2025 年循人中学高三期末考兼统考预试

高中组

高级数学 (III)

(SC007)

训练集

采题: 李冬恒

February 6, 2026

版权所有 © 2026 李冬恒

前言

此训练集的雏形要追溯到 2019 年, 依稀记得为当时的备赛爬了大量的 AMC 历届考题, 创了“AMC 10 精选”的文档, 其中我认为是属于统考范围的难题, 便收录于另一个文档。

尘封已久, 直到今年 5 月, 我在整理电脑资料时偶然翻出, 看着当年的内容, 心想: 读了一个数学系, 难免觉得发展空间实属不少。在这几个月内, 我随性地在网络上寻找、采集、整理更有趣 (恶心)、更值得深思 (烧脑) 的题目, 于是诞生了——高级数学 (III) 训练集。

起初, 我并没想过要为每一题整理出解析, 但发现到不少当年的题目只附答案没附解法。可惜的是, 我的脑袋算是停止运作了一年, 发现有一些题目对于现在的我实在是难以下咽。好吧, 此乃下下策, 但我决定用 LaTeX 开始动手为每一题补上解法、重写排版、增加新的内容。也好, 既是备忘录, 也是为了防止未来的我看到这些题目时会再次怀疑人生: 「咦? 是不是百尺竿头, 更蠢一步?」

依据统考范围, 我把训练集大致分为代数、组合数学、几何及微积分。若你想自行动手尝试, 可以在 `preamble` 中将 `\printanswers` 这行注释掉。

绝大部分解法都由官方或我提供, 只有某些是 `ChatGpt` 生成后由我再校对, 之中一定会有纰漏, 欢迎批评指正, 也希望这份训练集能助你一路披荆斩棘、越战越勇!

——冬恒

目录

代数

数论

组合数学

几何

微积分

总题数: 1666

微积分

极限

考点: 极限的直观意义、性质、基本极限 ($\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0, \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1, \lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,\cdots$)、对数微分法、洛必达法则、幂级数的展开、夹挤定理

1.

$$\lim_{x\to0}\lfloor x\rfloor$$

由于

$$\lim_{x\to0^+}\lfloor x\rfloor=0,\quad \lim_{x\to0^-}\lfloor x\rfloor=-1$$

极限 $\lim\limits_{x\to0}\lfloor x\rfloor$ 不存在。

2.

$$\lim_{x\to3}(\lceil x\rceil-\lfloor x\rfloor)$$

由于

$$\lim_{x\to3^+}(\lceil x\rceil-\lfloor x\rfloor)=\lim_{x\to3^+}\lceil x\rceil-\lim_{x\to3^+}\lfloor x\rfloor=4-3=1$$

且

$$\lim_{x\to3^-}(\lceil x\rceil-\lfloor x\rfloor)=\lim_{x\to3^-}\lceil x\rceil-\lim_{x\to3^-}\lfloor x\rfloor=3-2=1$$

故

$$\lim_{x\to3}(\lceil x\rceil-\lfloor x\rfloor)=1$$

3.

$$\lim_{x\to0}\left\lfloor\frac{\sin x}{x}\right\rfloor$$

由于

$$\lim_{x\to 0^+}\left\lfloor\frac{\sin x}{x}\right\rfloor=\lim_{x\to 0^-}\left\lfloor\frac{\sin x}{x}\right\rfloor=0$$

故

$$\lim_{x\to 0}\left\lfloor\frac{\sin x}{x}\right\rfloor=0$$

4.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{x}$$

有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\\&=1\cdot 1\\&=1\end{aligned}$$

5.

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta-\theta\cos\theta}{\sin\theta\tan\theta}$$

有

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta-\theta\cos\theta}{\sin\theta\tan\theta}&=\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\frac{\sin\theta}{\theta}}\cdot\frac{1}{\tan\theta}\\&=\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\cdot\frac{1}{\frac{\sin\theta}{\theta}}\cdot\frac{\theta}{\tan\theta}\cdot\theta\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{1}\cdot 0\\&=0\end{aligned}$$

6.

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\left(\frac{1-\cos\theta}{2}\right)}{\theta^4}$$

有

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\left(\frac{1-\cos\theta}{2}\right)}{\theta^4} = \lim_{\theta\to 0}\left[\frac{1-\cos\left(\frac{1-\cos\theta}{2}\right)}{\left(\frac{1-\cos\theta}{2}\right)^2}\cdot\left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)^2\cdot\frac{1}{4}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{32}$$

其中

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{x^2} = \frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

7.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin^{-1}x\tan x}$$

有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin^{-1}x\tan x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin^{-1}x\cdot\frac{\sin x}{\cos x}}\\ &= \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1-\cos x}{x^2}\right)\cdot\frac{x}{\sin^{-1}x}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\cos x\\ &= -\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot 1\\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

8. 求极限

$$\lim_{x\to 1}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)+x\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)+x^2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)+\dots\right]$$

注意到

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 1}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)+x\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)+x^2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)+\dots\right]\\
&=\lim_{x\to 1}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{1-x}\\
&\overset{H}{=}\lim_{x\to 1}\frac{-\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{-1}\\
&=\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}\\
&=\frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

9. 计算极限

$$
\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{\frac{1}{x(x-1)}+\frac{1}{4x^2}}-\frac{1}{2x}\right)
$$

有理化得

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{\frac{1}{x(x-1)}+\frac{1}{4x^2}}-\frac{1}{2x}\right)&=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{x(x-1)}+\frac{1}{4x^2}\right)-\frac{1}{4x^2}}{\sqrt{\frac{1}{x(x-1)}+\frac{1}{4x^2}}+\frac{1}{2x}}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x-1}}{\sqrt{\frac{x}{x-1}+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}}\\
&=\frac{-1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\\
&=-1
\end{aligned}
$$

10. 试求

$$
\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[5]{x^5+3x^4+4x^3+3x}-\sqrt[3]{x^3+3x^2+4x+1}\right).
$$

由洛必达法则,

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[5]{x^5+3x^4+4x^3+3x}-\sqrt[3]{x^3+3x^2+4x+1}\right)\\
&=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[5]{1+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}+\frac{3}{x^4}}-\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^3}}}{\frac{1}{x}}\\
&\overset{H}{=}-\lim_{x\to\infty}x^2\left(\frac{1}{5}\left(1+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}+\frac{3}{x^4}\right)^{-\frac{4}{5}}\left(-\frac{3}{x^2}-\frac{8}{x^3}-\frac{12}{x^5}\right)\right.\\
&\quad\left.-\frac{1}{3}\left(1+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(-\frac{3}{x^2}-\frac{8}{x^3}-\frac{3}{x^4}\right)\right)\\
&=\frac{3}{5}-1=-\frac{2}{5}
\end{aligned}
$$

11. 已知等差数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 公差均不为 0, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=5$, 求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n\cdot b_{2n}}.$$

设 $\{a_n\},\{b_n\}$ 公差为 d_1,d_2, 则

$$a_n=a_1+(n-1)d_1,\quad b_n=b_1+(n-1)d_2.$$

由已知极限得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+(n-1)d_1}{b_1+(n-1)d_2}=\frac{d_1}{d_2}=5.$$

所以 $d_1=5d_2$, 因此所求极限为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{2}\big(2a_1+(n-1)d_1\big)}{n\big(b_1+(2n-1)d_2\big)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2a_1+(n-1)d_1}{2\big(b_1+(2n-1)d_2\big)}=\frac{d_1}{4d_2}=\frac{5}{4}$$

12. 设 $a_1+a_2+\cdots+a_n=n^3-2n$, 试求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{a_3+a_6+\cdots+a_{3n}}-\sqrt[3]{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}}{n}$$

由

$$S(n)=\sum_{k=1}^{n}a_k=n^3-2n$$

得

$$a_n=S(n)-S(n-1)=n^3-2n-\left[(n-1)^3-2(n-1)\right]=3n^2-3n-1$$

于是

$$a_{3k}=27k^2-9k-1,\quad a_{2k}=12k^2-6k-1,$$

且

$$\sum_{k=1}^{n}a_{3k}=\frac{27}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{9}{2}n(n+1)-n=9n^3+9n^2-n,$$

$$\sum_{k=1}^{n}a_{2k}=2n(n+1)(2n+1)-3n(n+1)-n=4n^3+3n^2-2n$$

故极限为

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{9+\frac{9}{n}-\frac{1}{n^2}}-\sqrt[3]{4+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}\right)=\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{4}$$

13.

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{1+3^{2n}}+\sqrt[n]{3^{2n}+5^{2n}}+\sqrt[n]{5^{2n}+7^{2n}}+\cdots+\sqrt[n]{(2m-1)^{2n}+(2m+1)^{2n}}}{m^3}$$

首先有

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{1+3^{2n}}+\sqrt[n]{3^{2n}+5^{2n}}+\cdots+\sqrt[n]{(2m-1)^{2n}+(2m+1)^{2n}}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\left(3^2\sqrt[n]{\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}+1}+5^2\sqrt[n]{\left(\frac{3}{5}\right)^{2n}+1}+\cdots+(2m+1)^2\sqrt[n]{\left(\frac{2m-1}{2m+1}\right)^{2n}+1}\right)\\
&=\sum_{k=1}^{m}(2k+1)^2\\
&=\sum_{k=1}^{m}(4k^2+4k+1)\\
&=\frac{2}{3}m(m+1)(2m+1)+2m(m+1)+m
\end{aligned}$$

因此, 原式

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\frac{2}{3}m(m+1)(2m+1)+2m(m+1)+m}{m^3}=\frac{4}{3}$$

14.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^{1} e^{-y^2}\,dy}{x\sin x}$$

由洛必达法则,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^{1} e^{-y^2}\,dy}{x\sin x} &\overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot e^{-(\cos x)^2}}{\sin x + x\cos x}\\ &\overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x(1+2\sin^2 x)\cdot e^{-(\cos x)^2}}{2\cos x - x\sin x}\\ &= \frac{1}{2e}\end{aligned}$$

15.

$$\lim_{x\to 1}\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})}{1+\cos\pi x}$$

消去根号, 令 $x=t^6$, 当 $x\to 1$ 时,$t\to 1$, 由洛必达法则,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})}{1+\cos\pi x} &= \lim_{t\to 1}\frac{(1-t^3)(1-t^2)}{1+\cos\pi t^6}\\ &= \lim_{t\to 1}\frac{1-t^2-t^3+t^5}{1+\cos\pi t^6}\\ &\overset{H}{=} \lim_{t\to 1}\frac{-2t-3t^2+5t^4}{-6\pi t^5\sin\pi t^6}\\ &\overset{H}{=} \lim_{t\to 1}\frac{-2-6t+20t^3}{-30\pi t^4\sin\pi t^6 - 6\pi t^5\cdot\cos\pi t^6\cdot 6\pi t^5}\\ &= \frac{-2-6(1)+20(1)^3}{-6\pi\cdot(-1)\cdot 6\pi}\\ &= \frac{1}{3\pi^2}\end{aligned}$$

16.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x t\cos t^2\,dt\right)^2}{\int_0^x \sin t^2\,dt}$$

首先发现到

$$\int_0^x t\cos t^2\,dt = \left[\frac{1}{2}\sin t^2\right]_0^x = \frac{1}{2}\sin x^2$$

将积分结果代入原极限式:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x t\cos t^2\,dt\right)^2}{\int_0^x \sin t^2\,dt} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{4}\sin^2 x^2}{\int_0^x \sin t^2\,dt}\\ &\overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{4}\cdot 2\sin x^2\cdot\cos x^2\cdot 2x}{\sin x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}(x\cos x^2)\\ &= 0\cdot 1 = 0\end{aligned}$$

17. 求实数 a,b, 使得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{ax+b}-2}{x} = 1.$$

有理化得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{ax+b}-2}{x}\cdot\frac{\sqrt{ax+b}+2}{\sqrt{ax+b}+2} = \lim_{x\to 0}\frac{ax+b-4}{x(\sqrt{ax+b}+2)}$$

当 $x\to 0$ 时分母趋于 0, 欲使极限存在, 分子也必须趋于 0, 因此

$$a\cdot 0+b-4=0,$$

从而 $b=4$, 于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{a}{\sqrt{ax+4}+2} = \frac{a}{\sqrt{4}+2} = 1,$$

解得

$$a=4$$

18. 已知

$$\lim_{x\to -1}\frac{ax^2+3x+b}{x+1} = 2,\quad a,b\in\mathbb{R}$$

试求 (a,b)。

当 $x \to -1, x+1 \to 0$; 欲使该极限存在且等于 2, 分子 ax^2+3x+b 在 $x \to -1$ 也应趋于 0, 即

$$\lim_{x\to -1}(ax^2+3x+b)=0 \Rightarrow a(-1)^2+3(-1)+b=0 \Rightarrow a+b=3 \tag{1}$$

又原极限中分子分母处处可导, 且极限

$$\lim_{x\to -1}\frac{(ax^2+3x+b)'}{(x+1)'}=\lim_{x\to -1}\frac{2ax+3}{1}=-2a+3$$

存在, 则由洛必达法则,

$$\lim_{x\to -1}\frac{ax^2+3x+b}{x+1}\overset{H}{=}-2a+3=2 \Rightarrow (a,b)=\left(\frac{1}{5},\frac{14}{5}\right)$$

19. 已知 a,b 为正整数, 设函数

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2x^{2n+1}+ax^2+bx-1}{2x^{2n}+3},$$

若 $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)$ 为连续函数, 求序对 (a,b)。

首先注意到

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2x^{2n+1}+ax^2+bx-1}{2x^{2n}+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{x+\frac{ax^2+bx-1}{2x^{2n}}}{1+\frac{3}{2x^{2n}}}=\begin{cases} x, & |x|>1,\\ \dfrac{ax^2+bx-1}{3}, & |x|<1.\end{cases}$$

由连续性,

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=1,\quad \lim_{x\to 1^-}f(x)=\frac{a+b-1}{3},\quad f(1)=\lim_{n\to\infty}\frac{2+a+b-1}{2+3}=\frac{a+b+1}{5}$$

可得

$$\frac{a+b+1}{5}=1=\frac{a+b-1}{3}\quad\Rightarrow\quad a+b=4 \tag{1}$$

同理,

$$\lim_{x\to -1^+}f(x)=\frac{a-b-1}{3},\quad \lim_{x\to -1^-}f(x)=-1,\quad f(-1)=\frac{-2+a-b-1}{5}=\frac{a-b-3}{5}$$

可得

$$\frac{a-b-3}{5}=-1=\frac{a-b-1}{3}\quad\Rightarrow\quad a-b=-2 \tag{2}$$

由 (1), (2) 得

$$(a,b)=(1,3)$$

20. 若

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{f(x)\sin x+1}-1}{e^{4x}-1}=2,$$

求

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$

当 $x\to 0$ 时, 原式为不定型 $\frac{0}{0}$, 可用洛必达法则:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{f(x)\sin x+1}-1}{e^{4x}-1}\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{f(x)\sin x+1}}\cdot[f'(x)\sin x+f(x)\cos x]}{4e^{4x}}.$$

当 $x\to 0$,

$$\sin x\to 0,\cos x\to 1,e^{4x}\to 1,\sqrt{f(x)\sin x+1}\to 1$$

上式化简为

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{8}=2\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=16$$

21. 定义序列 $\{x_n\}_{n=2}^{\infty}$ 如下:

$$(n+x_n)[\sqrt{2}-1]=\ln 2.$$

求 $\lim_{n\to\infty} x_n$。

由方程可解得

$$x_n=\frac{\ln 2}{2^{\frac{1}{n}}-1}-n,$$

极限形式为 $\infty-\infty$。令 $u=\frac{1}{n}$, 并使用洛必达法则两次, 有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} x_n&=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln 2-n\cdot 2^{\frac{1}{n}}+n}{2^{\frac{1}{n}}-1}\\&=\lim_{u\to 0}\frac{u\ln 2-2^u+1}{u2^u-u}\\&\overset{H}{=}\lim_{u\to 0}\frac{\ln 2-2^u\ln 2}{2^u-1+u2^u\ln 2}\\&\overset{H}{=}\lim_{u\to 0}\frac{-2^u(\ln 2)^2}{2^u\ln 2+2^u\ln 2+u2^u(\ln 2)^2}\\&=\frac{-(\ln 2)^2}{2\ln 2}\\&=-\frac{1}{2}\ln 2\end{aligned}$$

22. 计算极限

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^3}\int_0^x \frac{t\ln(t+1)}{t^4+\frac{1}{6}}dt\right]$$

使用两次洛必达法则,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^3}\int_0^x \frac{t\ln(t+1)}{t^4+\frac{1}{6}}dt\right] &\overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x\ln(x+1)}{x^4+\frac{1}{6}}}{3x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{3x^5+\frac{x}{2}}\\ &\overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+1}}{15x^4+\frac{1}{2}}\\ &= \frac{1}{0+\frac{1}{2}}\\ &= 2\end{aligned}$$

23. 求极限

$$\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^{\frac{1}{\ln x}}$$

此极限属于 0^0 型。利用对数恒等式将原式重写为以 e 为底的形式:

$$(\sin x)^{\frac{1}{\ln x}} = \exp\left(\frac{\ln(\sin x)}{\ln x}\right)$$

由于 e^x 是连续函数, 只需计算指数部分的极限

$$L = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\sin x)}{\ln x}$$

属于 $\frac{\infty}{\infty}$ 型, 由洛必达法则,

$$L \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sin x}\cdot\cos x = 1\cdot 1 = 1$$

因此原极限为

$$e^1 = e$$

24. 求极限

$$\lim_{x\to\infty}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$$

此极限属于 ∞^0 型, 由

$$(x+e^x)^{\frac{1}{x}}=\exp\left(\frac{\ln(x+e^x)}{x}\right)$$

设

$$L=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+e^x)}{x}$$

此极限属于 $\frac{\infty}{\infty}$ 型, 由洛必达法则,

$$L\overset{H}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1+e^x}{x+e^x}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+e^x}{x+e^x}$$

再由洛必达法则,

$$L\overset{H}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{1+e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{e^x}+1}=\frac{1}{0+1}=1$$

因此, 原极限为

$$e^1=e$$

25. 求

$$\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{x^2+2x-1}-\sqrt{x^2-1}\right]^x$$

首先注意到

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+2x-1)-(x^2-1)}{\sqrt{x^2+2x-1}+\sqrt{x^2-1}}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\\&=\frac{2}{1+1}=1\end{aligned}$$

故原极限为 1^∞ 型, 于是

$$\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{x^2+2x-1}-\sqrt{x^2-1}\right]^x=\exp\left[\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt{x^2+2x-1}-\sqrt{x^2-1}-1\right)\right]$$

其中

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+2x-1}-\sqrt{x^2-1}-1\right) &= \lim_{x\to\infty} x\cdot\frac{(x^2+2x-1)-(\sqrt{x^2-1}+1)^2}{\sqrt{x^2+2x-1}+\sqrt{x^2-1}+1}\\ &= \lim_{x\to\infty} x\cdot\frac{2x-2\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+2x-1}+\sqrt{x^2-1}+1}\\ &= \lim_{x\to\infty} x\cdot\frac{\frac{2}{x+\sqrt{x^2-1}}-1}{\sqrt{x^2+2x-1}+\sqrt{x^2-1}+1}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x+\sqrt{x^2-1}}-1}{\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x^2}}\\ &= \frac{0-1}{1+1}\\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

故原极限为

$$\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{x^2+2x-1}-\sqrt{x^2-1}\right]^x = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

26. 设

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = 0,$$

求

$$\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}$$

原极限为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = 0.$$

利用幂级数展开

$$\sin 6x = 6x - \frac{(6x)^3}{6} + o(x^3) = 6x - 36x^3 + o(x^3),$$

代入得

$$\frac{6x-36x^3+xf(x)}{x^3} = \frac{6x+xf(x)}{x^3} - 36 + o(1) = \frac{6+f(x)}{x^2} - 36 + o(1).$$

极限存在且为 0, 则

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{6+f(x)}{x^2}-36\right) = 0 \implies \lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2} = 36.$$

27. 若 $f(x)$ 为满足

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=36,\quad \lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=-36,\quad \lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=0,\quad \lim_{x\to-2}\frac{f(x)}{x+2}=0$$

的最低次多项式, 求 $f(3)$。

设

$$f(x)=(ax+b)(x-1)(x+1)(x-2)^2(x+2)^2$$

由

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=36,\quad \lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=-36$$

得方程式

$$\begin{cases}(a+b)\cdot2\cdot1^2\cdot3^2=36\\(-a+b)\cdot(-2)\cdot(-3)^2\cdot1^2=-36\end{cases}\Rightarrow a=0,b=2$$

因此

$$f(x)=2(x^2-1)(x-2)^2(x+2)^2\Rightarrow f(3)=400$$

28. 若

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^4+3}-[A+B(x-1)+C(x-1)^2]}{(x-1)^2}=0,$$

求常数 A,B,C。

设

$$L=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^4+3}-[A+B(x-1)+C(x-1)^2]}{(x-1)^2}$$

由于分母当 $x\to1$ 时趋于 0, 而极限存在且为 0, 故分子必趋于 0:

$$\lim_{x\to1}\left(\sqrt{x^4+3}-[A+B(x-1)+C(x-1)^2]\right)=\sqrt{1+3}-A=2-A=0$$

解得

$$A=2$$

此时原式变为 $\frac{0}{0}$ 型, 由洛必达法则,

$$L\overset{H}{=}\lim_{x\to1}\frac{\frac{2x^3}{\sqrt{x^4+3}}-B-2C(x-1)}{2(x-1)}=0$$

同样地, 由于分母趋于 0, 分子必趋于 0:

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{2x^3}{\sqrt{x^4+3}}-B-2C(x-1)\right)=\frac{2}{2}-B=1-B=0$$

解得

$$B = 1$$

再次应用洛必达法则处理该 $\frac{0}{0}$ 型极限:

$$L \overset{H}{=} \lim_{x \to 1} \frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{2x^3}{\sqrt{x^4+3}} - 1 - 2C(x-1)\right)}{\frac{d}{dx}2(x-1)} = 0$$

计算分子导数:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2x^3}{\sqrt{x^4+3}}\right) = \frac{6x^2\sqrt{x^4+3} - 2x^3 \cdot \frac{4x^3}{2\sqrt{x^4+3}}}{x^4+3} = \frac{6x^2(x^4+3) - 4x^6}{(x^4+3)\sqrt{x^4+3}}$$

代入 $x = 1$ 得到

$$\frac{6(4) - 4}{4\sqrt{4}} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$$

因此解得

$$\frac{\frac{5}{2} - 2C}{2} = 0 \Rightarrow C = \frac{5}{4}$$

综上, 常数分别为

$$A = 2, \quad B = 1, \quad C = \frac{5}{4}$$

由于极限式

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^4+3} - [A + B(x-1) + C(x-1)^2]}{(x-1)^2} = 0$$

符合函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处的二阶泰勒展开定义, 其中多项式

$$P_2(x) = A + B(x-1) + C(x-1)^2$$

必须等于 $f(x)$ 的二阶泰勒多项式。设 $f(x) = \sqrt{x^4+3}$, 根据泰勒公式可知:

$$A = f(1), \quad B = f'(1), \quad C = \frac{f''(1)}{2!}$$

由

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^4+3}} \cdot 4x^3 = \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+3}}$$

$$f''(x) = \frac{6x^2\sqrt{x^4+3} - 2x^3 \cdot \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+3}}}{x^4+3} = \frac{6x^2(x^4+3) - 4x^6}{(x^4+3)\sqrt{x^4+3}}$$

代入得

$$f(1)=2,\quad f'(1)=1,\quad f''(1)=\frac{5}{2}$$

因此

$$A=2,\quad B=1,\quad C=\frac{5}{4}$$

29.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{3n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{3n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{3n^2+2n}}\right)$$

令

$$L=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{3n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{3n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{3n^2+2n}}\right)$$

由夹挤定理,

$$\frac{2}{\sqrt{3}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{\sqrt{3n^2}}\right)<L<\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{\sqrt{3n^2+2n}}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\Rightarrow L=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

30. 设 $a_n=\sqrt{1\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 3}+\cdots+\sqrt{n(n+1)}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$ 的值。

发现到

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k^2}<a_n<\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(k+1)^2}\Rightarrow\frac{n(n+1)}{2}<a_n<\frac{n(n+3)}{2}$$

于是有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}<\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}<\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+3)}{2n^2}\Rightarrow\frac{1}{2}<\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}<\frac{1}{2}$$

由夹挤定理,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=\frac{1}{2}$$

31. 设 $a_n=\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\dots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\dots\cdot(2n)}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 之值。

由

$$(2n-1)(2n+1)<(2n)^2$$

令 $S=1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)$, 则

$(2n+1)S^2=(1\cdot 3)(3\cdot 5)(5\cdot 7)\cdots((2n-3)(2n-1))((2n-1)(2n+1))<2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot\cdots\cdot(2n)^2$

即

$$\sqrt{2n+1}S<2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)$$

于是

$$\Rightarrow 0<a_n=\frac{S}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

由夹挤定理,

$$0<\lim_{n\to\infty}a_n<\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=0$$

32. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{kn}}$$

由放缩法,

$$\sqrt{k-1}+\sqrt{k}<2\sqrt{k}<\sqrt{k}+\sqrt{k+1}$$

有理化得

$$2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})<\frac{2}{\sqrt{k}}<2(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})$$

于是有

$$\frac{2}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})<\frac{2}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}<\frac{2}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})$$

累加得

$$\frac{2\sqrt{n+1}-2}{\sqrt{n}}<\frac{2}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}<\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}}=2$$

因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n+1}-2}{\sqrt{n}}=2$$

由夹挤定理得,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{kn}}=2$$

33. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)$$

由放缩法,

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}<\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n+k}<\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}$$

即

$$\frac{n(n+1)}{2(n^2+2n)}<\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n+k}<\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+2n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}=\frac{1}{2}$$

由夹挤定理得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n+k}=\frac{1}{2}$$

34. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k^2+n+k}$$

对于整数 $1\leqslant k\leqslant n$, 有

$$\sqrt{k^2}<\sqrt{k^2+n+k}<\sqrt{k^2+2n}$$

于是

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k<\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k^2+n+k}\leqslant\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(k+\sqrt{2n})$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{1}{2}$$

且

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(k+\sqrt{2n})&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{2n}\\&=\frac{1}{2}+\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{2n}}{n^2}\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

由夹挤定理,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k^2+n+k}=\frac{1}{2}$$

35. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+\frac{1}{n+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n}}\right)$$

由放缩法得

$$\frac{n}{n+\sqrt{n}}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+\sqrt{k}}<\frac{n}{n+1}$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+1/n}=1$$

由夹挤定理,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n}}\right)=1$$

36. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k\sin^2(n!)}{n+2},\quad 0<k<1$$

由于

$$0\leqslant\sin^2 x\leqslant 1,\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

得到不等式

$$0\leqslant\frac{n^k\sin^2(n!)}{n+2}\leqslant\frac{n^k}{n+2}$$

当 $0<k<1$ 时, 上界的极限为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{n+2}=0$$

故由夹挤定理,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k\sin^2(n!)}{n+2}=0$$

37. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+(2|\sin(n^n)|)^n}$$

由于

$$0\leqslant|\sin(n^n)|\leqslant 1$$

得到上下界:

$$\sqrt[n]{3^n}\leqslant\sqrt[n]{3^n+(2|\sin(n^n)|)^n}\leqslant\sqrt[n]{3^n+2^n}\leqslant\sqrt[n]{2\cdot 3^n}$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2\cdot 3^n}=3$$

由夹挤定理,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+(2|\sin(n^n)|)^n}=3$$

38. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足

$$\frac{2n^2-7}{4n+5}<a_n<\frac{3n^2+8}{6n-1},\quad n\in\mathbb{Z}^+$$

求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3na_n}{(n+1)^2}$$

将不等式两边同时乘以 $\dfrac{3n}{(n+1)^2}$:

$$\frac{3n}{(n+1)^2}\cdot\frac{2n^2-7}{4n+5}<\frac{3na_n}{(n+1)^2}<\frac{3n}{(n+1)^2}\cdot\frac{3n^2+8}{6n-1}$$

取极限得

$$\frac{3}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n(2n^2-7)}{(4n+5)(n+1)^2}\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{3na_n}{(n+1)^2}\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{3n(3n^2+8)}{(6n-1)(n+1)^2}=\frac{3}{2}$$

由夹挤定理,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3na_n}{(n+1)^2}=\frac{3}{2}$$

39. 已知 $x_1=1$, 且对每个正整数 $n\geqslant 2$,

$$n(x_n)^2-x_{n-1}-n=0,\quad x_n\geqslant 0.$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 或证明 $\{x_n\}$ 发散。

由等式得对所有 $n\geqslant 2$, 有

$$x_n=\sqrt{1+\frac{x_{n-1}}{n}}$$

首先证明 $x_n\leqslant 2$: 有 $x_1=1\leqslant 2$。假设 $n\geqslant 2$ 有 $x_n\leqslant 2$ 成立, 则

$$x_n=\sqrt{1+\frac{x_n}{n+1}}\leqslant\sqrt{1+2}<2$$

故由数学归纳法得对所有 $n\geqslant 2$ 都皆有 $x_n\leqslant 2$, 故

$$1\leqslant x_n=\sqrt{1+\frac{x_{n-1}}{n}}\leqslant\sqrt{1+\frac{2}{n}}$$

由夹挤定理,

$$\lim_{n\to\infty} x_n=1$$

40. (a) 证明

$$\int_0^1\left(1+\sin\frac{\pi}{2}x\right)^n dx>\frac{2^{n+1}-1}{n+1}\quad (n=1,2,\dots)$$

由

$$\sin x\geqslant\frac{2}{\pi}x,\quad 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$$

得

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\geqslant x,\quad 0\leqslant x\leqslant 1,$$

从而

$$\int_0^1\left(1+\sin\frac{\pi}{2}x\right)^n dx\geqslant\int_0^1(1+x)^n dx=\left.\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right|_0^1=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

因此原不等式成立。

(b) 求极限:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_0^1\left(1+\sin\frac{\pi}{2}x\right)^n dx\right]^{\frac{1}{n}}$$

注意到:
$$\frac{2^n}{n+1} < \frac{2^{n+1}-1}{n+1} \leqslant \int_0^1 \left(1+\sin\frac{\pi}{2}x\right)^n dx \leqslant \int_0^1 2^n dx = 2^n.$$
对上述不等式取 n 次方根, 得:
$$2(n+1)^{-\frac{1}{n}} < \left[\int_0^1 \left(1+\sin\frac{\pi}{2}x\right)^n dx\right]^{\frac{1}{n}} \leqslant 2.$$
因为 $(n+1)^{-\frac{1}{n}} \to 1$, 由夹挤定理可得:
$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_0^1 \left(1+\sin\frac{\pi}{2}x\right)^n dx\right]^{\frac{1}{n}} = 2$$

41. (a) 设 n 是正整数, 计算
$$\int_0^{n\pi} x\sin^2 x\,dx$$

对非负整数 k,
$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} x\sin^2 x\,dx = \int_0^{\pi}(k\pi+x)\sin^2 x\,dx$$
利用恒等式 $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, 得:
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(k\pi+x)(1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left((k\pi+x)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(k\pi+x)\cos 2x\,dx\right)$$
由于 $\int_0^{\pi}\cos 2x\,dx = 0$ 且 $\int_0^{\pi} x\cos 2x\,dx = 0$, 所以最后只剩:
$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} x\sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(k\pi+x)\,dx = \frac{1}{2}\left(k\pi^2+\frac{\pi^2}{2}\right) = \frac{\pi^2(2k+1)}{4}$$
所以,
$$\int_0^{n\pi} x\sin^2 x\,dx = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\pi^2(2k+1)}{4} = \frac{\pi^2}{4}\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \frac{\pi^2}{4}\cdot n^2$$
因为 $\sum\limits_{k=0}^{n-1}(2k+1) = n^2$, 所以原式为
$$\frac{\pi^2 n^2}{4}$$

(b) 证明对任何正实数 p, 函数极限

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\int_0^x t|\sin t|^p\,dt$$

存在.

