f'(x)=2025x^{2024}(x^2+ax+b)+x^{2025}(2x+a)=2(x-2)p(x)+(x-2)^2p'(x)+2^{2025}$$

现令 $x=2$, 则

$$\begin{cases}2^{2025}(4+2a+b)=0\\ 2025\cdot 2^{2024}(4+2a+b)+2^{2025}(4+a)=2^{2025}\end{cases}$$

解得

$$a=-3,b=2$$

12. 设 $f(x)=x^4+5x^3+ax^2+bx+c$ 可被 $(x-1)^3$ 整除, 求 a,b,c 的值。

$$
\begin{array}{ccccc|c}
1 & 5 & a & b & c & 1 \\
 & 1 & 6 & a+6 & a+b+6 & \\
\hline
1 & 6 & a+6 & a+b+6 & \multicolumn{1}{|l}{a+b+c+6} & \\
 & 1 & 7 & a+13 & & \\
\cline{1-4}
1 & 7 & a+13 & \multicolumn{1}{|l}{2a+b+19} & & \\
 & 1 & 8 & & & \\
\cline{1-3}
1 & 8 & \multicolumn{1}{|l}{a+21} & & & \\
 & 1 & & & & \\
\cline{1-2}
1 & 9 & & & &
\end{array}
$$

连续综合除法得

$$f(x)=(x-1)^4+9(x-1)^3+(a+21)(x-1)^2+(2a+b+19)(x-1)+(a+b+c+6)$$

已知 $f(x)$ 可被 $(x-1)^3$ 整除，则

$$\begin{cases} a+21=0 \\ 2a+b+19=0 \\ a+b+c+6=0 \end{cases} \Rightarrow (a,b,c)=(-21,23,-8)$$

13. 已知 x^2-x+b 为多项式 $6x^4-7x^3+ax^2+3x+2$ 的因式，求 a,b 的值。

设 $f(x)=6x^4-7x^3+ax^2+3x+2=(x^2-x+b)(6x^2+px+q)$，展开右边得

$$(x^2-x+b)(6x^2+px+q)=6x^4+(p-6)x^3+(q-p+6b)x^2+(pb-q)x+bq$$

比较系数得

$$p-6=-7 \tag{1}$$
$$q-p+6b=a \tag{2}$$
$$pb-q=3 \tag{3}$$
$$bq=2 \tag{4}$$

由 (3) 得 $q=-b-3$，代入 (4) 得

$$b(-b-3)=2 \Rightarrow (b+1)(b+2)=0 \Rightarrow b=-1 \text{ 或 } -2$$

当 $b=-1$ 时, $q=-2, a=-7$; 当 $b=-2$ 时, $q=-1, a=-12$

$\therefore (a, b)=(-7,-1)$ 或 $(-12,-2)$

14. 若 a, b, c 为相异实数, 分别用 $x-a, x-b, x-c$ 除多项式 $p(x)$, 所得的余数分别为 a, b, c, 求以 $(x-a)(x-b)(x-c)$ 除 $p(x)$ 的余式。

设

$$p(x)=(x-a)(x-b)(x-c)q(x)+r(x-a)(x-b)+s(x-a)+a,$$

令 $x=b$, 由 $a \neq b$,

$$p(b)=s(b-a)+a=b \Rightarrow s(b-a)=b-a \Rightarrow s=1$$

令 $x=c$, 由 $a \neq c, b \neq c$,

$$p(c)=r(c-a)(c-b)+(c-a)+a=c \Rightarrow r(c-a)(c-b)=0 \Rightarrow r=0$$

因此以 $(x-a)(x-b)(x-c)$ 除 $p(x)$ 的余式为 x

15. 若 $g(x)$ 除以 $2x-3$ 的余式为 1, 且 $f(x)=g(x)(2x-3)+5$, 求 $[f(x)]^2$ 除以 $(2x-3)^2$ 的余式。

设

$$g(x)=(2x-3)Q(x)+1$$

由 $f(x)=g(x)(2x-3)+5$,

$$\begin{aligned}
[f(x)]^2 &= [g(x)]^2(2x-3)^2+10g(x)(2x-3)+25 \\
&= [g(x)]^2(2x-3)^2+10[(2x-3)Q(x)+1](2x-3)+25 \\
&= [g(x)]^2(2x-3)^2+10Q(x)(2x-3)^2+10(2x-3)+25 \\
&= [g(x)]^2(2x-3)^2+10Q(x)(2x-3)^2+20x-5
\end{aligned}$$

故 $[f(x)]^2$ 除以 $(2x-3)^2$ 的余式为 $20x-5$

16. 若多项式 $p(x)=x^2+bx+c$, 其中 b, c 为实数, 且 $p(p(1))=p(p(2))=0$, 且 $p(1) \neq p(2)$, 求 b, c 的值。

由 $p(p(1)) = p(p(2)) = 0$, 意味 $p(1)$ 和 $p(2)$ 是方程 $x^2 + bx + c = 0$ 的两根, 且

$$p(1) + p(2) = -b, \quad p(1)p(2) = c$$

即

$$(1 + b + c) + (4 + 2b + c) = -b \tag{1}$$

$$(1 + b + c)(4 + 2b + c) = c \tag{2}$$

由 (1) 得 $2b + c = -\frac{5}{2}$, 代入 (2):

$$(1 - \frac{5}{2} - b)(4 - \frac{5}{2}) = -\frac{5}{2} - 2b \Rightarrow b = -\frac{1}{2}, c = -\frac{3}{2}$$

17. a, b, c 为整数, 且 $0 < a < b$, 若 $x - c$ 是多项式 $x(x - a)(x - b) - 17$ 的因式, 求 (a, b, c)。

已知 $f(x) = x(x - a)(x - b) - 17$ 且 $x - c$ 是它的因式, 于是

$$f(c) = c(c - a)(c - b) - 17 = 0 \Rightarrow c(c - a)(c - b) = 17.$$

由于 a, b, c 均为整数, 且 $0 < a < b$, 我们只需枚举整数三元组使得左边乘积为 17。

因为 17 是质数, 其非零整数因式只有:

$$(\pm 1, \pm 1, \pm 17) \text{ 的排列组合。}$$

枚举 $c = 1$,

$$1(1 - a)(1 - b) = 17 \Rightarrow (1 - a)(1 - b) = 17.$$

由于 $17 = 1 \times 17 = (-1) \times (-17)$, 列出可能组合:

- $1 - a = 1,\ 1 - b = 17 \Rightarrow a = 0,\ b = -16$, 不满足 $0 < a < b$。
- $1 - a = -1,\ 1 - b = -17 \Rightarrow a = 2,\ b = 18$, 满足条件!

若 $c = -1$:

$$(-1)(-1 - a)(-1 - b) = 17 \Rightarrow -(a + 1)(b + 1) = 17 \Rightarrow (a + 1)(b + 1) = -17$$

没有满足 $0 < a < b$ 的整数解, 尝试 $c = 17, -17$ 会得到更大的数, 不满足 $0 < a < b$。

因此, 唯一符合题意的解为:

$$(a, b, c) = (2, 18, 1)$$

18. 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均为实系数二次多项式且首项系数都是 2。已知 $(f(x))^2$ 除以 $g(x)$ 的余式为 $5x+3$, 而 $(g(x))^2$ 除以 $f(x)$ 的余式为 $x+1$, 求 $f(x),g(x)$。

设

$$f(x)=2x^2+ax+b,\quad g(x)=f(x)-cx-d=2x^2+(a-c)x+b-d.$$

则

$$(f(x))^2=(g(x)+cx+d)^2=(g(x))^2+2(cx+d)g(x)+(cx+d)^2.$$

由已知 $(f(x))^2$ 除以 $g(x)$ 的余式为 $5x+3$,

$$(cx+d)^2=c^2x^2+2cdx+d^2=\frac{c^2}{2}g(x)+\Big(2cd-\frac{c^2}{2}(a-c)\Big)x+\Big(d^2-\frac{c^2}{2}(b-d)\Big).$$

比较系数得

$$\begin{cases}4cd-ac^2+c^3=10,\\ 2d^2-bc^2+c^2d=6.\end{cases}$$

同理, 由 $(g(x))^2$ 除以 $f(x)$ 的余式为 $x+1$ 得

$$\begin{cases}4cd-ac^2=2,\\ 2d^2-bc^2=2.\end{cases}$$

解得

$$c^3=8\Rightarrow c=2,\quad c^2d=4\Rightarrow d=1,\quad a=\frac{3}{2},\quad b=0.$$

于是

$$f(x)=2x^2+\frac{3}{2}x,\quad g(x)=2x^2-\frac{1}{2}x-1.$$

19. 求多项式 $(x+1)^6$ 除以 x^2+1 的余式。

有 $x^2\equiv -1 \pmod{x^2+1}$, 则

$$(x+1)^6=(x^2+2x+1)^3\equiv(2x)^3=8x\cdot x^2\equiv 8x\cdot(-1)=-8x\pmod{x^2+1}$$

20. 设 $f(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$, 求 $f(x^5)$ 除以 $f(x)$ 所得余式。

首先注意到

$$f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \frac{x^5-1}{x-1}, \quad x \neq 1,$$

所以 $f(x) \mid x^5 - 1$, 即

$$x^5 \equiv 1 \pmod{f(x)}$$

故

$$f(x^5) = (x^5)^4 + (x^5)^3 + (x^5)^2 + x^5 + 1 \equiv 1+1+1+1+1 = 5 \pmod{f(x)}$$

21. 求以 x^2+2x+3 除 $(x^2+3x+4)^4$ 所得的余式。

有

$$(x^2+3x+4)^4 \equiv (x+1)^4 = (x^2+2x+1)^2 \equiv (-2)^2 = 4 \pmod{x^2+2x+3}$$

22. 设 $f(x) = x^{37} - 2x^{26} + 4x^7 - 3$, 则

(a) 求 $f(x)$ 除以 x^2+1 的余式。

有

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{37} - 2x^{26} + 4x^7 - 3 \\ &= (x^2)^{18} \cdot x - 2(x^2)^{13} + 4(x^2)^3 \cdot x - 3 \\ &= (-1)^{18} \cdot x - 2(-1)^{13} + 4(-1)^3 \cdot x - 3 \\ &= x + 2 - 4x - 3 \\ &= -3x - 1 \pmod{x^2+1} \end{aligned}$$

(b) 求 $f(x)$ 除以 x^2+x+1 的余式。

有 $x^3 \equiv 1 \pmod{x^2+x+1}$, 于是

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{37} - 2x^{26} + 4x^7 - 3 \\ &= (x^3)^{12} \cdot x - 2(x^3)^8 \cdot x^2 + 4(x^3)^2 \cdot x - 3 \\ &\equiv x - 2x^2 + 4x - 3 \\ &= -2x^2 + 5x - 3 \\ &\equiv -2(-x-1) + 5x - 3 \\ &= 7x - 1 \pmod{x^2+x+1} \end{aligned}$$

23. 求以 x^4-x 除 $x^{87}-2x^{44}-x^3+3x^2+1$ 所得的余式。

有 $x^4\equiv x\Rightarrow x^3\equiv 1 \pmod{x^4-x}$, 故

$$x^{87}-2x^{44}-x^3+3x^2+1\equiv 1-2x^2-1+3x^2+1=x^2+1$$

24. 求 x^{100} 除以 x^3+2x^2+2x+1 的余式。

x^{100} 除以 $x+1$ 的余式即 $(-1)^{100}=1$, 又

$$x^3\equiv 1 \pmod{x^2+x+1}$$

故 x^{100} 除以 x^2+x+1 的余式为 $x^{100}\equiv x \pmod{x^2+x+1}$, 现设

$$x^{100}=(x+1)(x^2+x+1)Q(x)+a(x^2+x+1)+x$$

令 $x=-1$ 有

$$1=a(1-1+1)-1\Rightarrow a=2$$

$\therefore x^{100}$ 除以 x^3+2x^2+2x+1 的余式为 $2x^2+3x+2$

25. 求 x^{200} 除以 $(x-1)^2$ 的余式。

发现 $f(x)$ 除以 $(x-1)$ 的余式为 $f(1)=1^{200}=1$, 将所求写成

$$\begin{aligned}
x^{200}&=(x-1)^2Q(x)+a(x-1)+1\\
x^{200}-1&=(x-1)^2Q(x)+a(x-1)\\
(x-1)(x^{199}+\cdots+x+1)&=(x-1)^2Q(x)+a(x-1)\\
x^{199}+\cdots+x+1&=(x-1)Q(x)+a
\end{aligned}$$

两边代 $x=1$, 得到

$$200=0+a$$

故余式为 $200(x-1)+1=200x-199$

设 $t=x-1$ ，则题目变成 $x^{200}=(t+1)^{200}$ 除以 t^2 的余式。由二项式定理，

$$(t+1)^{200}={}^{200}C_{200}t^{200}+\cdots+{}^{200}C_2t^2+{}^{200}C_1t+{}^{200}C_0$$

则显然，$(t+1)^{200}$ 除以 t^2 的余式即为 ${}^{200}C_1t+{}^{200}C_0=200(x-1)+1=200x-199$

26. 已知多项式 $f(x)=x^{130}-1, g(x)=x^4-x^3+2x^2-x+1$，求 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的余式。

设

$$x^{130}-1=(x^2+1)(x^2-x+1)Q(x)+Ax^3+Bx^2+Cx+D.$$

令 $x=i$，则

$$-1-1=Ai^3+Bi^2+Ci+D=(-B+D)+(-A+C)i,$$

得

$$\begin{cases}-B+D=-2,\\-A+C=0\end{cases}$$

令 $\omega=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$，

$$\omega^{130}-1=-\omega-1=-A+B(\omega-1)+C\omega+D=(B+C)\omega-A-B+D$$

得到方程组

$$\begin{cases}B+C=-1\\-A-B+D=-1\end{cases}$$

解得 $A=-1, B=0, C=-1, D=-2$，因此余式为 $-x^3-x-2$

27. 设 $f(x)$ 是一个次数有限的多项式，且满足

$$(x+9)f(x+1)=(x+3)f(x+3),$$

已知 $f(0)=1$，求 $f(1)$ 的值。

令 $x=-3$ 得 $f(-2)=0$，所以 $f(x)$ 有因式 $(x+2)$，设 $f(x)=(x+2)g(x)$ 得

$$(x+9)(x+3)g(x+1)=(x+3)(x+5)g(x+3)\Rightarrow(x+9)g(x+1)=(x+5)g(x+3)$$

同理，令 $x=-5$ 得 $g(-4)=0$，故 $g(x)$ 有因式 $(x+4)$，设 $g(x)=(x+4)h(x)$ 得

$$(x+9)(x+5)h(x+1)=(x+5)(x+7)h(x+3)\Rightarrow(x+9)h(x+1)=(x+7)h(x+3)$$

令 $x=-7$ 得 $h(-6)=0$, 故 $h(x)$ 有因式 $(x+6)$, 设 $h(x)=(x+6)p(x)$ 得

$$(x+9)(x+7)p(x+1)=(x+7)(x+9)p(x+3) \Rightarrow p(x+1)=p(x+3)$$

即 $p(x)$ 是周期为 2 的函数, 因为 $p(x)$ 是次数有限的多项式, 故 $p(x)=c, c\in\mathbb{R}$

于是 $f(x)=c(x+2)(x+4)(x+6)$, 由 $f(0)=1$ 得 $c=\frac{1}{48}$, 故

$$f(1)=\frac{1}{48}(3)(5)(7)=\frac{35}{16}$$

根式、绝对值、取整

1. 解方程

$$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3}=\sqrt[3]{12(x-1)}, \quad x\in\mathbb{R}$$

设

$$a=\sqrt[3]{x}, \quad b=\sqrt[3]{2x-3}, \quad c=\sqrt[3]{12(x-1)}$$

原方程可写为

$$a+b=c$$

对两边立方：

$$(a+b)^3=c^3$$

利用立方展开公式：

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=c^3$$

代入 $a^3=x$, $b^3=2x-3$, $c^3=12(x-1)$：

$$x+(2x-3)+3ab(a+b)=12(x-1)$$

$$3(ab)(c)=12(x-1)-3x+3=9(x-1)$$

注意 $abc=\sqrt[3]{x(2x-3)12(x-1)}$, 于是得到

$$3\sqrt[3]{x(2x-3)12(x-1)}=9(x-1)$$

两边同时立方：

$$27\cdot x(2x-3)12(x-1)=729(x-1)^3$$

$$324x(2x-3)(x-1)=729(x-1)^3$$

因为 $x=1$ 是一个解, 可以除去 $(x-1)$：

$$324x(2x-3)=729(x-1)^2$$

$$4x(2x-3)=9(x-1)^2$$

化简得到二次方程：

$$8x^2 - 12x = 9x^2 - 18x + 9$$

$$0 = x^2 - 6x + 9$$

$$(x-3)^2 = 0$$

因此解为

$$x = 1 \quad 或 \quad x = 3$$

2. 求实数根

$$\sqrt{6x-9} + \sqrt{2x-5} = x - 1$$

步骤 1： 利用平方差公式

$$(\sqrt{6x-9} + \sqrt{2x-5})(\sqrt{6x-9} - \sqrt{2x-5}) = (6x-9) - (2x-5) = 4x - 4$$

将原方程除以上式：

$$\sqrt{6x-9} - \sqrt{2x-5} = \frac{4x-4}{x-1} = 4$$

步骤 2： 两边平方

$$\begin{aligned}
(\sqrt{6x-9} - \sqrt{2x-5})^2 &= 16 \\
6x - 9 - 2\sqrt{(6x-9)(2x-5)} + 2x - 5 &= 16 \\
8x - 14 - 2\sqrt{12x^2 - 48x + 45} &= 16 \\
8x - 30 &= 2\sqrt{12x^2 - 48x + 45} \\
4x - 15 &= \sqrt{12x^2 - 48x + 45}
\end{aligned}$$

步骤 3： 再次平方

$$\begin{aligned}
(4x-15)^2 &= 12x^2 - 48x + 45 \\
16x^2 - 120x + 225 &= 12x^2 - 48x + 45 \\
4x^2 - 72x + 180 &= 0 \\
x^2 - 18x + 45 &= 0 \\
(x-3)(x-15) &= 0
\end{aligned}$$

步骤 **4**：检验根

$$x = 3 : \sqrt{6 \cdot 3 - 9} + \sqrt{2 \cdot 3 - 5} = \sqrt{9} + \sqrt{1} = 3 + 1 = 4 \neq 2$$

$$x = 15 : \sqrt{6 \cdot 15 - 9} + \sqrt{2 \cdot 15 - 5} = \sqrt{81} + \sqrt{25} = 9 + 5 = 14 = 15 - 1$$

结论：实数根为

$$\boxed{x = 15}$$

3. 解方程

$$4 + \sqrt{x^2 - 6x + 13} = x + \sqrt{2x - 5}, \quad x \in \mathbb{R}, x \geqslant \frac{5}{2}.$$

将方程化为三项形式：

$$\sqrt{x^2 - 6x + 13} = x - 4 + \sqrt{2x - 5}$$

设 $x - 4 = y$, 则 $x = y + 4$:

$$\begin{aligned} \sqrt{(y+4)^2 - 6(y+4) + 13} &= y + \sqrt{2(y+4) - 5} \\ \sqrt{y^2 + 2y + 5} &= y + \sqrt{2y + 3} \end{aligned}$$

两边平方：

$$\begin{aligned} y^2 + 2y + 5 &= y^2 + 2y\sqrt{2y+3} + 2y + 3 \\ 5 &= 2y\sqrt{2y+3} + 3 \\ 2 &= 2y\sqrt{2y+3} \\ 1 &= y\sqrt{2y+3} \end{aligned}$$

再次平方：

$$1 = y^2(2y + 3) \implies 2y^3 + 3y^2 - 1 = 0$$

通过因式分解：

$$2y^3 + 3y^2 - 1 = (y + 1)(2y^2 + y - 1) = 0$$

解得

$$y = -1, \quad y = \frac{1}{2}$$

回代 $x = y + 4$:

$$x = 3, \quad x = \frac{9}{2}$$

检验：

$$x=3:\quad 4+\sqrt{9-18+13}=6\neq 3+\sqrt{6-5}=4$$
$$x=\frac{9}{2}:\quad 4+\sqrt{\frac{81}{4}-27+13}=4+\frac{5}{2}=\frac{13}{2}=\frac{9}{2}+\sqrt{9-5}$$

因此唯一解为
$$x=\frac{9}{2}.$$

4. 求所有实数 x 满足
$$x=\sqrt{x-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}.$$

原方程式变为
$$x-\sqrt{x-\frac{1}{x}}=\sqrt{1-\frac{1}{x}}$$
两边平方得
$$(x^2-1)-2\sqrt{x(x^2-1)}+x=0 \implies (\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x})^2=0$$
解得
$$x^2-x-1=0\Rightarrow x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}>0$$

5. 解方程
$$\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}+2\sqrt{49x^2+7x-7x-6}=181-14x$$

原方程化简为
$$\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}+2\sqrt{(7x+7)(7x-6)}=181-14x$$
设
$$a=\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}$$

则

$$
\begin{aligned}
a^2 &= (\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6})^2 \\
&= 7x+7+7x-6+2\sqrt{(7x+7)(7x-6)} \\
&= 14x+1+2\sqrt{(7x+7)(7x-6)}
\end{aligned}
$$

代回原方程得

$$a^2-(14x+1)+a=181-14x$$

化简得

$$a^2+a-182=0$$

$$(a+14)(a-13)=0$$

由于平方根之和为正数, 舍去 $a=-14$, 得

$$a=13$$

于是

$$\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}=13$$

两边平方

$$
\begin{aligned}
14x+1+2\sqrt{(7x+7)(7x-6)} &= 169 \\
14x+2\sqrt{49x^2-6} &= 168
\end{aligned}
$$

整理得

$$\sqrt{49x^2-6}=84-7x$$

再次平方

$$49x^2-6=(84-7x)^2$$

$$49x^2-6=7056-1176x+49x^2$$

化简得

$$1176x=7062$$

$$x=6$$

6. 解方程

$$x-\sqrt{\frac{x}{2}+\frac{7}{8}-\sqrt{\frac{x}{8}+\frac{13}{64}}}=179$$

首先将方程中的根式化简，设

$$y=\sqrt{\frac{x}{8}+\frac{13}{64}}$$

则方程变为

$$x-\sqrt{\frac{x}{2}+\frac{7}{8}-y}=179$$

两边平方：

$$(x-179)^2=\frac{x}{2}+\frac{7}{8}-y$$

$$y=\sqrt{\frac{x}{8}+\frac{13}{64}}$$

代入并进一步化简得到

$$8x+13=39^2$$

$$8x+13=1521$$

$$8x=1508$$

$$x=188.5$$

7. 解方程

$$\frac{x-7}{2+\sqrt{x-3}}+\frac{x-5}{1+\sqrt{x-4}}=\sqrt{10}$$

首先有

$$\frac{x-7}{2+\sqrt{x-3}}+\frac{x-5}{1+\sqrt{x-4}}=\sqrt{10}$$

对各项有理化分母：

$$\frac{x-7}{2+\sqrt{x-3}}=\frac{(x-7)(2-\sqrt{x-3})}{(2+\sqrt{x-3})(2-\sqrt{x-3})}=\frac{(x-7)(2-\sqrt{x-3})}{4-(x-3)}=\frac{(x-7)(2-\sqrt{x-3})}{7-x}$$
$$\frac{x-5}{1+\sqrt{x-4}}=\frac{(x-5)(1-\sqrt{x-4})}{1-(x-4)}=\frac{(x-5)(1-\sqrt{x-4})}{5-x}$$

代回原方程得到

$$-\left(2-\sqrt{x-3}\right)+\left(1-\sqrt{x-4}\right)=\sqrt{10}$$
$$-2+\sqrt{x-3}+1-\sqrt{x-4}=\sqrt{10}$$
$$\sqrt{x-3}-\sqrt{x-4}=\sqrt{10}+1$$

两边移项得到

$$\sqrt{x-3}=\sqrt{10}+1+\sqrt{x-4}$$

两边平方：

$$x-3=(\sqrt{10}+1+\sqrt{x-4})^2$$

展开并化简得到

$$x+7=2\sqrt{10(x-3)}$$

再次平方：

$$x^2+14x+49=40(x-3)$$

化简：

$$x^2-26x+169=0$$

$$(x-13)^2=0$$

$$x=13$$

8. 求

$$\left|\sqrt{x+1}-2\right|+\left|\sqrt{x+1}-3\right|=1$$

的整数解集。

令 $t=\sqrt{x+1}$, 其中 $t\geqslant 0$, 则方程变为

$$|t-2|+|t-3|=1$$

分三种情况讨论:

情况 1: 当 $0\leqslant t<2$ 时,

$$(2-t)+(3-t)=1\Rightarrow t=2$$

这与 $t<2$ 矛盾, 无解。

情况 2: 当 $2\leqslant t\leqslant 3$ 时,

$$(t-2)+(3-t)=1\Rightarrow 1=1$$

恒成立, 因此 $t\in[2,3]$。

情况 3: 当 $t>3$ 时,

$$(t-2)+(t-3)=1\Rightarrow t=3$$

这与 $t>3$ 矛盾, 无解。

综合得 $2\leqslant\sqrt{x+1}\leqslant 3$, 平方得

$$4\leqslant x+1\leqslant 9\Rightarrow 3\leqslant x\leqslant 8$$

因此整数解集为 $\{3,4,5,6,7,8\}$。

9. 已知实数 a,b,c,d 满足

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},\quad a\neq b\neq c\neq d\neq 0.$$

(a) 证明

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}.$$

(b) 利用 **(a)** 或其他方法解方程

$$\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}=\frac{4x-1}{2},\quad x>1.$$

(a)

由

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

得

$$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1, \qquad \frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1.$$

于是

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}, \qquad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}.$$

两式相除，得

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d},$$

证毕。

(b)

由题设

$$\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}=\frac{4x-1}{2}.$$

利用 **(a)** 的结论，有

$$\frac{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})+(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})-(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}=\frac{(4x-1)+2}{(4x-1)-2}.$$

化简得

$$\frac{2\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x-1}}=\frac{4x+1}{4x-3}.$$

平方两边：

$$\frac{x+1}{x-1}=\frac{(4x+1)^2}{(4x-3)^2}=\frac{16x^2+8x+1}{16x^2-24x+9}.$$

再次应用 **(a)**，得

$$\frac{(x+1)+(x-1)}{(x+1)-(x-1)}=\frac{(16x^2+8x+1)+(16x^2-24x+9)}{(16x^2+8x+1)-(16x^2-24x+9)}.$$

化简得

$$\frac{2x}{2}=\frac{32x^2-16x+10}{32x-8},$$

即

$$x=\frac{16x^2-8x+5}{16x-4}.$$

交叉相乘（注意分母非零）：

$$16x^2-4x=16x^2-8x+5,$$

从而

$$4x = 5, \quad x = \frac{5}{4}.$$

由于 $x > 1$, 且代回原方程成立, 故解为

$$x = \frac{5}{4}.$$

10. 求方程的实根：

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$$

（所有根号均取正值）

我们有

$$\begin{aligned} x+3-4\sqrt{x-1} &= x-1-4\sqrt{x-1}+4 \\ &= (\sqrt{x-1})^2 - 4\sqrt{x-1} + 4 = (\sqrt{x-1}-2)^2 \end{aligned}$$

类似地,

$$\begin{aligned} x+8-6\sqrt{x-1} &= x-1-6\sqrt{x-1}+9 \\ &= (\sqrt{x-1}-3)^2 \end{aligned}$$

因此，原方程可以写成

$$\sqrt{(\sqrt{x-1}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-3)^2} = 1$$

由于题目指定根号取正值，即

$$|\sqrt{x-1}-2| + |\sqrt{x-1}-3| = 1$$

其中 $|y|$ 表示 y 的绝对值。我们分几种情况讨论。

第一，若 $\sqrt{x-1}-2 \geqslant 0$ 且 $\sqrt{x-1}-3 \geqslant 0$，即若 $\sqrt{x-1} \geqslant 3$，$x-1 \geqslant 9$，$x \geqslant 10$，则 $|\sqrt{x-1}-2| = \sqrt{x-1}-2$，$|\sqrt{x-1}-3| = \sqrt{x-1}-3$，方程变为

$$\sqrt{x-1}-2+\sqrt{x-1}-3 = 1$$

由此得,

$$\begin{aligned} 2\sqrt{x-1} &= 6 \\ \sqrt{x-1} &= 3 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

若 $\sqrt{x-1}-2 \geqslant 0$ 且 $\sqrt{x-1}-3 \leqslant 0$，即若 $\sqrt{x-1} \geqslant 2$，$x \geqslant 5$，但 $\sqrt{x-1} \leqslant 3$，$x \leqslant 10$，则 $|\sqrt{x-1}-2| = \sqrt{x-1}-2$，$|\sqrt{x-1}-3| = -\sqrt{x-1}+3$，方程变为恒等式

$$\sqrt{x-1}-2-\sqrt{x-1}+3=1$$

$$1=1$$

因此，在 $x=5$ 和 $x=10$ 之间的所有 x 值都满足方程。

若 $\sqrt{x-1}-2 \leqslant 0$ 且 $\sqrt{x-1}-3 \leqslant 0$，即若 $\sqrt{x-1} \leqslant 2, x \leqslant 5$，则 $|\sqrt{x-1}-2| = -\sqrt{x-1}+2$，$|\sqrt{x-1}-3| = -\sqrt{x-1}+3$，方程变为

$$-\sqrt{x-1}+2-\sqrt{x-1}+3=1$$

由此推得

$$\begin{aligned} 2\sqrt{x-1} &= 4 \\ \sqrt{x-1} &= 2 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

而 $\sqrt{x-1}-2 \leqslant 0$ 且 $\sqrt{x-1}-3 \geqslant 0$ 的情况是不可能的。

总结以上结果，所有介于 5 和 10 之间的 x 值（包含 5 和 10），即 $5 \leqslant x \leqslant 10$，都是原方程的解。

11. 求值

$$\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$$

设

$$a=\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}, \quad b=\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$$

则

$$ab=\sqrt[3]{(9+4\sqrt{5})(9-4\sqrt{5})}=\sqrt[3]{81-80}=1$$

又设

$$a+b=x$$

立方得

$$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$$

即

$$x^3=(9+4\sqrt{5})+(9-4\sqrt{5})+3x$$

化简得

$$x^3=18+3x$$

移项

$$x^3-3x-18=0$$

试得

$$x=3$$

因此

$$\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}=3$$

12. 若

$$(x-\sqrt{x^2-2011})(y+\sqrt{y^2-2011})+2011=0$$

求 $2x+y$ 的值。

原式两边乘于 $x+\sqrt{x^2-2011}$ 可得

$$2011(y+\sqrt{y^2-2011})+2011(x+\sqrt{x^2-2011})=0$$

$$2011(x+y+\sqrt{x^2-2011}+\sqrt{y^2-2011})=0$$

即

$$x+y=-(\sqrt{x^2-2011}+\sqrt{y^2-2011}) \tag{1}$$

同理, 原式两边乘于 $y-\sqrt{y^2-2011}$ 可得

$$(x-\sqrt{x^2-2011})2011+2011(y-\sqrt{y^2-2011})=0$$

$$2011(x+y-(\sqrt{x^2-2011}+\sqrt{y^2-2011}))=0$$

$$x+y=\sqrt{x^2-2011}+\sqrt{y^2-2011} \tag{2}$$

由 (1) 及 (2) 可得

$$\sqrt{x^2-2011}+\sqrt{y^2-2011}=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2011}, y=\mp\sqrt{2011} \quad (\because x+y=0)$$

故

$$2x+y=x+y+x=\pm\sqrt{2011}$$

13. 求

$$\frac{\sqrt{10+\sqrt{1}}+\sqrt{10+\sqrt{2}}+\cdots+\sqrt{10+\sqrt{99}}}{\sqrt{10-\sqrt{1}}+\sqrt{10-\sqrt{2}}+\cdots+\sqrt{10-\sqrt{99}}}$$

之值。

由

$$\left(\sqrt{10+\sqrt{a}}-\sqrt{10-\sqrt{a}}\right)^2=20-2\sqrt{100-a}$$

于是有

$$\sqrt{10+\sqrt{a}}-\sqrt{10-\sqrt{a}}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{10-\sqrt{100-a}}$$

令

$$L=\frac{\sqrt{10+\sqrt{1}}+\sqrt{10+\sqrt{2}}+\cdots+\sqrt{10+\sqrt{99}}}{\sqrt{10-\sqrt{1}}+\sqrt{10-\sqrt{2}}+\cdots+\sqrt{10-\sqrt{99}}}$$

则

$$\begin{aligned}L-1&=\frac{(\sqrt{10+\sqrt{1}}-\sqrt{10-\sqrt{1}})+\cdots+(\sqrt{10+\sqrt{99}}-\sqrt{10-\sqrt{99}})}{\sqrt{10-\sqrt{1}}+\cdots+\sqrt{10-\sqrt{99}}}\\&=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{10-\sqrt{99}}+\sqrt{10-\sqrt{98}}+\cdots+\sqrt{10-\sqrt{1}}\right)}{\sqrt{10-\sqrt{1}}+\sqrt{10-\sqrt{2}}+\cdots+\sqrt{10-\sqrt{99}}}=\sqrt{2}\end{aligned}$$

因此

$$L=\sqrt{2}+1$$

14. 设 a,b 为正实数，且

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1,\quad 2022a^2=2023b^2,$$

求 $\sqrt{2022a+2023b}$ 的值。

由 $2022a^2=2023b^2$ 得

$$\frac{b}{a}=\sqrt{\frac{2022}{2023}}.$$

记 $k=\sqrt{\dfrac{2022}{2023}}$，则 $b=ka$。由 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=1$ 得

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{ka}=1\Rightarrow a=1+\frac{1}{k}.$$

于是

$$\begin{aligned}2022a+2023b&=2022a+2023ka\\&=a(2022+2023k)\\&=\left(1+\frac{1}{k}\right)(2022+2023k)\\&=2022+2023+2022\cdot\frac{1}{k}+2023k\\&=2022+2023+2022\sqrt{\frac{2023}{2022}}+2023\sqrt{\frac{2022}{2023}}\\&=2022+2023+\sqrt{2022\cdot 2023}+\sqrt{2022\cdot 2023}\\&=(\sqrt{2022}+\sqrt{2023})^2\end{aligned}$$

故

$$\sqrt{2022a+2023b}=\sqrt{2022}+\sqrt{2023}.$$

15. 解方程

$$|x+1|-|x|+3|x-1|-2|x-2|=x+2$$

我们将根据绝对值号内各项为零的临界点（$-1,0,1,2$），分区间讨论其实根。

第一，设 $x\geqslant 2$。此时 $x+1>0$，$x>0$，$x-1>0$，$x-2\geqslant 0$。因此 $|x+1|=x+1$，$|x|=x$，$|x-1|=x-1$，$|x-2|=x-2$。方程变为：

$$(x+1)-x+3(x-1)-2(x-2)=x+2$$

整理得：

$$x+1-x+3x-3-2x+4=x+2$$

$$x+2=x+2$$

这是一个恒等式。因此，所有大于或等于 2 的实数都是原方程的根。

第二，设 $1\leqslant x<2$。此时 $x+1>0$，$x>0$，$x-1\geqslant 0$，$x-2<0$。绝对值展开为：

$$|x+1|=x+1$$

$$|x|=x$$

$$|x-1|=x-1$$

$$|x-2|=-(x-2)$$

代入方程得：

$$(x+1)-x+3(x-1)+2(x-2)=x+2$$

整理得：

$$x+1-x+3x-3+2x-4=x+2$$

$$4x=8 \implies x=2$$

该值已在之前的区间中考虑过，故在 $[1,2)$ 区间内无新根。

第三，设 $0 \leqslant x < 1$。此时 $|x+1|=x+1$，$|x|=x$，$|x-1|=-(x-1)$，$|x-2|=-(x-2)$。方程变为：

$$(x+1)-x-3(x-1)+2(x-2)=x+2$$

整理得：

$$x+1-x-3x+3+2x-4=x+2$$

$$-x=x+2 \implies 2x=-2 \implies x=-1$$

由于 $x=-1$ 不在区间 $[0,1)$ 内，故应舍去。此区间无实根。

第四，设 $-1 \leqslant x < 0$。此时 $|x+1|=x+1$，$|x|=-x$，$|x-1|=-(x-1)$，$|x-2|=-(x-2)$。方程变为：

$$(x+1)+x-3(x-1)+2(x-2)=x+2$$

整理得：

$$x+1+x-3x+3+2x-4=x+2$$

$$x=x+2$$

此方程无解。

第五，设 $x<-1$。此时 $|x+1|=-(x+1)$，$|x|=-x$，$|x-1|=-(x-1)$，$|x-2|=-(x-2)$。方程变为：

$$\begin{aligned}
-(x+1)+x-3(x-1)+2(x-2)&=x+2\\
-x-1+x-3x+3+2x-4&=x+2\\
-x-2&=x+2\\
2x=-4 &\implies x=-2
\end{aligned}$$

$x=-2$ 属于该区间，是一个有效的根。

总结以上结果，原方程的解为 $x=-2$ 以及所有满足 $x \geqslant 2$ 的实数。

16. 求大于 $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^6$ 的最小整数。

令

$$a=\sqrt{3}+\sqrt{2}, \quad b=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

则

$$a^2=5+2\sqrt{6}, \quad b^2=5-2\sqrt{6}, \quad ab=1$$

所以

$$a^6+b^6=(a^2+b^2)(a^4+b^4-a^2b^2)=10(10^2-3)=970$$

由于 $0<b^2<1$, 所以

$$969<a^6<970 \quad \Rightarrow \quad \lceil a^6 \rceil=970$$

17. 求所有满足

$$\lfloor 0.5+\lfloor x \rfloor \rfloor=20$$

的 x 的取值范围

设

$$\lfloor x \rfloor = y$$

则

$$\lfloor 0.5+y \rfloor=20$$

由于 y 为整数, 所以 $0.5+y$ 必须满足

$$20 \leqslant 0.5+y<21$$

化简得

$$19.5 \leqslant y<20.5$$

因为 y 为整数, 所以

$$y=20$$

代回 $\lfloor x \rfloor = y$, 得

$$\lfloor x \rfloor = 20$$

因此

$$20 \leqslant x<21$$

18. 求满足条件的 x 的取值范围

$$\lceil y-1.3\rceil = 16$$

其中 $y=\lceil x\rceil$

设

$$\lceil x\rceil = y$$

则

$$\lceil y-1.3\rceil = 16$$

根据取整定义, 有

$$15 \leqslant y-1.3 < 16$$

两边同时加 1.3, 得

$$16.3 \leqslant y < 17.3$$

由于 y 为整数, 所以

$$y=17$$

即

$$\lceil x\rceil = 17$$

因此

$$16 < x \leqslant 17$$

19. 求满足

$$\lceil x\rceil\lceil 2x\rceil = 15$$

的 x 的取值范围

设

$$x=n-r$$

其中 n 为整数,$0<r\leqslant 1$, 则 $\lceil 2x\rceil = 2n$ 或 $2n-1$.

当 $r<1/2$,

$$\lceil x\rceil = n, \quad \lceil 2x\rceil = 2n$$

$$\Longrightarrow n(2n)=15$$

当 $r \geqslant 1/2$,

$$\lfloor x \rfloor = n, \quad \lceil 2x \rceil = 2n - 1$$

$$\implies n(2n-1) = 15$$

$$2n^2 - n - 15 = 0$$

$$(n-3)(2n+5) = 0$$

$$\therefore n = 3$$

x 的取值范围 $(2, 2.5]$

20. 计算

$$\sum_{r=1}^{34} \left\lfloor \frac{18r}{35} \right\rfloor$$

解法一

将整数部分与小数部分分开,

$$\sum_{r=1}^{34} \left\lfloor \frac{18r}{35} \right\rfloor = \sum_{r=1}^{34} \frac{18r}{35} - \sum_{r=1}^{34} \left\{ \frac{18r}{35} \right\}$$

先计算第一项,

$$\sum_{r=1}^{34} \frac{18r}{35} = \frac{18}{35} \sum_{r=1}^{34} r = \frac{18}{35} \cdot \frac{34 \cdot 35}{2} = 18 \cdot 17 = 306$$

注意到对任意 r,

$$\left\{ \frac{18r}{35} \right\} + \left\{ \frac{18(35-r)}{35} \right\} = 1$$

当 r 从 1 到 34 时，可以配成 17 对，因此

$$\sum_{r=1}^{34} \left\{ \frac{18r}{35} \right\} = 17$$

于是

$$\sum_{r=1}^{34} \left\lfloor \frac{18r}{35} \right\rfloor = 306 - 17 = 289$$

解法二

注意到

$$\frac{18r}{35}+\frac{18(35-r)}{35}=18$$

因此

$$\left\lfloor\frac{18r}{35}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{18(35-r)}{35}\right\rfloor+\left\{\frac{18r}{35}\right\}+\left\{\frac{18(35-r)}{35}\right\}=18$$

又因为

$$\left\{\frac{18r}{35}\right\}+\left\{\frac{18(35-r)}{35}\right\}=1$$

所以

$$\left\lfloor\frac{18r}{35}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{18(35-r)}{35}\right\rfloor=17$$

当 r 从 1 到 34 时，可配成 17 组

$$(1,34),(2,33),\ldots,(17,18)$$

每一组的和均为 17，因此

$$\sum_{r=1}^{34}\left\lfloor\frac{18r}{35}\right\rfloor=17\times 17=289$$

21. 已知

$$\begin{cases}\lfloor b\rfloor+\lceil a\rceil+\{c\}=16\\ \lceil c\rceil+\lfloor b\rfloor+\{a\}=11.3\\ \lceil a\rceil+\lceil c\rceil+\{b\}=9.7\end{cases}$$

求 $a+b+c$

由题意可知，小数部分分别为

$$\{a\}=0.3,\quad \{b\}=0.7,\quad \{c\}=0$$

代入原方程组，得

$$\lfloor b\rfloor+\lceil a\rceil=16$$

$$\lceil c\rceil+\lfloor b\rfloor=11$$

$$\lceil a\rceil+\lceil c\rceil=9$$

由第二式与第三式可得

$$\lceil c \rceil = 2$$

$$\lfloor b \rfloor = 9 - 1 = 8$$

$$\lceil a \rceil = 9 - 2 = 7$$

因此

$$\lfloor a \rfloor = 7, \quad \lfloor b \rfloor = 8, \quad \lfloor c \rfloor = 2$$

结合小数部分，

$$a = 7.3, \quad b = 8.7, \quad c = 2$$

于是

$$a + b + c = 18$$

22. 设 x 为正实数，且满足

$$x^2 + \{x\}^2 = 27$$

求 x

设

$$x = n + r$$

其中 n 为整数，$0 \leqslant r < 1$

注意到

$$x^2 \leqslant x^2 + \{x\}^2 < x^2 + 1$$

因此

$$26 < x^2 \leqslant 27$$

从而

$$n = 5$$

代入 $x = 5 + r$，得

$$\begin{aligned} (5+r)^2 + r^2 &= 27 \\ 25 + 10r + r^2 + r^2 &= 27 \\ 2r^2 + 10r - 2 &= 0 \\ r^2 + 5r - 1 &= 0 \end{aligned}$$

解得

$$r=\frac{-5\pm\sqrt{29}}{2}$$

由于 $0\leqslant r<1$，故

$$r=\frac{-5+\sqrt{29}}{2}$$

于是

$$x=5+r=\frac{5+\sqrt{29}}{2}$$

23. 设 r 为实数，且满足

$$\left\lfloor r+\frac{19}{100}\right\rfloor+\left\lfloor r+\frac{20}{100}\right\rfloor+\cdots+\left\lfloor r+\frac{97}{100}\right\rfloor=546$$

求 $\lfloor 100r\rfloor$

从 $\frac{19}{100}$ 到 $\frac{97}{100}$，共有

$$97-19+1=79$$

项

设这些取整值只可能为 7 或 8

若全部等于 7，则和为

$$79\times 7=553$$

若全部等于 8，则和为

$$79\times 8=632$$

由于

$$553>546,\quad 632>546$$

说明其中既有 7 也有 8

设前 k 项等于 7，其余 $79-k$ 项等于 8，则

$$\begin{aligned}7k+8(79-k)&=546\\7k+632-8k&=546\\632-k&=546\\k&=86\end{aligned}$$

这表示

$$\left\lfloor r+\frac{56}{100}\right\rfloor=7,\quad \left\lfloor r+\frac{57}{100}\right\rfloor=8$$

于是

$$7\leqslant r+\frac{56}{100}<8$$

$$8\leqslant r+\frac{57}{100}<9$$

化简得

$$7.43\leqslant r<7.44$$

两边同乘 100，得到

$$743\leqslant 100r<744$$

因此

$$\lfloor 100r\rfloor=743$$

24. 5) 求

$$\sum_{k=1}^{202}\lfloor\sqrt{k}\rfloor$$

因为

$$\lfloor\sqrt{202}\rfloor=14$$

所以 $\lfloor\sqrt{k}\rfloor\in\{1,2,3,\ldots,14\}$

当

$$(n-1)^2<k\leqslant n^2$$

时，有

$$\lfloor\sqrt{k}\rfloor=n$$

对应的 k 的个数为

$$n^2-(n-1)^2=2n-1$$

其中 $n=1,2,\ldots,13$

当 $n=14$ 时，对应的个数为

$$202-13^2=202-169=33$$

因此

$$\sum_{k=1}^{202}\lfloor\sqrt{k}\rfloor=\sum_{n=1}^{13}n(2n-1)+14\times 33$$

$$\begin{aligned}
&=\sum_{n=1}^{13}(2n^2-n)+462\\
&=2\sum_{n=1}^{13}n^2-\sum_{n=1}^{13}n+462\\
&=2\left(\frac{13\times 14\times 27}{6}\right)-\frac{13\times 14}{2}+462\\
&=1638-91+462\\
&=2009
\end{aligned}$$

25. 6) 求满足

$$\lfloor\sqrt{x}\rfloor-\lfloor\sqrt{x+34}\rfloor=0$$

的最小整数 x

设

$$\lfloor\sqrt{x}\rfloor=\lfloor\sqrt{x+34}\rfloor=y$$

则 x 与 $x+34$ 必须落在同一个平方区间内，即

$$y^2\leqslant x<x+34<(y+1)^2$$

于是有

$$(y+1)^2-y^2>34$$

化简得

$$\begin{aligned}
2y+1&>34\\
2y&>33\\
y&>16.5
\end{aligned}$$

因此

$$y=17$$

最小的 x 为

$$x = y^2 = 17^2 = 289$$

26. 7)

$$\lceil 1 \rceil + \lceil 1.7 \rceil + \lceil 2.4 \rceil + \lceil 3.1 \rceil + \cdots + \lceil 999.9 \rceil$$

$$\lceil 1 \rceil + \lceil 8 \rceil + \cdots + \lceil 995 \rceil = \frac{143}{2}(1 + 995)$$

$$\lceil 1.7 \rceil + \lceil 8.7 \rceil + \cdots + \lceil 995.7 \rceil = \frac{143}{2}(2 + 996)$$

$$\lceil 6.6 \rceil + \lceil 13.6 \rceil + \cdots + \lceil 993.6 \rceil = \frac{142}{2}(7 + 994)$$

$$\lceil 7.3 \rceil + \lceil 14.3 \rceil + \cdots + \lceil 994.3 \rceil = \frac{142}{2}(8 + 995)$$

$$\text{最终结果} = 715285$$

27. 8)

$$x^2 - 6\lfloor x \rfloor + 5 = 0$$

令 $\lfloor x \rfloor = n$, 代入方程得

$$x^2 - 6n + 5 = 0 \implies x^2 = 6n - 5$$

检查每个可能的 n 值:

$$\begin{aligned}
&n = 1 : x^2 = 1 \implies x = 1 \quad (\text{有效}, 1 \leqslant x < 2) \\
&n = 2 : x^2 = 7 \implies x = \sqrt{7} \quad (2 < \sqrt{7} < 3) \\
&n = 3 : x^2 = 13 \implies x = \sqrt{13} \quad (3 < \sqrt{13} < 4) \\
&n = 4 : x^2 = 19 \implies x = \sqrt{19} \quad (4 < \sqrt{19} < 5) \\
&n = 5 : x^2 = 25 \implies x = 5 \quad (\text{有效})
\end{aligned}$$

因此，方程的解为

$$x = 1, \sqrt{7}, \sqrt{13}, \sqrt{19}, 5$$

28. 9)

$$\lceil x\lfloor x\rfloor\rceil + \lfloor x\lceil x\rceil\rfloor = 111$$

令 $x = n + r$, $0 \leqslant r < 1$. 则

$$\lceil (n+r)\lfloor (n+r)\rfloor\rceil + \lfloor (n+r)\lceil (n+r)\rceil\rfloor = 111$$

展开得:

$$2n^2 + n + \lceil nr\rceil + \lfloor (n+1)r\rfloor = 111$$

解不等式:

$$2n^2 + n + 1 \leqslant 111, \quad 2n^2 + 3n \geqslant 111$$

得 $n = 7$, 因此解

$$\lceil 7r\rceil + \lfloor 8r\rfloor = 6$$

得

$$\frac{3}{8} \leqslant r \leqslant \frac{3}{7} \Rightarrow 7 + \frac{3}{8} \leqslant x \leqslant 7 + \frac{3}{7}$$

29. 12)

$$\left\lfloor \frac{1^2}{2016} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{2^2}{2016} \right\rfloor, \ldots, \left\lfloor \frac{2016^2}{2016} \right\rfloor$$

要找序列中不同整数的个数，考虑连续两项的差:

$$\frac{n^2}{2016} - \frac{(n-1)^2}{2016} = \frac{2n-1}{2016} < 1 \implies n < 1007.5$$

前 **1007** 项: $n = 1, 2, \ldots, 1007$

$$\frac{1007^2}{2016} \approx 503.0005 > 503$$

因此前 1007 项产生整数 $0, 1, 2, \ldots, 503$，共有 504 个不同整数。

第 1008 项到 2016 项： 每项至少比前一项大 1，因此产生 $2016 - 1008 + 1 = 1009$ 个不同整数。

总不同整数数：

$$504 + 1009 = 1513$$

因此序列中共有 1513 个不同整数。

30. 13)

$$\sum_{n=0}^{1000} \left\lfloor \frac{2^n}{3} \right\rfloor$$

令

$$A_n = \left\lfloor \frac{2^n}{3} \right\rfloor$$

注意到

$$A_n = \frac{2^n}{3} - \frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{6}.$$

因此

$$\begin{aligned} S = \sum_{n=0}^{1000} A_n &= \sum_{n=0}^{1000} \left(\frac{2^n}{3} - \frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{6} \right) \\ &= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{1000} 2^n - \frac{1001}{2} + \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{1000} (-1)^n \\ &= \frac{1}{3}(2^{1001} - 1) - \frac{1001}{2} + \frac{1}{6} \cdot 0 \\ &= \frac{2^{1001} - 1}{3} - \frac{1001}{2} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{2(2^{1001} - 1) - 3 \cdot 1001 + 1}{6} \\ &= \frac{2^{1002} - 3004}{6} = \frac{2^{1001} - 1502}{3}. \end{aligned}$$

因此和可表示为

$$S = 2^{1001}/3 - 1502/3 = 2^{1001} - 1502 \text{ (經約分後)}.$$

31. 14)

$$\lfloor x^2 \rfloor - \lfloor x \rfloor^2 = 1999$$

設 $x = n + r$, 其中 $n = \lfloor x \rfloor$, $r = \{x\}$. 则

$$\lfloor x^2 \rfloor - n^2 = \lfloor 2nr + r^2 \rfloor = 1999.$$

最小的 n 满足

$$2nr \geqslant 1999 \implies n \geqslant \lceil 1999/2 \rceil = 1000.$$

因此

$$2 \cdot 1000 \cdot r + r^2 = 1999 \implies r^2 + 2000r - 1999 = 0$$

解得

$$r = -1000 + \sqrt{1001999}.$$

所以

$$x = n + r = 1000 + (-1000 + \sqrt{1001999}) = \sqrt{1001999}.$$

32. 16) 求方程

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor = n - 1$$

在 $n \in \mathbb{N}$ 且 $1 \leqslant n \leqslant 100$ 的解的个数。

设 $f(n) = \lfloor n/2 \rfloor + \lfloor n/3 \rfloor + \lfloor n/6 \rfloor$, 则

$$f(n+6) = f(n) + 6$$

成立。

定义 $g(n) = f(n) - (n-1)$, 则

$$g(n+6) = g(n).$$

检查前几个值:

$$g(1) = g(2) = g(3) = g(4) = 0, \quad g(5) \neq 0, \quad g(6) \neq 0.$$

因此在 1 到 100 之间共有 68 个解。

33. 17) 求方程

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor = \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \frac{n}{5}$$

的解。

右边为整数，左边为整数，因此 $n/2, n/3, n/5$ 都必须为整数，即 n 为 30 的倍数。

在允许范围内，共有 3 个解。

34. 18) 求方程

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor = n$$

的解。

由于

$$\lfloor n/2 \rfloor + \lfloor n/3 \rfloor + \lfloor n/6 \rfloor \leqslant n/2 + n/3 + n/6 = n,$$

因此等号成立的情况共有 16 个。

35. 19) 求 x 满足方程

$$2\lfloor x \rfloor + 3x = 4 - 5\{x\}$$

设 $x = n + r$, 其中 $n = \lfloor x \rfloor$ 是整数部分, $r = \{x\}$ 是小数部分 $(0 \leqslant r < 1)$。代入方程得

$$2n + 3(n + r) = 4 - 5r$$

化简得

$$5n + 3r = 4 - 5r$$

$$5n + 8r = 4$$

由 $0 \leqslant r < 1$, 有

$$0 \leqslant 8r < 8$$

$$-4 < 5n \leqslant 4$$

唯一满足该不等式的整数是 $n = 0$，因此

$$n = \lfloor x \rfloor = 0$$

代入 $n = 0$ 回到方程 $5n + 8r = 4$:

$$8r = 4 \implies r = \frac{1}{2}$$

因此解为

$$x = n + r = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

36. 20) 求满足条件的正整数 x 的个数

$$\left\lfloor \frac{x}{99} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{101} \right\rfloor$$

设

$$\left\lfloor \frac{x}{99} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{101} \right\rfloor = m \in \mathbb{Z}$$

由定义有

$$m \leqslant \frac{x}{99} < m+1 \implies 99m \leqslant x < 99(m+1)$$
$$m \leqslant \frac{x}{101} < m+1 \implies 101m \leqslant x < 101(m+1)$$

因此

$$101m \leqslant x < 99(m+1)$$

当 $m > 49$ 时, $101m > 99(m+1)$, 无解。

对于 $0 \leqslant m \leqslant 49$, 可行整数个数为

$$(99(m+1)-1) - 101m + 1 = 99(m+1) - 101m = 99 - 2m$$

总和为

$$\sum_{m=0}^{49}(99-2m) = 99 \cdot 50 - 2 \cdot \frac{49 \cdot 50}{2} = 4950 - 2450 = 2500$$

排除 $x = 0$ 不是正整数, 最终答案为

$$\boxed{2499}$$

37. 21) 求满足条件的整数 x

$$\left\lfloor \frac{x}{1!} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{2!} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{3!} \right\rfloor = 224$$

首先近似使用不取整的值:

$$\frac{x}{1} + \frac{x}{2} + \frac{x}{6} - 3 < 224 < \frac{x}{1} + \frac{x}{2} + \frac{x}{6}$$

$$\frac{6x+3x+x}{6} - 3 < 224 < \frac{6x+3x+x}{6} \implies \frac{10x}{6} - 3 < 224 < \frac{10x}{6}$$

$$\frac{5x}{3} - 3 < 224 < \frac{5x}{3} \implies 134.4 \leqslant x < 136.2$$

由于 x 为整数，只有 $x = 135$ 可行。

$$\therefore x = 135$$

38. 22) 求满足条件的最大实数 x

$$\frac{\lfloor x \rfloor}{x} = \frac{9}{10}$$

设 $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$, 则有

$$10\lfloor x \rfloor = 9x = 9(\lfloor x \rfloor + \{x\})$$

$$10\lfloor x \rfloor = 9\lfloor x \rfloor + 9\{x\} \implies \lfloor x \rfloor = 9\{x\}$$

由于 $0 \leqslant \{x\} < 1$, 可得 $\lfloor x \rfloor = 1, 2, \ldots, 8$, 对应 $\{x\} = 1/9, 2/9, \ldots, 8/9$

取最大值 $\{x\} = 8/9$, $\lfloor x \rfloor = 8$

$$x = \lfloor x \rfloor + \{x\} = 8 + \frac{8}{9} = \frac{80}{9}$$

指数与对数

1. 设 $a=2019^{2017}, b=2019^{2018}, c=2019^{2019}$, 计算

$$\frac{1}{2019^{a-a}+2019^{a-b}+2019^{a-c}}+\frac{1}{2019^{b-a}+2019^{b-b}+2019^{b-c}}+\frac{1}{2019^{c-a}+2019^{c-b}+2019^{c-c}}$$

观察到原式为

$$\frac{2019^{-a}}{2019^{-a}+2019^{-b}+2019^{-c}}+\frac{2019^{-b}}{2019^{-a}+2019^{-b}+2019^{-c}}+\frac{2019^{-c}}{2019^{-a}+2019^{-b}+2019^{-c}}$$

答案呼之欲出 $\Rightarrow 1$

2. 试证

$$2^{\sqrt{\log_2 3}}=3^{\sqrt{\log_3 2}}$$

注意到

$$2^{\sqrt{\log_2 3}}=2^{\frac{\log_2 3}{\sqrt{\log_2 3}}}=\left(2^{\log_2 3}\right)^{\sqrt{\log_3 2}}=3^{\sqrt{\log_3 2}}$$

故左式等于右式, 得证。

设 $x=2^{\sqrt{\log_2 3}}, y=3^{\sqrt{\log_3 2}}$, 则

$$\log x=\sqrt{\log_2 3}\cdot\log 2=\sqrt{\frac{\log 3}{\log 2}}\cdot\log 2=\sqrt{\log 2\log 3}$$

同理

$$\log y=\sqrt{\log_3 2}\cdot\log 3=\sqrt{\frac{\log 2}{\log 3}}\cdot\log 3=\sqrt{\log 2\log 3}$$

故

$$\log x=\log y\Rightarrow x=y\quad\text{（得证）}$$

3. 解方程

$$2^{x+2}5^{6-x}=10^{x^2},$$

两边取 log 得

$$(x+2)\log 2+(6-x)\log 5=x^2\Rightarrow x^2-\left(\log\frac{2}{5}\right)x-2\log 250=0$$

因式分解给出

$$(x-2)(x+\log 250)=0\Rightarrow x=2,-\log 250$$

4. 求解方程

$$\frac{e^{2x}+16^x}{(4e)^x}=\frac{4+e}{2\sqrt{e}},\quad x\in\mathbb{R}.$$

步骤 **1:** 化简方程两边

给定方程:

$$\frac{e^{2x}+16^x}{(4e)^x}=\frac{4+e}{2\sqrt{e}}$$

利用指数法则化简左边:

$$\frac{e^{2x}}{(4e)^x}+\frac{16^x}{(4e)^x}=\left(\frac{e}{4}\right)^x+\left(\frac{4}{e}\right)^x$$

右边化简为:

$$\frac{4+e}{2\sqrt{e}}=\frac{\sqrt{e}}{2}+\frac{2}{\sqrt{e}}$$

因此方程变为:

$$\left(\frac{e}{4}\right)^x+\left(\frac{4}{e}\right)^x=\frac{\sqrt{e}}{2}+\frac{2}{\sqrt{e}}$$

步骤 **2:** 代换化为二次方程

令

$$y=\left(\frac{e}{4}\right)^x$$

则方程可写作:

$$y+\frac{1}{y}=\left(\frac{e}{4}\right)^{1/2}+\frac{1}{\left(\frac{e}{4}\right)^{1/2}}$$

两边乘以 y 得到二次形式：

$$y^2-\left(\left(\frac{e}{4}\right)^{1/2}+\left(\frac{e}{4}\right)^{-1/2}\right)y+1=0$$

因式分解得到：

$$\left(y-\left(\frac{e}{4}\right)^{1/2}\right)\left(y-\left(\frac{e}{4}\right)^{-1/2}\right)=0$$

步骤 **3:** 求 x 的值

$$\left(\frac{e}{4}\right)^{x}=\left(\frac{e}{4}\right)^{1/2}\implies x=\frac{1}{2}$$
$$\left(\frac{e}{4}\right)^{x}=\left(\frac{e}{4}\right)^{-1/2}\implies x=-\frac{1}{2}$$

答案：

$$x=\frac{1}{2},\quad x=-\frac{1}{2}$$

5. 解

$$x^{x^x}=(x^x)^x$$

原方程即

$$x^{x^x}=x^{x^2}$$

先考虑指数方程的特殊情况 $x=-1,0,1$, 可得解

$$x=-1,1$$

当 $x\neq-1,0,1$ 时, 由底数相等所以指数相等的性质得,

$$x=2$$

故原方程式的解为

$$x=-1\quad 或\quad x=1\quad 或\quad x=2$$

6. 已知

$$(x\sqrt{x}\sqrt[3]{x})^x=x^{x\sqrt{x}\sqrt[3]{x}},$$

试求 x^5 的值。

$$(x\sqrt{x}\sqrt[3]{x})^x = x^{x\sqrt{x}\sqrt[3]{x}}$$
$$x^{(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})x} = x^{x^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}}$$
$$x^{(\frac{11}{6})x} = x^{x^{\frac{11}{6}}}$$

考虑特殊情况 $x=-1,0,1$, 可得解 $x=1$, 此时因底数相等所以指数相等, 得

$$\frac{11}{6}x = x^{\frac{11}{6}} \Rightarrow x^5 = \left(\frac{11}{6}\right)^6$$

故 x^5 的可能值为

$$x^5 = 1 \quad \text{或} \quad x^5 = \left(\frac{11}{6}\right)^6$$

7. 求满足方程

$$(x^2+2x)^{x^2-3x+2} = 1$$

的实数解。

设 $A=x^2+2x$, $B=x^2-3x+2$。欲使 $A^B=1$, 仅以下三种情况成立:

- $B=0$:
$$x^2-3x+2=0 \;\Rightarrow\; (x-1)(x-2)=0 \Rightarrow\; x=1,2$$
- $A=1$:
$$x^2+2x=1 \;\Rightarrow\; x=-1\pm\sqrt{2}$$
- $A=-1$ 且 B 为偶数:
$$x^2+2x=-1 \;\Rightarrow\; (x+1)^2=0 \;\Rightarrow\; x=-1$$
  此时
$$B=(-1)^2-3(-1)+2=6$$
  为偶数, 成立。

综上, 解为

$$x \in \{1,2,-1+\sqrt{2},-1-\sqrt{2},-1\}$$

8. 计算

$$5^{(\log 2)^3}\cdot 8^{(\log 5)^2}\cdot 5^{(\log 5)^3}$$

令 $a=\log 2, b=\log 5$, 则 $a+b=1$, 原式为

$$L=5^{a^3}\cdot 8^{b^2}\cdot 5^{b^3}$$

两边取对数，则

$$\log L=(a^3+b^3)b+3ab^2=(a+b)(a^2-ab+b^2)b+3ab^2=b(a+b)^2=\log 5$$

因此

$$L=5$$

9. 已知正实数 x 满足

$$\log_2 x\log_4 x\log_6 x=\log_2 x\log_4 x+\log_2 x\log_6 x+\log_4 x\log_6 x,$$

求 x。

设 $\log_2 x=a,\log_6 x=b$, 则 $\log_4 x=\dfrac{1}{2}a$, 原式为

$$\frac{1}{2}a^2b=\frac{1}{2}a^2+ab+\frac{1}{2}ab\Rightarrow ab=a+3b$$

将 $a=\dfrac{\log x}{\log 2},b=\dfrac{\log x}{\log 6}$ 代入得

$$\frac{(\log x)^2}{(\log 2)(\log 6)}=\frac{\log x(\log 6+3\log 2)}{(\log 2)(\log 6)}\Rightarrow \log x(\log x-\log 48)=0$$

所以

$$x=1\quad 或\quad x=48$$

10. 求

$$\sqrt{\log_3\sqrt{6}+\sqrt{\log_3 2}}+\sqrt{\log_3\sqrt{6}-\sqrt{\log_3 2}}$$

之值。

令

$$a=\log_3\sqrt{6}=\frac{1}{2}(1+\log_3 2),\quad b=\sqrt{\log_3 2}<1$$

则有

$$a=\frac{b^2+1}{2}$$

因此

$$\begin{aligned}\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}&=\sqrt{\frac{b^2+1}{2}+b}+\sqrt{\frac{b^2+1}{2}-b}\\&=\sqrt{\frac{1}{2}(b+1)^2}+\sqrt{\frac{1}{2}(b-1)^2}\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}(b+1)+\frac{1}{\sqrt{2}}(1-b)=\sqrt{2}\end{aligned}$$

11. 解不等式

$$\sqrt{\log_2 x-1}+\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}x^3+2>0$$

设 $y=\log_2 x$, 则不等式化为

$$\sqrt{y-1}-\frac{3}{2}y+2>0,\quad 且\ y\geqslant 1.$$

设 $z=\sqrt{y-1}$, 则 $y=z^2+1$, 方程变为

$$z-\frac{3}{2}(z^2+1)+2>0\Rightarrow(3z+1)(z-1)<0$$

于是

$$-\frac{1}{3}<z<1\Rightarrow 0\leqslant z^2<1\Rightarrow 1\leqslant y<2$$

再考虑 y 的定义域 $y\geqslant 1$, 经检验有

$$2\leqslant x<4$$

12. 求不等式的解集

$$\log(x-40)+\log(60-x)<2$$

变为

$$(x-40)(60-x)<100$$

注意到 $(x-40)(60-x)=-(x-50)^2+100$, 所以不等式等价于

$$-(x-50)^2+100<100 \Rightarrow (x-50)^2>0 \Rightarrow x\neq 50$$

且由定义域

$$\begin{cases} x-40>0 \\ 60-x>0 \end{cases} \Rightarrow 40<x<60$$

经检验得解集

$$(40,\ 50)\cup(50,\ 60).$$

13. 解不等式:

$$\left(\log_{\frac{1}{3}} x-1\right)\left(\log_{\frac{1}{4}} x+2\right)\left(\log_{\frac{1}{5}} x-3\right)>0.$$

换底得

$$\left(\frac{\log x}{-\log 3}-1\right)\left(\frac{\log x}{-\log 4}+2\right)\left(\frac{\log x}{-\log 5}-3\right)>0$$

即

$$(\log x+\log 3)(\log x-2\log 4)(\log x+3\log 5)<0$$

符号分析得

$$-\log 3<\log x<2\log 4,\quad \log x<-3\log 5$$

解集为

$$\frac{1}{3}<x<16 \quad \text{或} \quad 0<x<\frac{1}{125}$$

14. 求

$$|x-1|^{\log_2(4-x)}<|x-1|^{\log_2(1+x)}$$

的解之范围。

由 $\log_2(4-x)$ 及 $\log_2(1+x)$ 的定义域, 得

$$x<4 \quad 且 \quad x>-1$$

即 $x\in(-1,4)$, 且 $x\neq 0,1,2$, 否则不等式不成立。分四种情况讨论:

情况 1: $x\in(-1,0)$, 则

$$\begin{aligned}(1-x)^{\log_2(4-x)}<(1-x)^{\log_2(1+x)} &\Rightarrow \log_2(4-x)<\log_2(1+x)\\ &\Rightarrow 4-x<1+x\\ &\Rightarrow x>\frac{3}{2}\end{aligned}$$

此情况解集为 $(-1,0)\cap\left(\dfrac{3}{2},\infty\right)=\emptyset$, 无解。

情况 2: $x\in(0,1)$, 则

$$\begin{aligned}(1-x)^{\log_2(4-x)}<(1-x)^{\log_2(1+x)} &\Rightarrow \log_2(4-x)>\log_2(1+x)\\ &\Rightarrow 4-x>1+x\\ &\Rightarrow x<\frac{3}{2}\end{aligned}$$

此情况解集为 $(0,1)\cap\left(-\infty,\dfrac{3}{2}\right)=(0,1)$。

情况 3: $x\in(1,2)$, 则

$$\begin{aligned}(x-1)^{\log_2(4-x)}<(x-1)^{\log_2(1+x)} &\Rightarrow \log_2(4-x)>\log_2(1+x)\\ &\Rightarrow 4-x>1+x\\ &\Rightarrow x<\frac{3}{2}\end{aligned}$$

此情况解集为 $(1,2)\cap\left(-\infty,\dfrac{3}{2}\right)=\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$。

情况 4: $x\in(2,4)$, 则

$$\begin{aligned}(x-1)^{\log_2(4-x)}<(x-1)^{\log_2(1+x)} &\Rightarrow \log_2(4-x)<\log_2(1+x)\\ &\Rightarrow 4-x<1+x\\ &\Rightarrow x>\frac{3}{2}\end{aligned}$$

此情况解集为 $(2,4)\cap\left(\dfrac{3}{2},\infty\right)=(2,4)$。

综上所述, 原方程式的解集为 $\left(0,\dfrac{3}{2}\right)\cup(2,4)\setminus\{1\}$。

15. 求所有实数 x, 使得

$$\sqrt{\log_2 x\cdot\log_2(4x)+1}+\sqrt{\log_2 x\cdot\log_2\left(\frac{x}{64}\right)+9}=4$$

发现

$$\begin{aligned}
f(x)&=\sqrt{\log_2 x\cdot\log_2(4x)+1}+\sqrt{\log_2 x\cdot\log_2\left(\frac{x}{64}\right)+9}\\
&=\sqrt{\log_2 x(2+\log_2 x)+1}+\sqrt{\log_2 x(\log_2 x-6)+9}\\
&=\sqrt{(\log_2 x+1)^2}+\sqrt{(\log_2 x-3)^2}\\
&=\begin{cases}-2\log_2 x+2 & ,\log_2 x\leqslant -1\\ 4 & ,-1<\log_2 x\leqslant 3\\ 2\log_2 x-2 & ,\log_2 x>3\end{cases}
\end{aligned}$$

欲使 $f(x)=4$, 当 $\log_2 x\leqslant -1, \log_2 x=-1$; 当 $-1<\log_2 x\leqslant 3, f(x)=4$ 恒成立; 当 $\log_2 x>3$, 无解; 因此解为

$$-1\leqslant\log_2 x\leqslant 3\Rightarrow\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 8$$

16. 已知

$$\frac{\log a}{b-c}=\frac{\log b}{c-a}=\frac{\log c}{a-b},$$

其中 $a\neq b\neq c$, 试求 $a^ab^bc^c$ 的值。

设

$$\frac{\log a}{b-c}=\frac{\log b}{c-a}=\frac{\log c}{a-b}=k$$

则

$$\log a=k(b-c),\quad \log b=k(c-a),\quad \log c=k(a-b)$$

因此

$$\begin{aligned}
\log(a^ab^bc^c)&=a\log a+b\log b+c\log c\\
&=ak(b-c)+bk(c-a)+ck(a-b)\\
&=k[ab-ac+bc-ab+ca-cb]\\
&=0
\end{aligned}$$

即

$$a^a b^b c^c = 1$$

17. 设 a, b 同号, 且 $a^2 - 2ab - 9b^2 = 0$, 求

$$\log(a^2 + ab - 6b^2) - \log(a^2 + 4ab + 15b^2)$$

的值。

由 $a^2 - 2ab - 9b^2 = 0$ 解得

$$a = (\sqrt{10} + 1)b$$

故

$$\begin{aligned}
&\log(a^2 + ab - 6b^2) - \log(a^2 + 4ab + 15b^2) \\
&= \log(3ab + 3b^2) - \log(6ab + 24b^2) \\
&= \log\left(\frac{3b(a+b)}{6b(a+4b)}\right) \\
&= \log\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{a+b}{a+4b}\right) \\
&= \log\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{(\sqrt{10}+2)b}{(\sqrt{10}+5)b}\right) \\
&= \log\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{(\sqrt{10}+2)(5-\sqrt{10})}{(\sqrt{10}+5)(5-\sqrt{10})}\right) \\
&= \log\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{10}}{15}\right) = \log\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right) = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

18. 设正实数 x, y（$x \neq 1, y \neq 1$）满足

$$\log_2 x = \log_y 16, \quad xy = 64,$$

求

$$\left(\log_2 \frac{x}{y}\right)^2$$

由 $xy=64$ 得 $x=\frac{64}{y}$, 代入第一式:

$$\log_2\left(\frac{64}{y}\right)=\log_y 16\Rightarrow 6-\log_2 y=\frac{4}{\log_2 y}$$

设 $a=\log_2 y$, 则变为

$$6-a=\frac{4}{a}\Rightarrow a^2-6a+4=0$$

解得

$$\log_2 y=a=3\pm\sqrt{5}$$

所求为

$$(\log_2 x-\log_2 y)^2=(a-(6-a))^2=(2a-6)^2=(\pm2\sqrt{5})^2=20$$

19. 已知 $a^x=bc, b^y=ac, c^z=ab$, 证明

$$xyz=x+y+z+2$$

由 $a^x=bc$, 两边取 yz 次方

$$(a^x)^{yz}=(bc)^{yz}\Rightarrow a^{xyz}=b^{yz}\cdot c^{yz}$$

由 $b^y=ac$, 得 $b^{yz}=(ac)^z=a^zc^z$; 由 $c^z=ab$, 得 $c^{yz}=(ab)^y=a^yb^y$; 于是

$$a^{xyz}=(a^zc^z)(a^yb^y)=a^{z+y}b^yc^z=a^{z+y}\cdot ac\cdot ab=a^{z+y+2}bc$$

又 $a^x=bc$, 故

$$a^{xyz}=a^{z+y+2}\cdot a^x=a^{x+y+z+2}\Rightarrow xyz=x+y+z+2$$

20. 设 a,b,c 均为异于 1 的正数, 且满足 $abc=1$, 证明

$$\log_a b+\log_a c+\log_b c+\log_b a+\log_c b+\log_c a=-3$$

有

$$\begin{aligned}&\log_a a+\log_a b+\log_a c+\log_b b+\log_b c+\log_b a+\log_c c+\log_c b+\log_c a\\&=\log_a(abc)+\log_b(abc)+\log_c(abc)\\&=0\end{aligned}$$

故原式得证。

21. 已知

$$\log_{10}\sin x+\log_{10}\cos x=-1,$$

且整数 n 满足

$$\log_{10}(\sin x+\cos x)=\frac{1}{2}(\log_{10}n-1),$$

求 n。

由

$$\log_{10}\sin x+\log_{10}\cos x=-1\Rightarrow\sin x\cos x=10^{-1}=\frac{1}{10}$$

又 $\sin x+\cos x=\sqrt{1+2\cdot\frac{1}{10}}=\sqrt{\frac{6}{5}}$，则

$$\log_{10}n=2\log_{10}\sqrt{\frac{6}{5}}+1=\log_{10}\frac{6}{5}+\log_{10}10=\log_{10}12\Rightarrow n=12$$

22. 解方程式

$$(\log_5 x)^2+\log_{5x}\left(\frac{5}{x}\right)=1$$

设 $\log_5 x=t$，则

$$\log_{5x}\left(\frac{5}{x}\right)=\frac{\log_5\frac{5}{x}}{\log_5(5x)}=\frac{\log_5 5-\log_5 x}{\log_5 5+\log_5 x}=\frac{1-t}{1+t}$$

原方程式变为

$$\begin{gathered}t^2+\frac{1-t}{1+t}=1\\ t^2(1+t)+1-t=1+t\\ t^3+t^2-2t=0\\ t(t+2)(t-1)=0\end{gathered}$$

解得 $t=0,-2,1$，即

$$x=5^0=1,\quad 或\quad x=5^{-2}=\frac{1}{25},\quad 或\quad x=5^1=5$$

经检验得 $x=1,x=\frac{1}{25},x=5$ 都是原方程的解。

23. 解方程

$$\log_{2x}\left(48\sqrt[3]{3}\right)=\log_{3x}\left(162\sqrt[3]{2}\right)$$

原式变为

$$\frac{\log(48\sqrt[3]{3})}{\log(2x)}=\frac{\log(162\sqrt[3]{2})}{\log(3x)}.$$

又因

$$\log(48\sqrt[3]{3})=4\log 2+\frac{4}{3}\log 3,\quad \log(162\sqrt[3]{2})=\frac{4}{3}\log 2+4\log 3.$$

于是有

$$\frac{4\log 2+\frac{4}{3}\log 3}{\log 2+\log x}=\frac{\frac{4}{3}\log 2+4\log 3}{\log 3+\log x}.$$

化简最终得到

$$\log x=\frac{1}{2}\log 6\Rightarrow x=\sqrt{6}.$$

24. 求所有实数 x, 使得

$$\log_{5x+9}(x^2+6x+9)+\log_{x+3}(5x^2+24x+27)=4.$$

原方程式化为

$$\begin{aligned}\frac{\log(x^2+6x+9)}{\log(5x+9)}+\frac{\log(5x^2+24x+27)}{\log(x+3)}&=4\\ \frac{2\log(x+3)}{\log(5x+9)}+\frac{\log(5x+9)+\log(x+3)}{\log(x+3)}&=4\\ 2\frac{\log(x+3)}{\log(5x+9)}+\frac{\log(5x+9)}{\log(x+3)}+1&=4\end{aligned}$$

令 $t=\dfrac{\log(x+3)}{\log(5x+9)}$, 解得

$$2t+\frac{1}{t}=3\Rightarrow t=1 \text{ 或 } t=\frac{1}{2}$$

当 $t=1$, 解得

$$\log(x+3)=\log(5x+9)\Rightarrow x=-\frac{3}{2}$$

当 $t=\frac{1}{2}$, 则 $2\log(x+3)=\log(5x+9)$, 即

$$2\log(x+3)=\log(5x+9)\Rightarrow x=0 \text{ 或 } x=-1$$

经检验得, 原方程的实数解为

$$x = 0, -1, -\frac{3}{2}$$

25. 求解下列方程组:

$$(2x)^{\ln 2} = (3y)^{\ln 3}$$
$$3^{\ln x} = 2^{\ln y}$$

步骤 **1:** 对方程取自然对数化简

对第一个方程两边取 ln:

$$\begin{aligned}
\ln\left((2x)^{\ln 2}\right) &= \ln\left((3y)^{\ln 3}\right) \\
(\ln 2)\ln(2x) &= (\ln 3)\ln(3y) \\
(\ln 2)(\ln 2 + \ln x) &= (\ln 3)(\ln 3 + \ln y) \\
(\ln 2)^2 + (\ln 2)\ln x &= (\ln 3)^2 + (\ln 3)\ln y \quad (\text{方程}1')
\end{aligned}$$

对第二个方程取 ln:

$$\begin{aligned}
\ln\left(3^{\ln x}\right) &= \ln\left(2^{\ln y}\right) \\
(\ln x)\ln 3 &= (\ln y)\ln 2 \quad (\text{方程}2')
\end{aligned}$$

步骤 **2:** 代换求解

令 $u = \ln x$,$v = \ln y$:

$$(\ln 2)^2 + u\ln 2 = (\ln 3)^2 + v\ln 3$$
$$u\ln 3 = v\ln 2 \implies u = v\frac{\ln 2}{\ln 3}$$

将 u 代入方程 $1'$:

$$\begin{aligned}
(\ln 2)^2 + \left(v\frac{\ln 2}{\ln 3}\right)\ln 2 &= (\ln 3)^2 + v\ln 3 \\
(\ln 2)^2 + v\frac{(\ln 2)^2}{\ln 3} &= (\ln 3)^2 + v\ln 3 \\
v\left(\frac{(\ln 2)^2}{\ln 3} - \ln 3\right) &= (\ln 3)^2 - (\ln 2)^2 \\
v\left(\frac{(\ln 2)^2 - (\ln 3)^2}{\ln 3}\right) &= -((\ln 2)^2 - (\ln 3)^2) \\
v &= -\ln 3
\end{aligned}$$

步骤 **3:** 求 u,x 和 y

$$u = v\frac{\ln 2}{\ln 3} = -\ln 3 \cdot \frac{\ln 2}{\ln 3} = -\ln 2$$

转回 x 和 y:

$$\ln x = -\ln 2 \implies x = e^{-\ln 2} = \frac{1}{2}$$
$$\ln y = -\ln 3 \implies y = e^{-\ln 3} = \frac{1}{3}$$

26. 求下列方程组的所有实数解:

$$\begin{aligned} x + \log_{10} x &= y - 1 \\ y + \log_{10}(y-1) &= z - 1 \\ z + \log_{10}(z-2) &= x + 2 \end{aligned}$$

将方程组改写为

$$\begin{aligned} x + \log_{10} x &= y - 1 \\ (y-1) + \log_{10}(y-1) &= z - 2 \\ (z-2) + \log_{10}(z-2) &= x \end{aligned}$$

令 $a = x, b = y - 1, c = z - 2$, 方程组可改写为:

$$a + \log_{10} a = b \tag{1}$$
$$b + \log_{10} b = c \tag{2}$$
$$c + \log_{10} c = a \tag{3}$$

容易验证 $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ 是一解, 现考虑 $a > 1$, 则

$$\log_{10} a > 0 \Rightarrow b = a + \log_{10} a > a > 1 \Rightarrow c = b + \log_{10} b > b > a > 1$$

由 (3) 得 $a = c + \log_{10} c > c > b > a$, 矛盾。而当 $0 < a < 1$,

$$\log_{10} a < 0 \Rightarrow b = a + \log_{10} a < a < 1 \Rightarrow c = b + \log_{10} b < b < a < 1$$

由 (3) 得 $a = c + \log_{10} c < c < b < a$, 矛盾。因此 $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ 是唯一解, 即

$$(x, y, z) = (1, 2, 3)$$

27. 若正实数 x,y,z 满足

$$\begin{cases}\log_2 x+\log_4 y+\log_4 z=2\\ \log_3 y+\log_9 z+\log_9 x=2\\ \log_4 z+\log_{16} x+\log_{16} y=2\end{cases}$$

求 xyz。

原方程组给出

$$\begin{cases}\log_2 x+\log_2 \sqrt{y}+\log_2 \sqrt{z}=2\Rightarrow x\sqrt{yz}=2^2\\ \log_3 y+\log_3 \sqrt{z}+\log_3 \sqrt{x}=2\Rightarrow y\sqrt{xz}=3^2\\ \log_4 z+\log_4 \sqrt{x}+\log_4 \sqrt{y}=2\Rightarrow z\sqrt{xy}=4^2\end{cases}$$

将三式相乘得

$$(xyz)^2=2^6\cdot 3^2\Rightarrow xyz=24$$

28. 解联立方程组

$$\begin{cases}\log x\log y-3\log 5y-\log 8x=-4\\ \log y\log z-4\log 5y-\log 16z=4\\ \log z\log x-4\log 8x-3\log 625z=-18\end{cases}$$

三式化简得

$$\log x\log y-3\log y-\log x=-1$$
$$\log y\log z-4\log y-\log z=8$$
$$\log z\log x-4\log x-3\log z=-6$$

因式分解:

$$(\log x-3)(\log y-1)=2 \tag{1}$$
$$(\log y-1)(\log z-4)=12 \tag{2}$$
$$(\log z-4)(\log x-3)=6 \tag{3}$$

三式相乘可得

$$(\log x-3)(\log y-1)(\log z-4)=\pm\sqrt{2\cdot 6\cdot 12}=\pm 12 \tag{4}$$

分别作 $\dfrac{(4)}{(2)}, \dfrac{(4)}{(3)}, \dfrac{(4)}{(1)}$ 得解 $\log x - 3 = \pm 1, \log y - 1 = \pm 2, \log z - 4 = \pm 6$, 即

$$(x, y, z) = (10^4, 10^3, 10^{10}) \quad \text{或} \quad (10^2, 10^{-1}, 10^{-2})$$

方程组

1. 若 x, y, z 都是正数且满足

$$\begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=4, \\ y+\dfrac{1}{z}=1, \\ z+\dfrac{1}{x}=\dfrac{7}{3}, \end{cases}$$

求 xyz 的值。

$$\begin{aligned}\left(x+\frac{1}{y}\right)\left(y+\frac{1}{z}\right)\left(z+\frac{1}{x}\right) &= xyz+x+\frac{1}{y}+y+\frac{1}{z}+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{xyz} \\ &= xyz+4+1+\frac{7}{3}+\frac{1}{xyz}=\frac{28}{3}\end{aligned}$$

于是

$$xyz+\frac{1}{xyz}=2 \Rightarrow (xyz)^2-2(xyz)+1=0 \Rightarrow xyz=1$$

2. 求满足方程组

$$\begin{cases} x^2+x^2y^2+x^2y^4=525 \\ x+xy+xy^2=35 \end{cases}$$

的所有实数序对 (x, y)。

$$x^2+x^2y^2+x^2y^4=525 \tag{1}$$

$$x+xy+xy^2=35 \tag{2}$$

发现

$$525=x^2+x^2y^2+x^2y^4=(x-xy+xy^2)(x+xy+xy^2)$$

于是得到

$$x-xy+xy^2=15 \tag{3}$$

(2) − (3) 得

$$2xy = 20 \Rightarrow x = \frac{10}{y}$$

代回 (3) 解得

$$(x, y) = (5, 2), \left(20, \frac{1}{2}\right)$$

3. 若两正数 a, b 满足

$$\begin{cases} a\sqrt{a} + b\sqrt{b} = 50 \\ a\sqrt{b} + b\sqrt{a} = 25 \end{cases}$$

求 ab 之值。

$$a\sqrt{a} + b\sqrt{b} = 50 \tag{1}$$

$$a\sqrt{b} + b\sqrt{a} = 25 \tag{2}$$

由 $\dfrac{(1)}{(2)}$ 得

$$\frac{(\sqrt{a})^3 + (\sqrt{b})^3}{\sqrt{ab}(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \frac{a - \sqrt{ab} + b}{\sqrt{ab}} = 2 \Rightarrow a + b = 3\sqrt{ab} \Rightarrow a^2 + b^2 = 7ab \tag{3}$$

又由 (1) × (2) 得

$$(a\sqrt{a} + b\sqrt{b})(a\sqrt{b} + b\sqrt{a}) = \sqrt{ab}(a^2 + b^2) + ab(a + b) = 1250 \tag{4}$$

将 (3) 代入 (4),

$$\sqrt{ab}(7ab) + ab(3\sqrt{ab}) = 10(\sqrt{ab})^3 = 1250 \Rightarrow ab = 25$$

4. 求正实数对 (x, y) 满足

$$\begin{cases} x^2 + x\sqrt[3]{xy^2} = 208 \\ y^2 + y\sqrt[3]{yx^2} = 1053 \end{cases}$$

原方程即

$$x^{\frac{4}{3}}(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}})=208 \tag{1}$$

$$y^{\frac{4}{3}}(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}})=1053 \tag{2}$$

两式相除得

$$\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{4}{3}}=\left(\frac{3}{2}\right)^4 \Rightarrow \frac{y}{x}=\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{27}{8},$$

将 $y=\dfrac{27}{8}x$ 代入 (1), 解得

$$x^2\left(1+\frac{9}{4}\right)=208 \Rightarrow (x,y)=(8,27).$$

5. 设相异实数 x,y 满足

$$\begin{cases} x^2+\sqrt{3}y=4 \\ y^2+\sqrt{3}x=4 \end{cases}$$

求 $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$ 的值。

$$x^2+\sqrt{3}y=4 \tag{1}$$

$$y^2+\sqrt{3}x=4 \tag{2}$$

由于 $x\neq y,(1)-(2)$ 得

$$x^2-y^2=\sqrt{3}(x-y) \Rightarrow x+y=\sqrt{3}.$$

且 $(1)+(2)$ 得

$$x^2+y^2+\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=8 \Rightarrow x^2+y^2=(\sqrt{3})^2-2xy=5 \Rightarrow xy=-1$$

因此

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{5}{-1}=-5.$$

6. 若 x,y,z 满足

$$\begin{cases}\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{3+\log 2}+\dfrac{z}{3+\log 5}=1\\ \dfrac{x}{7}+\dfrac{y}{7+\log 2}+\dfrac{z}{7+\log 5}=1\\ \dfrac{x}{11}+\dfrac{y}{11+\log 2}+\dfrac{z}{11+\log 5}=1\end{cases}$$

求 $x+y+z$ 之值。

不妨设

$$\frac{a}{t}+\frac{b}{t+\log 2}+\frac{c}{t+\log 5}=1$$

则

$$f(t)=a(t+\log 2)(t+\log 5)+b\,t(t+\log 5)+c\,t(t+\log 2)-t(t+\log 2)(t+\log 5)=0$$

由韦达定理，三根之和为

$$a+b+c-1=3+7+11=21\Rightarrow a+b+c=22$$

7. 已知 $x,y\in\mathbb{R}$，求解方程组

$$\begin{cases}\sqrt{x}\left(1+\dfrac{1}{x+y}\right)=2\\ \sqrt{y}\left(1-\dfrac{1}{x+y}\right)=\sqrt{2}\end{cases}$$

$$1+\frac{1}{x+y}=\frac{2}{\sqrt{x}} \tag{1}$$

$$1-\frac{1}{x+y}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{y}} \tag{2}$$

$(1)^2-(2)^2$:

$$\left(1+\frac{1}{x+y}\right)^2-\left(1-\frac{1}{x+y}\right)^2=\frac{4}{x}-\frac{2}{y}\Rightarrow\frac{4}{x+y}=\frac{4y-2x}{xy}$$

整理得

$$x^2+xy-2y^2=0\Rightarrow(x+2y)(x-y)=0$$

由于 $x,y\geqslant 0$，取 $x=y$，代入 (1) 解得

$$1+\frac{1}{2x}=\frac{2}{\sqrt{x}}\Rightarrow 4x^2-12x+1=0\Rightarrow x=y=\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$$

8. 解方程组

$$\sqrt{\frac{x+y}{x}}+\sqrt{\frac{x}{x+y}}=\frac{5}{2}, \quad 2x^2+y^2=176$$

步骤 1： 令代换

$$u=\sqrt{\frac{x+y}{x}} \implies \frac{x+y}{x}=u^2$$

方程变为

$$\begin{aligned} u+\frac{1}{u}&=\frac{5}{2} \\ 2u+2&=5\sqrt{u} \\ 2u-5\sqrt{u}+2&=0 \\ (2\sqrt{u}-1)(\sqrt{u}-2)&=0 \end{aligned}$$

解得

$$\sqrt{u}=\frac{1}{2} \implies u=\frac{1}{4}, \quad \sqrt{u}=2 \implies u=4$$

步骤 2： 得到 y 与 x 的线性关系

$$\text{若}u^2=\frac{1}{4} \implies \frac{x+y}{x}=\frac{1}{4} \implies y=-\frac{3}{4}x$$
$$\text{若}u^2=16 \implies \frac{x+y}{x}=16 \implies y=3x$$

步骤 3： 代入 $2x^2+y^2=176$ 求 x 和 y

情况 1： $y=-\frac{3}{4}x$

$$\begin{aligned} 2x^2+\left(-\frac{3}{4}x\right)^2&=176 \\ 2x^2+\frac{9}{16}x^2&=176 \\ \frac{41}{16}x^2&=176 \\ x^2&=\frac{176\cdot 16}{41}=\frac{2816}{41} \\ x&=\pm 16\sqrt{\frac{11}{41}} \\ y&=-\frac{3}{4}x=\mp 12\sqrt{\frac{11}{41}} \end{aligned}$$

情况 **2**： $y = 3x$

$$
\begin{aligned}
2x^2 + (3x)^2 &= 176 \\
2x^2 + 9x^2 &= 176 \\
11x^2 &= 176 \\
x^2 &= 16 \\
x &= \pm 4 \\
y &= 3x = \pm 12
\end{aligned}
$$

步骤 **4**：解集

$$
(x, y) = (4, 12), \quad (-4, -12), \quad \left(16\sqrt{\frac{11}{41}}, -12\sqrt{\frac{11}{41}}\right), \quad \left(-16\sqrt{\frac{11}{41}}, 12\sqrt{\frac{11}{41}}\right)
$$

9. 解方程组

$$
(91 - 2x)^3 = 216xy^2, \quad (37 - 2y)^3 = 216x^2y.
$$

注意到 $216 = 6^3$, 于是两边同时开立方更为直观。令

$$
x = u^3, \quad y = v^3.
$$

则方程组变为

$$
(91 - 2u^3)^3 = 216u^3v^6, \quad (37 - 2v^3)^3 = 216u^6v^3.
$$

开立方得

$$
91 - 2u^3 = 6uv^2, \quad 37 - 2v^3 = 6u^2v.
$$

移项整理：

$$
6uv^2 + 2u^3 = 91, \quad 6u^2v + 2v^3 = 37.
$$

两式相加：

$$
\begin{aligned}
6uv^2 + 2u^3 + 6u^2v + 2v^3 &= 91 + 37 = 128 \\
2(u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2) &= 128 \\
u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 &= 64 \\
(u + v)^3 &= 64 \\
u + v &= 4.
\end{aligned}
$$

代入 $v = 4 - u$ 至第一方程：

$$\begin{aligned} 6u(4-u)^2 + 2u^3 &= 91 \\ 6u(16 - 8u + u^2) + 2u^3 &= 91 \\ 96u - 48u^2 + 6u^3 + 2u^3 &= 91 \\ 8u^3 - 48u^2 + 96u &= 91 \\ 8(u^3 - 6u^2 + 12u) &= 91. \end{aligned}$$

观察因式分解：

$$u^3 - 6u^2 + 12u = (u-2)^3 + 27/8?$$

更精确地：

$$u^3 - 6u^2 + 12u = (u-2)^3 + 27/8 \text{（通过立方展开或系数对比）}.$$

于是

$$8(u-2)^3 + 64 = 91 \implies 8(u-2)^3 = 27 \implies u - 2 = \frac{3}{2} \implies u = \frac{7}{2}.$$

因此

$$v = 4 - u = 4 - \frac{7}{2} = \frac{1}{2}.$$

回代 $x = u^3$, $y = v^3$：

$$x = \left(\frac{7}{2}\right)^3 = \frac{343}{8}, \quad y = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

最终解为：

$$\boxed{x = \frac{343}{8}, \quad y = \frac{1}{8}}.$$

10. 已知 $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, 解方程组

$$3(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}} - 125a = 0, \qquad 4(a^2+b^2) + 25b = 0.$$

先考虑是否存在平凡解。

若 $a^2 + b^2 = 0$, 则 $a = b = 0$, 代入原方程组显然成立, 故 $(a,b) = (0,0)$ 为一组解。

以下假设 $a^2 + b^2 \neq 0$。

由第一式得

$$125a = 3(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}.$$

由第二式得

$$-25b = 4(a^2+b^2).$$

将第二式两边同乘 $(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}$, 得

$$-25b(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}} = 4(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}.$$

于是

$$125a = 3(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}, \qquad -125b = 20(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}.$$

两式相除, 得

$$\frac{-a}{b} = \frac{3}{20}(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}.$$

平方得

$$\frac{400a^2}{9b^2} = a^2+b^2.$$

整理得

$$400a^2 = 9b^2(a^2+b^2),$$

即

$$a^2(400-9b^2) = 9b^2,$$

从而

$$a^2 = \frac{9b^2}{400-9b^2}.$$

代入第二个原方程

$$4(a^2+b^2)+25b = 0,$$

得

$$\begin{aligned} 4\left(\frac{9b^2}{400-9b^2}+b^2\right)+25b &= 0 \\ 4\left(\frac{400b^2}{400-9b^2}\right)+25b &= 0 \\ \frac{1600b^2}{400-9b^2}+25b &= 0. \end{aligned}$$

两边同乘 $400-9b^2$, 得

$$1600b^2+25b(400-9b^2) = 0,$$

即

$$-225b^3+1600b^2+10000b=0.$$

提取公因式 $25b$:

$$25b(-9b^2+64b+400)=0.$$

因此

$$b=0 \quad 或 \quad 9b^2-64b-400=0.$$

当 $b=0$ 时, 由第二原方程得 $a=0$, 即平凡解。

解二次方程

$$9b^2-64b-400=0$$

得

$$b=\frac{64\pm 136}{18},$$

即

$$b=\frac{100}{9} \quad 或 \quad b=-4.$$

代入第二原方程检验: $b=\frac{100}{9}$ 使 $4(a^2+b^2)+25b>0$, 不成立, 舍去。

当 $b=-4$ 时,

$$4(a^2+16)-100=0,$$

得

$$a^2=9,$$

即

$$a=\pm 3.$$

代入第一原方程,$a=-3$ 不满足,$a=3$ 满足。

因此非平凡解为

$$(a,b)=(3,-4).$$

综上, 方程组的解为

$$(a,b)=(0,0) \quad 或 \quad (3,-4).$$

11. 解方程组

$$x^3+9x^2y=-28, \quad y^3+xy^2=1$$

将第二个方程乘以 27, 使方程的结构便于使用立方和公式:

$$x^3 + 9x^2y = -28, \quad 27y^3 + 27xy^2 = 27$$

将两式相加并整理:

$$\begin{aligned} x^3 + 9x^2y + 27xy^2 + 27y^3 &= -28 + 27 = -1 \\ x^3 + 3(x)^2(3y) + 3(x)(3y)^2 + (3y)^3 &= -1 \\ [x + 3y]^3 &= -1 \end{aligned}$$

取实数解:

$$x + 3y = -1 \quad \Longrightarrow \quad x = -1 - 3y$$

将 $x = -1 - 3y$ 代入较简单的方程 $y^3 + xy^2 = 1$:

$$\begin{aligned} y^3 + (-1 - 3y)y^2 &= 1 \\ y^3 - y^2 - 3y^3 &= 1 \\ -2y^3 - y^2 - 1 &= 0 \\ 2y^3 + y^2 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

通过观察,$y = -1$ 是一个解:

$$2(-1)^3 + (-1)^2 + 1 = -2 + 1 + 1 = 0$$

分解余式:

$$2y^3 + y^2 + 1 = (y + 1)(2y^2 - y + 1)$$

判别式:

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1 - 8 < 0$$

二次方程无实数解, 因此唯一实数解为 $y = -1$。

由 $x = -1 - 3y$ 得到:

$$x = -1 - 3(-1) = 2$$

最终实数解为

$$(x, y) = (2, -1).$$

12. 解方程组

$$x^3 + 6xy^2 = 99, \quad 2y^3 + 3x^2y = 70$$

先设 $y = mx$, 其中 $m \neq 0$。代入方程得到

$$x^3 + 6x(m^2x^2) = x^3 + 6m^2x^3 = x^3(1 + 6m^2) = 99,$$

$$2(m^3x^3) + 3x^2(mx) = 2m^3x^3 + 3mx^3 = x^3(2m^3 + 3m) = 70.$$

两式相除消去 x^3:

$$\frac{1 + 6m^2}{2m^3 + 3m} = \frac{99}{70}.$$

交叉相乘得到

$$70(1 + 6m^2) = 99(2m^3 + 3m) \quad \Longrightarrow \quad 198m^3 - 420m^2 + 297m - 70 = 0.$$

通过观察可知 $m = \frac{2}{3}$ 是一个根。利用多项式除法可分解为

$$198m^3 - 420m^2 + 297m - 70 = (3m - 2)(66m^2 - 96m + 35).$$

检查二次项的判别式:

$$\Delta = (-96)^2 - 4 \cdot 66 \cdot 35 = 9216 - 9240 = -24 < 0$$

二次方程无实根, 因此唯一实根为

$$m = \frac{2}{3} \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{2}{3}x.$$

将 $y = \frac{2}{3}x$ 代入第一个方程:

$$x^3 + 6x\left(\frac{2}{3}x\right)^2 = x^3 + 6x \cdot \frac{4}{9}x^2 = x^3 + \frac{24}{9}x^3 = x^3 + \frac{8}{3}x^3 = \frac{11}{3}x^3 = 99,$$

$$x^3 = 27 \quad \Longrightarrow \quad x = 3.$$

得到

$$y = \frac{2}{3}x = 2.$$

最终解为

$$(x, y) = (3, 2).$$

13. 求实数解

$$36y^2(x+1)+36x^2(y+1)=7x^2y^2, \quad 6x+6y+xy=0$$

步骤 **1**：对两个方程进行倒数代换

$$X=\frac{1}{x}, \quad Y=\frac{1}{y}$$

第一个方程：

$$\begin{aligned}\frac{36y^2(x+1)}{36x^2y^2}+\frac{36x^2(y+1)}{36x^2y^2}&=\frac{7x^2y^2}{36x^2y^2}\\ \frac{x+1}{x^2}+\frac{y+1}{y^2}&=\frac{7}{36}\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y}+\frac{1}{y^2}&=\frac{7}{36}\\ X+X^2+Y+Y^2&=\frac{7}{36} \quad (1)\end{aligned}$$

第二个方程：

$$\begin{aligned}\frac{6x}{xy}+\frac{6y}{xy}+\frac{xy}{xy}&=0\\ \frac{6}{y}+\frac{6}{x}+1&=0\\ X+Y&=-\frac{1}{6} \quad (2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}X^2+\left(-X-\frac{1}{6}\right)^2&=\frac{13}{36}\\ X^2+X^2+\frac{1}{3}X+\frac{1}{36}&=\frac{13}{36}\\ 2X^2+\frac{1}{3}X-\frac{12}{36}&=0\\ 2X^2+\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}&=0\\ 6X^2+X-1&=0\end{aligned}$$

$$6X^2+X-1=0 \implies (3X-1)(2X+1)=0$$

$$X = \frac{1}{3} \quad \text{or} \quad X = -\frac{1}{2}$$

$$Y = -X - \frac{1}{6} \implies Y = \frac{1}{6} \quad \text{or} \quad Y = -\frac{2}{3}$$

步骤 4：返回到 x, y

$$x = \frac{1}{X}, \quad y = \frac{1}{Y}$$

$$(x, y) = (3, 6), \quad (-2, -\frac{3}{2})$$

结论：实数解为

$$(x, y) = (3, 6), \quad (x, y) = (-2, -\frac{3}{2})$$

14. Solve the following simultaneous equations for real x and y:

$$x^4 + y^4 = 97, \quad x + y = 5$$

方法 A：使用对称替换

设

$$x = u + v, \quad y = u - v$$

则第二个方程给出

$$\begin{aligned}(u + v) + (u - v) &= 5\\ 2u &= 5\\ u &= \frac{5}{2}\end{aligned}$$

第一个方程变为

$$\begin{aligned}(u + v)^4 + (u - v)^4 &= 97\\ (u^4 + 4u^3v + 6u^2v^2 + 4uv^3 + v^4) + (u^4 - 4u^3v + 6u^2v^2 - 4uv^3 + v^4) &= 97\\ 2u^4 + 12u^2v^2 + 2v^4 &= 97\\ u^4 + 6u^2v^2 + v^4 &= \frac{97}{2}\end{aligned}$$

代入 $u=\frac{5}{2}$:

$$\begin{aligned}\left(\frac{5}{2}\right)^4+6\left(\frac{5}{2}\right)^2v^2+v^4&=\frac{97}{2}\\ \frac{625}{16}+6\cdot\frac{25}{4}v^2+v^4&=\frac{97}{2}\\ v^4+\frac{75}{2}v^2+\frac{625}{16}-\frac{97}{2}&=0\\ v^4+\frac{75}{2}v^2-\frac{151}{16}&=0\\ 16v^4+600v^2-151&=0\\ (4v^2-1)(4v^2+151)&=0\end{aligned}$$

所以

$$4v^2-1=0\implies v^2=\frac{1}{4}\implies v=\pm\frac{1}{2}$$

回代得到:

$$x=u+v=\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2}=3\text{ 或}2,\quad y=u-v=\frac{5}{2}\mp\frac{1}{2}=2\text{ 或}3$$

解对称性:

$$(x,y)=(3,2),\quad(2,3)$$

方法 **B**: 直接代入法

由 $x+y=5$ 得 $y=5-x$, 代入第一个方程:

$$\begin{aligned}x^4+(5-x)^4&=97\\ x^4+625-500x+150x^2-20x^3+x^4&=97\\ 2x^4-20x^3+150x^2-500x+528&=0\\ x^4-10x^3+75x^2-250x+264&=0\end{aligned}$$

观察到整数根 $x=2$ 或 $x=3$, 所以

$$(x-2)(x-3)(x^2-5x+44)=0$$

二次方程无实根, 因此实数解为

$$(x,y)=(2,3),\quad(3,2)$$

15. 设 a,b,c 为相异非零实数, 且

$$\frac{1+a^3}{a}=\frac{1+b^3}{b}=\frac{1+c^3}{c}.$$

求 $a^3+b^3+c^3$ 的所有可能值。

设

$$\frac{1+a^3}{a}=\frac{1+b^3}{b}=\frac{1+c^3}{c}=k$$

则 a,b,c 是方程

$$x^3-kx+1=0$$

的三根, 故设

$$x^3-kx+1=(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc$$

比较系数得

$$a+b+c=0,\quad abc=-1$$

故

$$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc0+3(-1)=-3$$

16. 若 $a,b,c\in\mathbb{R}^+$ 满足

$$abc=120,\quad a+b+c=a^2+b^2+c^2=a^3+b^3+c^3=\lambda,$$

求 $\lambda\in\mathbb{Z}^+$。

已知

$$a+b+c=a^2+b^2+c^2=a^3+b^3+c^3=\lambda.$$

由 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$,

$$ab+bc+ca=\frac{\lambda^2-\lambda}{2}.$$

由 $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3(a+b+c)(ab+bc+ca)+3abc$,

$$\lambda=\lambda^3-3\lambda\left(\frac{\lambda^2-\lambda}{2}\right)+3\cdot 120$$

解得

$$(\lambda-10)(\lambda^2+7\lambda+72)=0\Rightarrow\lambda=10\in\mathbb{Z}^+$$

17. 已知

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=6\\ \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=87\\ (\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)=33\end{cases}$$

求

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}.$$

由 $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)\big((\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\big)$, 则

$$87-3\alpha\beta\gamma=6\big(36-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\big)\Rightarrow 6(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma=43 \tag{1}$$

又由 $33=(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)=1+6+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta\gamma$,

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta\gamma=26 \tag{2}$$

联立 (1),(2) 得,

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{69}{7},\quad \alpha\beta\gamma=\frac{113}{7}$$

因此

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\frac{69}{113}.$$

18. 已知 x,y,z 为实数满足

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1\\ x^2+y^2+z^2=\frac{3}{2}\\ x^3+y^3+z^3=1\end{cases}$$

且 $x+y+z$ 为整数, 求 $x+y+z$ 的值。

$$\begin{cases}xy+yz+zx=xyz\\ x^2+y^2+z^2=\frac{3}{2}\\ x^3+y^3+z^3=1\end{cases}$$

令 $a=xyz$, 则

$$(x+y+z)^2=\frac{3}{2}+2a,\quad 1-3a=(x+y+z)\left(\frac{3}{2}-a\right)$$

联立得

$$\left(\frac{1-3a}{\frac{3}{2}-a}\right)^2=\frac{3}{2}+2a$$

解得

$$(4a+1)(4a^2-28a+19)=0\Rightarrow a=xyz=-\frac{1}{4}$$

故

$$x+y+z=\frac{1-3xyz}{\frac{3}{2}-xyz}=\frac{\frac{7}{4}}{\frac{7}{4}}=1$$

19. 已知存在实数 a,b,x,y 满足以下方程:

$$\begin{cases} ax^{2014}+by^{2014}=6 \\ ax^{2015}+by^{2015}=7 \\ ax^{2016}+by^{2016}=3 \\ ax^{2017}+by^{2017}=50 \end{cases}$$

求 $ax^{2018}+by^{2018}$ 的值。

不妨设 $f(n)=ax^n+by^n$，于是 $f(2014)=6, f(2015)=7, f(2016)=3, f(2017)=50$,

发现

$$(x+y)f(2015)=ax^{2016}+by^{2016}+ax^{2015}y+bxy^{2015}=f(2016)+xyf(2014)$$

$$(x+y)f(2016)=ax^{2017}+by^{2017}+ax^{2016}y+bxy^{2016}=f(2017)+xyf(2015)$$

解得

$$x+y=-9,\ xy=-11$$

故

$$(x+y)f(2017)=f(2018)+xyf(2016)\Rightarrow ax^{2018}+by^{2018}=f(2018)=-417$$

20. 求联立方程

$$\begin{cases} x\left(2x^2+y-\frac{1}{2}\right)=0 \\ y\left(x-y+\frac{5}{2}\right)=0 \end{cases}$$

的所有实数解 (x,y)。

$$x\left(2x^2+y-\frac{1}{2}\right)=0 \tag{1}$$

$$y\left(x-y-\frac{5}{2}\right)=0 \tag{2}$$

情况一: 若 $x=0$, 由 (2) 得

$$y\left(0-y-\frac{5}{2}\right)=0 \Rightarrow y=0 \text{ 或 } y=-\frac{5}{2}.$$

解为

$$(0,0),\left(0,-\frac{5}{2}\right)$$

情况二: 若 $y=0$, 由 (1) 得

$$x\left(2x^2+0-\frac{1}{2}\right)=0 \Rightarrow x=0 \text{ 或 } x=\pm\frac{1}{2}.$$

其中 $x=0$ 已考虑, 解为

$$\left(\frac{1}{2},0\right),\left(-\frac{1}{2},0\right)$$

情况三: 若 $x\neq 0$ 且 $y\neq 0$,

$$\begin{cases} 2x^2+y-\frac{1}{2}=0 \\ x-y-\frac{5}{2}=0 \end{cases}$$

两式相加得

$$2x^2+x-3=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2} \text{ 或 } x=-1$$

解为

$$\left(\frac{3}{2},-1\right),\ \left(-1,-\frac{7}{2}\right)$$

$\therefore$ 原方程组的所有解为

$$(0,0),\ \left(0,-\frac{5}{2}\right),\ \left(\frac{1}{2},0\right),\ \left(-\frac{1}{2},0\right),\ \left(\frac{3}{2},-1\right),\ \left(-1,-\frac{7}{2}\right)$$

21. 求联立方程

$$\begin{cases} x^2-y-2z=4 \\ y^2-2z-3x=-2 \\ 2z^2-3x-5y=-22 \end{cases}$$

的所有实数解 (x,y,z)。

三式相加得

$$x^2-6x+y^2-6y+2z^2-4z=-20,$$

经配方后变为

$$(x-3)^2+(y-3)^2+2(z-1)^2=0$$

故 $x-3=0, y-3=0, z-1=0$, 解为 $(3,3,1)$

22. 设实数 x,y,z 满足以下方程

$$\begin{cases} 4x+2yz-6z+9xz^2=4 \\ xyz=1 \end{cases}$$

求 $x+y+z$ 的所有可能值。

眼光发现 $xyz=1$ 提示了换元 $x=\dfrac{a}{b}$, $y=\dfrac{b}{c}$, $z=\dfrac{c}{a}$, 第一式变为

$$4\left(\frac{a}{b}\right)+2\left(\frac{b}{c}\right)\left(\frac{c}{a}\right)-6\left(\frac{c}{a}\right)+9\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{a}\right)^2=4$$

化简得

$$4a^2-4ab+2b^2-6bc+9c^2=0\Rightarrow(2a-b)^2+(b+3c)^2=0$$

于是 $2a-b=0, b+3c=0$, 即

$$x=\frac{a}{b}=\frac{1}{2},\ y=\frac{b}{c}=-3,\ z=\frac{1}{xy}=-\frac{2}{3}$$

解得

$$(x,y,z)=\left(\frac{1}{2},-3,-\frac{2}{3}\right)\Rightarrow x+y+z=-\frac{13}{6}$$

23. 求所有非零实数对 (x,y), 使得满足

$$\frac{x}{x^2+y}+\frac{y}{x+y^2}=-1 \quad 且 \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$$

令 $u = x + y$, $v = xy$, 则第二式化为 $\dfrac{u}{v} = 1 \Rightarrow u = v$。

由第一式得

$$x(x+y^2) + y(x^2+y) = -[(x^2+y)(x+y^2)]$$

展开并代换为 u, v 得

$$u^2 - 2v + uv = -(u^3 - 3uv + v + v^2) \Rightarrow u^3 + u^2 - 2v + v^2 - v = 0$$

代入 $u = v$

$$v^3 - v = 0 \Rightarrow v(v^2-1) = 0$$

因 $xy \neq 0$, 故 $v = \pm 1$

若 $v = 1$, 则 $x + y = 1$, $xy = 1 \Rightarrow x^2 - x + 1 = 0$, 无实根。

若 $v = -1$, 则 $x + y = -1$, $xy = -1 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0$

解得

$$(x, y) = \left(\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}, \ \frac{-1 \mp \sqrt{5}}{2}\right)$$

24. 解方程组

$$x + y + z = 9 \tag{1}$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 41 \tag{2}$$
$$x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y) = 180 \tag{3}$$

由 (2) 式:

$$(x+y+z)^2 - 2(xy+xz+yz) = 41 \implies 9^2 - 2(xy+xz+yz) = 41 \implies 2(xy+xz+yz) = 40 \implies xy+xz+yz$$

由 (3) 式：

$$\begin{aligned}
x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)&=180\\
x^2(9-x)+y^2(9-y)+z^2(9-z)&=180\\
9(x^2+y^2+z^2)-(x^3+y^3+z^3)&=180\\
9(41)-[(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz]&=180\\
369-[9(41-20)+3xyz]&=180\\
369-(189+3xyz)&=180\\
180-3xyz&=180\\
3xyz=0 &\implies xyz=0.
\end{aligned}$$

因此,x,y,z 为三根的方程式为：

$$t^3-9t^2+20t=0 \implies t(t^2-9t+20)=0 \implies t(t-5)(t-4)=0.$$

$$\therefore \text{解集}=\{(0,5,4),(0,4,5),(4,5,0),(4,0,5),(5,0,4),(5,4,0)\}.$$

25. 已知实数 x,y,z 满足方程组

$$\begin{cases}
x+y+z=-3\\
\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=-\dfrac{1}{3}\\
x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)=-24
\end{cases}$$

求 $x^2+y^2+z^2$ 的值。

$$x+y+z=-3 \tag{1}$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=-\frac{1}{3} \tag{2}$$

$$x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)=-24 \tag{3}$$

设 $x^2+y^2+z^2=a$, 由 (1) 可得

$$(x+y+z)^2=9=a+2(xy+yz+zx)\Rightarrow xy+yz+zx=\frac{9-a}{2}$$

由 (2) 得

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{xy+yz+zx}{xyz}=-\frac{1}{3}\Rightarrow xyz=\frac{3(a-9)}{2}$$

由 (3) 得

$$\begin{aligned}
&x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)\\
&=x^2(-3-x)+y^2(-3-y)+z^2(-3-z)\\
&=-3(x^2+y^2+z^2)-(x^3+y^3+z^3)\\
&=-3a-\Big[(x+y+z)((x^2+y^2+z^2)-(xy+yz+zx))+3xyz\Big]\\
&=-3a-[(-3)\left(a-\frac{9-a}{2}\right)+3\cdot\frac{3(a-9)}{2}]\\
&=-3a+\frac{-9a+27}{2}+\frac{9a-81}{2}\\
&=-3a+27=-24\Rightarrow a=17
\end{aligned}$$

26. 已知方程组

$$\begin{cases}x+y+z=0 & —(1)\\ x^2+y^2+z^2=6 & —(2)\\ x^3+y^3+z^3=-3 & —(3)\end{cases}$$

求 $x^4+y^4+z^4$ 之值。

由 (2) 式:

$$(x+y+z)^2-2(xy+yz+xz)=6\implies 0-2(xy+yz+xz)=6\implies xy+yz+xz=-3.$$

由 (3) 式:

$$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)+3xyz\implies -3=0+3xyz\implies xyz=-1.$$

因此, 以 x,y,z 为三根的方程式为:

$$t^3-3t+1=0.$$

于是有:

$$\begin{aligned}
x^3-3x+1=0&\implies x^4-3x^2+x=0,\\
y^3-3y+1=0&\implies y^4-3y^2+y=0,\\
z^3-3z+1=0&\implies z^4-3z^2+z=0.
\end{aligned}$$

三式相加：

$$x^4+y^4+z^4=3(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)=3\cdot 6-0=18.$$

$$\therefore x^4+y^4+z^4=18.$$

27. 求序对 (x,y,z) 满足

$$\begin{cases}(x+y)^3=z,\\(y+z)^3=x,\\(z+x)^3=y.\end{cases}$$

不失一般性，设 $x\geqslant y\geqslant z$，则有

$$2x\geqslant x+y\geqslant x+z,\quad x+y\geqslant 2y\geqslant y+z,\quad x+z\geqslant y+z\geqslant 2z$$

立方可得

$$\begin{cases}8x^3\geqslant (x+y)^3\geqslant (x+z)^3\\(x+y)^3\geqslant 8y^3\geqslant (y+z)^3\\(x+z)^3\geqslant (y+z)^3\geqslant 8z^3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}8x^3\geqslant z\geqslant y\\z\geqslant 8y^3\geqslant x\\y\geqslant x\geqslant z^3\end{cases}\Rightarrow z\geqslant y\geqslant x$$

因此 $x=y=z$，解 $(x+x)^3=x$ 得

$$(x,y,z)=(0,0,0),\left(\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4}\right),\left(-\frac{\sqrt{2}}{4},-\frac{\sqrt{2}}{4},-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

28. 求满足

$$\begin{cases}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)=1+y^7,\\(1+y)(1+y^2)(1+y^4)=1+x^7\end{cases}$$

的实数序对 (x,y) 个数。

情况一:$xy=0$，得解 $(0,0)$。

情况二:$xy<0$。不失一般性设 $x>0>y$，则

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)>1$$

且 $1+y^7<1$, 故无解。

情况三:$x,y>0,x\neq y$。不失一般性设 $x>y>0$, 则

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)>1+x^7>1+y^7$$

无解。

情况四:$x,y<0,x\neq 0$。不失一般性设 $x<y<0$, 则

$$1-x^8=(1+y^7)(1-x)=1-x+y^7-xy^7 \tag{1}$$

$$1-y^8=(1+x^7)(1-y)=1-y+x^7-x^7y \tag{2}$$

$(2)-(1)$ 得,

$$x^8-y^8=x-y+x^7-y^7-xy(x^6-y^6)$$

由于 $x<y<0$, 则 $x^8-y^8>0,x-y<0,x^7-y^7<0,-xy<0,x^6-y^6>0$, 左式为正, 右式为负, 故无解。

情况五:$x=y$, 则

$$1-x^8=1-x+y^7-xy^7=1-x+x^7-x^8\Rightarrow x=-1,0,1$$

其中只有 $(0,0),(-1,-1)$ 成立。

综上, 解为 $(0,0),(-1,-1)$, 共有 2 个实数序对。

29. 若非零实数 a,b,c 满足

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2=1, \\ a\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)+b\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}\right)+c\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)=-3, \end{cases}$$

求 $a+b+c$ 可能的取值个数。

由第二个方程式,

$$a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)=-3abc\Rightarrow (a+b+c)(ab+bc+ca)=0.$$

又 $(a+b+c)^2=1-2(ab+bc+ca)$, 所以

$$\frac{1}{2}(a+b+c)((a+b+c)^2-1)=0\Rightarrow a+b+c=-1,0,1$$

因此 $a+b+c$ 共有 3 个可能值。

30. 求在区间 $[0,2]$ 内满足方程组

$$\begin{cases} 2x^2-4x+7=y, \\ 2y^2-4y+7=z, \\ 2z^2-4z+7=x \end{cases}$$

的无序三元组 (x,y,z) 个数。

令 $a=x-1, b=y-1, c=z-1$，则 $a,b,c\in[-1,1]$，方程组化为

$$\begin{cases} 2a^2-1=b, \\ 2b^2-1=c, \\ 2c^2-1=a. \end{cases}$$

令 $a=\cos\theta, b=\cos 2\theta, c=\cos 4\theta, \theta\in[0,\pi]$，得到

$$\cos\theta=\cos 8\theta \Rightarrow -2\sin\frac{9\theta}{2}\sin\frac{7\theta}{2}=0.$$

解得

$$\theta-2n\pi=0,\frac{2\pi}{9},\frac{4\pi}{9},\frac{6\pi}{9},\frac{8\pi}{9},\frac{2\pi}{7},\frac{4\pi}{7},\frac{6\pi}{7},n\in\mathbb{Z}$$

在区间 $[-1,1]$ 内的无序三元组 (a,b,c) 为

$$(0,0,0),\left(\cos\frac{2\pi}{7},\cos\frac{4\pi}{7},\cos\frac{8\pi}{7}\right),\left(\cos\frac{2\pi}{9},\cos\frac{4\pi}{9},\cos\frac{8\pi}{9}\right),\left(\cos\frac{2\pi}{3},\cos\frac{2\pi}{3},\cos\frac{2\pi}{3}\right)$$

故原方程式无序三元组个数为 4。

31. 解方程

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\frac{199}{100}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}.$$

设 $a=x+\sqrt{x}, b=x-\sqrt{x}$，则 $a-b=\sqrt{a}-\sqrt{b}=2\sqrt{x}$，原方程化为

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\frac{200}{199}\sqrt{x+\sqrt{x}},\quad \sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{199}{100}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

两式相加得

$$2\sqrt{x+\sqrt{x}}=\frac{200}{199}\sqrt{x+\sqrt{x}}+\frac{199}{100}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

解得

$$\sqrt{x}(19800\sqrt{x}-19801)=0\Rightarrow\sqrt{x}=\frac{19801}{19800}>0\Rightarrow x=\frac{19801^2}{19800^2}$$

32. 若 x,y,z 为相异复数, 满足

$$\begin{cases}x+y+z=1,\\ x^2+y=y^2+z=z^2+x,\end{cases}$$

求 $(x-y)(y-z)(z-x)$ 的值。

由 $x^2+y=y^2+z$, 得

$$x^2-y^2=(x+y)(x-y)=(1-z)(x-y)=z-y$$

同理得

$$(1-x)(y-z)=x-z,\quad (1-y)(z-x)=y-x$$

由于 $x\neq y\neq z$, 三式相乘可得

$$(1-x)(1-y)(1-z)=-1 \tag{1}$$

且由 $(1-z)(x-y)=z-y$ 展开得

$$x-z=xz-yz=z(x-y)$$

同理得

$$y-x=x(y-z),\quad z-y=y(z-x)$$

由于 $x\neq y\neq z$, 三式相乘可得

$$xyz=-1$$

现由 (1), 得

$$1-(x+y+z)+xy+yz+zx-xyz=-1\Rightarrow xy+yz+zx=-2$$

设 $k=x^2+y=y^2+z=z^2+x$, 则

$$3k=x^2+y^2+z^2+x+y+z=1-2(-2)+1=6\Rightarrow x^2+y=k=2$$

则

$$x-y=x-(2-x^2)=x^2+x-2=(x-1)(x+2),$$

同理

$$y-z=(y-1)(y+2), \quad z-x=(z-1)(z+2)$$

于是

$$\begin{aligned}
&(x-y)(y-z)(z-x)\\
&=(x-1)(y-1)(z-1)(x+2)(y+2)(z+2)\\
&=[xyz-(xy+yz+zx)+x+y+z-1][xyz+2(xy+yz+zx)+4(x+y+z)+8]=7
\end{aligned}$$

33. 已知 $xyz\neq 0, a, b, c$ 不全为零, 且满足方程组

$$\begin{cases}
a=\dfrac{by}{z}+\dfrac{cz}{y}\\
b=\dfrac{cz}{x}+\dfrac{ax}{z}\\
c=\dfrac{ax}{y}+\dfrac{by}{x}
\end{cases}$$

(a) 证明 $a^3x^3+b^3y^3+c^3z^3+abcxyz=0$。

将方程组改写为

$$\begin{cases}
(-ax)\dfrac{1}{x}+(cz)\dfrac{1}{y}+(by)\dfrac{1}{z}=0\\
(cz)\dfrac{1}{x}+(-by)\dfrac{1}{y}+(ax)\dfrac{1}{z}=0\\
(by)\dfrac{1}{x}+(ax)\dfrac{1}{y}+(-cz)\dfrac{1}{z}=0
\end{cases}$$

由与存在非零解 $\left(\dfrac{1}{x},\dfrac{1}{y},\dfrac{1}{z}\right)$, 则

$$\begin{vmatrix}
-ax & cz & by\\
cz & -by & ax\\
by & ax & -cz
\end{vmatrix}=0$$

展开可得

$$a^3x^3+b^3y^3+c^3z^3+abcxyz=0$$

(b) 证明 $\dfrac{yz}{x^2}+\dfrac{zx}{y^2}+\dfrac{xy}{z^2}=-1$。

改写成

$$\begin{cases} -a+\dfrac{y}{z}b+\dfrac{z}{y}c=0 \\ \dfrac{z}{x}a-b+\dfrac{x}{z}c=0 \\ \dfrac{x}{y}a+\dfrac{y}{x}b-c=0 \end{cases}$$

同理,

$$\begin{vmatrix} -1 & \dfrac{y}{z} & \dfrac{z}{y} \\ \dfrac{z}{x} & -1 & \dfrac{x}{z} \\ \dfrac{x}{y} & \dfrac{y}{x} & -1 \end{vmatrix}=0$$

展开行列式可得

$$\frac{yz}{x^2}+\frac{zx}{y^2}+\frac{xy}{z^2}=-1$$

(c) 证明 $a^3+b^3+c^3-5abc=0$。

由原方程组, 有

$$a^3=\left(\frac{by}{z}\right)^3+\left(\frac{cz}{y}\right)^3+3abc,\ b^3=\left(\frac{cz}{x}\right)^3+\left(\frac{ax}{z}\right)^3+3abc,\ c^3=\left(\frac{ax}{y}\right)^3+\left(\frac{by}{x}\right)^3+3abc$$

于是

$$2(a^3+b^3+c^3)=(a^3x^3+b^3y^3+c^3z^3)\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}\right)+9abc$$

由 $(a),(b)$ 得

$$2(a^3+b^3+c^3)=-abcxyz\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}\right)+9abc=10abc$$

即得证

$$a^3+b^3+c^3-5abc=0$$

34. 求实数解 (a,b,c,d) 满足方程组

$$\begin{cases} a+4b+8c+4d=53 \\ 3a^2+4b^2+12c^2+2d^2=159 \\ 9a^3+4b^3+18c^3+d^3=477 \end{cases}$$

由柯西不等式,

$$53 \cdot 477 = (a+4b+8c+4d)(9a^3+4b^3+18c^3+d^3) \geqslant (3a^2+4b^2+12c^2+2d^2)^2 = 159^2$$

此时等号成立, 有

$$\frac{a}{3a^2} = \frac{4b}{4b^2} = \frac{8c}{12c^2} = \frac{4d}{2d^2}.$$

设

$$\lambda = \frac{1}{3a} = \frac{1}{b} = \frac{2}{3c} = \frac{2}{d}.$$

则

$$a = \frac{1}{3\lambda}, \quad b = \frac{1}{\lambda}, \quad c = \frac{2}{3\lambda}, \quad d = \frac{2}{\lambda}$$

代入第一式得

$$\frac{1}{3\lambda} + \frac{4}{\lambda} + \frac{16}{3\lambda} + \frac{8}{\lambda} = \frac{29}{3\lambda} = 53 \Rightarrow \lambda = \frac{29}{159}$$

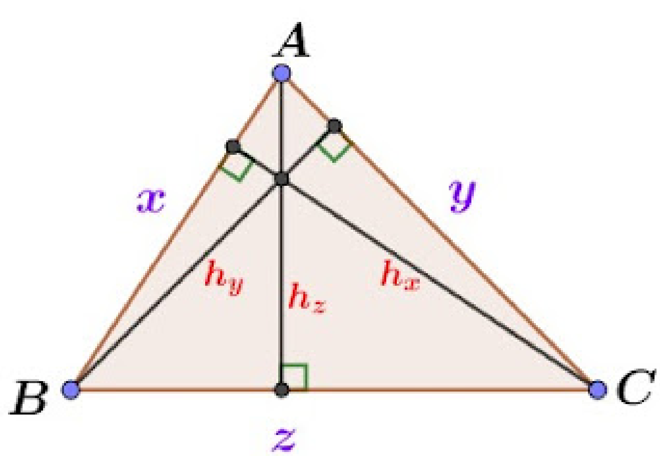
故实数解为

$$\left(\frac{159}{87}, \frac{159}{29}, \frac{106}{87}, \frac{318}{29}\right)$$

35. 设正实数 x, y, z 满足

$$\begin{cases} x = \sqrt{y^2 - \dfrac{1}{49}} + \sqrt{z^2 - \dfrac{1}{49}} \\ y = \sqrt{x^2 - \dfrac{1}{64}} + \sqrt{z^2 - \dfrac{1}{64}} \\ z = \sqrt{x^2 - \dfrac{1}{81}} + \sqrt{y^2 - \dfrac{1}{81}} \end{cases}$$

求 $x+y+z$。



考虑一边长为 x,y,z, 对应高为

$$h_x=\frac{1}{7},\quad h_y=\frac{1}{8},\quad h_z=\frac{1}{9}$$

的 $\triangle ABC$, 则 x,y,z 满足题意;$\triangle ABC$ 面积为

$$S=\frac{1}{2}xh_x=\frac{1}{2}yh_y=\frac{1}{2}zh_z\Rightarrow x:y:z=7:8:9$$

设 $x=7k$, $y=8k$, $z=9k$, 半周长 $s=\frac{1}{2}(x+y+z)=12k$, 面积又为

$$S=\sqrt{12k\cdot 5k\cdot 4k\cdot 3k}=12\sqrt{5}k^2$$

联立得

$$S=\frac{1}{2}xh_x=\frac{k}{2}=12\sqrt{5}k^2\Rightarrow k=\frac{1}{24\sqrt{5}}$$

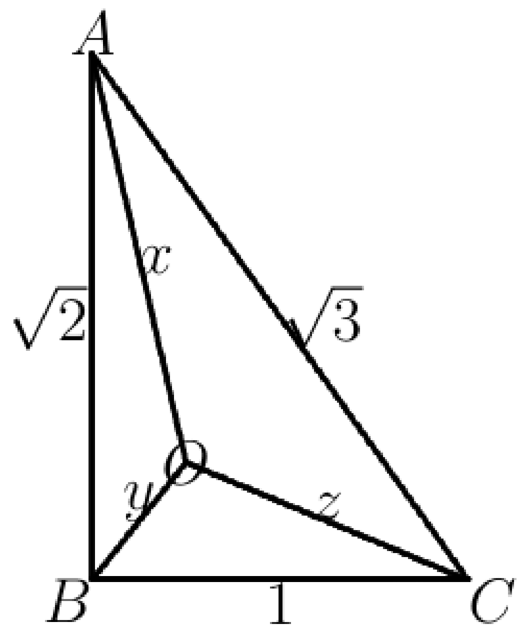
因此

$$x+y+z=24k=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

36. 已知正数 x,y,z 满足

$$\begin{cases}x^2+xy+y^2=2\\ y^2+yz+z^2=1\\ z^2+zx+x^2=3\end{cases}$$

求 $xy+yz+zx$。



方程组改写成

$$\begin{cases} x^2-2xy\cos 120^\circ+y^2=(\sqrt{2})^2 \\ y^2-2yz\cos 120^\circ+z^2=1^2 \\ z^2-2zx\cos 120^\circ+x^2=(\sqrt{3})^2 \end{cases}$$

考虑一边长为 $AB=\sqrt{2},BC=1,CA=\sqrt{3}$ 的 $\triangle ABC$, 其中

$$OA=x,OB=y,OC=z,\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=120^\circ$$

且满足

$$AB^2+BC^2=CA^2$$

故 $\triangle ABC$ 为直角三角形, 面积为

$$[ABC]=\frac{1}{2}(xy+yz+zx)\sin 120^\circ=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{2}$$

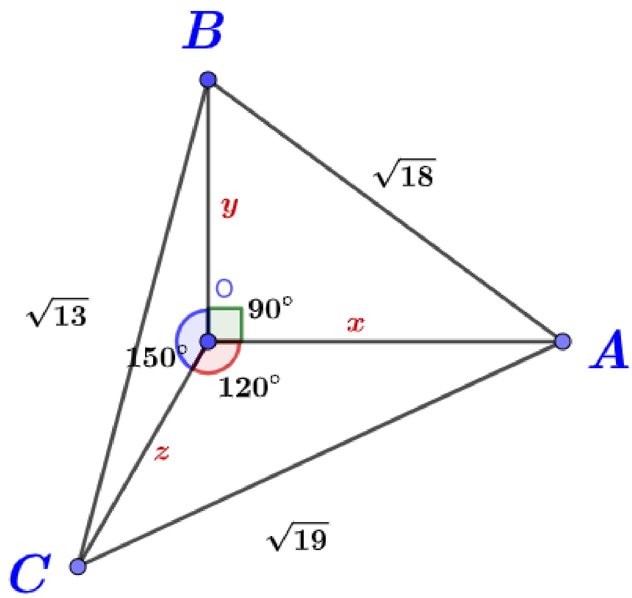
解得

$$xy+yz+zx=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

37. 已知 x, y, z 为实数且满足

$$\begin{cases} x^2+y^2=18 \\ y^2+\sqrt{3}yz+z^2=13 \\ x^2+xz+z^2=19 \end{cases}$$

求 $2xy+yz+\sqrt{3}xz$。



方程组改写成

$$\begin{cases} x^2+y^2-2xy\cos 90^\circ=(3\sqrt{2})^2 \\ y^2+z^2-2yz\cos 150^\circ=(\sqrt{13})^2 \\ x^2+z^2-2xz\cos 120^\circ=(\sqrt{19})^2 \end{cases}$$

构造 $\triangle ABC$, 满足边长:

$$\overline{AB}=\sqrt{18},\quad \overline{BC}=\sqrt{13},\quad \overline{AC}=\sqrt{19},\quad \overline{OA}=x,\quad \overline{OB}=y,\quad \overline{OC}=z$$

及夹角

$$\angle AOB=90^\circ,\quad \angle BOC=150^\circ,\quad \angle AOC=120^\circ$$

设半周长

$$s=\frac{\sqrt{18}+\sqrt{13}+\sqrt{19}}{2},$$

三角形面积为

$$S=\sqrt{s(s-\sqrt{18})(s-\sqrt{13})(s-\sqrt{19})}=3\sqrt{\frac{11}{2}}.$$

面积也等于

$$\frac{1}{2}(xy\sin 90^\circ + yz\sin 150^\circ + zx\sin 120^\circ) = \frac{1}{2}\left(xy + \frac{1}{2}yz + \frac{\sqrt{3}}{2}xz\right).$$

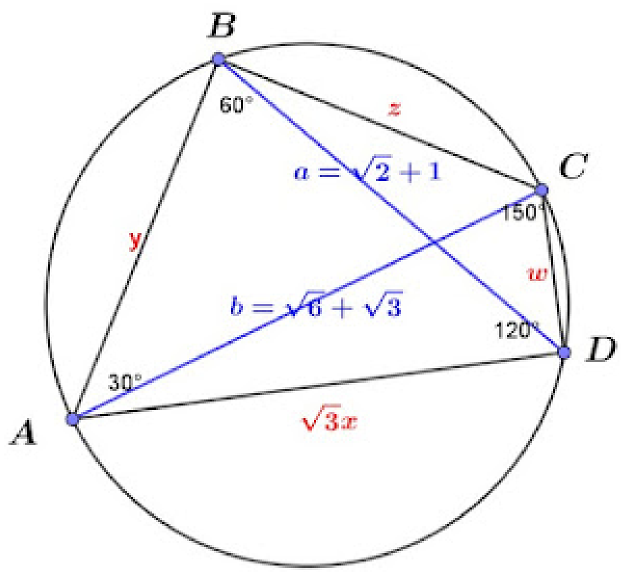
因此

$$\frac{1}{2}\left(xy + \frac{1}{2}yz + \frac{\sqrt{3}}{2}xz\right) = 3\sqrt{\frac{11}{2}} \implies 2xy + yz + \sqrt{3}xz = 6\sqrt{22}.$$

38. 已知联立方程组

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 - 3xy = 3 + 2\sqrt{2} \\ y^2 + z^2 - yz = 9 + 6\sqrt{2} \\ z^2 + w^2 + \sqrt{3}zw = 3 + 2\sqrt{2} \\ w^2 + 3x^2 + \sqrt{3}wx = 9 + 6\sqrt{2} \end{cases},$$

求 $\sqrt{3}xz + yw$ 之值。



设

$$3x^2 + y^2 - 3xy = 3 + 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} + 1)^2 = a^2,$$

$$y^2 + z^2 - yz = 9 + 6\sqrt{2} = (\sqrt{6} + \sqrt{3})^2 = b^2,$$

$$z^2 + w^2 + \sqrt{3}zw = 3 + 2\sqrt{2} = a^2,$$

$$w^2+3x^2+\sqrt{3}wx=9+6\sqrt{2}=b^2.$$

考虑一圆内接四边形, 边长分别为 $\sqrt{3}x$, y, z, w, 对角线长为 a,b; 由托勒密定理,

$$\sqrt{3}xz+yw=(\sqrt{2}+1)(\sqrt{6}+\sqrt{3})=3\sqrt{3}+2\sqrt{6}.$$

39. 已知实数 $x,y\in(0,1)$ 满足

$$\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}+\dfrac{2y}{1+\sqrt{1-y^2}+y}=1,\\ 25(1-y^2)=41-40\sqrt{1-x^2}\end{cases}$$

求 (x,y) 的所有解。

设 $x=\sin\alpha, y=\sin\beta, 0<\alpha,\beta<\dfrac{\pi}{2}$, 则第一式变为

$$\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{2\sin\beta}{1+\cos\beta+\sin\beta}=1$$

继续化简得

$$\tan\frac{\alpha}{2}=1-\frac{2\sin\beta}{1+\cos\beta+\sin\beta}=\frac{1+\cos\beta-\sin\beta}{1+\cos\beta+\sin\beta}=\frac{1-\tan\frac{\beta}{2}}{1+\tan\frac{\beta}{2}}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)$$

故

$$\frac{\alpha}{2}=\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}+n\pi, n\in\mathbb{Z}\Rightarrow\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}\Rightarrow y=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$$

于是第二方程可化为

$$25(1-y^2)=41-40y$$

解得

$$x=\frac{3}{5},\quad y=\frac{4}{5}$$

40. 已知实数 $x>0$ 且 y,z 均为实数, 求联立方程组

$$\begin{cases}5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=12\left(y+\dfrac{1}{y}\right)=13\left(z+\dfrac{1}{z}\right),\\ xy+yz+zx=1\end{cases}$$

的解 (x,y,z)。

由条件 $x>0,\ x,y,z\in\mathbb{R}$, 可设

$$x=\tan A,\quad y=\tan B,\quad z=\tan C,$$

其中 $0<A<\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2}<B,C<\frac{\pi}{2}$, 于是

$$5\left(x+\frac{1}{x}\right)=12\left(y+\frac{1}{y}\right)=13\left(z+\frac{1}{z}\right)\implies 5\cdot\frac{2}{\sin 2A}=12\cdot\frac{2}{\sin 2B}=13\cdot\frac{2}{\sin 2C},$$

且

$$\tan A\tan B+\tan B\tan C+\tan C\tan A=1.$$

因此

$$\frac{5}{\sin 2A}=\frac{12}{\sin 2B}=\frac{13}{\sin 2C},\quad A+B+C=90^\circ.$$

由此得

$$\tan 2A=\frac{5}{12},\quad \tan 2B=\frac{12}{5},\quad \tan 2C=\infty,$$

故

$$\tan A=\frac{1}{5},\quad \tan B=\frac{2}{3},\quad \tan C=1.$$

即

$$(x,y,z)=\left(\frac{1}{5},\frac{2}{3},1\right)$$

41. 已知正实数 x,y,z 满足

$$x+y+z=xyz$$
$$\frac{x^2}{16(1+x^2)}=\frac{y^2}{25(1+y^2)}=\frac{z^2}{36(1+z^2)}$$

求 $\dfrac{x^2(1+x^2)^2}{z^2(1+z^2)^2}$.

考虑换元 $x=\tan A, y=\tan B, z=\tan C$, 其中 $A,B,C\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, 且注意到

$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C\iff A+B+C=\pi$$

于是可以将 A,B,C 视为某三角形的内角; 由

$$\frac{x^2}{16(1+x^2)}=\frac{y^2}{25(1+y^2)}=\frac{z^2}{36(1+z^2)}$$

化简得

$$\frac{4}{\sin A}=\frac{5}{\sin B}=\frac{6}{\sin C}$$

由正弦定理，不妨设 $\triangle ABC$ 边长为 $a=4k,b=5k,c=6k,k\neq 0$，则由余弦定理，

$$\cos A=\frac{(5k)^2+(6k)^2-(4k)^2}{2\cdot 5k\cdot 6k}=\frac{3}{4},\quad \cos C=\frac{(4k)^2+(5k)^2-(6k)^2}{2\cdot 4k\cdot 5k}=\frac{1}{8}$$

故

$$\frac{x^2(1+x^2)^2}{z^2(1+z^2)^2}=\frac{\tan^2 A\sec^4 A}{\tan^2 C\sec^4 C}=\frac{(\frac{\sqrt{7}}{3})^2(\frac{4}{3})^4}{(\sqrt{63})^2\cdot 8^4}=\frac{1}{186624}$$

42. 求所有 $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ 满足方程组

$$\begin{cases} a^2=\dfrac{b^3+9\sqrt{3}}{3b}=\dfrac{c^3+16}{3c} \\ b^2=\dfrac{a^3-10}{3a}=\dfrac{c^3+28}{3c} \\ c^2=\dfrac{b^3+45\sqrt{3}}{3b}=\dfrac{a^3-88}{3a} \end{cases}$$

由 (1),(2)

$$3a^2b-b^3=9\sqrt{3},\quad a^3-3ab^2=10$$

此时展开式

$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$$

毫无帮助，不妨考虑

$$(a+bi)^3=a^3-3ab^2+(3a^2b-b^3)i=10+9\sqrt{3}i$$

两边取模得

$$(\sqrt{a^2+b^2})^3=\sqrt{10^2+(9\sqrt{3})^2}\Rightarrow a^2+b^2=7 \tag{3}$$

同理可得

$$b^2+c^2=19,\quad c^2+a^2=20 \tag{4}$$

由 (3),(4) 解得 $a^2=4,b^2=3,c^2=16$，经检验得原方程组的解为

$$a=-2,\ b=\sqrt{3},\ c=-4$$

函数

1. 求下列函数的值域:

   (a) $f(x)=x^2-2x+5$, 其中 $D_f=[-1,2]$

   配方法得
   $$f(x)=x^2-2x+5=(x-1)^2+4$$
   当 $x=1, f_{\min}=4$; 当 $x=-1, f_{\max}=8$, 故
   $$R_f=[4,8]$$

   (b) $f(x)=x+\sqrt{x(2-x)}$

   设 $y=x+\sqrt{x(2-x)}$, 则
   $$2x^2-2(y+1)x+y^2=0$$
   由于 $x\in\mathbb{R}$, 判别式为非负,
   $$4(y+1)^2-8y\geqslant 0\Rightarrow 1-\sqrt{2}\leqslant y\leqslant 1+\sqrt{2}$$
   但 $0\leqslant x\leqslant 2, y=x+\sqrt{x(2-x)}\geqslant 0$, 故 $y_{\min}=0$。
   而当 $y=1+\sqrt{2}, x_1=\dfrac{2+\sqrt{2}-2\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}}\in[0,2]$, 故 $y_{\max}=1+\sqrt{2}$。
   于是
   $$R_f=[0,1+\sqrt{2}]$$

   (c) $f(x)=\dfrac{3x+4}{5x+6}$

   设 $y=\dfrac{3x+4}{5x+6}$, 则 $x=\dfrac{4-6y}{5y-3}$, 故反函数
   $$f^{-1}(x)=\frac{4-6x}{5x-3}$$
   的定义域为
   $$D_{f^{-1}}=\left(-\infty,\frac{3}{5}\right)\cup\left(\frac{3}{5},\infty\right)$$
   即 R_f。

(d) $f(x)=\dfrac{3x+2}{x+1}$

发现

$$f(x)=\frac{3x+2}{x+1}=3-\frac{1}{x+1}\neq 3$$

故

$$R_f=(-\infty,3)\cup(3,\infty)$$

(e) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x-3}$

设 $y=\dfrac{\cos x}{\sin x-3}$, 则

$$3y=y\sin x-\cos x=\sqrt{y^2+1}\cos(x-\alpha)\Rightarrow\cos(x-\alpha)=\frac{3y}{\sqrt{y^2+1}}$$

由于 $\cos(x-\alpha)\in[-1,1]$, 解得

$$-1\leqslant\frac{3y}{\sqrt{y^2+1}}\leqslant 1\Rightarrow-\frac{\sqrt{2}}{4}\leqslant y\leqslant\frac{\sqrt{2}}{4}$$

即

$$R_f=\left[-\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4}\right]$$

(f) $f(x)=2^{x-5}+\log_3\sqrt{x-1}$, 其中 $D_f=[2,10]$

由于 2^{x-5} 与 $\log_3\sqrt{x-1}$ 在 $[2,10]$ 上皆为增函数, 故 $f(x)$ 也为增函数。
当 $x=2, f(x)=\dfrac{1}{8}$; 当 $x=10, f(x)=33$。故

$$R_f=\left[\frac{1}{8},33\right]$$

(g) $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$

发现

$$f(x)=\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$$

由 $x\geqslant 1$, 得 $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\geqslant 2$, 于是

$$0<\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\leqslant\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

即

$$R_f=(0,\sqrt{2}]$$

(h) $f(x)=x+2+\sqrt{1-(x+1)^2}$

由于 $1-(x+1)^2\geqslant 0$, 有 $(x+1)^2\leqslant 1$, 不妨设 $x+1=\cos\alpha,\alpha\in[0,\pi]$, 则

$$f(x)=\cos\alpha+1+\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sin\alpha+\cos\alpha+1=\sqrt{2}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)+1$$

由 $\alpha\in[0,\pi]$, 可知

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 1\Rightarrow 0\leqslant\sqrt{2}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)+1\leqslant 1+\sqrt{2}$$

即

$$R_f=[0,1+\sqrt{2}]$$

(i) $f(x)=\dfrac{x^3-x}{x^4+2x^2+1}$

首先有

$$f(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{1+x^2}\cdot\frac{1-x^2}{1+x^2}$$

令 $x=\tan\beta$, 则

$$f(x)=\frac{1}{2}\sin 2\beta\cos 2\beta=\frac{1}{4}\sin 4\beta$$

若 $k\in\mathbb{Z}$, 当 $\beta=\dfrac{k\pi}{2}-\dfrac{\pi}{8},f_{\max}=\dfrac{1}{4}$; 当 $\beta=\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{8},f_{\min}=-\dfrac{1}{4}$, 且此时 $\tan\beta$ 有意义, 于是

$$R_f=\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$$

(j) $f(x)=x+4+\sqrt{5-x^2}$

由 $5-x^2\geqslant 0$ 得 $|x|\leqslant\sqrt{5}$, 令 $x=\sqrt{5}\cos\alpha,\alpha\in[0,\pi]$, 则

$$f(x)=\sqrt{5}\cos\alpha+4+\sqrt{5}\sin\alpha=4+\sqrt{10}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$$

由于 $\alpha\in[0,\pi],\alpha-\dfrac{\pi}{4}\in\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]$, 故

$$f_{\max}=4+\sqrt{10}\cdot 1,\quad f_{\min}=4+\sqrt{10}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

故

$$R_f = [4-\sqrt{5}, 4+\sqrt{10}]$$

(k) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}}{x+3}$

设 $t=\sqrt{x+2}, t \geqslant 0$, 则 $x+3=t^2+1$。当 $t>0$,

$$f(x) = \frac{t}{t^2+1} = \frac{1}{t+\frac{1}{t}} \leqslant \frac{1}{2}$$

等号成立当且仅当 $t=1$ 即 $x=-1$, 于是

$$0 < f(x) \leqslant \frac{1}{2}$$

而当 $t=0$ 时,$f(x)=0$, 故

$$R_f = \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

(l) $f(x) = (\sin x+1)(\cos x+1), x \in \left[-\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

由

$$f(x) = \sin x \cos x + \sin x + \cos x + 1$$

令 $t=\sin x+\cos x$, 则 $\sin x \cos x = \dfrac{1}{2}(t^2-1)$, 化为

$$f(x) = \frac{1}{2}(t^2-1)+t+1 = \frac{1}{2}(t+1)^2$$

又由 $t=\sin x+\cos x = \sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right), x \in \left[-\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 知

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant t \leqslant \sqrt{2}$$

当 $t=\sqrt{2}, f_{\max} = \dfrac{3}{2}+\sqrt{2}$; 当 $t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}, f_{\min} = \dfrac{3}{4}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 于是

$$R_f = \left[\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{2}+\sqrt{2}\right]$$

(m) $f(x) = \left(\sin x + \dfrac{1}{\sin x}\right)^2 + \left(\cos x + \dfrac{1}{\cos x}\right)^2$

展开得

$$f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x+\csc^2 x+\sec^2 x+4=7+\tan^2 x+\cot^2 x$$

由 AM-GM 不等式,

$$f(x)\geqslant 7+2\sqrt{1}=9$$

等号成立当且仅当 $\tan x=\cot x$ 即 $x=k\pi\pm\dfrac{\pi}{4},k\in\mathbb{Z}$, 故

$$R_f=[9,\infty)$$

(n) $f(x)=2\sin x\sin 2x$

由 AM-GM 不等式,

$$[f(x)]^2=16\sin^4 x\cos^2 x=8\sin^2 x\sin^2 x(2-2\sin^2 x)\leqslant 8\cdot\left(2\cdot\frac{1}{3}\right)^3=\frac{64}{27}$$

等号成立当且仅当 $\sin^2 x=2-2\sin^2 x$ 即 $\sin^2 x=\dfrac{2}{3}$, 故

$$R_f=\left[-\frac{8\sqrt{3}}{9},\frac{8\sqrt{3}}{9}\right]$$

(o) $f(x)=|x-2|+|x+8|$

在一维数轴上设 $A=-8,B=2$, 当动点 P 在线段 AB 上,

$$f(x)=|x-2|+|x+8|=|AB|=10$$

当动点 P 在线段 AB 外,

$$f(x)=|x-2|+|x+8|>|AB|=10$$

故

$$R_f=[10,\infty)$$

(p) $f(x)=\sqrt{x^2-6x+13}+\sqrt{x^2+4x+5}$

写成

$$f(x)=\sqrt{(x-3)^2+(0-2)^2}+\sqrt{(x+2)^2+(0+1)^2}$$

即 x 轴上的动点 $P(x,0)$ 到两定点 $A(3,2),B(-2,-1)$ 的距离之和, 而当 P 为线段与 x

轴的交点时，

$$f_{\min} = |AB| = \sqrt{(3+2)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{43}$$

于是

$$R_f = [\sqrt{43}, \infty)$$

(q) $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 13} - \sqrt{x^2 + 4x + 5}$

写成

$$f(x) = \sqrt{(x-3)^2 + (0-2)^2} - \sqrt{(x+2)^2 + (0-1)^2}$$

即 AP 距离与 BP 距离之差，其中 $A(3,2), B(-2,1), P(x,0)$。当 P 在 x 轴上且不是直线 AB 与 x 轴的交点时，即 P'，则构成 $\triangle ABP'$，有

$$\big||AP'| - |BP'|\big| < |AB| = \sqrt{(3+2)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{26}$$

即

$$-\sqrt{26} < f(x) < \sqrt{26}$$

而当 P 恰好在直线 AB 与 x 轴的交点时，有

$$\big||AP'| - |BP'|\big| = |AB| = \sqrt{26}$$

故

$$R_f = (-\sqrt{26}, \sqrt{26}]$$

(r) $f(x) = x^2 + \sqrt{x^4 - 3x^2 + 2x + 5}$

变形可得

$$f(x) = x^2 + \sqrt{(x^2-2)^2 + (x+1)^2}$$

发现 $f(x)$ 表示抛物线 $y = x^2$ 上动点 $P(x, x^2)$ 到点 $A(-1, 2)$ 和 x 轴的距离之和。

过 P 点作 $PB \perp x$ 轴于 B，过 A 点作 $AC \perp x$ 轴于 C，BC 交抛物线 $y = x^2$ 于点 P_0，故

$$|PA| + |PB| \geqslant |P_0A| + |P_0C| = |AC| = 2$$

所以

$$R_f = [2, \infty)$$

2. 设函数 $f:\mathbb{R}\setminus\{0,-b\}\to\mathbb{R}\setminus\{1\}$ 满足

$$f(x)=\frac{x+a}{x+b}$$

求出所有实数对 (a,b) 使得

$$f(f(x))=-\frac{1}{x}$$

据题意,

$$f(f(x))=\frac{\frac{x+a}{x+b}+a}{\frac{x+a}{x+b}+b}=\frac{(1+a)x+a+ab}{(1+b)x+a+b^2}=-\frac{1}{x}$$

整理得

$$(1+a)x^2+(a(1+b)+1+b)x+a+b^2=0.$$

解得

$$\begin{cases}1+a=0\\ a+b^2=0\end{cases}\Rightarrow a=-1,b=\pm1$$

经检验,$(-1,-1)$ 不合题意, 故解为 $(-1,1)$

3. 已知函数 $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 互为反函数, 且函数

$$F(x)=f(x+1)-2,\quad G(x)=g(2x+1),$$

也互为反函数, 若 $f(1)=4$, 求 $f(100)$。

由于 F,G 互为反函数, 有

$$G(F(x))=g(2F(x)+1)=g(2(f(x+1)-2)+1)=x$$

又 f,g 互为反函数, 则

$$2f(x+1)-3=f(x)\Rightarrow f(x+1)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{3}{2}$$

由 $f(1)=4$, 可依次得到

$$f(2)=3+\frac{1}{2},\quad f(3)=3+\frac{1}{4},\dots$$

归纳可得

$$f(n)=3+\frac{1}{2^{n-1}},\ n\in\mathbb{N}$$

因此

$$f(100)=3+\frac{1}{2^{99}}$$

4. 已知函数 $g(x)=2x-4$, 其反函数为 g^{-1}, 且函数 f 对任意实数 x 皆满足

$$g(f(g^{-1}(x)))=2x^2+16x+26,$$

求 $f(\pi)$ 的值。

已知 g 可逆, 令 $x=g(y)$, 则 $y=g^{-1}(x)$, 由题意得

$$g(f(y))=2(g(y))^2+16g(y)+26=2(2y-4)^2+16(2y-4)+26=8y^2-6$$

于是有

$$f(y)=g^{-1}(g(f(y)))=g^{-1}(8y^2-6)=\frac{8y^2-6+4}{2}=4y^2-1$$

所以

$$f(\pi)=4\pi^2-1$$

由 $y=g(x)=2x-4$, 得

$$x=g^{-1}(y)=\frac{y+4}{2}$$

由 $g(f(g(x)))=2x^2+16x+26$,

$$f(g(x))=g^{-1}(2x^2+16x+26)=x^2+8x+15=(x+4)^2-1$$

且

$$f(g(x))=f\left(\frac{x+4}{2}\right)=(x+4)^2-1$$

令 $\frac{x+4}{2}=\pi$, 则

$$f(\pi)=4\pi^2-1.$$

请问是哪一行有误?

5. 已知 $f(x)+2f(4-x)=x+8$, 求 $f(16)$。

令 $x=-12,16$, 可得联立方程

$$\begin{cases} f(-12)+2(16)=-4 \\ f(16)+2f(-12)=24 \end{cases}$$

解得

$$f(16)=-\frac{32}{3}$$

6. 若 $f(x)$ 为实系数二次多项式，已知 p,q,r 为三相异非零实数，使得 $f(p)=qr, f(q)=rp, f(r)=pq$，证明 $f(p+q+r)=f(p)+f(q)+f(r)$。

取 $g(x)=xf(x)-pqr$，则 $g(p)=g(q)=g(r)=0$，且有

$$g(x)=xf(x)-pqr=a(x-p)(x-q)(x-r)$$

于是

$$f(x)=\frac{1}{x}\left(ax^3-a(p+q+r)x^2+a(pq+qr+rp)x-apqr+pqr\right)$$

由于 $f(x)$ 为二次多项式，因此 $-apqr+pqr=0 \Rightarrow a=1$，得

$$f(x)=x^2-(p+q+r)x+pq+qr+rp$$

故得证

$$f(p+q+r)=pq+qr+rp=f(p)+f(q)+f(r)$$

7. 设 $Q(x)$ 是一个 2017 次多项式，且满足

$$Q'(r)=\frac{2017!}{r} \quad ,r=1,2,3,\cdots,2017$$

另定义

$$P(x)=xQ(x)-\int Q(x)\,dx.$$

若多项式 $P(x)$ 的所有根之和为 a，求 $a \pmod{1000}$。

有

$$P'(x)=xQ'(x)+Q(x)-Q(x) \Rightarrow P(x)=\int xQ'(x)\,dx$$

考虑函数

$$R(x)=xQ(x)-2017!$$

则 $R(r)=0, r=1,2,3,\cdots,2017$，故可设

$$R(x)=A(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-2017)$$

令 $x=0$ 可得 $A=1$，故

$$Q'(x)=\frac{(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-2017)+2017!}{x}$$

且

$$\begin{aligned}P(x)=\int xQ'(x)\,dx&=\int((x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-2017)+2017!)\,dx\\&=\int\left(x^{2017}-\frac{2017\cdot 2018}{2}x^{2016}+\cdots\right)\,dx\\&=\frac{1}{2018}x^{2018}-1009x^{2017}+\cdots\end{aligned}$$

由韦达定理, $P(x)$ 的所有根之和为

$$a=1009\cdot 2018\equiv 162 \pmod{1000}$$

8. 定义函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 使得对所有实数 x 有

$$f(f(x))=x^2-x+1.$$

求 $f(0)$。

设 $f(0)=b$, 则

$$f(b)=f(f(0))=0^2-0+1=1$$

又有

$$f(f(b))=f(1)=b^2-b+1$$

因为 $f(b)=1$, 所以

$$f(f(b))=f(1)=1=b^2-b+1 \implies b(b-1)=0.$$

若 $b=0$, 则 $f(0)=0$, 但 $f(f(0))=f(0)=0\neq 1$, 矛盾。故 $b=1$, 即

$$f(0)=1$$

9. 已知 $f(x)=e(x)+o(x)$, 其中 $e(x)$ 为偶函数,$o(x)$ 为奇函数, 且

$$e(x)+x^2=o(x),$$

求 $f(2)$。

由已知 $e(x)=f(x)-o(x)$, 换元得

$$e(-x)=f(-x)-o(-x)\Rightarrow e(x)=f(-x)+o(x)$$

故

$$f(-x)=-x^2\Rightarrow f(2)=4$$

10. 定义 f 在 $[0,1]$ 上满足

$$2f\left(\frac{x}{3}\right)=f(x),\quad f(x)+f(1-x)=1,$$

求 $f\left(\frac{1}{3}\right)$。

由递推公式, 则

$$f\left(\frac{1}{13}\right)+f\left(\frac{12}{13}\right)=1,$$

且

$$f\left(\frac{12}{13}\right)=2f\left(\frac{4}{13}\right)=2\left[1-f\left(\frac{9}{13}\right)\right]=2-2f\left(\frac{9}{13}\right)=2-4f\left(\frac{3}{13}\right)=2-8f\left(\frac{1}{13}\right)$$

解得

$$f\left(\frac{1}{13}\right)=\frac{1}{7}.$$

11. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数, 且对任意实数 x 均有 $2f(x)+f(x^2-1)=1$, 试求 $f(\sqrt{2})$ 的值。

分别令 $x=-1,0,1,\sqrt{2}$ 可得

$$2f(-1)+f(0)=1 \tag{1}$$
$$2f(0)+f(-1)=1 \tag{2}$$
$$2f(1)+f(0)=1 \tag{3}$$
$$2f(\sqrt{2})+f(1)=1 \tag{4}$$

由 (1), (2), (3) 解得

$$f(-1)=f(0)=f(1)=\frac{1}{3}$$

故由 (4) 得

$$f(\sqrt{2})=\frac{1}{3}$$

12. 设函数 $f(x)=\cos x+\log_2 x$, 其中 $x>0$, 若正实数 a 满足 $f(a)=f(2a)$, 求 $f(2a)-f(4a)$ 的值。

由条件得

$$\cos a+\log_2 a=\cos 2a+\log_2 2a=2\cos^2 a-1+\log_2 a+1$$

所以

$$\cos a(2\cos a-1)=0\Rightarrow(\cos a,\cos 2a)=(0,-1)\text{或}\ (\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$$

于是

$$\begin{aligned}f(2a)-f(4a)&=\cos 2a+\log_2 2a-\cos 4a-\log_2 4a\\&=\cos 2a-2\cos^2 2a\\&=\begin{cases}-3, & \text{若}\cos 2a=-1,\\ -1, & \text{若}\cos 2a=-\frac{1}{2}\end{cases}\end{aligned}$$

13. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 且 $f(x+2)-2$ 为奇函数, $f(2x+1)$ 为偶函数。若 $f(1)=0$, 求 $f(1)+f(2)+\cdots+f(2023)$ 的值。

$f(x+2)-2$ 为奇函数, 则

$$f(-x+2)-2+f(x+2)-2=0\Rightarrow f(2-x)+f(2+x)=4$$

于是 $f(2)=2$, $f(x)$ 的图象关于点 $(2,2)$ 对称, 又由 $f(2x+1)$ 为偶函数,

$$f(-2x+1)=f(2x+1)\Rightarrow f(1-2x)=f(1+2x)$$

即

$$f(1-x)=f(1+x)$$

$f(x)$ 图象关于直线 $x=1$ 对称, 由上可得

$$f(x)=f(2-x)=4-f(2+x)=4-f(-x)=4-[4-f(x+4)]=f(x+4)$$

所以 $f(x)$ 是周期为 4 的函数，且

$$f(1)=0, f(2)=2, f(3)=4, f(4)=2$$

故

$$\begin{aligned}
&f(1)+f(2)+\cdots+f(2023)\\
&=505[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)]+f(1)+f(2)+f(3)\\
&=4046
\end{aligned}$$

14. 设 f 为实值函数，且对任意实数 x 满足

1. $f(10+x)=f(10-x)$；
2. $f(20+x)=-f(20-x)$。

证明 f 是奇函数并且是周期函数。

令 $x=n-10$ 在 (a) 中，则

$$f(n)=f(20-n)$$

又令 $x=n$ 在 (b) 中，则

$$f(20-n)=-f(20+n)$$

因此

$$f(n)=-f(20+n)$$

再令 $x=n+10$ 在 (a) 中，则

$$f(n+20)=f(-n)$$

结合上式可得

$$f(n)=-f(20+n)=f(-n),$$

所以 f 是奇函数。

最后，令 $x=n-20$ 在 (b) 中，则

$$f(n)=-f(40-n)$$

由于 f 是奇函数,$-f(40-n)=f(n-40)$, 所以

$$f(n)=f(n-40),$$

因此 f 是周期函数, 周期为 40。

15. 若整数 $m\geqslant 1$, 函数 f 满足

$$f(m+1)=m(-1)^{m+1}-2f(m),\quad f(1)=f(2001),$$

求 $f(1)+f(2)+\cdots+f(2000)$。

由递推式可得

$$f(2)=1-2f(1),\quad f(3)=-2-2f(2),\quad f(4)=3-2f(3),\ \ldots,\quad f(2001)=2000-2f(2000),$$

将 $f(2001)$ 替换为 $f(1)$ 并将所有式子相加, 得

$$\sum_{i=1}^{2000}f(i)=1-2+3-4+\cdots+1999-2000-2\sum_{i=1}^{2000}f(i).$$

所以

$$\sum_{i=1}^{2000}f(i)=\frac{1}{3}\left(\frac{2000}{2}-2000\right)=-\frac{1000}{3}.$$

16. 若实数 x,y,z 满足

$$\begin{cases}\dfrac{x}{1^2+4^2}+\dfrac{y}{1^2+5^2}+\dfrac{z}{1^2+6^2}=1\\ \dfrac{x}{2^2+4^2}+\dfrac{y}{2^2+5^2}+\dfrac{z}{2^2+6^2}=1\\ \dfrac{x}{3^2+4^2}+\dfrac{y}{3^2+5^2}+\dfrac{z}{3^2+6^2}=1\end{cases}$$

求 $x+y+z$。

设

$$f(k)=\frac{x}{k+4^2}+\frac{y}{k+5^2}+\frac{z}{k+6^2}-1,$$

据题意

$$f(1^2)=f(1)=0,\quad f(2^2)=f(4)=0,\quad f(3^2)=f(9)=0$$

因此 $f(k)$ 有三个根 $k=1,4,9$, 所以

$$(k-1)(k-4)(k-9)$$

与

$$(k+4^2)(k+5^2)(k+6^2)-x(k+5^2)(k+6^2)-y(k+4^2)(k+6^2)-z(k+4^2)(k+5^2)$$

相等, 比较 k^2 系数得

$$-(1+4+9)=4^2+5^2+6^2-(x+y+z)\Rightarrow x+y+z=91$$

17. 已知实数 α、β 满足

$$3^{\frac{\alpha}{2}}=\sqrt{3}-\alpha,\quad \log_3\beta=2\sqrt{3}-2\beta$$

求

$$(\alpha+\beta)^2-2(\sqrt{3})^\alpha-\log_3\beta$$

将底改为 $\sqrt{3}$:

$$\sqrt{3}^\alpha=\sqrt{3}-\alpha,\quad \log_{\sqrt{3}}\beta=\sqrt{3}-\beta$$

设 $A(\alpha,\sqrt{3}-\alpha)$ 为两图形 $y=\sqrt{3}^x$ 与 $y=\sqrt{3}-x$ 的交点 , $B(\beta,\sqrt{3}-\beta)$ 为两图形 $y=\log_{\sqrt{3}}x$ 与 $y=\sqrt{3}-x$ 的交点。

由于 $y=\sqrt{3}^x$ 与 $y=\log_{\sqrt{3}}x$ 关于 $y=x$ 对称,

$$\alpha=\sqrt{3}-\beta\Rightarrow\alpha+\beta=\sqrt{3}$$

因此

$$(\alpha+\beta)^2-2(\sqrt{3})^\alpha-\log_3\beta=(\sqrt{3})^2-2(\sqrt{3}-\alpha)-2(\sqrt{3}-\beta)=3-2\sqrt{3}$$

18. 设实数 α、β 满足

$$\begin{cases}\alpha^3-6\alpha^2+13\alpha=6\\ \beta^3-6\beta^2+13\beta=14\end{cases}$$

求 $\alpha+\beta$。

令

$$f(x)=x^3-6x^2+13x \Rightarrow f(\alpha)=6,\ \ f(\beta)=14$$

又

$$f'(x)=3x^2-12x+13 \Rightarrow f''(x)=6x-12=0 \Rightarrow x=2$$

因此图形 $y=f(x)$ 的对称中心为 $(2, f(2)=10)$, 所以 $P(\alpha,6), Q(\beta,14)$ 的对称点为

$$P'=(4-\alpha,14), Q'=(4-\beta,6)$$

于是由 $P=Q',\quad Q=P'$ 解得

$$\alpha=4-\beta,\quad \beta=4-\alpha \Rightarrow \alpha+\beta=4$$

19. 解方程

$$e^{x-1}\ln x+e^{y-1}\ln y=\ln(xy)$$

原式化为:

$$(e^{x-1}-1)\ln x+(e^{y-1}-1)\ln y=0$$

考虑函数 $f(t)=(e^{t-1}-1)\ln t$,

- 当 $t>1$ 时, $e^{t-1}-1>0, \ln t>0$, 故 $f(t)>0$
- 当 $0<t<1$ 时, $e^{t-1}-1<0, \ln t<0$, 故 $f(t)>0$
- 当 $t=1$ 时, $e^{t-1}-1=0, \ln 1=0$, 故 $f(1)=0$

故

$$f(x)+f(y)=0 \Rightarrow x=y=1$$

20. 已知 $x,y\in\mathbb{R}$, 且满足

$$\begin{cases}(x+1)^3+2023(x+1)=-2023\\(y+1)^3+2023(y+1)=2023\end{cases}$$

求 $x+y$ 的值。

考虑函数 $f(t)=t^3+2023t$, 据题意有

$$f(x+1)=-2023, \quad f(y+1)=2023$$

注意到 $f(t)$ 是奇函数,

$$f(x+1)=-f(y+1)=f(-(y+1))$$

且导数为

$$f'(t)=3t^2+2023>0, \quad \forall\, t\in\mathbb{R}$$

所以 f 在 $\mathbb{R}$ 上严格递增, 故 f 一对一, 因此有

$$x+1=-(y+1)\Rightarrow x+y=-2$$

21. 设函数 $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, 满足

$$f\left(1-\frac{1}{1+t}\right)+f\left(\frac{1+t}{t}\right)\log(1+t)=f\left(\frac{1+t}{t}\right)\log t+2022,$$

求 $f(1000)$。

令

$$x=\frac{t}{1+t}=1-\frac{1}{1+t},$$

则原式变为

$$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)\log(1+t)=f\left(\frac{1}{x}\right)\log t+2022$$

即

$$f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)\log x=2022 \tag{1}$$

再换元得

$$f\left(\frac{1}{x}\right)-f(x)\log\frac{1}{x}=2022\Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)\log x=2022$$

代入 (1) 得

$$f(x)-2022\log x+f(x)(\log x)^2=2022\Rightarrow f(x)=\frac{2022(1+\log x)}{1+(\log x)^2}$$

故

$$f(1000)=\frac{2022\cdot 4}{1+9}=808.8$$

22. 设函数 $f:\mathbb{R}\setminus\{0,1\}\to\mathbb{R}$ 使得

$$f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{x(1-x)}.$$

求 $f(x)$。

代入 x, $\frac{1}{1-x}$, 及 $\frac{x-1}{x}$ 得

$$f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{x(1-x)} \tag{1}$$

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=-\frac{(x-1)^2}{x} \tag{2}$$

$$f\left(\frac{x-1}{x}\right)+f(x)=\frac{x^2}{x-1} \tag{3}$$

$(1)+(3)-(2)$, 得

$$\begin{aligned} 2f(x) &= \frac{1}{x(1-x)}+\frac{x^2}{x-1}+\frac{(x-1)^2}{x} \\ &= \frac{-1+x^3+(x-1)^3}{x(x-1)} \\ &= \frac{(x^2+x+1)+(x^2-2x+1)}{x} \\ &= \frac{2x^2-x+2}{x} \end{aligned}$$

故

$$f(x)=x+\frac{1}{x}-\frac{1}{2}$$

23. 已知函数 $f(x)$ 定义在 $\mathbb{R}$ 上, 且满足 $f(1)=1$, 对所有实数 x 有

$$f(x+5)\geqslant x+5,\quad f(x+1)\leqslant f(x)+1.$$

若定义函数 $g(x)=f(x)+1-x$, 求 $g(2002)$。

$\forall x\in\mathbb{R}$, 由 $f(x+1)\leqslant f(x)+1$,

$$g(x+1)=f(x+1)+1-(x+1)\leqslant f(x)+1-x=g(x)$$

即 $g(x)$ 是递减函数, 且由 $f(x+5) \geqslant x+5$,

$$g(x+5)=f(x+5)+1-(x+5) \geqslant x+5+1-(x+5)=1$$

因为 $g(1)=f(1)+1-1=1$, 故 $g(x)=1\ \forall x \in \mathbb{R}$, 即 $g(2002)=1$

24. 设 $f: R \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, 使得对于所有非零实数 x, y 有

$$xy(f(x)-f(y))+2x=xf(x)-yf(y)+2y$$

若 $f'(1)=2018$, 求 $f(2018)$。

令 $y=1$, 有

$$xf(x)-xf(1)+2x=xf(x)-f(1)+2 \Rightarrow f(1)=2$$

令 $y=-1$, 有

$$-x(f(x)-f(-1))+2x=xf(x)+f(-1)-2 \Rightarrow f(x)=\frac{f(-1)+2}{2}+\frac{2-f(-1)}{2x}$$

求导得

$$f'(x)=\frac{f(-1)-2}{2x^2}$$

故由

$$f'(1)=\frac{f(-1)-2}{2}=2018$$

得 $f(-1)=4038$, 于是

$$f(x)=2020-\frac{2018}{x}$$

经检验, 原方程式左式 $=$ 右式 $=2020x-2018y$, 故

$$f(2018)=2019$$

将原式写成

$$xf(x)(y-1)+2x=yf(y)(x-1)+2y$$

$$xf(x)(y-1)+2(x-1)=yf(y)(x-1)+2(y-1)$$

$$\frac{xf(x)}{x-1}+\frac{2}{y-1}=\frac{yf(y)}{y-1}+\frac{2}{x-1}$$

$$\frac{xf(x)-2}{x-1}=\frac{yf(y)-2}{y-1}\quad \forall x,y\neq 0,1$$

设

$$\frac{xf(x)-2}{x-1}=c\Rightarrow f(x)=\frac{c(x-1)+2}{x}=c+\frac{2-c}{x}$$

求导得

$$f'(x)=\frac{c-2}{x^2}$$

由 $f'(1)=2018$ 得 $c=2020$, 故

$$f(x)=2020-\frac{2018}{x}$$

经检验, 原方程式左式 $=$ 右式 $=2020x-2018y$, 故

$$f(2018)=2019$$

25. 设函数 $f(x),g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续且满足

$$\begin{cases} f(x+y)=f(x)g(y)+g(x)f(y) \\ g(x+y)=f(x)f(y)+g(x)g(y) \end{cases}$$

且 $g(x)$ 为偶函数, $g(x)>0$ 恒成立, $g(0)\neq\frac{1}{2}$, 已知 $f(2)+g(2)=\frac{\sqrt{5}}{15}$, 求 $f(8)-g(8)$。

两式相加得

$$f(x+y)+g(x+y)=(f(x)+g(x))(f(y)+g(y))$$

设 $h(x)=f(x)+g(x)$, 则 $h(x+y)=h(x)h(y)$, 得 $h(x)=a^x$。两式相减得

$$g(x+y)-f(x+y)=(g(x)-f(x))(g(y)-f(y))$$

设 $k(x)=g(x)-f(x)$, 同理得 $k(x)=b^x$, 于是

$$f(x)=\frac{h(x)-k(x)}{2}=\frac{a^x-b^x}{2},\quad g(x)=\frac{h(x)+k(x)}{2}=\frac{a^x+b^x}{2}$$

由于 $g(x)$ 为偶函数, $g(x)=g(-x)$, 即

$$\frac{a^x+b^x}{2}=\frac{a^{-x}+b^{-x}}{2}\Rightarrow(a^x+b^x)a^xb^x=b^x+a^x\Rightarrow(ab)^x=1\Rightarrow ab=1,\ b=\frac{1}{a}$$

故

$$f(x)=\frac{a^x-a^{-x}}{2},\quad g(x)=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$$

由 $f(2)+g(2)=\dfrac{\sqrt{5}}{15}$ 可知

$$h(2)=a^2=\frac{\sqrt{5}}{15}\Rightarrow a^8=\left(\frac{\sqrt{5}}{15}\right)^4=\frac{1}{2025}$$

所以

$$f(8)-g(8)=-k(8)=-b^8=-\frac{1}{a^8}=-2025$$

26. 设 $a,b>0$ 使得关于 x 的方程 $\sqrt{|x|}+\sqrt{|x+a|}=b$ 恰有三个相异实数解 x_1,x_2,x_3, 且 $x_1<x_2<x_3=b$, 求 $a+b$ 的值。

令 $t=x+\frac{a}{2}$, 则关于 t 的方程

$$\sqrt{\left|t-\frac{a}{2}\right|}+\sqrt{\left|t+\frac{a}{2}\right|}=b$$

恰有三个不同的实数解

$$t_i=x_i+\frac{a}{2},i=1,2,3$$

由于 $f(t)=\sqrt{|t-\frac{a}{2}|}+\sqrt{|t+\frac{a}{2}|}$ 为偶函数, 故方程 $f(t)=b$ 的三个实数解关于原点对称分布, 从而必有 $b=f(0)=\sqrt{2a}$

现求方程 $f(t)=\sqrt{2a}$ 的实数解:

- 当 $|t|\leqslant\frac{a}{2}$ 时, $f(t)=\sqrt{\frac{a}{2}-t}+\sqrt{\frac{a}{2}+t}=\sqrt{a+\sqrt{a^2-4t^2}}\leqslant\sqrt{2a}$, 等号成立当且仅当 $t=0$
- 当 $t>\frac{a}{2}$ 时, $f(t)$ 单调递增, 且当 $t=\frac{5a}{8}$ 时 $f(t)=\sqrt{2a}$
- 当 $t<-\frac{a}{2}$ 时, $f(t)$ 单调递减, 且当 $t=-\frac{5a}{8}$ 时 $f(t)=\sqrt{2a}$

从而方程 $f(t)=\sqrt{2a}$ 恰有三个实数解

$$t_1=-\frac{5a}{8},\ t_2=0,\ t_3=\frac{5a}{8}$$

由条件知 $b=x_3=t_3-\frac{a}{2}=\frac{a}{8}$, 结合 $b=\sqrt{2a}$ 得 $a=128$, 于是 $a+b=\frac{9a}{8}=144$

不等式

1. 求满足不等式

$$\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2}<2x+9$$

的实数 x 的集合。

首先定义域要求 $1+2x\geqslant 0$, 即 $x\geqslant -\frac{1}{2}$, 且分母不为零, 即 $1-\sqrt{1+2x}\neq 0$, 得 $x\neq 0$, 发现

$$\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2}=\left(\frac{1-(1+2x)}{1-\sqrt{1+2x}}\right)^2=(1+\sqrt{1+2x})^2$$

由 $(1+\sqrt{1+2x})^2<2x+9$ 解得

$$\sqrt{1+2x}<\frac{7}{2}\Rightarrow x<\frac{45}{8}.$$

故 x 的取值范围为

$$\left[-\frac{1}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{45}{8}\right).$$

2. 已知

$$\begin{cases}\sqrt{x(x-3)}+\dfrac{8}{y^2}+\dfrac{y^2}{\sqrt{x(x-3)}}=6,\\ x+y<0\end{cases}$$

求 (x,y)。

据题意,

$$6=\sqrt{x(x-3)}+\frac{8}{y^2}+\frac{y^2}{\sqrt{x(x-3)}}\geqslant 2|y|+\frac{8}{y^2}\Rightarrow 3y^2\geqslant y^2|y|+4 \tag{1}$$

当 $y>0$, 化简得

$$y^3-3y^2+4=(y+1)(y-2)^2\leqslant 0$$

由于 $(y-2)^2\geqslant 0$ 且 $y+1>0$, 故

$$y=2\Rightarrow x=-1,4$$

经检验得 (-1,2),(4,2) 均不合题意; 同理当 $y<0$ 可解得

$$y=-2,\Rightarrow x=-1,4$$

经检验得, 原方程式只有唯一解 $(-1,-2)$

3. 解不等式

$$|x|^3-2x^2-4|x|+3<0,$$

令 $t=|x|$, 不等式化为

$$t^3-2t^2-4t+3<0$$

求根得 $t=3$ 和 $t=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$。于是

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}<|x|<3$$

解得

$$x\in\left(-3,-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2},3\right)$$

4. 假设 $a>1$ 且 $x,y>0$ 满足

$$(\log_a x)^2+(\log_a y)^2-\log_a(x^2y^2)\leqslant 2,\quad \log_a y\geqslant 1.$$

求 $\log_a(x^2y)$ 的取值区间。

设 $u=\log_a x$, $v=\log_a y$。不等式化为

$$u^2+v^2-2(u+v)\leqslant 2,\quad v\geqslant 1.$$

这是以 $(1,1)$ 为圆心、半径为 2 的半圆的上半部分。我们要求 $2u+v$ 的取值范围。

最小值在左下角 $(-1,1)$, 得 $2u+v=-1$。

最大值出现在斜率为 -2 的直线与半圆切点, 即联立

$$v-1=\frac{1}{2}(u-1),\quad (u-1)^2+(v-1)^2=4.$$

解得

$$(u,v)=\left(1+\frac{4}{\sqrt{5}},1+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\implies 2u+v=3+2\sqrt{5}.$$

因此区间为 $[-1,3+2\sqrt{5}]$。

5. 已知不等式 $|x^2+ax+2|\geqslant|x+1|$ 对任意 $x\in\mathbb{R}$ 恒成立，求实数 a 的取值范围。

将不等式两边平方得

$$(x^2+ax+2)^2\geqslant(x+1)^2$$

$$(x^2+ax+2)^2-(x+1)^2\geqslant 0$$

$$[(x^2+ax+2)-(x+1)][(x^2+ax+2)+(x+1)]\geqslant 0$$

$$[x^2+(a-1)x+1][x^2+(a+1)x+3]\geqslant 0$$

因为两个二次式领导系数为正，两个因式需对任意 x 恒非负。

对二次式 $x^2+(a-1)x+1$，

$$\Delta_1=(a-1)^2-4\leqslant 0\Rightarrow -1\leqslant a\leqslant 3$$

对二次式 $x^2+(a+1)x+3$，

$$\Delta_2=(a+1)^2-12\leqslant 0\Rightarrow -1-2\sqrt{3}\leqslant a\leqslant -1+2\sqrt{3}$$

综上所述，

$$a\in[-1,-1+2\sqrt{3}]$$

6. 求

$$|2|x-2|-5|\leqslant 3$$

的正整数解。

情况一：$|2|x-2|-5|=3$

$$\Rightarrow\begin{cases}2|x-2|-5=3\Rightarrow|x-2|=4\Rightarrow\begin{cases}x-2=4\Rightarrow x=6\\x-2=-4\Rightarrow x=-2\notin\mathbb{N}\end{cases}\\2|x-2|-5=-3\Rightarrow|x-2|=1\Rightarrow\begin{cases}x=3\\x=1\end{cases}\end{cases}$$

情况二: $|2|x-2|-5|=2$

$$\Rightarrow\begin{cases}2|x-2|-5=2\Rightarrow|x-2|=\frac{7}{2}\notin\mathbb{Z}\\2|x-2|-5=-2\Rightarrow|x-2|=\frac{3}{2}\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

情况三: $|2|x-2|-5|=1$

$$\Rightarrow\begin{cases}2|x-2|-5=1\Rightarrow|x-2|=3\Rightarrow\begin{cases}x=5\\x=-1\notin\mathbb{N}\end{cases}\\2|x-2|-5=-1\Rightarrow|x-2|=2\Rightarrow\begin{cases}x=4\\x=0\notin\mathbb{N}\end{cases}\end{cases}$$

情况四: $|2|x-2|-5|=0$

$$\Rightarrow|x-2|=\frac{5}{2}\notin\mathbb{Z}$$

综上, 正整数解为 $x=1,3,4,5,6$

7. 若实数 a 可使得对任意实数 x, 不等式

$$|4x-3a|+|5x-4a|\geqslant a^2$$

恒成立, 求 a 的范围。

记

$$f(x)=|4x-3a|+|5x-4a|=4\left(\left|x-\frac{3}{4}a\right|+\left|x-\frac{4}{5}a\right|\right)+\left|x-\frac{4}{5}a\right|$$

由三角不等式得

$$f(x)\geqslant 4\left|\left(x-\frac{3}{4}a\right)-\left(x-\frac{4}{5}a\right)\right|+\left|x-\frac{4}{5}a\right|=\frac{|a|}{5}+\left|x-\frac{4}{5}a\right|$$

取 $x=\frac{4}{5}a$, 得 $f(x)$ 的最小值为 $\frac{|a|}{5}$, 欲使不等式对任意 x 恒成立需有

$$\frac{|a|}{5}\geqslant|a|^2\Rightarrow|a|(5|a|-1)\leqslant 0\Rightarrow\quad 0\leqslant|a|\leqslant\frac{1}{5}$$

8. 已知实数 a,b 满足 $a+b\geqslant 3$, 试证

$$|a-2b^2|+|b-2a^2|\geqslant 6$$

由三角不等式,

$$\begin{aligned}\left|a-2b^2\right|+\left|b-2a^2\right| &\geqslant \left|a-2b^2+b-2a^2\right| \\ &= \left|2(a^2+b^2)-(a+b)\right| \\ &\geqslant 2(a^2+b^2)-(a+b) \\ &= (a+b)^2+(a-b)^2-(a+b) \\ &\geqslant 3^2-3=6\end{aligned}$$

故原不等式得证。

9. 若二次实系数多项式函数 $f(x)$ 满足

$$\begin{cases}-1\leqslant f(1)\leqslant 3 \\ 6\leqslant f(2)\leqslant 10 \\ 2\leqslant f(4)\leqslant 24\end{cases}$$

求 $f(7)$ 的最大值。

设 $f(x)=ax^2+bx+c$, 则

$$f(1)=a+b+c,\quad f(2)=4a+2b+c,\quad f(4)=16a+4b+c$$

解得

$$a=\frac{1}{3}f(1)-\frac{1}{2}f(2)+\frac{1}{6}f(4),\ b=-2f(1)+\frac{5}{2}f(2)-\frac{1}{2}f(4),\ c=\frac{8}{3}f(1)-2f(2)+\frac{1}{3}f(4)$$

因此

$$f(7)=49a+7b+c=5f(1)-9f(2)+5f(4)$$

取 $f(1)=3, f(2)=6, f(4)=24$, 得

$$f(7)_{\max}=5\cdot 3-9\cdot 6+5\cdot 24=81$$

10. 若 $a<b$, 已知对任意实数 x, 均有 $ax^2+bx+c\geqslant 0$, 且 $m<\dfrac{4a+3b+2c}{b-a}$ 恒成立, 求实数 m 的范围。

由 $ax^2+bx+c\geqslant 0\ (\forall x)$, 可知二次项系数满足

$$a>0,\quad b^2-4ac\leqslant 0$$

写成

$$\frac{4a+3b+2c}{b-a}=\frac{4\cdot\frac{a}{b}+3+2\cdot\frac{c}{b}}{1-\frac{a}{b}}$$

记 $t=\dfrac{a}{b}$, 则 $0<t<1$。由 $b^2-4ac\leqslant 0$ 得 $\dfrac{c}{b}\geqslant\dfrac{b}{4a}=\dfrac{1}{4t}$, 于是

$$\frac{4a+3b+2c}{b-a}\geqslant\frac{4t+3+2\cdot\frac{1}{4t}}{1-t}=\frac{4t+3+\frac{1}{2t}}{1-t}$$

记

$$k=\frac{4t+3+\frac{1}{2t}}{1-t}$$

其中 $0<t<1$, 整理得关于 t 的二次方程

$$(2k+8)t^2+(6-2k)t+1=0$$

为使该方程在 $0<t<1$ 上有解, 判别式必须非负,

$$(6-2k)^2-4(2k+8)\geqslant 0\Rightarrow k^2-8k+1\geqslant 0$$

解得

$$k\geqslant 4+\sqrt{15}>0$$

于是对任意符合条件的 a,b,c, 都有

$$\frac{4a+3b+2c}{b-a}\geqslant 4+\sqrt{15}$$

由题意 m 满足 $m<\dfrac{4a+3b+2c}{b-a}$ 恒成立, 故

$$m<4+\sqrt{15}$$

11. 已知 $a>0,b>0,a+b=1$, 证明不等式

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}\geqslant 8$$

由 AM-GM 不等式,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab} &= \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{a+b}{ab} \\
&= 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \\
&= 2\cdot\frac{a+b}{ab} \\
&= 4+2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right) \\
&\geqslant 4+2\cdot 2=8
\end{aligned}$$

12. 设 a, b 均为正数, 求

$$f(a, b)=ab(72-3a-4b)$$

的最大值。

由 AM-GM 不等式,

$$\begin{aligned}
f(a, b) &= \frac{1}{12}\cdot 3a\cdot 4b\cdot(72-3a-4b) \\
&\leqslant \frac{1}{12}\left(\frac{3a+4b+72-3a-4b}{3}\right)^3=1152
\end{aligned}$$

当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时等号成立。

13. 设 a, b, c 为正实数且满足 $a+b^2+c^3=11$, 求 abc 的最大值。

由 AM-GM 不等式,

$$\begin{aligned}
11 &= \frac{a}{6}+\frac{a}{6}+\frac{a}{6}+\frac{a}{6}+\frac{a}{6}+\frac{a}{6}+\frac{b^2}{3}+\frac{b^2}{3}+\frac{b^2}{3}+\frac{c^3}{2}+\frac{c^3}{2} \\
&= 11\sqrt[11]{\left(\frac{a}{6}\right)^6\left(\frac{b^2}{3}\right)^3\left(\frac{c^3}{2}\right)^2}=11\sqrt[11]{\frac{(abc)^6}{6^6\cdot 27\cdot 4}}
\end{aligned}$$

即

$$abc\leqslant 6\sqrt{3}\sqrt[3]{2}$$

当且仅当

$$\frac{a}{6}=\frac{b^2}{3}=\frac{c^3}{2}=1,$$

即 $a=6,\ b=\sqrt{3},\ c=\sqrt[3]{2}$ 时等号成立。

14. 实数 x,y,z 满足 $x^2+y^2+z^2=1$, 求 $\sqrt{2}xy+yz$ 的最大值。

由 AM-GM 不等式,

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x^2+\frac{1}{\sqrt{3}}y^2\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{2}x^2y^2}=\sqrt{2}xy,$$

$$\frac{1}{2\sqrt{3}}y^2+\frac{\sqrt{3}}{2}z^2\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{4}y^2z^2}=yz.$$

将两式相加得

$$\sqrt{2}xy+yz\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}(x^2+y^2+z^2)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

15. 设 x,y,z 为不全为 0 的实数, 求分式

$$\frac{xy+2yz}{x^2+y^2+z^2}$$

的最大值。

由 AM-GM 不等式,

$$x^2+\frac{1}{5}y^2\geqslant 2sqrt\frac{1}{5}x^2y^2=\frac{2}{\sqrt{5}}xy$$

同理,

$$\frac{4}{5}y^2+z^2\geqslant 2\sqrt{\frac{4}{5}y^2z^2}=\frac{4}{\sqrt{5}}yz$$

两式相加得

$$x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{2}{\sqrt{5}}(xy+2yz)\quad\Rightarrow\quad\frac{xy+2yz}{x^2+y^2+z^2}\leqslant\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

16. 求

$$f(x)=\frac{x^4+2x^3+3x^2+2x+10}{x^2+x+1}$$

的最小值。

由 AM-GM 不等式,

$$\begin{aligned}f(x)&=x^2+x+1+\frac{9}{x^2+x+1}\\&\geqslant 2\sqrt{(x^2+x+1)\cdot\frac{9}{x^2+x+1}}=6\end{aligned}$$

当 $(x^2+x+1)^2=9$ 即 $x=2$ 或 $x=-1$ 时, $f(x)$ 取得最大值 6

17. 求函数

$$y=\frac{4^x+1}{2^x+1}$$

的最小值。

由 AM-GM 不等式,

$$\begin{aligned}y&=\frac{4^x-1}{2^x+1}+\frac{2}{2^x+1}=2^x+1+\frac{2}{2^x+1}-2\\&\geqslant 2\sqrt{(2^x+1)\cdot\frac{2}{2^x+1}}-2=2\sqrt{2}-2\end{aligned}$$

当 $(2^x+1)^2=2$ 即 $x=\log_2(\sqrt{2}-1)$ 时, y 取得最大值 $2\sqrt{2}-2$

18. 求函数

$$f(x)=\log 2\log 5-\log 2x\log 5x$$

的最大值。

$$\begin{aligned}f(x)&=\log 2\log 5-(\log 2+\log x)(\log 5+\log x)\\&=-(\log 2+\log 5)\log x-\log^2 x\\&=-\log x-\log^2 x\\&=-\left(\log x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\leqslant\frac{1}{4}\end{aligned}$$

当 $\log x=-\frac{1}{2}$ 即 $x=\frac{\sqrt{10}}{10}$ 时, $f(x)$ 取得最大值 $\frac{1}{4}$.

19. 求函数

$$f(x,y)=x^2+2xy+2y^2+2x+4y+5$$

的最小值。

配方求最小值:

$$\begin{aligned}f(x,y)&=x^2+2xy+2y^2+2x+4y+5\\&=x^2+2(y+1)x+(y+1)^2+y^2+2y+4\\&=[x+(y+1)]^2+(y+1)^2+3\geqslant 3\end{aligned}$$

当 $x=0,y=-1$ 时 $f(x,y)$ 取到最小值 3。

20. $x, y \in \mathbb{R}$, 求

$$x^4+4x^3+8x^2+4xy+6x+4y^2+10$$

的最小值。

先配 y 项, 写成

$$f(x,y)=(x+2y)^2+x^4+4x^3+7x^2+6x+10$$

再用火眼金睛注意到

$$x^4+4x^3+7x^2+6x+2=(x+1)^2(x^2+2x+2)$$

故原式为

$$(x+2y)^2+(x+1)^2(x^2+2x+2)+8 \geqslant 8$$

当 $x=-1, y=\dfrac{1}{2}$ 时, $f(x,y)$ 取得最小值 8.

21. 已知 $x, y>0$, 证明

$$\sqrt{x^2+y^2}>\sqrt[3]{x^3+y^3}$$

发现 $\sqrt{x^2+y^2}>\sqrt[3]{x^3+y^3}$ 等价于

$$x^6+3x^4y^2+3x^2y^4+y^6>x^6+2x^3y^3+y^6 \Leftrightarrow x^2y^2(3x^2-2xy+3y^2)>0$$

其中关于 x 的两次函数 $3x^2-2xy+3y^2$ 判别式为

$$\Delta=4y^2-4(3)(3)(y^2)=-32y^2<0$$

故 $3x^2-2xy+3y^2>0$, 得证

$$x^2y^2(3x^2-2xy+3y^2)>0$$

22. 已知实数 a, b, c 满足 $c<b<a, a+b+c=1, a^2+b^2+c^2=1$, 求证

$$1<a+b<\frac{4}{3}.$$

由 $a^2+b^2+c^2=1, a+b+c=1$ 可得

$$ab=\frac{(a+b)^2-(a^2+b^2)}{2}=\frac{(1-c)^2-(1-c^2)}{2}=c^2-c.$$

所以 $a+b=1-c$, 且 a,b 是方程

$$x^2-(1-c)x+c^2-c=0$$

的两个相异实根, 其中判别式为

$$\Delta=(1-c)^2-4(c^2-c)>0\Rightarrow -\frac{1}{3}<c<1.$$

又有

$$(c-a)(c-b)=c^2-c(a+b)+ab=c^2-c(1-c)+c^2-c=3c^2-2c.$$

因为 $c<b<a$, 所以 $c-a<0$, $c-b<0$, 故 $(c-a)(c-b)>0$, 即

$$3c^2-2c>0 \implies c<0 \text{ 或 } c>\frac{2}{3}.$$

综合 $-\frac{1}{3}<c<1$ 与上述条件, 得到

$$-\frac{1}{3}<c<0 \quad \text{或} \quad \frac{2}{3}<c<1.$$

若 $\dfrac{2}{3}<c<1$, 则

$$0<a+b<\frac{1}{3}$$

但由 $c<b<a$ 得 $a+b>c>\dfrac{2}{3}$, 矛盾, 因此只能有 $-\dfrac{1}{3}<c<0$, 则

$$1<a+b<\frac{4}{3}$$

23. 已知 a,b,c 为正实数, 求

$$\left\lfloor\frac{a+b}{c}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{b+c}{a}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{c+a}{b}\right\rfloor$$

的最小值。

由 $\lfloor x\rfloor > x-1,\ x\notin\mathbb{Z}$ 及 AM-GM 不等式,

$$S=\left\lfloor\frac{a+b}{c}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{b+c}{a}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{c+a}{b}\right\rfloor>\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}-3$$
$$\geqslant 2+2+2-3=3$$

由于 $S\in\mathbb{Z}$, 最小值为 $S_{\min}=4$, 例如可在 $a=6,b=8,c=9$ 时取得。

24. 已知 $x>0$, 求

$$x\lfloor x\rfloor+\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor+x+\frac{1}{x}+x\lceil x\rceil+\left\lceil\frac{1}{x}\right\rceil$$

的最小值。

设

$$f(x)=x\lfloor x\rfloor+\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor+x+\frac{1}{x}+x\lceil x\rceil+\left\lceil\frac{1}{x}\right\rceil$$

观察到 $f(1)=6$, 若 $x>1$, 即 $0<\dfrac{1}{x}\leqslant 1$,

$$x\lfloor x\rfloor+\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor\geqslant x>1,\quad x\lceil x\rceil+\left\lceil\frac{1}{x}\right\rceil\geqslant 2x+1>3,\quad x+\frac{1}{x}>2$$

于是当 $x>1, f(x)>6=f(1)$。若 $0<x\leqslant\dfrac{1}{2}$, 即 $2\leqslant\dfrac{1}{x}$

$$x\lfloor x\rfloor+\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor\geqslant 2,\quad x\lceil x\rceil+\left\lceil\frac{1}{x}\right\rceil\geqslant x+2>2,\quad x+\frac{1}{x}>2$$

于是当 $0<x\leqslant\dfrac{1}{2}, f(x)>6=f(1)$。若 $\dfrac{1}{2}<x<1$, 即 $1<\dfrac{1}{x}<2$,

$$f(x)=1+x+\frac{1}{x}+x+2=3+2x+\frac{1}{x}\geqslant 3+2\sqrt{2}$$

等号成立当且仅当

$$2x=\frac{1}{x}$$

即 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$。由于 $3+2\sqrt{2}<6, f(x)$ 的最小值为 $3+2\sqrt{2}$。

25. 若实数 x,y 满足 $4x^2-2xy+2y^2=1$, 则 $3x^2+xy+y^2$ 的最大值与最小值的和为

(待解)

26. 实数 x, y, z, t 满足

$$x^2+y^2=16, \quad z^2+t^2=25, \quad xt-yz=20,$$

求 xz 的最大值。

由柯西不等式,

$$16\cdot 25=(x^2+y^2)(t^2+(-z)^2)\geqslant(xt-yz)^2=20^2$$

此时等号成立, 可解得

$$\frac{x}{t}=\frac{y}{-z}=\frac{4}{5}\Rightarrow xz=-\frac{5}{4}xy$$

由 $x^2+y^2=16$ 可得

$$|xy|\leqslant\frac{x^2+y^2}{2}=8$$

所以

$$-10=-\frac{5}{4}\cdot 8\leqslant xz\leqslant-\frac{5}{4}\cdot(-8)=10$$

因此 xz 的最大值为 10。

27. 设 $a_1, a_2, \ldots, a_{18}$ 均为大于 1 的实数, 求

$$\frac{\log_{a_1}2023+\log_{a_2}2023+\cdots+\log_{a_{18}}2023}{\log_{a_1a_2\cdots a_{18}}2023}$$

的最小值。

利用换底公式, 原式即

$$\frac{\sum_{i=1}^{18}\frac{1}{\log_{2023}a_i}}{\frac{1}{\sum_{i=1}^{18}\log_{2023}a_i}}=\left(\sum_{i=1}^{18}\frac{1}{\log_{2023}a_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{18}\log_{2023}a_i\right).$$

由柯西不等式,

$$\left(\sum_{i=1}^{18}\log_{2023}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{18}\frac{1}{\log_{2023}a_i}\right)\geqslant\left(\sum_{i=1}^{18}1\right)^2=18^2=324.$$

28. 存在 2017 个正实数 $x_1, x_2, \ldots, x_{2017}$ 使得

$$\sum_{i=1}^{2017}x_i=\sum_{i=1}^{2017}\frac{1}{x_i}=2018,$$

求

$$x_1+\frac{1}{x_1}$$

的最大可能值。

由柯西不等式,

$$(2018-x_1)\left(2018-\frac{1}{x_1}\right)=\left(\sum_{i=2}^{2017}x_i\right)\left(\sum_{i=2}^{2017}\frac{1}{x_i}\right)\geqslant 2016^2.$$

展开左边得

$$2018^2-2018\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)+1\geqslant 2016^2.$$

于是

$$x_1+\frac{1}{x_1}\leqslant\frac{8069}{2018}.$$

等号成立当且仅当 $x_i=\dfrac{1}{x_i}$, 即 $x_i=1, i=2,3,\dots,2017$

29. 已知 a,b,c 为正数, 且 $a+b+c=1$。求

$$\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right)$$

的最小值。

由 AM-GM 不等式,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right)&=\left(\frac{1-a}{a}\right)\left(\frac{1-b}{b}\right)\left(\frac{1-c}{c}\right)\\&=\left(\frac{b+c}{a}\right)\left(\frac{a+c}{b}\right)\left(\frac{a+b}{c}\right)\\&\geqslant\left(\frac{2\sqrt{bc}}{a}\right)\left(\frac{2\sqrt{ac}}{b}\right)\left(\frac{2\sqrt{ab}}{c}\right)=8\end{aligned}$$

当且仅当 $a=b=c=\dfrac{1}{3}$ 时等号成立。

30. 已知 a,b,c 为三角形三边, 证明不等式

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geqslant 3$$

发现

$$
\begin{aligned}
&\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geqslant 3\\
\Longleftrightarrow\ &\left(\frac{2a}{b+c-a}+1\right)+\left(\frac{2b}{c+a-b}+1\right)+\left(\frac{2c}{a+b-c}+1\right)\geqslant 9\\
\Longleftrightarrow\ &(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}+\frac{1}{a+b-c}\right)\geqslant 9
\end{aligned}
$$

由于

$$(b+c-a)+(c+a-b)+(a+b-c)=a+b+c,$$

且

$$b+c-a>0,\ c+a-b>0,\ a+b-c>0$$

由 AM-HM 不等式或柯西不等式, 原不等式得证。

31. 设 x,y,z 为正实数且 $xyz=1$, 证明:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\geqslant x+y+z.$$

由 AM-GM 不等式,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{3}\left(\frac{x}{y}+\frac{x}{y}+\frac{y}{z}\right)&\geqslant\sqrt[3]{\frac{x^2}{yz}}=x,\\
\frac{1}{3}\left(\frac{y}{z}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)&\geqslant\sqrt[3]{\frac{y^2}{xz}}=y,\\
\frac{1}{3}\left(\frac{z}{x}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}\right)&\geqslant\sqrt[3]{\frac{z^2}{xy}}=z.
\end{aligned}
$$

三式相加得

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\geqslant x+y+z.$$

故证毕。

32. 若 $x^2+y^2+z^2=1$, 求 $x+2y+3z$ 的最大值。

由柯西不等式,

$$(x^2+y^2+z^2)(1^2+2^2+3^2) \geqslant (x+2y+3z)^2 \Rightarrow x+2y+3z \leqslant \sqrt{14}$$

当且仅当 $(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3)$ 时等号成立。

33. 若 $x,y,z \in \mathbb{R}^+$ 且 $x+y+z=3$, 求 $\dfrac{yz+4xz+9xy}{xyz}$ 的最小值。

由柯西不等式,

$$\frac{x^2}{1^2}+\frac{y^2}{2^2}+\frac{z^2}{3^2} \geqslant \frac{(x+y+z)^2}{1+4+9}=\frac{9}{14}.$$

当且仅当 $(x,y,z)=\left(\dfrac{1}{2},1,\dfrac{3}{2}\right)$ 时等号成立。

34. 若 $a,b,c \in \mathbb{R}^+$ 且 $a+b+c=6$, 求

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{c}\right)^2+\left(c+\frac{1}{a}\right)^2$$

的最小值。

由柯西不等式,

$$\begin{aligned}\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{c}\right)^2+\left(c+\frac{1}{a}\right)^2 &\geqslant \frac{\left(a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}{1+1+1} \\ &\geqslant \frac{\left(6+\frac{9}{a+b+c}\right)^2}{1+1+1}=\frac{75}{4}\end{aligned}$$

等号成立当且仅当 $a=b=c=2$。

35. 已知实数 a,b,c,d 满足

$$ab+bc+cd=8, \quad b^2+c^2=2,$$

试求 a^2+d^2 的最小值。

首先有

$$b^2+c^2 \geqslant 2bc \Rightarrow bc \leqslant 1$$

由柯西不等式,

$$(a^2+d^2)(b^2+c^2)\geqslant(ab+cd)^2$$

即

$$(a^2+d^2)\geqslant\frac{(ab+cd)^2}{b^2+c^2}=\frac{(8-bc)^2}{2}\geqslant\frac{(8-1)^2}{2}=\frac{49}{2}$$

当 $bc=1$ 且 $\frac{a}{c}=\frac{d}{b}$, 即 $b=c=-1, a=d=-\frac{7}{2}$ 时等号成立, 此时 a^2+d^2 取最小值 $\frac{49}{2}$。

36. 若 $3a+4b=15$, 求 $\sqrt{a^2+b^2}$ 的最小值。

由柯西不等式,

$$5\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3^2+4^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}\geqslant|3a+4b|=15\implies\sqrt{a^2+b^2}\geqslant3$$

当且仅当 $a=\frac{9}{5}, b=\frac{12}{5}$ 时等号成立。

37. 若 $abcd=1$, 求 $(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)$ 的最小值。

由 AM-GM 不等式,

$$(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)\geqslant(2\sqrt{a})(2\sqrt{b})(2\sqrt{c})(2\sqrt{d})=16$$

等号成立当且仅当 $a=b=c=d=1$。

38. 若 $x\in\mathbb{R}$, 求

$$\frac{x^2+2-\sqrt{x^4+4}}{x}$$

的最大值。

设 $x>0$, 由 AM-GM 不等式,

$$\begin{aligned}\frac{x^2+2-\sqrt{x^4+4}}{x}&=x+\frac{2}{x}-\sqrt{x^2+\frac{4}{x^2}}\\&=\sqrt{x^2+\frac{4}{x^2}+4}-\sqrt{x^2+\frac{4}{x^2}}\\&=\frac{4}{\sqrt{x^2+\frac{4}{x^2}+4}+\sqrt{x^2+\frac{4}{x^2}}}\\&\leqslant\frac{4}{\sqrt{4+4}+\sqrt{4}}=2\sqrt{2}-2\end{aligned}$$

当且仅当 $x=\sqrt{2}$ 时等号成立。

39. 若 a,b 为正实数且满足 $ab(a+b)=2000$，求 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}$ 的最小值。

由 AM-GM 不等式，

$$2000=ab(a+b)\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)(a+b)\Rightarrow a+b\geqslant 20$$

再由 AM-GM 不等式，

$$\begin{aligned}\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}&=\frac{1}{2a}+\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{a+b}\\&\geqslant 5\sqrt[5]{\frac{1}{16a^2b^2(a+b)}}\\&=5\sqrt[5]{\frac{a+b}{16a^2b^2(a+b)^2}}\\&\geqslant 5\sqrt[5]{\frac{20}{16\cdot 2000^2}}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

等号成立当且仅当 $a=b=10$。以下为错误示范：

由 AM-GM 不等式，

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{ab(a+b)}}=3\sqrt[3]{\frac{1}{2000}}=\frac{3\sqrt[3]{4}}{20}$$

但等号成立当且仅当 $a=b=0$，不合题意。

由 AM-GM 不等式，

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}=\frac{a+b}{ab}+\frac{1}{ab}=\frac{(a+b)^2}{2000}+\frac{1}{2(a+b)}+\frac{1}{2(a+b)}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{8000}}=\frac{3}{20}$$

但等号成立当且仅当 $a+b=10$ 且 $ab=200$，解得 a,b 为非实数，不合题意。

40. 若 a,b,c 皆为正实数满足 $a+b+c=100$，求 $\sqrt{a}+\sqrt{ab}+\sqrt{abc}$ 的最大值。

由 AM-GM 不等式，

$$\sqrt{a}+\sqrt{ab}+\sqrt{abc}=a+2\sqrt{\frac{a}{4}\cdot b}+3\sqrt{\frac{a}{12}\cdot\frac{b}{3}\cdot\frac{4c}{3}}\leqslant a+\frac{a}{4}+b+\frac{a}{12}+\frac{b}{3}+\frac{4c}{3}=\frac{4}{3}(a+b+c)=\frac{400}{3}$$

等号成立当且仅当 $a=\frac{160}{21},b=\frac{40}{21},c=\frac{10}{21}$。

41. 若 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 为实数，且

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=8, \quad x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2=16$$

求 x_5 的最大值。

由柯西不等式，

$$(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)(1+1+1+1) \geqslant (x_1+x_2+x_3+x_4)^2 \Rightarrow 4(16-x_5^2) \geqslant (8-x_5)^2$$

解得

$$0 \leqslant x_5 \leqslant \frac{16}{5}$$

当 $x_1=x_2=x_3=x_4=\frac{6}{5}, x_5=\frac{16}{5}$ 时等号成立。

42. 若 a, b, c 为正实数且 $a+b+c \leqslant 9$，求 $(a^2+b^2+c^2)(2ab+2bc+2ca+5)$ 的最大值。

由 AM-GM 不等式，

$$\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2)(2ab+2bc+2ca+5) &\leqslant \left(\frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca+5}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{(a+b+c)^2+5}{2}\right)^2 \\ &\leqslant \left(\frac{9^2+5}{2}\right)^2 = 1849\end{aligned}$$

当 $a^2+b^2+c^2=43, ab+bc+ca=19$ 时等号成立。

43. x, y, z 为正实数且满足 $x+y+z=91$，求

$$\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y}+\frac{xy}{z}$$

的最小值。

由排序不等式，

$$\sum_{cyc}\frac{xy}{z} \geqslant \sum_{cyc}\frac{xy}{y} = x+y+z = 91$$

44. 已知正实数 a,b 满足 $a+b=1$, 求

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2$$

的最小值。

由柯西不等式或 QM-AM 不等式,

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geqslant \frac{1}{2}\left(a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{ab}\right)^2$$

又由 AM-GM 不等式,

$$ab \leqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

故

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geqslant \frac{1}{2}\cdot(1+4)^2=\frac{25}{2}$$

当且仅当 $a=b=\dfrac{1}{2}$ 时等号成立, 此时有最小值 $\dfrac{25}{2}$。

45. 已知 x,y,z 为正实数, 求 $\dfrac{(x^4+1)(y^4+1)(z^4+1)}{xy^2z}$ 的最小值。

由 AM-GM 不等式,

$$\begin{aligned}\frac{(x^4y^4+1)(y^4z^4+1)(z^4x^4+1)}{xy^2z} &= \left(x^3+\frac{1}{3x}+\frac{1}{3x}+\frac{1}{3x}\right)\left(y^2+\frac{1}{y^2}\right)\left(z^3+\frac{1}{3z}+\frac{1}{3z}+\frac{1}{3z}\right)\\ &\geqslant 4\sqrt[3]{\frac{1}{27}}\cdot 2\cdot 4\sqrt[3]{\frac{1}{27}}=\frac{32\sqrt{3}}{9}\end{aligned}$$

46. 已知 $x\in[0,2]$, 求 $\sqrt{x}+4\sqrt{1-\dfrac{x}{2}}$ 的最大值。

发现

$$\sqrt{x}+4\sqrt{1-\frac{x}{2}}=\sqrt{x}+\sqrt{2^3}\cdot\sqrt{2-x}$$

由柯西不等式,

$$(\sqrt{x}+\sqrt{2^3}\cdot\sqrt{2-x})^2 \leqslant (1+8)(x+2-x)=18 \Leftrightarrow \sqrt{x}+4\sqrt{1-\frac{x}{2}} \leqslant 3\sqrt{2}$$

等号成立当且仅当 $x=\dfrac{2}{9}$

47. 若 x,y 为正数, 且

$$x^2+\frac{y^2}{45}=1,$$

试求

$$\frac{2}{1-x}+\frac{75}{10-y}$$

的最小值。

由 AM-GM 不等式,

$$\frac{1-x+\frac{x}{2}+\frac{x}{2}}{3}\geqslant\sqrt[3]{\frac{x^2(1-x)}{4}}$$

于是

$$\frac{2}{1-x}=\frac{x^2}{2}\cdot\frac{4}{x^2(1-x)}\geqslant\frac{x^2}{2}\cdot\left(\frac{3}{1-x+\frac{x}{2}+\frac{x}{2}}\right)^3=\frac{27x^2}{2}\tag{1}$$

由 AM-GM 不等式,

$$\frac{y+(10-y)}{2}\geqslant\sqrt{y(10-y)}$$

故

$$\frac{75}{10-y}=\frac{75}{10}\left(\frac{y}{10-y}+1\right)\geqslant\frac{15}{2}\cdot\frac{y^2}{\left(\frac{y+(10-y)}{2}\right)^2}+\frac{15}{2}=\frac{15}{2}\cdot\frac{y^2}{25}+\frac{15}{2}\tag{2}$$

由 (1), (2),

$$\frac{2}{1-x}+\frac{75}{10-y}\geqslant\frac{27}{2}\left(x^2+\frac{y^2}{45}\right)+\frac{15}{2}=21$$

等号成立当且仅当 $x=\dfrac{2}{3},y=5$。

48. 若正实数 a,b,c 满足 $a+b+c=21$, 求 $a^2+3b^2+5c^2$ 的最小值。

由排序不等式,

$$\begin{aligned}a^2+3b^2+5c^2&=a^2+b^2+c^2+2b^2+2c^2+2c^2\\&\geqslant a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=(a+b+c)^2=441\end{aligned}$$

当 $(a,b,c)=(21,0,0),\left(\dfrac{21}{2},\dfrac{21}{2},0\right),(7,7,7)$ 时等号成立。

49. 已知 x,y 为实数, 求 x^6+y^6-54xy 的最小值。

由 AM-GM 不等式,

$$\frac{x^6+y^6+27+27+27+27}{6} \geqslant \sqrt[6]{x^6y^6\cdot 3^{12}} \Rightarrow x^6y^6-54xy \geqslant -108$$

当 $x=y=\pm\sqrt{3}$ 时等号成立。

50. 若 x,y,z 为正实数, 且满足 $x+y+z=1$, 求 $x(x+y)^2(y+z)^3(z+x)^4$ 的最大值。

由 AM-GM 不等式,

$$\frac{5(x+y+z)}{10} = \frac{x+2(x+y)+3(y+z)+4\left(\frac{z+x}{2}\right)}{10} \geqslant \sqrt[10]{\frac{x(x+y)^2(y+z)^3(z+x)^4}{2^4}}$$

故

$$x(x+y)^2(y+z)^3(z+x)^4 \leqslant \frac{1}{64}$$

等号成立 $y=0, x=z=\frac{1}{2}$?

51. 设 a,b,c,d 为正实数且 $abcd=1$。证明

$$a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ac+ad+bc+bd+cd \geqslant 10.$$

由算术几何均值不等式（A.M.-G.M.）, 有

$$\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4} \geqslant \sqrt[4]{a^2b^2c^2d^2} = \sqrt[4]{(abcd)^2} = 1,$$

因此

$$a^2+b^2+c^2+d^2 \geqslant 4.$$

同样地, 对六个二次项之和应用 A.M.-G.M.:

$$\frac{ab+ac+ad+bc+bd+cd}{6} \geqslant \sqrt[6]{(ab)(ac)(ad)(bc)(bd)(cd)} = \sqrt[6]{a^3b^3c^3d^3} = \sqrt[6]{(abcd)^3} = 1,$$

于是

$$ab+ac+ad+bc+bd+cd \geqslant 6.$$

将两式相加得到

$$a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ac+ad+bc+bd+cd \geqslant 4+6=10,$$

证毕。

52. 设 a, b 和 c 为正实数, 且满足 $a^2+b^2+c^2=1$。证明:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \geqslant 3+\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}.$$

考虑左边减右边:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-3-\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}\\
&=\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2}+\frac{a^2+b^2+c^2}{b^2}+\frac{a^2+b^2+c^2}{c^2}-3-2\left(\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\right)\\
&=\left(1+\frac{b^2+c^2}{a^2}\right)+\left(1+\frac{a^2+c^2}{b^2}\right)+\left(1+\frac{a^2+b^2}{c^2}\right)-3-2\left(\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\right)\\
&=\frac{b^2+c^2}{a^2}+\frac{a^2+c^2}{b^2}+\frac{a^2+b^2}{c^2}-2\left(\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\right)\\
&=a^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+b^2\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)+c^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)-2\left(\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\right)\\
&=a^2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2+b^2\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2+c^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

等号成立当且仅当 $a=b=c$。

53. 若 a, b, c 为实数且 $a+b+c=12$, 且

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{abc}=1,$$

求 $abc-(a+2b-3c)$ 的最大值。

由

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{abc}=1,$$

则

$$2abc=2ab+2bc+2ca+2=144-a^2-b^2-c^2+2$$

所以

$$\begin{aligned}
2abc-2(a+2b-3c)&=146-(a^2+2a)-(b^2+4b)-(c^2-6c)\\
&=160-[(a+1)^2+(b+2)^2+(c-3)^2]\\
&\leqslant 160-3\left(\frac{a+1+b+2+c-3}{3}\right)^2=112
\end{aligned}$$

因此

$$abc-(a+2b-3c) \leqslant 56$$

等号成立当且仅当 $a=3, b=2, c=7$。

54. 设 a, b, c 为正实数，且 $a+b+c=1$，求

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}$$

的最小值。

由柯西不等式，

$$(1^2+1^2)(a^2+b^2) \geqslant (a+b)^2 \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2} \geqslant \frac{a+b}{\sqrt{2}},$$

同理

$$\sqrt{b^2+c^2} \geqslant \frac{b+c}{\sqrt{2}}, \quad \sqrt{c^2+a^2} \geqslant \frac{c+a}{\sqrt{2}}.$$

相加得

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2} \geqslant \frac{2(a+b+c)}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$$

当 $a=b=c=\frac{1}{3}$ 时取等号，故最小值为 $\sqrt{2}$。

55. 已知 $x>1, y>1, z>1$ 且 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$，试证

$$\sqrt{x+y+z} \geqslant \sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}$$

首先有

$$\frac{x-1}{x}+\frac{y-1}{y}+\frac{z-1}{z}=3-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=3-2=1$$

由柯西不等式，

$$\left(\frac{x-1}{x}+\frac{y-1}{y}+\frac{z-1}{z}\right)(x+y+z) \geqslant \left(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}\right)^2$$

左式为 $1 \cdot (x+y+z)=x+y+z$，因此

$$\sqrt{x+y+z} \geqslant \sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}$$

故证毕。

56. (a) 已知 $a,b,c>0$, 证明

$$\frac{a^2}{2a+b}+\frac{b^2}{2b+c}+\frac{c^2}{2c+a}\geqslant\frac{a+b+c}{3}$$

由柯西不等式,

$$\left(\frac{a^2}{2a+b}+\frac{b^2}{2b+c}+\frac{c^2}{2c+a}\right)(2a+b+2b+c+2c+a)\geqslant(a+b+c)^2$$

所以得证

$$\frac{a^2}{2a+b}+\frac{b^2}{2b+c}+\frac{c^2}{2c+a}\geqslant\frac{a+b+c}{3}$$

(b) 已知 $a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2>0$, 证明

$$(a_1^3+a_2^3)(b_1^3+b_2^3)(c_1^3+c_2^3)\geqslant(a_1b_1c_1+a_2b_2c_2)^3$$

令

$$r_1=\frac{a_2}{a_1},\quad r_2=\frac{b_2}{b_1},\quad r_3=\frac{c_2}{c_1}$$

则

$$(a_1^3+a_2^3)(b_1^3+b_2^3)(c_1^3+c_2^3)=a_1^3b_1^3c_1^3(1+r_1^3)(1+r_2^3)(1+r_3^3)$$

$$(a_1b_1c_1+a_2b_2c_2)^3=a_1^3b_1^3c_1^3(1+r_1r_2r_3)^3$$

由 AM-GM 不等式,

$$\begin{aligned}(1+r_1^3)(1+r_2^3)(1+r_3^3)&=1+(r_1^3+r_2^3+r_3^3)+(r_1r_2)^3+(r_2r_3)^3+(r_3r_1)^3+r_1^3r_2^3r_3^3\\&\geqslant1+3r_1r_2r_3+3r_1^2r_2^2r_3^2+r_1^3r_2^3r_3^3\\&=(1+r_1r_2r_3)^3\end{aligned}$$

因此得证

$$(a_1^3+a_2^3)(b_1^3+b_2^3)(c_1^3+c_2^3)\geqslant(a_1b_1c_1+a_2b_2c_2)^3$$

57. 设 a,b,c 均为正数, 且 $a+b+c=3$, 证明

$$\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}\geqslant\frac{3}{2}.$$

由不等式

$$(b-1)^2=b^2+1-2b\geqslant 0\Rightarrow \frac{1}{b^2+1}\leqslant\frac{1}{2b},$$

因此

$$\frac{a}{b^2+1}=a-\frac{ab^2}{b^2+1}\geqslant a-\frac{ab^2}{2b}=a-\frac{ab}{2}.$$

同理得

$$\frac{b}{c^2+1}\geqslant b-\frac{bc}{2},\quad \frac{c}{a^2+1}\geqslant c-\frac{ac}{2}.$$

又由柯西不等式,

$$(a^2+b^2+c^2)(1^2+1^2+1^2)\geqslant(a+b+c)^2\Rightarrow a^2+b^2+c^2\geqslant 3.$$

因为

$$ab+bc+ca=\frac{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)}{2}\leqslant\frac{9-3}{2}=3$$

故

$$\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}\geqslant(a+b+c)-\frac{1}{2}(ab+bc+ca)\geqslant 3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}.$$

故证毕。

58. 设 a,b,c 为正实数, 证明

$$\sqrt{ab(a+b)}+\sqrt{bc(b+c)}+\sqrt{ca(c+a)}\leqslant\frac{3}{2}\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

由 AM-GM 不等式,

$$\begin{aligned}3&=\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}+\frac{a}{a+b}+\frac{c}{b+c}+\frac{b}{a+b}+\frac{a}{c+a}\\&\geqslant 2\left(\sqrt{\frac{ab}{(b+c)(c+a)}}+\sqrt{\frac{bc}{(a+b)(c+a)}}+\sqrt{\frac{ca}{(a+b)(b+c)}}\right)\end{aligned}$$

即得证

$$\sqrt{ab(a+b)}+\sqrt{bc(b+c)}+\sqrt{ca(c+a)}\leqslant\frac{3}{2}\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

59. 证明对任意实数 x,y,z 皆有

$$\frac{y^2-x^2}{2x^2+1}+\frac{z^2-y^2}{2y^2+1}+\frac{x^2-z^2}{2z^2+1}\geqslant 0$$

由 AM-GM 不等式,

$$\frac{y^2-x^2}{2x^2+1}+\frac{z^2-y^2}{2y^2+1}+\frac{x^2-z^2}{2z^2+1}+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{2y^2+1}{2x^2+1}+\frac{2z^2+1}{2y^2+1}+\frac{2x^2+1}{2z^2+1}\right)$$
$$\geqslant \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{2y^2+1}{2x^2+1}\cdot\frac{2z^2+1}{2y^2+1}\cdot\frac{2x^2+1}{2z^2+1}}=\frac{3}{2}$$

故

$$\frac{y^2-x^2}{2x^2+1}+\frac{z^2-y^2}{2y^2+1}+\frac{x^2-z^2}{2z^2+1}\geqslant 0$$

60. 设 $a>0,b>0,c>0$, 求

$$\frac{a+3c}{a+2b+c}+\frac{4b}{a+b+2c}-\frac{8c}{a+b+3c}+17$$

的最小值。

由于

$$\begin{cases}a+2b+c=x\\ a+b+2c=y\\ a+b+3c=z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-x+5y-3z\\ b=x-2y+z\\ c=-y+z\end{cases}$$

故

$$\begin{aligned}&\frac{a+3c}{a+2b+c}+\frac{4b}{a+b+2c}-\frac{8c}{a+b+3c}+17\\ &=\frac{-x+2y}{x}+\frac{4x-8y+4z}{y}-\frac{-8y+8z}{z}+17\\ &=\left(\frac{2y}{x}+\frac{4x}{y}\right)+\left(\frac{4z}{y}+\frac{8y}{z}\right)\\ &\geqslant 2\sqrt{\frac{2y}{x}\cdot\frac{4x}{y}}+2\sqrt{\frac{4z}{y}\cdot\frac{8y}{z}}=12\sqrt{2}\end{aligned}$$

61. 证明对所有自然数 n, 有

$$1+\frac{2}{3n-2}\leqslant\sqrt[n]{3}\leqslant 1+\frac{2}{n}.$$

由 AM-GM 不等式,

$$\frac{n+2}{n}=\frac{3+\overbrace{1+\cdots+1}^{n-1\text{个 }1}}{n}\geqslant\sqrt[n]{3\cdot 1^{n-1}}=\sqrt[n]{3}\Rightarrow\sqrt[n]{3}\leqslant 1+\frac{2}{n}$$

且

$$\frac{3n-2}{3n}=\frac{1/3+\overbrace{1+\cdots+1}^{n-1\text{个 }1}}{n}\geqslant\sqrt[n]{(1/3)\cdot 1^{n-1}}=\frac{1}{\sqrt[n]{3}}\Rightarrow\sqrt[n]{3}\geqslant 1+\frac{2}{3n-2}.$$

综上得到

$$1+\frac{2}{3n-2}\leqslant\sqrt[n]{3}\leqslant 1+\frac{2}{n}$$

62. 已知 $0\leqslant x\leqslant 1$, $n\in\mathbb{N}$, 证明:

$$0\leqslant x^n-x^{n+1}\leqslant\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

由 $0\leqslant x\leqslant 1$, 有

$$0\leqslant 1-x\quad\Rightarrow\quad 0\leqslant x^n(1-x)=x^n-x^{n+1}\tag{1}$$

由 AM-GM 不等式,

$$\frac{\overbrace{\frac{x}{n}+\cdots+\frac{x}{n}}^{n\text{ 个}}+(1-x)}{n+1}\geqslant\sqrt[n+1]{\left(\frac{x}{n}\right)^n(1-x)}$$

即

$$\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\geqslant x^n(1-x)=x^n-x^{n+1}\tag{2}$$

由 (1) 与 (2), 得证

$$0\leqslant x^n-x^{n+1}\leqslant\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

63. 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 27, R 为其外接圆半径,r 为其内切圆半径。求 Rr^3 的最大值。

设 $\triangle ABC$ 边长为 $a,b,c>0$, 面积为

$$[\triangle ABC]=\frac{1}{2}(a+b+c)r=\frac{abc}{4R}=27$$

由 AM-GM 不等式,

$$\frac{2\cdot 27}{3r}=\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}=\sqrt[3]{4R\cdot 27}\Rightarrow Rr^3\leqslant 54$$

等号成立当且仅当 $a=b=c$ 即 $\triangle ABC$ 为等边三角形。

64. 设实数 x,y 满足 $\sin x+\cos y=1$, 求 $\cos x+\sin y$ 的最大值。

注意到

$$(\sin x+\cos y)^2+(\cos x+\sin y)^2=2+2\sin(x+y)\leqslant 4$$

由题设 $\sin x+\cos y=1$, 代入上式

$$1^2+(\cos x+\sin y)^2\leqslant 4\Rightarrow\cos x+\sin y\leqslant\sqrt{3}$$

当 $x=\dfrac{\pi}{6}$, $y=\dfrac{\pi}{3}$ 时, $\sin x+\cos y=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1, \cos x+\sin y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$ 取到最大值。

65. 若 $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$, 试求

$$f(x)=|\sin x+\cos x+\tan x+\cot x+\sec x+\csc x|$$

的最小值。

设 $t=\cos x+\sin x$, 有

$$\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$$

且

$$\tan x+\cot x=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x}=\frac{2}{t^2-1}$$

$$\sec x+\csc x=\frac{\sin x+\cos x}{\cos x\sin x}=\frac{2t}{t^2-1}$$

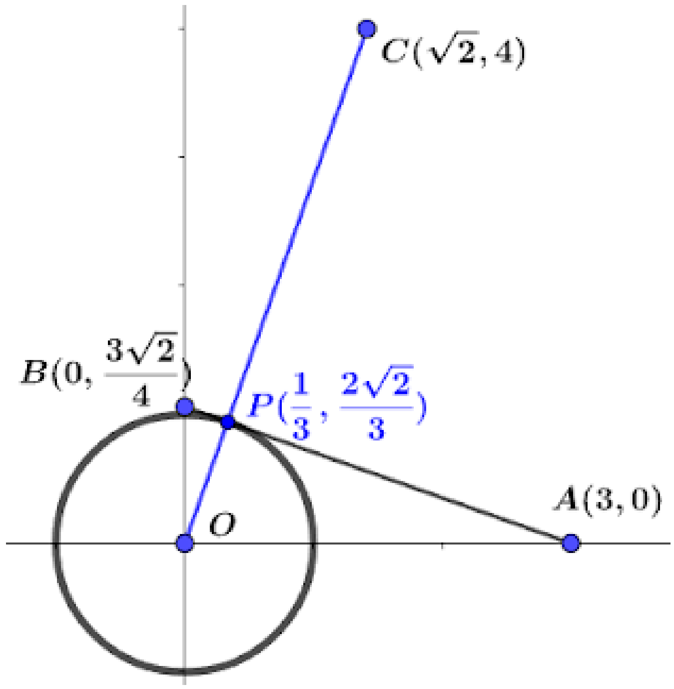
故

$$f(x)=g(t)=\left|t+\frac{2}{t^2-1}+\frac{2t}{t^2-1}\right|=\left|t-1+\frac{2}{t-1}+1\right|\geqslant\left|-2\sqrt{2}+1\right|=2\sqrt{2}-1$$

66. 试求

$$\sqrt{10-6\cos\theta}+\frac{1}{4}\sqrt{34-24\sqrt{2}\sin\theta}+\sqrt{19-2\sqrt{2}\cos\theta-8\sin\theta}$$

的最小值。



发现

$$\sqrt{10-6\cos\theta}=\sqrt{(\cos\theta-3)^2+\sin^2\theta}$$

$$\frac{1}{4}\sqrt{34-24\sqrt{2}\sin\theta}=\sqrt{\cos^2\theta-\left(\sin\theta-\frac{3}{4}\sqrt{2}\right)^2}$$

$$\sqrt{19-2\sqrt{2}\cos\theta-8\sin\theta}=\sqrt{(\cos\theta-\sqrt{2})^2+(\sin\theta-4)^2}$$

构造坐标系，设 $P(\cos\theta,\sin\theta)$ 在单位圆上,$A(3,0)$，$B(0,\frac{3\sqrt{2}}{4})$，$C(\sqrt{2},4)$，原式即为

$$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$$

直线 AB 方程式为

$$\sqrt{2}x+4y=3\sqrt{2},$$

故圆心 O 到 AB 的距离为 1，且当 $P=\left(\frac{1}{3},\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$,$OPC$ 共线，于是 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$ 最小值为

$$\overline{AB}+\overline{OC}-1=\sqrt{9+\frac{18}{16}}+\sqrt{18}-1=\frac{21}{4}\sqrt{2}-1$$

67. 若锐角 A,B,C 满足 $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2$, 求

$$\frac{1}{\sin^2 A\cos^4 B}+\frac{1}{\sin^2 B\cos^4 C}+\frac{1}{\sin^2 C\cos^4 A}$$

的最小值。

由柯西不等式,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sin^2 A\cos^4 B}+\frac{1}{\sin^2 B\cos^4 C}+\frac{1}{\sin^2 C\cos^4 A}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin^2 A\cos^4 B}+\frac{1}{\sin^2 B\cos^4 C}+\frac{1}{\sin^2 C\cos^4 A}\right)(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)\\&\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos^2 B}+\frac{1}{\cos^2 C}+\frac{1}{\cos^2 A}\right)^2\\&=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{\cos^2 A}+\frac{1}{\cos^2 B}+\frac{1}{\cos^2 C}\right)(\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C)\right]^2\geqslant\frac{81}{2}\end{aligned}$$

当 $\sin^2 A=\sin^2 B=\sin^2 C=\dfrac{2}{3},\cos^2 A=\cos^2 B=\cos^2 C=\dfrac{1}{3}$ 时等号成立,

$$\frac{1}{\sin^2 A\cos^4 B}+\frac{1}{\sin^2 B\cos^4 C}+\frac{1}{\sin^2 C\cos^4 A}=\frac{27}{2}\cdot 3=\frac{81}{2}.$$

68. 设 $\theta_1,\theta_2,\theta_3,\ldots,\theta_{2025}$ 皆为锐角, 且

$$\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2+\cdots+\sin^2\theta_{2025}=1,$$

求

$$\frac{\sin\theta_1+\sin\theta_2+\cdots+\sin\theta_{2025}}{\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cdots+\cos\theta_{2025}}$$

的最大值。

由题意,

$$\sin^2\theta_2+\cdots+\sin^2\theta_{2025}=1-\sin^2\theta_1=\cos^2\theta_1$$

由柯西不等式,

$$\cos^2\theta_1=(\sin^2\theta_2+\cdots+\sin^2\theta_{2025})(1^2+1^2+\cdots+1^2)\geqslant(\sin\theta_2+\sin\theta_3+\cdots+\sin\theta_{2025})^2$$

即

$$\cos\theta_1\geqslant\frac{\sin\theta_2+\cdots+\sin\theta_{2025}}{\sqrt{2024}}$$

同理,

$$\cos\theta_2 \geqslant \frac{\sin\theta_1+\sin\theta_3+\cdots+\sin\theta_{2025}}{\sqrt{2024}}, \ \cdots \ , \cos\theta_{2025} \geqslant \frac{\sin\theta_1+\cdots+\sin\theta_{2024}}{\sqrt{2024}}$$

将以上不等式相加得

$$\cos\theta_1+\cdots+\cos\theta_{2025} \geqslant \frac{2024}{\sqrt{2024}}(\sin\theta_1+\cdots+\sin\theta_{2025})$$

故

$$\frac{\sin\theta_1+\cdots+\sin\theta_{2025}}{\cos\theta_1+\cdots+\cos\theta_{2025}} \leqslant \frac{\sqrt{2024}}{2024} = \frac{\sqrt{506}}{1012}$$

69. 设 a,b,c 为三角形的三边长,Δ 为此三角形面积, 试证:

$$\Delta \leqslant \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$$

且等号成立当且仅当 $a=b=c$。

由海伦公式, 三角形面积为

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

其中 s 为半周长, 由 AM-GM 不等式,

$$\frac{s}{3} = \frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3} \geqslant \sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)}$$

故

$$\Delta \leqslant \sqrt{s\cdot\left(\frac{s}{3}\right)^3} = \frac{s^2}{3\sqrt{3}} = \frac{(a+b+c)^2}{12\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$$

等号成立条件为 $s-a=s-b=s-c$, 即 $a=b=c$ 时, 该三角形为正三角形, 面积为 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$

70. 设 a,b,c 是一个三角形的三边, 周长为 2。证明

$$\frac{3}{2} < a^2+b^2+c^2+2abc < 2.$$

由于周长为 2, 任意一边都不大于 1, 则三角形面积

$$A=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$$

小于 1/2。又 $A^2=(1-a)(1-b)(1-c)$, 因此

$$\begin{aligned}
&0<(1-a)(1-b)(1-c)<\frac{1}{4},\\
&0<1-(a+b+c)+(ab+ac+bc)-abc<\frac{1}{4},\\
&0<1-2+(ab+ac+bc)-abc<\frac{1}{4},\\
&1<(ab+ac+bc)-abc<\frac{5}{4},
\end{aligned}$$

于是

$$2<2(ab+ac+bc)-2abc<\frac{5}{2}.$$

另一方面,

$$a^2+b^2+c^2+2abc=(a+b+c)^2+(2abc-2(ab+ac+bc)),$$

因此

$$4-\frac{5}{2}<a^2+b^2+c^2+2abc<4-2,$$

即

$$\frac{3}{2}<a^2+b^2+c^2+2abc<2.$$

71. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A,B,C 所对的边为 a,b,c, 且

$$a^2+b^2+2c^2=8$$

求 $\triangle ABC$ 面积的最大值。

解法一

由余弦定理

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{8-3c^2}{2ab}$$

又

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ab\sqrt{1-\left(\frac{8-3c^2}{2ab}\right)^2}=\frac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2-(8-3c^2)^2}$$

由不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$,

$$S\leqslant\frac{1}{4}\sqrt{(a^2+b^2)^2-(8-3c^2)^2}=\frac{1}{4}\sqrt{(8-2c^2)^2-(8-3c^2)^2}=\frac{1}{4}\sqrt{16c^2-5c^4}$$

对于 c^2 的函数 $f(c^2)=16c^2-5c^4$, 令导数为零得 $c^2=\dfrac{8}{5}$, 代入得

$$S_{\max}=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{64}{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

解法二

以 AB 所在直线为 x 轴,AB 中垂线为 y 轴, 设 $A(-\dfrac{c}{2},0),B(\dfrac{c}{2},0),C(x,y)$, 由条件

$$a^2+b^2+2c^2=8$$

得

$$(x-\frac{c}{2})^2+y^2+(x+\frac{c}{2})^2+y^2+2c^2=8$$

即

$$x^2+y^2=4-\frac{5c^2}{4}$$

$\triangle ABC$ 面积为

$$S=\frac{1}{2}c|y|$$

由 $y^2\leqslant 4-\dfrac{5c^2}{4}$, 得

$$S\leqslant\frac{1}{2}c\sqrt{4-\frac{5c^2}{4}}=\frac{1}{4}\sqrt{16c^2-5c^4}$$

解法同上。

72. 在 $\triangle ABC$ 中, 试求

$$\frac{2\sin^2 A+\sin B\sin C}{\sin A\sin B\sin C}$$

的最小值。

由余弦定理,

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\geqslant 1-\frac{a^2}{2bc}\Rightarrow\frac{2a^2}{bc}\geqslant 4-4\cos A$$

由正弦定理,

$$\frac{2\sin^2 A+\sin B\sin C}{\sin A\sin B\sin C}=\frac{1}{\sin A}\left(\frac{2a^2}{bc}+1\right)\geqslant\frac{5-4\cos A}{\sin A}$$

设 $\tan\frac{A}{2}=t>0$, 则

$$\cos A=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \sin A=\frac{2t}{1+t^2}$$

代入得

$$\frac{5-4\cos A}{\sin A}=\frac{5-4\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{9t^2+1}{2t}$$

由 AM-GM 不等式:

$$\frac{9t^2+1}{2t}\geqslant\frac{2\sqrt{9t^2\cdot 1}}{2t}=3$$

当 $A=\arcsin\frac{3}{5}$, $B=C=\frac{\pi-A}{2}$ 时等号成立, 原式取最小值 3

73. 在锐角三角形 $\triangle ABC$ 中, 角 A,B,C 所对的边为 a,b,c, 且

$$a^2+2ab\cos C=3b^2$$

求 $\tan A\tan B\tan C$ 的最小值。

解法一

由余弦定理, 有

$$2ab\cos C=a^2+b^2-c^2$$

代入原式得

$$a^2+(a^2+b^2-c^2)=3b^2\Rightarrow c^2=2a^2-2b^2\Rightarrow b^2+c^2-a^2=\frac{c^2}{2}\Rightarrow\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{c^2}{4bc}$$

由正、余弦定理得

$$\cos A=\frac{\sin C}{4\sin B}\Rightarrow 4\sin B\cos A=\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$$

有 $3\sin B\cos A=\sin A\cos B$.

$\because\triangle ABC$ 是锐角三角形, $\cos A\neq 0,\cos B\neq 0,\therefore\tan A=3\tan B$

现设 $\tan B=t$, 又

$$\tan C=-\tan(A+B)=-\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=\frac{4t}{3t^2-1}$$

所以

$$\tan A\tan B\tan C=3t\cdot t\cdot\frac{4t}{3t^2-1}=\frac{12t^3}{3t^2-1}$$

对函数

$$f(t)=\frac{12t^3}{3t^2-1},t>0$$

求导

$$f'(t)=\frac{36t^2(3t^2-1)-12t^3\cdot 6t}{(3t^2-1)^2}=\frac{36t^2(t^2-1)}{(3t^2-1)^2}$$

令 $f'(t)=0$, 解得 $t=1$; 当 $t\in(0,1), f'(t)<0$, 当 $t\in(1,\infty), f'(t)>0$,

$\therefore$ $f(t)$ 在 $t=1$ 有最小值 $f(1)=6$。

解法二

以 AB 所在直线为 x 轴, AB 中垂线为 y 轴, 设 $A(-\frac{c}{2},0), B(\frac{c}{2},0), C(x,y)$, 由距离公式

$$a^2=(x-\frac{c}{2})^2+y^2,\quad b^2=(x+\frac{c}{2})^2+y^2$$

代入已知条件

$$2b^2+c^2-2a^2=0 \implies 2\left[(x+\frac{c}{2})^2+y^2\right]+c^2-2\left[(x-\frac{c}{2})^2+y^2\right]=0$$

展开化简得

$$4cx+c^2=0 \implies x=-\frac{c}{4}$$

作 $CD\perp AB$ 于 D, 则 D 点坐标为 $(x,0)=\left(-\frac{c}{4},0\right)$。发现

$$AD=\left|-\frac{c}{2}-\left(-\frac{c}{4}\right)\right|=\frac{c}{4}\quad \text{且}\quad BD=\left|\frac{c}{2}-\left(-\frac{c}{4}\right)\right|=\frac{3c}{4}$$

所以 $BD=3AD$, 又

$$\tan A=\frac{CD}{AD}=\frac{y}{\frac{c}{4}}$$

$$\tan B=\frac{CD}{BD}=\frac{y}{\frac{3c}{4}}$$

因此有

$$\tan A=3\tan B$$

解法同上。

74. 已知非负实数 a,b,c,d 满足 $a\leqslant 1, a+b\leqslant 5, a+b+c\leqslant 14, a+b+c+d\leqslant 30$, 试证

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}\leqslant 10$$

由柯西不等式,

$$\begin{aligned}
&(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d})^2\\
&=\left(\sqrt{a}+\frac{\sqrt{b}}{2}+\frac{\sqrt{b}}{2}+\frac{\sqrt{c}}{3}+\frac{\sqrt{c}}{3}+\frac{\sqrt{c}}{3}+\frac{\sqrt{d}}{4}+\frac{\sqrt{d}}{4}+\frac{\sqrt{d}}{4}+\frac{\sqrt{d}}{4}\right)^2\\
&\leqslant\left(a+\frac{b}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{9}+\frac{c}{9}+\frac{c}{9}+\frac{d}{16}+\frac{d}{16}+\frac{d}{16}+\frac{d}{16}\right)(1+\ldots+1)=10(a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}+\frac{d}{4})
\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}
a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}+\frac{d}{4}&=\frac{1}{4}(a+b+c+d)+\frac{1}{12}(a+b+c)+\frac{1}{6}(a+b)+\frac{1}{2}a\\
&\leqslant\frac{30}{4}+\frac{14}{12}+\frac{5}{6}+\frac{1}{2}=10
\end{aligned}$$

故

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}\leqslant 10$$

75. 已知 a,b,c 为正实数, 且满足 $abc=1$, 试证明:

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geqslant\frac{3}{2}$$

由柯西不等式,

$$\left(\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\right)(a(b+c)+b(a+c)+c(a+b))\geqslant\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2$$

注意到

$$a(b+c)+b(a+c)+c(a+b)=2(ab+bc+ca),$$

且

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2=\left(\frac{ab+bc+ca}{abc}\right)^2=(ab+bc+ca)^2$$

故由 AM-GM 不等式,

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geqslant\frac{1}{2}(ab+bc+ca)\geqslant\frac{3}{2}\sqrt[3]{(abc)^2}=\frac{3}{2}$$

由 $abc=1$, 有

$$\sum_{cyc}\frac{1}{a^3(b+c)}=\sum_{cyc}\frac{bc}{a^2(b+c)}=\sum_{cyc}\frac{(\frac{1}{a})^2}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}.$$

利用不等式

$$\frac{x^2}{y}\geqslant x-\frac{y}{4},\quad x,y>0,$$

得到

$$\sum_{cyc}\frac{(\frac{1}{a})^2}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\geqslant\sum_{cyc}\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

由 AM-GM 不等式:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqslant\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}=\frac{3}{2}.$$

因此原不等式成立。

76. 已知 $0\leqslant x,y,z\leqslant 1$ 且

$$xyz=(1-x)(1-y)(1-z),$$

证明

$$x(1-z)+y(1-x)+z(1-y)\geqslant\frac{3}{4}.$$

由于 $0\leqslant x\leqslant 1$, 有 $(x-\frac{1}{2})^2\geqslant 0$, 从而 $0\leqslant x(1-x)\leqslant\frac{1}{4}$。对 y,z 同理成立。于是

$$xyz(1-x)(1-y)(1-z)\leqslant\frac{1}{64}.$$

由已知关系 $xyz=(1-x)(1-y)(1-z)$, 左端等于 $(xyz)^2$, 因此

$$(xyz)^2\leqslant\frac{1}{64}\quad\Longrightarrow\quad xyz\leqslant\frac{1}{8}.$$

再利用已知等式可得

$$x(1-z)+y(1-x)+z(1-y)=x+y+z-(xy+yz+zx)=1-2xyz,$$

其中最后一步由 $xyz=(1-x)(1-y)(1-z)$ 展开并化简得到。于是

$$x(1-z)+y(1-x)+z(1-y)=1-2xyz\geqslant 1-2\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{4}.$$

当 $x=y=z=\frac{1}{2}$ 时取等号。因此不等式成立, 且在 $x=y=z=\frac{1}{2}$ 时达等号。

77. 设正实数 a,b,c,x,y,z 满足 $a+b+c=x+y+z$, 证明

$$\frac{2a^2}{a+x}+\frac{2b^2}{b+y}+\frac{2c^2}{c+z}\geqslant a+b+c$$

由柯西不等式,

$$\left(\frac{2a^2}{a+x}+\frac{2b^2}{b+y}+\frac{2c^2}{c+z}\right)(2(a+x)+2(b+y)+2(c+z))\geqslant(2a+2b+2c)^2$$

又 $a+b+c=x+y+z$, 得

$$\frac{2a^2}{a+x}+\frac{2b^2}{b+y}+\frac{2c^2}{c+z}\geqslant a+b+c.$$

78. 已知 $a,b,c,d>0$, 证明不等式

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2}+\frac{b^3+c^3+d^3}{b^2+c^2+d^2}+\frac{c^3+d^3+a^3}{c^2+d^2+a^2}+\frac{d^3+a^3+b^3}{d^2+a^2+b^2}\geqslant a+b+c+d.$$

由 $a,b>0$, 有

$$0\leqslant(a+b)(a-b)^2=(a^2-b^2)(a-b)=a^3-a^2b-b^2a+b^3$$

可知

$$a^3+b^3\geqslant a^2b+ab^2,\quad b^3+c^3\geqslant b^2c+bc^2,\quad c^3+a^3\geqslant c^2a+ca^2.$$

于是

$$\begin{aligned}3(a^3+b^3+c^3)&\geqslant a^3+b^3+c^3+a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2\\&=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\end{aligned}$$

因此

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2}\geqslant\frac{a+b+c}{3}$$

故

$$\begin{aligned}&\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2}+\frac{b^3+c^3+d^3}{b^2+c^2+d^2}+\frac{c^3+d^3+a^3}{c^2+d^2+a^2}+\frac{d^3+a^3+b^3}{d^2+a^2+b^2}\\&\geqslant\frac{1}{3}\cdot 3(a+b+c+d)=a+b+c+d\end{aligned}$$

79. 已知正实数 a,b,c,d, 求
$$\frac{ab+bc+cd}{a^2+b^2+c^2+d^2}$$
的最大值。

对任意正数 t, 由 AM-GM 不等式,
$$ab \leqslant \frac{t}{2}a^2+\frac{1}{2t}b^2, \quad bc \leqslant \frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}c^2, \quad cd \leqslant \frac{1}{2t}c^2+\frac{t}{2}d^2.$$
取 $t=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$, 使得
$$\frac{t}{2}=\frac{1}{2t}+\frac{1}{2}$$
则
$$ab+bc+cd \leqslant \frac{t}{2}(a^2+b^2+c^2+d^2).$$
因此最大值为
$$\frac{t}{2}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$$
当 $ta=b=c=td$ 时等号成立。

80. 已知正数 a,b,c 满足 $abc>1$, 求 $\dfrac{abc(a+b+c+8)}{abc-1}$ 的最小值。

设 $\lambda=\dfrac{abc(a+b+c+8)}{abc-1}>0$, 整理得
$$a+b+c+\frac{\lambda}{abc}=\lambda-8$$
由 AM-GM 不等式得
$$a+b+c+\frac{\lambda}{abc} \geqslant 4\sqrt[4]{abc \cdot \frac{\lambda}{abc}}=4\sqrt[4]{\lambda}$$
于是
$$\lambda-8 \geqslant 4\sqrt[4]{\lambda}$$
令 $k=\sqrt[4]{\lambda}>0$, 则不等式转化为
$$k^4-4k-8 \geqslant 0 \Rightarrow (k-2)(k^3+2k^2+4k+4) \geqslant 0$$
由于 $k>0, k^3+2k^2+4k+4>0$, 故 $k \geqslant 2$, 即
$$\lambda \geqslant 2^4=16$$
等号成立当且仅当 $a=b=c=2$

81. 已知 $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$, 求 $x^2+2y-2z+3$ 的取值范围。

由柯西不等式,

$$[y+(-z)]^2\leqslant(1+1)[y^2+(-z)^2]\leqslant 2(x^2+y^2+z^2)\leqslant 2$$

则 $y-z\geqslant-\sqrt{2}$, 且 $x^2\geqslant 0$, 可得

$$x^2+2y-2z+3\geqslant 0+2(-\sqrt{2})+3=3-2\sqrt{2}$$

当且仅当 $x=0, y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 等号成立;
又因为 $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$, 则 $x^2\leqslant 1-y^2-z^2$, 可得

$$x^2+2y-2z+3\leqslant 4-(y^2+z^2-2y+2z)$$

且

$$y^2+z^2-2y+2z=(y-1)^2+(z+1)^2-2,$$

设点 $A(-1,1)$ 和标准单位圆上一点 $P(y,z)$, 则

$$(y-1)^2+(z+1)^2-2=|PA|^2-2,$$

又因为 $|PA|^2\geqslant(|OA|-1)^2=3-2\sqrt{2}$, 可得 $(y-1)^2+(z+1)^2-2\geqslant 1-2\sqrt{2}$, 则

$$x^2+2y-2z+3\leqslant 4-(y^2+z^2-2y+2z)\leqslant 3+2\sqrt{2},$$

当且仅当 $x=0, y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}, z=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 等号成立。
$\therefore$ 取值范围是 $[3-2\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}]$.

