

2025 年循人中学高三期末考兼统考预试

高中组

高级数学 (III)

(SC007)

# 训练集

采题: 李冬恒

January 21, 2026

版权所有 © 2026 李冬恒

# 前言

此训练集的雏形要追溯到 2019 年,依稀记得为当时的备赛爬了大量的 AMC 历届考题,创了“AMC 10 精选”的文档,其中我认为是属于统考范围的难题,便收录于另一个文档。

尘封已久,直到今年 5 月,我在整理电脑资料时偶然翻出,看着当年的内容,心想:读了一个数学系,难免觉得发展空间实属不少。在这几个月内,我随性地在网络上寻找、采集、整理更有趣(恶心)、更值得深思(烧脑)的题目,于是诞生了——高级数学 (III) 训练集。

起初,我并没想过要为每一题整理出解析,但发现到不少当年的题目只附答案没附解法。可惜的是,我的脑袋算是停止运作了一年,发现有一些题目对于现在的我实在是难以下咽。好吧,此乃下下策,但我决定用 LaTeX 开始动手为每一题补上解法、重写排版、增加新的内容。也好,既是备忘录,也是为了防止未来的我看到这些题目时会再次怀疑人生:「咦?是不是百尺竿头,更蠢一步?」

依据统考范围,我把训练集大致分为代数、组合数学、几何及微积分。若你想自行动手尝试,可以在 preamble 中将 `\printanswers` 这行注释掉。

绝大部分解法都由官方或我提供,只有某些是 ChatGpt 生成后由我再校对,之中一定会有纰漏,欢迎批评指正,也希望这份训练集能助你一路披荆斩棘、越战越勇!

——冬恒

# 目录



## 代数

一元二次方程、多项式 .....	4
因式定理、余式定理 .....	32
根式、绝对值 .....	45
指数与对数 .....	55
方程组 .....	71
取整 .....	103
函数 .....	120
不等式 .....	144
数列与级数 .....	199
二项展开式 .....	262
泰勒展开式 .....	288
矩阵 .....	305
行列式 .....	323
复数 .....	347
数学归纳法 .....	383

## 组合数学

排列与组合 .....	420
概率、期望值 .....	446
统计 .....	473

## 几何

解三角形 .....	478
三角函数 .....	589
反三角函数 .....	650
平面向量 .....	661
直角坐标 .....	672
圆锥曲线 .....	699
坐标变换 .....	775
轨迹方程式、参数方程式 .....	781
极坐标 .....	812
立体几何、空间向量 .....	828

## 微积分

极限 .....	882
微分 .....	906
积分 .....	932
微分方程 .....	1094

总题数: 1518

# 代数

# 一元二次方程、多项式

1. 已知方程

$$x^2 - mx - m + 3 = 0$$

的两根满足下列条件, 求  $m$  的取值范围:

(a) 一根大于 1, 另一根小于 1

设  $f(x) = x^2 - mx - m + 3$ , 所求即

$$f(1) = 1 - m - m + 3 < 0 \Rightarrow m > 2$$

(b) 一根小于 0, 另一根大于 2

即

$$\begin{cases} f(0) = -m + 3 < 0 \\ f(2) = 4 - 2m - m + 3 < 0 \end{cases} \Rightarrow m > 3$$

(c) 一根在 0 与 1 之间, 另一根在 1 与 2 之间

即

$$\begin{cases} f(0) = -m + 3 > 0 \\ f(1) = 1 - m - m + 3 < 0 \\ f(2) = 4 - 2m - m + 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow 2 < m < \frac{7}{3}$$

(d) 两根都在 -4 与 0 之间

即

$$\begin{cases} f(-4) = 16 + 4m - m + 3 > 0 \\ f(0) = -m + 3 > 0 \\ -4 < \frac{m}{2} < 0 \\ f\left(\frac{m}{2}\right) = \frac{m^2}{4} - \frac{m^2}{2} - m + 3 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{19}{3} < m < -6$$

(e) 两根都大于  $-5$

即

$$\begin{cases} f(-5) = 25 + 5m - m + 3 > 0 \\ \frac{m}{2} > -5 \\ f\left(\frac{m}{2}\right) = \frac{m^2}{4} - \frac{m^2}{2} - m + 3 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow -7 < m \leq -6 \quad \text{或} \quad m \geq 2$$

(f) 有且仅有一根在  $0$  与  $2$  之间

即

$$\begin{cases} 0 < \frac{m}{2} < 2, \\ f\left(\frac{m}{2}\right) = \frac{m^2}{4} - \frac{m^2}{2} - m + 3 = 0 \end{cases}$$

或

$$f(0) \cdot f(2) = (-m + 3)(4 - 2m - m + 3) < 0$$

解得

$$m = 2 \quad \text{或} \quad \frac{7}{3} < m < 3$$

2. 已知  $y = x^3 - x^2 + 3x - 4$  与  $y = ax^2 - x - 4$  恰好相交于两点, 求  $a$  的可能值。

联立方程得

$$x[x^2 - (a+1)x + 4] = 0$$

已知两线交于恰好两点, 其中一点为  $(0, 4)$ , 则意味

$$x^2 - (a+1)x + 4 = 0$$

有重根, 其判别式为零:

$$[-(a+1)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$$

解得  $a = 3, -5$

3. 已知由  $f(x) = -x^2 + 4x + 1$  和  $g(x) = -x + 5$  所围成的封闭区域  $A$ , 若作一直线  $L$  垂直于  $x$  轴, 分别与封闭区域  $A$  的边界交于  $P, Q$  两点, 求在封闭区域内的  $\overline{PQ}$  长的最大值为多少?

令  $f(x) = g(x)$ , 则

$$-x^2 + 4x + 1 = -x + 5 \Rightarrow (x-1)(x-4) = 0 \Rightarrow x = 1, 4$$

所以封闭区域的  $x$  范围为  $[1, 4]$ , 而  $\overline{PQ}$  即

$$f(x) - g(x) = (-x^2 + 4x + 1) - (-x + 5) = -x^2 + 5x - 4 = -\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$$

在  $x = \frac{5}{2}$  时有最大值  $\frac{9}{4}$

4. 已知  $k$  为有理数, 且使得方程式  $kx^2 + (k-1)x + (k+1) = 0$  只有整数解, 求  $k$  的所有可能值。

情况一:  $k = 0$ , 则原方程式为

$$-x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \in \mathbb{Z}$$

情况二:  $k \neq 0$ , 原方程式变为

$$k(x^2 + x + 1) = x - 1 \Rightarrow k = \frac{x-1}{x^2+x+1} \quad (1)$$

设  $\alpha, \beta$  为  $kx^2 + (k-1)x + (k+1) = 0$  的两根, 则

$$\alpha + \beta = \frac{1-k}{k} = \frac{1}{k} - 1$$

将 (1) 代入上式,

$$\alpha + \beta = \frac{x^2 + x + 1}{x-1} - 1 = x + 1 + \frac{3}{x-1} \in \mathbb{Z}$$

解得

$$x-1 = \pm 1, \pm 3 \Rightarrow \begin{cases} x=2, 4 \Rightarrow k = \frac{1}{7} \\ x=0, -2 \Rightarrow k = -1 \end{cases}$$

故  $k$  的所有可能值为  $-1, 0, \frac{1}{7}$

5. 若抛物线  $y = mx^2 - 1$  上必存在相异两点对称于直线  $x + y = 0$ , 求  $m$  的范围。

设  $A, B$  在抛物线  $\Gamma: y = mx^2 - 1$  上且对称于直线  $L_1: x + y = 0$ , 则  $A, B$  同在直线

$$L_2: y = x + k$$

上, 其中  $L_1 \perp L_2$ , 抛物线与  $L_2$  联立得

$$mx^2 - x - 1 - k = 0 \quad (1)$$

设 (1) 的解为  $a, b$ , 则  $A(a, a + k), B(b, b + k)$  的中点  $C\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2} + k\right)$  在  $L_1$  上, 得

$$\frac{a+b}{2} + \frac{a+b}{2} + k = 0 \Rightarrow k = -(a+b)$$

由韦达定理,

$$k = -(a+b) = -\frac{1}{m}$$

且两实根相异, 则判别式大于 0:

$$\Delta = (-1)^2 - 4m\left(-\frac{1}{m} + 1\right) > 0 \Rightarrow m > \frac{3}{4}$$

6. 实系数二次多项方程  $f(x) = 0$  有一根为 2, 且方程  $f(f(x)) = 0$  恰只有一实根为 5, 求  $f(0)$ 。

设

$$f(x) = a(x-2)(x-b)$$

则

$$\begin{aligned} g(x) = f(f(x)) &= a[a(x-2)(x-b)-2][a(x-2)(x-b)-b] \\ &= a^3 \left( x^2 - (b+2)x + 2b - \frac{2}{a} \right) \left( x^2 - (b+2)x + 2b - \frac{b}{a} \right) \equiv a^3 f_1(x) f_2(x) \end{aligned}$$

若  $f_1 = (x-5)^2$ ,  $f_2$  的判别式  $< 0$ , 可得

$$a = -\frac{2}{9}, b = 8$$

若  $f_2 = (x-5)^2$ ,  $f_1$  的判别式  $< 0$ , 可得

$$a = -\frac{8}{9}, b = 8$$

但  $f_1$  判别式  $> 0$ , 故舍去; 因此

$$f(0) = 2ab = 2 \cdot \left(-\frac{2}{9}\right) \cdot 8 = -\frac{32}{9}$$

7. 求所有实数  $c$ , 使得  $f(x) = x^2 + 4x + c$  满足  $f(f(x))$  恰好有三个相异实根。

若  $f$  的根为重根, 则  $f \circ f$  至多只有两个相异根, 因此  $f$  必须有两个相异根。设  $r$  为其中一根使得  $f(x) = r$  有重根, 解

$$x^2 + 4x + c - r = (x + 2)^2$$

得  $r = c - 4$  是  $f$  的根, 故

$$(c - 4)^2 + 4(c - 4) + c = 0 \Rightarrow c = 0 \text{ 或 } c = 3.$$

当  $c = 0$ , 解  $x^2 + 4x = 0$  及  $x^2 + 4x = -4$  得

$$x = 0, -4, -2,$$

当  $c = 3$ , 解  $x^2 + 4x + 3 = -3$  及  $x^2 + 4x + 3 = -1$ , 发现其中

$$x^2 + 4x + 6$$

判别式为负, 故唯一满足条件的  $c$  为 0。

8. 求非零实数三元组  $(a, b, c)$ , 使得

$$(x^2 + 2ax + b)^2 + 2a(x^2 + 2ax + b) - b = (x - c)^4$$

是多项式恒等式。

设

$$P(x) = x^2 + 2ax + b, Q(x) = x^2 + 2ax - b,$$

且  $Q(P(x))$  的根满足  $P(x) = r_1$  或  $P(x) = r_2$ , 其中  $r_1, r_2$  是  $Q$  的根。欲使  $Q(P(x))$  只有一个四重根,  $Q$  必须有重根, 因此判别式为

$$4a^2 + 4b = 0 \Rightarrow b = -a^2,$$

其中根为  $-a$ , 此时  $P(x) = -a$  也必须有重根, 因此  $P(x) + a = x^2 + 2ax + b + a = 0$  的判别式为

$$4a^2 - 4(a + b) = 0.$$

代入  $b = -a^2$  解得

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = -\frac{1}{4}.$$

$c$  是  $P(x) + a = 0$  的解, 即  $c = -a = -\frac{1}{2}$ , 所以三元组为

$$(a, b, c) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$$

9. 求所有实数  $k$ , 使方程

$$4x^2 + 4(2 - k)x - k^2 = 0$$

有两个实数解  $x_1, x_2$  满足  $|x_1| = 2 + |x_2|$ 。

由韦达定理,

$$x_1 + x_2 = k - 2, \quad x_1 x_2 = -\frac{k^2}{4} \leq 0$$

条件  $|x_1| = 2 + |x_2|$  等价于

$$4 = (|x_1| - |x_2|)^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2|x_1 x_2| = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + 2x_1 x_2$$

解得

$$k = 0 \text{ 或 } 4$$

10. 解方程

$$(x+1)(x+2)(x+3)^2(x+4)(x+5) = 360$$

排版后有

$$(x+1)(x+5)(x+2)(x+4)(x+3)(x+3) = 360$$

$$(x^2 + 6x + 5)(x^2 + 6x + 8)(x^2 + 6x + 9) = 360$$

设  $y = x^2 + 6x$ , 变为

$$(y+5)(y+8)(y+9) = 360$$

$$y(y^2 + 22y + 157) = 0$$

其中  $y^2 + 22y + 157 = 0$  无实数解, 解  $x^2 + 6x = 0$  可得

$$x = 0, -6$$

11. 解方程

$$9x^4 - 24x^3 - 2x^2 - 24x + 9 = 0 \quad x \in \mathbb{R}$$

此方程为倒数方程式, 将原方程写成

$$\begin{aligned} 9x^2 - 24x - 2 - \frac{24}{x} + \frac{9}{x^2} &= 0 \\ 9\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 24\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2 &= 0 \end{aligned}$$

设  $y = x + \frac{1}{x}$ , 则

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$

代入方程得

$$9(y^2 - 2) - 24y - 2 = 0 \Rightarrow y = \frac{10}{3}, -\frac{2}{3}$$

当  $x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3}$ , 解得

$$x = \frac{1}{3}, \quad x = 3$$

当  $x + \frac{1}{x} = -\frac{2}{3}$ , 方程

$$3x^2 + 2x + 3 = 0$$

的判别式  $2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = -32 < 0$ , 故无实数解, 因此原方程式的实根为

$$x = \frac{1}{3}, \quad x = 3$$

12. 解

$$\frac{x^2 + 16x + 54}{x^2 + 11x + 35} = \frac{x^2 + 13x + 35}{x^2 + 14x + 54}$$

使得原式交叉相乘时能顺利平方差, 写成

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 15x + 54 + x}{x^2 + 12x + 35 - x} &= \frac{x^2 + 12x + 35 + x}{x^2 + 15x + 54 - x} \\ (x^2 + 15x + 54)^2 - x^2 &= (x^2 + 12x + 35)^2 - x^2 \end{aligned}$$

$$(x^2 + 15x + 54)^2 - (x^2 + 12x + 35)^2 = 0$$

再平方差得

$$(3x + 19)(2x^2 + 27x + 89) = 0$$

经检验, 原方程的解为  $x = -\frac{19}{3}, \frac{-27 \pm \sqrt{17}}{4}$

13. 解

$$(x+1)^5 + (x+1)^4(x-1) + (x+1)^3(x-1)^2 + (x+1)^2(x-1)^3 + (x+1)(x-1)^4 + (x-1)^5 = 0$$

其中  $x \in \mathbb{C}$ 。

利用恒等式

$$\frac{a^6 - b^6}{a - b} = a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5$$

则原式可写为

$$\frac{(x+1)^6 - (x-1)^6}{(x+1) - (x-1)} = 0(x+1)^6 - (x-1)^6 = 0$$

展开并化简得

$$x(3x^2 + 1)(x^2 + 3) = 0$$

解得

$$x = 0, \quad x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}i, \quad x = \pm \sqrt{3}i$$

14. 已知  $\alpha, \beta$  是方程

$$x^2 + (m-2)x + 1 = 0$$

的根, 求

$$(1 + m\alpha + \alpha^2)(1 + m\beta + \beta^2).$$

由于  $\alpha, \beta$  是方程

$$x^2 + mx - 2x + 1 = 0$$

的根, 故满足

$$\alpha^2 + m\alpha + 1 = 2\alpha, \quad \beta^2 + m\beta + 1 = 2\beta$$

于是

$$(1 + m\alpha + \alpha^2)(1 + m\beta + \beta^2) = (2\alpha)(2\beta) = 4\alpha\beta$$

由韦达定理,  $\alpha\beta = 1$ , 因此

$$(1 + m\alpha + \alpha^2)(1 + m\beta + \beta^2) = 4 \cdot 1 = 4$$

15. 若三次多项式  $x^3 + 3x - 2 = 0$  的根为  $a, b, c$ , 求以  $(a-b)^2, (b-c)^2, (c-a)^2$  为根且首项系数为 1 的三次多项式。

由韦达定理,

$$a + b + c = 0, \quad ab + bc + ca = 3, \quad abc = 2.$$

且有

$$a^3 + 3a = b^3 + 3b = c^3 + 3c = 2.$$

因此

$$a^3 - b^3 + 3(a - b) = 0 \Rightarrow (a - b)(a^2 + ab + b^2 + 3) = 0 \Rightarrow a^2 + ab + b^2 = -3$$

于是

$$(a - b)^2 = -3 - 3ab = -3(ab + 1)$$

同理,

$$(b - c)^2 = -3(bc + 1), \quad (c - a)^2 = -3(ca + 1)$$

故

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = -3(3 + ab + bc + ca) = -18$$

$$\begin{aligned} & (a - b)^2(b - c)^2 + (b - c)^2(c - a)^2 + (c - a)^2(a - b)^2 \\ &= 9((ab + 1)(bc + 1) + (bc + 1)(ca + 1) + (ca + 1)(ab + 1)) \\ &= 9(2(a + b + c) + 2(ab + bc + ca) + 3) = 81 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a - b)^2(b - c)^2(c - a)^2 &= -27(ab + 1)(bc + 1)(ca + 1) \\ &= -27(abc(a + b + c) + (abc)^2 + ab + bc + ca + 1) = -216 \end{aligned}$$

所求三次多项式为

$$x^3 + 18x^2 + 81x + 216$$

16. 设  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , 证明方程式

$$\frac{b+c}{x-a} + \frac{c+a}{x-b} + \frac{a+b}{x-c} = 3$$

的根都是实根。

有

$$\begin{aligned} & \frac{b+c}{x-a} + \frac{c+a}{x-b} + \frac{a+b}{x-c} = 3 \\ & 1 - \frac{b+c}{x-a} + 1 - \frac{c+a}{x-b} + 1 - \frac{a+b}{x-c} = 0 \\ & \frac{x-a-b-c}{x-a} + \frac{x-a-b-c}{x-b} + \frac{x-a-b-c}{x-c} = 0 \\ & (x-a-b-c) \left( \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} \right) = 0 \\ & (x-a-b-c) \frac{x^2 - (b+c)x + bc + x^2 - (a+c)x + ac + x^2 - (a+b)x + ab}{(x-a)(x-b)(x-c)} = 0 \\ & (x-a-b-c) (3x^2 - 2(a+b+c)x + ab + bc + ca) = 0 \end{aligned}$$

故方程式

$$\frac{b+c}{x-a} + \frac{c+a}{x-b} + \frac{a+b}{x-c} = 3$$

有一实根  $x = a + b + c$ , 现探讨另两根, 方程式

$$3x^2 - 2(a+b+c)x + ab + bc + ca = 0.$$

的判别式为

$$\Delta = 4(a+b+c)^2 - 12(ab+bc+ca) = 4(a^2+b^2+c^2 - ab - bc - ca).$$

由 AM-GM 不等式,

$$ab + bc + ca \leq \frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{b^2 + c^2}{2} + \frac{c^2 + a^2}{2} = a^2 + b^2 + c^2.$$

故判别式为非负, 于是方程式  $3x^2 - 2(a+b+c)x + ab + bc + ca = 0$  的根都是实根, 得证原方程式的根都是实根。

17. 设  $f(x) = x^3 + 4x^2 + 8x + 16$ , 计算

$$f(x+7) - f(x+6) - f(x+5) + f(x+4) - f(x+3) + f(x+2) + f(x+1) - f(x).$$

设  $g(x) = f(x+1) - f(x)$ , 则

$$g(x) = 3x^2 + 10x + 12$$

同理设  $h(x) = g(x+2) - g(x) = 12x + 24$ , 原式可写成

$$g(x+6) - g(x+4) - g(x+2) + g(x) = h(x+4) - h(x) = 12(x+4) - 12x = 48$$

18. 已知关于  $x$  的方程  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$  的三个非零实数根成等比数列, 求  $a^3c - b^3$  的值。

设方程  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$  的三根为  $\frac{\alpha}{r}, \alpha, \alpha r, \alpha \neq 0$ , 由韦达定理,

$$-a = \frac{\alpha}{r} + \alpha + \alpha r = \alpha \left( \frac{1}{r} + 1 + r \right) \quad (1)$$

$$b = \frac{\alpha^2}{r} + \alpha^2 + \alpha^2 r = \alpha^2 \left( \frac{1}{r} + 1 + r \right) \quad (2)$$

$$-c = \alpha^3 \quad (3)$$

由 (1), (2) 得  $-\frac{b}{a} = \alpha$ , 代入 (3) 得

$$-c = -\frac{b^3}{a^3} \Rightarrow a^3c - b^3 = 0$$

19. 已知  $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 3$ , 求

$$x^{63} + x^{44} + x^{37} + x^{31} + x^{26} + x^9 + 6$$

的值。

由已知得

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3(1)(\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}$$

给出

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = 0$$

同理可得,

$$x^9 + \frac{1}{x^9} = 0, \quad x^{27} + \frac{1}{x^{27}} = 0$$

故

$$\begin{aligned} & x^{63} + x^{44} + x^{37} + x^{31} + x^{26} + x^9 + 6 \\ &= x^{36} \left( x^{27} + \frac{1}{x^{27}} \right) + x^{35} \left( x^9 + \frac{1}{x^9} \right) + x^{34} \left( x^3 + \frac{1}{x^3} \right) + 6 = 6 \end{aligned}$$

20. 已知实数  $x$  满足

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = 18$$

求

$$x^{11} + \frac{1}{x^{11}}.$$

设  $a = x + \frac{1}{x}$ , 则

$$a^3 - 3a = 18 \Rightarrow (a - 3)(a^2 + 3a + 6) = 0$$

所以

$$a = x + \frac{1}{x} = 3 \in \mathbb{R}$$

则

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 3^2 - 2 = 7$$

同理得

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = 47, \quad x^8 + \frac{1}{x^8} = 2207$$

于是

$$\left( x^2 + \frac{1}{x^2} \right) \left( x^3 + \frac{1}{x^3} \right) = x^5 + \frac{1}{x^5} + x + \frac{1}{x} = 126 \Rightarrow x^5 + \frac{1}{x^5} = 123$$

且

$$\left( x^3 + \frac{1}{x^3} \right) \left( x^8 + \frac{1}{x^8} \right) = x^{11} + \frac{1}{x^{11}} + x^5 + \frac{1}{x^5} = 39726$$

故

$$x^{11} + \frac{1}{x^{11}} = 39726 - 123 = 39603$$

21. 已知  $\alpha, \beta, \gamma$  是方程

$$x^3 - x - 1 = 0$$

的三根, 计算

$$\frac{1-\alpha}{1+\alpha} + \frac{1-\beta}{1+\beta} + \frac{1-\gamma}{1+\gamma}$$

的值。

由韦达定理,  $\alpha + \beta + \gamma = 0$ ,  $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -1$ ,  $\alpha\beta\gamma = 1$ , 故

$$\begin{aligned}\frac{1-\alpha}{1+\alpha} + \frac{1-\alpha}{1+\beta} + \frac{1-\gamma}{1+\gamma} &= \frac{2}{1+\alpha} + \frac{2}{1+\beta} + \frac{2}{1+\gamma} - 3 \\&= 2 \cdot \frac{(1+\alpha)(1+\beta) + (1+\beta)(1+\gamma) + (1+\gamma)(1+\alpha)}{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)} - 3 \\&= 2 \cdot \frac{3 + 2(\alpha + \beta + \gamma) + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{1 + \alpha + \beta + \gamma + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta\gamma} - 3 \\&= 2 \cdot \frac{3-1}{1-1+1} - 3 \\&= 1\end{aligned}$$

22. 已知  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  为  $x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1 = 0$  的四根, 试求

$$(\alpha^2 + \alpha + 1)(\beta^2 + \beta + 1)(\gamma^2 + \gamma + 1)(\delta^2 + \delta + 1)$$

的值。

$\alpha$  是方程

$$x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1 = 0$$

的根, 则

$$\alpha^4 + 2\alpha^3 + \alpha^2 + 2\alpha + 1 = 0 \Rightarrow (\alpha^2 + \alpha + 1)^2 = 2\alpha^2 \Rightarrow \alpha^2 + \alpha + 1 = \sqrt{2}\alpha$$

同理可得

$$\beta^2 + \beta + 1 = \sqrt{2}\beta, \quad \gamma^2 + \gamma + 1 = \sqrt{2}\gamma, \quad \delta^2 + \delta + 1 = \sqrt{2}\delta$$

由韦达定理,

$$(\alpha^2 + \alpha + 1)(\beta^2 + \beta + 1)(\gamma^2 + \gamma + 1)(\delta^2 + \delta + 1) = (\sqrt{2})^4 \cdot \alpha\beta\gamma\delta = 4 \cdot 1 = 4$$

23. 设方程  $x^3 - 4x + 1 = 0$  的三个相异复数根为  $a, b, c$ , 求

$$\frac{a+1}{(a-1)^4} + \frac{b+1}{(b-1)^4} + \frac{c+1}{(c-1)^4}$$

的值。

发现

$$\frac{a+1}{(a-1)^4} = \frac{1}{(a-1)^3} + \frac{2}{(a-1)^4}$$

, 因此欲求以  $\frac{1}{a-1}, \frac{1}{b-1}, \frac{1}{c-1}$  为三根的多项式, 令  $x_1 = x - 1$  代入原方程式

$$(x_1 + 1)^3 - 4(x_1 + 1) + 1 = 0 \Rightarrow x_1^3 + 3x_1^2 - x_1 - 2 = 0$$

再令  $x_2 = \frac{1}{x_1}$  代入可得

$$\frac{1}{x_2^3} + \frac{3}{x_2^2} - \frac{1}{x_2} - 2 = 0 \Rightarrow x_2^3 + \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2} = 0$$

故

$$\frac{a+1}{(a-1)^4} + \frac{b+1}{(b-1)^4} + \frac{c+1}{(c-1)^4} = (\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3) + 2(\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4) \quad (1)$$

设  $f(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$ , 则  $f'(x) = 3x^2 + x - \frac{3}{2}$ , 利用长除法计算  $\frac{f'(x)}{f(x)}$ :

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{3}{x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{13}{4} \cdot \frac{1}{x^3} - \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{x^4} + \frac{81}{16} \cdot \frac{1}{x^5} + \cdots$$

由系数比较得

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = -\frac{7}{8}, \quad \alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 = \frac{81}{16}$$

故所求为

$$-\frac{7}{8} + 2 \cdot \frac{81}{16} = \frac{37}{4}$$

24. 已知  $f(x) = x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s$  且  $f(1) = 59, f(2) = 118, f(3) = 177$ , 求  $f(9) + f(-5)$ 。

考虑函数  $g(x) = 59x$ , 则

$$f(1) = g(1) = 59, \quad f(2) = g(2) = 118, \quad f(3) = g(3) = 177$$

定义  $h(x) = f(x) - g(x)$ , 则  $x = 1, 2, 3$  为  $h(x)$  的根且  $h(x)$  首项系数为 1, 所以设

$$h(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-a)$$

其中  $a$  是一实数, 于是

$$\begin{aligned} f(9) + f(-5) &= h(9) + g(9) + h(-5) + g(-5) \\ &= 336(9-a) + 9 \cdot 59 + 336(5+a) - 5 \cdot 59 \\ &= 4940 \end{aligned}$$

25. 已知  $x_1, x_2, x_3$  是方程

$$x^3 - 6x^2 + ax - a = 0$$

的根, 且满足

$$(x_1 - 3)^3 + (x_2 - 3)^3 + (x_3 - 3)^3 = 0,$$

求  $a$  的值。

令  $r_i = x_i - 3$ , 则  $r_1, r_2, r_3$  是方程

$$(x + 3)^3 - 6(x + 3)^2 + a(x + 3) - a = 0$$

即方程

$$x^3 + 3x^2 + (a - 9)x + (2a - 27) = 0$$

的根, 由韦达定理,

$$r_1 + r_2 + r_3 = -3, \quad r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1 = a - 9, \quad r_1 r_2 r_3 = 27 - 2a$$

由立方和公式,

$$r_1^3 + r_2^3 + r_3^3 = -3(9 - 3(a - 9)) + 3(27 - 2a) = 0$$

解得

$$a = 9$$

26. 已知  $x_1, x_2, x_3$  为方程  $\sqrt{123}x^3 - 247x^2 + 2 = 0$  的相异实根, 且  $x_1 < x_2 < x_3$ , 求  $x_2(x_3^2 - x_1^2)$  的值。

设  $\sqrt{123} = a$ , 则方程  $\sqrt{123}x^3 - 247x^2 + 2 = 0$  化为

$$ax^3 - (2a^2 + 1)x^2 + 2 = 0 \Rightarrow (ax - 1)(x^2 - 2ax - 2) = 0$$

所以方程的 3 个实数根为

$$\frac{1}{a}, a + \sqrt{a^2 + 2}, a - \sqrt{a^2 + 2}$$

因为  $a = \sqrt{123} > 1$ , 所以

$$a - \sqrt{a^2 + 2} < 0 < \frac{1}{a} < 1 < a + \sqrt{a^2 + 2}$$

因此  $x_1 = a - \sqrt{a^2 + 2}, x_2 = \frac{1}{a}, x_3 = a + \sqrt{a^2 + 2}$ , 而

$$x_2(x_3^2 - x_1^2) = \frac{1}{a} \cdot 2\sqrt{a^2 + 2} \cdot 2a = 20\sqrt{5}$$

27. 已知正整数  $m, n$  满足  $m^2 - n = 32$ , 且  $\sqrt[5]{m + \sqrt{n}} + \sqrt[5]{m - \sqrt{n}}$  是方程

$$x^5 - 10x^3 + 20x - 40 = 0$$

的一个实根, 求  $m, n$  的值。

令  $a = \sqrt[5]{m + \sqrt{n}}, b = \sqrt[5]{m - \sqrt{n}}$ , 则  $x = a + b$  是该方程的一个实根, 且

$$a^5 + b^5 = 2m, \quad a^5 b^5 = m^2 - n = 32 \Rightarrow ab = 2$$

考虑  $(a + b)^5$  的展开式:

$$x^5 = a^5 + b^5 + 5ab(a^3 + b^3) + 10a^2b^2(a + b)$$

由  $a^3 + b^3 = (a + b)[(a + b)^2 - 3ab] = x(x^2 - 6)$ , 得

$$x^5 = 2m + 10x(x^2 - 6) + 40x$$

整理得:

$$x^5 - 10x^3 + 20x - 2m = 0$$

对比原方程式得

$$m = 20, n = 368$$

28. 设方程式  $x^5 + x^4 - x^2 + 1 = 0$  的五个根为  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ , 若  $P(x) = x^4 - 1$ , 求

$$P(\alpha_1)P(\alpha_2)P(\alpha_3)P(\alpha_4)P(\alpha_5)$$

的值。

设

$$f(x) = x^5 + x^4 - x^2 + 1 = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4)(x - \alpha_5)$$

令  $x = 1$  得

$$f(1) = (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)(1 - \alpha_3)(1 - \alpha_4)(1 - \alpha_5) = 0$$

由于

$$P(x) = x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x - 1)(x + 1)$$

故

$$\begin{aligned} & P(\alpha_1)P(\alpha_2)P(\alpha_3)P(\alpha_4)P(\alpha_5) \\ &= -(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)(1-\alpha_4)(1-\alpha_5) \prod_{k=1}^5 (\alpha_k^2 + 1)(\alpha_k + 1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

29. 已知  $p(x)$  是一个整系数多项式, 定义  $q(x) = \frac{p(x)}{x(1-x)}$ , 若对所有  $x \neq 0, 1$  都有

$$q(x) = q\left(\frac{1}{1-x}\right),$$

且  $p(2) = p(3) = 5$ , 求  $p(4)$  的值。

由  $q(x) = q\left(\frac{1}{1-x}\right)$  可得

$$\frac{p(x)}{x(1-x)} = \frac{p\left(\frac{1}{1-x}\right)}{\frac{1}{1-x}\left(1-\frac{1}{1-x}\right)} \Rightarrow p(x) = (1-x)^3 p\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

这说明  $\deg(p) \leq 3$ , 设  $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , 则

$$(1-x)^3 p\left(\frac{1}{1-x}\right) = d(1-x)^3 + c(1-x)^2 + b(1-x) + a$$

比较  $x^3, x^2$  系数得

$$a = d, \quad b = -c - 3d$$

且由  $p(2) = p(3) = 5$  得

$$-3a - 2c = a - 6c = 5 \Rightarrow a = c = -1$$

于是

$$p(x) = -x^3 + 4x^2 - x - 1 \Rightarrow p(4) = -5$$

30. 已知多项式  $x^7 - 5$  的七个相异根为  $r_1, \dots, r_7$ , 求

$$\prod_{1 \leq i < j \leq 7} (r_i + r_j)^2$$

的值。

设所求乘积为  $P$ , 由韦达定理, 考虑

$$\begin{aligned} 2^7 \cdot 5 \cdot P &= \prod_{i=1}^7 2r_i \prod_{1 \leq i < j \leq 7} (r_i + r_j)^2 \\ &= \prod_{1 \leq i \leq j \leq 7} (r_i + r_j) \prod_{1 \leq i < j \leq 7} (r_i + r_j) \prod_{1 \leq j < i \leq 7} (r_i + r_j) \\ &= \prod_{i=1}^7 \prod_{j=1}^7 (r_i + r_j) \end{aligned}$$

且注意到

$$\prod_{j=1}^7 (x - r_j) = x^7 - 5 \Rightarrow \prod_{j=1}^7 (x + r_j) = x^7 + 5,$$

故

$$\prod_{j=1}^7 (r_i + r_j) = r_i^7 + 5 = 10$$

因此

$$2^7 \cdot 5 \cdot P = 10^7 \Rightarrow P = 5^6$$

31. 设  $P(x)$  为次数为 10 的多项式, 且满足

$$P(2^i) = i, 0 \leq i \leq 10,$$

求  $P(x)$  中  $x$  项的系数。

令  $Q(x) = P(2x) - P(x) - 1$ , 则  $Q(2^i) = 0, 0 \leq i \leq 9$ , 所以

$$Q(x) = \alpha \prod_{k=0}^9 (x - 2^k)$$

其中  $\alpha$  为一常数, 又  $Q(0) = P(0) - P(0) - 1 = -1$ , 且

$$\prod_{k=0}^9 (0 - 2^k) = 2^{45},$$

因此  $\alpha = -\frac{1}{2^{45}}$ , 记

$$R(x) = \prod_{k=0}^9 (x - 2^k),$$

其  $x$  项系数为

$$\operatorname{coef}_x(R) = - \left( \prod_{k=0}^9 2^k \right) \sum_{k=0}^9 \frac{1}{2^k} = -2^{45} \left( 2 - \frac{1}{2^9} \right)$$

因为  $P(2x) - P(x) - 1$  的  $x$  项系数恰好等于  $P(x)$  的  $x$  项系数, 故

$$\operatorname{coef}_x(Q) = \alpha \cdot \operatorname{coef}_x(R) = -\frac{1}{2^{45}} \cdot \left( -2^{45} \cdot \frac{1023}{512} \right) = \frac{1023}{512}$$

32. 已知  $x_1, x_2, \dots, x_{2015}$  是方程

$$x^{2015} + x^{2014} + \dots + x^2 + x + 1 = 0$$

的根, 求

$$\frac{1}{1-x_1} + \frac{1}{1-x_2} + \dots + \frac{1}{1-x_{2015}}.$$

设

$$a_k = \frac{1}{1-x_k}, \quad k = 1, 2, \dots, 2015.$$

则

$$x_k = \frac{a_k - 1}{a_k}.$$

代入原方程, 得到

$$\frac{(a_k - 1)^{2015}}{a_k^{2015}} + \frac{(a_k - 1)^{2014}}{a_k^{2014}} + \dots + \frac{a_k - 1}{a_k} + 1 = 0.$$

两边同时乘以  $a_k^{2015}$ , 得

$$(a_k - 1)^{2015} + a_k(a_k - 1)^{2014} + \dots + a_k^{2014}(a_k - 1) + a_k^{2015} = 0.$$

因此

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{2015} = \frac{{}^{2015}C_1 + {}^{2014}C_1 + \dots + {}^1C_1}{2016} = \frac{2015}{2}$$

而当  $k = 1, 2, \dots, n$ ,  $a_1 + a_2 + \dots + a_{2015} = \frac{n}{2}$

设

$$f(x) = x^{2015} + x^{2014} + \cdots + x + 1,$$

则

$$f(x) = \prod_{k=1}^{2015} (x - x_k) \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{k=1}^{2015} \frac{1}{x - x_k}.$$

取  $x = 1$ , 得到

$$\sum_{k=1}^{2015} \frac{1}{1 - x_k} = \frac{f'(1)}{f(1)} = \frac{2015}{2}$$

其中

$$f(1) = 2016, \quad f'(1) = 2015 + 2014 + \cdots + 1 = \frac{2015 \cdot 2016}{2}$$

33. (a) 已知  $\alpha, \beta, \gamma$  为三实数, 设  $t = -(\alpha + \beta + \gamma), v = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$ , 且满足

$$\alpha\beta\gamma = -1, \quad t + v = -3,$$

试证

$$\alpha^{\frac{1}{3}} + \beta^{\frac{1}{3}} + \gamma^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{(-t-6) + 3\sqrt[3]{t^2 + 3t + 9}}.$$

设

$$f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) = x^3 + tx^2 + vx + 1,$$

$$g(y) = (y - \alpha^{\frac{1}{3}})(y - \beta^{\frac{1}{3}})(y - \gamma^{\frac{1}{3}}) = y^3 + ay^2 + by + 1$$

由  $g(y) = 0$  得  $y^3 + 1 = -y(ay + b)$ , 于是

$$(y^3 + 1)^3 = -y^3(a^3y^3 + b^3 + 3aby(ay + b)) = -y^3(a^3y^3 + b^3 - 3ab(y^3 + 1))$$

令  $x = y^3$ , 展开整理得

$$x^3 + (a^3 - 3ab + 3)x^2 + (b^3 - 3ab + 3)x + 1 = 0$$

于是  $a^3 - 3ab + 3 = t, b^3 - 3ab + 3 = v$ , 令  $z = ab$ , 则

$$\begin{aligned} z^3 &= (t + 3z - 3)(v + 3z - 3) \\ &= tv + 3z(t + v) - 3(t + v) + 9z^2 - 18z + 9 \\ &= t(-3 - t) + 3z(-3) - 3(-3) + 9z^2 - 18z + 9 \\ &= 9z^2 - 27z + (-t^2 - 3t + 18) \end{aligned}$$

即

$$(z-3)^3 = -t^2 - 3t - 9 \Rightarrow z = 3 - \sqrt[3]{t^2 + 3t + 9}$$

由韦达定理,

$$\alpha^{\frac{1}{3}} + \beta^{\frac{1}{3}} + \gamma^{\frac{1}{3}} = -a = -\sqrt[3]{t+3z-3} = \sqrt[3]{(-t-6) + 3\sqrt[3]{t^2+3t+9}}$$

故证毕。

(b) 据此, 试证

$$\sqrt[3]{\cos \frac{2\pi}{9}} + \sqrt[3]{\cos \frac{4\pi}{9}} + \sqrt[3]{\cos \frac{8\pi}{9}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}(\sqrt[3]{9}-2)}$$

考虑

$$\alpha = 2 \cos \frac{2\pi}{9}, \quad \beta = 2 \cos \frac{4\pi}{9}, \quad \gamma = 2 \cos \frac{8\pi}{9}.$$

则由

$$\begin{aligned} \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9} \cos \frac{8\pi}{9} &= \frac{1}{2} \left( \cos \frac{6\pi}{9} + \cos \frac{2\pi}{9} \right) \cos \frac{8\pi}{9} \\ &= \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} + \cos \frac{2\pi}{9} \right) \cos \frac{8\pi}{9} \\ &= \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} \cos \frac{8\pi}{9} + \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{8\pi}{9} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} \cos \frac{8\pi}{9} + \frac{1}{2} \left( \cos \frac{10\pi}{9} + \cos \frac{6\pi}{9} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{9} - \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{9} - \frac{1}{4} \right) = -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

满足已知  $\alpha\beta\gamma = -1$ , 此时

$$\begin{aligned} t &= -(\alpha + \beta + \gamma) = -2 \left( \cos \frac{2\pi}{9} + \cos \frac{4\pi}{9} + \cos \frac{8\pi}{9} \right) \\ &= -2 \left( 2 \cos \frac{3\pi}{9} \cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{8\pi}{9} \right) \\ &= -2 \left( \cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{8\pi}{9} \right) \\ &= -2 \cdot 2 \cos \frac{\pi}{2} \cos \frac{7\pi}{18} = 0 \end{aligned}$$

故

$$\alpha^{\frac{1}{3}} + \beta^{\frac{1}{3}} + \gamma^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-6 + 3\sqrt[3]{9}}$$

且

$$\sqrt[3]{\cos \frac{2\pi}{9}} + \sqrt[3]{\cos \frac{4\pi}{9}} + \sqrt[3]{\cos \frac{8\pi}{9}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}(\alpha^{\frac{1}{3}} + \beta^{\frac{1}{3}} + \gamma^{\frac{1}{3}}) = \sqrt[3]{\frac{3}{2}(\sqrt[3]{9} - 2)}.$$

证毕。

34. 求

$$\frac{(1^4 + 18^2)(11^4 + 18^2)(23^4 + 18^2)(35^4 + 18^2)(47^4 + 18^2)}{(5^4 + 18^2)(7^4 + 18^2)(17^4 + 18^2)(29^4 + 18^2)(41^4 + 18^2)}$$

的值。

因式分解给出

$$a^4 + 18^2 = (a^2 + 18)^2 - (6a)^2 = (a^2 + 6a + 18)(a^2 - 6a + 18) = ((a + 3)^2 + 9)((a - 3)^2 + 9)$$

故

$$\begin{aligned} & \frac{(1^4 + 18^2)(11^4 + 18^2)(23^4 + 18^2)(35^4 + 18^2)(47^4 + 18^2)}{(5^4 + 18^2)(7^4 + 18^2)(17^4 + 18^2)(29^4 + 18^2)(41^4 + 18^2)} \\ &= \frac{(4^2 + 9)(2^2 + 9)(14^2 + 9)(8^2 + 9)(26^2 + 9)(20^2 + 9)(38^2 + 9)(32^2 + 9)(50^2 + 9)(44^2 + 9)}{(8^2 + 9)(2^2 + 9)(10^2 + 9)(4^2 + 9)(20^2 + 9)(14^2 + 9)(32^2 + 9)(26^2 + 9)(44^2 + 9)(38^2 + 9)} \\ &= \frac{50^2 + 9}{10^2 + 9} = \frac{2509}{109} \end{aligned}$$

35. 已知三实数  $a, b, c$  满足  $\sqrt{3}(a - b) + 3(b - c) + (c - a) = 0$ , 且  $b \neq c$ , 求

$$\frac{(a - b)(a - c)}{(b - c)^2}$$

的值。

令  $\alpha = a - b, \beta = b - c, \gamma = c - a$ , 则

$$\alpha + \beta + \gamma = \sqrt{3}\alpha + 3\beta + \gamma = 0$$

由此得

$$\gamma = -(\alpha + \beta), \quad \alpha + \beta = \sqrt{3}\alpha + 3\beta \Rightarrow \beta = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}\alpha$$

因此

$$\frac{(a - b)(a - c)}{(b - c)^2} = \frac{-\alpha\gamma}{\beta^2} = \frac{\alpha(\alpha + \beta)}{\left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}\alpha\right)^2} = \frac{\frac{3 - \sqrt{3}}{2}\alpha^2}{\frac{4 - 2\sqrt{3}}{4}\alpha^2} = \frac{3 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} \cdot \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = 3 + \sqrt{3}$$

36. 已知  $a+b+c=6$ , 且

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2,$$

求

$$\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c}$$

的值。

不难发现

$$\begin{aligned} & \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \\ &= \left( \frac{b+c}{a} + 1 \right) + \left( \frac{c+a}{b} + 1 \right) + \left( \frac{a+b}{c} + 1 \right) - 3 \\ &= \frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c} - 3 \\ &= 6 \cdot 2 - 3 = 9 \end{aligned}$$

37. 已知  $a, b, c$  皆为实数, 若

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$$

求

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b}$$

的值。

有

$$\frac{a(a+b+c)}{b+c} + \frac{b(a+b+c)}{c+a} + \frac{c(a+b+c)}{a+b} = a+b+c$$

于是

$$\frac{a^2}{b+c} + a + \frac{b^2}{c+a} + b + \frac{c^2}{a+b} + c = a+b+c$$

即

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$$

38. 已知  $abc=1$ , 证明

(a)

$$\frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ca+c+1} = 1$$

由  $abc = 1$ ,

$$\begin{aligned}
 & \frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ca+c+1} \\
 &= \frac{a}{ab+a+1} + \frac{ab}{abc+ab+a} + \frac{abc}{abca+abc+ab} \\
 &= \frac{a}{ab+a+1} + \frac{ab}{1+ab+a} + \frac{1}{a+1+ab} \\
 &= \frac{a+ab+1}{ab+a+1} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

(b)

$$\frac{1}{ab+a+1} + \frac{1}{bc+b+1} + \frac{1}{ca+c+1} = 1$$

由 (a),

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{ab+a+1} + \frac{1}{bc+b+1} + \frac{1}{ac+c+1} \\
 &= \frac{c}{abc+ac+c} + \frac{a}{abc+ab+a} + \frac{b}{abc+bc+b} \\
 &= \frac{c}{1+ac+c} + \frac{a}{1+ab+a} + \frac{b}{1+bc+b} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

39. 已知  $a, b, c$  为非零相异实数, 且  $a+b+c=0$ , 求

$$\left( \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c} \right) \left( \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} \right)$$

的值。

首先有

$$\begin{aligned}
 \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c} &= \frac{b^2c - bc^2 + ac^2 - a^2c + a^2b - ab^2}{abc} \\
 &= -\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}
 \end{aligned}$$

现令  $a' = b-c, b' = c-a, c' = a-b$ , 发现

$$b' - c' = (c-a) - (a-b) = b+c-2a = -3a$$

由此得  $a = -\frac{b' - c'}{3}$ , 同理有

$$b = -\frac{c' - a'}{3}, \quad c = -\frac{a' - b'}{3}$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} &= \frac{a}{a'} + \frac{b}{b'} + \frac{c}{c'} \\ &= -\frac{1}{3} \left( \frac{b' - c'}{a'} + \frac{c' - a'}{b'} + \frac{a' - b'}{c'} \right) \\ &= -\frac{1}{3} \left[ -\frac{(a' - b')(b' - c')(c' - a')}{a'b'c'} \right] \\ &= \frac{1}{3} \frac{(-3c)(-3a)(-3b)}{(b-c)(c-a)(a-b)} \\ &= -9 \frac{abc}{(a-b)(b-c)(c-a)} \end{aligned}$$

故所求的值为

$$\begin{aligned} &\left( \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c} \right) \left( \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} \right) \\ &= \left[ -\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc} \right] \left[ -9 \frac{abc}{(a-b)(b-c)(c-a)} \right] \\ &= 9 \end{aligned}$$

40. 已知  $x^5 = 1$  且  $x \neq 1$ , 求

$$\frac{x}{1+x^2} + \frac{x^2}{1+x^4} + \frac{x^3}{1+x} + \frac{x^4}{1+x^3}$$

的值。

由  $x^5 = 1$ ,

$$\begin{aligned} \frac{x}{1+x^2} + \frac{x^2}{1+x^4} + \frac{x^3}{1+x} + \frac{x^4}{1+x^3} &= \frac{x}{1+x^2} + \frac{x^3}{x+1} + \frac{x^3}{1+x} + \frac{x}{x^2+1} \\ &= 2 \left( \frac{x}{1+x^2} + \frac{x^3}{x+1} \right) \\ &= 2 \left( \frac{x+x^2+x^3+x^5}{1+x+x^2+x^3} \right) \\ &= 2 \end{aligned}$$

41. 设  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  且  $abcd \neq 0$ , 又  $a + b + c + d = 0$ , 求

$$S = a \left( \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right) + b \left( \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{a} \right) + c \left( \frac{1}{d} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) + d \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

的值。

由  $a + b + c + d = 0$ , 得

$$\begin{aligned} S &= a \left( \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right) + b \left( \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{a} \right) + c \left( \frac{1}{d} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) + d \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \\ &= -(b + c + d) \left( \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right) - (a + c + d) \left( \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{a} \right) \\ &\quad - (a + b + d) \left( \frac{1}{d} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) - (a + b + c) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \\ &= -12 - \frac{2(b + c + d)}{a} - \frac{2(a + c + d)}{b} - \frac{2(a + b + d)}{c} - \frac{2(a + b + c)}{d} \\ &= -12 - \frac{-2a}{a} - \frac{-2b}{b} - \frac{-2c}{c} - \frac{-2d}{d} \\ &= -4 \end{aligned}$$

42. 设  $a, b, c$  满足  $a + b + c = a^3 + b^3 + c^3 = 0$ ,  $n$  为任意实数, 求  $a^{2n+1} + b^{2n+1} + c^{2n+1}$  的值。

由恒等式

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

将已知代入得

$$0 - 3abc = 0 \Rightarrow abc = 0.$$

若  $c = 0$ , 由  $a + b + c = 0$  可得  $b = -a$ , 则

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} + c^{2n+1} = a^{2n+1} + (-a)^{2n+1} + 0 = 0$$

同理若  $a = 0$  或  $b = 0$ ,  $a^{2n+1} + b^{2n+1} + c^{2n+1} = 0$

43. 已知  $x, y, p, q$  为实数, 且满足  $2x^2 + 3p^2 = 2y^2 + 3q^2 = (xq - yp)^2 = 6$ , 求

$$(x^2 + y^2)(p^2 + q^2)$$

的值。

(待另三种解)

解法一:

设

$$x = \sqrt{3} \cos \alpha, \quad p = \sqrt{2} \sin \alpha, \quad y = \sqrt{3} \cos \beta, \quad q = \sqrt{2} \sin \beta$$

则

$$6 = (xq - yp)^2 = (\sqrt{6}(\cos \alpha \sin \beta - \cos \beta \sin \alpha))^2 = 6 \sin^2(\beta - \alpha)$$

于是  $\sin^2(\beta - \alpha) = 1 \Rightarrow \beta - \alpha = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ , 因此有

$$\cos \beta = \mp \sin \alpha, \quad \sin \beta = \pm \cos \alpha$$

故

$$(x^2 + y^2)(p^2 + q^2) = \underbrace{(3 \cos^2 \alpha + 3 \cos^2 \beta)}_{=3(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)=3} \underbrace{(2 \sin^2 \alpha + 2 \sin^2 \beta)}_{=2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)=2} = 6$$

44. 解方程

$$(x+1)^6 - 2(x-1)^6 = (x^2-1)^3$$

原方程两边除以  $(x-1)^6$ , 得

$$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^6 - 2 = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$$

设  $y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$ , 得到二次方程:

$$y^2 - y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2 \quad \text{或} \quad y = -1$$

解为

$$\frac{x+1}{x-1} = 2^{\frac{1}{3}} \Rightarrow x = \frac{2^{\frac{1}{3}} + 1}{2^{\frac{1}{3}} - 1} = 3 + 2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}$$

或

$$\frac{x+1}{x-1} = -1 \Rightarrow x = 0$$

45. 若  $a, b$  为正实数, 解方程

$$(a+b)(ax+b)(a-bx) = (a^2x - b^2)(a+bx), \quad x \in \mathbb{R}.$$

首先设

$$f(x) = (a+b)(ax+b)(a-bx) - (a^2x - b^2)(a+bx)$$

不难发现  $f(1) = 0$ , 故  $(x-1)$  是  $f(x)$  的因式。正所谓: 解决问题仍需暴力, 展开并整理得

$$\begin{aligned} f(x) &= a^3x + a^2bx^2 - a^2b - b^3x - (a^3x - a^2bx^2 + a^2b - ab^2x + a^2bx - ab^2x^2 + ab^2 - b^3x) \\ &= (2a^2b + ab^2)x^2 + (ab^2 - a^2b)x - (a^2b + ab^2) \\ &= ab[(2a+b)x^2 + (b-a)x - (a+2b)] \\ &= ab(x-1)((2a+b)x + a+2b) \end{aligned}$$

故  $f(x) = 0$  给出了

$$x = 1 \quad \text{或} \quad x = -\frac{a+2b}{2a+b}$$

# 因式定理、余式定理

1. 设  $f(x) = ax^3 + bx^2 - 18x + 3$ ,  $g(x) = ax^3 + 9x^2 + bx - 9$ 。当  $f(x)$  和  $g(x)$  除以  $2x - 1$  时所得余数相同, 且当  $f(x)$  除以  $x - 2$  时余数是  $-5$ 。

(a) 求  $a, b$  的值。

令  $x = \frac{1}{2}$ , 有:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = g\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow a \cdot \frac{1}{8} + b \cdot \frac{1}{4} - 9 + 3 = a \cdot \frac{1}{8} + \frac{9}{4} + \frac{b}{2} - 9 \Rightarrow b = 3$$

又

$$f(2) = 8a + 4b - 36 + 3 = -5 \Rightarrow a = 2$$

$$\therefore a = 2, b = 3$$

(b) 若  $x + 4$  整除  $f(x) + kg(x)$ , 求  $k$ 。

有

$$f(-4) + kg(-4) = 0 \Rightarrow -128a + 16b + 72 + 3 + k(-128a + 144 - 4b - 9) = 0$$

代入  $a = 2, b = 3$  得:

$$-133(1 + k) = 0 \Rightarrow k = -1$$

2. 已知  $f(x)$  为三次多项式, 以  $x^2 + x + 2$  除之得余式  $x + 3$ , 以  $x^2 + x - 2$  除之得余式  $5x + 7$ , 求  $f(x)$ 。

据题意有  $f(1) = 5(1) + 7 = 12, f(-2) = 5(-2) + 7 = -3$ , 设

$$f(x) = (x^2 + x + 2)(ax + b) + x + 3$$

令  $x = 1$ ,

$$f(1) = (1 + 1 + 2)(a + b) + 1 + 3 = 12 \Rightarrow a + b = 2$$

令  $x = -2$ ,

$$f(-2) = (4 - 2 + 2)(-2a + b) - 2 + 3 = -3 \Rightarrow -2a + b = -1$$

解得  $a = 1, b = 1$ , 所以

$$f(x) = (x^2 + x + 2)(x + 1) + x + 3 = x^3 + 2x^2 + 4x + 5$$

3. 若  $f(x)$  以  $x^2 - 1$  除余  $3x + 2$ ,  $g(x)$  以  $x^2 + 2x - 3$  除余  $5x + 2$ , 求  $(x + 3)f(x) + (5x^2 + 1)g(x)$  除以  $x - 1$  的余式。

即求  $(1 + 3)f(1) + (5 + 1)g(1) = 4f(1) + 6g(1)$  的值, 由已知

$$f(1) = 3 \cdot 1 + 2 = 5, \quad g(1) = 5 \cdot 1 + 2 = 7$$

故  $(x + 3)f(x) + (5x^2 + 1)g(x)$  除以  $x - 1$  的余式为

$$4 \cdot 5 + 6 \cdot 7 = 62$$

4. 以  $x^2 + 2x + 3$  除  $f(x)$  余  $x + 12$ , 以  $(x + 1)^2$  除  $f(x)$  余  $5x + 4$ , 求以  $(x + 1)(x^2 + 2x + 3)$  除  $f(x)$  的余式。

同上, 设

$$f(x) = (x + 1)(x^2 + 2x + 3)Q(x) + a(x^2 + 2x + 3) + x + 12$$

据题意  $f(-1) = -5 + 4 = -1$ , 现令  $x = -1$  有

$$f(-1) = a(1 - 2 + 3) - 1 + 12 = -1 \Rightarrow a = -6$$

$\therefore$  以  $(x + 1)(x^2 + 2x + 3)$  除  $f(x)$  的余式为  $-6(x^2 + 2x + 3) + x + 12 = -6x^2 - 11x - 6$

5.  $f(x)$  以  $x(x - 1)$  除之, 余式为  $-x + 3$ ; 以  $x(x + 1)$  除之, 余式为  $-3x + 3$ , 则  $f(x)$  除以  $x(x^2 - 1)$  的余式为?

设

$$f(x) = x(x^2 - 1)Q(x) + ax(x - 1) - x + 3$$

据题意  $f(-1) = 3 + 3 = 6$ , 令  $x = -1$  有

$$f(-1) = a(-1)(-2) + 1 + 3 = 6 \Rightarrow a = 1$$

$\therefore f(x)$  除以  $x(x^2 - 1)$  的余式为  $x(x - 1) - x + 3 = x^2 - 2x + 3$

6. 设多项式  $f(x)$  除以  $(x+1)^3$  得余式  $2x^2+8$ , 除以  $(x-2)^2$  得余式  $15x+40$ , 且  $\deg f(x) \geq 4$ , 则  $f(x)$  除以  $(x+1)^3(x-2)$  的余式为?

设

$$f(x) = (x+1)^3(x-2)Q(x) + a(x+1)^3 + 2x^2 + 8$$

据题意  $f(2) = 15 \cdot 2 + 40 = 70$ , 令  $x = 2$  有

$$f(2) = a(2+1)^3 + 2 \cdot 2^2 + 8 = 70 \Rightarrow a = 2$$

$\therefore f(x)$  除以  $(x+1)^3(x-2)$  的余式为  $2(x+1)^3 + 2x^2 + 8 = 2x^3 + 8x^2 + 6x + 10$

7. 设  $\deg f(x) \geq 3$ , 且  $f(x)$  以  $(x-1)^2$  除之余  $3x+2$ , 以  $(x+2)^2$  除之余  $5x-3$ , 求:

(a) 以  $x-1$  除之余式。

$$\text{即 } f(1) = 3 \cdot 1 + 2 = 5$$

(b) 以  $(x-1)(x+2)$  除之余式。

设

$$f(x) = (x-1)(x+2)Q(x) + ax + b$$

令  $x = 1$ ,

$$f(1) = a + b = 5$$

令  $x = -2$ ,

$$f(-2) = -2a + b = -13$$

解得  $a = 6$ ,  $b = -1$ , 故余式为  $6x - 1$

(c) 以  $(x-1)^2(x+2)$  除之余式。

设

$$f(x) = (x-1)^2(x+2)Q(x) + a(x-1)^2 + 3x + 2$$

令  $x = -2$ ,

$$f(-2) = 9a + -4 = -13$$

解得  $a = -1$ , 故余式为  $-x^2 + 5x + 1$

8.  $f(x)$  为一多项式, 若  $(x+1)f(x)$  除以  $x^2+x+1$  的余式为  $5x+3$ , 则  $f(x)$  除以  $x^2+x+1$  的余式为何?

据题意有

$$(x+1)f(x) = (x+1)(x^2+x+1)Q(x) + a(x^2+x+1) + 5x+3$$

且设

$$f(x) = (x^2+x+1)Q(x) + ax+b$$

两边乘  $x+1$  有

$$(x+1)f(x) = (x+1)(x^2+x+1)Q(x) + (x+1)(ax+b)$$

比较得

$$a(x^2+x+1) + 5x+3 = (x+1)(ax+b)$$

即

$$ax^2 + (a+b)x + b = ax^2 + (a+5)x + a+3$$

得知  $a=2$ ,  $b=5$ , 余式为  $2x+5$

9. 以  $(x+1)^3$  除  $f(x)$  余式为  $x^2-2x+3$ , 求以  $(x+1)^2$  除  $f(x)$  所得余式。

设

$$f(x) = Q(x)(x+1)^3 + x^2 - 2x + 3$$

有

$$f(x) = Q(x)(x+1)^3 + (x+1)^2 + (-4x+2) = (x+1)^2[Q(x)(x+1) + 1] + (-4x+2)$$

轻而易举得知余式为  $-4x+2$ .

10. 设  $f(x)$  为实系数三次多项式, 若  $f(x)$  除以  $x-2$  的余式为  $-5$ , 且  $(x+1)f(x)$  除以  $x^3-3$  的余式为  $3x-1$ , 求多项式  $f(x)$

设

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

则

$$(x+1)f(x) = ax^4 + (a+b)x^3 + (b+c)x^2 + (c+d)x + d.$$

由题意,

$$f(2) = 8a + 4b + 2c + d = -5 \quad (1)$$

且有

$$(x+1)f(x) = (x^3 - 3)(ax + (a+b)) + 3x - 1,$$

比较系数得:

$$b + c = 0 \quad (2)$$

$$3a + 3b + d = -1 \quad (3)$$

$$3a + c + d = 3 \quad (4)$$

由 (1) - (4) 联立解得

$$a = -1, \quad b = -1, \quad c = 1, \quad d = 5$$

因此

$$f(x) = -x^3 - x^2 + x + 5$$

11. 已知一多项式  $f(x) = x^{2025}(x^2 + ax + b)$ , 其中  $a, b$  为实数, 如果将  $f(x)$  除以  $(x-2)^2$  得余式  $2^{2025}(x-2)$ , 求  $a, b$ 。

设

$$f(x) = x^{2025}(x^2 + ax + b) = (x-2)^2 p(x) + 2^{2025}(x-2)$$

对  $x$  求导有

$$f'(x) = 2025x^{2024}(x^2 + ax + b) + x^{2025}(2x + a) = 2(x-2)p(x) + (x-2)^2 p'(x) + 2^{2025}$$

现令  $x = 2$ , 则

$$\begin{cases} 2^{2025}(4 + 2a + b) = 0 \\ 2025 \cdot 2^{2024}(4 + 2a + b) + 2^{2025}(4 + a) = 2^{2025} \end{cases}$$

解得

$$a = -3, b = 2$$

12. 设  $f(x) = x^4 + 5x^3 + ax^2 + bx + c$  可被  $(x-1)^3$  整除, 求  $a, b, c$  的值。

$$\begin{array}{r|rrrr}
1 & 5 & a & b & c \\
& 1 & 6 & a+6 & a+b+6 \\
\hline
1 & 6 & a+6 & a+b+6 & a+b+c+6 \\
& 1 & 7 & a+13 & \\
\hline
1 & 7 & a+13 & 2a+b+19 & \\
& 1 & 8 & & \\
\hline
1 & 8 & a+21 & & \\
& 1 & & & \\
\hline
1 & 9 & & & 
\end{array}$$

连续综合除法得

$$f(x) = (x-1)^4 + 9(x-1)^3 + (a+21)(x-1)^2 + (2a+b+19)(x-1) + (a+b+c+6)$$

已知  $f(x)$  可被  $(x-1)^3$  整除, 则

$$\begin{cases} a+21=0 \\ 2a+b+19=0 \\ a+b+c+6=0 \end{cases} \Rightarrow (a, b, c) = (-21, 23, -8)$$

13. 已知  $x^2 - x + b$  为多项式  $6x^4 - 7x^3 + ax^2 + 3x + 2$  的因式, 求  $a, b$  的值。

设  $f(x) = 6x^4 - 7x^3 + ax^2 + 3x + 2 = (x^2 - x + b)(6x^2 + px + q)$ , 展开右边得

$$(x^2 - x + b)(6x^2 + px + q) = 6x^4 + (p-6)x^3 + (q-p+6b)x^2 + (pb-q)x + bq$$

比较系数得

$$p-6 = -7 \quad (1)$$

$$q-p+6b = a \quad (2)$$

$$pb-q = 3 \quad (3)$$

$$bq = 2 \quad (4)$$

由 (3) 得  $q = -b - 3$ , 代入 (4) 得

$$b(-b-3) = 2 \Rightarrow (b+1)(b+2) = 0 \Rightarrow b = -1 \text{ 或 } -2$$

当  $b = -1$  时,  $q = -2, a = -7$ ; 当  $b = -2$  时,  $q = -1, a = -12$

$\therefore (a, b) = (-7, -1)$  或  $(-12, -2)$

14. 若  $a, b, c$  为相异实数, 分别用  $x - a, x - b, x - c$  除多项式  $p(x)$ , 所得的余数分别为  $a, b, c$ , 求以  $(x - a)(x - b)(x - c)$  除  $p(x)$  的余式。

设

$$p(x) = (x - a)(x - b)(x - c)q(x) + r(x - a)(x - b) + s(x - a) + a,$$

令  $x = b$ , 由  $a \neq b$ ,

$$p(b) = s(b - a) + a = b \Rightarrow s(b - a) = b - a \Rightarrow s = 1$$

令  $x = c$ , 由  $a \neq c, b \neq c$ ,

$$p(c) = r(c - a)(c - b) + (c - a) + a = c \Rightarrow r(c - a)(c - b) = 0 \Rightarrow r = 0$$

因此以  $(x - a)(x - b)(x - c)$  除  $p(x)$  的余式为  $x$

15. 若  $g(x)$  除以  $2x - 3$  的余式为 1, 且  $f(x) = g(x)(2x - 3) + 5$ , 求  $[f(x)]^2$  除以  $(2x - 3)^2$  的余式。

设

$$g(x) = (2x - 3)Q(x) + 1$$

由  $f(x) = g(x)(2x - 3) + 5$ ,

$$\begin{aligned} [f(x)]^2 &= [g(x)]^2(2x - 3)^2 + 10g(x)(2x - 3) + 25 \\ &= [g(x)]^2(2x - 3)^2 + 10[(2x - 3)Q(x) + 1](2x - 3) + 25 \\ &= [g(x)]^2(2x - 3)^2 + 10Q(x)(2x - 3)^2 + 10(2x - 3) + 25 \\ &= [g(x)]^2(2x - 3)^2 + 10Q(x)(2x - 3)^2 + 20x - 5 \end{aligned}$$

故  $[f(x)]^2$  除以  $(2x - 3)^2$  的余式为  $20x - 5$

16. 若多项式  $p(x) = x^2 + bx + c$ , 其中  $b, c$  为实数, 且  $p(p(1)) = p(p(2)) = 0$ , 且  $p(1) \neq p(2)$ , 求  $b, c$  的值。

由  $p(p(1)) = p(p(2)) = 0$ , 意味  $p(1)$  和  $p(2)$  是方程  $x^2 + bx + c = 0$  的两根, 且

$$p(1) + p(2) = -b, \quad p(1)p(2) = c$$

即

$$(1 + b + c) + (4 + 2b + c) = -b \quad (1)$$

$$(1 + b + c)(4 + 2b + c) = c \quad (2)$$

由 (1) 得  $2b + c = -\frac{5}{2}$ , 代入 (2):

$$(1 - \frac{5}{2} - b)(4 - \frac{5}{2}) = -\frac{5}{2} - 2b \Rightarrow b = -\frac{1}{2}, c = -\frac{3}{2}$$

17.  $a, b, c$  为整数, 且  $0 < a < b$ , 若  $x - c$  是多项式  $x(x - a)(x - b) - 17$  的因式, 求  $(a, b, c)$ 。

已知  $f(x) = x(x - a)(x - b) - 17$  且  $x - c$  是它的因式, 于是

$$f(c) = c(c - a)(c - b) - 17 = 0 \Rightarrow c(c - a)(c - b) = 17.$$

由于  $a, b, c$  均为整数, 且  $0 < a < b$ , 我们只需枚举整数三元组使得左边乘积为 17。

因为 17 是质数, 其非零整数因式只有:

$(\pm 1, \pm 1, \pm 17)$  的排列组合。

枚举  $c = 1$ ,

$$1(1 - a)(1 - b) = 17 \Rightarrow (1 - a)(1 - b) = 17.$$

由于  $17 = 1 \times 17 = (-1) \times (-17)$ , 列出可能组合:

- $1 - a = 1, 1 - b = 17 \Rightarrow a = 0, b = -16$ , 不满足  $0 < a < b$ 。
- $1 - a = -1, 1 - b = -17 \Rightarrow a = 2, b = 18$ , 满足条件!

若  $c = -1$ :

$$(-1)(-1 - a)(-1 - b) = 17 \Rightarrow -(a + 1)(b + 1) = 17 \Rightarrow (a + 1)(b + 1) = -17$$

没有满足  $0 < a < b$  的整数解, 尝试  $c = 17, -17$  会得到更大的数, 不满足  $0 < a < b$ 。

因此, 唯一符合题意的解为:

$$(a, b, c) = (2, 18, 1)$$

18. 设  $f(x)$  与  $g(x)$  均为实系数二次多项式且首项系数都是 2。已知  $(f(x))^2$  除以  $g(x)$  的余式为  $5x + 3$ , 而  $(g(x))^2$  除以  $f(x)$  的余式为  $x + 1$ , 求  $f(x), g(x)$ 。

设

$$f(x) = 2x^2 + ax + b, \quad g(x) = f(x) - cx - d = 2x^2 + (a - c)x + b - d.$$

则

$$(f(x))^2 = (g(x) + cx + d)^2 = (g(x))^2 + 2(cx + d)g(x) + (cx + d)^2.$$

由已知  $(f(x))^2$  除以  $g(x)$  的余式为  $5x + 3$ ,

$$(cx + d)^2 = c^2x^2 + 2cdx + d^2 = \frac{c^2}{2}g(x) + \left(2cd - \frac{c^2}{2}(a - c)\right)x + \left(d^2 - \frac{c^2}{2}(b - d)\right).$$

比较系数得

$$\begin{cases} 4cd - ac^2 + c^3 = 10, \\ 2d^2 - bc^2 + c^2d = 6. \end{cases}$$

同理, 由  $(g(x))^2$  除以  $f(x)$  的余式为  $x + 1$  得

$$\begin{cases} 4cd - ac^2 = 2, \\ 2d^2 - bc^2 = 2. \end{cases}$$

解得

$$c^3 = 8 \Rightarrow c = 2, \quad c^2d = 4 \Rightarrow d = 1, \quad a = \frac{3}{2}, \quad b = 0.$$

于是

$$f(x) = 2x^2 + \frac{3}{2}x, \quad g(x) = 2x^2 - \frac{1}{2}x - 1.$$

19. 求多项式  $(x + 1)^6$  除以  $x^2 + 1$  的余式。

有  $x^2 \equiv -1 \pmod{x^2 + 1}$ , 则

$$(x + 1)^6 = (x^2 + 2x + 1)^3 \equiv (2x)^3 = 8x \cdot x^2 \equiv 8x \cdot (-1) = -8x \pmod{x^2 + 1}$$

20. 设  $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ , 求  $f(x^5)$  除以  $f(x)$  所得余式。

首先注意到

$$f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \frac{x^5 - 1}{x - 1}, \quad x \neq 1,$$

所以  $f(x) \mid x^5 - 1$ , 即

$$x^5 \equiv 1 \pmod{f(x)}$$

故

$$f(x^5) = (x^5)^4 + (x^5)^3 + (x^5)^2 + x^5 + 1 \equiv 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5 \pmod{f(x)}$$

21. 求以  $x^2 + 2x + 3$  除  $(x^2 + 3x + 4)^4$  所得的余式。

有

$$(x^2 + 3x + 4)^4 \equiv (x + 1)^4 = (x^2 + 2x + 1)^2 \equiv (-2)^2 = 4 \pmod{x^2 + 2x + 3}$$

22. 设  $f(x) = x^{37} - 2x^{26} + 4x^7 - 3$ , 则

(a) 求  $f(x)$  除以  $x^2 + 1$  的余式。

有

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{37} - 2x^{26} + 4x^7 - 3 \\ &= (x^2)^{18} \cdot x - 2(x^2)^{13} + 4(x^2)^3 \cdot x - 3 \\ &= (-1)^{18} \cdot x - 2(-1)^{13} + 4(-1)^3 \cdot x - 3 \\ &= x + 2 - 4x - 3 \\ &= -3x - 1 \pmod{x^2 + 1} \end{aligned}$$

(b) 求  $f(x)$  除以  $x^2 + x + 1$  的余式。

有  $x^3 \equiv 1 \pmod{x^2 + x + 1}$ , 于是

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{37} - 2x^{26} + 4x^7 - 3 \\ &= (x^3)^{12} \cdot x - 2(x^3)^8 \cdot x^2 + 4(x^3)^2 \cdot x - 3 \\ &\equiv x - 2x^2 + 4x - 3 \\ &= -2x^2 + 5x - 3 \\ &\equiv -2(-x - 1) + 5x - 3 \\ &= 7x - 1 \pmod{x^2 + x + 1} \end{aligned}$$

23. 求以  $x^4 - x$  除  $x^{87} - 2x^{44} - x^3 + 3x^2 + 1$  所得的余式。

有  $x^4 \equiv x \Rightarrow x^3 \equiv 1 \pmod{x^4 - x}$ , 故

$$x^{87} - 2x^{44} - x^3 + 3x^2 + 1 \equiv 1 - 2x^2 - 1 + 3x^2 + 1 = x^2 + 1$$

24. 求  $x^{100}$  除以  $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$  的余式。

$x^{100}$  除以  $x + 1$  的余式即  $(-1)^{100} = 1$ , 又

$$x^3 \equiv 1 \pmod{x^2 + x + 1}$$

故  $x^{100}$  除以  $x^2 + x + 1$  的余式为  $x^{100} \equiv x \pmod{x^2 + x + 1}$ , 现设

$$x^{100} = (x + 1)(x^2 + x + 1)Q(x) + a(x^2 + x + 1) + x$$

令  $x = -1$  有

$$1 = a(1 - 1 + 1) - 1 \Rightarrow a = 2$$

$\therefore x^{100}$  除以  $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$  的余式为  $2x^2 + 3x + 2$

25. 求  $x^{200}$  除以  $(x - 1)^2$  的余式。

发现  $f(x)$  除以  $(x - 1)$  的余式为  $f(1) = 1^{200} = 1$ , 将所求写成

$$x^{200} = (x - 1)^2 Q(x) + a(x - 1) + 1$$

$$x^{200} - 1 = (x - 1)^2 Q(x) + a(x - 1)$$

$$(x - 1)(x^{199} + \cdots + x + 1) = (x - 1)^2 Q(x) + a(x - 1)$$

$$x^{199} + \cdots + x + 1 = (x - 1)Q(x) + a$$

两边代  $x = 1$ , 得到

$$200 = 0 + a$$

故余式为  $200(x - 1) + 1 = 200x - 199$

设  $t = x - 1$ , 则题目变成  $x^{200} = (t + 1)^{200}$  除以  $t^2$  的余式。由二项式定理,

$$(t + 1)^{200} = {}^{200}C_{200}t^{200} + \cdots + {}^{200}C_2t^2 + {}^{200}C_1t + {}^{200}C_0$$

则显然,  $(t + 1)^{200}$  除以  $t^2$  的余式即为  ${}^{200}C_1t + {}^{200}C_0 = 200(x - 1) + 1 = 200x - 199$

26. 已知多项式  $f(x) = x^{130} - 1, g(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1$ , 求  $f(x)$  除以  $g(x)$  的余式。

设

$$x^{130} - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - x + 1)Q(x) + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D.$$

令  $x = i$ , 则

$$-1 - 1 = Ai^3 + Bi^2 + Ci + D = (-B + D) + (-A + C)i,$$

得

$$\begin{cases} -B + D = -2, \\ -A + C = 0 \end{cases}$$

$$\text{令 } \omega = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2},$$

$$\omega^{130} - 1 = -\omega - 1 = -A + B(\omega - 1) + C\omega + D = (B + C)\omega - A - B + D$$

得到方程组

$$\begin{cases} B + C = -1 \\ -A - B + D = -1 \end{cases}$$

解得  $A = -1, B = 0, C = -1, D = -2$ , 因此余式为  $-x^3 - x - 2$

27. 设  $f(x)$  是一个次数有限的多项式, 且满足

$$(x + 9)f(x + 1) = (x + 3)f(x + 3),$$

已知  $f(0) = 1$ , 求  $f(1)$  的值。

令  $x = -3$  得  $f(-2) = 0$ , 所以  $f(x)$  有因式  $(x + 2)$ , 设  $f(x) = (x + 2)g(x)$  得

$$(x + 9)(x + 3)g(x + 1) = (x + 3)(x + 5)g(x + 3) \Rightarrow (x + 9)g(x + 1) = (x + 5)g(x + 3)$$

同理, 令  $x = -5$  得  $g(-4) = 0$ , 故  $g(x)$  有因式  $(x + 4)$ , 设  $g(x) = (x + 4)h(x)$  得

$$(x + 9)(x + 5)h(x + 1) = (x + 5)(x + 7)h(x + 3) \Rightarrow (x + 9)h(x + 1) = (x + 7)h(x + 3)$$

令  $x = -7$  得  $h(-6) = 0$ , 故  $h(x)$  有因式  $(x+6)$ , 设  $h(x) = (x+6)p(x)$  得

$$(x+9)(x+7)p(x+1) = (x+7)(x+9)p(x+3) \Rightarrow p(x+1) = p(x+3)$$

即  $p(x)$  是周期为 2 的函数, 因为  $p(x)$  是次数有限的多项式, 故  $p(x) = c, c \in \mathbb{R}$

于是  $f(x) = c(x+2)(x+4)(x+6)$ , 由  $f(0) = 1$  得  $c = \frac{1}{48}$ , 故

$$f(1) = \frac{1}{48}(3)(5)(7) = \frac{35}{16}$$

# 根式、绝对值

1. 求

$$\frac{\sqrt{10+\sqrt{1}}+\sqrt{10+\sqrt{2}}+\cdots+\sqrt{10+\sqrt{99}}}{\sqrt{10-\sqrt{1}}+\sqrt{10-\sqrt{2}}+\cdots+\sqrt{10-\sqrt{99}}}$$

之值。

由

$$\left(\sqrt{10+\sqrt{a}}-\sqrt{10-\sqrt{a}}\right)^2=20-2\sqrt{100-a}$$

于是有

$$\sqrt{10+\sqrt{a}}-\sqrt{10-\sqrt{a}}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{10-\sqrt{100-a}}$$

令

$$L=\frac{\sqrt{10+\sqrt{1}}+\sqrt{10+\sqrt{2}}+\cdots+\sqrt{10+\sqrt{99}}}{\sqrt{10-\sqrt{1}}+\sqrt{10-\sqrt{2}}+\cdots+\sqrt{10-\sqrt{99}}}$$

则

$$\begin{aligned} L-1 &= \frac{(\sqrt{10+\sqrt{1}}-\sqrt{10-\sqrt{1}})+\cdots+(\sqrt{10+\sqrt{99}}-\sqrt{10-\sqrt{99}})}{\sqrt{10-\sqrt{1}}+\cdots+\sqrt{10-\sqrt{99}}} \\ &= \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{10-\sqrt{99}}+\sqrt{10-\sqrt{98}}+\cdots+\sqrt{10-\sqrt{1}}\right)}{\sqrt{10-\sqrt{1}}+\sqrt{10-\sqrt{2}}+\cdots+\sqrt{10-\sqrt{99}}}=\sqrt{2} \end{aligned}$$

因此

$$L=\sqrt{2}+1$$

2. 求根式方程

$$\sqrt{6x-9}+\sqrt{2x-5}=x-1$$

的实数根。

原方程式两边平方得

$$6x-9+2x-5+2\sqrt{(6x-9)(2x-5)}=x^2-2x+1$$

看来并不是明智之举。考虑

$$(\sqrt{6x-9}+\sqrt{2x-5})(\sqrt{6x-9}-\sqrt{2x-5})=(6x-9)-(2x-5)=4x-4$$

由于  $x \neq 1$ , 化为

$$\sqrt{6x-9} - \sqrt{2x-5} = 4$$

消去  $\sqrt{2x-5}$  可得

$$\sqrt{6x-9} = \frac{1}{2}(x-1+4)$$

两边平方,

$$4(6x-9) = x^2 + 6x + 9 \Rightarrow (x-3)(x-15) = 0$$

经检验得  $x=3$  是增根, 且  $x=15$  是原方程式的解。

### 3. 解方程

$$4 + \sqrt{x^2 - 6x + 13} = x + \sqrt{2x - 5}$$

由

$$\sqrt{x^2 - 6x + 13} = x - 4 + \sqrt{2x - 5}$$

设  $x - 4 = y$ , 化简得

$$\sqrt{y^2 + 2y + 5} = y + \sqrt{2y + 3}$$

两边平方,

$$y^2 + 2y + 5 = y^2 + 2y\sqrt{2y+3} + 2y + 3 \Rightarrow 1 = y\sqrt{2y+3}$$

再次平方得

$$2y^3 + 3y^2 - 1 = 0 \Rightarrow (y+1)(2y^2 + y - 1) = 0$$

解得

$$y = -1, \quad y = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 3, \quad x = \frac{9}{2}$$

经检验  $x=3$  是增根, 原方程式的解为

$$x = \frac{9}{2}$$

### 4. 求所有实数 $x$ 满足

$$x = \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}.$$

原方程式变为

$$x - \sqrt{x - \frac{1}{x}} = \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$$

两边平方得

$$(x^2 - 1) - 2\sqrt{x(x^2 - 1)} + x = 0 \implies (\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x})^2 = 0$$

解得

$$x^2 - x - 1 = 0 \implies x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 0$$

## 5. 解方程

$$\sqrt{7x+7} + \sqrt{7x-6} + 2\sqrt{49x^2+7x-42} = 181 - 14x$$

由原方程

$$\sqrt{7x+7} + \sqrt{7x-6} + 2\sqrt{(7x+7)(7x-6)} = 181 - 14x$$

设  $y = \sqrt{7x+7} + \sqrt{7x-6}$ , 则

$$y^2 = 14x + 1 + 2\sqrt{(7x+7)(7x-6)}$$

代回原方程得

$$y^2 - (14x + 1) + y = 181 - 14x \implies (y + 14)(y - 13) = 0$$

由于平方根之和为非负, 舍去  $y = -14$ , 于是由

$$\sqrt{7x+7} + \sqrt{7x-6} = 13$$

两边平方,

$$14x + 1 + 2\sqrt{(7x+7)(7x-6)} = 169 \implies \sqrt{49x^2 - 6} = 84 - 7x$$

再次平方,

$$49x^2 - 6 = 7056 - 1176x + 49x^2 \implies x = 6$$

经检验, 原方程式的解为

$$x = 6$$

6. 解

$$x - \sqrt{\frac{x}{2} + \frac{7}{8}} - \sqrt{\frac{x}{8} + \frac{13}{64}} = 179$$

将两边乘以 4 得

$$4x - \sqrt{8x + 14} - 2\sqrt{8x + 13} = 716$$

观察到

$$8x + 14 - 2\sqrt{8x + 13} = (8x + 13) - 2\sqrt{8x + 13} + 1 = (\sqrt{8x + 13} - 1)^2$$

且由原方程知  $x \geq 179$ , 故  $\sqrt{8x + 13} - 1 > 0$ , 方程变为

$$4x - (\sqrt{8x + 13} - 1) = 716 \Rightarrow 8x + 13 - 2\sqrt{8x + 13} - 1443 = 0$$

因式分解得

$$(\sqrt{8x + 13} - 39)(\sqrt{8x + 13} + 37) = 0$$

由于  $\sqrt{8x + 13} \geq 0$ , 所以

$$\sqrt{8x + 13} = 39 \Rightarrow x = 188.5$$

经检验, 原方程式的解为

$$x = 188.5$$

7. 解

$$\frac{x-7}{2+\sqrt{x-3}} + \frac{x-5}{1+\sqrt{x-4}} = \sqrt{10}$$

首先有

$$-\frac{4-(x-3)}{2+\sqrt{x-3}} - \frac{1-(x-4)}{1+\sqrt{x-4}} = \sqrt{10}$$

于是

$$-(2-\sqrt{x-3}) - (1-\sqrt{x-4}) = \sqrt{10} \Rightarrow \sqrt{x-3} - \sqrt{x-4} = \sqrt{10} + 3$$

两边移项得到

$$\sqrt{x-3} - \sqrt{10} = 3 + \sqrt{x-4}$$

两边平方,

$$x-3+10-2\sqrt{10(x-3)} = 9+x-4-6\sqrt{x-4} \Rightarrow \sqrt{10(x-3)} - 1 = 3\sqrt{x-4}$$

再次平方,

$$10(x-3)+1-2\sqrt{10(x-3)}=9(x-4)\Rightarrow x+7=2\sqrt{10(x-3)}$$

再再次平方,

$$x^2+14x+49=40(x-3)\Rightarrow (x-13)^2=0$$

经检验, 原方程的解为

$$x=13$$

8. (a) 已知相异非零实数  $a, b, c, d$  满足

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

证明

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$$

由  $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ , 得

$$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1, \quad \frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$$

即

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}, \quad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$

两式相除, 得

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$$

证毕。

(b) 利用 (a) 或其他方法, 解方程

$$\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}=\frac{4x-1}{2}$$

由 (a), 原方程化为

$$\frac{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})+(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})-(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}=\frac{(4x-1)+2}{(4x-1)-2}$$

即

$$\frac{2\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x-1}}=\frac{4x+1}{4x-3}$$

两边平方,

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{(4x+1)^2}{(4x-3)^2} = \frac{16x^2+8x+1}{16x^2-24x+9}.$$

再由 (a) 得

$$\frac{(x+1)+(x-1)}{(x+1)-(x-1)} = \frac{(16x^2+8x+1)+(16x^2-24x+9)}{(16x^2+8x+1)-(16x^2-24x+9)}.$$

化简得

$$\frac{2x}{2} = \frac{32x^2-16x+10}{32x-8} \Rightarrow x = \frac{5}{4}$$

经检验, 原方程的解为

$$x = \frac{5}{4}$$

#### 9. 解方程

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3} = \sqrt[3]{12(x-1)}.$$

两边立方得

$$x + 2x - 3 + 3\sqrt[3]{x(2x-3)}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3}) = 12(x-1)$$

由原方程  $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3} = \sqrt[3]{12(x-1)}$  代入得

$$\sqrt[3]{x(2x-3)}12(x-1) = 3(x-1)$$

两边再立方,

$$(x-1)(x-3)^2 = 0 \Rightarrow x = 1, 3$$

经检验, 原方程式的解为

$$x = 1 \quad \text{或} \quad x = 3$$

#### 10. 证明

$$\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}} = 3$$

设

$$x = \sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9 - 4\sqrt{5}}$$

完全立方展开得

$$x^3 = 9 + 4\sqrt{5} + 9 - 4\sqrt{5} + 3\sqrt[3]{81 - 80}(x)$$

即解得

$$x^3 - 3x - 18 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x^2 + 3x + 6) = 0 \Rightarrow x = 3 \in \mathbb{R}$$

因此得证

$$\sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9 - 4\sqrt{5}} = 3$$

11. 解方程

$$\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}} = \frac{199}{100} \sqrt{\frac{x}{x + \sqrt{x}}}.$$

设  $a = x + \sqrt{x}$ ,  $b = x - \sqrt{x}$ , 则  $a - b = \sqrt{a} - \sqrt{b} = 2\sqrt{x}$ , 原方程化为

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \frac{200}{199} \sqrt{x + \sqrt{x}}, \quad \sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{199}{100} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x}}}$$

两式相加得

$$2\sqrt{x + \sqrt{x}} = \frac{200}{199} \sqrt{x + \sqrt{x}} + \frac{199}{100} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x}}}$$

解得

$$\sqrt{x}(19800\sqrt{x} - 19801) = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{19801}{19800} > 0 \Rightarrow x = \frac{19801^2}{19800^2}$$

12. 设  $a, b$  为正实数, 且

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1, \quad 2022a^2 = 2023b^2,$$

求  $\sqrt{2022a + 2023b}$  的值。

由  $2022a^2 = 2023b^2$  得

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{2022}{2023}}.$$

记  $k = \sqrt{\frac{2022}{2023}}$ , 则  $b = ka$ 。由  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$  得

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{ka} = 1 \Rightarrow a = 1 + \frac{1}{k}.$$

于是

$$\begin{aligned}2022a + 2023b &= 2022a + 2023ka \\&= a(2022 + 2023k) \\&= \left(1 + \frac{1}{k}\right)(2022 + 2023k) \\&= 2022 + 2023 + 2022 \cdot \frac{1}{k} + 2023k \\&= 2022 + 2023 + 2022\sqrt{\frac{2023}{2022}} + 2023\sqrt{\frac{2022}{2023}} \\&= 2022 + 2023 + \sqrt{2022 \cdot 2023} + \sqrt{2022 \cdot 2023} \\&= (\sqrt{2022} + \sqrt{2023})^2\end{aligned}$$

故

$$\sqrt{2022a + 2023b} = \sqrt{2022} + \sqrt{2023}.$$

13. 若

$$(x - \sqrt{x^2 - 2011})(y + \sqrt{y^2 - 2011}) + 2011 = 0,$$

求  $2x + y$  的值。

原式两边乘以  $x + \sqrt{x^2 - 2011}$  可得

$$2011(y + \sqrt{y^2 - 2011}) + 2011(x + \sqrt{x^2 - 2011}) = 0$$

$$2011(x + y + \sqrt{x^2 - 2011} + \sqrt{y^2 - 2011}) = 0$$

即

$$x + y = -(\sqrt{x^2 - 2011} + \sqrt{y^2 - 2011}) \quad (1)$$

同理, 原式两边乘以  $y - \sqrt{y^2 - 2011}$  可得

$$(x - \sqrt{x^2 - 2011})2011 + 2011(y - \sqrt{y^2 - 2011}) = 0$$

$$2011(x + y - (\sqrt{x^2 - 2011} + \sqrt{y^2 - 2011})) = 0$$

$$x + y = \sqrt{x^2 - 2011} + \sqrt{y^2 - 2011} \quad (2)$$

由 (1) 及 (2) 可得

$$\sqrt{x^2 - 2011} + \sqrt{y^2 - 2011} = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2011}, y = \mp\sqrt{2011} \quad (\because x + y = 0)$$

故

$$2x + y = x + y + x = \pm\sqrt{2011}$$

14. 求

$$\left|\sqrt{x+1}-2\right|+\left|\sqrt{x+1}-3\right|=1$$

的整数解集。

令  $t = \sqrt{x+1}$ , 其中  $t \geq 0$ , 则方程变为

$$|t-2|+|t-3|=1$$

分三种情况讨论:

情况 1: 当  $0 \leq t < 2$  时,

$$(2-t)+(3-t)=1 \Rightarrow t=2$$

这与  $t < 2$  矛盾, 无解。

情况 2: 当  $2 \leq t \leq 3$  时,

$$(t-2)+(3-t)=1 \Rightarrow 1=1$$

恒成立, 因此  $t \in [2, 3]$ 。

情况 3: 当  $t > 3$  时,

$$(t-2)+(t-3)=1 \Rightarrow t=3$$

这与  $t > 3$  矛盾, 无解。

综合得  $2 \leq \sqrt{x+1} \leq 3$ , 平方得

$$4 \leq x+1 \leq 9 \Rightarrow 3 \leq x \leq 8$$

因此整数解集为  $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 。

15. 解

$$|x+1|-|x|+3|x-1|-2|x-2|=x+2$$

分情况讨论:

情况 1: 当  $x < -1$  时,

$$-(x+1) + x - 3(x-1) + 2(x-2) = x+2 \Rightarrow x = -2$$

得一解  $x = -2$ 。

情况 2: 当  $-1 \leq x < 0$  时,

$$(x+1) + x - 3(x-1) + 2(x-2) = x+2 \Rightarrow x = x+2$$

故无解。

情况 3: 当  $0 \leq x < 1$  时,

$$(x+1) - x - 3(x-1) + 2(x-2) = x+2 \Rightarrow x = -1$$

这与  $0 \leq x < 1$  矛盾, 故无解。

情况 4: 当  $1 \leq x < 2$  时,

$$(x+1) - x + 3(x-1) + 2(x-2) = x+2 \Rightarrow x = 2$$

这与  $1 \leq x < 2$  矛盾, 故无解。

情况 4: 当  $x \geq 2$  时,

$$(x+1) - x + 3(x-1) - 2(x-2) = x+2 \Rightarrow x = x$$

恒成立, 因此  $x \geq 2$  都是解。

结论: 原方程的解为  $x = -2$  以及所有满足  $x \geq 2$  的实数。

# 指数与对数

1. 设  $a = 2019^{2017}, b = 2019^{2018}, c = 2019^{2019}$ , 计算

$$\frac{1}{2019^{a-a} + 2019^{a-b} + 2019^{a-c}} + \frac{1}{2019^{b-a} + 2019^{b-b} + 2019^{b-c}} + \frac{1}{2019^{c-a} + 2019^{c-b} + 2019^{c-c}}$$

观察到原式为

$$\frac{2019^{-a}}{2019^{-a} + 2019^{-b} + 2019^{-c}} + \frac{2019^{-b}}{2019^{-a} + 2019^{-b} + 2019^{-c}} + \frac{2019^{-c}}{2019^{-a} + 2019^{-b} + 2019^{-c}}$$