记

$$S_0=\int_0^\pi|\sin t|^p\,dt,\qquad S_1=\int_0^\pi t|\sin t|^p\,dt.$$

对任意非负整数 k, 有

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}t|\sin t|^p\,dt=\int_0^\pi(k\pi+x)|\sin x|^p dx=k\pi S_0+S_1.$$

若设 $x=(n+\alpha)\pi$ 且 $0\leqslant\alpha<1$, 则

$$\int_0^x t|\sin t|^p dt=\sum_{k=0}^{n-1}(k\pi S_0+S_1)+\int_{n\pi}^x t|\sin t|^p dt.$$

利用估计（注意 $\int_{n\pi}^x t|\sin t|^p dt\leqslant(n+1)\pi\cdot S_0$）, 得上下界:

$$\frac{\frac{1}{2}n(n-1)\pi S_0+nS_1}{(n+1)^2\pi^2}\leqslant\frac{1}{x^2}\int_0^x t|\sin t|^p dt\leqslant\frac{\frac{1}{2}n(n+1)\pi S_0+(n+1)S_1}{n^2\pi^2}.$$

随着 $n\to\infty$, 上下界极限均趋于 $\frac{S_0}{2\pi}$, 所以由夹挤定理知极限存在, 且为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\int_0^x t|\sin t|^p dt=\frac{S_0}{2\pi}$$

42. (a) 求

$$\int_0^\pi\frac{1}{1+\cos^2 x}dx$$

及

$$\int_0^\pi\frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}dx$$

设

$$I_1=\int_0^\pi\frac{1}{1+\cos^2 x}\,dx,\quad I_2=\int_0^\pi\frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}\,dx.$$

发现

$$I_1=\frac{1}{2}\int_0^\pi\frac{1+\sin^2 x+\cos^2 x}{1+\cos^2 x}\,dx=\frac{1}{2}(I_2+\pi)\Rightarrow I_2=2I_1-\pi$$

所以只需计算 I_1 即可得出两个积分。发现被积函数在 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 处不连续, 将 I_1 写成

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos^2 x}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{1+\cos^2 x}dx$$

其中第一个积分变为

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 x}{2+\tan^2 x}dx=\int_0^{\infty}\frac{1}{2+u^2}du=\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^{\infty}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

对于第二个积分如下, 设 $x=\pi-y, dx=-dy$,

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{1+\cos^2 x}dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{1}{1+\cos^2(\pi-y)}(-dy)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos^2 y}dy=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

所以

$$I_1=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}+\frac{\pi}{2\sqrt{2}}=\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

$$I_2=2I_1-\pi=2\cdot\frac{\pi\sqrt{2}}{2}-\pi=\pi(\sqrt{2}-1)$$

(b) 证明

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\displaystyle\int_0^x\frac{\sin^2 t}{1+\cos^2 t}dt}{\displaystyle\int_0^x\frac{1}{1+\cos^2 t}dt}=2-\sqrt{2}$$

取 $n=\left\lfloor\dfrac{x}{\pi}\right\rfloor$, 则

$$\int_0^x\frac{1}{1+\cos^2 t}\,dt=\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{1}{1+\cos^2 t}\,dt+\int_{k\pi}^{x}\frac{1}{1+\cos^2 t}\,dt$$

于是

$$\frac{n\pi}{\sqrt{2}}\leqslant\int_0^x\frac{1}{1+\cos^2 t}\,dt\leqslant\frac{(n+1)\pi}{\sqrt{2}}$$

同理

$$n\pi(\sqrt{2}-1)\leqslant\int_0^x\frac{1}{1+\cos^2 t}\,dt\leqslant(n+1)\pi(\sqrt{2}-1)$$

于是

$$\frac{n}{n+1}(2-\sqrt{2})\leqslant\frac{\displaystyle\int_0^x\frac{\sin^2 t}{1+\cos^2 t}dt}{\displaystyle\int_0^x\frac{1}{1+\cos^2 t}dt}\leqslant\frac{n+1}{n}(2-\sqrt{2}),$$

令 $x \to \infty$ 便得结论。

43. 对每个正整数 n, 设

$$R_n = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant n,\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}\},$$

记 $N(n)$ 为 R_n 中坐标都是整数的点的个数。求

$$\lim_{n \to \infty} \frac{N(n)}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

对每个正整数 n, 满足 $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{k}$ 的整数 y 个数为 $[\sqrt{k}] + 1$, 所以

$$N(n) = \sum_{k=0}^{n}([\sqrt{k}] + 1) = (n + 1) + \sum_{k=1}^{n}[\sqrt{k}]$$

由于 $\sqrt{k} - 1 < [\sqrt{k}] \leqslant \sqrt{k}$, 并且

$$\int_0^n \sqrt{x}\, dx \leqslant \sum_{k=1}^{n}[\sqrt{k}] \leqslant \int_0^{n+1} \sqrt{x}\, dx$$

所以

$$1 + \int_0^n \sqrt{x}\, dx \leqslant N(n) \leqslant (n + 1) + \int_0^{n+1} \sqrt{x}\, dx$$

即

$$1 + \frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}} \leqslant N(n) \leqslant (n + 1) + \frac{2}{3}(n + 1)^{\frac{3}{2}}$$

由夹挤定理, 得到

$$\lim_{n \to \infty} \frac{N(n)}{n^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{3}$$

微分

考点: 导数、微分法则、链导法、切线与法线、函数的增减性、函数的极值、变率与相关变率、隐函数的微分法、曲线的凸向及拐点及曲线的渐近线、最值定理、介值定理、拉格朗日中值定理、罗尔定理、柯西中值定理、积分中值定理、达布定理

1. 已知 $f(x)=x^{2013}-x^{2012}+x^{2011}-x^{2010}+1$, 求

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$$

计算导数:

$$f'(x)=2013x^{2012}-2012x^{2011}+2011x^{2010}-2010x^{2009}$$

于是

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}&=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(1)-f(1-h)}{h}\\&=f'(1)+f'(1)\\&=2\cdot(2013-2012+2011-2010)\\&=4\end{aligned}$$

2. 已知 $f'(1)=12$, 求

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+4h)-f(1-2h)}{3h}$$

改写

$$\begin{aligned}\frac{f(1+4h)-f(1-2h)}{3h}&=\frac{f(1+4h)-f(1)}{3h}+\frac{f(1)-f(1-2h)}{3h}\\&=\frac{4}{3}f'(1)+\frac{2}{3}f'(1)\\&=24\end{aligned}$$

3. 求

$$\lim_{h\to 0}\left[\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}+h}\frac{2\sqrt{\sin x}}{\pi h}\,dx\right]$$

先提取常数

$$\lim_{h\to 0}\left[\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}+h}\frac{2\sqrt{\sin x}}{\pi h}\,dx\right]=\frac{2}{\pi}\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{h}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}+h}\sqrt{\sin x}\,dx\right]$$

令

$$F(x)=\int\sqrt{\sin x}\,dx\Rightarrow F'(x)=\sqrt{\sin x}$$

则

$$\frac{1}{h}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}+h}\sqrt{\sin x}\,dx=\frac{F\left(\frac{\pi}{6}+h\right)-F\left(\frac{\pi}{6}\right)}{h}$$

当 $h\to 0$ 时, 上式为导数定义:

$$\lim_{h\to 0}\frac{F\left(\frac{\pi}{6}+h\right)-F\left(\frac{\pi}{6}\right)}{h}=F'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{\sin\frac{\pi}{6}}$$

因此原极限为

$$\frac{2}{\pi}\cdot\sqrt{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{\pi}$$

4. 由导数定义, 证明

$$\frac{d}{dx}(\sec x)=\sec x\tan x$$

由导数的定义，

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\sec x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\sec(x+h)-\sec x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x-\cos(x+h)}{h\cos x\cos(x+h)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h\cos x\cos(x+h)}\\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\frac{\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)}{\cos x\cos(x+h)}\right]\\
&= 1\cdot\frac{\sin x}{\cos^2 x}\\
&= \sec x\tan x
\end{aligned}$$

5. 通过导数的定义，求

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}},\quad |x|>1$$

的导数 $f'(x)$。

由导数的定义，

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{(x+h)^2-1}}-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}}{h}\\
&= lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{(x+h)^2-1}}{h\sqrt{x^2-1}\sqrt{(x+h)^2-1}}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(x^2-1)-((x+h)^2-1)}{h\sqrt{x^2-1}\sqrt{(x+h)^2-1}(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{(x+h)^2-1})}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-2xh-h^2}{h\sqrt{x^2-1}\sqrt{(x+h)^2-1}(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{(x+h)^2-1})}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-2x-h}{\sqrt{x^2-1}\sqrt{(x+h)^2-1}(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{(x+h)^2-1})}\\
&= \frac{-2x}{\sqrt{x^2-1}\sqrt{x^2-1}(2\sqrt{x^2-1})}\\
&= -\frac{x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

6. 设

$$y = \frac{(x^4+2)(x^3-2)}{(x+2)(x^2-2)},$$

求 $\dfrac{dy}{dx}$。

对等式两边取自然对数,

$$\ln y = \ln(x^4+2) + \ln(x^3-2) - \ln(x+2) - \ln(x^2-2)$$

对 x 求导,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3}{x^4+2} + \frac{3x^2}{x^3-2} - \frac{1}{x+2} - \frac{2x}{x^2-2}$$

整理得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3(x^3-2)}{(x+2)(x^2-2)} + \frac{3x^2(x^4+2)}{(x+2)(x^2-2)} - \frac{(x^4+2)(x^3-2)}{(x+2)^2(x^2-2)} - \frac{2x(x^4+2)(x^3-2)}{(x+2)(x^2-2)^2}$$

7. 已知曲线方程

$$y = 2^{3e^{2x}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

以 y 表示 $\frac{dy}{dx}$。

由链导法,

$$\frac{dy}{dx} = 2^{3e^{2x}} \cdot \ln 2 \cdot 6e^{2x} == y \cdot \ln 2 \cdot 6e^{2x}$$

又由原式取自然对数得

$$\ln y = 3e^{2x}\ln 2 \Rightarrow 2\ln y = 6e^{2x}\ln 2$$

因此得到

$$\frac{dy}{dx} = 2y\ln y$$

不如一开始就取 ln,

$$\ln y = 3e^{2x}\ln 2.$$

对 x 求导,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \ln 2 \cdot 6e^{2x}$$

同样代入 $\ln y = 3e^{2x}\ln 2$ 得

$$\frac{dy}{dx} == y \cdot (\ln 2) \cdot 6e^{2x} = 2y \ln y$$

8. 已知曲线由方程

$$x^m y^n = (x+y)^{m+n}, \quad x \neq 0,\ y \neq 0,\ x+y \neq 0,\ my - nx \neq 0$$

隐式定义, 其中 m, n 为有理数。证明

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

两边取对数,

$$m \ln x + n \ln y = (m+n)\ln(x+y)$$

对 x 求导,

$$\frac{m}{x} + \frac{n}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{m+n}{x+y}\left(1 + \frac{dy}{dx}\right)$$

整理得

$$\frac{my - nx}{x(x+y)} = \frac{my - nx}{y(x+y)}\frac{dy}{dx}$$

由于 $x + y \neq 0, my - nx \neq 0$, 故

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

9. 已知曲线 C 的隐函数方程为

$$y = xe^y, \quad x \neq 0,\ y \neq 1,\ y \neq 2.$$

证明

$$(1-y)\frac{d^2y}{dx^2} = (2-y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

对 $y = xe^y$ 两边求导,

$$\frac{dy}{dx} = e^y + xe^y\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx}(1-y) = e^y$$

再次求导,

$$\frac{d^2y}{dx^2}(1-y)-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=e^y\frac{dy}{dx}$$

代入 $e^y=\dfrac{dy}{dx}(1-y)$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}(1-y)-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\left(\frac{dy}{dx}\right)^2(1-y)$$

即

$$\frac{d^2y}{dx^2}(1-y)=\left(\frac{dy}{dx}\right)^2(2-y)$$

10. 求曲线 C

$$x^2+3xy-2y^2+17=0$$

的极值。

设 $F(x,y)=x^2+3xy-2y^2+17$。对方程 $F(x,y)=0$ 两边求导,

$$2x+3y+3xy'-4yy'=0$$

整理得:

$$y'=-\frac{2x+3y}{3x-4y}$$

令 $y'=0$, 得到

$$y=-\frac{2}{3}x$$

代入原方程解得

$$x^2+3x\left(-\frac{2}{3}x\right)-2\left(-\frac{2}{3}x\right)^2+17=0\Rightarrow x_1=3,x_2=-3$$

得临界点 $P_1(3,-2),P_2(-3,2)$。再求导得,

$$y''(3x-4y)+y'(3-4y')=-(2+3y')$$

在临界点处 $y'=0$, 化简得

$$y''(3x-4y)=-2\Rightarrow y''=\frac{-2}{3x-4y}$$

由于

$$y''(3,-2)=\frac{-2}{3(3)-4(-2)}=-\frac{2}{17}<0,\quad y''(-3,2)=\frac{-2}{3(-3)-4(2)}=\frac{2}{17}>0$$

故 $y_1=-2$ 是极大值,$y_2=2$ 是极小值。该曲线在 $x=3$ 处取得极大值 -2, 在 $x=-3$ 处取得极小值 2。

11. 设函数 $f(x)$ 处处可导，且 $f'(0)=1$，并对任意实数 x,h 恒有

$$f(x+h)=f(x)+f(h)+2hx,$$

求 $f'(x)$。

已知 $\forall\, x,h\in\mathbb{R}$，

$$f(x+h)=f(x)+f(h)+2hx$$

对 h 微分，

$$f'(x+h)=f'(h)+2x$$

令 $h=0$，则

$$f'(x)=f'(0)+2x=1+2x$$

12. 设 $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-2023), g(x)=f(f(x))$，求 $g'(1)$。

求导得

$$f'(x)=(x-1)P(x)+x(x-2)(x-3)\cdots(x-2023)=xQ(x)+(x-1)(x-2)\cdots(x-2023)$$

所以有

$$f(1)=0,\quad f'(1)=2022!,\quad f'(0)=-2023!$$

由于 $g(x)=f(f(x))$，有

$$g'(x)=f'(f(x))\cdot f'(x)\Rightarrow g'(1)=f'(f(1))\cdot f'(1)=f'(0)\cdot 2022!=-2023!\cdot 2022!$$

13. 设 $f(x)$ 为正实函数且为可微分函数，对任意实数 x,y，满足 $f(x+y)=2f(x)f(y)$，若 $f'(0)=2$，试求 $\dfrac{f''(x)}{f(x)}$。

由 $f(x+y)=2f(x)f(y)$ 代入 $x=y=0$ 得

$$f(0)=2f(0)f(0)\Rightarrow f(0)=\frac{1}{2}$$

考虑 $f'(x)$，

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2f(x)f(h)-f(x)}{h}\\&=2f(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=2f(x)f'(0)=2f(x)\cdot 2=4f(x)\end{aligned}$$

对两边求导得

$$f''(x)=4f'(x)=4\cdot 4f(x)\Rightarrow \frac{f''(x)}{f(x)}=16$$

14. 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续, 且

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(f(x)+2)}{x-\sin x}=1,$$

求 $f'(0)$。

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续, 所以

$$\lim_{x\to 0}\ln(f(x)+2)=\ln(f(0)+2).$$

又因 $x-\sin x\to 0$, 分母趋于 0, 极限存在, 需有分子也趋于 0, 即

$$\ln(f(0)+2)=0\Rightarrow f(0)=-1.$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(f(x)+2)}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+1}{x-\sin x}\quad (因\ \ln(1+y)\backsim y).$$

又 $x-\sin x\backsim \frac{x^3}{6}$, 于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+1}{x^3}=\frac{1}{1/6}=6.$$

因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+1}{x^3}\cdot x^2=6\cdot 0=0.$$

故 $f'(0)=\boxed{0}$。待验证

15. 已知 a,b 为实数, 若函数 $f(x)=2ax^3-3ax^2+b$ 在 $0\leqslant x\leqslant 2$ 时有最大值 7, 最小值 -3, 求数对 (a,b) 。

导数为

$$f'(x)=6ax^2-6ax=6ax(x-1)$$

临界点为 $x=0,1$, 二阶导为

$$f''(x)=12ax-6a=6a(2x-1)$$

当 $a>0$, 则

$$f(x)\begin{cases}\text{递增} & x\geqslant 1\\ \text{递减} & 0\leqslant x\leqslant 1\\ \text{递增} & x\leqslant 0\end{cases}$$

极小值在 $x=1$, 极大值在 $x=2$ 或 $x=0$, 解得

$$\begin{cases}f(2)=4a+b=7\\ f(1)=-a+b=-3\end{cases}\quad\Rightarrow a=2,b=-1$$

当 $a<0$, 则

$$f(x)\begin{cases}\text{递减} & x\geqslant 1\\ \text{递增} & 0\leqslant x\leqslant 1\\ \text{递减} & x\leqslant 0\end{cases}$$

极大值在 $x=1$, 极小值在 $x=0$ 或 $x=2$, 同理解得

$$\begin{cases}f(1)=-a+b=7\\ f(2)=4a+b=-3\end{cases}\quad\Rightarrow a=-2,b=5$$

$\therefore (a,b)=(2,-1)$ 或 $(-2,5)$

16. 函数 f 定义为

$$f(n,y)=\sum_{x=1}^{n}\frac{x^2y^x}{k},\quad n\in\mathbb{N},\quad y\in\mathbb{R}$$

其中

$$k=\sum_{r=1}^{n}r^2,$$

若已知数列求和公式

$$\sum_{r=1}^{n}r^4=\frac{1}{30}n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1),$$

证明

$$\left.\frac{d^2f}{dy^2}\right|_{y=1}+\left.\frac{df}{dy}\right|_{y=1}-\left[\left.\frac{df}{dy}\right|_{y=1}\right]^2=\frac{3n^4+6n^3-n^2-4n}{20(2n+1)^2}.$$

首先, 利用标准求和公式:

$$k=\sum_{x=1}^{n}x^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

既然 k 与 x 无关, 可以将其作为常数因子提取到求和号外

$$f(n,y)=\frac{1}{k}\sum_{x=1}^{n}x^2y^x.$$

对 y 求导,

$$\frac{df}{dy}=\frac{1}{k}\sum_{x=1}^{n}x^3y^{x-1},\quad \left.\frac{df}{dy}\right|_{y=1}=\frac{1}{k}\sum_{x=1}^{n}x^3.$$

再次对 y 求导,

$$\frac{d^2f}{dy^2}=\frac{1}{k}\sum_{x=1}^{n}x^3(x-1)y^{x-2}=\frac{1}{k}\sum_{x=1}^{n}x^4y^{x-2}-\frac{1}{k}\sum_{x=1}^{n}x^3y^{x-2}.$$

在 $y=1$ 时,

$$\left.\frac{d^2f}{dy^2}\right|_{y=1}+\left.\frac{df}{dy}\right|_{y=1}-\left[\left.\frac{df}{dy}\right|_{y=1}\right]^2=\frac{1}{k}\sum_{x=1}^{n}x^4-\frac{1}{k^2}\left(\sum_{x=1}^{n}x^3\right)^2.$$

代入求和公式得

$$\begin{aligned}&\frac{6}{n(n+1)(2n+1)}\cdot\frac{1}{30}n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)-\frac{36}{n^2(n+1)^2(2n+1)^2}\cdot\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right]\\&=\frac{6n^3+9n^2+n-1}{5(2n+1)}-\frac{9}{4(2n+1)^2}\\&=\frac{3n^4+6n^3-n^2-4n}{20(2n+1)^2}.\end{aligned}$$

因此,

$$\left.\frac{d^2f}{dy^2}\right|_{y=1}+\left.\frac{df}{dy}\right|_{y=1}-\left[\left.\frac{df}{dy}\right|_{y=1}\right]^2=\frac{3n^4+6n^3-n^2-4n}{20(2n+1)^2},$$

得证。

17. (a) 设

$$f(x)=x^3+x,$$

且 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的反函数, 求 $g'(10)$。

由于 f 与 g 为反函数,$f(g(x))=x$, 对两边求导得到

$$f'(g(x))g'(x)=1$$

又因为 $f(2)=10$, 所以 $g(10)=2$。令 $x=10$, 则

$$f'(2)g'(10)=1$$

而 $f'(x)=3x^2+1$, 所以 $f'(2)=13$, 因此

$$g'(10)=\frac{1}{13}$$

(b) 对 $x>0$, 定义

$$h(x)=\frac{1}{f(x)},$$

证明函数 $f(x)+h(x)$ 在 $x=g(1)$ 处取得最小值。

令

$$F(x)=f(x)+h(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}$$

则

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}=f'(x)\frac{[f(x)]^2-1}{[f(x)]^2}$$

因为 $f'(x)>1$, 所以在临界点有 $f(x_0)^2-1=0$, 即 $f(x_0)=1$, 因此 $x_0=g(1)$, 再次求导,

$$F''(x)=f''(x)-\frac{[f(x)]^2f''(x)-2f(x)[f'(x)]^2}{[f(x)]^4}$$

在 $x=x_0$ 时,$f(x_0)=1, f''(x_0)=6g(1), f'(x_0)=3(g(1))^2+1$, 所以

$$F''(x_0)=6g(1)-\left(6g(1)-2[3(g(1))^2+1]^2\right)=2[3(g(1))^2+1]^2>0$$

因此 $x=x_0$ 为极小值。由于

$$\lim_{x\to0^+}F(x)=\lim_{x\to\infty}F(x)=\infty,$$

故 $x=g(1)$ 为 $F(x)$ 的最小值。

18. 已知对任意正整数 k, 方程

$$x^k-x^{k-1}-x^{k-2}-\cdots-x-1=0$$

恰有一个正实根, 设该方程唯一正实根为 α_k, 试证该无穷数列 $\langle\alpha_k\rangle$ 收敛, 且

$$\lim_{k\to\infty}\alpha_k=2$$

原方程可化为

$$x^k-x^{k-1}-x^{k-2}-\cdots-x-1=x^k-(x^{k-1}+x^{k-2}+\cdots+1)=x^k-\frac{x^k-1}{x-1}$$

令

$$f_k(x)=x^{k+1}-2x^k+1$$

则 α_k 为 $f_k(x)=0$ 在 $(1,2)$ 内的唯一正实根 (注意 $\alpha_k\neq 1$, 当 $k>1$), 考虑

$$f_k(0)=1,\quad f_k(1)=0,\quad f_k(2)=1$$

对 $f_k(x)$ 求导得

$$f_k'(x)=(k+1)x^k-2kx^{k-1}=x^{k-1}[(k+1)x-2k]$$

导函数零点为

$$x=0\quad 或\quad x=\frac{2k}{k+1}=2-\frac{2}{k+1}$$

因此

$$f_k(x)\ 在\ \left(0,2-\frac{2}{k+1}\right)\ 上递减,\quad \left(2-\frac{2}{k+1},\infty\right)\ 上递增$$

由于 $f_k(1)=0$, $f_k(2)=1$ 且 α_k 是唯一正实根, 结合单调性可得:

$$2-\frac{2}{k+1}<\alpha_k<2$$

故由夹挤定理,

$$\lim_{k\to\infty}\alpha_k=2$$

因此 α_k 收敛, 且收敛至 2, 故得证。

19. 已知 $a<b<c$, $f'(x)$ 在 (a,c) 上严格递增, 且 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 上连续, 证明

$$(b-a)f(c)+(c-b)f(a)>(c-a)f(b).$$

由拉格朗日中值定理, 因此存在 α 和 β 使得

$$\frac{f(c)-f(b)}{c-b}=f'(\beta),\quad b<\beta<c$$

以及

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\alpha),\quad a<\alpha<b$$

由于 f' 严格递增, 我们有 $f'(\beta)>f'(\alpha)$, 因此

$$\frac{f(c)-f(b)}{c-b}>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

即

$$(b-a)f(c)+(c-b)f(a)>(c-a)f(b)$$

20. 设 $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续函数, 且 g 可导, 若

$$(f(0)-g'(0))(g'(1)-f(1))>0,$$

证明存在实数 $c\in(0,1)$, 使得 $f(c)=g'(c)$。

令

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt,\quad h(x)=F(x)-g(x).$$

由 f 的连续性,F 可导且 $F'=f$, 因此

$$h'(x)=F'(x)-g'(x)=f(x)-g'(x).$$

故由 $(f(0)-g'(0))(g'(1)-f(1))>0$ 知

$$h'(0)(-h'(1))>0,$$

因此 $h'(0)$ 和 $h'(1)$ 异号。由达布定理, 存在 $c\in(0,1)$ 使得

$$h'(c)=0\Rightarrow f(c)=g'(c).$$

21. 设 $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ 为连续可微函数,$b>a>0$ 且 $f(a)=f(b)=k$。证明存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$f(\xi)-\xi f'(\xi)=k.$$

若考虑函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$, 则

$$g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2},$$

其中分子与已知正好对应。考虑在 $[a,b]$ 上的函数

$$g(x)=\frac{f(x)}{x},\quad h(x)=\frac{1}{x}$$

由柯西中值定理, 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\frac{g(a)-g(b)}{h(a)-h(b)}=\frac{g'(\xi)}{h'(\xi)}$$

注意到

$$\frac{g'(\xi)}{h'(\xi)}=\frac{\frac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}}=f(\xi)-\xi f'(\xi)$$

而

$$\frac{g(a)-g(b)}{h(a)-h(b)}=\frac{\frac{f(a)}{a}-\frac{f(b)}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}=k$$

故原命题得证。

22. 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为二阶可导函数, 且 $f(0)=0$。证明: 存在 $\xi\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 使得

$$f''(\xi)=f(\xi)\left(1+2\tan^2\xi\right).$$

设 $g(x)=f(x)\cos x$, 由于

$$g\left(-\frac{\pi}{2}\right)=g(0)=g\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

由罗尔定理, 存在

$$\xi_1\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right),\quad \xi_2\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

使得

$$g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=0$$

考虑函数

$$h(x)=\frac{g'(x)}{\cos^2 x}=\frac{f'(x)\cos x-f(x)\sin x}{\cos^2 x}$$

显然有

$$h(\xi_1)=h(\xi_2)=0$$

再由罗尔定理, 存在

$$\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

使得 $h'(\xi) = 0$,h 导数为

$$\begin{aligned} 0 = h'(\xi) &= \frac{g''(\xi)\cos^2\xi + 2\cos\xi\sin\xi\, g'(\xi)}{\cos^4\xi} \\ &= \frac{(f''(\xi)\cos\xi - 2f'(\xi)\sin\xi - f(\xi)\cos\xi)\cos\xi + 2\sin\xi\big(f'(\xi)\cos\xi - f(\xi)\sin\xi\big)}{\cos^3\xi} \\ &= \frac{f''(\xi)\cos^2\xi - f(\xi)\big(\cos^2\xi + 2\sin^2\xi\big)}{\cos^3\xi} \end{aligned}$$

整理得

$$0 = \frac{1}{\cos\xi}\Big(f''(\xi) - f(\xi)\big(1 + 2\tan^2\xi\big)\Big)$$

因此得证

$$f''(\xi) = f(\xi)\big(1 + 2\tan^2\xi\big)$$

23. 证明当 $0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ 时, 有

$$\tan\theta < \frac{4\theta}{\pi}.$$

设

$$f(x) = \tan x, \quad x = \theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$$

因为 f 在 $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ 上连续,$\left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$ 上可导, 由拉格朗日中值定理, 存在

$$0 < \xi < \theta, \theta < \xi' < \frac{\pi}{4}$$

使得

$$\sec^2\xi = \frac{\tan\theta - \tan 0}{\theta - 0}, \quad \sec^2\xi' = \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\theta}{\frac{\pi}{4} - \theta}$$

由于 $\sec^2 x$ 在 $\left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$ 上单调递增, 因此 $\sec^2\xi' > \sec^2\xi$, 即

$$\frac{1 - \tan\theta}{\frac{\pi}{4} - \theta} > \frac{\tan\theta}{\theta} \Rightarrow \frac{4\theta}{\pi} > \tan\theta$$

令

$$f(\theta)=\frac{4\theta}{\pi}-\tan\theta.$$

则

$$f'(\theta)=\frac{4}{\pi}-\sec^2\theta$$

因此可解得唯一的 $\xi\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 使得 $f'(\xi)=0$, 又

$$f'(\theta)<0,\ \forall\theta\in(0,\xi),\quad f'(\theta)>0,\ \forall\theta\in\left(\xi,\frac{\pi}{4}\right)$$

因此 f 在 $(0,\xi)$ 上严格递减, 在 $\left(\xi,\frac{\pi}{4}\right)$ 上严格递增。又 $f(0)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$, 所以对所有 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 皆有 $f(\theta)<0$, 即

$$\tan\theta<\frac{4\theta}{\pi},\quad 0<\theta<\frac{\pi}{4}$$

24. 证明对于所有非负整数 n, 有

$$2(3n-1)^n\geqslant(3n+1)^n$$

当 $n=0$ 时, 不等式显然成立, 因为

$$2(3\cdot0-1)^0=2\cdot1=2\geqslant1=(3\cdot0+1)^0.$$

考虑 $n\geqslant1$, 命题等价于

$$2(3n-1)^n\geqslant(3n+1)^n\iff\left(\frac{3n-1}{3n+1}\right)^n\geqslant\frac{1}{2}\iff n\ln\frac{3n-1}{3n+1}\geqslant-\ln2$$

定义函数

$$f(x)=x\ln\frac{3x-1}{3x+1},\quad x\geqslant1.$$

对 $f(x)$ 求导,

$$f'(x)=\ln\frac{3x-1}{3x+1}+\frac{6x}{9x^2-1},\quad f''(x)=\frac{6(3x^2-1)}{(9x^2-1)^2}$$

当 $x\geqslant1$ 时, $f''(x)>0$, 故 $f'(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上严格递增。又因为

$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{3-1/x}{3+1/x}+\frac{6/x}{9-1/x^2}\right)=0$$

由 $f'(x)$ 严格递增且趋于 0 可知, 在 $[1,+\infty)$ 上 $f'(x)<0$。因此 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上严格递减。根据其极限:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1-\frac{2}{3x+1}\right)^x=-\frac{2}{3}$$

由于 $f(x)$ 严格递减且下界为 $-\frac{2}{3}$, 而 $-\frac{2}{3}>-0.693\approx-\ln 2$。故对于所有 $n\geqslant 1$, 有 $f(n)>-\frac{2}{3}>-\ln 2$, 原不等式成立。(待验证)

25. 当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$, 比较 $\tan(\sin x)$ 及 $\sin(\tan x)$ 的大小。

设

$$f(x)=\tan(\sin x)-\sin(\tan x)$$

求导得,

$$f'(x)=\frac{\cos x}{\cos^2(\sin x)}-\frac{\cos(\tan x)}{\cos^2 x}=\frac{\cos^3 x-\cos(\tan x)\cdot\cos^2(\sin x)}{\cos^2 x\cdot\cos^2(\tan x)}$$

对 $0<x<\arctan\dfrac{\pi}{2}$, 由与 cos 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上凸, 由琴生不等式及 AM-GM 不等式,

$$\sqrt[3]{\cos(\tan x)\cdot\cos^2(\sin x)}<\frac{1}{3}[\cos(\tan x)+2\cos(\sin x)]\leqslant\cos\left(\frac{\tan x+2\sin x}{3}\right)<\cos x$$

其中最后一个不等式由

$$\left(\frac{\tan x+2\sin x}{3}\right)'=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\cos^2 x}+2\cos x\right)\geqslant 1$$

得到, 据此有

$$\cos^3 x-\cos(\tan x)\cdot\cos^2(\sin x)>0\Rightarrow f'(x)>0$$

因此 f 在 $\left[0,\arctan\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增。又注意到

$$\tan\left(\sin(\arctan\frac{\pi}{2})\right)=\tan\frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}}}>\tan\frac{\pi}{4}=1$$