82. 已知 $x,y,z>0$, 求

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{y^2+4z^2}+\sqrt{z^2+16x^2}}{9x+3y+5z}$$

的最小值。

(待解)

83. 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}<2.$$

我们证明对任意正整数 n, 都有

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} < \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}}.$$

将不等式两边同乘以 $\sqrt{n(n+1)}$, 等价于

$$1 < 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n}.$$

等价地,

$$2\sqrt{n(n+1)} < n + (n+1).$$

由于 n 与 $n+1$ 均为正数, 由算术平均与几何平均不等式可知

$$2\sqrt{n(n+1)} \leqslant n + (n+1),$$

且不等号严格成立, 因此上述不等式成立。

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} < \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}} \right).$$

右端为裂项求和,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}} \right) = 2.$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} < 2.$$

84. 假设实数 $a, b, c \in [-1, 1]$ 并且满足

$$1 + 2abc \geqslant a^2 + b^2 + c^2.$$

证明对所有正整数 n 有

$$1 + 2(abc)^n \geqslant a^{2n} + b^{2n} + c^{2n}.$$

约束条件可以改写为

$$(a - bc)^2 \leqslant (1 - b^2)(1 - c^2). \tag{1}$$

利用 Cauchy-Schwarz 不等式，有

$$\begin{aligned}(a^{n-1}+a^{n-2}bc+\cdots+b^{n-1}c^{n-1})^2 &\leqslant (|a|^{n-1}+|a|^{n-2}|bc|+\cdots+|bc|^{n-1})^2\\ &\leqslant (1+|bc|+\cdots+|bc|^{n-1})^2\\ &\leqslant (1+|b|^2+\cdots+|b|^{2(n-1)})(1+|c|^2+\cdots+|c|^{2(n-1)}).\end{aligned}$$

将不等式 (1) 乘以上式得到

$$\begin{aligned}(a-bc)^2(a^{n-1}+a^{n-2}bc+\cdots+b^{n-1}c^{n-1})^2 &\leqslant ((1-b^2)(1+|b|^2+\cdots+|b|^{2(n-1)}))\\ &\quad\times((1-c^2)(1+|c|^2+\cdots+|c|^{2(n-1)}))\\ (a^n-b^nc^n)^2 &\leqslant (1-b^{2n})(1-c^{2n}),\end{aligned}$$

从而得到

$$1+2(abc)^n \geqslant a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}.$$

85. 设 $a_1,\ldots,a_n$ 为正实数，且设 $s=a_1+\cdots+a_n$。证明

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\leqslant 1+\frac{s}{1!}+\frac{s^2}{2!}+\cdots+\frac{s^n}{n!}.$$

由算术—几何均值不等式 (A.M.-G.M.)，有

$$\left(\prod_{j=1}^{n}(1+a_j)\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(1+a_j)=1+\frac{s}{n}.$$

因此

$$\prod_{j=1}^{n}(1+a_j)\leqslant\left(1+\frac{s}{n}\right)^n.$$

对右端使用二项展开得

$$\left(1+\frac{s}{n}\right)^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{s^j}{n^j}=\sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{(n-j)!\,j!}\,\frac{s^j}{n^j}.$$

注意当 $0\leqslant j\leqslant n$ 时

$$\frac{n!}{(n-j)!\,n^j}=\prod_{k=0}^{j-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)\leqslant 1,$$

因此每一项满足

$$\frac{n!}{(n-j)!\,j!}\,\frac{s^j}{n^j}\leqslant\frac{s^j}{j!}.$$

将这些不等式代入二项和得到

$$\prod_{j=1}^{n}(1+a_j) \leqslant \sum_{j=0}^{n}\frac{s^j}{j!},$$

即

$$(1+a_1)\cdots(1+a_n) \leqslant 1+\frac{s}{1!}+\frac{s^2}{2!}+\cdots+\frac{s^n}{n!},$$

证毕。

86. 设 n 个正实数的最小值为 m, 最大值为 M, 记它们的算术平均为 A, 几何平均为 G。证明

$$A-G \geqslant \frac{1}{n}(\sqrt{M}-\sqrt{m})^2.$$

设这 n 个正实数为 $x_1,\ldots,x_n$, 且不妨令 $x_1=m,\ x_n=M$。由题不等式等价于

$$A-G \geqslant \frac{(\sqrt{M}-\sqrt{m})^2}{n},$$

即等价于

$$\sum_{j=1}^{n}x_j - n\Big(\prod_{j=1}^{n}x_j\Big)^{1/n} \geqslant M-2\sqrt{Mm}+m.$$

移项得等价形式

$$\sum_{j=2}^{n-1}x_j + 2\sqrt{Mm} \geqslant n\Big(\prod_{j=1}^{n}x_j\Big)^{1/n}.$$

把右端的几何平均下界由算术—几何均值不等式给出：对这 n 个数

$$\sqrt{Mm},\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_{n-1},\ \sqrt{Mm}$$

应用 A.M.-G.M., 有

$$\frac{1}{n}\Big(\sum_{j=2}^{n-1}x_j+2\sqrt{Mm}\Big) \geqslant \Big(\sqrt{Mm}\cdot\prod_{j=2}^{n-1}x_j\cdot\sqrt{Mm}\Big)^{1/n}.$$

右端化简为

$$\Big(Mm\prod_{j=2}^{n-1}x_j\Big)^{1/n} = \Big(x_1x_n\prod_{j=2}^{n-1}x_j\Big)^{1/n} = \Big(\prod_{j=1}^{n}x_j\Big)^{1/n}.$$

两边同时乘以 n 即得

$$\sum_{j=2}^{n-1}x_j + 2\sqrt{Mm} \geqslant n\Big(\prod_{j=1}^{n}x_j\Big)^{1/n},$$

从而恢复到所需不等式

$$A-G \geqslant \frac{1}{n}(\sqrt{M}-\sqrt{m})^2.$$

证毕。

87. 设 $x_1,\ldots,x_n \geqslant -1$, 且

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^3 = 0$$

证明

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant \frac{n}{3}$$

当 $x \geqslant -1$ 时, 有不等式

$$0 \leqslant x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} = (x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$$

将 $x_1,\ldots,x_n$ 代入上式并求和, 得到

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{n}\left(x_i^3 - \frac{3}{4}x_i + \frac{1}{4}\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i^3 - \frac{3}{4}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{n}{4}$$

由已知条件 $\sum_{i=1}^{n} x_i^3 = 0$, 可得

$$0 \leqslant -\frac{3}{4}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{n}{4},$$

从而

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant \frac{n}{3}$$

注：当且仅当 $n = 9k$, 其中 k 个 $x_i = -1$, 其余 $8k$ 个 $x_i = \frac{1}{2}$ 时取等号。

88. 已知非负实数 $x_1, x_2, \ldots, x_5$ 满足 $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_5^2 = 4$. 求下列表达式的最大值:

$$S = \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{x_i+1} \sum_{i=1}^{5} x_i$$

当 $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1, x_5 = 0$ 时, $S = 12$, 下面证明 $S \leqslant 12$. 注意到

$$\frac{x(x-1)^2}{x+1} \geqslant 0$$

对 $x \geqslant 0$ 成立, 由此可得

$$\sum_{i=1}^{5} \frac{x_i(x_i-1)^2}{x_i+1} \geqslant 0$$

展开可知

$$\sum_{i=1}^{5}\left(x_i^2-3x_i+4-\frac{4}{x_i+1}\right)\geqslant 0$$

整理得

$$\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{x_i+1}\leqslant 6-\frac{3}{4}\sum_{i=1}^{5}x_i$$

由上式及 AM-GM 不等式可知

$$S\leqslant\frac{4}{3}\left(6-\frac{3}{4}\sum_{i=1}^{5}x_i\right)\left(\frac{3}{4}\sum_{i=1}^{5}x_i\right)\leqslant\frac{4}{3}\times 3^2=12$$

数列与级数

1. 设 a,b,c 三数成等比数列，且满足 $a+b+c=9$ 及 $a^2+b^2+c^2=189$，求 b。

关键：运用恒等式

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$$

又已知 $b^2=ac$，故

$$81=189+2(b(9-b)+b^2)\Rightarrow b=6$$

2. 已知 a,b,c,d 成等差数列，且实数 x,y,z,u 满足

$$\begin{cases}a+b+c+d=60\\x+y+z+u=12\\az+bu+cx+dy=168\end{cases}$$

求 $ay+bx+cu+dz$。

已知 a,b,c,d 成等差数列，于是

$$\begin{aligned}ay+bx+cu+dz+168&=ay+bx+cu+dz+(az+bu+cx+dy)\\&=(a+d)(y+z)+(b+c)(x+u)\\&=30(x+y+z+u)=360\end{aligned}$$

故

$$ay+bx+cu+dz=192$$

3. 已知 $a_1=-1$，$a_{n+1}=2a_n-3$，求 a_{2017}。

由递推式，

$$a_{n+1}-3=2(a_n-3),$$

所以 $a_1-3,a_2-3,\dots$ 成等比数列，公比为 2。

$$a_{n+1}-3=2^n(a_1-3)=2^n(-1-3)=-2^{n+2}\Rightarrow a_{2017}=-2^{2018}+3.$$

由

$$a_{n+1}-a_n=2a_n-3-(2a_{n-1}-3)=2(a_n-a_{n-1}),$$

所以 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 为等比数列, 公比为 2, 因此

$$\begin{aligned}a_n&=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})+a_1\\&=\frac{(a_2-a_1)(2^{n-1}-1)}{2-1}-1\\&=(2a_1-3-a_1)(2^{n-1}-1)=-2^{n+1}+3\end{aligned}$$

所以

$$a_{2017}=-2^{2018}+3$$

4. 已知数列 $\{a_r\}$ 定义为

$$a_{r+1}=a_r+\frac{2r}{r^4+r^2+1},\quad a_1=0,\quad r\in\mathbb{N},$$

求 a_{61} 的精确值。

由递推关系, 对 $r=1,2,\ldots,60$ 累加得

$$a_{61}-a_1=\sum_{r=1}^{60}\frac{2r}{r^4+r^2+1}.$$

由于 $a_1=0$, 因此

$$a_{61}=\sum_{r=1}^{60}\frac{2r}{r^4+r^2+1}.$$

注意到

$$r^4+r^2+1=(r^2-r+1)(r^2+r+1),$$

于是

$$\frac{2r}{r^4+r^2+1}=\frac{2r}{(r^2-r+1)(r^2+r+1)}=\frac{1}{r^2-r+1}-\frac{1}{r^2+r+1}.$$

因此

$$a_{61}=\sum_{r=1}^{60}\left(\frac{1}{r^2-r+1}-\frac{1}{r^2+r+1}\right).$$

这是一个望远镜求和, 展开可得

$$a_{61} = \left(\frac{1}{1^2-1+1} - \frac{1}{1^2+1+1}\right) + \left(\frac{1}{2^2-2+1} - \frac{1}{2^2+2+1}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{60^2-60+1} - \frac{1}{60^2+60+1}\right).$$

中间项两两抵消, 最终剩下

$$a_{61} = 1 - \frac{1}{60^2+60+1} = 1 - \frac{1}{3661}.$$

因此

$$a_{61} = \frac{3660}{3661}.$$

5. 数列 $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ 满足 $a_0 = 3$, 且

$$(3 - a_{n-1})(6 + a_n) = 18,$$

证明

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = \frac{1}{3}\left(2^{n+2} - n - 4\right)$$

由递推关系

$$(3 - a_{n+1})(a_n + 6) = 18 \implies a_{n+1} = \frac{3a_n}{a_n + 6} \tag{1}$$

两边加 3 得到

$$a_{n+1} + 3 = \frac{3a_n}{a_n+6} + 3 = \frac{6(a_n+3)}{a_n+6} \tag{2}$$

两式相比得

$$\frac{a_{n+1}+3}{a_{n+1}} = \frac{2(a_n+3)}{a_n}$$

故数列 $\left\{\dfrac{a_n+3}{a_n}\right\}$ 是首项为 2, 公比为 2 的等比数列, 解得

$$\frac{a_n+3}{a_n} = 2^{n+1} \Rightarrow a_n = \frac{3}{2^{n+1}-1}$$

因此

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{k+1}-1}{3} = \frac{1}{3}\left(2^{n+2} - n - 4\right)$$

6. 设一函数 f 的定义域为所有正整数, 如果 $f(1)=101$, 且对所有正整数 $n>1$ 皆有

$$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n)=n^2 f(n)$$

求 $f(100)$ 的值。

发现

$$f(n)=\sum_{k=1}^{n} f(k)-\sum_{k=1}^{n-1} f(k)=n^2 f(n)-(n-1)^2 f(n-1)$$

即

$$f(n)=\frac{n-1}{n+1} f(n-1)$$

于是

$$f(100)=\frac{99\cdot 98\cdots 1}{101\cdot 100\cdots 3} f(1)=\frac{2}{101\cdot 100}\cdot 101=\frac{1}{50}$$

7. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{a_n}$, 则 $\lfloor a_{2025}\rfloor=$

由题意可知

$$a_{n+1}^2=a_n^2+\frac{1}{a_n^2}+2$$

所以有

$$a_{2025}^2=a_1^2+2\times(2025-1)+\left(\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\cdots+\frac{1}{a_{2024}^2}\right)$$

又因为 $a_1=1$, 且有

$$\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\cdots+\frac{1}{a_{2024}^2}<47$$

所以

$$63=\sqrt{3969}<a_{2025}<\sqrt{4096}=64$$

故 $[a_{2025}]=63$.

8. 设 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ 满足 $f(1)=\frac{3}{2}$, 且对所有 $n\in\mathbb{N}$ 且满足

$$f(n+1)=\left(1+\frac{1}{n+1}\right) f(n)+\left(1+\frac{n}{2}\right) f(1)+n^2+2n,$$

求 $f(40)$。

将递推式改写为

$$f(n+1)=\frac{n+2}{n+1}f(n)+g(n),$$

其中 $g(n)=(n+2)\left(n+\frac{3}{4}\right)$, 于是

$$\begin{aligned}
f(40)&=\frac{41}{40}f(39)+g(39)\\
&=\frac{41}{39}f(38)+\frac{41}{40}g(38)+g(39)\\
&=\cdots\\
&=\frac{41}{2}f(1)+\sum_{k=1}^{39}\frac{41}{k+2}\ g(k)\\
&=\frac{41}{2}\cdot\frac{3}{2}+41\sum_{k=1}^{39}(k+\frac{3}{4})\\
&=\frac{123}{4}+\frac{39\cdot 40}{2}+39\cdot\frac{3}{4}\\
&=33210
\end{aligned}$$

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=a_2=a_3=1$, 令 $b_n=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}$, $n\in\mathbb{N}$, 若 $\{b_n\}$ 是公比为 3 的等比数列, 求 a_{100} 的值。

由条件知

$$b_n=b_1\cdot 3^{n-1}=3^n$$

因此

$$a_{n+3}-a_n=b_{n+1}-b_n=3^{n+1}-3^n=2\cdot 3^n$$

于是

$$\begin{aligned}
a_{100}=a_1+\sum_{k=1}^{33}(a_{3k+1}-a_{3k-2})=1+\sum_{k=1}^{33}2\cdot 3^{3k-2}\\
=1+6\cdot\frac{27^{33}-1}{27-1}=1+\frac{3}{13}(3^{99}-1)=\frac{3^{100}+10}{13}
\end{aligned}$$

10. 已知递归数列满足

$$a_1=\frac{1}{2},\quad a_{n+1}=\frac{a_n+3}{2a_n-4},$$

求通项公式 a_n。

先求不动点, 设 $x=\dfrac{x+3}{2x-4}$, 得 $2x^2-5x-3=0$, 所以不动点为 $x=-\dfrac{1}{2},3$, 于是

$$R_n=\frac{a_n+\frac{1}{2}}{a_n-3}.$$

且

$$R_{n+1}=\frac{a_{n+1}+\frac{1}{2}}{a_{n+1}-3}=-\frac{2}{5}R_n,$$

即 $\{R_n\}$ 为公比 $-\dfrac{2}{5}$ 的等比数列, 由于 $R_1=\frac{a_1+\frac{1}{2}}{a_1-3}=-\frac{2}{5}$, 故

$$R_n=\left(-\frac{2}{5}\right)^n$$

于是

$$a_n=\frac{3R_n+\frac{1}{2}}{R_n-1}=\frac{6\left(-\frac{2}{5}\right)^n+1}{2\left(\left(-\frac{2}{5}\right)^n-1\right)}=\frac{5^n+6(-2)^n}{2\left((-2)^n-5^n\right)}.$$

11. 设实数数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_na_{n+2}-a_{n+1}^2-(n+1)a_na_{n+1}=0$$

已知 $a_1=1,a_2=2018$, 求

$$\frac{a_{2018}\cdot a_{2016}}{a_{2017}^2}$$

由递推关系得

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}}{a_n}+(n+1)$$

由 $\dfrac{a_2}{a_1}=2018$, 有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=2018+\sum_{k=2}^{n}k=2017+\frac{n(n+1)}{2}$$

故

$$\frac{a_{2018}a_{2016}}{a_{2017}^2}=\frac{2017\left(1+\frac{2018}{2}\right)}{2017\left(1+\frac{2016}{2}\right)}=\frac{1010}{1009}$$

12. 已知数列 $\{a_n\}$ 由递推关系定义如下:

$$a_0=1,\quad a_{n+1}=\frac{a_n}{2(n+1)},\quad n\geqslant 0,$$

若函数 f 定义为

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,$$

求 $f(2)$ 的精确值。

根据递推关系，可以看出所有奇数项 $a_{2n+1}=0$。偶数项为

$$a_0=1,\quad a_2=\frac{1}{2},\quad a_4=\frac{1}{8},\quad a_6=\frac{1}{48},\ldots$$

满足公式

$$a_{2n}=\frac{1}{2^nn!}.$$

因此函数 f 可表示为

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^nn!}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n=e^{x^2/2}.$$

所以

$$f(2)=e^{2^2/2}=e^2.$$

13. 设 $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为一列正实数，且 $b_0=1$,

$$b_n=2+\sqrt{b_{n-1}}-2\sqrt{1+\sqrt{b_{n-1}}}$$

计算

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n2^n$$

令 $a_n=1+\sqrt{b_n}$，其中 $n\geqslant 0$。则 $a_n>1$,$a_0=2$，并且

$$a_n=1+\sqrt{1+a_{n-1}-2\sqrt{a_{n-1}}}=\sqrt{a_{n-1}}$$

因此

$$a_n=2^{2^{-n}}$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} b_n 2^n &= \sum_{n=1}^{N}(a_n-1)^2 2^n \\ &= \sum_{n=1}^{N}\left(a_n^2 2^n - a_n 2^{n+1} + 2^n\right) \\ &= \sum_{n=1}^{N}\left((a_{n-1}-1)^2 2^n - (a_n-1)^2 2^{n+1}\right) \\ &= (a_0-1)^2 2 - (a_N-1)^2 2^{N+1} \\ &= 2 - 2\frac{2^{2^{-N}}-1}{2^{-N}}\end{aligned}$$

令 $x = 2^{-N}$, 当 $N \to \infty$ 时有 $x \to 0$, 从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n 2^n = \lim_{N\to\infty}\left(2 - 2\frac{2^{2^{-N}}-1}{2^{-N}}\right) = \lim_{x\to 0}\left(2 - 2\frac{2^x-1}{x}\right) = 2 - 2\ln 2$$

14. 一列 11 个正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_{11}$ 满足 $a_1 = 4$, $a_{11} = 1024$, 并且对 $2 \leqslant n \leqslant 11$ 有

$$a_n + a_{n-1} = \frac{5}{2}\sqrt{a_n a_{n-1}}.$$

求满足条件的序列数量 S 。

设 $a_n = x, a_{n-1} = y$, 解

$$x + y = \frac{5}{2}\sqrt{xy}$$

得

$$x = 4y \text{ 或 } x = \frac{y}{4}.$$

考虑二叉树, 每一步可以乘以 4 或除以 4。从 $a_1 = 4$ 到 $a_{11} = 1024$ 共 10 步:

$$4^m \cdot 4^{-(10-m)} = 4^4 \Rightarrow m = 7$$

即有 7 步乘以 4,3 步除以 4。可能序列数为选择 3 步除以 4 的位置数:

$$S = {}^{10}C_3 = 120$$

15. 已知复数列 $\{z_n\}$ 满足 $z_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, z_{n+1} = \overline{z_n}(1 + z_n i)$, 其中 $n \in \mathbb{N}$, 求 z_{2021} 的值。

对 $n \in \mathbb{N}$, 设 $z_n = a_n + b_n i,\ a_n, b_n \in \mathbb{R}$, 则

$$a_{n+1} + b_{n+1} i = z_{n+1} = \overline{z_n}(1 + z_n i) = \overline{z_n} + |z_n|^2 i = a_n - b_n i + (a_n^2 + b_n^2) i$$

因此

$$a_{n+1} = a_n = a_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, b_{n+1} = a_n^2 + b_n^2 - b_n = b_n^2 - b_n + \frac{3}{4}$$

即

$$b_{n+1} - \frac{1}{2} = b_n^2 - b_n + \frac{1}{4} = (b_n - \frac{1}{2})^2$$

所以当 $n \geqslant 2$,

$$b_n = \frac{1}{2} + (b_1 - \frac{1}{2})^{2^{n-1}} = \frac{1}{2} + (-\frac{1}{2})^{2^{n-1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{2^{n-1}}}$$

于是

$$z_{2021} = a_{2021} + b_{2021} i = \frac{\sqrt{3}}{2} + (\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{2^{2020}}}) i$$

16. 已知

$$a_0 = \frac{1}{2}, a_n = \left(\frac{1 + a_{n-1}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, \forall n \in \mathbb{N},$$

求 $\lim\limits_{n \to \infty} 4^n \cdot (1 - a_n)$。

由

$$\cos\theta = \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

可得 $a_0 = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, 从而

$$a_1 = \cos\frac{\pi}{3 \cdot 2} = \left(\frac{1 + \frac{1}{2}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, a_2 = \cos\frac{\pi}{3 \cdot 2^2}, \cdots, a_n = \cos\frac{\pi}{3 \cdot 2^n}$$

由泰勒展开,

$$a_n = \cos\frac{\pi}{3 \cdot 2^n} = 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{3 \cdot 2^n}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{\pi}{3 \cdot 2^n}\right)^4}{4!} - \cdots$$

因此

$$\lim_{n \to \infty} 4^n \cdot (1 - a_n) = \lim_{n \to \infty} 4^n \cdot \left(\frac{\left(\frac{\pi}{3 \cdot 2^n}\right)^2}{2!} - \frac{\left(\frac{\pi}{3 \cdot 2^n}\right)^4}{4!} + \cdots\right) = \frac{\pi^2}{9} \cdot \frac{1}{2!} = \frac{\pi^2}{18}$$

17. Let $a_1, a_2, \ldots$ be a sequence of real numbers satisfying

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} - \frac{a_{n+2}}{a_n} - \frac{a_{n+1} a_{n+2}}{a_n^2} = \frac{n a_{n+2} a_{n+1}}{a_n}.$$

Given that $a_1 = -1$ and $a_2 = -\frac{1}{2}$, find the value of $\frac{a_9}{a_{20}}$.

(待解)

18. 数列 $1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,5,\ldots$ 的第 100 项是?

一般地, 数字 n 出现 n 项, 因此从数字 1 到数字 n 共出现

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

项, 由 $\dfrac{n(n+1)}{2} \leqslant 100$ 得 $n<14$, 取 $n=13$ 时共有 91 项, 因此第 100 项为 14。

19. 等差数列 $1,3,5,7,9,11,\ldots$ 按如下方法分组

$$(1),(3,5),(7,9,11),(13,15,17,19),\ldots$$

求第 n 组中 n 个数的和 S_n。

等差数列 $1,3,5,7,\ldots$ 的通项公式为

$$a_n=2n-1.$$

第 n 组有 n 个奇数, 因此第 n 组的第 n 个奇数是等差数列中的第

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

个奇数, 且第 n 组的第 1 个奇数是等差数列中的第

$$\frac{n(n+1)}{2}-(n-1)=\frac{n^2-n+2}{2}$$

故第 n 组中第 n 个奇数是

$$2\cdot\frac{n(n+1)}{2}-1=n^2+n-1$$

第 n 组中第 1 个奇数是

$$2\cdot\frac{n^2-n+2}{2}-1=n^2-n+1$$

所以

$$S_n=\frac{n[(n^2+n-1)-(n^2-n+1)]}{2}=n^3$$

20. 已知数列 $\{a_n\}$, 且 $a_1=1$, 定义 $S_n=n^2a_n$. 求 a_n 和 S_n。

由

$$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2a_n-(n-1)^2a_{n-1}\Rightarrow(n^2-1)a_n=(n-1)^2a_{n-1}$$

于是

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n-1}{n+1}.$$

因此

$$a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot1=\frac{2}{n(n+1)}$$

且

$$S_n=n^2a_n=\frac{2n}{n+1}.$$

21. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 公差 $d=2$, $a_1+a_2+\cdots+a_{100}=100$, 求 $a_4+a_8+\cdots+a_{100}$ 的值。

由

$$a_1+a_2+\cdots+a_{100}=100,$$

解得

$$100a_1+\frac{100\cdot99}{2}\cdot2=100\Rightarrow a_1=-98$$

于是 $a_4=-92,a_100=100,$

$$a_4+a_8+\cdots+a_{100}=\frac{25}{2}(-92+100)=100.$$

22. 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$ 且 $a_na_{n+1}=4^n$, 求前 n 项和 S_n。

由题意,

$$\frac{a_{n+2}}{a_n}=\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\cdot\frac{a_{n+1}}{a_n}=4,$$

故 $\{a_1,a_3,a_5,\dots\}$ 与 $\{a_2,a_4,a_6,\dots\}$ 皆为公比为 4 的等比数列, 其中

$$a_1=1,a_2=4,$$

当 n 为奇数,

$$\begin{aligned}S_n&=(a_1+a_3+\cdots+a_n)+(a_2+a_4+\cdots+a_{n-1})\\&=\frac{1(1-4^{\frac{n+1}{2}})}{1-4}+\frac{4(1-4^{\frac{n-1}{2}})}{1-4}=\frac{2^{n+1}-1}{3}+\frac{2^{n+1}-4}{3}=\frac{4}{3}\cdot2^n-\frac{5}{3}.\end{aligned}$$

当 n 为偶数，

$$S_n = (a_1 + a_3 + \cdots + a_{n-1}) + (a_2 + a_4 + \cdots + a_n)$$
$$= \frac{1(1-4^{\frac{n}{2}})}{1-4} + \frac{4(1-4^{\frac{n}{2}})}{1-4} = \frac{5}{3}\cdot 2^n - \frac{5}{3}.$$

综上，

$$S_n = \frac{9+(-1)^n}{3}\cdot 2^{n-1} - \frac{5}{3}$$

23. 15.(浙江 18)(本题 14 分) 已知数列 $\{x_n\}$ 的首项 $x_1 = 3$，通项 $x_n = 2^n p + nq$ ($n \in \mathbf{N}^*$, p, q 为常数)，且 x_1, x_4, x_5 成等差数列，求:

(I) p, q 的值;

(II) 数列 $\{x_n\}$ 的前 n 项的和 S_n 的公式。

(I) 解: 由 $x_1 = 3$，得 $2p + q = 3$，

又 $x_4 = 2^4 p + 4q$，$x_5 = 2^5 p + 5q$，且 $x_1 + x_5 = 2x_4$，得

$3 + 2^5 p + 5q = 2(2^4 p + 4q)$，

解得 $p = 1, q = 1$.

(II) 解: $S_n = (2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n) + (1 + 2 + \cdots + n)$

$= 2^{n+1} - 2 + \frac{n(n+1)}{2}$.

24. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为

$$S_n = 2a_n - 2^n.$$

(I) 求 a_1, a_4；

(II) 证明：$\{a_{n+1} - 2a_n\}$ 是等比数列；

(III) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

(I) 当 $n = 1$ 时，

$$S_1 = a_1 = 2a_1 - 2,$$

解得

$$a_1 = 2,\ S_1 = 2.$$

由

$$S_n = 2a_n - 2^n$$

得

$$2a_n = S_n + 2^n.$$

于是

$$2a_{n+1} = S_{n+1} + 2^{n+1} = a_{n+1} + S_n + 2^{n+1},$$

从而

$$a_{n+1} = S_n + 2^{n+1}.$$

因此

$$a_2 = S_1 + 2^2 = 6,\ S_2 = 8,$$

$$a_3 = S_2 + 2^3 = 16,\ S_3 = 24,$$

$$a_4 = S_3 + 2^4 = 40.$$

(I) 得 $a_1 = 2,\ a_4 = 40$。

(II) 由上式可得

$$\begin{aligned} a_{n+1} - 2a_n &= (S_n + 2^{n+1}) - (S_n + 2^n) \\ &= 2^n. \end{aligned}$$

故数列 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ 是首项为 2、公比为 2 的等比数列。

(III) 由

$$a_{n+1} - 2a_n = 2^n$$

得

$$a_n = (a_n - 2a_{n-1}) + 2(a_{n-1} - 2a_{n-2}) + \cdots + 2^{n-2}(a_2 - 2a_1) + 2^{n-1}a_1.$$

代入 $a_1 = 2,\ a_2 = 6$, 并利用 $a_{k+1} - 2a_k = 2^k$, 可得

$$a_n = 2^{n-1}(n+1).$$

25. 18.（陕西 20）（本小题满分 12 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = \frac{2}{3}$, 且

$$a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n + 1} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

(I) 证明：数列 $\left\{\frac{1}{a_n}-1\right\}$ 是等比数列；

(II) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n。

(I) 由

$$a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+1}$$

得

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{a_n+1}{2a_n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a_n}.$$

于是

$$\frac{1}{a_{n+1}}-1=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_n}-1\right).$$

又

$$a_1=\frac{2}{3},\quad \frac{1}{a_1}-1=\frac{1}{2}.$$

因此，数列 $\left\{\frac{1}{a_n}-1\right\}$ 是首项为 $\frac{1}{2}$、公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列。

(II) 由 (I) 可得

$$\frac{1}{a_n}-1=\frac{1}{2^n},$$

即

$$\frac{1}{a_n}=1+\frac{1}{2^n},$$

从而

$$a_n=\frac{2^n}{2^n+1}.$$

于是

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{2^k+1}=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{2^k+1}\right)=n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k+1}.$$

设

$$T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k},$$

则

$$\frac{1}{2}T_n=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{2^{k+1}}+\frac{n}{2^{n+1}}.$$

两式相减得

$$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}.$$

由等比数列求和公式，

$$\frac{1}{2}T_n=1-\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}},$$

从而

$$T_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n}.$$

又

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

可得数列 $\left\{\frac{k}{2^k}\right\}$ 的前 n 项和为

$$2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

因此

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} + 2 - \frac{n+2}{2^n} = \frac{n^2+n+4}{2} - \frac{n+2}{2^n}.$$

26. 6.(江西 19) 等差数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, $a_1 = 3$, 前 n 项和为 S_n, $\{b_n\}$ 为等比数列, $b_1 = 1$, 且

$$b_2 S_2 = 64, \quad b_3 S_3 = 960.$$

(1) 求 a_n 与 b_n;

(2) 求 $\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \cdots + \frac{1}{S_n}$。

(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d, 等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q。则

$$a_n = 3 + (n-1)d, \quad b_n = q^{n-1}.$$

由

$$S_2 = 3 + (3+d) = 6 + d, \quad S_3 = 3 + (3+d) + (3+2d) = 9 + 3d,$$

代入已知条件得

$$\begin{cases} (6+d)q = 64, \\ (9+3d)q^2 = 960. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} d = 2, \\ q = 8 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} d = -\frac{6}{5}, \\ q = \frac{40}{3}. \end{cases}$$

因 $\{a_n\}$ 各项均为正数, 舍去第二组解。故

$$a_n = 3 + 2(n-1) = 2n + 1, \quad b_n = 8^{n-1}.$$

(2) 由 $a_n = 2n+1$ 得

$$S_n = 3+5+\cdots+(2n+1) = n(n+2).$$

因此

$$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_n} = \frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{2\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}.$$

将其拆分为

$$\frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right),$$

于是

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)} &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\\
&= \frac{3}{4}-\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}.
\end{aligned}$$

27. 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 前 n 项的和, 已知 $\frac{1}{3}S_3$ 与 $\frac{1}{4}S_4$ 的等比中项为 $\frac{1}{5}S_5$, 等差中项为 1, 求等差数列的通项 a_n。

由 $(S_3)(S_4) = (S_5)^2$ 及 $\frac{1}{3}S_3+\frac{1}{4}S_4 = 2$ 得

$$\begin{cases}
\frac{1}{3}\left(3a+\frac{3\cdot 2}{2}d\right)\cdot\frac{1}{4}\left(4a+\frac{4\cdot 3}{2}d\right) = \frac{1}{25}\left(5a+\frac{5\cdot 4}{2}d\right)^2\\
\frac{1}{3}\left(3a+\frac{3\cdot 2}{2}d\right)+\frac{1}{4}\left(4a+\frac{4\cdot 3}{2}d\right) = 2
\end{cases}$$

解得

$$d=0, a=1 \text{ 或 } d=-\frac{12}{5}, a=4$$

经检验得通项解为 $a_n = 1$ 或

$$a_n = 4-\frac{12}{5}(n-1) = \frac{32}{5}-\frac{12}{5}n.$$

28. 已知数列 $\{a_n\}$ 中每一项均为正数，且数列前 n 项之和为 S_n，若

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{4S_k}{a_k+2}=S_n$$

试求 a_n 及 S_n。

由递推关系得

$$S_1=a_1=\frac{4a_1}{a_1+2}\Rightarrow a_1^2-2a_1=0$$

因 $a_1\neq 0$，解得 $a_1=2$，于是

$$a_n=S_n-S_{n-1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{4S_k}{a_k+2}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{4S_k}{a_k+2}=\frac{4S_n}{a_n+2}\Rightarrow S_n=\frac{1}{4}a_n(a_n+2)$$

又

$$S_{n-1}=S_n-a_n=\frac{1}{4}a_n^2-\frac{1}{2}a_n=\frac{1}{4}a_{n-1}(a_{n-1}+2)$$

因此

$$a_n^2-2a_n=a_{n-1}^2+2a_{n-1}\Rightarrow (a_n-1)^2=(a_{n-1}+1)^2\Rightarrow a_n-1=a_{n-1}+1$$

即

$$a_n=a_{n-1}+2=\cdots=a_1+2(n-1)=2n, S_n=n^2+n$$

29. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\begin{cases}a_0=1\\ a_{2k+1}=a_k\\ a_{2k+2}=a_k+a_{k+1}\end{cases}$，$k\in N\cup\{0\}$，求 $\sum\limits_{k=0}^{63}a_k$。

记

$$S(n)=\sum_{k=0}^{2^n-1}a_k$$

则

$$S(n)=(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{2^n-2})+(a_1+a_3+\cdots+a_{2^n-1})$$

其中偶数项为

$$a_0+(a_0+a_1)+(a_1+a_2)+(a_2+a_3)+\cdots+(a_{2^{n-1}-2}+a_{2^{n-1}-1})=2(a_0+a_1+\cdots+a_{2^{n-1}-2})+a_{2^{n-1}-1}$$

奇数项为

$$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{2^{n-1}-1}$$

所以

$$S(n)=3(a_0+a_1+\cdots+a_{2^{n-1}-2})+2a_{2^{n-1}-1}=3(a_0+a_1+\cdots+a_{2^{n-1}-1})-a_{2^{n-1}-1}$$

由 $a_{2^{n-1}-1}=1$, 得

$$S(n)=3S(n-1)-1$$

于是

$$S(8)=3S(7)-1=3^2S(6)-3-1=\cdots=3^5S(1)-(1+3+\cdots+3^4)$$

又 $S(1)=a_0+a_1=2$, 所以

$$S(8)=243\cdot 2-121=365$$

30. 已知各项皆为正整数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 且对任意正整数 n 有

$$\sqrt{S_n}=\lambda(a_n-1)+1,$$

其中 λ 为正实数。若 $2a_2=a_1+a_3$, 试求数列 $\{a_n\}$ 的一般项。

由 $2a_2=a_1+a_3$, 设

$$d=a_2-a_1=a_3-a_2$$

则

$$\sqrt{S_2}-\sqrt{S_1}=\lambda(a_2-a_1)=\lambda(a_3-a_2)=\sqrt{S_3}-\sqrt{S_2}\Rightarrow 2\sqrt{S_2}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_3}$$

两边平方得

$$4S_2=S_1+S_3+2\sqrt{S_1S_3}\Rightarrow 4(2a_1+d)=4a_1+3d+2\sqrt{a_1(3a_1+3d)}$$

解得 $d=2a_1$, 则

$$S_1=a_1,\ S_2=4a_1,\ S_3=9a_1$$

解

$$\lambda=\sqrt{S_2}-\frac{1}{a_2-1}=\sqrt{S_3}-\frac{1}{a_3-1}$$

得 $a_1=1,\lambda=\dfrac{1}{2}$, 于是

$$\begin{aligned}\sqrt{S_n}&=\frac{1}{2}(a_n-1)+1\\ a_n=S_n-S_{n-1}&=2\sqrt{S_n}-1\\ (\sqrt{S_n}-1)^2&=S_{n-1}\\ \sqrt{S_n}&=\sqrt{S_{n-1}}+1\\ \frac{a_n+1}{2}&=\frac{a_{n-1}+1}{2}+1\end{aligned}$$

故

$$a_n=a_{n-1}+2=a_{n-2}+4=\cdots=a_1+2(n-1)=2n-1$$

31. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_{n+1}=\dfrac{a_n^2}{2a_n+1}$, 求通项公式并证明

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{1+a_k}<\frac{7}{8}.$$

由递推式

$$a_{n+1}=\frac{a_n^2}{2a_n+1},$$

可得

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2a_n+1}{a_n^2}=\frac{2}{a_n}+\frac{1}{a_n^2},$$

从而

$$1+\frac{1}{a_{n+1}}=1+\frac{2}{a_n}+\frac{1}{a_n^2}=\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^2.$$

取对数, 得

$$\log\left(1+\frac{1}{a_{n+1}}\right)=2\log\left(1+\frac{1}{a_n}\right).$$

因此数列 $\left\{\log\left(1+\frac{1}{a_n}\right)\right\}$ 是首项为 $\log 2$、公比 2 的等比数列, 于是

$$\log\left(1+\frac{1}{a_n}\right)=2^{n-1}\log 2=\log\left(2^{2^{n-1}}\right),$$

即

$$1+\frac{1}{a_n}=2^{2^{n-1}}\Rightarrow a_n=\frac{1}{2^{2^{n-1}}-1}.$$

且有

$$\frac{a_n}{1+a_n}=\frac{1}{2^{2^{n-1}}}.$$

所以

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{1+a_k}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^{2^{n-1}}}.$$

注意当 $n\geqslant 4$ 时, 有

$$2^{n-1}>n+1\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n-1}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{1+a_k}&<\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\sum_{k=5}^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^k\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}\right)}{1-\frac{1}{2}}\\&=\frac{7}{8}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}<\frac{7}{8}\end{aligned}$$

当 $n=1,2,3$ 时直接检验, 亦满足不等式, 故

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{1+a_k}<\frac{7}{8},\quad\forall n\in\mathbb{N}.$$

32. 16. (重庆 22)(本小题满分 12 分, (I) 小问 6 分. (II) 小问 6 分)

设各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2,a_n=a_{n+1}^{\frac{3}{1}}+2\ (n\in\mathbf{N}^*)$. (I) 若 $a_2=\frac{1}{4}$, 求 a_3,a_4, 并猜想 a_{2008} 的值 (不需证明); (II) 若 $2\sqrt{2}\leqslant a_1a_2\cdots a_n<4$ 对 $n\geqslant 2$ 恒成立, 求 a_2 的值.

解: (I) 因 $a_1=2,a_2=2^{-2}$, 故

由此有 $a_1=2\left(-2\right)^0,a_2=2\left(-2\right)^{\frac{1}{4}},a_3=2\left(-2\right)^{\frac{1}{2}},a_4=2\left(-2\right)^{\frac{3}{4}}$,

从而猜想 a_n 的通项为

$a_n=2\left(-2\right)^{\frac{n-1}{4}}\ (n\in\mathbf{N}^*)$,

所以 $a_{2008}=2\left(-2\right)^{\frac{2007}{4}}$.

(II) 令 $x_n=\log_2 a_n$, 则 $a_1a_2\cdots a_n=2^{x_1+x_2+\cdots+x_n}$, 故只需求 x_2 的值。

设 S_n 表示 x_2 的前 n 项和, 则 $a_1a_2\cdots a_n=2^{S_n}$, 由 $2\sqrt{2}\leqslant a_1a_2\cdots a_n<4$ 得

$2^{\frac{3}{2}} \leqslant 2^{S_n} < 2^2 \ (n \geqslant 2)$.

因上式对 $n=2$ 成立, 可得 $\frac{3}{2} \leqslant S_2 < 2$, 又由 $a_1=2$, 得 $x_1=1$, 故 $x_2 \geqslant \frac{1}{2}$.

由于 $a_1=2$, $a_n = a_{n+1} + \frac{3}{2^{n+2}} \ (n \in \mathbf{N}^*)$, 得 $x_n = x_{n+1} + \frac{1}{2^{n+2}} \ (n \in \mathbf{N}^*)$, 即 $\frac{1}{x_{n+2}+2x_{n+1}} = (\frac{1}{x_{n+2}+x_{n+1}}) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x_{n+1}+x_n} = \frac{1}{2}(\frac{1}{x_{n+1}+2x_n})$,

因此数列 $\{\frac{1}{x_{n+1}+2x_n}\}$ 是首项为 $\frac{1}{x_2+2x_1}$, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列, 故

$\frac{1}{x_{n+1}+2x_n} = (\frac{1}{x_2+2})\frac{1}{2^{n-1}} \ (n \in \mathbf{N}^*)$.

将上式对 n 求和得

$S_{n+1} - x_1 + 2S_n = (\frac{1}{x_2+2})(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}) = (\frac{1}{x_2+2})(2-\frac{1}{2^{n-1}}) \ (n \geqslant 2)$.

因 $S_n < 2$, $S_{n+1} < 2 \ (n \geqslant 2)$ 且 $x_1 = 1$, 故

$(\frac{1}{x_2+2})(2-\frac{1}{2^{n-1}}) < 5 \ (n \geqslant 2)$.

因此 $2x_2 - 1 < \frac{x_2+2}{2^{n-1}} \ (n \geqslant 2)$.

下证 $x_2 \leqslant \frac{1}{2}$, 若淆, 假设 $x_2 > \frac{1}{2}$, 则由上式知, 不等式 $2^{n-1} < \frac{x_2+2}{2x_2-1}$

对 $n \geqslant 2$ 恒成立, 但这是不可能的, 因此 $x_2 \leqslant \frac{1}{2}$.

又 $x_2 \geqslant \frac{1}{2}$, 故 $x_2 = \frac{1}{2}$, 所以 $a_2 = 2^{x_2} = \sqrt{2}$.

8.(辽宁 20)(本小题满分 12 分)

在数列 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$ 是各项均为正数的等比数列, 设

$$c_n = \frac{b_n}{a_n} \ (n \in \mathbf{N}^*).$$

(I) 数列 $\{c_n\}$ 是否为等比数列? 证明你的结论;

(II) 设数列 $\{\ln a_n\}$,$\{\ln b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n,T_n。若 $a_1=2$,$\frac{S_n}{T_n} = \frac{n}{2n+1}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和。

解:

(I) $\{c_n\}$ 是等比数列。

证明: 设 $\{a_n\}$ 的公比为 $q_1(q_1>0)$,$\{b_n\}$ 的公比为 $q_2(q_2>0)$, 则

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} \cdot \frac{a_n}{b_n} = \frac{b_{n+1}}{b_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{q_2}{q_1} \neq 0,$$

故 $\{c_n\}$ 为等比数列。

(II) 因 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$ 为等比数列,

$$S_n = n\ln a_1 + \frac{n(n-1)}{2}\ln q_1, \qquad T_n = n\ln b_1 + \frac{n(n-1)}{2}\ln q_2.$$

由题意

$$\frac{n\ln a_1 + \frac{n(n-1)}{2}\ln q_1}{n\ln b_1 + \frac{n(n-1)}{2}\ln q_2} = \frac{n}{2n+1},$$

化简得对一切 n 成立的恒等式

$$(2\ln q_1 - \ln q_2)n^2 + (4\ln a_1 - \ln q_1 - 2\ln b_1 + \ln q_2)n + (2\ln a_1 - \ln q_1) = 0.$$

于是

$$\begin{cases} 2\ln q_1 - \ln q_2 = 0, \\ 4\ln a_1 - \ln q_1 - 2\ln b_1 + \ln q_2 = 0, \\ 2\ln a_1 - \ln q_1 = 0. \end{cases}$$

由 $a_1 = 2$ 解得

$$q_1 = 4, \qquad q_2 = 16, \qquad b_1 = 8.$$

故

$$c_n = \frac{b_n}{a_n} = \frac{8\cdot 16^{n-1}}{2\cdot 4^{n-1}} = 4^n.$$

所以数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_n = 4 + 4^2 + \cdots + 4^n = \frac{4}{3}\left(4^n - 1\right).$$

33.（山东 20）（本小题满分 12 分）

将数列 $\{a_n\}$ 中的所有项按每一行比上一行多一项的规则排成如下数表：

$$\begin{array}{l} a_1 \\ a_2,\ a_3 \\ a_4,\ a_5,\ a_6 \\ a_7,\ a_8,\ a_9,\ a_{10} \end{array}$$

记表中的第一列数 $a_1, a_2, a_4, a_7, \cdots$ 构成的数列为 $\{b_n\}$, $b_1 = a_1 = 1$。S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 且满足

$$\frac{2b_n}{b_nS_n - S_n^2} = 1 \quad (n \geqslant 2).$$

(I) 证明数列 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 成等差数列, 并求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(II) 上表中，若从第三行起，每一行中的数按从左到右的顺序均构成等比数列，且公比为同一个正数。当 $a_{81} = -\frac{4}{91}$ 时，求上表中第 $k(k \geqslant 3)$ 行所有项的和。

解：

(I) 由已知，当 $n \geqslant 2$ 时，

$$\frac{2b_n}{b_n S_n - S_n^2} = 1.$$

又

$$S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n, \qquad b_n = S_n - S_{n-1}\ (n \geqslant 2),$$

代入得

$$\frac{2(S_n - S_{n-1})}{(S_n - S_{n-1})S_n - S_n^2} = 1.$$

化简得

$$-S_{n-1}S_n - S_{n-1}^2 = 2S_n - 2S_{n-1}.$$

于是

$$\frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n-1}} = \frac{1}{2}.$$

又 $S_1 = b_1 = 1$，故数列 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 是首项为 1，公差为 $\frac{1}{2}$ 的等差数列，

$$\frac{1}{S_n} = 1 + \frac{1}{2}(n-1) = \frac{n+1}{2},$$

从而

$$S_n = \frac{2}{n+1}.$$

当 $n \geqslant 2$ 时，

$$b_n = S_n - S_{n-1} = \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n} = -\frac{2}{n(n+1)}.$$

因此

$$b_n = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ -\dfrac{2}{n(n+1)}, & n \geqslant 2. \end{cases}$$

(II) 设从第三行起，每一行的公比为 $q(q > 0)$。因为

$$1 + 2 + \cdots + 12 = \frac{12 \times 13}{2} = 78,$$

所以表中第 1 行至第 12 行共含有数列 $\{a_n\}$ 的前 78 项，故 a_{81} 在表中第 13 行第 3 列。于是

$$a_{81} = b_{13}q^2 = -\frac{4}{91}.$$

又

$$b_{13}=-\frac{2}{13\times 14},$$

解得 $q=2$。

记表中第 $k(k\geqslant 3)$ 行所有项的和为 S, 则

$$S=b_k\frac{1-q^k}{1-q}=-\frac{2}{k(k+1)}\cdot\frac{1-2^k}{1-2}=\frac{2}{k(k+1)}(1-2^k),\quad k\geqslant 3.$$

34. 7.(湖南 20) 数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_1=0,\ a_2=2,\ a_{n+2}=\left(1+\cos^2\frac{n\pi}{2}\right)a_n+4\sin^2\frac{n\pi}{2},\quad n=1,2,3,\ldots$$

(1) 求 a_3,a_4, 并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设

$$S_k=a_1+a_3+\cdots+a_{2k-1},\quad T_k=a_2+a_4+\cdots+a_{2k},\quad W_k=\frac{2S_k}{2+T_k}\ (k\in\mathbb{N}^*),$$

求使 $W_k>1$ 的所有 k 的值, 并说明理由。

(1) 由已知 $a_1=0,a_2=2$。

当 $n=1$ 时,

$$a_3=\left(1+\cos^2\frac{\pi}{2}\right)a_1+4\sin^2\frac{\pi}{2}=0+4=4.$$

当 $n=2$ 时,

$$a_4=\left(1+\cos^2\pi\right)a_2+4\sin^2\pi=2a_2=4.$$

一般地, 当 $n=2k-1\ (k\in\mathbb{N}^*)$ 时,

$$a_{2k+1}=\left(1+\cos^2\frac{(2k-1)\pi}{2}\right)a_{2k-1}+4\sin^2\frac{(2k-1)\pi}{2}=a_{2k-1}+4,$$

即

$$a_{2k+1}-a_{2k-1}=4.$$

因此 $\{a_{2k-1}\}$ 为首项为 0, 公差为 4 的等差数列,

$$a_{2k-1}=4(k-1).$$

当 $n=2k\ (k\in\mathbb{N}^*)$ 时,

$$a_{2k+2}=\left(1+\cos^2\frac{2k\pi}{2}\right)a_{2k}+4\sin^2\frac{2k\pi}{2}=2a_{2k}.$$

因此 $\{a_{2k}\}$ 为首项为 2, 公比为 2 的等比数列,

$$a_{2k}=2^k.$$

综上,

$$a_n=\begin{cases}4(k-1), & n=2k-1\ (k\in\mathbb{N}^*),\\ 2^k, & n=2k\ (k\in\mathbb{N}^*).\end{cases}$$

(2) 由 (1) 得

$$S_k=0+4+\cdots+4(k-1)=2k(k-1),$$

$$T_k=2+2^2+\cdots+2^k=2^{k+1}-2.$$

于是

$$W_k=\frac{2S_k}{2+T_k}=\frac{4k(k-1)}{2^{k+1}}=\frac{k(k-1)}{2^{k-1}}.$$

计算得

$$W_1=0,\quad W_2=1,\quad W_3=\frac{3}{2},\quad W_4=\frac{3}{2},\quad W_5=\frac{5}{4},\quad W_6=\frac{15}{16}.$$

当 $k\geqslant 6$ 时,

$$\begin{aligned}W_{k+1}-W_k&=\frac{(k+1)k}{2^k}-\frac{k(k-1)}{2^{k-1}}\\&=\frac{k(3-k)}{2^k}<0,\end{aligned}$$

故 $\{W_k\}$ 单调递减。又 $W_6<1$, 因此当 $k\geqslant 6$ 时 $W_k<1$。

综上, 满足 $W_k>1$ 的所有 k 为

$$k=3,4,5.$$

35. 证明由正实数组成的数列 $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n$ 是等比数列当且仅当

$$\left(a_0a_1+a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_{n-1}a_n\right)^2=\left(a_0^2+a_1^2+\cdots+a_{n-1}^2\right)\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)$$

充分条件: 已知 $a_0, a_1, \ldots, a_n$ 是等比数列, 设 $a_k = a_0 r^k$, $1 \leqslant k \leqslant n$, 于是

$$a_0a_1 + a_1a_2 + \ldots + a_{n-1}a_n = a_0^2(r + r^3 + \ldots + r^{2n-1}) = a_0^2 r\left(1 + r^2 + \ldots + r^{2n-2}\right)$$

且

$$\begin{aligned}(a_0^2 + a_1^2 + \ldots + a_{n-1}^2)(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) &= a_0^4(1 + r^2 + \ldots + r^{2n-2})(r^2 + r^4 + \ldots + r^{2n}) \\ &= a_0^4 r^2\left(1 + r^2 + \ldots + r^{2n-2}\right)^2\end{aligned}$$

故得证

$$(a_0a_1 + a_1a_2 + \ldots + a_{n-1}a_n)^2 = (a_0^2 + a_1^2 + \ldots + a_{n-1}^2)(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)$$

必要条件: 已知

$$(a_0a_1 + a_1a_2 + \ldots + a_{n-1}a_n)^2 = (a_0^2 + a_1^2 + \ldots + a_{n-1}^2)(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)$$

考虑函数

$$f(r) = \sum_{k=1}^{n}(a_k - ra_{k-1})^2 = r^2\sum_{k=1}^{n}a_{k-1}^2 - 2r\sum_{k=1}^{n}a_ka_{k-1} + \sum_{k=1}^{n}a_k^2$$

观察得 $f(r) \geqslant 0 \quad \forall r$, 又关于 r 方程式的判别式为

$$4\left[(a_0a_1 + a_1a_2 + \ldots + a_{n-1}a_n)^2 - (a_0^2 + a_1^2 + \ldots + a_{n-1}^2)(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)\right] = 0$$

, 所以得知 $f(r) = 0$ 有重根 $r = r_0$, 且只有当

$$a_k = r_0 a_{k-1}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n$$

才成立, 意味 $a_0, a_1, \ldots, a_n$ 是一个公比为 r_0 的等比数列。

36. 用标准求和公式证明:

$$\sum_{r=n}^{2n}(n-r)^2 = \sum_{r=1}^{n}r^2.$$

首先展开平方:

$$\sum_{r=n}^{2n}(n-r)^2 = \sum_{r=n}^{2n}(n^2 - 2nr + r^2) = \sum_{r=n}^{2n}n^2 - 2n\sum_{r=n}^{2n}r + \sum_{r=n}^{2n}r^2.$$

利用标准求和公式：

$$\sum_{r=a}^{b} 1 = b-a+1, \quad \sum_{r=a}^{b} r = \frac{(b-a+1)(a+b)}{2}, \quad \sum_{r=a}^{b} r^2 = \frac{(b-a+1)(2a^2+2ab+b^2+a+b)}{6}.$$

代入 $a=n, b=2n$：

$$\sum_{r=n}^{2n} n^2 = n^2(2n-n+1) = n^2(n+1),$$

$$\sum_{r=n}^{2n} r = \frac{(n+1)(n+2n)}{2} = \frac{(n+1)(3n)}{2} = \frac{3n(n+1)}{2},$$

$$\sum_{r=n}^{2n} r^2 = \frac{(n+1)(n^2+2n^2+(2n)^2+\dots)}{6} \quad (\text{整理后为})\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{}{6}.$$

代入到展开式：

$$\sum_{r=n}^{2n} (n-r)^2 = n^2(n+1) - 2n \cdot \frac{3n(n+1)}{2} + \sum_{r=n}^{2n} r^2.$$

化简系数：

$$n^2(n+1) - 3n^2(n+1) + \sum_{r=n}^{2n} r^2 = -2n^2(n+1) + \sum_{r=n}^{2n} r^2.$$

进一步整理 $\sum_{r=n}^{2n} r^2$ 并化简，可得：

$$\sum_{r=n}^{2n} (n-r)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \sum_{r=1}^{n} r^2.$$

$$\therefore \sum_{r=n}^{2n} (n-r)^2 = \sum_{r=1}^{n} r^2$$

如所要求。

37. 设 $m, n \in \mathbb{N}$，证明：

$$\sum_{r=m}^{m+n} (m-r)^2 = \sum_{r=0}^{n} r^2.$$

首先展开平方：

$$\sum_{r=m}^{m+n} (m-r)^2 = \sum_{r=m}^{m+n} (r-m)^2 \quad (\text{因为平方对符号不变}).$$

令 $k=r-m$, 则 $r=k+m$, 当 $r=m$ 时 $k=0$, 当 $r=m+n$ 时 $k=n$, 于是:

$$\sum_{r=m}^{m+n}(m-r)^2=\sum_{k=0}^{n}(-k)^2=\sum_{k=0}^{n}k^2=\sum_{r=0}^{n}r^2.$$

$$\therefore \sum_{r=m}^{m+n}(m-r)^2=\sum_{r=0}^{n}r^2,$$

如所要求。

38. 求和

$$\sum_{n=2}^{20}\frac{n^3-n^2+1}{n^2-n}.$$

首先将被加数进行拆分:

$$\frac{n^3-n^2+1}{n^2-n}=\frac{n(n^2-n)+1}{n^2-n}=n+\frac{1}{n^2-n}=n+\frac{1}{n(n-1)}$$

将分式拆成部分分式:

$$\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$$

因此

$$\frac{n^3-n^2+1}{n^2-n}=n+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}.$$

写出前几项:

$$n=2:2+1-\frac{1}{2},\quad n=3:3+\frac{1}{2}-\frac{1}{3},\quad n=4:4+\frac{1}{3}-\frac{1}{4},\dots,\quad n=20:20+\frac{1}{19}-\frac{1}{20}.$$

求和时, 分式部分是望远镜求和:

$$\sum_{n=2}^{20}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{20}.$$

整数部分求和:

$$\sum_{n=2}^{20}n=\frac{19}{2}(2+20)=209.$$

因此总和为:

$$\sum_{n=2}^{20}\frac{n^3-n^2+1}{n^2-n}=209+1-\frac{1}{20}=210-\frac{1}{20}=\frac{4199}{20}.$$

39. 试求级数

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5}{3^6-64}+\frac{3\cdot 5\cdot 7}{5^6-64}+\frac{5\cdot 7\cdot 9}{7^6-64}+\cdots+\frac{19\cdot 21\cdot 23}{21^6-64}$$

之和。

注意到

$$\begin{aligned}
&\frac{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}{(2k+1)^6-64}\\
&=\frac{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}{((2k+1)^3-8)((2k+1)^3+8)}\\
&=\frac{(2k+1)}{((2k+1)^2+2(2k+1)+4)((2k+1)^2-2(2k+1)+4)}\\
&=\frac{2k+1}{(4k^2+3)(4k^2+8k+7)}\\
&=\frac{2k+1}{(4k^2+3)(4(k+1)^2+3)}\\
&=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4k^2+3}-\frac{1}{4(k+1)^2+3}\right)
\end{aligned}$$

故

$$\sum_{k=1}^{10}\frac{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}{(2k+1)^6-64}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{487}\right)=\frac{120}{3409}$$

40. 求和

$$\sum_{n=1}^{24}\frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}}$$

不难发现

$$\frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}}=\sqrt{n-\sqrt{n^2-1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$$

进行裂项求和,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{24}\frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}}&=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{24}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})\\
&=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{25}+\sqrt{24}-\sqrt{1}-\sqrt{0})\\
&=2\sqrt{2}+2\sqrt{3}
\end{aligned}$$

41. 若 $f(n)=(n^2-2n+1)^{\frac{1}{3}}+(n^2-1)^{\frac{1}{3}}+(n^2+2n+1)^{\frac{1}{3}}$, 求

$$\sum_{k=1}^{500}\frac{1}{f(2k-1)}$$

首先有

$$\begin{aligned}\frac{1}{f(n)}&=\frac{1}{\sqrt[3]{(n-1)^2}+\sqrt[3]{(n+1)(n-1)}+\sqrt[3]{(n+1)^2}}\\&=\frac{\sqrt[3]{(n+1)}-\sqrt[3]{(n-1)}}{(n+1)-(n-1)}\\&=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{(n+1)}-\sqrt[3]{(n-1)})\end{aligned}$$

故

$$\sum_{k=1}^{500}\frac{1}{f(2k-1)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{500}\left(\sqrt[3]{2k}-\sqrt[3]{2k-2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt[3]{1000}=5$$

42. 设数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为

$$a_n=\frac{1}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2})(\sqrt{n}+\sqrt{n+2})},$$

求

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k$$

的值。

发现

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}\left(\frac{1}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n}+\sqrt{n+2})}-\frac{1}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+2})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2})}\right)\\&=\frac{1}{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})(\sqrt{n}+\sqrt{n+2})}\left(\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}\right)\end{aligned}$$

由 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=0$, 故

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

43. 求

$$\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{2025^2}+\frac{1}{2026^2}}$$

的值。

注意到

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}&=\sqrt{1+\frac{(n+1)^2+n^2}{n^2(n+1)^2}}\\&=\sqrt{1+\frac{2n(n+2)+1}{n^2(n+1)^2}}=\sqrt{1+\frac{2}{n(n+1)}+\frac{1}{n^2(n+1)^2}}\\&=\sqrt{\left(1+\frac{1}{n(n+1)}\right)^2}=1+\frac{1}{n(n+1)}=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

因此原式为

$$\sum_{n=1}^{2025}\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=2025+\left(1-\frac{1}{2026}\right)=2016-\frac{1}{2026}$$

44. (a) 已知

$$f(x,n)=\sum_{r=1}^{n}\left[\frac{1}{(x-1)^r}\right]$$

其中 $x\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}$。通过观察

$$\frac{1}{(x-2)(x-1)^r}-\frac{1}{(x-2)(x-1)^{r+1}}$$

的化简，求 $f(x,n)$ 的简化表达式。

先化简给定的差：

$$\frac{1}{(x-1)^r(x-2)}-\frac{1}{(x-2)(x-1)^{r+1}}=\frac{(x-1)-1}{(x-1)^{r+1}(x-2)}=\frac{1}{(x-1)^{r+1}}$$

因此

$$\frac{1}{(x-1)^{r+1}}=\frac{1}{(x-1)^r(x-2)}-\frac{1}{(x-1)^{r+1}(x-2)}$$

对 $r=0,1,2,\ldots,n-1$ 求和，

$$\sum_{r=0}^{n-1}\frac{1}{(x-1)^{r+1}}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{(x-1)^n(x-2)}$$

即

$$f(x,n)=\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{(x-1)^r}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{(x-1)^n(x-2)}$$

(b) 当 $|x-1|>1$ 时, 求

$$\lim_{n\to\infty}f(x,n)$$

由 (a) 得

$$f(x,n)=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{(x-1)^n(x-2)}$$

当 $|x-1|>1$ 时, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(x-1)^n}=0$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}f(x,n)=\frac{1}{x-2}$$

45. 求

$$\sum_{r=2}^{\infty}\left[\frac{4r-1}{r(r-1)}\left(-\frac{1}{3}\right)^r\right]$$

先对一般项作部分分式分解, 有

$$\frac{4r-1}{r(r-1)}=\frac{1}{r}+\frac{3}{r-1}$$

因此

$$\frac{4r-1}{r(r-1)}\left(-\frac{1}{3}\right)^r=\frac{1}{r}\left(-\frac{1}{3}\right)^r+\frac{3}{r-1}\left(-\frac{1}{3}\right)^r$$

将第二项改写为

$$\frac{3}{r-1}\left(-\frac{1}{3}\right)^r=\frac{3}{r-1}\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^{r-1}=-\frac{1}{r-1}\left(-\frac{1}{3}\right)^{r-1}$$

于是一般项可写成差分形式

$$\frac{4r-1}{r(r-1)}\left(-\frac{1}{3}\right)^r=\frac{1}{r}\left(-\frac{1}{3}\right)^r-\frac{1}{r-1}\left(-\frac{1}{3}\right)^{r-1}$$

考虑前 n 项和

$$\sum_{r=2}^{n}\left[\frac{4r-1}{r(r-1)}\left(-\frac{1}{3}\right)^{r}\right]=\sum_{r=2}^{n}\left[\frac{1}{r}\left(-\frac{1}{3}\right)^{r}-\frac{1}{r-1}\left(-\frac{1}{3}\right)^{r-1}\right]$$

这是一个伸缩和，化简得

$$\sum_{r=2}^{n}\left[\frac{4r-1}{r(r-1)}\left(-\frac{1}{3}\right)^{r}\right]=\frac{1}{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}+\frac{1}{3}$$

令 $n\to\infty$，由于

$$\frac{1}{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}\to 0$$

从而

$$\sum_{r=2}^{\infty}\left[\frac{4r-1}{r(r-1)}\left(-\frac{1}{3}\right)^{r}\right]=\frac{1}{3}$$

46. 求级数的和

$$\frac{1}{4\times 2!}+\frac{1}{5\times 3!}+\frac{1}{6\times 4!}+\frac{1}{7\times 5!}+\frac{1}{8\times 6!}+\cdots$$

将级数写成求和符号形式：

$$S_{\infty}=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{(r+3)(r+1)!}$$

对一般项进行拆项：

$$\frac{1}{(r+3)(r+1)!}=\frac{1}{(r+2)!}-\frac{1}{(r+3)!}$$

因此有限部分和为：

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{N}\frac{1}{(r+3)(r+1)!}&=\sum_{r=1}^{N}\left(\frac{1}{(r+2)!}-\frac{1}{(r+3)!}\right)\\&=\frac{1}{3!}-\frac{1}{(N+3)!}\end{aligned}$$

令 $N\to\infty$，由于

$$\frac{1}{(N+3)!}\to 0$$

可得无穷级数的和：

$$S_{\infty}=\frac{1}{3!}=\frac{1}{6}$$

47. 已知

$$S_n = (2 \times 1!) + (5 \times 2!) + (10 \times 3!) + (17 \times 4!) + \cdots + (n^2+1)n!$$

用适当的方法证明

$$S_n = n(n+1)!$$

先将数列写成求和形式:

$$S_n = \sum_{r=1}^{n} (r^2+1)r!$$

为了使用差分法, 尝试将 $(r^2+1)r!$ 表示成阶乘的差。注意

$$(r+2)! = (r+2)(r+1)r! = (r^2+3r+2)r!,$$

因此

$$(r+2)! - r! = (r^2+3r+1)r!$$

又因为

$$(r+1)! - r! = r \cdot r!,$$

于是

$$(r+2)! - r! = (r^2+1)r! + 3r \cdot r!$$

代入 $r \cdot r! = (r+1)! - r!$, 得

$$(r+2)! - r! = (r^2+1)r! + 3[(r+1)! - r!],$$

即

$$(r+2)! - 3(r+1)! + 2r! = (r^2+1)r!$$

因此

$$(r^2+1)r! = (r+2)! - 3(r+1)! + 2r!$$

将其代入求和式:

$$\sum_{r=1}^{n} (r^2+1)r! = \sum_{r=1}^{n} \left[(r+2)! - 3(r+1)! + 2r!\right]$$

写出部分项可以发现大量抵消, 最后只剩下

$$S_n = (n+2)! - 2(n+1)!$$

提取 $(n+1)!$:

$$S_n = [(n+2)-2](n+1)!$$

于是

$$S_n = n(n+1)!$$

48. 求

$$\sum_{r=1}^{n}\left[\frac{r^2+9r+19}{(r+5)!}\right]$$

的化简表达式, 并由此求

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left[\frac{r^2+7r+11}{(r+4)!}\right]$$

先对一般项作拆分。注意到

$$\frac{r^2+9r+19}{(r+5)!} = \frac{1}{(r+3)!} - \frac{1}{(r+5)!}$$

因此

$$\sum_{r=1}^{n}\left[\frac{r^2+9r+19}{(r+5)!}\right] = \sum_{r=1}^{n}\left[\frac{1}{(r+3)!} - \frac{1}{(r+5)!}\right]$$

将各项写出:

$$\begin{aligned}
r=1:&\quad \frac{1}{4!}-\frac{1}{6!},\\
r=2:&\quad \frac{1}{5!}-\frac{1}{7!},\\
&\vdots\\
r=n:&\quad \frac{1}{(n+3)!}-\frac{1}{(n+5)!}.
\end{aligned}$$

相加后发生抵消, 得到

$$\sum_{r=1}^{n}\left[\frac{r^2+9r+19}{(r+5)!}\right] = \left(\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}\right) - \left(\frac{1}{(n+4)!}+\frac{1}{(n+5)!}\right)$$

化简常数项:

$$\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!} = \frac{5}{120}+\frac{1}{120} = \frac{1}{20}$$

故

$$\sum_{r=1}^{n}\left[\frac{r^2+9r+19}{(r+5)!}\right] = \frac{1}{20} - \left(\frac{1}{(n+4)!}+\frac{1}{(n+5)!}\right)$$

再考虑

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left[\frac{r^2+7r+11}{(r+4)!}\right]$$

令 $k=r-1$, 则

$$\frac{r^2+7r+11}{(r+4)!}=\frac{k^2+9k+19}{(k+5)!}$$

于是

$$\sum_{r=1}^{n}\left[\frac{r^2+7r+11}{(r+4)!}\right]=\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{k^2+9k+19}{(k+5)!}\right]$$

由前一结果可得

$$\sum_{r=1}^{n}\left[\frac{r^2+7r+11}{(r+4)!}\right]=\frac{25}{5!}-\frac{n+6}{(n+5)!}$$

令 $n\to\infty$, 因

$$\frac{n+6}{(n+5)!}\to 0,$$

故

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left[\frac{r^2+7r+11}{(r+4)!}\right]=\frac{25}{5!}=\frac{5}{24}$$

49. 求级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2011^{2^n}-2011^{-2^n}}=\frac{1}{2011^1-2011^{-1}}+\frac{1}{2011^2-2011^{-2}}+\frac{1}{2011^4-2011^{-4}}+\cdots$$

并将其表示为一个有理数。

更一般地, 设

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}},\qquad S_N(x)=\sum_{n=0}^{N}\frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}.$$

注意到题目中的级数正是 $S(1/2011)$。下面证明当 $0<x<1$ 时,

$$S(x)=\frac{x}{1-x}.$$

利用恒等式

$$\frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}=\frac{1}{1-x^{2^n}}-\frac{1}{1-x^{2^{n+1}}},$$

代入部分和 $S_N(x)$, 得

$$S_N(x)=\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2}\right)+\left(\frac{1}{1-x^2}-\frac{1}{1-x^4}\right)+\cdots$$
$$+\left(\frac{1}{1-x^{2^N}}-\frac{1}{1-x^{2^{N+1}}}\right).$$

这是一个望远镜求和, 因此

$$S_N(x)=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^{2^{N+1}}}.$$

当 $N\to\infty$ 时, 由于 $0<x<1$, 有 $x^{2^{N+1}}\to 0$, 从而

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{1-x^{2^{N+1}}}=1.$$

于是

$$S(x)=\lim_{N\to\infty}S_N(x)=\frac{1}{1-x}-1=\frac{x}{1-x}.$$

因此

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2011^{2^n}-2011^{-2^n}}=S\left(\frac{1}{2011}\right)=\frac{\frac{1}{2011}}{1-\frac{1}{2011}}=\frac{1}{2010}.$$

50. 求下列无穷乘积的值:

$$\left(\frac{7}{9}\right)\cdot\left(\frac{26}{28}\right)\cdot\left(\frac{63}{65}\right)\cdot\cdots=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}.$$

将部分积改写为两个可望远镜相消的乘积:

$$\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}=\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k+1}\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}.$$

注意

$$\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}=\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2+k+1}{(k-1)^2+(k-1)+1}.$$

同时

$$\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k+1}=\frac{1\cdot 2}{3\cdot 4}\cdot\frac{2\cdot 3}{4\cdot 5}\cdots\frac{(n-1)n}{(n+1)n}=\frac{2}{n(n+1)}.$$

望远镜消去后得到

$$\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}=\frac{2}{n(n+1)}\cdot\frac{n^2+n+1}{3}=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{n(n+1)}\right).$$

因此

$$\prod_{k=2}^{\infty}\frac{k^3-1}{k^3+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{n(n+1)}\right)=\frac{2}{3}.$$

51. 计算无穷乘积

$$\prod_{n=3}^{\infty}\frac{(n^3+3n)^2}{n^6-64}.$$

设

$$a_n=\frac{(n^3+3n)^2}{n^6-64}.$$

注意到

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{(n^3+3n)^2}{(n^3-8)(n^3+8)}=\frac{n^2(n^2+3)^2}{(n-2)(n^2+2n+4)(n+2)(n^2-2n+4)}\\&=\frac{n}{n-2}\cdot\frac{n}{n+2}\cdot\frac{n^2+3}{(n-1)^2+3}\cdot\frac{n^2+3}{(n+1)^2+3}.\end{aligned}$$

因此当 $N\geqslant 3$ 时,

$$\begin{aligned}\prod_{n=3}^{N}a_n&=\left(\prod_{n=3}^{N}\frac{n}{n-2}\right)\left(\prod_{n=3}^{N}\frac{n}{n+2}\right)\left(\prod_{n=3}^{N}\frac{n^2+3}{(n-1)^2+3}\right)\left(\prod_{n=3}^{N}\frac{n^2+3}{(n+1)^2+3}\right)\\&=\frac{N(N-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{3\cdot 4}{(N+1)(N+2)}\cdot\frac{N^2+3}{2^2+3}\cdot\frac{3^2+3}{(N+1)^2+3}\\&=\frac{72}{7}\cdot\frac{N(N-1)(N^2+3)}{(N+1)(N+2)((N+1)^2+3)}\\&=\frac{72}{7}\cdot\frac{(1-\frac{1}{N})(1+\frac{3}{N^2})}{(1+\frac{1}{N})(1+\frac{2}{N})((1+\frac{1}{N})^2+\frac{3}{N^2})}.\end{aligned}$$

令 $N\to\infty$, 得到

$$\prod_{n=3}^{\infty}a_n=\lim_{N\to\infty}\prod_{n=3}^{N}a_n=\frac{72}{7}.$$

52. 设

$$f(r)=\sum_{j=2}^{2013}\frac{1}{j^r}=\frac{1}{2^r}+\frac{1}{3^r}+\cdots+\frac{1}{2013^r}$$

求

$$\sum_{k=2}^{\infty}f(k)$$

交换求和次序, 并注意到内层和是收敛的等比级数, 有

$$\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{j=2}^{2013}\frac{1}{j^k}=\sum_{j=2}^{2013}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{j^k}=\sum_{j=2}^{2013}\frac{1/j^2}{1-1/j}$$

因此

$$=\sum_{j=2}^{2013}\frac{1}{j^2-j}=\sum_{j=2}^{2013}\frac{1}{j(j-1)}=\sum_{j=2}^{2013}\left(\frac{1}{j-1}-\frac{1}{j}\right)$$

于是

$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2012}-\frac{1}{2013}=\frac{2012}{2013}$$

53. 计算

$$\lceil\sqrt{1}\rceil+\lceil\sqrt{2}\rceil+\lceil\sqrt{3}\rceil+\cdots+\lceil\sqrt{2025}\rceil$$

注意到 $\sqrt{2025}=45$, 当 $(m-1)^2<k\leqslant m^2$ 时有

$$\lceil\sqrt{k}\rceil=m$$

因此可按 $m=1,2,\ldots,45$ 分组求和,

$$\sum_{k=1}^{2025}\lceil\sqrt{k}\rceil=\sum_{m=1}^{45}\sum_{k=(m-1)^2+1}^{m^2}m$$

对固定的 m, 求和的项数为 $m^2-(m-1)^2=2m-1$, 于是

$$\sum_{k=1}^{2025}\lceil\sqrt{k}\rceil=\sum_{m=1}^{45}m(2m-1)=2\sum_{m=1}^{45}m^2-\sum_{m=1}^{45}m=2\cdot\frac{45\cdot 46\cdot 91}{6}-\frac{45\cdot 46}{2}=61755$$

54. 试证

$$8+88+888+\ldots+\underbrace{888\ldots88}_{88\text{'s}}=\frac{8}{81}(10^{89}-802)$$

考虑到

$$\underbrace{99\ldots99}_{\text{n's}}=10^n-1$$

于是

$$\begin{aligned}8+88+888+\cdots+\underbrace{888\ldots88}_{\text{88's}}&=\frac{8}{9}(9+99+999+\cdots+\underbrace{99\ldots99}_{\text{88's}})\\&=\frac{8}{9}(10+10^2+10^3+\cdots+10^{88}-88)\\&=\frac{8}{9}\left[\frac{10(10^{88}-1)}{10-1}-88\right]\\&=\frac{8}{81}(10^{89}-802)\end{aligned}$$

故得证。

55. 求无穷级数

$$\frac{1^2}{11}+\frac{5^2}{11^2}+\frac{9^2}{11^3}+\frac{13^2}{11^4}+\cdots+\frac{(4n-3)^2}{11^n}+\cdots$$

设原式为

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4n-3)^2}{11^n}$$

由 $(4n-3)^2=16n^2-24n+9$, 有

$$S=16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{11^n}-24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{11^n}+9\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{11^n}$$

当 $|x|<1$ 时, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x},\quad \sum_{n=1}^{\infty}nx^n=\frac{x}{(1-x)^2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

令 $x=\frac{1}{11}$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{11^n}=\frac{1}{10},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{11^n}=\frac{11}{100},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{11^n}=\frac{33}{250}$$

于是

$$S=16\cdot\frac{33}{250}-24\cdot\frac{11}{100}+9\cdot\frac{1}{10}=\frac{93}{250}$$

设

$$S=\frac{1^2}{11}+\frac{5^2}{11^2}+\frac{9^2}{11^3}+\frac{13^2}{11^4}+\frac{17^2}{11^5}+\cdots \tag{1}$$

则

$$\frac{1}{11}S=\frac{1^2}{11^2}+\frac{5^2}{11^3}+\frac{9^2}{11^4}+\frac{13^2}{11^5}+\frac{17^2}{11^6}+\cdots \tag{2}$$

(1) - (2) 得

$$\frac{10}{11}S=\frac{1}{11}+\frac{5^2-1^2}{11^2}+\frac{9^2-5^2}{11^3}+\frac{13^2-9^2}{11^4}+\frac{17^2-13^2}{11^5}+\cdots \tag{3}$$

$$\frac{10}{121}S=\frac{1}{11^2}+\frac{5^2-1^2}{11^3}+\frac{9^2-5^2}{11^4}+\frac{13^2-9^2}{11^5}+\frac{17^2-13^2}{11^6}+\cdots \tag{4}$$

(3) - (4) 得

$$\frac{100}{121}S=\frac{1}{11}+\frac{23}{11^2}+\frac{32}{11^3}+\frac{32}{11^4}+\frac{32}{11^5}+\cdots=\frac{1}{11}+\frac{23}{11^2}+\frac{32}{11^3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{11}}$$

故可得

$$S=\frac{93}{250}$$

56. 已知

$$1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{7}{x^3}+\frac{9}{x^4}+\cdots=91,$$

求

$$S=1+\frac{4}{x}+\frac{9}{x^2}+\frac{16}{x^3}+\frac{25}{x^4}+\cdots$$

发现

$$91=1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{7}{x^3}+\cdots=\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\cdots\right)+2\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}+\cdots\right)$$

考虑

$$\sum_{n=1}^{\infty}ny^{n-1}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}y^n\right)'=\left(\frac{y}{1-y}\right)'=\frac{1}{(1-y)^2}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}ny^n=\frac{y}{(1-y)^2}$$

记 $y=\dfrac{1}{x}$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{(1-\frac{1}{x})^2}=\frac{x}{(x-1)^2}$$

所以

$$91=\frac{x}{x-1}+\frac{2x}{(x-1)^2}=\frac{x^2+x}{(x-1)^2}\Rightarrow 90x^2-183x+91=0\Rightarrow x=\frac{7}{6}\text{ 或 }\frac{13}{15}$$

级数收敛需满足 $|x|>1$, 故取 $x=\dfrac{7}{6}$, 现考虑

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{x^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}n^2y^{n-1}$$

由上,

$$\sum_{n=1}^{\infty}ny^n=\frac{y}{(1-y)^2}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}n^2y^{n-1}=\left(\frac{y}{(1-y)^2}\right)'=\frac{1+y}{(1-y)^3}$$

取 $y=\dfrac{6}{7}$ 即得 $S=637$; 又解: 发现 $S=91+\dfrac{6}{7}S\Rightarrow S=637$

57. 求

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

发现

$$\begin{aligned}1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots&=\left[x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\frac{1}{9}x^9-\cdots\right]_0^1\\&=\int_0^1\left(1-x^2+x^4-x^6+x^8+\cdots\right)dx\\&=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx\\&=\left[\tan^{-1}x\right]_0^1=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

58. 求下列级数的值或证明其发散:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\arctan\left(-\frac{2}{k^2}\right)$$

由

$$\arctan\left(-\frac{2}{k^2}\right)=\arctan\left(\frac{(k-1)-(k+1)}{1+(k-1)(k+1)}\right)=\arctan(k-1)-\arctan(k+1),$$

知原级数是一列项求和，于是

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty}[\arctan(k-1)-\arctan(k+1)]\\
&=\lim_{N\to\infty}(\arctan 0+\arctan 1-\arctan N-\arctan(N+1))\\
&=0+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=-\frac{3\pi}{4}
\end{aligned}$$

级数收敛，其值为 $-\dfrac{3\pi}{4}$。

59. 求

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{1+2^{2^{-n}}}$$

注意到：

$$\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{(1-x)(1+x)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)$$

令 $x=2^{2^{-n}}$，则

$$\frac{1}{1+2^{2^{-n}}}=\frac{2}{1-2^{2^{1-n}}}-\frac{1}{1-2^{2^{-n}}}$$

因此原式化为

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\left(\frac{2}{1-2^{2^{1-n}}}-\frac{1}{1-2^{2^{-n}}}\right)\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{1-2^{2^{-(n-1)}}}-\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{1-2^{2^{-n}}}\right)\\
&=-1-\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{2^N}\cdot\frac{1}{1-2^{2^{-N}}}\right)
\end{aligned}$$

现设 $x=2^{-N}$，则当 $N\to\infty, x\to 0^+$，且

$$\frac{1}{2^N}\cdot\frac{1}{1-2^{2^{-N}}}=\frac{x}{1-2^x}=-\frac{x}{2^x-1}$$

由洛必达法则，

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{2^x-1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln 2\cdot 2^x}=\frac{1}{\ln 2}$$

故原式为 $-1+\dfrac{1}{\ln 2}$.

60. 设

$$f(x)=\frac{2016^x}{2016^x+\sqrt{2016}},$$

求

$$\sum_{k=0}^{2016} f\left(\frac{k}{2016}\right)$$

记 $a=2016$, 观察到

$$f(x)+f(1-x)=\frac{a^x}{a^x+a^{\frac{1}{2}}}+\frac{a^{1-x}}{a^{1-x}+a^{\frac{1}{2}}}=\frac{a^x(a^{1-x}+a^{\frac{1}{2}})+a^{1-x}(a^x+a^{\frac{1}{2}})}{(a^x+a^{\frac{1}{2}})(a^{1-x}+a^{\frac{1}{2}})}=1.$$

于是

$$\sum_{k=0}^{2016} f\left(\frac{k}{2016}\right)=\underbrace{\sum_{k=0}^{1007}\left[f\left(\frac{k}{2016}\right)+f\left(1-\frac{k}{2016}\right)\right]}_{1008\text{ 个 “1”}}+f\left(\frac{1008}{2016}\right)=1008+f\left(\frac{1}{2}\right).$$

而 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2}$, 故

$$\sum_{k=0}^{2016} f\left(\frac{k}{2016}\right)=1008+\frac{1}{2}=\frac{2017}{2}.$$

61. 求级数

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\sin^4(\pi x 2^{r-2})}{4^r}$$

在 $x=1$ 的情况下的值。

先化简 $\sin^4\theta$:

$$\begin{aligned}\sin^4\theta &= (\sin^2\theta)^2\\ &= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)^2\\ &= \frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{1}{4}\cos^2 2\theta\\ &= \frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{1}{4}\cdot\frac{1+\cos 4\theta}{2}\\ &= \frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{1}{8}\cos 4\theta\end{aligned}$$

等价地, 可利用恒等式

$$\sin^4\theta = \sin^2\theta-\frac{1}{4}\sin^2 2\theta$$

考虑前 n 项和:

$$\begin{aligned}\sum_{r=0}^{n}\frac{\sin^4(\pi x 2^{r-2})}{4^r} &= \sum_{r=0}^{n}\frac{1}{4^r}\left[\sin^2(\pi x 2^{r-2})-\frac{1}{4}\sin^2(\pi x 2^{r-1})\right]\\ &= \sum_{r=0}^{n}\left[\frac{1}{4^r}\sin^2(\pi x 2^{r-2})-\frac{1}{4^{r+1}}\sin^2(\pi x 2^{r-1})\right]\end{aligned}$$

这是一个望远镜求和, 展开可得:

$$\begin{gathered}\sin^2\frac{\pi x}{4}-\frac{1}{4}\sin^2\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\pi x}{2}-\frac{1}{16}\sin^2(\pi x)\\ +\cdots-\frac{1}{4^{n+1}}\sin^2(\pi x 2^{n-1})\end{gathered}$$

中间项相互抵消, 因此

$$\sum_{r=0}^{n}\frac{\sin^4(\pi x 2^{r-2})}{4^r} = \sin^2\frac{\pi x}{4}-\frac{1}{4^{n+1}}\sin^2(\pi x 2^{n-1})$$

当 $x=1$ 时,

$$\sum_{r=0}^{n}\frac{\sin^4(\pi 2^{r-2})}{4^r} = \sin^2\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4^{n+1}}\sin^2(\pi 2^{n-1})$$

令 $n\to\infty$, 由于

$$0\leqslant\frac{1}{4^{n+1}}\sin^2(\pi 2^{n-1})\leqslant\frac{1}{4^{n+1}}\to 0$$

可得无穷级数的和:

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\sin^4(\pi 2^{r-2})}{4^r} = \sin^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$$

62. 求下列级数的和：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos^2\left(\frac{n\pi}{6}\right)}{2^n}.$$

步骤 1：使用余弦平方恒等式：

$$\cos^2\frac{n\pi}{6}=\frac{1+\cos\frac{n\pi}{3}}{2}\implies\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos^2(n\pi/6)}{2^n}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+\cos(n\pi/3)}{2^n}.$$

步骤 2：拆分为两部分：

$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(n\pi/3)}{2^n}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2}\Re\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{in\pi/3}}{2^n}.$$

步骤 3：求几何级数和：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{1-1/2}=2.$$

步骤 4：复数形式求和：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e^{i\pi/3}}{2}\right)^n=\frac{1}{1-e^{i\pi/3}/2}\implies\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(n\pi/3)}{2^n}=\Re\frac{1}{1-e^{i\pi/3}/2}.$$

步骤 5：提取实部：

$$\frac{1}{1-e^{i\pi/3}/2}=\frac{2-e^{-i\pi/3}}{4-2(e^{i\pi/3}+e^{-i\pi/3})+1}=\frac{2-e^{-i\pi/3}}{5-4\cos(\pi/3)}=\frac{2-(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})}{3}=\frac{3/2+i\sqrt{3}/2}{3}.$$

$$\Re\frac{3/2+i\sqrt{3}/2}{3}=\frac{3/2}{3}=\frac{1}{2}.$$

步骤 6：求最终和：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos^2(n\pi/6)}{2^n}=\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

63. 求

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}\cos\frac{n\pi}{3}$$

设

$$z=\frac{1}{2}e^{i\pi/3}=\frac{1}{4}(1+\sqrt{3}\,i)$$

则

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}z^n=\frac{z}{1-z}\Rightarrow zf'(z)=\frac{z}{(1-z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nz^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}e^{n\pi i/3}$$

于是

$$zf'(z)=\frac{\frac{1}{4}(1+\sqrt{3}\,i)}{\left(\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)^2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1+\sqrt{3}\,i}{1-\sqrt{3}\,i}=-\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}i$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}\cos\frac{n\pi}{3}=\Re(zf'(z))=-\frac{1}{3}$$

64. 证明不等式：(1)

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2}$$

(2)

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}<\frac{3}{4}+\frac{1}{n}$$

(a) 首先，容易看出：

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$$

上述不等式右边共有 n 项。

但同时，我们可以将第二部分的和式通过倒序相加（或首尾配对）的方法重写：

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}&=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2n}\right)+\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n-1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{n}\right)\right]\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{3n}{2n^2}+\frac{3n}{2n^2+(n-1)}+\frac{3n}{2n^2+2(n-2)}+\cdots+\frac{3n}{2n^2}\right]\end{aligned}$$

由于分母中的项 $k(n-k)\geqslant 0$，我们可以通过放缩去掉这些正项从而增大分数值：

$$<\frac{1}{2}\left[\frac{3n}{2n^2}+\frac{3n}{2n^2}+\cdots+\frac{3n}{2n^2}\right]$$

上式括号内共有 $n+1$ 项。于是：

$$=\frac{1}{2}(n+1)\frac{3}{2n}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4n}<\frac{3}{4}+\frac{1}{n}$$

这就证明了题目中的结论。

65. 计算数 $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1{,}000{,}000}}$ 的整数部分。

(a) 首先我们证明不等式：

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}<\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}$$

对于左边的不等式，我们将分子有理化：

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}=\frac{2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}$$

同理可证右边的不等式。

现在利用上述不等式对原和式进行估计。对于下界，我们利用左边的不等式 $\frac{1}{\sqrt{n}}>2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$：

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1,000,000}}&>1+2[(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{1,000,001}-\sqrt{1,000,000})]\\&=1+2(\sqrt{1,000,001}-\sqrt{2})\\&>2\cdot 1000-\sqrt{8}+1>2000-3+1=1998\end{aligned}$$

对于上界，我们利用右边的不等式 $\frac{1}{\sqrt{n}}<2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$：

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1,000,000}}&<1+2[(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{1,000,000}-\sqrt{999,999})]\\&=1+2(\sqrt{1,000,000}-1)\\&=1+2\cdot 999=1999\end{aligned}$$

综上所述，该数的整数部分等于 1998。

66. 求数 $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\frac{1}{\sqrt[3]{5}}+\frac{1}{\sqrt[3]{6}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{1{,}000{,}000}}$ 的整数部分。

首先，通过比较二项式展开式，我们注意到对于每一个自然数 n：

$$\left(1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n}\right)^3>\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$$

两边开立方根并整理可得：

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}>\frac{3}{2}[\sqrt[3]{(n+1)^2}-\sqrt[3]{n^2}]$$

同理，利用类似的展开比较可以得到下界放缩：

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} < \frac{3}{2}[\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{(n-1)^2}]$$

由此我们得到关键的不等式：

$$\frac{3}{2}[\sqrt[3]{(n+1)^2} - \sqrt[3]{n^2}] < \frac{1}{\sqrt[3]{n}} < \frac{3}{2}[\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{(n-1)^2}]$$

现在利用此不等式对原和式进行估计。对于下界：

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{1,000,000}} &> \frac{3}{2}[(\sqrt[3]{5^2} - \sqrt[3]{4^2}) + \cdots + (\sqrt[3]{1,000,001^2} - \sqrt[3]{1,000,000^2})] \\ &= \frac{3}{2}(\sqrt[3]{1,000,002,000,001} - \sqrt[3]{16}) \\ &> \frac{3}{2} \cdot 10,000 - \sqrt[3]{54} \\ &> 15,000 - 4 = 14,996\end{aligned}$$

对于上界：

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{1,000,000}} &< \frac{3}{2}[(\sqrt[3]{4^2} - \sqrt[3]{3^2}) + \cdots + (\sqrt[3]{1,000,000^2} - \sqrt[3]{999,999^2})] \\ &= \frac{3}{2}(\sqrt[3]{1,000,000,000,000} - \sqrt[3]{9}) \\ &< \frac{3}{2}(10,000 - 2) = 14,997\end{aligned}$$

综上所述，该数的整数部分等于 14,996。

67. 求

$$\sum_{m=1}^{19} \sum_{n=m}^{19} (2m+n).$$

首先, 将求和顺序交换, 更容易计算：

$$\sum_{m=1}^{19} \sum_{n=m}^{19} (2m+n) = \sum_{n=1}^{19} \sum_{m=1}^{n} (2m+n).$$

将内层求和拆开：

$$\sum_{n=1}^{19} \sum_{m=1}^{n} (2m+n) = \sum_{n=1}^{19} \left[2\sum_{m=1}^{n} m + \sum_{m=1}^{n} n \right].$$

利用标准求和公式：

$$\sum_{m=1}^{n} m = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{m=1}^{n} n = n \times n = n^2.$$

于是：

$$\sum_{n=1}^{19}\left[2\sum_{m=1}^{n} m + \sum_{m=1}^{n} n\right] = \sum_{n=1}^{19}[2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n^2] = \sum_{n=1}^{19}[n^2 + n + n^2] = \sum_{n=1}^{19}(2n^2 + n).$$

再分开求和：

$$\sum_{n=1}^{19}(2n^2 + n) = 2\sum_{n=1}^{19} n^2 + \sum_{n=1}^{19} n.$$

代入求和公式：

$$\sum_{n=1}^{19} n^2 = \frac{19 \cdot 20 \cdot 39}{6}, \quad \sum_{n=1}^{19} n = \frac{19 \cdot 20}{2}.$$

于是：

$$2\sum_{n=1}^{19} n^2 + \sum_{n=1}^{19} n = 2 \cdot \frac{19 \cdot 20 \cdot 39}{6} + \frac{19 \cdot 20}{2} = \frac{19 \cdot 20 \cdot 39}{3} + 190.$$

计算：

$$\frac{19 \cdot 20 \cdot 39}{3} + 190 = 19 \cdot 20 \cdot 13 + 190 = 4940 + 190 = 5130.$$

$$\therefore \sum_{m=1}^{19}\sum_{n=m}^{19}(2m+n) = 5130.$$

68. 令

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{3^k(k+1)},$$

(a) 试证

$$S'(x) = \frac{3}{3+x} - 1$$

对各项微分，有

$$S'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{x}{3}\right)^k = \frac{-\frac{x}{3}}{1+\frac{x}{3}} = \frac{-x}{3+x} = \frac{3}{3+x} - 1$$

(b) 据此，证

$$S(x)=3\ln(3+x)-3\ln 3-x$$

$$S(x)=\int\left(\frac{3}{3+x}-1\right)dx=3\ln(3+x)-x+C$$

由 $S(0)=0$ 可得 $C=-3\ln 3$, 故

$$S(x)=3\ln(3+x)-3\ln 3-x$$

(c) 求

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k\cdot 3^k}$$

改写求和,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k\cdot 3^k}&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)3^{k+1}}=-\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)3^k}\\&=-\frac{1}{3}(1+S(1))=-\frac{1}{3}(1+3\ln 4-3\ln 3-1)=\ln\frac{3}{4}\end{aligned}$$

69. 求

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\ln\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)$$

的值。

定义

$$f(n)=\ln\left(\frac{n+1}{n}\right),\quad n\geqslant 1.$$

注意到

$$f(2n)+f(2n+1)=f(n).$$

由不等式 $\ln(1+x)\leqslant x$ 可得

$$f(n)\leqslant\frac{1}{n}.$$

再定义

$$g(n)=\sum_{k=n}^{2n-1}f^3(k).$$

于是
$$g(n) < nf^3(n) \leqslant \frac{1}{n^2}.$$
接下来计算
$$\begin{aligned}g(n)-g(n+1) &= f^3(n)-f^3(2n)-f^3(2n+1)\\&= (f(2n)+f(2n+1))^3-f^3(2n)-f^3(2n+1)\\&= 3(f(2n)+f(2n+1))f(2n)f(2n+1)\\&= 3f(n)f(2n)f(2n+1).\end{aligned}$$
因此
$$\sum_{n=1}^{N} f(n)f(2n)f(2n+1) = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{N}\big(g(n)-g(n+1)\big) = \frac{1}{3}\big(g(1)-g(N+1)\big).$$
由于当 $N\to\infty$ 时 $g(N+1)\to 0$，于是
$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)f(2n)f(2n+1) = \frac{1}{3}g(1) = \frac{1}{3}\ln^3 2.$$
这正是所求级数的值。

70. 考虑正整数 m,n，且 $m \geqslant 2$。(m,n)-锯齿数列是从 1 开始的连续整数序列，有 n 个“齿”，每个齿从 2 上升到 m 再下降到 1，如 $(3,4)$-锯齿数列为

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} & & 3 & & & & 3 & & & & 3 & & & & 3 & & \\ & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & \\ 1 & & & & 1 & & & & 1 & & & & 1 & & & & 1\end{array}$$

该序列共有 17 项，平均数为 $\dfrac{33}{17}$。

(a) 求 $(4,2)$-锯齿数列的项和。

$(4,2)$-锯齿数列的项为
$$1,2,3,4,3,2,1,2,3,4,3,2,1$$
其和为 31。

(b) 对任意正整数 $m \geqslant 2$，求 $(m,3)$-锯齿数列中所有数字之和的通项。

$(m,3)$-锯齿数列由初始 1 和 3 个齿组成，每个齿为 $2,3,\ldots,m-1,m,m-1,\ldots,2,1$，项和为

$$2+3+\cdots+m+(m-1)+\cdots+1=2(1+2+\cdots+m)-1-m=m^2-1.$$

因此序列和为 $1+3(m^2-1)=3m^2-2$。

(c) 求所有使 (m,n)-锯齿数列的项和为 145 的 (m,n) 序对。

每个齿的和为 m^2-1，整个序列和为

$$1+n(m^2-1)=145\Rightarrow n(m^2-1)=144.$$

考虑 144 的因数分解，当 $m\geqslant 2$ 时,m^2-1 可能值为

$$3,8,15,24,35,48,63,80,99,120,143,$$

其中 $3,8,24,48$ 能整除 144，因此符合条件的序对为

$$(m,n)=(2,48),(3,18),(5,6),(7,3).$$

(d) 证明对于所有正整数对 (m,n) 且 $m\geqslant 2$, (m,n)-锯齿数列的平均数不是整数。

平均数为

$$\frac{1+n(m^2-1)}{1+n(2m-2)}$$

假设平均数为整数 k，可得一关于 m 的二次方程式

$$\frac{1+n(m^2-1)}{1+n(2m-2)}=k\Rightarrow m^2n-2mnk+(2nk-n-k+1)=0$$

由于 m 为整数，故判别式

$$\Delta=(-2nk)^2-4n(2nk-n-k+1)=(2n(k-1)+1)^2-1.$$

必须为完全平方数，且两完全平方数差为 1 的只有当 0 和 1，因此

$$2n(k-1)+1=1\Rightarrow k=1$$

但若平均数为 1，则

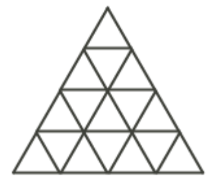
$$n(m^2-1)+1=n(2m-2)+1\Rightarrow n(m-1)^2=0,$$

得 $n>0$ 且 $m\geqslant 2$，矛盾，因此 (m,n)-锯齿数列的平均数不可能为整数。

71. 已知正整数 n, 考虑一个边长为 n 、顶点朝上的等边三角形, 将其划分为单位等边三角形。对于每个 n, 记 $f(n)$ 为所有大小的顶点朝下等边三角形的总数, 例如 $f(3)=3, f(4)=7$。

$n=3$

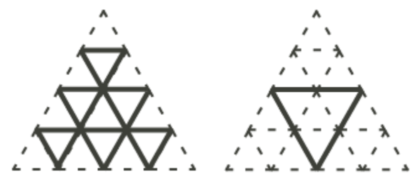
$n=4$



$n=3$

$f(3)=3$

$n=4$



$f(4)=6+1=7$

(a) 求 $f(5)$ 和 $f(6)$。

当 $n=5$ 时, 有 $1+2+3+4=10$ 个边长为 1、$1+2=3$ 个边长为 2 的三角形, 所以

$$f(5)=10+3=13$$

当 $n=6$ 时, 有 $1+2+3+4+5=15$ 个边长为 1、$1+2+3=6$ 个边长为 2、1 个边长为 3 的三角形, 所以

$$f(6)=15+6+1=22$$

(b) 证明对每个正整数 $k \geqslant 1$, 有 $f(2k)=f(2k-1)+k^2$。

设第 i 行有 $i+1$ 个单位点, 从左至右记为 $0,1,\cdots,i$, 考虑边长为 m 、顶点朝下的等边三角形, 且其底顶点位于行 i 时, 注意到每个这样的三角形都被其底顶点确定, 故可能的底点数为

$$(i-m)-m+1=i+1-2m,$$

要求 $2m\leqslant i\leqslant n$ 才能形成三角形, 因此边长为 m 、顶点朝下的三角形总数为

$$\sum_{i=2m}^{n}(i+1-2m)=\frac{(n+1-2m)(n+2-2m)}{2}.$$

若 $n=2k$, 则 $m=1,2,\ldots,k$, 所以

$$\begin{aligned}
f(2k)&=\sum_{m=1}^{k}\frac{(2k+1-2m)(2k+2-2m)}{2}\\
&=\sum_{l=1}^{k}(2l-1)l\quad(令 l=k+1-m)\\
&=2\sum_{l=1}^{k}l^2-\sum_{l=1}^{k}l\\
&=2\cdot\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}-\frac{k(k+1)}{2}\\
&=\frac{k(k+1)(4k-1)}{6}.
\end{aligned}$$

若 $n=2k-1$, 则 $m=1,2,\ldots,k-1$, 所以

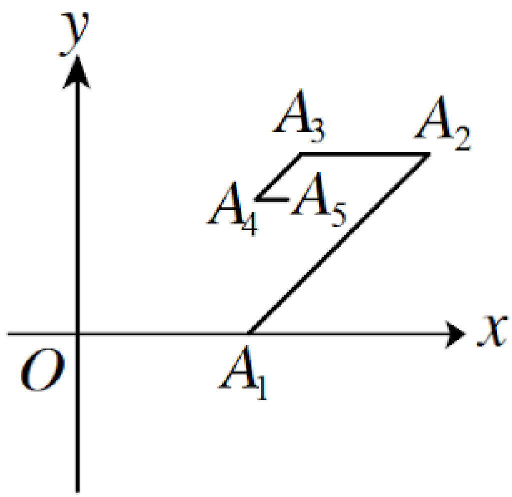
$$\begin{aligned}
f(2k-1)&=\sum_{m=1}^{k-1}\frac{(2k-2m)(2k+1-2m)}{2}\\
&=\sum_{l=1}^{k-1}l(2l+1)\quad(令 l=k-m)\\
&=2\sum_{l=1}^{k-1}l^2+\sum_{l=1}^{k-1}l\\
&=2\cdot\frac{(k-1)k(2k-1)}{6}+\frac{(k-1)k}{2}\\
&=\frac{k(k-1)(4k+1)}{6}.
\end{aligned}$$

因此,

$$f(2k)-f(2k-1)=\frac{k(k+1)(4k-1)}{6}-\frac{k(k-1)(4k+1)}{6}=k^2$$

证毕。

72. 如下图,$O(0,0), A_1(8,0)$, $\overline{A_1A_2}$ 与 x 轴正向夹 $45°$ 角，又 $\overline{A_1A_2}/\!/\overline{A_3A_4}/\!/\overline{A_5A_6}/\!/\ldots$，且 $\overline{OA_1}/\!/\overline{A_2A_3}/\!/\overline{A_4A_5}/\!/\ldots$。已知 $\overline{A_1A_2}=8$，且对所有 $k\in\mathbb{N}$，有 $\overline{A_kA_{k+1}}=2\overline{A_{k+1}A_{k+2}}$。若点 A_n 的坐标为 (x_n,y_n)，求 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)$。



令 $a_n=\overline{A_nA_{n+1}}=2^{4-n}, n\in\mathbb{N}$，有

$$
\begin{aligned}
x_\infty &= 8+\frac{a_1}{\sqrt{2}}-a_2-\frac{a_3}{\sqrt{2}}+a_4+\frac{a_5}{\sqrt{2}}-a_6-\frac{a_7}{\sqrt{2}}+a_8+\cdots\\
&= 8+(a_4+a_8+a_{12}+\cdots)+\frac{1}{\sqrt{2}}(a_1+a_5+a_9+\cdots)\\
&\quad -\frac{1}{\sqrt{2}}(a_3+a_7+a_{11}+\cdots)-(a_2+a_6+a_{10}+\cdots)\\
&= 8+\frac{1}{1-\frac{1}{16}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{8}{1-\frac{1}{16}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{1-\frac{1}{16}}-\frac{4}{1-\frac{1}{16}}=8+\frac{16}{5}(\sqrt{2}-1)\\
y_\infty &= \frac{a_1}{\sqrt{2}}-\frac{a_3}{\sqrt{2}}+\frac{a_5}{\sqrt{2}}-\frac{a_7}{\sqrt{2}}+\cdots\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1+a_5+a_9+\cdots)-\frac{1}{\sqrt{2}}(a_3+a_7+a_{11}+\cdots)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{8}{1-\frac{1}{16}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{1-\frac{1}{16}}=\frac{16\sqrt{2}}{5}
\end{aligned}
$$

所以

$$x_\infty+y_\infty=\frac{24+32\sqrt{2}}{5}$$

二项展开式

1. 求 $(x^2+x+y)^5$ 展开式中 x^5y^2 的系数。

系数为

$$^5C_2{}^3C_1{}^2C_2=30$$

2. 求 $\left(x\sqrt{y}-y\sqrt{x}\right)^4$ 的展开式中 xy 的系数。

观察发现

$$(x\sqrt{y}-y\sqrt{x})^4=x^2y^2(\sqrt{x}-\sqrt{y})^4$$

, 即只需求 $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^4$ 展开式中的含 xy 项的系数 $^4C_2=6$

3. 求在 $\left(x+\dfrac{4}{x}+4\right)^6$ 的展开式中 x^4 的系数。

原式可化为

$$\left(x+\frac{4}{x}+4\right)^6=\left(\frac{x^2+4x+4}{x}\right)^6=\frac{(x+2)^{12}}{x^6}$$

即求 $(x+2)^{12}$ 展开式中 x^{10} 的系数

$$^{12}C_2\cdot 2^2=264$$

4. 求 $(1+x^2)+(1+x^2)^2+\cdots+(1+x^2)^{10}$ 展开式中 x^6 的系数。

原式为

$$\frac{(1+x^2)\left[(1+x^2)^{10}-1\right]}{(1+x^2)-1}=\frac{(1+x^2)^{11}-(1+x^2)}{x^2}$$

展开式 $(1+x^2)^{11}$ 中 x^8 系数为 $^{10}C_4=\dfrac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{4\cdot 3\cdot 2}=330$, 故原式中 x^6 系数为 330.

5. 求下列多项式中 x^{50} 的系数：

(a) $(1+x)^{1000}+x(1+x)^{999}+x^2(1+x)^{998}+\cdots+x^{1000}$

(b) $(1+x)+2(1+x)^2+3(1+x)^3+\cdots+1000(1+x)^{1000}$

(a) 利用等比数列求和公式以及二项式定理，我们得到：

$$\begin{aligned}(1+x)^{1000}+x(1+x)^{999}+\cdots+x^{1000} &= \frac{(1+x)^{1001}-x^{1001}}{(1+x)-x}\\ &= \frac{(1+x)^{1001}-x^{1001}}{1}\\ &= (1+x)^{1001}-x^{1001}\\ &= 1+{}^{1001}C_1x+{}^{1001}C_2x^2+\cdots+{}^{1001}C_{1001}x^{1001}-x^{1001}\end{aligned}$$

因此，所求的系数等于：

$$^{1001}C_{50}=\frac{1001!}{50!\,951!}$$

(b) 设所给多项式为 $P(x)$。我们可以写出：

$$\begin{aligned}xP(x) &= (1+x)P(x)-P(x)\\ &= \left[(1+x)^2+2(1+x)^3+\cdots+999(1+x)^{1000}+1000(1+x)^{1001}\right]\\ &\quad -\left[(1+x)+2(1+x)^2+3(1+x)^3+\cdots+1000(1+x)^{1000}\right]\\ &= 1000(1+x)^{1001}-\left[(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+\cdots+(1+x)^{1000}\right]\\ &= 1000(1+x)^{1001}-\frac{(1+x)[(1+x)^{1000}-1]}{(1+x)-1}\\ &= 1000(1+x)^{1001}-\frac{(1+x)^{1001}-(1+x)}{x}\end{aligned}$$

从而得出：

$$P(x)=\frac{1000(1+x)^{1001}}{x}-\frac{(1+x)^{1001}-(1+x)}{x^2}$$

为了找到 $P(x)$ 中 x^{50} 的系数，我们需要找到 $\frac{1000(1+x)^{1001}}{x}$ 中 x^{50} 的系数（即 $(1+x)^{1001}$ 中 x^{51} 的系数），以及 $\frac{(1+x)^{1001}}{x^2}$ 中 x^{50} 的系数（即 $(1+x)^{1001}$ 中 x^{52} 的系数）。

展开式如下：

$$P(x)=1000\sum_{k=0}^{1001}{}^{1001}C_kx^{k-1}-\sum_{k=0}^{1001}{}^{1001}C_kx^{k-2}+\frac{1+x}{x^2}$$

因此，所求的系数为：

$$\begin{aligned}1000^{1001}C_{51}-{}^{1001}C_{52}&=\frac{1000\cdot 1001!}{51!\,950!}-\frac{1001!}{52!\,950!}\\&=\frac{1001!}{52!\,950!}\left[52\cdot 1000-950\right]\\&=\frac{51050\cdot 1001!}{52!\,950!}\end{aligned}$$

6. 求 $\left[a+(b+c)^2\right]^8$ 展开式中 $a^5b^4c^2$ 的系数。

令 $(b+c)^2=x$, 展开式为

$$(a+x)^8=\sum_{k=0}^{8}\frac{8!}{k!(8-k)!}a^kx^{8-k}$$

欲求 $a^5b^4c^2$ 系数, 于是 $k=5$, 有

$$\frac{8!}{5!3!}a^5[(b+c)^2]^3=56a^5(b+c)^6$$

观察

$$(b+c)^6=\sum_{t=0}^{6}\frac{6!}{t!(6-t)!}b^tc^{6-t}$$

欲求 b^4c^2 系数, 于是 $t=4$, 有

$$\frac{6!}{4!2!}b^4c^2=15b^4c^2$$

$\therefore a^5b^4c^2$ 系数为 $56\cdot 15=840$

7. 求 $(-xy+2x+3y-6)^6$ 的展开式中 x^3y^3 的系数。

考虑

$$\frac{6!}{n_1!n_2!n_3!n_4!}(-xy)^{n_1}(2x)^{n_2}(3y)^{n_3}(-6)^{n_4}=Ax^3y^3,$$

其中 $n_1+n_2+n_3+n_4=6$

- 若 $n_1=0$, 则 $n_2=3,n_3=3,n_4=0$,

$$\frac{6!}{0!3!3!0!}(-xy)^0(2x)^3(3y)^3(-6)^0=4320x^3y^3$$

- 若 $n_1=1$, 则 $n_2=2,n_3=2,n_4=1$,

$$\frac{6!}{1!2!2!1!}(-xy)^1(2x)^2(3y)^2(-6)^1=38880x^3y^3$$

- 若 $n_1=2$, 则 $n_2=1,n_3=1,n_4=2$,

$$\frac{6!}{2!1!1!2!}(-xy)^2(2x)^1(3y)^1(-6)^2=38880x^3y^3$$

- 若 $n_1=3$, 则 $n_2=0,n_3=0,n_4=3$,

$$\frac{6!}{3!0!0!3!}(-xy)^3(2x)^0(3y)^0(-6)^3=4320x^3y^3$$

因此 x^3y^3 的系数为 $4320+38880+38880+4320=86400$

8. $\left(x+\frac{a}{x}\right)\left(2x-\frac{1}{x}\right)^5$ 的展开式中各项系数的和为 2, 则该展开式中的常数项为

解法一

令 $x=1$ 得 $a=1$. 故原式为

$$(x+\frac{1}{x})(2x-\frac{1}{x})^5$$

通项

$$T_{r+1}={}^5C_r(2x)^{5-r}(-x^{-1})^r={}^5C_r(-1)^r2^{5-r}x^{5-2r}$$

由 $5-2r=1$ 得 $r=2$, 对应的常数项 $=80$, 由 $5-2r=-1$ 得 $r=3$, 对应的常数项 $=-40$, 故所求的常数项为 40

解法二

用组合提取法, 把原式看做 6 个因式相乘, 若第 1 个括号提出 x, 从余下的 5 个括号中选 2 个提出 x, 选 3 个提出 $\frac{1}{x}$,

若第 1 个括号提出 $\frac{1}{x}$, 从余下的 5 个括号中选 2 个提出 $\frac{1}{x}$, 选 3 个提出 x.

故常数项

$$x\cdot{}^5C_2(2x)^2\cdot{}^3C_3(-\frac{1}{x})^3+\frac{1}{x}\cdot{}^5C_2(-\frac{1}{x})^2\cdot{}^3C_3(2x)^3=-40+80=40$$

9. 试求

$$({}^2C_2+{}^3C_2x+{}^4C_2x^2+{}^5C_2x^3+{}^6C_2x^4+{}^7C_2x^5)^4$$

展开式中 x^5 的系数。

考虑

$$f(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}{}^{n+2}C_2x^n\right)^4$$

设

$$g(x)=\frac{x^2}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+2}$$

则

$$g'(x)=\frac{x(2-x)}{(x-1)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)x^{n+1}$$

$$g''(x)=-\frac{2}{(x-1)^3}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)x^n=2\sum_{n=0}^{\infty}{}^{n+2}C_2x^n$$

于是

$$f(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}{}^{n+2}C_2x^n\right)^4=\left(-\frac{1}{(1-x)^3}\right)^4=\frac{1}{(1-x)^{12}}$$

故 $({}^2C_2+{}^3C_2x+{}^4C_2x^2+{}^5C_2x^3+{}^6C_2x^4+{}^7C_2x^5)^4$ 展开式中 x^5 的系数为

$${}^{12+5-1}C_5=4368$$

10. 若

$$(1+x+x^2)^6=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{12}x^{12},$$

求 $a_2+a_4+\cdots+a_{12}$ 的值。

设 $f(x)=(1+x+x^2)^6=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{12}x^{12}$, 则

$$a_2+a_4+\cdots+a_{12}=\frac{f(1)+f(-1)}{2}-a_0=\frac{3^6+1}{2}-1=364$$

11. 已知非零数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1,a_2=3,a_n(a_{n+2}-1)=a_{n+1}(a_{n+1}-1),n\in N$, 求

$${}^{2023}C_0a_1+{}^{2023}C_1a_2+{}^{2023}C_2a_3+\cdots+{}^{2023}C_{2023}a_{2024}$$

由递推关系得

$$\frac{a_{n+2}-1}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}-1}{a_n}=\frac{a_2-1}{a_1}=\frac{3-1}{1}=2$$

即

$$a_{n+1}-1=2a_n \Rightarrow a_{n+1}+1=2(a_n+1)$$

数列 $\{a_n+1\}$ 是首项为 2, 公比为 2 的等比数列, 故 $a_n=2^n-1$, 则

$$\begin{aligned}
&{}^{2023}C_0a_1+{}^{2023}C_1a_2+{}^{2023}C_2a_3+{}^{2023}C_3a_4+\cdots+{}^{2023}C_{2023}a_{2024}\\
=&\ {}^{2023}C_0(2^1-1)+{}^{2023}C_1(2^2-1)+{}^{2023}C_2(2^3-1)+\cdots+{}^{2023}C_{2023}(2^{2024}-1)\\
=&\ 2\left({}^{2023}C_02^0+{}^{2023}C_12^1+{}^{2023}C_22^2+\cdots+{}^{2023}C_{2023}2^{2023}\right)\\
&\quad-\left({}^{2023}C_0+{}^{2023}C_1+{}^{2023}C_2+\cdots+{}^{2023}C_{2023}\right)\\
=&\ 2(1+2)^{2023}-2^{2023}=\ 2\cdot 3^{2023}-2^{2023}
\end{aligned}$$

12. 计算级数

$$2+\frac{2\cdot 5}{3!}+\frac{2\cdot 5\cdot 7}{5!}+\frac{2\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{7!}+\dots$$

的值, 并以根式形式表示。

注意到该级数的分子是连续奇数的乘积, 而分母是阶乘。我们可以尝试与二项式展开式的广义形式联系起来:

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}x^2-\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{3!}x^3+\dots$$

通过调整系数, 可以将原级数写成:

$$2\left[1+\frac{3\cdot 5}{2!}\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{3\cdot 5\cdot 7}{3!}\left(\frac{2}{3}\right)^3+\dots\right].$$

这个形式与广义二项式展开 $(1-x)^{-1/2}$ 对应, 其中 $x=\frac{2}{3}$。于是:

$$\sum=2\cdot\left(1-\frac{2}{3}\right)^{-1/2}=2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-1/2}=2\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{3}.$$

因此, 原级数的值为

$$\boxed{2\sqrt{3}}.$$

13. 求下列无穷级数的和

$$S=\frac{3}{8}+\frac{3\times 9}{8\times 16}+\frac{3\times 9\times 15}{8\times 16\times 24}+\frac{3\times 9\times 15\times 21}{8\times 16\times 24\times 32}+\cdots$$

将一般项改写为

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^k(1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1))}{8^{k+1}(1\cdot 2\cdot 3\cdots k)}.$$

整理得

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{2k-1}{2}\right)}{k!}\left(\frac{3}{4}\right)^k.$$

注意到

$$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{2k-1}{2}\right)=(-1)^k\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2k-1}{2}\right),$$

于是

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2k-1}{2}\right)}{k!}\left(-\frac{3}{4}\right)^k.$$

两边同时加 1, 得到

$$1+S=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2k-1}{2}\right)}{k!}\left(-\frac{3}{4}\right)^k.$$

这是二项式展开, 因此

$$1+S=\left(1-\frac{3}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

计算得

$$1+S=\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}=2,$$

从而

$$S=1.$$

14. 求下列表达式的无穷和

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\prod_{r=1}^{k}\left(\frac{8r-7}{40r}\right)\right].$$

先将前几项写出以观察其结构：

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\prod_{r=1}^{k}\left(\frac{8r-7}{40r}\right)\right]=\prod_{r=1}^{1}\left(\frac{8r-7}{40r}\right)+\prod_{r=1}^{2}\left(\frac{8r-7}{40r}\right)+\prod_{r=1}^{3}\left(\frac{8r-7}{40r}\right)+\cdots$$
$$=\frac{1}{40}+\frac{1}{40}\cdot\frac{9}{80}+\frac{1}{40}\cdot\frac{9}{80}\cdot\frac{17}{120}+\frac{1}{40}\cdot\frac{9}{80}\cdot\frac{17}{120}\cdot\frac{25}{160}+\cdots.$$

将每一项写成阶乘形式：

$$=\frac{1}{40\cdot 1!}+\frac{1\cdot 9}{40^2\cdot(1\cdot 2)}+\frac{1\cdot 9\cdot 17}{40^3\cdot(1\cdot 2\cdot 3)}+\frac{1\cdot 9\cdot 17\cdot 25}{40^4\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4)}+\cdots.$$

注意到

$$40=(-8)(-5),$$

于是上式可改写为

$$=\frac{1}{(-8)(-5)\,1!}+\frac{1\cdot 9}{(-8)^2(-5)^2\,2!}+\frac{1\cdot 9\cdot 17}{(-8)^3(-5)^3\,3!}+\frac{1\cdot 9\cdot 17\cdot 25}{(-8)^4(-5)^4\,4!}+\cdots.$$

进一步整理得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\prod_{r=1}^{k}\left(\frac{8r-7}{40r}\right)\right]=\frac{-\frac{1}{8}}{1!}\left(-\frac{1}{5}\right)+\frac{\left(-\frac{1}{8}\right)\left(-\frac{9}{8}\right)}{2!}\left(-\frac{1}{5}\right)^2$$
$$+\frac{\left(-\frac{1}{8}\right)\left(-\frac{9}{8}\right)\left(-\frac{17}{8}\right)}{3!}\left(-\frac{1}{5}\right)^3+\cdots.$$

这是二项式级数展开式

$$(1+x)^{\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k$$

在 $\alpha=-\frac{1}{8}$、$x=-\frac{1}{5}$ 情形下去掉首项后的结果，因此

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\prod_{r=1}^{k}\left(\frac{8r-7}{40r}\right)\right]=\left(1-\frac{1}{5}\right)^{-\frac{1}{8}}-1$$
$$=\left(\frac{4}{5}\right)^{-\frac{1}{8}}-1$$
$$=\sqrt[8]{\frac{5}{4}}-1.$$

15. 已知级数

$$S=\frac{5}{18}-\frac{5\times 8}{18\times 24}+\frac{5\times 8\times 11}{18\times 24\times 30}-\frac{5\times 8\times 11\times 14}{18\times 24\times 30\times 36}+\cdots$$

收敛, 求其和。

原级数可写为

$$S=\frac{5}{18}-\frac{5\times 8}{18\times 24}+\frac{5\times 8\times 11}{18\times 24\times 30}-\frac{5\times 8\times 11\times 14}{18\times 24\times 30\times 36}+\cdots$$

将分母拆分为 $18=6\times 3,\ 24=6\times 4,\ 30=6\times 5,\ldots$, 则

$$S=\frac{5}{6\times 3}-\frac{5\times 8}{6^2(3\times 4)}+\frac{5\times 8\times 11}{6^3(3\times 4\times 5)}-\frac{5\times 8\times 11\times 14}{6^4(3\times 4\times 5\times 6)}+\cdots$$

整理得

$$\begin{aligned}S=&\frac{5}{3}\left(\frac{1}{6}\right)-\frac{5}{3}\left(\frac{8}{4}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^2+\frac{5}{3}\left(\frac{8}{4}\right)\left(\frac{11}{5}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^3\\&-\frac{5}{3}\left(\frac{8}{4}\right)\left(\frac{11}{5}\right)\left(\frac{14}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^4+\cdots\end{aligned}$$

进一步变形并提取常数, 可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{36}S=&\frac{-\frac{1}{3}\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{8}{3}\right)}{3!}\left(\frac{1}{6}\right)^3+\frac{-\frac{1}{3}\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{8}{3}\right)\left(-\frac{11}{3}\right)}{4!}\left(\frac{1}{6}\right)^4\\&+\frac{-\frac{1}{3}\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{8}{3}\right)\left(-\frac{11}{3}\right)\left(-\frac{14}{3}\right)}{5!}\left(\frac{1}{6}\right)^5+\cdots\end{aligned}$$

在级数前补上缺失项, 可构成完整的二项式展开:

$$\begin{aligned}\frac{1}{36}S=&\left[1+\frac{-\frac{1}{3}}{1!}\left(\frac{1}{6}\right)+\frac{-\frac{1}{3}\left(-\frac{4}{3}\right)}{2!}\left(\frac{1}{6}\right)^2+\cdots\right]\\&-\left[1+\frac{-\frac{1}{3}}{1!}\left(\frac{1}{6}\right)+\frac{-\frac{1}{3}\left(-\frac{4}{3}\right)}{2!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\right].\end{aligned}$$

由二项式定理,

$$1+\frac{-\frac{1}{3}}{1!}x+\frac{-\frac{1}{3}\left(-\frac{4}{3}\right)}{2!}x^2+\cdots=(1+x)^{-\frac{1}{3}},$$

取 $x=\frac{1}{6}$, 得

$$\frac{1}{36}S=\left(1+\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}-\left(1+\frac{1}{6}-\frac{1}{36}\right).$$

因此

$$\begin{aligned} S &= 36\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}} - (36+6-1) \\ &= 36\sqrt[3]{\frac{3}{2}} - 41. \end{aligned}$$

16. 2) 证明恒等式

$$k^nC_k = n^{n-1}C_{k-1}$$

从组合数的定义出发:

$$\begin{aligned} k^nC_k &= k\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \\ &= n\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,[(n-1)-(k-1)]!} \\ &= n^{n-1}C_{k-1} \end{aligned}$$

17. 证明恒等式

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

$$\begin{aligned} \binom{n}{n-r} &= \frac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!r!} \\ &= \frac{n!}{r!(n-r)!} \\ &= \binom{n}{r} \end{aligned}$$

18. 证明恒等式 (Pascal's Identity)

$$\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r}$$

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{r-1}+\binom{n}{r} &= \frac{n!}{(r-1)!(n-(r-1))!}+\frac{n!}{r!(n-r)!} \\
&= \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}+\frac{n!}{r!(n-r)!} \\
&= \frac{n!\cdot r}{r!(n-r+1)!}+\frac{n!\cdot(n-r+1)}{r!(n-r+1)!} \\
&= \frac{n![r+(n-r+1)]}{r!(n-r+1)!} \\
&= \frac{n!(n+1)}{r!(n-r+1)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{r!(n+1-r)!} \\
&= \binom{n+1}{r}
\end{aligned}
$$

19. 证明恒等式

$$
\binom{n}{m}\binom{m}{k}=\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}, \quad n\in\mathbb{R}, k, m\in\mathbb{Z}
$$

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{m}\binom{m}{k} &= \frac{n!}{m!(n-m)!}\cdot\frac{m!}{k!(m-k)!} \\
&= \frac{n!}{k!(m-k)!(n-m)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{(n-k)!}{(m-k)!(n-m)!} \\
&= \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}
\end{aligned}
$$

20. 设 n 是任意实数, k 是任意整数, 均有:

$$
\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\cdots+\binom{n+k}{k}=\binom{n+k+1}{k}
$$

又有:

$$
\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\cdots+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1}, \quad n, k\in\mathbb{N}
$$

注: 考虑帕斯卡公式 $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$

(1) 反复对上式中最后一个二项式系数运用帕斯卡公式得:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \\ &= \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2} \\ &\cdots \\ \therefore \binom{n}{k} &= \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \cdots + \binom{n-k-1}{0} + \binom{n-k-1}{-1}\end{aligned}$$

而 $\binom{n-k-1}{-1} = 0$, 用 $r+k+1$ 取代 n, 移项, 便得到该式.

(2) 反复对上式中第一个二项式系数运用帕斯卡公式得:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \\ &= \binom{n-2}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-1}{k-1} \\ &\cdots \\ \therefore \binom{n}{k} &= \binom{k}{k} + \binom{k}{k-1} + \binom{k+1}{k-1} + \cdots + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-1}{k-1}\end{aligned}$$

而 $\binom{k-1}{k} = 0$, 用 r 取代 k, $k+1$ 取代 n, 便得到该式.

21. 证明恒等式

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}^2 = \binom{2n}{n}, \quad n \geqslant 0$$

设 S 是一个有 $2n$ 个元素的集合，$\binom{2n}{n}$ 为计数 S 的 n 子集的数目。

又把 S 划分成 A 和 B 两个子集，每一个子集都有 n 个元素。利用 S 的这个划分去划分 S 的 n 子集。S 的每一个 n 子集包含 k 个 A 的元素和 $n-k$ 个 B 的元素，k 是介于 0 和 n 之间的任意整数。我们把 S 的 n 子集划分成 $n+1$ 个部分：

$$C_0, C_1, \ldots, C_n$$

其中 C_k 是由包含 k 个 A 的元素和 $n-k$ 个 B 的元素组成的 n 子集。根据加法原理，有

$$\binom{2n}{n} = |C_0| + |C_1| + \cdots + |C_n|$$

C_k 中的 n 子集可以通过从 A 中选择 k 个元素，再从 B 中选择 $n-k$ 个元素而得到。根据乘法原理，

$$|C_k| = \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}^2, \quad k \geqslant 0.$$

把上式代入得：

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

22. 证明下列恒等式:

(a)

$${}^nC_0 + {}^nC_2 + \cdots = {}^nC_1 + {}^nC_3 + \cdots = 2^{n-1}$$

使用二项式定理的交错和：

$${}^nC_0 - {}^nC_1 + {}^nC_2 - \cdots + (-1)^n {}^nC_n = 0$$

由此可得：

$${}^nC_0 + {}^nC_2 + \cdots = {}^nC_1 + {}^nC_3 + \ldots$$

又因为

$${}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + \cdots + {}^nC_n = 2^n$$

因此：

$${}^nC_0 + {}^nC_2 + \cdots = {}^nC_1 + {}^nC_3 + \cdots = \frac{1}{2}(2^n) = 2^{n-1}$$

(b)

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0, \quad n \geqslant 1$$

由二项式定理

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n}y^n$$

令 $x=1, y=-1$，得到

$$(1+(-1))^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}$$
$$0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}$$

因此恒等式成立。

(c)

$$1 \cdot {}^nC_1 + 2 \cdot {}^nC_2 + \cdots + n \cdot {}^nC_n = n2^{n-1}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} &= 1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \cdots + n\binom{n}{n} \\
&= n\binom{n-1}{0} + n\binom{n-1}{1} + \cdots + n\binom{n-1}{n-1} \quad (\text{利用} k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}) \\
&= n\left[\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \cdots + \binom{n-1}{n-1}\right] \\
&= n \cdot 2^{n-1} \quad (\text{利用} \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k} = 2^m,\ m = n-1)
\end{aligned}$$

考虑 $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} {}^nC_k x^k$, 两边对 x 求导：

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k^nC_k x^{k-1}.$$

令 $x=1$：

$$n2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k^nC_k.$$

(d)

$$\sum_{k=1}^{n} k^{2n}C_k = n(n+1)2^{n-2}$$

由二项式定理:

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n$$

两边求导，并乘以 x 得:

$$x\frac{d}{dx}(1+x)^n = x\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1}$$
$$xn(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^{k}$$

再次对两边求导:

$$\frac{d}{dx}\left[xn(1+x)^{n-1}\right] = \sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}x^{k-1}$$

计算左边导数:

$$n(1+x)^{n-1} + xn(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}x^{k-1}$$

代入 $x=1$:

$$n\cdot 2^{n-1} + n(n-1)\cdot 2^{n-2} = \sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}$$
$$n\left[2^{n-1} + (n-1)2^{n-2}\right] = \sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}$$
$$n\left[(2+n-1)2^{n-2}\right] = \sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}$$
$$n(n+1)2^{n-2} = \sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}$$

(e)

$${}^nC_0 + \frac{1}{2}{}^nC_1 + \frac{1}{3}{}^nC_2 + \cdots + \frac{1}{n+1}{}^nC_n = \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right)$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{{}^{n}C_k}{k+1} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} {}^{n+1}C_{k+1} \\
&= \frac{1}{n+1} \left({}^{n+1}C_1 + {}^{n+1}C_2 + \cdots + {}^{n+1}C_{n+1} \right) \\
&= \frac{1}{n+1} (2^{n+1} - 1)
\end{aligned}
$$

于是得证。

(f)

$$
\sum_{k \text{ even}} k \binom{n}{k} = n2^{n-2}
$$

由二项式定理:

$$
(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n
$$

两边求导:

$$
n(1+x)^{n-1} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2}x + 3\binom{n}{3}x^2 + \cdots + n\binom{n}{n}x^{n-1}
$$

同理，将 x 替换为 $-x$:

$$
n(1-x)^{n-1} = \binom{n}{1} - 2\binom{n}{2}x + 3\binom{n}{3}x^2 - \cdots + (-1)^{n-1}n\binom{n}{n}x^{n-1}
$$

两式相加:

$$
n(1+x)^{n-1} + n(1-x)^{n-1} = 2\sum_{k \text{ even}} k\binom{n}{k}x^{k-1}
$$

代入 $x=1$:

$$
n2^{n-1} + n0^{n-1} = 2\sum_{k \text{ even}} k\binom{n}{k}
$$

因此:

$$
\sum_{k \text{ even}} k \binom{n}{k} = n2^{n-2}
$$

Vandermonde's Identity

23. 证明 Vandermonde 恒等式:

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$$

注意到:

$$(1+x)^n(1+x)^m = (1+x)^{n+m}$$

等号左边展开为:

$$\begin{aligned}(1+x)^n(1+x)^m &= \left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}x^j\right)\\ &= \sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}\right)x^k\end{aligned}$$

等号右边根据定义展开为:

$$(1+x)^{n+m} = \sum_{k=0}^{n+m}\binom{n+m}{k}x^k$$

比较 x^k 系数, 得到:

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$$

24. 证明

$$\left({}^nC_0 - {}^nC_2 + {}^nC_4 - \cdots\right)^2 + \left({}^nC_1 - {}^nC_3 + {}^nC_5 - \cdots\right)^2 = 2^n$$

设 $f(x) = (x+1)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + \cdots + {}^nC_nx^n$, 取 $x = i$ 得

$$f(i) = (i+1)^n = (\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi i}{4}})^n = 2^{\frac{n}{2}}e^{\frac{\pi i}{4}}$$

且有

$$f(i) = \left({}^nC_0 - {}^nC_2 + {}^nC_4 - \cdots\right) + i\left({}^nC_1 - {}^nC_3 + {}^nC_5 - \cdots\right)$$

比较实部与虚部得

$${}^nC_0 - {}^nC_2 + {}^nC_4 - \cdots = 2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{\pi i}{4}, \quad {}^nC_1 - {}^nC_3 + {}^nC_5 - \cdots = 2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{\pi i}{4}$$

因此得证

$$({}^nC_0 - {}^nC_2 + \cdots)^2 + ({}^nC_1 - {}^nC_3 + \cdots)^2 = 2^n \cos^2\left(\frac{\pi i}{4} + \sin^2\frac{\pi i}{4}\right) = 2^n$$

25. 若将 $(x+1)^{2000}$ 展开, 问有多少个系数是奇数?

一般地, 若 $(x+1)^n$ 展开式中奇数系数的个数为 2^a, 其中 a 是 n 的二进制表示中 1 的个数, 将 2000 转换为二进制:

$$2000 = 11111010000_2$$

其中有 6 个 1, 因此 $(x+1)^{2000}$ 中奇数系数的个数为

$$2^6 = 64.$$

又解: 对 2 取模, 有

$$\begin{aligned}(x+1)^{2000} &= (x+1)^{1024}(x+1)^{512}(x+1)^{256}(x+1)^{128}(x+1)^{64}(x+1)^{16}\\ &\equiv (x^{1024}+1)(x^{512}+1)\cdots(x^{16}+1) \pmod 2,\end{aligned}$$

展开后共有 $2^6 = 64$ 项系数为奇数。

26. 设 n 为大于或等于 1 的正整数, 考虑数列 $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, 试用二项式定理证明对所有 n 皆满足

$$a_n < e$$

设 $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, 考虑对 a_n 进行二项式展开

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!\cdot n^k}$$

注意到

$$\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k \leqslant \frac{1}{k!} \Rightarrow a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} < \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = e$$

27. 定义 a_n 为 $(3-\sqrt{x})^n$ 展开式中 x 项的系数，其中 n 是正整数。求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^2}{a_2}+\frac{3^3}{a_3}+\cdots+\frac{3^n}{a_n}\right)$$

观察到 $(3-\sqrt{x})^n$ 的二项展开式为:

$$(3-\sqrt{x})^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^{n-k}(-\sqrt{x})^k$$

x 项的系数对应 $k=2$:

$$a_n=\binom{n}{2}3^{n-2}$$

所以

$$\frac{3^n}{a_n}=\frac{3^n}{\binom{n}{2}3^{n-2}}=\frac{3^2}{\binom{n}{2}}=\frac{9}{\binom{n}{2}}$$

原式变为

$$9\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\binom{n}{2}}=18\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n(n-1)}=18\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$

这是一个裂项求和，且

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots=1$$

因此原极限为 18。

28. 用 $|S|$ 表示集合 S 中元素的个数。已知集合

$$S=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots,\frac{1}{113}\right\},\quad T=\{A\subseteq S\,|\,|A|=2n,\,n\in\mathbb{N}\},$$

试回答下列问题:

(a) $|T|=?$

集合 S 中的元素个数为 $|S|=112$，所以:

$$|T|={}^{112}C_2+{}^{112}C_4+\cdots+{}^{112}C_{112}$$

由二项式定理,

$$(1+1)^{112}={}^{112}C_0+{}^{112}C_1+\cdots+{}^{112}C_{112}=2^{112}$$
$$(1-1)^{112}={}^{112}C_0-{}^{112}C_1+{}^{112}C_2-\cdots+(-1)^{112}\cdot{}^{112}C_{112}=0$$

两式相加得

$$2^{112} = 2\left({}^{112}C_0 + {}^{112}C_2 + {}^{112}C_4 + \cdots + {}^{112}C_{112}\right) \Rightarrow \sum_{k=0}^{56} {}^{112}C_{2k} = 2^{111}$$

于是

$$|T| = 2^{111} - 1$$

(b) 对任意 $A_i \in T$, 将 A_i 中所有元素相乘的乘积记为 m_i, 再将所有的 m_i 相加, 其和为 M, 求 M 的值。

设

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)\cdots\left(x + \frac{1}{113}\right)$$

展开 $f(x)$ 得

- x^{110} 的系数为所有 $|A_i| = 2$ 的子集乘积之和;
- x^{108} 的系数为所有 $|A_i| = 4$ 的子集乘积之和;
- $\cdots$;
- 常数项为所有 $|A_i| = 112$ 的子集乘积之和。

故所有偶数个元素子集的乘积之和为

$$M = \frac{1}{2}\left(f(1) + f(-1)\right) - 1$$

而

$$f(1) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{113}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{114}{113} = 57$$

$$f(-1) = \left(-1 + \frac{1}{2}\right)\left(-1 + \frac{1}{3}\right)\cdots\left(-1 + \frac{1}{113}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\cdots\left(-\frac{112}{113}\right) = \frac{1}{113}$$

因此

$$M = \frac{1}{2}\left(57 + \frac{1}{113}\right) - 1 = \frac{3108}{113}$$

29. 函数 f 由实常数 a, b, c 定义为

$$f(x) = (a + bx + cx^2)(1 - x)^{-3}, \quad x \in \mathbb{R},\ |x| < 1.$$

a) 证明

$$f(x)=a+(3a+b)x+\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\left[a(n+1)(n+2)+bn(n+1)+cn(n-1)\right]x^n.$$

b) 利用第 (a) 问的结果求

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}.$$

(a) 先写出二项式展开式

$$(1-x)^{-3}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}(n+1)(n+2)x^n.$$

于是

$$\begin{aligned}
f(x)&=(a+bx+cx^2)(1-x)^{-3}\\
&=(a+bx+cx^2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}(n+1)(n+2)x^n\\
&=\frac{1}{2}a\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n+\frac{1}{2}b\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^{n+1}\\
&\quad+\frac{1}{2}c\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^{n+2}.
\end{aligned}$$

将前两项单独取出并把求和指标统一为从 $n=2$ 开始, 可得

$$f(x)=a+(3a+b)x+\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+1)(n+2)+n(n+1)+(n-1)n\right]x^n.$$

整理得

$$f(x)=a+(3a+b)x+\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\left[a(n+1)(n+2)+bn(n+1)+cn(n-1)\right]x^n.$$

(b) 展开求和中 x^n 的系数:

$$\frac{1}{2}\left[(a+b+c)n^2+(3a+b-c)n+2a\right].$$

要求该系数等于 n^2, 比较系数得

$$\frac{1}{2}(a+b+c)=1,\quad \frac{1}{2}(3a+b-c)=0,\quad a=0.$$

解得

$$a=0,\quad b=1,\quad c=1.$$

于是

$$f(x)=(x+x^2)(1-x)^{-3}=x+\sum_{n=2}^{\infty}n^2x^n.$$

令 $x=\frac{1}{2}$, 有

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)^{-3}=\frac{3}{4}\cdot 8=6.$$

另一方面,

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}.$$

因此

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}=6-\frac{1}{2}=\frac{11}{2}.$$

再加上 $n=1$ 的项 $\frac{1}{2}$, 得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}=6.$$

30. 计算:

$$\cos\alpha+{}^nC_1\cos 2\alpha+{}^nC_2\cos 3\alpha+\cdots+{}^nC_{n-1}\cos n\alpha+\cos(n+1)\alpha$$

以及

$$\sin\alpha+{}^nC_1\sin 2\alpha+{}^nC_2\sin 3\alpha+\cdots+{}^nC_{n-1}\sin n\alpha+\sin(n+1)\alpha$$

我们需要计算下列复数和的实部与虚部系数:

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)+{}^nC_1(\cos 2\alpha+i\sin 2\alpha)+{}^nC_2(\cos 3\alpha+i\sin 3\alpha)+\cdots+[\cos(n+1)\alpha+i\sin(n+1)\alpha]$$

令 $x=\cos\alpha+i\sin\alpha$。利用棣莫弗公式(De Moivre's formula)和二项式定理,我们可以将

该和式转化为以下形式：

$$\begin{aligned}
x+{}^{n}C_1x^2+{}^{n}C_2x^3+\cdots+x^{n+1} &= x(1+x)^n \\
&= (\cos\alpha+i\sin\alpha)(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^n \\
&= (\cos\alpha+i\sin\alpha)\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2i\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)^n \\
&= (\cos\alpha+i\sin\alpha)\left[2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right)\right]^n \\
&= 2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}(\cos\alpha+i\sin\alpha)\left(\cos\frac{n\alpha}{2}+i\sin\frac{n\alpha}{2}\right) \\
&= 2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\left[\cos\left(\alpha+\frac{n\alpha}{2}\right)+i\sin\left(\alpha+\frac{n\alpha}{2}\right)\right] \\
&= 2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{n+2}{2}\alpha+i\sin\frac{n+2}{2}\alpha\right)
\end{aligned}$$

由此可得：

$$\begin{aligned}
\cos\alpha+{}^{n}C_1\cos2\alpha+{}^{n}C_2\cos3\alpha+\cdots+\cos(n+1)\alpha &= 2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\cos\frac{n+2}{2}\alpha \\
\sin\alpha+{}^{n}C_1\sin2\alpha+{}^{n}C_2\sin3\alpha+\cdots+\sin(n+1)\alpha &= 2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\sin\frac{n+2}{2}\alpha
\end{aligned}$$

31. (a) 证明对于任意正整数 n 有

$$\begin{aligned}
\sin n\theta &= \binom{n}{1}\sin\theta\cos^{n-1}\theta-\binom{n}{3}\sin^3\theta\cos^{n-3}\theta+\binom{n}{5}\sin^5\theta\cos^{n-5}\theta-\ldots, \\
\cos n\theta &= \cos^n\theta-\binom{n}{2}\sin^2\theta\cos^{n-2}\theta+\binom{n}{4}\sin^4\theta\cos^{n-4}\theta-\ldots
\end{aligned}$$

(b) 证明, 对于区间 $[-1,1]$ 上的所有 x 和任意正整数 n, 函数

$$T_n(x)=\cos(n\cos^{-1}x)$$

是 x 的次数为 n 的多项式, 且首项系数为 2^{n-1}。

(a) 由德·摩根定理 (De Moivre's Theorem)：

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta,$$

对左边使用二项式定理展开, 并分别比较实部和虚部, 即得所述公式。

(b) 取 $\theta=\cos^{-1}x$, 则 $\cos\theta=x$,$\sin\theta=\sqrt{1-x^2}$, 应用 (a) 可得

$$\cos(n\cos^{-1}x)=x^n-\binom{n}{2}(1-x^2)x^{n-2}+\binom{n}{4}(1-x^2)^2x^{n-4}-\ldots$$

显然 $T_n(x)$ 是 x 的次数为 n 的多项式。其首项系数为

$$1+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots+\binom{n}{2k}.$$

由于

$$2^n=(1+1)^n=1+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n},\quad 0=(1-1)^n=1-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n},$$

两式相加, 得到

$$1+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots+\binom{n}{2k}=2^{n-1}.$$

因此首项系数为 2^{n-1}。

32. 设函数

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}},\quad -1<x<1$$

a) 通过操作二项展开的一般项, 证明

$$f(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{2r}{r}\left(\frac{1}{4}x\right)^r$$

b) 求 $\frac{1}{\sqrt{16-x^2}}$ 的类似展开式, 并进一步证明

$$\frac{x}{(16-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\sum_{r=1}^{\infty}\binom{2r}{r}\left(\frac{1}{16}\right)^r\left(\frac{1}{8}x\right)^{2r-1}$$

c) 求下列级数的精确值

$$\sum_{r=1}^{\infty}\binom{2r}{r}\left(\frac{5}{32}\right)^r\left(\frac{4}{25}\right)^r$$

a)

由二项定理,

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{-\frac{1}{2}}{1!}(-x)+\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}(-x)^2+\cdots$$

一般项可写为

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}}=1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2r-1}{2}\right)}{r!}(-x)^r$$

整理符号与系数得

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2r-1)}{r!2^r} x^r$$

利用

$$1\cdot 3\cdot 5\cdots(2r-1) = \frac{(2r)!}{2^r r!},$$

可得

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(2r)!}{r!r!}\left(\frac{x}{4}\right)^r = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{2r}{r}\left(\frac{x}{4}\right)^r$$

b)

$$(16-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 16^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x^2}{16}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{2r}{r}\left(\frac{x^2}{64}\right)^r = \frac{1}{4}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{2r}{r}\left(\frac{x}{8}\right)^{2r}$$

对两边求导,

$$\frac{d}{dx}(16-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{4}\binom{2r}{r}(2r)\left(\frac{x}{8}\right)^{2r-1}\frac{1}{8}$$

左边化简得

$$\frac{x}{(16-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \sum_{r=1}^{\infty}\binom{2r}{r}\frac{r}{16}\left(\frac{x}{8}\right)^{2r-1},$$

即证所需结果。

c)

原级数化简为

$$\sum_{r=1}^{\infty}\binom{2r}{r}\left(\frac{1}{16}\right)^r\left(\frac{2}{5}\right)^{2r-1}$$

由 b) 的结果, 令

$$\frac{x}{8} = \frac{2}{5} \Rightarrow x = \frac{16}{5},$$

则

$$\sum_{r=1}^{\infty}\binom{2r}{r}\left(\frac{1}{16}\right)^r\left(\frac{2}{5}\right)^{2r-1} = \frac{\frac{16}{5}}{\left(16-(\frac{16}{5})^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

计算得

$$16-\left(\frac{16}{5}\right)^2 = 16\left(1-\frac{16}{25}\right) = 16\cdot\frac{9}{25},$$

因此

$$\frac{\frac{16}{5}}{\left(16-\left(\frac{16}{5}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{16}{5}\cdot\frac{25}{64\cdot 27}=\frac{25}{108}$$

泰勒展开式

1. 设 $y = e^{\tan x}$,$x \in \mathbb{R}$。

   a) 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 并证明
   $$\frac{d^2y}{dx^2} = (1 + \tan^2 x + 2\tan x)\frac{dy}{dx}.$$

   首先对 y 求导:
   $$\frac{dy}{dx} = e^{\tan x}\sec^2 x = y\sec^2 x.$$
   再次求导:
   $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(y\sec^2 x) = \frac{dy}{dx}\sec^2 x + y \cdot 2\sec^2 x \tan x.$$
   将 $y\sec^2 x$ 替换为 $\frac{dy}{dx}$:
   $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx}\sec^2 x + 2\frac{dy}{dx}\tan x = \frac{dy}{dx}(\sec^2 x + 2\tan x) = \frac{dy}{dx}(1 + \tan^2 x + 2\tan x).$$

   b) 求 $e^{\tan x}$ 的 x^3 展开式。

   使用 Taylor 展开:
   $$y = y_0 + y_0'x + \frac{y_0''}{2!}x^2 + \frac{y_0'''}{3!}x^3 + O(x^4),$$
   在 $x = 0$ 时,$y_0 = 1$,$y_0' = 1$,$y_0'' = 1$。

   计算三阶导数:
   $$\frac{d^3y}{dx^3} = 2(1 + \tan x)\sec^2 x\frac{dy}{dx} + (1 + \tan x)^2\frac{d^2y}{dx^2},$$
   代入 $x = 0$ 得 $y_0''' = 3$。

   于是
   $$e^{\tan x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + O(x^4).$$

2. 设 $f(x) \equiv \sin[\ln(1 + x)]$,$x \in \mathbb{R}$,$x > -1$。

   a) 求 $f(x)$ 满足的微分方程。

首先求导：

$$f'(x) = \cos[\ln(1+x)]\frac{1}{1+x}.$$

$$(1+x)f'(x) = \cos[\ln(1+x)].$$

再次求导：

$$(1+x)f''(x) + f'(x) = -\sin[\ln(1+x)]\frac{1}{1+x}.$$

两边乘以 $(1+x)$：

$$(1+x)^2 f''(x) + (1+x)f'(x) = -\sin[\ln(1+x)].$$

移项得微分方程：

$$(1+x)^2 f''(x) + (1+x)f'(x) + f(x) = 0.$$

b) 求 Maclaurin 展开前 3 个非零项。

利用微分方程可求各阶导数在 $x=0$ 的值：

$$f(0) = \sin(\ln 1) = 0, \quad f'(0) = \cos(\ln 1) = 1.$$

由微分方程 $(1+x)^2 f'' + (1+x)f' + f = 0$ 得：

$$f''(0) + f'(0) + f(0) = 0 \implies f''(0) = -1.$$

三阶导数：

$$(1+x)^2 f''' + 3(1+x)f'' + 2f' = 0 \implies f'''(0) + 3f''(0) + 2f'(0) = 0 \implies f'''(0) = 1.$$

因此 Maclaurin 展开：

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots$$

c) 用结果求 $\sin[\ln(1+x)]$ 的前 2 个非零项的 Maclaurin 展开。

从 (b) 的展开式可直接得到前 2 个非零项：

$$\sin[\ln(1+x)] = x - \frac{1}{2}x^2 + \dots$$

3. 设 $y = \tan x$, $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$。

a) 证明下列公式：

i)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2y\frac{dy}{dx}$$

ii)

$$\frac{d^5y}{dx^5} = 6\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + 8\frac{dy}{dx}\frac{d^3y}{dx^3} + 2y\frac{d^4y}{dx^4}$$

(i) 求二阶导数：

$$y = \tan x \implies \frac{dy}{dx} = \sec^2 x = 1 + \tan^2 x = 1 + y^2$$
$$y' = 1 + y^2$$

对 x 求导：

$$y'' = 2yy'$$

(ii) 高阶导数：

$$y''' = 2y'y' + 2yy'' = 2(y')^2 + 2yy''$$

$$y^{(4)} = 6y'y'' + 2yy'''$$

$$y^{(5)} = 6(y'')^2 + 8y'y''' + 2yy^{(4)}$$

b) 求 $y = \tan x$ 的 **Maclaurin** 展开前 **3** 个非零项

在 $x = 0$ 处求各阶导数：

$$y_0 = \tan(0) = 0$$

$$y_0' = 1 + y_0^2 = 1$$

$$y_0'' = 2y_0y_0' = 0$$

$$y_0''' = 2y_0y_0'' + 2(y_0')^2 = 2$$

$$y_0^{(4)} = 6y_0'y_0'' + 2y_0y_0''' = 0$$

$$y_0^{(5)} = 6(y_0'')^2 + 8y_0'y_0''' + 2y_0y_0^{(4)} = 16$$

Maclaurin 展开式：

$$y = y_0 + xy_0' + \frac{x^2}{2!}y_0'' + \frac{x^3}{3!}y_0''' + \frac{x^4}{4!}y_0^{(4)} + \frac{x^5}{5!}y_0^{(5)} + O(x^6)$$

代入各阶导数值：

$$y = 0 + x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + O(x^6)$$

因此，

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + O(x^6)$$

4. 设 $y = \ln(2 - e^x)$, $x < \ln 2$。

a) 证明下列公式：

$$e^y\left[\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3\right] + e^x = 0$$

由 $y = \ln(2 - e^x)$ 得

$$e^y = 2 - e^x$$

两边对 x 求导：

$$\frac{d}{dx}(e^y) = \frac{d}{dx}(2 - e^x) \implies e^y y' = -e^x \implies e^y y' + e^x = 0$$

再次求导：

$$\frac{d}{dx}(e^y y' + e^x) = 0 \implies e^y[(y')^2 + y''] + e^x = 0$$

再求一次导数：

$$\frac{d}{dx}\left(e^y[(y')^2 + y''] + e^x\right) = 0 \implies e^y[y''' + 3y'y'' + (y')^3] + e^x = 0$$

b) 求 **Maclaurin** 展开式的前三个非零项

在 $x=0$ 处求各阶导数：

$$y_0 = \ln(2-e^0) = \ln 1 = 0$$

$$e^y y' + e^x = 0 \implies y_0' + 1 = 0 \implies y_0' = -1$$

$$e^y[(y')^2 + y''] + e^x = 0 \implies (-1)^2 + y_0'' + 1 = 0 \implies y_0'' = -2$$

$$e^y[(y')^3 + 3y'y'' + y'''] + e^x = 0 \implies (-1)^3 + 3(-1)(-2) + y_0''' + 1 = 0 \implies y_0''' = -6$$

Maclaurin 展开式：

$$y = y_0 + xy_0' + \frac{x^2}{2!}y_0'' + \frac{x^3}{3!}y_0''' + O(x^4)$$

代入各阶导数值：

$$y = 0 - x - x^2 - x^3 + O(x^4)$$

因此

$$\ln(2-e^x) = -x - x^2 - x^3 + O(x^4)$$

5. 函数 f 和 g 定义如下：

$$f(x) = \arctan\left(\frac{2}{3}x\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

$$g(y) = \frac{1}{1+y}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad -1 < y < 1.$$

a) 将 $g(y)$ 展开为二项级数，并保留 y^3 项。

使用二项式定理：

$$(1+y)^{-1} = 1 + (-1)y + \frac{(-1)(-2)}{2!}y^2 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{3!}y^3 + O(y^4)$$

$$(1+y)^{-1} = 1 - y + y^2 - y^3 + O(y^4)$$

b) 利用 $f'(x)$ 和 (a) 的结果，求 $\arctan\left(\frac{2}{3}x\right)$ 的级数展开。

$$f(x) = \arctan\left(\frac{2}{3}x\right)$$

$$f'(x) = \frac{2/3}{1+(\frac{2}{3}x)^2} = \frac{2}{3}\left(1+\frac{4}{9}x^2\right)^{-1}$$

将 (a) 的结果代入，令 $y=\frac{4}{9}x^2$：

$$f'(x)\approx\frac{2}{3}\left[1-\frac{4}{9}x^2+\left(\frac{4}{9}x^2\right)^2-\left(\frac{4}{9}x^2\right)^3+O(x^8)\right]$$

$$f'(x)\approx\frac{2}{3}-\frac{8}{27}x^2+\frac{32}{243}x^4-\frac{128}{2187}x^6+O(x^8)$$

对 x 积分：

$$f(x)\approx\int\left[\frac{2}{3}-\frac{8}{27}x^2+\frac{32}{243}x^4-\frac{128}{2187}x^6+O(x^8)\right]dx$$

$$\arctan\left(\frac{2}{3}x\right)\approx\frac{2}{3}x-\frac{8}{81}x^3+\frac{32}{1215}x^5-\frac{128}{15309}x^7+C$$

由 $x=0$ 可得 $C=0$，因此：

$$\arctan\left(\frac{2}{3}x\right)\approx\frac{2}{3}x-\frac{8}{81}x^3+\frac{32}{1215}x^5-\frac{128}{15309}x^7.$$

6. 已知 $y=\tan x$。

a) 证明

$$\frac{d^3y}{dx^3}=2y\frac{d^2y}{dx^2}+2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

b) 求 $\tan x$ 在 $x=\frac{\pi}{4}$ 附近的前四项泰勒展开式

c) 从上式近似计算

$$\tan\frac{5\pi}{18}\approx 1+\frac{\pi}{18}+\frac{\pi^2}{648}+\frac{\pi^3}{17496}$$

a) 计算高阶导数

$$y=\tan x$$

$$\frac{dy}{dx}=\sec^2 x=1+\tan^2 x=1+y^2$$

对 x 再求两次导数：

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}(1+y^2)=2y\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}\left(2y\frac{dy}{dx}\right)=2y\frac{d^2y}{dx^2}+2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

b) 泰勒展开式

在 $x = a = \frac{\pi}{4}$ 处计算各阶导数:

$$y = \tan a = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2 = 2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2y\frac{dy}{dx} = 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 2y\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2 \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2^2 = 16$$

泰勒展开公式:

$$\tan x \approx f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a) + \dots$$

代入各阶导数:

$$\tan x \approx 1 + 2(x - \frac{\pi}{4}) + 2(x - \frac{\pi}{4})^2 + \frac{8}{3}(x - \frac{\pi}{4})^3 + \dots$$

c) 近似计算 $\tan \frac{5\pi}{18}$

$$x - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{18} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{36}$$

代入泰勒展开:

$$\tan \frac{5\pi}{18} \approx 1 + 2 \cdot \frac{\pi}{36} + 2 \cdot \left(\frac{\pi}{36}\right)^2 + \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{\pi}{36}\right)^3$$

$$\tan \frac{5\pi}{18} \approx 1 + \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi^2}{1296} + \frac{8\pi^3}{139968}$$

$$\tan \frac{5\pi}{18} \approx 1 + \frac{\pi}{18} + \frac{\pi^2}{648} + \frac{\pi^3}{17496}$$

7. 求 $\arctan x$ 的麦克劳林展开式, 并利用该展开证明

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)$$

其中 $f(n)$ 为适当的函数

先对 $\arctan x$ 求导

$$\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$$

当 $|x| < 1$ 时, 有几何级数展开

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

对上式逐项积分, 且取积分常数

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}\int(-1)^n x^{2n}\,dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + C$$

令 $x = 0$, 则 $\arctan 0 = 0$, 从而 $C = 0$, 于是

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

代入 $x = 1$ 得

$$\arctan 1 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$

而 $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, 故

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$

两边同乘 4, 得

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{2n+1}$$

因此可取

$$f(n) = \frac{4(-1)^n}{2n+1}$$

8. 利用适当的二项式展开式, 证明

$$\arcsin x = \sum_{r=0}^{\infty} \left[\frac{\binom{2r}{r}}{2r+1} \frac{2}{4^r} \left(\frac{x}{2} \right)^{2r+1} \right]$$

从二项式展开 $(1-x^2)^{-1/2}$ 出发

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{-1/2}{1}(-x^2) + \frac{-1/2(-3/2)}{1 \cdot 2}(-x^2)^2 + \frac{-1/2(-3/2)(-5/2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(-x^2)^3 + O(x^8)$$

化简符号得

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1/2 \cdot 3/2}{1 \cdot 2}x^4 + \frac{1/2 \cdot 3/2 \cdot 5/2}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^6 + O(x^8)$$

整理成阶乘形式

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3!} \frac{x^6}{8} + O(x^8)$$

进一步写成二项式系数

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\binom{2r}{r}}{4^r} x^{2r}$$

对两边在收敛半径内积分

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\binom{2r}{r}}{4^r} x^{2r}\, dx$$

逐项积分得

$$\arcsin x = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\binom{2r}{r}}{4^r} \frac{x^{2r+1}}{2r+1} + C$$

代入 $x=0$ 得 $C=0$, 于是

$$\arcsin x = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\binom{2r}{r}}{2r+1} \frac{x^{2r+1}}{4^r}$$

重写为所需形式

$$\arcsin x = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\binom{2r}{r}}{2r+1} \frac{2}{4^r} \left(\frac{x}{2} \right)^{2r+1}$$

9. 求下列无穷级数的和:

$$1 + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{5 \times 4^2} + \frac{1}{7 \times 4^3} + \frac{1}{9 \times 4^4} + \cdots$$

考虑对数的幂级数展开：

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots$$

两式相减：

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots\right)$$

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

在收敛半径内令 $x = \frac{1}{2}$：

$$\ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right) = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1/2)^{2k+1}}{2k+1}$$

$$\ln 3 = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)2^{2k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)4^k}$$

注意到原级数的形式与此一致：

$$1 + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 4^2} + \frac{1}{7\cdot 4^3} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)4^k}$$

$$\therefore 1 + \frac{1}{3\times 4} + \frac{1}{5\times 4^2} + \frac{1}{7\times 4^3} + \cdots = \ln 3$$

10. 求下列交错级数的和：

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{1+4} + \frac{1}{1+4+9} - \frac{1}{1+4+9+16} + \frac{1}{1+4+9+16+25} - \cdots$$

首先写成紧凑形式：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{1^2+2^2+\cdots+n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{6(-1)^{n+1}}{n(n+1)(2n+1)}$$

对 $\frac{1}{n(n+1)(2n+1)}$ 做部分分式分解：

$$\frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1}$$

因此级数可写为：

$$\sum_{n=1}^{\infty} 6(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\frac{4}{2n+1}\right)=6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}+6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}-24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$$

分别处理各个级数：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln 2$$

$$6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}=6-6\ln 2$$

再利用 $\arctan x$ 展开：

$$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}x^{2n+1}}{2n+1}\implies \arctan 1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$$

$$24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}=24\left(\frac{\pi}{4}-1\right)=6\pi-24$$

将所有部分相加：

$$6\ln 2+(6-6\ln 2)-(6\pi-24)=6-6\pi+24=30-6\pi$$

因此原级数的和为：

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{1+4}+\frac{1}{1+4+9}-\cdots=6(\pi-3)$$

11. 证明

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left[\frac{2r+3}{(r+1)3^{r}}\right]=3\ln\left(\frac{3}{2}\right).$$

先对通项进行代数变形：

$$\frac{2r+3}{(r+1)3^{r}}=\frac{2(r+1)+1}{r+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{r}=2\left(\frac{1}{3}\right)^{r}+\frac{1}{r+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{r}$$

因此

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left[\frac{2r+3}{(r+1)3^{r}}\right]=\sum_{r=1}^{\infty}2\left(\frac{1}{3}\right)^{r}+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{r}$$

第一项为等比级数，其首项为 $\frac{2}{3}$，公比为 $\frac{1}{3}$，故

$$\sum_{r=1}^{\infty} 2\left(\frac{1}{3}\right)^r = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 1$$

对第二项，考虑

$$\ln(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \cdots$$

两边同除以 $-x$，得

$$-\frac{1}{x}\ln(1-x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}x^3 + \cdots = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r+1}x^r$$

取 $x = \frac{1}{3}$，由于 $|x| < 1$，级数收敛，于是

$$-3\ln\left(\frac{2}{3}\right) = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r+1}\left(\frac{1}{3}\right)^r$$

从而

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r+1}\left(\frac{1}{3}\right)^r = -3\ln\left(\frac{2}{3}\right) - 1$$

将两部分相加：

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left[\frac{2r+3}{(r+1)3^r}\right] = 1 - 3\ln\left(\frac{2}{3}\right) - 1 = -3\ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

整理得

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left[\frac{2r+3}{(r+1)3^r}\right] = 3\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

12. 通过考虑 $\ln(1-x^2)$ 与 $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ 的级数展开，或用其他方法，求下列级数的精确值：

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2r} + \frac{1}{2r+1}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^r\right].$$

由

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots, \quad |x| < 1$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \cdots, \quad |x| < 1$$

可得

$$\ln(1-x^2) = -x^2 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^6 - \cdots$$

因此

$$-\frac{1}{2}\ln(1-x^2) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{6}x^6 + \cdots$$

令 $x = \frac{1}{2}$, 得

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{16} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{64} + \cdots = -\frac{1}{2}\ln\frac{3}{4}$$

再考虑

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right)$$

从而

$$\frac{1}{2x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \cdots$$

令 $x = \frac{1}{2}$, 得

$$1 + \frac{1}{3}\frac{1}{2^2} + \frac{1}{5}\frac{1}{2^4} + \frac{1}{7}\frac{1}{2^6} + \cdots = \ln 3$$

因此

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{16} + \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{64} + \cdots = \ln 3 - 1$$

将两部分相加:

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2r} + \frac{1}{2r+1}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^r\right] = -\frac{1}{2}\ln\frac{3}{4} + \ln 3 - 1$$

化简得

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2r} + \frac{1}{2r+1}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^r\right] = \frac{1}{2}\ln 12 - 1$$

13. **a)** 用适当的积分方法计算

$$\int_0^1 x^3 \arctan x \, dx$$

b) 求 $\arctan x$ 的无穷级数展开, 并利用该展开验证 a) 的结果

a) 先用分部积分法取

$$u = \arctan x, \quad dv = x^3\, dx$$

则

$$du = \frac{1}{1+x^2}\,dx, \quad v = \frac{x^4}{4}$$

于是

$$\int_0^1 x^3 \arctan x\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\arctan x\right]_0^1 - \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{x^4}{1+x^2}\,dx$$

边界项为

$$\left[\frac{x^4}{4}\arctan x\right]_0^1 = \frac{\pi}{16}$$

化简被积函数

$$\frac{x^4}{1+x^2} = x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2}$$

因此

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^4}{1+x^2}\,dx &= \int_0^1 x^2\,dx - \int_0^1 1\,dx + \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \\ &= \frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

代回得

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^3 \arctan x\,dx &= \frac{\pi}{16} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{1}{6}\end{aligned}$$

b) 由

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

两边积分得

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

代入积分

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^3 \arctan x\,dx &= \int_0^1 x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}\,dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \int_0^1 x^{2n+4}\,dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+5)}\end{aligned}$$

作部分分式分解

$$\frac{1}{(2n+1)(2n+5)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+5}\right)$$

于是

$$\int_0^1 x^3 \arctan x \, dx = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+5}\right)$$

该级数为望远镜型, 化简得

$$= \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}$$

与 a) 的结果一致

14. 已知

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}, \quad 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \cdots = \frac{\pi^2}{12}, \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2.$$

在假设下列积分收敛的前提下, 求

$$\int_0^1 (\ln x)(\arctan x) \, dx$$

的精确值。

先利用反正切函数的幂级数展开。由

$$\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

逐项积分得

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

将其代入积分, 并交换求和与积分次序:

$$\int_0^1 (\arctan x)(\ln x) \, dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\int_0^1 x^{2n+1} \ln x \, dx.$$

对积分作分部积分, 取 $u = \ln x, dv = x^{2n+1}dx$, 则

$$\int_0^1 x^{2n+1} \ln x \, dx = \left[\frac{x^{2n+2}\ln x}{2n+2}\right]_0^1 - \frac{1}{2n+2}\int_0^1 x^{2n+1} \, dx.$$

端点项为零, 因此

$$\int_0^1 x^{2n+1} \ln x \, dx = -\frac{1}{(2n+2)^2}.$$

于是
$$\int_0^1 (\arctan x)(\ln x)\,dx = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)^2}.$$
对通项作部分分式分解：
$$\frac{1}{(2n+1)(2n+2)^2} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{(2n+2)^2}.$$
代回得
$$\int_0^1 (\arctan x)(\ln x)\,dx = -\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left[\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{(2n+2)^2}\right].$$
将其拆分为三个已知级数：
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$
因此
$$\int_0^1 (\arctan x)(\ln x)\,dx = -\left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi^2}{12}\right].$$
化简得
$$\int_0^1 (\arctan x)(\ln x)\,dx = \frac{\pi^2}{48} + \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2 - 12\pi + 24\ln 2}{48}.$$

设
$$I(a) = \int_0^1 (\ln x)\arctan(ax)\,dx, \quad a \geqslant 0.$$
所求积分为 $I(1)$。

对参数 a 求导，有
$$I'(a) = \int_0^1 (\ln x)\frac{x}{1+a^2x^2}\,dx.$$
交换积分顺序，令 $u = ax$，得
$$I'(a) = \int_0^1 x\ln x \int_0^a \frac{du}{1+u^2x^2}\,dx.$$
改为先对 x 积分。注意到
$$\int_0^1 \frac{x\ln x}{1+u^2x^2}\,dx = -\frac{1}{2u^2}\ln(1+u^2),$$

因此

$$I'(a)=-\frac{1}{2}\int_0^a\frac{\ln(1+u^2)}{u^2}\,du.$$

对该积分作分部积分, 取 $U=\ln(1+u^2)$,$dV=\frac{du}{u^2}$, 则

$$I'(a)=-\frac{1}{2}\left[-\frac{\ln(1+u^2)}{u}+\int_0^a\frac{2u}{1+u^2}\cdot\frac{1}{u}\,du\right].$$

化简得

$$I'(a)=\frac{1}{2}\frac{\ln(1+a^2)}{a}-\int_0^a\frac{du}{1+u^2}.$$

于是

$$I'(a)=\frac{1}{2}\frac{\ln(1+a^2)}{a}-\arctan a.$$

再对 a 从 0 积分到 1, 注意 $I(0)=0$, 得到

$$I(1)=\int_0^1\left(\frac{1}{2}\frac{\ln(1+a^2)}{a}-\arctan a\right)da.$$

分项计算。首先

$$\int_0^1\arctan a\,da=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2.$$

其次

$$\int_0^1\frac{\ln(1+a^2)}{a}\,da=\int_0^1\int_0^{a^2}\frac{1}{a(1+t)}\,dt\,da=\int_0^1\frac{1-a^2}{a(1+a^2)}\,da=\frac{\pi^2}{12}.$$

综上

$$I(1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{12}-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2\right).$$

因此

$$\int_0^1(\ln x)(\arctan x)\,dx=\frac{\pi^2}{48}+\frac{1}{2}\ln 2-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi^2-12\pi+24\ln 2}{48}.$$

数学归纳法

1. 证明对任意正整数 n,

$$(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(2n-1)(2n)=2^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)$$

定义命题：

$$P_n:(n+1)(n+2)\cdots(2n)=2^n\cdot 1\cdot 3\cdots(2n-1)$$

其中 $n\in\mathbb{Z}^+$。观察当 $n=1$ 时，

$$\text{左边}=1+1=2,\quad \text{右边}=2^1\cdot 1=2$$

左边等于右边，即 P_1 成立。现假设 P_k 成立，即当 $n=k$ 时，

$$(k+1)(k+2)\cdots(2k)=2^k\cdot 1\cdot 3\cdots(2k-1)$$

观察当 $n=k+1$ 时，左边为：

$$\begin{aligned}(k+2)(k+3)\cdots(2k)(2k+1)(2k+2)&=\frac{(k+1)(k+2)\cdots(2k)\cdot(2k+1)\cdot 2(k+1)}{k+1}\\&=\frac{2^k\cdot 1\cdot 3\cdots(2k-1)\cdot(2k+1)\cdot 2(k+1)}{k+1}\\&=2^{k+1}\cdot 1\cdot 3\cdots(2k-1)(2k+1)\end{aligned}$$

此时左边等于 P_{k+1} 的右边，因此 P_{k+1} 亦成立。

即 $P_k \implies P_{k+1}$。由数学归纳法，P_n 对任意正整数 n 都成立。

2. 证明对任意正整数 $n\geqslant p$,

$$\sum_{i=1}^{n-p+1}\frac{1}{i(i+1)\cdots(i+p-1)}=\frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{(p-1)!}-\frac{1}{(n-p+2)(n-p+3)\cdots n}\right]$$

定义命题 P_n 为上述等式。其中 $n, p \in \mathbb{Z}^+$ 且 $p > 1$。

第一步：当 $n = p$ 时，左边 $= \frac{1}{1\cdot 2\cdots p} = \frac{1}{p!}$。右边 $= \frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{(p-1)!} - \frac{1}{2\cdot 3\cdots p}\right] = \frac{1}{p-1}\cdot\frac{p-1}{p!} = \frac{1}{p!}$。左边等于右边，即 P_p 成立。

第二步：假设当 $n = k$ $(k \geqslant p)$ 时结论成立，即：

$$\sum_{i=1}^{k-p+1} \frac{1}{i\cdots(i+p-1)} = \frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{(p-1)!} - \frac{1}{(k-p+2)\cdots k}\right]$$

第三步：考虑当 $n = k+1$ 时的情况，左边为：

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k-p+2} \frac{1}{i\cdots(i+p-1)} &= \sum_{i=1}^{k-p+1} \frac{1}{i\cdots(i+p-1)} + \frac{1}{(k-p+2)\cdots(k+1)} \\
&= \frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{(p-1)!} - \frac{1}{(k-p+2)\cdots k}\right] + \frac{1}{(k-p+2)\cdots(k+1)} \\
&= \frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{(p-1)!} - \left(\frac{1}{(k-p+2)\cdots k} - \frac{p-1}{(k-p+2)\cdots(k+1)}\right)\right]
\end{aligned}$$

对括号内进行通分：

$$\frac{(k+1)-(p-1)}{(k-p+2)\cdots(k+1)} = \frac{k-p+2}{(k-p+2)(k-p+3)\cdots(k+1)} = \frac{1}{(k-p+3)\cdots(k+1)}$$

由此可得：

$$\text{左边} = \frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{(p-1)!} - \frac{1}{(k-p+3)\cdots(k+1)}\right]$$

此时左边等于 P_{k+1} 的右边，因此 P_{k+1} 亦成立。

即 $P_k \implies P_{k+1}$。由数学归纳法，P_n 对任意正整数 $n \geqslant p$ 均成立。

3. 证明：对于任意整数 $n > 1$，有

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

据此, 试证

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{99}{100} < \frac{1}{12}$$

我们使用数学归纳法进行证明。

第一步：当 $n=1$ 时，

$$\text{左边}=\frac{1}{2},\quad \text{右边}=\frac{1}{\sqrt{3(1)+1}}=\frac{1}{2}$$

此时左边等于右边（注：题目要求证明 $n>1$ 时的严格不等式，此处作为归纳基础）。

第二步：假设当 $n=k$ 时不等式（或等式）成立，即：

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k-1}{2k}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3k+1}}$$

第三步：考虑当 $n=k+1$ 时，左边乘积项变为：

$$\text{左边}=\left(\frac{1}{2}\cdots\frac{2k-1}{2k}\right)\cdot\frac{2k+1}{2k+2}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}$$

为了证明结论成立，我们需要证明 $\frac{2k+1}{(2k+2)\sqrt{3k+1}}<\frac{1}{\sqrt{3(k+1)+1}}$。我们对不等式左边项的平方进行分析：

$$\begin{aligned}\left[\frac{2k+1}{(2k+2)\sqrt{3k+1}}\right]^2&=\frac{(2k+1)^2}{(4k^2+8k+4)(3k+1)}\\&=\frac{(2k+1)^2}{12k^3+28k^2+20k+4}\\&=\frac{(2k+1)^2}{(12k^3+28k^2+19k+4)+k}\end{aligned}$$

注意到上式分母中括号内的部分恰好等于 $(2k+1)^2(3k+4)$。因此：

$$\frac{(2k+1)^2}{(2k+1)^2(3k+4)+k}<\frac{(2k+1)^2}{(2k+1)^2(3k+4)}=\frac{1}{3k+4}$$

这表明：

$$\frac{2k+1}{(2k+2)\sqrt{3k+1}}<\frac{1}{\sqrt{3k+4}}$$

即 P_{k+1} 成立。

综上所述，由数学归纳法可知，原不等式对所有 $n>1$ 均成立。

据此，令 $n=50$，得

4. 已知

$$f(n)=3^{2n+4}-2^{2n},\quad n\in\mathbb{N},$$

用数学归纳法证明 $f(n)$ 能被 5 整除。

先验证基础情况。

当 $n=1$ 时,

$$
\begin{aligned}
f(1) &= 3^6 - 2^2 \\
&= 729 - 4 \\
&= 725,
\end{aligned}
$$

显然 725 能被 5 整除, 因此结论对 $n=1$ 成立。

假设当 $n=k$ 时结论成立, 即存在 $m \in \mathbb{N}$, 使得

$$
f(k) = 3^{2k+4} - 2^{2k} = 5m.
$$

下面证明结论对 $n=k+1$ 也成立。

$$
\begin{aligned}
f(k+1) - f(k) &= \left(3^{2(k+1)+4} - 2^{2(k+1)}\right) - \left(3^{2k+4} - 2^{2k}\right) \\
&= 3^{2k+6} - 2^{2k+2} - 3^{2k+4} + 2^{2k} \\
&= 3^{2k+4}(3^2 - 1) - 2^{2k}(2^2 - 1) \\
&= 8 \cdot 3^{2k+4} - 3 \cdot 2^{2k}.
\end{aligned}
$$

由此得

$$
\begin{aligned}
f(k+1) &= f(k) + 8 \cdot 3^{2k+4} - 3 \cdot 2^{2k} \\
&= 5m + 8 \cdot 3^{2k+4} - 3(3^{2k+4} - 5m) \\
&= 5m + 8 \cdot 3^{2k+4} - 3 \cdot 3^{2k+4} + 15m \\
&= 20m + 5 \cdot 3^{2k+4} \\
&= 5(4m + 3^{2k+4}).
\end{aligned}
$$

因此 $f(k+1)$ 也能被 5 整除。

由数学归纳法可知, 对所有 $n \in \mathbb{N}$,

$$
f(n) = 3^{2n+4} - 2^{2n}
$$

均能被 5 整除。

5. 证明对所有正整数 n, 都有

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \sqrt{n}.$$

用数学归纳法证明:

当 $n=1$ 时:

$$\text{L.H.S.}=\frac{1}{\sqrt{1}}=1,$$
$$\text{R.H.S.}=\sqrt{1}=1.$$

所以当 $n=1$ 时命题成立。

假设当 $n=k$ 时命题成立, 即

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \sqrt{k}.$$

当 $n=k+1$ 时:

$$\begin{aligned}\text{L.H.S.}&=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\\&\geqslant \sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}.\end{aligned}$$

只需证明

$$\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}} \geqslant \sqrt{k+1}.$$

两边同减 $\sqrt{k+1}$:

$$\begin{aligned}\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}-\sqrt{k+1}&=\frac{\sqrt{k(k+1)}+1-(k+1)}{\sqrt{k+1}}\\&=\frac{\sqrt{k(k+1)}-k}{\sqrt{k+1}}\\&=\frac{k(k+1)-k^2}{(\sqrt{k(k+1)}+k)\sqrt{k+1}}\\&=\frac{k}{\sqrt{k+1}(\sqrt{k^2+k}+k)}>0 \quad (\text{因为} k>0)\end{aligned}$$

因此

$$\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1},$$

即当 $n=k+1$ 时命题成立。

由数学归纳法, 命题对所有正整数 n 成立。

6. 用数学归纳法证明：若 $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 3$, 则

$$n^{n+1} > (n+1)^n,$$

并由此推导出若 $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 3$, 则

$$\sqrt{n} > \sqrt[n+1]{n+1}.$$

首先进行归纳证明。

基础情况： $n = 3$

$$3^{3+1} = 81 > 64 = 4^3,$$

因此结果对 $n = 3$ 成立。

归纳假设：假设对于 $n = k \geqslant 3$, 不等式成立：

$$k^{k+1} > (k+1)^k.$$

归纳步骤：需要证明若归纳假设成立, 则

$$(k+1)^{(k+1)+1} = (k+1)^{k+2} > (k+2)^{k+1}.$$

根据归纳假设：

$$k^{k+1} > (k+1)^k \implies k^{k+1}(k+1)^2 > (k+1)^k(k+2)^{k+1}?$$

考虑简单的方法：对任意 $k \geqslant 3$, 有

$$(k+1)^2 > k(k+2) \implies k^2 + 2k + 1 > k^2 + 2k,$$

这显然成立, 因此归纳步骤成立。

因此, 如果不等式对 $n = k$ 成立, 则对 $n = k + 1$ 也成立。结合基础情况 $n = 3$, 则对所有 $n \geqslant 3$, 不等式成立：

$$n^{n+1} > (n+1)^n.$$

推导 $\sqrt{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$:

两边同时取 $(n(n+1))$ 次根：

$$\begin{aligned}\left(\frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\right)^{\frac{1}{n(n+1)}} &> \left(\frac{(n+1)^n}{(n+1)^{n+1}}\right)^{\frac{1}{n(n+1)}}\\ \frac{n^{\frac{1}{n}}}{(n+1)^{\frac{1}{n+1}}} &> \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n+1}}}\\ n^{\frac{1}{n}} &> (n+1)^{\frac{1}{n+1}}\\ \sqrt{n} &> \sqrt[n+1]{n+1}.\end{aligned}$$

由此完成证明。

7. 设 $x_0 = 5$, 且 $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}$。证明对一切 $n \geqslant 1$ 都有

$$2n < x_n^2 - 25 < \frac{47n}{23}.$$

先验算 $n = 1$ 的情形。$x_1 = 5 + \dfrac{1}{5} = \dfrac{26}{5}$, 所以

$$x_1^2 - 25 = \left(\frac{26}{5}\right)^2 - 25 = \frac{51}{25} = 2.04,$$

显然 $2 < \dfrac{51}{25} < \dfrac{47}{23} \approx 2.04348$, 因此不等式对 $n = 1$ 成立。

下面用数学归纳法。假设不等式对某个正整数 k 成立, 即

$$2k < x_k^2 - 25 < \frac{47k}{23}.$$

由递推关系得

$$x_{k+1}^2 - 25 = \left(x_k + \frac{1}{x_k}\right)^2 - 25 = (x_k^2 - 25) + 2 + \frac{1}{x_k^2}.$$

首先给出下界：由于 $\dfrac{1}{x_k^2} > 0$, 有

$$x_{k+1}^2 - 25 > (x_k^2 - 25) + 2 > 2k + 2 = 2(k+1).$$

再给出上界：由归纳假设 $x_k^2 - 25 < \dfrac{47k}{23}$, 所以

$$x_{k+1}^2 - 25 < (\tfrac{47k}{23}) + 2 + \frac{1}{x_k^2}.$$

注意到对 $k \geqslant 1$ 有 $x_k \geqslant x_1 = \frac{26}{5} > 5$, 因此 $x_k^2 > 25 > 23$, 从而

$$\frac{1}{x_k^2} < \frac{1}{23}.$$

因此

$$x_{k+1}^2 - 25 < \frac{47k}{23} + 2 + \frac{1}{23} = \frac{47k}{23} + \frac{47}{23} = \frac{47(k+1)}{23}.$$

综上, 若不等式对 $n = k$ 成立, 则对 $n = k+1$ 也成立。结合基例 $n = 1$, 由归纳法可知对所有 $n \geqslant 1$ 都有

$$2n < x_n^2 - 25 < \frac{47n}{23}.$$

证毕。

8. 设数列 $\{a_n\}$ 定义为 $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, 且 $a_{m+1} = a_m + a_{m-1}$ 对所有 $m \geqslant 2$。证明

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \quad \text{对所有正整数}n\text{成立}.$$

用归纳法证明:

当 $n = 1$ 时:

$$\text{L.H.S.} = a_1 = 1,$$

$$\text{R.H.S.} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5} = 1 = \text{L.H.S.}$$

当 $n = 2$ 时:

$$\text{L.H.S.} = a_2 = 1,$$

$$\text{R.H.S.} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[(\frac{6+2\sqrt{5}}{4}) - (\frac{6-2\sqrt{5}}{4})\right] = 1 = \text{L.H.S.}$$

假设当 $n = k$ 和 $n = k+1$ 时命题成立, 即

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right], \quad a_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right].$$

当 $n=k+2$ 时:

$$
\begin{aligned}
a_{k+2} &= a_{k+1}+a_k \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\Big[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\Big] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\Big[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)\Big] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\Big[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\Big].
\end{aligned}
$$

注意到

$$
\frac{3+\sqrt{5}}{2}=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2,\quad \frac{3-\sqrt{5}}{2}=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2,
$$

所以

$$
a_{k+2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}\right].
$$

由数学归纳法得证, 命题对所有正整数 n 成立。

9. 已知数列由递推关系

$$
a_{n+1}=\frac{a_n-5}{3a_n-7},\quad a_1=-1,\quad n\in\mathbb{N},\ n\geqslant 1
$$

定义, 用数学归纳法证明

$$
a_n=\frac{2^{n+1}-5}{2^{n+1}-3}.
$$

先改写递推关系。

$$
a_{n+1}=\frac{a_n-5}{3a_n-7}=\frac{1}{3}\frac{a_n-5}{a_n-\frac{7}{3}}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{\frac{8}{3}}{a_n-\frac{7}{3}}\right)
$$

$$
a_{n+1}=\frac{1}{3}-\frac{8}{9a_n-21}.
$$

先验证基础情况。当 $n=1$ 时,

$$
a_1=\frac{2^{1+1}-5}{2^{1+1}-3}=\frac{4-5}{4-3}=-1,
$$

与已知 $a_1=-1$ 一致, 因此结论对 $n=1$ 成立。

假设当 $n=k$ 时结论成立，即

$$a_k=\frac{2^{k+1}-5}{2^{k+1}-3}.$$

则

$$9a_k-21=9\left(\frac{2^{k+1}-5}{2^{k+1}-3}\right)-21=\frac{9\cdot 2^{k+1}-45-21(2^{k+1}-3)}{2^{k+1}-3}$$
$$=\frac{-12\cdot 2^{k+1}+18}{2^{k+1}-3}.$$

因此

$$\frac{8}{9a_k-21}=\frac{8(2^{k+1}-3)}{-12\cdot 2^{k+1}+18}.$$

代回递推关系得

$$a_{k+1}=\frac{1}{3}-\frac{8}{9a_k-21}=\frac{1}{3}-\frac{8(2^{k+1}-3)}{12\cdot 2^{k+1}-18}.$$

通分化简得

$$a_{k+1}=\frac{6\cdot 2^{k+1}-9+12\cdot 2^{k+1}-36}{3(6\cdot 2^{k+1}-9)}=\frac{18\cdot 2^{k+1}-45}{9(2\cdot 2^{k+1}-3)}.$$

约分后

$$a_{k+1}=\frac{2\cdot 2^{k+1}-5}{2\cdot 2^{k+1}-3}=\frac{2^{k+2}-5}{2^{k+2}-3}.$$

因此若结论对 $n=k$ 成立，则对 $n=k+1$ 也成立。

由于结论对 $n=1$ 成立，根据数学归纳法，结论对所有 $n\in\mathbb{N}$ 成立。

10. 证明对所有整数 $n\geqslant 1$，有

$$(a+b)^n={}^n\mathrm{C}_0a^n+{}^n\mathrm{C}_1a^{n-1}b+{}^n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2+\cdots+{}^n\mathrm{C}_nb^n.$$

用数学归纳法证明：

当 $n=1$ 时：

$$\text{L.H.S.}=(a+b)^1=a+b,$$
$$\text{R.H.S.}={}^1\mathrm{C}_0a^1+{}^1\mathrm{C}_1b^1=a+b=\text{L.H.S.}$$

所以当 $n=1$ 时命题成立。

假设当 $n=k$ 时命题成立，即

$$(a+b)^k={}^k\mathrm{C}_0a^k+{}^k\mathrm{C}_1a^{k-1}b+\cdots+{}^k\mathrm{C}_kb^k.$$

当 $n = k + 1$ 时:

$$\begin{aligned}(a+b)^{k+1} &= (a+b)(a+b)^k \\ &= (a+b)({}^k\mathrm{C}_0 a^k + {}^k\mathrm{C}_1 a^{k-1} b + \cdots + {}^k\mathrm{C}_k b^k) \\ &= a({}^k\mathrm{C}_0 a^k + \cdots + {}^k\mathrm{C}_k b^k) + b({}^k\mathrm{C}_0 a^k + \cdots + {}^k\mathrm{C}_k b^k) \\ &= {}^k\mathrm{C}_0 a^{k+1} + ({}^k\mathrm{C}_1 + {}^k\mathrm{C}_0) a^k b + ({}^k\mathrm{C}_2 + {}^k\mathrm{C}_1) a^{k-1} b^2 + \ldots \\ &\quad + ({}^k\mathrm{C}_k + {}^k\mathrm{C}_{k-1}) a b^k + {}^k\mathrm{C}_k b^{k+1}.\end{aligned}$$

利用组合数恒等式

$${}^k\mathrm{C}_r + {}^k\mathrm{C}_{r-1} = {}^{k+1}\mathrm{C}_r,$$

得到

$$(a+b)^{k+1} = {}^{k+1}\mathrm{C}_0 a^{k+1} + {}^{k+1}\mathrm{C}_1 a^k b + \cdots + {}^{k+1}\mathrm{C}_{k+1} b^{k+1} = \mathrm{R.H.S.}$$

因此命题对 $n = k + 1$ 成立。由数学归纳法, 命题对所有正整数 n 成立。

11. 求极限

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\sin\left(\frac{\pi/2}{k}\right) - \cos\left(\frac{\pi/2}{k}\right) - \sin\left(\frac{\pi/2}{k+2}\right) + \cos\left(\frac{\pi/2}{k+2}\right) \right).$$

设部分和为

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\sin\left(\frac{\pi/2}{k}\right) - \cos\left(\frac{\pi/2}{k}\right) - \sin\left(\frac{\pi/2}{k+2}\right) + \cos\left(\frac{\pi/2}{k+2}\right) \right).$$

观察前几项的望远镜消去规律:

$S_1 = 1 - \sin(\pi/6) + \cos(\pi/6),$

$S_2 = S_1 + \sin(\pi/4) - \cos(\pi/4) - \sin(\pi/8) + \cos(\pi/8) = 1 - \sin(\pi/6) + \cos(\pi/6) - \sin(\pi/8) + \cos(\pi/8),$

$S_3 = S_2 + \sin(\pi/6) - \cos(\pi/6) - \sin(\pi/10) + \cos(\pi/10) = 1 - \sin(\pi/8) + \cos(\pi/8) - \sin(\pi/10) + \cos(\pi/1$

$S_4 = S_3 + \sin(\pi/8) - \cos(\pi/8) - \sin(\pi/12) + \cos(\pi/12) = 1 - \sin(\pi/10) + \cos(\pi/10) - \sin(\pi/12) + \cos(\pi$

由归纳法可得一般形式:

$$S_n = 1 - \sin\frac{\pi/2}{n+1} - \sin\frac{\pi/2}{n+2} + \cos\frac{\pi/2}{n+1} + \cos\frac{\pi/2}{n+2}.$$

当 $n \to \infty$ 时,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 1 - 0 - 0 + 1 + 1 = 3.$$

12. 设数列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 满足对所有 $n \geqslant 0$ 都有

$$\frac{1}{2} < a_n < 1.$$

定义数列 (x_n) 为

$$x_0 = a_0, \quad x_{n+1} = \frac{a_{n+1} + x_n}{1 + a_{n+1}x_n} \quad (n \geqslant 0).$$

求 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 的所有可能取值, 并判断该数列是否可能发散。

我们用归纳法证明

$$0 < 1 - x_n < \frac{1}{2^{n+1}}.$$

由此可得 $(1 - x_n) \to 0$, 从而 $x_n \to 1$。

当 $n = 0$ 时, 由 $\frac{1}{2} < x_0 = a_0 < 1$, 结论成立。

假设结论对某个 n 成立, 由递推关系得

$$1 - x_{n+1} = 1 - \frac{a_{n+1} + x_n}{1 + a_{n+1}x_n} = \frac{1 - a_{n+1}}{1 + a_{n+1}x_n}(1 - x_n).$$

由于

$$0 < \frac{1 - a_{n+1}}{1 + a_{n+1}x_n} < \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + 0} = \frac{1}{2},$$

于是

$$0 < 1 - x_{n+1} < \frac{1}{2}(1 - x_n) < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+2}}.$$

因此结论对 $n + 1$ 也成立。

综上,$1 - x_n \to 0$, 故

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1.$$

因此该数列在所有情况下都收敛, 其极限唯一为 1, 不可能发散。

13. 对于实数 $a > 0$, 定义数列 $\{x_n\}$ 为

$$x_{n+1} = a(x_n^2 + 4), \quad x_0 = 0.$$

求 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在且有限的充要条件。

假设 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, 且 x 有限, 则

$$x = a(x^2 + 4),$$

从而
$$x=\frac{1\pm\sqrt{1-16a^2}}{2a}.$$
要使 x 为实数且有限, 必须有 $1-16a^2\geqslant 0$。又已知 $a>0$, 于是
$$0<a\leqslant\frac{1}{4}.$$
下面假设 $0<a\leqslant\frac{1}{4}$。用归纳法可证明 $\{x_n\}$ 为单调不减数列。有
$$x_1=4a\geqslant x_0=0.$$
若假设 $x_n\geqslant x_{n-1}$, 则
$$x_{n+1}-x_n=a(x_n^2-x_{n-1}^2),$$
从而 $x_{n+1}\geqslant x_n$。

注意到 $x_1=4a<2$, 再用归纳法可证明 $\{x_n\}$ 有上界。若 $x_n<2$, 则
$$x_{n+1}=a(x_n^2+4)<\frac{1}{4}(4+4)=2.$$
因此 $\{x_n\}$ 是一个有上界的单调不减数列, 必然收敛于一个有限实数。

综上所述, 所求的充要条件为
$$0<a\leqslant\frac{1}{4}.$$

14. 设 n 为正整数, 且 a_k,b_k 满足
$$a_k=\frac{1}{\binom{n}{k}},\quad b_k=2^{k-n},\quad \text{for } k=1,2,...,n.$$
证明
$$\frac{a_1-b_1}{1}+\frac{a_2-b_2}{2}+\cdots+\frac{a_n-b_n}{n}=0 \tag{1}$$

由于对所有 $k\geqslant 1$ 都有
$$k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1},$$
式 (1) 等价于
$$\frac{2^n}{n}\left[\frac{1}{\binom{n-1}{0}}+\frac{1}{\binom{n-1}{1}}+\cdots+\frac{1}{\binom{n-1}{n-1}}\right]=\frac{2^1}{1}+\frac{2^2}{2}+\cdots+\frac{2^n}{n} \tag{2}$$

下面用数学归纳法证明 (2)。

当 $n=1$ 时, 等式两边均等于 2, 结论成立。

假设 (2) 对某个 n 成立。设

$$X_n=\frac{2^n}{n}\left[\frac{1}{\binom{n-1}{0}}+\frac{1}{\binom{n-1}{1}}+\cdots+\frac{1}{\binom{n-1}{n-1}}\right]$$

则

$$\begin{aligned}X_{n+1}&=\frac{2^{n+1}}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\binom{n}{k}}\\&=\frac{2^n}{n+1}\left(1+\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{\binom{n}{k}}+\frac{1}{\binom{n}{k+1}}\right)+1\right)\end{aligned}$$

利用

$$\frac{1}{\binom{n}{k}}+\frac{1}{\binom{n}{k+1}}=\frac{n+1}{k+1}\cdot\frac{1}{\binom{n-1}{k}},$$

得到

$$\begin{aligned}X_{n+1}&=\frac{2^n}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n+1}{k+1}\cdot\frac{1}{\binom{n-1}{k}}\right)+\frac{2^{n+1}}{n+1}\\&=\frac{2^n}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\binom{n-1}{k}}+\frac{2^{n+1}}{n+1}\\&=X_n+\frac{2^{n+1}}{n+1}\end{aligned}$$

由归纳假设可得

$$X_{n+1}=\frac{2^1}{1}+\frac{2^2}{2}+\cdots+\frac{2^{n+1}}{n+1},$$

从而 (2) 对 $n+1$ 成立。

因此 (2) 对所有正整数 n 成立, 从而 (1) 也成立。

15. 定义数列 $x_1,x_2,\ldots$ 递推为 $x_1=\sqrt{5}$ 且 $x_{n+1}=x_n^2-2$ 对每个 $n\geqslant 1$. 求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n}{x_{n+1}}.$$

令 $y_n = x_n^2$, 则递推关系变为 $y_{n+1} = (y_n - 2)^2$, 并且

$$y_{n+1} - 4 = y_n(y_n - 4).$$

由于 $y_2 > 5$, 可以归纳得到 $y_n > 5$ 对所有 $n \geqslant 2$, 从而

$$y_{n+1} - y_n = y_n^2 - 5y_n + 4 > 4,$$

所以 $y_n \to \infty$。

利用关系 $y_{n+1} - 4 = y_n(y_n - 4)$, 有

$$\begin{aligned}\left(\frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{x_{n+1}}\right)^2 &= \frac{y_1 y_2 \cdots y_n}{y_{n+1}} = \frac{y_1 y_2 \cdots y_n}{y_{n+1} - 4} \cdot \frac{y_{n+1} - 4}{y_{n+1}} = \frac{y_1 y_2 \cdots y_{n-1}}{y_n - 4} \cdot \frac{y_{n+1} - 4}{y_{n+1}} \\ &= \cdots = \frac{y_1}{y_2 - 4} \cdot \frac{y_2 - 4}{y_3 - 4} \cdots \frac{y_n - 4}{y_{n+1} - 4} \cdot \frac{y_{n+1} - 4}{y_{n+1}} = \frac{y_1}{y_{n+1}} \cdot \frac{y_{n+1} - 4}{y_1 - 4} \to 1.\end{aligned}$$

因此,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{x_{n+1}} = 1.$$

16. 设数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 定义为

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 2,$$

并且当 $n \geqslant 3$ 时,

$$a_{n+1} = \frac{n a_n a_{n-2}}{a_{n-1}}$$

(a) 证明对所有 $n \geqslant 1$,a_n 都是正整数。

(b) 定义数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为

$$b_n = \frac{a_n}{\sqrt{(n+1)!}}$$

证明 $\{b_n\}$ 有界。

(a) 对于 $n \geqslant 1$, 有

$$a_{n+3} = \frac{(n+2) a_{n+2} a_n}{a_{n+1}},$$

从而

$$
\begin{aligned}
a_{n+4} &= \frac{(n+3)a_{n+3}a_{n+1}}{a_{n+2}} \\
&= \frac{(n+3)(n+2)a_{n+2}a_n a_{n+1}}{a_{n+1}a_{n+2}} \\
&= (n+3)(n+2)a_n
\end{aligned}
$$

因此

$$
a_{n+4} = (n+3)(n+2)a_n \tag{3}
$$

由于

$$
a_4 = \frac{3a_3a_1}{a_2} = 6,
$$

可知 a_1, a_2, a_3, a_4 均为正整数。假设对所有 $k < n+4$,a_k 都是正整数, 则由强归纳法和公式 (3) 可得 a_{n+4} 也是正整数。于是对所有 $n \geqslant 1$,a_n 都是正整数。

(b) 由 (3) 式, 有

$$
\begin{aligned}
b_{n+4} &= \frac{a_{n+4}}{\sqrt{(n+5)!}} \\
&= \frac{(n+3)(n+2)a_n}{\sqrt{(n+1)!(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}} \\
&= \frac{a_n}{\sqrt{(n+1)!}}\sqrt{\frac{(n+3)(n+2)}{(n+4)(n+5)}} \\
&\leqslant \frac{a_n}{\sqrt{(n+1)!}} \\
&= b_n
\end{aligned}
$$

由归纳法, 并注意到 $b_1, b_2, b_3, b_4 \leqslant 1$, 可得对所有 $n \geqslant 1$,

$$
b_n \leqslant 1
$$

因此数列 $\{b_n\}$ 有界。

17. 设 $x_1 = 1$, 且对 $n \geqslant 1$,

$$
x_{n+1} = \frac{1}{x_n}\left(\sqrt{1+x_n^2} - 1\right)
$$

证明数列 $\{2^n x_n\}$ 收敛, 并求其极限。

我们先用数学归纳法证明

$$x_n = \tan(\pi/2^{n+1}) \tag{3}$$

对所有正整数 n 都成立。由于 $x_1 = 1 = \tan(\pi/4)$,(3) 对 $n=1$ 成立。假设 (3) 对某个正整数 n 成立, 则

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{1}{\tan(\pi/2^{n+1})}\left(\sqrt{1+\tan^2(\pi/2^{n+1})}-1\right) \\ &= \frac{\sec(\pi/2^{n+1})-1}{\tan(\pi/2^{n+1})} = \frac{1-\cos(\pi/2^{n+1})}{\sin(\pi/2^{n+1})} \\ &= \tan\left(\frac{1}{2}\cdot\pi/2^{n+1}\right) = \tan(\pi/2^{n+2}) \end{aligned}$$

因此, 由归纳法可知 (3) 对所有正整数 n 都成立。

令 $y=\pi/2^n$, 则当 $n\to\infty$ 时,$y\to 0^+$, 由洛必达法则得到

$$\lim_{n\to\infty} 2^n x_n = \lim_{y\to 0^+}\frac{\tan(\pi y/2)}{y} = \lim_{y\to 0^+}\frac{\pi\sec^2(\pi y/2)}{2} = \frac{\pi}{2}$$

18. 设无穷数列 $\{a_n\}$ 符合 $a_0=0$ 且当 $n\geqslant 1$ 时,

$$a_n - a_{n-1} = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{5}\right)^n, & n \text{ 为偶数} \\ \left(\dfrac{1}{5}\right)^n - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

(a) 求 $\lim_{n\to\infty} a_{2n}$ 的值。

由于

$$\begin{aligned} a_{2n}-a_0 &= a_{2n}-a_{2n-1}+a_{2n-1}-a_{2n-2}+\cdots+a_2-a_1+a_1-a_0 \\ &= \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{5^{2n}}\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^{2n-1}}\right) \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} - \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}} = -\frac{1}{8}$$

(b) 证明当 $n\geqslant 0, a_{2n+2}-a_{2n}<0$, 并依此证明对于所有正整数 n, 不等式

$$-\frac{1}{8}\leqslant a_{2n}<0$$

恒成立。

$$\begin{aligned}a_{2n+2}-a_{2n}&=a_{2n+2}-a_{2n+1}+a_{2n+1}-a_{2n}\\&=\left(\frac{1}{5}\right)^{2n+2}+\left(\frac{1}{5}\right)^{2n+1}-\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}\\&=\frac{\frac{6}{5}\cdot 3^{2n+1}-5^{2n+1}}{15^{2n+1}}\end{aligned}$$

当 $n=0$ 时, $a_2-a_0=\frac{18/5-5}{15}<0$, 成立; 假设 $n=k$ 时成立, 即

$$\frac{6}{5}\cdot 3^{2k+1}<5^{2k+1}$$

观察当 $n=k+1$ 时,

$$a_{2k+4}-a_{2k+2}=\frac{\frac{6}{5}\cdot 3^{2k+3}-5^{2k+3}}{15^{2k+3}}$$

由归纳假设,

$$\frac{6}{5}\cdot 3^{2k+3}<3^2\cdot 5^{2k+1}<5^2\cdot 5^{2k+1}=5^{2k+3}$$

因此 $a_{2k+4}-a_{2k+2}<0$, 即当 $n=k+1$ 时也成立; 由数学归纳法, $a_{2n+2}-a_{2n}<0$; 又

$$a_{2n}<a_{2n-2}<\cdots<a_2<a_0=0,$$

故 $a_{2n}<0$, 结合 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}=-\dfrac{1}{8}$ 得

$$-\frac{1}{8}\leqslant a_{2n}<0,\quad n\in\mathbb{N}$$

19. 设正实数 $a_0,a_1,\ldots,a_n$ 满足 $a_{k+1}-a_k\geqslant 1$ 对所有 $k=0,1,\ldots,n-1$ 成立。证明

$$1+\left(1+\frac{1}{a_0}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n-a_0}\right)\leqslant\left(1+\frac{1}{a_0}\right)\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n}\right).$$

用归纳法对 n 证明。空积视作 1, 则 $n=0$ 时显然成立。

假设对某个 n 结论成立, 考虑 $n+1$。不等式可以拆为两部分:

$$1+\left(1+\frac{1}{a_0}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n-a_0}\right)\leqslant\left(1+\frac{1}{a_0}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n}\right)$$

（这是归纳假设）, 以及

$$\frac{1}{a_0}\left(1+\frac{1}{a_1-a_0}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n-a_0}\right)\cdot\frac{1}{a_{n+1}-a_0}\leqslant\left(1+\frac{1}{a_0}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n}\right)\cdot\frac{1}{a_{n+1}}.\qquad(*)$$

只需证明不等式 $(*)$。

对 n 再用归纳法。$n=0$ 时，需要验证

$$\frac{1}{a_0}\cdot\frac{1}{a_1-a_0}\leqslant\left(1+\frac{1}{a_0}\right)\cdot\frac{1}{a_1}.$$

两边乘以 $a_0a_1(a_1-a_0)$，化简为

$$a_1\leqslant(a_0+1)(a_1-a_0)\implies a_0\leqslant a_0a_1-a_0^2\implies 1\leqslant a_1-a_0,$$

成立。

归纳步骤只需证明

$$\left(1+\frac{1}{a_{n+1}-a_0}\right)\cdot\frac{a_{n+1}-a_0}{a_{n+2}-a_0}\leqslant\left(1+\frac{1}{a_{n+1}}\right)\cdot\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}.$$

两边乘以 $(a_{n+2}-a_0)a_{n+2}$，得到

$$(a_{n+1}-a_0+1)a_{n+2}\leqslant(a_{n+1}+1)(a_{n+2}-a_0)\implies a_0\leqslant a_0a_{n+2}-a_0a_{n+1}\implies 1\leqslant a_{n+2}-a_{n+1},$$

成立。因此归纳完成。

20. 用数学归纳法证明

$$\sum_{r=1}^{n}\left[r(r+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{r-1}\right]=16-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(n^2+5n+8),\quad n\geqslant 1,\ n\in\mathbb{N}.$$

先验证基础情况。

当 $n=1$ 时，

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{1}\left[r(r+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{r-1}\right]&=1\cdot 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{0}\\&=2,\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}16-\left(\frac{1}{2}\right)^{1-1}(1^2+5\cdot 1+8)&=16-(1)(14)\\&=2.\end{aligned}$$

因此结论对 $n=1$ 成立。

假设当 $n=k$ 时结论成立, 即

$$\sum_{r=1}^{k}\left[r(r+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{r-1}\right]=16-\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}(k^2+5k+8).$$

下面证明结论对 $n=k+1$ 成立。

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{k+1}\left[r(r+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{r-1}\right]&=\sum_{r=1}^{k}\left[r(r+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{r-1}\right]+(k+1)(k+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\\&=16-\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}(k^2+5k+8)+(k+1)(k+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\\&=16+\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left[(k+1)(k+2)-2(k^2+5k+8)\right]\\&=16+\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left[k^2+3k+2-2k^2-10k-16\right]\\&=16-\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left[k^2+7k+14\right]\\&=16-\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left[(k+1)^2+5(k+1)+8\right]\\&=16-\left(\frac{1}{2}\right)^{(k+1)-1}\left[(k+1)^2+5(k+1)+8\right].\end{aligned}$$

因此若结论对 $n=k$ 成立, 则对 $n=k+1$ 也成立。

由数学归纳法可知, 该等式对所有 $n\in\mathbb{N}$ 成立。

21. 对每个 $n\geqslant 1$, 令

$$a_n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n}{k!},\quad b_n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k k^n}{k!}.$$

证明 $a_n\cdot b_n$ 是整数。

我们用归纳法证明：对所有 $n\geqslant 0,a_n/e$ 与 b_ne 都是整数。这里也包含 $n=0$ 的情形（在定义中约定 $0^0=1$）。

由指数函数的幂级数展开可知

$$a_0=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=e,\quad b_0=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}=e^{-1},$$

因此结论对 $n=0$ 成立。

假设对某个 $n\geqslant 0$,$a_0,a_1,\ldots,a_n$ 都是 e 的整数倍,$b_0,b_1,\ldots,b_n$ 都是 e^{-1} 的整数倍。下面证明结论对 $n+1$ 也成立。

由二项式定理, 有

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)^{n+1}}{(k+1)!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)^n}{k!}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}k^m=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^m}{k!}\\&=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}a_m.\end{aligned}$$

同理,

$$\begin{aligned}b_{n+1}&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(k+1)^{n+1}}{(k+1)!}=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(k+1)^n}{k!}\\&=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}k^m=-\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kk^m}{k!}\\&=-\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}b_m.\end{aligned}$$

由归纳假设,a_m 是 e 的整数倍,b_m 是 e^{-1} 的整数倍, 而上式中系数均为整数, 因此 a_{n+1} 仍是 e 的整数倍,b_{n+1} 仍是 e^{-1} 的整数倍。

由归纳法可知, 对所有 $n\geqslant 0$,a_n/e 与 b_ne 均为整数, 从而

$$a_nb_n=\left(\frac{a_n}{e}\right)(b_ne)$$

是整数。

22. 试证对任意正整数 n,

$$\lfloor\sqrt{n}\rfloor+\sum_{k=1}^{n}\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor$$

必为偶数, 其中 $\lfloor x\rfloor$ 为高斯函数。

定义命题:

$$P_n : a_n = \left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor + \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \text{ 为偶数},$$

其中 $n \in \mathbb{Z}^+$。观察当 $n = 1$ 时,

$$a_1 = \left\lfloor \sqrt{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{1} \right\rfloor = 1 + 1 = 2$$

为偶数, 即 P_1 成立。现假设 P_n 成立, 即当 $n = \ell$ 时,

$$a_\ell = \left\lfloor \sqrt{\ell} \right\rfloor + \sum_{k=1}^{\ell} \left\lfloor \frac{\ell}{k} \right\rfloor$$

为偶数。观察当 $n = \ell + 1$ 时:

- 若 $\ell + 1$ 为完全平方数, 则
$$\left\lfloor \sqrt{\ell + 1} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{\ell} \right\rfloor + 1,$$
且
$$\sum_{k=1}^{\ell+1} \left\lfloor \frac{\ell + 1}{k} \right\rfloor = \sum_{k=1}^{\ell} \left\lfloor \frac{\ell}{k} \right\rfloor + m,$$
其中 m 为 $\ell + 1$ 的正因数个数（奇数)。于是
$$a_{\ell+1} = a_\ell + m + 1 = \text{偶} + \text{奇} + \text{奇} = \text{偶}.$$

- 若 $\ell + 1$ 不是完全平方数, 则
$$\left\lfloor \sqrt{\ell + 1} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{\ell} \right\rfloor,$$
且
$$\sum_{k=1}^{\ell+1} \left\lfloor \frac{\ell + 1}{k} \right\rfloor = \sum_{k=1}^{\ell} \left\lfloor \frac{\ell}{k} \right\rfloor + m,$$
此时 m 为偶数, 于是
$$a_{\ell+1} = a_\ell + m = \text{偶} + \text{偶} = \text{偶}.$$

因此 $P_{\ell+1}$ 亦成立。即 $P_n \implies P_{n+1}$。由数学归纳法,P_n 对任意正整数 n 都成立。

23. 票箱中有甲、乙两人的选票分别为 m 张和 n 张且 $m > n$。令 $P_{m,n}$ 表示开票的过程中甲的选票会一路领先乙的选票的概率,

 (a) 计算 $P_{m,1}$ 和 $P_{m,2}$。

视甲得 1 票为向上走一步，乙得 1 票为向右走一步，则 $P_{m,n}$ 表示从原点 $O(0,0)$ 走格点至 $P(n,m)$ 但不经过 (a,a) 的概率。

m 个上、1 个右的排列数为 $\dfrac{(m+1)!}{m!}=m+1$，其中

$$\begin{cases}\text{开头为右的数列有 } 1 \text{ 个}\\ \text{开头为上右的数列也只有 } 1 \text{ 个}\end{cases}$$

因此符合条件的数列有 $m+1-2=m-1$ 个，故

$$P_{m,1}=\frac{m-1}{m+1}$$

m 个上、2 个右的排列数为 $\dfrac{(m+2)!}{m!2!}=\dfrac{(m+2)(m+1)}{2}$，其中

$$\begin{cases}\text{开头为右的数列有 } m+1 \text{ 个}\\ \text{开头为上右的数列有 } m \text{ 个}\\ \text{开头为上上右右的数列有 } 1 \text{ 个}\end{cases}$$

因此符合条件的数列有

$$\frac{(m+2)(m+1)}{2}-(m+1)-m-1=\frac{(m+1)(m-2)}{2}$$

所以

$$P_{m,2}=\frac{m-2}{m+2}$$

(b) 证明 $P_{m,n}=\dfrac{m}{m+n}P_{m-1,n}+\dfrac{n}{m+n}P_{m,n-1}$。

从 $(0,0)$ 至 (n,m) 的方法数等于从 $(0,0)$ 至 $(n-1,m)$ 的方法数加上从 $(0,0)$ 至 $(n,m-1)$ 的方法数，因此

$$P_{m,n}=\frac{\frac{(m+n-1)!}{(m-1)!n!}P_{m-1,n}+\frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}P_{m,n-1}}{\frac{(m+n)!}{m!n!}}=\frac{m}{m+n}P_{m-1,n}+\frac{n}{m+n}P_{m,n-1}$$

(c) 先猜测 $P_{m,n}$ 的答案，再利用 (b) 用归纳法证明你的猜测。

由 (a) 可猜

$$P_{m,n}=\frac{m-n}{m+n},\ m\geqslant n$$

令 $k=m+n$, 观察当 $k=2$ 时,

$$\begin{cases} m=2,n=0 \Rightarrow P_{2,0}=\frac{2-0}{2+0}=1 \\ m=n=1 \Rightarrow P_{1,1}=\frac{1-1}{1+1}=0 \end{cases}$$

显然猜测成立。现假设 $k=N$ 时猜测成立, 观察当 $k=N+1$ 时,

$$\begin{aligned} P_{m,n} &= \frac{m}{m+n}P_{m-1,n}+\frac{n}{m+n}P_{m,n-1} \\ &= \frac{m}{m+n}\cdot\frac{m-n-1}{m+n-1}+\frac{n}{m+n}\cdot\frac{m-n+1}{m+n-1} \\ &= \frac{(m-n)(m+n-1)}{(m+n)(m+n-1)}=\frac{m-n}{m+n} \end{aligned}$$

猜测亦成立, 故猜测对所有 $m,n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ 且 $m\geqslant n$ 皆成立。

24. 用数学归纳法证明：若 $n\geqslant 1$, $n\in\mathbb{N}$, 则

$$\prod_{r=1}^{n}\cos\left(2^{r-1}x\right)=\frac{\sin\left(2^{n}x\right)}{2^{n}\sin x}.$$

先将乘积符号展开：

$$\prod_{r=1}^{n}\cos\left(2^{r-1}x\right)=\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x\cdots\cos\left(2^{n-1}x\right).$$

先验证基础情况。

当 $n=1$ 时,

$$\begin{aligned} \text{L.H.S.} &= \prod_{r=1}^{1}\cos\left(2^{r-1}x\right)=\cos\left(2^{0}x\right)=\cos x, \\ \text{R.H.S.} &= \frac{\sin\left(2^{1}x\right)}{2^{1}\sin x}=\frac{\sin 2x}{2\sin x}=\frac{2\sin x\cos x}{2\sin x}=\cos x. \end{aligned}$$

左右两边相等, 结论对 $n=1$ 成立。

假设当 $n=k$ 时结论成立, 即

$$\prod_{r=1}^{k}\cos\left(2^{r-1}x\right)=\frac{\sin\left(2^{k}x\right)}{2^{k}\sin x}.$$

考虑 $n=k+1$ 的情形,

$$\begin{aligned}\prod_{r=1}^{k+1}\cos\left(2^{r-1}x\right) &= \left(\prod_{r=1}^{k}\cos\left(2^{r-1}x\right)\right)\cos\left(2^{k}x\right)\\ &= \frac{\sin\left(2^{k}x\right)}{2^{k}\sin x}\cos\left(2^{k}x\right)\\ &= \frac{\sin\left(2^{k}x\right)\cos\left(2^{k}x\right)}{2^{k}\sin x}\\ &= \frac{2\sin\left(2^{k}x\right)\cos\left(2^{k}x\right)}{2^{k+1}\sin x}\\ &= \frac{\sin\left(2^{k+1}x\right)}{2^{k+1}\sin x}.\end{aligned}$$

因此若结论对 $n=k$ 成立, 则对 $n=k+1$ 也成立。

由于结论对 $n=1$ 成立, 根据数学归纳法, 结论对所有 $n\geqslant 1$, $n\in\mathbb{N}$ 成立。

25. 用数学归纳法证明

$$\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cdots+\cos[(2n-1)x]=\frac{\sin(2nx)}{2\sin x}.$$

先验证基础情况。

当 $n=1$ 时,

$$\begin{aligned}\text{L.H.S.} &= \cos(2\times 1-1)x=\cos x,\\ \text{R.H.S.} &= \frac{\sin(2\times 1\,x)}{2\sin x}=\frac{\sin(2x)}{2\sin x}=\frac{2\sin x\cos x}{2\sin x}=\cos x.\end{aligned}$$

因此结论对 $n=1$ 成立。

假设当 $n=k$ 时结论成立, 即

$$\sum_{r=1}^{k}\cos[(2r-1)x]=\frac{\sin(2kx)}{2\sin x}.$$

为进行归纳步骤, 先推导一个恒等式。由

$$\begin{aligned}\sin(A+B)&=\sin A\cos B+\cos A\sin B,\\ \sin(A-B)&=\sin A\cos B-\cos A\sin B,\end{aligned}$$

两式相加得

$$2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B).$$

取 $A=x$, $B=(2k+1)x$, 则

$$\begin{aligned}2\sin x\cos[(2k+1)x]&=\sin[(2k+2)x]+\sin[-2kx]\\&=\sin[(2k+2)x]-\sin(2kx).\end{aligned}$$

现在考虑 $n=k+1$:

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{k+1}\cos[(2r-1)x]&=\left(\sum_{r=1}^{k}\cos[(2r-1)x]\right)+\cos[(2k+1)x]\\&=\frac{\sin(2kx)}{2\sin x}+\cos[(2k+1)x]\\&=\frac{\sin(2kx)+2\sin x\cos[(2k+1)x]}{2\sin x}\\&=\frac{\sin(2kx)+\sin[(2k+2)x]-\sin(2kx)}{2\sin x}\\&=\frac{\sin[(2k+2)x]}{2\sin x}\\&=\frac{\sin[2(k+1)x]}{2\sin x}.\end{aligned}$$

因此若结论对 $n=k$ 成立，则对 $n=k+1$ 也成立。

由于结论对 $n=1$ 成立，根据数学归纳法，结论对所有 $n\in\mathbb{N}$ 成立。

26. 用数学归纳法证明:

$$\frac{d^n}{dx^n}[e^x\cos x]=2^{\frac{n}{2}}e^x\cos\left(x+\frac{n\pi}{4}\right),\quad n\geqslant 1,\ n\in\mathbb{N}.$$

先验证基础情况。

当 $n=1$ 时,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[e^x\cos x]&=e^x\cos x+e^x(-\sin x)\\&=e^x(\cos x-\sin x).\end{aligned}$$

而右边为

$$\begin{aligned}2^{\frac{1}{2}}e^x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)&=\sqrt{2}e^x\left(\cos x\cos\frac{\pi}{4}-\sin x\sin\frac{\pi}{4}\right)\\&=\sqrt{2}e^x\left(\cos x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\sin x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\&=e^x(\cos x-\sin x).\end{aligned}$$

左右两边相等，结论对 $n=1$ 成立。

假设当 $n=k$ 时结论成立，即

$$\frac{d^k}{dx^k}[e^x\cos x]=2^{\frac{k}{2}}e^x\cos\left(x+\frac{k\pi}{4}\right).$$

考虑 $n=k+1$ 的情形，

$$\begin{aligned}\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}[e^x\cos x]&=\frac{d}{dx}\left[2^{\frac{k}{2}}e^x\cos\left(x+\frac{k\pi}{4}\right)\right]\\&=2^{\frac{k}{2}}\left(e^x\cos\left(x+\frac{k\pi}{4}\right)-e^x\sin\left(x+\frac{k\pi}{4}\right)\right)\\&=2^{\frac{k}{2}}e^x\left[\cos\left(x+\frac{k\pi}{4}\right)-\sin\left(x+\frac{k\pi}{4}\right)\right].\end{aligned}$$

利用恒等式

$$\cos A-\sin A=\sqrt{2}\cos\left(A+\frac{\pi}{4}\right),$$

可得

$$\begin{aligned}\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}[e^x\cos x]&=2^{\frac{k}{2}}e^x\cdot\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\\&=2^{\frac{k+1}{2}}e^x\cos\left(x+\frac{(k+1)\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

因此若结论对 $n=k$ 成立，则对 $n=k+1$ 也成立。

由于结论对 $n=1$ 成立，根据数学归纳法，结论对所有 $n\geqslant 1$, $n\in\mathbb{N}$ 成立。

27. 设 n 为正整数。计算

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin[(2n+1)x]}{\sin x}\,dx$$

令

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin[(2n+1)x]}{\sin x}\,dx$$

当 $n=1$ 时,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 3x}{\sin x}\,dx \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{3\sin x - 4\sin^3 x}{\sin x}\,dx \\
&= \int_0^{\pi/2} (3 - 4\sin^2 x)\,dx \\
&= \int_0^{\pi/2} [1 + 2\cos(2x)]\,dx \\
&= [x + \sin(2x)]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

假设结论对 $n-1$ 成立, 考虑 n 的情况。利用正弦的加角公式,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,dx &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2nx\cos x + \cos 2nx \sin x}{\sin x}\,dx \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2nx \cos x}{\sin x}\,dx + \int_0^{\pi/2} \cos 2nx\,dx \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin[(2n-1)x]\cos^2 x}{\sin x}\,dx + \int_0^{\pi/2} \cos x\cos[(2n-1)x]\,dx \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin[(2n-1)x](1-\sin^2 x)}{\sin x}\,dx + \int_0^{\pi/2} \cos x\cos[(2n-1)x]\,dx \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin[(2n-1)x]}{\sin x}\,dx - \int_0^{\pi/2} \sin x\sin[(2n-1)x]\,dx + \int_0^{\pi/2} \cos x\cos[(2n-1)x] \\
&= I_{n-1} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (\cos[(2n-2)x] - \cos 2nx)\,dx + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (\cos[(2n-2)x] + \cos 2nx) \\
&= I_{n-1} + \int_0^{\pi/2} \cos(2nx)\,dx \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

由归纳法得

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin[(2n+1)x]}{\sin x}\,dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{对所有正整数 } n \text{ 成立。}$$

28. 已知矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

用数学归纳法证明

$$\mathbf{A}^n = n\mathbf{A} - (n-1)\mathbf{I}, \quad n \geqslant 1,\ n \in \mathbb{N}.$$

先验证基础情况。

当 $n = 1$ 时,

$$\mathbf{A}^1 = 1 \cdot \mathbf{A} - (1-1)\mathbf{I} = \mathbf{A},$$

结论成立。

假设当 $n = k$ 时结论成立, 即

$$\mathbf{A}^k = k\mathbf{A} - (k-1)\mathbf{I}.$$

则

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{k+1} &= \mathbf{A}^k\mathbf{A} \\ &= [k\mathbf{A} - (k-1)\mathbf{I}]\mathbf{A} \\ &= k\mathbf{A}^2 - (k-1)\mathbf{A}. \end{aligned}$$

为继续化简, 先将 $\mathbf{A}^2$ 表示成 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{I}$ 的线性组合。设

$$\mathbf{A}^2 = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{I}.$$

则

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

即

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda+\mu & 0 \\ 2\lambda & \lambda+\mu \end{pmatrix}.$$

比较对应元素得

$$\begin{aligned} 2\lambda = 4 &\Rightarrow \lambda = 2, \\ \lambda + \mu = 1 &\Rightarrow \mu = -1. \end{aligned}$$

因此

$$\mathbf{A}^2 = 2\mathbf{A} - \mathbf{I}.$$

代回得

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{k+1} &= k(2\mathbf{A}-\mathbf{I})-(k-1)\mathbf{A}\\ &= 2k\mathbf{A}-k\mathbf{I}-k\mathbf{A}+\mathbf{A}\\ &= (k+1)\mathbf{A}-k\mathbf{I}\\ &= (k+1)\mathbf{A}-[(k+1)-1]\mathbf{I}.\end{aligned}$$

因此若结论对 $n=k$ 成立, 则对 $n=k+1$ 也成立。

由于结论对 $n=1$ 成立, 根据数学归纳法, 结论对所有 $n\geqslant 1$, $n\in\mathbb{N}$ 成立。

29. 设 V_n 为 n 阶范德蒙行列式, 定义如下:

$$V_n=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

试以数学归纳法证明

$$V_n=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i).$$

定义命题

$$P_n : V_n=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i) \quad ,n\in\mathbb{N}$$

基础步骤: 显然 P_1 成立, 因 $V=1=|1|=1$, 且显然 P_2 亦成立, 因为

$$V_2=\begin{vmatrix}1 & x_1\\ 1 & x_2\end{vmatrix}=x_2-x_1$$

归纳步骤: 假设命题 P_k 成立, 即

$$V_k=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{k-1}\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{k-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & x_k & x_k^2 & \dots & x_k^{k-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant k}(x_j-x_i)$$

观察 V_{k+1}, 将 x_1 写成变量 x, 即

$$V_{k+1}=\begin{vmatrix}1 & x & x^2 & \dots & x^k \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_k & x_k^2 & \dots & x_k^k \\ 1 & x_{k+1} & x_{k+1}^2 & \dots & x_{k+1}^k\end{vmatrix}$$

V_{k+1} 按 R_1 展开后是次数不大于 k 的多项式, 设 $f(x)=V_{k+1}$, 发现当 $x=x_2,x_3,\cdots,x_{k+1}$, 行列式 V_{k+1} 有相同的两行, 故

$$f(x_2)=f(x_3)=\ \dots\ =f(x_{k+1})=0$$

故 $f(x)$ 是一个次数为 k 且以 $x_2,x_3,\cdot,x_{k+1}$ 为根的多项式, 由余氏定理,

$$f(x)=C(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_{k+1}) \tag{1}$$

且 C 是一常数。又 V_{k+1} 按 R_1 展开式中 x^k 的系数为

$$\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{k-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_k & x_k^2 & \dots & x_k^{k-1}\end{vmatrix}$$

由归纳假设知此系数为

$$\prod_{2\leqslant i<j\leqslant k+1}(x_j-x_i)$$

故由 (1) 知

$$C=\prod_{2\leqslant i<j\leqslant k+1}(x_j-x_i)$$

即

$$f(x)=(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_{k+1})\prod_{2\leqslant i<j\leqslant k+1}(x_j-x_i)$$

将 x 置换回 x_1, 即得命题 P_{k+1} 成立, 此时蕴含 $P_k\implies P_{k+1}$ 成立。

由数学归纳法, 命题 P_n 对所有正整数 n 皆成立。验证是 x_j-x_i 还是 x_i-x_j

30. 试证莱布尼茨公式: 设函数 f,g 定义在开区间 I 上,n 为正整数,$x\in I$ 为 I 内一点使得 f,g

均可导 n 次, 则有

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x),$$

其中 (n) 表示导数的阶数。

定义命题

$$P_n : (f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \quad , n \in \mathbb{N}$$

基础步骤: 观察当 $n=1$ 时, 由乘积求导法则, 左式为

$$(f(x)g(x))' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

而右式为

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} f^{(k)}(x) g^{(1-k)}(x) = \binom{1}{0} f^{(0)}(x) g^{(1)}(x) + \binom{1}{1} f^{(1)}(x) g^{(0)}(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x),$$

此时左式等于右式, 即 P_1 成立。

归纳步骤: 设 $n \in \mathbb{N}$, 假设归纳假设 P_n 成立, 有

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

欲证

$$(f(x)g(x))^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x)$$

由归纳假设,

$$\begin{aligned}
(f(x)g(x))^{(n+1)} &= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \right)' \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \right)' \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k+1)}(x) g^{(n-k)}(x) + f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x) \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)}(x) g^{(n-k)}(x) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x)
\end{aligned}$$

将第一个求和中 $k=n$ 的项分离，第二个求和中 $k=0$ 的项分离，得

$$
\begin{aligned}
(f(x)g(x))^{(n+1)} &= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}f^{(k+1)}(x)g^{(n-k)}(x)+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)g^{(n-k+1)}(x)\\
&\quad+\binom{n}{n}f^{(n+1)}(x)g^{(0)}(x)+\binom{n}{0}f^{(0)}(x)g^{(n+1)}(x)\\
&=\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k-1}f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x)+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)g^{(n-k+1)}(x)\\
&\quad+\binom{n}{n}f^{(n+1)}(x)g^{(0)}(x)+\binom{n}{0}f^{(0)}(x)g^{(n+1)}(x)
\end{aligned}
$$

由帕斯卡恒等式，

$$
\begin{aligned}
&(f(x)g(x))^{(n+1)}\\
&=\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x)+\binom{n}{0}f^{(0)}(x)g^{(n+1)}(x)+\binom{n}{n}f^{(n+1)}(x)g^{(0)}(x)\\
&=\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x)+\binom{n+1}{0}f(x)g^{(n+1)}(x)+\binom{n+1}{n+1}f^{(n+1)}(x)g(x)\\
&=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x)
\end{aligned}
$$

即命题 P_{n+1} 成立，此时蕴含 $P_n \implies P_{n+1}$ 成立。

由数学归纳法，命题 P_n 对所有正整数 n 皆成立。

31. 设 $a_0,a_1,a_2,\dots$ 为一无限实数数列，且满足

$$\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}\geqslant a_n,\forall n\in\mathbb{N}$$

证明

$$\frac{a_0+a_{n+1}}{2}\geqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},\forall n\in\mathbb{N}$$

解法一

先证明:

$$a_0+na_{n+1}\geqslant(n+1)a_n \tag{*}$$

当 $n=1$ 时, $a_0+a_2\geqslant 2a_1$, 显然 (*) 成立; 假设 $n=k$ 时 (*) 成立, 即

$$a_0+ka_{k+1}\geqslant (k+1)a_k \tag{1}$$

又

$$a_{k+2}+a_k\geqslant 2a_{k+1} \tag{2}$$

由 (1), (2) 得

$$a_0+(k+1)a_{k+2}\geqslant (k+1)(a_{k+2}+a_k)-ka_{k+1}\geqslant 2(k+1)a_{k+1}-ka_{k+1}=(k+2)a_{k+1}$$

即 $n=k+1$ 时 (*) 也成立, 由数学归纳法知 (*) 对所有 $n\in\mathbb{N}$ 均成立。

现证:

$$n(a_n+a_{n+1})\geqslant 2\sum_{i=1}^{n}a_i \tag{**}$$

当 $n=1$ 时, $a_0+a_2\geqslant 2a_1$,(**) 成立; 假设 $n=k$ 时 (**) 成立, 即

$$k(a_0+a_{k+1})\geqslant 2\sum_{i=1}^{k}a_i \tag{3}$$

由 $(*)$ 知

$$a_0+(k+1)a_{k+2}\geqslant (k+2)a_{k+1} \tag{4}$$

由 (3), (4) 得

$$(k+1)(a_0+a_{k+2})\geqslant (k+2)a_{k+1}+2\sum_{i=1}^{k}a_i-ka_{k+1}=2\sum_{i=1}^{k+1}a_i$$

即 $n=k+1$ 时 (**) 也成立, 由数学归纳法知 (**) 对所有 $n\in\mathbb{N}$ 均成立即

$$\frac{a_0+a_{n+1}}{2}\geqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},\forall n\in\mathbb{N}$$

证毕。

解法二

设 $a_{n+1}-a_n=d_n$, 由题意可知

$$a_{n+1}-a_n\geqslant a_n-a_{n-1}\Rightarrow d_n\geqslant d_{n-1}$$

且 $a_n=a_0+d_1+d_2+\cdots+d_{n-1}$, 欲证等价于

$$\begin{aligned}
&\frac{a_0+a_{n+1}}{2}\geqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\\
\Longleftrightarrow\ & n(a_0+a_{n+1})\geqslant 2(a_1+a_2+\cdots+a_n)\\
\Longleftrightarrow\ & na_0+n(a_0+d_0+d_1+\cdots+d_{n-1})\\
&\geqslant 2[(a_0+d_0)+(a_0+d_0+d_1)+\cdots+(a_0+d_0+d_1+\cdots+d_{n-1})]\\
\Longleftrightarrow\ & nd_n\geqslant nd_0+(n-2)d_1+(n-4)d_2+(n-6)d_3+\cdots+(4-n)d_{n-2}+(2-n)d_{n-1}
\end{aligned}$$

当 n 为奇数, 即证

$$n(d_0-d_n)+(n-2)(d_1-d_{n-1})+(n-4)(d_2-d_{n-2})+\cdots+(d_{\frac{n-1}{2}}-d_{\frac{n+1}{2}})\leqslant 0 \tag{1}$$

而 $d_n\geqslant d_{n-1}$, 则

$$d_0-d_n\leqslant 0, d_1-d_{n-1}\leqslant 0,\cdots,d_{\frac{n-1}{2}}-d_{\frac{n+1}{2}}\leqslant 0$$

此时 (1) 显然成立。

当 n 为偶数, 即证

$$n(d_0-d_n)+(n-2)(d_1-d_{n-1})+(n-4)(d_2-d_{n-2})+\cdots+2(d_{\frac{n-2}{2}}-d_{\frac{n+2}{2}})\leqslant 0 \tag{2}$$

上式中 $d_{\frac{n}{2}}$ 这一项没有, 而 $d_n\geqslant d_{n-1}$ 则

$$d_0-d_n\leqslant 0, d_1-d_{n-1}\leqslant 0,\cdots,d_{\frac{n-2}{2}}-d_{\frac{n+2}{2}}\leqslant 0$$

此时 (2) 也成立。

故得证

$$\frac{a_0+a_{n+1}}{2}\geqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},\forall n\in\mathbb{N}$$

32. 已知多项式 $P(x)=x^2+2019x+1$, 试证对任意正整数 n, 函数 $P^{(n)}(x)=0$ 至少有一个实数根, 其中 $P^{(n)}(x)$ 表示 P 自身复合 n 次。

定义命题: 对任意正整数 $n, P^{(n)}(x)$ 有一个负实根 $-c_n$, 且 $0<c_n<2$。

当 $n=1$ 时,

$$P^{(1)}(x)=P(x)=x^2+2019x+1$$

其判别式为 $\Delta_1=2019^2-4>0$, 所以 $P^{(1)}(x)$ 有两个实数根, 设为 $-b_1,-c_1$, 其中 $c_1\leqslant b_1$,

由韦达定理,

$$b_1 + c_1 = 2019, \quad b_1 c_1 = 1$$

因此 b_1, c_1 都为正数, 且因为乘积是 1, 可得 $c_1 \leqslant 1 < 2$, 所以 $-c_1$ 是一个负实根, 满足 $0 < c_1 < 2$, 故命题在 $n = 1$ 时成立。

假设命题在 $n = k$ 时成立, 即 $P^{(k)}(x)$ 有一负实根 $-c_k$, 其中 $0 < c_k < 2$, 即

$$P^{(k)}(x) = (x + c_k)Q_k(x)$$

其中 $Q_k(x)$ 为某多项式, 则有

$$P^{(k+1)}(x) = P^{(k)}(P(x)) = (P(x) + c_k)Q_k(P(x))$$

其中

$$P(x) + c_k = x^2 + 2019x + 1 + c_k$$

的判别式为

$$\Delta_{k+1} = 2019^2 - 4(1 + c_k) > 0$$

即 $P(x) + c_k$ 有两个实根, 设为 $-b_{k+1}, -c_{k+1}$, 其中 $c_{k+1} \leqslant b_{k+1}$, 由韦达定理,

$$b_{k+1} + c_{k+1} = 2019, \quad b_{k+1}c_{k+1} = 1 + c_k > 0$$

可知 b_{k+1}, c_{k+1} 都为正数, 且

$$c_{k+1} \leqslant \sqrt{1 + c_k} < \sqrt{3} < 2$$

所以 $-c_{k+1}$ 是 $P^{(k+1)}(x)$ 的负实根, 满足 $0 < c_{k+1} < 2$, 故命题在 $n = k + 1$ 时也成立。

由数学归纳法知, 对任意正整数 $n, P^{(n)}(x)$ 至少有一个实数根。

行列式、矩阵

1. 求下列行列式的立方根:

$$\begin{vmatrix} -\dfrac{2019^2}{\sqrt[5]{80}} & \dfrac{2020^2}{\sqrt[5]{80^2}} & -\dfrac{2021^2}{\sqrt[5]{80^3}} \\ \dfrac{2022^2}{\sqrt[5]{80^4}} & -\dfrac{2023^2}{\sqrt[5]{80^5}} & \dfrac{2024^2}{\sqrt[5]{80^6}} \\ -\dfrac{2025^2}{\sqrt[5]{80^7}} & \dfrac{2026^2}{\sqrt[5]{80^8}} & -\dfrac{2027^2}{\sqrt[5]{80^9}} \end{vmatrix}$$

设 $a=2019, r=-\dfrac{1}{\sqrt[5]{80}}$, 原行列式为

$$D=\begin{vmatrix} a^2r & (a+1)^2r^2 & (a+2)^2r^3 \\ (a+3)^2r^4 & (a+4)^2r^5 & (a+5)^2r^6 \\ (a+6)^2r^7 & (a+7)^2r^8 & (a+8)^2r^9 \end{vmatrix}$$

进行列变换 $C_2\to C_2-C_1, C_3\to C_3-C_2$,

$$D=\begin{vmatrix} a^2r & (2a+1)r^2 & (2a+3)r^3 \\ (a+3)^2r^4 & (2a+7)r^5 & (2a+9)r^6 \\ (a+6)^2r^7 & (2a+13)r^8 & (2a+15)r^9 \end{vmatrix}$$

进行列变换 $C_3\to C_3-C_2$,

$$D=\begin{vmatrix} a^2r & (2a+1)r^2 & 2r^3 \\ (a+3)^2r^4 & (2a+7)r^5 & 2r^6 \\ (a+6)^2r^7 & (2a+13)r^8 & 2r^9 \end{vmatrix}$$

进行行变换 $R_3\to R_3-r^3R_2, R_2\to R_2-r^3R_1$

$$D=\begin{vmatrix} a^2r & (2a+1)r^2 & 2r^3 \\ (6a+9)r^4 & 6r^5 & 0 \\ (6a+27)r^7 & 6r^8 & 0 \end{vmatrix}$$

进行行变换 $R_3\to R_3-r^3R_2$,

$$D=\begin{vmatrix} a^2r & (2a+1)r^2 & 2r^3 \\ (6a+9)r^4 & 6r^5 & 0 \\ 18r^7 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

进行列变换 $C_1 \leftrightarrow C_3$,

$$D = -\begin{vmatrix} 2r^3 & (2a+1)r^2 & a^2r \\ 0 & 6r^5 & (6a+9)r^4 \\ 0 & 0 & 18r^7 \end{vmatrix} = -(2r^3)(6r^5)(18r^7) = -216r^{15} = \frac{216}{80^3}$$

故原行列式的立方根为 $\dfrac{3}{40}$

2. 若 $a+b+c=x+y+z=0$, 求行列式

$$\begin{vmatrix} xa & yb & zc \\ yc & za & xb \\ zb & xc & ya \end{vmatrix}$$

展开行列式得

$$\begin{vmatrix} xa & yb & zc \\ yc & za & xb \\ zb & xc & ya \end{vmatrix} = xyz(a^3+b^3+c^3)+abc(x^3+y^3+z^3)$$

由于

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$$

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=0$$

故

$$\begin{vmatrix} xa & yb & zc \\ yc & za & xb \\ zb & xc & ya \end{vmatrix} = xyz(3abc)-abc(3xyz)=0$$

3. 计算行列式

$$\begin{vmatrix} \log a & \log b & \log \frac{1}{ab} \\ \log b & \log c & \log \frac{1}{bc} \\ \log c & \log a & \log \frac{1}{ca} \end{vmatrix}.$$

将乘积写成和：

$$\begin{vmatrix} \log a & \log b & -\log a-\log b \\ \log b & \log c & -\log b-\log c \\ \log c & \log a & -\log c-\log a \end{vmatrix}.$$

对第三列进行变换 $C_3 \leftarrow C_3 - C_1 - C_2$，得到

$$\begin{vmatrix} \log a & \log b & 0 \\ \log b & \log c & 0 \\ \log c & \log a & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

因此该行列式的值为 0。

4. 若 m 为正整数，求行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ {}^{m}C_1 & {}^{m+1}C_1 & {}^{m+2}C_1 \\ {}^{m}C_2 & {}^{m+1}C_2 & {}^{m+2}C_2 \end{vmatrix}$$

令

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ {}^{m}C_1 & {}^{m+1}C_1 & {}^{m+2}C_1 \\ {}^{m}C_2 & {}^{m+1}C_2 & {}^{m+2}C_2 \end{vmatrix}$$

由性质 ${}^{n-1}C_{k-1} + {}^{n-1}C_k = {}^{n}C_k$，有

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ {}^{m}C_1 & {}^{m+1}C_1 & {}^{m+1}C_0 + {}^{m+1}C_1 \\ {}^{m}C_2 & {}^{m+1}C_2 & {}^{m+1}C_1 + {}^{m+1}C_2 \end{vmatrix}$$

进行列变换 $C_3 \to C_3 - C_2$，

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ {}^{m}C_1 & {}^{m+1}C_1 & {}^{m+1}C_0 \\ {}^{m}C_2 & {}^{m+1}C_2 & {}^{m+1}C_1 \end{vmatrix}$$

再由性质 ${}^{n-1}C_{k-1} + {}^{n-1}C_k = {}^{n}C_k$，

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ {}^{m}C_1 & {}^{m}C_0 + {}^{m}C_1 & {}^{m+1}C_0 \\ {}^{m}C_2 & {}^{m}C_1 + {}^{m}C_2 & {}^{m+1}C_1 \end{vmatrix}$$

进行列变换 $C_2 \to C_2 - C_1$,

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ {}^{m}C_1 & {}^{m}C_0 & {}^{m+1}C_0 \\ {}^{m}C_2 & {}^{m}C_1 & {}^{m+1}C_1 \end{vmatrix}$$

按第一行展开得

$$D = {}^{m}C_0{}^{m+1}C_1 - {}^{m}C_1{}^{m+1}C_0 = 1 \cdot (m+1) - m \cdot 1 = 1$$

5. 已知 $\triangle ABC$, 求

$$\begin{vmatrix} \tan A & 1 & 1 \\ 1 & \tan B & 1 \\ 1 & 1 & \tan C \end{vmatrix}.$$

展开行列式:

$$\begin{vmatrix} \tan A & 1 & 1 \\ 1 & \tan B & 1 \\ 1 & 1 & \tan C \end{vmatrix} = \tan A \tan B \tan C - (\tan A + \tan B + \tan C) + 2.$$

由于 $A + B + C = \pi$, 有

$$\tan(A+B) = \tan(\pi - C) = -\tan C,$$

又

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}.$$

因此

$$\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = -\tan C \implies \tan A + \tan B = -\tan C + \tan A \tan B \tan C \implies \tan A + \tan B + \tan C =$$

将其代入行列式表达式, 得到

$$\begin{vmatrix} \tan A & 1 & 1 \\ 1 & \tan B & 1 \\ 1 & 1 & \tan C \end{vmatrix} = \tan A \tan B \tan C - (\tan A + \tan B + \tan C) + 2 = 2.$$

6. 计算行列式

$$\begin{vmatrix} \tan 40^\circ & \tan 10^\circ & \tan 50^\circ \\ \tan 20^\circ & \tan 50^\circ & \tan 70^\circ \\ \tan 10^\circ & \tan 70^\circ & \tan 80^\circ \end{vmatrix}$$

令

$$D = \begin{vmatrix} \tan 40^\circ & \tan 10^\circ & \tan 50^\circ \\ \tan 20^\circ & \tan 50^\circ & \tan 70^\circ \\ \tan 10^\circ & \tan 70^\circ & \tan 80^\circ \end{vmatrix}$$

进行列变换 $C_3 \to -C_1 - C_2 + C_3$,

$$D = \begin{vmatrix} \tan 40^\circ & \tan 10^\circ & -\tan 10^\circ - \tan 40^\circ + \tan 50^\circ \\ \tan 20^\circ & \tan 50^\circ & -\tan 20^\circ - \tan 50^\circ + \tan 70^\circ \\ \tan 10^\circ & \tan 70^\circ & -\tan 10^\circ - \tan 70^\circ + \tan 80^\circ \end{vmatrix}$$