答案呼之欲出  $\Rightarrow 1$

2. 试证

$$2^{\sqrt{\log_2 3}} = 3^{\sqrt{\log_3 2}}$$

注意到

$$2^{\sqrt{\log_2 3}} = 2^{\frac{\log_2 3}{\sqrt{\log_2 3}}} = (2^{\log_2 3})^{\frac{1}{\sqrt{\log_2 3}}} = 3^{\frac{1}{\sqrt{\log_2 3}}}$$

故左式等于右式, 得证。

设  $x = 2^{\sqrt{\log_2 3}}, y = 3^{\sqrt{\log_3 2}}$ , 则

$$\log x = \sqrt{\log_2 3} \cdot \log 2 = \sqrt{\frac{\log 3}{\log 2}} \cdot \log 2 = \sqrt{\log 2 \log 3}$$

同理

$$\log y = \sqrt{\log_3 2} \cdot \log 3 = \sqrt{\frac{\log 2}{\log 3}} \cdot \log 3 = \sqrt{\log 2 \log 3}$$

故

$$\log x = \log y \Rightarrow x = y \quad (\text{得证})$$

3. 解方程

$$2^{x+2}5^{6-x} = 10^{x^2},$$

两边取  $\log$  得

$$(x+2)\log 2 + (6-x)\log 5 = x^2 \Rightarrow x^2 - \left(\log \frac{2}{5}\right)x - 2\log 250 = 0$$

因式分解给出

$$(x-2)(x+\log 250) = 0 \Rightarrow x = 2, -\log 250$$

4. 求解方程

$$\frac{e^{2x} + 16^x}{(4e)^x} = \frac{4+e}{2\sqrt{e}}.$$

原方程即

$$\left(\frac{e}{4}\right)^x + \left(\frac{4}{e}\right)^x = \frac{\sqrt{e}}{2} + \frac{2}{\sqrt{e}}$$

令

$$y = \left(\frac{e}{4}\right)^x$$

则由

$$y^2 - \left(\left(\frac{e}{4}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{e}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)y + 1 = 0$$

因式分解得

$$\left(y - \left(\frac{e}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\left(y - \left(\frac{e}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}\right) = 0$$

解得

$$x = \frac{1}{2}, \quad x = -\frac{1}{2}$$

5. 解

$$x^{x^x} = (x^x)^x$$

原方程即

$$x^{x^x} = x^{x^2}$$

先考虑指数方程的特殊情况  $x = -1, 0, 1$ , 可得解

$$x = -1, 1$$

当  $x \neq -1, 0, 1$  时, 由底数相等所以指数相等的性质得,

$$x = 2$$

故原方程式的解为

$$x = -1 \quad \text{或} \quad x = 1 \quad \text{或} \quad x = 2$$

6. 已知

$$(x\sqrt{x}\sqrt[3]{x})^x = x^{x\sqrt{x}\sqrt[3]{x}},$$

试求  $x^5$  的值。

$$(x\sqrt{x}\sqrt[3]{x})^x = x^{x\sqrt{x}\sqrt[3]{x}}$$

$$x^{(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})x} = x^{x^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}}$$

$$x^{(\frac{11}{6})x} = x^{x^{\frac{11}{6}}}$$

考虑特殊情况  $x = -1, 0, 1$ , 可得解  $x = 1$ , 此时因底数相等所以指数相等, 得

$$\frac{11}{6}x = x^{\frac{11}{6}} \Rightarrow x^5 = \left(\frac{11}{6}\right)^6$$

故  $x^5$  的可能值为

$$x^5 = 1 \quad \text{或} \quad x^5 = \left(\frac{11}{6}\right)^6$$

7. 求满足方程

$$(x^2 + 2x)^{x^2 - 3x + 2} = 1$$

的实数解。

设  $A = x^2 + 2x$ ,  $B = x^2 - 3x + 2$ 。欲使  $A^B = 1$ , 仅以下三种情况成立:

- $B = 0$ :

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 1, 2$$

- $A = 1$ :

$$x^2 + 2x = 1 \Rightarrow x = -1 \pm \sqrt{2}$$

- $A = -1$  且  $B$  为偶数:

$$x^2 + 2x = -1 \Rightarrow (x + 1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1$$

此时

$$B = (-1)^2 - 3(-1) + 2 = 6$$

为偶数, 成立。

综上, 解为

$$x \in \{1, 2, -1 + \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2}, -1\}$$

## 8. 计算

$$5^{(\log 2)^3} \cdot 8^{(\log 5)^2} \cdot 5^{(\log 5)^3}$$

令  $a = \log 2$ ,  $b = \log 5$ , 则  $a + b = 1$ , 原式为

$$L = 5^{a^3} \cdot 8^{b^2} \cdot 5^{b^3}$$

两边取对数, 则

$$\log L = (a^3 + b^3)b + 3ab^2 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)b + 3ab^2 = b(a + b)^2 = \log 5$$

因此

$$L = 5$$

## 9. 已知正实数 $x$ 满足

$$\log_2 x \log_4 x \log_6 x = \log_2 x \log_4 x + \log_2 x \log_6 x + \log_4 x \log_6 x,$$

求  $x$ 。

设  $\log_2 x = a, \log_6 x = b$ , 则  $\log_4 x = \frac{1}{2}a$ , 原式为

$$\frac{1}{2}a^2b = \frac{1}{2}a^2 + ab + \frac{1}{2}ab \Rightarrow ab = a + 3b$$

将  $a = \frac{\log x}{\log 2}, b = \frac{\log x}{\log 6}$  代入得

$$\frac{(\log x)^2}{(\log 2)(\log 6)} = \frac{\log x(\log 6 + 3\log 2)}{(\log 2)(\log 6)} \Rightarrow \log x(\log x - \log 48) = 0$$

所以

$$x = 1 \quad \text{或} \quad x = 48$$

10. 求

$$\sqrt{\log_3 \sqrt{6} + \sqrt{\log_3 2}} + \sqrt{\log_3 \sqrt{6} - \sqrt{\log_3 2}}$$

之值。

令

$$a = \log_3 \sqrt{6} = \frac{1}{2}(1 + \log_3 2), \quad b = \sqrt{\log_3 2} < 1$$

则有

$$a = \frac{b^2 + 1}{2}$$

因此

$$\begin{aligned} \sqrt{a+b} + \sqrt{a-b} &= \sqrt{\frac{b^2+1}{2} + b} + \sqrt{\frac{b^2+1}{2} - b} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}(b+1)^2} + \sqrt{\frac{1}{2}(b-1)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(b+1) + \frac{1}{\sqrt{2}}(1-b) = \sqrt{2} \end{aligned}$$

11. 解不等式

$$\sqrt{\log_2 x - 1} + \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{2}} x^3 + 2 > 0$$

设  $y = \log_2 x$ , 则不等式化为

$$\sqrt{y-1} - \frac{3}{2}y + 2 > 0, \quad \text{且 } y \geq 1.$$

设  $z = \sqrt{y-1}$ , 则  $y = z^2 + 1$ , 方程变为

$$z - \frac{3}{2}(z^2 + 1) + 2 > 0 \Rightarrow (3z + 1)(z - 1) < 0$$

于是

$$-\frac{1}{3} < z < 1 \Rightarrow 0 \leq z^2 < 1 \Rightarrow 1 \leq y < 2$$

再考虑  $y$  的定义域  $y \geq 1$ , 经检验有

$$2 \leq x < 4$$

## 12. 求不等式的解集

$$\log(x-40) + \log(60-x) < 2$$

变为

$$(x-40)(60-x) < 100$$

注意到  $(x-40)(60-x) = -(x-50)^2 + 100$ , 所以不等式等价于

$$-(x-50)^2 + 100 < 100 \Rightarrow (x-50)^2 > 0 \Rightarrow x \neq 50$$

且由定义域

$$\begin{cases} x-40 > 0 \\ 60-x > 0 \end{cases} \Rightarrow 40 < x < 60$$

经检验得解集

$$(40, 50) \cup (50, 60).$$

## 13. 解不等式:

$$\left(\log_{\frac{1}{3}} x - 1\right) \left(\log_{\frac{1}{4}} x + 2\right) \left(\log_{\frac{1}{5}} x - 3\right) > 0.$$

换底得

$$\left(\frac{\log x}{-\log 3} - 1\right) \left(\frac{\log x}{-\log 4} + 2\right) \left(\frac{\log x}{-\log 5} - 3\right) > 0$$

即

$$(\log x + \log 3)(\log x - 2 \log 4)(\log x + 3 \log 5) < 0$$

符号分析得

$$-\log 3 < \log x < 2 \log 4, \quad \log x < -3 \log 5$$

解集为

$$\frac{1}{3} < x < 16 \quad \text{或} \quad 0 < x < \frac{1}{125}$$

14. 求

$$|x-1|^{\log_2(4-x)} < |x-1|^{\log_2(1+x)}$$

的解之范围。

由  $\log_2(4-x)$  及  $\log_2(1+x)$  的定义域, 得

$$x < 4 \quad \text{且} \quad x > -1$$

即  $x \in (-1, 4)$ , 且  $x \neq 0, 1, 2$ , 否则不等式不成立。分四种情况讨论:

情况 1:  $x \in (-1, 0)$ , 则

$$\begin{aligned} (1-x)^{\log_2(4-x)} < (1-x)^{\log_2(1+x)} &\Rightarrow \log_2(4-x) < \log_2(1+x) \\ &\Rightarrow 4-x < 1+x \\ &\Rightarrow x > \frac{3}{2} \end{aligned}$$

此情况解集为  $(-1, 0) \cap \left(\frac{3}{2}, \infty\right) = \emptyset$ , 无解。

情况 2:  $x \in (0, 1)$ , 则

$$\begin{aligned} (1-x)^{\log_2(4-x)} < (1-x)^{\log_2(1+x)} &\Rightarrow \log_2(4-x) > \log_2(1+x) \\ &\Rightarrow 4-x > 1+x \\ &\Rightarrow x < \frac{3}{2} \end{aligned}$$

此情况解集为  $(0, 1) \cap \left(-\infty, \frac{3}{2}\right) = (0, 1)$ 。

情况 3:  $x \in (1, 2)$ , 则

$$\begin{aligned}(x-1)^{\log_2(4-x)} &< (x-1)^{\log_2(1+x)} \Rightarrow \log_2(4-x) > \log_2(1+x) \\ &\Rightarrow 4-x > 1+x \\ &\Rightarrow x < \frac{3}{2}\end{aligned}$$

此情况解集为  $(1, 2) \cap \left(-\infty, \frac{3}{2}\right) = \left(1, \frac{3}{2}\right)$ 。

情况 4:  $x \in (2, 4)$ , 则

$$\begin{aligned}(x-1)^{\log_2(4-x)} &< (x-1)^{\log_2(1+x)} \Rightarrow \log_2(4-x) < \log_2(1+x) \\ &\Rightarrow 4-x < 1+x \\ &\Rightarrow x > \frac{3}{2}\end{aligned}$$

此情况解集为  $(2, 4) \cap \left(\frac{3}{2}, \infty\right) = (2, 4)$ 。

综上所述, 原方程式的解集为  $\left(0, \frac{3}{2}\right) \cup (2, 4) \setminus \{1\}$ 。

15. 求所有实数  $x$ , 使得

$$\sqrt{\log_2 x \cdot \log_2(4x) + 1} + \sqrt{\log_2 x \cdot \log_2\left(\frac{x}{64}\right) + 9} = 4$$

发现

$$\begin{aligned}f(x) &= \sqrt{\log_2 x \cdot \log_2(4x) + 1} + \sqrt{\log_2 x \cdot \log_2\left(\frac{x}{64}\right) + 9} \\ &= \sqrt{\log_2 x (2 + \log_2 x) + 1} + \sqrt{\log_2 x (\log_2 x - 6) + 9} \\ &= \sqrt{(\log_2 x + 1)^2} + \sqrt{(\log_2 x - 3)^2} \\ &= \begin{cases} -2\log_2 x + 2 & , \log_2 x \leq -1 \\ 4 & , -1 < \log_2 x \leq 3 \\ 2\log_2 x - 2 & , \log_2 x > 3 \end{cases}\end{aligned}$$

欲使  $f(x) = 4$ , 当  $\log_2 x \leq -1, \log_2 x = -1$ ; 当  $-1 < \log_2 x \leq 3, f(x) = 4$  恒成立; 当

$\log_2 x > 3$ , 无解; 因此解为

$$-1 \leq \log_2 x \leq 3 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 8$$

16. 已知

$$\frac{\log a}{b-c} = \frac{\log b}{c-a} = \frac{\log c}{a-b},$$

其中  $a \neq b \neq c$ , 试求  $a^a b^b c^c$  的值。

设

$$\frac{\log a}{b-c} = \frac{\log b}{c-a} = \frac{\log c}{a-b} = k$$

则

$$\log a = k(b-c), \quad \log b = k(c-a), \quad \log c = k(a-b)$$

因此

$$\begin{aligned} \log(a^a b^b c^c) &= a \log a + b \log b + c \log c \\ &= ak(b-c) + bk(c-a) + ck(a-b) \\ &= k[ab - ac + bc - ab + ca - cb] \\ &= 0 \end{aligned}$$

即

$$a^a b^b c^c = 1$$

17. 设  $a, b$  同号, 且  $a^2 - 2ab - 9b^2 = 0$ , 求

$$\log(a^2 + ab - 6b^2) - \log(a^2 + 4ab + 15b^2)$$

的值。

由  $a^2 - 2ab - 9b^2 = 0$  解得

$$a = (\sqrt{10} + 1)b$$

故

$$\begin{aligned}& \log(a^2 + ab - 6b^2) - \log(a^2 + 4ab + 15b^2) \\&= \log(3ab + 3b^2) - \log(6ab + 24b^2) \\&= \log\left(\frac{3b(a+b)}{6b(a+4b)}\right) \\&= \log\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{a+b}{a+4b}\right) \\&= \log\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{(\sqrt{10}+2)b}{(\sqrt{10}+5)b}\right) \\&= \log\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{(\sqrt{10}+2)(5-\sqrt{10})}{(\sqrt{10}+5)(5-\sqrt{10})}\right) \\&= \log\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{10}}{15}\right) = \log\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right) = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

18. 设正实数  $x, y$  ( $x \neq 1, y \neq 1$ ) 满足

$$\log_2 x = \log_y 16, \quad xy = 64,$$

求

$$\left(\log_2 \frac{x}{y}\right)^2$$

由  $xy = 64$  得  $x = \frac{64}{y}$ , 代入第一式:

$$\log_2 \left(\frac{64}{y}\right) = \log_y 16 \Rightarrow 6 - \log_2 y = \frac{4}{\log_2 y}$$

设  $a = \log_2 y$ , 则变为

$$6 - a = \frac{4}{a} \Rightarrow a^2 - 6a + 4 = 0$$

解得

$$\log_2 y = a = 3 \pm \sqrt{5}$$

所求为

$$(\log_2 x - \log_2 y)^2 = (a - (6 - a))^2 = (2a - 6)^2 = (\pm 2\sqrt{5})^2 = 20$$

19. 已知  $a^x = bc, b^y = ac, c^z = ab$ , 证明

$$xyz = x + y + z + 2$$

由  $a^x = bc$ , 两边取  $yz$  次方

$$(a^x)^{yz} = (bc)^{yz} \Rightarrow a^{xyz} = b^{yz} \cdot c^{yz}$$

由  $b^y = ac$ , 得  $b^{yz} = (ac)^z = a^z c^z$ ; 由  $c^z = ab$ , 得  $c^{yz} = (ab)^y = a^y b^y$ ; 于是

$$a^{xyz} = (a^z c^z)(a^y b^y) = a^{z+y} b^y c^z = a^{z+y} \cdot ac \cdot ab = a^{z+y+2} bc$$

又  $a^x = bc$ , 故

$$a^{xyz} = a^{z+y+2} \cdot a^x = a^{x+y+z+2} \Rightarrow xyz = x + y + z + 2$$

20. 设  $a, b, c$  均为异于 1 的正数, 且满足  $abc = 1$ , 证明

$$\log_a b + \log_a c + \log_b c + \log_b a + \log_c b + \log_c a = -3$$

有

$$\begin{aligned} & \log_a a + \log_a b + \log_a c + \log_b b + \log_b c + \log_b a + \log_c c + \log_c b + \log_c a \\ &= \log_a(abc) + \log_b(abc) + \log_c(abc) \\ &= 0 \end{aligned}$$

故原式得证。

21. 已知

$$\log_{10} \sin x + \log_{10} \cos x = -1,$$

且整数  $n$  满足

$$\log_{10}(\sin x + \cos x) = \frac{1}{2}(\log_{10} n - 1),$$

求  $n$ 。

由

$$\log_{10} \sin x + \log_{10} \cos x = -1 \Rightarrow \sin x \cos x = 10^{-1} = \frac{1}{10}$$

又  $\sin x + \cos x = \sqrt{1 + 2 \cdot \frac{1}{10}} = \sqrt{\frac{6}{5}}$ , 则

$$\log_{10} n = 2 \log_{10} \sqrt{\frac{6}{5}} + 1 = \log_{10} \frac{6}{5} + \log_{10} 10 = \log_{10} 12 \Rightarrow n = 12$$

22. 解方程式

$$(\log_5 x)^2 + \log_{5x} \left( \frac{5}{x} \right) = 1$$

设  $\log_5 x = t$ , 则

$$\log_{5x} \left( \frac{5}{x} \right) = \frac{\log_5 \frac{5}{x}}{\log_5 (5x)} = \frac{\log_5 5 - \log_5 x}{\log_5 5 + \log_5 x} = \frac{1-t}{1+t}$$

原方程式变为

$$t^2 + \frac{1-t}{1+t} = 1$$

$$t^2(1+t) + 1-t = 1+t$$

$$t^3 + t^2 - 2t = 0$$

$$t(t+2)(t-1) = 0$$

解得  $t = 0, -2, 1$ , 即

$$x = 5^0 = 1, \quad \text{或} \quad x = 5^{-2} = \frac{1}{25}, \quad \text{或} \quad x = 5^1 = 5$$

经检验得  $x = 1, x = \frac{1}{25}, x = 5$  都是原方程的解。

23. 解方程

$$\log_{2x} \left( 48\sqrt[3]{3} \right) = \log_{3x} \left( 162\sqrt[3]{2} \right)$$

原式变为

$$\frac{\log(48\sqrt[3]{3})}{\log(2x)} = \frac{\log(162\sqrt[3]{2})}{\log(3x)}.$$

又因

$$\log(48\sqrt[3]{3}) = 4\log 2 + \frac{4}{3}\log 3, \quad \log(162\sqrt[3]{2}) = \frac{4}{3}\log 2 + 4\log 3.$$

于是有

$$\frac{4\log 2 + \frac{4}{3}\log 3}{\log 2 + \log x} = \frac{\frac{4}{3}\log 2 + 4\log 3}{\log 3 + \log x}.$$

化简最终得到

$$\log x = \frac{1}{2}\log 6 \Rightarrow x = \sqrt{6}.$$

24. 求所有实数  $x$ , 使得

$$\log_{5x+9}(x^2 + 6x + 9) + \log_{x+3}(5x^2 + 24x + 27) = 4.$$

原方程式化为

$$\begin{aligned} \frac{\log(x^2 + 6x + 9)}{\log(5x + 9)} + \frac{\log(5x^2 + 24x + 27)}{\log(x + 3)} &= 4 \\ \frac{2\log(x + 3)}{\log(5x + 9)} + \frac{\log(5x + 9) + \log(x + 3)}{\log(x + 3)} &= 4 \\ 2\frac{\log(x + 3)}{\log(5x + 9)} + \frac{\log(5x + 9)}{\log(x + 3)} + 1 &= 4 \end{aligned}$$

令  $t = \frac{\log(x + 3)}{\log(5x + 9)}$ , 解得

$$2t + \frac{1}{t} = 3 \Rightarrow t = 1 \text{ 或 } t = \frac{1}{2}$$

当  $t = 1$ , 解得

$$\log(x + 3) = \log(5x + 9) \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

当  $t = \frac{1}{2}$ , 则  $2\log(x + 3) = \log(5x + 9)$ , 即

$$2\log(x + 3) = \log(5x + 9) \Rightarrow x = 0 \text{ 或 } x = -1$$

经检验得, 原方程的实数解为

$$x = 0, -1, -\frac{3}{2}$$

25. 求解下列方程组:

$$\begin{cases} (2x)^{\ln 2} = (3y)^{\ln 3} \\ 3^{\ln x} = 2^{\ln y} \end{cases}$$

两边取对数,

$$(\ln 2)^2 + \ln 2 \cdot \ln x = (\ln 3)^2 + \ln 3 \cdot \ln y \quad (1)$$

$$\ln x \cdot \ln 3 = \ln y \cdot \ln 2 \Rightarrow \ln x = \frac{\ln y \cdot \ln 2}{\ln 3} \quad (2)$$

将 (2) 代入 (1), 可解得

$$x = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{1}{3}$$

26. 求下列方程组的所有实数解:

$$\begin{cases} x + \log_{10} x = y - 1 \\ y + \log_{10}(y - 1) = z - 1 \\ z + \log_{10}(z - 2) = x + 2 \end{cases}$$

将方程组改写为

$$x + \log_{10} x = y - 1$$

$$(y - 1) + \log_{10}(y - 1) = z - 2$$

$$(z - 2) + \log_{10}(z - 2) = x$$

令  $a = x, b = y - 1, c = z - 2$ , 方程组可改写为:

$$a + \log_{10} a = b \quad (1)$$

$$b + \log_{10} b = c \quad (2)$$

$$c + \log_{10} c = a \quad (3)$$

容易验证  $(a, b, c) = (1, 1, 1)$  是一解, 现考虑  $a > 1$ , 则

$$\log_{10} a > 0 \Rightarrow b = a + \log_{10} a > a > 1 \Rightarrow c = b + \log_{10} b > b > a > 1$$

由 (3) 得  $a = c + \log_{10} c > c > b > a$ , 矛盾。而当  $0 < a < 1$ ,

$$\log_{10} a < 0 \Rightarrow b = a + \log_{10} a < a < 1 \Rightarrow c = b + \log_{10} b < b < a < 1$$

由 (3) 得  $a = c + \log_{10} c < c < b < a$ , 矛盾。因此  $(a, b, c) = (1, 1, 1)$  是唯一解, 即

$$(x, y, z) = (1, 2, 3)$$

27. 若正实数  $x, y, z$  满足

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2 \\ \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2 \\ \log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2 \end{cases}$$

求  $xyz$ 。

原方程组给出

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_2 \sqrt{y} + \log_2 \sqrt{z} = 2 \Rightarrow x\sqrt{yz} = 2^2 \\ \log_3 y + \log_3 \sqrt{z} + \log_3 \sqrt{x} = 2 \Rightarrow y\sqrt{xz} = 3^2 \\ \log_4 z + \log_4 \sqrt{x} + \log_4 \sqrt{y} = 2 \Rightarrow z\sqrt{xy} = 4^2 \end{cases}$$

将三式相乘得

$$(xyz)^2 = 2^6 \cdot 3^2 \Rightarrow xyz = 24$$

28. 解联立方程组

$$\begin{cases} \log x \log y - 3 \log 5y - \log 8x = -4 \\ \log y \log z - 4 \log 5y - \log 16z = 4 \\ \log z \log x - 4 \log 8x - 3 \log 625z = -18 \end{cases}$$

三式化简得

$$\log x \log y - 3 \log y - \log x = -1$$

$$\log y \log z - 4 \log y - \log z = 8$$

$$\log z \log x - 4 \log x - 3 \log z = -6$$

因式分解:

$$(\log x - 3)(\log y - 1) = 2 \quad (1)$$

$$(\log y - 1)(\log z - 4) = 12 \quad (2)$$

$$(\log z - 4)(\log x - 3) = 6 \quad (3)$$

三式相乘可得

$$(\log x - 3)(\log y - 1)(\log z - 4) = \pm\sqrt{2 \cdot 6 \cdot 12} = \pm 12 \quad (4)$$

分别作  $\frac{(4)}{(2)}$ ,  $\frac{(4)}{(3)}$ ,  $\frac{(4)}{(1)}$  得解  $\log x - 3 = \pm 1$ ,  $\log y - 1 = \pm 2$ ,  $\log z - 4 = \pm 6$ , 即

$$(x, y, z) = (10^4, 10^3, 10^{10}) \quad \text{或} \quad (10^2, 10^{-1}, 10^{-2})$$

# 方程组

1. 若  $x, y, z$  都是正数且满足

$$\begin{cases} x + \frac{1}{y} = 4, \\ y + \frac{1}{z} = 1, \\ z + \frac{1}{x} = \frac{7}{3}, \end{cases}$$

求  $xyz$  的值。

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{1}{y}\right) \left(y + \frac{1}{z}\right) \left(z + \frac{1}{x}\right) &= xyz + x + \frac{1}{y} + y + \frac{1}{z} + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{xyz} \\ &= xyz + 4 + 1 + \frac{7}{3} + \frac{1}{xyz} = \frac{28}{3} \end{aligned}$$

于是

$$xyz + \frac{1}{xyz} = 2 \Rightarrow (xyz)^2 - 2(xyz) + 1 = 0 \Rightarrow xyz = 1$$

2. 求满足方程组

$$\begin{cases} x^2 + x^2y^2 + x^2y^4 = 525 \\ x + xy + xy^2 = 35 \end{cases}$$

的所有实数序对  $(x, y)$ 。

$$x^2 + x^2y^2 + x^2y^4 = 525 \quad (1)$$

$$x + xy + xy^2 = 35 \quad (2)$$

发现

$$525 = x^2 + x^2y^2 + x^2y^4 = (x - xy + xy^2)(x + xy + xy^2)$$

于是得到

$$x - xy + xy^2 = 15 \quad (3)$$

(2) - (3) 得

$$2xy = 20 \Rightarrow x = \frac{10}{y}$$

代回 (3) 解得

$$(x, y) = (5, 2), \left(20, \frac{1}{2}\right)$$

3. 若两正数  $a, b$  满足

$$\begin{cases} a\sqrt{a} + b\sqrt{b} = 50 \\ a\sqrt{b} + b\sqrt{a} = 25 \end{cases}$$

求  $ab$  之值。

$$a\sqrt{a} + b\sqrt{b} = 50 \quad (1)$$

$$a\sqrt{b} + b\sqrt{a} = 25 \quad (2)$$

由  $\frac{(1)}{(2)}$  得

$$\frac{(\sqrt{a})^3 + (\sqrt{b})^3}{\sqrt{ab}(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \frac{a - \sqrt{ab} + b}{\sqrt{ab}} = 2 \Rightarrow a + b = 3\sqrt{ab} \Rightarrow a^2 + b^2 = 7ab \quad (3)$$

又由 (1)  $\times$  (2) 得

$$(a\sqrt{a} + b\sqrt{b})(a\sqrt{b} + b\sqrt{a}) = \sqrt{ab}(a^2 + b^2) + ab(a + b) = 1250 \quad (4)$$

将 (3) 代入 (4),

$$\sqrt{ab}(7ab) + ab(3\sqrt{ab}) = 10(\sqrt{ab})^3 = 1250 \Rightarrow ab = 25$$

4. 求正实数对  $(x, y)$  满足

$$\begin{cases} x^2 + x\sqrt[3]{xy^2} = 208 \\ y^2 + y\sqrt[3]{yx^2} = 1053 \end{cases}$$

原方程即

$$x^{\frac{4}{3}}(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}) = 208 \quad (1)$$

$$y^{\frac{4}{3}}(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}) = 1053 \quad (2)$$

两式相除得

$$\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{4}{3}} = \left(\frac{3}{2}\right)^4 \Rightarrow \frac{y}{x} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8},$$

将  $y = \frac{27}{8}x$  代入 (1), 解得

$$x^2 \left(1 + \frac{9}{4}\right) = 208 \Rightarrow (x, y) = (8, 27).$$

5. 设相异实数  $x, y$  满足

$$\begin{cases} x^2 + \sqrt{3}y = 4 \\ y^2 + \sqrt{3}x = 4 \end{cases}$$

求  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$  的值。

$$x^2 + \sqrt{3}y = 4 \quad (1)$$

$$y^2 + \sqrt{3}x = 4 \quad (2)$$

由于  $x \neq y$ , (1) - (2) 得

$$x^2 - y^2 = \sqrt{3}(x - y) \Rightarrow x + y = \sqrt{3}.$$

且 (1) + (2) 得

$$x^2 + y^2 + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 8 \Rightarrow x^2 + y^2 = (\sqrt{3})^2 - 2xy = 5 \Rightarrow xy = -1$$

因此

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{5}{-1} = -5.$$

6. 已知实数  $x, y, z$  满足

$$\begin{cases} xy + 4z = 60 \\ yz + 4x = 60 \\ zx + 4y = 60 \end{cases}$$

求  $x$  的可能值。

$$xy + 4z = 60 \quad (1)$$

$$yz + 4x = 60 \quad (2)$$

$$zx + 4y = 60 \quad (3)$$

由 (1) - (2) 得

$$y(x - z) + 4(z - x) = 0 \Rightarrow (x - z)(y - 4) = 0 \Rightarrow y = 4 \text{ 或 } x = z$$

同理有

$$z = 4 \text{ 或 } x = y$$

及

$$x = 4 \text{ 或 } y = z$$

若  $x = 4$ , 由 (1) 及 (2) 得

$$y + z = 15, \quad yz = 44$$

由此可知  $y, z$  是方程

$$t^2 - 15t + 44 = 0$$

的根, 解得

$$(x, y, z) = (4, 4, 11), (4, 11, 4)$$

若  $y = z$ , 由 (2) - (1) 得

$$y^2 - (x + 4)y + 4x = 0 \Rightarrow (y - 4)(y - x) = 0$$

当  $y = 4$  有

$$(x, y, z) = (11, 4, 4)$$

而当  $y = x$  有  $x = y = z$ , 代入 (1) 得

$$x^2 + 4x - 60 = 0 \Rightarrow (x + 10)(x - 6) = 0$$

给出

$$(x, y, z) = (-10, -10, -10), (6, 6, 6)$$

所以原方程组的解为

$$(x, y, z) = (-10, -10, -10), (6, 6, 6), (11, 4, 4), (4, 11, 4), (4, 4, 11)$$

## 7. 解方程组

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 18 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 4 \end{cases}$$

由

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz)$$

给出

$$xy + xz + yz = \frac{1}{2}(6^2 - 18) = 9$$

又由

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2 = x + y + z + 2(\sqrt{xy} + \sqrt{xz} + \sqrt{yz})$$

所以

$$4^2 = 6 + 2(\sqrt{xy} + \sqrt{xz} + \sqrt{yz}) \Rightarrow \sqrt{xy} + \sqrt{xz} + \sqrt{yz} = 5$$

对上式两边平方, 有

$$xy + xz + yz + 2\sqrt{xyz}(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}) = 25$$

即

$$9 + 2\sqrt{xyz} \cdot 4 = 25 \Rightarrow xyz = 4$$

由韦达定理,  $x, y, z$  为三次方程

$$t^3 - 6t^2 + 9t - 4 = 0$$

的根, 因式分解得

$$(t - 1)^2(t - 4) = 0 \Rightarrow t = 1, 4$$

所以方程组的解为

$$(x, y, z) = (1, 1, 4), (1, 4, 1), (4, 1, 1)$$

8. 若  $x, y, z$  满足

$$\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{3 + \log 2} + \frac{z}{3 + \log 5} = 1 \\ \frac{x}{7} + \frac{y}{7 + \log 2} + \frac{z}{7 + \log 5} = 1 \\ \frac{x}{11} + \frac{y}{11 + \log 2} + \frac{z}{11 + \log 5} = 1 \end{cases}$$

求  $x + y + z$  之值。

不妨设

$$\frac{a}{t} + \frac{b}{t + \log 2} + \frac{c}{t + \log 5} = 1$$

则

$$f(t) = a(t + \log 2)(t + \log 5) + b t(t + \log 5) + c t(t + \log 2) - t(t + \log 2)(t + \log 5) = 0$$

由韦达定理, 三根之和为

$$a + b + c - 1 = 3 + 7 + 11 = 21 \Rightarrow a + b + c = 22$$

9. 已知  $x, y \in \mathbb{R}$ , 求解方程组

$$\begin{cases} \sqrt{x} \left( 1 + \frac{1}{x + y} \right) = 2 \\ \sqrt{y} \left( 1 - \frac{1}{x + y} \right) = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$1 + \frac{1}{x + y} = \frac{2}{\sqrt{x}} \quad (1)$$

$$1 - \frac{1}{x + y} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{y}} \quad (2)$$

$(1)^2 - (2)^2$ :

$$\left( 1 + \frac{1}{x + y} \right)^2 - \left( 1 - \frac{1}{x + y} \right)^2 = \frac{4}{x} - \frac{2}{y} \Rightarrow \frac{4}{x + y} = \frac{4y - 2x}{xy}$$

整理得

$$x^2 + xy - 2y^2 = 0 \Rightarrow (x + 2y)(x - y) = 0$$

由于  $x, y \geq 0$ , 取  $x = y$ , 代入 (1) 解得

$$1 + \frac{1}{2x} = \frac{2}{\sqrt{x}} \Rightarrow 4x^2 - 12x + 1 = 0 \Rightarrow x = y = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2}$$

10. 解方程组

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x+y}{x}} + \sqrt{\frac{x}{x+y}} = \frac{5}{2} \\ 2x^2 + y^2 = 176 \end{cases}$$

$$\sqrt{\frac{x+y}{x}} + \sqrt{\frac{x}{x+y}} = \frac{5}{2} \quad (1)$$

$$2x^2 + y^2 = 176 \quad (2)$$

设

$$u = \sqrt{\frac{x+y}{x}}$$

方程 (1) 变为

$$u + \frac{1}{u} = \frac{5}{2} \Rightarrow (2u-1)(u-2) = 0$$

当  $u = \frac{1}{2}$ ,

$$\frac{x+y}{x} = \frac{1}{4} \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x$$

代入 (2), 解得

$$x = \pm 16\sqrt{\frac{11}{41}}, \quad y = -\frac{3}{4}x = \mp 12\sqrt{\frac{11}{41}}$$

而当  $u = 2$ ,

$$\frac{x+y}{x} = 16 \Rightarrow y = 3x$$

代入 (2), 解得

$$x = \pm 4, \quad y = 3x = \pm 12$$

故原方程组解为

$$(x, y) = (4, 12), (-4, -12), \left(16\sqrt{\frac{11}{41}}, -12\sqrt{\frac{11}{41}}\right), \left(-16\sqrt{\frac{11}{41}}, 12\sqrt{\frac{11}{41}}\right)$$

11. 解方程组

$$\begin{cases} (91-2x)^3 = 216xy^2 \\ (37-2y)^3 = 216x^2y \end{cases}$$

$$(91 - 2x)^3 = 216xy^2 \quad (1)$$

$$(37 - 2y)^3 = 216x^2y \quad (2)$$

令

$$x = u^3, \quad y = v^3.$$

将 (1),(2) 两边开立方得

$$91 - 2u^3 = 6uv^2, \quad 37 - 2v^3 = 6u^2v.$$

两式相加,

$$2(u + v)^3 = 128 \Rightarrow u + v = 4$$

将  $v = 4 - u$  代入 (1),

$$6u(4 - u)^2 + 2u^3 = 91 \Rightarrow (2u - 7)(4u^2 - 10u + 13) = 0 \Rightarrow u = \frac{7}{2} \in \mathbb{R}$$

因此

$$v = 4 - u = \frac{1}{2}$$

最终解为

$$x = \frac{343}{8}, \quad y = \frac{1}{8}$$

12. 解

$$\begin{cases} 3(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}} = 125a \\ 4(a^2 + b^2) = -25b \end{cases}$$

$$3(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}} = 125a \quad (1)$$

$$4(a^2 + b^2) = -25b \quad (2)$$

由  $\frac{(1)}{(2)}$  得

$$-\frac{20a}{3b} = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$$

平方得

$$\frac{400a^2}{9b^2} = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 = \frac{9b^2}{400 - 9b^2}$$

代入 (2) 得

$$4 \left( \frac{9b^2}{400 - 9b^2} + b^2 \right) + 25b = 0 \Rightarrow b(b+4)(9b-100) = 0$$

经检验得  $b = \frac{100}{9}$  是增根, 原方程组的解为

$$(a, b) = (0, 0) \quad \text{或} \quad (3, -4)$$

13. 解方程组

$$\begin{cases} x^3 + 9x^2y = -28 \\ y^3 + xy^2 = 1 \end{cases}$$

$$x^3 + 9x^2y = -28 \quad (1)$$

$$y^3 + xy^2 = 1 \quad (2)$$

(1) + 27 · (2), 得

$$x^3 + 9x^2y + 27xy^2 + 27y^3 = -1$$

即

$$(x + 3y)^3 = -1 \Rightarrow x + 3y = -1$$

将  $x = -1 - 3y$  代入 (2),

$$y^3 + (-1 - 3y)y^2 = 1 \Rightarrow (y + 1)(2y^2 - y + 1) = 0$$

其中  $2y^2 - y + 1$  的判别式

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -7 < 0$$

故  $2y^2 - y + 1 = 0$  无实数解, 因此唯一实数解为

$$(x, y) = (2, -1)$$

14. 解方程组

$$\begin{cases} x^3 + 6xy^2 = 99 \\ 2y^3 + 3x^2y = 70 \end{cases}$$

$$x^3 + 6xy^2 = 99 \quad (1)$$

$$2y^3 + 3x^2y = 70 \quad (2)$$

观察到方程式齐次, 不妨设  $y = mx$ , 其中  $m \neq 0$ , 代入方程得到

$$x^3(1 + 6m^2) = 99, \quad x^3(2m^3 + 3m) = 70.$$

两式相除得

$$\frac{1 + 6m^2}{2m^3 + 3m} = \frac{99}{70} \Rightarrow (3m - 2)(66m^2 - 96m + 35) = 0$$

其中  $66m^2 - 96m + 35$  的判别式为

$$\Delta = (-96)^2 - 4 \cdot 66 \cdot 35 = -24 < 0$$

故  $66m^2 - 96m + 35 = 0$  无实根, 因此唯一实根为

$$m = \frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{2}{3}x$$

将之代入 (1),

$$x^3 + 6x \left( \frac{2}{3}x \right)^2 = 99 \Rightarrow x = 3$$

得到

$$(x, y) = (3, 2)$$

15. 求方程

$$\begin{cases} 36y^2(x+1) + 36x^2(y+1) = 7x^2y^2 \\ 6x + 6y + xy = 0 \end{cases}$$

的实数解。

$$36y^2(x+1) + 36x^2(y+1) = 7x^2y^2 \quad (1)$$

$$6x + 6y + xy = 0$$

由 (1),

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} = \frac{7}{36} \quad (3)$$

由 (2),

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{1}{6} \quad (4)$$

将 (3) 代入 (4), 得

$$\frac{1}{x^2} + \left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{13}{36} \Rightarrow (x-3)(x+2) = 0$$

故原方程式的解为

$$(x, y) = (3, 6), \quad \left(-2, -\frac{3}{2}\right)$$

16. 设  $a, b, c$  为相异非零实数, 且

$$\frac{1+a^3}{a} = \frac{1+b^3}{b} = \frac{1+c^3}{c}.$$

求  $a^3 + b^3 + c^3$  的所有可能值。

设

$$\frac{1+a^3}{a} = \frac{1+b^3}{b} = \frac{1+c^3}{c} = k$$

则  $a, b, c$  是方程

$$x^3 - kx + 1 = 0$$

的三根, 故设

$$x^3 - kx + 1 = (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc$$

比较系数得

$$a+b+c=0, \quad abc=-1$$

故

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc = 0 + 3(-1) = -3$$

17. 若  $a, b, c \in \mathbb{R}^+$  满足

$$abc = 120, \quad a+b+c = a^2 + b^2 + c^2 = a^3 + b^3 + c^3 = \lambda,$$

求  $\lambda \in \mathbb{Z}^+$ 。

已知

$$a+b+c = a^2 + b^2 + c^2 = a^3 + b^3 + c^3 = \lambda.$$

由  $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$ ,

$$ab + bc + ca = \frac{\lambda^2 - \lambda}{2}.$$

由  $a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3 - 3(a + b + c)(ab + bc + ca) + 3abc$ ,

$$\lambda = \lambda^3 - 3\lambda \left( \frac{\lambda^2 - \lambda}{2} \right) + 3 \cdot 120$$

解得

$$(\lambda - 10)(\lambda^2 + 7\lambda + 72) = 0 \Rightarrow \lambda = 10 \in \mathbb{Z}^+$$

18. 已知

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 6 \\ \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 87 \\ (\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1) = 33 \end{cases}$$

求

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}.$$

由  $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = (\alpha + \beta + \gamma)((\alpha + \beta + \gamma)^2 - 3(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha))$ , 则

$$87 - 3\alpha\beta\gamma = 6(36 - 3(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)) \Rightarrow 6(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma = 43 \quad (1)$$

又由  $33 = (\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1) = 1 + 6 + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta\gamma$ ,

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta\gamma = 26 \quad (2)$$

联立 (1),(2) 得,

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{69}{7}, \quad \alpha\beta\gamma = \frac{113}{7}$$

因此

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} = \frac{69}{113}.$$

19. 已知  $x, y, z$  为实数满足

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = \frac{3}{2} \\ x^3 + y^3 + z^3 = 1 \end{cases}$$

且  $x + y + z$  为整数, 求  $x + y + z$  的值。

$$\begin{cases} xy + yz + zx = xyz \\ x^2 + y^2 + z^2 = \frac{3}{2} \\ x^3 + y^3 + z^3 = 1 \end{cases}$$

令  $a = xyz$ , 则

$$(x + y + z)^2 = \frac{3}{2} + 2a, \quad 1 - 3a = (x + y + z) \left( \frac{3}{2} - a \right)$$

联立得

$$\left( \frac{1 - 3a}{\frac{3}{2} - a} \right)^2 = \frac{3}{2} + 2a$$

解得

$$(4a + 1)(4a^2 - 28a + 19) = 0 \Rightarrow a = xyz = -\frac{1}{4}$$

故

$$x + y + z = \frac{1 - 3xyz}{\frac{3}{2} - xyz} = \frac{\frac{7}{4}}{\frac{7}{4}} = 1$$

20. 已知存在实数  $a, b, x, y$  满足以下方程:

$$\begin{cases} ax^{2014} + by^{2014} = 6 \\ ax^{2015} + by^{2015} = 7 \\ ax^{2016} + by^{2016} = 3 \\ ax^{2017} + by^{2017} = 50 \end{cases}$$

求  $ax^{2018} + by^{2018}$  的值。

不妨设  $f(n) = ax^n + by^n$ , 于是

$$f(2014) = 6, f(2015) = 7, f(2016) = 3, f(2017) = 50,$$

发现

$$(x+y)f(2015) = ax^{2016} + by^{2016} + ax^{2015}y + bxy^{2015} = f(2016) + xyf(2014)$$

$$(x+y)f(2016) = ax^{2017} + by^{2017} + ax^{2016}y + bxy^{2016} = f(2017) + xyf(2015)$$

解得

$$x+y = -9, \quad xy = -11$$

故

$$(x+y)f(2017) = f(2018) + xyf(2016) \Rightarrow ax^{2018} + by^{2018} = f(2018) = -417$$

21. 求联立方程

$$\begin{cases} x \left( 2x^2 + y - \frac{1}{2} \right) = 0 \\ y \left( x - y + \frac{5}{2} \right) = 0 \end{cases}$$

的所有实数解  $(x, y)$ 。

$$x \left( 2x^2 + y - \frac{1}{2} \right) = 0 \tag{1}$$

$$y \left( x - y - \frac{5}{2} \right) = 0 \tag{2}$$

情况一: 若  $x = 0$ , 由 (2) 得

$$y \left( 0 - y - \frac{5}{2} \right) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ 或 } y = -\frac{5}{2}.$$

解为

$$(0, 0), \left( 0, -\frac{5}{2} \right)$$

情况二: 若  $y = 0$ , 由 (1) 得

$$x \left( 2x^2 + 0 - \frac{1}{2} \right) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ 或 } x = \pm \frac{1}{2}.$$

其中  $x = 0$  已考虑, 解为

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right), \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$$

情况三: 若  $x \neq 0$  且  $y \neq 0$ ,

$$\begin{cases} 2x^2 + y - \frac{1}{2} = 0 \\ x - y - \frac{5}{2} = 0 \end{cases}$$

两式相加得

$$2x^2 + x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \text{ 或 } x = -1$$

解为

$$\left(\frac{3}{2}, -1\right), \left(-1, -\frac{7}{2}\right)$$

$\therefore$  原方程组的所有解为

$$(0, 0), \left(0, -\frac{5}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, 0\right), \left(-\frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{3}{2}, -1\right), \left(-1, -\frac{7}{2}\right)$$

22. 求联立方程

$$\begin{cases} x^2 - y - 2z = 4 \\ y^2 - 2z - 3x = -2 \\ 2z^2 - 3x - 5y = -22 \end{cases}$$

的所有实数解  $(x, y, z)$ 。

三式相加得

$$x^2 - 6x + y^2 - 6y + 2z^2 - 4z = -20,$$

经配方后变为

$$(x - 3)^2 + (y - 3)^2 + 2(z - 1)^2 = 0$$

故  $x - 3 = 0, y - 3 = 0, z - 1 = 0$ , 解为  $(3, 3, 1)$

23. 设实数  $x, y, z$  满足以下方程

$$\begin{cases} 4x + 2yz - 6z + 9xz^2 = 4 \\ xyz = 1 \end{cases}$$

求  $x + y + z$  的所有可能值。

眼光发现  $xyz = 1$  提示了换元  $x = \frac{a}{b}$ ,  $y = \frac{b}{c}$ ,  $z = \frac{c}{a}$ , 第一式变为

$$4\left(\frac{a}{b}\right) + 2\left(\frac{b}{c}\right)\left(\frac{c}{a}\right) - 6\left(\frac{c}{a}\right) + 9\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{a}\right)^2 = 4$$

化简得

$$4a^2 - 4ab + 2b^2 - 6bc + 9c^2 = 0 \Rightarrow (2a - b)^2 + (b + 3c)^2 = 0$$

于是  $2a - b = 0$ ,  $b + 3c = 0$ , 即

$$x = \frac{a}{b} = \frac{1}{2}, y = \frac{b}{c} = -3, z = \frac{1}{xy} = -\frac{2}{3}$$

解得

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, -3, -\frac{2}{3}\right) \Rightarrow x + y + z = -\frac{13}{6}$$

24. 求所有非零实数对  $(x, y)$ , 使得满足

$$\frac{x}{x^2 + y} + \frac{y}{x + y^2} = -1 \quad \text{且} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$$

令  $u = x + y$ ,  $v = xy$ , 则第二式化为  $\frac{u}{v} = 1 \Rightarrow u = v$ 。

由第一式得

$$x(x + y^2) + y(x^2 + y) = -[(x^2 + y)(x + y^2)]$$

展开并代换为  $u, v$  得

$$u^2 - 2v + uv = -(u^3 - 3uv + v + v^2) \Rightarrow u^3 + u^2 - 2v + v^2 - v = 0$$

代入  $u = v$

$$v^3 - v = 0 \Rightarrow v(v^2 - 1) = 0$$

因  $xy \neq 0$ , 故  $v = \pm 1$

若  $v = 1$ , 则  $x + y = 1$ ,  $xy = 1 \Rightarrow x^2 - x + 1 = 0$ , 无实根。

若  $v = -1$ , 则  $x + y = -1$ ,  $xy = -1 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0$

解得

$$(x, y) = \left(\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 \mp \sqrt{5}}{2}\right)$$

25. 解方程组

$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 41 \\ x^2(y + z) + y^2(z + x) + z^2(x + y) = 180 \end{cases}$$

$$x + y + z = 9 \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 41 \quad (2)$$

$$x^2(y + z) + y^2(z + x) + z^2(x + y) = 180 \quad (3)$$

由 (2),

$$(x + y + z)^2 - 2(xy + xz + yz) = 41 \Rightarrow xy + xz + yz = 20$$

由 (3),

$$x^2(9 - x) + y^2(9 - y) + z^2(9 - z) = 180$$

$$9(x^2 + y^2 + z^2) - (x^3 + y^3 + z^3) = 180$$

$$9(41) - [(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + 3xyz] = 180$$

$$369 - [9(41 - 20) + 3xyz] = 180$$

$$xyz = 0$$

由韦达定理, 实数  $x, y, z$  为方程式

$$t^3 - 9t^2 + 20t = 0 \Rightarrow t(t - 5)(t - 4) = 0.$$

的三根, 于是解为

$$(0, 5, 4), (0, 4, 5), (4, 5, 0), (4, 0, 5), (5, 0, 4), (5, 4, 0)$$

26. 已知实数  $x, y, z$  满足方程组

$$\begin{cases} x + y + z = -3 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = -\frac{1}{3} \\ x^2(y + z) + y^2(z + x) + z^2(x + y) = -24 \end{cases}$$

求  $x^2 + y^2 + z^2$  的值。

$$x + y + z = -3 \quad (1)$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = -\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$x^2(y + z) + y^2(z + x) + z^2(x + y) = -24 \quad (3)$$

设  $x^2 + y^2 + z^2 = a$ , 由 (1) 可得

$$(x + y + z)^2 = 9 = a + 2(xy + yz + zx) \Rightarrow xy + yz + zx = \frac{9 - a}{2}$$

由 (2) 得

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{xy + yz + zx}{xyz} = -\frac{1}{3} \Rightarrow xyz = \frac{3(a - 9)}{2}$$

由 (3) 得

$$\begin{aligned} & x^2(y + z) + y^2(z + x) + z^2(x + y) \\ &= x^2(-3 - x) + y^2(-3 - y) + z^2(-3 - z) \\ &= -3(x^2 + y^2 + z^2) - (x^3 + y^3 + z^3) \\ &= -3a - \left[ (x + y + z)((x^2 + y^2 + z^2) - (xy + yz + zx)) + 3xyz \right] \\ &= -3a - \left[ (-3) \left( a - \frac{9 - a}{2} \right) + 3 \cdot \frac{3(a - 9)}{2} \right] \\ &= -3a + \frac{-9a + 27}{2} + \frac{9a - 81}{2} \\ &= -3a + 27 = -24 \Rightarrow a = 17 \end{aligned}$$

27. 已知方程组

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x^3 + y^3 + z^3 = -3 \end{cases}$$

求  $x^4 + y^4 + z^4$  之值。

$$x + y + z = 0 \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6 \quad (2)$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = -3 \quad (3)$$

由 (2),

$$(x + y + z)^2 - 2(xy + yz + xz) = 6 \Rightarrow xy + yz + xz = -3$$

由 (3),

$$x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz) + 3xyz \Rightarrow xyz = -1$$

因此  $x, y, z$  为方程式

$$t^3 - 3t + 1 = 0$$

的三根, 于是有

$$x^3 = 3x - 1, \quad y^3 = 3y - 1, \quad z^3 = 3z - 1$$

故

$$x^4 + y^4 + z^4 = 3(x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z) = 3 \cdot 6 - 0 = 18$$

28. 求序对  $(x, y, z)$  满足

$$\begin{cases} (x + y)^3 = z, \\ (y + z)^3 = x, \\ (z + x)^3 = y. \end{cases}$$

不失一般性, 设  $x \geq y \geq z$ , 则有

$$2x \geq x + y \geq x + z, \quad x + y \geq 2y \geq y + z, \quad x + z \geq y + z \geq 2z$$

立方可得

$$\begin{cases} 8x^3 \geq (x + y)^3 \geq (x + z)^3 \\ (x + y)^3 \geq 8y^3 \geq (y + z)^3 \\ (x + z)^3 \geq (y + z)^3 \geq 8z^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x^3 \geq z \geq y \\ z \geq 8y^3 \geq x \\ y \geq x \geq z^3 \end{cases} \Rightarrow z \geq y \geq x$$

因此  $x = y = z$ , 解  $(x + x)^3 = x$  得

$$(x, y, z) = (0, 0, 0), \left( \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4} \right), \left( -\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4} \right)$$

29. 求满足

$$\begin{cases} (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4) = 1 + y^7, \\ (1 + y)(1 + y^2)(1 + y^4) = 1 + x^7 \end{cases}$$

的实数序对  $(x, y)$  个数。

情况一:  $xy = 0$ , 得解  $(0, 0)$ 。

情况二:  $xy < 0$ 。不失一般性设  $x > 0 > y$ , 则

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4) > 1$$

且  $1+y^7 < 1$ , 故无解。

情况三:  $x, y > 0, x \neq y$ 。不失一般性设  $x > y > 0$ , 则

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4) > 1+x^7 > 1+y^7$$

无解。

情况四:  $x, y < 0, x \neq 0$ 。不失一般性设  $x < y < 0$ , 则

$$1-x^8 = (1+y^7)(1-x) = 1-x+y^7-xy^7 \quad (1)$$

$$1-y^8 = (1+x^7)(1-y) = 1-y+x^7-x^7y \quad (2)$$

(2) - (1) 得,

$$x^8 - y^8 = x - y + x^7 - y^7 - xy(x^6 - y^6)$$

由于  $x < y < 0$ , 则  $x^8 - y^8 > 0, x - y < 0, x^7 - y^7 < 0, -xy < 0, x^6 - y^6 > 0$ , 左式为正, 右式为负, 故无解。

情况五:  $x = y$ , 则

$$1-x^8 = 1-x+y^7-xy^7 = 1-x+x^7-x^8 \Rightarrow x = -1, 0, 1$$

其中只有  $(0, 0), (-1, -1)$  成立。

综上, 解为  $(0, 0), (-1, -1)$ , 共有 2 个实数序对。

30. 若非零实数  $a, b, c$  满足

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1, \\ a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + b\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right) + c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = -3, \end{cases}$$

求  $a + b + c$  可能的取值个数。

由第二个方程式,

$$a^2(b+c) + b^2(a+c) + c^2(a+b) = -3abc \Rightarrow (a+b+c)(ab+bc+ca) = 0.$$

又  $(a+b+c)^2 = 1 - 2(ab+bc+ca)$ , 所以

$$\frac{1}{2}(a+b+c)((a+b+c)^2 - 1) = 0 \Rightarrow a+b+c = -1, 0, 1$$

因此  $a+b+c$  共有 3 个可能值。

31. 求在区间  $[0, 2]$  内满足方程组

$$\begin{cases} 2x^2 - 4x + 7 = y, \\ 2y^2 - 4y + 7 = z, \\ 2z^2 - 4z + 7 = x \end{cases}$$

的无序三元组  $(x, y, z)$  个数。

令  $a = x - 1, b = y - 1, c = z - 1$ , 则  $a, b, c \in [-1, 1]$ , 方程组化为

$$\begin{cases} 2a^2 - 1 = b, \\ 2b^2 - 1 = c, \\ 2c^2 - 1 = a. \end{cases}$$

令  $a = \cos \theta, b = \cos 2\theta, c = \cos 4\theta, \theta \in [0, \pi]$ , 得到

$$\cos \theta = \cos 8\theta \Rightarrow -2 \sin \frac{9\theta}{2} \sin \frac{7\theta}{2} = 0.$$

解得

$$\theta - 2n\pi = 0, \frac{2\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}, \frac{6\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}, \frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}, \frac{6\pi}{7}, n \in \mathbb{Z}$$

在区间  $[-1, 1]$  内的无序三元组  $(a, b, c)$  为

$$(0, 0, 0), \left(\cos \frac{2\pi}{7}, \cos \frac{4\pi}{7}, \cos \frac{8\pi}{7}\right), \left(\cos \frac{2\pi}{9}, \cos \frac{4\pi}{9}, \cos \frac{8\pi}{9}\right), \left(\cos \frac{2\pi}{3}, \cos \frac{2\pi}{3}, \cos \frac{2\pi}{3}\right)$$

故原方程式无序三元组个数为 4。

32. 若  $x, y, z$  为相异复数, 满足

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x^2 + y = y^2 + z = z^2 + x, \end{cases}$$

求  $(x - y)(y - z)(z - x)$  的值。

由  $x^2 + y = y^2 + z$ , 得

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = (1 - z)(x - y) = z - y$$

同理得

$$(1 - x)(y - z) = x - z, \quad (1 - y)(z - x) = y - x$$

由于  $x \neq y \neq z$ , 三式相乘可得

$$(1 - x)(1 - y)(1 - z) = -1 \quad (1)$$

且由  $(1 - z)(x - y) = z - y$  展开得

$$x - z = xz - yz = z(x - y)$$

同理得

$$y - x = x(y - z), \quad z - y = y(z - x)$$

由于  $x \neq y \neq z$ , 三式相乘可得

$$xyz = -1$$

现由 (1), 得

$$1 - (x + y + z) + xy + yz + zx - xyz = -1 \Rightarrow xy + yz + zx = -2$$

设  $k = x^2 + y = y^2 + z = z^2 + x$ , 则

$$3k = x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z = 1 - 2(-2) + 1 = 6 \Rightarrow x^2 + y = k = 2$$

则

$$x - y = x - (2 - x^2) = x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2),$$

同理

$$y - z = (y - 1)(y + 2), \quad z - x = (z - 1)(z + 2)$$

于是

$$\begin{aligned} & (x - y)(y - z)(z - x) \\ &= (x - 1)(y - 1)(z - 1)(x + 2)(y + 2)(z + 2) \\ &= [xyz - (xy + yz + zx) + x + y + z - 1][xyz + 2(xy + yz + zx) + 4(x + y + z) + 8] = 7 \end{aligned}$$

33. 已知  $xyz \neq 0$ ,  $a, b, c$  不全为零, 且满足方程组

$$\begin{cases} a = \frac{by}{z} + \frac{cz}{y} \\ b = \frac{cz}{x} + \frac{ax}{z} \\ c = \frac{ax}{y} + \frac{by}{x} \end{cases}$$

(a) 证明  $a^3x^3 + b^3y^3 + c^3z^3 + abcxyz = 0$ 。

将方程组改写为

$$\begin{cases} (-ax)\frac{1}{x} + (cz)\frac{1}{y} + (by)\frac{1}{z} = 0 \\ (cz)\frac{1}{x} + (-by)\frac{1}{y} + (ax)\frac{1}{z} = 0 \\ (by)\frac{1}{x} + (ax)\frac{1}{y} + (-cz)\frac{1}{z} = 0 \end{cases}$$

由与存在非零解  $\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right)$ , 则

$$\begin{vmatrix} -ax & cz & by \\ cz & -by & ax \\ by & ax & -cz \end{vmatrix} = 0$$

展开可得

$$a^3x^3 + b^3y^3 + c^3z^3 + abcxyz = 0$$

(b) 证明  $\frac{yz}{x^2} + \frac{zx}{y^2} + \frac{xy}{z^2} = -1$ 。

改写成

$$\begin{cases} -a + \frac{y}{z}b + \frac{z}{y}c = 0 \\ \frac{z}{x}a - b + \frac{x}{z}c = 0 \\ \frac{x}{y}a + \frac{y}{x}b - c = 0 \end{cases}$$

同理,

$$\begin{vmatrix} -1 & \frac{y}{z} & \frac{z}{y} \\ \frac{z}{x} & -1 & \frac{x}{z} \\ \frac{x}{y} & \frac{y}{x} & -1 \end{vmatrix} = 0$$

展开行列式可得

$$\frac{yz}{x^2} + \frac{zx}{y^2} + \frac{xy}{z^2} = -1$$

(c) 证明  $a^3 + b^3 + c^3 - 5abc = 0$ 。

由原方程组, 有

$$a^3 = \left(\frac{by}{z}\right)^3 + \left(\frac{cz}{y}\right)^3 + 3abc, \quad b^3 = \left(\frac{cz}{x}\right)^3 + \left(\frac{ax}{z}\right)^3 + 3abc, \quad c^3 = \left(\frac{ax}{y}\right)^3 + \left(\frac{by}{x}\right)^3 + 3abc$$

于是

$$2(a^3 + b^3 + c^3) = (a^3x^3 + b^3y^3 + c^3z^3) \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3}\right) + 9abc$$

由 (a), (b) 得

$$2(a^3 + b^3 + c^3) = -abcxyz \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3}\right) + 9abc = 10abc$$

即得证

$$a^3 + b^3 + c^3 - 5abc = 0$$

34. 求实数解  $(a, b, c, d)$  满足方程组

$$\begin{cases} a + 4b + 8c + 4d = 53 \\ 3a^2 + 4b^2 + 12c^2 + 2d^2 = 159 \\ 9a^3 + 4b^3 + 18c^3 + d^3 = 477 \end{cases}$$

由柯西不等式,

$$53 \cdot 477 = (a + 4b + 8c + 4d)(9a^3 + 4b^3 + 18c^3 + d^3) \geq (3a^2 + 4b^2 + 12c^2 + 2d^2)^2 = 159^2$$

此时等号成立, 有

$$\frac{a}{3a^2} = \frac{4b}{4b^2} = \frac{8c}{12c^2} = \frac{4d}{2d^2}.$$

设

$$\lambda = \frac{1}{3a} = \frac{1}{b} = \frac{2}{3c} = \frac{2}{d}.$$

则

$$a = \frac{1}{3\lambda}, \quad b = \frac{1}{\lambda}, \quad c = \frac{2}{3\lambda}, \quad d = \frac{2}{\lambda}$$

代入第一式得

$$\frac{1}{3\lambda} + \frac{4}{\lambda} + \frac{16}{3\lambda} + \frac{8}{\lambda} = \frac{29}{3\lambda} = 53 \Rightarrow \lambda = \frac{29}{159}$$

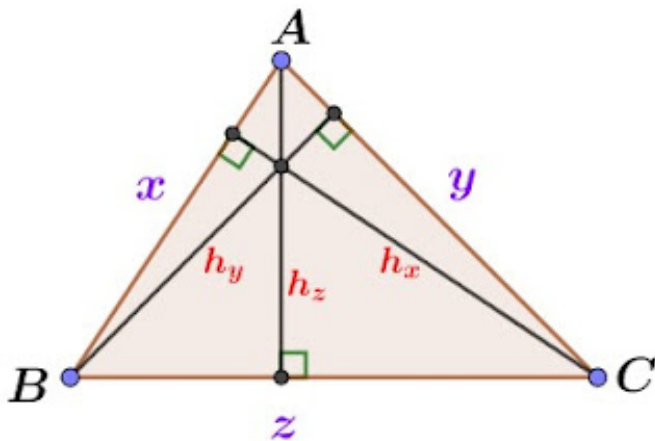
故实数解为

$$\left( \frac{159}{87}, \frac{159}{29}, \frac{106}{87}, \frac{318}{29} \right)$$

35. 设正实数  $x, y, z$  满足

$$\begin{cases} x = \sqrt{y^2 - \frac{1}{49}} + \sqrt{z^2 - \frac{1}{49}} \\ y = \sqrt{x^2 - \frac{1}{64}} + \sqrt{z^2 - \frac{1}{64}} \\ z = \sqrt{x^2 - \frac{1}{81}} + \sqrt{y^2 - \frac{1}{81}} \end{cases}$$

求  $x + y + z$ 。



考虑一边长为  $x, y, z$ , 对应高为

$$h_x = \frac{1}{7}, \quad h_y = \frac{1}{8}, \quad h_z = \frac{1}{9}$$

的  $\triangle ABC$ , 则  $x, y, z$  满足题意;  $\triangle ABC$  面积为

$$S = \frac{1}{2}xh_x = \frac{1}{2}yh_y = \frac{1}{2}zh_z \Rightarrow x : y : z = 7 : 8 : 9$$

设  $x = 7k, y = 8k, z = 9k$ , 半周长  $s = \frac{1}{2}(x + y + z) = 12k$ , 面积又为

$$S = \sqrt{12k \cdot 5k \cdot 4k \cdot 3k} = 12\sqrt{5}k^2$$

联立得

$$S = \frac{1}{2}xh_x = \frac{k}{2} = 12\sqrt{5}k^2 \Rightarrow k = \frac{1}{24\sqrt{5}}$$

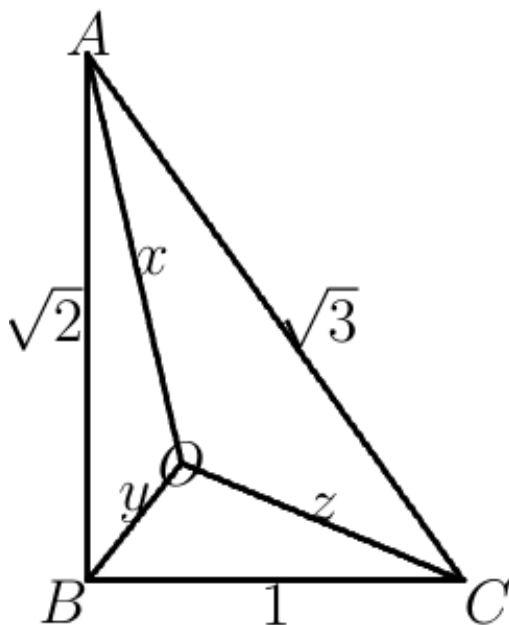
因此

$$x + y + z = 24k = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

36. 已知正数  $x, y, z$  满足

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 2 \\ y^2 + yz + z^2 = 1 \\ z^2 + zx + x^2 = 3 \end{cases}$$

求  $xy + yz + zx$ 。



方程组改写成

$$\begin{cases} x^2 - 2xy \cos 120^\circ + y^2 = (\sqrt{2})^2 \\ y^2 - 2yz \cos 120^\circ + z^2 = 1^2 \\ z^2 - 2zx \cos 120^\circ + x^2 = (\sqrt{3})^2 \end{cases}$$

考虑一边长为  $AB = \sqrt{2}, BC = 1, CA = \sqrt{3}$  的  $\triangle ABC$ , 其中

$$OA = x, OB = y, OC = z, \angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 120^\circ$$

且满足

$$AB^2 + BC^2 = CA^2$$

故  $\triangle ABC$  为直角三角形, 面积为

$$[ABC] = \frac{1}{2}(xy + yz + zx) \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{2}$$

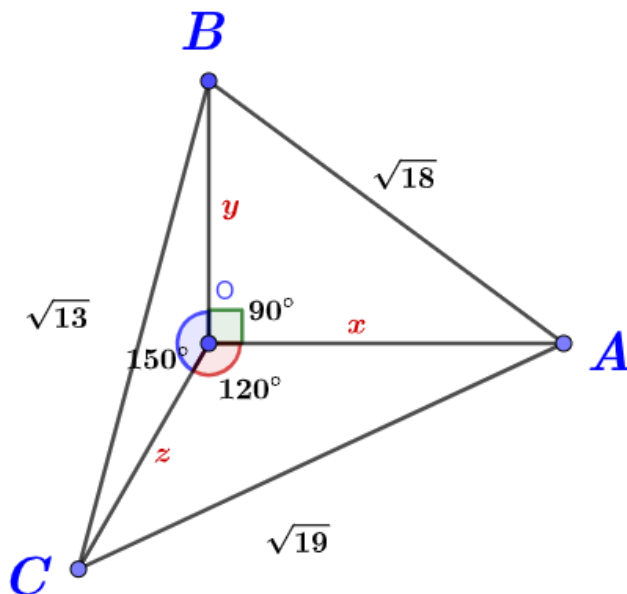
解得

$$xy + yz + zx = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

37. 已知  $x, y, z$  为实数且满足

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 18 \\ y^2 + \sqrt{3}yz + z^2 = 13 \\ x^2 + xz + z^2 = 19 \end{cases}$$

求  $2xy + yz + \sqrt{3}xz$ 。



方程组改写成

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2xy \cos 90^\circ = (3\sqrt{2})^2 \\ y^2 + z^2 - 2yz \cos 150^\circ = (\sqrt{13})^2 \\ x^2 + z^2 - 2xz \cos 120^\circ = (\sqrt{19})^2 \end{cases}$$

构造  $\triangle ABC$ , 满足边长:

$$AB = \sqrt{18}, \quad BC = \sqrt{13}, \quad AC = \sqrt{19}, \quad OA = x, \quad OB = y, \quad OC = z$$

及夹角

$$\angle AOB = 90^\circ, \quad \angle BOC = 150^\circ, \quad \angle AOC = 120^\circ$$

设半周长

$$s = \frac{\sqrt{18} + \sqrt{13} + \sqrt{19}}{2},$$

三角形面积为

$$S = \sqrt{s(s - \sqrt{18})(s - \sqrt{13})(s - \sqrt{19})} = 3\sqrt{\frac{11}{2}}.$$

面积也等于

$$\frac{1}{2} (xy \sin 90^\circ + yz \sin 150^\circ + zx \sin 120^\circ) = \frac{1}{2} \left( xy + \frac{1}{2}yz + \frac{\sqrt{3}}{2}xz \right).$$

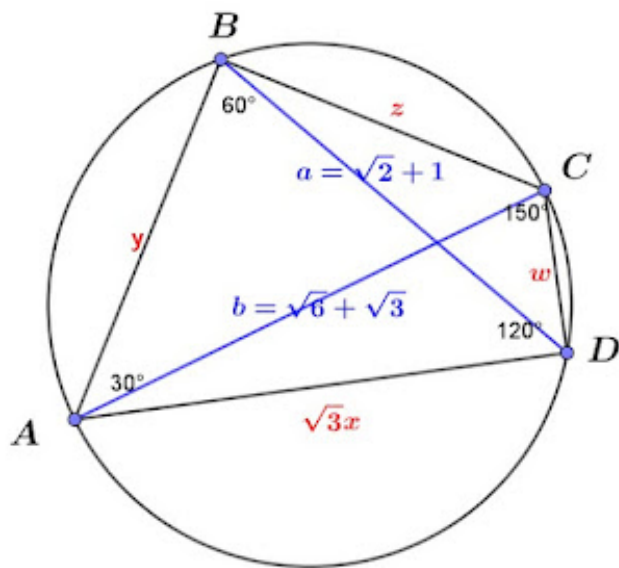
因此

$$\frac{1}{2} \left( xy + \frac{1}{2}yz + \frac{\sqrt{3}}{2}xz \right) = 3\sqrt{\frac{11}{2}} \implies 2xy + yz + \sqrt{3}xz = 6\sqrt{22}.$$

38. 已知联立方程组

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 - 3xy = 3 + 2\sqrt{2} \\ y^2 + z^2 - yz = 9 + 6\sqrt{2} \\ z^2 + w^2 + \sqrt{3}zw = 3 + 2\sqrt{2} \\ w^2 + 3x^2 + \sqrt{3}wx = 9 + 6\sqrt{2} \end{cases},$$

求  $\sqrt{3}xz + yw$  之值。



设

$$3x^2 + y^2 - 3xy = 3 + 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} + 1)^2 = a^2,$$

$$y^2 + z^2 - yz = 9 + 6\sqrt{2} = (\sqrt{6} + \sqrt{3})^2 = b^2,$$

$$z^2 + w^2 + \sqrt{3}zw = 3 + 2\sqrt{2} = a^2,$$

$$w^2 + 3x^2 + \sqrt{3}wx = 9 + 6\sqrt{2} = b^2.$$

考虑一圆内接四边形, 边长分别为  $\sqrt{3}x, y, z, w$ , 对角线长为  $a, b$ ; 由托勒密定理,

$$\sqrt{3}xz + yw = (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{6} + \sqrt{3}) = 3\sqrt{3} + 2\sqrt{6}.$$

39. 已知实数  $x, y \in (0, 1)$  满足

$$\begin{cases} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x} + \frac{2y}{1 + \sqrt{1 - y^2} + y} = 1, \\ 25(1 - y^2) = 41 - 40\sqrt{1 - x^2} \end{cases}$$

求  $(x, y)$  的所有解。

设  $x = \sin \alpha, y = \sin \beta, 0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$ , 则第一式变为

$$\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{2 \sin \beta}{1 + \cos \beta + \sin \beta} = 1$$

继续化简得

$$\tan \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{2 \sin \beta}{1 + \cos \beta + \sin \beta} = \frac{1 + \cos \beta - \sin \beta}{1 + \cos \beta + \sin \beta} = \frac{1 - \tan \frac{\beta}{2}}{1 + \tan \frac{\beta}{2}} = \tan \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2} \right)$$

故

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = \sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \cos \alpha$$

于是第二方程可化为

$$25(1 - y^2) = 41 - 40y$$

解得

$$x = \frac{3}{5}, \quad y = \frac{4}{5}$$

40. 已知实数  $x > 0$  且  $y, z$  均为实数, 求联立方程组

$$\begin{cases} 5 \left( x + \frac{1}{x} \right) = 12 \left( y + \frac{1}{y} \right) = 13 \left( z + \frac{1}{z} \right), \\ xy + yz + zx = 1 \end{cases}$$

的解  $(x, y, z)$ 。

由条件  $x > 0, x, y, z \in \mathbb{R}$ , 可设

$$x = \tan A, \quad y = \tan B, \quad z = \tan C,$$

其中  $0 < A < \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < B, C < \frac{\pi}{2}$ , 于是

$$5 \left( x + \frac{1}{x} \right) = 12 \left( y + \frac{1}{y} \right) = 13 \left( z + \frac{1}{z} \right) \Rightarrow 5 \cdot \frac{2}{\sin 2A} = 12 \cdot \frac{2}{\sin 2B} = 13 \cdot \frac{2}{\sin 2C},$$

且

$$\tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan C \tan A = 1.$$

因此

$$\frac{5}{\sin 2A} = \frac{12}{\sin 2B} = \frac{13}{\sin 2C}, \quad A + B + C = 90^\circ.$$

由此得

$$\tan 2A = \frac{5}{12}, \quad \tan 2B = \frac{12}{5}, \quad \tan 2C = \infty,$$

故

$$\tan A = \frac{1}{5}, \quad \tan B = \frac{2}{3}, \quad \tan C = 1.$$

即

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{3}, 1\right)$$

41. 已知正实数  $x, y, z$  满足

$$\begin{cases} x + y + z = xyz \\ \frac{x^2}{16(1+x^2)} = \frac{y^2}{25(1+y^2)} = \frac{z^2}{36(1+z^2)} \end{cases}$$

求

$$\frac{x^2(1+x^2)^2}{z^2(1+z^2)^2}$$

的值。

考虑换元  $x = \tan A, y = \tan B, z = \tan C$ , 其中  $A, B, C \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , 且注意到

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C \iff A + B + C = \pi$$

于是可以将  $A, B, C$  视为某三角形的内角; 由

$$\frac{x^2}{16(1+x^2)} = \frac{y^2}{25(1+y^2)} = \frac{z^2}{36(1+z^2)}$$

化简得

$$\frac{4}{\sin A} = \frac{5}{\sin B} = \frac{6}{\sin C}$$

由正弦定理, 不妨设  $\triangle ABC$  边长为  $a = 4k, b = 5k, c = 6k, k \neq 0$ , 则由余弦定理,

$$\cos A = \frac{(5k)^2 + (6k)^2 - (4k)^2}{2 \cdot 5k \cdot 6k} = \frac{3}{4}, \quad \cos C = \frac{(4k)^2 + (5k)^2 - (6k)^2}{2 \cdot 4k \cdot 5k} = \frac{1}{8}$$

故

$$\frac{x^2(1+x^2)^2}{z^2(1+z^2)^2} = \frac{\tan^2 A \sec^4 A}{\tan^2 C \sec^4 C} = \frac{\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2 \left(\frac{4}{3}\right)^4}{(\sqrt{63})^2 \cdot 8^4} = \frac{1}{186624}$$

42. 求所有  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  满足方程组

$$\begin{cases} a^2 = \frac{b^3 + 9\sqrt{3}}{3b} = \frac{c^3 + 16}{3c} \\ b^2 = \frac{a^3 - 10}{3a} = \frac{c^3 + 28}{3c} \\ c^2 = \frac{b^3 + 45\sqrt{3}}{3b} = \frac{a^3 - 88}{3a} \end{cases}$$

由 (1), (2)

$$3a^2b - b^3 = 9\sqrt{3}, \quad a^3 - 3ab^2 = 10$$

此时展开式

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

毫无帮助, 不妨考虑

$$(a + bi)^3 = a^3 - 3ab^2 + (3a^2b - b^3)i = 10 + 9\sqrt{3}i$$

两边取模得

$$(\sqrt{a^2 + b^2})^3 = \sqrt{10^2 + (9\sqrt{3})^2} \Rightarrow a^2 + b^2 = 7 \quad (3)$$

同理可得

$$b^2 + c^2 = 19, \quad c^2 + a^2 = 20 \quad (4)$$

由 (3), (4) 解得  $a^2 = 4, b^2 = 3, c^2 = 16$ , 经检验得原方程组的解为

$$a = -2, \quad b = \sqrt{3}, \quad c = -4$$

# 取整

1. 求满足

$$\lfloor 0.5 + \lfloor x \rfloor \rfloor = 20$$

的所有  $x$  的取值范围。

由下取整定义, 原方程即

$$20 \leq 0.5 + \lfloor x \rfloor < 21 \Rightarrow 19.5 \leq \lfloor x \rfloor < 20.5$$

由于  $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ ,

$$\lfloor x \rfloor = 20 \Rightarrow 20 \leq x < 21$$

2. 求满足

$$\lceil \lceil x \rceil - 1.3 \rceil = 16$$

的所有  $x$ 。

由上取整定义, 原方程即

$$15 \leq \lceil x \rceil - 1.3 < 16 \Rightarrow 16.3 \leq \lceil x \rceil < 17.3$$

由于  $\lceil x \rceil \in \mathbb{Z}$ ,

$$\lceil x \rceil = 17 \Rightarrow 16 < x \leq 17$$

3. 解方程

$$2x = \lfloor x \rfloor + \frac{16}{5}$$

发现  $x \neq \lfloor x \rfloor$ , 由于

$$\lfloor x \rfloor < x < \lfloor x \rfloor + 1 \Rightarrow 2\lfloor x \rfloor < 2x < 2\lfloor x \rfloor + 2,$$

观察右式的取值范围可知

$$2[x] < [x] + \frac{16}{5} < 2[x] + 2 \Rightarrow \frac{6}{5} < [x] < \frac{16}{5}$$

因此

$$[x] = 2, 3 \Rightarrow x = \frac{13}{5}, \frac{31}{10}$$

#### 4. 解方程

$$2[x] + 3x = 4 - 5\{x\}$$

设  $x = n + r$ , 其中  $n = [x], r = \{x\}$ , 代入方程得

$$2n + 3(n + r) = 4 - 5r \Rightarrow 5x = 4 - 3r$$

由  $0 \leq r < 1$ , 有

$$1 < 4 - 3r \leq 4 \Rightarrow \frac{1}{5} < x \leq \frac{4}{5}$$

由此可得  $x = \{x\}$ , 即  $[x] = 0$ , 此时

$$2 \cdot 0 + 3x = 4 - 5x \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

5. 令  $f(x) = [x + \frac{1}{2}] + [x - \frac{1}{2}] - [2x]$  证明只有  $\frac{1}{2} \leq \{x\} < 1$  时, 满足方程  $f(x) = 0$ 。

设  $x = n + \{x\}$ , 其中  $n$  为整数,  $0 \leq \{x\} < 1$ 。

$$f(x) = [n + \{x\} + \frac{1}{2}] + [n + \{x\} - \frac{1}{2}] - [2n + 2\{x\}]$$

由于  $n$  是整数, 可以从取整符号中提出:

$$f(x) = n + [\{x\} + \frac{1}{2}] + n + [\{x\} - \frac{1}{2}] - (2n + [2\{x\}]) = [\{x\} + \frac{1}{2}] + [\{x\} - \frac{1}{2}] - [2\{x\}]$$

分情况讨论  $\{x\}$  的取值范围: 1. 当  $0 \leq \{x\} < \frac{1}{2}$  时:  $[\{x\} + \frac{1}{2}] = 0$ ,  $[\{x\} - \frac{1}{2}] = -1$ ,  $[2\{x\}] = 0 \therefore f(x) = 0 + (-1) - 0 = -1 \neq 0$ ; 2. 当  $\frac{1}{2} \leq \{x\} < 1$  时:  $[\{x\} + \frac{1}{2}] = 1$ ,  $[\{x\} - \frac{1}{2}] = 0$ ,  $[2\{x\}] = 1 \therefore f(x) = 1 + 0 - 1 = 0$ 。得证只有  $\frac{1}{2} \leq \{x\} < 1$  时,  $f(x) = 0$ 。

6. 8. 解  $8[3x] - 5[2x] = 3$ 。

令  $x = n + r$ ，其中  $n \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < 1$ 。原方程变为  $8[3n + 3r] - 5[2n + 2r] = 3$ ，即

$$3n + 8[3r] - 5[2r] = 3$$

分区间讨论  $r$  的取值：1. 当  $0 \leq r < \frac{1}{3}$  时， $[3r] = 0, [2r] = 0 \Rightarrow 3n = 3 \Rightarrow n = 1$ ；2. 当  $\frac{1}{3} \leq r < \frac{1}{2}$  时， $[3r] = 1, [2r] = 0 \Rightarrow 3n + 8 = 3 \Rightarrow 3n = -5$ （无整数解）；3. 当  $\frac{1}{2} \leq r < \frac{2}{3}$  时， $[3r] = 1, [2r] = 1 \Rightarrow 3n + 8 - 5 = 3 \Rightarrow 3n = 0 \Rightarrow n = 0$ ；4. 当  $\frac{2}{3} \leq r < 1$  时， $[3r] = 2, [2r] = 1 \Rightarrow 3n + 16 - 5 = 3 \Rightarrow 3n = -8$ （无整数解）。综上所述，解为： $n = 1, 0 \leq r < \frac{1}{3} \Rightarrow 1 \leq x < \frac{4}{3}$ ； $n = 0, \frac{1}{2} \leq r < \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq x < \frac{2}{3}$ 。

7. 已知

$$\begin{cases} [b] + [a] + \{c\} = 16 \\ [c] + [b] + \{a\} = 11.3 \\ [a] + [c] + \{b\} = 9.7 \end{cases}$$

求  $a + b + c$  的值。

由题意可知，小数部分分别为

$$\{a\} = 0.3, \quad \{b\} = 0.7, \quad \{c\} = 0$$

原方程组变为

$$\begin{cases} [b] + [a] + 1 = 16 \\ [c] + [b] + 1 = 11 \\ [a] + [c] = 9 \end{cases}$$

由第二式与第三式可得

$$[a] = 7, \quad [b] = 9 - 1 = 8, \quad [c] = 2$$

因此

$$a = 7.3, \quad b = 8.7, \quad c = 2 \Rightarrow a + b + c = 18$$

8. 已知  $\frac{1}{3-\sqrt{7}}$  的整数部分为  $a$ ，小数部分为  $b$ ，求  $a^2 + (1 + \sqrt{7})ab$ 。

$$\frac{1}{3 - \sqrt{7}} = \frac{3 + \sqrt{7}}{2}$$

由  $2 < \sqrt{7} < 3 \Rightarrow \frac{5}{2} < \frac{3+\sqrt{7}}{2} < 3$ , 得  $a = 2$ ,  $b = \frac{3+\sqrt{7}}{2} - a = \frac{\sqrt{7}-1}{2}$ 。

$$\begin{aligned} a^2 + (1 + \sqrt{7})ab &= 4 + (1 + \sqrt{7}) \times 2 \times \frac{\sqrt{7}-1}{2} \\ &= 4 + (\sqrt{7} + 1)(\sqrt{7} - 1) \\ &= 4 + 7 - 1 \\ &= 10 \end{aligned}$$

9. 求大于  $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^6$  的最小整数。

令

$$a = \sqrt{3} + \sqrt{2}, \quad b = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

则

$$a^2 = 5 + 2\sqrt{6}, \quad b^2 = 5 - 2\sqrt{6}, \quad ab = 1$$

所以

$$a^6 + b^6 = (a^2 + b^2)(a^4 + b^4 - a^2b^2) = 10(10^2 - 3) = 970$$

由于  $0 < b^2 < 1$ , 所以

$$969 < a^6 < 970 \Rightarrow [a^6] = 970$$

10. 求满足

$$[\sqrt{x}] = [\sqrt{x+34}]$$

的最小整数  $x$ 。

设  $y, y+1$  为连续正整数, 使得他们的平方根的差不小于 34, 则

$$(y+1)^2 - y^2 > 34 \Rightarrow y > 16.5$$

由于  $y \in \mathbb{Z}$ , 最小的  $x$  为

$$x = y^2 = 17^2 = 289$$

11. 解

$$[x][2x] = 15$$

设

$$x = n - r, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad 0 < r \leq 1$$

当  $r < \frac{1}{2}$ , 原方程即

$$n(2n) = 15 \Rightarrow n = \sqrt{\frac{15}{2}} \notin \mathbb{Z}$$

当  $r \geq \frac{1}{2}$ , 原方程即

$$n(2n - 1) = 15 \Rightarrow (n - 3)(2n + 5) = 0 \Rightarrow n = 3 \in \mathbb{Z}$$

故  $x$  的取值范围为

$$2 < x \leq 2.5$$

12. 求正实数  $x$  满足

$$x^2 + \{x\}^2 = 27$$

设

$$x = n - r, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad 0 < r \leq 1$$

且注意到

$$x^2 \leq x^2 + \{x\}^2 < x^2 + 1$$

因此

$$26 < x^2 \leq 27 \Rightarrow n = 5$$

代入原方程得

$$(5 + r)^2 + r^2 = 27 \Rightarrow r = \frac{-5 + \sqrt{29}}{2}$$

于是

$$x = 5 + r = \frac{5 + \sqrt{29}}{2}$$

13. 解

$$x^2 - 6[x] + 5 = 0$$

原方程化为

$$x^2 - 6[x] + 5 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = -6\{x\}$$

$-6\{x\}$  的值域为  $(-6, 0]$ , 且对于  $x \in [1, 5]$ , 有

$$x^2 - 6x + 5 \in (-6, 0]$$

当  $x \in [1, 2)$ , 有  $[x] = 1$ , 则

$$x^2 = 6 \cdot 1 - 5 \Rightarrow x = 1$$

类似地,

$$[x] = 2 \Rightarrow x^2 = 7 \Rightarrow x = \sqrt{7}$$

$$[x] = 3 \Rightarrow x^2 = 13 \Rightarrow x = \sqrt{13}$$

$$[x] = 4 \Rightarrow x^2 = 19 \Rightarrow x = \sqrt{19}$$

$$[x] = 5 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = 5$$

因此, 方程的解为

$$x = 1, \sqrt{7}, \sqrt{13}, \sqrt{19}, 5$$

14. 解

$$[x^2] - [x]^2 = 1999$$

设  $x = n + r$ , 其中  $n = [x]$ ,  $r = \{x\}$ , 则

$$[x^2] - n^2 = [(n+r)^2 - n^2] = [2nr + r^2]$$

故

$$[x^2] - [x]^2 = 1999 \Rightarrow 2nr + r^2 \geq 1999$$

最小的  $n$  满足

$$2nr \geq 1999 \implies n \geq [1999/2] = 1000.$$

此时有

$$r^2 + 2000r - 1999 = 0 \Rightarrow r = -1000 + \sqrt{1001999}$$

所以

$$x = n + r = \sqrt{1001999}$$

15. 解

$$\left\lfloor \frac{4x+3}{5} \right\rfloor = \frac{3(2x+1)}{4}$$

令

$$m = \frac{3(2x+1)}{4} \Rightarrow x = \frac{4m-3}{6},$$

代回原方程化简得到

$$\left\lfloor \frac{8m+3}{15} \right\rfloor = m$$

有

$$0 \leq \frac{8m+3}{15} - m < 1 \Rightarrow -\frac{12}{7} < m \leq \frac{3}{7}$$

由于  $m \in \mathbb{Z}$  于是

$$m = 0, -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}, -\frac{7}{6}$$

16. 求满足以下条件的正整数  $x$  的个数:

$$\left\lfloor \frac{x}{99} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{101} \right\rfloor.$$

设

$$\left\lfloor \frac{x}{99} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{101} \right\rfloor = m \in \mathbb{Z}$$

由定义有

$$m \leq \frac{x}{99} < m+1 \Rightarrow 99m \leq x < 99(m+1)$$

$$m \leq \frac{x}{101} < m+1 \Rightarrow 101m \leq x < 101(m+1)$$

因此

$$101m \leq x < 99(m+1)$$

当  $m > 49$  时,  $101m > 99(m+1)$ , 无解。对于  $0 \leq m \leq 49$ , 由于  $x = 0$  不是正整数, 可行整数个数为

$$\sum_{m=0}^{49} (99(m+1) - 101m) = \sum_{m=0}^{49} (99 - 2m) - 1 = 99 \cdot 50 - 2 \cdot \frac{49 \cdot 50}{2} - 1 = 2499$$

17. 求解  $x \in \mathbb{Z}$  满足

$$\left\lfloor \frac{x}{1!} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{2!} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{3!} \right\rfloor = 224$$

原方程给出

$$\frac{x}{1} + \frac{x}{2} + \frac{x}{6} - 3 < 224 < \frac{x}{1} + \frac{x}{2} + \frac{x}{6}$$

化简得

$$134.4 \leq x < 136.2$$

由于  $x \in \mathbb{Z}$ , 且  $x = 136$  不满足原方程, 故原方程式的解只有

$$x = 135$$

18. 求满足

$$\frac{\lfloor x \rfloor}{x} = \frac{9}{10}$$

的最大实数  $x$ 。

由  $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$ , 交叉相乘得

$$10\lfloor x \rfloor = 9(\lfloor x \rfloor + \{x\}) \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 9\{x\}$$

由于  $0 \leq \{x\} < 1$ ,  $\{x\}$  的可能值为

$$\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \dots, \frac{8}{9},$$

取最大值  $\{x\} = \frac{8}{9}$ , 于是

$$x = \lfloor x \rfloor + \{x\} = \frac{80}{9}$$

19. 18. 如  $x > 0$  且满足  $[x]^2 = x(x - [x])$ , 求  $x - \frac{1}{x}$ 。

令  $[x] = n$ , 则  $x = n + r$ , 其中  $n$  为正整数,  $0 \leq r < 1$ 。方程变为  $n^2 = (n + r)r$ , 即  $n^2 = nr + r^2$ 。由于  $x > 0$ , 方程两边同除以  $x$  得:

$$\frac{n^2}{x} = x - n \Rightarrow n = x - \frac{n^2}{x}$$

又由  $n^2 = r(n + r)$  可知,  $r^2 < n^2 = nr + r^2 < (n + 1)^2$  始终成立。通过代数变形可得:  $x - \frac{1}{x} = n + r - \frac{1}{n+r}$ 。(注: 根据题目关系项, 可进一步解得具体数值或化简表达式)

20. 19. 用反证法证明  $[x] + [2x] + [4x] + [8x] = 147$  无解。

证: 设  $f(x) = [x] + [2x] + [4x] + [8x]$ 。注意到  $f(x)$  是一个阶梯增函数, 且仅在  $x = \frac{k}{8}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) 处发生跳跃。当  $x = 9$  时,  $f(9) = 9 + 18 + 36 + 72 = 135$ ; 当  $x = 10$  时,  $f(10) = 10 + 20 + 40 + 80 = 150$ 。在区间  $[9, 10)$  内, 最大的跳跃发生在  $x$  趋近于 10 时。考虑  $f(x)$  的所有可能跳跃值之和: 在一个单位区间  $[n, n + 1)$  内,  $f(x)$  的总增量为  $1 + 2 + 4 + 8 = 15$ 。因此  $f(x)$  取到的值模 15 的余数与  $f(n)$  相同。因为  $135 = 15 \times 9$ , 所以  $f(x)$  在该区间内的所有取值均应满足  $f(x) \equiv f(9) \pmod{15}$  (即跳跃点的增量累加)。具体的跳跃点值为:  $1, 1 + 8, 1 + 4 + 8$  等, 经检验 147 不在  $f(x)$  的值域内。故原方程无解。

21. 解

$$[x[x]] + [x[x]] = 111$$

令  $x = n + r$ , 其中  $n \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < 1$ , 则

$$[(n + r)[(n + r)]] + [(n + r)[(n + r)]] = 111$$

展开得

$$2n^2 + n + [nr] + [(n + 1)r] = 111$$

解不等式组

$$\begin{cases} 2n^2 + n + 1 \leq 111 \\ 2n^2 + 3n \geq 111 \end{cases}$$

得  $n = 7$ , 因此解

$$[7r] + [8r] = 6$$

得

$$\frac{3}{8} \leq r \leq \frac{3}{7} \Rightarrow \frac{59}{8} \leq x \leq \frac{52}{7}$$

22. (a) 求方程

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor = n$$

的正整数解个数, 其中  $1 \leq n \leq 100$ 。

原方程化为

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor = \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \frac{n}{6}$$