因此对于 $x\in\left[\arctan\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, 有 $\tan(\sin x)>1$, 所以 $f(x)>0$。综上, 对于所有 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$,

$$\tan(\sin x)>\sin(\tan x).$$

26. 证明: 对半开区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 内的任意 x, 有

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3>\cos x.$$

在 $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 上, 有泰勒展开的不等式:

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6}, \quad \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

因此

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 > \left(1 - \frac{x^2}{6}\right)^3$$

展开右边并与 $\cos x$ 比较:

$$\left(1 - \frac{x^2}{6}\right)^3 = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{216} > 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} > \cos x$$

其中

$$0 < x \leqslant \frac{\pi}{2} < 3 \Rightarrow x^2 < 9 \Rightarrow \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{216} > \frac{x^4}{24}$$

故原不等式得证。

27. 证明不等式: 当 $0 < x \leqslant 1$ 时, 有

$$\sin x + \arcsin x > 2x.$$

$\sin x$ 与 $\arcsin x$ 的麦克劳林展开式分别为

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots$$

因此, 对任意 $0 < x \leqslant 1$, 存在 θ_1, θ_2, 满足 $0 < \theta_1 < x, 0 < \theta_2 < x$, 使得

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{\theta_1^5}{5!}, \quad \arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{\theta_2^5}{5}$$

于是

$$\sin x + \arcsin x = 2x + \frac{\theta_1^5}{5!} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{\theta_2^5}{5} > 2x$$

故得证。

设

$$f(x)=\sin x+\arcsin x,$$

则 $f(0)=0$, 且

$$f'(x)=\cos x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

从而

$$f'(0)=2,$$

故直线 $y=2x$ 是曲线 $y=f(x)$ 在原点处的切线。又

$$f''(x)=-\sin x+\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

当 $0<x<1$ 时, 有

$$\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}>\sin x,$$

因此 $f''(x)>0$, 函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上上凸, 即 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上位于其在原点处的切线 $y=2x$ 之上, 故得证

$$\sin x+\arcsin x>2x$$

28. 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为二次可微函数, 满足 $f(0)=1$, $f'(0)=0$, 且对所有 $x\in[0,\infty)$ 有

$$f''(x)-5f'(x)+6f(x)\geqslant 0.$$

证明对所有 $x\in[0,\infty)$ 有

$$f(x)\geqslant 3e^{2x}-2e^{3x}.$$

设 $x\in[0,\infty)$, 令 $g(x)=f'(x)-2f(x)$. 则

$$g'(x)-3g(x)\geqslant 0$$

即

$$\left(g(x)e^{-3x}\right)'\geqslant 0$$

因此

$$g(x)e^{-3x}\geqslant g(0)=f'(0)-2f(0)=-2$$

即

$$f'(x)-2f(x)\geqslant -2e^{3x}$$

两边同乘 e^{-2x} 并整理得

$$(f(x)e^{-2x})' \geqslant -2e^{x}$$

即

$$(f(x)e^{-2x}+2e^{x})' \geqslant 0$$

于是

$$f(x)e^{-2x}+2e^{x} \geqslant f(0)+2=3$$

即

$$f(x) \geqslant 3e^{2x}-2e^{3x}$$

29. 设函数

$$F(x)=e^{-x}-\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n},$$

证明: 当 $n \geqslant 2$ 且 $x \in [0,n]$ 时,

$$0 \leqslant F(x) \leqslant \frac{e^{-1}}{n}.$$

函数 $F(x)$ 在区间 $[0,n]$ 上连续且可微, 因此在该区间内必有最大值与最小值, 且只能出现在端点或临界点处。有 $F(0)=1-1=0, F(n)=e^{-n}$, 且

$$F'(x)=-e^{-x}+\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1}$$

先证明 $F(x) \geqslant 0$。只需证明

$$\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n} \leqslant e^{-x}, \quad x \in [0,n]$$

等价于

$$0 \leqslant 1-\frac{x}{n} \leqslant e^{-x/n}, \quad x \in [0,n]$$

令 $t=\frac{x}{n}$, 则 $t \in [0,1]$, 上述不等式化为

$$1-t \leqslant e^{-t}, \quad t \in [0,1]$$

这是显然成立的, 因为直线 $y=1-t$ 是曲线 $y=e^{-t}$ 在 $(0,1)$ 处的切线, 而 $y=e^{-t}$ 在 $[0,1]$ 上向下凸, 因此图像始终位于其切线之上, 故 $F(x) \geqslant 0$, 最小值在 $x=0$ 处取得。接下来确定最大值, 由于

$$F'(n)=-e^{-n}<0,$$

最大值不可能出现在 $x=n$, 因此必存在 $x_0\in(0,n)$ 使得 $F'(x_0)=0$, 这意味

$$e^{-x_0}=\left(1-\frac{x_0}{n}\right)^{n-1}$$

于是

$$\begin{aligned}F(x_0)&=e^{-x_0}-\left(1-\frac{x_0}{n}\right)^{n}\\&=e^{-x_0}-\left(1-\frac{x_0}{n}\right)^{n-1}\left(1-\frac{x_0}{n}\right)\\&=e^{-x_0}-e^{-x_0}\left(1-\frac{x_0}{n}\right)\\&=e^{-x_0}\frac{x_0}{n}\end{aligned}$$

设 $g(x)=xe^{-x}$, 可推导得知 $g(x)$ 在 $x=1$ 处取得最大值 e^{-1}, 因此

$$F(x_0)\leqslant\frac{e^{-1}}{n}$$

综上所述 $n\geqslant 2$ 且 $x\in[0,n]$ 时,

$$0\leqslant F(x)\leqslant\frac{e^{-1}}{n}$$

30. 已知在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有二阶连续导数的函数 $f(x)$ 满足方程

$$x^2f''(x)-2x\sin x f'(x)=e^x+e^{-x}-2,$$

若 $f(x)$ 在 $x=a$ 处取极值, 问 $f(a)$ 是函数 $f(x)$ 的极大值还是极小值? 请说明理由。

因为 $f(x)$ 在 $x=a$ 处取极值, 所以

$$f'(a)=0.$$

代入原方程得

$$a^2f''(a)=e^a+e^{-a}-2.$$

由 AM-GM 不等式,

$$e^a+e^{-a}\geqslant 2,$$

等号成立当且仅当 $a=0$, 所以

$$a^2f''(a)=e^a+e^{-a}-2\geqslant 0,$$

若 $a \neq 0$, 则 $a^2 > 0$, 因此

$$f''(a) = \frac{e^a + e^{-a} - 2}{a^2} > 0,$$

所以 $f(x)$ 在 $x = a$ 处为极小值; 若 $a = 0$, 则

$$f''(0) = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2}$$

由洛必达法则,

$$f''(0) = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 > 0.$$

因此 $f''(0) > 0$ 仍为极小值, 故 $f(a)$ 是函数 $f(x)$ 的极小值。

31. 已知函数 $f(t)$ 在 $[a, x]$ 上可微, 且 $f'(t)$ 可微。对所有 $x > a$, 存在 c_x 满足 $a < c_x < x$ 且

$$\int_a^x f(t)\, dt = f(c_x)(x - a).$$

假设 $f'(a) \neq 0$, 证明

$$\lim_{x \to a} \frac{c_x - a}{x - a} = \frac{1}{2}.$$

设

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

利用 $F(x)$ 的泰勒展开, 有

$$F(x) = F(a) + (x - a)F'(a) + \frac{(x - a)^2}{2} F''(\theta_x)$$

其中 $a < \theta_x < x$, 且当 $x \to a$ 时,$\theta_x \to a$。又 $F(a) = 0, F'(x) = f(x), F''(x) = f'(x)$, 所以

$$F(x) = 0 + (x - a)f(a) + \frac{(x - a)^2}{2} f'(\theta_x)$$

由定义有

$$f(c_x) = \frac{F(x)}{x - a} = f(a) + \frac{x - a}{2} f'(\theta_x)$$

因此

$$\frac{f(c_x) - f(a)}{x - a} = \frac{1}{2} f'(\theta_x)$$

另一方面可以写成

$$\frac{f(c_x) - f(a)}{x - a} = \frac{f(c_x) - f(a)}{c_x - a} \cdot \frac{c_x - a}{x - a}$$

取极限得到

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{2}f'(\theta_x)=\lim_{x\to a}\frac{f(c_x)-f(a)}{c_x-a}\cdot\lim_{x\to a}\frac{c_x-a}{x-a}$$

由此可得

$$\frac{1}{2}f'(a)=f'(a)\cdot\lim_{x\to a}\frac{c_x-a}{x-a}$$

即

$$\lim_{x\to a}\frac{c_x-a}{x-a}=\frac{1}{2}$$

32. (a) 已知 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续且单调增加, 且 $f(0)\geqslant 0$, 证明:

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^n}\displaystyle\int_0^x t^{n-1}f(t)\,dt, & x>0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在 $[0,+\infty)$ 上连续且单调增加, 其中 $n>0$。

先证连续性。由于 f 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 且 $f(0)\geqslant 0$, 有:

$$\lim_{x\to 0^+}F(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^n}\int_0^x t^{n-1}f(t)\,dt=0=F(0),$$

所以 $F(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

再证单调性。对于 $x>0$, 由积分中值定理可得:

$$\int_0^x t^{n-1}f(t)\,dt=f(\xi)\int_0^x t^{n-1}\,dt=f(\xi)\cdot\frac{x^n}{n},\quad \text{其中}\xi\in(0,x).$$

因此,

$$F(x)=\frac{1}{x^n}\cdot\int_0^x t^{n-1}f(t)\,dt=\frac{1}{x^n}\cdot f(\xi)\cdot\frac{x^n}{n}=\frac{f(\xi)}{n}.$$

因为 f 单调递增,$\xi\in(0,x)$, 所以 $x\uparrow\Rightarrow\xi\uparrow\Rightarrow f(\xi)\uparrow$, 故 $F(x)$ 单调递增。

(b) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, 且满足 $|f''(x)|\leqslant 1$。已知 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内取最大值为 $\dfrac{1}{4}$, 证明:

$$|f(0)|+|f(1)|\leqslant 1.$$

设 $x_0\in(0,1)$, 使得 $f(x_0)=\dfrac{1}{4}$, 且 $f'(x_0)=0$。对 $f(0)$ 做 Taylor 展开（Lagrange 余项形式）得:

$$f(0)=f(x_0)+f'(x_0)(0-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(0-x_0)^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}f''(\xi)x_0^2,$$

其中 $\xi \in (0, x_0)$。同理,

$$f(1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} f''(\eta)(1 - x_0)^2, \quad \eta \in (x_0, 1).$$

因为 $|f''(x)| \leqslant 1$, 故

$$|f(0)| \leqslant \left| \frac{1}{4} + \frac{1}{2} f''(\xi) x_0^2 \right| \leqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{2} x_0^2,$$

$$|f(1)| \leqslant \left| \frac{1}{4} + \frac{1}{2} f''(\eta)(1 - x_0)^2 \right| \leqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(1 - x_0)^2.$$

相加得:

$$|f(0)| + |f(1)| \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(x_0^2 + (1 - x_0)^2\right).$$

注意 $x_0^2 + (1 - x_0)^2 = 1 - 2x_0(1 - x_0) \leqslant 1$, 因此:

$$|f(0)| + |f(1)| \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 = 1.$$

33. 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 且 $f(0) = 0, f'(0) = 1$, 设

$$F(x) = \int_0^x t^{n-1} f(x^n - t^n)\, dt,$$

求

$$\lim_{x \to 0} \frac{F(x)}{x^{2n}}.$$

由题设 $f(0) = 0$, 且 f 在 0 可导, 考虑换元 $t = xu$, 则

$$F(x) = \int_0^x t^{n-1} f(x^n - t^n) dt = x^n \int_0^1 u^{n-1} f(x^n - x^n u^n) du.$$

注意 $x^n - x^n u^n = x^n(1 - u^n)$, 故

$$F(x) = x^n \int_0^1 u^{n-1} f\big(x^n(1 - u^n)\big) du.$$

因 $f(0) = 0$, 且 f 在 0 处可导, 令 $h = x^n(1 - u^n)$, 有

$$f(h) = f(0) + f'(0)h + o(h) = f'(0) x^n (1 - u^n) + o(x^n).$$

所以

$$F(x) = x^n \int_0^1 u^{n-1} \left(f'(0) x^n (1 - u^n) + o(x^n)\right) du = f'(0) x^{2n} \int_0^1 u^{n-1}(1 - u^n) du + o(x^{2n}).$$

计算积分:

$$\int_0^1 u^{n-1}(1-u^n)du = \int_0^1 u^{n-1}du - \int_0^1 u^{2n-1}du = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n}.$$

故

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^{2n}} = \frac{1}{2n}$$

积分

考点: 不定积分、定积分、面积计算、旋转体的体积、直线运动问题

1. 已知 $p > 0$, 证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}.$$

设

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^p$$

则

$$\frac{S_n}{n^{p+1}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p.$$

这是函数 $f(x) = x^p$ 在 $[0,1]$ 的黎曼和, 故

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n^{p+1}} = \int_0^1 x^p\, dx = \frac{1}{p+1}.$$

2. 求

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{2017^{\frac{1}{k}}}{k+1} + \frac{2017^{\frac{2}{k}}}{k+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{2017^{\frac{k}{k}}}{k+\frac{1}{k}}\right)$$

写成黎曼和:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} 2017^{\frac{j}{k}} = \int_0^1 2017^x\, dx = \left[\frac{2017^x}{\ln 2017}\right]_0^1 = \frac{2016}{\ln 2017}.$$

(待验证,$2017^{\frac{j}{k}}/(1+0?)$)

3. 设

$$a_n = \frac{2}{n}\left[(2^2+1) + \left(2+\frac{2}{n}\right)^2 + 1 + \cdots + \left(2+\frac{2n-2}{n}\right)^2 + 1\right]$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

发现

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{n} \left[\left(2 + \frac{2k-2}{n} \right)^2 + 1 \right].$$

是函数 $f(x) = (2+x)^2 + 1$ 在 $[0,2]$ 上的黎曼和, 故

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \int_0^2 \left[(2+x)^2 + 1 \right] dx = \left[\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 5x \right]_0^2 = \frac{62}{3}.$$

4. 试求

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5}{n^2} \left[\sqrt{4n^2 - 2\cdot 1^2} + \sqrt{4n^2 - 2\cdot 2^2} + \cdots + \sqrt{4n^2 - 2\cdot n^2} \right]$$

将其写成黎曼和, 得

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{5}{n} \sqrt{4 - 2\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \int_0^1 5\sqrt{4 - 2x^2}\, dx.$$

可得原极限为

$$\left[\frac{5}{\sqrt{2}} \left(x\sqrt{2 - x^2} + 2\sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \right]_0^1 = \frac{5\sqrt{2}(\pi + 2)}{4}.$$

5. 设函数 $f:(0,\infty) \to \mathbb{R}$, 且当 $x > 0$ 时, 恒有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3n-1} \left(f\left(\frac{x^2}{n}\right) + f\left(\frac{2x^2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{nx^2}{n}\right) \right) = \frac{\sqrt[3]{7+x}}{x},$$

求 $f(1)$。

先写成黎曼和:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3n-1} \left(f\left(\frac{x^2}{n}\right) + f\left(\frac{2x^2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{nx^2}{n}\right) \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3n-1} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{kx^2}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{kx^2}{n}\right) \\
&= \frac{1}{3} \int_0^1 f(x^2 t)\, dt = \frac{\sqrt[3]{7+x}}{x}.
\end{aligned}$$

于是
$$\int_0^1 x^2 f(x^2t)\,dt = 3x\sqrt[3]{7+x}.$$
取 $u = x^2t \Rightarrow du = x^2dt$, 则
$$\begin{aligned}\int_0^{x^2} f(u)\,du &= 3x\sqrt[3]{7+x},\\ \frac{d}{dx}\left(\int_0^{x^2} f(u)\,du\right) &= \frac{d}{dx}\left(3x\sqrt[3]{7+x}\right),\\ 2xf(x^2) &= 3\sqrt[3]{7+x} + x(7+x)^{-\frac{2}{3}}.\end{aligned}$$
令 $x = 1$, 则
$$2f(1) = 3\cdot 2 + \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad f(1) = \frac{25}{8}.$$

6.
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{12n} + \sin\frac{3\pi}{12n} + \sin\frac{5\pi}{12n} + \cdots + \sin\frac{(2n-1)\pi}{12n}\right)$$

写成黎曼和,
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{(2k-1)\pi}{12n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{2n}\sin\frac{k\pi}{12n} - \sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2k\pi}{12n}\right)\\ &= \int_0^2 \sin\frac{\pi}{12}x\,dx - \int_0^1 \sin\frac{\pi}{6}x\,dx\end{aligned}$$
可得
$$\left[-\frac{12}{\pi}\cos\frac{\pi}{12}x\right]_0^2 - \left[-\frac{6}{\pi}\cos\frac{\pi}{6}x\right]_0^1 = \frac{6-3\sqrt{3}}{\pi}$$

7. 求
$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{x(1-x)}{k+(n-k)x}\text{ , } x\in[0,1]$$

显然 $f(0)=f(1)=0$, 对于 $x\in[0,1]$,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{x(1-x)}{k+(n-k)x} &= x(1-x)\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(\frac{k}{n})(1-x)+x}\cdot\frac{1}{n}\\
&= x(1-x)\int_0^1\frac{1}{(1-x)y+x}dy\\
&= x\cdot[\ln|(1-x)y+x|]_0^1\\
&= -x\ln(x)
\end{aligned}$$

8. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=10}^{n+9}\frac{2^{11(k-9)/n}}{\log_2 e^{n/11}}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{58}{\pi\sqrt{(n-k)(n+k)}}\right)$$

首先有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=10}^{n+9}\frac{2^{11(k-9)/n}}{\log_2 e^{n/11}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}2^{11(\frac{k}{n})}\ln\left(\frac{11}{n}\right)\ln 2=\int_0^{11}2^x\ln 2\,dx$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{58}{\pi\sqrt{(n-k)(n+k)}}=\frac{58}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}}=\frac{58}{\pi}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

故所求为

$$\int_0^{11}2^x\ln 2\,dx-\frac{58}{\pi}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=[2^x]_0^{11}-\frac{58}{\pi}[\arcsin x]_0^1=2047-29=2018$$

9. 求极限

$$\lim_{t\to1^-}(1-t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{1+t^n},$$

注意到

$$\lim_{t\to1^-}\frac{1-t}{-\ln t}=1$$

因此

$$\lim_{t\to1^-}(1-t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{1+t^n}=\lim_{t\to1^-}(-\ln t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{1+t^n}=(-\ln t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+e^{-n\ln t}}$$

设 $h=-\ln t$, 则当 $t\to 1^-$ 时 $h\to 0^+$, 于是上述极限化为

$$\lim_{h\to 0^+} h\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+e^{nh}}$$

这是一个黎曼和, 对应的积分为

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+e^x}=\ln 2$$

10. 对于 $n=1,2,\ldots,$ 定义

$$S_n=\log\left(\sqrt[n^2]{1^1\cdot 2^2\cdot\cdots\cdot n^n}\right)-\log(\sqrt{n}),$$

其中 log 表示自然对数。求 $\lim_{n\to\infty} S_n$。

将 S_n 变形如下:

$$\begin{aligned}
S_n&=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\log k-\frac{1}{2}\log n\\
&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\left(\log\frac{k}{n}+\log n\right)\right)-\frac{1}{2}\log n\\
&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\log\frac{k}{n}+\frac{\log n}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k-\frac{1}{2}\log n\\
&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\log\frac{k}{n}+\frac{\log n}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}-\frac{1}{2}\log n\\
&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\log\frac{k}{n}+\frac{\log n}{2n}
\end{aligned}$$

当 $n\to\infty$ 时, 最后一项 $\frac{\log n}{2n}$ 趋于 0, 而第一项是函数 $f(x)=x\log x$ 在区间 $[0,1]$ 上的黎曼和, 因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\log\frac{k}{n}=\int_0^1 x\log x\,dx$$

利用分部积分法计算得

$$\int_0^1 x\log x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\log x-\frac{x^2}{4}\right]_0^1=-\frac{1}{4}$$

所以极限 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 存在, 且

$$\lim_{n\to\infty} S_n=-\frac{1}{4}$$

11. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1^2+2^2+\cdots+n^2)(1^5+2^5+\cdots+n^5)}{(1^3+2^3+\cdots+n^3)(1^4+2^4+\cdots+n^4)}$$

首先看到

$$a_n=\frac{\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5\right)}{\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4\right)}=\frac{\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5\right)}{\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4\right)}$$

故

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{\left(\int_0^1 x^2dx\right)\left(\int_0^1 x^5dx\right)}{\left(\int_0^1 x^3dx\right)\left(\int_0^1 x^4dx\right)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}}=\frac{10}{9}$$

12. 计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}\right)^2(1^3+2^3+\cdots+n^3)}{\left(\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{2}+\cdots+\sqrt[3]{n}\right)^3(1^2+2^2+\cdots+n^2)}$$

由

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2,\quad \sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

可得

$$f(n)=\frac{n^2\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{\frac{k}{n}}\right)^2}{n^3\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt[3]{\frac{k}{n}}\right)^3}\cdot\frac{3n(n+1)}{2(2n+1)}$$

由积分定义,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{\frac{k}{n}}=\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3},\quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt[3]{\frac{k}{n}}=\int_0^1 x^{\frac{1}{3}}\,dx=\frac{3}{4}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}f(n)=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{64}{81}$$

13. 求极限

$$L=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n)!}{n!\,n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

首先有

$$\ln L=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\Big(\ln(2n)!-\ln n!-n\ln n\Big)$$

其中

$$\ln(2n)!-\ln n!=\sum_{k=n+1}^{2n}\ln k=\sum_{k=1}^{n}\ln\big(n+k\big)$$

因此

$$\ln L=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\ln\big(n+k\big)-n\ln n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\Big(1+\frac{k}{n}\Big)$$

这是在 $[0,1]$ 上的黎曼和, 得

$$\ln L=\int_0^1\ln(1+x)\,dx=\Big[(1+x)\ln(1+x)-x\Big]_0^1=2\ln 2-1$$

所以

$$L=e^{2\ln 2-1}=\frac{4}{e}$$

14. 设

$$A_n=\{\sin(\ln 1),\sin(\ln 2),\ldots,\sin(\ln n)\},\quad B_n=\{\cos(\ln 1),\cos(\ln 2),\ldots,\cos(\ln n)\}$$

且 $\bar{a}_n,\bar{b}_n$ 分别为 A_n,B_n 的算术平均值。求

$$\lim_{n\to\infty}\left(\bar{a}_n\cos(\ln n)-\bar{b}_n\sin(\ln n)\right).$$

由积分定义,

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(\sin(\ln i)\cos(\ln n)-\cos(\ln i)\sin(\ln n))\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\sin(\ln i-\ln n)\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\left(\ln\left(\frac{i}{n}\right)\right)\\
&=\int_0^1\sin(\ln x)\,dx\\
&=\Im\int_0^1(e^{i\ln x})\,dx\\
&=\Im\int_0^1 x^i\,dx\\
&=\Im\left(\frac{1}{i+1}\right)=-\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

15. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上具有连续导数,$f(0)=0, f(1)=1$。证明:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)=-\frac{1}{2}.$$

考察括号内的表达式:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\\
&=\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f(x)dx-\frac{1}{n}f(\frac{k}{n})\right)\\
&=\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)+\left(x-\frac{k}{n}\right)f'\left(\frac{k}{n}\right)+o\left(x-\frac{k}{n}\right)\right)dx-\frac{1}{n}f(\frac{k}{n})\right)\\
&=\sum_{k=1}^{n}\left(\left[f\left(\frac{k}{n}\right)x+\frac{f'(\frac{k}{n})}{2}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2+o\left(\left(x-\frac{k}{n}\right)^2\right)\right]_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}-\frac{1}{n}f(\frac{k}{n})\right)\\
&=\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{f'(\frac{k}{n})}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)
\end{aligned}$$

将上述结果乘以 n 并代入原极限中，利用黎曼和定义可得原式为

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f'\left(\frac{k}{n}\right)+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)&=-\frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)dx\\&=-\frac{1}{2}[f(x)]_0^1\\&=-\frac{1}{2}(1-0)=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

证毕。

16. 证明

$$\frac{\pi}{4}<\int_0^1\frac{1}{1+x^8}dx<1$$

在 $x\in(0,1)$ 上，有 $0<x^8<1$，于是

$$\frac{1}{1+x^8}<1\implies\int_0^1\frac{1}{1+x^8}\,dx<\int_0^1 1\,dx=1$$

又 $x^8<x^2$，所以

$$\frac{1}{1+x^8}>\frac{1}{1+x^2}\implies\int_0^1\frac{dx}{1+x^8}>\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=[\tan^{-1}x]_0^1=\frac{\pi}{4}$$

17. 若 $f(x)$ 为一实系数多项式函数，已知

$$\int_0^1 f(x)f'(x)\,dx=1,\quad\int_0^1(f(x))^3f'(x)\,dx=2,$$

求

$$\int_0^1(f(x))^5f'(x)\,dx$$

的值。

有

$$1=\int_0^1 f(x)f'(x)\,dx=\left[\frac{1}{2}(f(x))^2\right]_0^1=\frac{1}{2}\big([f(1)]^2-[f(0)]^2\big)\tag{1}$$

同理，

$$2=\int_0^1(f(x))^3f'(x)\,dx=\left[\frac{1}{4}(f(x))^4\right]_0^1=\frac{1}{4}\big([f(1)]^4-[f(0)]^4\big)\tag{2}$$

由 (1), (2) 解得

$$[f(0)]^2 = 1, \quad [f(1)]^2 = 3$$

于是

$$\int_0^1 (f(x))^5 f'(x)\,dx = \left[\frac{1}{6}(f(x))^6\right]_0^1 = \frac{1}{6}\big(f(1)^6 - f(0)^6\big) = \frac{13}{3}$$

18. 设 f 为实数系上的连续函数, 若

$$\frac{d}{dx}\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = x^2 + 1,$$

求

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$$

两边积分得

$$g(x) = \int_{-x}^{x} f(t)\,dt = \int (x^2+1)\,dx = \frac{1}{3}x^3 + x + C$$

令 $x = 0$, 得

$$g(0) = \int_0^0 f(t)\,dt = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow g(x) = \frac{1}{3}x^3 + x$$

所以

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = g(1) = \frac{4}{3}$$

19. 已知一连续实函数 $f(x)$ 满足 $f(2x) = 3f(x), \forall x \in \mathbb{R}$, 若 $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = 1$, 求

$$\int_0^2 f(x)dx$$

由 $f(2x) = 3f(x)$ 得

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{3}\int_0^1 f(2x)\,dx = 1$$

令 $u = 2x$, 则 $du = 2dx$, 于是

$$\int_0^2 f(u)\,du = 6$$

故
$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx = 1 + \int_1^2 f(x)\,dx = 6 \Rightarrow \int_1^2 f(x)\,dx = 5$$

20. 设多项式函数 $y = f(x)$ 满足
$$f(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x + 20 - \int_1^x f(t)\,dt,$$
求 $f(x)$。

对两边求导得
$$f'(x) + f(x) = 12x^2 - 24x + 8$$
故 $f(x)$ 为二次多项式, 设
$$f(x) = ax^2 + bx + c, f'(x) = 2ax + b$$
代入得
$$f(x) + f'(x) = ax^2 + bx + c + 2ax + b = ax^2 + (b + 2a)x + (b + c)$$
比较系数, 解得
$$a = 12, b = -48, c = 56 \Rightarrow f(x) = 12x^2 - 48x + 56$$

21. 设
$$f(x) = \int_0^x g(t)\,dt + 1, \quad g(x) = 12x^2 - 6x + \int_0^1 [f(t) + g'(t)]\,dt,$$
求 $g(0)$。

由题意有
$$f(0) = 1, \quad g(0) = \int_0^1 [f(t) + g'(t)]\,dt,$$
又
$$f(x) = \int_0^x [12t^2 - 6t + g(0)]\,dt + 1 = 4x^3 - 3x^2 + xg(0) + 1$$
代入 $g(x)$ 得
$$g(x) = 12x^2 - 6x + \int_0^1 (4t^3 - 3t^2 + tg(0) + 1)\,dt + g(1) - g(0)$$

其中

$$\int_0^1 (4t^3-3t^2+tg(0)+1)dt = \left[t^4-t^3+\frac{1}{2}g(0)t^2+t\right]_0^1 = \frac{1}{2}g(0)+1$$

因此

$$g(x) = 12x^2-6x+1+g(1)-\frac{1}{2}g(0)$$

令 $x=1$, 得

$$g(0)=14$$

22. 设

$$f(x) = x+3+\int_0^x g(t)\,dt, \qquad g(x) = 2x-9+\int_0^x f(t)\,dt,$$

试求 $f(3)$。

设

$$a = \int_0^1 g(x)\,dx, \qquad b = \int_0^2 f(x)\,dx.$$

由题得

$$f(x) = x+3+a, \qquad g(x) = 2x-9+b.$$

因此

$$b = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 (x+3+a)\,dx = \left[\tfrac{1}{2}x^2+(3+a)x\right]_0^2 = 8+2a,$$

$$a = \int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 (2x-9+b)\,dx = \left[x^2+(b-9)x\right]_0^1 = b-8.$$

联立得

$$b=8+2a, \qquad a=b-8.$$

代入消元得

$$b=8+2(b-8) \Rightarrow b=8, \quad a=b-8=0.$$

所以

$$f(x)=x+3+a=x+3.$$

因此

$$f(3)=3+3=6.$$

(待验证, 为什么设 a, b?)