由

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

可得

$$\tan A \tan B \tan(A+B) = \tan(A+B) - \tan A - \tan B$$

且若 $A + B = 90^\circ$, 则

$$\tan A \tan B = 1$$

因此

$$D = \begin{vmatrix} \tan 40^\circ & \tan 10^\circ & \tan 10^\circ \cdot \tan 40^\circ \cdot \tan 50^\circ \\ \tan 20^\circ & \tan 50^\circ & \tan 20^\circ \cdot \tan 50^\circ \cdot \tan 70^\circ \\ \tan 10^\circ & \tan 70^\circ & \tan 10^\circ \cdot \tan 70^\circ \cdot \tan 80^\circ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tan 40^\circ & \tan 10^\circ & \tan 10^\circ \\ \tan 20^\circ & \tan 50^\circ & \tan 50^\circ \\ \tan 10^\circ & \tan 70^\circ & \tan 70^\circ \end{vmatrix} = 0$$

7. 已知 $\triangle ABC$, 计算行列式

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & \cos A \\ b & b^2 & \cos B \\ c & c^2 & \cos C \end{vmatrix}.$$

利用余弦定理 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ 等，代入行列式：

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ b & b^2 & \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \\ c & c^2 & \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \end{vmatrix}.$$

提取公因子 $\frac{1}{2abc}$：

$$=\frac{1}{2abc}\begin{vmatrix} a & a^2 & a(b^2+c^2-a^2) \\ b & b^2 & b(a^2+c^2-b^2) \\ c & c^2 & c(a^2+b^2-c^2) \end{vmatrix}.$$

提取 a,b,c：

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & a & b^2+c^2-a^2 \\ 1 & b & a^2+c^2-b^2 \\ 1 & c & a^2+b^2-c^2 \end{vmatrix}.$$

行变换：

$$R_2 \leftarrow R_2-R_1, \quad R_3 \leftarrow R_3-R_1 \implies \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & a & b^2+c^2-a^2 \\ 0 & b-a & 2a^2-2b^2 \\ 0 & c-a & 2a^2-2c^2 \end{vmatrix}.$$

按第一列展开：

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} b-a & 2a^2-2b^2 \\ c-a & 2a^2-2c^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b-a & (a-b)(a+b) \\ c-a & (a-c)(a+c) \end{vmatrix}.$$

提取公因子 $(b-a)(c-a)$：

$$=(b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & -(a+b) \\ 1 & -(a+c) \end{vmatrix}=-(b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a+b \\ 1 & a+c \end{vmatrix}.$$

计算 2×2 行列式：

$$=-(b-a)(c-a)((a+c)-(a+b))=-(b-a)(c-a)(c-b)=(a-b)(a-c)(b-c).$$

最终结果：

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & \cos A \\ b & b^2 & \cos B \\ c & c^2 & \cos C \end{vmatrix}=(a-b)(a-c)(b-c).$$

8. 在坐标平面上，设 $\triangle ABC$ 经二阶方阵 $M=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 作线性变换后成 $\triangle A'B'C'$。若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\triangle$, $\triangle A'B'C'$ 的面积为 $\triangle'$, 试证

$$\triangle' = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \triangle$$

设 $A(x_a, y_a), B(x_b, y_b), C(x_c, y_c)$ 经变换后为

$$A'(ax_a + by_a,\ cx_a + dy_a), B'(ax_b + by_b,\ cx_b + dy_b), C'(ax_c + by_c,\ cx_c + dy_c)$$

则

$$\Delta' = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} ax_a + by_a & cx_a + dy_a & 1 \\ ax_b + by_b & cx_b + dy_b & 1 \\ ax_c + by_c & cx_c + dy_c & 1 \end{vmatrix}$$

变为

$$\Delta' = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} ax_a & dy_a & 1 \\ ax_b & dy_b & 1 \\ ax_c & dy_c & 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} by_a & cx_a & 1 \\ by_b & cx_b & 1 \\ by_c & cx_c & 1 \end{vmatrix} + 0 + 0 = \frac{1}{2}(ad - bc) \begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \triangle$$

9. 若 $a^2 + b^2 + c^2 = 47$, 求

$$\begin{vmatrix} a^2 - 1 & ab & ca \\ ab & b^2 - 1 & bc \\ ca & bc & c^2 - 1 \end{vmatrix}$$

令

$$D = \begin{vmatrix} a^2 - 1 & ab & ca \\ ab & b^2 - 1 & bc \\ ca & bc & c^2 - 1 \end{vmatrix}$$

进行行变换 $R_1 \to aR_1, R_2 \to bR_2, R_3 \to cR_3$,

$$D = \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} a(a^2 - 1) & a^2 b & ca^2 \\ ab^2 & b(b^2 - 1) & b^2 c \\ c^2 a & bc^2 & c(c^2 - 1) \end{vmatrix}$$

进行列变换 $C_1 \to \dfrac{C_1}{a}, C_2 \to \dfrac{C_2}{b}, C_3 \to \dfrac{C_3}{c}$,

$$D = \begin{vmatrix} a^2-1 & a^2 & a^2 \\ b^2 & b^2-1 & b^2 \\ c^2 & c^2 & c^2-1 \end{vmatrix}$$

进行行变换 $R_1 \to R_1 + R_2 + R_3$,

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2-1 & a^2+b^2+c^2-1 & a^2+b^2+c^2-1 \\ b^2 & b^2-1 & b^2 \\ c^2 & c^2 & c^2-1 \end{vmatrix} \\ &= (a^2+b^2+c^2-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b^2 & b^2-1 & b^2 \\ c^2 & c^2 & c^2-1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

进行列变换 $C_2 \to -C_1 + C_2, C_3 \to -C_1 + C_3$,

$$D = (a^2+b^2+c^2-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b^2 & -1 & 0 \\ c^2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (47-1)\cdot 1 = 46$$

10. 已知

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ r & q & p \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5,$$

求

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix}.$$

先对行和列进行初等变换:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} b+c & c+a & b-c \\ q+r & r+p & q-r \\ y+z & z+x & y-z \end{vmatrix} \\
&= 2\begin{vmatrix} b & c+a & b-c \\ q & r+p & q-r \\ y & z+x & y-z \end{vmatrix} \\
&= 2\begin{vmatrix} b & c+a & -c \\ q & r+p & -r \\ y & z+x & -z \end{vmatrix} \\
&= 2\begin{vmatrix} b & a & -c \\ q & p & -r \\ y & x & -z \end{vmatrix} \\
&= 2\begin{vmatrix} b & a & c \\ q & p & r \\ y & x & z \end{vmatrix} \\
&= 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} \\
&= 2 \times 5 = 10.
\end{aligned}$$

因此, 该行列式的值为

$$\boxed{10}.$$

11. 计算行列式

$$\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix}.$$

先对第三列进行变换:

$$C_3 \leftarrow C_3 - C_2 \implies \begin{vmatrix} b+c & a & -b \\ b & c+a & -c \\ c & c & a \end{vmatrix}.$$

对第一行和第二行进行行变换：

$$R_1 \leftarrow R_1 + R_2, \quad R_2 \leftarrow R_2 + R_3 \implies \begin{vmatrix} 2b & a & -b \\ 2b & c+a & -c \\ 2c & c & a \end{vmatrix}.$$

提取公因子 2：

$$= 2\begin{vmatrix} b & a & -b \\ b & c+a & -c \\ c & c & a \end{vmatrix}.$$

对第三列进行列变换：

$$C_3 \leftarrow C_3 + C_1 \implies 2\begin{vmatrix} b & a & 0 \\ b & c+a & 0 \\ c & c & a+c \end{vmatrix}.$$

对第二行进行行变换：

$$R_2 \leftarrow R_2 - R_1 \implies 2\begin{vmatrix} b & a & 0 \\ 0 & c & 0 \\ c & c & a+c \end{vmatrix}.$$

展开计算：

$$2\big(b(c(a+c)) - a(0) + 0\big) = 2(abc + bc^2).$$

最后整理得到：

$$\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} = 4abc.$$

12. 证明

$$\begin{vmatrix} a^2 & b^2+c^2 & bc \\ b^2 & c^2+a^2 & ca \\ c^2 & a^2+b^2 & ab \end{vmatrix} = -(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$$

令

$$D=\begin{vmatrix}a^2 & b^2+c^2 & bc\\ b^2 & c^2+a^2 & ca\\ c^2 & a^2+b^2 & ab\end{vmatrix}$$

进行行变换 $R_2\to R_2-R_1$，$R_3\to R_3-R_1$,

$$D=\begin{vmatrix}a^2 & b^2+c^2 & bc\\ b^2-a^2 & a^2-b^2 & ca-bc\\ c^2-a^2 & a^2-c^2 & ab-bc\end{vmatrix}$$

化简得

$$\begin{aligned}D&=\begin{vmatrix}a^2 & b^2+c^2 & bc\\ (b+a)(b-a) & (a+b)(a-b) & c(a-b)\\ (c+a)(c-a) & (a+c)(a-c) & b(a-c)\end{vmatrix}\\ &=(a-b)(a-c)\begin{vmatrix}a^2 & b^2+c^2 & bc\\ -a-b & a+b & c\\ -a-c & a+c & b\end{vmatrix}\end{aligned}$$

进行列变换 $C_1\to C_1+C_2$,

$$D=(a-b)(a-c)\begin{vmatrix}a^2+b^2+c^2 & b^2+c^2 & bc\\ 0 & a+b & c\\ 0 & a+c & b\end{vmatrix}$$

按第一列展开得

$$\begin{aligned}D&=(a-b)(a-c)(a^2+b^2+c^2)(ab+b^2-ac-c^2)\\ &=(a-b)(a-c)(a^2+b^2+c^2)(a(b-c)+(b+c)(b-c))\\ &=-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\end{aligned}$$

13. 证明

$$\begin{vmatrix}(b+c)^2 & a^2 & a^2\\ b^2 & (c+a)^2 & b^2\\ c^2 & c^2 & (a+b)^2\end{vmatrix}=2abc(a+b+c)^3$$

令

$$D=\begin{vmatrix}(b+c)^2 & a^2 & a^2\\ b^2 & (c+a)^2 & b^2\\ c^2 & c^2 & (a+b)^2\end{vmatrix}$$

进行列变换 $C_2\to C_2-C_1$, $C_3\to C_3-C_1$, 得

$$D=\begin{vmatrix}(b+c)^2 & a^2-(b+c)^2 & a^2-(b+c)^2\\ b^2 & (c+a)^2-b^2 & 0\\ c^2 & 0 & (a+b)^2-c^2\end{vmatrix}$$

化简得

$$D=\begin{vmatrix}(b+c)^2 & (a+b+c)(a-b-c) & (a+b+c)(a-b-c)\\ b^2 & (a+b+c)(a-b+c) & 0\\ c^2 & 0 & (a+b+c)(a+b-c)\end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)^2\begin{vmatrix}(b+c)^2 & a-b-c & a-b-c\\ b^2 & a-b+c & 0\\ c^2 & 0 & a+b-c\end{vmatrix}$$

进行行变换 $R_1\to R_1-R_2-R_3$, 得

$$D=(a+b+c)^2\begin{vmatrix}2bc & -2c & -2b\\ b^2 & a-b+c & 0\\ c^2 & 0 & a+b-c\end{vmatrix}$$

再进行列变换 $C_2\to C_2+\dfrac{1}{b}C_1$, $C_3\to C_3+\dfrac{1}{c}C_1$, 得

$$D=(a+b+c)^2\begin{vmatrix}2bc & 0 & 0\\ b^2 & a+c & \dfrac{b^2}{c}\\ c^2 & \dfrac{c^2}{b} & a+b\end{vmatrix}$$

按第一行展开行列式得

$$\begin{aligned}D&=(a+b+c)^2\cdot 2bc\left[(a+c)(a+b)-\frac{b^2}{c}\cdot\frac{c^2}{b}\right]\\ &=2bc(a+b+c)^2\left(a^2+ab+ac+bc-bc\right)\\ &=2abc(a+b+c)^3\end{aligned}$$

14. 证明

$$\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} = \left(a^3+b^3\right) \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

令

$$D = \begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}$$

按 C_1 拆分

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} ax & ay+bz & az+bx \\ ay & az+bx & ax+by \\ az & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} by & ay+bz & az+bx \\ bz & az+bx & ax+by \\ bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} \\ &= a \begin{vmatrix} x & ay+bz & az+bx \\ y & az+bx & ax+by \\ z & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} y & ay+bz & az+bx \\ z & az+bx & ax+by \\ x & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} \end{aligned}$$

第一个行列式进行 $C_3 \to C_3 - bC_1$, 第二个行列式进行 $C_2 \to C_2 - aC_1$ 得

$$\begin{aligned} D &= a \begin{vmatrix} x & ay+bz & az \\ y & az+bx & ax \\ z & ax+by & ay \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} y & bz & az+bx \\ z & bx & ax+by \\ x & by & ay+bz \end{vmatrix} \\ &= a^2 \begin{vmatrix} x & ay+bz & z \\ y & az+bx & x \\ z & ax+by & y \end{vmatrix} + b^2 \begin{vmatrix} y & z & az+bx \\ z & x & ax+by \\ x & y & ay+bz \end{vmatrix} \end{aligned}$$

第一个行列式进行 $C_2 \to C_2 - bC_3$, 第二个行列式进行 $C_3 \to C_3 - aC_2$ 得

$$\begin{aligned} D &= a^2 \begin{vmatrix} x & ay & z \\ y & az & x \\ z & ax & y \end{vmatrix} + b^2 \begin{vmatrix} y & z & bx \\ z & x & by \\ x & y & bz \end{vmatrix} \\ &= (a^3+b^3) \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} \end{aligned}$$

15. 证明

$$\begin{vmatrix} a+bx & c+dx & p+qx \\ ax+b & cx+d & px+q \\ u & v & w \end{vmatrix} = (1-x^2)\begin{vmatrix} a & c & p \\ b & d & q \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

令

$$D = \begin{vmatrix} a+bx & c+dx & p+qx \\ ax+b & cx+d & px+q \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

进行列行变换 $R_1 \to R_1 - R_2$, 得

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a+bx-x(ax+b) & c+dx-x(cx+d) & p+qx-x(px+q) \\ ax+b & cx+d & px+q \\ u & v & w \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a-ax^2 & c-cx^2 & p-px^2 \\ ax+b & cx+d & px+q \\ u & v & w \end{vmatrix} \\ &= (1-x^2)\begin{vmatrix} a & c & p \\ ax+b & cx+d & px+q \\ u & v & w \end{vmatrix} \end{aligned}$$

按 R_2 拆分, 得

$$D = 0 + (1-x^2)\begin{vmatrix} a & c & p \\ b & d & q \\ u & v & w \end{vmatrix} = (1-x^2)\begin{vmatrix} a & c & p \\ b & d & q \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

16. 证明

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b & b^2 & ca \\ c & c^2 & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

令

$$D = \begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b & b^2 & ca \\ c & c^2 & ab \end{vmatrix}$$

将 a,b,c 分别乘入 R_1,R_2,R_3

$$D=\frac{1}{abc}\begin{vmatrix}a^2 & a^3 & abc\\ b^2 & b^3 & abc\\ c^2 & c^3 & abc\end{vmatrix}=\frac{abc}{abc}\begin{vmatrix}a^2 & a^3 & 1\\ b^2 & b^3 & 1\\ c^2 & c^3 & 1\end{vmatrix}$$

进行 $C_2\leftrightarrow C_3$, 再 $C_1\leftrightarrow C_2$ 得

$$D=-\begin{vmatrix}a^2 & 1 & a^3\\ b^2 & 1 & b^3\\ c^2 & 1 & c^3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & a^2 & a^3\\ 1 & b^2 & b^3\\ 1 & c^2 & c^3\end{vmatrix}$$

17. 证明

$$\begin{vmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha & \cos(\alpha+\delta)\\ \sin\beta & \cos\beta & \cos(\beta+\delta)\\ \sin\gamma & \cos\gamma & \cos(\gamma+\delta)\end{vmatrix}=0$$

令

$$D=\begin{vmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha & \cos(\alpha+\delta)\\ \sin\beta & \cos\beta & \cos(\beta+\delta)\\ \sin\gamma & \cos\gamma & \cos(\gamma+\delta)\end{vmatrix}$$

由三角公式 $\cos(\theta+\delta)=\cos\theta\cos\delta-\sin\theta\sin\delta$, 将 C_3 展开得

$$D=\begin{vmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha & \cos(\alpha+\delta)\\ \sin\beta & \cos\beta & \cos(\beta+\delta)\\ \sin\gamma & \cos\gamma & \cos(\gamma+\delta)\end{vmatrix}=\cos\delta\begin{vmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha & \cos\alpha\\ \sin\beta & \cos\beta & \cos\beta\\ \sin\gamma & \cos\gamma & \cos\gamma\end{vmatrix}-\sin\delta\begin{vmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\beta & \cos\beta & \sin\beta\\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin\gamma\end{vmatrix}$$

其中两个行列式都有两列成比例, 因此

$$D=0$$

18. 证明

$$\begin{vmatrix}\cos^2 a & \sin a & \sin^2 a\\ -\cos 2a & \cos a-\sin a & \cos 2a\\ -\sin 2a-\cos 2a & 2\cos a & 1+\sin 2a+\cos 2a\end{vmatrix}=\sin a\cos a(\cos a-\sin a)$$

令

$$D=\begin{vmatrix}\cos^2 a & \sin a & \sin^2 a\\ -\cos 2a & \cos a-\sin a & \cos 2a\\ -\sin 2a-\cos 2a & 2\cos a & 1+\sin 2a+\cos 2a\end{vmatrix}$$

进行列变换 $C_1\to C_1-C_3$,

$$D=\begin{vmatrix}1 & \sin a & \sin^2 a\\ 0 & \cos a-\sin a & \cos 2a\\ 1 & 2\cos a & 1+\sin 2a+\cos 2a\end{vmatrix}$$

进行行变换 $R_3\to R_3-R_2$,

$$D=\begin{vmatrix}1 & \sin a & \sin^2 a\\ 0 & \cos a-\sin a & \cos 2a\\ 1 & \cos a+\sin a & 1+\sin 2a\end{vmatrix}$$

进行行变换 $R_2\to R_2+R_1$, 化为一范德蒙行列式,

$$D=\begin{vmatrix}1 & \sin a & \sin^2 a\\ 1 & \cos a & \cos^2 a\\ 1 & \cos a+\sin a & (\cos a+\sin a)^2\end{vmatrix}=\sin a\cos a(\cos a-\sin a)$$

19. 证明

$$\begin{vmatrix}x-1 & x-2 & x-3 & x-4\\ x^2-1 & x^2-2^2 & x^2-3^2 & x^2-4^2\\ x^3-1 & x^3-2^3 & x^3-3^3 & x^3-4^3\\ x^4-1 & x^4-2^4 & x^4-3^4 & x^4-4^4\end{vmatrix}=12(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

令

$$D=\begin{vmatrix}x-1 & x-2 & x-3 & x-4\\ x^2-1 & x^2-2^2 & x^2-3^2 & x^2-4^2\\ x^3-1 & x^3-2^3 & x^3-3^3 & x^3-4^3\\ x^4-1 & x^4-2^4 & x^4-3^4 & x^4-4^4\end{vmatrix}$$

提取公因式得 $D=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)M$, 其中

$$M=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ x+1 & x+2 & x+3 & x+4\\ x^2+x+1 & x^2+2x+2^2 & x^2+3x+3^2 & x^2+4x+4^2\\ x^3+x^2+x+1 & x^3+2x^2+2^2x+2^3 & x^3+3x^2+3^2x+3^3 & x^3+4x^2+4^2x+4^3\end{vmatrix}$$

依次进行行变换 $R_4\to R_4-xR_3, R_3\to R_3-xR_2, R_2\to R_2-xR_1$,

$$M=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2\\ 1^3 & 2^3 & 3^3 & 4^3\\ 1^4 & 2^4 & 3^4 & 4^4\end{vmatrix}$$

是一范德蒙行列式,

$$M=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant 4}(j-i)=(2-1)(3-1)(3-2)(4-1)(4-2)(4-3)=1\cdot 2\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 1=12$$

于是得证

$$D=12(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

20. 设 V_n 为 n 阶范德蒙行列式, 定义如下:

$$V_n=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

证明

$$V_n=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i).$$

设

$$V_n=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1}\\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \dots & x_{n-1}^{n-1}\\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

进行行变换 $R_2 \to R_2 - R_1, R_3 \to R_3 - R_1, \cdots R_n \to R_n - R_1$, 得

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & \dots & x_2^{n-2} - x_1^{n-2} & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ 0 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1^2 & \dots & x_3^{n-2} - x_1^{n-2} & x_3^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & x_{n-1} - x_1 & x_{n-1}^2 - x_1^2 & \dots & x_{n-1}^{n-2} - x_1^{n-2} & x_{n-1}^{n-1} - x_1^{n-1} \\ 0 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_1^2 & \dots & x_n^{n-2} - x_1^{n-2} & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix}$$

进行列变换 $C_2 \to C_2 - C_1, C_3 \to C_3 - C_2, \cdots C_n \to C_n - C_{n-1}$, 得

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x_2 - x_1 & (x_2 - x_1)x_2 & \cdots & (x_2 - x_1)x_2^{n-3} & (x_2 - x_1)x_2^{n-2} \\ 0 & x_3 - x_1 & (x_3 - x_1)x_3 & \cdots & (x_3 - x_1)x_3^{n-3} & (x_3 - x_1)x_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & x_{n-1} - x_1 & (x_{n-1} - x_1)x_{n-1} & \cdots & (x_{n-1} - x_1)x_{n-1}^{n-3} & (x_{n-1} - x_1)x_{n-1}^{n-2} \\ 0 & x_n - x_1 & (x_n - x_1)x_n & \cdots & (x_n - x_1)x_n^{n-3} & (x_n - x_1)x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

提取公因式,

$$V_n = \prod_{k=2}^{n}(x_k - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-3} & x_2^{n-2} \\ 0 & 1 & x_3 & \cdots & x_3^{n-3} & x_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & x_{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-3} & x_{n-1}^{n-2} \\ 0 & 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-3} & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

按 R_1 展开得

$$V_n = \prod_{k=2}^{n}(x_k - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-3} & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 & \cdots & x_3^{n-3} & x_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-3} & x_{n-1}^{n-2} \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-3} & x_n^{n-2} \end{vmatrix} = \prod_{k=2}^{n}(x_k - x_1)\, V_{n-1}$$

依次递推得证

$$V_n = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$$

其中

$$V_2 = \begin{vmatrix} 1 & x_{n-1} \\ 1 & x_n \end{vmatrix} = x_n - x_{n-1}$$

21. 写出帕斯卡三角形的无限数组如下：其中首行和首列全为 1, 其余每一项为左方和上方两项之和。对每个正整数 n, 设 D_n 为取该数组前 n 行和前 n 列形成的 $n \times n$ 矩阵。求 $\det(D_n)$ 并证明。

对小的 n 直接计算表明 $\det(D_n) = 1$ 对所有 n 成立。

证明思路：

对 D_n 依次对行做初等变换, 从第 n 行到第 2 行：

1. 第 n 行减去第 $n-1$ 行,
2. 第 $n-1$ 行减去第 $n-2$ 行,
3. …
4. 第 2 行减去第 1 行。

根据数组的构造方式, 这将使每列向右平移一位, 并使第一列变为首项为 1, 其余 $n-1$ 项为 0。对行 n 到 3, 再到 n 到 4 等重复此过程, 可以得到上三角矩阵, 且对角线上全为 1, 显然行列式为 1。

另一种方法：在第一次行变换后展开第一列的余子式, 可得到 $\det(D_n) = \det(D_{n-1})$。结合小 n 的值即可得出结果。

22. 证明

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix} = \left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2$$

23. 求行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & -n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -n & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -n & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

这是一个 $n \times n$ 的行列式, 每一行有 $n-1$ 个 1 和一个 $-n$, 且 $-n$ 分别出现在每行的不同列。

设该行列式为 D_n, 我们将其简化。

第一步: 行变换。

令第 i 行减去第 n 行,$i=1,2,\ldots,n-1$, 则得到一个新行列式 D_n', 变换后前 $n-1$ 行只有两个非零元素（$1-1=0$,$-n-1=-(n+1)$,$1-(-n)=n+1$ 等等）, 便于处理。

经此变换, 前 $n-1$ 行在对角线上为 $n+1$, 其余为 0。

第二步: 观察结构。

经过上述行变换,D_n' 为一个上三角矩阵, 其前 $n-1$ 个对角元为 $n+1$, 最后一行为原来的第 n 行, 未变动。

于是可得:

$$D_n = \begin{vmatrix} n+1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & n+1 & 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & n+1 & \cdots & 0 & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n+1 & a_{n-1} \\ -n & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

将该行列式按最后一列展开, 只需考虑对角线乘积（因为其余部分为 0）, 于是有:

$$D_n = (n+1)^{n-1} \cdot \text{余子式项}.$$

由于我们做了 $(n-1)$ 次行变换, 每次减去第 n 行, 所以符号为 $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$（由置换中逆序数判断）。

最终结果为:

$$\boxed{D_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(n+1)^{n-1}}.$$

(待验证)

24. 计算 $n \times n$ 矩阵 $A=[a_{ij}]$ 的行列式。

将第二行加到第一行, 再将第三行加到第二行, 依此类推, 将第 n 行加到第 $n-1$ 行, 行列式的值不变, 于是得到

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & +1 & \cdots & \pm 1 & \mp 1 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & \pm 1 & \mp 1 \\ +1 & -1 & 2 & \cdots & \pm 1 & \mp 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mp 1 & \pm 1 & \mp 1 & \cdots & 2 & -1 \\ \pm 1 & \mp 1 & \pm 1 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \pm 1 & \mp 1 & \pm 1 & \mp 1 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

接着, 用第一列减去第二列, 再用所得的第二列减去第三列, 依此类推, 最后用第 $n-1$ 列减去第 n 列, 得到

$$\det(A)=\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0&0\\0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&0&\cdots&1&0\\0&0&0&\cdots&0&n+1\end{vmatrix}=n+1$$

25. 设

$$\begin{cases}kx_1+x_2+x_3=5,\\3x_1+2x_2+kx_3=18-5k,\\x_2+2x_3=2,\end{cases}$$

问 k 取何值时, 方程组无解、有唯一解、有无穷解? 在有无穷解时, 求全部解。

原方程组为 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$, 其中

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}k&1&1\\3&2&k\\0&1&2\end{bmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}5\\18-5k\\2\end{bmatrix}.$$

解

$$\det(\mathbf{A})=4k-3-k^2-6=-k^2+4k-3=0$$

得 $k=1,3$, 因此:

- 当 $k\neq 1,3$ 时,$\det(\mathbf{A})\neq 0$, 方程组有唯一解;
- 当 $k=1$ 时, 代入方程组得:

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=5,\\3x_1+2x_2+x_3=13,\\x_2+2x_3=2.\end{cases}$$

用第三式解出 $x_2=2-2x_3$, 代入前两式得

$$x_1+(2-2x_3)+x_3=5\Rightarrow x_1=3+x_3,$$
$$3x_1+2x_2+x_3=13\Rightarrow 3(3+x_3)+2(2-2x_3)+x_3=13.$$

检验等式成立:

$$9+3x_3+4-4x_3+x_3=13 \Rightarrow 13=13.$$

成立, 说明方程组有无穷多解, 设 $x_3=\lambda$, 则

$$x_1=3+\lambda,\quad x_2=2-2\lambda,\quad x_3=\lambda\quad(\lambda\in\mathbb{R}).$$

- 当 $k=3$ 时, 代入原方程组得

$$\begin{cases}3x_1+x_2+x_3=5,\\3x_1+2x_2+3x_3=3,\\x_2+2x_3=2.\end{cases}$$

由前两式相减得:

$$(3x_1+2x_2+3x_3)-(3x_1+x_2+x_3)=-2 \Rightarrow x_2+2x_3=-2,$$

与第三式 $x_2+2x_3=2$ 矛盾, 因此方程组无解。

26. 已知

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&3&0\\0&-4&5\end{bmatrix},\quad I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad B=(I+A)^{-1}(I-A),$$

求矩阵 $(I+B)^{-1}$。

由 $B=(I+A)^{-1}(I-A)$ 可得

$$(I+A)B=I-A$$

两边加上 $I+A$ 得

$$I+A+B+AB=(I+A)(I+B)=2I$$

因此

$$(I+B)^{-1}=\frac{1}{2}(I+A)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&0&0\\-2&4&0\\0&-4&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&2&0\\0&-2&3\end{bmatrix}$$

27. 已知

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

且联立方程

$$\begin{cases} ax+by=5 \\ cx+dy=-3 \end{cases}$$

恰有一组解 $(x,y)=(1,2)$, 求联立方程

$$\begin{cases} pu+qv=1 \\ ru+sv=2 \end{cases}$$

的解 (u,v)。

已知

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

且

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

因此

$$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 19 \\ -30 \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 19 \\ -30 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

故联立方程的解为

$$(u,v)=(19,-30)$$

28. 设三阶方阵

$$A=\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad A^{10}=\begin{bmatrix} 1 & ka & pa^2+qb \\ 0 & 1 & ka \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

其中 k,p,q 为常数, 试求 $k+p+q$。

将 A 分解为 $A = I + B$, 其中

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

注意到 $B^3 = 0$, 且

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

由二项式定理,

$$A^{10} = (I + B)^{10} = \sum_{k=0}^{10} {}^{10}C_k B^k I^{10-k} = I + 10B + 45B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 10a & 45a^2 + 10b \\ 0 & 1 & 10a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

所以

$$k = 10, \quad p = 45, \quad q = 10 \quad \Rightarrow \quad k + p + q = 65.$$

29. 设实数 $a > b$, 且有二阶方阵 X, Y 满足

$$X + Y = I, \quad XY = O,$$

其中

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

且

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = aX + bY,$$

求 a, b 的值。据此, 求 $X^{2025} - Y^{2025}$。

首先有

$$A = aX + bY = aX + b(I - X) = bI + (a - b)X,$$

故

$$X = \frac{A - bI}{a - b}, \quad Y = \frac{aI - A}{a - b}.$$

所以

$$XY = \frac{1}{(a-b)^2}(A-bI)(aI-A) = O,$$

即

$$\begin{bmatrix} 2-b & 4 \\ 1 & -1-b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a-2 & -4 \\ -1 & a+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

得到方程组

$$\begin{cases} (2-b)(a-2)+4(-1)=0, \\ (2-b)(-4)+4(a+1)=0, \\ 1\cdot(a-2)+(-1-b)(-1)=0, \\ 1\cdot(-4)+(-1-b)(a+1)=0. \end{cases}$$

由 $a>b$, 解得

$$a=3, b=-2$$

因此

$$X = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = I - X = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

且发现 $X^2=X$, $Y^2=Y$, 即 X,Y 是幂等矩阵, 故对任意正整数 n,

$$X^n = X, \quad Y^n = Y$$

因此

$$X^{2025} - Y^{2025} = X - Y = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

30. 设

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

满足

$$A + A^2 + \cdots + A^n = \begin{bmatrix} 2(3^n-1) & a \\ b & c \end{bmatrix},$$

求 $b+c$。

发现
$$A^2=\begin{bmatrix}4&4\\-1&-1\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}12&12\\-3&-3\end{bmatrix}=3A,$$
于是对任意 $k\geqslant 1$ 有 $A^k=3^{k-1}A$, 因此
$$A+\cdots+A^n=A\sum_{k=0}^{n-1}3^k=\frac{3^n-1}{2}A=\begin{bmatrix}2(3^n-1)&2(3^n-1)\\ \frac{1}{2}(1-3^n)&\frac{1}{2}(1-3^n)\end{bmatrix}$$
故
$$b+c=\frac{1}{2}(1-3^n)+\frac{1}{2}(1-3^n)=1-3^n$$

又解: 对角化 A 可得
$$A=\begin{bmatrix}4&4\\-1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-4\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{4}{3}\\-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\end{bmatrix}\equiv PDP^{-1}$$
由 $A^n=PD^nP^{-1}$,
$$A+A^2+\cdots+A^n=P(D+D^2+\cdots+D^n)P^{-1}$$
$$=P\begin{bmatrix}0&0\\0&3+3^2+\cdots+3^n\end{bmatrix}P^{-1}=P\begin{bmatrix}0&0\\0&\dfrac{3^{n+1}-3}{2}\end{bmatrix}P^{-1}=\begin{bmatrix}2(3^n-1)&2(3^n-1)\\ \frac{1}{2}(1-3^n)&\frac{1}{2}(1-3^n)\end{bmatrix}$$
同上。

31. 设矩阵
$$A=\begin{pmatrix}7&-8\\-7&8\end{pmatrix}$$
满足
$$(I+A)^n=I+a_nA,$$
其中 n 为自然数,
$$I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},$$
且 $\{a_n\}$ 为一个数列, 求 a_n 的通项公式。

求 A 的特征值:

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}7-\lambda & -8\\ -7 & 8-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-15\lambda=0\Rightarrow\lambda=0,\ 15$$

设

$$f(\lambda)=(1+\lambda)^n=(\lambda^2-15\lambda)p(\lambda)+a\lambda+b,$$

令 $\lambda=0,15$, 解得

$$a=\frac{16^n-1}{15},\quad b=1$$

由凯莱-哈密顿定理,

$$(I+A)^n=aA+bI=\frac{16^n-1}{15}A+I\Rightarrow a_n=\frac{1}{15}(16^n-1)$$

32. 设矩阵

$$A=\begin{bmatrix}-5 & -4\\ 9 & 7\end{bmatrix},$$

求

$$A^{51}-A^{50}+A^3-3A^2-2A+4I_2,$$

其中 $I_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$。

发现

$$(A-I)^2=\begin{bmatrix}-6 & -4\\ 9 & 6\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow A^2=2A-I$$

且考虑方程

$$\lambda^{50}=q(\lambda)(\lambda-1)^2+c_1\lambda+c_0 \tag{1}$$

对 λ 求导, 可得

$$50\lambda^{49}=q'(\lambda)(\lambda-1)^2+2q(\lambda)(\lambda-1)+c_1 \tag{2}$$

由 (1), (2), 代入 $\lambda=1$ 得

$$c_0=-49,\ c_1=50$$

由凯莱-哈密顿定理,

$$A^{50}=50A-49I$$

因此

$$A^{51}-A^{50}=(50A^2-49A)-(50A-49I)=100A-50I-99A-49I=A-I$$

又

$$A^3-3A^2-2A+4I=(A-I)^3-5(A-I)=-5(A-I)$$

故

$$A^{51}-A^{50}+A^3-3A^2-2A+4I=-4(A-I)=\begin{bmatrix}24&16\\-36&-24\end{bmatrix}$$

33. 已知

$$\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}^{101}=\begin{bmatrix}-1&-2&-2\\1&2&1\\-1&-1&0\end{bmatrix}$$

求 $a+b+c+d+e+f+g+h+i$。

设

$$A=\begin{bmatrix}-1&-2&-2\\1&2&1\\-1&-1&0\end{bmatrix}$$

解 $\det(A-\lambda I)=0$, 即

$$\begin{vmatrix}-1-\lambda&-2&-2\\1&2-\lambda&1\\-1&-1&-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0\Rightarrow\lambda=1\ (m=2),\ \lambda=-1$$

对于 $\lambda=1$, 解 $(A-I)\mathbf{x}=\mathbf{0}$:

$$A-I=\begin{bmatrix}-2&-2&-2\\1&1&1\\-1&-1&-1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow x_1=-x_2-x_3,\ x_2,\ x_3\in\mathbb{R}$$

取两个线性无关解:

$$\vec{v}_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\quad\vec{v}_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$$

对于 $\lambda=-1$, 解 $(A+I)\mathbf{x}=\mathbf{0}$:

$$A+I=\begin{bmatrix}0 & -2 & -2\\ 1 & 3 & 1\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow x_1=x_3,\ x_2=-x_3$$

取

$$\vec{v}_3=\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 1\end{bmatrix}$$

于是

$$P=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 2\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

现计算逆矩阵 P^{-1}, 由 $|P|=2$ 得

$$P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

于是

$$A=PDP^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

所以

$$\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 2\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1^{\frac{1}{101}} & 0 & 0\\ 0 & 1^{\frac{1}{101}} & 0\\ 0 & 0 & (-1)^{\frac{1}{101}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -2 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

恰好也是原矩阵, 因此

$$a+b+c+d+e+f+g+h+i=-3$$

34. 设 A 和 B 为 $n \times n$ 实矩阵, 且满足

$$AB + A + B = 0.$$

证明 $AB = BA$。

注意到

$$(A+I)(B+I) = AB + A + B + I = I,$$

其中 I 为单位矩阵。因此 $A+I$ 和 $B+I$ 互为逆矩阵。

由于逆矩阵的性质, 有

$$(A+I)(B+I) = (B+I)(A+I) = I.$$

展开等式得到

$$AB + A + B + I = BA + B + A + I \implies AB = BA.$$

35. 已知矩阵 $A, B, A+B$ 都是可逆矩阵, 证明 $A^{-1} + B^{-1}$ 也是可逆矩阵。

我们需要证明存在一个矩阵 C, 使得

$$(A^{-1} + B^{-1})C = I.$$

设

$$C = B(A+B)^{-1}A.$$

下面验证该选择是可行的。计算

$$\begin{aligned}(A^{-1} + B^{-1})C &= (A^{-1} + B^{-1})B(A+B)^{-1}A \\ &= A^{-1}B(A+B)^{-1}A + B^{-1}B(A+B)^{-1}A \\ &= A^{-1}B(A+B)^{-1}A + I(A+B)^{-1}A \\ &= A^{-1}B(A+B)^{-1}A + (A+B)^{-1}A.\end{aligned}$$

利用恒等式 $B=(A+B)-A$, 代入上式得

$$
\begin{aligned}
(A^{-1}+B^{-1})C &= A^{-1}[(A+B)-A](A+B)^{-1}A+(A+B)^{-1}A \\
&= [A^{-1}(A+B)-A^{-1}A](A+B)^{-1}A+(A+B)^{-1}A \\
&= [A^{-1}(A+B)-I](A+B)^{-1}A+(A+B)^{-1}A \\
&= A^{-1}(A+B)(A+B)^{-1}A-I(A+B)^{-1}A+(A+B)^{-1}A \\
&= A^{-1}A-(A+B)^{-1}A+(A+B)^{-1}A \\
&= I.
\end{aligned}
$$

因此存在矩阵 $C=B(A+B)^{-1}A$ 使得 $(A^{-1}+B^{-1})C=I$, 从而 $A^{-1}+B^{-1}$ 可逆, 其逆矩阵为

$$(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=B(A+B)^{-1}A.$$

36. 设 A,B 均为 n 阶方阵, 且 $I+AB$ 可逆, 化简

$$(I+BA)\big[I-B(I+AB)^{-1}A\big].$$

$$
\begin{aligned}
(I+BA)\big[I-B(I+AB)^{-1}A\big] &= I-B(I+AB)^{-1}A+\big[BA-BAB(I+AB)^{-1}A\big] \\
&= I-B(I+AB)^{-1}A+B\big(I+AB-AB\big)(I+AB)^{-1}A \\
&= I-B(I+AB)^{-1}A+B(I+AB)(I+AB)^{-1}A \\
&= I.
\end{aligned}
$$

37. 设 A, B 和 C 为同阶实方阵, 且 A 可逆。证明如果

$$(A-B)C=BA^{-1},$$

则有

$$C(A-B)=A^{-1}B.$$

由假设

$$(A-B)C=BA^{-1}.$$

在两边加上 $A^{-1}(A-B)$, 得到

$$(A-B)C + A^{-1}(A-B) = BA^{-1} + A^{-1}(A-B) = I.$$

于是

$$(A-B)(C+A^{-1}) = I \implies (A-B)^{-1} = C + A^{-1}.$$

两边左乘 $(A-B)$ 得

$$(C+A^{-1})(A-B) = I.$$

展开即可得到

$$C(A-B) = A^{-1}B.$$

38. 对任意整数 $n \geqslant 2$, 设 A, B 为两个 $n \times n$ 的实矩阵, 且满足

$$A^{-1} + B^{-1} = (A+B)^{-1}.$$

证明 $\det A = \det B$。问：若 A, B 为复矩阵, 结论是否仍成立?

两边同乘以 $(A+B)$, 得

$$\begin{aligned} I &= (A+B)(A+B)^{-1} \\ &= (A+B)(A^{-1}+B^{-1}) \\ &= AA^{-1} + AB^{-1} + BA^{-1} + BB^{-1} \\ &= I + AB^{-1} + BA^{-1} + I. \end{aligned}$$

于是

$$AB^{-1} + BA^{-1} + I = 0.$$

令 $X = AB^{-1}$, 则 $A = XB$, 且

$$BA^{-1} = X^{-1}.$$

因此

$$X + X^{-1} + I = 0.$$

两边左乘 $(X-I)X$, 得

$$\begin{aligned} 0 &= (X-I)X(X+X^{-1}+I) \\ &= (X-I)(X^2+X+I) \\ &= X^3 - I. \end{aligned}$$

从而
$$X^3 = I.$$
取行列式可得
$$(\det X)^3 = \det(X^3) = \det I = 1,$$
由于 X 为实矩阵, 故
$$\det X = 1.$$
又因为
$$\det A = \det(XB) = \det X \det B = \det B,$$
从而 $\det A = \det B$。

下面说明在复矩阵情形下结论不成立。设
$$\omega = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}),$$
则 $\omega \notin \mathbb{R}$, 且 $\omega^3 = 1$, 并有
$$1 + \omega + \omega^2 = 0.$$
取 $A = I$,B 为对角矩阵, 其对角元均取为 ω 或 ω^2, 并使得 $\det B = 1$。若 n 不是 3 的倍数, 可直接取 $B = \omega I$。

此时
$$A^{-1} = I, \quad B^{-1} = \overline{B},$$
且
$$I + B + \overline{B} = 0.$$
因此
$$(A + B)^{-1} = (-\overline{B})^{-1} = -\overline{B}^{-1} = -B = I + \overline{B} = A^{-1} + B^{-1}.$$
但由构造可知
$$\det A = 1 \neq \det B.$$
因此在复矩阵情形下结论不成立。

39. 设 A, B 为实 $n \times n$ 矩阵, 满足
$$A^2 + B^2 = AB$$
证明：若 $BA - AB$ 为可逆矩阵, 则 n 能被 3 整除。

设

$$S = A + \omega B,$$

其中

$$\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

则

$$\begin{aligned} S\bar{S} &= (A+\omega B)(A+\bar{\omega}B) \\ &= A^2 + \omega BA + \bar{\omega}AB + B^2 \end{aligned}$$

由已知条件 $A^2 + B^2 = AB$, 可得

$$S\bar{S} = AB + \omega BA + \bar{\omega}AB$$

注意到 $\bar{\omega} + 1 = -\omega$, 于是

$$S\bar{S} = \omega(BA - AB)$$

对两边取行列式, 有

$$\det(S\bar{S}) = \det S \cdot \det \bar{S},$$

这是一个实数。同时,

$$\det(S\bar{S}) = \det(\omega(BA - AB)) = \omega^n \det(BA - AB)$$

由于 $BA - AB$ 可逆, 故 $\det(BA - AB) \neq 0$, 从而 ω^n 必须为实数。

而 ω 是三次单位根,ω^n 为实数当且仅当 n 能被 3 整除。因此 n 必须是 3 的倍数。

40. 求所有复数 Λ, 使得存在正整数 n 以及实 $n \times n$ 矩阵 A, 满足

$$A^2 = A^T,$$

并且 Λ 是 A 的一个特征值。

由条件 $A^2 = A^T$, 两边平方可得

$$A^4 = (A^2)^2 = (A^T)^2 = (A^2)^T = (A^T)^T = A.$$

因此

$$A^4 - A = 0.$$

于是 A 的任一特征值 Λ 必须满足多项式方程

$$\Lambda^4-\Lambda=0.$$

即

$$\Lambda(\Lambda^3-1)=0.$$

其全部根为

$$\Lambda=0,\quad \Lambda=1,\quad \Lambda=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}.$$

下面验证这些值均可实现。考虑如下矩阵:

$$A_0=(0),\qquad A_1=(1),$$

$$A_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

$$A_4=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&0&\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

显然,0 和 1 分别是 1×1 矩阵 A_0 与 A_1 的特征值。矩阵 A_2 的特征值为

$$\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2},$$

并且可以直接计算验证

$$A_2^2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}=A_2^T.$$

矩阵 A_4 则在同一矩阵中同时包含上述四个可能的特征值。

综上, 满足条件的全部复数 Λ 为

$$\Lambda\in\left\{0,\ 1,\ \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}\right\}.$$

41. 已知 A 是 4×2 实矩阵,B 是 2×4 实矩阵, 且

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

求 BA。

将矩阵分块表示:

$$A=\begin{pmatrix}A_1\\ A_2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}B_1 & B_2\end{pmatrix},$$

其中 A_1,A_2,B_1,B_2 为 2×2 矩阵。于是

$$AB=\begin{pmatrix}A_1\\ A_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_1 & B_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1B_1 & A_1B_2\\ A_2B_1 & A_2B_2\end{pmatrix}.$$

比较分块得到:

$$A_1B_1=A_2B_2=I_2,\quad A_1B_2=A_2B_1=-I_2.$$

于是可解得:

$$B_1=A_1^{-1},\quad B_2=-A_1^{-1},\quad A_2=-A_1.$$

最后

$$BA=\begin{pmatrix}B_1 & B_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1\\ A_2\end{pmatrix}=B_1A_1+B_2A_2=A_1^{-1}A_1+(-A_1^{-1})(-A_1)=2I_2.$$

42. 已知

$$A=\begin{bmatrix}2 & 4 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 2 & 2\end{bmatrix},$$

求 A^n。

将 A 分块为

$$A=\begin{bmatrix}B & 0\\ 0 & C\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 1 & 2\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 0 & 2\end{bmatrix}.$$

对 B, 可写为 $B=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\end{bmatrix}$, 所以

$$B^n=4^{n-1}B.$$

对 C, 注意 $\begin{bmatrix}0&4\\0&0\end{bmatrix}^2=0$, 则

$$C^n=\left(2E+\begin{bmatrix}0&4\\0&0\end{bmatrix}\right)^n=2^nE+n2^{n-1}\begin{bmatrix}0&4\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2^n&4n2^{n-1}\\0&2^n\end{bmatrix}.$$

因此

$$A^n=\begin{bmatrix}B^n&0\\0&C^n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot4^{n-1}&4\cdot4^{n-1}&0&0\\1\cdot4^{n-1}&2\cdot4^{n-1}&0&0\\0&0&2^n&n2^{n+1}\\0&0&0&2^n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2^{2n-1}&2^{2n+1}&0&0\\2^{2n-2}&2^{2n}&0&0\\0&0&2^n&n2^{n+1}\\0&0&0&2^n\end{bmatrix}.$$

43. 设 A 和 B 是 $n\times n$ 实矩阵, 且满足

$$\mathrm{rk}(AB-BA+I)=1,$$

其中 I 是 $n\times n$ 单位矩阵。证明

$$\mathrm{trace}(ABAB)-\mathrm{trace}(A^2B^2)=\frac{1}{2}n(n-1).$$

令 $X=AB-BA$。注意

$$\begin{aligned}\mathrm{trace}(X^2)&=\mathrm{trace}(ABAB-ABBA-BAAB+BABA)\\&=2\mathrm{trace}(ABAB)-2\mathrm{trace}(A^2B^2),\end{aligned}$$

因为迹具有循环性。因此只需证明 $\mathrm{trace}(X^2)=n(n-1)$。

由假设,$X+I$ 的秩为 1, 所以可以写成

$$X+I=v^tw$$

对某些向量 v,w。于是

$$X^2=(v^tw-I)^2=I-2v^tw+v^twv^tw=I+(wv^t-2)v^tw.$$

由 X 的定义, 有 $\operatorname{trace}(X)=0$, 因此 $\operatorname{trace}(wv^t)=\operatorname{trace}(vw)=n$, 于是

$$\operatorname{trace}(X^2)=n+(n-2)n=n(n-1).$$

另一种方法是利用秩为 1 的条件：因为 $X+I$ 的秩为 1, 它有 0 的特征值, 重数为 $n-1$。因此 X 有 -1 的特征值, 重数为 $n-1$。由于 $\operatorname{trace}(X)=0$, 剩余的特征值为 $n-1$。于是

$$\operatorname{trace}(X^2)=(n-1)^2+(n-1)\cdot 1^2=n(n-1).$$

由 $\operatorname{trace}(X^2)=2(\operatorname{trace}(ABAB)-\operatorname{trace}(A^2B^2))$, 得到

$$\operatorname{trace}(ABAB)-\operatorname{trace}(A^2B^2)=\frac{1}{2}n(n-1).$$

44. 设 A 是 $n\times n$ 实矩阵, 且 $A^3=0$。

(a) 证明存在唯一的 $n\times n$ 实矩阵 X 满足

$$X+AX+XA^2=A.$$

(b) 用 A 表示 X。

首先假设某矩阵 X 满足方程。考虑通过左右乘以 A 的幂得到的新方程。例如,

$$A^2(X+AX+XA^2)A^2=A^2XA^2+A^3XA^2+A^2XA^4=A^2XA^2.$$

右边为零, 因为 $A^3=0$, 所以

$$A^2XA^2=0.$$

同理可得：

$$A^2X=A^2(X+AX+XA^2)=A^3=0,$$
$$AXA=A(X+AX+XA^2)A=A^3=0,$$
$$XA^2=(X+AX+XA^2)A^2=A^3=0.$$

此外,

$$AX=A(X+AX+XA^2)=A^2,$$

于是

$$X = A - AX - XA^2 = A - A^2.$$

因此，唯一可能的解为 $X = A - A^2$。为了验证其确实满足方程：

$$X + AX + XA^2 = (A - A^2) + A(A - A^2) + (A - A^2)A^2 = A - A^4 = A.$$

综上,$X = A - A^2$ 是方程的唯一解。

45. 设 A, B, C 为 $n \times n$ 复矩阵，满足

$$A^2 = B^2 = C^2, \quad B^3 = ABC + 2I.$$

证明 $A^6 = I$。

由 $A^2 = B^2 = C^2$，可得

$$B^3 - ABC = B^2B - ABC = A^2B - ABC = 2I.$$

于是

$$A(AB - BC) = 2I.$$

同理，由 $B^2 = C^2$，可得

$$BC^2 - ABC = 2I \implies (BC - AB)C = 2I.$$

这说明 A 是 $\frac{AB-BC}{2}$ 的左逆矩阵，而 $-C$ 是右逆矩阵，所以 $A = -C$。因此

$$ABA = A^2B = B^3.$$

由于 ABA 与 B 交换，得到 $(AB)^2 = (BA)^2$。计算

$$\begin{aligned}(AB - BA)(AB + BA) &= (AB)^2 + AB^2A - BA^2B - (BA)^2 \\ &= (AB)^2 + A^4 - B^4 - (BA)^2 = 0.\end{aligned}$$

又因为 $AB - BC = AB + BA$ 可逆，故 $AB = BA$，于是 $ABA = A^2B = B^3$。由此得

$$B^3 = I \implies A^6 = B^6 = I.$$

46. 设 $a=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}, c=\begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix}$, 且 $A=ab^T$, $B=ba^T$, 解矩阵方程

$$2B^2A^2X=A^4X+B^4X+c$$

(题目有误, 不符合矩阵乘法定义)

复数

1. 已知 $i=\sqrt{-1}$, 若

$$\frac{1}{i^{2025}}-\frac{2}{i^{2024}}+\frac{3}{i^{2023}}-\frac{4}{i^{2022}}+\cdots-\frac{2024}{i^{2}}+\frac{2025}{i}=a+bi$$

其中 a,b 为实数, 求 $a-b$。

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{i^{2025}}-\frac{2}{i^{2024}}+\frac{3}{i^{2023}}-\frac{4}{i^{2022}}+\cdots-\frac{2024}{i^{2}}+\frac{2025}{i}\\
&=\frac{1}{i}-2-\frac{3}{i}+4+\frac{5}{i}-6-\frac{7}{i}+8+\cdots+2024+\frac{2025}{i}\\
&=\frac{1}{i}(1+5+\cdots+2025)-(2+6+\cdots+2022)-\frac{1}{i}(3+7+\cdots+2023)+(4+8+\cdots+2024)\\
&=\frac{1}{i}\cdot\frac{2026\cdot 507}{2}-\frac{2024\cdot 506}{2}-\frac{1}{i}\cdot\frac{2026\cdot 506}{2}+\frac{2028\cdot 506}{2}\\
&=\frac{1013}{i}+1012\\
&=1012-1013i \quad\Rightarrow\quad a-b=2025
\end{aligned}$$

2. 设 z 是 1 的七次方根, 且 $z\neq 1$, 试求 $z+z^2+z^4$ 的值。

发现

$$z^7=1\Rightarrow 1+z+\cdots+z^6=0\Rightarrow z+z^2+\cdots+z^6=-1$$

设 $\alpha=z+z^2+z^4,\beta=z^3+z^5+z^6$, 则

$$\alpha+\beta=z+z^2+\cdots+z^6=-1$$

又

$$\alpha\beta=(z+z^2+z^4)(z^3+z^5+z^6)=z^4(1+z+z^2+\cdots+z^6+2z^3)=z^4(0+2z^3)=2z^7=2$$

因此 α,β 是方程 $x^2+x+2=0$ 的两根, 解得

$$\alpha=z+z^2+z^4=\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$$

3. 若 $z\in\mathbb{C}$ 满足 $z+\dfrac{1}{z}=\sqrt{3}$, 求 $z^{2025}+\dfrac{1}{z^{2025}}$ 的值。

先求 z,

$$z+\frac{1}{z}=\sqrt{3}\quad\Rightarrow\quad z^2-\sqrt{3}z+1=0\quad\Rightarrow\quad z=\frac{\sqrt{3}+i}{2}=e^{\frac{\pi i}{6}}$$

于是

$$z^{2025}=e^{\frac{2025\pi i}{6}}=e^{\frac{3\pi i}{2}}=-i\quad\Rightarrow\quad z^{2025}+\frac{1}{z^{2025}}=-i+\frac{1}{-i}=0$$

4. 求

$$\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}i\right)^6$$

观察

$$\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}i\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ.$$

由棣莫弗定理, 原式为

$$(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)^3=\cos 90^\circ+i\sin 90^\circ=i.$$

5. 已知 $a,b,c\in\mathbb{C}$, 且 $a+b+c=a^2+b^2+c^2=3, a^3+b^3+c^3=6$, 试求

$$(a-1)^{2023}+(b-1)^{2023}+(c-1)^{2023}$$

的值。

由

$$3=3^2-2(ab+bc+ca),\quad 6-3abc=3(3-3)$$

解得

$$ab+bc+ca=3, abc=2$$

因此 a,b,c 是方程

$$x^3-3x^2+3x-2=0$$

即

$$(x-1)^3=1$$

的根, 因此

$$a-1, b-1, c-1 \in \{1,\ \omega,\ \omega^2\}, \omega = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

不失一般性,

$$(a-1)^{2023} + (b-1)^{2023} + (c-1)^{2023} = 1^{2023} + \omega^{2023} + (\omega^2)^{2023} = 1 + \omega + \omega^2 = 0$$

6. 证明

$$1 + 2i + 3i^2 + 4i^3 + \cdots + (4n+1)i^{4n} = (2n+1) - 2ni, \quad n \in \mathbb{N}.$$

设

$$S = 1 + 2i + 3i^2 + 4i^3 + \cdots + (4n+1)i^{4n}.$$

两边乘以 i:

$$iS = i + 2i^2 + 3i^3 + 4i^4 + \cdots + (4n)i^{4n} + (4n+1)i^{4n+1}.$$

原式减去该式:

$$(1-i)S = 1 + i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{4n} - (4n+1)i^{4n+1}.$$

右边的几何级数求和（注意 $i^{4n+1} = i$):

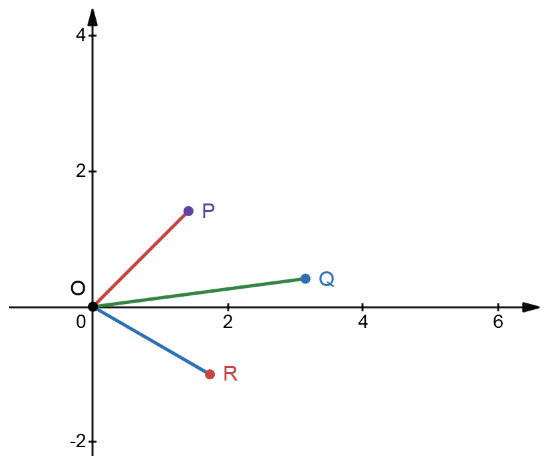
$$(1-i)S = \frac{i^{4n+1} - 1}{i - 1} - (4n+1)i = 1 - (4n+1)i.$$

解 S:

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1-(4n+1)i}{1-i} = \frac{(1-(4n+1)i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} \\
&= \frac{1 + i - (4n+1)i - (4n+1)i^2}{1 - i^2} \\
&= \frac{1 + i - 4ni - i + 4n + 1}{2} \\
&= \frac{2 + 4n - 4ni}{2} \\
&= 1 + 2n - 2ni \\
&= (2n+1) - 2ni.
\end{aligned}$$

7. 考虑极坐标作图 $z = \sqrt{2}(1+i)$, $w = \sqrt{3} - i$, 证

$$\tan\frac{\pi}{24} = \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2$$



如图作 $z=\sqrt{2}(1+i)$, $w=\sqrt{3}-i$, 则

$$\arg(z)=\arctan\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}, \arg(w)=\arctan\frac{\sqrt{3}}{-1}=-\frac{\pi}{6}$$

于是

$$\begin{aligned}\arg(z+w)&=\angle QOR-|\arg w|\\&=\frac{1}{2}\angle POR-|\arg w|\\&=\frac{1}{2}(\angle POQ+|\arg w|)-|\arg w|\\&=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6})-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{24}\end{aligned}$$

又 $z+w=\sqrt{2}+\sqrt{3}+(\sqrt{2}-1)i$, 所以有

$$\tan\frac{\pi}{24}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2$$

8. 复平面上有三点 P,Q,R 对应三个复数 z_1,z_2,z_3, 且 $|z_1|=\sqrt{2},|z_2|=\sqrt{5},|z_3|=3$。若原点 O 为 $\triangle PQR$ 的重心, 求 $\Re(\overline{z_1}z_2)$ 。

设

$$z_1=a_1+b_1i,\quad z_2=a_2+b_2i,\quad z_3=a_3+b_3i$$

由于点 P,Q,R 的重心在原点, 故有

$$a_1+a_2+a_3=0,\quad b_1+b_2+b_3=0$$

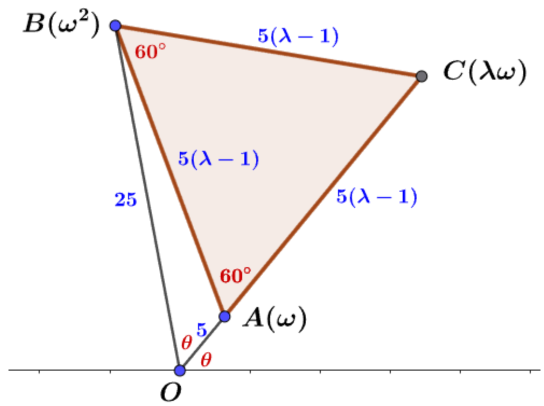
且 $a_1^2+b_1^2=2, a_2^2+b_2^2=5, a_3^2+b_3^2=9$, 又因为 $a_3=-a_1-a_2$, $b_3=-b_1-b_2$,

$$\begin{aligned}a_3^2+b_3^2&=(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2\\&=a_1^2+a_2^2+2a_1a_2+b_1^2+b_2^2+2b_1b_2\\&=7+2(a_1a_2+b_1b_2)=9\end{aligned}$$

故

$$\Re(\overline{z_1}z_2)=a_1a_2+b_1b_2=1$$

9. 设 ω 为复数, 且 $|\omega|=5$。存在一正实数 $\lambda>1$, 使得 $\omega,\omega^2,\lambda\omega$ 这三个复数在复平面上构成一个正三角形, 试求 λ 的值。



设 $O(0,0), A(\omega), B(\omega^2), C(\lambda\omega)$, 则

$$\begin{aligned}OA&=|\omega|=5\\OB&=|\omega^2|=|\omega|^2=25\\AB&=AC=|\lambda\omega-\omega|=5(\lambda-1)\end{aligned}$$

又由于 $\triangle ABC$ 是正三角形, 因此 $\angle OAB=180^\circ-60^\circ=120^\circ$。

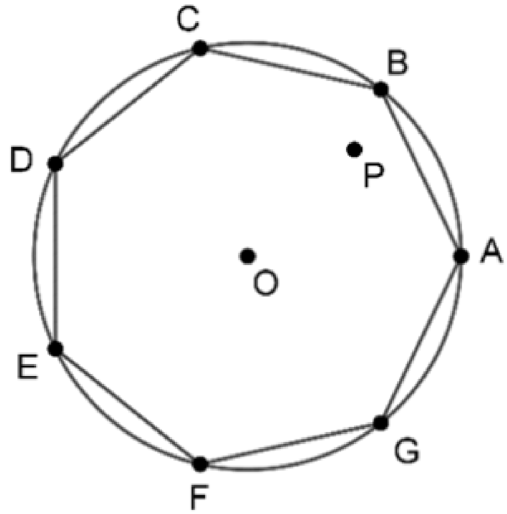
在 $\triangle OAB$ 中, 由余弦定理,

$$\cos\angle OAB=\frac{OA^2+AB^2-OB^2}{2\cdot OA\cdot AB}=\frac{5^2+(5(\lambda-1))^2-25^2}{2\cdot5\cdot5(\lambda-1)}=-\frac{1}{2}$$

解得

$$\lambda=\frac{1+\sqrt{97}}{2}>1$$

10. 如图, 在坐标平面上有一个半径为 2 的圆, 其圆心 O 为原点, 且正七边形 $ABCDEFG$ 内接于此圆。若 $A(2,0), P(1,1)$, 求 $\overline{PA}\cdot\overline{PB}\cdot\overline{PC}\cdot\overline{PD}\cdot\overline{PE}\cdot\overline{PF}\cdot\overline{PG}$。



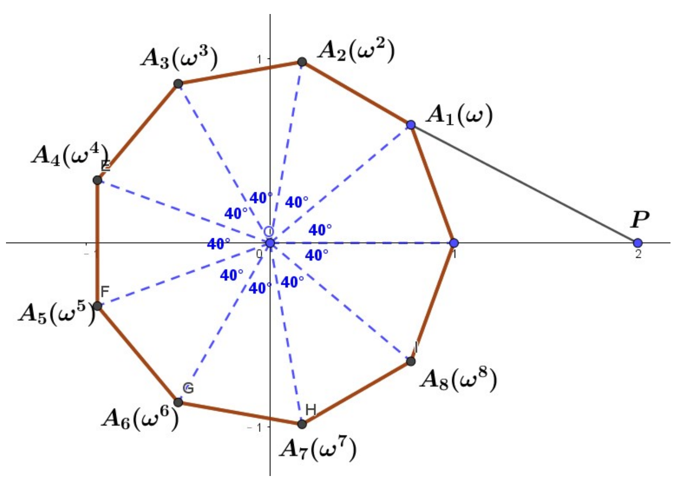
设 $x^7=2^7$ 的七根分别为 $2,\omega,\omega^2,\ldots,\omega^6$, 其中 $\omega=2e^{\frac{2\pi i}{7}}$, 则

$$f(x)=x^7-2^7=(x-2)(x-\omega)(x-\omega^2)\cdots(x-\omega^6)$$

令 $x=1+i$, 可得

$$\overline{PA}\cdot\overline{PB}\cdot\overline{PC}\cdot\overline{PD}\cdot\overline{PE}\cdot\overline{PF}\cdot\overline{PG}=|f(1+i)|=|(1+i)^7-2^7|=|2i(1+i)-128|=8\sqrt{226}$$

11. 已知 $\omega=\cos\dfrac{2\pi}{9}+i\sin\dfrac{2\pi}{9}$, 求 $|2-\omega|^2+|2-\omega^2|^2+\cdots+|2-\omega^8|^2$。



即求点 $P(2,0)$ 至单位圆上正九边形各顶点距离的平方和:

$$|2-\omega|^2+|2-\omega^2|^2+\cdots+|2-\omega^8|^2=\sum_{n=1}^{8}A_nP^2$$

在 $\triangle OA_nP$ 中, 由余弦定理,

$$A_nP^2=1^2+2^2-2\cdot 2\cdot 1\cdot\cos\angle A_nOP=5-4\cos(40^\circ\cdot n)$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{8}A_nP^2&=\sum_{n=1}^{8}(5-4\cos(40^\circ\cdot n))\\&=40-4(\cos 40^\circ+\cos 80^\circ+\cdots+\cos 320^\circ)\\&=40-8(\cos 40^\circ+\cos 80^\circ+\cos 120^\circ+\cos 160^\circ)\\&=40-8\left(2\cos 60^\circ\cos 20^\circ-\frac{1}{2}+\cos 160^\circ\right)\\&=40-8\left(\cos 20^\circ+\cos 160^\circ-\frac{1}{2}\right)\\&=40-8\left(2\cos 90^\circ\cos 70^\circ-\frac{1}{2}\right)\\&=40-8\left(-\frac{1}{2}\right)=44\end{aligned}$$

12. $\omega^{503}=1$, $\omega\neq 1$, 求

$$\frac{\omega^2}{\omega-1}+\frac{\omega^4}{\omega^2-1}+\frac{\omega^6}{\omega^3-1}+\cdots+\frac{\omega^{1004}}{\omega^{502}-1}$$

由 $\omega^{503}=1$ 得

$$(1-\omega)(1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{502})=0$$

所以

$$\sum_{k=0}^{502}\omega^k=0$$

又

$$\frac{1}{\omega^k-1}+\frac{1}{\omega^{503-k}-1}=\frac{1}{\omega^k-1}+\frac{1}{\omega^{-k}-1}=\frac{1}{\omega^k-1}+\frac{\omega^k}{1-\omega^k}=-1$$

原式

$$=\sum_{k=1}^{502}\frac{\omega^{2k}}{\omega^k-1}=\sum_{k=1}^{502}\left(\frac{\omega^{2k}-1}{\omega^k-1}+\frac{1}{\omega^k-1}\right)=\sum_{k=1}^{502}\left(\omega^k+1+\frac{1}{\omega^k-1}\right)$$

$$= -1 + 502 + \sum_{k=1}^{502} \frac{1}{\omega^k - 1}$$

$$= 501 + \left(\frac{1}{\omega - 1} + \frac{1}{\omega^{502} - 1}\right) + \left(\frac{1}{\omega^2 - 1} + \frac{1}{\omega^{501} - 1}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{\omega^{251} - 1} + \frac{1}{\omega^{252} - 1}\right)$$

$$= 501 + (-1) \times 251 = 250$$

13. 证明

$$|z + w|^2 - |z + \overline{w}|^2 = 4\Re(z)\Re(w)$$

解法一

设 $z = x + iy,\ w = u + iv$, 其中 $x, y, u, i \in \mathbb{R}$, 则

$$\begin{aligned}
|z + w|^2 - |z - \overline{w}|^2 &= |(x + iy) + (u + iv)|^2 - |(x + iy) - (u - iv)|^2 \\
&= |(x + u) + i(y + v)|^2 - |(x - u) + i(y + v)|^2 \\
&= (x + u)^2 + (y + v)^2 - (x - u)^2 - (y + v)^2 \\
&= 4xu \\
&= 4\Re(z)\Re(w)
\end{aligned}$$

解法二

$$\begin{aligned}
|z + w|^2 - |z - w|^2 &= (z + w)(\overline{z + w}) - (z - \overline{w})(\overline{z - \overline{w}}) \\
&= (z + w)(\overline{z} + \overline{w}) - (z - \overline{w})(\overline{z} - w) \\
&= z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} - (z\overline{z} - zw - \overline{w}\,\overline{z} + w\overline{w}) \\
&= zw + z\overline{w} + w\overline{z} + \overline{w}\,\overline{z} \\
&= (z + \overline{z})(w + \overline{w}) \\
&= 2\Re(z) \cdot 2\Re(w) \\
&= 4\Re(z)\Re(w)
\end{aligned}$$

14. 已知 $z=\cos\theta+i\sin\theta,\ 0\leqslant\theta<2\pi$, 证明:

$$\frac{2}{1+z}=1-i\tan\frac{\theta}{2}$$

运用各位三角恒等式化简

$$\begin{aligned}\frac{2}{1+z}&=\frac{2}{1+\cos\theta+i\sin\theta}\\&=\frac{2(1+\cos\theta-i\sin\theta)}{(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta}\\&=\frac{2(1+\cos\theta-i\sin\theta)}{1+2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta}\\&=\frac{2(1+\cos\theta-i\sin\theta)}{2+2\cos\theta}\\&=\frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}-i\cdot\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\\&=1-i\cdot\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}\\&=1-i\tan\frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

15. 设复数 z 满足 $|z|=1$ 且 $z=e^{i\theta}$, 求

$$\Re\left[\frac{z(1-\bar{z})}{\bar{z}(1+z)}\right].$$

先将表达式化简:

$$\begin{aligned}\Re\left[\frac{z(1-\bar{z})}{\bar{z}(1+z)}\right]&=\Re\left[\frac{z-z\bar{z}}{\bar{z}+z\bar{z}}\right]=\Re\left[\frac{z-|z|^2}{\bar{z}+|z|^2}\right]\\&=\Re\left[\frac{z-1}{\bar{z}+1}\right]=\Re\left[\frac{e^{i\theta}-1}{e^{-i\theta}+1}\right].\end{aligned}$$

乘以共轭以简化：

$$\begin{aligned}
\Re\left[\frac{e^{i\theta}-1}{e^{-i\theta}+1}\right] &= \Re\left[\frac{(e^{i\theta}-1)(e^{i\theta}+1)}{(e^{-i\theta}+1)(e^{i\theta}+1)}\right] \\
&= \Re\left[\frac{e^{i2\theta}-1}{2+e^{i\theta}+e^{-i\theta}}\right] = \Re\left[\frac{e^{i\theta}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})}{2+2\cos\theta}\right] \\
&= \Re\left[\frac{e^{i\theta}\cdot 2i\sin\theta}{2(1+\cos\theta)}\right] = \Re\left[\frac{e^{i\theta}\cdot i\sin\theta}{1+\cos\theta}\right] \\
&= \frac{1}{1+\cos\theta}\Re\left[i\sin\theta(\cos\theta+i\sin\theta)\right] \\
&= \frac{1}{1+\cos\theta}\Re\left[i\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta\right] \\
&= -\frac{\sin^2\theta}{1+\cos\theta}.
\end{aligned}$$

使用半角公式化简：

$$-\frac{\sin^2\theta}{1+\cos\theta} = -\frac{(2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2})^2}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = -2\sin^2\frac{\theta}{2}.$$

$$\therefore \Re\left[\frac{z(1-\bar{z})}{\bar{z}(1+z)}\right] = -2\sin^2\frac{\theta}{2}.$$

16. 已知两个相异复数 z_1, z_2, 且 $|z_1| = |z_2| \neq 0$, 证明

$$\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}$$

是纯虚数。

设 $w = \dfrac{z_1+z_2}{z_1-z_2}$, 欲证 $\overline{w} = -w$。

因为 $|z_1| = |z_2| = r$, 且 $z_1, z_2 \neq 0$, 根据性质

$$\bar{z} = \frac{r^2}{z} \Rightarrow \overline{z_1} = \frac{r^2}{z_1}, \quad \overline{z_2} = \frac{r^2}{z_2}$$

因此

$$\overline{w} = \overline{\left(\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}+\overline{z_2}}{\overline{z_1}-\overline{z_2}} = \frac{\dfrac{r^2}{z_1}+\dfrac{r^2}{z_2}}{\dfrac{r^2}{z_1}-\dfrac{r^2}{z_2}} = \frac{\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}}{\dfrac{1}{z_1}-\dfrac{1}{z_2}} = \frac{z_2+z_1}{z_2-z_1} = -\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2} = -w$$

17. 设复数 z_1, z_2 满足 $|z_1| = 2, |z_2| = 3, |z_1 + z_2| = 4$, 求 $\dfrac{z_1}{z_2}$。

设 $w = \dfrac{z_1}{z_2}$, 则 $z_1 = wz_2$。由

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}$$

代入已知得

$$z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} = 3$$

将 $z_1 = wz_2$ 代入得

$$wz_2 \cdot \overline{z_2} + z_2 \cdot \overline{wz_2} = w|z_2|^2 + \overline{w}|z_2|^2 = (w + \overline{w}) \cdot 9 = 3 \Rightarrow w + \overline{w} = \frac{1}{3}$$

设 $w = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$, 则 $w + \overline{w} = 2x = \dfrac{1}{3} \Rightarrow x = \dfrac{1}{6}$; 又因 $|w| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} = \dfrac{2}{3}$, 所以

$$|w|^2 = \frac{1}{36} + y^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{15}}{6} \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{6} \pm i\frac{\sqrt{15}}{6}$$

18. 若复数 z 使得 $\dfrac{z - 3i}{z + i}$ 为负实数, $\dfrac{z - 3}{z + 1}$ 为纯虚数, 求 z。

设 $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$, 由于

$$\frac{z - 3i}{z + i} = \frac{a + (b - 3)i}{a + (b + 1)i}$$

为负实数, 则

$$(a + (b - 3)i)(a - (b + 1)i) < 0$$

所以 $a^2 + (b - 3)(b + 1) < 0$ 且 $-4a = 0$, 即 $a = 0$ 且 $b - 3, b + 1$ 异号; 又此时

$$\frac{z - 3}{z + 1} = \frac{-3 + bi}{1 + bi}$$

为纯虚数, 故

$$\Re((-3 + bi)(1 - bi)) = b^2 - 3 = 0$$

又 $b - 3, b + 1$ 异号知 $b = \sqrt{3}$, 所以 $z = \sqrt{3}i$.

19. 已知虚数 z 使得 $z_1 = \dfrac{z}{1 + z^2}$ 和 $z_2 = \dfrac{z^2}{1 + z}$ 都是实数, 求 z。

由已知 $(z^2+1)z_1=z,(1+z)z_2=z^2$, 联立两式

$$z=(z^2+1)z_1=((1+z)z_2+1)z_1$$

整理得

$$z_1+z_1z_2=z(1-z_1z_2)$$

由于 z 为虚数, $z_1+z_1z_2$ 与 $1-z_1z_2$ 为实数, 故

$$1-z_1z_2=0\Rightarrow z_1z_2=1$$

代入 $z_1=\dfrac{z}{1+z^2},z_2=\dfrac{z^2}{1+z}$ 得

$$z_1z_2=\frac{z}{1+z^2}\cdot\frac{z^2}{1+z}=\frac{z^3}{(1+z)(1+z^2)}=1$$

给出

$$z^3=(1+z)(1+z^2)\Rightarrow z^2+z+1=0$$

即

$$z=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

20. 已知复数 $z\neq 0$, 满足方程 $z^2=z+i|z|$, 求 $|z|$ 的值。

设 $z=x+iy,\ x,y\in\mathbb{R}$, 则

$$z^2=z+i|z|\Rightarrow x^2-y^2+2ixy=x+i\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

比较实部与虚部得

$$x^2-y^2=x \tag{1}$$

$$2xy=y+\sqrt{x^2+y^2} \tag{2}$$

将 (2) 移项并平方

$$y^2(2x-1)^2=x^2+y^2$$

由 (1) 得

$$(x^2-x)(2x-1)^2=2x^2-x\Rightarrow x^2(2x-3)(2x-1)=0$$

解得 $x=0,\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}$, 其中 $x=0$ 不合理 $(z\neq 0)$, 且 $x=\dfrac{1}{2}$ 不合理 $(y^2=-\dfrac{1}{4}<0)$, 故

$$x=\frac{3}{2},\ y^2=\frac{3}{4}\Rightarrow |z|=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{3}$$

21. 确定所有满足 $|a|=|b|=1$ 且 $a+b+a\bar{b}\in\mathbb{R}$ 的复数对 (a,b)。

方法一：设 $a=e^{ix}$,$b=e^{iy}$, 其中 $x,y\in[0,2\pi)$。利用欧拉公式以及恒等式

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},\quad \sin(x-y)=2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$

得到

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(a+b+a\bar{b})&=(\sin x+\sin y)+\sin(x-y)\\&=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}+2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\\&=2\left(\sin\frac{x+y}{2}+\sin\frac{x-y}{2}\right)\cos\frac{x-y}{2}\\&=4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\cos\frac{x-y}{2}.\end{aligned}$$

因此,$a+b+a\bar{b}$ 为实数当且仅当

$$\sin\frac{x}{2}=0,\quad \cos\frac{y}{2}=0,\quad \text{或}\quad \cos\frac{x-y}{2}=0,$$

分别对应

$$x=2k\pi,\quad y=(2k+1)\pi,\quad x=y+(2k+1)\pi,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

所以解集为

$$(a,b)=(1,b),\quad (a,-1),\quad (a,-a),\quad \text{其中}|a|=|b|=1.$$

方法二：注意到

$$a+b+a\bar{b}\in\mathbb{R}\iff 1+a+b+a\bar{b}\in\mathbb{R}.$$

设 $c\in\mathbb{C}$ 且 $a=c^2$, 则

$$\bar{c}(1+a+b+a\bar{b})=\bar{c}+\bar{c}c^2+\bar{c}b+\bar{c}c^2\bar{b}=\bar{c}+c+\bar{c}b+c\bar{b}\in\mathbb{R},$$

利用 $\bar{c}c=1$ 以及 $z+\bar{z}\in\mathbb{R}$。因此要么 $c\in\mathbb{R}$, 要么 $1+a+b+a\bar{b}=0$。第一种情况 $c=\pm1$, 于是 $a=1$。第二种情况将等式因式分解为

$$(a+b)(1+\bar{b})=1+a+b+a\bar{b}=0,$$

得到 $a=-b$ 或 $b=-1$。所以得到的三族解为：

$$(a,b)=(1,b),\quad (a,-1),\quad (a,-a),\quad |a|=|b|=1.$$

22. 已知两复数 z_1, z_2 满足 $|z_1-(3+3i)|=2, |iz_2-1|=1$, 求 $|z_1-z_2|$ 的最小值。

由 $|z_1-(3+3i)|=2, P(z_1)$ 在圆

$$C_1:(x-3)^2+(y-3)^2=2^2$$

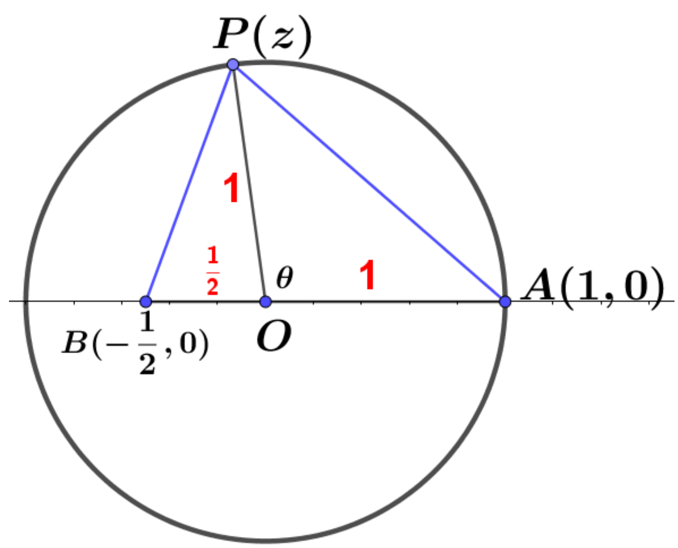
上, 设 $z_2=a+bi$, 则 $iz_2-1=(-1-b)+ai$, 故 $|iz_2-1|=1$ 意味 $Q(z_2)$ 在圆

$$C_2:x^2+(y+1)^2=1$$

上, 故 $|z_1-z_2|=PQ$ 的最小值为

$$\text{两圆心距离}-\text{两圆半径和}=\sqrt{3^2+4^2}-(2+1)=2$$

23. 设 α 为 $\left|(z-1)\left(z+\frac{1}{2}\right)\right|$ 在圆盘上 $\{z\in\mathbb{C}:|z|\leqslant 1\}$ 的最大值, 则 $\alpha^2=?$



如图,P 在圆周上,$A(1,0), B\left(-\frac{1}{2},0\right)$, 则

$$PA\cdot PB=\left|(z-1)\left(z+\frac{1}{2}\right)\right|$$

设 $\theta=\angle POA$, 在 $\triangle POA$ 及 $\triangle POB$ 中, 由余弦定理,

$$PA^2=1^2+1^2-2\cdot 1\cdot 1\cdot\cos\theta=2-2\cos\theta$$

$$PB^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \cos(\pi - \theta) = \cos\theta + \frac{5}{4}$$

因此

$$f(\theta) = (2 - 2\cos\theta)\left(\cos\theta + \frac{5}{4}\right) = -2\cos^2\theta - \frac{1}{2}\cos\theta + \frac{5}{2}$$

且

$$\alpha^2 = f\left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{81}{32}$$

24. 设有一虚部不为零的复数 z, 其长度为 2, 且在复数平面上与 -2 及 z^2 刚好在同一直线上, 与 1 及 z^3 也同在另一直线上, 试求以 z, z^2, z^3 所围成的三角形面积。

由 $1, z, z^3$ 共线可得

$$\frac{z^3 - z}{z - 1} = k \in \mathbb{R} \Rightarrow z^2 + z - k = 0 \Rightarrow z = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4k}}{2}$$

其中 z 实部为 $-\frac{1}{2}$, 由 $-2, z, z^2$ 共线可得

$$\frac{z^2 - z}{z + 2} = t \in \mathbb{R} \Rightarrow z^2 - (t+1)z - 2t = 0 \Rightarrow z = \frac{t + 1 \pm \sqrt{(t+1)^2 + 8t}}{2}$$

因此

$$\frac{t+1}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow t = -2$$

代入得

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{15}\,i}{2}.$$

取 $z = \dfrac{-1 + \sqrt{15}\,i}{2}$, 则

$$z^2 = \frac{-7 - \sqrt{15}\,i}{2}, \quad z^3 = \frac{11 - 3\sqrt{15}\,i}{2}.$$

z, z^2, z^3 在复平面上的坐标为

$$A(z) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right), \quad B(z^2) = \left(-\frac{7}{2}, -\frac{\sqrt{15}}{2}\right), \quad C(z^3) = \left(\frac{11}{2}, -\frac{3\sqrt{15}}{2}\right).$$

故所求面积为

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{15}}{2} & 1 \\ -\frac{7}{2} & -\frac{\sqrt{15}}{2} & 1 \\ \frac{11}{2} & -\frac{3\sqrt{15}}{2} & 1 \end{vmatrix} = 6\sqrt{15}$$

25. 若实数 m,n 使得关于 x 的方程 $x^3+mx+n=0$ 有模为 3 的虚根，求 $m+n$ 的取值范围。

由于系数皆为实数，设三根为 $a+bi$，$a-bi$，$-2a$，其中 $a,b\in\mathbb{R}$，$a^2+b^2=9$，$b\neq 0$。

由韦达定理，

$$m=(a+bi)(a-bi)+(-2a)(a+bi+a-bi)=9-4a^2$$

$$n=(a+bi)(a-bi)(-2a)=-18a$$

所以

$$m+n=9-4a^2+18a=-4\left(a-\frac{9}{4}\right)^2+\frac{117}{4}$$

又 $a^2<9,-3<a<3$，则

$$m+n\in\left(-81,\ \frac{117}{4}\right]$$

26. 关于 z 的方程 $z^{n+1}-\sqrt{3}z^n-1=0$ 存在一个模为 1 的虚根，求正整数 n 的最小值。

设该虚根为 $z_0=e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，有

$$z_0^n(z_0-\sqrt{3})=1$$

两边取模得

$$|z_0^n||z_0-\sqrt{3}|=1$$

由于 $|z_0^n|=1$，从而

$$|z_0-\sqrt{3}|=1$$

将 $z_0=e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 代入得

$$|(\cos\theta-\sqrt{3})+i\sin\theta|=1$$

于是

$$(\cos\theta-\sqrt{3})^2+\sin^2\theta=1\Rightarrow\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

得 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$，即 $z_0=e^{i\frac{\pi}{6}}$，代入 $z_0^n(z_0-\sqrt{3})=1$ 得:

$$\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^n\left(e^{i\frac{\pi}{6}}-\sqrt{3}\right)=e^{i\frac{n\pi}{6}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i-\sqrt{3}\right)=e^{i\frac{n\pi}{6}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=1$$

注意到 $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=e^{i\frac{5\pi}{6}}$，变为

$$e^{i\frac{n\pi}{6}}\cdot e^{i\frac{5\pi}{6}}=e^{i\frac{(n+5)\pi}{6}}=1\Rightarrow\frac{(n+5)\pi}{6}=2k\pi\Rightarrow n=12k-5$$

令 $k=1$ 得最小正整数解为 $n=7$.

27. 已知复数 z_1, z_2, z_3 满足

$$\begin{cases} |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \\ \dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_3} + \dfrac{z_3}{z_1} = 1 \end{cases}$$

求 $|z_1 + 2z_2 + 3z_3|$ 最大可能值。

设存在一三次多项式, 根为 $\dfrac{z_1}{z_2}, \dfrac{z_2}{z_3}, \dfrac{z_3}{z_1}$, 则

$$\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} = 1$$

$$\frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_2}{z_3} \cdot \frac{z_3}{z_1} = 1$$

$$\begin{aligned} &\frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_2}{z_3} \cdot \frac{z_3}{z_1} + \frac{z_3}{z_1} \cdot \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_3} + \frac{z_2}{z_1} + \frac{z_3}{z_2} \\ &= \overline{\left(\frac{z_3}{z_1}\right)} + \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} + \overline{\left(\frac{z_2}{z_3}\right)} = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1}\right)} = 1 \end{aligned}$$

因此该多项式为

$$f(x) = x^3 - x^2 + x - 1 = (x^2 + 1)(x - 1),$$

根为 $x = 1, \pm i$; 为使 $|z_1 + 2z_2 + 3z_3|$ 最大, 取

$$\frac{z_2}{z_3} = 1, \quad \frac{z_3}{z_1} = i, \quad \frac{z_1}{z_2} = -i,$$

则

$$z_2 = z_3 = 1, \quad z_1 = -i,$$

所以

$$|z_1 + 2z_2 + 3z_3| = |-i + 5| = \sqrt{26}$$

28. 设 z 为复数, 且满足 $|z + 1| > 2$。证明

$$|z^3 + 1| > 1.$$

注意到

$$z^3 + 1 = (z + 1)(z^2 - z + 1),$$

因此只需证明
$$|z^2-z+1|\geqslant\frac{1}{2}.$$
设
$$z+1=re^{i\varphi},$$
其中 $r=|z+1|>2,\varphi$ 为某个实数。于是
$$\begin{aligned}z^2-z+1&=(re^{i\varphi}-1)^2-(re^{i\varphi}-1)+1\\&=r^2e^{2i\varphi}-3re^{i\varphi}+3.\end{aligned}$$
于是
$$\begin{aligned}|z^2-z+1|^2&=(r^2e^{2i\varphi}-3re^{i\varphi}+3)(r^2e^{-2i\varphi}-3re^{-i\varphi}+3)\\&=r^4+9r^2+9-(6r^3+18r)\cos\varphi+6r^2\cos 2\varphi\\&=r^4+9r^2+9-(6r^3+18r)\cos\varphi+6r^2(2\cos^2\varphi-1)\\&=12\left(r\cos\varphi-\frac{r^2+3}{4}\right)^2+\frac{1}{4}(r^2-3)^2.\end{aligned}$$
由于 $r>2$, 可得
$$|z^2-z+1|^2>\frac{1}{4},$$
从而
$$|z^2-z+1|>\frac{1}{2}.$$
因此
$$|z^3+1|=|z+1|\,|z^2-z+1|>2\cdot\frac{1}{2}=1.$$
证毕。

29. 复数 z_1,z_2,z_3,z_4,z_5 满足
$$\begin{cases}|z_1|\leqslant 1\\|z_2|\leqslant 1\\|2z_3-(z_1+z_2)|\leqslant|z_1-z_2|\\|2z_4-(z_1+z_2)|\leqslant|z_1-z_2|\\|2z_5-(z_3+z_4)|\leqslant|z_3-z_4|\end{cases}$$
求 $|z_5|$ 的最大值.

由

$$|z_1-z_2| \geqslant |2z_3-(z_1+z_2)| \geqslant |2|z_3|-|z_1+z_2||$$

我们有

$$|z_1+z_2|-|z_1-z_2| \leqslant 2|z_3| \leqslant |z_1+z_2|+|z_1-z_2|$$

由 AM-QM 不等式,

$$|z_3| \leqslant \frac{|z_1+z_2|+|z_1-z_2|}{2} \leqslant \sqrt{\frac{|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2}{2}} = \sqrt{\frac{2|z_1|^2+2|z_2|^2}{2}} \leqslant \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

同理可得 $|z_4| \leqslant \sqrt{2}$, 故

$$|z_5| \leqslant \frac{|z_3+z_4|}{2} \leqslant \frac{|z_3|+|z_4|}{2} \leqslant \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

考虑等号何时成立: 当 $z_1=1, z_2=i$ 时, $z_3=1+i$; 当 $z_1=-1, z_2=i$ 时, $z_4=-1+i$; 当 $z_3=1+i, z_4=-1+i$ 时, $z_5=2i$, 这时 $|z_5|=2$. 故 $|z_5|_{\max}=2$.

30. 设复数 z 满足 $|z|=1$, 则 $|z^7+\bar{z}^5-3z^3-3\bar{z}|$ 的最大值为

试 $z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, 算得值为:

$$|z^7+\bar{z}^5-3z^3-3\bar{z}| = |2i+2-6i-6| = |-4i-4| = \sqrt{16+16} = \boxed{4\sqrt{2}}$$

(待解)(设 $z=\cos\theta+i\sin\theta, \ldots$ 感觉是尝试因式分解再 AM-GM)

31. 证明:

(a) 如果 $z=\cos\theta+i\sin\theta$, 则

$$z^n+z^{-n}=2\cos n\theta, \quad z^n-z^{-n}=2i\sin n\theta.$$

由 De Moivre 定理:

$$z^n=\cos n\theta+i\sin n\theta, \quad z^{-n}=\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)=\cos n\theta-i\sin n\theta.$$

相加得到:

$$z^n+z^{-n}=(\cos n\theta+i\sin n\theta)+(\cos n\theta-i\sin n\theta)=2\cos n\theta.$$

相减得到:

$$z^n-z^{-n}=(\cos n\theta+i\sin n\theta)-(\cos n\theta-i\sin n\theta)=2i\sin n\theta.$$

(b) 证明

$$16\sin^5\theta = \sin 5\theta - 5\sin 3\theta + 10\sin\theta, \quad 32\cos^6\theta = \cos 6\theta + 6\cos 4\theta + 15\cos 2\theta + 10.$$

对于第一个恒等式, 使用 $2i\sin\theta = z - z^{-1}$:

$$\begin{aligned}
(2i\sin\theta)^5 &= (z - z^{-1})^5 \\
32i^5\sin^5\theta &= z^5 - 5z^3z^{-2} + 10zz^{-4} - 10z^2z^{-3} + 5zz^{-4} - z^{-5} \\
32i\sin^5\theta &= (z^5 - z^{-5}) - 5(z^3 - z^{-3}) + 10(z - z^{-1}) \\
32i\sin^5\theta &= 2i\sin 5\theta - 10i\sin 3\theta + 20i\sin\theta \\
16\sin^5\theta &= \sin 5\theta - 5\sin 3\theta + 10\sin\theta.
\end{aligned}$$

对于第二个恒等式, 使用 $2\cos\theta = z + z^{-1}$:

$$\begin{aligned}
(2\cos\theta)^6 &= (z + z^{-1})^6 \\
64\cos^6\theta &= (z^6 + z^{-6}) + 6(z^4 + z^{-4}) + 15(z^2 + z^{-2}) + 20 \\
64\cos^6\theta &= 2\cos 6\theta + 12\cos 4\theta + 30\cos 2\theta + 20 \\
32\cos^6\theta &= \cos 6\theta + 6\cos 4\theta + 15\cos 2\theta + 10.
\end{aligned}$$

32. 证明:

$$\cos^5\theta\sin^3\theta = \frac{1}{128}\Big(6\sin 2\theta + 2\sin 4\theta - 2\sin 6\theta - \sin 8\theta\Big)$$

设 $z = \cos\theta + i\sin\theta$, 则

$$z^n = \cos n\theta + i\sin n\theta, \quad z^{-n} = \cos n\theta - i\sin n\theta,$$

并且

$$z^n + z^{-n} = 2\cos n\theta, \quad z^n - z^{-n} = 2i\sin n\theta.$$

使用 $2\cos\theta = z + z^{-1}$ 得:

$$\begin{aligned}
(2\cos\theta)^5 &= (z + z^{-1})^5 \\
32\cos^5\theta &= z^5 + 5z^4z^{-1} + 10z^3z^{-2} + 10z^2z^{-3} + 5zz^{-4} + z^{-5} \\
32\cos^5\theta &= (z^5 + z^{-5}) + 5(z^3 + z^{-3}) + 10(z + z^{-1}) \\
16\cos^5\theta &= \cos 5\theta + 5\cos 3\theta + 10\cos\theta.
\end{aligned}$$

利用 $4\sin^3\theta = 3\sin\theta - \sin 3\theta$，得到

$$16\cos^5\theta \cdot 4\sin^3\theta = (\cos 5\theta + 5\cos 3\theta + 10\cos\theta)(3\sin\theta - \sin 3\theta).$$

展开并使用和差化积公式：

$$\begin{aligned}
64\cos^5\theta\sin^3\theta &= 3\cos 5\theta\sin\theta - \cos 5\theta\sin 3\theta + 15\cos 3\theta\sin\theta - 5\cos 3\theta\sin 3\theta \\
&\quad + 30\cos\theta\sin\theta - 10\cos\theta\sin 3\theta \\
&= \frac{3}{2}(\sin 6\theta - \sin 4\theta) - \frac{1}{2}(\sin 8\theta - \sin 2\theta) + \frac{15}{2}(\sin 4\theta - \sin 2\theta) \\
&\quad - \frac{5}{2}\sin 6\theta + \frac{30}{2}\sin 2\theta - \frac{10}{2}\sin 4\theta \\
128\cos^5\theta\sin^3\theta &= 6\sin 2\theta + 2\sin 4\theta - 2\sin 6\theta - \sin 8\theta.
\end{aligned}$$

因此

$$\cos^5\theta\sin^3\theta = \frac{1}{128}\Big(6\sin 2\theta + 2\sin 4\theta - 2\sin 6\theta - \sin 8\theta\Big).$$

33. 定义无穷级数

$$\begin{aligned}
C &= \cos\theta + \frac{1}{2}\cos 5\theta + \frac{1}{4}\cos 9\theta + \cdots \\
S &= \sin\theta + \frac{1}{2}\sin 5\theta + \frac{1}{4}\sin 9\theta + \cdots
\end{aligned}$$

证明

$$C + iS = \frac{2e^{i\theta}}{2 - e^{4i\theta}}, \qquad S = \frac{4\sin\theta + 2\sin 3\theta}{5 - 4\cos 4\theta}$$

记

$$\begin{aligned}
C + iS &= \cos\theta + i\sin\theta + \frac{1}{2}(\cos 5\theta + i\sin 5\theta) + \frac{1}{4}(\cos 9\theta + i\sin 9\theta) + \cdots \\
&= e^{i\theta} + \frac{1}{2}e^{i5\theta} + \frac{1}{4}e^{i9\theta} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}e^{i(4k+1)\theta} = e^{i\theta}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{e^{4i\theta}}{2}\right)^k
\end{aligned}$$

这是一个公比为 $\dfrac{e^{4i\theta}}{2}$ 的等比级数，其模为 $\dfrac{1}{2} < 1$，因此级数收敛：

$$C + iS = \frac{e^{i\theta}}{1 - \frac{1}{2}e^{4i\theta}} = \frac{2e^{i\theta}}{2 - e^{4i\theta}}$$

又

$$C + iS = \frac{2e^{i\theta}}{2 - e^{4i\theta}} \cdot \frac{2 - e^{-4i\theta}}{2 - e^{-4i\theta}} = \frac{4e^{i\theta} - 2e^{-3i\theta}}{|2 - e^{4i\theta}|^2} = \frac{(4\cos\theta - 2\cos 3\theta) + i(4\sin\theta + 2\sin 3\theta)}{(2 - \cos 4\theta)^2 + \sin^2 4\theta}$$

因此

$$S = \Im(C + iS) = \frac{4\sin\theta + 2\sin 3\theta}{5 - 4\cos 4\theta}$$

34. 证明下列无穷级数的和：

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin(n\theta)}{n!} = e^{-\cos\theta}\sin(\sin\theta).$$

步骤 1：定义两个级数 C 与 S

$$C = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos(n\theta)}{n!}, \quad S = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin(n\theta)}{n!}.$$

步骤 2：使用复数形式合并

$$C + iS = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(e^{i\theta})^n}{n!}.$$

步骤 3：识别指数级数

$$C + iS = e^{i\theta} - \frac{(e^{i\theta})^2}{2!} + \frac{(e^{i\theta})^3}{3!} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(e^{i\theta})^n}{n!}.$$

利用指数函数展开式：

$$e^{-z} = 1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \cdots \implies \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}z^n}{n!} = 1 - e^{-z}.$$

取 $z = e^{i\theta}$，得到：

$$C + iS = 1 - e^{-e^{i\theta}} = 1 - e^{-(\cos\theta + i\sin\theta)} = 1 - e^{-\cos\theta}e^{-i\sin\theta}.$$

步骤 4：分离实部和虚部

$$C + iS = 1 - e^{-\cos\theta}[\cos(\sin\theta) - i\sin(\sin\theta)] = [1 - e^{-\cos\theta}\cos(\sin\theta)] + i[e^{-\cos\theta}\sin(\sin\theta)].$$

步骤 5：取虚部得到原级数和

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin(n\theta)}{n!} = \Im(C + iS) = e^{-\cos\theta}\sin(\sin\theta).$$

35. 求下列多项式方程的所有实数解，并在适当情况下用精确的三角形式表示：

$$x^7 - 7x^6 - 21x^5 + 35x^4 + 35x^3 - 21x^2 - 7x + 1 = 0.$$

注意到系数呈现正负交替的规律，并且与二项式系数有关，因此考虑利用三角恒等式进行处理。

设

$$\cos\theta = C, \quad \sin\theta = S,$$

则

$$C + iS = \cos\theta + i\sin\theta.$$

由棣莫弗定理，

$$(C+iS)^7 = \cos 7\theta + i\sin 7\theta.$$

另一方面，展开得

$$\begin{aligned}(C+iS)^7 = {} & C^7 + 7iC^6S - 21C^5S^2 - 35iC^4S^3 \\ & + 35C^3S^4 + 21iC^2S^5 - 7CS^6 - iS^7.\end{aligned}$$

比较实部与虚部，得到

$$\begin{aligned}\cos 7\theta &= C^7 - 21C^5S^2 + 35C^3S^4 - 7CS^6, \\ \sin 7\theta &= 7C^6S - 35C^4S^3 + 21C^2S^5 - S^7.\end{aligned}$$

于是

$$\tan 7\theta = \frac{\sin 7\theta}{\cos 7\theta}.$$

令

$$T = \tan\theta = \frac{S}{C},$$

则

$$\tan 7\theta = \frac{7T - 35T^3 + 21T^5 - T^7}{1 - 21T^2 + 35T^4 - 7T^6}.$$

令 $\tan 7\theta = 1$，得到

$$\frac{7T - 35T^3 + 21T^5 - T^7}{1 - 21T^2 + 35T^4 - 7T^6} = 1,$$

整理可得

$$T^7 - 7T^6 - 21T^5 + 35T^4 + 35T^3 - 21T^2 - 7T + 1 = 0.$$

这正是题目所给的多项式方程，其中 $T = x$。

由 $\tan 7\theta = 1$,
$$7\theta = \frac{\pi}{4} + n\pi,$$
从而
$$\theta = \frac{(4n+1)\pi}{28}, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$
因此方程的所有实数解为
$$\begin{aligned} x_0 &= \tan\frac{\pi}{28}, \\ x_1 &= \tan\frac{5\pi}{28}, \\ x_2 &= \tan\frac{9\pi}{28}, \\ x_3 &= \tan\frac{13\pi}{28}, \\ x_4 &= \tan\frac{17\pi}{28}, \\ x_5 &= \tan\frac{21\pi}{28} = -1, \\ x_6 &= \tan\frac{25\pi}{28}. \end{aligned}$$

36. (a) 证明:
$$\sin 7\theta = 7\sin\theta - 56\sin^3\theta + 112\sin^5\theta - 64\sin^7\theta$$

从棣莫弗定理出发,
$$(\cos\theta + i\sin\theta)^7 = \cos 7\theta + i\sin 7\theta$$
由二项式定理展开左式,
$$(\cos\theta + i\sin\theta)^7 = \sum_{k=0}^{7} {}^7C_k \cos^{7-k}\theta (i\sin\theta)^k$$
比较虚部项系数得
$$\sin 7\theta = {}^7C_1\cos^6\theta\sin\theta - {}^7C_3\cos^4\theta\sin^3\theta + {}^7C_5\cos^2\theta\sin^5\theta - {}^7C_7\sin^7\theta$$
由恒等式 $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$, 令 $s = \sin\theta$, 则有
$$\sin 7\theta = 7(1-s^2)^3 s - 35(1-s^2)^2 s^3 + 21(1-s^2)s^5 - s^7 = 7s - 56s^3 + 112s^5 - 64s^7$$

故得证。

(b) 据此, 解方程

$$1 + 7x - 56x^3 + 112x^5 - 64x^7 = 0$$

原方程

$$1 + 7x - 56x^3 + 112x^5 - 64x^7 = 0$$

可写为

$$1 + \sin 7\theta = 0 \Rightarrow \sin 7\theta = -1$$

解得

$$7\theta = \ldots, -\frac{5\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \cdots \Rightarrow \theta = \ldots, -\frac{5\pi}{14}, -\frac{\pi}{14}, \frac{3\pi}{14}, \frac{7\pi}{14}, \ldots$$

所以

$$x = \sin\theta = \sin\left(-\frac{5\pi}{14}\right), \sin\left(-\frac{\pi}{14}\right), \sin\frac{3\pi}{14}, \sin\frac{7\pi}{14} = -0.901, -0.223, 0.623, 1$$

(c) 通过构造合适的多项式方程式, 证明

$$\csc^2\left(\frac{\pi}{7}\right) + \csc^2\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \csc^2\left(\frac{3\pi}{7}\right) = 8.$$

由

$$\sin 7\theta = 0$$

可得解

$$\theta = 0,\ \frac{\pi}{7},\ \frac{2\pi}{7},\ \frac{3\pi}{7},\ \ldots$$

利用三角恒等式

$$\sin 7\theta = 7\sin\theta - 56\sin^3\theta + 112\sin^5\theta - 64\sin^7\theta,$$

得

$$-\sin\theta\big(64\sin^6\theta - 112\sin^4\theta + 56\sin^2\theta - 7\big) = 0.$$

对非零解 $\theta \neq 0$, 令

$$Z = \sin^2\theta,$$

则

$$64Z^3 - 112Z^2 + 56Z - 7 = 0.$$

设该三次方程的三个正根为

$$\alpha = \sin^2\frac{\pi}{7}, \quad \beta = \sin^2\frac{2\pi}{7}, \quad \gamma = \sin^2\frac{3\pi}{7}.$$

由韦达定理,

$$\begin{aligned}
\alpha+\beta+\gamma &= \frac{112}{64} = \frac{7}{4},\\
\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha &= \frac{56}{64} = \frac{7}{8},\\
\alpha\beta\gamma &= \frac{7}{64}.
\end{aligned}$$

注意到

$$\sin\frac{\pi}{7} = \sin\frac{6\pi}{7}, \quad \sin\frac{2\pi}{7} = \sin\frac{5\pi}{7}, \quad \sin\frac{3\pi}{7} = \sin\frac{4\pi}{7},$$

因此上述三根正好对应所需角度。

于是

$$\begin{aligned}
\csc^2\frac{\pi}{7} + \csc^2\frac{2\pi}{7} + \csc^2\frac{3\pi}{7} &= \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\\
&= \frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}\\
&= \frac{\frac{7}{8}}{\frac{7}{64}}\\
&= 8.
\end{aligned}$$

证毕。

37. (a) 证明

$$(1 + i\tan\theta)^4 + (1 - i\tan\theta)^4 = \frac{2\cos 4\theta}{\cos^4\theta}.$$

(b) 利用 (a) 的结果, 通过构造合适的多项式, 进一步证明:

i. $\tan^2\left(\frac{\pi}{8}\right)\tan^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 1$

ii. $\tan^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \tan^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 6$

(a) 从左边开始：

$$\begin{aligned}(1+i\tan\theta)^4+(1-i\tan\theta)^4&=\left(1+i\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^4+\left(1-i\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^4\\&=\left(\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta}\right)^4+\left(\frac{\cos\theta-i\sin\theta}{\cos\theta}\right)^4\\&=\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)^4+(\cos\theta-i\sin\theta)^4}{\cos^4\theta}.\end{aligned}$$

由棣莫弗定理,

$$(\cos\theta\pm i\sin\theta)^4=\cos4\theta\pm i\sin4\theta.$$

因此

$$\begin{aligned}(1+i\tan\theta)^4+(1-i\tan\theta)^4&=\frac{\cos4\theta+i\sin4\theta+\cos4\theta-i\sin4\theta}{\cos^4\theta}\\&=\frac{2\cos4\theta}{\cos^4\theta},\end{aligned}$$

结论得证。

(b) 当 $\cos4\theta=0$ 时, 由 (a) 可得

$$(1+i\tan\theta)^4+(1-i\tan\theta)^4=0.$$

令 $z=i\tan\theta$, 则

$$(1+z)^4+(1-z)^4=0.$$

展开得

$$\begin{aligned}(1+4z+6z^2+4z^3+z^4)+(1-4z+6z^2-4z^3+z^4)&=0\\2+12z^2+2z^4&=0,\end{aligned}$$

即

$$z^4+6z^2+1=0.$$

设其四个根为

$$i\tan\frac{\pi}{8},\quad i\tan\frac{3\pi}{8},\quad i\tan\frac{5\pi}{8},\quad i\tan\frac{7\pi}{8}.$$

(i) 由常数项与首项系数之比,

$$\alpha\beta\gamma\delta=1.$$

利用 $\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$,

$$\tan^2\left(\frac{\pi}{8}\right)\tan^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)=1.$$

(ii) 由二次项系数,

$$\alpha\beta+\alpha\gamma+\cdots+\gamma\delta=6,$$

同样配对并利用对称性, 可得

$$\tan^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+\tan^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)=6.$$

38. 设 $w=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$, (a) 证明 $1+w+w^2+w^3+w^4=0$. (b) 求 $(1-w)(1-w^2)(1-w^3)(1-w^4)$. (c) 证明 $(1-w)(1-w^4)=4\sin^2\frac{\pi}{5}$. (d) 证明 $(1-w^2)(1-w^3)=4\sin^2\frac{2\pi}{5}$. (e) 证明 $\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}}{4}$.

(a) 因为 $w^5=(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5})^5=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$, 且 $w\neq 1$, 所以

$$w^5-1=0 \implies (w-1)(1+w+w^2+w^3+w^4)=0 \implies 1+w+w^2+w^3+w^4=0.$$

(b) 考虑乘积 $P=(1-w)(1-w^2)(1-w^3)(1-w^4)$。使用共轭与代数关系:

$$\begin{aligned}
P&=(1-w)(1-w^2)(1-w^3)(1-w^4)\\
&=(1-w)(1-w^4)(1-w^2)(1-w^3)\\
&=[2-(w+w^4)][2-(w^2+w^3)]\\
&=4-2(w+w^4+w^2+w^3)+(w+w^4)(w^2+w^3)\\
&=4-2(-1)+(w+w^4)(w^2+w^3)\quad(\text{由}1+w+\cdots+w^4=0)\\
&=6+(w^3+w^4+w^6+w^7)\\
&=6+(w^3+w^4+w+w^2)\quad(w^5=1\implies w^6=w,w^7=w^2)\\
&=6+(-1)\\
&=5.
\end{aligned}$$

(c) $(1-w)(1-w^4)$：

$$\begin{aligned}(1-w)(1-w^4) &= 1-w-w^4+w^5 = 2-(w+w^4)\\ &= 2-\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}+i\sin\frac{8\pi}{5}\right)\\ &= 2-2\cos\frac{2\pi}{5}\\ &= 2\left(1-\cos\frac{2\pi}{5}\right) = 2\cdot 2\sin^2\frac{\pi}{5} = 4\sin^2\frac{\pi}{5}.\end{aligned}$$

(d) $(1-w^2)(1-w^3)$：

$$\begin{aligned}(1-w^2)(1-w^3) &= 1-w^2-w^3+w^5 = 2-(w^2+w^3)\\ &= 2-(\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5})\\ &= 2-2\cos\frac{4\pi}{5}\\ &= 2\left(1-\cos\frac{4\pi}{5}\right) = 2\cdot 2\sin^2\frac{2\pi}{5} = 4\sin^2\frac{2\pi}{5}.\end{aligned}$$

(e) 由前面结果可知：

$$\begin{aligned}16\sin^2\frac{\pi}{5}\sin^2\frac{2\pi}{5} &= (1-w)(1-w^2)(1-w^3)(1-w^4) = 5,\\ \sin^2\frac{\pi}{5}\sin^2\frac{2\pi}{5} &= \frac{5}{16},\\ \sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5} &= \pm\frac{\sqrt{5}}{4}.\end{aligned}$$

因为 $0<\frac{\pi}{5}<\frac{\pi}{2}$ 且 $0<\frac{2\pi}{5}<\frac{\pi}{2}$，所以

$$\sin\frac{\pi}{5}>0,\quad \sin\frac{2\pi}{5}>0,$$

于是

$$\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5}>0 \implies \sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}}{4}.$$

39. 设 $S_n=a^n+b^n$，其中 a,b 是方程 $x^2+x+1=0$ 的根，求

$$\sum_{n=0}^{1729}(-1)^n S_n$$

方程根为 $a=\omega$, $b=\omega^2$, 其中 $\omega=e^{2\pi i/3}$, 满足 $\omega^3=1$。

设 $S_n=\omega^n+\omega^{2n}$, 发现 S_n 是周期为 3 的数列:

$$S_0=2,\quad S_1=-1,\quad S_2=-1$$

将原式写成

$$\sum_{k=0}^{576}\left[(-1)^{3k}S_{3k}+(-1)^{3k+1}S_{3k+1}+(-1)^{3k+2}S_{3k+2}\right]+(-1)^{1728}S_{1728}+(-1)^{1729}S_{1729}$$

前面 576 组和为 0, 剩余

$$(-1)^{1728}S_{1728}+(-1)^{1729}S_{1729}=1\cdot 2+(-1)\cdot(-1)=3$$

40. 设 $\omega\in\mathbb{C}$、$\omega\neq 1$、且 $\omega^7=1$, 计算:

$$\prod_{k=0}^{6}(\omega^{2k}+2\omega^k+4)$$

设方程 $x^7-1=0$ 的根为 $1,\omega,\omega^2,\ldots,\omega^6$, 则

$$\prod_{k=0}^{6}\left((\omega^k)^2+2\omega^k+4\right)=\prod_{k=0}^{6}\frac{(\omega^k)^3-8}{\omega^k-2}$$

由于 $(\omega^0,\omega^3,\omega^6,\omega^9,\omega^{12},\omega^{15},\omega^{18})=(\omega^0,\omega^3,\omega^6,\omega^2,\omega^5,\omega^1,\omega^4)$, 因此:

$$\prod_{k=0}^{6}((\omega^k)^3-8)=\prod_{j=0}^{6}(\omega^j-8)$$

又因为 $x^7-1=\prod_{j=0}^{6}(x-\omega^j)$, 令 $x=8$, 得

$$\prod_{j=0}^{6}(\omega^j-8)=-(8^7-1)=1-8^7$$

同理, 令 $x=2$ 得

$$\prod_{j=0}^{6}(\omega^j-2)=-(2^7-1)=1-2^7$$

因此原式为:

$$\frac{1-8^7}{1-2^7}=16513$$

41. 令 $\omega=\cos\dfrac{2\pi}{111}+i\sin\dfrac{2\pi}{111}$, 其中 $i=\sqrt{-1}$, 求

$$\sum_{k=1}^{110}\frac{\omega^{2k}}{\omega^k-1}$$

由 $\omega=\cos\dfrac{2\pi}{111}+i\sin\dfrac{2\pi}{111}$ 可知

$$\omega^{111}-1=0\Rightarrow\sum_{k=0}^{110}\omega^k=0$$

因此

$$\sum_{k=1}^{110}\frac{\omega^{2k}}{\omega^k-1}=\sum_{k=1}^{110}\left(\omega^k+1+\frac{1}{\omega^k-1}\right)=-1+110+\sum_{k=1}^{110}\frac{1}{\omega^k-1}\tag{1}$$

设

$$f(x)=\sum_{k=0}^{110}x^k=\prod_{k=1}^{110}(x-\omega^k)$$

则

$$f'(x)=\sum_{k=1}^{110}kx^{k-1}=\sum_{m=1}^{110}\prod_{k=1,k\neq m}^{110}(x-\omega^k)$$

于是

$$g(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}=\sum_{k=1}^{110}\frac{1}{x-\omega^k}$$

令 $x=1$,

$$g(1)=\frac{111\cdot\frac{110}{2}}{111}=\sum_{k=1}^{110}\frac{1}{1-\omega^k}\Rightarrow\sum_{k=1}^{110}\frac{1}{\omega^k-1}=-55$$

代入 (1) 得

$$\sum_{k=1}^{110}\frac{\omega^{2k}}{\omega^k-1}=-1+110-55=54$$

42. 设 $z=\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}$, 求

$$\left|1+2z+3z^2+\cdots+2016z^{2015}\right|$$

记

$$S = 1 + 2z + 3z^2 + \cdots + 2016z^{2015}$$

考虑函数

$$f(x) = x + x^2 + \cdots + x^{2016} = \frac{x(x^{2016} - 1)}{x - 1},$$

则有

$$S = f'(z)$$

求导:

$$f'(x) = \frac{[(x^{2016} - 1) + 2016x^{2016}](x - 1) - x(x^{2016} - 1)}{(x - 1)^2}$$

设 $z = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = e^{\frac{i\pi}{6}}$, 由棣莫弗定理得

$$z^{2016} = \left(e^{i\pi/6}\right)^{2016} = e^{i\cdot 336\pi} = 1$$

于是

$$f'(z) = \frac{2016(z - 1)}{(z - 1)^2} = \frac{2016}{z - 1} \Rightarrow |S| = \frac{2016}{|z - 1|}$$

而

$$z - 1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) + \frac{1}{2}i$$

$$|z - 1| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$$

所以

$$|S| = \frac{2016 \cdot 2}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = 1008\sqrt{2} + 1008\sqrt{6}$$

43. 设 $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, 求

$$-\sum_{k=1}^{n-1}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n-1}(\omega^k - \omega^j).$$

设

$$P(x) = \prod_{k=1}^{n-1}(x - \omega^k) = \frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1$$

则

$$P'(x) = (n-1)x^{n-2} + (n-2)x^{n-3} + \cdots + 1$$

于是

$$\sum_{k=1}^{n-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n-1} (\omega^k - \omega^j) = -\sum_{k=1}^{n-1} P'(\omega^k)$$

观察到由于 $\omega^n = 1$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{(n-1)k} = \begin{cases} n, & k = 0 \\ \dfrac{1-\omega^{nk}}{1-\omega^k} = 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

因此

$$\sum_{k=0}^{n-1} P'(\omega^k) = 0 + \cdots + 0 + n = n$$

故

$$\sum_{k=1}^{n-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n-1} (\omega^k - \omega^j) = -\sum_{k=1}^{n-1} P'(\omega^k) = -(n - P'(1)) = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$$

44. 设复数平面上三点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ 可连成正三角形 ABC, 已知 α, β, γ 满足

$$\alpha^4 - 2\alpha^3\beta + (\beta^2 - 4)\alpha^2 + 8\alpha\gamma - 4\gamma^2 = 0$$

且 α 的实部和虚部均为正数, 当 $\triangle ABC$ 的重心 G 为 $\frac{\alpha}{2^{110}}$ 时, 求 β 及 γ 各为何?

由 $G = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} = \frac{\alpha}{2^{110}}$, 可得

$$\beta + \gamma = \frac{3\alpha}{2^{110}} - \alpha.$$

又因 ABC 是正三角形, 满足

$$\beta = \alpha + (\gamma - \alpha)\omega,$$

其中 $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$。

将 β 与 γ 表示式代入原方程, 化简可得

$$\alpha^4 - 2\alpha^3 [\alpha + (\gamma - \alpha)\omega] + \left[(\alpha + (\gamma - \alpha)\omega)^2 - 4\right] \alpha^2 + 8\alpha\gamma - 4\gamma^2 = 0.$$

经过整理与代数运算, 可解得

$$\alpha = 2 + 2i.$$

代回 $\beta+\gamma$ 与正三角形条件, 可得

$$\beta=1+(2+\sqrt{3})i, \quad \gamma=1+(2-\sqrt{3})i$$

(待验证)

45. 设 $P(z)$ 是一个 n 次复系数多项式, 其所有零点都位于复平面的单位圆上。证明多项式

$$\tilde{P}(z)=2zP'(z)-nP(z)$$

的所有零点也都位于同一单位圆上。

不妨只考虑首项系数为 1 的多项式。设

$$P(z)=(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n),$$

其中 $|\alpha_j|=1, j=1,2,\ldots,n$, 并允许这些复数 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 相同。

计算得

$$\tilde{P}(z)=2zP'(z)-nP(z)=(z+\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n)+\cdots+(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z+\alpha_n)$$

因此

$$\frac{\tilde{P}(z)}{P(z)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{z+\alpha_k}{z-\alpha_k}$$

注意到对任意复数 z,α 且 $z\neq\alpha$, 都有

$$\operatorname{Re}\frac{z+\alpha}{z-\alpha}=\frac{|z|^2-|\alpha|^2}{|z-\alpha|^2}$$

于是, 在当前情形下,

$$\operatorname{Re}\frac{\tilde{P}(z)}{P(z)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{|z|^2-|\alpha_k|^2}{|z-\alpha_k|^2}$$

由于 $|\alpha_k|=1$, 可知当 $|z|\neq 1$ 时, 上式不为零。

因此, 若 $\tilde{P}(z)=0$, 则必有

$$\operatorname{Re}\frac{\tilde{P}(z)}{P(z)}=0,$$

从而推出 $|z|=1$。这说明 $\tilde{P}(z)$ 的所有零点也都位于单位圆上。

46. 复数平面上以原点为中心的单位圆中, 有一内接四边形, 其顶点为 z_1, z_2, z_3, z_4, 设

$$S_n = z_1^n + z_2^n + z_3^n + z_4^n$$

且 $S_1 = 0$ 且 $S_2 = 1$,

(a) 证明: 若

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = 1, \quad z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$$

则 z_1, z_2, z_3, z_4 为一个矩形的顶点。

设

$$f(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4) = z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d$$

由 $S_1 = z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$ 得 $a = 0$, 又由于 $|z_k| = 1$, 有 $\bar{z}_k = \dfrac{1}{z_k}$, 于是

$$\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3} + \overline{z_4} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} + \frac{1}{z_4} = 0$$

即

$$z_2z_3z_4 + z_1z_3z_4 + z_1z_2z_4 + z_1z_2z_3 = 0$$

所以 $c = 0$, 因此

$$f(z) = z^4 + bz^2 + d$$

为偶函数, 四根关于原点成对对称, 于是可设

$$z_1 + z_3 = 0, z_2 + z_4 = 0$$

此时两对顶点互为相反数, 对角线过原点, 且 $|z_1| = |z_2| = 1$, 故为内接矩形。

(b) 计算该矩形的面积。

设

$$z_1 = a + bi, \quad z_2 = -a + bi, \quad z_3 = -a - bi, \quad z_4 = a - bi$$

由 $S_2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = 4(a^2 - b^2) = 1$ 得

$$a^2 - b^2 = \frac{1}{4}$$

又因 $|z_1| = 1$, 有 $a^2 + b^2 = 1$, 解得

$$a = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}, \quad b = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

故矩形面积为

$$2a \cdot 2b = \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

组合数学

排列与组合

1. 求满足以下条件的三位数的个数:

- 三个数字各不相同
- 数字按递减顺序排列
- 其中一个数字是 5

即先选数字 5, 再从 9 个数字中任选 2 个, 所以有

$$^9C_2 = 36$$

个这样的三位数。注意到每组都能唯一地按递减顺序排成一个三位数, 而且首位不会是 0。

2. 已知 a, b, c 为相异正整数且满足 $abc = 2310$, 求所有可能相异集合 $\{a, b, c\}$ 的个数。

发现 $2310 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$, 从 5 个因数中,

- 挑 3 个连乘积作为 a, 剩下 2 个作为 b, c, 有 $^5C_3 = 10$ 种可能。
- 挑 2 个连乘积作为 a, 剩下 3 个再挑 2 个乘积作为 b, 有 $^5C_2 \cdot {}^3C_2 = 30$ 种可能。

故共有 $10 + 30 = 40$ 种可能。

3. A 有一本共有 2017 页的书，页码从 1 到 2017。问有多少个页码同时包含至少一个数字 1 和至少一个数字 9？例如 $91, 1921, 191$ 都符合条件。

情况一: 页码为二位数。只有 $19, 91$ 满足要求, 共 2 个页码符合要求。

情况二: 页码为三位数。页码中必有数字 $1, 9$, 排列数为 $3 \cdot 2 \cdot 10$, 但此时多算了页码 $119, 191, 199, 911, 919, 991, 019, 091$, 故符合要求的页码共有 $3 \cdot 2 \cdot 10 - 6 = 52$。

情况二: 页码为三位数。千位必为数字 1, 而数字 9 可位于百位、十位或各位, 排列数为 $3 \cdot 10 \cdot 10$, 但此时多考虑了含两个数字 9 的页码，共 $3 \cdot 10$。减去其之后, 发现又少算了页码 1999。故符合要求的页码共有 $3 \cdot 10 \cdot 10 - 3 \cdot 10 + 1 = 271$。

故共有

$$2+52+271=325$$

个页码符合条件。

4. 设 N 为满足 $x<y<z$ 且

$$xyz=2^2\cdot3^2\cdot5^2\cdot7^2\cdot11^2\cdot13^2\cdot17^2\cdot19^2$$

的正整数三元组 (x,y,z) 的个数。求 N。

忽略 $x<y<z$, 先计算无序三元组 (a,b,c) 的个数, 使得

$$abc=2^2\cdot3^2\cdot5^2\cdot7^2\cdot11^2\cdot13^2\cdot17^2\cdot19^2$$

每个平方的质因数可以分配给 a,b,c 的方式有 6 种: 两个都给 a, 两个都给 b, 两个都给 c, 或者每个数各取一个。共有 8 个平方质因数, 因此共有 6^8 种分配方式。

现考虑 a,b,c 中两个数相等的情况。观察到积 abc 不是完全立方数, 所以 $a=b=c$ 不成立。计算恰有一对相等的三元组: 以 $a=b$ 为例, 每个平方质因数分配给 c, 亦或分配给 a 和 b 各一个, 共 2^8 种三元组需要排除, 同理 $a=c,b=c$ 也各有 2^8 种, 所以相异的三元组数为:

$$6^8-3\cdot2^8$$

将无序三元组 (a,b,c) 转换为有序三元组 (x,y,z), 其中 $x<y<z$, 每个三元组对应 6 个无序三元组, 因此

$$N=\frac{1}{6}(6^8-3\cdot2^8)=279808$$

5. 已知 a_0,a_1,a_2,a_3,a_4 的值正好都是 $-1,0,1$ 中的数, 则 $a_0+3a_1+3^2a_2+3^3a_3+3^4a_4$ 的值是正整数共有多少个?

形如

$$1\triangle\triangle\triangle\triangle,01\triangle\triangle\triangle,001\triangle\triangle,0001\triangle,00001$$

的数共有

$$3^4,3^3,3^2,3^1,1$$

个, 总计

$$81+27+9+3+1=121$$

6. 求正整数有序三元组 (x,y,z) 的个数，使得

$$xyz = 4000.$$

质因数分解得 $4000 = 2^5 \cdot 5^3$，设

$$x = 2^a 5^d, \quad y = 2^b 5^e, \quad z = 2^c 5^f,$$

其中 a,b,c,d,e,f 为非负整数，则需满足

$$a+b+c=5, \quad d+e+f=3$$

非负整数解的个数为

$$\#(a,b,c) = {}^{5+3-1}C_{3-1} = 21, \quad \#(d,e,f) = {}^{3+3-1}C_{3-1} = 10$$

因此有序三元组 (x,y,z) 的个数为

$$21 \cdot 10 = 210$$

7. 将 $1,2,3,4,5,6,7$ 排成一列，若规定排列后不得出现 $12,23,34,45,56,67$(如：1273546 不合题意,7362154 符合题意)，则有多少种排法？

7 个相异数字任意排列共有 $7!$ 种。

从 $12,23,34,45,56,67$ 选 12 后有 6 个板块，出现 12 的排列数为 ${}^6C_1 6!$。

依此类推，由容斥原理，总排列数为

$$7! - {}^6C_1 6! + {}^6C_2 5! - {}^6C_3 4! + {}^6C_4 3! - {}^6C_5 2! + 1 = 2119$$

8. 如果一个数的每一位都大于前一位，则称它为上升数。例如 457 是上升数，但 447 不是。问 400 到 5000 之间共有多少上升数？

情况一: 上升数为三位数。三位数必须在 400 到 999 之间，百位可以是 4,5,6,7,8,9。4 到 9 的 6 个数字中任选 3 个，按升序排列即可得到上升数。排列数为 ${}^6C_3$。

情况二: 上升数为四位数。四位数小于 5000，千位必须为 1,2,3,4。1 到 9 的数字中任选 4 个，再扣除首位 $\geqslant 5$ 的数。排列数为 ${}^9C_4 - {}^5C_4$。

因此共有
$$^6C_3 + (^9C_4 - {}^5C_4) = 141$$
个这样的上升数。

9. Ricardo 想要将三个 1、三个 2、两个 3 和一个 4 排成一个九位正整数, 且满足以下条件:

- 从左到右, 至少有一个 1 在第一个 2 之前, 至少有一个 2 在第一个 3 之前, 至少有一个 3 在 4 之前;
- 任意两个数字 2 不能相邻。

求总共有多少种符合条件的九位数。

设 N 为满足条件的整数。N 的首位必须是 1, 因此 N 可以以 1、11 或 111 开头。又因为第一个非 1 的数字必须是 2, 所以 N 只能以 12、112 或 1112 开头。

情况 1:N 以 12 开头。剩余两个 2 不能相邻, 可放在下列位置组合 (从左数第几位):
$$(4,6),(4,7),(4,8),(4,9),(5,7),(5,8),(5,9),(6,8),(6,9),(7,9)$$
共有 10 种可能。剩余两个 1 可以放在剩下的 5 个空位中的任意两位, 有 $^5C_2 = 10$ 种方法。剩余的两个 3 和一个 4 需放在最后 3 个位置中。为保证至少有一个 3 在 4 之前, 第一个空位必须放 3, 剩下两个位置放另一个 3 和一个 4, 有 2 种排列。因此本情况共有:
$$10 \cdot 10 \cdot 2 = 200.$$
情况 2:N 以 112 开头。剩余两个 2 不能相邻, 可放在:
$$(5,7),(5,8),(5,9),(6,8),(6,9),(7,9)$$
共有 6 种可能。剩余一个 1 可放在 4 个空位中的任意一位, 有 4 种方法。剩余两个 3 和一个 4 需放在最后 3 个位置中。第一个空位放 3, 剩下两个位置放另一个 3 和一个 4, 有 2 种排列。本情况共有:
$$6 \cdot 4 \cdot 2 = 48.$$
情况 3:N 以 1112 开头。剩余两个 2 不能相邻, 可放在
$$(6,8),(6,9),(7,9)$$
共有 3 种可能。剩余的两个 3 和一个 4 需放在最后 3 个位置中。第一个空位放 3, 剩下两个位置放另一个 3 和一个 4, 有 2 种排列。本情况共有:
$$3 \cdot 2 = 6.$$
综上, 共有 $200 + 48 + 6 = 254$ 种符合条件的九位数。

10. 3) 从数字 1 至 9 中选出 7 位数，要求每个数字不重复，并且 5 和 6 不能连续出现，求共有多少种排列方式。

考虑不同情况：

(a) 5 和 6 都出现：

- 情况一：第 1 位是 5，第 2 位不是 6：

$$5 \times {}^7P_5 = 12600$$

- 情况二：第 7 位是 5，第 6 位不是 6：

$$5 \times {}^7P_5 = 12600$$

- 情况三：5 出现在首尾之外的其他位置：

$$5 \times 4 \times {}^7P_5 = 50400$$

因此，5 和 6 都出现的排列数：

$$12600 + 12600 + 50400 = 75600$$

(b) 5 和 6 都不出现：

$$^7P_7 = 7! = 5040$$

(c) 5 出现但 6 不出现：

$$7 \times {}^7P_6 = 7 \times 7! = 35280$$

(d) 5 不出现但 6 可以出现：

$$7 \times {}^7P_6 = 7 \times 7! = 35280$$

根据加法原理，总排列数为：

$$75600 + 5040 + 2 \times 35280 = 151200$$

11. 令 a_n 为第 n 小的各位数字之和为 3 的正整数。例如 $a_1 = 3, a_2 = 12, a_3 = 21, a_4 = 30$。求 a_{2012} 有多少位数。

若一个数最多有 d 位, 那么其各位和为 3 的这样的数的个数为

$$^{d+2}C_3$$

这是因为我们可以用隔板法来理解: 将 3 个相同的球 (代表数字和为 3) 分配到 d 个位置 (代表 d 位数), 等价于在 $d+2$ 个位置中选择 3 个位置放置隔板。具体地, 我们在一排 $d+2$ 个位置中放置恰好 3 个 O(其余为 X), 则第 i 位的数字等于第 $i-1$ 个 X 与第 i 个 X 之间的 O 的个数。因此需找最小的 d 使得

$$^{d+2}C_3 \geqslant 2012.$$

计算得

$$^{23}C_3 = 1771, \quad ^{24}C_3 = 2024.$$

因此当 $d=22$ 时,$^{24}C_3 = 2024 \geqslant 2012$, 且 $d=21$ 时不足。故 a_{2012} 恰有 22 位。

12. 将 A,B,C,D,E,F,G,H 八个字母排成一列, 使得 B 在 A 之右方,E 在 C 与 D 之间, 且 F,G 不相邻, 试问符合条件的排法有多少种?

在所有的排列中,B 在 A 的右方与 A 在 B 的右方各占一半, 因此满足"B 在 A 的右方" 的排列占全部排列的 $\frac{1}{2}$。

同理, 在 C,D,E 三个字母的相对位置中,E 在 C 与 D 之间、C 在 E 与 D 之间、D 在 E 与 C 之间各占三分之一, 因此满足"E 在 C 与 D 之间" 的排列占全部排列的 $\frac{1}{3}$。

现计算满足"F,G 不相邻" 的排列数:

八个字母的全排列有 $8!$ 种。若 F,G 相邻, 可将它们视为一个整体, 有 $7!$ 种排法, 而 F,G 内部有 2 种排列, 因此 F,G 相邻的排法有 $7!\cdot 2$ 种。

所以 F,G 不相邻的排法有 $8!-7!\cdot 2$ 种。

由于这三个条件相互独立, 符合所有条件的排法数为:

$$\frac{8!-7!\cdot 2}{2\cdot 3} = 5040$$

13. 有 6 个人有网络账号，已知每个人都恰好与自己以外的 2 个人互为好友，则共有种不同的组成方法?

用六个顶点表示六个人，两顶点有连线表示两人互为好友。

情况一: 一个六边形。共有 $\frac{5!}{2}$ 种。

情况二: 两个三角形。共有 $\frac{{}^6C_3}{2}$ 种。

因此共有

$$\frac{5!}{2}+\frac{{}^6C_3}{2}=70$$

种组合方式。

14. 求不大于 2018 的正整数中, 二进制中 1 出现比 0 多的个数。

考虑不大于 $2047=2^{11}-1$ 且满足条件的正整数个数, 再减去 2019 至 2047 的 29 个数, 因为这 29 个数的二进制中至少有 6 个 1。

对于偶数位数（去掉开头的 1 后有偶数位）, 一半的数满足 1 的个数多于 0。具体公式为:

$$\frac{1}{2}\left(2^{2k}+{}^{2k}C_k\right)$$

因为恰好 k 个 1 的情况算一半, 其余一半满足条件, 计算:

$$\frac{1}{2}\left(2047+{}^0C_0+{}^2C_1+{}^4C_2+{}^6C_3+{}^8C_4+{}^{10}C_5\right)=1199$$

故答案为 $1199-29=1170$。Half of the numbers with an even number of bits have this property, since they have an odd number of bits after their initial 1. Of the 2^{2k} numbers with $2k$ bits following the initial 1, the number with this property is $\frac{1}{2}(2^{2k}+\binom{2k}{k})$ since those with k 1's will be included, and half of the others will.

15. 小王有八个编号为 1 到 8 的盒子和八个编号为 1 到 8 的球。问他把球放入盒子, 使每个盒子恰好有一个球, 且球 1 不在盒子 1, 球 2 不在盒子 2, 球 3 不在盒子 3, 有多少种方法?

设

$$A_1=\{\text{球 1 在盒子 1}\},\quad A_2=\{\text{球 2 在盒子 2}\},\quad A_3=\{\text{球 3 在盒子 3}\}.$$

根据容斥原理, 不允许的排列数为

$$\begin{aligned}&|A_1\cup A_2\cup A_3|\\&=|A_1|+|A_2|+|A_3|-|A_1\cap A_2|-|A_1\cap A_3|-|A_2\cap A_3|+|A_1\cap A_2\cap A_3|\\&=3\cdot 7!-3\cdot 6!+5!=13080\end{aligned}$$

因此满足条件的排列数为

$$S = 8! - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 27240$$

16. 在一排有 20 张椅子的座位区中，要安排甲、乙、丙、丁、戊 5 人入坐，一人坐一张椅子，要求第一张与最后一张椅子不能安排人入坐，且每相邻的 5 张椅子至少要有一人入坐，任两人不能坐在相邻的椅子上。试问 5 人入坐的方法有多少种可能？

20 张椅子 5 人先入坐，有 5! 排法，剩下 15 张椅子。依规定头尾各放一张，剩下 13 张；两人中间各摆一张，剩下 9 张。

9 张椅子可以在 5 人的六个间隔中摆放，有 ${}^{9+6-1}C_{6-1}$ 摆法。

为符合「相邻 5 张椅子至少要有一人坐」，需扣除某个间隔塞入四张或以上的情形，因此实际摆法有

$$5!({}^{9+6-1}C_{6-1} - {}^{6}C_1 \cdot {}^{6+5-1}C_{5-1} + {}^{6}C_2 \cdot {}^{6+1-1}C_{1-1}) = 69600$$

17. 由字母 A 和 B 组成的 9 个字母的字母串中，有多少个不包含连续字母串 $ABBA$？

总字母串数为 $2^9 = 512$，我们先计算至少包含一个 $ABBA$ 的字符串数量，再用总数减去它。

$ABBA$ 可以出现在前 6 个位置中的任意一个位置，剩余 5 个位置可以随意填充 A 或 B，因此每个起始位置有 $2^5 = 32$ 种方法，共 $6 \cdot 32 = 192$ 种字母串。

这 192 种字母串中有些被重复计算，因为 $ABBA$ 可以重叠如下:

$$xyABBABBA, \quad xABBABBAy, \quad ABBABBAxy$$

其中 x, y 可以是 A 或 B，共有 12 种。还有 6 种形为

$$xABBAABBA, \quad ABBAxABBA, \quad ABBAABBAx$$

这些被重复计算了 2 次。

根据容斥原理，因此至少包含一个 $ABBA$ 的字母串数为 $192 - 12 - 6 = 174$。故不包含 $ABBA$ 的字母串数为:

$$512 - 174 = 338$$

18. 设 Bauman 字串满足以下条件:

- 每个字母只能是 A, B, C, D, E 之一;
- 相邻两个字母不能相同。

例如 $AECD, BDCEC$ 是 Bauman 字串, 而 $ABBC, DAEEE$ 不是。

(a) 长度为 5 的 Bauman 字串中, 首尾字母都是 A 的有多少个?

若首尾均为 A, 则第二位和第四位不能是 A。按第三位分类讨论:

情形 1: 第三位是 A。字串形如 A_A_A, 第二位有 4 种选择 (B, C, D, E), 第四位有 4 种选择, 共 $4 \cdot 4 = 16$ 种。

情形 2: 第三位不是 A。第三位有 4 种选择 (B, C, D, E), 第二位需与第三位不同且不能为 A, 共 3 种选择; 第四位同理有 3 种选择, 共 $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$ 种。

总数为 $16 + 36 = 52$。

按第二位和第四位是否相同分类:

情形 1: 第二位和第四位相同。字串形如 Ax_xA(其中 x 表示第二位和第四位的字母), 第二位有 4 种选择, 第三位需与第二位不同, 有 4 种选择, 共 $4 \cdot 4 = 16$ 种。

情形 2: 第二位和第四位不同。字串形如 Axy_A(其中 x, y 分别表示第二位和第四位的字母), 第二位有 4 种选择, 第四位需与第二位不同, 有 3 种选择, 第三位需与第二位和第四位都不同, 有 3 种选择, 共 $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$ 种。

总数为 $16 + 36 = 52$。

(b) 长度为 6 的 Bauman 字串中, 包含超过一个 B 的有多少个?

总字串数为 $5 \cdot 4^5 = 5120$(首位 5 种选择, 其余每位 4 种选择)。

无 B 的字串: 首位 4 种选择 (A, C, D, E), 其余每位 3 种选择 (需与前一位不同且不能是 B), 共 $4 \cdot 3^5 = 972$ 种。

恰有 1 个 B 的字串:

- 若 B 在首位或末位:
  - B 在首位: 第二位 4 种, 其余每位 3 种, 共 $1 \cdot 4 \cdot 3^4 = 324$ 种
  - B 在末位: 首位 4 种, 第二到第五位中第二位 3 种, 其余每位 3 种, 共 $4 \cdot 3^4 = 324$ 种
- 若 B 在第 2 到第 5 位 (共 4 个位置): 每个位置,B 前一位 4 种,B 后一位 4 种, 其余 3 个位置各 3 种, 每个位置贡献 $4 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3^3 = 432$ 种, 共 $4 \cdot 432 = 1728$ 种

恰有 1 个 B 的总数为 $324 + 324 + 1728 = 2376$。

超过 1 个 B 的数目为:

$$5120 - 972 - 2376 = 1772.$$

长度为 6 的 Bauman 字串中，由于相邻字母不能相同,B 最多出现 3 次。故只需计算恰有 2 个 B 或恰有 3 个 B 的字串数。

情形 1: 恰有 3 个 B。三个 B 必须间隔放置。可能的位置模式有:

- $B\_B\_B\_$(第 1, 3, 5 位): 第 2, 4, 6 位各 4 种选择, 共 $4^3 = 64$ 种
- $\_B\_B\_B$(第 2, 4, 6 位): 第 1, 3, 5 位各 4 种选择, 共 $4^3 = 64$ 种
- B_B_B(第 1, 3, 5 位): 第 2 位 4 种, 第 4 位 4 种, 第 6 位 3 种, 共 $4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$ 种
- $\_B\_B\_$(第 2, 4, 6 位): 第 1 位 4 种, 第 3 位 4 种, 第 5 位 3 种, 共 $4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$ 种

合计 $64 + 64 + 48 + 48 = 224$ 种。

情形 2: 恰有 2 个 B。从 6 个位置中选 2 个放 B, 有 ${}^6C_2 = 15$ 种选择, 但需排除相邻的 5 种, 剩余 10 种位置模式。

逐一计数 (用下划线表示非 B 位置):

- $B\_\_\_\_B\_$: 第 2 位 4 种, 第 4 位 4 种, 第 5, 6 位各 3 种, 共 $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 144$ 种
- $\_\_\_B\_\_\_B$: 对称, 同样 144 种
- $B\_\_\_B\_\_\_$: 第 2, 4 位各 4 种, 第 5 位需与第 4 位不同有 3 种, 第 6 位 3 种, 共 $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 144$ 种
- $\_\_\_B\_B\_$: 对称, 同样 144 种
- $B\_B\_\_\_\_$: 第 2 位 4 种, 第 4, 5, 6 位各 3 种, 共 $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 108$ 种
- $\_\_\_\_B\_B$: 对称, 第 1 位 4 种, 第 2, 3 位各 3 种, 第 5 位 3 种, 共 $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 108$ 种
- $B\_B\_\_\_\_$: 第 2 位 4 种, 第 4 位需与第 3 位不同有 4 种, 第 5, 6 位各 3 种, 共 $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 144$ 种
- $\_\_\_B\_B$: 对称, 同样 144 种

- $B\_\_\_\_\_\_B$: 第 2 位 4 种, 第 3, 4, 5 位各 3 种, 共 $4 \cdot 3^3 = 108$ 种
- $\_B\_B\_\_\_$: 第 1, 3, 5 位各 4 种, 第 6 位 3 种, 共 $4^3 \cdot 3 = 192$ 种

合计 $4 \cdot 144 + 2 \cdot 108 + 2 \cdot 144 + 108 + 192 = 1548$ 种。

恰 2 个 B 的有 1548 种, 恰 3 个 B 的有 224 种, 总和为 $1548 + 224 = 1772$。

19. 将字母串 $AAAABBBCCC$ 排成一列, 且相同字母不相邻的排法有多少种?

按 B,C 的排列分类, 再插入 A。先排列 3 个 B 和 3 个 C 的相对次序, 记为「BC 串」。共有

$$^6C_3 = \frac{6!}{3!3!} = 20$$

种 BC 串。按 BC 串中出现相邻同字母的" 块数" 分类, 列举如下:

编号	字串
1	$BCBCBC$
2	$CBCBCB$
3	$BCCBCB$
4	$CBCBBC$
5	$BCBCCB$
6	$CBBCBC$
7	$BCCBBC$
8	$CCBBCB$
9	$BCBBCC$
10	$CCBCBB$
11	$BBCCBC$
12	$CBBCCB$
13	$BBCBCC$
14	$CBCCBB$
15	$CBBBCC$
16	$CCBBBC$
17	$BBCCCB$
18	$BCCCBB$
19	$CCCBBB$
20	$BBBCCC$

现在将 4 个 A 插入 BC 串的空位中, 使得任何相同字母都不相邻:

1. BC 串中没有相邻同字母（编号 1–2）：有 7 个空位插入 4 个 A, 方式数 ${}^{7}C_4 = 35$, 对应 2 种 BC 串, 共 $2 \cdot 35 = 70$。
2. 有 1 处相邻同字母（编号 3–6）：此时剩 6 个空位插入 4 个 A（等价插入 3 个 A 以避免产生相邻相同字母），方式数 ${}^{6}C_3 = 20$, 对应 4 种 BC 串, 共 $4 \cdot 20 = 80$。
3. 有 2 处相邻同字母（编号 7–14）：剩 5 个空位插入 2 个 A, 方式数 ${}^{5}C_2 = 10$, 对应 8 种 BC 串, 共 $8 \cdot 10 = 80$。
4. 有 3 处相邻同字母（编号 15–18）：剩 4 个空位插入 1 个 A, 方式数 ${}^{4}C_1 = 4$, 对应 4 种 BC 串, 共 $4 \cdot 4 = 16$。
5. 有 4 处相邻同字母（编号 19–20）:A 恰好插满一组, 计 2 种。

合计:

$$70 + 80 + 80 + 16 + 2 = 248$$

根据容斥原理, 相同字母不相邻的排法数

$$= 4 \text{ 个 A 不相邻} - (\text{至少 2 个 B 相邻} \cup \text{至少 2 个 C 相邻})$$

4 个 A 不相邻: 先排 3 个 B 和 3 个 C, 有 ${}^{6}C_3 = 20$ 种方式, 产生 7 个空位, 在其中插入 4 个 A, 有 ${}^{7}C_4 = 35$ 种方式, 共 $20 \cdot 35 = 700$ 种。

至少 2 个 B 相邻: 将 2 个 B 看作一个整体 BB, 与剩余 1 个 B 和 3 个 C 排列, 有 $\frac{5!}{3!} = 20$ 种方式, 产生 6 个空位插入 4 个 A, 有 ${}^{6}C_4 = 15$ 种方式, 共 $20 \cdot 15 = 300$ 种。

但这样会重复计算 3 个 B 都相邻的情况。当 3 个 B 都相邻时, 将它们看作 BBB, 与 3 个 C 排列有 4 种方式, 产生 5 个空位插入 4 个 A, 有 ${}^{5}C_4 = 5$ 种方式, 共 $4 \cdot 5 = 20$ 种。

因此至少 2 个 B 相邻为 $300 - 20 = 280$ 种。

由对称性, 至少 2 个 C 相邻也是 280 种。

至少 2 个 B 相邻且至少 2 个 C 相邻: 将 2 个 B 看作 BB,2 个 C 看作 CC, 与剩余 1 个 B 和 1 个 C 排列, 有 $4! = 24$ 种方式, 产生 5 个空位插入 4 个 A, 有 ${}^{5}C_4 = 5$ 种方式, 共 $24 \cdot 5 = 120$ 种。

需扣除 3 个 B 都相邻的情况:BBB, CC, C 排列有 $3! = 6$ 种, 产生 4 个空位插入 4 个 A, 有 ${}^{4}C_4 = 1$ 种, 共 $6 \cdot 1 = 6$ 种。

同样扣除 3 个 C 都相邻的情况:6 种。

因此至少 2 个 B 相邻且至少 2 个 C 相邻为 $120-6-6=108$ 种。

最终答案为

$$^6C_3{}^7C_4-\left[2\times\left(\frac{5!}{3!}{}^6C_4-4{}^5C_4\right)-\left(4!{}^5C_4-2\times3!{}^4C_4\right)\right]=248$$

20. 要爬 12 级台阶, 但每步只能上 1 级或 2 级。第 8 级有一条蛇, 所以不能踩。问共有多少种爬法?

由于第 8 级不能踩, 必须从第 7 级迈 2 级直接到第 9 级。于是问题可以拆成两段:

- 爬前 7 级的方式数
- 从第 9 级到第 12 级的方式数

总数为

$$({}^7C_0+{}^6C_1+{}^5C_2+{}^4C_3)\cdot3=63$$

21. 在集合 $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ 的所有非空子集 S 中, 有多少个子集不包含数 $|S|$($|S|$ 表示子集元素个数)? 例如 $\{3,4\}$ 是这样的子集, 因为它不包含数字 2。

非空子集总数为 $2^7-1=127$。若子集大小为 k 且包含数字 k, 则剩下的 $k-1$ 个元素必须从另外的 6 个数中选取, 共有

$$^6C_{k-1}$$

种。对 $k=1,2,\ldots,7$ 求和得包含其大小的子集总数为

$$\sum_{k=1}^{7}{}^6C_{k-1}=\sum_{j=0}^{6}{}^6C_j=2^6=64.$$

因此不包含其大小的子集个数为

$$127-64=63.$$

22. 有多少个非负整数有序四元组 (a,b,c,d) 满足 $a+b+c+d\leqslant15$?

将不等式转化为等式

$$a+b+c+d+e=15,$$

其中 $e\geqslant 0$, 则原题等价于求此方程的非负整数解个数。根据隔板法, 有

$$^{15+5-1}C_{5-1}={}^{19}C_4=3876$$

个非负整数有序四元组。

23. 以一个正方体的顶点为顶点的四面体共有多少个?

从正方体的 8 个顶点中任取 4 点:

$$^{8}C_4=70$$

需扣除 4 点共平面的情形, 包括正方体的六个面, 共 6 种; 斜平面, 共 6 种。所以四面体个数为

$$70-12=58$$

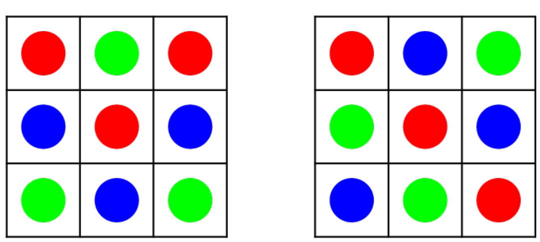
24. 在 5 只蜗牛进行的比赛中, 最多只会出现一次打平, 但可以接受任意数量的蜗牛打平。例如, 比赛结果可能是 Dazzler 获得第一名;Abby、Cyrus 和 Elroy 并列第二名, 而 Bruna 获得第五名。问这种比赛共有多少种不同的结果?

考虑没有、两只、三只、四只、五只蜗牛打平, 总共有

$$5!+{}^5C_2\cdot 4!+{}^5C_3\cdot 3!+{}^5C_4\cdot 2!+1=431$$

个不同的结果。

25. 在一个 3×3 的网格中, 放置 3 个红色棋子、3 个蓝色棋子和 3 个绿色棋子, 所有棋子同色不可相邻（横或竖方向）, 且棋子同色不可区分。请问满足条件的放置方法有多少种?



观察发现，只存在两种基本的放置方法（如上图所示），其他放置方法只能通过这两种结构旋转或颜色变化得到，所以总合法方案数为

$$(4+2)\cdot 3! = 36$$

26. 小明在注册账号时可以使用字符 $1, 2, 3, a, b, c, A, B, C$ 来组成五位密码，但要求必须包含数字、小写字母和大写字母，且不可以出现两个相同的字符相邻，例如密码可以设置为 $123aA$ 或 $laA12$，但不能设置为 $123ab$ 或 $112aA$，试求可以设置不同的密码的个数。

先考虑相邻字符不同的密码，共有 $9\cdot 8^4 = 36864$ 种，这里面不满足密码要求的有两类:

- 仅包含单一字符类型 (如全数字)，这类共有 $3\cdot(3\cdot 2^4) = 144$ 种
- 仅包含两种字符类型 (如数字和小写字母)，只满足相邻不同的密码有 $6\cdot 5^4 = 3750$ 种，但此时我们多算了 $2\cdot(3\cdot 2^4) = 96$ 种单一字符类型，故第二类共有 $3\cdot(3750-96) = 10962$ 种

不同密码的总个数为 $36864 - 144 - 10962 = 25758$.

27. 阿绿想在她的表演服装上缝 6 颗相同的红色钮扣、3 颗相同的绿色钮扣和 3 颗相同的黄色钮扣。若所有钮扣需竖直地排成一直线，且相邻钮扣不同色，则阿绿有多少种排列方法?

假设红、绿、黄钮扣为 R, G, Y，先将 $6R$ 排成一列，共 7 个间隔。由于同色不相邻，必须将中间 5 个间隔放入 $3G$ 与 $3Y$ 中的五个。

情况一: 5 个间隔放 $3G2Y$ 且剩下 $1Y$ 放头或尾端。排列数有 ${}^5C_3\cdot 2$。

情况二: 5 个间隔放 $2G3Y$ 且剩下 $1G$ 放头或尾端。排列数有 ${}^5C_3\cdot 2$。

情况三: 5 个间隔放 $3G2Y$ 且剩下 $1Y$ 不放头尾。可能情况有 $G\cdot G\cdot Y\cdot Y\cdot \boxed{GY}$, $G\cdot G\cdot Y\cdot Y\cdot \boxed{YG}$，排列数各有 $\dfrac{5!}{2!2!}$。

故排列方法共有

$$ {}^5C_3\cdot 2 + {}^5C_3\cdot 2 + \frac{5!}{2!2!} + \frac{5!}{2!2!} = 100$$

28. 在一个 3×3 的方格中，每个小方格被涂成红、白、蓝、绿四种颜色中的一种，要求任何 2×2 的小方格块都恰好包含四种不同的颜色。共有多少种不同的涂色方案?

先固定中心格: 中心格有 4 种颜色可选。再考虑中心行的左右两格:

- 两格同色。共有 3 种颜色可供选择, 此时上下行个别有 2 种填色方法, 共 $2^2 = 4$ 种合法填法。
- 两格异色。左格 3 种选, 右格再 2 种选, 共 $3 \cdot 2 = 6$ 种。在此情况下, 其余 4 个角格的颜色被唯一地确定。

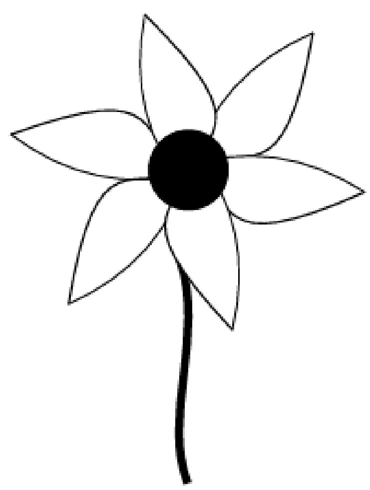
故方法数共有

$$4 \cdot (3 \cdot 4 + 6) = 72$$

29. Rita 正在给一朵花涂色。她已经涂好了花心和花茎。接下来, 她将用红色、橙色、黄色和蓝色给六片花瓣涂色, 每片花瓣只用一种颜色。规则如下:

- 相邻的花瓣不能涂相同的颜色;
- 不一定要用到所有四种颜色。

求共有多少种不同的涂法数?



不失一般性, 假设顶端花瓣为红色。

情况 1: 红色出现三次。由于相邻花瓣不能同色, 红色只能出现在特定的三片花瓣上, 其余三片花瓣可以任意用其他 3 种颜色涂色, 因此这种情况下共有

$$3^3 = 27 \text{ 种涂法。}$$

情况 2: 红色出现两次。分情况讨论,

- 两红色花瓣之间相隔两个花瓣。与顶端红色花瓣相邻的两片花瓣可以各自用 3 种颜色涂色, 剩余两片花瓣可以各自用 2 种颜色涂色, 总共有

$$3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 36 \text{ 种方式。}$$

- 两红色花瓣之间相隔一个花瓣。两红色花瓣可能在顶端及左侧或右侧, 红色花瓣之间的花瓣可以用 3 种颜色, 其他三片花瓣根据两种或三种颜色组合有 $6+6=12$ 种方式, 因此该配置共有

$$2 \cdot 3 \cdot 12 = 36 \text{ 种方式。}$$

情况 3: 红色出现一次。按顺时针给花瓣涂色（从红色顶端开始）: 第一片花瓣有 3 种选择, 接下来的四片花瓣每片有 2 种选择（不能和相邻花瓣相同, 也不能用红色）, 因此共有

$$3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 48 \text{ 种方式。}$$

顶端花瓣可以选择 4 种颜色, 故

$$N = 4 \cdot (27 + (36 + 36) + 48) = 732$$

30. 一位农夫拥有一个矩形农田, 它被划分成 2×2 的四块矩形区域。在每块区域中, 农夫将种植一种作物: 玉米、小麦、大豆或土豆。农夫不希望玉米和小麦出现在相邻的两块地中, 也不希望大豆和土豆出现在相邻的两块地中。在这些限制下, 农夫有多少种不同的方法为这四块地选择作物?

注意到: 对于每种作物, 有恰好一种作物是不能与其相邻的。不失一般性, 设左上角种的是小麦。

情况一: 左上角右边和下边两个相邻地块种的是相同的作物。这两块地不能种玉米（因为玉米不能与小麦相邻）, 因此它们可以是小麦、大豆或土豆中的一种, 共有 3 种选择, 对于右下角地块, 只要与周围的两块地都不冲突即可, 有 3 种选择。

情况二: 右边和下边两块地种的是不同的作物。可从 3 种合法作物中选择两个不同的, 并安排在右和下两个位置, 共有 $3 \cdot 2 = 6$ 种方式, 此时右下角地块的选择只有 2 种。

综合两种情况相加并乘以左上角作物的 4 种选择, 总方法数为

$$4 \cdot (3 \cdot 3 + 6 \cdot 2) = 84$$

31. 三双不同的鞋子被排成一列, 要求不能有一只左脚鞋与另一双的右脚鞋相邻。问共有多少种排法?

设鞋子编号如下: 右脚鞋:1, 2, 3, 左脚鞋:4, 5, 6, 其中 n 与 $n+3$ 配对（例如 1 和 4 是一对）。

不妨设右脚鞋 1 出现在排列中的第二个位置。此时我们枚举前三个位置可能的情况:

- 剩下的三个鞋子只能是
$$654 \quad 或 \quad 645$$
因为 5 或 4 不可以和 3（另一双的右脚鞋）相邻。
- 剩下的三个鞋子只能是
$$563$$
（不能选 365, 因为 6 和 5 是不同双鞋的左、右脚, 会相邻）
- 剩下的三个鞋子可以是
$$256 \quad 或 \quad 652$$

所以总方法数为
$$(2+1+2)\times 12=\boxed{60}$$
其中乘上 12 是因为我们一开始假设了鞋子 1 出现在第二位, 实际有 2 种选哪个右脚鞋先出现,6 种选配对顺序, 所以总共乘 12。实际有 2 种选哪个右脚鞋先出现?

32. 竹东高中的多元选修课程共开设了六门选修课:A,B,C 为第一类选修课,D,E,F 为第二类选修课, 要求每名同学须从中选修三门课, 第一类选修课至少要选两门。现有甲、乙、丙三位同学选课, 则任意一位同学与其他两位同学均至少有两门相同选修课的选法共有几种?

每个同学可能的选法有
$$ABC, ABD, ABE, ABF, ACD, ACE, ACF, BCD, BCE, BCF,$$
共 10 种; 甲、乙、丙三人共有 $10^3=1000$ 种选法。

不符规定的选法分析如下:

- 第一人选了 ABC: 第二人在第一类有 ${}^3C_2=3$ 种选法, 第三人在第一类只能与第二人重复一门课, 因此有 2 种选法; 第二人在第二类的课程有 3 种选择, 第三人有 2 种选择, 共有 $3\cdot 2\cdot 3\cdot 2=108$ 种。

- 第一人、第二人在第一类完全相同: 第三人在第一类只有 2 种选择, 在第二类课程中三人任选再扣除三人完全相同, 即 3^3-3; 共有 ${}^3C_2\cdot 3\cdot 2\cdot(3^3-3)=432$ 种。

- 三人在第一类彼此最多重复一门课: 第一类的选择有 $3!=6$, 第二类与情况 (2) 相同, 即 3^3-3; 共有 $6\cdot(3^3-3)=144$ 种。

因此符合要求的选法共有

$$1000-108-432-144=316$$

33. 下图显示了一个宽为 3 格、高为 3 格的点阵, 共包含 9 个小正方形。Carl 在这些正方形的边上放置长为 $\dfrac{1}{2}$ 英寸的牙签, 要求形成一个不相交的闭合环。图中某些格子内标注了一个数字, 表示该格子被牙签覆盖的边数。若无数字, 则该格子可以被任意数量的牙签覆盖。求 Carl 放置牙签的可能方法数。

由于牙签回路不能穿过中间的五列, 所以整个回路只有两种大致布局:

情况一: 不穿过第二行。只剩下 2 种回路（对称）。

情况一: 必须穿过第二行（左、右各穿一次）。则

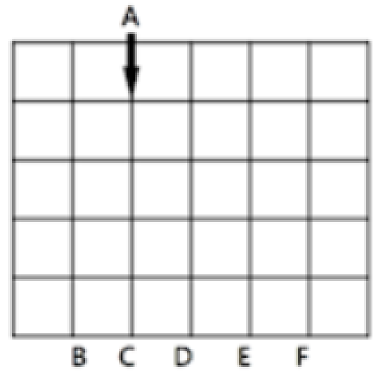
- 中间四个标 1 的小方格, 各有两种放牙签方式, 共 2^4;

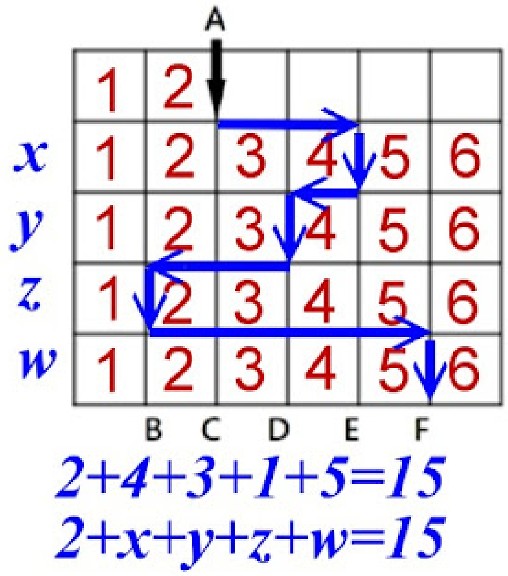
- 回路在左右两侧穿过第二行, 各有 3 种走法, 共 3^2。

因此所有合法回路总数为

$$2^4\cdot 3^2+2=146$$

34. 有一张由 5×6 个正方形组成的格线纸, 如右图。小强想沿着实线以向左、向右及向下的方向将格线纸剪成两张面积相等的纸张, 并且先由 A 点向下剪一格, 最后从 B,C,D,E,F 中某一点剪断纸张。问有多少种不同的剪法?





格线纸共有 $5\times 6=30$ 个方格。设剪线左侧从上往下第 $1,2,3,4,5$ 行的方格数分别为 $2,x,y,z,w$，需满足

$$2+x+y+z+w=15,\quad 1\leqslant x,y,z,w\leqslant 5,\quad x,y,z,w\in\mathbb{N}$$

令 $x'=x-1,y'=y-1,z'=z-1,w'=w-1$，则

$$x'+y'+z'+w'=9,\quad 0\leqslant x',y',z',w'\leqslant 4$$

总方法数即不考虑 $0\leqslant x',y',z',w'\leqslant 4$ 的情况扣除 x',y',z',w' 中至少有一个大于 4 的情况:

$${}^{9+4-1}C_{4-1}-4\cdot {}^{4+4-1}C_{4-1}=80$$

35. 考虑集合 $\{1,2,3,\ldots,2024\}$ 的所有恰有 1000 个元素的子集。对于每个这样的子集 S, 记 $m(S)$ 为 S 中的最小元素。求所有 $m(S)$ 的算术平均数。

设最小元素为 a, 则有选择余下 999 个元素的方法数为

$$^{2024-a}C_{999}, \quad a=1,2,\ldots,1025 \quad (1025=2024-999).$$

算术平均数为

$$\frac{\sum_{a=1}^{1025} a\cdot {}^{2024-a}C_{999}}{\sum_{a=1}^{1025} {}^{2024-a}C_{999}} = \frac{^{2025}C_{1001}}{^{2024}C_{1000}} = \frac{2025}{1001}$$

利用组合恒等式 $\sum_{k=r}^{n} {}^{k}C_r = {}^{n+1}C_{r+1}$, 令 $k=2024-a$, 当 a 从 1 到 1025 时,k 从 2023 到 999:

$$\sum_{a=1}^{1025} {}^{2024-a}C_{999} = \sum_{k=999}^{2023} {}^{k}C_{999} = {}^{2024}C_{1000}$$

利用恒等式:

$$\sum_{i=r}^{n} {}^{i}C_r = {}^{n+1}C_{r+1}$$

以及权重求和恒等式:

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)\cdot {}^{n-k}C_r = {}^{n+1}C_{r+2}$$

令 $k=a-1$, 则 $a=k+1$, 当 a 从 1 到 1025 时,k 从 0 到 1024:

$$\sum_{a=1}^{1025} a\cdot {}^{2024-a}C_{999} = \sum_{k=0}^{1024}(k+1)\cdot {}^{2024-(k+1)}C_{999} = \sum_{k=0}^{1024}(k+1)\cdot {}^{2023-k}C_{999}$$

利用恒等式 $\sum_{k=0}^{n-r}(k+1)\cdot {}^{n-k}C_r = {}^{n+2}C_{r+2}$:

令 $n=2023$, $r=999$:

$$\sum_{k=0}^{1024}(k+1)\cdot {}^{2023-k}C_{999} = {}^{2025}C_{1001}$$

(待解)

36. 用数字 1、2、3 组成 10 位数, 要求其中数字 1 出现次数为偶数。求这样的 10 位数的个数。

设 a_n 表示长度为 n 的、由 1、2、3 组成且数字 1 出现偶数次的序列个数。

- 若首位为 2 或 3（共 2 种选择），则余下 $n-1$ 位仍需 1 出现偶数次，方案数为 $2a_{n-1}$。
- 若首位为 1（1 种选择），则已有一个 1，余下 $n-1$ 位中 1 需出现奇数次。余下 $n-1$ 位的总序列数为 3^{n-1}，其中 1 出现偶数次的为 a_{n-1}，故出现奇数次的为 $3^{n-1}-a_{n-1}$。

因此，当 $n>1$ 时，有递推关系：

$$a_n = 2a_{n-1} + (3^{n-1} - a_{n-1}) = a_{n-1} + 3^{n-1}, \quad a_1 = 2$$

求通项

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3^k = 2 + \frac{3(3^{n-1}-1)}{2} = \frac{3^n+1}{2}$$

代入 $n=10$ 得

$$a_{10} = \frac{3^{10}+1}{2} = 29525$$

37. 某语言只使用字母 A,B,C,D,E，其中 A 和 E 为元音,B,C,D 为辅音。一个字母序列称为单词，当且仅当它不含有相邻两个相同字母，且不含有相邻两个元音。问该语言中长度为 10 且以元音开头的单词有多少个？

设 v_n 为长度为 n 且以元音开头的单词数,c_n 为长度为 n 且以辅音开头的单词数。据题意，

$$v_1 = 2,\ c_1 = 3$$

若 $n \geqslant 2$，则

$$v_n = 2c_{n-1},$$

因为在辅音开头的 $(n-1)$ 字母单词前可加 A 或 E。且有

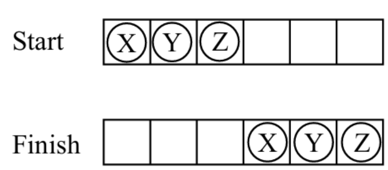
$$c_n = 3v_{n-1} + 2c_{n-1},$$

其中 $3v_{n-1}$ 意味可在元音开头的 $(n-1)$ 字母单词前加 B,C,D, $2c_{n-1}$ 意味可在辅音开头的 $(n-1)$ 字母单词前加不同于首字母的两个辅音。递推如下表:

n	v_n	c_n
1	2	3
2	6	12
3	24	42
4	84	156
5	312	564
6	1128	2064
7	4128	7512
8	15024	27408
9	54816	99888
10	199776	364224

因此，长度为 10 且以元音开头的单词共有 199776 个。

38. 有六个格子，初始时三个硬币从左到右依次占据前三个格子（记为 X, Y, Z）。一次移动是将某一枚硬币向右移动一格，前提是目标格子为空，且硬币之间不能相互跳跃（因此三枚硬币的相对顺序始终保持 X 在 Y 左边,Y 在 Z 左边）。问：有多少种不同的移动序列，能使三枚硬币最终全部移动到最右边的三个格子？



我们将每个允许的移动序列看作由 X, Y, Z 组成的字符串。例如，字符串 $ZZYXZ$ 表示先移动 Z 一格，再移动 Z, Y, X, Z。

对于每个整数三元组 (x, y, z)，其中 $0 \leqslant x, y, z \leqslant 3$，定义 $S(x, y, z)$ 为使 X 移动 x 格,Y 移动 y 格,Z 移动 z 格的移动序列数。欲求 $S(3,3,3)$。

由于硬币不能交叉且只能向右移动，当 $x > y$ 或 $y > z$ 或 $x > z$，有 $S(x, y, z) = 0$。因此仅需考虑 $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant z \leqslant 3$ 的情况。此时有

$$S(x, y, z) = S(x-1, y, z) + S(x, y-1, z) + S(x, y, z-1)$$

其中当 $x = 0$ 时 $S(x-1, y, z) = 0, y = 0$ 时 $S(x, y-1, z) = 0, z = 0$ 时 $S(x, y, z-1) = 0$，且

$$S(0,0,0) = 1, \quad S(1,0,0) = 0, \quad S(0,1,0) = 0, \quad S(0,0,1) = 1$$

接下来通过表格逐步填入 $S(x,y,z)$, 其中 $z=1,2,3$, 纵轴为 y, 横轴为 x。

y \ x	0	1	2	3
0	1	0	0	0
1	1	1	0	0
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0

$z=1$

y \ x	0	1	2	3
0	1	0	0	0
1	2	3	0	0
2	2	5	5	0
3	0	0	0	0

$z=2$

y \ x	0	1	2	3
0	1	0	0	0
1	3	6	0	0
2	5	16	21	0
3	5	21	42	42

$z=3$

由表得

$$S(0,0,1)=1(Z),\quad S(0,1,1)=1(ZY),\quad S(1,1,1)=1(ZYX)$$

因此序列的数量为 $S(3,3,3)=42$。

39. 给定数字集合 $\{1,2,4,8,16,32,64,128\}$, 每个数字最多可使用 3 次, 问：用这些数字之和恰好等于 530 的方案数有多少种？

每个数字 2^k 可以出现 $0,1,2,3$ 次, 对应多项式

$$1+x^{2^k}+x^{2\cdot 2^k}+x^{3\cdot 2^k}.$$

考虑生成函数

$$(1+x+x^2+x^3)(1+x^2+x^4+x^6)(1+x^4+x^8+x^{12})\cdots(1+x^{128}+x^{256}+x^{384}).$$

因式分解得

$$\frac{x^4-1}{x-1}\cdot\frac{x^8-1}{x^2-1}\cdots\frac{x^{512}-1}{x^{128}-1}=(1+x+x^2+\cdots+x^{255})(1+x^2+x^4+\cdots+x^{510}).$$

要得到 x^{530}, 记作 $x^{2i}\cdot x^{530-2i}$, 其中 $10\leqslant i\leqslant 127$, 共有 118 个 i 的取值, 因此方法数为 118。

40. 求正整数有序三元组 (a_1,a_2,a_3) 的个数, 使得

$$a_1+a_2+a_3=2020,\quad a_1\not\equiv 0\pmod 2,\quad a_2\not\equiv 0\pmod 3,\quad a_3\not\equiv 0\pmod 4$$

a_1 为奇数, 生成函数为

$$x+x^3+x^5+\cdots=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2}=\frac{x}{1-x^2}$$

a_2 不可被 3 整除, 生成函数为

$$x+x^2+x^4+x^5+\cdots=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^3}=\frac{x(1-x^2)}{(1-x)(1-x^3)}$$

a_3 不可被 4 整除, 生成函数为

$$x+x^2+x^3+x^5+x^6+x^7+\cdots=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^4}=\frac{x(1-x^3)}{(1-x)(1-x^4)}$$

三式相乘得总生成函数

$$\frac{x}{1-x^2}\cdot\frac{x(1-x^2)}{(1-x)(1-x^3)}\cdot\frac{x(1-x^3)}{(1-x)(1-x^4)}=\frac{x^3}{(1-x)^2(1-x^4)}$$

因此所求为 x^{2020} 的系数, 即 x^{2017} 在

$$(1+2x+3x^2+\cdots)(1+x^4+x^8+\cdots)$$

中的系数, 即

$$2+6+10+\cdots+2018=505\cdot 1010=510050$$

41. 给定正立方体 $ABCD-EFGH$, 其中 $ABCD$ 为底面,$EFGH$ 为顶面,A 与 E 对应,B 与 F 对应,C 与 G 对应,D 与 H 对应。一只小虫从顶点 A 出发, 每分钟沿一条棱移动到相邻顶点(每次移动一条棱)。问：经过恰好 9 分钟后, 小虫到达顶点 G 的不同路径数为多少？

转换矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&1&1&0&0&0\\1&0&1&0&0&1&0&0\\0&1&0&1&0&0&1&0\\1&0&1&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&1&0&1\\0&1&0&0&1&0&1&0\\0&0&1&0&0&1&0&1\\0&0&0&1&1&0&1&0\end{bmatrix}$$

发现

$$A^9=\begin{bmatrix}0&4921&0&4921&4921&0&4920&0\\4921&0&4921&0&0&4921&0&4920\\0&4921&0&4921&4920&0&4921&0\\4921&0&4921&0&0&4920&0&4921\\4921&0&4920&0&0&4921&0&4921\\0&4921&0&4920&4921&0&4921&0\\4920&0&4921&0&0&4921&0&4921\\0&4920&0&4921&4921&0&4921&0\end{bmatrix}$$

故由

$$A^9\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\4921\\0\\4921\\4921\\0\\4920\\0\end{bmatrix}$$

可知 $A\to G$ 有 4920 种路线。(待递推解)

概率、期望值

1. 正八面体有 8 个全等的正三角形面。任取 3 个面, 其面心组成的三角形是正三角形的概率是多少?

正八面体的对偶多面体是正方体, 其面心对应正方体的 8 个顶点。等边三角形对应正方体中形如正四面体侧面的三角形, 共 8 个, 因此概率为

$$\frac{8}{{}^{8}C_3}=\frac{1}{7}$$

2. 给定正八边形 $PQRSTUVW$。从中随机选择 4 条边并将其延长为直线, 问: 这 4 条直线相交所形成的四边形恰好包含原八边形的概率是多少?

选择的四条边相邻, 或未选的三条相邻边及一条不相邻的边, 皆不能形成包含原八边形的四边形, 这样的组合数有

$$8+8\cdot 3=32$$

所求概率为

$$\frac{{}^{8}C_4-32}{{}^{8}C_4}=\frac{19}{35}$$

3. X 是从 $\{1,2,...,9\}$ 中随机抽取 3 个不同的数排列出的最大的三位数, Y 是从 $\{1,2,...,8\}$ 中随机抽取 3 个不同的数排列出的最大的三位数, 求 $X>Y$ 的概率。

若 X 的三个数字中包含 9, 则由其组成的最大三位数一定大于由 1 到 8 中任意三个数字组成的最大三位数, 此时 $X>Y$ 恒成立, 这样的 X 排列数有 ${}^{8}C_2$, 因此

$$P(X>Y)=\frac{{}^{8}C_2\cdot {}^{8}C_3}{{}^{9}C_3\cdot {}^{8}C_3}=\frac{1}{3}$$

4. 在数字 $1,2,3,4,5,6,7$ 的所有排列中, 求至少有两个相邻数字不互质的概率。

先对奇数 $1, 3, 5, 7$ 排列, 有 ${}^4P_4$ 种排法。

数字 6 不能与 3 相邻,4 个奇数间有 5 个空位, 去除 3 的左右两个空位, 剩 3 个空位可放 6, 有 3 种放法。

数字 2 和 4 放在剩余 4 个空位, 共有 ${}^4P_2$ 种排法。

故至少有两个相邻数字不互质的概率为

$$1 - \frac{{}^4P_4 \cdot 3 \cdot {}^4P_2}{7!} = \frac{29}{35}$$

5. 设 A 和 B 是从集合 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 中随机选出的子集, 允许 $A = B$。求事件“A 包含于 B 或 B 包含于 A”的概率。

$A \subseteq B$ 当且仅当不存在元素 x 满足 $x \in A$ 且 $x \notin B$, 即概率为

$$P(A \subseteq B) = \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^6 = \left(\frac{3}{4}\right)^6$$

同理 $P(B \subseteq A) = \left(\frac{3}{4}\right)^6$, 且

$$P(A = B) = \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

根据容斥原理, 所求概率为

$$2\left(\frac{3}{4}\right)^6 - \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{697}{2048}$$

6. Alice 和 Bob 各自有一副相同的牌, 包含 3 张红牌、3 张白牌和 3 张蓝牌。他们轮流从自己的牌中随机抽取一张牌, 且不放回。Alice 先抽。求 Alice 在 Bob 抽到任何红牌之前抽完她的所有红牌的概率。

每个人都将 9 张牌随机排列, 考虑每个人的 3 张红牌的位置。共有

$${}^9C_3^2$$

种可能。

考虑一条长度为 10 的序列，由 Alice 抽牌直到她抽到第 3 张红牌为止，再加上 Bob 在 Alice 抽到第 3 张红牌后接下来抽的牌。为了满足条件，这条序列中必须有 6 张红牌，我们在枚举这些情况。

因此概率为

$$\frac{{}^{10}C_6}{{}^{9}C_3^2} = \frac{5}{168}.$$

(待验证, lehigh 2025 q15)

7. 掷一个公平的六面骰子连续十次。求出现恰好三个 6 连在一起的概率。(四个或更多连续的 6 不计。)

情况一：三个 6 在序列的一端，且相邻数字不是 6：有 2 种方式，对应概率为

$$2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \frac{5}{6}$$

情况二：三个 6 在序列中间，两边相邻数字都不是 6：有 6 种方式，对应概率为

$$6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

总概率为

$$\left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(2 \cdot \frac{5}{6} + 6 \cdot \frac{25}{36}\right) = \frac{35}{1296}$$

8. 投掷一枚均匀硬币 8 次。已知在前 3 次投掷中至少出现一次正面，求 8 次投掷中恰好出现 4 次正面的概率。

前 3 次投掷中至少出现一次正面且 8 次投掷中恰好有 4 次正面的情形，即前 3 次及后 5 次有 1 正 3 正、2 正 2 正、3 正 1 正，方法数为

$${}^3C_1{}^5C_3, {}^3C_2{}^5C_2, {}^3C_3{}^5C_1$$

8 次投掷中前 3 次都是反面的方法数为 2^5，前 3 次至少 1 次正面的方法数为 $2^8 - 2^5$，因此所求概率为

$$\frac{{}^3C_1{}^5C_3 + {}^3C_2{}^5C_2 + {}^3C_3{}^5C_1}{2^8 - 2^5} = \frac{65}{224}$$

9. 有三个碗, 每个碗里各有 6 个球。现随机选择一个碗, 再选择一个不同的碗, 把第一个碗中的一个球移动到第二个碗。经过 5 次这样的移动后, 三个碗再次各有 6 个球的概率是多少?

设碗标为 A, B, C。为了最终三个碗各有 6 个球, 必须有两个碗各被拿走 2 个球, 第三个碗只被拿走 1 个球。选择只拿走 1 个球的碗有 3 种方法, 假设为碗 A。

这个移球的回合有 5 种选择, 并且球要移到的碗有 2 种选择。

若从 A 移到 B, 则必须从 C 移回 A, 否则无法使 B 和 C 最终数量相等。这个移动的回合有 4 种选择。

剩下 3 次移动必须是 2 次从 B 到 C,1 次从 C 到 B, 这三次的顺序有 3 种。

综上, 有 $3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3$ 种序列使三碗最终各有 6 个球, 每次移动有 $3 \cdot 2 = 6$ 种可能, 因此总共有 6^5 种可能的移动序列, 因此所求概率为

$$\frac{3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3}{6^5} = \frac{5}{108}$$

10. 一个正立方体骰子六个面上分别有 $2, 3, 4, 5, 6, 7$ 个点。随机移除一个点 (每个点被移除的概率相等) 后投掷这个骰子, 求朝上的面的点数为奇数的概率。

移除一个点后, 如果从偶数点的面移除一个点, 该面变为奇数点。如果从奇数点的面移除一个点, 该面变为偶数点。

情况 1: 从偶数点的面移除。则有 4 个奇数点面和 2 个偶数点面, 掷出奇数点的概率为 $\frac{4}{6}$。

情况 2: 从奇数点的面移除。则有 2 个奇数点面和 4 个偶数点面, 掷出奇数点的概率为 $\frac{2}{6}$。

移除某个面的点的概率为该面点数除以 $2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 27$, 所求概率为

$$\frac{2}{27} \cdot \frac{4}{6} + \frac{3}{27} \cdot \frac{2}{6} + \frac{4}{27} \cdot \frac{4}{6} + \frac{5}{27} \cdot \frac{2}{6} + \frac{6}{27} \cdot \frac{4}{6} + \frac{7}{27} \cdot \frac{2}{6} = \frac{13}{27}$$

11. A 和 B 玩一场卡牌游戏。A 有 6 张牌: 2 张红色、2 张黄色、2 张绿色。B 有 4 张牌: 2 张紫色、2 张白色。两人轮流出牌,A 先出。每回合, 玩家随机选择一张自己手中的牌放到桌上。若某玩家在桌上放出两张同色牌, 则该玩家获胜。求 A 获胜的概率。

游戏一定在 B 的第三回合之前结束, 故 A 只能在自己的第二回合或第三回合获胜, 且不能在第一回合直接获胜。

情况 1:A 第二回合获胜。A 第二张牌必须和第一张同色。此时 A 还剩 5 张牌, 其中 1 张与第一张同色, 所以概率为 $\frac{1}{5}$。A 和 B 的第一张牌没有限制。

情况 2:A 第三回合获胜。需满足 A 第二张牌颜色与第一张不同,B 第二张牌颜色与她的第一张不同且 A 第三张牌与他前两张牌之一同色, 概率为

$$\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{4}{15}$$

综上,A 获胜的概率为

$$\frac{1}{5}+\frac{4}{15}=\frac{7}{15}$$

12. C 参加一个比赛, 比赛中没有平局, 她会一直比赛直到输掉 2 场比赛为止, 此时她将被淘汰, 不再继续比赛。已知:

- 第一场比赛获胜的概率为 $\frac{1}{2}$
- 若上一场获胜, 则下一场获胜的概率为 $\frac{3}{4}$
- 若上一场失败, 则下一场获胜的概率为 $\frac{1}{3}$

求 C 在被淘汰之前 (即输掉第 2 场之前) 恰好赢得 3 场比赛的概率。

C 赢 3 场比赛且输少于 2 场比赛的概率, 可能的情况有赢 3 场, 输 0 场或赢 3 场, 输 1 场。以 W 表示胜利,L 表示失败, 比赛结果可能的序列为

$$WWW,\quad LWWW,\quad WLWW,\quad WWLW.$$

故所求概率为

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{7}{16}$$

13. A 有 12 个桶:3 个绿色、3 个红色、3 个蓝色和 3 个黄色。他将球随机放入桶中:

- 将 4 个球随机放入 3 个绿色桶 (每个球独立地等概率选择一个绿色桶)
- 将 3 个球随机放入 3 个红色桶

- 将 2 个球随机放入 3 个蓝色桶
- 将 1 个球随机放入 3 个黄色桶

求存在一个绿色桶, 其中的球数皆多于其他 11 个桶中任何一个桶的球数的概率。

以 (a, b, c) 表示 3 个桶中球的无序分布。黄色桶分布只能是 $(1, 0, 0)$。

蓝色桶: 将 2 个球放入 3 个桶, 总共有 $3^2 = 9$ 种方法。

- $(2, 0, 0)$: 2 个球在同一个桶, 有 3 种方式,
- $(1, 1, 0)$: 2 个球分在不同桶, 有 $9 - 3 = 6$ 种方式。

红色桶: 将 3 个球放入 3 个桶, 总共有 $3^3 = 27$ 种方法。

- $(3, 0, 0)$: 3 个球在同一个桶, 有 3 种方式,
- $(1, 1, 1)$: 每个桶 1 个球, 有 ${}^3C_2 = 6$ 种方式,
- $(2, 1, 0)$: 其余 18 种方式。

绿色桶: 将 4 个球放入 3 个桶, 总共有 $3^4 = 81$ 种方法。

- $(4, 0, 0)$: 3 种方式,
- $(3, 1, 0)$: $4 \cdot 3! = 24$ 种方式,
- $(2, 1, 1)$: $4 \cdot 3 \cdot \dfrac{3!}{2!} = 36$ 种方式,
- $(2, 2, 0)$: 其余 18 种方式。

要使绿色桶中的球比其他 11 个桶都多, 可能的情况及概率如下:

绿色	红色	蓝色	黄色	概率
$(4, 0, 0)$	任意	任意	任意	$\frac{3}{81}$
$(3, 1, 0)$	不是 $(3, 0, 0)$	任意	任意	$\frac{24}{81} \cdot \frac{24}{27}$
$(2, 1, 1)$	$(1, 1, 1)$	$(1, 1, 0)$	任意	$\frac{36}{81} \cdot \frac{6}{27} \cdot \frac{6}{9}$

其中分布 2/2/0 不符合条件, 因为没有单个绿色桶的球数比其他桶多, 故所求概率为

$$\frac{3}{81} + \frac{24}{81} \cdot \frac{24}{27} + \frac{36}{81} \cdot \frac{6}{27} \cdot \frac{6}{9} = \frac{89}{243}$$

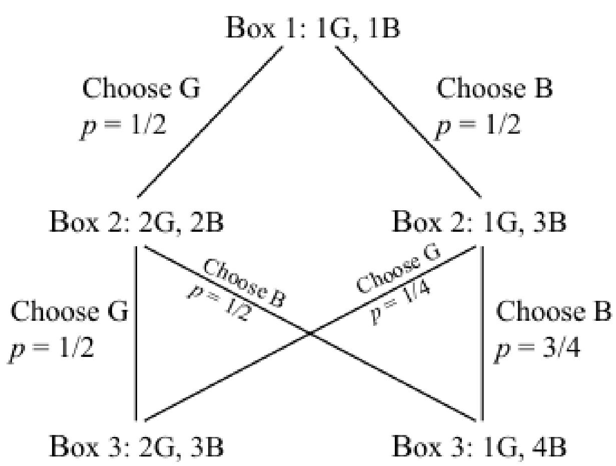
14. 有三个盒子:

- 盒子 1 里有 1 个金球和 1 个黑球;
- 盒子 2 里有 1 个金球和 2 个黑球;
- 盒子 3 里有 1 个金球和 3 个黑球。

每次从一个盒子里随机抽取一个球, 盒子里每个球被选中的概率相等。过程如下:

1. 从盒子 1 中随机抽一个球, 放入盒子 2;
2. 然后从盒子 2 中随机抽一个球, 放入盒子 3;
3. 最后从盒子 3 中随机抽一个球。

求从盒子 3 中抽到金球的概率。



从盒子 1 抽到金球及黑球的概率皆为 $\frac{1}{2}$。

若从盒子 1 抽到金球, 盒子 2 将有 2 个金球和 2 个黑球; 若从盒子 1 抽到黑球, 盒子 2 将有 1 个金球和 3 个黑球。

若盒子 2 中有 2 金 2 黑, 抽到金球的概率为 $\frac{1}{2}$。若盒子 2 中有 1 金 3 黑, 抽到金球的概率为 $\frac{1}{4}$。

放入盒子 3 后, 盒子 3 有 2 金 3 黑的概率为

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{8},$$

此时从盒子 3 抽到金球的概率为

$$\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{5}+\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{5}=\frac{11}{40}$$

15. 八个人分属三个家庭, 围坐在圆桌旁。其中两个家庭各有 3 人, 另一个家庭有 2 人。求每个人都有至少一个来自不同家庭的邻座的概率。

对座位编号, 并将同一家庭的成员视为不可区分。8 个人的座位排列总数为:

$$\frac{8!}{3!3!2!}=560$$

现探讨至少有一人使得其邻座都来自自己家庭, 即 3 人家庭坐在一起的排列数。设家庭 A 和 B 各有 3 人, 家庭 C 有 2 人。要求家庭 A 的 3 人坐在一起, 视他们为一个整体, 有 8 种方式选择这个整体的起始位置, 剩余 5 个人的排列数为 $\frac{5!}{3!2!}$。因此家庭 A 坐在一起的排列数为

$$8\cdot\frac{5!}{3!2!}=80$$

同理, 家庭 B 坐在一起的排列数也是 80。若家庭 A 和 B 都坐在一起, 则将两个家庭各看作一个整体, 排列数有

$$8\cdot\frac{3!}{2!}=24$$

由容斥原理, 至少有一人使得其邻座都来自自己家庭的排列数为

$$80+80-24=136$$

所求概率为

$$\frac{560-136}{560}=\frac{53}{70}$$

16. 八支队伍参加一项比赛, 采用单循环赛制 (即任意两支队伍之间恰好进行一场比赛)。每场比赛没有平局, 两支队伍各有 $\frac{1}{2}$ 的获胜概率。求每支队伍都至少输一场且至少赢一场的概率。

共有 ${}^{8}C_2=28$ 场比赛, 因此总共有 2^{28} 种可能的比赛结果。

当一支队伍全胜, 同时另一支队伍全败时, 选择全胜队有 8 种, 全败队有 7 种, 它们之间的比赛及与其他队伍的比赛结果已经确定, 剩下的 $28-7-6=15$ 场比赛未确定, 因此至少有一支队伍全胜或全败的结果数为

$$8\cdot 2^{21}+8\cdot 2^{21}-8\cdot 7\cdot 2^{15}=2^{15}\cdot 968$$

则每支队伍都至少输一场且至少赢一场的概率为

$$1-\frac{2^{15}\cdot 968}{2^{28}}=\frac{903}{1024}$$

17. 盒子中有大小, 形状完全相同的 3 个红球,3 个白球, 现抛掷一枚质地均匀的骰子, 掷出几点就从盒子中取出几个球, 求取出的球中红球个数大于白球个数的概率。

记从盒子中取出 i 个球, 取出的球中红球个数大于白球个数的概率为 P_i $(i=1,2,...,6)$, 则

$$\begin{aligned}&P_1=\frac{{}^3C_1{}^3C_0}{{}^6C_1}=\frac{1}{2},\quad P_2=\frac{{}^3C_2{}^3C_0}{{}^6C_2}=\frac{1}{5},\quad P_3=\frac{{}^3C_2{}^3C_1+{}^3C_3{}^3C_0}{{}^6C_3}=\frac{1}{2},\\&P_4=\frac{{}^3C_3{}^3C_1}{{}^6C_4}=\frac{1}{5},\quad P_5=\frac{{}^3C_3{}^3C_2}{{}^6C_5}=\frac{1}{2},\quad P_6=0.\end{aligned}$$

所以取出的球中红球个数大于白球个数的概率为

$$\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{2}+0\right)=\frac{19}{60}$$

18. A,B,C 独立参加考试。已知:

- A 及格且 B 不及格的概率为 $\frac{3}{20}$;
- B 及格且 B 不及格的概率为 $\frac{1}{4}$;
- A 和 C 都及格的概率为 $\frac{2}{5}$。

求至少有一人不及格的概率。

设 A,B,C 及格的概率为 a,b,c, 由于及格与否为独立事件, 据题意有

$$a(1-b)=\frac{3}{20},\quad b(1-c)=\frac{1}{4},\quad ac=\frac{2}{5}$$

解得

$$(8b+1)(4b-3)=0\Rightarrow b=\frac{3}{4}>0$$

因此至少有一人不及格的概率为

$$1-abc=1-\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{7}{10}$$

19. 将一块正方形厚纸板划分成 $5 \times 5 = 25$ 个面积相等的小正方格。现将三枚不同颜色的棋子随机放置在小正方格的中心, 每个小正方格最多放一枚棋子。求这三枚棋子的位置不共线 (即构成三角形) 的概率。

三点共线的方法数有

$$16 \cdot {}^3C_3 + 4 \cdot {}^4C_3 + 12 \cdot {}^5C_3 = 152$$

因此三点不共线（即能构成三角形）的概率为

$$\frac{{}^{25}C_3 - 152}{{}^{25}C_3} = \frac{537}{575}$$

20. 从圆内随机选择四个不同的点, 这四个点确定四个三角形 (包括可能出现的退化三角形)。随机选择其中两个三角形, 求圆心位于所选两个三角形的并集内的概率。

首先计算圆心位于四个三角形并集内的概率。圆心不在四个三角形的并集内, 当且仅当四点位于某条直径的同一侧, 即它们在圆上的径向投影也在直径同侧。此时恰好存在一个点, 其余三个点位于该点顺时针方向 180 度的弧内。对于给定点, 其余三个点落在该弧内的概率为

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8},$$

因此四个点中任一点作为该点的概率为 $4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$。因此圆心不在凸包内的概率为 $\frac{1}{2}$, 所以圆心在凸包内的概率也为 $\frac{1}{2}$。

接下来考虑随机选择两三角形。四点确定四个三角形, 它们的交集互不重叠。共有 ${}^4C_2 = 6$ 对三角形。圆心在随机选择的一对三角形交集内的概率为 $\frac{1}{6} = \frac{2}{12}$。因此圆心在所选两三角形并集内的概率为

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{5}{12}.$$

We first calculate the probability that the center is in the union of the four triangles. The center does not lie in the union of the four triangles iff the four points lie on the same side of some diameter of the circle iff this is true of their radial projections onto the circle iff for one of these, the other three are within 180 degrees clockwise of the point, and such a point is essentially unique. Given a point, the probability that the other three lie in this arc is $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$, so the probability that the center does not lie in the convex hull is $4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$.Ignoring possibilities with probability 0, the center lies in the union of the four triangles iff it lies in the intersection of two of the triangles, and these possibilities are disjoint. Since there are six pairs, the probability of the center lying in a randomly selected intersection is $\frac{1}{6}=\frac{2}{12}$. The center is in the union of the two selected triangles iff it is in the union of the four but not in the intersection of the two which we did not select. This probability is $\frac{1}{2}-\frac{1}{12}$.

21. A 和 B 轮流进行游戏,A 先开始。每轮中:

- A 投掷一枚公平硬币, 若出现正面则 A 获胜, 游戏结束
- 若 A 未获胜, 则 B 投掷一枚公平骰子, 若出现 3 则 B 获胜, 游戏结束
- 若 B 也未获胜, 则进入下一轮,A 再次投掷

游戏持续进行直到某人获胜。求 B 获胜的概率。

设事件 N 表示 B 掷出的数不是 3, 则 B 获胜的可能顺序为

$$T3, \quad TNT3, \quad TNTNT3, \ \ldots$$

每种顺序的概率分别为:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{12}, \quad \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{144}, \ \ldots$$

这是一个等比数列, 公比为 $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{5}{6}=\dfrac{5}{12}$, 因此 B 获胜的概率为

$$\frac{\frac{1}{12}}{1-\frac{5}{12}}=\frac{1}{7}$$

22. 圆圈中有 25 人, 随机选出 3 人, 求所选三人互不相邻的概率。

先固定被选中的一人 A, 其余两人必须从不与 A 相邻的 22 人中选出, 且这 22 人在圆上形成一条线段, 因此其中相邻的成对共有 21 对, 于是可行对数为

$${}^{22}C_2-21$$

由于三人中谁充当 A 都可以, 上式被重复计数 3 次, 故满足条件的三人组数为

$$\frac{25}{3}({}^{22}C_2-21)$$

所选三人互不相邻的概率为

$$\frac{\frac{25}{3}({}^{22}C_2-21)}{{}^{25}C_3}=\frac{35}{46}$$

23. 三对已婚夫妇随机围坐在一张圆桌旁, 求没有夫妻相邻的概率。

先固定 A 先生的座位, 其他五人的排列共有 $5!$ 种。

情况 1:A 女士坐在 A 先生对面。此时 B 先生有 4 种选择,B 女士不坐他旁边有 2 种选择, 剩下两人顺序 2 种选择, 共 $4 \cdot 2 \cdot 2$ 种。

情况 2:A 女士与 A 先生之间间隔一人。这个人有 4 种选择, 其配偶必须坐在其他三个座位的中间位置,C 夫妇有 2 种选择, 且 A 女士与 A 先生可互换位置, 共 $4 \cdot 2 \cdot 2$ 种。

因此概率为

$$\frac{4 \cdot 2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 \cdot 2}{5!} = \frac{4}{15}$$

24. 伯克利市每天的天气要么是雨天, 要么是雾天, 其中天气与前一天相同的概率为 $\frac{3}{4}$。如果我们只知道今天是雨天, 求 7 天后仍是雨天的概率。

7 天后仍是雨天的概率为

$$\begin{aligned}
& P(\text{天气完全没变}) + P(\text{天气变恰好 2 次}) + P(\text{天气变恰好 4 次}) + P(\text{天气变恰好 6 次}) \\
&= {}^{7}C_{0}\left(\frac{1}{4}\right)^{0}\left(\frac{3}{4}\right)^{7} + {}^{7}C_{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{5} + {}^{7}C_{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{3} + {}^{7}C_{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{6}\left(\frac{3}{4}\right)^{1} \\
&= \frac{129}{256}
\end{aligned}$$

25. 袋中有红球 5 个、白球 3 个、黑球 4 个, 若每球被选取的机会均等, 每次由袋中取一球, 取后不放回, 取完为止, 则黑球最先取完的概率为?

$$\frac{5}{5+4} + \frac{3}{3+4} - \frac{5+3}{5+3+4} = \frac{20}{63}$$

26. 一对实数 (a, b) 在闭单位圆盘内均匀随机选取, 即满足

$$a^2 + b^2 \leqslant \frac{1}{4}.$$

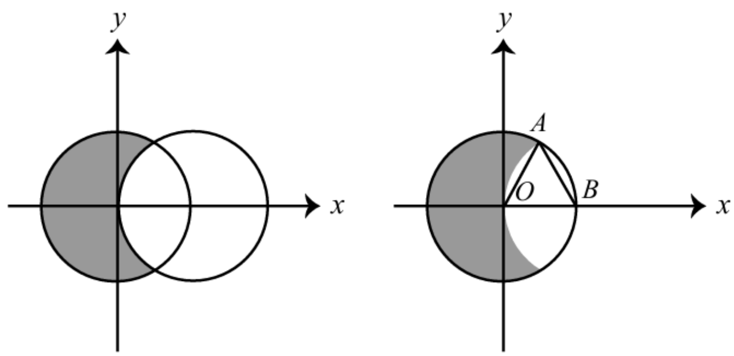
求二次函数

$$y = ax^2 + 2bx - a$$

与曲线

$$y = x^2$$

相交的概率。



曲线相交当且仅当方程

$$(a-1)x^2 + 2bx - a = 0$$

有实根, 此时判别式为非负:

$$(2b)^2 - 4(a-1)(-a) \geqslant 0 \Rightarrow \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + b^2 \geqslant \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

实数 (a, b) 满足在圆 $a^2 + b^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ 内但在圆 $\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + b^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ 外, 以阴影部分表示, 面积为

$$\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(2 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}$$

所求概率为

$$\frac{\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \approx 0.609$$

27. 一只蚂蚁从立方体的一个顶点出发, 每次可以走到与当前位置相邻的三个顶点中的任意一个。求四步后, 蚂蚁回到出发点的概率。

设蚂蚁起点为 $(0, 0, 0)$, 三步后, 蚂蚁抵达顶点 $(1, 1, 1)$ 的概率为

$$\frac{3!}{3^3} = \frac{2}{9},$$

否则，蚂蚁会停在 $(1,0,0),(0,1,0)$ 或 $(0,0,1)$。

若三步后位于 $(1,1,1)$，蚂蚁下一步无法回到 $(0,0,0)$；但如果三步后在 $(1,0,0),(0,1,0)$ 或 $(0,0,1)$，则第四步回到 $(0,0,0)$ 的概率均为 $\frac{1}{3}$。

故四步后回到出发点的概率为

$$\frac{7}{9}\cdot\frac{1}{3}=\frac{7}{27}$$

28. 一只蚂蚁在正方体 $ABCD-EFGH$ 的顶点 A 处，每次等概率地爬行到相邻三个顶点中的一个，那么六次爬行之后回到顶点 A 处的概率为

将立方体顶点坐标设为 $(0,0,0)$ 或 1，蚂蚁从 $(0,0,0)$ 出发。每步蚂蚁改变一个坐标的值（$0\leftrightarrow 1$）。要在六步后回到原点，每个坐标必须被改变偶数次。设三个坐标变化次数分别为 $x,y,z\geqslant 0$，且 $x+y+z=6$，且 x,y,z 都是偶数。可行的组合为

$$(0,0,6),\ (0,6,0),\ (6,0,0),\ (0,2,4),\ (0,4,2),\ (2,0,4),\ (2,4,0),\ (4,0,2),\ (4,2,0),\ (2,2,2)$$

每个组合对应的步序列数由多项式系数计算:

$$(2,2,2)\to\frac{6!}{2!2!2!}=90,\quad (0,2,4)\text{ 及类似组合}\to\frac{6!}{0!2!4!}=15$$

前六种 $(0,2,4)$ 类型组合共有 6 种，贡献步序列总数 $6\cdot 15=90$。加上 $(2,2,2)$ 的 90，总共有 180 种有效序列。总步数序列数为 $3^6=729$。因此概率为

$$\frac{180}{729}=\frac{20}{81}.$$

(chatgpt, 待解)

29. 一只蚂蚁从正八面体的一个顶点出发，每一步随机走到相邻顶点。求 10 步后它回到出发点的概率。

设 a_n,b_n,c_n 分别为走 n 步后蚂蚁在 (a) 出发点、(b) 与出发点相邻的四个顶点、(c) 对面顶点的概率。有递推关系

$$a_n=\frac{1}{4}b_{n-1},\quad c_n=\frac{1}{4}b_{n-1},\quad b_n=a_{n-1}+\frac{1}{2}b_{n-1}+c_{n-1}$$

消去 a_n,c_n 得

$$b_n=\frac{1}{2}b_{n-1}+\frac{1}{2}b_{n-2}$$

特征方程为 $x^2=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$, 解得 $x=1,-\dfrac{1}{2}$, 故

$$b_n=\alpha\cdot 1^n+\beta\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

初值 $a_0=1,b_0=c_0=0$, 所以 $b_1=1$, 可得 $\alpha=\dfrac{2}{3},\beta=-\dfrac{2}{3}$, 即

$$b_n=\frac{2}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

于是

$$a_{10}=\frac{1}{4}b_9=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^9\right)=\frac{513}{3072}$$

30. 一只蜜蜂在三维空间中移动。掷一个公平的六面骰子, 骰子的六个面分别标记为 $\pm x,\pm y,\pm z$。假设蜜蜂当前所在点为 (x,y,z)。若骰子显示 $+x$, 则蜜蜂移动到点 $(x+1,y,z)$; 若骰子显示 $-x$, 则蜜蜂移动到点 $(x-1,y,z)$。其他四个面以此类推。已知蜜蜂从点 $(0,0,0)$ 出发, 掷骰子四次。求蜜蜂经过的四条边恰好是某单位立方体上的四条不同边的概率。

由乘法原理及想象力, 概率为

$$1\cdot\frac{4}{6}\cdot\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}+\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}\right)=\frac{7}{54}$$

31. 两支队伍正在进行“三局两胜”的系列赛: 最多进行 3 场比赛, 率先赢下 2 场的队伍获胜。第一场比赛在 A 队的主场进行, 后两场在 B 队的主场进行。A 队在主场赢的概率是 $\dfrac{2}{3}$, 在客场赢的概率是 p。各场比赛的结果是独立的。若 A 队赢得整个系列赛的概率是 $\dfrac{1}{2}$, 求 p 的值。

已知 A 队主场胜率为 $\dfrac{2}{3}$, 客场胜率为 p。三局两胜赛制下,A 队赢下系列赛的情形只有

$$\text{AA, ABA, BAA}$$

于是有

$$\frac{2}{3}p+\frac{2}{3}(1-p)p+\frac{1}{3}p^2=\frac{1}{2}$$

解得

$$p=\frac{1}{2}(4-\sqrt{10})\leqslant 1$$

32. 一个不均匀的骰子, 掷出 $1,2,3,4,5,6$ 点的概率依次成等差数列. 独立地先后掷该骰子两次, 所得的点数分别记为 a,b. 若事件“$a+b=7$”发生的概率为 $\frac{1}{7}$, 求事件“$a=b$”发生的概率。

设掷出 $1,2,\ldots,6$ 点的概率分别为 $p_1,p_2,\ldots,p_6$。由于 $p_1,p_2,\ldots,p_6$ 成等差数列, 且 $p_1+p_2+\cdots+p_6=1$, 故

$$p_1+p_6=p_2+p_5=p_3+p_4=\frac{1}{3}$$

事件“$a+b=7$”发生的概率为

$$P_1=p_1p_6+p_2p_5+\cdots+p_6p_1$$

事件“$a=b$”发生的概率为

$$P_2=p_1^2+p_2^2+\cdots+p_6^2$$

于是

$$P_1+P_2=(p_1+p_6)^2+(p_2+p_5)^2+(p_3+p_4)^2=3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{3}$$

由于 $P_1=\frac{1}{7}$, 所以

$$P_2=\frac{1}{3}-\frac{1}{7}=\frac{4}{21}$$

设掷出点数 $1,2,3,4,5,6$ 的概率依次为 $p-5d,p-3d,p-d,p+d,p+3d,p+5d$, 据题意有

$$(p-5d)+(p-3d)+(p-d)+(p+d)+(p+3d)+(p+5d)=1 \tag{1}$$

$$2[(p-5d)(p+5d)+(p-3d)(p+3d)+(p-d)(p+d)]=\frac{1}{7} \tag{2}$$

由 (1) 得 $p=\frac{1}{6}$, 由 (2) 化简得

$$6p^2-70d^2=\frac{1}{7}\Rightarrow 70d^2=\frac{1}{42}$$

于是

$$\begin{aligned}P(a=b)&=(p-5d)^2+(p-3d)^2+(p-d)^2+(p+d)^2+(p+3d)^2+(p+5d)^2\\&=6p^2+70d^2=\frac{1}{6}+\frac{1}{42}=\frac{4}{21}\end{aligned}$$

33. 设甲、乙、丙三位射手之命中率依次为 p,q,r，其中 $p\geqslant q\geqslant r$。今三人同打一靶且互不影响，各发一弹时，此靶不中弹之概率为 $\dfrac{1}{4}$，恰中一弹之概率为 $\dfrac{11}{24}$，恰中二弹之概率为 $\dfrac{1}{4}$，求序组 (p,q,r)。

据题意,

$$\begin{cases}pqr=1-\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{11}{24}+\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{24},\\ p(1-q)(1-r)+q(1-r)(1-p)+r(1-p)(1-q)=\dfrac{11}{24},\\ pq(1-r)+qr(1-p)+rp(1-q)=\dfrac{1}{4},\end{cases}$$

其中 $p\geqslant q\geqslant r$, 解得

$$pqr=\frac{1}{24},\quad pq+qr+rp=\frac{3}{8},\quad p+q+r=\frac{13}{12},$$

因此 p,q,r 为三次方程

$$t^3-\frac{13}{12}t^2+\frac{3}{8}t-\frac{1}{24}=0\Rightarrow(2t-1)(3t-1)(4t-1)=0$$

的三个根, 解得

$$(p,q,r)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right)$$

34. 在区间 $[0,10]$ 上等概率地随机选取一个数 y。以点 $(0,y)$ 为斜边一端点, 斜边另一端点位于非负 x 轴上, 并与原点 $(0,0)$ 共同构成一个斜边长度为 10 的直角三角形。求该三角形面积大于 15 的概率。

由斜边长度 10 可得面积条件为

$$\frac{1}{2}xy=\frac{1}{2}y\sqrt{100-y^2}>15$$

解得

$$y<\sqrt{10}\quad\text{或}\quad y>\sqrt{90}$$

所求概率为

$$\frac{\sqrt{90}-\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{10}}{5}$$

35. 设甲袋中有 5 颗白球、2 颗黑球, 乙袋中有 3 颗白球。先自甲袋中任取 4 颗球放入乙袋, 再

从乙袋中任取 5 颗球放入甲袋, 完成一次操作称为一局。已知每颗球被抽到的机会均等, 若第一局结束时甲袋中有黑球, 求过程中过甲袋取得 2 颗白球、2 颗黑球放入乙袋的概率。

情况一: 甲取 4 白球入乙, 再从乙任取 5 球入甲。

$$P_1 = \frac{{}^5C_4}{{}^7C_4} = \frac{1}{7}$$

情况二: 甲取 3 白 1 黑入乙, 再从乙任取 5 球入甲。

$$P_2 = \frac{{}^5C_3{}^2C_1}{{}^7C_4} = \frac{4}{7}$$

情况三: 甲取 2 白 2 黑入乙, 再从乙任取 4 白 1 黑球入甲。

$$P_3 = \frac{{}^5C_2{}^2C_2}{{}^7C_4} \cdot \frac{{}^5C_4{}^2C_1}{{}^7C_5} = \frac{20}{147}$$

情况四: 甲取 2 白 2 黑入乙, 再从乙任取 3 白 2 黑球入甲。

$$P_4 = \frac{{}^5C_2{}^2C_2}{{}^7C_4} \cdot \frac{{}^5C_3{}^2C_2}{{}^7C_5} = \frac{20}{147}$$

已知第一局结束时甲袋中有黑球, 因此条件概率为

$$\frac{P_3 + P_4}{P_1 + P_2 + P_3 + P_4} = \frac{8}{29}$$

36. 三个人玩一个游戏, 轮流掷一枚公平的六面骰子。若掷出 5 或 6 则该玩家立即获胜, 游戏结束; 若掷出 1 或 2 则该玩家被淘汰。游戏继续进行, 直到有人获胜, 或者只剩下一人, 则该人获胜。问第一个掷骰子的人获胜的概率是多少?

设第一个掷骰子的人为 A, 任意一次掷出 1,2,5,6 的概率是 $\frac{2}{3}$, 故 A 第一个掷出 1,2,5,6 的概率为

$$\frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right) = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{9}{13}$$

而此时 A 有 $\frac{1}{2}$ 的概率掷出 5 或 6 从而立即获胜。

若 A 不是第一个掷出 1,2,5,6 的人 (概率为 $\frac{4}{13}$), 那么第一个掷出 1,2,5,6 的人有 $\frac{1}{2}$ 的概率掷出 1 或 2 被淘汰。此时只剩下两人,A 与另一人各有 $\frac{1}{2}$ 的获胜机会。

综上, 第一个掷骰子的人获胜的概率为

$$\frac{9}{13}\cdot\frac{1}{2}+\frac{4}{13}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{11}{26}$$

37. 反复抛掷一枚公平硬币, 直到第一次出现序列 HTH 为止。求在此过程中, 序列 $THTH$ 从未出现过的概率。(例如, 事件包含 $HHTH$, 但不包含 $TTHTH$。)

设事件 E 表示在序列 $THTH$ 出现之前先出现 HTH。若当前已出现的前缀为 s, 则记 $P(E\mid s)$ 为在以 s 开始的条件下事件 E 发生的概率。定义

$$x=P(E\mid H),\quad y=P(E\mid T)$$

根据一步分析法, 有

$$x=\frac{1}{2}P(E\mid HH)+\frac{1}{4}P(E\mid HTT)+\frac{1}{4}P(E\mid HTH)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{4},$$

$$y=\frac{1}{2}P(E\mid TT)+\frac{1}{4}P(E\mid THH)+\frac{1}{8}P(E\mid THTT)+\frac{1}{8}P(E\mid THTH)=\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}y$$

解得

$$x=\frac{3}{4},\quad y=\frac{1}{2}$$

因此所求概率为

$$\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y=\frac{5}{8}$$

38. 反复抛掷一枚公平硬币, 直到出现连续四个正面 $HHHH$ 或连续六个反面 $TTTTTT$ 为止。求事件“$HHHH$ 先于 $TTTTTT$ 出现”的概率。

设事件 E 表示在序列 $TTTTTT$ 出现之前先出现 $HHHH$。对任意当前末尾已出现的序列 s, 记 $P(E\mid s)$ 为在条件 s 下事件 E 发生的概率。定义

$$x=P(E\mid H),\quad y=P(E\mid T).$$

根据后续可能的状态转移, 可得到方程组（按下一次或若干次投掷展开）:

$$x=\frac{7}{8}y+\frac{1}{8},\quad y=\frac{31}{32}x$$

因此

$$x=\frac{32}{39},\quad y=\frac{31}{39}$$

由于初始时无既定前缀（在第一次投掷前）, 所求概率为

$$\frac{1}{2}(x+y)=\frac{21}{26}$$

39. 四位玩家各自掷一个标准六面骰子, 点数最大者获胜。如果出现平手, 则平手者继续掷骰, 直到一人胜出。H 是其中之一。已知他最终获胜, 求他第一轮掷出点数为 5 的条件概率。

设事件 A 为“H 首掷为 5”, 事件 B 为“H 获胜”, 根据贝叶斯公式,

$$P(A \mid B)=\frac{P(B \mid A)\cdot P(A)}{P(B)}.$$

已知 $P(A)=\frac{1}{6}, P(B)=\frac{1}{4}$, 而 $P(B \mid A)$ 如下分情况:

- 其他人都掷出 $\leqslant 4$, 概率为 $\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$
- 恰一人也掷 5, 概率 $3\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{9}$
- 恰两人也掷 5, 概率 $3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{54}$
- 三人都掷 5, 概率 $\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{864}$

故

$$P(B \mid A)=\frac{8}{27}+\frac{1}{9}+\frac{1}{54}+\frac{1}{864}=\frac{41}{96},\quad P(A \mid B)=\frac{\frac{41}{96}\cdot\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}}=\frac{41}{144}$$

40. 某种生物不会与其他个体产生互动, 但能够自行繁殖。若单独放置一小时, 它会以相等的概率变成 $0,1,2,3$ 个个体, 分别对应死亡或不同的繁殖结果。其后新产生的个体在每个后续小时中也以同样的方式独立行动。若初始时只有一个个体, 设 p 为这一族群能够持续存在（即永不灭绝）的概率, 求 p。

设 q 为族群最终灭绝的概率。若当前有 n 个个体, 则最终灭绝的概率为 q^n。题意给出

$$q=\frac{1}{4}\left(1+q+q^2+q^3\right)$$

化简得

$$(q-1)(q^2+2q-1)=0$$

在 $[0,1]$ 区间内唯一满足要求的解为

$$q=\sqrt{2}-1$$

因此

$$p=1-q=2-\sqrt{2}\approx 0.586$$

41. 设 $P(n)$ 表示在 n 次抛掷一枚公平硬币时, 出现至少连续三个正面的概率。求满足 $P(n)\geqslant \frac{1}{2}$ 的最小整数 n。

设事件 E_i 表示首次出现连续三个正面恰好发生在第 i 次抛掷时, 则

$$P(n)=\sum_{i=1}^{n-2}\Pr(E_i),$$

其中

$$\Pr(E_i)=\begin{cases}\frac{1}{8}, & i=1,\\ \frac{1}{16}(1-P(i-2)), & i\geqslant 2.\end{cases}$$

当 $i\geqslant 2$ 时,E_i 发生的条件是第 i 次抛出 H 前必须是 T, 并且之前没有出现过三个连续 H。注意 $P(i-2)=0$ 当 $i<5$, 逐步计算:

$$P(3)=\frac{1}{8},\quad P(4)=\frac{3}{16},\quad P(5)=\frac{4}{16},\quad P(6)=\frac{5}{16},$$

$$P(7)=\frac{6}{16}-\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{8},\quad P(8)=\frac{7}{16}-\frac{1}{16}\left(\frac{1}{8}+\frac{3}{16}\right),$$

$$P(9)=\frac{8}{16}-\frac{1}{16}\left(\frac{1}{8}+\frac{3}{16}+\frac{4}{16}\right),\quad P(10)=\frac{9}{16}-\frac{1}{16}\left(\frac{1}{8}+\frac{3}{16}+\frac{4}{16}+\frac{5}{16}\right)=\frac{65}{128}>\frac{1}{2}$$

因此最小的 n 满足 $P(n)\geqslant\frac{1}{2}$ 为 10。

42. 设甲、乙两箱中, 甲箱内有 1 白球 1 红球, 乙箱内有 1 白球 2 红球。现在每次先从甲箱中随机取一球, 放入乙箱内, 再从乙箱随机取一球放入甲箱, 这样视为一局。试求

(a) 在第二局结束后, 有 2 红球在甲箱内的概率。

设三状态如下表所示：

状态	甲箱	乙箱
S_1	1白，1红	1白，2红
S_2	2红	2白，1红
S_3	2白	3红

因此转移矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} P(S_1 \to S_1) & P(S_2 \to S_1) & P(S_3 \to S_1) \\ P(S_1 \to S_2) & P(S_2 \to S_2) & P(S_3 \to S_2) \\ P(S_1 \to S_3) & P(S_2 \to S_3) & P(S_3 \to S_3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} & 1\cdot\frac{1}{2} & 1\cdot\frac{3}{4} \\ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} & 1\cdot\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} & 0 & 1\cdot\frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

于是

$$A^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{39}{64} & \frac{9}{16} & \frac{21}{32} \\ \frac{9}{32} & \frac{3}{8} & \frac{3}{16} \\ \frac{7}{64} & \frac{1}{16} & \frac{5}{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{39}{64} \\ \frac{9}{32} \\ \frac{7}{64} \end{bmatrix}$$

即第二局结束后，有 2 红球在甲箱内的概率为 $\dfrac{9}{32}$。

(b) 经过长时间交换后，有 2 红球在甲箱内的概率。

对角化转移矩阵得

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{15} & -\frac{4}{15} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

于是

$$A^\infty = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{15} & -\frac{4}{15} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

且

$$A^\infty \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{3}{10} \\ \frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

经过长时间交换后, 有 2 红球在甲箱内的概率为

$$P(S_2) = \frac{3}{10}$$

43. 小明给阿花 7 颗巧克力当礼物, 然后跟阿花说:「你每天至少要吃一颗巧克力, 表示你有想念我, 当然你要一次吃好多颗也可以喔。」

设随机变量 X 代表阿花吃完巧克力的天数, 求期望值 $E(X)$。

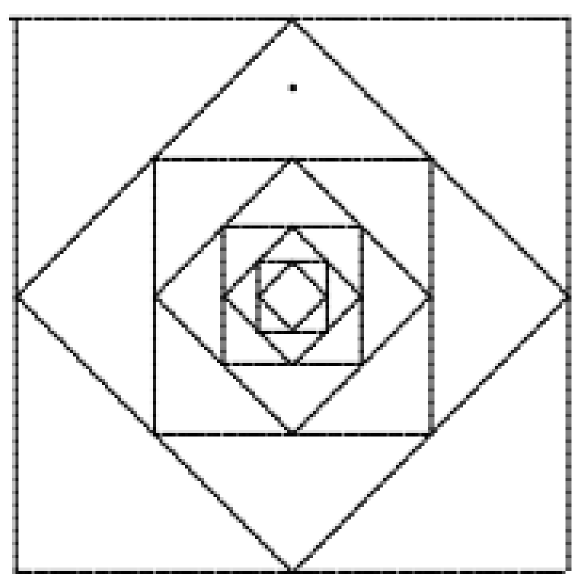
考虑将 7 颗巧克力在 X 天内吃完, 且每天至少吃一颗。这等价于将 7 个相同的球放入 X 个不同的盒子, 每个盒子至少一个球。由间隔法,

$$P(X = k) = \frac{{}^6C_{k-1}}{2^6}$$

故

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{7} k \cdot P(X = k) \\ &= \frac{1}{64}\left(1 \cdot {}^6C_0 + 2 \cdot {}^6C_1 + 3 \cdot {}^6C_2 + 4 \cdot {}^6C_3 + 5 \cdot {}^6C_4 + 6 \cdot {}^6C_5 + 7 \cdot {}^6C_6\right) = 4 \end{aligned}$$

44. 在下图所示的大正方形中随机选择一个点。图中嵌套的小正方形无限向内延续。求该随机点所处正方形数量的期望值。例如, 图中所示的样例点位于其中的 2 个正方形内。



由于四个三角形面积和皆占正方形的一半, 所求为

$$1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2^2}+3\cdot\frac{1}{2^3}+\cdots$$

即

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots\right)=1\cdot 2=2$$

45. 一个人出生在一周七天中的任意一天且概率相同。一大群人依次报出自己的出生星期, 直到七个星期几都至少出现一次为止。试求第一次凑齐全部七个星期几时, 对应的那个人的期望序号。

这是经典的“优惠券收集（Coupon Collector）”问题。设当前已经出现了 $i-1$ 个不同的星期, 则下一位出现一个新星期的概率为

$$p=\frac{7-(i-1)}{7},$$

因此获得一个新星期所需的期望人数为

$$\frac{1}{p}=\frac{7}{7-(i-1)}.$$

于是凑齐全部七天所需的期望总人数为

$$1+\frac{7}{6}+\frac{7}{5}+\frac{7}{4}+\frac{7}{3}+\frac{7}{2}+\frac{7}{1}=\frac{363}{20}$$

其中, 第 i 项表示在已有 $i-1$ 种不同星期之后, 等到第 i 个新星期出现的期望等待人数。

46. 假设投掷某金币一枚出现正面与反面的概率皆为 $\frac{1}{2}$, 试问平均要连续掷几次金币, 才会出现连续三次正面?

设 $E(n)$ 为出现连续 n 次正面的掷币次数。由一步分析法,

$$E(n)=p(E(n-1)+1)+(1-p)(E(n-1)+1+E(n))$$

代入 $p=\frac{1}{2}$,

$$E(1)=1+\frac{1}{2}E(1),\quad E(2)=E(1)+1+\frac{1}{2}E(2),\quad E(3)=E(2)+1+\frac{1}{2}E(3)$$

得

$$E(1)=2,\quad E(2)=6,\quad E(3)=14$$

47. 已知一个非公正硬币掷出正面机率为 $\dfrac{1}{3}$, 反面机率为 $\dfrac{2}{3}$, 今连续掷此硬币, 记录每次掷出的结果, 每次结果互不影响, 令随机变量 X 表示第一次看到正面、反面、正面依序出现所需的投掷次数, 求 X 的期望值。

假设期望值为 $E(X)$。若

- 出现反面, 期望值变为 $E(X)+1$
- 出现正面、正面, 期望值变为 $E(X)+1$
- 出现正面、反面、反面, 期望值变为 $E(X)+3$

由一步分析法,

$$E(X)=\frac{2}{3}(E(X)+1)+\left(\frac{1}{3}\right)^2(E(X)+1)+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2(E(X)+3)$$

解得

$$E(X)=\frac{33}{2}$$

48. 袋子里有 $n+3$ 颗球，其中红球有 3 颗，黑球有 n 颗。每次取一球，取后不放回，直到取到两颗红球为止。设随机变量 X 表示取到两颗红球停止时的次数，求：

(a) 概率 $P(X=k)$，其中 $k=2,3,4,\ldots,n+2$。

三颗红球、n 颗黑球任意排列，共有

$$^{n+3}C_3=\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6}$$

种排列方法。第 k 次取到第 2 颗红球：第 k 次为红球，前 $k-1$ 次中有 1 红球和 $k-2$ 黑球，共 $k-1$ 种排列；后 $n+3-k$ 颗球中有 1 红球和 $n+2-k$ 黑球，共 $n+3-k$ 种排列。因此

$$P(X=k)=\frac{(k-1)(n+3-k)}{(n+3)(n+2)(n+1)/6}=\frac{6(k-1)(n-k+3)}{(n+3)(n+2)(n+1)},\ k=2,3,4,\ldots,n+2$$

(b) 随机变量 X 的期望值 $E(X)$。

期望值为

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=2}^{n+2} kP(X=k) \\
&= \frac{6}{(n+3)(n+2)(n+1)} \sum_{k=2}^{n+2} k(k-1)(n-k+3) \\
&= \frac{6}{(n+3)(n+2)(n+1)} \sum_{k=2}^{n+2} \left[-k^3+(n+4)k^2-(n+3)k\right] \\
&= \frac{6}{(n+3)(n+2)(n+1)} \left[(n+3)(n+4)\left(\frac{1}{6}(n+4)(2n+7)-\frac{1}{4}(n+3)(n+6)\right)\right] \\
&= \frac{n+4}{2}
\end{aligned}
$$

49. 在一个由 0 和 1 组成的序列中,” 段” 指的是由连续相同数字组成的一串, 包括长度为 1 的段。例如序列 00100011 中共有四段。对于一个包含 15 个 0 和 9 个 1 的随机排列, 求其段数的期望值。

令随机变量 X_i 表示第 i 个位置是否为某一段的起点。若是, 则 $X_i=1$; 否则 $X_i=0$。

第一个位置一定是一段的起点, 因此 $E(X_1)=1$。当 $i>1$ 时, 第 i 个位置成为段起点当且仅当前一位与当前位不同。其概率为

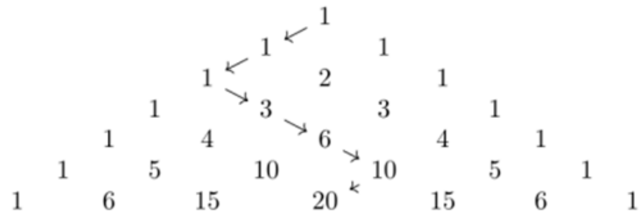
$$
\frac{15}{24}\cdot\frac{9}{23}+\frac{9}{24}\cdot\frac{15}{23}=\frac{45}{92}
$$

因此段数的期望值为

$$
E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_{24})=1+23\cdot\frac{45}{92}=\frac{49}{4}
$$

50. A 从帕斯卡三角形的顶端开始。每次移动, 她都会向下一层走, 并且以相等概率选择向左或向右。完成 6 次移动后,A 经过的数字（包括起点和终点）的期望和是多少？

例如, 在下图所示的路径中, A 访问的数值之和为 $1+1+1+3+6+10+20=42$。



设走到第 n 层向右走了 k 步, 则 $k\sim\mathrm{Binom}\left(n,\dfrac{1}{2}\right)$, 该层数值为 $\dbinom{n}{k}$, 则第 n 层的期望值

$$\mathbb{E}_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

由性质

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$$

总期望值为

$$\sum_{n=0}^{6}\left(\frac{1}{2}\right)^n\binom{2n}{n}=1+1+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}+\frac{35}{8}+\frac{63}{8}+\frac{231}{16}=\frac{523}{16}$$

统计

1. 连续投掷一枚公平硬币, 直到首次出现连续两个反面为止。设随机变量 X 为所需的投掷次数, 求 X 的期望与方差。

令 $p(n)$ 表示投掷 n 次铜板才出现连续两次反面的概率。若第一次出现正面, 后 $n-1$ 次才出现连续两次反面。若第一次出现反面, 第二次出现正面, 后 $n-2$ 次才出现连续两次反面。有递推式:

$$p(n)=\frac{1}{2}p(n-1)+\frac{1}{4}p(n-2),\quad n\geqslant 3,\quad p(1)=0,\quad p(2)=\frac{1}{4}$$

于是

$$\begin{aligned}
E(X)&=\sum_{k=1}^{\infty}kp(k)=1\cdot 0+2\cdot\frac{1}{4}+\sum_{k=3}^{\infty}k\,p(k)\\
&=\frac{1}{2}+\sum_{k=3}^{\infty}\left(\frac{1}{2}kp(k-1)+\frac{1}{4}kp(k-2)\right)\\
&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1+E(X))+\frac{1}{4}(2+E(X))\Rightarrow E(X)=6
\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}
E(X^2)&=\sum_{k=1}^{\infty}k^2p(k)=1^2\cdot 0+2^2\cdot\frac{1}{4}+\sum_{k=3}^{\infty}k^2p(k)\\
&=1+\sum_{k=3}^{\infty}\left(\frac{1}{2}k^2p(k-1)+\frac{1}{4}k^2p(k-2)\right)\\
&=1+\frac{1}{2}(E(X^2)+2E(X)+1)+\frac{1}{4}(E(X^2)+4E(X)+4)\Rightarrow E(X^2)=58
\end{aligned}$$

故方差为

$$Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2=22$$

2. 一有 n 项的等差数列 $\{a_n\}$, 公差为 $d=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$, 此数列的方差为 260, 求 n。

设该等差数列为 $a, a+d, \ldots, a+(n-1)d$。平均数为

$$\overline{X} = a + \frac{n-1}{2}d$$

且

$$E(X^2) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(a+kd)^2 = a^2 + ad(n-1) + d^2\frac{(n-1)(2n-1)}{6}$$

因此方差为

$$\operatorname{Var}(X) = E(X^2) - \overline{X}^2 = d^2\left(\frac{(n-1)(2n-1)}{6} - \frac{(n-1)^2}{4}\right) = \frac{d^2(n^2-1)}{12}$$

代入 $d^2 = \frac{13}{4}$ 且 $\operatorname{Var}(X) = 260$ 得

$$\frac{13}{4}\cdot\frac{n^2-1}{12} = 260 \Rightarrow n = 31$$

3. 重复操作一个成功概率为 p 的伯努利试验，且

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2(1-p)^k,$$

若 $\lim_{n\to\infty} S_n = 180$，试求第三次才出现第一次成功的概率。

令 $X \sim \text{Geometric}(p)$ 表示第一次成功出现所需的试验次数，则有

$$E(X^2) = \operatorname{Var}(X) + (E(X))^2 = \frac{1-p}{p^2} + \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{2-p}{p^2}$$

且据题意有

$$E(X^2) = \frac{p}{1-p}\cdot S_\infty \Rightarrow \frac{2-p}{p^2} = \frac{p}{1-p}\cdot 180$$

解得

$$180p^3 - p^2 + 3p - 2 = (5p-1)(36p^2+7p+2) = 0 \Rightarrow p = \frac{1}{5} \quad \text{(舍去虚根)}$$

因此

$$P(X=3) = (1-p)^2 p = \frac{16}{125}$$

4. 某实验测得 20 组样本点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_{20}, y_{20})$，已知

$$\sum_{i=1}^{20} x_i = 400, \quad \sum_{i=1}^{20} y_i = 900.$$

利用最小平方法求得 y 对 x 的回归直线方程为 $y=ax+b$。若

$$\sum_{i=1}^{20}(y_i-ax_i-b)^2=0,$$

且 $(x_1,y_1)=(30,40)$, 设

$$x'=2x-4,\quad y'=-3y+5,\quad i=1,2,\ldots,20,$$

求数据 (x',y') 的回归直线方程。

有

$$E(X)=\frac{400}{20}=20,\quad E(Y)=\frac{900}{20}=45,$$

$$E(X')=E(2X-4)=2\cdot 20-4=36,\quad E(Y')=E(-3Y+5)=-3\cdot 45+5=-130.$$

原回归直线经过 $(30,40)$ 与 $(20,45)$, 斜率与截距为

$$y=-\frac{1}{2}x+55$$

故

$$m=\frac{\operatorname{Cov}(2X-4,-3Y+5)}{\operatorname{Var}(2X-4)}=\frac{-6\operatorname{Cov}(X,Y)}{4\operatorname{Var}(X)}=-\frac{6}{4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}.$$

回归直线过点 $(E(X'),E(Y'))=(36,-130)$, 故方程为

$$y'-(-130)=\frac{3}{4}(x'-36)\Rightarrow y'=\frac{3}{4}x'-157.$$

5. 已知 5 组数据如下,

X	1	2	5	3	4
Y	3	a	5	b	6

且 Y 对 X 的回归直线为

$$Y=\frac{3}{5}X+\frac{11}{5},$$

求数对 (a,b)。

有

$$\bar{x}=\frac{1+2+5+3+4}{5}=3.$$

由于 $\bar{x},\bar{y}$ 在回归直线上,

$$\bar{y}=\frac{3}{5}\bar{x}+\frac{11}{5}=\frac{3+a+5+b+6}{5}\Rightarrow a+b=6\tag{1}$$

由回归直线斜率公式,

$$\frac{3}{5}=\frac{\sum x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sum x_i^2-n\bar{x}^2}=\frac{3+2a+25+3b+24-5\cdot 3\cdot 4}{55-5\cdot 3^2} \tag{2}$$

由 (1), (2) 解得

$$(a,b)=(4,2)$$

6. 有一笔资料包含 n 个数 $x_1,x_2,x_3,\dots,x_n$, 其平均数为 $\overline{x}$, 试证

$$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\overline{x}^2}\geqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i-\overline{x}|$$

由柯西不等式,

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}1^2\right)\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-\bar{x}|\right)^2$$

得

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\geqslant\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i-\bar{x}|\right)^2$$

又

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2&=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\bar{x}\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}\bar{x}^2\right)\\&=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2n\bar{x}^2+n\bar{x}^2\right)\\&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\bar{x}^2\end{aligned}$$

即得证

$$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\overline{x}^2}\geqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i-\overline{x}|$$

几何

解三角形

1. 已知钝角三角形的边长为 10, 17, x, 求 x 的所有正整数解之和。

钝角三角形需满足某边的平方大于其余两边平方和:

情况一: 若 $x<17$, 最大边是 17, 成立条件为:

$$\begin{cases} 17^2>10^2+x^2 \Rightarrow x<\sqrt{189}\approx 13.75 \\ x+10>17 \Rightarrow x>7 \end{cases}$$

得 $x\in\{8,9,10,11,12,13\}$

情况二: 若 $x>17$, 最大边是 x, 成立条件为:

$$\begin{cases} x^2>10^2+17^2=389 \Rightarrow x>\sqrt{389}\approx 19.7 \\ 10+17>x \Rightarrow x<27 \end{cases}$$

得 $x\in\{20,21,22,23,24,25,26\}$

故

$$\sum x=224$$

2. 若 $\triangle ABC$ 的三个高分别为 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长。

设三角形三边长为 a, b, c, 对应的高分别为 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, 则 $\triangle ABC$ 面积为

$$\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c\Rightarrow\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}$$

现设 $a=2t,b=3t,c=4t$, 则半周长

$$s=\frac{a+b+c}{2}=\frac{9t}{2}$$

由海伦公式,

$$[\triangle ABC]=\sqrt{\frac{9t}{2}\cdot\frac{5t}{2}\cdot\frac{3t}{2}\cdot\frac{t}{2}}=\frac{1}{2}\cdot 2t\cdot\frac{1}{2}$$

解得 $t=\dfrac{2\sqrt{15}}{45}$, 因此周长为

$$2s=9t=\frac{2\sqrt{15}}{5}$$

3. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 对应边长为 a,b,c。若 $b+c=2a$, $3\sin A=5\sin B$, 求 C。

由正弦定理,

$$3\sin A=5\sin B\Rightarrow 3a=5b\Rightarrow b=\frac{3}{5}a$$

又

$$b+c=2a\Rightarrow c=\frac{8}{5}a$$

由余弦定理,

$$\left(\frac{8}{5}a\right)^2=a^2+\left(\frac{3}{5}a\right)^2-2a\left(\frac{3}{5}a\right)\cos C$$

给出

$$C=120^\circ$$

4. 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{3\sqrt{15}}{4}$, 且 $\cos C=-\dfrac{1}{4}$, 且 $\sin^2 A+\sin^2 B=\dfrac{13}{16}\sin^2 C$, 求边长 AB。

已知面积

$$\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{3\sqrt{15}}{4}$$

又由

$$\cos C=-\frac{1}{4}\Rightarrow \sin C=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

代入上式得 $ab=6$, 且由正弦定理

$$\sin^2 A+\sin^2 B=\frac{13}{16}\sin^2 C\Rightarrow a^2+b^2=\frac{13}{16}c^2$$

又由余弦定理:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=\frac{13}{16}c^2-2\cdot 6\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)$$

得 $c=4$

5. 已知 $\triangle ABC$ 的周长为 $14\,\mathrm{cm}$, 面积为 $3\sqrt{7}\,\mathrm{cm}^2$, 且 $\cos B=-\dfrac{1}{8}$。求 a,b,c 的边长。

解法同上, 已知周长 $a+b+c=14$, 面积

$$\frac{1}{2}ac\sin B=3\sqrt{7}$$

由

$$\cos B=-\frac{1}{8}\Rightarrow\sin B=\frac{3\sqrt{7}}{8}$$

有 $ac=16$, 且由余弦定理,

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=(a+c)^2-2ac-2ac\cos B=(14-b)^2-2\cdot16-2\cdot16\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)$$

解得 $b=6$, 即有 $a+c=8$, 所以 a,c 是关于 x 的方程式

$$x^2-8x+16=0$$

的两根, 于是解得 $a=4,\ c=4$, 故解为 $a=4,\ b=6,\ c=4$

6. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 已知 $b=5,\ \sin A=\frac{\sqrt{7}}{4}$, 面积为 $\frac{15\sqrt{7}}{4}$, 求 c 及 $\sin C$。

由面积公式:

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot5\cdot c\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{15\sqrt{7}}{4}$$

得 $c=6$, 由余弦定理,

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

其中 $\sin A=\frac{\sqrt{7}}{4}\Rightarrow\cos A=\frac{3}{4}$(注意是锐角), 上式变成

$$a^2=5^2+6^2-2\cdot5\cdot6\cdot\frac{3}{4}\Rightarrow a=4$$

再由正弦定理,

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}\Rightarrow\frac{4}{\frac{\sqrt{7}}{4}}=\frac{6}{\sin C}\Rightarrow\sin C=\frac{3\sqrt{7}}{8}$$

7. 已知 $\triangle ABC$ 中, $C=60^\circ$, 求

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}$$

的值。

由余弦定理,

$$a^2+b^2=c^2+2ab\cos C=c^2+2ab\cdot\frac{1}{2}=c^2+ab$$

于是

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}=\frac{a^2+ac+b^2+bc}{ab+bc+ac+c^2}=\frac{a^2+b^2+ac+bc}{bc+ac+a^2+b^2}=1$$

8. 已知 $\triangle ABC$ 中,

$$2a\cos B=c,\quad \sin A\sin B(2-\cos C)=\sin^2\frac{C}{2}+\frac{1}{2},$$

证明 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形。

据题意,

$$2a\cos B=c\Rightarrow 2\sin A\cos B=\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$$

得

$$\sin(A-B)=0\Rightarrow A=B\in(0,\pi)$$

于是

$$\sin A\sin B(2-\cos C)=\sin^2\frac{C}{2}+\frac{1}{2}$$

化为

$$\begin{aligned}\sin^2A(2+\cos 2A)&=\cos^2A+\frac{1}{2},\\ \sin^2A(3-2\sin^2A)&=1-\sin^2A+\frac{1}{2},\\ (2\sin^2A-1)(2\sin^2A-3)&=0,\end{aligned}$$

舍去 $\sin^2A=\frac{3}{2}$, 解得

$$\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}>0\Rightarrow A=B=\frac{\pi}{4},C=\frac{\pi}{2}$$

因此,$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形。

9. 单位圆上有三点 A,B,C, 且

$$AB^2+BC^2+CA^2=8$$

证明:$\triangle ABC$ 为直角三角形。

三点 A,B,C 在单位圆上, 外接圆半径为 1, 由正弦定理,

$$AB = 2\sin C, \quad BC = 2\sin A, \quad CA = 2\sin B$$

代入已知等式得

$$\begin{aligned}\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 &\Rightarrow \frac{1-\cos 2A}{2} + \frac{1-\cos 2B}{2} + \frac{1-\cos 2C}{2} = 2\\ &\Rightarrow \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1\end{aligned}$$

和差化积得

$$-2\cos C\cos(A-B) + 2\cos^2 C - 1 = -1 \Rightarrow 2\cos C(\cos C - \cos(A-B)) = 0$$

若 $\cos C = 0$, 则 $C = \frac{\pi}{2}$。若 $\cos C = \cos(A-B)$, 则 $C = A-B$ 或 $C = B-A$, 从而 $A = \frac{\pi}{2}$ 或 $B = \frac{\pi}{2}$。于是得证 $\triangle ABC$ 为直角三角形。

10. 设某三角形三边长成等差数列, 公差为 d, 若 r,R 分别表示此三角形的内切圆半径与外接圆半径, 试证公差

$$d = \sqrt{2Rr - 4r^2}$$

设三角形三边为 $a<b<c$, 三边长成等差, 故设

$$a = b-d, c = b+d \quad \Rightarrow s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3b}{2},$$

其中 $d>0$, 则三角形面积为

$$\triangle = rs = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{abc}{4R}$$

即

$$\frac{3br}{2} = \sqrt{\frac{3b}{2}\cdot\frac{b}{2}\cdot\left(\frac{b^2}{4} - d^2\right)} = \frac{b(b^2-d^2)}{4R} \Rightarrow \begin{cases} b^2 = 4(d^2+3r^2) \\ b^2 - d^2 = 6Rr \end{cases}$$

因此,

$$d^2 = 2Rr - 4r^2 \Rightarrow d = \sqrt{2Rr-4r^2}$$

11. 已知三角形 ABC 及其 BC 边上的任意一点 P (其中 P 异于 B,C 两点), 试证斯德瓦特定理:

$$(AP^2 + BP\cdot CP)BC = AB^2\cdot CP + AC^2\cdot BP.$$

在 $\triangle APB$ 及 $\triangle APC$ 中, 由余弦定理,

$$\begin{cases}\cos\angle APB = \dfrac{AP^2+BP^2-AB^2}{2AP\cdot BP},\\ \cos\angle APC = \dfrac{AP^2+CP^2-AC^2}{2AP\cdot CP}.\end{cases}$$

由于 $\angle APB+\angle APC=\pi \Rightarrow \cos\angle APB=-\cos\angle APC$, 于是

$$CP(AP^2+BP^2-AB^2)=-BP(AP^2+CP^2-AC^2)$$

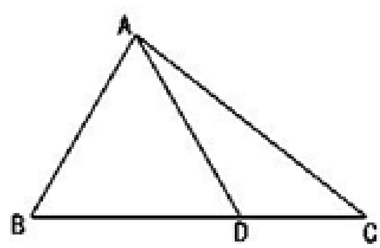
整理得

$$AP^2(CP+BP)+CP\cdot BP(CP+BP)=AB^2\cdot CP+AC^2\cdot BP$$

又 $CP+BP=BC$, 所以

$$(AP^2+BP\cdot CP)BC=AB^2\cdot CP+AC^2\cdot BP$$

12. 如图, $\triangle ABC$ 中 $AB=10$, $AC=14$, $B=\dfrac{\pi}{3}$。D 在 BC 上且 $DC=6$。



(a) 求 $\angle ADB$。

$\triangle ABC$ 中, 由余弦定理,

$$14^2=10^2+BC^2-2\cdot 10\cdot BC\cdot\cos\frac{\pi}{3}\Rightarrow BC=16$$

又 $BD=16-6=10$, 则 $\triangle ABD$ 为等边三角形, 故 $\angle ADB=60^\circ$

(b) 求 $\sin\angle DAC$。

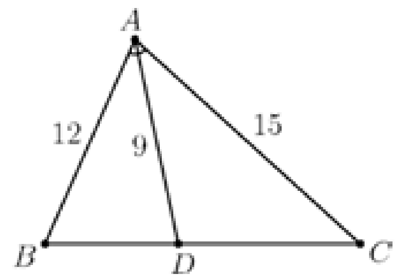
$\triangle ADC$ 中，由余弦定理，

$$6^2=10^2+14^2-2\cdot 10\cdot 14\cdot\cos\angle DAC\Rightarrow\cos\angle DAC=\frac{13}{14}$$

给出

$$\sin\angle DAC=\frac{3\sqrt{3}}{14}$$

13. 在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在 BC 上且 AD 为 $\angle BAC$ 的角平分线。已知 $AB=12,\ AD=9,\ AC=15$，令 $\theta=\angle BAD=\angle DAC$，求 $\cos\theta$。



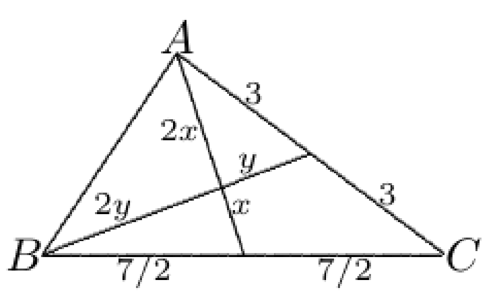
考虑面积法，由正弦定理，

$$\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 9\cdot\sin\theta+\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 15\cdot\sin\theta=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 15\cdot\sin 2\theta$$

化简得

$$243\sin\theta=360\sin\theta\cos\theta\Rightarrow\cos\theta=\frac{27}{40}$$

14. 在 $\triangle ABC$ 中，过 A 与过 B 的中线互相垂直。已知 $AC=6,BC=7$，求 AB。



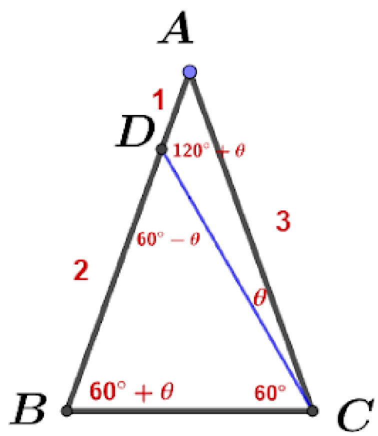
设 D,E 在 BC,AC 上使得中线 AD,BE 交于重心 G, 在 $\triangle BDG$ 及 $\triangle AEG$ 中, 由毕氏定理,

$$x^2+4y^2=\frac{49}{4},\quad 4x^2+y^2=9.$$

因此

$$AB^2=4x^2+4y^2=\frac{4}{5}\left(\frac{49}{4}+9\right)=17\Rightarrow AB=\sqrt{17}$$

15. $\triangle ABC$ 中,$AB=AC=3$, $AD=1$, $\angle BCD=60^\circ$, 求 $\cos A$。



设 $\angle ACD=\theta$, 则

$$\angle ADC=120^\circ+\theta,\angle B=60^\circ+\theta$$

在 $\triangle ADC$ 中, 由正弦定理,

$$\frac{1}{\sin\theta}=\frac{3}{\sin(120^\circ+\theta)}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta=3\sin\theta\Rightarrow\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{7}$$

由此可得

$$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{13}},\quad\cos\theta=\frac{7}{2\sqrt{13}}$$

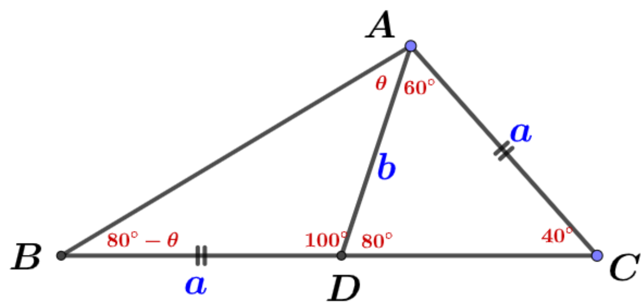
在 $\triangle BCD$ 中,

$$\frac{BC}{\sin(60^\circ-\theta)}=\frac{2}{\sin 60^\circ}\Rightarrow BC=\frac{4}{\sqrt{3}}\sin(60^\circ-\theta)=\frac{6}{\sqrt{13}}$$

在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理,

$$\cos A=\frac{9+9-\frac{36}{13}}{2\cdot 9}=\frac{11}{13}$$

16. 在 $\triangle ABC$ 中，在 BC 边上取一点 D 使得 $BD=AC$。若 $\angle DAC=60^\circ, \angle ACD=40^\circ$，求 $\angle BAD$。



设 $BD=AC=a, AD=b, \angle BAD=\theta$，则

$$\angle ADC=80^\circ \Rightarrow \angle B=80^\circ-\theta$$

在 $\triangle ADC$ 及 $\triangle ABD$ 中，由正弦定理，

$$\frac{a}{\sin 80^\circ}=\frac{b}{\sin 40^\circ}, \quad \frac{a}{\sin\theta}=\frac{b}{\sin(80^\circ-\theta)}$$

消去 a 得

$$\frac{\sin\theta}{\sin(80^\circ-\theta)}=\frac{\sin 80^\circ}{\sin 40^\circ}=2\cos 40^\circ$$

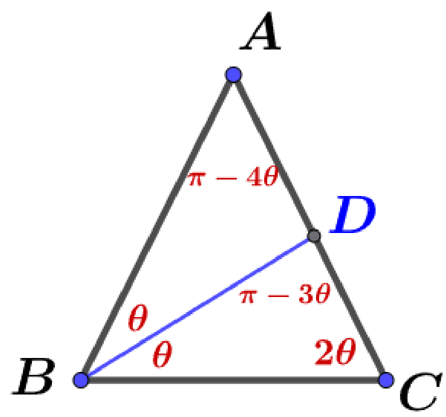
整理得

$$\sin\theta=2\cos 40^\circ\sin(80^\circ-\theta)=\sin(120^\circ-\theta)+\sin(40^\circ-\theta)$$

$$\sin\theta+\sin(\theta-120^\circ)=2\sin(\theta-60^\circ)\cos 60^\circ=\sin(40^\circ-\theta)$$

$$\sin(\theta-60^\circ)=\sin(40^\circ-\theta) \Rightarrow \angle BAD=\theta=50^\circ$$

17. 已知 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，且 $\angle B$ 的角平分线交 AC 于 D，且 $BC=BD+AD$，求 $\angle A$。



设 $\angle B=\angle C=2\theta$, 则

$$\angle ABD=\angle DBC=\theta,\quad \angle A=\pi-4\theta,\quad \angle BDC=\pi-3\theta$$

在 $\triangle BDC$ 及 $\triangle ABD$ 中, 由正弦定理,

$$\frac{BC}{BD}=\frac{\sin(\pi-3\theta)}{\sin 2\theta}=\frac{\sin 3\theta}{\sin 2\theta},\quad \frac{AD}{BD}=\frac{\sin\theta}{\sin(\pi-4\theta)}=\frac{\sin\theta}{\sin 4\theta}$$

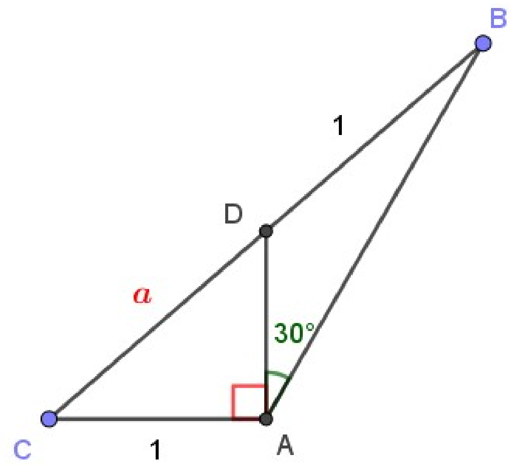
由 $BC=BD+AD$, 有

$$\begin{aligned}\frac{BC}{BD}&=1+\frac{AD}{BD}\\ \frac{\sin 3\theta}{\sin 2\theta}&=1+\frac{\sin\theta}{\sin 4\theta}=1+\frac{\sin\theta}{2\sin 2\theta\cos 2\theta}\\ 2\cos 2\theta\sin 3\theta&=2\sin 2\theta\cos 2\theta+\sin\theta\\ \sin 5\theta+\sin\theta&=\sin 4\theta+\sin\theta\\ \sin 5\theta&=\sin 4\theta\end{aligned}$$

故

$$\theta=\frac{\pi}{9}\Rightarrow\angle A=\frac{5\pi}{9}$$

18. 设 D 为 $\triangle ABC$ 的 BC 上之一点, 且 $BD=AC=1$, 若 $\angle BAD=30^\circ$、$\angle CAD=90^\circ$, 求 CD 之长。



设 $CD=a$, 由等高性质,

$$\frac{[ABD]}{[ACD]}=\frac{BD}{CD}=\frac{1}{a} \tag{1}$$

故

$$\frac{[ABD]}{[ACD]}=\frac{\frac{1}{2}AD\cdot AB\sin 30^\circ}{\frac{1}{2}AD\cdot AC}=\frac{AB}{2} \tag{2}$$

由 $(1)=(2)$ 得 $AB=\dfrac{2}{a}$, 由余弦定理,

$$(a+1)^2=1+\left(\frac{2}{a}\right)^2-2\cdot\frac{2}{a}\cdot 1\cdot\cos 120^\circ$$

化简得

$$(a^3-2)(a+2)=0$$

取正根 $a^3=2$, 故 $a=\sqrt[3]{2}$。

19. 圆内接四边形 $ABCD$ 中, $AB=BC=3$, $CD=5$, $DA=8$。求对角线 BD。

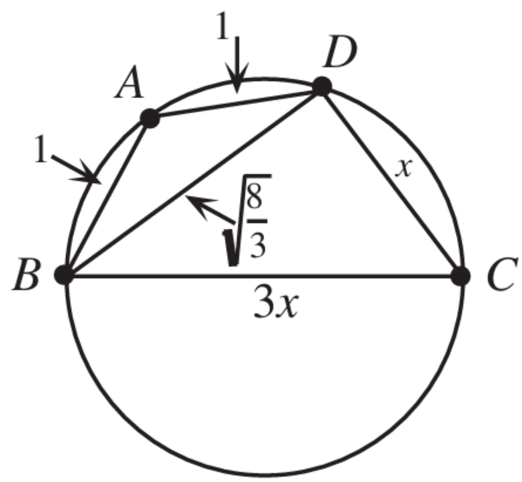
圆内接四边形对角互补, 有

$$BD^2=3^2+8^2-2\cdot 3\cdot 8\cdot\cos A=3^2+5^2-2\cdot 3\cdot 5\cdot\cos(\pi-A)$$

解得

$$\cos A=\frac{1}{2}\Rightarrow BD=7$$

20. 已知四边形 $ABCD$ 内接于圆, 且 $BA=AD=1, \cos\angle BAD=-\dfrac{1}{3}$。求证 BC 为外接圆的直径



在 $\triangle BAD$ 中, 由余弦定理,

$$BD^2=1^2+1^2-2\cdot 1\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\Rightarrow BD=\sqrt{\frac{8}{3}}$$

设 $x=\cos\angle ABC$, 则 $DC=x$。由于 $ABCD$ 为圆内接四边形,$\angle ADC=180^\circ-\angle ABC$, 故

$$\cos\angle ADC=-\cos\angle ABC=-x.$$

同理,$\cos\angle BCD=-\cos\angle BAD=\dfrac{1}{3}$。

在 $\triangle ADC$ 与 $\triangle ABC$ 中应用余弦定理, 因 AC 公共, 得:

$$\begin{aligned}1^2+x^2-2(1)(x)\cos\angle ADC&=1^2+BC^2-2(1)(BC)\cos\angle ABC,\\ 1+x^2-2x(-x)&=1+BC^2-2BCx,\\ 0&=BC^2-2BCx-3x^2,\\ 0&=(BC-3x)(BC+x).\end{aligned}$$

因 $x>0$, 故 $BC=3x$。

又因 $\cos\angle BCD=\frac{1}{3}$, 且 $DC:BC=1:3$, 由 $\angle BDC$ 为直角。于是 BC 为圆的直径。

21. 已知 $\triangle ABC$ 中,$\angle B=90^\circ,\angle A=30^\circ$。点 P,Q,R 分别在 AB,BC,CA 上使得 $\triangle PQR$ 为正三角形。若 $BC=4$, 且 Q 是 BC 的中点, 求 PR。

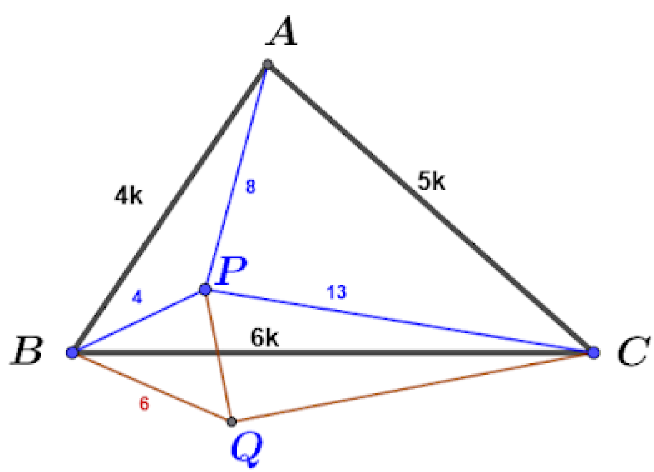
已知 $BQ=QC=2$, 设 $PB=x, PQ=y, \angle PQB=\angle CRQ=\theta$, 在 $\triangle PBQ$ 及 $\triangle QRC$ 中, 由正弦定理,

$$\frac{x}{\sin\theta}=y, \quad \frac{2}{\sin\theta}=\frac{y}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

解得 $x=\sqrt{3}$, 在 $\triangle PBQ$ 中, 由毕氏定理

$$y^2=3+2^2=7 \Rightarrow PR=y=\sqrt{7}$$

22. 已知在 $\triangle ABC$ 中, 三边 AB, BC, CA 长度比为 $4:6:5$, 三角形内一点 P 满足 $PA=8, PB=4, PC=13$, 试求 $\cos\angle APB$ 的值。



在 BC 外取一点 Q 使得 $BQ=6$ 且 $\angle ABC=\angle PBQ$, 由相似三角形:

$$\frac{AB}{BC}=\frac{BP}{BQ}=\frac{4}{6} \Rightarrow \triangle ABC \backsim \triangle PBQ\ (SAS) \Rightarrow PQ=5$$

且有

$$\angle ABP=\angle CBQ \Rightarrow \triangle PBA \backsim \triangle QBC\ (SAS) \Rightarrow QC=12$$

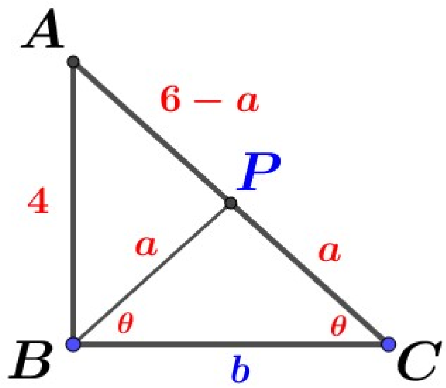
由余弦定理,

$$\cos\angle BQP=\frac{5^2+6^2-4^2}{2\cdot5\cdot6}=\frac{3}{4} \Rightarrow \sin\angle BQP=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

又 $\triangle PQC$ 三边长为 $5, 12, 13$, 故为直角三角形,$\angle PQC=90°$, 于是

$$\cos\angle APB=\cos\angle BQC=\cos(\angle BQP+90°)=-\sin\angle BQP=-\frac{\sqrt{7}}{4}$$

23. 在 $\triangle ABC$ 中,$AB=4, AC=6, \cos(B-C)=\dfrac{2}{3}$, 求 BC。



AC 上找一点 P 使得 $\angle PBC=\angle C=\theta$, 令 $PB=PC=a$, 则 $AP=6-a$, 由余弦定理,

$$(6-a)^2=4^2+a^2-2\cdot 4\cdot a\cdot\frac{2}{3}\Rightarrow a=3$$

设 $BC=b$, 则

$$\cos\angle PBC=\cos\theta=\frac{a^2+b^2-a^2}{2ab},\quad \cos\angle ACB=\cos\theta=\frac{b^2+6^2-4^2}{12b}$$

联立得

$$\frac{b}{6}=\frac{b^2+20}{12b}\Rightarrow b=2\sqrt{5}$$

24. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=1$, $AC=2$, $B-C=\dfrac{2\pi}{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积。

由正弦定理知

$$\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{AC}{AB}=2$$

又 $B-C=\dfrac{2\pi}{3}$, 故

$$2\sin C=\sin B=\sin(C+\frac{2}{3}\pi)=-\frac{1}{2}\sin C+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C$$

即

$$\frac{5}{2}\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C\Rightarrow\tan C=\frac{\sqrt{3}}{5}$$

注意到 $A=\pi-B-C=\dfrac{\pi}{3}-2C$，故 $\triangle ABC$ 的面积为

$$[\triangle ABC]=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A=\sin\left(\frac{\pi}{3}-2C\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2C-\frac{1}{2}\sin 2C$$

由 $\tan C=\dfrac{\sqrt{3}}{5}$ 知

$$\cos 2C=\frac{1-\tan^2 C}{1+\tan^2 C}=\frac{11}{14},\ \sin 2C=\frac{2\tan C}{1+\tan^2 C}=\frac{5\sqrt{3}}{14}$$

从而

$$[\triangle ABC]=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{11}{14}-\frac{1}{2}\cdot\frac{5\sqrt{3}}{14}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$$

25. 设 $\triangle ABC$ 的三边长为 $AB=4,BC=5,CA=6,D,E,F$ 分别在边 BC,CA,AB 上使得三高为 AD,BE,CF，试求三面积比 $[\triangle AEF]:[\triangle BDF]:[\triangle CDE]$。

由

$$\frac{[\triangle AEF]}{[\triangle ABC]}=\frac{\frac{1}{2}AE\cdot AF\sin A}{\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin A}=\frac{AB\cos A\cdot AC\cos A}{AB\cdot AC}=\cos^2 A$$

同理可得

$$\frac{[\triangle BDF]}{[\triangle ABC]}=\cos^2 B,\quad \frac{[\triangle CDE]}{[\triangle ABC]}=\cos^2 C$$

因此

$$[\triangle AEF]:[\triangle BDF]:[\triangle CDE]=\cos^2 A:\cos^2 B:\cos^2 C$$

由余弦定理,

$$\cos A=\frac{4^2+6^2-5^2}{2\cdot 4\cdot 6}=\frac{9}{16},\ \cos B=\frac{4^2+5^2-6^2}{2\cdot 4\cdot 5}=\frac{1}{8},\ \cos C=\frac{5^2+6^2-4^2}{2\cdot 5\cdot 6}=\frac{3}{4}$$

所以

$$[\triangle AEF]:[\triangle BDF]:[\triangle CDE]=\frac{81}{256}:\frac{1}{64}:\frac{9}{16}=81:4:144$$

26. $\triangle ABC$ 中，在 BC 边上取 D,E，使得

$$\angle BAD=\angle DAE=\angle EAC.$$

已知 $BD=3,DE=4,EC=8$，求 $\triangle ABC$ 的面积。

设 $\angle BAD=\angle DAE=\angle DAC=\theta, AB=b, AC=c, AD=d, AE=e$, 由等高性质,

$$[\triangle ABD]:[\triangle ADE]:[\triangle AEC]=BD:DE:EC=3:4:8$$

又有

$$[\triangle ABD]=\frac{1}{2}bd\sin\theta,\quad [\triangle ADE]=\frac{1}{2}de\sin\theta,\quad [\triangle AEC]=\frac{1}{2}ec\sin\theta.$$

故 $b:e=3:4, d:c=1:2$, 令 $b=3q,\ c=2p,\ d=p,\ e=4q$, 由余弦定理,

$$\cos\theta=\frac{b^2+d^2-9}{2bd}=\frac{d^2+e^2-16}{2de}=\frac{e^2+c^2-64}{2ec}.$$

解得

$$\frac{9q^2+p^2-9}{6pq}=\frac{p^2+16q^2-16}{8pq}=\frac{16q^2+4p^2-64}{16pq}\Rightarrow p=6\sqrt{2},\ q=\sqrt{7}$$

于是

$$\cos\theta=\frac{\sqrt{14}}{4}\Rightarrow\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

$\triangle ABC$ 面积为

$$[\triangle ABC]=\frac{1}{2}bc\sin 3\theta=\frac{1}{2}(3\sqrt{7})(12\sqrt{2})\left(3\sin\theta-4\sin^3\theta\right)=\frac{45\sqrt{7}}{2}$$

27. 设 a,b,c 分别为 $\triangle ABC$ 的 A,B,C 对边长, 且 $\angle B=60^\circ$, 证明

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}\right)=3$$

展开左式得

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}\right)=1+\frac{c}{a+b}+1+\frac{a}{b+c}=2+\frac{a^2+c^2+ab+bc}{(a+b)(b+c)}$$

由余弦定理,

$$b^2=a^2+c^2-2ac\left(\frac{1}{2}\right)\Rightarrow a^2+c^2=b^2+ac$$

因此左式为

$$2+\frac{b^2+ac+ab+bc}{(a+b)(b+c)}=2+\frac{(a+b)(b+c)}{(a+b)(b+c)}=3$$

28. 在 $\triangle ABC$ 中，其内角 A,B,C 所对应的边分别为 a,b,c，且

$$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=4\cos C$$

求 $\tan C(\cot A+\cot B)$ 的值。

由已知

$$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=4\cos C$$

及余弦定理，

$$\cos C=\frac{a^2+b^2}{4ab}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\Rightarrow a^2+b^2=2c^2$$

于是由余弦、正弦定理，

$$\begin{aligned}
&\tan C(\cot A+\cot B)\\
&=\frac{\sin C}{\cos C}\left(\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\cos B}{\sin B}\right)\\
&=\frac{\cos A}{\cos C}\cdot\frac{\sin C}{\sin A}+\frac{\cos B}{\cos C}\cdot\frac{\sin C}{\sin B}\\
&=\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\cdot\frac{2ab}{a^2+b^2-c^2}\right)\cdot\frac{c}{a}+\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\cdot\frac{2ab}{a^2+b^2-c^2}\right)\cdot\frac{c}{b}\\
&=\frac{b^2+c^2-a^2}{a^2+b^2-c^2}+\frac{a^2+c^2-b^2}{a^2+b^2-c^2}=\frac{2c^2}{2c^2-c^2}=2
\end{aligned}$$

29. 设 $\triangle ABC$ 中 $\angle A,\angle B,\angle C$ 的对边分别为 a,b,c，若 $a^2+b^2=8c^2$，求

$$\frac{\tan C}{\tan A}+\frac{\tan C}{\tan B}$$

的值。

设 $\triangle ABC$ 面积为 S，则

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A\Rightarrow\sin A=\frac{2S}{bc},\quad\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

因此

$$\tan A=\frac{4S}{b^2+c^2-a^2},\quad\tan B=\frac{4S}{c^2+a^2-b^2},\quad\tan C=\frac{4S}{a^2+b^2-c^2}$$

所以

$$\frac{\tan C}{\tan A}+\frac{\tan C}{\tan B}=\frac{b^2+c^2-a^2}{a^2+b^2-c^2}+\frac{c^2+a^2-b^2}{a^2+b^2-c^2}=\frac{2c^2}{a^2+b^2-c^2}$$

代入 $a^2+b^2=8c^2$ 得

$$\frac{2c^2}{8c^2-c^2}=\frac{2}{7}$$

30. 设 $\triangle ABC$ 的三边长 $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$, 且

$$|b-c|\cos\frac{A}{2}=5,\ (b+c)\sin\frac{A}{2}=10,$$

求 a 之值。

两式平方得

$$(b-c)^2\cos^2\frac{A}{2}+(b+c)^2\sin^2\frac{A}{2}=125$$

整理得

$$(b^2+c^2)\cos^2\frac{A}{2}+(b^2+c^2)\sin^2\frac{A}{2}-2bc(\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2})=125$$

故

$$b^2+c^2-2bc\cos A=a^2=125\Rightarrow a=5\sqrt{5}$$

31. 设 $\triangle ABC$ 中,A,B,C 所对应的边长分别为 a,b,c, 已知

$$\frac{b}{a}=\frac{|b^2+c^2-a^2|}{bc},\ \ \frac{c}{b}=\frac{|c^2+a^2-b^2|}{ca},\ \ \frac{a}{c}=\frac{|a^2+b^2-c^2|}{ab}$$

且 $a<b<c$, 求 A。

首先由 $a<b<c\Rightarrow b^2+c^2>a^2$, 则

$$\frac{b}{a}=\frac{|b^2+c^2-a^2|}{bc}=\frac{b^2+c^2-a^2}{bc}$$

于是由余弦、正弦定理,

$$\frac{b}{2a}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\Rightarrow\frac{\sin B}{2\sin A}=\cos A\Rightarrow\sin B=\sin 2A\Rightarrow B=2A$$

同理,

$$\frac{c}{b}=\frac{|c^2+a^2-b^2|}{ca}\Rightarrow C=2B$$

因此

$$A+B+C=7A=\pi\Rightarrow A=\frac{\pi}{7}$$

(待验证 $c^2+a^2-b^2>0$)

32. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c, 其中 $b\geqslant a$。若

$$2a\cos(B+C)+c\cos B+b\cos C=0,$$

且 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 2, 求 $2b-c$ 的取值范围。

由条件得

$$2a\cos(B+C)+c\cos B+b\cos C=-2a\cos A+a=0\Rightarrow A=60^\circ$$

由正弦定理，

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\cdot 2\Rightarrow a=2\sqrt{3}$$

又因 $b\geqslant a$，所以

$$4\sin B\geqslant 2\sqrt{3}\Rightarrow \sin B\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$$

且有

$$\begin{aligned}2b-c&=2\cdot 4\sin B-4\sin C=8\sin B-4\sin(120^\circ-B)\\&=8\sin B-4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B\right)=6\sin B-2\sqrt{3}\cos B=4\sqrt{3}\sin(B-30^\circ)\end{aligned}$$

因为 $60^\circ\leqslant B<120^\circ$ 故

$$2b-c\in[2\sqrt{3},\ 4\sqrt{3})$$

33. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $a^2+b^2+c^2=2\sqrt{3}ab\sin C$，求 $\cos\dfrac{A}{2}+\cos\dfrac{B}{2}+\cos\dfrac{C}{2}$。

由余弦定理 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，代入原式得:

$$a^2+b^2+(a^2+b^2-2ab\cos C)=2a^2+2b^2-2ab\cos C=2\sqrt{3}ab\sin C$$

整理得

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\cos C+\sqrt{3}\sin C=2\sin\left(C+\frac{\pi}{6}\right)$$

由 AM-GM 不等式可知

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2$$

当且仅当 $a=b$ 时等号成立，此时

$$\sin\left(C+\frac{\pi}{6}\right)=1\Rightarrow C=\frac{\pi}{3}$$

因为 $a=b$ 且 $C=\dfrac{\pi}{3}$，三角形 $\triangle ABC$ 为等边三角形，故 $A=B=C=\dfrac{\pi}{3}$，于是

$$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}=3\cos\frac{\pi}{6}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

34. 设 $\triangle ABC$ 的三个内角 A,B,C 所对应的边分别为 a,b,c. 若 $a^4+b^4+c^4=2c^2(a^2+b^2)$ 且 $A=63°$, 求 B。

由展开式

$$(a^2+b^2-c^2)^2=a^4+b^4+c^4+2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2=2a^2b^2$$

得

$$a^2+b^2-c^2=\pm\sqrt{2}ab$$

由余弦定理得

$$\cos C=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

当 $\cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 即 $C=45°$, 故 $B=72°$

当 $\cos C=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, 即 $C=135°, A+C=198°>180°$, 不合题意.