明示了

$$\frac{n}{2}, \frac{n}{3}, \frac{n}{6}$$

皆为整数, 于是  $n$  必须为 6 的倍数, 因此正整数解共有  $\left\lfloor \frac{100}{6} \right\rfloor = 16$  个。

(b) 求方程

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor = n - 1$$

的正整数解个数, 其中  $1 \leq n \leq 100$ 。

设

$$f(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor,$$

则

$$f(n+6) = f(n) + 6$$

定义  $g(n) = f(n) - (n-1)$ , 则

$$g(n+6) = g(n).$$

且有

$$g(1) = g(2) = g(3) = g(4) = 0, \quad g(5) \neq 0, \quad g(6) \neq 0.$$

因此正整数解共有

$$17 + 17 + 17 + 17 = 68$$

个。

23. 求数列

$$\left\lfloor \frac{1^2}{2016} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{2^2}{2016} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{2016^2}{2016} \right\rfloor$$

中相异整数的个数。

考虑连续两项的差

$$\frac{n^2}{2016} - \frac{(n-1)^2}{2016} = \frac{2n-1}{2016} < 1 \implies n < 1007.5$$

由于

$$\frac{1007^2}{2016} \approx 503.0005 > 503$$

前 1007 项即整数  $0, 1, 2, \dots, 503$ , 共有 504 个不同整数。对于第 1008 项到 2016 项, 每项至少比前一项大 1, 因此产生

$$2016 - 1008 + 1 = 1009$$

个不同整数, 因此数列中相异整数的个数为

$$504 + 1009 = 1513$$

24. 求

$$\sum_{k=1}^{512} [\log_2 k]$$

$1 \leq k < 2 \Rightarrow [\log_2 k] = 0$ ,  $2 \leq k < 4 \Rightarrow [\log_2 k] = 1$ ,  $4 \leq k < 8 \Rightarrow [\log_2 k] = 2$ , ...  
 $256 \leq k < 512 \Rightarrow [\log_2 k] = 8$ ,  $[\log_2 512] = 9$ 。因此

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{512} [\log_2 k] &= 0 + (4-2) \times 1 + (8-4) \times 2 + \cdots + (512-256) \times 8 + 9 \\ &= 2 \times 1 + 2^2 \times 2 + \cdots + 2^8 \times 8 + 9 \\ &= 3595 \end{aligned}$$

(项数不大, 直接计算)

25. 计算

$$\sum_{r=1}^{34} \left\lfloor \frac{18r}{35} \right\rfloor$$

将整数部分与小数部分分开,

$$\sum_{r=1}^{34} \left\lfloor \frac{18r}{35} \right\rfloor = \sum_{r=1}^{34} \frac{18r}{35} - \sum_{r=1}^{34} \left\{ \frac{18r}{35} \right\}$$

其中

$$\sum_{r=1}^{34} \frac{18r}{35} = \frac{18}{35} \cdot \frac{34 \cdot 35}{2} = 306$$

注意到对任意正整数  $1 \leq r \leq 34$ ,

$$\left\{ \frac{18r}{35} \right\} + \left\{ \frac{18(35-r)}{35} \right\} = 1$$

当  $r$  从 1 到 34 时, 可以配成 17 对, 因此

$$\sum_{r=1}^{34} \left\{ \frac{18r}{35} \right\} = 17$$

于是

$$\sum_{r=1}^{34} \left\lfloor \frac{18r}{35} \right\rfloor = 289$$

对任意正整数  $1 \leq r \leq 34$ , 有

$$\frac{18r}{35} + \frac{18(35-r)}{35} = 18$$

因此

$$\left\lfloor \frac{18r}{35} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{18(35-r)}{35} \right\rfloor + \left\{ \frac{18r}{35} \right\} + \left\{ \frac{18(35-r)}{35} \right\} = 18$$

又因为

$$\left\{ \frac{18r}{35} \right\} + \left\{ \frac{18(35-r)}{35} \right\} = 1$$

所以

$$\left\lfloor \frac{18r}{35} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{18(35-r)}{35} \right\rfloor = 17$$

因此

$$\sum_{r=1}^{34} \left\lfloor \frac{18r}{35} \right\rfloor = 17 \cdot 17 = 289$$

26. 设  $r$  为实数, 且满足

$$\left\lfloor r + \frac{19}{100} \right\rfloor + \left\lfloor r + \frac{20}{100} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor r + \frac{91}{100} \right\rfloor = 546$$

求  $\lfloor 100r \rfloor$  的值。

从  $\frac{19}{100}$  到  $\frac{91}{100}$ , 共有

$$91 - 19 + 1 = 73$$

项, 这些取整值只可能为 7 或 8。

若全部等于 7, 则和为  $73 \cdot 7 = 511$ ; 若全部等于 8, 则和为  $73 \cdot 8 = 584$ ,

设前  $k$  项等于 7, 其余  $73 - k$  项等于 8, 则

$$7k + 8(73 - k) = 546 \Rightarrow k = 38$$

这表示

$$\left\lfloor r + \frac{56}{100} \right\rfloor = 7, \quad \left\lfloor r + \frac{57}{100} \right\rfloor = 8$$

于是

$$\lfloor 100r \rfloor = \lfloor r \rfloor + \cdots + \left\lfloor r + \frac{56}{100} \right\rfloor + \left\lfloor r + \frac{57}{100} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor r + \frac{99}{100} \right\rfloor = 38 \cdot 7 + 35 \cdot 8 = 743$$

27. 10. 证明  $\lfloor \sqrt{1} \rfloor + \lfloor \sqrt{2} \rfloor + \cdots + \lfloor \sqrt{n^2 - 1} \rfloor = \frac{n(n-1)(4n+1)}{6}$ 。

证: 考虑满足  $\lfloor \sqrt{k} \rfloor = m$  的正整数  $k$  的个数。这意味着  $m \leq \sqrt{k} < m+1$ , 即  $m^2 \leq k < (m+1)^2$ 。因此, 对于每一个确定的  $m$ , 满足条件的  $k$  有  $(m+1)^2 - m^2 = 2m+1$  个。在

原式中,  $k$  从 1 取到  $n^2 - 1$ , 则  $m = \lfloor \sqrt{k} \rfloor$  从 1 取到  $n - 1$ 。

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{n^2-1} \lfloor \sqrt{k} \rfloor &= \sum_{m=1}^{n-1} m(2m+1) \\
 &= \sum_{m=1}^{n-1} (2m^2 + m) \\
 &= 2 \sum_{m=1}^{n-1} m^2 + \sum_{m=1}^{n-1} m \\
 &= 2 \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{(n-1)n}{2} \\
 &= \frac{n(n-1)(2(2n-1)+3)}{6} \\
 &= \frac{n(n-1)(4n+1)}{6}
 \end{aligned}$$

得证。

28. 求

$$\sum_{k=1}^{202} \lceil \sqrt{k} \rceil$$

因为  $\lceil \sqrt{202} \rceil = 15$ , 所以

$$\lceil \sqrt{k} \rceil \in \{1, 2, 3, \dots, 15\}$$

当  $(n-1)^2 < k \leq n^2$  时, 有  $\lceil \sqrt{k} \rceil = n$ , 且个数为

$$n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$$

其中  $n = 1, 2, \dots, 14$ , 当  $n = 15$  时, 对应的个数为  $202 - 14^2 = 6$ , 因此

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{202} \lceil \sqrt{k} \rceil &= \sum_{n=1}^{14} n(2n-1) + 6 \cdot 15 \\
 &= 2 \left( \frac{14 \cdot 15 \cdot 29}{6} \right) - \frac{14 \cdot 15}{2} + 90 \\
 &= 2015
 \end{aligned}$$

29. 求

$$\lceil 1 \rceil + \lceil 1.7 \rceil + \lceil 2.4 \rceil + \lceil 3.1 \rceil + \dots + \lceil 999.9 \rceil$$

首先发现

$$\begin{aligned}\lceil 1 \rceil + \lceil 8 \rceil + \cdots + \lceil 995 \rceil &= \frac{143}{2}(1 + 995) \\ \lceil 1.7 \rceil + \lceil 8.7 \rceil + \cdots + \lceil 995.7 \rceil &= \frac{143}{2}(2 + 996)\end{aligned}$$

以此类推, 原式即

$$\begin{aligned}&\lceil 1 \rceil + \lceil 8 \rceil + \cdots + \lceil 995 \rceil + \lceil 1.7 \rceil + \lceil 8.7 \rceil + \cdots + \lceil 995.7 \rceil \\&+ \cdots + \lceil 6.6 \rceil + \lceil 13.6 \rceil + \cdots + \lceil 993.6 \rceil + \lceil 7.3 \rceil + \lceil 14.3 \rceil + \cdots + \lceil 994.3 \rceil \\&= \frac{143}{2}(1 + 995 + 2 + 996 + 3 + 997 + 4 + 998 + 4 + 998 + 5 + 999 + 6 + 1000 + 6 + 1000) \\&\quad + \frac{142}{2}(7 + 994 + 8 + 995) \\&= 715285\end{aligned}$$

30.

$$\sum_{n=0}^{1000} \left\lfloor \frac{2^n}{3} \right\rfloor$$

利用二项式展开,

$$\begin{aligned}a_n &= \left\lfloor \frac{(3-1)^n}{3} \right\rfloor \\&= \left\lfloor 3^{n-1} - n \cdot 3^{n-2} + n(n-1)3^{n-3} + \cdots + (-1)^{n-1} + \frac{(-1)^n}{3} \right\rfloor \\&= 3^{n-1} - n \cdot 3^{n-2} + n(n-1)3^{n-3} + \cdots + (-1)^{n-1}\end{aligned}$$

且注意到

$$a_n = \begin{cases} \frac{2^n - 1}{3}, & n \text{ 为偶数} \\ \frac{2^n - 2}{3}, & n \text{ 为奇数} \end{cases} = \frac{2^n}{3} - \frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{6}$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{1000} \left\lfloor \frac{2^n}{3} \right\rfloor &= \sum_{n=0}^{1000} \left( \frac{2^n}{3} - \frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{6} \right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{2^{1001} - 1}{2 - 1} - \frac{1001}{2} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{2^{1001} - 1502}{3}\end{aligned}$$

31. 例 8、设  $m, n$  是整数,  $n \geq 1$ , 证明  $\left\lfloor \frac{m+1}{n} \right\rfloor = \begin{cases} \left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor & (n \nmid m+1) \\ \left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor + 1 & (n \mid m+1) \end{cases}$ 。

证: 对  $n$  不整除  $m+1$  的情况即是当  $m+1 = kn + r$ , 其中  $1 \leq r \leq n-1$  时, 要证  $\left\lfloor \frac{m+1}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor$ 。

$$\begin{aligned}&= \left\lfloor \frac{m+1}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{kn+r}{n} \right\rfloor = \left\lfloor k + \frac{r}{n} \right\rfloor = k \\ &= \left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{kn+r-1}{n} \right\rfloor = \left\lfloor k + \frac{r-1}{n} \right\rfloor = k\end{aligned}$$

得证;

当  $n$  整除  $m+1$  时, 即  $m+1 = kn$ ,

$$\begin{aligned}&= \left\lfloor \frac{m+1}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{kn}{n} \right\rfloor = \lfloor k \rfloor = k \\ &= \left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{kn-1}{n} \right\rfloor = \left\lfloor k - \frac{1}{n} \right\rfloor = k-1\end{aligned}$$

$\therefore k = \left\lfloor \frac{m+1}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor + 1$ , 得证。

32. 12. 证明对任意实数  $\alpha, \beta$  有  $\lfloor 2\alpha \rfloor + \lfloor 2\beta \rfloor \geq \lfloor \alpha \rfloor + \lfloor \beta \rfloor + \lfloor \alpha + \beta \rfloor$ 。

证: 令  $\alpha = n_1 + r_1$ ,  $\beta = n_2 + r_2$ , 其中  $n_1, n_2$  为整数,  $0 \leq r_1, r_2 < 1$ 。原不等式等价于证明:

$$\lfloor 2r_1 \rfloor + \lfloor 2r_2 \rfloor \geq \lfloor r_1 + r_2 \rfloor$$

分情况讨论: 1. 若  $0 \leq r_1 < \frac{1}{2}$  且  $0 \leq r_2 < \frac{1}{2}$ , 则左式  $= 0 + 0 = 0$ 。由于  $r_1 + r_2 < 1$ , 右式  $= 0$ , 等式成立; 2. 若  $r_1, r_2$  中有一个大于等于  $\frac{1}{2}$ , 不妨设  $r_1 \geq \frac{1}{2}$ , 则左式  $\geq 1 + 0 = 1$ 。而  $r_1 + r_2 < 2$ , 右式最大为 1, 不等式成立; 3. 若  $r_1 \geq \frac{1}{2}$  且  $r_2 \geq \frac{1}{2}$ , 则左式  $= 1 + 1 = 2$ 。由于  $r_1 + r_2 < 2$ , 右式最大为 1, 不等式成立。综上所述, 原不等式成立。

33. 13. 证明对任意实数  $x, y$  有  $\lfloor x - y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x - y \rfloor + 1$ 。

证：由取整函数的性质可知  $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$  以及  $-(y - 1) > -\lfloor y \rfloor \geq -y$ 。1. 证明左半部分： $\lfloor x - y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor$  由  $x = (x - y) + y$  得  $\lfloor x \rfloor = \lfloor (x - y) + y \rfloor \geq \lfloor x - y \rfloor + \lfloor y \rfloor$ ，移项得  $\lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \geq \lfloor x - y \rfloor$ ；2. 证明右半部分： $\lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x - y \rfloor + 1$  由  $x - y = x + (-y)$  得  $\lfloor x - y \rfloor = \lfloor x + (-y) \rfloor \geq \lfloor x \rfloor + \lfloor -y \rfloor$ 。由于  $\lfloor -y \rfloor$  等于  $-\lfloor y \rfloor$ （当  $y$  为整数）或  $-\lfloor y \rfloor - 1$ （当  $y$  不为整数），即  $\lfloor -y \rfloor \geq -\lfloor y \rfloor - 1$ 。代入得  $\lfloor x - y \rfloor \geq \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor - 1$ ，移项得  $\lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x - y \rfloor + 1$ 。综上所述，不等式成立。

34. 证明埃尔米特恒等式：对于每一个实数  $x$  和每一个正整数  $n$ ，以下恒等式成立：

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$$

证：将  $x$  分解为整数部分和小数部分，即  $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$ 。在  $\{1, \dots, n\}$  中，恰好存在一个  $k'$  使得：

$$\lfloor x \rfloor = \left\lfloor x + \frac{k' - 1}{n} \right\rfloor \leq x < \left\lfloor x + \frac{k'}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$$

通过在不等式左右两边的取整符号内减去同一个整数  $\lfloor x \rfloor$ ，可以重写为：

$$0 = \left\lfloor \{x\} + \frac{k' - 1}{n} \right\rfloor \leq \{x\} < \left\lfloor \{x\} + \frac{k'}{n} \right\rfloor = 1$$

因此有：

$$1 - \frac{k'}{n} \leq \{x\} < 1 - \frac{k' - 1}{n}$$

两边同时乘以  $n$  得：

$$n - k' \leq n\{x\} < n - k' + 1$$

这意味着  $\lfloor n\{x\} \rfloor = n - k'$ 。现在将埃尔米特恒等式中的求和以索引  $k'$  为界分为两部分：

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor &= \sum_{k=0}^{k'-1} \lfloor x \rfloor + \sum_{k=k'}^{n-1} (\lfloor x \rfloor + 1) \\ &= k' \lfloor x \rfloor + (n - k')(\lfloor x \rfloor + 1) \\ &= n \lfloor x \rfloor + n - k' \\ &= n \lfloor x \rfloor + \lfloor n\{x\} \rfloor \\ &= \lfloor n \lfloor x \rfloor + n\{x\} \rfloor \\ &= \lfloor nx \rfloor \end{aligned}$$

得证。

# 函数

1. 求下列函数的值域:

(a)  $f(x) = x^2 - 2x + 5$ , 其中  $D_f = [-1, 2]$

配方法得

$$f(x) = x^2 - 2x + 5 = (x - 1)^2 + 4$$

当  $x = 1$ ,  $f_{\min} = 4$ ; 当  $x = -1$ ,  $f_{\max} = 8$ , 故

$$R_f = [4, 8]$$

(b)  $f(x) = x + \sqrt{x(2-x)}$

设  $y = x + \sqrt{x(2-x)}$ , 则

$$2x^2 - 2(y+1)x + y^2 = 0$$

由于  $x \in \mathbb{R}$ , 判别式为非负,

$$4(y+1)^2 - 8y \geq 0 \Rightarrow 1 - \sqrt{2} \leq y \leq 1 + \sqrt{2}$$

但  $0 \leq x \leq 2$ ,  $y = x + \sqrt{x(2-x)} \geq 0$ , 故  $y_{\min} = 0$ 。

而当  $y = 1 + \sqrt{2}$ ,  $x_1 = \frac{2 + \sqrt{2} - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \in [0, 2]$ , 故  $y_{\max} = 1 + \sqrt{2}$ 。

于是

$$R_f = [0, 1 + \sqrt{2}]$$

(c)  $f(x) = \frac{3x+4}{5x+6}$

设  $y = \frac{3x+4}{5x+6}$ , 则  $x = \frac{4-6y}{5y-3}$ , 故反函数

$$f^{-1}(x) = \frac{4-6x}{5x-3}$$

的定义域为

$$D_{f^{-1}} = \left(-\infty, \frac{3}{5}\right) \cup \left(\frac{3}{5}, \infty\right)$$

即  $R_f$ 。

(d)  $f(x) = \frac{3x+2}{x+1}$

发现

$$f(x) = \frac{3x+2}{x+1} = 3 - \frac{1}{x+1} \neq 3$$

故

$$R_f = (-\infty, 3) \cup (3, \infty)$$

(e)  $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x - 3}$

设  $y = \frac{\cos x}{\sin x - 3}$ , 则

$$3y = y \sin x - \cos x = \sqrt{y^2 + 1} \cos(x - \alpha) \Rightarrow \cos(x - \alpha) = \frac{3y}{\sqrt{y^2 + 1}}$$

由于  $\cos(x - \alpha) \in [-1, 1]$ , 解得

$$-1 \leq \frac{3y}{\sqrt{y^2 + 1}} \leq 1 \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{4} \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$$

即

$$R_f = \left[ -\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4} \right]$$

(f)  $f(x) = 2^{x-5} + \log_3 \sqrt{x-1}$ , 其中  $D_f = [2, 10]$

由于  $2^{x-5}$  与  $\log_3 \sqrt{x-1}$  在  $[2, 10]$  上皆为增函数, 故  $f(x)$  也为增函数。

当  $x = 2$ ,  $f(x) = \frac{1}{8}$ ; 当  $x = 10$ ,  $f(x) = 33$ 。故

$$R_f = \left[ \frac{1}{8}, 33 \right]$$

(g)  $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$

发现

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$$

由  $x \geq 1$ , 得  $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} \geq 2$ , 于是

$$0 < \frac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} \leq \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

即

$$R_f = (0, \sqrt{2}]$$

(h)  $f(x) = x + 2 + \sqrt{1 - (x+1)^2}$

由于  $1 - (x+1)^2 \geq 0$ , 有  $(x+1)^2 \leq 1$ , 不妨设  $x+1 = \cos \alpha, \alpha \in [0, \pi]$ , 则

$$f(x) = \cos \alpha + 1 + \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sin \alpha + \cos \alpha + 1 = \sqrt{2} \cos \left( \alpha - \frac{\pi}{4} \right) + 1$$

由  $\alpha \in [0, \pi]$ , 可知

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos \left( \alpha - \frac{\pi}{4} \right) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{2} \cos \left( \alpha - \frac{\pi}{4} \right) + 1 \leq 1 + \sqrt{2}$$

即

$$R_f = [0, 1 + \sqrt{2}]$$

(i)  $f(x) = \frac{x^3 - x}{x^4 + 2x^2 + 1}$

首先有

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{1+x^2} \cdot \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

令  $x = \tan \beta$ , 则

$$f(x) = \frac{1}{2} \sin 2\beta \cos 2\beta = \frac{1}{4} \sin 4\beta$$

若  $k \in \mathbb{Z}$ , 当  $\beta = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ ,  $f_{\max} = \frac{1}{4}$ ; 当  $\beta = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ ,  $f_{\min} = -\frac{1}{4}$ , 且此时  $\tan \beta$  有意义, 于是

$$R_f = \left[ -\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right]$$

(j)  $f(x) = x + 4 + \sqrt{5 - x^2}$

由  $5 - x^2 \geq 0$  得  $|x| \leq \sqrt{5}$ , 令  $x = \sqrt{5} \cos \alpha, \alpha \in [0, \pi]$ , 则

$$f(x) = \sqrt{5} \cos \alpha + 4 + \sqrt{5} \sin \alpha = 4 + \sqrt{10} \cos \left( \alpha - \frac{\pi}{4} \right)$$

由于  $\alpha \in [0, \pi], \alpha - \frac{\pi}{4} \in \left[ -\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right]$ , 故

$$f_{\max} = 4 + \sqrt{10} \cdot 1, \quad f_{\min} = 4 + \sqrt{10} \cdot \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

故

$$R_f = [4 - \sqrt{5}, 4 + \sqrt{10}]$$

$$(k) \quad f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x+3}$$

设  $t = \sqrt{x+2}, t \geq 0$ , 则  $x+3 = t^2 + 1$ 。当  $t > 0$ ,

$$f(x) = \frac{t}{t^2 + 1} = \frac{1}{t + \frac{1}{t}} \leq \frac{1}{2}$$

等号成立当且仅当  $t = 1$  即  $x = -1$ , 于是

$$0 < f(x) \leq \frac{1}{2}$$

而当  $t = 0$  时,  $f(x) = 0$ , 故

$$R_f = \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

$$(l) \quad f(x) = (\sin x + 1)(\cos x + 1), x \in \left[-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{2}\right]$$

由

$$f(x) = \sin x \cos x + \sin x + \cos x + 1$$

令  $t = \sin x + \cos x$ , 则  $\sin x \cos x = \frac{1}{2}(t^2 - 1)$ , 化为

$$f(x) = \frac{1}{2}(t^2 - 1) + t + 1 = \frac{1}{2}(t + 1)^2$$

又由  $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right), x \in \left[-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{2}\right]$  知

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq t \leq \sqrt{2}$$

当  $t = \sqrt{2}, f_{\max} = \frac{3}{2} + \sqrt{2}$ ; 当  $t = \frac{\sqrt{2}}{2}, f_{\min} = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 于是

$$R_f = \left[\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{2} + \sqrt{2}\right]$$

$$(m) \quad f(x) = \left(\sin x + \frac{1}{\sin x}\right)^2 + \left(\cos x + \frac{1}{\cos x}\right)^2$$

展开得

$$f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x + \csc^2 x + \sec^2 x + 4 = 7 + \tan^2 x + \cot^2 x$$

由 AM-GM 不等式,

$$f(x) \geqslant 7 + 2\sqrt{1} = 9$$

等号成立当且仅当  $\tan x = \cot x$  即  $x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$ , 故

$$R_f = [9, \infty)$$

(n)  $f(x) = 2 \sin x \sin 2x$

由 AM-GM 不等式,

$$[f(x)]^2 = 16 \sin^4 x \cos^2 x = 8 \sin^2 x \sin^2 x (2 - 2 \sin^2 x) \leqslant 8 \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{3}\right)^3 = \frac{64}{27}$$

等号成立当且仅当  $\sin^2 x = 2 - 2 \sin^2 x$  即  $\sin^2 x = \frac{2}{3}$ , 故

$$R_f = \left[-\frac{8\sqrt{3}}{9}, \frac{8\sqrt{3}}{9}\right]$$

(o)  $f(x) = |x - 2| + |x + 8|$

在一维数轴上设  $A = -8, B = 2$ , 当动点  $P$  在线段  $AB$  上,

$$f(x) = |x - 2| + |x + 8| = |AB| = 10$$

当动点  $P$  在线段  $AB$  外,

$$f(x) = |x - 2| + |x + 8| > |AB| = 10$$

故

$$R_f = [10, \infty)$$

(p)  $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 13} + \sqrt{x^2 + 4x + 5}$

写成

$$f(x) = \sqrt{(x - 3)^2 + (0 - 2)^2} + \sqrt{(x + 2)^2 + (0 + 1)^2}$$

即  $x$  轴上的动点  $P(x, 0)$  到两定点  $A(3, 2), B(-2, -1)$  的距离之和, 而当  $P$  为线段与  $x$

轴的交点时,

$$f_{\min} = |AB| = \sqrt{(3+2)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{43}$$

于是

$$R_f = [\sqrt{43}, \infty)$$

(q)  $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 13} - \sqrt{x^2 + 4x + 5}$

写成

$$f(x) = \sqrt{(x-3)^2 + (0-2)^2} - \sqrt{(x+2)^2 + (0-1)^2}$$

即  $AP$  距离与  $BP$  距离之差, 其中  $A(3, 2), B(-2, 1), P(x, 0)$ 。当  $P$  在  $x$  轴上且不是直线  $AB$  与  $x$  轴的交点时, 即  $P'$ , 则构成  $\triangle ABP'$ , 有

$$||AP'| - |BP'|| < |AB| = \sqrt{(3+2)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{26}$$

即

$$-\sqrt{26} < f(x) < \sqrt{26}$$

而当  $P$  恰好在直线  $AB$  与  $x$  轴的交点时, 有

$$||AP'| - |BP'|| = |AB| = \sqrt{26}$$

故

$$R_f = (-\sqrt{26}, \sqrt{26}]$$

(r)  $f(x) = x^2 + \sqrt{x^4 - 3x^2 + 2x + 5}$

变形可得

$$f(x) = x^2 + \sqrt{(x^2 - 2)^2 + (x + 1)^2}$$

发现  $f(x)$  表示抛物线  $y = x^2$  上动点  $P(x, x^2)$  到点  $A(-1, 2)$  和  $x$  轴的距离之和。

过  $P$  点作  $PB \perp x$  轴于  $B$ , 过  $A$  点作  $AC \perp x$  轴于  $C$ ,  $BC$  交抛物线  $y = x^2$  于点  $P_0$ , 故

$$|PA| + |PB| \geq |P_0A| + |P_0C| = |AC| = 2$$

所以

$$R_f = [2, \infty)$$

2. 设函数  $f: \mathbb{R} \setminus \{0, -b\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$  满足

$$f(x) = \frac{x+a}{x+b}$$

求出所有实数对  $(a, b)$  使得

$$f(f(x)) = -\frac{1}{x}$$

据题意,

$$f(f(x)) = \frac{\frac{x+a}{x+b} + a}{\frac{x+a}{x+b} + b} = \frac{(1+a)x + a + ab}{(1+b)x + a + b^2} = -\frac{1}{x}$$

整理得

$$(1+a)x^2 + (a(1+b) + 1+b)x + a + b^2 = 0.$$

解得

$$\begin{cases} 1+a=0 \\ a+b^2=0 \end{cases} \Rightarrow a=-1, b=\pm 1$$

经检验,  $(-1, -1)$  不合题意, 故解为  $(-1, 1)$

3. 已知函数  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  互为反函数, 且函数

$$F(x) = f(x+1) - 2, \quad G(x) = g(2x+1),$$

也互为反函数, 若  $f(1) = 4$ , 求  $f(100)$ 。

由于  $F, G$  互为反函数, 有

$$G(F(x)) = g(2F(x) + 1) = g(2(f(x+1) - 2) + 1) = x$$

又  $f, g$  互为反函数, 则

$$2f(x+1) - 3 = f(x) \Rightarrow f(x+1) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{3}{2}$$

由  $f(1) = 4$ , 可依次得到

$$f(2) = 3 + \frac{1}{2}, \quad f(3) = 3 + \frac{1}{4}, \dots$$

归纳可得

$$f(n) = 3 + \frac{1}{2^{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

因此

$$f(100) = 3 + \frac{1}{2^{99}}$$

4. 已知函数  $g(x) = 2x - 4$ , 其反函数为  $g^{-1}$ , 且函数  $f$  对任意实数  $x$  皆满足

$$g(f(g^{-1}(x))) = 2x^2 + 16x + 26,$$

求  $f(\pi)$  的值。

已知  $g$  可逆, 令  $x = g(y)$ , 则  $y = g^{-1}(x)$ , 由题意得

$$g(f(y)) = 2(g(y))^2 + 16g(y) + 26 = 2(2y - 4)^2 + 16(2y - 4) + 26 = 8y^2 - 6$$

于是有

$$f(y) = g^{-1}(g(f(y))) = g^{-1}(8y^2 - 6) = \frac{8y^2 - 6 + 4}{2} = 4y^2 - 1$$

所以

$$f(\pi) = 4\pi^2 - 1$$

由  $y = g(x) = 2x - 4$ , 得

$$x = g^{-1}(y) = \frac{y + 4}{2}$$

由  $g(f(g(x))) = 2x^2 + 16x + 26$ ,

$$f(g(x)) = g^{-1}(2x^2 + 16x + 26) = x^2 + 8x + 15 = (x + 4)^2 - 1$$

且

$$f(g(x)) = f\left(\frac{x + 4}{2}\right) = (x + 4)^2 - 1$$

令  $\frac{x + 4}{2} = \pi$ , 则

$$f(\pi) = 4\pi^2 - 1.$$

请问是哪一行有误?

5. 已知  $f(x) + 2f(4 - x) = x + 8$ , 求  $f(16)$ 。

令  $x = -12, 16$ , 可得联立方程

$$\begin{cases} f(-12) + 2f(16) = -4 \\ f(16) + 2f(-12) = 24 \end{cases}$$

解得

$$f(16) = -\frac{32}{3}$$

6. 若  $f(x)$  为实系数二次多项式, 已知  $p, q, r$  为三相异非零实数, 使得  $f(p) = qr, f(q) = rp, f(r) = pq$ , 证明  $f(p+q+r) = f(p) + f(q) + f(r)$ 。

取  $g(x) = xf(x) - pqr$ , 则  $g(p) = g(q) = g(r) = 0$ , 且有

$$g(x) = xf(x) - pqr = a(x-p)(x-q)(x-r)$$

于是

$$f(x) = \frac{1}{x} (ax^3 - a(p+q+r)x^2 + a(pq+qr+rp)x - apqr + pqr)$$

由于  $f(x)$  为二次多项式, 因此  $-apqr + pqr = 0 \Rightarrow a = 1$ , 得

$$f(x) = x^2 - (p+q+r)x + pq + qr + rp$$

故得证

$$f(p+q+r) = pq + qr + rp = f(p) + f(q) + f(r)$$

7. 设  $Q(x)$  是一个 2017 次多项式, 且满足

$$Q'(r) = \frac{2017!}{r}, r = 1, 2, 3, \dots, 2017$$

另定义

$$P(x) = xQ(x) - \int Q(x) dx.$$

若多项式  $P(x)$  的所有根之和为  $a$ , 求  $a \pmod{1000}$ 。

有

$$P'(x) = xQ'(x) + Q(x) - Q(x) \Rightarrow P(x) = \int xQ'(x) dx$$

考虑函数

$$R(x) = xQ(x) - 2017!$$

则  $R(r) = 0, r = 1, 2, 3, \dots, 2017$ , 故可设

$$R(x) = A(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-2017)$$

令  $x = 0$  可得  $A = 1$ , 故

$$Q'(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-2017) + 2017!}{x}$$

且

$$\begin{aligned} P(x) &= \int xQ'(x) dx = \int ((x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-2017) + 2017!) dx \\ &= \int \left( x^{2017} - \frac{2017 \cdot 2018}{2} x^{2016} + \cdots \right) dx \\ &= \frac{1}{2018} x^{2018} - 1009 x^{2017} + \cdots \end{aligned}$$

由韦达定理,  $P(x)$  的所有根之和为

$$a = 1009 \cdot 2018 \equiv 162 \pmod{1000}$$

8. 定义函数  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , 使得对所有实数  $x$  有

$$f(f(x)) = x^2 - x + 1.$$

求  $f(0)$ 。

设  $f(0) = b$ , 则

$$f(b) = f(f(0)) = 0^2 - 0 + 1 = 1$$

又有

$$f(f(b)) = f(1) = b^2 - b + 1$$

因为  $f(b) = 1$ , 所以

$$f(f(b)) = f(1) = 1 = b^2 - b + 1 \implies b(b-1) = 0.$$

若  $b = 0$ , 则  $f(0) = 0$ , 但  $f(f(0)) = f(0) = 0 \neq 1$ , 矛盾。故  $b = 1$ , 即

$$f(0) = 1$$

9. 已知  $f(x) = e(x) + o(x)$ , 其中  $e(x)$  为偶函数,  $o(x)$  为奇函数, 且

$$e(x) + x^2 = o(x),$$

求  $f(2)$ 。

由已知  $e(x) = f(x) - o(x)$ , 换元得

$$e(-x) = f(-x) - o(-x) \Rightarrow e(x) = f(-x) + o(x)$$

故

$$f(-x) = -x^2 \Rightarrow f(2) = 4$$

10. 定义  $f$  在  $[0, 1]$  上满足

$$2f\left(\frac{x}{3}\right) = f(x), \quad f(x) + f(1-x) = 1,$$

求  $f\left(\frac{1}{3}\right)$ 。

由递推公式, 则

$$f\left(\frac{1}{13}\right) + f\left(\frac{12}{13}\right) = 1,$$

且

$$f\left(\frac{12}{13}\right) = 2f\left(\frac{4}{13}\right) = 2\left[1 - f\left(\frac{9}{13}\right)\right] = 2 - 2f\left(\frac{9}{13}\right) = 2 - 4f\left(\frac{3}{13}\right) = 2 - 8f\left(\frac{1}{13}\right)$$

解得

$$f\left(\frac{1}{13}\right) = \frac{1}{7}.$$

11. 已知  $f(x)$  是定义在  $\mathbb{R}$  上的函数, 且对任意实数  $x$  均有  $2f(x) + f(x^2 - 1) = 1$ , 试求  $f(\sqrt{2})$  的值。

分别令  $x = -1, 0, 1, \sqrt{2}$  可得

$$2f(-1) + f(0) = 1 \tag{1}$$

$$2f(0) + f(-1) = 1 \tag{2}$$

$$2f(1) + f(0) = 1 \tag{3}$$

$$2f(\sqrt{2}) + f(1) = 1 \tag{4}$$

由 (1), (2), (3) 解得

$$f(-1) = f(0) = f(1) = \frac{1}{3}$$

故由 (4) 得

$$f(\sqrt{2}) = \frac{1}{3}$$

12. 设函数  $f(x) = \cos x + \log_2 x$ , 其中  $x > 0$ , 若正实数  $a$  满足  $f(a) = f(2a)$ , 求  $f(2a) - f(4a)$  的值。

由条件得

$$\cos a + \log_2 a = \cos 2a + \log_2 2a = 2\cos^2 a - 1 + \log_2 a + 1$$

所以

$$\cos a(2\cos a - 1) = 0 \Rightarrow (\cos a, \cos 2a) = (0, -1) \text{ 或 } \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

于是

$$\begin{aligned} f(2a) - f(4a) &= \cos 2a + \log_2 2a - \cos 4a - \log_2 4a \\ &= \cos 2a - 2\cos^2 2a \\ &= \begin{cases} -3, & \text{若 } \cos 2a = -1, \\ -1, & \text{若 } \cos 2a = -\frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

13. 已知函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbb{R}$ , 且  $f(x+2) - 2$  为奇函数,  $f(2x+1)$  为偶函数。若  $f(1) = 0$ , 求  $f(1) + f(2) + \cdots + f(2023)$  的值。

$f(x+2) - 2$  为奇函数, 则

$$f(-x+2) - 2 + f(x+2) - 2 = 0 \Rightarrow f(2-x) + f(2+x) = 4$$

于是  $f(2) = 2$ ,  $f(x)$  的图象关于点  $(2, 2)$  对称, 又由  $f(2x+1)$  为偶函数,

$$f(-2x+1) = f(2x+1) \Rightarrow f(1-2x) = f(1+2x)$$

即

$$f(1-x) = f(1+x)$$

$f(x)$  图象关于直线  $x = 1$  对称, 由上可得

$$f(x) = f(2-x) = 4 - f(2+x) = 4 - f(-x) = 4 - [4 - f(x+4)] = f(x+4)$$

所以  $f(x)$  是周期为 4 的函数, 且

$$f(1) = 0, f(2) = 2, f(3) = 4, f(4) = 2$$

故

$$\begin{aligned} & f(1) + f(2) + \cdots + f(2023) \\ &= 505[f(1) + f(2) + f(3) + f(4)] + f(1) + f(2) + f(3) \\ &= 4046 \end{aligned}$$

14. 设  $f$  为实值函数, 且对任意实数  $x$  满足

$$f(10+x) = f(10-x), \quad f(20+x) = -f(20-x)$$

(a) 证明  $f$  是奇函数。

$$f(10+x) = f(10-x) \quad (1)$$

$$f(20+x) = -f(20-x) \quad (2)$$

由 (1), 令  $x = y - 10$ ,

$$f(y) = f(20 - y)$$

由 (2), 令  $x = -y$ ,

$$f(20 - y) = -f(20 + y)$$

因此

$$f(y) = -f(20 + y)$$

由 (1), 令  $x = y + 10$ ,

$$f(y + 20) = f(-y)$$

结合上式可得

$$f(y) = -f(20 + y) = f(-y),$$

所以得证  $f$  是奇函数。

(b) 证明  $f$  是周期函数。

由 (2), 令  $x = y - 20$  在 (b) 中, 则

$$f(y) = -f(40 - y)$$

由于  $f$  是奇函数, 有  $-f(40-y) = f(y-40)$ , 所以

$$f(y) = f(y-40),$$

因此得证  $f$  是周期函数。

15. 若实数  $x, y, z$  满足

$$\begin{cases} \frac{x}{1^2+4^2} + \frac{y}{1^2+5^2} + \frac{z}{1^2+6^2} = 1 \\ \frac{x}{2^2+4^2} + \frac{y}{2^2+5^2} + \frac{z}{2^2+6^2} = 1 \\ \frac{x}{3^2+4^2} + \frac{y}{3^2+5^2} + \frac{z}{3^2+6^2} = 1 \end{cases}$$

求  $x+y+z$ 。

设

$$f(k) = \frac{x}{k+4^2} + \frac{y}{k+5^2} + \frac{z}{k+6^2} - 1,$$

据题意

$$f(1^2) = f(1) = 0, \quad f(2^2) = f(4) = 0, \quad f(3^2) = f(9) = 0$$

因此  $f(k)$  有三个根  $k=1, 4, 9$ , 所以

$$(k-1)(k-4)(k-9)$$

与

$$(k+4^2)(k+5^2)(k+6^2) - x(k+5^2)(k+6^2) - y(k+4^2)(k+6^2) - z(k+4^2)(k+5^2)$$

相等, 比较  $k^2$  系数得

$$-(1+4+9) = 4^2 + 5^2 + 6^2 - (x+y+z) \Rightarrow x+y+z = 91$$

16. 已知实数  $\alpha, \beta$  满足

$$3^{\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{3} - \alpha, \quad \log_3 \beta = 2\sqrt{3} - 2\beta$$

求

$$(\alpha + \beta)^2 - 2(\sqrt{3})^\alpha - \log_3 \beta$$

将底改为  $\sqrt{3}$ :

$$\sqrt{3}^\alpha = \sqrt{3} - \alpha, \quad \log_{\sqrt{3}} \beta = \sqrt{3} - \beta$$

设  $A(\alpha, \sqrt{3} - \alpha)$  为两图形  $y = \sqrt{3}^x$  与  $y = \sqrt{3} - x$  的交点,  $B(\beta, \sqrt{3} - \beta)$  为两图形  $y = \log_{\sqrt{3}} x$  与  $y = \sqrt{3} - x$  的交点。

由于  $y = \sqrt{3}^x$  与  $y = \log_{\sqrt{3}} x$  关于  $y = x$  对称,

$$\alpha = \sqrt{3} - \beta \Rightarrow \alpha + \beta = \sqrt{3}$$

因此

$$(\alpha + \beta)^2 - 2(\sqrt{3})^\alpha - \log_3 \beta = (\sqrt{3})^2 - 2(\sqrt{3} - \alpha) - 2(\sqrt{3} - \beta) = 3 - 2\sqrt{3}$$

17. 设实数  $\alpha, \beta$  满足

$$\begin{cases} \alpha^3 - 6\alpha^2 + 13\alpha = 6 \\ \beta^3 - 6\beta^2 + 13\beta = 14 \end{cases}$$

求  $\alpha + \beta$ 。

令

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 13x \Rightarrow f(\alpha) = 6, \quad f(\beta) = 14$$

又

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 13 \Rightarrow f''(x) = 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$$

因此图形  $y = f(x)$  的对称中心为  $(2, f(2) = 10)$ , 所以  $P(\alpha, 6), Q(\beta, 14)$  的对称点为

$$P' = (4 - \alpha, 14), Q' = (4 - \beta, 6)$$

于是由  $P = Q', Q = P'$  解得

$$\alpha = 4 - \beta, \quad \beta = 4 - \alpha \Rightarrow \alpha + \beta = 4$$

18. 解方程

$$e^{x-1} \ln x + e^{y-1} \ln y = \ln(xy)$$

原式化为:

$$(e^{x-1} - 1) \ln x + (e^{y-1} - 1) \ln y = 0$$

考虑函数  $f(t) = (e^{t-1} - 1) \ln t$ ,

- 当  $t > 1$  时,  $e^{t-1} - 1 > 0$ ,  $\ln t > 0$ , 故  $f(t) > 0$
- 当  $0 < t < 1$  时,  $e^{t-1} - 1 < 0$ ,  $\ln t < 0$ , 故  $f(t) > 0$
- 当  $t = 1$  时,  $e^{t-1} - 1 = 0$ ,  $\ln 1 = 0$ , 故  $f(1) = 0$

故

$$f(x) + f(y) = 0 \Rightarrow x = y = 1$$

19. 已知  $x, y \in \mathbb{R}$ , 且满足

$$\begin{cases} (x+1)^3 + 2023(x+1) = -2023 \\ (y+1)^3 + 2023(y+1) = 2023 \end{cases}$$

求  $x+y$  的值。

考虑函数  $f(t) = t^3 + 2023t$ , 据题意有

$$f(x+1) = -2023, \quad f(y+1) = 2023$$

注意到  $f(t)$  是奇函数,

$$f(x+1) = -f(y+1) = f(-(y+1))$$

且导数为

$$f'(t) = 3t^2 + 2023 > 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

所以  $f$  在  $\mathbb{R}$  上严格递增, 故  $f$  一对一, 因此有

$$x+1 = -(y+1) \Rightarrow x+y = -2$$

20. 例 2、求定义于实数集 ( $x \neq 0$ ) 上的所有实值函数使  $\frac{1}{x}f(-x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x$  ( $x \neq 0$ )。

解: 令  $x = \frac{1}{n}$  代入, 得  $nf(-\frac{1}{n}) + f(n) = \frac{1}{n} \dots (1)$  令  $x = -n$  代入, 得  $-\frac{1}{n}f(n) + f(-\frac{1}{n}) = -n \dots (2)$  将 (2) 式变形为  $f(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}f(n) - n$ , 代入 (1) 式:

$$n \left[ \frac{1}{n}f(n) - n \right] + f(n) = \frac{1}{n}$$

$$f(n) - n^2 + f(n) = \frac{1}{n} \Rightarrow 2f(n) = n^2 + \frac{1}{n} = \frac{n^3 + 1}{n}$$

即  $f(x) = \frac{x^3+1}{2x} \quad (x \neq 0)$ 。

21. 例 3、求解函数方程  $xf(y) + yf(x) = (x+y)f(x)f(y)$ 。

解: 令  $x = y = 1$ , 得  $2f(1) = 2f^2(1)$ , 因此  $f(1) = 0$  或  $1$ 。1. 若  $f(1) = 0$ , 令  $y = 1$ , 得  $xf(1) + 1 \cdot f(x) = (x+1)f(x)f(1)$ , 解得  $f(x) = 0$ 。2. 若  $f(1) = 1$ , 令  $y = 1$ , 得  $x + f(x) = (x+1)f(x) \Rightarrow x[f(x) - 1] = 0$ 。由此可得: 当  $x \neq 0$  时,  $f(x) = 1$ ; 当  $x = 0$  时,  $f(0)$  可为任意实数  $a$ 。即  $f(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases} \quad (a \text{ 为任意实数})$ 。

22. 例 4、 $x \in \mathbb{N}$ ,  $f(m+n) = f(m) + f(n) + mn$ ,  $f(1) = 1$ , 求  $f(x)$ 。

解: 令  $m = 1$ , 则  $f(n+1) = f(n) + f(1) + n = f(n) + (n+1)$ 。当  $n = 1, \dots, n-1$  时, 利用累加法:

$$f(2) = f(1) + 2$$

$$f(3) = f(2) + 3$$

$$\vdots$$

$$f(n) = f(n-1) + n$$

相加得  $f(n) = f(1) + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ 。即  $f(x) = \frac{x(x+1)}{2}, x \in \mathbb{N}$ 。

23. 例 6、已知函数  $f(x)$  满足:  $f(0) = 1, f(\frac{\pi}{2}) = 2$ , 且对任意的  $x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \cos y$ , 求  $f(x)$ 。

解: 令  $x = 0, y = t$  代入原式得:  $f(t) + f(-t) = 2f(0)\cos t = 2\cos t \quad \dots (1)$  令  $x = \frac{\pi}{2} + t, y = \frac{\pi}{2}$  代入原式得:  $f(t + \pi) + f(t) = 2f(\frac{\pi}{2})\cos \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow f(t + \pi) = -f(t) \quad \dots (2)$  再令  $x = \frac{\pi}{2}, y = \frac{\pi}{2} + t$  代入原式得:  $f(\pi + t) + f(-t) = 2f(\frac{\pi}{2})\cos(\frac{\pi}{2} + t) = -4\sin t \quad \dots (3)$  由 (2) 式知  $f(\pi + t) = -f(t)$ , 代入 (3) 式得:  $-f(t) + f(-t) = -4\sin t \quad \dots (4)$  联立 (1) 和 (4):  $(1) + (4) \Rightarrow 2f(-t) = 2\cos t - 4\sin t \Rightarrow f(-t) = \cos t - 2\sin t$ . 用  $-x$  替换  $t$ , 得  $f(x) = \cos(-x) - 2\sin(-x) = \cos x + 2\sin x$ .

24. 2. 已知  $f(x)$  为多项式, 解  $f(x+1) + f(x-1) = 2x^2 - 4x$ .

解: 观察右端项为二次多项式, 设  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . 代入原式得:  $a(x+1)^2 + b(x+1) + c + a(x-1)^2 + b(x-1) + c = 2x^2 - 4x$  整理得:  $2ax^2 + 2bx + 2a + 2c = 2x^2 - 4x$ . 对比系数得:  $2a = 2, 2b = -4, 2a + 2c = 0$ . 解得  $a = 1, b = -2, c = -1$ . 故  $f(x) = x^2 - 2x - 1$ .

25. 3. 设  $f(x)$  是在实数域上有定义的函数, 满足  $f(0) = 1$  且对任意的  $x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y) - 1$ .

解: 令  $g(x) = f(x) - 1$ , 则  $g(0) = 0$ . 原方程变为:  $g(x+y) + 1 = (g(x) + 1) + (g(y) + 1) - 1 \Rightarrow g(x+y) = g(x) + g(y)$ . 这是典型的柯西方程, 在一定条件下其解为  $g(x) = cx$ . 因此  $f(x) = cx + 1$  (其中  $c$  为常数).

26. 8. 设  $f(1) = 1, f(2) = 8$  且满足  $f(n) = \sqrt{f(n-1)f(n-2)} \quad (n \geq 3)$ , 求  $f(n)$ .

解: 对方程两边取对数, 令  $g(n) = \ln f(n)$ . 则  $g(n) = \frac{1}{2}[g(n-1) + g(n-2)]$ , 特征方程为  $r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{2} = 0$ . 解得  $r_1 = 1, r_2 = -\frac{1}{2}$ . 故  $g(n) = c_1 + c_2(-\frac{1}{2})^{n-1}$ . 代入  $g(1) = \ln 1 = 0$  和  $g(2) = \ln 8$  可求得  $c_1, c_2$ . 根据手写笔记规律, 该数列项为  $1, 2^3, 2^{\frac{3}{2}}, 2^{\frac{9}{4}}, \dots$ . 最终可推得  $f(n) = 8^{\frac{2}{3}[1 - (-\frac{1}{2})^{n-1}]}$ .

27. 9. 设  $ab \neq 0, a^2 \neq b^2$ , 求  $af(x) + bf(\frac{1}{x}) = cx$  的解.

解: 已知  $af(x) + bf(\frac{1}{x}) = cx \quad \dots (1)$ . 以  $\frac{1}{x}$  代替  $x$  得:  $af(\frac{1}{x}) + bf(x) = \frac{c}{x} \quad \dots (2)$ . 联立方程组,  $(1) \times a - (2) \times b$  得:  $(a^2 - b^2)f(x) = acx - \frac{bc}{x}$ . 故  $f(x) = \frac{c}{a^2 - b^2}(ax - \frac{b}{x})$ .

28. 10. 求函数  $f(x)$ , 如果  $af(x^n) + f(-x^n) = bx$ , 其中  $a^2 \neq 1, n$  是奇数.

解: 已知  $af(x^n)+f(-x^n)=bx \dots (1)$ 。以  $-x$  代替  $x$ , 由于  $n$  为奇数, 得:  $af(-x^n)+f(x^n)=-bx \dots (2)$ 。联立消去  $f(-x^n)$ , 由  $(1) \times a - (2)$  得:  $(a^2-1)f(x^n)=abx+bx=bx(a+1)$ 。故  $f(x^n)=\frac{bx(a+1)}{(a+1)(a-1)}=\frac{bx}{a-1}$ 。令  $t=x^n \Rightarrow x=t^{\frac{1}{n}}$ , 得  $f(x)=\frac{bx^{\frac{1}{n}}}{a-1}$ 。

29. 11. 解函数方程  $2f(x^2)+f(\frac{1}{x^2})=x \quad (x>0)$ 。

解: 已知  $2f(x^2)+f(\frac{1}{x^2})=x \dots (1)$ 。以  $\frac{1}{x}$  代替  $x$  得:  $2f(\frac{1}{x^2})+f(x^2)=\frac{1}{x} \dots (2)$ 。由  $(1) \times 2 - (2)$  得:  $3f(x^2)=2x-\frac{1}{x}$ 。令  $t=x^2 \Rightarrow x=\sqrt{t}$ , 则  $f(t)=\frac{1}{3}(2\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}})$ 。即  $f(x)=\frac{2x-1}{3\sqrt{x}} \quad (x>0)$ 。

30. 12. 已知  $f(1)=\frac{1}{5}$ , 且当  $n>1$  时,  $\frac{f(n-1)}{f(n)}=\frac{2nf(n-1)+1}{1-2f(n)}$ , 求  $f(n)$ 。

解: 整理原式得  $f(n-1)-2f(n)f(n-1)=2nf(n)f(n-1)+f(n)$ 。两边同除以  $f(n)f(n-1)$  得:  $\frac{1}{f(n)}-2=2n+\frac{1}{f(n-1)}$ 。即  $\frac{1}{f(n)}-\frac{1}{f(n-1)}=2n+2=2(n+1)$ 。利用累加法:  $\frac{1}{f(n)}=\frac{1}{f(1)}+\sum_{i=2}^n 2(i+1)=5+2[\frac{(3+n+1)(n-1)}{2}]$ 。整理得  $f(n)=\frac{1}{n^2+3n+1}$ 。

31. 13. 函数  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上定义, 且 (1)  $f(-x)=f(x), f(0)=993$ ; (2)  $g(-x)=-g(x)$  且  $g(x)=f(x-1)$ 。求  $f(1992)$ 。

解: 由  $g(-x)=-g(x)$  及  $g(x)=f(x-1)$  得  $f(-x-1)=-f(x-1)$ 。结合  $f(x)$  为偶函数,  $f(x+1)=f(-x-1)=-f(x-1)$ 。从而  $f(x+2)=-f(x)$ , 进而  $f(x+4)=f(x)$ , 周期  $T=4$ 。  $f(1992)=f(4 \times 498)=f(0)=993$ 。

32. 15. 解函数方程  $f(x+y)^2=f(x)^2+f(y)^2$ 。

解: 令  $H(x)=f(x)^2$ , 则方程变为  $H(x+y)=H(x)+H(y)$ 。此为柯西方程, 解为  $H(x)=cx$ 。因为  $f(x)^2 \geq 0$ , 故对于定义域内的  $x$  需满足  $cx \geq 0$ 。若定义域为  $\mathbb{R}$ , 则  $c=0 \Rightarrow f(x)=0$ 。若定义域为  $[0, +\infty)$ , 则  $f(x)=\pm\sqrt{cx}$ 。

33. 设函数  $f:(0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , 满足

$$f\left(1-\frac{1}{1+t}\right)+f\left(\frac{1+t}{t}\right)\log(1+t)=f\left(\frac{1+t}{t}\right)\log t+2022,$$

求  $f(1000)$ 。

令

$$x = \frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t},$$

则原式变为

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) \log(1+t) = f\left(\frac{1}{x}\right) \log t + 2022$$

即

$$f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) \log x = 2022 \quad (1)$$

再换元得

$$f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x) \log \frac{1}{x} = 2022 \Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) \log x = 2022$$

代入 (1) 得

$$f(x) - 2022 \log x + f(x)(\log x)^2 = 2022 \Rightarrow f(x) = \frac{2022(1 + \log x)}{1 + (\log x)^2}$$

故

$$f(1000) = \frac{2022 \cdot 4}{1 + 9} = 808.8$$

34. 设函数  $f: \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$  使得

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{x(1-x)}.$$

求  $f(x)$ 。

代入  $x$ ,  $\frac{1}{1-x}$ , 及  $\frac{x-1}{x}$  得

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{x(1-x)} \quad (1)$$

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = -\frac{(x-1)^2}{x} \quad (2)$$

$$f\left(\frac{x-1}{x}\right) + f(x) = \frac{x^2}{x-1} \quad (3)$$

(1) + (3) - (2), 得

$$\begin{aligned} 2f(x) &= \frac{1}{x(1-x)} + \frac{x^2}{x-1} + \frac{(x-1)^2}{x} \\ &= \frac{-1+x^3+(x-1)^3}{x(x-1)} \\ &= \frac{(x^2+x+1)+(x^2-2x+1)}{x} \\ &= \frac{2x^2-x+2}{x} \end{aligned}$$

故

$$f(x) = x + \frac{1}{x} - \frac{1}{2}$$

35. 已知函数  $f(x)$  定义在  $\mathbb{R}$  上, 且满足  $f(1) = 1$ , 对所有实数  $x$  有

$$f(x+5) \geq x+5, \quad f(x+1) \leq f(x)+1.$$

若定义函数  $g(x) = f(x) + 1 - x$ , 求  $g(2002)$ 。

$\forall x \in \mathbb{R}$ , 由  $f(x+1) \leq f(x)+1$ ,

$$g(x+1) = f(x+1) + 1 - (x+1) \leq f(x) + 1 - x = g(x)$$

即  $g(x)$  是递减函数, 且由  $f(x+5) \geq x+5$ ,

$$g(x+5) = f(x+5) + 1 - (x+5) \geq x+5+1-(x+5) = 1$$

因为  $g(1) = f(1) + 1 - 1 = 1$ , 故  $g(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ , 即  $g(2002) = 1$

36. 设  $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ , 使得对于所有非零实数  $x, y$  有

$$xy(f(x) - f(y)) + 2x = xf(x) - yf(y) + 2y$$

若  $f'(1) = 2018$ , 求  $f(2018)$ 。

令  $y = 1$ , 有

$$xf(x) - xf(1) + 2x = xf(x) - f(1) + 2 \Rightarrow f(1) = 2$$

令  $y = -1$ , 有

$$-x(f(x) - f(-1)) + 2x = xf(x) + f(-1) - 2 \Rightarrow f(x) = \frac{f(-1) + 2}{2} + \frac{2 - f(-1)}{2x}$$

求导得

$$f'(x) = \frac{f(-1) - 2}{2x^2}$$

故由

$$f'(1) = \frac{f(-1) - 2}{2} = 2018$$

得  $f(-1) = 4038$ , 于是

$$f(x) = 2020 - \frac{2018}{x}$$

经检验, 原方程式左式 = 右式 =  $2020x - 2018y$ , 故

$$f(2018) = 2019$$

将原式写成

$$xf(x)(y-1) + 2x = yf(y)(x-1) + 2y$$

$$xf(x)(y-1) + 2(x-1) = yf(y)(x-1) + 2(y-1)$$

$$\frac{xf(x)}{x-1} + \frac{2}{y-1} = \frac{yf(y)}{y-1} + \frac{2}{x-1}$$

$$\frac{xf(x) - 2}{x-1} = \frac{yf(y) - 2}{y-1} \quad \forall x, y \neq 0, 1$$

设

$$\frac{xf(x) - 2}{x-1} = c \Rightarrow f(x) = \frac{c(x-1) + 2}{x} = c + \frac{2-c}{x}$$

求导得

$$f'(x) = \frac{c-2}{x^2}$$

由  $f'(1) = 2018$  得  $c = 2020$ , 故

$$f(x) = 2020 - \frac{2018}{x}$$

经检验, 原方程式左式 = 右式 =  $2020x - 2018y$ , 故

$$f(2018) = 2019$$

37. 设函数  $f(x), g(x)$  在  $\mathbb{R}$  上连续且满足

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y) \\ g(x+y) = f(x)f(y) + g(x)g(y) \end{cases}$$

且  $g(x)$  为偶函数,  $g(x) > 0$  恒成立,  $g(0) \neq \frac{1}{2}$ , 已知  $f(2) + g(2) = \frac{\sqrt{5}}{15}$ , 求  $f(8) - g(8)$ 。

两式相加得

$$f(x+y) + g(x+y) = (f(x) + g(x))(f(y) + g(y))$$

设  $h(x) = f(x) + g(x)$ , 则  $h(x+y) = h(x)h(y)$ , 得  $h(x) = a^x$ 。两式相减得

$$g(x+y) - f(x+y) = (g(x) - f(x))(g(y) - f(y))$$

设  $k(x) = g(x) - f(x)$ , 同理得  $k(x) = b^x$ , 于是

$$f(x) = \frac{h(x) - k(x)}{2} = \frac{a^x - b^x}{2}, \quad g(x) = \frac{h(x) + k(x)}{2} = \frac{a^x + b^x}{2}$$

由于  $g(x)$  为偶函数,  $g(x) = g(-x)$ , 即

$$\frac{a^x + b^x}{2} = \frac{a^{-x} + b^{-x}}{2} \Rightarrow (a^x + b^x)a^x b^x = b^x + a^x \Rightarrow (ab)^x = 1 \Rightarrow ab = 1, \quad b = \frac{1}{a}$$

故

$$f(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{2}, \quad g(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$$

由  $f(2) + g(2) = \frac{\sqrt{5}}{15}$  可知

$$h(2) = a^2 = \frac{\sqrt{5}}{15} \Rightarrow a^8 = \left(\frac{\sqrt{5}}{15}\right)^4 = \frac{1}{2025}$$

所以

$$f(8) - g(8) = -k(8) = -b^8 = -\frac{1}{a^8} = -2025$$

38. 设  $a, b > 0$  使得关于  $x$  的方程  $\sqrt{|x|} + \sqrt{|x+a|} = b$  恰有三个相异实数解  $x_1, x_2, x_3$ , 且  $x_1 < x_2 < x_3 = b$ , 求  $a+b$  的值。

令  $t = x + \frac{a}{2}$ , 则关于  $t$  的方程

$$\sqrt{\left|t - \frac{a}{2}\right|} + \sqrt{\left|t + \frac{a}{2}\right|} = b$$

恰有三个不同的实数解

$$t_i = x_i + \frac{a}{2}, i = 1, 2, 3$$

由于  $f(t) = \sqrt{\left|t - \frac{a}{2}\right|} + \sqrt{\left|t + \frac{a}{2}\right|}$  为偶函数, 故方程  $f(t) = b$  的三个实数解关于原点对称分布, 从而必有  $b = f(0) = \sqrt{2a}$

现求方程  $f(t) = \sqrt{2a}$  的实数解:

- 当  $|t| \leq \frac{a}{2}$  时,  $f(t) = \sqrt{\frac{a}{2} - t} + \sqrt{\frac{a}{2} + t} = \sqrt{a + \sqrt{a^2 - 4t^2}} \leq \sqrt{2a}$ , 等号成立当且仅当  $t = 0$
- 当  $t > \frac{a}{2}$  时,  $f(t)$  单调递增, 且当  $t = \frac{5a}{8}$  时  $f(t) = \sqrt{2a}$
- 当  $t < -\frac{a}{2}$  时,  $f(t)$  单调递减, 且当  $t = -\frac{5a}{8}$  时  $f(t) = \sqrt{2a}$

从而方程  $f(t) = \sqrt{2a}$  恰有三个实数解

$$t_1 = -\frac{5a}{8}, t_2 = 0, t_3 = \frac{5a}{8}$$

由条件知  $b = x_3 = t_3 - \frac{a}{2} = \frac{a}{8}$ , 结合  $b = \sqrt{2a}$  得  $a = 128$ , 于是  $a + b = \frac{9a}{8} = 144$

# 不等式

1. 求满足不等式

$$\frac{4x^2}{(1 - \sqrt{1 + 2x})^2} < 2x + 9$$

的实数  $x$  的集合。

首先定义域要求  $1 + 2x \geq 0$ , 即  $x \geq -\frac{1}{2}$ , 且分母不为零, 即  $1 - \sqrt{1 + 2x} \neq 0$ , 得  $x \neq 0$ , 发现

$$\frac{4x^2}{(1 - \sqrt{1 + 2x})^2} = \left( \frac{1 - (1 + 2x)}{1 - \sqrt{1 + 2x}} \right)^2 = (1 + \sqrt{1 + 2x})^2$$

由  $(1 + \sqrt{1 + 2x})^2 < 2x + 9$  解得

$$\sqrt{1 + 2x} < \frac{7}{2} \Rightarrow x < \frac{45}{8}.$$

故  $x$  的取值范围为

$$\left[ -\frac{1}{2}, 0 \right) \cup \left( 0, \frac{45}{8} \right).$$

2. 已知

$$\begin{cases} \sqrt{x(x-3)} + \frac{8}{y^2} + \frac{y^2}{\sqrt{x(x-3)}} = 6, \\ x + y < 0 \end{cases}$$

求  $(x, y)$ 。

据题意,

$$6 = \sqrt{x(x-3)} + \frac{8}{y^2} + \frac{y^2}{\sqrt{x(x-3)}} \geq 2|y| + \frac{8}{y^2} \Rightarrow 3y^2 \geq y^2|y| + 4 \quad (1)$$

当  $y > 0$ , 化简得

$$y^3 - 3y^2 + 4 = (y + 1)(y - 2)^2 \leq 0$$

由于  $(y - 2)^2 \geq 0$  且  $y + 1 > 0$ , 故

$$y = 2 \Rightarrow x = -1, 4$$

经检验得  $(-1,2), (4,2)$  均不合题意; 同理当  $y < 0$  可解得

$$y = -2, \Rightarrow x = -1, 4$$

经检验得, 原方程式只有唯一解  $(-1, -2)$

### 3. 解不等式

$$|x|^3 - 2x^2 - 4|x| + 3 < 0,$$

令  $t = |x|$ , 不等式化为

$$t^3 - 2t^2 - 4t + 3 < 0$$

求根得  $t = 3$  和  $t = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 。于是

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} < |x| < 3$$

解得

$$x \in \left(-3, -\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 3\right)$$

### 4. 假设 $a > 1$ 且 $x, y > 0$ 满足

$$(\log_a x)^2 + (\log_a y)^2 - \log_a(x^2 y^2) \leq 2, \quad \log_a y \geq 1.$$

求  $\log_a(x^2 y)$  的取值区间。

设  $u = \log_a x, v = \log_a y$ 。不等式化为

$$u^2 + v^2 - 2(u + v) \leq 2, \quad v \geq 1.$$

这是以  $(1, 1)$  为圆心、半径为 2 的半圆的上半部分。我们要求  $2u + v$  的取值范围。

最小值在左下角  $(-1, 1)$ , 得  $2u + v = -1$ 。

最大值出现在斜率为  $-2$  的直线与半圆切点, 即联立

$$v - 1 = \frac{1}{2}(u - 1), \quad (u - 1)^2 + (v - 1)^2 = 4.$$

解得

$$(u, v) = \left(1 + \frac{4}{\sqrt{5}}, 1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \implies 2u + v = 3 + 2\sqrt{5}.$$

因此区间为  $[-1, 3 + 2\sqrt{5}]$ 。

5. 已知不等式

$$|x^2 + ax + 2| \geq |x + 1|$$

对任意  $x \in \mathbb{R}$  恒成立, 求实数  $a$  的取值范围。

将不等式两边平方得

$$(x^2 + ax + 2)^2 \geq (x + 1)^2$$

$$(x^2 + ax + 2)^2 - (x + 1)^2 \geq 0$$

$$[(x^2 + ax + 2) - (x + 1)][(x^2 + ax + 2) + (x + 1)] \geq 0$$

$$[x^2 + (a - 1)x + 1][x^2 + (a + 1)x + 3] \geq 0$$

因为两个二次式领导系数为正, 两个因式需对任意  $x$  恒非负。

对二次式  $x^2 + (a - 1)x + 1$ ,

$$\Delta_1 = (a - 1)^2 - 4 \leq 0 \implies -1 \leq a \leq 3$$

对二次式  $x^2 + (a + 1)x + 3$ ,

$$\Delta_2 = (a + 1)^2 - 12 \leq 0 \implies -1 - 2\sqrt{3} \leq a \leq -1 + 2\sqrt{3}$$

综上所述,

$$a \in [-1, -1 + 2\sqrt{3}]$$

6. 求

$$|2|x - 2| - 5| \leq 3$$

的正整数解。

情况一:  $|2|x - 2| - 5| = 3$

$$\implies \begin{cases} 2|x - 2| - 5 = 3 \implies |x - 2| = 4 \implies \begin{cases} x - 2 = 4 \implies x = 6 \\ x - 2 = -4 \implies x = -2 \notin \mathbb{N} \end{cases} \\ 2|x - 2| - 5 = -3 \implies |x - 2| = 1 \implies \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases} \end{cases}$$



情况二:  $|2|x - 2| - 5| = 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2|x - 2| - 5 = 2 \Rightarrow |x - 2| = \frac{7}{2} \notin \mathbb{Z} \\ 2|x - 2| - 5 = -2 \Rightarrow |x - 2| = \frac{3}{2} \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

情况三:  $|2|x - 2| - 5| = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2|x - 2| - 5 = 1 \Rightarrow |x - 2| = 3 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -1 \notin \mathbb{N} \end{cases} \\ 2|x - 2| - 5 = -1 \Rightarrow |x - 2| = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 0 \notin \mathbb{N} \end{cases} \end{cases}$$

情况四:  $|2|x - 2| - 5| = 0$

$$\Rightarrow |x - 2| = \frac{5}{2} \notin \mathbb{Z}$$

综上, 正整数解为

$$x = 1, 3, 4, 5, 6$$

7. 若实数  $a$  可使得对任意实数  $x$ , 不等式

$$|4x - 3a| + |5x - 4a| \geq a^2$$

恒成立, 求  $a$  的范围。

记

$$f(x) = |4x - 3a| + |5x - 4a| = 4 \left( \left| x - \frac{3}{4}a \right| + \left| x - \frac{4}{5}a \right| \right) + \left| x - \frac{4}{5}a \right|$$

由三角不等式得

$$f(x) \geq 4 \left| \left( x - \frac{3}{4}a \right) - \left( x - \frac{4}{5}a \right) \right| + \left| x - \frac{4}{5}a \right| = \frac{|a|}{5} + \left| x - \frac{4}{5}a \right|$$

取  $x = \frac{4}{5}a$ , 得  $f(x)$  的最小值为  $\frac{|a|}{5}$ , 欲使不等式对任意  $x$  恒成立需有

$$\frac{|a|}{5} \geq |a|^2 \Rightarrow |a|(5|a| - 1) \leq 0 \Rightarrow 0 \leq |a| \leq \frac{1}{5}$$

8. 已知实数  $a, b$  满足  $a + b \geq 3$ , 试证

$$|a - 2b^2| + |b - 2a^2| \geq 6$$

由三角不等式,

$$\begin{aligned} |a - 2b^2| + |b - 2a^2| &\geq |a - 2b^2 + b - 2a^2| \\ &= |2(a^2 + b^2) - (a + b)| \\ &\geq 2(a^2 + b^2) - (a + b) \\ &= (a + b)^2 + (a - b)^2 - (a + b) \\ &\geq 3^2 - 3 = 6 \end{aligned}$$

故原不等式得证。

9. 若二次实系数多项式函数  $f(x)$  满足

$$\begin{cases} -1 \leq f(1) \leq 3 \\ 6 \leq f(2) \leq 10 \\ 2 \leq f(4) \leq 24 \end{cases}$$

求  $f(7)$  的最大值。

设  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , 则

$$f(1) = a + b + c, \quad f(2) = 4a + 2b + c, \quad f(4) = 16a + 4b + c$$

解得

$$a = \frac{1}{3}f(1) - \frac{1}{2}f(2) + \frac{1}{6}f(4), \quad b = -2f(1) + \frac{5}{2}f(2) - \frac{1}{2}f(4), \quad c = \frac{8}{3}f(1) - 2f(2) + \frac{1}{3}f(4)$$

因此

$$f(7) = 49a + 7b + c = 5f(1) - 9f(2) + 5f(4)$$

取  $f(1) = 3, f(2) = 6, f(4) = 24$ , 得

$$f(7)_{\max} = 5 \cdot 3 - 9 \cdot 6 + 5 \cdot 24 = 81$$

10. 若  $a < b$ , 已知对任意实数  $x$ , 均有  $ax^2 + bx + c \geq 0$ , 且  $m < \frac{4a + 3b + 2c}{b - a}$  恒成立, 求实数  $m$  的范围。

由  $ax^2 + bx + c \geq 0$  ( $\forall x$ ), 可知二次项系数满足

$$a > 0, \quad b^2 - 4ac \leq 0$$

写成

$$\frac{4a + 3b + 2c}{b - a} = \frac{4 \cdot \frac{a}{b} + 3 + 2 \cdot \frac{c}{b}}{1 - \frac{a}{b}}$$

记  $t = \frac{a}{b}$ , 则  $0 < t < 1$ 。由  $b^2 - 4ac \leq 0$  得  $\frac{c}{b} \geq \frac{b}{4a} = \frac{1}{4t}$ , 于是

$$\frac{4a + 3b + 2c}{b - a} \geq \frac{4t + 3 + 2 \cdot \frac{1}{4t}}{1 - t} = \frac{4t + 3 + \frac{1}{2t}}{1 - t}$$

记

$$k = \frac{4t + 3 + \frac{1}{2t}}{1 - t}$$

其中  $0 < t < 1$ , 整理得关于  $t$  的二次方程

$$(2k + 8)t^2 + (6 - 2k)t + 1 = 0$$

为使该方程在  $0 < t < 1$  上有解, 判别式必须非负,

$$(6 - 2k)^2 - 4(2k + 8) \geq 0 \Rightarrow k^2 - 8k + 1 \geq 0$$

解得

$$k \geq 4 + \sqrt{15} > 0$$

于是对任意符合条件的  $a, b, c$ , 都有

$$\frac{4a + 3b + 2c}{b - a} \geq 4 + \sqrt{15}$$

由题意  $m$  满足  $m < \frac{4a + 3b + 2c}{b - a}$  恒成立, 故

$$m < 4 + \sqrt{15}$$

11. 已知  $a > 0, b > 0, a + b = 1$ , 证明不等式

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{ab} \geq 8$$

由 AM-GM 不等式,

$$\begin{aligned}\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{ab} &= \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{a+b}{ab} \\ &= 2 \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \\ &= 2 \cdot \frac{a+b}{ab} \\ &= 4 + 2 \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \\ &\geq 4 + 2 \cdot 2 = 8\end{aligned}$$

12. 设  $a, b$  均为正数, 求

$$f(a, b) = ab(72 - 3a - 4b)$$

的最大值。

由 AM-GM 不等式,

$$\begin{aligned}f(a, b) &= \frac{1}{12} \cdot 3a \cdot 4b \cdot (72 - 3a - 4b) \\ &\leq \frac{1}{12} \left( \frac{3a + 4b + 72 - 3a - 4b}{3} \right)^3 = 1152\end{aligned}$$

当  $a = b = \frac{1}{2}$  时等号成立。

13. 设  $a, b, c$  为正实数且满足  $a + b^2 + c^3 = 11$ , 求  $abc$  的最大值。

由 AM-GM 不等式,

$$\begin{aligned}11 &= \frac{a}{6} + \frac{a}{6} + \frac{a}{6} + \frac{a}{6} + \frac{a}{6} + \frac{a}{6} + \frac{b^2}{3} + \frac{b^2}{3} + \frac{b^2}{3} + \frac{c^3}{2} + \frac{c^3}{2} \\ &= 11 \sqrt[11]{\left(\frac{a}{6}\right)^6 \left(\frac{b^2}{3}\right)^3 \left(\frac{c^3}{2}\right)^2} = 11 \sqrt[11]{\frac{(abc)^6}{6^6 \cdot 27 \cdot 4}}\end{aligned}$$

即

$$abc \leq 6\sqrt{3} \sqrt[3]{2}$$

当且仅当

$$\frac{a}{6} = \frac{b^2}{3} = \frac{c^3}{2} = 1,$$

即  $a = 6$ ,  $b = \sqrt{3}$ ,  $c = \sqrt[3]{2}$  时等号成立。

14. 实数  $x, y, z$  满足  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , 求  $\sqrt{2}xy + yz$  的最大值。

由 AM-GM 不等式,

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}y^2 \geq 2\sqrt{\frac{1}{2}x^2y^2} = \sqrt{2}xy,$$

$$\frac{1}{2\sqrt{3}}y^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}z^2 \geq 2\sqrt{\frac{1}{4}y^2z^2} = yz.$$

将两式相加得

$$\sqrt{2}xy + yz \leq \frac{\sqrt{3}}{2}(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

15. 设  $x, y, z$  为不全为 0 的实数, 求分式

$$\frac{xy + 2yz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

的最大值。

由 AM-GM 不等式,

$$x^2 + \frac{1}{5}y^2 \geq 2\sqrt{\frac{1}{5}x^2y^2} = \frac{2}{\sqrt{5}}xy$$

同理,

$$\frac{4}{5}y^2 + z^2 \geq 2\sqrt{\frac{4}{5}y^2z^2} = \frac{4}{\sqrt{5}}yz$$

两式相加得

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{2}{\sqrt{5}}(xy + 2yz) \Rightarrow \frac{xy + 2yz}{x^2 + y^2 + z^2} \leq \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

16. 求

$$f(x) = \frac{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 10}{x^2 + x + 1}$$

的最小值。

由 AM-GM 不等式,

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + x + 1 + \frac{9}{x^2 + x + 1} \\ &\geq 2\sqrt{(x^2 + x + 1) \cdot \frac{9}{x^2 + x + 1}} = 6 \end{aligned}$$

当  $(x^2 + x + 1)^2 = 9$  即  $x = 2$  或  $x = -1$  时,  $f(x)$  取得最大值 6

17. 求函数

$$y = \frac{4^x + 1}{2^x + 1}$$

的最小值。

由 AM-GM 不等式,

$$\begin{aligned} y &= \frac{4^x - 1}{2^x + 1} + \frac{2}{2^x + 1} = 2^x + 1 + \frac{2}{2^x + 1} - 2 \\ &\geqslant 2\sqrt{(2^x + 1) \cdot \frac{2}{2^x + 1}} - 2 = 2\sqrt{2} - 2 \end{aligned}$$

当  $(2^x + 1)^2 = 2$  即  $x = \log_2(\sqrt{2} - 1)$  时,  $y$  取得最大值  $2\sqrt{2} - 2$

18. 求函数

$$f(x) = \log 2 \log 5 - \log 2x \log 5x$$

的最大值。

$$\begin{aligned} f(x) &= \log 2 \log 5 - (\log 2 + \log x)(\log 5 + \log x) \\ &= -(\log 2 + \log 5) \log x - \log^2 x \\ &= -\log x - \log^2 x \\ &= -\left(\log x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{4} \end{aligned}$$

当  $\log x = -\frac{1}{2}$  即  $x = \frac{\sqrt{10}}{10}$  时,  $f(x)$  取得最大值  $\frac{1}{4}$ .

19. 求函数

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2 + 2x + 4y + 5$$

的最小值。

配方求最小值:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 + 2xy + 2y^2 + 2x + 4y + 5 \\ &= x^2 + 2(y + 1)x + (y + 1)^2 + y^2 + 2y + 4 \\ &= [x + (y + 1)]^2 + (y + 1)^2 + 3 \geqslant 3 \end{aligned}$$

当  $x = 0, y = -1$  时  $f(x, y)$  取到最小值 3。

20.  $x, y \in \mathbb{R}$ , 求

$$x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 4xy + 6x + 4y^2 + 10$$

的最小值。

先配  $y$  项, 写成

$$f(x, y) = (x + 2y)^2 + x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 6x + 10$$

再用火眼金睛注意到

$$x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 6x + 2 = (x + 1)^2(x^2 + 2x + 2)$$

故原式为

$$(x + 2y)^2 + (x + 1)^2(x^2 + 2x + 2) + 8 \geq 8$$

当  $x = -1, y = \frac{1}{2}$  时,  $f(x, y)$  取得最小值 8.

21. 已知  $x, y > 0$ , 证明

$$\sqrt{x^2 + y^2} > \sqrt[3]{x^3 + y^3}$$

发现  $\sqrt{x^2 + y^2} > \sqrt[3]{x^3 + y^3}$  等价于

$$x^6 + 3x^4y^2 + 3x^2y^4 + y^6 > x^6 + 2x^3y^3 + y^6 \Leftrightarrow x^2y^2(3x^2 - 2xy + 3y^2) > 0$$

其中关于  $x$  的二次函数  $3x^2 - 2xy + 3y^2$  判别式为

$$\Delta = 4y^2 - 4(3)(3)(y^2) = -32y^2 < 0$$

故  $3x^2 - 2xy + 3y^2 > 0$ , 得证

$$x^2y^2(3x^2 - 2xy + 3y^2) > 0$$

22. 已知实数  $a, b, c$  满足  $c < b < a, a + b + c = 1, a^2 + b^2 + c^2 = 1$ , 求证

$$1 < a + b < \frac{4}{3}.$$

由  $a^2 + b^2 + c^2 = 1, a + b + c = 1$  可得

$$ab = \frac{(a+b)^2 - (a^2 + b^2)}{2} = \frac{(1-c)^2 - (1-c^2)}{2} = c^2 - c.$$

所以  $a + b = 1 - c$ , 且  $a, b$  是方程

$$x^2 - (1-c)x + c^2 - c = 0$$

的两个相异实根, 其中判别式为

$$\Delta = (1-c)^2 - 4(c^2 - c) > 0 \Rightarrow -\frac{1}{3} < c < 1.$$

又有

$$(c-a)(c-b) = c^2 - c(a+b) + ab = c^2 - c(1-c) + c^2 - c = 3c^2 - 2c.$$

因为  $c < b < a$ , 所以  $c - a < 0, c - b < 0$ , 故  $(c-a)(c-b) > 0$ , 即

$$3c^2 - 2c > 0 \implies c < 0 \text{ 或 } c > \frac{2}{3}.$$

综合  $-\frac{1}{3} < c < 1$  与上述条件, 得到

$$-\frac{1}{3} < c < 0 \text{ 或 } \frac{2}{3} < c < 1.$$

若  $\frac{2}{3} < c < 1$ , 则

$$0 < a + b < \frac{1}{3}$$

但由  $c < b < a$  得  $a + b > c > \frac{2}{3}$ , 矛盾, 因此只能有  $-\frac{1}{3} < c < 0$ , 则

$$1 < a + b < \frac{4}{3}$$

23. 已知  $a, b, c$  为正实数, 求

$$\left\lfloor \frac{a+b}{c} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b+c}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{c+a}{b} \right\rfloor$$

的最小值。

由  $[x] > x - 1$ ,  $x \notin \mathbb{Z}$  及 AM-GM 不等式,

$$\begin{aligned} S &= \left\lfloor \frac{a+b}{c} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b+c}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{c+a}{b} \right\rfloor > \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} - 3 \\ &\geq 2 + 2 + 2 - 3 = 3 \end{aligned}$$

由于  $S \in \mathbb{Z}$ , 最小值为  $S_{\min} = 4$ , 例如可在  $a = 6, b = 8, c = 9$  时取得。

24. 已知  $x > 0$ , 求

$$x[x] + \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + x + \frac{1}{x} + x[x] + \left\lceil \frac{1}{x} \right\rceil$$

的最小值。

设

$$f(x) = x[x] + \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + x + \frac{1}{x} + x[x] + \left\lceil \frac{1}{x} \right\rceil$$

观察到  $f(1) = 6$ , 若  $x > 1$ , 即  $0 < \frac{1}{x} \leq 1$ ,

$$x[x] + \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \geq x > 1, \quad x[x] + \left\lceil \frac{1}{x} \right\rceil \geq 2x + 1 > 3, \quad x + \frac{1}{x} > 2$$

于是当  $x > 1$ ,  $f(x) > 6 = f(1)$ 。若  $0 < x \leq \frac{1}{2}$ , 即  $2 \leq \frac{1}{x}$

$$x[x] + \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \geq 2, \quad x[x] + \left\lceil \frac{1}{x} \right\rceil \geq x + 2 > 2, \quad x + \frac{1}{x} > 2$$

于是当  $0 < x \leq \frac{1}{2}$ ,  $f(x) > 6 = f(1)$ 。若  $\frac{1}{2} < x < 1$ , 即  $1 < \frac{1}{x} < 2$ ,

$$f(x) = 1 + x + \frac{1}{x} + x + 2 = 3 + 2x + \frac{1}{x} \geq 3 + 2\sqrt{2}$$

等号成立当且仅当

$$2x = \frac{1}{x}$$

即  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。由于  $3 + 2\sqrt{2} < 6$ ,  $f(x)$  的最小值为  $3 + 2\sqrt{2}$ 。

25. 若实数  $x, y$  满足  $4x^2 - 2xy + 2y^2 = 1$ , 则  $3x^2 + xy + y^2$  的最大值与最小值的和为

(待解)

26. 例 2、已知  $x, y, a, b$  均为正实数, 且  $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1$ , 则  $x + y$  的最小值为 \_\_\_\_\_。

设  $\frac{a}{x} = \cos^2 \alpha$ ,  $\frac{b}{y} = \sin^2 \alpha$  则

$$x + y = a \sec^2 \alpha + b \csc^2 \alpha = a + b + a \tan^2 \alpha + b \cot^2 \alpha \geq a + b + 2\sqrt{ab}$$

27. 例 3、求函数  $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{2 + 3x - x^2}$  的最大值和最小值。

$$1 = \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{y} + \frac{\sqrt{2 + 3x - x^2}}{y} \quad \text{令} \quad \cos^2 \alpha = \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{y}, \sin^2 \alpha = \frac{\sqrt{2 + 3x - x^2}}{y}$$

$$\cos^4 \alpha = \frac{x^2 - 3x + 2}{y^2}, \sin^4 \alpha = \frac{2 + 3x - x^2}{y^2} \Rightarrow \cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha = \frac{4}{y^2}$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{4}{\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha} = \frac{8}{2 - \sin^2 2\alpha}$$

由于  $0 \leq \sin^2 2\alpha \leq 1$ , 所以  $4 \leq y^2 \leq 8$

$$2 \leq y \leq 2\sqrt{2}$$

28. 例 6、已知  $x, y, z$  均为正实数, 且  $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 1$ , 则  $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3}$  的最小值为 \_\_\_\_\_。

$$\text{解 1: } x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z}\right)\left(x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3}\right) = 1 + \frac{y}{2x} + \frac{z}{3x} + \frac{2x}{y} + 1 + \frac{2z}{3y} + \frac{3x}{z} + \frac{3y}{2z} + 1$$

$$= 3 + \left(\frac{y}{2x} + \frac{2x}{y}\right) + \left(\frac{z}{3x} + \frac{3x}{z}\right) + \left(\frac{2z}{3y} + \frac{3y}{2z}\right) \geq 3 + 2\sqrt{1} + 2\sqrt{1} + 2\sqrt{1} = 9$$

解 2: 利用算术平均数大于调和平均数知

$$\frac{x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3}}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z}} = 3 \Rightarrow x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} \geq 9$$

29. 如  $x^6 + \frac{y^3}{3} + \frac{z}{4} = 1$ , 求  $x^{12}y^6z^3$  的最大值, 其中  $x, y, z \in R^+$ 。

根据算术—几何平均值不等式 (AM-GM Inequality), 为了得到  $x^{12}y^6z^3$ , 我们需要将已知等式中的项进行拆分: 将  $x^6$  拆分为 2 项, 将  $\frac{y^3}{3}$  拆分为 2 项, 将  $\frac{z}{4}$  拆分为 3 项。共计  $2+2+3=7$  项。

$$1 = x^6 + \frac{y^3}{3} + \frac{z}{4} = \frac{x^6}{2} + \frac{x^6}{2} + \frac{y^3}{6} + \frac{y^3}{6} + \frac{z}{12} + \frac{z}{12} + \frac{z}{12}$$

根据平均值不等式:

$$\frac{x^6}{2} + \frac{x^6}{2} + \frac{y^3}{6} + \frac{y^3}{6} + \frac{z}{12} + \frac{z}{12} + \frac{z}{12} \geq 7 \sqrt[7]{\frac{x^6}{2} \cdot \frac{x^6}{2} \cdot \frac{y^3}{6} \cdot \frac{y^3}{6} \cdot \frac{z}{12} \cdot \frac{z}{12} \cdot \frac{z}{12}}$$

代入已知条件 1:

$$1 \geq 7 \sqrt[7]{\frac{x^{12}y^6z^3}{2^2 \cdot 6^2 \cdot 12^3}}$$

由于  $2^2 \cdot 6^2 \cdot 12^3 = 4 \cdot 36 \cdot 1728 = 144 \cdot 1728 = 12^2 \cdot 12^3 = 12^5$ , 不等式简化为:

$$1 \geq 7 \sqrt[7]{\frac{x^{12}y^6z^3}{12^5}}$$

两边同时取 7 次方:

$$\left(\frac{1}{7}\right)^7 \geq \frac{x^{12}y^6z^3}{12^5}$$

因此:

$$x^{12}y^6z^3 \leq \frac{12^5}{7^7}$$

所以  $x^{12}y^6z^3$  的最大值为  $\frac{12^5}{7^7}$ 。

30. 例 7、 $f(x, y, z) = \frac{x}{y} + \sqrt{\frac{y}{z}} + \sqrt[3]{\frac{z}{x}}$ , 求该函数的最小值。

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \frac{x}{y} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{z}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{z}} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{z}{x}} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{z}{x}} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{z}{x}} \\ &\geq 6 \cdot \sqrt[6]{\frac{x}{y} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{z}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{z}} \cdot \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{z}{x}} \cdot \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{z}{x}} \cdot \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{z}{x}}} = 6 \cdot \sqrt[6]{\frac{1}{2^2 \cdot 3^3} \cdot \frac{xyz}{yzx}} = \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{3} \end{aligned}$$

等号在  $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{z}} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{z}{x}}$  时成立。

31. 例 8、已知  $x, y, z$  均为正实数, 则  $\frac{xy+yz}{x^2+y^2+z^2}$  的最大值为 \_\_\_\_\_。

$$\frac{xy + yz}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{\frac{x}{y} + \frac{z}{y}}{(\frac{x}{y})^2 + 1 + (\frac{z}{y})^2} = \frac{\frac{x}{y} + \frac{z}{y}}{[(\frac{x}{y})^2 + \frac{1}{2}] + [(\frac{z}{y})^2 + \frac{1}{2}]} \leq \frac{\frac{x}{y} + \frac{z}{y}}{2(\frac{x}{y})\sqrt{\frac{1}{2}} + 2(\frac{z}{y})\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

等号在  $\frac{1}{2} = (\frac{x}{y})^2 = (\frac{z}{y})^2$  时成立。

32. 例 9、证明  $x + \frac{4}{x-1} \geq 2\sqrt{x+3}$ , 其中  $x > 1$ 。

利用比较法。令  $u = x - 1 > 0$  得到  $u + 1 + \frac{4}{u} \geq 2\sqrt{u+4}$ , 现在比较  $u + 1 + \frac{4}{u}$  与  $2\sqrt{u+4}$  的大小

$$\frac{u + 1 + \frac{4}{u}}{2\sqrt{u+4}} = \frac{u^2 + (u+4)}{2u\sqrt{u+4}} \geq \frac{2\sqrt{u^2(u+4)}}{2u\sqrt{u+4}} = 1$$

等号在  $u^2 = u + 4$  时成立。

33. 例 10、已知  $x_1 + x_2 = 2$ , 证  $\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} \geq \frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{x_2}{1+x_2^2}$ , 其中所有  $x_i$  都是正数。

由右式  $\frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{x_2}{1+x_2^2} = \frac{1}{\frac{1}{x_1}+x_1} + \frac{1}{\frac{1}{x_2}+x_2} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$  由左式  $\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} \geq 2\sqrt{\frac{1}{(1+x_1)(1+x_2)}}$  考虑分母  $(1+x_1)(1+x_2) = 1+x_1+x_2+x_1x_2 = 1+2+x_1(2-x_1) = -x_1^2+2x_1+3 = -(x_1-1)^2+4 \leq 4$

$$\therefore \frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} \geq 2\sqrt{\frac{1}{4}} = 1$$

因此左式  $\geq 1 \geq$  右式。

34. 例 12、如  $a, b, c$  是三角形三边, 证明  $\frac{1}{4} < \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3} \leq \frac{8}{27}$ 。

证: 由于  $(a+b) + (b+c) + (c+a) \geq 3\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}$

$$\frac{2(a+b+c)}{3} \geq \sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$\frac{8}{27}(a+b+c)^3 \geq (a+b)(b+c)(c+a)$$

所以  $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3} \leq \frac{8}{27}$ 。又  $a+b > c \Rightarrow 2a+2b > a+b+c \Rightarrow \frac{a+b}{a+b+c} > \frac{1}{2}$ , 同理可得  $\frac{b+c}{a+b+c} > \frac{1}{2}, \frac{c+a}{a+b+c} > \frac{1}{2}$ 。设  $\frac{a+b}{a+b+c} = \frac{1+x}{2}, \frac{b+c}{a+b+c} = \frac{1+y}{2}, \frac{c+a}{a+b+c} = \frac{1+z}{2}$  由于  $\frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{a+b+c} + \frac{c+a}{a+b+c} = 2 \Rightarrow \frac{1+x}{2} + \frac{1+y}{2} + \frac{1+z}{2} = 2 \Rightarrow x+y+z = 1$  于是  $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3} = \frac{(1+x)(1+y)(1+z)}{8} > \frac{1+x+y+z}{8} = \frac{1}{4}$  得证。

35. 例 14、若  $a > b > c$  求证:  $\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} \geq \frac{4}{a-c}$

因为  $a > c \Rightarrow a - c > 0$ , 结论改为  $(a - c)(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c}) \geq 4$

$$(a - c)(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c}) = [(a-b) + (b-c)](\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c}) \geq (1+1)^2 = 4$$

36. 例 15、证  $(x+y+z)(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{x+z} + \frac{1}{x+y}) \geq \frac{9}{2}$

$$\begin{aligned} & (x+y+z)(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{x+z} + \frac{1}{x+y}) \\ &= \frac{1}{2}[(x+y) + (y+z) + (z+x)](\frac{1}{y+z} + \frac{1}{x+z} + \frac{1}{x+y}) \\ &= \frac{1}{2}[(\sqrt{x+y})^2 + (\sqrt{y+z})^2 + (\sqrt{z+x})^2][(\sqrt{\frac{1}{y+z}})^2 + (\sqrt{\frac{1}{x+z}})^2 + (\sqrt{\frac{1}{x+y}})^2] \\ &\geq \frac{1}{2}[\sqrt{x+y} \cdot \sqrt{\frac{1}{x+y}} + \sqrt{y+z} \cdot \sqrt{\frac{1}{y+z}} + \sqrt{z+x} \cdot \sqrt{\frac{1}{z+x}}]^2 = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