23. 设 $0 < a < b$, 证明
$$\int_a^b (x^2+1)e^{-x^2}\,dx > e^{-a^2} - e^{-b^2}.$$

令
$$f(x) = \int_0^x (t^2+1)e^{-t^2}\,dt, \quad g(x) = -e^{-x^2}$$
两函数在 $(0,\infty)$ 上均递增。由柯西中值定理, 存在 $x \in (a,b)$ 使得
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{(x^2+1)e^{-x^2}}{2xe^{-x^2}} = \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right) \geqslant \sqrt{x\cdot\frac{1}{x}} = 1$$
于是
$$\int_a^b (x^2+1)e^{-x^2}\,dx = f(b)-f(a) \geqslant g(b)-g(a) = e^{-a^2} - e^{-b^2}$$

由不等式 $(x-1)^2 \geqslant 0 \Rightarrow x^2+1 \geqslant 2x$,
$$\int_a^b (x^2+1)e^{-x^2}\,dx \geqslant \int_a^b 2xe^{-x^2}\,dx = [-e^{-x^2}]_a^b = e^{-a^2} - e^{-b^2}$$

24. 设 f 是定义在区间 $[0,1]$ 上的连续实值函数。证明存在 $\xi \in [0,1]$, 使得
$$\int_0^1 x^2 f(x)\,dx = \frac{1}{3}f(\xi).$$

由于 f 连续, 由最值定理,f 必在 $[0,1]$ 上取得最小值和最大值, 分别设之为 $f(a), f(b)$, 其中 $a,b \in [0,1]$, 于是
$$f(a)\int_0^1 x^2\,dx \leqslant \int_0^1 x^2 f(x)\,dx \leqslant f(b)\int_0^1 x^2\,dx,$$
即
$$f(a) \leqslant 3\int_0^1 x^2 f(x)\,dx \leqslant f(b).$$
由拉格朗日中值定理, 存在 $\xi \in [0,1]$, 使得
$$f(\xi) = 3\int_0^1 x^2 f(x)\,dx.$$
即得证命题。

25. 设 $f:[0,1]\to(0,\infty)$ 是可积函数, 且对所有 $x\in[0,1]$ 有

$$f(x)\cdot f(1-x)=1,$$

证明

$$\int_0^1 f(x)\,dx\geqslant 1.$$

对任意 $x\in[0,1]$, 由 AM-GM 不等式,

$$f(x)+f(1-x)\geqslant 2\sqrt{f(x)f(1-x)}=2$$

在区间 $[0,\frac{1}{2}]$ 上积分得

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx+\int_0^{\frac{1}{2}} f(1-x)\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}}(f(x)+f(1-x))\,dx\geqslant\int_0^{\frac{1}{2}}2\,dx=1$$

由条件可得

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 f(1-x)\,dx=\int_0^1\frac{1}{f(x)}\,dx$$

于是由柯西不等式,

$$\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2=\int_0^1 f(x)\,dx\cdot\int_0^1\frac{1}{f(x)}\,dx\geqslant\left(\int_0^1 1\,dx\right)^2=1$$

因此

$$\int_0^1 f(x)\,dx\geqslant 1$$

26. 设 $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ 是二阶可导函数, 满足

$$2f'(x)+xf''(x)\geqslant 1,\quad x\in(-1,1).$$

证明

$$\int_{-1}^1 xf(x)\,dx\geqslant\frac{1}{3}.$$

令

$$g(x) = xf(x) - \frac{x^2}{2}$$

则

$$g''(x) = 2f'(x) + xf''(x) - 1 \geqslant 0$$

因此 g 是凸函数, 以 g 在 $x = 0$ 处的切线估计 g。设 $g'(0) = a$, 则由凸性知

$$g(x) \geqslant g(0) + g'(0)x = ax$$

于是

$$\int_{-1}^{1} xf(x)\, dx = \int_{-1}^{1} \left(g(x) + \frac{x^2}{2}\right) dx \geqslant \int_{-1}^{1} \left(ax + \frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{1}{3}$$

这就证明了结论。

27. 设 f 为闭区间 $[0,1]$ 上的实值连续函数。已知

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \frac{\pi}{4},$$

证明存在 y 满足 $0 < y < 1$ 且

$$\frac{1}{1+y} < f(y) < \frac{1}{2y}.$$

注意到

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}.$$

令

$$g(x) = f(x) - \frac{1}{1+x^2}$$

若 $g(x) \equiv 0 \quad \forall x \in (0,1)$, 则 $f(y) = \dfrac{1}{1+y^2}$ 对所有 $y \in (0,1)$ 都成立; 反之, 由于

$$\int_0^1 g(x)\, dx = 0$$

存在 $x_0, x_1 \in (0,1)$ 使得 $g(x_0) < 0$ 且 $g(x_1) > 0$。由 g 在 $(0,1)$ 上连续, 由介值定理, 存在 y 满足 $x_0 < y < x_1$ 使得 $g(y) = 0$, 于是 $f(y) = \dfrac{1}{1+y^2}$。

综上, 皆存在 $y \in (0,1)$ 使得 $f(y) = \frac{1}{1+y^2}$。由于 $0 < y < 1$, 有

$$2y < 1 + y^2 < 1 + y$$

从而得到

$$\frac{1}{1+y} < f(y) < \frac{1}{2y}$$

证毕。

28. 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上具有连续导数，且满足 $f(a)=f(b)=0$。证明

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)| \geqslant \frac{4}{(b-a)^2}\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|.$$

由拉格朗日中值定理，对任意 $x\in(a,b)$，存在 $\xi_1\in(a,x),\xi_2\in(x,b)$ 使得

$$f(x)=f(x)-f(a)=f'(\xi_1)(x-a)=f(x)-f(b)=f'(\xi_2)(x-b)$$

设

$$M=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|$$

则

$$|f(x)|\leqslant M(x-a),\qquad |f(x)|\leqslant M(b-x).$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b |f(x)|\,dx &\leqslant \frac{4}{(b-a)^2}\left(\int_a^{(a+b)/2} M(x-a)\,dx+\int_{(a+b)/2}^b M(b-x)\,dx\right)\\ &=\frac{4}{(b-a)^2}\left(\frac{(b-a)^2}{8}M+\frac{(b-a)^2}{8}M\right)=M\end{aligned}$$

又因为

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\leqslant\int_a^b |f(x)|\,dx,$$

于是得证

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)| \geqslant \frac{4}{(b-a)^2}\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$$

29. 设 a 为实数，已知函数

$$f(x)=4x^2-3ax+4\int_0^1 (tf(t))\,dt,$$

及

$$g(x)=x^2+4x+a-\int_0^x ((t+1)g'(t))\,dt.$$

若方程 $f(x) - x \cdot g(x) = 0$ 有两相异实根 α, β, 且 $\alpha < \beta$, 求

$$\frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} (3x^2 - 2ax + a^2)\, dx$$

的最小值。

设常数

$$C = \int_0^1 t f(t)\, dt,$$

则

$$f(x) = 4x^2 - 3ax + 4C.$$

计算 C:

$$C = \int_0^1 t(4t^2 - 3at + 4C)dt = \int_0^1 (4t^3 - 3at^2 + 4Ct)dt = \left[t^4 - at^3 + 2Ct^2\right]_0^1 = 1 - a + 2C.$$

整理得

$$C = 1 - a + 2C \implies C = a - 1.$$

因此

$$f(x) = 4x^2 - 3ax + 4a - 4.$$

对 $g(x)$, 由条件有

$$g'(x) = 2x + 4 - (x+1)g'(x),$$

整理得

$$g'(x) + (x+1)g'(x) = 2x + 4 \implies (x+2)g'(x) = 2x + 4,$$

即

$$g'(x) = \frac{2x+4}{x+2} = 2.$$

计算积分

$$\int_0^x (t+1)g'(t)dt = \int_0^x 2(t+1)dt = x^2 + 2x,$$

代入 $g(x)$:

$$g(x) = x^2 + 4x + a - (x^2 + 2x) = 2x + a.$$

因此

$$f(x) - xg(x) = (4x^2 - 3ax + 4a - 4) - x(2x + a) = 4x^2 - 3ax + 4a - 4 - 2x^2 - ax = 2x^2 - 4ax + 4a - 4.$$

设两根为 α, β, 满足

$$\alpha+\beta=2a, \quad \alpha\beta=2a-2.$$

计算

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta(3x^2-2ax+a^2)dx=\frac{1}{\beta-\alpha}\left[x^3-ax^2+a^2x\right]_\alpha^\beta=\frac{1}{\beta-\alpha}\left(\beta^3-\alpha^3-a(\beta^2-\alpha^2)+a^2(\beta-\alpha)\right).$$

利用因式分解:

$$\beta^3-\alpha^3=(\beta-\alpha)(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2), \quad \beta^2-\alpha^2=(\beta-\alpha)(\beta+\alpha),$$

因此表达式为

$$(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)-a(\beta+\alpha)+a^2.$$

利用已知根的和与积:

$$\beta+\alpha=2a, \quad \alpha\beta=2a-2,$$

以及

$$\beta^2+\alpha^2=(\beta+\alpha)^2-2\alpha\beta=(2a)^2-2(2a-2)=4a^2-4a+4.$$

所以

$$\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2=(\beta^2+\alpha^2)+\alpha\beta=(4a^2-4a+4)+(2a-2)=4a^2-2a+2.$$

代入原式:

$$4a^2-2a+2-a\cdot 2a+a^2=4a^2-2a+2-2a^2+a^2=3a^2-2a+2.$$

令

$$h(a)=3a^2-2a+2=3\left(a-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{5}{3}.$$

因此最小值为

$$\frac{5}{3}.$$

(待验证)

30. 已知

$$\int_0^2 f(x)dx=1, \quad f(2)=\frac{1}{2}, \quad f'(2)=0,$$

计算

$$\int_0^1 x^2 f''(2x)dx$$

进行变量代换, 令 $t=2x$, 则 $dt=2dx$, 于是

$$I=\int_0^1 x^2 f''(2x)dx=\frac{1}{2}\int_0^2 (\frac{t}{2})^2 f''(t)dt=\frac{1}{8}\int_0^2 t^2 f''(t)dt$$

由分部积分法,

$$I=\frac{1}{8}\left([t^2f'(t)]_0^2-\int_0^2 2tf'(t)dt\right)=-\frac{1}{4}\int_0^2 tf'(t)dt$$

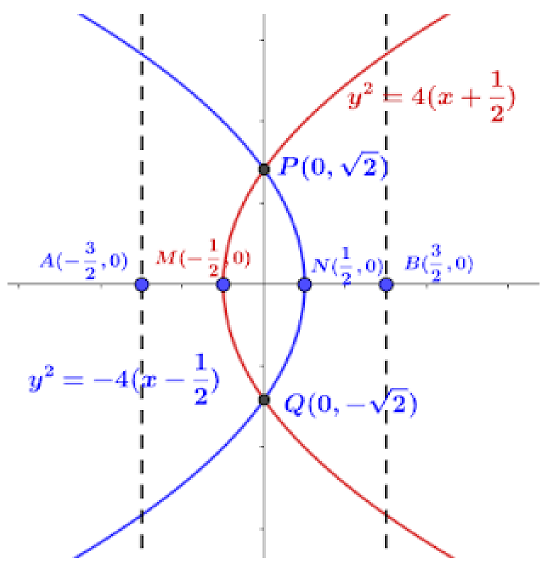
再由分部积分法,

$$I=-\frac{1}{4}([tf(t)]_0^2-\int_0^2 f(t)dt)=-\frac{1}{4}(2\cdot\frac{1}{2}-1)=0$$

31. 坐标平面上,A,B 两点分别在直线

$$L_1: x=-\frac{3}{2},\quad L_2: x=\frac{3}{2}$$

上。已知 $AB\perp L_1$, 且 M,N 为 AB 的三等分点, 并满足 $AM=MN=NB$。设 Γ_1 为以 L_1 为准线,N 为焦点的抛物线;Γ_2 为以 L_2 为准线,N 为顶点的抛物线, 求 Γ_1 与 Γ_2 所围区域的面积。



所围面积为

$$I = 4\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{-4\left(x-\frac{1}{2}\right)}\, dx = 8\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2}-x}\, dx$$

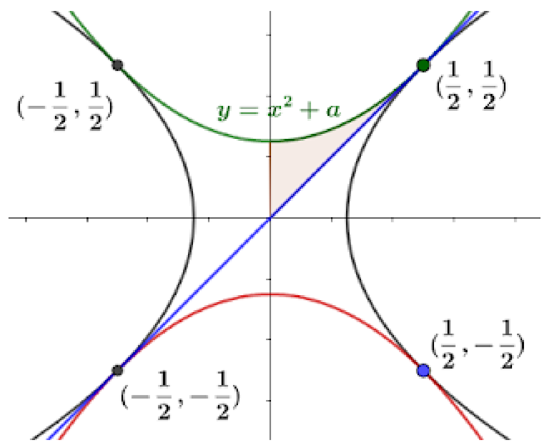
令 $u = \dfrac{1}{2} - x, du = -dx$, 则

$$I = 8\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{u}\, du = 8\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

32. 已知四条抛物线

$$\Gamma_1 : y = x^2 + a, \quad \Gamma_2 : y = -x^2 - a, \quad \Gamma_3 : y^2 = x - a, \quad \Gamma_4 : y^2 = -x - a,$$

其中 a 为正实数, 若任相邻两条抛物线均相切, 试求这四条抛物线所围成之区域面积。



Γ_1, Γ_3 的共切点在 $x = y$ 上, 故知

$$x^2 - x + a = 0$$

恰有一根, 其中判别式为

$$1 - 4a = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

故四个切点为

$$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),$$

所围面积为

$$8\int_0^{\frac{1}{2}} (x^2 - x + \frac{1}{4})\, dx = 8\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

33. 已知曲线

$$y^2 + 2xy + 2x^2 = 50,$$

求被 x 轴和曲线上 $y \geqslant 0$ 部分围成的区域面积。

将曲线改写为

$$y^2 + 2xy + 2x^2 = 50 \Rightarrow y = -x \pm \sqrt{50 - x^2}$$

可知曲线与坐标轴交于 $(0, \pm 5\sqrt{2}), (\pm 5, 0)$, 设曲线与某垂直线切于点 P, 对曲线求导,

$$4x + 2y + 2x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2x + y}{x + y}$$

此时 $\frac{dy}{dx}$ 不存在, 故有

$$x + y = 0 \Rightarrow y = -x$$

代入曲线方程解得

$$2x^2 + 2x(-x) + (-x)^2 = 50 \Rightarrow x = -5\sqrt{2}$$

所以垂直切线点为 $P = (-5\sqrt{2}, 5\sqrt{2})$, 故所围面积为

$$A = \int_{-5\sqrt{2}}^{5} (-x + \sqrt{50 - x^2})\,dx - \int_{-5\sqrt{2}}^{-5} (-x - \sqrt{50 - x^2})\,dx$$

其中由换元 $x = \sqrt{50}\sin\theta$ 知不定积分

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{50 - x^2}\,dx &= \int \sqrt{50 - \sin^2\theta} \cdot \sqrt{50}\cos\theta\,d\theta \\
&= 50 \int \cos^2\theta\,d\theta \\
&= 25 \int (1 + \cos 2\theta)\,d\theta \\
&= 25\left(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right) + C
\end{aligned}$$

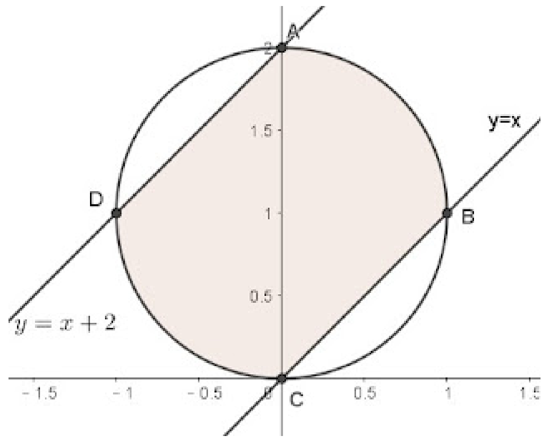
于是

$$\begin{aligned}
A &= \left[-\frac{1}{2}x^2\right]_{-5\sqrt{2}}^{5} + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-5\sqrt{2}}^{-5} + \left[25\theta + \frac{25\sin 2\theta}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} + \left[25\theta + \frac{25\sin 2\theta}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \\
&= 25\pi
\end{aligned}$$

34. 座标平面上, 满足联立不等式

$$\begin{cases} x^2+(y-1)^2 \leqslant 1 \\ x-y \leqslant 0 \\ x-y \geqslant -2 \end{cases}$$

的解区域为 S, 求区域 S 绕 x 轴旋转一圈所得立体的体积。



联立 $x^2+(y-1)^2=1$ 与 $y=x+2$ 得

$$A(0,2),\ D(-1,1)$$

联立 $x^2+(y-1)^2=1$ 与 $y=x$ 得

$$B(1,1),\ C(0,0)$$

如上图, 左半部绕 x 轴旋转体的体积为

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi\int_{-1}^{0}\left[(x+2)^2-(1-\sqrt{1-x^2})^2\right]dx \\ &= \pi\int_{-1}^{0}\left[2x^2+4x+2+2\sqrt{1-x^2}\right]dx \\ &= \pi\left[\frac{2}{3}x^3+2x^2+2x+(\sqrt{1-x^2}+\arcsin x)\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{2}\pi^2+\frac{5}{3}\pi \end{aligned}$$

上图右半部绕 x 轴旋转体的体积为

$$\begin{aligned} V_2 &= \pi\int_{0}^{1}\left[(1+\sqrt{1-x^2})^2-x^2\right]dx \\ &= \pi\int_{0}^{1}\left[2-2x^2+2\sqrt{1-x^2}\right]dx \\ &= \pi\left[2x-\frac{2}{3}x^3+\sqrt{1-x^2}+\arcsin x\right]_{0}^{1} = \frac{1}{2}\pi^2+\frac{1}{3}\pi \end{aligned}$$

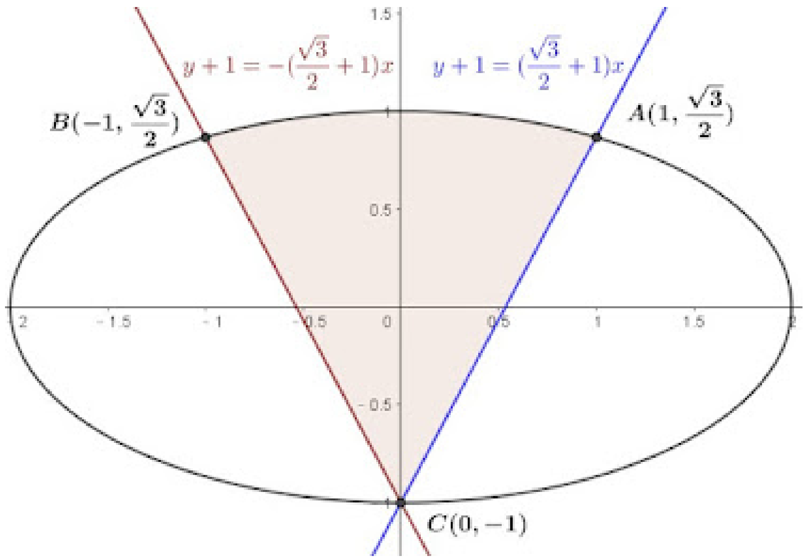
因此总体积为

$$V = V_1 + V_2 = \pi^2 + 2\pi$$

35. 在坐标平面上, 求由不等式

$$\frac{x^2}{4} + y^2 \leqslant 1, \quad y+1 \geqslant \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)x, \quad y+1 \geqslant -\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)x$$

所围成的图形面积。



三方程的交点为

$$A\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad B\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad C(0,-1)$$

图形关于 y 轴对称, 于是所求面积为

$$S = 2\left[\int_0^1 \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\,dx - \int_0^1 \left(\frac{\sqrt{3}+2}{2}x - 1\right)dx\right]$$

令 $x = 2\sin\theta, dx = 2\cos\theta\,d\theta$, 则

$$\int_0^1 \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot 2\cos\theta\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1+\cos 2\theta)\,d\theta = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{6}$$

且

$$\int_0^1 \left(\frac{\sqrt{3}+2}{2}x - 1\right)dx = \left[\frac{\sqrt{3}+2}{4}x^2 - x\right]_0^1 = \frac{\sqrt{3}-2}{4}$$

所以

$$S = 2\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}-2}{4}\right) = 1 + \frac{\pi}{3}$$

36. 计算

$$\lim_{x\to 0^+}\int_x^{2x}\frac{\sin^m t}{t^n}\,dt, \quad m,n\in\mathbb{N}.$$

注意到当 $t\to 0^+$ 时 $\frac{\sin t}{t}\to 1$, 且函数 $\dfrac{\sin t}{t}$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递减。因此, 对于 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 且 $t\in[x,2x]$, 有

$$\frac{\sin 2x}{2x} < \frac{\sin t}{t} < 1.$$

于是

$$\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^m\int_x^{2x} t^{m-n}\,dt < \int_x^{2x}\frac{\sin^m t}{t^n}\,dt < \int_x^{2x} t^{m-n}\,dt.$$

对积分做换元 $t = xu$ 得

$$\int_x^{2x} t^{m-n}\,dt = x^{m-n+1}\int_1^2 u^{m-n}\,du.$$

注意到 $\left(\dfrac{\sin 2x}{2x}\right)^m\to 1$, 于是极限取决于 x^{m-n+1} 的幂:

$$\lim_{x\to 0^+}\int_x^{2x}\frac{\sin^m t}{t^n}\,dt = \begin{cases} 0, & m-n+1>0 \\ \ln 2, & m-n+1=0 \\ +\infty, & m-n+1<0 \end{cases}$$

37. (a) 已知 a,b 是相异实数,λ 为非零实参数。证明

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right]^2 \leqslant \left[\int_a^b [f(x)]^2\,dx\right]\left[\int_a^b [g(x)]^2\,dx\right]$$

由关系 $[\lambda f(x)+g(x)]^2\geqslant 0$, 展开得

$$\lambda^2[f(x)]^2 + 2\lambda f(x)g(x) + [g(x)]^2 \geqslant 0$$

对 x 从 a 到 b 积分知

$$\lambda^2\int_a^b[f(x)]^2\,dx+2\lambda\int_a^b f(x)g(x)\,dx+\int_a^b[g(x)]^2\,dx\geqslant 0$$

即关于 λ 的二次不等式, 要求判别式为非正:

$$4\lambda^2\left[\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right]^2-\left[2\lambda\int_a^b[f(x)]^2\,dx\right]\left[2\lambda\int_a^b[g(x)]^2\,dx\right]\leqslant 0$$

消去 λ 即得证。

(b) 试证明

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin x}\,dx\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

令 $f(x)=\sqrt{\sin x}, g(x)=1$, 则

$$\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin x}\,dx\right]^2\leqslant\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx\right]\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\,dx\right]=[-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot[x]_0^{\frac{\pi}{2}}=1\cdot\frac{\pi}{2}$$

故

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin x}\,dx\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

(c) 试证明

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin x}\,dx\geqslant\frac{16}{25}\cdot\frac{4}{\pi}=\frac{64}{25\pi}$$

令 $f(x)=(\sin x)^{\frac{1}{4}}, g(x)=\cos x$, 则

$$\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\frac{1}{4}}\cos x\,dx\right]^2\leqslant\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\frac{1}{2}}\,dx\right]\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx\right]$$

左式积分可用代换 $u=\sin x, du=\cos x\,dx$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\frac{1}{4}}\cos x\,dx=\frac{4}{5}$$

而右式第二个积分为

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx=\frac{\pi}{4}$$

代入不等式得

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 \leqslant \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x}\, dx\right] \cdot \frac{\pi}{4}$$

即

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x}\, dx \geqslant \frac{64}{25\pi}$$

积分技巧

考点: 换元积分法、部分分式积分法、三角函数的积分法、三角代换法、分部积分法、降阶公式、广义积分、对称性、国王法、函数的奇偶性、积分符号内取微分、其他

1.

$$\int_{80^{-\frac{1}{4}}}^{15^{-\frac{1}{4}}} \frac{1}{x^2(1+x^4)^{\frac{3}{4}}}\, dx$$

改写次方, 注意到

$$\frac{1}{x^2(1+x^4)^{\frac{3}{4}}} = x^{-5}(1+x^{-4})^{-\frac{3}{4}}$$

设 $u = 1 + x^{-4}$, 则 $du = -4x^{-5}\, dx$, 因此

$$\begin{aligned}\int_{80^{-\frac{1}{4}}}^{15^{-\frac{1}{4}}} \frac{1}{x^2(1+x^4)^{\frac{3}{4}}}\, dx &= \int_{81}^{16} -\frac{1}{4}u^{-\frac{3}{4}}\, du \\ &= \frac{1}{4}\left[4u^{\frac{1}{4}}\right]_{16}^{81} \\ &= 1\end{aligned}$$

2.

$$\int_0^1 \frac{1}{(x^{\frac{7}{6}} + 4x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{4}}}\, dx$$

首先注意到

$$\frac{1}{(x^{\frac{7}{6}} + 4x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{[x^{\frac{2}{3}}(x^{\frac{1}{2}}+4)]^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}}+4)^{\frac{3}{4}}}$$

令 $u = x^{\frac{1}{2}}$, 则 $x = u^2, dx = 2u\, du$, 代入得

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{(x^{\frac{7}{6}} + 4x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{4}}}\, dx &= \int_0^1 \frac{1}{u(u+4)^{\frac{3}{4}}} \cdot 2u\, du \\ &= \left[8(u+4)^{\frac{1}{4}}\right]_0^1 \\ &= 8(\sqrt[4]{5} - \sqrt{2})\end{aligned}$$

3.

$$\int_0^4 x^3\sqrt{9+x^2}\,dx$$

设 $u=9+x^2, du=2x\,dx$, 则

$$\begin{aligned}\int_0^4 x^3\sqrt{9+x^2}\,dx &= \frac{1}{2}\int_9^{25}(u-9)\sqrt{u}\,du \\ &= \left[\frac{1}{5}u^{\frac{5}{2}}-3u^{\frac{3}{2}}\right]_9^{25} \\ &= 282.4\end{aligned}$$

4.

$$\int \frac{1}{1+x^4}dx$$

无中生有, 凭空捏造, 将被积函数拆分成

$$\int \frac{1}{1+x^4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{x^2-1}{x^4+1}dx$$

对于第一部分, 分子分母同除以 x^2:

$$\frac{1}{2}\int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}\right)$$

对于第二部分, 同理可得

$$\frac{1}{2}\int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x})^2-2} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right|$$

合并结果得到

$$\int \frac{1}{1+x^4}dx = \frac{\sqrt{2}}{4}\tan^{-1}\left(\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}\right) - \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right| + C$$

5.

$$\int \frac{4}{e^{3x}\sqrt{e^{2x}+4}}\,dx$$

设 $t=\frac{1}{e^x}$, 则 $dx=-\frac{dt}{t}$, 代入积分:

$$I=\int\frac{4}{e^{3x}\sqrt{e^{2x}+4}}\,dx=\int 4t^3\cdot\frac{1}{\sqrt{t^{-2}+4}}\cdot\left(-\frac{1}{t}\right)\,dt=-4\int\frac{t^3}{\sqrt{1+4t^2}}\,dt$$

再设 $u=\sqrt{1+4t^2}$, 则 $u^2=1+4t^2, u\,du=4t\,dt$,

$$I=-4\int\frac{t^2}{u}\cdot\frac{u}{4}\,du=\frac{1}{4}\int(1-u^2)\,du=\frac{1}{4}\left(u-\frac{1}{3}u^3\right)+C$$

将 $u=\sqrt{1+4t^2}, t=e^{-x}$ 代回得

$$I=\frac{(1-2t^2)\sqrt{1+4t^2}}{6}+C=\frac{(e^{2x}-2)\sqrt{e^{2x}+4}}{6e^{3x}}+C$$

6. 求

$$\int_0^{\pi}\frac{1+x\cos x}{x+e^{-\sin x}}\,dx$$

应用配凑法, 对被积函数上下乘以 $e^{\sin x}$,

$$I=\int_0^{\pi}\frac{1+x\cos x}{x+e^{-\sin x}}dx=\int_0^{\pi}\frac{e^{\sin x}+xe^{\sin x}\cos x}{xe^{\sin x}+1}dx$$

注意到分母的导数为

$$\frac{d}{dx}(xe^{\sin x}+1)=e^{\sin x}+x(e^{\sin x}\cdot\cos x)=e^{\sin x}(1+x\cos x)$$

因此

$$I=\int_0^{\pi}\frac{d(xe^{\sin x}+1)}{xe^{\sin x}+1}=\Big[\ln|xe^{\sin x}+1|\Big]_0^{\pi}=\ln(1+\pi)$$

7.

$$\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx$$

设 $u=\sqrt{e^x-1} \Rightarrow u^2=e^x-1$, 则

$$2u\,du=e^x\,dx \Rightarrow dx=\frac{2u}{u^2+1}\,du$$

原积分变为:

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx &= \int_0^1 \frac{2u^2}{u^2+1}\,du\\ &= \int_0^1\left(2-\frac{2}{u^2+1}\right)du\\ &= \Big[2u-2\arctan u\Big]_0^1\\ &= 2-\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

8.

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{8x}-e^{2x}}{(e^{8x}+3)(e^{2x}+3)}\,dx$$

观察到被积函数可被拆成部分分式:

$$\frac{e^{8x}-e^{2x}}{(e^{8x}+3)(e^{2x}+3)}=\frac{1}{e^{2x}+3}-\frac{1}{e^{8x}+3}$$

于是各积分可配凑成

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\frac{e^{8x}-e^{2x}}{(e^{8x}+3)(e^{2x}+3)}\,dx &= \int_0^{\infty}\left(\frac{1}{e^{2x}+3}-\frac{1}{e^{8x}+3}\right)dx\\ &= \int_0^{\infty}\left(\frac{e^{-2x}}{1+3e^{-2x}}-\frac{e^{-8x}}{1+3e^{-8x}}\right)dx\\ &= \left[-\frac{1}{6}\ln\left(1+3e^{-2x}\right)-\frac{1}{24}\ln\left(1+3e^{-8x}\right)\right]_0^{\infty}\\ &= \frac{1}{4}\ln 2\end{aligned}$$

9. 计算

$$\int_0^1\frac{e^x(1-x)}{x^2+e^{2x}}\,dx$$

尝试将分母调整为 $1+(xe^{-x})^2$,

$$I=\int_0^1 \frac{e^x(1-x)}{x^2+e^{2x}}\,dx=\int_0^1 \frac{e^{-x}(1-x)}{(xe^{-x})^2+1}\,dx$$

此时设 $u=xe^{-x}$, 则 $du=(1-x)e^{-x}\,dx$, 因此积分变为

$$I=\int_0^{e^{-1}} \frac{1}{u^2+1}\,du=\Big[\arctan u\Big]_0^{e^{-1}}=\arctan\frac{1}{e}$$

10. 已知

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

求

$$\int_e^{\infty} e^{-x^2}\ln(x^2)x^{(\ln(x^{-x^2})+2x^2)}\,dx$$

发现

$$\begin{aligned}I&=\int_e^{\infty} e^{-x^2}\ln(x^2)x^{(\ln(x^{-x^2})+2x^2)}\,dx\\&=\int_e^{\infty} e^{-x^2}\ln(x^2)e^{\ln x(-x^2\ln x+2x^2)}\,dx\\&=2\int_e^{\infty} e^{-(x\ln x-x)^2}\ln(x)\,dx\end{aligned}$$

设 $u=x\ln x-x$, 则 $du=\left(\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}-1\right)dx=\ln x\,dx$, 于是

$$I=2\int_0^{\infty} e^{-u^2}\,du=2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\pi}$$

11.

$$\int\left(\frac{\ln x-1}{1+(\ln x)^2}\right)^2 dx$$

设 $u=\ln x$, 则 $x=e^u, dx=e^u du$, 积分变为

$$\begin{aligned} I &= \int \left(\frac{\ln x - 1}{1+(\ln x)^2}\right)^2 dx \\ &= \int \left(\frac{u-1}{1+u^2}\right)^2 e^u\, du \\ &= \int \left[\frac{1}{1+u^2} - \frac{2u}{(1+u^2)^2}\right] e^u\, du \end{aligned}$$

由性质

$$\int [f(u)+f'(u)]e^u du = f(u)e^u + C$$

其中

$$f(u)=\frac{1}{1+u^2}, \quad f'(u) = -\frac{2u}{(1+u^2)^2}$$

因此

$$I = \frac{1}{1+u^2}e^u + C = \frac{x}{1+(\ln x)^2} + C$$

12.

$$\int x\sqrt{x+19}\, dx$$

配凑得

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{x+19}\, dx &= \int (x+19-19)(x+19)^{\frac{1}{2}}\, dx \\ &= \int (x+19)^{\frac{3}{2}}\, dx - 19\int (x+19)^{\frac{1}{2}}\, dx \\ &= \frac{2}{5}(x+19)^{\frac{5}{2}} - \frac{38}{3}(x+19)^{\frac{3}{2}} + C \end{aligned}$$

由分部积分,

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{x+19}\, dx &= \frac{2}{3}x(x+19)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\int (x+19)^{\frac{3}{2}}\, dx \\ &= \frac{2}{3}x(x+19)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(x+19)^{\frac{5}{2}} + C \end{aligned}$$

注: 两者答案皆正确。

13.

$$\int_3^6 (\sqrt{x+\sqrt{12x-36}}+\sqrt{x-\sqrt{12x-36}})\,dx$$

设 $x=3+t, dx=dt$, 则

$$\sqrt{12x-36}=\sqrt{12(x-3)}=2\sqrt{3t}$$

$$\begin{aligned}\int_3^6 (\sqrt{x+\sqrt{12x-36}}+\sqrt{x-\sqrt{12x-36}})\,dx &= \int_0^3 \left(\sqrt{3+t+2\sqrt{3t}}+\sqrt{3+t-2\sqrt{3t}}\right)\,dt \\ &= \int_0^3 \left(\sqrt{3}+\sqrt{t}+\sqrt{3}-\sqrt{t}\right)\,dt \\ &= \int_0^3 2\sqrt{3}\,dt \\ &= 6\sqrt{3}\end{aligned}$$

14.

$$\int \frac{1}{(3x+7)\sqrt{x+2}}\,dx$$

设 $u=\sqrt{x+2}$, 则 $x=u^2-2, dx=2u\,du$, 代入积分,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(3x+7)\sqrt{x+2}}\,dx &= \int \frac{2u}{(3u^2+1)u}\,du \\ &= \int \frac{2}{3u^2+1}\,du \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}(\sqrt{3}u)+C \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3}\tan^{-1}\sqrt{3x+6}+C\end{aligned}$$

15.

$$\int \frac{\sqrt{4+x}}{x}\,dx$$

设 $u=\sqrt{4+x}$, 则 $x=u^2-4, dx=2u\,du$:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{4+x}}{x}\,dx &= \int \frac{u}{u^2-4}\cdot 2u\,du \\ &= 2\int\left(1+\frac{4}{u^2-4}\right)du \\ &= 2u+2\int\left(\frac{1}{u-2}-\frac{1}{u+2}\right)du \\ &= 2u+2\ln\left|\frac{u-2}{u+2}\right|+C \\ &= 2\sqrt{4+x}+2\ln\left|\frac{\sqrt{4+x}-2}{\sqrt{4+x}+2}\right|+C\end{aligned}$$

16.

$$\int_1^2 \frac{x^2-1}{x^3\sqrt{2x^4-2x^2+1}}\,dx$$

作代换

$$x=\frac{1}{u},\quad dx=-\frac{1}{u^2}\,du$$

于是

$$\begin{aligned}I=\int_1^2 \frac{x^2-1}{x^3\sqrt{2x^4-2x^2+1}}\,dx &= \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{u^2}-1}{\frac{1}{u^3}\sqrt{\frac{2}{u^4}-\frac{2}{u^2}+1}}\left(-\frac{1}{u^2}\right)du \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\frac{1-u^2}{u^2}\cdot\frac{1}{u^2}}{\frac{1}{u^3}\cdot\frac{\sqrt{u^4-2u^2+2}}{u^2}}\,du \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{u(1-u^2)}{\sqrt{u^4-2u^2+2}}\,du\end{aligned}$$

再设

$$w=u^4-2u^2+2 \implies dw=(4u^3-4u)\,du=-4u(1-u^2)\,du$$

于是

$$I=\int_{\frac{25}{16}}^1 \frac{-\frac{1}{4}\,dw}{\sqrt{w}}=\frac{1}{4}\int_1^{\frac{25}{16}} w^{-\frac{1}{2}}\,dw=\frac{1}{4}\Big[2\sqrt{w}\Big]_1^{\frac{25}{16}}=\frac{1}{8}$$

17.

$$\int \frac{9}{(9-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$$

设 $x=3\sin\theta$, 则 $dx=3\cos\theta\,d\theta$, 原积分变为

$$\begin{aligned}\int \frac{9}{(9-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx &= \int \frac{9}{(9-9\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}\cdot 3\cos\theta\,d\theta\\ &= \int \frac{27\cos\theta}{(9\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}}\,d\theta\\ &= \int \sec^2\theta\,d\theta\\ &= \tan\theta + C\\ &= \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} + C\end{aligned}$$

18.

$$\int \frac{x^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$$

设 $x=\sin\theta, dx=\cos\theta\,d\theta$, 则

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx &= \int \frac{\sin^2\theta}{(1-\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}\cos\theta\,d\theta\\ &= \int \frac{\sin^2\theta}{\cos^3\theta}\cos\theta\,d\theta = \int \tan^2\theta\,d\theta\\ &= \int (\sec^2\theta-1)d\theta\\ &= \tan\theta-\theta+C\\ &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \sin^{-1}x + C\end{aligned}$$

19.