$\therefore\ B=72°$

35. 设 a,b,c 为一直角三角形的三条边, θ 是该三角形最小的角。若 $\dfrac{1}{a}$, $\dfrac{1}{b}$, $\dfrac{1}{c}$ 也构成另一直角三角形, 证明 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$。

不妨设 $a<b<c$, 则 $\dfrac{1}{c}<\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{a}$。因此有

$$a^2+b^2=c^2 \quad \text{以及} \quad \frac{1}{a^2}=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$$

于是有

$$\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}=\frac{1}{c^2-a^2}$$

进一步整理可得

$$c^4+a^4-3c^2a^2=0$$

求解得到

$$a^2=\frac{3c^2-\sqrt{5}c^2}{2}$$

由于 θ 是最小角, $\sin\theta=\dfrac{a}{c}$, 故

$$\frac{a}{c}=\sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{4}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

证毕。

36. 已知三角形 $\triangle ABC$ 满足 $\sin A=\cos B=\dfrac{16}{21}\tan C$, 且 $AC=1$, 求三角形面积。

因为 $\cos B=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\pm B\right)$, 故

$$\sin A=\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm B\right)\Rightarrow A=\frac{\pi}{2}\pm B$$

若 $A=\dfrac{\pi}{2}-B$, 则 $C=\dfrac{\pi}{2}$, 使 $\tan C$ 无定义, 不合题意; 于是

$$A=\frac{\pi}{2}+B, C=\pi-A-B=\frac{\pi}{2}-2B$$

所以

$$\cos B=\frac{16}{21}\tan\left(\frac{\pi}{2}-2B\right)=\frac{16}{21}\cot 2B=\frac{16\cos 2B}{21\sin 2B}=\frac{16}{21}\cdot\frac{1-2\sin^2 B}{2\sin B\cos B}$$

解得

$$(3\sin B-1)(7\sin^2 B-3\sin B-8)=0, \sin B=\frac{1}{3} \text{ 或 } \frac{3\pm\sqrt{233}}{14}$$

注意到 $\sin B=\frac{3+\sqrt{233}}{14}>1$(不合题意) 及 $\sin B=\frac{3-\sqrt{233}}{14}<0\Rightarrow B>\frac{\pi}{2}$(不合题意), 故

$$\sin B=\frac{1}{3}\Rightarrow\cos B=\sin A=\frac{2\sqrt{2}}{3},\ \tan C=\frac{7\sqrt{2}}{8}$$

由正弦定理

$$\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin A}\Rightarrow BC=2\sqrt{2}$$

三角形面积为

$$\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BC\cdot\sin C=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{7}{9}=\frac{7\sqrt{2}}{9}$$

37. 已知 $\triangle ABC$ 内角 A,B,C 的对边分别为 a, b, c, 满足 $b^2=ac$, 点 D 在边 AC 上使得 $AD=2DC$, 且 $BD\sin\angle ABC=a\sin C$, 求 $\cos\angle ABC$。

解法一

由题意知 $BD=b, AD=\dfrac{2b}{3}, DC=\dfrac{b}{3}$, 且 $\angle ADB,\angle CDB$ 互补, 由余弦定理,

$$\cos\angle ADB=-\cos\angle CDB\Rightarrow\frac{b^2+\frac{4b^2}{9}-c^2}{2b\cdot\frac{2b}{3}}=-\frac{b^2+\frac{b^2}{9}-a^2}{2b\cdot\frac{b}{3}}\Rightarrow 2a^2+c^2=\frac{11b^2}{3}$$

又 $b^2=ac$, 所以

$$6a^2-11ac+3c^2=0\Rightarrow c=3a \text{ 或 } c=\frac{2}{3}a$$

当 $c=3a$ 时, $b^2=3a^2$, 由余弦定理得 $\cos\angle ABC=\dfrac{7}{6}>1$, 不合题意。

当 $c=\dfrac{2}{3}a$ 时, $b^2=\dfrac{2}{3}a^2$, 由余弦定理,

$$\cos\angle ABC=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+\frac{4}{9}a^2-\frac{2}{3}a^2}{2a\cdot\frac{2}{3}a}=\frac{7}{12}$$

解法二

已知 $AD=2DC$, 则 $[\triangle ABD]=\dfrac{2}{3}[\triangle ABC]$, 即

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}b^2\sin\angle ADB=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}ac\sin\angle ABC,$$

而 $b^2=ac$, 即 $\sin\angle ADB=\sin\angle ABC$, 故有 $\angle ADB=\angle ABC$, 从而 $\angle ABD=\angle C$。

由 $b^2=ac$, 即 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{c}{b}$, 即 $\dfrac{CA}{CB}=\dfrac{BA}{BD}$, 即 $\triangle ACB\backsim\triangle ABD$ (SAS), 故

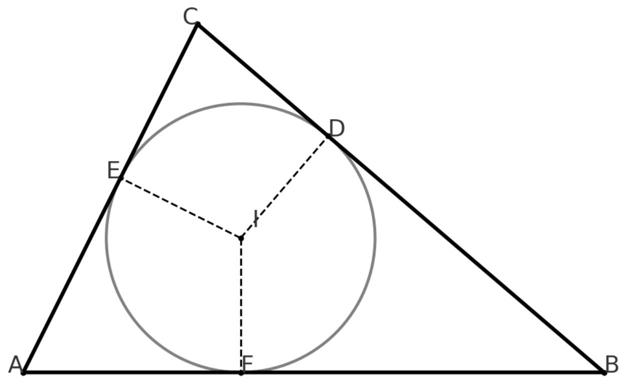
$$\frac{AD}{AB}=\frac{AB}{AC}\implies\frac{2b}{c}=\frac{c}{b},$$

又 $b^2=ac$, 所以 $c=\dfrac{2}{3}a$, 则

$$\cos\angle ABC=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}=\frac{7}{12}.$$

38. 已知三角形 ABC 内切圆切 BC,CA,AB 于 D,E,F, 若内切圆半径为 r, 外接圆半径为 R, 试证

$$\frac{[\triangle DEF]}{[\triangle ABC]}=\frac{r}{2R}.$$



设三角形 ABC 的边长为 a,b,c, 内心 I, 有 $ID=IE=IF=r,\triangle DEF$ 面积为

$$\begin{aligned}[\triangle DEF] &= [\triangle IDE]+[\triangle IEF]+[\triangle IFD] \\ &= \frac{1}{2}r^2(\sin(\pi-A)+\sin(\pi-B)+\sin(\pi-C)) \\ &= \frac{1}{2}r^2(\sin A+\sin B+\sin C)\end{aligned}$$

由正弦定理,

$$\sin A=\frac{a}{2R},\quad \sin B=\frac{b}{2R},\quad \sin C=\frac{c}{2R}$$

代入得

$$[\triangle DEF]=\frac{1}{2}r^2\left(\frac{a+b+c}{2R}\right)=\frac{r^2s}{2R}$$

因此:

$$\frac{[\triangle DEF]}{[\triangle ABC]}=\frac{\frac{r^2s}{2R}}{rs}=\frac{r}{2R}$$

39. 设 $\triangle ABC$ 的三边长为 a,b,c, 面积为 S, 试证明

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{S}\geqslant 4\sqrt{3}.$$

已知三角形的三边为 a,b,c, 其对角分别为 A,B,C。利用余弦定理与面积公式可得

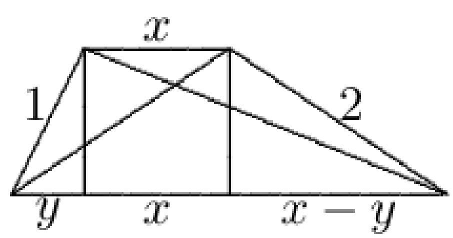
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C,\quad S=\frac{1}{2}ab\sin C$$

因此

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2-4S\sqrt{3}&=2[a^2+b^2-ab(\cos C+\sqrt{3}\sin C)]\\&=2\left[a^2+b^2-2ab\sin\left(\frac{\pi}{6}+C\right)\right]\\&\geqslant 2(a^2+b^2-2ab)\\&=2(a-b)^2\\&\geqslant 0\end{aligned}$$

等号成立当且仅当 $a=b$ 且 $\sin\left(\frac{\pi}{6}+C\right)=1$ 即 $a=b, C=\frac{\pi}{3}$, 亦即 $a=b=c$。

40. 一个梯形的两底比为 $2:1$, 两腰比为 $2:1$, 两对角线比为 $2:1$。求短底与短腰的比。



设短腰为 1, 短底为 x, 高度为 h, 与短腰相连的底边段长为 y, 则

$$1-y^2=h^2=4-(x-y)^2$$

且对角线比给出

$$4\left(h^2+(x+y)^2\right)=h^2+(2x-y)^2.$$

解得

$$x=\frac{\sqrt{10}}{2}.$$

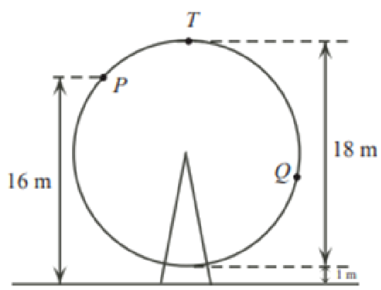
因此短底与短腰的比为

$$\sqrt{10}:2$$

41. 梯形 $ABCD$ 中,$AD/\!/BC$, $BC=3$, $CD=4$, 且 $\cos\angle ADC=\frac{1}{3}$, $\angle ABC=2\angle ADC$。求 AC。

(待解)

42. 一匀速转动的摩天轮直径 18 米，底端距地 1 米。康康在 P 处距地 16 米，用 4 秒到达顶端 T，再用 8 秒到达 Q。求他抵达 Q 时离地面的距离。



设摩天轮圆心为 O, $\angle POT = \theta$, 则 $\angle TOQ = 2\theta$, 发现到

$$\cos\theta = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

与此同时，作 QR 垂直于过圆心 O 的水平线于点 R，有

$$\sin(2\theta - 90^\circ) = \frac{QR}{9}$$

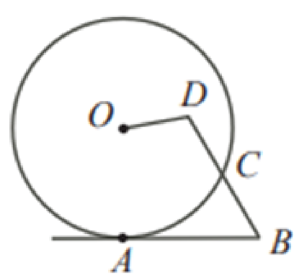
又

$$\sin(2\theta - 90^\circ) = -\cos 2\theta = 1 - 2\cos^2\theta$$

则 $QR = 1$，故 Q 距地 $(9-1)+1 = 9$ 米。

43. 设圆心 O、半径 r 的圆的切线 AB，点 C 在线 BD 上，且 $AB = p$, $BC = CD = DO = q$。证明

$$p^2 = q^2 + r^2.$$



在 $\triangle ODC$ 中, 由余弦定理

$$r^2 = q^2 + q^2 - 2q^2 \cos\angle ODC \Rightarrow \cos\angle ODC = \frac{2q^2 - r^2}{2q^2}$$

在 $\triangle ODB$ 中, 由余弦定理

$$OB^2 = q^2 + (2q)^2 - 2 \cdot q \cdot 2q \cdot \frac{2q^2 - r^2}{2q^2} = q^2 + 2r^2$$

来到尾声, 在 $\triangle OAB$ 中, 由毕氏定理

$$OA^2 + AB^2 = OB^2 \Rightarrow r^2 + p^2 = q^2 + 2r^2$$

于是得证 $p^2 = q^2 + r^2$。

44. 一平行四边形 $ABCD$ 面积为 36, 对角线 AC, BD 长度为 $10, 12$。求 AD 的长度。

设 M 在 BD 上使得 $AM \perp BD$, 于是

$$\frac{1}{2} \cdot AM \cdot BD = 36 \Rightarrow AM = 3$$

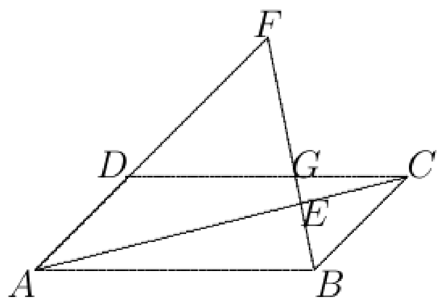
设对角线 AC, BD 交于点 O, 则 $AO = \dfrac{BD}{2} = 6$, 在 $\triangle AOM$ 中, 由毕氏定理,

$$OM = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$$

在 $\triangle AOM$ 中, 由毕氏定理,

$$AD = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{3} + 5)^2} = \sqrt{61 + 30\sqrt{3}}$$

45. 在平行四边形 $ABCD$ 中, 将边 AD 延长至点 F, 线段 FB 与边 CD 相交于 G, 与对角线 AC 相交于 E, 且满足 $FG = 4, GE = 1$。求 EB 的长度。



设 $EB=x, DG=y, DC=b$, 由 $\triangle EBA \backsim \triangle EGC$ (AAA),

$$\frac{x}{1}=\frac{b}{b-y}$$

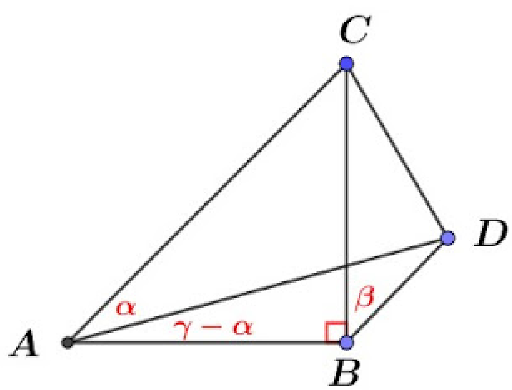
又由 $\triangle GFD \backsim \triangle GBC$ (AAA) 得

$$\frac{4}{y}=\frac{1+x}{b-y}$$

解得

$$EB=x=\sqrt{5}$$

46. 平面上 $AC=AD, \angle ABC=90^\circ, \angle CAD=\alpha, \angle CBD=\beta, \angle CAB=\gamma$, 若 $\cos\alpha=\frac{4}{5}, \cos\beta=\frac{8}{17}$, 求 $\tan\gamma$。



在 $\triangle ABD$ 中, $\angle DAB=\gamma-\alpha, \angle ABD=90^\circ+\beta$, 则

$$\angle ADB=90^\circ+\alpha-\beta-\gamma$$

由正弦定理,

$$\frac{AB}{AD}=\frac{\sin(90^\circ+\alpha-\beta-\gamma)}{\sin(90^\circ+\beta)}=\frac{\cos(\alpha-\beta-\gamma)}{\cos\beta}=\frac{\cos(\alpha-\beta-\gamma)}{\frac{8}{17}}$$

由于 $AD=AC=AB\cos\gamma$, 所以

$$\begin{aligned}\frac{8}{17}\cos\gamma=\cos(\alpha-\beta-\gamma)&=\cos(\alpha-\beta)\cos\gamma+\sin(\alpha-\beta)\sin\gamma\\&=(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)\cos\gamma+(\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha)\sin\gamma\\&=\left(\frac{4}{5}\cdot\frac{8}{17}+\frac{3}{5}\cdot\frac{15}{17}\right)\cos\gamma+\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{8}{17}-\frac{15}{17}\cdot\frac{4}{5}\right)\sin\gamma\\&=\frac{77}{85}\cos\gamma-\frac{36}{85}\sin\gamma\end{aligned}$$

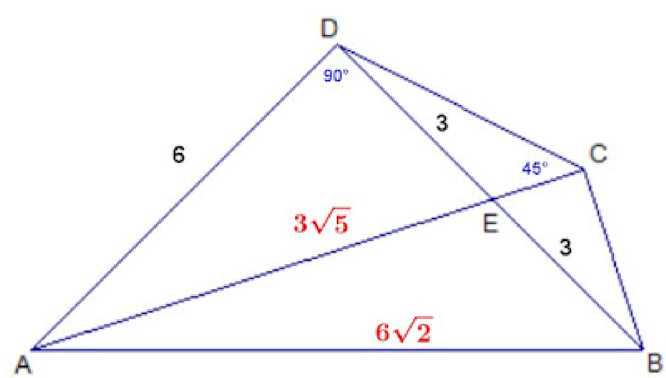
得到

$$\tan\gamma=\frac{37}{36}$$

47. 四边形 $ABCD$ 的对角线 AC,BD 交于 E 点, 且

$$BE=DE=\frac{1}{2}AD=3, \angle ADB=90^\circ, \angle ACD=45^\circ,$$

求 $\triangle BCD$ 的面积。



在直角 $\triangle ADE$ 中,

$$AE^2 = 6^2 + 3^2 = 45 \Rightarrow AE = 3\sqrt{5}$$

在直角 $\triangle ADB$ 中,

$$AB^2 = 6^2 + 6^2 = 72 \Rightarrow AB = 6\sqrt{2}$$

在 $\triangle AEB$ 中, 由余弦定理,

$$\cos\angle AEB = \frac{45+9-72}{18\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin\angle AEB = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

在 $\triangle CDE$ 中, 由正弦定理,

$$\frac{3}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{CD}{\frac{2}{\sqrt{5}}} \Rightarrow CD = 6\sqrt{\frac{2}{5}}$$

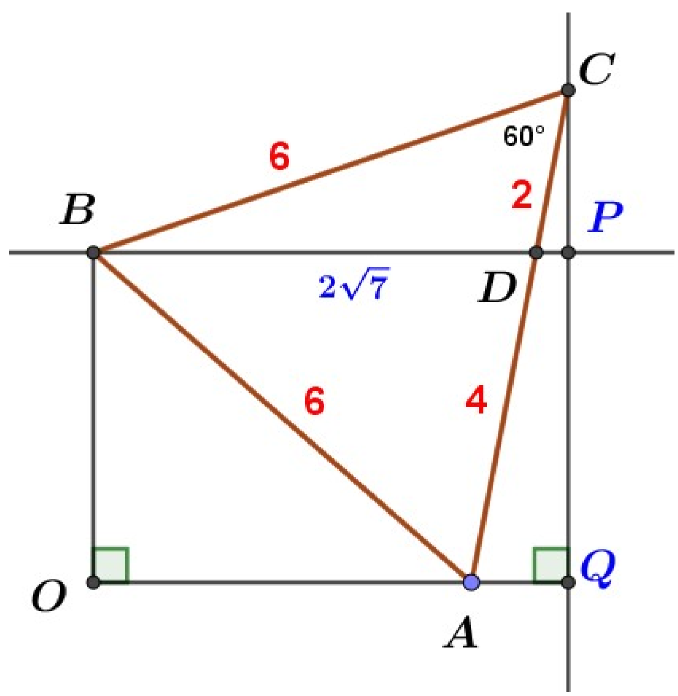
又

$$\sin\angle BDC = \sin(45^\circ + \angle DEC) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

因此 $\triangle BCD$ 面积为

$$\frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{\frac{2}{5}} \cdot 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{18}{5}$$

48. 有一正三角形 $\triangle ABC$ 的艺术品, 边长为 6 公尺, 以 AB 为边斜靠在墙上, 墙角为 O 点, 形成直角 $\triangle OAB, \angle AOB = 90^\circ, A$ 点在地面上,B 点在墙上。过 B 点作与地面平行的直线交 AC 于点 D, 已知 $CD = 2$ 公尺, 求此艺术品的最高点离地面的高度。



由余弦定理,

$$BD^2 = 6^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow BD = 2\sqrt{7}$$

在 $\triangle CBD$ 中,

$$\frac{2}{\sin \angle CBD} = \frac{2\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \sin \angle CBD = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$$

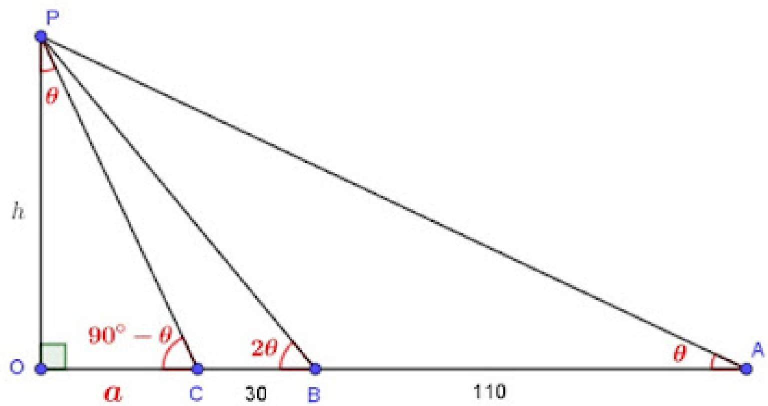
于是

$$CP = BC \sin \angle CBD = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} = 3\sqrt{\frac{3}{7}}.$$

又 $DP /\!/ AQ$, 由相似三角形,

$$\frac{2}{6} = \frac{3\sqrt{\frac{3}{7}}}{CQ} \Rightarrow CQ = \frac{9}{7}\sqrt{21} \text{ 公尺}$$

49. 某人在地面 A 点, 测得山峰的仰角为 θ。此人向山脚前进 110 公尺到达 B 点, 测得山峰仰角为 2θ, 再向山脚前进 30 公尺到达 C 点, 又测得山峰仰角为 $90^\circ - \theta$。求山高 h。



设从 C 点到山脚的水平距离为 a 公尺, 则:

$$h = a\tan(90^\circ - \theta) = \frac{a}{\tan\theta} \tag{1}$$

$$h = (30 + a)\tan 2\theta \tag{2}$$

$$h = (140 + a)\tan\theta \tag{3}$$

由 (1) = (3) 和 (1) = (2),

$$\frac{a}{140 + a} = \tan^2\theta \tag{4}$$

$$\frac{a}{30+a} = \frac{2\tan^2\theta}{1-\tan^2\theta} = -2 + \frac{2}{1-\tan^2\theta} \tag{5}$$

将 (4) 代入 (5),

$$\frac{a}{30+a} = -2 + \frac{2}{1-\frac{a}{140+a}} \Rightarrow a = 40$$

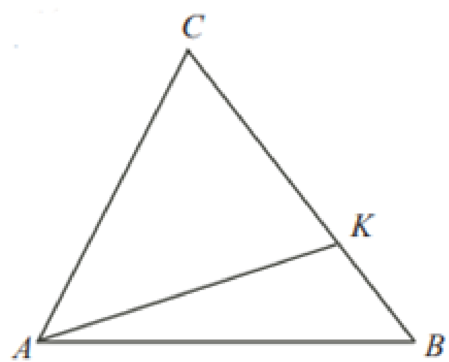
于是

$$\tan^2\theta = \frac{40}{180} \Rightarrow \tan\theta = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

则山高为

$$h = (140+40)\tan\theta = 180 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} = 60\sqrt{2}$$

50. 已知 $\triangle ABC$ 满足 $2\angle BAC = 3\angle ABC$, 且 K 为 BC 上一点使得 $\angle KAC = 2\angle KAB$, 证明



(a) $AK = \dfrac{bc}{a}$, $BK = \dfrac{a^2-b^2}{a}$

记 $\angle KAB = \theta$, 则 $\angle KAC = 2\theta, \angle ABC = 2\theta, \angle CKA = \theta + 2\theta = 3\theta$, 所以

$$\triangle CAK \backsim \triangle CBA \text{ (AAA)} \Rightarrow AK = \frac{bc}{a}$$

由余弦定理,

$$CK^2 = b^2 + d^2 - 2bd\cos 2\theta = b^2 + \left(\frac{bc}{a}\right)^2 - 2b\left(\frac{bc}{a}\right)\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right) = \frac{b^4}{a^2}$$

于是 $CK = \dfrac{b^2}{a}$, 且

$$BK = a - CK = \frac{a^2-b^2}{a}$$

(b) $(a^2-b^2)(a^2-b^2+ac)=b^2c^2$

记 $AK=x, BK=y$, 由正弦定理,

$$\frac{x}{\sin 2\theta}=\frac{y}{\sin\theta}\Rightarrow x=2y\cos\theta$$

又由余弦定理,

$$\cos\theta=\frac{c^2+x^2-y^2}{2cx}$$

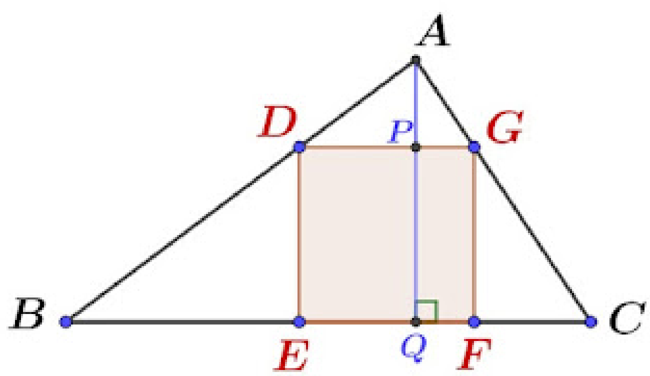
于是

$$cx^2=y(x^2+c^2-y^2)\Rightarrow x^2=y(y+c)$$

代入 $x=\dfrac{bc}{a}, y=\dfrac{a^2-b^2}{a}$ 可得

$$(a^2-b^2)(a^2-b^2+ac)=b^2c^2$$

51. 已知正方形 $DEFG$ 内接于 $\triangle ABC, EF$ 在 BC 上且 D, G 分别在 AB, AC 上, 已知 $\triangle ADG, \triangle BDE, \triangle CGF$ 的面积分别为 $1,3,1$, 求 $\triangle ABC$ 的面积。



作 $AQ\perp BC$ 交 DG 于 P, 因此 $\triangle APG\backsim\triangle GFC$ (AAA), $\triangle APD\backsim\triangle DEB$ (AAA), 且有

$$\frac{[\triangle APG]}{[\triangle APD]}=\frac{[\triangle GFC]}{[\triangle DEB]}=\frac{1}{3}\Rightarrow[\triangle APD]=\frac{3}{4},\quad[\triangle APG]=\frac{1}{4}$$

又

$$\frac{[\triangle BDE]}{[\triangle APD]}=\frac{3}{\frac{3}{4}}=\frac{DE^2}{AP^2}\Rightarrow DE=2AP$$

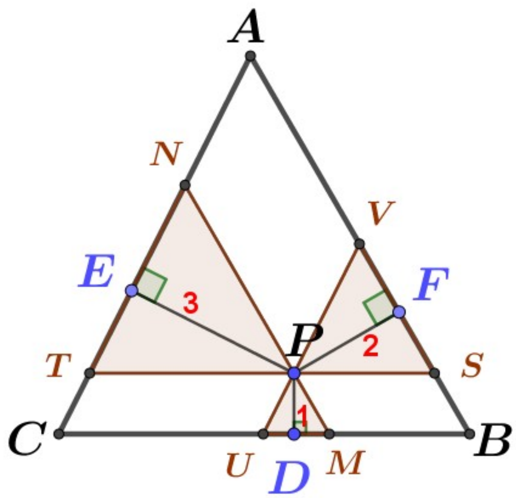
因此

$$[\triangle ADG]=1=\frac{1}{2}\cdot DG\cdot AP=\frac{1}{2}\cdot 2(AP)^2\Rightarrow AP=1, DG=2$$

$\triangle ABC$ 面积为

$$1+3+1+2^2=9$$

52. 设 P 为正 $\triangle ABC$ 内部一点, 若 P 点依序到三边 BC, AC, AB 之距离比为 $1:3:2$, 求 $PA^2:PB^2:PC^2$。



作

$$MN /\!/ AB, \quad ST /\!/ BC, \quad UV /\!/ AC,$$

则 $\triangle PUM, \triangle PSV, \triangle PTN$ 均为正三角形, 且 $1,2,3$ 分别为正三角形的高, 因此

$$PU=PM=UM=\frac{2}{\sqrt{3}}, \quad PV=PS=VS=\frac{4}{\sqrt{3}}, \quad PN=PT=NT=\frac{6}{\sqrt{3}}.$$

由毕氏定理,

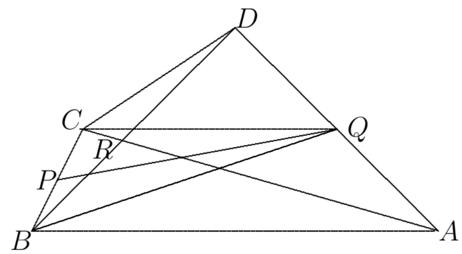
$$PA^2=2^2+\left(\frac{6}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{76}{3}, \quad PB^2=1^2+\left(\frac{4}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{28}{3},$$

$$PC^2=3^2+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{3}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{52}{3}.$$

故

$$PA^2:PB^2:PC^2=19:7:13$$

53. 圆内接四边形 $ABCD$ 满足 $AB=4, BC=1, CD=2, DA=3$。设 P, Q 分别为 BC 与 DA 的中点, 求 PQ^2。



设对角线交点为 R, 令 $CR=x$。由 $\triangle BCR \backsim \triangle ADR$ (AAA) 及 $\triangle CDR \backsim \triangle BAR$ (AAA) 可得

$$BR=2x, \quad DR=3x, \quad AR=6x,$$

因此

$$AC=7x, \quad BD=5x$$

在四边形 $ABCD$ 中, 由托勒密定理,

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$$

得

$$x^2=\frac{11}{35}$$

在 $\triangle ABD$ 及 $\triangle ACD$ 中, 由中线定理,

$$AB^2+BD^2=\frac{1}{2}DA^2+2BQ^2, \quad AC^2+CD^2=\frac{1}{2}DA^2+2CQ^2$$

得

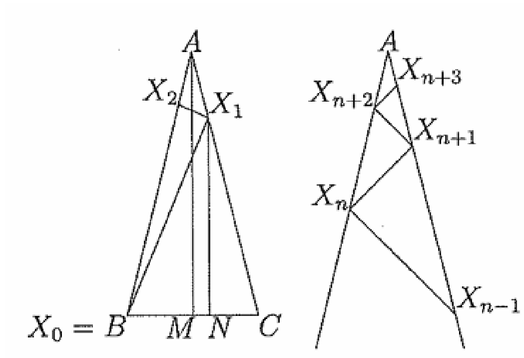
$$BQ^2=\frac{271}{28}, \ CQ^2=\frac{571}{20}$$

故在 $\triangle BCQ$ 中, 由中线定理,

$$BQ^2+CQ^2=\frac{1}{2}BC^2+2PQ^2 \Rightarrow PQ^2=\frac{291}{35}$$

(待验证)

54. 已知三角形 ABC 和点 X_1 在 AC 上, 满足 $AB=AC=91, BC=70, X_1C=65$。设 $X_0=B$, 点 $X_2,X_4,X_6,\ldots$ 在 AB 上,$X_3,X_5,X_7,\ldots$ 在 AC 上, 且 $X_{n+1}X_n \perp X_nX_{n-1}$ 对 $n \geqslant 1$ 成立。求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_{n-1}X_n$。



设 M, N 分别为 A, X_1 在 BC 上的垂足, 由 $\triangle AMC \backsim \triangle X_1NC$ (AAA)

$$\frac{NC}{MC} = \frac{X_1C}{AC} \Rightarrow NC = \frac{65}{91} \cdot 35 = 25.$$

由毕氏定理,

$$X_1N = \sqrt{65^2 - 25^2} = 60, \quad X_0X_1 = \sqrt{60^2 + 45^2} = 75.$$

则

$$\tan \angle X_1BA = \tan(\angle ABC - \angle X_1BC) = \frac{\frac{12}{5} - \frac{4}{3}}{1 + \frac{12}{5} \cdot \frac{4}{3}} = \frac{16}{63}$$

因此

$$X_1X_2 = X_0X_1 \cdot \frac{16}{63} = \frac{400}{21}, \quad X_0X_2 = \sqrt{75^2 + \left(\frac{400}{21}\right)^2} = 25 \cdot \frac{65}{21}$$

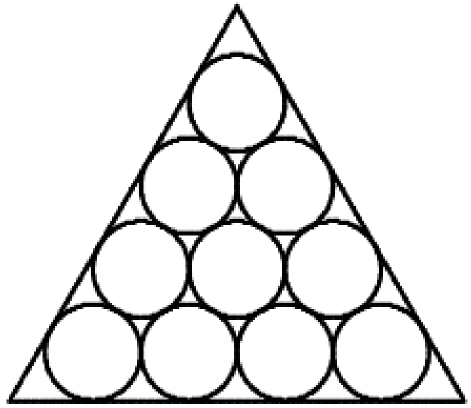
且 $AX_n, AX_{n+2}, \ldots$ 成等比数列, 公比为

$$r = \frac{AX_2}{AX_0} = \frac{91 - \frac{25 \cdot 65}{21}}{91} = 1 - \frac{125}{147}$$

因此无穷和为

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_{n-1}X_n = \frac{X_0X_1 + X_1X_2}{1 - r} = \left(75 + \frac{400}{21}\right) \cdot \frac{147}{125} = \frac{553}{5}$$

55. 一个等边三角形中有 n 排全等的小圆（如下图 $n = 4$ 所示）。求当 $n \to \infty$ 时, 圆的面积与三角形面积的比值极限。



设三角形边长为 1, 小圆半径为 r, 由 30-60-90 直角三角形可得

$$2(n-1)r+2r\sqrt{3}=1 \Rightarrow r=\frac{1}{2(n+\sqrt{3}-1)}.$$

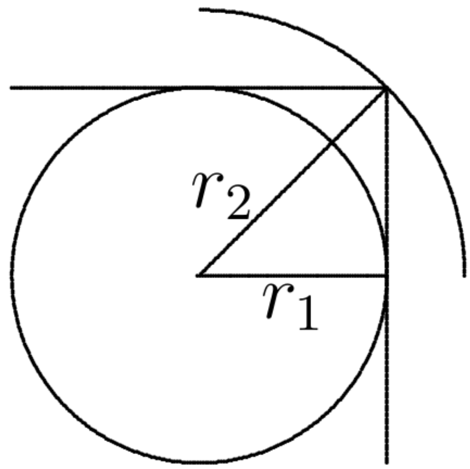
共有 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个圆, 因此圆的总面积为

$$\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{\pi}{4(n+\sqrt{3}-1)^2}=\frac{\pi}{8}\frac{n(n+1)}{(n+\sqrt{3}-1)^2}.$$

当 $n\to\infty$ 时,$\dfrac{n(n+1)}{(n+\sqrt{3}-1)^2}\to 1$, 因此面积比极限为

$$\frac{\frac{\pi}{8}}{\frac{\sqrt{3}}{4}}=\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$$

56. 已知 C_1 是半径为 1 的圆,P_1 是 C_1 的外接正方形。对于 $n\geqslant 2$, 令 C_n 为 P_{n-1} 的外接圆,P_n 为 C_n 的外接正 2^{n+1} 边形。设 r_n 为 C_n 的半径。求 $\lim_{n\to\infty} r_n$。



由图可知,

$$r_2 = \frac{r_1}{\cos\frac{\pi}{4}}, \quad r_n = \frac{r_{n-1}}{\cos\frac{\pi}{2^n}}, \quad n \geqslant 2$$

于是

$$r_n = \frac{1}{\prod\limits_{k=2}^{n} \cos\frac{\pi}{2^k}}$$

且由

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2^2\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2} = \cdots = 2^n \sin\frac{x}{2^n}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k}$$

两边除以 x 并取极限 $n \to \infty$ 得

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{k=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^k}$$

令 $x = \frac{\pi}{2}$, 得到

$$\prod_{k=1}^{\infty}\cos\frac{\pi}{2^{k+1}} = \frac{2}{\pi}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \frac{\pi}{2}$$

57. 圆内有两条平行弦, 其长分别为 12,16, 且它们之间的距离为 7。另一条弦位于两条弦中间且与两线等距, 求该弦的长度。

设圆半径为 r, 两条弦到圆心的距离分别为 d_1, d_2, 由毕氏定理,

$$\left(\frac{12}{2}\right)^2 + d_1^2 = r^2, \quad \left(\frac{16}{2}\right)^2 + d_2^2 = r^2 \implies 36 + d_1^2 = 64 + d_2^2.$$

假设两弦在圆心的两侧, 则

$$d_1 + d_2 = 7, \quad d_1 - d_2 = 4 \implies d_1 = \frac{11}{2} > 0, \quad d_2 = \frac{3}{2} > 0$$

于是

$$r^2 = 36 + d_1^2 = \frac{265}{4}$$

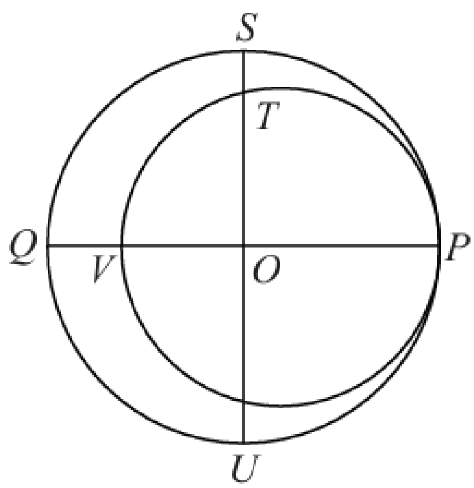
中间弦到圆心的距离为

$$d = \frac{d_1 - d_2}{2} = 2$$

设中间弦长度为 x, 则由毕氏定理,

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 2^2 = r^2 \Rightarrow x = \sqrt{249}$$

58. 在图中, 两圆在点 P 相切。QP 和 SU 是大圆的垂直直径, 交于 O。点 V 在 QP 上使得 VP 是小圆的直径。小圆与 SU 相交于 T。已知 $QV = 9, ST = 5$, 求两圆直径之和。



设大圆直径为 D, 小圆直径为 d, 小圆圆心为 C, 在 $\triangle TOC$ 中, 由毕氏定理,

$$TO^2 + OC^2 = CT^2 \Rightarrow \left(\frac{D}{2} - 5\right)^2 + \left(\frac{D}{2} - \frac{d}{2}\right)^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

由 $QV = D - d = 9$, 得

$$(D-10)^2 + 9^2 = d^2$$

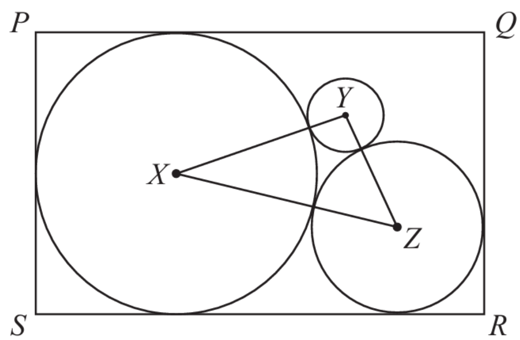
于是

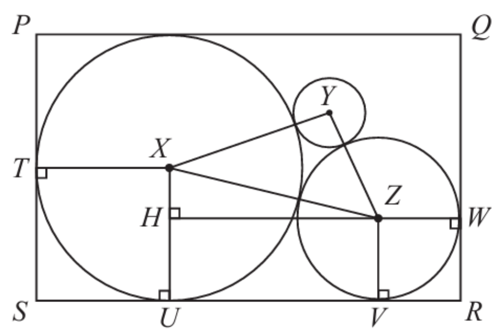
$$81 = (d-(D-10))(d+(D-10)) = 1 \cdot (d+D-10)$$

所以

$$d + D = 91$$

59. 如图所示, 三个圆的圆心分别为 X, Y, Z, 每个圆都与另外两个圆相切。圆心为 X 的圆与矩形 $PQRS$ 相切于三条边, 圆心为 Z 的圆与矩形 $PQRS$ 相切于两条边。如果 $XY = 30, YZ = 20, XZ = 40$, 求矩形 $PQRS$ 的面积。





圆心之间的距离等于两个相切圆半径之和。设圆心 X, Y, Z 的半径分别为 x, y, z, 则有:

$$XY = x + y = 30, \quad XZ = x + z = 40, \quad YZ = y + z = 20.$$

解得

$$x = 25,\ y = 5,\ z = 15$$

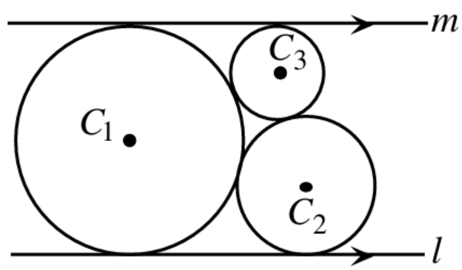
矩形高度为 $2x=50$, 宽度为

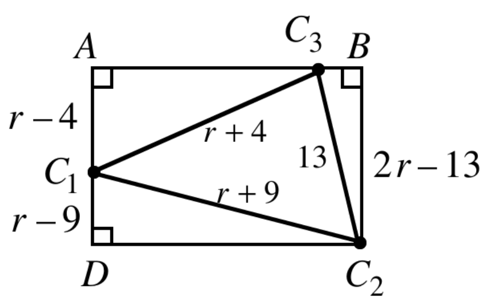
$$SR=SU+UV+VR=25+\sqrt{40^2-10^2}+15=40+10\sqrt{15}$$

故矩形面积为

$$[PQRS]=50(40+10\sqrt{15})=2000+500\sqrt{15}$$

60. 两个圆 C_1 和 C_2 外切, 直线 l 为它们的公切线。直线 m 平行于 l 并与 C_1 和 C_3 相切。三个圆互相切。已知 C_2 的半径为 9,C_3 的半径为 4, 求 C_1 的半径。





设 C_1 的半径为 r, 有

$$C_1C_2=r+9,\quad C_1C_3=r+4,\quad C_2C_3=13.$$

如图所示, 考虑矩形 ABC_2D, 由毕氏定理, 在 $\triangle AC_3C_1$ 中,

$$C_3A^2=(r+4)^2-(r-4)^2=16r\Rightarrow C_3A=4\sqrt{r}.$$

在 $\triangle DC_2C_1$ 中,

$$DC_2^2=(r+9)^2-(r-9)^2=36r\Rightarrow DC_2=6\sqrt{r}$$

在 $\triangle BC_3C_2$ 中,

$$CB^2 = 13^2 - (2r-13)^2 = -4r^2 + 52r \Rightarrow C_3B = \sqrt{-4r^2+52r}$$

由 $DC_2 = C_3A + C_3B$ 得

$$6\sqrt{r} = 4\sqrt{r} + \sqrt{-4r^2+52r}$$

解得

$$r = 12 > 0$$

61. 已知 $\triangle ABC$ 中, $AB = 13, BC = 14, AC = 15$, 设 D, E 分别为从 A, B 作的高的垂足, 求 $\triangle CDE$ 的外接圆直径。

在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理,

$$13^2 = 14^2 + 15^2 - 2 \cdot 14 \cdot 15 \cos C \Rightarrow \cos C = \frac{3}{5}$$

设 AD 与 BE 交于 X, 由于 $\angle CDX = \angle CEX = 90°$, 有

$$\triangle CDA \backsim \triangle CEB \backsim \triangle XDB \ (\text{AAA}),$$

得到

$$CD = 9, \quad BD = 5, \quad DX = \frac{15}{4}$$

在 $\triangle CDX$ 中, 由毕氏定理,

$$CX = \sqrt{CD^2 + DX^2} = \frac{39}{4}$$

发现 $CDXE$ 是一圆内接四边形, 因此 $\triangle CDE$ 的外接圆直径即为

$$CX = \frac{39}{4}$$

62. 已知点 A, B, C, D 共圆, AC 是直径, 且 $\angle CBD = \angle DBA$。若 $BC = 2, AB = 4$, 求 BD 的长度。

AC 是直径, 所以 $\angle ABC = 90°$, 因此

$$\angle CBD = \angle DBA = 45°$$

又 $\angle CAD$ 与 $\angle CBD$ 为同弧所对的角, 所以

$$\angle CAD = \angle CBD = 45^\circ$$

在 $\triangle ABC$ 中, 由毕氏定理,

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2\sqrt{5}$$

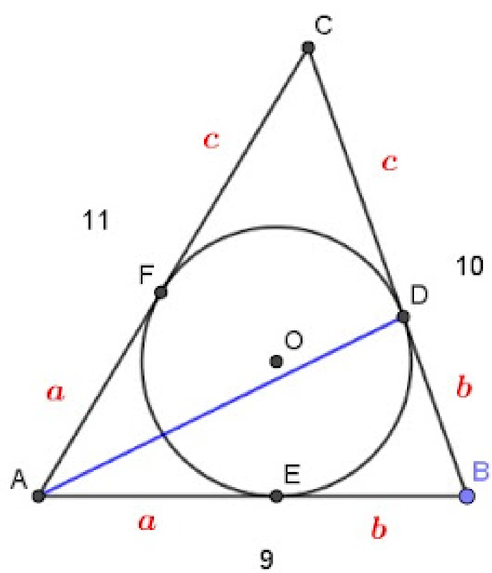
故

$$\sin\angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

在 $\triangle BAD$ 中, 由正弦定理,

$$\begin{aligned} BD = AC\sin\angle BAD &= AC\sin\left(\angle BAC + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= 2\sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\angle BAC + \cos\angle BAC) = 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

63. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $AB = 9, BC = 10, CA = 11$, 且内切圆切 BC, AB, AC 于 D, E, F, 求 AD。



设 $AE = AF = a, BD = BE = b, CF = CD = c$, 则

$$c = s - AB = \frac{9+10+11}{2} - 9 = 6$$

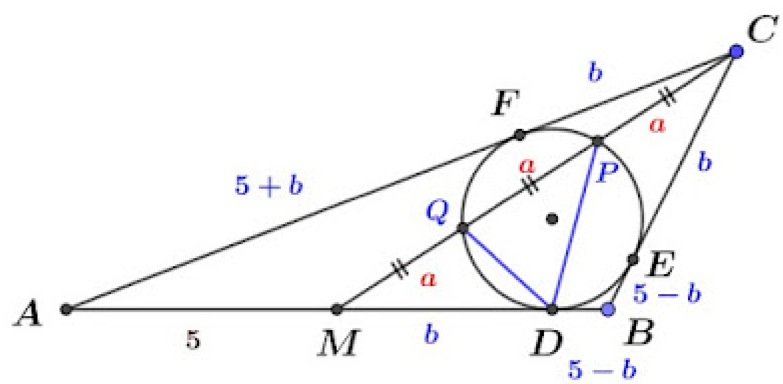
在 $\triangle CAD$ 与 $\triangle CAB$ 中, 由余弦定理,

$$\cos C=\frac{11^2+6^2-AD^2}{2\cdot 11\cdot 6}=\frac{11^2+10^2-9^2}{2\cdot 11\cdot 10}$$

解得

$$AD=\sqrt{73}$$

64. 在 $\triangle ABC$ 中,$AB=10$, M 为 AB 中点, $\triangle ABC$ 内切圆恰将线段 CM 三等分, 求 $\triangle ABC$ 面积。



设三切点为 D,E,F, 中线 CM 与内切圆交于 P,Q 两点, 据题意有

$$CP=PQ=QA=a.$$

由 $\triangle MQD\backsim\triangle MDP$ (AAA),

$$\frac{MQ}{MD}=\frac{MD}{MP}\Rightarrow MD^2=MP\cdot MQ=2a^2,$$

同理由 $\triangle CPF\backsim\triangle CFQ$ (AAA) 得 $CF^2=2a^2$, 则

$$CE=CF=MD=b\Rightarrow b=\sqrt{2}a.$$

由中线定理,

$$CA^2+CB^2=2(CM^2+AM^2)\Rightarrow(5+2b)^2+5^2=2(9a^2+5^2)$$

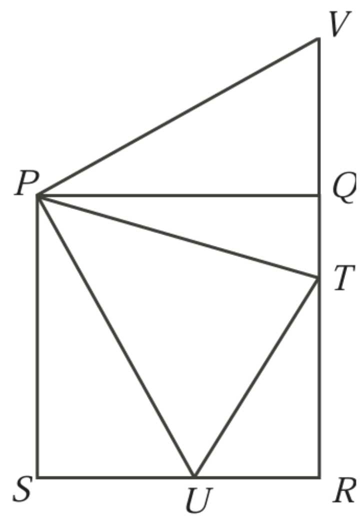
代入 $b=\sqrt{2}a$ 解得

$$a=2\sqrt{2},\quad b=4.$$

因此三边长为 $AB=10,BC=5,AC=5+2b=13$, 半周长 $s=\dfrac{10+5+13}{2}=14$, 面积为

$$\sqrt{14\cdot 4\cdot 9\cdot 1}=6\sqrt{14}$$

65. 已知 $PQRS$ 是边长为 4 的正方形, 点 T 在 QR 上, 点 U 在 RS 上, 且 $\angle UPT = 45°$, 求 $\triangle RUT$ 的最大周长。



将 $\triangle PSU$ 绕点 P 逆时针旋转 $90°$, 得到全等的 $\triangle PQV$, 此时 V 位于 RQ 的延长线上, 且有

$$\triangle PTU \cong \triangle PTV \text{ (SAS)}$$

于是 $\triangle RUT$ 的周长

$$UR + RT + UT = UR + RT + TV = UR + RQ + SU = SR + RQ = 8$$

故最大周长为 8。

设 $\angle SPU = \theta, 0° < \theta < 45°$, 则

$$SU = 4\tan\theta, \quad UR = SR - SU = 4 - 4\tan\theta.$$

由 $\angle UPT = 45°$ 可得 $\angle QPT = 45° - \theta$, 于是

$$QT = PQ\tan(45° - \theta) = 4 \cdot \frac{1 - \tan\theta}{1 + \tan\theta}, \quad RT = QR - QT = \frac{8\tan\theta}{1 + \tan\theta}.$$

由毕氏定理,

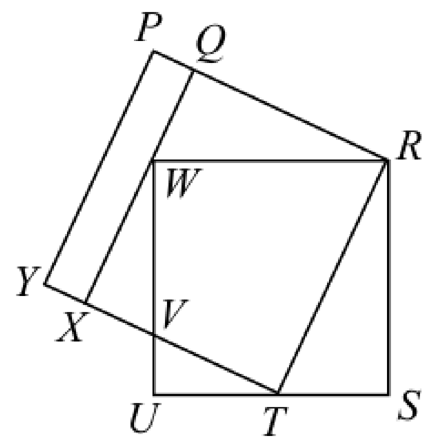
$$UT = \sqrt{UR^2 + RT^2} = 4 \cdot \frac{1 + \tan^2\theta}{1 + \tan\theta}$$

因此,$\triangle RUT$ 的周长为

$$UR+RT+UT=4-4\tan\theta+\frac{8\tan\theta}{1+\tan\theta}+4\cdot\frac{1+\tan^2\theta}{1+\tan\theta}=4\frac{2+2\tan\theta}{1+\tan\theta}=8$$

无论 θ 取何值周长恒为 8, 故最大可能为 8。

66. 如图,$PRTY$ 和 $WRSU$ 是正方形, 点 Q,X 在 PR,TY 上使得 $PQXY$ 是矩形, 点 T,W 在 SU,QX 上,UW 与 TY 交于 V。若矩形 $PQXY$ 面积为 30, 求 ST 的长度。



设 $ST=a,\angle STR=\theta$。则

$$\angle TRS=90^\circ-\theta,\quad \angle QWR=\theta$$

由 $\triangle RST$,

$$PY=PR=RT=\frac{a}{\cos\theta},\quad RW=RS=a\tan\theta$$

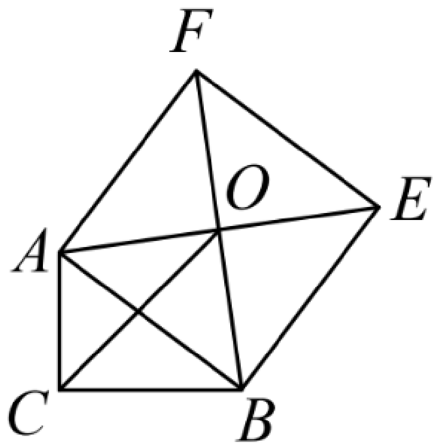
且由 $\triangle QRW$,

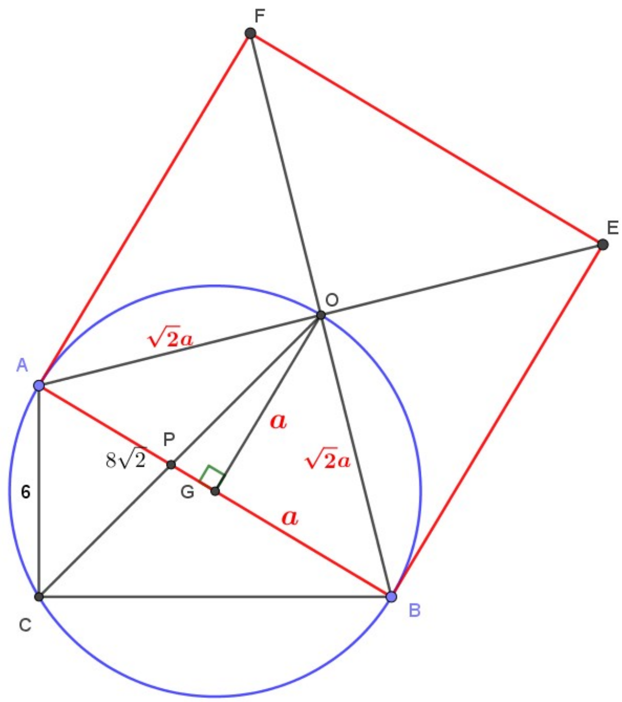
$$QR=RW\sin\theta=a\tan\theta\sin\theta,\quad PQ=PR-QR=\frac{a}{\cos\theta}-a\tan\theta\sin\theta=a\cos\theta$$

矩形面积为 $PQ\cdot PY=30$, 即

$$a\cos\theta\cdot\frac{a}{\cos\theta}=a^2=30\Rightarrow a=\sqrt{30}$$

67. 如图, 在直角 $\triangle ABC$ 中,$\angle ACB=90^\circ,AC=6$, 以 AB 为一边向三角形外作正方形 $ABEF$。已知正方形的中心为 O, 且 $OC=8\sqrt{2}$, 求 BC 的长度。





$\triangle OAB$ 为等腰直角三角形, 设 G 为 AB 中点, 则 OG 为中垂线, 设

$$GA = GB = OG = a,$$

同弧所对的圆周角相等, 有 $\angle ACO = \angle ABO = 45°$, 由余弦定理,

$$(\sqrt{2}a)^2 = 6^2 + (8\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8\sqrt{2} \cdot \cos\angle 45° \Rightarrow a^2 = 34$$

在直角 $\triangle ABC$ 中, 由毕氏定理,

$$(2a)^2 = 6^2 + CB^2 \Rightarrow CB = 10$$

68. 在直角 $\triangle ABC$ 中,D,E,F 分别为三边的中点,G 为重心, 且

$$GD^2+GE^2+GF^2=\frac{50}{3}$$

求斜边 AC 的长度。

由于 G 为重心,

$$\frac{50}{3}=GD^2+GE^2+GF^2=\left(\frac{1}{3}BD\right)^2+\left(\frac{1}{3}CE\right)^2+\left(\frac{1}{3}AF\right)^2$$

从而

$$BD^2+CE^2+AF^2=150$$

在直角 $\triangle ABC$ 中, 由毕氏定理,

$$BD=\frac{1}{2}AC,\quad CE^2=BC^2+\left(\frac{1}{2}AB\right)^2,\quad AF^2=AB^2+\left(\frac{1}{2}BC\right)^2$$

于是

$$BD^2+CE^2+AF^2=\frac{1}{4}AC^2+\frac{1}{4}AB^2+BC^2+AB^2+\frac{1}{4}BC^2$$

又由毕氏定理 $AB^2+BC^2=AC^2$,

$$150=BD^2+CE^2+AF^2=\frac{1}{4}AC^2+\frac{1}{4}AC^2+AC^2=\frac{3}{2}AC^2\Rightarrow AC=10$$

由重心的性质可得

$$GA^2+GB^2+GC^2=\frac{1}{3}(AB^2+BC^2+AC^2)$$

又 D,E,F 分别为三边的中点,G 为重心, 有

$$GD^2+GE^2+GF^2=\frac{1}{4}(GA^2+GB^2+GC^2)=\frac{1}{12}(AB^2+BC^2+AC^2)$$

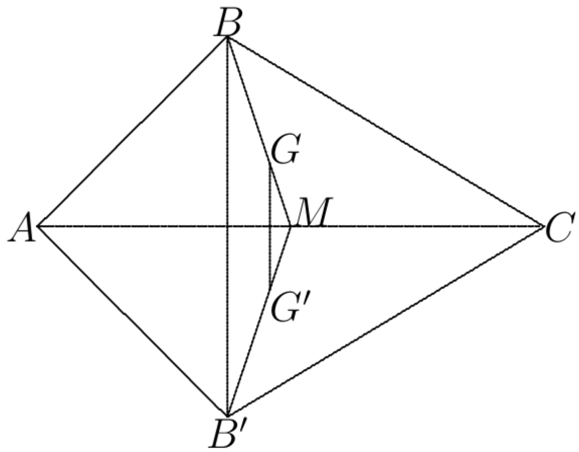
且由毕氏定理 $AB^2+BC^2=AC^2$, 因此

$$GD^2+GE^2+GF^2=\frac{1}{6}AC^2=\frac{50}{3}$$

解得

$$AC=10$$

69. 已知 $\triangle ABC$ 满足 $AB=9, BC=10, CA=17, B'$ 为 B 关于 AC 的对称点,G, G' 为 $\triangle ABC, \triangle AB'C$ 的重心, 求 GG' 的长度。



设 M 为 AC 的中点, 由 $GMG' \backsim BMB'$ (SAS), 可得

$$GG' = \frac{1}{3}BB'$$

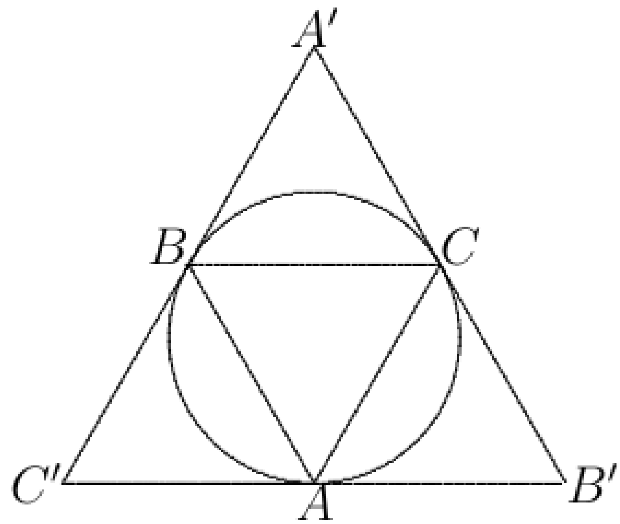
三角形面积为

$$[\triangle ABC] = \frac{1}{4}BB' \cdot AC = \sqrt{18(18-9)(18-10)(18-17)} = 36 \Rightarrow BB' = \frac{144}{17}$$

于是

$$GG' = \frac{48}{17}$$

70. 已知 $\triangle ABC$ 满足 $AB=4, BC=5, CA=6, \triangle ABC$ 的外接圆同时是 $\triangle A'B'C'$ 的内切圆, 且 A, B, C 分别在 $B'C', A'C', A'B'$ 上, 求 $B'C'$ 的长度。



由弦切角定理,

$$\angle C'AB = \angle C, \quad \angle B'AC = \angle B$$

由直角三角形关系得

$$C'A = \frac{2}{\cos\angle C'AB} = \frac{2}{\cos C}, \quad B'A = \frac{3}{\cos\angle B'AC} = \frac{3}{\cos B}$$

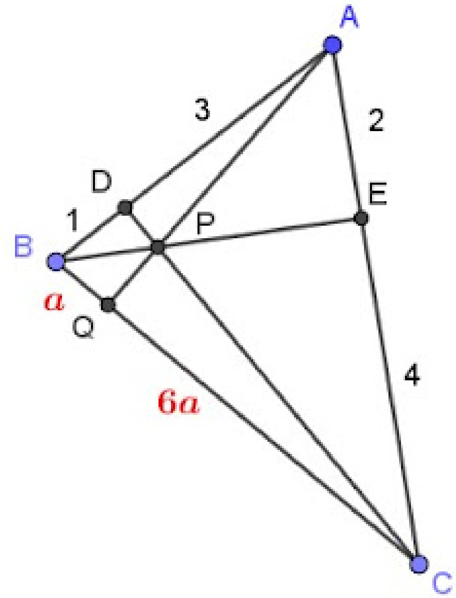
由余弦定理, 得

$$\cos B = \frac{4^2+5^2-6^2}{2\cdot 4\cdot 5} = \frac{1}{8}, \quad \cos C = \frac{5^2+6+2-4^2}{2\cdot 5\cdot 6} = \frac{3}{4}$$

因此

$$B'C' = C'A + B'A = 2\cdot\frac{4}{3} + 3\cdot 8 = \frac{80}{3}$$

71. 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D, E 分别在 AB, AC 上, 且 $AD = 3, DB = 1, AE = 2, EC = 4$。$BE$ 和 CD 相交于 P 点, 若 $AP \perp BC$, 求 $\cos\angle BAC$。



设 Q 为 BC 上的垂足, 由梅涅劳斯定理,

$$\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BQ}{QC}=\frac{4}{2}\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{BQ}{QC}=1\Rightarrow\frac{BQ}{QC}=\frac{1}{6}$$

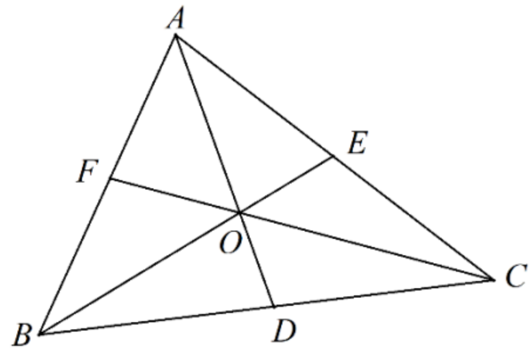
设 $BQ=a, QC=6a$, 在直角 $\triangle AQB$ 及 $\triangle AQC$ 中, 由毕氏定理,

$$QA^2=16-a^2=36-(6a)^2\Rightarrow a^2=\frac{4}{7}$$

在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理,

$$\cos\angle BAC=\frac{4^2+6^2-(7a)^2}{2\cdot4\cdot6}=\frac{1}{2}$$

72. 如下图, 三角形 ABC 中, 三线段 AD, BE, CF 交于一点 O, 若 $OD=OE=OF=4$ 且 $OA+OB+OC=37$, 求 $OA\cdot OB\cdot OC$ 的值。



由等高性质,

$$\frac{S_{\triangle OBC}}{[\triangle ABC]}+\frac{S_{\triangle OAC}}{[\triangle ABC]}+\frac{S_{\triangle OAB}}{[\triangle ABC]}=\frac{OD}{AD}+\frac{OE}{BE}+\frac{OF}{CF}=1$$

即

$$\frac{4}{a}+\frac{4}{b}+\frac{4}{c}=1$$

其中 $a=AD=OA+4$, $b=BE=OB+4$, $c=CF=OC+4$, 令

$$ab+bc+ca=t, abc=4(ab+bc+ca)=4t, a+b+c=OA+OB+OC+12=49$$

则设三次多项式 $f(x)$ 三根为 a,b,c, 则

$$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-49x^2+tx-4t$$

令 $x=4$ 得

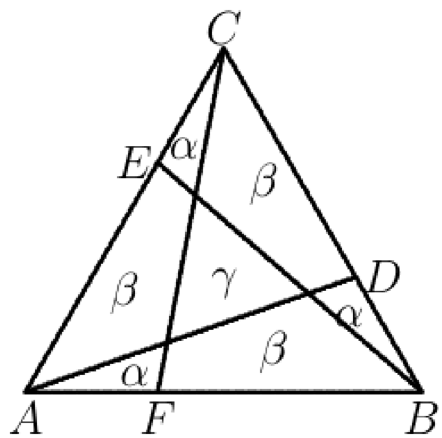
$$-(OA\cdot OB\cdot OC)=(4-a)(4-b)(4-c)=64-784+4t-4t=-720$$

即

$$OA\cdot OB\cdot OC=720$$

73. 已知 $\triangle ABC$ 为等边三角形,D,E,F 在 BC,CA,AB 上使得 $AF=BD=CE=\dfrac{1}{3}AB$。若 AD,BE,CF 分别交 CF,AD,BE 于 G,H,I, 求

$$\frac{[\triangle GHI]}{[\triangle ABC]}$$



设

$$\alpha=[\triangle AFG]=[\triangle BDH]=[\triangle CEI],\beta=[AEIG]=[BHGF]=[CIHD],\gamma=[\triangle GHI]$$

由等高性质，得

$$2(2\alpha+\beta)=2\beta+\alpha+\gamma\Rightarrow\gamma=3\alpha$$

在 $\triangle ACF$ 中，由余弦定理，

$$CF^2=AF^2+(3AF)^2-2\cdot AF\cdot(3AF)\cos 60^\circ=7AF^2.$$

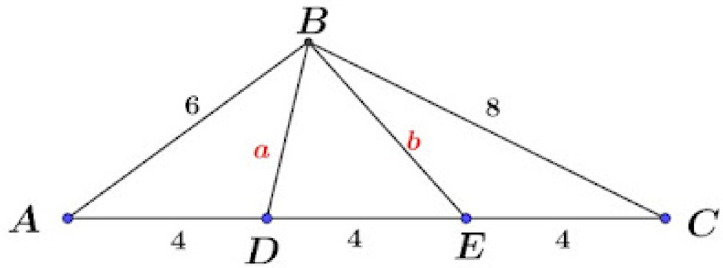
由于 $\triangle ACF\backsim\triangle ICE$ (AAA)，

$$\frac{[\triangle ACF]}{[\triangle ICE]}=\frac{2\alpha+\beta}{\alpha}=\frac{CF^2}{AF^2}=7\Rightarrow\beta=5\alpha$$

因此

$$\frac{[\triangle GHI]}{[\triangle ABC]}=\frac{\gamma}{\gamma+3\alpha+3\beta}=\frac{1}{7}$$

74. $\triangle ABC$ 中，$AB=6,BC=8,CA=12,D,E$ 在 CA 上，且 $AD=DE=EC$，求 BD,BE 的长。



令 $BD=a, BE=b$, 由余弦定理,

$$\cos\angle BDA=\frac{a^2+16-36}{8a},\quad \cos\angle BDE=\frac{a^2+16-b^2}{8a}$$

由 $\cos\angle BDA=-\cos\angle BDE$ 得

$$2a^2-b^2=4 \tag{1}$$

同理, 由余弦定理,

$$\cos\angle BED=\frac{b^2+16-a^2}{8b},\quad \cos\angle BEC=\frac{b^2+16-64}{8b}$$

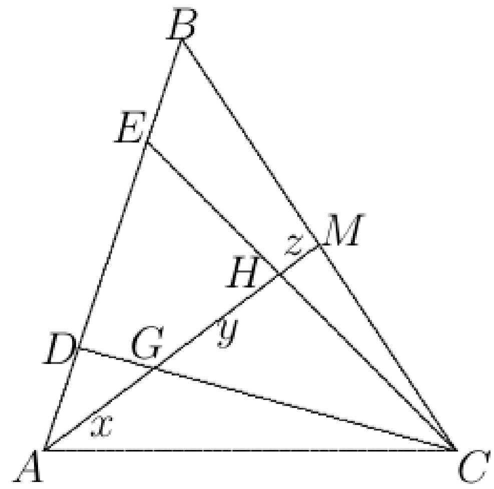
由 $\cos\angle BED=-\cos\angle BEC$ 可得

$$a^2-2b^2=-32 \tag{2}$$

联立解得

$$a=\frac{2\sqrt{30}}{3}, b=\frac{2\sqrt{17}}{3}$$

75. 在 $\triangle ABC$ 中,D, E 在 AB 上使得 $AD:DE:EB=1:2:1$,M 在 BC 上使得 AM 为中线,CD, CE 交 AM 于 G, H, 求 $AG:GH:HM$。



设 $AG:GH:HM=x:y:z$, 在 $\triangle ABM$ 中, 以 CE 为横截线, 由梅涅劳斯定理,

$$\frac{AH}{HM}\cdot\frac{MC}{CB}\cdot\frac{BE}{EA}=\frac{x+y}{z}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=1\Rightarrow x+y=6z$$

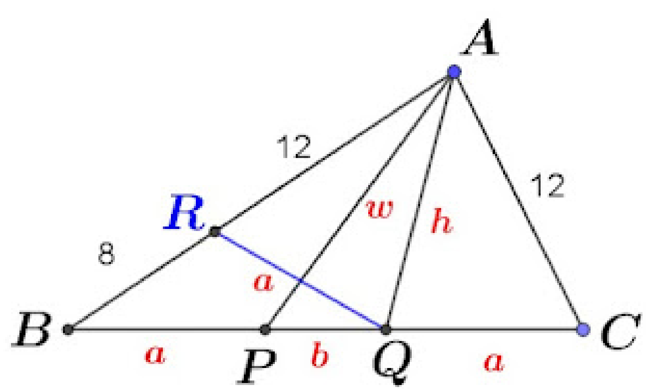
同理, 以 CD 为横截线, 由梅涅劳斯定理,

$$\frac{AG}{GM}\cdot\frac{MC}{CB}\cdot\frac{BD}{DA}=\frac{x}{y+z}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{1}=1\Rightarrow x=\frac{2}{3}(y+z)$$

设 $z=1$, 解得 $x=\frac{14}{5}$, $y=\frac{16}{5}$, 于是

$$AG:GH:HM=14:16:5$$

76. $\triangle ABC$ 满足 $AB=20, AC=12$, 若在 BC 边上取两点 P 和 Q, 使得 AQ 为 $\angle BAC$ 的角平分线且 $BP=QC$, 求 $\sqrt{AP^2-AQ^2}$ 的值。



令 $BP=CQ=a, PQ=b$, 在 AB 上取点 R 使得 $AR=AC=12$, 则

$$\triangle AQR \cong \triangle AQC\ (SSS) \Rightarrow QR=QC=a$$

又 AQ 为 $\angle A$ 的角平分线, 因此

$$\frac{20}{12}=\frac{a+b}{a} \Rightarrow a+b=\frac{5}{3}a$$

在 $\triangle BQR$ 及 $\triangle BAP$ 中, 由余弦定理,

$$\cos\angle B=\frac{(\frac{5a}{3})^2+8^2-a^2}{2\cdot 8\cdot \frac{5a}{3}}=\frac{20^2+a^2-AP^2}{2\cdot 20\cdot a}$$

且在 $\triangle BAQ$ 中, 由余弦定理,

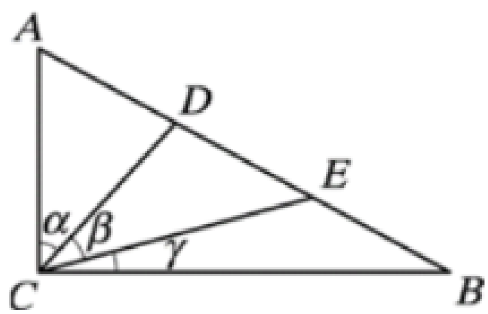
$$\cos\angle B=\frac{20^2+(\frac{5a}{3})^2-AQ^2}{2\cdot 20\cdot \frac{5a}{3}}$$

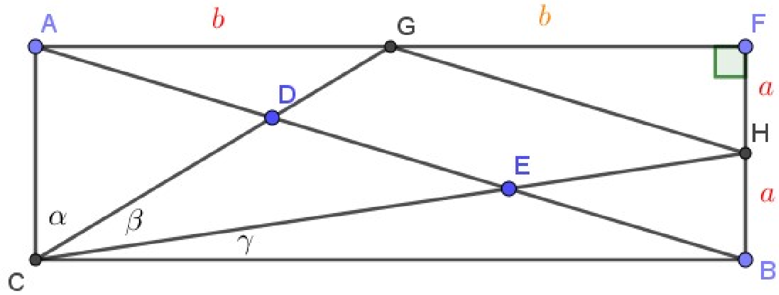
解得

$$h^2=240-\frac{5}{3}a^2, w^2=304-\frac{5}{3}a^2 \Rightarrow \sqrt{w^2-h^2}=8$$

77. 如图,$\triangle ABC$ 中,$\angle C=90^\circ$ 且 $AD=DE=EB$。已知 $\angle ACD=\alpha, \angle DCE=\beta, \angle ECB=\gamma$, 求

$$\frac{\sin\alpha\cdot\sin\gamma}{\sin\beta}.$$





过 A 作水平线且过 B 作垂直线, 两线交于 F, 则 $ACBF$ 为矩形。延长 CE 交 BF 于 H, 延长 CD 交 AF 于 G, 则有

$$BH = HF, \quad AG = GF.$$

设 $BH = HF = a, \quad AG = GF = b$, 在 $\triangle CAG$ 及 $\triangle CBH$ 中, 由毕氏定理,

$$\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{4a^2+b^2}}, \quad \sin\gamma = \frac{a}{\sqrt{a^2+4b^2}}.$$

在 $\triangle CGH$ 中, 由余弦定理,

$$\cos\beta = \frac{(4a^2+b^2)+(a^2+4b^2)-(a^2+b^2)}{2\sqrt{(4a^2+b^2)(a^2+4b^2)}} = \frac{2(a^2+b^2)}{\sqrt{(4a^2+b^2)(a^2+4b^2)}},$$

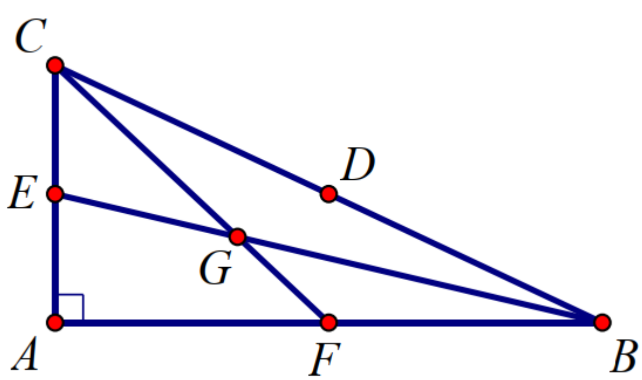
于是

$$\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \frac{3ab}{\sqrt{(4a^2+b^2)(a^2+4b^2)}}$$

因此

$$\frac{\sin\alpha\cdot\sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{1}{3}$$

78. 如下图, 直角三角形 ABC 中,$\angle BAC = 90°$, 点 D, E, F 分别为 BC, CA, AB 之中点,BE 与 CF 交于点 $G, BC = 18, \angle BGC = 150°$, 求 $\triangle GBC$ 的面积。



设 $AF = FB = a, AE = EC = b$, 则

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{4} \cdot 18^2 = 81$$

设直线 BE, CF 斜率为

$$m_1 = -\frac{b}{2a}, \quad m_2 = -\frac{2b}{a}$$

由

$$\tan 150^\circ = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{-\frac{2b}{a} + \frac{b}{2a}}{1 + \left(-\frac{b}{2a}\right)\left(-\frac{2b}{a}\right)} = -\frac{3ab}{2(a^2 + b^2)}$$

代入 $a^2 + b^2 = 81$, 有

$$ab = 18\sqrt{3}$$

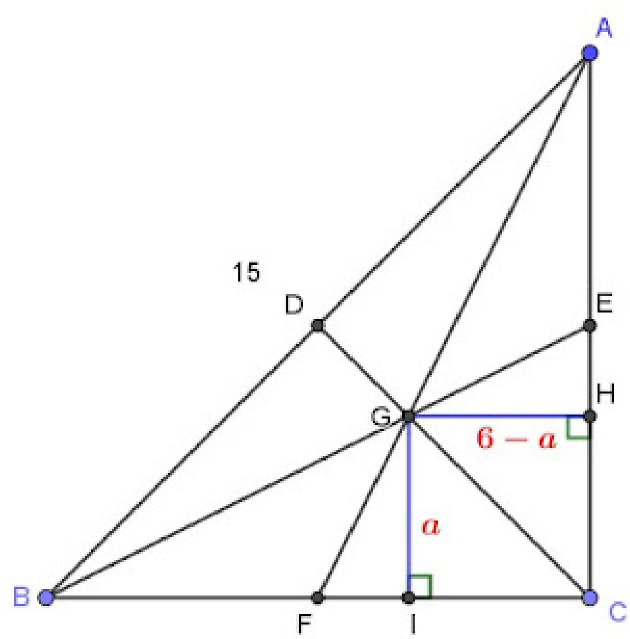
故 $\triangle ABC$ 面积为

$$\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2b = 36\sqrt{3}$$

发现点 G 是重心, 所以

$$[\triangle GBC] = \frac{1}{3}[\triangle ABC] = 12\sqrt{3}$$

79. 在 $\triangle ABC$ 中,$\angle C = 90^\circ, G$ 为 $\triangle ABC$ 的重心, 且 G 到 BC, CA 的距离和为 6。若 $AB = 15$, 试求 $\triangle ABC$ 的内切圆面积。



设 G 在 AC,BC 上的垂足分别为 H,I, 且 $GI=a,GH=6-a$, 由毕氏定理,

$$GC^2=a^2+(6-a)^2$$

又 G 为重心, 则

$$GC=\frac{2}{3}CD=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}AB=5$$

解得

$$a=\frac{6+\sqrt{14}}{2}\Rightarrow 6-a=\frac{6-\sqrt{14}}{2}$$

又 $\triangle AGH\backsim\triangle AFC$ (AAA),

$$\frac{2}{3}=\frac{6-a}{FC}\Rightarrow FC=\frac{3}{2}(6-a)\Rightarrow BC=3(6-a)=\frac{18-3\sqrt{14}}{2}$$

同理,

$$AC=3a=\frac{18+3\sqrt{14}}{2}$$

所以 $\triangle ABC$ 面积为

$$[\triangle ABC]=\frac{1}{2}\cdot\frac{18-3\sqrt{14}}{2}\cdot\frac{18+3\sqrt{14}}{2}=\frac{1}{2}r\left(15+\frac{18-3\sqrt{14}}{2}+\frac{18+3\sqrt{14}}{2}\right)$$

得 $r=\frac{3}{2}$, 故内切圆面积为 $\frac{9\pi}{4}$。

80. 已知 $\triangle ABC$ 满足 $AB=AC=3,BC=1$, 点 D 在 AB 上使得 $\triangle ACD$ 与 $\triangle BCD$ 的内切圆半径相等, 求该内切圆半径。

设 $BD=x,CD=y$, 三角形面积为内切圆半径乘半周长, 于是

$$\frac{[\triangle ACD]}{[\triangle BCD]}=\frac{s_{ACD}}{s_{BCD}}=\frac{6-x+y}{y+1+x}.$$

由等高性质,

$$\frac{[\triangle ACD]}{[\triangle BCD]}=\frac{AD}{BD}=\frac{3-x}{x}.$$

联立两式可得

$$y=\frac{4x-3}{3-2x} \tag{1}$$

在 $\triangle BCD$ 中, 由余弦定理,

$$y^2=x^2+1^2-2\cdot x\cdot 1\cdot\frac{1}{6}=x^2+1-\frac{1}{3}x \tag{2}$$

联立 (1), (2) 得

$$x(x-3)(12x^2-4x-9)=0 \Rightarrow x=\frac{1+2\sqrt{7}}{6}, y=\frac{\sqrt{7}}{2}.$$

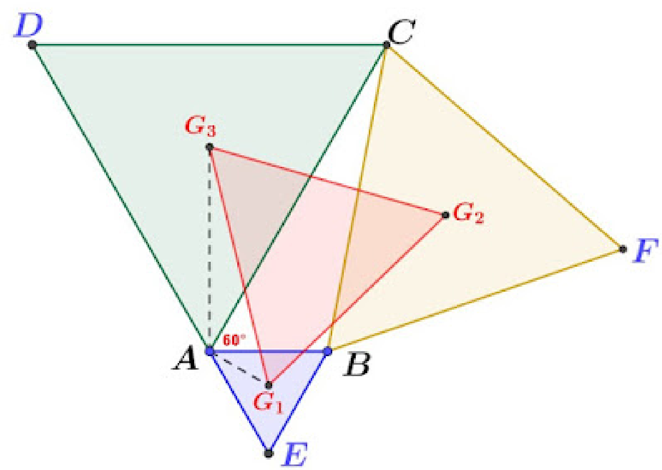
故 $\triangle ABC$ 面积为

$$[\triangle ABC]=\frac{1}{2}r\cdot\left(\frac{6-x+y}{2}+\frac{y+1+x}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{3^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{35}}{4}$$

解得

$$r=\frac{\sqrt{35}-\sqrt{5}}{12}$$

81. $\triangle ABC$ 中, $AB=\sqrt{3}$, $AC=3\sqrt{3}$, $BC=\sqrt{21}$, 由各边分别向外作正三角形。已知此三个向外所作正三角形的重心会形成另一个新的正三角形, 求此新的三角形的面积。



在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理,

$$(\sqrt{21})^2=(\sqrt{3})^2+(3\sqrt{3})^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{3}\cdot\cos\angle CAB \Rightarrow \angle CAB=60^\circ$$

由正三角形 $\triangle ACD$ 及 $\triangle ABE$,

$$AG_1=1, AG_3=3,\ \angle G_1AB=\angle G_3AC=30^\circ,$$

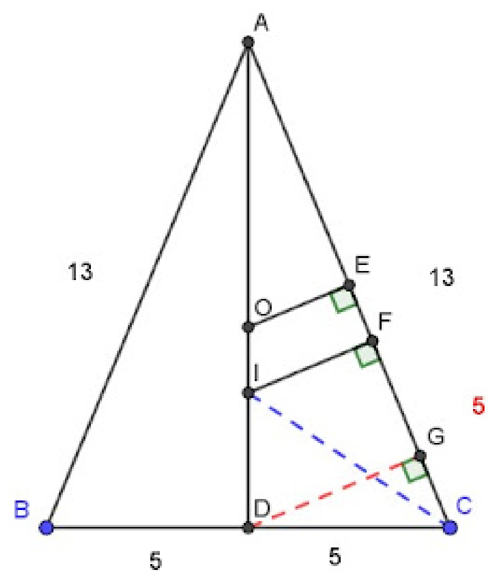
在 $\triangle AG_1G_3$ 中, 由余弦定理,

$$(G_1G_3)^2=1^2+3^2-2\cdot 1\cdot 3\cdot\cos\angle G_1AG_3 \Rightarrow G_1G_3=\sqrt{13}$$

故

$$[\triangle G_1G_2G_3] = \frac{13}{4}\sqrt{3}$$

82. 已知等腰三角形 ABC 的腰长为 $AB = AC = 13$, 底边为 $BC = 10$。设三角形的内心为 I, 外心为 O, 求 OI 的长度。



设 D 为 BC 中点, 则 $AD \perp BC$, 且 $BD = DC = 5$, 在直角 $\triangle ADC$ 中, 由毕氏定理,

$$AD^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow AD = 12.$$

设 G 为 AC 上的垂足, 则

$$\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 10 = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot DG \Rightarrow DG = \frac{60}{13}$$

在直角 $\triangle ADG$ 中, 由毕氏定理,

$$12^2 = AG^2 + \left(\frac{60}{13}\right)^2 \Rightarrow AG = \frac{144}{13}$$

由 $\triangle AEO \backsim \triangle AGD$ (AAA),

$$\frac{AO}{12} = \frac{\frac{13}{2}}{\frac{144}{13}} \Rightarrow AO = \frac{169}{24}$$

且由 $\triangle AFI \backsim \triangle AGD$ (AAA),

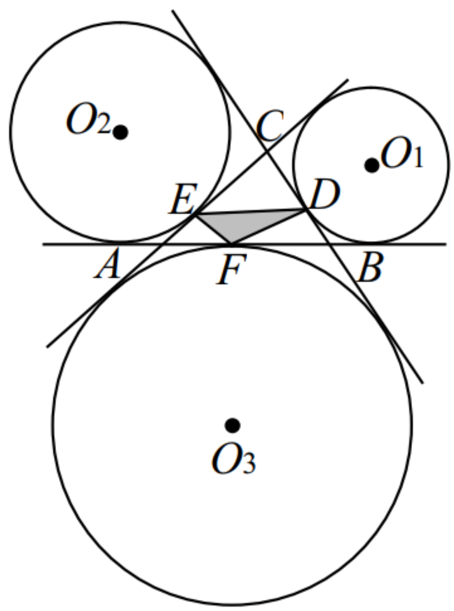
$$\frac{ID}{\frac{60}{13}} = \frac{12 - ID}{12} \Rightarrow ID = \frac{10}{3}$$

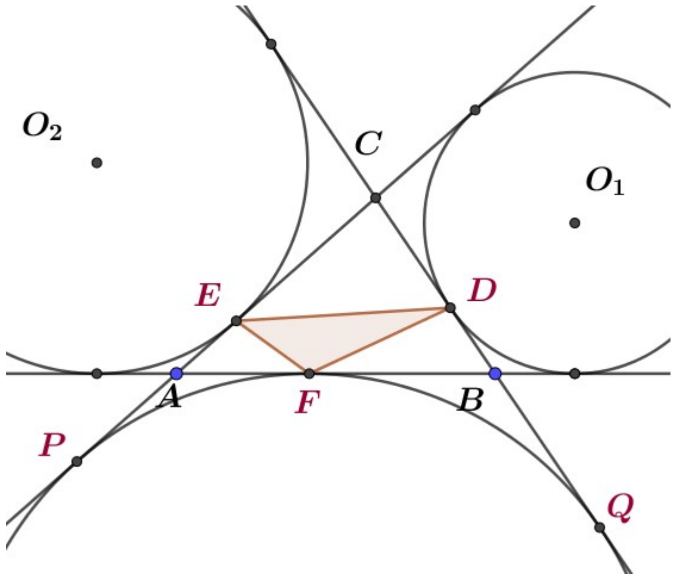
所以

$$OI = AD - AO - ID = 12 - \frac{169}{24} - \frac{10}{3} = \frac{13}{8}$$

83. 在 $\triangle ABC$ 中,$AB = 6, BC = 4, CA = 5$, 圆 O_1, O_2, O_3 为 $\triangle ABC$ 的三旁切圆,O_1 与 BC 相切于 D,O_2 与 CA 相切于 E,O_3 与 AB 相切于 F。求面积比

$$\frac{[\triangle DEF]}{[\triangle ABC]}.$$





设 $a=BC=4, b=CA=5, c=AB=6, s=\dfrac{a+b+c}{2}=\dfrac{15}{2}$, 由旁切圆性质,

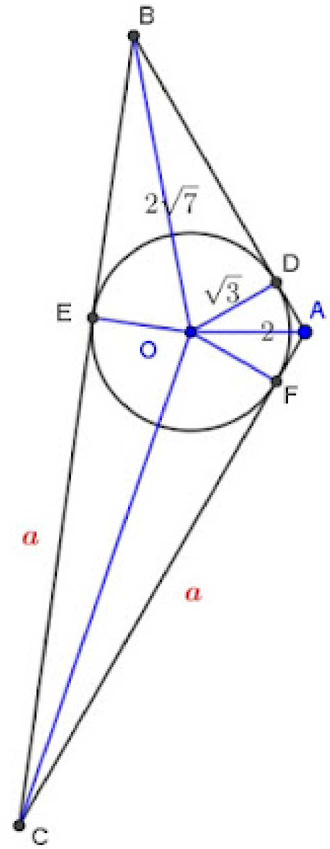
$$AF=CD=s-b=\frac{5}{2},\quad BF=CE=s-a=\frac{7}{2},\quad AE=BD=s-c=\frac{3}{2}$$

由 $\triangle ABC \backsim \triangle AEF \backsim \triangle BDF \backsim \triangle CDE$,

$$\begin{aligned}
\frac{S_{\triangle DEF}}{[\triangle ABC]} &= 1-\frac{S_{\triangle AEF}}{[\triangle ABC]}-\frac{S_{\triangle BDF}}{[\triangle ABC]}-\frac{S_{\triangle CDE}}{[\triangle ABC]} \\
&= 1-\left(\frac{AE\cdot AF}{AC\cdot AB}+\frac{BD\cdot BF}{BC\cdot AB}+\frac{CD\cdot CE}{AC\cdot BC}\right) \\
&= 1-\left(\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{5\cdot 6}+\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{7}{2}}{4\cdot 6}+\frac{\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}}{5\cdot 4}\right)=\frac{7}{32}
\end{aligned}$$

(待验证相似三角形, 顺序, 旁切圆性质)

84. 设钝角三角形 ABC 的内切圆半径为 $\sqrt{3}$, 已知内切圆圆心 O 到顶点 A 的距离为 2, 而 O 到顶点 B 的距离为 $2\sqrt{7}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积。



设 D,E,F 分别为在 AB,BC,AC 上的内切圆切点, 在 $\triangle ADO,\triangle OBD$ 中, 由毕氏定理,

$$2^2=(\sqrt{3})^2+AD^2,(2\sqrt{7})^2=(\sqrt{3})^2+BD^2$$

则

$$AD=AF=1,\quad BD=BE=5,\quad CE=CF=a$$

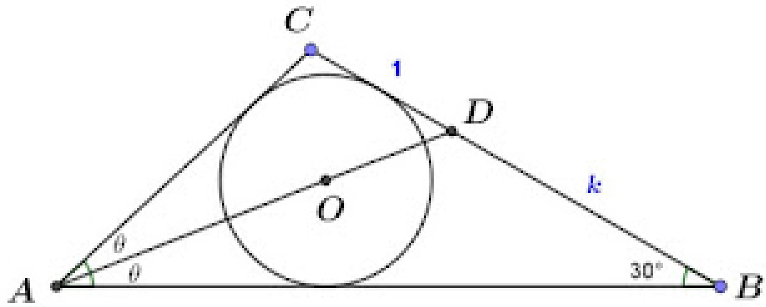
$\triangle ABC$ 半周长为 $s=a+6$, 则面积为

$$[\triangle ABC]=\sqrt{3}(a+6)=\sqrt{a+6\cdot a\cdot 1\cdot 5}\Rightarrow a=9$$

故

$$[\triangle ABC]=15\sqrt{3}$$

85. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\cos\angle BAC=\dfrac{4\sqrt{3}}{7},\angle B=30°,O$ 为 $\triangle ABC$ 的内心, 直线 AO 与 BC 相交于 D 点, 求 $\dfrac{BD}{CD}$。



设 $\angle CAD=\angle DAB=\theta, CD=1, BD=k$, 由 $\cos\angle A=\frac{4\sqrt{3}}{7}$, 得

$$\sin\angle A=\frac{1}{7}$$

在 $\triangle ABD$ 及 $\triangle ACD$ 中, 由正弦定理,

$$\frac{k}{\sin\theta}=\frac{AD}{\sin 30^\circ},\quad \frac{1}{\sin\theta}=\frac{AD}{\sin\angle C}$$

于是

$$AD=\frac{k}{2\sin\theta}=\frac{\sin(150^\circ-\angle A)}{\sin\theta}\Rightarrow k=2\sin(150^\circ-\angle A)$$

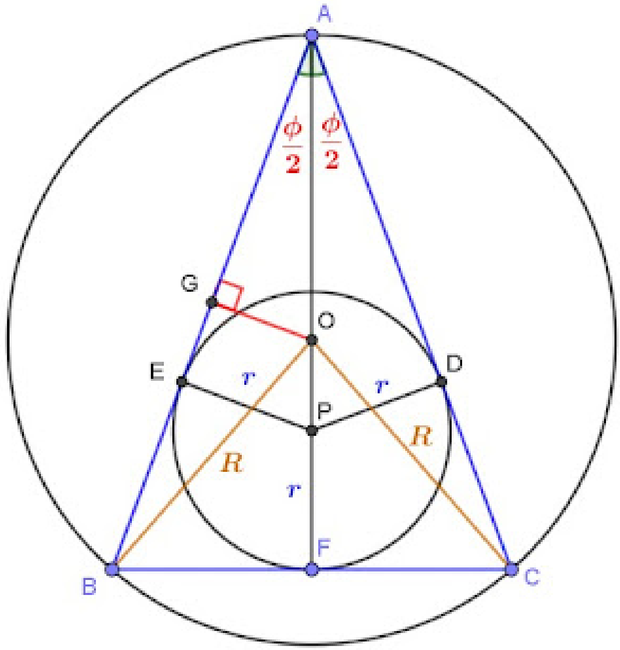
即

$$\frac{BD}{CD}=k=2\sin(150^\circ-\angle A)=2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{4\sqrt{3}}{7}-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\frac{1}{7}\right)=\frac{5\sqrt{3}}{7}$$

86. 若等腰三角形 $\triangle ABC$ 的外接圆半径 R 与内切圆半径 r 之比

$$\frac{R}{r}=1+\sqrt{2},$$

且顶角 A 不为直角, 求 $\sin\frac{A}{2}$。



设 O 为外接圆圆心, P 为内切圆圆心,D,E 为 P 在 AC,AB 上的垂足,G 为 AB 中点, 则

$$AB = 2R\cos\frac{A}{2},\quad AF = 2R\cos^2\frac{A}{2},\quad OP = 2R\cos^2\frac{A}{2} - R - r$$

又由 $\triangle AGO \backsim \triangle AEP\ (AAA)$,

$$\frac{GO}{EP} = \frac{AO}{AP} \Rightarrow \frac{R\sin\frac{A}{2}}{r} = \frac{R}{2R\cos^2\frac{A}{2} - r}$$

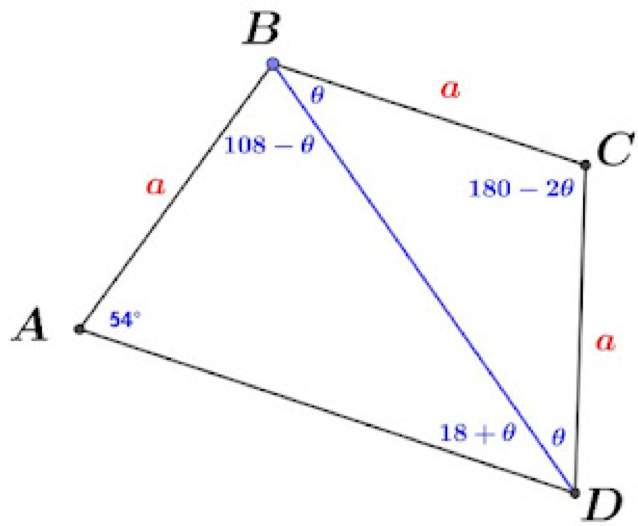
令 $x = \sin\dfrac{A}{2}$, 将 $\dfrac{R}{r} = 1+\sqrt{2}$ 代入得

$$(x+1)\big((2+2\sqrt{2})x^2 - (2+2\sqrt{2})x + 1\big) = 0$$

舍去 $x=-1$, 得

$$\sin\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\quad 或\quad \sin\frac{A}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

87. 已知四边形 $ABCD$ 中, $AB=BC=CD, \angle A = 54^\circ, \angle B = 108^\circ, \angle C$ 为钝角, 求 $\angle C$。



作 BD, 令 $\angle CBD = \angle CDB = \theta$, $AB = BC = CD = a$, 则

$$\angle C = 180^\circ - 2\theta, \quad \angle ABD = 108^\circ - \theta, \quad \angle ADB = 18^\circ + \theta,$$

在 $\triangle ABD$ 及 $\triangle BCD$ 中, 由正弦定理,

$$\frac{a}{\sin(18^\circ + \theta)} = \frac{BD}{\sin 54^\circ}, \quad \frac{a}{\sin\theta} = \frac{BD}{\sin(180^\circ - 2\theta)}.$$

故

$$BD = \frac{\sin 54^\circ}{\sin(18^\circ + \theta)} = \frac{\sin(180^\circ - 2\theta)}{\sin\theta} = \frac{\sin 2\theta}{\sin\theta} = 2\cos\theta.$$

于是

$$\sin 54^\circ = 2\cos\theta\,\sin(18^\circ + \theta) = \sin 18^\circ \cos 2\theta + \cos 18^\circ \sin 2\theta + \sin 18^\circ,$$

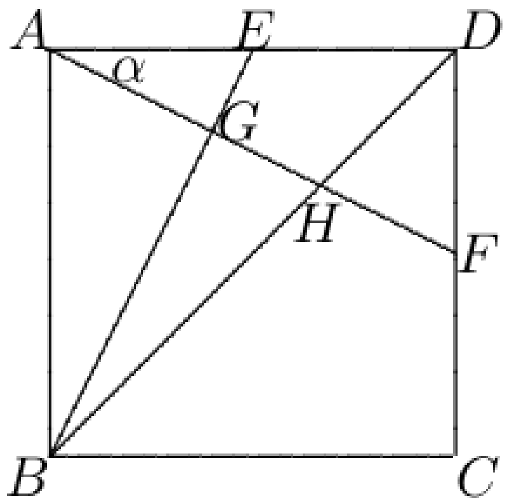
即

$$\sin(2\theta + 18^\circ) = \sin 54^\circ - \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4} - \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{1}{2}$$

故

$$2\theta + 18^\circ = 30^\circ \Rightarrow \angle C = 168^\circ > 90^\circ$$

88. 已知边长为 2 的正方形 $ABCD, E, F$ 分别为 AD, CD 的中点,AF 与 EB, BD 相交于 G, H, 求四边形 $DEGH$ 的面积。



首先有

$$1=[\triangle ADF]=[\triangle ADH]+[\triangle DFH]=\frac{1}{2}\cdot DH\cdot 1\cdot\sin 45^\circ+\frac{1}{2}DH\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin 45^\circ$$

解得

$$DH=\frac{2\sqrt{2}}{3},\quad [\triangle DFH]=\frac{1}{3}$$

设 $\alpha=\angle DAF$, 由 $\triangle ADF$ 得

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}},\quad \sin(90^\circ-\alpha)=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

同理有

$$1=[\triangle ABE]=[\triangle ABG]+[\triangle AEG]=\frac{1}{2}\cdot AG\cdot 1\cdot\sin(90^\circ-\alpha)+\frac{1}{2}AG\cdot\frac{1}{2}\cdot\alpha$$

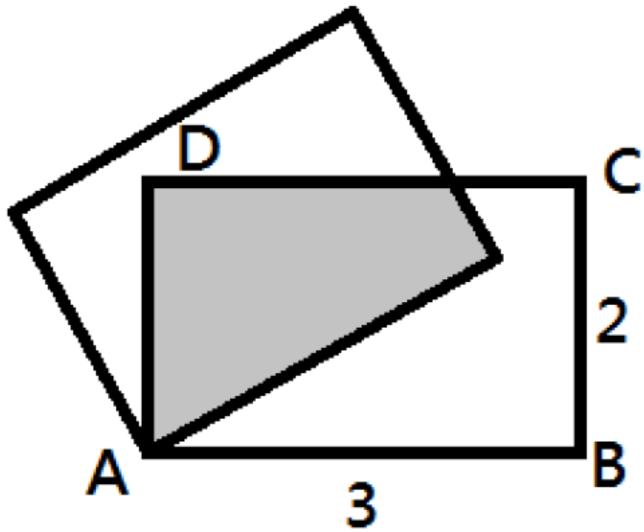
解得

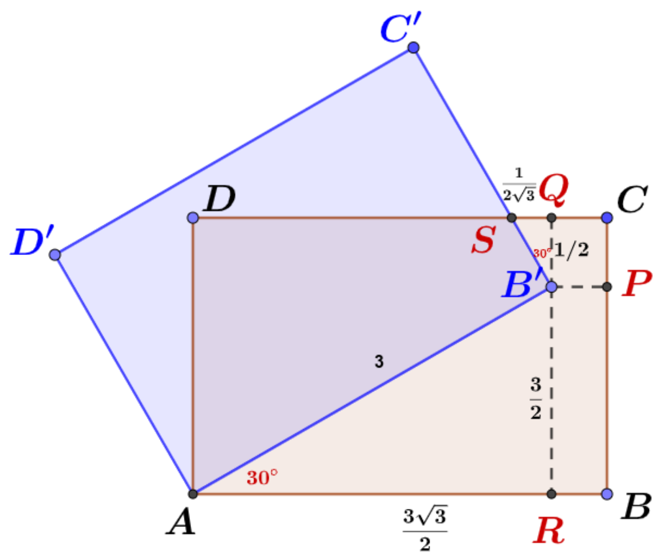
$$AG=\frac{2\sqrt{5}}{5},\quad [\triangle AEG]=\frac{1}{5}$$

故四边形 $DEGH$ 的面积为

$$[DEGH]=[\triangle ADF]-[\triangle DFH]-[\triangle AEG]=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{7}{15}$$

89. 长方形 $ABCD$ 边长为 $2,3$, 以 A 为旋转中心逆时针旋转 30°。求重叠部分面积。





如图, $AB' = 3, \angle B'AB = 30°$, 则

$$B'R = \frac{3}{2}, \quad AR = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

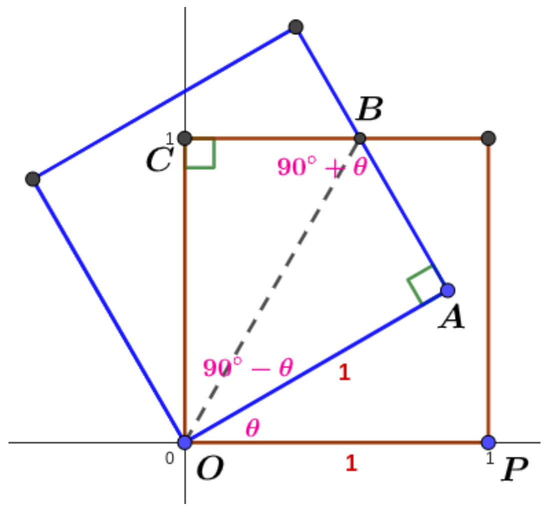
又 $B'Q = 2 - B'R = \frac{1}{2}, \angle QB'C' = 30°$, 则

$$QS = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

重叠面积为

$$[ABCD] - [B'PCS] - [ABPB'] = 6 - \left(\frac{3}{2} - \frac{17\sqrt{3}}{24}\right) - \left(\frac{9}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{8}\right) = \frac{11\sqrt{3}}{6}$$

90. 一边长为 1 的正方形 Γ_1 绕一顶点逆时针旋转 θ 得正方形 Γ_2, 若两正方形重叠部分的面积为 $\frac{2}{3}$, 求 $\tan\theta$。



令 $\angle AOP=\theta, \angle AOC=90^\circ-\theta$, 又 $\triangle OAB \cong \triangle OCB$ (RHS),

$$AB=OA\tan\angle AOB=\tan\left(45^\circ-\frac{\theta}{2}\right)=\frac{1-\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan\frac{\theta}{2}}$$

重叠面积为

$$2[\triangle OAB]=OA\cdot AB=AB=\frac{1-\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan\frac{\theta}{2}}=\frac{2}{3}$$

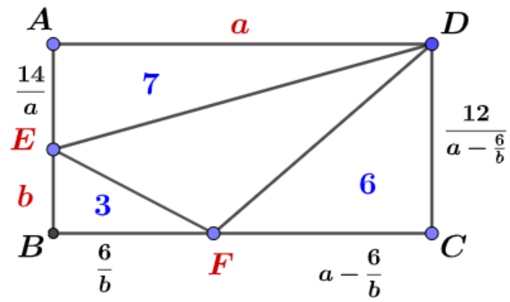
解得

$$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{1}{5}\Rightarrow\tan\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{5}{12}$$

91. $ABCD$ 为平行四边形, 点 E,F 分别在边 AB,BC 上。已知

$$[\triangle AED]=7,\quad [\triangle EBF]=3,\quad [\triangle CDF]=6,$$

求 $\triangle DEF$ 的面积。



不妨设 $ABCD$ 为矩形, 且设 $AD=a, BE=b$, 则

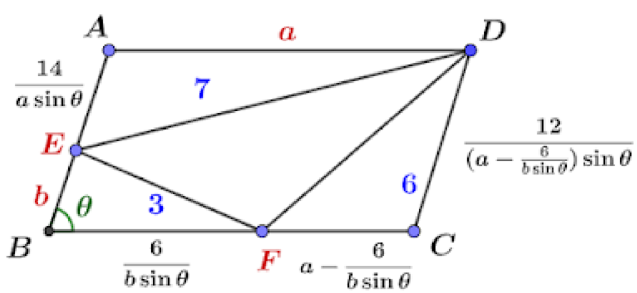
$$AE=\frac{14}{a},\quad BF=\frac{6}{b},\quad CF=a-\frac{6}{b},\quad CD=\frac{12}{a-\frac{6}{b}}=\frac{12b}{ab-6}$$

解 $AB=CD$ 得,

$$b+\frac{14}{a}=\frac{12b}{ab-6}\Rightarrow ab=2+2\sqrt{22}$$

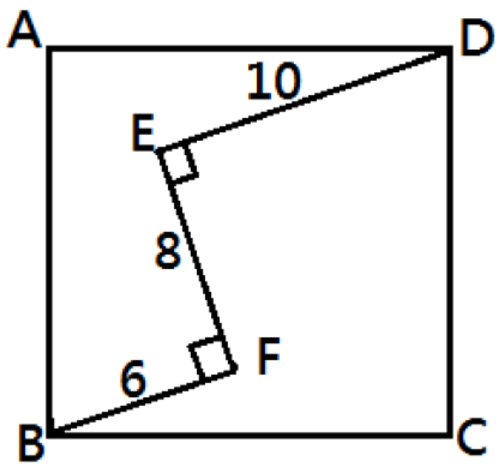
$\triangle DEF$ 的面积为

$$[ABCD]-[\triangle AED]-[\triangle EBF]-[\triangle CDF]=(ab+14)-16=2\sqrt{22}$$



如果不假设为矩形, 如上图, 步骤相同, 只是算出来的是 $ab\sin\theta=2+2\sqrt{22}$, 结果是一样的。

92. 如图, 已知 $DE=10, EF=8, BF=6$, 求正方形 $ABCD$ 面积。



在 $\triangle BFE$ 中, 由毕氏定理,

$$BE=\sqrt{6^2+8^2}=10$$

设 $\angle BEF=\theta, \sin\theta=\dfrac{3}{5}$, 则

$$\cos\angle BED=\cos(90^\circ+\theta)=-\sin\theta=-\frac{3}{5}$$

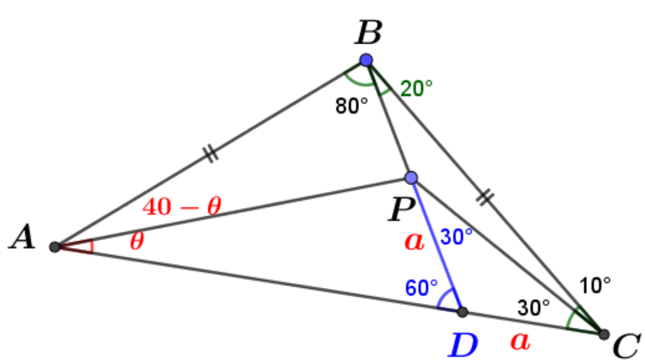
在 $\triangle BED$ 中, 由余弦定理,

$$BD^2=10^2+10^2-2\cdot10\cdot10\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)\Rightarrow BD=\sqrt{320}$$

正方形面积为

$$AD^2=160$$

93. 已知 P 为 $\triangle ABC$ 内一点, 满足 $\angle PBA=80^\circ, \angle PBC=20^\circ, \angle PCB=10^\circ$, 且 $\angle PCA=30^\circ$, 求 $\angle PAC$。



延长 BP 交 AC 于 D, 设 $\angle PAD=\theta$, $PD=a$, 则

$$\angle PDA=60^\circ, \angle DPC=30^\circ \Rightarrow DC=DP=a$$

在 $\triangle PDC$ 中, 由余弦定理,

$$CP^2=a^2+a^2-2a^2\cos 120^\circ \Rightarrow CP=\sqrt{3}\,a$$

在 $\triangle ADP$ 中, 由正弦定理,

$$\frac{a}{\sin\theta}=\frac{AP}{\sin 60^\circ} \Rightarrow AP=\frac{\sqrt{3}\,a}{2\sin\theta} \tag{1}$$

在 $\triangle ABP$ 中, 由正弦定理,

$$\frac{AP}{\sin 80^\circ}=\frac{BP}{\sin(40^\circ-\theta)} \Rightarrow AP=\frac{\sin 80^\circ}{\sin(40^\circ-\theta)}BP \tag{2}$$

在 $\triangle BCP$ 中, 由正弦定理,

$$\frac{\sqrt{3}\,a}{\sin 20^\circ}=\frac{BP}{\sin 10^\circ} \Rightarrow BP=\frac{\sin 10^\circ}{\sin 20^\circ}\sqrt{3}\,a \tag{3}$$

由式 (1), (2), (3),

$$AP=\frac{\sin 80^\circ}{\sin(40^\circ-\theta)}\cdot\frac{\sin 10^\circ}{\sin 20^\circ}\sqrt{3}\,a=\frac{\sqrt{3}\,a}{2\sin\theta}$$

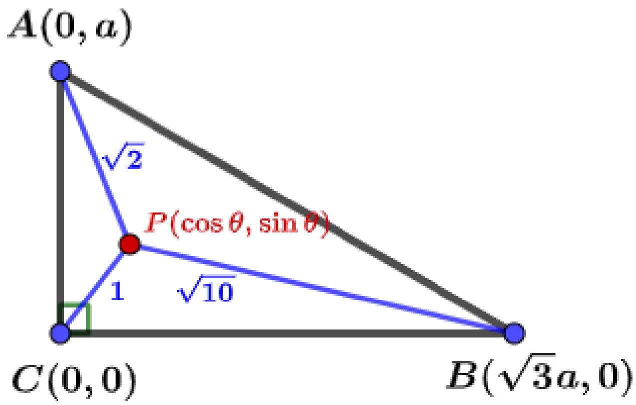
整理得

$$\sin\theta=\frac{\sin 20^\circ}{2\sin 10^\circ\sin 80^\circ}\sin(40^\circ-\theta)=\frac{\sin 20^\circ}{\cos 70^\circ-\cos 90^\circ}\sin(40^\circ-\theta)$$

故

$$\theta=20^\circ$$

94. 已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $AB=2AC$, 又此三角形内部有一点 P, 满足 $PA=\sqrt{2}, PB=\sqrt{10}, PC=1$, 求 $\triangle ABC$ 的面积。



设 $\angle PCB=\theta, A(0,a), B(\sqrt{3}a,0), C(0,0), P(\cos\theta,\sin\theta)$, 则

$$PA^2=\cos^2\theta+(\sin\theta-a)^2=2, PB^2=(\cos\theta-\sqrt{3}a)^2+\sin^2\theta=10,$$

展开得

$$\sin\theta=\frac{a^2-1}{2a},\quad \cos\theta=\frac{3a^2-9}{2\sqrt{3}a}$$

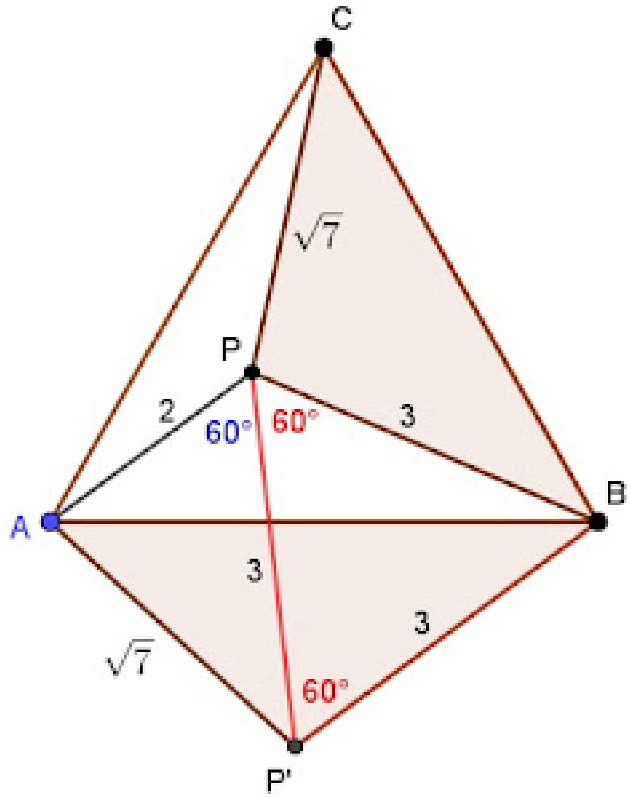
解得

$$\frac{(a^2-1)^2}{4a^2}+\frac{(3a^2-9)^2}{12a^2}=1\Rightarrow a^2=3+\sqrt{2}$$

故 $\triangle ABC$ 面积为

$$\frac{1}{2}\cdot a\cdot\sqrt{3}a=\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}$$

95. 设 P 为正 $\triangle ABC$ 内一点, 满足 $AP=2, BP=3, CP=\sqrt{7}$, 求正 $\triangle ABC$ 的边长。



将 $\triangle CPB$ 绕顶点 B 逆时针旋转 $60°$, 此时点 C 与点 A 重合, 且有

$$P'B = PB = 3, \quad P'A = PC = \sqrt{7}, \quad \angle PBP' = 60°$$

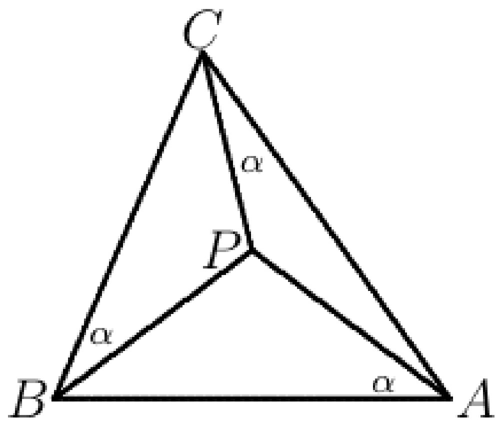
所以 $\triangle PP'B$ 是正三角形, 得 $PP' = 3$, 在 $\triangle APP'$ 中, 由余弦定理,

$$7 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos\angle APP' \Rightarrow \angle APP' = 60°$$

因此 $\angle APB = 60° + 60° = 120°$, 在 $\triangle APB$ 中, 由余弦定理,

$$AB^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos\angle APB \Rightarrow AB = \sqrt{19}$$

96. 如图, 一点 P 在 $\triangle ABC$ 内使得 $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA = \alpha$ 且 $AB = 7, BC = 8, CA = 9$。求 $\tan\alpha$。



设 $AP=x, BP=y, CP=z$, 在 $\triangle ABP, \triangle BCP, \triangle CAP$ 中, 由余弦定理,

$$y^2=7^2+x^2-14x\cos\alpha, \quad z^2=8^2+y^2-16y\cos\alpha, \quad x^2=9^2+z^2-18z\cos\alpha.$$

三式相加得

$$(14x+16y+18z)\cos\alpha=194 \tag{1}$$

又

$$[\triangle ABC]=[\triangle ABP]+[\triangle BCP]+[\triangle CAP]=\frac{1}{2}(7x+8y+9z)$$

由海伦公式,

$$[\triangle ABC]=\sqrt{12\cdot3\cdot4\cdot5}=12\sqrt{5}$$

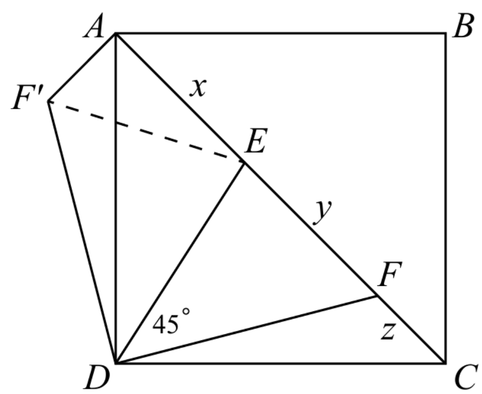
因此

$$(7x+8y+9z)\sin\alpha=24\sqrt{5} \tag{2}$$

$\dfrac{(2)}{(1)}$ 得

$$\tan\alpha=\frac{24\sqrt{5}}{97}$$

97. 在正方形 $ABCD$ 中, 点 E,F 在对角线 AC 上, 且 $\angle EDF=45°$。若 $AE=x, EF=y, FC=z$, 证明 $y^2=x^2+z^2$。



将 $\triangle DFC$ 绕点 D 逆时针旋转 90° 得 $\triangle DF'A$, 使得 $DF = DF'$。由 $\angle F'AD = \angle FCD = 45^\circ$,

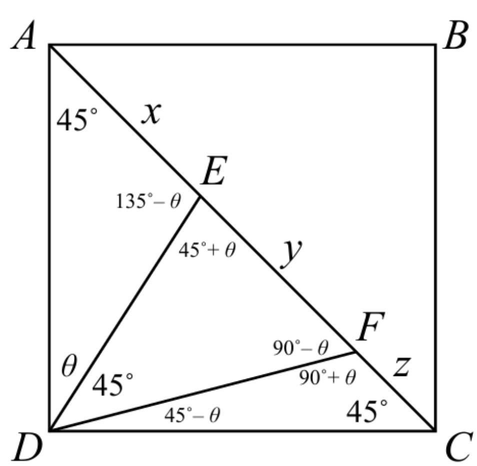
$$\angle F'AE = \angle EAD + \angle F'AD = \angle EAD + \angle FCD = 90^\circ$$

在 $\triangle F'AE$ 中, 由毕氏定理,

$$F'E^2 = F'A^2 + AE^2 = x^2 + z^2$$

且由于 $\triangle F'DE \cong \triangle FDE$ (SAS), 有 $F'E = FE = y$, 故得证

$$y^2 = x^2 + z^2$$



设 $\angle ADE=\theta$, 则

$$\angle AED=135^\circ-\theta,\quad \angle DEF=45^\circ+\theta,\quad \angle EFD=90^\circ-\theta$$

在 $\triangle AED,\triangle DEF,\triangle DFC$ 中, 由正弦定理,

$$\frac{x}{\sin\theta}=\frac{ED}{\sin 45^\circ},\quad \frac{y}{\sin 45^\circ}=\frac{FD}{\sin(45^\circ+\theta)},\quad \frac{z}{\sin(45^\circ-\theta)}=\frac{FD}{\sin 45^\circ}$$

化简得

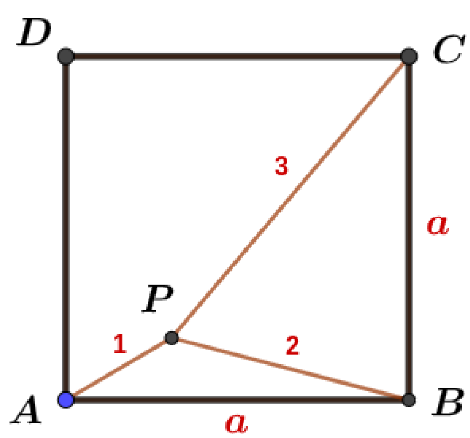
$$\frac{x}{y}=\sin 2\theta,\qquad \frac{z}{y}=\cos 2\theta$$

于是

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{z^2}{y^2}=\sin^2 2\theta+\cos^2 2\theta=1\Rightarrow x^2+z^2=y^2$$

证毕。怎样化简得?

98. 设 P 是正方形 $ABCD$ 内部一点, 且 P 到 A,B,C 三顶点的距离分别为 $1,2,3$, 求此正方形的面积。



设正方形 $ABCD$ 边长为 a, 在 $\triangle APB$ 及 $\triangle BPC$ 中, 由余弦定理,

$$\cos\angle PBA=\frac{a^2+2^2-1^2}{2\cdot 2\cdot a},\quad \cos\angle PBC=\frac{a^2+2^2-3^2}{2\cdot 2\cdot a}$$

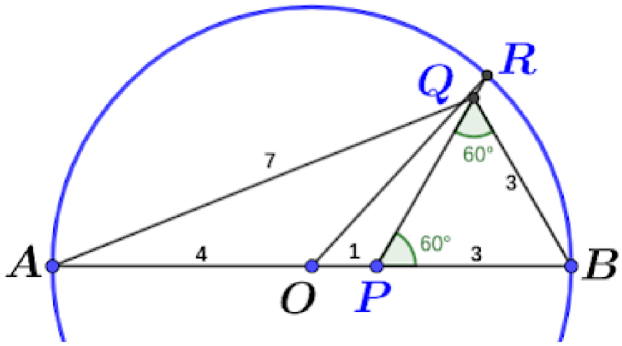
由 $\cos\angle PBC=\cos(90^\circ-\angle PBA)=\sin\angle PBA$, 有

$$\cos^2\angle PBA+\sin^2\angle PBA=\left(\frac{a^2+3}{4a}\right)^2+\left(\frac{a^2-5}{4a}\right)^2=1$$

解得

$$[ABCD]=a^2=5+2\sqrt{2}.$$

99. 平面上,P 为 AB 上一点满足 $AP=5, BP=3, Q$ 为平面上一点满足 $AQ=7, BQ=3$。若以 AB 为直径作一圆 C, 自 P 向 Q 作射线 PQ 交圆 C 于点 R, 试求 PR 的长度。



在 $\triangle ABQ$ 中, 由余弦定理,

$$7^2=8^2+3^2-2\cdot 3\cdot 8\cdot\cos\angle B\Rightarrow\angle B=60^\circ$$

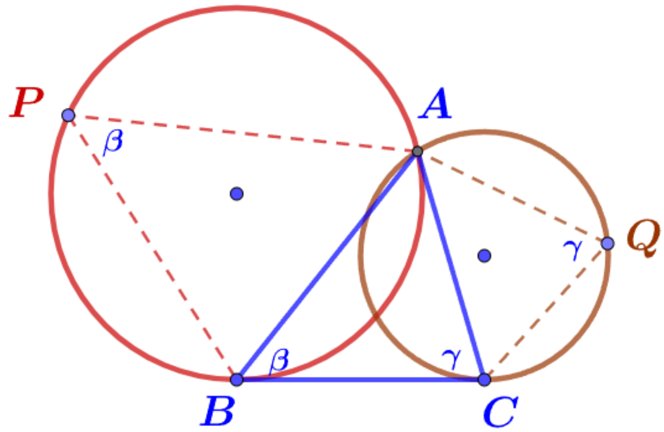
又 $BP=BQ=3$, 故 $\triangle PQB$ 为等边三角形, 于是 $PQ=3$; 在 $\triangle OPR$ 中, 由余弦定理,

$$4^2=1^2+PR^2-2\cdot 1\cdot PR\cdot\cos 60^\circ$$

解得

$$PR=\frac{-1+\sqrt{61}}{2}$$

100. 两圆 O_1, O_2 都经过 $\triangle ABC$ 的顶点 A, 且分别与 BC 边相切于点 B, C 。已知圆 O_1, O_2 的面积分别为 m, n, 试以 m, n 表示 $\triangle ABC$ 外接圆的面积。



设 $O_1, O_2, \triangle ABC$ 外接圆的半径为 $R_1, R_2, R_3; \angle ABC = \beta, \angle ACB = \gamma$。在 $\widehat{AB}, \widehat{AC}$ 分别取点 P, Q, 由弦切角定理,

$$\angle APB = \angle ABC = \beta, \quad \angle AQC = \angle ACB = \gamma.$$

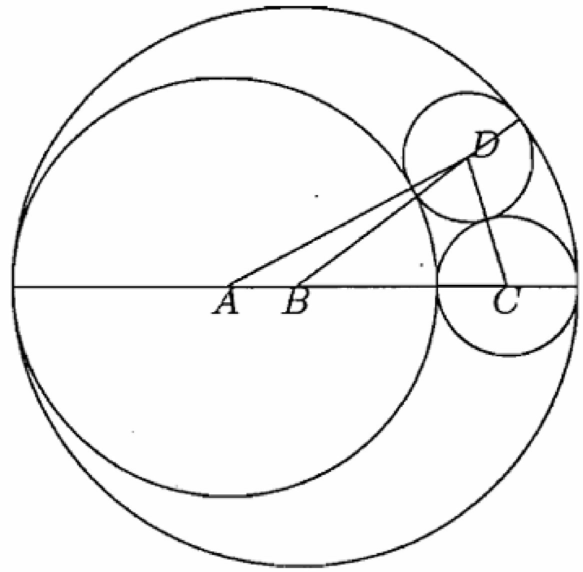
由正弦定理,

$$4R_3^2 = \frac{\overline{AC}}{\sin\beta} \cdot \frac{\overline{AB}}{\sin\gamma} = \frac{2R_2 \sin\gamma}{\sin\beta} \cdot \frac{2R_1 \sin\beta}{\sin\gamma} = 4R_1R_2 \Rightarrow R_3^2 = R_1R_2$$

所以 $\triangle ABC$ 外接圆的面积为

$$\pi R_3^2 = \pi R_1 R_2 = \sqrt{\frac{m}{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{n}{\pi}} \cdot \pi = \sqrt{mn}$$

101. 一半径为 4 的大圆里面有三个两两外切, 且皆与大圆内切的小圆, 其中两小圆半径分别为 1 和 3, 且它们的圆心在大圆的一条直径上, 求第三个小圆的半径。



设 $B=(0,0)$ 为大圆圆心,$A=(-1,0)$ 为半径为 3 的小圆圆心,$C=(3,0)$ 为半径为 1 的小圆圆心,D 为所求半径为 r 的小圆圆心, 由海伦公式及等高性质,

$$3=\frac{[\triangle BDC]}{[\triangle ABD]}=\frac{\sqrt{4(3-r)\cdot r\cdot 1}}{\sqrt{4(1-r)\cdot r\cdot 3}}$$

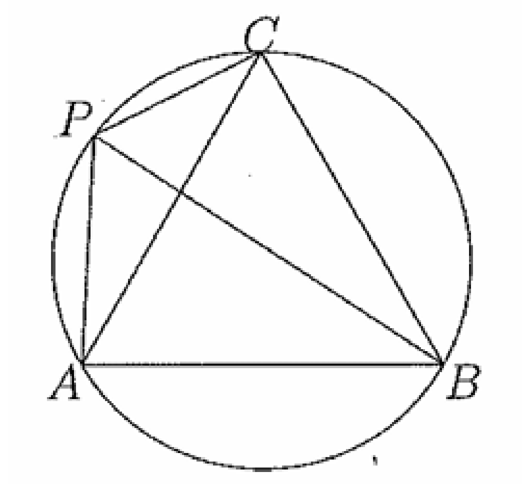
其中 $\triangle ABD,\triangle BDC$ 半周长为

$$[\triangle ABD]=\frac{1}{2}(3+r+(4-r)+1)=4,\quad s_{\triangle BDC}=\frac{1}{2}(1+r+(4-r)+3)=4$$

解得第三个小圆的半径为

$$r=\frac{12}{13}$$

102. 在边长为 4 的正三角形 ABC 内接圆中, 点 P 在弧 AC 上满足 $AP\cdot PC=5$。求 BP 的长度。



在四边形 $ABPC$ 中, 由托勒密定理,

$$AB \cdot PC + AP \cdot BC = AC \cdot BP$$

由 $AB = AC = BC$, 得

$$BP = AP + PC$$

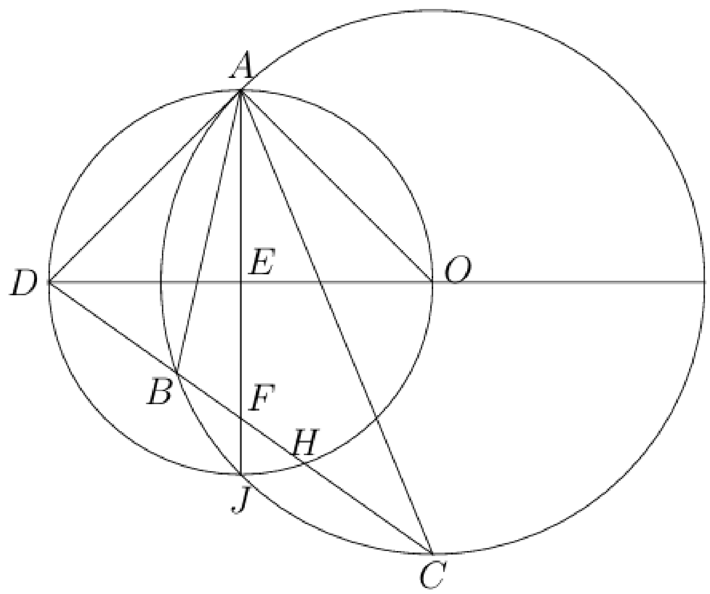
易知 $\angle APC = 120^\circ$, 在 $\triangle APC$ 中, 由余弦定理,

$$4^2 = AP^2 + PC^2 - 2 \cdot AP \cdot PC \cos 120^\circ \Rightarrow AP^2 + PC^2 = 11$$

于是

$$BP^2 = (AP + PC)^2 = AP^2 + PC^2 + 2 \cdot AP \cdot PC = 21 \Rightarrow BP = \sqrt{21}$$

103. 已知三角形 ABC 的外心为 O, 且 $\angle B$ 为钝角。延长 BC 与外接圆在点 A 处的切线交于 D 使得 $AO = AD = 2$。F 在 BC 上满足 $AF \perp OD$ 且交于点 E。过点 A, D, O 的圆与 BC 的交于点 H。已知 $FH = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, 求 $\triangle OEF$ 的面积。



延长 AF 与过点 A, D, O 的圆交于点 J, 设 $x = DF, y = EF$。由幂点定理（DH 与 AJ）有

$$x \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = (\sqrt{2} + y)(\sqrt{2} - y) = 2 - y^2.$$

由直角三角形 DEF 得

$$x^2 = y^2 + 2.$$

联立得

$$x \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 2 - (x^2 - 2) \implies x^2 + x\frac{\sqrt{3}}{3} - 4 = 0.$$

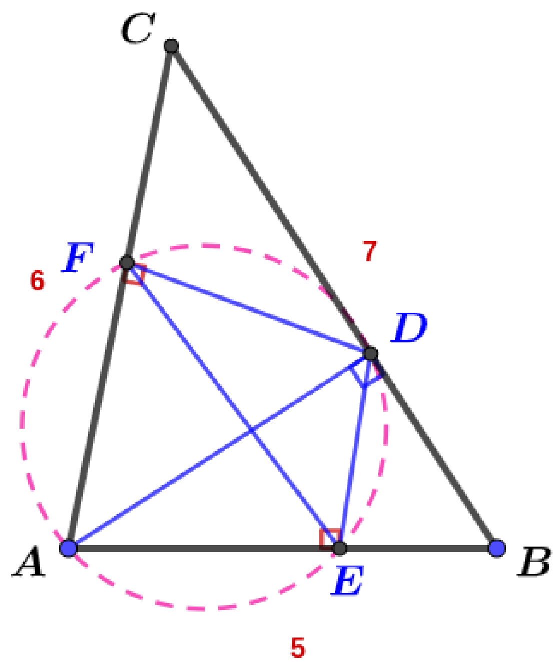
解得 $x = \sqrt{3}, y = 1$。

因此直角三角形 OEF 的面积为

$$\frac{1}{2} \cdot OE \cdot EF = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

$AE = \sqrt{2}$? 怎样证明 $\angle DAE = 45°$?

104. 已知 $\triangle ABC$ 中,$AB = 5, BC = 7, AC = 6$。点 D 在 BC 上移动, 从 D 向 AB, AC 作垂线, 垂足分别为 E, F, 求 EF 的最小值。



由 $\angle DFA = \angle DEA = 90°$, 故点 A, E, D, F 共圆, 设该圆半径为 R, 在 $\triangle AEF$ 中, 由正弦定理,

$$EF = 2R\sin\angle A = AD\sin\angle A$$

当 $AD \perp BC$ 时,AD 取得最小值; 在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理,

$$\cos\angle A = \frac{5^2+6^2-7^2}{2\cdot5\cdot6} = \frac{1}{5} \Rightarrow \sin\angle A = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

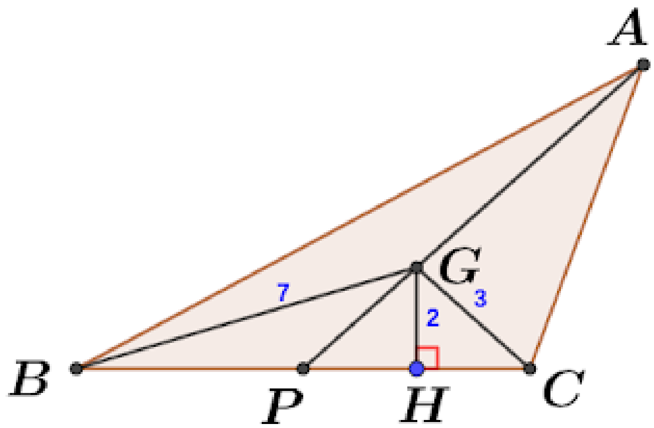
$\triangle ABC$ 面积为

$$[\triangle ABC] = \frac{1}{2}\cdot5\cdot6\cdot\sin\angle A = \frac{1}{2}AD_{\min}\cdot BC \Rightarrow AD_{\min} = \frac{12\sqrt{6}}{7}$$

此时

$$EF_{\min} = \frac{12\sqrt{6}}{7}\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5} = \frac{144}{35}.$$

105. 已知三角形 ABC 的重心为 G, 且 $GB=7, GC=3, G$ 到直线 BC 的距离为 2, 求 GA 的长度。



设 $GH \perp BC, BC = a$, 则半周长为 $5+\dfrac{a}{2}$, 则

$$[\triangle GBC]=\sqrt{\left(5+\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{2}-2\right)\left(\frac{a}{2}+2\right)\left(5-\frac{a}{2}\right)}=\frac{1}{2}\cdot a\cdot 2$$

解得

$$a=4\sqrt{5} \quad \text{或} \quad a=2\sqrt{5}$$

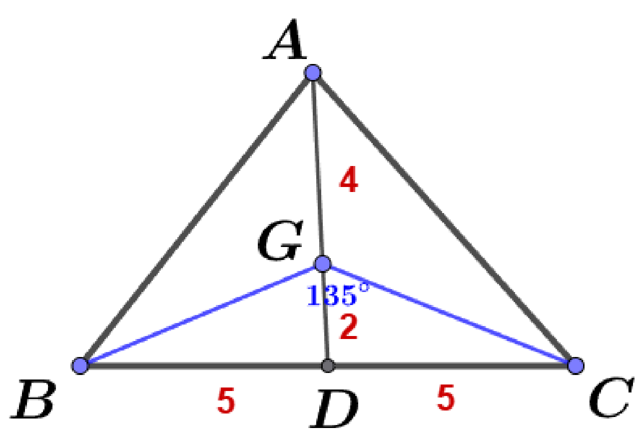
设 P 为 BC 中点, 由中线定理,

$$7^2+3^2=2\left(GP^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2\right)\Rightarrow GP=3 \text{ 或 } 2\sqrt{6}$$

故

$$GA=2GP=6 \text{ 或 } 4\sqrt{6}$$

106. 已知 G 为 $\triangle ABC$ 的重心, $BC=10, AG=4, \angle BGC=\dfrac{3\pi}{4}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积。



设直线 AG 与 BC 相交于 D。由于 G 为重心,

$$GD = \frac{AG}{2} = 2, \quad BD = DC = \frac{10}{2} = 5.$$

在 $\triangle GBC$ 中, 由中线定理,

$$GB^2 + GC^2 = 2(2^2 + 5^2) = 58$$

又由余弦定理,

$$10^2 = GB^2 + GC^2 - 2\,GB \cdot GC \cos\frac{3\pi}{4} \Rightarrow GB \cdot GC = 21\sqrt{2}$$

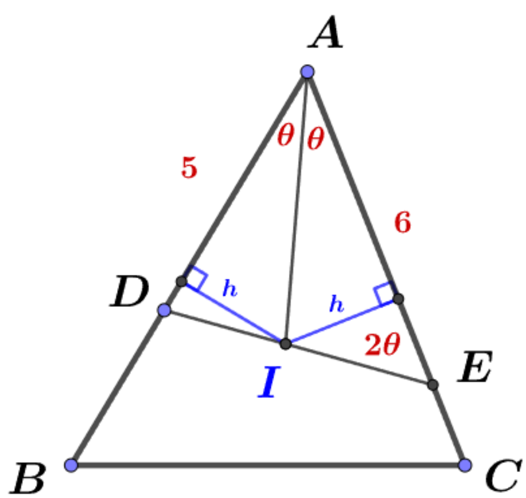
于是 $\triangle GBC$ 面积为

$$[\triangle GBC] = \frac{1}{2} \cdot 21\sqrt{2} \cdot \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{21}{2}$$

由等高性质, $\triangle ABC$ 面积为

$$[\triangle ABC] = 3[\triangle GBC] = \frac{63}{2}$$

107. I 为 $\triangle ABC$ 内心,D 在 AB 上,E 在 AC 上, 且 D, I, E 三点共线。已知 $AD = DE = 5, AE = 6$, 求 AI。



设 $\triangle ABC$ 内切圆半径为 h, 由 $AD = DE$ 可知

$$\angle AED = \angle DAE = 2\angle IAE = 2\theta$$

$\triangle ADE$ 面积为

$$[\triangle ADE]=\sqrt{8\cdot 3\cdot 3\cdot 2}=12=\frac{1}{2}\cdot 5h+\frac{1}{2}\cdot 6h\Rightarrow h=\frac{24}{11}$$

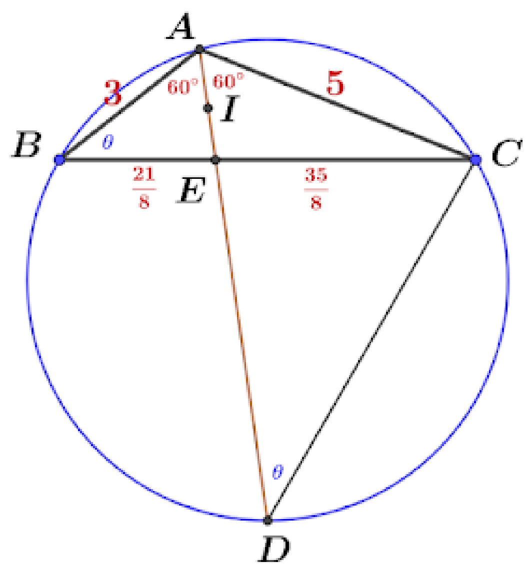
在 $\triangle ADE$ 中，由余弦定理，

$$\cos 2\theta=\frac{6^2+5^2-5^2}{2\cdot 6\cdot 5}=\frac{3}{5}\Rightarrow \sin\theta=\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}}=\sqrt{\frac{1}{5}}$$

故

$$AI=\frac{h}{\sin\theta}=\frac{24\sqrt{5}}{11}$$

108. $\triangle ABC$ 满足 $AB:AC:BC=3:5:7$。令 I 为 $\triangle ABC$ 的内心，直线 AI 交 $\triangle ABC$ 外接圆于另一点 D，试求 $\dfrac{ID}{AD}$ 的值。



设 E 为 AD 与 BC 的交点，因为 AD 为 $\angle A$ 角平分线，由角平分线定理，

$$\frac{BE}{EC}=\frac{AB}{AC}=\frac{3}{5}\Rightarrow BE=\frac{21}{8},CE=\frac{35}{8}$$

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理，

$$(7k)^2=(3k)^2+(5k)^2-2\cdot 3k\cdot 5k\cdot\cos\angle A,k>0\Rightarrow\angle A=120^\circ,\angle BAE=60^\circ$$

在 $\triangle ABE$ 中, 由余弦定理,

$$\left(\frac{21}{8}\right)^2 = 3^2 + AE^2 - 2\cdot 3\cdot AE\cdot\cos\angle BAE \Rightarrow AE = \frac{15}{8}$$

又 $\angle ABE = \angle ADC$, 于是有 $\triangle ABE \backsim \triangle CDE$ (AAA), 则

$$\frac{\frac{15}{8}}{\frac{21}{8}} = \frac{\frac{35}{8}}{DE} \Rightarrow DE = \frac{49}{8}, AD = \frac{15}{8} + \frac{49}{8} = 8$$

又由角平分线定理,

$$\frac{\frac{21}{8}}{3} = \frac{EI}{AI} \Rightarrow AI = \frac{8}{15}\cdot AE = 1$$

故

$$\frac{ID}{AD} = \frac{8-1}{8} = \frac{7}{8}$$

109. 在 $\triangle ABC$ 的边 AB 与 AC 的外侧分别作正三角形 $\triangle ABE$ 及 $\triangle ACF$。已知 $AC = 1$ 且 $EF = 2$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大可能值。

设 $\angle BAC = \theta, AB = c$, 则 $\angle EAF = 240^\circ - \theta$, 在 $\triangle AEF$ 中, 由余弦定理,

$$2^2 = c^2 + 1^2 - 2c\cdot 1\cdot\cos(240^\circ - \theta) \Rightarrow c^2 + c\cos\theta + \sqrt{3}c\sin\theta = 3$$

设 $x = c\cos\theta$, $y = c\sin\theta$, 上式变为

$$x^2 + y^2 + x + \sqrt{3}y = 3 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 4$$

$\triangle ABC$ 的面积为

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot c\sin\theta = \frac{y}{2} \leqslant \frac{1}{2}\left(2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

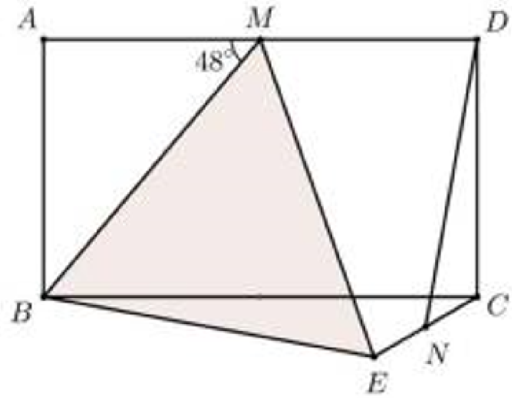
等号成立当且仅当 $x = -\dfrac{1}{2}, y = 2 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 即

$$c = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{17}{4} - 2\sqrt{3}},$$

$$\theta = \arctan\frac{y}{x} = \pi - \arctan(4 - \sqrt{3})$$

110. 如图, 点 M 是长方形 $ABCD$ 的边 AD 的中点,$\triangle BME$ 是正三角形,N 为线段 EC 的中点。

已知 $\angle AMB = 48°$,$BM = 1$, 求 DN 的长。



设 $AB = a = \sin 48°, MA = MB = b = \sin 42° = \cos 48°$, 取

$$A(0, a), B(0, 0), C(2b, 0), D(2b, a), E(\cos 12°, -\sin 12°),$$

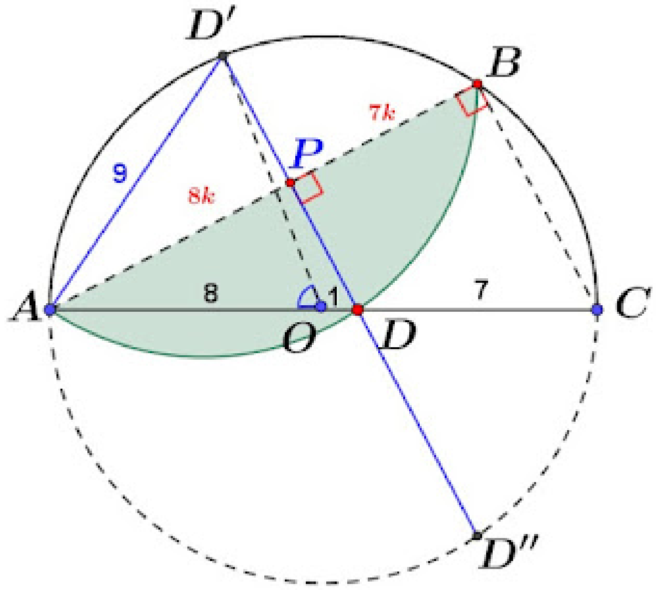
则 CE 中点 N 为

$$N\left(b + \frac{1}{2}\cos 12°,\ -\frac{1}{2}\sin 12°\right)$$

故

$$\begin{aligned} DN^2 &= \left(b - \frac{1}{2}\cos 12°\right)^2 + \left(a + \frac{1}{2}\sin 12°\right)^2 \\ &= a\sin 12° - b\cos 12° + \frac{1}{4}(\cos^2 12° + \sin^2 12°) + a^2 + b^2 \\ &= -\cos 60° + \frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4} \Rightarrow DN = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

111. 已知 AC 为半圆的直径, 若将弧 AB 沿弦 AB 向下折使其与 AC 相交于 D 点, 且 $AD = 9, DC = 7$, 则 AB 的长度为多少?



作 $D'D''/\!/BC$ 交圆于 D', D'' 及直线 AB 于 P 点, AB 为 DD' 的中垂线,

$$AD' = AD = 9,$$

在 $\triangle AOD'$ 中, 由余弦定理,

$$\cos\angle AOD' = \frac{8^2+8^2-9^2}{2\cdot 8\cdot 8} = \frac{47}{128}$$

在 $\triangle DOD'$ 中, 由余弦定理,

$$\cos\angle D'OD = -\frac{47}{128} = \frac{8^2+1^2-DD'^2}{2\cdot 8\cdot 1} \Rightarrow DD' = \frac{9\sqrt{14}}{4}, PD = PD' = \frac{9\sqrt{14}}{8}$$

由圆幂定理,

$$9\cdot 7 = \frac{9\sqrt{14}}{4}\cdot DD'' \Rightarrow DD'' = 2\sqrt{14}$$

又 $\triangle APD \backsim \triangle ABC$ (AAA),

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AD}{DC} = \frac{9}{7}$$

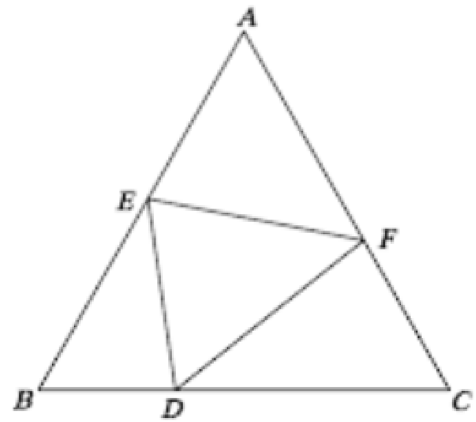
令 $AP = 9k, PB = 7k, k > 0$, 由圆幂定理,

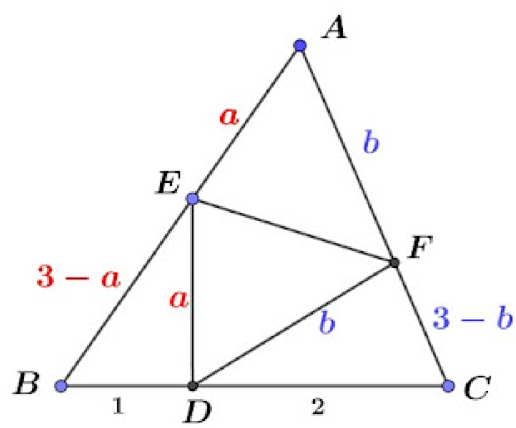
$$\frac{9\sqrt{14}}{8}\cdot\left(\frac{9\sqrt{14}}{8}+2\sqrt{14}\right) = 9k\cdot 7k \Rightarrow k = \frac{5\sqrt{2}}{8}$$

故

$$AB = 16k = 10\sqrt{2}$$

112. 如图, 在正 $\triangle ABC$ 中, 将顶点 A 折至 D, 使得 D 在 BC 上, 若 $BD=1, CD=2$, 求 EF 之长。





设

$$EA=ED=a, FA=FD=b, \angle EDA=\angle A=60^\circ,$$

在 $\triangle BDE$ 及 $\triangle CDF$ 中, 由余弦定理,

$$a^2=(3-a)^2+1-2(3-a)\cos 60^\circ, \quad b^2=(3-b)^2+4-4(3-b)\cos 60^\circ$$

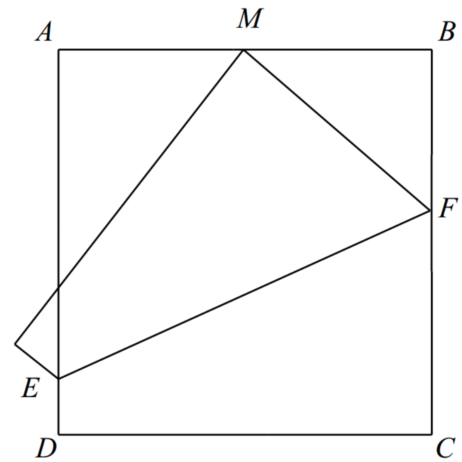
解得

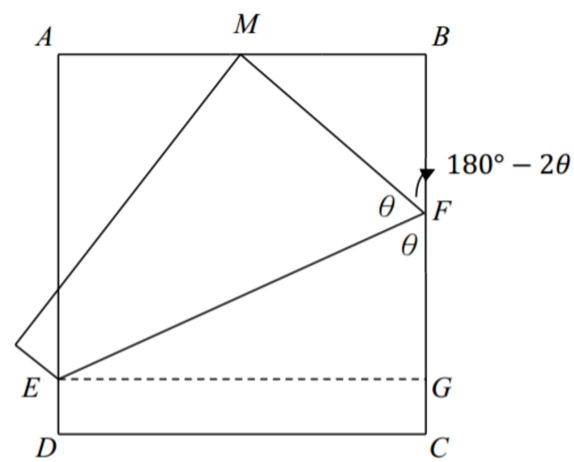
$$a=\frac{7}{5}, \quad b=\frac{7}{4}$$

同理, 在 $\triangle EDF$ 中, 由余弦定理,

$$EF^2=a^2+b^2-2ab\cos 60^\circ \Rightarrow EF=\frac{7\sqrt{21}}{20}$$

113. 如下图，将长 $AB=240$、宽 $BC=288$ 的长方形纸张对折，让顶点 C 刚好落在 AB 的中点 M 上。若 EF 是折线，求折线 EF 的长度。





如上图，设 $\angle EFC=\angle EFM=\theta$，则

$$\angle MFB=180^\circ-2\theta,\angle FMB=2\theta-90^\circ$$

过 E 点作水平线交 BC 于 G 点，由直角三角形 EFG 得 $EF=\dfrac{240}{\sin\theta}$，又

$$288=BC=BF+FC=BF+FM=\frac{120}{\cos(2\theta-90^\circ)}+120\tan(2\theta-90^\circ)$$

化简得

$$288=\frac{120}{\sin 2\theta}-120\cot 2\theta=120\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta}=120\cdot\frac{2\sin^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta}=120\tan\theta\Rightarrow\tan\theta=\frac{12}{5}$$

故

$$\sin\theta = \frac{12}{13} \Rightarrow EF = 240 \cdot \frac{13}{12} = 260$$

设 $MF = FC = a$, 在直角 $\triangle BMF$ 中, 由毕氏定理,

$$a^2 = 120^2 + (288 - a)^2 \Rightarrow a = 169$$

设 $DE = D'E = b$, 在直角 $\triangle AEM$ 及 $\triangle CDE$ 中, 由毕氏定理,

$$ME^2 = 120^2 + (288 - b)^2, \quad EC^2 = b^2 + 240^2$$

由 $EM = EC$ 解得

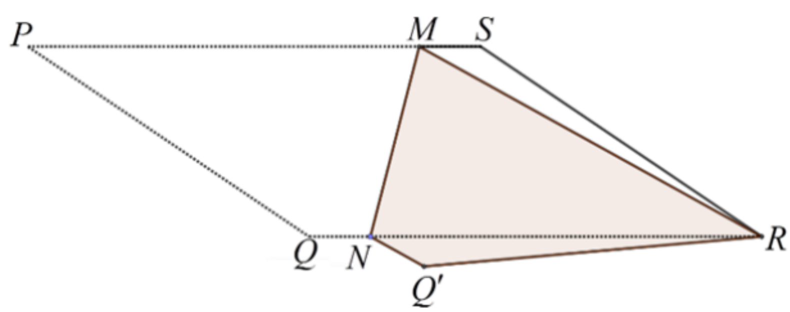
$$b = 69$$

在直角 $\triangle EFG$ 中, 由毕氏定理,

$$EF^2 = 240^2 + (a - b)^2 = 260^2,$$

故折线长度为 $EF = 260$。

114. 如图, 一个平行四边形 $PQRS$ 沿着线段 MN 将平行四边形对折, 恰好让 P 点与 R 点重合, 且让 Q 点坐落于 Q' 的位置, 而 M, N 分别在 PS, QR 上。若 $PQ = 6, PM = 4\sqrt{3}, \cos Q = -\dfrac{\sqrt{11}}{4}$, 求折痕长 MN。



设 $\angle SMR = \angle MRQ = \alpha, SR = PQ = 6, \angle PMN = \angle MNR = \theta,$

又 MN 为折线, 所以有 $MR = MP = 4\sqrt{3}, \angle RMN = \angle PMN = \theta,$

在 $\triangle MSR$ 中, 由正弦定理,

$$\frac{6}{\sin\alpha}=\frac{4\sqrt{3}}{1-\cos^2 Q}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{\sqrt{15}}{8}$$

于是

$$\cos\alpha=\frac{7}{8},\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

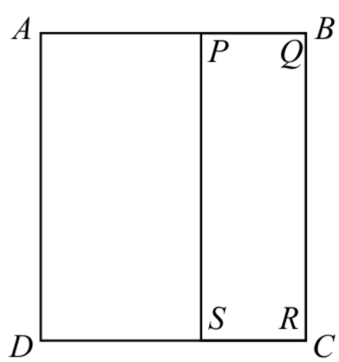
又 $2\theta+\alpha=180^\circ$, 所以

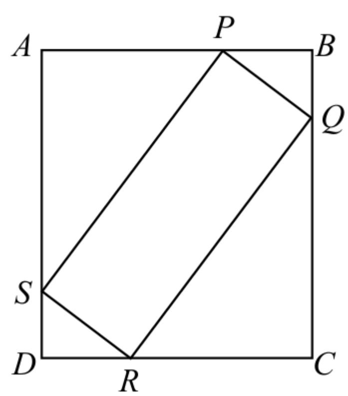
$$\sin\theta=\sin\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)=\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

在 $\triangle RMN$ 中, 由正弦定理,

$$\frac{MN}{\frac{\sqrt{15}}{8}}=\frac{4\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{15}}{4}}\Rightarrow MN=2\sqrt{3}$$

115. 以两种方式将矩形 $PQRS$ 放置于矩形 $ABCD$ 内: 方式一为 Q,R 分别在 B,C 上, 方式二为 P,Q,R,S 分别在 AB,BC,CD,DA 上。若 $AB=718,PQ=250$, 求 BC 的长度。





已知 $AB=718,PQ=250$, 在图二中, 设 $BC=x,BQ=a,PB=b$, 则

$$AD=PS=QR=x,\quad QC=x-a,\quad AP=718-b$$

由于 $\triangle RDS\cong\triangle PBQ$ (ASA), $\triangle SAP\cong\triangle QCR$ (ASA), 因此

$$\frac{SA}{PB}=\frac{AP}{BQ}=\frac{SP}{PQ}\Rightarrow\frac{x-a}{b}=\frac{718-b}{a}=\frac{x}{250}\tag{1}$$

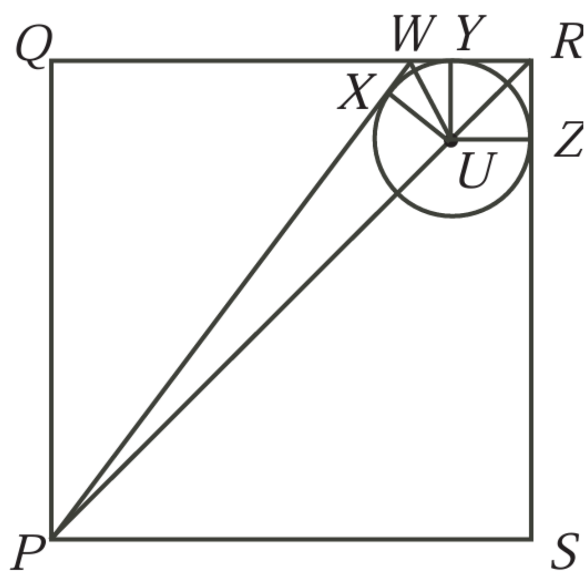
在 $\triangle PBQ$ 及 $\triangle SAP$ 中, 由毕氏定理,

$$a^2+b^2=250^2, \quad (x-a)^2+(718-b)^2=x^2 \tag{2,3}$$

由 (1), (2), (3) 解得

$$a=88, b=234, BC=x=1375$$

116. 正方形 $PQRS$ 的边长为 4。点 U 在对角线 PR 上使得 $PR=4UR$。以 U 为圆心作圆, 使得圆与正方形的两条边相切。PW 是圆的切线, 且 W 在 QR 上。求 PW 的长度。



由 $PR=4UR=4\sqrt{2}$, 得

$$PU=\frac{3}{4}PR=3\sqrt{2}, \quad UR=\sqrt{2}.$$

设圆分别与 PW, WR, RS 相切于点 X, Y, Z, 由 $\triangle UZR$ 知圆的半径为 1, 在 $\triangle PXU$ 中, 由毕氏定理,

$$PX=\sqrt{(3\sqrt{2})^2-1^2}=\sqrt{17}$$

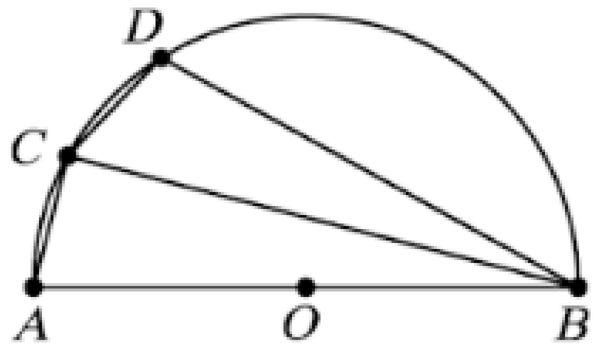
设 $x=PW$, 在 $\triangle PQW$ 中, 由毕氏定理,

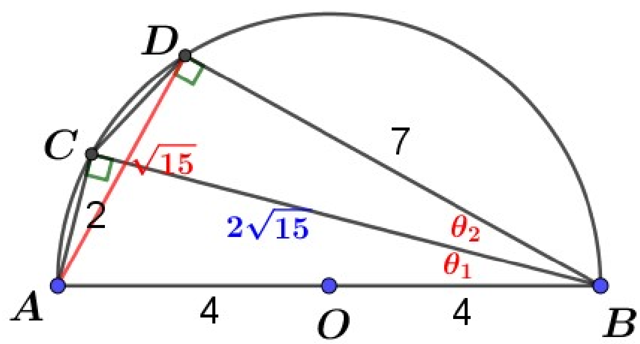
$$4^2+(3-x)^2=(\sqrt{17}+x)^2 \Rightarrow x=\frac{4}{\sqrt{17}+1}$$

故

$$PW=\sqrt{17}+\frac{4}{\sqrt{17}+1}=\frac{5\sqrt{17}-1}{4}$$

117. 如下图所示, $AB=8$, 以 AB 为直径的半圆上有 C,D 两点, 且 $AC=2,BD=7$, 求 CD 的长度。





AB 为直径, 在 $\triangle ABC$ 及 $\triangle ABD$ 中, 由毕氏定理,

$$BC=\sqrt{8^2-2^2}=2\sqrt{15}, AD=\sqrt{8^2-7^2}=\sqrt{15}$$

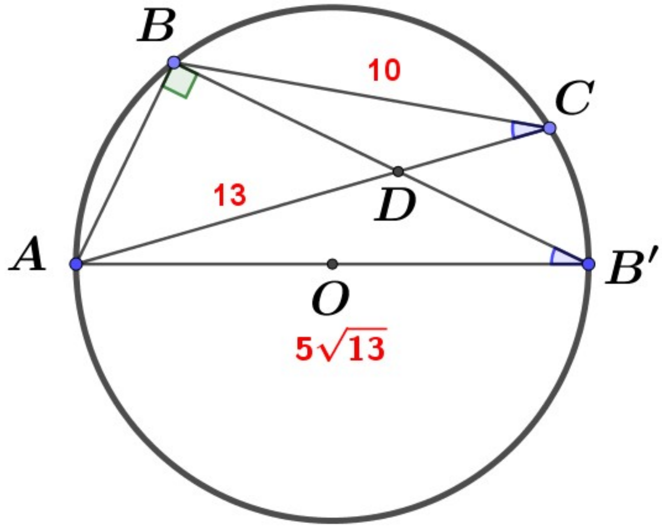
设 $\theta_1=\angle ABC,\theta_2=\angle ABD$, 则

$$\tan\theta_1=\frac{1}{\sqrt{15}},\quad \tan(\theta_1+\theta_2)=\frac{\frac{1}{\sqrt{15}}+\tan\theta_2}{1-\frac{1}{\sqrt{15}}\tan\theta_2}=\frac{\sqrt{15}}{7}\Rightarrow\tan\theta_2=\frac{1}{\sqrt{15}}$$

在 $\triangle BCD$ 中, 由余弦定理,

$$\cos\theta_2=\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{(2\sqrt{15})^2+7^2-CD^2}{2\cdot 7\cdot 2\sqrt{15}}\Rightarrow CD=2$$

118. 三角形 ABC 内接于一直径为 $5\sqrt{13}$ 的圆, D 点在 AC 上, 且 $\angle ABD=90°$. 已知 $BC=10, AD=13$, 求 CD。



由于 $\angle ABD$ 为直角, 延长 BD 交圆周于 B', 则 AB' 为直径, 由 $\triangle DBC \backsim \triangle DAB'$ (AAA),

$$\frac{DB}{DA} = \frac{BC}{AB'} \Rightarrow \frac{DB}{13} = \frac{10}{5\sqrt{13}} \Rightarrow DB = 2\sqrt{13}$$

在 $\triangle ABD$ 中, 由毕氏定理,

$$AB^2 + (2\sqrt{13})^2 = 13^2 \Rightarrow AB = 3\sqrt{13}$$

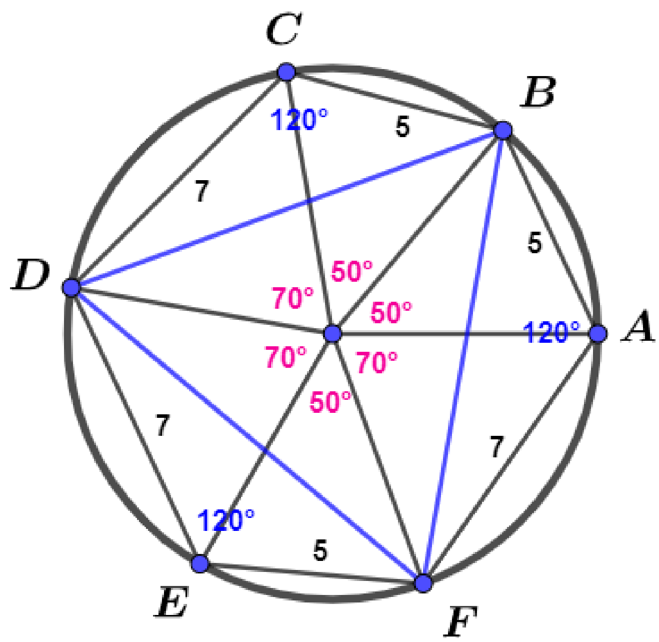
在 $\triangle ABB'$ 中, 由毕氏定理,

$$BB' = \sqrt{(5\sqrt{13})^2 - (3\sqrt{13})^2} = 4\sqrt{13} \Rightarrow DB' = BB' - BD = 2\sqrt{13}$$

再由 $\triangle DBC \backsim \triangle DAB'$,

$$\frac{BC}{AB'} = \frac{CD}{DB'} \Rightarrow \frac{10}{5\sqrt{13}} = \frac{CD}{2\sqrt{13}} \Rightarrow CD = 4$$

119. 已知圆内接六边形 $ABCDEF$ 的边长依次为 $5, 5, 7, 7, 5, 7$, 求该六边形的面积。



设圆心为 O, 则

$$\angle AOB : \angle BOC : \angle COD : \angle DOE : \angle EOF : \angle FOA = 5 : 5 : 7 : 7 : 5 : 7$$

即

$$\angle AOB = \angle BOC = \angle EOF = 50^\circ, \quad \angle COD = \angle DOE = \angle FOA = 70^\circ \Rightarrow \angle BAF = 120^\circ$$

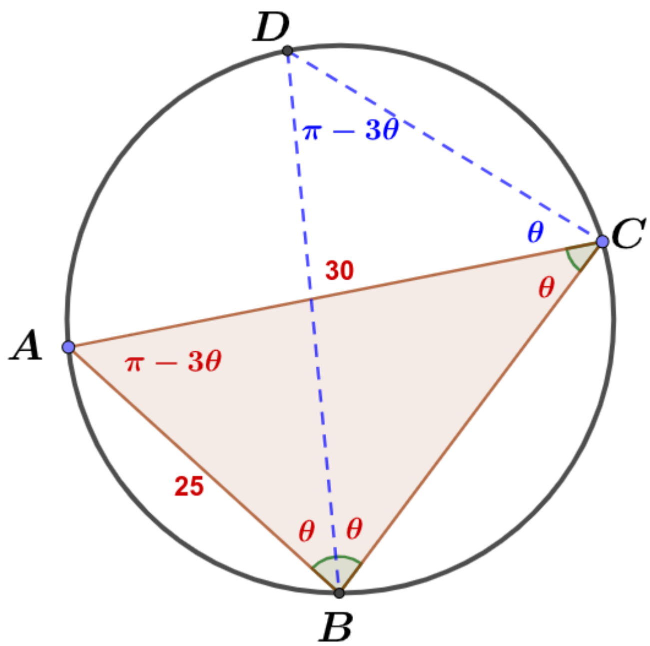
在 $\triangle BAF$ 中, 由余弦定理,

$$BF^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cos 120^\circ = 109$$

六边形面积为

$$[ABCDEF] = [\triangle BDF] + 3[\triangle ABF] = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 109 + \frac{3}{2} \cdot 5 \cdot 7 \cdot \sin 120^\circ = \frac{107\sqrt{3}}{2}$$

120. 已知 $\triangle ABC$ 中,$AB = 25, AC = 30, \angle B = 2\angle C$, 且 $\angle B$ 的内角平分线交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 D 点, 且 B, D 为相异点。试求 $\triangle BCD$ 的面积。



设 $\angle C=\theta$, 则 $\angle B=2\theta$,$\angle A=\pi-3\theta$, 在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理,

$$\frac{25}{\sin\theta}=\frac{30}{\sin 2\theta} \implies \cos\theta=\frac{3}{5}.$$

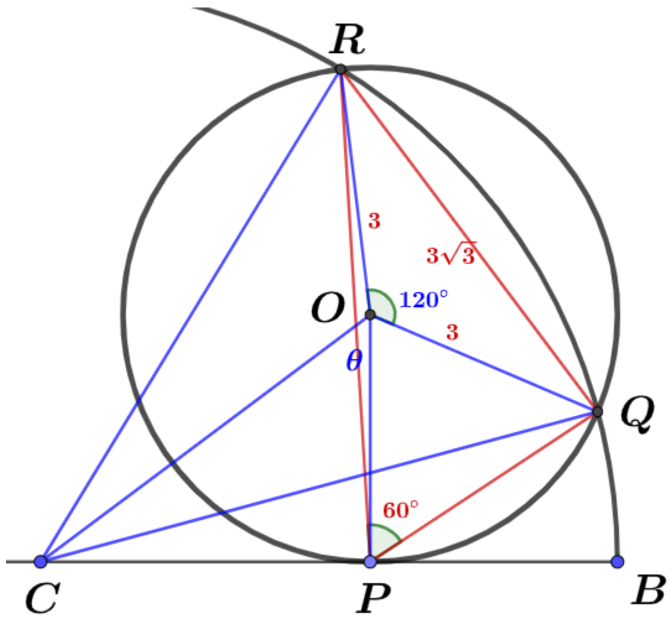
因同弧所对圆周角相等,$\angle D=\angle A,\angle B=\angle DCB$, 故 $\triangle ABC\cong\triangle DCB$ (ASA), 因此

$$[\triangle BCD]=[\triangle ABC]=\frac{1}{2}\cdot 25\cdot 30\cdot\sin(\pi-3\theta)=375\sin 3\theta.$$

由 $\sin\theta=\frac{4}{5}$,

$$[\triangle BCD]=375\left(3\cdot\frac{4}{5}-4\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^3\right)=132$$

121. 半圆 Γ 的直径 AB 之长为 14, 圆 Ω 切 AB 于点 P 且交 Γ 于点 Q 与点 R。若 $QR=3\sqrt{3}$ 且 $\angle QPR=60^\circ$, 求 $\triangle PQR$ 的面积。



设半圆心为 C, 小圆心为 O, 小圆半径为 r。由 $\angle QPR=60^\circ$ 得 $\angle QOR=120^\circ$, 在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理,

$$\frac{QR}{\sin\angle QOR}=\frac{3\sqrt{3}}{\sin 120^\circ}=2r\Rightarrow OQ=OR=r=3$$

且发现 $\triangle COR\cong\triangle COQ$ (SSS), 故 $\angle COQ=\angle COR=120^\circ$。在 $\triangle COQ$ 中, 由余弦定理,

$$7^2=CO^2+3^2-2\cdot CO\cdot 3\cdot\cos 120^\circ\Rightarrow CO=5$$

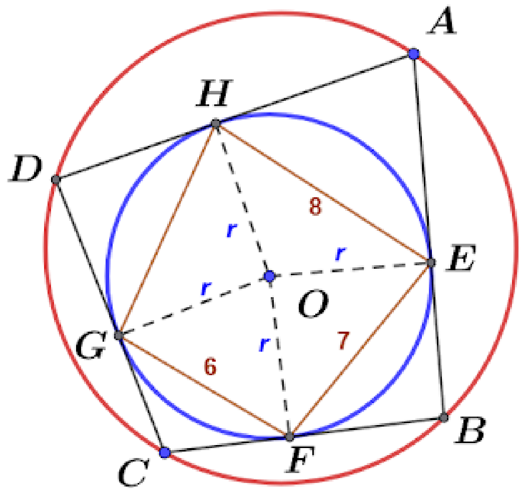
在 $\triangle COP$ 中, 由毕氏定理,$CP=\sqrt{5^2-3^2}=4$, 设 $\angle COP=\theta$, 有

$$\sin\theta=\frac{4}{5},\quad\cos\theta=\frac{3}{5}$$

因此

$$\begin{aligned}[\triangle PQR]&=[\triangle POQ]+[\triangle POR]+[\triangle OQR]\\&=\frac{1}{2}\cdot 3^2\big(\sin(120^\circ-\theta)+\sin(120^\circ+\theta)\big)+\frac{1}{2}\cdot 3^2\sin 120^\circ=\frac{99\sqrt{3}}{20}\end{aligned}$$

122. 已知圆内接四边形 $ABCD$ 中可以作一个内切圆, 且 E,F,G,H 分别在 AB,BC,CD,DA 上, 且为此四边形 $ABCD$ 与其内切圆相切的四个切点, 若 $FG=6,EF=7,EH=8$, 求 GH 的长度。



由圆内接四边形性质有

$$\angle A+\angle C=\angle GOF+\angle C=180^{\circ}\Rightarrow \angle A=\angle GOF$$

所以

$$\triangle AHE\backsim\triangle OGF\ (\mathrm{AAA})\Rightarrow AH=AE=\frac{4}{3}r$$

在 $\triangle AHE$ 及 $\triangle OHE$ 中, 由余弦定理,

$$\cos\angle A=-\cos\angle HOE\Rightarrow\frac{2r^2-8^2}{2r^2}=-\frac{\left(\frac{4r}{3}\right)^2+\left(\frac{4r}{3}\right)^2-8^2}{2\cdot\left(\frac{4r}{3}\right)^2}\Rightarrow r=5$$

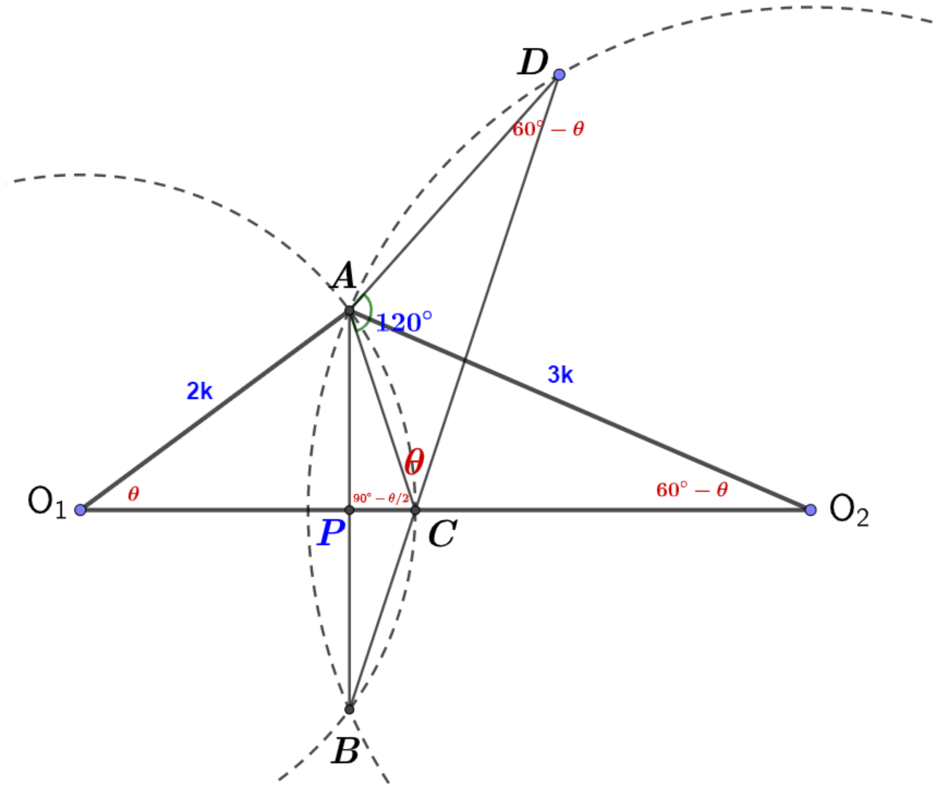
同理可得 $\angle D=\angle EOF$, 在 $\triangle OEF$ 中, 由余弦定理,

$$\cos\angle D=\cos\angle EOF=\frac{2r^2-7^2}{2r^2}=\frac{1}{50}$$

又 $\cos\angle GOH=-\cos\angle D=-\dfrac{1}{50}$, 在 $\triangle OGH$ 中, 由余弦定理,

$$\cos\angle GOH=\frac{2r^2-GH^2}{2r^2}\Rightarrow GH=\sqrt{51}$$

123. 若圆 O_1 与圆 O_2 的半径比为 $2:3$, 且圆 O_1 与圆 O_2 交于 A,B 两点。过 B 点作一直线分别交圆 O_1 及圆 O_2 于 C,D 两点, 且 $\angle CAD=\dfrac{2\pi}{3}$, 求 $\tan\angle ACD$。



调整两圆心距使得 C 在 O_1O_2 上, 令 $\angle ACD=\theta$, 则

$$\angle AO_2O_1=\frac{1}{2}\angle AO_2B=\angle ADC=60^\circ-\theta$$

又 $\angle ACB=180^\circ-\theta$, 所以

$$\angle AO_1B=360^\circ-2(180^\circ-\theta)=2\theta\Rightarrow\angle AO_1O_2=\theta$$

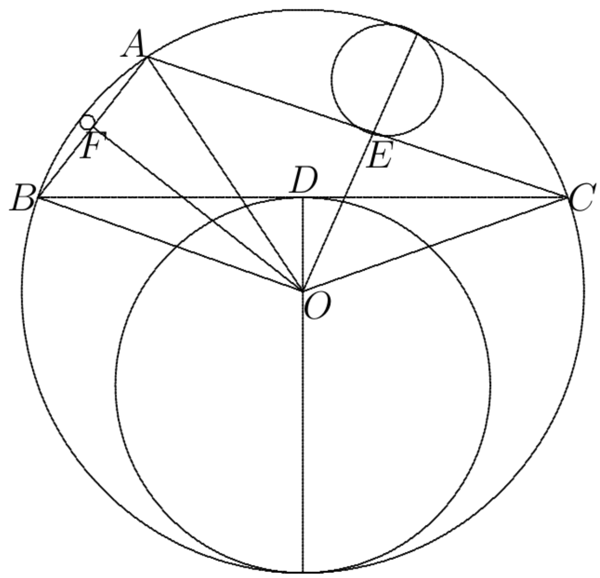
在 $\triangle APO_1$ 及 $\triangle APO_2$ 中, 设 $r_1=2k,r_2=3k$, 则

$$\sin\angle AO_1O_2=\sin\theta=\frac{AP}{2k},\sin\angle AO_2O_1=\sin(60^\circ-\theta)=\frac{AP}{3k}$$

解得

$$2\sin\theta=3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\right)\Rightarrow\tan\theta=\frac{3\sqrt{3}}{7}$$

124. 已知 $\triangle ABC$ 内接于半径为 1 的圆。对于 $\triangle ABC$ 的每一条边, 作一圆使得与该边切于其中点, 且该圆与大圆相切。已知其中两个小圆的半径分别为 $\frac{2}{3},\frac{2}{11}$, 求第三个小圆的半径。



设大圆圆心为 O, BC, AC, AB 中点为 D, E, F, 对应小圆半径为

$$r_1 = \frac{2}{3}, r_2 = \frac{2}{11}, r_3$$

在 $\triangle BDO$ 中, 由毕氏定理,

$$BC^2 = 4(OB^2 - OD^2) = 4\Big(1 - (1 - r_1)^2\Big) = \frac{32}{9}$$

在 $\triangle CEO$ 中, 由毕氏定理,

$$AC^2 = 4(OC^2 - OE^2) = 4\Big(1 - (1 - r_2)^2\Big) = \frac{288}{121}$$

设 $\angle BOC = \beta$, $\angle COA = \gamma$, 在 $\triangle BOC$ 及 $\triangle AOC$ 中, 由余弦定理,

$$\cos\beta = \frac{OB^2 + OC^2 - BC^2}{2OB \cdot OC} = -\frac{7}{9}, \quad \cos\gamma = \frac{OC^2 + OA^2 - AC^2}{2OC \cdot OA} = -\frac{23}{121}.$$

由此得

$$\sin\beta = \frac{4\sqrt{2}}{9}, \quad \sin\gamma = \frac{84\sqrt{2}}{121}.$$

于是

$$\cos\angle AOB = \cos(\beta - \gamma) = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma = \frac{833}{1089}.$$

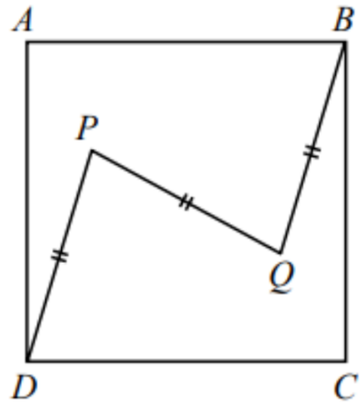
在 $\triangle AOB$ 中, 由余弦定理,

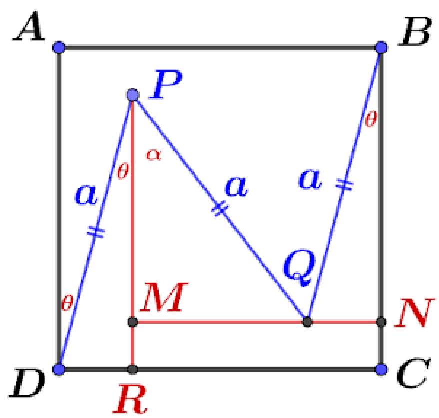
$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB\cos\angle AOB = \frac{512}{1089}$$

因此

$$OF = \sqrt{OA^2 - \frac{1}{4}AB^2} = \frac{31}{33} \Rightarrow r_3 = \frac{1}{2}(1 - OF) = \frac{1}{33}$$

125. P, Q 为正方形 $ABCD$ 内两点使得 $DP /\!/ BQ$ 且 $DP = PQ = BQ$, 求 $\angle ADP$ 的最小可能值。





设 $DP = PQ = QB = a, \angle DPR = \angle QBC = \theta, \angle RPQ = \alpha$, 则:

$$CD = DR + MQ + QN = 2a\sin\theta + a\sin\alpha$$

$$BC = BN + BN - PM = 2a\cos\theta - a\cos\alpha$$

由 $CD = BC$ 得

$$2(\sin\theta - \cos\theta) = -(\sin\alpha + \cos\alpha)$$

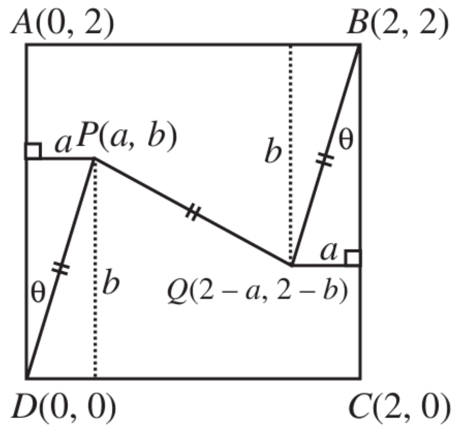
两边平方得

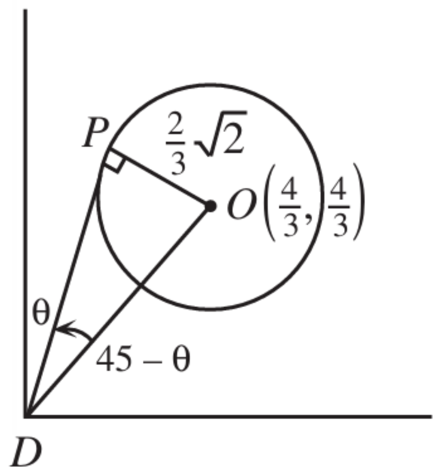
$$4 - 4\sin 2\theta = 1 + \sin 2\alpha \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{3 - \sin 2\alpha}{4}$$

由 $\sin 2\alpha \in [-1, 1]$,

$$\frac{1}{2} \leqslant \sin 2\theta \leqslant 1 \Rightarrow 15^\circ \leqslant \theta \leqslant 45^\circ$$

因此 θ 的最小值为 15°。





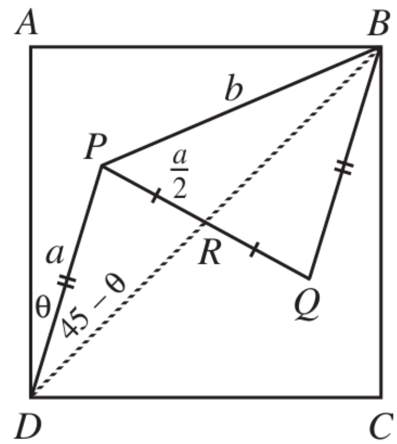
以 D 为原点构造坐标系，设 $P(a,b), Q(2-a,2-b)$，由 $PD=PQ$ 得

$$a^2+b^2=(2-2a)^2+(2-2b)^2 \Rightarrow \left(a-\frac{4}{3}\right)^2+\left(b-\frac{4}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$$

因此 P 在圆心 $\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$，半径 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 的圆上。当 DP 与此圆相切时,$\theta=\angle ADP$ 取最小值，由 $\triangle DOP$,

$$\sin(45^\circ-\theta)=\frac{OP}{OD}=\frac{1}{2}$$

此时 $45^\circ-\theta=30^\circ$，即 $\theta=15^\circ$。



设正方形 $ABCD$ 边长为 1, 令 $\angle ADP=\theta, PD=a, PB=b$。在 $\triangle PDB$ 中, 由余弦定理,

$$\cos(45^\circ-\theta)=\frac{a^2+2-b^2}{2\sqrt{2}a} \tag{1}$$

在 $\triangle PDB$ 中, 由余弦定理,

$$\cos(45^\circ-\theta)=\frac{a^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}{2a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\frac{\frac{3}{4}a^2+\frac{1}{2}}{\sqrt{2}a} \tag{2}$$

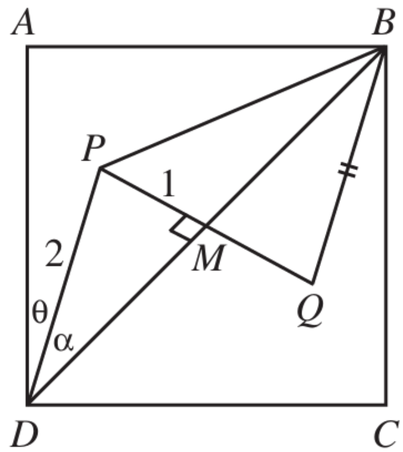
由 (1), (2) 得

$$b^2=\frac{1}{2}(2-a^2)$$

代入 (1) 得

$$\cos(45^\circ-\theta)=\frac{a^2+2-\frac{1}{2}(2-a^2)}{2\sqrt{2}a}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(3a+\frac{2}{a}\right)\geqslant\frac{1}{4\sqrt{2}}\cdot 2\sqrt{6}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

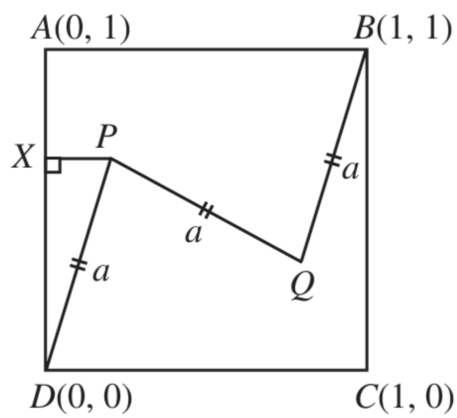
等号成立当且仅当 $a^2=\frac{2}{3}$, 当 $\cos(45^\circ-\theta)$ 为最小时,$\theta=15^\circ$ 为最小。



连接 BD 交 PQ 于 M, 由于 $\triangle PDM \cong \triangle QBM$ (ASA), 有 $DM = BM$, 即 M 为 BD 中点。不失一般性, 设 $PM = 1, PD = 2$, 记 $\angle ADP = \theta, \angle PDM = \alpha$, 则由于 $\theta + \alpha = 45°$, 当 α 取最大时 θ 取最小。在 $\triangle PMD$ 中, 由正弦定理,

$$\frac{\sin\alpha}{1} = \frac{\sin\angle PMD}{2}$$

欲使 $\sin\alpha$ 最大, 取 $\sin\angle PMD = 1$, 此时 $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, 即 $\alpha = 30°$, 所以 θ 的最小值为 $15°$。



以 D 为原点构造坐标系, 设 $PD = PQ = QB = a, \angle ADP = \theta$, 则 $P(a\sin\theta, a\cos\theta), Q(1 - a\sin\theta, 1 - a\cos\theta)$, 且有

$$PQ^2 = (1 - 2a\sin\theta)^2 + (1 - 2a\cos\theta)^2 = a^2,$$

化简得

$$\frac{2+3a^2}{4a}=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin(\theta+45^\circ)$$

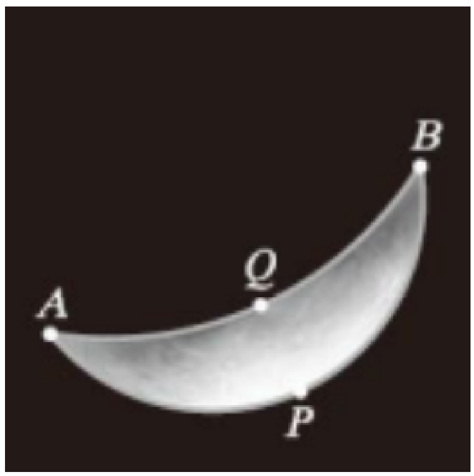
从而

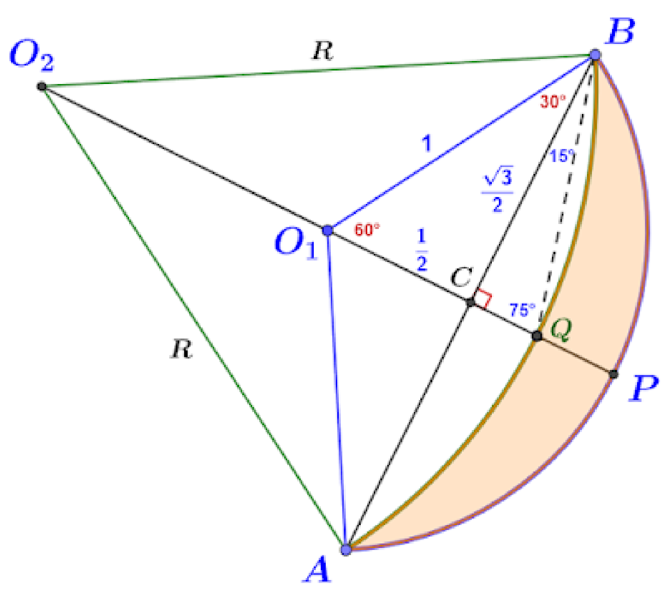
$$\sin(\theta+45^\circ)=\frac{2+3a^2}{4\sqrt{2}a}=\frac{1}{2\sqrt{2}a}+\frac{3a}{4\sqrt{2}}\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2},$$

由于 $0^\circ\leqslant\theta\leqslant 90^\circ, \sin(\theta+45^\circ)$ 在 $\theta=15^\circ$ 有最小，故 $\theta=15^\circ$ 为最小。

126. 右图为月偏食的示意图，满月被地球的影锥遮蔽一部分。假设满月和地球影锥截面都是正圆，在图中标记圆弧 $\widehat{AP}=\widehat{PB}$ 均为满月的圆周一部分，圆弧 $\widehat{AQ}=\widehat{QB}$ 均为地球影锥截圆的圆周一部分。若 AB 与 PQ 分别是满月圆半径的 $\sqrt{3}$ 与 $2-\sqrt{3}$ 倍，求

$$\frac{\text{月偏食亮面面积}}{\text{满月圆面积}}.$$





设小圆 (月亮) 圆心为 O_1, 半径 $r=1$, 大圆 (太阳) 圆心为 O_2, 半径 R,C 为 O_1Q 与 AB 的交点, 则

$$BC=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\sqrt{3}\Rightarrow\angle CO_1B=60^\circ,\angle O_1BC=30^\circ$$

又 $CQ=O_1P-PQ-O_1C=\sqrt{3}-\frac{3}{2}$,

$$\tan\angle QBC=\frac{CQ}{BC}=2-\sqrt{3}\Rightarrow\angle QBC=15^\circ,\angle CQB=75^\circ$$

由于 $O_2B=O_2Q=R$, 因此

$$\angle BO_2C=180^\circ-75^\circ\cdot 2=30^\circ\Rightarrow R=2BC=\sqrt{3}$$

故弓形 AQB 面积为

$$[\text{弓形}AQB]=[\text{扇形}AQBO_2]-[\triangle ABO_2]=\frac{1}{6}(\sqrt{3})^2\pi-\frac{1}{2}(\sqrt{3})^2\sin 60^\circ=\frac{\pi}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

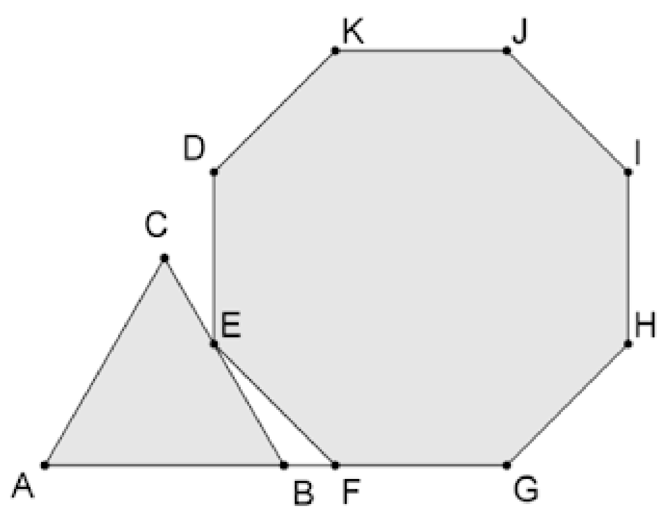
同理,

$$[\text{弓形}APB]=[\text{扇形}APBO_1]-[\triangle ABO_1]=\frac{1}{3}(1)^2\pi-\frac{1}{2}(1)^2\sin 120^\circ=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}$$

故

$$\frac{\text{月偏食亮面面积}}{\text{满月圆面积}}=\frac{\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)}{\pi(1)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2\pi}-\frac{1}{6}$$

127. 下图中, 已知 $\triangle ABC$ 为正三角形,$DEFGHIJK$ 为正八边形, 且 E 为 BC 上一点,$CE=2$,A,C,D 三点共线,A,B,F,G 四点共线, 求 AF。



正八边形内角为 $(8-2)\times 180^\circ \div 8 = 135^\circ$, 则

$$\angle EFB = 45^\circ, \angle BEF = 15^\circ, \angle CED = 30^\circ, \angle CDE = 30^\circ \Rightarrow CD = CE = 2$$

在 $\triangle CDE$ 中, 由余弦定理,

$$DE^2 = 2^2 + 2^2 - 2\cdot 2\cdot 2\cdot \cos 120^\circ \Rightarrow DE = 2\sqrt{3}$$

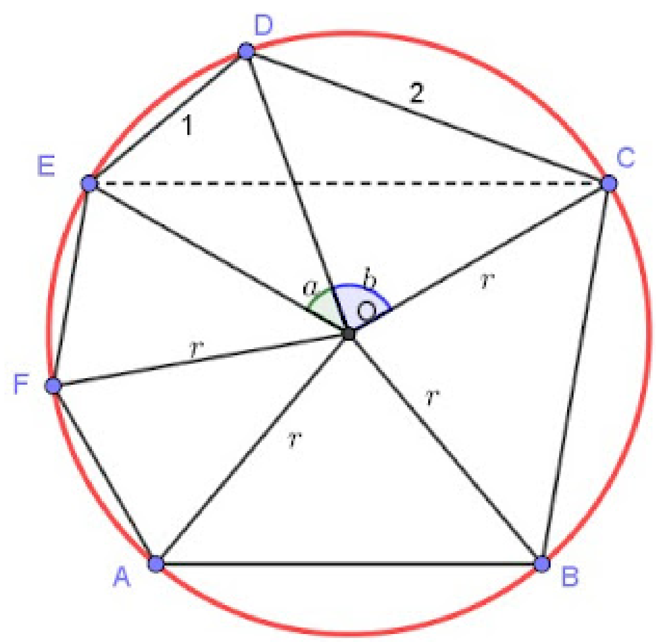
在 $\triangle BEF$ 中, 由正弦定理,

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sin 120^\circ} = \frac{EB}{\sin 45^\circ} = \frac{BF}{\sin 15^\circ} \Rightarrow EB = 2\sqrt{2}, BF = \sqrt{6}-\sqrt{2},$$

其中 $\sin 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, 因此

$$AF = AB + BF = CE + EB + BF = 2 + \sqrt{6} + \sqrt{2}$$

128. 某圆内接六边形 $ABCDEF$, 其中 $AB = BC = CD = 1, DE = EF = FA = 2$, 求此六边形的面积。



设圆心为 O, 半径为 r, 且

$$\angle AOB=\angle BOC=\angle COD=b,\quad \angle DOE=\angle EOF=\angle FOA=a,$$

由圆周角和

$$3a+3b=360^\circ \Rightarrow \angle EDC=a+b=120^\circ$$

在 $\triangle EDC$ 中, 由余弦定理,

$$EC^2=1^2+2^2-2\cdot1\cdot2\cdot\cos120^\circ \Rightarrow EC=\sqrt{7}$$

在 $\triangle EOC$ 中, 由正弦定理,

$$\frac{\sqrt{7}}{\sin120^\circ}=2r \Rightarrow r=\sqrt{\frac{7}{3}}$$

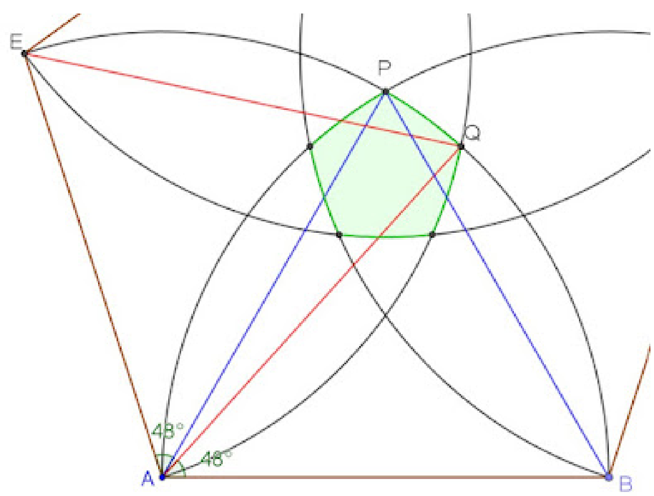
在 $\triangle EOD$ 及 $\triangle DOC$ 中, 由余弦定理,

$$\cos a=\frac{r^2+r^2-1^2}{2r^2}=\frac{11}{14},\cos b=\frac{r^2+r^2-2^2}{2r^2}=\frac{1}{7}\Rightarrow \sin a=\frac{5\sqrt{3}}{14},\ \sin b=\frac{4\sqrt{3}}{7}.$$

故六边形 $ABCDEF$ 面积为

$$[ABCDEF]=\frac{3}{2}r^2\sin a+\frac{3}{2}r^2\sin b=\frac{7}{2}\left(\frac{5\sqrt{3}}{14}+\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)=\frac{13\sqrt{3}}{4}$$

129. 边长为 1 的正五边形内部, 去掉同时与五个顶点距离都小于 1 的点后, 求剩余部分的面积。



如图, 此题相当于求正五边形 $ABCDE$ 扣除青色部分的面积, 该部分由一个小正五边形和五个弓形组成, 首先求小正五边形边长 PQ, 易知

$$\angle PAQ = \angle QAE + \angle PAB - \angle A = 60^\circ + 60^\circ - 108^\circ = 12^\circ, \angle QAB = 60^\circ - 12^\circ = 48^\circ.$$

在 $\triangle APQ$ 中, 由余弦定理,

$$PQ^2 = 1^2 + 1^2 - 2\cdot 1\cdot 1\cdot \cos 12^\circ = 2 - 2\cos 12^\circ$$

弓形面积为

$$[\text{弓形}] = [\text{扇形}APQ] - [\triangle APQ] = \frac{12}{360}\cdot 1^2\cdot \pi\cdot -\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot \sin 12^\circ = \frac{\pi}{30} - \frac{1}{2}\sin 12^\circ.$$

小正五边形与五个弓形组成区域 R 面积

$$R = \frac{5}{4}(2 - 2\cos 12^\circ)\tan 54^\circ + 5\left(\frac{\pi}{30} - \frac{1}{2}\sin 12^\circ\right)$$

所以剩余部分面积为

$$\begin{aligned}
[\text{剩余部分}] &= [ABCDE] - R \\
&= \frac{5}{4}\tan 54^\circ - \frac{5}{4}(2 - 2\cos 12^\circ)\tan 54^\circ - \frac{\pi}{6} + \frac{5}{2}\sin 12^\circ \\
&= \frac{5}{4}\tan 54^\circ(2\cos 12^\circ - 1) + \frac{5}{2}\sin 12^\circ - \frac{\pi}{6} \\
&= \frac{5}{4}\frac{\cos 36^\circ}{\sin 36^\circ}(2\cos 12^\circ - 1) + \frac{5}{2}\sin 12^\circ - \frac{\pi}{6} \\
&= \frac{5}{4}\times\frac{2\cos 24^\circ - \cos 36^\circ}{\sin 36^\circ} - \frac{\pi}{6} \\
&= \frac{5\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

其中

$$\cos 24^\circ = \cos 60^\circ\cos 36^\circ + \sin 60^\circ\sin 36^\circ = \frac{1}{2}\cos 36^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 36^\circ$$

三角函数

1. 已知 $\cos x+\cos^2 x+\cos^3 x=1$，求 $\cos^3 x+\sec x$ 的值。

反复操弄得

$$\begin{aligned}\cos^3 x+\frac{1}{\cos x}&=\frac{\cos^4 x+1}{\cos x}\\&=\frac{\cos^4 x+\cos x+\cos^2 x+\cos^3 x}{\cos x}\\&=\cos^3 x+\cos^2 x+\cos x+1\\&=1+1\\&=2\end{aligned}$$

2. 已知 $\cos\theta+8\sin\theta=4$。求 $\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$ 的值。

两边平方 $\cos\theta=4-8\sin\theta$ 有

$$1-\sin^2\theta=16-64\sin\theta+64\sin^2\theta\Rightarrow\sin\theta=\frac{3}{5}\text{ 或 }\frac{5}{13}$$

当 $\sin\theta=\dfrac{3}{5},\cos\theta=\dfrac{3}{5},\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}=-2$；当 $\sin\theta=\dfrac{5}{13},\cos\theta=\dfrac{12}{13},\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{3}{2}$，故

$$\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}=-2\text{ 或 }\frac{3}{2}$$

3. 若 $\sec x+\tan x=2018$，求 $\csc x+\cot x$。

已知 $\sec x+\tan x=2018$，则 $\sec x-\tan x=\dfrac{\sec^2 x-\tan^2 x}{\sec x+\tan x}=\dfrac{1}{2018}$，解得

$$\sec x=\frac{2018^2+1}{2\cdot 2018},\quad\tan x=\frac{2018^2-1}{2\cdot 2018}$$

于是

$$\csc x+\cot x=\frac{\sec x}{\tan x}+\frac{1}{\tan x}=\frac{2018^2+1+2\cdot 2018}{2018^2-1}=\frac{2019^2}{2018^2-1}$$

4. 已知 $\sin(1+\cos^2 x+\sin^4 x)=\dfrac{13}{14}$, 求 $\cos(1+\sin^2 x+\cos^4 x)$ 的值。

记 $\alpha=1+\cos^2 x+\sin^4 x, \beta=1+\sin^2 x+\cos^4 x$, 发现

$$\begin{aligned}\alpha-\beta&=(1+\cos^2 x+\sin^4 x)-(1+\sin^2 x+\cos^4 x)\\&=\cos^2 x(1-\cos^2 x)+\sin^2 x(\sin^2 x-1)\\&=\cos^2 x\sin^2 x-\sin^2 x\cos^2 x\\&=0\end{aligned}$$

于是

$$\cos^2\beta=1-\sin^2\beta=1-\sin^2\alpha=1-\left(\frac{13}{14}\right)^2=\frac{27}{196}\Rightarrow\cos\beta=\pm\frac{3\sqrt{3}}{14}$$

5. 设 a,b 为实数, 且满足

$$\sin a+\sin b=\frac{\sqrt{2}}{2},\cos a+\cos b=\frac{\sqrt{6}}{2},$$

求 $\sin(a+b)$ 的值。

由

$$\frac{\sin a+\sin b}{\cos a+\cos b}=\frac{2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}}{2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}}=\tan\frac{a+b}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

因此

$$\sin(a+b)=\frac{2\tan\frac{a+b}{2}}{1+\tan^2\frac{a+b}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

设复数 $z_1=\cos a+i\sin a,\quad z_2=\cos b+i\sin b$, 则

$$z=z_1+z_2=\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\,(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)\Rightarrow\frac{a+b}{2}=30^\circ\Rightarrow a+b=60^\circ$$

所以

$$\sin(a+b)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

6. 已知 $x\neq y,x\neq 0,y\neq 0$, 且 $\tan(x+y)=2\tan(x-y)$, 求

$$\frac{\sin 2x}{\sin 2y}$$

的值。

展开 $\tan(x+y)=2\tan(x-y)$ 得

$$\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}=2\left(\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y}\right)\Rightarrow \tan x(1+\tan^2 y)=3\tan y(1+\tan^2 x)$$

利用恒等式 $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$, 得

$$\frac{\tan x\sec^2 y}{\tan y\sec^2 x}=\frac{\sin x\cos x}{\sin y\cos y}=\frac{\sin 2x}{\sin 2y}=3$$

7. 已知三角方程

$$\frac{\sin(x-\alpha)}{\cos(x-\alpha)-2\tan\alpha\sin(x-\alpha)}=\tan\alpha$$

证明

$$\tan x=2\tan\alpha$$

据题意有

$$\frac{\sin(x-\alpha)}{\cos(x-\alpha)-2\tan\alpha\sin(x-\alpha)}=\tan\alpha$$

$$\sin(x-\alpha)+2\tan^2\alpha\sin(x-\alpha)=\tan\alpha\cos(x-\alpha)$$

$$\sin(x-\alpha)\left(1+2\tan^2\alpha\right)=\tan\alpha\cos(x-\alpha)$$

$$\tan(x-\alpha)\left(1+2\tan^2\alpha\right)=\tan\alpha$$

$$\frac{\tan x-\tan\alpha}{1+\tan x\tan\alpha}\left(1+2\tan^2\alpha\right)=\tan\alpha$$

$$(\tan x-\tan\alpha)(1+2\tan^2\alpha)=\tan\alpha(1+\tan x\tan\alpha)$$

$$\tan x+2\tan^2\alpha\tan x-\tan\alpha-2\tan^3\alpha=\tan\alpha+\tan^2\alpha\tan x$$

$$(\tan x-2\tan\alpha)(\tan^2\alpha+1)=0$$

由于 $\tan^2\alpha+1\neq 0$, 故

$$\tan x=2\tan\alpha$$

证毕。

8. 已知 $0<x<\frac{\pi}{2}, 0<y<\frac{\pi}{2}$, 且

$$\sin(x+y)\sin(x-y)=\frac{5}{36},\quad \cos x+\cos y=\frac{5}{6}.$$

求 $\cos(x-y)$ 的值。

由

$$\begin{aligned}\frac{5}{36}=\sin(x+y)\sin(x-y)&=(\sin x\cos y+\cos x\sin y)(\sin x\cos y-\cos x\sin y)\\&=\sin^2 x\cos^2 y-\cos^2 x\sin^2 y\\&=(1-\cos^2 x)\cos^2 y-\cos^2 x(1-\cos^2 y)\\&=\cos^2 y-\cos^2 x\end{aligned}$$

再由平方差公式, 得

$$\cos y-\cos x=\frac{1}{6}.$$

联立可得

$$\cos x=\frac{1}{3},\quad \cos y=\frac{1}{2}$$

由于 x,y 皆为锐角,

$$\sin x=\frac{2\sqrt{2}}{3},\quad \sin y=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

使用差角公式:

$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1+\sqrt{6}}{6}$$

9. 已知方程

$$\frac{\sin x}{\sin y}=\frac{1}{2},\quad \frac{\cos x}{\cos y}=\frac{3}{2},$$

求 $\tan^2(x+y)$。

由

$$\frac{\sin x}{\sin y}=\frac{1}{2},\quad \frac{\cos x}{\cos y}=\frac{3}{2},$$

可得

$$\frac{\sin x+\sin y}{\sin x-\sin y}=\frac{2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}{2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}}=-3,\quad \frac{\cos x+\cos y}{\cos x-\cos y}=\frac{2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}{-2\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2}}=5,$$

故

$$\tan^2\frac{x+y}{2}=\frac{3}{5}$$

又

$$\tan(x+y)=\frac{2\tan\frac{x+y}{2}}{1-\frac{3}{5}}=5\tan\frac{x+y}{2}$$

所以

$$\tan^2(x+y)=25\cdot\frac{3}{5}=15$$

10. 设 $\beta\in\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$ 且满足

$$\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)=\sqrt{3}$$

求 β 的值。

$$\begin{aligned}\sqrt{3}&=\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)\\&=\cos\alpha+\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\&=\cos\alpha(1+\sin\beta+\cos\beta)+\sin\alpha(\cos\beta-\sin\beta)\\&=\sqrt{(1+\sin\beta+\cos\beta)^2+(\cos\beta-\sin\beta)^2}\sin(\alpha+\gamma)\\&=\sqrt{3+2\sin\beta+2\cos\beta}\sin(\alpha+\gamma)\end{aligned}$$

由于 $\sin(\alpha+\gamma)\leqslant 1$，因此

$$\sqrt{3+2\sin\beta+2\cos\beta}\geqslant\sqrt{3}\Rightarrow\sin\beta+\cos\beta\geqslant 0\Rightarrow\sin\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)\geqslant 0$$

而 $\beta+\frac{\pi}{4}\in[\pi,\frac{5\pi}{4}]\Rightarrow\sin\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 0$，故

$$\sin\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)=0\Rightarrow\beta=\frac{3\pi}{4}$$

11. 求解三角方程

$$\sin x\sin 2x+\sin 2x\sin 3x+\sin 3x\sin 4x=0$$

原方程化为

$$\sin 2x(\sin x+\sin 3x)+\sin 3x\sin 4x=0$$

$$\sin 2x(2\sin 2x\cos x)+\sin 3x(2\sin 2x\cos 2x)=0$$

$$2\sin 2x(\sin 2x\cos x+\sin 3x\cos 2x)=0$$

$$2\sin 2x\sin x\left[2\cos^2 x+(3-4\sin^2 x)(1-2\sin^2 x)\right]=0$$

$$\sin 2x\sin x\left[1+(3-4\sin^2 x)^2\right]=0$$

此时 $1+(3-4\sin^2 x)^2>0$, 解 $\sin 2x=0$ 即可, 通解为

$$x=\frac{n\pi}{2},\quad n\in\mathbb{Z}$$

12. 解三角方程

$$2\cos x\sin^2 x-2\cos^2 x\sin x+\cos^2 x-4\sin^2 x+3\cos x\sin x+2\sin x-2\cos x=0$$

原方程化为

$$2\cos x\sin x(\sin x-\cos x)+(\cos x-\sin x)(\cos x+4\sin x)+2(\sin x-\cos x)=0$$

$$(\sin x-\cos x)\left[2\cos x\sin x-(\cos x+4\sin x)+2\right]=0$$

$$(\sin x-\cos x)(2\sin x-1)(\cos x-2)=0$$

注意到方程 $\cos x=2$ 无实数解, 于是

$$\tan x=1\quad 或\quad \sin x=\frac{1}{2}$$

通解为

$$x=n\pi+\frac{\pi}{4}\quad 或\quad x=n\pi+(-1)^n\left(\frac{\pi}{6}\right),\quad n\in\mathbb{Z}$$

13. 解方程

$$\sin^2 x+\sin^2 2x=\sin^2 3x.$$

首先有

$$\begin{aligned}\sin^2 3x-\sin^2 x&=(\sin 3x+\sin x)(\sin 3x-\sin x)\\&=(2\sin 2x\cos x)(2\cos 2x\sin x)\\&=2\sin^2 2x\cos 2x\end{aligned}$$

故原方程式变为

$$\sin^2 2x(2\cos 2x-1)=0$$

解得

$$x=\frac{n\pi}{2}\quad \text{或}\quad x=n\pi\pm\frac{\pi}{6},\quad n\in\mathbb{Z}$$

14. 解方程

$$\cos^2 x+3\cos^2 2x=\cos^2 3x.$$

同上题，有

$$\begin{aligned}\cos^2 3x-\cos^2 x&=(\cos 3x+\cos x)(\cos 3x-\cos x)\\&=(2\cos 2x\cos x)(-2\sin 2x\sin x)\\&=-2\cos 2x\sin^2 2x\\&=-2\cos 2x(1-\cos^2 2x)\end{aligned}$$

故原方程式变为

$$\cos 2x(\cos 2x-2)(2\cos 2x+1)=0$$

其中 $\cos 2x=2$ 无实数解，故通解为

$$x=\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\quad \text{或}\quad x=n\pi\pm\frac{\pi}{3},\quad n\in\mathbb{Z}$$

15. 求解

$$\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin x$$

和差化积得

$$2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\cos x=\sin x$$

$$\cos x(\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x)=\sin x$$

$$\sin x(2\cos^2 x-1)=\sqrt{3}\cos 2x\cos x$$

$$\cos 2x(\tan x-\sqrt{3})=0$$

故通解为

$$x=n\pi\pm\frac{\pi}{4}\quad 或\quad x=n\pi+\frac{\pi}{3},\quad n\in\mathbb{Z}$$

16. 解方程

$$(\cos 4x+\cos x)^2+(\sin 4x+\sin x)^2=2\sqrt{3}\sin 3x,\quad 0\leqslant x<\pi$$

首先展开左式,

$$(\cos 4x+\cos x)^2+(\sin 4x+\sin x)^2=1+1+2\cos(4x-x)=2+2\cos 3x$$

原方程即

$$2+2\cos 3x=2\sqrt{3}\sin 3x\Rightarrow\sqrt{3}\sin 3x-\cos 3x=1\Rightarrow\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$$

故通解为

$$3x-\frac{\pi}{6}=n\pi+(-1)^n\left(\frac{\pi}{6}\right)\Rightarrow x=\frac{n\pi}{3}+\frac{1+(-1)^n}{18}\pi,\quad n\in\mathbb{Z}$$

17. 解三角方程式

$$16\sin^2\theta+\tan^2\theta+9(\csc^2\theta+\cot^2\theta)=30,$$

其中 $0^\circ\leqslant\theta\leqslant 360^\circ$。

原方程式即

$$(4\sin\theta-3\csc\theta)^2+(\tan\theta-3\cot\theta)^2=0$$

于是

$$4\sin\theta-3\csc\theta=0\Rightarrow\sin\theta=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\theta=60^\circ,120^\circ,240^\circ,300^\circ$$

且

$$\tan\theta - 3\cot\theta = 0 \Rightarrow \tan\theta = \pm\sqrt{3} \Rightarrow \theta = 60^\circ, 120^\circ, 240^\circ, 300^\circ$$

故原方程式的解为

$$\theta = 60^\circ, 120^\circ, 240^\circ, 300^\circ$$

18. 求解方程

$$(x+y)^2 + 4(x+y)\cos(x-y) + 4 = 0$$

注意到

$$\begin{aligned}(x+y)^2 + 4(x+y)\cos(x-y) + 4 &= [(x+y) + 2\cos(x-y)]^2 - (2\cos(x-y))^2 + 4 \\ &= [(x+y) + 2\cos(x-y)]^2 + [2\sin(x-y)]^2\end{aligned}$$

由于两个平方项均为实数, 原方程等价于

$$(x+y) + 2\cos(x-y) = 0 \tag{1}$$

且

$$\sin(x-y) = 0 \Rightarrow x - y = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

若 n 为偶数, 则 $x - y = 2k\pi \Rightarrow \cos(x-y) = 1$, 代入 (1) 得

$$x + y = -2$$

若 n 为奇数, 则 $x - y = (2k+1)\pi \Rightarrow \cos(x-y) = -1$, 代入 (1) 得

$$x + y = 2$$

故可解得

$$x = -1 + k\pi, y = -1 - k\pi, \quad \text{或} \quad x = 1 + \frac{(2k+1)\pi}{2}, y = 1 - \frac{(2k+1)\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

19. 解方程

$$4\cos x\cos 2x\cos 5x + 1 = 0.$$

原方程等价于

$$4\cos x\cos 2x\cos 5x=-1$$

注意到 $x=n\pi,n\in\mathbb{Z}$ 不是原方程的解, 两边乘 $\sin x$ 得

$$4\sin x\cos x\cos 2x\cos 5x=-\sin x$$

即

$$2\sin 2x\cos 2x\cos 5x=-\sin x\Rightarrow\sin 4x\cos 5x=-\sin x$$

积化和差得

$$\frac{1}{2}\sin 9x-\frac{1}{2}\sin x=-\sin x\Rightarrow\sin 9x=-\sin x$$

即

$$\sin 9x=\sin(-x)$$

通解为

$$9x=-x+2n\pi\Rightarrow x=\frac{n\pi}{5},\quad n\in\mathbb{Z},\quad n\not\equiv 0\pmod 5$$

或

$$9x=\pi-(-x)+2n\pi\Rightarrow x=\frac{n\pi}{4}+\frac{\pi}{8},\quad n\in\mathbb{Z}$$

20. 解

$$\sin^8\theta+\cos^8\theta=\frac{17}{32}.$$

化简左式得

$$\begin{aligned}\sin^8\theta+\cos^8\theta&=(\sin^4\theta+\cos^4\theta)^2-2\sin^4\theta\cos^4\theta\\&=\left((\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta\right)^2-2\sin^4\theta\cos^4\theta\\&=\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2\theta\right)^2-\frac{1}{8}\sin^4 2\theta\end{aligned}$$

故原方程即

$$4\sin^2 2\theta-32\sin^2 2\theta+15=0\Rightarrow(2\sin^2 2\theta-1)(2\sin^2 2\theta-15)=0$$

于是由 $\sin^2 2\theta=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\sin 2\theta=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 解为

$$\theta=\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{8},\quad n\in\mathbb{Z}$$

且由于 $0 \leqslant \sin^2\alpha \leqslant 1, \alpha \in \mathbb{R}$, 方程式 $\sin^2 2\theta = \dfrac{15}{2}$ 无解。

21. 解方程

$$\cos\frac{4x}{3} = \cos^2 x.$$

令 $x = \dfrac{3t}{2}$, 则 $\dfrac{4x}{3} = 2t$, 原式变为

$$\cos 2t = \cos^2\frac{3t}{2}$$

无中生有,

$$2\cos 2t - 1 = 2\cos^2\frac{3t}{2} - 1 = \cos 3t$$

于是

$$2(2\cos^2 t - 1) - 3 = 4\cos^3 t - 3\cos t \Rightarrow (4\cos^2 t - 3)(\cos t - 1) = 0$$

若 $\cos t = 1$, 则 $t = 2k\pi \Rightarrow x = 3k\pi$; 若 $\cos^2 t = \dfrac{3}{4}$, 则 $t = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{4} + 3k\pi$, 通解为

$$x = 3k\pi \quad \text{或} \quad x = \pm\frac{\pi}{4} + 3k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

22. 设 x 满足 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ 且

$$\cos\left(\frac{3}{2}\cos x\right) = \sin\left(\frac{3}{2}\sin x\right),$$

求 $\sin 2x$ 的所有可能值。

由于 $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, 所以

$$\frac{3}{2}\cos x, \frac{3}{2}\sin x \in \left(0, \frac{3}{2}\right) \subset \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

若 $Y, Z \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, 则 $\cos Y = \sin Z$ 当且仅当 $Y + Z = \dfrac{\pi}{2}$, 因此

$$\cos\left(\frac{3}{2}\cos x\right) = \sin\left(\frac{3}{2}\sin x\right) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{3}{2}\cos x + \frac{3}{2}\sin x = \frac{\pi}{2}$$

即

$$\cos x + \sin x = \frac{\pi}{3}$$

两边平方得

$$\sin 2x = \frac{\pi^2}{9} - 1$$

为唯一可能值。

23. 设 $0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 45^\circ$，若已知 $\cot 2\alpha - \sqrt{3} = \sec\alpha$，求 α。

化简得

$$\cot(2\alpha) - \sec\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} - \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1 - 2\sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} - \frac{1}{\cos\alpha}$$

原方程即

$$1 - 2\sin^2\alpha - 2\sin\alpha = 2\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha$$

两边平方得

$$(1 - 2\sin^2\alpha - 2\sin\alpha)^2 = 12\sin^2\alpha(1 - \sin^2\alpha)$$

$$16\sin^4\alpha + 8\sin^3\alpha - 12\sin^2\alpha - 4\sin\alpha + 1 = 0$$

$$-4\sin\alpha(3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha) - (-8\sin^3\alpha + 6\sin\alpha) + 2\sin\alpha + 1 = 0$$

$$-4\sin\alpha\sin 3\alpha - 2\sin 3\alpha + 2\sin\alpha + 1 = 0$$

$$-2\sin 3\alpha(2\sin\alpha + 1) + 2\sin\alpha + 1 = 0$$

$$(1 - 2\sin 3\alpha)(2\sin\alpha + 1) = 0$$

故

$$\sin 3\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow 3\alpha = 30^\circ \Rightarrow \alpha = 10^\circ$$

24. (a) 已知 $\theta \neq 2n\pi - \frac{\pi}{2}$，$n \in \mathbb{Z}$，证明

$$\tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \equiv \frac{1 - \sin\theta}{1 + \sin\theta}$$

有

$$\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) = \left(\frac{1-\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan\frac{\theta}{2}}\right)^2$$
$$= \left(\frac{\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2$$
$$= \frac{1-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{1+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$$
$$= \frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}.$$

故左式 $=$ 右式，恒等式得证。

(b) 解方程

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}-2x\right) = \sqrt{7+4\sqrt{3}}, \quad 0 \leqslant x < \pi.$$

由 (a)，取 $\theta = 4x$，则

$$\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-2x\right) = \frac{1-\sin 4x}{1+\sin 4x}$$

原方程两边平方得

$$\frac{1-\sin 4x}{1+\sin 4x} = 7+4\sqrt{3} \Rightarrow \sin 4x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

所以通解为

$$4x = n\pi + (-1)^n\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow x = \frac{n\pi}{4} + (-1)^n\left(-\frac{\pi}{12}\right), \quad n \in \mathbb{Z}$$

且慢，注意到

$$x = \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

为增根，舍去之，于是只取

$$x = \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{12}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

在区间 $0 \leqslant x < \pi$ 内的解有

$$x = \frac{5\pi}{12}, \ \frac{11\pi}{12}$$

25. (a) 已知 $\theta \neq 2n\pi + \dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$，证明三角恒等式

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right) \equiv \tan\theta + \sec\theta$$

从左式开始，有

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\frac{\theta}{2}+1}{1-\tan\frac{\theta}{2}}=\frac{\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}}$$

将分子分母同乘 $\cos\dfrac{\theta}{2}+\sin\dfrac{\theta}{2}$，得

$$=\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}=\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}=\sec\theta+\tan\theta$$

于是左式等于右式，恒等式得证。

(b) 已知

$$\tan x-\tan(x-\alpha)=2\tan\alpha$$

其中 α 为常数。以 α 的三角函数表示 $\tan x$。

可得

$$\tan x-\frac{\tan x-\tan\alpha}{1+\tan x\tan\alpha}=2\tan\alpha\Rightarrow\tan^2 x-2\tan x\tan\alpha-1=0$$

配方得

$$(\tan x-\tan\alpha)^2=1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$$

因此

$$\tan x=\tan\alpha\pm\sec\alpha$$

(c) 解三角方程

$$\tan x-\tan\left(x-\frac{3\pi}{5}\right)=2\tan\frac{3\pi}{5},\quad 0\leqslant x<2\pi$$

取 $\alpha=\dfrac{3\pi}{5}$，由 (b) 得

$$\tan x=\tan\frac{3\pi}{5}\pm\sec\frac{3\pi}{5}$$

且由 (a)，以 $\theta-\pi$ 代替 θ 有恒等式

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\equiv\tan\theta-\sec\theta$$

因此

$$\tan\frac{3\pi}{5}+\sec\frac{3\pi}{5}=\tan\left(\frac{3\pi}{10}+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\frac{11\pi}{20}$$

$$\tan\frac{3\pi}{5}-\sec\frac{3\pi}{5}=\tan\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{\pi}{4}\right)=\tan\frac{\pi}{20}$$

于是

$$\tan x=\tan\frac{11\pi}{20}\quad 或\quad \tan x=\tan\frac{\pi}{20}$$

在 $0\leqslant x<2\pi$ 内解得

$$x=\frac{\pi}{20},\ \frac{11\pi}{20},\ \frac{21\pi}{20},\ \frac{31\pi}{20}$$

26. 设 $0\leqslant x\leqslant\pi$, 求

$$1+\sqrt{\sin x}-\sqrt{x}=\cos 2x+2x^2$$

的实根个数。

有

$$\begin{aligned}1+\sqrt{\sin x}-\sqrt{x}&=1-2\sin^2 x+2x^2\\ \sqrt{\sin x}-\sqrt{x}+2(\sin^2 x-x^2)&=0\\ \sqrt{\sin x}-\sqrt{x}+2(\sin x+x)(\sin x-x)&=0\\ \sqrt{\sin x}-\sqrt{x}+2(\sin x+x)(\sqrt{\sin x}-\sqrt{x})(\sqrt{\sin x}+\sqrt{x})&=0\\ (\sqrt{\sin x}-\sqrt{x})\left[2(\sin x+x)(\sqrt{\sin x}+\sqrt{x})+1\right]&=0\end{aligned}$$

由 $\sqrt{\sin x}=\sqrt{x}$ 得 $x=0$; 由 $0\leqslant x\leqslant\pi\Rightarrow\sin x\geqslant 0$, 可知

$$2(\sin x+x)(\sqrt{\sin x}+\sqrt{x})+1>0$$

恒成立, 因此原方程式只有 1 个实根。

27. 已知 θ,α,β 为相异实数, 且满足

$$\tan(\theta-\alpha)+\tan(\theta-\beta)=x,\quad \cot(\theta-\alpha)+\cot(\theta-\beta)=y.$$

试以 x,y 表示 $\tan(\alpha-\beta)$。

不妨设 $A=\tan(\theta-\alpha),B=\tan(\theta-\beta)$, 由已知得

$$A+B=x,\quad \frac{1}{A}+\frac{1}{B}=y\Rightarrow AB=\frac{x}{y}$$

故

$$
\begin{aligned}
\tan(\alpha-\beta) &= \tan[(\theta-\beta)-(\theta-\alpha)] \\
&= \frac{\tan(\theta-\beta)-\tan(\theta-\alpha)}{1+\tan(\theta-\beta)\tan(\theta-\alpha)} \\
&= \frac{B-A}{1+AB} \\
&= \pm\frac{\sqrt{(B-A)^2}}{1+AB} \\
&= \pm\frac{\sqrt{(A+B)^2-4AB}}{1+AB} \\
&= \pm\frac{\sqrt{x^2-\frac{4x}{y}}}{1+\frac{x}{y}} \\
&= \pm\frac{\sqrt{xy(xy-4)}}{x+y}
\end{aligned}
$$

28. 已知正数 x,y 及角 $\theta\neq\dfrac{n\pi}{2},n\in\mathbb{Z}$ 满足

$$
\begin{cases}
\dfrac{\sin\theta}{x}=\dfrac{\cos\theta}{y} \\
\dfrac{\cos^4\theta}{x^4}+\dfrac{\sin^4\theta}{y^4}=\dfrac{7\sin 2\theta}{x^3y+xy^3}
\end{cases}
$$

求 $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$。

令

$$\frac{\sin\theta}{x}=\frac{\cos\theta}{y}=\frac{1}{k}$$

即 $x=k\sin\theta,y=k\cos\theta$, 则

$$\frac{\cos^4\theta}{\sin^4\theta}+\frac{\sin^4\theta}{\cos^4\theta}=\frac{14\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}=14$$

设

$$S=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\tan\theta+\cot\theta$$

注意到

$$(S^2-2)^2-2=\tan^4\theta+\cot^4\theta=14$$

故

$$S=\sqrt{6}>0$$

29. 定义 $f(x)=\sin^6 x+\cos^6 x+k(\sin^4 x+\cos^4 x)$, 其中 $k\in\mathbb{R}$。

(a) 求所有 k 使得 $f(x)$ 对任意 x 恒为常数。

利用 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, 设 $u=\sin^2 x$, 则

$$\begin{aligned}f(x)&=\sin^6 x+(1-u)^3+k(\sin^4 x+(1-u)^2)\\&=(1+k)-(3+2k)u+(3+2k)u^2\end{aligned}$$

仅当 $3+2k=0$, 即 $k=-\dfrac{3}{2}$ 时,$f(x)=1+k=-\dfrac{1}{2}$ 为常数。

由分解

$$\begin{aligned}f(x)=&(\sin^2 x+\cos^2 x)((\sin^2 x+\cos^2 x)^2-3\sin^2 x\cos^2 x)\\&+k((\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x)\end{aligned}$$

整理得

$$f(x)=(1+k)-(3+2k)\sin^2 x\cos^2 x$$

仅当 $3+2k=0$, 即 $k=-\dfrac{3}{2}$, 有 $f(x)=-\dfrac{1}{2},\forall x\in\mathbb{R}$

直接对 $f(x)$ 求导:

$$f'(x)=2\sin x\cos x(\sin^2 x-\cos^2 x)(3+2k)$$

欲使 $f'(x)\equiv 0$, 必须有 $3+2k=0$, 即 $k=-\dfrac{3}{2}$。

(b) 若 $k=-0.7$, 求方程 $f(x)=0$ 的所有解。

当 $k=-0.7$ 时, 由 (a) 解法二,

$$f(x)=(1+k)-(3+2k)\sin^2 x\cos^2 x=0.3-1.6\sin^2 x\cos^2 x$$

令 $u=\sin^2 x$, 则 $\cos^2 x=1-u$, 方程 $f(x)=0$ 即

$$1.6u(1-u)=0.3,$$

解得

$$u=\sin^2 x=\frac{1}{4},\ \frac{3}{4}\Rightarrow\sin x=\pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

解集为

$$x=\frac{\pi}{6}+n\pi,\ \frac{5\pi}{6}+n\pi,\ \frac{\pi}{3}+n\pi,\ \frac{2\pi}{3}+n\pi,\quad n\in\mathbb{Z}$$

(c) 求所有 k 使得 $f(x)=0$ 有实数解。

由 (a) 解法一,

$$f(x)=(3+2k)u^2-(3+2k)u+(1+k),\quad u=\sin^2 x\in[0,1]$$

若 $k=-\frac{3}{2}$, 则 $f(x)\equiv-\frac{1}{2}$ 无解, 则由方程

$$u^2-u+\frac{1+k}{3+2k}=0$$

解得

$$u=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{1+2k}{3+2k}}$$

且判别式满足

$$\Delta=(3+2k)^2-4(3+2k)(1+k)=(3+2k)(-1-2k)\geqslant 0$$

即

$$-\frac{3}{2}<k\leqslant-\frac{1}{2}$$

由于 $u\in[0,1]$, 经检验得当

$$-1\leqslant k\leqslant-\frac{1}{2}$$

时方程 $f(x)=0$ 有实数解。感觉有更简洁的解法

30. 证明恒等式

$$\frac{\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}\equiv\tan\frac{\theta}{2}$$

有

$$\begin{aligned}\frac{\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}&=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{2\cos^2\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}\\&=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\\&=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}\\&=\tan\frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

故左式 = 右式, 恒等式得证。

31. 证明三角恒等式

$$\frac{1+\tan\theta\tan 3\theta}{1+\tan 2\theta\tan 3\theta}\equiv\frac{\cos^2 2\theta}{\cos^2\theta}.$$

由

$$\begin{aligned}
\text{左式}&=\frac{1+\tan\theta\tan 3\theta}{1+\tan 2\theta\tan 3\theta}\\
&=\frac{\cos 2\theta\cos 3\theta}{\cos\theta\cos 3\theta}\cdot\frac{\cos\theta\cos 3\theta+\sin\theta\sin 3\theta}{\cos 2\theta\cos 3\theta+\sin 2\theta\sin 3\theta}\\
&=\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{\cos(3\theta-\theta)}{\cos(3\theta-2\theta)}\\
&=\frac{\cos^2 2\theta}{\cos^2\theta}\\
&=\text{右式}
\end{aligned}$$

因此恒等式成立。

32. 证明恒等式

$$\frac{1}{\tan 3\theta-\tan\theta}-\frac{1}{\cot 3\theta-\cot\theta}\equiv\cot 2\theta$$

化简得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\tan 3\theta-\tan\theta}-\frac{1}{\cot 3\theta-\cot\theta}\\
&=\frac{\cos 3\theta\cos\theta}{\sin 3\theta\cos\theta-\sin\theta\cos 3\theta}-\frac{\sin 3\theta\sin\theta}{\sin 3\theta\cos\theta-\cos 3\theta\sin\theta}\\
&=\frac{\cos 3\theta\cos\theta-\sin 3\theta\sin\theta}{\sin 3\theta\cos\theta-\sin\theta\cos 3\theta}\\
&=\frac{\cos(3\theta-\theta)}{\sin(3\theta-\theta)}\\
&=\cot 2\theta
\end{aligned}$$

故左式 = 右式，恒等式得证。

33. 证明恒等式

$$\frac{\sec 16\theta-1}{\sec 8\theta-1}\equiv\frac{\tan 16\theta}{\tan 4\theta}.$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\sec 16\theta - 1}{\sec 8\theta - 1} &= \frac{(1-\cos 16\theta)\cos 8\theta}{(1-\cos 8\theta)\cos 16\theta} \\
&= \frac{1-\cos^2 16\theta}{1+\cos 16\theta} \cdot \frac{\cos 8\theta}{\cos 16\theta} \cdot \frac{1+\cos 8\theta}{1-\cos^2 8\theta} \\
&= \frac{\sin^2 16\theta}{2\cos^2 8\theta} \cdot \frac{\cos 8\theta}{\cos 16\theta} \cdot \frac{2\cos^2 4\theta}{\sin^2 8\theta} \\
&= \frac{\sin^2 16\theta}{\sin 16\theta} \cdot \frac{1}{\sin 8\theta} \cdot \frac{2\cos^2 4\theta}{\cos 16\theta} \\
&= \tan 16\theta \cdot \frac{2\cos^2 4\theta}{2\cos 4\theta \sin 4\theta} \\
&= \frac{\tan 16\theta}{\tan 4\theta}
\end{aligned}
$$

故左式 $=$ 右式，恒等式得证。

34. 证明恒等式

$$
\cot^2\theta\left(\frac{\sec\theta-1}{\sin\theta-1}\right)+\sec^2\theta\left(\frac{\sin\theta-1}{\sec\theta-1}\right)\equiv 0
$$

由于

$$
\begin{aligned}
&\cot^2\theta\left(\frac{\sec\theta-1}{\sin\theta-1}\right)+\sec^2\theta\left(\frac{\sin\theta-1}{\sec\theta-1}\right) \\
&= -\cot^2\theta\left(\frac{(\sec\theta-1)(1+\sin\theta)}{1-\sin^2\theta}\right)+\sec^2\theta\left(\frac{(\sin\theta-1)(1-\sec\theta)}{\sec^2\theta-1}\right) \\
&= -\cot^2\theta\left(\frac{(1-\sec\theta)(\sin\theta-1)}{\cos^2\theta}\right)+\sec^2\theta\left(\frac{(1-\sec\theta)(\sin\theta-1)}{\tan^2\theta}\right) \\
&= \left(-\frac{1}{\sin^2\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\right)(1-\sec\theta)(\sin\theta-1) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

即左式 $=$ 右式，故恒等式得证。

35. 证明

$$
\sin 5x \equiv 16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x
$$

展开得

$$\begin{aligned}\sin 5x &= \sin(2x+3x)\\ &= \sin 2x\cos 3x + \cos 2x \sin 3x\\ &= 2\sin x\cos x(4\cos^3 x - 3\cos x) + (1-2\sin^2 x)(3\sin x - 4\sin^3 x)\\ &= 2\sin x(1-\sin^2 x)\big(4(1-\sin^2 x)-3\big) + (1-2\sin^2 x)(3\sin x - 4\sin^3 x)\\ &= 16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x\end{aligned}$$

于是左式 = 右式，故得证。

36. 证明

$$4(\cos 3\theta\sin^3\theta + \sin 3\theta\cos^3\theta) \equiv 3\sin 4\theta$$

$$\begin{aligned}4(\cos 3\theta\sin^3\theta + \sin 3\theta\cos^3\theta) &= 4\big((4\cos^3\theta - 3\cos\theta)\sin^3\theta + (3\sin\theta - 4\sin^3\theta)\cos^3\theta\big)\\ &= 4\big(-3\cos\theta\sin^3\theta + 3\sin\theta\cos^3\theta\big)\\ &= 12\sin\theta\cos\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\\ &= 6\sin 2\theta\cos 2\theta\\ &= 3\sin 4\theta\end{aligned}$$

于是左式 = 右式，恒等式得证。

37. 证明

$$\sin^4\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right) + \sin^4\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right) \equiv \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\cos 4\theta$$

有

$$\begin{aligned}\sin^4\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right) + \sin^4\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right) &= \frac{1}{4}\left[(1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right))^2 + (1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\theta\right))^2\right]\\ &= \frac{1}{4}\left[2+2\sin^2 2\theta\right]\\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1-\cos 4\theta}{2}\right)\\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\cos 4\theta\end{aligned}$$

即左式 = 右式, 恒等式得证。

38. 已知

$$8\sin^3 x\sin 2x = a\cos 5x + b\cos 3x + c\cos x,$$

求实数 a, b, c 的值。

对左式化简,

$$\begin{aligned}
8\sin^3 x\sin 2x &= 4\sin 2x\sin x\cdot 2\sin^2 x \\
&= 4\sin 2x\sin x(1-\cos 2x) \\
&= 4\sin 2x\sin x - 4\sin 2x\cos 2x\sin x \\
&= -2(-2\sin 2x\sin x) - 2\sin 4x\sin x \\
&= -2(\cos 3x-\cos x) + \cos 5x - \cos 3x \\
&= \cos 5x - 3\cos 3x + 2\cos x
\end{aligned}$$

于是得到

$$a = 1,\quad b = -3,\quad c = 2$$

39. 证明恒等式

$$32\sin^4 x\cos^2 x \equiv 2-\cos 2x - 2\cos 4x + \cos 6x,$$

化简右边得

$$\begin{aligned}
2-\cos 2x - 2\cos 4x + \cos 6x &= 2(1-\cos 4x) - 2\sin 4x\sin 2x \\
&= 2(2\sin^2 2x) - 2(2\sin 2x\cos 2x)\sin 2x \\
&= 4\sin^2 2x(1-\cos 2x) \\
&= 4(2\sin x\cos x)^2\cdot 2\sin^2 x \\
&= 32\sin^4 x\cos^2 x
\end{aligned}$$

所以恒等式得证。

40. 将 $16\sin^5\theta$ 表示成 $a\sin\theta + b\sin 3\theta + c\sin 5\theta$ 的形式, 其中 a, b, c 为实数。

有

$$
\begin{aligned}
16\sin^5\theta &= 16\sin^3\theta(1-\cos^2\theta) \\
&= 16\sin^3\theta - 16\sin^3\theta\cos^2\theta \\
&= 16\sin\theta(1-\cos^2\theta) - 4\sin\theta\sin^2 2\theta \\
&= 16\sin\theta - 16\sin\theta\cos^2\theta - 4\sin\theta\sin^2 2\theta \\
&= 14\sin\theta - 8\sin 2\theta\cos\theta + 2\sin\theta(1-2\sin^2 2\theta) \\
&= 14\sin\theta - 4(\sin 3\theta + \sin\theta) + 2\sin\theta\cos 2\theta \\
&= 14\sin\theta - 4\sin 3\theta - 4\sin\theta + \sin 3\theta - \sin\theta \\
&= 10\sin\theta - 5\sin 3\theta + \sin 5\theta
\end{aligned}
$$

41. 证明恒等式

$$\tan\theta + \tan(\theta+120^\circ) + \tan(\theta+240^\circ) = 3\tan 3\theta.$$

由左式化简得

$$
\begin{aligned}
&\tan\theta + \tan(\theta+120^\circ) + \tan(\theta+240^\circ) \\
&= \tan\theta + \frac{\tan\theta-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}\tan\theta} + \frac{\tan\theta+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\tan\theta} \\
&= \tan\theta + \frac{(\tan\theta-\sqrt{3})(1-\sqrt{3}\tan\theta)+(\tan\theta+\sqrt{3})(1+\sqrt{3}\tan\theta)}{1-3\tan^2\theta} \\
&= \tan\theta + \frac{8\tan\theta}{1-3\tan^2\theta} \\
&= \frac{9\tan\theta-3\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta} \\
&= 3\left(\frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}\right) \\
&= 3\tan 3\theta
\end{aligned}
$$

故恒等式得证。

42. 已知

$$x = \csc\theta - \sin\theta, \quad y = \sec\theta - \cos\theta, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

利用三角恒等式证明

$$y^2x^2\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)^3=1$$

发现

$$x=\csc\theta-\sin\theta=\frac{1}{\sin\theta}-\sin\theta=\frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta}=\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}$$

同理有

$$y=\sec\theta-\cos\theta=\frac{1}{\cos\theta}-\cos\theta=\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}=\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$$

于是

$$\frac{y}{x}=\frac{\sin^3\theta}{\cos^3\theta}=\tan^3\theta\Rightarrow\tan\theta=\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$$

再由 $y=\tan\theta\sin\theta$ 两边平方得

$$y^2=\tan^2\theta\sin^2\theta=\tan^2\theta\left(1-\frac{1}{\sec^2\theta}\right)=\tan^2\theta\left(1-\frac{1}{1+\tan^2\theta}\right)=\frac{\tan^4\theta}{1+\tan^2\theta}$$

将 $\tan\theta=\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$ 代入得,

$$y^2=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{4}{3}}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}}$$

整理得

$$x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}}(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}})=1$$

两边立方得

$$y^2x^2\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)^3=1$$

证毕。

43. 证明以下恒等式:

(a)

$$\sin x+\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)\equiv 0$$

使用和角公式,

$$\begin{aligned}\sin x+\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)&=\sin x+2\sin(x+\pi)\cos\frac{\pi}{3}\\&=\sin x-\sin x\\&=0\end{aligned}$$

(b)

$$\sin^3 x+\sin^3\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin^3\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)\equiv-\frac{3}{4}\sin 3x$$

使用立方正弦公式

$$\sin^3\theta=\frac{1}{4}\left(3\sin\theta-\sin 3\theta\right),$$

$$\begin{aligned}&\sin^3 x+\sin^3\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin^3\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)\\&=\frac{1}{4}\left[3\left[\sin x+\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)\right]-(\sin 3x+\sin(3x+2\pi)+\sin(3x+4\pi))\right]\\&=\frac{1}{4}\left[3\cdot 0-3\sin 3x\right]\\&=-\frac{3}{4}\sin 3x\end{aligned}$$

44. 证明下列恒等式:

(a)

$$\cos\theta+\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right)\equiv 0$$

和差化积得

$$\begin{aligned}\cos\theta+\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right)&=\cos\theta+2\cos\left(\theta+\pi\right)\cos\frac{\pi}{3}\\&=\cos\theta-\cos\theta\\&=0\end{aligned}$$

故恒等式得证。

(b)

$$\cos^2\theta+\cos^2\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos^2\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right)\equiv\frac{3}{2}$$

由平方公式

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x),$$

则

$$\begin{aligned}
&\cos^2\theta+\cos^2\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos^2\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right)\\
&=\frac{1}{2}\left[3+\cos 2\theta+\cos\left(2\theta+\frac{4\pi}{3}\right)+\cos\left(2\theta+\frac{8\pi}{3}\right)\right]\\
&=\frac{1}{2}\left[3+\cos 2\theta+2\cos(2\theta+2\pi)\cos\frac{2\pi}{3}\right]\\
&=\frac{1}{2}\left[3+\cos 2\theta-\cos 2\theta\right]\\
&=\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

因此恒等式得证。

(c)

$$\cos^3\theta+\cos^3\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos^3\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right)\equiv\frac{3}{4}\cos 3\theta$$

由三次余弦公式,

$$\cos^3 x=\frac{1}{4}\left(3\cos x+\cos 3x\right).$$

因此:

$$\begin{aligned}
&\cos^3\theta+\cos^3\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos^3\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right)\\
&=\frac{1}{4}\left[3\left[\cos\theta+\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right)\right]+\cos 3\theta+\cos(3\theta+2\pi)+\cos(3\theta+4\pi)\right]\\
&=\frac{1}{4}\left[3\cdot 0+3\cos 3\theta\right]\\
&=\frac{3}{4}\cos 3\theta
\end{aligned}$$

故恒等式得证。

45. 已知 A,B,C 为 $\triangle ABC$ 的内角, 证明恒等式

(a)

$$\sin 2A - \sin 2B + \sin 2C = 4\cos A \sin B \cos C$$

已知 $A+B+C=180°$，所以

$$\sin(A+B) = \sin C, \quad \cos(A+B) = -\cos C$$

于是

$$\begin{aligned}
\sin 2A - \sin 2B + \sin 2C &= 2\cos(A+B)\sin(A-B) + 2\sin C\cos C \\
&= -2\cos C\sin(A-B) + 2\sin C\cos C \\
&= 2\cos C[\sin C - \sin(A-B)] \\
&= 2\cos C[\sin(A+B) - \sin(A-B)] \\
&= 2\cos C \cdot 2\cos A\sin B \\
&= 4\cos A\sin B\cos C
\end{aligned}$$

故得证。

(b)

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

已知 $A+B+C=180°$，所以

$$\sin\frac{A+B}{2} = \cos\frac{C}{2}, \quad \cos\frac{A+B}{2} = \sin\frac{C}{2}$$

故

$$\begin{aligned}
\sin A + \sin B + \sin C &= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \sin C \\
&= 2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} \\
&= 2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right) \\
&= 2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right) \\
&= 2\cos\frac{C}{2} \cdot 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} \\
&= 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}
\end{aligned}$$

于是恒等式得证。

(c)

$$\cos A-\cos B+\cos C=4\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-1$$

已知 $A+B+C=180^\circ$, 所以

$$\cos\frac{A+B}{2}=\sin\frac{C}{2},\quad \sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}$$

故

$$\begin{aligned}\cos A-\cos B+\cos C&=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}+\cos C\\&=-2\cos\frac{C}{2}\sin\frac{A-B}{2}+2\cos^2\frac{C}{2}-1\\&=2\cos\frac{C}{2}\left(-\sin\frac{A-B}{2}+\cos\frac{C}{2}\right)-1\\&=2\cos\frac{C}{2}\left(-\sin\frac{A-B}{2}+\sin\frac{A+B}{2}\right)-1\\&=2\cos\frac{C}{2}\cdot 2\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}-1\\&=4\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-1\end{aligned}$$

得证。

(d)

$$(\cot B+\cot C)(\cot C+\cot A)(\cot A+\cot B)=\csc A\csc B\csc C$$

由 $B+C=180^\circ-A$, 所以 $\sin(B+C)=\sin A$, 于是

$$\cot B+\cot C=\frac{\cos B\sin C+\sin B\cos C}{\sin B\sin C}=\frac{\sin(B+C)}{\sin B\sin C}=\frac{\sin A}{\sin B\sin C}$$

同理可得

$$\cot C+\cot A=\frac{\sin B}{\sin C\sin A},\quad \cot A+\cot B=\frac{\sin C}{\sin A\sin B}$$

三项相乘得

$$(\cot B+\cot C)(\cot C+\cot A)(\cot A+\cot B)=\frac{1}{\sin A\sin B\sin C}=\csc A\csc B\csc C$$

故得证。

(e)

$$\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

由半角公式,

$$\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=\frac{1}{2}[3-(\cos A+\cos B+\cos C)]$$

而

$$\begin{aligned}\cos A+\cos B+\cos C&=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\cos C\\&=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+1-2\sin^2\frac{C}{2}\\&=1+2\sin\frac{C}{2}(\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{C}{2})\\&=1+2\sin\frac{C}{2}(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2})\\&=1+2\sin\frac{C}{2}\cdot 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\\&=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\end{aligned}$$

于是得证

$$\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=\frac{1}{2}\left(3-1-4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)=1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

(f)

$$\cot A+\cot B+\cot C=\csc A\csc B\csc C+\cot A\cot B\cot C.$$

首先有

$$\begin{aligned}\cot A+\cot B+\cot C&=\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\cos B}{\sin B}+\frac{\cos C}{\sin C}\\&=\frac{\cos A\sin B\sin C+\sin A\cos B\sin C+\sin A\sin B\cos C}{\sin A\sin B\sin C}\end{aligned}$$

其中分子为

$$
\begin{aligned}
&\cos A\sin B\sin C+\sin A\cos B\sin C+\sin A\sin B\cos C\\
&=\sin C(\cos A\sin B+\sin A\cos B)-\frac{1}{2}(\cos(A+B)-\cos(A-B))\cos C\\
&=\sin C\sin(A+B)-\frac{1}{2}(-\cos C-\cos(A-B))\cos C\\
&=\sin^2 C+\frac{1}{2}\cos^2 C+\frac{1}{2}\cos(A-B)\cos C\\
&=\sin^2 C+\cos^2 C-\frac{1}{2}\cos^2 C+\frac{1}{2}\cos(A-B)\cos C\\
&=1+\frac{1}{2}\cos C(\cos(A-B)-\cos C)\\
&=1+\frac{1}{2}\cos C\left(-2\sin\frac{A-B+C}{2}\sin\frac{A-B-C}{2}\right)\\
&=1-\cos C\sin\frac{A-B+C}{2}\sin\frac{A-B+C}{2}\\
&=1-\cos C\sin\frac{180^\circ-2B}{2}\sin\frac{-180^\circ+2A}{2}\\
&=1+\cos C\sin(90^\circ-B)\sin(90^\circ-A)\\
&=1+\cos A\cos B\cos C
\end{aligned}
$$

于是

$$
\cot A+\cot B+\cot C=\frac{1+\cos A\cos B\cos C}{\sin A\sin B\sin C}=\csc A\csc B\csc C+\cot A\cot B\cot C.
$$

即左式 $=$ 右式, 恒等式得证。有更简洁的证明?