37. 例 16、设  $a, b$  为不相等的正数, 试证  $(a+b)(a^3+b^3) > (a^2+b^2)^2$ 。

由柯西不等式知, 左式改写为

$$[(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2][(\sqrt{a^3})^2 + (\sqrt{b^3})^2] \geq (\sqrt{a} \cdot \sqrt{a^3} + \sqrt{b} \cdot \sqrt{b^3})^2 = (a^2 + b^2)^2$$

若等号成立, 则必有一实数  $k$  存在, 使得  $\sqrt{a^3} = k\sqrt{a}$ ,  $\sqrt{b^3} = k\sqrt{b}$  于是  $a = b = k$ , 与  $a, b$  不相等的假设矛盾。

38. 例 17、 $a, b, c \in R^+$  求证:  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

$$\begin{aligned} & \text{由于 } \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + 3 = (\frac{a}{b+c} + 1) + (\frac{b}{c+a} + 1) + (\frac{c}{a+b} + 1) \\ &= \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{b+c+a}{c+a} + \frac{c+a+b}{a+b} = (a+b+c)(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}) \\ &= \frac{1}{2}[(b+c) + (c+a) + (a+b)](\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}) \geq \frac{1}{2}(1+1+1)^2 = \frac{9}{2} \\ &\therefore \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

39. 例 19、求证:  $\frac{a^2}{b+c-a} + \frac{b^2}{c+a-b} + \frac{c^2}{a+b-c} \geq a+b+c$ , 其中  $a, b, c$  为  $\triangle ABC$  三边。

$$\begin{aligned} & \text{由 } (a+b+c)\left(\frac{a^2}{b+c-a} + \frac{b^2}{c+a-b} + \frac{c^2}{a+b-c}\right) \\ &= [(b+c-a) + (c+a-b) + (a+b-c)]\left(\frac{a^2}{b+c-a} + \frac{b^2}{c+a-b} + \frac{c^2}{a+b-c}\right) \\ &= [(\sqrt{b+c-a})^2 + (\sqrt{c+a-b})^2 + (\sqrt{a+b-c})^2] \left[ \left(\frac{a}{\sqrt{b+c-a}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{c+a-b}}\right)^2 + \left(\frac{c}{\sqrt{a+b-c}}\right)^2 \right] \\ &\geq (a+b+c)^2 \end{aligned}$$

整理即得。

40. 例 20、当  $\alpha, \beta \in [0, \frac{\pi}{4}]$ , 求  $\sin(\alpha - \beta) + 2\sin(\alpha + \beta)$  的最大值。

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - \beta) + 2\sin(\alpha + \beta) &= 3\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \text{ 利用柯西不等式 } a_1b_1 + \cdots + a_nb_n \leq \\ &\sqrt{(a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2)} \quad 3\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \leq \sqrt{(9\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\cos^2\beta + \sin^2\beta)} \\ &= \sqrt{9\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = \sqrt{8\sin^2\alpha + 1} \leq \sqrt{8\sin^2\frac{\pi}{4} + 1} = \sqrt{5} \end{aligned}$$

等号在  $\alpha = \frac{\pi}{4}, \beta = \tan^{-1} \frac{1}{3}$  成立。

41. 如  $\frac{1}{x^3} + \frac{3}{y^2} + \frac{12}{z} = 1$ , 求  $xy^2z$  的最小值, 其中  $x, y, z \in R^+$ , 并指明等号何时成立。

根据均值不等式 (AM-GM):

$$1 = \frac{1}{x^3} + \frac{3}{y^2} + \frac{12}{z} = \frac{1}{x^3} + \frac{3}{2y^2} + \frac{3}{2y^2} + \frac{12}{3z} + \frac{12}{3z} + \frac{12}{3z}$$

(此处需根据目标式  $xy^2z$  的指数权值进行拆分, 图片中草稿显示了不同的拆分思路。若直接对三项使用 AM-GM):

$$1 = \frac{1}{x^3} + \frac{3}{y^2} + \frac{12}{z} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{x^3} \cdot \frac{3}{y^2} \cdot \frac{12}{z}} = 3\sqrt[3]{\frac{36}{x^3y^2z}}$$

等号成立时, 有  $\frac{1}{x^3} = \frac{3}{y^2} = \frac{12}{z} = \frac{1}{3}$ 。

42. 求多元函数  $f(x, y, z) = 4\sqrt{\frac{2x}{y}} + \sqrt{\frac{3y}{2z}} + \frac{z}{2x}$  的最小值, 其中  $D_f = R^+$ 。

利用均值不等式, 将各项拆分以消去变量  $x, y, z$ :

$$f(x, y, z) = \sqrt{\frac{2x}{y}} + \sqrt{\frac{2x}{y}} + \sqrt{\frac{2x}{y}} + \sqrt{\frac{2x}{y}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3y}{2z}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3y}{2z}} + \frac{z}{2x}$$

共有 7 项, 应用 AM-GM 不等式:

$$f(x, y, z) \geq 7\sqrt[7]{\left(\frac{2x}{y}\right)^2 \cdot \left(\frac{3y}{8z}\right) \cdot \frac{z}{2x}} \text{ (此处需根据系数调整拆分份数以配平变量)}$$

43. 设  $x, y, z$  为实数, 若  $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{4} + \frac{(z-2)^2}{3} = 1$ , 求  $x + y + z$  之最大值与最小值。

利用柯西不等式 (Cauchy-Schwarz Inequality):

$$[(x-1) + (y+1) + (z-2)]^2 \leq \left[ \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{4} + \frac{(z-2)^2}{3} \right] (9 + 4 + 3)$$

$$(x + y + z - 2)^2 \leq 1 \cdot 16$$

$$|x + y + z - 2| \leq 4$$

解得:  $-2 \leq x + y + z \leq 6$ 。最大值为 6, 最小值为 -2。

44. 设  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ , 试求  $\frac{3}{\cos \theta} + \frac{2}{\sin \theta}$  的最小值。

利用赫尔德不等式 (Hölder's Inequality) 或构建辅助函数:

$$\left( \frac{3}{\cos \theta} + \frac{2}{\sin \theta} \right)^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \geq (\sqrt[3]{3^2} + \sqrt[3]{2^2})^3 \text{ (此为变式用法)}$$

常用方法: 令  $f(\theta) = 3 \sec \theta + 2 \csc \theta$ , 求导  $f'(\theta) = \frac{3 \sin \theta}{\cos^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{\sin^2 \theta} = 0$ , 得  $\tan^3 \theta = \frac{2}{3}$ 。

45. 设实数  $x, y$  满足  $x^2 + y^2 = 6x - 4y - 9$ , 求  $2x - 3y$  的最大值和最小值。

原方程配方得圆的方程:  $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 4$ 。设  $x = 3 + 2 \cos \alpha, y = -2 + 2 \sin \alpha$ 。代入目标式:

$$2x - 3y = 2(3 + 2 \cos \alpha) - 3(-2 + 2 \sin \alpha) = 6 + 4 \cos \alpha + 6 - 6 \sin \alpha = 12 + (4 \cos \alpha - 6 \sin \alpha)$$

利用辅助角公式:  $4 \cos \alpha - 6 \sin \alpha = \sqrt{4^2 + (-6)^2} \sin(\alpha + \phi) = \sqrt{52} \sin(\alpha + \phi) = 2\sqrt{13} \sin(\alpha + \phi)$ 。最大值为  $12 + 2\sqrt{13}$ , 最小值为  $12 - 2\sqrt{13}$ 。

46. 若  $a, b$  均为实数且满足  $a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2} = 1$ , 则  $a^2 + b^2$  之值为多少。

设  $a = \sin \alpha, b = \sin \beta$ , 其中  $\alpha, \beta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 。原式变为:  $\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha = 1$ , 即  $\sin(\alpha + \beta) = 1$ 。由此得  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ , 即  $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ 。则  $b = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha$ 。因此  $a^2 + b^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ 。

47. 当点  $P$  沿着直线  $y = 2x + 6$  移动, 点  $Q$  在椭圆  $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{4} = 1$  运动时, 线段  $PQ$  的长度最小值为 \_\_\_\_\_。

线段  $PQ$  的最小值即为平行于已知直线的椭圆切线与该直线之间的距离。设与  $y = 2x + 6$  平行的椭圆切线方程为  $y = 2x + k$ 。代入椭圆方程  $\frac{x^2}{6} + \frac{(2x+k)^2}{4} = 1$ , 整理得:

$$2x^2 + 3(4x^2 + 4kx + k^2) = 12 \implies 14x^2 + 12kx + (3k^2 - 12) = 0$$

令判别式  $\Delta = (12k)^2 - 4(14)(3k^2 - 12) = 0$ :

$$144k^2 - 168k^2 + 672 = 0 \implies 24k^2 = 672 \implies k^2 = 28 \implies k = \pm 2\sqrt{7}$$

取较近的切线  $y = 2x + 2\sqrt{7}$ 。利用平行线间距离公式  $d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ :

$$PQ_{\min} = \frac{|6 - 2\sqrt{7}|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{6 - 2\sqrt{7}}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5} - 2\sqrt{35}}{5}$$

48. 如  $a, b$  都是正数, 证明  $a + b \geq \sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[3]{b^2a}$ 。

证法一: 利用因式分解。

$$\begin{aligned} a + b - (\sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[3]{b^2a}) &= (\sqrt[3]{a})^3 + (\sqrt[3]{b})^3 - \sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}) \\ &= (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) - \sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}) \\ &= (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} - 2\sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) = (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})^2 \end{aligned}$$

因为  $a, b > 0$ , 所以  $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} > 0$  且  $(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})^2 \geq 0$ 。故  $a + b \geq \sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[3]{b^2a}$  成立。

49. 设  $a, b, c \in R$ , 证明:  $a^2 + ac + c^2 + 3b(a + b + c) \geq 0$ 。

整理原式为关于  $b$  的二次式:

$$3b^2 + 3(a+c)b + (a^2 + ac + c^2) \geq 0$$

对于二次函数  $f(b) = 3b^2 + 3(a+c)b + (a^2 + ac + c^2)$ , 其判别式为:

$$\begin{aligned}\Delta &= [3(a+c)]^2 - 4(3)(a^2 + ac + c^2) = 9(a^2 + 2ac + c^2) - 12(a^2 + ac + c^2) \\ &= 9a^2 + 18ac + 9c^2 - 12a^2 - 12ac - 12c^2 = -3a^2 + 6ac - 3c^2 = -3(a-c)^2\end{aligned}$$

因为  $-3(a-c)^2 \leq 0$  且二次项系数  $3 > 0$ , 故该二次式恒大于或等于 0。

50. 已知  $x, y, z$  是正实数, 求  $\frac{x}{y} + \left(\frac{y}{z}\right)^2 + \left(\frac{z}{x}\right)^3$  的最小值。

利用加权平均值不等式 (AM-GM), 为了消去所有变量, 设各项分配的权重分别为  $k_1, k_2, k_3$ 。我们要满足  $x, y, z$  的总幂次为 0: 对于  $x$ :  $k_1 - 3k_3 = 0 \implies k_1 = 3k_3$  对于  $y$ :  $-k_1 + 2k_2 = 0 \implies 2k_2 = k_1 = 3k_3 \implies k_2 = \frac{3}{2}k_3$  设  $k_3 = 2$ , 则  $k_1 = 6, k_2 = 3$ 。总项数为  $6 + 3 + 2 = 11$ 。

$$\frac{6 \cdot \frac{x}{6y} + 3 \cdot \frac{y^2}{3z^2} + 2 \cdot \frac{z^3}{2x^3}}{11} \geq \sqrt[11]{\left(\frac{x}{6y}\right)^6 \cdot \left(\frac{y^2}{3z^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{z^3}{2x^3}\right)^2} \quad (\text{此处需根据具体系数配平, 见图片草稿})$$

根据图片中的简化计算:

$$\frac{x}{y} + \left(\frac{y}{z}\right)^2 + \left(\frac{z}{x}\right)^3 \geq 11 \sqrt[11]{\frac{1}{6^6 \cdot 3^3 \cdot 2^2}} = \frac{11}{6} \sqrt[11]{72}$$

51. 实数  $x, y, z, t$  满足

$$x^2 + y^2 = 16, \quad z^2 + t^2 = 25, \quad xt - yz = 20,$$

求  $xz$  的最大值。

由柯西不等式,

$$16 \cdot 25 = (x^2 + y^2)(t^2 + (-z)^2) \geq (xt - yz)^2 = 20^2$$

此时等号成立, 可解得

$$\frac{x}{t} = \frac{y}{-z} = \frac{4}{5} \Rightarrow xz = -\frac{5}{4}xy$$

由  $x^2 + y^2 = 16$  可得

$$|xy| \leq \frac{x^2 + y^2}{2} = 8$$

所以

$$-10 = -\frac{5}{4} \cdot 8 \leqslant xz \leqslant -\frac{5}{4} \cdot (-8) = 10$$

因此  $xz$  的最大值为 10。

52. 设  $a_1, a_2, \dots, a_{18}$  均为大于 1 的实数, 求

$$\frac{\log_{a_1} 2023 + \log_{a_2} 2023 + \dots + \log_{a_{18}} 2023}{\log_{a_1 a_2 \dots a_{18}} 2023}$$

的最小值。

利用换底公式, 原式即

$$\frac{\sum_{i=1}^{18} \frac{1}{\log_{2023} a_i}}{\frac{1}{\sum_{i=1}^{18} \log_{2023} a_i}} = \left( \sum_{i=1}^{18} \frac{1}{\log_{2023} a_i} \right) \left( \sum_{i=1}^{18} \log_{2023} a_i \right).$$

由柯西不等式,

$$\left( \sum_{i=1}^{18} \log_{2023} a_i \right) \left( \sum_{i=1}^{18} \frac{1}{\log_{2023} a_i} \right) \geqslant \left( \sum_{i=1}^{18} 1 \right)^2 = 18^2 = 324.$$

53. 存在 2017 个正实数  $x_1, x_2, \dots, x_{2017}$  使得

$$\sum_{i=1}^{2017} x_i = \sum_{i=1}^{2017} \frac{1}{x_i} = 2018,$$

求

$$x_1 + \frac{1}{x_1}$$

的最大可能值。

由柯西不等式,

$$(2018 - x_1) \left( 2018 - \frac{1}{x_1} \right) = \left( \sum_{i=2}^{2017} x_i \right) \left( \sum_{i=2}^{2017} \frac{1}{x_i} \right) \geqslant 2016^2.$$

展开左边得

$$2018^2 - 2018 \left( x_1 + \frac{1}{x_1} \right) + 1 \geqslant 2016^2.$$

于是

$$x_1 + \frac{1}{x_1} \leq \frac{8069}{2018}.$$

等号成立当且仅当  $x_i = \frac{1}{x_i}$ , 即  $x_i = 1, i = 2, 3, \dots, 2017$

54. 已知  $a, b, c$  为正数, 且  $a + b + c = 1$ 。求

$$\left(\frac{1}{a} - 1\right) \left(\frac{1}{b} - 1\right) \left(\frac{1}{c} - 1\right)$$

的最小值。

由 AM-GM 不等式,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{a} - 1\right) \left(\frac{1}{b} - 1\right) \left(\frac{1}{c} - 1\right) &= \left(\frac{1-a}{a}\right) \left(\frac{1-b}{b}\right) \left(\frac{1-c}{c}\right) \\ &= \left(\frac{b+c}{a}\right) \left(\frac{a+c}{b}\right) \left(\frac{a+b}{c}\right) \\ &\geq \left(\frac{2\sqrt{bc}}{a}\right) \left(\frac{2\sqrt{ac}}{b}\right) \left(\frac{2\sqrt{ab}}{c}\right) = 8 \end{aligned}$$

当且仅当  $a = b = c = \frac{1}{3}$  时等号成立。

55. 已知  $a, b, c$  为三角形三边, 证明不等式

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

发现

$$\begin{aligned} &\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3 \\ \Leftrightarrow &\left(\frac{2a}{b+c-a} + 1\right) + \left(\frac{2b}{c+a-b} + 1\right) + \left(\frac{2c}{a+b-c} + 1\right) \geq 9 \\ \Leftrightarrow &(a+b+c) \left(\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} + \frac{1}{a+b-c}\right) \geq 9 \end{aligned}$$

由于

$$(b+c-a) + (c+a-b) + (a+b-c) = a+b+c,$$

且

$$b+c-a>0, c+a-b>0, a+b-c>0$$

由 AM-HM 不等式或柯西不等式, 原不等式得证。

56. 设  $x, y, z$  为正实数且  $xyz = 1$ , 证明:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq x + y + z.$$

由 AM-GM 不等式,

$$\frac{1}{3} \left( \frac{x}{y} + \frac{x}{y} + \frac{y}{z} \right) \geq \sqrt[3]{\frac{x^2}{yz}} = x,$$

$$\frac{1}{3} \left( \frac{y}{z} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \right) \geq \sqrt[3]{\frac{y^2}{xz}} = y,$$

$$\frac{1}{3} \left( \frac{z}{x} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y} \right) \geq \sqrt[3]{\frac{z^2}{xy}} = z.$$

三式相加得

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq x + y + z.$$

故证毕。

57. 若  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , 求  $x + 2y + 3z$  的最大值。

由柯西不等式,

$$(x^2 + y^2 + z^2)(1^2 + 2^2 + 3^2) \geq (x + 2y + 3z)^2 \Rightarrow x + 2y + 3z \leq \sqrt{14}$$

当且仅当  $(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{14}}(1, 2, 3)$  时等号成立。

58. 若  $x, y, z \in \mathbb{R}^+$  且  $x + y + z = 3$ , 求  $\frac{yz + 4xz + 9xy}{xyz}$  的最小值。

由柯西不等式,

$$\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{2^2} + \frac{z^2}{3^2} \geq \frac{(x + y + z)^2}{1 + 4 + 9} = \frac{9}{14}.$$

当且仅当  $(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right)$  时等号成立。

59. 若  $a, b, c \in \mathbb{R}^+$  且  $a + b + c = 6$ , 求

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{c}\right)^2 + \left(c + \frac{1}{a}\right)^2$$

的最小值。

由柯西不等式,

$$\begin{aligned} \left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{c}\right)^2 + \left(c + \frac{1}{a}\right)^2 &\geq \frac{\left(a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{1 + 1 + 1} \\ &\geq \frac{\left(6 + \frac{9}{a+b+c}\right)^2}{1 + 1 + 1} = \frac{75}{4} \end{aligned}$$

等号成立当且仅当  $a = b = c = 2$ 。

60. 已知实数  $a, b, c, d$  满足

$$ab + bc + cd = 8, \quad b^2 + c^2 = 2,$$

试求  $a^2 + d^2$  的最小值。

首先有

$$b^2 + c^2 \geq 2bc \Rightarrow bc \leq 1$$

由柯西不等式,

$$(a^2 + d^2)(b^2 + c^2) \geq (ab + cd)^2$$

即

$$(a^2 + d^2) \geq \frac{(ab + cd)^2}{b^2 + c^2} = \frac{(8 - bc)^2}{2} \geq \frac{(8 - 1)^2}{2} = \frac{49}{2}$$

当  $bc = 1$  且  $\frac{a}{c} = \frac{d}{b}$ , 即  $b = c = -1, a = d = -\frac{7}{2}$  时等号成立, 此时  $a^2 + d^2$  取最小值  $\frac{49}{2}$ 。

61. 若  $3a + 4b = 15$ , 求  $\sqrt{a^2 + b^2}$  的最小值。

由柯西不等式,

$$5\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \geq |3a + 4b| = 15 \implies \sqrt{a^2 + b^2} \geq 3$$

当且仅当  $a = \frac{9}{5}, b = \frac{12}{5}$  时等号成立。

62. 若  $abcd = 1$ , 求  $(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)$  的最小值。

由 AM-GM 不等式,

$$(1+a)(1+b)(1+c)(1+d) \geq (2\sqrt{a})(2\sqrt{b})(2\sqrt{c})(2\sqrt{d}) = 16$$

等号成立当且仅当  $a = b = c = d = 1$ 。

63. 若  $x \in \mathbb{R}$ , 求

$$\frac{x^2 + 2 - \sqrt{x^4 + 4}}{x}$$

的最大值。

设  $x > 0$ , 由 AM-GM 不等式,

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 2 - \sqrt{x^4 + 4}}{x} &= x + \frac{2}{x} - \sqrt{x^2 + \frac{4}{x^2}} \\ &= \sqrt{x^2 + \frac{4}{x^2} + 4} - \sqrt{x^2 + \frac{4}{x^2}} \\ &= \frac{4}{\sqrt{x^2 + \frac{4}{x^2} + 4} + \sqrt{x^2 + \frac{4}{x^2}}} \\ &\leq \frac{4}{\sqrt{4+4} + \sqrt{4}} = 2\sqrt{2} - 2 \end{aligned}$$

当且仅当  $x = \sqrt{2}$  时等号成立。

64. 若  $a, b$  为正实数且满足  $ab(a+b) = 2000$ , 求  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{ab}$  的最小值。

由 AM-GM 不等式,

$$2000 = ab(a+b) \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)(a+b) \Rightarrow a+b \geq 20$$

再由 AM-GM 不等式,

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{ab} &= \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{a+b} \\ &\geq 5\sqrt[5]{\frac{1}{16a^2b^2(a+b)}} \\ &= 5\sqrt[5]{\frac{a+b}{16a^2b^2(a+b)^2}} \\ &\geq 5\sqrt[5]{\frac{20}{16 \cdot 2000^2}} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

等号成立当且仅当  $a = b = 10$ 。以下为错误示范:

由 AM-GM 不等式,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{ab} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{ab(a+b)}} = 3\sqrt[3]{\frac{1}{2000}} = \frac{3\sqrt[3]{4}}{20}$$

但等号成立当且仅当  $a = b = 0$ , 不合题意。

由 AM-GM 不等式,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{ab} = \frac{a+b}{ab} + \frac{1}{ab} = \frac{(a+b)^2}{2000} + \frac{1}{2(a+b)} + \frac{1}{2(a+b)} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{8000}} = \frac{3}{20}$$

但等号成立当且仅当  $a+b=10$  且  $ab=200$ , 解得  $a, b$  为非实数, 不合题意。

65. 若  $a, b, c$  皆为正实数满足  $a+b+c=100$ , 求  $\sqrt{a} + \sqrt{ab} + \sqrt{abc}$  的最大值。

由 AM-GM 不等式,

$$\sqrt{a} + \sqrt{ab} + \sqrt{abc} = a + 2\sqrt{\frac{a}{4} \cdot b} + 3\sqrt{\frac{a}{12} \cdot \frac{b}{3} \cdot \frac{4c}{3}} \leqslant a + \frac{a}{4} + b + \frac{a}{12} + \frac{b}{3} + \frac{4c}{3} = \frac{4}{3}(a+b+c) = \frac{400}{3}$$

等号成立当且仅当  $a = \frac{160}{21}, b = \frac{40}{21}, c = \frac{10}{21}$ 。

66. 若  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  为实数, 且

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 16$$

求  $x_5$  的最大值。

由柯西不等式,

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(1+1+1+1) \geqslant (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 \Rightarrow 4(16 - x_5^2) \geqslant (8 - x_5)^2$$

解得

$$0 \leqslant x_5 \leqslant \frac{16}{5}$$

当  $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{6}{5}, x_5 = \frac{16}{5}$  时等号成立。

67. 若  $a, b, c$  为正实数且  $a+b+c \leqslant 9$ , 求  $(a^2 + b^2 + c^2)(2ab + 2bc + 2ca + 5)$  的最大值。

由 AM-GM 不等式,

$$\begin{aligned}(a^2 + b^2 + c^2)(2ab + 2bc + 2ca + 5) &\leq \left( \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca + 5}{2} \right)^2 \\ &= \left( \frac{(a + b + c)^2 + 5}{2} \right)^2 \\ &\leq \left( \frac{9^2 + 5}{2} \right)^2 = 1849\end{aligned}$$

当  $a^2 + b^2 + c^2 = 43, ab + bc + ca = 19$  时等号成立。

68.  $x, y, z$  为正实数且满足  $x + y + z = 91$ , 求

$$\frac{yz}{x} + \frac{xz}{y} + \frac{xy}{z}$$

的最小值。

由排序不等式,

$$\sum_{cyc} \frac{xy}{z} \geq \sum_{cyc} \frac{xy}{y} = x + y + z = 91$$

69. 已知正实数  $a, b$  满足  $a + b = 1$ , 求

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2$$

的最小值。

由柯西不等式或 QM-AM 不等式,

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{1}{2} \left(a + b + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{ab}\right)^2$$

又由 AM-GM 不等式,

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

故

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{1}{2} \cdot (1 + 4)^2 = \frac{25}{2}$$

当且仅当  $a = b = \frac{1}{2}$  时等号成立, 此时有最小值  $\frac{25}{2}$ 。

70. 已知  $x, y, z$  为正实数, 求  $\frac{(x^4+1)(y^4+1)(z^4+1)}{xy^2z}$  的最小值。

由 AM-GM 不等式,

$$\begin{aligned}\frac{(x^4y^4+1)(y^4z^4+1)(z^4x^4+1)}{xy^2z} &= \left(x^3 + \frac{1}{3x} + \frac{1}{3x} + \frac{1}{3x}\right) \left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) \left(z^3 + \frac{1}{3z} + \frac{1}{3z} + \frac{1}{3z}\right) \\ &\geq 4\sqrt[3]{\frac{1}{27}} \cdot 2 \cdot 4\sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{32\sqrt{3}}{9}\end{aligned}$$

71. 已知  $x \in [0, 2]$ , 求  $\sqrt{x} + 4\sqrt{1 - \frac{x}{2}}$  的最大值。

发现

$$\sqrt{x} + 4\sqrt{1 - \frac{x}{2}} = \sqrt{x} + \sqrt{2^3} \cdot \sqrt{2 - x}$$

由柯西不等式,

$$(\sqrt{x} + \sqrt{2^3} \cdot \sqrt{2 - x})^2 \leq (1 + 8)(x + 2 - x) = 18 \Leftrightarrow \sqrt{x} + 4\sqrt{1 - \frac{x}{2}} \leq 3\sqrt{2}$$

等号成立当且仅当  $x = \frac{2}{9}$

72. 若  $x, y$  为正数, 且

$$x^2 + \frac{y^2}{45} = 1,$$

试求

$$\frac{2}{1-x} + \frac{75}{10-y}$$

的最小值。

由 AM-GM 不等式,

$$\frac{1-x+\frac{x}{2}+\frac{x}{2}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{x^2(1-x)}{4}}$$

于是

$$\frac{2}{1-x} = \frac{x^2}{2} \cdot \frac{4}{x^2(1-x)} \geq \frac{x^2}{2} \cdot \left(\frac{3}{1-x+\frac{x}{2}+\frac{x}{2}}\right)^3 = \frac{27x^2}{2} \quad (1)$$

由 AM-GM 不等式,

$$\frac{y+(10-y)}{2} \geq \sqrt{y(10-y)}$$

故

$$\frac{75}{10-y} = \frac{75}{10} \left( \frac{y}{10-y} + 1 \right) \geq \frac{15}{2} \cdot \frac{y^2}{\left( \frac{y+(10-y)}{2} \right)^2} + \frac{15}{2} = \frac{15}{2} \cdot \frac{y^2}{25} + \frac{15}{2} \quad (2)$$

由 (1), (2),

$$\frac{2}{1-x} + \frac{75}{10-y} \geq \frac{27}{2} \left( x^2 + \frac{y^2}{45} \right) + \frac{15}{2} = 21$$

等号成立当且仅当  $x = \frac{2}{3}, y = 5$ 。

73. 若正实数  $a, b, c$  满足  $a + b + c = 21$ , 求  $a^2 + 3b^2 + 5c^2$  的最小值。

由排序不等式,

$$\begin{aligned} a^2 + 3b^2 + 5c^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2c^2 \\ &\geq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = (a + b + c)^2 = 441 \end{aligned}$$

当  $(a, b, c) = (21, 0, 0), \left( \frac{21}{2}, \frac{21}{2}, 0 \right), (7, 7, 7)$  时等号成立。

74. 已知  $x, y$  为实数, 求  $x^6 + y^6 - 54xy$  的最小值。

由 AM-GM 不等式,

$$\frac{x^6 + y^6 + 27 + 27 + 27 + 27}{6} \geq \sqrt[6]{x^6 y^6 \cdot 3^{12}} \Rightarrow x^6 y^6 - 54xy \geq -108$$

当  $x = y = \pm\sqrt{3}$  时等号成立。

75. 若  $x, y, z$  为正实数, 且满足  $x + y + z = 1$ , 求  $x(x+y)^2(y+z)^3(z+x)^4$  的最大值。

由 AM-GM 不等式,

$$\frac{5(x+y+z)}{10} = \frac{x+2(x+y)+3(y+z)+4\left(\frac{z+x}{2}\right)}{10} \geq \sqrt[10]{\frac{x(x+y)^2(y+z)^3(z+x)^4}{2^4}}$$

故

$$x(x+y)^2(y+z)^3(z+x)^4 \leq \frac{1}{64}$$

等号成立  $y = 0, x = z = \frac{1}{2}$ ?

76. 设  $a, b, c, d$  为正实数, 且满足  $abcd = 1$ , 求

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd$$

的最小值。

由 AM-GM 不等式, 有

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd \geqslant \sqrt[4]{(abcd)^2} + \sqrt[6]{(abcd)^3} = 4 + 6 = 10$$

等号成立当且仅当  $a = b = c = d = 1$ 。

77. 设  $a, b, c$  为正实数, 且满足  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ , 证明

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geqslant 3 + \frac{2(a^3 + b^3 + c^3)}{abc}.$$

考虑左式减右式, 有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - 3 - \frac{2(a^3 + b^3 + c^3)}{abc} \\ &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2} + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{b^2} + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{c^2} - 3 - 2\left(\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab}\right) \\ &= \frac{b^2 + c^2}{a^2} + \frac{a^2 + c^2}{b^2} + \frac{a^2 + b^2}{c^2} - 2\left(\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab}\right) \\ &= a^2\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2 + b^2\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right)^2 + c^2\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

等号成立当且仅当  $a = b = c$ 。

78. 若  $a, b, c$  为实数且  $a + b + c = 12$ , 且

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{abc} = 1,$$

求  $abc - (a + 2b - 3c)$  的最大值。

由

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{abc} = 1,$$

则

$$2abc = 2ab + 2bc + 2ca + 2 = 144 - a^2 - b^2 - c^2 + 2$$

所以

$$\begin{aligned} 2abc - 2(a + 2b - 3c) &= 146 - (a^2 + 2a) - (b^2 + 4b) - (c^2 - 6c) \\ &= 160 - [(a + 1)^2 + (b + 2)^2 + (c - 3)^2] \\ &\leq 160 - 3 \left( \frac{a + 1 + b + 2 + c - 3}{3} \right)^2 = 112 \end{aligned}$$

因此

$$abc - (a + 2b - 3c) \leq 56$$

等号成立当且仅当  $a = 3, b = 2, c = 7$ 。

79. 设  $a, b, c$  为正实数, 且  $a + b + c = 1$ , 求

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2}$$

的最小值。

由柯西不等式,

$$(1^2 + 1^2)(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2 \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} \geq \frac{a + b}{\sqrt{2}},$$

同理

$$\sqrt{b^2 + c^2} \geq \frac{b + c}{\sqrt{2}}, \quad \sqrt{c^2 + a^2} \geq \frac{c + a}{\sqrt{2}}.$$

相加得

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} \geq \frac{2(a + b + c)}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

当  $a = b = c = \frac{1}{3}$  时取等号, 故最小值为  $\sqrt{2}$ 。

80. 已知  $x > 1, y > 1, z > 1$  且  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$ , 试证

$$\sqrt{x + y + z} \geq \sqrt{x - 1} + \sqrt{y - 1} + \sqrt{z - 1}$$

首先有

$$\frac{x-1}{x} + \frac{y-1}{y} + \frac{z-1}{z} = 3 - \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = 3 - 2 = 1$$

由柯西不等式,

$$\left( \frac{x-1}{x} + \frac{y-1}{y} + \frac{z-1}{z} \right) (x+y+z) \geq \left( \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1} \right)^2$$

左式为  $1 \cdot (x+y+z) = x+y+z$ , 因此

$$\sqrt{x+y+z} \geq \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}$$

故证毕。

81. (a) 已知  $a, b, c > 0$ , 证明

$$\frac{a^2}{2a+b} + \frac{b^2}{2b+c} + \frac{c^2}{2c+a} \geq \frac{a+b+c}{3}$$

由柯西不等式,

$$\left( \frac{a^2}{2a+b} + \frac{b^2}{2b+c} + \frac{c^2}{2c+a} \right) (2a+b+2b+c+2c+a) \geq (a+b+c)^2$$

所以得证

$$\frac{a^2}{2a+b} + \frac{b^2}{2b+c} + \frac{c^2}{2c+a} \geq \frac{a+b+c}{3}$$

(b) 已知  $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 > 0$ , 证明

$$(a_1^3 + a_2^3)(b_1^3 + b_2^3)(c_1^3 + c_2^3) \geq (a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2)^3$$

令

$$r_1 = \frac{a_2}{a_1}, \quad r_2 = \frac{b_2}{b_1}, \quad r_3 = \frac{c_2}{c_1}$$

则

$$(a_1^3 + a_2^3)(b_1^3 + b_2^3)(c_1^3 + c_2^3) = a_1^3 b_1^3 c_1^3 (1 + r_1^3)(1 + r_2^3)(1 + r_3^3)$$

$$(a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2)^3 = a_1^3 b_1^3 c_1^3 (1 + r_1 r_2 r_3)^3$$

由 AM-GM 不等式,

$$\begin{aligned}(1+r_1^3)(1+r_2^3)(1+r_3^3) &= 1 + (r_1^3 + r_2^3 + r_3^3) + (r_1r_2)^3 + (r_2r_3)^3 + (r_3r_1)^3 + r_1^3r_2^3r_3^3 \\ &\geq 1 + 3r_1r_2r_3 + 3r_1^2r_2^2r_3^2 + r_1^3r_2^3r_3^3 \\ &= (1+r_1r_2r_3)^3\end{aligned}$$

因此得证

$$(a_1^3 + a_2^3)(b_1^3 + b_2^3)(c_1^3 + c_2^3) \geq (a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2)^3$$

82. 设  $a, b, c$  均为正数, 且  $a + b + c = 3$ , 证明

$$\frac{a}{b^2+1} + \frac{b}{c^2+1} + \frac{c}{a^2+1} \geq \frac{3}{2}.$$

由不等式

$$(b-1)^2 = b^2 + 1 - 2b \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{b^2+1} \leq \frac{1}{2b},$$

因此

$$\frac{a}{b^2+1} = a - \frac{ab^2}{b^2+1} \geq a - \frac{ab^2}{2b} = a - \frac{ab}{2}.$$

同理得

$$\frac{b}{c^2+1} \geq b - \frac{bc}{2}, \quad \frac{c}{a^2+1} \geq c - \frac{ac}{2}.$$

又由柯西不等式,

$$(a^2 + b^2 + c^2)(1^2 + 1^2 + 1^2) \geq (a + b + c)^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq 3.$$

因为

$$ab + bc + ca = \frac{(a+b+c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2} \leq \frac{9-3}{2} = 3$$

故

$$\frac{a}{b^2+1} + \frac{b}{c^2+1} + \frac{c}{a^2+1} \geq (a+b+c) - \frac{1}{2}(ab+bc+ca) \geq 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

故证毕。

83. 设  $a, b, c$  为正实数, 证明

$$\sqrt{ab(a+b)} + \sqrt{bc(b+c)} + \sqrt{ca(c+a)} \leq \frac{3}{2} \sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

由 AM-GM 不等式,

$$\begin{aligned} 3 &= \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} + \frac{a}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{b}{a+b} + \frac{a}{c+a} \\ &\geq 2 \left( \sqrt{\frac{ab}{(b+c)(c+a)}} + \sqrt{\frac{bc}{(a+b)(c+a)}} + \sqrt{\frac{ca}{(a+b)(b+c)}} \right) \end{aligned}$$

即得证

$$\sqrt{ab(a+b)} + \sqrt{bc(b+c)} + \sqrt{ca(c+a)} \leq \frac{3}{2} \sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

84. 证明对任意实数  $x, y, z$  皆有

$$\frac{y^2 - x^2}{2x^2 + 1} + \frac{z^2 - y^2}{2y^2 + 1} + \frac{x^2 - z^2}{2z^2 + 1} \geq 0$$

由 AM-GM 不等式,

$$\begin{aligned} \frac{y^2 - x^2}{2x^2 + 1} + \frac{z^2 - y^2}{2y^2 + 1} + \frac{x^2 - z^2}{2z^2 + 1} + \frac{3}{2} &= \frac{1}{2} \left( \frac{2y^2 + 1}{2x^2 + 1} + \frac{2z^2 + 1}{2y^2 + 1} + \frac{2x^2 + 1}{2z^2 + 1} \right) \\ &\geq \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{2y^2 + 1}{2x^2 + 1} \cdot \frac{2z^2 + 1}{2y^2 + 1} \cdot \frac{2x^2 + 1}{2z^2 + 1}} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

故

$$\frac{y^2 - x^2}{2x^2 + 1} + \frac{z^2 - y^2}{2y^2 + 1} + \frac{x^2 - z^2}{2z^2 + 1} \geq 0$$

85. 设  $a > 0, b > 0, c > 0$ , 求

$$\frac{a+3c}{a+2b+c} + \frac{4b}{a+b+2c} - \frac{8c}{a+b+3c} + 17$$

的最小值。

由于

$$\begin{cases} a+2b+c=x \\ a+b+2c=y \\ a+b+3c=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-x+5y-3z \\ b=x-2y+z \\ c=-y+z \end{cases}$$

故

$$\begin{aligned}
 & \frac{a+3c}{a+2b+c} + \frac{4b}{a+b+2c} - \frac{8c}{a+b+3c} + 17 \\
 &= \frac{-x+2y}{x} + \frac{4x-8y+4z}{y} - \frac{-8y+8z}{z} + 17 \\
 &= \left( \frac{2y}{x} + \frac{4x}{y} \right) + \left( \frac{4z}{y} + \frac{8y}{z} \right) \\
 &\geq 2\sqrt{\frac{2y}{x} \cdot \frac{4x}{y}} + 2\sqrt{\frac{4z}{y} \cdot \frac{8y}{z}} = 12\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

86. 证明对所有自然数  $n$ , 有

$$1 + \frac{2}{3n-2} \leq \sqrt[n]{3} \leq 1 + \frac{2}{n}.$$

由 AM-GM 不等式,

$$\frac{n+2}{n} = \frac{3 + \overbrace{1+\cdots+1}^{n-1 \uparrow 1}}{n} \geq \sqrt[n]{3 \cdot 1^{n-1}} = \sqrt[n]{3} \Rightarrow \sqrt[n]{3} \leq 1 + \frac{2}{n}$$

且

$$\frac{3n-2}{3n} = \frac{1/3 + \overbrace{1+\cdots+1}^{n-1 \uparrow 1}}{n} \geq \sqrt[n]{(1/3) \cdot 1^{n-1}} = \frac{1}{\sqrt[n]{3}} \Rightarrow \sqrt[n]{3} \geq 1 + \frac{2}{3n-2}.$$

综上所述得到

$$1 + \frac{2}{3n-2} \leq \sqrt[n]{3} \leq 1 + \frac{2}{n}$$

87. 已知  $0 \leq x \leq 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , 证明:

$$0 \leq x^n - x^{n+1} \leq \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

由  $0 \leq x \leq 1$ , 有

$$0 \leq 1-x \Rightarrow 0 \leq x^n(1-x) = x^n - x^{n+1} \quad (1)$$

由 AM-GM 不等式,

$$\frac{\overbrace{\frac{x}{n} + \cdots + \frac{x}{n}}^{n \uparrow} + (1-x)}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{\left(\frac{x}{n}\right)^n (1-x)}$$

即

$$\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \geq x^n(1-x) = x^n - x^{n+1} \quad (2)$$

由 (1) 与 (2), 得证

$$0 \leq x^n - x^{n+1} \leq \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

88. 已知  $\triangle ABC$  的面积为 27,  $R$  为其外接圆半径,  $r$  为其内切圆半径。求  $Rr^3$  的最大值。

设  $\triangle ABC$  边长为  $a, b, c > 0$ , 面积为

$$[\triangle ABC] = \frac{1}{2}(a+b+c)r = \frac{abc}{4R} = 27$$

由 AM-GM 不等式,

$$\frac{2 \cdot 27}{3r} = \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} = \sqrt[3]{4R \cdot 27} \Rightarrow Rr^3 \leq 54$$

等号成立当且仅当  $a = b = c$  即  $\triangle ABC$  为等边三角形。

89. 设实数  $x, y$  满足  $\sin x + \cos y = 1$ , 求  $\cos x + \sin y$  的最大值。

注意到

$$(\sin x + \cos y)^2 + (\cos x + \sin y)^2 = 2 + 2\sin(x+y) \leq 4$$

由题设  $\sin x + \cos y = 1$ , 代入上式

$$1^2 + (\cos x + \sin y)^2 \leq 4 \Rightarrow \cos x + \sin y \leq \sqrt{3}$$

当  $x = \frac{\pi}{6}$ ,  $y = \frac{\pi}{3}$  时,  $\sin x + \cos y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ ,  $\cos x + \sin y = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$  取到最大值。

90. 若  $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ , 试求

$$f(x) = |\sin x + \cos x + \tan x + \cot x + \sec x + \csc x|$$

的最小值。

设  $t = \cos x + \sin x$ , 有

$$\sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$$

且

$$\tan x + \cot x = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{2}{t^2 - 1}$$

$$\sec x + \csc x = \frac{\sin x + \cos x}{\cos x \sin x} = \frac{2t}{t^2 - 1}$$

故

$$f(x) = g(t) = \left| t + \frac{2}{t^2 - 1} + \frac{2t}{t^2 - 1} \right| = \left| t - 1 + \frac{2}{t - 1} + 1 \right| \geqslant \left| -2\sqrt{2} + 1 \right| = 2\sqrt{2} - 1$$

91. 1. 已知  $x^2 + y^2 = 1$ , 求  $\frac{y-3}{x+2}$  的最大值。

解: 设  $k = \frac{y-3}{x+2}$ , 则直线方程为  $kx - y + 2k + 3 = 0$ 。由于直线与圆  $x^2 + y^2 = 1$  有交点, 圆心  $(0, 0)$  到直线的距离  $d \leqslant 1$ :

$$\frac{|2k + 3|}{\sqrt{k^2 + 1}} \leqslant 1 \Rightarrow 4k^2 + 9 + 12k \leqslant k^2 + 1 \Rightarrow 3k^2 + 12k + 8 \leqslant 0$$

解得  $k_{\max} = \frac{-12 + \sqrt{144 - 96}}{6} = -2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 。

92. 2. 已知实数  $x, y$  满足  $3x - 4y = 5$ , 求  $x^2 + y^2$  的最小值。

解:  $x^2 + y^2$  的最小值即为原点  $(0, 0)$  到直线  $3x - 4y - 5 = 0$  距离的平方。

$$d = \frac{|-5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 1$$

所以  $(x^2 + y^2)_{\min} = 1^2 = 1$ 。

93. 3. 已知实数  $x, y$  满足  $12x + 5y = 1$ , 求  $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 20$  的最小值。

解: 原式可配方为  $(x+2)^2 + (y-3)^2 + 7$ 。其几何意义为点  $(-2, 3)$  到直线  $12x + 5y - 1 = 0$  距离的平方加 7。

$$d = \frac{|12(-2) + 5(3) - 1|}{\sqrt{12^2 + 5^2}} = \frac{10}{13}$$

最小值  $d^2 + 7 = \left(\frac{10}{13}\right)^2 + 7 = \frac{100}{169} + 7 = \frac{1283}{169}$ 。

94. 4. 已知实数  $x, y$  满足  $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 7$ , 求  $\sqrt{(x-5)^2 + (y-6)^2}$  的最小值。

解: 圆方程配方为  $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 3^2$ , 圆心  $A(-1, 1)$ , 半径  $R = 3$ 。设点  $B(5, 6)$ , 则  $\sqrt{(x-5)^2 + (y-6)^2}$  的最小值即为  $|AB| - R$ 。

$$|AB| = \sqrt{(5+1)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{6^2 + 5^2} = \sqrt{61}$$

最小值为  $\sqrt{61} - 3$ 。

95. 5. 已知  $(x-2)^2 + y^2 = 3$ , 求  $\frac{y}{x}$  的最大值。

解: 设  $k = \frac{y}{x}$ , 即直线  $kx - y = 0$  与圆  $(x-2)^2 + y^2 = 3$  相切。

$$\frac{|2k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \sqrt{3} \Rightarrow 4k^2 = 3k^2 + 3 \Rightarrow k^2 = 3$$

所以  $k_{\max} = \sqrt{3}$ 。

96. 8. 求  $\sqrt{x^2 + 6x + 73} + \sqrt{x^2 - 4x + 8}$  的最小值。

解: 原式可化为  $\sqrt{(x+3)^2 + (0-8)^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (0-2)^2}$ 。其几何意义为  $x$  轴上的点  $(x, 0)$  到两点  $A(-3, 8)$  和  $B(2, 2)$  距离之和。找  $B$  关于  $x$  轴的对称点  $B'(2, -2)$ , 最小值为线段  $AB'$  的长度:

$$\min = \sqrt{(-3-2)^2 + (8+2)^2} = \sqrt{5^2 + 10^2} = 5\sqrt{5}$$

97. 11.  $\frac{3-\sin x}{2+\cos x}$  的最大值为, 最小值为。

解: 设  $y = \frac{3-\sin x}{2+\cos x}$ , 则  $y \cos x + \sin x = 3 - 2y$ 。利用辅助角公式:  $\sqrt{y^2 + 1} \cos(x - \alpha) = 3 - 2y$ 。

由  $|\cos(x - \alpha)| \leq 1$ , 得  $\left| \frac{3-2y}{\sqrt{y^2+1}} \right| \leq 1$ 。

$$(3-2y)^2 \leq y^2 + 1 \Rightarrow 9 + 4y^2 - 12y \leq y^2 + 1 \Rightarrow 3y^2 - 12y + 8 \leq 0$$

解方程  $3y^2 - 12y + 8 = 0$  得  $y = \frac{12 \pm \sqrt{144-96}}{6} = 2 \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 。所以最大值为  $2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$ , 最小值为  $2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 。

98. 例 8: 已知  $a, b$  为正实数, 请问  $\sqrt{49 + a^2 - 7\sqrt{2}a} + \sqrt{a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab} + \sqrt{50 + b^2 - 10b}$  之最小值是什么?

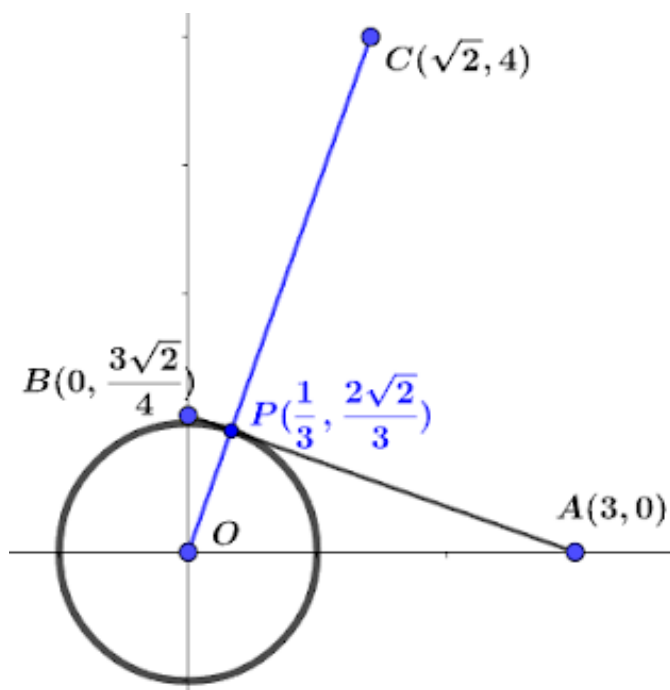
利用余弦定理将各项转化为几何线段: 1.  $L_1 = \sqrt{a^2 + 7^2 - 2 \cdot a \cdot 7 \cos 45^\circ}$  2.  $L_2 = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cos 45^\circ}$  3.  $L_3 = \sqrt{b^2 + (\sqrt{50})^2 - 2 \cdot b \cdot \sqrt{50} \cos 45^\circ}$  将三个三角形拼接, 总夹角为  $45^\circ + 45^\circ + 45^\circ = 135^\circ$ 。最小值为连接始点与终点的线段长:

$$\begin{aligned} \sqrt{7^2 + (\sqrt{50})^2 - 2 \cdot 7 \cdot \sqrt{50} \cos 135^\circ} &= \sqrt{49 + 50 - 2 \cdot 7 \cdot 5\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \\ &= \sqrt{99 + 70} = \sqrt{169} = 13 \end{aligned}$$

99. 试求

$$\sqrt{10 - 6 \cos \theta} + \frac{1}{4} \sqrt{34 - 24\sqrt{2} \sin \theta} + \sqrt{19 - 2\sqrt{2} \cos \theta - 8 \sin \theta}$$

的最小值。



发现

$$\begin{aligned} \sqrt{10 - 6 \cos \theta} &= \sqrt{(\cos \theta - 3)^2 + \sin^2 \theta} \\ \frac{1}{4} \sqrt{34 - 24\sqrt{2} \sin \theta} &= \sqrt{\cos^2 \theta - \left(\sin \theta - \frac{3}{4}\sqrt{2}\right)^2} \end{aligned}$$

$$\sqrt{19 - 2\sqrt{2}\cos\theta - 8\sin\theta} = \sqrt{(\cos\theta - \sqrt{2})^2 + (\sin\theta - 4)^2}$$

构造坐标系, 设  $P(\cos\theta, \sin\theta)$  在单位圆上,  $A(3, 0)$ ,  $B(0, \frac{3\sqrt{2}}{4})$ ,  $C(\sqrt{2}, 4)$ , 原式即为

$$\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$$

直线  $AB$  方程式为

$$\sqrt{2}x + 4y = 3\sqrt{2},$$

故圆心  $O$  到  $AB$  的距离为 1, 且当  $P = \left(\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ ,  $OPC$  共线, 于是  $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$  最小值为

$$\overline{AB} + \overline{OC} - 1 = \sqrt{9 + \frac{18}{16}} + \sqrt{18} - 1 = \frac{21}{4}\sqrt{2} - 1$$

100. 若锐角  $A, B, C$  满足  $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2$ , 求

$$\frac{1}{\sin^2 A \cos^4 B} + \frac{1}{\sin^2 B \cos^4 C} + \frac{1}{\sin^2 C \cos^4 A}$$

的最小值。

由柯西不等式,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sin^2 A \cos^4 B} + \frac{1}{\sin^2 B \cos^4 C} + \frac{1}{\sin^2 C \cos^4 A} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sin^2 A \cos^4 B} + \frac{1}{\sin^2 B \cos^4 C} + \frac{1}{\sin^2 C \cos^4 A} \right) (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) \\ &\geq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\cos^2 B} + \frac{1}{\cos^2 C} + \frac{1}{\cos^2 A} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{\cos^2 A} + \frac{1}{\cos^2 B} + \frac{1}{\cos^2 C} \right) (\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C) \right]^2 \geq \frac{81}{2} \end{aligned}$$

当  $\sin^2 A = \sin^2 B = \sin^2 C = \frac{2}{3}$ ,  $\cos^2 A = \cos^2 B = \cos^2 C = \frac{1}{3}$  时等号成立,

$$\frac{1}{\sin^2 A \cos^4 B} + \frac{1}{\sin^2 B \cos^4 C} + \frac{1}{\sin^2 C \cos^4 A} = \frac{27}{2} \cdot 3 = \frac{81}{2}.$$

101. 设  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_{2025}$  皆为锐角, 且

$$\sin^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_2 + \dots + \sin^2 \theta_{2025} = 1,$$

求

$$\frac{\sin \theta_1 + \sin \theta_2 + \cdots + \sin \theta_{2025}}{\cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \cdots + \cos \theta_{2025}}$$

的最大值。

由题意,

$$\sin^2 \theta_2 + \cdots + \sin^2 \theta_{2025} = 1 - \sin^2 \theta_1 = \cos^2 \theta_1$$

由柯西不等式,

$$\cos^2 \theta_1 = (\sin^2 \theta_2 + \cdots + \sin^2 \theta_{2025})(1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2) \geq (\sin \theta_2 + \sin \theta_3 + \cdots + \sin \theta_{2025})^2$$

即

$$\cos \theta_1 \geq \frac{\sin \theta_2 + \cdots + \sin \theta_{2025}}{\sqrt{2024}}$$

同理,

$$\cos \theta_2 \geq \frac{\sin \theta_1 + \sin \theta_3 + \cdots + \sin \theta_{2025}}{\sqrt{2024}}, \quad \cdots, \quad \cos \theta_{2025} \geq \frac{\sin \theta_1 + \cdots + \sin \theta_{2024}}{\sqrt{2024}}$$

将以上不等式相加得

$$\cos \theta_1 + \cdots + \cos \theta_{2025} \geq \frac{2024}{\sqrt{2024}}(\sin \theta_1 + \cdots + \sin \theta_{2025})$$

故

$$\frac{\sin \theta_1 + \cdots + \sin \theta_{2025}}{\cos \theta_1 + \cdots + \cos \theta_{2025}} \leq \frac{\sqrt{2024}}{2024} = \frac{\sqrt{506}}{1012}$$

102. 设  $a, b, c$  为三角形的三边长,  $\Delta$  为此三角形面积, 试证:

$$\Delta \leq \frac{\sqrt{3}}{4} \left( \frac{a+b+c}{3} \right)^2$$

且等号成立当且仅当  $a = b = c$ 。

由海伦公式, 三角形面积为

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

其中  $s$  为半周长, 由 AM-GM 不等式,

$$\frac{s}{3} = \frac{(s-a) + (s-b) + (s-c)}{3} \geq \sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)}$$

故

$$\Delta \leq \sqrt{s \cdot \left(\frac{s}{3}\right)^3} = \frac{s^2}{3\sqrt{3}} = \frac{(a+b+c)^2}{12\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$$

等号成立条件为  $s-a=s-b=s-c$ , 即  $a=b=c$  时, 该三角形为正三角形, 面积为  $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

103. 设  $a, b, c$  是一个三角形的三边, 周长为 2。证明

$$\frac{3}{2} < a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2.$$

由于周长为 2, 有  $a, b, c < 1$ , 则三角形面积

$$A = \frac{1}{2}bc \sin \alpha < \frac{1}{2}$$

由海伦公式,

$$A^2 = (1-a)(1-b)(1-c),$$

因此展开

$$0 < (1-a)(1-b)(1-c) < \frac{1}{4}$$

可得

$$1 < (ab+ac+bc) - abc < \frac{5}{4}$$

且由

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+ac+bc),$$

因此

$$4 - \frac{5}{2} < a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 4 - 2 \Rightarrow \frac{3}{2} < a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2$$

104. 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对的边为  $a, b, c$ , 且

$$a^2 + b^2 + 2c^2 = 8$$

求  $\triangle ABC$  面积的最大值。

由余弦定理

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{8 - 3c^2}{2ab}$$

又

$$S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}ab \sqrt{1 - \left(\frac{8 - 3c^2}{2ab}\right)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2 - (8 - 3c^2)^2}$$

由不等式  $a^2 + b^2 \geq 2ab$ ,

$$S \leq \frac{1}{4}\sqrt{(a^2 + b^2)^2 - (8 - 3c^2)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{(8 - 2c^2)^2 - (8 - 3c^2)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{16c^2 - 5c^4}$$

对于  $c^2$  的函数  $f(c^2) = 16c^2 - 5c^4$ , 令导数为零得  $c^2 = \frac{8}{5}$ , 代入得

$$S_{\max} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{64}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

以  $AB$  所在直线为  $x$  轴,  $AB$  中垂线为  $y$  轴, 设  $A(-\frac{c}{2}, 0), B(\frac{c}{2}, 0), C(x, y)$ , 由条件

$$a^2 + b^2 + 2c^2 = 8$$

得

$$(x - \frac{c}{2})^2 + y^2 + (x + \frac{c}{2})^2 + y^2 + 2c^2 = 8$$

即

$$x^2 + y^2 = 4 - \frac{5c^2}{4}$$

$\triangle ABC$  面积为

$$S = \frac{1}{2}c|y|$$

由  $y^2 \leq 4 - \frac{5c^2}{4}$ , 得

$$S \leq \frac{1}{2}c\sqrt{4 - \frac{5c^2}{4}} = \frac{1}{4}\sqrt{16c^2 - 5c^4}$$

解法同上。

105. 在  $\triangle ABC$  中, 试求

$$\frac{2\sin^2 A + \sin B \sin C}{\sin A \sin B \sin C}$$

的最小值。

由余弦定理,

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \geq 1 - \frac{a^2}{2bc} \Rightarrow \frac{2a^2}{bc} \geq 4 - 4\cos A$$

由正弦定理,

$$\frac{2\sin^2 A + \sin B \sin C}{\sin A \sin B \sin C} = \frac{1}{\sin A} \left( \frac{2a^2}{bc} + 1 \right) \geq \frac{5 - 4\cos A}{\sin A}$$

设  $\tan \frac{A}{2} = t > 0$ , 则

$$\cos A = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin A = \frac{2t}{1+t^2}$$

代入得

$$\frac{5 - 4\cos A}{\sin A} = \frac{5 - 4 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{9t^2 + 1}{2t}$$

由 AM-GM 不等式:

$$\frac{9t^2 + 1}{2t} \geq \frac{2\sqrt{9t^2 \cdot 1}}{2t} = 3$$

当  $A = \arcsin \frac{3}{5}$ ,  $B = C = \frac{\pi - A}{2}$  时等号成立, 原式取最小值 3

106. 在锐角三角形  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对的边为  $a, b, c$ , 且

$$a^2 + 2ab \cos C = 3b^2$$

求  $\tan A \tan B \tan C$  的最小值。

由余弦定理, 有

$$2ab \cos C = a^2 + b^2 - c^2$$

代入原式得

$$a^2 + (a^2 + b^2 - c^2) = 3b^2 \Rightarrow c^2 = 2a^2 - 2b^2 \Rightarrow b^2 + c^2 - a^2 = \frac{c^2}{2} \Rightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{c^2}{4bc}$$

由正、余弦定理得

$$\cos A = \frac{\sin C}{4 \sin B} \Rightarrow 4 \sin B \cos A = \sin C = \sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

有  $3 \sin B \cos A = \sin A \cos B$ .

$\therefore \triangle ABC$  是锐角三角形,  $\cos A \neq 0, \cos B \neq 0, \therefore \tan A = 3 \tan B$

现设  $\tan B = t$ , 又

$$\tan C = -\tan(A + B) = -\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = \frac{4t}{3t^2 - 1}$$

所以

$$\tan A \tan B \tan C = 3t \cdot t \cdot \frac{4t}{3t^2 - 1} = \frac{12t^3}{3t^2 - 1}$$

对函数

$$f(t) = \frac{12t^3}{3t^2 - 1}, t > 0$$

求导

$$f'(t) = \frac{36t^2(3t^2 - 1) - 12t^3 \cdot 6t}{(3t^2 - 1)^2} = \frac{36t^2(t^2 - 1)}{(3t^2 - 1)^2}$$

令  $f'(t) = 0$ , 解得  $t = 1$ ; 当  $t \in (0, 1)$ ,  $f'(t) < 0$ , 当  $t \in (1, \infty)$ ,  $f'(t) > 0$ ,

$\therefore f(t)$  在  $t = 1$  有最小值  $f(1) = 6$ 。

以  $AB$  所在直线为  $x$  轴,  $AB$  中垂线为  $y$  轴, 设  $A(-\frac{c}{2}, 0)$ ,  $B(\frac{c}{2}, 0)$ ,  $C(x, y)$ , 由距离公式

$$a^2 = (x - \frac{c}{2})^2 + y^2, \quad b^2 = (x + \frac{c}{2})^2 + y^2$$

代入已知条件

$$2b^2 + c^2 - 2a^2 = 0 \implies 2\left[(x + \frac{c}{2})^2 + y^2\right] + c^2 - 2\left[(x - \frac{c}{2})^2 + y^2\right] = 0$$

展开化简得

$$4cx + c^2 = 0 \implies x = -\frac{c}{4}$$

作  $CD \perp AB$  于  $D$ , 则  $D$  点坐标为  $(x, 0) = (-\frac{c}{4}, 0)$ 。发现

$$AD = \left| -\frac{c}{2} - \left(-\frac{c}{4}\right) \right| = \frac{c}{4} \quad \text{且} \quad BD = \left| \frac{c}{2} - \left(-\frac{c}{4}\right) \right| = \frac{3c}{4}$$

所以  $BD = 3AD$ , 又

$$\tan A = \frac{CD}{AD} = \frac{y}{\frac{c}{4}}$$

$$\tan B = \frac{CD}{BD} = \frac{y}{\frac{3c}{4}}$$

因此有

$$\tan A = 3 \tan B$$

解法同上。

107. 已知非负实数  $a, b, c, d$  满足  $a \leq 1, a + b \leq 5, a + b + c \leq 14, a + b + c + d \leq 30$ , 试证

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} \leq 10$$

由柯西不等式,

$$\begin{aligned} & (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d})^2 \\ &= \left( \sqrt{a} + \frac{\sqrt{b}}{2} + \frac{\sqrt{b}}{2} + \frac{\sqrt{c}}{3} + \frac{\sqrt{c}}{3} + \frac{\sqrt{c}}{3} + \frac{\sqrt{d}}{4} + \frac{\sqrt{d}}{4} + \frac{\sqrt{d}}{4} + \frac{\sqrt{d}}{4} \right)^2 \\ &\leq \left( a + \frac{b}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{9} + \frac{c}{9} + \frac{c}{9} + \frac{d}{16} + \frac{d}{16} + \frac{d}{16} + \frac{d}{16} \right) (1 + \dots + 1) = 10 \left( a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} + \frac{d}{4} \right) \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} + \frac{d}{4} &= \frac{1}{4}(a + b + c + d) + \frac{1}{12}(a + b + c) + \frac{1}{6}(a + b) + \frac{1}{2}a \\ &\leq \frac{30}{4} + \frac{14}{12} + \frac{5}{6} + \frac{1}{2} = 10 \end{aligned}$$

故

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} \leq 10$$

108. 已知  $a, b, c$  为正实数, 且满足  $abc = 1$ , 试证明:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

由柯西不等式,

$$\left( \frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \right) (a(b+c) + b(a+c) + c(a+b)) \geq \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2$$

注意到

$$a(b+c) + b(a+c) + c(a+b) = 2(ab+bc+ca),$$

且

$$\left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2 = \left( \frac{ab+bc+ca}{abc} \right)^2 = (ab+bc+ca)^2$$

故由 AM-GM 不等式,

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{1}{2}(ab+bc+ca) \geq \frac{3}{2} \sqrt[3]{(abc)^2} = \frac{3}{2}$$

由  $abc = 1$ , 有

$$\sum_{cyc} \frac{1}{a^3(b+c)} = \sum_{cyc} \frac{bc}{a^2(b+c)} = \sum_{cyc} \frac{(\frac{1}{a})^2}{\frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

由 AM-GM 不等式, 可推出

$$\frac{x^2}{y} \geq x - \frac{y}{4}, \quad x, y > 0,$$

据此得到

$$\sum_{cyc} \frac{(\frac{1}{a})^2}{\frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \geq \sum_{cyc} \left[ \frac{1}{a} - \frac{1}{4} \left( \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \right] = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

再由 AM-GM 不等式,

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{1}{abc}} = \frac{3}{2}$$

因此原不等式成立。

109. 已知  $0 \leq x, y, z \leq 1$  且

$$xyz = (1-x)(1-y)(1-z),$$

证明

$$x(1-z) + y(1-x) + z(1-y) \geq \frac{3}{4}.$$

由于  $0 \leq x \leq 1$ , 有

$$(x - \frac{1}{2})^2 \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x(1-x) \leq \frac{1}{4},$$

对  $y, z$  同理成立。于是

$$xyz(1-x)(1-y)(1-z) \leq \frac{1}{64}$$

由已知关系  $xyz = (1-x)(1-y)(1-z)$  得

$$(xyz)^2 \leq \frac{1}{64} \Rightarrow xyz \leq \frac{1}{8}$$

于是

$$x(1-z) + y(1-x) + z(1-y) = x + y + z - (xy + yz + zx) = 1 - 2xyz \geq 1 - 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$$

当  $x = y = z = \frac{1}{2}$  时等号成立,

110. 设正实数  $a, b, c, x, y, z$  满足  $a + b + c = x + y + z$ , 证明

$$\frac{2a^2}{a+x} + \frac{2b^2}{b+y} + \frac{2c^2}{c+z} \geq a + b + c$$

由柯西不等式,

$$\left( \frac{2a^2}{a+x} + \frac{2b^2}{b+y} + \frac{2c^2}{c+z} \right) (2(a+x) + 2(b+y) + 2(c+z)) \geq (2a + 2b + 2c)^2$$

又  $a + b + c = x + y + z$ , 得

$$\frac{2a^2}{a+x} + \frac{2b^2}{b+y} + \frac{2c^2}{c+z} \geq a + b + c.$$

111. 已知  $a, b, c, d > 0$ , 证明不等式

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{b^3 + c^3 + d^3}{b^2 + c^2 + d^2} + \frac{c^3 + d^3 + a^3}{c^2 + d^2 + a^2} + \frac{d^3 + a^3 + b^3}{d^2 + a^2 + b^2} \geq a + b + c + d.$$

由  $a, b > 0$ , 有

$$0 \leq (a+b)(a-b)^2 = (a^2 - b^2)(a-b) = a^3 - a^2b - b^2a + b^3$$

可知

$$a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2, \quad b^3 + c^3 \geq b^2c + bc^2, \quad c^3 + a^3 \geq c^2a + ca^2.$$

于是

$$\begin{aligned} 3(a^3 + b^3 + c^3) &\geq a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 \\ &= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2) \end{aligned}$$

因此

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{a^2 + b^2 + c^2} \geq \frac{a+b+c}{3}$$

故

$$\begin{aligned} &\frac{a^3 + b^3 + c^3}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{b^3 + c^3 + d^3}{b^2 + c^2 + d^2} + \frac{c^3 + d^3 + a^3}{c^2 + d^2 + a^2} + \frac{d^3 + a^3 + b^3}{d^2 + a^2 + b^2} \\ &\geq \frac{1}{3} \cdot 3(a+b+c+d) = a+b+c+d \end{aligned}$$

112. 已知正实数  $a, b, c, d$ , 求

$$\frac{ab + bc + cd}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

的最大值。

对任意正数  $t$ , 由 AM-GM 不等式,

$$ab \leq \frac{t}{2}a^2 + \frac{1}{2t}b^2, \quad bc \leq \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2, \quad cd \leq \frac{1}{2t}c^2 + \frac{t}{2}d^2.$$

取  $t = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ , 使得

$$\frac{t}{2} = \frac{1}{2t} + \frac{1}{2}$$

则

$$ab + bc + cd \leq \frac{t}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2).$$

因此最大值为

$$\frac{t}{2} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$$

当  $ta = b = c = td$  时等号成立。

113. 已知正数  $a, b, c$  满足  $abc > 1$ , 求  $\frac{abc(a + b + c + 8)}{abc - 1}$  的最小值。

设  $\lambda = \frac{abc(a + b + c + 8)}{abc - 1} > 0$ , 整理得

$$a + b + c + \frac{\lambda}{abc} = \lambda - 8$$

由 AM-GM 不等式得

$$a + b + c + \frac{\lambda}{abc} \geq 4\sqrt[4]{abc \cdot \frac{\lambda}{abc}} = 4\sqrt[4]{\lambda}$$

于是

$$\lambda - 8 \geq 4\sqrt[4]{\lambda}$$

令  $k = \sqrt[4]{\lambda} > 0$ , 则不等式转化为

$$k^4 - 4k - 8 \geq 0 \Rightarrow (k - 2)(k^3 + 2k^2 + 4k + 4) \geq 0$$

由于  $k > 0, k^3 + 2k^2 + 4k + 4 > 0$ , 故  $k \geq 2$ , 即

$$\lambda \geq 2^4 = 16$$

等号成立当且仅当  $a = b = c = 2$

114. 已知  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ , 求  $x^2 + 2y - 2z + 3$  的取值范围。

由柯西不等式,

$$[y + (-z)]^2 \leq (1+1)[y^2 + (-z)^2] \leq 2(x^2 + y^2 + z^2) \leq 2$$

则  $y - z \geq -\sqrt{2}$ , 且  $x^2 \geq 0$ , 可得

$$x^2 + 2y - 2z + 3 \geq 0 + 2(-\sqrt{2}) + 3 = 3 - 2\sqrt{2}$$

当且仅当  $x = 0, y = -\frac{\sqrt{2}}{2}, z = \frac{\sqrt{2}}{2}$  时, 等号成立;

又因为  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ , 则  $x^2 \leq 1 - y^2 - z^2$ , 可得

$$x^2 + 2y - 2z + 3 \leq 4 - (y^2 + z^2 - 2y + 2z)$$

且

$$y^2 + z^2 - 2y + 2z = (y - 1)^2 + (z + 1)^2 - 2,$$

设点  $A(-1, 1)$  和标准单位圆上一点  $P(y, z)$ , 则

$$(y - 1)^2 + (z + 1)^2 - 2 = |PA|^2 - 2,$$

又因为  $|PA|^2 \geq (|OA| - 1)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$ , 可得  $(y - 1)^2 + (z + 1)^2 - 2 \geq 1 - 2\sqrt{2}$ , 则

$$x^2 + 2y - 2z + 3 \leq 4 - (y^2 + z^2 - 2y + 2z) \leq 3 + 2\sqrt{2},$$

当且仅当  $x = 0, y = \frac{\sqrt{2}}{2}, z = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  时, 等号成立。

$\therefore$  取值范围是  $[3 - 2\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}]$ .

115. 已知  $x, y, z > 0$ , 求

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{y^2 + 4z^2} + \sqrt{z^2 + 16x^2}}{9x + 3y + 5z}$$

的最小值。

(待解)

116. 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} < 2.$$

首先证明对任意正整数  $n$ , 都有如下不等式成立

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} < \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}} \quad (1)$$

将不等式 (1) 两边同乘以  $\sqrt{n(n+1)}$ , 可得其等价形式

$$1 < 2(n+1) - 2\sqrt{n(n+1)} \iff 2\sqrt{n(n+1)} < n + (n+1)$$

由 AM-GM 不等式, 显然上述等价形式成立, 故

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} < \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}} \right)$$

右端为裂项级数, 其前  $k$  项部分和为

$$\sum_{n=1}^k \left( \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}} \right) = 2 \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right)$$

当  $k \rightarrow \infty$  时,  $S_k \rightarrow 2$ , 因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} < 2$$

117. 设实数  $a, b, c \in [-1, 1]$  满足

$$1 + 2abc \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

证明对所有正整数  $n$  有

$$1 + 2(abc)^n \geq a^{2n} + b^{2n} + c^{2n}.$$

条件可改写为

$$(a - bc)^2 \leq (1 - b^2)(1 - c^2). \quad (1)$$

由柯西不等式,

$$\begin{aligned} (a^{n-1} + a^{n-2}bc + \cdots + b^{n-1}c^{n-1})^2 &\leq (|a|^{n-1} + |a|^{n-2}|bc| + \cdots + |bc|^{n-1})^2 \\ &\leq (1 + |bc| + \cdots + |bc|^{n-1})^2 \\ &\leq (1 + |b|^2 + \cdots + |b|^{2(n-1)})(1 + |c|^2 + \cdots + |c|^{2(n-1)}) \end{aligned}$$

乘以不等式 (1), 得到

$$(a-bc)^2(a^{n-1}+a^{n-2}bc+\cdots+b^{n-1}c^{n-1})^2 \leq ((1-b^2)(1+|b|^2+\cdots+|b|^{2(n-1)})) \\ \cdot ((1-c^2)(1+|c|^2+\cdots+|c|^{2(n-1)}))$$

即

$$(a^n - b^n c^n)^2 \leq (1 - b^{2n})(1 - c^{2n})$$

从而得到

$$1 + 2(abc)^n \geq a^{2n} + b^{2n} + c^{2n}$$

118. 设  $a_1, \dots, a_n$  为正实数, 且设  $s = a_1 + \cdots + a_n$ , 试证明

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \leq 1 + \frac{s}{1!} + \frac{s^2}{2!} + \cdots + \frac{s^n}{n!}.$$

由 AM-GM 不等式,

$$\prod_{j=1}^n (1+a_j) \leq \left( \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (1+a_j) \right)^n = \left( 1 + \frac{s}{n} \right)^n$$

二项展开得

$$\left( 1 + \frac{s}{n} \right)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{s^j}{n^j} = \sum_{j=0}^n \frac{n!}{(n-j)!j!} \frac{s^j}{n^j}.$$

注意当  $0 \leq j \leq n$  时,

$$\frac{n!}{(n-j)!j!} \frac{s^j}{n^j} = \prod_{k=0}^{j-1} \left( 1 - \frac{k}{n} \right) \leq 1,$$

因此每一项满足

$$\frac{n!}{(n-j)!j!} \frac{s^j}{n^j} \leq \frac{s^j}{j!}.$$

代入二项和得到

$$\prod_{j=1}^n (1+a_j) \leq \sum_{j=0}^n \frac{s^j}{j!},$$

即

$$(1+a_1)\cdots(1+a_n) \leq 1 + \frac{s}{1!} + \frac{s^2}{2!} + \cdots + \frac{s^n}{n!},$$

证毕。

119. 设  $n$  个正实数的最小值为  $m$ , 最大值为  $M$ , 记它们的算术平均为  $A$ , 几何平均为  $G$ 。证明

$$A - G \geq \frac{1}{n} \left( \sqrt{M} - \sqrt{m} \right)^2.$$

设  $n$  个正实数为  $x_1, \dots, x_n$ , 不妨令  $x_1 = m, x_n = M$ 。不等式等价于

$$\begin{aligned} A - G &\geq \frac{\left( \sqrt{M} - \sqrt{m} \right)^2}{n} \\ \iff \sum_{j=1}^n x_j - n \left( \prod_{j=1}^n x_j \right)^{\frac{1}{n}} &\geq M - 2\sqrt{Mm} + m \\ \iff \sum_{j=2}^{n-1} x_j + 2\sqrt{Mm} &\geq n \left( \prod_{j=1}^n x_j \right)^{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

对这  $n$  个数

$$\sqrt{Mm}, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, \sqrt{Mm}$$

应用 AM-GM 不等式, 有

$$\frac{1}{n} \left( \sum_{j=2}^{n-1} x_j + 2\sqrt{Mm} \right) \geq \left( Mm \prod_{j=2}^{n-1} x_j \right)^{\frac{1}{n}} = \left( x_1 x_n \prod_{j=2}^{n-1} x_j \right)^{\frac{1}{n}} = \left( \prod_{j=1}^n x_j \right)^{\frac{1}{n}}$$

即

$$\sum_{j=2}^{n-1} x_j + 2\sqrt{Mm} \geq n \left( \prod_{j=1}^n x_j \right)^{\frac{1}{n}}$$

故原不等式得证。

120. 设  $x_1, \dots, x_n \geq -1$ , 且

$$\sum_{i=1}^n x_i^3 = 0,$$

证明

$$\sum_{i=1}^n x_i \leq \frac{n}{3}.$$

当  $x \geq -1$  时, 有不等式

$$0 \leq x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} = (x+1) \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

将  $x_1, \dots, x_n$  代入上式并求和, 得到

$$0 \leq \sum_{i=1}^n x_i^3 - \frac{3}{4} \sum_{i=1}^n x_i + \frac{n}{4}$$

由已知条件

$$\sum_{i=1}^n x_i^3 = 0,$$

可得

$$0 \leq -\frac{3}{4} \sum_{i=1}^n x_i + \frac{n}{4} \Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i \leq \frac{n}{3}$$

当且仅当  $n = 9k$ , 其中  $k$  个  $x_i = -1$ , 其余  $8k$  个  $x_i = \frac{1}{2}$  时取等号。

121. 已知非负实数  $x_1, x_2, \dots, x_5$  满足  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_5^2 = 4$ . 求下式的最大值:

$$S = \sum_{i=1}^5 \frac{1}{x_i + 1} \sum_{i=1}^5 x_i$$

当  $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1, x_5 = 0$  时,  $S = 12$ , 下面证明  $S \leq 12$ . 注意到

$$\frac{x(x-1)^2}{x+1} \geq 0$$

对  $x \geq 0$  成立, 由此可得

$$\sum_{i=1}^5 \frac{x_i(x_i-1)^2}{x_i+1} \geq 0$$

展开可知

$$\sum_{i=1}^5 \left( x_i^2 - 3x_i + 4 - \frac{4}{x_i+1} \right) \geq 0$$

整理得

$$\sum_{i=1}^5 \frac{1}{x_i+1} \leq 6 - \frac{3}{4} \sum_{i=1}^5 x_i$$

由上式及 AM-GM 不等式可知

$$S \leq \frac{4}{3} \left( 6 - \frac{3}{4} \sum_{i=1}^5 x_i \right) \left( \frac{3}{4} \sum_{i=1}^5 x_i \right) \leq \frac{4}{3} \cdot 3^2 = 12$$

# 数列与级数

1. 设  $a, b, c$  三数成等比数列, 且满足  $a + b + c = 9$  及  $a^2 + b^2 + c^2 = 189$ , 求  $b$ 。

关键: 运用恒等式

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)$$

又已知  $b^2 = ac$ , 故

$$81 = 189 + 2(b(9 - b) + b^2) \Rightarrow b = 6$$

2. 已知  $a, b, c, d$  成等差数列, 且实数  $x, y, z, u$  满足

$$\begin{cases} a + b + c + d = 60 \\ x + y + z + u = 12 \\ az + bu + cx + dy = 168 \end{cases}$$

求  $ay + bx + cu + dz$ 。

已知  $a, b, c, d$  成等差数列, 于是

$$\begin{aligned} ay + bx + cu + dz + 168 &= ay + bx + cu + dz + (az + bu + cx + dy) \\ &= (a + d)(y + z) + (b + c)(x + u) \\ &= 30(x + y + z + u) = 360 \end{aligned}$$

故

$$ay + bx + cu + dz = 192$$

3. 已知  $a_1 = -1, a_{n+1} = 2a_n - 3$ , 求  $a_{2017}$ 。

由递推式,

$$a_{n+1} - 3 = 2(a_n - 3),$$

所以  $a_1 - 3, a_2 - 3, \dots$  成等比数列, 公比为 2。

$$a_{n+1} - 3 = 2^n(a_1 - 3) = 2^n(-1 - 3) = -2^{n+2} \Rightarrow a_{2017} = -2^{2018} + 3.$$

由

$$a_{n+1} - a_n = 2a_n - 3 - (2a_{n-1} - 3) = 2(a_n - a_{n-1}),$$

所以  $\{a_{n+1} - a_n\}$  为等比数列, 公比为 2, 因此

$$\begin{aligned} a_n &= (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) + a_1 \\ &= \frac{(a_2 - a_1)(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} - 1 \\ &= (2a_1 - 3 - a_1)(2^{n-1} - 1) = -2^{n+1} + 3 \end{aligned}$$

所以

$$a_{2017} = -2^{2018} + 3$$

4. 若整数  $m \geqslant 1$ , 函数  $f$  满足

$$f(m+1) = m(-1)^{m+1} - 2f(m), \quad f(1) = f(2001),$$

求  $f(1) + f(2) + \cdots + f(2000)$ 。

由递推式可得

$$f(2) = 1 - 2f(1), \quad f(3) = -2 - 2f(2), \quad f(4) = 3 - 2f(3), \quad \dots, \quad f(2001) = 2000 - 2f(2000),$$

将  $f(2001)$  替换为  $f(1)$  并将所有式子相加, 得

$$\sum_{i=1}^{2000} f(i) = 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + 1999 - 2000 - 2 \sum_{i=1}^{2000} f(i)$$

所以

$$\sum_{i=1}^{2000} f(i) = \frac{1}{3} \left( \frac{2000}{2} - 2000 \right) = -\frac{1000}{3}$$

5. 已知数列  $\{a_r\}$  定义为

$$a_{r+1} = a_r + \frac{2r}{r^4 + r^2 + 1}, \quad a_1 = 0, \quad r \in \mathbb{N},$$

求  $a_{61}$  的精确值。

由递推关系, 对  $r = 1, 2, \dots, 60$  累加得

$$a_{61} - a_1 = \sum_{r=1}^{60} \frac{2r}{r^4 + r^2 + 1}.$$

由于  $a_1 = 0$ , 因此

$$a_{61} = \sum_{r=1}^{60} \frac{2r}{r^4 + r^2 + 1}.$$

注意到

$$r^4 + r^2 + 1 = (r^2 - r + 1)(r^2 + r + 1),$$

于是

$$\frac{2r}{r^4 + r^2 + 1} = \frac{2r}{(r^2 - r + 1)(r^2 + r + 1)} = \frac{1}{r^2 - r + 1} - \frac{1}{r^2 + r + 1}.$$

因此

$$a_{61} = \sum_{r=1}^{60} \left( \frac{1}{r^2 - r + 1} - \frac{1}{r^2 + r + 1} \right).$$

这是一个望远镜求和, 展开可得

$$\begin{aligned} a_{61} &= \left( \frac{1}{1^2 - 1 + 1} - \frac{1}{1^2 + 1 + 1} \right) + \left( \frac{1}{2^2 - 2 + 1} - \frac{1}{2^2 + 2 + 1} \right) + \cdots \\ &\quad + \left( \frac{1}{60^2 - 60 + 1} - \frac{1}{60^2 + 60 + 1} \right). \end{aligned}$$

中间项两两抵消, 最终剩下

$$a_{61} = 1 - \frac{1}{60^2 + 60 + 1} = 1 - \frac{1}{3661}.$$

因此

$$a_{61} = \frac{3660}{3661}.$$

6. 数列  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  满足  $a_0 = 3$ , 且

$$(3 - a_{n-1})(6 + a_n) = 18,$$

证明

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} = \frac{1}{3} (2^{n+2} - n - 4)$$

由递推关系

$$(3 - a_{n+1})(a_n + 6) = 18 \implies a_{n+1} = \frac{3a_n}{a_n + 6} \quad (1)$$

两边加 3 得到

$$a_{n+1} + 3 = \frac{3a_n}{a_n + 6} + 3 = \frac{6(a_n + 3)}{a_n + 6} \quad (2)$$

两式相比得

$$\frac{a_{n+1} + 3}{a_{n+1}} = \frac{2(a_n + 3)}{a_n}$$

故数列  $\left\{ \frac{a_n + 3}{a_n} \right\}$  是首项为 2, 公比为 2 的等比数列, 解得

$$\frac{a_n + 3}{a_n} = 2^{n+1} \implies a_n = \frac{3}{2^{n+1} - 1}$$

因此

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} = \sum_{k=1}^n \frac{2^{k+1} - 1}{3} = \frac{1}{3} (2^{n+2} - n - 4)$$

7. 设一函数  $f$  的定义域为所有正整数, 如果  $f(1) = 101$ , 且对所有正整数  $n > 1$  皆有

$$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n) = n^2 f(n)$$

求  $f(100)$  的值。

发现

$$f(n) = \sum_{k=1}^n f(k) - \sum_{k=1}^{n-1} f(k) = n^2 f(n) - (n-1)^2 f(n-1)$$

即

$$f(n) = \frac{n-1}{n+1} f(n-1)$$

于是

$$f(100) = \frac{99 \cdot 98 \cdots 1}{101 \cdot 100 \cdots 3} f(1) = \frac{2}{101 \cdot 100} \cdot 101 = \frac{1}{50}$$

8. 已知数列  $\{a_n\}$  满足:  $a_1 = 1$ ,  $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$ , 则  $\lfloor a_{2025} \rfloor =$

由题意可知

$$a_{n+1}^2 = a_n^2 + \frac{1}{a_n^2} + 2$$

所以有

$$a_{2025}^2 = a_1^2 + 2 \times (2025 - 1) + \left( \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_{2024}^2} \right)$$

又因为  $a_1 = 1$ , 且有

$$\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_{2024}^2} < 47$$

所以

$$63 = \sqrt{3969} < a_{2025} < \sqrt{4096} = 64$$

故  $[a_{2025}] = 63$ .

9. 设  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  满足  $f(1) = \frac{3}{2}$ , 且对所有  $n \in \mathbb{N}$  且满足

$$f(n+1) = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) f(n) + \left(1 + \frac{n}{2}\right) f(1) + n^2 + 2n,$$

求  $f(40)$ 。

将递推式改写为

$$f(n+1) = \frac{n+2}{n+1} f(n) + g(n),$$

其中  $g(n) = (n+2) \left(n + \frac{3}{4}\right)$ , 于是

$$\begin{aligned} f(40) &= \frac{41}{40} f(39) + g(39) \\ &= \frac{41}{39} f(38) + \frac{41}{40} g(38) + g(39) \\ &= \cdots \\ &= \frac{41}{2} f(1) + \sum_{k=1}^{39} \frac{41}{k+2} g(k) \\ &= \frac{41}{2} \cdot \frac{3}{2} + 41 \sum_{k=1}^{39} \left(k + \frac{3}{4}\right) \\ &= \frac{123}{4} + \frac{39 \cdot 40}{2} + 39 \cdot \frac{3}{4} \\ &= 33210 \end{aligned}$$

10. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ , 令  $b_n = a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , 若  $\{b_n\}$  是公比为 3 的等比数列, 求  $a_{100}$  的值。

由条件知

$$b_n = b_1 \cdot 3^{n-1} = 3^n$$

因此

$$a_{n+3} - a_n = b_{n+1} - b_n = 3^{n+1} - 3^n = 2 \cdot 3^n$$

于是

$$\begin{aligned} a_{100} &= a_1 + \sum_{k=1}^{33} (a_{3k+1} - a_{3k-2}) = 1 + \sum_{k=1}^{33} 2 \cdot 3^{3k-2} \\ &= 1 + 6 \cdot \frac{27^{33} - 1}{27 - 1} = 1 + \frac{3}{13} (3^{99} - 1) = \frac{3^{100} + 10}{13} \end{aligned}$$

11. 已知递归数列满足

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + 3}{2a_n - 4},$$

求通项公式  $a_n$ 。

先求不动点, 设  $x = \frac{x+3}{2x-4}$ , 得  $2x^2 - 5x - 3 = 0$ , 所以不动点为  $x = -\frac{1}{2}, 3$ , 于是

$$R_n = \frac{a_n + \frac{1}{2}}{a_n - 3}.$$

且

$$R_{n+1} = \frac{a_{n+1} + \frac{1}{2}}{a_{n+1} - 3} = -\frac{2}{5} R_n,$$

即  $\{R_n\}$  为公比  $-\frac{2}{5}$  的等比数列, 由于  $R_1 = \frac{a_1 + \frac{1}{2}}{a_1 - 3} = -\frac{2}{5}$ , 故

$$R_n = \left(-\frac{2}{5}\right)^n$$

于是

$$a_n = \frac{3R_n + \frac{1}{2}}{R_n - 1} = \frac{6\left(-\frac{2}{5}\right)^n + 1}{2\left(\left(-\frac{2}{5}\right)^n - 1\right)} = \frac{5^n + 6(-2)^n}{2((-2)^n - 5^n)}.$$

12. 设实数数列  $\{a_n\}$  满足

$$a_n a_{n+2} - a_{n+1}^2 - (n+1) a_n a_{n+1} = 0$$

已知  $a_1 = 1, a_2 = 2018$ , 求

$$\frac{a_{2018} \cdot a_{2016}}{a_{2017}^2}$$

由递推关系得

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n} + (n+1)$$

由  $\frac{a_2}{a_1} = 2018$ , 有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2018 + \sum_{k=2}^n k = 2017 + \frac{n(n+1)}{2}$$

故

$$\frac{a_{2018}a_{2016}}{a_{2017}^2} = \frac{2017 \left(1 + \frac{2018}{2}\right)}{2017 \left(1 + \frac{2016}{2}\right)} = \frac{1010}{1009}$$

13. 13. 设数列  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  满足  $a_1 = a_2 = 1, a_3 = 2$ , 且对任意自然数  $n$ , 都有  $a_n \cdot a_{n+1} \cdot a_{n+2} \neq 1$ , 又  $a_n \cdot a_{n+1} \cdot a_{n+2} \cdot a_{n+3} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3}$ , 求  $a_1 + a_2 + \dots + a_{100}$ 。

解: 由  $a_n a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3}$  及  $a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} a_{n+4} = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4}$ , 两式相减得  $a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} (a_{n+4} - a_n) = a_{n+4} - a_n$ , 即  $(a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} - 1)(a_{n+4} - a_n) = 0$ 。因为  $a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} \neq 1$ , 所以  $a_{n+4} = a_n$ , 数列是周期为 4 的周期数列。由  $a_1 a_2 a_3 a_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \Rightarrow 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot a_4 = 1 + 1 + 2 + a_4 \Rightarrow 2a_4 = 4 + a_4 \Rightarrow a_4 = 4$ 。故数列的前四项为 1, 1, 2, 4。

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{100} = 25 \times (1 + 1 + 2 + 4) = 25 \times 8 = 200$$

14. 18. 已知函数  $f(x) = \frac{(x+1)^4 + (x-1)^4}{(x+1)^4 - (x-1)^4}$  ( $x \neq 0$ )。在数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = 2, a_{n+1} = f(a_n)$ 。求数列  $\{a_n\}$  的通项公式。

解: 对  $f(x)$  的表达式进行化简:

$$f(x) = \frac{2(x^4 + 6x^2 + 1)}{8x^3 + 8x} = \frac{x^4 + 6x^2 + 1}{4x(x^2 + 1)}$$

观察该结构, 考虑利用辅助变量简化。令  $a_n = \frac{x_{n+1}}{x_n - 1}$  形式并不直接, 但注意到  $f(x)$  与双曲函数或正切函数的倍角公式结构类似。另一种解法是考察  $\frac{a_{n+1}-1}{a_{n+1}+1}$ :

$$\frac{f(x)-1}{f(x)+1} = \frac{(x-1)^4}{(x+1)^4} = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4$$

令  $b_n = \frac{a_n - 1}{a_n + 1}$ , 则有  $b_{n+1} = b_n^4$ 。已知  $b_1 = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$ 。由此可得  $b_n = b_1^{4^{n-1}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{4^{n-1}}$ 。由  $b_n = \frac{a_n - 1}{a_n + 1} \Rightarrow a_n = \frac{1+b_n}{1-b_n}$ , 代入得:

$$a_n = \frac{3^{4^{n-1}} + 1}{3^{4^{n-1}} - 1}$$

15. 19. 已知数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = 2$ ,  $a_n = \frac{1+a_{n-1}}{1-a_{n-1}}$ , 求  $\{a_n\}$  的通项公式。

解: 通过计算数列的前几项寻找规律:  $a_1 = 2$ ;  $a_2 = \frac{1+2}{1-2} = -3$ ;  $a_3 = \frac{1-3}{1-(-3)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$ ;  $a_4 = \frac{1-(-1/2)}{1-(-1/2)} = \frac{1/2}{3/2} = \frac{1}{3}$ ;  $a_5 = \frac{1+1/3}{1-1/3} = \frac{4/3}{2/3} = 2 = a_1$ 。由此可知, 数列  $\{a_n\}$  是以 4 为周期的周期数列。其通项公式可表示为:

$$a_n = \begin{cases} 2 & n = 4k - 3 \\ -3 & n = 4k - 2 \\ -\frac{1}{2} & n = 4k - 1 \\ \frac{1}{3} & n = 4k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{N}^+)$$

或者利用三角函数表示: 令  $a_n = \tan \theta_n$ , 则  $\theta_n = \theta_{n-1} + \frac{\pi}{4}$ 。

16. 已知数列  $\{a_n\}$  由递推关系定义如下:

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2(n+1)}, \quad n \geq 0,$$

若函数  $f$  定义为

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

求  $f(2)$  的精确值。

根据递推关系, 可以看出所有奇数项  $a_{2n+1} = 0$ 。偶数项为

$$a_0 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_4 = \frac{1}{8}, \quad a_6 = \frac{1}{48}, \dots$$

满足公式

$$a_{2n} = \frac{1}{2^n n!}.$$

因此函数  $f$  可表示为

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x^2}{2}\right)^n = e^{x^2/2}.$$

所以

$$f(2) = e^{2^2/2} = e^2.$$

17. 设  $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$  为一列正实数, 且  $b_0 = 1$ ,

$$b_n = 2 + \sqrt{b_{n-1}} - 2\sqrt{1 + \sqrt{b_{n-1}}}$$

计算

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n 2^n$$

令  $a_n = 1 + \sqrt{b_n}$ , 其中  $n \geq 0$ 。则  $a_n > 1, a_0 = 2$ , 并且

$$a_n = 1 + \sqrt{1 + a_{n-1} - 2\sqrt{a_{n-1}}} = \sqrt{a_{n-1}}$$

因此

$$a_n = 2^{2^{-n}}$$

于是

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N b_n 2^n &= \sum_{n=1}^N (a_n - 1)^2 2^n \\ &= \sum_{n=1}^N (a_n^2 2^n - a_n 2^{n+1} + 2^n) \\ &= \sum_{n=1}^N ((a_{n-1} - 1)^2 2^n - (a_n - 1)^2 2^{n+1}) \\ &= (a_0 - 1)^2 2 - (a_N - 1)^2 2^{N+1} \\ &= 2 - 2 \frac{2^{2^{-N}} - 1}{2^{-N}} \end{aligned}$$

令  $x = 2^{-N}$ , 当  $N \rightarrow \infty$  时有  $x \rightarrow 0$ , 从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n 2^n = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( 2 - 2 \frac{2^{2^{-N}} - 1}{2^{-N}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( 2 - 2 \frac{2^x - 1}{x} \right) = 2 - 2 \ln 2$$

18. 一列 11 个正实数  $a_1, a_2, \dots, a_{11}$  满足  $a_1 = 4, a_{11} = 1024$ , 并且对  $2 \leq n \leq 11$  有

$$a_n + a_{n-1} = \frac{5}{2} \sqrt{a_n a_{n-1}}.$$

求满足条件的序列数量  $S$ 。

设  $a_n = x, a_{n-1} = y$ , 解

$$x + y = \frac{5}{2}\sqrt{xy}$$

得

$$x = 4y \text{ 或 } x = \frac{y}{4}.$$

考虑二叉树, 每一步可以乘以 4 或除以 4。从  $a_1 = 4$  到  $a_{11} = 1024$  共 10 步:

$$4^m \cdot 4^{-(10-m)} = 4^4 \Rightarrow m = 7$$

即有 7 步乘以 4, 3 步除以 4。可能序列数为选择 3 步除以 4 的位置数:

$$S = {}^{10}C_3 = 120$$

19. 已知复数列  $\{z_n\}$  满足  $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, z_{n+1} = \overline{z_n}(1 + z_n i)$ , 其中  $n \in \mathbb{N}$ , 求  $z_{2021}$  的值。

对  $n \in \mathbb{N}$ , 设  $z_n = a_n + b_n i$ ,  $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ , 则

$$a_{n+1} + b_{n+1}i = z_{n+1} = \overline{z_n}(1 + z_n i) = \overline{z_n} + |z_n|^2 i = a_n - b_n i + (a_n^2 + b_n^2)i$$

因此

$$a_{n+1} = a_n = a_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, b_{n+1} = a_n^2 + b_n^2 - b_n = b_n^2 - b_n + \frac{3}{4}$$

即

$$b_{n+1} - \frac{1}{2} = b_n^2 - b_n + \frac{1}{4} = (b_n - \frac{1}{2})^2$$

所以当  $n \geq 2$ ,

$$b_n = \frac{1}{2} + (b_1 - \frac{1}{2})^{2^{n-1}} = \frac{1}{2} + (-\frac{1}{2})^{2^{n-1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{2^{n-1}}}$$

于是

$$z_{2021} = a_{2021} + b_{2021}i = \frac{\sqrt{3}}{2} + (\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{2^{2020}}})i$$

20. 已知

$$a_0 = \frac{1}{2}, a_n = \left( \frac{1 + a_{n-1}}{2} \right)^{\frac{1}{2}}, \forall n \in \mathbb{N},$$

求  $\lim_{n \rightarrow \infty} 4^n \cdot (1 - a_n)$ 。

由

$$\cos \theta = \left( \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

可得  $a_0 = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ , 从而

$$a_1 = \cos \frac{\pi}{3 \cdot 2} = \left( \frac{1 + \frac{1}{2}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, a_2 = \cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^2}, \dots, a_n = \cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^n}$$

由泰勒展开,

$$a_n = \cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^n} = 1 - \frac{\left( \frac{\pi}{3 \cdot 2^n} \right)^2}{2!} + \frac{\left( \frac{\pi}{3 \cdot 2^n} \right)^4}{4!} - \dots$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 4^n \cdot (1 - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 4^n \cdot \left( \frac{\left( \frac{\pi}{3 \cdot 2^n} \right)^2}{2!} - \frac{\left( \frac{\pi}{3 \cdot 2^n} \right)^4}{4!} + \dots \right) = \frac{\pi^2}{9} \cdot \frac{1}{2!} = \frac{\pi^2}{18}$$

21. Let  $a_1, a_2, \dots$  be a sequence of real numbers satisfying

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} - \frac{a_{n+2}}{a_n} - \frac{a_{n+1}a_{n+2}}{a_n^2} = \frac{na_{n+2}a_{n+1}}{a_n}.$$

Given that  $a_1 = -1$  and  $a_2 = -\frac{1}{2}$ , find the value of  $\frac{a_9}{a_{20}}$ .