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{x+3}}\,dx$$

有理化处理得

$$I=\int\sqrt{\frac{x+1}{x+3}}\,dx=\int\frac{x+1}{\sqrt{(x+1)(x+3)}}\,dx$$

注意到分母 $(x+1)(x+3)=(x+2)^2-1$，于是可凑得

$$I=\int\frac{x+2}{\sqrt{(x+2)^2-1}}\,dx-\int\frac{1}{\sqrt{(x+2)^2-1}}\,dx$$

分别计算两个积分。对于第一个积分，

$$\int\frac{x+2}{\sqrt{(x+2)^2-1}}\,dx=\frac{1}{2}\int((x+2)^2-1)^{-\frac{1}{2}}\,d((x+2)^2-1)=\sqrt{(x+2)^2-1}+C_1$$

对于第二个积分，设 $x+2=\sec\theta$，则 $dx=\sec\theta\tan\theta\,d\theta$，

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sqrt{(x+2)^2-1}}\,dx&=\int\frac{\sec\theta\tan\theta}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}\,d\theta\\&=\int\frac{\sec\theta\tan\theta}{\tan\theta}\,d\theta\\&=\int\sec\theta\,d\theta\\&=\ln|\sec\theta+\tan\theta|+C_2\\&=\ln|x+2+\sqrt{(x+2)^2-1}|+C_2\end{aligned}$$

最后合并得

$$I=\sqrt{x^2+4x+3}-\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+3}|+C,\quad C=C_1+C_2$$

20.

$$\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x}{x^4+9}\,dx$$

令 $x^2=3\tan\theta$，则 $2x\,dx=3\sec^2\theta\,d\theta$，代入积分：

$$\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x}{x^4+9}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{3\sec^2\theta}{2((3\tan\theta)^2+9)}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{6}\,d\theta=\left[\frac{\theta}{6}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{24}$$

21.

$$\int\frac{dx}{(x^2+9)^3}$$

设 $x = 3\tan\theta, dx = 3\sec^2\theta\, d\theta$:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(x^2+9)^3} &= \int \frac{3\sec^2\theta}{(9\tan^2\theta+9)^3} d\theta \\
&= \frac{1}{243}\int \cos^4\theta\, d\theta \\
&= \frac{1}{243}\int \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta \\
&= \frac{1}{972}\int (1+2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta) d\theta \\
&= \frac{1}{972}\int \left(\frac{3}{2}+2\cos 2\theta+\frac{1}{2}\cos 4\theta\right) d\theta \\
&= \frac{1}{648}\theta+\frac{1}{972}\sin 2\theta+\frac{1}{7776}\sin 4\theta + C \\
&= \frac{1}{648}\tan^{-1}\frac{x}{3}+\frac{1}{972}\cdot\frac{2\cdot\frac{x}{3}}{1+\frac{x^2}{9}}+\frac{1}{3888}\cdot\frac{2\cdot\frac{x}{3}}{1+\frac{x^2}{9}}\cdot\frac{1-\frac{x^2}{9}}{1+\frac{x^2}{9}}+C \\
&= \frac{1}{648}\tan^{-1}\frac{x}{3}+\frac{x}{162(x^2+9)}+\frac{x(9-x^2)}{648(x^2+9)^2}+C
\end{aligned}$$

22.

$$\int \frac{x}{(x^2-4x+13)^2}\, dx$$

凑得

$$\begin{aligned}
I = \int \frac{x}{(x^2-4x+13)^2}\, dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x-4+4}{(x^2-4x+13)^2}\, dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2x-4}{(x^2-4x+13)^2} + 2\int \frac{1}{((x-2)^2+9)^2}\, dx
\end{aligned}$$

对于第一个积分,

$$\frac{1}{2}\int \frac{d(x^2-4x+13)}{(x^2-4x+13)^2} = -\frac{1}{2(x^2-4x+13)} + C_1$$

对于第二个积分, 设 $x-2=3\tan\theta, dx=3\sec^2\theta\,d\theta$, 则

$$\begin{aligned}
2\int\frac{1}{((x-2)^2+9)^2}\,dx &= 2\int\frac{3\sec^2\theta}{(9\sec^2\theta)^2}\,d\theta\\
&= \frac{2}{27}\int\cos^2\theta\,d\theta\\
&= \frac{1}{27}\int(1+\cos 2\theta)\,d\theta\\
&= \frac{1}{27}\left(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)+C_2\\
&= \frac{1}{27}\left(\tan^{-1}\frac{x-2}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot\frac{x-2}{3}}{1+(\frac{x-2}{3})^2}\right)+C_2\\
&= \frac{1}{27}\tan^{-1}\frac{x-2}{3}+\frac{x-2}{9(x^2-4x+13)}+C_2
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{27}\tan^{-1}\frac{x-2}{3}+\frac{x-2}{9(x^2-4x+13)}-\frac{1}{2(x^2-4x+13)}+C\\
&= \frac{1}{27}\tan^{-1}\frac{x-2}{3}+\frac{2x-13}{18(x^2-4x+13)}+C,\quad C=C_1+C_2
\end{aligned}$$

23.

$$\int_1^{\sqrt[3]{2}}\frac{\sqrt{x^3-1}}{x}\,dx$$

设 $\tan\theta=\sqrt{x^3-1}$, 则

$$x^3=1+\tan^2\theta=\sec^2\theta,\quad 3x^2\,dx=2\sec^2\theta\tan\theta\,d\theta$$

原积分化为

$$
\begin{aligned}
\int_1^{\sqrt[3]{2}} \frac{\sqrt{x^3-1}}{x}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan\theta}{x}\cdot\frac{2\sec^2\theta\tan\theta}{3x^2}\,d\theta \\
&= \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2\theta\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\,d\theta \\
&= \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2\theta\,d\theta \\
&= \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2\theta-1)\,d\theta \\
&= \frac{2}{3}\Big[\tan\theta-\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{2}{3}-\frac{\pi}{6}
\end{aligned}
$$

24.

$$
\int \sqrt{(1+x)(5-x)}\,dx
$$

由配方得

$$
I=\int \sqrt{(1+x)(5-x)}\,dx=\int \sqrt{9-(x-2)^2}\,dx
$$

设 $x-2=3\sin\theta, dx=3\cos\theta\,d\theta$, 则

$$
\begin{aligned}
I &= \int \sqrt{9-9\sin^2\theta}\cdot 3\cos\theta\,d\theta \\
&= 9\int \cos^2\theta\,d\theta \\
&= \frac{9}{2}\int (1+\cos 2\theta)\,d\theta \\
&= \frac{9}{2}\theta+\frac{9}{4}\sin 2\theta+C \\
&= \frac{9}{2}\theta+\frac{9}{2}\sin\theta\cos\theta+C \\
&= \frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{x-2}{3}+\frac{9}{2}\cdot\frac{x-2}{3}\cdot\frac{\sqrt{9-(x-2)^2}}{3}+C \\
&= \frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{x-2}{3}+\frac{1}{2}(x-2)\sqrt{(1+x)(5-x)}+C
\end{aligned}
$$

25.

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}\,dx$$

有理化得

$$I = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}(1+\sqrt{x})}{1-x}\,dx = \int_0^1 \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$$

设 $u=\sqrt{1-x}$, 则 $x=1-u^2, dx=-2u\,du$, 于是

$$I = \int_1^0 \frac{1+\sqrt{1-u^2}}{u}(-2u)\,du = 2\int_0^1 (1+\sqrt{1-u^2})\,du = 2+2\int_0^1 \sqrt{1-u^2}\,du$$

设 $u=\sin\theta$, 则

$$\int_0^1 \sqrt{1-u^2}\,du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta = \frac{\pi}{4}$$

故

$$I = 2+\frac{\pi}{2}$$

26.

$$\int \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$$

设 $\sqrt{x}=\sin\theta$, 则 $x=\sin^2\theta, dx=2\sin\theta\cos\theta\,d\theta$, 于是

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx &= \int \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\cdot 2\sin\theta\cos\theta\,d\theta \\
&= \int \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot 2\sin\theta\cos\theta\,d\theta \\
&= \int 2\sin^2\theta\,d\theta \\
&= \int (1-\cos 2\theta)\,d\theta \\
&= \theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta + C \\
&= \theta - \sin\theta\cos\theta + C \\
&= \arcsin\sqrt{x} - \sqrt{x-x^2} + C
\end{aligned}$$

27.

$$\int_7^9 \sqrt{\frac{x-7}{11-x}}\,dx$$

设 $x = 7\cos^2\theta + 11\sin^2\theta = 7 + 4\sin^2\theta$, 则 $dx = 8\sin\theta\cos\theta\,d\theta$。于是

$$\begin{aligned}
\int_7^9 \sqrt{\frac{x-7}{11-x}}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{4\sin^2\theta}{4\cos^2\theta}} \cdot 8\sin\theta\cos\theta\,d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 8\sin^2\theta\,d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4(1-\cos 2\theta)\,d\theta \\
&= \Big[4\theta - 2\sin 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \pi - 2
\end{aligned}$$

令 $x = 9 - 2\sin\theta$, 则 $dx = -2\cos\theta\,d\theta$。于是

$$\begin{aligned}
\int_7^9 \sqrt{\frac{x-7}{11-x}}\,dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{\frac{(9-2\sin\theta)-7}{11-(9-2\sin\theta)}}(-2\cos\theta)\,d\theta \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{2-2\sin\theta}{2+2\sin\theta}}\cos\theta\,d\theta \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{(1-\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta}}\cos\theta\,d\theta \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}\cos\theta\,d\theta \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin\theta)\,d\theta \\
&= \Big[2\theta + 2\cos\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \pi - 2
\end{aligned}$$

28.

$$\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+4x+2}}\,dx$$

令 $x+1=\frac{1}{u}$, 则 $dx=-\frac{1}{u^2}\,du$, 且

$$x=\frac{1}{u}-1 \Rightarrow x^2+4x+2=(x+2)^2-2=\left(\frac{1}{u}+1\right)^2-2=\frac{1}{u^2}+\frac{2}{u}-1$$

于是

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+4x+2}}\,dx &= \int \frac{1}{\frac{1}{u}\sqrt{\frac{1+2u-u^2}{u^2}}}\left(-\frac{1}{u^2}\right)\,du \\
&= -\int \frac{1}{\sqrt{1+2u-u^2}}\,du \\
&= -\int \frac{1}{\sqrt{2-(u-1)^2}}\,du \\
&= -\arcsin\frac{u-1}{\sqrt{2}}+C \\
&= -\arcsin\frac{\frac{1}{x+1}-1}{\sqrt{2}}+C \\
&= \arcsin\frac{x}{\sqrt{2}(x+1)}+C
\end{aligned}$$

29.

$$\int_0^4 \frac{16}{3(3x^2+16)^{\frac{5}{2}}}\,dx$$

设 $\sqrt{3}x=4\tan\theta$, 则 $dx=\frac{4}{\sqrt{3}}\sec^2\theta\,d\theta$,

$$\begin{aligned}
\int_0^4 \frac{16}{3(3x^2+16)^{\frac{5}{2}}}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{16}{3(16\sec^2\theta)^{\frac{5}{2}}}\cdot\frac{4}{\sqrt{3}}\sec^2\theta\,d\theta \\
&= \frac{1}{48\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^3\theta\,d\theta \\
&= \frac{1}{48\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1-\sin^2\theta)\,d(\sin\theta) \\
&= \frac{1}{48\sqrt{3}}\left[\sin\theta-\frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\
&= \frac{1}{128}
\end{aligned}$$

30.

$$\int \frac{(3x^2+5x)\sqrt{x}}{(x+1)^2}\,dx$$

设 $u=\sqrt{x}$, 则 $x=u^2, dx=2u\,du$, 代入积分得

$$\begin{aligned} I=\int \frac{(3x^2+5x)\sqrt{x}}{(x+1)^2}\,dx &= \int \frac{(3u^4+5u^2)u}{(u^2+1)^2}\cdot 2u\,du \\ &= \int \frac{6u^6+10u^4}{(u^2+1)^2}\,du \\ &= \int (6u^2-2)\,du + \int \frac{-2u^2+2}{(u^2+1)^2}\,du \end{aligned}$$

对于第二部分积分, 设 $u=\tan\theta$, 则 $du=\sec^2\theta\,d\theta$,

$$\begin{aligned} \int \frac{-2u^2+2}{(u^2+1)^2}\,du &= \int \frac{2(1-\tan^2\theta)}{(\sec^2\theta)^2}\cdot \sec^2\theta\,d\theta \\ &= \int 2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\,d\theta \\ &= \int 2\cos(2\theta)\,d\theta \\ &= \sin(2\theta)+C_1 \\ &= \frac{2u}{u^2+1}+C_1 \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} I &= 2u^3-2u+\frac{2u}{u^2+1}+C \\ &= 2x\sqrt{x}-2\sqrt{x}+\frac{2\sqrt{x}}{x+1}+C \\ &= \frac{2x^2\sqrt{x}}{x+1}+C \end{aligned}$$

31.

$$\int \frac{2-x}{\sqrt{x}(x+2)^2}\,dx$$

设 $x = 2\tan^2\theta$, 则 $dx = 4\tan\theta\sec^2\theta\,d\theta$, 于是

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{2-2\tan^2\theta}{\sqrt{2}\tan\theta(2\sec^2\theta)^2}\cdot 4\tan\theta\sec^2\theta\,d\theta \\
&= \sqrt{2}\int \frac{1-\tan^2\theta}{\sec^2\theta}\,d\theta \\
&= \sqrt{2}\int (\cos^2\theta-\sin^2\theta)\,d\theta \\
&= \sqrt{2}\int \cos 2\theta\,d\theta \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\theta + C \\
&= \sqrt{2}\sin\theta\cos\theta + C \\
&= \sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{x}{x+2}}\cdot\sqrt{\frac{2}{x+2}} + C \\
&= \frac{2\sqrt{x}}{x+2} + C
\end{aligned}$$

32.

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{x^4-1}{x^2\sqrt{x^4+1}}\,dx$$

令 $x = \frac{1}{t}$, 则 $dx = -\frac{1}{t^2}\,dt$, 于是有

$$\begin{aligned}
I = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{x^4-1}{x^2\sqrt{x^4+1}}\,dx &= \int_{2}^{\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{t^4}-1}{\frac{1}{t^2}\sqrt{\frac{1}{t^4}+1}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\,dt \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1-t^4}{t^2\sqrt{t^4+1}}\,dt = -I
\end{aligned}$$

由 $I = -I$ 知 $2I = 0$, 故

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{x^4-1}{x^2\sqrt{x^4+1}}\,dx = 0$$

33.

$$\int \frac{1+x^2}{(1-x^2)\sqrt{1+x^4}}\,dx$$

分子分母同时除以 x^2, 变形为

$$I=\int \frac{1+x^2}{(1-x^2)\sqrt{1+x^4}}\,dx=\int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{(\frac{1}{x}-x)\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}}\,dx$$

注意到分母根号内可配方为

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$$

令 $t=x-\dfrac{1}{x}$, 则 $dt=\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)dx$, 积分变为

$$I=-\int \frac{1}{t\sqrt{t^2+2}}\,dt$$

对该式进行倒代换, 令 $t=\dfrac{\sqrt{2}}{z}$, 则 $dt=-\dfrac{\sqrt{2}}{z^2}\,dz$, 代入得

$$\begin{aligned}
I&=-\int \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{z}\sqrt{\frac{2}{z^2}+2}}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{z^2}\right)dz\\
&=\int \frac{1}{\sqrt{2z^2+2}}\,dz=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|z+\sqrt{z^2+1}|+C
\end{aligned}$$

代回变量 $z=\frac{\sqrt{2}}{x-\frac{1}{x}}$, 化简整理即得结果。

34.

$$\int \frac{1+x+\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\,dx$$

别急, 先注意到

$$1+x+\sqrt{x^2+x}=\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$$

代入原积分式, 分母被巧妙约去,

$$\begin{aligned}
I&=\int \frac{\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\,dx\\
&=\int \sqrt{x+1}\,dx\\
&=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C
\end{aligned}$$

35. (a) 利用复角公式 $\cos(A+B)$ 证明

$$\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

注意到

$$\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6},$$

应用复角公式:

$$\begin{aligned}\cos\frac{5\pi}{12}&=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\\&=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

(b) 利用适当的三角代换, 求

$$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{\sqrt{6}+\sqrt{2}}}\frac{2}{x\sqrt{x^4-1}}\,dx$$

设 $x^2=\sec\theta$, 则 $2x\,dx=\sec\theta\tan\theta\,d\theta$, 当 $x=\sqrt{2}$, 得 $\theta=\frac{\pi}{3}$, 当 $x=\sqrt{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$,

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},$$

由 (a) 部分知 $\theta=\frac{5\pi}{12}$, 代入积分式,

$$\begin{aligned}I&=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{12}}\frac{2}{x\sqrt{\sec^2\theta-1}}\cdot\frac{\sec\theta\tan\theta}{2x}\,d\theta\\&=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{12}}\frac{\sec\theta}{\sec\theta}\cdot\frac{1}{2}\,d\theta\\&=\left[\frac{1}{2}\theta\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{12}}=\frac{\pi}{24}\end{aligned}$$

36.

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{(e^x+1)(1+x^2)}\,dx$$

巧妙换元 $u=-x$,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(e^x+1)(1+x^2)}&=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{(e^x+1)(1+x^2)}+\int_{0}^{1}\frac{dx}{(e^x+1)(1+x^2)}\\&=-\int_{1}^{0}\frac{du}{(e^{-u}+1)(1+u^2)}+\int_{0}^{1}\frac{dx}{(e^x+1)(1+x^2)}\\&=\int_{0}^{1}\frac{e^u du}{(1+e^u)(1+u^2)}+\int_{0}^{1}\frac{dx}{(e^x+1)(1+x^2)}\\&=\int_{0}^{1}\frac{du}{1+u^2}=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

37. 使用代换 $u=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$, 计算

$$\int_0^{\frac{1}{4}}\frac{3}{(4x+5)\sqrt{1-x^2}-3(1-x^2)}\,dx$$

由代换 $u^2=\dfrac{1+x}{1-x}$ 可得 $x=\dfrac{u^2-1}{u^2+1}$, 对 x 求导得

$$dx=\frac{4u}{(u^2+1)^2}\,du$$

将被积式中的各项用 u 表示:

$$\sqrt{1-x^2}=\sqrt{\frac{(u^2+1)^2-(u^2-1)^2}{(u^2+1)^2}}=\frac{2u}{u^2+1},\quad 1-x^2=\frac{4u^2}{(u^2+1)^2}$$

$$4x+5=4\left(\frac{u^2-1}{u^2+1}\right)+5=\frac{9u^2+1}{u^2+1}$$

当 $x=0$ 时 $u=1$; 当 $x=\frac{1}{4}$ 时 $u=\sqrt{\frac{5}{3}}$, 代入原积分:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_1^{\sqrt{\frac{5}{3}}} \frac{3}{\frac{9u^2+1}{u^2+1}\cdot\frac{2u}{u^2+1}-3\cdot\frac{4u^2}{(u^2+1)^2}}\cdot\frac{4u}{(u^2+1)^2}\,du \\
&= \int_1^{\sqrt{\frac{5}{3}}} \frac{12u}{2u(9u^2+1)-12u^2}\,du = \int_1^{\sqrt{\frac{5}{3}}} \frac{6}{9u^2-6u+1}\,du \\
&= \int_1^{\sqrt{\frac{5}{3}}} \frac{6}{(3u-1)^2}\,du = \left[-\frac{2}{3u-1}\right]_1^{\sqrt{\frac{5}{3}}} \\
&= 1-\frac{2}{\sqrt{15}-1} = \frac{6-\sqrt{15}}{7}
\end{aligned}
$$

38. 已知实数 $a>b>0$, 使用代换 $x=\frac{ab}{t}$, 求积分

$$
\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(x+a)(x+b)}\,dx
$$

设原积分为 I，作代换 $x=\frac{ab}{t}$，则 $dx=-\frac{ab}{t^2}\,dt$,

$$
I=\int_{\infty}^{0} \frac{\ln(ab/t)}{(\frac{ab}{t}+a)(\frac{ab}{t}+b)}\left(-\frac{ab}{t^2}\right)dt = \int_0^{\infty}\frac{\ln(ab)-\ln t}{(t+b)(t+a)}\,dt
$$

整理得

$$
I=\ln(ab)\int_0^{\infty}\frac{1}{(t+a)(t+b)}\,dt - I \implies 2I=\ln(ab)\int_0^{\infty}\frac{1}{(t+a)(t+b)}\,dt
$$

对被积函数作部分分式分解:

$$
2I=\frac{\ln(ab)}{a-b}\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{t+b}-\frac{1}{t+a}\right)dt = \frac{\ln(ab)}{a-b}\left[\ln\left(\frac{t+b}{t+a}\right)\right]_0^{\infty} = \frac{\ln(ab)\ln\left(\frac{a}{b}\right)}{a-b}
$$

故

$$
I=\frac{\ln(ab)\ln\left(\frac{a}{b}\right)}{2(a-b)}
$$

39. 使用代换 $u=\sec x+\sqrt{\tan x}$, 求

$$
\int \frac{2\sin x\sqrt{\tan x}+1}{2\cos x\sqrt{\tan x}(\cos x\sqrt{\tan x}+1)}\,dx
$$

设 $u = \sec x + \sqrt{\tan x}$，则

$$du = \left(\sec x \tan x + \frac{\sec^2 x}{2\sqrt{\tan x}}\right) dx = \frac{2\sin x\sqrt{\tan x} + 1}{2\cos^2 x\sqrt{\tan x}}\, dx$$

整理原积分:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2\sin x\sqrt{\tan x} + 1}{2\cos^2 x\sqrt{\tan x}(\sqrt{\tan x} + \sec x)}\, dx \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{\tan x} + \sec x} \cdot \frac{2\sin x\sqrt{\tan x} + 1}{2\cos^2 x\sqrt{\tan x}}\, dx \\ &= \int \frac{1}{u}\, du = \ln|u| + C \end{aligned}$$

代回变量得

$$I = \ln|\sec x + \sqrt{\tan x}| + C$$

40.

$$\int \frac{16}{(x+6)(x-2)\sqrt{x+2}}\, dx$$

设 $u = \sqrt{x+2}$，则 $x = u^2 - 2, dx = 2u\, du$。代入得

$$I = \int \frac{16}{(u^2+4)(u^2-4)u} \cdot 2u\, du = \int \frac{32}{(u^2+4)(u^2-4)}\, du$$

应用部分分式分解:

$$\frac{32}{(u^2+4)(u^2-4)} = \frac{4}{u^2-4} - \frac{4}{u^2+4}$$

积分得

$$\begin{aligned} I &= \int \left(\frac{1}{u-2} - \frac{1}{u+2} - \frac{4}{u^2+4}\right) du \\ &= \ln\left|\frac{u-2}{u+2}\right| - 2\arctan\left(\frac{u}{2}\right) + C \end{aligned}$$

代回 $u = \sqrt{x+2}$ 得

$$I = \ln\left|\frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x+2} + 2}\right| - 2\arctan\left(\frac{\sqrt{x+2}}{2}\right) + C$$

41.

$$\int \frac{x^4-1}{x^2\sqrt{x^4+1}}\,dx$$

应用配凑法

$$I=\int \frac{x^2-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{x^4+1}}\,dx=\int \frac{x-\frac{1}{x^3}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}}\,dx$$

此时注意到

$$\frac{d}{dx}\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=2x-\frac{2}{x^3}=2\left(x-\frac{1}{x^3}\right)$$

于是原积分可化为

$$I=\frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+\frac{1}{x^2})}{\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}}=\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}+C=\frac{\sqrt{x^4+1}}{x}+C$$

42. 已使用代换 $x^2+x+2=(u-x)^2$，求

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+2}}\,dx$$

由已知关系得

$$x^2+x+2=u^2-2ux+x^2 \Rightarrow x=\frac{u^2-2}{2u+1}$$

则

$$dx=\frac{2(u^2+u+2)}{(2u+1)^2}\,du$$

注意到

$$\sqrt{x^2+x+2}=u-x=u-\frac{u^2-2}{2u+1}=\frac{u^2+u+2}{2u+1}$$

代入积分得

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{\frac{u^2-2}{2u+1} \cdot \frac{u^2+u+2}{2u+1}} \cdot \frac{2(u^2+u+2)}{(2u+1)^2}\,du \\
&= \int \frac{2}{u^2-2}\,du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\frac{u-\sqrt{2}}{u+\sqrt{2}}\right| + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{2}}{x+\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{2}}\right| + C
\end{aligned}$$

43.

$$\int_{0.2}^{0.5} \frac{\sqrt{x-x^2}}{x^4}\,dx$$

将被积函数变形:

$$\frac{\sqrt{x-x^2}}{x^4} = \frac{1}{x^3}\sqrt{\frac{1}{x}-1}$$

设 $u = \sqrt{\frac{1}{x}-1}$，则

$$x = \frac{1}{u^2+1} \Rightarrow dx = -\frac{2u}{(u^2+1)^2}\,du$$

于是

$$\begin{aligned}
I &= \int_2^1 (u^2+1)^3 \cdot u \cdot \frac{-2u}{(u^2+1)^2}\,du \\
&= \int_1^2 2u^2(u^2+1)\,du = \int_1^2 (2u^4+2u^2)\,du \\
&= \left[\frac{2}{5}u^5 + \frac{2}{3}u^3\right]_1^2 = \frac{256}{15}
\end{aligned}$$

44.

$$\int \frac{dx}{x^2(a+bx)^2},\ a, b \in \mathbb{R}$$

设 $u=\dfrac{a+bx}{x}$, 则

$$x=\frac{a}{u-b},\quad dx=\frac{-a\,du}{(u-b)^2},\quad a+bx=xu=\frac{au}{u-b}$$

代入原式:

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{x^2(a+bx)^2}&=\int\frac{-a\,du}{(u-b)^2}\cdot\frac{1}{x^2(a+bx)^2}\\&=\int\frac{-a\,du}{(u-b)^2}\cdot\frac{(u-b)^4}{a^4u^2}\\&=-\frac{1}{a^3}\int\frac{(u-b)^2}{u^2}\,du\\&=-\frac{1}{a^3}\int\left(1-\frac{2b}{u}+\frac{b^2}{u^2}\right)du\\&=-\frac{1}{a^3}\left(u-2b\ln|u|-\frac{b^2}{u}\right)+C\end{aligned}$$

代回 $u=\dfrac{a+bx}{x}$ 得

$$\int\frac{dx}{x^2(a+bx)^2}=-\frac{1}{a^3}\left(\frac{a+bx}{x}-2b\ln\left|\frac{a+bx}{x}\right|-\frac{b^2x}{a+bx}\right)+C$$

45. 使用代换 $\sqrt{5-4x-x^2}=(1-x)u$，其中 $x\neq 1$，求

$$\int\frac{x}{(5-4x-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$$

代换给出

$$5-4x-x^2=(1-x)(x+5)=(1-x)^2u^2\Rightarrow x=\frac{u^2-5}{u^2+1}\Rightarrow dx=\frac{12u}{(u^2+1)^2}\,du$$

由 $1-x=\dfrac{6}{u^2+1}$ 得，

$$\begin{aligned}I=\int\frac{x}{(5-4x-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx&=\int\frac{u^2-5}{u^2+1}\cdot\frac{1}{\left(\frac{6u}{u^2+1}\right)^3}\cdot\frac{12u}{(u^2+1)^2}\,du\\&=\int\frac{u^2-5}{u^2+1}\cdot\frac{(u^2+1)^3}{216u^3}\cdot\frac{12u}{(u^2+1)^2}\,du\\&=\frac{1}{18}\int\frac{u^2-5}{u^2}\,du\\&=\frac{1}{18}\left(u+\frac{5}{u}\right)+C\end{aligned}$$

代回 $u=\dfrac{\sqrt{5-4x-x^2}}{1-x}$，整理得

$$I=\frac{5-2x}{9\sqrt{5-4x-x^2}}+C$$

46.