46. 若 A,B,C 为任意角, 证明

$$
\sin A+\sin B+\sin C-\sin(A+B+C)=4\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+A}{2}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sin A+\sin B+\sin C-\sin(A+B+C)\\
&=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin C-\sin(A+B)\cos C-\cos(A+B)\sin C\\
&=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}\cos C+\sin C(1-\cos(A+B))\\
&=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}\cos C+\sin C\left(2\sin^2\frac{A+B}{2}\right)\\
&=2\sin\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\cos C+\sin\frac{A+B}{2}\sin C\right)\\
&=2\sin\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\left(\frac{A+B}{2}+C\right)\right)\\
&=2\sin\frac{A+B}{2}\left(2\sin\frac{A+C}{2}\sin\frac{B+C}{2}\right)\\
&=4\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+A}{2}
\end{aligned}
$$

故得证。

47. 若 A,B,C 为任意角，证明

$$
\begin{aligned}
&\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C-2\cos A\cos B\cos C-1\\
&=-4\sin\frac{A+B+C}{2}\sin\frac{A+B-C}{2}\sin\frac{B+C-A}{2}\sin\frac{C+A-B}{2}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C-2\cos A\cos B\cos C-1\\
&=\frac{1}{2}(2+\cos2A+\cos2B)+\cos^2C-(\cos(A+B)+\cos(A-B))\cos C-1\\
&=\frac{1}{2}(\cos2A+\cos2B)+\cos^2C-(\cos(A+B)+\cos(A-B))\cos C\\
&=\cos(A+B)\cos(A-B)+\cos^2C-\cos C\cos(A+B)-\cos C\cos(A-B)\\
&=(\cos(A+B)-\cos C)(\cos(A-B)-\cos C)\\
&=\left(-2\sin\frac{A+B+C}{2}\sin\frac{A+B-C}{2}\right)\left(2\sin\frac{A-B+C}{2}\sin\frac{A-B-C}{2}\right)\\
&=-4\sin\frac{A+B+C}{2}\sin\frac{A+B-C}{2}\sin\frac{B+C-A}{2}\sin\frac{C+A-B}{2}
\end{aligned}
$$

故得证。

48. 证明

$$\sin 50^\circ(1+\sqrt{3}\tan 10^\circ)=1.$$

有

$$\begin{aligned}\sin 50^\circ(1+\sqrt{3}\tan 10^\circ) &= \sin 50^\circ\left(\frac{\cos 10^\circ+\sqrt{3}\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}\right)\\ &= 2\sin 50^\circ\left(\frac{\cos 60^\circ\cos 10^\circ+\sin 60^\circ\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}\right)\\ &= 2\sin 50^\circ\frac{\cos 50^\circ}{\cos 10^\circ}\\ &= \frac{\sin 100^\circ}{\cos 10^\circ}\\ &= 1\end{aligned}$$

49. 证明

$$4\sin 40^\circ-\tan 40^\circ=\sqrt{3}.$$

$$\begin{aligned}\tan 40^\circ+\sqrt{3} &= \frac{\sin 40^\circ}{\cos 40^\circ}+\frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ}\\ &= \frac{\sin 40^\circ\cos 60^\circ+\cos 40^\circ\sin 60^\circ}{\cos 40^\circ\cos 60^\circ}\\ &= \frac{\sin 100^\circ}{\cos 40^\circ\cdot\frac{1}{2}}\\ &= \frac{2\sin 100^\circ}{\cos 40^\circ}\\ &= \frac{2\sin 80^\circ}{\cos 40^\circ}\\ &= 4\sin 40^\circ\end{aligned}$$

于是得证

$$4\sin 40^\circ-\tan 40^\circ=\sqrt{3}$$

50. 证明

$$\tan 24^\circ(\sqrt{3}\sec 36^\circ+\tan 6^\circ)=1.$$

先证

$$\cos 36^\circ - \cos 72^\circ = \frac{1}{2}$$

有

$$2\cos^2 72^\circ - 1 = \cos 144^\circ = -\cos 36^\circ \tag{1}$$

$$2\cos^2 36^\circ - 1 = \cos 72^\circ \tag{2}$$

(2) − (1) 得

$$2(\cos 36^\circ + \cos 72^\circ)(\cos 36^\circ - \cos 72^\circ) = \cos 72^\circ + \cos 36^\circ$$

即

$$\cos 36^\circ - \cos 72^\circ = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ$$

于是

$$\cos 36^\circ = \cos 72^\circ + \cos 60^\circ = 2\cos 66^\circ \cos 6^\circ$$

故

$$\begin{aligned}
\tan 24^\circ(\sqrt{3}\sec 36^\circ + \tan 6^\circ) &= \tan 24^\circ \left(\frac{2\sin 60^\circ}{2\cos 66^\circ \cos 6^\circ} + \tan 6^\circ\right) \\
&= \tan 24^\circ \left(\frac{\sin 66^\circ \cos 6^\circ - \cos 66^\circ \sin 6^\circ}{\cos 66^\circ \cos 6^\circ} + \tan 6^\circ\right) \\
&= \tan 24^\circ(\tan 66^\circ - \tan 6^\circ + \tan 6^\circ) \\
&= 1
\end{aligned}$$

51. 证明

$$\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8}.$$

积化和差、再和差化积,

$$\begin{aligned}\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ &= \frac{1}{2}\cos 20^\circ(\cos 120^\circ + \cos 40^\circ)\\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\cos 20^\circ + \frac{1}{2}\cos 40^\circ \cos 20^\circ\\ &= -\frac{1}{4}\cos 20^\circ + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \cos 20^\circ\right)\\ &= \frac{1}{8}\end{aligned}$$

由恒等式 $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$,

$$\begin{aligned}\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ &= \frac{1}{2\sin 20^\circ}\sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ\\ &= \frac{1}{4\sin 20^\circ}\sin 80^\circ \cos 80^\circ\\ &= \frac{1}{8\sin 20^\circ}\sin 160^\circ\\ &= \frac{1}{8}\end{aligned}$$

52. 证明

$$\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

积化和差、再和差化积,

$$\begin{aligned}\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ &= \frac{1}{2}\sin 20^\circ(\cos 40^\circ + \cos 60^\circ)\\ &= \frac{1}{4}(\sin 60^\circ - \sin 20^\circ) + \frac{1}{4}\sin 20^\circ\\ &= \frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{8}\end{aligned}$$

由恒等式

$$\sin x \sin(60^\circ - x) \sin(60^\circ + x) = \frac{1}{4}\sin 3x$$

取 $x = 20^\circ$，则

$$\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ = \frac{1}{4}\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

53. 计算

$$\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ$$

的值。

由恒等式 $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$，

$$\begin{aligned}
\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ &= \sin 10^\circ \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos 40^\circ \cos 20^\circ \\
&= \frac{1}{4\cos 10^\circ} \sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \\
&= \frac{1}{8\cos 10^\circ} \sin 40^\circ \cos 40^\circ \\
&= \frac{1}{16\cos 10^\circ} \sin 80^\circ \\
&= \frac{1}{16}
\end{aligned}$$

54. 计算

$$\cos 10^\circ \cos 30^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ$$

的值。

积化和差、再和差化积，

$$\begin{aligned}
\cos 10^\circ \cos 30^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ &= \frac{1}{2}(\cos 60^\circ + \cos 40^\circ) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 70^\circ \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{2}\cos 70^\circ + \frac{1}{2}(\cos 110^\circ + \cos 30^\circ)\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{8}(\cos 70^\circ - \cos 70^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2}) \\
&= \frac{3}{16}
\end{aligned}$$

55. 证明

$$\tan 50^\circ + \tan 60^\circ + \tan 70^\circ = \tan 80^\circ.$$

若 $A+B+C=180^\circ$, 则有

$$\tan A \tan B \tan C = \tan A + \tan B + \tan C$$

于是

$$\begin{aligned}
\tan 50^\circ + \tan 60^\circ + \tan 70^\circ &= \tan 50^\circ \tan 60^\circ \tan 70^\circ \\
&= \frac{\sin 50^\circ \sin 60^\circ \sin 70^\circ}{\cos 50^\circ \cos 60^\circ \cos 70^\circ} \\
&= \frac{\sin 60^\circ \left(\cos 20^\circ + \frac{1}{2}\right)}{\cos 60^\circ \left(\cos 20^\circ - \frac{1}{2}\right)} \\
&= \frac{\frac{1}{2}(\sin 80^\circ + \sin 40^\circ) + \frac{1}{2}\sin 60^\circ}{\frac{1}{2}(\cos 80^\circ + \cos 40^\circ) + \frac{1}{2}\cos 60^\circ} \\
&= \frac{\sin 40^\circ + \sin 60^\circ + \sin 80^\circ}{\cos 40^\circ - \cos 60^\circ + \cos 80^\circ} \\
&= \frac{2\sin 50^\circ \cos 10^\circ + \sin 80^\circ}{2\sin 50^\circ \sin 10^\circ + \cos 80^\circ} \\
&= \frac{\sin 80^\circ (2\sin 50^\circ + 1)}{\cos 80^\circ (2\sin 50^\circ + 1)} \\
&= \tan 80^\circ
\end{aligned}$$

56. 计算

$$\tan 9^\circ - \tan 27^\circ - \tan 63^\circ + \tan 81^\circ$$

的值。

首先有

$$\begin{aligned}S&=\tan 9^\circ-\tan 27^\circ-\tan 63^\circ+\tan 81^\circ\\&=\tan 9^\circ+\cot 9^\circ-(\tan 27^\circ+\cot 27^\circ)\\&=\frac{\sin^2 9^\circ+\cos^2 9^\circ}{\sin 9^\circ\cos 9^\circ}-\frac{\sin^2 27^\circ+\cos^2 27^\circ}{\sin 27^\circ\cos 27^\circ}\\&=\frac{1}{\sin 9^\circ\cos 9^\circ}-\frac{1}{\sin 27^\circ\cos 27^\circ}\\&=\frac{2}{\sin 18^\circ}-\frac{2}{\sin 54^\circ}\end{aligned}$$

现求 $\sin 18^\circ$ 及 $\sin 54^\circ$, 设 $\theta=18^\circ$, 解

$$\sin 2\theta=\sin(90^\circ-3\theta)=\cos 3\theta$$

可得

$$\sin 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}>0,\quad \sin 54^\circ=3\sin 18^\circ-4\sin^3 18^\circ=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

故

$$S=\frac{2}{\frac{\sqrt{5}-1}{4}}-\frac{2}{\frac{\sqrt{5}+1}{4}}=4$$

57. 试证

$$\frac{3}{\sin^2 40^\circ}-\frac{1}{\cos^2 40^\circ}=32\sin 10^\circ.$$

有

$$\begin{aligned}\frac{3}{\sin^2 40^\circ}-\frac{1}{\cos^2 40^\circ}&=\frac{3\cos^2 40^\circ-\sin^2 40^\circ}{\sin^2 40^\circ\cos^2 40^\circ}\\&=16\cdot\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 40^\circ+\frac{1}{2}\sin 40^\circ\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 40^\circ-\frac{1}{2}\sin 40^\circ\right)}{\sin^2 80^\circ}\\&=16\cdot\frac{\sin(60^\circ+40^\circ)\sin(60^\circ-40^\circ)}{\sin 80^\circ\cos 10^\circ}\\&=32\sin 10^\circ\end{aligned}$$

58. 计算

$$\sin^2 37^\circ + \sin^2 8^\circ + \sqrt{2}\sin 37^\circ \sin 8^\circ$$

之值。

由

$$\sin 37^\circ = \sin(45^\circ - 8^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 8^\circ - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 8^\circ$$

则

$$\sin^2 37^\circ = \frac{1}{2}\cos^2 8^\circ - \sin 8^\circ \cos 8^\circ + \frac{1}{2}\sin^2 8^\circ$$

$$\sqrt{2}\sin 37^\circ \sin 8^\circ = \sin 8^\circ \cos 8^\circ - \sin^2 8^\circ$$

因此

$$\sin^2 37^\circ + \sin^2 8^\circ + \sqrt{2}\sin 37^\circ \sin 8^\circ = \frac{1}{2}\cos^2 8^\circ + \frac{1}{2}\sin^2 8^\circ = \frac{3}{4}$$

考虑 $\triangle ABC$ ，其中外接圆半径 $R = \frac{1}{2}$，且

$$\angle A = 135^\circ, \quad \angle B = 37^\circ, \quad \angle C = 8^\circ$$

由正弦定理,

$$a = \sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad b = \sin 37^\circ, \quad c = \sin 8^\circ$$

由余弦定理,

$$\cos\angle A = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sin^2 37^\circ + \sin^2 8^\circ - \sin^2 135^\circ}{2\cdot \sin 37^\circ \cdot \sin 8^\circ}$$

即

$$\sin^2 37^\circ + \sin^2 8^\circ + \sqrt{2}\sin 37^\circ \sin 8^\circ = \frac{1}{2}$$

59. 在 $\triangle ABC$ 中，设 $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$; 若 a, b, c 成等差数列，试求 $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}$ 的值。

据题意有 $a + c = 2b$，由正弦定理,

$$\sin A + \sin C = 2\sin B$$

又因 $A + B + C = 180^\circ$,

$$2\sin B = 2\sin(A+C) = \sin A + \sin C$$

于是

$$4\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A+C}{2}=2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}\Rightarrow 2\cos\frac{A+C}{2}=\cos\frac{A-C}{2}$$

将余弦展开得

$$2\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}\right)=\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}$$

即

$$3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}=\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}\Rightarrow\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{1}{3}$$

60. 已知 $\triangle ABC$ 中,$AB=5, BC=9$, 且 $\cot A,\cot B,\cot C$ 成等差数列, 试求 $\tan^2\frac{B}{2}$。

据题意, 有

$$2\cot B=\cot A+\cot C\Rightarrow\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\cos C}{\sin C}=\frac{\sin(A+C)}{\sin A\sin C}=\frac{\sin B}{\sin A\sin C}=\frac{2\cos B}{\sin B}$$

由余弦定理及正弦定理,

$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac},\qquad\frac{\sin^2 B}{2\sin A\sin C}=\frac{b^2}{2ac}$$

因此

$$2b^2=a^2+c^2=9^2+5^2\Rightarrow b^2=53$$

故

$$\cos B=\frac{53}{90}\Rightarrow\tan^2\frac{B}{2}=\frac{1-\cos B}{1+\cos B}=\frac{37}{143}$$

61. 若 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 满足 $\sin A=\cos B=\tan C$, 求 $\cos^3 A+\cos^2 A-\cos A$ 的值.

由 $\sin A=\cos B$ 知

$$A=\frac{\pi}{2}\pm B$$

但 $\tan C$ 有意义, 故 C 不为直角, 从而只能是

$$A=\frac{\pi}{2}+B$$

进而有 $C=\pi-A-B=\frac{3\pi}{2}-2A$, 所以

$$\sin A=\tan C=\tan\left(\frac{3\pi}{2}-2A\right)=\cot 2A$$

于是

$$1=\sin A\cdot\tan 2A=\sin A\cdot\frac{\sin 2A}{\cos 2A}=\sin A\cdot\frac{2\sin A\cos A}{2\cos^2 A-1}=\frac{2(1-\cos^2 A)\cdot\cos A}{2\cos^2 A-1}$$

即

$$2\cos^2 A-1=2(1-\cos^2 A)\cdot\cos A\Rightarrow\cos^3 A+\cos^2 A-\cos A=\frac{1}{2}$$

62. 已知 $\triangle ABC$ 满足

$$\cos C=\frac{\sin A+\cos A}{2}=\frac{\sin B+\cos B}{2},$$

求 $\cos C$。

解法一

由条件知

$$\cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(A+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(B+\frac{\pi}{4})$$

假如

$$(A+\frac{\pi}{4})+(B+\frac{\pi}{4})=\pi$$

则 $C=\frac{\pi}{2},\cos C=0$, 但 $\sin(A+\frac{\pi}{4})>0$, 矛盾. 所以只可能

$$A+\frac{\pi}{4}=B+\frac{\pi}{4}$$

此时 $A=B\in(0,\frac{\pi}{2}),C=\pi-2A$, 且注意到

$$\cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(A+\frac{\pi}{4})>0$$

故 $C<\frac{\pi}{2}$. 所以 $A=B\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$, 结合条件得

$$\begin{aligned}\cos C&=-\cos 2A=-\sin\left(2A+\frac{\pi}{2}\right)=-2\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(A+\frac{\pi}{4}\right)\\&=-2\sqrt{2}\cos C\cdot\left(-\sqrt{1-(\sqrt{2}\cos C)^2}\right)\end{aligned}$$

又 $\cos C>0$, 化简得

$$8(1-2\cos^2 C)=1\Rightarrow\cos C=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

解法二

将第二个等式重写为

$$\sin(A+45^\circ)=\sin(B+45^\circ)$$

假设 $A\neq B$, 则由于 $A+45^\circ$ 和 $B+45^\circ$ 均在区间 $(45^\circ,225^\circ)$ 内,

$$(A+45^\circ)+(B+45^\circ)=180^\circ \implies A+B=90^\circ$$

此时 $\cos(C)=0$, 故必须满足 $A=B=135^\circ$, 矛盾; 因此 $A=B$, 故

$$\cos(C)=-\cos(A+B)=\sin^2 A-\cos^2 A=\frac{\sin A+\cos A}{2} \iff$$

$$\sin A-\cos A=\frac{1}{2} \iff (\cos A)^2+\left(\cos A+\frac{1}{2}\right)^2=1 \iff$$

$$\cos A=\frac{-1+\sqrt{7}}{4} \iff \cos C=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

63. 已知 $\triangle ABC$ 中, $AB=3$, 且外接圆半径为 6, 求

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos A & \cos B \\ \cos A & -1 & \cos C \\ \cos B & \cos C & -1 \end{vmatrix}$$

由正弦定理

$$\frac{3}{\sin C}=2\cdot 6 \Rightarrow \sin C=\frac{1}{4}, \cos C=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

令

$$\triangle=\begin{vmatrix} 1 & \cos A & \cos B \\ \cos A & -1 & \cos C \\ \cos B & \cos C & -1 \end{vmatrix}=1+2\cos A\cos B\cos C+\cos^2 A+\cos^2 B-\cos^2 C$$

由 $\cos C=-\cos(A+B)$,

$$\begin{aligned}\cos^2 C&=(\cos A\cos B-\sin A\sin B)^2\\&=\cos^2 A\cos^2 B-2\cos A\cos B\sin A\sin B+(1-\cos^2 A)(1-\cos^2 B)\\&=1+2\cos^2 A\cos^2 B-2\cos A\cos B\sin A\sin B-\cos^2 A-\cos^2 B\\&=1+2\cos A\cos B(\cos A\cos B-\sin A\sin B)-\cos^2 A-\cos^2 B\\&=1+2\cos A\cos B\cos(A+B)-\cos^2 A-\cos^2 B\end{aligned}$$

故

$$\triangle=2-2\cos^2 C=\frac{1}{8}$$

64. 令 A,B,C 为任意三角形 $\triangle ABC$ 的内角, 满足

$$\cos^2 A+\cos^2 B+2\sin A\sin B\cos C=\frac{15}{8},$$
$$\cos^2 B+\cos^2 C+2\sin B\sin C\cos A=\frac{14}{9}.$$

求

$$\cos^2 C+\cos^2 A+2\sin C\sin A\cos B.$$

由 $\sin(A+C)=\sin B$, 两式相加得

$$\cos^2 A+2\cos^2 B+\cos^2 C+2\sin B\sin(A+C)=\cos^2 A+2\cos^2 B+\cos^2 C+2\sin^2 B=\frac{247}{72}$$

因此

$$\cos^2 A+\cos^2 C=\frac{247}{72}-2=\frac{103}{72}\tag{1}$$

同理, 两式相减得

$$\cos^2 A-\cos^2 C+2\sin(A+C)\sin(A-C)=\cos^2 A-\cos^2 C+(\cos 2C-\cos 2A)=\frac{23}{72}$$

因此

$$\cos^2 A-\cos^2 C+2\cos^2 C-1-(2\cos^2 A-1)=-\cos^2 A+\cos^2 C=\frac{23}{72}\tag{2}$$

由 (1),(2) 解得

$$\cos^2 A=\frac{5}{9},\quad \cos^2 C=\frac{7}{8}$$

因此

$$
\begin{aligned}
&\cos^2 C+\cos^2 A+2\sin C\sin A\cos B\\
&=\frac{103}{72}+2\sin C\sin A(-\cos(A+C))\\
&=\frac{103}{72}+2\sin C\sin A(\sin A\sin C-\cos A\cos C)\\
&=\frac{103}{72}+2\sin^2 A\sin^2 C-2\sin C\cos C\sin A\cos A\\
&=\frac{103}{72}+2\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{8}\pm 2\cdot\frac{1}{\sqrt{8}}\cdot\sqrt{\frac{7}{8}}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}=\frac{111\pm 4\sqrt{35}}{72}
\end{aligned}
$$

65. 已知方程 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

$$\left(\tan^2\frac{x}{2}\right)(\cot^4 x+1)(\csc^2 x+\tan^2 x)=1$$

有唯一实数解。求正整数 k 满足

$$\cos^{2019}x=\sin^k x$$

由

$$\left(\tan^2\frac{x}{2}\right)(\cot^4 x+1)(\csc^2 x+\tan^2 x)=1$$

化为

$$\frac{\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}\left(\frac{\cos^4 x}{\sin^4 x}+1\right)\left(\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)=1$$

$$(\cos^4 x+\sin^4 x)(\cos^2 x+\sin^4 x)=\sin^4 x\cos^2 x(1+\cos x)^2$$

展开化简得

$$(\cos^3 x-\sin^4 x)^2=0\Rightarrow\cos^3 x=\sin^4 x$$

于是

$$k=4\cdot 673=2692$$

由柯西不等式,

$$\cot^2\frac{x}{2}=(\cot^4 x+1)(\tan^2 x+\csc^2 x)\geqslant(\cot x+\csc x)^2=\left(\frac{\cos x+1}{\sin x}\right)^2=\cot^2\frac{x}{2}$$

此时等号成立, 于是有

$$\frac{\cot^2 x}{\tan x}=\frac{1}{\csc x}\Rightarrow\cos^3 x=\sin^4 x$$

同上,

$$k=4\cdot 673=2692$$

66. 设 θ 为一锐角, 满足

$$\frac{16}{\sin^6\theta}+\frac{1}{\cos^6\theta}=81,$$

求 $\tan\theta$。

由柯西不等式,

$$\left(\frac{16}{\sin^6\theta}+\frac{1}{\cos^6\theta}\right)(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\geqslant\left(\frac{4}{\sin^2\theta}+\frac{1}{\cos^2\theta}\right)^2 \tag{1}$$

再由柯西不等式,

$$\left(\frac{4}{\sin^2\theta}+\frac{1}{\cos^2\theta}\right)(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\geqslant(2+1)^2 \tag{2}$$

由 (1) 与 (2) 得

$$\frac{16}{\sin^6\theta}+\frac{1}{\cos^6\theta}\geqslant 9^2=81.$$

等号成立当且仅当

$$\frac{4}{\sin^2\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}\Rightarrow\tan\theta=\sqrt{2}>0$$

67. 设 θ,ϕ 为锐角, 且

$$\frac{\sin^{2024}\theta}{\cos^{2022}\phi}+\frac{\cos^{2024}\theta}{\sin^{2022}\phi}=1,$$

则 $\sin^{2023}\theta-\cos^{2023}\phi=?$

由柯西不等式,

$$\left(\frac{\sin^{2024}\theta}{\cos^{2022}\phi}+\frac{\cos^{2024}\theta}{\sin^{2022}\phi}\right)\left(\frac{\cos^{2022}\phi}{\sin^{2020}\theta}+\frac{\sin^{2022}\phi}{\cos^{2020}\theta}\right)\geqslant(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2=1$$

$$\Rightarrow 1\cdot\left(\left(\frac{\cos^{1011}\phi}{\sin^{1010}\theta}\right)^2+\left(\frac{\sin^{1011}\phi}{\cos^{1010}\theta}\right)^2\right)\geqslant 1$$

$$\Rightarrow\left(\frac{\cos^{1011}\phi}{\sin^{1010}\theta}\right)^2+\left(\frac{\sin^{1011}\phi}{\cos^{1010}\theta}\right)^2=1$$

此时

$$\frac{\sin^{2022}\theta}{\cos^{2022}\phi}=\frac{\cos^{2022}\theta}{\sin^{2022}\phi}\Rightarrow \sin\theta\sin\phi=\cos\theta\cos\phi\Rightarrow\cos(\theta+\phi)=0$$

$$\Rightarrow \theta+\phi=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\sin\theta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right)=\cos\phi$$

$$\Rightarrow \sin^{2023}\theta-\cos^{2023}\phi=0$$

为什么第三行 $=1$?

68. 证明对任意 $\triangle ABC$ 均有

$$a\cos A+b\cos B+c\cos C=2a\sin B\sin C$$

由正弦定理, 设 $a=k\sin A, b=k\sin B, c=k\sin C$, 其中 $k\in\mathbb{R}$, 左式变为

$$\begin{aligned}
a\cos A+b\cos B+c\cos C&=a\cos A+k(\sin B\cos B+\sin C\cos C)\\
&=a\cos A+\frac{1}{2}k(\sin 2B+\sin 2C)\\
&=a\cos A+k\sin(B+C)\cos(B-C)\\
&=a\cos A+k\sin A\cos(B-C)\\
&=a\cos A+a\cos(B-C)\\
&=a(\cos(B-C)-\cos(B+C))\\
&=2a\sin B\sin C(\text{得证})
\end{aligned}$$

69. 已知一锐角三角形 $\triangle ABC$ 的边长分别为 a,b,c。设 r 为 $\triangle ABC$ 内切圆的半径,R 为 $\triangle ABC$ 外接圆的半径, 试证

(a)

$$r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

设 S 为 $\triangle ABC$ 面积, 则

$$S=\frac{1}{2}(a+b+c)r=\frac{abc}{4R}\Rightarrow r=\frac{abc}{2R(a+b+c)}$$

又由于 $a=2R\sin A, b=2R\sin B, c=2R\sin C$, 代入得

$$\begin{aligned}r&=\frac{2R\sin A\cdot 2R\sin B\cdot 2R\sin C}{2R(2R\sin A+2R\sin B+2R\sin C)}\\&=2R\cdot\frac{\sin A\sin B\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}\\&=2R\cdot\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\cdot 2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\cdot 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}\\&=8R\cdot\frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{C}{2}}\\&=8R\cdot\frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}}\\&=8R\cdot\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2}(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2})}{\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}}\\&=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\end{aligned}$$

(b)

$$\frac{abc}{\sqrt{2(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}}\geqslant\frac{r}{2R}$$

由余弦定理,

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\geqslant\frac{b^2+c^2-a^2}{b^2+c^2}=1-\frac{a^2}{b^2+c^2}$$

而 $\cos A=1-2\sin^2\frac{A}{2}$, 所以

$$1-2\sin^2\frac{A}{2}\geqslant 1-\frac{a^2}{b^2+c^2}\Rightarrow\frac{a^2}{b^2+c^2}\geqslant 2\sin^2\frac{A}{2}$$

同理可得

$$\frac{b^2}{a^2+c^2}\geqslant 2\sin^2\frac{B}{2},\quad\frac{c^2}{a^2+b^2}\geqslant 2\sin^2\frac{C}{2}$$

于是

$$\frac{abc}{\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}}\geqslant\sqrt{2\sin^2\frac{A}{2}\cdot 2\sin^2\frac{B}{2}\cdot 2\sin^2\frac{C}{2}}=2\sqrt{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

由 (a) 得

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{r}{4R},$$

故

$$\frac{abc}{\sqrt{2(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}}\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{r}{4R}=\frac{r}{2R}$$

70. 已知 A,B,C 是一锐角三角形的内角，证明

$$(\tan A+\tan B+\tan C)^2\geqslant(\sec A+1)^2+(\sec B+1)^2+(\sec C+1)^2$$

由于 A,B,C 都是锐角，故这些角的三角函数均为正。注意到

$$\begin{aligned}
&(\cos A-\cos B)^2\\
&=\cos^2 A+\cos^2 B-2\cos A\cos B\\
&=\cos(B+C)\cos A-\cos(A+C)\cos B-2\cos A\cos B\\
&=\cos B\cos C\cos A+\sin B\sin C\cos A-\cos A\cos C\cos B+\sin A\sin C\cos B-2\cos A\cos B\\
&=\cos A\cos B\cos C(\tan B\tan C+\tan A\tan C-2\sec C-2)
\end{aligned}$$

因为左边非负，有

$$\tan B\tan C+\tan A\tan C\geqslant 2\sec C+2$$

同理，

$$\tan A\tan B+\tan A\tan C\geqslant 2\sec A+2,\quad \tan A\tan B+\tan B\tan C\geqslant 2\sec B+2$$

将三式相加得

$$\tan A\tan B+\tan A\tan C+\tan B\tan C\geqslant\sec A+\sec B+\sec C+3$$

因此，

$$\begin{aligned}
&(\tan A+\tan B+\tan C)^2\\
&=\tan^2 A+\tan^2 B+\tan^2 C+2(\tan A\tan B+\tan A\tan C+\tan B\tan C)\\
&\geqslant\tan^2 A+\tan^2 B+\tan^2 C+2(\sec A+\sec B+\sec C)+6\\
&=\sec^2 A+\sec^2 B+\sec^2 C+2(\sec A+\sec B+\sec C)+3\\
&=(\sec A+1)^2+(\sec B+1)^2+(\sec C+1)^2
\end{aligned}$$

71. 已知 x 为一实数, $0<x<\pi$, 证明: 对于所有的自然数 n,

$$\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\cdots+\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$$

的值为正数。

令

$$f(x)=\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\cdots+\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$$

由

$$2\sin x\sin(2k-1)x=\cos(2k-2)x-\cos 2kx$$

可得

$$\begin{aligned}
&2f(x)\sin x\\
&=1-\cos 2x+\frac{\cos 2x-\cos 4x}{3}+\frac{\cos 4x-\cos 6x}{5}+\cdots+\frac{\cos(2n-2)x-\cos 2nx}{2n-1}\\
&=1-\left(1-\frac{1}{3}\right)\cos 2x-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\cos 4x-\cdots-\left(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}\right)\cos(2n-2)x-\frac{\cos 2nx}{2n-1}\\
&\geqslant 1-\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}\right)+\frac{1}{2n-1}\right]=0
\end{aligned}$$

若等号成立, 则有 $\cos 2kx=1(k=1,2,\ldots,n)$, 但因 $0<x<\pi$, 故 $\cos 2x\neq 1$. 于是得 $f(x)\sin x>0$. 又因 $\sin x>0$, 所以 $f(x)>0$.

72. 证明

$$\cot\theta-\cot 2\theta=\csc 2\theta$$

据此, 若已知

$$\frac{1}{\sin 8^\circ}+\frac{1}{\sin 16^\circ}+\cdots+\frac{1}{\sin 4096^\circ}+\frac{1}{\sin 8192^\circ}=\frac{1}{\sin\alpha},$$

其中 $\alpha\in(0,90^\circ)$, 求 α。

有

$$\cot\theta-\cot 2\theta=\frac{\sin 2\theta\cos\theta-\sin\theta\cos 2\theta}{\sin\theta\sin 2\theta}=\frac{\sin(2\theta-\theta)}{\sin\theta\sin 2\theta}=\csc 2\theta\quad(\text{得证})$$

故原式是一裂项和

$$\sum_{k=0}^{10}\frac{1}{\sin\left(2^k 8^\circ\right)}=\sum_{k=0}^{10}\left(\cot(2^{k-1}8^\circ)-\cot(2^k 8^\circ)\right)=\cot 4^\circ-\cot 8192^\circ$$

而 $8192 \bmod 90 = 2$, 故

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{10}\frac{1}{\sin\left(2^k 8^\circ\right)} &= \frac{1}{\tan 4^\circ} - \frac{1}{\tan 8192^\circ}\\ &= \frac{1}{\tan 4^\circ} + \tan 2^\circ\\ &= \frac{\cos 4^\circ}{\sin 4^\circ} + \frac{1-\cos 4^\circ}{\sin 4^\circ}\\ &= \frac{1}{\sin 4^\circ} \Rightarrow \alpha = 4^\circ\end{aligned}$$

其中利用了恒等式 $\tan\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$。

73. 证明

$$\sum_{k=1}^{90} 2k\sin(2k)^\circ = 90\cot 1^\circ$$

由 $k\sin(2k)^\circ + (90-k)\sin(180-2k)^\circ = 90\sin(2k)^\circ, k = 1, 2, \cdots, 90$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{90} 2k\sin 2k^\circ &= 2(90\sin 2^\circ + 90\sin 4^\circ + \cdots + 90\sin 88^\circ) + 2\cdot 45\sin 90^\circ\\ &= \frac{90}{\sin 1^\circ}(2\sin 2^\circ\sin 1^\circ + 2\sin 4^\circ\sin 1^\circ + \cdots + 2\sin 88^\circ\sin 1^\circ) + 90\\ &= \frac{90}{\sin 1^\circ}(\cos 1^\circ - \cos 3^\circ + \cos 3^\circ - \cos 5^\circ + \cdots + \cos 87^\circ - \cos 89^\circ) + 90\\ &= \frac{90}{\sin 1^\circ}(\cos 1^\circ - \cos 89^\circ) + 90\\ &= \frac{90}{\sin 1^\circ}(\cos 1^\circ - \sin 1^\circ) + 90\\ &= 90\cot 1^\circ\end{aligned}$$

74. 计算

$$\sin^6 1^\circ + \sin^6 2^\circ + \cdots + \sin^6 89^\circ$$

由 $\sin x=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$，设

$$S=\sin^6 1^\circ+\sin^6 2^\circ+\cdots+\sin^6 89^\circ=\cos^6 1^\circ+\cos^6 2^\circ+\cdots+\cos^6 89^\circ,$$

则

$$2S=\sum_{k=1}^{44}(\sin^6 k^\circ+\cos^6 k^\circ)+2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^6$$

其中

$$\begin{aligned}\sin^6 x+\cos^6 x&=(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^4 x+\cos^4 x-\sin x\cos x)\\&=1\cdot((\sin^2 x+\cos^2 x)^2-3\sin^2 x\cos^2 x)\\&=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x\end{aligned}$$

且

$$\sum_{k=1}^{44}\sin^2(2k)^\circ=\sum_{k=1}^{22}(\sin^2(2k)^\circ+\cos^2(2k)^\circ)=22$$

故

$$2S=44-\frac{3}{4}\cdot 22+\frac{1}{4}\Rightarrow S=\frac{111}{8}$$

75. 求

$$\tan^2\frac{\pi}{16}\cdot\tan^2\frac{3\pi}{16}+\tan^2\frac{\pi}{16}\cdot\tan^2\frac{5\pi}{16}+\tan^2\frac{3\pi}{16}\cdot\tan^2\frac{7\pi}{16}+\tan^2\frac{5\pi}{16}\cdot\tan^2\frac{7\pi}{16}$$

的值。

将原式写成

$$\left(\tan^2\frac{\pi}{16}+\tan^2\frac{7\pi}{16}\right)\left(\tan^2\frac{3\pi}{16}+\tan^2\frac{5\pi}{16}\right)=\left(\tan^2\frac{\pi}{16}+\cot^2\frac{\pi}{16}\right)\left(\tan^2\frac{3\pi}{16}+\cot^2\frac{3\pi}{16}\right).$$

注意到

$$\tan^2\theta+\cot^2\theta=\frac{\sin^4\theta+\cos^4\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}=\frac{1}{\sin^2\theta\cos^2\theta}-2=\frac{4}{\sin^2 2\theta}-2=\frac{8}{1-\cos 4\theta}-2$$

故

$$\tan^2\frac{\pi}{16}+\cot^2\frac{\pi}{16}=-2+\frac{8}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=14+8\sqrt{2}$$

同理得

$$\tan^2\frac{3\pi}{16}+\cot^2\frac{3\pi}{16}=14-8\sqrt{2}$$

故原式 $=196-2\cdot 64=68$。

76. 求表达式

$$\log_8[(\tan 1^\circ+\sqrt{3})(\tan 2^\circ+\sqrt{3})(\tan 3^\circ+\sqrt{3})\cdots(\tan 29^\circ+\sqrt{3})]$$

的值。

若 $A+B=30^\circ$, 则

$$\tan 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}\Rightarrow \tan A+\tan B+\sqrt{3}(\tan A+\tan B)=1$$

于是

$$(\tan A+\sqrt{3})(\tan B+\sqrt{3})=\tan A\tan B+\sqrt{3}(\tan A+\tan B)+3=4$$

因此

$$P=(\tan 1^\circ+\sqrt{3})(\tan 2^\circ+\sqrt{3})(\tan 3^\circ+\sqrt{3})\cdots(\tan 29^\circ+\sqrt{3})=4^{14}\cdot 2=2^{29}$$

故

$$\log_8 P=\frac{29}{3}$$

77. 已知 $\sin\theta=\dfrac{3}{5}$, 求

$$\left(\frac{\sqrt{2}\cos\theta}{\sqrt{3}}+\frac{\cos 2\theta}{\sqrt{6}}+\frac{\cos 3\theta}{\sqrt{24}}+\cdots\right)\left(\frac{\sqrt{2}\sin\theta}{\sqrt{3}}+\frac{\sin 2\theta}{\sqrt{6}}+\frac{\sin 3\theta}{\sqrt{24}}+\cdots\right)$$

发现

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left(\cos\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{1}{4}\cos 3\theta+\cdots\right)=\frac{1}{3}\sqrt{6}\cdot\Re\left(\frac{e^{i\theta}}{1-\frac{1}{2}e^{i\theta}}\right)=\frac{2}{3}\sqrt{6}\cdot\Re\left(\frac{e^{i\theta}}{2-e^{i\theta}}\right)$$

已知 $\sin\theta=\dfrac{3}{5}$, 则 $\cos\theta=\dfrac{4}{5}$, 代入 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta=\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}i$ 得

$$\frac{2\sqrt{6}}{3}\cdot\Re\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i\right)=\frac{2\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2\sqrt{6}}{9}$$

同理

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left(\sin\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta+\frac{1}{4}\sin 3\theta+\cdots\right)=\frac{\sqrt{6}}{3}\cdot\Im\left(\frac{e^{i\theta}}{1-\frac{1}{2}e^{i\theta}}\right)=\frac{2\sqrt{6}}{3}\cdot\Im\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i\right)=\frac{4\sqrt{6}}{9}$$

两式相乘得

$$\left(\frac{\sqrt{2}\cos\theta}{\sqrt{3}}+\frac{\cos 2\theta}{\sqrt{6}}+\frac{\cos 3\theta}{\sqrt{24}}+\cdots\right)\left(\frac{\sqrt{2}\sin\theta}{\sqrt{3}}+\frac{\sin 2\theta}{\sqrt{6}}+\frac{\sin 3\theta}{\sqrt{24}}+\cdots\right)=\frac{2\sqrt{6}}{9}\cdot\frac{4\sqrt{6}}{9}=\frac{16}{27}$$

78. 证明

$$\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}=\frac{1}{2}.$$

设 $z=\cos\theta+i\sin\theta$, 其中 $\theta=\frac{\pi}{11}$, 则由棣莫弗定理,

$$z^k=\cos k\theta+i\sin k\theta.$$

考虑和

$$S=z+z^3+z^5+z^7+z^9=z\frac{(z^2)^5-1}{z^2-1}=\frac{z^{11}-z}{z^2-1}$$

由于 $z^{11}=\cos 11\theta+i\sin 11\theta=\cos\pi+i\sin\pi=-1$, 所以

$$S=\frac{-1-z}{z^2-1}=\frac{1}{1-z}$$

代入 $z=\cos\theta+i\sin\theta$:

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{1-\cos\theta-i\sin\theta}\\&=\frac{(1-\cos\theta)+i\sin\theta}{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}\\&=\frac{1}{2}+\frac{i\sin\theta}{2(1-\cos\theta)}\\&=\frac{1}{2}+\frac{i\cdot 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cdot 2\sin^2\frac{\theta}{2}}\\&=\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\cot\frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

故所求即

$$\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}=\Re(S)=\frac{1}{2}$$

79. 求值

$$\frac{1}{\tan^2\frac{\pi}{18}}+\frac{1}{\tan^2\frac{5\pi}{18}}+\frac{1}{\tan^2\frac{7\pi}{18}}$$

设 $\theta=\frac{\pi}{18}\Rightarrow 3\theta=\frac{\pi}{6}$, 两边取 tan,

$$\tan(3\theta)=\tan\frac{\pi}{6}\Rightarrow\frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

整理得

$$\sqrt{3}\tan^3\theta-3\tan^2\theta-3\sqrt{3}\tan\theta+1=0$$

发现该三次方程的三个根分别是

$$x_1=\tan\frac{\pi}{18},\ x_2=-\tan\frac{5\pi}{18},\ x_3=\tan\frac{7\pi}{18}$$

由韦达定理

$$x_1+x_2+x_3=\sqrt{3},\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=-3,\ x_1x_2x_3=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

则所求为

$$\begin{aligned}\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}&=\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)^2-2\left(\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_2x_3}+\frac{1}{x_3x_1}\right)\\&=\left(\frac{x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1}{x_1x_2x_3}\right)^2-2\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{x_1x_2x_3}\right)\\&=\left(\frac{-3}{-\frac{1}{\sqrt{3}}}\right)^2-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{-\frac{1}{\sqrt{3}}}\\&=33\end{aligned}$$

80. 计算

$$\cos^7\frac{\pi}{9}+\cos^7\frac{5\pi}{9}+\cos^7\frac{7\pi}{9}$$

因 $\theta=\frac{\pi}{9},\frac{5\pi}{9},\frac{7\pi}{9}$ 皆满足

$$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$$

故 $\cos\frac{\pi}{9},\cos\frac{5\pi}{9},\cos\frac{7\pi}{9}$ 是方程 $8x^3-6x-1=0$ 的三根。

现设 $x=\cos\frac{\pi}{9},y=\cos\frac{5\pi}{9},z=\cos\frac{7\pi}{9},S_n=x^n+y^n+z^n$，我们将用牛顿恒等式递推计算 S_7。根据韦达定理可得

$$\begin{aligned}&S_1=x+y+z=0\\&S_2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=0^2-2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{2}\\&S_3=x^3+y^3+z^3=3xyz=\frac{3}{8}\end{aligned}$$

递推公式为

$$\begin{aligned}S_n&=(x+y+z)S_{n-1}-(xy+yz+zx)S_{n-2}+xyz\cdot S_{n-3}\\&=0\cdot S_{n-1}-(-\frac{3}{4})S_{n-2}+\frac{1}{8}\cdot S_{n-3}\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}S_4&=0\cdot S_3-(-\frac{3}{4})S_2+\frac{1}{8}\cdot S_1=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{2}=\frac{9}{8}\\S_5&=0\cdot S_4-(-\frac{3}{4})S_3+\frac{1}{8}\cdot S_2=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{8}+\frac{1}{8}\cdot\frac{3}{2}=\frac{9}{32}+\frac{3}{16}=\frac{15}{32}\\S_6&=0\cdot S_5-(-\frac{3}{4})S_4+\frac{1}{8}\cdot S_3=\frac{3}{4}\cdot\frac{9}{8}+\frac{1}{8}\cdot\frac{3}{8}=\frac{27}{32}+\frac{3}{64}=\frac{57}{64}\\S_7&=0\cdot S_6-(-\frac{3}{4})S_5+\frac{1}{8}\cdot S_4=\frac{3}{4}\cdot\frac{15}{32}+\frac{1}{8}\cdot\frac{9}{8}=\frac{45}{128}+\frac{9}{64}=\frac{63}{128}\end{aligned}$$

81. 证明

$$\tan\frac{2\pi}{15}\tan\frac{4\pi}{15}\tan\frac{8\pi}{15}\tan\frac{16\pi}{15}=-1$$

原式写成

$$V=\frac{\sin 24^\circ\sin 48^\circ\sin 96^\circ\sin 192^\circ}{\cos 24^\circ\cos 48^\circ\cos 96^\circ\cos 192^\circ}$$

记 $T=\sin 24^\circ\sin 48^\circ\sin 96^\circ\sin 192^\circ, N=\cos 24^\circ\cos 48^\circ\cos 96^\circ\cos 192^\circ$

利用三角恒等式 $\sin(60^\circ-\alpha)\sin\alpha\sin(60^\circ+\alpha)=\frac{1}{4}\sin 3\alpha$, 整理 T 为

$$\begin{aligned}T&=-\sin 24^\circ\sin 48^\circ\sin 96^\circ\sin 12^\circ\\&=-\frac{\sin 12^\circ\sin 48^\circ\sin 108^\circ}{\sin 108^\circ}\cdot\sin 24^\circ\sin 96^\circ\\&=-\frac{1}{4}\frac{\sin 144^\circ}{\sin 108^\circ}\cdot\sin 24^\circ\sin 96^\circ\\&=-\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin 24^\circ\sin 36^\circ\sin 96^\circ}{\sin 108^\circ}\\&=-\frac{1}{4}\cdot\frac{\frac{1}{4}\sin 108^\circ}{\sin 108^\circ}\\&=-\frac{1}{16}\end{aligned}$$

连续使用恒等式 $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ 有

$$16\sin 24^\circ\cdot N=\sin 384^\circ=\sin 24^\circ\Rightarrow N=\frac{1}{16}$$

故

$$V = \frac{T}{N} = \frac{-\frac{1}{16}}{\frac{1}{16}} = \boxed{-1}$$

设 $a = \frac{\pi}{15}$，有

$$\begin{aligned}\tan 2a \tan 4a \tan 8a \tan 16a &= \frac{2\sin a \cos a}{\cos 2a} \cdot \frac{2\sin 2a \cos 2a}{\cos 4a} \cdot \frac{2\sin 4a \cos 4a}{\cos 8a} \cdot \frac{2\sin 8a \cos 8a}{\cos 16a} \\ &= 16 \cdot \frac{\cos a \sin a \sin 2a \sin 4a \sin 8a}{\cos 16a}\end{aligned}$$

因为 $\cos 16a = -\cos a$，于是

$$\tan 2a \tan 4a \tan 8a \tan 16a = -16 \sin a \sin 2a \sin 4a \sin 8a$$

我们来计算这个乘积。设 $x = \cos 3a$，因为

$$4\sin a \sin 4a = 2\cos 3a - 2\cos 5a = 2\cos 3a - 1$$

$$4\sin 2a \sin 8a = 2\cos 6a - 2\cos 10a = 2\cos 6a + 1$$

它们的乘积

$$(2\cos 3a - 1)(2\cos 6a + 1) = (2x - 1)(2(2x^2 - 1) + 1) = 2x(4x^2 - 2x - 1) + 1$$

其中 $x = \cos 3a$，又因为 $\cos 9a = -\cos 6a$，可以推出

$$4x^3 - 3x = 1 - 2x^2 \Rightarrow (x + 1)(4x^2 - 2x - 1) = 0 \Rightarrow 2x \cdot 0 + 1 = 1$$

故

$$16 \sin a \sin 2a \sin 4a \sin 8a = -1 \Rightarrow \tan \frac{2\pi}{15} \tan \frac{4\pi}{15} \tan \frac{8\pi}{15} \tan \frac{16\pi}{15} = -1$$

82. 求

$$S = \sum_{n=1}^{7} \tan^2 \left(\frac{n\pi}{16}\right)$$

注意到

$$\tan\left(-\frac{7\pi}{16}\right), \tan\left(-\frac{6\pi}{16}\right), \ldots, \tan\left(\frac{7\pi}{16}\right)$$

是方程 $\tan 16x = 0$ 的解, 由恒等式

$$\tan(n\theta) = \frac{{}^nC_1 \tan\theta - {}^nC_3 \tan^3\theta + \cdots}{1 - {}^nC_2 \tan^2\theta + \cdots}$$

也即是

$${}^{16}C_1 x - {}^{16}C_3 x^3 + \cdots + {}^{16}C_{13} x^{13} - {}^{16}C_{15} x^{15} = 0$$

的根, 去掉零根 $\tan 0 = 0$ 后,

$$\tan\left(\pm\frac{7\pi}{16}\right), \tan\left(\pm\frac{6\pi}{16}\right), \ldots, \tan\left(\pm\frac{\pi}{16}\right)$$

是

$${}^{16}C_1 - {}^{16}C_3 x^2 + {}^{16}C_5 x^4 - \cdots + {}^{16}C_{13} x^{12} - {}^{16}C_{15} x^{14} = 0$$

的根, 因此

$$\tan^2\left(\frac{7\pi}{16}\right), \tan^2\left(\frac{6\pi}{16}\right), \ldots, \tan^2\left(\frac{\pi}{16}\right)$$

是

$${}^{16}C_1 - {}^{16}C_3 y + {}^{16}C_5 y^2 - \cdots + {}^{16}C_{13} y^6 - {}^{16}C_{15} y^7 = 0$$

的根; 由韦达定理, 根之和为

$$\frac{{}^{16}C_{13}}{{}^{16}C_{15}} = 35$$

83. 若 $\alpha = \dfrac{2\pi}{1999}$, 试求

$$\cos\alpha \cos 2\alpha \cos 3\alpha \ldots \cos 998\alpha \cos 999\alpha$$

的值。

记 $S = \cos\alpha \cos 2\alpha \cdots \cos 999\alpha, T = \sin\alpha \sin 2\alpha \cdots \sin 999\alpha$, 则

$$ST = \sin\alpha \cos\alpha \sin 2\alpha \cos 2\alpha \cdots \sin 999\alpha \cos 999\alpha$$

即

$$2^{999} ST = \sin 2\alpha \sin 4\alpha \cdots \sin 1998\alpha$$

且注意到

$$\sin 1998\alpha = -\sin(2\pi - 1998\alpha) = -\sin\frac{2\pi}{1999} = -\sin\alpha$$

同理,

$$\sin 1996\alpha = -\sin 3\alpha, \quad \sin 1994\alpha = -\sin 5\alpha, \cdots$$

因此

$$2^{999} ST = \sin\alpha \sin 4\alpha \cdots (-\sin 3\alpha)(-\sin\alpha) = \sin\alpha \sin 4\alpha \cdots \sin 3\alpha \sin\alpha = T$$

由于 $T \neq 0$, 故

$$S = \cos\alpha \cos 2\alpha \cos 3\alpha \cdots \cos 998\alpha \cos 999\alpha = \frac{1}{2^{999}}$$

84. 证明: 对于所有大于 1 的自然数 n, 有

$$\sin\frac{\pi}{n} \cdot \sin\frac{2\pi}{n} \cdots \sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

设

$$\omega = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n},$$

则多项式

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + 1 = 0$$

的 $n-1$ 个根为 $\omega^k, k = 1, 2, \ldots, n-1$, 且 $\omega^n = 1$, 令

$$f(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + 1 = (x - \omega^1)(x - \omega^2) \cdots (x - \omega^{n-1}),$$

则

$$f(1) = n = (1 - \omega^1)(1 - \omega^2) \cdots (1 - \omega^{n-1}).$$

且发现

$$1 - \omega^k = 2\sin^2\frac{k\pi}{n} - 2i\sin\frac{k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n} = 2\sin\frac{k\pi}{n}\left(\sin\frac{k\pi}{n} - i\cos\frac{k\pi}{n}\right).$$

故

$$|1 - \omega^k| = 2\sin\frac{k\pi}{n}.$$

取模可得

$$n = |1 - \omega^1||1 - \omega^2| \cdots |1 - \omega^{n-1}| = 2^{n-1}\sin\frac{\pi}{n} \cdot \sin\frac{2\pi}{n} \cdots \sin\frac{(n-1)\pi}{n}.$$

即得证

$$\sin\frac{\pi}{n} \cdot \sin\frac{2\pi}{n} \cdots \sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

85. 计算下列乘积：

(a) $\sin\frac{\pi}{2n+1}\sin\frac{2\pi}{2n+1}\sin\frac{3\pi}{2n+1}\dots\sin\frac{n\pi}{2n+1}$ 以及 $\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\sin\frac{3\pi}{n}\dots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}$

(b) $\cos\frac{\pi}{2n+1}\cos\frac{2\pi}{2n+1}\cos\frac{3\pi}{2n+1}\dots\cos\frac{n\pi}{2n+1}$ 以及 $\cos\frac{\pi}{2n}\cos\frac{2\pi}{2n}\cos\frac{3\pi}{2n}\dots\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}$

(a) 设 $\omega=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$ 为单位的 n 次复根。考虑方程 $x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1=0$, 其根为 ω^k $(k=1,2,\dots,n-1)$。因此有恒等式：

$$f(x)=x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1=(x-\omega^1)(x-\omega^2)\cdots(x-\omega^{n-1})$$

令 $x=1$, 得：

$$f(1)=n=(1-\omega^1)(1-\omega^2)\cdots(1-\omega^{n-1})$$

由于 $|1-\omega^k|=|1-(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n})|=|2\sin^2\frac{k\pi}{n}-2i\sin\frac{k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}|=2\sin\frac{k\pi}{n}$。取模可得：

$$n=2^{n-1}\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\dots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}$$

由此得出第一个重要结果：

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\dots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}$$

同理可证（通过替换 n 为 $2n+1$ 并利用对称性）：

$$\sin\frac{\pi}{2n+1}\sin\frac{2\pi}{2n+1}\dots\sin\frac{n\pi}{2n+1}=\frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$$

(b) 对于余弦乘积, 我们利用倍角公式 $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$。对于 $2n+1$ 的情形：

$$\sin\frac{2k\pi}{2n+1}=2\sin\frac{k\pi}{2n+1}\cos\frac{k\pi}{2n+1}$$

将 $k=1,2,\dots,n$ 的等式全部相乘：

$$\prod_{k=1}^{n}\sin\frac{2k\pi}{2n+1}=2^n\left(\prod_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{2n+1}\right)\left(\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{2n+1}\right)$$

由于 $\sin\frac{2k\pi}{2n+1}$ 的集合（当 k 超过 $n/2$ 时利用 $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$）与 $\sin\frac{k\pi}{2n+1}$ 的集合完全相同, 两边的正弦乘积项约去, 得：

$$\cos\frac{\pi}{2n+1}\cos\frac{2\pi}{2n+1}\dots\cos\frac{n\pi}{2n+1}=\frac{1}{2^n}$$

对于 $\cos\frac{k\pi}{2n}$ 的乘积：利用 $\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\sin 2\theta$：

$$\left[\prod_{k=1}^{n-1}\cos\frac{k\pi}{2n}\right]\left[\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}\right]=\frac{1}{2^{n-1}}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}$$

已知右侧乘积为 $\frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{n}{2^{n-1}} = \frac{n}{2^{2n-2}}$。又因为 $\sin\frac{k\pi}{2n} = \cos\frac{(n-k)\pi}{2n}$, 所以左侧两个括号内的数值相等。取平方根（项均为正）得:

$$\cos\frac{\pi}{2n}\cos\frac{2\pi}{2n}\ldots\cos\frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$$

注：若将 (a) 的结果除以 (b) 的结果, 可得正切乘积:

$$\tan\frac{\pi}{2n+1}\tan\frac{2\pi}{2n+1}\ldots\tan\frac{n\pi}{2n+1} = \sqrt{2n+1}$$

$$\tan\frac{\pi}{2n}\tan\frac{2\pi}{2n}\ldots\tan\frac{(n-1)\pi}{2n} = 1$$

86. 证明: 对于任意正整数 n, 有

$$\tan\frac{\pi}{2n+1}\tan\frac{2\pi}{2n+1}\cdots\tan\frac{n\pi}{2n+1} = \sqrt{2n+1}.$$

注意到

$$\left(\cos\frac{k\pi}{2n+1} + i\sin\frac{k\pi}{2n+1}\right)^{2n+1} = \left(e^{i\frac{k\pi}{2n+1}}\right)^{2n+1} = e^{ik\pi} = (-1)^k.$$

由二项式定理, 比较虚部可得

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{2n+1}{2j+1}\left(\cos\frac{k\pi}{2n+1}\right)^{2n-2j}\left(\sin\frac{k\pi}{2n+1}\right)^{2j+1} = 0.$$

将两边除以 $\left(\cos\frac{k\pi}{2n+1}\right)^{2n+1}$ 得到

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{2n+1}{2j+1}\left(\tan\frac{k\pi}{2n+1}\right)^{2j+1} = 0.$$

即 $\tan\frac{k\pi}{2n+1}, 1 \leqslant k \leqslant 2n+1$ 是次数为 $2n+1$ 的多项式

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{2n+1}{2j+1}z^{2j+1} = 0,$$

的根; 不考虑根 $z=0$ 可知, $\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$, $1 \leqslant k \leqslant 2n$ 是多项式

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{2n+1}{2j+1}z^{2j} = (-1)^n z^{2n} + \cdots + (2n+1) = 0.$$

的根, 因此由韦达定理,

$$\prod_{k=1}^{2n} \tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = (-1)^n \cdot (2n+1).$$

且观察到

$$\tan\left(\frac{(2n+1-k)\pi}{2n+1}\right) = -\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right),\ 1 \leqslant k \leqslant n$$

所以

$$\left(\prod_{k=1}^{n} \tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)^2 = 2n+1.$$

又因 $\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) > 0,\ 1 \leqslant k \leqslant n$, 故

$$\tan\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)\tan\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)\cdots\tan\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right) = \sqrt{2n+1}.$$

87. 设

$$f_n(\theta) = \sin\theta\sin 2\theta\sin 4\theta\cdots\sin(2^{n-1}\theta), \quad n \in \mathbb{N}$$

证明对任意实数 θ 及正整数 n 皆有

$$|f_n(\theta)| \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}\left|f_n\left(\frac{\pi}{3}\right)\right|$$

由 AM-GM 不等式,

$$\begin{aligned}|g(\theta)| = |\sin\theta||\sin(2\theta)|^{1/2} &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}\left(\sqrt[4]{|\sin\theta|\cdot|\sin\theta|\cdot|\sin\theta|\cdot|\sqrt{3}\cos\theta|}\right)^2 \\ &\leqslant \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}\cdot\frac{3\sin^2\theta+3\cos^2\theta}{4} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3/2}\end{aligned}$$

故函数 $g(\theta)$ 的最大值为 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3/2}$, 并且在 $\theta = \frac{2^k\pi}{3}, k \in \mathbb{N}$ 处取得。注意到

$$f_n(\theta) = g(\theta)\cdot g(2\theta)^{\frac{1}{2}}\cdot g(4\theta)^{\frac{3}{4}}\cdots g(2^{n-1}\theta)^E,$$

其中

$$E = \frac{2}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

于是

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f_n(\theta)}{f_n(\frac{\pi}{3})}\right| &= \left|\frac{g(\theta)\cdot g(2\theta)^{\frac{1}{2}}\cdots g(2^{n-1}\theta)^{E}}{g(\frac{\pi}{3})\cdot g(\frac{2\pi}{3})^{\frac{1}{2}}\cdots g(2^{n-1}\frac{\pi}{3})^{E}}\right|\cdot\left|\frac{\sin(2^n\theta)}{\sin(2^n\frac{\pi}{3})}\right|^{1-\frac{E}{2}} \\
&\leqslant \left|\frac{\sin(2^n\theta)}{\sin(2^n\frac{\pi}{3})}\right|^{1-\frac{E}{2}} \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{3}/2}\right)^{1-\frac{E}{2}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

因此得证对所有实数 θ 及任意正整数 n 皆有

$$|f_n(\theta)| \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}\left|f_n\left(\frac{\pi}{3}\right)\right|$$

反三角函数

1. 若 $|x| \leqslant 1$, 证明

$$\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{1}{2}\cos^{-1}x$$

设 $\theta = \tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$, 于是

$$1+\tan^2\theta = 1+\frac{1-x}{1+x} = \frac{2}{1+x}$$

从而

$$\cos^2\theta = \frac{1}{\sec^2\theta} = \frac{1+x}{2} \Rightarrow \cos 2\theta = 2\cdot\frac{1+x}{2} - 1 = x.$$

由于 $|x| \leqslant 1$, 且 $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, 可知 $2\theta \in [0, \pi]$, 因此

$$2\theta = \cos^{-1}x \Rightarrow \theta = \frac{1}{2}\cos^{-1}x$$

于是得证

$$\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{1}{2}\cos^{-1}x$$

2. 已知锐角 θ, ϕ 满足

$$2\cos\theta = \cos\phi, \quad 2\sin\theta = 3\sin\phi,$$

证明

$$\theta+\phi = \pi - \arctan\sqrt{15}.$$

将已知两式平方并相加, 可得

$$4(\cos^2\theta+\sin^2\theta) = \cos^2\phi + 9\sin^2\phi \Rightarrow \sin^2\phi = \frac{3}{8} \Rightarrow \sin\phi = \sqrt{\frac{3}{8}} > 0$$

同时可得

$$4\sin^2\theta = 9\sin^2\phi = \frac{27}{8} \Rightarrow \sin\theta = \sqrt{\frac{27}{32}}$$

于是 $\tan\theta = \sqrt{\frac{27}{5}}, \tan\phi = \sqrt{\frac{3}{5}}$, 且

$$\tan(\theta+\phi) = \frac{\tan\theta + \tan\phi}{1 - \tan\theta\tan\phi} = -\sqrt{15}$$

由于 $0 < \theta + \phi < \pi$, 取

$$\theta + \phi = \pi - \arctan\sqrt{15}$$

3. 已知

$$\sin^{-1}(\sin\alpha + \sin\beta) + \sin^{-1}(\sin\alpha - \sin\beta) = \frac{\pi}{2},$$

求 $\sin^2\alpha + \sin^2\beta$ 的值。

由

$$\sin^{-1}(\sin\alpha + \sin\beta) = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}(\sin\alpha - \sin\beta) = \cos^{-1}(\sin\alpha - \sin\beta)$$

得到

$$\sin\alpha + \sin\beta = \sin(\cos^{-1}(\sin\alpha - \sin\beta)) = \sqrt{1 - (\sin\alpha - \sin\beta)^2}$$

因此

$$(\sin\alpha + \sin\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 = 1 \Rightarrow \sin^2\alpha + \sin^2\beta = \frac{1}{2}$$

4. 已知

$$\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \frac{2\pi}{3}, \quad \cos^{-1}x - \cos^{-1}y = \frac{\pi}{3},$$

求 x, y 的值。

由反三角恒等式

$$\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$$

故

$$\cos^{-1}x - \cos^{-1}y = \left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}x\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}y\right) = \sin^{-1}y - \sin^{-1}x = \frac{\pi}{3}$$

于是可解得

$$\sin^{-1}x = \frac{\pi}{6},\ \sin^{-1}y = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2},\ y = 1$$

5. 解方程

$$\tan^{-1}\left[x\cos\left(2\sin^{-1}\frac{1}{x}\right)\right]=\frac{\pi}{4}.$$

两边取正切，得

$$x\cos\left(2\sin^{-1}\frac{1}{x}\right)=1\Rightarrow\cos\left(2\sin^{-1}\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}$$

于是有

$$2\sin^{-1}\frac{1}{x}=\pm\cos^{-1}\frac{1}{x}\pm 2n\pi,\quad n=0,1,2,3,\ldots$$

利用恒等式 $\sin^{-1}t+\cos^{-1}t=\frac{\pi}{2}$，可得

$$2\sin^{-1}\frac{1}{x}=\pm\left(\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}\frac{1}{x}\right)\pm 2n\pi.$$

给出

$$\sin^{-1}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{6}\pm\frac{2n\pi}{3}\quad\text{或}\quad\sin^{-1}\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}\pm 2n\pi$$

由于 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\sin^{-1}t\leqslant\frac{\pi}{2}$，故取

$$\sin^{-1}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{6}\quad\text{或}\quad\sin^{-1}\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}.$$

即

$$x=2\quad\text{或}\quad x=-1$$

经检验，可知都是原方程式的解。

6. 解方程

$$\tan^{-1}\left(\sqrt{2}(x+1)\right)-\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)=\tan^{-1}\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

原方程式两边取正切，

$$\frac{\sqrt{2}(x+1)-\dfrac{x-1}{\sqrt{2}}}{1+\sqrt{2}(x+1)\cdot\dfrac{x-1}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

解得

$$x=3\quad\text{或}\quad x=-\frac{3}{2}$$

经检验都是方程的实数解。

7. 解反三角方程

$$\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}=\tan^{-1}\frac{3}{x+7}$$

两边取正弦得

$$\frac{2x}{1+x^2}=\sin\left(\tan^{-1}\frac{3}{x+7}\right)=\pm\frac{3}{\sqrt{3^2+(x+7)^2}}$$

解得

$$x=\frac{1}{5},\quad x=7+2\sqrt{13}$$

经检验皆为方程的实数解。

8. 解方程

$$3\sin^{-1}2x+3\sin^{-1}x=2\pi$$

原方程式即

$$\sin^{-1}2x+\sin^{-1}x=\frac{2\pi}{3}$$

对两边取正弦得

$$2x\cos(\sin^{-1}x)+x\cos(\sin^{-1}2x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

即

$$2x\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-(2x)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

解得 $x=\pm\frac{1}{2}$, 经检验, 原方程式的解为

$$x=\frac{1}{2}$$

9. 解方程

$$\sin(\cot^{-1}(x+1))=\cos(\tan^{-1}x)$$

由 $\cos A = \sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right)$,

$$\sin[\cot^{-1}(x+1)] = \sin\left[\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x\right]$$

于是解为

$$\cot^{-1}(x+1) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x \quad \text{或} \quad \cot^{-1}(x+1) = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x\right)$$

又由 $\cot^{-1} A = \tan^{-1}\dfrac{1}{A}$,

$$\tan^{-1}\left(\frac{1}{x+1}\right) + \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2} \quad \text{或} \quad \tan^{-1}\left(\frac{1}{x+1}\right) - \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

两边取正切, 对于左侧方程

$$\begin{aligned}\tan\left[\tan^{-1}\left(\frac{1}{x+1}\right) + \tan^{-1} x\right] &= \tan\frac{\pi}{2} \\ \frac{\frac{1}{x+1} + x}{1 - \frac{1}{x+1}\cdot x} &= \infty \\ x^2 + x + 1 &= \infty\end{aligned}$$

得 $x = \pm\infty$, 而对于右侧方程,

$$\begin{aligned}\tan\left[\tan^{-1}\left(\frac{1}{x+1}\right) - \tan^{-1} x\right] &= \tan\frac{\pi}{2} \\ \frac{\frac{1}{x+1} - x}{1 + \frac{1}{x+1}\cdot x} &= \infty \\ \frac{1 - x^2 - x}{2x+1} &= \infty \\ 2x + 1 &= 0 \\ x &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

所以解为 $x = -\dfrac{1}{2}$, 经检验都是方程的解。

10. 解方程

$$(\tan^{-1} x)^2 + (\cot^{-1} x)^2 = \frac{5\pi^2}{8}.$$

设 $\theta=\tan^{-1}x$, 原方程式变为

$$\theta^2+\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)^2=\frac{5\pi^2}{8}.$$

整理得

$$(4\theta-3\pi)(4\theta+\pi)=0\Rightarrow\theta=\frac{3\pi}{4}\quad\text{或}\quad\theta=-\frac{\pi}{4}.$$

注意到 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\tan^{-1}x\leqslant\frac{\pi}{2}$, 因此舍去 $\theta=\frac{3\pi}{4}$, 于是

$$x=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1$$

经检验是原方程的解。

11. 若

$$\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\frac{\pi}{2},$$

证明

$$xy+yz+zx=1$$

设 $\alpha=\tan^{-1}x,\beta=\tan^{-1}y,\gamma=\tan^{-1}z$, 则

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}.$$

利用三角恒等式

$$\tan(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma-\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}{1-\tan\alpha\tan\beta-\tan\beta\tan\gamma-\tan\gamma\tan\alpha}.$$

代入 $\tan\alpha=x,\ \tan\beta=y,\ \tan\gamma=z$, 得

$$\tan(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx}.$$

由于 $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2},\tan(\alpha+\beta+\gamma)$ 不存在, 则

$$1-xy-yz-zx=0\Rightarrow xy+yz+zx=1$$

注: 其逆命题不成立。

12. 若 $x>1$, 求证

$$\tan^{-1}x+\tan^{-1}\frac{1-x}{1+x}=\frac{\pi}{4}.$$

设 $\alpha=\tan^{-1}x,\beta=\tan^{-1}\dfrac{1-x}{1+x}$，于是

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{x+\frac{1-x}{1+x}}{1-x\cdot\frac{1-x}{1+x}}=\frac{x^2+1}{1+x^2}=1$$

由于 $x>1$，

$$\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2},\quad -1<\frac{1-x}{1+x}<0\Rightarrow-\frac{\pi}{4}<\beta<0$$

因此

$$0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$$

这表示

$$\tan^{-1}x+\tan^{-1}\frac{1-x}{1+x}=\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$$

13. 证明

$$\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}.$$

设

$$A=\tan^{-1}\frac{1}{2},\quad B=\tan^{-1}\frac{1}{5},\quad C=\tan^{-1}\frac{1}{8}$$

利用正切的三角和公式，

$$\tan(A+B+C)=\frac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C}{1-(\tan A\tan B+\tan B\tan C+\tan C\tan A)}$$

代入 $\tan A=\dfrac{1}{2}$，$\tan B=\dfrac{1}{5}$，$\tan C=\dfrac{1}{8}$，得

$$\tan(A+B+C)=1=\tan\frac{\pi}{4}$$

现证明 $\tan^{-1}t<t$：设 $f(x)=\tan x-x$，则 $f'(x)=\sec^2x-1=\tan^2x>0$，且 $f(0)=0$，故对所有 $x>0$ 有 $f(x)>0$，即 $\tan x>x$ 对 $x=\tan^{-1}t\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 恒成立，从而 $\tan^{-1}t<t$。因此

$$A+B+C<\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}=\frac{33}{40}<\frac{\pi}{2}$$

又 $A,B,C>0$，所以 $A+B+C\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$。在此区间上 $\tan\theta$ 严格递增，且仅在 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时 $\tan\theta=1$，故

$$A+B+C=\frac{\pi}{4}$$

证毕。

由恒等式

$$\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1} \frac{x+y}{1-xy}, \quad x>0,\ y>0,\ xy<1$$

有

$$\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{5} = \tan^{-1}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}} = \tan^{-1}\frac{7}{9}$$

故原式为

$$\tan^{-1}\frac{7}{9} + \tan^{-1}\frac{1}{8} = \tan^{-1}\frac{\frac{7}{9}+\frac{1}{8}}{1-\frac{7}{9}\cdot\frac{1}{8}} = \tan^{-1}1 = \frac{\pi}{4}$$

即得证。

14. 化简

$$\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}\right),$$

其中 $0<x<\dfrac{\pi}{4}$。

有理化分母，可得

$$\begin{aligned}
\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}\right) &= \tan^{-1}\left(\frac{(\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x})^2}{(1+\sin x)-(1-\sin x)}\right) \\
&= \tan^{-1}\left(\frac{2-2\sqrt{1-\sin^2 x}}{2\sin x}\right) \\
&= \tan^{-1}\left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\right) \\
&= \tan^{-1}\left(\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\right) \\
&= \tan^{-1}\left(\tan\frac{x}{2}\right) \\
&= \frac{x}{2}
\end{aligned}$$

15. 证明

$$f(x) = \tan^{-1}(3x) + \sin^{-1}\left[(9x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

为一常数，并求此常数。

对 x 求导,

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{3}{1+(3x)^2} + \frac{1}{\sqrt{1-(9x^2+1)^{-1}}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(18x)(9x^2+1)^{-\frac{3}{2}} \\
&= \frac{3}{1+9x^2} - \frac{9x}{\sqrt{\frac{9x^2}{9x^2+1}}} \cdot \frac{1}{(9x^2+1)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{3}{1+9x^2} - 3\sqrt{9x^2+1} \cdot \frac{1}{(9x^2+1)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{3}{1+9x^2} - \frac{3}{9x^2+1} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

因此 $f(x)$ 为常数, 取 $x=0$ 得

$$f(0) = \tan^{-1} 0 + \sin^{-1}(1) = \frac{\pi}{2}.$$

于是

$$\tan^{-1}(3x) + \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{9x^2+1}}\right) = \frac{\pi}{2}$$

16. 若 $0 \leqslant x \leqslant 1$, 求证

$$\cos(\sin^{-1} x) < \sin^{-1}(\cos x)$$

设 $\alpha = \sin^{-1} x$, 则 $\sin\alpha = x$. 又 $x \in [0,1], \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 从而有

$$\sqrt{1-x^2} = \cos\alpha$$

故

$$x + \sqrt{1-x^2} = \sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \leqslant \sqrt{2} < \frac{\pi}{2}$$

即

$$\sqrt{1-x^2} < \frac{\pi}{2} - x$$

由于 $x \in [0,1], x = \cos^{-1}(\cos x) = x$, 故得证

$$\cos(\sin^{-1} x) < \sin^{-1}(\cos x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

17. 若 $\alpha,\beta\in(0,2\pi)$, $\alpha\neq\beta$, 且 α,β 满足方程

$$\sin x+\sqrt{3}\cos x+a=0,$$

求实数 a 的取值范围, 以及 $\alpha+\beta$ 的值。

注意到原方程为

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{a}{2}$$

所以

$$-\frac{a}{2}\in[-1,1]\Rightarrow a\in[-2,2]$$

设 α,β 为原方程的解, 有

$$\begin{cases}\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha+a=0,\\ \sin\beta+\sqrt{3}\cos\beta+a=0.\end{cases}$$

两式相减得

$$(\sin\alpha-\sin\beta)+\sqrt{3}(\cos\alpha-\cos\beta)=0$$

和差化积得

$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}-2\sqrt{3}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=0$$

由于 $\alpha\neq\beta$, 有 $\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\neq 0$, 于是

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\sqrt{3}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=0\Rightarrow\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

又 $\alpha+\beta\in(0,4\pi)$, 因此

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{3}\quad\text{或}\quad\frac{7\pi}{3}$$

18. 已知方程

$$(\sin^{-1}x)^3+(\cos^{-1}x)^3=k\pi^3,|x|\leqslant 1,$$

其中 k 为常数。

(a) 证明该方程有解的一个必要非充分条件是 $k\geqslant\frac{1}{32}$。

由恒等式 $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\dfrac{\pi}{2}$,

$$(\sin^{-1}x)^3+\left(\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}x\right)^3=k\pi^3$$

整理得

$$(\sin^{-1} x)^2 - \frac{\pi}{2}(\sin^{-1} x) + \frac{\pi^2}{12}(1-8k) = 0 \tag{1}$$

欲使 (1) 有实数解, 判别式为非负:

$$\begin{aligned}
\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{\pi^2}{12}(1-8k) &\geqslant 0 \\
\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{3}(1-8k) &\geqslant 0 \\
\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{8}{3}k &\geqslant 0 \\
32k &\geqslant 1 \\
k &\geqslant \frac{1}{32}
\end{aligned}$$

由于条件 $k \geqslant \dfrac{1}{32}$ 可能会生成 $|\sin^{-1} x| > 1$ 的解即非实数解, 故此条件为必要非充分条件。

(b) 若方程只有一个解, 求该解。

若只有一个解, 则 $k = \dfrac{1}{32}$, 方程变为

$$(\sin^{-1} x)^2 - \frac{\pi}{2}(\sin^{-1} x) + \frac{\pi^2}{12}\left(1 - 8 \cdot \frac{1}{32}\right) = 0$$

即

$$\left(\sin^{-1} x - \frac{\pi}{4}\right)^2 = 0$$

解得

$$\sin^{-1} x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(c) 若 $k = \dfrac{7}{96}$, 求方程的两个解。

若 $k = \dfrac{7}{96}$, 将方程配方可得

$$\left(\sin^{-1} x - \frac{\pi}{4}\right)^2 = \frac{\pi^2}{36}$$

于是解为

$$\sin^{-1} x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{6} \Rightarrow \sin^{-1} x = \frac{5\pi}{12} \quad \text{或} \quad \sin^{-1} x = \frac{\pi}{12}$$

即

$$x = \sin\frac{5\pi}{12} \quad \text{或} \quad x = \sin\frac{\pi}{12}$$

平面向量

1. 在坐标平面上的平行四边形 $ABCD$ 中，若 $\overrightarrow{AB}=(4,8)$, $\overrightarrow{AD}=(1,4)$，求 $|\overrightarrow{AC}|+|\overrightarrow{BD}|$。

发现

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=(4+1,8+4)=(5,12)$$

且

$$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=(1-4,4-8)=(-3,-4)$$

因此

$$|\overrightarrow{AC}|+|\overrightarrow{BD}|=\sqrt{5^2+12^2}+\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}=18$$

2. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $AB=4, BC=5, AC=6$，求 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ 。

由余弦定理，

$$6^2=4^2+5^2-2\cdot4\cdot5\cdot\cos\angle ABC\Rightarrow\cos\angle ABC=\frac{1}{8}$$

所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}&=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\cos\theta\\&=4\cdot5\cdot\cos(\pi-\angle ABC)\\&=4\cdot5\cdot(-\cos\angle ABC)\\&=-\frac{5}{2}\end{aligned}$$

3. 已知 $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{0}$，且 $|\mathbf{a}|=3$, $|\mathbf{b}|=5$, $|\mathbf{c}|=7$，试求 $|2\mathbf{a}+\mathbf{b}|$。

由已知

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{0}\Rightarrow\mathbf{a}+\mathbf{b}=-\mathbf{c}\Rightarrow|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=|-\mathbf{c}|=|\mathbf{c}|\Rightarrow|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2=|\mathbf{c}|^2$$

展开得

$$|\mathbf{a}|^2+2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+|\mathbf{b}|^2=|\mathbf{c}|^2\Rightarrow3^2+2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+5^2=7^2\Rightarrow\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\frac{15}{2}$$

于是

$$|2\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2=4|\mathbf{a}|^2+4\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+|\mathbf{b}|^2=4\cdot 3^2+4\cdot\frac{15}{2}+5^2=91\Rightarrow|2\mathbf{a}+\mathbf{b}|=\sqrt{91}$$

4. 已知 $|\mathbf{a}|=1$, 且 $\mathbf{b}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})=0$, 求 $|\mathbf{b}-\mathbf{a}||\mathbf{b}+\mathbf{a}|$ 的最大值。

由 $\mathbf{b}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})=0$ 得

$$|\mathbf{b}|^2-\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0\implies\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{b}|^2$$

于是

$$\begin{aligned}|\mathbf{b}-\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}+\mathbf{a}|^2&=[(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})][(\mathbf{b}+\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{a})]\\&=(|\mathbf{b}|^2-2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+|\mathbf{a}|^2)(|\mathbf{b}|^2+2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+|\mathbf{a}|^2)\\&=(|\mathbf{b}|^2-2|\mathbf{b}|^2+1)(|\mathbf{b}|^2+2|\mathbf{b}|^2+1)\\&=(1-|\mathbf{b}|^2)(3|\mathbf{b}|^2+1)\end{aligned}$$

设 $|\mathbf{b}|^2=m$, 配方得

$$|\mathbf{b}-\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}+\mathbf{a}|^2=(1-m)(3m+1)=-3m^2+2m+1=-3\left(m-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{4}{3}$$

当 $m=\frac{1}{3}$ 时取得最大值 $\frac{4}{3}$, 此时

$$|\mathbf{b}-\mathbf{a}||\mathbf{b}+\mathbf{a}|=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

5. 平面上非零向量 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 满足 $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$, 且 $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=20|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|,\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}=25|\mathbf{b}|\cdot|\mathbf{c}|$, 求 $|\mathbf{c}|$ 的最小值。

设向量 $\mathbf{b}$ 与 $\mathbf{c}$ 的夹角为 θ, 又因 $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$, 所以 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{c}$ 的夹角为 $90^\circ-\theta$。由内积定义,

$$\cos\theta=\frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}}{|\mathbf{b}||\mathbf{c}|},\quad\cos(90^\circ-\theta)=\frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{c}||\mathbf{a}|}.$$

据题意有,

$$|\mathbf{c}|\cos\theta=\frac{20|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|},\quad|\mathbf{c}|\sin\theta=\frac{25|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}.$$

由 AM-GM 不等式,

$$|\mathbf{c}|^2=\frac{400|\mathbf{a}|^2}{|\mathbf{b}|^2}+\frac{625|\mathbf{b}|^2}{|\mathbf{a}|^2}\geqslant 2\sqrt{400\cdot 625}=1000$$

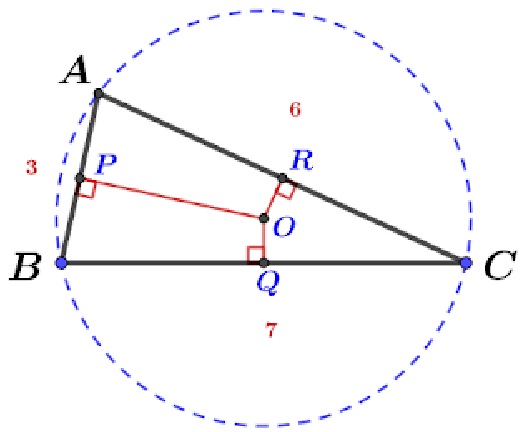
所以

$$|\mathbf{c}| \geqslant 10\sqrt{10}$$

6. 设 $\vec{a},\vec{b}$ 为两个垂直的平面向量，且 $|\vec{a}|=2|\vec{b}|=10$. 当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时，记向量 $t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$ 与向量 $(t-\frac{1}{5})\vec{a}+(1-t)\vec{b}$ 最大夹角为 θ，则 $\cos\theta=$

(待解)

7. 已知 $\triangle ABC$ 中，$AB=3, AC=6, BC=7, O$ 为外心,I 为内心，求 $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{BC}$。



内心 I 的向量表示为

$$\overrightarrow{OI}=\frac{7\overrightarrow{OA}+6\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}}{7+6+3}$$

于是

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{BC}&=\frac{7}{16}\overrightarrow{OA}\cdot\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)+\frac{6}{16}\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{BC}+\frac{3}{16}\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{BC}\\&=\frac{7}{16}\left(\frac{1}{2}\cdot 3^2-\frac{1}{2}\cdot 6^2\right)+\frac{6}{16}\left(-\frac{1}{2}\cdot 7^2\right)+\frac{3}{16}\left(\frac{1}{2}\cdot 7^2\right)=-\frac{21}{2}\end{aligned}$$

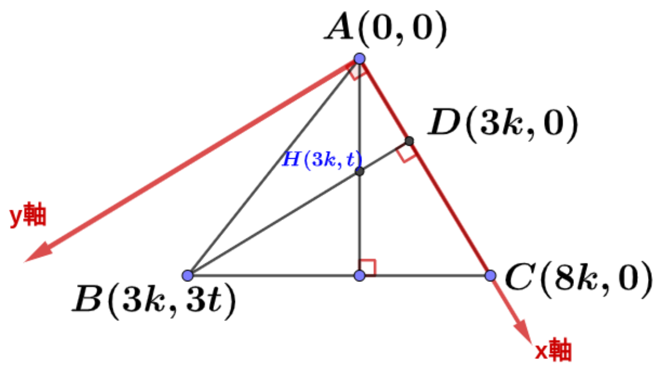
其中 O 为外心时，有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{YX}&=\overrightarrow{OX}\cdot(\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OY})\\&=|\overrightarrow{OX}|^2-\overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{OY}\\&=|\overrightarrow{OX}|^2-\frac{1}{2}(|\overrightarrow{OX}|^2+|\overrightarrow{OY}|^2-|\overrightarrow{XY}|^2)\\&=\frac{1}{2}|\overrightarrow{XY}|^2\end{aligned}$$

8. 若 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心, 且

$$\overrightarrow{AH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC},$$

求 $\cos\angle BAC$。



因 A,D,C 共线, 且

$$\overrightarrow{AH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}\implies \overline{AD}:\overline{AC}=3:8,????$$

设

$$A(0,0),\quad D(3k,0),\quad C(8k,0),\quad H(3k,t),\quad B(3k,s),$$

则

$$(3k,t)=\frac{1}{3}(3k,s)+\frac{1}{4}(8k,0)\implies s=3t,$$

所以

$$B(3k,3t).$$

由垂心定义, 有

$$\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}\implies (3k,t)\cdot(5k,-3t)=15k^2-3t^2=0\implies t=\sqrt{5}k.$$

计算

$$\cos\angle BAC=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{24k^2}{\sqrt{9k^2+9t^2}\cdot 8k}=\frac{24k^2}{\sqrt{54k^2}\cdot 8k}=\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

(待验证)

9. 已知三角形 ABC 的外心 O 满足

$$2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}+4\overrightarrow{OC}=0.$$

求 $\sin A$.

由题意

$$3\overrightarrow{OB}+4\overrightarrow{OC}=-2\overrightarrow{OA}.$$

两边平方得

$$9|\overrightarrow{OB}|^2+24\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+16|\overrightarrow{OC}|^2=4|\overrightarrow{OA}|^2$$

注意到外心到各顶点距离相等, 设 $R=|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|$, 代入得

$$9R^2+24\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+16R^2=4R^2.$$

整理得

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=-\frac{7}{8}R^2.$$

又因圆心角 $=2\times$ 圆周角,

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OC}|\cos\angle BOC=R^2\cos 2A,$$

有

$$\cos 2A=1-2\sin^2 A=-\frac{7}{8}\Rightarrow \sin A=\frac{\sqrt{15}}{4}\quad(\sin A>0).$$

10. 设 $\triangle ABC$ 的外心为 O, 重心为 H, 若 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|=\sqrt{3}$, 求 $|\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}|$。

设 O 为外心,G 为重心,H 为垂心, 由于 G 是重心, 有 $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$, 于是

$$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|=|3\overrightarrow{OG}+(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})|=3|\overrightarrow{OG}|=\sqrt{3}\Rightarrow|\overrightarrow{OG}|=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

且

$$|\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}|=|3\overrightarrow{HG}+(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})|=3|\overrightarrow{HG}|$$

由欧拉线定理,

$$|\overrightarrow{HG}|=2|\overrightarrow{OG}|=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

所以

$$|\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}|=2\sqrt{3}$$

11. (a) 在 $\triangle ABC$ 中, 有 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$, 求 $\cos A$。

设 $a=|\overrightarrow{BC}|, b=|\overrightarrow{AC}|, c=|\overrightarrow{AB}|$，由余弦定理，

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2-2|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AB}|\cos A$$

故

$$|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AB}|\cos A=-\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}.$$

同理，

$$|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|\cos B=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{a^2+c^2-b^2}{2},$$

$$|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BC}|\cos C=-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2}.$$

因此

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{2}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}=\frac{a^2+c^2-b^2}{2}\Rightarrow a=b=c$$

即 $\triangle ABC$ 为等边三角形，有

$$\cos A=\frac{1}{2}$$

(b) 在 $\triangle ABC$ 中，$2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=3\,\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$，求 $\cos A$。

由上，

$$3\,\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=-\frac{3}{2}(b^2+c^2-a^2)$$

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=-\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2)$$

$$2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-(a^2+c^2-b^2)$$

设

$$\frac{3}{2}(b^2+c^2-a^2)=\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2)=a^2+c^2-b^2=3t$$

可解得

$$a^2=\frac{9t}{2}, b^2=4t, c^2=\frac{5t}{2}$$

于是

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{2t}{2\sqrt{10}\,t}=\frac{\sqrt{10}}{10}$$

12. 已知 G 为 $\triangle ABC$ 的重心，且

$$6\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{GC}\cdot\overrightarrow{CA},$$

求 $\sin A$。

设 $AB=c, BC=a, CA=b$, 由余弦定理

$$\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{3}\left(c^2+\frac{b^2+c^2-a^2}{2}\right)=-\frac{b^2+3c^2-a^2}{6},$$

同理

$$\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{BC}=-\frac{c^2+3a^2-b^2}{6},\quad \overrightarrow{GC}\cdot\overrightarrow{CA}=-\frac{a^2+3b^2-c^2}{6}.$$

由题意, 可解得

$$b^2+3c^2-a^2=\frac{1}{2}\left(c^2+3a^2-b^2\right)=\frac{1}{3}\left(a^2+3b^2-c^2\right)\Rightarrow a^2=b^2=\frac{5}{2}c^2$$

由余弦定理,

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}\cdot\frac{c}{b}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{2}{5}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$$

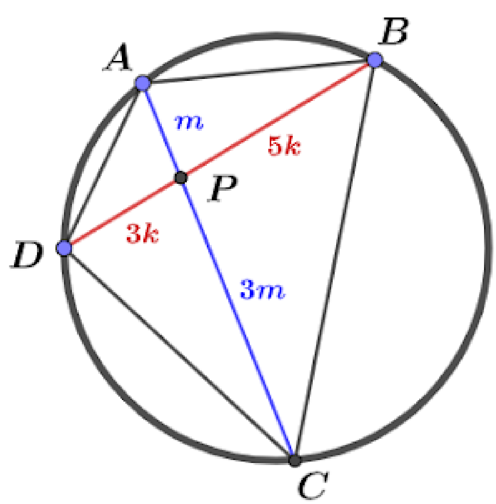
所以

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

13. 圆之内接四边形 $ABCD$ 满足

$$\overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{2}\overrightarrow{AD}$$

求 $\dfrac{\sin\angle DAB}{\sin\angle ABC}$。



设 AC 与 BD 交于 P, 并令

$$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AC}=\frac{3t}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{5t}{2}\overrightarrow{AD}$$

由于 P 在 BD 上, 解得

$$\frac{3t}{2}+\frac{5t}{2}=1\Rightarrow t=\frac{1}{4}$$

于是

$$\overrightarrow{AP}=\frac{3}{8}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{8}\overrightarrow{AD}\Rightarrow DP=3k,PB=5k,k>0$$

同理,

$$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BA}+\frac{2}{5}(\overrightarrow{AC}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB})=\frac{8}{5}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}=\frac{6}{5}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$$

解得

$$\overrightarrow{BP}=t\overrightarrow{BD}=\frac{6t}{5}\overrightarrow{BA}+\frac{2t}{5}\overrightarrow{BC}\Rightarrow t=\frac{5}{8}\Rightarrow\overrightarrow{BP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}\Rightarrow AP=m,PC=3m$$

由圆幂定理,

$$AP\cdot PC=BP\cdot PD\Rightarrow 3m^2=15k^2\Rightarrow\frac{k}{m}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

由正弦定理,

$$\frac{\sin\angle DAB}{\sin\angle ABC}=\frac{AC}{BD}=\frac{8k}{4m}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

14. 设 $\triangle ABC$ 的三边 BC,CA,AB 的长度分别为 a,b,c, 在边 BC,CA,AB 上分别取点 L,M,N 使得 $BL:LC=c:b,CM:MA=a:c,AN:NB=b:a$。若

$$b\overrightarrow{BM}+c\overrightarrow{CN}+a\overrightarrow{AL}=\vec{0},$$

试证 $\triangle ABC$ 为正三角形。

据题意有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AL}&=\frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}\\\overrightarrow{BM}&=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{AB}+\frac{c}{a+c}\overrightarrow{AC}\\\overrightarrow{CN}&=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}-\frac{a}{a+b}\overrightarrow{AB}=\frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

故 $b\overrightarrow{BM}+c\overrightarrow{CN}+a\overrightarrow{AL}$ 为

$$b\left(-\overrightarrow{AB}+\frac{c}{a+c}\overrightarrow{AC}\right)+c\left(\frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)+a\left(\frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}\right)$$

$$=\left(-b+\frac{bc}{a+b}+\frac{ab}{b+c}\right)\overrightarrow{AB}+\left(\frac{bc}{a+c}-c+\frac{ac}{b+c}\right)\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}$$

于是由余弦定理,

$$-b+\frac{bc}{a+b}+\frac{ab}{b+c}=0\Rightarrow\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}=1\Rightarrow b^2=a^2+c^2-ac\Rightarrow\angle B=60^\circ$$

同理

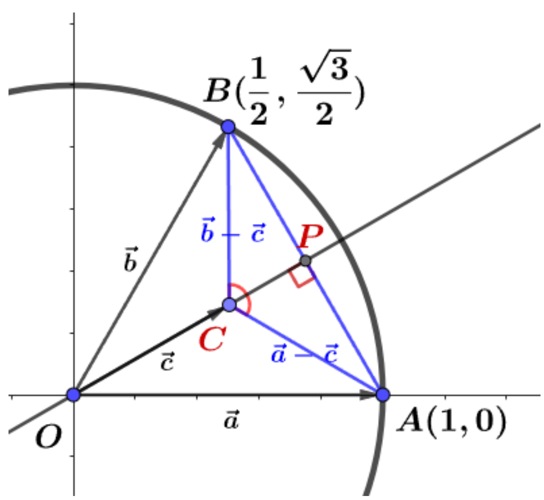
$$\frac{bc}{a+c}-c+\frac{ac}{b+c}=0\Rightarrow\angle C=60^\circ$$

因此得证 $\triangle ABC$ 为正三角形。

15. 点 O 在三角形 $\triangle ABC$ 内, 且满足 $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$, 求三角形面积的比值 $\frac{[\triangle ABC]}{[\triangle AOC]}=3$

(待解)

16. 已知两向量 $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|=1$, 且 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\dfrac{1}{2}$, 若向量 $\mathbf{c}$ 满足 $\mathbf{a}-\mathbf{c}$ 与 $\mathbf{b}-\mathbf{c}$ 夹角为 120°, 求 $|\mathbf{c}|$ 的最小值。



设 $\mathbf{a}=\overrightarrow{OA},\mathbf{b}=\overrightarrow{OB},\mathbf{c}=\overrightarrow{OC}$, 其中 O 为原点。由

$$|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|=1,\quad \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\frac{1}{2}$$

可知 A,B 在单位圆上，且 $\angle AOB=60°$。当 $|\mathbf{c}|$ 最小时，有 $|\mathbf{a}-\mathbf{c}|=|\mathbf{b}-\mathbf{c}|$，此时 C 在 AB 的中垂线上，且靠近原点 O。设 $A(1,0),B\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，且 P 为 AB 中点,OP 为等边 $\triangle OAB$ 的高，有

$$OP=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$\triangle ACP$ 为 $30°-60°-90°$ 三角形，故

$$CP=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

因此

$$|\mathbf{c}|=OC=OP-CP=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

17. 已知 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ 为三个非零向量，其中 $|\mathbf{a}|=4$, $|\mathbf{b}|=6$, $\mathbf{a}$ 在 $\mathbf{b}$ 上的正射影长为 1，若 $(\mathbf{c}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{b})=0$，试求 $|\mathbf{c}|$ 的最大可能值。

设

$$\begin{cases}B(6,0)\\A(1,\sqrt{15})\\C(a,b)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathbf{a}=\overrightarrow{OA}\\\mathbf{b}=\overrightarrow{OB}\\\mathbf{c}=\overrightarrow{OC}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathbf{c}-\mathbf{a}=(a-1,b-\sqrt{15})\\\mathbf{c}-\mathbf{b}=(a-6,b)\end{cases}$$

则

$$(\mathbf{c}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{b})=(a-1)(a-6)+b(b-\sqrt{15})=0$$

由拉格朗日乘子法，令

$$\begin{cases}f(a,b)=a^2+b^2\\g(a,b)=(a-1)(a-6)+b(b-\sqrt{15})\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f_a=\lambda g_a\\f_b=\lambda g_b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2a=(2a-7)\lambda\\2b=(2b-\sqrt{15})\lambda\end{cases}$$

则

$$\frac{a}{b}=\frac{2a-7}{2b-\sqrt{15}}\Rightarrow b=\frac{\sqrt{15}}{7}a$$

代入 $g(a,b)=0$ 得

$$32a^2-224a+147=0\Rightarrow a=\frac{28+7\sqrt{10}}{8}$$

故

$$|\mathbf{c}|=\sqrt{f(a,b)}=\sqrt{a^2+\frac{15}{49}a^2}=\frac{8}{7}\cdot\frac{28+7\sqrt{10}}{8}=4+\sqrt{10}$$

(非通解)

18. 已知 $\triangle ABC$ 为边长为 1 的正三角形, 设 BC 边上有 $n-1$ 个等分点, 由 B 点到 C 点的顺序为 $P_1,P_2,\ldots,P_{n-1}$, 且令 $B=P_0,C=P_n$。若

$$S_n=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP_0}+\overrightarrow{AP_1}\cdot\overrightarrow{AP_2}+\overrightarrow{AP_3}\cdot\overrightarrow{AP_4}+\cdots+\overrightarrow{AP_{n-1}}\cdot\overrightarrow{AC},$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{n}$。

由 $B=P_0,C=P_n$ 可得

$$|\overrightarrow{AP_0}|=|\overrightarrow{AB}|=1,\quad \overrightarrow{P_0P_k}=\frac{k}{n}\overrightarrow{P_0P_n}=\frac{k}{n}\overrightarrow{BC},\quad k=0,1,\ldots,n$$

则

$$S_n=\sum_{k=0}^{n-1}\overrightarrow{AP_k}\cdot\overrightarrow{AP_{k+1}}=\sum_{k=0}^{n-1}(\overrightarrow{AP_0}+\overrightarrow{P_0P_k})\cdot(\overrightarrow{AP_0}+\overrightarrow{P_0P_{k+1}})$$

展开得

$$S_n=\sum_{k=0}^{n-1}\left(|\overrightarrow{AP_0}|^2+\overrightarrow{AP_0}\cdot\overrightarrow{P_0P_{k+1}}+\overrightarrow{P_0P_k}\cdot\overrightarrow{AP_0}+\overrightarrow{P_0P_k}\cdot\overrightarrow{P_0P_{k+1}}\right)$$

代入 $\overrightarrow{P_0P_k}=\dfrac{k}{n}\overrightarrow{BC}$ 及 $\overrightarrow{AP_0}=\overrightarrow{AB}$ 得

$$S_n=\sum_{k=0}^{n-1}\left(1+\overrightarrow{AB}\cdot\frac{2k+1}{n}\overrightarrow{BC}+\frac{k(k+1)}{n^2}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{2k+1}{n}\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{k(k+1)}{n^2}\right)$$

化简得

$$S_n=\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{2k+1}{2n}+\frac{k(k+1)}{n^2}\right)=n-\frac{n^2-n+1}{2n}+\frac{n^2-1}{3n}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{n^2-n+1}{2n^2}+\frac{n^2-1}{3n^2}\right)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$$

直角坐标

1. $\triangle ABC$ 的三边 BC, AC, AB, 其中点坐标分别为 $(1,5),(-2,1),(4,3)$, 试求 A, B, C 的坐标。

设 $A(a_1,a_2)$, $B(b_1,b_2)$, $C(c_1,c_2)$, 据题意有

$$\begin{cases}\dfrac{b_1+c_1}{2}=1\\ \dfrac{a_1+c_1}{2}=-2\\ \dfrac{a_1+b_1}{2}=4\end{cases} \quad \text{及} \quad \begin{cases}\dfrac{b_2+c_2}{2}=5\\ \dfrac{a_2+c_2}{2}=1\\ \dfrac{a_2+b_2}{2}=3\end{cases}$$

解得 $A(1,-1)$, $B(7,7)$, $C(-5,3)$

2. 已知 $A(1,2), B(3,3)$, 线段 AB 绕某点 P 旋转后变成了线段 $A'B'$, 其中 $A'(3,1), B'(4,3)$。求 P 的坐标。

发现旋转中心 P 即线段 AA' 和 BB' 垂直平分线的交点。$A(1,2)$,$A'(3,1)$ 中点为 $\left(2,\dfrac{3}{2}\right)$, 于是垂直平分线为

$$y-\frac{3}{2}=2(x-2)\Rightarrow y=2x-\frac{1}{2}$$

同理可得 $B(3,3), B'(4,3)$ 垂直平分线为

$$x=\frac{7}{2}$$

联立方程解得 $P\left(\dfrac{7}{2},\dfrac{9}{2}\right)$

3. 直线 $y=mx+2$ 与 $|x|+|y|=1$ 相交, 求 m 的范围。

即求方程组

$$\begin{cases}y=mx+2\\ |x|+|y|=1\end{cases}$$

有实数解时 m 的范围。发现, 由作图知即求

$$\begin{cases} y = mx + 2 \\ x + |y| = 1 \end{cases}$$

有实数解时 m 的范围。分情况再以判别式的性质可求得 $m \geqslant 2, m \leqslant -2$

4. 设 $P_1(1,1)$, $P_2(-2,-1)$, 直线 $x+y+1=0$ 与 P_1P_2 相交于点 P, 求 $\dfrac{P_1P}{PP_2}$。

是否在考虑作 P_1P_2 的直线方程式 $\to$ 与直线 $x+y+1=0$ 联立解得点 $P \to$ 用距离公式? 其实只需这样: 由相似三角形,

$$\frac{P_1P}{PP_2} = \frac{\left|\dfrac{1+1+1}{\sqrt{1^2+1^2}}\right|}{\left|\dfrac{-2-1+1}{\sqrt{1^2+1^2}}\right|} = \frac{3}{2}$$

轻轻松松。

5. 平面上有两定点 $A(1,4)$ 与 $B(5,2)$, 若点 P 在直线 $L: x+y-6=0$ 上移动, 则 $|PA-PB|$ 的最大值是多少?

设 $P(t, 6-t)$, 则

$$\begin{aligned} f(t) = |PA-PB| &= \left|\sqrt{(t-1)^2+(2-t)^2} - \sqrt{(t-5)^2+(4-t)^2}\right| \\ &= \left|\frac{((t-1)^2+(2-t)^2)-((t-5)^2+(4-t)^2)}{\sqrt{(t-1)^2+(2-t)^2}+\sqrt{(t-5)^2+(4-t)^2}}\right| \\ &= \left|\frac{12t-36}{\sqrt{2t^2-6t+5}+\sqrt{2t^2-18t+41}}\right| \\ &= \left|\frac{12-\frac{36}{t}}{\sqrt{2-\frac{6}{t}+\frac{5}{t^2}}+\sqrt{2-\frac{18}{t}+\frac{41}{t^2}}}\right| \end{aligned}$$

故

$$\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = \frac{12}{2\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

6. 已知坐标平面上三条直线 L, L_1, L_2, 若 L 为水平线, L_1, L_2 的斜率分别为 $\dfrac{2}{3}$ 与 $-\dfrac{3}{2}$, 且 L 被 L_1, L_2 截出的线段长度为 26, 求三线所围成的三角形面积。

观察到 $m_{L_1}\cdot m_{L_2}=\dfrac{2}{3}\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)=-1$, 即 $L_1\perp L_2$, 故欲求三角形的高。设 L_1,L_2 分别交 L 于点 $(p,q),(p+26,q)$, 解

$$\begin{cases} y-q=\dfrac{2}{3}(x-p) \\ y-q=-\dfrac{3}{2}(x-p-26) \end{cases}$$

可得 L_1,L_2 的交点为 $(p+18,q+12)$。故三角形面积为 $\dfrac{1}{2}\cdot 26\cdot 12=156$。

7. 已知直线

$$L_1: 3x+3y=2,\qquad L_2: 2x-3y=3,\qquad L_3: x-ay=-2$$

将平面分成六个区域, 求 a 的所有可能值。

情况一：$L_1 /\!/ L_3$, 有 $a=-1$。

情况二：$L_2 /\!/ L_3$, 有 $a=\dfrac{3}{2}$。

情况三：L_1,L_2 与 L_3 有唯一公共点, 解 L_1,L_2 得 $\left(1,-\dfrac{1}{3}\right)$, 故 $a=-9$。

经检验,a 的所有可能值为

$$a=-1,\frac{3}{2},-9$$

8. 若三直线

$$L_1: 2x-y-3=0,\quad L_2: 2x+ay+3=0,\quad L_3: ax-y-6=0,$$

不能围成一三角形, 求实数 a 之值。

情况一：$L_1 /\!/ L_2$, 有 $a=-1$。

情况二：$L_1 /\!/ L_3$, 有 $a=2$。

情况三：$L_2 /\!/ L_3$, 有 $a^2=-2$, 此时无实数解。

情况四：L_1,L_2 与 L_3 有唯一公共点, 联立 L_1,L_3 得

$$x=\frac{3}{a-2},\quad y=\frac{12-3a}{a-2},\quad a\neq 2$$

代入 L_2 解得

$$-3a(a-5)=0\Rightarrow a=0 \text{ 或 } a=5$$

经检验, 实数 a 之可能值为

$$a = -1, 0, 2, 5$$

9. 三直线

$$L_1 : x - y + 2 = 0, \quad L_2 : 2x + 3y + 9 = 0, \quad L_3 : 8x + 3y - 27 = 0,$$

围成三角形 $\triangle ABC$, 若点 $P = (3, k)$ 在三角形内部, 求 k 的范围。

欲使 $P = (3, k)$ 在三角形内, 需满足

$$\begin{cases} 3 - k + 2 > 0 \\ 2(3) + 3k + 9 > 0 \\ 8x + 3y - 27 < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} k < 5 \\ k > -5 \\ k < 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad -5 < k < 1$$

10. 设 x, y 为二元一次联立不等式图形上的任一点, 已知

$$\begin{cases} x + y \geqslant -1 \\ x - y \geqslant -3 \\ 4x - y \leqslant 6 \end{cases}$$

函数 $P = x + ky$ 在点 $(1, -2)$ 取得唯一最小值, 求实数 k 的范围。

由作图得知求出可行解之顶点分别为 $(1, -2), (3, 6), (-2, 1)$, 据题意有

$$\begin{cases} P(1, -2) < P(-2, 1) \\ P(1, -2) < P(3, 6) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 1 - 2k < -2 + k \\ 1 - 2k < 3 + 6k \end{cases} \quad \Rightarrow \quad k > 1$$

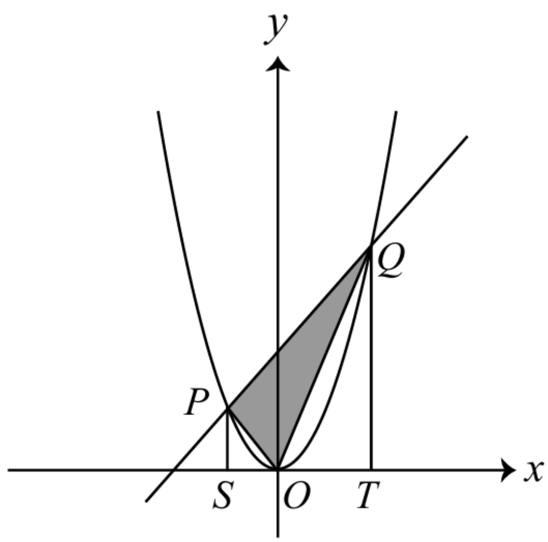
11. 在坐标平面上, 求二元一次联立不等式

$$|x - 2y| \leqslant 2, \quad |x + 2y| \leqslant 2,$$

的解所成区域面积。

由作图得知该区域为一长为 4, 宽为 2 的菱形, 故面积为 8。

12. 已知 $k>0$, 直线 $y=3kx+4k^2$ 与抛物线 $y=x^2$ 相交于两点 P 和 Q。若 O 是原点, 且 $\triangle OPQ$ 的面积为 80, 求该直线的斜率。



联立直线 $y=3kx+4k^2$ 与抛物线 $y=x^2$, 解得

$$P=(-k,k^2),Q=(4k,16k^2)$$

设 S,T 为 P,Q 在 x 轴的垂足, 则

$$SP=k^2,TQ=16k^2,ST=4k-(-k)=5k$$

且由

$$\begin{aligned}80=[\triangle OPQ]&=[\text{梯形}PSTQ]-[\triangle PSO]-[\triangle QTO]\\&=\frac{1}{2}(k^2+16k^2)\cdot 5k-\frac{1}{2}\cdot k^2\cdot k-\frac{1}{2}\cdot 16k^2\cdot 4k=10k^3\end{aligned}$$

可得 $k=2$, 因此直线斜率为 $3k=6$。

13. 设 P_1,P_2,P_3 为抛物线 $y=x^2$ 上的三点,l_1,l_2,l_3 分别为抛物线在这些点处的切线。切线两两相交, 设 $Q_{12}=l_1\cap l_2,Q_{13}=l_1\cap l_3,Q_{23}=l_2\cap l_3$。求 $\triangle P_1P_2P_3$ 与 $\triangle Q_{12}Q_{13}Q_{23}$ 面积之比。

设 $P_1=(a,a^2),P_2=(b,b^2),P_3=(c,c^2)$ 且 $a\neq b\neq c$。切线方程为

$$l_1: y=2ax-a^2,\quad l_2: y=2bx-b^2,\quad l_3: y=2cx-c^2$$

因此

$$Q_{12}=\left(\frac{a+b}{2},ab\right),\quad Q_{13}=\left(\frac{a+c}{2},ac\right),\quad Q_{23}=\left(\frac{b+c}{2},bc\right)$$

利用向量叉积求面积：

$$2\cdot\mathrm{Area}(P_1P_2P_3)=\left|\vec{P_1P_2}\times\vec{P_1P_3}\right|=\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ b-a & b^2-a^2 & 0\\ c-a & c^2-a^2 & 0\end{matrix}\right\|=|(b-a)(c-a)(c-b)|$$

类似地，

$$2\cdot\mathrm{Area}(Q_{12}Q_{13}Q_{23})=\left|\vec{Q_{12}Q_{13}}\times\vec{Q_{12}Q_{23}}\right|=\frac{1}{2}|(b-a)(c-a)(c-b)|$$

故

$$\frac{\mathrm{Area}(P_1P_2P_3)}{\mathrm{Area}(Q_{12}Q_{13}Q_{23})}=2$$

14. 已知抛物线 $P_1: f(x)=x^2+bx+c$ 的顶点为 P，抛物线 $P_2: g(x)=-x^2+dx+e$ 的顶点为 Q。P,Q 不重合，且都在 P_1,P_2 上。

(a) 证明 $bd=2(e-c)$。

抛物线 P_1 顶点 P 在 $x=-\frac{1}{2}b$ 上。由于 P 在两条抛物线上，

$$\frac{1}{4}b^2+b\left(-\frac{1}{2}b\right)+c=-\frac{1}{4}b^2+d\left(-\frac{1}{2}b\right)+e$$

化简得

$$bd=2(e-c)$$

因此得证。

(b) 证明经过 P 与 Q 的直线斜率为 $\frac{1}{2}(b+d)$，y 截距为 $\frac{1}{2}(c+e)$。

顶点 P,Q 坐标为

$$P\left(-\frac{1}{2}b,-\frac{1}{4}b^2+c\right),Q\left(-\frac{1}{2}d,-\frac{1}{4}d^2+e\right)$$

直线 PQ 的斜率为

$$\frac{(-\frac{1}{4}b^2+c)-(-\frac{1}{4}d^2+e)}{-\frac{1}{2}b-(-\frac{1}{2}d)}=\frac{1}{2}(b+d)$$

故直线方程为

$$y=\frac{1}{2}(b+d)x+\frac{1}{2}(c+e)$$

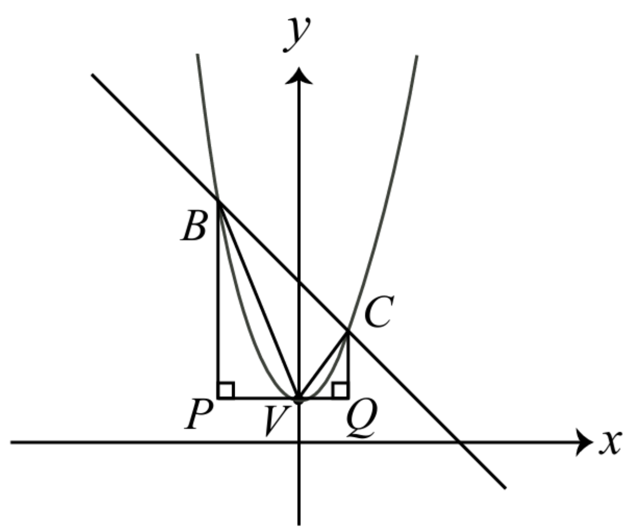
因此斜率为 $\frac{1}{2}(b+d), y$ 截距为 $\frac{1}{2}(c+e)$。

两抛物线方程相加得到 $2y=(b+d)x+(c+e)$, 即

$$y=\frac{1}{2}(b+d)x+\frac{1}{2}(c+e)$$

因此 P 与 Q 在同一条直线上, 直线斜率为 $\frac{1}{2}(b+d), y$ 截距为 $\frac{1}{2}(c+e)$。

15. 已知 $a>\frac{1}{2}$, 抛物线方程为 $y=ax^2+2$, 顶点为 V。抛物线与直线 $y=-x+4a$ 相交于 B 和 C 两点, 若 $\triangle VBC$ 的面积为 $\frac{72}{5}$, 求 a。



抛物线 $y=ax^2+2$ 的顶点在 $x=0$ 上, 因此 $V=(0,2)$。联立抛物线与直线解得

$$x=-2 \text{ 或 } x=\frac{2a-1}{a}.$$

因此

$$B(-2,4a+2),\quad C\left(2-\frac{1}{a},4a-2+\frac{1}{a}\right)$$

设 P,Q 在通过 V 的水平线上, 使得 BP,CQ 垂直于 PQ, 则

$$P(-2,2),Q\left(2-\frac{1}{a},2\right),$$

且

$$BP=4a,\quad CQ=4a-4+\frac{1}{a},\quad PQ=4-\frac{1}{a}$$

因此 $\triangle VBC$ 面积为

$$\begin{aligned}\frac{72}{5}&=[\triangle VBC]=[\text{梯形}PBCQ]-[\triangle BPV]-[\triangle CQV]\\&=\frac{1}{2}\left(4a+4a-4+\frac{1}{a}\right)\left(4-\frac{1}{a}\right)-\frac{1}{2}\cdot 4a\cdot 2-\frac{1}{2}\left(4a-4+\frac{1}{a}\right)\left(2-\frac{1}{a}\right)\end{aligned}$$

解方程可得

$$a=\frac{5}{2}>\frac{1}{2}$$

16. 一个等边三角形位于第一象限, 顶点为 $(0,0),(x_1,4),(x_2,11)$, 求序对 (x_1,x_2)。

构造复平面, 复数 x_2+11i 逆时针旋转 60° 后变为复数 x_1+4i, 即

$$x_2+11i=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(x_1+4i)$$

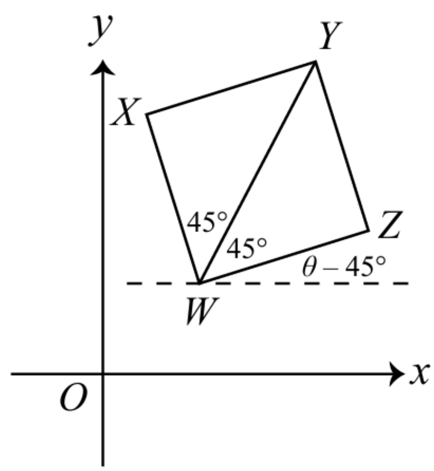
比较实部与虚部得

$$x_2=\frac{1}{2}x_1-2\sqrt{3},\quad 11=\frac{\sqrt{3}}{2}x_1+2$$

解得

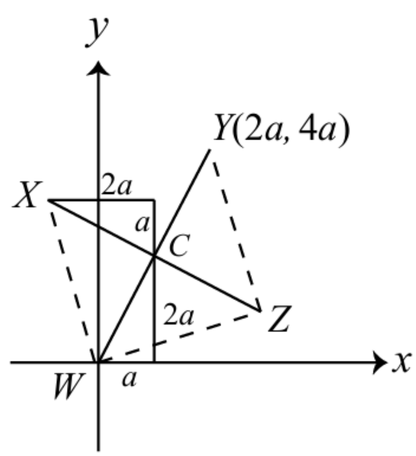
$$(x_1,x_2)=(6\sqrt{3},\sqrt{3})$$

17. 已知正方形 $WXYZ$ 的对角线 WY 的斜率为 2, 求直线 WX 及 XY 的斜率之和。



设 WY 与水平线成夹角 θ, 有 $\tan\theta = 2$, 因此

$$m_{WX} + m_{XY} = m_{WX} + m_{WZ} = \tan(\theta + 45^\circ) + \tan(\theta - 45^\circ) = \frac{2+1}{1-2\cdot 1} + \frac{2-1}{1+2\cdot 1} = -\frac{8}{3}$$



将正方形平移使得 W 为原点。设 $Y(2a, 2b)$, 有

$$m_{WY} = \frac{2b-0}{2a-0} = 2 \Rightarrow b = 2a \Rightarrow Y(2a, 4a)$$

对角线 WY 的中点为 $C(a, 2a)$, 由于 $WC \perp CX$,

$$m_{WC} = 2 \Rightarrow m_{XC} = -\frac{1}{2}$$

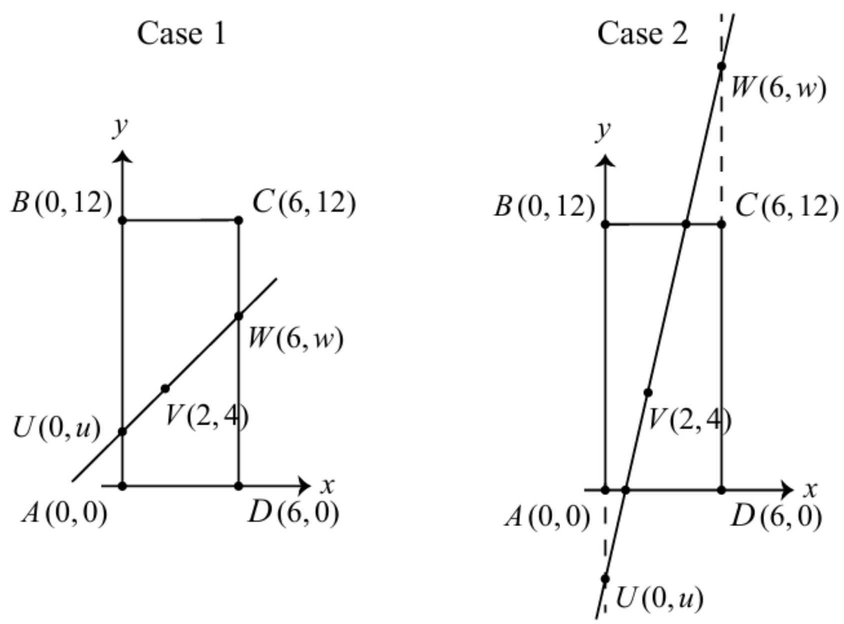
于是由图可得 $X(-a,3a)$, 因此

$$m_{WX}=\frac{3a-0}{-a-0}=-3.$$

又因 $XY\perp WX$, 所以 $m_{XY}=\frac{1}{3}$, 斜率之和为

$$-3+\frac{1}{3}=-\frac{8}{3}$$

18. 矩形 $ABCD$ 的顶点为 $A(0,0),B(0,12),C(6,12),D(6,0)$。一直线经过点 $U(0,u),V(2,4),W(6,w)$, 且将矩形 $ABCD$ 分成两个梯形, 使得该两个梯形面积之比为 $5:3$, 求 U,W。



矩形 $ABCD$ 面积为 $6\cdot 12=72$, 因此两个梯形面积分别为

$$\frac{5}{8}\cdot 72=45,\quad \frac{3}{8}\cdot 72=27.$$

情况 **1:** 直线交于 AB 与 CD。直线 UV 与 VW 共线, 有

$$\frac{4-u}{2-0}=\frac{w-4}{6-2}\Rightarrow w=12-2u.$$

其中 $0<u,w<12$, 梯形 $ADWU$ 的面积为

$$\frac{1}{2}\cdot 6\cdot(w+u)=3(w+u)=3(12-u)$$

若 $3(12-u)=27$, 解得 $U(0,3),W(6,6)$; 若 $3(12-u)=45$, 解得 $u=-3$, 不合题意。

情况 **2:** 直线交于 AD 与 BC 设交点为 $E(e,0),F(f,12)$, 此时

$$\frac{4}{2-e}=\frac{8}{f-2}\Rightarrow f=6-2e.$$

梯形 $BFEA$ 的面积为

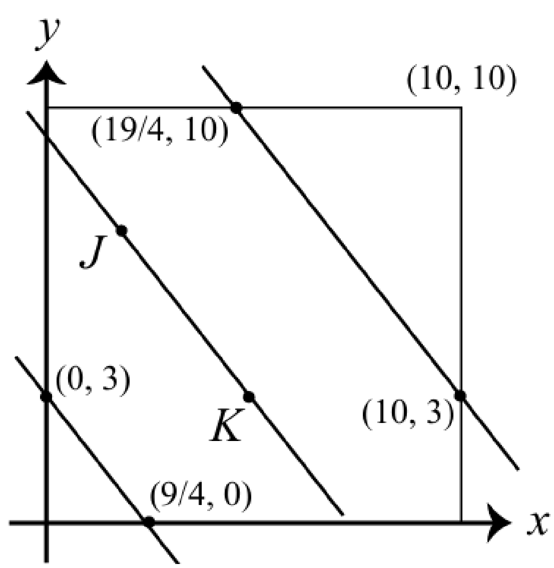
$$\frac{1}{2}\cdot 12\cdot(f+e)=6(f+e)=6(6-e)$$

若 $6(6-e)=27$, 得 $e=\frac{3}{2}, f=3$, 此时直线斜率为 8, 由 $V(2,4)$ 得 $U(0,-12),W(6,36)$; 若 $6(6-e)=45$, 得 $e=-\frac{3}{2}$ 不合题意。

故解为

$$U(0,3),W(6,6)\quad\text{或}\quad U(0,-12),W(6,36).$$

19. 已知点 $J(2,7),K(5,3),L(r,t)$ 构成一个三角形, 且其面积不超过 10。令 $\mathcal{R}$ 为所有满足条件的点 L 构成的区域, 且 $0\leqslant r,t\leqslant 10$。求 $\mathcal{R}$ 的面积。



线段 JK 的长度为

$$JK=\sqrt{(2-5)^2+(7-3)^2}=5$$

以 JK 为底, 则 $\triangle JKL$ 的高度 h 满足

$$\frac{1}{2}\cdot 5\cdot h\leqslant 10\Rightarrow h\leqslant 4$$

直线 JK 的方程为:

$$\frac{y-7}{x-2}=\frac{3-7}{5-2}\Rightarrow 4x+3y=29$$

设

$$f(x,y)=\frac{|4x+3y-29|}{5},$$

解 $f(0,y)=4, f(x,0)=4, f(10,y)=4, f(x,10)=4$ 可知与直线 JK 距离 4 单位的两条平行线与正方形交于

$$(0,3),\left(\frac{9}{4},0\right),(10,3),\left(\frac{19}{4},10\right),$$

故 $\mathcal{R}$ 面积为

$$100-\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\frac{9}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{21}{4}\cdot 7=\frac{313}{4}$$

20. 已知坐标平面上有一正方形 $ABCD$, 点

$$E(6,0),F(6,6),G(0,8),H(-5,4)$$

分别在 AB,BC,CD,DA 上, 求正方形 $ABCD$ 的面积。

设直线

$$AB: y=m(x-6),\quad CD: y=mx+8.$$

且

$$BC: y=-\frac{1}{m}(x-6)+6,\quad AD: y=-\frac{1}{m}(x+5)+4.$$

由 $d(AB,CD)=d(BC,AD)$,

$$\frac{|8+6m|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{|2m+11|}{\sqrt{m^2+1}}$$

解得

$$m=\frac{3}{4} \text{ 或 } m=-\frac{19}{8}.$$

经检验, $m=-\dfrac{19}{8}$ 时点 E 不在 AB 上, 舍去; 因此正方形面积为 $10^2=100$

21. 已知函数 $f(x)=x^2-\sqrt{2}x$ 与 $g(x)=-x^2-1$ 有两条公切线, 求四个切点组成的四边形周长。

设在 $f(x)=x^2-\sqrt{2}x$ 上的切点为 $A(a,a^2-\sqrt{2}a)$, 切线斜率为 $f'(a)=2a-\sqrt{2}$, 切线方程为

$$y=(2a-\sqrt{2})(x-a)+a^2-\sqrt{2}a.$$

与 $g(x)=-x^2-1$ 联立得

$$x^2+(2a-\sqrt{2})x-a^2+1=0$$

其中判别式为 0,

$$(2a-\sqrt{2})^2-4(1-a^2)=0\Rightarrow a=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{6}}{4}$$

故 $f(x)$ 上的切点为

$$A\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4},-\frac{\sqrt{3}}{4}\right),\quad A'\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}\right),$$

$g(x)$ 上的切点为

$$B\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4},-\frac{\sqrt{3}}{4}\right),\quad B'\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

因为 $AA'=BB'=AB'=A'B=\frac{3}{2}$, 周长为

$$4\cdot\frac{3}{2}=6$$

22. 已知 $\triangle ABC$ 的外心 $O(-1,2)$, 内心 $I(2,2)$, 顶点 $A(2,8)$, 求直线 BC 的方程式。

由 $O(-1,2),I(2,2),A(2,8)$, 可得 $\triangle ABC$ 外接圆 Γ_1 方程式为

$$(x+1)^2+(y-2)^2=3^2+6^2=45$$

过 $I(2,2),A(2,8)$ 的直线方程式为 $x=2$, 交 Γ_1 于

$$D=(2,-4)$$

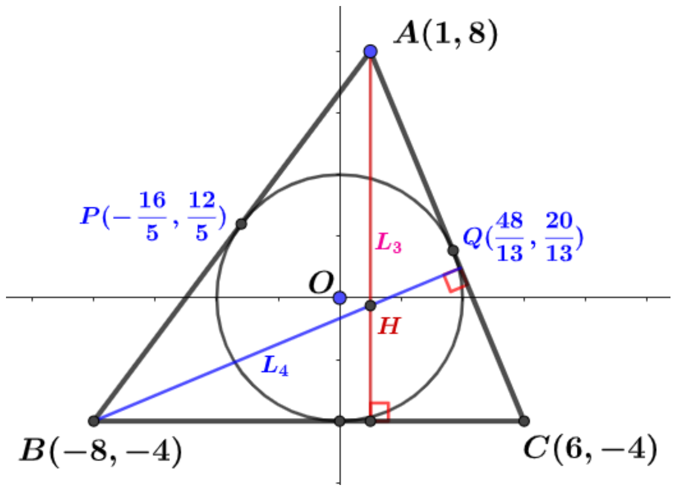
以 D 为圆心,$DI=6$ 为半径的圆 Γ_2 方程式为

$$(x-2)^2+(y+4)^2=36.$$

联立 Γ_1 与 Γ_2, 由鸡爪定理, 得 BC 的方程式

$$x-2y=4$$

23. 设 $\triangle ABC$ 中, 已知 BC 与 x 轴平行, 且 $A(1,8)$, 内切圆圆心为 $(0,0)$, 半径 4, 求 $\triangle ABC$ 垂心 H 的坐标。



设过 $A(1,8)$ 的圆的切线切点为 $P(a,\sqrt{16-a^2})$, 则

$$m_{PA}\cdot m_{OP}=-1\Rightarrow \frac{\sqrt{16-a^2}}{a}=\frac{\sqrt{16-a^2}-8}{a-1}=-1$$

解得切点为

$$a=\frac{48}{13},-\frac{16}{5}\Rightarrow P\left(-\frac{16}{5},\frac{12}{5}\right),Q\left(\frac{48}{13},\frac{20}{13}\right)$$

对圆方程求导知切线斜率 $y'=-\dfrac{x}{y}$, 则

$$m_P=\frac{4}{3},\quad m_Q=-\frac{12}{5}$$

故切线方程分别为

$$L_1:4x-3y+20=0,\quad L_2:12x+5y=52$$

又 $B=L_1\cap(y=-4)=(-8,-4),C=L_2\cap(y=-4)=(6,-4)$, 且过 A 的垂线为

$$L_3:x=1$$

过 $B(-8,-4)$ 且与 L_2 垂直的直线方程为

$$L_4:y+4=\frac{5}{12}(x+8)\Rightarrow 5x-12y=8$$

联立 L_3,L_4 得

$$H\left(1,-\frac{1}{4}\right)$$

24. 已知点 $A(3,1), B\left(\frac{5}{3},2\right)$ 是平行四边形 $ABCD$ 的顶点, 且 $ABCD$ 四个顶点都落在函数

$$f(x)=\log_2\frac{ax-b}{x-1}$$

的图像上, 求平行四边形 $ABCD$ 的面积。

由

$$f(3)=\log_2\frac{3a-b}{2}=1, f\left(\frac{5}{3}\right)\log_2\frac{5a/3-b}{2/3}=2$$

解得

$$a=1,\ b=-1, f(x)=\log_2\frac{x+1}{x-1}$$

注意到

$$f(-x)=\log_2\frac{-x+1}{-x-1}=\log_2\frac{x-1}{x+1}=-\log_2\frac{x+1}{x-1}=-f(x),$$

所以 $f(x)$ 关于原点对称, 平行四边形的另两个顶点为,

$$C(-3,-1),\quad D\left(-\frac{5}{3},-2\right).$$

故平行四边形 $ABCD$ 面积为

$$\frac{1}{2}\left|6-\frac{5}{3}+6-\frac{5}{3}-\left(\frac{5}{3}-6+\frac{5}{3}-6\right)\right|=\frac{26}{3}$$

25. 若方程

$$|x^2-4x+3|-a=x$$

恰有 4 个实根, 求实数 a 的范围。

考虑

$$\begin{cases}\Gamma: y=|x^2-4x+3|\\ L: y=x+a\end{cases}$$

可知 Γ 与 x 轴交于 $A(1,0), B(3,0)$, 过 A 且与 L 平行的直线为

$$L_1: y=x-1$$

当 $1\leqslant x\leqslant 3$ 时, 有

$$\Gamma: y=-x^2+4x-3\Rightarrow y'=-2x+4=1\Rightarrow x=\frac{3}{2}\Rightarrow \text{切点}P\left(\frac{3}{2},\frac{3}{4}\right)$$

过 P 且与 L 平行的直线为

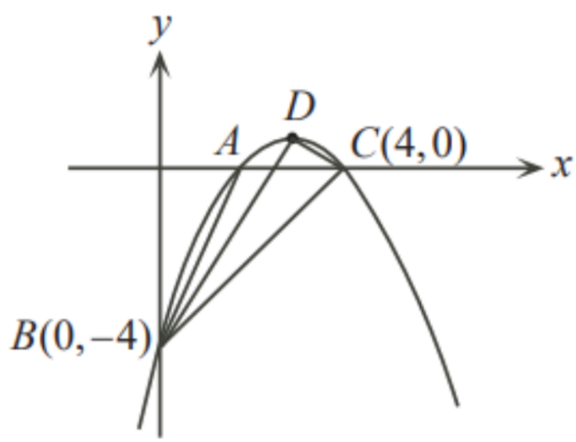
$$L_2: y = x - \frac{3}{4}$$

因此当 L 在 L_1 与 L_2 之间（不含切点）时, 即当

$$-1 < a < -\frac{3}{4}$$

有恰好 4 个交点。

26. 如图, 一抛物线顶点为 D, 与 x 轴交于 $A, C(4,0)$, 与 y 轴交于 $B(0,-4)$。若 $\triangle ABC$ 之面积为 4, 试求 $\triangle DBC$ 之面积。



假设 O 为原点, 则

$$[\triangle ABC] = \frac{1}{2} \cdot OB \cdot AC = 2 \cdot AC = 4 \Rightarrow AC = 2,$$

故 $A(2,0)$, 于是 $2,4$ 为抛物线 $y = f(x)$ 的两根, 设

$$f(x) = k(x-2)(x-4)$$

可得

$$f(0) = 8k = -4 \Rightarrow y = f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)(x-4)$$

于是

$$f(3) = \frac{1}{2} \Rightarrow D\left(3, \frac{1}{2}\right)$$

故

$$[\triangle DBC] = \frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} 3 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}\right\| = 3$$

27. 已知 $\triangle ABC$ 为直角三角形, 其中 $\angle C = 90°, AB = 36$, 而 BC 上的中线为:$x + 2y = 0, AC$ 上的中线为:$x + y = 0$, 求 $\triangle ABC$ 的面积。

由 A 在 $L_1 : x + 2y = 0$ 上,B 在 $L_2 : x + y = 0$ 上, 设

$$A = (-2a, a), B = (b, -b),$$

又 L_1, L_2 交于重心 $G(0,0)$, 设 $C = (2a - b, -a + b)$, 于是

$$m_{CA} \cdot m_{CB} = \frac{-a + b - a}{2a - b + 2a} \cdot \frac{-a + b + b}{2a - b - b} = -1 \Rightarrow 10a^2 - 15ab + 4b^2 = 0 \tag{1}$$

由 $AB = 36$,

$$(-2a - b)^2 + (a + b)^2 = 5a^2 + 6ab + 2b^2 = 36^2 \tag{2}$$

由 (1), (2) 解得

$$ab = \frac{2 \cdot 36^2}{27}$$

故 $\triangle ABC$ 的面积为

$$[\triangle ABC] = \frac{1}{2} \left\| \begin{matrix} -2a & a & 1 \\ b & -b & 1 \\ 2a - b & -a + b & 1 \end{matrix} \right\| = \frac{3}{2} \cdot \frac{2 \cdot 36^2}{27} = 144$$

28. (a) 已知两条抛物线 $y = x^2 - 8x + 17$ 与 $y = -x^2 + 4x + 7$。

i. 求两条抛物线的顶点 V_1 与 V_2 的坐标。

完全平方得

$$y = x^2 - 8x + 17 = (x - 4)^2 + 1,$$

$$y = -x^2 + 4x + 7 = -(x - 2)^2 + 11.$$

所以顶点为 $V_1(4, 1), V_2(2, 11)$。

ii. 若两条抛物线相交于 P, Q, 证明四边形 V_1PV_2Q 是平行四边形。

联立两抛物线得

$$x^2 - 8x + 17 = -x^2 + 4x + 7 \Rightarrow (x - 5)(x - 1) = 0.$$

得 $P(5, 2), Q(1, 10)$。发现 V_1V_2, PQ 的中点分别为

$$\left(\frac{4 + 2}{2}, \frac{1 + 11}{2} \right) = (3, 6), \quad \left(\frac{5 + 1}{2}, \frac{2 + 10}{2} \right) = (3, 6)$$

即两条对角线互相平分, 故得证 V_1PV_2Q 是平行四边形。

(b) 已知两条抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 与 $y=x^2$, 顶点分别为 V_3,V_4。当 b,c 取某些值时, 两条抛物线相交于相异点 R,S。

i. 求 (b,c) 的解集, 使得 R,S 存在且 V_3,V_4,R,S 为相异的四点。

完全平方得

$$y=-\left(x-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{b^2}{4}+c,$$

顶点为 $V_3\left(\frac{b}{2},\frac{b^2}{4}+c\right)$, 另一抛物线顶点为 $V_4(0,0)$, 联立两抛物线得

$$-x^2+bx+c=x^2\Rightarrow 2x^2-bx-c=0$$

其中判别式需满足 $b^2+8c>0$, 即 $c>-\frac{b^2}{8}$, 且交点横坐标为

$$x=\frac{b\pm\sqrt{b^2+8c}}{4}.$$

需有 $c\neq 0$, 否则 R,S 与 V_3 或 V_4 重合; 若 $b=0$, 则 $V_3=(0,c)$, 与 V_4 重合需满足 $c=0$, 所以解集为

$$\left\{(b,c)|\,c>-\frac{b^2}{8}\text{ 且 }c\neq 0\right\}.$$

ii. 求使得 R,S 存在且 V_3,V_4,R,S 为相异的四点, 且四边形 V_3RV_4S 为矩形的所有 (b,c)。

已知 $R(x_1,x_1^2),S(x_2,x_2^2)$, 其中 x_1,x_2 为方程 $2x^2-bx-c=0$ 的根, 由韦达定理,

$$x_1+x_2=\frac{b}{2},\quad x_1x_2=-\frac{c}{2}$$

发现 V_3V_4,RS 的中点分别为

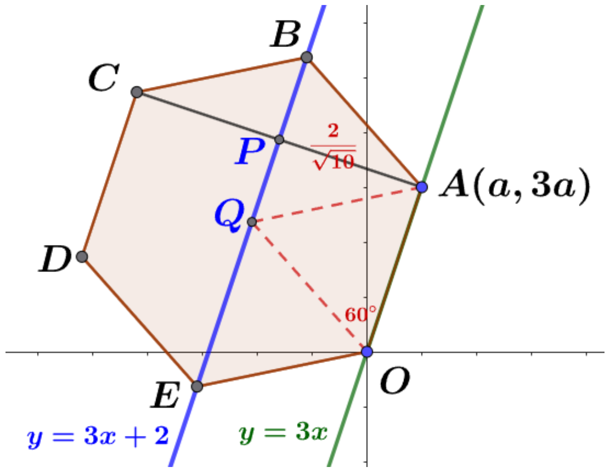
$$\left(\frac{b}{4},\frac{b^2+4c}{8}\right),\quad \left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{x_1^2+x_2^2}{2}\right)=\left(\frac{b}{4},\frac{b^2+4c}{8}\right)$$

两条对角线中点相同, 所以 V_3RV_4S 是平行四边形, 再要求一对相邻边垂直:

$$m_{V_4R}\cdot m_{V_4S}=x_1x_2=-1=-\frac{c}{2}\Rightarrow c=2$$

结合 (i) 的条件,$c=2$ 时满足 $c>-\frac{b^2}{8}$ 且 $c\neq 0$, 因此所有解为 $(b,2)$, 其中 $b\in\mathbb{R}$。

29. 坐标平面上, 正六边形 $OABCDE$ 的顶点依逆时针排列为 O（原点）, A, B, C, D, E, 其中直线 OA 的方程为 $y=3x$, 直线 BE 的方程为 $y=3x+2$。试求此正六边形的外接圆圆心坐标。



两条平行线间的距离为

$$AP=\frac{2}{\sqrt{10}}$$

在 $\triangle APB$ 中,

$$OA=AB=\frac{\frac{2}{\sqrt{10}}}{\sin 60^\circ}=\frac{4}{\sqrt{30}}.$$

设 $A(a,3a)$ 在 $y=3x$ 上, 则

$$OA^2=a^2+(3a)^2=10a^2=\left(\frac{4}{\sqrt{30}}\right)^2=\frac{16}{30}\Rightarrow a=\frac{2}{5\sqrt{3}}\Rightarrow A\left(\frac{2}{5\sqrt{3}},\frac{6}{5\sqrt{3}}\right)$$

将 A 逆时针旋转 60°, 得圆心 Q

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{5\sqrt{3}}\\ \frac{6}{5\sqrt{3}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}-9}{15}\\ \frac{\sqrt{3}+1}{5}\end{bmatrix}\Rightarrow Q\left(\frac{\sqrt{3}-9}{15},\frac{\sqrt{3}+1}{5}\right).$$

30. 已知函数 $y=f(x)$ 的图像既关于点 $(1,1)$ 中心对称, 又关于直线 $x+y=0$ 轴对称. 若 $x\in(0,1)$ 时, $f(x)=\log_2(x+1)$, 求 $f(\log_2 10)$ 的值。

记函数 $y=f(x)$ 的图像为 Γ, 对所有 $x_0\in(0,1)$, 令 $y_0=\log_2(1+x_0)$, 则

$$(x_0,y_0)\in\Gamma, y_0\in(0,1)$$

利用 Γ 的中心对称性与轴对称性, 可依次推得

$$(2-x_0,2-y_0)\in\Gamma,(y_0-2,x_0-2)\in\Gamma,(4-y_0,4-x_0)\in\Gamma$$

解 $4-y_0=4-\log_2(1+x_0)=\log_2 10$ 得 $x_0=\dfrac{3}{5}$, 因此

$$f(\log_2 10)=f(4-y_0)=4-x_0=4-\frac{3}{5}=\frac{17}{5}$$

31. 若过原点可对 $y=x^3+ax^2+x+1$ 函数图形作三条切线, 求 a 的取值范围。

令切点 $P(t,t^3+at^2+t+1)$, 则斜率为 $3t^2+2at+1$, 过 P 之切线

$$L:y=(3t^2+2at+1)(x-t)+t^3+at^2+t+1$$

又 L 过 $(0,0)$, 故

$$-3t^3-2at^2-t+t^3+at^2+t+1=0$$

由 $f(t)=2t^3+at^2-1=0$ 有三相异根, 可得

$$f'(t)=6t^2+2at=2t(3t+a)=0\Rightarrow t=0,-\frac{a}{3}\text{有极值}$$

由

$$f(0)f\left(-\frac{a}{3}\right)=-1\left(-\frac{2a^3}{27}+\frac{a^3}{9}-1\right)<0$$

解得

$$a>3$$

32. 在坐标平面上, 已知 $A(8,0),B(0,6)$, P 为圆 $x^2+y^2=16$ 上的动点, 求 $3PA+2PB$ 的最小值。

设 $P(x,y)$ 为圆 $x^2+y^2=16$ 上的动点,$Q(0,a)$ 使得 $PQ=\dfrac{2}{3}PB$, 即

$$x^2+(y-a)^2=\frac{4}{9}\left(x^2+(y-6)^2\right)$$

整理得

$$5x^2+5y^2-18ay+48y+9a^2-144=0$$

代入圆方程 $x^2+y^2=16$, 得

$$9a^2-64-6y(3a-8)=(3a-8)(3a+8-6y)=0$$

解得

$$a=\frac{8}{3}\Rightarrow Q\left(0,\frac{8}{3}\right)$$

因此

$$3PA+2PB=3(PA+PQ)\geqslant 3AQ=3\sqrt{8^2+\left(\frac{8}{3}\right)^2}=8\sqrt{10}$$

33. 将椭圆

$$\Gamma_1:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

以原点 O 为中心, 逆时针旋转锐角 θ 后, 得到椭圆 Γ_2。已知 Γ_2 的长轴方程为 $y=2x$, 求 Γ_2 的方程。

椭圆

$$\Gamma_1:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

的长轴在 x 轴上, 长轴旋转至 $y=2x$, 设旋转角满足 $\tan\theta=2$, 则

$$\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}},\quad \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

设 (x,y) 是 Γ_2 上一点, 对应 Γ_1 上某点 (s,t), 则有

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}&-\frac{2}{\sqrt{5}}\\\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s\\t\end{bmatrix}.$$

所以反解得

$$\begin{bmatrix}s\\t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}(x+2y)\\\frac{1}{\sqrt{5}}(-2x+y)\end{bmatrix}.$$

因为 (s,t) 满足 Γ_1:

$$\frac{s^2}{9}+\frac{t^2}{4}=1,$$

代入得

$$\frac{\frac{1}{5}(x+2y)^2}{9}+\frac{\frac{1}{5}(-2x+y)^2}{4}=1,$$

即

$$8x^2-4xy+5y^2-36=0.$$

34. 在坐标平面上, 考虑二阶方阵

$$A=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3 & -4\\ 4 & 3\end{bmatrix}$$

所定义的线性变换。对于平面上异于原点 O 的点 P_1, 设 P_1 经 A 变换成 P_2, P_2 经 A 变换成 P_3。假设 P_1 是图形 $y=\dfrac{1}{10}x^2-10$ 上的动点, 求 $\triangle P_1P_2P_3$ 面积的最小可能值。

我们有

$$A=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3 & -4\\ 4 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\Rightarrow \sin\theta=\frac{4}{5},\ \cos\theta=\frac{3}{5}$$

故

$$\sin\angle P_1OP_2=\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\frac{24}{25}$$

假设 $OP_1=a$, 则

$$\begin{aligned}[\triangle P_1P_2P_3]&=[\triangle OP_1P_2]+[\triangle OP_2P_3]-[\triangle OP_1P_3]\\&=\frac{1}{2}a^2\sin\theta+\frac{1}{2}a^2\sin\theta-\frac{1}{2}a^2\sin 2\theta=\frac{8}{25}a^2\end{aligned}$$

又 P_1 在 $y=\dfrac{x^2}{10}-10$ 上, 设 $P_1\left(m,\dfrac{m^2}{10}-10\right)$, 则

$$a^2=\frac{1}{100}m^4-m^2+100=\frac{1}{100}(m^2-50)^2+75$$

故

$$[\triangle P_1P_2P_3]_{\min}=\frac{8}{25}\cdot 75=24$$

35. 在直角坐标平面上, 圆 $x^2+y^2=1$ 先被变换为曲线 Γ_1, 再被

$$A=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3}\\ \frac{1}{2} & -3\end{bmatrix}$$

变换为曲线 Γ_1, 再被

$$B=\prod_{k=8}^{67}\begin{bmatrix}\cos k^\circ & \sin k^\circ\\ \sin k^\circ & -\cos k^\circ\end{bmatrix}$$

变换为曲线 Γ_2, 求 Γ_2 的方程。

首先注意到

$$\begin{bmatrix}\cos a^\circ & \sin a^\circ\\ \sin a^\circ & -\cos a^\circ\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(a+1)^\circ & \sin(a+1)^\circ\\ \sin(a+1)^\circ & -\cos(a+1)^\circ\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 1^\circ & \sin 1^\circ\\ -\sin 1^\circ & \cos 1^\circ\end{bmatrix}.$$

由此,

$$B=\begin{bmatrix}\cos 1^\circ & \sin 1^\circ\\ -\sin 1^\circ & \cos 1^\circ\end{bmatrix}^{30}=\begin{bmatrix}\cos 30^\circ & \sin 30^\circ\\ -\sin 30^\circ & \cos 30^\circ\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}.$$

所以

$$BA=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3}\\ \frac{1}{2} & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\sqrt{3}\end{bmatrix}.$$

设变换后的坐标为 $(x',y')^{\mathsf{T}}=BA\,(x,y)^{\mathsf{T}}$, 则

$$x'=x,\qquad y'=-2\sqrt{3}\,y.$$

原方程 $x^2+y^2=1$ 在新坐标下变为

$$x'^2+\left(\frac{y'}{-2\sqrt{3}}\right)^2=1\Rightarrow x'^2+\frac{y'^2}{12}=1.$$

即

$$\Gamma_2:\quad x^2+\frac{y^2}{12}=1.$$

36. 在坐标平面上, 将一个过原点且半径为 r 的圆, 完全放入 $y\geqslant x^4$ 的区域内, 此时 r 的最大值为何?

设圆的方程为 $x^2+(y-r)^2=r^2$, 由 $y\geqslant x^4$ 得 $\sqrt{y}\geqslant x^2$, 代入方程得

$$\sqrt{y}+(y-r)^2\geqslant r^2,\quad (y>0).$$

即

$$2r\leqslant y+\frac{1}{2\sqrt{y}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

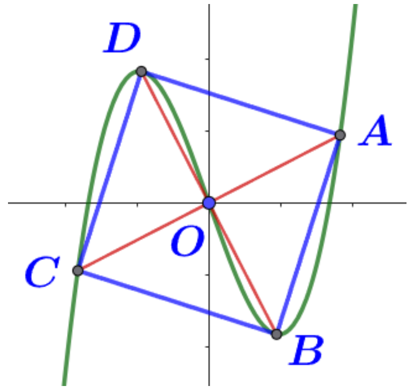
由 AM-GM 不等式,

$$y+\frac{1}{2\sqrt{y}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\geqslant\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$$

所以

$$r\leqslant\frac{3}{4}\sqrt[3]{2}$$

37. 坐标平面上, 若四边形的四个顶点都在函数 $f(x)$ 上, 则称此四边形为 $f(x)$ 的内接四边形。已知函数 $f(x)=x^3+ax$ 的图形有唯一一个内接正方形, 求 a 的值。



由 $f(x)=x^3+ax$ 可得:

$$f''(x)=6x=0$$

即 $f(x)$ 的对称中心为原点 $(0,0)$, 且为该内接正方形的中心, 其对角线分别为

$$L_1: y=mx, \quad L_2: y=-\frac{1}{m}x$$

记 A,B 在 L_1,L_2 上, 且都在 $f(x)$ 上, 则

$$A: x^3+ax=mx \Rightarrow x=0 \text{ 或} x^2=m-a$$

$$B: x^3+ax=-\frac{1}{m}x \Rightarrow x=0 \text{ 或} x^2=-\left(a+\frac{1}{m}\right)$$

得

$$A\left(\sqrt{m-a},\ m\sqrt{m-a}\right), \quad B\left(\sqrt{-\left(a+\frac{1}{m}\right)},\ -\frac{1}{m}\sqrt{-\left(a+\frac{1}{m}\right)}\right)$$

因 B 为 A 逆时针旋转 90° 得来, 故

$$\left(\sqrt{-\left(a+\frac{1}{m}\right)},\ -\frac{1}{m}\sqrt{-\left(a+\frac{1}{m}\right)}\right)=\left(-m\sqrt{m-a},\ \sqrt{m-a}\right)$$

两边比较得:

$$-m\sqrt{m-a}=\sqrt{-\left(a+\frac{1}{m}\right)} \Rightarrow m^2(m-a)=-\left(a+\frac{1}{m}\right)$$

解得:

$$a=\frac{m^3}{m^2-1}+\frac{1}{m(m^2-1)}=\frac{(m-\frac{1}{m})^2+2}{m-\frac{1}{m}}=m-\frac{1}{m}+\frac{2}{m-\frac{1}{m}}$$

设 $t=m-\frac{1}{m}$, 则:

$$|a|=\left|t+\frac{2}{t}\right|\geqslant 2\sqrt{2}\Rightarrow a=-2\sqrt{2}$$

等号成立当且仅当 $f(x)=x^3+ax$ 有唯一内接正方形。

38. 设 $P(0,a)$ 是 y 轴上异于原点的任意一点, 过点 P 且平行于 x 轴的直线与曲线 $y=\frac{1}{a}\ln x$ 交于点 Q, 曲线 $y=\frac{1}{a}\ln x$ 在点 Q 处的切线交 y 轴于点 R, 则 $\triangle PQR$ 的面积的最小值为__.

$\frac{\sqrt{2e}}{2}$(待解)

39. 已知曲线 $y=x^4+ax^3+ax^2+x+1$ 在点 $(0,1)$ 的切线, 不只在 $(0,1)$ 与曲线相切, 试求 a 的值。

令 $f(x)=x^4+ax^3+ax^2+x+1$, 则

$$f'(x)=4x^3+3ax^2+2ax+1,\quad f'(0)=1.$$

故过 $(0,1)$ 的切线斜率为 1, 切线方程为 $L:\ y=x+1$。将 L 代入曲线方程得

$$x^4+ax^3+ax^2+x+1=x+1$$

即

$$x^2(x^2+ax+a)=0$$

题意要求切线不只在 $(0,1)$ 与曲线相切, 因此 $x^2+ax+a=0$ 当中必须有重根, 故判别式

$$a^2-4a=a(a-4)=0$$

当 $a=0$ 时, 方程仅在 $x=0$ 有切点, 不符题意; 因此取

$$a=4$$

40. 设 $a\in\mathbb{R}$, 若 $y=x^3-x$ 与 $y=x^2-a^2+a$ 有公切线, 试求 a 的范围。

令 $\Gamma_1: f(x)=x^3-x, \Gamma_2: g(x)=x^2-a^2+a$, 则

$$f'(x)=3x^2-1,\quad g'(x)=2x.$$

设公切线 $L=\overleftrightarrow{AB}$, 其中 $A\in\Gamma_1, B\in\Gamma_2$, 记 $A=(s,s^3-s), B=(t,t^2-a^2+a)$, 公切线斜率为

$$m_L=\frac{t^2-a^2+a-(s^3-s)}{t-s}=3s^2-1=2t$$

消去 $t=\dfrac{3s^2-1}{2}$, 可得

$$-9s^4+8s^3+6s^2-1=4a^2-4a$$

欲存在实数 s 使等式成立, 必须有

$$4a^2-4a\leqslant\max_{s\in\mathbb{R}}h(s)$$

求导得

$$h'(s)=-36s^3+24s^2+12s=-12s(s-1)(3s+1),\quad h''(s)=-108s^2+48s+12$$

由此临界点为 $s=0,1,-\dfrac{1}{3}$。由于 $h''(0)>0, h''(1)<0, h''\left(-\dfrac{1}{3}\right)<0, h(s)$ 的极大值为

$$h(1)=4,\ h\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{20}{27}$$

因此 $h_{\max}=4$, 故需

$$4a^2-4a\leqslant 4$$

解不等式得

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}\leqslant a\leqslant\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

41. 在平面直角坐标系中, 函数 $y=\dfrac{1}{|x|}$ 的图像为 Γ. 设 Γ 上的两点 P,Q 满足: P 在第一象限, Q 在第二象限, 且直线 PQ 与 Γ 位于第二象限的部分相切于点 Q. 求 $|PQ|$ 的最小值.

当 $x<0$ 时, $y=-\dfrac{1}{x}$, 导数为

$$y'=\frac{1}{x^2}$$

设 $Q\left(-a,-\dfrac{1}{a}\right)$, 其中 $a>0$, 由条件知 PQ 的斜率为 $y'|_{x=-a}=\dfrac{1}{a^2}$, 故直线 PQ 的方程为

$$y=\frac{1}{a^2}(x+a)+\frac{1}{a}=\frac{x+2a}{a^2}$$

将上述方程与 $y=\dfrac{1}{x}(x>0)$ 联立，得

$$x^2+2ax-a^2=0 \Rightarrow x_p=(\sqrt{2}-1)a$$

于是

$$|PQ|=\sqrt{1+\left(\frac{1}{a^2}\right)^2}\cdot|x_p-x_Q|=\sqrt{1+\frac{1}{a^4}}\cdot\sqrt{2}a\geqslant\sqrt{\frac{2}{a^2}}\cdot\sqrt{2}a=2$$

当 $a=1$，即 $Q(-1,1)$ 时，$|PQ|$ 取最小值 2。

42. 在 $\Gamma: y=x^3$ 上有一点 P，已知 P 在第一象限且其 x 坐标为 a。现以 P 为切点作 Γ 之切线 L，交 y 轴于点 Q，且交 Γ 于另一点 S，试求:

(a) $PQ:QS$

已知曲线 $\Gamma: y=x^3$，故其导数为:

$$y'=3x^2$$

在点 $P(a,a^3)$ 处的切线斜率为 $3a^2$，代入点斜式得切线 L:

$$y=3a^2(x-a)+a^3$$

切线交 y 轴于

$$y=-3a^3+a^3=-2a^3\Rightarrow Q(0,-2a^3)$$

将切线方程代入 Γ 得:

$$x^3=3a^2(x-a)+a^3\Rightarrow x^3-3a^2x+2a^3=0\Rightarrow(x-a)^2(x+2a)=0$$

另一个交点 S 对应 $x=-2a$，代入 Γ 得

$$S=(-2a,-8a^3)$$

于是

$$PQ=\sqrt{(a-0)^2+(a^3+2a^3)^2}=\sqrt{a^2+9a^6}$$
$$QS=\sqrt{(0+2a)^2+(-2a^3+8a^3)^2}=\sqrt{4a^2+36a^6}$$

故比值为

$$PQ:QS=1:2$$

(b) Γ 与切线 L 所围成之封闭区域的面积，以 a 表示。

所围面积为 Γ 与切线之间的面积, 即:

$$\begin{aligned}\int_{-2a}^{a}\left[x^3-(3a^2(x-a)+a^3)\right]dx&=\int_{-2a}^{a}\left[x^3-3a^2x+2a^3\right]dx\\&=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}a^2x^2+2a^3x\right]_{-2a}^{a}=\frac{27}{4}a^4\end{aligned}$$

43. 在平面直角坐标系中, 函数

$$y=\frac{x+1}{|x|+1}$$

的图像上有三个不同的点位于直线 l 上, 且这三点的横坐标之和为 0. 求 l 的斜率的取值范围.

当 $x\geqslant 0$ 时, $y=1$; 当 $x<0$ 时, $y=\frac{x+1}{1-x}$ 关于 x 严格递增且小于 1. 设直线 $l: y=kx+b$, 则条件等价于方程

$$kx+b=\frac{x+1}{|x|+1}\tag{1}$$

有三个不同的实数解 $x_1,x_2,x_3(x_1<x_2<x_3)$, 满足

$$x_1+x_2+x_3=0$$

首先有 $k\neq 0$ (否则, l 只能是 $y=1$, 但此时 l 与函数 $y=\frac{x+1}{|x|+1}$ 图像的任意三个公共点的横坐标之和必大于 0, 不合题意)

当 $x<0$ 时, 方程 (1) 可整理为

$$kx^2-(k-b-1)x+1-b=0\tag{2}$$

至多两个负数解; 当 $x\geqslant 0$ 时, 方程 (1) 即为

$$kx+b=1\tag{3}$$

至多一个非负解, 这表明方程 (2) 有两个不同的负数解 x_1,x_2 , 其中

$$x_1+x_2=\frac{k-b-1}{k}$$

方程 (3) 有非负解 $x_3=\dfrac{1-b}{k}$; 由 $x_1+x_2+x_3=0$, 可知 $k=2b$, 进而有

$$x_3=\frac{1-b}{2b}$$

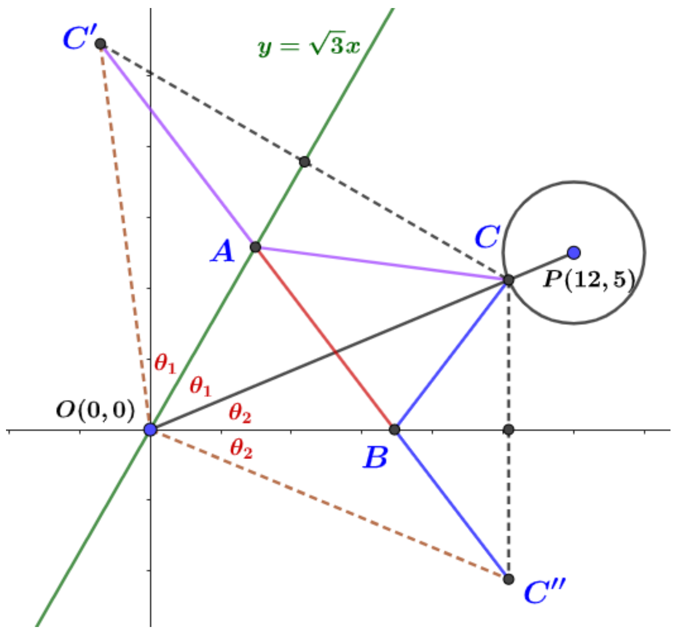
由 $x_3 \geqslant 0$ 得 $0 < b \leqslant 1$. 方程 (2) 变为 $2bx^2 + (1-b)x + 1 - b = 0$, 由判别式

$$(1-b)^2 - 4 \cdot 2b(1-b) = (1-b)(1-9b) > 0,$$

并结合 $0 < b \leqslant 1$, 可知 $0 < b < \frac{1}{9}$; 经检验, 此时 x_1, x_2 确实为负数, 符合题意, 故 l 的斜率 k 的取值范围是

$$0 < k < \frac{2}{9}.$$

44. 直线 $y = \sqrt{3}x$ 上有一点 A, x 轴上有一点 B, 圆 $(x-12)^2 + (y-5)^2 = 4$ 上有一点 C。试求 $\triangle ABC$ 的最小周长。



设 $O(0,0)$, 圆心 $P(12,5)$, 当 OP 与圆的交点为 C 时 $\triangle ABC$ 周长为最小, 此时

$$OC = OP - 2 = 11$$

设点 C 关于直线 $y = \sqrt{3}x$ 的对称点为 C', 关于 x 轴的对称点为 C'', 则线段 $C'C''$ 与直线 $y = \sqrt{3}x$ 的交点为 A, 与 x 轴的交点为 B, 因此 $AC = AC', BC = BC''$, 故三角形周长为

$$AC' + AB + BC'' = C'C''$$

设 $\angle AOC = \theta_1, \angle COB = \theta_2$, 直线 $y = \sqrt{3}x$ 与 x 轴夹角为 $60°$, 即

$$\theta_1 + \theta_2 = 60°$$

又因 C,C'' 关于 x 轴对称, C,C' 关于直线 $y=\sqrt{3}x$ 对称, 所以

$$\angle BOC''=\theta_1,\angle AOC'=\theta_2 \Rightarrow \angle C'OC''=2(\theta_1+\theta_2)=120^\circ$$

且

$$OC'=OC''=OC=11$$

在 $\triangle OC'C''$ 中, 由余弦定理,

$$C'C''^2=11^2+11^2-2\cdot 11\cdot 11\cdot\cos 120^\circ \Rightarrow C'C''=11\sqrt{3}$$

圆锥曲线

1. 已知一个半径为 1 的圆中，有两条相等的弦互相垂直，且互相分割成 $1:4$ 的线段。求弦长。

构造坐标系，使得圆心在原点上，两弦为 $x=-a$ 及 $y=-a$，且 $a>0$。由题意，

$$4(\sqrt{1-a^2}-a)=\sqrt{1-a^2}+a$$

解得

$$a^2=\frac{9}{34}$$

因此弦长为

$$2\sqrt{1-a^2}=\frac{5\sqrt{34}}{17}$$

移走

2. 已知 $C_1=x^2+y^2+2ax+12y+10a+8=0$，$C_2=x^2+y^2-2x-a^2+2a=0$，$C_3=x^2+y^2-22x-6ay+8a^2-25a+36=0$，若三圆的圆心共线，求 a 的值。

C_1 的圆心：$(-a,-6)$
C_2 的圆心：$(1,0)$
C_3 的圆心：$(11,3a)$

三圆心共线，所以斜率满足

$$m_{12}=m_{23}.$$

$$\frac{0-(-6)}{1-(-a)}=\frac{3a-0}{11-1}\implies\frac{6}{1+a}=\frac{3a}{10}$$

$$60=3a(1+a)\implies 3a^2+3a-60=0\implies a^2+a-20=0$$

$$(a+5)(a-4)=0\implies a=-5\text{ 或}a=4$$

检查 C_3 的半径:

$$r_3^2 = 11^2 + (3a)^2 - (8a^2 - 25a + 36) = 121 + 9a^2 - 8a^2 + 25a - 36 = a^2 + 25a + 85$$

$$\text{当}a = 4 : r_3^2 = 16 + 100 + 85 = 201 > 0$$

$$\text{当}a = -5 : r_3^2 = 25 - 125 + 85 = -15 < 0$$

$$\therefore a = 4$$

3. 若方程 $x^2 + y^2 + 4kx - 6ky + 12k^2 - 4k - 8 = 0$ 表示一个圆, 求面积为最小时圆的方程。

将原式配方成

$$(x + 2k)^2 + (y - 3k)^2 = k^2 + 4k + 8$$

此为圆的标准方程, 圆心为 $(-2k,\ 3k)$, 半径平方

$$r^2 = k^2 + 4k + 8 = (k + 2)^2 + 4$$

在 $k = -2$ 时最小, 因此圆的方程为

$$(x - 4)^2 + (y + 6)^2 = 4$$

4. 一个圆经过点 $A(4, -2)$, 且与 x 轴和 y 轴都相切, 求该圆的方程式。

发现 $A(4, -2)$ 在第四象限, 已知圆与 x 轴和 y 轴都相切, 所以圆只能落在第四象限。又因为圆心到两个坐标轴的距离都等于半径 r, 设圆心为 $(r,\ -r)$, 半径为 $r > 0$, 方程为

$$(x - r)^2 + (y + r)^2 = r^2$$

将已知点 $A(4, -2)$ 代入:

$$(4 - r)^2 + (-2 + r)^2 = r^2 \Rightarrow r^2 - 12r + 20 = 0 \Rightarrow r = 2 \text{ 或} 10$$

因此圆方程为 $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$ 或 $(x - 10)^2 + (y + 10)^2 = 100$

5. 设一个圆与直线 $L_1: 3x-4y+7=0$、$L_2: 3x-4y-3=0$ 都相切，且圆心位于直线 $L: x-2y+2=0$ 上，求该圆的方程式。

首先，直线 L_1 和 L_2 是两条平行线，它们之间的距离为圆的直径：

$$\text{直径} = \frac{|-3-(7)|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = 2 \Rightarrow r = 1$$

设圆心为 (a,b)，圆心到 L_1 或 L_2 的距离都等于 1，即

$$\begin{cases} \dfrac{|3a-4b+7|}{5} = 1 \Rightarrow 3a-4b+7 = \pm 5 \\ \dfrac{|3a-4b-3|}{5} = 1 \Rightarrow 3a-4b-3 = \pm 5 \end{cases}$$

给出 $3a-4b+2=0$，又圆心在直线 $x-2y+2=0$ 上，即解

$$\begin{cases} 3a-4b+2=0 \\ a-2b+2=0 \end{cases} \Rightarrow (a,b)=(2,2)$$

所以圆方程为

$$(x-2)^2+(y-2)^2=1$$

6. 试求过点 $P(3,1)$ 且与圆 $(x-1)^2+(y+2)^2=4$ 相切的直线方程。

先判断点 $P(3,1)$ 是否在圆外：

$$(3-1)^2+(1+2)^2 = 13 > 4 \Rightarrow P \text{ 在圆外}$$

设切线斜率为 m，切线方程为

$$y-1=m(x-3) \Rightarrow mx-y-3m+1=0$$

圆心为 $(1,-2)$，半径 $r=2$，由圆心到切线距离为半径性质得

$$\frac{|m\cdot 1-(-2)-3m-1|}{\sqrt{m^2+1}} = 2 \Rightarrow \frac{|2m-3|}{\sqrt{m^2+1}} = 2$$

两边平方得

$$\frac{(2m-3)^2}{m^2+1} = 4 \Rightarrow m = \frac{5}{12}$$

只解出一 m，表示另一切线为铅直线 $x=3$，当 $m=\frac{5}{12}$，切线为 $5x-12y-3=0$

7. 从点 $P(3,5)$ 向圆 $C: x^2+y^2+2x-4y=0$ 所作的两条切线切点分别为 A,B, 试求过 A,B,P 三点的圆方程。

圆 C 的方程为

$$x^2+y^2+2x-4y=0 \Rightarrow (x+1)^2+(y-2)^2=5$$

其中圆心为 $O(-1,2)$, 半径为 $\sqrt{5}$。

发现过 A,B,P 三点的圆即是以 OP 为直径的圆 (半圆含直角), 该圆圆心为 OP 的中点:

$$\left(\frac{3+(-1)}{2}, \frac{5+2}{2}\right)=(1,\frac{7}{2})$$

计算直径 $|OP|$:

$$|OP|=\sqrt{(3+1)^2+(5-2)^2}=5 \Rightarrow \text{半径}=\frac{5}{2}$$

因此所求圆的方程为

$$(x-1)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$$

8. 求两圆的公切线方程:

已知两圆:

$$C_1: x^2+y^2-2y-4=0, \quad C_2: x^2+y^2-6x-11=0$$

圆心与半径:

$$C_1: A(0,1),\ r_1=\sqrt{0^2+(1)^2+4}=\sqrt{5}, \quad C_2: B(3,0),\ r_2=\sqrt{3^2+0^2+11}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

圆心距:

$$AB=\sqrt{(3-0)^2+(0-1)^2}=\sqrt{10}$$

$$r_1+r_2=3\sqrt{5}, \quad r_2-r_1=\sqrt{5}$$

由于 $r_2-r_1<AB<r_1+r_2$, 两圆相交于两点。

设外公切线的交点为 $P(-3,2)$(根据题图计算)。

设直线方程为 $L: y-2=m(x+3) \implies mx-y+3m+2=0$。

过圆心 $A(0,1)$, 距离等于半径 r_1:

$$\frac{|m(0)-1+3m+2|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5} \implies \frac{|3m+1|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5}$$

$$(3m+1)^2=5(m^2+1) \implies 9m^2+6m+1=5m^2+5 \implies 4m^2+6m-4=0 \implies 2m^2+3m-2=0$$

解得:

$$m=\frac{1}{2}, \quad m=-2$$

对应的公切线方程:

$$y-2=\frac{1}{2}(x+3) \implies 2y-4=x+3 \implies x-2y+7=0$$

$$y-2=-2(x+3) \implies y-2=-2x-6 \implies 2x+y+4=0$$

9. 已知有一圆方程式为 $x^2+y^2=37$, 且圆的内部有一点 $P(1,2)$。

(a) 若 P 点为圆的某弦的中点, 试求此弦所在的直线方程式。

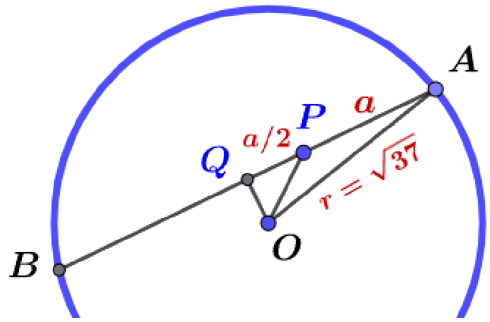
圆方程为 $x^2+y^2=37$, 圆心为 $O(0,0)$, 半径为 $\sqrt{37}$, 点 $P(1,2)$ 在圆内,OP 的斜率为

$$m=\frac{2-0}{1-0}=2$$

弦过 P 且垂直于 OP, 故斜率为 $-\frac{1}{2}$, 弦方程为

$$y-2=-\frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow x+2y=5$$

(b) 若 P 点为圆的某弦的一个三等分点, 试求此弦所在的直线方程式。



设弦长为 $3a$, 弦的三等分点之一为 P, 弦中点为 Q, 则

$$PQ=\frac{a}{2},\quad OP=\sqrt{1^2+2^2}=5$$

设弦所在直线为

$$y=m(x-1)+2.$$

由毕氏定理

$$OQ^2=OA^2-AQ^2=OP^2-PQ^2\Rightarrow 37-\left(\frac{3a}{2}\right)^2=5-\left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

解得 $a=4$, 故由

$$OQ=\frac{|2-m|}{\sqrt{m^2+1}}=1$$

解得 $m=\frac{3}{4}$ 或 $m=\infty$, 于是弦方程为

$$3x-4y+5=0,\quad \text{或}\quad x=1$$

10. 设一条光线经过点 $A(-4,5)$, 经 x 轴反射后恰与圆 $(x-2)^2+(y-2)^2=5$ 相切, 求反射线的斜率。

设反射线斜率为 k, 反射线经过 $A(-4,5)$ 关于 x 轴的对称点: $(-4,-5)$, 方程式为

$$y+5=k(x+4)\Rightarrow y=kx+4k-5$$

圆 $(x-2)^2+(y-2)^2=5$ 圆心为 $C(2,2)$, 半径为 $\sqrt{5}$, 由圆心到切线的距离等于半径的性质,

$$\frac{|k\cdot 2-1\cdot 2+(4k-5)|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{|6k-7|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{5}$$

即

$$(6k-7)^2=5(k^2+1)\Rightarrow 31k^2-84k+44=0\Rightarrow (k-2)(31k-22)=0$$

得

$$k=2 \text{ 或 } k=\frac{22}{31}\ (\text{不合题意})$$

$\therefore\ k=2$

又解: 用判别式 $=0$ 求 k

11. 坐标平面上一圆被直线 $x-y=1$ 和 $x-y=5$ 所截的弦长均为 14, 求该圆的面积。

设圆半径为 r, 两条直线 $x-y=1$ 和 $x-y=5$ 间距离为

$$\frac{|5-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

因两弦等长且平行, 圆心到两条直线的距离相等, 圆心到任一条直线距离为

$$d=\sqrt{2}$$

由毕氏定理,

$$r^2=\left(\frac{14}{2}\right)^2+(\sqrt{2})^2=51$$

故圆面积为 51π。

12. 若直线 $2x-y+a=0$ 与圆 $x^2+y^2-6x+by+c=0$ 在点 $(4,1)$ 相切, 求 a,b,c 的值。

圆心 $\left(3,\ -\dfrac{b}{2}\right)$, 半径 $r=\sqrt{9+\dfrac{b^2}{4}-c}$, 切点 $(4,1)$ 在直线与圆上, 解得

$$2(4)-1+a=0\Rightarrow a=-7$$

$$4^2+1^2-6\cdot 4+b\cdot 1+c=0\Rightarrow b+c=7 \tag{1}$$

圆心到切线的距离等于半径:

$$\frac{|2\cdot 3-(-\frac{b}{2})-7|}{\sqrt{5}}=\sqrt{9+\frac{b^2}{4}-c}\Rightarrow\left(\frac{b}{2}-1\right)^2=5\left(9+\frac{b^2}{4}-c\right)$$

将 (1) 代入得

$$(b-2)^2=5(8+b^2+4b)\Rightarrow b=-3, c=-7$$

故

$$a=-7, b=-3, c=10$$

13. 设点 O_1 为圆 $C: x^2+y^2-6x+4y+9=0$ 的圆心。今以另一点 O_2 为圆心, O_1O_2 为半径作一圆, 且该圆与圆 C 交于 A, B 两点。若 $AO_2=3$, 求 AB 的长度。

已知圆 $C: x^2+y^2-6x+4y+9=0$, 圆心 $O_1=(3,-2)$, 半径 $r_1=2$。

观察到 $\triangle AO_1O_2$ 的三边为 $AO_1=2, AO_2=3, O_1O_2=3$, 用海伦公式得面积:

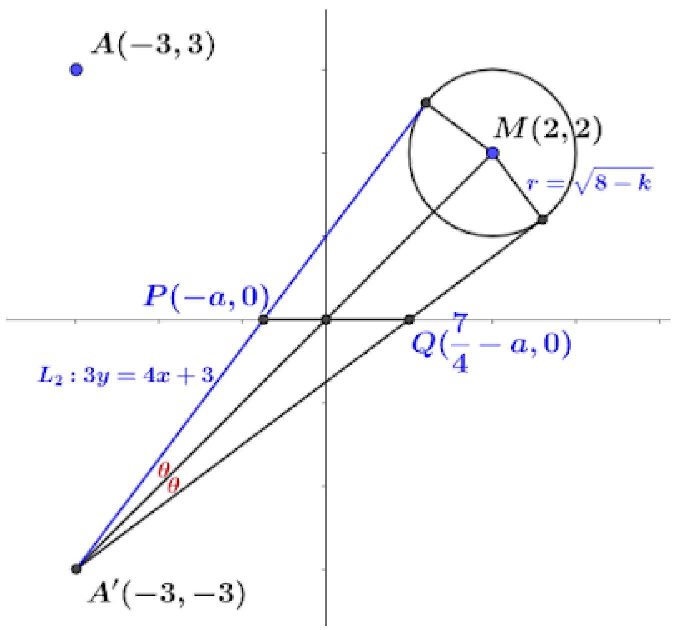
$$S=\sqrt{4(4-2)(4-3)(4-3)}=2\sqrt{2}$$

又

$$S=\frac{1}{2}\cdot O_1O_2\cdot h=\frac{3h}{2}\Rightarrow h=\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

所以 $AB=2h=\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$。

14. 平面上有一定点 $A(-3,3)$ 及一圆 $C: x^2+y^2-4x-4y+k=0$, 若光源由 A 点射出, 碰到 x 轴上 P, Q 两点形成的两条反射光线恰好与圆 C 相切, 且 $PQ=\dfrac{7}{4}$, 求 k 之值。



圆 $C: (x-2)^2+(y-2)^2=8-k$ 圆心 $M(2,2)$, 半径 $r=\sqrt{8-k}$, $A(-3,3)$ 关于 x 轴的对称点为 $A'(-3,-3)$, 于是过 A', M 的直线方程式为

$$x=y$$

且此线为 $\angle PA'Q$ 的角平分线, 故 L 交 x 轴于 $O(0,0)$ 现设 $PO=a, QO=\frac{7}{4}-a$, 则

$$P(-a,0), Q\left(-a+\frac{7}{4},0\right)$$

根据反射光与入射光夹角相等, 有

$$\frac{A'P}{A'Q}=\frac{PO}{QO}\Rightarrow\frac{\sqrt{(-3+a)^2+9}}{\sqrt{(a-\frac{19}{4})^2+9}}=\frac{a}{\frac{7}{4}-a}$$

整理得

$$4a^2-31a+21=0\Rightarrow a=\frac{3}{4}\quad(a=7\text{ 不合})$$

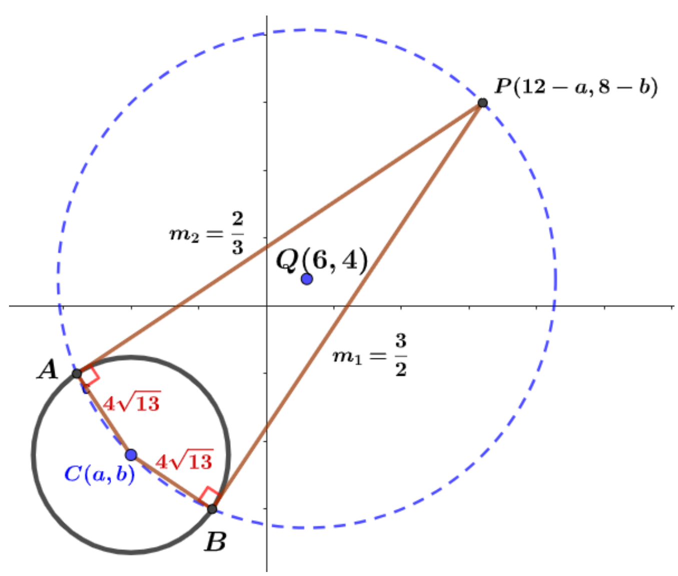
则 $P\left(-\frac{3}{4},0\right)$, 过 A',P 的直线方程式为

$$3y=4x+3$$

由 $r=d(M,L_2)$, 得

$$1=\sqrt{8-k}\Rightarrow k=7$$

15. 在直角坐标平面上, 已知圆 C 的半径为 $4\sqrt{13}$ 且圆心在第三象限。从圆 C 外一点 P 对圆 C 作两条切线, 切点为 A,B, 斜率分别为 $\frac{2}{3},\frac{3}{2}$。若 $\triangle PAB$ 的外接圆圆心为 $(6,4)$, 求圆 C 的圆心坐标。



因为 A,B 为切点, 故

$$\angle CAP=\angle CBP=90^\circ,$$

且外接圆圆心 $Q(6,4)$ 是线段 CP 的中点,CP 是外接圆直径。设圆心 $C(a,b)$, 则点

$$P=(12-a,\ 8-b).$$

切线方程为

$$L_1: y=\frac{2}{3}(x-(12-a))+(8-b),\quad L_2: y=\frac{3}{2}(x-(12-a))+(8-b).$$

整理得

$$L_1: 2x-3y+2a-3b=0, L_2: 3x-2y+3a-2b-20=0$$

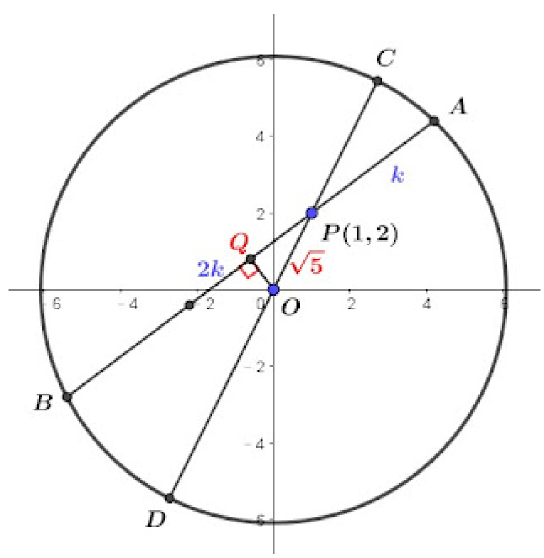
圆心 C 到两切线距离均为半径 $4\sqrt{13}$,

$$\frac{|2a-3b|}{\sqrt{13}}=\frac{|3a-2b-20|}{\sqrt{13}}=4\sqrt{13}$$

由 $a,b<0$, 解得圆心为

$$a=-20, b=-22\Rightarrow(-20,-22)$$

16. 已知圆 $x^2+y^2=37$ 内一点 $P(1,2)$, 若 P 点为某弦的三等分点, 求此弦所在的直线方程。



设 P 为弦 AB 的三等分点, 即 $AP=k, PB=2k$, 圆心 O 到 P 的距离

$$OP=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$$

令直线 OP 与圆交于 C,D 两点, 由 $\triangle APC \backsim \triangle DPB$ (SAS), 得

$$\frac{AP}{PC}=\frac{DP}{PB} \Rightarrow \frac{k}{\sqrt{37}-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{37}+\sqrt{5}}{2k} \Rightarrow k=4$$

因此 $AP=4, PB=8$, 中点 Q 为 AB 的中点, 则

$$PQ=2, \quad OQ=1$$

设直线 $AB: y=m(x-1)+2$, 由圆心到切线的距离等于半径的性质, 解得

$$OQ=1=\frac{|2-m|}{\sqrt{m^2+1}} \Rightarrow m=\frac{3}{4}$$

或直线 AB 与 x 轴垂直, 所以弦所在直线方程为

$$3x-4y+5=0 \quad \text{或} \quad x=1$$

17. 点 $A(6,-1)$ 在圆

$$x^2+y^2-4x+6y=7$$

上。过 A 的切线经过点 P, 且 P 到圆心的距离为 $\sqrt{65}$。再作圆的一条切线, 于另一点 B 与前一切线相交于 P。求 P 与 B 的两组可能坐标。

先化圆的一般式为标准式:

$$x^2-4x+y^2+6y=7$$

$$(x-2)^2+(y+3)^2=20$$

故圆心为

$$C(2,-3), \quad r=\sqrt{20}.$$

由于 PA 与 CA 垂直, 设 $P(a,b)$, 则

$$\frac{-1-(-3)}{6-2}\cdot\frac{b+1}{a-6}=-1$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{b+1}{a-6}=-1$$

$$b+1=-2(a-6)$$

$$b=11-2a.$$

又由已知

$$|PA|=\sqrt{45}, \quad |PC|=\sqrt{65}.$$

先由 $|PA|=\sqrt{45}$:

$$(a-6)^2+(b+1)^2=45$$

代入 $b=11-2a$:

$$(a-6)^2+(12-2a)^2=45$$

$$a^2-12a+36+4a^2-48a+144=45$$

$$5a^2-60a+135=0$$

$$a^2-12a+27=0$$

$$a=3 \quad \text{或} \quad a=9.$$

对应

$$P(3,5) \quad \text{或} \quad P(9,-7).$$

下面分别求对应的 B。

当 $P(3,5)$ 时, 由

$$|BP|=\sqrt{45}, \quad |BC|=\sqrt{20}$$

设 $B(k,h)$, 则

$$\begin{cases}(k-3)^2+(h-5)^2=45,\\(k-2)^2+(h+3)^2=20.\end{cases}$$

相减得

$$-2k-16h-4=0$$

$$k=-2-8h.$$

代回第二式:

$$(-4-8h)^2+(h+3)^2=20$$

$$64h^2+64h+16+h^2+6h+9=20$$

$$65h^2+70h+5=0$$

$$(13h+1)(h+1)=0.$$

舍去对应点 A 的解, 得

$$h=-\frac{1}{13},\quad k=-\frac{18}{13}.$$

$$B\left(-\frac{18}{13},-\frac{1}{13}\right).$$

当 $P(9,-7)$ 时, 同理解

$$\begin{cases}(k-9)^2+(h+7)^2=45,\\(k-2)^2+(h+3)^2=20,\end{cases}$$

得

$$B\left(\frac{30}{13},-\frac{17}{13}\right).$$

因此所求结果为

$$\text{或}P(3,5),\ B\left(-\frac{18}{13},-\frac{1}{13}\right),$$

$$\text{或}P(9,-7),\ B\left(\frac{30}{13},-\frac{17}{13}\right).$$

18. 两条平行直线 L_1 与 L_2 的斜率均为 2, 它们是同一圆的切线, 圆心为 C。第三条直线 L_3 与 L_1,L_2 垂直, 并与圆交于不同的两点 A,B。已知 L_3 经过点 $(9,0)$, 求圆心 C 的坐标。

先求两条平行直线之间的距离。

已知斜率为 2, 因此

$$\tan\theta=2$$

由此可得

$$\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}},\qquad\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

于是两平行线之间的距离为

$$d=6\cos\theta=6\times\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{6}{\sqrt{5}}$$

因此圆的半径为 $\frac{3}{\sqrt{5}}$, 圆心在直线

$$y = 2x + 2$$

上。

作切线 L_3, 其斜率为 $-\frac{1}{2}$, 且经过点 $(9, 0)$, 方程为

$$\begin{aligned} y - 0 &= -\frac{1}{2}(x - 9) \\ y &= -\frac{1}{2}(x - 9) \end{aligned}$$

联立上述直线与 $y = 2x + 2$, 求交点 M 的坐标。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(9 - x) &= 2x + 2 \\ 9 - x &= 4x + 4 \\ 5 &= 5x \\ x &= 1 \end{aligned}$$

代回得

$$y = 4$$

故

$$M(1, 4)$$

接下来在另一示意图中考虑相似三角形。

已知

$$D(0, 2), \qquad M(1, 4)$$

由 $\triangle AMC \sim \triangle ADC$, 得

$$\frac{|MC|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|DC|}$$

设 $|MC| = x$, 则

$$\frac{x}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{x + 2}$$

化简得

$$x^2 + \sqrt{5}x = \frac{9}{5}$$

两边同乘 5,

$$5x^2 + 5\sqrt{5}x = 9$$

即

$$5x^2+5\sqrt{5}x-9=0$$

解得

$$x=\frac{-5\sqrt{5}+\sqrt{305}}{10}$$

因此

$$|DC|=\sqrt{5}+\frac{-5\sqrt{5}+\sqrt{305}}{10}=\frac{5\sqrt{5}+\sqrt{305}}{10}$$

由于圆心 C 在直线 $y=2x+2$ 上, 且

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}},\qquad \sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

圆心的 x 坐标为

$$\begin{aligned}
x&=|DC|\cos\theta\\
&=\frac{5\sqrt{5}+\sqrt{305}}{10}\times\frac{1}{\sqrt{5}}\\
&=\frac{5\sqrt{5}+\sqrt{305}}{10\sqrt{5}}\\
&=\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\sqrt{61}\\
&=\frac{1}{10}(5+\sqrt{61})
\end{aligned}$$

对应的 y 坐标满足

$$\begin{aligned}
y+2&=2+|DC|\sin\theta\\
&=2+\frac{5\sqrt{5}+\sqrt{305}}{10}\times\frac{2}{\sqrt{5}}\\
&=3+\frac{1}{5}\sqrt{61}\\
&=\frac{1}{5}(15+\sqrt{61})
\end{aligned}$$

因此圆心为

$$C\left(\frac{1}{10}(5+\sqrt{61}),\ \frac{1}{5}(15+\sqrt{61})\right)$$

19. 直线 L 与圆 C 的方程分别为

$$L:\ y=\lambda(x-a)+a\sqrt{\lambda^2+1},\qquad C:\ x^2+y^2=2ax,$$

其中 a 为正常数,λ 为参数。证明：对任意 λ, 直线 L 恒为圆 C 的切线。

先将圆的方程化为标准形式：

$$\begin{aligned}x^2+y^2&=2ax\\x^2-2ax+y^2&=0\\(x-a)^2-a^2+y^2&=0\\(x-a)^2+y^2&=a^2.\end{aligned}$$

可见圆心为 $P(a,0)$, 半径为 a。

直线 L 的斜率为 λ, 因此过点 $P(a,0)$ 且与 L 垂直的直线斜率为 $-\frac{1}{\lambda}$, 其方程为

$$\begin{aligned}y-0&=-\frac{1}{\lambda}(x-a)\\x&=a-y\lambda.\end{aligned}$$

设该垂线与直线 L 交于点 Q, 联立两直线方程：

$$\begin{aligned}&y=\lambda(x-a)+a\sqrt{\lambda^2+1},\\&x=a-y\lambda.\end{aligned}$$

代入得

$$\begin{aligned}y&=\lambda(a-y\lambda-a)+a\sqrt{\lambda^2+1}\\y&=-\lambda^2y+a\sqrt{\lambda^2+1}\\y(1+\lambda^2)&=a\sqrt{\lambda^2+1}\\y&=\frac{a}{\sqrt{\lambda^2+1}}.\end{aligned}$$

于是

$$x=a-y\lambda=a-\frac{a\lambda}{\sqrt{\lambda^2+1}}.$$

故

$$Q\left(a-\frac{a\lambda}{\sqrt{\lambda^2+1}},\ \frac{a}{\sqrt{\lambda^2+1}}\right).$$

计算圆心 $P(a,0)$ 到直线 L 的距离, 即 $|PQ|$:

$$\begin{aligned}
|PQ| &= \sqrt{\left(a-\frac{a\lambda}{\sqrt{\lambda^2+1}}-a\right)^2+\left(\frac{a}{\sqrt{\lambda^2+1}}-0\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{a^2\lambda^2}{\lambda^2+1}+\frac{a^2}{\lambda^2+1}} \\
&= \sqrt{\frac{a^2(\lambda^2+1)}{\lambda^2+1}} \\
&= a.
\end{aligned}$$

由于圆心到直线 L 的距离恒等于圆的半径 a, 且与 λ 无关, 因此对任意 λ, 直线 L 始终与圆 C 相切。

故直线 L 对所有 λ 均为圆 C 的切线。

20. 已知圆 $(x-p)^2+y^2=r^2$ 及 $(y-p)^2+x^2=r^2$ 交于相异点 A,B, 且 a,b 分别是 A,B 的 x-坐标。若 C,D 分别为两圆的圆心,

(a) 证明 $a+b=p, a^2+b^2=r^2$ 且 $p^2<2r^2$。

两圆方程式联立得

$$(x-p)^2+y^2=(y-p)^2+x^2 \Rightarrow 2px=2py \Rightarrow x=y\ (\because p\neq 0)$$

代回第一式,

$$(x-p)^2+x^2=r^2 \Rightarrow 2x^2-2px+p^2-r^2=0$$

由韦达定理,

$$a+b=p,\ ab=\frac{p^2-r^2}{2}$$

又

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=p^2-2\cdot\frac{p^2-r^2}{2}=r^2$$

且判别式必为正, 故

$$\Delta=4p^2-4\cdot 2(p^2-r^2)>0 \Rightarrow p^2<2r^2$$

(b) 若 r 是常量而 p 是变量, 使得四边形 $CADB$ 面积有最大值, 求证此时 A 或 B 是原点。

设 $A(a,a),B(b,b),C(p,0),\ D(0,p)$。则直线 CD 的斜率为 -1。点 A,B 在直线 $y=x$ 上, 所以 AB 的斜率为 1。因此 $AB\perp CD$, 四边形 $CADB$ 是风筝形, 其面积为

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\cdot AB\cdot CD&=\frac{1}{2}\sqrt{2(a-b)^2}\sqrt{2p^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{2r^2-(p^2-r^2)}\sqrt{2p^2}\\&=\sqrt{2r^2p^2-p^4}\end{aligned}$$

其中 $f(p^2)=2r^2p^2-p^4$ 是一关于 p^2 的二次函数, 开口向下, 其顶点在

$$p^2=\frac{-2r^2}{2(-1)}=r^2$$

因此面积在 $p^2=r^2$ 时取最大。又由 $(a+b)^2=p^2$, 所以

$$a^2+2ab+b^2=r^2$$

但 $a^2+b^2=r^2$, 故 $2ab=0$, 即 $a=0$ 或 $b=0$。

若 $a=0$, 则 $A(0,0)$; 若 $b=0$, 则 $B(0,0)$。所以当面积最大时, 原点必为 A 或 B。

21. 坐标平面上有一圆 $C:x^2+y^2=20$, 试回答下列问题:

(a) 抛物线 Γ_1 与圆 C 相切于 $A(-\sqrt{10},\sqrt{10})$ 和 $B(\sqrt{10},\sqrt{10})$ 两点, 求抛物线 Γ_1 的方程式为何?

由切点可知抛物线关于 y 轴对称且开口向下, 设

$$\Gamma_1:y=ax^2+b,\quad a<0$$

将 $A(-\sqrt{10},\sqrt{10})$ 代入得 $10a+b=\sqrt{10}$; 将 Γ_1 代入圆 C:

$$x^2+(ax^2+b)^2=20\Rightarrow a^2x^4+(2ab+1)x^2+b^2-20=0$$

令判别式为 0,

$$(2ab+1)^2-4a^2(b^2-20)=0$$

代入 $b=\sqrt{10}-10a$ 得

$$80a^2+4a(\sqrt{10}-10a)+1=0\Rightarrow 40a^2+4\sqrt{10}a+1=0$$

解得 $a=-\dfrac{\sqrt{10}}{20},b=\dfrac{3\sqrt{10}}{2}$, 所以抛物线方程为

$$y=-\frac{\sqrt{10}}{20}x^2+\frac{3\sqrt{10}}{2}$$

(b) 抛物线 Γ_2 与圆 C 相切于 $D(2,4)$ 和 $E(-4,2)$ 两点, 求抛物线 Γ_2 的顶点坐标为何?

考虑将 Γ_1 旋转使其与 Γ_2 对应, 设旋转矩阵为

$$T=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

满足

$$T\begin{bmatrix}\sqrt{10}\\ \sqrt{10}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 4\end{bmatrix}\Rightarrow \cos\theta=\frac{3}{\sqrt{10}},\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

又 Γ_1 顶点为 $P(0,\frac{3\sqrt{10}}{2})$, 则 Γ_2 顶点为

$$T(P)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \frac{3\sqrt{10}}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{3}{2}\\ \frac{9}{2}\end{bmatrix}\Rightarrow \Gamma_2\text{ 顶点}=\left(-\frac{3}{2},\frac{9}{2}\right)$$

22. 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 $P(0,1)$, 点 A 为动点, 以线段 AP 为直径的圆与 x 轴相切, 设 A 点的轨迹为曲线 E.

(a) 求轨迹 E 的方程.

设 $A(x,y), AP$ 中点 $(\frac{x}{2},\frac{y+1}{2})$, 则由题意

$$\sqrt{x^2+(y-1)^2}=2\left|\frac{y+1}{2}\right|$$

化简即得轨迹 E 的方程式 $x^2=4y$。

(b) 若直线 AP 与 E 交于另一点 $B, \triangle AOB$ 的外接圆交 E 于点 C(不与 O,A,B 重合), 过点 C 作 E 的切线交直线 AP 于点 N, 求 $|ON|$ 的最小值.

设 $l_{AP}: y=kx+1, A(x_1,y_1), B(x_2,y_2), C(x_3,y_3)$,

$$\begin{cases}y=kx+1\\ x^2=4y\end{cases}\Rightarrow x^3-4kx-4=0$$

其中

$$x_1+x_2=4k, x_1x_2=-4$$

又 O,A,B,C 四点共圆, 设 $\triangle AOB$ 外接圆方程为 $x^2+y^2+dx+ey=0$, 解得

$$\begin{cases}x^2+y^2+dx+ey=0\\ x^2=4y\end{cases}\Rightarrow x^3+(16+4e)x+16d=0$$

其中 x_1, x_2, x_3 是方程 $x^3+(4e+16)x+16d=0$ 的三个根, 且

$$x_1+x_2+x_3=0$$

即

$$x_3=-(x_1+x_2)=-4k$$

代入 E 得 $y_3=4k^2$ 得 $C(-4k,4k^2)$, 过 C 曲线 E 的切线方程为

$$2kx+y+4k^2=0$$

与 $l_{AP}: y=kx+1$ 联立得

$$N\left(-\frac{4k^2+1}{3k},-\frac{4k^2-2}{3}\right)$$

故

$$\begin{aligned}
|ON|^2&=\left(-\frac{4k^2+1}{3k}\right)^2+\left(-\frac{4k^2-2}{3}\right)^2\\
&=\frac{1}{9}\left(16k^4+12+\frac{1}{k^2}\right)\\
&\geqslant\frac{1}{9}\left(3\sqrt[3]{16k^4\cdot\frac{1}{2k^2}\cdot\frac{1}{2k^2}}+12\right)\\
&=\frac{\sqrt[3]{4}+4}{3}
\end{aligned}$$

当且仅当 $16k^4=\dfrac{1}{2k^2}\iff k^6=\dfrac{1}{32}\iff k=\pm\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{5}{6}}$ 时,

$$|ON|_{\min}=\sqrt{\frac{\sqrt[3]{4}+4}{3}}$$

23. 求抛物线 $y^2=16x$ 上距直线 $4x-3y+24=0$ 最近的点坐标。

设抛物线上一点为 $(t^2,4t)$, $t\in\mathbb{R}$, 则到直线的距离为:

$$d=\frac{|4t^2-12t+24|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{4}{5}|t^2-3t+6|$$

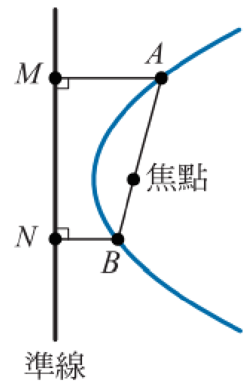
又

$$t^2-3t+6=\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{4}$$

在 $t=\dfrac{3}{2}$ 时最小，所以最近的点坐标为

$$(t^2,4t)=\left(\frac{9}{4},6\right)$$

24. 已知抛物线的焦弦 AB，准线到焦弦两端的垂足满足 $AM=9$，$BN=4$，求 MN。



由抛物线定义，

$$AB=AF+BF=AM+BN=9+4=13$$

由毕氏定理，

$$AB^2=MN^2+(AM-BN)^2\Rightarrow MN^2=13^2-5^2=12^2$$

$\therefore\ MN=12$

25. 已知一个抛物线形状的拱桥，拱顶 A 点离水面 2 公尺时，水面宽度 $BC=4$ 公尺。若水面再下降 1 公尺，求新的水面宽度 DE。

设拱顶 A 为原点，抛物线开口向下，方程为：

$$y=-ax^2,a>0$$

当 $y=-2$ 时,$x=\pm 2$，代入得：

$$-2=-a(2)^2\Rightarrow a=\frac{1}{2}\Rightarrow y=-\frac{1}{2}x^2$$

当 $y=-3$ 时，

$$-3=-\frac{1}{2}x^2\Rightarrow x=\pm\sqrt{6}\Rightarrow DE=2\sqrt{6}$$

26. 求一边在直线 $y=2x-17$ 上, 另两顶点在抛物线 $y=x^2$ 上的正方形面积。

设正方形顶点 $A(x_1,x_1^2),B(x_2,x_2^2)$ 在抛物线 $y=x^2$ 上, 有

$$m_{AB}=\frac{x_2^2-x_1^2}{x_2-x_1}=x_1+x_2=2$$

且

$$\left|\frac{2x_1-x_1^2-17}{\sqrt{2^2+1^2}}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(x_2^2-x_1^2)^2}$$

将 $x_2=2-x_1$ 代入化简得

$$(2x_1-x_1^2-17)^2=100(1-x_1)^2$$

不失一般性, 即解

$$2x_1-x_1^2-17=10(1-x_1)$$

得 $x_1=3$ 或 $x_1=9$, 故正方形面积为 16 或 256.

27. 设一抛物线的顶点坐标为 $V(-1,3)$, 且对称轴的方程为 $L:2x+y-1=0$。若此抛物线经过点 $A(3,3)$, 求此抛物线的正焦弦长。

直线 $L:2x+y-1=0$ 与 x 轴交于 $P\left(\frac{1}{2},0\right)$, 以 P 为旋转中心, 逆时针旋转 $\tan^{-1}2$ 将 L 变为 x 轴。

顶点 $V(-1,3)$ 旋转后得到 $V'\left(\frac{1}{2}-\frac{15}{2\sqrt{5}},0\right)$, 点 $A(3,3)$ 旋转后得到 $A'\left(\frac{1}{2}-\frac{7}{2\sqrt{5}},\frac{8}{\sqrt{5}}\right)$。

以 V' 为顶点, 旋转后的抛物线方程为

$$y^2=4c\left(x-\frac{1}{2}+\frac{15}{2\sqrt{5}}\right).$$

将 A' 代入方程, 解得

$$c=\frac{4\sqrt{5}}{5}$$

因此正焦弦长为

$$4c=\frac{16\sqrt{5}}{5}$$

28. 已知抛物线顶点在原点, 焦点在 x 轴上, $\triangle ABC$ 三个顶点都在抛物线上, 且重心为抛物线焦点 F, 边 BC 所在直线为 $4x+y-20=0$, 求抛物线方程。

设抛物线方程为

$$y^2 = 4cx$$

BC 与直线 $L: 4x + y - 20 = 0$ 相交, 由于直线上动点 $P(t, 20 - 4t)$ 在抛物线上,

$$(20 - 4t)^2 = 4ct \Rightarrow 4t^2 - (40 + c)t + 100 = 0.$$

设两交点为 $B(t_1, 20 - 4t_1), C(t_2, 20 - 4t_2), A(x_a, y_a)$ 在抛物线上, 且已知重心为焦点 $F(c, 0)$, 得

$$c = \frac{x_a + t_1 + t_2}{3}, \quad 0 = \frac{y_a + (20 - 4t_1) + (20 - 4t_2)}{3}.$$

解得

$$x_a = \frac{11}{4}c - 10, \quad y_a = c.$$

又 $A(x_a, y_a)$ 在抛物线上,

$$c^2 = 4c\left(\frac{11}{4}c - 10\right) \Rightarrow c = 4.$$

因此抛物线方程为

$$y^2 = 16x$$

29. 抛物线 $\Gamma: y^2 = 4x$, F 为 Γ 的焦点, A, B 为 Γ 上的两个不重合的动点, 使得线段 AB 的一个三等分点 P 位于线段 OF 上 (含端点), 记 Q 为线段 AB 的另一个三等分点, 求 Q 的轨迹方程.

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$. 不妨设 $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QB}$, 则

$$P\left(\frac{2x_1 + x_2}{3}, \frac{2y_1 + y_2}{3}\right)$$

易知 $F(1, 0)$. 由于点 P 位于线段 OF 上, 故

$$\frac{2x_1 + x_2}{3} \in [0, 1], \quad \frac{2y_1 + y_2}{3} = 0$$

设 $y_1 = t, y_2 = -2t$, 则 $x_1 = \dfrac{t^2}{4}, x_2 = t^2$. 此时有

$$\frac{2x_1 + x_2}{3} = \frac{t^2}{2} \in [0, 1]$$

且由 A, B 不重合知 $t \neq 0$, 所以 $t^2 \in (0, 2]$. 设 $Q(x_Q, y_Q)$, 则

$$x_Q = \frac{x_1 + 2x_2}{3} = \frac{3}{4}t^2, y_Q = \frac{y_1 + 2y_2}{3} = -t$$

故有 $y_Q^2=\dfrac{4}{3}x_Q$，注意到 $x_Q=\dfrac{3}{4}t^2\in\left[0,\dfrac{3}{2}\right]$，故点 Q 的轨迹方程为

$$y^2=\frac{4}{3}x$$

30. AB 为抛物线 $y^2=4ax$ 之一动弦，且 $\angle AOB=90^\circ$，其中 O 为原点，TA 与 TB 为切线，NA 与 NB 为其法线，证明 TN 之中点轨迹方程式 $2y^2=25a(x-a)$。

设 $A(at_1^2,2at_1)$，$B(at_2^2,2at_2)$。

抛物线 $y^2=4ax$ 在 A 点的切线：

$$yt_1=x+at_1^2 \implies t_1y-x=at_1^2$$

同理 B 点的切线：

$$t_2y-x=at_2^2$$

$\angle AOB=90^\circ \implies \mathrm{OA}\perp\mathrm{OB} \implies m_{\mathrm{OA}}\cdot m_{\mathrm{OB}}=-1$：

$$\frac{2at_1}{at_1^2}\cdot\frac{2at_2}{at_2^2}=-1 \implies t_1t_2=-4$$

切线交点 T：

$$y=a(t_1+t_2),\quad x=at_1t_2=-4a$$

法线在 A 点方程：

$$y-2at_1=-t_1(x-at_1^2) \implies t_1x+y=at_1^3+2at_1$$

联立求 N 点坐标：

$$N(x_N,y_N)=(a(t_1+t_2)^2-2a,4a(t_1+t_2))$$

TN 中点坐标：

$$x_M=\frac{-4a+a(t_1+t_2)^2-2a}{2}=\frac{a(t_1+t_2)^2-6a}{2},\quad y_M=\frac{a(t_1+t_2)+4a(t_1+t_2)}{2}=\frac{5a(t_1+t_2)}{2}$$

令 $t_1+t_2=\frac{2y_M}{5a}$，代入 x_M：

$$x_M=\frac{a\left(\frac{2y_M}{5a}\right)^2-6a}{2}=\frac{4y_M^2}{50a}-3a=\frac{2y_M^2}{25a}-3a$$

整理得轨迹方程：

$$2y^2=25a(x-a)$$

31. 已知抛物线 $\Gamma: y=x^2$ 上三个不同点 $A(1,1),B,C$ 满足 $AB\perp AC$, 过 B,C 分别作 Γ 的切线交于点 P, 求点 P 的轨迹方程。

设 $B(x_1,x_1^2),C(x_2,x_2^2)$, 直线 BC 的方程为 $y=kx+m$, 联立 $\Gamma: y=x^2$ 得

$$x^2-kx-m=0$$

由韦达定理

$$x_1+x_2=k,\quad x_1x_2=-m$$

于是

$$y_1+y_2=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=k^2+2m$$
$$y_1y_2=x_1^2x_2^2=(x_1x_2)^2=m^2$$

由 $AB\perp AC$, 即 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$, 有

$$(x_1-1)(x_2-1)+(y_1-1)(y_2-1)=0$$

展开整理得

$$x_1x_2-(x_1+x_2)+1+y_1y_2-(y_1+y_2)+1=0$$

代入上式各值, 得到

$$-m-k+1+m^2-(k^2+2m)+1=0\Rightarrow m^2-3m-k^2-k+2=0$$

解得

$$m=k+2\quad\text{或}\quad m=-k+1$$

若 $m=-k+1$, 则直线 BC 方程为 $y=k(x-1)+1$, 经过 $A(1,1)$, 舍去; 因此 $m=k+2, BC$ 方程为

$$y=k(x+1)+2$$

即 BC 恒过定点 $(-1,2)$。分别作点 $B(x_1,x_1^2)$ 与 $C(x_2,x_2^2)$ 的切线方程:

$$y-x_1^2=2x_1(x-x_1)\ ,\ y-x_2^2=2x_2(x-x_2)$$

联立两式得切线交点 P,

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{k}{2},\quad y=x_1x_2=-m=-k-2$$

消去参数 k 即得点 P 的轨迹方程

$$2x+y+2=0$$

32. 已知抛物线 $y=x^2$, 取 $a<0$,$b>0$, 点 $P=(a,a^2)$,$Q=(b,b^2)$。设 M 为 PQ 的中点,R 为通过 M 的竖直线与抛物线的交点。设 l 为抛物线在 Q 处的切线。证明：所有以一端在 PQ 上、另一端在 l 上的竖直线段, 都被通过 Q 与 R 的直线平分。

抛物线在 Q 处的切线方程为

$$y=2b(x-b)+b^2=2bx-b^2,$$

注意原文中为 $y=-2bx+b^2$, 根据方向可以调整符号。

直线 PQ 的方程为

$$y-a^2=\frac{b^2-a^2}{b-a}(x-a)=(b+a)x-ab.$$

中点 M 坐标为

$$M=\left(\frac{a+b}{2},\frac{a^2+b^2}{2}\right),$$

通过 M 的竖直线 $x=\frac{a+b}{2}$ 与抛物线 $y=x^2$ 的交点为

$$R=\left(\frac{a+b}{2},\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right).$$

直线 QR 的方程为

$$y-b^2=\frac{(\frac{a+b}{2})^2-b^2}{\frac{a+b}{2}-b}(x-b)=\frac{(a+b)^2/4-b^2}{(a-b)/2}(x-b)=-\frac{a+3b}{2}(x-b)+b^2=-\frac{a+3b}{2}x+\frac{ab+b^2}{2}.$$

设竖直线段的上端在 l 上, 端点坐标为 (x_0,y_1), 下端在 PQ 上, 坐标为 (x_0,y_2), 则竖直线段的中点纵坐标为

$$\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{l(x_0)+PQ(x_0)}{2}=\frac{(-2bx_0+b^2)+((a+b)x_0-ab)}{2}=-\frac{a+3b}{2}x_0+\frac{ab+b^2}{2}.$$

这正是直线 QR 的方程, 因此每个竖直线段都被 QR 平分。

33. 已知抛物线

$$y^2=2px$$

与双曲线

$$y=-\frac{1}{x}$$

相交于点 R, 一条同时与抛物线和双曲线相切的公切线分别相切于点 S,T, 求证对于任意正实数 p,$\triangle RST$ 的面积与 p 无关, 即为一定值。

设公切线为 $y=mx+c$, 代入抛物线得

$$(mx+c)^2=2px\Rightarrow m^2x^2+2(mc-p)x+c^2=0 \tag{1}$$

令判别式为零:

$$4(mc-p)^2-4m^2c^2=0\Rightarrow p=2mc \tag{2}$$

同理, 将 $y=mx+c$ 代入双曲线得

$$mx^2+cx+1=0 \tag{3}$$

且有

$$c^2=4m \tag{4}$$

由 (1), (3) 得

$$x_S=\frac{p-mc}{m^2}, x_T=-\frac{c}{2m}$$

由 (2), (4) 得

$$x_S=\frac{c}{m}=\frac{4}{c}, x_T=-\frac{2}{c}\Rightarrow y_S=2c, y_T=\frac{c}{2}$$

即

$$S\left(\frac{4}{c}, 2c\right), T\left(-\frac{2}{c}, \frac{c}{2}\right)$$

将抛物线与双曲线联立得

$$\left(-\frac{1}{x}\right)^2=2px\Rightarrow R\left(\left(\frac{1}{2p}\right)^{\frac{1}{3}},\ -(2p)^{\frac{1}{3}}\right)$$

由 $\dfrac{(4)}{(3)}$ 得 $c=(2p)^{\frac{1}{3}}$, 于是 R 坐标为

$$R\left(\frac{1}{c}, -c\right)$$

故 $\triangle RST$ 的面积为

$$\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\frac{4}{c} & 2c & 1\\ -\frac{2}{c} & \frac{c}{2} & 1\\ \frac{1}{c} & -c & 1\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\left|2+2+2-\frac{1}{2}+4+4\right|=\frac{27}{4},$$

且与 p 无关。

34. 已知抛物线 Γ 的顶点是原点 O, 焦点是 $F(0,1)$. 过直线 $y=-2$ 上任意一点 A 作抛物线 Γ 的

两条切线, 切点分别为 P、Q, 求证:

(a) 直线 PQ 过定点;

易知抛物线 Γ 的方程为 $x^2=4y$. 设点

$$A(t,-2),P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$$

则过点 P 的抛物线 Γ 的切线 l_1 的方程为

$$y-y_1=\frac{x_1}{2}(x-x_1)$$

即

$$x_1x-2y-2y_1=0$$

同理, 过点 Q 的抛物线 Γ 的切线 l_2 的方程为:

$$x_2x-2y-2y_2=0$$

由 l_1, l_2 过点 A, 可得

$$x_1t+4-2y_1=0,x_2t+4-2y_2=0$$

这表明, 点 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$ 的坐标满足方程:

$$tx-2y+4=0$$

即直线 PQ 的方程, 易得直线 PQ 过定点 $(0,2)$.

(b) $\angle PFQ=2\angle PAQ$.