(待解)

22. 数列 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, ... 的第 100 项是?

一般地, 数字  $n$  出现  $n$  项, 因此从数字 1 到数字  $n$  共出现

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

项, 由  $\frac{n(n+1)}{2} \leq 100$  得  $n < 14$ , 取  $n = 13$  时共有 91 项, 因此第 100 项为 14。

23. 等差数列 1, 3, 5, 7, 9, 11, ... 按如下方法分组

$$(1), (3, 5), (7, 9, 11), (13, 15, 17, 19), \dots$$

求第  $n$  组中  $n$  个数的和  $S_n$ 。

等差数列  $1, 3, 5, 7, \dots$  的通项公式为

$$a_n = 2n - 1.$$

第  $n$  组有  $n$  个奇数, 因此第  $n$  组的第  $n$  个奇数是等差数列中的第

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

个奇数, 且第  $n$  组的第 1 个奇数是等差数列中的第

$$\frac{n(n+1)}{2} - (n-1) = \frac{n^2 - n + 2}{2}$$

故第  $n$  组中第  $n$  个奇数是

$$2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - 1 = n^2 + n - 1$$

第  $n$  组中第 1 个奇数是

$$2 \cdot \frac{n^2 - n + 2}{2} - 1 = n^2 - n + 1$$

所以

$$S_n = \frac{n[(n^2 + n - 1) - (n^2 - n + 1)]}{2} = n^3$$

24. 已知数列  $\{a_n\}$ , 且  $a_1 = 1$ , 定义  $S_n = n^2 a_n$ . 求  $a_n$  和  $S_n$ .

由

$$a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 a_n - (n-1)^2 a_{n-1} \Rightarrow (n^2 - 1)a_n = (n-1)^2 a_{n-1}$$

于是

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n-1}{n+1}.$$

因此

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{2}{n(n+1)}$$

且

$$S_n = n^2 a_n = \frac{2n}{n+1}.$$

25. 已知等差数列  $\{a_n\}$  公差  $d = 2$ ,  $a_1 + a_2 + \dots + a_{100} = 100$ , 求  $a_4 + a_8 + \dots + a_{100}$  的值。

由

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{100} = 100,$$

解得

$$100a_1 + \frac{100 \cdot 99}{2} \cdot 2 = 100 \Rightarrow a_1 = -98$$

于是  $a_4 = -92, a_{100} = 100$ ,

$$a_4 + a_8 + \cdots + a_{100} = \frac{25}{2}(-92 + 100) = 100.$$

26. 15. 已知数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = 1$ ,  $S_n = \frac{S_{n-1}}{2S_{n-1}+1}$ , 求  $\{a_n\}$  的通项公式。

解: 由  $S_n = \frac{S_{n-1}}{2S_{n-1}+1}$  取倒数得  $\frac{1}{S_n} = \frac{2S_{n-1}+1}{S_{n-1}} = \frac{1}{S_{n-1}} + 2$ 。说明  $\{\frac{1}{S_n}\}$  是首项为  $\frac{1}{S_1} = \frac{1}{a_1} = 1$ , 公差为 2 的等差数列。则  $\frac{1}{S_n} = 1 + (n-1) \times 2 = 2n-1$ , 即  $S_n = \frac{1}{2n-1}$ 。当  $n \geq 2$  时,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n-3} \\ &= \frac{(2n-3) - (2n-1)}{(2n-1)(2n-3)} \\ &= -\frac{2}{(2n-1)(2n-3)} \end{aligned}$$

$$\text{综上所述, } a_n = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ -\frac{2}{(2n-1)(2n-3)} & n \geq 2 \end{cases}.$$

27. 13. 设数列  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  满足  $a_1 = a_2 = 1, a_3 = 2$ , 且对任意自然数  $n$ , 都有  $a_n a_{n+1} a_{n+2} \neq 1$ , 又  $a_n a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3}$ , 求  $a_1 + a_2 + \cdots + a_{100}$ 。

解: 由已知条件有

$$a_n a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3}$$

以及对于项  $n+1$  有

$$a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} a_{n+4} = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4}$$

两式相减得:

$$a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} (a_{n+4} - a_n) = a_{n+4} - a_n$$

$$(a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3} - 1)(a_{n+4} - a_n) = 0$$

因为  $a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3} \neq 1$  , 所以  $a_{n+4} = a_n$  , 该数列是周期为 4 的周期数列。当  $n = 1$  时,  $1 \times 1 \times 2 \times a_4 = 1 + 1 + 2 + a_4 \Rightarrow 2a_4 = 4 + a_4 \Rightarrow a_4 = 4$  。数列前四项为 1, 1, 2, 4 , 其和一个周期内为  $1 + 1 + 2 + 4 = 8$  。

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{100} = 25 \times (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = 25 \times 8 = 200$$

28. 例 1. 已知  $F_1 = 0, F_2 = 1$  , 求斐波那契数列  $F_n + F_{n+1} = F_{n+2}$  的通项  $F_n$  。

解:  $F_n + F_{n+1} = F_{n+2}$  的特征方程为  $1 + \lambda = \lambda^2 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$  。解得  $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$  。代入公式得  $F_n = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$  。代入初值  $F_1 = 0, F_2 = 1$  得:  $F_1 = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0$  ;  $F_2 = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = 1 \Rightarrow C_1(1 + \sqrt{5}) + C_2(1 - \sqrt{5}) = 2$  。联立解得  $C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$  。因此  $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \right]$  。

29. 例 2. 已知数列  $a_1 = 1, a_2 = 5$  , 且  $a_{n+1} = 4a_n - 4a_{n-1} (n \geq 2)$  , 求通项公式  $a_n$  。

解: 此数列对应特征方程为  $\lambda^2 = 4\lambda - 4$  即  $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$  , 解得  $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$  。设此数列的通项公式为  $a_n = (C_1 + nC_2) \cdot 2^{n-1}$  (注: 此处根据图片推导调整为  $n-1$  次幂形式)。由初始条件  $a_1 = 1, a_2 = 5$  可知: 
$$\begin{cases} (C_1 + C_2) \cdot 1 = 1 \\ (C_1 + 2C_2) \cdot 2 = 5 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} C_1 = -\frac{1}{4} \\ C_2 = \frac{3}{4} \end{cases} \text{。所以}$$
 
$$a_n = (3n - 1) \cdot 2^{n-2} \text{。}$$

30. 例 3. 设数列  $\{a_n\}$  满足  $a_0 = 1, a_1 = 4$  , 且  $a_{n+2} - 14a_{n+1} + a_n + 6 = 0$  。求证:  $a_n$  是完全平方数。

证: 将  $a_{n+2} - 14a_{n+1} + a_n + 6 = 0$  化为  $(a_{n+2} - \frac{1}{2}) - 14(a_{n+1} - \frac{1}{2}) + (a_n - \frac{1}{2}) = 0$  。令  $b_n = a_n - \frac{1}{2}$  , 且  $b_0 = \frac{1}{2}, b_1 = \frac{7}{2}$  , 则  $b_{n+2} - 14b_{n+1} + b_n = 0$  。由特征方程  $\lambda^2 - 14\lambda + 1 = 0$  得两根  $\lambda_1 = 7 + 4\sqrt{3}, \lambda_2 = 7 - 4\sqrt{3}$  。 $b_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$  , 由  $n = 0, 1$  时条件解得  $C_1 = C_2 = \frac{1}{4}$  。因此  $b_n = \frac{1}{4}(7 + 4\sqrt{3})^n + \frac{1}{4}(7 - 4\sqrt{3})^n = \frac{1}{4}(2 + \sqrt{3})^{2n} + \frac{1}{4}(2 - \sqrt{3})^{2n}$  。则  $a_n = b_n + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(2 + \sqrt{3})^{2n} + \frac{1}{4}(2 - \sqrt{3})^{2n} + \frac{1}{2} = \left[ \frac{(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n}{2} \right]^2$  。因为  $(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$  为偶数, 所以  $a_n$  是完全平方数。

31. 例 4. 设  $D_1 = 4, D_2 = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}, \dots$ 。求  $D_{10}$ 。

解: 观察  $D_n = 4D_{n-1} - 4D_{n-2} \Rightarrow \lambda^2 = 4\lambda - 4 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 2$ 。因此  $D_n = (C_1 + nC_2) \cdot 2^{n-1}$ 。  
由  $D_1 = 4, D_2 = 12$  得  $\begin{cases} C_1 + C_2 = 4 \\ 2C_1 + 4C_2 = 12 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 2, C_2 = 2$ 。因此  $D_n = (2 + 2n) \cdot 2^{n-1} = (n+1) \cdot 2^n$ 。当  $n = 10$  时,  $D_{10} = 11 \cdot 1024 = 11264$ 。

32. 例 5. 已知对任意  $x$ ,  $f(x+1) + f(x-1) = \sqrt{2}f(x)$ , 且  $f(1) = 2, f(2) = 1$ 。求  $f(2010)$ 。

解: 将  $f(x+1) + f(x-1) = \sqrt{2}f(x)$  化为  $a_{n+2} + a_n = \sqrt{2}a_{n+1}$  且  $a_1 = 2, a_2 = 1$ 。特征方程为  $\lambda^2 - \sqrt{2}\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{-2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm i \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4} \pm i \sin \frac{\pi}{4}$ 。则  $a_n = C_1 \cos \frac{n\pi}{4} + C_2 \sin \frac{n\pi}{4}$ 。代入  $a_1 = 2, a_2 = 1$  得  $C_1 = 2\sqrt{2} - 1, C_2 = 1$ 。计算可得  $a_n = (2\sqrt{2} - 1) \cos \frac{n\pi}{4} + \sin \frac{n\pi}{4}$ 。对于  $n = 2010, \frac{2010\pi}{4} = 502\pi + \frac{\pi}{2}$ 。  $a_{2010} = (2\sqrt{2} - 1) \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} = 1$ 。

33. 例 6. 上楼梯时, 若每步只能跨一级或两级阶梯, 则要登上第  $n$  级的方式有多少种?

解: 设登上第  $n$  级有  $a_n$  种方法。则  $a_n$  可分为两类: 一类是最后一步跨一级, 前  $n-1$  级有  $a_{n-1}$  种走法; 另一类是最后一步跨两级, 前  $n-2$  级有  $a_{n-2}$  种走法。故  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} (n = 3, 4, 5, \dots), a_1 = 1, a_2 = 2$ 。它和斐波那契数列一样, 特征方程根为  $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ 。代入初值解得  $a_n = \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$ 。

34. 有一个实数列  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  定义如下,  $u_1 = \sqrt{2}, u_2 = \pi$ , 当  $n \geq 3$  时,  $u_n = u_{n-1} - u_{n-2}$ , 用特征方程求  $u_n, u_{2008}$  及  $u_{2016}$ 。

由递推关系  $u_n - u_{n-1} + u_{n-2} = 0$ , 其特征方程为:

$$x^2 - x + 1 = 0$$

判别式  $\Delta = 1 - 4 = -3$ , 求得特征根为:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \pm i \sin \frac{\pi}{3}$$

因此, 数列的通项公式形式为:

$$u_n = C_1 \cos \frac{n\pi}{3} + C_2 \sin \frac{n\pi}{3}$$

代入初始条件  $u_1 = \sqrt{2}, u_2 = \pi$ : 当  $n = 1$  时,  $C_1 \cos \frac{\pi}{3} + C_2 \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}C_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}C_2 = \sqrt{2}$  当  $n = 2$  时,  $C_1 \cos \frac{2\pi}{3} + C_2 \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}C_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}C_2 = \pi$  联立方程组:

$$\begin{aligned} C_1 + \sqrt{3}C_2 &= 2\sqrt{2} \\ -C_1 + \sqrt{3}C_2 &= 2\pi \end{aligned}$$

解得:

$$\begin{aligned} C_1 &= \sqrt{2} - \pi \\ C_2 &= \frac{\sqrt{2} + \pi}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

故通项公式为:

$$u_n = (\sqrt{2} - \pi) \cos \frac{n\pi}{3} + \frac{\sqrt{2} + \pi}{\sqrt{3}} \sin \frac{n\pi}{3}$$

对于  $u_{2008}$ , 因为  $2008 = 6 \times 334 + 4$ , 且该数列周期为 6:

$$u_{2008} = u_4 = u_3 - u_2 = (u_2 - u_1) - u_2 = -u_1 = -\sqrt{2}$$

对于  $u_{2016}$ , 因为  $2016 = 6 \times 336$ :

$$u_{2016} = u_6 = u_5 - u_4 = (u_4 - u_3) - u_4 = -u_3 = -(u_2 - u_1) = \sqrt{2} - \pi$$

35. 15. 已知数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = 1$ ,  $S_n = \frac{S_{n-1}}{2S_{n-1}+1}$ , 求  $\{a_n\}$  的通项公式。

解: 对  $S_n = \frac{S_{n-1}}{2S_{n-1}+1}$  取倒数得:

$$\frac{1}{S_n} = \frac{2S_{n-1}+1}{S_{n-1}} = \frac{1}{S_{n-1}} + 2$$

说明数列  $\{\frac{1}{S_n}\}$  是以  $\frac{1}{S_1} = \frac{1}{a_1} = 1$  为首项, 2 为公差的等差数列。则  $\frac{1}{S_n} = 1 + (n-1) \times 2 = 2n-1$ , 即  $S_n = \frac{1}{2n-1}$ 。当  $n \geq 2$  时:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n-3} = \frac{(2n-3) - (2n-1)}{(2n-1)(2n-3)} = -\frac{2}{(2n-1)(2n-3)}$$

故通项公式为  $a_n = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ -\frac{2}{(2n-1)(2n-3)} & n \geq 2 \end{cases}$ 。

36. 16. 已知正数数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n})$ , 求  $\{a_n\}$  的通项公式。

解: 当  $n=1$  时,  $a_1 = S_1 = \frac{1}{2}(a_1 + \frac{1}{a_1}) \Rightarrow a_1^2 = 1$ 。由于  $a_n > 0$ , 解得  $a_1 = 1$ 。当  $n \geq 2$  时,  $S_n = \frac{a_n^2 + 1}{2a_n}$  且  $S_{n-1} = \frac{a_{n-1}^2 + 1}{2a_{n-1}}$ 。由于  $a_n = S_n - S_{n-1}$ , 有:

$$a_n = \frac{a_n^2 + 1}{2a_n} - \frac{a_{n-1}^2 + 1}{2a_{n-1}}$$

$$2a_n = a_n + \frac{1}{a_n} - a_{n-1} - \frac{1}{a_{n-1}}$$

$$a_n + a_{n-1} = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1} - a_n}{a_n a_{n-1}}$$

由于  $a_n + a_{n-1} > 0$ , 等式两边同除以  $(a_n + a_{n-1})$  得:

$$1 = \frac{a_{n-1} - a_n}{(a_n + a_{n-1})a_n a_{n-1}}$$

经观察或递推可得  $S_n = \sqrt{n}$  满足原式, 则  $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ 。验证: 当  $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$  时,  $\frac{1}{a_n} = \sqrt{n} + \sqrt{n-1}$ , 则  $\frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n}) = \frac{1}{2}(\sqrt{n} - \sqrt{n-1} + \sqrt{n} + \sqrt{n-1}) = \sqrt{n} = S_n$ , 符合题意。故  $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ 。

37. 数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = 1$  且  $a_n a_{n+1} = 4^n$ , 求前  $n$  项和  $S_n$ 。

由题意,

$$\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} = 4,$$

故  $\{a_1, a_3, a_5, \dots\}$  与  $\{a_2, a_4, a_6, \dots\}$  皆为公比为 4 的等比数列, 其中

$$a_1 = 1, a_2 = 4,$$

当  $n$  为奇数,

$$\begin{aligned} S_n &= (a_1 + a_3 + \dots + a_n) + (a_2 + a_4 + \dots + a_{n-1}) \\ &= \frac{1(1 - 4^{\frac{n+1}{2}})}{1 - 4} + \frac{4(1 - 4^{\frac{n-1}{2}})}{1 - 4} = \frac{2^{n+1} - 1}{3} + \frac{2^{n+1} - 4}{3} = \frac{4}{3} \cdot 2^n - \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

当  $n$  为偶数,

$$\begin{aligned} S_n &= (a_1 + a_3 + \dots + a_{n-1}) + (a_2 + a_4 + \dots + a_n) \\ &= \frac{1(1 - 4^{\frac{n}{2}})}{1 - 4} + \frac{4(1 - 4^{\frac{n}{2}})}{1 - 4} = \frac{5}{3} \cdot 2^n - \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

综上,

$$S_n = \frac{9 + (-1)^n}{3} \cdot 2^{n-1} - \frac{5}{3}$$

38. 15.(浙江 18)(本题 14 分) 已知数列  $\{x_n\}$  的首项  $x_1 = 3$ , 通项  $x_n = 2^n p + nq$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $p, q$  为常数), 且  $x_1, x_4, x_5$  成等差数列, 求:

(I)  $p, q$  的值;

(II) 数列  $\{x_n\}$  的前  $n$  项的和  $S_n$  的公式。

(I) 解: 由  $x_1 = 3$ , 得  $2p + q = 3$ ,

又  $x_4 = 2^4 p + 4q$ ,  $x_5 = 2^5 p + 5q$ , 且  $x_1 + x_5 = 2x_4$ , 得

$$3 + 2^5 p + 5q = 2(2^4 p + 4q),$$

解得  $p = 1, q = 1$ .

(II) 解:  $S_n = (2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n) + (1 + 2 + \cdots + n)$

$$= 2^{n+1} - 2 + \frac{n(n+1)}{2}.$$

39. 设数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为

$$S_n = 2a_n - 2^n.$$

(I) 求  $a_1, a_4$ ;

(II) 证明:  $\{a_{n+1} - 2a_n\}$  是等比数列;

(III) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式。

(I) 当  $n = 1$  时,

$$S_1 = a_1 = 2a_1 - 2,$$

解得

$$a_1 = 2, S_1 = 2.$$

由

$$S_n = 2a_n - 2^n$$

得

$$2a_n = S_n + 2^n.$$

于是

$$2a_{n+1} = S_{n+1} + 2^{n+1} = a_{n+1} + S_n + 2^{n+1},$$

从而

$$a_{n+1} = S_n + 2^{n+1}.$$

因此

$$a_2 = S_1 + 2^2 = 6, \quad S_2 = 8,$$

$$a_3 = S_2 + 2^3 = 16, \quad S_3 = 24,$$

$$a_4 = S_3 + 2^4 = 40.$$

(I) 得  $a_1 = 2, a_4 = 40$ 。

(II) 由上式可得

$$\begin{aligned} a_{n+1} - 2a_n &= (S_n + 2^{n+1}) - (S_n + 2^n) \\ &= 2^n. \end{aligned}$$

故数列  $\{a_{n+1} - 2a_n\}$  是首项为 2、公比为 2 的等比数列。

(III) 由

$$a_{n+1} - 2a_n = 2^n$$

得

$$a_n = (a_n - 2a_{n-1}) + 2(a_{n-1} - 2a_{n-2}) + \cdots + 2^{n-2}(a_2 - 2a_1) + 2^{n-1}a_1.$$

代入  $a_1 = 2, a_2 = 6$ , 并利用  $a_{k+1} - 2a_k = 2^k$ , 可得

$$a_n = 2^{n-1}(n+1).$$

40. 18. (陕西 20) (本小题满分 12 分)

已知数列  $\{a_n\}$  的首项  $a_1 = \frac{2}{3}$ , 且

$$a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n + 1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

(I) 证明: 数列  $\left\{\frac{1}{a_n} - 1\right\}$  是等比数列;

(II) 求数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ 。

(I) 由

$$a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n + 1}$$

得

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{a_n + 1}{2a_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a_n}.$$

于是

$$\frac{1}{a_{n+1}} - 1 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a_n} - 1 \right).$$

又

$$a_1 = \frac{2}{3}, \quad \frac{1}{a_1} - 1 = \frac{1}{2}.$$

因此, 数列  $\left\{ \frac{1}{a_n} - 1 \right\}$  是首项为  $\frac{1}{2}$ 、公比为  $\frac{1}{2}$  的等比数列。

(II) 由 (I) 可得

$$\frac{1}{a_n} - 1 = \frac{1}{2^n},$$

即

$$\frac{1}{a_n} = 1 + \frac{1}{2^n},$$

从而

$$a_n = \frac{2^n}{2^n + 1}.$$

于是

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{2^k + 1} = \sum_{k=1}^n \left( 1 - \frac{1}{2^k + 1} \right) = n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k + 1}.$$

设

$$T_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k},$$

则

$$\frac{1}{2}T_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{2^{k+1}} + \frac{n}{2^{n+1}}.$$

两式相减得

$$\frac{1}{2}T_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}}.$$

由等比数列求和公式,

$$\frac{1}{2}T_n = 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}},$$

从而

$$T_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n}.$$

又

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

可得数列  $\{\frac{k}{2^k}\}$  的前  $n$  项和为

$$2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

因此

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} + 2 - \frac{n+2}{2^n} = \frac{n^2 + n + 4}{2} - \frac{n+2}{2^n}.$$

41. 6.(江西 19) 等差数列  $\{a_n\}$  的各项均为正数,  $a_1 = 3$ , 前  $n$  项和为  $S_n$ ,  $\{b_n\}$  为等比数列,  $b_1 = 1$ , 且

$$b_2 S_2 = 64, \quad b_3 S_3 = 960.$$

(1) 求  $a_n$  与  $b_n$ ;

(2) 求  $\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \cdots + \frac{1}{S_n}$ 。

(1) 设等差数列  $\{a_n\}$  的公差为  $d$ , 等比数列  $\{b_n\}$  的公比为  $q$ 。则

$$a_n = 3 + (n-1)d, \quad b_n = q^{n-1}.$$

由

$$S_2 = 3 + (3+d) = 6+d, \quad S_3 = 3 + (3+d) + (3+2d) = 9+3d,$$

代入已知条件得

$$\begin{cases} (6+d)q = 64, \\ (9+3d)q^2 = 960. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} d = 2, \\ q = 8 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} d = -\frac{6}{5}, \\ q = \frac{40}{3}. \end{cases}$$

因  $\{a_n\}$  各项均为正数, 舍去第二组解。故

$$a_n = 3 + 2(n-1) = 2n+1, \quad b_n = 8^{n-1}.$$

(2) 由  $a_n = 2n+1$  得

$$S_n = 3 + 5 + \cdots + (2n+1) = n(n+2).$$

因此

$$\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \cdots + \frac{1}{S_n} = \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{2 \times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+2)}.$$

将其拆分为

$$\frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right),$$

于是

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)} &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

42. 设  $S_n$  是等差数列  $\{a_n\}$  前  $n$  项的和, 已知  $\frac{1}{3}S_3$  与  $\frac{1}{4}S_4$  的等比中项为  $\frac{1}{5}S_5$ , 等差中项为 1, 求等差数列的通项  $a_n$ 。

由  $(S_3)(S_4) = (S_5)^2$  及  $\frac{1}{3}S_3 + \frac{1}{4}S_4 = 2$  得

$$\begin{cases} \frac{1}{3} \left( 3a + \frac{3 \cdot 2}{2}d \right) \cdot \frac{1}{4} \left( 4a + \frac{4 \cdot 3}{2}d \right) = \frac{1}{25} \left( 5a + \frac{5 \cdot 4}{2}d \right)^2 \\ \frac{1}{3} \left( 3a + \frac{3 \cdot 2}{2}d \right) + \frac{1}{4} \left( 4a + \frac{4 \cdot 3}{2}d \right) = 2 \end{cases}$$

解得

$$d = 0, a = 1 \text{ 或 } d = -\frac{12}{5}, a = 4$$

经检验得通项解为  $a_n = 1$  或

$$a_n = 4 - \frac{12}{5}(n-1) = \frac{32}{5} - \frac{12}{5}n.$$

43. 已知数列  $\{a_n\}$  中每一项均为正数, 且数列前  $n$  项之和为  $S_n$ , 若

$$\sum_{k=1}^n \frac{4S_k}{a_k + 2} = S_n$$

试求  $a_n$  及  $S_n$ 。

由递推关系得

$$S_1 = a_1 = \frac{4a_1}{a_1 + 2} \Rightarrow a_1^2 - 2a_1 = 0$$

因  $a_1 \neq 0$ , 解得  $a_1 = 2$ , 于是

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \sum_{k=1}^n \frac{4S_k}{a_k + 2} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{4S_k}{a_k + 2} = \frac{4S_n}{a_n + 2} \Rightarrow S_n = \frac{1}{4}a_n(a_n + 2)$$

又

$$S_{n-1} = S_n - a_n = \frac{1}{4}a_n^2 - \frac{1}{2}a_n = \frac{1}{4}a_{n-1}(a_{n-1} + 2)$$

因此

$$a_n^2 - 2a_n = a_{n-1}^2 + 2a_{n-1} \Rightarrow (a_n - 1)^2 = (a_{n-1} + 1)^2 \Rightarrow a_n - 1 = a_{n-1} + 1$$

即

$$a_n = a_{n-1} + 2 = \cdots = a_1 + 2(n-1) = 2n, S_n = n^2 + n$$

44. 10.  $n^2 (n \geq 4)$  个正数排成几行几列:

$$\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{array}$$

其中每一行的数成等差数列, 每一列的数成等比数列, 并且所有公比相等。已知  $a_{24} = 1, a_{42} = \frac{1}{8}, a_{43} = \frac{3}{16}$ , 试求  $a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$  的值。

解: 设每一列的公比为  $q$ , 第  $i$  行的等差数列公差为  $d_i$ 。由每一列成等比数列且公比相等可知:  $a_{ij} = a_{1j} \cdot q^{i-1}$ 。对于第四行,  $a_{42} = \frac{1}{8}, a_{43} = \frac{3}{16}$ , 则公差为:

$$d_4 = a_{43} - a_{42} = \frac{3}{16} - \frac{1}{8} = \frac{1}{16}$$

由此可得第四行的通项为  $a_{4j} = a_{42} + (j-2)d_4 = \frac{1}{8} + (j-2)\frac{1}{16} = \frac{j}{16}$ 。对于  $a_{44}$ , 有  $a_{44} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ 。又已知  $a_{24} = 1$ , 且第四列成等比数列, 则:

$$a_{44} = a_{24} \cdot q^{4-2} \Rightarrow \frac{1}{4} = 1 \cdot q^2 \Rightarrow q = \frac{1}{2} \quad (a_{ij} > 0)$$

由  $a_{4j} = a_{1j} \cdot q^3 \Rightarrow a_{1j} = a_{4j} \cdot 2^3 = 8 \cdot \frac{j}{16} = \frac{j}{2}$ 。因此  $a_{ii} = a_{1i} \cdot q^{i-1} = \frac{i}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} = \frac{i}{2^i}$ 。所求和为:

$$S = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \cdots + \frac{n}{2^n}$$

利用错位相减法:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}S &= \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^{n+1}} \\ \frac{1}{2}S &= \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}} \\ \frac{1}{2}S &= \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) - \frac{n}{2^{n+1}} \\ S &= 2 - \frac{n+2}{2^n}\end{aligned}$$

45. 已知数列  $\{a_n\}$  满足 
$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{2k+1} = a_k \\ a_{2k+2} = a_k + a_{k+1} \end{cases}, k \in N \cup \{0\}, \text{ 求 } \sum_{k=0}^{63} a_k.$$

记

$$S(n) = \sum_{k=0}^{2^n-1} a_k$$

则

$$S(n) = (a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{2^{n-2}}) + (a_1 + a_3 + \cdots + a_{2^{n-1}-1})$$

其中偶数项为

$$a_0 + (a_0 + a_1) + (a_1 + a_2) + (a_2 + a_3) + \cdots + (a_{2^{n-1}-2} + a_{2^{n-1}-1}) = 2(a_0 + a_1 + \cdots + a_{2^{n-1}-2}) + a_{2^{n-1}-1}$$

奇数项为

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^{n-1}-1}$$

所以

$$S(n) = 3(a_0 + a_1 + \cdots + a_{2^{n-1}-2}) + 2a_{2^{n-1}-1} = 3(a_0 + a_1 + \cdots + a_{2^{n-1}-1}) - a_{2^{n-1}-1}$$

由  $a_{2^{n-1}-1} = 1$ , 得

$$S(n) = 3S(n-1) - 1$$

于是

$$S(8) = 3S(7) - 1 = 3^2S(6) - 3 - 1 = \cdots = 3^5S(1) - (1 + 3 + \cdots + 3^4)$$

又  $S(1) = a_0 + a_1 = 2$ , 所以

$$S(8) = 243 \cdot 2 - 121 = 365$$

46. 已知各项皆为正整数的数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 且对任意正整数  $n$  有

$$\sqrt{S_n} = \lambda(a_n - 1) + 1,$$

其中  $\lambda$  为正实数。若  $2a_2 = a_1 + a_3$ , 试求数列  $\{a_n\}$  的一般项。

由  $2a_2 = a_1 + a_3$ , 设

$$d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2$$

则

$$\sqrt{S_2} - \sqrt{S_1} = \lambda(a_2 - a_1) = \lambda(a_3 - a_2) = \sqrt{S_3} - \sqrt{S_2} \Rightarrow 2\sqrt{S_2} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_3}$$

两边平方得

$$4S_2 = S_1 + S_3 + 2\sqrt{S_1 S_3} \Rightarrow 4(2a_1 + d) = 4a_1 + 3d + 2\sqrt{a_1(3a_1 + 3d)}$$

解得  $d = 2a_1$ , 则

$$S_1 = a_1, S_2 = 4a_1, S_3 = 9a_1$$

解

$$\lambda = \sqrt{S_2} - \frac{1}{a_2 - 1} = \sqrt{S_3} - \frac{1}{a_3 - 1}$$

得  $a_1 = 1, \lambda = \frac{1}{2}$ , 于是

$$\sqrt{S_n} = \frac{1}{2}(a_n - 1) + 1$$

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 2\sqrt{S_n} - 1$$

$$(\sqrt{S_n} - 1)^2 = S_{n-1}$$

$$\sqrt{S_n} = \sqrt{S_{n-1}} + 1$$

$$\frac{a_n + 1}{2} = \frac{a_{n-1} + 1}{2} + 1$$

故

$$a_n = a_{n-1} + 2 = a_{n-2} + 4 = \cdots = a_1 + 2(n-1) = 2n - 1$$

47. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n^2}{2a_n + 1}$ , 求通项公式并证明

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{1 + a_k} < \frac{7}{8}.$$

由递推式

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2}{2a_n + 1},$$

可得

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2a_n + 1}{a_n^2} = \frac{2}{a_n} + \frac{1}{a_n^2},$$

从而

$$1 + \frac{1}{a_{n+1}} = 1 + \frac{2}{a_n} + \frac{1}{a_n^2} = \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^2.$$

取对数, 得

$$\log\left(1 + \frac{1}{a_{n+1}}\right) = 2\log\left(1 + \frac{1}{a_n}\right).$$

因此数列  $\left\{\log\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)\right\}$  是首项为  $\log 2$ 、公比 2 的等比数列, 于是

$$\log\left(1 + \frac{1}{a_n}\right) = 2^{n-1} \log 2 = \log\left(2^{2^{n-1}}\right),$$

即

$$1 + \frac{1}{a_n} = 2^{2^{n-1}} \Rightarrow a_n = \frac{1}{2^{2^{n-1}} - 1}.$$

且有

$$\frac{a_n}{1 + a_n} = \frac{1}{2^{2^{n-1}}}.$$

所以

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{1 + a_k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^{2^{n-1}}}.$$

注意当  $n \geq 4$  时, 有

$$2^{n-1} > n + 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n-1}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

因此

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{1 + a_k} &< \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \sum_{k=5}^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}\right)}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{7}{8} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} < \frac{7}{8} \end{aligned}$$

当  $n = 1, 2, 3$  时直接检验, 亦满足不等式, 故

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{1+a_k} < \frac{7}{8}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

48. 16. (重庆 22)(本小题满分 12 分, (I) 小问 6 分. (II) 小问 6 分)

设各项均为正数的数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 2, a_n = a_{n+1}^{\frac{3}{4}} + 2$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ). (I) 若  $a_2 = \frac{1}{4}$ , 求  $a_3, a_4$ , 并猜想  $a_{2008}$  的值 (不需证明); (II) 若  $2\sqrt{2} \leq a_1 a_2 \cdots a_n < 4$  对  $n \geq 2$  恒成立, 求  $a_2$  的值.

解: (I) 因  $a_1 = 2, a_2 = 2^{-2}$ , 故

$$\text{由此有 } a_1 = 2(-2)^0, a_2 = 2(-2)^{\frac{1}{4}}, a_3 = 2(-2)^{\frac{1}{2}}, a_4 = 2(-2)^{\frac{3}{4}},$$

从而猜想  $a_n$  的通项为

$$a_n = 2(-2)^{\frac{n-1}{4}} \quad (n \in \mathbb{N}^*),$$

$$\text{所以 } a_{2008} = 2(-2)^{\frac{2007}{4}}.$$

(II) 令  $x_n = \log_2 a_n$ , 则  $a_1 a_2 \cdots a_n = 2^{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}$ , 故只需求  $x_2$  的值.

设  $S_n$  表示  $x_2$  的前  $n$  项和, 则  $a_1 a_2 \cdots a_n = 2^{S_n}$ , 由  $2\sqrt{2} \leq a_1 a_2 \cdots a_n < 4$  得

$$2^{\frac{3}{2}} \leq 2^{S_n} < 2^2 \quad (n \geq 2).$$

因上式对  $n = 2$  成立, 可得  $\frac{3}{2} \leq S_2 < 2$ , 又由  $a_1 = 2$ , 得  $x_1 = 1$ , 故  $x_2 \geq \frac{1}{2}$ .

由于  $a_1 = 2, a_n = a_{n+1} + \frac{3}{2^{n+2}}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ), 得  $x_n = x_{n+1} + \frac{1}{2^{n+2}}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ), 即  $\frac{1}{x_{n+2} + 2x_{n+1}} =$

$$\left(\frac{1}{x_{n+2} + x_{n+1}}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x_{n+1} + x_n} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x_{n+1} + 2x_n}\right),$$

因此数列  $\left\{\frac{1}{x_{n+1} + 2x_n}\right\}$  是首项为  $\frac{1}{x_2 + 2x_1}$ , 公比为  $\frac{1}{2}$  的等比数列, 故

$$\frac{1}{x_{n+1} + 2x_n} = \left(\frac{1}{x_2 + 2}\right) \frac{1}{2^{n-1}} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

将上式对  $n$  求和得

$$S_{n+1} - x_1 + 2S_n = \left(\frac{1}{x_2 + 2}\right) \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \left(\frac{1}{x_2 + 2}\right) \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \quad (n \geq 2).$$

因  $S_n < 2, S_{n+1} < 2$  ( $n \geq 2$ ) 且  $x_1 = 1$ , 故

$$\left(\frac{1}{x_2 + 2}\right) \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) < 5 \quad (n \geq 2).$$

$$\text{因此 } 2x_2 - 1 < \frac{x_2 + 2}{2^{n-1}} \quad (n \geq 2).$$

下证  $x_2 \leq \frac{1}{2}$ , 若清, 假设  $x_2 > \frac{1}{2}$ , 则由上式知, 不等式  $2^{n-1} < \frac{x_2 + 2}{2x_2 - 1}$

对  $n \geq 2$  恒成立, 但这是不可能的, 因此  $x_2 \leq \frac{1}{2}$ .

又  $x_2 \geq \frac{1}{2}$ , 故  $x_2 = \frac{1}{2}$ , 所以  $a_2 = 2^{x_2} = \sqrt{2}$ .

8.(辽宁 20)(本小题满分 12 分)

在数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  是各项均为正数的等比数列, 设

$$c_n = \frac{b_n}{a_n} \quad (n \in \mathbf{N}^*).$$

(I) 数列  $\{c_n\}$  是否为等比数列? 证明你的结论;

(II) 设数列  $\{\ln a_n\}, \{\ln b_n\}$  的前  $n$  项和分别为  $S_n, T_n$ . 若  $a_1 = 2, \frac{S_n}{T_n} = \frac{n}{2n+1}$ , 求数列  $\{c_n\}$  的前  $n$  项和。

解:

(I)  $\{c_n\}$  是等比数列。

证明: 设  $\{a_n\}$  的公比为  $q_1 (q_1 > 0)$ ,  $\{b_n\}$  的公比为  $q_2 (q_2 > 0)$ , 则

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} \cdot \frac{a_n}{b_n} = \frac{b_{n+1}}{b_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{q_2}{q_1} \neq 0,$$

故  $\{c_n\}$  为等比数列。

(II) 因  $\{a_n\}, \{b_n\}$  为等比数列,

$$S_n = n \ln a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \ln q_1, \quad T_n = n \ln b_1 + \frac{n(n-1)}{2} \ln q_2.$$

由题意

$$\frac{n \ln a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \ln q_1}{n \ln b_1 + \frac{n(n-1)}{2} \ln q_2} = \frac{n}{2n+1},$$

化简得对一切  $n$  成立的恒等式

$$(2 \ln q_1 - \ln q_2)n^2 + (4 \ln a_1 - \ln q_1 - 2 \ln b_1 + \ln q_2)n + (2 \ln a_1 - \ln q_1) = 0.$$

于是

$$\begin{cases} 2 \ln q_1 - \ln q_2 = 0, \\ 4 \ln a_1 - \ln q_1 - 2 \ln b_1 + \ln q_2 = 0, \\ 2 \ln a_1 - \ln q_1 = 0. \end{cases}$$

由  $a_1 = 2$  解得

$$q_1 = 4, \quad q_2 = 16, \quad b_1 = 8.$$

故

$$c_n = \frac{b_n}{a_n} = \frac{8 \cdot 16^{n-1}}{2 \cdot 4^{n-1}} = 4^n.$$

所以数列  $\{c_n\}$  的前  $n$  项和为

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_n = 4 + 4^2 + \cdots + 4^n = \frac{4}{3}(4^n - 1).$$

49. (山东 20) (本小题满分 12 分)

将数列  $\{a_n\}$  中的所有项按每一行比上一行多一项的规则排成如下数表:

$$\begin{array}{c} a_1 \\ a_2, a_3 \\ a_4, a_5, a_6 \\ a_7, a_8, a_9, a_{10} \end{array}$$

记表中的第一列数  $a_1, a_2, a_4, a_7, \dots$  构成的数列为  $\{b_n\}$ ,  $b_1 = a_1 = 1$ .  $S_n$  为数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和, 且满足

$$\frac{2b_n}{b_n S_n - S_n^2} = 1 \quad (n \geq 2).$$

(I) 证明数列  $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$  成等差数列, 并求数列  $\{b_n\}$  的通项公式;

(II) 上表中, 若从第三行起, 每一行中的数按从左到右的顺序均构成等比数列, 且公比为同一个正数。当  $a_{81} = -\frac{4}{91}$  时, 求上表中第  $k(k \geq 3)$  行所有项的和。

解:

(I) 由已知, 当  $n \geq 2$  时,

$$\frac{2b_n}{b_n S_n - S_n^2} = 1.$$

又

$$S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n, \quad b_n = S_n - S_{n-1} \quad (n \geq 2),$$

代入得

$$\frac{2(S_n - S_{n-1})}{(S_n - S_{n-1})S_n - S_n^2} = 1.$$

化简得

$$-S_{n-1}S_n - S_{n-1}^2 = 2S_n - 2S_{n-1}.$$

于是

$$\frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n-1}} = \frac{1}{2}.$$

又  $S_1 = b_1 = 1$ , 故数列  $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$  是首项为 1, 公差为  $\frac{1}{2}$  的等差数列,

$$\frac{1}{S_n} = 1 + \frac{1}{2}(n-1) = \frac{n+1}{2},$$

从而

$$S_n = \frac{2}{n+1}.$$

当  $n \geqslant 2$  时,

$$b_n = S_n - S_{n-1} = \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n} = -\frac{2}{n(n+1)}.$$

因此

$$b_n = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ -\frac{2}{n(n+1)}, & n \geqslant 2. \end{cases}$$

(II) 设从第三行起, 每一行的公比为  $q (q > 0)$ 。因为

$$1 + 2 + \cdots + 12 = \frac{12 \times 13}{2} = 78,$$

所以表中第 1 行至第 12 行共含有数列  $\{a_n\}$  的前 78 项, 故  $a_{81}$  在表中第 13 行第 3 列。于是

$$a_{81} = b_{13}q^2 = -\frac{4}{91}.$$

又

$$b_{13} = -\frac{2}{13 \times 14},$$

解得  $q = 2$ 。

记表中第  $k (k \geqslant 3)$  行所有项的和为  $S$ , 则

$$S = b_k \frac{1 - q^k}{1 - q} = -\frac{2}{k(k+1)} \cdot \frac{1 - 2^k}{1 - 2} = \frac{2}{k(k+1)}(1 - 2^k), \quad k \geqslant 3.$$

50. 7.(湖南 20) 数列  $\{a_n\}$  满足

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+2} = \left(1 + \cos^2 \frac{n\pi}{2}\right) a_n + 4 \sin^2 \frac{n\pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

(1) 求  $a_3, a_4$ , 并求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 设

$$S_k = a_1 + a_3 + \cdots + a_{2k-1}, \quad T_k = a_2 + a_4 + \cdots + a_{2k}, \quad W_k = \frac{2S_k}{2 + T_k} \quad (k \in \mathbb{N}^*),$$

求使  $W_k > 1$  的所有  $k$  的值, 并说明理由。

(1) 由已知  $a_1 = 0, a_2 = 2$ 。

当  $n = 1$  时,

$$a_3 = \left(1 + \cos^2 \frac{\pi}{2}\right) a_1 + 4 \sin^2 \frac{\pi}{2} = 0 + 4 = 4.$$

当  $n = 2$  时,

$$a_4 = (1 + \cos^2 \pi) a_2 + 4 \sin^2 \pi = 2a_2 = 4.$$

一般地, 当  $n = 2k - 1$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ ) 时,

$$a_{2k+1} = \left(1 + \cos^2 \frac{(2k-1)\pi}{2}\right) a_{2k-1} + 4 \sin^2 \frac{(2k-1)\pi}{2} = a_{2k-1} + 4,$$

即

$$a_{2k+1} - a_{2k-1} = 4.$$

因此  $\{a_{2k-1}\}$  为首项为 0, 公差为 4 的等差数列,

$$a_{2k-1} = 4(k-1).$$

当  $n = 2k$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ ) 时,

$$a_{2k+2} = \left(1 + \cos^2 \frac{2k\pi}{2}\right) a_{2k} + 4 \sin^2 \frac{2k\pi}{2} = 2a_{2k}.$$

因此  $\{a_{2k}\}$  为首项为 2, 公比为 2 的等比数列,

$$a_{2k} = 2^k.$$

综上,

$$a_n = \begin{cases} 4(k-1), & n = 2k-1 \ (k \in \mathbb{N}^*), \\ 2^k, & n = 2k \ (k \in \mathbb{N}^*). \end{cases}$$

(2) 由 (1) 得

$$S_k = 0 + 4 + \cdots + 4(k-1) = 2k(k-1),$$

$$T_k = 2 + 2^2 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 2.$$

于是

$$W_k = \frac{2S_k}{2 + T_k} = \frac{4k(k-1)}{2^{k+1}} = \frac{k(k-1)}{2^{k-1}}.$$

计算得

$$W_1 = 0, \quad W_2 = 1, \quad W_3 = \frac{3}{2}, \quad W_4 = \frac{3}{2}, \quad W_5 = \frac{5}{4}, \quad W_6 = \frac{15}{16}.$$

当  $k \geq 6$  时,

$$\begin{aligned} W_{k+1} - W_k &= \frac{(k+1)k}{2^k} - \frac{k(k-1)}{2^{k-1}} \\ &= \frac{k(3-k)}{2^k} < 0, \end{aligned}$$

故  $\{W_k\}$  单调递减。又  $W_6 < 1$ , 因此当  $k \geq 6$  时  $W_k < 1$ 。

综上, 满足  $W_k > 1$  的所有  $k$  为

$$k = 3, 4, 5.$$

51. 证明由正实数组成的数列  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  是等比数列当且仅当

$$(a_0a_1 + a_1a_2 + a_2a_3 + \dots + a_{n-1}a_n)^2 = (a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_{n-1}^2)(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)$$

充分条件: 已知  $a_0, a_1, \dots, a_n$  是等比数列, 设  $a_k = a_0r^k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , 于是

$$a_0a_1 + a_1a_2 + \dots + a_{n-1}a_n = a_0^2(r + r^3 + \dots + r^{2n-1}) = a_0^2r(1 + r^2 + \dots + r^{2n-2})$$

且

$$\begin{aligned}(a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_{n-1}^2)(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) &= a_0^4(1 + r^2 + \dots + r^{2n-2})(r^2 + r^4 + \dots + r^{2n}) \\ &= a_0^4r^2(1 + r^2 + \dots + r^{2n-2})^2\end{aligned}$$

故得证

$$(a_0a_1 + a_1a_2 + \dots + a_{n-1}a_n)^2 = (a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_{n-1}^2)(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)$$

必要条件: 已知

$$(a_0a_1 + a_1a_2 + \dots + a_{n-1}a_n)^2 = (a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_{n-1}^2)(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)$$

考虑函数

$$f(r) = \sum_{k=1}^n (a_k - ra_{k-1})^2 = r^2 \sum_{k=1}^n a_{k-1}^2 - 2r \sum_{k=1}^n a_k a_{k-1} + \sum_{k=1}^n a_k^2$$

观察得  $f(r) \geq 0 \quad \forall r$ , 又关于  $r$  方程式的判别式为

$$4[(a_0a_1 + a_1a_2 + \dots + a_{n-1}a_n)^2 - (a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_{n-1}^2)(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)] = 0$$

, 所以得知  $f(r) = 0$  有重根  $r = r_0$ , 且只有当

$$a_k = r_0 a_{k-1}, \quad 1 \leq k \leq n$$

才成立, 意味  $a_0, a_1, \dots, a_n$  是一个公比为  $r_0$  的等比数列。

52. 用标准求和公式证明:

$$\sum_{r=n}^{2n} (n-r)^2 = \sum_{r=1}^n r^2.$$

首先展开平方:

$$\sum_{r=n}^{2n} (n-r)^2 = \sum_{r=n}^{2n} (n^2 - 2nr + r^2) = \sum_{r=n}^{2n} n^2 - 2n \sum_{r=n}^{2n} r + \sum_{r=n}^{2n} r^2.$$

利用标准求和公式:

$$\sum_{r=a}^b 1 = b-a+1, \quad \sum_{r=a}^b r = \frac{(b-a+1)(a+b)}{2}, \quad \sum_{r=a}^b r^2 = \frac{(b-a+1)(2a^2+2ab+b^2+a+b)}{6}.$$

代入  $a=n, b=2n$ :

$$\begin{aligned} \sum_{r=n}^{2n} n^2 &= n^2(2n-n+1) = n^2(n+1), \\ \sum_{r=n}^{2n} r &= \frac{(n+1)(n+2n)}{2} = \frac{(n+1)(3n)}{2} = \frac{3n(n+1)}{2}, \\ \sum_{r=n}^{2n} r^2 &= \frac{(n+1)(n^2+2n^2+(2n)^2+\dots)}{6} \quad (\text{整理后为}) \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

代入到展开式:

$$\sum_{r=n}^{2n} (n-r)^2 = n^2(n+1) - 2n \cdot \frac{3n(n+1)}{2} + \sum_{r=n}^{2n} r^2.$$

化简系数:

$$n^2(n+1) - 3n^2(n+1) + \sum_{r=n}^{2n} r^2 = -2n^2(n+1) + \sum_{r=n}^{2n} r^2.$$

进一步整理  $\sum_{r=n}^{2n} r^2$  并化简, 可得:

$$\sum_{r=n}^{2n} (n-r)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \sum_{r=1}^n r^2.$$

$$\therefore \sum_{r=n}^{2n} (n-r)^2 = \sum_{r=1}^n r^2$$

如所要求。

53. 设  $m, n \in \mathbb{N}$ , 证明:

$$\sum_{r=m}^{m+n} (m-r)^2 = \sum_{r=0}^n r^2.$$

首先展开平方:

$$\sum_{r=m}^{m+n} (m-r)^2 = \sum_{r=m}^{m+n} (r-m)^2 \quad (\text{因为平方对符号不变}).$$

令  $k = r - m$ , 则  $r = k + m$ , 当  $r = m$  时  $k = 0$ , 当  $r = m + n$  时  $k = n$ , 于是:

$$\sum_{r=m}^{m+n} (m-r)^2 = \sum_{k=0}^n (-k)^2 = \sum_{k=0}^n k^2 = \sum_{r=0}^n r^2.$$

$$\therefore \sum_{r=m}^{m+n} (m-r)^2 = \sum_{r=0}^n r^2,$$

如所要求。

54. 求和

$$\sum_{n=2}^{20} \frac{n^3 - n^2 + 1}{n^2 - n}.$$

首先将被加数进行拆分:

$$\frac{n^3 - n^2 + 1}{n^2 - n} = \frac{n(n^2 - n) + 1}{n^2 - n} = n + \frac{1}{n^2 - n} = n + \frac{1}{n(n-1)}$$

将分式拆成部分分式:

$$\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

因此

$$\frac{n^3 - n^2 + 1}{n^2 - n} = n + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

写出前几项:

$$n=2: 2 + 1 - \frac{1}{2}, \quad n=3: 3 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \quad n=4: 4 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \dots, \quad n=20: 20 + \frac{1}{19} - \frac{1}{20}.$$

求和时, 分式部分是望远镜求和:

$$\sum_{n=2}^{20} \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 1 - \frac{1}{20}.$$

整数部分求和:

$$\sum_{n=2}^{20} n = \frac{19}{2}(2+20) = 209.$$

因此总和为:

$$\sum_{n=2}^{20} \frac{n^3 - n^2 + 1}{n^2 - n} = 209 + 1 - \frac{1}{20} = 210 - \frac{1}{20} = \frac{4199}{20}.$$

55. 试求级数

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3^6 - 64} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{5^6 - 64} + \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{7^6 - 64} + \cdots + \frac{19 \cdot 21 \cdot 23}{21^6 - 64}$$

之和。

注意到

$$\begin{aligned} & \frac{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}{(2k+1)^6 - 64} \\ &= \frac{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}{((2k+1)^3 - 8)((2k+1)^3 + 8)} \\ &= \frac{(2k+1)}{((2k+1)^2 + 2(2k+1) + 4)((2k+1)^2 - 2(2k+1) + 4)} \\ &= \frac{2k+1}{(4k^2 + 3)(4k^2 + 8k + 7)} \\ &= \frac{2k+1}{(4k^2 + 3)(4(k+1)^2 + 3)} \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{1}{4k^2 + 3} - \frac{1}{4(k+1)^2 + 3} \right) \end{aligned}$$

故

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}{(2k+1)^6 - 64} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{7} - \frac{1}{487} \right) = \frac{120}{3409}$$

56. 求和

$$\sum_{n=1}^{24} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n^2 - 1}}$$

不难发现

$$\frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}} = \sqrt{n-\sqrt{n^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$$

进行裂项求和,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{24} \frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{24} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{25}+\sqrt{24}-\sqrt{1}-\sqrt{0}) \\ &= 2\sqrt{2}+2\sqrt{3}\end{aligned}$$

57. 若  $f(n) = (n^2 - 2n + 1)^{\frac{1}{3}} + (n^2 - 1)^{\frac{1}{3}} + (n^2 + 2n + 1)^{\frac{1}{3}}$ , 求

$$\sum_{k=1}^{500} \frac{1}{f(2k-1)}$$

首先有

$$\begin{aligned}\frac{1}{f(n)} &= \frac{1}{\sqrt[3]{(n-1)^2} + \sqrt[3]{(n+1)(n-1)} + \sqrt[3]{(n+1)^2}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{(n+1)} - \sqrt[3]{(n-1)}}{(n+1) - (n-1)} \\ &= \frac{1}{2} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n-1})\end{aligned}$$

故

$$\sum_{k=1}^{500} \frac{1}{f(2k-1)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{500} (\sqrt[3]{2k} - \sqrt[3]{2k-2}) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{1000} = 5$$

58. 设数列  $\{a_n\}$  的通项公式为

$$a_n = \frac{1}{(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2})(\sqrt{n} + \sqrt{n+2})},$$

求

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

的值。

发现

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}} \left( \frac{1}{(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n} + \sqrt{n+2})} - \frac{1}{(\sqrt{n} + \sqrt{n+2})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2})} \right) \\&= \frac{1}{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})(\sqrt{n} + \sqrt{n+2})} \left( \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} \right) \\&= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} \right)\end{aligned}$$

由  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = 0$ , 故

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \cdots \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$$

59. 求

$$\sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \cdots + \sqrt{1 + \frac{1}{2025^2} + \frac{1}{2026^2}}$$

的值。

注意到

$$\begin{aligned}\sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} &= \sqrt{1 + \frac{(n+1)^2 + n^2}{n^2(n+1)^2}} \\&= \sqrt{1 + \frac{2n(n+2) + 1}{n^2(n+1)^2}} = \sqrt{1 + \frac{2}{n(n+1)} + \frac{1}{n^2(n+1)^2}} \\&= \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n(n+1)}\right)^2} = 1 + \frac{1}{n(n+1)} = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

因此原式为

$$\sum_{n=1}^{2025} \left( 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 2025 + \left( 1 - \frac{1}{2026} \right) = 2016 - \frac{1}{2026}$$

60. (a) 已知

$$f(x, n) = \sum_{r=1}^n \left[ \frac{1}{(x-1)^r} \right]$$

其中  $x \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ 。通过观察

$$\frac{1}{(x-2)(x-1)^r} - \frac{1}{(x-2)(x-1)^{r+1}}$$

的化简, 求  $f(x, n)$  的简化表达式。

先化简给定的差:

$$\frac{1}{(x-1)^r(x-2)} - \frac{1}{(x-2)(x-1)^{r+1}} = \frac{(x-1) - 1}{(x-1)^{r+1}(x-2)} = \frac{1}{(x-1)^{r+1}}$$

因此

$$\frac{1}{(x-1)^{r+1}} = \frac{1}{(x-1)^r(x-2)} - \frac{1}{(x-1)^{r+1}(x-2)}$$

对  $r = 0, 1, 2, \dots, n-1$  求和,

$$\sum_{r=0}^{n-1} \frac{1}{(x-1)^{r+1}} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{(x-1)^n(x-2)}$$

即

$$f(x, n) = \sum_{r=1}^n \frac{1}{(x-1)^r} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{(x-1)^n(x-2)}$$

(b) 当  $|x-1| > 1$  时, 求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x, n)$$

由 (a) 得

$$f(x, n) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{(x-1)^n(x-2)}$$

当  $|x-1| > 1$  时, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(x-1)^n} = 0$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x, n) = \frac{1}{x-2}$$

61. 求

$$\sum_{r=2}^{\infty} \left[ \frac{4r-1}{r(r-1)} \left( -\frac{1}{3} \right)^r \right]$$

先对一般项作部分分式分解, 有

$$\frac{4r-1}{r(r-1)} = \frac{1}{r} + \frac{3}{r-1}$$

因此

$$\frac{4r-1}{r(r-1)} \left(-\frac{1}{3}\right)^r = \frac{1}{r} \left(-\frac{1}{3}\right)^r + \frac{3}{r-1} \left(-\frac{1}{3}\right)^r$$

将第二项改写为

$$\frac{3}{r-1} \left(-\frac{1}{3}\right)^r = \frac{3}{r-1} \left(-\frac{1}{3}\right) \left(-\frac{1}{3}\right)^{r-1} = -\frac{1}{r-1} \left(-\frac{1}{3}\right)^{r-1}$$

于是一般项可写成差分形式

$$\frac{4r-1}{r(r-1)} \left(-\frac{1}{3}\right)^r = \frac{1}{r} \left(-\frac{1}{3}\right)^r - \frac{1}{r-1} \left(-\frac{1}{3}\right)^{r-1}$$

考虑前  $n$  项和

$$\sum_{r=2}^n \left[ \frac{4r-1}{r(r-1)} \left(-\frac{1}{3}\right)^r \right] = \sum_{r=2}^n \left[ \frac{1}{r} \left(-\frac{1}{3}\right)^r - \frac{1}{r-1} \left(-\frac{1}{3}\right)^{r-1} \right]$$

这是一个伸缩和, 化简得

$$\sum_{r=2}^n \left[ \frac{4r-1}{r(r-1)} \left(-\frac{1}{3}\right)^r \right] = \frac{1}{n} \left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{3}$$

令  $n \rightarrow \infty$ , 由于

$$\frac{1}{n} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \rightarrow 0$$

从而

$$\sum_{r=2}^{\infty} \left[ \frac{4r-1}{r(r-1)} \left(-\frac{1}{3}\right)^r \right] = \frac{1}{3}$$

62. 求级数的和

$$\frac{1}{4 \times 2!} + \frac{1}{5 \times 3!} + \frac{1}{6 \times 4!} + \frac{1}{7 \times 5!} + \frac{1}{8 \times 6!} + \cdots$$

将级数写成求和符号形式:

$$S_{\infty} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(r+3)(r+1)!}$$

对一般项进行拆项:

$$\frac{1}{(r+3)(r+1)!} = \frac{1}{(r+2)!} - \frac{1}{(r+3)!}$$

因此有限部分和为:

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^N \frac{1}{(r+3)(r+1)!} &= \sum_{r=1}^N \left( \frac{1}{(r+2)!} - \frac{1}{(r+3)!} \right) \\ &= \frac{1}{3!} - \frac{1}{(N+3)!} \end{aligned}$$

令  $N \rightarrow \infty$ , 由于

$$\frac{1}{(N+3)!} \rightarrow 0$$

可得无穷级数的和:

$$S_{\infty} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$$

63. 已知

$$S_n = (2 \times 1!) + (5 \times 2!) + (10 \times 3!) + (17 \times 4!) + \cdots + (n^2 + 1)n!$$

用适当的方法证明

$$S_n = n(n+1)!$$

先将数列写成求和形式:

$$S_n = \sum_{r=1}^n (r^2 + 1)r!$$

为了使用差分法, 尝试将  $(r^2 + 1)r!$  表示成阶乘的差。注意

$$(r+2)! = (r+2)(r+1)r! = (r^2 + 3r + 2)r!,$$

因此

$$(r+2)! - r! = (r^2 + 3r + 1)r!$$

又因为

$$(r+1)! - r! = r \cdot r!,$$

于是

$$(r+2)! - r! = (r^2 + 1)r! + 3r \cdot r!$$

代入  $r \cdot r! = (r+1)! - r!$ , 得

$$(r+2)! - r! = (r^2 + 1)r! + 3[(r+1)! - r!],$$

即

$$(r+2)! - 3(r+1)! + 2r! = (r^2 + 1)r!$$

因此

$$(r^2 + 1)r! = (r+2)! - 3(r+1)! + 2r!$$

将其代入求和式:

$$\sum_{r=1}^n (r^2 + 1)r! = \sum_{r=1}^n [(r+2)! - 3(r+1)! + 2r!]$$

写出部分项可以发现大量抵消, 最后只剩下

$$S_n = (n+2)! - 2(n+1)!$$

提取  $(n+1)!$ :

$$S_n = [(n+2) - 2](n+1)!$$

于是

$$S_n = n(n+1)!$$

64. 求

$$\sum_{r=1}^n \left[ \frac{r^2 + 9r + 19}{(r+5)!} \right]$$

的化简表达式, 并由此求

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left[ \frac{r^2 + 7r + 11}{(r+4)!} \right]$$

先对一般项作拆分。注意到

$$\frac{r^2 + 9r + 19}{(r+5)!} = \frac{1}{(r+3)!} - \frac{1}{(r+5)!}$$

因此

$$\sum_{r=1}^n \left[ \frac{r^2 + 9r + 19}{(r+5)!} \right] = \sum_{r=1}^n \left[ \frac{1}{(r+3)!} - \frac{1}{(r+5)!} \right]$$

将各项写出:

$$\begin{aligned} r=1 &: \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!}, \\ r=2 &: \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!}, \\ &\vdots \\ r=n &: \frac{1}{(n+3)!} - \frac{1}{(n+5)!}. \end{aligned}$$

相加后发生抵消, 得到

$$\sum_{r=1}^n \left[ \frac{r^2 + 9r + 19}{(r+5)!} \right] = \left( \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} \right) - \left( \frac{1}{(n+4)!} + \frac{1}{(n+5)!} \right)$$

化简常数项:

$$\frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = \frac{5}{120} + \frac{1}{120} = \frac{1}{20}$$

故

$$\sum_{r=1}^n \left[ \frac{r^2 + 9r + 19}{(r+5)!} \right] = \frac{1}{20} - \left( \frac{1}{(n+4)!} + \frac{1}{(n+5)!} \right)$$

再考虑

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left[ \frac{r^2 + 7r + 11}{(r+4)!} \right]$$

令  $k = r - 1$ , 则

$$\frac{r^2 + 7r + 11}{(r+4)!} = \frac{k^2 + 9k + 19}{(k+5)!}$$

于是

$$\sum_{r=1}^n \left[ \frac{r^2 + 7r + 11}{(r+4)!} \right] = \sum_{k=0}^{n-1} \left[ \frac{k^2 + 9k + 19}{(k+5)!} \right]$$

由前一结果可得

$$\sum_{r=1}^n \left[ \frac{r^2 + 7r + 11}{(r+4)!} \right] = \frac{25}{5!} - \frac{n+6}{(n+5)!}$$

令  $n \rightarrow \infty$ , 因

$$\frac{n+6}{(n+5)!} \rightarrow 0,$$

故

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left[ \frac{r^2 + 7r + 11}{(r+4)!} \right] = \frac{25}{5!} = \frac{5}{24}$$

65. 求级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2011^{2^n} - 2011^{-2^n}} = \frac{1}{2011^1 - 2011^{-1}} + \frac{1}{2011^2 - 2011^{-2}} + \frac{1}{2011^4 - 2011^{-4}} + \cdots$$

并将其表示为一个有理数。

更一般地, 设

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2^n}}{1 - x^{2^{n+1}}}, \quad S_N(x) = \sum_{n=0}^N \frac{x^{2^n}}{1 - x^{2^{n+1}}}.$$

注意到题目中的级数正是  $S(1/2011)$ 。下面证明当  $0 < x < 1$  时,

$$S(x) = \frac{x}{1-x}.$$

利用恒等式

$$\frac{x^{2^n}}{1 - x^{2^{n+1}}} = \frac{1}{1 - x^{2^n}} - \frac{1}{1 - x^{2^{n+1}}},$$

代入部分和  $S_N(x)$ , 得

$$\begin{aligned} S_N(x) &= \left( \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^2} \right) + \left( \frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{1-x^4} \right) + \cdots \\ &\quad + \left( \frac{1}{1-x^{2^N}} - \frac{1}{1-x^{2^{N+1}}} \right). \end{aligned}$$

这是一个望远镜求和, 因此

$$S_N(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^{2^{N+1}}}.$$

当  $N \rightarrow \infty$  时, 由于  $0 < x < 1$ , 有  $x^{2^{N+1}} \rightarrow 0$ , 从而

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - x^{2^{N+1}}} = 1.$$

于是

$$S(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x) = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}.$$

因此

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2011^{2^n} - 2011^{-2^n}} = S\left(\frac{1}{2011}\right) = \frac{\frac{1}{2011}}{1 - \frac{1}{2011}} = \frac{1}{2010}.$$

66. 求下列无穷乘积的值:

$$\left(\frac{7}{9}\right) \cdot \left(\frac{26}{28}\right) \cdot \left(\frac{63}{65}\right) \cdots = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=2}^n \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1}.$$

将部分积改写为两个可望远镜相消的乘积:

$$\prod_{k=2}^n \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1} = \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k+1} \prod_{k=2}^n \frac{k^2 + k + 1}{k^2 - k + 1}.$$

注意

$$\prod_{k=2}^n \frac{k^2 + k + 1}{k^2 - k + 1} = \prod_{k=2}^n \frac{k^2 + k + 1}{(k-1)^2 + (k-1) + 1}.$$

同时

$$\prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k+1} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 4} \cdot \frac{2 \cdot 3}{4 \cdot 5} \cdots \frac{(n-1)n}{(n+1)n} = \frac{2}{n(n+1)}.$$

望远镜消去后得到

$$\prod_{k=2}^n \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1} = \frac{2}{n(n+1)} \cdot \frac{n^2 + n + 1}{3} = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{n(n+1)}\right).$$

因此

$$\prod_{k=2}^{\infty} \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{n(n+1)}\right) = \frac{2}{3}.$$

67. 计算无穷乘积

$$\prod_{n=3}^{\infty} \frac{(n^3 + 3n)^2}{n^6 - 64}.$$

设

$$a_n = \frac{(n^3 + 3n)^2}{n^6 - 64}.$$

注意到

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(n^3 + 3n)^2}{(n^3 - 8)(n^3 + 8)} = \frac{n^2(n^2 + 3)^2}{(n-2)(n^2 + 2n + 4)(n+2)(n^2 - 2n + 4)} \\ &= \frac{n}{n-2} \cdot \frac{n}{n+2} \cdot \frac{n^2 + 3}{(n-1)^2 + 3} \cdot \frac{n^2 + 3}{(n+1)^2 + 3}. \end{aligned}$$

因此当  $N \geqslant 3$  时,

$$\begin{aligned}\prod_{n=3}^N a_n &= \left( \prod_{n=3}^N \frac{n}{n-2} \right) \left( \prod_{n=3}^N \frac{n}{n+2} \right) \left( \prod_{n=3}^N \frac{n^2+3}{(n-1)^2+3} \right) \left( \prod_{n=3}^N \frac{n^2+3}{(n+1)^2+3} \right) \\ &= \frac{N(N-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{3 \cdot 4}{(N+1)(N+2)} \cdot \frac{N^2+3}{2^2+3} \cdot \frac{3^2+3}{(N+1)^2+3} \\ &= \frac{72}{7} \cdot \frac{N(N-1)(N^2+3)}{(N+1)(N+2)((N+1)^2+3)} \\ &= \frac{72}{7} \cdot \frac{(1-\frac{1}{N})(1+\frac{3}{N^2})}{(1+\frac{1}{N})(1+\frac{2}{N})((1+\frac{1}{N})^2+\frac{3}{N^2})}.\end{aligned}$$

令  $N \rightarrow \infty$ , 得到

$$\prod_{n=3}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=3}^N a_n = \frac{72}{7}.$$

68. 设

$$f(r) = \sum_{j=2}^{2013} \frac{1}{j^r} = \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \cdots + \frac{1}{2013^r}$$

求

$$\sum_{k=2}^{\infty} f(k)$$

交换求和次序, 并注意到内层和是收敛的等比级数, 有

$$\sum_{k=2}^{\infty} \sum_{j=2}^{2013} \frac{1}{j^k} = \sum_{j=2}^{2013} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{j^k} = \sum_{j=2}^{2013} \frac{1/j^2}{1-1/j}$$

因此

$$= \sum_{j=2}^{2013} \frac{1}{j^2-j} = \sum_{j=2}^{2013} \frac{1}{j(j-1)} = \sum_{j=2}^{2013} \left( \frac{1}{j-1} - \frac{1}{j} \right)$$

于是

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2012} - \frac{1}{2013} = \frac{2012}{2013}$$

69. 计算

$$[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \cdots + [\sqrt{2025}]$$

注意到  $\sqrt{2025} = 45$ , 当  $(m-1)^2 < k \leq m^2$  时有

$$\lceil \sqrt{k} \rceil = m$$

因此可按  $m = 1, 2, \dots, 45$  分组求和,

$$\sum_{k=1}^{2025} \lceil \sqrt{k} \rceil = \sum_{m=1}^{45} \sum_{k=(m-1)^2+1}^{m^2} m$$

对固定的  $m$ , 求和的项数为  $m^2 - (m-1)^2 = 2m - 1$ , 于是

$$\sum_{k=1}^{2025} \lceil \sqrt{k} \rceil = \sum_{m=1}^{45} m(2m-1) = 2 \sum_{m=1}^{45} m^2 - \sum_{m=1}^{45} m = 2 \cdot \frac{45 \cdot 46 \cdot 91}{6} - \frac{45 \cdot 46}{2} = 61755$$

70. 试证

$$8 + 88 + 888 + \dots + \underbrace{888 \dots 88}_{88\text{'s}} = \frac{8}{81}(10^{89} - 802)$$

考虑到

$$\underbrace{99 \dots 99}_{n\text{'s}} = 10^n - 1$$

于是

$$\begin{aligned} 8 + 88 + 888 + \dots + \underbrace{888 \dots 88}_{88\text{'s}} &= \frac{8}{9}(9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{99 \dots 99}_{88\text{'s}}) \\ &= \frac{8}{9}(10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^{88} - 88) \\ &= \frac{8}{9} \left[ \frac{10(10^{88} - 1)}{10 - 1} - 88 \right] \\ &= \frac{8}{81}(10^{89} - 802) \end{aligned}$$

故得证。

71. 求无穷级数

$$\frac{1^2}{11} + \frac{5^2}{11^2} + \frac{9^2}{11^3} + \frac{13^2}{11^4} + \dots + \frac{(4n-3)^2}{11^n} + \dots$$

设原式为

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n-3)^2}{11^n}$$

由  $(4n-3)^2 = 16n^2 - 24n + 9$ , 有

$$S = 16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{11^n} - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{11^n} + 9 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{11^n}$$

当  $|x| < 1$  时, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

令  $x = \frac{1}{11}$ , 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{11^n} = \frac{1}{10}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{11^n} = \frac{11}{100}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{11^n} = \frac{33}{250}$$

于是

$$S = 16 \cdot \frac{33}{250} - 24 \cdot \frac{11}{100} + 9 \cdot \frac{1}{10} = \frac{93}{250}$$

设

$$S = \frac{1^2}{11} + \frac{5^2}{11^2} + \frac{9^2}{11^3} + \frac{13^2}{11^4} + \frac{17^2}{11^5} + \cdots \quad (1)$$

则

$$\frac{1}{11}S = \frac{1^2}{11^2} + \frac{5^2}{11^3} + \frac{9^2}{11^4} + \frac{13^2}{11^5} + \frac{17^2}{11^6} + \cdots \quad (2)$$

(1) - (2) 得

$$\frac{10}{11}S = \frac{1}{11} + \frac{5^2 - 1^2}{11^2} + \frac{9^2 - 5^2}{11^3} + \frac{13^2 - 9^2}{11^4} + \frac{17^2 - 13^2}{11^5} + \cdots \quad (3)$$

$$\frac{10}{121}S = \frac{1}{11^2} + \frac{5^2 - 1^2}{11^3} + \frac{9^2 - 5^2}{11^4} + \frac{13^2 - 9^2}{11^5} + \frac{17^2 - 13^2}{11^6} + \cdots \quad (4)$$

(3) - (4) 得

$$\frac{100}{121}S = \frac{1}{11} + \frac{23}{11^2} + \frac{32}{11^3} + \frac{32}{11^4} + \frac{32}{11^5} + \cdots = \frac{1}{11} + \frac{23}{11^2} + \frac{32}{11^3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{11}}$$

故可得

$$S = \frac{93}{250}$$

72. 已知

$$1 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2} + \frac{7}{x^3} + \frac{9}{x^4} + \cdots = 91,$$

求

$$S = 1 + \frac{4}{x} + \frac{9}{x^2} + \frac{16}{x^3} + \frac{25}{x^4} + \cdots$$

发现

$$91 = 1 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2} + \frac{7}{x^3} + \cdots = \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \cdots\right) + 2\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} + \cdots\right)$$

考虑

$$\sum_{n=1}^{\infty} ny^{n-1} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} y^n\right)' = \left(\frac{y}{1-y}\right)' = \frac{1}{(1-y)^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} ny^n = \frac{y}{(1-y)^2}$$

记  $y = \frac{1}{x}$ , 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{(1 - \frac{1}{x})^2} = \frac{x}{(x-1)^2}$$

所以

$$91 = \frac{x}{x-1} + \frac{2x}{(x-1)^2} = \frac{x^2+x}{(x-1)^2} \Rightarrow 90x^2 - 183x + 91 = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{6} \text{ 或 } \frac{13}{15}$$

级数收敛需满足  $|x| > 1$ , 故取  $x = \frac{7}{6}$ , 现考虑

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{x^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 y^{n-1}$$

由上,

$$\sum_{n=1}^{\infty} ny^n = \frac{y}{(1-y)^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^2 y^{n-1} = \left(\frac{y}{(1-y)^2}\right)' = \frac{1+y}{(1-y)^3}$$

取  $y = \frac{6}{7}$  即得  $S = 637$ ; 又解: 发现  $S = 91 + \frac{6}{7}S \Rightarrow S = 637$

73. 求

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

发现

$$\begin{aligned}1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots &= \left[ x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \cdots \right]_0^1 \\&= \int_0^1 (1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots) dx \\&= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \\&= [\tan^{-1} x]_0^1 = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

74. 求下列级数的值或证明其发散:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \arctan \left( -\frac{2}{k^2} \right)$$

由

$$\arctan \left( -\frac{2}{k^2} \right) = \arctan \left( \frac{(k-1) - (k+1)}{1 + (k-1)(k+1)} \right) = \arctan(k-1) - \arctan(k+1),$$

知原级数是一列项求和, 于是

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{\infty} [\arctan(k-1) - \arctan(k+1)] \\&= \lim_{N \rightarrow \infty} (\arctan 0 + \arctan 1 - \arctan N - \arctan(N+1)) \\&= 0 + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{4}\end{aligned}$$

级数收敛, 其值为  $-\frac{3\pi}{4}$ 。

75. 求

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{1+2^{2^{-n}}}$$

注意到:

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right)$$

令  $x = 2^{2^{-n}}$ , 则

$$\frac{1}{1 + 2^{2^{-n}}} = \frac{2}{1 - 2^{2^{1-n}}} - \frac{1}{1 - 2^{2^{-n}}}$$

因此原式化为

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \left( \frac{2}{1 - 2^{2^{1-n}}} - \frac{1}{1 - 2^{2^{-n}}} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{1 - 2^{2^{-(n-1)}}} - \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{1 - 2^{2^{-n}}} \right) \\ &= -1 - \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2^N} \cdot \frac{1}{1 - 2^{2^{-N}}} \right) \end{aligned}$$

现设  $x = 2^{-N}$ , 则当  $N \rightarrow \infty, x \rightarrow 0^+$ , 且

$$\frac{1}{2^N} \cdot \frac{1}{1 - 2^{2^{-N}}} = \frac{x}{1 - 2^x} = -\frac{x}{2^x - 1}$$

由洛必达法则,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{2^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln 2 \cdot 2^x} = \frac{1}{\ln 2}$$

故原式为  $-1 + \frac{1}{\ln 2}$ .