$$\int\frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$$

注意到

$$d(\sqrt[3]{x})=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\,dx$$

于是

$$\int\frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx=3\int(1+\sqrt[3]{x})^{\frac{1}{2}}\,d(\sqrt[3]{x})=2(1+\sqrt[3]{x})^{\frac{3}{2}}+C$$

47.

$$\int\frac{1}{x(1+x^{119})}\,dx$$

分子分母同乘 x^{118}，构造 $\frac{f'}{f}$ 形式:

$$I=\int\frac{1}{x(1+x^{119})}\,dx=\int\frac{x^{118}}{x^{119}(1+x^{119})}\,dx$$

设 $t=x^{119}$，则 $dt=119x^{118}\,dx$,

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{119}\int\frac{1}{t(1+t)}\,dt=\frac{1}{119}\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t}\right)\,dt\\&=\frac{1}{119}\ln\left|\frac{t}{1+t}\right|+C=\frac{1}{119}\ln\left|\frac{x^{119}}{1+x^{119}}\right|+C\end{aligned}$$

48.

$$\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{1+2^x}\,dx$$

设 $u=-x$, 则

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{u^2}{1+2^{-u}}\,du=\int_{-1}^{1}\frac{u^2 2^u}{1+2^u}\,du=\int_{-1}^{1}\frac{x^2 2^x}{1+2^x}\,dx$$

于是有

$$2I=\int_{-1}^{1}\frac{x^2(2^x+1)}{1+2^x}\,dx=\int_{-1}^{1}x^2\,dx=\frac{2}{3}\Rightarrow I=\frac{1}{3}$$

49.

$$I=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$$

应用倒数代换法, 设 $x=\frac{1}{t}$，则 $dx=-\frac{1}{t^2}\,dt$, 整理得

$$I=\int_{2}^{\frac{1}{2}}\frac{\ln\frac{1}{t}}{1+(\frac{1}{t})^2}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\,dt=\int_{2}^{\frac{1}{2}}\frac{\ln t}{t^2+1}\,dt=-I$$

由于 $I=-I$，故 $I=0$。

50.

$$\int_{0}^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^2}\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

设 $x=\tan\theta$，则 $dx=\sec^2\theta\,d\theta$。原积分变形为:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^{-1}(\sin 2\theta)\,d\theta$$

注意到 $\sin^{-1}(\sin\alpha)$ 的值取决于 α 所在的区间: 当 $0\leqslant 2\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，即 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$ 时，

$$\sin^{-1}(\sin 2\theta)=2\theta;$$

当 $\frac{\pi}{2}<2\theta\leqslant\frac{2\pi}{3}$，即 $\frac{\pi}{4}<\theta\leqslant\frac{\pi}{3}$ 时，

$$\sin^{-1}(\sin 2\theta)=\pi-2\theta$$

因此，积分需分段计算:

$$\begin{aligned}
I&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\theta\,d\theta+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}(\pi-2\theta)\,d\theta\\
&=\left[\theta^2\right]_0^{\frac{\pi}{4}}+\left[\pi\theta-\theta^2\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\\
&=\frac{\pi^2}{16}+\frac{2\pi^2}{9}-\frac{3\pi^2}{16}\\
&=\frac{7\pi^2}{72}
\end{aligned}$$

51.

$$I=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{x^{2012}-1}{x^{2014}+1}\,dx$$

设 $x=\frac{1}{t}$，则 $dx=-\frac{1}{t^2}\,dt$, 代入积分得:

$$\begin{aligned}
I&=\int_2^{\frac{1}{2}}\frac{\left(\frac{1}{t}\right)^{2012}-1}{\left(\frac{1}{t}\right)^{2014}+1}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\,dt\\
&=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1-t^{2012}}{1+t^{2014}}\cdot\frac{t^{2014}}{t^{2012}\cdot t^2}\,dt\\
&=-\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{t^{2012}-1}{t^{2014}+1}\,dt=-I
\end{aligned}$$

由 $I=-I$ 可知 $I=0$。

52. 若正整数 k 满足

$$\left(\int_0^1 x^{2018}(2019+kx^{10})\sqrt{1+x^{10}}\,dx\right)^2=8,$$

求 k 的最大值。

由于被积函数随 k 严格递增，则当

$$\int_0^1 x^{2018}(2019+kx^{10})\sqrt{1+x^{10}}\,dx=\sqrt{8}$$

时 k 取最大。欲写成形如

$$\int_0^1 (2019x^{2018-n}+kx^{2028-n})\sqrt{x^{2n}+x^{2n+10}}\,dx$$

的积分，考虑强迫

$$2n-1=2018-n,$$

可得 $n=673$，此时设 $u=x^{1346}+x^{1356}$，则 $du=1346x^{1345}+1356x^{1355}dx$，于是

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1 (2019x^{1345}+kx^{1355})\sqrt{x^{1346}+x^{1356}}\,dx\\&=\frac{3}{2}\int_0^1 (1346^{1345}+\frac{2}{3}kx^{1355})\sqrt{x^{1346}+x^{1356}}\,dx\end{aligned}$$

当 $\dfrac{2}{3}k=1356$ 即 $k=2034$ 时，有

$$I=\frac{3}{2}\int_0^2\sqrt{u}\,du=\frac{3}{2}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_0^2=\sqrt{8}$$

53.

$$\int\frac{dx}{x^3+1}$$

部分分式分解得

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{3(x+1)}+\frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}$$

于是

$$\int\frac{dx}{x^3+1}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{3}\int\frac{x}{x^2-x+1}dx+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x^2-x+1}$$

其中

$$\int \frac{dx}{x+1} = \ln|x+1|, \quad \int \frac{x}{x^2-x+1}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)$$

$$\int \frac{dx}{x^2-x+1} = \int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

故

$$\int \frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

54.

$$\int \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx$$

注意到 $x^6+1=(x^2+1)(x^4-x^2+1)$，将被积函数分子进行配凑:

$$\frac{x^4+1}{x^6+1} = \frac{(x^4-x^2+1)+x^2}{x^6+1} = \frac{1}{x^2+1} + \frac{x^2}{x^6+1}$$

于是积分拆分为:

$$I = \int \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx = \int \frac{1}{x^2+1}\,dx + \int \frac{x^2}{(x^3)^2+1}\,dx$$

第一部分为 $\tan^{-1}x$；第二部分通过 $d(x^3)=3x^2\,dx$ 得:

$$\frac{1}{3}\int \frac{d(x^3)}{(x^3)^2+1} = \frac{1}{3}\tan^{-1}(x^3)$$

故结果为:

$$I = \tan^{-1}x + \frac{1}{3}\tan^{-1}(x^3) + C$$

55.

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{x^2+1}\,dx$$

进行多项式除法,

$$\frac{x^4(1-x)^4}{x^2+1} = \frac{x^8-4x^7+6x^6-4x^5+x^4}{x^2+1} = x^6-4x^5+5x^4-4x^2+4-\frac{4}{x^2+1}$$

逐项积分得

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \left(x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4 - \frac{4}{x^2+1} \right) dx \\
&= \left[\frac{1}{7}x^7 - \frac{2}{3}x^6 + x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 4x - 4\tan^{-1} x \right]_0^1 \\
&= \frac{22}{7} - \pi
\end{aligned}
$$

56.

$$
\int_0^1 \frac{(x^2+1)(x^2+4)}{(x^2+3)(x^2-4)}\, dx
$$

将被积函数化为真分式:

$$
\frac{x^4+5x^2+4}{x^4-x^2-12} = 1 + \frac{6x^2+16}{(x^2+3)(x-2)(x+2)}
$$

对真分式部分设待定系数:

$$
\frac{6x^2+16}{(x^2+3)(x-2)(x+2)} = \frac{Ax+B}{x^2+3} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x+2}
$$

两边同乘以分母得

$$
6x^2+16 = (Ax+B)(x^2-4) + C(x^2+3)(x+2) + D(x^2+3)(x-2)
$$

利用特殊值法求解:

- 令 $x = 2{:}6(4) + 16 = C(7)(4) \Rightarrow C = \frac{10}{7}$。
- 令 $x = -2{:}6(4) + 16 = D(7)(-4) \Rightarrow D = -\frac{10}{7}$。
- 令 $x = 0{:}16 = B(-4) + 2(3)C - 2(3)D \Rightarrow B = \frac{2}{7}$。
- 比较 x^3 项系数:$0 = A + C + D$, 故 $A = 0$。

于是被积函数为

$$
1 + \frac{2}{7(x^2+3)} + \frac{10}{7(x-2)} - \frac{10}{7(x+2)}
$$

积分得

$$
\begin{aligned}
I &= \left[x + \frac{2}{7\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + \frac{10}{7} \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\right]_0^1 \\
&= \left(1 + \frac{2}{7\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{10}{7} \ln \frac{1}{3}\right) - 0 \\
&= 1 + \frac{\pi}{21\sqrt{3}} - \frac{10}{7} \ln 3
\end{aligned}
$$

57.

$$
\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{32x^2}{(x^2-1)(x+1)^3} \, dx
$$

化简分母得 $\dfrac{32x^2}{(x-1)(x+1)^4}$。设 $u = x+1$，则 $dx = du$, 于是

$$
I = \int_1^{\frac{4}{3}} \frac{32(u-1)^2}{(u-2)u^4} \, du = \int_1^{\frac{4}{3}} \frac{32u^2 - 64u + 32}{u^4(u-2)} \, du
$$

进行部分分式分解:

$$
\frac{32u^2 - 64u + 32}{u^4(u-2)} = -\frac{16}{u^4} + \frac{24}{u^3} - \frac{4}{u^2} - \frac{2}{u} + \frac{2}{u-2}
$$

逐项积分得

$$
\begin{aligned}
I &= \left[\frac{16}{3u^3} - \frac{12}{u^2} + \frac{4}{u} - 2\ln|u| + 2\ln|u-2|\right]_1^{\frac{4}{3}} \\
&= \left(\frac{9}{4} - \frac{27}{4} + 3 - 2\ln\frac{4}{3} + 2\ln\frac{2}{3}\right) - \left(\frac{16}{3} - 12 + 4\right) \\
&= \frac{7}{6} - 2\ln 2
\end{aligned}
$$

58.

$$
\int \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}} \, dx
$$

设 $(tx)^4=1+x^4$，则 $x=(t^4-1)^{-\frac{1}{4}}$, 对 x 求导得 $dx=-t^3(t^4-1)^{-\frac{5}{4}}\,dt$, 代入得

$$I=\int\frac{1}{tx}\cdot dx=\int(t^4-1)^{\frac{1}{4}}\cdot\frac{1}{t}\cdot[-t^3(t^4-1)^{-\frac{5}{4}}]\,dt=-\int\frac{t^2}{t^4-1}\,dt$$

利用部分分式拆分,

$$I=-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t^2-1}+\frac{1}{t^2+1}\right)\,dt=-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|-\frac{1}{2}\tan^{-1}t+C$$

其中

$$t=\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}$$

59.

$$\int\frac{2}{\sqrt{x}-3\sqrt[4]{x}+2}\,dx$$

设 $t=\sqrt[4]{x}$，则 $x=t^4$, $dx=4t^3\,dt$。

$$I=\int\frac{2}{\sqrt{x}-3\sqrt[4]{x}+2}\,dx=\int\frac{8t^3}{t^2-3t+2}\,dt$$

进行多项式除法与部分分式分解, 可得

$$\frac{8t^3}{(t-1)(t-2)}=8t+24+\frac{64}{t-2}-\frac{8}{t-1}$$

逐项积分得：

$$\begin{aligned}I&=4t^2+24t+64\ln|t-2|-8\ln|t-1|+C\\&=4\sqrt{x}+24\sqrt[4]{x}+64\ln|\sqrt[4]{x}-2|-8\ln|\sqrt[4]{x}-1|+C\end{aligned}$$

60.

$$\int\frac{3x^3}{x^4+x^3+x+1}\,dx$$

观察到

$$x^4+x^3+x+1=(x^3+1)(x+1)=(x+1)^2(x^2-x+1)$$

设待定系数：

$$\frac{3x^3}{(x+1)^2(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1}$$

求得 $A=2,B=-1,C=1,D=-1,$

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{2}{x+1}\,dx-\int\frac{1}{(x+1)^2}\,dx+\int\frac{x-1}{x^2-x+1}\,dx\\&=2\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C\\&=\ln\left|(x+1)^2\sqrt{x^2-x+1}\right|-\frac{\sqrt{3}}{3}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{x+1}+C\end{aligned}$$

61.

$$\int\frac{x^2(x^4+1)}{\sqrt{x^4+2}}\,dx$$

注意到

$$I=\int\frac{x^2(x^4+1)}{\sqrt{x^4+2}}\,dx=\int\frac{x^6+x^2}{\sqrt{x^4+2}}\,dx=\int\frac{x^7+x^3}{\sqrt{x^8+2x^4}}\,dx$$

此时有 $\frac{d}{dx}(x^8+2x^4)=8x^7+8x^3=8(x^7+x^3)$，于是

$$I=\frac{1}{8}\int\frac{d(x^8+2x^4)}{\sqrt{x^8+2x^4}}=\frac{1}{4}\sqrt{x^8+2x^4}+C=\frac{x^2}{4}\sqrt{x^4+2}+C$$

62.

$$\int\frac{x^2+1}{(x^2-2x+2)^3}\,dx$$

设 $x-1=\tan\theta$，则 $dx=\sec^2\theta\,d\theta, x^2-2x+2=\sec^2\theta$, 代入得：

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{\tan^2\theta+2\tan\theta+2}{\sec^6\theta}\sec^2\theta\,d\theta = \int(\sin^2\theta\cos^2\theta+2\sin\theta\cos^3\theta+2\cos^4\theta)\,d\theta \\
&= \int\left[\frac{1}{4}\sin^2 2\theta+2\sin\theta\cos^3\theta+2\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2\right] \\
&= \int\left[\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\cos 4\theta+2\sin\theta\cos^3\theta+\frac{1}{2}+\cos 2\theta+\frac{1}{4}(1+\cos 4\theta)\right]\,d\theta \\
&= \int\left[\frac{7}{8}+\cos 2\theta+\frac{1}{8}\cos 4\theta+2\sin\theta\cos^3\theta\right]\,d\theta \\
&= \frac{7}{8}\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta+\frac{1}{32}\sin 4\theta-\frac{1}{2}\cos^4\theta+C
\end{aligned}
$$

还原变量：由 $\tan\theta=x-1$，知

$$\cos^2\theta=\frac{1}{1+\tan^2\theta}=\frac{1}{x^2-2x+2}$$

利用倍角公式：

- $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\tan\theta\cos^2\theta=\dfrac{2(x-1)}{x^2-2x+2}$
- $\sin 4\theta=2\sin 2\theta(2\cos^2\theta-1)=\dfrac{4(x-1)(2x-x^2)}{(x^2-2x+2)^2}$
- $\cos^4\theta=\left(\dfrac{1}{x^2-2x+2}\right)^2$

代入整理得

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{7}{8}\tan^{-1}(x-1)+\frac{x-1}{x^2-2x+2}+\frac{(x-1)(2x-x^2)}{8(x^2-2x+2)^2}-\frac{4}{8(x^2-2x+2)^2}+C \\
&= \frac{7}{8}\tan^{-1}(x-1)+\frac{7x^3-21x^2+30x-20}{8(x^2-2x+2)^2}+C
\end{aligned}
$$

63.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x+1}}$$

设 $x+1=u^4$，则 $dx=4u^3\,du$。原积分变为：

$$I=\int\frac{4u^3}{u^2+u}\,du=4\int\frac{u^2}{u+1}\,du$$

进行多项式除法：$\frac{u^2}{u+1}=u-1+\frac{1}{u+1}$。

$$\begin{aligned}I&=4\int(u-1+\frac{1}{u+1})\,du=4\left(\frac{1}{2}u^2-u+\ln|u+1|\right)+C\\&=2u^2-4u+4\ln(u+1)+C\end{aligned}$$

还原变量 $u=\sqrt[4]{x+1}$：

$$I=2\sqrt{x+1}-4\sqrt[4]{x+1}+4\ln(\sqrt[4]{x+1}+1)+C$$

64.

$$\int\frac{1+x^2}{x\sqrt{x^4-x^2+1}}\,dx$$

分子分母同时除以 x^2：

$$I=\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x\cdot\frac{1}{x}\sqrt{x^2-1+\frac{1}{x^2}}}\,dx=\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{(x-\frac{1}{x})^2+1}}\,dx$$

设 $t=x-\frac{1}{x}$，则 $dt=(1+\frac{1}{x^2})\,dx$。

$$I=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}=\ln|t+\sqrt{t^2+1}|+C$$

还原变量 $t=\frac{x^2-1}{x}$：

$$I=\ln\left|\frac{x^2-1}{x}+\sqrt{\frac{x^4-x^2+1}{x^2}}\right|+C=\ln\left|\frac{x^2-1+\sqrt{x^4-x^2+1}}{x}\right|+C$$

65.

$$\int\frac{1}{(2x^2+3)\sqrt{5x^2+4}}\,dx$$

设 $x=\frac{1}{u}$，则 $dx=-\frac{1}{u^2}\,du$。

$$I=\int\frac{-\frac{1}{u^2}\,du}{(\frac{2}{u^2}+3)\sqrt{\frac{5}{u^2}+4}}=\int\frac{-u\,du}{(2+3u^2)\sqrt{5+4u^2}}$$

设 $t=\sqrt{5+4u^2}$，则 $t^2=5+4u^2\Rightarrow u^2=\frac{t^2-5}{4}$，且 $t\,dt=4u\,du$。代入 $2+3u^2=2+3(\frac{t^2-5}{4})=\frac{3t^2-7}{4}$：

$$I=\int\frac{-\frac{1}{4}t\,dt}{\frac{3t^2-7}{4}\cdot t}=-\int\frac{dt}{3t^2-7}=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{\frac{7}{3}-t^2}$$

利用公式 $\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|$：

$$I=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{7/3}}\ln\left|\frac{\sqrt{7/3}+t}{\sqrt{7/3}-t}\right|+C=\frac{\sqrt{21}}{42}\ln\left|\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}t}{\sqrt{7}-\sqrt{3}t}\right|+C$$

其中 $t=\sqrt{5+\frac{4}{x^2}}$。

66.

$$\int\frac{x+x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{6}}}{x(1+x^{\frac{1}{3}})}\,dx$$

设 $x=u^6$，则 $dx=6u^5\,du$。

$$I=\int\frac{u^6+u^4+u}{u^6(1+u^2)}\cdot 6u^5\,du=6\int\frac{u^6+u^4+u}{1+u^2}\,du$$

由于 $u^6+u^4=u^4(u^2+1)$，故：

$$I=6\int\left(u^4+\frac{u}{1+u^2}\right)\,du=\frac{6}{5}u^5+3\ln(1+u^2)+C$$

还原变量 $u=x^{\frac{1}{6}}$：

$$I=\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}+3\ln(1+x^{\frac{1}{3}})+C$$

67.

$$\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$$

设 $1+x^{\frac{1}{4}}=t^3$，则 $x^{\frac{1}{4}}=t^3-1 \Rightarrow x=(t^3-1)^4$。$dx=4(t^3-1)^3\cdot 3t^2\,dt=12t^2(t^3-1)^3\,dt$。

$$I=\int \frac{t}{(t^3-1)^2}\cdot 12t^2(t^3-1)^3\,dt=12\int (t^3-1)t^3\,dt=12\int (t^6-t^3)\,dt$$

积分得：

$$I=12\left(\frac{1}{7}t^7-\frac{1}{4}t^4\right)+C=\frac{12}{7}t^7-3t^4+C$$

还原变量 $t=\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}$。

68.

$$\int \frac{x-1}{(x+1)\sqrt{x^3+x^2+x}}\,dx$$

分子分母同时除以 $x^{\frac{3}{2}}$ 并进行配凑：

$$I=\int \frac{1-\frac{1}{x}}{(x+1)\sqrt{x+1+\frac{1}{x}}}\cdot \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

此题最简路径为分子分母同乘 $(x+1)$ 构造：

$$I=\int \frac{x^2-1}{(x+1)^2\sqrt{x^3+x^2+x}}\,dx=\int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{(x+2+\frac{1}{x})\sqrt{x+1+\frac{1}{x}}}\,dx$$

设 $u=\sqrt{x+1+\frac{1}{x}}$，则 $u^2=x+1+\frac{1}{x} \Rightarrow 2u\,du=(1-\frac{1}{x^2})\,dx$。代入得（注意 $x+2+\frac{1}{x}=u^2+1$）：

$$I=\int \frac{2u\,du}{(u^2+1)\cdot u}=2\int \frac{du}{u^2+1}=2\tan^{-1}u+C$$

还原变量：$I=2\tan^{-1}\sqrt{x+1+\frac{1}{x}}+C$。

69.

$$\int \frac{x}{(x-1)\sqrt{x^2-2x}}\,dx$$

设 $x-1=t$，则 $dx=dt$，$x=t+1$，$x^2-2x=(x-1)^2-1=t^2-1$。

$$I=\int \frac{t+1}{t\sqrt{t^2-1}}\,dt=\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}+\int \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}$$

第一项为 $\ln|t+\sqrt{t^2-1}|$；第二项令 $t=\sec\theta$ 或直接得 $\sec^{-1}|t|$。

$$I=\ln|t+\sqrt{t^2-1}|+\sec^{-1}|t|+C$$

还原变量 $t=x-1$：

$$I=\ln|x-1+\sqrt{x^2-2x}|+\sec^{-1}|x-1|+C$$

70. 51) 计算不定积分:

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x^2}}dx$$

对分母进行有理化:

$$I=\int\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x}}{(1+x^2)-(1-x)}dx=\int\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x}}{x^2+x}dx$$

拆分为两个积分:

$$I=\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{x(x+1)}dx-\int\frac{\sqrt{1-x}}{x(x+1)}dx$$

对于第二部分，设 $u^2=1-x$。根据笔记底部的最终整理结果:

$$I=-\sqrt{2}\left(\ln\left|\sqrt{2x^2+2}+x-1\right|-\ln|x+1|\right)+C$$

very bash

71. 计算 $[\int\frac{3\sin 2x+4\cos xe^{\sin x}+8\cos x}{3\sin x+e^{\sin x}+1}dx]$。

首先，利用二倍角公式 $\sin 2x=2\sin x\cos x$ 展开分子:

$$=[\int\frac{6\sin x\cos x+4\cos xe^{\sin x}+8\cos x}{3\sin x+e^{\sin x}+1}dx]$$

令 $u=\sin x$，则 $du=\cos xdx$。代入原式得:

$$=[\int\frac{6u+4e^u+8}{3u+e^u+1}du]$$

提取分子中的常数 2:

$$=2[\int\frac{3u+2e^u+4}{3u+e^u+1}du]$$

将分子拆项，使其包含分母的形式:

$$= 2[\int \frac{(3u+e^u+1)+(3+e^u)}{3u+e^u+1}du]$$

$$= 2([\int \frac{3u+e^u+1}{3u+e^u+1}du]+[\int \frac{e^u+3}{3u+e^u+1}du])$$

$$= 2[\int 1du]+2[\int \frac{d(3u+e^u+1)}{3u+e^u+1}]$$

进行积分:

$$= 2u+2\ln|3u+e^u+1|+C$$

最后回代 $u=\sin x$:

$$= 2\sin x+2\ln|3\sin x+e^{\sin x}+1|+C$$

72. 52) 计算不定积分:

$$\int \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+1}}dx$$

方法一: 设 $t=\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}$, 则 $x=\frac{2-t^2}{t^2-1}$。方法二: 设 $1+x=\sinh^2 u$, 则 $dx=2\sinh u\cosh udu$。代入积分式:

$$I=\int \frac{\cosh u}{\sinh u}\cdot 2\sinh u\cosh udu=\int 2\cosh^2 udu=\int(1+\cosh 2u)du$$

积分得 $u+\frac{1}{2}\sinh 2u+C=u+\sinh u\cosh u+C$。还原变量:

$$I=\sinh^{-1}\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x}\sqrt{2+x}+C$$

73. 54) 计算不定积分:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-1}dx$$

设 $x=a^6$, 则 $dx=6a^5da$。代入积分式:

$$I=\int \frac{a^3}{a^2-1}\cdot 6a^5da=6\int \frac{a^8}{a^2-1}da$$

利用多项式除法:

$$\frac{a^8}{a^2-1}=a^6+a^4+a^2+1+\frac{1}{a^2-1}$$

逐项积分:

$$I = 6\left(\frac{a^7}{7} + \frac{a^5}{5} + \frac{a^3}{3} + a + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{a-1}{a+1}\right|\right) + C$$

还原变量 $a = x^{\frac{1}{6}}$:

$$I = \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + \frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}} + 2x^{\frac{1}{2}} + 6x^{\frac{1}{6}} + 3\ln\left|\frac{x^{1/6}-1}{x^{1/6}+1}\right| + C$$

74. 7) 计算不定积分:

$$\int \frac{(x+1)^3(x-1)}{(x^2+1)^2\sqrt{x^4+x^2+1}}dx$$

首先简化被积函数, 分子展开并提取公因子:

$$\int \frac{(x^2+2x+1)(x^2-1)}{(x^2+1)^2\sqrt{x^4+x^2+1}}dx$$

分子分母同除以 x^4, 利用 $x+\frac{1}{x}$ 进行换元:

$$= \int \frac{(x+\frac{1}{x}+2)(1-\frac{1}{x^2})}{(x+\frac{1}{x})^2\sqrt{x^2+1+\frac{1}{x^2}}}dx$$

$$= \int \frac{(x+\frac{1}{x}+2)(1-\frac{1}{x^2})}{(x+\frac{1}{x})^2\sqrt{(x+\frac{1}{x})^2-1}}dx$$

设 $x+\frac{1}{x}=t$, 则 $(1-\frac{1}{x^2})dx = dt$:

$$I = \int \frac{t+2}{t^2\sqrt{t^2-1}}dt = \int \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}dt + 2\int \frac{1}{t^2\sqrt{t^2-1}}dt$$

对于第一部分, 设 $t = \sec\theta$, 则积分结果为 $\tan^{-1}\sqrt{t^2-1}$ 或 $\sec^{-1}t$。对于第二部分, 设 $t^2-1=u^2$, 则 $tdt = udu$:

$$2\int \frac{1}{t^2\sqrt{t^2-1}}dt = \cdots = \frac{2\sqrt{t^2-1}}{t} + C$$

合并结果并还原变量 $t = x+\frac{1}{x}$:

$$I = \tan^{-1}\left(\sqrt{(x+\frac{1}{x})^2-1}\right) + \frac{2\sqrt{(x+\frac{1}{x})^2-1}}{x+\frac{1}{x}} + C$$

75.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x(\sin x+\cos x-2)}{(\cos x-2)^2}\,dx$$

有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x(\sin x+\cos x-2)}{(\cos x-2)^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\left(\frac{\sin x}{(\cos x-2)^2}+\frac{1}{\cos x-2}\right)dx$$

发现被积函数形如 $e^x(f(x)+f'(x))$，其中

$$f(x)=\frac{1}{\cos x-2},f'(x)=\frac{\sin x}{(\cos x-2)^2}$$

所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\left(\frac{1}{\cos x-2}+\frac{\sin x}{(\cos x-2)^2}\right)dx=\left[\frac{e^x}{\cos x-2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1-\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$$

76. 8) 计算不定积分:

$$\int e^x\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{1-2x^2}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}\right)dx$$

观察被积函数形式，尝试利用公式 $\int e^x[f(x)+f'(x)]dx=e^xf(x)+C$。令 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$。计算导数 $f'(x)$:

$$f'(x)=-\frac{x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}+\frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}-x\cdot\frac{3}{2}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x}{(x^2+1)^3}$$

$$=-\frac{x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1-2x^2}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}$$

将其代入原式:

$$I=\int e^x\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}+\frac{x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1-2x^2}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}\right)dx$$

根据恒等式性质得到结果:

$$I=e^x\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\right)+C$$

77. 13) 计算不定积分:

$$\int \sqrt{x+\sqrt{x^2+2}}dx$$

使用双曲函数换元，设 $x = \sqrt{2}\sinh t$，则 $dx = \sqrt{2}\cosh tdt$。同时利用恒等式 $\sqrt{x^2+2} = \sqrt{2}\cosh t$:

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{\sqrt{2}\sinh t + \sqrt{2}\cosh t} \cdot \sqrt{2}\cosh tdt \\ &= \sqrt[4]{8}\int \sqrt{e^t}\cosh tdt = \sqrt[4]{8}\int e^{\frac{t}{2}}\frac{e^t+e^{-t}}{2}dt \\ &= \frac{\sqrt[4]{8}}{2}\int (e^{\frac{3t}{2}}+e^{-\frac{t}{2}})dt = \frac{\sqrt[4]{8}}{2}\left[\frac{2}{3}e^{\frac{3t}{2}} - 2e^{-\frac{t}{2}}\right] + C \end{aligned}$$

还原变量 $t = \sinh^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}}$ 得到最终结果:

$$I = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\left(\frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}\sinh^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}}} - 2e^{-\frac{1}{2}\sinh^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}}}\right) + C$$

78. 求积分 $\int \frac{\sin\theta\cos\theta}{(3+5\sin^2\theta-2\cos^2\theta)^{\frac{1}{3}}}d\theta$

设 $u = (3+5\sin^2\theta - 2\cos^2\theta)^{\frac{1}{3}}$ 利用三角恒等式 $\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta$ 简化括号内的表达式:

$$3+5\sin^2\theta - 2(1-\sin^2\theta) = 3+5\sin^2\theta - 2 + 2\sin^2\theta = 1+7\sin^2\theta$$

所以有:

$$u = (1+7\sin^2\theta)^{\frac{1}{3}}$$

两边同时取三次方:

$$u^3 = 1+7\sin^2\theta$$

对两边求导:

$$3u^2du = 14\sin\theta\cos\theta d\theta$$

由此得:

$$\sin\theta\cos\theta d\theta = \frac{3u^2du}{14}$$

代入原积分:

$$\int \frac{\sin\theta\cos\theta}{(3+5\sin^2\theta-2\cos^2\theta)^{\frac{1}{3}}}d\theta = \int \frac{1}{u}\cdot\frac{3u^2du}{14}$$
$$= \frac{3}{14}\int udu$$
$$= \frac{3}{14}\cdot\frac{1}{2}u^2+C$$
$$= \frac{3}{28}u^2+C$$
$$= \frac{3}{28}(3+5\sin^2\theta-2\cos^2\theta)^{\frac{2}{3}}+C$$

79.