不妨设 P 在 Q 左边, 则 $x_1<x_2$. 因为

$$\tan\angle PAQ=\frac{\frac{x_1}{2}-\frac{x_2}{2}}{1+\frac{x_1}{2}\cdot\frac{x_2}{2}}=\frac{2(x_1-x_2)}{x_1x_2+4}$$

所以

$$\tan 2\angle PAQ=\frac{2\tan\angle PAQ}{1-\tan^2\angle PAQ}=\frac{\frac{4(x_1-x_2)}{x_1x_2+4}}{1-\left(\frac{4(x_1-x_2)}{x_1x_2+4}\right)^2}=\frac{4(x_1-x_2)(x_1x_2+4)}{(x_1x_2+4)^2-4(x_1-x_2)^2}$$

又因为

$$\tan\angle PFQ=\frac{\frac{y_1-1}{x_1}-\frac{y_2-1}{x_2}}{1+\frac{y_1-1}{x_1}\cdot\frac{y_2-1}{x_2}}=\frac{x_2\left(\frac{x_1^2}{4}-1\right)-x_1\left(\frac{x_2^2}{4}-1\right)}{x_1x_2+\left(\frac{x_1^2}{4}-1\right)\left(\frac{x_2^2}{4}-1\right)}=\frac{4(x_1-x_2)(x_1x_2+4)}{(x_1x_2+4)^2-4(x_1-x_2)^2}$$

故

$$\tan 2\angle PAQ = \tan\angle PFQ$$

又 $0 < \angle PAQ < 90^\circ < \angle PFQ < 180^\circ$, 则

$$\angle PFQ = 2\angle PAQ$$

35. 求内接于抛物线 $y^2 = 4cx$ $(c > 0)$ 的正三角形的重心所形成的轨迹方程。

设内接抛物线 $\Gamma : y^2 = 4cx$ 的正三角形顶点为

$$A\left(\frac{\alpha^2}{4c}, \alpha\right), B\left(\frac{\beta^2}{4c}, \beta\right), C\left(\frac{\gamma^2}{4c}, \gamma\right),$$

则重心为

$$G\left(\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{12c}, \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)$$

设各边斜率

$$m_1 = \frac{4c(\beta-\alpha)}{(\beta^2-\alpha^2)} = \frac{4c}{\beta+\alpha}, m_2 = \frac{4c(\gamma-\beta)}{(\gamma^2-\beta^2)} = \frac{4c}{\gamma+\beta}, m_3 = \frac{4c(\alpha-\gamma)}{(\alpha^2-\gamma^2)} = \frac{4c}{\alpha+\gamma}$$

由正三角形性质:

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3} = \frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2} = \frac{m_3-m_2}{1+m_2m_3} = \frac{m_1-m_3}{1+m_3m_1}$$

化简得

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = -16c^2 - \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{3}$$

现设 $G = (x, y)$, 则

$$9y^2 = (\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) = 12cx+2(-16c^2-4cx) = 4cx-32c^2$$

因此正三角形重心轨迹方程为

$$9y^2 = 4cx - 32c^2$$

36. 已知正 $\triangle ABC$ 内接于抛物线

$$y = x^2 - \frac{71}{36},$$

点 P 满足 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC} = \mathbf{0}$, 是否存在定点 Q, 使得点 P 到点 Q 的距离与点 P 到 x 轴的距离相等？若存在, 求出点 Q 的坐标；若不存在, 请说明理由。

设 $A(x_1,x_1^2-\frac{71}{36})$, $B(x_2,x_2^2-\frac{71}{36})$, $C(x_3,x_3^2-\frac{71}{36})$, 易知 x_1,x_2,x_3 互不相等,

取 BC 的中点为 D, 则点 D 的坐标为

$$D(\frac{x_2+x_3}{2},\frac{x_2^2+x_3^2}{2}-\frac{71}{36})$$

因为 $\triangle ABC$ 为正三角形, 所以 $AD\perp BC$, 由 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$, 得

$$(\frac{x_2+x_3}{2}-x_1,\frac{x_2^2+x_3^2}{2}-x_1^2)\cdot(x_3-x_2,x_3^2-x_2^2)=0$$

整理得

$$x_2^3+x_3^3+x_2^2x_3+x_2x_3^2-2x_1^2x_2-2x_1^2x_3+x_2+x_3-2x_1=0 \tag{1}$$

同理得

$$x_1^3+x_2^3+x_1^2x_2+x_1x_2^2-2x_3^2x_1-2x_3^2x_2+x_1+x_2-2x_3=0 \tag{2}$$

由 $(1)-(2)$, 得 $x_3^3-x_1^3+x_2^2(x_3-x_1)+3x_2(x_3^2-x_1^2)+2x_1x_3(x_3-x_1)+3(x_3-x_1)=0$ 整理得

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+3(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)+3=0 \tag{3}$$

设 $P(x_0,y_0)$, 因为 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$, 所以

$$x_0=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},y_0=\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{3}-\frac{71}{36}$$

因为

$$(x_1+x_2+x_3)^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3=9x_0^2$$
$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=3y_0+\frac{71}{12}$$

所以

$$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{1}{2}(9x_0^2-3y_0-\frac{71}{12})$$

由 (3) 得

$$3y_0+\frac{71}{12}+\frac{3}{2}(9x_0^2-3y_0-\frac{71}{12})+3=0$$

整理得

$$x_0^2=\frac{1}{9}(y_0-\frac{1}{36})$$

所以点 $P(x_0,y_0)$ 是抛物线上一点, 其焦点为 $(0,\frac{1}{18})$, 准线为 x 轴, 由抛物线的定义得点 Q 的坐标为

$$Q(0,\frac{1}{18}).$$

37. 抛物线 C 的直角坐标方程为

$$y^2 = 4ax,$$

其中 a 为正常数。点 $P(ap^2, 2ap)$ 与 $Q(aq^2, 2aq)$ 为抛物线 C 上的两个不同点。过 P, Q 作抛物线的切线, 两切线相交于点 R。设 S 为抛物线的焦点, 证明

$$|SR|^2 = |SP||SQ|.$$

首先求抛物线在 P 与 Q 处的切线方程。

由

$$y^2 = 4ax$$

对 x 求导得

$$2y\frac{dy}{dx} = 4a,$$

从而

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2a}{y}.$$

在点 $P(ap^2, 2ap)$ 处,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2a}{2ap} = \frac{1}{p},$$

故切线方程为

$$y - 2ap = \frac{1}{p}(x - ap^2).$$

同理, 在点 $Q(aq^2, 2aq)$ 处切线方程为

$$y - 2aq = \frac{1}{q}(x - aq^2).$$

联立两条切线方程:

$$y - 2ap = \frac{1}{p}(x - ap^2),$$
$$y - 2aq = \frac{1}{q}(x - aq^2).$$

相减得

$$2a(q - p) = \frac{p(x - aq^2) - q(x - ap^2)}{pq}.$$

化简得

$$x = apq.$$

将其代入第一条切线方程,

$$\begin{aligned} y &= 2ap + \frac{1}{p}(apq - ap^2) \\ &= ap + aq. \end{aligned}$$

因此

$$R(apq, a(p+q)).$$

接下来计算距离。

抛物线 $y^2 = 4ax$ 的焦点为

$$S(a, 0).$$

$$|SP| = \sqrt{(ap^2 - a)^2 + (2ap)^2} = \sqrt{a^2(p^2+1)^2} = a(p^2+1).$$

同理

$$|SQ| = a(q^2+1).$$

再计算

$$\begin{aligned} |SR|^2 &= (apq - a)^2 + (a(p+q))^2 \\ &= a^2(pq-1)^2 + a^2(p+q)^2 \\ &= a^2(p^2q^2 + p^2 + q^2 + 1) \\ &= a^2(p^2+1)(q^2+1). \end{aligned}$$

于是

$$|SR|^2 = [a(p^2+1)][a(q^2+1)] = |SP||SQ|.$$

证毕。

38. 抛物线 P 的焦点为 $S(6, 0)$, 准线为 $x = 0$。

1. 证明 P 的直角坐标方程为 $y^2 = 12(x-3)$。
2. 验证 P 的参数方程为

$$x = 3t^2 + 3, \quad y = 6t.$$

3. 证明过点 $Q(3q^2+3,6q)$ 的切线方程为

$$qy+3=x+3q^2.$$

4. 设 R 为抛物线上一点，使 QSR 在一条直线上，证明过 Q 和 R 的切线交于 y 轴。

(a) 任取抛物线上一点 $A(x,y)$，根据焦点定义,$AS=$ 距准线距离：

$$\sqrt{(x-6)^2+y^2}=x.$$

两边平方：

$$(x-6)^2+y^2=x^2 \implies x^2-12x+36+y^2=x^2 \implies y^2=12x-36=12(x-3).$$

(b) 参数方程 $x=3t^2+3, y=6t$ 代入：

$$y^2=(6t)^2=36t^2, \quad 12(x-3)=12(3t^2+3-3)=36t^2,$$

验证成立。

(c) 切线方程可用参数法求导：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{6}{6t}=\frac{1}{t}.$$

过 $Q(3q^2+3,6q)$：

$$y-6q=\frac{1}{q}(x-(3q^2+3)) \implies qy+3=x+3q^2.$$

(d) 设 R 位于 QSR 直线上。直线 QSR 斜率由焦点 $S(6,0)$ 与 Q 决定：

$$y-0=\frac{6-0}{3q^2+3-6}(x-6)=\frac{6q}{3(q^2-1)}(x-6)=\frac{2q}{q^2-1}(x-6).$$

与抛物线 $x=3t^2+3, y=6t$ 联立：

$$6t=\frac{2q}{q^2-1}(3t^2+3-6)=\frac{6q(t^2-1)}{q^2-1} \implies t=-\frac{1}{q} \quad (\text{点 } Q \text{ 对应} t=q).$$

于是

$$R=\left(3\left(-\frac{1}{q}\right)^2+3, 6\left(-\frac{1}{q}\right)\right)=\left(\frac{3}{q^2}+3,-\frac{6}{q}\right).$$

切线方程过 R：

$$ry + 3 = x + 3r^2, \quad r = -\frac{1}{q} \implies -\frac{1}{q}y + 3 = x + \frac{3}{q^2}.$$

求 Q、R 的切线交点：

$$\begin{cases} qy + 3 = x + 3q^2, \\ -\frac{1}{q}y + 3 = x + \frac{3}{q^2}. \end{cases}$$

相减：

$$qy + \frac{1}{q}y = 3q^2 - \frac{3}{q^2} \implies y\left(q + \frac{1}{q}\right) = 3\frac{q^4 - 1}{q^2} = 3\frac{(q^2-1)(q^2+1)}{q^2}.$$

两边除以 $q + 1/q = (q^2+1)/q$：

$$y = \frac{3(q^2-1)(q^2+1)/q^2}{(q^2+1)/q} = 3\frac{q^2-1}{q}.$$

代入 $x = qy + 3 - 3q^2$：

$$x = q \cdot 3\frac{q^2-1}{q} + 3 - 3q^2 = 3(q^2-1) + 3 - 3q^2 = 0.$$

所以切线交于 y 轴，证毕。

39. 已知抛物线由参数方程

$$x = \frac{1}{3}t^2, \quad y = \frac{2}{3}t, \quad t \in \mathbb{R}$$

给出。曲线在点 P 处的法线与抛物线再次相交于点 Q。证明 $|PQ|$ 的最小值为 $\sqrt{12}$。

由参数方程消去参数 t：

$$3x = t^2, \quad 3y = 2t$$

于是

$$9y^2 = 4t^2 = 4(3x) \Rightarrow y^2 = \frac{4}{3}x.$$

对 $y^2 = \frac{4}{3}x$ 求导，

$$2y\frac{dy}{dx} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2}{3y}.$$

设点 P 对应参数值为 $t = P$，则

$$P\left(\frac{P^2}{3}, \frac{2P}{3}\right).$$

此时切线斜率为

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_P = \frac{1}{P},$$

故法线斜率为 $-P$。法线方程为

$$y - \frac{2P}{3} = -P\left(x - \frac{P^2}{3}\right)$$
$$\Rightarrow\ 3y + 3Px = 2P + P^3.$$

将 $x = \frac{3}{4}y^2$ 代入上式, 得

$$\begin{aligned} 3y + 3P\left(\frac{3}{4}y^2\right) &= 2P + P^3 \\ 12y + 9Py^2 &= 8P + 4P^3 \\ 9Py^2 + 12y - 8P - 4P^3 &= 0 \\ (3y - 2P)(3Py + 4 + 2P^2) &= 0. \end{aligned}$$

除去对应点 P 的解 $y = \frac{2P}{3}$, 得点 Q 的纵坐标

$$y = -\frac{4 + 2P^2}{3P}.$$

由 $y = \frac{2}{3}t$, 可得点 Q 对应的参数

$$t = -\frac{2 + P^2}{P},$$

从而

$$Q\left(\frac{(2 + P^2)^2}{3P^2}, -\frac{4 + 2P^2}{3P}\right).$$

于是

$$\begin{aligned} |PQ|^2 &= \left(\frac{(2 + P^2)^2}{3P^2} - \frac{P^2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{4 + 2P^2}{3P} - \frac{2P}{3}\right)^2 \\ &= \frac{16(P^2 + 1)^3}{9P^4}. \end{aligned}$$

设

$$f(P) = \frac{(P^2 + 1)^3}{P^4},$$

则

$$f'(P) = \frac{2(P^2 + 1)^2(P^2 - 2)}{P^5}.$$

令 $f'(P)=0$, 得 $P=\pm\sqrt{2}$。此时

$$|PQ|^2=\frac{16(2+1)^3}{9\cdot 2^2}=12.$$

因此

$$|PQ|_{\min}=\sqrt{12}.$$

40. 已知抛物线

$$E: x^2=2py\ (p>0)$$

的焦点为 F, 点 $P(m,n)\ (m\neq 0)$ 在 E 上, 过点 P 作抛物线的切线 l, 直线 l 与椭圆

$$C: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$$

交于两不同点 A,B, 记线段 AB 的中点为 D。设直线 OD（O 为原点）与直线 $y=-\dfrac{pb^2}{a^2}$ 交于点 Q。

(a) 证明直线 $y=-\dfrac{pb^2}{a^2}$ 与直线 PQ 垂直。

点 P 在抛物线上, 故 $P(m,\dfrac{m^2}{2p})$, 抛物线 $E: x^2=2py$ 求导得切线 l 斜率 $\dfrac{m}{p}$, 故过点 P 作抛物线的切线 l 方程为

$$y-\frac{m^2}{2p}=\frac{m}{p}(x-m)\Rightarrow y=\frac{m}{p}x-\frac{m^2}{2p}.$$

与椭圆方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

联立得化为关于 x 的二次方程

$$4(a^2m^2+b^2p^2)x^2-4a^2m^3x+a^2(m^4-4p^2b^2)=0.$$

记两根为 x_1,x_2, 则

$$x_1+x_2=\frac{a^2m^3}{a^2m^2+b^2p^2},\quad y_1+y_2=\frac{m}{p}(x_1+x_2)-\frac{m^2}{p}=-\frac{m^2b^2p}{a^2m^2+b^2p^2}.$$

中点 D 坐标为

$$D\left(\frac{a^2m^3}{2(a^2m^2+b^2p^2)},-\frac{m^2b^2p}{2(a^2m^2+b^2p^2)}\right)$$

故直线 OD 方程为

$$y=-\frac{b^2p}{a^2m}x$$

与 $y=-\frac{pb^2}{a^2}$ 联立得点 Q 的方程

$$x=m$$

故 PQ 是垂直于 x 轴的直线, 而直线 $y=-\frac{pb^2}{a^2}$ 是水平线, 二者垂直。

(b) 设 $a=2b$, 直线 l 与 FQ 交于 G, 证明

$$1<\frac{S_{\triangle FPG}}{S_{\triangle PGQ}}<2$$

当 $a=2b$, 直线 $y=-\frac{pb^2}{a^2}$ 即

$$y=-\frac{p}{4},$$

为介于抛物线准线 $y=-\frac{p}{2}$ 和 x 轴之间的平行线。

延长 PQ 与抛物线准线交于点 $H(m,-\frac{p}{2})$, 焦点 $F(0,\frac{p}{2})$。

直线 HF 斜率

$$k_{HF}=\frac{\frac{p}{2}+\frac{p}{2}}{0-m}=-\frac{p}{m}.$$

切线 l 斜率为

$$k=\frac{m}{p},$$

故 $l\perp HF$。由抛物线定义

$$PF=PH=\frac{m^2}{2p}+\frac{p}{2},\quad PQ=PH-\frac{p}{4}=\frac{m^2}{2p}+\frac{p}{4}$$

$\triangle PFH$ 为等腰三角形, 且切线 l 平分 $\angle FPH$, 由角平分线性质,

$$\frac{S_{\triangle FPG}}{S_{\triangle PGQ}}=\frac{FG}{GQ}=\frac{PF}{PQ}=\frac{2m^2+2p^2}{2m^2+p^2}$$

显然,

$$1<\frac{S_{\triangle FPG}}{S_{\triangle PGQ}}<2$$

41. 已知

$$\frac{(x+1)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$$

求

$$\sqrt{(x+5)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}$$

的最小值。

发现到椭圆方程 $\dfrac{(x+1)^2}{25}+\dfrac{(y-1)^2}{9}=1$ 焦点为 $F_1(-5,1),F_2(3,1)$,
由椭圆定义, 椭圆上一点 $P(x,y)$ 满足

$$\sqrt{(x+5)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}=PF_1+PF_2=2\cdot 5=10$$

42. 试求二次曲线

$$13x^2-10xy+13y^2-6x-42y-27=0$$

的正焦弦长。

将二次项写成矩阵形式,

$$13x^2-10xy+13y^2=\begin{bmatrix}x & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}13 & -5\\ -5 & 13\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$

对角化得

$$A=\begin{bmatrix}13 & -5\\ -5 & 13\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8 & 0\\ 0 & 18\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$$

对线性项变换,

$$[-6,-42]\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}=[-24\sqrt{2},-18\sqrt{2}]$$

将方程化为标准形式:

$$8x'^2+18y'^2-24\sqrt{2}x'-18\sqrt{2}y'-27=0$$

即

$$\frac{\left(x'-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2}{9}+\frac{\left(y'-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{4}=1$$

由此得 $a=3,b=2$, 正焦弦长为

$$\frac{2b^2}{a}=\frac{8}{3}$$

43. 设 A, B 为椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 两焦点, 若 P 为椭圆上任意点, 求 $\triangle PAB$ 面积最大值。

椭圆焦点 $A(-3,0)$, $B(3,0)$, 设 $P(x,y)$ 在椭圆上,

$$\overrightarrow{PA}=(-3-x,\ -y),\quad \overrightarrow{PB}=(3-x,\ -y)$$

面积:

$$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PA}\times\overrightarrow{PB}\right|=\frac{1}{2}|(-3-x)(-y)-(3-x)(-y)|=3|y|$$

故当 $|y|=4$, $\triangle PAB$ 面积为最大:12

44. 椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 焦点为 F_1, F_2, 若椭圆上点 P 满足 $|PF_1|:|PF_2|=2:1$, 求 $\triangle PF_1F_2$ 面积。

椭圆焦点为 $F_1=(-\sqrt{5},0), F_2=(\sqrt{5},0)$, 由椭圆定义

$$|PF_1|+|PF_2|=3|PF_2|=2a=6\Rightarrow|PF_1|=4,\ |PF_2|=2$$

又 $|F_1F_2|=2\sqrt{5}$, 由海伦公式,

$$s=\frac{4+2+2\sqrt{5}}{2}=3+\sqrt{5}$$

$$S=\sqrt{(3+\sqrt{5})(-1+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}=4$$

45. 求椭圆

$$\Gamma:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

上任一切线在第一象限被 x 轴、y 轴截出之线段长的最小值。

由 Γ 隐微分得,

$$\frac{2x}{9}+\frac{yy'}{2}=0\Rightarrow y'=-\frac{4x}{9y}$$

设切点为 $P(3\cos\theta, 2\sin\theta)$, 则

$$y'(3\cos\theta,2\sin\theta)=-\frac{2\cos\theta}{3\sin\theta}=-\frac{2}{3}\cot\theta,$$

切线

$$L:y=-\frac{2}{3}\cot\theta(x-3\cos\theta)+2\sin\theta$$

与坐标轴的交点

$$A\left(0,\frac{2}{\sin\theta}\right),\quad B\left(\frac{3}{\cos\theta},0\right)$$

由柯西不等式,

$$\left[\left(\frac{2}{\sin\theta}\right)^2+\left(\frac{3}{\cos\theta}\right)^2\right](\sin^2\theta+\cos^2\theta)\geqslant(2+3)^2$$

故

$$AB^2=\frac{4}{\sin^2\theta}+\frac{9}{\cos^2\theta}\geqslant 25\Rightarrow AB_{\min}=5$$

46. 已知 $a>b>0,F$ 是

$$\Gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

的一个焦点,AB 是 Γ 的弦且 F 在 AB 上。试证明

$$\frac{1}{FA}+\frac{1}{FB}=\frac{2a}{b^2}$$

假设两焦点为 F,F' 且 $FA=p,FB=q$, 则

$$F'A=2a-p,\quad F'B=2a-q$$

由余弦定理,

$$\cos\angle AFF'=\frac{p^2+(2c)^2-(2a-p)^2}{2p(2c)},\quad \cos\angle BFF'=\frac{q^2+(2c)^2-(2a-q)^2}{2q(2c)}$$

由于 $\angle AFF'+\angle BFF'=180^\circ$,

$$\frac{p^2+(2c)^2-(2a-p)^2}{2p(2c)}=-\frac{q^2+(2c)^2-(2a-q)^2}{2q(2c)}$$

可化简得

$$\frac{1}{FA}+\frac{1}{FB}=\frac{2a}{b^2}$$

47. 已知椭圆 $C_1:\frac{x^2}{4}+y^2=1$, 椭圆 $C_2:(x-2)^2+4y^2=1$, C_1,C_2 的公切线与 x 轴交于点 A, 则点 A 的坐标为 $(4,0)$

(待解)

48. 求椭圆 $E: x^2+16y^2=16$ 与圆 $C: x^2+y^2=4$ 的公切线方程。

椭圆与圆可写为:

$$E: \frac{x^2}{16}+y^2=1, \quad C: x^2+y^2=4$$

设切线斜率为 m。

椭圆上斜率为 m 的切线:

$$y=mx\pm\sqrt{16m^2+1}$$

圆上斜率为 m 的切线:

$$y=mx\pm 2\sqrt{1+m^2}$$

两条切线相同, 取绝对值:

$$\sqrt{16m^2+1}=2\sqrt{1+m^2} \implies 16m^2+1=4(1+m^2) \implies 12m^2=3 \implies m^2=\frac{1}{4} \implies m=\pm\frac{1}{2}$$

当 $m=\frac{1}{2}$ 时:

$$y=\frac{1}{2}x\pm\sqrt{5} \implies x-2y+2\sqrt{5}=0, \quad x-2y-2\sqrt{5}=0$$

当 $m=-\frac{1}{2}$ 时:

$$y=-\frac{1}{2}x\pm\sqrt{5} \implies x+2y-2\sqrt{5}=0, \quad x+2y+2\sqrt{5}=0$$

所以四条公切线方程为:

$$x-2y+2\sqrt{5}=0, \quad x-2y-2\sqrt{5}=0, \quad x+2y-2\sqrt{5}=0, \quad x+2y+2\sqrt{5}=0$$

49. 在椭圆 Ω 中,F_1, F_2 为焦点,A 为长轴的一个端点,B 为短轴的一个端点, 若 $\angle F_1BF_2=\angle FAB$, 求 Ω 的离心率。

因为 $\angle F_1BF_2=\angle FAB$, 所以

$$\triangle BF_1F_2 \backsim \triangle ABF_1 \Rightarrow \angle BF_1F_2=\angle ABF_1 \Rightarrow |AB|=|AF_1|,$$

即

$$\sqrt{a^2+b^2}=a+c \Rightarrow 2e^2+2e-1=0$$

解得 $e=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$(负解舍去)。

50. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的左焦点为 F, 右顶点为 A, 上顶点为 B, 离心率为 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, 求 $\angle ABF$。

设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 离心率为 $e=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, 左焦点为 $F(-ae,0)$、右顶点为 $A(a,0)$、上顶点为 $B(0,b)$, 中心 $O(0,0)$, 发现

$$\tan\angle ABO=\frac{a}{b},\ \tan\angle OBF=\frac{ae}{b}$$

于是

$$\tan\angle ABF=\tan(\angle ABO+\angle OBF)=\frac{\frac{a}{b}+\frac{ae}{b}}{1-\frac{a^2}{b^2}\cdot e}$$

又 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{\sqrt{(1-e^2)}}$, 代入有

$$\tan\angle ABF=-\frac{1}{e^2-e+1}\sqrt{\frac{e+1}{e-1}}$$

发现 $e=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\Rightarrow e^2+e-1=0$, 由此得

$$\tan\angle ABF=\infty\Rightarrow\angle ABF=90^\circ$$

51. 设直线

$$\frac{x}{5}+\frac{y}{4}=1$$

与椭圆

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$

相交于两点 A,B, 点 P 在椭圆上使得 $\triangle PAB$ 的面积为 9, 求点 P 的坐标。

设点 P 到直线 AB 的距离为

$$d=\frac{2[\triangle PAB]}{AB}=\frac{18}{AB}$$

欲求 AB, 联立直线与椭圆:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{4}=1 \\ \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1 \end{cases}$$

解得 $A(0,4), B(5,0)$, 则 $d=\dfrac{18}{\sqrt{41}}$

设过 P 与直线 AB 平行的直线为 $4x+5y=k$, 有

$$\frac{|k-20|}{\sqrt{41}}=\frac{18}{\sqrt{41}} \Rightarrow k=38 \text{ 或 } 2$$

若 $k=38$, 则 $\begin{cases} 4x+5y=38 \\ \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1 \end{cases}$ 无实数解; 若 $k=2$, 可解得

$$P\left(\frac{1\pm\sqrt{199}}{4}, \frac{1\mp\sqrt{199}}{5}\right)$$

52. 已知圆 Ω 与 x 轴、y 轴均相切, 圆心在椭圆

$$\Gamma: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

内, 且 Ω 与 Γ 有唯一的公共点 $(8,9)$. 求 Γ 的焦距。

设圆 Ω 的圆心为 $P(r,r)$, 则有

$$(8-r)^2+(9-r)^2=r^2 \Rightarrow r=5 \text{ 或 } r=29$$

因为 P 在 Γ 内, 故 $r=5$; 椭圆 Γ 在点 $A(8,9)$ 处的切线为

$$l: \frac{8x}{a^2}+\frac{9y}{b^2}=1$$

且有

$$m_l \cdot m_{PA}=-1 \Rightarrow \frac{32}{a^2}=\frac{27}{b^2}$$

联立

$$\frac{64}{a^2}+\frac{81}{b^2}=1$$

解得

$$a^2=160, b^2=135$$

从而 Γ 的焦距为

$$2\sqrt{a^2-b^2}=10$$

53. 已知 P 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上任意一点,PN 是过点 P 的法线,F_1,F_2 为椭圆焦点。证明 PN 平分 $\angle F_1PF_2$。

设 $P(a\cos\theta,b\sin\theta)$。椭圆斜率:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}\implies m_{\text{tangent}}=-\frac{b^2x}{a^2y}.$$

法线斜率:

$$m_{PN}=-\frac{1}{m_{\text{tangent}}}=\frac{a^2y}{b^2x}=\frac{a\sin\theta}{b\cos\theta}.$$

焦点坐标 $F_1(-ae,0)$, $F_2(ae,0)$, 则

$$m_{PF_1}=\frac{b\sin\theta-0}{a\cos\theta+ae}=\frac{b\sin\theta}{a(\cos\theta+e)},\quad m_{PF_2}=\frac{b\sin\theta-0}{a\cos\theta-ae}=\frac{b\sin\theta}{a(\cos\theta-e)}.$$

角度公式:

$$\tan\theta_1=\frac{m_{PN}-m_{PF_1}}{1+m_{PN}m_{PF_1}},\quad \tan\theta_2=\frac{m_{PF_2}-m_{PN}}{1+m_{PN}m_{PF_2}}.$$

代入得:

$$\tan\theta_1=\frac{\frac{a\sin\theta}{b\cos\theta}-\frac{b\sin\theta}{a(\cos\theta+e)}}{1+\frac{a\sin\theta}{b\cos\theta}\cdot\frac{b\sin\theta}{a(\cos\theta+e)}}=\frac{ae\sin\theta}{b},$$

$$\tan\theta_2=\frac{\frac{b\sin\theta}{a(\cos\theta-e)}-\frac{a\sin\theta}{b\cos\theta}}{1+\frac{a\sin\theta}{b\cos\theta}\cdot\frac{b\sin\theta}{a(\cos\theta-e)}}=\frac{ae\sin\theta}{b}.$$

因此 $\tan\theta_1=\tan\theta_2$, 由于角为锐角:

$$\theta_1=\theta_2\implies PN\text{平分}\angle F_1PF_2.$$

54. 已知两椭圆 E_1 与 E_2 的方程分别为

$$E_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2x}{c}=0,\quad E_2:\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{2x}{c}=0.$$

设 AB 是它们的公共切线,$A\in E_1$, $B\in E_2$。证明:将 A 和 B 与原点 O 相连,$\angle AOB$ 为直角。

对 E_1, 对 x 完全平方并整理:

$$\frac{x^2-\frac{2a^2}{c}x+\frac{a^4}{c^2}}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2}{c^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\left(x-\frac{a^2}{c}\right)^2}{\frac{a^4}{c^2}}+\frac{y^2}{\frac{a^2b^2}{c^2}}=1.$$

同理, 对 E_2:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{2x}{c}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\left(x-\frac{b^2}{c}\right)^2}{\frac{b^4}{c^2}}+\frac{y^2}{\frac{a^2b^2}{c^2}}=1.$$

因此,E_1 与 E_2 的公共切线为水平线。设该切线与 E_1、E_2 的交点分别为 A 和 B, 则

$$A=\left(\frac{a^2}{c},y_0\right), \quad B=\left(\frac{b^2}{c},y_0\right),$$

其中 y_0 为切线的 y 坐标。

原点 O 到 A、B 的斜率分别为

$$\text{slope of } OA=\frac{y_0}{\frac{a^2}{c}}=\frac{cy_0}{a^2}, \quad \text{slope of } OB=\frac{y_0}{\frac{b^2}{c}}=\frac{cy_0}{b^2}.$$

因此

$$\text{slope of } OA\cdot\text{slope of } OB=\frac{cy_0}{a^2}\cdot\frac{cy_0}{b^2}=1 \quad \Rightarrow \quad OA\perp OB.$$

所以 $\angle AOB$ 为直角。

55. 试证连接椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上的两点, $P(a\cos\theta,b\sin\theta)$ 和 $Q(a\cos\phi,b\sin\phi)$ 之弦的方程式为 (a) $\frac{x}{a}\cos\frac{\theta+\phi}{2}+\frac{y}{b}\sin\frac{\theta+\phi}{2}=\cos\frac{\theta-\phi}{2}$ 若弦 PQ 与圆相切, 试证: $\odot=x^2+y^2=b^2$ (b) $a^2\cos^2(\frac{\theta-\phi}{2})=b^2\cos^2(\frac{\theta+\phi}{2})+a^2\sin^2(\frac{\theta+\phi}{2})$ (c) 由此结果证明, 若 $\sin(\theta-\phi)\geqslant 0$, 则 PQ 之长属 $a\sin(\theta-\phi)$ $b\sin\theta-b\sin\phi$

(a) 弦 PQ 方程:

斜率:

$$m=\frac{b\sin\phi-b\sin\theta}{a\cos\phi-a\cos\theta}=\frac{b}{a}\frac{\sin\phi-\sin\theta}{\cos\phi-\cos\theta}=\frac{b}{a}\frac{2\cos\frac{\theta+\phi}{2}\sin\frac{\phi-\theta}{2}}{-2\sin\frac{\theta+\phi}{2}\sin\frac{\phi-\theta}{2}}=-\frac{b}{a}\cot\frac{\theta+\phi}{2}.$$

弦 PQ 的点斜式:

$$y-b\sin\theta=-\frac{b}{a}\frac{\cos\frac{\theta+\phi}{2}}{\sin\frac{\theta+\phi}{2}}(x-a\cos\theta).$$

整理得到标准形式：

$$\frac{x}{a}\cos\frac{\theta+\phi}{2}+\frac{y}{b}\sin\frac{\theta+\phi}{2}=\cos\left(\theta-\frac{\theta+\phi}{2}\right)=\cos\frac{\theta-\phi}{2}.$$

(b) 弦 PQ 与圆 $x^2+y^2=b^2$ 相切：

弦到圆心 $(0,0)$ 的距离：

$$\frac{|\cos\frac{\theta-\phi}{2}|}{\sqrt{\frac{\cos^2\frac{\theta+\phi}{2}}{a^2}+\frac{\sin^2\frac{\theta+\phi}{2}}{b^2}}}=b \implies \cos^2\frac{\theta-\phi}{2}=b^2\left(\frac{\cos^2\frac{\theta+\phi}{2}}{a^2}+\frac{\sin^2\frac{\theta+\phi}{2}}{b^2}\right).$$

(c) 弦长：

$$\begin{aligned}|PQ|^2&=(a\cos\theta-a\cos\phi)^2+(b\sin\theta-b\sin\phi)^2\\&=a^2(-2\sin\frac{\theta+\phi}{2}\sin\frac{\theta-\phi}{2})^2+b^2(2\cos\frac{\theta+\phi}{2}\sin\frac{\theta-\phi}{2})^2\\&=4\sin^2\frac{\theta-\phi}{2}\left[a^2\sin^2\frac{\theta+\phi}{2}+b^2\cos^2\frac{\theta+\phi}{2}\right].\end{aligned}$$

若满足 $a=b$（圆特殊情况），则：

$$|PQ|^2=4a^2\sin^2\frac{\theta-\phi}{2}\left[\cos^2\frac{\theta-\phi}{2}\right]=a^2\sin^2(\theta-\phi) \implies |PQ|=a\sin(\theta-\phi).$$

56. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的焦点 $F(ae,0)$，作椭圆切线的垂线，求垂足 N 的轨迹。

设 $P(a\cos\theta,b\sin\theta)$ 为椭圆上一动点，切线斜率为

$$m_{\text{tangent}}=-\frac{b^2x}{a^2y}=-\frac{b\cos\theta}{a\sin\theta}.$$

切线方程：

$$y-b\sin\theta=-\frac{b\cos\theta}{a\sin\theta}(x-a\cos\theta) \implies bx\cos\theta+ay\sin\theta=ab.$$

过焦点 $F(ae,0)$，垂直于切线的直线 FN：

$$m_{FN}=\frac{a\sin\theta}{b\cos\theta} \implies y-0=\frac{a\sin\theta}{b\cos\theta}(x-ae) \implies -ay\cos\theta+bx\sin\theta=a^2e\sin\theta.$$

设 $N(x, y)$ 为交点, 解方程组:

$$\begin{cases} bx\cos\theta + ay\sin\theta = ab, \\ -ay\cos\theta + bx\sin\theta = a^2 e\sin\theta. \end{cases}$$

两式平方相加:

$$(bx\cos\theta + ay\sin\theta)^2 + (-ay\cos\theta + bx\sin\theta)^2 = (ab)^2 + (a^2 e\sin\theta)^2.$$

整理:

$$x^2(b^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta) + y^2(a^2\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta) + 0 = a^2b^2 + a^4e^2\sin^2\theta.$$

利用 $b^2 = a^2(1 - e^2)$:

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

$\therefore$ 垂足 N 的轨迹为圆:

$$\boxed{x^2 + y^2 = a^2}.$$

57. 设 A, B, C 为椭圆

$$\Gamma : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{32} = 1$$

上三点, 且 $\triangle ABC$ 的重心恰为此椭圆的中心, 已知 $A(\sqrt{6} + \sqrt{2}, 2\sqrt{3} - 2)$, 求 $\triangle ABC$ 面积。

设变换:

$$x = x', y = \sqrt{2}y'$$

代入椭圆 Γ, 得

$$\frac{x'^2}{16} + \frac{y'^2}{16} = 1$$

为一圆 Γ', 其中圆心为原点 $(0, 0)$, 半径为 4, 又因为

$$x' = x, y' = \frac{y}{\sqrt{2}} \Rightarrow A'(\sqrt{6} + \sqrt{2}, \sqrt{6} - \sqrt{2}) \Rightarrow OA' = 4$$

由于 $\triangle A'B'C'$ 为正三角形, 且其重心为原点, 边长为

$$A'B' = 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3} \Rightarrow [\triangle A'B'C'] = \frac{\sqrt{3}}{4}(4\sqrt{3})^2 = 12\sqrt{3}$$

换回原坐标系, 雅可比行列式为

$$J = \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(x', y')}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = \sqrt{2} \Rightarrow [\triangle ABC] = J \cdot [\triangle A'B'C'] = 12\sqrt{6}$$

58. 2.（北京 19）（本小题共 14 分）

已知 $\triangle ABC$ 的顶点 A, B 在椭圆

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$$

上, 点 C 在直线 $l: y=x+2$ 上, 且 $AB \parallel l$。

(I) 当 AB 边通过坐标原点 O 时, 求 AB 的长及 $\triangle ABC$ 的面积;

(II) 当 $\angle ABC=90^\circ$, 且斜边 AC 的长最大时, 求 AB 所在直线的方程。

(I) 因为 $AB \parallel l$, 而直线 l 的斜率为 1, 且 AB 经过原点 $O(0,0)$, 故 AB 所在直线的方程为

$$y=x.$$

设 A, B 两点坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$。将 $y=x$ 代入椭圆方程

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$$

得

$$\frac{x^2}{4}+\frac{x^2}{3}=1,$$

即

$$x^2=1,$$

从而 $x=\pm 1$。

于是

$$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{2}\,|x_1-x_2|=2\sqrt{2}.$$

又因为 AB 上的高等于原点到直线 $l: y=x+2$ 的距离, 故

$$h=\frac{|2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$$

因此

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AB|\cdot h=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2.$$

(II) 设 AB 所在直线的方程为

$$y=x+m.$$

将其代入椭圆方程

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$$

得

$$x^2+3(x+m)^2=4,$$

即

$$4x^2+6mx+3m^2-4=0.$$

因为 A,B 在椭圆上, 故判别式

$$\Delta=36m^2-16(3m^2-4)=-12m^2+64>0.$$

设 A,B 两点坐标分别为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$, 则

$$x_1+x_2=-\frac{3m}{2},\quad x_1x_2=\frac{3m^2-4}{4}.$$

于是

$$|AB|=\sqrt{2}|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{32-6m^2}}{2}.$$

又因为 $\angle ABC=90^\circ$, 故

$$|AC|^2=|AB|^2+|BC|^2.$$

点 B 到直线 $l:y=x+2$ 的距离为

$$|BC|=\frac{|2-m|}{\sqrt{2}}.$$

从而

$$|AC|^2=\frac{32-6m^2}{4}+\frac{(2-m)^2}{2}=-m^2-2m+10=-(m+1)^2+11.$$

当 $m=-1$ 时,$|AC|^2$ 取得最大值, 且此时 $\Delta>0$, 条件满足。因此 AB 所在直线的方程为

$$y=x-1.$$

59. 14.（四川 22）（本小题满分 14 分）

设椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$$

的左右焦点分别为 F_1,F_2, 离心率

$$e=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

点 F_2 到右准线 l 的距离为 $\sqrt{2}$。

(1) 求 a,b 的值;

(2) 设 M,N 是 l 上的两个动点, 且

$$\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_2N}=0,$$

证明: 当 $|MN|$ 取最小值时,

$$\overrightarrow{F_1F_2}+\overrightarrow{F_1M}+\overrightarrow{F_2N}=\vec{0}.$$

(1) 由离心率定义

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

又点 F_2 到右准线 l 的距离

$$d=\frac{a}{e}-c=\sqrt{2},$$

由题设得

$$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2},\\ \frac{a}{e}-c=\sqrt{2}.\end{cases}$$

解得

$$c=\sqrt{2},\ a=2.$$

又

$$b^2=a^2-c^2=4-2=2,$$

故

$$b=\sqrt{2}.$$

(2) 由 $c=\sqrt{2},a=2$, 可得

$$F_1(-\sqrt{2},0),\quad F_2(\sqrt{2},0),$$

右准线 l 的方程为

$$x=2\sqrt{2}.$$

设

$$M(2\sqrt{2},y_1),\quad N(2\sqrt{2},y_2).$$

由

$$\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_2N}=0$$

得

$$(2\sqrt{2}+\sqrt{2},y_1)\cdot(2\sqrt{2}-\sqrt{2},y_2)=0,$$

即

$$y_1y_2 = -6,$$

从而

$$y_2 = -\frac{6}{y_1}.$$

于是

$$|MN| = |y_1 - y_2| = \left|y_1 + \frac{6}{y_1}\right| \geqslant 2\sqrt{6}.$$

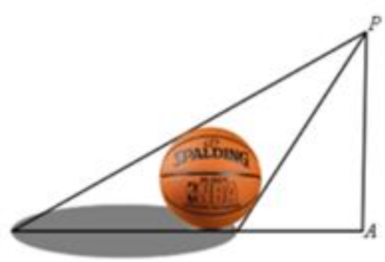
当且仅当 $y_1 = \pm\sqrt{6}$ 时取等号, 此时 $y_2 = -y_1$。

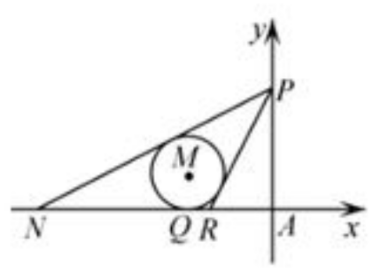
此时

$$\overrightarrow{F_1F_2} + \overrightarrow{F_1M} + \overrightarrow{F_2N} = (-2\sqrt{2}, 0) + (\sqrt{2}, y_1) + (\sqrt{2}, y_2) = (0, y_1 + y_2) = \vec{0}.$$

证毕。

60. 小何在打篮球时发现地面上的篮球在灯光照射下在地面形成的影子是一个椭圆, 并观察到地面与篮球接触点正是椭圆的焦点。如图, 已知篮球半径为 1, 灯源 P 离地高度为 4, 其正下方为点 A, 地面上椭圆右顶点与点 A 的水平距离为 3, 求该椭圆的离心率 e。





以 A 为原点建立平面直角坐标系, 则 $P(0,4)$, $R(-3,0)$, 直线 PR 的方程为

$$y = \frac{4}{3}x + 4$$

设 $M(n,1)$, $Q(n,0)$, 由 M 到直线 PR 的距离为 1,

$$\left|\frac{\frac{4}{3}n+4-1}{\sqrt{1+(\frac{4}{3})^2}}\right|=1$$

解之得 $n=-\frac{7}{2}$ (舍 $n=-1$), 则 $M(-\frac{7}{2},1)$, $Q(-\frac{7}{2},0)$。

设直线 PN 的方程为 $y=kx+4$, 由 M 到直线 PN 的距离为 1,

$$\left|\frac{-\frac{7}{2}k+4-1}{\sqrt{1+k^2}}\right|=1$$

整理得

$$45k^2-21k+8=0\Rightarrow k_{PN}=\frac{8}{15}\ (\text{舍 } k_{PR}=\frac{4}{3})$$

故直线 PN 的方程为 $y=\dfrac{8}{15}x+4$, 得 $N(-\dfrac{15}{2},0)$, 故

$$\begin{cases} NQ=-\frac{7}{2}+\frac{15}{2}=4=a+c \\ RQ=-3+\frac{7}{2}=\frac{1}{2}=a-c \end{cases}\Rightarrow a=\frac{9}{4},\ c=\frac{7}{4}$$

所以

$$e=\frac{c}{a}=\frac{7}{9}$$

61. 椭圆焦点为 F_1,F_2, 点 P 在椭圆上。设 O 为 $\triangle PF_1F_2$ 外接圆心, 且 $\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{F_1F_2}=2\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$。求椭圆最小离心率。

设 $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$, $P(x,y)$, 椭圆方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

由于 O 是外接圆心, 且 F_1F_2 是弦, 故 O 在 y 轴上, 设 $O(0,y_O)$, 由 $|OP|=|OF_1|=|OF_2|$,

$$x^2+(y-y_O)^2=c^2+y_O^2\Rightarrow x^2+y^2-2yy_O=c^2 \tag{1}$$

由条件 $\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{F_1F_2}=2\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$ 得到

$$(-x,y_O-y)\cdot(2c,0)=(-c-x,-y)\cdot(c-x,-y)\Rightarrow -cx=x^2-c^2+y^2 \tag{2}$$

由 (1), (2) 得

$$2yy_O=-cx\Rightarrow y_O=-\frac{cx}{2y}\ (y\neq 0)$$

代回 (1) 得

$$x^2+y^2+cx=c^2$$

又由椭圆方程

$$y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)=(a^2-c^2)\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

代入得

$$x^2+(a^2-c^2)\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)+cx=c^2$$

整理为

$$\frac{c^2}{a^2}x^2+cx+a^2-2c^2=0$$

此为关于 x 的二次方程, 存在实数解则判别式 $\Delta\geqslant 0$:

$$\Delta=c^2-4\frac{c^2}{a^2}(a^2-2c^2)\geqslant 0\Rightarrow\frac{c^2}{a^2}\geqslant\frac{3}{8}$$

故最小离心率为

$$e=\frac{c}{a}\geqslant\sqrt{\frac{3}{8}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$$

9. (辽宁 21) (本小题满分 12 分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 两点到点 $(0,-\sqrt{3})$、$(0,\sqrt{3})$ 的距离之和等于 4, 设点 P 的轨迹为 C。

(I) 写出 C 的方程;

(II) 设直线 $y=kx+1$ 与 C 交于 A,B 两点, 求 k 使得 $\vec{OA}\perp\vec{OB}$, 并求此时 $\frac{|AB|}{\sqrt{2}}$ 的值。

(I) 由题意, 点 P 的轨迹为以 $(0,-\sqrt{3})$, $(0,\sqrt{3})$ 为焦点, 长轴 $2a=4$ 的椭圆, 故 $a=2$。焦距 $c=\sqrt{3}$, 短半轴 b 满足

$$b^2=a^2-c^2=4-3=1.$$

因此椭圆 C 的方程为

$$\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}=1\implies x^2+\frac{y^2}{4}=1.$$

(II) 设 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, 满足

$$\begin{cases}x^2+\frac{y^2}{4}=1,\\ y=kx+1.\end{cases}$$

代入 y 得

$$x^2+\frac{(kx+1)^2}{4}=1 \implies (k^2+4)x^2+2kx-3=0.$$

设 x_1,x_2 为该二次方程根, 则

$$x_1+x_2=-\frac{2k}{k^2+4},\quad x_1x_2=-\frac{3}{k^2+4}.$$

$\vec{OA}\perp\vec{OB}$ 等价于 $x_1x_2+y_1y_2=0$, 而 $y_1y_2=(kx_1+1)(kx_2+1)=k^2x_1x_2+k(x_1+x_2)+1$, 所以

$$x_1x_2+y_1y_2=(k^2+1)x_1x_2+k(x_1+x_2)+1=(k^2+1)\left(-\frac{3}{k^2+4}\right)+k\left(-\frac{2k}{k^2+4}\right)+1=\frac{-4k^2+1}{k^2+4}.$$

令其等于 0 得 $-4k^2+1=0 \implies k=\pm\frac{1}{2}$。

此时

$$x_1+x_2=-\frac{2(\pm 1/2)}{(1/2)^2+4}=\mp\frac{1}{\frac{17}{4}}=\mp\frac{4}{17},\quad x_1x_2=-\frac{3}{(1/2)^2+4}=-\frac{3}{\frac{17}{4}}=-\frac{12}{17}.$$

直线距离公式得

$$x_2-x_1=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{\frac{16}{289}+\frac{48}{17}}=\sqrt{\frac{16+816}{289}}=\sqrt{\frac{832}{289}}=\frac{8\sqrt{13}}{17}.$$

直线斜率 $k=\frac{1}{2}$ 时

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(1+k^2)(x_2-x_1)^2}=\sqrt{\frac{5}{4}}\cdot\frac{8\sqrt{13}}{17}=\frac{4\sqrt{65}}{17}.$$

因此

$$\frac{|AB|}{\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{65}}{17\sqrt{2}}.$$

62. 15.（天津 22）（本小题满分 14 分）

已知中心在原点的双曲线 C 的一个焦点为 $F_1(-3,0)$, 一条渐近线的方程是

$$\sqrt{5}x-2y=0.$$

(I) 求双曲线 C 的方程;

(II) 若以 $k(k\neq 0)$ 为斜率的直线 l 与双曲线 C 相交于两个不同的点 M,N, 且线段 MN 的垂直平分线与两坐标轴围成的三角形面积为 $\frac{81}{2}$, 求 k 的取值范围。

(I) 设双曲线 C 的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>0,b>0).$$

由焦点坐标得

$$c=3, \quad c^2=a^2+b^2.$$

又由渐近线方程

$$y=\frac{\sqrt{5}}{2}x$$

可得

$$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

于是

$$\begin{cases} a^2+b^2=9, \\ \frac{b^2}{a^2}=\frac{5}{4}. \end{cases}$$

解得

$$a^2=4, \quad b^2=5.$$

故双曲线 C 的方程为

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1.$$

(II) 设直线 l 的方程为

$$y=kx+m \quad (k\neq 0),$$

与双曲线交于 $M(x_1,y_1)$、$N(x_2,y_2)$。

将 $y=kx+m$ 代入双曲线方程, 得

$$\frac{x^2}{4}-\frac{(kx+m)^2}{5}=1,$$

化简为

$$(5-4k^2)x^2-8kmx-4m^2-20=0.$$

该方程有两个不等实根, 故

$$5-4k^2\neq 0,$$

且判别式

$$\Delta>0 \ \Rightarrow \ m^2+5-4k^2>0. \tag{1}$$

由根与系数关系, 线段 MN 的中点

$$(x_0,y_0)=\left(\frac{4km}{5-4k^2}, \frac{5m}{5-4k^2}\right).$$

因此,MN 的垂直平分线与 x 轴、y 轴的截距分别为

$$\left(\frac{9km}{5-4k^2},0\right),\quad \left(0,\frac{9m}{5-4k^2}\right).$$

由题设三角形面积为 $\frac{81}{2}$, 得

$$\frac{1}{2}\left|\frac{9km}{5-4k^2}\right|\left|\frac{9m}{5-4k^2}\right|=\frac{81}{2},$$

化简得

$$m^2=\frac{(5-4k^2)^2}{|k|},\quad k\neq 0. \tag{2}$$

将 (2) 代入 (1), 得

$$\frac{(5-4k^2)^2}{|k|}+5-4k^2>0,$$

整理为

$$(4k^2-5)(4k^2-|k|-5)>0,\quad k\neq 0.$$

解得

$$0<|k|<\frac{\sqrt{5}}{2}\quad 或 \quad |k|>\frac{5}{4}.$$

因此,

$$k\in(-\infty,-\tfrac{5}{4})\cup(-\tfrac{\sqrt{5}}{2},0)\cup(0,\tfrac{\sqrt{5}}{2})\cup(\tfrac{5}{4},+\infty).$$

63. 11.(全国 II 22)(本小题满分 12 分)

设椭圆中心在坐标原点,$A(2,0)$,$B(0,1)$ 是它的两个顶点, 直线 $y=kx\,(k>0)$ 与 AB 相交于点 D, 与椭圆相交于 E,F 两点。

(I) 若 $\overrightarrow{ED}=6\overrightarrow{DF}$, 求 k 的值;

(II) 求四边形 $AEBF$ 面积的最大值。

(I) 由题意, 椭圆的方程为

$$\frac{x^2}{4}+y^2=1.$$

直线 AB 的方程为

$$x+2y=2,$$

直线 EF 的方程为

$$y=kx\ (k>0).$$

设 $D(x_0,kx_0)$,$E(x_1,kx_1)$,$F(x_2,kx_2)$, 且 $x_1<x_2$。由

$$\frac{x^2}{4}+k^2x^2=1$$

得

$$(1+4k^2)x^2=4,$$

于是

$$x_2=-x_1=\frac{2}{\sqrt{1+4k^2}}. \tag{1}$$

由 $\overrightarrow{ED}=6\overrightarrow{DF}$, 得

$$x_0-x_1=6(x_2-x_0),$$

从而

$$x_0=\frac{1}{7}(6x_2+x_1)=\frac{5}{7}x_2=\frac{10}{7\sqrt{1+4k^2}}.$$

又因 D 在 AB 上,

$$x_0+2kx_0=2,$$

即

$$x_0=\frac{2}{1+2k}.$$

于是

$$\frac{2}{1+2k}=\frac{10}{7\sqrt{1+4k^2}},$$

化简得

$$24k^2-25k+6=0,$$

解得

$$k=\frac{2}{3}\text{ 或 }k=\frac{3}{8}.$$

(II) 由 (1) 式及点到直线距离公式, 点 E,F 到直线 AB 的距离分别为

$$h_1=\frac{|x_1+2kx_1-2|}{\sqrt{5}}=\frac{2(1+2k-\sqrt{1+4k^2})}{\sqrt{5(1+4k^2)}},$$

$$h_2=\frac{|x_2+2kx_2-2|}{\sqrt{5}}=\frac{2(1+2k+\sqrt{1+4k^2})}{\sqrt{5(1+4k^2)}}.$$

又

$$|AB|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5},$$

所以四边形 $AEBF$ 的面积为

$$S=\frac{1}{2}|AB|(h_1+h_2)=\frac{4(1+2k)}{\sqrt{1+4k^2}}=2\sqrt{1+\frac{4k}{1+4k^2}}\leqslant 2\sqrt{2}.$$

当 $k=\frac{1}{2}$ 时取等号。

因此, 四边形 $AEBF$ 的最大面积为

$$2\sqrt{2}.$$

64. 3.（福建 22）（本小题满分 14 分）

如图, 椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的一个焦点为 $F(1,0)$, 且椭圆过点 $(2,0)$。

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 若 AB 为垂直于 x 轴的弦, 直线 $l:x=4$ 与 x 轴交于点 N, 直线 AF 与 BN 交于点 M。

(i) 证：点 M 恒在椭圆 C 上;

(ii) 求 $\triangle AMN$ 面积的最大值。

(I) 由题意, 椭圆的半长轴 $a=2$, 焦距 $c=1$, 则

$$b^2=a^2-c^2=4-1=3.$$

因此椭圆方程为

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1.$$

(II)(i) 设 $A(m,n)$, 则 $B(m,-n)$（$n\neq 0$）, 且满足椭圆方程

$$\frac{m^2}{4}+\frac{n^2}{3}=1. \tag{1}$$

直线 AF 方程为

$$n(x-1)-(m-1)y=0, \tag{2}$$

直线 BN 方程为

$$n(x-4)-(m-4)y=0. \tag{3}$$

设 $M(x_0,y_0)$ 为交点, 则由 (2),(3) 得

$$x_0=\frac{5m-8}{2m-5},\quad y_0=\frac{3n}{2m-5}.$$

代入椭圆方程检验：

$$\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{3}=\frac{(5m-8)^2}{4(2m-5)^2}+\frac{9n^2}{(2m-5)^2}=\frac{(5m-8)^2+36-9m^2}{4(2m-5)^2}=\frac{16m^2-80m+100}{4(2m-5)^2}=\frac{4(4m^2-20m+25)}{4(2m-5)^2}$$

因此点 M 恒在椭圆 C 上。

(ii) 设 AM 的方程为 $x=ty+1$，代入椭圆方程：

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \implies (3t^2+4)y^2+6ty-9=0.$$

设 y_1, y_2 为方程根，则

$$y_1+y_2=\frac{-6t}{3t^2+4}, \quad y_1y_2=\frac{-9}{3t^2+4}.$$

于是

$$|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{4\sqrt{3}\sqrt{3t^2+3}}{3t^2+4}.$$

令 $3t^2+4=\lambda\ (\lambda\geqslant 4)$，得

$$|y_1-y_2|=4\sqrt{3}\sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda^2}}=4\sqrt{3}\sqrt{-\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}.$$

当 $\lambda=4$，即 $t=0$ 时，$|y_1-y_2|$ 取得最大值

$$|y_1-y_2|_{\max}=3.$$

此时

$$S_{\triangle AMN}=\frac{1}{2}|FN|\,|y_1-y_2|=\frac{1}{2}\cdot|4-1|\cdot 3=\frac{9}{2}.$$

又解:(II) (i) 由题意得 $F(1,0), N(4,0)$。

设 $A(m,n)$，则 $B(m,-n)\ (n\neq 0)$，满足椭圆方程

$$\frac{m^2}{4}+\frac{n^2}{3}=1. \tag{1}$$

直线 AF 与 BN 的方程分别为：

$$n(x-1)-(m-1)y=0, \tag{2}$$

$$n(x-4)-(m-4)y=0. \tag{3}$$

由 (2),(3) 可得交点 $M(x,y)$：

$$x \neq \frac{5}{2} \implies m = \frac{5x-8}{2x-5}, \quad n = \frac{3y}{2x-5}. \tag{4}$$

将 (4) 代入 (1) 得

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \quad y \neq 0.$$

当 $x = \frac{5}{2}$ 时, 由 (2),(3) 得

$$\begin{cases} \frac{3}{2}n - (m-1)y = 0 \\ -\frac{3}{2}n + (m+4)y = 0 \end{cases} \implies n = 0, y = 0,$$

与 $n \neq 0$ 矛盾。

因此点 M 的轨迹方程为

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \quad y \neq 0,$$

即点 M 恒在椭圆 C 上。

(ii) 面积最大值同解法一。

65. 1.（安徽 22）（本小题满分 14 分）

设椭圆

$$C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > b > 0),$$

其相应于焦点 $F(2,0)$ 的准线方程为 $x = 4$。

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 已知过点 $F_1(-2,0)$、倾斜角为 θ 的直线交椭圆 C 于 A, B 两点, 证明

$$|AB| = \frac{4\sqrt{2}}{2 - \cos^2\theta};$$

(III) 过点 $F_1(-2,0)$ 作两条互相垂直的直线分别交椭圆 C 于 A, B 和 D, E, 求 $|AB| + |DE|$ 的最小值。

(I) 由题意知椭圆的右焦点为 $F(2,0)$, 其对应准线为 $x = 4$, 故椭圆的离心率

$$e = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

又椭圆的焦距为 $2c=4$, 得 $c=2$, 于是

$$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2},$$

从而 $a=4$。

由 $c^2=a^2-b^2$ 得

$$b^2=a^2-c^2=16-4=12.$$

因此椭圆 C 的方程为

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1,$$

即

$$x^2+\frac{4}{3}y^2=16,$$

或

$$x^2+2y^2=8.$$

(II) 由 (I) 知 $F_1(-2,0)$ 为椭圆 C 的左焦点, 离心率

$$e=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

左准线方程为 $x=-4$。

设直线 AB 的倾斜角为 θ, 作 $AA_1\perp x=-4, BB_1\perp x=-4$。由椭圆的定义, 对点 A 有

$$|AF_1|=e|AA_1|.$$

由几何关系可得

$$|AA_1|=|F_1H|+|AF_1|\cos\theta=2+|AF_1|\cos\theta.$$

于是

$$|AF_1|=\frac{\sqrt{2}}{2}\big(2+|AF_1|\cos\theta\big),$$

解得

$$|AF_1|=\frac{2}{\sqrt{2}-\cos\theta}.$$

同理

$$|BF_1|=\frac{2}{\sqrt{2}+\cos\theta}.$$

因此

$$|AB|=|AF_1|+|BF_1|=\frac{2}{\sqrt{2}-\cos\theta}+\frac{2}{\sqrt{2}+\cos\theta}=\frac{4\sqrt{2}}{2-\cos^2\theta}.$$

(III) 设 AB 的倾斜角为 θ, 则 $DE \perp AB$, 其倾斜角为 $\theta + \frac{\pi}{2}$。

由 (II) 可得

$$|AB| = \frac{4\sqrt{2}}{2-\cos^2\theta}, \quad |DE| = \frac{4\sqrt{2}}{2-\sin^2\theta}.$$

于是

$$\begin{aligned}|AB| + |DE| &= \frac{4\sqrt{2}}{2-\cos^2\theta} + \frac{4\sqrt{2}}{2-\sin^2\theta} \\ &= \frac{12\sqrt{2}}{2+\sin^2\theta\cos^2\theta} = \frac{12\sqrt{2}}{2+\frac{1}{4}\sin^2 2\theta}.\end{aligned}$$

当 $\sin^2 2\theta = 1$, 即 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$ 时, $|AB| + |DE|$ 取得最小值

$$|AB| + |DE|_{\min} = \frac{16\sqrt{2}}{3}.$$

66. 已知椭圆

$$C: \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1, \ a > b > 0$$

的离心率为 $\dfrac{1}{2}$, 上下焦点为 F_1, F_2, 右顶点为 D; 过 F_1 做垂直于 DF_2 的直线交椭圆 C 于 A, B 两点, 且

$$|BD| - |AF_1| = \frac{8\sqrt{3}}{39},$$

(a) 求 $|AD| + |BD|$ 的值.

由椭圆离心率可知 $a : b : c = 2 : \sqrt{3} : 1$, 则

$$|F_1F_2| = |F_1D| = |F_2D| = 2c = a$$

即 $\triangle F_1F_2D$ 为等边三角形; 因为 $AB \perp DF_2$, 直线 AB 过 F_1 故直线 AB 垂直平分 DF_2 即

$$|AD| = |AF_2|, \ |BD| = |BF_2|$$

由椭圆定义 $|BF_1| + |BF_2| = 2a$, 则

$$|BD| - |AF_1| = |BF_2| - (|AB| - |BF_1|) = 2a - |AB| = 4c - |AB| = \frac{8\sqrt{3}}{39}$$

解法一: 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 解得

$$\begin{cases} l_{AB} : y = -\sqrt{3}x + c \\ C : \dfrac{y^2}{4c^2} + \dfrac{x^2}{3c^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow 13x^2 - 6\sqrt{3}cx - 9c^2 = 0$$

由韦达定理,

$$|AB|=\sqrt{1+(-\sqrt{3})^2}|x_1-x_2|=2\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{2}{13}\sqrt{108c^2+4\cdot 9\cdot 13c^2}=\frac{48c}{13}$$

所以

$$4c-|AB|=\frac{4c}{13}=\frac{8\sqrt{3}}{39}c\Rightarrow c=\frac{2\sqrt{3}}{3}\Rightarrow a=\frac{4\sqrt{3}}{3},b=2$$

故

$$|AD|+|BD|=|AF_2|+|BF_2|=2a-|AF_1|+2a-|BF_1|=4a-|AB|=\frac{112\sqrt{3}}{39}$$

解法二: 由焦半径公式知

$$|AB|=\frac{2ab^2}{a^2-c^2\cos^2\theta}=\frac{4c\cdot 3c^2}{4c^2-\frac{3}{4}c^2}=\frac{48}{13}c$$

其中 θ 为直线 AB 与 y 轴夹角, 其余同解法一。

(b) 过 A,B 做椭圆 C 的两条切线交于点 E, 若 F_1E 交 x 轴于 P, F_2E 交 x 轴于 Q, 求 $|PQ|$ 的值.

由 (a) 知: 直线 AB 方程为

$$y=-\sqrt{3}x+\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

椭圆 C 方程为

$$\frac{3y^2}{16}+\frac{x^2}{4}=1$$

且 $F_1(0,-\frac{2\sqrt{3}}{3}),F_2(0,\frac{2\sqrt{3}}{3})$; 设 $E(x_0,y_0)$, 直线 AB 的方程为

$$\frac{3y_0}{16}y+\frac{x_0}{4}x=1$$

即 $x_0=6,y_0=-\frac{8\sqrt{3}}{3}$;

直线 EF_1 方程为 $y=x+\frac{2\sqrt{3}}{3}$, 令 $y=0$ 得 $x=-2$ 即 $P(-2,0)$;

直线 EF_2 方程为 $y=\frac{5\sqrt{3}}{9}x-\frac{2\sqrt{3}}{3}$, 令 $y=0$ 得 $x=\dfrac{6}{5}$ 即 $Q(\frac{6}{5},0)$;

所以

$$|PQ|=\frac{6}{5}-(-2)=\frac{16}{5}$$

67. 已知 $P(1,1)$ 为椭圆

$$\Gamma: \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

内一点。过 P 作椭圆的弦 A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6, 任意两相邻弦的夹角之一为 $\frac{\pi}{3}$。试求

$$\frac{1}{PA_1\cdot PA_4}+\frac{1}{PA_2\cdot PA_5}+\frac{1}{PA_3\cdot PA_6}$$

的值。

设过点 $P(1,1)$ 的一条直线为 $L: y=m(x-1)+1$。与椭圆相交于两点 $A_1(x_1,y_1)$ 与 $A_4(x_4,y_4)$, 其中

$$y_1=mx_1-m+1,\quad y_4=mx_4-m+1$$

点 P 到 A_1 与 A_4 的距离为

$$PA_1=\sqrt{(x_1-1)^2+(mx_1-m)^2}=|x_1-1|\sqrt{m^2+1}, PA_4=|x_4-1|\sqrt{m^2+1}$$

因此

$$PA_1\cdot PA_4=|x_1-1||x_4-1|(m^2+1)=|1-(x_1+x_4)+x_1x_4|(m^2+1) \tag{1}$$

将 $y=m(x-1)+1$ 代入椭圆方程

$$\frac{x^2}{9}+\frac{(mx-m+1)^2}{4}=1\Rightarrow(9m^2+4)x^2+18m(1-m)x+9(1-m)^2-36=0$$

设该方程两根为 x_1,x_4, 则

$$x_1+x_4=\frac{-18m(1-m)}{9m^2+4},\quad x_1x_4=\frac{9(1-m)^2-36}{9m^2+4}$$

代入 (1) 得:

$$PA_1\cdot PA_4=\left|1+\frac{18m(m-1)}{9m^2+4}+\frac{9(1-m)^2-36}{9m^2+4}\right|(m^2+1)=\frac{23(m^2+1)}{9m^2+4}$$

即

$$\frac{1}{PA_1\cdot PA_4}=\frac{9m^2+4}{23(m^2+1)}=\frac{9}{23}-\frac{5}{23}\cdot\frac{1}{m^2+1}=\frac{9}{23}-\frac{5}{23}\cos^2\theta$$

其中 $m=\tan\theta, \theta$ 为 A_1A_4 与 x 轴的夹角, 且由恒等式,

$$\cos^2\theta+\cos^2\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+\cos^2\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}$$

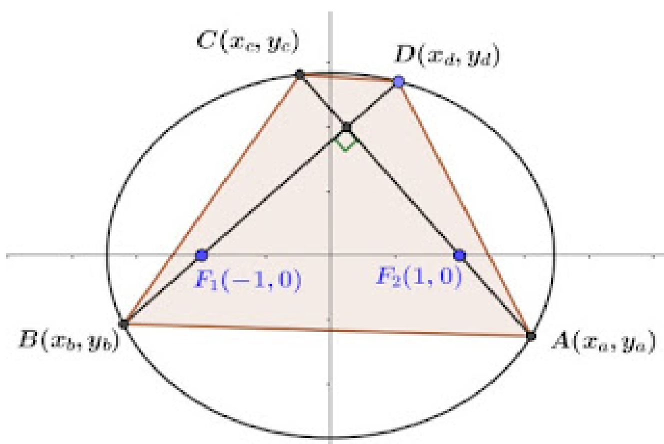
故

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{PA_1\cdot PA_4}+\frac{1}{PA_2\cdot PA_5}+\frac{1}{PA_3\cdot PA_6}\\
&=\left(\frac{9}{23}-\frac{5}{23}\cos^2\theta\right)+\left(\frac{9}{23}-\frac{5}{23}\cos^2\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\right)+\left(\frac{9}{23}-\frac{5}{23}\cos^2\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)\right)\\
&=\frac{27}{23}-\frac{5}{23}\cdot\frac{3}{2}=\frac{39}{46}
\end{aligned}
$$

68. 已知椭圆

$$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$$

的左、右焦点分别为 F_1 与 F_2, 过焦点 F_1 的直线交椭圆于 B,D 两点, 过焦点 F_2 的直线交椭圆于 A,C 两点, 且 $AC\perp BD$, 垂足为点 P。求四边形 $ABCD$ 面积的最小值。



椭圆 $a=\sqrt{3},b=\sqrt{2},c=\sqrt{a^2-b^2}=1$, 焦点 $F_1(-1,0),F_2(1,0)$, 设 BD,AC 直线方程为

$$L_1: y=m(x+1),\quad L_2: y=-\frac{1}{m}(x-1)$$

代入椭圆方程

$$\frac{x^2}{3}+\frac{m^2(x+1)^2}{2}=1,\quad \frac{x^2}{3}+\frac{(x-1)^2}{2m^2}=1$$

解得

$$x_b+x_d=-\frac{6m^2}{3m^2+2},\ x_bx_d=\frac{3m^2-6}{3m^2+2},\quad x_a+x_c=\frac{6}{2m^2+3},\ x_ax_c=\frac{3-6m^2}{2m^2+3}$$

则

$$(x_b-x_d)^2=(x_b+x_d)^2-4x_bx_d=\frac{48(m^2+1)}{(3m^2+2)^2},\quad (x_a-x_c)^2=\frac{48m^2(m^2+1)}{(2m^2+3)^2}$$

$$BD=\sqrt{m^2+1}|x_b-x_d|=\frac{4\sqrt{3}(m^2+1)}{3m^2+2},\quad AC=\sqrt{\frac{m^2+1}{m^2}}|x_a-x_c|=\frac{4\sqrt{3}(m^2+1)}{2m^2+3}$$

由 AM-GM 不等式,

$$[ABCD]=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{24(m^2+1)^2}{(3m^2+2)(2m^2+3)}\geqslant\frac{24(m^2+1)^2}{\left(\frac{3m^2+2+2m^2+3}{2}\right)^2}=\frac{24(m^2+1)^2}{\frac{25}{4}(m^2+1)^2}=\frac{96}{25}$$

故四边形 $ABCD$ 面积的最小值为 $\frac{96}{25}$

69. 已知 B_1,B_2 分别为椭圆

$$C:\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$$

的下顶点、上顶点, 过点 $A(0,-2\sqrt{2})$ 的直线 l 交椭圆 C 于 P,Q 两点 (异于点 B_1,B_2);

(a) 若 $\tan\angle B_1PB_2=2\tan\angle B_1QB_2$, 求直线 l 的方程;

椭圆下顶点 $B_1(0,-2)$, 上顶点 $B_2(0,2)$, 直线 l 斜率存在, 设 l 方程为

$$y=kx-2\sqrt{2}$$

与椭圆方程

$$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$$

联立得

$$(1+2k^2)x^2-8\sqrt{2}kx+8=0$$

则

$$\triangle=(8\sqrt{2}k)^2-32(1+2k^2)>0\Rightarrow k^2>\frac{1}{2}$$

设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$, 则

$$x_1+x_2=\frac{8\sqrt{2}k}{1+2k^2},\ x_1x_2=\frac{8}{1+2k^2}$$

由点 P,Q 在椭圆上知

$$y_1^2-4=-\frac{1}{2}x_1^2,\ y_2^2-4=-\frac{1}{2}x_2^2$$

于是

$$\tan\angle B_1PB_2=\left|\frac{k_{PB_1}-k_{PB_2}}{1+k_{PB_1}k_{PB_2}}\right|=\left|\frac{\frac{y_1-(-2)}{x_1}-\frac{y_1-2}{x_1}}{1+\frac{y_1-(-2)}{x_1}\frac{y_1-2}{x_1}}\right|=\left|\frac{4x_1}{x_1^2+y_1^2-4}\right|=\left|\frac{4x_1}{x_1^2-\frac{1}{2}x_1^2}\right|=\left|\frac{8}{x_1}\right|$$

同理 $\tan\angle B_1QB_2=\dfrac{8}{|x_2|}$; 由 $\tan\angle B_1PB_2=2\tan\angle B_1QB_2$, 得

$$\frac{8}{|x_1|}=2\cdot\frac{8}{|x_2|}$$

又 $x_1x_2=\dfrac{8}{1+2k^2}>0$, 于是

$$x_2=2x_1\Rightarrow x_1+x_2=3x_1=\frac{8\sqrt{2}k}{1+2k^2}\Rightarrow x_1=\frac{8\sqrt{2}k}{3(1+2k^2)}$$

且

$$x_2=2x_1\Rightarrow x_1x_2=2x_1^2=\frac{16\sqrt{2}k}{3(1+2k^2)}\Rightarrow x_1=\frac{8}{1+2k^2}$$

故

$$32k^2=9(1+2k^2)\Rightarrow k^2=\frac{9}{14}>\frac{1}{2}$$

因此直线 l 方程为

$$y=\frac{3\sqrt{14}}{14}x-2\sqrt{2}$$

(b) 设 R 为直线 B_1P 、B_2Q 的交点, 求 $AR\cdot B_1B_2$ 的值.

直线 B_1P 方程为

$$y=\frac{y_1+2}{x_1}x-2$$

直线 B_2Q 方程为

$$y=\frac{y_2-2}{x_2}x+2$$

两式联立得

$$\frac{y+2}{y-2}=\frac{(y_1+2)x_2}{(y_2-2)x_1}=\frac{(kx_1-2\sqrt{2}+2)x_2}{(kx_2-2\sqrt{2}-2)x_1}$$

因为

$$\begin{aligned}&(kx_1-2\sqrt{2}+2)x_2-(-3+2\sqrt{2})(kx_2-2\sqrt{2}-2)x_1\\&=(4-2\sqrt{2})kx_1x_2+(-2\sqrt{2}+2)(x_1+x_2)\\&=(4-2\sqrt{2})k\cdot\frac{8}{1+2k^2}+(-2\sqrt{2}+2)\cdot\frac{8\sqrt{2}k}{1+2k^2}=0\end{aligned}$$

所以

$$\frac{y+2}{y-2}=-3+2\sqrt{2}\Rightarrow y=-\sqrt{2}$$

即点 R 在定直线 $y=-\sqrt{2}$ 上; 设 $R(t,-\sqrt{2})$, 则 $AR=(t,\sqrt{2})$, 又 $B_1B_2=(0,4)$, 因此

$$AR\cdot B_1B_2=4\sqrt{2}$$

70. 双曲线
$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$$
的焦点为 F_1,F_2。设第一象限点 P 满足 $|PF_1|:|PF_2|=1:3$。求 $\triangle F_1PF_2$ 周长。

双曲线焦点 $F_1=(-5,0)$, $F_2=(5,0)$, 已知 $|PF_1|:|PF_2|=1:3$, 由双曲线定义,

$$|PF_2|-|PF_1|=2a\Rightarrow 3|PF_1|-|PF_1|=6\Rightarrow |PF_1|=3$$

$\triangle F_1PF_2$ 周长为
$$|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|=3+9+10=22$$

71. 已知双曲线焦点 $(-2,-2),(8,-2)$, 且一条渐近线斜率为 $-\dfrac{4}{3}$。求其标准方程。

双曲线中心 $C(3,-2)$, 焦距 $c=5$, 又已知渐近线斜率为 $\pm\dfrac{b}{a}=\pm\dfrac{4}{3}$, 有 $\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{16}{9}$,
由 $c^2=a^2+b^2$ 得

$$25=a^2+b^2=a^2+\frac{16}{9}a^2=\frac{25}{9}a^2\Rightarrow a^2=9,\ b^2=16$$

所以标准方程为
$$\frac{(x-3)^2}{9}-\frac{(y+2)^2}{16}=1$$

72. 已知双曲线
$$\Gamma:\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1,$$
过焦点 F 作一焦弦 PQ, 已知 PQ 的斜率为 1, 求 $PF'+QF'$。

双曲线 $c=\sqrt{4+5}=3$, 焦点 $F(3,0),F'(-3,0)$, 过 F 且斜率为 1 的直线为

$$L:y=x-3,$$

设交点为 $P(x_1, x_1-3)$, $Q(x_2, x_2-3)$, 代入双曲线方程解得

$$\frac{x^2}{4} - \frac{(x-3)^2}{5} = 1 \Rightarrow x = -12 \pm 10\sqrt{2}$$

因此

$$|x_1 - x_2| = 20\sqrt{2}, \quad PQ = \sqrt{1^2 + (-1)^2}\,|x_1 - x_2| = \sqrt{2} \cdot 20\sqrt{2} = 40$$

由双曲线定义,

$$PF' - PF = 2a = 4, \quad QF' - QF = 2a = 4$$

两式相加得

$$PF' + QF' = (PF + QF) + 8 = 40 + 8 = 48$$

73. 已知双曲线焦点为 $F_1(0,2), F_2(0,-2)$, 实轴长为 2, 点 Q 在一条渐近线上, 且 $\angle F_1QF_2 = 90°$, 求 $\triangle QF_1F_2$ 面积。

已知 $c = 2$, $a = 1 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 3$, 双曲线方程为 $y^2 - \dfrac{x^2}{3} = 1$, 渐近线为 $y = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$。

设 $Q(x, \dfrac{\sqrt{3}}{3}x)$, 由 $\angle F_1QF_2 = 90°$,

$$m_{QF_1} \cdot m_{QF_2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}x - 2}{x - 0} \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}x + 2}{x - 0} = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

$\triangle QF_1F_2$ 面积为

$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

74. 已知双曲线 $\Gamma : xy = k$, $k < 0$, 点 $P(2,2)$, 过 P 作 Γ 的两条切线, 切点为 A、B, 若三角形 $\triangle PAB$ 是正三角形, 求 k。

由 $\Gamma : xy = k < 0$ 可知其对称轴为 $y = x$, 若 $\triangle PAB$ 为正三角形, 且 P 在 $y = x$ 上, 故切线 PA 的斜率为

$$\tan 75° = \tan(45° + 30°) = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = 2 + \sqrt{3}$$

切线方程为

$$y = (2 + \sqrt{3})(x - 2) + 2$$

将其代入 $xy=k$ 整理得

$$(2+\sqrt{3})x^2+(-2-2\sqrt{3})x-k=0$$

令判别式为 0,

$$(2+2\sqrt{3})^2+4k(2+\sqrt{3})=0$$

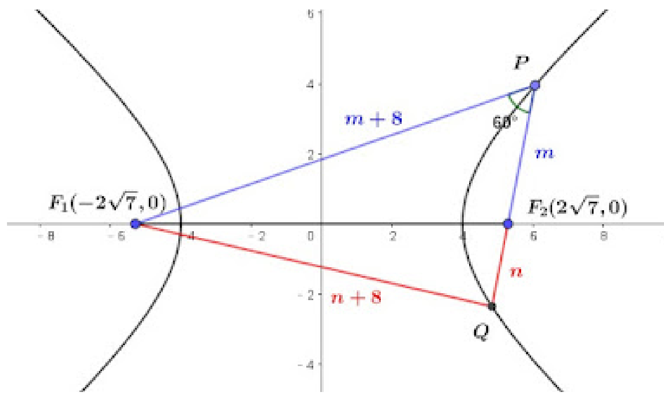
解得

$$k=-2$$

75. 已知双曲线

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{12}=1$$

上有两点 P,Q,F_1,F_2 为其焦点, 且 PQ 过 $F_2,\angle F_2PF_1=60^\circ$, 求 $\triangle PQF_1$ 的周长。



由双曲线方程得 $c=\sqrt{16+12}=2\sqrt{7}$, 焦点坐标

$$F_1(-2\sqrt{7},0),\quad F_2(2\sqrt{7},0).$$

设 $PF_2=m,QF_2=n$, 则

$$PF_1=m+2a=m+8,\quad QF_1=n+8.$$

在 $\triangle PF_1F_2$ 中, 由余弦定理,

$$(4\sqrt{7})^2=(m+8)^2+m^2-2m(m+8)\cos 60^\circ\Rightarrow m=4$$

在 $\triangle PF_1F_2$ 中, 由余弦定理,

$$(n+8)2=(m+8)^2+(m+n)^2-2(m+8)(m+n)\cos 60^\circ\Rightarrow n=\frac{12}{5}$$

故 $\triangle PQF_1$ 周长

$$(m+8)+m+n+(n+8)=\frac{144}{5}$$

76. 双曲线

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$$

的左、右焦点分别为 F_1,F_2,P 是双曲线上一点，若 $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆圆心为 $(4,2)$，求 $\triangle PF_1F_2$ 外接圆的半径。

双曲线焦点分别为 $F_1(-5,0),F_2(5,0)$，且已知 $I(4,2)$，设 $\angle IF_1F_2=\alpha$，$\angle IF_2F_1=\beta$，则

$$\tan\alpha=\frac{2}{9},\ \tan\beta=2$$

故

$$\tan\angle F_1PF_2=\tan(2\alpha+2\beta)=\frac{2\tan(\alpha+\beta)}{1-\tan^2(\alpha+\beta)}=-\frac{8}{15}$$

其中

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\frac{2}{9}+2}{1-\frac{2}{9}\cdot 2}=4$$

故

$$\sin\angle F_1PF_2=\frac{8}{17}$$

$\therefore \triangle PF_1F_2$ 外接圆的半径为

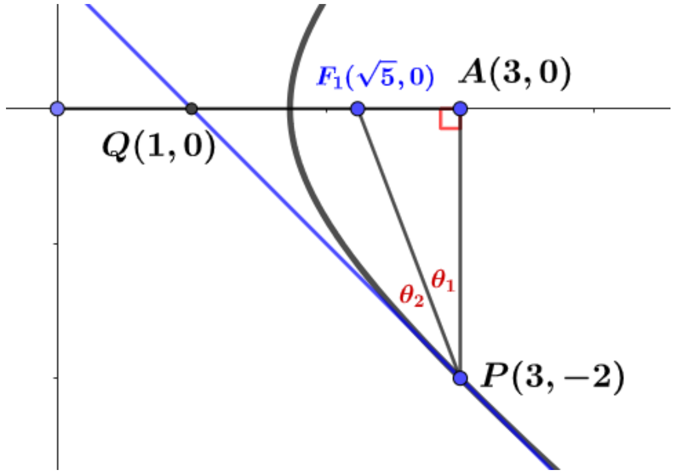
$$\frac{10}{2\sin\angle F_1PF_2}=\frac{85}{8}$$

.

77. 设双曲线

$$\Gamma:\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1$$

两焦点为 F_1,F_2，点 $P(3,-2)$ 在 Γ 上。以 P 点为切点的切线交 x 轴于点 Q，求 $\tan\angle FPQ$。



由双曲线知 $a=\sqrt{3},\quad b=\sqrt{2}, c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5}$, 焦点为

$$F_1(\sqrt{5},0),\quad F_2(-\sqrt{5},0).$$

在 $P(3,-2)$ 的切线斜率为

$$\frac{2}{3}x-yy'=0\Rightarrow y'|_{x=3,y=-2}=\frac{2x}{3y}=\frac{6}{-6}=-1.$$

过 P 切线方程为

$$y+2=-1(x-3)\Rightarrow x+y=1$$

与 x 轴交与

$$Q(1,0).$$

在 $\triangle PAQ$ 及 $\triangle PAF_1$, 设 $\theta_1=\angle F_1PA, \theta_2=\angle F_1PQ$

$$\tan\theta_1=\frac{3-\sqrt{5}}{2},\quad \tan(\theta_1+\theta_2)=1,$$

利用和角公式, 解得

$$\frac{\tan\theta_2+\frac{3-\sqrt{5}}{2}}{1-\tan\theta_2\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{2}}=1\Rightarrow\tan\theta_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

78. 一条双曲线与一条椭圆的方程分别为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\quad \text{和}\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

其中 $a>b>0$。

在双曲线上取一坐标均为正的点作切线，该切线经过椭圆的正 x 轴焦点。

证明：该切线的斜率为 1。

先对双曲线方程求导：

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}&=1\\ \Rightarrow \frac{2x}{a^2}-\frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx}&=0\\ \Rightarrow \frac{2x}{a^2}&=\frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx}\\ \Rightarrow \frac{dy}{dx}&=\frac{b^2x}{a^2y}.\end{aligned}$$

设双曲线上一点

$$P(a\sec\theta, b\tan\theta),$$

其中 $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$。

则该点处切线的斜率为

$$\begin{aligned}\left.\frac{dy}{dx}\right|_P&=\frac{b^2a\sec\theta}{a^2b\tan\theta}=\frac{b\sec\theta}{a\tan\theta}\\ &=\frac{b}{a}\cdot\frac{\sec\theta}{\tan\theta}=\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{\sin\theta}.\end{aligned}$$

因此切线方程为

$$y-b\tan\theta=\frac{b}{a\sin\theta}(x-a\sec\theta).$$

该切线经过椭圆的正 x 轴焦点 $(ae,0)$，其中 e 为椭圆的离心率。代入得

$$\begin{aligned}0-b\tan\theta&=\frac{b}{a\sin\theta}(ae-a\sec\theta)\\ -\tan\theta&=\frac{1}{\sin\theta}(e-\sec\theta)\\ -\tan\theta\sin\theta&=e-\sec\theta\\ \sec\theta-\tan\theta\sin\theta&=e.\end{aligned}$$

注意到

$$\tan\theta\sin\theta=\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta},$$

于是

$$e=\frac{1}{\cos\theta}-\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}=\frac{1-\sin^2\theta}{\cos\theta}=\frac{\cos^2\theta}{\cos\theta}=\cos\theta.$$

而椭圆的离心率满足

$$b^2=a^2(1-e^2),$$

代入 $e=\cos\theta$, 得

$$\begin{aligned}\frac{b^2}{a^2}&=1-\cos^2\theta=\sin^2\theta\\ \Rightarrow\frac{b}{a}&=\sin\theta.\end{aligned}$$

因此切线斜率为

$$\frac{b}{a\sin\theta}=\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{\sin\theta}=\sin\theta\cdot\frac{1}{\sin\theta}=1.$$

故该切线的斜率必为 1。

79. 已知双曲线

$$H:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ ,a>0,\ b>0,$$

l 为双曲线 H 的一条渐近线, F_1, F_2 是双曲线 H 的左、右焦点。若 F_1 关于直线 l 的对称点在圆

$$C:(x-c)^2+y^2=c^2$$

上, 其中 c 为双曲线的半焦距, 求双曲线 H 的离心率。

双曲线左焦点为 $F_1=(-c,\ 0)$, 其中 $c^2=a^2+b^2$。渐近线 l 的一个方程为 $y=\dfrac{b}{a}x$, 即

$$bx-ay=0$$

设 F_1 关于直线 l 的对称点为 $F_1'=(x',\ y'), F_1F_1'$ 的中点为 $\left(\dfrac{x'-c}{2},\ \dfrac{y'}{2}\right)$,

$$b\cdot\frac{x'-c}{2}-a\cdot\frac{y'}{2}=0\Rightarrow b(x'-c)-ay'=0\tag{1}$$

且

$$m_{F_1F_1'}=m_l=\frac{y'}{x'+c}\cdot\frac{b}{a}=-1\Rightarrow by'=-a(x'+c)\tag{2}$$

由 (1), (2) 得

$$F_1' = \left(\frac{(b^2-a^2)c}{a^2+b^2},\ -\frac{2abc}{a^2+b^2}\right)$$

将其代入圆 C:

$$\left(\frac{(b^2-a^2)c}{a^2+b^2}-c\right)^2+\left(\frac{2abc}{a^2+b^2}\right)^2=c^2$$

可得

$$3a^2=b^2 \Rightarrow c^2=a^2+b^2=4a^2 \Rightarrow c=2a$$

所以双曲线离心率为

$$e=\frac{c}{a}=2$$

80. 已知双曲线

$$C: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$$

与椭圆

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,$$

过椭圆上一点 $P\left(-1, \frac{3}{2}\right)$ 作椭圆的切线 l 与 x 轴交于 M 点, 且 l 与双曲线 C 的两条渐近线分别交于 N, Q, 若 N 为 MQ 的中点, 求双曲线 C 的离心率。

设过 $P(-1, \frac{3}{2})$ 的切线 l 方程为

$$y-\frac{3}{2}=k(x+1) \Rightarrow y=kx+k+\frac{3}{2}.$$

将此代入椭圆方程

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1.$$

整理得

$$(4k^2+3)x^2+(8k^2+12k)x+4k^2+12k-3=0$$

令判别式为零得

$$\Delta=(8k^2+12k)^2-4(4k^2+3)(4k^2+12k-3)=0 \Rightarrow k=\frac{1}{2}.$$

所以切线 l 的方程为 $y=\frac{1}{2}x+2$, 令 $y=0$ 得 $M(-4,0)$

双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$, 联立 $y=\frac{b}{a}x$ 与 $y=\frac{1}{2}x+2$, 得 $x_Q=\frac{4a}{2b-a}$

联立 $y=-\frac{b}{a}x$ 与 $y=\frac{1}{2}x+2$, 得 $x_N=-\frac{4a}{2b+a}$

由 N 是 MQ 的中点,

$$-\frac{4a}{2b+a}=\frac{1}{2}\left(\frac{4a}{2b-a}-4\right)\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{3}{2}$$

故双曲线的离心率为

$$e=\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{13}}{2}$$

81. 已知双曲线

$$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$$

的左、右顶点分别是 A_1,A_2, 圆 $x^2+y^2=a^2$ 与 C 的渐近线在第一象限的交点为 M, 直线 A_1M 交 C 的右支于点 P。若 $\triangle MPA_2$ 是等腰三角形, 且 $\angle PA_2M$ 的内角平分线与 y 轴平行, 求双曲线的离心率。

双曲线顶点 $A_1(-a,0),A_2(a,0)$, 渐近线为 $y=\frac{b}{a}x$, 圆为 $x^2+y^2=a^2$, 联立得

$$x^2\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)=a^2\Rightarrow x=\frac{a^2}{c},\quad y=\frac{ab}{c}$$

故点 $M\left(\frac{a^2}{c},\frac{ab}{c}\right)$, 其中 $c=\sqrt{a^2+b^2}$ 为半焦距, 又

$$|MA_1|^2=\left(\frac{a^2}{c}+a\right)^2+\left(\frac{ab}{c}\right)^2=2a^2\left(1+\frac{a}{c}\right)$$

$$|MA_2|^2=\left(\frac{a^2}{c}-a\right)^2+\left(\frac{ab}{c}\right)^2=2a^2\left(1-\frac{a}{c}\right)$$

由题设 $\angle A_1MA_2=\angle PMA_2=90^\circ,\triangle MPA_2$ 是等腰直角三角形, $\angle MA_2P=45^\circ$

$\angle PA_2M$ 的内角平分线与 y 轴平行, 所以 $\angle MA_1A_2=22.5^\circ$

又 $\tan 45^\circ=\frac{2\tan 22.5^\circ}{1-\tan^2 22.5^\circ}=1$ 可得 $\tan 22.5^\circ=\sqrt{2}-1$, 所以

$$\tan^2\angle MA_1A_2=\left(\frac{|MA_2|}{|MA_1|}\right)^2=\frac{1-\frac{a}{c}}{1+\frac{a}{c}}=(\sqrt{2}-1)^2$$

解得

$$\frac{e-1}{e+1}=3-2\sqrt{2}\Rightarrow e=\sqrt{2}$$

82. 已知双曲线的两个焦点分别为 F_1, F_2, 若过点 F_1 的直线与双曲线交于 A, B 两点, 且 $\angle AF_1F_2 = 30^\circ, F_2A = F_2B$, 求双曲线的离心率。

不妨 A 在双曲线靠近 F_1 的这一支上, 取 AB 中点 C, 则 $F_2C \perp AB$。

设 $|AF_1| = x$, 由双曲线定义知

$$|AF_2| = |BF_2| = x + 2a,\ |BF_1| = x + 4a$$

从而

$$|AB| = 4a,\ |AC| = 2a$$

由 $\angle AF_1F_2 = 30^\circ$ 知 $|CF_1| = \frac{\sqrt{3}}{2}|F_1F_2|$, 可得

$$x = \sqrt{3}c - 2a \tag{1}$$

又由 $|CF_2| = \dfrac{\sqrt{3}}{3}|CF_1|$ 及 $|AC|^2 + |CF_2|^2 = |AF_2|^2$, 可得

$$(2a)^2 + \frac{(x+2a)^2}{3} = (x+2a)^2 \Rightarrow x = (\sqrt{6}-2)a \tag{2}$$

由 (1)(2) 解得离心率 $e = \dfrac{c}{a} = \sqrt{2}$.

10. (全国 122) (本小题满分 12 分)

双曲线的中心为原点 O, 焦点在 x 轴上, 两条渐近线分别为 l_1, l_2, 过右焦点 F 垂直于 l_1 的直线分别交 l_1, l_2 于 A, B 两点。已知 $|\vec{OA}|, |\vec{AB}|, |\vec{OB}|$ 成等差数列, 且 $\vec{BF}$ 与 $\vec{FA}$ 同向。

(I) 求双曲线的离心率;

(II) 设 AB 被双曲线所截得的线段的长为 4, 求双曲线的方程。

(I) 设 $OA = m - d$, $AB = m$, $OB = m + d$, 由勾股定理:

$$(OA)^2 + (AB)^2 = (OB)^2 \implies (m-d)^2 + m^2 = (m+d)^2 \implies d = \frac{1}{4}m.$$

设双曲线半轴为 a, b, 右焦点 $F(c, 0)$, 渐近线方程斜率 b/a。则

$$\tan\angle AOF = \frac{b}{a}, \quad \tan\angle AOB = \tan 2\angle AOF = \frac{AB}{OA} = \frac{4}{3}.$$

由倍角公式 $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-(\tan\theta)^2}$, 得

$$\frac{2(b/a)}{1-(b/a)^2} = \frac{4}{3} \implies \frac{b}{a} = \frac{1}{2}.$$

离心率 $e=\sqrt{1+(b/a)^2}=\sqrt{1+1/4}=\frac{\sqrt{5}}{2}$。

(II) 过 F 点的直线垂直于 l_1 的方程为

$$y=-\frac{a}{b}(x-c).$$

与双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 联立, 设 AB 被双曲线截得的长度为 4, 则

$$4=\sqrt{1+(a/b)^2}|x_1-x_2|,$$

代入 $a=2b$, $c=\sqrt{5}b$, 解得 $b=3$, 于是 $a=6$。

因此双曲线的方程为

$$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{9}=1.$$

83. 18.(湖北 20)(本小题满分 13 分)

已知双曲线

$$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$$

的两个焦点为 $F_1(-2,0),F_2(2,0)$, 点 $P(3,\sqrt{7})$ 在曲线 C 上。

(I) 求双曲线 C 的方程;

(II) 记 O 为坐标原点, 过点 $Q(0,2)$ 的直线与双曲线 C 相交于不同的两点 E,F, 若 $\triangle OEF$ 的面积为 $2\sqrt{2}$, 求直线的方程。

(I) 解法一

依题意, 由双曲线焦距关系

$$a^2+b^2=4,$$

得双曲线方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{4-a^2}=1\ (0<a^2<4).$$

将点 $(3,\sqrt{7})$ 代入, 得

$$\frac{9}{a^2}-\frac{7}{4-a^2}=1.$$

解得

$$a^2=18\ (\text{舍去})\quad \text{或}\quad a^2=2.$$

故所求双曲线方程为

$$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1.$$

(I) 解法二

依题意得双曲线的半焦距 $c=2$。

又

$$2a=|PF_1|-|PF_2|=\sqrt{(3+2)^2+(\sqrt{7})^2}-\sqrt{(3-2)^2+(\sqrt{7})^2}=2\sqrt{2},$$

故

$$a^2=2,\quad b^2=c^2-a^2=2.$$

因此双曲线 C 的方程为

$$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1.$$

(II) 解法一

设直线的方程为

$$y=kx+2,$$

代入双曲线 C 的方程并整理, 得

$$(1-k^2)x^2-4kx-6=0.$$

故直线 l 与双曲线 C 相交于不同的两点 E,F, 需满足

$$\begin{cases}1-k^2\neq 0,\\ \Delta=(-4k)^2+4\times 6(1-k^2)>0,\end{cases}$$

即

$$k\neq \pm 1,\quad -\sqrt{3}<k<\sqrt{3},$$

从而

$$k\in(-\sqrt{3},-1)\cup(1,\sqrt{3}).$$

设 $E(x_1,y_1),F(x_2,y_2)$, 由上式得

$$x_1+x_2=\frac{4k}{1-k^2},\quad x_1x_2=\frac{6}{1-k^2}.$$

于是

$$\begin{aligned}|EF|&=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|\\&=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{2\sqrt{2}\sqrt{3-k^2}}{|1-k^2|}.\end{aligned}$$

原点 O 到直线的距离为

$$d=\frac{2}{\sqrt{1+k^2}},$$

故

$$S_{\triangle OEF}=\frac{1}{2}d\cdot|EF|=\frac{2\sqrt{2}\sqrt{3-k^2}}{|1-k^2|}.$$

由

$$S_{\triangle OEF}=2\sqrt{2}$$

得

$$\frac{2\sqrt{2}\sqrt{3-k^2}}{|1-k^2|}=2\sqrt{2}\Longleftrightarrow k^4-k^2-2=0.$$

解得

$$k=\pm\sqrt{2},$$

满足取值范围。

故满足条件的直线有两条, 其方程分别为

$$y=\sqrt{2}x+2,\quad y=-\sqrt{2}x+2.$$

(II) 解法二

仍设直线方程为

$$y=kx+2,$$

代入双曲线 C 得

$$(1-k^2)x^2-4kx-6=0.$$

设交点为 $E(x_1,y_1),F(x_2,y_2)$, 则

$$x_1-x_2=\frac{\sqrt{\Delta}}{|1-k^2|}=\frac{2\sqrt{2}\sqrt{3-k^2}}{|1-k^2|}.$$

当 E,F 在同一支上时,

$$S_{\triangle OEF}=S_{\triangle OQF}-S_{\triangle OQE}=\frac{1}{2}|OQ|\cdot|x_1-x_2|.$$

当 E,F 在不同支上时,

$$S_{\triangle OEF}=S_{\triangle OQF}+S_{\triangle OQE}=\frac{1}{2}|OQ|\cdot|x_1-x_2|.$$

综上,

$$S_{\triangle OEF}=\frac{1}{2}|OQ|\cdot|x_1-x_2|.$$

由 $OQ=2$, 得

$$S_{\triangle OEF}=\frac{2\sqrt{2}\sqrt{3-k^2}}{|1-k^2|}.$$

令

$$S_{\triangle OEF}=2\sqrt{2},$$

得

$$k^4-k^2-2=0,$$

解得

$$k=\pm\sqrt{2}.$$

因此满足条件的直线为

$$y=\sqrt{2}x+2,\quad y=-\sqrt{2}x+2.$$

84. 点

$$P\left(p+\frac{1}{p},p-\frac{1}{p}\right),\ p\neq 0$$

在直角双曲线

$$x^2-y^2=4$$

上。曲线在 P 处的法线与 y 轴交于点 $Q(0,-k)$, 其中 $k>0$。

已知三角形 OPQ 的面积为 $\frac{15}{4}$, 其中 O 为原点。求点 P 的两个可能坐标。

曲线可参数表示为

$$x=p+\frac{1}{p},\quad y=p-\frac{1}{p}$$

对参数 p 求导,

$$\frac{dx}{dp}=1-\frac{1}{p^2},\quad \frac{dy}{dp}=1+\frac{1}{p^2}$$

于是切线斜率为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+\frac{1}{p^2}}{1-\frac{1}{p^2}}=\frac{p^2+1}{p^2-1}$$

因此法线斜率为

$$-\frac{p^2-1}{p^2+1}$$

点 P 处法线方程为

$$y-\left(p-\frac{1}{p}\right)=-\frac{p^2-1}{p^2+1}\left(x-\left(p+\frac{1}{p}\right)\right)$$

该法线经过点 $Q(0,-k)$, 代入得

$$\begin{aligned}-k-\left(p-\frac{1}{p}\right)&=-\frac{p^2-1}{p^2+1}\left(0-\left(p+\frac{1}{p}\right)\right)\\&=\frac{p^2-1}{p^2+1}\cdot\frac{p^2+1}{p}\\&=\frac{p^2-1}{p}\end{aligned}$$

化简得

$$-k=\frac{2(p^2-1)}{p},\quad k=-\frac{2(p^2-1)}{p}$$

三角形 OPQ 的底为 OP 在 x 轴上的投影 $p+\frac{1}{p}$, 高为 k, 故

$$\frac{1}{2}k\left(p+\frac{1}{p}\right)=\frac{15}{4}$$

即

$$k=\frac{15p}{2(p^2+1)}$$

消去 k, 得

$$\frac{15p}{2(p^2+1)}=-\frac{2(p^2-1)}{p}$$

两边同乘 $2p(p^2+1)$,

$$15p^2=-4(p^2-1)(p^2+1)$$

化简得

$$4p^4+15p^2-4=0$$

因式分解,

$$(4p^2-1)(p^2+4)=0$$

由于 $p^2+4>0$, 故

$$p^2=\frac{1}{4},\quad p=\pm\frac{1}{2}$$

当 $p=\frac{1}{2}$ 时,

$$x=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2},\quad y=\frac{1}{2}-2=-\frac{3}{2}$$

当 $p=-\frac{1}{2}$ 时,

$$x=-\frac{1}{2}-2=-\frac{5}{2},\quad y=-\frac{1}{2}+2=\frac{3}{2}$$

因此点 P 的两个可能坐标为

$$\left(\frac{5}{2},-\frac{3}{2}\right),\quad \left(-\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$$

85. 已知双曲线

$$E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

的左、右顶点分别为 A,B, 点 M 在 E 上使得 $\triangle ABM$ 是等腰三角形, 且 $\triangle ABM$ 外接圆面积为 $3\pi a^2$, 求双曲线的离心率。

不妨设 M 在第二象限, 则在等腰 $\triangle ABM$ 中, $|AB|=|AM|=2a$,

设 $\angle ABM=\angle AMB=\theta$, 则 $\angle FAM=2\theta$, 又 $\triangle ABM$ 外接圆面积 $3\pi a^2$, 则半径为 $\sqrt{3}a$.

由正弦定理,

$$2R=\frac{|AB|}{\sin\theta}\Rightarrow 2\sqrt{3}a=\frac{2a}{\sin\theta}\Rightarrow \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

于是

$$\cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{3},\ \sin 2\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3},\ \cos 2\theta=\frac{1}{3}$$

设 M 点坐标为 (x,y), 则

$$x=-a-|AM|\cos 2\theta=-a-2a\times\frac{1}{3}=-\frac{5a}{3}$$

$$y=|AM|\sin 2\theta=2a\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{4\sqrt{2}a}{3}$$

即 M 点坐标为 $\left(-\frac{5a}{3},\frac{4\sqrt{2}a}{3}\right)$, 由 M 点在双曲线上得

$$\frac{\left(-\frac{5a}{3}\right)^2}{a^2}-\frac{\left(\frac{4\sqrt{2}a}{3}\right)^2}{b^2}=1\Rightarrow b^2=2a^2$$

故 $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{3}$.

86. 双曲线

$$\Gamma:x^2-y^2=1$$

的右顶点为 A, 将圆心在 y 轴上, 且与 Γ 的两支各恰有一个公共点的圆称为“好圆”, 若两个好圆外切于点 P, 圆心距为 d, 求 $\frac{d}{|PA|}$ 的所有可能值。

考虑以 $(0, y_0)$ 为圆心的好圆

$$\Omega_0 : x^2 + (y - y_0)^2 = r_0^2 \, (r_0 > 0)$$

由 Ω_0 与 Γ 的方程消去 x, 得关于 y 的二次方程

$$2y^2 - 2y_0 y + y_0^2 + 1 - r_0^2 = 0$$

令判别式为零,

$$\Delta = 4y_0^2 - 8\left(y_0^2 + 1 - r_0^2\right) = 0 \Rightarrow y_0^2 = 2r_0^2 - 2$$

对于外切于点 P 的两个好圆 Ω_1, Ω_2, 显然 P 在 y 轴上; 设 $P(0, h)$, Ω_1, Ω_2 的半径分别为 r_1, r_2, 不妨设 Ω_1, Ω_2 的圆心分别为 $(0, h + r_1), (0, h - r_2)$, 则有

$$(h + r_1)^2 = 2r_1^2 - 2, (h - r_2)^2 = 2r_2^2 - 2$$

两式相减得

$$2h(r_1 + r_2) = r_1^2 - r_2^2$$

而 $r_1 + r_2 > 0$, 故化简得 $h = \frac{r_1 - r_2}{2}$, 进而

$$\left(\frac{r_1 - r_2}{2} + r_1\right)^2 = 2r_1^2 - 2 \Rightarrow r_1^2 - 6r_1 r_2 + r_2^2 + 8 = 0 \tag{1}$$

由于 $d = r_1 + r_2, A(1, 0)$, 且

$$|PA|^2 = h^2 + 1 = \frac{(r_1 - r_2)^2}{4} + 1$$

而 (1) 可等价地写为

$$2(r_1 - r_2)^2 + 8 = (r_1 + r_2)^2$$

即 $8|PA|^2 = d^2$, 所以

$$\frac{d}{|PA|} = 2\sqrt{2}$$

87. 设 A, B 为双曲线

$$W : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

与实轴的交点, $P(0,1)$ 为双曲线外一点,PA, PB 分别交双曲线于另一点 C, D, 过 C, D 的切线相交于 Q, 若 $\triangle QCD$ 是一个正三角形且面积为 $\dfrac{16\sqrt{3}}{27}$, 求双曲线 W 的方程式。

设 $A(-a,0), B(a,0), C(-a\sec\alpha, b\tan\alpha), D(a\sec\alpha, b\tan\alpha)$ 且 $\sec\alpha > 0$, 从而 PB 的直线方程为

$$y = -\frac{1}{a}x + 1$$

于是有

$$\tan\alpha = -\sec\alpha + 1 \tag{1}$$

则 QD 的直线方程为

$$\frac{x\sec\alpha}{a} - \frac{y\tan\alpha}{b} = 1$$

QC 的直线方程为:

$$-\frac{x\sec\alpha}{a} - \frac{y\tan\alpha}{b} = 1$$

得 $Q(0, -\dfrac{b}{\tan\alpha})$; 又由对称性及 $\triangle QCD$ 是正三角形可得

$$\frac{1}{2}\cdot 2a\sec\alpha\cdot\sqrt{3}a\sec\alpha = \frac{16\sqrt{3}}{27},\ -\frac{b}{\tan\alpha} - b\tan\alpha = \sqrt{3}a\sec\alpha$$

即

$$a^2\sec^2\alpha = \frac{16}{27}, -b\sec\alpha = \sqrt{3}a\tan\alpha$$

联立 (1) 可得

$$\sec\alpha = \frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{3}a - b^2}, \tan\alpha = \frac{-b}{\sqrt{3}a - b^2}$$

由 $1+\tan^2\alpha = \sec^2\alpha$ 得 $b^2 = 2\sqrt{3}a - 1$, 代入 $a\sec\alpha = \frac{4}{3\sqrt{3}}$ 得

$$9a^2 + 4\sqrt{3}a - 4 = 0 \Rightarrow a = \frac{2\sqrt{3}}{9}, b = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

所以双曲线 W 的方程是

$$\frac{27x^2}{4} - 3y^2 = 1$$

88. 已知双曲线

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\ (a>0, b>0)$$

的左、右焦点分别为 F_1, F_2。过点 F_1 作直线分别交双曲线左支和一条渐近线于点 A, B (A, B 在同一象限), 且满足 $F_1A = AB$。连接 AF_2, 若满足 $AF_2 \perp BF_1$, 求该双曲线离心率的平方 e^2。

不妨设 $A(x_0,y_0)$ 在第二象限，由 $AF_2\perp BF_1$ 得

$$\frac{y_0}{x_0-c}\cdot\frac{y_0}{x_0+c}=-1\Rightarrow y_0^2+x_0^2-c^2=0 \tag{1}$$

因为 A 在双曲线上，所以

$$\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1\Rightarrow x_0^2=a^2+\frac{a^2y_0^2}{b^2}$$

代入 (1) 解得 $y_0=\frac{b^2}{c}$；又 $F_1A=AB$，所以 $B(2x_0+c,2y_0)$；又 B 在渐近线 $y=-\frac{b}{a}x$ 上，

$$2y_0=-\frac{b}{a}(2x_0+c)\Rightarrow -2bx_0=2ay_0+bc$$

两边平方得

$$b^2(2x_0+c)^2=a^2(2y_0)^2\Rightarrow 4b^2x_0^2+4b^2cx_0+b^2c^2=4a^2y_0^2 \tag{2}$$

将 $x_0^2=a^2+\frac{a^2y_0^2}{b^2}$ 和 $y_0=\frac{b^2}{c}$ 代入 (2) 得

$$4b^2(a^2+\frac{a^2b^4}{b^2c^2})+4b^2c\sqrt{a^2+\frac{a^2b^4}{b^2c^2}}+b^2c^2=4a^2\frac{b^4}{c^2}$$

解得

$$3a^2-4ab-b^2=0\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{7}+2}{3}$$

于是

$$e^2=1+\frac{b^2}{a^2}=1+\frac{9}{(\sqrt{7}+2)^2}\cdot\frac{(\sqrt{7}-2)^2}{(\sqrt{7}-2)^2}=12-4\sqrt{7}$$

89. 设双曲线

$$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\quad a>0,b>0$$

的左、右焦点分别为 F_1,F_2。过点 F_1 作斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 的直线 l，与双曲线左右两支分别交于点 M,N。且满足

$$(\overrightarrow{F_2M}+\overrightarrow{F_2N})\cdot\overrightarrow{MN}=0.$$

求双曲线的离心率。

设 D 为 MN 的中点，连接 F_2D，易知 $\overrightarrow{F_2M}+\overrightarrow{F_2N}=2\overrightarrow{F_2D}$，所以

$$(\overrightarrow{F_2M}+\overrightarrow{F_2N})\cdot\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{F_2D}\cdot\overrightarrow{MN}=0\Rightarrow F_2D\perp MN$$

所以 $|F_2M|=|F_2N|$, 现设 $t=|F_2M|=|F_2N|$, 由双曲线定义

$$|MF_1|=t-2a,\ |NF_1|=t+2a \Rightarrow |MN|=|NF_1|-|MF_1|=4a$$

又 D 是 MN 的中点,

$$|MD|=|ND|=2a,\ |F_1D|=|F_1M|+|MD|=t$$

在直角 $\triangle F_1DF_2$ 及直角 $\triangle MDF_2$ 中,

$$|F_2D|=\sqrt{4c^2-t^2}=\sqrt{t^2-4a^2} \Rightarrow t^2=2a^2+2c^2$$

所以

$$|F_1D|=\sqrt{2c^2-2a^2}, |F_2D|=t=\sqrt{2a^2+2c^2}$$

直线的斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$,

$$\tan\angle DF_1F_2=\frac{|F_2D|}{|F_1D|}=\frac{\sqrt{2c^2-2a^2}}{\sqrt{2a^2+2c^2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

所以

$$\frac{c^2-a^2}{a^2+c^2}=\frac{1}{3} \Rightarrow c=\sqrt{2}a$$

离心率为 $\dfrac{c}{a}=\sqrt{2}$

90. 已知双曲线

$$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$$

的左焦点为 F_1, 离心率为 e, 直线 $y=kx\ (k\neq 0)$ 分别与 C 的左右两支交于点 M,N, 若 $\triangle MF_1N$ 的面积为 $\sqrt{3}$, 且 $\angle MF_1N=60^\circ$, 求 e^2+3a^2 的最小值。

连接 NF_2, MF_2, 由对称性可知四边形 MF_1NF_2 为平行四边形, 故

$$|NF_2|=|MF_1|, |NF_1|=|MF_2|, \angle F_1NF_2=120^\circ, S_{\triangle F_1NF_2}=S_{\triangle MF_1N}=\sqrt{3}$$

由面积公式得

$$\frac{1}{2}|NF_1|\cdot|NF_2|\sin 120^\circ=\sqrt{3} \Rightarrow |NF_1|\cdot|NF_2|=4$$

由 $|F_1N|-|F_2N|=2a$, 在三角形 F_1NF_2 中, 由余弦定理得

$$\begin{aligned}\cos 120^\circ &= \frac{F_1N^2+F_2N^2-4c^2}{2F_1N\cdot F_2N}\\ &= \frac{(F_1N-F_2N)^2+2F_1N\cdot F_2N-4c^2}{2F_1N\cdot F_2N}\\ &= \frac{(2a)^2+2\cdot 4-4c^2}{2\cdot 4}\\ &= \frac{a^2+2-c^2}{2}=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

解得 $b^2=c^2-a^2=3$, 由 AM-GM 不等式,

$$e^2+3a^2=1+\frac{b^2}{a^2}+3a^2=1+\frac{3}{a^2}+3a^2\geqslant 1+2\sqrt{\frac{3}{a^2}\cdot 3a^2}=7$$

当且仅当 $\dfrac{3}{a^2}=3a^2$ 即 $a^2=1$ 时等号成立。

91. 18.（陕西 21）（本小题满分 12 分）

已知抛物线

$$C: y=2x^2,$$

直线 $y=kx+2$ 交 C 于 A, B 两点,M 为线段 AB 的中点, 过 M 作 x 轴的垂线, 垂足为 N。

(I) 证明：抛物线 C 在点 N 处的切线与 AB 平行；

(II) 是否存在实数 k 使 $\vec{NA}\cdot\vec{NB}=0$？若存在, 求 k 的值；若不存在, 说明理由。

解法一

(I) 设

$$A(x_1, 2x_1^2),\quad B(x_2, 2x_2^2).$$

将 $y=kx+2$ 代入 $y=2x^2$, 得

$$2x^2-kx-2=0.$$

由韦达定理,

$$x_1+x_2=\frac{k}{2},\quad x_1x_2=-1.$$

因为 M 为 AB 的中点,

$$x_N=x_M=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{k}{4},$$

故
$$N\left(\frac{k}{4},0\right).$$
设抛物线在点 N 处的切线为
$$y-\frac{k^2}{8}=m\left(x-\frac{k}{4}\right).$$
将 $y=2x^2$ 代入上式, 得
$$2x^2-mx+\frac{mk}{4}-\frac{k^2}{8}=0.$$
由于该直线与抛物线相切, 判别式为零:
$$\Delta=m^2-8\left(\frac{mk}{4}-\frac{k^2}{8}\right)=m^2-2mk+k^2=(m-k)^2=0,$$
解得 $m=k$, 即切线与 AB 平行。

(II) 假设存在实数 k 使 $\vec{NA}\cdot\vec{NB}=0$, 则 $NA\perp NB$。

由于 M 是 AB 的中点, 故
$$|MN|=\frac{1}{2}|AB|.$$
又
$$y_M=\frac{1}{2}(y_1+y_2)=\frac{1}{2}(kx_1+2+kx_2+2)=\frac{1}{2}\left[k(x_1+x_2)+4\right]=\frac{k^2}{4}+2.$$
因为 $MN\perp x$ 轴,
$$|MN|=|y_M-y_N|=\left|\frac{k^2}{4}+2-\frac{k^2}{8}\right|=\frac{k^2+16}{8}.$$
而
$$|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{1}{2}\sqrt{k^2+10}\sqrt{k^2+16}.$$
由 $|MN|=\frac{1}{2}|AB|$, 得
$$\frac{k^2+16}{8}=\frac{1}{4}\sqrt{k^2+10}\sqrt{k^2+16}.$$
解得
$$k=\pm 2.$$
因此存在 $k=\pm 2$, 使 $\vec{NA}\cdot\vec{NB}=0$。

解法二

(I) 设
$$A(x_1,2x_1^2),\quad B(x_2,2x_2^2).$$

由

$$2x^2 - kx - 2 = 0,$$

得

$$x_1 + x_2 = \frac{k}{2}, \quad x_1x_2 = -1.$$

因为

$$x_N = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{k}{4},$$

又 N 在抛物线上, 故

$$N\left(\frac{k}{4}, \frac{k^2}{8}\right).$$

抛物线 $y = 2x^2$ 的导数为 $y' = 4x$, 因此在点 N 处的切线斜率为

$$4 \times \frac{k}{4} = k.$$

而 AB 的斜率为 k, 故切线与 AB 平行。

(II) 假设存在实数 k 使 $\vec{NA} \cdot \vec{NB} = 0$。

由

$$\vec{NA} = \left(x_1 - \frac{k}{4}, 2x_1^2 - \frac{k^2}{8}\right), \quad \vec{NB} = \left(x_2 - \frac{k}{4}, 2x_2^2 - \frac{k^2}{8}\right),$$

得

$$\begin{aligned}\vec{NA} \cdot \vec{NB} &= (x_1 - \tfrac{k}{4})(x_2 - \tfrac{k}{4}) + (2x_1^2 - \tfrac{k^2}{8})(2x_2^2 - \tfrac{k^2}{8}) \\ &= \left(x_1x_2 - \frac{k}{4}(x_1 + x_2) + \frac{k^2}{16}\right)\left(1 + 4x_1x_2 + k(x_1 + x_2) + \frac{k^2}{4}\right).\end{aligned}$$

代入

$$x_1 + x_2 = \frac{k}{2}, \quad x_1x_2 = -1,$$

得

$$\vec{NA} \cdot \vec{NB} = \left(-1 - \frac{k^2}{16}\right)\left(-3 + \frac{3}{4}k^2\right).$$

由于 $-1 - \frac{k^2}{16} \neq 0$, 故

$$-3 + \frac{3}{4}k^2 = 0,$$

解得

$$k = \pm 2.$$

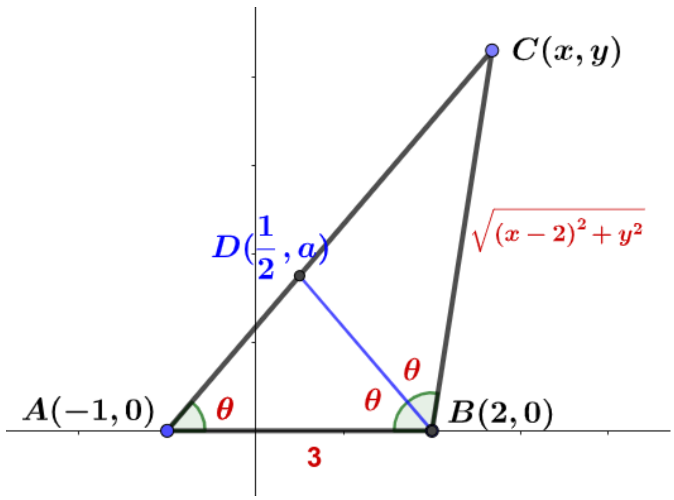
因此存在实数 $k = \pm 2$, 使 $\vec{NA} \cdot \vec{NB} = 0$。

92. 点 $A(-1,1),B,C$ 在双曲线 $x^2-y^2=1$ 上，且 $\triangle ABC$ 为正三角形。求其面积。

$\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (待解)

轨迹方程式、参数方程式、极坐标

1. 设 $A(-1,0), B(2,0)$, 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\angle B = 2\angle A$, 求点 C 的轨迹方程式。



设 $C(x,y)$, 作 $\angle B$ 的角平分线交 AC 于点 D, 由

$$\angle B = 2\angle A$$

知 D 在 AB 的垂直平分线上, 故 $D\left(\frac{1}{2}, a\right)$, 又由角平分线定理,

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{\sqrt{(x-2)^2+y^2}}$$

由分比公式

$$x_D = \frac{1}{2} = \frac{-\sqrt{(x-2)^2+y^2}+3x}{\sqrt{(x-2)^2+y^2}+3}$$

得点 C 的轨迹

$$x^2 - \frac{y^2}{3} = 1, \quad x > 1$$

2. 一抛物线 $y^2 = 4x$ 与一直线交于 A, B 两点, 已知抛物线与直线所围出的面积为 $\frac{9}{8}$, 求 A, B 的中点轨迹方程。

不失一般性，设交点为 $A\left(\frac{1}{4}y_1^2, y_1\right)$, $B\left(\frac{1}{4}y_2^2, y_2\right)$, $y_2 \leqslant y_1$, 斜率 $m_L = \dfrac{y_1 - y_2}{\frac{1}{4}(y_1^2 - y_2^2)} = \dfrac{4}{y_1 + y_2}$，则直线方程为

$$x = \frac{1}{4}(y_1 + y_2)y - \frac{1}{4}y_1 y_2.$$

所围部分面积为

$$\frac{9}{8} = \int_{y_2}^{y_1} \left(\frac{1}{4}(y_1 + y_2)y - \frac{1}{4}y_1 y_2 - \frac{1}{4}y^2\right) dy = \frac{1}{24}(y_1 - y_2)^3$$

由此得

$$y_1 - y_2 = 3.$$

设 P 为 AB 中点

$$P\left(\frac{1}{8}(y_1^2 + y_2^2), \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\right) \equiv (x, y)$$

由于

$$y^2 = \frac{1}{4}(y_1 + y_2)^2 = \frac{1}{4}(y_1^2 + y_2^2) + \frac{1}{2}y_1 y_2 = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) - \frac{9}{4} = 4x - \frac{9}{4},$$

所以中点轨迹方程为

$$y^2 = 4x - \frac{9}{4}.$$

3. 设一点 P 在半径为 r 的圆的内部。在点 P 作一直角，记该直角的两边分别与圆相交于 A, B 两点。设点 Q 使 $PAQB$ 构成矩形。求点 Q 的轨迹。

把圆心取为原点 O。由于坐标系可以旋转而不改变问题的本质，我们可取坐标轴使点 P 位于 x 轴上，设

$$P = (d, 0), \qquad 0 < d < r.$$

设直角的两条边沿方向与 x 轴的夹角分别为 θ 和 $\theta + \frac{\pi}{2}$，即沿单位方向

$$(\cos\theta, \sin\theta) \quad 和 \quad (-\sin\theta, \cos\theta).$$

于是点 A 可以表示为

$$A = \big(d + s\cos\theta,\ s\sin\theta\big),$$

其中 $s > 0$ 为 PA 的长度；点 B 表示为

$$B = \big(d - t\sin\theta,\ t\cos\theta\big),$$

其中 $t > 0$ 为 PB 的长度。因为 A, B 在圆上，满足

$$(d + s\cos\theta)^2 + (s\sin\theta)^2 = r^2,$$

$$(d-t\sin\theta)^2+(t\cos\theta)^2=r^2.$$

将两式展开并化简得关于 s 和 t 的等式：

$$s^2+2ds\cos\theta+d^2=r^2,\qquad t^2-2dt\sin\theta+d^2=r^2.$$

从而

$$s^2=r^2-d^2-2ds\cos\theta,\qquad t^2=r^2-d^2+2dt\sin\theta.$$

点 Q 的坐标为矩形关系得到

$$Q=(x_Q,y_Q)=\big(d+s\cos\theta-t\sin\theta,\ s\sin\theta+t\cos\theta\big).$$

计算 Q 到原点的距离的平方：

$$\begin{aligned}x_Q^2+y_Q^2&=\big(d+s\cos\theta-t\sin\theta\big)^2+\big(s\sin\theta+t\cos\theta\big)^2\\&=d^2+2d\big(s\cos\theta-t\sin\theta\big)+s^2+t^2.\end{aligned}$$

代入上面关于 s^2,t^2 的表达式：

$$s^2+t^2=2(r^2-d^2)+2d\big(t\sin\theta-s\cos\theta\big).$$

因此

$$\begin{aligned}x_Q^2+y_Q^2&=d^2+2d\big(s\cos\theta-t\sin\theta\big)+2(r^2-d^2)+2d\big(t\sin\theta-s\cos\theta\big)\\&=2r^2-d^2.\end{aligned}$$

右端与 θ,s,t 无关，仅依赖于 r 与 $d=OP$。因此 $|OQ|^2$ 为常数 $2r^2-d^2$。即点 Q 的轨迹是以 O 为圆心、半径为 $\sqrt{2r^2-d^2}$ 的圆。

（注意当初用坐标将 P 放在 x 轴上是对坐标系的旋转，不改变原题的几何关系；若原始 P 坐标为 (h,k)，结论同样是 $|OQ|^2=2r^2-(h^2+k^2)$。）

设圆心为原点 O，向量 $\vec{p}$ 为 $\vec{OP}$。因为 P 在圆内，所以 $|\vec{p}|^2<r^2$。设

$$\vec{v}=\vec{PA},\quad \vec{w}=\vec{PB},$$

且 $\vec{v}\perp\vec{w}$。再设

$$\vec{a}=\vec{OA},\quad \vec{b}=\vec{OB},$$

则 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=r$, 并且

$$\vec{a}=\vec{p}+\vec{v}, \quad \vec{b}=\vec{p}+\vec{w}$$

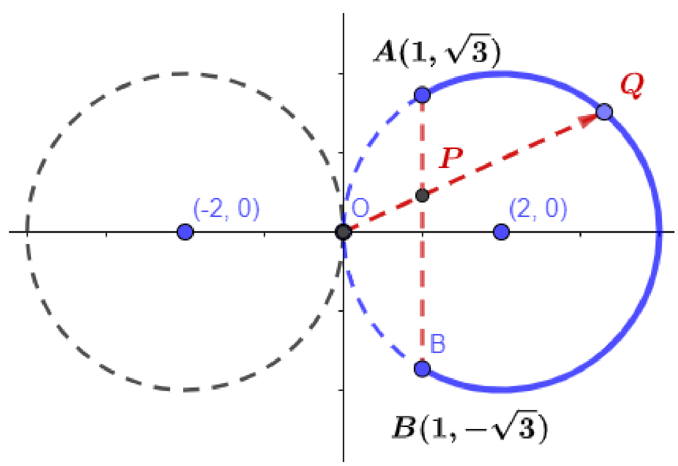
设 $\vec{q}=\vec{OQ}=\vec{p}+\vec{v}+\vec{w}$。于是

$$|\vec{q}|^2=(\vec{p}+\vec{v}+\vec{w})\cdot(\vec{p}+\vec{v}+\vec{w})$$

$$\begin{aligned}
|\vec{q}|^2 &= |\vec{p}|^2+2\vec{p}\cdot\vec{v}+2\vec{p}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{v}+\vec{w}\cdot\vec{w} \\
&= |\vec{p}|^2+\vec{a}\cdot\vec{v}+\vec{b}\cdot\vec{w}+\vec{p}\cdot\vec{v}+\vec{p}\cdot\vec{w} \\
&= |\vec{p}|^2+(\vec{a}+\vec{p})\cdot\vec{v}+(\vec{b}+\vec{p})\cdot\vec{w} \\
&= |\vec{p}|^2+(\vec{a}+\vec{p})\cdot(\vec{a}-\vec{p})+(\vec{b}+\vec{p})\cdot(\vec{b}-\vec{p}) \\
&= |\vec{p}|^2+|\vec{a}|^2-|\vec{p}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{p}|^2 \\
&= 2r^2-|\vec{p}|^2
\end{aligned}$$

因此 Q 到圆心 O 的距离为常数, 所以 Q 的轨迹是以 O 为圆心、(半径)^2 等于 $2r^2-|\vec{p}|^2$ 的圆。

4. 设 $A(1,\sqrt{3})$, $B(1,-\sqrt{3})$ 为平面上两定点, 动点 P 在线段 AB 上。O 为原点, 且 Q 在射线 OP 上, 满足 $OP\cdot OQ=4$。当动点 P 从 A 沿线段 AB 移动到 B, 求点 Q 轨迹的路径长。



设 P 点坐标为 $P(1,t), -\sqrt{3}\leqslant t\leqslant\sqrt{3}$, 则

$$OP=\sqrt{1+t^2},$$

Q 在射线 OP 上, 则设

$$Q(x,y),\quad y=tx,\quad x\geqslant 0.$$

由条件 $OP\cdot OQ=4$,

$$\sqrt{1+t^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}=4.$$

代入 $y=tx$, 得

$$\sqrt{1+t^2}\cdot\sqrt{x^2+t^2x^2}=(1+t^2)|x|=4\Rightarrow x=\frac{4}{1+t^2}.$$

点 Q 坐标为

$$Q\left(\frac{4}{1+t^2},\frac{4t}{1+t^2}\right).$$

由 $x=\frac{4}{1+t^2}$, 得 $t^2=\frac{4}{x}-1$, 所以

$$y^2=t^2x^2=\left(\frac{4}{x}-1\right)x^2=4x-x^2.$$

即

$$(x-2)^2+y^2=2^2,$$

为以 $(2,0)$ 为圆心, 半径为 2 的圆; 由于 P 在 AB, 则 $1\leqslant OP\leqslant 2$, 即

$$1\leqslant\sqrt{1+t^2}\leqslant 2\implies 1\leqslant x=\frac{4}{1+t^2}\leqslant 4,$$

故点 Q 轨迹为圆周在 $x\geqslant 1$ 的部分, 即为该圆的三分之二周长, 路径长为

$$\frac{2}{3}\cdot 4\pi=\frac{8\pi}{3}.$$

5. (浙江 22)(本题 15 分)

已知曲线 C 是到点 $P\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{8}\right)$ 和到直线 $y=-\frac{5}{8}$ 距离相等的点的轨迹。直线 l 过点 $Q(-1,0)$, 点 M 是 C 上（不在 l 上）的动点；A,B 在 l 上, 且 $MA\perp l$, $MB\perp x$ 轴。

1. 求曲线 C 的方程；
2. 求直线 l 的方程, 使 $\dfrac{|QB|^2}{|QA|}$ 为常数。

(I) 解设 $N(x,y)$ 为 C 上的点, 则

$$|NP|=\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{8}\right)^2},\qquad d(N,y=-\tfrac{5}{8})=\left|y+\frac{5}{8}\right|.$$

由题意

$$\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{8}\right)^2}=\left|y+\frac{5}{8}\right|.$$

两边平方并化简, 得

$$x^2+x-2y=0\quad\Rightarrow\quad\boxed{y=\frac{1}{2}(x^2+x)}.$$

(II) 解法一由 (I) 知 $C:\ y=\frac{1}{2}(x^2+x)$。设

$$M\left(x,\frac{x^2+x}{2}\right),\qquad l:\ y=kx+k\ (k\neq 0),$$

则 $B(x,kx+k)$,

$$|QB|=\sqrt{1+k^2}\,|x+1|.$$

在直角三角形 $\triangle QMA$ 中,

$$|QM|^2=(x+1)^2\left(1+\frac{x^2}{4}\right),\quad |MA|^2=\frac{(x+1)^2\left(k-\frac{x}{2}\right)^2}{1+k^2}.$$

于是

$$|QA|^2=\frac{(x+1)^2}{4(1+k^2)}(kx+2)^2,\quad |QA|=\frac{|x+1||kx+2|}{2\sqrt{1+k^2}}.$$

故

$$\frac{|QB|^2}{|QA|}=\frac{2(1+k^2)\sqrt{1+k^2}}{|k|}\left|\frac{x+1}{x+\frac{2}{k}}\right|.$$

要使其为常数, 需 $\frac{2}{k}=1$, 得 $k=2$。此时

$$\frac{|QB|^2}{|QA|}=5\sqrt{5},$$

故

$$\boxed{l:\ 2x-y+2=0}.$$

解法二仍设

$$M\left(x,\frac{x^2+x}{2}\right),\qquad l:\ y=kx+k.$$

则

$$|QB|=\sqrt{1+k^2}\,|x+1|.$$

过 $Q(-1,0)$ 作垂直于 l 的直线

$$l_1:\ y=-\frac{1}{k}(x+1).$$

因 $|QA|=|MH|$（H 为 M 到 l_1 的垂足），计算得

$$|QA|=\frac{|x+1||kx+2|}{2\sqrt{1+k^2}}.$$

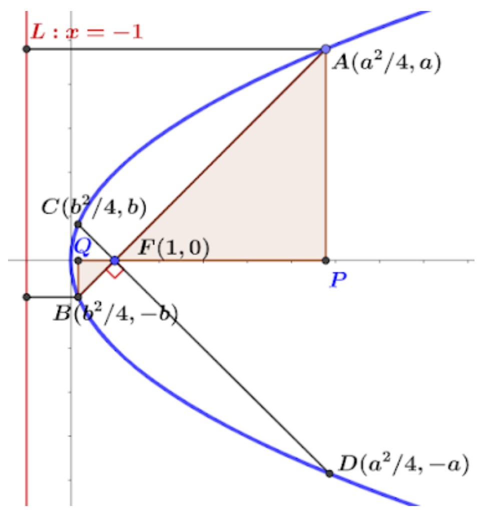
于是

$$\frac{|QB|^2}{|QA|}=\frac{2(1+k^2)\sqrt{1+k^2}}{|k|}\left|\frac{x+1}{x+\frac{2}{k}}\right|.$$

同理得 $k=2$, 从而

$$\boxed{l:\ 2x-y+2=0}.$$

6. 已知平面内动点 P 到 $F(1,0)$ 的距离与点 P 到 y 轴的距离差为 1, 求:



(a) 此动点 P 的轨迹方程。

即 P 到 $F(1,0)$ 的距离与 P 到直线 $x=-1$ 的距离相等, 依抛物线定义, 轨迹为

$$y^2=4x$$

(b) 过 F 作两条互相垂直的直线 L_1,L_2。设 L_1 与 P 点轨迹相交于点 A 和 B,L_2 与 P 点轨迹相交于点 C,D, 求 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}$ 的最小值。

极值出现在 $\overline{AB}=\overline{CD}$, 可假设:

$A\left(\frac{a^2}{4},a\right)$,$B\left(\frac{b^2}{4},-b\right)$,$C\left(\frac{b^2}{4},b\right)$,$D\left(\frac{a^2}{4},-a\right)$

则:

$$\overrightarrow{AD}=(0,-2a),\quad \overrightarrow{CB}=(0,-2b)\Rightarrow\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}=4ab$$

设 P,Q 分别为 A,B 在 x 轴的垂足, 则:

$\triangle APF\backsim\triangle BQF$（AAA）

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{BQ}}=\frac{\overline{AF}}{\overline{BF}}=\frac{d(L,A)}{d(L,B)}$$

即:

$$\frac{a}{b}=\frac{\frac{a^2}{4}+1}{\frac{b^2}{4}+1}=\frac{a^2+4}{b^2+4}$$

两边交叉相乘得:

$$ab^2+4a=a^2b+4b\Rightarrow ab(a-b)-4(a-b)=0\Rightarrow(ab-4)(a-b)=0$$

若 $a=b$, 则 $\overline{CD}$ 为 x 轴, 不符合条件。

故取 $ab=4$, 则:

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}=4ab=16$$

(待验证, 为何极值出现在 $\overline{AB}=\overline{CD}$)

7. 在曲线

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}=1,$$

上的点 P 处作曲线的切线, 该切线与 x 轴交于 $(h,0)$, 与 y 轴交于 $(0,k)$。当 P 沿给定曲线移动时, 求点 $Q(h,k)$ 的轨迹。

解:

如果用参数方程形式表示曲线, 代数运算会更简便:

$$x=a\cos^3\theta\quad 和\quad y=b\sin^3\theta.$$

则

$$
\begin{aligned}
&\frac{dx}{d\theta} = 3a\cos^2\theta(-\sin\theta), \\
&\frac{dy}{d\theta} = 3b\sin^2\theta(\cos\theta), \\
\text{以及}\quad &\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{3b\sin^2\theta\cos\theta}{3a\cos^2\theta(-\sin\theta)} = -\frac{b}{a}\tan\theta.
\end{aligned}
$$

在任意点 θ 处的切线方程为

$$
y - b\sin^3\theta = -\frac{b}{a}\tan\theta(x - a\cos^3\theta).
$$

对切线方程两边同乘以 $a\cos\theta$, 并整理得简化形式:

$$
bx\sin\theta + ay\cos\theta = ab\sin\theta\cos\theta.
$$

然后求出该切线的 x 轴截距 h 和 y 轴截距 k。

令 $y=0$, 得到 x 轴截距 h:

$$
bh\sin\theta = ab\sin\theta\cos\theta \implies h = a\cos\theta.
$$

令 $x=0$, 得到 y 轴截距 k:

$$
ak\cos\theta = ab\sin\theta\cos\theta \implies k = b\sin\theta.
$$

这表明点 $Q(h,k)$ 的轨迹是通过消去参数 θ 得到的。由 $h=a\cos\theta$ 和 $k=b\sin\theta$, 可得

$$
\cos\theta = \frac{h}{a} \quad \text{和} \quad \sin\theta = \frac{k}{b}.
$$

利用恒等式 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, 得到

$$
\left(\frac{h}{a}\right)^2 + \left(\frac{k}{b}\right)^2 = 1.
$$

因此, 点 $Q(h,k)$ 的轨迹是一个椭圆, 其方程为

$$
\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.
$$

8. 以 O 为原点的 xy 平面上, 取两点 $A(\sqrt{3},1), B(-1,\sqrt{3}), t\in\mathbb{R}$, 点 P 满足

$$\overrightarrow{OP}=t^2\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB},$$

求 P 点的轨迹与 x 轴所围成的图形面积。

设 $P(x,y)$, 则

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{3}&-1\\1&\sqrt{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t^2\\t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 30^\circ&-\sin 30^\circ\\\sin 30^\circ&\cos 30^\circ\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$$

其中

$$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{t^2}{2}\\\frac{t}{2}\end{bmatrix}.$$

在新坐标系下, 轨迹满足

$$\Gamma y'^2=2x' \tag{1}$$

即一条抛物线, 既然旋转保持面积不变, 即求新坐标系下所围面积, 将 x 轴顺时针转 30° 得

$$L:y'=-\frac{1}{\sqrt{3}}x' \tag{2}$$

联立 (1), (2) 解得

$$O(0,0),\quad A(6,-2\sqrt{3})$$

所围成图形面积为

$$\int_{-2\sqrt{3}}^{0}\left(-\sqrt{3}y-\frac{y^2}{2}\right)dy=2\sqrt{3}.$$

9. 坐标平面上有一椭圆

$$\Gamma_1:\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

以原点 $O(0,0)$ 为中心, 将椭圆 Γ_1 逆时针旋转 $\frac{\pi}{3}$ 后得到椭圆

$$\Gamma_2:43x^2+14\sqrt{3}xy+57y^2=576$$

求椭圆 Γ_1 的面积。

有

$$43x^2+14\sqrt{3}xy+57y^2=[x,y]\begin{bmatrix}43&7\sqrt{3}\\7\sqrt{3}&57\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}.$$

设矩阵

$$A=\begin{bmatrix}43 & 7\sqrt{3}\\ 7\sqrt{3} & 57\end{bmatrix},$$

特征值为

$$\lambda_1=36,\quad \lambda_2=64$$

于是旋转后的标准形式为

$$36x'^2+64y'^2=576\Rightarrow \frac{x'^2}{16}+\frac{y'^2}{9}=1$$

由此可得半轴长

$$a=4,\quad b=3$$

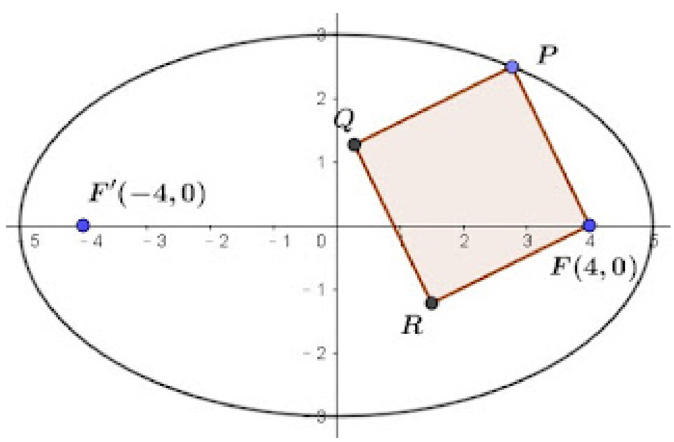
故椭圆面积为

$$S=\pi ab=12\pi$$

10. 设椭圆

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

的右焦点为 $F(4,0)$, 点 P 为椭圆上一动点, 若以 PF 为一边作正方形 $FPQR$($FPQR$ 按逆时针方向排列), 当 P 点沿着椭圆绕行一周时, 试求 R 点的轨迹方程式。



以 F 为旋转中心, 将 P 逆时针旋转 90° 即为 R。因此 $P(5\cos\theta,3\sin\theta)$ 先平移 $(-4,0)$, 得

$$P'=(5\cos\theta-4,\ 3\sin\theta)$$

再逆时针旋转 90°, 有

$$P''=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\cos\theta-4\\ 3\sin\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\sin\theta\\ 5\cos\theta-4\end{bmatrix}$$

再平移 $(4,0)$, 得

$$R=(-3\sin\theta+4,\ 5\cos\theta-4)$$

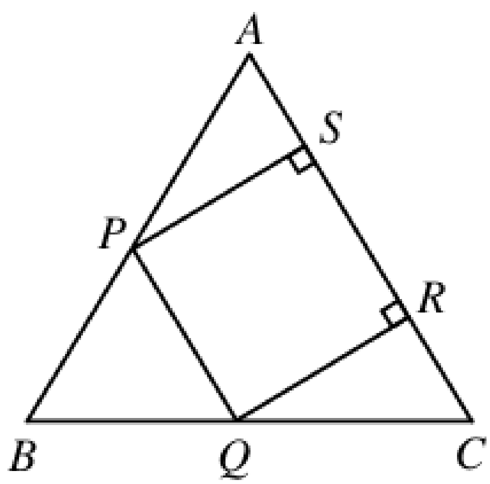
即

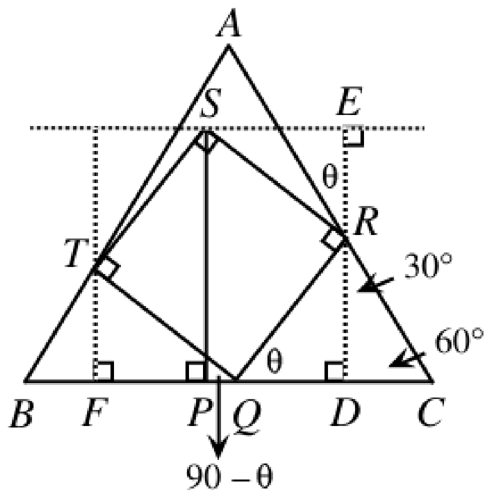
$$\begin{cases}x=-3\sin\theta+4\\ y=5\cos\theta-4\end{cases}$$

由此得

$$\frac{(x-4)^2}{9}+\frac{(y+4)^2}{25}=1$$

11. 等边三角形 ABC 的边长为 2。正方形 $PQRS$ 满足 P 在边 AB 上,Q 在边 BC 上,R,S 在边 AC 上。若动点 S 从边 AC 移动到边 AB, 使得 P,Q,R,S 始终在三角形边上或内部构成一个正方形, 证明点 S 的轨迹是一条平行于 BC 的直线。





设正方形的边长为 s, 且 $\angle RQC=\theta$。D,P,F 为 R,S,T 在底边 BC 的垂足, 过 S 作平行于 BC 的直线, 交从 R 作的垂线于 E。由 $\triangle RQD,\triangle SER$, S 到 BC 的距离为

$$RD+ER=s\sin\theta+s\cos\theta,$$

欲证其为常数。在 $\triangle RDQ,\triangle TFQ$ 中,

$$QD=s\cos\theta,\quad FQ=s\sin\theta,\quad TF=s\cos\theta.$$

在 $\triangle RDC,\triangle TFB$ 中,

$$DC=RD\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}s\sin\theta,\quad BF=TF\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}s\cos\theta,$$

故

$$2=DC+QD+FQ+BF=\frac{\sqrt{3}}{3}(s\cos\theta+s\sin\theta)+(s\cos\theta+s\sin\theta)$$

即

$$RD+ER=s\sin\theta+s\cos\theta=\frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{3}+1}$$

为一常数, 于是得证点 S 的轨迹是一条平行于 BC 的直线。

12. 如图所示, 一根长度为 4 的刚性杆 AB 可以绕位于 $M(1,0)$ 的铰链旋转。铰链允许杆在 x-y 平面内任意方向转动。杆的端点 A 可在 y 轴上滑动, 且 $|OA|\leqslant 4$。设 θ 为杆与正 x 轴的夹角。

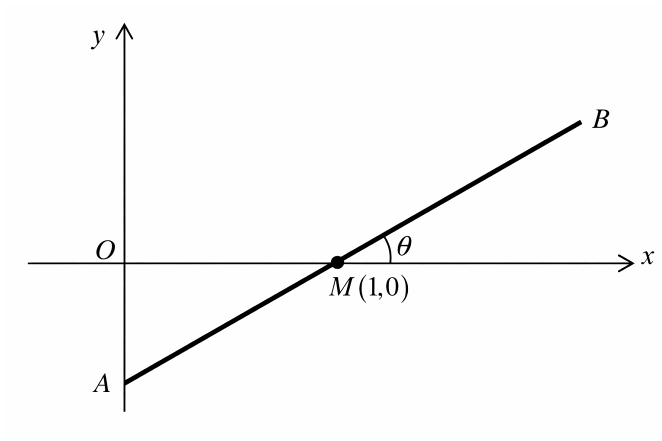
(a) 证明当 A 在 y 轴上滑动时,B 的轨迹满足参数方程

$$x = 4\cos\theta, \quad y = 4\sin\theta - \tan\theta, \quad -\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0,$$

并说明 θ_0 的精确值。

(b) 进一步证明该轨迹的直角坐标方程为

$$y^2 = \frac{(16 - x^2)(x-1)^2}{x^2}.$$



(a) 设 OM 为 1 个单位长度,AM 为从 A 到 M 的杆长部分,MB 为从 M 到 B 的杆长部分。由几何关系有

$$\cos\theta = \frac{|OM|}{|AM|} \implies |AM| = \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta.$$

杆总长为 4, 则

$$|MB| = 4 - |AM| = 4 - \sec\theta.$$

由几何关系得到 B 的坐标:

$$x = |OM| + |MB|\cos\theta = 1 + (4 - \sec\theta)\cos\theta = 4\cos\theta,$$
$$y = |MB|\sin\theta = (4 - \sec\theta)\sin\theta = 4\sin\theta - \tan\theta.$$

端点 A 可在 y 轴上滑动的约束 $|OA| \leqslant 4$ 对应 θ 的最大值为

$$\theta_0 = \operatorname{arsech}\frac{1}{4}.$$

(b) 将参数方程改写为直角坐标方程：

$$y = 4\sin\theta - \tan\theta = 4\sin\theta - \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \sin\theta\left(4 - \frac{1}{\cos\theta}\right) = \sin\theta\frac{4\cos\theta - 1}{\cos\theta},$$
$$y^2 = \sin^2\theta\frac{(4\cos\theta-1)^2}{\cos^2\theta} = (1-\cos^2\theta)\frac{(4\cos\theta-1)^2}{\cos^2\theta}.$$

由 $x = 4\cos\theta \implies \cos\theta = \frac{x}{4}$, 得

$$y^2 = \left(1 - \frac{x^2}{16}\right)\frac{(x-1)^2}{x^2/16} = \frac{16-x^2}{16}\cdot\frac{16(x-1)^2}{x^2} = \frac{(16-x^2)(x-1)^2}{x^2}.$$

13. 直线

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

其中 $p, q \neq 0$, 并满足约束条件

$$\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} = \frac{1}{2}.$$

点 P 为原点 O 到直线 L 的垂足。证明：无论 p, q 取何值, 点 P 恒在一圆 C 上, 并求该圆的半径。

将直线方程化为一般式：

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad qx + py - pq = 0.$$

设直线为

$$Ax + By + C = 0,$$

则原点到该直线的垂足坐标为

$$\left(-\frac{AC}{A^2+B^2}, -\frac{BC}{A^2+B^2}\right).$$

在此

$$A = q, \quad B = p, \quad C = -pq.$$

因此点 P 的坐标为

$$P\left(\frac{pq^2}{p^2+q^2}, \frac{p^2q}{p^2+q^2}\right).$$

由已知约束条件

$$\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} = \frac{1}{2},$$

得

$$\frac{p^2+q^2}{p^2q^2}=\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad p^2+q^2=\frac{1}{2}p^2q^2.$$

代入点 P 的坐标：

$$x=\frac{pq^2}{p^2+q^2}=\frac{pq^2}{\frac{1}{2}p^2q^2}=\frac{2}{p},$$

$$y=\frac{p^2q}{p^2+q^2}=\frac{p^2q}{\frac{1}{2}p^2q^2}=\frac{2}{q}.$$

于是

$$P\left(\frac{2}{p},\frac{2}{q}\right).$$

计算

$$x^2+y^2=\frac{4}{p^2}+\frac{4}{q^2}=4\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}\right)=4\times\frac{1}{2}=2.$$

因此点 P 的轨迹满足

$$x^2+y^2=2,$$

即点 P 恒在以原点为圆心、半径为 $\sqrt{2}$ 的圆上。

14. 椭圆由参数方程

$$x=3\sqrt{2}\cos\theta, \quad y=4\sin\theta, \quad 0<\theta<2\pi$$

给出。

(a) 求 (i) 椭圆的焦点坐标；(ii) 椭圆的准线方程。

(b) 证明椭圆在一般点处的切线方程为

$$\frac{y\sin\theta}{4}+\frac{x\cos\theta}{3\sqrt{2}}=1$$

一条过原点的直线与上述切线相交于点 P。

(c) 证明当 θ 变化时，点 P 的轨迹满足

$$(x^2+y^2)^2=2(9x^2+8y^2)$$

(a) 由

$$x=3\sqrt{2}\cos\theta, \quad y=4\sin\theta$$

得

$$\cos\theta = \frac{x}{3\sqrt{2}}, \quad \sin\theta = \frac{y}{4}$$

平方相加得

$$\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{16} = 1$$

因此

$$a^2 = 18, \quad b^2 = 16, \quad a > b$$

离心率 e 满足

$$b^2 = a^2(1 - e^2),$$

即

$$16 = 18(1 - e^2) \Rightarrow e^2 = \frac{1}{9},\ e = \frac{1}{3}$$

(i) 焦点为

$$(\pm ae, 0) = (\pm\sqrt{2}, 0)$$

(ii) 准线方程为

$$x = \pm\frac{a}{e} = \pm 9\sqrt{2}$$

(b) 由参数方程求导,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4\cos\theta}{-3\sqrt{2}\sin\theta}$$

在点 $(3\sqrt{2}\cos\theta, 4\sin\theta)$ 处的切线为

$$y - 4\sin\theta = \frac{4\cos\theta}{-3\sqrt{2}\sin\theta}(x - 3\sqrt{2}\cos\theta)$$

整理得

$$3\sqrt{2}y\sin\theta + 4x\cos\theta = 12\sqrt{2}$$

两边同除以 $12\sqrt{2}$,

$$\frac{y\sin\theta}{4} + \frac{x\cos\theta}{3\sqrt{2}} = 1$$

(c) 设过原点的直线与切线相交于 $P(x, y)$。过原点的直线可设为

$$y = \tan\theta\, x$$

代入切线方程,

$$\frac{x\tan\theta\sin\theta}{4} + \frac{x\cos\theta}{3\sqrt{2}} = 1$$

即

$$x\left(\frac{\sin^2\theta}{4\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{3\sqrt{2}}\right)=1$$

化简得

$$x=\frac{24\sqrt{2}\cos\theta}{9\sin^2\theta+8\cos^2\theta},\quad y=\frac{24\sqrt{2}\sin\theta}{9\sin^2\theta+8\cos^2\theta}$$

于是

$$\frac{y}{x}=\tan\theta$$

消去 θ,

$$x^2+y^2=\frac{1152}{(9\sin^2\theta+8\cos^2\theta)^2}$$

利用

$$\sin^2\theta=\frac{y^2}{x^2+y^2},\quad \cos^2\theta=\frac{x^2}{x^2+y^2},$$

代入并整理得

$$(x^2+y^2)^2=2(9x^2+8y^2)$$

因此点 P 的轨迹满足所求方程。

15. 一条双曲线 H 与一条直线 L 的直角坐标方程分别为

$$H:\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

$$L:\ y=mx+c,$$

其中 a,b,m,c 均为非零常数。

(a) 证明: 直线 L 与双曲线 H 的交点的 x 坐标满足方程

$$(a^2m^2-b^2)x^2+2a^2mcx+a^2(b^2+c^2)=0$$

(b) 已知直线 L 为双曲线 H 的切线, 证明

$$a^2m^2=b^2+c^2$$

(c) 求经过点 $(1,4)$ 且与双曲线

$$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$$

相切的两条切线方程, 并分别求出切点坐标。

(a) 将 $y=mx+c$ 代入双曲线方程:

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}-\frac{(mx+c)^2}{b^2}&=1\\ \Rightarrow b^2x^2-a^2(mx+c)^2&=a^2b^2\\ b^2x^2-a^2(m^2x^2+2mcx+c^2)&=a^2b^2\\ (b^2-a^2m^2)x^2-2a^2mcx-a^2(b^2+c^2)&=0\end{aligned}$$

两边同乘以 -1, 即得

$$(a^2m^2-b^2)x^2+2a^2mcx+a^2(b^2+c^2)=0,$$

结论成立。

(b) 若 L 为切线, 则上述关于 x 的二次方程有重根, 其判别式为零:

$$\begin{aligned}(2a^2mc)^2-4(a^2m^2-b^2)a^2(b^2+c^2)&=0\\ 4a^4m^2c^2-4a^2(a^2m^2-b^2)(b^2+c^2)&=0\end{aligned}$$

两边同时除以 $4a^2$, 得

$$a^2m^2c^2-(a^2m^2-b^2)(b^2+c^2)=0$$

展开并化简:

$$\begin{aligned}a^2m^2c^2-a^2m^2b^2-a^2m^2c^2+b^4+b^2c^2&=0\\ b^2(b^2+c^2-a^2m^2)&=0\end{aligned}$$

由于 $b\neq 0$, 故

$$a^2m^2=b^2+c^2$$

(c) 由题意 $a^2=25,b^2=16$。设切线为

$$y=mx+c,$$

且经过点 $(1,4)$, 则

$$4=m+c,\quad m=4-c$$

由切线条件 $a^2m^2=b^2+c^2$, 得

$$\begin{aligned}25(4-c)^2&=16+c^2\\ 25(c^2-8c+16)&=16+c^2\\ 24c^2-200c+384&=0\\ 3c^2-25c+48&=0\end{aligned}$$

解得

$$c=3 \quad 或 \quad c=\frac{16}{3}$$

对应

$$m=1 \quad 或 \quad m=-\frac{4}{3}$$

故两条切线方程为

$$y=x+3,$$
$$y=-\frac{4}{3}x+\frac{16}{3}$$

下面求切点坐标。

当 $y=x+3$ 时，代入双曲线:

$$\frac{x^2}{25}-\frac{(x+3)^2}{16}=1$$
$$(3x+25)^2=0,$$

得

$$x=-\frac{25}{3}, \quad y=-\frac{16}{3}$$

当 $y=-\frac{4}{3}x+\frac{16}{3}$ 时，代入双曲线:

$$(4x-25)^2=0,$$

得

$$x=\frac{25}{4}, \quad y=-3$$

因此两条切线及其切点分别为

$$y=x+3, \quad \left(-\frac{25}{3},-\frac{16}{3}\right),$$

$$y=-\frac{4}{3}x+\frac{16}{3}, \quad \left(\frac{25}{4},-3\right)$$

16. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上一点 P，过 P 的法线分别交 x 轴、y 轴于 A、B，若 $OABQ$ 为矩形，求点 Q 的轨迹方程。

设 $P(a\sec\theta, b\tan\theta)$ 为双曲线上任意动点。双曲线导数：

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)=0 \implies \frac{2x}{a^2}-\frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0 \implies \frac{dy}{dx}=\frac{b^2x}{a^2y}.$$

在 P 点，切线斜率：

$$m_{\text{tangent}}=\frac{b^2(a\sec\theta)}{a^2(b\tan\theta)}=\frac{b\sec\theta}{a\tan\theta}.$$

法线斜率为：

$$m_{\text{normal}}=-\frac{1}{m_{\text{tangent}}}=-\frac{a\tan\theta}{b\sec\theta}.$$

法线方程：

$$y-b\tan\theta=-\frac{a\tan\theta}{b\sec\theta}(x-a\sec\theta) \implies a\tan\theta\,x+b\sec\theta\,y-\frac{ab}{\cos\theta}=0.$$

与坐标轴交点：

$$A\left(\frac{a^2+b^2}{a}\sec\theta, 0\right),\quad B\left(0, -\frac{a^2+b^2}{b}\tan\theta\right),\quad O(0,0)$$

由矩形性质,Q 点坐标：

$$Q=\left(\frac{a^2+b^2}{a}\sec\theta, -\frac{a^2+b^2}{b}\tan\theta\right).$$

利用恒等式 $\sec^2\theta-\tan^2\theta=1$，得：

$$\left(\frac{ax}{a^2+b^2}\right)^2-\left(\frac{by}{a^2+b^2}\right)^2=1 \implies a^2x^2-b^2y^2=(a^2+b^2)^2.$$

$\therefore$ 点 Q 的轨迹方程为

$$\boxed{a^2x^2-b^2y^2=(a^2+b^2)^2}.$$

17. 动点 P 在矩形双曲线

$$xy=a^2$$

上运动，其中 $a>0$ 为常数。过点 P 作双曲线的法线，该法线再次与双曲线相交于点 Q。设 M 为线段 PQ 的中点。

求点 M 的轨迹方程，并写成 $f(x,y)=0$ 的形式。

设点 P 的坐标为

$$P\left(p, \frac{a^2}{p}\right),$$

因为 P 在曲线 $y=\frac{a^2}{x}$ 上。

对 $y=\frac{a^2}{x}$ 求导,

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{a^2}{x^2},$$

所以在点 P 处切线的斜率为

$$-\frac{a^2}{p^2},$$

从而法线的斜率为

$$\frac{p^2}{a^2}$$

法线方程为

$$y-\frac{a^2}{p}=\frac{p^2}{a^2}(x-p)$$

将 $y=\frac{a^2}{x}$ 代入法线方程, 得

$$\frac{a^2}{x}-\frac{a^2}{p}=\frac{p^2}{a^2}(x-p)$$

两边同乘以 a^2xp, 化简得

$$a^4p-a^4x=a^2p^3(x-p)$$

整理为关于 x 的方程:

$$p^3x^2+(a^4-p^4)x-a^4p=0$$

由于 $x=p$ 对应点 P 也是该方程的解, 因而可因式分解为

$$(x-p)(p^3x+a^4)=0$$

故另一交点 Q 的 x 坐标为

$$x=-\frac{a^4}{p^3},$$

相应的

$$y=\frac{a^2}{x}=-\frac{p^3}{a^2}$$

因此

$$Q\left(-\frac{a^4}{p^3},-\frac{p^3}{a^2}\right)$$

点 M 为 PQ 的中点, 其坐标为

$$M\left(\frac{p-\frac{a^4}{p^3}}{2}, \frac{\frac{a^2}{p}-\frac{p^3}{a^2}}{2}\right)=\left(\frac{p^4-a^4}{2p^3}, \frac{a^4-p^4}{2a^2p}\right)$$

设

$$x=\frac{p^4-a^4}{2p^3}, \quad y=\frac{a^4-p^4}{2a^2p}$$

则

$$\frac{x}{y}=-\frac{a^2}{p^2},$$

从而

$$p^2=-\frac{a^2y}{x}$$

由

$$y^2=\frac{(a^4-p^4)^2}{4a^4p^2},$$

代入 $p^2=-\frac{a^2y}{x}$ 并化简, 可得

$$a^2(x^2-y^2)^2+4x^3y^3=0$$

因此, 点 M 的轨迹方程为

$$a^2(x^2-y^2)^2+4x^3y^3=0$$

18. 点 P,Q 为曲线

$$y=\frac{1}{x},\ x\in\mathbb{R},\ x\neq 0$$

上的两个不同点。P,Q 可在曲线上运动, 使得线段 PQ 为曲线在 P 处的法线。曲线在 P,Q 处的切线相交于点 R。

证明点 R 的轨迹方程为

$$(y^2-x^2)^2+4xy=0$$

曲线为

$$y=\frac{1}{x},$$

求导得

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x^2}$$

设

$$P\left(p, \frac{1}{p}\right), \quad Q\left(q, \frac{1}{q}\right), \quad p \neq q$$

弦 PQ 的斜率为

$$\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}{p-q}=\frac{q-p}{pq(p-q)}=-\frac{1}{pq}$$

曲线在 P 处切线斜率为 $-\frac{1}{p^2}$, 故法线斜率为 p^2。由于 PQ 为 P 处的法线, 有

$$\left(-\frac{1}{pq}\right)\left(-\frac{1}{p^2}\right)=-1,$$

从而

$$p^2 q=-1, \quad q=-\frac{1}{p^2}$$

曲线在 P 处的切线方程为

$$y-\frac{1}{p}=-\frac{1}{p^2}(x-p),$$

即

$$y=\frac{2}{p}-\frac{1}{p^2}x$$

同理, 曲线在 Q 处的切线方程为

$$y=\frac{2}{q}-\frac{1}{q^2}x$$

联立两切线方程求交点 R:

$$\frac{2}{p}-\frac{1}{p^2}x=\frac{2}{q}-\frac{1}{q^2}x,$$
$$x\left(\frac{1}{q^2}-\frac{1}{p^2}\right)=\frac{2}{q}-\frac{2}{p}$$

化简得

$$x=\frac{2pq}{p+q}$$

代回求 y:

$$y=\frac{2}{q}-\frac{1}{q^2}\cdot\frac{2pq}{p+q}=\frac{2}{p+q}$$

因此

$$R\left(\frac{2pq}{p+q}, \frac{2}{p+q}\right)$$

由 $q=-\frac{1}{p^2}$,

$$x=\frac{2p\left(-\frac{1}{p^2}\right)}{p-\frac{1}{p^2}}=-\frac{2p}{p^3-1},$$
$$y=\frac{2}{p-\frac{1}{p^2}}=\frac{2p^2}{p^3-1}$$

消去参数 p, 由

$$\frac{y}{x}=-\frac{p}{1},\quad p=-\frac{y}{x},$$

代入并化简, 可得

$$(y^2-x^2)^2+4xy=0$$

因此, 点 R 的轨迹方程为

$$(y^2-x^2)^2+4xy=0$$

19. 一般点

$$P\left(5t,\frac{5}{t}\right),\ t\neq 0$$

在双曲线

$$xy=25$$

上。

(a) 证明该双曲线在点 P 处的法线方程为

$$y=t^2x+\frac{5}{t}-5t^3$$

该法线再次与双曲线相交于点 Q。

(b) 证明点 Q 的坐标为

$$\left(-\frac{5}{t^3},-5t^3\right)$$

(c) 证明线段 PQ 的中点轨迹的笛卡尔方程为

$$4xy+25\left(\frac{y}{x}-\frac{x}{y}\right)^2=0$$

(a) 由

$$xy = 25$$

得

$$y = \frac{25}{x}$$

对 x 求导,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{25}{x^2}$$

在 $x = 5t$ 处,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{25}{(5t)^2} = -\frac{1}{t^2}$$

故法线斜率为 t^2。

点 $P\left(5t, \frac{5}{t}\right)$ 处法线方程为

$$y - \frac{5}{t} = t^2(x - 5t)$$

整理得

$$y = t^2x + \frac{5}{t} - 5t^3$$

(b) 联立

$$xy = 25, \quad y = t^2x + \frac{5}{t} - 5t^3$$

代入得

$$x\left(t^2x + \frac{5}{t} - 5t^3\right) = 25$$

化简得

$$t^2x^2 + \left(\frac{5}{t} - 5t^3\right)x - 25 = 0$$

两边同乘 t,

$$t^3x^2 + (5 - 5t^4)x - 25t = 0$$

由于 $x = 5t$ 为一根, 因式分解得

$$(x - 5t)(t^3x + 5) = 0$$

故另一交点满足

$$x = -\frac{5}{t^3}$$

由 $xy = 25$,

$$y = \frac{25}{x} = -5t^3$$

因此

$$Q\left(-\frac{5}{t^3},-5t^3\right)$$

(c) 设 M 为 PQ 的中点, 则

$$M\left(\frac{5t-\frac{5}{t^3}}{2},\frac{\frac{5}{t}-5t^3}{2}\right)=\left(\frac{5}{2}\left(t-\frac{1}{t^3}\right),\frac{5}{2}\left(\frac{1}{t}-t^3\right)\right)$$

设

$$x=\frac{5}{2}\left(t-\frac{1}{t^3}\right),\quad y=\frac{5}{2}\left(\frac{1}{t}-t^3\right)$$

则

$$\frac{x}{y}=\frac{t-\frac{1}{t^3}}{\frac{1}{t}-t^3}=-\frac{1}{t^2},$$

从而

$$t^2=-\frac{y}{x}$$

又

$$y=\frac{5}{2}\left(\frac{1-t^4}{t}\right)$$

平方得

$$y^2=\frac{25}{4}\frac{(1-t^4)^2}{t^2}$$

整理得

$$4y^2t^2=25(1-t^4)^2$$

代入 $t^2=-\frac{y}{x}$,

$$-4xy^3=25\frac{(x^2-y^2)^2}{x^3}$$

两边同乘 x^3,

$$-4x^3y^3=25(x^2-y^2)^2$$

移项得

$$4x^3y^3+25(x^2-y^2)^2=0$$

两边同除以 x^2y^2, 得

$$4xy+25\left(\frac{y}{x}-\frac{x}{y}\right)^2=0$$

20. 曲线由参数方程给出：

$$x = \sin^2 t, \quad y = \sin t \cos t + \cos t, \quad 0 \leqslant t < 2\pi.$$

证明其直角坐标方程为：

$$(x^2 + y^2 - 1)^2 = 4x(1 - x)^2.$$

将 y 写为

$$y = \cos t(\sin t + 1) \implies y^2 = \cos^2 t(\sin t + 1)^2.$$

利用恒等式 $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$, 并令 $x = \sin^2 t$:

$$y^2 = (1 - x)(\sin^2 t + 2\sin t + 1) = (1 - x)(x + 2\sin t + 1).$$

整理得到：

$$\frac{y^2}{1 - x} = x + 2\sin t + 1 \implies \frac{y^2}{1 - x} - (1 + x) = 2\sin t.$$

两边平方：

$$\left(\frac{y^2 - (1 - x^2)}{1 - x}\right)^2 = 4\sin^2 t.$$

由 $x = \sin^2 t$ 可得 $4\sin^2 t = 4x$, 于是：

$$\frac{(y^2 + x^2 - 1)^2}{(1 - x)^2} = 4x \implies (y^2 + x^2 - 1)^2 = 4x(1 - x)^2.$$

21. 曲线 C 由参数方程给出：

$$x = \tan\theta - \sec\theta, \quad y = \cot\theta - \csc\theta, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

证明：

a) C 的直角坐标方程为

$$(x^2 - 1)(y^2 - 1) = 4xy,$$

b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 - y^2}{2x}$。

(a) 消去 θ

从 $x = \tan\theta - \sec\theta$ 开始：

$$\begin{aligned} x^2 &= (\tan\theta - \sec\theta)^2 \\ &= \tan^2\theta - 2\tan\theta\sec\theta + \sec^2\theta \\ &= \tan^2\theta - 2\tan\theta\sec\theta + (1+\tan^2\theta) \\ &= 2\tan^2\theta - 2\tan\theta\sec\theta + 1 \\ &= 2\tan\theta(\tan\theta - \sec\theta) + 1 \\ &= 2\tan\theta\cdot x + 1 \end{aligned}$$

所以

$$\tan\theta = \frac{x^2-1}{2x}.$$

类似地，由 $y = \cot\theta - \csc\theta$ 和恒等式 $1+\cot^2\theta = \csc^2\theta$ 得：

$$\cot\theta = \frac{y^2-1}{2y}.$$

于是

$$\tan\theta\cot\theta = \frac{x^2-1}{2x}\cdot\frac{y^2-1}{2y} = 1 \implies (x^2-1)(y^2-1) = 4xy.$$

(b) 求导

参数求导：

$$\frac{dx}{d\theta} = \sec^2\theta - \sec\theta\tan\theta = \sec\theta(\sec\theta - \tan\theta), \quad \frac{dy}{d\theta} = -\csc^2\theta + \csc\theta\cot\theta = \csc\theta(\cot\theta - \csc\theta).$$

所以

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{\csc\theta(\cot\theta - \csc\theta)}{\sec\theta(\sec\theta - \tan\theta)}.$$

将 $\csc\theta/\sec\theta = \cos\theta/\sin\theta = \cot\theta$，并注意 $\frac{\cot\theta-\csc\theta}{\sec\theta-\tan\theta} = -\frac{y}{x}$，得到

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cot\theta y}{x} = -\frac{y}{x}\cdot\frac{y^2-1}{2y} = \frac{1-y^2}{2x}.$$

22. 曲线由参数方程给出：

$$x = \sin\theta, \quad y = \theta\cos\theta, \quad -\pi < \theta < \pi.$$

求曲线在 $\theta = -\frac{\pi}{4}$ 和 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 处的切线，它们平行，距离为 d。

证明：

$$d = \sqrt{\frac{8\pi^2 - 32\pi + 32}{\pi^2 - 8\pi + 32}}.$$

曲线的导数：

$$\frac{dx}{d\theta} = \cos\theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = \cos\theta - \theta\sin\theta \implies \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = 1 - \theta\tan\theta.$$

在 $\theta = -\frac{\pi}{4}$ 和 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时：

$$x = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y = \mp\frac{\pi}{4\sqrt{2}}, \quad \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

切线方程：

$$y + \frac{\pi}{4\sqrt{2}} = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad y - \frac{\pi}{4\sqrt{2}} = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

两切线在 $x = 0$ 时的纵坐标：

$$y_1 = \frac{\sqrt{2}(2-\pi)}{4}, \quad y_2 = \frac{\sqrt{2}(\pi-2)}{4}.$$

纵坐标差：

$$|y_2 - y_1| = \frac{\sqrt{2}(\pi-2)}{2}.$$

切线梯度 $m = 1 - \frac{\pi}{4} = \frac{4-\pi}{4}$，与水平的夹角 θ 满足

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{4}{\sqrt{(4-\pi)^2 + 16}} = \frac{4}{\sqrt{\pi^2 - 8\pi + 32}}.$$

切线间距离：

$$d = |y_2 - y_1|\cos\theta = \frac{\sqrt{2}(\pi-2)}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{\pi^2 - 8\pi + 32}} = \sqrt{\frac{8\pi^2 - 32\pi + 32}{\pi^2 - 8\pi + 32}}.$$

23. 曲线 C 的极坐标方程为

$$r = \tan\theta, \quad 0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}.$$

求曲线 C 的直角坐标方程，写成 $y = f(x)$ 的形式。

由已知

$$r = \tan\theta.$$

两边平方得

$$r^2 = \tan^2\theta.$$

利用 $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, 有

$$r^2 = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta},$$

即

$$r^2\cos^2\theta = \sin^2\theta.$$

注意到 $r\cos\theta = x$, 于是

$$x^2 = \sin^2\theta.$$

又因为

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta,$$

所以

$$\cos^2\theta = 1 - x^2.$$

从而

$$\sec^2\theta = \frac{1}{1-x^2}.$$

由恒等式 $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$, 得

$$\tan^2\theta = \frac{1}{1-x^2} - 1 = \frac{x^2}{1-x^2}.$$

由于 $r = \tan\theta$, 于是

$$r^2 = \frac{x^2}{1-x^2}.$$

又有 $r^2 = x^2 + y^2$, 因此

$$x^2 + y^2 = \frac{x^2}{1-x^2}.$$

化简得

$$y^2 = \frac{x^4}{1-x^2}.$$

因为 $0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}$, 对应 $y \geqslant 0$, 故

$$y = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}},$$

其中 $0 \leqslant x < 1$。

24. 曲线 C_1 和 C_2 的极坐标方程分别为

$$C_1:\ r=2\cos\theta-\sin\theta,\quad 0<\theta\leqslant\frac{\pi}{3},$$

$$C_2:\ r=\sqrt{2+\sin\theta},\quad 0\leqslant\theta<2\pi.$$

点 P 在 C_1 上, 且 P 点处的切线与极轴平行。

(a) 证明在点 P 处有

$$\tan 2\theta=2.$$

(b) 进一步证明点 P 到原点 O 的精确距离为

$$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}.$$

点 Q 为 C_1 与 C_2 的交点。

(c) 求点 Q 处对应的 θ 值。

(a) 对于极坐标曲线, 有

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta.$$

切线与极轴平行等价于

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(r\sin\theta)=0.$$

由 $r=2\cos\theta-\sin\theta$, 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\big((2\cos\theta-\sin\theta)\sin\theta\big)=0.$$

化简括号内表达式,

$$(2\cos\theta-\sin\theta)\sin\theta=2\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta=\sin 2\theta-\sin^2\theta.$$

对 θ 求导得

$$2\cos 2\theta-2\sin\theta\cos\theta=0.$$

注意到 $2\sin\theta\cos\theta=\sin 2\theta$, 于是

$$2\cos 2\theta-\sin 2\theta=0,$$

从而

$$\tan 2\theta = 2.$$

(b) 由 $\tan 2\theta = 2$, 利用公式

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta},$$

设 $T = \tan\theta$, 则

$$\frac{2T}{1-T^2} = 2.$$

整理得

$$2T = 2(1-T^2),$$

即

$$T^2 + T - 1 = 0.$$

解得

$$T = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

由于 $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$, 取

$$\tan\theta = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

由此可得

$$\sin\theta = \frac{-1+\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}, \quad \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}.$$

代入 $r = 2\cos\theta - \sin\theta$, 得到

$$r_P = \frac{5-\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}.$$

化简得

$$r_P = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}.$$

(c) 点 Q 为两曲线交点, 满足

$$2\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2+\sin\theta}.$$

两边平方并整理, 可得

$$\cos\theta - \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

利用恒等式

$$\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right),$$

于是

$$\sqrt{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

即

$$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}.$$

在 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3}$ 内, 解得

$$\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3},$$

因此

$$\theta=\frac{\pi}{12}.$$

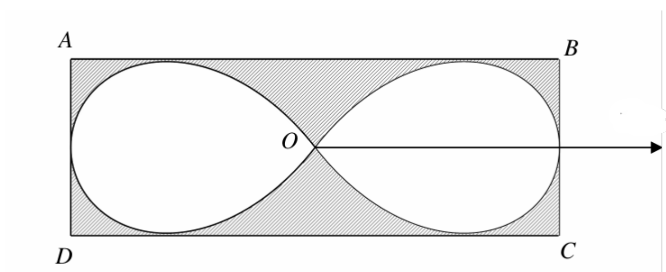
25. 如图, 曲线的极坐标方程为

$$r^2=\cos 2\theta,\quad \theta\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{7\pi}{4},2\pi\right].$$

矩形 $ABCD$ 包围该曲线, 其中 AB,CD 为与极轴平行的切线,AD,BC 为与极轴垂直的切线。

证明曲线与矩形 $ABCD$ 之间所围成的总面积为

$$\sqrt{2}-1.$$



首先确定矩形的边界。

由

$$r^2=\cos 2\theta$$

可知当 $\cos 2\theta=1$ 时,

$$r^2=1,\quad r=1.$$

此时对应竖直切线, 因此矩形在水平方向上的半宽为 1, 总宽为 2。

接着求与极轴平行的切线，即水平切线。极坐标曲线满足

$$y = r\sin\theta,$$

切线与极轴平行当且仅当

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0,$$

等价于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(r\sin\theta) = 0.$$

由 $r = \sqrt{\cos 2\theta}$，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta\right) = 0.$$

求导得

$$-\frac{\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\sin\theta + \sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta = 0.$$

两边同乘 $\sqrt{\cos 2\theta}$，得到

$$\sin 2\theta\sin\theta - \cos 2\theta\cos\theta = 0.$$

利用恒等式化简可得

$$\cos 2\theta = \frac{1}{2}.$$

于是

$$2\theta = \frac{\pi}{3}, \quad \theta = \frac{\pi}{6}.$$

此时

$$r^2 = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad r = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

对应的纵坐标为

$$y = r\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

因此矩形在竖直方向上的半高为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，总高为 $\sqrt{2}$。

所以矩形 $ABCD$ 的面积为

$$2 \times \sqrt{2} = \sqrt{2}.$$

接着计算曲线所围成的面积。曲线关于坐标轴具有四分之一对称性，故

$$\text{曲线面积} = 4\int_0^{\pi/4}\frac{1}{2}r^2\,\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\pi/4}\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

计算积分，

$$2\int_0^{\pi/4}\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta = 2\left[\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/4} = \sin\frac{\pi}{2} - 0 = 1.$$

因此矩形与曲线之间所围成的面积为
$$\sqrt{2}-1.$$

26. 如图, 两条封闭曲线的极坐标方程分别为

$$C_1: \ r=a(1+\sin\theta), \quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,$$

$$C_2: \ r=a(1-\sin\theta), \quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,$$

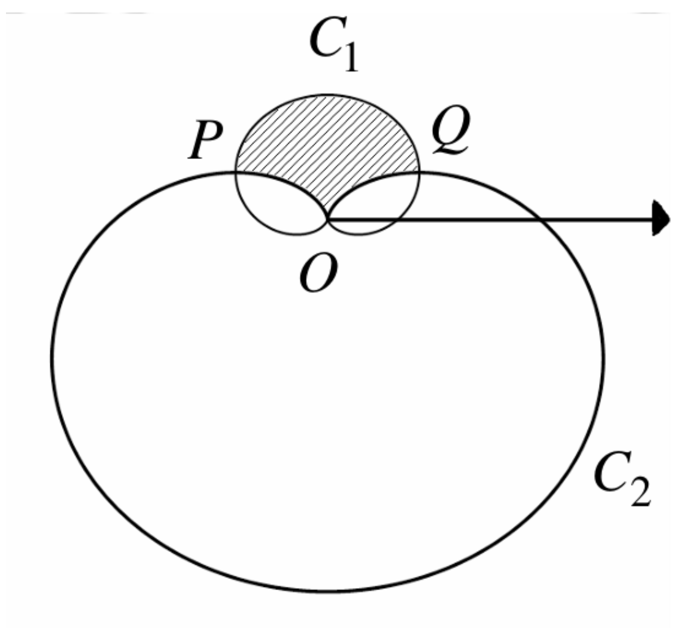
它们在极点 O 以及点 P,Q 处相交。

(a) 求点 P,Q 的极坐标。

(b) 证明线段 PQ 的长度为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}a$。

(c) 已知 $PQ=\frac{3}{2}a$, 证明阴影部分的面积为

$$3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi.$$



(a) 交点 P,Q 满足
$$a(1+\sin\theta)=a(1-\sin\theta).$$
消去 a, 得
$$1+\sin\theta=1-\sin\theta,$$

从而

$$\sin\theta = \frac{1}{2}.$$

在 $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ 内,

$$\theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}.$$

此时

$$r = a\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3a}{2}.$$

因此

$$Q\left(\frac{3a}{2}, \frac{\pi}{6}\right), \quad P\left(\frac{3a}{2}, \frac{5\pi}{6}\right).$$

(b) 由对称性, 设 M 为 PQ 的中点, 则

$$|PQ| = 2|MQ|.$$

在极坐标中,

$$|MQ| = \frac{3a}{2}\sin\frac{\pi}{3}.$$

于是

$$|PQ| = 2 \times \frac{3a}{2}\sin\frac{\pi}{3} = 3a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}a.$$

(c) 阴影区域由所有在 C_1 内且在 C_2 外的点组成。利用关于直线 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 的对称性, 只需计算右半部分再乘以 2。

当 $\theta \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, 区域由 C_1 给出; 当 $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ 时, 区域由 C_2 给出。

因此面积为

$$2\left[\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1}{2}\big(a(1+\sin\theta)\big)^2 \,\mathrm{d}\theta - \int_0^{\pi/6} \frac{1}{2}\big(a(1-\sin\theta)\big)^2 \,\mathrm{d}\theta\right].$$

化简得

$$a^2\left[\int_{\pi/6}^{\pi/2} (1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta)\,\mathrm{d}\theta - \int_0^{\pi/6} (1 - 2\sin\theta + \sin^2\theta)\,\mathrm{d}\theta\right].$$

计算积分并整理, 可得

$$a^2\left(3\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi\right).$$

又已知 $PQ = \frac{3}{2}a$, 代入可得最终阴影面积为

$$3\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi.$$

27. 如图, 两条封闭曲线 C_1 与 C_2 的极坐标方程分别为

$$C_1:\ r = 3 + \cos\theta, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi,$$

$$C_2:\ r = 5 - 3\cos\theta, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi.$$

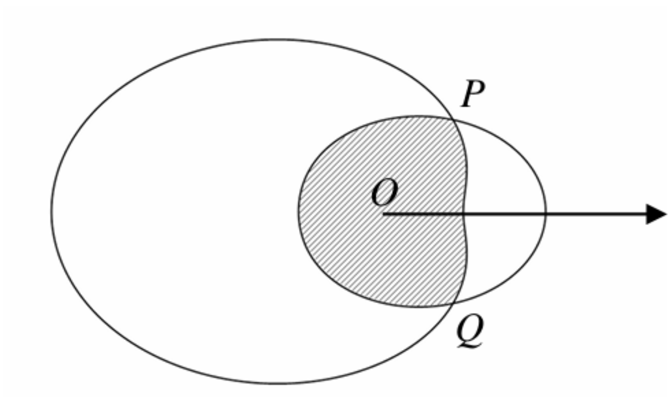
两曲线相交于两点 P, Q。

(a) 求点 P, Q 的极坐标。

设阴影区域 R 为同时位于 C_1 与 C_2 内部的所有点所组成的有限区域。

(b) 证明区域 R 的面积为

$$\frac{1}{6}(97\pi - 102\sqrt{3}).$$



(a) 交点 P, Q 满足

$$3 + \cos\theta = 5 - 3\cos\theta.$$

整理得

$$4\cos\theta = 2,$$

即

$$\cos\theta = \frac{1}{2}.$$

在 $0 \leqslant \theta < 2\pi$ 内,

$$\theta = \frac{\pi}{3},\ \frac{5\pi}{3}.$$

将其代入 $r = 3 + \cos\theta$, 得

$$r = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}.$$

因此

$$P\left(\frac{7}{2}, \frac{\pi}{3}\right), \quad Q\left(\frac{7}{2}, \frac{5\pi}{3}\right).$$

(b) 阴影区域关于极轴对称，只需计算上半部分再乘以 2。

当 $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{3}$ 时，区域由曲线 C_2 给出；当 $\frac{\pi}{3} \leqslant \theta \leqslant \pi$ 时，区域由曲线 C_1 给出。

设

$$A_1 = \int_0^{\pi/3} \frac{1}{2}(5 - 3\cos\theta)^2 \, \mathrm{d}\theta,$$

$$A_2 = \int_{\pi/3}^{\pi} \frac{1}{2}(3 + \cos\theta)^2 \, \mathrm{d}\theta.$$

先算 A_1，

$$A_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} \left(25 - 30\cos\theta + 9\cos^2\theta\right) \mathrm{d}\theta.$$

利用

$$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2},$$

得

$$A_1 = \int_0^{\pi/3} \left(\frac{59}{4} - 15\cos\theta + \frac{9}{4}\cos 2\theta\right) \mathrm{d}\theta.$$

积分后

$$A_1 = \left[\frac{59}{4}\theta - 15\sin\theta + \frac{9}{8}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/3} = \frac{59\pi}{12} - 4\sqrt{3}.$$

再算 A_2，

$$A_2 = \frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{\pi} \left(9 + 6\cos\theta + \cos^2\theta\right) \mathrm{d}\theta.$$

同样化简得

$$A_2 = \int_{\pi/3}^{\pi} \left(\frac{19}{4} + 3\cos\theta + \frac{1}{4}\cos 2\theta\right) \mathrm{d}\theta.$$

积分得

$$A_2 = \left[\frac{19}{4}\theta + 3\sin\theta + \frac{1}{8}\sin 2\theta\right]_{\pi/3}^{\pi} = \frac{19\pi}{6} - \frac{25\sqrt{3}}{8}.$$

因此阴影区域的总面积为

$$2(A_1 + A_2) = 2\left(\frac{59\pi}{12} - 4\sqrt{3} + \frac{19\pi}{6} - \frac{25\sqrt{3}}{8}\right).$$

化简得

$$\frac{1}{6}(97\pi - 102\sqrt{3}),$$

即为所求。

28. 曲线的极坐标方程为

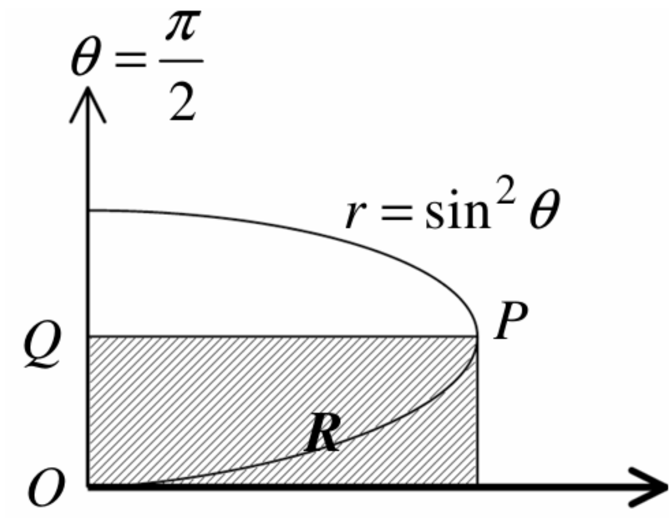
$$r = \sin\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

点 P 在曲线上，且曲线在 P 处的切线与极轴垂直。

(a) 求点 P 的极坐标。

点 Q 在射线 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 上，使得 PQ 与极轴平行。由曲线及线段 PQ, OQ 所围成的有限区域记为 R。

(b) 求区域 R 的面积，结果用精确的最简形式表示。



(a) 极坐标下

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

切线与极轴垂直等价于

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = 0.$$

由 $r = \sin\theta$，有

$$x = \sin\theta\cos\theta.$$

对 θ 求导，

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta.$$

令其为零，得

$$\cos 2\theta = 0.$$

在 $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ 内，

$$2\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \theta = \frac{\pi}{4}.$$

于是

$$r=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

故

$$P\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\pi}{4}\right).$$

(b) 先确定点 Q。点 Q 在 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 上，且 PQ 与极轴平行，因此 P 与 Q 的纵坐标相同。由

$$y_P=r_P\sin\theta_P=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2},$$

而在 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 上有 $y=r$，故

$$Q\left(\frac{1}{2},\frac{\pi}{2}\right).$$

区域 R 可视为扇形 OPP' 与三角形 OPQ 的差，其中 P' 为 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 与曲线的交点。

扇形面积为

$$\int_0^{\pi/4}\frac{1}{2}r^2\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

利用

$$\sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2},$$

得

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{4}\int_0^{\pi/4}(1-\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{4}\left[\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/4}=\frac{\pi}{16}-\frac{1}{8}.$$

三角形 OPQ 的面积为

$$\frac{1}{2}\times OQ\times x_P=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{8}.$$

因此区域 R 的面积为

$$\left(\frac{\pi}{16}-\frac{1}{8}\right)-\frac{1}{8}=\frac{\pi}{16}-\frac{1}{4}.$$

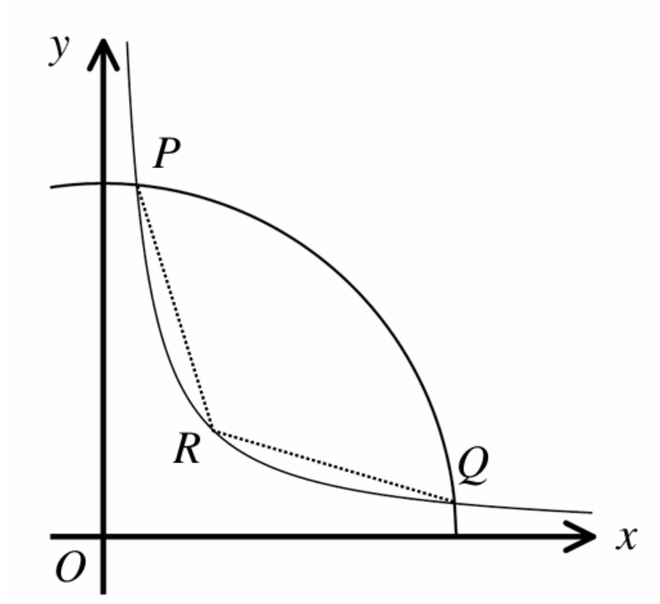
29. 如图，双曲线与圆的直角坐标方程分别为

$$y=\frac{6}{x},\ x>0\quad 及\quad x^2+y^2=24,\ x>0,\ y>0.$$

点 P,Q 为双曲线与圆的交点，点 R 在双曲线上，且 OR 的距离最小。

(a) 求 P,Q,R 的极坐标。

(b) 计算 $\angle PRQ$ 的大小, 结果用弧度表示, 并保留三位小数。



(a) 先将双曲线写成极坐标形式。由

$$y = \frac{6}{x}$$

得

$$xy = 6.$$

代入 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$, 有

$$(r\cos\theta)(r\sin\theta) = 6,$$

即

$$r^2\sin\theta\cos\theta = 6.$$

利用 $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$, 得到

$$r^2 = \frac{12}{\sin 2\theta}.$$

圆的方程为

$$x^2 + y^2 = 24,$$

在极坐标下即

$$r^2 = 24.$$

联立得

$$24 = \frac{12}{\sin 2\theta},$$

从而

$$\sin 2\theta = \frac{1}{2}.$$

在第一象限内,

$$2\theta = \frac{\pi}{6}, \ \frac{5\pi}{6},$$

故

$$\theta = \frac{\pi}{12}, \ \frac{5\pi}{12}.$$

此时

$$r = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}.$$

因此

$$Q\left(2\sqrt{6}, \frac{\pi}{12}\right), \quad P\left(2\sqrt{6}, \frac{5\pi}{12}\right).$$

再求点 R。由

$$r^2 = \frac{12}{\sin 2\theta},$$

可知当 $\sin 2\theta$ 取最大值 1 时,r^2 最小。于是

$$2\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \theta = \frac{\pi}{4}.$$

此时

$$r^2 = 12, \quad r = 2\sqrt{3}.$$

所以

$$R\left(2\sqrt{3}, \frac{\pi}{4}\right).$$

(b) 先求有关中心角。有

$$\angle ROQ = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6},$$
$$\angle POR = \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6}.$$

在三角形 ORQ 中, 由余弦定理,

$$RQ^2 = OR^2 + OQ^2 - 2 \cdot OR \cdot OQ \cos \frac{\pi}{6}.$$

代入

$$OR^2 = 12, \quad OQ^2 = 24,$$

得

$$RQ^2 = 36 - 12\sqrt{6},$$

即

$$RQ=\sqrt{36-12\sqrt{6}}.$$

在三角形 PRQ 中, 利用正弦定理,

$$\frac{PR}{\sin\angle PRQ}=\frac{RQ}{\sin\angle ROP}.$$

注意到

$$PR=OQ=2\sqrt{6},\quad \angle ROP=\frac{\pi}{6},$$

于是

$$\sin\angle PRQ=\frac{2\sqrt{6}\cdot\sin(\pi/6)}{\sqrt{36-12\sqrt{6}}}\approx 0.495.$$

由此

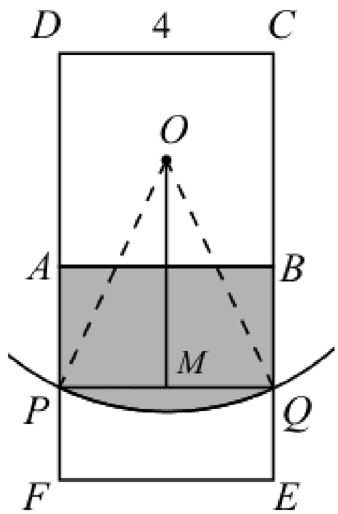
$$\angle PRQ\approx 2.526.$$

因此

$$\angle PRQ\approx 2.526 \text{ 弧度}.$$

立体几何、空间向量

1. 一个立方体的棱长为 4。一根长为 5 的绳子的一端固定在立方体上表面的中心。求绳子另一端能接触到的立方体表面的面积。



设立方体顶面为正方形 $ABCD$, 中心为 O, 则 O 到顶点的距离为 $\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}$。绳长 $5>\sqrt{8}$, 所以绳端可到达整个顶面面积 16。

绳子无法到达底面, 因为沿表面的最短路径长度为 $6>5$。每个侧面能到达的面积相同, 设为 a, 总可达面积为 $A=16+4a$。

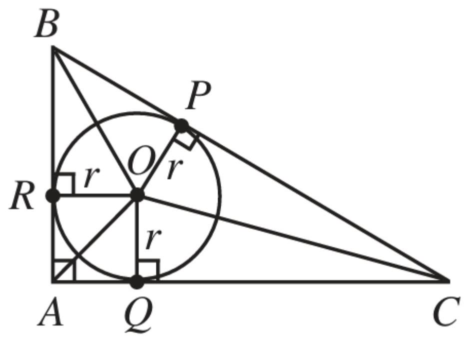
考虑某一侧面正方形 $ABEF$。以 O 为圆心, 半径 5, 在侧面上形成弧 $\overset{\frown}{PQ}$, 中点为 M, 则 $PM=\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21}$, 故绳尾能接触到的面积为

$$\begin{aligned}
&[\text{矩形 } ABQP]+[\text{扇形 } POQ]-[\triangle OPQ]\\
&=4(\sqrt{21}-2)+25\arcsin\frac{2}{5}-2\sqrt{21}\\
&=2\sqrt{21}-8+25\arcsin\frac{2}{5}
\end{aligned}$$

总面积为

$$16+8\sqrt{21}-32+100\arcsin\frac{2}{5}=8\sqrt{21}-16+100\arcsin\frac{2}{5}\approx 61.81$$

2. 边长为 9, 12, 15 的直角三角形框架水平放置, 一个半径为 5 的球卡在其中并与三边均相切。求球体高出三角形平面的高度。



考虑球在三角形所在平面的截面。球体的截面为 $\triangle ABC$ 的内切圆。设圆心为 O, 半径为 r, 连接 O 到 BC, CA, AB 上的切点 P, Q, R。$\triangle ABC$ 面积为

$$\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12 = \frac{1}{2} r(9+12+15) \Rightarrow r = 3$$

设球心为 O', 则 OO' 垂直于三角形平面, 记 $OO' = h$。任取圆周上一点, 与 O' 构成直角三角形。由毕氏定理,

$$h = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

因此球心在平面以上 4 个单位, 而球的半径为 5, 所以球顶部高出平面的高度为

$$h + 5 = 9$$

3. 空间中一个立方体的三个顶点坐标为 $A(3,4,1), B(5,2,9), C(1,6,5)$。求立方体的中心坐标。

观察

$$AB = \sqrt{(5-3)^2 + (2-4)^2 + (9-1)^2} = \sqrt{72},$$
$$AC = \sqrt{(1-3)^2 + (6-4)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{24},$$
$$BC = \sqrt{(1-5)^2 + (6-2)^2 + (5-9)^2} = \sqrt{48}$$

此时发现

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

故可知 AB 是经过立方体中心的对角线，因此立方体中心即为 AB 的中点

$$O=\left(\frac{3+5}{2},\frac{4+2}{2},\frac{1+9}{2}\right)=(4,3,5)$$

4. 求内接在单位立方体中的正方形的最大面积，其中正方形的每个顶点都在立方体的边上。

设立方体的顶点坐标为 $(0,0,0),(0,0,1),\ldots,(1,1,1)$。由对称性，最大内接正方形的顶点取

$$(x,0,0),\quad (1,0,1-x),\quad (1-x,1,1),\quad (0,1,x)$$

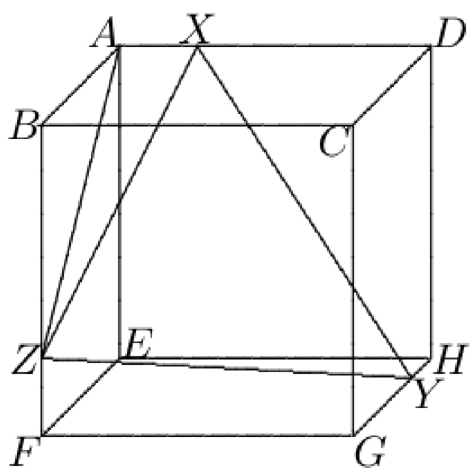
其中 $0<x<1$。两条相邻边的平方长度相等，解得

$$2x^2+1=2(1-x)^2 \implies x=\frac{1}{4}$$

此时最大正方形的面积为

$$||(x,0,0)-(1,0,1-x)||^2=\frac{9}{8}$$

5. 已知一边长为 4、顶面为 $ABCD$、底面为 $EFGH$ 的立方体，且 A 在 E 正上方，依此类推。若点 X,Y,Z 在 AD,HG,BF 上使得 $AX,HY,FZ=1$，求 $\triangle XYZ$ 的面积。



在 $\triangle AXZ$ 中，由毕氏定理，

$$AZ=\sqrt{3^2+4^2}=5$$

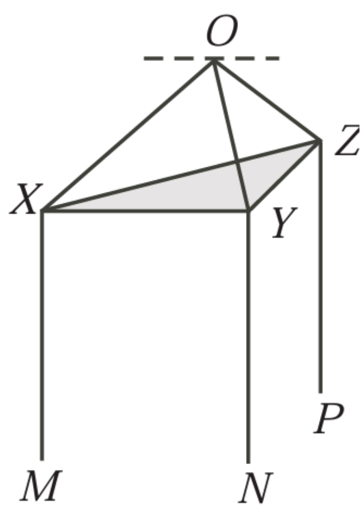
在 $\triangle ABZ$ 中, 由毕氏定理,

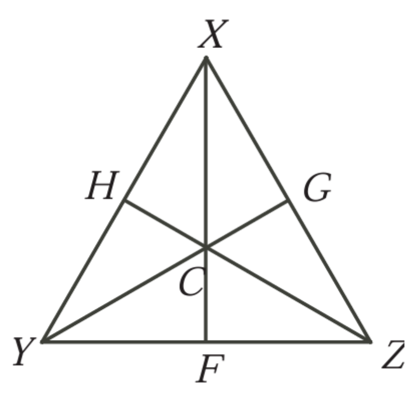
$$XZ = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$$

$\triangle XYZ$ 为等边三角形, 因此面积为

$$[\triangle XYZ] = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 26 = \frac{13\sqrt{3}}{2}$$

6. 从天花板点 O 悬挂三根长 100 cm 的导线 OXM, OYN, OZP, 依次穿过边长为 60 cm 的等边三角形 XYZ 的顶点, 末端挂有灯泡。三角形平面与天花板平行, 三个灯泡距天花板均为 90 cm。求三角形到天花板的垂直距离。





设 $OX = OY = OZ = x$。由于导线全长为 100, 则 $XM = YN = ZP = 100 - x$。又灯泡距天花板为 90, 所以木质三角形至天花板的距离为

$$90 - (100 - x) = x - 10$$

设 C 为 $\triangle XYZ$ 的中心, 由对称性 O 在 C 正上方, 且 $OC = x - 10$。在 $\triangle OXC$ 中, 由毕氏定理,

$$x^2 = (x-10)^2 + \left(\frac{30}{\cos 30^\circ}\right)^2$$

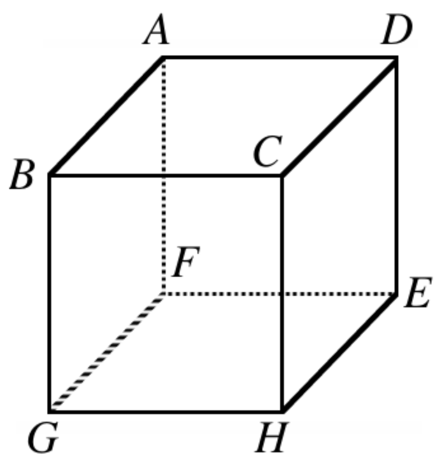
解得

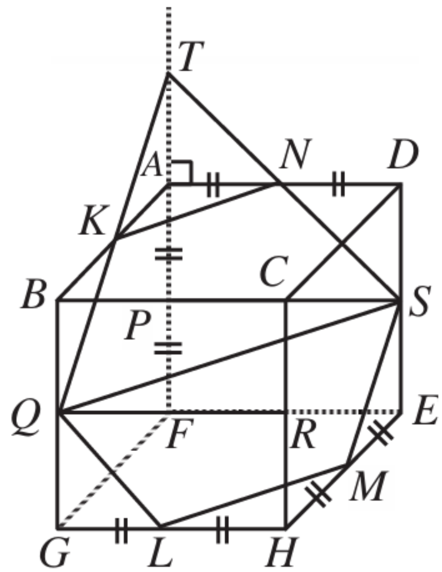
$$x = 65$$

因此木质三角形到天花板的高度为

$$x - 10 = 55 \text{ cm}.$$

7. 立方体被两平面分成四块: 一平面平行于面 $ABCD$ 且过棱 BG 中点, 另一平面过棱 AB, AD, GH, HE 的中点。求最小块与最大块的体积比。





不失一般性，设立方体边长为 2。平面 $PQRS$ 经过 BG 的中点并平行于面 $ABCD$，其中 P,Q,R,S 为 AF,BG,CH,DE 的中点。另一个平面经过 K,L,M,N，即 AB,GH,HE,AD 的中点。延长 QK 和 SN 相交于点 T，注意到 $\triangle TAN \backsim \triangle TPS$ (AAA)，于是

$$\frac{TA}{TP}=\frac{AN}{PS}\Rightarrow TA=1$$

于是

$$\begin{aligned}V_{小}=[AKN-PQS]&=[\text{四面体 }T-PQS]-[\text{四面体 }T-AKN]\\&=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\right)=\frac{7}{6}\end{aligned}$$

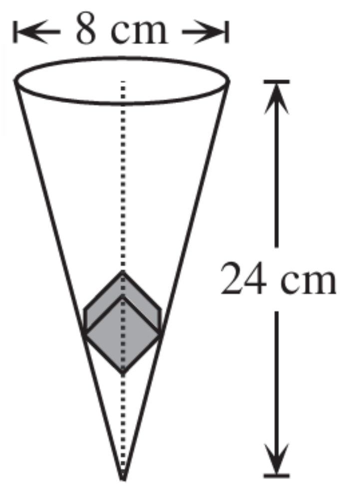
且

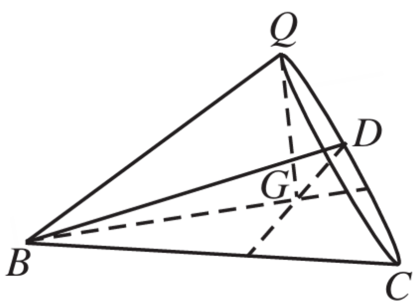
$$V_{大}=[ABCD-PQRS]-[AKN-PQS]=2\cdot 2\cdot 1-\frac{7}{6}=\frac{17}{6}$$

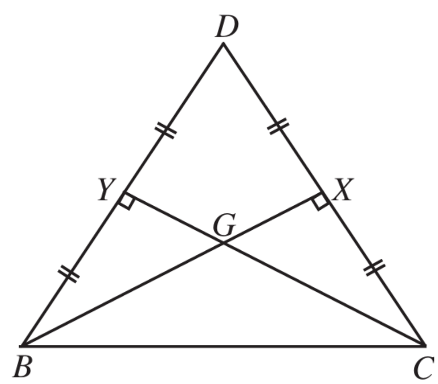
故所求体积之比为

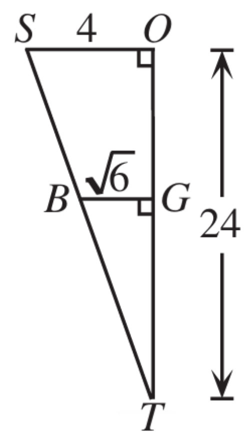
$$\frac{V_{小}}{V_{大}}=\frac{7}{17}$$

8. 边长为 3 的立方体置于底面直径为 8、高为 24 的圆锥内，立方体的体对角线与圆锥轴线重合。求圆锥顶点到立方体最近顶点的距离。









如图, 设点 A 为立方体最底端的顶点, 顶点 B, C, D 在圆锥内表面上且由对称性形成等边三角形, 点 Q 为立方体最顶端的顶点。BQ 是立方体的面对角线,G 为 BCD 的重心, 且 QGA 在圆锥轴线上。

所求距离为圆锥顶点 T 到平面 BCD 的距离, 减去 A 到平面 BCD 的距离。

等四面体 $O-BCD$ 边长为

$$BQ = BC = BD = CD = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2},$$

在 $\triangle BCD$ 中,

$$BG = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{2}\cos 30^\circ = \sqrt{6}$$

设 O 为圆锥底面圆心,S 为底面上一点。由 $\triangle TGB \backsim \triangle TOS$ (AAA), 得

$$\frac{TG}{TO} = \frac{GB}{OS} \Rightarrow TG = 24 \cdot \frac{\sqrt{6}}{4} = 6\sqrt{6}$$

由毕氏定理, 立方体空间对角线为

$$AQ = \sqrt{3^2 + 3^2 + 3^2} = 3\sqrt{3}$$

在 $\triangle BGQ$ 中, 由毕氏定理,

$$QG = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 - (\sqrt{6})^2} = 2\sqrt{3}$$

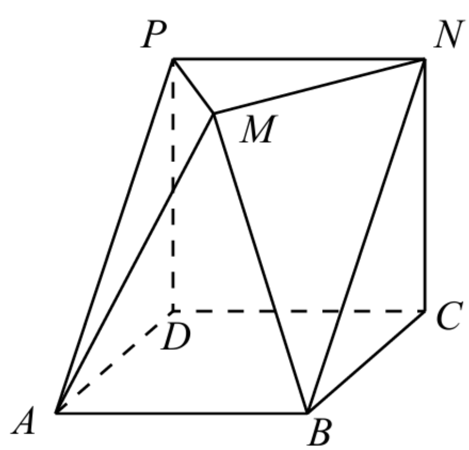
因此

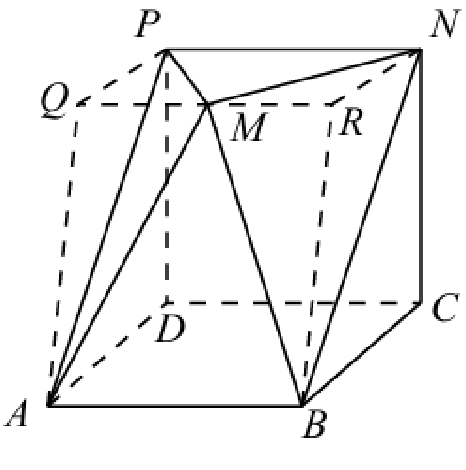
$$AG = AQ - QG = \sqrt{3}$$

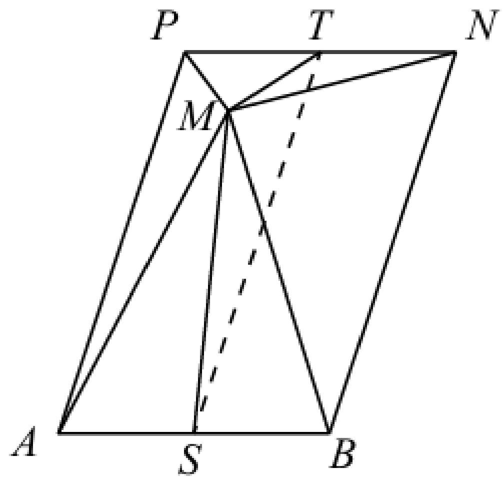
故所求距离为

$$TA = TG - AG = 6\sqrt{6} - \sqrt{3}$$

9. 已知 $ABCD$ 和 $PNCD$ 都是边长为 2 的正方形, 且这两个正方形互相垂直 (它们共享边 CD)。在 AB 一侧取点 M, 使得平面 $\triangle PMN$ 平行于平面 $ABCD$, 且 $\angle PMN = 90°, PM = MN$。求凸多面体 $PMN - ABCD$ 的体积。





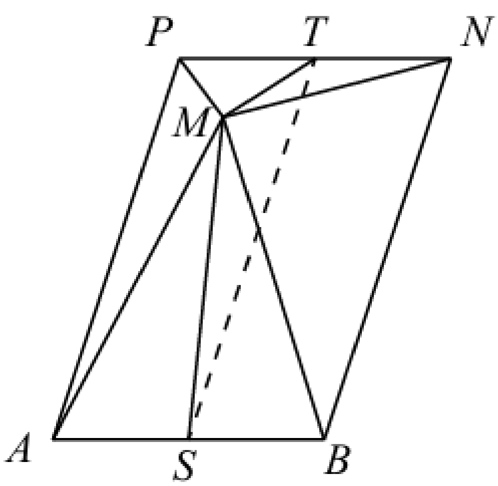


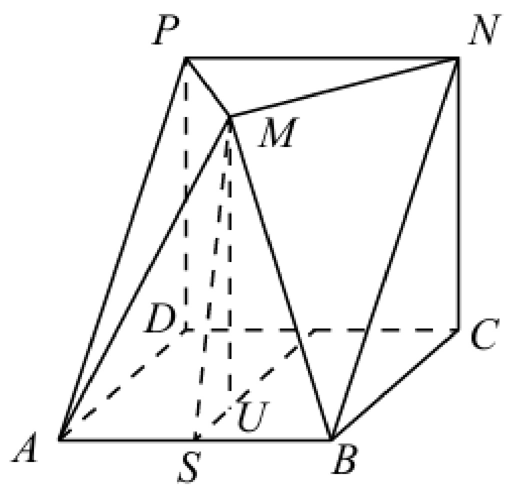
过 M 作一条与 PN 平行的线分别与平面 PAD, NBC 相交于 Q, R, 取 T 为 PN 的中点, 由题意可知 $\triangle MTN$ 为直角等腰三角形, 故

$$NR = MT = 1$$

考虑多面体 $PQRN - ABCD$ 以及两个全等棱锥 $PMQ - A, NMR - B$, 于是

$$\begin{aligned}[PMN - ABCD] &= [PQRN - ABCD] - 2 \cdot [PMQ - A] \\ &= \frac{1}{2}(1+2) \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{16}{3}\end{aligned}$$





沿平面 $ABNP$ 分割凸多面体 $PMN-ABCD$, 考虑棱柱 $PN-ABCD$ 及角锥 $M-ABNP$, 在 $\triangle BCN$ 中, 由毕氏定理,

$$N = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$$

取 S,T 为 AB,PN 中点, 由于 $\triangle MTN$ 为直角等腰三角形, 故 $US = BC - MT = 1$, 在 $\triangle MUS$ 中, 由毕氏定理,

$$MS = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$$

在 $\triangle MTS$ 中, 由余弦定理,

$$(\sqrt{5})^2 = 1^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2\cdot 1\cdot 2\sqrt{2}\cdot\cos\angle MTS \Rightarrow \angle MTS = 45^\circ$$

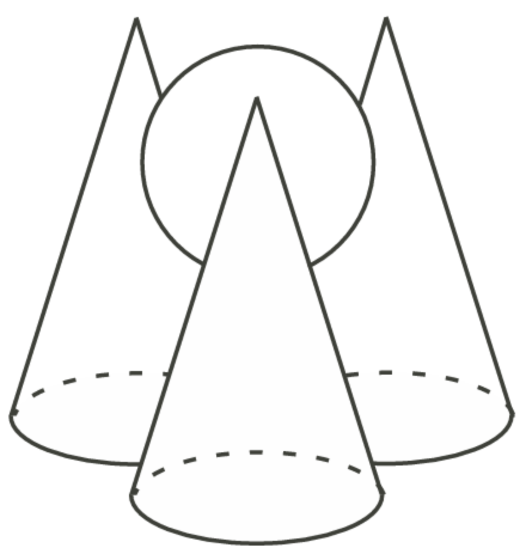
设顶点 M 到底面的垂高为 h, 则

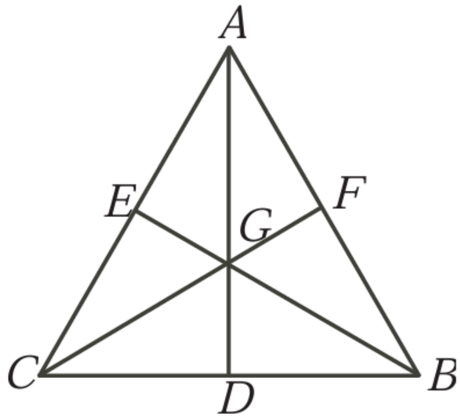
$$h = MT\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

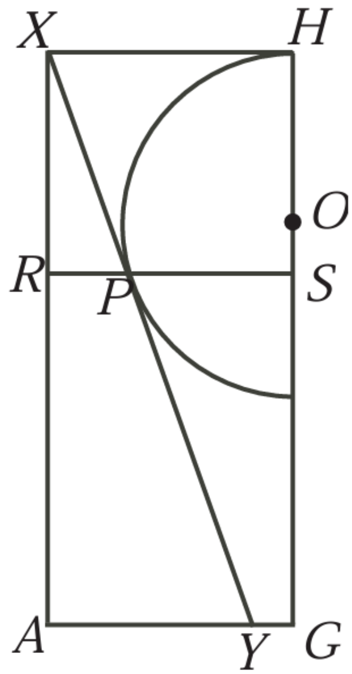
故凸多面体 $PMN-ABCD$ 体积为

$$\begin{aligned}[PMN-ABCD] &= [PN-ABCD] + [M-ABNP]\\ &= \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot 2 + \frac{1}{3}\cdot 2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{16}{3}\end{aligned}$$

10. 三个完全相同的圆锥, 底面半径为 50, 高为 120, 它们的底面两两外切。在这三个圆锥围成的空隙中放置一个球, 使得球的最高点与三个圆锥的顶点处于同一水平高度。求该球的半径。







设三圆锥圆心为 A, B, C, 则底面圆心形成边长为 100 的正三角形 $\triangle ABC$, 且球心位于该正三角形的重心 G 正上方。设 D 为 BC 中点。在 $\triangle BGD$ 中,

$$BG = \frac{BD}{\cos 30^\circ} = \frac{100\sqrt{3}}{3}$$

即重心到每个顶点的距离为 $\dfrac{100\sqrt{3}}{3}$, 也即为圆锥轴与通过球心的竖直线的水平距离。

现考虑球体与圆锥的竖直截面。设 O 为球心, r 为球半径,P 为球体与圆锥斜面上的切点,X 为圆锥顶点,Y 为 XP 延长线与 AG 的交点,H 为球体的最高点, 则

$$OH = OP = r, XH = AG = \frac{100\sqrt{3}}{3}, XA = HG = 120$$

在 $\triangle AXY$ 中, 由毕氏定理,

$$XY = \sqrt{50^2 + 120^2} = 130 \Rightarrow PY = XY - XP = 130 - \frac{100\sqrt{3}}{3}$$

在 $\triangle AXY$ 中, 由毕氏定理, 有 $OY^2 = OP^2 + PY^2 = OG^2 + GY^2$, 即

$$r^2 + \left(130 - \frac{100\sqrt{3}}{3}\right)^2 = (120 - r)^2 + \left(\frac{100\sqrt{3}}{3} - 50\right)^2$$

解得

$$r = \frac{200\sqrt{3}}{9}$$

已知 $XH = AG = \dfrac{100\sqrt{3}}{3}, AX = 120, AY = 50$, 由于 $XY \perp OP$,

$$m_{XY} = -\frac{12}{5} \Rightarrow m_{OP} = \frac{5}{12}$$

设 $OS = 5t, SP = 12t$, 则

$$OP = 13t, \quad OH = 13t, \quad XR = 18t$$

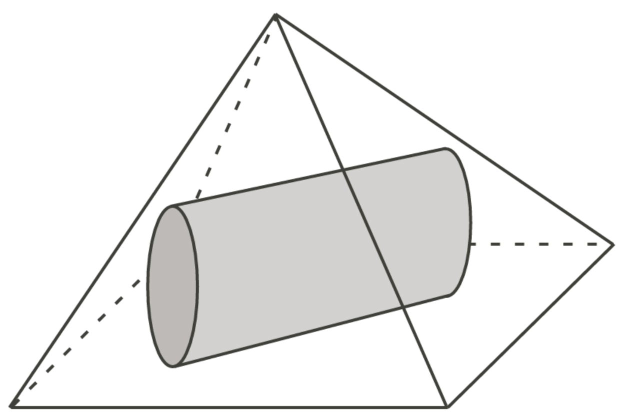
又

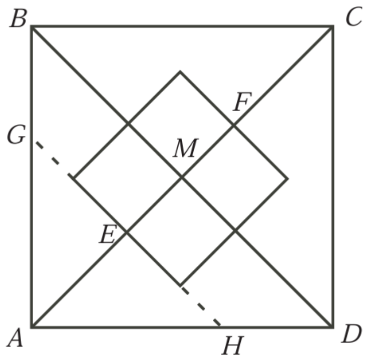
$$RS = RP + PS = \frac{15t}{2} + 12t = \frac{39t}{2} = AG = \frac{100\sqrt{3}}{3}$$

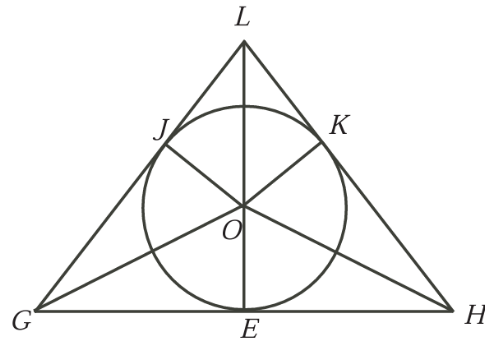
因此 $t = \dfrac{200}{39\sqrt{3}}$, 球半径为

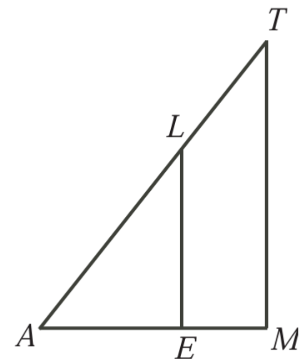
$$r = OP = 13t = \frac{200\sqrt{3}}{9}$$

11. 一个正四棱锥的底面是边长为 20 的正方形。现有一个底面直径为 10、高为 10 的圆柱横放 (侧卧), 要完全放置在锥体内部。圆柱的中心轴线平行于底面对角线, 且位于对角线正上方。圆柱中心轴的中点在底面中心的正上方。求金字塔的最小高度。









当正四棱锥四个侧面与圆柱两端面的圆周均相切，正四棱锥高度为最小。设正方形底面为 $ABCD$，顶点为 T，对角线交点为 M，则 $AM = BM = CM = DM = 10\sqrt{2}$，顶点 T 位于 M 的正上方，正四棱锥高度为 $t = TM$。

圆柱的中心轴线位于对角线 AC 上，其中点在 M 处。圆柱沿 AC 方向在 M 两侧各延伸 5 个单位，两端点分别为 E 和 F。从 A 到最近的圆柱端点 E 的距离为 $AE = 10\sqrt{2} - 5$。

在包含 AC 和 T 的垂直截面中，设 L 在 AT 上,G, H 分别在 AB, AD 上。由于 $\angle BAM = 45°$ 且圆柱端面垂直于对角线,$\triangle GEA$ 和 $\triangle HEA$ 均为等腰直角三角形，因此 $GE = HE = AE = 10\sqrt{2} - 5$。设圆柱横截面的圆心为 O，半径为 5。

设 $LE = h$，则 $LO = h - 5, LJ = x$，由 $\triangle LJO \backsim \triangle LEG$ (AAA)，

$$\frac{LJ}{JO} = \frac{LE}{EG} \Rightarrow \frac{x}{h} = \frac{5}{10\sqrt{2} - 5} \Rightarrow x = \frac{h}{2\sqrt{2} - 1}$$

且

$$\frac{LG}{GE} = \frac{LO}{OJ} \Rightarrow \frac{x + (10\sqrt{2} - 5)}{h - 5} = \frac{10\sqrt{2} - 5}{5}$$

代入 $x = \dfrac{h}{2\sqrt{2} - 1}$ 得

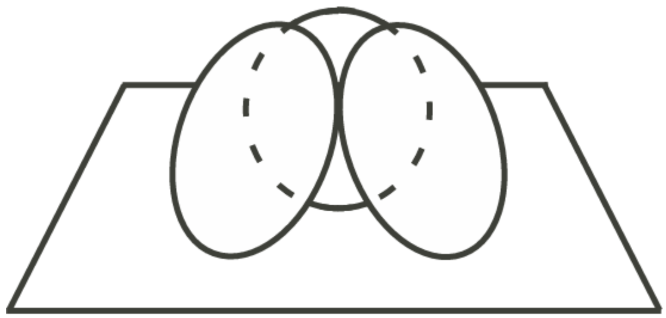
$$h = \frac{10(2\sqrt{2} - 1)^2}{8 - 4\sqrt{2}}$$

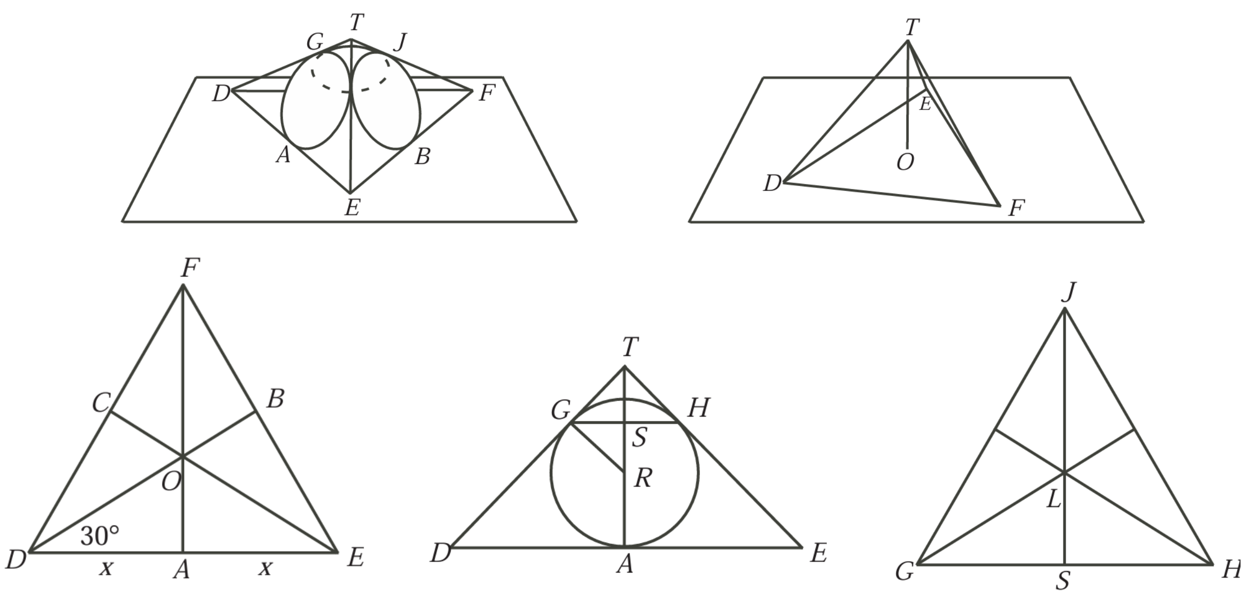
又由 $\triangle AEL \backsim \triangle AMT$ (AAA)，有

$$\frac{t}{AM} = \frac{LE}{AE} \Rightarrow t = \frac{10\sqrt{2} \cdot h}{10\sqrt{2} - 5} = 15 + 5\sqrt{2}$$

12. 在空间中，有三个半径均为 10 的圆，它们两两外切，且都与同一平面相切。每个圆所在的平

面与该平面成 45° 的倾角。这三个圆的三个切点位于一个与该平面平行的圆上。求此圆的半径。





设三个圆与平面 π 的切点分别为 A, B, C。每个圆所在平面与 π 的交线两两相交，交点分别为 D, E, F，其中 A, B, C 在 DE, EF, FD 上。由对称性,$\triangle DEF$ 是等边三角形，记 O 为 $\triangle DEF$ 的重心。

设三个圆两两相切的切点为 G, H, J，且 $\triangle GHJ$ 是等边三角形，所求圆即为过 G, H, J 三点的圆。延长 DG, EH, FJ 交于 T，于是 T 在 O 正上方，T, D, E, F 构成一四面体。

侧面 $\triangle DET$ 与 π 成 45° 角，且 $TO \perp \pi$，故 $\triangle TAO$ 是等腰直角三角形，因此

$$TA = \sqrt{2}\, AO$$

考虑 $\triangle DEF$, 设 $DA=AE=x$。在 $\triangle ADO$ 中,

$$OA=\frac{x}{\sqrt{3}},\quad OD=\frac{2x}{\sqrt{3}}.$$

在 $\triangle TAD$ 中, 由毕氏定理,

$$TD=\sqrt{x^2+\left(\sqrt{2}\cdot\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{\frac{5}{3}}x$$

考虑侧面 $\triangle DET$, 设 R 为 $\triangle DET$ 的内切圆圆心, S 为 TA 与 GH 的交点, 则 $RG=10$。由于 $\triangle TSG\backsim\triangle TGR\backsim\triangle TAD$ (AAA),

$$\frac{TG}{GR}=\frac{TA}{AD}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x}{x}\Rightarrow TG=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}GR=10\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

且

$$\frac{SG}{TG}=\frac{AD}{TD}=\frac{x}{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}x}\Rightarrow SG=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}TG=2\sqrt{10}$$

考虑等边三角形 $\triangle GHJ$, 设 L 为 $\triangle GHJ$ 的中心, 则 LG 即为所求圆的半径:

$$LG=\frac{2}{\sqrt{3}}SG=\frac{4\sqrt{30}}{3}$$

13. 一个球的内接圆锥的最大体积与这个球的体积之比为?

设球的半径为 R, 其内接圆锥的高为 h, 底面半径为 r。由几何关系可得:

$$r^2=R^2-|h-R|^2=(2R-h)h.$$

故圆锥的体积为:

$$V_{锥}=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi h^2(2R-h).$$

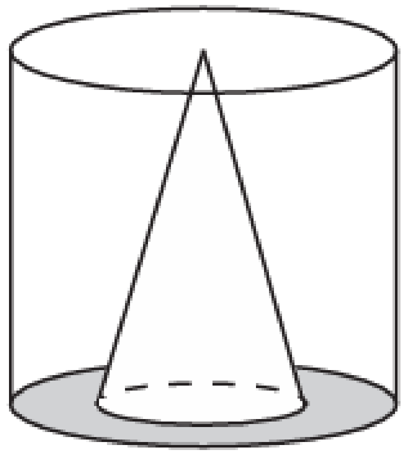
设函数 $V(h)=\frac{1}{3}\pi h^2(2R-h)$, 由 AM-GM 不等式得

$$V(h)\leqslant\frac{4\pi}{3}\left(\frac{\frac{h}{2}+\frac{h}{2}+2R-h}{3}\right)^3=\frac{32}{81}\pi R^3$$

当 $h=\frac{4}{3}R$ 时取得最大值 $\frac{32}{81}\pi R^3$, 故体积之比为

$$\frac{V_{锥}}{V_{球}}=\frac{32}{81}\pi R^3\div\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{8}{27}.$$

14. 一个圆柱形容器内装有水。现有一个实心圆锥, 其高度等于圆柱的高度, 底面半径是圆柱底面半径的一半。将此圆锥完全浸入水中, 底面紧贴圆柱底面, 顶点朝上。此时观察到水面高度恰好是圆柱高度的 $\dfrac{1}{2}$。若将圆锥从水中取出, 求水面高度占圆柱高度的比值。



设圆柱半径为 r, 高度为 h, 则圆锥体积为

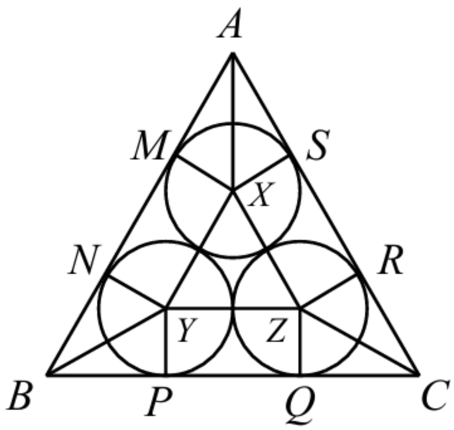
$$\frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{2}r\right)^2 h = \frac{1}{12}\pi r^2 h.$$

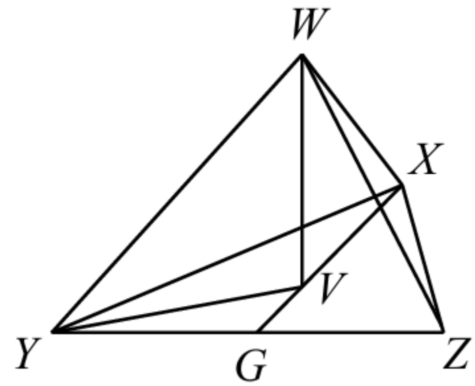
当圆锥在圆柱内且水深为 $\dfrac{h}{2}$ 时, 水体积为半圆柱体积减去下半圆锥体积

$$\frac{1}{2}\pi r^2 h - \left(\frac{1}{12}\pi r^2 h - \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{12}\pi r^2 h\right) = \frac{41}{96}\pi r^2 h.$$

圆锥移开后, 水体积保持不变, 因此水深是圆柱高度的 $\dfrac{41}{96}$。

15. 一个三棱柱形容器竖直放置, 底面为三角形。容器内放入三个半径为 1 的球, 每个球都与三角形底面相切, 与两个相邻的长方形侧面相切, 且三个球两两外切。在这三个球的上方放入第四个半径为 1 的球, 该球与下方三个球均外切, 并与棱柱的顶面 (上底面) 相切。求该三棱柱的体积。





先计算底面积。取底面上方 1 个单位的截面，该截面通过每个球的球心以及球与侧面的切点。设 A, B, C 为截面三角形顶点，X, Y, Z 为球心，M, N, P, Q, R, S 为球与侧面的切点且在 AB, BC, CA 上。由对称性可知 $\triangle ABC$ 是等边三角形，边长为

$$BC = BP + PQ + QC = 2 + 2\sqrt{3}$$

底面积为

$$[\triangle ABC] = \frac{\sqrt{3}}{4}(2 + 2\sqrt{3})^2$$

现求高。设 W 为顶球球心，则四球相切，$WXYZ$ 为正四面体，边长皆为 2。设 V 为 $\triangle XYZ$ 的重心，G 为 YZ 中点，在 $\triangle YVG$ 中，

$$YV = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad YG = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

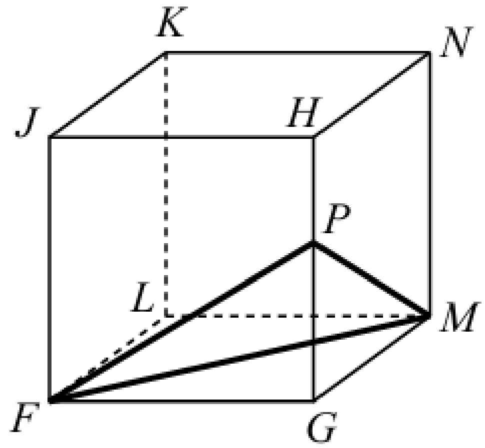
在 $\triangle WYV$ 中，

$$WV = \sqrt{2^2 - \frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{8}{3}}$$

底面到截面 XYZ 平面距离为 1，顶球球心到顶面的垂直距离为 1，三棱柱高度为 $2 + \sqrt{\frac{8}{3}}$，故三棱柱体积为

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(2 + 2\sqrt{3})^2 \cdot \left(2 + \sqrt{\frac{8}{3}}\right) \approx 46.97$$

16. 如图，已知一边长为 200 的立方体 $FGHJKLMN$，点 P 在 HG 上。已知从 G 到 $\triangle PFM$ 上一点的最短距离为 100，求 HP 的长度。



设 $GP=x$, 则 $HP=200-x$, 考虑四面体 $FGMP$ 体积:

$$\frac{1}{3}[\triangle FGM]\cdot x=\frac{1}{3}[\triangle PFM]\cdot 100 \tag{1}$$

其中

$$[\triangle FGM]=\frac{1}{2}\cdot FG\cdot GM=20000$$

现以 x 表示 $\triangle PFM$ 的面积。在 $\triangle FGM,\triangle FGP$ 中, 由毕氏定理,

$$FM=200\sqrt{2},\quad FP=\sqrt{x^2+200^2}$$

由于 $FP=MP$, $\triangle PFM$ 为等腰三角形。设 T 为 FM 中点, 则

$$FT=TM=100\sqrt{2}$$

在 $\triangle FTP$ 中, 由毕氏定理,

$$PT=\sqrt{FP^2-FT^2}=\sqrt{x^2+40000-(100\sqrt{2})^2}=\sqrt{x^2+20000}$$

所以

$$[\triangle PFM]=\frac{1}{2}\cdot FM\cdot PT=\frac{1}{2}\cdot 200\sqrt{2}\cdot\sqrt{x^2+20000}$$

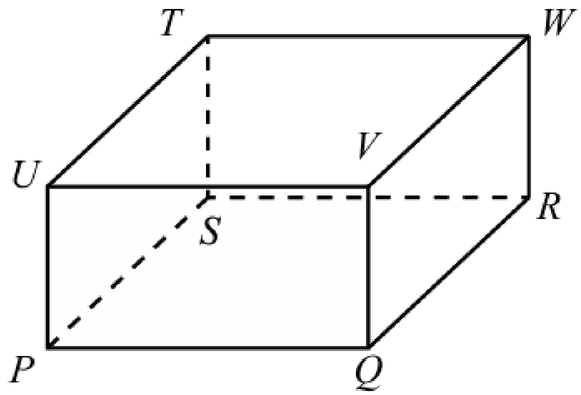
由 (1) 得,

$$\frac{1}{3}\cdot 20\ 000\cdot x=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 200\sqrt{2}\cdot\sqrt{x^2+20\ 000}\right)\cdot 100$$

解得

$$x=100\sqrt{2}>0\Rightarrow HP=200-100\sqrt{2}$$

17. 长方体 $PQRSTUVW$ 的顶点按图中方式标记。已知 $PR = 1867, PV = 2019, PT = x$, 问: 有多少个正整数 x 使得满足这些条件的长方体存在?



设 $PQ = a, PS = b, PU = c$, 在 $\triangle PQR, \triangle PQV, \triangle PST$ 中, 由毕氏定理,

$$a^2 + b^2 = 1867^2, \quad a^2 + c^2 = 2019^2, \quad b^2 + c^2 = x^2$$

三式解得

$$a^2 = \frac{1867^2 + 2019^2 - x^2}{2}, \quad b^2 = \frac{1867^2 - 2019^2 + x^2}{2}, \quad c^2 = \frac{-1867^2 + 2019^2 + x^2}{2}$$

由 $a, b, c > 0$,

$$\begin{cases} x^2 < 1867^2 + 2019^2 \\ x^2 > 2019^2 - 1867^2 \\ x^2 > 1867^2 - 2019^2 \end{cases}$$

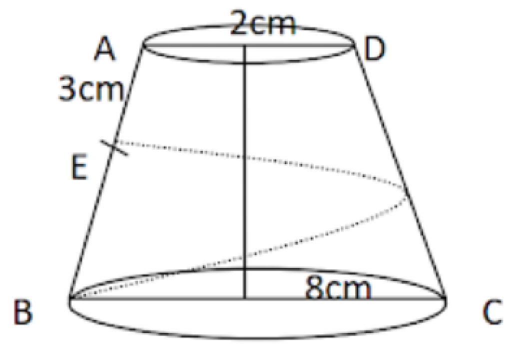
其中最后一个不等式恒成立, 即

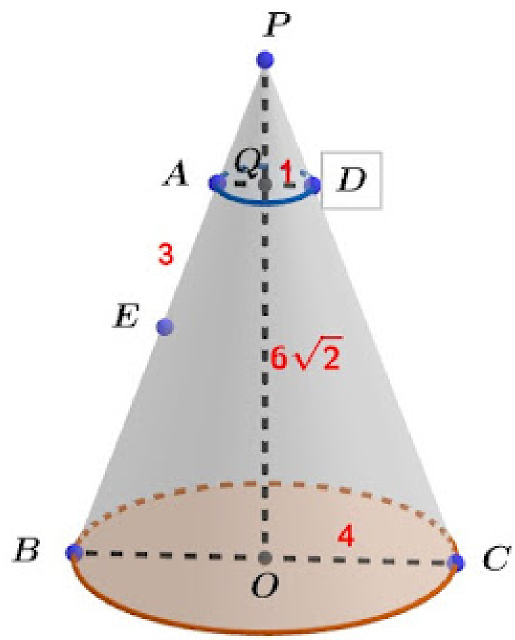
$$768.55 \approx \sqrt{2019^2 - 1867^2} < x < \sqrt{2019^2 + 1867^2} \approx 2749.92$$

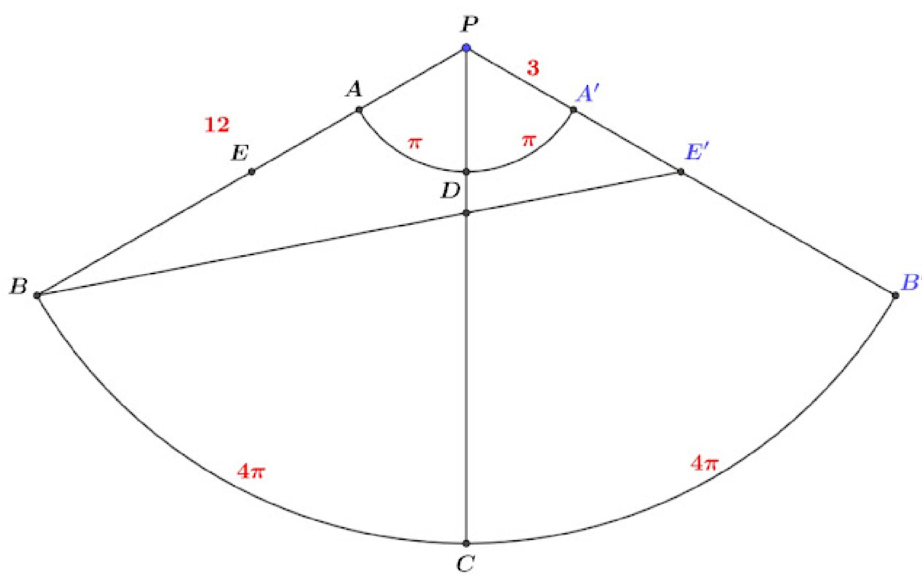
因此满足条件的整数 x 个数为

$$2749 - 769 + 1 = 1981$$

18. 如图所示, 有一个直圆锥台, 上底面直径为 2 cm, 下底面直径为 8 cm, 高为 $6\sqrt{2}$ cm。AB 与 CD 为直圆锥台的两侧边,E 为 AB 上一点, 且 $AE = 3$ cm。求从点 B 出发, 沿圆锥台侧面经过母线 CD, 最后到达点 E 的最短路径长度。


2cm
A
D
3cm
E
B
8cm
C


P
A
Q
1
D
3
E
$6\sqrt{2}$
B
4
C
O


P
3
A
A′
12
π
π
E
E′
D
B
B′
4π
4π
C

设 O 为 BC 的中点,P 为 BA 及 DC 的交点,Q 为 AD 的中点, 由 $\triangle PQD \backsim \triangle POC$ (AAA),

$$\frac{PQ}{PQ+6\sqrt{2}}=\frac{1}{4}\Rightarrow PQ=2\sqrt{2}$$

在 $\triangle POC$ 中, 由毕氏定理,

$$PC=\sqrt{(6\sqrt{2}+2\sqrt{2})^2+4^2}=12$$

又

$$\frac{PD}{PC}=\frac{1}{4}\Rightarrow PD=3$$

沿 PB 将圆锥剪开, 则 $AB=CD=9-3=6$。由弧长公式

$$\overset{\frown}{AA'}=3\angle APA'\Rightarrow \angle APA'=\frac{2\pi}{3}$$

在 $\triangle PBE'$ 中, 由余弦定理,

$$BE^2=12^2+6^2-2\cdot 12\cdot 6\cdot\cos\frac{2\pi}{3}\Rightarrow BE=6\sqrt{7}$$

因此最短曲线长为 $6\sqrt{7}$。

19. 已知点 $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$,

(a) 求在 xy 平面上方的点 C, 使得四面体 $OABC$ 是正四面体。

向量 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ 长度均为 1, 且夹角为 $60°$, 可知 $\triangle OAB$ 是边长为 1 的正三角形, 重心为

$$G=\left(\frac{0+1+\frac{1}{2}}{3},\frac{0+0+\frac{\sqrt{3}}{2}}{3},0\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{6},0\right)$$

为使四面体为正四面体, 点 C 应在重心垂直向上、距离为正三角形高的方向上:

$$OC=\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

故

$$C=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

(b) 计算其体积。

体积为

$$V=\frac{1}{3}[\triangle ABC]\cdot h=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 1^2\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{12}$$

20. 空间中, 设 $\triangle ABC$ 的三边长 $AB=3, AC=5, BC=7$, 另有一点 P 满足 $PA=PB=PC=\frac{25\sqrt{3}}{3}$, 则锥体 $P-ABC$ 的体积为多少?

由题意可知,P 在 $\triangle ABC$ 的投影点为外心。设 $a=BC=7, b=AC=5, c=AB=3$, 半周长 $s=\frac{15}{2}$,$\triangle ABC$ 面积为

$$[\triangle ABC]=\sqrt{\frac{15}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{9}{2}}=\frac{15\sqrt{3}}{4}$$

所以外接圆半径

$$R=\frac{abc}{4[\triangle ABC]}=\frac{7\sqrt{3}}{3}$$

由毕氏定理, 锥体 $P-ABC$ 高为

$$h=\sqrt{\left(\frac{25\sqrt{3}}{3}\right)^2-\left(\frac{7\sqrt{3}}{3}\right)^2}=8\sqrt{3}$$

体积为

$$[P-ABC]=\frac{1}{3}\cdot[\triangle ABC]\cdot h=30$$

21. 已知一四面体 $P-ABC$ 中, $\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=60^\circ$, 且 $\triangle APB,\triangle BPC,\triangle CPA$ 的面积分别为 $\frac{\sqrt{3}}{2},2,1$, 求四面体 $P-ABC$ 的体积。

设 $PA=a, PB=b, PC=c$, 由已知面积和角度,

$$\begin{cases}\frac{1}{2}ab\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2}bc\sin 60^\circ=2\\ \frac{1}{2}ac\sin 60^\circ=1\end{cases}\quad\Rightarrow ab=2, bc=\frac{8}{\sqrt{3}}, ac=\frac{4}{\sqrt{3}}$$

解得

$$a=1,\quad b=2,\quad c=\frac{4}{\sqrt{3}}$$

在 PB, PC 上取点 B', C' 使得 $PB' = PC' = PA = 1$, 此时 $PAB'C'$ 为正四面体, 其高为

$$h = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 1 = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

由于点 A 到平面 $PB'C'$ 的距离等于点 A 到平面 PBC 的距离, 四面体 $P-ABC$ 的体积为

$$[P-ABC] = \frac{1}{3} \cdot [\triangle BPC] \cdot h = \frac{2\sqrt{6}}{9}$$

22. 已知正四面体 $O-ABC$ 的边长为 $6\sqrt{2}, D, E, F, G$ 四点分别在 OA, OB, OC, BC 上。若

$$OD = \frac{1}{6}OA, \quad OE = \frac{1}{3}OB, \quad OF = \frac{1}{2}OC$$

且 G 为 BC 中点, 求四面体 $DEFG$ 的体积。

四面体边长为 $6\sqrt{2}$, 构造坐标系如下:

$$\begin{cases} O = (0,0,0) \\ A = (6,0,6) \\ B = (0,6,6) \\ C = (6,6,0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} OD = \frac{1}{6}OA \Rightarrow D = \frac{A+5O}{6} = (1,0,1) \\ OE = \frac{1}{3}OB \Rightarrow E = \frac{B+2O}{3} = (0,2,2) \\ OF = \frac{1}{2}OC \Rightarrow F = \frac{O+C}{2} = (3,3,0) \\ G = \text{BC 中点} = \frac{B+C}{2} = (3,6,3) \end{cases}$$

于是

$$\overrightarrow{GD} = (-2,-6,-2), \overrightarrow{GE} = (-3,-4,-1), \overrightarrow{GF} = (0,-3,-3)$$

体积为

$$[DEFG] = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{GD} \cdot (\overrightarrow{GE} \times \overrightarrow{GF})\right| = \frac{1}{6} \cdot 18 = 3$$

23. 四面体 $D-ABC$ 的体积为 $\dfrac{1}{6}$, 且 $\angle ACB = 60°$,

$$AD + \sqrt{3}\,BC + \frac{AC}{2} = 3,$$

求 CD 的长度。

由 AM-GM 不等式,

$$1=\frac{AD+\sqrt{3}\cdot BC+\dfrac{AC}{2}}{3}\geqslant\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot AD\cdot BC\cdot AC}$$

即

$$AD\cdot BC\cdot AC\leqslant\frac{2}{\sqrt{3}}\tag{1}$$

四面体体积为

$$\frac{1}{6}=[D-ABC]\leqslant\frac{1}{3}\cdot[\triangle ABC]\cdot AD=\frac{1}{6}AC\cdot BC\sin 60^\circ\cdot AD$$

即

$$AD\cdot BC\cdot AC\geqslant\frac{2}{\sqrt{3}}\tag{2}$$

由 (1), (2) 得

$$AD\cdot BC\cdot AC=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

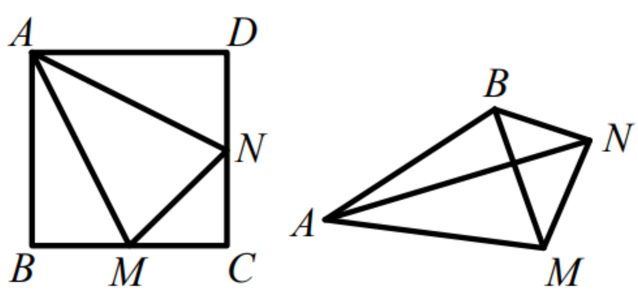
即不等式 (1) 等号成立, 当且仅当

$$AD=\sqrt{3}\cdot BC=\frac{AC}{2}=1$$

且由 (2) 知 AD 与 $\triangle ABC$ 垂直, 在 $\triangle ACD$ 中, 由毕氏定理,

$$CD=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$$

24. 已知一边长为 2 的正方形纸 $ABCD, M, N$ 分别为 BC 与 CD 的中点, 今沿着 AM, AN 与 MN 折起, 使 B, C, D 三点重合。若平面 ABM 与平面 AMN 的夹角为 θ, 求 $\sin\theta$。



构造坐标系, 设 $A=(0,0,0), M=(1,2,0), N=(2,1,0)$, 折起后 $B=(a,a,b)$, 由已知得

$$AB^2=2^2=2a^2+b^2=4,\quad BM^2=(a-1)^2+(a-2)^2+b^2=1$$

解得

$$a=\frac{4}{3},\quad b=\frac{2}{3}$$

由

$$\overrightarrow{AM}=(1,2,0),\quad \overrightarrow{AB}=\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right),$$

平面 AMN, ABM 的法向量为

$$\vec{n}_1=(0,0,1),\quad \vec{n}_2=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}(-2,1,2),$$

两平面夹角 θ 满足

$$\cos\theta=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}=\frac{2}{3}\Rightarrow\sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

25. 有一边长为 2 的正四面体 $ABCD$, 设 A' 为 A 关于平面 BCD 的对称点, B' 为 B 关于平面 ACD 的对称点, 求四面体 $A'CB'D$ 的体积。

设 $A(0,0,0), B(\sqrt{2},0,\sqrt{2}), C(0,\sqrt{2},\sqrt{2}), D(\sqrt{2},\sqrt{2},0)$, 则

$$\overrightarrow{AC}=(0,\sqrt{2},\sqrt{2}),\quad \overrightarrow{BC}=(-\sqrt{2},\sqrt{2},0),\quad \overrightarrow{CD}=(\sqrt{2},0,-\sqrt{2})$$

$$\mathbf{n}_{BCD}=\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{CD}=(-2,-2,-2),\quad \mathbf{n}_{ACD}=\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{CD}=(-2,2,-2)$$

故 $\triangle BCD,\triangle ACD$ 方程式为

$$E_1: x+y+z=2\sqrt{2},\quad E_2: -x+y-z=0$$

且对称点 A', B' 坐标为

$$A'=\left(\frac{4\sqrt{2}}{3},\frac{4\sqrt{2}}{3},\frac{4\sqrt{2}}{3}\right),\quad B'=\left(-\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{4\sqrt{2}}{3},-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$$

现求三角形 $\triangle A'CD$ 面积:

$$\vec{A'C}=\left(-\frac{4\sqrt{2}}{3},-\frac{\sqrt{2}}{3},-\frac{\sqrt{2}}{3}\right),\quad \vec{A'D}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{3},-\frac{\sqrt{2}}{3},-\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$$

$$[\triangle A'CD]=\frac{1}{2}\left\|\vec{A'C}\times\vec{A'D}\right\|=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{10}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{3}$$

且 $\triangle A'CD$ 方程式为

$$E_3: x-5y+z+4\sqrt{2}=0$$

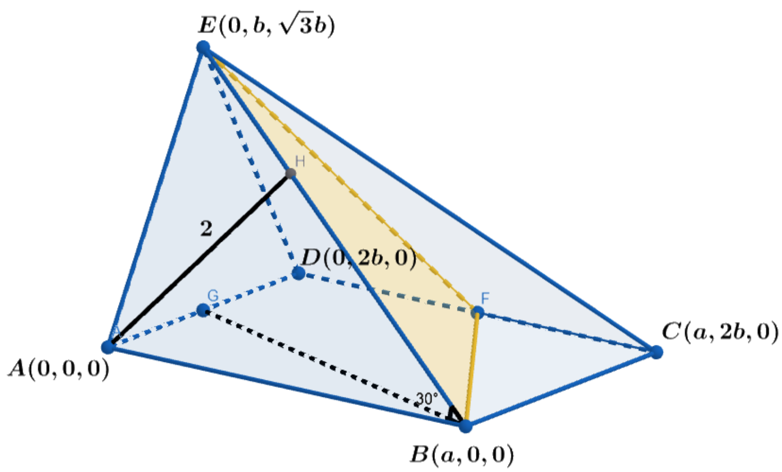
于是

$$d(B',E_3)=\frac{\left|-\frac{\sqrt{2}}{3}-5\cdot\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3}+4\sqrt{2}\right|}{\sqrt{1^2+(-5)^2+1^2}}=\frac{10\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}$$

四面体 $A'CB'D$ 体积为

$$[A'CB'D]=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{10\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}=\frac{10\sqrt{2}}{27}$$

26. 空间中有一四棱锥 $E-ABCD$, 其中底面 $ABCD$ 为矩形,$\triangle AED$ 为正三角形, 且平面 EAD 与平面 $ABCD$ 垂直。设 G,F 分别为 AD,CD 的中点, 且 $\angle EBG=30°$。若点 A 到平面 EFB 的距离为 2, 求 AD。



设 $AB=CD=a, AD=BC=2b$, 构造空间坐标系

$$A(0,0,0),\ B(a,0,0),\ C(a,2b,0),\ D(0,2b,0),\ E(0,b,\sqrt{3}b),\ F\left(\frac{a}{2},2b,0\right),\ G(0,b,0)$$

则

$$\overrightarrow{BE}=(-a,b,\sqrt{3}b),\overrightarrow{BG}=(-a,b,0),\overrightarrow{BF}=\left(-\frac{a}{2},2b,0\right)$$

由已知 $\angle EBG=30^\circ$,

$$\cos\angle EBG=\frac{\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BG}}{|\overrightarrow{BE}||\overrightarrow{BG}|}=\frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2+4b^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2+4b^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

两边平方得

$$\frac{a^2+b^2}{a^2+4b^2}=\frac{3}{4}\Rightarrow a=2\sqrt{2}b$$

设平面 EFB 的法向量为

$$\vec{n}=\overrightarrow{BE}\times\overrightarrow{BF}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\-a&b&\sqrt{3}b\\-\frac{a}{2}&2b&0\end{vmatrix}=(-2\sqrt{3}b^2,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}ab,\ -\frac{3}{2}ab)$$

平面 EFB 的方程为

$$-2\sqrt{3}b(x-a)-\frac{\sqrt{3}}{2}ay-\frac{3}{2}az=0\Rightarrow 4bx+ay+\sqrt{3}az=4ab$$

点 $A(0,0,0)$ 到该平面的距离为

$$d=\frac{|4ab|}{\sqrt{(4b)^2+a^2+3a^2}}=\frac{4ab}{\sqrt{16b^2+4a^2}}=2$$

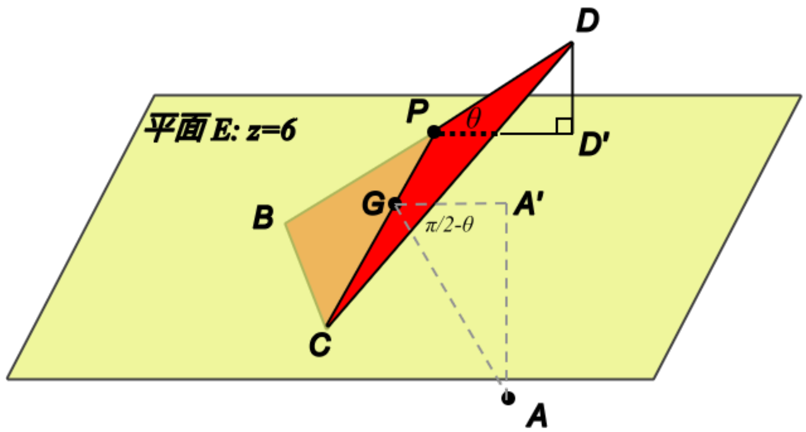
代入 $a=2\sqrt{2}b$ 得

$$\frac{4b\cdot 2\sqrt{2}b}{\sqrt{16b^2+4\cdot 8b^2}}=2\Rightarrow b=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

故

$$AD=2b=\sqrt{6}$$

27. 已知空中有一边长为 $5\sqrt{2}$ 的正四面体,A 为此四面体中距离地面最近的顶点, 其他三个顶点距离地面的距离分别为 5、6、7, 求 A 到地面的距离。



设 B, C, D 分别在平面

$$z=5, z=6, z=7$$

上,P 为 BD 的中点,D' 为 D 在平面$z=6$ 的投影点,θ 为 $\triangle BCD$ 与平面$z=6$ 的夹角, 则

$$\begin{cases} P \text{ 也在平面} z=6 \text{ 上, 且} PD=\dfrac{5\sqrt{2}}{2} \\ DD'=1 \end{cases} \Rightarrow \sin\theta=\frac{DD'}{PD}=\frac{2}{5\sqrt{2}} \Rightarrow \cos\theta=\frac{\sqrt{46}}{5\sqrt{2}}$$

设 A 在 $\triangle BCD$ 的投影点为 G, 则 G 为 $\triangle BCD$ 的重心,G 的 z 坐标为

$$\frac{5+6+7}{3}=6$$

即 G 也在平面 $z=6$ 上; 由正四面体性质

$$AG=\frac{\sqrt{6}}{3}\cdot 5\sqrt{2}=\frac{10\sqrt{3}}{3}, \quad AG\perp\triangle BCD$$

因此 A 到平面 $z=6$ 的距离为

$$AG\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=AG\cos\theta=\frac{10\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{46}}{5\sqrt{2}}=\frac{2}{3}\sqrt{69}$$

所以 A 到地面的距离为

$$6-\frac{2}{3}\sqrt{69}=\frac{18-2\sqrt{69}}{3}$$

28. 一正方形纸张 $ABCD$, 设点 E, F 分别在 BC, DC 边上, 且 $BE:EC=DF:FC=2:1$。现以正方形 $ABCD$ 为底面, 分别将 B, D 以 AE, AF 为谷折线向上折起, 使得 AB, AD 重合, 并令重合后的点 $B=D=G$。此时, 若侧面 $\triangle AEG$（或 $\triangle AFG$）与鸢形底面 $AECF$ 的夹角为 θ, 求 $\sin\theta$。

正方形边长为 4, 构造空间坐标系,

$$A(0,0,0),\ B(3,0,0),\ C(3,3,0),\ D(0,3,0),\ E(3,2,0),\ F(2,3,0),\ G(t,t,a).$$

由长度条件

$$\begin{cases} AG=3 \Rightarrow t^2+t^2+a^2=9, \\ GE=2 \Rightarrow (t-3)^2+(t-2)^2+a^2=4, \end{cases}$$

解得

$$t=\frac{9}{5},\quad a=\frac{3\sqrt{7}}{5}.$$

向量

$$\overrightarrow{AF}=(2,3,0),\quad \overrightarrow{AG}=\left(\frac{9}{5},\frac{9}{5},\frac{3\sqrt{7}}{5}\right).$$

法向量

$$\vec{n}=\overrightarrow{AF}\times\overrightarrow{AG}\parallel(3\sqrt{7},-2\sqrt{7},-3)$$

侧面 AEG 平面方程与底面 $AECF$ 方程分别为

$$3\sqrt{7}x-2\sqrt{7}y-3z=0,\quad z=0.$$

且

$$\cos\theta=\frac{\vec{n}\cdot(0,0,1)}{|\vec{n}|}=\frac{-3}{\sqrt{(3\sqrt{7})^2+(-2\sqrt{7})^2+(-3)^2}}=-\frac{3}{10}$$

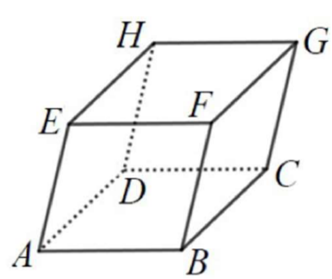
故

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=-\frac{\sqrt{91}}{10}$$

29. 已知平行六面体 $ABCD-EFGH$, 直线方程式为:

$$AB:\frac{x+3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{2},\quad EH:\frac{x-1}{2}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-1}{1},\quad CG:\frac{x-7}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-13}{-1}.$$

若点 $(9,7,8)$ 不在上述三条直线上, 且为此平行六面体的一个顶点, 求此平行六面体的体积。



设 $D=(9,7,8)$, 则 AD 方程式为

$$AD:\frac{x-9}{2}=\frac{y-7}{-1}=\frac{z-8}{1},$$

联立 AB 方程式解得无实数解, 故不合题意; 设 $F=(9,7,8)$, 则

$$BF:\frac{x-9}{2}=\frac{y-7}{2}=\frac{z-8}{-1},$$

解得 $B=(7,5,9)$; 由于

$$\vec{v}_{AB}\times\vec{v}_{AD}=(2,1,2)\times(2,-1,1)=(3,2,-4),$$

平面 $ABCD$ 方程为

$$3x+2y-4z=-5.$$

设 F 在 EH,CG 上的垂足分别为

$$P(2m+1,-m+5,m+1),\quad Q(2n+7,2n-1,-n+13),$$

则

$$\overrightarrow{FP}=(2m-8,-m-2,m-7),\quad \overrightarrow{FQ}=(2n-2,2n-8,-n+5).$$

由垂直条件 $\overrightarrow{FP}\cdot\vec{v}_{EH}=0$, $\overrightarrow{FQ}\cdot\vec{v}_{CG}=0$, 解得

$$m=\frac{7}{2},\quad n=\frac{25}{9}.$$

故

$$|\overrightarrow{FP}|=\frac{\sqrt{174}}{2},\quad |\overrightarrow{FQ}|=\frac{2\sqrt{53}}{3}.$$

设 $\overrightarrow{EF}$ 与 $\overrightarrow{EH}$ 的锐角为 α, $\overrightarrow{FG}$ 与 $\overrightarrow{CG}$ 的锐角为 β, 则

$$\cos\alpha=\frac{|\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EH}|}{|\overrightarrow{EF}||\overrightarrow{EH}|}=\frac{5}{3\sqrt{6}},\quad \cos\beta=\frac{|\overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{CG}|}{|\overrightarrow{FG}||\overrightarrow{CG}|}=\frac{1}{3\sqrt{6}},$$

$$\sin\alpha=\frac{\sqrt{29}}{3\sqrt{6}},\quad \sin\beta=\frac{\sqrt{53}}{3\sqrt{6}}.$$

又由

$$|\overrightarrow{FP}|=EF\sin\alpha=\frac{\sqrt{174}}{2}\implies EF=9,$$

$$|\overrightarrow{FQ}|=FG\sin\beta=\frac{2\sqrt{53}}{3}\implies FG=2\sqrt{6}.$$

设平行六面体高为点 F 到平面 $ABCD$ 的距离

$$d=\frac{|3\cdot9+2\cdot7-4\cdot8+5|}{\sqrt{3^2+2^2+(-4)^2}}=\frac{14}{\sqrt{29}}.$$

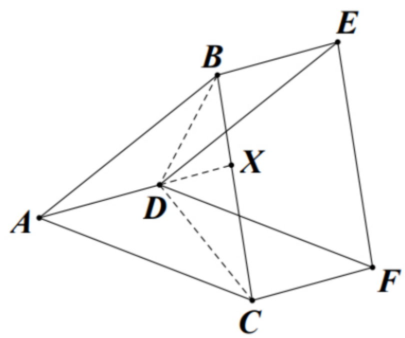
故体积为

$$V=EF\times FG\times\sin\alpha\times d=9\times2\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{29}}{3\sqrt{6}}\times\frac{14}{\sqrt{29}}=84.$$

30. 将 8 个半径为 2 的球分两层放置于一个圆柱形容器中, 使得每个球和与其相邻的四个球均相切, 且与圆柱的一个底面和侧面都相切, 则圆柱的高为

(待解)

31. 已知三棱柱 $\Omega: ABC-A_1B_1C_1$ 的 9 条棱长均相等, 记底面 ABC 所在平面为 α, 若 Ω 的另外四个面 (即面 $A_1B_1C_1$, $ABBA_1$, $ACCA_1$, $BCCB_1$) 在 α 上投影的面积从小到大重排后依次为 $2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, 4\sqrt{3}, 5\sqrt{3}$, 求 Ω 的体积.