76. 设

$$f(x) = \frac{2016^x}{2016^x + \sqrt{2016}},$$

求

$$\sum_{k=0}^{2016} f\left(\frac{k}{2016}\right)$$

记  $a = 2016$ , 观察到

$$f(x) + f(1-x) = \frac{a^x}{a^x + a^{\frac{1}{2}}} + \frac{a^{1-x}}{a^{1-x} + a^{\frac{1}{2}}} = \frac{a^x(a^{1-x} + a^{\frac{1}{2}}) + a^{1-x}(a^x + a^{\frac{1}{2}})}{(a^x + a^{\frac{1}{2}})(a^{1-x} + a^{\frac{1}{2}})} = 1.$$

于是

$$\sum_{k=0}^{2016} f\left(\frac{k}{2016}\right) = \underbrace{\sum_{k=0}^{1007} \left[ f\left(\frac{k}{2016}\right) + f\left(1 - \frac{k}{2016}\right) \right]}_{1008 \text{ 个 "1"}} + f\left(\frac{1008}{2016}\right) = 1008 + f\left(\frac{1}{2}\right).$$

而  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}$ , 故

$$\sum_{k=0}^{2016} f\left(\frac{k}{2016}\right) = 1008 + \frac{1}{2} = \frac{2017}{2}.$$

77. 求级数

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\sin^4(\pi x 2^{r-2})}{4^r}$$

在  $x = 1$  的情况下的值。

先化简  $\sin^4 \theta$ :

$$\begin{aligned} \sin^4 \theta &= (\sin^2 \theta)^2 \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta\right)^2 \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{4} \cos^2 2\theta \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{4} \cdot \frac{1 + \cos 4\theta}{2} \\ &= \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{8} \cos 4\theta \end{aligned}$$

等价地, 可利用恒等式

$$\sin^4 \theta = \sin^2 \theta - \frac{1}{4} \sin^2 2\theta$$

考虑前  $n$  项和:

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^n \frac{\sin^4(\pi x 2^{r-2})}{4^r} &= \sum_{r=0}^n \frac{1}{4^r} \left[ \sin^2(\pi x 2^{r-2}) - \frac{1}{4} \sin^2(\pi x 2^{r-1}) \right] \\ &= \sum_{r=0}^n \left[ \frac{1}{4^r} \sin^2(\pi x 2^{r-2}) - \frac{1}{4^{r+1}} \sin^2(\pi x 2^{r-1}) \right] \end{aligned}$$

这是一个望远镜求和, 展开可得:

$$\begin{aligned} &\sin^2 \frac{\pi x}{4} - \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\pi x}{2} - \frac{1}{16} \sin^2(\pi x) \\ &+ \cdots - \frac{1}{4^{n+1}} \sin^2(\pi x 2^{n-1}) \end{aligned}$$

中间项相互抵消, 因此

$$\sum_{r=0}^n \frac{\sin^4(\pi x 2^{r-2})}{4^r} = \sin^2 \frac{\pi x}{4} - \frac{1}{4^{n+1}} \sin^2(\pi x 2^{n-1})$$

当  $x = 1$  时,

$$\sum_{r=0}^n \frac{\sin^4(\pi 2^{r-2})}{4^r} = \sin^2 \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4^{n+1}} \sin^2(\pi 2^{n-1})$$

令  $n \rightarrow \infty$ , 由于

$$0 \leq \frac{1}{4^{n+1}} \sin^2(\pi 2^{n-1}) \leq \frac{1}{4^{n+1}} \rightarrow 0$$

可得无穷级数的和:

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\sin^4(\pi 2^{r-2})}{4^r} = \sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$$

78. 求下列级数的和:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^2\left(\frac{n\pi}{6}\right)}{2^n}.$$

步骤 1: 使用余弦平方恒等式:

$$\cos^2 \frac{n\pi}{6} = \frac{1 + \cos \frac{n\pi}{3}}{2} \implies \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^2(n\pi/6)}{2^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + \cos(n\pi/3)}{2^n}.$$

步骤 2: 拆分为两部分:

$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\pi/3)}{2^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2} \Re \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{in\pi/3}}{2^n}.$$

步骤 3: 求几何级数和:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1 - 1/2} = 2.$$

步骤 4: 复数形式求和:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^{i\pi/3}}{2}\right)^n = \frac{1}{1 - e^{i\pi/3}/2} \implies \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\pi/3)}{2^n} = \Re \frac{1}{1 - e^{i\pi/3}/2}.$$

步骤 5: 提取实部:

$$\frac{1}{1 - e^{i\pi/3}/2} = \frac{2 - e^{-i\pi/3}}{4 - 2(e^{i\pi/3} + e^{-i\pi/3}) + 1} = \frac{2 - e^{-i\pi/3}}{5 - 4\cos(\pi/3)} = \frac{2 - (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})}{3} = \frac{3/2 + i\sqrt{3}/2}{3}.$$

$$\Re \frac{3/2 + i\sqrt{3}/2}{3} = \frac{3/2}{3} = \frac{1}{2}.$$

步骤 6: 求最终和:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^2(n\pi/6)}{2^n} = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

79. 求

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \cos \frac{n\pi}{3}$$

设

$$z = \frac{1}{2}e^{i\pi/3} = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{3}i)$$

则

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{z}{1-z} \Rightarrow zf'(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} e^{n\pi i/3}$$

于是

$$zf'(z) = \frac{\frac{1}{4}(1 + \sqrt{3}i)}{\left(\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)^2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i} = -\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}i$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \cos \frac{n\pi}{3} = \Re(zf'(z)) = -\frac{1}{3}$$

80. 证明不等式: (1)

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$$

(2)

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} < \frac{3}{4} + \frac{1}{n}$$

(a) 首先, 容易看出:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

上述不等式右边共有  $n$  项。

但同时, 我们可以将第二部分的和式通过倒序相加 (或首尾配对) 的方法重写:

$$\begin{aligned}\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} \right) + \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n-1} \right) + \cdots + \left( \frac{1}{2n} + \frac{1}{n} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{3n}{2n^2} + \frac{3n}{2n^2 + (n-1)} + \frac{3n}{2n^2 + 2(n-2)} + \cdots + \frac{3n}{2n^2} \right]\end{aligned}$$

由于分母中的项  $k(n-k) \geq 0$ , 我们可以通过放缩去掉这些正项从而增大分数值:

$$< \frac{1}{2} \left[ \frac{3n}{2n^2} + \frac{3n}{2n^2} + \cdots + \frac{3n}{2n^2} \right]$$

上式括号内共有  $n+1$  项。于是:

$$= \frac{1}{2}(n+1) \frac{3}{2n} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4n} < \frac{3}{4} + \frac{1}{n}$$

这就证明了题目中的结论。

81. 计算数  $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1,000,000}}$  的整数部分。

(a) 首先我们证明不等式:

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}$$

对于左边的不等式, 我们将分子有理化:

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} = \frac{2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

同理可证右边的不等式。

现在利用上述不等式对原和式进行估计。对于下界, 我们利用左边的不等式  $\frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ :

$$\begin{aligned}1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1,000,000}} &> 1 + 2[(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{1,000,001} - \sqrt{1,000,000})] \\ &= 1 + 2(\sqrt{1,000,001} - \sqrt{2}) \\ &> 2 \cdot 1000 - \sqrt{8} + 1 > 2000 - 3 + 1 = 1998\end{aligned}$$

对于上界, 我们利用右边的不等式  $\frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$ :

$$\begin{aligned}1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1,000,000}} &< 1 + 2[(\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{1,000,000} - \sqrt{999,999})] \\ &= 1 + 2(\sqrt{1,000,000} - 1) \\ &= 1 + 2 \cdot 999 = 1999\end{aligned}$$

综上所述, 该数的整数部分等于 1998。

82. 求数  $\frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}} + \frac{1}{\sqrt[3]{6}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{1,000,000}}$  的整数部分。

首先, 通过比较二项式展开式, 我们注意到对于每一个自然数  $n$ :

$$\left(1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{n}\right)^3 > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$$

两边开立方根并整理可得:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} > \frac{3}{2}[\sqrt[3]{(n+1)^2} - \sqrt[3]{n^2}]$$

同理, 利用类似的展开比较可以得到下界放缩:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} < \frac{3}{2}[\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{(n-1)^2}]$$

由此我们得到关键的不等式:

$$\frac{3}{2}[\sqrt[3]{(n+1)^2} - \sqrt[3]{n^2}] < \frac{1}{\sqrt[3]{n}} < \frac{3}{2}[\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{(n-1)^2}]$$

现在利用此不等式对原和式进行估计。对于下界:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{1,000,000}} &> \frac{3}{2}[(\sqrt[3]{5^2} - \sqrt[3]{4^2}) + \cdots + (\sqrt[3]{1,000,001^2} - \sqrt[3]{1,000,000^2})] \\&= \frac{3}{2}(\sqrt[3]{1,000,002,000,001} - \sqrt[3]{16}) \\&> \frac{3}{2} \cdot 10,000 - \sqrt[3]{54} \\&> 15,000 - 4 = 14,996\end{aligned}$$

对于上界:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{1,000,000}} &< \frac{3}{2}[(\sqrt[3]{4^2} - \sqrt[3]{3^2}) + \cdots + (\sqrt[3]{1,000,000^2} - \sqrt[3]{999,999^2})] \\&= \frac{3}{2}(\sqrt[3]{1,000,000,000,000} - \sqrt[3]{9}) \\&< \frac{3}{2}(10,000 - 2) = 14,997\end{aligned}$$

综上所述, 该数的整数部分等于 14,996。

83. 求

$$\sum_{m=1}^{19} \sum_{n=m}^{19} (2m + n).$$

首先, 将求和顺序交换, 更容易计算:

$$\sum_{m=1}^{19} \sum_{n=m}^{19} (2m + n) = \sum_{n=1}^{19} \sum_{m=1}^n (2m + n).$$

将内层求和拆开:

$$\sum_{n=1}^{19} \sum_{m=1}^n (2m + n) = \sum_{n=1}^{19} \left[ 2 \sum_{m=1}^n m + \sum_{m=1}^n n \right].$$

利用标准求和公式:

$$\sum_{m=1}^n m = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{m=1}^n n = n \times n = n^2.$$

于是:

$$\sum_{n=1}^{19} \left[ 2 \sum_{m=1}^n m + \sum_{m=1}^n n \right] = \sum_{n=1}^{19} \left[ 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n^2 \right] = \sum_{n=1}^{19} [n^2 + n + n^2] = \sum_{n=1}^{19} (2n^2 + n).$$

再分开求和:

$$\sum_{n=1}^{19} (2n^2 + n) = 2 \sum_{n=1}^{19} n^2 + \sum_{n=1}^{19} n.$$

代入求和公式:

$$\sum_{n=1}^{19} n^2 = \frac{19 \cdot 20 \cdot 39}{6}, \quad \sum_{n=1}^{19} n = \frac{19 \cdot 20}{2}.$$

于是:

$$2 \sum_{n=1}^{19} n^2 + \sum_{n=1}^{19} n = 2 \cdot \frac{19 \cdot 20 \cdot 39}{6} + \frac{19 \cdot 20}{2} = \frac{19 \cdot 20 \cdot 39}{3} + 190.$$

计算:

$$\frac{19 \cdot 20 \cdot 39}{3} + 190 = 19 \cdot 20 \cdot 13 + 190 = 4940 + 190 = 5130.$$

$$\therefore \sum_{m=1}^{19} \sum_{n=m}^{19} (2m + n) = 5130.$$

84. 令

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{3^k (k+1)},$$

(a) 试证

$$S'(x) = \frac{3}{3+x} - 1$$

对各项微分, 有

$$S'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{x}{3}\right)^k = \frac{-\frac{x}{3}}{1 + \frac{x}{3}} = \frac{-x}{3+x} = \frac{3}{3+x} - 1$$

(b) 据此, 证

$$S(x) = 3 \ln(3+x) - 3 \ln 3 - x$$

$$S(x) = \int \left( \frac{3}{3+x} - 1 \right) dx = 3 \ln(3+x) - x + C$$

由  $S(0) = 0$  可得  $C = -3 \ln 3$ , 故

$$S(x) = 3 \ln(3+x) - 3 \ln 3 - x$$

(c) 求

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k \cdot 3^k}$$

改写求和,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k \cdot 3^k} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)3^{k+1}} = -\frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)3^k} \\ &= -\frac{1}{3}(1 + S(1)) = -\frac{1}{3}(1 + 3 \ln 4 - 3 \ln 3 - 1) = \ln \frac{3}{4} \end{aligned}$$

85. 求

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \ln \left( 1 + \frac{1}{2n} \right) \ln \left( 1 + \frac{1}{2n+1} \right)$$

的值。

定义

$$f(n) = \ln \left( \frac{n+1}{n} \right), \quad n \geq 1.$$

注意到

$$f(2n) + f(2n+1) = f(n).$$

由不等式  $\ln(1+x) \leq x$  可得

$$f(n) \leq \frac{1}{n}.$$

再定义

$$g(n) = \sum_{k=n}^{2n-1} f^3(k).$$

于是

$$g(n) < n f^3(n) \leq \frac{1}{n^2}.$$

接下来计算

$$\begin{aligned} g(n) - g(n+1) &= f^3(n) - f^3(2n) - f^3(2n+1) \\ &= (f(2n) + f(2n+1))^3 - f^3(2n) - f^3(2n+1) \\ &= 3(f(2n) + f(2n+1))f(2n)f(2n+1) \\ &= 3f(n)f(2n)f(2n+1). \end{aligned}$$

因此

$$\sum_{n=1}^N f(n)f(2n)f(2n+1) = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^N (g(n) - g(n+1)) = \frac{1}{3} (g(1) - g(N+1)).$$

由于当  $N \rightarrow \infty$  时  $g(N+1) \rightarrow 0$ , 于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)f(2n)f(2n+1) = \frac{1}{3} g(1) = \frac{1}{3} \ln^3 2.$$

这正是所求级数的值。

86. 考虑正整数  $m, n$ , 且  $m \geq 2$ 。  $(m, n)$ -锯齿数列是从 1 开始的连续整数序列, 有  $n$  个“齿”, 每个齿从 2 上升到  $m$  再下降到 1, 如  $(3, 4)$ -锯齿数列为

$$\begin{array}{cccccccc} & 3 & & 3 & & 3 & & 3 \\ 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 \\ 1 & & & 1 & & & 1 & & & 1 \end{array}$$

该序列共有 17 项, 平均数为  $\frac{33}{17}$ 。

(a) 求 (4, 2)-锯齿数列的项和。

(4, 2)-锯齿数列的项为

$$1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1$$

其和为 31。

(b) 对任意正整数  $m \geq 2$ , 求  $(m, 3)$ -锯齿数列中所有数字之和的通项。

$(m, 3)$ -锯齿数列由初始 1 和 3 个齿组成, 每个齿为  $2, 3, \dots, m-1, m, m-1, \dots, 2, 1$ , 项和为

$$2 + 3 + \dots + m + (m-1) + \dots + 1 = 2(1 + 2 + \dots + m) - 1 - m = m^2 - 1.$$

因此序列和为  $1 + 3(m^2 - 1) = 3m^2 - 2$ 。

(c) 求所有使  $(m, n)$ -锯齿数列的项和为 145 的  $(m, n)$  序对。

每个齿的和为  $m^2 - 1$ , 整个序列和为

$$1 + n(m^2 - 1) = 145 \Rightarrow n(m^2 - 1) = 144.$$

考虑 144 的因数分解, 当  $m \geq 2$  时,  $m^2 - 1$  可能值为

$$3, 8, 15, 24, 35, 48, 63, 80, 99, 120, 143,$$

其中 3, 8, 24, 48 能整除 144, 因此符合条件的序对为

$$(m, n) = (2, 48), (3, 18), (5, 6), (7, 3).$$

(d) 证明对于所有正整数对  $(m, n)$  且  $m \geq 2$ ,  $(m, n)$ -锯齿数列的平均数不是整数。

平均数为

$$\frac{1 + n(m^2 - 1)}{1 + n(2m - 2)}$$

假设平均数为整数  $k$ , 可得一关于  $m$  的二次方程式

$$\frac{1 + n(m^2 - 1)}{1 + n(2m - 2)} = k \Rightarrow m^2 n - 2mnk + (2nk - n - k + 1) = 0$$

由于  $m$  为整数, 故判别式

$$\Delta = (-2nk)^2 - 4n(2nk - n - k + 1) = (2n(k - 1) + 1)^2 - 1.$$

必须为完全平方数, 且两完全平方数差为 1 的只有当 0 和 1, 因此

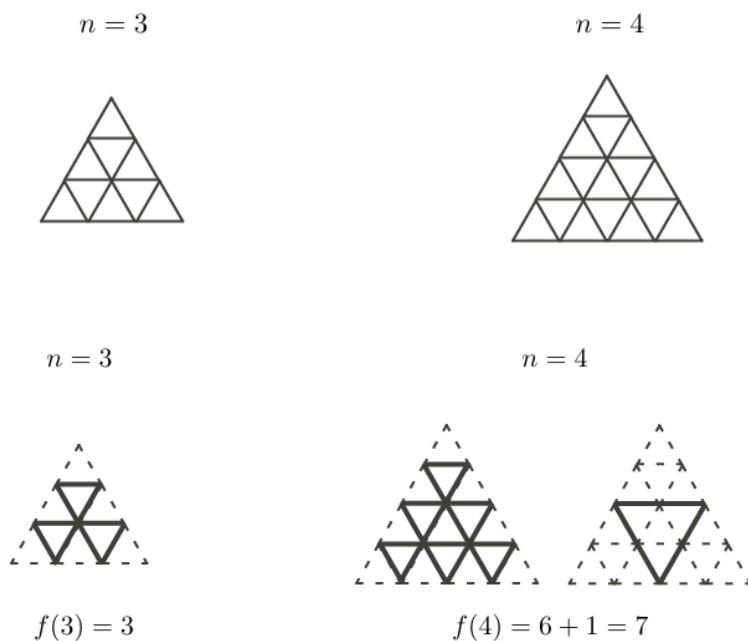
$$2n(k-1)+1=1 \Rightarrow k=1$$

但若平均数为 1, 则

$$n(m^2-1)+1=n(2m-2)+1 \Rightarrow n(m-1)^2=0,$$

得  $n > 0$  且  $m \geq 2$ , 矛盾, 因此  $(m, n)$ -锯齿数列的平均数不可能为整数。

87. 已知正整数  $n$ , 考虑一个边长为  $n$ 、顶点朝上的等边三角形, 将其划分为单位等边三角形。对于每个  $n$ , 记  $f(n)$  为所有大小的顶点朝下等边三角形的总数, 例如  $f(3) = 3, f(4) = 7$ 。



- (a) 求  $f(5)$  和  $f(6)$ 。

当  $n = 5$  时, 有  $1 + 2 + 3 + 4 = 10$  个边长为 1、 $1 + 2 = 3$  个边长为 2 的三角形, 所以

$$f(5) = 10 + 3 = 13$$

当  $n = 6$  时, 有  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$  个边长为 1、 $1 + 2 + 3 = 6$  个边长为 2、1 个边长为 3 的三角形, 所以

$$f(6) = 15 + 6 + 1 = 22$$

(b) 证明对每个正整数  $k \geq 1$ , 有  $f(2k) = f(2k-1) + k^2$ 。



设第  $i$  行有  $i+1$  个单位点, 从左至右记为  $0, 1, \dots, i$ , 考虑边长为  $m$ 、顶点朝下的等边三角形, 且其底顶点位于行  $i$  时, 注意到每个这样的三角形都被其底顶点确定, 故可能的底点数为

$$(i-m) - m + 1 = i + 1 - 2m,$$

要求  $2m \leq i \leq n$  才能形成三角形, 因此边长为  $m$ 、顶点朝下的三角形总数为

$$\sum_{i=2m}^n (i+1-2m) = \frac{(n+1-2m)(n+2-2m)}{2}.$$

若  $n = 2k$ , 则  $m = 1, 2, \dots, k$ , 所以

$$\begin{aligned} f(2k) &= \sum_{m=1}^k \frac{(2k+1-2m)(2k+2-2m)}{2} \\ &= \sum_{l=1}^k (2l-1)l \quad (\text{令 } l = k+1-m) \\ &= 2 \sum_{l=1}^k l^2 - \sum_{l=1}^k l \\ &= 2 \cdot \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} - \frac{k(k+1)}{2} \\ &= \frac{k(k+1)(4k-1)}{6}. \end{aligned}$$

若  $n = 2k - 1$ , 则  $m = 1, 2, \dots, k - 1$ , 所以

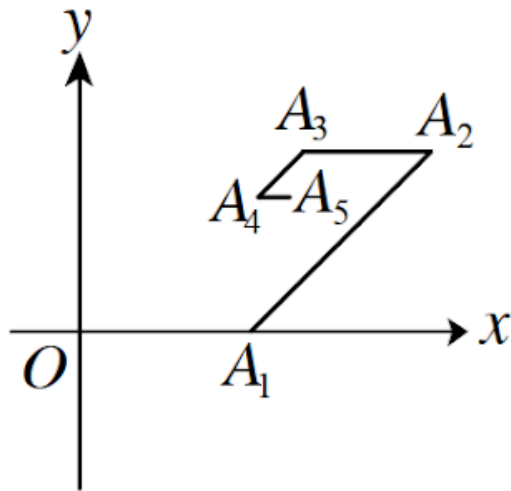
$$\begin{aligned}
 f(2k-1) &= \sum_{m=1}^{k-1} \frac{(2k-2m)(2k+1-2m)}{2} \\
 &= \sum_{l=1}^{k-1} l(2l+1) \quad (\text{令 } l = k-m) \\
 &= 2 \sum_{l=1}^{k-1} l^2 + \sum_{l=1}^{k-1} l \\
 &= 2 \cdot \frac{(k-1)k(2k-1)}{6} + \frac{(k-1)k}{2} \\
 &= \frac{k(k-1)(4k+1)}{6}.
 \end{aligned}$$

因此,

$$f(2k) - f(2k-1) = \frac{k(k+1)(4k-1)}{6} - \frac{k(k-1)(4k+1)}{6} = k^2$$

证毕。

88. 如下图,  $O(0,0)$ ,  $A_1(8,0)$ ,  $\overline{A_1A_2}$  与  $x$  轴正向夹  $45^\circ$  角, 又  $\overline{A_1A_2} \parallel \overline{A_3A_4} \parallel \overline{A_5A_6} \parallel \dots$ , 且  $\overline{OA_1} \parallel \overline{A_2A_3} \parallel \overline{A_4A_5} \parallel \dots$ 。已知  $\overline{A_1A_2} = 8$ , 且对所有  $k \in \mathbb{N}$ , 有  $\overline{A_kA_{k+1}} = 2\overline{A_{k+1}A_{k+2}}$ 。若点  $A_n$  的坐标为  $(x_n, y_n)$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n)$ 。



令  $a_n = \overline{A_n A_{n+1}} = 2^{4-n}, n \in \mathbb{N}$ , 有

$$\begin{aligned}
 x_\infty &= 8 + \frac{a_1}{\sqrt{2}} - a_2 - \frac{a_3}{\sqrt{2}} + a_4 + \frac{a_5}{\sqrt{2}} - a_6 - \frac{a_7}{\sqrt{2}} + a_8 + \cdots \\
 &= 8 + (a_4 + a_8 + a_{12} + \cdots) + \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 + a_5 + a_9 + \cdots) \\
 &\quad - \frac{1}{\sqrt{2}}(a_3 + a_7 + a_{11} + \cdots) - (a_2 + a_6 + a_{10} + \cdots) \\
 &= 8 + \frac{1}{1 - \frac{1}{16}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{8}{1 - \frac{1}{16}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{1 - \frac{1}{16}} - \frac{4}{1 - \frac{1}{16}} = 8 + \frac{16}{5}(\sqrt{2} - 1) \\
 y_\infty &= \frac{a_1}{\sqrt{2}} - \frac{a_3}{\sqrt{2}} + \frac{a_5}{\sqrt{2}} - \frac{a_7}{\sqrt{2}} + \cdots \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 + a_5 + a_9 + \cdots) - \frac{1}{\sqrt{2}}(a_3 + a_7 + a_{11} + \cdots) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{8}{1 - \frac{1}{16}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{16\sqrt{2}}{5}
 \end{aligned}$$

所以

$$x_\infty + y_\infty = \frac{24 + 32\sqrt{2}}{5}$$

# 二项展开式

1. 求  $(x^2 + x + y)^5$  展开式中  $x^5y^2$  的系数。

系数为

$${}^5C_2 {}^3C_1 {}^2C_2 = 30$$

2. 求  $(x\sqrt{y} - y\sqrt{x})^4$  的展开式中  $xy$  的系数。

观察发现

$$(x\sqrt{y} - y\sqrt{x})^4 = x^2y^2(\sqrt{x} - \sqrt{y})^4$$

, 即只需求  $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^4$  展开式中的含  $xy$  项的系数  ${}^4C_2 = 6$

3. 求在  $\left(x + \frac{4}{x} + 4\right)^6$  的展开式中  $x^4$  的系数。

原式可化为

$$\left(x + \frac{4}{x} + 4\right)^6 = \left(\frac{x^2 + 4x + 4}{x}\right)^6 = \frac{(x+2)^{12}}{x^6}$$

即求  $(x+2)^{12}$  展开式中  $x^{10}$  的系数

$${}^{12}C_2 \cdot 2^2 = 264$$

4. 求  $(1+x^2) + (1+x^2)^2 + \cdots + (1+x^2)^{10}$  展开式中  $x^6$  的系数。

原式为

$$\frac{(1+x^2)[(1+x^2)^{10} - 1]}{(1+x^2) - 1} = \frac{(1+x^2)^{11} - (1+x^2)}{x^2}$$

展开式  $(1+x^2)^{11}$  中  $x^8$  系数为  ${}^{10}C_4 = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 330$ , 故原式中  $x^6$  系数为 330.

5. 求下列多项式中  $x^{50}$  的系数:

(a)  $(1+x)^{1000} + x(1+x)^{999} + x^2(1+x)^{998} + \cdots + x^{1000}$

(b)  $(1+x) + 2(1+x)^2 + 3(1+x)^3 + \cdots + 1000(1+x)^{1000}$

(a) 利用等比数列求和公式以及二项式定理, 我们得到:

$$\begin{aligned} (1+x)^{1000} + x(1+x)^{999} + \cdots + x^{1000} &= \frac{(1+x)^{1001} - x^{1001}}{(1+x) - x} \\ &= \frac{(1+x)^{1001} - x^{1001}}{1} \\ &= (1+x)^{1001} - x^{1001} \\ &= 1 + {}^{1001}C_1x + {}^{1001}C_2x^2 + \cdots + {}^{1001}C_{1001}x^{1001} - x^{1001} \end{aligned}$$

因此, 所求的系数等于:

$${}^{1001}C_{50} = \frac{1001!}{50!951!}$$

(b) 设所给多项式为  $P(x)$ 。我们可以写出:

$$\begin{aligned} xP(x) &= (1+x)P(x) - P(x) \\ &= [(1+x)^2 + 2(1+x)^3 + \cdots + 999(1+x)^{1000} + 1000(1+x)^{1001}] \\ &\quad - [(1+x) + 2(1+x)^2 + 3(1+x)^3 + \cdots + 1000(1+x)^{1000}] \\ &= 1000(1+x)^{1001} - [(1+x) + (1+x)^2 + (1+x)^3 + \cdots + (1+x)^{1000}] \\ &= 1000(1+x)^{1001} - \frac{(1+x)[(1+x)^{1000} - 1]}{(1+x) - 1} \\ &= 1000(1+x)^{1001} - \frac{(1+x)^{1001} - (1+x)}{x} \end{aligned}$$

从而得出:

$$P(x) = \frac{1000(1+x)^{1001}}{x} - \frac{(1+x)^{1001} - (1+x)}{x^2}$$

为了找到  $P(x)$  中  $x^{50}$  的系数, 我们需要找到  $\frac{1000(1+x)^{1001}}{x}$  中  $x^{50}$  的系数 (即  $(1+x)^{1001}$  中  $x^{51}$  的系数), 以及  $\frac{(1+x)^{1001}}{x^2}$  中  $x^{50}$  的系数 (即  $(1+x)^{1001}$  中  $x^{52}$  的系数)。

展开式如下:

$$P(x) = 1000 \sum_{k=0}^{1001} {}^{1001}C_k x^{k-1} - \sum_{k=0}^{1001} {}^{1001}C_k x^{k-2} + \frac{1+x}{x^2}$$

因此, 所求的系数为:

$$\begin{aligned} 1000^{1001}C_{51} - 1001C_{52} &= \frac{1000 \cdot 1001!}{51!950!} - \frac{1001!}{52!950!} \\ &= \frac{1001!}{52!950!} [52 \cdot 1000 - 950] \\ &= \frac{51050 \cdot 1001!}{52!950!} \end{aligned}$$

6. 求  $[a + (b + c)^2]^8$  展开式中  $a^5b^4c^2$  的系数。

令  $(b + c)^2 = x$ , 展开式为

$$(a + x)^8 = \sum_{k=0}^8 \frac{8!}{k!(8-k)!} a^k x^{8-k}$$

欲求  $a^5b^4c^2$  系数, 于是  $k = 5$ , 有

$$\frac{8!}{5!3!} a^5 [(b + c)^2]^3 = 56a^5(b + c)^6$$

观察

$$(b + c)^6 = \sum_{t=0}^6 \frac{6!}{t!(6-t)!} b^t c^{6-t}$$

欲求  $b^4c^2$  系数, 于是  $t = 4$ , 有

$$\frac{6!}{4!2!} b^4 c^2 = 15b^4 c^2$$

$\therefore a^5b^4c^2$  系数为  $56 \cdot 15 = 840$

7. 求  $(-xy + 2x + 3y - 6)^6$  的展开式中  $x^3y^3$  的系数。

考虑

$$\frac{6!}{n_1!n_2!n_3!n_4!} (-xy)^{n_1} (2x)^{n_2} (3y)^{n_3} (-6)^{n_4} = Ax^3y^3,$$

其中  $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 6$

- 若  $n_1 = 0$ , 则  $n_2 = 3, n_3 = 3, n_4 = 0$ ,

$$\frac{6!}{0!3!3!0!} (-xy)^0 (2x)^3 (3y)^3 (-6)^0 = 4320x^3y^3$$

- 若  $n_1 = 1$ , 则  $n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 1$ ,

$$\frac{6!}{1!2!2!1!}(-xy)^1(2x)^2(3y)^2(-6)^1 = 38880x^3y^3$$

- 若  $n_1 = 2$ , 则  $n_2 = 1, n_3 = 1, n_4 = 2$ ,

$$\frac{6!}{2!1!1!2!}(-xy)^2(2x)^1(3y)^1(-6)^2 = 38880x^3y^3$$

- 若  $n_1 = 3$ , 则  $n_2 = 0, n_3 = 0, n_4 = 3$ ,

$$\frac{6!}{3!0!0!3!}(-xy)^3(2x)^0(3y)^0(-6)^3 = 4320x^3y^3$$

因此  $x^3y^3$  的系数为  $4320 + 38880 + 38880 + 4320 = 86400$

8.  $\left(x + \frac{a}{x}\right)\left(2x - \frac{1}{x}\right)^5$  的展开式中各项系数的和为 2, 则该展开式中的常数项为

解法一

令  $x = 1$  得  $a = 1$ . 故原式为

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(2x - \frac{1}{x}\right)^5$$

通项

$$T_{r+1} = {}^5C_r(2x)^{5-r}(-x^{-1})^r = {}^5C_r(-1)^r 2^{5-r} x^{5-2r}$$

由  $5 - 2r = 1$  得  $r = 2$ , 对应的常数项 = 80, 由  $5 - 2r = -1$  得  $r = 3$ , 对应的常数项 = -40, 故所求的常数项为 40

解法二

用组合提取法, 把原式看做 6 个因式相乘, 若第 1 个括号提出  $x$ , 从余下的 5 个括号中选 2 个提出  $x$ , 选 3 个提出  $\frac{1}{x}$ ,

若第 1 个括号提出  $\frac{1}{x}$ , 从余下的 5 个括号中选 2 个提出  $\frac{1}{x}$ , 选 3 个提出  $x$ .

故常数项

$$x \cdot {}^5C_2(2x)^2 \cdot {}^3C_3\left(-\frac{1}{x}\right)^3 + \frac{1}{x} \cdot {}^5C_2\left(-\frac{1}{x}\right)^2 \cdot {}^3C_3(2x)^3 = -40 + 80 = 40$$

9. 试求

$$({}^2C_2 + {}^3C_2x + {}^4C_2x^2 + {}^5C_2x^3 + {}^6C_2x^4 + {}^7C_2x^5)^4$$

展开式中  $x^5$  的系数。

考虑

$$f(x) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} {}^{n+2}C_2 x^n \right)^4$$

设

$$g(x) = \frac{x^2}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2}$$

则

$$g'(x) = \frac{x(2-x)}{(x-1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)x^{n+1}$$

$$g''(x) = -\frac{2}{(x-1)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)x^n = 2 \sum_{n=0}^{\infty} {}^{n+2}C_2 x^n$$

于是

$$f(x) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} {}^{n+2}C_2 x^n \right)^4 = \left( -\frac{1}{(1-x)^3} \right)^4 = \frac{1}{(1-x)^{12}}$$

故  $({}^2C_2 + {}^3C_2x + {}^4C_2x^2 + {}^5C_2x^3 + {}^6C_2x^4 + {}^7C_2x^5)^4$  展开式中  $x^5$  的系数为

$${}^{12+5-1}C_5 = 4368$$

10. 若

$$(1+x+x^2)^6 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{12}x^{12},$$

求  $a_2 + a_4 + \cdots + a_{12}$  的值。

设  $f(x) = (1+x+x^2)^6 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{12}x^{12}$ , 则

$$a_2 + a_4 + \cdots + a_{12} = \frac{f(1) + f(-1)}{2} - a_0 = \frac{3^6 + 1}{2} - 1 = 364$$

11. 已知非零数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1, a_2 = 3, a_n(a_{n+2} - 1) = a_{n+1}(a_{n+1} - 1), n \in N$ , 求

$${}^{2023}C_0 a_1 + {}^{2023}C_1 a_2 + {}^{2023}C_2 a_3 + \cdots + {}^{2023}C_{2023} a_{2024}$$

由递推关系得

$$\frac{a_{n+2}-1}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}-1}{a_n} = \frac{a_2-1}{a_1} = \frac{3-1}{1} = 2$$

即

$$a_{n+1}-1 = 2a_n \Rightarrow a_{n+1}+1 = 2(a_n+1)$$

数列  $\{a_n+1\}$  是首项为 2, 公比为 2 的等比数列, 故  $a_n = 2^n - 1$ , 则

$$\begin{aligned} & {}^{2023}C_0 a_1 + {}^{2023}C_1 a_2 + {}^{2023}C_2 a_3 + {}^{2023}C_3 a_4 + \cdots + {}^{2023}C_{2023} a_{2024} \\ &= {}^{2023}C_0 (2^1 - 1) + {}^{2023}C_1 (2^2 - 1) + {}^{2023}C_2 (2^3 - 1) + \cdots + {}^{2023}C_{2023} (2^{2024} - 1) \\ &= 2 \left( {}^{2023}C_0 2^0 + {}^{2023}C_1 2^1 + {}^{2023}C_2 2^2 + \cdots + {}^{2023}C_{2023} 2^{2023} \right) \\ &\quad - \left( {}^{2023}C_0 + {}^{2023}C_1 + {}^{2023}C_2 + \cdots + {}^{2023}C_{2023} \right) \\ &= 2(1+2)^{2023} - 2^{2023} = 2 \cdot 3^{2023} - 2^{2023} \end{aligned}$$

## 12. 计算级数

$$2 + \frac{2 \cdot 5}{3!} + \frac{2 \cdot 5 \cdot 7}{5!} + \frac{2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{7!} + \cdots$$

的值, 并以根式形式表示。

注意到该级数的分子是连续奇数的乘积, 而分母是阶乘。我们可以尝试与二项式展开式的广义形式联系起来:

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}x^2 - \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{3!}x^3 + \cdots$$

通过调整系数, 可以将原级数写成:

$$2 \left[ 1 + \frac{3 \cdot 5}{2!} \left( \frac{2}{3} \right)^2 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{3!} \left( \frac{2}{3} \right)^3 + \cdots \right].$$

这个形式与广义二项式展开  $(1-x)^{-1/2}$  对应, 其中  $x = \frac{2}{3}$ 。于是:

$$\sum = 2 \cdot \left( 1 - \frac{2}{3} \right)^{-1/2} = 2 \cdot \left( \frac{1}{3} \right)^{-1/2} = 2 \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$$

因此, 原级数的值为

$$\boxed{2\sqrt{3}}.$$

13. 求下列无穷级数的和

$$S = \frac{3}{8} + \frac{3 \times 9}{8 \times 16} + \frac{3 \times 9 \times 15}{8 \times 16 \times 24} + \frac{3 \times 9 \times 15 \times 21}{8 \times 16 \times 24 \times 32} + \cdots$$

将一般项改写为

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1))}{8^{k+1} (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k)}.$$

整理得

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{3}{2}\right) \cdots \left(\frac{2k-1}{2}\right)}{k!} \left(\frac{3}{4}\right)^k.$$

注意到

$$\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{3}{2}\right) \cdots \left(\frac{2k-1}{2}\right) = (-1)^k \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \cdots \left(-\frac{2k-1}{2}\right),$$

于是

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \cdots \left(-\frac{2k-1}{2}\right)}{k!} \left(-\frac{3}{4}\right)^k.$$

两边同时加 1, 得到

$$1 + S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \cdots \left(-\frac{2k-1}{2}\right)}{k!} \left(-\frac{3}{4}\right)^k.$$

这是二项式展开, 因此

$$1 + S = \left(1 - \frac{3}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

计算得

$$1 + S = \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} = 2,$$

从而

$$S = 1.$$

14. 求下列表达式的无穷和

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[ \prod_{r=1}^k \left( \frac{8r-7}{40r} \right) \right].$$

先将前几项写出以观察其结构:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \left[ \prod_{r=1}^k \left( \frac{8r-7}{40r} \right) \right] &= \prod_{r=1}^1 \left( \frac{8r-7}{40r} \right) + \prod_{r=1}^2 \left( \frac{8r-7}{40r} \right) + \prod_{r=1}^3 \left( \frac{8r-7}{40r} \right) + \cdots \\ &= \frac{1}{40} + \frac{1}{40} \cdot \frac{9}{80} + \frac{1}{40} \cdot \frac{9}{80} \cdot \frac{17}{120} + \frac{1}{40} \cdot \frac{9}{80} \cdot \frac{17}{120} \cdot \frac{25}{160} + \cdots.\end{aligned}$$

将每一项写成阶乘形式:

$$= \frac{1}{40 \cdot 1!} + \frac{1 \cdot 9}{40^2 \cdot (1 \cdot 2)} + \frac{1 \cdot 9 \cdot 17}{40^3 \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3)} + \frac{1 \cdot 9 \cdot 17 \cdot 25}{40^4 \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4)} + \cdots.$$

注意到

$$40 = (-8)(-5),$$

于是上式可改写为

$$= \frac{1}{(-8)(-5) 1!} + \frac{1 \cdot 9}{(-8)^2(-5)^2 2!} + \frac{1 \cdot 9 \cdot 17}{(-8)^3(-5)^3 3!} + \frac{1 \cdot 9 \cdot 17 \cdot 25}{(-8)^4(-5)^4 4!} + \cdots.$$

进一步整理得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \left[ \prod_{r=1}^k \left( \frac{8r-7}{40r} \right) \right] &= \frac{-\frac{1}{8}}{1!} \left( -\frac{1}{5} \right) + \frac{\left( -\frac{1}{8} \right) \left( -\frac{9}{8} \right)}{2!} \left( -\frac{1}{5} \right)^2 \\ &\quad + \frac{\left( -\frac{1}{8} \right) \left( -\frac{9}{8} \right) \left( -\frac{17}{8} \right)}{3!} \left( -\frac{1}{5} \right)^3 + \cdots.\end{aligned}$$

这是二项式级数展开式

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k$$

在  $\alpha = -\frac{1}{8}$ 、 $x = -\frac{1}{5}$  情形下去掉首项后的结果, 因此

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \left[ \prod_{r=1}^k \left( \frac{8r-7}{40r} \right) \right] &= \left( 1 - \frac{1}{5} \right)^{-\frac{1}{8}} - 1 \\ &= \left( \frac{4}{5} \right)^{-\frac{1}{8}} - 1 \\ &= \sqrt[8]{\frac{5}{4}} - 1.\end{aligned}$$

15. 已知级数

$$S = \frac{5}{18} - \frac{5 \times 8}{18 \times 24} + \frac{5 \times 8 \times 11}{18 \times 24 \times 30} - \frac{5 \times 8 \times 11 \times 14}{18 \times 24 \times 30 \times 36} + \cdots$$

收敛, 求其和。

原级数可写为

$$S = \frac{5}{18} - \frac{5 \times 8}{18 \times 24} + \frac{5 \times 8 \times 11}{18 \times 24 \times 30} - \frac{5 \times 8 \times 11 \times 14}{18 \times 24 \times 30 \times 36} + \cdots$$

将分母拆分为  $18 = 6 \times 3$ ,  $24 = 6 \times 4$ ,  $30 = 6 \times 5, \dots$ , 则

$$S = \frac{5}{6 \times 3} - \frac{5 \times 8}{6^2(3 \times 4)} + \frac{5 \times 8 \times 11}{6^3(3 \times 4 \times 5)} - \frac{5 \times 8 \times 11 \times 14}{6^4(3 \times 4 \times 5 \times 6)} + \cdots$$

整理得

$$\begin{aligned} S &= \frac{5}{3} \left( \frac{1}{6} \right) - \frac{5}{3} \left( \frac{8}{4} \right) \left( \frac{1}{6} \right)^2 + \frac{5}{3} \left( \frac{8}{4} \right) \left( \frac{11}{5} \right) \left( \frac{1}{6} \right)^3 \\ &\quad - \frac{5}{3} \left( \frac{8}{4} \right) \left( \frac{11}{5} \right) \left( \frac{14}{6} \right) \left( \frac{1}{6} \right)^4 + \cdots \end{aligned}$$

进一步变形并提取常数, 可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{36} S &= \frac{-\frac{1}{3} \left( -\frac{4}{3} \right) \left( -\frac{8}{3} \right)}{3!} \left( \frac{1}{6} \right)^3 + \frac{-\frac{1}{3} \left( -\frac{4}{3} \right) \left( -\frac{8}{3} \right) \left( -\frac{11}{3} \right)}{4!} \left( \frac{1}{6} \right)^4 \\ &\quad + \frac{-\frac{1}{3} \left( -\frac{4}{3} \right) \left( -\frac{8}{3} \right) \left( -\frac{11}{3} \right) \left( -\frac{14}{3} \right)}{5!} \left( \frac{1}{6} \right)^5 + \cdots \end{aligned}$$

在级数前补上缺失项, 可构成完整的二项式展开:

$$\begin{aligned} \frac{1}{36} S &= \left[ 1 + \frac{-\frac{1}{3}}{1!} \left( \frac{1}{6} \right) + \frac{-\frac{1}{3} \left( -\frac{4}{3} \right)}{2!} \left( \frac{1}{6} \right)^2 + \cdots \right] \\ &\quad - \left[ 1 + \frac{-\frac{1}{3}}{1!} \left( \frac{1}{6} \right) + \frac{-\frac{1}{3} \left( -\frac{4}{3} \right)}{2!} \left( \frac{1}{6} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

由二项式定理,

$$1 + \frac{-\frac{1}{3}}{1!} x + \frac{-\frac{1}{3} \left( -\frac{4}{3} \right)}{2!} x^2 + \cdots = (1+x)^{-\frac{1}{3}},$$

取  $x = \frac{1}{6}$ , 得

$$\frac{1}{36} S = \left( 1 + \frac{1}{6} \right)^{-\frac{1}{3}} - \left( 1 + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} \right).$$

因此

$$\begin{aligned} S &= 36 \left( \frac{3}{2} \right)^{\frac{1}{3}} - (36 + 6 - 1) \\ &= 36 \sqrt[3]{\frac{3}{2}} - 41. \end{aligned}$$

16. 2) 证明恒等式

$$k^n C_k = n^{n-1} C_{k-1}$$

从组合数的定义出发:

$$\begin{aligned} k^n C_k &= k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \\ &= n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} \\ &= n^{n-1} C_{k-1} \end{aligned}$$

17. 证明恒等式

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

$$\begin{aligned} \binom{n}{n-r} &= \frac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!r!} \\ &= \frac{n!}{r!(n-r)!} \\ &= \binom{n}{r} \end{aligned}$$

18. 证明恒等式 (Pascal's Identity)

$$\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r}$$

$$\begin{aligned}
\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} &= \frac{n!}{(r-1)!(n-(r-1))!} + \frac{n!}{r!(n-r)!} \\
&= \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!} + \frac{n!}{r!(n-r)!} \\
&= \frac{n! \cdot r}{r!(n-r+1)!} + \frac{n! \cdot (n-r+1)}{r!(n-r+1)!} \\
&= \frac{n![r + (n-r+1)]}{r!(n-r+1)!} \\
&= \frac{n!(n+1)}{r!(n-r+1)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{r!(n+1-r)!} \\
&= \binom{n+1}{r}
\end{aligned}$$

19. 证明恒等式

$$\binom{n}{m} \binom{m}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{m-k}, \quad n \in \mathbb{R}, k, m \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned}
\binom{n}{m} \binom{m}{k} &= \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \frac{m!}{k!(m-k)!} \\
&= \frac{n!}{k!(m-k)!(n-m)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{(m-k)!(n-m)!} \\
&= \binom{n}{k} \binom{n-k}{m-k}
\end{aligned}$$

20. 设  $n$  是任意实数,  $k$  是任意整数, 均有:

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \cdots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}$$

又有:

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \cdots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}, \quad n, k \in \mathbb{N}$$

注: 考虑帕斯卡公式  $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

(1) 反复对上式中最后一个二项式系数运用帕斯卡公式得:

$$\begin{aligned}
 \binom{n}{k} &= \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \\
 &= \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2} \\
 &\quad \dots \\
 \therefore \binom{n}{k} &= \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \dots + \binom{n-k-1}{0} + \binom{n-k-1}{-1}
 \end{aligned}$$

而  $\binom{n-k-1}{-1} = 0$ , 用  $r+k+1$  取代  $n$ , 移项, 便得到该式.

(2) 反复对上式中第一个二项式系数运用帕斯卡公式得:

$$\begin{aligned}
 \binom{n}{k} &= \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \\
 &= \binom{n-2}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-1}{k-1} \\
 &\quad \dots \\
 \therefore \binom{n}{k} &= \binom{k}{k} + \binom{k}{k-1} + \binom{k+1}{k-1} + \dots + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-1}{k-1}
 \end{aligned}$$

而  $\binom{k-1}{k} = 0$ , 用  $r$  取代  $k$ ,  $k+1$  取代  $n$ , 便得到该式.

## 21. 证明恒等式

$$\sum_{r=0}^n \binom{n}{r}^2 = \binom{2n}{n}, \quad n \geq 0$$

设  $S$  是一个有  $2n$  个元素的集合,  $\binom{2n}{n}$  为计数  $S$  的  $n$  子集的数目。

又把  $S$  划分成  $A$  和  $B$  两个子集, 每一个子集都有  $n$  个元素。利用  $S$  的这个划分去划分  $S$  的  $n$  子集。 $S$  的每一个  $n$  子集包含  $k$  个  $A$  的元素和  $n-k$  个  $B$  的元素,  $k$  是介于 0 和  $n$  之间的任意整数。我们把  $S$  的  $n$  子集划分成  $n+1$  个部分:

$$C_0, C_1, \dots, C_n$$

其中  $C_k$  是由包含  $k$  个  $A$  的元素和  $n-k$  个  $B$  的元素组成的  $n$  子集。根据加法原理, 有

$$\binom{2n}{n} = |C_0| + |C_1| + \dots + |C_n|$$

$C_k$  中的  $n$  子集可以通过从  $A$  中选择  $k$  个元素, 再从  $B$  中选择  $n-k$  个元素而得到。根据乘法原理,

$$|C_k| = \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}^2, \quad k \geq 0.$$

把上式代入得:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

22. 证明下列恒等式:

(a)

$${}^nC_0 + {}^nC_2 + \cdots = {}^nC_1 + {}^nC_3 + \cdots = 2^{n-1}$$

使用二项式定理的交错和:

$${}^nC_0 - {}^nC_1 + {}^nC_2 - \cdots + (-1)^n {}^nC_n = 0$$

由此可得:

$${}^nC_0 + {}^nC_2 + \cdots = {}^nC_1 + {}^nC_3 + \cdots$$

又因为

$${}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + \cdots + {}^nC_n = 2^n$$

因此:

$${}^nC_0 + {}^nC_2 + \cdots = {}^nC_1 + {}^nC_3 + \cdots = \frac{1}{2}(2^n) = 2^{n-1}$$

(b)

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0, \quad n \geq 1$$

由二项式定理

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n}y^n$$

令  $x = 1, y = -1$ , 得到

$$\begin{aligned}(1 + (-1))^n &= \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} \\ 0 &= \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}\end{aligned}$$

因此恒等式成立。

(c)

$$1 \cdot {}^nC_1 + 2 \cdot {}^nC_2 + \cdots + n \cdot {}^nC_n = n2^{n-1}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} &= 1 \binom{n}{1} + 2 \binom{n}{2} + \cdots + n \binom{n}{n} \\ &= n \binom{n-1}{0} + n \binom{n-1}{1} + \cdots + n \binom{n-1}{n-1} \quad (\text{利用 } k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}) \\ &= n \left[ \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \cdots + \binom{n-1}{n-1} \right] \\ &= n \cdot 2^{n-1} \quad (\text{利用 } \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} = 2^m, m = n-1)\end{aligned}$$

考虑  $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n {}^nC_k x^k$ , 两边对  $x$  求导:

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^n k {}^nC_k x^{k-1}.$$

令  $x = 1$ :

$$n2^{n-1} = \sum_{k=1}^n k {}^nC_k.$$

(d)

$$\sum_{k=1}^n k^2 {}^nC_k = n(n+1)2^{n-2}$$

由二项式定理:

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n$$

两边求导, 并乘以  $x$  得:

$$x \frac{d}{dx} (1+x)^n = x \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^{k-1}$$

$$xn(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^k$$

再次对两边求导:

$$\frac{d}{dx} [xn(1+x)^{n-1}] = \sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k} x^{k-1}$$

计算左边导数:

$$n(1+x)^{n-1} + xn(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k} x^{k-1}$$

代入  $x = 1$ :

$$n \cdot 2^{n-1} + n(n-1) \cdot 2^{n-2} = \sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k}$$

$$n [2^{n-1} + (n-1)2^{n-2}] = \sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k}$$

$$n [(2+n-1)2^{n-2}] = \sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k}$$

$$n(n+1)2^{n-2} = \sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k}$$

(e)

$${}^nC_0 + \frac{1}{2}{}^nC_1 + \frac{1}{3}{}^nC_2 + \cdots + \frac{1}{n+1}{}^nC_n = \frac{1}{n+1} (2^{n+1} - 1)$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n \frac{{}^nC_k}{k+1} &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n {}^{n+1}C_{k+1} \\
&= \frac{1}{n+1} ({}^{n+1}C_1 + {}^{n+1}C_2 + \cdots + {}^{n+1}C_{n+1}) \\
&= \frac{1}{n+1} (2^{n+1} - 1)
\end{aligned}$$

于是得证。

(f)

$$\sum_{k \text{ even}} k \binom{n}{k} = n2^{n-2}$$

由二项式定理:

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n$$

两边求导:

$$n(1+x)^{n-1} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2}x + 3\binom{n}{3}x^2 + \cdots + n\binom{n}{n}x^{n-1}$$

同理, 将  $x$  替换为  $-x$ :

$$n(1-x)^{n-1} = \binom{n}{1} - 2\binom{n}{2}x + 3\binom{n}{3}x^2 - \cdots + (-1)^{n-1}n\binom{n}{n}x^{n-1}$$

两式相加:

$$n(1+x)^{n-1} + n(1-x)^{n-1} = 2 \sum_{k \text{ even}} k \binom{n}{k} x^{k-1}$$

代入  $x = 1$ :

$$n2^{n-1} + n0^{n-1} = 2 \sum_{k \text{ even}} k \binom{n}{k}$$

因此:

$$\sum_{k \text{ even}} k \binom{n}{k} = n2^{n-2}$$

23. 证明 Vandermonde 恒等式:

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i}$$

注意到:

$$(1+x)^n(1+x)^m = (1+x)^{n+m}$$

等号左边展开为:

$$\begin{aligned} (1+x)^n(1+x)^m &= \left( \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i \right) \left( \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} x^j \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n+m} \left( \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} \right) x^k \end{aligned}$$

等号右边根据定义展开为:

$$(1+x)^{n+m} = \sum_{k=0}^{n+m} \binom{n+m}{k} x^k$$

比较  $x^k$  系数, 得到:

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i}$$

24. 证明

$$({}^nC_0 - {}^nC_2 + {}^nC_4 - \cdots)^2 + ({}^nC_1 - {}^nC_3 + {}^nC_5 - \cdots)^2 = 2^n$$

设  $f(x) = (x+1)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + \cdots + {}^nC_nx^n$ , 取  $x = i$  得

$$f(i) = (i+1)^n = (\sqrt{2} e^{\frac{\pi i}{4}})^n = 2^{\frac{n}{2}} e^{\frac{\pi i}{4}}$$

且有

$$f(i) = ({}^nC_0 - {}^nC_2 + {}^nC_4 - \cdots) + i({}^nC_1 - {}^nC_3 + {}^nC_5 - \cdots)$$

比较实部与虚部得

$${}^nC_0 - {}^nC_2 + {}^nC_4 - \cdots = 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{\pi i}{4}, \quad {}^nC_1 - {}^nC_3 + {}^nC_5 - \cdots = 2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{\pi i}{4}$$

因此得证

$$({}^nC_0 - {}^nC_2 + \cdots)^2 + ({}^nC_1 - {}^nC_3 + \cdots)^2 = 2^n \cos^2 \left( \frac{\pi i}{4} + \sin^2 \frac{\pi i}{4} \right) = 2^n$$

25. 若将  $(x+1)^{2000}$  展开, 问有多少个系数是奇数?

一般地, 若  $(x+1)^n$  展开式中奇数系数的个数为  $2^a$ , 其中  $a$  是  $n$  的二进制表示中 1 的个数, 将 2000 转换为二进制:

$$2000 = 11111010000_2$$

其中有 6 个 1, 因此  $(x+1)^{2000}$  中奇数系数的个数为

$$2^6 = 64.$$

又解: 对 2 取模, 有

$$\begin{aligned} (x+1)^{2000} &= (x+1)^{1024} (x+1)^{512} (x+1)^{256} (x+1)^{128} (x+1)^{64} (x+1)^{16} \\ &\equiv (x^{1024} + 1)(x^{512} + 1) \cdots (x^{16} + 1) \pmod{2}, \end{aligned}$$

展开后共有  $2^6 = 64$  项系数为奇数。

26. 设  $n$  为大于或等于 1 的正整数, 考虑数列  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ , 试用二项式定理证明对所有  $n$  皆满足

$$a_n < e$$

设  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ , 考虑对  $a_n$  进行二项式展开

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^n \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k! \cdot n^k}$$

注意到

$$\binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k \leq \frac{1}{k!} \Rightarrow a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$$

27. 定义  $a_n$  为  $(3 - \sqrt{x})^n$  展开式中  $x$  项的系数, 其中  $n$  是正整数。求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3^2}{a_2} + \frac{3^3}{a_3} + \cdots + \frac{3^n}{a_n} \right)$$

观察到  $(3 - \sqrt{x})^n$  的二项展开式为:

$$(3 - \sqrt{x})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^{n-k} (-\sqrt{x})^k$$

$x$  项的系数对应  $k = 2$ :

$$a_n = \binom{n}{2} 3^{n-2}$$

所以

$$\frac{3^n}{a_n} = \frac{3^n}{\binom{n}{2} 3^{n-2}} = \frac{3^2}{\binom{n}{2}} = \frac{9}{\binom{n}{2}}$$

原式变为

$$9 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\binom{n}{2}} = 18 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n(n-1)} = 18 \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right)$$

这是一个裂项求和, 且

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots = 1$$

因此原极限为 18。

28. 用  $|S|$  表示集合  $S$  中元素的个数。已知集合

$$S = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{113} \right\}, \quad T = \{A \subseteq S \mid |A| = 2n, n \in \mathbb{N}\},$$

试回答下列问题:

(a)  $|T| = ?$

集合  $S$  中的元素个数为  $|S| = 112$ , 所以:

$$|T| = {}^{112}C_2 + {}^{112}C_4 + \cdots + {}^{112}C_{112}$$

由二项式定理,

$$(1+1)^{112} = {}^{112}C_0 + {}^{112}C_1 + \cdots + {}^{112}C_{112} = 2^{112}$$

$$(1-1)^{112} = {}^{112}C_0 - {}^{112}C_1 + {}^{112}C_2 - \cdots + (-1)^{112} \cdot {}^{112}C_{112} = 0$$

两式相加得

$$2^{112} = 2 \left( {}^{112}C_0 + {}^{112}C_2 + {}^{112}C_4 + \cdots + {}^{112}C_{112} \right) \Rightarrow \sum_{k=0}^{56} {}^{112}C_{2k} = 2^{111}$$

于是

$$|T| = 2^{111} - 1$$

(b) 对任意  $A_i \in T$ , 将  $A_i$  中所有元素相乘的乘积记为  $m_i$ , 再将所有的  $m_i$  相加, 其和为  $M$ , 求  $M$  的值。

设

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \left(x + \frac{1}{3}\right) \cdots \left(x + \frac{1}{113}\right)$$

展开  $f(x)$  得

- $x^{110}$  的系数为所有  $|A_i| = 2$  的子集乘积之和;
- $x^{108}$  的系数为所有  $|A_i| = 4$  的子集乘积之和;
- $\cdots$ ;
- 常数项为所有  $|A_i| = 112$  的子集乘积之和。

故所有偶数个元素子集的乘积之和为

$$M = \frac{1}{2} (f(1) + f(-1)) - 1$$

而

$$f(1) = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{113}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdots \frac{114}{113} = 57$$

$$f(-1) = \left(-1 + \frac{1}{2}\right) \left(-1 + \frac{1}{3}\right) \cdots \left(-1 + \frac{1}{113}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{2}{3}\right) \cdots \left(-\frac{112}{113}\right) = \frac{1}{113}$$

因此

$$M = \frac{1}{2} \left( 57 + \frac{1}{113} \right) - 1 = \frac{3108}{113}$$

29. 函数  $f$  由实常数  $a, b, c$  定义为

$$f(x) = (a + bx + cx^2)(1 - x)^{-3}, \quad x \in \mathbb{R}, |x| < 1.$$

a) 证明

$$f(x) = a + (3a + b)x + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} [a(n+1)(n+2) + bn(n+1) + cn(n-1)] x^n.$$

b) 利用第 (a) 问的结果求

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}.$$

(a) 先写出二项式展开式

$$(1-x)^{-3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} (n+1)(n+2) x^n.$$

于是

$$\begin{aligned} f(x) &= (a + bx + cx^2)(1-x)^{-3} \\ &= (a + bx + cx^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} (n+1)(n+2) x^n \\ &= \frac{1}{2} a \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) x^n + \frac{1}{2} b \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) x^{n+1} \\ &\quad + \frac{1}{2} c \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) x^{n+2}. \end{aligned}$$

将前两项单独取出并把求和指标统一为从  $n=2$  开始, 可得

$$f(x) = a + (3a + b)x + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} [(n+1)(n+2) + n(n+1) + (n-1)n] x^n.$$

整理得

$$f(x) = a + (3a + b)x + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} [a(n+1)(n+2) + bn(n+1) + cn(n-1)] x^n.$$

(b) 展开求和中  $x^n$  的系数:

$$\frac{1}{2} [(a+b+c)n^2 + (3a+b-c)n + 2a].$$

要求该系数等于  $n^2$ , 比较系数得

$$\frac{1}{2}(a+b+c) = 1, \quad \frac{1}{2}(3a+b-c) = 0, \quad a = 0.$$

解得

$$a = 0, \quad b = 1, \quad c = 1.$$

于是

$$f(x) = (x + x^2)(1 - x)^{-3} = x + \sum_{n=2}^{\infty} n^2 x^n.$$

令  $x = \frac{1}{2}$ , 有

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-3} = \frac{3}{4} \cdot 8 = 6.$$

另一方面,

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}.$$

因此

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = 6 - \frac{1}{2} = \frac{11}{2}.$$

再加上  $n = 1$  的项  $\frac{1}{2}$ , 得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = 6.$$

30. 计算:

$$\cos \alpha + {}^nC_1 \cos 2\alpha + {}^nC_2 \cos 3\alpha + \cdots + {}^nC_{n-1} \cos n\alpha + \cos(n+1)\alpha$$

以及

$$\sin \alpha + {}^nC_1 \sin 2\alpha + {}^nC_2 \sin 3\alpha + \cdots + {}^nC_{n-1} \sin n\alpha + \sin(n+1)\alpha$$

我们需要计算下列复数和的实部与虚部系数:

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha) + {}^nC_1(\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha) + {}^nC_2(\cos 3\alpha + i \sin 3\alpha) + \cdots + [\cos(n+1)\alpha + i \sin(n+1)\alpha]$$

令  $x = \cos \alpha + i \sin \alpha$ 。利用棣莫弗公式 (De Moivre's formula) 和二项式定理, 我们可以将

该和式转化为以下形式:

$$\begin{aligned}
 x + {}^nC_1x^2 + {}^nC_2x^3 + \cdots + x^{n+1} &= x(1+x)^n \\
 &= (\cos \alpha + i \sin \alpha)(1 + \cos \alpha + i \sin \alpha)^n \\
 &= (\cos \alpha + i \sin \alpha) \left( 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 2i \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \right)^n \\
 &= (\cos \alpha + i \sin \alpha) \left[ 2 \cos \frac{\alpha}{2} \left( \cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \right) \right]^n \\
 &= 2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} (\cos \alpha + i \sin \alpha) \left( \cos \frac{n\alpha}{2} + i \sin \frac{n\alpha}{2} \right) \\
 &= 2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} \left[ \cos \left( \alpha + \frac{n\alpha}{2} \right) + i \sin \left( \alpha + \frac{n\alpha}{2} \right) \right] \\
 &= 2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} \left( \cos \frac{n+2}{2} \alpha + i \sin \frac{n+2}{2} \alpha \right)
 \end{aligned}$$

由此可得:

$$\begin{aligned}
 \cos \alpha + {}^nC_1 \cos 2\alpha + {}^nC_2 \cos 3\alpha + \cdots + \cos(n+1)\alpha &= 2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} \cos \frac{n+2}{2} \alpha \\
 \sin \alpha + {}^nC_1 \sin 2\alpha + {}^nC_2 \sin 3\alpha + \cdots + \sin(n+1)\alpha &= 2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} \sin \frac{n+2}{2} \alpha
 \end{aligned}$$

31. (a) 证明对于任意正整数  $n$  有

$$\begin{aligned}
 \sin n\theta &= \binom{n}{1} \sin \theta \cos^{n-1} \theta - \binom{n}{3} \sin^3 \theta \cos^{n-3} \theta + \binom{n}{5} \sin^5 \theta \cos^{n-5} \theta - \cdots, \\
 \cos n\theta &= \cos^n \theta - \binom{n}{2} \sin^2 \theta \cos^{n-2} \theta + \binom{n}{4} \sin^4 \theta \cos^{n-4} \theta - \cdots
 \end{aligned}$$

(b) 证明, 对于区间  $[-1, 1]$  上的所有  $x$  和任意正整数  $n$ , 函数

$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-1} x)$$

是  $x$  的次数为  $n$  的多项式, 且首项系数为  $2^{n-1}$ 。

(a) 由德·摩根定理 (De Moivre's Theorem):

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta,$$

对左边使用二项式定理展开, 并分别比较实部和虚部, 即得所述公式。

(b) 取  $\theta = \cos^{-1} x$ , 则  $\cos \theta = x, \sin \theta = \sqrt{1-x^2}$ , 应用 (a) 可得

$$\cos(n \cos^{-1} x) = x^n - \binom{n}{2} (1-x^2)x^{n-2} + \binom{n}{4} (1-x^2)^2 x^{n-4} - \cdots$$

显然  $T_n(x)$  是  $x$  的次数为  $n$  的多项式。其首项系数为

$$1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots + \binom{n}{2k}.$$

由于

$$2^n = (1+1)^n = 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}, \quad 0 = (1-1)^n = 1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n},$$

两式相加, 得到

$$1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots + \binom{n}{2k} = 2^{n-1}.$$

因此首项系数为  $2^{n-1}$ 。

32. 设函数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}, \quad -1 < x < 1$$

a) 通过操作二项展开的一般项, 证明

$$f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{2r}{r} \left(\frac{1}{4}x\right)^r$$

b) 求  $\frac{1}{\sqrt{16-x^2}}$  的类似展开式, 并进一步证明

$$\frac{x}{(16-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \sum_{r=1}^{\infty} \binom{2r}{r} \left(\frac{1}{16}\right)^r \left(\frac{1}{8}x\right)^{2r-1}$$

c) 求下列级数的精确值

$$\sum_{r=1}^{\infty} \binom{2r}{r} \left(\frac{5}{32}\right)^r \left(\frac{4}{25}\right)^r$$

a)

由二项定理,

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{-\frac{1}{2}}{1!}(-x) + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{3}{2})}{2!}(-x)^2 + \cdots$$

一般项可写为

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2r-1}{2}\right)}{r!}(-x)^r$$

整理符号与系数得

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2r-1)}{r! 2^r} x^r$$

利用

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2r-1) = \frac{(2r)!}{2^r r!},$$

可得

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(2r)!}{r! r!} \left(\frac{x}{4}\right)^r = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{2r}{r} \left(\frac{x}{4}\right)^r$$

b)

$$(16-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 16^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{x^2}{16}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \sum_{r=0}^{\infty} \binom{2r}{r} \left(\frac{x^2}{64}\right)^r = \frac{1}{4} \sum_{r=0}^{\infty} \binom{2r}{r} \left(\frac{x}{8}\right)^{2r}$$

对两边求导,

$$\frac{d}{dx}(16-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{4} \binom{2r}{r} (2r) \left(\frac{x}{8}\right)^{2r-1} \frac{1}{8}$$

左边化简得

$$\frac{x}{(16-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \sum_{r=1}^{\infty} \binom{2r}{r} \frac{r}{16} \left(\frac{x}{8}\right)^{2r-1},$$

即证所需结果。

c)

原级数化简为

$$\sum_{r=1}^{\infty} \binom{2r}{r} \left(\frac{1}{16}\right)^r \left(\frac{2}{5}\right)^{2r-1}$$

由 b) 的结果, 令

$$\frac{x}{8} = \frac{2}{5} \Rightarrow x = \frac{16}{5},$$

则

$$\sum_{r=1}^{\infty} \binom{2r}{r} \left(\frac{1}{16}\right)^r \left(\frac{2}{5}\right)^{2r-1} = \frac{\frac{16}{5}}{\left(16 - \left(\frac{16}{5}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

计算得

$$16 - \left(\frac{16}{5}\right)^2 = 16 \left(1 - \frac{16}{25}\right) = 16 \cdot \frac{9}{25},$$

因此

$$\frac{\frac{16}{5}}{\left(16 - \left(\frac{16}{5}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{16}{5} \cdot \frac{25}{64 \cdot 27} = \frac{25}{108}$$

# 泰勒展开式

1. 设  $y = e^{\tan x}, x \in \mathbb{R}$ 。

a) 求  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  并证明

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = (1 + \tan^2 x + 2 \tan x) \frac{dy}{dx}.$$

首先对  $y$  求导:

$$\frac{dy}{dx} = e^{\tan x} \sec^2 x = y \sec^2 x.$$

再次求导:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(y \sec^2 x) = \frac{dy}{dx} \sec^2 x + y \cdot 2 \sec^2 x \tan x.$$

将  $y \sec^2 x$  替换为  $\frac{dy}{dx}$ :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} \sec^2 x + 2 \frac{dy}{dx} \tan x = \frac{dy}{dx} (\sec^2 x + 2 \tan x) = \frac{dy}{dx} (1 + \tan^2 x + 2 \tan x).$$

b) 求  $e^{\tan x}$  的  $x^3$  展开式。

使用 Taylor 展开:

$$y = y_0 + y'_0 x + \frac{y''_0}{2!} x^2 + \frac{y'''_0}{3!} x^3 + O(x^4),$$

在  $x = 0$  时,  $y_0 = 1, y'_0 = 1, y''_0 = 1$ 。

计算三阶导数:

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = 2(1 + \tan x) \sec^2 x \frac{dy}{dx} + (1 + \tan x)^2 \frac{d^2 y}{dx^2},$$

代入  $x = 0$  得  $y'''_0 = 3$ 。

于是

$$e^{\tan x} = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + O(x^4).$$

2. 设  $f(x) \equiv \sin[\ln(1+x)], x \in \mathbb{R}, x > -1$ 。

a) 求  $f(x)$  满足的微分方程。

首先求导:

$$f'(x) = \cos[\ln(1+x)] \frac{1}{1+x}.$$
$$(1+x)f'(x) = \cos[\ln(1+x)].$$

再次求导:

$$(1+x)f''(x) + f'(x) = -\sin[\ln(1+x)] \frac{1}{1+x}.$$

两边乘以  $(1+x)$ :

$$(1+x)^2 f''(x) + (1+x)f'(x) = -\sin[\ln(1+x)].$$

移项得微分方程:

$$(1+x)^2 f''(x) + (1+x)f'(x) + f(x) = 0.$$

b) 求 Maclaurin 展开前 3 个非零项。

利用微分方程可求各阶导数在  $x=0$  的值:

$$f(0) = \sin(\ln 1) = 0, \quad f'(0) = \cos(\ln 1) = 1.$$

由微分方程  $(1+x)^2 f'' + (1+x)f' + f = 0$  得:

$$f''(0) + f'(0) + f(0) = 0 \implies f''(0) = -1.$$

三阶导数:

$$(1+x)^2 f''' + 3(1+x)f'' + 2f' = 0 \implies f'''(0) + 3f''(0) + 2f'(0) = 0 \implies f'''(0) = 1.$$

因此 Maclaurin 展开:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots$$

c) 用结果求  $\sin[\ln(1+x)]$  的前 2 个非零项的 Maclaurin 展开。

从 (b) 的展开式可直接得到前 2 个非零项:

$$\sin[\ln(1+x)] = x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots$$

3. 设  $y = \tan x$ ,  $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ 。

a) 证明下列公式:

i)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 2y \frac{dy}{dx}$$

ii)

$$\frac{d^5 y}{dx^5} = 6 \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 + 8 \frac{dy}{dx} \frac{d^3 y}{dx^3} + 2y \frac{d^4 y}{dx^4}$$

(i) 求二阶导数:

$$\begin{aligned} y = \tan x &\implies \frac{dy}{dx} = \sec^2 x = 1 + \tan^2 x = 1 + y^2 \\ y' &= 1 + y^2 \end{aligned}$$

对  $x$  求导:

$$y'' = 2yy'$$

(ii) 高阶导数:

$$y''' = 2y'y' + 2yy'' = 2(y')^2 + 2yy''$$

$$y^{(4)} = 6y'y'' + 2yy'''$$

$$y^{(5)} = 6(y'')^2 + 8y'y''' + 2yy^{(4)}$$

b) 求  $y = \tan x$  的 Maclaurin 展开前 3 个非零项

在  $x = 0$  处求各阶导数:

$$y_0 = \tan(0) = 0$$

$$y'_0 = 1 + y_0^2 = 1$$

$$y''_0 = 2y_0 y'_0 = 0$$

$$y'''_0 = 2y_0 y''_0 + 2(y'_0)^2 = 2$$

$$y^{(4)}_0 = 6y'_0 y''_0 + 2y_0 y'''_0 = 0$$

$$y^{(5)}_0 = 6(y''_0)^2 + 8y'_0 y'''_0 + 2y_0 y^{(4)}_0 = 16$$

Maclaurin 展开式:

$$y = y_0 + xy'_0 + \frac{x^2}{2!}y''_0 + \frac{x^3}{3!}y'''_0 + \frac{x^4}{4!}y^{(4)}_0 + \frac{x^5}{5!}y^{(5)}_0 + O(x^6)$$

代入各阶导数值:

$$y = 0 + x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + O(x^6)$$

因此,

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + O(x^6)$$

4. 设  $y = \ln(2 - e^x)$ ,  $x < \ln 2$ 。

a) 证明下列公式:

$$e^y \left[ \frac{d^3 y}{dx^3} + 3 \frac{dy}{dx} \frac{d^2 y}{dx^2} + \left( \frac{dy}{dx} \right)^3 \right] + e^x = 0$$

由  $y = \ln(2 - e^x)$  得

$$e^y = 2 - e^x$$

两边对  $x$  求导:

$$\frac{d}{dx}(e^y) = \frac{d}{dx}(2 - e^x) \implies e^y y' = -e^x \implies e^y y' + e^x = 0$$

再次求导:

$$\frac{d}{dx}(e^y y' + e^x) = 0 \implies e^y [(y')^2 + y''] + e^x = 0$$

再求一次导数:

$$\frac{d}{dx}(e^y [(y')^2 + y''] + e^x) = 0 \implies e^y [y'''] + 3y' y'' + (y')^3 + e^x = 0$$

b) 求 Maclaurin 展开式的前三个非零项

在  $x = 0$  处求各阶导数:

$$y_0 = \ln(2 - e^0) = \ln 1 = 0$$

$$e^y y' + e^x = 0 \implies y'_0 + 1 = 0 \implies y'_0 = -1$$

$$e^y [(y')^2 + y''] + e^x = 0 \implies (-1)^2 + y''_0 + 1 = 0 \implies y''_0 = -2$$

$$e^y [y'''] + 3y' y'' + (y')^3 + e^x = 0 \implies (-1)^3 + 3(-1)(-2) + y'''_0 + 1 = 0 \implies y'''_0 = -6$$

Maclaurin 展开式:

$$y = y_0 + xy'_0 + \frac{x^2}{2!}y''_0 + \frac{x^3}{3!}y'''_0 + O(x^4)$$

代入各阶导数值:

$$y = 0 - x - x^2 - x^3 + O(x^4)$$

因此

$$\ln(2 - e^x) = -x - x^2 - x^3 + O(x^4)$$

5. 函数  $f$  和  $g$  定义如下:

$$f(x) = \arctan\left(\frac{2}{3}x\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

$$g(y) = \frac{1}{1+y}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad -1 < y < 1.$$

a) 将  $g(y)$  展开为二项级数, 并保留  $y^3$  项。

使用二项式定理:

$$(1+y)^{-1} = 1 + (-1)y + \frac{(-1)(-2)}{2!}y^2 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{3!}y^3 + O(y^4)$$

$$(1+y)^{-1} = 1 - y + y^2 - y^3 + O(y^4)$$

b) 利用  $f'(x)$  和 (a) 的结果, 求  $\arctan\left(\frac{2}{3}x\right)$  的级数展开。

$$f(x) = \arctan\left(\frac{2}{3}x\right)$$

$$f'(x) = \frac{2/3}{1 + (\frac{2}{3}x)^2} = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{4}{9}x^2\right)^{-1}$$

将 (a) 的结果代入, 令  $y = \frac{4}{9}x^2$ :

$$f'(x) \approx \frac{2}{3} \left[ 1 - \frac{4}{9}x^2 + \left(\frac{4}{9}x^2\right)^2 - \left(\frac{4}{9}x^2\right)^3 + O(x^8) \right]$$

$$f'(x) \approx \frac{2}{3} - \frac{8}{27}x^2 + \frac{32}{243}x^4 - \frac{128}{2187}x^6 + O(x^8)$$

对  $x$  积分:

$$f(x) \approx \int \left[ \frac{2}{3} - \frac{8}{27}x^2 + \frac{32}{243}x^4 - \frac{128}{2187}x^6 + O(x^8) \right] dx$$

$$\arctan\left(\frac{2}{3}x\right) \approx \frac{2}{3}x - \frac{8}{81}x^3 + \frac{32}{1215}x^5 - \frac{128}{15309}x^7 + C$$

由  $x = 0$  可得  $C = 0$ , 因此:

$$\arctan\left(\frac{2}{3}x\right) \approx \frac{2}{3}x - \frac{8}{81}x^3 + \frac{32}{1215}x^5 - \frac{128}{15309}x^7.$$

6. 已知  $y = \tan x$ 。

a) 证明

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 2y \frac{d^2y}{dx^2} + 2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

b) 求  $\tan x$  在  $x = \frac{\pi}{4}$  附近的前四项泰勒展开式

c) 从上式近似计算

$$\tan \frac{5\pi}{18} \approx 1 + \frac{\pi}{18} + \frac{\pi^2}{648} + \frac{\pi^3}{17496}$$

a) 计算高阶导数

$$y = \tan x$$

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2 x = 1 + \tan^2 x = 1 + y^2$$

对  $x$  再求两次导数:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} (1 + y^2) = 2y \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx} \left( 2y \frac{dy}{dx} \right) = 2y \frac{d^2y}{dx^2} + 2 \left( \frac{dy}{dx} \right)^2$$

b) 泰勒展开式

在  $x = a = \frac{\pi}{4}$  处计算各阶导数:

$$y = \tan a = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2 = 2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2y \frac{dy}{dx} = 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 2y \frac{d^2y}{dx^2} + 2 \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 = 2 \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2^2 = 16$$

泰勒展开公式:

$$\tan x \approx f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a) + \dots$$

代入各阶导数:

$$\tan x \approx 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{8}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \dots$$

c) 近似计算  $\tan \frac{5\pi}{18}$

$$x - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{18} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{36}$$

代入泰勒展开:

$$\tan \frac{5\pi}{18} \approx 1 + 2 \cdot \frac{\pi}{36} + 2 \cdot \left(\frac{\pi}{36}\right)^2 + \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{\pi}{36}\right)^3$$

$$\tan \frac{5\pi}{18} \approx 1 + \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi^2}{1296} + \frac{8\pi^3}{139968}$$

$$\tan \frac{5\pi}{18} \approx 1 + \frac{\pi}{18} + \frac{\pi^2}{648} + \frac{\pi^3}{17496}$$

7. 求  $\arctan x$  的麦克劳林展开式, 并利用该展开证明

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)$$

其中  $f(n)$  为适当的函数

先对  $\arctan x$  求导

$$\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$$

当  $|x| < 1$  时, 有几何级数展开

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

对上式逐项积分, 且取积分常数

$$\begin{aligned}\arctan x &= \sum_{n=0}^{\infty} \int (-1)^n x^{2n} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + C\end{aligned}$$

令  $x = 0$ , 则  $\arctan 0 = 0$ , 从而  $C = 0$ , 于是

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

代入  $x = 1$  得

$$\arctan 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

而  $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ , 故

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

两边同乘 4, 得

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{2n+1}$$

因此可取

$$f(n) = \frac{4(-1)^n}{2n+1}$$

8. 利用适当的二项式展开式, 证明

$$\arcsin x = \sum_{r=0}^{\infty} \left[ \frac{\binom{2r}{r}}{2r+1} \frac{2}{4^r} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+1} \right]$$

从二项式展开  $(1-x^2)^{-1/2}$  出发

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{-1/2}{1}(-x^2) + \frac{-1/2(-3/2)}{1 \cdot 2}(-x^2)^2 + \frac{-1/2(-3/2)(-5/2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(-x^2)^3 + O(x^8)$$

化简符号得

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1/2 \cdot 3/2}{1 \cdot 2}x^4 + \frac{1/2 \cdot 3/2 \cdot 5/2}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^6 + O(x^8)$$

整理成阶乘形式

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3!} \frac{x^6}{8} + O(x^8)$$

进一步写成二项式系数

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\binom{2r}{r}}{4^r} x^{2r}$$

对两边在收敛半径内积分

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\binom{2r}{r}}{4^r} x^{2r} dx$$

逐项积分得

$$\arcsin x = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\binom{2r}{r}}{4^r} \frac{x^{2r+1}}{2r+1} + C$$

代入  $x=0$  得  $C=0$ , 于是

$$\arcsin x = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\binom{2r}{r}}{2r+1} \frac{x^{2r+1}}{4^r}$$

重写为所需形式

$$\arcsin x = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\binom{2r}{r}}{2r+1} \frac{2}{4^r} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+1}$$

9. 求下列无穷级数的和:

$$1 + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{5 \times 4^2} + \frac{1}{7 \times 4^3} + \frac{1}{9 \times 4^4} + \dots$$

考虑对数的幂级数展开:

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots$$

两式相减:

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = 2 \left( x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \right)$$

$$\ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

在收敛半径内令  $x = \frac{1}{2}$ :

$$\ln \left( \frac{1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} \right) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1/2)^{2k+1}}{2k+1}$$

$$\ln 3 = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)2^{2k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)4^k}$$

注意到原级数的形式与此一致:

$$1 + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 4^2} + \frac{1}{7 \cdot 4^3} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)4^k}$$

$$\therefore 1 + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{5 \times 4^2} + \frac{1}{7 \times 4^3} + \cdots = \ln 3$$

10. 求下列交错级数的和:

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{1+4} + \frac{1}{1+4+9} - \frac{1}{1+4+9+16} + \frac{1}{1+4+9+16+25} - \cdots$$

首先写成紧凑形式:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6(-1)^{n+1}}{n(n+1)(2n+1)}$$

对  $\frac{1}{n(n+1)(2n+1)}$  做部分分式分解:

$$\frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1}$$

因此级数可写为:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 6(-1)^{n+1} \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1} \right) = 6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} + 6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$$

分别处理各个级数:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$$

$$6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = 6 - 6 \ln 2$$

再利用  $\arctan x$  展开:

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \implies \arctan 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

$$24 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} = 24 \left( \frac{\pi}{4} - 1 \right) = 6\pi - 24$$

将所有部分相加:

$$6 \ln 2 + (6 - 6 \ln 2) - (6\pi - 24) = 6 - 6\pi + 24 = 30 - 6\pi$$

因此原级数的和为:

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{1+4} + \frac{1}{1+4+9} - \cdots = 6(\pi - 3)$$

11. 证明

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left[ \frac{2r+3}{(r+1)3^r} \right] = 3 \ln \left( \frac{3}{2} \right).$$

先对通项进行代数变形:

$$\frac{2r+3}{(r+1)3^r} = \frac{2(r+1)+1}{r+1} \left( \frac{1}{3} \right)^r = 2 \left( \frac{1}{3} \right)^r + \frac{1}{r+1} \left( \frac{1}{3} \right)^r$$

因此

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left[ \frac{2r+3}{(r+1)3^r} \right] = \sum_{r=1}^{\infty} 2 \left( \frac{1}{3} \right)^r + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r+1} \left( \frac{1}{3} \right)^r$$

第一项为等比级数, 其首项为  $\frac{2}{3}$ , 公比为  $\frac{1}{3}$ , 故

$$\sum_{r=1}^{\infty} 2 \left( \frac{1}{3} \right)^r = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 1$$

对第二项, 考虑

$$\ln(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \cdots$$

两边同除以  $-x$ , 得

$$-\frac{1}{x} \ln(1-x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}x^3 + \cdots = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r+1} x^r$$

取  $x = \frac{1}{3}$ , 由于  $|x| < 1$ , 级数收敛, 于是

$$-3 \ln \left( \frac{2}{3} \right) = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r+1} \left( \frac{1}{3} \right)^r$$

从而

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r+1} \left( \frac{1}{3} \right)^r = -3 \ln \left( \frac{2}{3} \right) - 1$$

将两部分相加:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left[ \frac{2r+3}{(r+1)3^r} \right] = 1 - 3 \ln \left( \frac{2}{3} \right) - 1 = -3 \ln \left( \frac{2}{3} \right)$$

整理得

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left[ \frac{2r+3}{(r+1)3^r} \right] = 3 \ln \left( \frac{3}{2} \right)$$

12. 通过考虑  $\ln(1-x^2)$  与  $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$  的级数展开, 或用其他方法, 求下列级数的精确值:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{1}{2r} + \frac{1}{2r+1} \right) \left( \frac{1}{4} \right)^r \right].$$

由

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots, \quad |x| < 1$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \cdots, \quad |x| < 1$$

可得

$$\ln(1-x^2) = -x^2 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^6 - \cdots$$

因此

$$-\frac{1}{2} \ln(1-x^2) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{6}x^6 + \cdots$$

令  $x = \frac{1}{2}$ , 得

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{64} + \cdots = -\frac{1}{2} \ln \frac{3}{4}$$

再考虑

$$\ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) = 2 \left( x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots \right)$$

从而

$$\frac{1}{2x} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) = 1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \cdots$$

令  $x = \frac{1}{2}$ , 得

$$1 + \frac{1}{3} \frac{1}{2^2} + \frac{1}{5} \frac{1}{2^4} + \frac{1}{7} \frac{1}{2^6} + \cdots = \ln 3$$

因此

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{64} + \cdots = \ln 3 - 1$$

将两部分相加:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{1}{2r} + \frac{1}{2r+1} \right) \left( \frac{1}{4} \right)^r \right] = -\frac{1}{2} \ln \frac{3}{4} + \ln 3 - 1$$

化简得

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{1}{2r} + \frac{1}{2r+1} \right) \left( \frac{1}{4} \right)^r \right] = \frac{1}{2} \ln 12 - 1$$

13. a) 用适当的积分方法计算

$$\int_0^1 x^3 \arctan x \, dx$$

b) 求  $\arctan x$  的无穷级数展开, 并利用该展开验证 a) 的结果

a) 先用分部积分法取

$$u = \arctan x, \quad dv = x^3 \, dx$$

则

$$du = \frac{1}{1+x^2} \, dx, \quad v = \frac{x^4}{4}$$

于是

$$\int_0^1 x^3 \arctan x \, dx = \left[ \frac{x^4}{4} \arctan x \right]_0^1 - \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{x^4}{1+x^2} \, dx$$

边界项为

$$\left[ \frac{x^4}{4} \arctan x \right]_0^1 = \frac{\pi}{16}$$

化简被积函数

$$\frac{x^4}{1+x^2} = x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2}$$

因此

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^4}{1+x^2} dx &= \int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 1 dx + \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

代回得

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^3 \arctan x dx &= \frac{\pi}{16} - \frac{1}{4} \left( \frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \frac{1}{6}\end{aligned}$$

b) 由

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

两边积分得

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

代入积分

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^3 \arctan x dx &= \int_0^1 x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \int_0^1 x^{2n+4} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+5)}\end{aligned}$$

作部分分式分解

$$\frac{1}{(2n+1)(2n+5)} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+5} \right)$$

于是

$$\int_0^1 x^3 \arctan x dx = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+5} \right)$$

该级数为望远镜型, 化简得

$$= \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{6}$$

与 a) 的结果一致

14. 已知

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}, \quad 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \cdots = \frac{\pi^2}{12}, \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2.$$

在假设下列积分收敛的前提下, 求

$$\int_0^1 (\ln x)(\arctan x) dx$$

的精确值。

先利用反正切函数的幂级数展开。由

$$\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

逐项积分得

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

将其代入积分, 并交换求和与积分次序:

$$\int_0^1 (\arctan x)(\ln x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \int_0^1 x^{2n+1} \ln x dx.$$

对积分作分部积分, 取  $u = \ln x, dv = x^{2n+1}dx$ , 则

$$\int_0^1 x^{2n+1} \ln x dx = \left[ \frac{x^{2n+2} \ln x}{2n+2} \right]_0^1 - \frac{1}{2n+2} \int_0^1 x^{2n+1} dx.$$

端点项为零, 因此

$$\int_0^1 x^{2n+1} \ln x dx = -\frac{1}{(2n+2)^2}.$$

于是

$$\int_0^1 (\arctan x)(\ln x) dx = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)^2}.$$

对通项作部分分式分解:

$$\frac{1}{(2n+1)(2n+2)^2} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{(2n+2)^2}.$$

代回得

$$\int_0^1 (\arctan x)(\ln x) dx = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[ \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{(2n+2)^2} \right].$$

将其拆分为三个已知级数:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

因此

$$\int_0^1 (\arctan x)(\ln x) dx = -\left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{12}\right].$$

化简得

$$\int_0^1 (\arctan x)(\ln x) dx = \frac{\pi^2}{48} + \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2 - 12\pi + 24 \ln 2}{48}.$$

设

$$I(a) = \int_0^1 (\ln x) \arctan(ax) dx, \quad a \geqslant 0.$$

所求积分为  $I(1)$ 。

对参数  $a$  求导, 有

$$I'(a) = \int_0^1 (\ln x) \frac{x}{1+a^2x^2} dx.$$

交换积分顺序, 令  $u = ax$ , 得

$$I'(a) = \int_0^1 x \ln x \int_0^a \frac{du}{1+u^2x^2} dx.$$

改为先对  $x$  积分。注意到

$$\int_0^1 \frac{x \ln x}{1+u^2x^2} dx = -\frac{1}{2u^2} \ln(1+u^2),$$

因此

$$I'(a) = -\frac{1}{2} \int_0^a \frac{\ln(1+u^2)}{u^2} du.$$

对该积分作分部积分, 取  $U = \ln(1+u^2)$ ,  $dV = \frac{du}{u^2}$ , 则

$$I'(a) = -\frac{1}{2} \left[ -\frac{\ln(1+u^2)}{u} + \int_0^a \frac{2u}{1+u^2} \cdot \frac{1}{u} du \right].$$

化简得

$$I'(a) = \frac{1}{2} \frac{\ln(1+a^2)}{a} - \int_0^a \frac{du}{1+u^2}.$$

于是

$$I'(a) = \frac{1}{2} \frac{\ln(1+a^2)}{a} - \arctan a.$$

再对  $a$  从 0 积分到 1, 注意  $I(0) = 0$ , 得到

$$I(1) = \int_0^1 \left( \frac{1}{2} \frac{\ln(1+a^2)}{a} - \arctan a \right) da.$$

分项计算。首先

$$\int_0^1 \arctan a \, da = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2.$$

其次

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+a^2)}{a} da = \int_0^1 \int_0^{a^2} \frac{1}{a(1+t)} dt da = \int_0^1 \frac{1-a^2}{a(1+a^2)} da = \frac{\pi^2}{12}.$$

综上

$$I(1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{12} - \left( \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 \right).$$

因此

$$\int_0^1 (\ln x)(\arctan x) dx = \frac{\pi^2}{48} + \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2 - 12\pi + 24 \ln 2}{48}.$$

# 矩阵

1. 已知

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = (I + A)^{-1}(I - A),$$

求矩阵  $(I + B)^{-1}$ 。

由  $B = (I + A)^{-1}(I - A)$  可得

$$(I + A)B = I - A$$

两边加上  $I + A$  得

$$I + A + B + AB = (I + A)(I + B) = 2I$$

因此

$$(I + B)^{-1} = \frac{1}{2}(I + A) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

2. 已知

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

且联立方程

$$\begin{cases} ax + by = 5 \\ cx + dy = -3 \end{cases}$$

恰有一组解  $(x, y) = (1, 2)$ , 求联立方程

$$\begin{cases} pu + qv = 1 \\ ru + sv = 2 \end{cases}$$

的解  $(u, v)$ 。

已知

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

且

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

因此

$$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ -30 \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19 \\ -30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

故联立方程的解为

$$(u, v) = (19, -30)$$

3. 设三阶方阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{10} = \begin{bmatrix} 1 & ka & pa^2 + qb \\ 0 & 1 & ka \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

其中  $k, p, q$  为常数, 试求  $k + p + q$ 。

将  $A$  分解为  $A = I + B$ , 其中

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

注意到  $B^3 = 0$ , 且

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

由二项式定理,

$$A^{10} = (I + B)^{10} = \sum_{k=0}^{10} {}^{10}C_k B^k I^{10-k} = I + 10B + 45B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 10a & 45a^2 + 10b \\ 0 & 1 & 10a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

所以

$$k = 10, \quad p = 45, \quad q = 10 \quad \Rightarrow \quad k + p + q = 65.$$

4. 设实数  $a > b$ , 且有二阶方阵  $X, Y$  满足

$$X + Y = I, \quad XY = O,$$

其中

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

且

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = aX + bY,$$

求  $a, b$  的值。据此, 求  $X^{2025} - Y^{2025}$ 。

首先有

$$A = aX + bY = aX + b(I - X) = bI + (a - b)X,$$

故

$$X = \frac{A - bI}{a - b}, \quad Y = \frac{aI - A}{a - b}.$$

所以

$$XY = \frac{1}{(a - b)^2} (A - bI)(aI - A) = O,$$

即

$$\begin{bmatrix} 2 - b & 4 \\ 1 & -1 - b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a - 2 & -4 \\ -1 & a + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

得到方程组

$$\begin{cases} (2 - b)(a - 2) + 4(-1) = 0, \\ (2 - b)(-4) + 4(a + 1) = 0, \\ 1 \cdot (a - 2) + (-1 - b)(-1) = 0, \\ 1 \cdot (-4) + (-1 - b)(a + 1) = 0. \end{cases}$$

由  $a > b$ , 解得

$$a = 3, b = -2$$

因此

$$X = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = I - X = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

且发现  $X^2 = X, Y^2 = Y$ , 即  $X, Y$  是幂等矩阵, 故对任意正整数  $n$ ,

$$X^n = X, \quad Y^n = Y$$

因此

$$X^{2025} - Y^{2025} = X - Y = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

5. 设

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

满足

$$A + A^2 + \cdots + A^n = \begin{bmatrix} 2(3^n - 1) & a \\ b & c \end{bmatrix},$$

求  $b + c$ 。

发现

$$A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 12 & 12 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} = 3A,$$

于是对任意  $k \geq 1$  有  $A^k = 3^{k-1}A$ , 因此

$$A + \cdots + A^n = A \sum_{k=0}^{n-1} 3^k = \frac{3^n - 1}{2} A = \begin{bmatrix} 2(3^n - 1) & 2(3^n - 1) \\ \frac{1}{2}(1 - 3^n) & \frac{1}{2}(1 - 3^n) \end{bmatrix}$$

故

$$b + c = \frac{1}{2}(1 - 3^n) + \frac{1}{2}(1 - 3^n) = 1 - 3^n$$

又解: 对角化  $A$  可得

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \equiv PDP^{-1}$$

由  $A^n = PD^nP^{-1}$ ,

$$A + A^2 + \cdots + A^n = P(D + D^2 + \cdots + D^n)P^{-1}$$

$$= P \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 + 3^2 + \cdots + 3^n \end{bmatrix} P^{-1} = P \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{3^{n+1} - 3}{2} \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} 2(3^n - 1) & 2(3^n - 1) \\ \frac{1}{2}(1 - 3^n) & \frac{1}{2}(1 - 3^n) \end{bmatrix}$$

同上。

6. 设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -8 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}$$

满足

$$(I + A)^n = I + a_n A,$$

其中  $n$  为自然数,

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

且  $\{a_n\}$  为一个数列, 求  $a_n$  的通项公式。

求  $A$  的特征值:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 7 - \lambda & -8 \\ -7 & 8 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 15\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0, 15$$

设

$$f(\lambda) = (1 + \lambda)^n = (\lambda^2 - 15\lambda)p(\lambda) + a\lambda + b,$$

令  $\lambda = 0, 15$ , 解得

$$a = \frac{16^n - 1}{15}, \quad b = 1$$

由凯莱-哈密顿定理,

$$(I + A)^n = aA + bI = \frac{16^n - 1}{15}A + I \Rightarrow a_n = \frac{1}{15}(16^n - 1)$$

7. 设矩阵

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 9 & 7 \end{bmatrix},$$

求

$$A^{51} - A^{50} + A^3 - 3A^2 - 2A + 4I_2,$$

其中  $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。

发现

$$(A - I)^2 = \begin{bmatrix} -6 & -4 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = 2A - I$$

且考虑方程

$$\lambda^{50} = q(\lambda)(\lambda - 1)^2 + c_1\lambda + c_0 \quad (1)$$

对  $\lambda$  求导, 可得

$$50\lambda^{49} = q'(\lambda)(\lambda - 1)^2 + 2q(\lambda)(\lambda - 1) + c_1 \quad (2)$$

由 (1), (2), 代入  $\lambda = 1$  得

$$c_0 = -49, \quad c_1 = 50$$

由凯莱-哈密顿定理,

$$A^{50} = 50A - 49I$$

因此

$$A^{51} - A^{50} = (50A^2 - 49A) - (50A - 49I) = 100A - 50I - 99A - 49I = A - I$$

又

$$A^3 - 3A^2 - 2A + 4I = (A - I)^3 - 5(A - I) = -5(A - I)$$

故

$$A^{51} - A^{50} + A^3 - 3A^2 - 2A + 4I = -4(A - I) = \begin{bmatrix} 24 & 16 \\ -36 & -24 \end{bmatrix}$$

8. 已知

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}^{101} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

求  $a + b + c + d + e + f + g + h + i$ 。

设

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

解  $\det(A - \lambda I) = 0$ , 即

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda+1) = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \ (m=2), \ \lambda = -1$$

对于  $\lambda = 1$ , 解  $(A - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ :

$$A - I = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = -x_2 - x_3, \ x_2, \ x_3 \in \mathbb{R}$$

取两个线性无关解:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

对于  $\lambda = -1$ , 解  $(A + I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ :

$$A + I = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = x_3, \ x_2 = -x_3$$

取

$$\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

于是

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

现计算逆矩阵  $P^{-1}$ , 由  $|P| = 2$  得

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

于是

$$A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

所以

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^{\frac{1}{101}} & 0 & 0 \\ 0 & 1^{\frac{1}{101}} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{\frac{1}{101}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

恰好也是原矩阵, 因此

$$a + b + c + d + e + f + g + h + i = -3$$

9. 设  $A, B$  为  $n \times n$  实矩阵, 且满足

$$AB + A + B = 0,$$

证明  $AB = BA$ 。

注意到

$$(A + I)(B + I) = AB + A + B + I = I$$

其中  $I$  为单位矩阵, 因此  $A + I$  及  $B + I$  互为逆矩阵, 据此有

$$(A + I)(B + I) = (B + I)(A + I) = I$$

展开等式得到

$$AB + A + B + I = BA + B + A + I \Rightarrow AB = BA$$

10. 若  $n$  阶方阵  $A, B, A + B$  皆可逆, 证明  $A^{-1} + B^{-1}$  也是可逆矩阵。

需证明存在一个矩阵  $C$ , 使得

$$(A^{-1} + B^{-1})C = I$$

设

$$C = B(A + B)^{-1}A$$

下面验证该选择可行, 观察

$$\begin{aligned}
 (A^{-1} + B^{-1})C &= (A^{-1} + B^{-1})B(A + B)^{-1}A \\
 &= A^{-1}B(A + B)^{-1}A + (A + B)^{-1}A \\
 &= A^{-1}[(A + B) - A](A + B)^{-1}A + (A + B)^{-1}A \\
 &= [A^{-1}(A + B) - I](A + B)^{-1}A + (A + B)^{-1}A \\
 &= A^{-1}A - (A + B)^{-1}A + (A + B)^{-1}A \\
 &= I
 \end{aligned}$$

因此存在矩阵  $C = B(A + B)^{-1}A$  使得  $(A^{-1} + B^{-1})C = I$ , 从而  $A^{-1} + B^{-1}$  可逆, 其逆矩阵为

$$(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = B(A + B)^{-1}A.$$

11. 设  $A, B$  均为  $n$  阶方阵, 且  $I + AB$  可逆, 证明矩阵  $I + BA$  也可逆。

首先发现到

$$(I + BA)B = B + BAB = B(I + AB)$$

由此观察

$$\begin{aligned}
 &(I + BA)[I - B(I + AB)^{-1}A] \\
 &= I + BA - (I + BA)B(I + AB)^{-1}A \\
 &= I + BA - B(I + AB)(I + AB)^{-1}A \\
 &= I + BA - BA \\
 &= I
 \end{aligned}$$

故得证  $I + BA$  也可逆。

12. 设  $A, B, C$  为同阶实方阵, 且  $A$  可逆, 证明若

$$(A - B)C = BA^{-1},$$

则有

$$C(A - B) = A^{-1}B.$$

由假设

$$(A - B)C = BA^{-1}$$

在两边加上  $(A - B)A^{-1}$ , 得到

$$(A - B)C + (A - B)A^{-1} = BA^{-1} + (A - B)A^{-1} = I$$

于是由

$$(A - B)(C + A^{-1}) = I$$

知  $A + B$  可逆, 有

$$(C + A^{-1})(A - B) = I$$

展开即得到

$$C(A - B) = A^{-1}B$$

13. 对任意整数  $n \geq 2$ , 设  $A, B$  为两个  $n \times n$  实矩阵, 且满足

$$A^{-1} + B^{-1} = (A + B)^{-1}.$$

证明

$$\det A = \det B.$$

若  $A, B$  为复矩阵, 结论是否仍成立?