$$\int \frac{4\cot x}{1+\cos^2 x}\,dx$$

作代换

$$u = 1+\cos^2 x$$

则

$$\frac{du}{dx} = -2\cos x\sin x$$

因此

$$dx = \frac{du}{-2\cos x\sin x}$$

原积分化为

$$\int \frac{4\cot x}{u}\cdot\frac{du}{-2\cos x\sin x}$$

$$= -\int \frac{2(\cos x/\sin x)}{u}\cdot\frac{1}{\cos x\sin x}\,du$$

$$= -\int \frac{2}{u}\cdot\frac{1}{\sin^2 x}\,du$$

由于

$$\sin^2 x = 1-\cos^2 x = 1-(u-1) = 2-u$$

于是

$$= -\int \frac{2}{u(2-u)}\,du = \int \frac{2}{u(u-2)}\,du$$

作部分分式分解

$$\frac{2}{u(u-2)}=\frac{1}{u-2}-\frac{1}{u}$$

因此

$$\int \frac{2}{u(u-2)}\,du=\int\left(\frac{1}{u-2}-\frac{1}{u}\right)\,du$$

$$=\ln|u-2|-\ln|u|=\ln\left|\frac{u-2}{u}\right|+C$$

代回 $u=1+\cos^2 x$ 得

$$=\ln\left|\frac{\cos^2 x-1}{1+\cos^2 x}\right|+C$$

$$=\ln\left(\frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}\right)+C$$

$$=-\ln\left(\frac{1+\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)+C$$

$$=-\ln(\csc^2 x+\cot^2 x)+C$$

80. 求积分

$$\int \frac{2+\sin 2x+2\cos^2 x}{(2+\cos x)\sin 2x}\,dx$$

作代换

$$u=\sin x+x\tan x$$

$$\frac{du}{dx}=\cos x+\tan x+x\sec^2 x$$

$$dx=\frac{1}{\cos x+\tan x+x\sec^2 x}\,du$$

积分变为

$$\int \frac{2+\sin 2x+2\cos^2 x}{(2+\cos x)\sin 2x}\,dx=\int \frac{2+2\sin x\cos x+2\cos^2 x}{(2+\cos x)(2\sin x\cos x)}\cdot\frac{1}{\cos x+\tan x+x\sec^2 x}\,du$$

$$=\int \frac{1}{\sin x+x\tan x}\,du=\int \frac{1}{u}\,du=\ln|u|+C$$

回代

$$= \ln|\sin x + x\tan x| + C$$

81. 已知代换

$$u = 1 + x^2 \csc x$$

求积分

$$\int \frac{2x - x^2 \cot x}{x^2 + \sin x}\, dx$$

作代换

$$u = 1 + x^2 \csc x$$

$$\frac{du}{dx} = 2x\csc x - x^2 \csc x \cot x = x\csc x(2 - x\cot x)$$

$$dx = \frac{du}{x\csc x(2 - x\cot x)}$$

代入积分

$$\int \frac{2x - x^2 \cot x}{x^2 + \sin x}\, dx = \int \frac{x(2 - x\cot x)}{x^2 + \sin x} \cdot \frac{du}{x\csc x(2 - x\cot x)}$$

$$= \int \frac{1}{(x^2 + \sin x)\csc x}\, du = \int \frac{1}{x^2 \csc x + \sin x \csc x}\, du$$

$$= \ln|u| + C = \ln|1 + x^2 \csc x| + C$$

82.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\cot^2 x}{1 + 2\cot^2 x + 2\cot^4 x}\, dx$$

作代换

$$u = 1 + \cos^2 x$$

则

$$\frac{du}{dx} = -2\cos x \sin x$$

因此

$$dx = -\frac{du}{2\cos x \sin x}$$

当 $x=\frac{\pi}{4}$ 时,

$$u=1+\cos^2\frac{\pi}{4}=\frac{5}{4}$$

当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时,

$$u=1+\cos^2\frac{\pi}{2}=1$$

原积分化为

$$\int_{\frac{5}{4}}^{1}\frac{4\cot^2 x}{1+2\cot^2 x+2\cot^4 x}\left(-\frac{du}{2\cos x\sin x}\right)$$

$$=\int_{\frac{5}{4}}^{1}\frac{2\cot^2 x}{1+2\cot^2 x+2\cot^4 x}\cdot\frac{1}{\cos x\sin x}\,du$$

将 $\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$ 代入, 得

$$=\int_{\frac{5}{4}}^{1}\frac{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}{1+\frac{2\cos^2 x}{\sin^2 x}+\frac{2\cos^4 x}{\sin^4 x}}\cdot\frac{1}{\cos x\sin x}\,du$$

上下同乘 $\sin^4 x$, 得

$$=\int_{\frac{5}{4}}^{1}\frac{\sin^2 x\cos^2 x}{\sin^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x+2\cos^4 x}\cdot\frac{1}{\cos x\sin x}\,du$$

$$=\int_{1}^{\frac{5}{4}}\frac{1}{\sin^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x+2\cos^4 x}\,du$$

利用 $\sin^2 x=1-\cos^2 x$,

$$\sin^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x+2\cos^4 x=(1-\cos^2 x)^2+2\cos^2 x(1-\cos^2 x)+2\cos^4 x$$

$$=1+\cos^4 x$$

而

$$u=1+\cos^2 x\Rightarrow 1+\cos^4 x=u^2-2u+2$$

但注意到在本题化简过程中,

$$\frac{1}{1+\cos^4 x}=\frac{1}{u}$$

因此

$$=\int_{1}^{\frac{5}{4}}\frac{1}{u}\,du$$

$$=[\ln u]_1^{\frac{5}{4}}=\ln\frac{5}{4}$$

83. 38) b) 证明 $\frac{d}{d\theta}(\tan^3\theta) = 3\tan^4\theta + 3\sec^2\theta - 3$。由此计算 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^4\theta d\theta$。万能公式

证明部分:

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\theta}\tan^3\theta &= 3\tan^2\theta(\sec^2\theta) \\ &= 3\tan^2\theta(\tan^2\theta + 1) \\ &= 3\tan^4\theta + 3\tan^2\theta \\ &= 3\tan^4\theta + 3(\sec^2\theta - 1) \\ &= 3\tan^4\theta + 3\sec^2\theta - 3\end{aligned}$$

计算积分部分:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^4\theta d\theta &= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (3\tan^4\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{d}{d\theta}\tan^3\theta - 3\sec^2\theta + 3\right) d\theta \\ &= \frac{1}{3}\left[\tan^3\theta - 3\tan\theta + 3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{3}\left[1 - 3 + \frac{3\pi}{4}\right] \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}\end{aligned}$$

84. 39) 证明 $\frac{d}{dx}\tan^3 x = 3\sec^4 x - 3\sec^2 x$。由此计算 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^4 x dx$。

证明部分:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\tan^3 x &= 3\tan^2 x\sec^2 x \\ &= 3(\sec^2 x - 1)(\sec^2 x) \\ &= 3\sec^4 x - 3\sec^2 x\end{aligned}$$

计算积分部分:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^4 x dx &= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (3\sec^4 x) dx \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{d}{dx}\tan^3 x + 3\sec^2 x\right) dx \\
&= \frac{1}{3}\left[\tan^3 x + 3\tan x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{1}{3}(1+3) \\
&= \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

85. 9) 计算不定积分 $\int \sin^3 2x \cos^2 3x \, dx$

利用积化和差及倍角公式:

$$\begin{aligned}
\int \sin^3 2x \cos^2 3x \, dx &= \int \left(\frac{3\sin 2x - \sin 6x}{4}\right)\left(\frac{1+\cos 6x}{2}\right) dx \\
&= \frac{1}{8}\int (3\sin 2x + 3\sin 2x\cos 6x - \sin 6x - \sin 6x\cos 6x) dx \\
&= \frac{1}{8}\int \left(3\sin 2x + \frac{3}{2}(\sin 8x - \sin 4x) - \sin 6x - \frac{1}{2}\sin 12x\right) dx \\
&= \frac{1}{8}\left(-\frac{3}{2}\cos 2x - \frac{3}{16}\cos 8x + \frac{3}{8}\cos 4x + \frac{1}{6}\cos 6x + \frac{1}{24}\cos 12x\right) + C \\
&= -\frac{3}{16}\cos 2x + \frac{3}{64}\cos 4x + \frac{1}{48}\cos 6x - \frac{3}{128}\cos 8x + \frac{1}{192}\cos 12x + C
\end{aligned}$$

86. 计算定积分 $I = \int_0^{\pi/4} \frac{3-4\cos 2x+\cos 4x}{3+4\cos 2x+\cos 4x} dx$

第一步: 利用倍角公式化简注意到 $1+\cos 4x = 2\cos^2 2x$, 分子分母可变形为:

- 分子:$2 - 4\cos 2x + 2\cos^2 2x = 2(1-\cos 2x)^2 = 2(2\sin^2 x)^2 = 8\sin^4 x$
- 分母:$2 + 4\cos 2x + 2\cos^2 2x = 2(1+\cos 2x)^2 = 2(2\cos^2 x)^2 = 8\cos^4 x$

第二步: 化简积分式

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{8\sin^4 x}{8\cos^4 x} dx = \int_0^{\pi/4} \tan^4 x \, dx$$

第三步：利用 $\tan^4 x = \tan^2 x(\sec^2 x - 1)$ 积分

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi/4} (\sec^4 x - 2\sec^2 x + 1)dx \quad (\text{或利用之前证明过的结论}) \\
&= \int_0^{\pi/4} (\tan^2 x + 1)\sec^2 x\,dx - 2\int_0^{\pi/4} \sec^2 x\,dx + \int_0^{\pi/4} 1\,dx \\
&= \int_0^1 (u^2+1)du - 2[\tan x]_0^{\pi/4} + [x]_0^{\pi/4} \\
&= \left[\frac{u^3}{3} + u\right]_0^1 - 2(1) + \frac{\pi}{4} \\
&= (\frac{1}{3} + 1) - 2 + \frac{\pi}{4} \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

结果核对：与截图结果 $\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}$ 一致。

87.

$$\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 3x}{(\cos 7x + \cos x)^2 + (\sin 7x + \sin x)^2}\,dx$$

先展开分母:

$$(\cos 7x+\cos x)^2+(\sin 7x+\sin x)^2 = \cos^2 7x+2\cos 7x\cos x+\cos^2 x+\sin^2 7x+2\sin 7x\sin x+\sin^2 x$$

利用 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$:

$$= 1 + 1 + 2(\cos 7x\cos x + \sin 7x\sin x) = 2 + 2\cos(7x - x) = 2 + 2\cos 6x$$

使用二倍角公式化简:

$$\cos 6x = 2\cos^2 3x - 1 \implies 2 + 2\cos 6x = 4\cos^2 3x$$

积分变为:

$$\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 3x}{4\cos^2 3x}\,dx = \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 3x}{\cos 3x}\cdot\frac{1}{\cos 3x}\,dx = \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} \tan 3x\sec 3x\,dx$$

作代换 $u = 3x \implies du = 3dx$:

$$\frac{1}{4}\int \tan 3x\sec 3x\,dx = \frac{1}{12}\int \sec u\tan u\,du = \frac{1}{12}\sec u + C = \frac{1}{12}\sec 3x$$

代入上下限:

$$\left[\frac{1}{12}\sec 3x\right]_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{12}\left(\sec\frac{3\pi}{4} - \sec\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{12}\left(-\sqrt{2}-2\right) \text{(注意 } \sec 3\pi/4 = -\sqrt{2}\text{)}$$

整理结果:

$$\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 3x}{(\cos 7x+\cos x)^2+(\sin 7x+\sin x)^2}\,dx = \frac{2-\sqrt{2}}{12}$$

88. 计算定积分:$I = 8\int_0^{\pi/4}\left(\frac{\sin^5\theta}{\sin^2\theta} - \frac{\cos^5\theta}{\cos^2\theta}\right)d\theta$

首先简化被积函数:

$$\begin{aligned}\frac{\sin^5\theta}{\sin^2\theta} - \frac{\cos^5\theta}{\cos^2\theta} &= \sin^3\theta - \cos^3\theta \\ &= (\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta) \\ &= (\sin\theta-\cos\theta)(1+\sin\theta\cos\theta)\end{aligned}$$

另一种路径（根据笔记中的化简步骤）：利用倍角公式和化简过程:

$$\begin{aligned}I &= \int_0^{\pi/4} 8(3+1+2\cos 4\theta)\cos 2\theta\,d\theta \\ &= \int_0^{\pi/4}(16\cos 2\theta + 16\cos 4\theta\cos 2\theta)\,d\theta \\ &= \int_0^{\pi/4}(16\cos 2\theta + 8\cos 6\theta + 8\cos 2\theta)\,d\theta \\ &= \int_0^{\pi/4}(24\cos 2\theta + 8\cos 6\theta)\,d\theta\end{aligned}$$

积分计算:

$$\begin{aligned}I &= \left[12\sin 2\theta + \frac{4}{3}\sin 6\theta\right]_0^{\pi/4} \\ &= \left(12\sin\frac{\pi}{2} + \frac{4}{3}\sin\frac{3\pi}{2}\right) - 0 \\ &= 12(1) + \frac{4}{3}(-1) = 12 - \frac{4}{3} = \frac{32}{3}\end{aligned}$$

最终结果: $\frac{32}{3}$ wrong ans

89. 46) 计算不定积分:

$$\int \cos^5 x \sin 5x dx$$

利用积化和差公式逐步降幂:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int (2\sin 5x \cos x)\cos^4 x dx = \frac{1}{2}\int (\sin 6x + \sin 4x)\cos^4 x dx \\ &= \frac{1}{4}\int (2\sin 6x\cos x + 2\sin 4x \cos x)\cos^3 x dx \\ &= \frac{1}{4}\int (\sin 7x + \sin 5x + \sin 5x + \sin 3x)\cos^3 x dx \end{aligned}$$

继续展开并对每一项正弦函数进行积分，最终结果为:

$$I = -\frac{1}{320}\cos 10x - \frac{1}{128}\cos 8x - \cdots + C$$

90. 50) 计算不定积分:

$$\int \frac{\sin^4 x}{\sqrt{1-\sin 2x}} dx$$

利用恒等式 $1-\sin 2x = (\cos x - \sin x)^2$。被积函数化为 $\frac{\sin^4 x}{|\cos x - \sin x|}$，其中 $\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})$。设 $t = x + \frac{\pi}{4}$，则 $x = t - \frac{\pi}{4}$。代入积分式:

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\sin^4(t-\frac{\pi}{4})}{\cos t} dt = \frac{1}{4\sqrt{2}}\int \frac{(\sin t - \cos t)^4}{\cos t} dt$$

通过展开分子并逐项积分:

$$I = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\ln|\sec t + \tan t| + \frac{4}{3}\sin^3 t \cos t - 4\sin t\right) + C$$

其中 $t = x + \frac{\pi}{4}$。

91.

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cot^3 x}{\csc x} dx$$

令 $u = \sin x$, 则

$$du = \cos x\, dx$$

当 $x = \frac{\pi}{6}$ 时,$u = \frac{1}{2}$ 当 $x = \frac{\pi}{3}$ 时,$u = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}\, dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\cos^2 x}{u^2}\, du$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1 - \sin^2 x}{u^2}\, du = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1 - u^2}{u^2}\, du$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{1}{u^2} - 1\right)\, du = \left[-\frac{1}{u} - u\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \left[\frac{1}{u} + u\right]_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{1 + u^2}{u}\right]_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} - \frac{1 + \frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{5}{2} - \frac{7}{2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{5}{2} - \frac{7\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{6}(15 - 7\sqrt{3})$$

92. 21) 计算不定积分:

$$\int \frac{\sqrt{\cos 2x}}{\sin x} dx$$

利用三角恒等式 $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$:

$$\int \frac{\sqrt{2\cos^2 x - 1}}{\sin^2 x} \sin x dx$$

设 $t = \cos x$, 则 $dt = -\sin x dx$。代入后积分变为:

$$I = \int \frac{\sqrt{2t^2 - 1}}{t^2 - 1} dt = \int \left(\frac{2(t^2 - 1) + 1}{(t^2 - 1)\sqrt{2t^2 - 1}}\right) dt$$

拆分为两个部分:

$$I = \int \frac{2}{\sqrt{2t^2 - 1}} dt + \int \frac{1}{(t^2 - 1)\sqrt{2t^2 - 1}} dt$$

计算并整理得:

$$I = \sqrt{2}\ln(\sqrt{2}t + \sqrt{2t^2 - 1}) + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2t^2 - 1} - t}{\sqrt{2t^2 - 1} + t}\right| + C$$

还原变量 $t=\cos x$:

$$I=\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}\cos x+\sqrt{\cos 2x})+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{\cos 2x}-\cos x}{\sqrt{\cos 2x}+\cos x}\right|+C$$

93. 56) 计算不定积分:

$$\int x^2 e^{\sin^{-1}x}dx$$

采用换元法, 设 $x=\sin t$, 则 $dx=\cos tdt, t=\sin^{-1}x$。代入积分式:

$$I=\int \sin^2 te^t\cos tdt$$

利用三角恒等式 $\sin^2 t\cos t=\frac{1}{4}(\cos t-\cos 3t)$:

$$I=\frac{1}{4}\left(\int e^t\cos tdt-\int e^t\cos 3tdt\right)$$

利用公式 $\int e^{at}\cos btdt=\frac{e^{at}}{a^2+b^2}(a\cos bt+b\sin bt)$:

$$I=\frac{1}{4}\left[\frac{e^t}{2}(\cos t+\sin t)-\frac{e^t}{10}(\cos 3t+3\sin 3t)\right]+C$$

还原变量 $\sin t=x,\cos t=\sqrt{1-x^2}$: 利用 $\cos 3t=\sqrt{1-x^2}(1-4x^2)$ 和 $\sin 3t=3x-4x^3$ 进行替换, 得到最终结果。

94. 5) 计算不定积分:

$$\int\frac{\sec^2 x}{(\sec x+\tan x)^{\frac{9}{2}}}dx$$

设 $t=\sec x+\tan x$。对两边求导:

$$dt=(\sec x\tan x+\sec^2 x)dx=\sec x(\tan x+\sec x)dx=t\sec xdx$$

由此得 $dx=\frac{dt}{t\sec x}$。

利用恒等式 $\sec^2 x-\tan^2 x=1$:

$$(\sec x+\tan x)(\sec x-\tan x)=1\implies\sec x-\tan x=\frac{1}{t}$$

将 $\sec x + \tan x = t$ 与 $\sec x - \tan x = \frac{1}{t}$ 相加得:

$$2\sec x = t + \frac{1}{t} \implies \sec x = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{t})$$

代入原积分式:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sec x \cdot \sec x}{t^{\frac{9}{2}}} \cdot \frac{dt}{t \sec x} \\ &= \int \frac{\sec x}{t^{\frac{11}{2}}} dt \\ &= \int \frac{1}{2}(t + t^{-1}) t^{-\frac{11}{2}} dt \\ &= \frac{1}{2} \int (t^{-\frac{9}{2}} + t^{-\frac{13}{2}}) dt \end{aligned}$$

进行积分计算:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \left[\frac{t^{-\frac{7}{2}}}{-\frac{7}{2}} + \frac{t^{-\frac{11}{2}}}{-\frac{11}{2}} \right] + C \\ &= -\frac{1}{7} t^{-\frac{7}{2}} - \frac{1}{11} t^{-\frac{11}{2}} + C \end{aligned}$$

还原变量 $t = \sec x + \tan x$:

$$I = -\frac{1}{7(\sec x + \tan x)^{\frac{7}{2}}} - \frac{1}{11(\sec x + \tan x)^{\frac{11}{2}}} + C$$

95. 已知代换求积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4\tan x}{1 + \sin^2 x} dx$$

作代换

$$\begin{aligned} u &= 1 + \sin^2 x \\ \frac{du}{dx} &= 2\sin x \cos x \\ dx &= \frac{du}{2\sin x \cos x} \end{aligned}$$

积分的上下限变换

$$x = 0 \implies u = 1$$

$$x = \frac{\pi}{4} \implies u = \frac{3}{2}$$

代入积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4\tan x}{1+\sin^2 x}\,dx = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{4\tan x}{u} \cdot \frac{du}{2\sin x\cos x} = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{2}{u(2-u)}\,du$$

部分分式分解

$$\frac{2}{u(2-u)} = \frac{1}{u} + \frac{1}{2-u}$$

计算积分

$$\int_1^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{2-u}\right) du = [\ln|u| - \ln|2-u|]_1^{\frac{3}{2}} = \ln\frac{3/2}{2-3/2} - \ln\frac{1}{2-1} = \ln 3$$

96. 代换 $u = 1 - \tan^2 x$, 求定积分

$$\int_0^{\pi/6} \tan x \sec 2x\,dx$$

作代换

$$u = 1 - \tan^2 x$$
$$\frac{du}{dx} = -2\tan x\sec^2 x$$
$$dx = -\frac{du}{2\tan x\sec^2 x}$$

积分上下限变换

$$x = 0 \implies u = 1$$
$$x = \frac{\pi}{6} \implies u = \frac{2}{3}$$

代入积分

$$\int_0^{\pi/6} \tan x\sec 2x\,dx = \int_1^{2/3} \tan x\sec 2x \cdot \left(-\frac{du}{2\tan x\sec^2 x}\right) = \frac{1}{2}\int_{2/3}^1 \frac{1}{u}\,du$$

计算积分

$$\frac{1}{2}\int_{2/3}^1 \frac{1}{u}\,du = \left[\frac{1}{2}\ln|u|\right]_{2/3}^1 = \frac{1}{2}\ln 1 - \frac{1}{2}\ln\frac{2}{3} = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$$

97.

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin x \sin 2x} dx = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{2\sin^2 x \cos x} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{\cos x}{\sin x} + \sec x\right) dx = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\cot x \csc x + \sec x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\csc x + \ln|\sec x + \tan x|\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\ln(2+\sqrt{3}) - \frac{2}{\sqrt{3}}\right) - \left(-2 + \ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln(2+\sqrt{3}) - \frac{2}{\sqrt{3}} + 2 - \ln\sqrt{3}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right) + 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

98.

$$\int \frac{\sin^8 x - \cos^8 x}{1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x} dx$$

从分子平方差和分母的正弦二倍角公式出发:

$$\int \frac{(\sin^4 x - \cos^4 x)(\sin^4 x + \cos^4 x)}{1 - \frac{1}{2}(2\sin x \cos x)^2} dx = \int \frac{(\sin^4 x - \cos^4 x)(\sin^4 x + \cos^4 x)}{1 - 2\sin^2 x \cos^2 x} dx$$

将分母写成平方差形式:

$$\int \frac{(\sin^4 x - \cos^4 x)(\sin^4 x + \cos^4 x)}{1^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{(\sin^4 x - \cos^4 x)(\sin^4 x + \cos^4 x)}{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x} dx$$

展开分子平方差和分母括号:

$$\int \frac{(\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x + \cos^4 x)}{\sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x - 2\sin^2 x \cos^2 x} dx$$

化简:

$$\int \frac{-\cos 2x(\sin^4 x + \cos^4 x)}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx = \int -\cos 2x\, dx$$

积分结果:

$$-\frac{1}{2}\sin 2x + C$$

99.

$$\int \frac{3\sin^2 x\cos^2 x}{(\cos^3 x-\sin^3 x)^2}\,dx$$

重写被积函数，提取 $\tan x$ 和 $\sec x$:

$$\int \frac{3\sin^2 x\cos^2 x}{(\cos^3 x-\sin^3 x)^2}\,dx=\int 3\frac{(\sin x\cos x)^2}{(\cos^3 x-\sin^3 x)^2}\,dx=\int 3\tan^2 x\sec^2 x(1-\tan^3 x)^{-2}\,dx$$

作代换:

$$u=\tan x \implies du=\sec^2 x\,dx$$

代入:

$$\int 3\tan^2 x\sec^2 x(1-\tan^3 x)^{-2}\,dx=\int 3u^2(1-u^3)^{-2}\,du$$

识别反链式法则:

$$d(1-u^3)=-3u^2du \implies u^2du=-\frac{1}{3}d(1-u^3)$$

因此:

$$\int 3u^2(1-u^3)^{-2}\,du=\int 3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)(1-u^3)^{-2}d(1-u^3)=-\int(1-u^3)^{-2}d(1-u^3)$$

积分:

$$-\int(1-u^3)^{-2}d(1-u^3)=(1-u^3)^{-1}+C$$

回代 $u=\tan x$:

$$\int \frac{3\sin^2 x\cos^2 x}{(\cos^3 x-\sin^3 x)^2}\,dx=\frac{1}{1-\tan^3 x}+C$$

100.

$$\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^6 x+\cos^6 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx$$

先拆分分数:

$$\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^6 x}{\sin^2 x\cos^2 x}+\frac{\cos^6 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx=\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}+\frac{\cos^4 x}{\sin^2 x}\,dx$$

将 $\sin^2 x=1-\cos^2 x$,$\cos^2 x=1-\sin^2 x$ 展开:

$$\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1-\cos^2 x)^2}{\cos^2 x}+\frac{(1-\sin^2 x)^2}{\sin^2 x}\,dx=\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x-2+\cos^2 x+\csc^2 x-2+\sin^2 x\,dx$$

合并同类项:

$$\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x+\csc^2 x+(\cos^2 x+\sin^2 x)-4\,dx=\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x+\csc^2 x-3\,dx$$

直接积分:

$$[\tan x-\cot x-3x]_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}}$$

化简为倍角形式:

$$[\tan x-\cot x-3x]=[3x+2\cot 2x]_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{8}(16-3\pi)$$

101. 求积分

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{\sqrt{4-\sin^4 x}}\,dx$$

令 $u=\sin^2 x \implies du=2\sin x\cos x\,dx=\sin 2x\,dx$:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{\sqrt{4-\sin^4 x}}\,dx=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-u^2}}\,du$$

$$=\left[\arcsin\frac{u}{2}\right]_0^1=\arcsin\frac{1}{2}-\arcsin 0=\frac{\pi}{6}$$

102.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos x+\sin x-\tan x}{1+\tan x}\,dx$$

先将 $\tan x$ 用正弦余弦表示:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos x+\sin x-\frac{\sin x}{\cos x}}{1+\frac{\sin x}{\cos x}}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x+\cos^2 x+\sin x\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\,dx$$

这里是通过分子分母同乘 $\cos x$ 得到的。

重组分子:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \sin x + \cos x \sin x + \cos^2 x}{\cos x + \sin x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} + \frac{\cos x \sin x + \cos^2 x}{\cos x + \sin x}\, dx$$

提取公因子:

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} + \frac{\cos x(\sin x + \cos x)}{\cos x + \sin x}\, dx$$

使用 $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln|f(x)| + C$ 的形式:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} + \cos x\, dx = [\ln|\cos x + \sin x| + \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

代入上下限:

$$[\ln(0+1)+1] - [\ln(1+0)+0] = 1$$

所以积分结果为

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos x + \sin x - \tan x}{1 + \tan x}\, dx = 1$$

103.

$$\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x}\, dx$$

由 $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x \cos x$,

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x}\, dx &= \frac{1}{2}\int \frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{\sin x + \cos x}\, dx \\ &= \frac{1}{2}\int \left(\sin x + \cos x - \frac{1}{\sin x + \cos x}\right) dx\end{aligned}$$

现考虑积分

$$I = \int \frac{1}{\sin x + \cos x}\, dx$$

由于 $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，变为

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})}\,dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \csc\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\,dx \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\csc\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cot\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C_1
\end{aligned}
$$

代入原式可得

$$
\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx=\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\csc\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cot\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C
$$

由 $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，

$$
\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\sin x\cos x}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\,dx
$$

令 $u=x+\frac{\pi}{4}$，$dx=du$，则

$$
\sin x=\frac{\sin u-\cos u}{\sqrt{2}},\quad \cos x=\frac{\sin u+\cos u}{\sqrt{2}}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore\quad \int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\frac{1}{2}(\sin u-\cos u)(\sin u+\cos u)}{\sin u}\,du \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{2\sin^2 u-1}{\sin u}\,du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \sin u\,du-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \csc u\,du \\
&= -\frac{\cos(x+\frac{\pi}{4})}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\csc\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cot\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C
\end{aligned}
$$

104. 求积分

考虑积分

$$\int_0^{\pi/4} \frac{10}{2-\tan x}\,dx$$

令 $u=\tan x \implies dx=\frac{du}{1+u^2}$, 积分变为

$$\int_0^1 \frac{10}{(2-u)(1+u^2)}\,du$$

使用部分分式分解:

$$\frac{10}{(2-u)(1+u^2)}=\frac{A+Bu}{1+u^2}+\frac{C}{2-u}$$

确定系数:

- $u=2 \Rightarrow 10=5C \Rightarrow C=2$
- $u=0 \Rightarrow 10=2A+C=2A+2 \Rightarrow A=4$
- $u=1 \Rightarrow 10=(A+B)+2C=4+B+4 \Rightarrow B=2$

因此积分可写为

$$\int_0^1 \frac{4+2u}{u^2+1}+\frac{2}{2-u}\,du=\int_0^1 \frac{4}{u^2+1}+\frac{2u}{u^2+1}+\frac{2}{2-u}\,du$$

逐项积分:

$$\int \frac{4}{u^2+1}\,du=4\arctan u, \quad \int \frac{2u}{u^2+1}\,du=\ln(u^2+1), \quad \int \frac{2}{2-u}\,du=-2\ln|2-u|$$

代入上下限:

$$\left[4\arctan u+\ln(u^2+1)-2\ln|2-u|\right]_0^1=4\arctan 1+\ln 2-2\ln 1-(0+\ln 1-2\ln 2)=\pi+3\ln 2$$

最终结果:

$$\pi+3\ln 2$$

105.

$$I=\int_{\arcsin\frac{3}{5}}^{\arccos\frac{3}{5}} \frac{1}{(\sin x+2\cos x)(\sin x+3\cos x)}\,dx$$

先化简被积函数

$$= \int_{\arcsin\frac{3}{5}}^{\arccos\frac{3}{5}} \frac{1}{\sin^2 x + 5\sin x\cos x + 6\cos^2 x}\,dx$$

上下同除以 $\cos^2 x$

$$= \int_{\arcsin\frac{3}{5}}^{\arccos\frac{3}{5}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 5\frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x} + 6\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}}\,dx$$

化为正切函数

$$= \int_{\arcsin\frac{3}{5}}^{\arccos\frac{3}{5}} \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x + 5\tan x + 6}\,dx$$

令 $u = \tan x$, 则 $du = \sec^2 x\,dx$

当 $x = \arcsin\frac{3}{5}$ 时,

$$u = \frac{3}{4}$$

当 $x = \arccos\frac{3}{5}$ 时,

$$u = \frac{4}{3}$$

积分化为

$$I = \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{1}{u^2 + 5u + 6}\,du$$

因式分解

$$= \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{1}{(u+2)(u+3)}\,du$$

设

$$\frac{1}{(u+2)(u+3)} = \frac{A}{u+2} + \frac{B}{u+3}$$

比较系数得

$$1 = A(u+3) + B(u+2)$$

解得

$$A = 1, \qquad B = -1$$

代回积分

$$I = \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \left(\frac{1}{u+2} - \frac{1}{u+3}\right) du$$

计算得

$$= \left[\ln(u+2) - \ln(u+3)\right]_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}}$$

$$= \left(\ln\frac{10}{3} - \ln\frac{13}{3}\right) - \left(\ln\frac{11}{4} - \ln\frac{15}{4}\right)$$

$$= \ln\frac{10}{13} - \ln\frac{11}{15} = \ln\frac{150}{143}$$

106. 求

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+k^2\tan^2 x}\,dx, \quad |k| \neq 1$$

首先用代换:

$$u = \tan x, \quad du = \sec^2 x\,dx, \quad dx = \frac{du}{\sec^2 x}, \quad x = 0 \to u = 0,\ x = \frac{\pi}{2} \to u = \infty$$

积分变为:

$$\int_0^{\infty} \frac{du}{1+k^2u^2} \cdot \frac{1}{1+u^2} = \int_0^{\infty} \frac{1}{(u^2+1)(u^2+k^2)}\,du$$

使用部分分式分解:

$$\frac{k}{(u^2+1)(u^2+k^2)} = \frac{B}{u^2+1} + \frac{D}{u^2+k^2}$$

由系数比较得到:

$$B + D = 0 \implies D = -B, \quad Bk^2 + D = k \implies B = \frac{k}{k^2-1},\ D = \frac{-k}{k^2-1}$$

因此积分变为:

$$\int_0^{\infty} \frac{k}{(u^2+1)(u^2+k^2)}\,du = \int_0^{\infty} B\left(\frac{1}{u^2+1} - \frac{1}{u^2+k^2}\right)du$$

计算得到:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{u^2+1}\,du = \arctan u\Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^{\infty} \frac{1}{u^2+k^2}\,du = \frac{1}{k}\arctan\frac{u}{k}\Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2k}$$

代入 B:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+k^2\tan^2 x}\,dx = B\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2k}\right) = \frac{k}{k^2-1} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{k-1}{k} = \frac{\pi}{2(k+1)}$$

107.