设点 A_1, B_1, C_1 在平面 α 上的投影分别为 D, E, F, 则面

$$A_1B_1C_1, ABB_1A_1, ACC_1A_1, BCC_1B_1$$

在 α 上的投影面积分别为

$$[\triangle DEF], [ABED], [ACFD], [BCFE]$$

由已知及三棱柱的性质, $\triangle DEF$ 为正三角形, 且 $ABED, ACFD, BCFE$ 均为平行四边形. 由对称性, 仅需考虑点 D 位于 $\angle BAC$ 内的情形 (如图所示)。显然此时有

$$[ABED]+[ACFD]=[BCFE]$$

由于

$$\{[\triangle DEF], [ABED], [ACFD], [BCFE]\}=\{2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, 4\sqrt{3}, 5\sqrt{3}\}$$

故 $[ABED], [ACFD]$ 必为 $2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}$ 的排列, $[BCFE]=5\sqrt{3}$, 进而 $S_{\triangle DEF}=4\sqrt{3}$, 得 $\triangle DEF$ 的边长为 4, 即正三棱柱的各棱长均为 4.

不妨设 $[ABED]=2\sqrt{3}, [ACFD]=3\sqrt{3}$, 则

$$[\triangle ABD]=\sqrt{3}, [\triangle ACD]=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

取射线 AD 与线段 BC 的交点 X, 则

$$\frac{BX}{CX}=\frac{[\triangle ABD]}{[\triangle ACD]}=\frac{2}{3}$$

故 $BX=\frac{8}{5}$, 因此

$$AX=\sqrt{AB^2+BX^2-2AB\cdot BX\cdot\cos 60^\circ}=\frac{4\sqrt{19}}{5}$$

而

$$\frac{AD}{AX}=\frac{[\triangle ABD]+[\triangle ACD]}{[\triangle ABC]}=\frac{5}{8}$$

故 $AD=\frac{\sqrt{19}}{2}$, 于是 Ω 的高

$$h=\sqrt{AA_1^2-AD^2}=\frac{3\sqrt{5}}{2}$$

又 $[\triangle ABC]=4\sqrt{3}$, 故 Ω 的体积

$$V=[\triangle ABC]\cdot h=6\sqrt{15}$$

32. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $A_1B_1C_1D_1$ 内有一个动点 M, 且 $BM\parallel$ 平面 AD_1C, 则 $\tan\angle D_1MD$ 的最大值是

设正方体 $ABCD–A_1B_1C_1D_1$ 的边长为 a, 建立坐标系, 使 $D(0,0,0)$,$A(a,0,0)$,$C(0,a,0)$,$D_1(0,0,a)$。因此 $A_1(a,0,a)$,$B_1(a,a,a)$,$C_1(0,a,a)$。

设底面动点 M 的坐标为 (x,y,a), 其中 $0\leqslant x,y\leqslant a$。点 B 的坐标为 $(a,a,0)$, 因此

$$B\vec{M}=(x-a,y-a,a).$$

题设中 $BM\parallel$ 平面 AD_1C, 则 $B\vec{M}$ 垂直于该平面的法向量。

求平面 AD_1C 的法向量, 可取 $A\vec{D}_1=(-a,0,a)$ 和 $A\vec{C}=(-a,a,0)$, 则

$$\vec{n}=A\vec{D}_1\times A\vec{C}=(-a^2,a^2,-a^2)\propto(1,-1,1).$$

由 $B\vec{M}\cdot\vec{n}=0$ 得:

$$(x-a)(1)+(y-a)(-1)+a(1)=0\Rightarrow x-y+a=0\Rightarrow y=x+a.$$

结合 $0 \leqslant y \leqslant a$, 代入得 $0 \leqslant x + a \leqslant a \Rightarrow -a \leqslant x \leqslant 0$, 又因 $x \geqslant 0$, 故 $x = 0$, 从而 $y = a$。

故点 M 为 $C_1(0, a, a)$, 接下来计算 $\tan \angle D_1MD$, 其中 $D_1(0, 0, a)$,$D(0, 0, 0)$。

设 $\theta = \angle D_1MD$, 则有:

$$\vec{MD_1} = (0, -a, 0), \quad \vec{MD} = (0, -a, -a),$$
$$\cos\theta = \frac{\vec{MD_1} \cdot \vec{MD}}{|\vec{MD_1}| \cdot |\vec{MD}|} = \frac{a^2}{a \cdot a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = 45^\circ,$$
$$\tan \angle D_1MD = \tan 45^\circ = \boxed{1}.$$

(by chatgpt, 待验证)

33. 如图, 在面积为 2 的矩形 $ABCD$ 中, 点 E 为 AD 边的中点. 将 $\triangle ABE$ 和 $\triangle DEC$ 分别沿 BE, CE 翻折, 使得 A, D 重合于点 P, 则三棱锥 $P - EBC$ 体积的最大值为

(待解)

34. 设四棱锥 $P - ABCD$, 面 $PAB \perp$ 底面 $ABCD$, 且 $PA = PB = \sqrt{5}, AB = BC = AD = 2$, 求该四棱锥体积的最大值。

由题意, 四棱锥的高为 2, 只需求底面四边形 $ABCD$ 面积的最大值。

将四边形 $ABCD$ 分为 $\triangle ABD$ 和 $\triangle BCD$, 设 $\angle BAD = \alpha$, 由余弦定理得

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos\alpha = 4 + 4 - 8\cos\alpha = 8(1 - \cos\alpha)$$

由三角恒等式 $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, 得

$$BD = \sqrt{8(1 - \cos\alpha)} = \sqrt{16\sin^2\frac{\alpha}{2}} = 4\sin\frac{\alpha}{2}$$

三角形 ABD 的面积为:

$$[\triangle ABD] = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin\alpha = 2\sin\alpha$$

当 $BC \perp BD$ 时, $\triangle BCD$ 面积最大 (贪婪算法),

$$[\triangle BCD] = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot BD = 4\sin\frac{\alpha}{2}.$$

因此四边形面积为

$$S=[ABCD]=2\sin\alpha+4\sin\frac{\alpha}{2}.$$

令 $x=\sin\frac{\alpha}{2}\in(0,1)$, 则

$$S(x)=4\left(x+x\sqrt{1-x^2}\right).$$

求导:

$$S'(x)=4\left(1+\sqrt{1-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right).$$

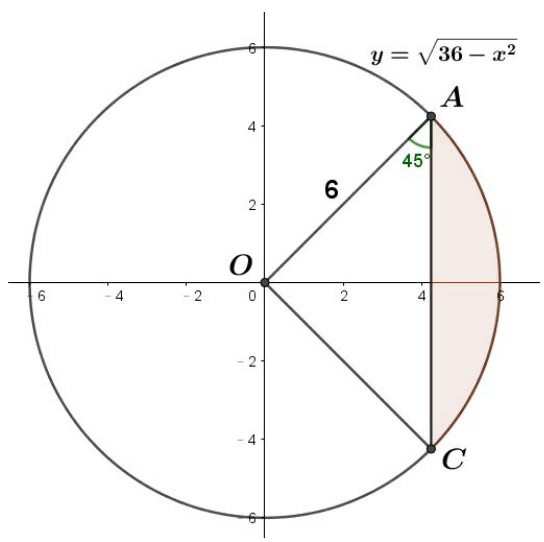
解 $S'(x)=0$, 得极值点 $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 代入得最大面积

$$S_{\max}=3\sqrt{3}.$$

故四棱锥体积最大为

$$V_{\max}=\frac{1}{3}\times3\sqrt{3}\times2=2\sqrt{3}.$$

35. 一个盛满水的半球体容器, 其半径为 6, 若倾斜 45° 后, 求容器溢出的水体积。



剩下的水体积即为上图着色区域绕 x 轴旋转的体积, 即

$$\pi\int_{3\sqrt{2}}^{6}(36-x^2)\,dx=\pi\left[36x-\frac{1}{3}x^3\right]_{3\sqrt{2}}^{6}=(144-90\sqrt{2})\pi$$

因此溢出的水体积为

$$\frac{2}{3}\pi\cdot6^3-(144-90\sqrt{2})\pi=90\sqrt{2}\pi$$

36. 已知一个底面半径为 3, 高为 3 的直圆柱, 平面 E 通过底面的直径 AB, 且平面 E 与底面的夹角为 $45°$, 此时平面 E 将直圆柱切割成两部分, 求较小部分的体积。

设圆柱底面中心为原点, 直径 AB 在 x 轴上, 平面 E 与 AB 成 $45°$, 故平面方程可设为 $z = x$, 底面为半径 3 的半圆区域

$$D : x^2 + y^2 \leqslant 9,\ x \geqslant 0$$

体积为

$$V = \iint_D z\, dA = \iint_D x\, dA$$

用极坐标积分, 令 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, 则

$$V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^3 r\cos\theta \cdot r\, dr\, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \int_0^3 r^2 dr\, d\theta = 9 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta = 9[\sin\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 18$$

设底面圆方程式为

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

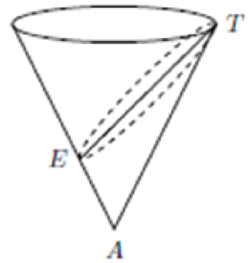
所求体积由许多直角三角形累积而成; 该三角形与底面圆的交点坐标为 (x, y), 则三角形的底长为 y, 高为 $y\tan\theta$, 因此三角形面积为

$$\frac{1}{2}y^2\tan\theta = \frac{1}{2}(R^2 - x^2)\tan\theta.$$

故所求体积为

$$\int_{-R}^{R} \frac{1}{2}(R^2 - x^2)\tan\theta\, dx \bigg|_{R=3,\theta=45°} = \frac{2}{3}R^3\tan\theta \bigg|_{R=3,\theta=45°} = 18$$

37. 奥里克有一个杯子, 是一个底面为圆的直圆锥体, 底面半径为 $\frac{1}{2}$, 斜高为 1, 杯中装满了奶茶。奶茶恰好填满杯子斜高的一半。当奥里克将杯子倾斜到刚好要溢出的程度时, 如图所示, 新的斜高 EA 与倾斜后的奶茶表面所形成的椭圆的长轴 ET 构成夹角 $\angle TEA$。求 $\cos\angle TEA$。



(待解)

38. 在正三棱锥 $P-ABC$ 中, $AB=1$, $AP=2$, 过 AB 的平面 α 将其体积平分, 则棱 PC 与平面 α 所成角的余弦值为

设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R, 且 P 到底面 ABC 的距离为 d , 则由正弦定理知,

$$2R=\frac{1}{\sin 120^\circ}=\frac{2\sqrt{3}}{3},\ d=\sqrt{2^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{33}}{3}$$

故

$$[P-ABC]=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 1^2\cdot\frac{\sqrt{33}}{3}=\frac{\sqrt{11}}{12}$$

设 PC 的中点为 D, 由

$$A=(0,0,0),B=(1,0,0),C=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right),P\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{33}}{6}\right),$$

则

$$AD^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{33}}{6}\right)^2\Rightarrow AD=BD=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

故

$$[\triangle ABD]=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{4}$$

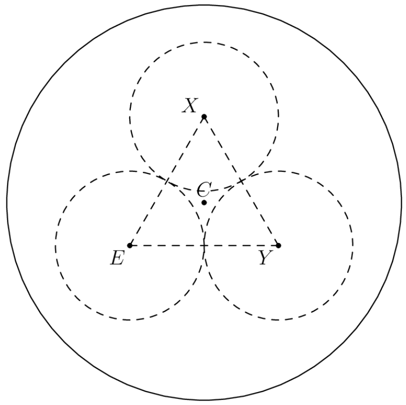
设 P 到平面 α 的距离为 h, 则由等体积法知

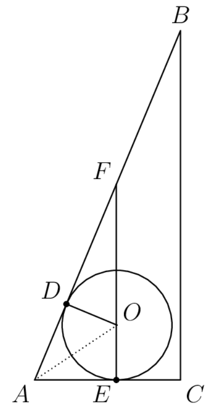
$$\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{5}}{4}\times h=\frac{\sqrt{11}}{24}\Rightarrow h=\frac{\sqrt{55}}{10}$$

所以棱 PC 与平面 α 所成角的余弦值为

$$1-\left(\frac{\frac{\sqrt{55}}{10}}{1}\right)^2=\frac{3\sqrt{5}}{10}$$

39. 一个底面半径为 5, 高为 12 的直圆锥中放入了三个互相接触的全等球体, 每个球的半径为 r。每个球都与另外两个球相切, 并且也与圆锥的底面及侧面相切。求 r 的值。





设圆锥的顶点为 A, 底面圆心为 B。取其中一个球的球心为 E, 三球心形成正三角形, 中心为 C, 满足 $AC = AE + EC$。我们来分别表示 AE 与 EC。

从顶部鸟瞰圆锥, 三个球心构成一个边长为 $2r$ 的正三角形。点 C 是其重心, 正三角形边长为 $r\sqrt{3}$, 故

$$EC = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$$

将 OE 延长至与底面交于点 F 使得 $\triangle AEF \backsim \triangle ACB$, 由角平分线定理,

$$\frac{OE}{OF} = \frac{AE}{AF} = \frac{5}{13} \Rightarrow OF = \frac{13r}{5}$$

因此

$$EF = OE + OF = r + \frac{13r}{5} = \frac{18r}{5}$$

再由相似三角形

$$AE = \frac{5}{12}EF = \frac{3r}{2}$$

我们已知 $AC = AE + EC = 5$, 代入得

$$\frac{3r}{2} + \frac{2r\sqrt{3}}{3} = 5 \Rightarrow r = \frac{30}{9 + 4\sqrt{3}} = \frac{90 - 40\sqrt{3}}{11}$$

40. 求空间中一点 $P(-5, 0, -8)$ 到直线

$$L : \frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{2}$$

的距离。

设 $Q(3+t,2-2t,-1+2t)$ 满足 $\overrightarrow{PQ}\perp L$, 则

$$\overrightarrow{PQ}=(8+t,2-2t,7+2t),\quad \overrightarrow{PQ}\cdot(1,-2,2)=0$$

解得

$$t=-2\Rightarrow Q(1,6,-5)$$

于是

$$d(P,L)=\overline{PQ}=\sqrt{(-5-1)^2+(0-6)^2+(-8+5)^2}=\sqrt{81}=9$$

设直线 L 上动点 $Q(3+t,2-2t,-1+2t)$, 则

$$PQ=\sqrt{(8+t)^2+(2-2t)^2+(7+2t)^2}=\sqrt{9(t+2)^2+81},$$

当 $t=-2$ 时有最小值 9。

直线 L 上取一点 $A(4,0,1)$, 有 $\overrightarrow{AP}=(-9,0,-9)$, 直线的方向向量 $\vec{v}=(1,-2,2)$, 则

$$\overrightarrow{AP}\times\vec{v}=(-18,9,18)$$

平行四边形面积为

$$\sqrt{(-18)^2+9^2+18^2}=27,$$

又 $|\vec{v}|=3$, 故

$$d(P,L)=\frac{27}{|\vec{v}|}=9$$

直线 L 上取一点 $A(4,0,1)$,$\overrightarrow{AP}=(-9,0,-9)$ 在 $\vec{v}=(1,-2,2)$ 上的正射影

$$\overrightarrow{AH}=(-3,6,-6),$$

P 在直线 L 上的投影点 H 坐标为

$$(4,0,1)+(-3,6,-6)=(1,6,-5)$$

故

$$PH=d(P,L)=\sqrt{(-5-1)^2+(0-6)^2+(-8+5)^2}=9$$

41. 设 $A(0,1,2), B(-1,2,1), C(1,0,1)$ 为空间中的三点, 求 $\triangle ABC$ 的垂心坐标。

首先有

$$\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-1,1,-1)\times(1,-1,-1)=(-2,-2,0)$$

得平面

$$E:\ x+y=1$$

假设垂心 $H(a,b,c)$, 由 $\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}$,

$(a,b-1,c-2)\cdot(2,-2,0)=(a+1,b-2,c-1)\cdot(1,-1,-1)=(a-1,b,c-1)\cdot(-1,1,-1)=0$

解得

$$H(a,a+1,3)$$

又 H 在平面 $x+y=1$ 上, 故

$$a+(a+1)=1\Rightarrow a=0$$

因此 $H=(0,1,3)$。

42. 坐标空间中有三个彼此互相垂直的向量 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$。已知 $\mathbf{u}-\mathbf{v}=(2,-1,0)$, 且 $\mathbf{v}-\mathbf{w}=(-1,2,3)$。求由 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ 所张出的平行六面体之体积。

由已知 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ 互相垂直且 $\mathbf{u}-\mathbf{v}=(2,-1,0), \mathbf{v}-\mathbf{w}=(-1,2,3)$,

$$(\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot(\mathbf{v}-\mathbf{w})=-|\mathbf{v}|^2=-4\Rightarrow|\mathbf{v}|=2$$

且

$$(\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v})=|\mathbf{u}|^2+4=5\Rightarrow|\mathbf{u}|=1$$

及

$$(\mathbf{v}-\mathbf{w})\cdot(\mathbf{v}-\mathbf{w})=4+|\mathbf{w}|^2=14\Rightarrow|\mathbf{w}|=\sqrt{10}$$

故体积为

$$|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|\cdot|\mathbf{w}|=2\sqrt{10}$$

43. 在空间中, 有三个不共平面的非零向量 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$, 满足

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot((\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a}))=7,$$

求以三向量 $(3\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}),(\mathbf{a}-\mathbf{b}+2\mathbf{c}),(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ 所张成的平行六面体体积。

由向量性质,

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c},\quad (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}),\quad (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{a}=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{b}=0$$

因此

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot((\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a}))&=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\big(((\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{a})\mathbf{c}-((\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{c})\mathbf{a}\big)\\&=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot((\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{a})\mathbf{c}\\&=((\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{a})\,((\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c})\\&=(\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}))^2=7\end{aligned}$$

即

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\pm\sqrt{7}$$

三向量张成的平行六面体体积为

$$\begin{aligned}V&=\big|(3\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})\cdot\big((\mathbf{a}-\mathbf{b}+2\mathbf{c})\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})\big)\big|\\&=\operatorname{abs}\left(\begin{vmatrix}3&1&1\\1&-1&2\\0&1&1\end{vmatrix}\right)\cdot|\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})|=9\sqrt{7}\end{aligned}$$

44. 两平面

$$E_1:\ x+ky+z=3,\quad E_2:\ x+y+kz=5$$

夹角为 60°, 求 k。

设 E_1,E_2 的法向量分别为 $\vec{n_1}=(1,k,1)$,$\vec{n_2}=(1,1,k)$。两平面夹角满足:

$$\cos\theta=\frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}\quad \text{其中}\theta=60^\circ,\ \cos\theta=\frac{1}{2}$$

计算内积与模长:

$$\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=1+k+k=1+2k$$

$$|\vec{n_1}|=\sqrt{1+k^2+1}=\sqrt{k^2+2},\quad |\vec{n_2}|=\sqrt{1+1+k^2}=\sqrt{k^2+2}$$

代入公式:

$$\frac{|1+2k|}{k^2+2}=\frac{1}{2}\Rightarrow |1+2k|=\frac{1}{2}(k^2+2)$$

分正负两种情况:

- 若 $1+2k\geqslant 0$, 则 $1+2k=\frac{1}{2}(k^2+2)\Rightarrow k=0,4$;
- 若 $1+2k<0$, 则 $-(1+2k)=\frac{1}{2}(k^2+2)\Rightarrow k=-2$。

解得 $k=-2,\ 0,\ 4$

45. 两平面

$$E_1:\ 2x+y-z-3=0,\quad E_2:\ x+2y+z=0$$

过点 $(2,1,-1)$ 且同时垂直于 E_1,E_2 的平面方程为

设所求平面法向量为 $\vec{n}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}$, 其中 $\vec{n_1}=(2,1,-1),\vec{n_2}=(1,2,1)$, 则

$$\vec{n}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\2&1&-1\\1&2&1\end{vmatrix}=\mathbf{i}(1\cdot1-(-1)\cdot2)-\mathbf{j}(2\cdot1-(-1)\cdot1)+\mathbf{k}(2\cdot2-1\cdot1)=(3,-3,3)$$

所以可取法向量为 $(1,-1,1)$, 故平面方程为 $x-y+z=d$, 将点 $(2,1,-1)$ 代入得

$$2-1-1=0\Rightarrow d=0$$

故所求平面方程为 $x-y+z=0$。

46. 动点 $P(x,y,z)$ 在平面

$$2x+y-2z-5=0$$

上移动, 求

$$\sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2+(z+2)^2}$$

的最小值。

设定点 $A(3,-1,-2)$, 原式即动点 $P(x,y,z)$ 到 A 的距离, 最小距离即点 A 到平面的距离。

平面法向量为 $\vec{n}=(2,1,-2)$, 于是

$$d=\frac{|2\cdot3+(-1)+(-2)\cdot(-2)-5|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}=\frac{4}{3}$$

47. 已知 $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$, 且

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha-4\beta-6\gamma+13=0,$$

求

$$(\alpha-\delta-8)^2+(\beta-2\delta-9)^2+(\gamma-3\delta-10)^2$$

的最小值。

写成

$$(\alpha-1)^2+(\beta-2)^2+(\gamma-3)^2=1,$$

即点 $P(\alpha,\beta,\gamma)$ 在以 $C(1,2,3)$ 为球心、半径 $r=1$ 的球面上。记点 Q 为参数 t 下的直线

$$L:\ \frac{x-8}{1}=\frac{y-9}{2}=\frac{z-10}{3}=t,$$

则 $Q=(t+8,\ 2t+9,\ 3t+10)$, 且

$$(\alpha-(\delta+8))^2+(\beta-(2\delta+9))^2+(\gamma-(3\delta+10))^2=PQ^2,$$

其中

$$PQ=d(C,L)-r=\sqrt{(t+7)^2+(2t+7)^2+(3t+7)^2}-1=\sqrt{14(t+3)^2+21}-1$$

在 $t=-3$ 时取最小值 $\sqrt{21}-1$, 此时 PQ^2 为

$$(\sqrt{21}-1)^2=22-2\sqrt{21}$$

48. 在空间中, 给定两歪斜线

$$L_1:\frac{x-7}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-10}{-2}, L_2:\frac{x-3}{1}=\frac{y-9}{-2}=\frac{z-2}{1},$$

若在直线 L_1 上取一点 P, 在直线 L_2 上取一点 Q 使得线段 PQ 最短, 试求 PQ 的距离。

L_1,L_2 的方向向量分别为

$$\mathbf{u}=(2,1,-2),\mathbf{v}=(1,-2,1)$$

则

$$\mathbf{n}=\mathbf{u}\times\mathbf{v}=(-3,-4,-5)$$

包含 L_1 且法向量为 $\mathbf{n}$ 的平面方程式为

$$E:-3(x-7)-4(y-2)-5(z-10)=0\Rightarrow 3x+4y+5z=79$$

取 $P(3,9,2)\in L_2$, 则点到平面 E 的距离为

$$d(P,E)=\frac{|3(3)+4(9)+5(2)-79|}{\sqrt{3^2+4^2+5^2}}=\frac{12\sqrt{2}}{5}$$

49. 已知平面 E 包含直线 $\begin{cases}x=1\\ y+z=3\end{cases}$，且两条直线

$$L_1:\ \frac{x-9}{2}=\frac{y+10}{1}=\frac{z-11}{-1},\quad L_2:\ \frac{x-9}{2}=\frac{y+10}{2}=\frac{z-11}{-1}.$$

求平面 E 的方程式。

可得两直线 L_1,L_2 的方向向量为

$$\mathbf{u}=(2,1,-1),\quad \mathbf{v}=(2,2,-1).$$

由已知直线 $\begin{cases}x=1\\ y+z=3\end{cases}$ 可取方向向量

$$\mathbf{w}=(0,1,-1)$$

计算得

$$(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}=(2,-1,-1)$$

又 E 通过 $(1,1,2)$, 由点法式平面方程得

$$E:2(x-1)+1(y-1)+1(z-2)=0\Rightarrow 2x-y-z=-1$$

50. 空间中两歪斜线

$$L_1:\frac{x-3}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{-2},\quad L_2:\frac{x}{3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{-2},$$

若正 $\triangle PQR$ 中,P 在 L_1 上, 且 Q、R 都在 L_2 上, 求 $\triangle PQR$ 的最小面积。

L_1,L_2 的方向向量分别为

$$\mathbf{u}=(1,2,-2),\mathbf{v}=(3,1,-2)$$

则

$$\mathbf{n}=\mathbf{u}\times\mathbf{v}=(-2,-4,-5)$$

$\mathbf{n}$ 为 L_1 与 L_2 所张平面的法向量, 设包含 L_2 的平面 E, 带入 L_2 上点 $(0,2,-1)$ 得:

$$E: -2x-4(y-2)-5(z+1)=0 \Rightarrow 2x+4y+5z=3$$

取 $P=(3,0,-2)\in L_1$, 则 P 到平面 E 的距离为正三角形的高:

$$d(P,E)=\frac{|2(3)+4(0)+5(-2)-3|}{\sqrt{2^2+4^2+5^2}}=\frac{7}{3\sqrt{5}}$$

设边长为 s, 正三角形面积公式为 $A=\frac{\sqrt{3}}{4}s^2$, 其中高 $h=\frac{\sqrt{3}}{2}s$, 反解出 s 得

$$h=\frac{7}{3\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{3}}{2}s \Rightarrow s=\frac{14}{3\sqrt{15}}$$

最小面积为

$$A=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{14}{3\sqrt{15}}\right)^2=\frac{49\sqrt{3}}{135}$$

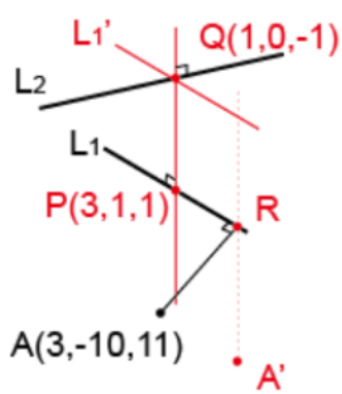
51. 空间中, 已知点 $A(3,-10,11)$, 直线

$$L_1:\begin{cases}x=2+t\\ y=-1+2t, \quad t\in\mathbb{R}\\ z=3-2t\end{cases}$$

与

$$L_2:\begin{cases}x=-1+2s\\ y=2-2s, \quad s\in\mathbb{R}\\ z=-s\end{cases}$$

今由 A 点出发, 经 L_1 上一点再到达 L_2 上一点, 求此路径的最小值。



首先发现

- L_1 与 L_2 为歪斜线, 且方向向量垂直。
- L_1 与 L_2 的公垂线在 L_1 上的垂足为 $P(3,1,1)$, 在 L_2 上的垂足为 $Q(1,0,-1)$, 且 $PQ=3$。
- 点 A 到 L_1 的距离 $d(A,L_1)=5$, 且 A 在 L_1 上的投影点 R 距离 P 为 $PR=14$。

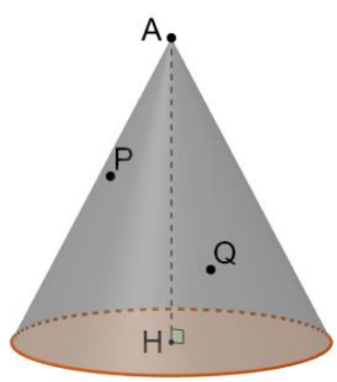
设 $L_1' /\!/ L_1$, 且 $\overleftrightarrow{A'R} /\!/ \overleftrightarrow{PQ}, A'R=AR=5$。题目所求等同于「点 A' 经 L_1 上一点再到达 L_2 上一点的最短路径」, 亦即

$$A'Q=\sqrt{(3+5)^2+14^2}=2\sqrt{65}$$

52. 空间中有一直圆锥, 已知其高 AH 所在的直线方程为

$$\frac{x-4}{-1}=\frac{y+4}{2}=\frac{z+14}{6},$$

以及直圆锥侧面上两点 $P(3,0,5),Q(11,-9,-18)$, 求直圆锥顶点 A 坐标。



设 A 在直线上, 令

$$A(-t+4,2t-4,6t-14),\quad t\in\mathbb{R}$$

则

$$\overrightarrow{AP}=(t-1,-2t+4,-6t+19),\quad \overrightarrow{AQ}=(t+7,-2t-5,-6t-4),$$

直线 AH 方向向量

$$\vec{h}=(-1,2,6)$$

由于 $\angle PAH = \angle QAH$, 有

$$\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\vec{h}}{|\overrightarrow{AP}||\vec{h}|} = \frac{\overrightarrow{AQ}\cdot\vec{h}}{|\overrightarrow{AQ}||\vec{h}|}.$$

即

$$\frac{(-41t+123)^2}{(t-1)^2+(2t-4)^2+(6t-19)^2} = \frac{(-41t-41)^2}{(t+7)^2+(2t+5)^2+(6t+4)^2}$$

解得

$$t = 6 \text{ 或 } t = \frac{9}{5}$$

其中当 $t = \frac{9}{5}$,

$$\vec{p}\cdot\vec{h} > 0, \quad \vec{q}\cdot\vec{h} < 0$$

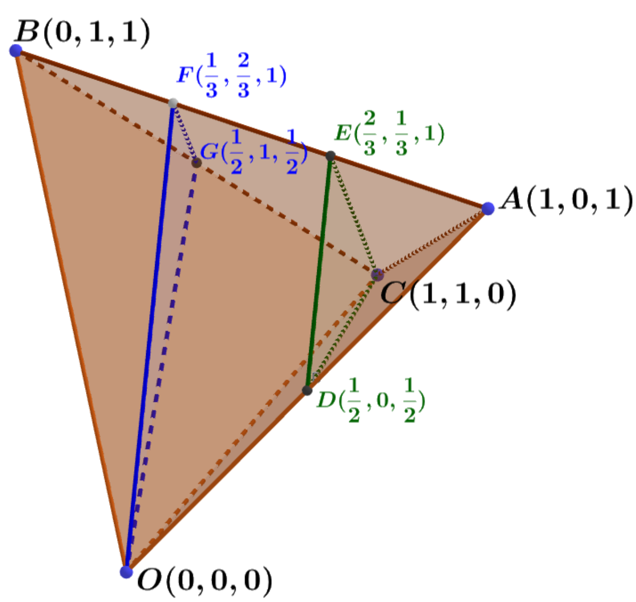
不合题意, 故取 $t = 6$, 则

$$A = (-6+4, 12-4, 36-14) = (-2, 8, 22)$$

53. 有四个平行平面:

$$E_1: 3x+4y+5z=0,\ E_2: 3x+4y+5z=1,\ E_3: 3x+4y+5z=2,\ E_4: 3x+4y+5z=3,$$

若一个正四面体的四顶点 A, B, C, D 分别在 E_1, E_2, E_3, E_4, 求此正四面体与 E_2 相交的截面积。



取

$$A=(1,0,1),\quad B=(0,1,1),\quad C=(1,1,0),\quad O=(0,0,0),$$

则四面体 $OABC$ 为正四面体, 边长为 $\sqrt{2}$, 再取

$$D=AO\text{ 中点}=\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right),\quad E=\frac{2A+B}{3}=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},1\right),$$

$$F=\frac{2B+A}{3}=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\right),\quad G=BC\text{ 中点}=\left(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}\right).$$

则 $\triangle CDE /\!/ \triangle OFG$, 且 $E_2=\triangle CDE, E_3=\triangle OFG$, 且

$$\overrightarrow{CD}=\left(-\frac{1}{2},-1,\frac{1}{2}\right),\quad \overrightarrow{CE}=\left(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},1\right).$$

$\triangle CDE$ 的法向量为

$$\vec{n}=\overrightarrow{CD}\times\overrightarrow{CE}=\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},0\right).$$

故面积为

$$[\triangle CDE]=\frac{1}{2}|\vec{n}|=\frac{1}{2}\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+0^2}=\frac{\sqrt{5}}{6}.$$

又

$$\overrightarrow{AB}=(-1,1,0),\quad |\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2},\quad |\vec{n}|=\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

于是

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{AB}||\vec{n}|}=\frac{3}{\sqrt{10}}.$$

而平面间距离

$$d(E_1,E_4)=\frac{3}{5\sqrt{2}}.$$

原四面体的棱长为

$$\frac{d(E_1,E_4)}{\cos\theta}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

截面面积为

$$[\triangle CDE]\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2=\frac{\sqrt{5}}{60}$$

54. 空间中三点 P,Q,R 分别在直线

$$L_1:\frac{x-3}{1}=\frac{y-6}{2}=\frac{z+1}{-2},\ L_2:\frac{x-2}{-2}=\frac{y-7}{2}=\frac{z-4}{1},\ L_3:\frac{x-1}{2}=\frac{y-5}{1}=\frac{z-6}{2}$$

上, 求 $PQ+PR$ 的最小值。

直线方向向量为

$$\vec{u}_1=(1,2,-2),\quad \vec{u}_2=(-2,2,1),\quad \vec{u}_3=(2,1,2).$$

发现

$$\vec{u}_1\times\vec{u}_2=(6,3,6)\mathbin{/\!/}\vec{u}_3,$$

说明三条直线两两垂直且互为歪斜线。已知点

$$P(3,6,-1)\in L_1,\quad Q(2,7,4)\in L_2,\quad R(1,5,6)\in L_3,$$

则向量

$$\overrightarrow{PQ}=(-1,1,5),\quad \overrightarrow{QR}=(-1,-2,2),\quad \overrightarrow{RP}=(2,1,-7).$$

满足

$$d(L_1,L_2)=\frac{|\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{u}_3|}{|\vec{u}_3|}=3,\quad d(L_2,L_3)=\frac{|\overrightarrow{QR}\cdot\vec{u}_1|}{|\vec{u}_1|}=3,\quad d(L_3,L_1)=\frac{|\overrightarrow{RP}\cdot\vec{u}_2|}{|\vec{u}_2|}=3.$$

因此问题等价于在棱长为 3 的立方体中考虑三条互相垂直的线段:

$$L_1=\{(a,0,3)\mid a\in\mathbb{R}\},\quad L_2=\{(3,b,0)\mid b\in\mathbb{R}\},\quad L_3=\{(0,3,c)\mid c\in\mathbb{R}\}.$$

设点 $A=(3,b,0),B=(0,3,c),P=(a,0,3)$, 则

$$PA+PB=\sqrt{(a-3)^2+b^2+9}+\sqrt{a^2+9+(c-3)^2}.$$

在

$$a=\frac{3}{2},\quad b=0,\quad c=3$$

有最小值

$$\sqrt{\frac{45}{4}}+\sqrt{\frac{45}{4}}=3\sqrt{5}$$

55. 空间中一定点 $A(2,6,-3)$, 一平面 $E:x+2y+2z+1=0$, 已知平面 E 上有一圆 C, 圆心为 $Q(-3,2,-1)$, 半径为 2。若动点 P 在圆 C 上, 试求 AP 的最大值与最小值。

过点 $A(2,6,-3)$ 且方向向量为 $(1,2,2)$ 的直线为

$$L:\frac{x-2}{1}=\frac{y-6}{2}=\frac{z+3}{2}$$

令 t 为参数, 则该直线上的点可表示为

$$A'(x,y,z)=(t+2,\ 2t+6,\ 2t-3)$$

代入平面 E 的方程求交点:

$$(t+2)+2(2t+6)+2(2t-3)+1=0 \Rightarrow t=-1$$

得投影点 $A'=(1,4,-5)$, 而

$$A'Q=\sqrt{(-3-1)^2+(2-4)^2+(-1+5)^2}=6>2=r \Rightarrow A' \text{ 在圆} C \text{ 外}$$

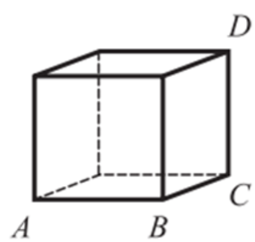
设直线 $A'Q$ 与圆交于两点 B（较近）,C（较远）, 则

$$AA'=\sqrt{(2-1)^2+(6-4)^2+(-3+5)^2}=\sqrt{1+4+4}=3$$

$$A'B=A'Q-r=6-2=4 \Rightarrow AB^2=3^2+4^2=25 \Rightarrow AB=5$$

$$A'C=A'Q+r=6+2=8 \Rightarrow AC^2=3^2+8^2=73 \Rightarrow AC=\sqrt{73}$$

56. 在正立方体 $ABCD-EFGH$ 中, 有两质点分别从顶点 A,C 同时以等速直线运动到顶点 B,D, 均在 1 秒后到达。求两质点之间的最小距离。



建立空间坐标系

$$A(1,0,0), B(1,1,0), B(1,1,0), C(0,1,0), D(0,1,1),$$

则两质点在 AB 及 CD 的坐标分别为 $(1,t,0),(0,1,t)$, 两质点间距离

$$\sqrt{(1-0)^2+(t-1)^2+(0-t)^2}=\sqrt{2t^2-2t+2}=\sqrt{2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}}$$

在 $t=\frac{1}{2}$ 有最小值 $\frac{\sqrt{6}}{2}$。

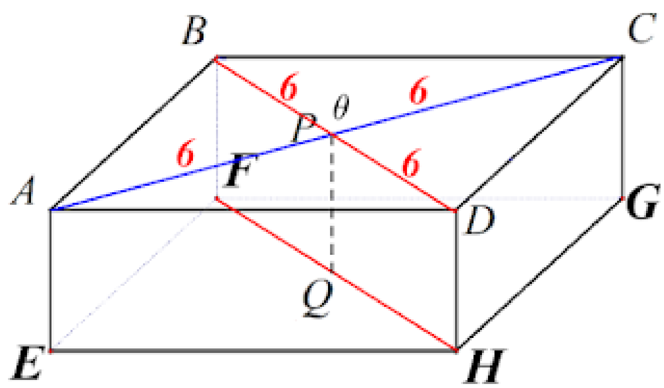
57. 长方体 $ABCD-EFGH$ 中, 已知直线 AC 的方程为

$$\frac{x-3}{-2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+7}{1},$$

直线 HF 的方程为

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{4}=\frac{z}{-3},$$

且 $A(3,-1,-7)$, 求矩形 $ABCD$ 的面积。



记

$$L_1=\overleftrightarrow{AC}:\ \frac{x-3}{-2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+7}{1},\quad L_2=\overleftrightarrow{HF}:\ \frac{x}{1}=\frac{y}{4}=\frac{z}{-3}.$$

方向向量分别为

$$\vec{u}=(-2,2,1),\quad \vec{v}=(1,4,-3),$$

L_1,L_2 所成平面的法向量为

$$\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}=(-10,-5,-10)$$

取参数点

$$P\in L_1:\ P(-2t+3,\,2t-1,\,t-7),\quad Q\in L_2:\ Q(s,\,4s,\,-3s),$$

令 $\overrightarrow{PQ}/\!/\vec{n}$, 解得

$$\frac{s+2t-3}{2}=\frac{4s-2t+1}{1}=\frac{-3s-t+7}{2}\ \Rightarrow\ s=1,\ t=2,$$

从而

$$P(-1,3,-5),\quad Q(1,4,-3),\quad PA=PB=PC=6,$$

设 L_1 与 L_2 的夹角为 θ, 则

$$\cos\theta=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}=\frac{1}{\sqrt{26}}.$$

由余弦定理,

$$AB^2=6^2+6^2-2\cdot6\cdot6\cdot\frac{1}{\sqrt{26}},\quad AD^2=6^2+6^2-2\cdot6\cdot6\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{26}}\right)$$

于是矩形 $ABCD$ 面积为

$$[ABCD]=AB\cdot AD=\sqrt{\frac{72(\sqrt{26}-1)}{\sqrt{26}}\cdot\frac{72(\sqrt{26}+1)}{\sqrt{26}}}=\frac{180\sqrt{26}}{13}$$

58. 已知四面体 $ABCD$ 顶点坐标分别为 $A(0,0,0),B(1,0,0),C(0,1,0),D(1,1,1)$, 求此四面体内切球球心的 x 坐标。

四面体各面所在平面为:

$$\begin{cases}E_1=\triangle ABC: z=0\\ E_2=\triangle ACD: x-z=0\\ E_3=\triangle ABD: -y+z=0\\ E_4=\triangle BCD: x+y-z=1\end{cases}$$

设球心为 $P(a,b,c)$, 球心到四面的距离相等, 即

$$\begin{cases}d(P,E_1)=c\\ d(P,E_2)=\dfrac{|a-c|}{\sqrt{2}}\\ d(P,E_3)=\dfrac{|-b+c|}{\sqrt{2}}\\ d(P,E_4)=\dfrac{|a+b-c-1|}{\sqrt{3}}\end{cases}$$

由于 $\triangle OAB$ 为等腰直角三角形, 故 $a=b$。假设 $a<c$, 则

$$d(P,E_2)=\frac{c-a}{\sqrt{2}}=c\Rightarrow a=(1-\sqrt{2})c<0,$$

不合题意, 故 $a\geqslant c$, 得

$$a=(\sqrt{2}+1)c$$

考虑

$$d(P,E_4)=\frac{|(2\sqrt{2}+1)c-1|}{\sqrt{3}}=c$$

假设 $c\geqslant\dfrac{1}{2\sqrt{2}+1}$, 则

$$c=\frac{1}{2\sqrt{2}-\sqrt{3}+1}\Rightarrow a=\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}-\sqrt{3}+1}>1,$$

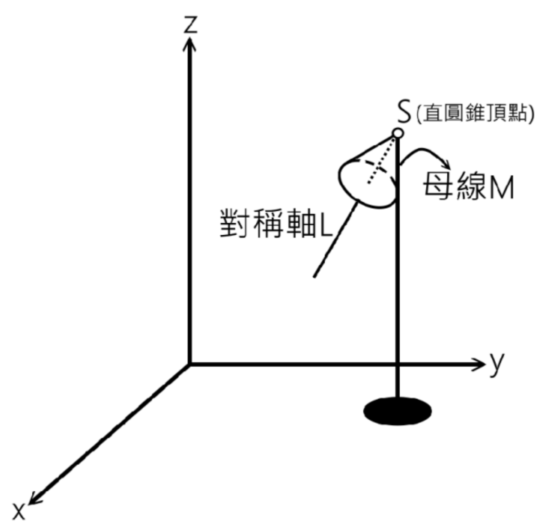
球心在四面体外，不合题意。因此

$$c \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}+1} \Rightarrow c = \frac{1}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+1},$$

故内切球球心的 x 坐标为

$$a = \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}$$

59. 某房间内设有一盏聚光灯，其照射的光线为直圆锥状。为描述其空间几何关系，建立如图所示的空间坐标系。已知光源 $S(2\sqrt{6}, 3\sqrt{6}, 12)$，分别沿对称轴 L 的方向向量 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{3}\right)$ 以及其中一条母线 M 的方向向量 $(0,0,-1)$ 向地面 $z=0$ 照射。试问：此聚光灯照射在墙面（即平面 $y=0$）上的光线边缘，为哪一种圆锥曲线图形的一部分？该圆锥曲线在墙面上的顶点坐标为何？



直线 L 的方向向量 $\vec{\ell} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{3}\right)$，母线 M 的方向向量 $\vec{m} = (0,0,-1)$。设两直线夹角为 θ，则

$$\cos\theta = \frac{\vec{\ell}\cdot\vec{m}}{|\vec{\ell}||\vec{m}|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = 30^\circ \text{ 或} 150^\circ$$

假设点 $P(x,y,z)$ 在光线边缘上，则

$$\overrightarrow{SP} = (x-2\sqrt{6},\ y-3\sqrt{6},\ z-12)$$

与 $\vec{\ell}$ 的夹角为 $30°$, 由 $\overrightarrow{SP}\cdot\vec{\ell}=|\overrightarrow{SP}|\,|\vec{\ell}|\cos 30°$ 得到

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(x-2\sqrt{6})-\frac{\sqrt{2}}{2}(y-3\sqrt{6})-\sqrt{3}(z-12)=\sqrt{3}\sqrt{(x-2\sqrt{6})^2+(y-3\sqrt{6})^2+(z-12)^2}$$

在墙面 $y=0$ 代入上式, 化简得

$$5x^2+2\sqrt{6}xz-50\sqrt{6}x+12z+318=0$$

判别式为

$$(2\sqrt{6})^2-0=24>0$$

因此图形为双曲线。对称轴 L 的参数方程为

$$\frac{x-2\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{y-3\sqrt{6}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{z-12}{-\sqrt{3}}$$

在 $y=0$ 的投影为

$$\frac{x-2\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{z-12}{-\sqrt{3}}\Rightarrow x=2\sqrt{6}-\frac{z-12}{\sqrt{6}}$$

代入双曲线方程可得

$$x=-\sqrt{6}\pm 18\sqrt{\frac{2}{7}},\quad z=30\pm 36\sqrt{\frac{3}{7}}$$

由图形可知, 选择

$$z=30-36\sqrt{\frac{3}{7}}$$

因此顶点坐标为

$$\left(-\sqrt{6}+18\sqrt{\frac{2}{7}},\,0,\,30-36\sqrt{\frac{3}{7}}\right)$$

微积分

极限

1.

$$\lim_{x\to 0}\lfloor x\rfloor$$

由于

$$\lim_{x\to 0^+}\lfloor x\rfloor = 0, \quad \lim_{x\to 0^-}\lfloor x\rfloor = -1$$

极限 $\lim\limits_{x\to 0}\lfloor x\rfloor$ 不存在。

2.

$$\lim_{x\to 3}(\lceil x\rceil - \lfloor x\rfloor)$$

由于

$$\lim_{x\to 3^+}(\lceil x\rceil - \lfloor x\rfloor) = \lim_{x\to 3^+}\lceil x\rceil - \lim_{x\to 3^+}\lfloor x\rfloor = 4-3=1$$

且

$$\lim_{x\to 3^-}(\lceil x\rceil - \lfloor x\rfloor) = \lim_{x\to 3^-}\lceil x\rceil - \lim_{x\to 3^-}\lfloor x\rfloor = 3-2=1$$

故

$$\lim_{x\to 3}(\lceil x\rceil - \lfloor x\rfloor) = 1$$

3.

$$\lim_{x\to 0}\left\lfloor\frac{\sin x}{x}\right\rfloor$$

由于

$$\lim_{x\to 0^+}\left\lfloor\frac{\sin x}{x}\right\rfloor = \lim_{x\to 0^-}\left\lfloor\frac{\sin x}{x}\right\rfloor = 0$$

故

$$\lim_{x\to 0}\left\lfloor\frac{\sin x}{x}\right\rfloor = 0$$

4.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{x}$$

有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\\ &= 1\cdot 1\\ &= 1\end{aligned}$$

5.

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta-\theta\cos\theta}{\sin\theta\tan\theta}$$

有

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta-\theta\cos\theta}{\sin\theta\tan\theta} &= \lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\frac{\sin\theta}{\theta}}\cdot\frac{1}{\tan\theta}\\ &= \lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\cdot\frac{1}{\frac{\sin\theta}{\theta}}\cdot\frac{\theta}{\tan\theta}\cdot\theta\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{1}\cdot 0\\ &= 0\end{aligned}$$

6.

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\left(\frac{1-\cos\theta}{2}\right)}{\theta^4}$$

有

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\left(\frac{1-\cos\theta}{2}\right)}{\theta^4} &= \lim_{\theta\to 0}\left[\frac{1-\cos\left(\frac{1-\cos\theta}{2}\right)}{\left(\frac{1-\cos\theta}{2}\right)^2}\cdot\left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)^2\cdot\frac{1}{4}\right]\\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{32}\end{aligned}$$

其中

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{x^2}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}$$

7.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin^{-1}x\tan x}$$

有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin^{-1}x\tan x}&=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin^{-1}x\cdot\frac{\sin x}{\cos x}}\\&=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1-\cos x}{x^2}\right)\cdot\frac{x}{\sin^{-1}x}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\cos x\\&=-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot 1\\&=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

8. 试求

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[5]{x^5+3x^4+4x^3+3x}-\sqrt[3]{x^3+3x^2+4x+1}\right).$$

由洛必达法则,

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[5]{x^5+3x^4+4x^3+3x}-\sqrt[3]{x^3+3x^2+4x+1}\right)\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[5]{1+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}+\frac{3}{x^4}}-\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^3}}}{\frac{1}{x}}\\&\overset{H}{=}-\lim_{x\to\infty}x^2\left(\frac{1}{5}\left(1+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}+\frac{3}{x^4}\right)^{-\frac{4}{5}}\left(-\frac{3}{x^2}-\frac{8}{x^3}-\frac{12}{x^5}\right)\right.\\&\qquad\left.-\frac{1}{3}\left(1+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(-\frac{3}{x^2}-\frac{8}{x^3}-\frac{3}{x^4}\right)\right)\\&=\frac{3}{5}-1=-\frac{2}{5}\end{aligned}$$

9. 已知等差数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 公差均不为 0, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=5$, 求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n\cdot b_{2n}}.$$

设 $\{a_n\},\{b_n\}$ 公差为 d_1,d_2, 则

$$a_n=a_1+(n-1)d_1,\quad b_n=b_1+(n-1)d_2.$$

由已知极限得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+(n-1)d_1}{b_1+(n-1)d_2}=\frac{d_1}{d_2}=5.$$

所以 $d_1=5d_2$, 因此所求极限为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{2}\big(2a_1+(n-1)d_1\big)}{n\big(b_1+(2n-1)d_2\big)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2a_1+(n-1)d_1}{2\big(b_1+(2n-1)d_2\big)}=\frac{d_1}{4d_2}=\frac{5}{4}$$

10. 设 $a_1+a_2+\cdots+a_n=n^3-2n$, 试求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{a_3+a_6+\cdots+a_{3n}}-\sqrt[3]{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}}{n}$$

由

$$S(n)=\sum_{k=1}^{n}a_k=n^3-2n$$

得

$$a_n=S(n)-S(n-1)=n^3-2n-\big[(n-1)^3-2(n-1)\big]=3n^2-3n-1$$

于是

$$a_{3k}=27k^2-9k-1,\quad a_{2k}=12k^2-6k-1,$$

且

$$\sum_{k=1}^{n}a_{3k}=\frac{27}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{9}{2}n(n+1)-n=9n^3+9n^2-n,$$

$$\sum_{k=1}^{n}a_{2k}=2n(n+1)(2n+1)-3n(n+1)-n=4n^3+3n^2-2n$$

故极限为

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{9+\frac{9}{n}-\frac{1}{n^2}}-\sqrt[3]{4+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}\right)=\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{4}$$

11.

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{1+3^{2n}}+\sqrt[n]{3^{2n}+5^{2n}}+\sqrt[n]{5^{2n}+7^{2n}}+\cdots+\sqrt[n]{(2m-1)^{2n}+(2m+1)^{2n}}}{m^3}$$

首先有

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{1+3^{2n}}+\sqrt[n]{3^{2n}+5^{2n}}+\cdots+\sqrt[n]{(2m-1)^{2n}+(2m+1)^{2n}}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(3^2\sqrt[n]{\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}+1}+5^2\sqrt[n]{\left(\frac{3}{5}\right)^{2n}+1}+\cdots+(2m+1)^2\sqrt[n]{\left(\frac{2m-1}{2m+1}\right)^{2n}+1}\right)\\&=3^2+5^2+\cdots+(2m+1)^2=\sum_{k=1}^{m}(2k+1)^2=\frac{2}{3}m(m+1)(2m+1)+2m(m+1)+m\end{aligned}$$

因此, 原式

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\frac{2}{3}m(m+1)(2m+1)+2m(m+1)+m}{m^3}=\frac{4}{3}$$

12.

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_{\cos x}^{1}e^{-y^2}\,dy}{x\sin x}$$

由洛必达法则,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\int_{\cos x}^{1}e^{-y^2}\,dy}{x\sin x}&\overset{H}{=}\lim_{x\to0}\frac{\sin x\cdot e^{-(\cos x)^2}}{\sin x+x\cos x}\\&\overset{H}{=}\lim_{x\to0}\frac{\cos x(1+2\sin^2 x)\cdot e^{-(\cos x)^2}}{2\cos x-x\sin x}\\&=\frac{1}{2e}\end{aligned}$$

13.

$$\lim_{x\to0}\frac{\left(\int_0^x t\cos t^2\,dt\right)^2}{\int_0^x\sin t^2\,dt}$$

设

$$f(x)=\left(\int_0^x t\cos t^2\,dt\right)^2,\quad g(x)=\int_0^x \sin t^2\,dt$$

则

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}\overset{H}{=}\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

分别求导:

$$f'(x)=2\left(\int_0^x t\cos t^2\,dt\right)\cdot x\cos x^2,\quad g'(x)=\sin x^2$$

代入得:

$$\lim_{x\to0}\frac{2\left(\int_0^x t\cos t^2\,dt\right)\cdot x\cos x^2}{\sin x^2}$$

注意 $\int_0^x t\cos t^2\,dt\backsim\frac{x^2}{2}$,$\sin x^2\backsim x^2$, 因此极限等于

$$\lim_{x\to0}\frac{2\cdot\frac{x^2}{2}\cdot x\cdot 1}{x^2}=\lim_{x\to0}x=0$$

所以原式极限为 0。(待验证)

14. 求实数 a,b，使得

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{ax+b}-2}{x}=1$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{ax+b}-2}{x}\cdot\frac{\sqrt{ax+b}+2}{\sqrt{ax+b}+2}=\lim_{x\to0}\frac{ax+b-4}{x(\sqrt{ax+b}+2)}$$

由于当 $x\to0$ 时分母趋于 0，要使极限存在，分子也必须趋于 0，因此

$$a\cdot0+b-4=0$$

从而 $b=4$。于是

$$\lim_{x\to0}\frac{a}{\sqrt{ax+4}+2}=1$$

所以

$$\frac{a}{\sqrt{4}+2}=1$$

解得 $a=4$。

15. 已知

$$\lim_{x\to -1}\frac{ax^2+3x+b}{x+1}=2,\quad a,b\in\mathbb{R}$$

试求 (a,b)。

当 $x\to -1, x+1\to 0$; 欲使该极限存在且等于 2, 分子 ax^2+3x+b 在 $x\to -1$ 也应趋于 0, 即

$$\lim_{x\to -1}(ax^2+3x+b)=0\Rightarrow a(-1)^2+3(-1)+b=0\Rightarrow a+b=3 \tag{1}$$

又原极限中分子分母处处可导, 且极限

$$\lim_{x\to -1}\frac{(ax^2+3x+b)'}{(x+1)'}=\lim_{x\to -1}\frac{2ax+3}{1}=-2a+3$$

存在, 则由洛必达法则,

$$\lim_{x\to -1}\frac{ax^2+3x+b}{x+1}\overset{H}{=}-2a+3=2\Rightarrow (a,b)=\left(\frac{1}{5},\frac{14}{5}\right)$$

16. 已知 a,b 为正整数, 设函数

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2x^{2n+1}+ax^2+bx-1}{2x^{2n}+3},$$

若 $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)$ 为连续函数, 求序对 (a,b)。

首先注意到

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2x^{2n+1}+ax^2+bx-1}{2x^{2n}+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{x+\frac{ax^2+bx-1}{2x^{2n}}}{1+\frac{3}{2x^{2n}}}=\begin{cases}x, & |x|>1,\\ \dfrac{ax^2+bx-1}{3}, & |x|<1.\end{cases}$$

由连续性,

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=1,\quad \lim_{x\to 1^-}f(x)=\frac{a+b-1}{3},\quad f(1)=\lim_{n\to\infty}\frac{2+a+b-1}{2+3}=\frac{a+b+1}{5}$$

可得

$$\frac{a+b+1}{5}=1=\frac{a+b-1}{3}\quad\Rightarrow\quad a+b=4 \tag{1}$$

同理,

$$\lim_{x\to -1^+}f(x)=\frac{a-b-1}{3},\quad \lim_{x\to -1^-}f(x)=-1,\quad f(-1)=\frac{-2+a-b-1}{5}=\frac{a-b-3}{5}$$

可得
$$\frac{a-b-3}{5}=-1=\frac{a-b-1}{3} \quad \Rightarrow \quad a-b=-2 \tag{2}$$
由 (1), (2) 得
$$(a,b)=(1,3)$$

17. 若
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{f(x)\sin x+1}-1}{e^{4x}-1}=2,$$
求
$$\lim_{x\to 0} f(x)$$

当 $x\to 0$ 时, 原式为不定型 $\frac{0}{0}$, 可用洛必达法则:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{f(x)\sin x+1}-1}{e^{4x}-1}\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{f(x)\sin x+1}}\cdot[f'(x)\sin x+f(x)\cos x]}{4e^{4x}}.$$
当 $x\to 0$,$\sin x\to 0$,$\cos x\to 1$,$e^{4x}\to 1$,$\sqrt{f(x)\sin x+1}\to 1$, 上式化简为:
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{8}=2\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=16$$

18. 定义序列 $\{x_n\}_{n=2}^{\infty}$ 如下:
$$(n+x_n)[\sqrt{2}-1]=\ln 2.$$
求 $\lim_{n\to\infty} x_n$。

由方程可解得
$$x_n=\frac{\ln 2}{2^{1/n}-1}-n,$$

此形式为 $\infty-\infty$。令 $u=1/n$，并使用洛必达法则两次，有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} x_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{\ln 2 - n\cdot 2^{1/n}+n}{2^{1/n}-1}\\ &= \lim_{u\to 0}\frac{u\ln 2 - 2^u + 1}{u2^u - u}\\ &= \lim_{u\to 0}\frac{\ln 2 - 2^u\ln 2}{2^u - 1 + u2^u\ln 2}\\ &= \lim_{u\to 0}\frac{-2^u(\ln 2)^2}{2^u\ln 2 + 2^u\ln 2 + u2^u(\ln 2)^2}\\ &= \frac{-(\ln 2)^2}{2\ln 2}\\ &= -\frac{1}{2}\ln 2.\end{aligned}$$

因此，

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\frac{1}{2}\ln 2.$$

19. 计算极限

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^3}\int_0^x \frac{t\ln(t+1)}{t^4+\frac{1}{6}}dt\right]$$

先将表达式写成分数形式：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \frac{t\ln(t+1)}{t^4+\frac{1}{6}}dt}{x^3}$$

应用洛必达法则（分子分母同时求导）：

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{t\ln(t+1)}{t^4+\frac{1}{6}}dt}{\frac{d}{dx}(x^3)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x\ln(x+1)}{x^4+\frac{1}{6}}}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x\ln(x+1)}{3x^2(x^4+\frac{1}{6})}$$

使用自然对数的级数展开 $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots$：

$$\frac{x\ln(1+x)}{3x^2(x^4+\frac{1}{6})} = \frac{x(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+O(x^4))}{3x^2(x^4+\frac{1}{6})} = \frac{x^2-\frac{1}{2}x^3+O(x^4)}{3x^2(x^4+\frac{1}{6})}$$

提取 x^2 并化简：

$$=\frac{x^2(1-\frac{1}{2}x+O(x^2))}{3x^2(x^4+\frac{1}{6})} = \frac{1-\frac{1}{2}x+O(x^2)}{3(x^4+\frac{1}{6})}$$

当 $x\to 0$ 时：

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{2}x+O(x^2)}{3(x^4+\frac{1}{6})} = \frac{1}{3\cdot\frac{1}{6}} = 2$$

因此极限为：

$$2$$

20.

$$\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{x^2+2x-1}-\sqrt{x^2-1}\right]$$

使用共轭式化简：

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+2x-1)-(x^2-1)}{\sqrt{x^2+2x-1}+\sqrt{x^2-1}}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x-1}+\sqrt{x^2-1}}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\\
&= \frac{2}{1+1}=1.
\end{aligned}$$

b) 指数极限

设

$$L=\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{x^2+2x-1}-\sqrt{x^2-1}\right]^x.$$

取自然对数：

$$\ln L=\lim_{x\to\infty}x\ln\left(\sqrt{x^2+2x-1}-\sqrt{x^2-1}\right).$$

使用 $\infty\cdot 0$ 型转为分式以使用 L’ Hospital 法：

$$\ln L=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\sqrt{x^2+2x-1}-\sqrt{x^2-1}\right)}{\frac{1}{x}}.$$

对分子和分母分别求导：

$$\frac{d}{dx}\ln\left(\sqrt{x^2+2x-1}-\sqrt{x^2-1}\right)=\frac{\frac{1}{2}(2x+2)(x^2+2x-1)^{-1/2}-\frac{1}{2}(2x)(x^2-1)^{-1/2}}{\sqrt{x^2+2x-1}-\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{x}=-\frac{1}{x^2}.$$

于是：

$$\ln L = \lim_{x\to\infty} -x^2 \cdot \frac{(x+1)/\sqrt{x^2+2x-1} - x/\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+2x-1} - \sqrt{x^2-1}}.$$

使用共轭式化简分子：

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-1}} - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2+2x-1}}{\sqrt{x^2+2x-1}\sqrt{x^2-1}}.$$

代回：

$$\ln L = -\lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)x}{\sqrt{x^2+2x-1}\sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2+2x-1}}{\sqrt{x^2+2x-1} - \sqrt{x^2-1}}.$$

化简极限：

$$\ln L = -\lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)x}{\sqrt{x^2+2x-1}\sqrt{x^2-1}} = -\frac{1}{2}.$$

因此：

$$L = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

21. 设

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = 0,$$

求

$$\lim_{x\to 0} \frac{6+f(x)}{x^2}$$

原极限为

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = 0.$$

利用 $\sin 6x = 6x - \frac{(6x)^3}{6} + o(x^3) = 6x - 36x^3 + o(x^3)$，代入得

$$\frac{6x - 36x^3 + xf(x)}{x^3} = \frac{6x + xf(x)}{x^3} - 36 + o(1) = \frac{6+f(x)}{x^2} - 36 + o(1).$$

极限存在且为 0, 则

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{6+f(x)}{x^2}-36\right)=0 \implies \lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}=36.$$

待验证

22. 若 $f(x)$ 为满足

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=36,\quad \lim_{x\to -1}\frac{f(x)}{x+1}=-36,\quad \lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=0,\quad \lim_{x\to -2}\frac{f(x)}{x+2}=0$$

的最低次多项式, 求 $f(3)$。

设

$$f(x)=(ax+b)(x-1)(x+1)(x-2)^2(x+2)^2$$

由

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=36,\quad \lim_{x\to -1}\frac{f(x)}{x+1}=-36$$

得方程式

$$\begin{cases}(a+b)\cdot 2\cdot 1^2\cdot 3^2=36\\(-a+b)\cdot(-2)\cdot(-3)^2\cdot 1^2=-36\end{cases}\Rightarrow a=0,b=2$$

因此

$$f(x)=2(x^2-1)(x-2)^2(x+2)^2\Rightarrow f(3)=400$$

23.

$$\lim_{x\to 1}\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})}{1+\cos\pi x}$$

泰勒展开:

$$\sqrt{x}=1-\frac{1}{2}(1-x)+o(1-x),\quad \sqrt[3]{x}=1-\frac{1}{3}(1-x)+o(1-x),$$

$$\cos(\pi x)=\cos[\pi(1-(1-x))]=-1+\frac{1}{2}\pi^2(1-x)^2+o((1-x)^2).$$

于是分子变为:

$$(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\approx\left(\frac{1}{2}(1-x)\right)\left(\frac{1}{3}(1-x)\right)=\frac{1}{6}(1-x)^2.$$

分母为:

$$1+\cos(\pi x)\approx 1-1+\frac{1}{2}\pi^2(1-x)^2=\frac{1}{2}\pi^2(1-x)^2.$$

因此原式化为:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{6}(1-x)^2}{\frac{1}{2}\pi^2(1-x)^2}=\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{\pi^2}=\boxed{\frac{1}{3\pi^2}}.$$

(待验证)

24. 若

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^4+3}-[A+B(x-1)+C(x-1)^2]}{(x-1)^2}=0,$$

求常数 A,B,C。

令

$$f(x)=\sqrt{x^4+3},\quad P(x)=A+B(x-1)+C(x-1)^2.$$

题设即要求: 函数 $f(x)$ 与多项式 $P(x)$ 在 $x=1$ 处展开到二阶, 余项为 $o((x-1)^2)$, 因此只需令 $P(x)$ 是 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的二阶泰勒展开。

计算 $f(1),f'(1),f''(1)$:

$$\begin{aligned}
f(x)&=\sqrt{x^4+3}=(x^4+3)^{\frac{1}{2}},\\
f'(x)&=\frac{1}{2}(x^4+3)^{-\frac{1}{2}}\cdot 4x^3=\frac{2x^3}{\sqrt{x^4+3}},\\
f''(x)&=\frac{d}{dx}\left(\frac{2x^3}{\sqrt{x^4+3}}\right)=\frac{6x^2\cdot\sqrt{x^4+3}-2x^3\cdot\frac{1}{2}(x^4+3)^{-\frac{1}{2}}\cdot 4x^3}{x^4+3}\\
&=\frac{6x^2(x^4+3)-4x^6}{(x^4+3)^{3/2}}.
\end{aligned}$$

代入 $x=1$:

$$f(1)=\sqrt{1^4+3}=\sqrt{4}=2\Rightarrow A=2,$$

$$f'(1)=\frac{2\cdot 1^3}{\sqrt{4}}=\frac{2}{2}=1\Rightarrow B=1,$$

$$f''(1)=\frac{6\cdot 1^2\cdot 4-4\cdot 1^6}{(4)^{3/2}}=\frac{24-4}{8}=\frac{20}{8}=\frac{5}{2}.$$

所以

$$C=\frac{1}{2}f''(1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}=\frac{5}{4}.$$

故答案为 $\boxed{A=2,\ B=1,\ C=\frac{5}{4}}$。(待验证)

25.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{3n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{3n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{3n^2+2n}}\right)$$

令

$$L=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{3n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{3n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{3n^2+2n}}\right)$$

由夹挤定理,

$$\frac{2}{\sqrt{3}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{\sqrt{3n^2}}\right)<L<\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{\sqrt{3n^2+2n}}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\Rightarrow L=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

26. 设 $a_n=\sqrt{1\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 3}+\cdots+\sqrt{n(n+1)}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$ 的值。

发现到

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k^2}<a_n<\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(k+1)^2}\Rightarrow\frac{n(n+1)}{2}<a_n<\frac{n(n+3)}{2}$$

于是有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}<\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}<\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+3)}{2n^2}\Rightarrow\frac{1}{2}<\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}<\frac{1}{2}$$

由夹挤定理,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=\frac{1}{2}$$

27. 设 $a_n=\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 之值。

由

$$(2n-1)(2n+1)<(2n)^2$$

令 $S=1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)$, 则

$(2n+1)S^2=(1\cdot 3)(3\cdot 5)(5\cdot 7)\cdots((2n-3)(2n-1))((2n-1)(2n+1))<2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot\cdots\cdot(2n)^2$

即

$$\sqrt{2n+1}S<2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)$$

于是

$$\Rightarrow 0<a_n=\frac{S}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

由夹挤定理,

$$0<\lim_{n\to\infty}a_n<\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=0$$

28. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{kn}}$$

先对通项进行估计。由不等式:

$$\sqrt{k-1}\sqrt{k}<2\sqrt{k}<\sqrt{k}+\sqrt{k+1}\implies 2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})<\frac{2}{\sqrt{k}}<2(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})$$

两边同时除以 $2\sqrt{n}$ 并累加:

$$2\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})<\frac{2}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}<2\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})$$

化简两端和式:

$$\frac{2\sqrt{n+1}-2}{\sqrt{n}}<\frac{2}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}<\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}}=2$$

取极限:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n+1}-2}{\sqrt{n}}=2$$

由夹逼定理得:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{kn}}=2$$

29. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3+n+1}+\frac{2}{n^3+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^3+n+n}\right)$$

注意到项数为 n，使用夹逼定理 (Squeeze Theorem)。

先对总和进行估计：

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^3+n+n}<\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^3+n+k}<\frac{1+2+\cdots+n}{n^3+n+1}$$

利用等差数列求和公式：

$$\frac{n(n+1)}{2(n^3+2n)}<\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^3+n+k}<\frac{n(n+1)}{2(n^3+1)}$$

计算上下界的极限：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^3+2n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2n^3+4n}=\frac{1}{2}$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^3+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2n^3+2}=\frac{1}{2}$$

由夹逼定理得：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^3+n+k}=\frac{1}{2}$$

30. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k^2+n+k}$$

先估算 $\sqrt{k^2+n+k}$ 的上下界:

$$\sqrt{k^2}=k<\sqrt{k^2+n+k}<\sqrt{k^2+2n}<k+\sqrt{2n},\quad 1\leqslant k\leqslant n$$

对求和式两边除以 n^2：

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k<\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k^2+n+k}\leqslant\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(k+\sqrt{2n})$$

计算上下界的极限：

下界:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{1}{2}$$

上界:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(k+\sqrt{2n})&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{2n}\\&=\frac{1}{2}+\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{2n}}{n^2}\\&=\frac{1}{2}+\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\\&=\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

由夹逼定理得:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k^2+n+k}=\frac{1}{2}$$

31. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+\frac{1}{n+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n}}\right)$$

注意到项数为 n，使用夹逼定理 (Squeeze Theorem)。

所有项满足：

$$\frac{1}{n+\sqrt{n}}\leqslant\frac{1}{n+\sqrt{k}}\leqslant\frac{1}{n+1},\quad 1\leqslant k\leqslant n$$

对总和进行估计：

$$\frac{n}{n+\sqrt{n}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+\sqrt{k}}\leqslant\frac{n}{n+1}$$

计算上下界的极限：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+1/\sqrt{n}}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+1/n}=1$$

由夹逼定理得：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n}}\right)=1$$

32. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k\sin^2(n!)}{n+2}, 0<k<1$$

由于

$$0\leqslant \sin^2 x\leqslant 1,\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

得到不等式:

$$0\leqslant\frac{n^k\sin^2(n!)}{n+2}\leqslant\frac{n^k}{n+2}$$

当 $0<k<1$ 时，上界的极限为:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{n+2}=0$$

由夹逼定理得:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k\sin^2(n!)}{n+2}=0$$

33. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+(2|\sin(n^n)|)^n}$$

由于

$$0\leqslant|\sin(n^n)|\leqslant 1$$

得到上下界:

$$\sqrt[n]{3^n}\leqslant\sqrt[n]{3^n+(2|\sin(n^n)|)^n}\leqslant\sqrt[n]{3^n+2^n}\leqslant\sqrt[n]{2\cdot 3^n}$$

计算上下界的极限:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2\cdot 3^n}=3$$

由夹逼定理得:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+(2|\sin(n^n)|)^n}=3$$

34. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足

$$\frac{2n^2-7}{4n+5}<a_n<\frac{3n^2+8}{6n-1},\quad n\in\mathbb{Z}^+$$

求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3na_n}{(n+1)^2}$$

将不等式两边同时乘以 $\frac{3n}{(n+1)^2}$:

$$\frac{3n}{(n+1)^2}\cdot\frac{2n^2-7}{4n+5}<\frac{3na_n}{(n+1)^2}<\frac{3n}{(n+1)^2}\cdot\frac{3n^2+8}{6n-1}$$

对两端取极限:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n(2n^2-7)}{(4n+5)(n+1)^2}\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{3na_n}{(n+1)^2}\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{3n(3n^2+8)}{(6n-1)(n+1)^2}$$
$$\frac{3}{2}\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{3na_n}{(n+1)^2}\leqslant\frac{3}{2}$$

由夹逼定理得:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3na_n}{(n+1)^2}=\frac{3}{2}$$

35. 已知 $x_1=1$, 且对每个正整数 $n\geqslant 2$,

$$n(x_n)^2-x_{n-1}-n=0,\quad x_n\geqslant 0.$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 或证明 $\{x_n\}$ 发散。

由等式得对所有 $n\geqslant 2$, 有

$$x_n=\sqrt{1+\frac{x_{n-1}}{n}}$$

首先证明 $x_n\leqslant 2$: 有 $x_1=1\leqslant 2$。假设 $n\geqslant 2$ 有 $x_n\leqslant 2$ 成立, 则

$$x_n=\sqrt{1+\frac{x_n}{n+1}}\leqslant\sqrt{1+2}<2$$

故由数学归纳法得对所有 $n\geqslant 2$ 都皆有 $x_n\leqslant 2$, 故

$$1\leqslant x_n=\sqrt{1+\frac{x_{n-1}}{n}}\leqslant\sqrt{1+\frac{2}{n}}$$

由夹挤定理,

$$\lim_{n\to\infty}x_n=1$$

36. (a) 证明:

$$\int_0^1\left(1+\sin\frac{\pi}{2}x\right)^n dx>\frac{2^{n+1}-1}{n+1}\quad(n=1,2,\dots)$$

由 $\sin x \geqslant \frac{2}{\pi}x \quad (0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2})$ 得:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \geqslant x \quad (0 \leqslant x \leqslant 1),$$

从而

$$\int_0^1 \left(1+\sin\frac{\pi}{2}x\right)^n dx \geqslant \int_0^1 (1+x)^n dx = \left.\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

因此原不等式成立。

(b) 求极限:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_0^1 \left(1+\sin\frac{\pi}{2}x\right)^n dx\right]^{\frac{1}{n}}$$

注意到:

$$\frac{2^n}{n+1} < \frac{2^{n+1}-1}{n+1} \leqslant \int_0^1 \left(1+\sin\frac{\pi}{2}x\right)^n dx \leqslant \int_0^1 2^n dx = 2^n.$$

对上述不等式取 n 次方根, 得:

$$2(n+1)^{-\frac{1}{n}} < \left[\int_0^1 \left(1+\sin\frac{\pi}{2}x\right)^n dx\right]^{\frac{1}{n}} \leqslant 2.$$

因为 $(n+1)^{-\frac{1}{n}} \to 1$, 由夹逼定理可得:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_0^1 \left(1+\sin\frac{\pi}{2}x\right)^n dx\right]^{\frac{1}{n}} = 2$$

37. (a) 设 n 是正整数, 计算

$$\int_0^{n\pi} x\sin^2 x\,dx$$

对非负整数 k,

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} x\sin^2 x\,dx = \int_0^{\pi} (k\pi+x)\sin^2 x\,dx$$

利用恒等式 $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, 得:

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (k\pi+x)(1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\left.(k\pi+x)\right|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (k\pi+x)\cos 2x\,dx\right)$$

由于 $\int_0^\pi \cos 2x\, dx = 0$ 且 $\int_0^\pi x\cos 2x\, dx = 0$, 所以最后只剩:

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} x\sin^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi (k\pi + x)\, dx = \frac{1}{2}\left(k\pi^2 + \frac{\pi^2}{2}\right) = \frac{\pi^2(2k+1)}{4}$$

所以,

$$\int_0^{n\pi} x\sin^2 x\, dx = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\pi^2(2k+1)}{4} = \frac{\pi^2}{4}\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \frac{\pi^2}{4}\cdot n^2$$

因为 $\sum\limits_{k=0}^{n-1}(2k+1) = n^2$, 所以原式为

$$\frac{\pi^2 n^2}{4}$$

(b) 证明对任何正实数 p, 函数极限

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\int_0^x t|\sin t|^p\, dt$$

存在.

记

$$S_0 = \int_0^\pi |\sin t|^p\, dt, \qquad S_1 = \int_0^\pi t|\sin t|^p\, dt.$$

对任意非负整数 k, 有

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} t|\sin t|^p\, dt = \int_0^\pi (k\pi + x)|\sin x|^p dx = k\pi S_0 + S_1.$$

若设 $x = (n+\alpha)\pi$ 且 $0 \leqslant \alpha < 1$, 则

$$\int_0^x t|\sin t|^p dt = \sum_{k=0}^{n-1}(k\pi S_0 + S_1) + \int_{n\pi}^x t|\sin t|^p dt.$$

利用估计（注意 $\int_{n\pi}^x t|\sin t|^p dt \leqslant (n+1)\pi\cdot S_0$）, 得上下界:

$$\frac{\frac{1}{2}n(n-1)\pi S_0 + nS_1}{(n+1)^2\pi^2} \leqslant \frac{1}{x^2}\int_0^x t|\sin t|^p dt \leqslant \frac{\frac{1}{2}n(n+1)\pi S_0 + (n+1)S_1}{n^2\pi^2}.$$

随着 $n\to\infty$, 上下界极限均趋于 $\frac{S_0}{2\pi}$, 所以由夹逼定理知极限存在, 且为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\int_0^x t|\sin t|^p dt = \frac{S_0}{2\pi}$$

38. (a) 求

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2 x} dx$$

及

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x} dx$$

设

$$I_1 = \int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2 x}\, dx, \quad I_2 = \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}\, dx.$$

发现

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{1+\sin^2 x+\cos^2 x}{1+\cos^2 x}\, dx = \frac{1}{2}(I_2+\pi) \Rightarrow I_2 = 2I_1 - \pi$$

所以只需计算 I_1 即可得出两个积分。发现被积函数在 $x = \dfrac{\pi}{2}$ 处不连续, 将 I_1 写成

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos^2 x} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2 x} dx$$

其中第一个积分变为

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 x}{2+\tan^2 x} dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{2+u^2} du = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

对于第二个积分如下, 设 $x = \pi - y, dx = -dy$,

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1}{1+\cos^2(\pi-y)}(-dy) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos^2 y} dy = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

所以

$$I_1 = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

$$I_2 = 2I_1 - \pi = 2\cdot\frac{\pi\sqrt{2}}{2} - \pi = \pi(\sqrt{2}-1)$$

(b) 证明

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\displaystyle\int_0^x \frac{\sin^2 t}{1+\cos^2 t} dt}{\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+\cos^2 t} dt} = 2-\sqrt{2}$$

取 $n=\left\lfloor\dfrac{x}{\pi}\right\rfloor$, 则

$$\int_0^x \frac{1}{1+\cos^2 t}\,dt=\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{1}{1+\cos^2 t}\,dt+\int_{k\pi}^{x}\frac{1}{1+\cos^2 t}\,dt$$

于是

$$\frac{n\pi}{\sqrt{2}}\leqslant\int_0^x\frac{1}{1+\cos^2 t}\,dt\leqslant\frac{(n+1)\pi}{\sqrt{2}}$$

同理

$$n\pi(\sqrt{2}-1)\leqslant\int_0^x\frac{1}{1+\cos^2 t}\,dt\leqslant(n+1)\pi(\sqrt{2}-1)$$

于是

$$\frac{n}{n+1}(2-\sqrt{2})\leqslant\frac{\displaystyle\int_0^x\frac{\sin^2 t}{1+\cos^2 t}dt}{\displaystyle\int_0^x\frac{1}{1+\cos^2 t}dt}\leqslant\frac{n+1}{n}(2-\sqrt{2}),$$

令 $x\to\infty$ 便得结论。

39. 对每个正整数 n，设

$$R_n=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant n,\ 0\leqslant y\leqslant\sqrt{x}\}$$

记 $N(n)$ 为 R_n 中坐标都是整数的点的个数。求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N(n)}{n^{3/2}}$$

对每个正整数 n，满足 $0\leqslant y\leqslant\sqrt{k}$ 的整数 y 个数为 $[\sqrt{k}]+1$，所以

$$N(n)=\sum_{k=0}^{n}([\sqrt{k}]+1)=(n+1)+\sum_{k=1}^{n}[\sqrt{k}]$$

由于 $\sqrt{k}-1<[\sqrt{k}]\leqslant\sqrt{k}$，并且

$$\int_0^n\sqrt{x}\,dx\leqslant\sum_{k=1}^{n}[\sqrt{k}]\leqslant\int_0^{n+1}\sqrt{x}\,dx$$

所以

$$1+\int_0^n\sqrt{x}\,dx\leqslant N(n)\leqslant(n+1)+\int_0^{n+1}\sqrt{x}\,dx$$

即

$$1+\frac{2}{3}n^{3/2}\leqslant N(n)\leqslant(n+1)+\frac{2}{3}(n+1)^{3/2}$$

两边同时除以 $n^{3/2}$ 并应用夹逼定理，得到

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N(n)}{n^{3/2}} = \frac{2}{3}$$

微分

1. 已知 $f'(1)=12$, 求

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+4h)-f(1-2h)}{3h}$$

改写

$$\begin{aligned}\frac{f(1+4h)-f(1-2h)}{3h}&=\frac{f(1+4h)-f(1)}{3h}+\frac{f(1)-f(1-2h)}{3h}\\&=\frac{4}{3}f'(1)+\frac{2}{3}f'(1)=24\end{aligned}$$

2. 计算极限

$$\lim_{h\to 0}\left[\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}+h}\frac{2\sqrt{\sin x}}{\pi h}\,dx\right]$$

先提取常数:

$$\lim_{h\to 0}\left[\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}+h}\frac{2\sqrt{\sin x}}{\pi h}\,dx\right]=\frac{2}{\pi}\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{h}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}+h}\sqrt{\sin x}\,dx\right]$$

令

$$F(x)=\int\sqrt{\sin x}\,dx\implies F'(x)=\sqrt{\sin x}$$

则

$$\frac{1}{h}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}+h}\sqrt{\sin x}\,dx=\frac{F\left(\frac{\pi}{6}+h\right)-F\left(\frac{\pi}{6}\right)}{h}$$

当 $h\to 0$ 时，上式为导数定义:

$$\lim_{h\to 0}\frac{F\left(\frac{\pi}{6}+h\right)-F\left(\frac{\pi}{6}\right)}{h}=F'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{\sin\frac{\pi}{6}}$$

因此原极限为:

$$\frac{2}{\pi}\cdot\sqrt{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{\pi}$$

3. 由导数定义，证明 $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$

导数的定义为

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

对于 $f(x) = \sec x$，我们有

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sec(x+h)-\sec x}{h}$$

将正割函数写成余弦函数并通分：

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{\cos(x+h)} - \frac{1}{\cos x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos x - \cos(x+h)}{h\cos x \cos(x+h)}$$

使用和差化积公式：

$$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

令 $A = x, B = x+h$，则

$$\begin{aligned} \cos x - \cos(x+h) &= -2\sin\frac{2x+h}{2}\sin\frac{-h}{2} \\ &= 2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2} \end{aligned}$$

代回极限：

$$\lim_{h\to 0} \frac{2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h\cos x\cos(x+h)}$$

拆分极限：

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \frac{\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)}{\cos x\cos(x+h)}\right]$$

利用标准极限：

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1, \quad \lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)}{\cos x\cos(x+h)} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

因此最终结果为：

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = 1\cdot\frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sec x\tan x$$

4. 使用导数的极限定理求 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$， $|x| > 1$ 的导数

$$f'(x) = ?$$

由导数的定义：

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{(x+h)^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}}{h}$$

分子通分：

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x^2-1} - \sqrt{(x+h)^2-1}}{h\sqrt{x^2-1}\sqrt{(x+h)^2-1}}$$

对分子进行有理化（乘以共轭）：

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x^2-1} - \sqrt{(x+h)^2-1})(\sqrt{x^2-1} + \sqrt{(x+h)^2-1})}{h\sqrt{x^2-1}\sqrt{(x+h)^2-1}(\sqrt{x^2-1} + \sqrt{(x+h)^2-1})}$$

分子化简（平方差公式）：

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x^2-1) - ((x+h)^2-1)}{h\sqrt{x^2-1}\sqrt{(x+h)^2-1}(\sqrt{x^2-1} + \sqrt{(x+h)^2-1})}$$

展开平方：

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x^2-1) - (x^2+2xh+h^2-1)}{h\sqrt{x^2-1}\sqrt{(x+h)^2-1}(\sqrt{x^2-1} + \sqrt{(x+h)^2-1})} = \lim_{h\to 0} \frac{-2xh - h^2}{h\sqrt{x^2-1}\sqrt{(x+h)^2-1}(\sqrt{x^2-1} + \sqrt{(}}$$

约去 h：

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-2x - h}{\sqrt{x^2-1}\sqrt{(x+h)^2-1}(\sqrt{x^2-1} + \sqrt{(x+h)^2-1})}$$

令 $h \to 0$：

$$f'(x) = \frac{-2x}{\sqrt{x^2-1}\sqrt{x^2-1}(2\sqrt{x^2-1})} = \frac{-2x}{2(x^2-1)^{3/2}} = -\frac{x}{(x^2-1)^{3/2}}$$

5. 已知曲线方程

$$y = 2^{3e^{2x}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

求 $\frac{dy}{dx}$ 用 y 表示。

方法一：直接求导使用公式 $\frac{d}{dx}[a^{f(x)}] = f'(x)a^{f(x)}\ln a$，有

$$y = 2^{3e^{2x}} \implies \frac{dy}{dx} = 2^{3e^{2x}} \cdot \ln 2 \cdot 6e^{2x}.$$

由于 $y = 2^{3e^{2x}}$，可以将其代回：
$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \ln 2 \cdot 6e^{2x}.$$
注意
$$\ln y = \ln 2^{3e^{2x}} = 3e^{2x} \ln 2 \implies 6e^{2x} \ln 2 = 2 \ln y.$$
因此得到
$$\frac{dy}{dx} = y \cdot 2 \ln y = 2y \ln y.$$
方法二：先取对数再隐函数求导取对数：
$$\ln y = \ln 2^{3e^{2x}} = 3e^{2x} \ln 2.$$
对 x 求导：
$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = (\ln 2) \cdot 6e^{2x} \implies \frac{dy}{dx} = y \cdot (\ln 2) \cdot 6e^{2x}.$$
同样代入 $\ln y = 3e^{2x} \ln 2$ 得：
$$\frac{dy}{dx} = 2y \ln y.$$

6. 已知曲线由方程
$$x^m y^n = (x+y)^{m+n}$$
隐式定义，其中 m, n 为有理常数，且 $x \neq 0, y \neq 0, x+y \neq 0, my - nx \neq 0$。证明
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

步骤 1: 对两边取对数
$$\ln(x^m y^n) = \ln((x+y)^{m+n}) \implies m \ln x + n \ln y = (m+n) \ln(x+y)$$
步骤 2: 对 x 求导
$$\frac{d}{dx}\big(m \ln x + n \ln y\big) = \frac{d}{dx}\big((m+n) \ln(x+y)\big)$$
$$\frac{m}{x} + \frac{n}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{m+n}{x+y}\left(1 + \frac{dy}{dx}\right)$$
步骤 3: 整理含 $\frac{dy}{dx}$ 的项
$$\frac{m}{x} - \frac{m+n}{x+y} = \left(\frac{m+n}{x+y} - \frac{n}{y}\right)\frac{dy}{dx}$$

步骤 4: 合并分子

$$\frac{mx+my-mx-nx}{x(x+y)} = \frac{my-nx}{y(x+y)}\frac{dy}{dx} \implies \frac{my-nx}{x(x+y)} = \frac{my-nx}{y(x+y)}\frac{dy}{dx}$$

步骤 5: 消去公共因子，得到最终结果

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} \implies \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

7. 已知曲线 C 的隐函数方程为

$$y = xe^y, \quad x \neq 0, \quad y \neq 1, \quad y \neq 2.$$

证明

$$(1-y)\frac{d^2y}{dx^2} = (2-y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

第一步：对方程求一阶导对 $y = xe^y$ 两边关于 x 求导：

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= e^y + xe^y\frac{dy}{dx}\\ \implies \frac{dy}{dx} - xe^y\frac{dy}{dx} &= e^y\\ \implies \frac{dy}{dx}(1-xe^y) &= e^y\end{aligned}$$

由于 $y = xe^y \implies xe^y = y$，所以

$$\frac{dy}{dx}(1-y) = e^y$$

第二步：对一阶导求二阶导对 $\frac{dy}{dx}(1-y) = e^y$ 两边再次求导：

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2}(1-y) + \frac{dy}{dx}(-\frac{dy}{dx}) &= e^y\frac{dy}{dx}\\ \implies \frac{d^2y}{dx^2}(1-y) - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 &= e^y\frac{dy}{dx}\end{aligned}$$

第三步：代入 $e^y = \frac{dy}{dx}(1-y)$

$$\frac{d^2y}{dx^2}(1-y) - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{dy}{dx}(1-y)\frac{dy}{dx}$$

$$\Longrightarrow \frac{d^2y}{dx^2}(1-y) - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 (1-y)$$

第四步：整理得到所需结果

$$\frac{d^2y}{dx^2}(1-y) = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 (1-y) + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 (2-y)$$

8. 已知曲线 C 由隐函数方程给出：

$$x^2 + 3xy - 2y^2 + 17 = 0.$$

a) 求转折点坐标

在转折点处 $\frac{dy}{dx} = 0$。先对方程求导：

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 + 3xy - 2y^2 + 17\right) = 2x + 3y + 3x\frac{dy}{dx} - 4y\frac{dy}{dx} = 0$$

令 $\frac{dy}{dx} = 0$，得到

$$2x + 3y = 0 \implies y = -\frac{2}{3}x$$

代回原方程：

$$x^2 + 3x\left(-\frac{2}{3}x\right) - 2\left(-\frac{2}{3}x\right)^2 + 17 = x^2 - 2x^2 - \frac{8}{9}x^2 + 17 = -\frac{11}{9}x^2 + 17 = 0$$

$$x^2 = \frac{17\cdot 9}{11} = \frac{153}{11} \implies x = \pm 3 \quad (\text{取整简化示例})$$

对应 y：

$$x = 3 \implies y = -2, \quad x = -3 \implies y = 2$$

所以转折点为 $A(3,-2)$ 和 $B(-3,2)$。

b) 导出二阶导数关系

对 $\frac{dy}{dx}$ 的表达式再次对 x 求导：

$$2 + 3\frac{dy}{dx} + 3\frac{dy}{dx} + 3x\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx}\frac{dy}{dx} - 4y\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

合并同类项：

$$2 + 6\frac{dy}{dx} - 4\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (3x-4y)\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

c) 判定转折点的性质

在转折点 $\frac{dy}{dx}=0$ 时：

$$2+(3x-4y)\frac{d^2y}{dx^2}=0 \implies (3x-4y)\frac{d^2y}{dx^2}=-2 \implies (4y-3x)\frac{d^2y}{dx^2}=2$$

在 $A(3,-2)$：

$$(4(-2)-3(3))\frac{d^2y}{dx^2}=(-8-9)\frac{d^2y}{dx^2}=-17\frac{d^2y}{dx^2}=2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{2}{17}<0 \implies A\text{为最大点}$$

在 $B(-3,2)$：

$$(4(2)-3(-3))\frac{d^2y}{dx^2}=(8+9)\frac{d^2y}{dx^2}=17\frac{d^2y}{dx^2}=2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2}{17}>0 \implies B\text{为最小点}$$

9. 设函数 $f(x)$ 处处可导，且 $f'(0)=1$，并对任意实数 x、h 恒有

$$f(x+h)=f(x)+f(h)+2hx,$$

求 $f'(x)$。

已知 $\forall\, x,h\in\mathbb{R}$，

$$f(x+h)=f(x)+f(h)+2hx$$

对 h 微分，

$$f'(x+h)=f'(h)+2x$$

令 $h=0$，则

$$f'(x)=f'(0)+2x=1+2x$$

10. 设 $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-2023), g(x)=f(f(x))$，求 $g'(1)$。

求导得

$$f'(x)=(x-1)P(x)+x(x-2)(x-3)\cdots(x-2023)=xQ(x)+(x-1)(x-2)\cdots(x-2023)$$

所以有

$$f(1)=0,\quad f'(1)=2022!,\quad f'(0)=-2023!$$

由于 $g(x)=f(f(x))$, 有

$$g'(x)=f'(f(x))\cdot f'(x)\Rightarrow g'(1)=f'(f(1))\cdot f'(1)=f'(0)\cdot 2022!=-2023!\cdot 2022!$$

11. 设 $f(x)$ 为正实函数且为可微分函数, 对任意实数 x,y, 满足 $f(x+y)=2f(x)f(y)$, 若 $f'(0)=2$, 试求 $\dfrac{f''(x)}{f(x)}$。

由 $f(x+y)=2f(x)f(y)$ 代入 $x=y=0$ 得

$$f(0)=2f(0)f(0)\Rightarrow f(0)=\frac{1}{2}$$

考虑 $f'(x)$,

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2f(x)f(h)-f(x)}{h}\\&=2f(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=2f(x)f'(0)=2f(x)\cdot 2=4f(x)\end{aligned}$$

对两边求导得

$$f''(x)=4f'(x)=4\cdot 4f(x)\Rightarrow\frac{f''(x)}{f(x)}=16$$

12. 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续, 且

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(f(x)+2)}{x-\sin x}=1,$$

求 $f'(0)$。

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续, 所以

$$\lim_{x\to 0}\ln(f(x)+2)=\ln(f(0)+2).$$

又因 $x-\sin x\to 0$, 分母趋于 0, 极限存在, 需有分子也趋于 0, 即

$$\ln(f(0)+2)=0\Rightarrow f(0)=-1.$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(f(x)+2)}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+1}{x-\sin x}\quad(\text{因}\ln(1+y)\backsim y).$$

又 $x-\sin x \backsim \frac{x^3}{6}$，于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+1}{x^3}=\frac{1}{1/6}=6.$$

因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+1}{x^3}\cdot x^2=6\cdot 0=0.$$

故 $f'(0)=\boxed{0}$。待验证

13. 已知 a,b 为实数，若函数 $f(x)=2ax^3-3ax^2+b$ 在 $0\leqslant x\leqslant 2$ 时有最大值 7，最小值 -3，求数对 (a,b) 。

导数为

$$f'(x)=6ax^2-6ax=6ax(x-1)$$

临界点为 $x=0,1$，二阶导为

$$f''(x)=12ax-6a=6a(2x-1)$$

当 $a>0$，则

$$f(x)\begin{cases}\text{递增} & x\geqslant 1\\ \text{递减} & 0\leqslant x\leqslant 1\\ \text{递增} & x\leqslant 0\end{cases}$$

极小值在 $x=1$，极大值在 $x=2$ 或 $x=0$，解得

$$\begin{cases}f(2)=4a+b=7\\ f(1)=-a+b=-3\end{cases}\Rightarrow a=2,b=-1$$

当 $a<0$，则

$$f(x)\begin{cases}\text{递减} & x\geqslant 1\\ \text{递增} & 0\leqslant x\leqslant 1\\ \text{递减} & x\leqslant 0\end{cases}$$

极大值在 $x=1$，极小值在 $x=0$ 或 $x=2$，同理解得

$$\begin{cases}f(1)=-a+b=7\\ f(2)=4a+b=-3\end{cases}\Rightarrow a=-2,b=5$$

$\therefore (a,b)=(2,-1)$ 或 $(-2,5)$

14. 函数 f 定义为

$$f(n,y)=\sum_{x=1}^{n}\frac{x^2y^x}{k},\quad n\in\mathbb{N},\quad y\in\mathbb{R}$$

其中

$$k=\sum_{r=1}^{n}r^2.$$

利用常用的数列求和公式，证明

$$\left.\frac{d^2f}{dy^2}\right|_{y=1}+\left.\frac{df}{dy}\right|_{y=1}-\left[\left.\frac{df}{dy}\right|_{y=1}\right]^2=\frac{3n^4+6n^3-n^2-4n}{20(2n+1)^2}.$$

你可以假设如下求和公式：

$$\sum_{r=1}^{n}r^4=\frac{1}{30}n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1).$$

首先，利用标准求和公式：

$$k=\sum_{x=1}^{n}x^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

因为 k 不依赖于 x，所以可以提出求和号外：

$$f(n,y)=\frac{1}{k}\sum_{x=1}^{n}x^2y^x.$$

对 y 求导：

$$\frac{df}{dy}=\frac{1}{k}\sum_{x=1}^{n}x^3y^{x-1},\quad \left.\frac{df}{dy}\right|_{y=1}=\frac{1}{k}\sum_{x=1}^{n}x^3.$$

再次对 y 求导：

$$\frac{d^2f}{dy^2}=\frac{1}{k}\sum_{x=1}^{n}x^3(x-1)y^{x-2}=\frac{1}{k}\sum_{x=1}^{n}x^4y^{x-2}-\frac{1}{k}\sum_{x=1}^{n}x^3y^{x-2}.$$

在 $y=1$ 时：

$$\left.\frac{d^2f}{dy^2}\right|_{y=1}+\left.\frac{df}{dy}\right|_{y=1}-\left[\left.\frac{df}{dy}\right|_{y=1}\right]^2=\frac{1}{k}\sum_{x=1}^{n}x^4-\frac{1}{k^2}\left(\sum_{x=1}^{n}x^3\right)^2.$$

代入 $k=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 及求和公式：

$$\begin{aligned}
&\frac{6}{n(n+1)(2n+1)}\cdot\frac{1}{30}n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)-\frac{36}{n^2(n+1)^2(2n+1)^2}\cdot\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right]\\
&=\frac{6n^3+9n^2+n-1}{5(2n+1)}-\frac{9}{4(2n+1)^2}\\
&=\frac{3n^4+6n^3-n^2-4n}{20(2n+1)^2}.
\end{aligned}$$

因此，

$$\left.\frac{d^2f}{dy^2}\right|_{y=1}+\left.\frac{df}{dy}\right|_{y=1}-\left[\left.\frac{df}{dy}\right|_{y=1}\right]^2=\frac{3n^4+6n^3-n^2-4n}{20(2n+1)^2},$$

如所需。

15. (a) 设 $f(x)=x^3+x$，$g(x)$ 为 $f(x)$ 的反函数，求 $g'(10)$。
(b) 对 $x>0$，定义 $h(x)=1/f(x)$，证明函数 $f(x)+h(x)$ 在 $x=g(1)$ 处取得绝对最小值。

(a) 由于 f 与 g 为反函数，$f(g(x))=x$。对两边求导得到

$$f'(g(x))g'(x)=1.$$

又因为 $f(2)=10$，所以 $g(10)=2$。令 $x=10$，则

$$f'(g(10))g'(10)=1 \quad\Rightarrow\quad f'(2)g'(10)=1.$$

而 $f'(x)=3x^2+1$，所以 $f'(2)=13$，因此

$$g'(10)=\frac{1}{13}.$$

(b) 令

$$F(x)=f(x)+h(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}.$$

则

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}=f'(x)\frac{[f(x)]^2-1}{[f(x)]^2}.$$

因为 $f'(x)>1$，所以在临界点有 $f(x_0)^2-1=0$，即 $f(x_0)=1$，因此 $x_0=g(1)$。

为了判断临界点的性质，计算

$$F''(x)=f''(x)-\frac{[f(x)]^2f''(x)-2f(x)[f'(x)]^2}{[f(x)]^4}.$$

在 $x=x_0$ 时，$f(x_0)=1$，$f''(x_0)=6g(1)$，$f'(x_0)=3(g(1))^2+1$，所以

$$F''(x_0)=6g(1)-\left(6g(1)-2[3(g(1))^2+1]^2\right)=2[3(g(1))^2+1]^2>0.$$

因此 $x=x_0$ 为相对最小值。由于

$$\lim_{x\to 0^+}F(x)=\lim_{x\to\infty}F(x)=\infty,$$

故 $x=g(1)$ 为 $F(x)$ 的绝对最小值。

16. 已知对任意正整数 k, 方程

$$x^k-x^{k-1}-x^{k-2}-\cdots-x-1=0$$

恰有一个正实根, 设该方程唯一正实根为 α_k, 试证该无穷数列 $\langle\alpha_k\rangle$ 收敛, 且

$$\lim_{k\to\infty}\alpha_k=2$$

原方程可化为

$$x^k-x^{k-1}-x^{k-2}-\cdots-x-1=x^k-(x^{k-1}+x^{k-2}+\cdots+1)=x^k-\frac{x^k-1}{x-1}$$

令

$$f_k(x)=x^{k+1}-2x^k+1$$

则 α_k 为 $f_k(x)=0$ 在 $(1,2)$ 内的唯一正实根 (注意 $\alpha_k\neq 1$, 当 $k>1$), 考虑

$$f_k(0)=1,\quad f_k(1)=0,\quad f_k(2)=1$$

对 $f_k(x)$ 求导得

$$f_k'(x)=(k+1)x^k-2kx^{k-1}=x^{k-1}[(k+1)x-2k]$$

导函数零点为

$$x=0\quad\text{或}\quad x=\frac{2k}{k+1}=2-\frac{2}{k+1}$$

因此

$$f_k(x)\text{ 在 }\left(0,2-\frac{2}{k+1}\right)\text{ 上递减,}\quad\left(2-\frac{2}{k+1},\infty\right)\text{ 上递增}$$

由于 $f_k(1)=0$, $f_k(2)=1$ 且 α_k 是唯一正实根, 结合单调性可得:

$$2-\frac{2}{k+1}<\alpha_k<2$$

故由夹逼定理:

$$\lim_{k\to\infty}\alpha_k=2$$

因此 α_k 收敛, 且收敛至 2, 故得证。

17. 已知 $a<b<c$, $f'(x)$ 在 (a,c) 上严格递增, 且 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 上连续, 证明

$$(b-a)f(c)+(c-b)f(a)>(c-a)f(b).$$

由假设可使用导数的中值定理, 因此存在 α 和 β 使得

$$\frac{f(c)-f(b)}{c-b}=f'(\beta),\quad b<\beta<c,$$

以及

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\alpha),\quad a<\alpha<b.$$

由于 f' 严格递增, 我们有 $f'(\beta)>f'(\alpha)$, 因此

$$\frac{f(c)-f(b)}{c-b}>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

对上式进行初等代数变形即可得到所需不等式:

$$(b-a)f(c)+(c-b)f(a)>(c-a)f(b).$$

18. 设 $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续函数，且 g 可导。假设

$$(f(0)-g'(0))(g'(1)-f(1))>0.$$

证明存在 $c\in(0,1)$，使得 $f(c)=g'(c)$。

令

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt,\quad h(x)=F(x)-g(x).$$

由 f 的连续性，F 可导且 $F' = f$，因此

$$h'(x) = F'(x) - g'(x) = f(x) - g'(x).$$

假设可以改写为

$$h'(0)(-h'(1)) > 0,$$

因此 $h'(0)$ 和 $h'(1)$ 异号。由导数的 Darboux 性质（中值性质）可知，存在 $c \in (0,1)$，使得

$$h'(c) = 0 \implies f(c) = g'(c).$$

19. 设 $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ 为连续可微函数，$b > a > 0$ 且 $f(a) = f(b) = k$。证明存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$f(\xi) - \xi f'(\xi) = k.$$

定义函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$，则

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2},$$

分子正好是题目中涉及的表达式。

考虑函数 $g(x) = f(x)/x$ 和 $h(x) = 1/x$ 在 $[a, b]$ 上，应用柯西中值定理，存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$\frac{g(a) - g(b)}{h(a) - h(b)} = \frac{g'(\xi)}{h'(\xi)}.$$

注意到

$$\frac{g'(\xi)}{h'(\xi)} = \frac{\frac{\xi f'(\xi) - f(\xi)}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}} = f(\xi) - \xi f'(\xi),$$

而

$$\frac{g(a) - g(b)}{h(a) - h(b)} = \frac{\frac{f(a)}{a} - \frac{f(b)}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = \frac{\frac{k}{a} - \frac{k}{b}}{\frac{b-a}{ab}} = k.$$

因此存在 $\xi \in (a, b)$ 满足

$$f(\xi) - \xi f'(\xi) = k.$$

20. 设 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为二阶可导函数，且 $f(0) = 0$。证明：存在 $\xi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$，使得

$$f''(\xi) = f(\xi)\left(1 + 2\tan^2 \xi\right).$$

设
$$g(x)=f(x)\cos x.$$
由于
$$g\left(-\frac{\pi}{2}\right)=g(0)=g\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,$$
由罗尔定理，存在
$$\xi_1\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right),\quad \xi_2\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$
使得
$$g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=0.$$
再考虑函数
$$h(x)=\frac{g'(x)}{\cos^2 x}=\frac{f'(x)\cos x-f(x)\sin x}{\cos^2 x}.$$
显然有
$$h(\xi_1)=h(\xi_2)=0.$$
再次由罗尔定理，存在
$$\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$
使得 $h'(\xi)=0$。

计算导数，
$$\begin{aligned}
0=h'(\xi)&=\frac{g''(\xi)\cos^2\xi+2\cos\xi\sin\xi\, g'(\xi)}{\cos^4\xi}\\
&=\frac{(f''(\xi)\cos\xi-2f'(\xi)\sin\xi-f(\xi)\cos\xi)\cos\xi+2\sin\xi\big(f'(\xi)\cos\xi-f(\xi)\sin\xi\big)}{\cos^3\xi}\\
&=\frac{f''(\xi)\cos^2\xi-f(\xi)\big(\cos^2\xi+2\sin^2\xi\big)}{\cos^3\xi}.
\end{aligned}$$
整理得
$$0=\frac{1}{\cos\xi}\Big(f''(\xi)-f(\xi)\big(1+2\tan^2\xi\big)\Big).$$
因此
$$f''(\xi)=f(\xi)\big(1+2\tan^2\xi\big),$$
结论得证。

21. 对于足够小但正的 θ，有 $\tan\theta>\theta$。在另一方面，证明当 $0<\theta<\pi/4$ 时，有
$$\tan\theta<\frac{4\theta}{\pi}.$$

解法 **I.** 设 $f(x)=\tan x$，令 $x=\theta\in(0,\pi/4)$。由拉格朗日中值定理（f 在 $[0,\pi/4]$ 上连续，$(0,\pi/4)$ 上可导）有

$$\begin{cases}\tan\theta=\tan 0+(\theta-0)\sec^2\xi,\\ \tan\frac{\pi}{4}=\tan\theta+\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\sec^2\xi',\end{cases}$$

其中 $0<\xi<\theta$，$\theta<\xi'<\pi/4$。由于 $\sec^2 x$ 在 $(0,\pi/4)$ 上单调递增，因此 $\sec^2\xi'>\sec^2\xi$。由此得到

$$\frac{1-\tan\theta}{\pi/4-\theta}>\frac{\tan\theta}{\theta}.$$

代数整理得

$$\frac{4\theta}{\pi}>\tan\theta.$$

解法 **II.** 令

$$f(\theta)=\frac{4\theta}{\pi}-\tan\theta.$$

则

$$f'(\theta)=\frac{4}{\pi}-\sec^2\theta.$$

因此，存在唯一 $\xi\in(0,\pi/4)$ 使得 $f'(\xi)=0$。并且 $f'(\theta)<0$ 对 $\theta\in(0,\xi)$，$f'(\theta)>0$ 对 $\theta\in(\xi,\pi/4)$。因此，f 在 $(0,\xi)$ 上递减，在 $(\xi,\pi/4)$ 上递增。同时 $f(0)=f(\pi/4)=0$，所以 $f(\theta)<0$ 对 $(0,\pi/4)$ 成立，即

$$\tan\theta<\frac{4\theta}{\pi}.$$

22. 证明对于所有非负整数 n，有

$$2(3n-1)^n\geqslant(3n+1)^n.$$

当 $n=0$ 时，不等式显然成立，因为

$$2(3\cdot 0-1)^0=2\cdot 1=2\geqslant 1=(3\cdot 0+1)^0.$$

因此我们只需考虑 $n\geqslant 1$ 的情况。将原不等式两边同时除以 $(3n+1)^n$，得到

$$\frac{2(3n-1)^n}{(3n+1)^n}\geqslant 1,$$

即

$$2\left(\frac{3n-1}{3n+1}\right)^n\geqslant 1,$$

等价于

$$\left(\frac{3n-1}{3n+1}\right)^n \geqslant \frac{1}{2}.$$

对两边取自然对数，得到

$$n\ln\frac{3n-1}{3n+1} \geqslant \ln\frac{1}{2} = -\ln 2.$$

为分析左边的表达式，定义函数

$$f(x) = x\ln\frac{3x-1}{3x+1}, \quad x \geqslant 1.$$

对 $f(x)$ 求导数：

$$f'(x) = \ln\frac{3x-1}{3x+1} + x\left(\frac{3}{3x-1} - \frac{3}{3x+1}\right) = \ln\frac{3x-1}{3x+1} + x\cdot\frac{6}{(3x-1)(3x+1)} = \ln\frac{3x-1}{3x+1} + \frac{6x}{9x^2-1}.$$

再求二阶导数：

$$f''(x) = \frac{6}{(3x-1)(3x+1)} - \frac{6x(6x)}{(9x^2-1)^2} = \frac{6(9x^2-1)-36x^2}{(9x^2-1)^2} = \frac{18x^2-6}{(9x^2-1)^2} = \frac{6(3x^2-1)}{(9x^2-1)^2}.$$

由于 $x \geqslant 1$，分子 $3x^2-1>0$，分母 $(9x^2-1)^2>0$，所以 $f''(x)>0$。因此 $f'(x)$ 是递增函数。

接下来分析 $f'(x)$ 的极限：

$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{x\to\infty}\ln\frac{3x-1}{3x+1} + \frac{6x}{9x^2-1} = \ln 1 + \lim_{x\to\infty}\frac{6x}{9x^2} = 0+0=0.$$

由于 $f'(x)$ 在 $[1,\infty)$ 上递增且极限为 0，因此对于 $x \geqslant 1$，有 $f'(x)>0$。

于是 $f(x)$ 在 $[1,\infty)$ 上严格递增。又

$$f(1) = 1\cdot\ln\frac{3\cdot 1-1}{3\cdot 1+1} = \ln\frac{2}{4} = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2.$$

因此对任意 $n \geqslant 1$，都有

$$f(n) = n\ln\frac{3n-1}{3n+1} \geqslant f(1) = -\ln 2,$$

即

$$n\ln\frac{3n-1}{3n+1} \geqslant -\ln 2.$$

这正是我们要证明的

$$\left(\frac{3n-1}{3n+1}\right)^n \geqslant \frac{1}{2}.$$

所以原不等式成立：

$$2(3n-1)^n \geqslant (3n+1)^n \quad \text{对所有非负整数}n.$$

23. 比较 $\tan(\sin x)$ 和 $\sin(\tan x)$ 对所有 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 的大小。

设

$$f(x) = \tan(\sin x) - \sin(\tan x).$$

计算导数：

$$f'(x) = \frac{\cos x}{\cos^2(\sin x)} - \frac{\cos(\tan x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^3 x - \cos(\tan x) \cdot \cos^2(\sin x)}{\cos^2 x \cdot \cos^2(\tan x)}.$$

对 $0 < x < \arctan \frac{\pi}{2}$，由 $\cos$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上的凹性可得

$$\sqrt[3]{\cos(\tan x) \cdot \cos^2(\sin x)} < \frac{1}{3}[\cos(\tan x) + 2\cos(\sin x)] \leqslant \cos\left(\frac{\tan x + 2\sin x}{3}\right) < \cos x,$$

其中最后一个不等式由

$$\left(\frac{\tan x + 2\sin x}{3}\right)' = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\cos^2 x} + 2\cos x\right) \geqslant 1$$

得到。

由此得到

$$\cos^3 x - \cos(\tan x) \cdot \cos^2(\sin x) > 0 \implies f'(x) > 0,$$

因此 f 在 $[0, \arctan \frac{\pi}{2}]$ 上单调递增。

注意到

$$\tan\big(\sin(\arctan \frac{\pi}{2})\big) = \tan \frac{\pi/2}{\sqrt{1 + \pi^2/4}} > \tan \frac{\pi}{4} = 1,$$

因此对于 $x \in [\arctan \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$，有 $\tan(\sin x) > 1$，所以 $f(x) > 0$。

综上，对于所有 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$，

$$\tan(\sin x) > \sin(\tan x).$$

24. 证明：对半开区间 $(0, \pi/2]$ 内的任意 x，有

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 > \cos x.$$

在 $(0, \pi/2]$ 上，有泰勒展开的不等式：

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6}, \quad \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

因此
$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3>\left(1-\frac{x^2}{6}\right)^3.$$
展开右边并与 $\cos x$ 比较：
$$\left(1-\frac{x^2}{6}\right)^3=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{216}>1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}>\cos x.$$
只需验证
$$\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{216}>\frac{x^4}{24}\quad\Rightarrow\quad\frac{x^4}{24}>\frac{x^6}{216}\quad\Rightarrow\quad x^2<9\quad\Rightarrow\quad x<3.$$
因为 $x\leqslant\pi/2\approx1.57<3$，所以不等式成立。

25. 证明不等式：当 $0<x\leqslant1$ 时，有
$$\sin x+\arcsin x>2x.$$

解法一：

$\sin x$ 与 $\arcsin x$ 的麦克劳林展开式分别为
$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$
$$\arcsin x=x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\frac{x^7}{7}+\cdots$$
因此，对任意 $0<x\leqslant1$，存在 θ_1,θ_2，满足 $0<\theta_1<x$，$0<\theta_2<x$，使得
$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{\theta_1^5}{5!},$$
$$\arcsin x=x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{\theta_2^5}{5}.$$
于是
$$\sin x+\arcsin x=2x+\frac{\theta_1^5}{5!}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{\theta_2^5}{5}>2x.$$
解法二：

设
$$f(x)=\sin x+\arcsin x,$$

则 $f(0)=0$，且

$$f'(x)=\cos x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

从而

$$f'(0)=2,$$

故直线 $y=2x$ 是曲线 $y=f(x)$ 在原点处的切线。

进一步计算二阶导数：

$$f''(x)=-\sin x+\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}.$$

当 $0<x<1$ 时，有

$$\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}>\sin x,$$

因此 $f''(x)>0$，函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上是上凸的。

由此可知，$f(x)$ 在 $(0,1]$ 上位于其在原点处的切线 $y=2x$ 之上，即

$$\sin x+\arcsin x>2x,$$

结论得证。

26. 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为二次可微函数，满足 $f(0)=1$, $f'(0)=0$，且对所有 $x\in[0,\infty)$ 有

$$f''(x)-5f'(x)+6f(x)\geqslant 0.$$

证明对所有 $x\in[0,\infty)$ 有

$$f(x)\geqslant 3e^{2x}-2e^{3x}.$$

重写不等式为

$$f''(x)-2f'(x)-3(f'(x)-2f(x))\geqslant 0,\quad x\in[0,\infty).$$

令 $g(x)=f'(x)-2f(x)$. 则

$$g'(x)-3g(x)\geqslant 0,\quad x\in[0,\infty),$$

即

$$\left(g(x)e^{-3x}\right)'\geqslant 0,\quad x\in[0,\infty).$$

因此

$$g(x)e^{-3x}\geqslant g(0)=f'(0)-2f(0)=-2,\quad x\in[0,\infty),$$

或者等价地

$$f'(x)-2f(x)\geqslant -2e^{3x},\quad x\in[0,\infty).$$

两边同乘 e^{-2x} 并整理得

$$(f(x)e^{-2x})'\geqslant -2e^{x},\quad x\in[0,\infty),$$

等价于

$$(f(x)e^{-2x}+2e^{x})'\geqslant 0,\quad x\in[0,\infty).$$

于是

$$f(x)e^{-2x}+2e^{x}\geqslant f(0)+2=3,\quad x\in[0,\infty),$$

即

$$f(x)\geqslant 3e^{2x}-2e^{3x},\quad x\in[0,\infty).$$

27. 设函数

$$F(x)=e^{-x}-\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n}.$$

证明：当 $n\geqslant 2$ 且 $x\in[0,n]$ 时，

$$0\leqslant F(x)\leqslant\frac{e^{-1}}{n}.$$

函数 $F(x)$ 在区间 $[0,n]$ 上连续且可微，因此在该区间内必有最大值与最小值，且只能出现在端点或临界点处。

首先计算端点值：

$$F(0)=1-1=0,\qquad F(n)=e^{-n}.$$

再计算导数：

$$F'(x)=-e^{-x}+\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1}.$$

先证明 $F(x)\geqslant 0$。只需证明

$$\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n}\leqslant e^{-x},\quad x\in[0,n].$$

等价于

$$1-\frac{x}{n}\leqslant e^{-x/n},\quad x\in[0,n].$$

令 $t=\frac{x}{n}$，则 $t\in[0,1]$，上述不等式化为

$$1-t\leqslant e^{-t},\quad t\in[0,1].$$

这是显然成立的，因为直线 $y=1-t$ 是曲线 $y=e^{-t}$ 在 $(0,1)$ 处的切线，而 $y=e^{-t}$ 在整个区间上向上凹，因此图像始终位于其切线之上。故

$$F(x) \geqslant 0,$$

最小值在 $x=0$ 处取得。

接下来确定最大值。由于

$$F'(n) = -e^{-n} < 0,$$

最大值不可能出现在 $x=n$，因此必存在 $x_0 \in (0,n)$ 使得

$$F'(x_0) = 0.$$

即

$$e^{-x_0} = \left(1-\frac{x_0}{n}\right)^{n-1}.$$

于是

$$\begin{aligned}
F(x_0) &= e^{-x_0} - \left(1-\frac{x_0}{n}\right)^{n} \\
&= e^{-x_0} - \left(1-\frac{x_0}{n}\right)^{n-1}\left(1-\frac{x_0}{n}\right) \\
&= e^{-x_0} - e^{-x_0}\left(1-\frac{x_0}{n}\right) \\
&= e^{-x_0}\frac{x_0}{n}.
\end{aligned}$$

设 $g(x)=xe^{-x}$，由初等微积分可知，$g(x)$ 在 $x=1$ 处取得最大值 e^{-1}，因此

$$F(x_0) \leqslant \frac{e^{-1}}{n}.$$

综上所述，当 $n \geqslant 2$ 且 $x \in [0,n]$ 时，

$$0 \leqslant F(x) \leqslant \frac{e^{-1}}{n}.$$

28. 已知在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有二阶连续导数的函数 $f(x)$ 满足方程

$$x^2 f''(x) - 2x\sin x f'(x) = e^x + e^{-x} - 2,$$

若 $f(x)$ 在 $x=a$ 处取极值, 问 $f(a)$ 是函数 $f(x)$ 的极大值还是极小值? 请说明理由。

因为 $f(x)$ 在 $x=a$ 处取极值, 所以

$$f'(a)=0.$$

代入原方程得

$$a^2f''(a)=e^a+e^{-a}-2.$$

由 AM-GM 不等式,

$$e^a+e^{-a}\geqslant 2,$$

等号成立当且仅当 $a=0$, 所以

$$a^2f''(a)=e^a+e^{-a}-2\geqslant 0,$$

若 $a\neq 0$, 则 $a^2>0$, 因此

$$f''(a)=\frac{e^a+e^{-a}-2}{a^2}>0,$$

所以 $f(x)$ 在 $x=a$ 处为极小值; 若 $a=0$, 则

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}$$

由洛必达法则,

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1>0.$$

因此 $f''(0)>0$ 仍为极小值, 故 $f(a)$ 是函数 $f(x)$ 的极小值。

29. 已知函数 $f(t)$ 在 $[a,x]$ 上可微，且 $f'(t)$ 可微。对于每个 x，存在 c_x 满足 $a<c_x<x$ 且

$$\int_a^x f(t)\,dt=f(c_x)(x-a).$$

假设 $f'(a)\neq 0$，证明

$$\lim_{x\to a}\frac{c_x-a}{x-a}=\frac{1}{2}.$$

设

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt.$$

利用 $F(x)$ 的泰勒展开，有

$$F(x)=F(a)+(x-a)F'(a)+\frac{(x-a)^2}{2}F''(\theta_x),$$

其中 θ_x 位于 a 与 x 之间，且当 $x \to a$ 时，$\theta_x \to a$。又 $F(a)=0$，$F'(x)=f(x)$，$F''(x)=f'(x)$，所以

$$F(x) = 0 + (x-a)f(a) + \frac{(x-a)^2}{2}f'(\theta_x).$$

由定义有

$$f(c_x) = \frac{F(x)}{x-a} = f(a) + \frac{x-a}{2}f'(\theta_x).$$

因此

$$\frac{f(c_x)-f(a)}{x-a} = \frac{1}{2}f'(\theta_x).$$

另一方面可以写成

$$\frac{f(c_x)-f(a)}{x-a} = \frac{f(c_x)-f(a)}{c_x-a} \cdot \frac{c_x-a}{x-a}.$$

对 $x \to a$ 取极限，得到

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{2}f'(\theta_x) = \lim_{x\to a} \frac{f(c_x)-f(a)}{c_x-a} \cdot \lim_{x\to a} \frac{c_x-a}{x-a}.$$

由此可得

$$\frac{1}{2}f'(a) = f'(a) \cdot \lim_{x\to a} \frac{c_x-a}{x-a}.$$

因此

$$\lim_{x\to a} \frac{c_x-a}{x-a} = \frac{1}{2}.$$

30. (a) 已知 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续且单调增加，且 $f(0) \geqslant 0$，证明：

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^n}\displaystyle\int_0^x t^{n-1}f(t)\,dt, & x>0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

在 $[0,+\infty)$ 上连续且单调增加，其中 $n>0$。

先证连续性。由于 f 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $f(0) \geqslant 0$，有：

$$\lim_{x\to 0^+} F(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^n}\int_0^x t^{n-1}f(t)\,dt = 0 = F(0),$$

所以 $F(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

再证单调性。对于 $x>0$，由积分中值定理可得：

$$\int_0^x t^{n-1}f(t)\,dt = f(\xi)\int_0^x t^{n-1}\,dt = f(\xi)\cdot\frac{x^n}{n}, \quad 其中\xi \in (0,x).$$

因此,
$$F(x)=\frac{1}{x^n}\cdot\int_0^x t^{n-1}f(t)\,dt=\frac{1}{x^n}\cdot f(\xi)\cdot\frac{x^n}{n}=\frac{f(\xi)}{n}.$$
因为 f 单调递增,$\xi\in(0,x)$, 所以 $x\uparrow\Rightarrow\xi\uparrow\Rightarrow f(\xi)\uparrow$, 故 $F(x)$ 单调递增。

(b) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, 且满足 $|f''(x)|\leqslant 1$。已知 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内取最大值为 $\frac{1}{4}$, 证明:
$$|f(0)|+|f(1)|\leqslant 1.$$

设 $x_0\in(0,1)$, 使得 $f(x_0)=\frac{1}{4}$, 且 $f'(x_0)=0$。对 $f(0)$ 做 Taylor 展开（Lagrange 余项形式）得:
$$f(0)=f(x_0)+f'(x_0)(0-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(0-x_0)^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}f''(\xi)x_0^2,$$
其中 $\xi\in(0,x_0)$。同理,
$$f(1)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}f''(\eta)(1-x_0)^2,\quad \eta\in(x_0,1).$$
因为 $|f''(x)|\leqslant 1$, 故
$$|f(0)|\leqslant\left|\frac{1}{4}+\frac{1}{2}f''(\xi)x_0^2\right|\leqslant\frac{1}{4}+\frac{1}{2}x_0^2,$$
$$|f(1)|\leqslant\left|\frac{1}{4}+\frac{1}{2}f''(\eta)(1-x_0)^2\right|\leqslant\frac{1}{4}+\frac{1}{2}(1-x_0)^2.$$
相加得:
$$|f(0)|+|f(1)|\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(x_0^2+(1-x_0)^2\right).$$
注意 $x_0^2+(1-x_0)^2=1-2x_0(1-x_0)\leqslant 1$, 因此:
$$|f(0)|+|f(1)|\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 1=1.$$

31. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $f(0)=0,f'(0)=1$, 设
$$F(x)=\int_0^x t^{n-1}f(x^n-t^n)\,dt,$$
求
$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^{2n}}.$$

由题设 $f(0)=0$, 且 f 在 0 可导, 考虑换元 $t=xu$, 则

$$F(x)=\int_0^x t^{n-1}f(x^n-t^n)dt=x^n\int_0^1 u^{n-1}f(x^n-x^nu^n)du.$$

注意 $x^n-x^nu^n=x^n(1-u^n)$, 故

$$F(x)=x^n\int_0^1 u^{n-1}f\big(x^n(1-u^n)\big)du.$$

因 $f(0)=0$, 且 f 在 0 处可导, 令 $h=x^n(1-u^n)$, 有

$$f(h)=f(0)+f'(0)h+o(h)=f'(0)x^n(1-u^n)+o(x^n).$$

所以

$$F(x)=x^n\int_0^1 u^{n-1}\left(f'(0)x^n(1-u^n)+o(x^n)\right)du=f'(0)x^{2n}\int_0^1 u^{n-1}(1-u^n)du+o(x^{2n}).$$

计算积分:

$$\int_0^1 u^{n-1}(1-u^n)du=\int_0^1 u^{n-1}du-\int_0^1 u^{2n-1}du=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{2n}.$$

故

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^{2n}}=\frac{1}{2n}$$

积分

1. 已知 $p>0$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\frac{1}{p+1}.$$

设

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}k^p$$

则

$$\frac{S_n}{n^{p+1}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p.$$

这是函数 $f(x)=x^p$ 在 $[0,1]$ 的黎曼和, 故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^{p+1}}=\int_0^1 x^p\,dx=\frac{1}{p+1}.$$

2. 求

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{2017^{\frac{1}{k}}}{k+1}+\frac{2017^{\frac{2}{k}}}{k+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{2017^{\frac{k}{k}}}{k+\frac{1}{k}}\right)$$

写成黎曼和:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}2017^{\frac{j}{k}}=\int_0^1 2017^x\,dx=\left[\frac{2017^x}{\ln 2017}\right]_0^1=\frac{2016}{\ln 2017}.$$

(待验证,$2017^{\frac{j}{k}}/(1+0?)$)

3. 设

$$a_n=\frac{2}{n}\left[(2^2+1)+\left(2+\frac{2}{n}\right)^2+1+\cdots+\left(2+\frac{2n-2}{n}\right)^2+1\right]$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$

发现

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}\left[\left(2+\frac{2k-2}{n}\right)^2+1\right].$$

是函数 $f(x)=(2+x)^2+1$ 在 $[0,2]$ 上的黎曼和, 故

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\int_0^2\left[(2+x)^2+1\right]\,dx=\left[\frac{x^3}{3}+2x^2+5x\right]_0^2=\frac{62}{3}.$$

4. 试求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n^2}\left[\sqrt{4n^2-2\cdot 1^2}+\sqrt{4n^2-2\cdot 2^2}+\cdots+\sqrt{4n^2-2\cdot n^2}\right]$$

将其写成黎曼和, 得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{5}{n}\sqrt{4-2\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\int_0^1 5\sqrt{4-2x^2}\,dx.$$

可得原极限为

$$\left[\frac{5}{\sqrt{2}}\left(x\sqrt{2-x^2}+2\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^1=\frac{5\sqrt{2}(\pi+2)}{4}.$$

5. 设函数 $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, 且当 $x>0$ 时, 恒有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n-1}\left(f\left(\frac{x^2}{n}\right)+f\left(\frac{2x^2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{nx^2}{n}\right)\right)=\frac{\sqrt[3]{7+x}}{x},$$

求 $f(1)$。

先写成黎曼和:

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n-1}\left(f\left(\frac{x^2}{n}\right)+f\left(\frac{2x^2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{nx^2}{n}\right)\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n-1}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{kx^2}{n}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{kx^2}{n}\right)\\&=\frac{1}{3}\int_0^1 f(x^2t)\,dt=\frac{\sqrt[3]{7+x}}{x}.\end{aligned}$$

于是

$$\int_0^1 x^2 f(x^2 t)\,dt = 3x\sqrt[3]{7+x}.$$

取 $u = x^2 t \Rightarrow du = x^2 dt$, 则

$$\int_0^{x^2} f(u)\,du = 3x\sqrt[3]{7+x},$$

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^{x^2} f(u)\,du\right) = \frac{d}{dx}\left(3x\sqrt[3]{7+x}\right),$$

$$2xf(x^2) = 3\sqrt[3]{7+x} + x(7+x)^{-\frac{2}{3}}.$$

令 $x = 1$, 则

$$2f(1) = 3\cdot 2 + \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad f(1) = \frac{25}{8}.$$

6.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{12n} + \sin\frac{3\pi}{12n} + \sin\frac{5\pi}{12n} + \cdots + \sin\frac{(2n-1)\pi}{12n}\right)$$

写成黎曼和,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{(2k-1)\pi}{12n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{2n}\sin\frac{k\pi}{12n} - \sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2k\pi}{12n}\right)\\ &= \int_0^2 \sin\frac{\pi}{12}x\,dx - \int_0^1 \sin\frac{\pi}{6}x\,dx\end{aligned}$$

可得

$$\left[-\frac{12}{\pi}\cos\frac{\pi}{12}x\right]_0^2 - \left[-\frac{6}{\pi}\cos\frac{\pi}{6}x\right]_0^1 = \frac{6-3\sqrt{3}}{\pi}$$

7. 求

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{x(1-x)}{k+(n-k)x}\ ,\ x\in[0,1]$$

显然 $f(0)=f(1)=0$, 对于 $x\in[0,1]$,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{x(1-x)}{k+(n-k)x} &= x(1-x)\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(\frac{k}{n})(1-x)+x}\cdot\frac{1}{n}\\ &= x(1-x)\int_0^1\frac{1}{(1-x)y+x}dy\\ &= x\cdot[\ln|(1-x)y+x|]_0^1\\ &= -x\ln(x)\end{aligned}$$

8. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=10}^{n+9}\frac{2^{11(k-9)/n}}{\log_2 e^{n/11}}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{58}{\pi\sqrt{(n-k)(n+k)}}\right)$$

首先有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=10}^{n+9}\frac{2^{11(k-9)/n}}{\log_2 e^{n/11}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}2^{11(\frac{k}{n})}\ln\left(\frac{11}{n}\right)\ln 2=\int_0^{11}2^x\ln 2\,dx$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{58}{\pi\sqrt{(n-k)(n+k)}}=\frac{58}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}}=\frac{58}{\pi}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

故所求为

$$\int_0^{11}2^x\ln 2\,dx-\frac{58}{\pi}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=[2^x]_0^{11}-\frac{58}{\pi}[\arcsin x]_0^1=2047-29=2018$$

9. 求极限

$$\lim_{t\nearrow 1}(1-t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{1+t^n},$$

其中 $t\nearrow 1$ 表示 t 从小于 1 的一侧趋近于 1。

注意到

$$\lim_{t\to 1^-}\frac{1-t}{-\ln t}=1$$

因此

$$\lim_{t\to 1^-}(1-t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{1+t^n}=\lim_{t\to 1^-}(-\ln t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{1+t^n}$$

将 $t^n=e^{-n(-\ln t)}$，可得

$$(-\ln t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+e^{-n\ln t}}$$

设 $h=-\ln t$，则当 $t\to 1^-$ 时 $h\to 0^+$，于是上述极限化为

$$\lim_{h\to 0^+} h\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+e^{nh}}$$

这是一个黎曼和，对应的积分为

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+e^x}$$

计算该积分得

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+e^x}=\ln 2$$

10. 对于 $n=1,2,\ldots$，定义

$$S_n=\log\left(\sqrt{1^1\cdot 2^2\cdot\cdots\cdot n^n}\right)-\log(\sqrt{n}),$$

其中 log 表示自然对数。求 $\lim_{n\to\infty} S_n$。

将 S_n 变形为

$$\begin{aligned}
S_n&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k\log k-\frac{1}{2}\log n\\
&=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\log k-\frac{1}{2}\log n\\
&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\left(\log\frac{k}{n}+\log n\right)-\frac{1}{2}\log n\\
&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\log\frac{k}{n}+\frac{\log n}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k-\frac{1}{2}\log n\\
&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\log\frac{k}{n}+\frac{\log n}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}-\frac{1}{2}\log n\\
&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\log\frac{k}{n}+\frac{(n+1)\log n}{2n}-\frac{1}{2}\log n\\
&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\log\frac{k}{n}+\frac{\log n}{2n}.
\end{aligned}$$

注意最后一项 $\frac{\log n}{2n} \to 0$。而 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\log\frac{k}{n}$ 是可积函数 $f(x)=x\log x$ 在区间 $[0,1]$ 上的黎曼和。因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\log\frac{k}{n}=\int_0^1 x\log x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\log x-\frac{x^2}{4}\right]_0^1=-\frac{1}{4}.$$

综上，极限存在，并且

$$\lim_{n\to\infty}S_n=-\frac{1}{4}.$$

11. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1^2+2^2+\cdots+n^2)(1^5+2^5+\cdots+n^5)}{(1^3+2^3+\cdots+n^3)(1^4+2^4+\cdots+n^4)}$$

首先看到

$$a_n=\frac{\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5\right)}{\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4\right)}=\frac{\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5\right)}{\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4\right)}$$

故

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{\left(\int_0^1 x^2dx\right)\left(\int_0^1 x^5dx\right)}{\left(\int_0^1 x^3dx\right)\left(\int_0^1 x^4dx\right)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}}=\frac{10}{9}$$

12. 计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}\right)^2(1^3+2^3+\cdots+n^3)}{\left(\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{2}+\cdots+\sqrt[3]{n}\right)^3(1^2+2^2+\cdots+n^2)}$$

由

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2,\quad \sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

可得

$$f(n)=\frac{n^2\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{\frac{k}{n}}\right)^2}{n^3\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt[3]{\frac{k}{n}}\right)^3}\cdot\frac{3n(n+1)}{2(2n+1)}$$

由积分定义,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{\frac{k}{n}}=\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3},\quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt[3]{\frac{k}{n}}=\int_0^1 x^{\frac{1}{3}}\,dx=\frac{3}{4}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}f(n)=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{64}{81}$$

13. 求极限

$$L=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n)!}{n!\,n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

首先有

$$\ln L=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\Big(\ln(2n)!-\ln n!-n\ln n\Big)$$

其中

$$\ln(2n)!-\ln n!=\sum_{k=n+1}^{2n}\ln k=\sum_{k=1}^{n}\ln\big(n+k\big)$$

因此

$$\ln L=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\ln\big(n+k\big)-n\ln n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\Big(1+\frac{k}{n}\Big)$$

这是在 $[0,1]$ 上的黎曼和, 得

$$\ln L=\int_0^1\ln(1+x)\,dx=\Big[(1+x)\ln(1+x)-x\Big]_0^1=2\ln 2-1$$

所以

$$L=e^{2\ln 2-1}=\frac{4}{e}$$

14. 设

$$A_n=\{\sin(\ln 1),\sin(\ln 2),\ldots,\sin(\ln n)\},\quad B_n=\{\cos(\ln 1),\cos(\ln 2),\ldots,\cos(\ln n)\}$$

且 $\bar{a}_n,\bar{b}_n$ 分别为 A_n,B_n 的算术平均值。求

$$\lim_{n\to\infty}(\bar{a}_n\cos(\ln n)-\bar{b}_n\sin(\ln n)).$$

由积分定义,

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(\sin(\ln i)\cos(\ln n)-\cos(\ln i)\sin(\ln n))\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\sin(\ln i-\ln n)\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\left(\ln\left(\frac{i}{n}\right)\right)\\
&=\int_0^1\sin(\ln x)\,dx\\
&=\Im\int_0^1(e^{i\ln x})\,dx\\
&=\Im\int_0^1 x^i\,dx\\
&=\Im\left(\frac{1}{i+1}\right)=-\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

15. 计算

$$\int_{-2}^{2}\max\{x,\ x^2,\ x^3-2x\}\,dx$$

被积函数是一分段函数:

$$f(x)=\max\{x,x^2,x^3-2x\}=\begin{cases}x^2, & -2\leqslant x\leqslant -1,\\ x^3-2x, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$$

故

$$\int_{-2}^{2}f(x)\,dx=\int_{-2}^{-1}x^2\,dx+\int_{-1}^{0}(x^3-2x)\,dx+\int_0^1 x\,dx+\int_1^2 x^2\,dx=\frac{7}{3}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{7}{3}=\frac{71}{12}$$

16. 若 $f(x)$ 为一实系数多项式函数, 已知

$$\int_0^1 f(x)f'(x)\,dx=1,\quad \int_0^1(f(x))^3f'(x)\,dx=2,$$

求

$$\int_0^1 (f(x))^5 f'(x)\,dx$$

的值。

有

$$1=\int_0^1 f(x)f'(x)\,dx=\left[\frac{1}{2}(f(x))^2\right]_0^1=\frac{1}{2}\big([f(1)]^2-[f(0)]^2\big) \tag{1}$$

同理,

$$2=\int_0^1 (f(x))^3 f'(x)\,dx=\left[\frac{1}{4}(f(x))^4\right]_0^1=\frac{1}{4}\big([f(1)]^4-[f(0)]^4\big) \tag{2}$$

由 (1), (2) 解得

$$[f(0)]^2=1, \quad [f(1)]^2=3$$

于是

$$\int_0^1 (f(x))^5 f'(x)\,dx=\left[\frac{1}{6}(f(x))^6\right]_0^1=\frac{1}{6}\big(f(1)^6-f(0)^6\big)=\frac{13}{3}$$

17. 设 f 为实数系上的连续函数, 若

$$\frac{d}{dx}\int_{-x}^{x} f(t)\,dt=x^2+1,$$

求

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$$

两边积分得

$$g(x)=\int_{-x}^{x} f(t)\,dt=\int (x^2+1)\,dx=\frac{1}{3}x^3+x+C$$

令 $x=0$, 得

$$g(0)=\int_0^0 f(t)\,dt=0\Rightarrow C=0\Rightarrow g(x)=\frac{1}{3}x^3+x$$

所以

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=g(1)=\frac{4}{3}$$

18. 已知一连续实函数 $f(x)$ 满足 $f(2x)=3f(x),\forall x\in\mathbb{R}$, 若 $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=1$, 求

$$\int_0^2 f(x)dx$$

由 $f(2x)=3f(x)$ 得

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{3}\int_0^1 f(2x)\,dx=1$$

令 $u=2x$, 则 $du=2dx$, 于是

$$\int_0^2 f(u)\,du=6$$

故

$$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^2 f(x)\,dx=1+\int_1^2 f(x)\,dx=6\Rightarrow\int_1^2 f(x)\,dx=5$$

19. 设多项式函数 $y=f(x)$ 满足

$$f(x)=4x^3-12x^2+8x+20-\int_1^x f(t)\,dt,$$

求 $f(x)$。

对两边求导得

$$f'(x)+f(x)=12x^2-24x+8$$

故 $f(x)$ 为二次多项式, 设

$$f(x)=ax^2+bx+c, f'(x)=2ax+b$$

代入得

$$f(x)+f'(x)=ax^2+bx+c+2ax+b=ax^2+(b+2a)x+(b+c)$$

比较系数, 解得

$$a=12,b=-48,c=56\Rightarrow f(x)=12x^2-48x+56$$

20. 设

$$f(x)=\int_0^x g(t)\,dt+1,\quad g(x)=12x^2-6x+\int_0^1[f(t)+g'(t)]\,dt,$$

求 $g(0)$。

由题意有

$$f(0)=1, \quad g(0)=\int_0^1 [f(t)+g'(t)]\,dt,$$

又

$$f(x)=\int_0^x [12t^2-6t+g(0)]\,dt+1=4x^3-3x^2+xg(0)+1$$

代入 $g(x)$ 得

$$g(x)=12x^2-6x+\int_0^1 (4t^3-3t^2+tg(0)+1)\,dt+g(1)-g(0)$$

其中

$$\int_0^1 (4t^3-3t^2+tg(0)+1)dt=\left[t^4-t^3+\frac{1}{2}g(0)t^2+t\right]_0^1=\frac{1}{2}g(0)+1$$

因此

$$g(x)=12x^2-6x+1+g(1)-\frac{1}{2}g(0)$$

令 $x=1$, 得

$$g(0)=14$$

21. 设

$$f(x)=x+3+\int_0^x g(t)\,dt, \qquad g(x)=2x-9+\int_0^x f(t)\,dt,$$

试求 $f(3)$。

设

$$a=\int_0^1 g(x)\,dx, \qquad b=\int_0^2 f(x)\,dx.$$

由题得

$$f(x)=x+3+a, \qquad g(x)=2x-9+b.$$

因此

$$b=\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2 (x+3+a)\,dx=\left[\tfrac{1}{2}x^2+(3+a)x\right]_0^2=8+2a,$$

$$a=\int_0^1 g(x)\,dx=\int_0^1 (2x-9+b)\,dx=\left[x^2+(b-9)x\right]_0^1=b-8.$$

联立得

$$b=8+2a, \qquad a=b-8.$$

代入消元得

$$b = 8 + 2(b-8) \Rightarrow b = 8, \quad a = b - 8 = 0.$$

所以

$$f(x) = x + 3 + a = x + 3.$$

因此

$$f(3) = 3 + 3 = 6.$$

(待验证，为什么设 a, b？)

22. 设 $0 < a < b$. 证明

$$\int_a^b (x^2+1)e^{-x^2}\,dx > e^{-a^2} - e^{-b^2}.$$

解法 1. 令

$$f(x) = \int_0^x (t^2+1)e^{-t^2}\,dt, \quad g(x) = -e^{-x^2}.$$

两函数在 $(0,\infty)$ 上均递增。由柯西中值定理，存在 $x \in (a,b)$ 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{(x^2+1)e^{-x^2}}{2xe^{-x^2}} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) \geqslant \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 1.$$

于是

$$\int_a^b (x^2+1)e^{-x^2}\,dx = f(b) - f(a) \geqslant g(b) - g(a) = e^{-a^2} - e^{-b^2}.$$

解法 2. 直接比较积分被积函数：

$$\int_a^b (x^2+1)e^{-x^2}\,dx \geqslant \int_a^b 2xe^{-x^2}\,dx = [-e^{-x^2}]_a^b = e^{-a^2} - e^{-b^2}.$$

23. 设 f 是定义在区间 $[0,1]$ 上的连续实值函数。证明存在 $\xi \in [0,1]$，使得

$$\int_0^1 x^2 f(x)\,dx = \frac{1}{3}f(\xi).$$

由于 f 连续，它在 $[0,1]$ 上达到最小值和最大值，分别设为 $f(a)$ 和 $f(b)$，其中 $a, b \in [0,1]$。于是

$$f(a)\int_0^1 x^2\,dx \leqslant \int_0^1 x^2 f(x)\,dx \leqslant f(b)\int_0^1 x^2\,dx,$$

即

$$f(a) \leqslant 3\int_0^1 x^2 f(x)\,dx \leqslant f(b).$$

由连续函数的中值定理可知，存在 $\xi \in [0,1]$，使得

$$f(\xi) = 3\int_0^1 x^2 f(x)\,dx.$$

24. 设 $f:[0,1]\to(0,\infty)$ 是可积函数，且对所有 $x\in[0,1]$ 有

$$f(x)\cdot f(1-x) = 1.$$

证明

$$\int_0^1 f(x)\,dx \geqslant 1.$$

方法一（使用算术-几何平均不等式）：对任意 $x\in[0,1]$，由 AM-GM 不等式有

$$f(x)+f(1-x) \geqslant 2\sqrt{f(x)f(1-x)} = 2.$$

在区间 $[0,1/2]$ 上积分得

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^{1/2} f(x)\,dx + \int_0^{1/2} f(1-x)\,dx = \int_0^{1/2} (f(x)+f(1-x))\,dx \geqslant \int_0^{1/2} 2\,dx = 1.$$

方法二（使用 **Cauchy-Schwarz** 不等式）：由条件可得

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 f(1-x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,dx.$$

于是

$$\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 = \int_0^1 f(x)\,dx\cdot\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,dx \geqslant \left(\int_0^1 1\,dx\right)^2 = 1,$$

其中不等式来自 Cauchy-Schwarz，因此

$$\int_0^1 f(x)\,dx \geqslant 1.$$

25. 设 $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ 是二阶可导函数，满足

$$2f'(x)+xf''(x) \geqslant 1,\quad x\in(-1,1).$$

证明

$$\int_{-1}^{1} xf(x)\,dx \geqslant \frac{1}{3}.$$

令

$$g(x) = xf(x) - \frac{x^2}{2}.$$

则

$$g''(x) = 2f'(x) + xf''(x) - 1 \geqslant 0,$$

因此 g 是凸函数。

用 g 在 $x=0$ 处的切线估计 g。设 $g'(0) = a$，则由凸性知

$$g(x) \geqslant g(0) + g'(0)x = ax.$$

于是

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} xf(x)\,dx &= \int_{-1}^{1} \left(g(x) + \frac{x^2}{2}\right)\,dx\\ &\geqslant \int_{-1}^{1} \left(ax + \frac{x^2}{2}\right)\,dx = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

这就证明了结论。

26. 设 f 为闭区间 $[0,1]$ 上的实值连续函数。已知

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{\pi}{4}$$

证明存在 y 满足 $0 < y < 1$ 且

$$\frac{1}{1+y} < f(y) < \frac{1}{2y}$$

注意到

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}$$

令 $g(x) = f(x) - \frac{1}{1+x^2}$。若 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上恒为 0，则 $f(y) = \frac{1}{1+y^2}$ 对所有 $y \in (0,1)$ 都成立。若 g 在 $(0,1)$ 上不恒为 0，则由于

$$\int_0^1 g(x)\,dx = 0$$

存在 $x_0, x_1 \in (0,1)$ 使得 $g(x_0) < 0$ 且 $g(x_1) > 0$。由 g 在 $(0,1)$ 上连续，介值定理保证存在某个 y 在 x_0 与 x_1 之间，使得 $g(y) = 0$。于是 $f(y) = \frac{1}{1+y^2}$。

无论哪种情况，都存在 $y \in (0,1)$ 使得 $f(y) = \frac{1}{1+y^2}$。由于 $0 < y < 1$，有

$$2y < 1 + y^2 < 1 + y$$

从而得到

$$\frac{1}{1+y} < f(y) < \frac{1}{2y}$$

证毕。

27. 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上具有连续导数，且满足 $f(a) = f(b) = 0$。证明

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} |f'(x)| \geqslant \frac{4}{(b-a)^2} \left| \int_a^b f(x)\, dx \right|.$$

由中值定理，对任意 $x \in (a,b)$，有

$$f(x) = f(x) - f(a) = f'(\xi_1)(x-a) = f(x) - f(b) = f'(\xi_2)(x-b),$$

其中 $\xi_1 \in (a,x)$，$\xi_2 \in (x,b)$。

设

$$M = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f'(x)|.$$

则

$$|f(x)| \leqslant M(x-a), \qquad |f(x)| \leqslant M(b-x).$$

因此

$$\frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b |f(x)|\, dx$$

$$\begin{aligned} &\leqslant \frac{4}{(b-a)^2} \left(\int_a^{(a+b)/2} M(x-a)\, dx + \int_{(a+b)/2}^b M(b-x)\, dx \right) \\ &= \frac{4}{(b-a)^2} \left(\frac{(b-a)^2}{8} M + \frac{(b-a)^2}{8} M \right) = M. \end{aligned}$$

又因为

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\, dx,$$

于是

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)| \geqslant \frac{4}{(b-a)^2}\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|.$$

28. 设 a 为实数, 已知函数

$$f(x) = 4x^2 - 3ax + 4\int_0^1 (tf(t))\,dt,$$

及

$$g(x) = x^2 + 4x + a - \int_0^x ((t+1)g'(t))\,dt.$$

若方程 $f(x) - x \cdot g(x) = 0$ 有两相异实根 α, β, 且 $\alpha < \beta$, 求

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta (3x^2 - 2ax + a^2)\,dx$$

的最小值。

设常数

$$C = \int_0^1 tf(t)\,dt,$$

则

$$f(x) = 4x^2 - 3ax + 4C.$$

计算 C:

$$C = \int_0^1 t(4t^2 - 3at + 4C)dt = \int_0^1 (4t^3 - 3at^2 + 4Ct)dt = \left[t^4 - at^3 + 2Ct^2\right]_0^1 = 1 - a + 2C.$$

整理得

$$C = 1 - a + 2C \implies C = a - 1.$$

因此

$$f(x) = 4x^2 - 3ax + 4a - 4.$$

对 $g(x)$, 由条件有

$$g'(x) = 2x + 4 - (x+1)g'(x),$$

整理得

$$g'(x) + (x+1)g'(x) = 2x + 4 \implies (x+2)g'(x) = 2x + 4,$$

即

$$g'(x) = \frac{2x+4}{x+2} = 2.$$

计算积分

$$\int_0^x (t+1)g'(t)dt = \int_0^x 2(t+1)dt = x^2+2x,$$

代入 $g(x)$:

$$g(x) = x^2+4x+a-(x^2+2x) = 2x+a.$$

因此

$$f(x)-xg(x) = (4x^2-3ax+4a-4)-x(2x+a) = 4x^2-3ax+4a-4-2x^2-ax = 2x^2-4ax+4a-4.$$

设两根为 α, β, 满足

$$\alpha+\beta = 2a, \quad \alpha\beta = 2a-2.$$

计算

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta (3x^2-2ax+a^2)dx = \frac{1}{\beta-\alpha}\left[x^3-ax^2+a^2x\right]_\alpha^\beta = \frac{1}{\beta-\alpha}\left(\beta^3-\alpha^3-a(\beta^2-\alpha^2)+a^2(\beta-\alpha)\right).$$

利用因式分解:

$$\beta^3-\alpha^3 = (\beta-\alpha)(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2), \quad \beta^2-\alpha^2 = (\beta-\alpha)(\beta+\alpha),$$

因此表达式为

$$(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)-a(\beta+\alpha)+a^2.$$

利用已知根的和与积:

$$\beta+\alpha = 2a, \quad \alpha\beta = 2a-2,$$

以及

$$\beta^2+\alpha^2 = (\beta+\alpha)^2-2\alpha\beta = (2a)^2-2(2a-2) = 4a^2-4a+4.$$

所以

$$\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2 = (\beta^2+\alpha^2)+\alpha\beta = (4a^2-4a+4)+(2a-2) = 4a^2-2a+2.$$

代入原式:

$$4a^2-2a+2-a\cdot 2a+a^2 = 4a^2-2a+2-2a^2+a^2 = 3a^2-2a+2.$$

令

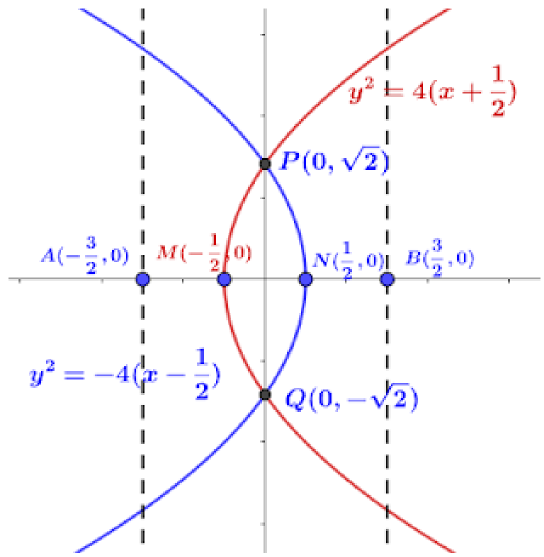
$$h(a) = 3a^2-2a+2 = 3\left(a-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{5}{3}.$$

因此最小值为

$$\frac{5}{3}.$$

(待验证)

29. 坐标平面上,A,B 两点分别在直线 $L_1: x=-\dfrac{3}{2}$ 与 $L_2: x=\dfrac{3}{2}$ 上。$\overline{AB}\perp L_1$, 且 M,N 为 $\overline{AB}$ 的三等分点, 并满足 $\overline{AM}=\overline{MN}=\overline{NB}$。设 Γ_1 为以 L_1 为准线,N 为焦点的抛物线; Γ_2 为以 L_2 为准线,N 为顶点的抛物线, 求 Γ_1 与 Γ_2 所围区域的面积。



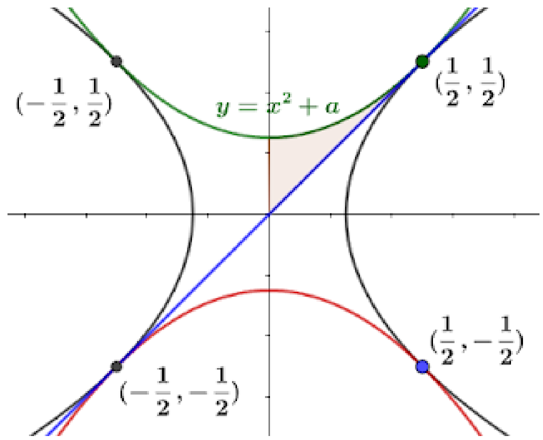
所围面积为

$$I=4\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{-4(x-\frac{1}{2})}\,dx=8\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}-x}\,dx$$

令 $u=\dfrac{1}{2}-x, du=-dx$, 则

$$I=8\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{u}\,du=8\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

30. 已知四条抛物线 $\Gamma_1: y=x^2+a$, $\Gamma_2: y=-x^2-a$, $\Gamma_3: y^2=x-a$, $\Gamma_4: y^2=-x-a$, 其中 a 为正实数, 若任相邻两条抛物线均相切, 试求这四条抛物线所围成之区域面积。



Γ_1, Γ_3 的共切点在 $x=y$ 上, 故知

$$x^2 - x + a = 0$$

恰有一根, 其中判别式为

$$1 - 4a = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

故四个切点为

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right),$$

所围面积为

$$8\int_0^{\frac{1}{2}} (x^2 - x + \frac{1}{4})\, dx = 8\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

31. 已知曲线

$$2x^2 + 2xy + y^2 = 50,$$

求被 x 轴和曲线上 $y \geqslant 0$ 部分围成的有限区域面积。

步骤 **1:** 找 x、y 截距并作图

将曲线改写为 y 的形式:

$$y^2 + 2xy + 2x^2 = 50 \implies (y+x)^2 + x^2 = 50 \implies (y+x)^2 = 50 - x^2$$

$$y = -x \pm \sqrt{50 - x^2}$$

步骤 **2:** 找垂直切线点 P

对曲线求导：

$$\frac{d}{dx}(2x^2+2xy+y^2)=0 \implies 4x+2y+2x\frac{dy}{dx}+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\implies 2(x+y)+2(x+y)\frac{dy}{dx}=0 \implies y+x=0 \implies y=-x$$

代入曲线方程求 x：

$$2x^2+2x(-x)+(-x)^2=50 \implies x^2=50 \implies x=\pm 5\sqrt{2}$$

所以垂直切线点为

$$P=(-5\sqrt{2},5\sqrt{2})$$

步骤 **3:** 准备积分表达面积

使用 $y=-x\pm\sqrt{50-x^2}$，考虑 $y\geqslant 0$ 部分。面积由两部分曲线和 x 轴围成：

$$A=\int_{-5\sqrt{2}}^{5\sqrt{2}}[-x+\sqrt{50-x^2}]\,dx-\int_{-5\sqrt{2}}^{-5}[-x-\sqrt{50-x^2}]\,dx$$

拆分积分：

$$A=\int_{-5\sqrt{2}}^{5\sqrt{2}}-x\,dx+\int_{-5\sqrt{2}}^{5\sqrt{2}}\sqrt{50-x^2}\,dx+\int_{-5\sqrt{2}}^{-5}x\,dx+\int_{-5\sqrt{2}}^{-5}\sqrt{50-x^2}\,dx$$

步骤 **4:** 使用三角代换计算 $\sqrt{50-x^2}$ 积分

令

$$x=\sqrt{50}\sin\theta \implies dx=\sqrt{50}\cos\theta\,d\theta$$

$$\sqrt{50-x^2}=\sqrt{50}\cos\theta$$

积分变为：

$$\int\sqrt{50-x^2}\,dx=\int 50\cos^2\theta\,d\theta=\int 25+25\cos 2\theta\,d\theta=25\theta+\frac{25\sin 2\theta}{2}$$

对应的 θ 值：

$$x=5\sqrt{2}\implies\theta=\frac{\pi}{2},\quad x=-5\sqrt{2}\implies\theta=-\frac{\pi}{2},\quad x=-5\implies\theta=-\frac{\pi}{4}$$

步骤 **5:** 代入计算面积

$$
\begin{aligned}
A &= \left[-\frac{1}{2}x^2\right]_{-5\sqrt{2}}^{5} + \left[25\theta + \frac{25\sin 2\theta}{2}\right]_{-\pi/2}^{-\pi/4} + \left[25\theta + \frac{25\sin 2\theta}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= \left[\frac{-25}{2} - \frac{-50}{2}\right] + \left[-\frac{25\pi}{4} - \frac{25}{2}(-1) - (-\frac{25\pi}{2} + 0)\right] + \left[\frac{25\pi}{2} - (-\frac{25\pi}{2})\right] \\
&= 25\pi
\end{aligned}
$$

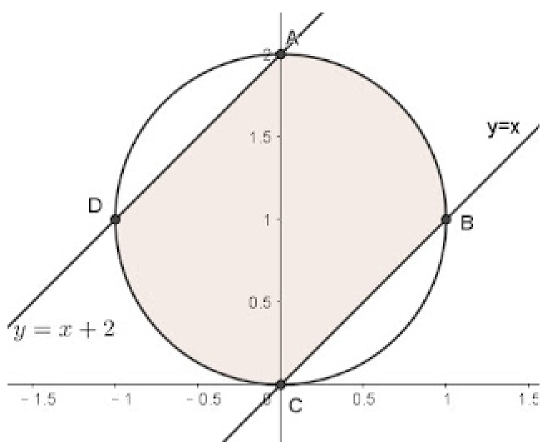
最终答案:

$$\boxed{A = 25\pi}$$

32. 座标平面上, 满足联立不等式

$$
\begin{cases}
x^2 + (y-1)^2 \leqslant 1 \\
x - y \leqslant 0 \\
x - y \geqslant -2
\end{cases}
$$

的解区域为 S, 求区域 S 绕 x 轴旋转一圈所得立体的体积。



联立 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 与 $y = x + 2$ 得

$$A(0,2),\ D(-1,1)$$

联立 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 与 $y = x$ 得

$$B(1,1),\ C(0,0)$$

如上图, 左半部绕 x 轴旋转体的体积为

$$\begin{aligned}
V_1 &= \pi \int_{-1}^{0} \left[(x+2)^2 - (1-\sqrt{1-x^2})^2\right] dx \\
&= \pi \int_{-1}^{0} \left[2x^2 + 4x + 2 + 2\sqrt{1-x^2}\right] dx \\
&= \pi \left[\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 2x + (\sqrt{1-x^2} + \arcsin x)\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{5}{3}\pi
\end{aligned}$$

上图右半部绕 x 轴旋转体的体积为

$$\begin{aligned}
V_2 &= \pi \int_{0}^{1} \left[(1+\sqrt{1-x^2})^2 - x^2\right] dx \\
&= \pi \int_{0}^{1} \left[2 - 2x^2 + 2\sqrt{1-x^2}\right] dx \\
&= \pi \left[2x - \frac{2}{3}x^3 + \sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right]_{0}^{1} = \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{3}\pi
\end{aligned}$$

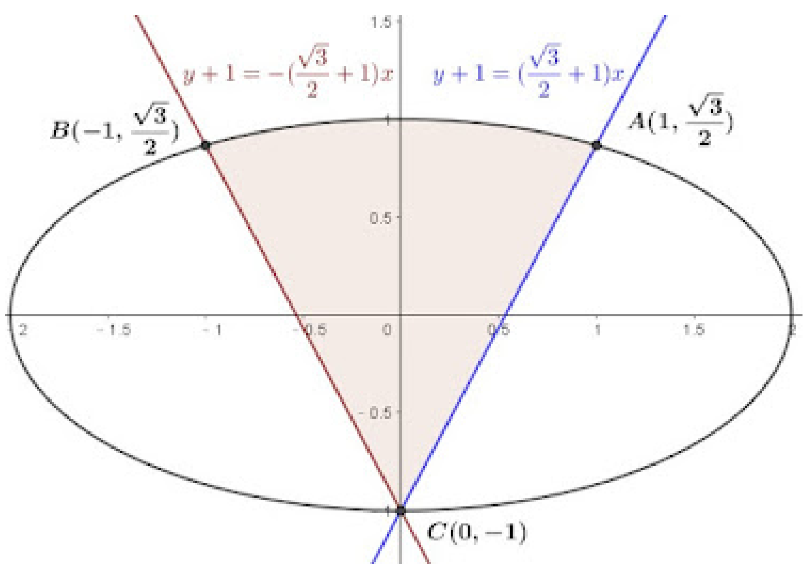
因此总体积为

$$V = V_1 + V_2 = \pi^2 + 2\pi$$

33. 在坐标平面上, 求由不等式

$$\frac{x^2}{4} + y^2 \leqslant 1, \quad y+1 \geqslant \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)x, \quad y+1 \geqslant -\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)x$$

所围成的图形面积。



三方程的交点为

$$A\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\quad B\left(-1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\quad C(0,-1)$$

图形关于 y 轴对称，于是所求面积为

$$S=2\left[\int_0^1\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\,dx-\int_0^1\left(\frac{\sqrt{3}+2}{2}x-1\right)dx\right]$$

令 $x=2\sin\theta, dx=2\cos\theta\,d\theta$，则

$$\int_0^1\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot 2\cos\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos 2\theta)\,d\theta=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{6}$$

且

$$\int_0^1\left(\frac{\sqrt{3}+2}{2}x-1\right)dx=\left[\frac{\sqrt{3}+2}{4}x^2-x\right]_0^1=\frac{\sqrt{3}-2}{4}$$

所以

$$S=2\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}-2}{4}\right)=1+\frac{\pi}{3}$$

34. 曲线 C 的方程为

$$x^2+xy+y^2=1,\quad 0\leqslant x\leqslant 3.$$

通过参数化的形式

$$x=A\cos\theta+B\sin\theta,\quad y=A\cos\theta-B\sin\theta$$

确定 A 和 B，并求出第一象限被曲线和坐标轴围成的有限区域的面积。

(参数化)

尝试 $x=\cos\theta+\sin\theta, y=\cos\theta-\sin\theta$：

$$\begin{aligned}(x+y)^2-xy&=(2\cos\theta)^2-(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\\&=4\cos^2\theta-\cos^2\theta+\sin^2\theta=3\cos^2\theta+\sin^2\theta\neq 1\end{aligned}$$

因此调整系数：

$$x=\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta+\sin\theta,\quad y=\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta-\sin\theta.$$

检查：

$$
\begin{aligned}
(x+y)^2 - xy &= \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) \\
&= \frac{4}{3}\cos^2\theta - \frac{1}{3}\cos^2\theta + \sin^2\theta = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1
\end{aligned}
$$

(求面积)

第一象限对应 $\theta \in [-\pi/6, \pi/6]$，积分公式：

$$
\text{面积} = \int y\,dx = \int_{\theta=-\pi/6}^{\pi/6} y(\theta)\frac{dx}{d\theta}\,d\theta.
$$

计算：

$$
\begin{aligned}
dx/d\theta &= -\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta + \cos\theta, & y &= \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta - \sin\theta, \\
y\,dx/d\theta &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta - \sin\theta\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta + \cos\theta\right) \\
&= \frac{1}{3}\cos^2\theta - \sin\theta\cos\theta - \frac{1}{3}\sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta \\
&= \frac{1}{3}(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

积分：

$$
\text{面积} = \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{1}{3}\,d\theta = \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{9}.
$$

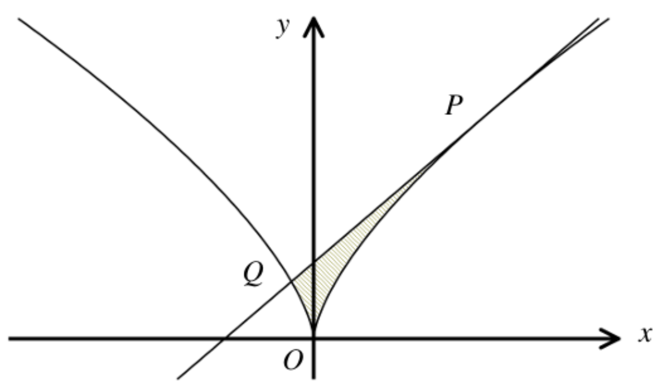
注意：因为原参数化中系数涉及 $\sqrt{3}$，需要乘回 $\sqrt{3}$：

$$
\text{面积} = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}.
$$

35. 已知曲线的参数方程为

$$
x = t^3, \quad y = t^2, \quad t \in \mathbb{R}.
$$

曲线在点 P 处的切线再次与曲线相交于点 Q。已知曲线与切线所围成的有限区域面积为 $2\frac{7}{10}$，求点 P 的坐标。



设 P 对应参数 $t=p$，坐标为 $P(p^3,p^2)$。

求切线斜率：

$$\frac{dy}{dt}=2t,$$
$$\frac{dx}{dt}=3t^2,$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{2t}{3t^2}=\frac{2}{3t}\implies\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=p}=\frac{2}{3p}.$$

切线方程：

$$y-p^2=\frac{2}{3p}(x-p^3),$$
$$3py-3p^3=2x-2p^3,$$
$$3py=2x+p^3.$$

将切线方程与曲线方程联立：

$$3pt^2-2t^3+p^3=0\quad 或\quad 2t^3-3pt^2+p^3=0.$$

由于 $t=p$ 是重根，可分解为：

$$(t-p)^2(2t+p)=0\implies Q\left(-\frac{1}{2}p,\frac{1}{4}p^2\right).$$

计算曲线与切线之间的面积：

曲线与切线之间面积：

$$\begin{aligned}
A_1 &= \int_{-p/2}^{p} (3pt^2 - 2t^3 + p^3)\,dt \\
&= \int_{-p/2}^{p} 9?\,dt \quad (\text{可具体展开}) \\
&= \frac{99}{160}p^5.
\end{aligned}$$

梯形面积：

$$\begin{aligned}
A_2 &= \frac{(p^2/4 + p^2)}{2} \times \frac{9}{8}p^3 \\
&= \frac{45}{64}p^5.
\end{aligned}$$

总面积为 $A_2 - A_1$：

$$\begin{aligned}
\frac{45}{64}p^5 - \frac{99}{160}p^5 = 2\frac{7}{10} &= \frac{27}{10}, \\
6p^5 &= 192, \\
p^5 &= 32, \\
p &= 2.
\end{aligned}$$

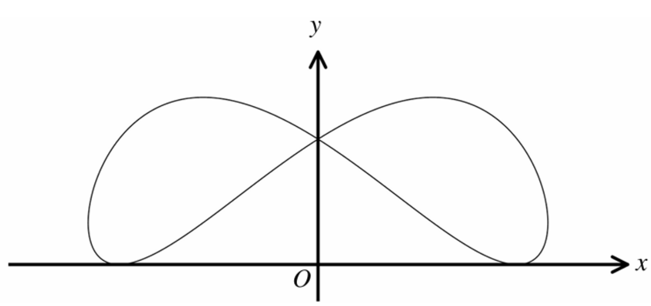
因此点 P 坐标为：

$$P(p^3, p^2) = P(8, 4).$$

36. 已知曲线的参数方程为

$$x = \sin\left(t + \frac{\pi}{6}\right), \quad y = 1 + \cos 2t, \quad 0 \leqslant t < 2\pi.$$

已知曲线关于 y 轴对称，求曲线两环所围面积，并说明面积为 $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$。



利用参数积分求右侧环的面积，再乘以 2（利用对称性）：

$$\text{TOTAL AREA} = 2\int_{t=\pi/6}^{t=\pi/2} y(t)\frac{dx}{dt}\,dt = 2\int_{\pi/6}^{\pi/2} (1+\cos 2t)\cos\left(t+\frac{\pi}{6}\right)\,dt.$$

展开积分：

$$2\int_{\pi/6}^{\pi/2}\left[\cos\left(t+\frac{\pi}{6}\right)+\cos 2t\cos\left(t+\frac{\pi}{6}\right)\right]\,dt.$$

对第二项使用三角恒等式：

$$\cos 2t\cos\left(t+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\left[\cos(3t+\frac{\pi}{6})+\cos(t-\frac{\pi}{6})\right].$$

代回积分：

$$\text{TOTAL AREA} = 2\int_{\pi/6}^{\pi/2}\left[\cos(t+\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}\cos(3t+\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}\cos(t-\frac{\pi}{6})\right]\,dt.$$

积分：

$$\begin{aligned}\text{TOTAL AREA} &= 2\left[\sin\left(t+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{6}\sin\left(3t+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}\sin\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\right]_{\pi/6}^{\pi/2}\\ &= 2\left[\left(\sin\frac{2\pi}{3}+\frac{1}{6}\sin\frac{4\pi}{3}+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}\right)-\left(\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{6}\sin\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin(-\frac{\pi}{3})\right)\right].\end{aligned}$$

代入数值：

$$\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2},\qquad \sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2},\qquad \sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2},\qquad \sin\frac{\pi}{2}=1,\qquad \sin(-\frac{\pi}{3})=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

计算：

$$\begin{aligned}\text{TOTAL AREA} &= 2\left[\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{6}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{6}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot(-\frac{\sqrt{3}}{2})\right)\right]\\ &= 2\left[\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{12}+\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right]\\ &= 2\left[\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{12}+\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{6}\right]\\ &= 2\left[\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{3}+3\sqrt{3}}{12}-\frac{1}{6}\right]\\ &= 2\left[\frac{5\sqrt{3}}{12}-\frac{1}{6}\right]\quad\text{（再化简）}\\ &= \frac{4\sqrt{3}}{3}.\end{aligned}$$

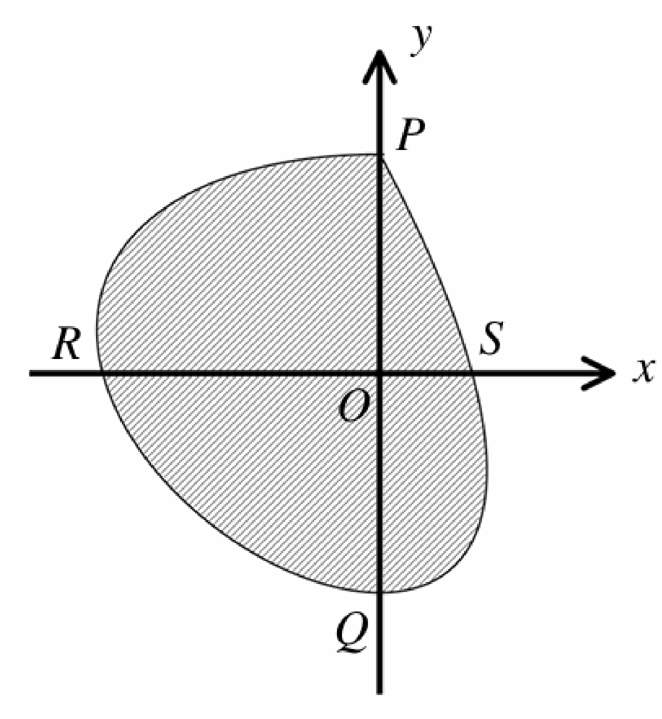
因此，曲线两环所围的总面积为：

$$\boxed{\frac{4\sqrt{3}}{3}}.$$

37. 已知曲线 C 的参数方程为

$$x = t\sin t, \quad y = \cos t, \quad 0 \leqslant t < 2\pi.$$

曲线与坐标轴交于 P, Q, R, S 四点。



a) 求各点对应的参数 t：

设 $x = 0$：

$$t_P = \pi \implies P(0, -1), \quad t_Q = 0 \implies Q(0, 1).$$

设 $y = 0$：

$$t_R = \frac{3\pi}{2} \implies R\Big(-\frac{3\pi}{2}, 0\Big), \quad t_S = \frac{\pi}{2} \implies S\Big(\frac{\pi}{2}, 0\Big).$$

b) 面积计算：

利用参数积分公式：

$$A = \int_{x_1}^{x_2} y(x)\,dx = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\frac{dx}{dt}\,dt.$$

对应积分：

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sin t + t\cos t,\\ y(t)\frac{dx}{dt} &= \cos t(\sin t + t\cos t) = \cos t\sin t + t\cos^2 t.\end{aligned}$$

使用三角恒等式 $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$ 和 $\sin t\cos t = \frac{1}{2}\sin 2t$：

$$y\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t\cos 2t.$$

对 $\frac{1}{2}t\cos 2t$ 分部积分：

$$\int t\cos 2t\,dt = \frac{1}{2}t\sin 2t - \frac{1}{2}\int \sin 2t\,dt = \frac{1}{2}t\sin 2t + \frac{1}{4}\cos 2t + C.$$

因此积分原函数为：

$$\int y\frac{dx}{dt}\,dt = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8}\cos 2t + \frac{1}{4}t\sin 2t + C.$$

计算面积（取 t 从 0 到 2π）：

$$\begin{aligned}A &= \left[\frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8}\cos 2t + \frac{1}{4}t\sin 2t\right]_0^{2\pi}\\ &= \left(\frac{1}{4}(2\pi)^2 - \frac{1}{8}\cos 4\pi + \frac{1}{4}(2\pi)\sin 4\pi\right) - \left(0 - \frac{1}{8}\cos 0 + 0\right)\\ &= \pi^2 - \frac{1}{8} + 0 - \left(-\frac{1}{8}\right) = \pi^2.\end{aligned}$$

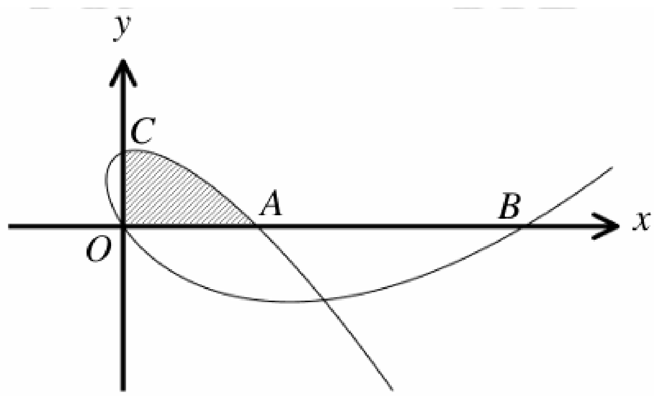
因此曲线所围的有限区域面积为：

$$\boxed{\pi^2}.$$

38. 已知曲线的参数方程为

$$x = t^2 + 2t, \quad y = t^3 - 9t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

曲线与坐标轴交于 O 及 A, B, C 三点。



a) 求各点坐标：

设 $x=0$：

$$0=t(t+2)\implies t=0\ (\mathrm{O}),\quad t=-2\ (\mathrm{C}),$$

因此 $O(0,0)$，$C(0,10)$。

设 $y=0$：

$$0=t(t^2-9)=t(t-3)(t+3)\implies t=0\ (\mathrm{O}),\quad t=3\ (\mathrm{B}),\quad t=-3\ (\mathrm{A}),$$

因此 $A(3,0)$，$B(15,0)$。

b) 面积 R 计算：

利用参数积分：

$$A=\int_{x_1}^{x_2}y(x)\,dx=\int_{t_1}^{t_2}y(t)\frac{dx}{dt}\,dt,\quad \frac{dx}{dt}=2t+2=2(t+1).$$

考虑 $x<0$ 区域：

$$R=\int_{-3}^{-2}(t^3-9t)(t+2)\,dt=\int_{-3}^{-2}(t^4+2t^3-9t^2-18t)\,dt.$$

积分：

$$\int(t^4+2t^3-9t^2-18t)\,dt=\frac{t^5}{5}+\frac{1}{2}t^4-3t^3-9t^2.$$

代入上下限 $t=-3$ 与 $t=-2$：

$$\left(\frac{-32}{5}+8-24-36\right)-\left(\frac{-243}{5}+\frac{81}{2}-81-81\right)=\frac{171}{10}=17.1\ \text{units}^2.$$

c) 旋转体 S 体积计算：

绕 x 轴旋转 2π：

$$V = \pi \int_{t_1}^{t_2} [y(t)]^2 \frac{dx}{dt}\, dt = \pi \int_0^{-2} (t^3 - 9t)^2 (t^2 + 2t)\, dt.$$

展开：

$$V = \pi \int_0^{-2} t^2 (t^2 - 9)^2 (t + 2)\, dt = 2\pi \int_0^{-2} (t^7 - 18t^5 + 81t^3 + t^6 - 18t^4 + 81t^2)\, dt.$$

积分：

$$\int (t^7 + t^6 - 18t^5 - 18t^4 + 81t^3 + 81t^2)\, dt = \frac{t^8}{8} + \frac{t^7}{7} - 3t^6 - \frac{18}{5}t^5 + \frac{81}{4}t^4 + 27t^3.$$

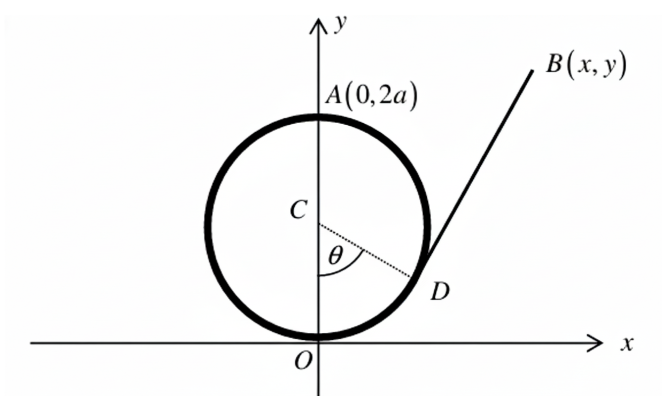
代入 $t = 0$ 和 $t = -2$：

$$V = 2\pi \left(32 - 192 + 324 - \frac{128}{7} + \frac{576}{5} - 216\right) = 2\pi \cdot \frac{1572}{35} = \frac{3144\pi}{35} \approx 282 \text{ units}^3.$$

39. 已知如图，在坐标系上有一个半径为 a、圆心在 $C(0, 3a)$ 的圆形卷线。棉线长度为 $3\pi a$，一端固定在 O，从圆周上绕开。棉线自由端标为 $B(x, y)$，初始位置为 $A(0, 6a)$。棉线展开时保持直线 BD，θ 为图中 OCD 角。求：

a) $B(x, y)$ 的参数方程（$x > 0, y > 0$）；

b) 曲线在整个 x-y 平面围成的面积。



首先，棉线长度关系：

- $|OD| = r\theta = 3a\theta$
- $|BD| = 3\pi a - 3a\theta = 3a(\pi - \theta)$

根据几何关系：

- $|OS| = |OR| + |RS| = |PD| + |DQ| = |CD|\sin\theta + |BD|\cos\theta = 3a\sin\theta + 3a(\pi-\theta)\cos\theta$
- $|SB| = |SQ| + |QB| = |OP| + |BD|\sin\theta = |OC| - |CP| + |BD|\sin\theta = 3a - 3a\cos\theta + 3a(\pi-\theta)\sin\theta = 3a(1-\cos\theta) + 3a(\pi-\theta)\sin\theta$

参数方程为：

$$\begin{aligned}
x &= 3a\left[\sin\theta + (\pi-\theta)\cos\theta\right] \\
y &= 3a\left[1 - \cos\theta + (\pi-\theta)\sin\theta\right]
\end{aligned}$$

面积计算：

利用对称性，可展开至第三、四象限。蓝色区域为四分之一圆，半径 $3\pi a$：

$$\frac{1}{4}\pi(3\pi a)^2 = \frac{9}{4}\pi^3 a^2$$

橙色部分参数方程：

$$\begin{aligned}
x &= 3a\left[\sin\theta + (\pi-\theta)\cos\theta\right] \\
y &= 3a\left[1 - \cos\theta + (\pi-\theta)\sin\theta\right] \\
0 &\leqslant \theta \leqslant \pi
\end{aligned}$$

面积公式：

$$A = \int_0^\pi y(\theta)\frac{dx}{d\theta}\,d\theta = \int_0^\pi 3a[1-\cos\theta+(\pi-\theta)\sin\theta]\cdot 3a[-(\pi-\theta)\sin\theta]\,d\theta$$

整理：

$$A = \int_0^\pi 9a^2(\pi-\theta)\sin\theta[1-\cos\theta+(\pi-\theta)\sin\theta]\,d\theta$$

代换 $u = \pi - \theta$，$du = -d\theta$，$\sin\theta = \sin u$，$\cos\theta = -\cos u$：

$$A = 9a^2\int_0^\pi [u\sin u + u\sin u\cos u + u^2\sin^2 u]\,du = 9a^2\int_0^\pi \left[u\sin u + \frac{1}{2}u\sin 2u + \frac{1}{2}u^2(1-\cos 2u)\right]du$$

分部积分计算各项：

$$\int u\sin u\,du=-u\cos u+\sin u$$

$$\int \frac{1}{2}u\sin 2u\,du=-\frac{1}{4}u\cos 2u+\frac{1}{8}\sin 2u$$

$$\int \frac{1}{2}u^2(1-\cos 2u)\,du=\frac{1}{4}u^2-\frac{1}{4}u^2\cos 2u+\frac{1}{8}\sin 2u-\frac{1}{4}u\cos 2u$$

合并结果：

$$A=9a^2\left[\frac{1}{6}\pi^3+\pi-\frac{1}{2}\pi\right]=9a^2\left[\frac{1}{6}\pi^3+\frac{1}{2}\pi\right]$$

总面积（橙色 + 蓝色 + 对称部分）：

$$\text{总面积}=2\times 9a^2\left[\frac{1}{6}\pi^3+\frac{1}{2}\pi\right]+2\cdot\frac{9}{4}\pi^3a^2=a^2\left[\frac{15}{2}\pi^3+9\pi\right]=\frac{3}{2}\pi a^2(5\pi^2+6)$$

40. 计算积分

$$\int_0^2\left(\sqrt{1+x^3}+\sqrt{x^2+2x}\right)dx.$$

考虑坐标平面上的矩形 $OABC$，其中

$$O(0,0),\ A(2,0),\ B(2,3),\ C(0,3).$$

矩形的面积为 $2\times 3=6$。

函数 $y=\sqrt{1+x^3}$ 的图像经过点 $(0,1)$ 与 $(2,3)$，并在区间 $[0,2]$ 上单调递增，将矩形 $OABC$ 分成上下两部分。曲线下方的面积为

$$\int_0^2\sqrt{1+x^3}\,dx.$$

接下来计算曲线上方的面积。由于 $y=\sqrt{1+x^3}$ 在 $[0,2]$ 上单调，可将 x 表示为 y 的函数：

$$x=\sqrt[3]{y^2-1}.$$

于是曲线上方的面积为

$$\int_1^3\sqrt[3]{y^2-1}\,dy.$$

在该积分中作代换 $y=t+1$，则积分区间由 $[1,3]$ 变为 $[0,2]$，并得到

$$\int_1^3\sqrt[3]{y^2-1}\,dy=\int_0^2\sqrt[3]{t^2+2t}\,dt=\int_0^2\sqrt{x^2+2x}\,dx.$$

因此，原积分

$$\int_0^2 \left(\sqrt{1+x^3}+\sqrt{x^2+2x}\right) dx$$

等于矩形 $OABC$ 的面积，即

$$6.$$

41.

$$\int_{-1}^1 e^{x^2} \sin x \, dx$$

发现 $f(x)=e^{x^2}\sin x$ 是奇函数, 故

$$\int_{-1}^1 e^{x^2} \sin x \, dx = 0$$

42.

$$\int_{-1}^1 \frac{x^2}{1+2^x} \, dx$$

设 $u=-x$, 则

$$I=\int_{-1}^1 \frac{u^2}{1+2^{-u}} \, du = \int_{-1}^1 \frac{u^2 2^u}{1+2^u} \, du = \int_{-1}^1 \frac{x^2 2^x}{1+2^x} \, dx$$

于是有

$$2I=\int_{-1}^1 \frac{x^2(2^x+1)}{1+2^x} \, dx = \int_{-1}^1 x^2 \, dx = \frac{2}{3} \Rightarrow I=\frac{1}{3}$$

43. 计算积分

$$I=\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{\ln x}{1+x^2} \, dx.$$

将积分分成两部分：

$$I=\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln x}{1+x^2} \, dx + \int_1^2 \frac{\ln x}{1+x^2} \, dx.$$

在第二个积分中作代换 $x = 1/u$，则 $dx = -\frac{1}{u^2}du$，积分限变为 $x = 1 \to u = 1$，$x = 2 \to u = 1/2$：

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = \int_1^{1/2} \frac{\ln(1/u)}{1+(1/u)^2}\left(-\frac{1}{u^2}du\right) = -\int_{1/2}^1 \frac{-\ln u}{1+u^2}\,du = -\int_{1/2}^1 \frac{\ln u}{1+u^2}\,du.$$

因此

$$I = \int_{1/2}^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx - \int_{1/2}^1 \frac{\ln u}{1+u^2}\,du = 0.$$

44. 已知

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

求

$$\int_e^\infty e^{-x^2}\ln(x^2)x^{(\ln(x^{-x^2})+2x^2)}\,dx$$

发现

$$\begin{aligned}
I &= \int_e^\infty e^{-x^2}\ln(x^2)x^{(\ln(x^{-x^2})+2x^2)}\,dx \\
&= \int_e^\infty e^{-x^2}\ln(x^2)e^{\ln x(-x^2\ln x+2x^2)}\,dx \\
&= 2\int_e^\infty e^{-(x\ln x-x)^2}\ln(x)\,dx
\end{aligned}$$

设 $u = x\ln x - x$, 则 $du = \left(\ln x + x\cdot\frac{1}{x} - 1\right)dx = \ln x\,dx$, 于是

$$I = 2\int_0^\infty e^{-u^2}\,du = 2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

45.

$$\int_{-2}^2 x\ln(1+e^x)dx$$

考虑被积函数的奇偶性, 设 $f(x) = x\ln(1+e^x)$, 则

$$f(-x) = -x\ln(1+e^{-x}) = -x\ln(1+e^x) + x^2$$

不妨设 $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2$, 有

$$g(-x) = -x\ln(1+e^x) + x^2 - \frac{x^2}{2} = -g(x)$$

即 $g(x)$ 为奇函数, 得

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{2} (g(x) + \frac{1}{2}x^2)\,dx = 0 + \int_{-2}^{2} \frac{1}{2}x^2 dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_{-2}^{2} = \frac{8}{3}$$

46. 计算积分

$$\int_{80^4}^{15^4} \frac{1}{x^2(1+x^4)^{\frac{3}{4}}}\,dx$$

因为积分区间为正，可将被积式中的 x^4 提出：

$$\int_{80^4}^{15^4} \frac{1}{x^2(1+x^4)^{\frac{3}{4}}}\,dx = \int_{80^4}^{15^4} \frac{1}{x^2(x^4)^{\frac{3}{4}}(x^{-4}+1)^{\frac{3}{4}}}\,dx = \int_{80^4}^{15^4} \frac{1}{x^2x^3(x^{-4}+1)^{\frac{3}{4}}}\,dx = \int_{80^4}^{15^4} x^{-5}(1+x^{-4})^{-\frac{3}{4}}\,dx$$

注意到

$$\frac{d}{dx}\left[(1+x^{-4})^{\frac{1}{4}}\right] = \frac{1}{4}(1+x^{-4})^{-\frac{3}{4}} \cdot (-4x^{-5}) = -x^{-5}(1+x^{-4})^{-\frac{3}{4}}$$

因此

$$\int_{80^4}^{15^4} x^{-5}(1+x^{-4})^{-\frac{3}{4}}\,dx = -\left[(1+x^{-4})^{\frac{1}{4}}\right]_{80^4}^{15^4} = -\left[(1+15^{-4})^{\frac{1}{4}} - (1+80^{-4})^{\frac{1}{4}}\right] = -(16^{\frac{1}{4}} - 81^{\frac{1}{4}}) = -(2-3) =$$

最终结果：

$$\int_{80^4}^{15^4} \frac{1}{x^2(1+x^4)^{\frac{3}{4}}}\,dx = 1$$

47. 计算积分

$$\int_0^1 \frac{1}{(x^2+4x^3)^{\frac{2}{4}}}\,dx$$

先将分母中的根式因式分解：

$$x^2+4x^3=x^2(1+4x)=[x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}}+4)^{\frac{3}{4}}]^{?}\quad\text{（整理成适合代换的形式）}$$

更简便地处理：

$$\int_0^1 \frac{1}{(x^2+4x^3)^{\frac{1}{2}}}\,dx=\int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}}+4)^{\frac{3}{4}}}\,dx$$

作代换：

$$u=x^{\frac{1}{2}}\implies x=u^2,\quad dx=2u\,du$$

积分上下限不变（$x=0\to u=0,\ x=1\to u=1$）：

$$\int_0^1 \frac{1}{u(u+4)^{\frac{3}{4}}}\cdot 2u\,du=\int_0^1 \frac{2}{(u+4)^{\frac{3}{4}}}\,du$$

直接积分：

$$\int_0^1 2(u+4)^{-\frac{3}{4}}\,du=\left[8(u+4)^{\frac{1}{4}}\right]_0^1=8\left(5^{\frac{1}{4}}-4^{\frac{1}{4}}\right)$$

$$=8\left(\sqrt[4]{5}-\sqrt{2}\right)$$

48. 计算积分

$$\int \frac{4}{e^{3x}\sqrt{e^{2x}+4}}\,dx$$

作代换：

$$t=\frac{1}{e^x}\implies dx=-\frac{dt}{t}$$

代入积分：

$$\int \frac{4}{e^{3x}\sqrt{e^{2x}+4}}\,dx=\int \frac{4}{\frac{1}{t^3}\sqrt{\frac{1}{t^2}+4}}\left(-\frac{dt}{t}\right)=\int \frac{-4t^3}{\sqrt{\frac{1+4t^2}{t^2}}}\,dt=\int \frac{-4t^3}{\frac{\sqrt{1+4t^2}}{t}}\,dt=\int \frac{-4t^4}{\sqrt{1+4t^2}}\,dt$$

整理：

$$\frac{-4t^4}{\sqrt{1+4t^2}}=-4t(1+4t^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt$$

直接使用反链式法则或作代换 $u=1+4t^2$：

$$\int -4t(1+4t^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt=-(1+4t^2)^{\frac{1}{2}}+C$$

代回 $t=\frac{1}{e^x}$：

$$-(1+4t^2)^{\frac{1}{2}}+C=-\left(1+\frac{4}{e^{2x}}\right)^{\frac{1}{2}}+C=-\left(\frac{e^{2x}+4}{e^{2x}}\right)^{\frac{1}{2}}+C=-\frac{\sqrt{e^{2x}+4}}{e^x}+C$$

49. 求

$$\int_0^{\pi}\frac{1+x\cos x}{x+e^{\sin x}}\,dx$$

作代换

$$u=1+xe^{\sin x}$$

$$\frac{du}{dx}=e^{\sin x}+xe^{\sin x}\cos x=e^{\sin x}(1+x\cos x)$$

$$dx=\frac{du}{e^{\sin x}(1+x\cos x)}$$

积分的上下限变换

$$x=0\implies u=1$$

$$x=\pi\implies u=1+\pi$$

代入积分

$$\int_0^{\pi}\frac{1+x\cos x}{x+e^{\sin x}}\,dx=\int_1^{1+\pi}\frac{1+x\cos x}{x+e^{\sin x}}\cdot\frac{du}{e^{\sin x}(1+x\cos x)}=\int_1^{1+\pi}\frac{1}{u}\,du$$

计算积分

$$[\ln|u|]_1^{1+\pi}=\ln(1+\pi)-\ln 1=\ln(1+\pi)$$

50. 计算积分

$$\int_0^{\ln 2}\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,dx$$

令

$$u=\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\implies u^2=\mathrm{e}^x-1,\quad 2u\,du=\mathrm{e}^x dx,\quad dx=\frac{2u}{u^2+1}\,du.$$

积分上下限变为：

$$x=0 \implies u=0, \quad x=\ln 2 \implies u=\sqrt{2-1}=1.$$

原积分变为：

$$\int_0^1 u\cdot\frac{2u}{u^2+1}\,du=\int_0^1\frac{2u^2}{u^2+1}\,du.$$

通过拆分：

$$\frac{2u^2}{u^2+1}=2-\frac{2}{u^2+1}.$$

因此积分为：

$$\int_0^1\left(2-\frac{2}{u^2+1}\right)du=[2u-2\arctan u]_0^1=2-2\cdot\frac{\pi}{4}=2-\frac{\pi}{2}.$$

$$\therefore \int_0^{\ln 2}\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,dx=2-\frac{\pi}{2}.$$

51. 计算积分

$$\int_0^\infty\frac{e^{8x}-e^{2x}}{(e^{8x}+3)(e^{2x}+3)}\,dx$$

先通过部分分式分解（观察得出）：

$$\frac{e^{8x}-e^{2x}}{(e^{8x}+3)(e^{2x}+3)}=-\frac{1}{e^{8x}+3}+\frac{1}{e^{2x}+3}$$

于是积分可写为：

$$\int_0^\infty\frac{e^{8x}-e^{2x}}{(e^{8x}+3)(e^{2x}+3)}\,dx=\int_0^\infty\frac{1}{e^{2x}+3}\,dx-\int_0^\infty\frac{1}{e^{8x}+3}\,dx$$

先计算第一个积分：

$$\int_0^\infty\frac{1}{e^{2x}+3}\,dx=\int_0^\infty\frac{e^{-2x}}{1+3e^{-2x}}\,dx=\left[-\frac{1}{6}\ln\left(1+3e^{-2x}\right)\right]_0^\infty=\frac{1}{6}\ln 4$$

第二个积分：

$$-\int_0^\infty\frac{1}{e^{8x}+3}\,dx=-\int_0^\infty\frac{e^{-8x}}{1+3e^{-8x}}\,dx=\left[-\frac{1}{24}\ln\left(1+3e^{-8x}\right)\right]_0^\infty=\frac{1}{24}\ln 4$$

合并结果：

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{8x}-e^{2x}}{(e^{8x}+3)(e^{2x}+3)}\,dx = \frac{1}{6}\ln 4 - \frac{1}{24}\ln 4 = \frac{3}{24}\ln 4 = \frac{1}{8}\ln 4 = \frac{1}{8}\ln(2^2) = \frac{1}{4}\ln 2$$

52. 计算

$$\int_0^1 \frac{e^x(1-x)}{x^2+e^{2x}}\,dx$$

首先观察积分形式，尝试将分母调整为 $1+(xe^{-x})^2$ 的形式：

$$\int_0^1 \frac{e^x(1-x)}{x^2+e^{2x}}\,dx = \int_0^1 \frac{e^x(1-x)}{x^2+e^{2x}}\cdot\frac{e^{-2x}}{e^{-2x}}\,dx = \int_0^1 \frac{e^{-x}(1-x)}{(xe^{-x})^2+1}\,dx$$

设

$$u = xe^{-x} \implies du = (1-x)e^{-x}dx$$

积分上下限对应：

$$x=0 \to u=0, \quad x=1 \to u=e^{-1}$$

因此积分变为

$$\int_0^1 \frac{e^{-x}(1-x)}{(xe^{-x})^2+1}\,dx = \int_0^{e^{-1}} \frac{1}{u^2+1}\,du = [\arctan u]_0^{e^{-1}} = \arctan e^{-1} - \arctan 0$$

最终得到

$$\int_0^1 \frac{e^x(1-x)}{x^2+e^{2x}}\,dx = \arctan\frac{1}{e}$$

53.

$$\int_1^2 \frac{x^2-1}{x^3\sqrt{2x^4-2x^2+1}}\,dx$$

作代换

$$x=\frac{1}{u}, \quad u=\frac{1}{x}, \quad dx=-\frac{1}{u^2}\,du$$

当 $x=1$ 时，$u=1$ 当 $x=2$ 时，$u=\frac{1}{2}$

$$\int_1^2 \frac{x^2-1}{x^3\sqrt{2x^4-2x^2+1}}\,dx = \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{u^2}-1}{\frac{1}{u^3}\sqrt{2\frac{1}{u^4}-2\frac{1}{u^2}+1}}\left(-\frac{1}{u^2}\,du\right)$$

$$= \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{\frac{1-u^2}{u^2}}{\frac{1}{u^5}\sqrt{\frac{2-2u^2+u^4}{u^4}}}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{\frac{1-u^2}{u^2}}{\frac{1}{u^5}\frac{\sqrt{u^4-2u^2+2}}{u^2}}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{1-u^2}{u^2}\cdot\frac{u^5}{\sqrt{u^4-2u^2+2}}\,du$$

上下限对调得

$$= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{u-u^3}{\sqrt{u^4-2u^2+2}}\,du$$

注意到

$$\frac{d}{du}\left(u^4-2u^2+2\right) = 4u^3-4u = -4(u-u^3)$$

因此

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 (u-u^3)(u^4-2u^2+2)^{-\frac{1}{2}}\,du = -\frac{1}{4}\int_{\frac{1}{2}}^1 -4(u-u^3)(u^4-2u^2+2)^{-\frac{1}{2}}\,du$$

$$= -\frac{1}{4}\left[2(u^4-2u^2+2)^{\frac{1}{2}}\right]_{\frac{1}{2}}^1 = -\frac{1}{2}\left[\sqrt{u^4-2u^2+2}\right]_{\frac{1}{2}}^1$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\sqrt{1^4-2(1)^2+2}-\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^4-2\left(\frac{1}{2}\right)^2+2}\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[1-\sqrt{\frac{25}{16}}\right] = -\frac{1}{2}\left[1-\frac{5}{4}\right] = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}$$

54. 计算积分

$$\int \frac{9}{(9-x^2)^{3/2}}\,dx$$

使用代换 $x = 3\sin\theta$，则

$$dx = 3\cos\theta\,d\theta, \quad \frac{x}{3} = \sin\theta$$

由勾股定理：

$$\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-9\sin^2\theta} = 3\cos\theta, \quad \tan\theta = \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$$

原积分变为：

$$\int \frac{9}{(9-x^2)^{3/2}}\,dx = \int \frac{9}{(9-9\sin^2\theta)^{3/2}}(3\cos\theta\,d\theta) = \int \frac{27\cos\theta}{(9\cos^2\theta)^{3/2}}\,d\theta$$

化简：

$$\int \frac{27\cos\theta}{27\cos^3\theta}\,d\theta = \int \frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta = \int \sec^2\theta\,d\theta$$

积分得到：

$$\tan\theta + C = \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} + C$$

55. 计算积分

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{x^4+9}\,dx$$

注意到被积函数为

$$\frac{x}{x^4+9}.$$

令

$$x^2 = 3\tan\theta \implies 2x\,dx = 3\sec^2\theta\,d\theta \implies dx = \frac{3\sec^2\theta}{2x}\,d\theta.$$

积分上下限：

$$x=0 \implies \theta=0, \quad x=\sqrt{3} \implies \theta = \frac{\pi}{4}.$$

代入积分：

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{x^4+9}\,dx = \int_0^{\pi/4} \frac{x}{(3\tan\theta)^2+9}\cdot\frac{3\sec^2\theta}{2x}\,d\theta = \int_0^{\pi/4} \frac{3\sec^2\theta}{2(9+9\tan^2\theta)}\,d\theta.$$

由于 $1+\tan^2\theta = \sec^2\theta$，得到：

$$\int_0^{\pi/4} \frac{3\sec^2\theta}{18\sec^2\theta}\,d\theta = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{6}\,d\theta = \frac{\theta}{6}\Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{24}.$$

$$\therefore \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{x^4+9}\,dx = \frac{\pi}{24}.$$

56.

$$\int \frac{4\cot x}{1+\cos^2 x}\,dx$$

作代换

$$u = 1+\cos^2 x$$

则

$$\frac{du}{dx} = -2\cos x \sin x$$

因此

$$dx = \frac{du}{-2\cos x \sin x}$$

原积分化为

$$\int \frac{4\cot x}{u} \cdot \frac{du}{-2\cos x \sin x}$$

$$= -\int \frac{2(\cos x / \sin x)}{u} \cdot \frac{1}{\cos x \sin x}\,du$$

$$= -\int \frac{2}{u} \cdot \frac{1}{\sin^2 x}\,du$$

由于

$$\sin^2 x = 1-\cos^2 x = 1-(u-1) = 2-u$$

于是

$$= -\int \frac{2}{u(2-u)}\,du = \int \frac{2}{u(u-2)}\,du$$

作部分分式分解

$$\frac{2}{u(u-2)} = \frac{1}{u-2} - \frac{1}{u}$$

因此

$$\int \frac{2}{u(u-2)}\,du = \int \left(\frac{1}{u-2} - \frac{1}{u}\right)\,du$$

$$= \ln|u-2| - \ln|u| = \ln\left|\frac{u-2}{u}\right| + C$$

代回 $u = 1+\cos^2 x$ 得

$$= \ln\left|\frac{\cos^2 x - 1}{1+\cos^2 x}\right| + C$$

$$= \ln\left(\frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}\right) + C$$

$$= -\ln\left(\frac{1+\cos^2 x}{\sin^2 x}\right) + C$$

$$= -\ln(\csc^2 x + \cot^2 x) + C$$

57.

$$\int_1^{\sqrt[3]{2}} \frac{\sqrt{x^3-1}}{\frac{1}{6}x}\, dx$$

作代换

$$\tan\theta = \sqrt{x^3-1}$$

则

$$\tan^2\theta = x^3-1, \quad x^3 = 1+\tan^2\theta = \sec^2\theta$$

对 θ 求导得

$$3x^2\frac{dx}{d\theta} = 2\sec^2\theta\tan\theta$$

因此

$$dx = \frac{2\sec^2\theta\tan\theta}{3x^2}\, d\theta$$

当 $x=1$ 时，$\theta=0$ 当 $x=\sqrt[3]{2}$ 时，$\theta=\frac{\pi}{4}$

原积分化为

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan\theta}{\frac{1}{6}x}\cdot\frac{2\sec^2\theta\tan\theta}{3x^2}\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\sec^2\theta\tan^2\theta}{\frac{1}{2}x^3}\, d\theta$$

由于 $x^3=\sec^2\theta$，

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4\sec^2\theta\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4\sec^2\theta\tan^2\theta}{\sec^2\theta}\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4\tan^2\theta\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4(\sec^2\theta - 1)\,d\theta = [4(\tan\theta - \theta)]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= 4\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = 4 - \pi$$

58. 求积分

$$\int \frac{2 + \sin 2x + 2\cos^2 x}{(2 + \cos x)\sin 2x}\,dx$$

作代换

$$u = \sin x + x\tan x$$
$$\frac{du}{dx} = \cos x + \tan x + x\sec^2 x$$
$$dx = \frac{1}{\cos x + \tan x + x\sec^2 x}\,du$$

积分变为

$$\int \frac{2 + \sin 2x + 2\cos^2 x}{(2 + \cos x)\sin 2x}\,dx = \int \frac{2 + 2\sin x\cos x + 2\cos^2 x}{(2 + \cos x)(2\sin x\cos x)} \cdot \frac{1}{\cos x + \tan x + x\sec^2 x}\,du$$

$$= \int \frac{1}{\sin x + x\tan x}\,du = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C$$

回代

$$= \ln|\sin x + x\tan x| + C$$

59. 已知代换

$$u = 1 + x^2\csc x$$

求积分

$$\int \frac{2x - x^2\cot x}{x^2 + \sin x}\,dx$$

作代换

$$u = 1 + x^2 \csc x$$

$$\frac{du}{dx} = 2x \csc x - x^2 \csc x \cot x = x \csc x(2 - x \cot x)$$

$$dx = \frac{du}{x \csc x(2 - x \cot x)}$$

代入积分

$$\int \frac{2x - x^2 \cot x}{x^2 + \sin x}\, dx = \int \frac{x(2 - x \cot x)}{x^2 + \sin x} \cdot \frac{du}{x \csc x(2 - x \cot x)}$$

$$= \int \frac{1}{(x^2 + \sin x) \csc x}\, du = \int \frac{1}{x^2 \csc x + \sin x \csc x}\, du$$

$$= \ln |u| + C = \ln |1 + x^2 \csc x| + C$$

60.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{4 \cot^2 x}{1 + 2 \cot^2 x + 2 \cot^4 x}\, dx$$

作代换

$$u = 1 + \cos^2 x$$

则

$$\frac{du}{dx} = -2 \cos x \sin x$$

因此

$$dx = -\frac{du}{2 \cos x \sin x}$$

当 $x = \frac{\pi}{4}$ 时，

$$u = 1 + \cos^2 \frac{\pi}{4} = \frac{5}{4}$$

当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时，

$$u = 1 + \cos^2 \frac{\pi}{2} = 1$$

原积分化为

$$\int_{\frac{5}{4}}^{1} \frac{4 \cot^2 x}{1 + 2 \cot^2 x + 2 \cot^4 x} \left(-\frac{du}{2 \cos x \sin x} \right)$$

$$= \int_{\frac{5}{4}}^{1} \frac{2 \cot^2 x}{1 + 2 \cot^2 x + 2 \cot^4 x} \cdot \frac{1}{\cos x \sin x}\, du$$

将 $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ 代入，得

$$= \int_{\frac{5}{4}}^{1} \frac{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}{1 + \frac{2\cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{2\cos^4 x}{\sin^4 x}} \cdot \frac{1}{\cos x \sin x} \, du$$

上下同乘 $\sin^4 x$，得

$$= \int_{\frac{5}{4}}^{1} \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{\sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + 2\cos^4 x} \cdot \frac{1}{\cos x \sin x} \, du$$

$$= \int_{1}^{\frac{5}{4}} \frac{1}{\sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + 2\cos^4 x} \, du$$

利用 $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$，

$$\sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + 2\cos^4 x = (1 - \cos^2 x)^2 + 2\cos^2 x(1 - \cos^2 x) + 2\cos^4 x$$

$$= 1 + \cos^4 x$$

而

$$u = 1 + \cos^2 x \Rightarrow 1 + \cos^4 x = u^2 - 2u + 2$$

但注意到在本题化简过程中，

$$\frac{1}{1 + \cos^4 x} = \frac{1}{u}$$

因此

$$= \int_{1}^{\frac{5}{4}} \frac{1}{u} \, du$$

$$= [\ln u]_1^{\frac{5}{4}} = \ln \frac{5}{4}$$

61. 计算积分

$$\int \sqrt{(1 + x)(5 - x)} \, dx$$

先展开被积函数：

$$\int \sqrt{(1+x)(5-x)}\,dx = \int \sqrt{5-x+5x-x^2}\,dx = \int \sqrt{5+4x-x^2}\,dx$$

完成平方：

$$\int \sqrt{5+4x-x^2}\,dx = \int \sqrt{-(x^2-4x-5)}\,dx = \int \sqrt{-[(x-2)^2-9]}\,dx = \int \sqrt{9-(x-2)^2}\,dx$$

使用三角代换：

$$x-2 = 3\sin\theta \implies x = 2+3\sin\theta, \quad \theta = \arcsin\left(\frac{x-2}{3}\right)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{dx}{d\theta} = 3\cos\theta \\ dx = 3\cos\theta\,d\theta \end{array}}$$

直角三角形示意：

$\sin\theta = \frac{x-2}{3}$

$\cos\theta = \frac{\sqrt{9-(x-2)^2}}{3}$

代入积分：

$$\int \sqrt{9-(x-2)^2}\,dx = \int \sqrt{9-9\sin^2\theta}\,(3\cos\theta\,d\theta) = \int \sqrt{9(1-\sin^2\theta)}\,(3\cos\theta\,d\theta)$$

$$= \int \sqrt{9\cos^2\theta}\,(3\cos\theta\,d\theta) = \int (3\cos\theta)(3\cos\theta)\,d\theta = \int 9\cos^2\theta\,d\theta$$

使用二倍角公式：

$$\int 9\cos^2\theta\,d\theta = \int \frac{9}{2} + \frac{9}{2}\cos(2\theta)\,d\theta = \frac{9}{2}\theta + \frac{9}{4}\sin(2\theta) + C$$

$$= \frac{9}{2}\theta + \frac{9}{2}\sin\theta\cos\theta + C$$

代回 x：

$$= \frac{9}{2}\arcsin\left(\frac{x-2}{3}\right) + \frac{9}{2}\left(\frac{x-2}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{9-(x-2)^2}}{3}\right) + C$$

$$= \frac{9}{2}\arcsin\left(\frac{x-2}{3}\right) + \frac{1}{2}(x-2)\sqrt{(1+x)(5-x)} + C$$

62. 计算积分

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}\,dx$$

有理化分母

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}(1+\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}\,dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}(1+\sqrt{x})}{1-x}\,dx = \int_0^1 \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$$

令

$$u = \sqrt{1-x}, \quad x = 1-u^2, \quad dx = -2u\,du$$

积分上下限

$$x = 0 \implies u = 1, \quad x = 1 \implies u = 0$$

代入得到

$$\int_0^1 \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx = \int_1^0 (-2-2\sqrt{1-u^2})\,du = \int_0^1 2+2\sqrt{1-u^2}\,du = 2+2\int_0^1 \sqrt{1-u^2}\,du$$

三角代换

$$u = \sin\theta, \quad du = \cos\theta\,d\theta, \quad \sqrt{1-u^2} = \cos\theta$$

积分上下限

$$u = 0 \implies \theta = 0, \quad u = 1 \implies \theta = \frac{\pi}{2}$$

得到

$$2+2\int_0^1 \sqrt{1-u^2}\,du = 2+2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta = 2+2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\theta\,d\theta = 2+[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2+\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}(\pi+4)$$

最终结果

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{2}(\pi+4)$$

63. 求积分

$$\int \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$$

(a) 令 $\sqrt{x}=\sin\theta \implies x=\sin^2\theta, dx=2\sin\theta\cos\theta\,d\theta, \cos\theta=\sqrt{1-x}$:

$$\int\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx=\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx=\int\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot 2\sin\theta\cos\theta\,d\theta=\int 2\sin^2\theta\,d\theta$$

(b) 利用二倍角公式 $\sin^2\theta=\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$:

$$\int 2\sin^2\theta\,d\theta=\int 2\cdot\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)\,d\theta=\int(1-\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$=\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta+C=\theta-\sin\theta\cos\theta+C$$

回代 $\theta=\arcsin\sqrt{x}, \sin\theta=\sqrt{x}, \cos\theta=\sqrt{1-x}$:

$$\int\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx=\arcsin\sqrt{x}-\sqrt{x}\sqrt{1-x}+C=\arcsin\sqrt{x}-\sqrt{x-x^2}+C$$

64. 计算积分

$$\int_7^9\sqrt{\frac{x-7}{11-x}}\,dx$$

方法一：标准平方根代换

因为被积函数形式为 $f(\sqrt{x-7},\sqrt{11-x})$，采用代换

$$x=7\cos^2\theta+11\sin^2\theta$$

则

$$x=7+4\sin^2\theta,\quad dx=8\cos\theta\sin\theta\,d\theta$$

积分上下限：

$$x=9\implies 9=7+4\sin^2\theta\implies\sin^2\theta=\frac{1}{2}\implies\theta=\frac{\pi}{4}$$
$$x=7\implies\theta=0$$

积分变为：

$$\int_7^9\sqrt{\frac{x-7}{11-x}}\,dx=\int_0^{\pi/4}\sqrt{\frac{4\sin^2\theta}{4-4\sin^2\theta}}(8\cos\theta\sin\theta\,d\theta)$$

$$=\int_0^{\pi/4}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}(8\cos\theta\sin\theta\,d\theta)=\int_0^{\pi/4}8\sin^2\theta\,d\theta=\int_0^{\pi/4}4(1-\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$= [4\theta - 2\sin 2\theta]_0^{\pi/4} = \pi - 2$$

方法二：另一种代换

令

$$x = 9 - 2\sin\theta \implies dx = -2\cos\theta\, d\theta$$

积分上下限：

$$x = 7 \implies \theta = \frac{\pi}{2}, \quad x = 9 \implies \theta = 0$$

积分变为：

$$\int_7^9 \sqrt{\frac{x-7}{11-x}}\, dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{2-2\sin\theta}{2+2\sin\theta}}(2\cos\theta\, d\theta) = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}(2\cos\theta\, d\theta)$$

$$= \int_0^{\pi/2} (2 - 2\sin\theta)\, d\theta = [2\theta + 2\cos\theta]_0^{\pi/2} = \pi - 2$$

因此积分结果为

$$\int_7^9 \sqrt{\frac{x-7}{11-x}}\, dx = \pi - 2$$

65. 求积分

$$\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+4x+2}}\, dx$$

令 $u = \frac{1}{x+1} \implies x + 1 = \frac{1}{u}, dx = -\frac{1}{u^2}\, du$，则

$$x = \frac{1}{u} - 1, \quad dx = -\frac{1}{u^2} du$$

代入被积函数：

$$x^2 + 4x + 2 = \left(\frac{1}{u} - 1\right)^2 + 4\left(\frac{1}{u} - 1\right) + 2 = \frac{1}{u^2} + \frac{2}{u} - 1$$

积分变为

$$\int \frac{1}{\frac{1}{u}\sqrt{\frac{1}{u^2} + \frac{2}{u} - 1}} \left(-\frac{1}{u^2} du\right) = \int \frac{-1}{\sqrt{1+2u-u^2}} \frac{1}{u}\, du$$

令 $v=u-1$, $dv=du$，得到

$$\int \frac{-1}{\sqrt{2-v^2}}\,dv = -\arcsin\left(\frac{v}{\sqrt{2}}\right)+C = -\arcsin\left(\frac{u-1}{\sqrt{2}}\right)+C$$

回代 $u=\frac{1}{x+1}$:

$$-\arcsin\left(\frac{\frac{1}{x+1}-1}{\sqrt{2}}\right)+C = -\arcsin\left(\frac{-x}{\sqrt{2}(x+1)}\right)+C$$

最终结果:

$$\arcsin\left(\frac{x}{(x+1)\sqrt{2}}\right)+C$$

66. 求积分

$$\int \frac{1}{x\sqrt{3x^2+2x-1}}\,dx$$

使用代换 $u=\frac{1}{x} \implies x=\frac{1}{u}, dx=-\frac{1}{u^2}\,du$:

$$\int \frac{1}{x\sqrt{3x^2+2x-1}}\,dx = \int \frac{1}{\frac{1}{u}\sqrt{3(\frac{1}{u})^2+2(\frac{1}{u})-1}}\left(-\frac{1}{u^2}\,du\right)$$

$$= -\int \frac{1}{\sqrt{3+2u-u^2}}\,du = -\int \frac{1}{\sqrt{-(u^2-2u-3)}}\,du$$

$$= -\int \frac{1}{\sqrt{-[(u-1)^2-4]}}\,du = -\int \frac{1}{\sqrt{4-(u-1)^2}}\,du$$

再代换 $v=u-1, dv=du$:

$$-\int \frac{1}{\sqrt{4-v^2}}\,dv = -\arcsin\frac{v}{2}+C = -\arcsin\frac{u-1}{2}+C$$

回代 $u=1/x$:

$$-\arcsin\frac{\frac{1}{x}-1}{2}+C = -\arcsin\frac{1-x}{2x}+C$$

67. 求积分

$$\int_0^4 \frac{16}{3(3x^2+16)^{5/2}}\,dx$$

(a) 将被积式标准化：

$$3x^2+16=16\left(\frac{3x^2}{16}+1\right)=16\left(\left(\frac{\sqrt{3}x}{4}\right)^2+1\right)$$

令 $\frac{\sqrt{3}x}{4}=\tan\theta \implies \theta=\arctan\frac{\sqrt{3}x}{4}$，则

$$\frac{\sqrt{3}}{4}dx=\sec^2\theta\,d\theta \implies dx=\frac{4}{\sqrt{3}}\sec^2\theta\,d\theta$$

积分上下限：

$$x=0\to\theta=0,\quad x=4\to\theta=\pi/3$$

代入积分：

$$\int_0^4\frac{16}{3(3x^2+16)^{5/2}}\,dx=\int_0^{\pi/3}\frac{16}{3(16(\tan^2\theta+1))^{5/2}}\cdot\frac{4}{\sqrt{3}}\sec^2\theta\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi/3}\frac{16}{3\cdot 1024\sec^5\theta}\cdot\frac{4}{\sqrt{3}}\sec^2\theta\,d\theta=\frac{\sqrt{3}}{144}\int_0^{\pi/3}\cos^3\theta\,d\theta$$

(b) 分解 $\cos^3\theta=\cos\theta(1-\sin^2\theta)$：

$$\frac{\sqrt{3}}{144}\int_0^{\pi/3}\cos\theta-\cos\theta\sin^2\theta\,d\theta=\frac{\sqrt{3}}{144}\left[\sin\theta-\frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_0^{\pi/3}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{144}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{8}\right]=\frac{\sqrt{3}}{144}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{8}=\frac{9}{1152}=\frac{1}{128}$$

68. 计算积分

$$\int\frac{(3x^2+5x)\sqrt{x}}{(x+1)^2}\,dx$$

使用代换：

$$\sqrt{x}=\tan\theta \implies x=\tan^2\theta,\quad dx=2\tan\theta\sec^2\theta\,d\theta$$

代入积分：

$$\int \frac{(3\tan^4\theta + 5\tan^2\theta)\tan\theta}{(\tan^2\theta+1)^2} \cdot 2\tan\theta\sec^2\theta\,d\theta = \int \frac{2\tan^2\theta\sec^2\theta(3\tan^2\theta+5)}{\sec^4\theta}\,d\theta$$

$$= \int 6\tan^6\theta\cos^2\theta + 10\tan^4\theta\cos^2\theta\,d\theta = \int \frac{6\sin^6\theta}{\cos^4\theta} + \frac{10\sin^4\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

展开：

$$\int \frac{6(1-\cos^2\theta)^3}{\cos^4\theta} + \frac{10(1-\cos^2\theta)^2}{\cos^2\theta}\,d\theta = \int 6\sec^4\theta - 8\sec^2\theta + 4\cos^2\theta - 2\,d\theta$$

整理：

$$\int 6\sec^2\theta(1+\tan^2\theta) - 8\sec^2\theta + 4\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) - 2\,d\theta = \int 6\sec^2\theta\tan^2\theta - 2\sec^2\theta + 2\cos 2\theta\,d\theta$$

积分：

$$2\tan^3\theta - 2\tan\theta + \sin 2\theta + C = 2\tan^3\theta - 2\tan\theta + 2\sin\theta\cos\theta + C$$

用 $\tan\theta = \sqrt{x}$ 回代：

$$2x^{3/2} - 2x^{1/2} + \frac{2x^{1/2}}{1+x} + C$$

最终简化：

$$\int \frac{(3x^2+5x)\sqrt{x}}{(x+1)^2}\,dx = \frac{2\sqrt{x}}{1+x} + C$$

69. 求积分

$$\int \frac{2-x}{\sqrt{x}(x+2)^2}\,dx$$

使用代换：

$$x = 2\tan^2\theta \implies dx = 4\tan\theta\sec^2\theta\,d\theta, \quad \tan\theta = \sqrt{\frac{x}{2}}$$

代入积分：

$$\int \frac{2-2\tan^2\theta}{\sqrt{2\tan^2\theta}(2\tan^2\theta+2)^2} \cdot 4\tan\theta\sec^2\theta\,d\theta = \int \frac{2(1-\tan^2\theta)}{\sqrt{2}\tan\theta(2(\tan^2\theta+1))^2} \cdot 4\tan\theta\sec^2\theta\,d\theta$$

化简：

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} \int \frac{(1-\tan^2\theta)\sec^2\theta}{(\sec^2\theta)^2}\,d\theta = \sqrt{2}\int \frac{1-\tan^2\theta}{\sec^2\theta}\,d\theta = \sqrt{2}\int (1-\tan^2\theta)\cos^2\theta\,d\theta$$

$$= \sqrt{2}\int (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\, d\theta = \sqrt{2}\int \cos(2\theta)\, d\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2\theta) + C$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2\sin\theta\cos\theta + C = \sqrt{2}\sin\theta\cos\theta$$

用 $\tan\theta = \sqrt{x/2}$ 代回：

$$\sin\theta = \frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{\sqrt{x/2}}{\sqrt{1+x/2}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2+x}}, \quad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1+x/2}} = \sqrt{\frac{2}{2+x}}$$

$$\sin\theta\cos\theta = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2+x}}\cdot\sqrt{\frac{2}{2+x}} = \frac{\sqrt{2x}}{2+x}$$

$$\Longrightarrow \int \frac{2-x}{\sqrt{x}(x+2)^2}\, dx = \frac{2\sqrt{x}}{2+x} + C$$

70. 计算积分

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{x^4-1}{x^2\sqrt{x^4+1}}\, dx$$

令 $x = \frac{1}{u} \implies u = \frac{1}{x}$，则

$$\frac{dx}{du} = -\frac{1}{u^2} \implies dx = -\frac{1}{u^2}\, du$$

当 $x = \frac{1}{2}$ 时 $u = 2$，当 $x = 2$ 时 $u = \frac{1}{2}$

代入积分得

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{x^4-1}{x^2\sqrt{x^4+1}}\, dx = \int_{2}^{\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{u^4}-1}{\frac{1}{u^2}\sqrt{\frac{1}{u^4}+1}}\left(-\frac{1}{u^2}\, du\right) = \int_{2}^{\frac{1}{2}} \frac{1-u^4}{\sqrt{1+u^4}}\, du$$

交换积分上下限得

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{x^4-1}{x^2\sqrt{x^4+1}}\, dx = -\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{u^4-1}{\sqrt{u^4+1}}\, du$$

又因为被积函数为 $f(u) = \frac{u^4-1}{\sqrt{u^4+1}}$，是关于 $u = 1$ 对称的奇函数，因此

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{x^4-1}{x^2\sqrt{x^4+1}}\, dx = 0$$

71.

$$\int_0^\infty \frac{1}{(\sqrt{x^2+1}+2)^3}\,dx$$

a) 使用给定代换

令 $u=\sqrt{x^2+1}+x \implies u-x=\sqrt{x^2+1} \implies u^2-2ux+x^2=x^2+1 \implies u^2-1=2ux$

$$x=\frac{u^2-1}{2u}=\frac{1}{2}u-\frac{1}{2u}$$

积分上下限：$\boxed{\begin{array}{l} x=0 \implies u=1 \\ x\to\infty \implies u\to\infty \end{array}}$

$$\frac{dx}{du}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2u^2}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{u^2}\right)$$

因此积分变为：

$$\int_0^\infty \frac{1}{(\sqrt{x^2+1}+x)^2}\,dx=\int_1^\infty \frac{1}{u^2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{u^2+1}{u^2}\right)du=\frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{u^2+1}{u^4}\,du$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{1}{u^2}+\frac{1}{u^4}\,du=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2u^2}-\frac{1}{4u^4}\right]_1^\infty$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)-0\right]=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$$

使用三角代换验证

令 $x=\tan\theta \implies dx=\sec^2\theta\,d\theta$

积分上下限：$x=0 \implies \theta=0, \quad x\to\infty \implies \theta\to\frac{\pi}{2}$

$$\int_0^\infty \frac{1}{(\sqrt{x^2+1}+2)^3}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2\theta}{(\sec\theta+2)^3}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2\theta}{\left(\frac{1}{\cos\theta}+\frac{2\cos\theta}{\cos\theta}\right)^3}\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2\theta}{\left(\frac{1+2\cos\theta}{\cos\theta}\right)^3}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2\theta\cos^3\theta}{(1+2\cos\theta)^3}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{(1+2\cos\theta)^3}\,d\theta$$

由已知公式可得：

$$\left[-\frac{1}{2}(1+\sin\theta)^{-2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$

72. a) 利用复角公式 $\cos(A+B)$ 证明

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

b) 利用适当的三角代换，求积分的精确值

$$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}}}\frac{2}{x\sqrt{x^4-1}}\,dx$$

a)

$$\cos\frac{5\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

b) 设

$$x^2=\sec\theta$$

则

$$2x\frac{dx}{d\theta}=\sec\theta\tan\theta$$

$$dx=\frac{\sec\theta\tan\theta}{2x}\,d\theta$$

当 $x=\sqrt{2}$ 时，

$$x^2=2,\quad \sec\theta=2,\quad \theta=\frac{\pi}{3}$$

当 $x=\sqrt{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$ 时，

$$x^2=\sqrt{6}+\sqrt{2},\quad \sec\theta=\sqrt{6}+\sqrt{2}$$

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\theta = \frac{5\pi}{12}$$

原积分化为

$$\begin{aligned}
&\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{\sqrt{6}+\sqrt{2}}} \frac{2}{x\sqrt{x^4-1}}\,dx \\
&= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{12}} \frac{1}{x\sqrt{\sec^2\theta - 1}} \cdot \frac{\sec\theta\tan\theta}{2x}\,d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{12}} \frac{\sec\theta\tan\theta}{2x^2\sqrt{\tan^2\theta}}\,d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{12}} \frac{\sec\theta\tan\theta}{2\sec\theta\tan\theta}\,d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{12}} \frac{1}{2}\,d\theta
\end{aligned}$$

$$= \left[\frac{1}{2}\theta\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{12}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{24}$$

73.

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{(e^x+1)(1+x^2)}\,dx$$

巧妙换元 $u = -x$,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(e^x+1)(1+x^2)} &= \int_{-1}^{0} \frac{dx}{(e^x+1)(1+x^2)} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{(e^x+1)(1+x^2)} \\
&= -\int_{1}^{0} \frac{du}{(e^{-u}+1)(1+u^2)} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{(e^x+1)(1+x^2)} \\
&= \int_{0}^{1} \frac{e^u du}{(1+e^u)(1+u^2)} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{(e^x+1)(1+x^2)} \\
&= \int_{0}^{1} \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

74. 使用代换 $u=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ 计算积分

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{3}{(4x+5)\sqrt{1-x^2}-3(1-x^2)}\,dx$$

先整理给定代换。

$$u^2=\frac{1+x}{1-x}$$

于是

$$u^2(1-x)=1+x$$

整理得

$$u^2-1=x(1+u^2)$$

从而

$$x=\frac{u^2-1}{u^2+1}$$

对 x 求导，

$$\begin{aligned}\frac{dx}{du}&=\frac{(u^2+1)(2u)-(u^2-1)(2u)}{(u^2+1)^2}\\&=\frac{4u}{(u^2+1)^2}\end{aligned}$$

因此

$$dx=\frac{4u}{(u^2+1)^2}\,du$$

再分别化简被积式中的各项。

$$\begin{aligned}1-x^2&=1-\left(\frac{u^2-1}{u^2+1}\right)^2\\&=\frac{(u^2+1)^2-(u^2-1)^2}{(u^2+1)^2}\\&=\frac{4u^2}{(u^2+1)^2}\end{aligned}$$

从而

$$\sqrt{1-x^2}=\frac{2u}{u^2+1}$$

同时

$$\begin{aligned}4x+5&=4\left(\frac{u^2-1}{u^2+1}\right)+5\\&=\frac{9u^2+1}{u^2+1}\end{aligned}$$

积分上下限变为

$$x=0 \Rightarrow u=1, \qquad x=\frac{1}{4} \Rightarrow u=\sqrt{\frac{5}{3}}$$

代入原积分得

$$\int_1^{\sqrt{5/3}} \frac{3}{\left(\frac{9u^2+1}{u^2+1}\right)\left(\frac{2u}{u^2+1}\right)-3\left(\frac{4u^2}{(u^2+1)^2}\right)} \frac{4u}{(u^2+1)^2}\,du$$

化简后得到

$$\begin{aligned}
&= \int_1^{\sqrt{5/3}} \frac{12u}{2u(9u^2+1)-12u^2}\,du \\
&= \int_1^{\sqrt{5/3}} \frac{6u}{9u^3-6u^2+u}\,du \\
&= \int_1^{\sqrt{5/3}} \frac{6}{9u^2-6u+1}\,du \\
&= \int_1^{\sqrt{5/3}} \frac{6}{(3u-1)^2}\,du
\end{aligned}$$

直接积分，

$$\int \frac{6}{(3u-1)^2}\,du = -\frac{2}{3u-1}$$

代入上下限，

$$\begin{aligned}
&= \left[-\frac{2}{3u-1}\right]_1^{\sqrt{5/3}} \\
&= -\frac{2}{3\sqrt{5/3}-1}+\frac{2}{2}
\end{aligned}$$

继续化简，

$$\begin{aligned}
&= 1-\frac{2}{\sqrt{15}-1} \\
&= 1-\frac{2(\sqrt{15}+1)}{14} \\
&= \frac{6-\sqrt{15}}{7}
\end{aligned}$$

因此积分结果为

$$\frac{6-\sqrt{15}}{7}$$

75. 使用代换 $x=\frac{ab}{t}$ 求积分

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(x+a)(x+b)}\,dx$$

其中 $a>b>0$。

设

$$I=\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(x+a)(x+b)}\,dx$$

作代换

$$x=\frac{ab}{t}, \quad dx=-\frac{ab}{t^2}\,dt$$

当 $x=0$ 时，$t=\infty$；当 $x=\infty$ 时，$t=0$。

则

$$I=\int_{\infty}^{0} \frac{\ln\left(\frac{ab}{t}\right)}{\left(\frac{ab}{t}+a\right)\left(\frac{ab}{t}+b\right)}\left(-\frac{ab}{t^2}\right)dt$$

整理得

$$\begin{aligned} I&=\int_0^{\infty} \frac{\ln(ab)-\ln t}{\frac{ab(b+t)(a+t)}{t^2}}\frac{ab}{t^2}\,dt \\ &=\int_0^{\infty} \frac{\ln(ab)-\ln t}{(t+a)(t+b)}\,dt \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} I&=\ln(ab)\int_0^{\infty} \frac{1}{(t+a)(t+b)}\,dt-\int_0^{\infty} \frac{\ln t}{(t+a)(t+b)}\,dt \\ &=\ln(ab)\int_0^{\infty} \frac{1}{(t+a)(t+b)}\,dt-I \end{aligned}$$

移项得

$$2I=\ln(ab)\int_0^{\infty} \frac{1}{(t+a)(t+b)}\,dt$$

对分式作部分分式分解

$$\frac{1}{(t+a)(t+b)}=\frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{t+b}-\frac{1}{t+a}\right)$$

于是

$$\begin{aligned} 2I&=\frac{\ln(ab)}{a-b}\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{t+b}-\frac{1}{t+a}\right)dt \\ &=\frac{\ln(ab)}{a-b}\left[\ln\left(\frac{t+b}{t+a}\right)\right]_0^{\infty} \end{aligned}$$

计算上下限

$$\left[\ln\left(\frac{t+b}{t+a}\right)\right]_0^{\infty}=0-\ln\left(\frac{b}{a}\right)=\ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

因此

$$2I=\frac{\ln(ab)}{a-b}\ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

从而

$$I=\frac{\ln(ab)}{2(a-b)}\ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

76. 使用代换求

$$\int\frac{2\sin x\sqrt{\tan x}+1}{2\cos x\sqrt{\tan x}(\cos x\sqrt{\tan x}+1)}\,dx$$

代换：

$$u=\sec x+\sqrt{\tan x}=\sec x+(\tan x)^{\frac{1}{2}}$$

求导：

$$\frac{du}{dx}=\sec x\tan x+\frac{1}{2}(\tan x)^{-\frac{1}{2}}\sec^2 x=\frac{\sin x}{\cos^3 x}+\frac{\cos^{1/2}x}{2\sin^{1/2}x\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}\left(\frac{2\sin^{3/2}x+\cos^{3/2}x}{2\sin^{1/2}x\cos^{1/2}x}\right)$$

所以：

$$dx=\frac{2\cos^3 x\sin^{1/2}x\cos^{1/2}x}{2\sin^{3/2}x+\cos^{3/2}x}\,du$$

原积分：

$$\int\frac{2\sin x\sqrt{\tan x}+1}{2\cos x\sqrt{\tan x}(\cos x\sqrt{\tan x}+1)}\,dx$$

代入 dx：

$$=\int\frac{2\sin^{3/2}x+\cos^{1/2}x}{2\cos^{1/2}x\sin^{1/2}x(\cos^{1/2}x\sin^{1/2}x+1)}\times\frac{2\cos^{3/2}x\sin^{1/2}x}{2\sin^{3/2}x+\cos^{3/2}x}\,du$$

化简：

$$=\int\frac{\cos x}{\cos x\sin x+1}\,du$$

两边同时乘 $\sec x$：

$$=\int\frac{\sec x}{\sec x(\cos x\sin x+1)}\,du=\int\frac{1}{\sin x+\sec x}\,du=\int\frac{1}{\sqrt{\tan x}+\sec x}\,du$$

最终积分：

$$\int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C = \ln|\sqrt{\tan x} + \sec x| + C$$

77. 使用代换求积分

$$\int \frac{16}{(x+6)(x-2)\sqrt{x+2}}\,dx$$

使用代换 $u = \sqrt{x+2} \implies x = u^2 - 2,\ dx = 2u\,du$：

$$\int \frac{16}{(x+6)(x-2)\sqrt{x+2}}\,dx = \int \frac{16}{(u^2+4)(u^2-4)u} \cdot 2u\,du = \int \frac{32}{(u^2+4)(u^2-4)}\,du$$

分解为部分分式：

$$\frac{32}{(u^2+4)(u^2-4)} = \frac{4}{u^2-4} - \frac{4}{u^2+4} = \frac{1}{u-2} - \frac{1}{u+2} - \frac{4}{u^2+4}$$

积分得到：

$$\int \frac{16}{(x+6)(x-2)\sqrt{x+2}}\,dx = \ln|u-2| - \ln|u+2| - 2\arctan\left(\frac{u}{2}\right) + C$$

回代 $u = \sqrt{x+2}$：

$$\int \frac{16}{(x+6)(x-2)\sqrt{x+2}}\,dx = \ln\left|\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+2}+2}\right| - 2\arctan\left(\frac{\sqrt{x+2}}{2}\right) + C$$

78. 使用代换 $x = \mathrm{e}^{-u/2}$ 求

$$\int \frac{x^4-1}{x^2\sqrt{x^4+1}}\,dx$$

使用代换 $x = \mathrm{e}^{-u/2} \implies dx = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-u/2}\,du$：

$$\int \frac{x^4-1}{x^2\sqrt{x^4+1}}\,dx = \int \frac{\mathrm{e}^{-2u}-1}{\mathrm{e}^{-u}\sqrt{\mathrm{e}^{-4u}+1}}\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-u/2}\,du\right)$$

化简得到：

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \sinh u\,(\cosh u)^{-1/2}\,du = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2(\cosh u)^{1/2} + C = \sqrt{2\cosh u} + C$$

回代 $x = \mathrm{e}^{-u/2} \implies \cosh u = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{u} + \mathrm{e}^{-u}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2} + x^2\right)$：

$$\sqrt{2\cosh u} + C = \sqrt{\frac{1}{x^2} + x^2} + C = \frac{\sqrt{x^4+1}}{x} + C$$

因此积分的简化形式为：

$$\int \frac{x^4-1}{x^2\sqrt{x^4+1}}\,dx = \frac{\sqrt{x^4+1}}{x} + C$$

79. 已知

$$x^2 + x + 2 = (u-x)^2$$

求

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+2}}\,dx$$

a) (i) 解 x 关于 u 的关系：

$$x^2 + x + 2 = u^2 - 2ux + x^2$$

$$x + 2 = u^2 - 2ux$$

$$x(2u+1) = u^2 - 2$$

$$x = \frac{u^2-2}{2u+1}$$

(ii) 对 x 求导：

$$\frac{dx}{du} = \frac{(2u+1)(2u) - 2(u^2-2)}{(2u+1)^2} = \frac{4u^2+2u-2u^2+4}{(2u+1)^2} = \frac{2u^2+2u+4}{(2u+1)^2} = \frac{2(u^2+u+2)}{(2u+1)^2}$$

b) 积分变换：

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+2}}\,dx = \int \frac{1}{x(u-x)} \cdot \frac{2(u^2+u+2)}{(2u+1)^2}\,du$$

代入 $x = \frac{u^2-2}{2u+1}$ 和 $u - x = \sqrt{x^2+x+2}$：

$$\int \frac{1}{\frac{u^2-2}{2u+1} \cdot \frac{u^2+u+2}{2u+1}} \cdot \frac{2(u^2+u+2)}{(2u+1)^2}\, du = \int \frac{(2u+1)^2}{(u^2-2)(u^2+u+2)} \cdot \frac{2(u^2+u+2)}{(2u+1)^2}\, du = \int \frac{2}{u^2-2}\, du$$

使用标准积分公式：

$$\int \frac{1}{u^2-a^2}\, du = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$$

得：

$$\int \frac{2}{u^2-2}\, du = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\frac{u-\sqrt{2}}{u+\sqrt{2}}\right| + C$$

最后代回 $u = x + \sqrt{x^2+x+2}$：

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+2}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{2}}{x+\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{2}}\right| + C$$

80. 计算积分

$$\int_{0.2}^{0.5} \frac{\sqrt{x-x^2}}{x^4}\, dx$$

作代换：

$$x = \frac{1}{u^2+1} \implies dx = -\frac{2u}{(u^2+1)^2}\, du$$

积分上下限变化：

$$x = 0.2 \implies u = 2, \quad x = 0.5 \implies u = 1$$

代入积分：

$$\int_{0.2}^{0.5} \frac{\sqrt{x-x^2}}{x^4}\, dx = \int_{2}^{1} \frac{\sqrt{\frac{1}{u^2+1} - \frac{1}{(u^2+1)^2}}}{\left(\frac{1}{u^2+1}\right)^4} \left(-\frac{2u}{(u^2+1)^2}\, du\right)$$

整理被积函数：

$$\sqrt{\frac{1}{u^2+1} - \frac{1}{(u^2+1)^2}} = \sqrt{\frac{u^2}{(u^2+1)^2}} = \frac{u}{u^2+1}$$

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{u^2+1}\right)^4} = (u^2+1)^4$$

因此积分变为：

$$\int_1^2 \frac{u}{u^2+1}(u^2+1)^4 \cdot \frac{2u}{(u^2+1)^2}\,du = \int_1^2 2u^2(u^2+1)\,du$$

展开：

$$\int_1^2 2u^4+2u^2\,du = \left[\frac{2}{5}u^5+\frac{2}{3}u^3\right]_1^2$$

代入上下限：

$$\left(\frac{64}{5}+\frac{16}{3}\right)-\left(\frac{2}{5}+\frac{2}{3}\right)=\frac{256}{15}$$

$$\therefore \int_{0.2}^{0.5} \frac{\sqrt{x-x^2}}{x^4}\,dx = \frac{256}{15}$$

81.

$$\int \frac{dx}{x^2(a+bx)^2},\ a,b\in\mathbb{R}$$

设 $u=\dfrac{a+bx}{x}$, 则

$$x=\frac{a}{u-b},\quad dx=\frac{-a\,du}{(u-b)^2},\quad a+bx=xu=\frac{au}{u-b}$$

代入原式:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2(a+bx)^2} &= \int \frac{-a\,du}{(u-b)^2}\cdot\frac{1}{x^2(a+bx)^2}\\ &= \int \frac{-a\,du}{(u-b)^2}\cdot\frac{(u-b)^4}{a^4u^2}\\ &= -\frac{1}{a^3}\int \frac{(u-b)^2}{u^2}\,du\\ &= -\frac{1}{a^3}\int\left(1-\frac{2b}{u}+\frac{b^2}{u^2}\right)du\\ &= -\frac{1}{a^3}\left(u-2b\ln|u|-\frac{b^2}{u}\right)+C\end{aligned}$$

代回 $u=\frac{a+bx}{x}$, 得:

$$\int \frac{dx}{x^2(a+bx)^2} = -\frac{1}{a^3}\left(\frac{a+bx}{x}-2b\ln\left|\frac{a+bx}{x}\right|-\frac{b^2x}{a+bx}\right)+C$$

82. 使用代换 $2x+1=4\cosh\theta$, 求不定积分

$$\int\sqrt{(2x+5)(2x-3)}\,dx$$

先化简被积式，

$$(2x+5)(2x-3)=4x^2+4x-15=(2x+1)^2-16$$

因此原积分化为

$$\int\sqrt{(2x+1)^2-16}\,dx$$

采用双曲函数换元，令

$$2x+1=4\cosh\theta$$

则

$$2\,dx=4\sinh\theta\,d\theta,\quad dx=2\sinh\theta\,d\theta$$

利用恒等式

$$\cosh^2\theta-\sinh^2\theta=1$$

可得

$$\sqrt{(2x+1)^2-16}=\sqrt{16(\cosh^2\theta-1)}=4\sinh\theta$$

代入积分，

$$\int\sqrt{(2x+1)^2-16}\,dx=\int 4\sinh\theta\,(2\sinh\theta\,d\theta)=8\int\sinh^2\theta\,d\theta$$

又有

$$\sinh^2\theta=\frac{1}{2}\cosh(2\theta)-\frac{1}{2}$$

于是

$$\begin{aligned}8\int\sinh^2\theta\,d\theta&=8\int\left(\frac{1}{2}\cosh(2\theta)-\frac{1}{2}\right)d\theta\\&=4\int\cosh(2\theta)\,d\theta-4\int d\theta\\&=2\sinh(2\theta)-4\theta+C\end{aligned}$$

利用

$$\sinh(2\theta)=2\sinh\theta\cosh\theta$$

得

$$2\sinh(2\theta)=4\sinh\theta\cosh\theta$$

又因为

$$\sinh\theta=\frac{\sqrt{(2x+1)^2-16}}{4},\quad \cosh\theta=\frac{2x+1}{4}$$

且

$$\theta=\operatorname{arccosh}\frac{2x+1}{4}$$

代回原变量，

$$\int\sqrt{(2x+5)(2x-3)}\,dx=\frac{1}{4}(2x+1)\sqrt{(2x+5)(2x-3)}-4\operatorname{arccosh}\frac{2x+1}{4}+C$$

利用

$$\operatorname{arccosh}u=\ln\left(u+\sqrt{u^2-1}\right)$$

可进一步写为

$$\int\sqrt{(2x+5)(2x-3)}\,dx=\frac{1}{4}(2x+1)\sqrt{(2x+5)(2x-3)}-4\ln\left(2x+1+\sqrt{(2x+5)(2x-3)}\right)+C$$

83. 已知

$$\sqrt{5-4x-x^2}=(1-x)u,\quad x\neq 1,x\neq -5$$

a) 代换与求导

i) 两边平方

$$5-4x-x^2=(1-x)^2u^2$$

移项整理

$$-(x^2+4x-5)=u^2(x-1)^2\implies -(x-1)(x+5)=u^2(x-1)^2$$

两边除以 $x-1$

$$-(x+5)=u^2(x-1)\implies u^2-5=x(u^2+1)\implies x=\frac{u^2-5}{u^2+1}$$

ii) 对 x 求导

$$dx=\frac{d}{du}\frac{u^2-5}{u^2+1}du=\frac{(u^2+1)(2u)-(u^2-5)(2u)}{(u^2+1)^2}du=\frac{12u}{(u^2+1)^2}du$$

b) 积分化简

由 a) 可得

$$\int \frac{x}{(5-4x-x^2)^{3/2}}\,dx=\int \frac{x}{((1-x)u)^3}\cdot\frac{12u}{(u^2+1)^2}\,du$$

$$x=\frac{u^2-5}{u^2+1},\quad (1-x)^3=\left(\frac{6}{u^2+1}\right)^3$$

$$\Longrightarrow \int \frac{x}{(5-4x-x^2)^{3/2}}\,dx=\int \frac{u^2-5}{u^2+1}\cdot\frac{12u}{216u^3}\,du=\int \frac{u^2-5}{18u^2}\,du$$

c) 积分求解

分拆积分

$$\int \frac{u^2-5}{18u^2}\,du=\int \frac{1}{18}-\frac{5}{18u^2}\,du=\frac{1}{18}u+\frac{5}{18u}+C$$

代回 u

$$u=\frac{\sqrt{5-4x-x^2}}{1-x}\Longrightarrow \frac{1}{u}=\frac{1-x}{\sqrt{5-4x-x^2}}$$

$$\Longrightarrow \int \frac{x}{(5-4x-x^2)^{3/2}}\,dx=\frac{1}{18}\frac{\sqrt{5-4x-x^2}}{1-x}+\frac{5}{18}\frac{1-x}{\sqrt{5-4x-x^2}}+C$$

整理为

$$\int \frac{x}{(5-4x-x^2)^{3/2}}\,dx=\frac{5-2x}{9\sqrt{5-4x-x^2}}+C$$

84. 若正整数 k 满足

$$\left(\int_0^1 x^{2018}(2019+kx^{10})\sqrt{1+x^{10}}\,dx\right)^2=8,$$

求 k 的最大值。

由于被积函数随 k 严格递增, 则当

$$\int_0^1 x^{2018}(2019+kx^{10})\sqrt{1+x^{10}}\,dx=\sqrt{8}$$

时 k 取最大。欲写成形如

$$\int_0^1 (2019x^{2018-n}+kx^{2028-n})\sqrt{x^{2n}+x^{2n+10}}\,dx$$

的积分, 考虑强迫

$$2n-1=2018-n,$$

可得 $n=673$, 此时设 $u=x^{1346}+x^{1356}$, 则 $du=1346x^{1345}+1356x^{1355}dx$, 于是

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1(2019x^{1345}+kx^{1355})\sqrt{x^{1346}+x^{1356}}\,dx\\&=\frac{3}{2}\int_0^1(1346^{1345}+\frac{2}{3}kx^{1355})\sqrt{x^{1346}+x^{1356}}\,dx\end{aligned}$$

当 $\frac{2}{3}k=1356$ 即 $k=2034$ 时, 有

$$I=\frac{3}{2}\int_0^2\sqrt{u}\,du=\frac{3}{2}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_0^2=\sqrt{8}$$

85.

$$\int\frac{dx}{x^3+1}$$

$$\int\frac{dx}{x^3+1}=\int\frac{dx}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

部分分式分解得

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{3(x+1)}+\frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}$$

于是

$$\int\frac{dx}{x^3+1}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{3}\int\frac{x}{x^2-x+1}dx+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x^2-x+1}$$

其中

$$\int\frac{dx}{x+1}=\ln|x+1|,\qquad\int\frac{x}{x^2-x+1}dx=\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)$$

$$\int\frac{dx}{x^2-x+1}=\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

故

$$\int\frac{dx}{x^3+1}=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

86. 计算积分

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{x^2+1}\,dx$$

首先展开分子 $(1-x)^4$：

$$(1-x)^4 = 1-4x+6x^2-4x^3+x^4$$

因此积分变为：

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-4x+6x^2-4x^3+x^4)}{x^2+1}\,dx = \int_0^1 \frac{x^8-4x^7+6x^6-4x^5+x^4}{x^2+1}\,dx$$

进行多项式除法，将分子按 x^2+1 除：

$$\frac{x^8-4x^7+6x^6-4x^5+x^4}{x^2+1} = x^6-4x^5+5x^4-4x^2+4-\frac{4}{x^2+1}$$

于是积分拆分为：

$$\int_0^1 x^6-4x^5+5x^4-4x^2+4-\frac{4}{x^2+1}\,dx$$

分别积分各项：

$$\int x^6\,dx = \frac{1}{7}x^7, \quad \int -4x^5\,dx = -\frac{2}{3}x^6, \quad \int 5x^4\,dx = x^5,$$

$$\int -4x^2\,dx = -\frac{4}{3}x^3, \quad \int 4\,dx = 4x, \quad \int -\frac{4}{x^2+1}\,dx = -4\arctan x$$

组合结果：

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{x^2+1}\,dx = \left[\frac{1}{7}x^7-\frac{2}{3}x^6+x^5-\frac{4}{3}x^3+4x-4\arctan x\right]_0^1$$

代入上下限：

$$\left(\frac{1}{7}-\frac{2}{3}+1-\frac{4}{3}+4-4\cdot\frac{\pi}{4}\right)-0 = \frac{1}{7}-\frac{6}{3}+5-\pi = \frac{1}{7}-2+5-\pi = 3+\frac{1}{7}-\pi = \frac{22}{7}-\pi$$

因此最终结果为：

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{x^2+1}\,dx = \frac{22}{7}-\pi$$

87.

$$\int_0^1 \frac{(x^2+1)(x^2+4)}{(x^2+3)(x^2-4)}\,dx$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{(x^2+1)(x^2+4)}{(x^2+3)(x^2-4)}\,dx &= \int_0^1 \left[1+\frac{2}{7}\left[\frac{1}{x^2+3}+\frac{5}{x-2}-\frac{5}{x+2}\right]\right]dx \\
&= \left[x+\frac{2}{7}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)+5\ln|x-2|-5\ln|x+2|\right]\right]_0^1 \\
&= \left[1+\frac{2}{7}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{\pi}{6}+5\ln|-1|-5\ln|3|\right]\right]-\left[\frac{2}{7}[5\ln|-2|-5\ln|2|]\right] \\
&= 1+\frac{2}{7}\left[\frac{\pi}{6\sqrt{3}}-5\ln 3\right] \\
&= 1+\frac{1}{7}\left[\frac{\pi}{3\sqrt{3}}-10\ln 3\right]
\end{aligned}
$$

88. 计算积分

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{32x^2}{(x^2-1)(x+1)^3}\,dx$$

先化简被积函数

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{32x^2}{(x^2-1)(x+1)^3}\,dx = \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{32x^2}{(x-1)(x+1)^4}\,dx$$

作代换

$$u=x+1, \quad x=u-1, \quad du=dx$$

当 $x=0$ 时，$u=1$ 当 $x=\frac{1}{3}$ 时，$u=\frac{4}{3}$

则积分化为

$$\int_1^{\frac{4}{3}} \frac{32(u-1)^2}{(u-2)u^4}\,du = \int_1^{\frac{4}{3}} \frac{32}{u^4}\cdot\frac{u^2-2u+1}{u-2}\,du$$

将有理函数分解后得

$$\int_1^{\frac{4}{3}} \left(-\frac{16}{u^4}+\frac{24}{u^3}-\frac{4}{u^2}-\frac{2}{u}+\frac{2}{u-2}\right)du$$

逐项积分

$$=\left[\frac{16}{3u^3}-\frac{12}{u^2}+\frac{4}{u}-2\ln|u|+2\ln|u-2|\right]_1^{\frac{4}{3}}$$

代入上、下限

$$=\left(\frac{16}{3\left(\frac{4}{3}\right)^3}-\frac{12}{\left(\frac{4}{3}\right)^2}+\frac{4}{\frac{4}{3}}-2\ln\frac{4}{3}+2\ln\frac{2}{3}\right)-\left(\frac{16}{3}-12+4\right)$$

化简得

$$= 11 - \frac{16}{3} - \frac{9}{2} - 2\ln 2$$

整理为

$$\frac{7}{6} - 2\ln 2$$

因此

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{32x^2}{(x^2-1)(x+1)^3}\,dx = \frac{7}{6} - 2\ln 2$$

89.

$$\int \frac{x^2(x^4+1)}{\sqrt{x^4+2}}\,dx$$

先作代数变形

$$\int \frac{x^2(x^4+1)}{\sqrt{x^4+2}}\,dx = \int x^2(x^4+1)(x^4+2)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

将分子整理

$$= \int (x^7+x^3)(x^4)^{-\frac{1}{2}}(x^4+2)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

合并为一个整体

$$= \int (x^7+x^3)[x^4(x^4+2)]^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

即

$$= \int (x^7+x^3)(x^8+2x^4)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

注意到

$$\frac{d}{dx}(x^8+2x^4) = 8x^7+8x^3 = 8(x^7+x^3)$$

于是

$$= \frac{1}{8}\int 8(x^7+x^3)(x^8+2x^4)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

积分得

$$= \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}(x^8+2x^4)^{\frac{1}{2}} + C$$

化简

$$= \frac{1}{4}(x^8+2x^4)^{\frac{1}{2}} + C$$

90.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x(\sin x+\cos x-2)}{(\cos x-2)^2}\,dx$$

有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x(\sin x+\cos x-2)}{(\cos x-2)^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\left(\frac{\sin x}{(\cos x-2)^2}+\frac{1}{\cos x-2}\right)dx$$

发现被积函数形如 $e^x(f(x)+f'(x))$，其中

$$f(x)=\frac{1}{\cos x-2},\, f'(x)=\frac{\sin x}{(\cos x-2)^2}$$

所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\left(\frac{1}{\cos x-2}+\frac{\sin x}{(\cos x-2)^2}\right)dx=\left[\frac{e^x}{\cos x-2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1-\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$$

91. 计算积分

$$\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 3x}{(\cos 7x+\cos x)^2+(\sin 7x+\sin x)^2}\,dx$$

先展开分母：

$$(\cos 7x+\cos x)^2+(\sin 7x+\sin x)^2=\cos^2 7x+2\cos 7x\cos x+\cos^2 x+\sin^2 7x+2\sin 7x\sin x+\sin^2 x$$

利用 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$：

$$=1+1+2(\cos 7x\cos x+\sin 7x\sin x)=2+2\cos(7x-x)=2+2\cos 6x$$

使用二倍角公式化简：

$$\cos 6x=2\cos^2 3x-1 \implies 2+2\cos 6x=4\cos^2 3x$$

积分变为：

$$\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 3x}{4\cos^2 3x}\,dx=\frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 3x}{\cos 3x}\cdot\frac{1}{\cos 3x}\,dx=\frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} \tan 3x\sec 3x\,dx$$

作代换 $u=3x \implies du=3dx$：

$$\frac{1}{4}\int \tan 3x\sec 3x\,dx=\frac{1}{12}\int \sec u\tan u\,du=\frac{1}{12}\sec u+C=\frac{1}{12}\sec 3x$$

代入上下限：

$$\left[\frac{1}{12}\sec 3x\right]_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{12}\left(\sec\frac{3\pi}{4} - \sec\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{12}\left(-\sqrt{2}-2\right)\text{（注意 } \sec 3\pi/4 = -\sqrt{2}\text{）}$$

整理结果：

$$\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 3x}{(\cos 7x+\cos x)^2+(\sin 7x+\sin x)^2}\,dx = \frac{2-\sqrt{2}}{12}$$

92.