由条件

$$A^{-1} + B^{-1} = (A + B)^{-1}$$

有

$$I = (A + B)(A + B)^{-1} = (A + B)(A^{-1} + B^{-1}) = I + AB^{-1} + BA^{-1} + I$$

于是

$$AB^{-1} + BA^{-1} + I = 0$$

令  $X = AB^{-1}$ , 则  $A = XB$ , 且  $BA^{-1} = X^{-1}$ , 因此

$$X + X^{-1} + I = 0$$

于是

$$X^3 - I = (X - I)X(X + X^{-1} + I) = 0 \Rightarrow X^3 = I$$

取行列式可得

$$(\det X)^3 = \det(X^3) = \det I = 1$$

由于  $X$  为实矩阵, 故  $\det X = 1$ , 于是

$$\det A = \det(XB) = \det X \det B = \det B,$$

故得证。下面说明在复矩阵情形下结论不成立。设

$$\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \notin \mathbb{R}$$

其中  $\omega^3 = 1$ , 且有

$$1 + \omega + \omega^2 = 0.$$

取  $A = I$ , 且  $B$  为对角矩阵, 其对角元均取为  $\omega$  或  $\omega^2$  使得  $\det B \neq 1$  (若  $n$  不是 3 的倍数可直接取  $B = \omega I$ ), 此时

$$A^{-1} = I, \quad B^{-1} = \bar{B}$$

且

$$I + B + \bar{B} = 0$$

因此

$$(A + B)^{-1} = (-\bar{B})^{-1} = -B = I + \bar{B} = A^{-1} + B^{-1}$$

但由构造可知

$$\det A = 1 \neq \det B$$

14. 设  $A, B$  为  $n \times n$  实矩阵, 满足

$$A^2 + B^2 = AB.$$

证明若  $BA - AB$  为可逆矩阵, 则  $n$  能被 3 整除。

设  $S = A + \omega B$ , 其中  $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ , 则

$$S\bar{S} = (A + \omega B)(A + \bar{\omega}B) = A^2 + \omega BA + \bar{\omega}AB + B^2 = AB + \omega BA + \bar{\omega}AB$$

注意到  $\bar{\omega} + 1 = -\omega$ , 于是

$$S\bar{S} = \omega(BA - AB)$$

两边取行列式, 有

$$\det S \cdot \det \bar{S} = \det(\omega(BA - AB)) = \omega^n \det(BA - AB)$$

由于  $\det S \cdot \det \bar{S} \in \mathbb{R}$ , 且  $BA - AB$  可逆, 故  $\det(BA - AB) \neq 0$ , 从而  $\omega^n$  必须为实数, 因此  $n$  必须是 3 的倍数。

15. 求所有复数  $\lambda$ , 使得存在正整数  $n$  及实  $n \times n$  矩阵  $A$ , 满足

$$A^2 = A^T$$

且  $\lambda$  是  $A$  的一个特征值。

有

$$A^4 = (A^2)^2 = (A^T)^2 = (A^2)^T = (A^T)^T = A$$

所以

$$A^4 - A = 0$$

由此可知  $A$  的所有特征值都是多项式  $X^4 - X$  的根, 而  $X^4 - X = X(X^3 - 1)$  的根是

$$0, 1, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

考虑以下矩阵

$$A_0 = (0), \quad A_1 = (1), \quad A_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

0 和 1 分别是  $1 \times 1$  矩阵  $A_0$  和  $A_1$  的特征值,  $\frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$  是  $A_2$  的特征值, 不难看出

$$A_2^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = A_2^T$$

故矩阵  $A_4$  包含了所有四个可能特征值。

16. 已知  $A$  是  $4 \times 2$  实矩阵,  $B$  是  $2 \times 4$  实矩阵, 且

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

求  $BA$ 。

将矩阵分块成

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \end{pmatrix},$$

其中  $A_1, A_2, B_1, B_2$  为  $2 \times 2$  矩阵, 于是

$$AB = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 B_1 & A_1 B_2 \\ A_2 B_1 & A_2 B_2 \end{pmatrix}$$

比较得

$$A_1 B_1 = A_2 B_2 = I_2, \quad A_1 B_2 = A_2 B_1 = -I_2$$

即

$$B_1 = A_1^{-1}, \quad B_2 = -A_1^{-1}, \quad A_2 = -A_1$$

于是

$$BA = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = B_1 A_1 + B_2 A_2 = A_1^{-1} A_1 + (-A_1^{-1})(-A_1) = 2I_2$$

17. 已知

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

求  $A^n$ 。

将  $A$  分块为

$$A = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

注意到  $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$ , 所以可递推得

$$B^n = 4^{n-1} B$$

且由于  $\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = 0$ , 则

$$C^n = \left( 2I + \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^n = 2^n I + n 2^{n-1} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^n & 4n 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$$

因此

$$A^n = \begin{bmatrix} B^n & 0 \\ 0 & C^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 4^{n-1} & 4 \cdot 4^{n-1} & 0 & 0 \\ 1 \cdot 4^{n-1} & 2 \cdot 4^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & n2^{n+1} \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{2n-1} & 2^{2n+1} & 0 & 0 \\ 2^{2n-2} & 2^{2n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & n2^{n+1} \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix}$$

18. 设  $A$  和  $B$  是  $n \times n$  实矩阵, 且满足

$$\text{rank}(AB - BA + I) = 1,$$

其中  $I$  是  $n \times n$  单位矩阵。证明

$$\text{tr}(ABAB) - \text{tr}(A^2B^2) = \frac{1}{2}n(n-1).$$

令  $X = AB - BA$ , 注意到

$$\begin{aligned} \text{tr}(X^2) &= \text{tr}(ABAB - ABBA - BAAB + BABA) \\ &= 2\text{tr}(ABAB) - 2\text{tr}(A^2B^2), \end{aligned}$$

因为迹具有循环性。因此只需证明  $\text{tr}(X^2) = n(n-1)$ 。由假设,  $X + I$  的秩为 1, 所以

$$X + I = v^t w$$

其中  $v, w$  为向量, 于是

$$X^2 = (v^t w - I)^2 = I - 2v^t w + v^t w v^t w = I + (w v^t - 2)v^t w.$$

且有  $\text{tr}(X) = 0$ , 因此

$$w v^t = \text{tr}(w v^t) = \text{tr}(v^t w) = n$$

于是

$$\text{tr}(X^2) = n + (n-2)n = n(n-1)$$

即得证。

由于  $X + I$  的秩为 1, 它有特征值 0, 重数为  $n - 1$ 。因此  $X$  有特征值  $-1$ , 重数也为  $n - 1$ 。由于  $\text{tr}(X) = 0$ , 剩余的特征值只能为  $n - 1$ , 于是

$$\text{tr}(X^2) = (n - 1)^2 + (n - 1) \cdot 1^2 = n(n - 1)$$

同样得证。

19. 确定是否存在奇正整数  $n$  和具有整数元素的  $n \times n$  矩阵  $A, B$ , 满足以下条件:

- $\det(B) = 1$ ;
- $AB = BA$ ;
- $A^4 + 4A^2B^2 + 16B^4 = 2019I$

我们证明不存在这样的矩阵。注意到  $A^4 + 4A^2B^2 + 16B^4$  可以因式分解为

$$A^4 + 4A^2B^2 + 16B^4 = (A^2 + 2AB + 4B^2)(A^2 - 2AB + 4B^2)$$

令  $C = A^2 + 2AB + 4B^2, D = A^2 - 2AB + 4B^2$ , 则

$$\det C \cdot \det D = \det(CD) = \det(2019I) = 2019^n$$

矩阵  $C, D$  的元素皆为整数, 因此它们的行列式也为整数, 此外由  $C \equiv D \pmod{4}$  可知

$$\det C \equiv \det D \pmod{4}$$

这意味  $\det C \cdot \det D \equiv (\det C)^2 \pmod{4}$ , 但  $2019^n \equiv 3$  是模 4 的二次非剩余, 矛盾。

注意

$$A^4 \equiv A^4 + 4A^2B^2 + 16B^4 = 2019I \pmod{4}$$

所以

$$(\det A)^4 = \det A^4 \equiv \det(2019I) = 2019^n \pmod{4}.$$

但是  $2019^n \equiv 3$  是模 4 的二次非剩余, 矛盾。

20. 设  $A$  是  $n \times n$  实矩阵, 且

$$A^3 = 0$$

证明存在唯一的  $n \times n$  实矩阵  $X$  满足

$$X + AX + XA^2 = A,$$

且以  $A$  表示  $X$ 。

首先假设某个矩阵  $X$  满足该方程。如果我们在给定方程的左侧乘以  $A$  的某个幂, 右侧乘以  $A$  的另一个幂, 就可以得到新的方程。例如,

$$A^2(X + AX + XA^2)A^2 = A^2XA^2 + A^3 \cdot XA^2 + A^2XA \cdot A^3 = A^2XA^2.$$

所以

$$A^2XA^2 = A^2(X + AX + XA^2)A^2 = A^5 = 0$$

$$A^2X = A^2(X + AX + XA^2) = A^3 = 0$$

$$AXA = A(X + AX + XA^2)A = A^3 = 0$$

$$XA^2 = (X + AX + XA^2)A^2 = A^3 = 0$$

$$AX = A(X + AX + XA^2)A = A^2$$

$$X = A - AX - XA^2 = A - A^2$$

因此, 除  $A - A^2$  以外, 没有其他矩阵能满足该方程。注意上述论证并未证明矩阵  $X = A - A^2$  满足方程, 因为这些步骤不能逆推。事实上,

$$X + AX + XA^2 = (A - A^2) + A(A - A^2) + (A - A^2)A^2 = A - A^4 = A$$

因此,  $X = A - A^2$  是方程的唯一解。

我们使用另一种不同的方法来用  $A$  表示  $X$ 。如果存在某个矩阵  $X$  满足方程, 那么

$$X = A - AX - XA^2.$$

让我们在右侧反复代入此恒等式, 直到  $X$  在各处都被消去。注意到根据条件  $A^3 = 0$ , 我们

有  $A^3 = A^4 = A^5 = A^3X = XA^4 = AXA^4 = A^3XA^2 = 0$ , 所以

$$\begin{aligned}
 X &= A - AX - XA^2 \\
 &= A - A(A - AX - XA^2) - (A - AX - XA^2)A^2 \\
 &= A - (A^2 - A^2X - AXA^2) - (A^3 - AXA^2 - XA^4) \\
 &= A - A^2 + A^2X + 2AXA^2 \\
 &= A - A^2 + A^2(A - AX - XA^2) + 2A(A - AX - XA^2)A^2 \\
 &= A - A^2 + (A^3 - A^3X - A^2XA^2) + 2(A^4 - A^2XA^2 - AXA^4) \\
 &= A - A^2 - 3A^2XA^2 \\
 &= A - A^2 - 3A^2(A - AX - XA^2)A^2 \\
 &= A - A^2 - 3(A^5 - A^3XA^2 - A^2XA^4) \\
 &= A - A^2.
 \end{aligned}$$

同上, 仍需验证  $X = A - A^2$  确实是一个解, 这一步与解 1 相同。

设  $B = I - A + A^2$ , 使得  $B$  是  $I + A$  的逆矩阵。在左侧乘以  $B$ , 方程等价于

$$X + BXA^2 = BA. \quad (1)$$

现在假设  $X$  满足方程。在右侧乘以  $A^2$  并利用  $A^3 = 0$ , 我们得到  $XA^2 = 0$ 。因此方程简化为

$$X = BA = A - A^2$$

另一方面,  $X = BA$  显然满足 (1)。

21. 设  $A, B, C$  为  $n \times n$  复矩阵, 满足

$$A^2 = B^2 = C^2, \quad B^3 = ABC + 2I.$$

证明  $A^6 = I$ 。

发现到  $B^3 = A^2B$  可得

$$B^3 - ABC = A^2B - ABC = 2I \Rightarrow A(AB - BC) = 2I$$

同理由  $B^3 = BC^2$  可得

$$BC^2 - ABC = 2I \implies (BC - AB)C = 2I$$

这说明  $A$  是  $\frac{AB - BC}{2}$  的左逆矩阵, 而  $-C$  是右逆矩阵, 所以  $A = -C$ 。因此

$$ABA = 2I - B^3$$

于是  $ABA$  与  $B$  交换, 由此得

$$(AB)^2 = (BA)^2$$

而

$$\begin{aligned}(AB - BA)(AB + BA) &= (AB)^2 + AB^2A - BA^2B - (BA)^2 \\ &= (AB)^2 + A^4 - B^4 - (AB)^2 = 0\end{aligned}$$

又因为  $AB - BC = AB + BA$  可逆, 故  $AB = BA$ , 于是  $ABA = A^2B = B^3$ , 由此得

$$B^3 = I \Rightarrow A^6 = B^6 = (B^3)^2 = I^2 = I$$

22. 设  $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$ , 且  $A = ab^T$ ,  $B = ba^T$ , 解矩阵方程

$$2B^2A^2X = A^4X + B^4X + c$$

(题目有误, 不符合矩阵乘法定义)

# 行列式

1. 若  $a + b + c = x + y + z = 0$ , 求行列式

$$\begin{vmatrix} xa & yb & zc \\ yc & za & xb \\ zb & xc & ya \end{vmatrix}$$

展开行列式得

$$\begin{vmatrix} xa & yb & zc \\ yc & za & xb \\ zb & xc & ya \end{vmatrix} = xyz(a^3 + b^3 + c^3) + abc(x^3 + y^3 + z^3)$$

由于

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 0$$

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 0$$

故

$$\begin{vmatrix} xa & yb & zc \\ yc & za & xb \\ zb & xc & ya \end{vmatrix} = xyz(3abc) - abc(3xyz) = 0$$

2. 计算行列式

$$\begin{vmatrix} \log a & \log b & \log \frac{1}{ab} \\ \log b & \log c & \log \frac{1}{bc} \\ \log c & \log a & \log \frac{1}{ca} \end{vmatrix}$$

令

$$D = \begin{vmatrix} \log a & \log b & \log \frac{1}{ab} \\ \log b & \log c & \log \frac{1}{bc} \\ \log c & \log a & \log \frac{1}{ca} \end{vmatrix}$$

化为

$$D = \begin{vmatrix} \log a & \log b & -\log a - \log b \\ \log b & \log c & -\log b - \log c \\ \log c & \log a & -\log c - \log a \end{vmatrix}$$

进行列变换  $C_3 \leftarrow C_3 - C_1 - C_2$ , 得到

$$D = \begin{vmatrix} \log a & \log b & 0 \\ \log b & \log c & 0 \\ \log c & \log a & 0 \end{vmatrix} = 0$$

3. 若  $m$  为正整数, 求行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ {}^m C_1 & {}^{m+1} C_1 & {}^{m+2} C_1 \\ {}^m C_2 & {}^{m+1} C_2 & {}^{m+2} C_2 \end{vmatrix}$$

令

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ {}^m C_1 & {}^{m+1} C_1 & {}^{m+2} C_1 \\ {}^m C_2 & {}^{m+1} C_2 & {}^{m+2} C_2 \end{vmatrix}$$

由性质  ${}^{n-1} C_{k-1} + {}^{n-1} C_k = {}^n C_k$ , 有

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ {}^m C_1 & {}^{m+1} C_1 & {}^{m+1} C_0 + {}^{m+1} C_1 \\ {}^m C_2 & {}^{m+1} C_2 & {}^{m+1} C_1 + {}^{m+1} C_2 \end{vmatrix}$$

进行列变换  $C_3 \rightarrow C_3 - C_2$ ,

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ {}^m C_1 & {}^{m+1} C_1 & {}^{m+1} C_0 \\ {}^m C_2 & {}^{m+1} C_2 & {}^{m+1} C_1 \end{vmatrix}$$

再由性质  ${}^{n-1} C_{k-1} + {}^{n-1} C_k = {}^n C_k$ ,

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ {}^m C_1 & {}^m C_0 + {}^m C_1 & {}^{m+1} C_0 \\ {}^m C_2 & {}^m C_1 + {}^m C_2 & {}^{m+1} C_1 \end{vmatrix}$$

进行列变换  $C_2 \rightarrow C_2 - C_1$ ,

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ {}^m C_1 & {}^m C_0 & {}^{m+1} C_0 \\ {}^m C_2 & {}^m C_1 & {}^{m+1} C_1 \end{vmatrix}$$

按第一行展开得

$$D = {}^m C_0 {}^{m+1} C_1 - {}^m C_1 {}^{m+1} C_0 = 1 \cdot (m+1) - m \cdot 1 = 1$$

4. 已知  $A, B, C$  为  $\triangle ABC$  的内角, 求

$$\begin{vmatrix} \tan A & 1 & 1 \\ 1 & \tan B & 1 \\ 1 & 1 & \tan C \end{vmatrix}$$

令

$$D = \begin{vmatrix} \tan A & 1 & 1 \\ 1 & \tan B & 1 \\ 1 & 1 & \tan C \end{vmatrix}$$

展开行列式:

$$D = \tan A \tan B \tan C - (\tan A + \tan B + \tan C) + 2$$

由于  $A + B + C = \pi$ , 有

$$\tan(A + B) = \tan(\pi - C) = -\tan C$$

又

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

因此可得

$$\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} \Rightarrow \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$$

故得到

$$D = 2$$

5. 计算行列式

$$\begin{vmatrix} \tan 40^\circ & \tan 10^\circ & \tan 50^\circ \\ \tan 20^\circ & \tan 50^\circ & \tan 70^\circ \\ \tan 10^\circ & \tan 70^\circ & \tan 80^\circ \end{vmatrix}$$

令

$$D = \begin{vmatrix} \tan 40^\circ & \tan 10^\circ & \tan 50^\circ \\ \tan 20^\circ & \tan 50^\circ & \tan 70^\circ \\ \tan 10^\circ & \tan 70^\circ & \tan 80^\circ \end{vmatrix}$$

进行列变换  $C_3 \rightarrow -C_1 - C_2 + C_3$ ,

$$D = \begin{vmatrix} \tan 40^\circ & \tan 10^\circ & -\tan 10^\circ - \tan 40^\circ + \tan 50^\circ \\ \tan 20^\circ & \tan 50^\circ & -\tan 20^\circ - \tan 50^\circ + \tan 70^\circ \\ \tan 10^\circ & \tan 70^\circ & -\tan 10^\circ - \tan 70^\circ + \tan 80^\circ \end{vmatrix}$$

由

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

可得

$$\tan A \tan B \tan(A+B) = \tan(A+B) - \tan A - \tan B$$

且若  $A+B=90^\circ$ , 则

$$\tan A \tan B = 1$$

因此

$$D = \begin{vmatrix} \tan 40^\circ & \tan 10^\circ & \tan 10^\circ \cdot \tan 40^\circ \cdot \tan 50^\circ \\ \tan 20^\circ & \tan 50^\circ & \tan 20^\circ \cdot \tan 50^\circ \cdot \tan 70^\circ \\ \tan 10^\circ & \tan 70^\circ & \tan 10^\circ \cdot \tan 70^\circ \cdot \tan 80^\circ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tan 40^\circ & \tan 10^\circ & \tan 10^\circ \\ \tan 20^\circ & \tan 50^\circ & \tan 50^\circ \\ \tan 10^\circ & \tan 70^\circ & \tan 70^\circ \end{vmatrix} = 0$$

6. 已知  $A, B, C$  为  $\triangle ABC$  的内角, 计算行列式

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & \cos A \\ b & b^2 & \cos B \\ c & c^2 & \cos C \end{vmatrix}$$

令

$$D = \begin{vmatrix} a & a^2 & \cos A \\ b & b^2 & \cos B \\ c & c^2 & \cos C \end{vmatrix}$$

由余弦定理,

$$D = \frac{1}{2abc} \begin{vmatrix} a & a^2 & a(b^2 + c^2 - a^2) \\ b & b^2 & b(a^2 + c^2 - b^2) \\ c & c^2 & c(a^2 + b^2 - c^2) \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & a & b^2 + c^2 - a^2 \\ 1 & b & a^2 + c^2 - b^2 \\ 1 & c & a^2 + b^2 - c^2 \end{vmatrix}$$

进行行变换  $R_2 \rightarrow R_2 - R_1, R_3 \rightarrow R_3 - R_1$

$$D = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & a & b^2 + c^2 - a^2 \\ 0 & b - a & 2a^2 - 2b^2 \\ 0 & c - a & 2a^2 - 2c^2 \end{vmatrix}$$

按  $C_1$  展开,

$$D = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} b - a & 2a^2 - 2b^2 \\ c - a & 2a^2 - 2c^2 \end{vmatrix} = -(b - a)(c - a) \begin{vmatrix} 1 & a + b \\ 1 & a + c \end{vmatrix} = (a - b)(a - c)(b - c)$$

7. 在坐标平面上, 设  $\triangle ABC$  经二阶方阵  $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  作线性变换后成  $\triangle A'B'C'$ 。若  $\triangle ABC$  的面积为  $\Delta$ ,  $\triangle A'B'C'$  的面积为  $\Delta'$ , 试证

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \Delta$$

设  $A(x_a, y_a), B(x_b, y_b), C(x_c, y_c)$  经变换后为

$$A'(ax_a + by_a, cx_a + dy_a), B'(ax_b + by_b, cx_b + dy_b), C'(ax_c + by_c, cx_c + dy_c)$$

则

$$\Delta' = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} ax_a + by_a & cx_a + dy_a & 1 \\ ax_b + by_b & cx_b + dy_b & 1 \\ ax_c + by_c & cx_c + dy_c & 1 \end{vmatrix}$$

变为

$$\Delta' = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} ax_a & dy_a & 1 \\ ax_b & dy_b & 1 \\ ax_c & dy_c & 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} by_a & cx_a & 1 \\ by_b & cx_b & 1 \\ by_c & cx_c & 1 \end{vmatrix} + 0 + 0 = \frac{1}{2}(ad - bc) \begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \Delta$$

8. 求下列行列式的立方根:

$$\begin{vmatrix} -\frac{2019^2}{\sqrt[5]{80}} & \frac{2020^2}{\sqrt[5]{80^2}} & -\frac{2021^2}{\sqrt[5]{80^3}} \\ \frac{2022^2}{\sqrt[5]{80^4}} & -\frac{2023^2}{\sqrt[5]{80^5}} & \frac{2024^2}{\sqrt[5]{80^6}} \\ -\frac{2025^2}{\sqrt[5]{80^7}} & \frac{2026^2}{\sqrt[5]{80^8}} & -\frac{2027^2}{\sqrt[5]{80^9}} \end{vmatrix}$$

设  $a = 2019, r = -\frac{1}{\sqrt[5]{80}}$ , 原行列式为

$$D = \begin{vmatrix} a^2r & (a+1)^2r^2 & (a+2)^2r^3 \\ (a+3)^2r^4 & (a+4)^2r^5 & (a+5)^2r^6 \\ (a+6)^2r^7 & (a+7)^2r^8 & (a+8)^2r^9 \end{vmatrix}$$

进行列变换  $C_2 \rightarrow C_2 - C_1, C_3 \rightarrow C_3 - C_2$ ,

$$D = \begin{vmatrix} a^2r & (2a+1)r^2 & (2a+3)r^3 \\ (a+3)^2r^4 & (2a+7)r^5 & (2a+9)r^6 \\ (a+6)^2r^7 & (2a+13)r^8 & (2a+15)r^9 \end{vmatrix}$$

进行列变换  $C_3 \rightarrow C_3 - C_2$ ,

$$D = \begin{vmatrix} a^2r & (2a+1)r^2 & 2r^3 \\ (a+3)^2r^4 & (2a+7)r^5 & 2r^6 \\ (a+6)^2r^7 & (2a+13)r^8 & 2r^9 \end{vmatrix}$$

进行行变换  $R_3 \rightarrow R_3 - r^3R_2, R_2 \rightarrow R_2 - r^3R_1$

$$D = \begin{vmatrix} a^2r & (2a+1)r^2 & 2r^3 \\ (6a+9)r^4 & 6r^5 & 0 \\ (6a+27)r^7 & 6r^8 & 0 \end{vmatrix}$$

进行行变换  $R_3 \rightarrow R_3 - r^3R_2$ ,

$$D = \begin{vmatrix} a^2r & (2a+1)r^2 & 2r^3 \\ (6a+9)r^4 & 6r^5 & 0 \\ 18r^7 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

进行列变换  $C_1 \leftrightarrow C_3$ ,

$$D = - \begin{vmatrix} 2r^3 & (2a+1)r^2 & a^2r \\ 0 & 6r^5 & (6a+9)r^4 \\ 0 & 0 & 18r^7 \end{vmatrix} = -(2r^3)(6r^5)(18r^7) = -216r^{15} = \frac{216}{80^3}$$

故原行列式的立方根为  $\frac{3}{40}$

9. 若  $a^2 + b^2 + c^2 = 47$ , 求

$$\begin{vmatrix} a^2 - 1 & ab & ca \\ ab & b^2 - 1 & bc \\ ca & bc & c^2 - 1 \end{vmatrix}$$

令

$$D = \begin{vmatrix} a^2 - 1 & ab & ca \\ ab & b^2 - 1 & bc \\ ca & bc & c^2 - 1 \end{vmatrix}$$

进行行变换  $R_1 \rightarrow aR_1, R_2 \rightarrow bR_2, R_3 \rightarrow cR_3$ ,

$$D = \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} a(a^2 - 1) & a^2b & ca^2 \\ ab^2 & b(b^2 - 1) & b^2c \\ c^2a & bc^2 & c(c^2 - 1) \end{vmatrix}$$

进行列变换  $C_1 \rightarrow \frac{C_1}{a}, C_2 \rightarrow \frac{C_2}{b}, C_3 \rightarrow \frac{C_3}{c}$ ,

$$D = \begin{vmatrix} a^2 - 1 & a^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 - 1 & b^2 \\ c^2 & c^2 & c^2 - 1 \end{vmatrix}$$

进行行变换  $R_1 \rightarrow R_1 + R_2 + R_3$ ,

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a^2 + b^2 + c^2 - 1 & a^2 + b^2 + c^2 - 1 & a^2 + b^2 + c^2 - 1 \\ b^2 & b^2 - 1 & b^2 \\ c^2 & c^2 & c^2 - 1 \end{vmatrix} \\ &= (a^2 + b^2 + c^2 - 1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b^2 & b^2 - 1 & b^2 \\ c^2 & c^2 & c^2 - 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

进行列变换  $C_2 \rightarrow -C_1 + C_2, C_3 \rightarrow -C_1 + C_3$ ,

$$D = (a^2 + b^2 + c^2 - 1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b^2 & -1 & 0 \\ c^2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (47 - 1) \cdot 1 = 46$$

10. 证明

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

令

$$D = \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix}$$

进行列变换  $C_3 \rightarrow C_3 - C_2$ ,

$$D = \begin{vmatrix} b+c & c+a & b-c \\ q+r & r+p & q-r \\ y+z & z+x & y-z \end{vmatrix}$$

进行列变换  $C_1 \rightarrow C_1 - C_3$ ,

$$D = 2 \begin{vmatrix} b & c+a & b-c \\ q & r+p & q-r \\ y & z+x & y-z \end{vmatrix}$$

进行列变换  $C_3 \rightarrow C_3 - C_1$ ,

$$D = 2 \begin{vmatrix} b & c+a & -c \\ q & r+p & -r \\ y & z+x & -z \end{vmatrix}$$

进行列变换  $C_2 \rightarrow C_2 + C_3$ ,

$$D = 2 \begin{vmatrix} b & a & -c \\ q & p & -r \\ y & x & -z \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

故得证。

11. 证明

$$\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} = 4abc$$

令

$$D = \begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix}$$

进行行变换  $R_1 \rightarrow R_1 - R_2 - R_3$ ,

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -2c & -2b \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 0 & c & b \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix}$$

进行行变换  $R_2 \rightarrow R_2 - R_1, R_3 \rightarrow R_3 - R_1$ ,

$$D = -2 \begin{vmatrix} 0 & c & b \\ b & a & 0 \\ c & 0 & a \end{vmatrix} = -2(-2abc) = 4abc$$

12. 证明

$$\begin{vmatrix} a^2 & b^2 + c^2 & bc \\ b^2 & c^2 + a^2 & ca \\ c^2 & a^2 + b^2 & ab \end{vmatrix} = -(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2)$$

令

$$D = \begin{vmatrix} a^2 & b^2 + c^2 & bc \\ b^2 & c^2 + a^2 & ca \\ c^2 & a^2 + b^2 & ab \end{vmatrix}$$

进行行变换  $R_2 \rightarrow R_2 - R_1, R_3 \rightarrow R_3 - R_1$ ,

$$D = \begin{vmatrix} a^2 & b^2 + c^2 & bc \\ b^2 - a^2 & a^2 - b^2 & ca - bc \\ c^2 - a^2 & a^2 - c^2 & ab - bc \end{vmatrix}$$

化简得

$$D = \begin{vmatrix} a^2 & b^2 + c^2 & bc \\ (b+a)(b-a) & (a+b)(a-b) & c(a-b) \\ (c+a)(c-a) & (a+c)(a-c) & b(a-c) \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(a-c) \begin{vmatrix} a^2 & b^2 + c^2 & bc \\ -a-b & a+b & c \\ -a-c & a+c & b \end{vmatrix}$$

进行列变换  $C_1 \rightarrow C_1 + C_2$ ,

$$D = (a-b)(a-c) \begin{vmatrix} a^2 + b^2 + c^2 & b^2 + c^2 & bc \\ 0 & a+b & c \\ 0 & a+c & b \end{vmatrix}$$

按第一列展开得

$$D = (a-b)(a-c)(a^2 + b^2 + c^2)(ab + b^2 - ac - c^2)$$

$$= (a-b)(a-c)(a^2 + b^2 + c^2)(a(b-c) + (b+c)(b-c))$$

$$= -(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2)$$

13. 证明

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3$$

令

$$D = \begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

进行列变换  $C_2 \rightarrow C_2 - C_1$ ,  $C_3 \rightarrow C_3 - C_1$ , 得

$$D = \begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 - (b+c)^2 & a^2 - (b+c)^2 \\ b^2 & (c+a)^2 - b^2 & 0 \\ c^2 & 0 & (a+b)^2 - c^2 \end{vmatrix}$$

化简得

$$D = \begin{vmatrix} (b+c)^2 & (a+b+c)(a-b-c) & (a+b+c)(a-b-c) \\ b^2 & (a+b+c)(a-b+c) & 0 \\ c^2 & 0 & (a+b+c)(a+b-c) \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} (b+c)^2 & a-b-c & a-b-c \\ b^2 & a-b+c & 0 \\ c^2 & 0 & a+b-c \end{vmatrix}$$

进行行变换  $R_1 \rightarrow R_1 - R_2 - R_3$ , 得

$$D = (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} 2bc & -2c & -2b \\ b^2 & a-b+c & 0 \\ c^2 & 0 & a+b-c \end{vmatrix}$$

再进行列变换  $C_2 \rightarrow C_2 + \frac{1}{b}C_1$ ,  $C_3 \rightarrow C_3 + \frac{1}{c}C_1$ , 得

$$D = (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} 2bc & 0 & 0 \\ b^2 & a+c & \frac{b^2}{c} \\ c^2 & \frac{c^2}{b} & a+b \end{vmatrix}$$

按第一行展开行列式得

$$D = (a+b+c)^2 \cdot 2bc \left[ (a+c)(a+b) - \frac{b^2}{c} \cdot \frac{c^2}{b} \right]$$

$$= 2bc(a+b+c)^2 (a^2 + ab + ac + bc - bc)$$

$$= 2abc(a+b+c)^3$$

14. 证明

$$\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} = (a^3 + b^3) \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

令

$$D = \begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}$$

按  $C_1$  拆分

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} ax & ay+bz & az+bx \\ ay & az+bx & ax+by \\ az & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} by & ay+bz & az+bx \\ bz & az+bx & ax+by \\ bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} \\ &= a \begin{vmatrix} x & ay+bz & az+bx \\ y & az+bx & ax+by \\ z & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} y & ay+bz & az+bx \\ z & az+bx & ax+by \\ x & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} \end{aligned}$$

第一个行列式进行  $C_3 \rightarrow C_3 - bC_1$ , 第二个行列式进行  $C_2 \rightarrow C_2 - aC_1$  得

$$\begin{aligned} D &= a \begin{vmatrix} x & ay+bz & az \\ y & az+bx & ax \\ z & ax+by & ay \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} y & bz & az+bx \\ z & bx & ax+by \\ x & by & ay+bz \end{vmatrix} \\ &= a^2 \begin{vmatrix} x & ay+bz & z \\ y & az+bx & x \\ z & ax+by & y \end{vmatrix} + b^2 \begin{vmatrix} y & z & az+bx \\ z & x & ax+by \\ x & y & ay+bz \end{vmatrix} \end{aligned}$$

第一个行列式进行  $C_2 \rightarrow C_2 - bC_3$ , 第二个行列式进行  $C_3 \rightarrow C_3 - aC_2$  得

$$\begin{aligned} D &= a^2 \begin{vmatrix} x & ay & z \\ y & az & x \\ z & ax & y \end{vmatrix} + b^2 \begin{vmatrix} y & z & bx \\ z & x & by \\ x & y & bz \end{vmatrix} \\ &= (a^3 + b^3) \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} \end{aligned}$$

15. 证明

$$\begin{vmatrix} a+bx & c+dx & p+qx \\ ax+b & cx+d & px+q \\ u & v & w \end{vmatrix} = (1-x^2) \begin{vmatrix} a & c & p \\ b & d & q \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

令

$$D = \begin{vmatrix} a+bx & c+dx & p+qx \\ ax+b & cx+d & px+q \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

进行列行变换  $R_1 \rightarrow R_1 - R_2$ , 得

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a+bx-x(ax+b) & c+dx-x(cx+d) & p+qx-x(px+q) \\ ax+b & cx+d & px+q \\ u & v & w \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a-ax^2 & c-cx^2 & p-px^2 \\ ax+b & cx+d & px+q \\ u & v & w \end{vmatrix} \\ &= (1-x^2) \begin{vmatrix} a & c & p \\ ax+b & cx+d & px+q \\ u & v & w \end{vmatrix} \end{aligned}$$

按  $R_2$  拆分, 得

$$D = 0 + (1-x^2) \begin{vmatrix} a & c & p \\ b & d & q \\ u & v & w \end{vmatrix} = (1-x^2) \begin{vmatrix} a & c & p \\ b & d & q \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

16. 证明

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b & b^2 & ca \\ c & c^2 & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

令

$$D = \begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b & b^2 & ca \\ c & c^2 & ab \end{vmatrix}$$

将  $a, b, c$  分别乘入  $R_1, R_2, R_3$

$$D = \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} a^2 & a^3 & abc \\ b^2 & b^3 & abc \\ c^2 & c^3 & abc \end{vmatrix} = \frac{abc}{abc} \begin{vmatrix} a^2 & a^3 & 1 \\ b^2 & b^3 & 1 \\ c^2 & c^3 & 1 \end{vmatrix}$$

进行  $C_2 \leftrightarrow C_3$ , 再  $C_1 \leftrightarrow C_2$  得

$$D = - \begin{vmatrix} a^2 & 1 & a^3 \\ b^2 & 1 & b^3 \\ c^2 & 1 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

17. 证明

$$\begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & \cos(\alpha + \delta) \\ \sin \beta & \cos \beta & \cos(\beta + \delta) \\ \sin \gamma & \cos \gamma & \cos(\gamma + \delta) \end{vmatrix} = 0$$

令

$$D = \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & \cos(\alpha + \delta) \\ \sin \beta & \cos \beta & \cos(\beta + \delta) \\ \sin \gamma & \cos \gamma & \cos(\gamma + \delta) \end{vmatrix}$$

由三角公式  $\cos(\theta + \delta) = \cos \theta \cos \delta - \sin \theta \sin \delta$ , 将  $C_3$  展开得

$$D = \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & \cos(\alpha + \delta) \\ \sin \beta & \cos \beta & \cos(\beta + \delta) \\ \sin \gamma & \cos \gamma & \cos(\gamma + \delta) \end{vmatrix} = \cos \delta \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & \cos \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta & \cos \beta \\ \sin \gamma & \cos \gamma & \cos \gamma \end{vmatrix} - \sin \delta \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \gamma & \cos \gamma & \sin \gamma \end{vmatrix}$$

其中两个行列式都有两列成比例, 因此

$$D = 0$$

18. 证明

$$\begin{vmatrix} \cos^2 a & \sin a & \sin^2 a \\ -\cos 2a & \cos a - \sin a & \cos 2a \\ -\sin 2a - \cos 2a & 2 \cos a & 1 + \sin 2a + \cos 2a \end{vmatrix} = \sin a \cos a (\cos a - \sin a)$$

令

$$D = \begin{vmatrix} \cos^2 a & \sin a & \sin^2 a \\ -\cos 2a & \cos a - \sin a & \cos 2a \\ -\sin 2a - \cos 2a & 2\cos a & 1 + \sin 2a + \cos 2a \end{vmatrix}$$

进行列变换  $C_1 \rightarrow C_1 - C_3$ ,

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \sin a & \sin^2 a \\ 0 & \cos a - \sin a & \cos 2a \\ 1 & 2\cos a & 1 + \sin 2a + \cos 2a \end{vmatrix}$$

进行行变换  $R_3 \rightarrow R_3 - R_2$ ,

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \sin a & \sin^2 a \\ 0 & \cos a - \sin a & \cos 2a \\ 1 & \cos a + \sin a & 1 + \sin 2a \end{vmatrix}$$

进行行变换  $R_2 \rightarrow R_2 + R_1$ , 化为一范德蒙行列式,

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \sin a & \sin^2 a \\ 1 & \cos a & \cos^2 a \\ 1 & \cos a + \sin a & (\cos a + \sin a)^2 \end{vmatrix} = \sin a \cos a (\cos a - \sin a)$$

19. 证明

$$\begin{vmatrix} x-1 & x-2 & x-3 & x-4 \\ x^2-1 & x^2-2^2 & x^2-3^2 & x^2-4^2 \\ x^3-1 & x^3-2^3 & x^3-3^3 & x^3-4^3 \\ x^4-1 & x^4-2^4 & x^4-3^4 & x^4-4^4 \end{vmatrix} = 12(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

令

$$D = \begin{vmatrix} x-1 & x-2 & x-3 & x-4 \\ x^2-1 & x^2-2^2 & x^2-3^2 & x^2-4^2 \\ x^3-1 & x^3-2^3 & x^3-3^3 & x^3-4^3 \\ x^4-1 & x^4-2^4 & x^4-3^4 & x^4-4^4 \end{vmatrix}$$

提取公因式得  $D = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)M$ , 其中

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ x+1 & x+2 & x+3 & x+4 \\ x^2+x+1 & x^2+2x+2^2 & x^2+3x+3^2 & x^2+4x+4^2 \\ x^3+x^2+x+1 & x^3+2x^2+2^2x+2^3 & x^3+3x^2+3^2x+3^3 & x^3+4x^2+4^2x+4^3 \end{vmatrix}$$

依次进行行变换  $R_4 \rightarrow R_4 - xR_3, R_3 \rightarrow R_3 - xR_2, R_2 \rightarrow R_2 - xR_1$ ,

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1^3 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \\ 1^4 & 2^4 & 3^4 & 4^4 \end{vmatrix}$$

是一范德蒙行列式,

$$M = \prod_{1 \leq i < j \leq 4} (j-i) = (2-1)(3-1)(3-2)(4-1)(4-2)(4-3) = 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 12$$

于是得证

$$D = 12(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

20. 设  $V_n$  为  $n$  阶范德蒙行列式, 定义如下:

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

证明

$$V_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

设

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \dots & x_{n-1}^{n-1} \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

进行行变换  $R_2 \rightarrow R_2 - R_1, R_3 \rightarrow R_3 - R_1, \dots, R_n \rightarrow R_n - R_1$ , 得

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & \dots & x_2^{n-2} - x_1^{n-2} & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ 0 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1^2 & \dots & x_3^{n-2} - x_1^{n-2} & x_3^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & x_{n-1} - x_1 & x_{n-1}^2 - x_1^2 & \dots & x_{n-1}^{n-2} - x_1^{n-2} & x_{n-1}^{n-1} - x_1^{n-1} \\ 0 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_1^2 & \dots & x_n^{n-2} - x_1^{n-2} & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix}$$

进行列变换  $C_2 \rightarrow C_2 - C_1, C_3 \rightarrow C_3 - C_2, \dots, C_n \rightarrow C_n - C_{n-1}$ , 得

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x_2 - x_1 & (x_2 - x_1)x_2 & \dots & (x_2 - x_1)x_2^{n-3} & (x_2 - x_1)x_2^{n-2} \\ 0 & x_3 - x_1 & (x_3 - x_1)x_3 & \dots & (x_3 - x_1)x_3^{n-3} & (x_3 - x_1)x_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & x_{n-1} - x_1 & (x_{n-1} - x_1)x_{n-1} & \dots & (x_{n-1} - x_1)x_{n-1}^{n-3} & (x_{n-1} - x_1)x_{n-1}^{n-2} \\ 0 & x_n - x_1 & (x_n - x_1)x_n & \dots & (x_n - x_1)x_n^{n-3} & (x_n - x_1)x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

提取公因式,

$$V_n = \prod_{k=2}^n (x_k - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-3} & x_2^{n-2} \\ 0 & 1 & x_3 & \dots & x_3^{n-3} & x_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & x_{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-3} & x_{n-1}^{n-2} \\ 0 & 1 & x_n & \dots & x_n^{n-3} & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

按  $R_1$  展开得

$$V_n = \prod_{k=2}^n (x_k - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-3} & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 & \dots & x_3^{n-3} & x_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-3} & x_{n-1}^{n-2} \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-3} & x_n^{n-2} \end{vmatrix} = \prod_{k=2}^n (x_k - x_1) V_{n-1}$$

依次递推得证

$$V_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

其中

$$V_2 = \begin{vmatrix} 1 & x_{n-1} \\ 1 & x_n \end{vmatrix} = x_n - x_{n-1}$$

21. 设

$$\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + kx_3 = 18 - 5k, \\ x_2 + 2x_3 = 2, \end{cases}$$

问  $k$  取何值时, 方程组无解、有唯一解、有无穷解? 在有无穷解时, 求全部解。

原方程组为  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , 其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} k & 1 & 1 \\ 3 & 2 & k \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 18 - 5k \\ 2 \end{bmatrix}.$$

解

$$\det(\mathbf{A}) = 4k - 3 - k^2 - 6 = -k^2 + 4k - 3 = 0$$

得  $k = 1, 3$ , 因此:

- 当  $k \neq 1, 3$  时,  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ , 方程组有唯一解;
- 当  $k = 1$  时, 代入方程组得:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 13, \\ x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

用第三式解出  $x_2 = 2 - 2x_3$ , 代入前两式得

$$x_1 + (2 - 2x_3) + x_3 = 5 \Rightarrow x_1 = 3 + x_3,$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 13 \Rightarrow 3(3 + x_3) + 2(2 - 2x_3) + x_3 = 13.$$

检验等式成立:

$$9 + 3x_3 + 4 - 4x_3 + x_3 = 13 \Rightarrow 13 = 13.$$

成立, 说明方程组有无穷多解, 设  $x_3 = \lambda$ , 则

$$x_1 = 3 + \lambda, \quad x_2 = 2 - 2\lambda, \quad x_3 = \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

• 当  $k = 3$  时, 代入原方程组得

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

由前两式相减得:

$$(3x_1 + 2x_2 + 3x_3) - (3x_1 + x_2 + x_3) = -2 \Rightarrow x_2 + 2x_3 = -2,$$

与第三式  $x_2 + 2x_3 = 2$  矛盾, 因此方程组无解。

22. 将帕斯卡三角形 (Pascal's Triangle) 写成如下无穷矩阵的形式:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & \dots \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 & \dots \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

其中第一行和第一列全部由 1 组成, 其他每个元素由其左侧元素与上方元素之和构成。对于每个正整数  $n$ , 令  $D_n$  表示由该阵列的前  $n$  行和前  $n$  列组成的  $n \times n$  矩阵。求  $D_n$  的行列式并证明你的结论。

对较小  $n$  值的直接计算表明, 对于所有  $n$ , 恒有  $\det(D_n) = 1$ 。

证明大纲:

对  $D_n$  按顺序执行以下初等行变换, 依次处理第  $n$  行至第 2 行:

1. 从第  $n$  行减去第  $n-1$  行;

2. 从第  $n-1$  行减去第  $n-2$  行;

...

$(n-1)$ . 从第 2 行减去第 1 行。

由于该阵列的构造满足  $a_{i,j} = a_{i-1,j} + a_{i,j-1}$ , 上述操作后,  $D_n$  的第  $i$  行第  $j$  列元素变为:

$$a'_{i,j} = a_{i,j} - a_{i-1,j} = a_{i,j-1}$$

这会将每一列向右“平移”一个位置, 并使第一列变为  $[1, 0, 0, \dots, 0]^T$ 。

对剩余的子矩阵重复此过程(即对第  $n$  行至第 3 行执行减法, 以此类推), 最终会将  $D_n$  转化为一个对角线元素均为 1 的上三角矩阵。由于上三角矩阵的行列式等于主对角线元素的乘积, 因此  $\det(D_n) = 1^n = 1$ 。

另一种方法(递推法): 在进行第一组行变换后, 按第一列进行余子式展开, 可以直接得到递推关系:

$$\det(D_n) = 1 \cdot \det(D_{n-1})$$

由于  $D_1 = [1]$  且  $\det(D_1) = 1$ , 通过数学归纳法可知  $\det(D_n) = 1$ 。

23. 证明

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix} = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$$

(待验证)

$$24. \text{ 求行列式 } D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & -n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -n & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -n & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

这是一个  $n \times n$  的行列式, 每一行有  $n-1$  个 1 和一个  $-n$ , 且  $-n$  分别出现在每行的不同列。设该行列式为  $D_n$ , 我们将其简化。

第一步: 行变换。

令第  $i$  行减去第  $n$  行,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , 则得到一个新行列式  $D'_n$ , 变换后前  $n-1$  行只有两个非零元素 ( $1-1=0, -n-1=-(n+1), 1-(-n)=n+1$  等等), 便于处理。

经此变换, 前  $n-1$  行在对角线上为  $n+1$ , 其余为 0。

第二步：观察结构。

经过上述行变换,  $D'_n$  为一个上三角矩阵, 其前  $n-1$  个对角元为  $n+1$ , 最后一行为原来的第  $n$  行, 未变动。

于是可得:

$$D_n = \begin{vmatrix} n+1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & n+1 & 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & n+1 & \cdots & 0 & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n+1 & a_{n-1} \\ -n & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

将该行列式按最后一列展开, 只需考虑对角线乘积 (因为其余部分为 0), 于是有:

$$D_n = (n+1)^{n-1} \cdot \text{余子式项}.$$

由于我们做了  $(n-1)$  次行变换, 每次减去第  $n$  行, 所以符号为  $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$  (由置换中逆序数判断)。

最终结果为:

$$D_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (n+1)^{n-1}.$$

(待验证)

25. 设  $M$  为一个任意  $3 \times 3$  矩阵, 其每个项  $m_{ij}$  均选自集合  $\{-1, 1\}$ , 记  $\det M$  为其行列式。证明  $|\det M| \leq 4$ 。

一个项为  $\pm 1$  的  $2 \times 2$  矩阵, 其行列式必然为 0 或  $\pm 2$ 。对  $3 \times 3$  的  $\det M$  按第一行进行余子式展开:

$$\det M = m_{11} \begin{vmatrix} m_{22} & m_{23} \\ m_{32} & m_{33} \end{vmatrix} - m_{12} \begin{vmatrix} m_{21} & m_{23} \\ m_{31} & m_{33} \end{vmatrix} + m_{13} \begin{vmatrix} m_{21} & m_{22} \\ m_{31} & m_{32} \end{vmatrix}$$

由于每个余子式都是偶数, 左侧的结果必然也是偶数。同时由上式可知  $|\det M|$  不可能超过 6。只有当所有余子式都不为 0 时才可能达到 6。但在由 1 和 -1 组成的  $2 \times 3$  矩阵中, 总能找到一个  $2 \times 2$  的子矩阵其行列式为 0。因此, 上述展开式中至少有一项为 0, 从而得出  $|\det M| \leq 4$ 。

26. 计算  $n \times n$  矩阵  $A = [a_{ij}]$  的行列式, 其中

$$a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{|i-j|}, & i \neq j, \\ 2, & i = j. \end{cases}$$

进行行变换  $R_1 \rightarrow R_1 + R_2, R_2 \rightarrow R_2 + R_3, \dots, R_{n-1} \rightarrow R_{n-1} + R_n$ , 有

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & +1 & \cdots & \pm 1 & \mp 1 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & \pm 1 & \mp 1 \\ +1 & -1 & 2 & \cdots & \pm 1 & \mp 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mp 1 & \pm 1 & \mp 1 & \cdots & 2 & -1 \\ \pm 1 & \mp 1 & \pm 1 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \pm 1 & \mp 1 & \pm 1 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

进行列变换  $C_2 \rightarrow C_2 - C_1, C_3 \rightarrow C_3 - C_2, \dots, C_n \rightarrow C_n - C_{n-1}$ , 得到

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n+1 \end{vmatrix} = n+1$$

27. 设对所有  $j = 0, \dots, n$  皆有

$$a_j = a_0 + jd,$$

其中  $a_0, d$  为实数, 令

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

计算  $\det(A)$ , 其中  $\det(A)$  表示  $A$  的行列式。

进行列变换  $C_{n+1} \rightarrow C_{n+1} + C_1$ , 得到

$$\det(A) = (a_0 + a_n) \det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_0 & a_1 & \cdots & 1 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

进行行变换  $R_{n+1} \rightarrow R_{n+1} - R_n, R_n \rightarrow R_n - R_{n-1}, \cdots R_2 \rightarrow R_2 - R_1$ , 得到

$$\det(A) = (a_0 + a_n) \det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & 1 \\ d & -d & -d & \cdots & 0 \\ d & d & -d & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d & d & d & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

按  $C_{n+1}$  展开得

$$\det(A) = (-1)^n (a_0 + a_n) \det \begin{pmatrix} d & -d & -d & \cdots & -d \\ d & d & -d & \cdots & -d \\ d & d & d & \cdots & -d \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d & d & d & \cdots & d \end{pmatrix}.$$

将上述矩阵的最后一行加至其他各行, 有

$$\det(A) = (-1)^n (a_0 + a_n) \det \begin{pmatrix} 2d & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2d & 2d & 0 & \cdots & 0 \\ 2d & 2d & 2d & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d & d & d & \cdots & d \end{pmatrix} = (-1)^n (a_0 + a_n) 2^{n-1} d^n$$

28. 已知  $n > 1$  是一个奇正整数, 设  $A = (a_{ij})_{i,j=1 \dots n}$  是一个  $n \times n$  矩阵, 其元素定义为:

$$a_{ij} = \begin{cases} 2 & , i = j \\ 1 & , i - j \equiv \pm 2 \pmod{n} \\ 0 & , \text{反之} \end{cases}$$

求  $\det A$ 。

注意到  $A = B^2$ , 其中矩阵  $B$  的元素定义为:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & i - j \equiv \pm 1 \pmod{n} \\ 0, & \text{反之} \end{cases}$$

计算  $\det B$ , 先按  $R_1$  展开行列式, 然后对得到的两项分别按  $C_1$  展开。

$$\begin{aligned} \det B &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & & & & 1 \\ 1 & 0 & 1 & & & \\ & 1 & 0 & 1 & & \\ & & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 0 & 1 \\ & & & & 1 & 0 & 1 \\ 1 & & & & & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & 0 & 1 & \\ & & & 1 & 0 & 1 \\ 1 & & & & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & & & \\ & 1 & 0 & 1 & & \\ & & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 0 & 1 \\ & & & & 1 & 0 \\ 1 & & & & & 1 \end{vmatrix} \\ &= - \left( \begin{vmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & 0 & 1 & \\ & & 1 & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ 1 & \ddots & \ddots & & \\ \ddots & 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & 1 & & \end{vmatrix} \right) + \left( \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{vmatrix} \right) \\ &= -(0-1) + (1-0) = 2 \end{aligned}$$

其中第二和第三个矩阵是下/上三角矩阵, 而第一个和第四个矩阵满足

$$R_1 - R_3 + R_5 - \cdots \pm R_{n-2} = (0)_{1 \times (n-2)},$$

故  $\det B = 2$ , 从而

$$\det A = (\det B)^2 = 4$$

# 复数

1. 已知  $i = \sqrt{-1}$ , 若

$$\frac{1}{i^{2025}} - \frac{2}{i^{2024}} + \frac{3}{i^{2023}} - \frac{4}{i^{2022}} + \cdots - \frac{2024}{i^2} + \frac{2025}{i} = a + bi$$

其中  $a, b$  为实数, 求  $a - b$ 。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{i^{2025}} - \frac{2}{i^{2024}} + \frac{3}{i^{2023}} - \frac{4}{i^{2022}} + \cdots - \frac{2024}{i^2} + \frac{2025}{i} \\ &= \frac{1}{i} - 2 - \frac{3}{i} + 4 + \frac{5}{i} - 6 - \frac{7}{i} + 8 + \cdots + 2024 + \frac{2025}{i} \\ &= \frac{1}{i} (1 + 5 + \cdots + 2025) - (2 + 6 + \cdots + 2022) - \frac{1}{i} (3 + 7 + \cdots + 2023) + (4 + 8 + \cdots + 2024) \\ &= \frac{1}{i} \cdot \frac{2026 \cdot 507}{2} - \frac{2024 \cdot 506}{2} - \frac{1}{i} \cdot \frac{2026 \cdot 506}{2} + \frac{2028 \cdot 506}{2} \\ &= \frac{1013}{i} + 1012 \\ &= 1012 - 1013i \quad \Rightarrow \quad a - b = 2025 \end{aligned}$$

2. 设  $z$  是 1 的七次方根, 且  $z \neq 1$ , 试求  $z + z^2 + z^4$  的值。

发现

$$z^7 = 1 \Rightarrow 1 + z + \cdots + z^6 = 0 \Rightarrow z + z^2 + \cdots + z^6 = -1$$

设  $\alpha = z + z^2 + z^4, \beta = z^3 + z^5 + z^6$ , 则

$$\alpha + \beta = z + z^2 + \cdots + z^6 = -1$$

又

$$\alpha\beta = (z + z^2 + z^4)(z^3 + z^5 + z^6) = z^4(1 + z + z^2 + \cdots + z^6 + 2z^3) = z^4(0 + 2z^3) = 2z^7 = 2$$

因此  $\alpha, \beta$  是方程  $x^2 + x + 2 = 0$  的两根, 解得

$$\alpha = z + z^2 + z^4 = \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$$

3. 若  $z \in \mathbb{C}$  满足  $z + \frac{1}{z} = \sqrt{3}$ , 求  $z^{2025} + \frac{1}{z^{2025}}$  的值。

先求  $z$ ,

$$z + \frac{1}{z} = \sqrt{3} \Rightarrow z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0 \Rightarrow z = \frac{\sqrt{3} + i}{2} = e^{\frac{\pi i}{6}}$$

于是

$$z^{2025} = e^{\frac{2025\pi i}{6}} = e^{\frac{3\pi i}{2}} = -i \Rightarrow z^{2025} + \frac{1}{z^{2025}} = -i + \frac{1}{-i} = 0$$

4. 求

$$\left( \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}i \right)^6$$

观察

$$\left( \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}i \right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \cos 30^\circ + i \sin 30^\circ.$$

由棣莫弗定理, 原式为

$$(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)^3 = \cos 90^\circ + i \sin 90^\circ = i.$$

5. 已知  $a, b, c \in \mathbb{C}$ , 且  $a + b + c = a^2 + b^2 + c^2 = 3, a^3 + b^3 + c^3 = 6$ , 试求

$$(a-1)^{2023} + (b-1)^{2023} + (c-1)^{2023}$$

的值。

由

$$3 = 3^2 - 2(ab + bc + ca), \quad 6 - 3abc = 3(3 - 3)$$

解得

$$ab + bc + ca = 3, abc = 2$$

因此  $a, b, c$  是方程

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 2 = 0$$

即

$$(x-1)^3 = 1$$

的根, 因此

$$a-1, b-1, c-1 \in \{1, \omega, \omega^2\}, \omega = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

不失一般性,

$$(a-1)^{2023} + (b-1)^{2023} + (c-1)^{2023} = 1^{2023} + \omega^{2023} + (\omega^2)^{2023} = 1 + \omega + \omega^2 = 0$$

6. 证明

$$1 + 2i + 3i^2 + 4i^3 + \cdots + (4n+1)i^{4n} = (2n+1) - 2ni, \quad n \in \mathbb{N}.$$

设

$$S = 1 + 2i + 3i^2 + 4i^3 + \cdots + (4n+1)i^{4n}$$

则

$$iS = i + 2i^2 + 3i^3 + 4i^4 + \cdots + (4n)i^{4n} + (4n+1)i^{4n+1}$$

两式相减得

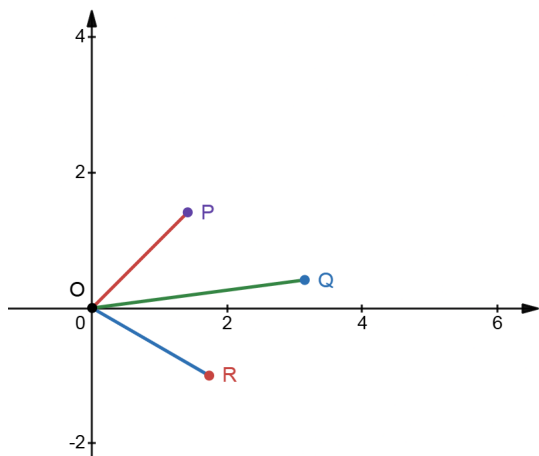
$$\begin{aligned} (1-i)S &= 1 + i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{4n} - (4n+1)i^{4n+1} \\ &= \frac{i^{4n+1} - 1}{i - 1} - (4n+1)i = 1 - (4n+1)i \end{aligned}$$

故

$$S = \frac{(1 - (4n+1)i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = (2n+1) - 2ni$$

7. 考虑复平面作图  $z = \sqrt{2}(1+i)$ ,  $w = \sqrt{3} - i$ , 证

$$\tan \frac{\pi}{24} = \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2$$



如图作  $z = \sqrt{2}(1 + i)$ ,  $w = \sqrt{3} - i$ , 则

$$\arg(z) = \arctan \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}, \arg(w) = \arctan \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\frac{\pi}{6}$$

于是

$$\begin{aligned} \arg(z + w) &= \angle QOR - |\arg w| \\ &= \frac{1}{2} \angle POR - |\arg w| \\ &= \frac{1}{2} (\angle POQ + |\arg w|) - |\arg w| \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{24} \end{aligned}$$

又  $z + w = \sqrt{2} + \sqrt{3} + (\sqrt{2} - 1)i$ , 所以有

$$\tan \frac{\pi}{24} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2$$

8. 复平面上有三点  $P, Q, R$  对应三个复数  $z_1, z_2, z_3$ , 且  $|z_1| = \sqrt{2}, |z_2| = \sqrt{5}, |z_3| = 3$ 。若原点  $O$  为  $\triangle PQR$  的重心, 求  $\Re(\overline{z_1}z_2)$ 。

设

$$z_1 = a_1 + b_1i, \quad z_2 = a_2 + b_2i, \quad z_3 = a_3 + b_3i$$

由于点  $P, Q, R$  的重心在原点, 故有

$$a_1 + a_2 + a_3 = 0, \quad b_1 + b_2 + b_3 = 0$$

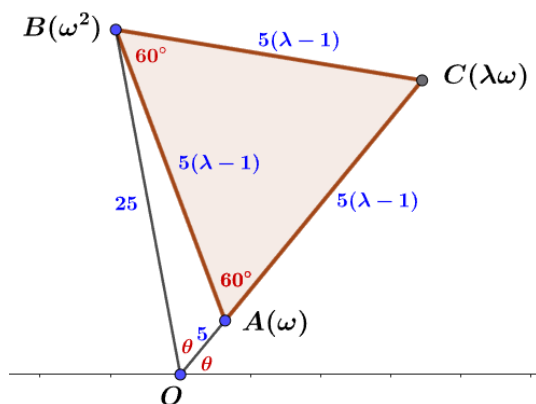
且  $a_1^2 + b_1^2 = 2, a_2^2 + b_2^2 = 5, a_3^2 + b_3^2 = 9$ , 又因为  $a_3 = -a_1 - a_2, b_3 = -b_1 - b_2$ ,

$$\begin{aligned} a_3^2 + b_3^2 &= (a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 \\ &= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 + b_1^2 + b_2^2 + 2b_1b_2 \\ &= 7 + 2(a_1a_2 + b_1b_2) = 9 \end{aligned}$$

故

$$\Re(\overline{z_1}z_2) = a_1a_2 + b_1b_2 = 1$$

9. 设  $\omega$  为复数, 且  $|\omega| = 5$ 。存在一正实数  $\lambda > 1$ , 使得  $\omega, \omega^2, \lambda\omega$  这三个复数在复平面上构成一个正三角形, 试求  $\lambda$  的值。



设  $O(0,0), A(\omega), B(\omega^2), C(\lambda\omega)$ , 则

$$OA = |\omega| = 5$$

$$OB = |\omega^2| = |\omega|^2 = 25$$

$$AB = AC = |\lambda\omega - \omega| = 5(\lambda - 1)$$

又由于  $\triangle ABC$  是正三角形, 因此

$$\angle OAB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

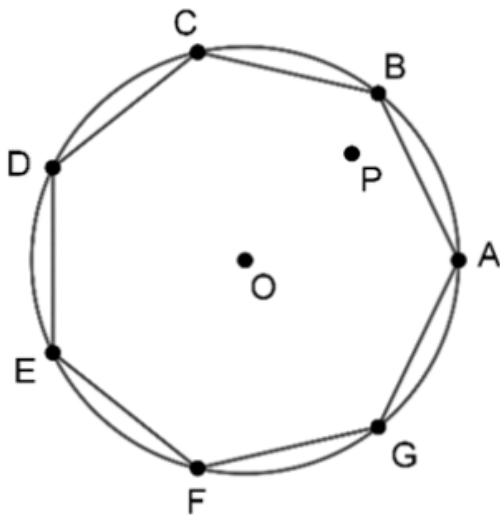
在  $\triangle OAB$  中, 由余弦定理,

$$\cos \angle OAB = \frac{OA^2 + AB^2 - OB^2}{2 \cdot OA \cdot AB} = \frac{5^2 + (5(\lambda - 1))^2 - 25^2}{2 \cdot 5 \cdot 5(\lambda - 1)} = -\frac{1}{2}$$

解得

$$\lambda = \frac{1 + \sqrt{97}}{2} > 1$$

10. 如图, 在坐标平面上有一个半径为 2 的圆, 其圆心  $O$  为原点, 且正七边形  $ABCDEFG$  内接于此圆。若  $A(2, 0), P(1, 1)$ , 求  $\overline{PA} \cdot \overline{PB} \cdot \overline{PC} \cdot \overline{PD} \cdot \overline{PE} \cdot \overline{PF} \cdot \overline{PG}$ 。



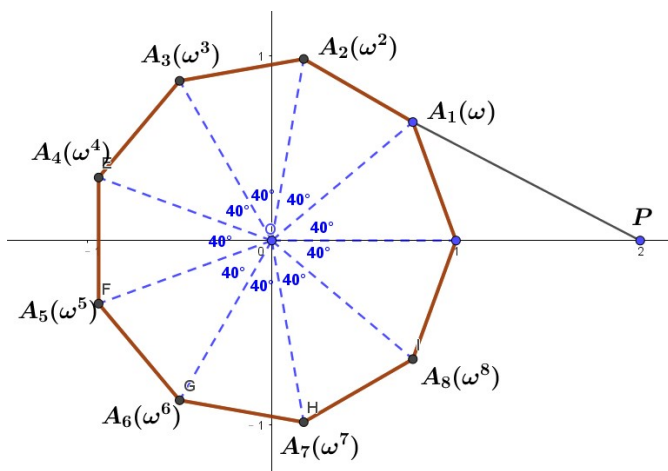
设  $x^7 = 2^7$  的七根分别为  $2, \omega, \omega^2, \dots, \omega^6$ , 其中  $\omega = 2e^{\frac{2\pi i}{7}}$ , 则

$$f(x) = x^7 - 2^7 = (x - 2)(x - \omega)(x - \omega^2) \cdots (x - \omega^6)$$

令  $x = 1 + i$ , 可得

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} \cdot \overline{PC} \cdot \overline{PD} \cdot \overline{PE} \cdot \overline{PF} \cdot \overline{PG} = |f(1 + i)| = |(1 + i)^7 - 2^7| = |2i(1 + i) - 128| = 8\sqrt{226}$$

11. 已知  $\omega = \cos \frac{2\pi}{9} + i \sin \frac{2\pi}{9}$ , 求  $|2 - \omega|^2 + |2 - \omega^2|^2 + \cdots + |2 - \omega^8|^2$ 。



即求点  $P(2, 0)$  至单位圆上正九边形各顶点距离的平方和:

$$|2 - \omega|^2 + |2 - \omega^2|^2 + \cdots + |2 - \omega^8|^2 = \sum_{n=1}^8 A_n P^2$$

在  $\triangle OA_n P$  中, 由余弦定理,

$$A_n P^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cos \angle A_n O P = 5 - 4 \cos(40^\circ \cdot n)$$

于是

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^8 A_n P^2 &= \sum_{n=1}^8 (5 - 4 \cos(40^\circ \cdot n)) \\ &= 40 - 4(\cos 40^\circ + \cos 80^\circ + \cdots + \cos 320^\circ) \\ &= 40 - 8(\cos 40^\circ + \cos 80^\circ + \cos 120^\circ + \cos 160^\circ) \\ &= 40 - 8 \left( 2 \cos 60^\circ \cos 20^\circ - \frac{1}{2} + \cos 160^\circ \right) \\ &= 40 - 8 \left( \cos 20^\circ + \cos 160^\circ - \frac{1}{2} \right) \\ &= 40 - 8 \left( 2 \cos 90^\circ \cos 70^\circ - \frac{1}{2} \right) \\ &= 40 - 8 \left( -\frac{1}{2} \right) = 44 \end{aligned}$$

12.  $\omega^{503} = 1$ ,  $\omega \neq 1$ , 求

$$\frac{\omega^2}{\omega - 1} + \frac{\omega^4}{\omega^2 - 1} + \frac{\omega^6}{\omega^3 - 1} + \cdots + \frac{\omega^{1004}}{\omega^{502} - 1}$$

由  $\omega^{503} = 1$  得

$$(1 - \omega)(1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{502}) = 0$$

所以

$$\sum_{k=0}^{502} \omega^k = 0$$

又

$$\frac{1}{\omega^k - 1} + \frac{1}{\omega^{503-k} - 1} = \frac{1}{\omega^k - 1} + \frac{1}{\omega^{-k} - 1} = \frac{1}{\omega^k - 1} + \frac{\omega^k}{1 - \omega^k} = -1$$

原式

$$= \sum_{k=1}^{502} \frac{\omega^{2k}}{\omega^k - 1} = \sum_{k=1}^{502} \left( \frac{\omega^{2k} - 1}{\omega^k - 1} + \frac{1}{\omega^k - 1} \right) = \sum_{k=1}^{502} \left( \omega^k + 1 + \frac{1}{\omega^k - 1} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= -1 + 502 + \sum_{k=1}^{502} \frac{1}{\omega^k - 1} \\
&= 501 + \left( \frac{1}{\omega - 1} + \frac{1}{\omega^{502} - 1} \right) + \left( \frac{1}{\omega^2 - 1} + \frac{1}{\omega^{501} - 1} \right) + \cdots + \left( \frac{1}{\omega^{251} - 1} + \frac{1}{\omega^{252} - 1} \right) \\
&= 501 + (-1) \times 251 = 250
\end{aligned}$$

13. 证明

$$|z + w|^2 - |z + \bar{w}|^2 = 4\Re(z)\Re(w)$$

设  $z = x + iy$ ,  $w = u + iv$ , 其中  $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ , 则

$$\begin{aligned}
|z + w|^2 - |z - \bar{w}|^2 &= |(x + iy) + (u + iv)|^2 - |(x + iy) - (u - iv)|^2 \\
&= |(x + u) + i(y + v)|^2 - |(x - u) + i(y + v)|^2 \\
&= (x + u)^2 + (y + v)^2 - (x - u)^2 - (y + v)^2 \\
&= 4xu \\
&= 4\Re(z)\Re(w)
\end{aligned}$$

又解:

$$\begin{aligned}
|z + w|^2 - |z - w|^2 &= (z + w)(\overline{z + w}) - (z - w)(\overline{z - w}) \\
&= (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) - (z - w)(\bar{z} - \bar{w}) \\
&= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} - (z\bar{z} - z\bar{w} - \bar{w}\bar{z} + w\bar{w}) \\
&= zw + z\bar{w} + w\bar{z} + \bar{w}\bar{z} \\
&= (z + \bar{z})(w + \bar{w}) \\
&= 2\Re(z) \cdot 2\Re(w) \\
&= 4\Re(z)\Re(w)
\end{aligned}$$

14. 已知  $z = \cos \theta + i \sin \theta$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ , 证明:

$$\frac{2}{1 + z} = 1 - i \tan \frac{\theta}{2}$$

运用各位三角恒等式化简

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{1+z} &= \frac{2}{1+\cos\theta+i\sin\theta} \\
 &= \frac{2(1+\cos\theta-i\sin\theta)}{(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta} \\
 &= \frac{2(1+\cos\theta-i\sin\theta)}{1+2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta} \\
 &= \frac{2(1+\cos\theta-i\sin\theta)}{2+2\cos\theta} \\
 &= \frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta} - i \cdot \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} \\
 &= 1 - i \cdot \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} \\
 &= 1 - i \tan\frac{\theta}{2}
 \end{aligned}$$

15. 设复数  $z$  满足  $|z|=1$  且  $z=e^{i\theta}$ , 求证

$$\Re\left[\frac{z(1-\bar{z})}{\bar{z}(1+z)}\right] = -2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

先将表达式化简,

$$\begin{aligned}
 \frac{z(1-\bar{z})}{\bar{z}(1+z)} &= \frac{z-|z|^2}{\bar{z}+|z|^2} \\
 &= \frac{e^{i\theta}-1}{e^{-i\theta}+1} \\
 &= \frac{(e^{i\theta}-1)(e^{i\theta}+1)}{(e^{-i\theta}+1)(e^{i\theta}+1)} \\
 &= \frac{e^{i2\theta}-1}{2+e^{i\theta}+e^{-i\theta}} \\
 &= \frac{e^{i\theta}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})}{2+2\cos\theta} \\
 &= \frac{e^{i\theta} \cdot 2i\sin\theta}{2(1+\cos\theta)} \\
 &= \frac{e^{i\theta} \cdot i\sin\theta}{1+\cos\theta}
 \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\Re \left[ \frac{z(1-\bar{z})}{\bar{z}(1+z)} \right] &= \Re \left[ \frac{e^{i\theta} \cdot i \sin \theta}{1 + \cos \theta} \right] = \frac{1}{1 + \cos \theta} \Re [i \sin \theta (\cos \theta + i \sin \theta)] \\&= \frac{1}{1 + \cos \theta} \Re [i \sin \theta \cos \theta - \sin^2 \theta] \\&= -\frac{\sin^2 \theta}{1 + \cos \theta} \\&= -\frac{(2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2})^2}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} \\&= -2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

16. 已知两个相异复数  $z_1, z_2$ , 且  $|z_1| = |z_2| \neq 0$ , 证明

$$\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$$

是纯虚数。

设  $w = \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$ , 欲证  $\bar{w} = -w$ , 因为  $|z_1| = |z_2| = r$ , 且  $z_1, z_2 \neq 0$ , 根据性质

$$\bar{z} = \frac{r^2}{z} \Rightarrow \bar{z}_1 = \frac{r^2}{z_1}, \quad \bar{z}_2 = \frac{r^2}{z_2}$$

因此

$$\bar{w} = \overline{\left( \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} \right)} = \frac{\bar{z}_1 + \bar{z}_2}{\bar{z}_1 - \bar{z}_2} = \frac{\frac{r^2}{z_1} + \frac{r^2}{z_2}}{\frac{r^2}{z_1} - \frac{r^2}{z_2}} = \frac{\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}}{\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2}} = \frac{z_2 + z_1}{z_2 - z_1} = -\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} = -w$$

17. 设复数  $z_1, z_2$  满足  $|z_1| = 2, |z_2| = 3, |z_1 + z_2| = 4$ , 求  $\frac{z_1}{z_2}$ 。

设  $w = \frac{z_1}{z_2}$ , 则  $z_1 = wz_2$ 。由

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1$$

代入已知得

$$z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1 = 3$$

将  $z_1 = wz_2$  代入得

$$wz_2 \cdot \overline{z_2} + z_2 \cdot \overline{wz_2} = w|z_2|^2 + \overline{w}|z_2|^2 = (w + \overline{w}) \cdot 9 = 3 \Rightarrow w + \overline{w} = \frac{1}{3}$$

设  $w = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$ , 则  $w + \overline{w} = 2x = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{6}$ ; 又因  $|w| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{2}{3}$ , 所以

$$|w|^2 = \frac{1}{36} + y^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{15}}{6} \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{6} \pm i \frac{\sqrt{15}}{6}$$

18. 若复数  $z$  使得  $\frac{z-3i}{z+i}$  为负实数,  $\frac{z-3}{z+1}$  为纯虚数, 求  $z$ 。

设  $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$ , 由于

$$\frac{z-3i}{z+i} = \frac{a+(b-3)i}{a+(b+1)i}$$

为负实数, 则

$$(a+(b-3)i)(a-(b+1)i) < 0$$

所以  $a^2 + (b-3)(b+1) < 0$  且  $-4a = 0$ , 即  $a = 0$  且  $b-3, b+1$  异号; 又此时

$$\frac{z-3}{z+1} = \frac{-3+bi}{1+bi}$$

为纯虚数, 故

$$\Re((-3+bi)(1-bi)) = b^2 - 3 = 0$$

又  $b-3, b+1$  异号知  $b = \sqrt{3}$ , 所以  $z = \sqrt{3}i$ 。

19. 已知虚数  $z$  使得  $z_1 = \frac{z}{1+z^2}$  和  $z_2 = \frac{z^2}{1+z}$  都是实数, 求  $z$ 。

由已知  $(z^2+1)z_1 = z, (1+z)z_2 = z^2$ , 联立两式

$$z = (z^2+1)z_1 = ((1+z)z_2+1)z_1$$

整理得

$$z_1 + z_1 z_2 = z(1 - z_1 z_2)$$

由于  $z$  为虚数,  $z_1 + z_1 z_2$  与  $1 - z_1 z_2$  为实数, 故

$$1 - z_1 z_2 = 0 \Rightarrow z_1 z_2 = 1$$

代入  $z_1 = \frac{z}{1+z^2}, z_2 = \frac{z^2}{1+z}$  得

$$z_1 z_2 = \frac{z}{1+z^2} \cdot \frac{z^2}{1+z} = \frac{z^3}{(1+z)(1+z^2)} = 1$$

给出

$$z^3 = (1+z)(1+z^2) \Rightarrow z^2 + z + 1 = 0$$

即

$$z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

20. 已知复数  $z \neq 0$ , 满足方程  $z^2 = z + i|z|$ , 求  $|z|$  的值。

设  $z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$ , 则

$$z^2 = z + i|z| \Rightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = x + i(y + \sqrt{x^2 + y^2})$$

比较实部与虚部得

$$x^2 - y^2 = x \tag{1}$$

$$2xy = y + \sqrt{x^2 + y^2} \tag{2}$$

将 (2) 移项并平方

$$y^2(2x-1)^2 = x^2 + y^2$$

由 (1) 得

$$(x^2 - x)(2x - 1)^2 = 2x^2 - x \Rightarrow x^2(2x - 3)(2x - 1) = 0$$

解得  $x = 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ , 其中  $x = 0$  不合理 ( $z \neq 0$ ), 且  $x = \frac{1}{2}$  不合理 ( $y^2 = -\frac{1}{4} < 0$ ), 故

$$x = \frac{3}{2}, y^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow |z| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}$$

21. 确定所有满足  $|a| = |b| = 1$  且  $a + b + a\bar{b} \in \mathbb{R}$  的复数对  $(a, b)$ 。

设  $a = e^{ix}, b = e^{iy}$ , 其中  $x, y \in [0, 2\pi)$ , 由欧拉公式,

$$\begin{aligned}\Im(a + b + \bar{a}\bar{b}) &= (\sin x + \sin y) + \sin(x - y) \\ &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} + 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \\ &= 2 \left( \sin \frac{x+y}{2} + \sin \frac{x-y}{2} \right) \cos \frac{x-y}{2} \\ &= 4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} \cos \frac{x-y}{2}.\end{aligned}$$

因此  $a + b + \bar{a}\bar{b}$  为实数当且仅当

$$\sin \frac{x}{2} = 0, \quad \cos \frac{y}{2} = 0, \quad \text{或} \quad \cos \frac{x-y}{2} = 0,$$

分别对应

$$x = 2k\pi, \quad y = (2k+1)\pi, \quad x = y + (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

所以解集为

$$(a, b) = (1, b), \quad (a, -1), \quad (a, -a),$$

其中  $|a| = |b| = 1$ 。

注意到

$$a + b + \bar{a}\bar{b} \in \mathbb{R} \iff 1 + a + b + \bar{a}\bar{b} \in \mathbb{R}.$$

设  $c \in \mathbb{C}$  且  $a = c^2$ , 则

$$\bar{c}(1 + a + b + \bar{a}\bar{b}) = \bar{c} + \bar{c}c^2 + \bar{c}b + \bar{c}c^2\bar{b} = \bar{c} + c + \bar{c}b + c\bar{b} \in \mathbb{R},$$

因此  $c \in \mathbb{R}$  或  $1 + a + b + \bar{a}\bar{b} = 0$ 。第一种情况  $c = \pm 1$ , 于是  $a = 1$ 。第二种情况将等式因式分解为

$$(a + b)(1 + \bar{b}) = 1 + a + b + \bar{a}\bar{b} = 0,$$

得到  $a = -b$  或  $b = -1$ , 所以得到解为

$$(a, b) = (1, b), \quad (a, -1), \quad (a, -a), \quad |a| = |b| = 1.$$

22. 已知两复数  $z_1, z_2$  满足  $|z_1 - (3 + 3i)| = 2, |iz_2 - 1| = 1$ , 求  $|z_1 - z_2|$  的最小值。

由  $|z_1 - (3 + 3i)| = 2$ ,  $P(z_1)$  在圆

$$C_1: (x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 2^2$$

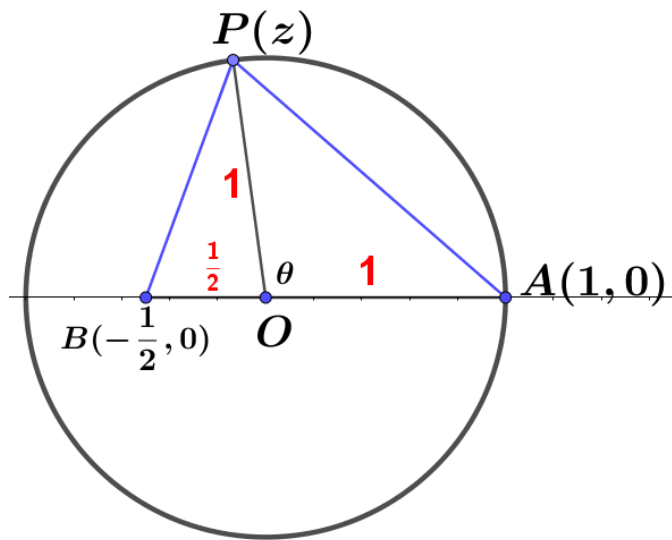
上, 设  $z_2 = a + bi$ , 则  $iz_2 - 1 = (-1 - b) + ai$ , 故  $|iz_2 - 1| = 1$  意味  $Q(z_2)$  在圆

$$C_2: x^2 + (y + 1)^2 = 1$$

上, 故  $|z_1 - z_2| = PQ$  的最小值为

$$\text{两圆心距离} - \text{两圆半径和} = \sqrt{3^2 + 4^2} - (2 + 1) = 2$$

23. 设  $\alpha$  为  $\left| (z - 1) \left( z + \frac{1}{2} \right) \right|$  在圆盘上  $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$  的最大值, 则  $\alpha^2 = ?$



如图,  $P$  在圆周上,  $A(1, 0)$ ,  $B\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ , 则

$$PA \cdot PB = \left| (z - 1) \left( z + \frac{1}{2} \right) \right|$$

设  $\theta = \angle POA$ , 在  $\triangle POA$  及  $\triangle POB$  中, 由余弦定理,

$$PA^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos \theta = 2 - 2 \cos \theta$$

$$PB^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \cos(\pi - \theta) = \cos \theta + \frac{5}{4}$$

因此

$$f(\theta) = (2 - 2\cos\theta) \left( \cos\theta + \frac{5}{4} \right) = -2\cos^2\theta - \frac{1}{2}\cos\theta + \frac{5}{2}$$

且

$$\alpha^2 = f\left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{81}{32}$$

24. 设有一虚部不为零的复数  $z$ , 其长度为 2, 且在复数平面上与  $-2$  及  $z^2$  刚好在同一直线上, 与  $1$  及  $z^3$  也同在另一直线上, 试求以  $z, z^2, z^3$  所围成的三角形面积。

由  $1, z, z^3$  共线可得

$$\frac{z^3 - z}{z - 1} = k \in \mathbb{R} \Rightarrow z^2 + z - k = 0 \Rightarrow z = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4k}}{2}$$

其中  $z$  实部为  $-\frac{1}{2}$ , 由  $-2, z, z^2$  共线可得

$$\frac{z^2 - z}{z + 2} = t \in \mathbb{R} \Rightarrow z^2 - (t + 1)z - 2t = 0 \Rightarrow z = \frac{t + 1 \pm \sqrt{(t + 1)^2 + 8t}}{2}$$

因此

$$\frac{t + 1}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow t = -2$$

代入得

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{15}i}{2}.$$

取  $z = \frac{-1 + \sqrt{15}i}{2}$ , 则

$$z^2 = \frac{-7 - \sqrt{15}i}{2}, \quad z^3 = \frac{11 - 3\sqrt{15}i}{2}.$$

$z, z^2, z^3$  在复平面上的坐标为

$$A(z) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right), \quad B(z^2) = \left(-\frac{7}{2}, -\frac{\sqrt{15}}{2}\right), \quad C(z^3) = \left(\frac{11}{2}, -\frac{3\sqrt{15}}{2}\right).$$

故所求面积为

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{15}}{2} & 1 \\ -\frac{7}{2} & -\frac{\sqrt{15}}{2} & 1 \\ \frac{11}{2} & -\frac{3\sqrt{15}}{2} & 1 \end{vmatrix} = 6\sqrt{15}$$

25. 若实数  $m, n$  使得关于  $x$  的方程  $x^3 + mx + n = 0$  有模为 3 的虚根, 求  $m + n$  的取值范围。

由于系数皆为实数, 设三根为  $a + bi, a - bi, -2a$ , 其中  $a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 9, b \neq 0$ 。

由韦达定理,

$$m = (a + bi)(a - bi) + (-2a)(a + bi + a - bi) = 9 - 4a^2$$

$$n = (a + bi)(a - bi)(-2a) = -18a$$

所以

$$m + n = 9 - 4a^2 + 18a = -4 \left( a - \frac{9}{4} \right)^2 + \frac{117}{4}$$

又  $a^2 < 9, -3 < a < 3$ , 则

$$m + n \in \left( -81, \frac{117}{4} \right]$$

26. 关于  $z$  的方程  $z^{n+1} - \sqrt{3}z^n - 1 = 0$  存在一个模为 1 的虚根, 求正整数  $n$  的最小值。

设该虚根为  $z_0 = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ , 有

$$z_0^n(z_0 - \sqrt{3}) = 1$$

两边取模得

$$|z_0^n| |z_0 - \sqrt{3}| = 1$$

由于  $|z_0^n| = 1$ , 从而

$$|z_0 - \sqrt{3}| = 1$$

将  $z_0 = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  代入得

$$|(\cos \theta - \sqrt{3}) + i \sin \theta| = 1$$

于是

$$(\cos \theta - \sqrt{3})^2 + \sin^2 \theta = 1 \Rightarrow \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

得  $\theta = \frac{\pi}{6}$ , 即  $z_0 = e^{i\frac{\pi}{6}}$ , 代入  $z_0^n(z_0 - \sqrt{3}) = 1$  得:

$$(e^{i\frac{\pi}{6}})^n \left( e^{i\frac{\pi}{6}} - \sqrt{3} \right) = e^{i\frac{n\pi}{6}} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i - \sqrt{3} \right) = e^{i\frac{n\pi}{6}} \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 1$$

注意到  $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = e^{i\frac{5\pi}{6}}$ , 变为

$$e^{i\frac{n\pi}{6}} \cdot e^{i\frac{5\pi}{6}} = e^{i\frac{(n+5)\pi}{6}} = 1 \Rightarrow \frac{(n+5)\pi}{6} = 2k\pi \Rightarrow n = 12k - 5$$

令  $k = 1$  得最小正整数解为  $n = 7$ .

27. 已知复数  $z_1, z_2, z_3$  满足

$$\begin{cases} |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \\ \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} = 1 \end{cases}$$

求  $|z_1 + 2z_2 + 3z_3|$  最大可能值。

设存在一三次多项式, 根为  $\frac{z_1}{z_2}, \frac{z_2}{z_3}, \frac{z_3}{z_1}$ , 则

$$\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} = 1$$

$$\frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_2}{z_3} \cdot \frac{z_3}{z_1} = 1$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_2}{z_3} \cdot \frac{z_3}{z_1} + \frac{z_3}{z_1} \cdot \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1}{z_3} + \frac{z_2}{z_1} + \frac{z_3}{z_2} \\ &= \overline{\left(\frac{z_3}{z_1}\right)} + \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} + \overline{\left(\frac{z_2}{z_3}\right)} = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1}\right)} = 1 \end{aligned}$$

因此该多项式为

$$f(x) = x^3 - x^2 + x - 1 = (x^2 + 1)(x - 1),$$

根为  $x = 1, \pm i$ ; 为使  $|z_1 + 2z_2 + 3z_3|$  最大, 取

$$\frac{z_2}{z_3} = 1, \quad \frac{z_3}{z_1} = i, \quad \frac{z_1}{z_2} = -i,$$

则

$$z_2 = z_3 = 1, \quad z_1 = -i,$$

所以

$$|z_1 + 2z_2 + 3z_3| = |-i + 5| = \sqrt{26}$$

28. 设  $z$  为复数, 且满足  $|z + 1| > 2$ 。证明

$$|z^3 + 1| > 1.$$

注意到

$$z^3 + 1 = (z + 1)(z^2 - z + 1),$$

因此只需证明

$$|z^2 - z + 1| > \frac{1}{2}.$$

设  $z + 1 = re^{i\varphi}$ , 其中  $r = |z + 1| > 2, \varphi$  为某个实数。于是

$$z^2 - z + 1 = (re^{i\varphi} - 1)^2 - (re^{i\varphi} - 1) + 1 = r^2 e^{2i\varphi} - 3re^{i\varphi} + 3$$

于是

$$\begin{aligned} |z^2 - z + 1|^2 &= (r^2 e^{2i\varphi} - 3re^{i\varphi} + 3)(r^2 e^{-2i\varphi} - 3re^{-i\varphi} + 3) \\ &= r^4 + 9r^2 + 9 - (6r^3 + 18r) \cos \varphi + 6r^2 \cos 2\varphi \\ &= r^4 + 9r^2 + 9 - (6r^3 + 18r) \cos \varphi + 6r^2 (2 \cos^2 \varphi - 1) \\ &= 12 \left( r \cos \varphi - \frac{r^2 + 3}{4} \right)^2 + \frac{1}{4} (r^2 - 3)^2. \end{aligned}$$

由于  $r > 2$ , 可得

$$|z^2 - z + 1|^2 > \frac{1}{4} \Rightarrow |z^2 - z + 1| > \frac{1}{2}$$

因此

$$|z^3 + 1| = |z + 1| |z^2 - z + 1| > 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

证毕。

29. 复数  $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5$  满足

$$\begin{cases} |z_1| \leq 1 \\ |z_2| \leq 1 \\ |2z_3 - (z_1 + z_2)| \leq |z_1 - z_2| \\ |2z_4 - (z_1 + z_2)| \leq |z_1 - z_2| \\ |2z_5 - (z_3 + z_4)| \leq |z_3 - z_4| \end{cases}$$

求  $|z_5|$  的最大值。

由

$$|z_1 - z_2| \geq |2z_3 - (z_1 + z_2)| \geq |2|z_3| - |z_1 + z_2||$$

我们有

$$|z_1 + z_2| - |z_1 - z_2| \leq 2|z_3| \leq |z_1 + z_2| + |z_1 - z_2|$$

由 AM-QM 不等式,

$$|z_3| \leq \frac{|z_1 + z_2| + |z_1 - z_2|}{2} \leq \sqrt{\frac{|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2}{2}} = \sqrt{\frac{2|z_1|^2 + 2|z_2|^2}{2}} \leq \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

同理可得  $|z_4| \leq \sqrt{2}$ , 故

$$|z_5| \leq \frac{|z_3 + z_4|}{2} \leq \frac{|z_3| + |z_4|}{2} \leq \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

考虑等号何时成立: 当  $z_1 = 1, z_2 = i$  时,  $z_3 = 1 + i$ ; 当  $z_1 = -1, z_2 = i$  时,  $z_4 = -1 + i$ ; 当  $z_3 = 1 + i, z_4 = -1 + i$  时,  $z_5 = 2i$ , 这时  $|z_5| = 2$ . 故  $|z_5|_{\max} = 2$ .