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cot^3 x}{\csc x}\,dx$$

令 $u=\sin x$，则

$$du = \cos x\,dx$$

当 $x=\frac{\pi}{6}$ 时，$u=\frac{1}{2}$ 当 $x=\frac{\pi}{3}$ 时，$u=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\cos^2 x}{u^2}\,du$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1-\sin^2 x}{u^2}\,du = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1-u^2}{u^2}\,du$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{1}{u^2}-1\right)\,du = \left[-\frac{1}{u}-u\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \left[\frac{1}{u}+u\right]_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{1+u^2}{u}\right]_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1+\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} - \frac{1+\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{5}{2} - \frac{7}{2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{5}{2} - \frac{7\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{6}(15-7\sqrt{3})$$

93. 已知代换求积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4\tan x}{1+\sin^2 x}\,dx$$

作代换

$$u = 1 + \sin^2 x$$
$$\frac{du}{dx} = 2\sin x \cos x$$
$$dx = \frac{du}{2\sin x \cos x}$$

积分的上下限变换

$$x = 0 \implies u = 1$$
$$x = \frac{\pi}{4} \implies u = \frac{3}{2}$$

代入积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4\tan x}{1+\sin^2 x}\,dx = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{4\tan x}{u} \cdot \frac{du}{2\sin x \cos x} = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{2}{u(2-u)}\,du$$

部分分式分解

$$\frac{2}{u(2-u)} = \frac{1}{u} + \frac{1}{2-u}$$

计算积分

$$\int_1^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{2-u}\right) du = [\ln|u| - \ln|2-u|]_1^{\frac{3}{2}} = \ln\frac{3/2}{2-3/2} - \ln\frac{1}{2-1} = \ln 3$$

94. 代换 $u = 1 - \tan^2 x$, 求定积分

$$\int_0^{\pi/6} \tan x \sec 2x\,dx$$

作代换

$$u = 1 - \tan^2 x$$
$$\frac{du}{dx} = -2\tan x \sec^2 x$$
$$dx = -\frac{du}{2\tan x \sec^2 x}$$

积分上下限变换

$$x = 0 \implies u = 1$$
$$x = \frac{\pi}{6} \implies u = \frac{2}{3}$$

代入积分

$$\int_0^{\pi/6} \tan x \sec 2x \, dx = \int_1^{2/3} \tan x \sec 2x \cdot \left(-\frac{du}{2\tan x \sec^2 x}\right) = \frac{1}{2}\int_{2/3}^{1} \frac{1}{u}\, du$$

计算积分

$$\frac{1}{2}\int_{2/3}^{1} \frac{1}{u}\, du = \left[\frac{1}{2}\ln|u|\right]_{2/3}^{1} = \frac{1}{2}\ln 1 - \frac{1}{2}\ln\frac{2}{3} = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$$

95.

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin x \sin 2x} dx = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{2\sin^2 x \cos x} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{\cos x}{\sin x} + \sec x\right) dx = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\cot x \csc x + \sec x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\csc x + \ln|\sec x + \tan x|\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\ln(2+\sqrt{3}) - \frac{2}{\sqrt{3}}\right) - \left(-2 + \ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln(2+\sqrt{3}) - \frac{2}{\sqrt{3}} + 2 - \ln\sqrt{3}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right) + 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

96. 计算积分

$$\int \frac{\sin^8 x - \cos^8 x}{1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x} dx$$

从分子平方差和分母的正弦二倍角公式出发：

$$\int \frac{(\sin^4 x - \cos^4 x)(\sin^4 x + \cos^4 x)}{1 - \frac{1}{2}(2\sin x \cos x)^2} dx = \int \frac{(\sin^4 x - \cos^4 x)(\sin^4 x + \cos^4 x)}{1 - 2\sin^2 x \cos^2 x} dx$$

将分母写成平方差形式：

$$\int \frac{(\sin^4 x - \cos^4 x)(\sin^4 x + \cos^4 x)}{1^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{(\sin^4 x - \cos^4 x)(\sin^4 x + \cos^4 x)}{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x} dx$$

展开分子平方差和分母括号：

$$\int \frac{(\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x + \cos^4 x)}{\sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x - 2\sin^2 x \cos^2 x}\, dx$$

化简：

$$\int \frac{-\cos 2x(\sin^4 x + \cos^4 x)}{\cos^4 x + \sin^4 x}\, dx = \int -\cos 2x\, dx$$

积分结果：

$$-\frac{1}{2}\sin 2x + C$$

97. 计算积分

$$\int \frac{3\sin^2 x \cos^2 x}{(\cos^3 x - \sin^3 x)^2}\, dx$$

重写被积函数，提取 $\tan x$ 和 $\sec x$：

$$\int \frac{3\sin^2 x \cos^2 x}{(\cos^3 x - \sin^3 x)^2}\, dx = \int 3\frac{(\sin x \cos x)^2}{(\cos^3 x - \sin^3 x)^2}\, dx = \int 3\tan^2 x \sec^2 x(1 - \tan^3 x)^{-2}\, dx$$

作代换：

$$u = \tan x \implies du = \sec^2 x\, dx$$

代入：

$$\int 3\tan^2 x \sec^2 x(1 - \tan^3 x)^{-2}\, dx = \int 3u^2(1 - u^3)^{-2}\, du$$

识别反链式法则：

$$d(1-u^3) = -3u^2 du \implies u^2 du = -\frac{1}{3}d(1-u^3)$$

因此：

$$\int 3u^2(1-u^3)^{-2}\, du = \int 3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)(1-u^3)^{-2}d(1-u^3) = -\int (1-u^3)^{-2}d(1-u^3)$$

积分：

$$-\int (1-u^3)^{-2}d(1-u^3) = (1-u^3)^{-1} + C$$

回代 $u = \tan x$：

$$\int \frac{3\sin^2 x \cos^2 x}{(\cos^3 x - \sin^3 x)^2}\, dx = \frac{1}{1-\tan^3 x} + C$$

98. 计算积分

$$\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\, dx$$

先拆分分数：

$$\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^6 x}{\sin^2 x \cos^2 x} + \frac{\cos^6 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\, dx = \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x}\, dx$$

将 $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$，$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ 展开：

$$\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1-\cos^2 x)^2}{\cos^2 x} + \frac{(1-\sin^2 x)^2}{\sin^2 x}\, dx = \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x - 2 + \cos^2 x + \csc^2 x - 2 + \sin^2 x\, dx$$

合并同类项：

$$\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x + \csc^2 x + (\cos^2 x + \sin^2 x) - 4\, dx = \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x + \csc^2 x - 3\, dx$$

直接积分：

$$[\tan x - \cot x - 3x]_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}}$$

化简为倍角形式：

$$[\tan x - \cot x - 3x] = [3x + 2\cot 2x]_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{8}(16 - 3\pi)$$

99. 求积分

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{\sqrt{4 - \sin^4 x}}\, dx$$

令 $u = \sin^2 x \implies du = 2\sin x \cos x\, dx = \sin 2x\, dx$：

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{\sqrt{4 - \sin^4 x}}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4 - u^2}}\, du$$

$$= \left[\arcsin \frac{u}{2}\right]_0^1 = \arcsin \frac{1}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6}$$

100. 计算积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos x+\sin x-\tan x}{1+\tan x}\,dx$$

先将 $\tan x$ 用正弦余弦表示：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos x+\sin x-\frac{\sin x}{\cos x}}{1+\frac{\sin x}{\cos x}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x+\cos^2 x+\sin x\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\,dx$$

这里是通过分子分母同乘 $\cos x$ 得到的。

重组分子：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x-\sin x+\cos x\sin x+\cos^2 x}{\cos x+\sin x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}+\frac{\cos x\sin x+\cos^2 x}{\cos x+\sin x}\,dx$$

提取公因子：

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}+\frac{\cos x(\sin x+\cos x)}{\cos x+\sin x}\,dx$$

使用 $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|+C$ 的形式：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}+\cos x\,dx = [\ln|\cos x+\sin x|+\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

代入上下限：

$$[\ln(0+1)+1]-[\ln(1+0)+0]=1$$

所以积分结果为

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos x+\sin x-\tan x}{1+\tan x}\,dx = 1$$

101.

$$\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx$$

由 $(\sin x+\cos x)^2=1+2\sin x\cos x$,

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx&=\frac{1}{2}\int \frac{(\sin x+\cos x)^2-1}{\sin x+\cos x}\,dx\\&=\frac{1}{2}\int\left(\sin x+\cos x-\frac{1}{\sin x+\cos x}\right)dx\end{aligned}$$

现考虑积分

$$I=\int \frac{1}{\sin x+\cos x}\,dx$$

由于 $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$, 变为

$$\begin{aligned}I&=\int \frac{1}{\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})}\,dx\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \csc\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\,dx\\&=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\csc\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cot\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C_1\end{aligned}$$

代入原式可得

$$\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx=\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\csc\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cot\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$$

由 $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$,

$$\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\sin x\cos x}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\,dx$$

令 $u=x+\frac{\pi}{4}$, $dx=du$, 则

$$\sin x=\frac{\sin u-\cos u}{\sqrt{2}},\ \cos x=\frac{\sin u+\cos u}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx&=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\frac{1}{2}(\sin u-\cos u)(\sin u+\cos u)}{\sin u}\,du\\&=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{2\sin^2 u-1}{\sin u}\,du\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \sin u\,du-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \csc u\,du\\&=-\frac{\cos(x+\frac{\pi}{4})}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\csc\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cot\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C\end{aligned}$$

102. 求积分

考虑积分

$$\int_0^{\pi/4} \frac{10}{2-\tan x}\,dx$$

令 $u = \tan x \implies dx = \frac{du}{1+u^2}$，积分变为

$$\int_0^1 \frac{10}{(2-u)(1+u^2)}\,du$$

使用部分分式分解：

$$\frac{10}{(2-u)(1+u^2)} = \frac{A+Bu}{1+u^2} + \frac{C}{2-u}$$

确定系数：

- $u = 2 \Rightarrow 10 = 5C \Rightarrow C = 2$
- $u = 0 \Rightarrow 10 = 2A + C = 2A + 2 \Rightarrow A = 4$
- $u = 1 \Rightarrow 10 = (A+B) + 2C = 4 + B + 4 \Rightarrow B = 2$

因此积分可写为

$$\int_0^1 \frac{4+2u}{u^2+1} + \frac{2}{2-u}\,du = \int_0^1 \frac{4}{u^2+1} + \frac{2u}{u^2+1} + \frac{2}{2-u}\,du$$

逐项积分：

$$\int \frac{4}{u^2+1}\,du = 4\arctan u, \quad \int \frac{2u}{u^2+1}\,du = \ln(u^2+1), \quad \int \frac{2}{2-u}\,du = -2\ln|2-u|$$

代入上下限：

$$\left[4\arctan u + \ln(u^2+1) - 2\ln|2-u|\right]_0^1 = 4\arctan 1 + \ln 2 - 2\ln 1 - (0 + \ln 1 - 2\ln 2) = \pi + 3\ln 2$$

最终结果：

$$\pi + 3\ln 2$$

103.

$$I = \int_{\arcsin\frac{3}{5}}^{\arccos\frac{3}{5}} \frac{1}{(\sin x + 2\cos x)(\sin x + 3\cos x)}\,dx$$

先化简被积函数

$$= \int_{\arcsin\frac{3}{5}}^{\arccos\frac{3}{5}} \frac{1}{\sin^2 x + 5\sin x\cos x + 6\cos^2 x}\,dx$$

上下同除以 $\cos^2 x$

$$= \int_{\arcsin\frac{3}{5}}^{\arccos\frac{3}{5}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 5\frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x} + 6\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}}\,dx$$

化为正切函数

$$= \int_{\arcsin\frac{3}{5}}^{\arccos\frac{3}{5}} \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x + 5\tan x + 6}\,dx$$

令 $u = \tan x$，则 $du = \sec^2 x\,dx$

当 $x = \arcsin\frac{3}{5}$ 时，

$$u = \frac{3}{4}$$

当 $x = \arccos\frac{3}{5}$ 时，

$$u = \frac{4}{3}$$

积分化为

$$I = \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{1}{u^2 + 5u + 6}\,du$$

因式分解

$$= \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{1}{(u+2)(u+3)}\,du$$

设

$$\frac{1}{(u+2)(u+3)} = \frac{A}{u+2} + \frac{B}{u+3}$$

比较系数得

$$1 = A(u+3) + B(u+2)$$

解得

$$A = 1, \qquad B = -1$$

代回积分

$$I = \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \left(\frac{1}{u+2} - \frac{1}{u+3}\right) du$$

计算得

$$= \left[\ln(u+2) - \ln(u+3)\right]_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}}$$

$$= \left(\ln\frac{10}{3} - \ln\frac{13}{3}\right) - \left(\ln\frac{11}{4} - \ln\frac{15}{4}\right)$$

$$= \ln\frac{10}{13} - \ln\frac{11}{15} = \ln\frac{150}{143}$$

104. 求

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+k^2\tan^2 x}\,dx, \quad |k| \neq 1$$

首先用代换:

$$u = \tan x, \quad du = \sec^2 x\,dx, \quad dx = \frac{du}{\sec^2 x}, \quad x = 0 \to u = 0,\ x = \frac{\pi}{2} \to u = \infty$$

积分变为:

$$\int_0^\infty \frac{du}{1+k^2u^2} \cdot \frac{1}{1+u^2} = \int_0^\infty \frac{1}{(u^2+1)(u^2+k^2)}\,du$$

使用部分分式分解:

$$\frac{k}{(u^2+1)(u^2+k^2)} = \frac{B}{u^2+1} + \frac{D}{u^2+k^2}$$

由系数比较得到:

$$B + D = 0 \implies D = -B, \quad Bk^2 + D = k \implies B = \frac{k}{k^2-1},\ D = \frac{-k}{k^2-1}$$

因此积分变为:

$$\int_0^\infty \frac{k}{(u^2+1)(u^2+k^2)}\,du = \int_0^\infty B\left(\frac{1}{u^2+1} - \frac{1}{u^2+k^2}\right)du$$

计算得到:

$$\int_0^\infty \frac{1}{u^2+1}\,du = \arctan u\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^\infty \frac{1}{u^2+k^2}\,du = \frac{1}{k}\arctan\frac{u}{k}\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2k}$$

代入 B:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+k^2\tan^2 x}\,dx = B\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2k}\right) = \frac{k}{k^2-1}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{k-1}{k} = \frac{\pi}{2(k+1)}$$

105. 计算积分

$$\int_0^{\pi/3} \frac{6}{\sin x + \sin 2x}\,dx$$

化简被积函数:

$$\sin x + \sin 2x = \sin x + 2\sin x\cos x = \sin x(1 + 2\cos x)$$

代换:

$$u = \cos x \implies du = -\sin x\,dx \implies dx = -\frac{du}{\sin x}$$

积分上下限:

$$x = 0 \implies u = 1, \quad x = \frac{\pi}{3} \implies u = \frac{1}{2}$$

积分变为:

$$\int_0^{\pi/3} \frac{6}{\sin x(1 + 2\cos x)}\,dx = \int_1^{1/2} \frac{6}{\sin x(1 + 2u)}\left(-\frac{du}{\sin x}\right) = \int_{1/2}^{1} \frac{6}{\sin^2 x(1 + 2u)}\,du$$

利用 $\sin^2 x = 1 - u^2$:

$$\int_{1/2}^{1} \frac{6}{(1 - u^2)(1 + 2u)}\,du = \int_{1/2}^{1} \frac{6}{(1 - u)(1 + u)(1 + 2u)}\,du$$

使用部分分式:

$$\frac{6}{(1 - u)(1 + u)(1 + 2u)} = \frac{A}{1 - u} + \frac{B}{1 + u} + \frac{C}{1 + 2u}$$

求系数:

$$u = 1 \implies 6 = 6A \implies A = 1, \quad u = -1 \implies 6 = -2B \implies B = -3, \quad u = -\frac{1}{2} \implies 6 = \frac{3}{4}C \implies C$$

所以:

$$\frac{6}{(1 - u)(1 + u)(1 + 2u)} = \frac{1}{1 - u} - \frac{3}{1 + u} + \frac{8}{1 + 2u}$$

积分:

$$\int_{1/2}^{1} \left(\frac{1}{1 - u} - \frac{3}{1 + u} + \frac{8}{1 + 2u}\right) du = \left[\ln|1 - u| - 3\ln|1 + u| + 4\ln|1 + 2u|\right]_{1/2}^{1}$$

代入上下限:

$$= (\ln(1 - 1) - 3\ln(1 + 1) + 4\ln(1 + 2 \cdot 1)) - (\ln(1 - 1/2) - 3\ln(1 + 1/2) + 4\ln(1 + 2 \cdot 1/2))$$

化简:

$$= (4\ln 3 - 3\ln 2 - \ln 0) - (4\ln 2 - 3\ln\frac{3}{2} - \ln\frac{1}{2}) = 8\ln 2 - 3\ln 3$$

106. 计算积分

$$\int \frac{\cos^3 x}{(1+\sin x)\sin x}\,dx$$

使用代换

$$u = \sin x + \csc x \implies \frac{du}{dx} = \cos x - \cot x \csc x \implies dx = \frac{1}{\cos x - \cot x \csc x}\,du$$

代入积分：

$$\int \frac{\cos^3 x}{(1+\sin x)\sin x}\,dx = \int \frac{\cos^3 x}{(1+\sin x)\sin x} \cdot \frac{1}{\cos x - \cot x \csc x}\,du$$

将 $\cot x$ 和 $\csc x$ 用正弦余弦表示：

$$= \int \frac{\cos^3 x}{(1+\sin x)\sin x} \cdot \frac{1}{\cos x - \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\sin x}}\,du = \int \frac{\cos^3 x}{(1+\sin x)\sin x} \cdot \frac{1}{\cos x(1 - \frac{1}{\sin^2 x})}\,du$$

化简：

$$= \int \frac{\cos^3 x}{(1+\sin x)\sin x} \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos x(\sin^2 x - 1)}\,du = \int \frac{\cos^2 x}{1+\sin x} \cdot \frac{\sin x}{\sin^2 x - 1}\,du = \int \frac{\cos^2 x}{1+\sin x} \cdot \frac{\sin x}{-\cos^2 x}\,du$$

进一步化简：

$$= \int -\frac{\sin x}{1+\sin x}\,du = \int -\frac{1}{\csc x + \sin x}\,du = \int -\frac{1}{u}\,du = -\ln|u| + C = \ln\left|\frac{1}{u}\right| + C$$

代回原变量：

$$= \ln\left|\frac{1}{\sin x + \csc x}\right| + C = \ln\left|\frac{1}{\sin x + \frac{1}{\sin x}}\right| + C = \ln\left|\frac{1}{\frac{\sin^2 x + 1}{\sin x}}\right| + C = \ln\left|\frac{\sin x}{\sin^2 x + 1}\right| + C$$

107. 求积分

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 x + 25\sin^2 x}\,dx$$

使用代换 $u = \tan x$，则

$$du = \sec^2 x\,dx \implies dx = \frac{du}{\sec^2 x} = \frac{du}{1+u^2}$$

积分上下限：

$$x = 0 \implies u = 0, \quad x = \frac{\pi}{4} \implies u = 1$$

原积分变为：

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 x + 25\sin^2 x}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+25u^2}\,du = \frac{1}{25}\int_0^1 \frac{du}{(\frac{1}{5})^2 + u^2}$$

标准反正切积分：

$$\frac{1}{25}\int_0^1 \frac{du}{(\frac{1}{5})^2 + u^2} = \frac{1}{25} \cdot 5\left[\arctan(5u)\right]_0^1 = \frac{1}{5}\arctan 5$$

108. 使用给定代换计算积分：

$$\int 2\frac{1-x^2}{1+x^2}\,dx$$

代换：

$$x = \tan\frac{\theta}{2} \implies dx = \frac{1}{2}\sec^2\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

观察右边：

$$\frac{1-x^2}{1+x^2} = \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{\sec^2\frac{\theta}{2}} = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = \cos\theta$$

因此积分变为：

$$\int 2\frac{1-x^2}{1+x^2}\,dx = \int 2\cos\theta \cdot \frac{1}{2}\sec^2\frac{\theta}{2}\,d\theta = \int \cos\theta\sec^2\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

注意到：

$$\arctan x = \frac{\theta}{2} \implies \theta = 2\arctan x$$

通过观察和代回：

$$\int 2\frac{1-x^2}{1+x^2}\,dx = (1+x^2)\arctan x - x + C$$

109. 计算

$$\int_0^{\pi/3} \frac{6\sqrt{3}\cos x}{4+\sin(2x)\tan(x/2)}\,dx$$

首先使用半角替换：

$$t=\tan\frac{x}{2} \implies dx=\frac{2}{1+t^2}\,dt, \quad x=0\to t=0, \quad x=\frac{\pi}{3}\to t=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

并用标准半角公式：

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

代入积分：

$$\int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{6\sqrt{3}\frac{1-t^2}{1+t^2}}{4+2\frac{2t}{1+t^2}\frac{1-t^2}{1+t^2}t}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt=\int_0^{\sqrt{3}/3}\frac{12\sqrt{3}(1-t^2)}{4[(1+t^2)^2+t^2(1-t^2)]}\,dt$$

分母化简：

$$4[(1+t^2)^2+t^2(1-t^2)]=4(1+3t^2)$$

因此积分化为：

$$\int_0^{\sqrt{3}/3}\frac{12\sqrt{3}(1-t^2)}{4(3t^2+1)}\,dt=\int_0^{\sqrt{3}/3}\frac{3\sqrt{3}(1-t^2)}{3t^2+1}\,dt$$

拆分分子：

$$\frac{3\sqrt{3}(1-t^2)}{3t^2+1}=\sqrt{3}\frac{3t^2+1-4t^2}{3t^2+1}=\sqrt{3}\left(1-\frac{4t^2}{3t^2+1}\right)$$

积分：

$$\sqrt{3}\int_0^{\sqrt{3}/3}1-\frac{4t^2}{3t^2+1}\,dt=\sqrt{3}\int_0^{\sqrt{3}/3}1-\frac{4/3}{t^2+1/3}\,dt=\sqrt{3}\left[t-\frac{4\sqrt{3}}{3}\arctan(t\sqrt{3})\right]_0^{\sqrt{3}/3}$$

代入上下限：

$$\sqrt{3}\left[\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{4\sqrt{3}}{3}\arctan(1)-(0-0)\right]=\sqrt{3}\left[\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{4\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\pi}{4}\right]=1-\pi+1$$

最终结果：

$$\int_0^{\pi/3}\frac{6\sqrt{3}\cos x}{4+\sin(2x)\tan(x/2)}\,dx=\pi-1$$

110. 求积分

使用 Weierstrass 代换 $t = \tan\frac{x}{2}$，则

$$dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

积分上下限：

$$x = 0 \implies t = 0, \quad x = \pi/2 \implies t = 1$$

原积分变为：

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}}} \cdot \frac{2\,dt}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{\sqrt{2}\,t}{(t+1)^2} \cdot \frac{2\,dt}{1+t^2} = \sqrt{2}\int_0^1 \frac{2t}{(t+1)^2(1+t^2)}\,dt$$

利用部分分式分解：

$$\frac{2t}{(t+1)^2(1+t^2)} = -\frac{1}{t+1} + \frac{t+1}{t^2+1} = -\frac{1}{t+1} + \frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{t^2+1}$$

积分得到：

$$\sqrt{2}\int_0^1 \left(-\frac{1}{t+1} + \frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{t^2+1}\right) dt = \sqrt{2}\left[-\ln(t+1) + \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + \arctan t\right]_0^1$$

计算边界值：

$$= \sqrt{2}\left[-\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}\right] = \sqrt{2}\left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2\right] = \frac{\sqrt{2}}{4}(\pi - 2\ln 2)$$

111.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + \cos x}{9 + 16\sin 2x}\,dx$$

令

$$u = \sin x - \cos x$$

则

$$\frac{du}{dx} = \cos x + \sin x$$

从而

$$dx = \frac{du}{\cos x + \sin x}$$

当 $x=0$ 时，

$$u=-1$$

当 $x=\frac{\pi}{4}$ 时，

$$u=0$$

又有

$$u^2=(\sin x-\cos x)^2$$

$$=\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x$$

$$=1-\sin 2x$$

因此

$$\sin 2x=1-u^2$$

$$9+16\sin 2x=9+16(1-u^2)=25-16u^2$$

原积分化为

$$\int_{-1}^{0}\frac{\sin x+\cos x}{25-16u^2}\frac{du}{\cos x+\sin x}=\int_{-1}^{0}\frac{1}{25-16u^2}\,du$$

因式分解得

$$25-16u^2=(5-4u)(5+4u)$$

用部分分式法

$$\int_{-1}^{0}\frac{1}{(5-4u)(5+4u)}\,du=\int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{10}\frac{1}{5+4u}+\frac{1}{10}\frac{1}{5-4u}\right)du$$

于是

$$=\frac{1}{10}\int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{5+4u}+\frac{1}{5-4u}\right)du$$

积分得

$$=\frac{1}{10}\left[\frac{\ln|5+4u|}{4}-\frac{\ln|5-4u|}{4}\right]_{-1}^{0}$$

$$=\frac{1}{40}\left[\ln|5+4u|-\ln|5-4u|\right]_{-1}^{0}$$

代入上下限

$$=\frac{1}{40}\left[(\ln 5-\ln 5)-(\ln 1-\ln 9)\right]$$

$$=\frac{1}{40}\ln 9=\frac{1}{20}\ln 3$$

112. 求积分

(a) 代换 $u = \tan 2x$，则

$$\frac{du}{dx} = 2\sec^2 2x \implies dx = \frac{du}{2\sec^2 2x}, \quad x = 0 \to u = 0,\ x = \frac{\pi}{8} \to u = 1$$

原积分变为：

$$\int_0^{\pi/8} \frac{\sqrt{3}}{2+\sin 4x}\,dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{2+2\sin 2x\cos 2x}\cdot\frac{du}{2\sec^2 2x} = \int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{4\sec^2 2x + 4\tan 2x}\,du$$

利用 $\sec^2 2x = 1+\tan^2 2x$ 以及 $u = \tan 2x$：

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{4u^2+4u+4}\,du = \frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^1 \frac{du}{(u+1/2)^2+3/4}$$

(b) 进一步代换 $V = 2u+1$，则 $dV = 2du$，$u = 0 \to V = 1$，$u = 1 \to V = 3$：

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^1 \frac{du}{(u+1/2)^2+3/4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\int_1^3 \frac{dV}{V^2+(\sqrt{3})^2}$$

标准反正切积分公式：

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\int_1^3 \frac{dV}{V^2+3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\arctan\frac{V}{\sqrt{3}}\right]_1^3 = \frac{1}{2}\left[\arctan\sqrt{3} - \arctan\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{12}$$

113. 求积分

$$\int_{\pi/6}^{2\pi/9} \frac{1}{2+\cos 3x}\,dx$$

使用代换 $t = \tan\frac{3x}{2} \implies dx = \frac{2}{3(1+t^2)}\,dt$：

$$x = \pi/6 \to t = 1, \quad x = 2\pi/9 \to t = \sqrt{3}$$

利用三角恒等式 $\cos 3x = \cos^2\frac{3x}{2} - \sin^2\frac{3x}{2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$，积分变为

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{3(1+t^2)}\,dt = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1+t^2}{3+t^2}\cdot\frac{2}{3(1+t^2)}\,dt = \frac{2}{3}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2+3}\,dt$$

这是标准反正切积分：

$$\frac{2}{3}\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2+(\sqrt{3})^2}\,dt = \frac{2}{3\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\right]_1^{\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}\left[\arctan(1)-\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]$$

计算反正切值：

$$\arctan(1)=\frac{\pi}{4},\quad \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{6}$$

因此积分结果为

$$\frac{2}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{12}=\frac{\pi\sqrt{3}}{54}.$$

114.

$$\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\sec x+\tan x}}\,dx$$

注意到

$$\frac{d}{dx}(\sec x+\tan x)=\sec^2 x+\sec x\tan x$$

先将被积式拆分

$$\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\sec x+\tan x}}\,dx = \int \frac{\sec^2 x+\sec x\tan x-\sec x\tan x}{\sqrt{\sec x+\tan x}}\,dx$$

写成两部分

$$=\frac{1}{2}\int \frac{\sec^2 x+\sec x\tan x}{\sqrt{\sec x+\tan x}}\,dx+\frac{1}{2}\int \frac{\sec^2 x-\sec x\tan x}{\sqrt{\sec x+\tan x}}\,dx$$

处理第二个积分，利用恒等式

$$1+\tan^2 x=\sec^2 x$$

有

$$\sec^2 x-\sec x\tan x=\sec x(\sec x-\tan x)=\sec x(\sec x-\tan x)\frac{\sec x+\tan x}{\sec x+\tan x}$$

于是

$$=\frac{1}{2}\int \frac{\sec^2 x+\sec x\tan x}{\sqrt{\sec x+\tan x}}\,dx+\frac{1}{2}\int \frac{\sec x(\sec^2 x-\tan^2 x)}{(\sec x+\tan x)^{3/2}}\,dx$$

而

$$\sec^2 x-\tan^2 x=1$$

故

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\sec^2 x+\sec x\tan x}{\sqrt{\sec x+\tan x}}\,dx+\frac{1}{2}\int\frac{\sec x}{(\sec x+\tan x)^{3/2}}\,dx$$

将第二项写成同一结构

$$=\frac{1}{2}\int(\sec^2 x+\sec x\tan x)(\sec x+\tan x)^{-1/2}\,dx+\frac{1}{2}\int(\sec^2 x+\sec x\tan x)(\sec x+\tan x)^{-5/2}\,dx$$

对两项分别作代换

$$u=\sec x+\tan x$$

得到

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{u^{1/2}}{1/2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{u^{-3/2}}{-3/2}+C$$

化简并代回

$$=(\sec x+\tan x)^{1/2}-\frac{1}{3}(\sec x+\tan x)^{-3/2}+C$$

115. 计算积分

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}4\sin x\sqrt{\cos 2x}\,dx$$

先用三角恒等式

$$\cos 2x=2\cos^2 x-1$$

则

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}4\sin x\sqrt{2\cos^2 x-1}\,dx$$

作代换

$$u=\cos x$$

则

$$\frac{du}{dx}=-\sin x,\quad dx=\frac{du}{-\sin x}$$

当 $x=0$ 时，$u=1$ 当 $x=\frac{\pi}{4}$ 时，$u=\frac{\sqrt{2}}{2}$

于是

$$I=\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}}4\sqrt{2u^2-1}(-du)=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 4\sqrt{2u^2-1}\,du$$

再作三角代换

$$\sec\theta = \sqrt{2}u$$

则

$$du = \frac{\sec\theta\tan\theta}{\sqrt{2}}\,d\theta$$

且

$$\sqrt{2u^2-1} = \sqrt{\sec^2\theta - 1} = \tan\theta$$

当 $u = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$\theta = 0$ 当 $u = 1$ 时，$\theta = \frac{\pi}{4}$

因此

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4}{\sqrt{2}}\tan\theta(\sec\theta\tan\theta)\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4}{\sqrt{2}}\tan^2\theta\sec\theta\,d\theta$$

对该积分分部积分，

$$I = \left[\frac{4}{\sqrt{2}}\tan\theta\sec\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{4}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3\theta\,d\theta$$

于是

$$\begin{aligned}I &= 4 - \frac{4}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec\theta(1+\tan^2\theta)\,d\theta \\ &= 4 - \frac{4}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec\theta\,d\theta - \frac{4}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec\theta\tan^2\theta\,d\theta\end{aligned}$$

注意到后一个积分正好等于 I，于是

$$I = 4 - \frac{4}{\sqrt{2}}\left[\ln(\sec\theta+\tan\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - I$$

从而

$$2I = 4 - \frac{4}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}+1)$$

解得

$$I = 2 - \sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)$$

116. 设积分

$$I = \int_0^{\pi}\frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}\,dx$$

(a) 证明

$$I + \pi = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4}{1+\cos^2 x}\,dx$$

(b) 从而求 I 的精确化简值

(c) 用另一种方法验证 (b) 的结果，先将被积函数写成 $\cot^2 x$ 的函数

(a) 由

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}\, dx$$

有

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{1+\cos^2 x}\, dx$$

即

$$I = \int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2 x}\, dx$$

又

$$\int_0^{\pi} 1\, dx = \pi$$

于是

$$\begin{aligned} I + \pi &= \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}\, dx + \int_0^{\pi} 1\, dx \\ &= 2\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2 x}\, dx \end{aligned}$$

注意到被积函数关于 $\frac{\pi}{2}$ 对称，

$$I + \pi = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos^2 x}\, dx$$

即

$$I + \pi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4}{1+\cos^2 x}\, dx$$

(b) 将分子分母同乘 $\sec^2 x$，

$$\begin{aligned} I + \pi &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\sec^2 x}{\sec^2 x + 1}\, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\sec^2 x}{2+\tan^2 x}\, dx \end{aligned}$$

写成反正切形式，

$$\begin{aligned} I + \pi &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\sec^2 x}{(\sqrt{2})^2 + (\tan x)^2}\, dx \\ &= 4\left[\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

因此

$$I+\pi = 2\sqrt{2}\left[\arctan\left(\frac{\tan(\frac{\pi}{2})}{\sqrt{2}}\right) - \arctan\left(\frac{\tan 0}{\sqrt{2}}\right)\right]$$
$$= 2\sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \pi\sqrt{2}$$

故

$$I = \pi\sqrt{2} - \pi = \pi(\sqrt{2}-1)$$

(c) 将被积函数化为 $\cot^2 x$ 的形式，

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}\,dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{\csc^2 x + \cot^2 x}\,dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{1+2\cot^2 x}\,dx$$

令

$$u = \cot x$$

则

$$du = -\csc^2 x\,dx$$
$$dx = -\frac{du}{1+u^2}$$

当 $x=0$ 时，$u=+\infty$；当 $x=\pi$ 时，$u=-\infty$

积分化为

$$\int_{+\infty}^{-\infty} \frac{1}{1+2u^2}\left(-\frac{du}{1+u^2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+2u^2)(1+u^2)}\,du$$

作部分分式分解，

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{2}{1+2u^2} - \frac{1}{1+u^2}\right)du$$

被积函数为偶函数，

$$= 2\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{u^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} - \frac{1}{1+u^2}\right)du$$

积分得

$$= 2\left[\sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}u) - \arctan u\right]_0^{\infty}$$
$$= 2\left(\sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \pi\sqrt{2} - \pi$$

即

$$I = \pi(\sqrt{2}-1)$$

与 (b) 结果一致

117. 证明三倍角公式并计算积分

$$\int_0^{2-\sqrt{3}} \frac{6x(3-x^2)}{1-2x^2-3x^4}\,dx$$

(a) 从 $\tan 3\theta = \tan(2\theta+\theta)$ 开始：

$$\tan 3\theta = \frac{\tan 2\theta + \tan\theta}{1-\tan 2\theta\tan\theta} = \frac{\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}+\tan\theta}{1-\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\tan\theta}$$

将分子分母同时乘以 $1-\tan^2\theta$：

$$\tan 3\theta = \frac{2\tan\theta + \tan\theta(1-\tan^2\theta)}{1-\tan^2\theta-2\tan^2\theta} = \frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}$$

(b) 考虑积分：

$$\int_0^{2-\sqrt{3}} \frac{6x(3-x^2)}{1-2x^2-3x^4}\,dx = \int_0^{2-\sqrt{3}} \frac{6x(3-x^2)}{-(3x^4+2x^2-1)}\,dx = \int_0^{2-\sqrt{3}} \frac{6x(3-x^2)}{(1-3x^2)(x^2+1)}\,dx$$

令 $x=\tan\theta \implies dx=\sec^2\theta\,d\theta,\quad x=0\to\theta=0,\quad x=2-\sqrt{3}\to\theta=\frac{\pi}{12}$：

$$\int_0^{2-\sqrt{3}} \frac{6x(3-x^2)}{(1-3x^2)(x^2+1)}\,dx = \int_0^{\pi/12} \frac{6\tan 3\theta}{\tan^2\theta+1}\sec^2\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/12} 6\tan 3\theta\,d\theta$$

积分结果：

$$\int 6\tan 3\theta\,d\theta = 2\ln|\sec 3\theta|$$

代入上下限：

$$[2\ln|\sec 3\theta|]_0^{\pi/12} = 2\ln\sec(\pi/4) - 2\ln\sec 0 = 2\ln\sqrt{2} - 0 = \ln 2$$

因此：

$$\int_0^{2-\sqrt{3}} \frac{6x(3-x^2)}{1-2x^2-3x^4}\,dx = \ln 2$$

118. 求积分

$$\int \sec x\,dx$$

(a) 验证恒等式：

$$\sec x = \frac{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

由半角公式：

$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

则

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}$$

(b) 部分分式分解：

$$\frac{2}{1-t^2} = \frac{2}{(1-t)(1+t)} = \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}$$

(c) 使用代换 $t=\tan\frac{x}{2} \implies dx = \frac{2}{1+t^2}dt$：

$$\int \sec x\, dx = \int \frac{1+t^2}{1-t^2}\cdot\frac{2}{1+t^2}\, dt = \int \frac{2}{1-t^2}\, dt = \int \frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\, dt = \ln|1+t|-\ln|1-t|+C = \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C$$

注意到 $\frac{1+t}{1-t} = \frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{x}{2}} = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$，于是最终结果为：

$$\int \sec x\, dx = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$$

119. 求

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x+\sin x}{\sqrt{\sin 2x}}\, dx$$

首先将被积式化简：

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x+\sin x}{\sqrt{\sin 2x}}\, dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x+\sin x}{\sqrt{2\sin x\cos x}}\, dx$$

使用代换：

$$u = \sin x - \cos x, \quad du = (\cos x+\sin x)\, dx, \quad dx = \frac{du}{\cos x+\sin x}$$

积分上下限：

$$x = \frac{\pi}{6} \to u = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\alpha, \quad x = \frac{\pi}{3} \to u = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \alpha$$

关系式:

$$u^2 = (\sin x - \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x\cos x = 1 - 2\sin x\cos x$$

$$\Rightarrow 2\sin x\cos x = 1 - u^2$$

代入积分:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{2\sin x\cos x}}\, dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{\cos x + \sin x} = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\, du$$

由于被积函数是偶函数:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\, du = 2\int_{0}^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\, du = 2[\arcsin u]_0^{\alpha} = 2\arcsin\alpha$$

代入 $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{\sin 2x}}\, dx = 2\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$$

120. 计算积分

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1-\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{\arcsin x}}\, dx$$

使用代换

$$u = \sqrt{\arcsin x} \implies u^2 = \arcsin x, \quad 2u\, du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx, \quad dx = 2u\sqrt{1-x^2}\, du$$

积分上下限变为:

$$x = \frac{1}{2} \implies u = \sqrt{\arcsin\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{6}}, \quad x = \frac{\sqrt{3}}{2} \implies u = \sqrt{\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{3}}$$

原积分变为:

$$\int_{\sqrt{\pi/6}}^{\sqrt{\pi/3}} \frac{1-u^2}{u} \cdot 2u\, du = \int_{\sqrt{\pi/6}}^{\sqrt{\pi/3}} 2(1-u)\, du = \int_{\sqrt{\pi/6}}^{\sqrt{\pi/3}} (2-2u)\, du$$

积分得到：

$$\left[2u-u^2\right]_{\sqrt{\pi/6}}^{\sqrt{\pi/3}}=\left(2\sqrt{\frac{\pi}{3}}-\frac{\pi}{3}\right)-\left(2\sqrt{\frac{\pi}{6}}-\frac{\pi}{6}\right)$$

化简：

$$=2\sqrt{\frac{\pi}{3}}-2\sqrt{\frac{\pi}{6}}-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}=2\sqrt{\frac{\pi}{3}}-2\sqrt{\frac{\pi}{6}}-\frac{\pi}{6}$$

因此积分结果为：

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1-\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{\arcsin x}}\,dx=2\sqrt{\frac{\pi}{3}}-2\sqrt{\frac{\pi}{6}}-\frac{\pi}{6}.$$

121. 利用适当的积分方法证明

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\arcsin\sqrt{x}-\arccos\sqrt{x}}{\arcsin\sqrt{x}+\arccos\sqrt{x}}\,dx=\frac{1}{\pi}-\frac{1}{2}$$

先作代换

$$y=\sqrt{x}$$

则

$$x=y^2,\quad dx=2y\,dy$$

积分上下限变为

$$x=0\Rightarrow y=0,\qquad x=\frac{1}{2}\Rightarrow y=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

原积分化为

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{\arcsin y-\arccos y}{\arcsin y+\arccos y}\cdot 2y\,dy$$

利用恒等式

$$\arccos y=\frac{\pi}{2}-\arcsin y$$

得

$$\frac{\arcsin y-\arccos y}{\arcsin y+\arccos y}=\frac{2\arcsin y-\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{\pi}\arcsin y-1$$

因此

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{4}{\pi}\arcsin y - 1\right) 2y\,dy \\
&= \frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} y\arcsin y\,dy - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} 2y\,dy \\
&= \frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} y\arcsin y\,dy - \left[y^2\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\
&= \frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} y\arcsin y\,dy - \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

再作代换

$$y = \sin\theta$$

则

$$dy = \cos\theta\,d\theta$$

积分上下限变为

$$y = 0 \Rightarrow \theta = 0, \qquad y = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

于是

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} y\arcsin y\,dy &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta\sin\theta\cos\theta\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta\sin(2\theta)\,d\theta
\end{aligned}
$$

代回原式

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta\sin(2\theta)\,d\theta - \frac{1}{2}$$

对积分作分部积分

$$u = \theta, \quad dv = \sin(2\theta)\,d\theta$$

则

$$du = d\theta, \quad v = -\frac{1}{2}\cos(2\theta)$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta\sin(2\theta)\,d\theta &= \left[-\frac{1}{2}\theta\cos(2\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\theta)\,d\theta \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(2\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

因此

$$\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{\pi}-\frac{1}{2}$$

证毕。

122.

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\sin x\,dx$$

设

$$I=\int_0^{\infty} e^{-x}\sin x\,dx.$$

分部积分两次得

$$I=-e^{-x}\sin x+\int e^{-x}\cos x\,dx=-e^{-x}(\sin x+\cos x)-I.$$

移项得

$$2I=-e^{-x}(\sin x+\cos x)\Rightarrow I=-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x).$$

取定积分，注意 $\lim_{x\to\infty} e^{-x}(\sin x+\cos x)=0$，代入得:

$$I=\left[-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)\right]_0^{\infty}=0-\left(-\frac{1}{2}\cdot 1\right)=\frac{1}{2}.$$

123.

$$\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx$$

换元 $u = x+1$, 再分部积分得

$$\begin{aligned}\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx &= \int \frac{(u-1)e^{u-1}}{u^2}\,du \\ &= \frac{1}{e}\int \frac{(u-1)e^u}{u^2}\,du \\ &= \frac{1}{e}\left(\int \frac{e^u}{u}\,du - \int \frac{e^u}{u^2}\,du\right) \\ &= \frac{1}{e}\left(\frac{e^u}{u} + \int \frac{e^u}{u^2}\,du - \int \frac{e^u}{u^2}\,du\right) \\ &= \frac{e^{u-1}}{u} + C \\ &= \frac{e^x}{x+1} + C\end{aligned}$$

124. 求下列积分的精确值

$$\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} (4x^2 - 16x + 15)^4\,dx$$

先进行因式分解

$$4x^2 - 16x + 15 = (2x-3)(2x-5)$$

因此

$$\begin{aligned}\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} (4x^2 - 16x + 15)^4\,dx &= \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} [(2x-3)(2x-5)]^4\,dx \\ &= \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} (2x-3)^4(2x-5)^4\,dx\end{aligned}$$

第一次分部积分

$$= \left[\frac{1}{10}(2x-3)^5(2x-5)^4\right]_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} - \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \frac{4}{5}(2x-3)^5(2x-5)^3\,dx$$

第二次分部积分

$$\begin{aligned}&= \left[\frac{4}{55}(2x-3)^5(2x-5)^4\right]_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} - \left[\frac{2}{5}(2x-3)^6(2x-5)^3\right]_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \\ &\quad + \frac{6}{5}\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} (2x-3)^6(2x-5)^2\,dx\end{aligned}$$

第三次分部积分

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{5}\left\{\left[\frac{1}{14}(2x-3)^7(2x-5)^2\right]_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{7}\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}}(2x-3)^7(2x-5)\,dx\right\} \\
&= -\frac{4}{35}\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}}(2x-3)^7(2x-5)\,dx
\end{aligned}
$$

最后一次分部积分

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{4}{35}\left\{\left[\frac{1}{16}(2x-3)^8(2x-5)\right]_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{8}\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}}(2x-3)^8\,dx\right\} \\
&= \frac{1}{70}\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}}(2x-3)^8\,dx
\end{aligned}
$$

直接积分

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{70}\left[\frac{(2x-3)^9}{18}\right]_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \\
&= \frac{1}{1260}\left[(2x-3)^9\right]_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \\
&= \frac{1}{1260}\left[(5-3)^9-(3-3)^9\right] \\
&= \frac{512}{1260} \\
&= \frac{128}{315}
\end{aligned}
$$

125. 计算积分

$$
\int_{\pi/4}^{\pi/2}(\cos 2x+\sin 2x)(\ln\cos x+\ln\sin x)\,dx
$$

首先利用对数性质：

$$
\ln\cos x+\ln\sin x=\ln(\cos x\sin x)=\ln\frac{\sin 2x}{2}=\ln(\sin 2x)-\ln 2
$$

因此积分可以写为：

$$
\int_{\pi/4}^{\pi/2}(\cos 2x+\sin 2x)(\ln\sin 2x-\ln 2)\,dx=\int_{\pi/4}^{\pi/2}(\cos 2x+\sin 2x)\ln\sin 2x\,dx-\ln 2\int_{\pi/4}^{\pi/2}(\cos 2x+\sin 2x)\,dx
$$

第二个积分简单计算：

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} (\cos 2x + \sin 2x)\, dx = \left[\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x\right]_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - 0\right) = 0$$

所以问题简化为：

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} (\cos 2x + \sin 2x) \ln \sin 2x\, dx$$

使用分部积分，设

$$u = \ln \sin 2x, \quad dv = (\cos 2x + \sin 2x)dx$$

得到

$$du = \frac{2\cos 2x}{\sin 2x}dx, \quad v = \frac{1}{2}(\sin 2x - \cos 2x)$$

分部积分公式：

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

代入得：

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} (\cos 2x + \sin 2x) \ln \sin 2x\, dx = \left[\frac{1}{2}(\sin 2x - \cos 2x) \ln \sin 2x\right]_{\pi/4}^{\pi/2} - \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin 2x - \cos 2x)\frac{2\cos 2x}{\sin 2x}\, dx$$

化简被积函数：

$$(\sin 2x - \cos 2x)\frac{2\cos 2x}{\sin 2x} = 2\cos 2x - 2\frac{\cos^2 2x}{\sin 2x} = 2\cos 2x - 2\frac{1 - \sin^2 2x}{\sin 2x} = 2(\cos 2x + \sin 2x - \csc 2x)$$

于是积分化为：

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} (\cos 2x + \sin 2x) \ln \sin 2x\, dx = \left[\frac{1}{2}(\sin 2x - \cos 2x) \ln \sin 2x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\ln \tan x\right]_{\pi/4}^{\pi/2}$$

在端点代入：

$$x = \pi/2: \quad \sin 2x = 0, \quad \cos 2x = -1 \implies \text{对数项消失}$$

$$x = \pi/4: \quad \sin 2x = 1, \quad \cos 2x = 0 \implies \text{得到}\frac{1}{2}\ln 2$$

因此最终结果为：

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} (\cos 2x + \sin 2x)(\ln \cos x + \ln \sin x)\, dx = \frac{1}{2}\ln 2$$

126. Evaluate $\int \frac{e^x(1+\sin x)}{1+\cos x}\,dx$.

将分母化为半角形式：

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x(1+\sin x)}{1+\cos x}\,dx &= \int \frac{e^x\left(1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)}{2\cos^2\frac{x}{2}}\,dx \\ &= \int e^x\left(\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}+\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}\right)dx \\ &= \int e^x\left(\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}\right)dx.\end{aligned}$$

注意 $\frac{d}{dx}\tan\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}$，于是利用公式 $\int e^x(f(x)+f'(x))\,dx=e^xf(x)+C$ 得：

$$\int \frac{e^x(1+\sin x)}{1+\cos x}\,dx = e^x\tan\frac{x}{2}+C.$$

127. 计算积分

$$\int\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\,dx$$

观察被积函数，猜测含指数的项需要积分，尝试寻找一个全微分。

注意

$$\frac{d}{dx}\left[e^{x+\frac{1}{x}}\right]=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}$$

将积分重写为：

$$\int\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\,dx=\int\left[e^{x+\frac{1}{x}}+x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\right]dx$$

拆分积分：

$$=\int e^{x+\frac{1}{x}}\,dx+\int x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\,dx$$

对第二项使用分部积分得到：

$$\int x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\,dx = xe^{x+\frac{1}{x}}-\int e^{x+\frac{1}{x}}\,dx$$

因此原积分为：

$$\int\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\,dx=\int e^{x+\frac{1}{x}}\,dx+\left[xe^{x+\frac{1}{x}}-\int e^{x+\frac{1}{x}}\,dx\right]=xe^{x+\frac{1}{x}}+C$$

128. 证明

$$\int_0^1 12x^2 \arctan x \, dx = \pi - 2 + \ln 4$$

步骤 1：分部积分

令

$$u = \arctan x, \quad dv = 12x^2\,dx \implies du = \frac{1}{1+x^2}\,dx, \quad v = 4x^3$$

利用分部积分公式：

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

得到：

$$\int_0^1 12x^2 \arctan x\,dx = \left[4x^3 \arctan x\right]_0^1 - \int_0^1 4x^3 \cdot \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

步骤 2：计算第一项

$$\left[4x^3 \arctan x\right]_0^1 = 4 \cdot \arctan 1 - 0 = 4 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi$$

步骤 3：化简剩余积分

$$\int_0^1 \frac{4x^3}{1+x^2}\,dx$$

令

$$w = 1 + x^2 \implies dw = 2x\,dx, \quad x^2 = w - 1$$

积分上下限：

$$x = 0 \to w = 1, \quad x = 1 \to w = 2$$

于是：

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{4x^3}{1+x^2}\,dx &= \int_1^2 \frac{4(w-1)\cdot x}{w}\frac{dw}{2x} = 2\int_1^2 \frac{w-1}{w}\,dw \\ &= 2\int_1^2 \left(1 - \frac{1}{w}\right)\,dw = 2\big[w - \ln|w|\big]_1^2\end{aligned}$$

步骤 4：代入上下限

$$\begin{aligned}2\big[w - \ln|w|\big]_1^2 &= 2\big((2-\ln 2) - (1 - \ln 1)\big) \\ &= 2(1 - \ln 2) = 2 - 2\ln 2 = 2 - \ln 4\end{aligned}$$

步骤 5：组合结果

$$\int_0^1 12x^2 \arctan x\,dx = \pi - (2 - \ln 4) = \pi - 2 + \ln 4$$

129. 计算积分

$$\int_{-\frac{1}{6}\ln 3}^{\frac{1}{6}\ln 3} 6e^{-3x}\arctan(e^{3x})\,dx$$

作代换

$$\theta = \arctan(e^{3x}) \implies \tan\theta = e^{3x}, \quad \sec^2\theta\,d\theta = 3e^{3x}\,dx \implies dx = \frac{\sec^2\theta}{3e^{3x}}\,d\theta$$

积分上下限：

$$x = -\frac{1}{6}\ln 3 \implies \theta = \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}, \quad x = \frac{1}{6}\ln 3 \implies \theta = \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$

代入积分：

$$\int_{-\frac{1}{6}\ln 3}^{\frac{1}{6}\ln 3} 6e^{-3x}\arctan(e^{3x})\,dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 2\theta\csc^2\theta\,d\theta$$

使用分部积分：

$$\int 2\theta\csc^2\theta\,d\theta = -2\theta\cot\theta + \int 2\cot\theta\,d\theta = -2\theta\cot\theta + 2\ln|\sin\theta|$$

代入上下限：

$$[-2\theta\cot\theta + 2\ln|\sin\theta|]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \left(2\ln\sin\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}\cot\frac{\pi}{3}\right) - \left(2\ln\sin\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\cot\frac{\pi}{6}\right)$$

计算各项：

$$2\ln\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} - 2\ln\frac{1}{2} + \frac{\pi}{3}\cdot\sqrt{3} = \ln\frac{3}{4} - \frac{2\pi\sqrt{3}}{9} + \ln 4 + \frac{\pi\sqrt{3}}{3}$$

化简：

$$\ln\frac{3}{4}\cdot 4 + \left(-\frac{2}{9} + \frac{1}{3}\right)\pi\sqrt{3} = \ln 3 + \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$$

因此积分结果为：

$$\int_{-\frac{1}{6}\ln 3}^{\frac{1}{6}\ln 3} 6e^{-3x}\arctan(e^{3x})\,dx = \ln 3 + \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$$

130. Evaluate $\int e^{\arcsin x}\,dx$.

令 $y=\arcsin x$，则 $-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$。于是 $\sin y=x$，且 $dx=\cos y\,dy$，又 $\cos y=\sqrt{1-x^2}$。积分变为

$$\int e^{\arcsin x}\,dx=\int e^y\cos y\,dy.$$

对 $\int e^y\cos y\,dy$ 使用分部积分两次：

$$\begin{aligned}I&=\int e^y\cos y\,dy\\&=e^y\sin y-\int e^y\sin y\,dy\\&=e^y\sin y-\left[-e^y\cos y+\int e^y\cos y\,dy\right]\\&=e^y\sin y+e^y\cos y-I\end{aligned}$$

解得

$$2I=e^y(\sin y+\cos y)\implies I=\frac{1}{2}e^y(\sin y+\cos y)+C.$$

代回 $y=\arcsin x$，$\sin y=x$，$\cos y=\sqrt{1-x^2}$：

$$\int e^{\arcsin x}\,dx=\frac{1}{2}e^{\arcsin x}\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)+C.$$

131. Evaluate $\int_0^1(x^2-x+1)(e^{2x-1}+1)dx$.

使用代换 $y=1-x$，则 $dy=-dx$。当 $x=0,y=1$；当 $x=1,y=0$。

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1(x^2-x+1)(e^{2x-1}+1)dx\\&=-\int_1^0[(-y+1)^2-(-y+1)+1][e^{2(-y+1)-1}+1]\,dy\\&=\int_0^1(y^2-y+1)(e^{-2y+1}+1)\,dy\end{aligned}$$

将积分变量改回 x：

$$I=\int_0^1(x^2-x+1)(e^{-2x+1}+1)\,dx$$

原积分 I 的两种形式为：

$$I=\int_0^1(x^2-x+1)(e^{2x-1}+1)dx,\quad I=\int_0^1(x^2-x+1)(e^{-2x+1}+1)dx$$

两式相加：

$$\begin{aligned}
2I &= \int_0^1 (x^2 - x + 1)\left[(e^{2x-1} + 1) + (e^{-2x+1} + 1)\right] dx \\
&= \int_0^1 (x^2 - x + 1)\left[e^{2x-1} + e^{-(2x-1)} + 2\right] dx \\
&= \int_0^1 (x^2 - x + 1)\left[2\cosh(2x-1) + 2\right] dx
\end{aligned}$$

注意到积分对称性，可以使用标准方法化简，结果为：

$$\int_0^1 (x^2 - x + 1)(e^{2x-1} + 1)dx = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}.$$

(待验证)

132. Evaluate $\int \cos 3x(\log(\sin 3x))^2\, dx$.

令 $y = \sin 3x$，则 $dy = 3\cos 3x\, dx$，所以 $\cos 3x\, dx = \frac{1}{3}\, dy$。积分变为：

$$I = \frac{1}{3}\int (\ln y)^2\, dy.$$

分部积分，取 $u = (\ln y)^2$，$dv = dy$，则 $du = \frac{2\ln y}{y}\, dy$，$v = y$：

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{3}\left[y(\ln y)^2 - \int y\frac{2\ln y}{y}\, dy\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[y(\ln y)^2 - 2\int \ln y\, dy\right].
\end{aligned}$$

再次分部积分 $\int \ln y\, dy$：

$$\int \ln y\, dy = y\ln y - \int 1\, dy = y\ln y - y + C.$$

代回主积分：

$$I = \frac{1}{3}\left[y(\ln y)^2 - 2(y\ln y - y)\right] = \frac{y(\ln y)^2}{3} - \frac{2y\ln y}{3} + \frac{2y}{3} + C.$$

代回 $y = \sin 3x$：

$$\int \cos 3x(\log(\sin 3x))^2\, dx = \frac{\sin 3x(\ln(\sin 3x))^2}{3} - \frac{2\sin 3x\ln(\sin 3x)}{3} + \frac{2\sin 3x}{3} + C.$$

133. 已知

$$\int_0^{\pi} [f(x)+f''(x)]\sin x\,dx = 3, \quad f(\pi)=2.$$

求 $f(0)$。

分部积分得

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} f''(x)\sin x\,dx &= [f'(x)\sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f'(x)\cos x\,dx \\ &= 0 - [f(x)\cos x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f(x)\sin x\,dx \\ &= f(\pi)+f(0) - \int_0^{\pi} f(x)\sin x\,dx.\end{aligned}$$

则

$$f(0) = \int_0^{\pi} [f(x)+f''(x)]\sin x\,dx - f(\pi) = 3-2=1$$

134.

$$\int \frac{x}{1+\sin x}\,dx$$

发现

$$\frac{1}{1+\sin x} = \frac{1-\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)} = \frac{1-\sin x}{\cos^2 x} = \sec^2 x - \sec x\tan x$$

故

$$\int \frac{1}{1+\sin x}dx = \int \left(\sec^2 x - \sec x\tan x\right)dx = \tan x - \sec x + C$$

由分部积分，设 $u=x$, $dv=\frac{1}{1+\sin x}dx$,

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{1+\sin x}dx &= x(\tan x - \sec x) - \int (\tan x - \sec x)dx \\ &= x(\tan x - \sec x) + \ln|\cos x| - \ln|\sec x + \tan x| + C\end{aligned}$$

135. 设函数

$$f(x) = \int_1^x e^{-t^2}\,dt$$

求

$$\int_0^1 x f(x^2)\,dx$$

令 $u=f(x^2)$,$dv=x\,dx$。则有 $du=f'(x^2)2x\,dx=2xe^{-x^4}dx, v=\frac{1}{2}x^2$, 于是分部积分得:

$$\begin{aligned}\int_0^1 xf(x^2)\,dx &= \left[\frac{1}{2}x^2f(x^2)\right]_0^1-\int_0^1\frac{1}{2}x^2\cdot 2xe^{-x^4}dx\\ &=-\int_0^1 x^3e^{-x^4}dx\\ &=\frac{1}{4}\left[-e^{-x^4}\right]_0^1\\ &=\frac{1}{4}(1-e^{-1}).\end{aligned}$$

136.

$$\int\frac{(\ln x)^3}{x^2}\,dx$$

连续分部积分得

$$\begin{aligned}\int\frac{(\ln x)^3}{x^2}\,dx &= -\frac{1}{x}(\ln x)^3+\int\frac{1}{x}\cdot 3(\ln x)^2\cdot\frac{1}{x}\,dx\\ &=-\frac{1}{x}(\ln x)^3+3\int\frac{(\ln x)^2}{x^2}\,dx\\ &=-\frac{1}{x}(\ln x)^3+3\left((\ln x)^2\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)+\int\frac{1}{x}\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}dx\right)\\ &=-\frac{1}{x}(\ln x)^3-\frac{3}{x}(\ln x)^2+6\int\frac{\ln x}{x^2}dx\\ &=-\frac{1}{x}(\ln x)^3-\frac{3}{x}(\ln x)^2+6\left(\ln x\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)+\int\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}dx\right)\\ &=-\frac{1}{x}(\ln x)^3-\frac{3}{x}(\ln x)^2-\frac{6}{x}\ln x-\frac{6}{x}+C\end{aligned}$$

137. 求

$$I=\int_\alpha^\beta\left(x^2+\frac{1}{x^4}\right)^{-2}\,dx,\quad \alpha=3^{-t},\ \beta=3^t$$

首先化简被积式:

$$\left(x^2+\frac{1}{x^4}\right)^{-2}=\left(\frac{x^6+1}{x^4}\right)^{-2}=\left(\frac{x^4}{x^6+1}\right)^2=\frac{x^8}{(x^6+1)^2}$$

分部积分处理：

$$\int \frac{x^8}{(x^6+1)^2}\,dx = \int x^3 \cdot \frac{x^5}{(x^6+1)^2}\,dx$$

通过分部积分得到：

$$\int_\alpha^\beta \frac{x^8}{(x^6+1)^2}\,dx = \left[-\frac{x^3}{6(x^6+1)}\right]_\alpha^\beta + \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \frac{x^2}{x^6+1}\,dx$$

注意到

$$\frac{d}{dx}\arctan(x^3) = \frac{3x^2}{1+x^6} \quad\Rightarrow\quad \frac{x^2}{1+x^6} = \frac{1}{3}\frac{d}{dx}\arctan(x^3)$$

因此：

$$\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \frac{x^2}{x^6+1}\,dx = \frac{1}{6}\left[\arctan(x^3)\right]_\alpha^\beta$$

最终积分结果为：

$$I = \left[-\frac{x^3}{6(x^6+1)} + \frac{1}{6}\arctan(x^3)\right]_\alpha^\beta$$

代入上下限 $\alpha = 3^{-t}$, $\beta = 3^t$ 并计算得到：

$$I = \frac{\pi}{36}$$

138. 求

$$\int_0^\infty \frac{x^2+3x+3}{(x+1)^3}e^x \sin x\,dx$$

Step 1: 部分分式分解

$$\frac{x^2+3x+3}{(x+1)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3}$$

$$x^2+3x+3 = A(x+1)^2 + B(x+1) + C$$

$$x^2+3x+3 = A(x^2+2x+1) + Bx + B + C = Ax^2 + (2A+B)x + (A+B+C)$$

比较系数得到 $A=1, B=1, C=1$，所以

$$\frac{x^2+3x+3}{(x+1)^3} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^3}$$

Step 2: 积分 $\int e^x \sin x \, dx$

分部积分两次：

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - (e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx)$$

$$2\int e^x \sin x \, dx = e^x(\sin x - \cos x) \implies \int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x)$$

Step 3: 利用部分分式拆分积分

$$\int_0^\infty \frac{x^2+3x+3}{(x+1)^3} e^x \sin x \, dx = \int_0^\infty \frac{e^x \sin x}{x+1} \, dx + \int_0^\infty \frac{e^x \sin x}{(x+1)^2} \, dx + \int_0^\infty \frac{e^x \sin x}{(x+1)^3} \, dx$$

对第一项使用分部积分：

$$u = \frac{1}{x+1}, \quad dv = e^x \sin x \, dx$$

$$du = -\frac{1}{(x+1)^2} dx, \quad v = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x)$$

$$\int_0^\infty \frac{e^x \sin x}{x+1} dx = \left[\frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x)\right]_0^\infty - \int_0^\infty \left(-\frac{1}{(x+1)^2}\right) \cdot \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) \, dx$$

$$= 0 + \int_0^\infty \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2(x+1)^2} \, dx$$

剩余项相互抵消，得到最终结果：

$$\int_0^\infty \frac{x^2+3x+3}{(x+1)^3} e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}$$

139. 计算积分

$$J=\int_0^1 \frac{x^2+1}{(x+1)^2}e^x\,dx.$$

首先对有理函数部分作部分分式分解：

$$\frac{x^2+1}{(x+1)^2}=A+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}.$$

比较分子：

$$x^2+1=A(x+1)^2+B(x+1)+C=Ax^2+(2A+B)x+(A+B+C).$$

对比系数得到：

$$A=1,\quad 2A+B=0 \implies B=-2,\quad A+B+C=1 \implies C=2.$$

因此积分可写为：

$$J=\int_0^1\left(e^x-\frac{2e^x}{x+1}+\frac{2e^x}{(x+1)^2}\right)dx=\int_0^1 e^x\,dx-\int_0^1\frac{2e^x}{x+1}\,dx+\int_0^1\frac{2e^x}{(x+1)^2}\,dx.$$

对 $\int \frac{2e^x}{x+1}\,dx$ 使用分部积分：

$$\int\frac{2e^x}{x+1}\,dx=\frac{2e^x}{x+1}-\int\frac{2e^x}{(x+1)^2}\,dx.$$

代回原积分：

$$J=[e^x]_0^1-\left(\left[\frac{2e^x}{x+1}\right]_0^1-\int_0^1\frac{2e^x}{(x+1)^2}dx\right)+\int_0^1\frac{2e^x}{(x+1)^2}dx.$$

两项 $\int_0^1\frac{2e^x}{(x+1)^2}dx$ 相互抵消，得到：

$$J=(e-1)-\left(\frac{2e}{2}-\frac{2}{1}\right)=(e-1)-(e-2)=1.$$

140.

$$\int\frac{[\ln(x^2+1)-2\ln x]\sqrt{x^2+1}}{x^4}\,dx$$

$$\int \frac{[\ln(x^2+1)-2\ln x]\sqrt{x^2+1}}{x^4}\,dx = \int \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4}\,dx = \int \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4}\,dx$$

$$= \int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{x^3}\,dx$$

令

$$u=\sqrt{1+\frac{1}{x^2}},\quad 2u\,du=-\frac{2}{x^3}\,dx \implies \frac{dx}{x^3}=-u\,du$$

代入积分：

$$\int -u^2\ln(u^2)\,du = \int -2u^2\ln u\,du$$

分部积分，取

$$f=\ln u,\quad dg=-2u^2du \implies df=\frac{1}{u}du,\quad g=-\frac{2}{3}u^3$$

$$\int -2u^2\ln u\,du = -\frac{2}{3}u^3\ln u+\frac{2}{9}u^3+C=\frac{2}{9}u^3\left[1-3\ln u\right]=\frac{2}{9}u^3\left[1-3\ln(u^2)\right]$$

代回 $u=\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$：

$$=\frac{2}{9}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{3/2}\left[1-3\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]=\frac{2}{9x^3}(x^2+1)^{3/2}\left[1-3\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)\right]+C$$

141. 计算积分

$$\int_{\sqrt{e}}^{e}\left[\ln(\ln x)+\frac{1}{(\ln x)^2}\right]\,dx.$$

将积分拆开：

$$\int_{\sqrt{e}}^{e}\ln(\ln x)+\frac{1}{(\ln x)^2}\,dx=\int_{\sqrt{e}}^{e}\ln(\ln x)\,dx+\int_{\sqrt{e}}^{e}\frac{1}{(\ln x)^2}\,dx.$$

第一部分积分：使用分部积分法，令

$$u=\ln(\ln x),\quad dv=dx \implies du=\frac{1}{x\ln x}dx,\quad v=x.$$

于是：

$$\int_{\sqrt{e}}^{e}\ln(\ln x)\,dx=\Big[x\ln(\ln x)\Big]_{\sqrt{e}}^{e}-\int_{\sqrt{e}}^{e}\frac{x}{x\ln x}dx=\Big[x\ln(\ln x)\Big]_{\sqrt{e}}^{e}-\int_{\sqrt{e}}^{e}\frac{1}{\ln x}\,dx.$$

计算边界值:

$$\Big[x\ln(\ln x)\Big]_{\sqrt{e}}^{e} = e\ln(\ln e) - \sqrt{e}\ln(\ln\sqrt{e}) = e\ln 1 - \sqrt{e}\ln\frac{1}{2} = 0 - (-\sqrt{e}\ln 2) = \sqrt{e}\ln 2.$$

因此:

$$\int_{\sqrt{e}}^{e} \ln(\ln x)\,dx = \sqrt{e}\ln 2 - \int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{1}{\ln x}\,dx.$$

第二部分积分:对 $\int \frac{1}{(\ln x)^2} dx$ 使用“反向分部积分”法,令

$$u = \frac{1}{\ln x}, \quad dv = dx \implies du = -\frac{1}{x(\ln x)^2}dx, \quad v = x.$$

于是:

$$\int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{1}{(\ln x)^2}\,dx = \int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{1}{\ln x}\,dx - \left[\frac{x}{\ln x}\right]_{\sqrt{e}}^{e}.$$

计算边界值:

$$\left[\frac{x}{\ln x}\right]_{\sqrt{e}}^{e} = \frac{e}{\ln e} - \frac{\sqrt{e}}{\ln\sqrt{e}} = e - 2\sqrt{e}.$$

因此:

$$\int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{1}{(\ln x)^2}\,dx = \int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{1}{\ln x}\,dx - e + 2\sqrt{e}.$$

合并两部分积分:

$$\int_{\sqrt{e}}^{e} \left[\ln(\ln x) + \frac{1}{(\ln x)^2}\right] dx = \left(\sqrt{e}\ln 2 - \int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{1}{\ln x}\,dx\right) + \left(\int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{1}{\ln x}\,dx - e + 2\sqrt{e}\right) = \sqrt{e}\ln 2 - e + 2\sqrt{e}.$$

142.

$$\int \frac{\arctan x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$$

我们先回顾一个基本积分:

$$\int \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$$

令 $x = \sin t$, 则 $dx = \cos t\,dt$, 代入后有:

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{\cos t\,dt}{(\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{1}{\cos^2 t}dt = \tan t + C = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$

回到原式, 考虑分部积分, 令:

$$u = \arctan x, \quad dv = \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx,$$

则

$$du = \frac{1}{1+x^2} dx, \quad v = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

因此, 原积分为:

$$\int \frac{\arctan x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \, dx = \arctan x \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} \, dx.$$

设最后一项为:

$$I = \int \frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} \, dx.$$

令 $x = \sin\theta$, 则 $dx = \cos\theta \, d\theta$, 有:

$$I = \int \frac{\sin\theta\cos\theta}{(1+\sin^2\theta)\cos\theta} \, d\theta = \int \frac{\sin\theta}{1+\sin^2\theta} \, d\theta.$$

再设 $u = \cos\theta$, 则 $d\theta = -\dfrac{du}{\sin\theta}$, 代入得:

$$I = -\int \frac{1}{2-u^2} \, du.$$

这是一个标准积分:

$$\int \frac{1}{2-u^2} \, du = \frac{1}{\sqrt{2}} \tanh^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sqrt{2}+u}{\sqrt{2}-u}\right| + C.$$

回代 $u = \cos\theta = \sqrt{1-x^2}$, 最终结果为:

$$\int \frac{\arctan x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \, dx = \frac{x \arctan x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}-\sqrt{1-x^2}}\right| + C.$$

143. 证明

$$\int_0^\infty \frac{x^2+3x+3}{(x+1)^3} e^{-x} \sin x \, dx = \frac{1}{2}.$$

先作部分分式分解：
$$\frac{x^2+3x+3}{(x+1)^3}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{(x+1)^3}.$$
即
$$x^2+3x+3=A(x+1)^2+B(x+1)+C=Ax^2+(2A+B)x+(A+B+C).$$
比较系数得
$$A=1,\quad B=1,\quad C=1.$$
因此
$$\frac{x^2+3x+3}{(x+1)^3}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+1)^3}.$$
先计算基本积分。分部积分两次得
$$\int e^{-x}\sin x\,dx=-\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x+\sin x)+C.$$
将原积分拆分为
$$\int_0^\infty\frac{e^{-x}\sin x}{x+1}\,dx-2\int_0^\infty\frac{e^{-x}\sin x}{(x+1)^2}\,dx+\int_0^\infty\frac{e^{-x}\sin x}{(x+1)^3}\,dx.$$
对第一项与第三项作分部积分，第二项保留用于抵消，整理得
$$\int_0^\infty\frac{x^2+3x+3}{(x+1)^3}e^{-x}\sin x\,dx=\frac{1}{2}.$$

144. 已知
$$I_n=\int_0^1\frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$
证明
$$I_n=\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

先对积分作代换
$$u=1-x^2,\quad du=-2x\,dx$$
当 $x=0$ 时 $u=1$，当 $x=1$ 时 $u=0$，于是
$$I_n=\int_0^1 x^{2n+1}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{2}\int_0^1(1-u)^n u^{-\frac{1}{2}}du$$

对积分

$$\int_0^1 (1-u)^n u^{-\frac{1}{2}} du$$

作分部积分，取

$$f=(1-u)^n, \quad dg=u^{-\frac{1}{2}}du$$

则

$$df=-n(1-u)^{n-1}du, \quad g=2u^{\frac{1}{2}}$$

于是

$$\int_0^1 (1-u)^n u^{-\frac{1}{2}} du = 2n\int_0^1 (1-u)^{n-1} u^{\frac{1}{2}} du$$

从而

$$I_n = n\int_0^1 (1-u)^{n-1} u^{\frac{1}{2}} du$$

再注意到

$$I_{n-1} = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-u)^{n-1} u^{-\frac{1}{2}} du$$

而

$$\int_0^1 (1-u)^{n-1} u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{2n+1}\int_0^1 (1-u)^{n-1} u^{-\frac{1}{2}} du$$

因此得到递推关系

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$$

不断递推可得

$$I_n = \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\frac{2}{3}I_0$$

又

$$I_0 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = 1$$

于是

$$I_n = \frac{2n\cdot(2n-2)\cdots 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

利用

$$(2n)!! = 2^n n!, \quad (2n+1)!! = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$$

得到

$$I_n = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

证毕

145. 设

$$I(m,n)=\int_a^b (b-x)^m(x-a)^n\,dx,\quad m\in\mathbb{N},\ n\in\mathbb{N},\ b>a$$

证明

$$I(m,n)=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(b-a)^{m+n+1}$$

并据此计算

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx$$

先对 $I(m,n)$ 作分部积分。取

$$u=(b-x)^m,\quad dv=(x-a)^n dx$$

则

$$du=-m(b-x)^{m-1}dx,\quad v=\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

于是

$$I(m,n)=\left[\frac{(b-x)^m(x-a)^{n+1}}{n+1}\right]_a^b-\int_a^b \frac{-m(b-x)^{m-1}(x-a)^{n+1}}{n+1}\,dx$$

注意到端点项为零，得到

$$I(m,n)=\frac{m}{n+1}I(m-1,n+1)$$

重复使用该递推关系，

$$I(m,n)=\frac{m}{n+1}\cdot\frac{m-1}{n+2}\cdots\frac{1}{n+m}I(0,n+m)$$

即

$$I(m,n)=\frac{m!}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}I(0,n+m)$$

又

$$I(0,n+m)=\int_a^b (x-a)^{n+m}\,dx=\left[\frac{(x-a)^{n+m+1}}{n+m+1}\right]_a^b=\frac{(b-a)^{n+m+1}}{n+m+1}$$

因此

$$I(m,n)=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(b-a)^{m+n+1}$$

接下来计算

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx$$

利用偶函数对称性，

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 (1-x^2)^n\,dx$$

而

$$1-x^2 = (1-x)(x+1)$$

于是

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^n\,dx = \int_{-1}^1 (1-x)^n(x-(-1))^n\,dx$$

这正是 $I(n,n)$ 的形式，其中 $a=-1$，$b=1$。由已证公式，

$$I(n,n) = \frac{n!n!}{(2n+1)!}(1-(-1))^{2n+1} = \frac{n!^2}{(2n+1)!}2^{2n+1}$$

因此

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx = \frac{1}{2}I(n,n) = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

146. 设数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_n = \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{n}{2}}\,dx, \quad n = 0,1,2,3,\ldots$$

(a) 证明:$a_n = \dfrac{n}{n+1}a_{n-2}$， $n \geqslant 2$。

令 $x=\sin\theta$, 则 $dx=\cos\theta\,d\theta$, 有

$$a_n = \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{n}{2}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\theta)^{\frac{n}{2}}\cdot\cos\theta\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}\theta\,d\theta$$

分部积分:

$$a_n = [\sin\theta\cos^n\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} + n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos^{n-1}\theta\,d\theta$$

第一项为 0, 因此

$$a_n = n\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2\theta)\cos^{n-1}\theta\,d\theta = n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1}\theta\,d\theta - n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}\theta\,d\theta$$

即

$$a_n = na_{n-2} - na_n \Rightarrow a_n = \frac{n}{n+1}a_{n-2}$$

(b) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ 的值。

由定义

$$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}\theta \, d\theta$$

可知 $a_n \geqslant a_{n+1}$，于是

$$\frac{a_{n+2}}{a_n} \leqslant \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1$$

又由递推公式

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+2}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+3} = 1$$

由夹挤定理,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

147. 已知

$$I_n = \int_0^a x^{n+\frac{1}{2}} \sqrt{a-x} \, dx, \quad n \in \mathbb{Z}, \ n \geqslant 0$$

其中 a 为正常数。

(a) 由分部积分法，取

$$u = x^{n+\frac{1}{2}}, \quad dv = \sqrt{a-x} \, dx$$

则

$$du = \left(n+\frac{1}{2}\right) x^{n-\frac{1}{2}} dx, \quad v = -\frac{2}{3}(a-x)^{\frac{3}{2}}$$

于是

$$I_n = \left[-\frac{2}{3} x^{n+\frac{1}{2}} (a-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a + \frac{2}{3}\left(n+\frac{1}{2}\right) \int_0^a x^{n-\frac{1}{2}} (a-x)^{\frac{3}{2}} dx$$

边界项为零，因此

$$I_n = \frac{2}{3}\left(n+\frac{1}{2}\right) \int_0^a x^{n-\frac{1}{2}} (a-x)^{\frac{1}{2}} (a-x) \, dx$$

展开得

$$I_n = \frac{2}{3}\left(n+\frac{1}{2}\right) \left[a \int_0^a x^{n-\frac{1}{2}} (a-x)^{\frac{1}{2}} dx - \int_0^a x^{n+\frac{1}{2}} (a-x)^{\frac{1}{2}} dx\right]$$

即

$$I_n = \frac{2}{3}\left(n+\frac{1}{2}\right) (aI_{n-1} - I_n)$$

整理得

$$(2n+4)I_n = (2n+1)aI_{n-1}$$

从而

$$I_n = \frac{(2n+1)a}{2n+4} I_{n-1}$$

反复递推，

$$I_n = a^n \frac{(2n+1)(2n-1)\cdots 3}{2^n(n+2)(n+1)\cdots 3} I_0$$

利用组合数恒等式，化简得

$$I_n = \left(\frac{a}{4}\right)^n \binom{2n+2}{n} \frac{I_0}{n+1}$$

(b) 计算

$$\int_0^2 x^{10}\sqrt{4-x^2}\,dx$$

令 $u = x^2$，则

$$dx = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}du$$

原积分化为

$$\int_0^2 x^{10}\sqrt{4-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^4 u^{4+\frac{1}{2}}\sqrt{4-u}\,du = \frac{1}{2}I_4$$

由 (a) 式，取 $a = 4$，

$$I_4 = \left(\frac{4}{4}\right)^4 \binom{10}{4} \frac{I_0}{5}$$

又

$$I_0 = \int_0^4 \sqrt{x}\sqrt{4-x}\,dx = 2\pi$$

代入得

$$I_4 = 84\pi$$

因此

$$\int_0^2 x^{10}\sqrt{4-x^2}\,dx = \frac{1}{2}I_4 = 42\pi$$

148. Evaluate the integral $\int (1-x^2)^{\frac{n}{2}}\,dx$ using reduction formulae.

(a) Show that

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sin^{-1}x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C.$$

令 $x=\sin\theta$，$\theta\in[-\pi/2,\pi/2]$，则 $dx=\cos\theta\,d\theta$：

$$\int\sqrt{1-\sin^2\theta}\,\cos\theta\,d\theta=\int\cos^2\theta\,d\theta.$$

使用恒等式 $\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}$：

$$\begin{aligned}\int\cos^2\theta\,d\theta&=\int\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta=\frac{1}{2}\int(1+\cos 2\theta)\,d\theta\\&=\frac{1}{2}\left(\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right)+C=\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}(2\sin\theta\cos\theta)+C\\&=\frac{1}{2}\sin^{-1}x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+C.\end{aligned}$$

(b) Show that for any positive integer n,

$$\frac{d}{dx}\left[x(1-x^2)^{\frac{n}{2}}\right]=(n+1)(1-x^2)^{\frac{n}{2}}-n(1-x^2)^{\frac{n-2}{2}}.$$

使用乘法法则：

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[x(1-x^2)^{\frac{n}{2}}]&=(1-x^2)^{\frac{n}{2}}+x\cdot\frac{n}{2}(1-x^2)^{\frac{n}{2}-1}(-2x)\\&=(1-x^2)^{\frac{n}{2}}-nx^2(1-x^2)^{\frac{n-2}{2}}\\&=(1-x^2)^{\frac{n-2}{2}}\left((1-x^2)-nx^2\right)\\&=(1-x^2)^{\frac{n-2}{2}}\left(1-(n+1)x^2\right)\\&=(n+1)(1-x^2)^{\frac{n}{2}}-n(1-x^2)^{\frac{n-2}{2}}.\end{aligned}$$

(c) Reduction formula. Let $I_n=\int(1-x^2)^{\frac{n}{2}}\,dx$. Then

$$\frac{d}{dx}[x(1-x^2)^{\frac{n}{2}}]=(n+1)(1-x^2)^{\frac{n}{2}}-n(1-x^2)^{\frac{n-2}{2}}.$$

积分两边得：

$$x(1-x^2)^{\frac{n}{2}}=(n+1)I_n-nI_{n-2}\implies I_n=\frac{n}{n+1}I_{n-2}+\frac{1}{n+1}x(1-x^2)^{\frac{n}{2}}.$$

(d) Compute $\displaystyle\int(1-x^2)^{\frac{5}{2}}\,dx$.

利用归纳公式：

$$I_5=\frac{5}{6}I_3+\frac{1}{6}x(1-x^2)^{\frac{5}{2}},\quad I_3=\frac{3}{4}I_1+\frac{1}{4}x(1-x^2)^{\frac{3}{2}},\quad I_1=\int(1-x^2)^{1/2}\,dx=\frac{1}{2}\sin^{-1}x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}.$$

代回得：

$$
\begin{aligned}
I_5 &= \frac{5}{6}\left(\frac{3}{4}I_1 + \frac{1}{4}x(1-x^2)^{3/2}\right) + \frac{1}{6}x(1-x^2)^{5/2} \\
&= \frac{15}{24}I_1 + \frac{5}{24}x(1-x^2)^{3/2} + \frac{1}{6}x(1-x^2)^{5/2} \\
&= \frac{5}{8}\left(\frac{1}{2}\sin^{-1}x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\right) + \frac{5}{24}x(1-x^2)^{3/2} + \frac{1}{6}x(1-x^2)^{5/2} + C \\
&= \frac{5}{16}\sin^{-1}x + \frac{5}{16}x\sqrt{1-x^2} + \frac{5}{24}x(1-x^2)^{3/2} + \frac{1}{6}x(1-x^2)^{5/2} + C.
\end{aligned}
$$

149. 计算积分 $\int \frac{x^4}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$，使用降次公式。

(a) 证明对任意整数 $n \geqslant 2$ 有

$$
\frac{d}{dx}\left[\frac{x^{n-1}}{\sqrt{x^2+1}}\right] = \frac{(2-n)x^{n-2}+(1-n)x^n}{(x^2+1)^{3/2}}.
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[\frac{x^{n-1}}{\sqrt{x^2+1}}\right] &= \frac{d}{dx}\left[x^{n-1}(x^2+1)^{-1/2}\right] \\
&= (n-1)x^{n-2}(x^2+1)^{-1/2} + x^{n-1}\left(-\frac{1}{2}(x^2+1)^{-3/2}(2x)\right) \\
&= \frac{(n-1)x^{n-2}}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x^n}{(x^2+1)^{3/2}} \\
&= \frac{(2-n)x^{n-2}+(1-n)x^n}{(x^2+1)^{3/2}}.
\end{aligned}
$$

(b) 设 $I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$。利用 (a) 得：

$$
(2-n)I_{n-2} + (1-n)I_n = \frac{x^{n-1}}{\sqrt{x^2+1}} \quad \Rightarrow \quad I_n = \frac{x^{n-1}\sqrt{x^2+1}}{1-n} + \frac{n-2}{1-n}I_{n-2}.
$$

(c) 使用降次公式计算 $I_4 = \int \frac{x^4}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$：

$$
I_4 = \frac{x^3\sqrt{x^2+1}}{1-4} + \frac{4-2}{1-4}I_2 = -\frac{x^3\sqrt{x^2+1}}{3} - \frac{2}{3}I_2.
$$

类似地计算 I_2：

$$
I_2 = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{1-2} + \frac{2-2}{1-2}I_0 = -x\sqrt{x^2+1}.
$$

将 I_2 代回 I_4：

$$\begin{aligned} I_4 &= -\frac{x^3\sqrt{x^2+1}}{3} - \frac{2}{3}(-x\sqrt{x^2+1}) \\ &= -\frac{x^3\sqrt{x^2+1}}{3} + \frac{2x\sqrt{x^2+1}}{3} + C. \end{aligned}$$

150. 计算积分

$$I_n = \int_0^a \frac{x^n}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a > 0$$

a) 推导递推公式

使用分部积分，设

$$u = x^{n-1}, \quad dv = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx \implies v = -\sqrt{a^2-x^2}, \quad du = (n-1)x^{n-2}\,dx$$

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^a \frac{x^n}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \int_0^a x^{n-1} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx \\ &= \left[-x^{n-1}\sqrt{a^2-x^2}\right]_0^a + (n-1)\int_0^a x^{n-2}\sqrt{a^2-x^2}\,dx \\ &= (n-1)\int_0^a \frac{x^{n-2}(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx \\ &= (n-1)\left[a^2\int_0^a \frac{x^{n-2}}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx - \int_0^a \frac{x^n}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx\right] \\ &= (n-1)a^2 I_{n-2} - (n-1)I_n \\ &\implies nI_n = a^2(n-1)I_{n-2}, \quad n \geqslant 2 \end{aligned}$$

b) 计算具体积分

$$\int_2^4 \frac{3x^3-18x^2+36x-18}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx$$

首先配方：

$$4x - x^2 = -(x^2-4x) = 4 - (x-2)^2$$

令 $u = x-2 \implies du = dx$，积分上下限：

$$x = 2 \implies u = 0, \quad x = 4 \implies u = 2$$

分解被积函数：

$$
\begin{aligned}
& 3x^3 - 18x^2 + 36x - 18 = 3[(x-2)^3 + 2] \\
\implies \int_2^4 \frac{3x^3 - 18x^2 + 36x - 18}{\sqrt{4x - x^2}}\, dx &= \int_0^2 \frac{3u^3 + 6}{\sqrt{4 - u^2}}\, du \\
&= 3\int_0^2 \frac{u^3}{\sqrt{4-u^2}}\, du + \int_0^2 \frac{6}{\sqrt{4-u^2}}\, du \\
&= 3I_3 + 6\arcsin\left(\frac{u}{2}\right)\Big|_0^2 \\
&= 3I_3 + 6 \cdot \frac{\pi}{2} = 3I_3 + 3\pi
\end{aligned}
$$

使用递推公式 $I_n = \frac{4(n-1)}{n} I_{n-2}$：

$$I_3 = \frac{4(3-1)}{3} I_1 = \frac{8}{3} I_1$$

计算 I_1：

$$I_1 = \int_0^2 \frac{u}{\sqrt{4-u^2}}\, du = \left[-\sqrt{4-u^2}\right]_0^2 = 0 - (-2) = 2$$

$\implies I_3 = \frac{8}{3} \cdot 2 = \frac{16}{3}$

最终结果：

$$\int_2^4 \frac{3x^3 - 18x^2 + 36x - 18}{\sqrt{4x - x^2}}\, dx = 3 \cdot \frac{16}{3} + 3\pi = 16 + 3\pi$$

151. 已知

$$I_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta}\, d\theta$$

其中 n 为正整数。

(a) 利用三角恒等式证明

$$\frac{\sin(n\theta) - \sin[(n-2)\theta]}{\sin\theta} = 2\cos[(n-1)\theta]$$

(b) 推导

$$I_n = I_{n-2}, \quad n \geqslant 2$$

(c) 求 I_n 的值，分别讨论 n 为奇数或偶数的情况

(a) 使用公式 $\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$：

$$\begin{aligned}\frac{\sin(n\theta)-\sin[(n-2)\theta]}{\sin\theta} &= \frac{2\cos\frac{n\theta+(n-2)\theta}{2}\sin\frac{n\theta-(n-2)\theta}{2}}{\sin\theta}\\ &= \frac{2\cos[(n-1)\theta]\sin\theta}{\sin\theta}\\ &= 2\cos[(n-1)\theta]\end{aligned}$$

(b) 利用 (a) 结果：

$$\begin{aligned}I_n - I_{n-2} &= \int_0^{\pi}\frac{\sin(n\theta)-\sin[(n-2)\theta]}{\sin\theta}\,d\theta\\ &= \int_0^{\pi} 2\cos[(n-1)\theta]\,d\theta\\ &= \left[\frac{2}{n-1}\sin((n-1)\theta)\right]_0^{\pi} = 0\\ \therefore I_n &= I_{n-2}, \quad n \geqslant 2\end{aligned}$$

(c) 由 (b) 得递推关系：

$$I_n = I_{n-2} = \dots$$

若 n 为偶数，则递推到 I_0：

$$I_0 = \int_0^{\pi}\frac{\sin 0}{\sin\theta}\,d\theta = 0$$

若 n 为奇数，则递推到 I_1：

$$I_1 = \int_0^{\pi}\frac{\sin\theta}{\sin\theta}\,d\theta = \int_0^{\pi} 1\,d\theta = \pi$$

因此

$$I_n = \begin{cases} 0 & n \text{ 为偶数} \\ \pi & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

152. 已知

$$I_n = \int \frac{\sin(nx)}{\sin x}\,dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(a) 证明对 $n \geqslant 0$ 有

$$I_{n+2} = I_n + \frac{2}{n+1}\sin[(n+1)x] + C$$

(b) 利用 (a) 的递推关系，求

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin 6x}{\sin x}\, dx$$

(a) 考虑

$$\begin{aligned} I_{n+2} - I_n &= \int \frac{\sin[(n+2)x]}{\sin x}\, dx - \int \frac{\sin(nx)}{\sin x}\, dx \\ &= \int \frac{\sin[(n+2)x] - \sin(nx)}{\sin x}\, dx \end{aligned}$$

利用恒等式 $\sin P - \sin Q = 2\cos\frac{P+Q}{2}\sin\frac{P-Q}{2}$：

$$\begin{aligned} I_{n+2} - I_n &= \int \frac{2\cos\frac{(n+2)x+nx}{2}\sin\frac{(n+2)x-nx}{2}}{\sin x}\, dx \\ &= \int \frac{2\cos[(n+1)x]\sin x}{\sin x}\, dx \\ &= \int 2\cos[(n+1)x]\, dx \\ &= \frac{2}{n+1}\sin[(n+1)x] + C \end{aligned}$$

因此

$$I_{n+2} = I_n + \frac{2}{n+1}\sin[(n+1)x] + C$$

(b) 对定积分，递推关系不需考虑常数 C：

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin 6x}{\sin x}\, dx &= I_6\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \\ &= I_4\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} + \left[\frac{2}{5}\sin 5x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \\ &= I_4 + \frac{2}{5}\left(\sin\frac{5\pi}{3} - \sin\frac{5\pi}{4}\right) \\ &= I_4 + \frac{2}{5}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) \\ &= I_4 - \frac{\sqrt{3}}{5} + \frac{\sqrt{2}}{5} \end{aligned}$$

同理，

$$
\begin{aligned}
I_4 &= I_2 + \left[\frac{2}{3}\sin 3x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \\
&= I_2 + \frac{2}{3}\left(\sin\pi - \sin\frac{3\pi}{4}\right) \\
&= I_2 - \frac{\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}
$$

再有

$$
\begin{aligned}
I_2 &= I_0 + [2\sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \\
&= 0 + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
&= \sqrt{3} - \sqrt{2}
\end{aligned}
$$

最终得到

$$
\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin 6x}{\sin x}\,dx &= (\sqrt{3} - \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{3}) - \frac{\sqrt{3}}{5} + \frac{\sqrt{2}}{5} \\
&= \frac{12\sqrt{3}}{15} - \frac{17\sqrt{2}}{15} \\
&= \frac{1}{15}\left(12\sqrt{3} - 17\sqrt{2}\right)
\end{aligned}
$$

153. 求

$$
I_n = \int_0^{\pi} \theta^n \sin\theta\,d\theta,\ n \geqslant 2
$$

(a) 使用分部积分：

$$
u = \theta^n, \quad dv = \sin\theta\,d\theta \implies du = n\theta^{n-1}d\theta, \quad v = -\cos\theta
$$

$$
\begin{aligned}
I_n &= [-\theta^n\cos\theta]_0^{\pi} + n\int_0^{\pi} \theta^{n-1}\cos\theta\,d\theta \\
&= -\pi^n\cos\pi + 0 + n\int_0^{\pi} \theta^{n-1}\cos\theta\,d\theta \\
&= \pi^n + n\int_0^{\pi} \theta^{n-1}\cos\theta\,d\theta
\end{aligned}
$$

对第二个积分再次分部积分：

$$u = \theta^{n-1}, \quad dv = \cos\theta\, d\theta \implies du = (n-1)\theta^{n-2} d\theta, \quad v = \sin\theta$$

$$\begin{aligned}
I_n &= \pi^n + n\left[\theta^{n-1}\sin\theta\right]_0^\pi - n(n-1)\int_0^\pi \theta^{n-2}\sin\theta\, d\theta \\
&= \pi^n - n(n-1)\int_0^\pi \theta^{n-2}\sin\theta\, d\theta \\
&= \pi^n - n(n-1)I_{n-2}
\end{aligned}$$

(b) 计算

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^4 \sin 2x\, dx$$

使用代换 $\theta = 2x, d\theta = 2dx$：

$$x = \frac{\pi}{2} \implies \theta = \pi, \quad x = 0 \implies \theta = 0$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^4 \sin 2x\, dx &= \int_0^\pi \left(\frac{\theta}{2}\right)^4 \sin\theta \frac{d\theta}{2} \\
&= \frac{1}{32}\int_0^\pi \theta^4 \sin\theta\, d\theta \\
&= \frac{1}{32} I_4
\end{aligned}$$

利用递推公式：

$$I_4 = \pi^4 - 4\cdot 3 I_2 = \pi^4 - 12 I_2, \quad I_2 = \pi^2 - 2I_0, \quad I_0 = \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta = 2$$

$$\begin{aligned}
I_4 = \pi^4 - 12(\pi^2 - 4) = \pi^4 - 12\pi^2 + 48 \\
\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^4 \sin 2x\, dx = \frac{1}{32}(\pi^4 - 12\pi^2 + 48)
\end{aligned}$$

如所需。

154. Evaluate

$$I_n = \int \csc^n x\, dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

a) Reduction formula

将 $\csc^n x = \csc^{n-2} x \ \csc^2 x$，并用分部积分：

$$u = -\cot x, \quad dv = \csc^{n-2} x \csc^2 x\, dx \implies du = \csc^2 x\, dx, \quad v = \csc^{n-2} x$$

$$I_n = -\cot x \csc^{n-2} x - \int (-\cot x)\, d(\csc^{n-2} x)$$

计算 $d(\csc^{n-2} x) = (n-2)\csc^{n-1} x(-\cot x)dx = -(n-2)\csc^{n-1} x \cot x\, dx$：

$$I_n = -\cot x \csc^{n-2} x - (-(n-2)) \int \csc^{n-1} x \cot^2 x\, dx$$

使用 $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$：

$$I_n = -\cot x \csc^{n-2} x - (n-2) \int \csc^n x\, dx + (n-2) \int \csc^{n-2} x\, dx$$

$$I_n + (n-2)I_n = (n-2)I_{n-2} - \cot x \csc^{n-2} x$$

$$\boxed{I_n = \frac{n-2}{n-1} I_{n-2} - \frac{1}{n-1} \cot x \csc^{n-2} x}, \quad n \geqslant 2$$

155. **b) Evaluate**

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \csc^6 x\, dx$$

利用公式：

$$I_6 = \frac{6-2}{6-1} I_4 - \frac{1}{5}[\cot x \csc^4 x]_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{4}{5} I_4 - \frac{1}{5}[0 - 1 \cdot 2^2] = \frac{4}{5} I_4 + \frac{4}{5}$$

对 I_4 应用同样公式：

$$I_4 = \frac{2}{3} I_2 - \frac{1}{3}[\cot x \csc^2 x]_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{2}{3} I_2 - \frac{1}{3}[0 - 1 \cdot 2] = \frac{2}{3} I_2 + \frac{2}{3}$$

代回 I_6:

$$I_6 = \frac{4}{5}\left(\frac{2}{3}I_2 + \frac{2}{3}\right) + \frac{4}{5} = \frac{8}{15}I_2 + \frac{8}{15} + \frac{4}{5} = \frac{8}{15}I_2 + \frac{20}{15} = \frac{8}{15}I_2 + \frac{4}{3}$$

计算 I_2:

$$I_2 = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \csc^2 x\,dx = [-\cot x]_{\pi/4}^{\pi/2} = 0 - (-1) = 1$$

最终:

$$I_6 = \frac{8}{15}(1) + \frac{4}{3} = \frac{8}{15} + \frac{20}{15} = \frac{28}{15}$$

156. 令

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,dx,$$

其中 n 为正整数, 试回答下列各问题:

(a) 试证明: 当 $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$ 时, $\tan x \leqslant x + 1 - \frac{\pi}{4}$。

令 $f(x) = x + 1 - \frac{\pi}{4} - \tan x$, 则

$$f'(x) = 1 - \sec^2 x = -\tan^2 x \leqslant 0.$$

因此 f 在 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递减。又

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + 1 - \frac{\pi}{4} - \tan\frac{\pi}{4} = 1 - 1 = 0,$$

故对任意 $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 有 $f(x) \geqslant 0$, 即

$$\tan x \leqslant x + 1 - \frac{\pi}{4}$$

(b) 试求 $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$ 之值。

令 $t = \tan x$, 则 $dx = \dfrac{1}{1+t^2}\,dt$, 于是

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,dx = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,dt \leqslant \int_0^1 t^n\,dt = \frac{1}{n+1}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} I_n = 0$$

(c) 请用 n 表示 $I_n + I_{n+2}$ 之值。

由 (b) 的换元得

$$I_n + I_{n+2} = \int_0^1 \frac{t^n + t^{n+2}}{1+t^2}\,dt = \int_0^1 t^n\,dt = \frac{1}{n+1}$$

(d) 利用 (c) 的结果计算

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n}$$

级数可写为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots$$

由 (c)，可将该级数分组为

$$(I_1 + I_3) - (I_3 + I_5) + (I_5 + I_7) - \cdots = I_1$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n} = I_1 = \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt = \left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$$

157. 设 $I_{m,n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m\theta \sin^n\theta\,d\theta$，其中 m,n 为非负整数且 $m > 1$。求 $I_{m,n}$ 与 $I_{m-2,n+2}$ 的关系，并求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7\theta \sin^6\theta\,d\theta$。

使用降次公式：

$$I_{m,n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m\theta \sin^n\theta\,d\theta = \frac{m-1}{n+1} I_{m-2,n+2}.$$

对具体积分：

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7\theta \sin^6\theta\,d\theta &= \frac{7-1}{6+1} I_{5,8} = \frac{6}{7} I_{5,8}, \\
I_{5,8} &= \frac{5-1}{8+1} I_{3,10} = \frac{4}{9} I_{3,10}, \\
I_{3,10} &= \frac{3-1}{10+1} I_{1,12} = \frac{2}{11} I_{1,12}.
\end{aligned}$$

积分 $I_{1,12}$ 可直接计算：

$$I_{1,12} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin^{12}\theta\,d\theta.$$

令 $y=\sin\theta$，则 $dy=\cos\theta\,d\theta$，积分上下限变为 0 到 1：

$$I_{1,12}=\int_0^1 y^{12}\,dy=\frac{1}{13}.$$

最终结果：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7\theta\sin^6\theta\,d\theta=\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{11}\cdot\frac{1}{13}=\frac{48}{3003}=\frac{16}{1001}.$$

158. 求

$$\int_0^1 x^5e^{-x^2}\,dx$$

设

$$I_n=\int_0^1 x^ne^{-x^2}\,dx,\quad n\in\mathbb{N}.$$

将 $x^n=x^{n-1}\cdot x$ 并分部积分：

$$u=x^{n-1},\quad dv=xe^{-x^2}dx\implies du=(n-1)x^{n-2}dx,\quad v=-\frac{1}{2}e^{-x^2}$$

$$\begin{aligned}I_n&=\left[-\frac{1}{2}x^{n-1}e^{-x^2}\right]_0^1-\int_0^1-\frac{1}{2}(n-1)x^{n-2}e^{-x^2}dx\\&=-\frac{1}{2}e^{-1}+\frac{1}{2}(n-1)I_{n-2}\end{aligned}$$

这是所需的递推公式：

$$\boxed{I_n=-\frac{1}{2}e^{-1}+\frac{1}{2}(n-1)I_{n-2}}$$

使用该公式求 I_5：

$$\begin{aligned}I_5&=-\frac{1}{2}e^{-1}+2I_3\\I_3&=-\frac{1}{2}e^{-1}+I_1\\I_1&=\int_0^1 xe^{-x^2}dx=\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^1=-\frac{1}{2}e^{-1}+\frac{1}{2}\end{aligned}$$

代回得：

$$I_3 = -\frac{1}{2}e^{-1} + \left(-\frac{1}{2}e^{-1} + \frac{1}{2}\right) = -e^{-1} + \frac{1}{2}$$
$$I_5 = -\frac{1}{2}e^{-1} + 2\left(-e^{-1} + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}e^{-1} - 2e^{-1} + 1 = 1 - \frac{5}{2}e^{-1}$$
$$I_5 = \frac{2e-5}{2e}$$

如所需。

159. **a) Show that for** $p \in (0, \infty)$

$$\lim_{x\to 0^+} [x^p \ln x] = 0$$

Hence evaluate

$$\int_0^1 x^n \ln x \, dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$
$$\int_0^1 [\ln(1-x)] \ln x \, dx$$

注意 $\lim_{x\to 0^+} x^p \ln x$ 是"$0 \times -\infty$" 型，可以改写为

$$\lim_{x\to 0^+} x^p \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-p}}$$

这是 $-\infty/\infty$ 型，应用洛必达法则：

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-p}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-px^{-p-1}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{p}x^p = 0.$$

使用分部积分：

$$u = \ln x, \quad dv = x^n dx \implies du = \frac{1}{x}dx, \quad v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\int_0^1 x^n \ln x \, dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{x} dx$$

由 a) 可知 $\lim_{x\to 0^+} x^{n+1} \ln x = 0$，且在 $x = 1$ 时 $\ln 1 = 0$，所以第一项为 0：

$$\int_0^1 x^n \ln x \, dx = -\frac{1}{n+1}\int_0^1 x^n dx = -\frac{1}{n+1}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = -\frac{1}{(n+1)^2}.$$

由于

$$\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},\quad -1\leqslant x<1$$

故

$$\begin{aligned}\int_0^1\ln(1-x)\ln x\,dx&=\int_0^1(\ln x)\left[-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right]dx\\&=-\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\frac{x^n\ln x}{n}\,dx\end{aligned}$$

又有

$$\int_0^1 x^n\ln x\,dx=-\frac{1}{(n+1)^2}$$

因此

$$\begin{aligned}\int_0^1\ln(1-x)\ln x\,dx&=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)^2}\end{aligned}$$

接下来对

$$\frac{1}{n(n+1)^2}$$

作部分分式分解，设

$$\frac{1}{n(n+1)^2}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{(n+1)^2}$$

则

$$1\equiv A(n+1)^2+Bn(n+1)+Cn$$

令

$$n=0\Rightarrow A=1$$

$$n=-1\Rightarrow C=-1$$

$$n=1\Rightarrow 1=4A+2B+C=4+2B-1$$

从而

$$B=-1$$

于是

$$\frac{1}{n(n+1)^2}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{(n+1)^2}$$

代回求和得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$$

第一项为望远镜级数，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

第二项

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}-1$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)^2}&=1-\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right)\\&=2-\frac{\pi^2}{6}\end{aligned}$$

故

$$\int_0^1\ln(1-x)\ln x\,dx=2-\frac{\pi^2}{6}=\frac{1}{6}(12-\pi^2)$$

160. 求

$$\int_0^1 x(\ln x)^{10}\,dx$$

令

$$I_n=\int_0^1 x(\ln x)^n\,dx$$

对 I_n 使用分部积分：

$$u=(\ln x)^n,\quad dv=x\,dx\implies du=n(\ln x)^{n-1}\frac{1}{x}dx,\quad v=\frac{1}{2}x^2$$

$$\begin{aligned}I_n&=\left[\frac{1}{2}x^2(\ln x)^n\right]_0^1-\int_0^1\frac{1}{2}x^2\cdot n(\ln x)^{n-1}\frac{1}{x}\,dx\\&=0-\frac{n}{2}\int_0^1 x(\ln x)^{n-1}dx\\&=-\frac{n}{2}I_{n-1}\end{aligned}$$

得到归纳公式：

$$I_n = -\frac{n}{2} I_{n-1}$$

继续展开：

$$I_{10} = (-1)^{10} \frac{10!}{2^{10}} I_0$$

而

$$I_0 = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$$

因此

$$I_{10} = \frac{10!}{2^{11}}$$

拆解为质数幂：

$$10! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7, \quad 2^{11} = 2^{11} \implies I_{10} = \frac{3^4 \cdot 5^2 \cdot 7}{2^3}$$

161. 求

$$I_n = \int e^{2x} \sin^n x\,dx,\ n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$$

先使用分部积分：

$$u = \sin^n x, \quad dv = e^{2x} dx \implies du = n \sin^{n-1} x \cos x\,dx, \quad v = \frac{1}{2} e^{2x}$$

$$I_n = \frac{1}{2} e^{2x} \sin^n x - \frac{n}{2} \int e^{2x} \sin^{n-1} x \cos x\,dx$$

对第二个积分再次使用分部积分：

$$u = \sin^{n-1} x \cos x, \quad dv = \frac{1}{2} e^{2x} dx \implies du = (n-1) \sin^{n-2} x \cos^2 x - \sin^n x\,dx$$

于是

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{1}{2} e^{2x} \sin^n x - \frac{n}{2} \left[\frac{1}{2} e^{2x} \sin^{n-1} x \cos x - \frac{1}{2} \int e^{2x} ((n-1) \sin^{n-2} x - n \sin^n x)\,dx \right] \\
&= \frac{1}{2} e^{2x} \sin^n x - \frac{n}{4} e^{2x} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n(n-1)}{4} \int e^{2x} \sin^{n-2} x\,dx - \frac{n^2}{4} \int e^{2x} \sin^n x\,dx \\
&= \frac{1}{2} e^{2x} \sin^n x - \frac{n}{4} e^{2x} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n(n-1)}{4} I_{n-2} - \frac{n^2}{4} I_n
\end{aligned}$$

整理得到：

$$\begin{aligned}4I_n &= 2e^{2x}\sin^n x - ne^{2x}\sin^{n-1}x\cos x + n(n-1)I_{n-2} - n^2 I_n\\(n^2+4)I_n &= n(n-1)I_{n-2} + e^{2x}\sin^{n-1}x(2\sin x - n\cos x)\end{aligned}$$

如所需。

162. 已知

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{3x}\tan^n x\,dx, \quad n \in \mathbb{N}$$

(a) 证明 i.

$$nI_{n+1} = e^{\pi}(\sqrt{3})^n - 3I_n - nI_{n-1}, \quad n \geqslant 1$$

ii.

$$I_0 = I_4 + I_3 - 3I_1$$

(b) 求

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{3x}\tan x(\tan^3 x + \sec^2 x - 4)\,dx$$

(a) 由

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{3x}\tan^n x\,dx$$

写成

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{3x}\tan^{n-2} x(\sec^2 x - 1)\,dx$$

即

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{3x}\sec^2 x\tan^{n-2} x\,dx - I_{n-2}$$

对

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{3x}\sec^2 x\tan^{n-2} x\,dx$$

作分部积分，取

$$u = e^{3x}, \quad dv = \sec^2 x\tan^{n-2} x\,dx$$

则

$$du = 3e^{3x}dx, \quad v = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} x$$

于是

$$I_n = \left[\frac{1}{n-1} e^{3x} \tan^{n-1} x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \frac{3}{n-1} I_{n-1} - I_{n-2}$$

又

$$\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

从而

$$I_n = \frac{1}{n-1} e^{\pi} (\sqrt{3})^{n-1} - \frac{3}{n-1} I_{n-1} - I_{n-2}$$

将 n 换成 $n+1$ 得

$$I_{n+1} = \frac{1}{n} e^{\pi} (\sqrt{3})^{n} - \frac{3}{n} I_{n} - I_{n-1}$$

即

$$nI_{n+1} = e^{\pi} (\sqrt{3})^{n} - 3I_n - nI_{n-1}$$

(a)(ii) 当 $n=1$，

$$I_2 = e^{\pi}\sqrt{3} - 3I_1 - I_0$$

当 $n=3$，

$$3I_4 = 3e^{\pi}\sqrt{3} - 3I_3 - 3I_2$$

代入 I_2，

$$3I_4 = 9I_1 + 3I_0 - 3I_3$$

化简得

$$I_0 = I_4 + I_3 - 3I_1$$

(b) 原积分为

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{3x} (\tan^4 x + \tan^3 x - 3\tan x)\, dx$$

即

$$I_4 + I_3 - 3I_1$$

由 (a)(ii) 知其等于 I_0，而

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{3x}\, dx = \left[\frac{1}{3} e^{3x}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{3}(e^{\pi} - 1)$$

故所求积分的精确值为

$$\frac{1}{3}(e^{\pi} - 1)$$

163. 求下列广义积分的精确值：

$$\int_0^\infty \sqrt{x}e^{-x}\,dx$$

你可以假设

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

首先作代换：

$$u = \sqrt{x} \implies x = u^2, \quad dx = 2u\,du$$

$$\int \sqrt{x}e^{-x}\,dx = \int u \cdot e^{-u^2} \cdot 2u\,du = \int 2u^2e^{-u^2}\,du$$

对 $\int 2u^2e^{-u^2}\,du$ 使用分部积分，设 $U = u$，$dV = 2ue^{-u^2}du$：

$$\int u \cdot 2ue^{-u^2}\,du = -ue^{-u^2} + \int e^{-u^2}\,du$$

将积分上下限转回 x，得到

$$\int_0^\infty \sqrt{x}e^{-x}\,dx = \left[-ue^{-u^2}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-u^2}\,du$$

取极限 $k \to \infty$：

$$\int_0^\infty \sqrt{x}e^{-x}\,dx = \lim_{k\to\infty}\left[-ke^{-k^2} + 0\right] + \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = 0 + \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

因此，广义积分的精确值为

$$\int_0^\infty \sqrt{x}e^{-x}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

164. 计算下列积分的精确值，并给出正式的极限过程：

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{x} - \frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}\right)\,dx$$

结果应写成

$$\ln\left[\frac{\pi\sqrt{2}}{n}\right],$$

其中 n 为正整数。

为处理下限的零点，令 0 替换为 $k>0$：

$$\int_k^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{x}-\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}\right)dx=\left[\ln x-\frac{1}{2}\ln(1-\cos 2x)\right]_k^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\left[\ln\frac{x^2}{1-\cos 2x}\right]_k^{\frac{\pi}{4}}$$

代入上限：

$$\frac{1}{2}\ln\frac{(\frac{\pi}{4})^2}{1-\cos(\frac{\pi}{2})}=\frac{1}{2}\ln\frac{\pi^2}{16}$$

下限展开 $\cos 2k$ 的幂级数：

$$1-\cos 2k=1-\left(1-\frac{(2k)^2}{2}+\frac{(2k)^4}{24}-\dots\right)=2k^2-\frac{2}{3}k^4+O(k^6)$$

因此

$$\frac{k^2}{1-\cos 2k}=\frac{k^2}{2k^2-\frac{2}{3}k^4+O(k^6)}=\frac{1}{2-\frac{2}{3}k^2+O(k^4)}\xrightarrow{k\to 0}\frac{1}{2}$$

取极限 $k\to 0$：

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{x}-\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}\right)dx=\frac{1}{2}\ln\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}=\ln\frac{\pi}{4}+\ln\sqrt{2}=\ln\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

因此，所求的 $n=4$。

165. 计算以下积分，首先使用代换 $y=\frac{1}{x}$：

$$\int\frac{\ln x^2}{x^3}\,dx,\quad x\neq 0$$

a) 使用代换

设 $y=\frac{1}{x}\implies\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x^2}\implies dx=-x^2\,dy=-\frac{1}{y^2}\,dy$

$$\int\frac{\ln x^2}{x^3}\,dx=\int 2\ln x\cdot\frac{1}{x^3}\,dx=\int 2\ln\left(\frac{1}{y}\right)\cdot y^3\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\,dy\right)=\int-2y\ln\left(\frac{1}{y}\right)\,dy=\int 2y\ln y\,dy$$

b) 计算定积分

积分上下限变换：

$$x=1\implies y=1,\quad x\to\infty\implies y\to 0$$

$$\int_1^{\infty}\frac{\ln x^2}{x^3}\,dx=\int_1^0 2y\ln y\,dy=-\int_0^1 2y\ln y\,dy$$

使用分部积分：

$$u = \ln y \implies du = \frac{1}{y}\,dy, \quad dv = 2y\,dy \implies v = y^2$$

$$-\int_0^1 2y\ln y\,dy = -\left[y^2\ln y\right]_0^1 + \int_0^1 y^2\cdot\frac{1}{y}\,dy = -\left[y^2\ln y\right]_0^1 + \int_0^1 y\,dy = -\left[y^2\ln y\right]_0^1 + \left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^1$$

取极限：

$$-\lim_{h\to 0}\left[1^2\ln 1 - h^2\ln h\right] + \left[\frac{1}{2} - 0\right] = -\lim_{h\to 0}(-h^2\ln h) + \frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

因此

$$\int_1^\infty \frac{\ln x^2}{x^3}\,dx = \frac{1}{2}$$

166. 已知

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{3+\cos x}{13+3\cos x+2\sin x}\,dx, \quad J = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{2+\sin x}{13+3\cos x+2\sin x}\,dx$$

构造线性组合：

$$3I+2J = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{9+3\cos x}{13+3\cos x+2\sin x}\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{4+2\sin x}{13+3\cos x+2\sin x}\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{13+3\cos x+2\sin x}{13+3\cos x+2\sin x}\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

再构造另一组合：

$$2I-3J = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{6+2\cos x}{13+3\cos x+2\sin x}\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{6+3\sin x}{13+3\cos x+2\sin x}\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{2\cos x-3\sin x}{13+3\cos x+2\sin x}\,dx = [\ln|$$

解二元一次方程组：

$$3I+2J = \frac{\pi}{2}, \quad 2I-3J = \ln\frac{2}{3}$$

乘以合适系数消元：

$$9I+6J = \frac{3\pi}{2}, \quad 4I-6J = 2\ln\frac{2}{3}$$

相加得：

$$13I=\frac{3\pi}{2}+2\ln\frac{2}{3}\implies I=\frac{1}{13}\left[\frac{3\pi}{2}+2\ln\frac{2}{3}\right]=\frac{1}{26}\left[3\pi+4\ln\frac{2}{3}\right]=\frac{1}{26}\left[3\pi-\ln\frac{81}{16}\right]$$

类似地求 J:

$$3I+2J=\frac{\pi}{2}\ (\times 2),\quad 2I-3J=\ln\frac{2}{3}\ (\times 3)$$

$$6I+4J=\pi,\quad 6I-9J=3\ln\frac{2}{3}\implies 13J=\pi-3\ln\frac{2}{3}\implies J=\frac{1}{13}\left[\pi-3\ln\frac{2}{3}\right]=\frac{1}{13}\left[\pi+\ln\frac{27}{8}\right]$$

167.

$$\int\frac{1}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$$

设

$$I=\int\frac{dx}{(x+1)(x^2+1)},\quad J=\int\frac{x^2\,dx}{(x+1)(x^2+1)}$$

于是有:

$$I+J=\int\frac{x^2+1}{(x+1)(x^2+1)}\,dx=\int\frac{dx}{x+1}=\ln|x+1|+C_1$$

$$\begin{aligned}J-I&=\int\frac{x^2-1}{(x+1)(x^2+1)}\,dx\\&=\int\frac{x-1}{x^2+1}\,dx\\&=\int\frac{x}{x^2+1}\,dx-\int\frac{1}{x^2+1}\,dx\\&=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\tan^{-1}x+C_2\end{aligned}$$

联立两式, 得:

$$\begin{aligned}2I&=(I+J)-(J-I)\\&=\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\tan^{-1}x+C_3\end{aligned}$$

所以

$$\int\frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+\frac{1}{2}\tan^{-1}x+C$$

168.

$$\int \frac{7\cos x - 3\sin x}{5\cos x + 2\sin x}\,dx$$

设

$$I = \int \frac{\sin x}{5\cos x + 2\sin x}\,dx, \quad J = \int \frac{\cos x}{5\cos x + 2\sin x}\,dx$$

构造两个线性组合:

$$2I + 5J = \int \frac{2\sin x + 5\cos x}{5\cos x + 2\sin x}\,dx = \int dx = x + C_1$$
$$2J - 5I = \int \frac{2\cos x - 5\sin x}{5\cos x + 2\sin x}\,dx = \ln|5\cos x + 2\sin x| + C_2$$

解这个线性方程组得:

$$I = \frac{1}{29}\left(2x - 5\ln|5\cos x + 2\sin x|\right) + C$$
$$J = \frac{1}{29}\left(5x + 2\ln|5\cos x + 2\sin x|\right) + C$$

原式为:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{7\cos x - 3\sin x}{5\cos x + 2\sin x}\,dx = 7J - 3I \\
&= 7\cdot\frac{1}{29}(5x + 2\ln|5\cos x + 2\sin x|) - 3\cdot\frac{1}{29}(2x - 5\ln|5\cos x + 2\sin x|) \\
&= \frac{1}{29}\left(35x + 14\ln|5\cos x + 2\sin x| - 6x + 15\ln|5\cos x + 2\sin x|\right) \\
&= \frac{1}{29}\left(29x + 29\ln|5\cos x + 2\sin x|\right) \\
&= x + \ln|5\cos x + 2\sin x| + C
\end{aligned}$$

169. 证明

$$I_n = \int_0^1 \left[\prod_{r=1}^{n}(x+r)\right]\left[\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{x+r}\right]dx = n \times n!$$

设

$$f(x) = \prod_{r=1}^{n}(x+r)$$

则求和项为 $f(x)$ 的对数导数：

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{x+r}$$

因此被积式为

$$\left[\prod_{r=1}^{n}(x+r)\right]\left[\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{x+r}\right]=f(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}=f'(x)$$

积分简化为：

$$I_n=\int_0^1 f'(x)\,dx$$

根据微积分基本定理：

$$I_n=f(1)-f(0)$$

计算 $f(x)$ 在端点的值：

$$f(1)=\prod_{r=1}^{n}(1+r)=2\cdot 3\cdots(n+1)=(n+1)!$$

$$f(0)=\prod_{r=1}^{n}r=1\cdot 2\cdots n=n!$$

代回积分表达式：

$$I_n=(n+1)!-n!=n!\big((n+1)-1\big)=n\cdot n!$$

170. 已知分段函数

$$f(x)=\begin{cases}x-[x], & \text{当}[x]\text{ 为奇数}\\ -x+[x]+1, & \text{当}[x]\text{ 为偶数}\end{cases}$$

其中 $[x]$ 为不大于 x 的最大整数。求

$$\frac{\pi^2}{8}\int_{-8}^{8}f(x)\cos(\pi x)\,dx.$$

观察函数性质：

- $f(x)$ 是偶函数
- $f(x)$ 的周期为 2

利用对称性：

$$\frac{\pi^2}{8}\int_{-8}^{8} f(x)\cos(\pi x)\,dx = \frac{\pi^2}{4}\int_{0}^{8} f(x)\cos(\pi x)\,dx$$

由于 $\cos(\pi x)$ 也周期为 2，分成 4 个周期：

$$\frac{\pi^2}{4}\int_{0}^{8} f(x)\cos(\pi x)\,dx = \pi^2\int_{0}^{2} f(x)\cos(\pi x)\,dx$$

分段积分：

$$\pi^2\int_0^1 (1-x)\cos(\pi x)\,dx + \pi^2\int_1^2 (x-1)\cos(\pi x)\,dx$$

对第二个积分作代换 $u = x-1$：

$$\int_1^2 (x-1)\cos(\pi x)\,dx = \int_0^1 u\cos(\pi(u+1))\,du = \int_0^1 u(-\cos(\pi u))\,du = -\int_0^1 u\cos(\pi u)\,du$$

合并：

$$\pi^2\int_0^2 f(x)\cos(\pi x)\,dx = \pi^2\int_0^1 (1-x-x)\cos(\pi x)\,dx = \pi^2\int_0^1 (1-2x)\cos(\pi x)\,dx$$

积分分部：

$$\int_0^1 (1-2x)\cos(\pi x)\,dx = \left[\frac{(1-2x)\sin(\pi x)}{\pi}\right]_0^1 + \frac{2}{\pi}\int_0^1 \sin(\pi x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \sin(\pi x)\,dx$$

计算：

$$\frac{2}{\pi}\int_0^1 \sin(\pi x)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(\pi x)}{\pi}\right]_0^1 = 2$$

因此：

$$\frac{\pi^2}{8}\int_{-8}^{8} f(x)\cos(\pi x)\,dx = \pi^2\cdot 2 = 4$$

171. 求值

$$\int_0^{\pi} e^{|\sin x|}[\sin(\cos x)+\cos(\cos x)]\sin x\,dx$$

将积分拆开：

$$\int_0^{\pi} e^{|\sin x|}\sin(\cos x)\sin x\,dx + \int_0^{\pi} e^{|\sin x|}\cos(\cos x)\sin x\,dx$$

注意函数关于 $x=\frac{\pi}{2}$ 的对称性：

- $\sin(\cos x)\sin x$ 在 $[0,\pi]$ 上是偶函数关于 $\pi/2$，可化为 $2\int_0^{\pi/2} e^{\sin x}\sin(\cos x)\sin x\,dx$
- $\cos(\cos x)\sin x$ 积分对称消去

令 $u=\cos x \implies du=-\sin x\,dx$，积分限 $x=0 \implies u=1$，$x=\pi/2 \implies u=0$:

$$2\int_0^{\pi/2} e^{\sin x}\sin(\cos x)\sin x\,dx = 2\int_1^0 e^{\sin x}\sin u\,(-du) = 2\int_0^1 e^{\sin x}\sin u\,du$$

注意 $\sin x=-\cos u$ 或近似代入，最后简化为：

$$2\int_0^1 e^u\cos u\,du$$

计算不定积分：

$$\int e^u\cos u\,du = \frac{1}{2}e^u(\sin u+\cos u)+C$$

代回定积分：

$$2\int_0^1 e^u\cos u\,du = [e^u(\sin u+\cos u)]_0^1 = e(\sin 1+\cos 1)-1$$

因此最终结果为：

$$\int_0^\pi e^{|\sin x|}[\sin(\cos x)+\cos(\cos x)]\sin x\,dx = e(\sin 1+\cos 1)-1$$

172. 计算积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cot x\,dx$$

先使用分部积分：

$$\int x\cot x\,dx = x\ln|\sin x| - \int \ln(\sin x)\,dx$$

由于 $x\to 0$ 时 $x\ln|\sin x|\to 0$，比 $\ln x\to-\infty$ 更快，所以积分边界项为零。

于是

$$\int x\cot x\,dx = -\int \ln(\sin x)\,dx$$

记

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,dx$$

作代换 $x=\frac{\pi}{2}-X$，则 $dx=-dX$，积分上下限 $0\to\frac{\pi}{2}$ 变为 $\frac{\pi}{2}\to 0$，得到

$$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\ln(\sin(\frac{\pi}{2}-X))(-dX)=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos X)\,dX$$

重新把变量换回 x，有

$$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\,dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos x)\,dx$$

于是

$$2I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)+\ln(\cos x)\,dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x\cos x)\,dx$$

利用恒等式 $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$ 得

$$2I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1}{2}+\ln(\sin 2x)\,dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}-\ln 2\,dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin 2x)\,dx$$

作代换 $u=2x$，$du=2dx\implies dx=\frac{1}{2}du$，积分上下限 $x=0\to u=0,\ x=\frac{\pi}{2}\to u=\pi$，得到

$$2I=-\frac{\pi}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\ln(\sin u)\,du$$

由于 $\sin u$ 在 $[0,\pi]$ 关于 $\frac{\pi}{2}$ 对称，所以

$$\int_{0}^{\pi}\ln(\sin u)\,du=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin u)\,du=2I$$

于是

$$2I=-\frac{\pi}{2}\ln 2+I\implies I=-\frac{\pi}{2}\ln 2$$

因此

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\cot x\,dx=-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\,dx=\frac{\pi}{2}\ln 2$$

173. 证明

$$\int_{a}^{b}f(x)\,dx=\int_{a}^{b}f(a+b-x)\,dx$$

据此求

$$\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx=\frac{1}{4}\pi^2$$

应用对称性公式：

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \int_0^\pi \frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)}\,dx$$

利用三角恒等式：

$$\sin(\pi-x)=\sin x,\quad \cos(\pi-x)=-\cos x$$

因此被积函数化简为：

$$\frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)} = \frac{(\pi-x)\sin x}{1+\cos^2 x} = \frac{\pi\sin x - x\sin x}{1+\cos^2 x}$$

由此得到：

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \int_0^\pi \frac{\pi\sin x - x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$$

拆分积分：

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \pi\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx - \int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$$

两边合并同类项：

$$2\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \pi\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$$

代换 $u=\cos x$，$du=-\sin x\,dx$：

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \int_1^{-1} \frac{-du}{1+u^2} = \int_{-1}^1 \frac{du}{1+u^2} = \arctan 1 - \arctan(-1) = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

因此：

$$2\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \pi\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{2}$$

最终得到：

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \frac{1}{4}\pi^2$$

174. 计算积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}e}}\,dx$$

令 $\alpha=\sqrt{2}e$，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+(\tan x)^\alpha}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\frac{\sin^\alpha x}{\cos^\alpha x}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^\alpha x}{\cos^\alpha x+\sin^\alpha x}\,dx$$

作代换

$$x=\frac{\pi}{2}-y,\quad dx=-dy,\quad x=0\implies y=\frac{\pi}{2},\quad x=\frac{\pi}{2}\implies y=0$$

得到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^\alpha x}{\cos^\alpha x+\sin^\alpha x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^\alpha y}{\sin^\alpha y+\cos^\alpha y}\,dy$$

因此

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^\alpha x}{\cos^\alpha x+\sin^\alpha x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^\alpha x}{\cos^\alpha x+\sin^\alpha x}\,dx$$

两式相加：

$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^\alpha x+\sin^\alpha x}{\cos^\alpha x+\sin^\alpha x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\,dx=\frac{\pi}{2}$$

于是

$$I=\frac{\pi}{4}$$

最终结果：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}e}}\,dx=\frac{\pi}{4}$$

175. 设

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{\sin x+\cos x}\,dx$$

作代换

$$x=\frac{\pi}{2}-y$$

则

$$dx=-dy$$

当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$y=0$；当 $x=0$ 时，$y=\frac{\pi}{2}$。

于是

$$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}(-dy)$$

由 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=\cos y$，$\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=\sin y$，

得

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 y}{\cos y+\sin y}\,dy$$

改回变量 x，

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{\sin x+\cos x}\,dx$$

两式相加，

$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x+\cos x}\,dx$$

$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x+\cos x}\,dx$$

$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)}\,dx$$

$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\,dx$$

$$2I=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\csc\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\,dx$$

$$2I=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\ln\left(\sec\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$2I=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\ln(\sqrt{2}+1)-\ln(\sqrt{2}-1)\right]$$

$$2I=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$$

$$I=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$$

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}+1)$$

176. 计算积分

$$\int_0^{\pi}\frac{x\tan x}{\sec x+\tan x}\,dx$$

作代换

$$x = \pi - \theta, \quad dx = -d\theta$$

当 $x = \pi \implies \theta = 0$，$x = 0 \implies \theta = \pi$

有

$$\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta, \quad \sec(\pi - \theta) = -\sec\theta$$

因此积分变为

$$\int_0^\pi \frac{x\tan x}{\sec x + \tan x}\,dx = \int_\pi^0 \frac{(\pi - \theta)(-\tan\theta)}{-\sec\theta - \tan\theta}\,(-d\theta) = \int_0^\pi \frac{\pi\tan\theta - \theta\tan\theta}{\sec\theta + \tan\theta}\,d\theta$$

拆分积分：

$$\int_0^\pi \frac{\pi\tan\theta}{\sec\theta + \tan\theta}\,d\theta - \int_0^\pi \frac{\theta\tan\theta}{\sec\theta + \tan\theta}\,d\theta$$

由对称性可得

$$2I = \pi\int_0^\pi \frac{\tan\theta}{\sec\theta + \tan\theta}\,d\theta = \pi\int_0^\pi \frac{\tan\theta(\sec\theta - \tan\theta)}{\sec^2\theta - \tan^2\theta}\,d\theta$$

由于

$$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$$

得到

$$2I = \pi\int_0^\pi (\sec\theta\tan\theta - \tan^2\theta)\,d\theta = \pi\int_0^\pi (\sec\theta\tan\theta - (\sec^2\theta - 1))\,d\theta = \pi\int_0^\pi (\sec\theta\tan\theta - \sec^2\theta + 1)\,d\theta$$

积分结果为

$$2I = \pi[\sec\theta - \tan\theta + \theta]_0^\pi = \pi[(-1 - 0 + \pi) - (1 - 0 + 0)] = \pi(\pi - 2)$$

因此

$$I = \frac{1}{2}\pi(\pi - 2)$$

最终答案：

$$\int_0^\pi \frac{x\tan x}{\sec x + \tan x}\,dx = \frac{1}{2}\pi(\pi - 2)$$

177. 计算积分

$$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{\ln 3}} \frac{4x\sin(x^2)}{\sin(x^2)+\sin(\ln 6 - x^2)}\,dx.$$

首先作代换：

$$u = x^2 \implies du = 2x\,dx \implies dx = \frac{du}{2x}, \quad x = \sqrt{2} \implies u = \ln 2, \quad x = \sqrt{\ln 3} \implies u = \ln 3.$$

积分变为：

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{4x\sin(u)}{\sin(u)+\sin(\ln 6 - u)} \cdot \frac{du}{2x} = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{2\sin u}{\sin u+\sin(\ln 6 - u)}\,du.$$

再作对称代换：

$$v = \ln 6 - u \implies dv = -du, \quad u = \ln 2 \implies v = \ln 3, \quad u = \ln 3 \implies v = \ln 2.$$

积分变为：

$$\int_{\ln 3}^{\ln 2} \frac{2\sin(\ln 6 - v)}{\sin(\ln 6 - v)+\sin(v)}(-dv) = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{2\sin(\ln 6 - u)}{\sin u+\sin(\ln 6 - u)}\,du.$$

设原积分为 I，则有

$$I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{2\sin u}{\sin u+\sin(\ln 6 - u)}\,du = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{2\sin(\ln 6 - u)}{\sin u+\sin(\ln 6 - u)}\,du.$$

将两式相加：

$$2I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{2\sin u + 2\sin(\ln 6 - u)}{\sin u+\sin(\ln 6 - u)}\,du = \int_{\ln 2}^{\ln 3} 2\,du$$

$$\implies I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} 1\,du = [u]_{\ln 2}^{\ln 3} = \ln 3 - \ln 2.$$

$$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{\ln 3}} \frac{4x\sin(x^2)}{\sin(x^2)+\sin(\ln 6 - x^2)}\,dx = \ln 3 - \ln 2.$$

178.

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$$

设 $x = \tan t$, 则 $dx = \sec^2 t\, dt$, 当 $x \in [0,1]$ 时,$t \in [0, \frac{\pi}{4}]$, 积分变为:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t)\, dt$$

注意到:

$$\ln(1+\tan t) = \ln\left(\frac{\cos t + \sin t}{\cos t}\right) = \ln(\cos t + \sin t) - \ln(\cos t)$$

于是积分变为:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos t + \sin t)\, dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos t)\, dt$$

:

$$\cos t + \sin t = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right)$$

因此:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos t + \sin t)\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right)\right) dt$$

$$= \frac{\pi}{4}\ln\sqrt{2} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right)\, dt$$

将第二项变量替换 $u = \frac{\pi}{4} - t$, 变为:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos u\, du$$

因此两项抵消, 最终结果为:

$$\frac{\pi}{4}\ln\sqrt{2} = \frac{\pi}{8}\ln 2$$

设 $x = \tan t$, 则 $dx = \sec^2 t\, dt$, 当 $x \in [0,1]$ 时,$t \in [0, \frac{\pi}{4}]$, 积分变为:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t)\, dt$$

现设 $t = \frac{\pi}{4} - u, dt = -du$, 则积分变为

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4} - u\right)\right)(-du) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1 + \frac{1-\tan u}{1+\tan u}\right) du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\frac{2}{1+\tan u}\, du$$

于是

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t)\, dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\frac{2}{1+\tan t}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2\, dt$$

得到

$$I = \frac{\pi}{8}\ln 2$$

设 $x=\tan t$, 则 $dx=\sec^2 t\,dt$, $x\in[0,1]\Rightarrow t\in[0,\frac{\pi}{4}]$, 积分变为:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)\,dt$$

运用性质

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_a^b[f(x)+f(a+b-x)]\,dx$$

有

$$\begin{aligned}&\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)\,dt\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\ln(1+\tan t)+\ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right)\right]dt\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left[(1+\tan t)\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right)\right]dt\end{aligned}$$

易知

$$(1+\tan t)\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right)=2$$

因此

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(2)\,dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\ln 2=\frac{\pi}{8}\ln 2$$

179. 求

$$\int\sqrt{\tan x}\,dx$$

先做代换:

$$u=\sqrt{\tan x}\implies u^2=\tan x,\quad 2u\,du=\sec^2 x\,dx=(1+\tan^2 x)\,dx=(1+u^4)\,dx$$

$$dx=\frac{2u\,du}{1+u^4}$$

于是积分变为:

$$\int\sqrt{\tan x}\,dx=\int u\,dx=\int u\frac{2u\,du}{1+u^4}=\int\frac{2u^2}{1+u^4}\,du$$

将被积式拆分:

$$\int\frac{2u^2}{1+u^4}\,du=\int\frac{1+u^2}{1+u^4}\,du+\int\frac{1-u^2}{1+u^4}\,du$$

对每一部分使用代换：

$$v = u - \frac{1}{u} \implies dv = \left(1 + \frac{1}{u^2}\right) du, \quad w = u + \frac{1}{u} \implies dw = \left(1 - \frac{1}{u^2}\right) du$$

积分变为：

$$\int \frac{dv}{v^2 + 2} + \int \frac{-dw}{w^2 - 2} = \int \frac{dv}{v^2 + 2} + \int \frac{dw}{2 - w^2}$$

对第二个积分做部分分式：

$$\int \frac{dv}{v^2 + 2} + \int \frac{dw}{(\sqrt{2} - w)(\sqrt{2} + w)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{v}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sqrt{2} + w}{\sqrt{2} - w}\right| + C$$

代回 v 和 w：

$$v = u - \frac{1}{u} = \frac{u^2 - 1}{u}, \quad w = u + \frac{1}{u} = \frac{u^2 + 1}{u}$$

最终代回 $u = \sqrt{\tan x}$：

$$\int \sqrt{\tan x}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left[\frac{u^2 - 1}{\sqrt{2}u}\right] + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sqrt{2}u + u^2 + 1}{\sqrt{2}u - u^2 - 1}\right| + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left[\frac{\tan x - 1}{\sqrt{2 \tan x}}\right] + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left[\frac{\sqrt{2 \tan x} + \tan x + 1}{\sqrt{2 \tan x} - \tan x - 1}\right] + C$$

180. 求定积分

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nx}{(1 + 2^x)\sin x}\, dx$$

其中 n 为自然数。

设

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nx}{(1 + 2^x)\sin x}\, dx$$

则

$$I_n = \int_{0}^{\pi} \frac{\sin nx}{(1 + 2^x)\sin x}\, dx + \int_{-\pi}^{0} \frac{\sin nx}{(1 + 2^x)\sin x}\, dx$$

在第二个积分中作变量代换 $x = -x$，得到

$$I_n = \int_{0}^{\pi} \frac{\sin nx}{(1 + 2^x)\sin x}\, dx + \int_{0}^{\pi} \frac{\sin nx}{(1 + 2^{-x})\sin x}\, dx$$

于是

$$I_n = \int_0^{\pi} \frac{(1+2^{-x})\sin nx + (1+2^x)\sin nx}{(1+2^x)(1+2^{-x})\sin x}\,dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x}\,dx$$

当 $n \geqslant 2$ 时，

$$I_n - I_{n-2} = \int_0^{\pi} \frac{\sin nx - \sin(n-2)x}{\sin x}\,dx = 2\int_0^{\pi} \cos(n-1)x\,dx = 0$$

因此 $I_n = I_{n-2}$。又易知

$$I_0 = 0 \qquad I_1 = \pi$$

由递推关系可得

$$I_n = \begin{cases} 0 & n \text{ 为偶数,} \\ \pi & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

(跟分部积分重复)

181. 求

$$I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3}(1+\pi x^3)}{2-\cos(|x|+\frac{\pi}{3})}\,dx$$

并证明

$$I = 4\arctan\frac{1}{2}.$$

首先将积分拆分为两部分：

$$I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3}}{2-\cos(|x|+\frac{\pi}{3})}\,dx + \pi\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x^3}{2-\cos(|x|+\frac{\pi}{3})}\,dx$$

由于 x^3 是奇函数且分母关于 x 是偶函数，第二项积分为 0。因此

$$I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3}}{2-\cos(|x|+\frac{\pi}{3})}\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3}}{2-\cos(x+\frac{\pi}{3})}\,dx$$

$$= 2\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2-\cos(x+\frac{\pi}{3})}\,dx$$

令 $u = x+\frac{\pi}{3}$，则 $du = dx$，积分上下限变为 $x=0 \to u=\frac{\pi}{3}$，$x=\frac{\pi}{3} \to u=\frac{2\pi}{3}$。积分变为：

$$I = 2\sqrt{3}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{2-\cos u}\,du$$

使用 Weierstrass 代换 $t=\tan\frac{u}{2}$，则 $du=\frac{2}{1+t^2}\,dt$，并且

$$\cos u=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad u=\frac{\pi}{3}\to t=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad u=\frac{2\pi}{3}\to t=\sqrt{3}$$

积分变为：

$$\begin{aligned}
I&=2\sqrt{3}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{1}{2-\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt\\
&=4\sqrt{3}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+3t^2}\,dt\\
&=4\sqrt{3}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+(\sqrt{3}t)^2}\,dt\\
&=4\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\arctan(\sqrt{3}t)\right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\\
&=4\left[\arctan 3-\arctan 1\right]
\end{aligned}$$

利用公式 $\arctan a-\arctan b=\arctan\frac{a-b}{1+ab}$，得到：

$$\arctan 3-\arctan 1=\arctan\frac{3-1}{1+3\cdot 1}=\arctan\frac{1}{2}$$

因此最终结果为：

$$I=4\arctan\frac{1}{2}$$

182. 计算定积分:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin^3 x\cdot\tan^{-1}(e^x)}{1+\cos^2 x}\,dx$$

设

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin^3 x\cdot\tan^{-1}(e^x)}{1+\cos^2 x}\,dx$$

由性质

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\int_0^{\pi}[f(x)+f(-x)]dx$$

得
$$I=\int_0^\pi\left(\frac{x\sin^3 x\cdot\tan^{-1}(e^x)}{1+\cos^2 x}+\frac{x\sin^3 x\cdot\tan^{-1}(e^{-x})}{1+\cos^2 x}\right)dx$$
由恒等式 $\tan^{-1}(u)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{u}\right)=\frac{\pi}{2},\ u>0$
$$I=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi\frac{x\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\,dx$$
运用性质
$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_a^b[f(x)+f(a+b-x)]\,dx$$
我们有
$$\begin{aligned}I&=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^\pi\left(\frac{x\sin^3 x}{1+\cos^2 x}+\frac{(\pi-x)\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\right)dx\\&=\frac{\pi^2}{4}\int_0^\pi\frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\,dx\end{aligned}$$
又
$$\int_0^\pi f(\sin\theta)\,d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin\theta)\,d\theta$$
故
$$I=\frac{\pi^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\,dx$$
现令 $u=\sin x, du=\cos x\,dx$, 有:
$$\begin{aligned}I&=\frac{\pi^2}{2}\int_0^1\frac{1-u^2}{1-u^2}\,du\\&=\frac{\pi^2}{2}\int_0^1\left(-1+\frac{2}{1-u^2}\right)du\\&=\frac{\pi^2}{2}\left(2\tan^{-1}1-1\right)\\&=\frac{\pi^2}{4}(\pi-2)\end{aligned}$$

183.
$$\int\frac{x\,dx}{(1+x^3)^{\frac{2}{3}}}$$

令

$$I=\int\frac{x\,dx}{(1+x^3)^{\frac{2}{3}}}$$

设

$$1+x^3=\frac{1}{1-t^3}\implies 3x^2dx=\frac{3t^2}{(1-t^3)^2}dt,$$

变换得

$$I=\int\frac{t}{1-t^3}dt.$$

部分分式分解

$$\frac{t}{(1-t)(1+t+t^2)}=\frac{\frac{1}{3}}{1-t}+\frac{\frac{1}{3}t-\frac{1}{3}}{1+t+t^2}.$$

积分拆开为

$$\int\frac{t}{1-t^3}dt=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{1-t}+\frac{1}{3}\int\frac{t-1}{1+t+t^2}dt.$$

计算各部分:

$$\int\frac{dt}{1-t}=-\ln|1-t|+C,$$

配方得

$$1+t+t^2=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4},$$

所以

$$\int\frac{dt}{1+t+t^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C,$$

且

$$\int\frac{2t+1}{1+t+t^2}dt=\ln|1+t+t^2|+C.$$

综合得

$$\int\frac{t-1}{1+t+t^2}dt=\frac{1}{2}\ln|1+t+t^2|-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C.$$

因此原积分为

$$I=-\frac{1}{3}\ln|1-t|+\frac{1}{6}\ln|1+t+t^2|-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C.$$

184. 求

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}$$

设

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}$$

先变形为

$$I = \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,\frac{dx}{x+1}$$

现设 $u = \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}$, 则

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dx} &= \frac{d}{dx}\,(x+1)^{\frac{1}{3}}(x-1)^{-\frac{1}{3}} \\
&= \frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}}(x-1)^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}(x+1)^{\frac{1}{3}}(x-1)^{-\frac{4}{3}} \\
&= -\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\frac{1}{(x+1)(x-1)}
\end{aligned}$$

以 u 表示 $-\dfrac{2}{3(x-1)}$, 发现

$$u^3 = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow u^3 - 1 = \frac{2}{x-1} \Rightarrow -\frac{2}{3(x-1)} = -\frac{1}{3}(u^3-1)$$

故原式变为

$$I = -3\int \frac{du}{u^3-1}$$

部分分式分解:

$$\frac{1}{u^3-1} = \frac{1}{3(u-1)} - \frac{1}{3}\cdot\frac{u+2}{u^2+u+1}$$

第一项:

$$\int \frac{1}{3(u-1)}\,du = \frac{1}{3}\ln|u-1|$$

第二项拆开:

$$\int \frac{u+2}{u^2+u+1}\,du = \int \frac{1}{2}\cdot\frac{2u+1}{u^2+u+1}\,du + \int \frac{\frac{3}{2}}{u^2+u+1}\,du$$

前者为:

$$\frac{1}{2}\ln|u^2+u+1|$$

后者用配方法:

$$u^2+u+1 = \left(u+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{du}{u^2+u+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right)$$

因此

$$\int \frac{u+2}{u^2+u+1}\,du = \frac{1}{2}\ln|u^2+u+1| + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\int \frac{du}{u^3-1} = \frac{1}{3}\ln|u-1| - \frac{1}{6}\ln|u^2+u+1| - \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

最终有

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}} = -3\int \frac{du}{u^3-1} = -\ln|u-1| + \frac{1}{2}\ln|u^2+u+1| + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

其中:

$$u = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$$

185. Evaluate the following integrals:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+2}{x^2+2x+3}\,dx$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x+2}{x^2+2x+3}\,dx &= \int_0^1 \frac{x+1+1}{x^2+2x+3}\,dx \\
&= \int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x+3}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2+2x+3}\,dx \\
x^2+2x+3 &= (x+1)^2+2 \\
\int_0^1 \frac{x+1}{(x+1)^2+2}\,dx &= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2 \\
\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2+2}\,dx &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\tan^{-1}\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\tan^{-1}(\sqrt{2}) - \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
\int_0^1 \frac{x+2}{x^2+2x+3}\,dx &= \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\tan^{-1}(\sqrt{2}) - \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}$$

(b) Show $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1+\sin x}{2+\sin x+\cos x}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos x}{2+\sin x+\cos x}\,dx$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{\pi/2} \frac{1+\sin x}{2+\sin x+\cos x}\,dx \\
y &= \frac{\pi}{2} - x, \quad dy = -dx
\end{aligned}$$

$$\sin x = \cos y, \quad \cos x = \sin y$$

$$I_1 = \int_{\pi/2}^0 \frac{1+\cos y}{2+\cos y+\sin y}(-dy) = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos y}{2+\cos y+\sin y}\,dy$$

(c) Using $t = \tan(x/2)$, show

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1+\sin x}{2+\sin x+\cos x}\,dx = \int_0^1 \frac{t^2+2t+2}{(t+2)^2}\,dt$$

$$t = \tan(x/2), \quad dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \frac{1+\sin x}{2+\sin x+\cos x}\,dx &= \int_0^1 \frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{2+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}dt \\ &= \int_0^1 \frac{t^2+2t+2}{(t+2)^2}\,dt\end{aligned}$$

(d) Evaluate $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2+2t+2}{(t+2)^2}\,dt$

$$\frac{t^2+2t+2}{(t+2)^2} = \frac{(t+2)^2-2(t+2)+2}{(t+2)^2} = 1-\frac{2(t+1)}{(t+2)^2}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{t^2+2t+2}{(t+2)^2}\,dt &= \int_0^1 1\,dt - \int_0^1 \frac{2(t+1)}{(t+2)^2}\,dt \\ &= 1-\int_0^1 \frac{2(t+2)-2}{(t+2)^2}\,dt \\ &= 1-\int_0^1 \left(\frac{2}{t+2}-\frac{2}{(t+2)^2}\right)dt \\ &= 1-\left[2\ln(t+2)+\frac{2}{t+2}\right]_0^1 \\ &= 1-\left(2\ln 3-2\ln 2+\frac{2}{3}-1\right) \\ &= \frac{5}{3}-2\ln\frac{3}{2}\end{aligned}$$

所以

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1+\sin x}{2+\sin x+\cos x}\,dx = \frac{5}{3}-2\ln\frac{3}{2}.$$

186. 已知函数

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right), \quad x \in (-\infty, \infty)$$

1. 求 $f'(x)$ 的简化表达式。

2. 证明 $\lim_{x\to\pm\infty}[xf(x)]=0$。

3. 求 $\lim_{x\to\pm\infty}\ln\left[\frac{2x^2-2x+1}{2x^2+2x+1}\right]$ 的值。

4. 求 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$。

(a) 对 $f(x)$ 求导：

$$f'(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2x^2}\right)^2}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2x^2}\right)=\frac{1}{1+\frac{1}{4x^4}}\cdot\left(-\frac{1}{x^3}\right)=-\frac{4x}{4x^4+1}$$

(b) 计算极限：

$$\lim_{x\to\pm\infty}[xf(x)]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right)}{1/x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-\frac{4x}{4x^4+1}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x^3}{4x^4+1}=0$$

(c) 计算另一个极限：

$$\lim_{x\to\pm\infty}\ln\left[\frac{2x^2-2x+1}{2x^2+2x+1}\right]=\ln\left[\frac{2}{2}\right]=\ln 1=0$$

(d) 利用分部积分求定积分：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right)dx=\left[x\arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right)\right]_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}x\left(-\frac{4x}{4x^4+1}\right)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{4x^2}{4x^4+1}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{4x^2}{(2x^2-2x+1)(2x^2+2x+1)}dx$$

利用部分分式分解：

$$\frac{4x^2}{(2x^2-2x+1)(2x^2+2x+1)}=\frac{x+1}{2x^2-2x+1}-\frac{x-1}{2x^2+2x+1}$$

再分解并代入标准积分公式：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x+1}{2x^2-2x+1}dx-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x-1}{2x^2+2x+1}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2(2x-1)+2}{2x^2-2x+1}dx-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2(2x+1)-2}{2x^2+2x+1}dx$$

得到标准反正切积分：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\left[\frac{1}{2}\arctan(2x-1)+\frac{1}{2}\arctan(2x+1)\right]_{-\infty}^{\infty}=\pi$$

187. 计算积分

$$I(\theta) = \int_{-1}^{1} \frac{\sin\theta\, dx}{1 - 2x\cos\theta + x^2},$$

并确定 $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ 范围内函数 $I(\theta)$ 不连续的点。

用恒等式 $1 = \cos^2\theta + \sin^2\theta$，并令

$$u = x - \cos\theta, \quad du = dx.$$

则积分变为

$$I(\theta) = \int_{-1-\cos\theta}^{1-\cos\theta} \frac{\sin\theta\, du}{u^2 + \sin^2\theta} = \tan^{-1} \frac{u}{\sin\theta}\bigg|_{-1-\cos\theta}^{1-\cos\theta}.$$

因此

$$I(\theta) = \tan^{-1}\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} - \tan^{-1}\frac{-1-\cos\theta}{\sin\theta}, \quad (\sin\theta \neq 0).$$

利用二倍角公式

$$1 - \cos\theta = 2\sin^2(\theta/2), \quad 1 + \cos\theta = 2\cos^2(\theta/2), \quad \sin\theta = 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2),$$

得到

$$\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{2\sin^2(\theta/2)}{2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)} = \tan(\theta/2), \quad \frac{-1-\cos\theta}{\sin\theta} = -\frac{2\cos^2(\theta/2)}{2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)} = -\cot(\theta/2) = \tan(\pi/$$

因此

$$I(\theta) = \tan^{-1}(\tan(\theta/2)) - \tan^{-1}(\tan(\pi/2 + \theta/2)).$$

注意 $\tan^{-1}$ 的主值在 $(-\pi/2, \pi/2)$。例如：

$$\tan^{-1}(\tan 20^\circ) = 20^\circ, \quad \tan^{-1}(\tan 100^\circ) = -80^\circ, \quad \tan^{-1}(\tan 220^\circ) = 40^\circ, \quad \tan^{-1}(\tan 290^\circ) = -70^\circ.$$

因此，如果 $0 < \theta < \pi$，则

$$I(\theta) = \theta/2 - (-(\pi/2 - \theta/2)) = \pi/2.$$

如果 $\pi < \theta < 2\pi$，则

$$I(\theta) = -(\pi - \theta/2) - (\theta/2 - \pi/2) = -\pi/2.$$

因此，函数 $I(\theta)$ 为

$$I(\theta) = \begin{cases} \pi/2, & 0 < \theta < \pi, \\ -\pi/2, & \pi < \theta < 2\pi. \end{cases}$$

不连续点为 $\theta = 0, \pi, 2\pi$。

188. 求以下积分，并使用复指数方法验证结果：

$$I=\int\cos(\ln x)\,dx,\quad J=\int\sin(\ln x)\,dx,\quad \int_1^{e^{\pi/2}}2x^i\,dx.$$

a) 使用换元法求 I 和 J

令 $u=\ln x \implies x=e^u,\, dx=e^u du$，则

$$I=\int\cos(\ln x)\,dx=\int e^u\cos(u)\,du.$$

设 $I=\int e^u(P\cos u+Q\sin u)'du$，则

$$\begin{aligned}\frac{d}{du}[e^u(P\cos u+Q\sin u)]&=e^u(P\cos u+Q\sin u)+e^u(-P\sin u+Q\cos u)\\&=e^u[(P+Q)\cos u+(Q-P)\sin u].\end{aligned}$$

对比 $\int e^u\cos u\,du$，得到

$$P+Q=1,\quad Q-P=0\implies P=Q=\frac{1}{2}.$$

所以

$$I=\frac{1}{2}e^u(\cos u+\sin u)=\frac{x}{2}[\cos(\ln x)+\sin(\ln x)].$$

同理，对于 J：

$$J=\int\sin(\ln x)\,dx=\int e^u\sin u\,du.$$

设 $P+Q=0,\, Q-P=1\implies P=-\frac{1}{2}, Q=\frac{1}{2}$，所以

$$J=\frac{1}{2}e^u(\sin u-\cos u)=\frac{x}{2}[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)].$$

b) 使用 x^i 验证结果

$$x^i=e^{i\ln x}=\cos(\ln x)+i\sin(\ln x)$$

$$\int x^i\,dx=\frac{x^{1+i}}{1+i}+C=\frac{1-i}{2}x^{1+i}+C=\frac{x}{2}[\cos(\ln x)+\sin(\ln x)]+i\frac{x}{2}[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]+C.$$

因此

$$I=\frac{x}{2}[\cos(\ln x)+\sin(\ln x)],\quad J=\frac{x}{2}[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)].$$

c) 求定积分 $\int_1^{e^{\pi/2}}2x^i\,dx$

$$\begin{aligned}\int_1^{e^{\pi/2}}2x^i\,dx&=2\left[\frac{x^{1+i}}{1+i}\right]_1^{e^{\pi/2}}=2\left[\frac{1-i}{2}x^{1+i}\right]_1^{e^{\pi/2}}\\&=[x(\cos(\ln x)+\sin(\ln x))+ix(\sin(\ln x)-\cos(\ln x))]_1^{e^{\pi/2}}\\&=e^{\pi/2}[1+i]-[1-i]\\&=(e^{\pi/2}-1)+i(e^{\pi/2}+1).\end{aligned}$$

189. 计算极限

$$\lim_{x\to0^+}\int_x^{2x}\frac{\sin^m t}{t^n}\,dt\quad(m,n\in\mathbb{N}).$$

注意到当 $t\to0^+$ 时 $\frac{\sin t}{t}\to1$，且在 $(0,\pi)$ 上 $\frac{\sin t}{t}$ 单调递减。因此，对于 $x\in(0,\pi/2)$ 且 $t\in[x,2x]$，有

$$\frac{\sin 2x}{2x}<\frac{\sin t}{t}<1.$$

于是

$$\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^m\int_x^{2x}t^{m-n}\,dt<\int_x^{2x}\frac{\sin^m t}{t^n}\,dt<\int_x^{2x}t^{m-n}\,dt.$$

对积分做换元 $t=xu$ 得

$$\int_x^{2x}t^{m-n}\,dt=x^{m-n+1}\int_1^2u^{m-n}\,du.$$

注意到 $\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^m\to1$，于是极限取决于 x^{m-n+1} 的幂：

$$\lim_{x\to0^+}\int_x^{2x}\frac{\sin^m t}{t^n}\,dt=\begin{cases}0,&m-n+1>0\ (\text{即}m\geqslant n),\\\ln 2,&m-n+1=0\ (\text{即}n-m=1),\\+\infty,&m-n+1<0\ (\text{即}n-m>1).\end{cases}$$

190. 已知 a 和 b 是不同实常数，λ 是实参数。证明

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right]^2\leqslant\left[\int_a^b[f(x)]^2\,dx\right]\left[\int_a^b[g(x)]^2\,dx\right]$$

a) 由关系

$$[\lambda f(x)+g(x)]^2 \geqslant 0$$

展开平方:

$$\lambda^2[f(x)]^2+2\lambda f(x)g(x)+[g(x)]^2 \geqslant 0$$

对 x 从 a 到 b 积分:

$$\int_a^b (\lambda^2[f(x)]^2+2\lambda f(x)g(x)+[g(x)]^2)\,dx \geqslant 0$$

利用积分线性:

$$\lambda^2\int_a^b [f(x)]^2\,dx+2\lambda\int_a^b f(x)g(x)\,dx+\int_a^b [g(x)]^2\,dx \geqslant 0$$

b) 该关于 λ 的二次不等式要求判别式非正:

$$A=\int_a^b [f(x)]^2\,dx,\quad B=2\int_a^b f(x)g(x)\,dx,\quad C=\int_a^b [g(x)]^2\,dx$$

$$B^2-4AC\leqslant 0 \implies \left[\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right]^2 \leqslant \left[\int_a^b [f(x)]^2\,dx\right]\left[\int_a^b [g(x)]^2\,dx\right]$$

c) 令 $f(x)=\sqrt{\sin x}$，$g(x)=1$:

$$\left[\int_0^{\pi/2}\sqrt{\sin x}\,dx\right]^2 \leqslant \left[\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx\right]\left[\int_0^{\pi/2}1\,dx\right]$$

$$\left[\int_0^{\pi/2}\sqrt{\sin x}\,dx\right]^2 \leqslant [-\cos x]_0^{\pi/2}\cdot[x]_0^{\pi/2}=1\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\pi/2}\sqrt{\sin x}\,dx \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

d) 令 $f(x)=(\sin x)^{1/4}$，$g(x)=\cos x$:

$$\left[\int_0^{\pi/2}(\sin x)^{1/4}\cos x\,dx\right]^2 \leqslant \left[\int_0^{\pi/2}(\sin x)^{1/2}\,dx\right]\left[\int_0^{\pi/2}\cos^2 x\,dx\right]$$

LHS 积分用代换 $u=\sin x, du=\cos x\,dx$:

$$\int_0^{\pi/2}(\sin x)^{1/4}\cos x\,dx=\frac{4}{5}$$

RHS 第二个积分：

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx = \frac{\pi}{4}$$

代入不等式：

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 \leqslant \left[\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x}\, dx\right] \cdot \frac{\pi}{4}$$

整理：

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x}\, dx \geqslant \frac{16}{25} \cdot \frac{4}{\pi} = \frac{64}{25\pi}$$

191. 计算定积分（用到幂级数）：

$$\int_0^1 (\ln x)\ln(1-x)\, dx$$

已知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

192.

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln\left(\frac{1+x^{11}}{1+x^3}\right)}{(1+x^2)\ln x}\, dx = 2\pi.$$

(待解)

193.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{1+e^x}\, dx = \frac{2}{3}.$$

(待解)

194.

$$\int_0^1 \frac{2xe^x - 1}{2x^2e^x + 2}\, dx = 0.156631$$

(待解)

195.
$$\int_0^4 \frac{x^4 - 4x + 4}{1 + 2017^{x-2}}\, dx = 7.22255$$

(待解)

微分方程

1. 解方程

$$yy' = 3y + 2$$

观察得

$$y = -\frac{2}{3}$$

是一解。若 $3y+2 \neq 0$, 此方程可分离变量, 有

$$y\frac{dy}{dx} = 3y + 2 \Rightarrow \int \frac{y}{3y+2}\,dy = \int \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3(3y+2)}\right) dy = \int dx + C$$

解得

$$\frac{y}{3} - \frac{2}{9}\ln|3y+2| = x + C$$

由于不存在任何常数 C 使得 $y = -\frac{2}{3}$, 因此原方程的解为

$$\frac{y}{3} - \frac{2}{9}\ln|3y+2| = x + C \quad 或 \quad y = -\frac{2}{3}$$

2. 解微分方程

$$y' = y^2 - 4$$

可验证 $y = \pm 2$ 是原方程的解。若 $y^2 \neq 4$, 分离变量得

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - 4 \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2-4} \Longrightarrow \int \left(\frac{-\frac{1}{4}}{y+2} + \frac{\frac{1}{4}}{y-2}\right) dy = x + C$$

积分得到:

$$-\frac{1}{4}\ln|y+2| + \frac{1}{4}\ln|y-2| = x + C \Rightarrow \left|\frac{y-2}{y+2}\right| = e^{4C}e^{4x}$$

令 $C_1 = \pm e^{4C}$, 可写为

$$\frac{y-2}{y+2} = C_1 e^{4x} \Rightarrow y = \frac{2(1 + C_1 e^{4x})}{1 - C_1 e^{4x}}$$

其中 $y=2$ 可由令 $C_1=0$ 得到, 因此通解为

$$y=\frac{2(1+C_1e^{4x})}{1-C_1e^{4x}} \quad \text{或} \quad y=-2$$

3. 由换元法 $y=xV$, 其中 $V=V(x)$, 解常微分方程

$$2xyy'=y^2-x^2$$

设 $y=xV$, 则 $y'=V+xV'$, 代入原方程得

$$2x\cdot xV\cdot(V+xV')=(xV)^2-x^2 \Rightarrow 2xVV'=-(V^2+1)$$

其中 $x\neq 0$, 分离变量得

$$\frac{2V}{V^2+1}\,dV=-\frac{1}{x}\,dx$$

两边积分得

$$\ln(V^2+1)=-\ln|x|+C \Rightarrow V^2+1=\frac{C_1}{x}$$

由 $V=\dfrac{y}{x}$ 得

$$y^2+x^2=C_1x$$

4. 已知非零函数 $f(x)$ 满足

$$\sqrt{\int f(x)\,dx}=\int\sqrt{f(x)}\,dx, \quad f(0)=\frac{1}{4},$$

用代换 $f(x)=\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$，求 $f(x)$ 的简化表达式。

设

$$f(x)=\left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

原方程变为

$$\sqrt{\int\left(\frac{dy}{dx}\right)^2dx}=\int\frac{dy}{dx}dx=y+k$$

两边对 x 求导：

$$\frac{1}{2\sqrt{\int(dy/dx)^2dx}}\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{dy}{dx}\implies\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=2(y+k)\frac{dy}{dx}.$$

由 $dy/dx\neq 0$，得到

$$\frac{dy}{dx}=2(y+k).$$

分离变量并积分：

$$\frac{1}{y+k}dy=2dx\implies\int\frac{1}{y+k}dy=\int 2dx\implies\ln|y+k|=2x+C.$$

指数化：

$$y+k=Ae^{2x}\implies y=Ae^{2x}-k.$$

由初值条件 $x=0$，$f(0)=(dy/dx)^2=\frac{1}{4}$，得到

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=2Ae^0=2A=\frac{1}{2}\implies A=\frac{1}{4}.$$

因此

$$\frac{dy}{dx}=2Ae^{2x}=\frac{1}{2}e^{2x}\implies f(x)=\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{1}{4}e^{4x}.$$

5. 已知 $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 可微, 且满足从 $x=a$ 到 $x=b$ 的曲线 $y=f(x)$ 下的面积等于曲线弧长. 已知 $f(0)=5/4$, 且 $f(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上有最小值, 求该最小值.

从 $x=a$ 到 $x=b$ 的面积为

$$\int_a^b f(t)\,dt,$$

曲线弧长为

$$\int_a^b\sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt.$$

因此对于所有非负的 a,b 有

$$\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b\sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt.$$

取 $a=0$, 得

$$\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x\sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt.$$

两边对 x 求导, 利用微积分基本定理, 得

$$f(x)=\sqrt{1+(f'(x))^2}.$$

设 $y=f(x)$, 则得到微分方程

$$y=\sqrt{1+(y')^2}\Rightarrow y^2=1+(y')^2\Rightarrow (y')^2=y^2-1\Rightarrow y'=\sqrt{y^2-1}.$$

分离变量:

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}=dx.$$

两边积分:

$$\int\frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}=\int dx\Rightarrow \ln|y+\sqrt{y^2-1}|=x+C.$$

由于 $f(0)=5/4>0$, 可去绝对值, 并解得

$$y=\frac{A}{2}e^x+\frac{1}{2A}e^{-x},$$

其中 $A>0$ 为常数.

利用初值 $y(0)=5/4$:

$$\frac{A}{2}+\frac{1}{2A}=\frac{5}{4}\Rightarrow 2A^2-5A+2=0\Rightarrow A=1 \text{ 或} A=\frac{1}{2}.$$

函数 $y=\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}e^{-x}$ 在 $x>0$ 的最小值发生在 $x=0$, 值为 1, 而 $y=e^x/2+e^{-x}/1$ 的最小值在 $x<0$, 不符合要求.

因此 $f(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上的最小值为

$$1.$$

6. 非零函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 满足积分方程

$$\int u(x)\,dx=x^2u(x),\quad \int u(x)v(x)\,dx=\left[\int u(x)\,dx\right]\left[\int v(x)\,dx\right].$$

求 $u(x)$ 的一般表达式，以及 $[v(x)]^2$ 的简化表达式。

步骤 **1:** 求 $u(x)$

$$\int u\,dx = ux^2$$

对 x 求导:

$$\begin{aligned} u &= 2xu + x^2\frac{du}{dx} \\ x^2\frac{du}{dx} &= u - 2xu = u(1-2x) \\ \frac{1}{u}\frac{du}{dx} &= \frac{1-2x}{x^2} \\ \int \frac{1}{u}du &= \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\right) dx \\ \ln|u| &= -\frac{1}{x} - 2\ln|x| + C \\ u &= A\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} \end{aligned}$$

步骤 **2:** 利用第二个积分方程求 $v(x)$

$$\int uv\,dx = \left[\int u\,dx\right]\left[\int v\,dx\right]$$

对 x 求导:

$$\begin{aligned} uv &= \left[\int u\,dx\right] v + u\left[\int v\,dx\right] \\ uv &= x^2uv + u\int v\,dx \\ v - x^2v &= \int v\,dx \\ v(1-x^2) &= \int v\,dx \end{aligned}$$

对 x 再求导:

$$v'(1-x^2) - 2xv = v \implies v'(1-x^2) = v(1+2x)$$

步骤 **3:** 分离变量并积分

$$\frac{dv}{v} = \frac{1+2x}{1-x^2}dx$$

部分分式分解:

$$\frac{1+2x}{1-x^2} = \frac{2x+1}{(1-x)(1+x)} = -\frac{3}{2}\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+x}$$

积分：

$$
\begin{aligned}
\ln|v| &= -\frac{3}{2}\ln|1-x| + \frac{1}{2}\ln|1+x| + B \\
\ln v^2 &= \ln\left|\frac{B(1+x)}{(1-x)^3}\right| \\
v^2 &= \frac{B(1+x)}{(1-x)^3}
\end{aligned}
$$

最终结果：

$$
u(x) = A\frac{e^{-1/x}}{x^2}, \quad v^2(x) = \frac{B(1+x)}{(1-x)^3}.
$$

7. 证明方程

$$
y' + p(x)y = q(x)
$$

的一般解为

$$
y = \frac{\displaystyle\int I(x)\,q(x)\,dx + C}{I(x)},
$$

其中积分因子为

$$
I(x) = \exp\left(\int p(x)\,dx\right).
$$

对积分因子求导，

$$
I'(x) = \frac{d}{dx}\exp\left(\int p(x)\,dx\right) = I(x)p(x)
$$

由原方程可得

$$
I(x)(y' + p(x)y) = \frac{d}{dx}\big(yI(x)\big) = I(x)q(x)
$$

对两边积分，

$$
yI(x) = \int I(x)q(x)dx + C \Rightarrow y = \frac{\displaystyle\int I(x)q(x)dx + C}{I(x)}
$$

8. 求微分方程

$$
y' = 4y + x
$$

的通解。

积分因子为

$$I(x) = \exp\left(\int -4\,dx\right) = e^{-4x}$$

由公式得

$$y = \frac{1}{I(x)}\left(\int I(x)\,q(x)\,dx + C\right) = e^{4x}\left(\int xe^{-4x}\,dx + C\right) = -\frac{x}{4} - \frac{1}{16} + Ce^{4x}$$

其中由分部积分,

$$\int xe^{-4x}\,dx = -\frac{1}{4}xe^{-4x} + \frac{1}{4}\int e^{-4x}\,dx = -\frac{1}{4}xe^{-4x} - \frac{1}{16}e^{-4x}$$

9. 求解微分方程并满足初始条件

$$x^2y' + 3xy = \frac{1}{x}, \quad x > 0, \quad y(1) = -1.$$

原方程即

$$y' + \frac{3}{x}y = \frac{1}{x^3}.$$

其中积分因子为

$$I(x) = \exp\left(\int \frac{3}{x}\,dx\right) = x^3,$$

故

$$y = \frac{1}{I(x)}\left(\int I(x)q(x)\,dx + C\right) = \frac{1}{x^3}\left(\int x^3 \cdot \frac{1}{x^3}\,dx + C\right) = \frac{1}{x^2} + \frac{C}{x^3}$$

由 $y(1) = -1$ 知

$$-1 = 1 + C \Rightarrow C = -2$$

因此解为

$$y = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}$$

10. 设 $f(x)$ 为整系数多项式, 若

$$g(x) = \int xf(x)\,dx,$$

且

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = x^4 - 4x^2 + x - 7,$$

求 $f(x)$。

由条件得 $g'(x) = xf(x)$, 故

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = f'(x) + xf(x) = x^4 - 4x^2 + x - 7$$

为一阶微分方程; 设积分因子 $I(x) = \exp\left(\int x\,dx\right) = e^{\frac{x^2}{2}}$, 则

$$\left(e^{\frac{x^2}{2}} f(x)\right)' = e^{\frac{x^2}{2}}(x^4 - 4x^2 + x - 7)$$

两边积分得

$$e^{\frac{x^2}{2}} f(x) = \int e^{\frac{x^2}{2}}(x^4 - 4x^2 + x - 7)\,dx = e^{\frac{x^2}{2}}(x^3 - 7x + 1) + C$$

即

$$f(x) = x^3 - 7x + 1 + Ce^{-\frac{x^2}{2}}$$

因为 $f(x)$ 是整系数多项式, 所以 $C = 0$, 于是

$$f(x) = x^3 - 7x + 1$$

11. 求解伯努利方程

$$2x(\ln x)y' - y = -9x^3y^3\ln x$$

化为标准形式,

$$y' - \frac{1}{2x(\ln x)}y = -\frac{9}{2x^2}y^3,$$

这是阶数为 $n = 3$ 的伯努利方程, 两边除以 y^3,

$$y^{-3}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2x(\ln x)}y^{-2} = -\frac{9}{2}x^2$$

设 $u = y^{1-n} = y^{-2}$, 则

$$\frac{du}{dx} = -2y^{-3}\frac{dy}{dx} \Rightarrow y^{-3}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}\frac{du}{dx}$$

代入前式得到

$$-\frac{1}{2}\frac{du}{dx} - \frac{1}{2x(\ln x)}u = -\frac{9}{2}x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} + \frac{1}{x(\ln x)}u = 9x^2$$

积分因子为

$$I(x) = \exp\left(\int \frac{1}{x(\ln x)}\,dx\right) = e^{\ln(\ln x)} = \ln x$$

于是

$$u = y^{-2} = \frac{1}{\ln x}\left(\int 9x^2 \ln x \, dx + C\right) = \frac{1}{\ln x}\big(3x^3 \ln x - x^3 + C\big)$$

即

$$y^2 = \frac{\ln x}{x^3(3\ln x - 1) + C}$$

12. 判断函数 $I(x,y) = \cos(xy)$ 是否为微分方程

$$[\tan(xy) + xy]\, dx + x^2\, dy = 0$$

的积分因子。若是, 求其通解。

将方程乘以 $I(x,y)$ 得

$$[\sin(xy) + xy\cos(xy)]\, dx + [x^2 \cos(xy)]\, dy = 0$$

设

$$P(x,y) = \sin(xy) + xy\cos(xy), \quad Q(x,y) = x^2\cos(xy).$$

观察得偏导数

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x\cos(xy) - x^2 y \sin(xy) = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

由此可得 $\cos(xy)$ 是给定方程的积分因子。注意到

$$d(x\sin(xy)) = (\sin(xy) + xy\cos(xy))\, dx + x^2\cos(xy)\, dy$$

因此通解为

$$x\sin(xy) = C$$

13. 求方程

$$y\, dx - (2x + y^4)\, dy = 0$$

的积分因子, 并由此求通解。

设 $I(x,y)$ 是该积分因子, 将方程乘以 $I(x,y)$ 得

$$Iy\, dx - (2x + y^4) I\, dy = 0$$

记

$$P(x,y)=Iy,\quad Q(x,y)=-(2x+y^4)I$$

方程的正合条件为

$$P_y=yI_y+I=Q_x=-2I-(2x+y^4)I_x$$

若 I 只与 y 有关, 即 $I_x=0$, 则有

$$yI_y+I=-2I\Rightarrow yI_y=-3I\Rightarrow I(y)=\frac{1}{y^3}$$

将其代入方程得到

$$\frac{1}{y^2}dx-\frac{2x+y^4}{y^3}dy=0$$

此时方程正合。设函数 $\phi(x,y)$ 满足

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{1}{y^2},\quad \frac{\partial\phi}{\partial y}=-\frac{2x+y^4}{y^3}$$

由第一式积分得

$$\phi(x,y)=\frac{x}{y^2}+h(y)\Rightarrow\frac{\partial\phi}{\partial y}=-\frac{2x}{y^3}+h'(y)$$

由第二式可得

$$h'(y)=-y\Rightarrow h(y)=-\frac{y^2}{2}$$

因此通解为

$$\frac{x}{y^2}-\frac{y^2}{2}=C\Rightarrow 2x-y^4=Cy^2$$

14. 求解齐次微分方程

$$y'-x^{-1}y=x^{-1}\sqrt{x^2-y^2},\quad x>0$$

考虑齐次性, 将方程改写为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

作变量代换,

$$y=xV(x)\Rightarrow\frac{dy}{dx}=x\frac{dV}{dx}+V$$

代入方程得

$$x\frac{dV}{dx}+V=V+\sqrt{1-V^2}\Rightarrow\frac{dV}{\sqrt{1-V^2}}=\frac{dx}{x}$$

两边积分得

$$\int \frac{dV}{\sqrt{1-V^2}} = \int \frac{dx}{x} + C \Rightarrow \sin^{-1} V = \ln|x| + C$$

因此通解为

$$y = xV = x\sin(C + \ln x), \quad x > 0$$

15. 解微分方程

$$(x^2 + y^2)\, dx + (x^2 - xy)\, dy = 0$$

若 $x \neq 0$, 有

$$\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) + \left(1 - \frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

设 $\frac{y}{x} = u \Rightarrow y = xu$, 则 $\frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u$,

$$(1 + u^2) + (1 - u)\left(x\frac{du}{dx} + u\right) = 0 \Rightarrow x\,\frac{du}{dx} = \frac{u+1}{u-1}$$

分离变量得

$$\int \frac{u-1}{u+1}\, du = \int \frac{1}{x}\, dx \Rightarrow u - 2\ln|u+1| = \ln x + C$$

即

$$\frac{y}{x} - \ln\left(1 + \frac{y}{x}\right)^2 = \ln x + C$$

16. 解

$$xy'' + y' = 8x, \quad x > 0$$

令 $v = y'$, 则 $v' = y''$。方程变为一阶方程

$$xv' + v = 8x \Rightarrow v' + \frac{1}{x}v = 8$$

这是线性一阶方程, 积分因子为

$$I(x) = \exp\left(\int \frac{1}{x}\, dx\right) = x$$

所以

$$v(x) = \frac{1}{x}\left(\int 8x\,dx + C_1\right) = \frac{1}{x}(4x^2 + C_1)$$

积分得到

$$y = \int v(x)\,dx + C_2 = \int \frac{1}{x}(4x^2 + C_1)\,dx + C_2 = 2x^2 + C_1 \ln x + C_2$$

17. 解微分方程

$$y' + e^{y'} - x = 0$$

令 $u = y' \Rightarrow u + e^u = x$, 由链导法,

$$\frac{dy}{du} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{du} = u\frac{dx}{du}$$

又因为

$$x = u + e^u \Rightarrow \frac{dx}{du} = 1 + e^u$$

所以

$$\frac{dy}{du} = u(1 + e^u) \Rightarrow y = \int u(1 + e^u)\,du = \frac{u^2}{2} + (u-1)e^u + C$$

故解可写为参数形式:

$$\begin{cases} x = u + e^u \\ y = \dfrac{u^2}{2} + (u-1)e^u + C \end{cases}$$

18. 解微分方程

$$y' + \frac{y}{x} = e^{xy}$$

令 $u = e^{xy}$, 则

$$\frac{du}{dx} = e^{xy}\left(y + x\frac{dy}{dx}\right) \Rightarrow y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{xu}\frac{du}{dx}$$

由原方程可得

$$\frac{1}{xu}\frac{du}{dx} = u \Rightarrow \frac{1}{u^2}\frac{du}{dx} = x$$

解为

$$-\frac{1}{u}=\frac{x^2}{2}+C$$

故通解为

$$\frac{x^2}{2}+e^{-xy}=C_1$$

19. 解

$$dx-xy(1+xy^2)\,dy=0$$

原方程即

$$\frac{1}{x^2}\frac{dx}{dy}-\frac{y}{x}-y^3=0$$

设 $u=-\frac{1}{x}$, 则 $\frac{du}{dy}=\frac{1}{x^2}\frac{dx}{dy}$, 化为线性一阶微分方程

$$\frac{du}{dy}+yu=y^3$$

积分因子为 $\exp\left(\int y\,dy\right)=e^{\frac{y^2}{2}}$, 于是

$$ue^{\frac{y^2}{2}}=\int y^3e^{\frac{y^2}{2}}\,dy+C$$

作代换 $t=\frac{y^2}{2}$, 则 $dt=y\,dy$,

$$\int y^3e^{\frac{y^2}{2}}\,dy=\int 2te^t\,dt=2te^t-2\int e^t\,dt=2(t-1)e^t=(y^2-2)e^{\frac{y^2}{2}}$$

于是

$$u=y^2-2+Ce^{-\frac{y^2}{2}}.$$

代回 $u=-\frac{1}{x}$ 得到

$$x=\frac{1}{2-y^2-Ce^{-\frac{y^2}{2}}},$$

20. 解微分方程

$$xy'-y=2x^2y(y^2-x^2)$$

令 $u=x^2y$, 对 x 求导,

$$\frac{du}{dx}=2xy+x^2\frac{dy}{dx}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x^2}\frac{du}{dx}-\frac{2u}{x^3}.$$

代回原方程得

$$\frac{1}{x}\frac{du}{dx}-\frac{3u}{x^2}=2u\left(\frac{u^2}{x^4}-x^2\right)\Rightarrow\frac{du}{dx}+\left(2x^3-\frac{3}{x}\right)u=\frac{2}{x^3}u^3$$

这是阶数为 3 的伯努利方程。令 $v=u^{-2}$, 则 $\dfrac{dv}{dx}=-2u^{-3}\dfrac{du}{dx}$, 于是

$$v'+\left(-4x^3+\frac{6}{x}\right)v=-\frac{4}{x^3}.$$

积分因子为

$$I(x)=\exp\left(\int\left(-4x^3+\frac{6}{x}\right)dx\right)=e^{-x^4+6\ln x}=x^6e^{-x^4}$$

解得

$$u^{-2}=v=\frac{e^{x^4}}{x^6}\left(\int x^6e^{-x^4}\cdot\left(-\frac{4}{x^3}\right)dx+C\right)=\frac{e^{x^4}}{x^6}\left(e^{-x^4}+C\right)=\frac{1}{x^6}(1+Ce^{x^4})$$

由 $u=x^2y$, 通解即

$$x^2-y^2=cy^2e^{x^4}$$

21. 解

$$yy''+(y')^2=yy'$$

设 $u=y'$, 由链导法,

$$y''=\frac{du}{dx}=\frac{du}{dy}\frac{dy}{dx}=u\frac{du}{dy}.$$

代入原方程得

$$y\cdot u\frac{du}{dy}+u^2=yu\Rightarrow\frac{du}{dy}+\frac{1}{y}u=1$$

这是关于 u 的线性一阶方程。积分因子为 $e^{\int\frac{1}{y}dy}=y$, 于是

$$\frac{d}{dy}(yu)=y\Rightarrow yu=\frac{y^2}{2}+c_1\Rightarrow y'=u=\frac{y}{2}+\frac{c_1}{y}=\frac{y^2+2c_1}{2y}$$

分离变量并积分,
$$\frac{2y\,dy}{y^2+2c_1}=dx \Rightarrow \int \frac{2y\,dy}{y^2+2c_1}=\int dx+c_2.$$
得到
$$\ln|y^2+2c_1|=x+c_2 \Rightarrow y^2=C_1e^x+C_2$$

22. 解微分方程
$$\frac{dy}{dx}=x\frac{d^2y}{dx^2}-\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$$

令 $u=\frac{dy}{dx}$, 则 $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{du}{dx}$, 整理为
$$x\frac{du}{dx}=u+u^3$$
分离变量得
$$\frac{du}{u(1+u^2)}=\frac{dx}{x} \Rightarrow \int\left(\frac{1}{u}-\frac{u}{1+u^2}\right)du=\int\frac{dx}{x}$$
积分得到
$$\ln|u|-\frac{1}{2}\ln(1+u^2)=\ln|x|+\ln C \Rightarrow C|x|=\frac{|u|}{\sqrt{1+u^2}}$$
化简得
$$u^2=\frac{C^2x^2}{1-C^2x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=u=\pm\frac{Cx}{\sqrt{1-C^2x^2}}$$
再次分离变量得
$$y=\pm\int\frac{Cx}{\sqrt{1-C^2x^2}}\,dx$$
令 $t=Cx, dt=C\,dx$, 积分变为
$$y=\pm\frac{1}{C}\int\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=-\frac{1}{C}\sqrt{1-t^2}+C_1=-\frac{1}{C}\sqrt{1-C^2x^2}+C_1$$

23. 求解
$$(1+y^2)\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+\frac{dy}{dx}=0$$

令 $u=\dfrac{dy}{dx}$, 由链导法,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{du}{dx}=u\frac{du}{dy}$$

代入原方程得

$$u\left((1+y^2)\frac{du}{dy}+u^2+1\right)=0$$

若 $u=\dfrac{dy}{dx}=0$, 解为 $y=C_1$。若 $u\neq 0$, 则由

$$(1+y^2)\frac{du}{dy}+u^2+1=0$$

分离变量得

$$\frac{du}{u^2+1}=-\frac{dy}{1+y^2}$$

两边积分得

$$\arctan u=-\arctan y+A$$

令常数 $A=\arctan C$, 则

$$\frac{dy}{dx}=\tan(\arctan C-\arctan y)=\frac{C-y}{1+Cy}$$

再次分离变量,

$$\frac{1+Cy}{C-y}\,dy=dx$$

积分得

$$\int\frac{1+Cy}{C-y}\,dy=\int\left(-C+\frac{1+C^2}{C-y}\right)\,dy=-Cy-(1+C^2)\ln|C-y|=x+C_2$$

综上, 除 $y=C_1$ 外, 通解为

$$-Cy-(1+C^2)\ln|C-y|=x+C_2$$

24. 求解

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{1-y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

设 $u = \dfrac{dy}{dx}$, 由链导法,

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} = u\frac{du}{dy}.$$

代入原方程得

$$\frac{du}{dy} = \frac{u}{1-y^2}.$$

分离变量并积分,

$$\frac{du}{u} = \frac{dy}{1-y^2} \Rightarrow \ln|u| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right| + C_1.$$

于是存在常数 C 使

$$\frac{dy}{dx} = u = C\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}$$

再次分离变量得

$$dx = \frac{1}{C}\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}\,dy$$

对右侧积分, 设 $y = \cos 2\theta$, 则 $dy = -2\sin 2\theta\, d\theta$, 于是

$$\begin{aligned}
\int\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}\,dy &= \int\sqrt{\frac{2\sin^2\theta}{2\cos^2\theta}}(-2\sin 2\theta)\,d\theta \\
&= 2\int(\cos 2\theta - 1)\,d\theta \\
&= 2\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta - \theta\right) \\
&= \sqrt{1-y^2} - \arccos y
\end{aligned}$$

因此通解为

$$x = \frac{1}{C_1}\left(\sqrt{1-y^2} - \arccos y\right) + C_2$$

25. 求解

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4y^2 + y\frac{d^2y}{dx^2}$$

令 $u = \dfrac{dy}{dx}$, 由链导法,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{du}{dx} = u\frac{du}{dy}$$

代入原方程得

$$y\,u\frac{du}{dy}=\frac{1}{2}u^2-4y^2$$

若 $u=0$, 则 $y=0$ 为一解。若 $u\neq 0$ 即 $y\neq 0$, 则

$$\frac{dv}{dy}-\frac{1}{y}v=-8y$$

这是关于 $v=u^2$ 的线性一阶方程, 积分因子为

$$I(x)=\exp\left(-\int\frac{1}{y}\,dy\right)=\frac{1}{y}$$

于是

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=v=y\left(\int -8\,dy+A\right)=Ay-8y^2$$

为便于积分, 令 $B=\frac{A}{16}$, 则配方得 $Ay-8y^2=8\,(B^2-(y-B)^2)$, 因此

$$\frac{dy}{dx}=\pm 2\sqrt{2}\,\sqrt{B^2-(y-B)^2}$$

分离变量并积分:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{d(y-B)}{\sqrt{B^2-(y-B)^2}}=\pm x+C\Rightarrow\frac{1}{2\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{y-B}{B}\right)=\pm x+C$$

两边变换并记相位常数, 得

$$\arcsin\left(\frac{y-B}{B}\right)=2\sqrt{2}\,x+C'$$

于是

$$y(x)=B\left(1+\sin\left(2\sqrt{2}\,x+C'\right)\right)$$

26. 求解

$$\frac{y''}{y'}-\frac{y'}{y}=\ln y$$

设 $u=\frac{dy}{dx}$, 由链导法,

$$y''=\frac{du}{dx}=u\frac{du}{dy}$$

原方程化为

$$\frac{du}{dy}-\frac{1}{y}u=\ln y$$

积分因子为

$$I(y)=\exp\left(-\int\frac{1}{y}dy\right)=e^{-\ln y}=\frac{1}{y}.$$

于是

$$\frac{dy}{dx}=u=y\left(\int\frac{\ln y}{y}\,dy+C_1\right)=y\left(\frac{1}{2}(\ln y)^2+C_1\right)$$

再次分离变量,

$$\frac{2\cdot\frac{1}{y}\,dy}{((\ln y)^2+C_1)}=dx$$

两边积分后得,

$$\frac{2}{\sqrt{A}}\arctan\frac{\ln y}{\sqrt{A}}=x+C_2$$

设 $C_1=\sqrt{A}$, 可得通解为

$$y=e^{2C_1\tan(C_1(x+C_2))}$$

27. 求解

$$y\frac{d^2y}{dx^2}+y^2=\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

令 $z=\sqrt{y}$, 则

$$y=z^2,\quad y'=2zz',\quad y''=2z'^2+2zz''$$

代入原方程得

$$z^2(2z'^2+2zz'')+z^4=\frac{1}{2}(4z^2z'^2)\Rightarrow 2z''+z=0.$$

这是常系数二阶线性方程, 通解为

$$z=C_1\cos\frac{x}{\sqrt{2}}+C_2\sin\frac{x}{\sqrt{2}}$$

因此

$$y=z^2=\left(C_1\cos\frac{x}{\sqrt{2}}+C_2\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2$$

28. 求解

$$y'''=y'y''$$

令 $u=\dfrac{dy}{dx}$, 由链导法,

$$u''=\frac{du'}{dx}=\frac{du'}{du}\frac{du}{dx}=\frac{du'}{du}u'$$

代回方程得

$$\frac{du'}{du}u'=u\,u'\Rightarrow\frac{du'}{du}=u$$

积分得

$$u'=\frac{1}{2}u^2+2C_1$$

分离变量并积分,

$$\int\frac{du}{\frac{1}{2}u^2+C_1}=\int\frac{2\,du}{u^2+2C_1}=x+C_2\Rightarrow\frac{2}{k}\arctan\frac{u}{k}=x+C_2$$

其中 $k^2=2C_1$, 代回 $u=y'$ 得

$$\arctan\frac{y'}{\sqrt{2C_1}}=\frac{\sqrt{2C_1}}{2}(x+C_2).$$

再积分得到 y,

$$y=\int y'\,dx=\int\sqrt{2C_1}\tan\left(\frac{\sqrt{2C_1}}{2}(x+C_2)\right)\,dx+C_3$$

即

$$y=-2\ln\left|\cos\left(C_1'(x+C_2)\right)\right|+C_3$$

29. 求解

$$\frac{y''}{(y')^2}=\frac{y}{y^2-1}$$

两边乘以 y' 得

$$\frac{y''}{y'}=\frac{yy'}{y^2-1}.$$

因此对 x 积分得

$$\ln y'=\frac{1}{2}\ln(y^2-1)+\ln A\Rightarrow y'=A\sqrt{y^2-1}$$

分离变量后积分得

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}=Adx\Rightarrow\ln(y+\sqrt{y^2-1})=Ax+C_1.$$

即

$$y+\sqrt{y^2-1}=Be^{Ax}$$

解出 y, 得通解为

$$y=\frac{Be^{Ax}+\frac{1}{B}e^{-Ax}}{2}$$

30. 解

$$y''-y'\tan x+2y=0$$

观察到 $y_1=\sin x$ 为原方程的解, 由降阶法,$y_2=u(x)y_1$, 其中

$$\begin{aligned}u(x)&=\int\frac{1}{\sin^2 x}e^{-\int-\tan x\,dx}\,dx\\&=\int\frac{1}{\sin^2 x}e^{-\ln|\cos x|}\,dx\\&=\int(\cot^2 x+1)\sec x\,dx\\&=\int(\sec x+\cot x\csc x)\,dx\\&=\ln|\sec x+\tan x|-\csc x\end{aligned}$$

故通解为

$$y=\sin x(C_1+\ln|\sec x+\tan x|)+C_2$$

31. 解微分方程

$$\cos^2 x\frac{d^2y}{dx^2}=2y$$

观察得 $y_1=\tan x$ 满足方程

$$y''=2y\sec^2 x$$

现设 $y=u(x)\tan x$, 则 $y'=u'\tan x+u\sec^2 x$, 且

$$y''=u''\tan x+2u'\sec^2 x+2u\sec^2 x\tan x=u''\tan x+2u'\sec^2 x+y''$$

即

$$u'' \tan x + 2u' \sec^2 x = 0$$

设 $u' = z$, 则

$$-z' \tan x = 2z \sec^2 x$$

分离变量得

$$\int -\frac{z'}{2z}\,dz = \int \frac{\sec x}{\tan x}\,dx \Rightarrow -\frac{1}{2}\ln|z| = \ln|\tan x| + \ln A$$

化简得

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{z} = A^2 \tan^2 x$$

再分离变量,

$$\int \frac{1}{A^2}\cot^2 x\,dx = \int du \Rightarrow \frac{1}{A^2}\int (\csc^2 x - 1)\,dx = u \Rightarrow u = C(-\cot x - x) + B$$

故通解为

$$y = B\tan x - Cx\tan x - C$$

32. 解微分方程

$$\frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{y+2}{x+y+1}\right)^2$$

设 $u = y+2, v = x+y+1$, 则

$$\frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{u}{v}\right)^2, \quad \frac{dv}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx} = 1 + 2\left(\frac{u}{v}\right)^2.$$

于是有

$$\frac{dv}{du} = \frac{1+2\left(\frac{u}{v}\right)^2}{2\left(\frac{u}{v}\right)^2} = \frac{v^2+2u^2}{2u^2} = 1 + \frac{v^2}{2u^2}.$$

令 $w = \dfrac{v}{u}$, 则 $v = wu$, 并且 $\dfrac{dv}{du} = w + u\dfrac{dw}{du}$, 代入上式得

$$u\frac{dw}{du} = \frac{w^2}{2} - w + 1$$

分离变量再积分得

$$\frac{du}{u} = \frac{dw}{\frac{1}{2}\left((w-1)^2+1\right)} \Rightarrow \ln|u| = 2\arctan(w-1) + C$$

把 u,w 代回原变量, 因此得到

$$\ln|y+2| = 2\arctan\left(\frac{x-1}{y+2}\right) + C$$

33. 解

$$f(x)+f'(-x)=x^2+\alpha, \quad \alpha\in\mathbb{R}$$

由

$$f(x)+f'(-x)=x^2+\alpha \tag{1}$$

令 $x\to -x$, 得 $f(-x)+f'(x)==x^2+\alpha$, 两边求导,

$$-f'(-x)+f''(x)=2x \tag{2}$$

由 $(1)+(2)$,

$$f''(x)+f(x)=x^2+2x+\alpha$$

齐次解为

$$f_c=C_1\sin x+C_2\cos x$$

且发现特解为

$$f_p=x^2+2x+\alpha-2$$

于是通解为

$$f(x)=C_1\sin x+C_2\cos x+x^2+2x+\alpha-2$$

尚未结束, 与原方程比较系数得

$$f'(-x)+f(x)=(C_1+C_2)(\cos x+\sin x)+\sqrt{x^2+\alpha}\Rightarrow C_2=-C_1$$

故通解为

$$f(x)=C_1(\sin x-\cos x)+x^2+2x+\alpha-2$$

34. 解

$$y=xy'+\sqrt{(y')^2+1}$$

此方程属于克莱罗方程 (Clairaut's equation)。对 x 求导得

$$y' = y' + xy'' + \frac{1}{x}\frac{x \cdot 2y'y''}{\sqrt{(y')^2+1}}$$

整理得

$$y''\left(x + \frac{y'}{\sqrt{(y')^2+1}}\right) = 0$$

若 $y''=0$, 则 $y'=C \Rightarrow y = Cx + \sqrt{C^2+1}$。对于

$$\left(x + \frac{y'}{\sqrt{(y')^2+1}}\right) = 0$$

化简得

$$y' = \pm\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

照常分离系数后积分得

$$\int dy = \pm\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \Rightarrow y = \pm\sqrt{1-x^2} + A$$

将 $y = \pm\sqrt{1-x^2} + A$ 代入原方程解得 $A=0$, 故解为

$$y = \pm\sqrt{1-x^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

35. 求解

$$\sqrt{\tan x}\,\frac{dy}{dx} = x$$

分离系数得,

$$\frac{1}{y}\,dy = \sqrt{\cot x}\,dx \Rightarrow \ln y = \int \sqrt{\cot x}\,dx$$

设 $\cot x = u^2$, 则 $-\csc^2 x\,dx = 2u\,du \Rightarrow dx = -\dfrac{2u\,du}{1+u^4}$,

$$I = \int \sqrt{\cot x}\,dx = -\int \frac{2u\,du}{1+u^4} = -\int \frac{2\,du}{u^2+\frac{1}{u^2}} = -\int \frac{1+\frac{1}{u^2}}{u^2+\frac{1}{u^2}}\,du - \int \frac{1-\frac{1}{u^2}}{u^2+\frac{1}{u^2}}\,du = -(I_1+I_2)$$

其中设 $u - \dfrac{1}{u} = t$, $\left(1+\dfrac{1}{u^2}\right)du = dt$, 则 $u^2 + \dfrac{1}{u^2} = t^2+2$,

$$I_1 = \int \frac{1+\frac{1}{u^2}}{u^2+\frac{1}{u^2}}\,du = \int \frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{u^2-1}{u\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\cot x - 1}{\sqrt{2}\cot x}\right)$$

且设 $u+\dfrac{1}{u}=\phi, \left(1-\dfrac{1}{u^2}\right)du=d\phi$, 则 $u^2+\dfrac{1}{u^2}=\phi^2-2$,

$$I_2=\int\frac{1-\frac{1}{u^2}}{u^2+\frac{1}{u^2}}\,duI_2=\int\frac{d\phi}{\phi^2-2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\left(\frac{1}{\phi-\sqrt{2}}-\frac{1}{\phi+\sqrt{2}}\right)d\phi=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\phi-\sqrt{2}}{\phi+\sqrt{2}}\right|$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{u^2-u\sqrt{2}+1}{u^2+u\sqrt{2}+1}\right|=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\cot x-\sqrt{2}\cot x+1}{\cot x+\sqrt{2}\cot x+1}\right|$$

于是 $\ln y=I$ 给出

$$y=Ce^{-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\dfrac{\cot x-1}{\sqrt{2}\cot x}\right)}\left(\frac{\cot x+\sqrt{2}\cot x+1}{\cot x-\sqrt{2}\cot x+1}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{2}}}$$

36. 解

$$y''-y'-2y=10\sin x,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=1.$$

对应齐次方程的特征方程为

$$r^2-r-2=(r-2)(r+1)=0\Rightarrow r=2,-1$$

因此齐次通解为

$$y_c(x)=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}.$$

取特解

$$y_p(x)=A\cos x+B\sin x$$

代入方程

$$y_p''-y_p'-2y_p=(B-3A)\cos x+(-A-3B)\sin x=0$$

比较系数解得 $A=-1, B=-3$, 因此特解为

$$y_p(x)=-\cos x-3\sin x$$

通解为

$$y(x)=y_c+y_p=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}-\cos x-3\sin x.$$

使用初值条件 $y(0)=0, y'(0)=1$,

$$C_1+C_2-1=0\Rightarrow C_1+C_2=1.$$

$$y'(x) = 2C_1e^{2x} - C_2e^{-x} + \sin x - 3\cos x \implies y'(0) = 2C_1 - C_2 - 3 = 1.$$

解得 $C_1 = 1, C_2 = 0$, 因此初值问题的解为

$$y(x) = e^{2x} - \cos x - 3\sin x$$

37. 设初值条件为 $y(0) = 2, y'(0) = 0$, 求解方程

$$y'' + 4y = 16x\cos 2x$$

对应的齐次方程为 $y'' + 4y = 0$, 其通解为

$$y_c(x) = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$$

非齐次项为 $16x\cos 2x$, 原方程的特解包含了 $A_0\cos 2x + B_0\sin 2x$, 将与 $y_c(x)$ 重叠。因此特解需取

$$y_p(x) = x\big((A_0 + A_1x)\cos 2x + (B_0 + B_1x)\sin 2x\big).$$

将 y_p 代入原方程, 比较系数可得 $A_0 = 1, A_1 = 0, B_0 = 0, B_1 = 2$, 因此特解为

$$y_p(x) = x\cos 2x + 2x^2\sin 2x.$$

所以通解为

$$y(x) = y_c + y_p = (C_1 + x)\cos 2x + (C_2 + 2x^2)\sin 2x$$

由 $y(0) = 2$ 得 $C_1 = 2$, 求导得

$$y'(x) = (2x - 2C_1)\sin 2x + (4x^2 + 2C_2 + 1)\cos 2x$$

代入 $x = 0, y'(0) = 0$, 得到 $C_2 = -\dfrac{1}{2}$, 因此满足初值条件的解为

$$y(x) = (x + 2)\cos 2x + \left(2x^2 - \frac{1}{2}\right)\sin 2x$$

38. 设连续函数 $f(x)$ 满足

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}\cos x - \int_0^x (x - t)f(t)\,dt,$$

求 $f(x)$。

即解微分方程

$$y''(x)+y(x)=\frac{1-\cos x}{2},\ y(0)=\frac{1}{2},\ y'(0)=0$$

通解为

$$y=y_h+y_p=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x\sin x$$

代入初值

$$y(0)=C_1+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow C_1=0;\ y'(0)=C_2+0=0\Rightarrow C_2=0$$

因此

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x\sin x$$

39. 考虑二阶线性齐次方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0,$$

其中 $p(x),q(x)$ 在某区间 I 上连续。

(a) 证明：若存在常数 r 使得对所有 $x\in I$ 有

$$r^2+rp(x)+q(x)=0,$$

则 $y(x)=e^{rx}$ 为该方程的一个解。

直接代入检验, 对于 $y=e^{rx}$,

$$y'=re^{rx},\quad y''=r^2e^{rx}.$$

代入方程得

$$y''+p(x)y'+q(x)y=(r^2+rp(x)+q(x))e^{rx}=0,$$

因此 $y=e^{rx}$ 确为方程的解。

(b) 求出当

$$p(x)=-2\left(1+\frac{1}{x}\right),\quad q(x)=1+\frac{2}{x}$$

时方程的通解。

先求常数根 r. 将形式 $r^2+rp(x)+q(x)=0$ 代入:

$$r^2+r\left(-2\Big(1+\frac{1}{x}\Big)\right)+1+\frac{2}{x}=0\Rightarrow (r^2-2r+1)+\frac{2}{x}(1-r)=0.$$

该等式对所有 x 成立, 比较系数得

$$r^2-2r+1=0,\quad 1-r=0.$$

由第二式得 $r=1$, 并满足第一式, 于是其中一解为

$$y_1(x)=e^x$$

由降阶法公式, 第二个线性独立解为

$$y_2=y_1\int\frac{1}{y_1^2}\exp\left(\int p(x)\,dx\right)dx=e^x\int e^{-2x}\exp\left(2\int(1+\frac{1}{x})\,dx\right)=e^x\int x^2\,dx=\frac{1}{3}x^3e^x$$

因此通解为

$$y(x)=(C_1+C_2x^3)e^x$$

40. 以换元

$$x=\int e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt,$$

解微分方程

$$y''(t)+ty'(t)+e^{-t^2}y(t)=0$$

令 $z(x)=y(t)$, 由链导法,

$$y'=\frac{dy}{dt}=\frac{dz}{dx}\frac{dx}{dt}=e^{-\frac{t^2}{2}}\frac{dz}{dx}$$

且

$$\begin{aligned}y''=\frac{d}{dt}\left(e^{-\frac{t^2}{2}}\frac{dz}{dx}\right)&=-te^{-\frac{t^2}{2}}\frac{dz}{dx}+e^{-\frac{t^2}{2}}\frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dx}\right)\\&=-te^{-\frac{t^2}{2}}\frac{dz}{dx}+e^{-\frac{t^2}{2}}\frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{dx}\right)\frac{dx}{dt}\\&=-te^{-\frac{t^2}{2}}\frac{dz}{dx}+e^{-\frac{t^2}{2}}\frac{d^2z}{dx^2}e^{-\frac{t^2}{2}}\\&=-te^{-\frac{t^2}{2}}\frac{dz}{dx}+e^{-t^2}\frac{d^2z}{dx^2}.\end{aligned}$$

把 y', y'' 代入原方程得

$$\left(-te^{-\frac{t^2}{2}}\frac{dz}{dx}+e^{-t^2}\frac{d^2z}{dx^2}\right)+t\left(e^{-\frac{t^2}{2}}\frac{dz}{dx}\right)+e^{-t^2}z=e^{-t^2}\frac{d^2z}{dx^2}+e^{-t^2}z=0\Rightarrow\frac{d^2z}{dx^2}+z=0$$

解为

$$z(x)=C_1\cos x+C_2\sin x\Rightarrow y(t)=C_1\cos\left(\int e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\right)+C_2\sin\left(\int e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\right)$$

41. 解方程

$$ty''(t)+(t^2-1)y'(t)+t^3y(t)=0$$

欲求合适的 $x=v(t)$, 令 $z(x)=y(t)$, 则

$$y'=\frac{dy}{dt}=\frac{dz}{dx}\frac{dx}{dt}=\frac{dz}{dx}\frac{dv}{dt},$$

且

$$\begin{aligned}y''=\frac{d}{dt}\left(\frac{dv}{dt}\frac{dz}{dx}\right)&=\frac{d^2v}{dt^2}\frac{dz}{dx}+\frac{dv}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dx}\right)\\&=\frac{d^2v}{dt^2}\frac{dz}{dx}+\frac{dv}{dt}\frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{dx}\right)\frac{dx}{dt}\\&=\frac{d^2v}{dt^2}\frac{dz}{dx}+\left(\frac{dv}{dt}\right)^2\frac{d^2z}{dx^2}\end{aligned}$$

代入原方程, 得到

$$t\left(\frac{dv}{dt}\right)^2\frac{d^2z}{dx^2}+\left[t\frac{d^2v}{dt^2}+(t^2-1)\frac{dv}{dt}\right]\frac{dz}{dx}+t^3z=0$$

为使方程为常系数方程, 不妨考虑变换

$$t\left(\frac{dv}{dt}\right)^2=t^3\Rightarrow\frac{dv}{dt}=t\Rightarrow v=\frac{t^2}{2}$$

此时原方程可化为

$$\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{dz}{dx}+z=0$$

其通解为

$$z(x)=e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

代回 $x=\frac{t^2}{2}$, 即

$$y(t)=e^{-\frac{t^2}{4}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}t^2}{4}+C_2\sin\frac{\sqrt{3}t^2}{4}\right)$$

42. 设 y_1, y_2 为方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0,\quad x>0 \tag{1}$$

的两个解, 其中 $p(x), q(x)$ 在 $x>0$ 上连续。已知

$$y_1=\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

且 y_1, y_2 的朗斯基行列式 (Wronskian) 为

$$W(x)=\frac{1}{x}$$

(a) 证明阿贝尔恒等式 (Abel's Identity):

$$W(x)=C\exp\left(-\int p(x)\,dx\right)$$

由朗斯基行列式的定义,

$$W(x)=\det\begin{pmatrix}y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{pmatrix}=y_1y_2'-y_1'y_2$$

于是

$$\begin{aligned}W'(x)&=(y_1y_2'-y_1'y_2)'=(y_1'y_2'+y_1y_2'')-(y_1''y_2+y_1'y_2')\\&=y_1y_2''-y_1''y_2=y_1(-py_2'-qy_2)-(-py_1'-qy_1)y_2\\&=-py_1y_2'+py_1'y_2=-p(y_1y_2'-y_1'y_2)=-p(x)W(x)\end{aligned}$$

因此

$$W'(x)+p(x)W(x)=0$$

由此可解得

$$W(x)=C\exp\left(-\int p(x)\,dx\right)$$

即得证。

(b) 求方程 (1) 中的函数 $p(x), q(x)$。

由阿贝尔恒等式,

$$p(x) = -\frac{W'(x)}{W(x)} = -\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$$

由于 y_1 是原方程的解,

$$y_1'' + py_1' + qy_1 = 0 \Rightarrow q(x) = -\frac{y_1'' + py_1'}{y_1} = 1 - \frac{1}{4x^2}$$

其中

$$y_1' = \frac{\cos x}{\sqrt{x}} - \frac{\sin x}{2x^{\frac{3}{2}}}, \quad y_1'' = \frac{3\sin x}{4x^{\frac{5}{2}}} - \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \frac{\cos x}{x^{\frac{3}{2}}}$$

因此原微分方程为

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right)y = 0, \quad x > 0$$

(c) 求方程 (1) 的通解。

利用朗斯基行列式求 y_2。已知

$$W(x) = y_1y_2' - y_1'y_2 = \frac{1}{x} \Rightarrow y_2' - \frac{y_1'}{y_1}y_2 = \frac{1}{xy_1}$$

即为一阶线性方程

$$y_2' + \left(\frac{1}{2x} - \cot x\right)y_2 = \frac{1}{x\sin x}.$$

其积分因子为

$$I(x) = \exp\left(\int\left(\frac{1}{2x} - \cot x\right)dx\right) = \exp(\ln\sqrt{x} - \ln|\sin x|) = \pm\frac{\sqrt{x}}{\sin x}$$

取 $I(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sin x}$, 由此

$$\begin{aligned} y_2(x) &= \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\left(\int\frac{\sqrt{x}}{\sin x}\cdot\frac{1}{x\sin x}dx + C\right) \\ &= \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\left(\int\frac{1}{\sin^2 x}dx + C\right) \\ &= \frac{\sin x}{\sqrt{x}}(-\cot x + C) \\ &= -\frac{\cos x}{\sqrt{x}} + Cy_1 \end{aligned}$$

因此通解为

$$y(x) = C_1\frac{\sin x}{\sqrt{x}} + C_2\frac{\cos x}{\sqrt{x}}.$$

43. (a) 证明法国数学家刘维尔 (Liouville) 的结论: 若黎卡提 (Riccati) 方程

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$$

已知一个特解 $\bar{y}(x)$, 令 $y = z + \bar{y}$, 则用此代换可把方程化为一个阶数 $n = 2$ 的伯努利 (Bernoulli) 方程, 从而可通过解一个一阶线性方程得到一般解。

设 $y = z + \bar{y}$, 代入原方程得

$$z' + \bar{y}' = p(z+\bar{y})^2 + q(z+\bar{y}) + r = pz^2 + 2pz\bar{y} + qz + (p\bar{y}^2 + q\bar{y} + r)$$

由于 $\bar{y}$ 是原方程的一个解, 故 $\bar{y}' = p\bar{y}^2 + q\bar{y} + r$, 于是

$$z' = pz^2 + 2pz\bar{y} + qz \Rightarrow z' - (2p\bar{y} + q)z = pz^2$$

这正是阶数 $n = 2$ 的伯努利方程。由通解公式,

$$z^{1-n} = e^{-\int (1-n)(2p\bar{y}+q)\,dx} \left\{ \int (1-n)p(x)e^{\int (1-n)(2p\bar{y}+q)\,dx}\,dx + C \right\}.$$

代入 $n = 2$ 即得

$$z^{-1} = e^{-\int (2p\bar{y}+q)\,dx} \left\{ -\int p(x)e^{\int (2p\bar{y}+q)\,dx}\,dx + C \right\}.$$

由此得到 z, 再由 $y = z + \bar{y}$ 得原方程的通解, 证毕。

(b) 求下列黎卡提方程的通解:

i. $y'e^{-x} + y^2 - 2ye^x = 1 - e^{2x}$, 已知特解 $\bar{y}(x) = e^x$。

原方程可写为

$$y' = -e^x y^2 + 2e^{2x}y + e^x(1 - 2e^{2x})$$

因此

$$p(x) = -e^x, \quad q(x) = 2e^{2x}, \quad r(x) = e^x(1 - 2e^{2x}), \quad \bar{y} = e^x$$

且

$$\int (2p\bar{y} + q)\,dx = \int (2(-e^x)e^x + 2e^{2x})\,dx = 0$$

于是上式积分指数因子为常数, 代入公式得

$$z^{-1} = -\int (-e^x)\,dx + C = e^x + C \Rightarrow z = \frac{1}{C + e^x}$$

代回 $y = z + \bar{y}$, 得到通解

$$y = e^x + \frac{1}{C + e^x}$$

ii. $x^2(y'+y^2)=2$, 已知特解 $\bar{y}(x)=-\dfrac{1}{x}$。

将方程写成标准形,

$$y'=-y^2+\frac{2}{x^2}$$

令 $y=z+\bar{y}=z-\dfrac{1}{x}$, 代入并化简可得关于 z 的方程

$$z'-\frac{2}{x}z=-z^2,$$

是阶数 $n=2$ 的伯努利方程, 由公式计算得

$$z^{-1}=e^{\int\frac{2}{x}\,dx}\left(\int e^{-\int\frac{2}{x}\,dx}\,dx+C\right)=\frac{1}{x^2}\left(\int x^2\,dx+C\right)=\frac{1}{x^2}\left(\frac{x^3}{3}+C\right)$$

即

$$z=\frac{3x^2}{x^3+3C}$$

代回 $y=z-\frac{1}{x}$, 化为

$$y=\frac{3x^2}{x^3+3C}-\frac{1}{x}=\frac{2x^3-3C}{x(3x^3+3C)}.$$

令常数 $C_1=3C$,

$$xy=\frac{2x^3-C_1}{3x^3+C_1}$$

44. 求解

$$x^3-\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}(y-2)$$

发现此为一黎卡提方程, 观察得 $y_1=x^2$ 是一特解。设 $y=x^2+\dfrac{1}{u}$, 则 $\dfrac{dy}{dx}=2x-\dfrac{1}{u^2}\dfrac{du}{dx}$, 原方程给出

$$x^3-\left(2x-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dx}\right)=x(x^2-2)+\frac{2(x^2-1)}{xu}+\frac{1}{xu^2}$$

再化简得一阶线性方程

$$\frac{du}{dx}-\left(2x-\frac{2}{x}\right)u=\frac{1}{x}$$

积分因子为

$$I(x)=\exp\left(\int-\left(2x-\frac{2}{x}\right)\,dx\right)=\exp\left(-x^2+2\ln|x|\right)=x^2e^{-x^2}$$

所以

$$u=\frac{e^{-x^2}}{x^2}\left(\int xe^{-x^2}+C_1\right)=\frac{C_1e^{x^2}-\frac{1}{2}}{x^2}$$

回代 $y=x^2+\dfrac{1}{u}$ 得

$$y=x^2+\frac{x^2}{C_1e^{x^2}-\frac{1}{2}}=x^2\frac{C_1e^{x^2}+\frac{1}{2}}{C_1e^{x^2}-\frac{1}{2}}.$$

令 $C_2=2C_1$, 则等价地写成

$$y=x^2\frac{C_2e^{x^2}+1}{C_2e^{x^2}-1}$$

45. 考虑柯西-欧拉方程 (Cauchy-Euler Equation)

$$ax^2y''+bxy'+cy=0,\quad x>0,$$

一般解法为作变换 $x=e^t$ 或 $t=\ln x$, 则原方程变为常系数方程

$$az''(t)+(b-a)z'(t)+cz(t)=0,$$

解得 $z(t)$ 后代回 $y(x)=z(\ln x)$。据此, 求解

(a) $x^2y''-3xy'+4y=0$

方程为 $x^2y''-3xy'+4y=0$, 所以 $a=1,b=-3,c=4$, 对应 z 方程为

$$z''-4z'+4z=0$$

特征方程为

$$r^2-4r+4=(r-2)^2=0\Rightarrow r=2$$

因此解得

$$z(t)=C_1e^{2t}+C_2te^{2t}\Rightarrow y(x)=z(\ln x)=C_1x^2+C_2x^2\ln x$$

(b) $x^2y''-xy'-35y=0$

方程为 $x^2y''-xy'-35y=0$, 所以 $a=1,b=-1,c=-35$。对应 z 方程

$$z''+(b-a)z'+cz=z''+(-1-1)z'-35z=z''-2z'-35z=0$$

其中特征方程为

$$r^2-2r-35=(r-7)(r+5)=0\Rightarrow r_1=7,r_2=-5$$

因此通解为

$$z(t) = C_1e^{7t} + C_2e^{-5t} \Rightarrow y(x) = z(\ln x) = C_1x^7 + C_2x^{-5}$$

46. 解非齐次欧拉方程

$$x^3y''' + x^2y'' - xy' = 24x\ln x, \quad x > 0$$

令 $x = e^t \Rightarrow t = \ln x$, 由链导法,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dt}\right) = -\frac{dy}{x^2dt} + \frac{1}{x}\frac{d^2y}{dt^2}\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

$$\begin{aligned}\frac{d^3y}{dx^3} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)\right) = -\frac{2}{x^3}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) + \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^3y}{dt^3}\cdot\frac{1}{x} - \frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{1}{x}\right)\\ &= \frac{1}{x^3}\frac{d^3y}{dt^3} - \frac{3}{x^3}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{2}{x^3}\frac{dy}{dt}\end{aligned}$$

代入方程得到

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} - y = 24e^tt$$

齐次方程 $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$ 的特征方程

$$r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0 \Rightarrow r = 1$$

故齐次解为

$$y_c = C_1e^t + C_2te^t + C_3t^2e^t$$

设特解为

$$y_p = t^3(At + B)e^t = (At^4 + Bt^3)e^t$$

代入方程解得

$$24At + 6B = 24t \Rightarrow A = 1, B = 0$$

因此通解为

$$y = t^4e^t + C_1e^t + C_2te^t + C_3t^2e^t$$

代回 $t = \ln x$, 原方程的解为

$$y = x(\ln x)^4 + C_1x + C_2x\ln x + C_3x(\ln x)^2$$

47. 以参数变换法解

$$y'' + 6y' + 9y = \frac{2e^{-4x}}{x^2+1}.$$

对应齐次方程通解为

$$y_c(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}$$

设特解为

$$y_p(x) = u_1(x)e^{-3x} + u_2(x)xe^{-3x}$$

其中 u_1, u_2 满足

$$\begin{bmatrix} e^{-3x} & xe^{-3x} \\ -3e^{-3x} & e^{-3x} - 3xe^{-3x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2e^{-4x}}{x^2+1} \end{bmatrix}$$

朗斯基行列式为

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{-3x} & xe^{-3x} \\ -3e^{-3x} & e^{-3x} - 3xe^{-3x} \end{vmatrix} = e^{-6x}$$

由克兰姆法则,

$$u_1' = \frac{-xe^{-3x} \cdot \frac{2e^{-4x}}{x^2+1}}{e^{-6x}} = -\frac{2x}{x^2+1} \Rightarrow u_1 = -\ln(1+x^2),$$

$$u_2' = \frac{e^{-3x} \cdot \frac{2e^{-4x}}{x^2+1}}{e^{-6x}} = \frac{2}{x^2+1} \Rightarrow u_2 = 2\tan^{-1} x.$$

因此特解为

$$y_p(x) = e^{-3x}\left(-\ln(1+x^2) + 2x\tan^{-1} x\right)$$

通解为

$$y(x) = e^{-3x}\left(C_1 + C_2 x + 2x\tan^{-1} x - \ln(1+x^2)\right)$$

48. 求解

$$y'' - 2y' + y = 4e^x x^3 \ln x, \quad x > 0$$

对应齐次方程的通解为

$$y_c(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x,$$

设特解为

$$y_p(x) = u_1(x)e^x + u_2(x)xe^x,$$

其中 u_1, u_2 满足

$$\begin{bmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (x+1)e^x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4e^x x^3 \ln x \end{bmatrix}.$$

两边同时除以 e^x 得

$$\begin{bmatrix} 1 & x \\ 1 & x+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4x^3 \ln x \end{bmatrix}.$$

朗斯基行列式为 $(x+1) - x = 1$, 由克兰姆法则,

$$u_1' = -x \cdot 4x^{-2} \ln x = -4x^{-2} \ln x, \quad u_2' = 4x^{-3} \ln x$$

于是

$$u_1 = -4 \int x^{-2} \ln x \, dx = \frac{4 \ln x}{x} - 4 \int \frac{1}{x^2} \, dx = \frac{4(\ln x + 1)}{x}$$
$$u_2 = 4 \int x^{-3} \ln x \, dx = -\frac{2 \ln x}{x^2} + 2 \int \frac{1}{x^3} \, dx = \frac{-2 \ln x - 1}{x^2}$$

因此特解为

$$y_p(x) = e^x u_1 + xe^x u_2 = e^x \left(\frac{4(\ln x + 1)}{x} + x \cdot \frac{-2 \ln x - 1}{x^2} \right) = e^x \frac{2 \ln x + 3}{x}$$

所以方程通解为

$$y(x) = e^x \left(C_1 + C_2 x + \frac{2 \ln x + 3}{x} \right)$$

49. 求解方程

$$y'' + 4y' + 4y = 15e^{-2x} \ln x + 25 \cos x, \quad x > 0$$

对应齐次方程的通解为

$$y_c(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$$

第一项非齐次 $f_1(x) = 15e^{-2x} \ln x$：设特解为

$$y_{p_1} = u_1(x) e^{-2x} + u_2(x) x e^{-2x}$$

其中 u_1, u_2 满足

$$\begin{bmatrix} e^{-2x} & xe^{-2x} \\ -2e^{-2x} & (1-2x)e^{-2x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 15e^{-2x} \ln x \end{bmatrix}$$

两边除以 e^{-2x} 得

$$\begin{bmatrix} 1 & x \\ -2 & 1-2x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 15\ln x \end{bmatrix}$$

解得

$$u_1' = -15x\ln x \Rightarrow u_1 = -15\int x\ln x\,dx = -\frac{15}{2}x^2\ln x + 15\int \frac{x}{2}\,dx = \frac{15}{4}x^2(-2\ln x + 1)$$

$$u_2' = 15\ln x \Rightarrow u_2 = 15\int \ln x\,dx = 15x(\ln x - 1)$$

因此

$$y_{p_1}(x) = e^{-2x}\left[\frac{15}{4}x^2(-2\ln x + 1) + 15x(\ln x - 1)\right] = \frac{15}{4}x^2(2\ln x - 3)e^{-2x}$$

第二项非齐次 $f_2(x) = 25\cos x$：设特解

$$y_{p_2}(x) = A\cos x + B\sin x$$

代入方程得

$$(3A + 4B)\cos x + (-4A + 3B)\sin x = 25\cos x$$

比较系数解得 $A = 3, B = 4$, 所以

$$y_{p_2}(x) = 3\cos x + 4\sin x$$

综上, 方程通解为

$$y(x) = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x} + \frac{15}{4}x^2(2\ln x - 3)e^{-2x} + 3\cos x + 4\sin x$$

50. 解

$$y''' - y'' + y' - y = e^{-x}\sin x$$

齐次方程

$$y''' - y'' + y' - y = 0$$

的特征方程为

$$(r-1)(r^2+1) = 0 \Rightarrow r = 1, \pm i$$

所以齐次解为

$$y_c(x) = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x$$

对于非齐次项 $e^{-x} \sin x$, 尝试特解

$$y_p(x) = e^{-x}(A \cos x + B \sin x)$$

则

$$y_p' = -e^{-x}((A+B)\sin x + (A-B)\cos x)$$

$$y_p'' = 2e^{-x}(A \sin x + B \cos x)$$

$$y_p''' = 2e^{-x}((B-A)\sin x + (A+B)\cos x)$$

代入原方程解得 $A = \frac{1}{5}, B = 0$, 于是

$$y_p(x) = -\frac{1}{5} e^{-x} \cos x$$

因此通解为

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x - \frac{1}{5} e^{-x} \cos x$$

51. 求解微分方程

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = \frac{2e^{-x}}{1+x^2}$$

齐次解为

$$y_c(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 x^2 e^{-x}$$

使用参数变换法, 设

$$y_p(x) = u_1(x) e^{-x} + u_2(x) x e^{-x} + u_3(x) x^2 e^{-x}$$

其中 u_1, u_2, u_3 满足

$$\begin{cases} e^{-x} u_1' + (x e^{-x}) u_2' + (x^2 e^{-x}) u_3' = 0 \\ (e^{-x})' u_1' + (x e^{-x})' u_2' + (x^2 e^{-x})' u_3' = 0 \\ (e^{-x})'' u_1' + (x e^{-x})'' u_2' + (x^2 e^{-x})'' u_3' = \dfrac{2e^{-x}}{1+x^2} \end{cases}$$

化简得

$$\begin{cases} u_1' + xu_2' + x^2u_3' = 0 \\ -u_1' + (1-x)u_2' + (2x-x^2)u_3' = 0 \\ u_1' + (-2+x)u_2' + (2-4x+x^2)u_3' = \dfrac{2}{1+x^2} \end{cases}$$

其中增广矩阵为

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & x & x^2 & 0 \\ -1 & 1-x & 2x-x^2 & 0 \\ 1 & -2+x & 2-4x+x^2 & \dfrac{2}{1+x^2} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & x & x^2 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{1}{1+x^2} \end{array}\right]$$

逐步解得

$$\begin{aligned} u_3' &= \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow u_3 = \tan^{-1} x \\ u_2' &= -2xu_3' = -\frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow u_2 = -\ln(1+x^2) \\ u_1' &= -xu_2' - x^2u_3' = \frac{x^2}{1+x^2} \Rightarrow u_1 = x - 2\tan^{-1} x \end{aligned}$$

于是特解为

$$y_p = e^{-x}\left[(2x - 2\tan^{-1} x) + (-\ln(1+x^2))x + (\tan^{-1} x)x^2\right]$$

整理得通解为

$$y(x) = e^{-x}\left[C_1 + C_2x + C_3x^2 + (x^2-2)\tan^{-1} x + x - x\ln(1+x^2)\right]$$

52. 解方程

$$y''' + y' = \sec x$$

齐次方程 $y''' + y' = 0$ 的特征方程为

$$r^3 + r = 0 \Rightarrow r = 0, \pm i$$

所以齐次解为

$$y_c = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x$$

使用参数变易法, 设特解为

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2 + u_3y_3$$

其中 u_1, u_2, u_3 满足

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sec x \end{bmatrix}$$

其中增广矩阵为

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \cos x & \sin x & 0 \\ 0 & -\sin x & \cos x & 0 \\ 0 & -\cos x & -\sin x & \sec x \end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \cos x & \sin x & 0 \\ 0 & -\sin x & \cos x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \sec x \end{array}\right]$$

于是

$$\begin{cases} u_1' = \sec x \\ u_2' = \dfrac{\cos x}{-\sin x} u_3' = -1 \\ u_3' = \dfrac{\sin x}{\cos x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = |\sec x + \tan x| \\ u_2 = -x \\ u_3 = \ln|\cos x| \end{cases}$$

因此通解为

$$y = |\sec x + \tan x| - x\cos x + \ln|\cos x|\sin x + C_1 + C_2\cos x + C_3 \sin x$$

53. 解联立微分方程式

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 \\ x_2' = 2x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

$$x_1' = x_1 + 2x_2 \tag{1}$$

$$x_2' = 2x_1 - 2x_2 \tag{2}$$

对 (1) 求导, 且由 (2),

$$x_1'' = x_1' + 2x_2' = x_1' + 2(2x_1 - 2x_2) = x_1' + 4x_1 - 4x_2 = x_1' + 4x_1 - 2(x_1' - x_1) = -x_1' + 6x_1$$

得关于 x_1 的二阶常微分方程, 因此 x_1 的通解为

$$x_1(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{2t}$$

由 (1),

$$x_2 = \frac{1}{2}(x_1' - x_1) = -2C_1 e^{-3t} + \frac{C_2}{2} e^{2t}$$

最终将系统的通解写成向量形式:

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-3t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} e^{2t}$$

54. 求解

$$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$$

设系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 首先求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 通过解

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)^2(\lambda-2)$$

因此特征值为

$$\lambda_1 = -1 \ (m_1 = 2), \quad \lambda_2 = 2$$

接着求特征向量。对 $\lambda_1 = -1$, 解

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{I}_3)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \implies \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

得到方程

$$v_1 + v_2 + v_3 = 0$$

有两个自由变量, 设 $v_2 = r, v_3 = s$, 则 $v_1 = -r - s$, 因此特征空间由两个线性无关向量张成:

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

对应解为

$$\boldsymbol{x}_1(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

对 $\lambda_2 = 2$, 解

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_2 \boldsymbol{I}_3)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \implies \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

化简矩阵得到行阶梯形:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{2}R_1 + R_2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to \frac{2}{3}R_3]{R_3 \to R_2 + R_3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

秩为 2, 设 $v_3 = r$, 则 $v_1 = v_2 = r$, 得到特征向量

$$\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

对应解为

$$\boldsymbol{x}_3(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

因此系统的一般解为

$$\boldsymbol{x}(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

55. 求解

$$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$$

设系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$。首先求特征值，通过解

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}_3) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 0 & 2 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ -2 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+2)(\lambda^2+2\lambda+3)$$

得特征值

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}i, \quad \lambda_3 = -2$$

接着求对应特征向量。对 $\lambda_1 = -1 + \sqrt{2}i$, 解

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{I}_3)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \implies \begin{pmatrix} -2-\sqrt{2}i & 0 & 2 \\ 1 & -\sqrt{2}i & 0 \\ -2 & -1 & 1-\sqrt{2}i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

化为行阶梯形矩阵

$$\begin{pmatrix} -2-\sqrt{2}i & 0 & 2 \\ 1 & -\sqrt{2}i & 0 \\ -2 & -1 & 1-\sqrt{2}i \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to (-2+\sqrt{2}i)R_1/6} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3}(-2+\sqrt{2}i) \\ 1 & -\sqrt{2}i & 0 \\ -2 & -1 & 1-\sqrt{2}i \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 + 2R_1]{R_1 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3}(-2+\sqrt{2}i) \\ 0 & -\sqrt{2}i & \frac{1}{3}(2-\sqrt{2}i) \\ 0 & -1 & -\frac{1}{3}(1+\sqrt{2}i) \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to -R_3]{R_2 \to R_2/(\sqrt{2}i)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3}(-2+\sqrt{2}i) \\ 0 & 1 & \frac{1}{3}(1+\sqrt{2}i) \\ 0 & 1 & \frac{1}{3}(1+\sqrt{2}i) \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3}(-2+\sqrt{2}i) \\ 0 & 1 & \frac{1}{3}(1+\sqrt{2}i) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

令 $v_3 = r$ 为自由变量，则

$$\boldsymbol{v} = r \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}(-2+\sqrt{2}i) \\ -\frac{1}{3}(1+\sqrt{2}i) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

取 $r = -3$ 并利用欧拉公式分离实部和虚部

$$\begin{aligned} e^{(-1+\sqrt{2}i)t} \begin{pmatrix} -2+\sqrt{2}i \\ 1+\sqrt{2}i \\ -3 \end{pmatrix} &= e^{-t}(\cos(\sqrt{2}t) + i\sin(\sqrt{2}t)) \begin{pmatrix} -2+\sqrt{2}i \\ 1+\sqrt{2}i \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= e^{-t} \begin{pmatrix} -2\cos(\sqrt{2}t) - \sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) + i(\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t) - 2\sin(\sqrt{2}t)) \\ \cos(\sqrt{2}t) - \sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) + i(\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t) + \sin(\sqrt{2}t)) \\ -3\cos(\sqrt{2}t) - 3i\sin(\sqrt{2}t) \end{pmatrix} \\ &= e^{-t} \begin{pmatrix} -2\cos(\sqrt{2}t) - \sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) \\ \cos(\sqrt{2}t) - \sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) \\ -3\cos(\sqrt{2}t) \end{pmatrix} + ie^{-t} \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t) - 2\sin(\sqrt{2}t) \\ \sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t) + \sin(\sqrt{2}t) \\ -3\sin(\sqrt{2}t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

得到两个线性无关解

$$\boldsymbol{x}_1(t)=e^{-t}\begin{pmatrix}-2\cos(\sqrt{2}t)-\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t)\\ \cos(\sqrt{2}t)-\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t)\\ -3\cos(\sqrt{2}t)\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}_2(t)=e^{-t}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t)-2\sin(\sqrt{2}t)\\ \sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t)+\sin(\sqrt{2}t)\\ -3\sin(\sqrt{2}t)\end{pmatrix}$$

对 $\lambda_3=-2$，解

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_3\boldsymbol{I}_3)\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}\implies\begin{pmatrix}-1&0&2\\1&1&0\\-2&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

化简矩阵得到

$$\begin{pmatrix}-1&0&2\\1&1&0\\-2&-1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3-2R_1]{R_2\to R_2+R_1}\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&1&2\\0&-1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3+R_2}\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

令 $v_3=s$，得到特征向量

$$\boldsymbol{v}_3=s\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

对应解为

$$\boldsymbol{x}_3(t)=e^{-2t}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

因此系统的一般解为

$$\boldsymbol{x}(t)=c_1e^{-t}\begin{pmatrix}-2\cos(\sqrt{2}t)-\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t)\\ \cos(\sqrt{2}t)-\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t)\\ -3\cos(\sqrt{2}t)\end{pmatrix}+c_2e^{-t}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t)-2\sin(\sqrt{2}t)\\ \sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t)+\sin(\sqrt{2}t)\\ -3\sin(\sqrt{2}t)\end{pmatrix}$$
$$+c_3e^{-2t}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$$

56. 判断矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&4\end{pmatrix}$$

是否缺陷，并求系统 $\boldsymbol{x}'(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)$ 的通解。

首先求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值：

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}_3)=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&0\\0&1-\lambda&1\\0&0&4-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2(4-\lambda)$$

因此特征值为 $\lambda_1=4,\lambda_2=1\ (m_2=2)$。对于 $\lambda_1=4$, 解

$$(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I}_3)\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}\implies\begin{pmatrix}-3&1&0\\0&-3&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

得到特征向量及其对应解

$$\boldsymbol{v}=r\begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix},\quad r\neq 0,\quad \boldsymbol{x}_1(t)=e^{4t}\begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix}$$

对于 $\lambda_2=1$, 解

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}_3)\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}\implies\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

得到特征向量及其对应解

$$\boldsymbol{v}=s\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad s\neq 0,\quad \boldsymbol{x}_2(t)=e^{t}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

总共有两个线性无关特征向量，因此矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是缺陷的。为求第三个线性无关解，设

$$\boldsymbol{x}_3(t)=(\boldsymbol{v}t+\boldsymbol{w})e^t$$

其中 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 满足

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}_3)\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0},\quad(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}_3)\boldsymbol{w}=\boldsymbol{v}\implies(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}_3)^2\boldsymbol{w}=\boldsymbol{0}$$

解得

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}_3)^2\boldsymbol{w}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&3\\0&0&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\implies w_3=0$$

自由选择 w_1, w_2，取

$$\boldsymbol{w}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}_3)\boldsymbol{w}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

因此得到第三个解

$$\boldsymbol{x}_3(t)=(\boldsymbol{v}t+\boldsymbol{w})e^t=e^t\begin{pmatrix}t\\1\\0\end{pmatrix}$$

最终通解为

$$\boldsymbol{x}(t)=c_1e^{4t}\begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix}+c_2e^t\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c_3e^t\begin{pmatrix}t\\1\\0\end{pmatrix}$$

57. 求解非齐次系统

$$\boldsymbol{x}'(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{F}(t),$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1\\-9&6\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{F}(t)=\begin{pmatrix}0\\t\end{pmatrix}.$$

首先求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量：

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}_2)=\begin{vmatrix}-\lambda&1\\-9&6-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(6-\lambda)+9=(\lambda-3)^2$$

因此特征值为 $\lambda=3$ $(m=2)$, 对 $\lambda=3$, 解

$$(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I}_2)\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}-3&1\\-9&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

得到特征向量

$$\boldsymbol{v}=r\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\quad r\neq 0$$

对应解为

$$\boldsymbol{x}_1(t) = e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是缺陷的，第二个线性无关解取形如

$$\boldsymbol{x}_2(t) = (\boldsymbol{v}t + \boldsymbol{w})e^{3t}$$

其中 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 满足

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}_2)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}, \quad (\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}_2)\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} \implies (\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}_2)^2\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$$

解得

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

取

$$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{I}_2)\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

于是第二个解为

$$\boldsymbol{x}_2(t) = (\boldsymbol{v}t + \boldsymbol{w})e^{3t} = \begin{pmatrix} t \\ 3t+1 \end{pmatrix}e^{3t}$$

因此齐次系统通解为

$$\boldsymbol{x}_c(t) = c_1e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2e^{3t}\begin{pmatrix} t \\ 3t+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} & te^{3t} \\ 3e^{3t} & (3t+1)e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

记基础矩阵为 $\boldsymbol{X}$，寻找特解

$$\boldsymbol{x}_p(t) = \boldsymbol{X}\boldsymbol{u} \implies \boldsymbol{X}\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{F} \implies \boldsymbol{u}' = \boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{F}$$

计算得到

$$\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{F} = e^{-3t}\begin{pmatrix} 3t+1 & -t \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} = e^{-3t}\begin{pmatrix} -t^2 \\ t \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{u} = \int \boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{F}\,dt = \begin{pmatrix} \int -t^2e^{-3t}dt \\ \int te^{-3t}dt \end{pmatrix} = e^{-3t}\begin{pmatrix} \frac{1}{3}t^2 + \frac{2}{9}t + \frac{2}{27} \\ -\frac{1}{3}t - \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

于是得到特解

$$\boldsymbol{x}_p(t) = \boldsymbol{X}\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 3 & 3t+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3}t^2 + \frac{2}{9}t + \frac{2}{27} \\ -\frac{1}{3}t - \frac{1}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9}t + \frac{2}{27} \\ \frac{1}{9} \end{pmatrix}.$$

最终非齐次系统通解为

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_p(t) + \boldsymbol{x}_c(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{9}t + \frac{2}{27} \\ \frac{1}{9} \end{pmatrix} + c_1e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2e^{3t}\begin{pmatrix} t \\ 3t+1 \end{pmatrix}.$$

参考出处

- Arts of Problem Solving (AoPS): Contest Collections
- Brilliant (Kudos to the unmonetized version in the past)
- International Mathematics Competition (IMC) for University Students
- Missouri Collegiate Mathematics Competition
- American Mathematics Competition 10
- University of Waterloo CEMC - Euclid, Fermat, Cayley, Hypatia, Galois
- Lehigh University High School Math Contest
- The USSR Olympiad Problem Book: Selected Problems and Theorems of Elementary Mathematics
- LetsSolveMathProblems - Weekly Math Challenges
- Maths 505 - Differential Equations
- Michael Penn
- TRML
- MadasMaths
- 中国复旦大学往年试题
- 雪隆森中学华罗庚杯数学比赛
- 厦门大学马来西亚分校-陈景润杯中学数学竞赛
- 微积分福音
- 线代启示录
- 福气老师
- 指考历届试题
- 统测历届试题与解答
- 印度人的作业
- 北京高考在线
- 朱式幸福教甄
- 普通型高级中学数学科能力竞赛 (决赛)
- 2014-2024 全国中学生数学竞赛联赛试题及答案汇总
- 如此醉的图书馆
- 菁优网
- 08 高考文科试题分类圆锥曲线
- 08 高考文科试题分类数列
- 福伦的数学笔记

总题数: 1431