30. 设复数  $z$  满足  $|z| = 1$ , 则  $|z^7 + \bar{z}^5 - 3z^3 - 3\bar{z}|$  的最大值为

试  $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ , 算得值为:

$$|z^7 + \bar{z}^5 - 3z^3 - 3\bar{z}| = |2i + 2 - 6i - 6| = |-4i - 4| = \sqrt{16 + 16} = \boxed{4\sqrt{2}}$$

(待解)(设  $z = \cos \theta + i \sin \theta, \dots$  感觉是尝试因式分解再 AM-GM)

31. (a) 已知  $z = \cos \theta + i \sin \theta$ , 证明

$$z^n + z^{-n} = 2 \cos n\theta, \quad z^n - z^{-n} = 2i \sin n\theta.$$

由棣莫弗定理,

$$z^n = \cos n\theta + i \sin n\theta, \quad z^{-n} = \cos n\theta - i \sin n\theta$$

相加得到

$$z^n + z^{-n} = (\cos n\theta + i \sin n\theta) + (\cos n\theta - i \sin n\theta) = 2 \cos n\theta$$

而相减得到

$$z^n - z^{-n} = (\cos n\theta + i \sin n\theta) - (\cos n\theta - i \sin n\theta) = 2i \sin n\theta$$

(b) 证明

$$16 \sin^5 \theta = \sin 5\theta - 5 \sin 3\theta + 10 \sin \theta,$$

且

$$32 \cos^6 \theta = \cos 6\theta + 6 \cos 4\theta + 15 \cos 2\theta + 10.$$

令  $n = 1$ , 则

$$2i \sin \theta = z - z^{-1}, \quad 2 \cos \theta = z + z^{-1}$$

由第一式, 二项式展开得

$$(2i \sin \theta)^5 = (z - z^{-1})^5$$

$$32i^5 \sin^5 \theta = z^5 - 5z^3 z^{-2} + 10z z^{-4} - 10z^2 z^{-3} + 5z z^{-4} - z^{-5}$$

$$32i \sin^5 \theta = (z^5 - z^{-5}) - 5(z^3 - z^{-3}) + 10(z - z^{-1})$$

$$32i \sin^5 \theta = 2i \sin 5\theta - 10i \sin 3\theta + 20i \sin \theta$$

$$16 \sin^5 \theta = \sin 5\theta - 5 \sin 3\theta + 10 \sin \theta$$

由第二式,

$$(2 \cos \theta)^6 = (z + z^{-1})^6$$

$$64 \cos^6 \theta = (z^6 + z^{-6}) + 6(z^4 + z^{-4}) + 15(z^2 + z^{-2}) + 20$$

$$64 \cos^6 \theta = 2 \cos 6\theta + 12 \cos 4\theta + 30 \cos 2\theta + 20$$

$$32 \cos^6 \theta = \cos 6\theta + 6 \cos 4\theta + 15 \cos 2\theta + 10$$

故得证。

32. 证明

$$\cos^5 \theta \sin^3 \theta = \frac{1}{128} (6 \sin 2\theta + 2 \sin 4\theta - 2 \sin 6\theta - \sin 8\theta)$$

设  $z = \cos \theta + i \sin \theta$ , 由棣莫弗定理,

$$z^n = \cos n\theta + i \sin n\theta, \quad z^{-n} = \cos n\theta - i \sin n\theta,$$

且

$$z^n + z^{-n} = 2 \cos n\theta, \quad z^n - z^{-n} = 2i \sin n\theta.$$

由  $2 \cos \theta = z + z^{-1}$  得

$$\begin{aligned}(2 \cos \theta)^5 &= (z + z^{-1})^5 \\ 32 \cos^5 \theta &= z^5 + 5z^4 z^{-1} + 10z^3 z^{-2} + 10z^2 z^{-3} + 5z z^{-4} + z^{-5} \\ 32 \cos^5 \theta &= (z^5 + z^{-5}) + 5(z^3 + z^{-3}) + 10(z + z^{-1}) \\ 16 \cos^5 \theta &= \cos 5\theta + 5 \cos 3\theta + 10 \cos \theta\end{aligned}$$

由  $4 \sin^3 \theta = 3 \sin \theta - \sin 3\theta$ , 得到

$$16 \cos^5 \theta \cdot 4 \sin^3 \theta = (\cos 5\theta + 5 \cos 3\theta + 10 \cos \theta)(3 \sin \theta - \sin 3\theta).$$

展开并和差化积,

$$\begin{aligned}64 \cos^5 \theta \sin^3 \theta &= 3 \cos 5\theta \sin \theta - \cos 5\theta \sin 3\theta + 15 \cos 3\theta \sin \theta - 5 \cos 3\theta \sin 3\theta \\ &\quad + 30 \cos \theta \sin \theta - 10 \cos \theta \sin 3\theta \\ &= \frac{3}{2}(\sin 6\theta - \sin 4\theta) - \frac{1}{2}(\sin 8\theta - \sin 2\theta) + \frac{15}{2}(\sin 4\theta - \sin 2\theta) \\ &\quad - \frac{5}{2} \sin 6\theta + \frac{30}{2} \sin 2\theta - \frac{10}{2} \sin 4\theta \\ 128 \cos^5 \theta \sin^3 \theta &= 6 \sin 2\theta + 2 \sin 4\theta - 2 \sin 6\theta - \sin 8\theta\end{aligned}$$

因此得证

$$\cos^5 \theta \sin^3 \theta = \frac{1}{128} (6 \sin 2\theta + 2 \sin 4\theta - 2 \sin 6\theta - \sin 8\theta)$$

### 33. 定义无穷级数

$$\begin{aligned}C &= \cos \theta + \frac{1}{2} \cos 5\theta + \frac{1}{4} \cos 9\theta + \cdots \\ S &= \sin \theta + \frac{1}{2} \sin 5\theta + \frac{1}{4} \sin 9\theta + \cdots\end{aligned}$$

证明

$$C + iS = \frac{2e^{i\theta}}{2 - e^{4i\theta}}, \quad S = \frac{4 \sin \theta + 2 \sin 3\theta}{5 - 4 \cos 4\theta}$$

记

$$\begin{aligned} C + iS &= \cos \theta + i \sin \theta + \frac{1}{2}(\cos 5\theta + i \sin 5\theta) + \frac{1}{4}(\cos 9\theta + i \sin 9\theta) + \cdots \\ &= e^{i\theta} + \frac{1}{2}e^{i5\theta} + \frac{1}{4}e^{i9\theta} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} e^{i(4k+1)\theta} = e^{i\theta} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{e^{4i\theta}}{2}\right)^k \end{aligned}$$

这是一个公比为  $\frac{e^{4i\theta}}{2}$  的等比级数, 其模为  $\frac{1}{2} < 1$ , 因此级数收敛:

$$C + iS = \frac{e^{i\theta}}{1 - \frac{1}{2}e^{4i\theta}} = \frac{2e^{i\theta}}{2 - e^{4i\theta}}$$

又

$$C + iS = \frac{2e^{i\theta}}{2 - e^{4i\theta}} \cdot \frac{2 - e^{-4i\theta}}{2 - e^{-4i\theta}} = \frac{4e^{i\theta} - 2e^{-3i\theta}}{|2 - e^{4i\theta}|^2} = \frac{(4\cos\theta - 2\cos 3\theta) + i(4\sin\theta + 2\sin 3\theta)}{(2 - \cos 4\theta)^2 + \sin^2 4\theta}$$

因此

$$S = \Im(C + iS) = \frac{4\sin\theta + 2\sin 3\theta}{5 - 4\cos 4\theta}$$

34. 证明下列无穷级数的和:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin(n\theta)}{n!} = e^{-\cos\theta} \sin(\sin\theta)$$

定义

$$C = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos(n\theta)}{n!}, \quad S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin(n\theta)}{n!}$$

则

$$C + iS = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(e^{i\theta})^n}{n!}$$

观察到指数函数的展开式为

$$e^{-z} = 1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n!} = 1 - e^{-z}$$

取  $z = e^{i\theta}$ , 得

$$\begin{aligned}C + iS &= 1 - e^{-e^{i\theta}} = 1 - e^{-(\cos\theta + i\sin\theta)} = 1 - e^{-\cos\theta} e^{-i\sin\theta} \\&= 1 - e^{-\cos\theta} [\cos(\sin\theta) - i\sin(\sin\theta)] \\&= [1 - e^{-\cos\theta} \cos(\sin\theta)] + i[e^{-\cos\theta} \sin(\sin\theta)]\end{aligned}$$

取虚部得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin(n\theta)}{n!} = \Im(C + iS) = e^{-\cos\theta} \sin(\sin\theta)$$

35. 求下列多项式方程的所有实数解:

$$x^7 - 7x^6 - 21x^5 + 35x^4 + 35x^3 - 21x^2 - 7x + 1 = 0.$$

设  $\cos\theta = c, \sin\theta = s$ , 由棣莫弗定理,

$$(c + is)^7 = (\cos\theta + i\sin\theta)^7 = \cos 7\theta + i\sin 7\theta$$

且由二项展开得

$$(c + is)^7 = c^7 + 7ic^6s - 21c^5s^2 - 35ic^4s^3 + 35c^3s^4 + 21ic^2s^5 - 7cs^6 - is^7$$

比较实部与虚部, 得到

$$\begin{aligned}\cos 7\theta &= c^7 - 21c^5s^2 + 35c^3s^4 - 7cs^6, \\ \sin 7\theta &= 7c^6s - 35c^4s^3 + 21c^2s^5 - s^7.\end{aligned}$$

设  $t = \tan\theta = \frac{s}{c}$ , 则

$$\tan 7\theta = \frac{\sin 7\theta}{\cos 7\theta} = \frac{7t - 35t^3 + 21t^5 - t^7}{1 - 21t^2 + 35t^4 - 7t^6}.$$

令  $\tan 7\theta = 1$ , 得到

$$\frac{7t - 35t^3 + 21t^5 - t^7}{1 - 21t^2 + 35t^4 - 7t^6} = 1,$$

整理得

$$t^7 - 7t^6 - 21t^5 + 35t^4 + 35t^3 - 21t^2 - 7t + 1 = 0.$$

这正是题目所给的多项式方程, 其中  $t = x$ 。由  $\tan 7\theta = 1$ ,

$$7\theta = \frac{\pi}{4} + n\pi,$$

从而

$$\theta = \frac{(4n+1)\pi}{28}, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

因此方程的所有实数解为

$$\tan \frac{\pi}{28}, \tan \frac{5\pi}{28}, \tan \frac{9\pi}{28}, \tan \frac{13\pi}{28}, \tan \frac{17\pi}{28}, \tan \frac{21\pi}{28}, \tan \frac{25\pi}{28}.$$

36. (a) 证明:

$$\sin 7\theta = 7 \sin \theta - 56 \sin^3 \theta + 112 \sin^5 \theta - 64 \sin^7 \theta$$

从棣莫弗定理出发,

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^7 = \cos 7\theta + i \sin 7\theta$$

由二项式定理展开左式,

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^7 = \sum_{k=0}^7 {}^7C_k \cos^{7-k} \theta (i \sin \theta)^k$$

比较虚部项系数得

$$\sin 7\theta = {}^7C_1 \cos^6 \theta \sin \theta - {}^7C_3 \cos^4 \theta \sin^3 \theta + {}^7C_5 \cos^2 \theta \sin^5 \theta - {}^7C_7 \sin^7 \theta$$

由恒等式  $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$ , 令  $s = \sin \theta$ , 则有

$$\sin 7\theta = 7(1-s^2)^3 s - 35(1-s^2)^2 s^3 + 21(1-s^2)s^5 - s^7 = 7s - 56s^3 + 112s^5 - 64s^7$$

故得证。

(b) 据此, 解方程

$$1 + 7x - 56x^3 + 112x^5 - 64x^7 = 0$$

原方程

$$1 + 7x - 56x^3 + 112x^5 - 64x^7 = 0$$

可写为

$$1 + \sin 7\theta = 0 \Rightarrow \sin 7\theta = -1$$

解得

$$7\theta = \dots, -\frac{5\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \dots \Rightarrow \theta = \dots, -\frac{5\pi}{14}, -\frac{\pi}{14}, \frac{3\pi}{14}, \frac{7\pi}{14}, \dots$$

所以

$$x = \sin \theta = \sin\left(-\frac{5\pi}{14}\right), \sin\left(-\frac{\pi}{14}\right), \sin\frac{3\pi}{14}, \sin\frac{7\pi}{14} = -0.901, -0.223, 0.623, 1$$

(c) 通过构造合适的多项式方程, 证明

$$\csc^2 \frac{\pi}{7} + \csc^2 \frac{2\pi}{7} + \csc^2 \frac{3\pi}{7} = 8$$

考虑解为

$$\theta = \dots, 0, \frac{\pi}{7}, \frac{2\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}, \dots, 2$$

的方程

$$\sin 7\theta = 0,$$

由三角恒等式

$$\sin 7\theta = 7 \sin \theta - 56 \sin^3 \theta + 112 \sin^5 \theta - 64 \sin^7 \theta,$$

方程变为

$$-\sin \theta (64 \sin^6 \theta - 112 \sin^4 \theta + 56 \sin^2 \theta - 7) = 0.$$

注意到

$$\sin \frac{\pi}{7} = \sin \frac{6\pi}{7}, \quad \sin \frac{2\pi}{7} = \sin \frac{5\pi}{7}, \quad \sin \frac{3\pi}{7} = \sin \frac{4\pi}{7},$$

则对非零解  $\sin \theta \neq 0$ , 令  $z = \sin^2 \theta$ , 则方程

$$64z^3 - 112z^2 + 56z - 7 = 0$$

的三根为

$$\alpha = \sin^2 \frac{\pi}{7}, \quad \beta = \sin^2 \frac{2\pi}{7}, \quad \gamma = \sin^2 \frac{3\pi}{7}.$$

由韦达定理,

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{112}{64} = \frac{7}{4}, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{56}{64} = \frac{7}{8}, \quad \alpha\beta\gamma = \frac{7}{64}$$

于是

$$\csc^2 \frac{\pi}{7} + \csc^2 \frac{2\pi}{7} + \csc^2 \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} = 8$$

证毕。

37. (a) 证明

$$(1 + i \tan \theta)^4 + (1 - i \tan \theta)^4 = \frac{2 \cos 4\theta}{\cos^4 \theta}.$$

由

$$\begin{aligned} (1 + i \tan \theta)^4 + (1 - i \tan \theta)^4 &= \left(1 + \frac{i \sin \theta}{\cos \theta}\right)^4 + \left(1 - \frac{i \sin \theta}{\cos \theta}\right)^4 \\ &= \left(\frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\cos \theta}\right)^4 + \left(\frac{\cos \theta - i \sin \theta}{\cos \theta}\right)^4 \\ &= \frac{\cos 4\theta + i \sin 4\theta}{\cos^4 \theta} + \frac{\cos 4\theta - i \sin 4\theta}{\cos^4 \theta} \\ &= \frac{2 \cos 4\theta}{\cos^4 \theta} \end{aligned}$$

故左式 = 右式, 等式得证。

(b) 通过构造合适的多项式方程, 证明

$$\tan^2 \frac{\pi}{8} \tan^2 \frac{3\pi}{8} = 1, \quad \tan^2 \frac{\pi}{8} + \tan^2 \frac{3\pi}{8} = 6$$

考虑  $\cos 4\theta = 0$  的解

$$4\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \dots \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \dots$$

则

$$z = i \tan \frac{\pi}{8}, i \tan \frac{3\pi}{8}, i \tan \frac{5\pi}{8}, i \tan \frac{7\pi}{8}$$

为方程

$$(1 + z)^4 + (1 - z)^4 = 0 \Rightarrow z^4 + 6z^2 + 1 = 0$$

的解, 由韦达定理,

$$i \tan \frac{\pi}{8} \cdot i \tan \frac{3\pi}{8} \cdot i \tan \frac{5\pi}{8} \cdot i \tan \frac{7\pi}{8} = 1$$

又因为

$$\tan \frac{7\pi}{8} = -\tan \frac{\pi}{8}, \quad \tan \frac{5\pi}{8} = -\tan \frac{3\pi}{8}$$

故得证

$$\tan^2 \frac{\pi}{8} \tan^2 \frac{3\pi}{8} = 1$$

又由韦达定理,

$$i \tan \frac{\pi}{8} + i \tan \frac{3\pi}{8} + i \tan \frac{5\pi}{8} + i \tan \frac{7\pi}{8} = 0$$

两边平方得

$$\left(i \tan \frac{\pi}{8}\right)^2 + \left(i \tan \frac{3\pi}{8}\right)^2 + \left(i \tan \frac{5\pi}{8}\right)^2 + \left(i \tan \frac{7\pi}{8}\right)^2 + 2 \cdot 6 = 0$$

给出

$$\tan^2 \frac{\pi}{8} + \tan^2 \frac{3\pi}{8} = 6$$

38. 设

$$w = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5},$$

(a) 证明

$$1 + w + w^2 + w^3 + w^4 = 0.$$

由棣莫弗定理,

$$w^5 = \left(\cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}\right)^5 = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1,$$

由于  $w \neq 1$ , 所以由  $w^5 - 1 = 0$  得

$$(w - 1)(1 + w + w^2 + w^3 + w^4) = 0 \Rightarrow 1 + w + w^2 + w^3 + w^4 = 0.$$

(b) 求

$$(1 - w)(1 - w^2)(1 - w^3)(1 - w^4)$$

的值。

有

$$\begin{aligned}(1-w)(1-w^2)(1-w^3)(1-w^4) &= (1-w)(1-w^4)(1-w^2)(1-w^3) \\&= [2 - (w + w^4)][2 - (w^2 + w^3)] \\&= 4 - 2(w + w^4 + w^2 + w^3) + (w + w^4)(w^2 + w^3) \\&= 4 - 2(-1) + w^3 + w^4 + w^6 + w^7 \\&= 6 + w^3 + w^4 + w + w^2 \\&= 6 - 1 \\&= 5\end{aligned}$$

(c) 证明

$$(1-w)(1-w^4) = 4 \sin^2 \frac{\pi}{5}.$$

由于  $w$  与  $w^4$  共轭, 有

$$\begin{aligned}(1-w)(1-w^4) &= 1 - w - w^4 + w^5 \\&= 2 - (w + w^4) \\&= 2 - 2 \cos \frac{2\pi}{5} \\&= 4 \sin^2 \frac{\pi}{5}\end{aligned}$$

(d) 证明

$$(1-w^2)(1-w^3) = 4 \sin^2 \frac{2\pi}{5}.$$

同理由于  $w^2$  与  $w^3$  共轭, 有

$$\begin{aligned}(1-w^2)(1-w^3) &= 1 - w^2 - w^3 + w^5 \\&= 2 - (w^2 + w^3) \\&= 2 - 2 \cos \frac{4\pi}{5} \\&= 4 \sin^2 \frac{2\pi}{5}\end{aligned}$$

(e) 证明

$$\sin \frac{\pi}{5} \sin \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}}{4}.$$

由 (b),(c),(d) 得

$$16 \sin^2 \frac{\pi}{5} \sin^2 \frac{2\pi}{5} = (1-w)(1-w^2)(1-w^3)(1-w^4) = 5,$$

即

$$\sin^2 \frac{\pi}{5} \sin^2 \frac{2\pi}{5} = \frac{5}{16},$$

由于  $\frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}$  为锐角, 所以  $\sin \frac{\pi}{5}, \sin \frac{2\pi}{5} > 0$ , 故取正值

$$\sin \frac{\pi}{5} \sin \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

39. 设  $S_n = a^n + b^n$ , 其中  $a, b$  是方程  $x^2 + x + 1 = 0$  的根, 求

$$\sum_{n=0}^{1729} (-1)^n S_n$$

方程根为  $a = \omega$ ,  $b = \omega^2$ , 其中  $\omega = e^{2\pi i/3}$ , 满足  $\omega^3 = 1$ 。设

$$S_n = \omega^n + \omega^{2n},$$

发现  $S_n$  是周期为 3 的数列:

$$S_0 = 2, \quad S_1 = -1, \quad S_2 = -1$$

将原式写成

$$\sum_{k=0}^{576} [(-1)^{3k} S_{3k} + (-1)^{3k+1} S_{3k+1} + (-1)^{3k+2} S_{3k+2}] + (-1)^{1728} S_{1728} + (-1)^{1729} S_{1729}$$

前面 576 组和为 0, 剩余

$$(-1)^{1728} S_{1728} + (-1)^{1729} S_{1729} = 1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) = 3$$

40. 设  $\omega \in \mathbb{C}$ 、 $\omega \neq 1$ 、且  $\omega^7 = 1$ ，计算：

$$\prod_{k=0}^6 (\omega^{2k} + 2\omega^k + 4)$$

设方程  $x^7 - 1 = 0$  的根为  $1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^6$ ，则

$$\prod_{k=0}^6 ((\omega^k)^2 + 2\omega^k + 4) = \prod_{k=0}^6 \frac{(\omega^k)^3 - 8}{\omega^k - 2}$$

由于  $(\omega^0, \omega^3, \omega^6, \omega^9, \omega^{12}, \omega^{15}, \omega^{18}) = (\omega^0, \omega^3, \omega^6, \omega^2, \omega^5, \omega^1, \omega^4)$ ，因此：

$$\prod_{k=0}^6 ((\omega^k)^3 - 8) = \prod_{j=0}^6 (\omega^j - 8)$$

又因为  $x^7 - 1 = \prod_{j=0}^6 (x - \omega^j)$ ，令  $x = 8$ ，得

$$\prod_{j=0}^6 (\omega^j - 8) = -(8^7 - 1) = 1 - 8^7$$

同理，令  $x = 2$  得

$$\prod_{j=0}^6 (\omega^j - 2) = -(2^7 - 1) = 1 - 2^7$$

因此原式为：

$$\frac{1 - 8^7}{1 - 2^7} = 16513$$

41. 令  $\omega = \cos \frac{2\pi}{111} + i \sin \frac{2\pi}{111}$ ，其中  $i = \sqrt{-1}$ ，求

$$\sum_{k=1}^{110} \frac{\omega^{2k}}{\omega^k - 1}$$

由  $\omega = \cos \frac{2\pi}{111} + i \sin \frac{2\pi}{111}$  可知

$$\omega^{111} - 1 = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{110} \omega^k = 0$$

因此

$$\sum_{k=1}^{110} \frac{\omega^{2k}}{\omega^k - 1} = \sum_{k=1}^{110} \left( \omega^k + 1 + \frac{1}{\omega^k - 1} \right) = -1 + 110 + \sum_{k=1}^{110} \frac{1}{\omega^k - 1} \quad (1)$$

设

$$f(x) = \sum_{k=0}^{110} x^k = \prod_{k=1}^{110} (x - \omega^k)$$

则

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{110} kx^{k-1} = \sum_{m=1}^{110} \prod_{k=1, k \neq m}^{110} (x - \omega^k)$$

于是

$$g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{k=1}^{110} \frac{1}{x - \omega^k}$$

令  $x = 1$ ,

$$g(1) = \frac{111 \cdot \frac{110}{2}}{111} = \sum_{k=1}^{110} \frac{1}{1 - \omega^k} \Rightarrow \sum_{k=1}^{110} \frac{1}{\omega^k - 1} = -55$$

代入 (1) 得

$$\sum_{k=1}^{110} \frac{\omega^{2k}}{\omega^k - 1} = -1 + 110 - 55 = 54$$

42. 设  $z = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$ , 求

$$|1 + 2z + 3z^2 + \cdots + 2016z^{2015}|$$

记

$$S = 1 + 2z + 3z^2 + \cdots + 2016z^{2015}$$

考虑函数

$$f(x) = x + x^2 + \cdots + x^{2016} = \frac{x(x^{2016} - 1)}{x - 1},$$

则有

$$S = f'(z)$$

求导:

$$f'(x) = \frac{[(x^{2016} - 1) + 2016x^{2016}](x - 1) - x(x^{2016} - 1)}{(x - 1)^2}$$

设  $z = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = e^{\frac{i\pi}{6}}$ , 由棣莫弗定理得

$$z^{2016} = (e^{i\pi/6})^{2016} = e^{i \cdot 336\pi} = 1$$

于是

$$f'(z) = \frac{2016(z-1)}{(z-1)^2} = \frac{2016}{z-1} \Rightarrow |S| = \frac{2016}{|z-1|}$$

而

$$z-1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) + \frac{1}{2}i$$

$$|z-1| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$$

所以

$$|S| = \frac{2016 \cdot 2}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = 1008\sqrt{2} + 1008\sqrt{6}$$

43. 设  $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ , 求

$$-\sum_{k=1}^{n-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n-1} (\omega^k - \omega^j).$$

设

$$P(x) = \prod_{k=1}^{n-1} (x - \omega^k) = \frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1$$

则

$$P'(x) = (n-1)x^{n-2} + (n-2)x^{n-3} + \cdots + 1$$

于是

$$\sum_{k=1}^{n-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n-1} (\omega^k - \omega^j) = -\sum_{k=1}^{n-1} P'(\omega^k)$$

观察到由于  $\omega^n = 1$ ,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{(n-1)k} = \begin{cases} n, & k=0 \\ \frac{1 - \omega^{nk}}{1 - \omega^k} = 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

因此

$$\sum_{k=0}^{n-1} P'(\omega^k) = 0 + \cdots + 0 + n = n$$

故

$$\sum_{k=1}^{n-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n-1} (\omega^k - \omega^j) = - \sum_{k=1}^{n-1} P'(\omega^k) = -(n - P'(1)) = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$$

44. 设复数平面上三点  $A(\alpha)$ ,  $B(\beta)$ ,  $C(\gamma)$  可连成正三角形  $ABC$ , 已知  $\alpha, \beta, \gamma$  满足

$$\alpha^4 - 2\alpha^3\beta + (\beta^2 - 4)\alpha^2 + 8\alpha\gamma - 4\gamma^2 = 0$$

且  $\alpha$  的实部和虚部均为正数, 当  $\triangle ABC$  的重心  $G$  为  $\frac{\alpha}{2^{1110}}$  时, 求  $\beta$  及  $\gamma$  各为何?

求解  $\alpha$  的值由原式因式分解得:

$$(\alpha^2 - \alpha\beta)^2 - 4(\alpha - \gamma)^2 = 0 \implies \alpha(\alpha - \beta) = \pm 2(\alpha - \gamma)$$

由于  $\triangle ABC$  为正三角形, 满足  $\alpha - \beta = (\alpha - \gamma)e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$ , 代入上式:

$$\alpha(\alpha - \gamma)e^{\pm i\frac{\pi}{3}} = \pm 2(\alpha - \gamma) \implies \alpha = \pm 2e^{\mp i\frac{\pi}{3}}$$

已知  $\alpha$  的实部与虚部均为正, 故:

$$\alpha = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + \sqrt{3}i$$

利用重心与旋转性质求解  $\beta, \gamma$

已知重心  $G = \frac{\alpha}{2^{1110}}$ 。根据正三角形的几何性质, 顶点  $\beta$  和  $\gamma$  是由顶点  $\alpha$  绕重心  $G$  分别旋转  $120^\circ$  和  $-120^\circ$  得到的:

$$\begin{aligned}\beta &= G + (\alpha - G)e^{i\frac{2\pi}{3}} = \frac{\alpha}{2^{1110}} + \alpha \left(1 - \frac{1}{2^{1110}}\right) e^{i\frac{2\pi}{3}} \\ \gamma &= G + (\alpha - G)e^{-i\frac{2\pi}{3}} = \frac{\alpha}{2^{1110}} + \alpha \left(1 - \frac{1}{2^{1110}}\right) e^{-i\frac{2\pi}{3}}\end{aligned}$$

具体数值计算将  $\alpha = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$  代入  $\beta$ :

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2^{1110}} + 2e^{i\frac{\pi}{3}} \left(1 - \frac{1}{2^{1110}}\right) e^{i\frac{2\pi}{3}} \\ &= \frac{1 + \sqrt{3}i}{2^{1110}} + 2 \left(1 - \frac{1}{2^{1110}}\right) e^{i\pi} \\ &= \frac{1 + \sqrt{3}i}{2^{1110}} - 2 + \frac{2}{2^{1110}} \\ &= \left(\frac{3}{2^{1110}} - 2\right) + \frac{\sqrt{3}}{2^{1110}}i\end{aligned}$$

将  $\alpha = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$  代入  $\gamma$ :

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2^{1110}} + 2e^{i\frac{\pi}{3}} \left(1 - \frac{1}{2^{1110}}\right) e^{-i\frac{2\pi}{3}} \\&= \frac{1 + \sqrt{3}i}{2^{1110}} + 2 \left(1 - \frac{1}{2^{1110}}\right) e^{-i\frac{\pi}{3}} \\&= \frac{1 + \sqrt{3}i}{2^{1110}} + 2 \left(1 - \frac{1}{2^{1110}}\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\&= \frac{1 + \sqrt{3}i}{2^{1110}} + \left(1 - \frac{1}{2^{1110}}\right) - \sqrt{3} \left(1 - \frac{1}{2^{1110}}\right) i \\&= 1 + \sqrt{3} \left(\frac{2}{2^{1110}} - 1\right) i\end{aligned}$$

综上所述:

$$\beta = \left(\frac{3}{2^{1110}} - 2\right) + \frac{\sqrt{3}}{2^{1110}}i$$

$$\gamma = 1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2^{1109}} - \sqrt{3}\right)i$$

(待验证)

45. 设  $P(z)$  是一个  $n$  次复系数多项式, 其所有零点都位于复平面的单位圆上。证明多项式

$$\tilde{P}(z) = 2zP'(z) - nP(z)$$

的所有零点也都位于同一单位圆上。

不失一般性, 考虑首项系数为 1 的多项式。设

$$P(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_n),$$

其中  $|\alpha_j| = 1, j = 1, 2, \dots, n$ , 并允许这些复数  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  相同, 则

$$\begin{aligned}\tilde{P}(z) &= 2zP'(z) - nP(z) \\&= (z + \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_n) + \cdots + (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z + \alpha_n)\end{aligned}$$

因此

$$\frac{\tilde{P}(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^n \frac{z + \alpha_k}{z - \alpha_k}$$

注意到, 对任意复数  $z, \alpha$  且  $z \neq \alpha$ , 皆有

$$\Re \left[ \frac{z + \alpha}{z - \alpha} \right] = \frac{|z|^2 - |\alpha|^2}{|z - \alpha|^2}$$

于是

$$\Re \left[ \frac{\tilde{P}(z)}{P(z)} \right] = \sum_{k=1}^n \frac{|z|^2 - |\alpha_k|^2}{|z - \alpha_k|^2}$$

由于  $|\alpha_k| = 1$ , 可知当  $|z| \neq 1$  时, 上式不为零, 因此若  $\tilde{P}(z) = 0$ , 则必有

$$\Re \left[ \frac{\tilde{P}(z)}{P(z)} \right] = 0,$$

从而推出  $|z| = 1$ 。这说明  $\tilde{P}(z)$  的所有零点也都位于单位圆上。

46. 复数平面上以原点为中心的单位圆中, 有一内接四边形, 其顶点为  $z_1, z_2, z_3, z_4$ , 设

$$S_n = z_1^n + z_2^n + z_3^n + z_4^n$$

且  $S_1 = 0$  且  $S_2 = 1$ ,

(a) 证明: 若

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = 1, \quad z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$$

则  $z_1, z_2, z_3, z_4$  为一个矩形的顶点。

设

$$f(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4) = z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d$$

由  $S_1 = z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$  得  $a = 0$ , 又由于  $|z_k| = 1$ , 有  $\bar{z}_k = \frac{1}{z_k}$ , 于是

$$\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3 + \bar{z}_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} + \frac{1}{z_4} = 0$$

即

$$z_2 z_3 z_4 + z_1 z_3 z_4 + z_1 z_2 z_4 + z_1 z_2 z_3 = 0$$

所以  $c = 0$ , 因此

$$f(z) = z^4 + bz^2 + d$$

为偶函数, 四根关于原点对称, 于是可设

$$z_1 + z_3 = 0, z_2 + z_4 = 0$$

此时两对顶点互为相反数, 对角线过原点, 且  $|z_1| = |z_2| = 1$ , 故为内接矩形。

(b) 计算该矩形的面积。

设

$$z_1 = a + bi, \quad z_2 = -a + bi, \quad z_3 = -a - bi, \quad z_4 = a - bi$$

由  $S_2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = 4(a^2 - b^2) = 1$  得

$$a^2 - b^2 = \frac{1}{4}$$

又因  $|z_1| = 1$ , 有  $a^2 + b^2 = 1$ , 解得

$$a = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}, \quad b = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

故矩形面积为

$$2a \cdot 2b = \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

# 数学归纳法

1. 证明对任意正整数  $n$ ,

$$(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(2n-1)(2n) = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)$$

定义命题:

$$P_n: (n+1)(n+2)\cdots(2n) = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2n-1)$$

其中  $n \in \mathbb{Z}^+$ 。观察当  $n=1$  时,

$$\text{左边} = 1+1=2, \quad \text{右边} = 2^1 \cdot 1 = 2$$

左边等于右边, 即  $P_1$  成立。现假设  $P_k$  成立, 即当  $n=k$  时,

$$(k+1)(k+2)\cdots(2k) = 2^k \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2k-1)$$

观察当  $n=k+1$  时, 左边为:

$$\begin{aligned} (k+2)(k+3)\cdots(2k)(2k+1)(2k+2) &= \frac{(k+1)(k+2)\cdots(2k) \cdot (2k+1) \cdot 2(k+1)}{k+1} \\ &= \frac{2^k \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2k-1) \cdot (2k+1) \cdot 2(k+1)}{k+1} \\ &= 2^{k+1} \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2k-1)(2k+1) \end{aligned}$$

此时左边等于  $P_{k+1}$  的右边, 因此  $P_{k+1}$  亦成立。

即  $P_k \implies P_{k+1}$ 。由数学归纳法,  $P_n$  对任意正整数  $n$  都成立。

2. 证明对任意正整数  $n \geq p$ ,

$$\sum_{i=1}^{n-p+1} \frac{1}{i(i+1)\cdots(i+p-1)} = \frac{1}{p-1} \left[ \frac{1}{(p-1)!} - \frac{1}{(n-p+2)(n-p+3)\cdots n} \right]$$

定义命题  $P_n$  为上述等式。其中  $n, p \in \mathbb{Z}^+$  且  $p > 1$ 。

第一步: 当  $n = p$  时, 左边  $= \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots p} = \frac{1}{p!}$ 。右边  $= \frac{1}{p-1} \left[ \frac{1}{(p-1)!} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdots p} \right] = \frac{1}{p-1} \cdot \frac{p-1}{p!} = \frac{1}{p!}$ 。左边等于右边, 即  $P_p$  成立。

第二步: 假设当  $n = k$  ( $k \geq p$ ) 时结论成立, 即:

$$\sum_{i=1}^{k-p+1} \frac{1}{i \cdots (i+p-1)} = \frac{1}{p-1} \left[ \frac{1}{(p-1)!} - \frac{1}{(k-p+2) \cdots k} \right]$$

第三步: 考虑当  $n = k+1$  时的情况, 左边为:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k-p+2} \frac{1}{i \cdots (i+p-1)} &= \sum_{i=1}^{k-p+1} \frac{1}{i \cdots (i+p-1)} + \frac{1}{(k-p+2) \cdots (k+1)} \\ &= \frac{1}{p-1} \left[ \frac{1}{(p-1)!} - \frac{1}{(k-p+2) \cdots k} \right] + \frac{1}{(k-p+2) \cdots (k+1)} \\ &= \frac{1}{p-1} \left[ \frac{1}{(p-1)!} - \left( \frac{1}{(k-p+2) \cdots k} - \frac{p-1}{(k-p+2) \cdots (k+1)} \right) \right] \end{aligned}$$

对括号内进行通分:

$$\frac{(k+1) - (p-1)}{(k-p+2) \cdots (k+1)} = \frac{k-p+2}{(k-p+2)(k-p+3) \cdots (k+1)} = \frac{1}{(k-p+3) \cdots (k+1)}$$

由此可得:

$$\text{左边} = \frac{1}{p-1} \left[ \frac{1}{(p-1)!} - \frac{1}{(k-p+3) \cdots (k+1)} \right]$$

此时左边等于  $P_{k+1}$  的右边, 因此  $P_{k+1}$  亦成立。

即  $P_k \implies P_{k+1}$ 。由数学归纳法,  $P_n$  对任意正整数  $n \geq p$  均成立。

3. 证明: 对于任意整数  $n > 1$ , 有

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

据此, 试证

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{99}{100} < \frac{1}{12}$$

我们使用数学归纳法进行证明。

第一步: 当  $n = 1$  时,

$$\text{左边} = \frac{1}{2}, \quad \text{右边} = \frac{1}{\sqrt{3(1)+1}} = \frac{1}{2}$$

此时左边等于右边 (注: 题目要求证明  $n > 1$  时的严格不等式, 此处作为归纳基础)。

第二步: 假设当  $n = k$  时不等式 (或等式) 成立, 即:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2k-1}{2k} \leq \frac{1}{\sqrt{3k+1}}$$

第三步: 考虑当  $n = k + 1$  时, 左边乘积项变为:

$$\text{左边} = \left( \frac{1}{2} \cdots \frac{2k-1}{2k} \right) \cdot \frac{2k+1}{2k+2} \leq \frac{1}{\sqrt{3k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2}$$

为了证明结论成立, 我们需要证明  $\frac{2k+1}{(2k+2)\sqrt{3k+1}} < \frac{1}{\sqrt{3(k+1)+1}}$ 。我们对不等式左边项的平方进行分析:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{2k+1}{(2k+2)\sqrt{3k+1}} \right]^2 &= \frac{(2k+1)^2}{(4k^2+8k+4)(3k+1)} \\ &= \frac{(2k+1)^2}{12k^3+28k^2+20k+4} \\ &= \frac{(2k+1)^2}{(12k^3+28k^2+19k+4)+k} \end{aligned}$$

注意到上式分母中括号内的部分恰好等于  $(2k+1)^2(3k+4)$ 。因此:

$$\frac{(2k+1)^2}{(2k+1)^2(3k+4)+k} < \frac{(2k+1)^2}{(2k+1)^2(3k+4)} = \frac{1}{3k+4}$$

这表明:

$$\frac{2k+1}{(2k+2)\sqrt{3k+1}} < \frac{1}{\sqrt{3k+4}}$$

即  $P_{k+1}$  成立。

综上所述, 由数学归纳法可知, 原不等式对所有  $n > 1$  均成立。

据此, 令  $n = 50$ , 得

4. 已知

$$f(n) = 3^{2n+4} - 2^{2n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

用数学归纳法证明  $f(n)$  能被 5 整除。

先验证基础情况。

当  $n = 1$  时,

$$\begin{aligned}f(1) &= 3^6 - 2^2 \\&= 729 - 4 \\&= 725,\end{aligned}$$

显然 725 能被 5 整除, 因此结论对  $n = 1$  成立。

假设当  $n = k$  时结论成立, 即存在  $m \in \mathbb{N}$ , 使得

$$f(k) = 3^{2k+4} - 2^{2k} = 5m.$$

下面证明结论对  $n = k + 1$  也成立。

$$\begin{aligned}f(k+1) - f(k) &= (3^{2(k+1)+4} - 2^{2(k+1)}) - (3^{2k+4} - 2^{2k}) \\&= 3^{2k+6} - 2^{2k+2} - 3^{2k+4} + 2^{2k} \\&= 3^{2k+4}(3^2 - 1) - 2^{2k}(2^2 - 1) \\&= 8 \cdot 3^{2k+4} - 3 \cdot 2^{2k}.\end{aligned}$$

由此得

$$\begin{aligned}f(k+1) &= f(k) + 8 \cdot 3^{2k+4} - 3 \cdot 2^{2k} \\&= 5m + 8 \cdot 3^{2k+4} - 3(3^{2k+4} - 5m) \\&= 5m + 8 \cdot 3^{2k+4} - 3 \cdot 3^{2k+4} + 15m \\&= 20m + 5 \cdot 3^{2k+4} \\&= 5(4m + 3^{2k+4}).\end{aligned}$$

因此  $f(k+1)$  也能被 5 整除。

由数学归纳法可知, 对所有  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$f(n) = 3^{2n+4} - 2^{2n}$$

均能被 5 整除。

5. 证明对所有正整数  $n$ , 都有

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}.$$

用数学归纳法证明:

当  $n = 1$  时:

$$\text{L.H.S.} = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1,$$

$$\text{R.H.S.} = \sqrt{1} = 1.$$

所以当  $n = 1$  时命题成立。

假设当  $n = k$  时命题成立, 即

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{k}.$$

当  $n = k + 1$  时:

$$\begin{aligned} \text{L.H.S.} &= \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \\ &\geq \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}. \end{aligned}$$

只需证明

$$\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \geq \sqrt{k+1}.$$

两边同减  $\sqrt{k+1}$ :

$$\begin{aligned} \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} - \sqrt{k+1} &= \frac{\sqrt{k(k+1)} + 1 - (k+1)}{\sqrt{k+1}} \\ &= \frac{\sqrt{k(k+1)} - k}{\sqrt{k+1}} \\ &= \frac{k(k+1) - k^2}{(\sqrt{k(k+1)} + k)\sqrt{k+1}} \\ &= \frac{k}{\sqrt{k+1}(\sqrt{k^2 + k} + k)} > 0 \quad (\text{因为 } k > 0) \end{aligned}$$

因此

$$\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1},$$

即当  $n = k + 1$  时命题成立。

由数学归纳法, 命题对所有正整数  $n$  成立。

6. 用数学归纳法证明: 若  $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ , 则

$$n^{n+1} > (n+1)^n,$$

并由此推导出若  $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ , 则

$$\sqrt{n} > \sqrt[n+1]{n+1}.$$

首先进行归纳证明。

基础情况:  $n = 3$

$$3^{3+1} = 81 > 64 = 4^3,$$

因此结果对  $n = 3$  成立。

归纳假设: 假设对于  $n = k \geq 3$ , 不等式成立:

$$k^{k+1} > (k+1)^k.$$

归纳步骤: 需要证明若归纳假设成立, 则

$$(k+1)^{(k+1)+1} = (k+1)^{k+2} > (k+2)^{k+1}.$$

根据归纳假设:

$$k^{k+1} > (k+1)^k \implies k^{k+1}(k+1)^2 > (k+1)^k(k+2)^{k+1}?$$

考虑简单的方法: 对任意  $k \geq 3$ , 有

$$(k+1)^2 > k(k+2) \implies k^2 + 2k + 1 > k^2 + 2k,$$

这显然成立, 因此归纳步骤成立。

因此, 如果不等式对  $n = k$  成立, 则对  $n = k+1$  也成立。结合基础情况  $n = 3$ , 则对所有  $n \geq 3$ , 不等式成立:

$$n^{n+1} > (n+1)^n.$$

推导  $\sqrt{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$ :

两边同时取  $(n(n+1))$  次根:

$$\begin{aligned}\left(\frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\right)^{\frac{1}{n(n+1)}} &> \left(\frac{(n+1)^n}{(n+1)^{n+1}}\right)^{\frac{1}{n(n+1)}} \\ \frac{n^{\frac{1}{n}}}{(n+1)^{\frac{1}{n+1}}} &> \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n+1}}} \\ n^{\frac{1}{n}} &> (n+1)^{\frac{1}{n+1}} \\ \sqrt[n]{n} &> \sqrt[n+1]{n+1}.\end{aligned}$$

由此完成证明。

7. 设  $x_0 = 5$ , 且  $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$ . 证明对一切  $n \geq 1$  都有

$$2n < x_n^2 - 25 < \frac{47n}{23}.$$

先验算  $n = 1$  的情形.  $x_1 = 5 + \frac{1}{5} = \frac{26}{5}$ , 所以

$$x_1^2 - 25 = \left(\frac{26}{5}\right)^2 - 25 = \frac{51}{25} = 2.04,$$

显然  $2 < \frac{51}{25} < \frac{47}{23} \approx 2.04348$ , 因此不等式对  $n = 1$  成立。

下面用数学归纳法。假设不等式对某个正整数  $k$  成立, 即

$$2k < x_k^2 - 25 < \frac{47k}{23}.$$

由递推关系得

$$x_{k+1}^2 - 25 = \left(x_k + \frac{1}{x_k}\right)^2 - 25 = (x_k^2 - 25) + 2 + \frac{1}{x_k^2}.$$

首先给出下界: 由于  $\frac{1}{x_k^2} > 0$ , 有

$$x_{k+1}^2 - 25 > (x_k^2 - 25) + 2 > 2k + 2 = 2(k+1).$$

再给出上界: 由归纳假设  $x_k^2 - 25 < \frac{47k}{23}$ , 所以

$$x_{k+1}^2 - 25 < \left(\frac{47k}{23}\right) + 2 + \frac{1}{x_k^2}.$$

注意到对  $k \geq 1$  有  $x_k \geq x_1 = \frac{26}{5} > 5$ , 因此  $x_k^2 > 25 > 23$ , 从而

$$\frac{1}{x_k^2} < \frac{1}{23}.$$

因此

$$x_{k+1}^2 - 25 < \frac{47k}{23} + 2 + \frac{1}{23} = \frac{47k}{23} + \frac{47}{23} = \frac{47(k+1)}{23}.$$

综上, 若不等式对  $n = k$  成立, 则对  $n = k + 1$  也成立。结合基例  $n = 1$ , 由归纳法可知对所有  $n \geq 1$  都有

$$2n < x_n^2 - 25 < \frac{47n}{23}.$$

证毕。

8. 设数列  $\{a_n\}$  定义为  $a_1 = 1, a_2 = 1$ , 且  $a_{m+1} = a_m + a_{m-1}$  对所有  $m \geq 2$ 。证明

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] \quad \text{对所有正整数 } n \text{ 成立.}$$

用归纳法证明:

当  $n = 1$  时:

$$\text{L.H.S.} = a_1 = 1,$$

$$\text{R.H.S.} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5} = 1 = \text{L.H.S.}$$

当  $n = 2$  时:

$$\text{L.H.S.} = a_2 = 1,$$

$$\text{R.H.S.} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{6+2\sqrt{5}}{4} \right) - \left( \frac{6-2\sqrt{5}}{4} \right) \right] = 1 = \text{L.H.S.}$$

假设当  $n = k$  和  $n = k + 1$  时命题成立, 即

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right], \quad a_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} \right].$$

当  $n = k + 2$  时:

$$\begin{aligned} a_{k+2} &= a_{k+1} + a_k \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} + \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 \right) - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1 \right) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k \left( \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right) - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \left( \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

注意到

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2} = \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2, \quad \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2,$$

所以

$$a_{k+2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+2} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+2} \right].$$

由数学归纳法得证, 命题对所有正整数  $n$  成立。

#### 9. 已知数列由递推关系

$$a_{n+1} = \frac{a_n - 5}{3a_n - 7}, \quad a_1 = -1, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 1$$

定义, 用数学归纳法证明

$$a_n = \frac{2^{n+1} - 5}{2^{n+1} - 3}.$$

先改写递推关系。

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{a_n - 5}{3a_n - 7} = \frac{1}{3} \frac{a_n - 5}{a_n - \frac{7}{3}} = \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{\frac{8}{3}}{a_n - \frac{7}{3}} \right) \\ a_{n+1} &= \frac{1}{3} - \frac{8}{9a_n - 21}. \end{aligned}$$

先验证基础情况。当  $n = 1$  时,

$$a_1 = \frac{2^{1+1} - 5}{2^{1+1} - 3} = \frac{4 - 5}{4 - 3} = -1,$$

与已知  $a_1 = -1$  一致, 因此结论对  $n = 1$  成立。

假设当  $n = k$  时结论成立, 即

$$a_k = \frac{2^{k+1} - 5}{2^{k+1} - 3}.$$

则

$$\begin{aligned} 9a_k - 21 &= 9 \left( \frac{2^{k+1} - 5}{2^{k+1} - 3} \right) - 21 = \frac{9 \cdot 2^{k+1} - 45 - 21(2^{k+1} - 3)}{2^{k+1} - 3} \\ &= \frac{-12 \cdot 2^{k+1} + 18}{2^{k+1} - 3}. \end{aligned}$$

因此

$$\frac{8}{9a_k - 21} = \frac{8(2^{k+1} - 3)}{-12 \cdot 2^{k+1} + 18}.$$

代回递推关系得

$$a_{k+1} = \frac{1}{3} - \frac{8}{9a_k - 21} = \frac{1}{3} - \frac{8(2^{k+1} - 3)}{12 \cdot 2^{k+1} - 18}.$$

通分化简得

$$a_{k+1} = \frac{6 \cdot 2^{k+1} - 9 + 12 \cdot 2^{k+1} - 36}{3(6 \cdot 2^{k+1} - 9)} = \frac{18 \cdot 2^{k+1} - 45}{9(2 \cdot 2^{k+1} - 3)}.$$

约分后

$$a_{k+1} = \frac{2 \cdot 2^{k+1} - 5}{2 \cdot 2^{k+1} - 3} = \frac{2^{k+2} - 5}{2^{k+2} - 3}.$$

因此若结论对  $n = k$  成立, 则对  $n = k + 1$  也成立。

由于结论对  $n = 1$  成立, 根据数学归纳法, 结论对所有  $n \in \mathbb{N}$  成立。

10. 证明对所有整数  $n \geq 1$ , 有

$$(a + b)^n = {}^nC_0 a^n + {}^nC_1 a^{n-1} b + {}^nC_2 a^{n-2} b^2 + \cdots + {}^nC_n b^n.$$

用数学归纳法证明:

当  $n = 1$  时:

$$\text{L.H.S.} = (a + b)^1 = a + b,$$

$$\text{R.H.S.} = {}^1C_0 a^1 + {}^1C_1 b^1 = a + b = \text{L.H.S.}$$

所以当  $n = 1$  时命题成立。

假设当  $n = k$  时命题成立, 即

$$(a + b)^k = {}^kC_0 a^k + {}^kC_1 a^{k-1} b + \cdots + {}^kC_k b^k.$$

当  $n = k + 1$  时:

$$\begin{aligned}(a+b)^{k+1} &= (a+b)(a+b)^k \\&= (a+b)({}^kC_0a^k + {}^kC_1a^{k-1}b + \cdots + {}^kC_kb^k) \\&= a({}^kC_0a^k + \cdots + {}^kC_kb^k) + b({}^kC_0a^k + \cdots + {}^kC_kb^k) \\&= {}^kC_0a^{k+1} + ({}^kC_1 + {}^kC_0)a^kb + ({}^kC_2 + {}^kC_1)a^{k-1}b^2 + \cdots \\&\quad + ({}^kC_k + {}^kC_{k-1})ab^k + {}^kC_kb^{k+1}.\end{aligned}$$

利用组合数恒等式

$${}^kC_r + {}^kC_{r-1} = {}^{k+1}C_r,$$

得到

$$(a+b)^{k+1} = {}^{k+1}C_0a^{k+1} + {}^{k+1}C_1a^kb + \cdots + {}^{k+1}C_{k+1}b^{k+1} = \text{R.H.S.}$$

因此命题对  $n = k + 1$  成立。由数学归纳法, 命题对所有正整数  $n$  成立。

#### 11. 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left( \sin\left(\frac{\pi/2}{k}\right) - \cos\left(\frac{\pi/2}{k}\right) - \sin\left(\frac{\pi/2}{k+2}\right) + \cos\left(\frac{\pi/2}{k+2}\right) \right).$$

设部分和为

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left( \sin\left(\frac{\pi/2}{k}\right) - \cos\left(\frac{\pi/2}{k}\right) - \sin\left(\frac{\pi/2}{k+2}\right) + \cos\left(\frac{\pi/2}{k+2}\right) \right).$$

观察前几项的望远镜消去规律:

$$S_1 = 1 - \sin(\pi/6) + \cos(\pi/6),$$

$$S_2 = S_1 + \sin(\pi/4) - \cos(\pi/4) - \sin(\pi/8) + \cos(\pi/8) = 1 - \sin(\pi/6) + \cos(\pi/6) - \sin(\pi/8) + \cos(\pi/8),$$

$$S_3 = S_2 + \sin(\pi/6) - \cos(\pi/6) - \sin(\pi/10) + \cos(\pi/10) = 1 - \sin(\pi/8) + \cos(\pi/8) - \sin(\pi/10) + \cos(\pi/10),$$

$$S_4 = S_3 + \sin(\pi/8) - \cos(\pi/8) - \sin(\pi/12) + \cos(\pi/12) = 1 - \sin(\pi/10) + \cos(\pi/10) - \sin(\pi/12) + \cos(\pi/12).$$

由归纳法可得一般形式:

$$S_n = 1 - \sin\frac{\pi/2}{n+1} - \sin\frac{\pi/2}{n+2} + \cos\frac{\pi/2}{n+1} + \cos\frac{\pi/2}{n+2}.$$

当  $n \rightarrow \infty$  时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1 - 0 - 0 + 1 + 1 = 3.$$

12. 设数列  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  满足对所有  $n \geq 0$  都有

$$\frac{1}{2} < a_n < 1.$$

定义数列  $(x_n)$  为

$$x_0 = a_0, \quad x_{n+1} = \frac{a_{n+1} + x_n}{1 + a_{n+1}x_n} \quad (n \geq 0).$$

求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  的所有可能取值, 并判断该数列是否可能发散。

我们用归纳法证明

$$0 < 1 - x_n < \frac{1}{2^{n+1}}.$$

由此可得  $(1 - x_n) \rightarrow 0$ , 从而  $x_n \rightarrow 1$ 。

当  $n = 0$  时, 由  $\frac{1}{2} < x_0 = a_0 < 1$ , 结论成立。

假设结论对某个  $n$  成立, 由递推关系得

$$1 - x_{n+1} = 1 - \frac{a_{n+1} + x_n}{1 + a_{n+1}x_n} = \frac{1 - a_{n+1}}{1 + a_{n+1}x_n}(1 - x_n).$$

由于

$$0 < \frac{1 - a_{n+1}}{1 + a_{n+1}x_n} < \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + 0} = \frac{1}{2},$$

于是

$$0 < 1 - x_{n+1} < \frac{1}{2}(1 - x_n) < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+2}}.$$

因此结论对  $n + 1$  也成立。

综上,  $1 - x_n \rightarrow 0$ , 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1.$$

因此该数列在所有情况下都收敛, 其极限唯一为 1, 不可能发散。

13. 对于实数  $a > 0$ , 定义数列  $\{x_n\}$  为

$$x_{n+1} = a(x_n^2 + 4), \quad x_0 = 0.$$

求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在且有限的充要条件。

假设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ , 且  $x$  有限, 则

$$x = a(x^2 + 4),$$

从而

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 16a^2}}{2a}.$$

要使  $x$  为实数且有限, 必须有  $1 - 16a^2 \geq 0$ 。又已知  $a > 0$ , 于是

$$0 < a \leq \frac{1}{4}.$$

下面假设  $0 < a \leq \frac{1}{4}$ 。用归纳法可证明  $\{x_n\}$  为单调不减数列。有

$$x_1 = 4a \geq x_0 = 0.$$

若假设  $x_n \geq x_{n-1}$ , 则

$$x_{n+1} - x_n = a(x_n^2 - x_{n-1}^2),$$

从而  $x_{n+1} \geq x_n$ 。

注意到  $x_1 = 4a < 2$ , 再用归纳法可证明  $\{x_n\}$  有上界。若  $x_n < 2$ , 则

$$x_{n+1} = a(x_n^2 + 4) < \frac{1}{4}(4 + 4) = 2.$$

因此  $\{x_n\}$  是一个有上界的单调不减数列, 必然收敛于一个有限实数。

综上所述, 所求的充要条件为

$$0 < a \leq \frac{1}{4}.$$

14. 设  $n$  为正整数, 且  $a_k, b_k$  满足

$$a_k = \frac{1}{\binom{n}{k}}, \quad b_k = 2^{k-n}, \quad \text{for } k = 1, 2, \dots, n.$$

证明

$$\frac{a_1 - b_1}{1} + \frac{a_2 - b_2}{2} + \dots + \frac{a_n - b_n}{n} = 0 \quad (1)$$

由于对所有  $k \geq 1$  都有

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1},$$

式 (1) 等价于

$$\frac{2^n}{n} \left[ \frac{1}{\binom{n-1}{0}} + \frac{1}{\binom{n-1}{1}} + \dots + \frac{1}{\binom{n-1}{n-1}} \right] = \frac{2^1}{1} + \frac{2^2}{2} + \dots + \frac{2^n}{n} \quad (2)$$

下面用数学归纳法证明 (2)。

当  $n = 1$  时, 等式两边均等于 2, 结论成立。

假设 (2) 对某个  $n$  成立。设

$$X_n = \frac{2^n}{n} \left[ \frac{1}{\binom{n-1}{0}} + \frac{1}{\binom{n-1}{1}} + \cdots + \frac{1}{\binom{n-1}{n-1}} \right]$$

则

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= \frac{2^{n+1}}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{\binom{n}{k}} \\ &= \frac{2^n}{n+1} \left( 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{1}{\binom{n}{k}} + \frac{1}{\binom{n}{k+1}} \right) + 1 \right) \end{aligned}$$

利用

$$\frac{1}{\binom{n}{k}} + \frac{1}{\binom{n}{k+1}} = \frac{n+1}{k+1} \cdot \frac{1}{\binom{n-1}{k}},$$

得到

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= \frac{2^n}{n+1} \left( \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n+1}{k+1} \cdot \frac{1}{\binom{n-1}{k}} \right) + \frac{2^{n+1}}{n+1} \\ &= \frac{2^n}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\binom{n-1}{k}} + \frac{2^{n+1}}{n+1} \\ &= X_n + \frac{2^{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

由归纳假设可得

$$X_{n+1} = \frac{2^1}{1} + \frac{2^2}{2} + \cdots + \frac{2^{n+1}}{n+1},$$

从而 (2) 对  $n+1$  成立。

因此 (2) 对所有正整数  $n$  成立, 从而 (1) 也成立。

15. 定义数列  $x_1, x_2, \dots$  递推为  $x_1 = \sqrt{5}$  且  $x_{n+1} = x_n^2 - 2$  对每个  $n \geq 1$ . 求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}{x_{n+1}}.$$

令  $y_n = x_n^2$ , 则递推关系变为  $y_{n+1} = (y_n - 2)^2$ , 并且

$$y_{n+1} - 4 = y_n(y_n - 4).$$

由于  $y_2 > 5$ , 可以归纳得到  $y_n > 5$  对所有  $n \geq 2$ , 从而

$$y_{n+1} - y_n = y_n^2 - 5y_n + 4 > 4,$$

所以  $y_n \rightarrow \infty$ 。

利用关系  $y_{n+1} - 4 = y_n(y_n - 4)$ , 有

$$\begin{aligned} \left( \frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{x_{n+1}} \right)^2 &= \frac{y_1 y_2 \cdots y_n}{y_{n+1}} = \frac{y_1 y_2 \cdots y_n}{y_{n+1} - 4} \cdot \frac{y_{n+1} - 4}{y_{n+1}} = \frac{y_1 y_2 \cdots y_{n-1}}{y_n - 4} \cdot \frac{y_{n+1} - 4}{y_{n+1}} \\ &= \cdots = \frac{y_1}{y_2 - 4} \cdot \frac{y_2 - 4}{y_3 - 4} \cdots \frac{y_n - 4}{y_{n+1} - 4} \cdot \frac{y_{n+1} - 4}{y_{n+1}} = \frac{y_1}{y_{n+1}} \cdot \frac{y_{n+1} - 4}{y_1 - 4} \rightarrow 1. \end{aligned}$$

因此,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{x_{n+1}} = 1.$$

16. 设数列  $\{a_n\}_{n=1}^\infty$  定义为

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 2,$$

并且当  $n \geq 3$  时,

$$a_{n+1} = \frac{n a_n a_{n-2}}{a_{n-1}}$$

(a) 证明对所有  $n \geq 1, a_n$  都是正整数。

(b) 定义数列  $\{b_n\}_{n=1}^\infty$  为

$$b_n = \frac{a_n}{\sqrt{(n+1)!}}$$

证明  $\{b_n\}$  有界。

(a) 对于  $n \geq 1$ , 有

$$a_{n+3} = \frac{(n+2)a_{n+2}a_n}{a_{n+1}},$$

从而

$$\begin{aligned}a_{n+4} &= \frac{(n+3)a_{n+3}a_{n+1}}{a_{n+2}} \\&= \frac{(n+3)(n+2)a_{n+2}a_n a_{n+1}}{a_{n+1}a_{n+2}} \\&= (n+3)(n+2)a_n\end{aligned}$$

因此

$$a_{n+4} = (n+3)(n+2)a_n \quad (3)$$

由于

$$a_4 = \frac{3a_3a_1}{a_2} = 6,$$

可知  $a_1, a_2, a_3, a_4$  均为正整数。假设对所有  $k < n+4, a_k$  都是正整数, 则由强归纳法和公式 (3) 可得  $a_{n+4}$  也是正整数。于是对所有  $n \geq 1, a_n$  都是正整数。

(b) 由 (3) 式, 有

$$\begin{aligned}b_{n+4} &= \frac{a_{n+4}}{\sqrt{(n+5)!}} \\&= \frac{(n+3)(n+2)a_n}{\sqrt{(n+1)!(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}} \\&= \frac{a_n}{\sqrt{(n+1)!}} \sqrt{\frac{(n+3)(n+2)}{(n+4)(n+5)}} \\&\leq \frac{a_n}{\sqrt{(n+1)!}} \\&= b_n\end{aligned}$$

由归纳法, 并注意到  $b_1, b_2, b_3, b_4 \leq 1$ , 可得对所有  $n \geq 1$ ,

$$b_n \leq 1$$

因此数列  $\{b_n\}$  有界。

17. 设  $x_1 = 1$ , 且对  $n \geq 1$ ,

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n} \left( \sqrt{1+x_n^2} - 1 \right)$$

证明数列  $\{2^n x_n\}$  收敛, 并求其极限。

我们先利用数学归纳法证明

$$x_n = \tan(\pi/2^{n+1}) \quad (3)$$

对所有正整数  $n$  都成立。由于  $x_1 = 1 = \tan(\pi/4)$ , (3) 对  $n = 1$  成立。假设 (3) 对某个正整数  $n$  成立, 则

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{1}{\tan(\pi/2^{n+1})} \left( \sqrt{1 + \tan^2(\pi/2^{n+1})} - 1 \right) \\ &= \frac{\sec(\pi/2^{n+1}) - 1}{\tan(\pi/2^{n+1})} = \frac{1 - \cos(\pi/2^{n+1})}{\sin(\pi/2^{n+1})} \\ &= \tan\left(\frac{1}{2} \cdot \pi/2^{n+1}\right) = \tan(\pi/2^{n+2}) \end{aligned}$$

因此, 由归纳法可知 (3) 对所有正整数  $n$  都成立。

令  $y = \pi/2^n$ , 则当  $n \rightarrow \infty$  时,  $y \rightarrow 0^+$ , 由洛必达法则得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n x_n = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\tan(\pi y/2)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\pi \sec^2(\pi y/2)}{2} = \frac{\pi}{2}$$

18. 设无穷数列  $\{a_n\}$  符合  $a_0 = 0$  且当  $n \geq 1$  时,

$$a_n - a_{n-1} = \begin{cases} \left(\frac{1}{5}\right)^n, & n \text{ 为偶数} \\ \left(\frac{1}{5}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

(a) 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n}$  的值。

由于

$$\begin{aligned} a_{2n} - a_0 &= a_{2n} - a_{2n-1} + a_{2n-1} - a_{2n-2} + \cdots + a_2 - a_1 + a_1 - a_0 \\ &= \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{5^{2n}}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^{2n-1}}\right) \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \frac{\frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5}} - \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{9}} = -\frac{1}{8}$$

(b) 证明当  $n \geq 0$ ,  $a_{2n+2} - a_{2n} < 0$ , 并依此证明对于所有正整数  $n$ , 不等式

$$-\frac{1}{8} \leq a_{2n} < 0$$

恒成立。

$$\begin{aligned}
 a_{2n+2} - a_{2n} &= a_{2n+2} - a_{2n+1} + a_{2n+1} - a_{2n} \\
 &= \left(\frac{1}{5}\right)^{2n+2} + \left(\frac{1}{5}\right)^{2n+1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1} \\
 &= \frac{\frac{6}{5} \cdot 3^{2n+1} - 5^{2n+1}}{15^{2n+1}}
 \end{aligned}$$

当  $n = 0$  时,  $a_2 - a_0 = \frac{18/5-5}{15} < 0$ , 成立; 假设  $n = k$  时成立, 即

$$\frac{6}{5} \cdot 3^{2k+1} < 5^{2k+1}$$

观察当  $n = k + 1$  时,

$$a_{2k+4} - a_{2k+2} = \frac{\frac{6}{5} \cdot 3^{2k+3} - 5^{2k+3}}{15^{2k+3}}$$

由归纳假设,

$$\frac{6}{5} \cdot 3^{2k+3} < 3^2 \cdot 5^{2k+1} < 5^2 \cdot 5^{2k+1} = 5^{2k+3}$$

因此  $a_{2k+4} - a_{2k+2} < 0$ , 即当  $n = k + 1$  时也成立; 由数学归纳法,  $a_{2n+2} - a_{2n} < 0$ ; 又

$$a_{2n} < a_{2n-2} < \cdots < a_2 < a_0 = 0,$$

故  $a_{2n} < 0$ , 结合  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = -\frac{1}{8}$  得

$$-\frac{1}{8} \leq a_{2n} < 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

19. 设正实数  $a_0, a_1, \dots, a_n$  满足  $a_{k+1} - a_k \geq 1$  对所有  $k = 0, 1, \dots, n-1$  成立。证明

$$1 + \left(1 + \frac{1}{a_0}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{a_n - a_0}\right) \leq \left(1 + \frac{1}{a_0}\right) \left(1 + \frac{1}{a_1}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{a_n}\right).$$

用归纳法对  $n$  证明。空积视作 1, 则  $n = 0$  时显然成立。

假设对某个  $n$  结论成立, 考虑  $n + 1$ 。不等式可以拆为两部分:

$$1 + \left(1 + \frac{1}{a_0}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{a_n - a_0}\right) \leq \left(1 + \frac{1}{a_0}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)$$

(这是归纳假设), 以及

$$\frac{1}{a_0} \left(1 + \frac{1}{a_1 - a_0}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{a_n - a_0}\right) \cdot \frac{1}{a_{n+1} - a_0} \leq \left(1 + \frac{1}{a_0}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{a_n}\right) \cdot \frac{1}{a_{n+1}}. \quad (*)$$

只需证明不等式 (\*)。

对  $n$  再用归纳法。 $n = 0$  时, 需要验证

$$\frac{1}{a_0} \cdot \frac{1}{a_1 - a_0} \leq \left(1 + \frac{1}{a_0}\right) \cdot \frac{1}{a_1}.$$

两边乘以  $a_0 a_1 (a_1 - a_0)$ , 化简为

$$a_1 \leq (a_0 + 1)(a_1 - a_0) \implies a_0 \leq a_0 a_1 - a_0^2 \implies 1 \leq a_1 - a_0,$$

成立。

归纳步骤只需证明

$$\left(1 + \frac{1}{a_{n+1} - a_0}\right) \cdot \frac{a_{n+1} - a_0}{a_{n+2} - a_0} \leq \left(1 + \frac{1}{a_{n+1}}\right) \cdot \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}.$$

两边乘以  $(a_{n+2} - a_0)a_{n+2}$ , 得到

$$(a_{n+1} - a_0 + 1)a_{n+2} \leq (a_{n+1} + 1)(a_{n+2} - a_0) \implies a_0 \leq a_0 a_{n+2} - a_0 a_{n+1} \implies 1 \leq a_{n+2} - a_{n+1},$$

成立。因此归纳完成。

## 20. 用数学归纳法证明

$$\sum_{r=1}^n \left[ r(r+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{r-1} \right] = 16 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (n^2 + 5n + 8), \quad n \geq 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

先验证基础情况。

当  $n = 1$  时,

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^1 \left[ r(r+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{r-1} \right] &= 1 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \\ &= 2, \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} 16 - \left(\frac{1}{2}\right)^{1-1} (1^2 + 5 \cdot 1 + 8) &= 16 - (1)(14) \\ &= 2. \end{aligned}$$

因此结论对  $n = 1$  成立。

假设当  $n = k$  时结论成立, 即

$$\sum_{r=1}^k \left[ r(r+1) \left( \frac{1}{2} \right)^{r-1} \right] = 16 - \left( \frac{1}{2} \right)^{k-1} (k^2 + 5k + 8).$$

下面证明结论对  $n = k + 1$  成立。

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{k+1} \left[ r(r+1) \left( \frac{1}{2} \right)^{r-1} \right] &= \sum_{r=1}^k \left[ r(r+1) \left( \frac{1}{2} \right)^{r-1} \right] + (k+1)(k+2) \left( \frac{1}{2} \right)^k \\ &= 16 - \left( \frac{1}{2} \right)^{k-1} (k^2 + 5k + 8) + (k+1)(k+2) \left( \frac{1}{2} \right)^k \\ &= 16 + \left( \frac{1}{2} \right)^k [(k+1)(k+2) - 2(k^2 + 5k + 8)] \\ &= 16 + \left( \frac{1}{2} \right)^k [k^2 + 3k + 2 - 2k^2 - 10k - 16] \\ &= 16 - \left( \frac{1}{2} \right)^k [k^2 + 7k + 14] \\ &= 16 - \left( \frac{1}{2} \right)^k [(k+1)^2 + 5(k+1) + 8] \\ &= 16 - \left( \frac{1}{2} \right)^{(k+1)-1} [(k+1)^2 + 5(k+1) + 8]. \end{aligned}$$

因此若结论对  $n = k$  成立, 则对  $n = k + 1$  也成立。

由数学归纳法可知, 该等式对所有  $n \in \mathbb{N}$  成立。

21. 对每个  $n \geq 1$ , 令

$$a_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}, \quad b_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k^n}{k!}.$$

证明  $a_n \cdot b_n$  是整数。

我们用归纳法证明: 对所有  $n \geq 0$ ,  $a_n/e$  与  $b_n e$  都是整数。这里也包含  $n = 0$  的情形 (在定义中约定  $0^0 = 1$ )。

由指数函数的幂级数展开可知

$$a_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e, \quad b_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1},$$

因此结论对  $n = 0$  成立。

假设对某个  $n \geq 0$ ,  $a_0, a_1, \dots, a_n$  都是  $e$  的整数倍,  $b_0, b_1, \dots, b_n$  都是  $e^{-1}$  的整数倍。下面证明结论对  $n+1$  也成立。

由二项式定理, 有

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)^{n+1}}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)^n}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} k^m = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^m}{k!} \\ &= \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} a_m. \end{aligned}$$

同理,

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (k+1)^{n+1}}{(k+1)!} = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (k+1)^n}{k!} \\ &= - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} k^m = - \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k^m}{k!} \\ &= - \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} b_m. \end{aligned}$$

由归纳假设,  $a_m$  是  $e$  的整数倍,  $b_m$  是  $e^{-1}$  的整数倍, 而上式中系数均为整数, 因此  $a_{n+1}$  仍是  $e$  的整数倍,  $b_{n+1}$  仍是  $e^{-1}$  的整数倍。

由归纳法可知, 对所有  $n \geq 0$ ,  $a_n/e$  与  $b_n e$  均为整数, 从而

$$a_n b_n = \left( \frac{a_n}{e} \right) (b_n e)$$

是整数。

22. 试证对任意正整数  $n$ ,

$$[\sqrt{n}] + \sum_{k=1}^n \left[ \frac{n}{k} \right]$$

必为偶数, 其中  $[x]$  为高斯函数。

定义命题:

$$P_n : a_n = \lfloor \sqrt{n} \rfloor + \sum_{k=1}^n \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \text{ 为偶数,}$$

其中  $n \in \mathbb{Z}^+$ 。观察当  $n = 1$  时,

$$a_1 = \lfloor \sqrt{1} \rfloor + \left\lfloor \frac{1}{1} \right\rfloor = 1 + 1 = 2$$

为偶数, 即  $P_1$  成立。现假设  $P_n$  成立, 即当  $n = \ell$  时,

$$a_\ell = \lfloor \sqrt{\ell} \rfloor + \sum_{k=1}^{\ell} \left\lfloor \frac{\ell}{k} \right\rfloor$$

为偶数。观察当  $n = \ell + 1$  时:

- 若  $\ell + 1$  为完全平方数, 则

$$\lfloor \sqrt{\ell + 1} \rfloor = \lfloor \sqrt{\ell} \rfloor + 1,$$

且

$$\sum_{k=1}^{\ell+1} \left\lfloor \frac{\ell+1}{k} \right\rfloor = \sum_{k=1}^{\ell} \left\lfloor \frac{\ell}{k} \right\rfloor + m,$$

其中  $m$  为  $\ell + 1$  的正因数个数 (奇数)。于是

$$a_{\ell+1} = a_\ell + m + 1 = \text{偶} + \text{奇} + \text{奇} = \text{偶}.$$

- 若  $\ell + 1$  不是完全平方数, 则

$$\lfloor \sqrt{\ell + 1} \rfloor = \lfloor \sqrt{\ell} \rfloor,$$

且

$$\sum_{k=1}^{\ell+1} \left\lfloor \frac{\ell+1}{k} \right\rfloor = \sum_{k=1}^{\ell} \left\lfloor \frac{\ell}{k} \right\rfloor + m,$$

此时  $m$  为偶数, 于是

$$a_{\ell+1} = a_\ell + m = \text{偶} + \text{偶} = \text{偶}.$$

因此  $P_{\ell+1}$  亦成立。即  $P_n \implies P_{n+1}$ 。由数学归纳法,  $P_n$  对任意正整数  $n$  都成立。

23. 票箱中有甲、乙两人的选票分别为  $m$  张和  $n$  张且  $m > n$ 。令  $P_{m,n}$  表示开票的过程中甲的选票会一路领先乙的选票的概率,

(a) 计算  $P_{m,1}$  和  $P_{m,2}$ 。

视甲得 1 票为向上走一步, 乙得 1 票为向右走一步, 则  $P_{m,n}$  表示从原点  $O(0,0)$  走格点至  $P(n,m)$  但不经过  $(a,a)$  的概率。

$m$  个上、1 个右的排列数为  $\frac{(m+1)!}{m!} = m+1$ , 其中

$$\begin{cases} \text{开头为右的数列有 1 个} \\ \text{开头为上右的数列也只有 1 个} \end{cases}$$

因此符合条件的数列有  $m+1-2 = m-1$  个, 故

$$P_{m,1} = \frac{m-1}{m+1}$$

$m$  个上、2 个右的排列数为  $\frac{(m+2)!}{m!2!} = \frac{(m+2)(m+1)}{2}$ , 其中

$$\begin{cases} \text{开头为右的数列有 } m+1 \text{ 个} \\ \text{开头为上右的数列有 } m \text{ 个} \\ \text{开头为上上右右的数列有 1 个} \end{cases}$$

因此符合条件的数列有

$$\frac{(m+2)(m+1)}{2} - (m+1) - m - 1 = \frac{(m+1)(m-2)}{2}$$

所以

$$P_{m,2} = \frac{m-2}{m+2}$$

(b) 证明  $P_{m,n} = \frac{m}{m+n}P_{m-1,n} + \frac{n}{m+n}P_{m,n-1}$ 。

从  $(0,0)$  至  $(n,m)$  的方法数等于从  $(0,0)$  至  $(n-1,m)$  的方法数加上从  $(0,0)$  至  $(n,m-1)$  的方法数, 因此

$$P_{m,n} = \frac{\frac{(m+n-1)!}{(m-1)!n!}P_{m-1,n} + \frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}P_{m,n-1}}{\frac{(m+n)!}{m!n!}} = \frac{m}{m+n}P_{m-1,n} + \frac{n}{m+n}P_{m,n-1}$$

(c) 先猜测  $P_{m,n}$  的答案, 再利用 (b) 用归纳法证明你的猜测。

由 (a) 可猜

$$P_{m,n} = \frac{m-n}{m+n}, \quad m \geq n$$

令  $k = m + n$ , 观察当  $k = 2$  时,

$$\begin{cases} m = 2, n = 0 \Rightarrow P_{2,0} = \frac{2-0}{2+0} = 1 \\ m = n = 1 \Rightarrow P_{1,1} = \frac{1-1}{1+1} = 0 \end{cases}$$

显然猜测成立。现假设  $k = N$  时猜测成立, 观察当  $k = N + 1$  时,

$$\begin{aligned} P_{m,n} &= \frac{m}{m+n} P_{m-1,n} + \frac{n}{m+n} P_{m,n-1} \\ &= \frac{m}{m+n} \cdot \frac{m-n-1}{m+n-1} + \frac{n}{m+n} \cdot \frac{m-n+1}{m+n-1} \\ &= \frac{(m-n)(m+n-1)}{(m+n)(m+n-1)} = \frac{m-n}{m+n} \end{aligned}$$

猜测亦成立, 故猜测对所有  $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  且  $m \geq n$  皆成立。

24. 用数学归纳法证明: 若  $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$ , 则

$$\prod_{r=1}^n \cos(2^{r-1}x) = \frac{\sin(2^n x)}{2^n \sin x}.$$

先将乘积符号展开:

$$\prod_{r=1}^n \cos(2^{r-1}x) = \cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x \cdots \cos(2^{n-1}x).$$

先验证基础情况。

当  $n = 1$  时,

$$\begin{aligned} \text{L.H.S.} &= \prod_{r=1}^1 \cos(2^{r-1}x) = \cos(2^0x) = \cos x, \\ \text{R.H.S.} &= \frac{\sin(2^1x)}{2^1 \sin x} = \frac{\sin 2x}{2 \sin x} = \frac{2 \sin x \cos x}{2 \sin x} = \cos x. \end{aligned}$$

左右两边相等, 结论对  $n = 1$  成立。

假设当  $n = k$  时结论成立, 即

$$\prod_{r=1}^k \cos(2^{r-1}x) = \frac{\sin(2^k x)}{2^k \sin x}.$$

考虑  $n = k + 1$  的情形,

$$\begin{aligned}\prod_{r=1}^{k+1} \cos(2^{r-1}x) &= \left( \prod_{r=1}^k \cos(2^{r-1}x) \right) \cos(2^k x) \\ &= \frac{\sin(2^k x)}{2^k \sin x} \cos(2^k x) \\ &= \frac{\sin(2^k x) \cos(2^k x)}{2^k \sin x} \\ &= \frac{2 \sin(2^k x) \cos(2^k x)}{2^{k+1} \sin x} \\ &= \frac{\sin(2^{k+1} x)}{2^{k+1} \sin x}.\end{aligned}$$

因此若结论对  $n = k$  成立, 则对  $n = k + 1$  也成立。

由于结论对  $n = 1$  成立, 根据数学归纳法, 结论对所有  $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$  成立。

## 25. 用数学归纳法证明

$$\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cdots + \cos[(2n-1)x] = \frac{\sin(2nx)}{2 \sin x}.$$

先验证基础情况。

当  $n = 1$  时,

$$\text{L.H.S.} = \cos(2 \times 1 - 1)x = \cos x,$$

$$\text{R.H.S.} = \frac{\sin(2 \times 1 x)}{2 \sin x} = \frac{\sin(2x)}{2 \sin x} = \frac{2 \sin x \cos x}{2 \sin x} = \cos x.$$

因此结论对  $n = 1$  成立。

假设当  $n = k$  时结论成立, 即

$$\sum_{r=1}^k \cos[(2r-1)x] = \frac{\sin(2kx)}{2 \sin x}.$$

为进行归纳步骤, 先推导一个恒等式。由

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B,$$

$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B,$$

两式相加得

$$2 \sin A \cos B = \sin(A + B) + \sin(A - B).$$

取  $A = x$ ,  $B = (2k + 1)x$ , 则

$$\begin{aligned} 2 \sin x \cos[(2k + 1)x] &= \sin[(2k + 2)x] + \sin[-2kx] \\ &= \sin[(2k + 2)x] - \sin(2kx). \end{aligned}$$

现在考虑  $n = k + 1$ :

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{k+1} \cos[(2r - 1)x] &= \left( \sum_{r=1}^k \cos[(2r - 1)x] \right) + \cos[(2k + 1)x] \\ &= \frac{\sin(2kx)}{2 \sin x} + \cos[(2k + 1)x] \\ &= \frac{\sin(2kx) + 2 \sin x \cos[(2k + 1)x]}{2 \sin x} \\ &= \frac{\sin(2kx) + \sin[(2k + 2)x] - \sin(2kx)}{2 \sin x} \\ &= \frac{\sin[(2k + 2)x]}{2 \sin x} \\ &= \frac{\sin[2(k + 1)x]}{2 \sin x}. \end{aligned}$$

因此若结论对  $n = k$  成立, 则对  $n = k + 1$  也成立。

由于结论对  $n = 1$  成立, 根据数学归纳法, 结论对所有  $n \in \mathbb{N}$  成立。

26. 用数学归纳法证明:

$$\frac{d^n}{dx^n}[e^x \cos x] = 2^{\frac{n}{2}} e^x \cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right), \quad n \geqslant 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

先验证基础情况。

当  $n = 1$  时,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[e^x \cos x] &= e^x \cos x + e^x(-\sin x) \\ &= e^x(\cos x - \sin x). \end{aligned}$$

而右边为

$$\begin{aligned}2^{\frac{1}{2}}e^x \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) &= \sqrt{2}e^x \left(\cos x \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \sin \frac{\pi}{4}\right) \\&= \sqrt{2}e^x \left(\cos x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \sin x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\&= e^x(\cos x - \sin x).\end{aligned}$$

左右两边相等, 结论对  $n = 1$  成立。

假设当  $n = k$  时结论成立, 即

$$\frac{d^k}{dx^k}[e^x \cos x] = 2^{\frac{k}{2}}e^x \cos\left(x + \frac{k\pi}{4}\right).$$

考虑  $n = k + 1$  的情形,

$$\begin{aligned}\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}[e^x \cos x] &= \frac{d}{dx} \left[ 2^{\frac{k}{2}}e^x \cos\left(x + \frac{k\pi}{4}\right) \right] \\&= 2^{\frac{k}{2}} \left( e^x \cos\left(x + \frac{k\pi}{4}\right) - e^x \sin\left(x + \frac{k\pi}{4}\right) \right) \\&= 2^{\frac{k}{2}}e^x \left[ \cos\left(x + \frac{k\pi}{4}\right) - \sin\left(x + \frac{k\pi}{4}\right) \right].\end{aligned}$$

利用恒等式

$$\cos A - \sin A = \sqrt{2} \cos\left(A + \frac{\pi}{4}\right),$$

可得

$$\begin{aligned}\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}[e^x \cos x] &= 2^{\frac{k}{2}}e^x \cdot \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) \\&= 2^{\frac{k+1}{2}}e^x \cos\left(x + \frac{(k+1)\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

因此若结论对  $n = k$  成立, 则对  $n = k + 1$  也成立。

由于结论对  $n = 1$  成立, 根据数学归纳法, 结论对所有  $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$  成立。

27. 设  $n$  为正整数。计算

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin[(2n+1)x]}{\sin x} dx$$

令

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin[(2n+1)x]}{\sin x} dx$$

当  $n=1$  时,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 3x}{\sin x} dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{3\sin x - 4\sin^3 x}{\sin x} dx \\ &= \int_0^{\pi/2} (3 - 4\sin^2 x) dx \\ &= \int_0^{\pi/2} [1 + 2\cos(2x)] dx \\ &= [x + \sin(2x)]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

假设结论对  $n-1$  成立, 考虑  $n$  的情况。利用正弦的加角公式,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2nx \cos x + \cos 2nx \sin x}{\sin x} dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2nx \cos x}{\sin x} dx + \int_0^{\pi/2} \cos 2nx dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin[(2n-1)x] \cos^2 x}{\sin x} dx + \int_0^{\pi/2} \cos x \cos[(2n-1)x] dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin[(2n-1)x](1 - \sin^2 x)}{\sin x} dx + \int_0^{\pi/2} \cos x \cos[(2n-1)x] dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin[(2n-1)x]}{\sin x} dx - \int_0^{\pi/2} \sin x \sin[(2n-1)x] dx + \int_0^{\pi/2} \cos x \cos[(2n-1)x] dx \\ &= I_{n-1} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (\cos[(2n-2)x] - \cos 2nx) dx + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (\cos[(2n-2)x] + \cos 2nx) dx \\ &= I_{n-1} + \int_0^{\pi/2} \cos(2nx) dx \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

由归纳法得

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin[(2n+1)x]}{\sin x} dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{对所有正整数 } n \text{ 成立。}$$

28. 已知矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

用数学归纳法证明

$$\mathbf{A}^n = n\mathbf{A} - (n-1)\mathbf{I}, \quad n \geqslant 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

先验证基础情况。

当  $n = 1$  时,

$$\mathbf{A}^1 = 1 \cdot \mathbf{A} - (1-1)\mathbf{I} = \mathbf{A},$$

结论成立。

假设当  $n = k$  时结论成立, 即

$$\mathbf{A}^k = k\mathbf{A} - (k-1)\mathbf{I}.$$

则

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{k+1} &= \mathbf{A}^k \mathbf{A} \\ &= [k\mathbf{A} - (k-1)\mathbf{I}]\mathbf{A} \\ &= k\mathbf{A}^2 - (k-1)\mathbf{A}. \end{aligned}$$

为继续化简, 先将  $\mathbf{A}^2$  表示成  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{I}$  的线性组合。设

$$\mathbf{A}^2 = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{I}.$$

则

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

即

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + \mu & 0 \\ 2\lambda & \lambda + \mu \end{pmatrix}.$$

比较对应元素得

$$2\lambda = 4 \Rightarrow \lambda = 2,$$

$$\lambda + \mu = 1 \Rightarrow \mu = -1.$$

因此

$$\mathbf{A}^2 = 2\mathbf{A} - \mathbf{I}.$$

代回得

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}^{k+1} &= k(2\mathbf{A} - \mathbf{I}) - (k-1)\mathbf{A} \\
 &= 2k\mathbf{A} - k\mathbf{I} - k\mathbf{A} + \mathbf{A} \\
 &= (k+1)\mathbf{A} - k\mathbf{I} \\
 &= (k+1)\mathbf{A} - [(k+1) - 1]\mathbf{I}.
 \end{aligned}$$

因此若结论对  $n = k$  成立, 则对  $n = k + 1$  也成立。

由于结论对  $n = 1$  成立, 根据数学归纳法, 结论对所有  $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$  成立。

29. 设  $V_n$  为  $n$  阶范德蒙行列式, 定义如下:

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

试以数学归纳法证明

$$V_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

定义命题

$$P_n : V_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i), \quad n \in \mathbb{N}$$

基础步骤: 显然  $P_1$  成立, 因  $V = 1 = |1| = 1$ , 且显然  $P_2$  亦成立, 因为

$$V_2 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$$

归纳步骤: 假设命题  $P_k$  成立, 即

$$V_k = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{k-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_k & x_k^2 & \cdots & x_k^{k-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq k} (x_j - x_i)$$

观察  $V_{k+1}$ , 将  $x_1$  写成变量  $x$ , 即

$$V_{k+1} = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^k \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_k & x_k^2 & \cdots & x_k^k \\ 1 & x_{k+1} & x_{k+1}^2 & \cdots & x_{k+1}^k \end{vmatrix}$$

$V_{k+1}$  按  $R_1$  展开后是次数不大于  $k$  的多项式, 设  $f(x) = V_{k+1}$ , 发现当  $x = x_2, x_3, \cdots, x_{k+1}$ , 行列式  $V_{k+1}$  有相同的两行, 故

$$f(x_2) = f(x_3) = \cdots = f(x_{k+1}) = 0$$

故  $f(x)$  是一个次数为  $k$  且以  $x_2, x_3, \cdots, x_{k+1}$  为根的多项式, 由余氏定理,

$$f(x) = C(x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_{k+1}) \quad (1)$$

且  $C$  是一常数。又  $V_{k+1}$  按  $R_1$  展开式中  $x^k$  的系数为

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{k-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_k & x_k^2 & \cdots & x_k^{k-1} \end{vmatrix}$$

由归纳假设知此系数为

$$\prod_{2 \leq i < j \leq k+1} (x_j - x_i)$$

故由 (1) 知

$$C = \prod_{2 \leq i < j \leq k+1} (x_j - x_i)$$

即

$$f(x) = (x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_{k+1}) \prod_{2 \leq i < j \leq k+1} (x_j - x_i)$$

将  $x$  置换回  $x_1$ , 即得命题  $P_{k+1}$  成立, 此时蕴含  $P_k \implies P_{k+1}$  成立。

由数学归纳法, 命题  $P_n$  对所有正整数  $n$  皆成立。验证是  $x_j - x_i$  还是  $x_i - x_j$

30. 试证莱布尼茨公式: 设函数  $f, g$  定义在开区间  $I$  上,  $n$  为正整数,  $x \in I$  为  $I$  内一点使得  $f, g$

均可导  $n$  次, 则有

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x),$$

其中  $(n)$  表示导数的阶数。

定义命题

$$P_n : (f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x) \quad , n \in \mathbb{N}$$

基础步骤: 观察当  $n = 1$  时, 由乘积求导法则, 左式为

$$(f(x)g(x))' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

而右式为

$$\sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} f^{(k)}(x)g^{(1-k)}(x) = \binom{1}{0} f^{(0)}(x)g^{(1)}(x) + \binom{1}{1} f^{(1)}(x)g^{(0)}(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x),$$

此时左式等于右式, 即  $P_1$  成立。

归纳步骤: 设  $n \in \mathbb{N}$ , 假设归纳假设  $P_n$  成立, 有

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$$

欲证

$$(f(x)g(x))^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x)$$

由归纳假设,

$$\begin{aligned} (f(x)g(x))^{(n+1)} &= \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x) \right)' \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x))' \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (f^{(k+1)}(x)g^{(n-k)}(x) + f^{(k)}(x)g^{(n-k+1)}(x)) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k+1)}(x)g^{(n-k)}(x) + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n-k+1)}(x) \end{aligned}$$

将第一个求和中  $k = n$  的项分离, 第二个求和中  $k = 0$  的项分离, 得

$$\begin{aligned}(f(x)g(x))^{(n+1)} &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} f^{(k+1)}(x)g^{(n-k)}(x) + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n-k+1)}(x) \\ &\quad + \binom{n}{n} f^{(n+1)}(x)g^{(0)}(x) + \binom{n}{0} f^{(0)}(x)g^{(n+1)}(x) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k-1} f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x) + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n-k+1)}(x) \\ &\quad + \binom{n}{n} f^{(n+1)}(x)g^{(0)}(x) + \binom{n}{0} f^{(0)}(x)g^{(n+1)}(x)\end{aligned}$$

由帕斯卡恒等式,

$$\begin{aligned}(f(x)g(x))^{(n+1)} &= \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x) + \binom{n}{0} f^{(0)}(x)g^{(n+1)}(x) + \binom{n}{n} f^{(n+1)}(x)g^{(0)}(x) \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x) + \binom{n+1}{0} f(x)g^{(n+1)}(x) + \binom{n+1}{n+1} f^{(n+1)}(x)g(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x)\end{aligned}$$

即命题  $P_{n+1}$  成立, 此时蕴含  $P_n \implies P_{n+1}$  成立。

由数学归纳法, 命题  $P_n$  对所有正整数  $n$  皆成立。

31. 设  $a_0, a_1, a_2, \dots$  为一无限实数数列, 且满足

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \geq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

证明

$$\frac{a_0 + a_{n+1}}{2} \geq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

解法一

先证明:

$$a_0 + na_{n+1} \geq (n+1)a_n \quad (*)$$

当  $n = 1$  时,  $a_0 + a_2 \geq 2a_1$ , 显然 (\*) 成立; 假设  $n = k$  时 (\*) 成立, 即

$$a_0 + ka_{k+1} \geq (k+1)a_k \quad (1)$$

又

$$a_{k+2} + a_k \geq 2a_{k+1} \quad (2)$$

由 (1), (2) 得

$$a_0 + (k+1)a_{k+2} \geq (k+1)(a_{k+2} + a_k) - ka_{k+1} \geq 2(k+1)a_{k+1} - ka_{k+1} = (k+2)a_{k+1}$$

即  $n = k+1$  时 (\*) 也成立, 由数学归纳法知 (\*) 对所有  $n \in \mathbb{N}$  均成立。

现证:

$$n(a_n + a_{n+1}) \geq 2 \sum_{i=1}^n a_i \quad (**)$$

当  $n = 1$  时,  $a_0 + a_2 \geq 2a_1$ , (\*\*) 成立; 假设  $n = k$  时 (\*\*) 成立, 即

$$k(a_0 + a_{k+1}) \geq 2 \sum_{i=1}^k a_i \quad (3)$$

由 (\*) 知

$$a_0 + (k+1)a_{k+2} \geq (k+2)a_{k+1} \quad (4)$$

由 (3), (4) 得

$$(k+1)(a_0 + a_{k+2}) \geq (k+2)a_{k+1} + 2 \sum_{i=1}^k a_i - ka_{k+1} = 2 \sum_{i=1}^{k+1} a_i$$

即  $n = k+1$  时 (\*\*) 也成立, 由数学归纳法知 (\*\*) 对所有  $n \in \mathbb{N}$  均成立即

$$\frac{a_0 + a_{n+1}}{2} \geq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

证毕。

解法二

设  $a_{n+1} - a_n = d_n$ , 由题意可知

$$a_{n+1} - a_n \geq a_n - a_{n-1} \Rightarrow d_n \geq d_{n-1}$$

且  $a_n = a_0 + d_1 + d_2 + \cdots + d_{n-1}$ , 欲证等价于

$$\begin{aligned} \frac{a_0 + a_{n+1}}{2} &\geq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \\ \iff n(a_0 + a_{n+1}) &\geq 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \\ \iff na_0 + n(a_0 + d_0 + d_1 + \cdots + d_{n-1}) \\ &\geq 2[(a_0 + d_0) + (a_0 + d_0 + d_1) + \cdots + (a_0 + d_0 + d_1 + \cdots + d_{n-1})] \\ \iff nd_n &\geq nd_0 + (n-2)d_1 + (n-4)d_2 + (n-6)d_3 + \cdots + (4-n)d_{n-2} + (2-n)d_{n-1} \end{aligned}$$

当  $n$  为奇数, 即证

$$n(d_0 - d_n) + (n-2)(d_1 - d_{n-1}) + (n-4)(d_2 - d_{n-2}) + \cdots + (d_{\frac{n-1}{2}} - d_{\frac{n+1}{2}}) \leq 0 \quad (1)$$

而  $d_n \geq d_{n-1}$ , 则

$$d_0 - d_n \leq 0, d_1 - d_{n-1} \leq 0, \cdots, d_{\frac{n-1}{2}} - d_{\frac{n+1}{2}} \leq 0$$

此时 (1) 显然成立。

当  $n$  为偶数, 即证

$$n(d_0 - d_n) + (n-2)(d_1 - d_{n-1}) + (n-4)(d_2 - d_{n-2}) + \cdots + 2(d_{\frac{n-2}{2}} - d_{\frac{n+2}{2}}) \leq 0 \quad (2)$$

上式中  $d_{\frac{n}{2}}$  这一项没有, 而  $d_n \geq d_{n-1}$  则

$$d_0 - d_n \leq 0, d_1 - d_{n-1} \leq 0, \cdots, d_{\frac{n-2}{2}} - d_{\frac{n+2}{2}} \leq 0$$

此时 (2) 也成立。

故得证

$$\frac{a_0 + a_{n+1}}{2} \geq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

32. 已知多项式  $P(x) = x^2 + 2019x + 1$ , 试证对任意正整数  $n$ , 函数  $P^{(n)}(x) = 0$  至少有一个实数根, 其中  $P^{(n)}(x)$  表示  $P$  自身复合  $n$  次。

定义命题: 对任意正整数  $n$ ,  $P^{(n)}(x)$  有一个负实根  $-c_n$ , 且  $0 < c_n < 2$ 。

当  $n = 1$  时,

$$P^{(1)}(x) = P(x) = x^2 + 2019x + 1$$

其判别式为  $\Delta_1 = 2019^2 - 4 > 0$ , 所以  $P^{(1)}(x)$  有两个实数根, 设为  $-b_1, -c_1$ , 其中  $c_1 \leq b_1$ ,

由韦达定理,

$$b_1 + c_1 = 2019, \quad b_1 c_1 = 1$$

因此  $b_1, c_1$  都为正数, 且因为乘积是 1, 可得  $c_1 \leq 1 < 2$ , 所以  $-c_1$  是一个负实根, 满足  $0 < c_1 < 2$ , 故命题在  $n = 1$  时成立。

假设命题在  $n = k$  时成立, 即  $P^{(k)}(x)$  有一负实根  $-c_k$ , 其中  $0 < c_k < 2$ , 即

$$P^{(k)}(x) = (x + c_k)Q_k(x)$$

其中  $Q_k(x)$  为某多项式, 则有

$$P^{(k+1)}(x) = P^{(k)}(P(x)) = (P(x) + c_k)Q_k(P(x))$$

其中

$$P(x) + c_k = x^2 + 2019x + 1 + c_k$$

的判别式为

$$\Delta_{k+1} = 2019^2 - 4(1 + c_k) > 0$$

即  $P(x) + c_k$  有两个实根, 设为  $-b_{k+1}, -c_{k+1}$ , 其中  $c_{k+1} \leq b_{k+1}$ , 由韦达定理,

$$b_{k+1} + c_{k+1} = 2019, \quad b_{k+1} c_{k+1} = 1 + c_k > 0$$

可知  $b_{k+1}, c_{k+1}$  都为正数, 且

$$c_{k+1} \leq \sqrt{1 + c_k} < \sqrt{3} < 2$$

所以  $-c_{k+1}$  是  $P^{(k+1)}(x)$  的负实根, 满足  $0 < c_{k+1} < 2$ , 故命题在  $n = k + 1$  时也成立。

由数学归纳法知, 对任意正整数  $n$ ,  $P^{(n)}(x)$  至少有一个实数根。

# 参考出处

- Arts of Problem Solving (AoPS): Contest Collections
- Brilliant (Kudos to the unmonetized version in the past)
- International Mathematics Competition (IMC) for University Students
- Missouri Collegiate Mathematics Competition
- American Mathematics Competition 10
- University of Waterloo CEMC - Euclid, Fermat, Cayley, Hypatia, Galois
- Lehigh University High School Math Contest
- Joint Entrance Examination (Advanced)
- The USSR Olympiad Problem Book: Selected Problems and Theorems of Elementary Mathematics
- LetsSolveMathProblems - Weekly Math Challenges
- Maths 505 - Differential Equations
- Michael Penn
- Prime Newtons
- TRML
- MadasMaths
- 中国复旦大学往年试题
- 雪隆森中学华罗庚杯数学比赛
- 厦门大学马来西亚分校-陈景润杯中学数学竞赛
- 微积分福音
- 线代启示录
- 福气老师
- 指考历届试题
- 统测历届试题与解答
- 印度人的作业
- 北京高考在线
- 朱式幸福教甄
- 普通型高级中学数学科能力竞赛 (决赛)
- 2014-2024 全国中学生数学竞赛联赛试题及答案汇总
- 如此醉的图书馆
- 菁优网
- 08 高考文科试题分类圆锥曲线
- 08 高考文科试题分类数列
- 福伦-隆中高数笔记
- 曾龙文师-高二数理培训队笔记