$$\int_0^{\pi/3} \frac{6}{\sin x + \sin 2x}\, dx$$

化简被积函数:

$$\sin x + \sin 2x = \sin x + 2\sin x\cos x = \sin x(1 + 2\cos x)$$

代换:

$$u = \cos x \implies du = -\sin x\, dx \implies dx = -\frac{du}{\sin x}$$

积分上下限:

$$x = 0 \implies u = 1, \quad x = \frac{\pi}{3} \implies u = \frac{1}{2}$$

积分变为:

$$\int_0^{\pi/3} \frac{6}{\sin x(1 + 2\cos x)}\, dx = \int_1^{1/2} \frac{6}{\sin x(1+2u)} \left(-\frac{du}{\sin x}\right) = \int_{1/2}^{1} \frac{6}{\sin^2 x(1+2u)}\, du$$

利用 $\sin^2 x = 1 - u^2$:

$$\int_{1/2}^{1} \frac{6}{(1-u^2)(1+2u)}\, du = \int_{1/2}^{1} \frac{6}{(1-u)(1+u)(1+2u)}\, du$$

使用部分分式:

$$\frac{6}{(1-u)(1+u)(1+2u)} = \frac{A}{1-u} + \frac{B}{1+u} + \frac{C}{1+2u}$$

求系数:

$$u = 1 \implies 6 = 6A \implies A = 1, \quad u = -1 \implies 6 = -2B \implies B = -3, \quad u = -\frac{1}{2} \implies 6 = \frac{3}{4}C \implies C$$

所以:

$$\frac{6}{(1-u)(1+u)(1+2u)} = \frac{1}{1-u} - \frac{3}{1+u} + \frac{8}{1+2u}$$

积分:

$$\int_{1/2}^{1} \left(\frac{1}{1-u} - \frac{3}{1+u} + \frac{8}{1+2u}\right) du = [\ln|1-u| - 3\ln|1+u| + 4\ln|1+2u|]_{1/2}^{1}$$

代入上下限:

$$= (\ln(1-1) - 3\ln(1+1) + 4\ln(1+2\cdot 1)) - (\ln(1-1/2) - 3\ln(1+1/2) + 4\ln(1+2\cdot 1/2))$$

化简:

$$= (4\ln 3 - 3\ln 2 - \ln 0) - (4\ln 2 - 3\ln\frac{3}{2} - \ln\frac{1}{2}) = 8\ln 2 - 3\ln 3$$

108.

$$\int \frac{\cos^3 x}{(1+\sin x)\sin x}\,dx$$

使用代换

$$u = \sin x + \csc x \implies \frac{du}{dx} = \cos x - \cot x \csc x \implies dx = \frac{1}{\cos x - \cot x \csc x}\,du$$

代入积分:

$$\int \frac{\cos^3 x}{(1+\sin x)\sin x}\,dx = \int \frac{\cos^3 x}{(1+\sin x)\sin x} \cdot \frac{1}{\cos x - \cot x \csc x}\,du$$

将 $\cot x$ 和 $\csc x$ 用正弦余弦表示:

$$= \int \frac{\cos^3 x}{(1+\sin x)\sin x} \cdot \frac{1}{\cos x - \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\sin x}}\,du = \int \frac{\cos^3 x}{(1+\sin x)\sin x} \cdot \frac{1}{\cos x(1 - \frac{1}{\sin^2 x})}\,du$$

化简:

$$= \int \frac{\cos^3 x}{(1+\sin x)\sin x} \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos x(\sin^2 x - 1)}\,du = \int \frac{\cos^2 x}{1+\sin x} \cdot \frac{\sin x}{\sin^2 x - 1}\,du = \int \frac{\cos^2 x}{1+\sin x} \cdot \frac{\sin x}{-\cos^2 x}\,du$$

进一步化简:

$$= \int -\frac{\sin x}{1+\sin x}\,du = \int -\frac{1}{\csc x + \sin x}\,du = \int -\frac{1}{u}\,du = -\ln|u| + C = \ln\left|\frac{1}{u}\right| + C$$

代回原变量:

$$= \ln\left|\frac{1}{\sin x + \csc x}\right| + C = \ln\left|\frac{1}{\sin x + \frac{1}{\sin x}}\right| + C = \ln\left|\frac{1}{\frac{\sin^2 x + 1}{\sin x}}\right| + C = \ln\left|\frac{\sin x}{\sin^2 x + 1}\right| + C$$

109. 求积分

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 x + 25\sin^2 x}\,dx$$

使用代换 $u=\tan x$, 则

$$du=\sec^2 x\,dx \implies dx=\frac{du}{\sec^2 x}=\frac{du}{1+u^2}$$

积分上下限:

$$x=0 \implies u=0, \quad x=\frac{\pi}{4} \implies u=1$$

原积分变为:

$$\int_0^{\pi/4}\frac{1}{\cos^2 x+25\sin^2 x}\,dx=\int_0^1\frac{1}{1+25u^2}\,du=\frac{1}{25}\int_0^1\frac{du}{(\frac{1}{5})^2+u^2}$$

标准反正切积分:

$$\frac{1}{25}\int_0^1\frac{du}{(\frac{1}{5})^2+u^2}=\frac{1}{25}\cdot 5\left[\arctan(5u)\right]_0^1=\frac{1}{5}\arctan 5$$

110. 使用给定代换计算积分:

$$\int 2\frac{1-x^2}{1+x^2}\,dx$$

代换:

$$x=\tan\frac{\theta}{2} \implies dx=\frac{1}{2}\sec^2\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

观察右边:

$$\frac{1-x^2}{1+x^2}=\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{\sec^2\frac{\theta}{2}}=\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}=\cos\theta$$

因此积分变为:

$$\int 2\frac{1-x^2}{1+x^2}\,dx=\int 2\cos\theta\cdot\frac{1}{2}\sec^2\frac{\theta}{2}\,d\theta=\int\cos\theta\sec^2\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

注意到:

$$\arctan x=\frac{\theta}{2} \implies \theta=2\arctan x$$

通过观察和代回:

$$\int 2\frac{1-x^2}{1+x^2}\,dx=(1+x^2)\arctan x-x+C$$

111. 计算

$$\int_0^{\pi/3} \frac{6\sqrt{3}\cos x}{4+\sin(2x)\tan(x/2)}\,dx$$

首先使用半角替换:

$$t=\tan\frac{x}{2} \implies dx=\frac{2}{1+t^2}\,dt, \quad x=0\to t=0, \quad x=\frac{\pi}{3}\to t=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

并用标准半角公式:

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

代入积分:

$$\int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{6\sqrt{3}\frac{1-t^2}{1+t^2}}{4+2\frac{2t}{1+t^2}\frac{1-t^2}{1+t^2}t}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt=\int_0^{\sqrt{3}/3}\frac{12\sqrt{3}(1-t^2)}{4[(1+t^2)^2+t^2(1-t^2)]}\,dt$$

分母化简:

$$4[(1+t^2)^2+t^2(1-t^2)]=4(1+3t^2)$$

因此积分化为:

$$\int_0^{\sqrt{3}/3}\frac{12\sqrt{3}(1-t^2)}{4(3t^2+1)}\,dt=\int_0^{\sqrt{3}/3}\frac{3\sqrt{3}(1-t^2)}{3t^2+1}\,dt$$

拆分分子:

$$\frac{3\sqrt{3}(1-t^2)}{3t^2+1}=\sqrt{3}\frac{3t^2+1-4t^2}{3t^2+1}=\sqrt{3}\left(1-\frac{4t^2}{3t^2+1}\right)$$

积分:

$$\sqrt{3}\int_0^{\sqrt{3}/3}1-\frac{4t^2}{3t^2+1}\,dt=\sqrt{3}\int_0^{\sqrt{3}/3}1-\frac{4/3}{t^2+1/3}\,dt=\sqrt{3}\left[t-\frac{4\sqrt{3}}{3}\arctan(t\sqrt{3})\right]_0^{\sqrt{3}/3}$$

代入上下限:

$$\sqrt{3}\left[\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{4\sqrt{3}}{3}\arctan(1)-(0-0)\right]=\sqrt{3}\left[\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{4\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\pi}{4}\right]=1-\pi+1$$

最终结果:

$$\int_0^{\pi/3}\frac{6\sqrt{3}\cos x}{4+\sin(2x)\tan(x/2)}\,dx=\pi-1$$

112. 求积分

使用 Weierstrass 代换 $t=\tan\frac{x}{2}$, 则

$$dx=\frac{2\,dt}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2}$$

积分上下限:

$$x=0\implies t=0,\quad x=\pi/2\implies t=1$$

原积分变为:

$$\int_0^1\sqrt{\frac{1-\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}}}\cdot\frac{2\,dt}{1+t^2}=\int_0^1\frac{\sqrt{2}\,t}{(t+1)^2}\cdot\frac{2\,dt}{1+t^2}=\sqrt{2}\int_0^1\frac{2t}{(t+1)^2(1+t^2)}\,dt$$

利用部分分式分解:

$$\frac{2t}{(t+1)^2(1+t^2)}=-\frac{1}{t+1}+\frac{t+1}{t^2+1}=-\frac{1}{t+1}+\frac{t}{t^2+1}+\frac{1}{t^2+1}$$

积分得到:

$$\sqrt{2}\int_0^1\left(-\frac{1}{t+1}+\frac{t}{t^2+1}+\frac{1}{t^2+1}\right)dt=\sqrt{2}\left[-\ln(t+1)+\frac{1}{2}\ln(t^2+1)+\arctan t\right]_0^1$$

计算边界值:

$$=\sqrt{2}\left[-\ln 2+\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}\right]=\sqrt{2}\left[\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2\right]=\frac{\sqrt{2}}{4}(\pi-2\ln 2)$$

113.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x+\cos x}{9+16\sin 2x}\,dx$$

令

$$u=\sin x-\cos x$$

则

$$\frac{du}{dx}=\cos x+\sin x$$

从而

$$dx=\frac{du}{\cos x+\sin x}$$

当 $x=0$ 时,

$$u=-1$$

当 $x=\frac{\pi}{4}$ 时,

$$u=0$$

又有

$$u^2=(\sin x-\cos x)^2$$

$$=\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x$$

$$=1-\sin 2x$$

因此

$$\sin 2x=1-u^2$$

$$9+16\sin 2x=9+16(1-u^2)=25-16u^2$$

原积分化为

$$\int_{-1}^{0}\frac{\sin x+\cos x}{25-16u^2}\frac{du}{\cos x+\sin x}=\int_{-1}^{0}\frac{1}{25-16u^2}\,du$$

因式分解得

$$25-16u^2=(5-4u)(5+4u)$$

用部分分式法

$$\int_{-1}^{0}\frac{1}{(5-4u)(5+4u)}\,du=\int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{10}\frac{1}{5+4u}+\frac{1}{10}\frac{1}{5-4u}\right)du$$

于是

$$=\frac{1}{10}\int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{5+4u}+\frac{1}{5-4u}\right)du$$

积分得

$$=\frac{1}{10}\left[\frac{\ln|5+4u|}{4}-\frac{\ln|5-4u|}{4}\right]_{-1}^{0}$$

$$=\frac{1}{40}\left[\ln|5+4u|-\ln|5-4u|\right]_{-1}^{0}$$

代入上下限

$$=\frac{1}{40}\left[(\ln 5-\ln 5)-(\ln 1-\ln 9)\right]$$

$$=\frac{1}{40}\ln 9=\frac{1}{20}\ln 3$$

114. 求积分

(a) 代换 $u = \tan 2x$, 则

$$\frac{du}{dx} = 2\sec^2 2x \implies dx = \frac{du}{2\sec^2 2x}, \quad x = 0 \to u = 0,\ x = \frac{\pi}{8} \to u = 1$$

原积分变为:

$$\int_0^{\pi/8} \frac{\sqrt{3}}{2 + \sin 4x}\, dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{2 + 2\sin 2x \cos 2x} \cdot \frac{du}{2\sec^2 2x} = \int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{4\sec^2 2x + 4\tan 2x}\, du$$

利用 $\sec^2 2x = 1 + \tan^2 2x$ 以及 $u = \tan 2x$:

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{4u^2 + 4u + 4}\, du = \frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^1 \frac{du}{(u + 1/2)^2 + 3/4}$$

(b) 进一步代换 $V = 2u + 1$, 则 $dV = 2du$,$u = 0 \to V = 1$,$u = 1 \to V = 3$:

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^1 \frac{du}{(u + 1/2)^2 + 3/4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \int_1^3 \frac{dV}{V^2 + (\sqrt{3})^2}$$

标准反正切积分公式:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \int_1^3 \frac{dV}{V^2 + 3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\arctan \frac{V}{\sqrt{3}}\right]_1^3 = \frac{1}{2}\left[\arctan \sqrt{3} - \arctan \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{12}$$

115. 36) 计算不定积分:

$$\int \frac{1}{1 + \sin^2 x} dx$$

分子分母同时除以 $\cos^2 x$:

$$I = \int \frac{\sec^2 x}{\sec^2 x + \tan^2 x} dx = \int \frac{\sec^2 x}{1 + 2\tan^2 x} dx$$

设 $u = \sqrt{2}\tan x$, 则 $du = \sqrt{2}\sec^2 x dx$。代入积分式:

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{u^2 + 1} du = \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1} u + C$$

还原变量:

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1}(\sqrt{2}\tan x) + C$$

116. 求积分

$$\int_{\pi/6}^{2\pi/9} \frac{1}{2+\cos 3x}\, dx$$

使用代换 $t = \tan\frac{3x}{2} \implies dx = \frac{2}{3(1+t^2)}\, dt$:

$$x = \pi/6 \to t = 1, \quad x = 2\pi/9 \to t = \sqrt{3}$$

利用三角恒等式 $\cos 3x = \cos^2\frac{3x}{2} - \sin^2\frac{3x}{2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, 积分变为

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{3(1+t^2)}\, dt = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1+t^2}{3+t^2} \cdot \frac{2}{3(1+t^2)}\, dt = \frac{2}{3}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2+3}\, dt$$

这是标准反正切积分:

$$\frac{2}{3}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2+(\sqrt{3})^2}\, dt = \frac{2}{3\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\right]_1^{\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}\left[\arctan(1) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]$$

计算反正切值:

$$\arctan(1) = \frac{\pi}{4}, \quad \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$$

因此积分结果为

$$\frac{2}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{12} = \frac{\pi\sqrt{3}}{54}.$$

117.

$$\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\sec x + \tan x}}\, dx$$

注意到

$$\frac{d}{dx}(\sec x + \tan x) = \sec^2 x + \sec x \tan x$$

先将被积式拆分

$$\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\sec x + \tan x}}\, dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x - \sec x \tan x}{\sqrt{\sec x + \tan x}}\, dx$$

写成两部分

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sqrt{\sec x + \tan x}}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{\sec^2 x - \sec x \tan x}{\sqrt{\sec x + \tan x}}\,dx$$

处理第二个积分，利用恒等式

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

有

$$\sec^2 x - \sec x \tan x = \sec x(\sec x - \tan x) = \sec x(\sec x - \tan x)\frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}$$

于是

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sqrt{\sec x + \tan x}}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{\sec x(\sec^2 x - \tan^2 x)}{(\sec x + \tan x)^{3/2}}\,dx$$

而

$$\sec^2 x - \tan^2 x = 1$$

故

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sqrt{\sec x + \tan x}}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{\sec x}{(\sec x + \tan x)^{3/2}}\,dx$$

将第二项写成同一结构

$$= \frac{1}{2}\int (\sec^2 x + \sec x \tan x)(\sec x + \tan x)^{-1/2}\,dx + \frac{1}{2}\int (\sec^2 x + \sec x \tan x)(\sec x + \tan x)^{-5/2}\,dx$$

对两项分别作代换

$$u = \sec x + \tan x$$

得到

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{1/2}}{1/2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{-3/2}}{-3/2} + C$$

化简并代回

$$= (\sec x + \tan x)^{1/2} - \frac{1}{3}(\sec x + \tan x)^{-3/2} + C$$

118.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4\sin x\sqrt{\cos 2x}\,dx$$

先用三角恒等式

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

则

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4\sin x\sqrt{2\cos^2 x - 1}\,dx$$

作代换

$$u = \cos x$$

则

$$\frac{du}{dx} = -\sin x, \quad dx = \frac{du}{-\sin x}$$

当 $x = 0$ 时,$u = 1$ 当 $x = \frac{\pi}{4}$ 时,$u = \frac{\sqrt{2}}{2}$

于是

$$I = \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} 4\sqrt{2u^2 - 1}(-du) = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 4\sqrt{2u^2 - 1}\,du$$

再作三角代换

$$\sec\theta = \sqrt{2}u$$

则

$$du = \frac{\sec\theta\tan\theta}{\sqrt{2}}\,d\theta$$

且

$$\sqrt{2u^2 - 1} = \sqrt{\sec^2\theta - 1} = \tan\theta$$

当 $u = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时,$\theta = 0$ 当 $u = 1$ 时,$\theta = \frac{\pi}{4}$

因此

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4}{\sqrt{2}}\tan\theta(\sec\theta\tan\theta)\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4}{\sqrt{2}}\tan^2\theta\sec\theta\,d\theta$$

对该积分分部积分,

$$I = \left[\frac{4}{\sqrt{2}}\tan\theta\sec\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{4}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3\theta\,d\theta$$

于是

$$I = 4 - \frac{4}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec\theta(1 + \tan^2\theta)\,d\theta$$

$$= 4 - \frac{4}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec\theta\,d\theta - \frac{4}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec\theta\tan^2\theta\,d\theta$$

注意到后一个积分正好等于 I, 于是

$$I = 4 - \frac{4}{\sqrt{2}}\left[\ln(\sec\theta + \tan\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - I$$

从而

$$2I = 4 - \frac{4}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}+1)$$

解得

$$I = 2 - \sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)$$

119. 设积分

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}\,dx$$

(a) 证明

$$I + \pi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4}{1+\cos^2 x}\,dx$$

(b) 从而求 I 的精确化简值

(c) 用另一种方法验证 (b) 的结果, 先将被积函数写成 $\cot^2 x$ 的函数

(a) 由

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}\,dx$$

有

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{1+\cos^2 x}\,dx$$

即

$$I = \int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2 x}\,dx$$

又

$$\int_0^{\pi} 1\,dx = \pi$$

于是

$$\begin{aligned} I + \pi &= \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}\,dx + \int_0^{\pi} 1\,dx \\ &= 2\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2 x}\,dx \end{aligned}$$

注意到被积函数关于 $\frac{\pi}{2}$ 对称,

$$I+\pi=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos^2 x}\,dx$$

即

$$I+\pi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4}{1+\cos^2 x}\,dx$$

(b) 将分子分母同乘 $\sec^2 x$,

$$\begin{aligned}I+\pi&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4\sec^2 x}{\sec^2 x+1}\,dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4\sec^2 x}{2+\tan^2 x}\,dx\end{aligned}$$

写成反正切形式,

$$\begin{aligned}I+\pi&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4\sec^2 x}{(\sqrt{2})^2+(\tan x)^2}\,dx\\&=4\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}I+\pi&=2\sqrt{2}\left[\arctan\left(\frac{\tan(\frac{\pi}{2})}{\sqrt{2}}\right)-\arctan\left(\frac{\tan 0}{\sqrt{2}}\right)\right]\\&=2\sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\pi\sqrt{2}\end{aligned}$$

故

$$I=\pi\sqrt{2}-\pi=\pi(\sqrt{2}-1)$$

(c) 将被积函数化为 $\cot^2 x$ 的形式,

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}\,dx=\int_0^{\pi}\frac{1}{\csc^2 x+\cot^2 x}\,dx=\int_0^{\pi}\frac{1}{1+2\cot^2 x}\,dx$$

令

$$u=\cot x$$

则

$$\begin{aligned}du&=-\csc^2 x\,dx\\dx&=-\frac{du}{1+u^2}\end{aligned}$$

当 $x=0$ 时,$u=+\infty$; 当 $x=\pi$ 时,$u=-\infty$

积分化为

$$\int_{+\infty}^{-\infty} \frac{1}{1+2u^2}\left(-\frac{du}{1+u^2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+2u^2)(1+u^2)}\, du$$

作部分分式分解,

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{2}{1+2u^2} - \frac{1}{1+u^2}\right) du$$

被积函数为偶函数,

$$= 2\int_{0}^{\infty} \left(\frac{1}{u^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} - \frac{1}{1+u^2}\right) du$$

积分得

$$= 2\left[\sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}u) - \arctan u\right]_0^{\infty}$$

$$= 2\left(\sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \pi\sqrt{2} - \pi$$

即

$$I = \pi(\sqrt{2}-1)$$

与 (b) 结果一致

120. 证明三倍角公式并计算积分

$$\int_0^{2-\sqrt{3}} \frac{6x(3-x^2)}{1-2x^2-3x^4}\, dx$$

(a) 从 $\tan 3\theta = \tan(2\theta+\theta)$ 开始:

$$\tan 3\theta = \frac{\tan 2\theta + \tan\theta}{1-\tan 2\theta\tan\theta} = \frac{\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} + \tan\theta}{1-\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\tan\theta}$$

将分子分母同时乘以 $1-\tan^2\theta$:

$$\tan 3\theta = \frac{2\tan\theta + \tan\theta(1-\tan^2\theta)}{1-\tan^2\theta-2\tan^2\theta} = \frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}$$

(b) 考虑积分:

$$\int_0^{2-\sqrt{3}} \frac{6x(3-x^2)}{1-2x^2-3x^4}\, dx = \int_0^{2-\sqrt{3}} \frac{6x(3-x^2)}{-(3x^4+2x^2-1)}\, dx = \int_0^{2-\sqrt{3}} \frac{6x(3-x^2)}{(1-3x^2)(x^2+1)}\, dx$$

令 $x=\tan\theta \implies dx=\sec^2\theta\,d\theta,\quad x=0\to\theta=0,\quad x=2-\sqrt{3}\to\theta=\frac{\pi}{12}$:

$$\int_0^{2-\sqrt{3}}\frac{6x(3-x^2)}{(1-3x^2)(x^2+1)}\,dx=\int_0^{\pi/12}\frac{6\tan3\theta}{\tan^2\theta+1}\sec^2\theta\,d\theta=\int_0^{\pi/12}6\tan3\theta\,d\theta$$

积分结果:

$$\int 6\tan3\theta\,d\theta=2\ln|\sec3\theta|$$

代入上下限:

$$\left[2\ln|\sec3\theta|\right]_0^{\pi/12}=2\ln\sec(\pi/4)-2\ln\sec0=2\ln\sqrt{2}-0=\ln2$$

因此:

$$\int_0^{2-\sqrt{3}}\frac{6x(3-x^2)}{1-2x^2-3x^4}\,dx=\ln2$$

121. 求积分

$$\int\sec x\,dx$$

(a) 验证恒等式:

$$\sec x=\frac{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

由半角公式:

$$\sin x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}},\quad \cos x=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

则

$$\sec x=\frac{1}{\cos x}=\frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}$$

(b) 部分分式分解:

$$\frac{2}{1-t^2}=\frac{2}{(1-t)(1+t)}=\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}$$

(c) 使用代换 $t=\tan\frac{x}{2}\implies dx=\frac{2}{1+t^2}dt$:

$$\int\sec x\,dx=\int\frac{1+t^2}{1-t^2}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt=\int\frac{2}{1-t^2}\,dt=\int\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\,dt=\ln|1+t|-\ln|1-t|+C=\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C$$

注意到 $\frac{1+t}{1-t}=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{x}{2}}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$，于是最终结果为:

$$\int\sec x\,dx=\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$$

122. 求

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x+\sin x}{\sqrt{\sin 2x}}\,dx$$

首先将被积式化简:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x+\sin x}{\sqrt{\sin 2x}}\,dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x+\sin x}{\sqrt{2\sin x\cos x}}\,dx$$

使用代换:

$$u=\sin x-\cos x,\quad du=(\cos x+\sin x)\,dx,\quad dx=\frac{du}{\cos x+\sin x}$$

积分上下限:

$$x=\frac{\pi}{6}\to u=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\alpha,\quad x=\frac{\pi}{3}\to u=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}=\alpha$$

关系式:

$$u^2=(\sin x-\cos x)^2=\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x=1-2\sin x\cos x$$

$$\Rightarrow 2\sin x\cos x=1-u^2$$

代入积分:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x+\sin x}{\sqrt{2\sin x\cos x}}\,dx=\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\cos x+\sin x}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\frac{du}{\cos x+\sin x}=\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$$

由于被积函数是偶函数:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du=2\int_{0}^{\alpha}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du=2[\arcsin u]_0^{\alpha}=2\arcsin\alpha$$

代入 $\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}$:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x+\sin x}{\sqrt{\sin 2x}}\,dx=2\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$$

123. 27) 计算不定积分:

$$\int \frac{\sin^3\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}\sqrt{\cos x+\cos^2 x+\cos^3 x}}dx$$

利用三角恒等式简化分子, 并设 $t=\cos x, dt=-\sin x dx$:

$$I=\frac{1}{2}\int \frac{\sin x(1-\cos x)}{(1+\cos x)\sqrt{\cos x+\cos^2 x+\cos^3 x}}dx$$

代入变量 t:

$$=\frac{1}{2}\int \frac{t^2-1}{(t+1)^2\sqrt{t+t^2+t^3}}dt=\frac{1}{2}\int \frac{1-\frac{1}{t^2}}{(t+2+\frac{1}{t})\sqrt{t+1+\frac{1}{t}}}dt$$

设 $u^2=t+1+\frac{1}{t}$, 则 $2udu=(1-\frac{1}{t^2})dt$:

$$I=\int \frac{du}{u^2+1}=\tan^{-1}u+C$$

还原变量:

$$I=\tan^{-1}\sqrt{\cos x+\sec x+1}+C$$

124.

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1-\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{\arcsin x}}\,dx$$

使用代换

$$u=\sqrt{\arcsin x} \implies u^2=\arcsin x, \quad 2u\,du=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \quad dx=2u\sqrt{1-x^2}\,du$$

积分上下限变为:

$$x=\frac{1}{2} \implies u=\sqrt{\arcsin\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{\pi}{6}}, \quad x=\frac{\sqrt{3}}{2} \implies u=\sqrt{\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\frac{\pi}{3}}$$

原积分变为:

$$\int_{\sqrt{\pi/6}}^{\sqrt{\pi/3}} \frac{1-u^2}{u}\cdot 2u\,du=\int_{\sqrt{\pi/6}}^{\sqrt{\pi/3}} 2(1-u)\,du=\int_{\sqrt{\pi/6}}^{\sqrt{\pi/3}} (2-2u)\,du$$

积分得到:

$$\left[2u-u^2\right]_{\sqrt{\pi/6}}^{\sqrt{\pi/3}}=\left(2\sqrt{\frac{\pi}{3}}-\frac{\pi}{3}\right)-\left(2\sqrt{\frac{\pi}{6}}-\frac{\pi}{6}\right)$$

化简:

$$=2\sqrt{\frac{\pi}{3}}-2\sqrt{\frac{\pi}{6}}-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}=2\sqrt{\frac{\pi}{3}}-2\sqrt{\frac{\pi}{6}}-\frac{\pi}{6}$$

因此积分结果为:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1-\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{\arcsin x}}\,dx=2\sqrt{\frac{\pi}{3}}-2\sqrt{\frac{\pi}{6}}-\frac{\pi}{6}.$$

125. 利用适当的积分方法证明

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\arcsin\sqrt{x}-\arccos\sqrt{x}}{\arcsin\sqrt{x}+\arccos\sqrt{x}}\,dx=\frac{1}{\pi}-\frac{1}{2}$$

先作代换

$$y=\sqrt{x}$$

则

$$x=y^2,\quad dx=2y\,dy$$

积分上下限变为

$$x=0\Rightarrow y=0,\qquad x=\frac{1}{2}\Rightarrow y=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

原积分化为

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{\arcsin y-\arccos y}{\arcsin y+\arccos y}\cdot 2y\,dy$$

利用恒等式

$$\arccos y=\frac{\pi}{2}-\arcsin y$$

得

$$\frac{\arcsin y-\arccos y}{\arcsin y+\arccos y}=\frac{2\arcsin y-\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{\pi}\arcsin y-1$$

因此

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{4}{\pi}\arcsin y - 1\right) 2y\, dy \\
&= \frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} y \arcsin y\, dy - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} 2y\, dy \\
&= \frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} y \arcsin y\, dy - \left[y^2\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\
&= \frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} y \arcsin y\, dy - \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

再作代换

$$y = \sin\theta$$

则

$$dy = \cos\theta\, d\theta$$

积分上下限变为

$$y = 0 \Rightarrow \theta = 0, \qquad y = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

于是

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} y \arcsin y\, dy &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta \sin\theta \cos\theta\, d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta \sin(2\theta)\, d\theta
\end{aligned}
$$

代回原式

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta \sin(2\theta)\, d\theta - \frac{1}{2}$$

对积分作分部积分

$$u = \theta, \quad dv = \sin(2\theta)\, d\theta$$

则

$$du = d\theta, \quad v = -\frac{1}{2}\cos(2\theta)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta \sin(2\theta)\, d\theta = \left[-\frac{1}{2}\theta\cos(2\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\theta)\, d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(2\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$= \frac{1}{4}$$

因此

$$\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}$$

证毕。

126. 计算 $[\int \frac{3\sin 2x + 4\cos x e^{\sin x} + 8\cos x}{3\sin x + e^{\sin x} + 1} dx]$。

首先，利用二倍角公式 $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ 展开分子:

$$= [\int \frac{6\sin x\cos x + 4\cos x e^{\sin x} + 8\cos x}{3\sin x + e^{\sin x} + 1} dx]$$

令 $u = \sin x$，则 $du = \cos x dx$。代入原式得:

$$= [\int \frac{6u + 4e^u + 8}{3u + e^u + 1} du]$$

提取分子中的常数 2:

$$= 2[\int \frac{3u + 2e^u + 4}{3u + e^u + 1} du]$$

将分子拆项，使其包含分母的形式:

$$= 2[\int \frac{(3u + e^u + 1) + (3 + e^u)}{3u + e^u + 1} du]$$

$$= 2([\int \frac{3u + e^u + 1}{3u + e^u + 1} du] + [\int \frac{e^u + 3}{3u + e^u + 1} du])$$
$$= 2[\int 1 du] + 2[\int \frac{d(3u + e^u + 1)}{3u + e^u + 1}]$$

进行积分:

$$= 2u + 2\ln|3u + e^u + 1| + C$$

最后回代 $u = \sin x$:

$$= 2\sin x + 2\ln|3\sin x + e^{\sin x} + 1| + C$$

127. 已知 $\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$

(a) 证明 $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = \frac{\sin^2 3x}{\sin x}$:

$$\begin{aligned}
\sin x(\sin x + \sin 3x + \sin 5x) &= \sin x(2\sin\frac{x+5x}{2}\cos\frac{x-5x}{2} + \sin 3x) \\
&= \sin x(2\sin 3x\cos(-2x) + \sin 3x) \\
&= \sin x\sin 3x(2\cos 2x + 1) \\
&= \sin 3x(\sin(x+2x) + \sin(x-2x) + \sin x) \\
&= \sin 3x(\sin 3x - \sin x + \sin x) \\
&= \sin^2 3x
\end{aligned}$$

因此得证:$\sin x + \sin 3x + \sin 5x = \frac{\sin^2 3x}{\sin x}$

(b) 计算 $\int \frac{\sin x + \sin 3x}{\cos x\sqrt{4-\cos^4 x}} dx$: 设 $u = \cos^2 x$, 则 $du = -2\sin x\cos x dx$。

$$\begin{aligned}
\int \frac{2\sin\frac{x+3x}{2}\cos\frac{x-3x}{2}}{\cos x\sqrt{4-\cos^4 x}} dx &= \int \frac{2\sin 2x\cos(-x)}{\cos x\sqrt{4-\cos^4 x}} dx \\
&= \int \frac{4\sin x\cos x\cos x}{\cos x\sqrt{4-\cos^4 x}} dx \\
&= \int \frac{4\sin x\cos x}{\sqrt{4-\cos^4 x}} dx \\
&= \int \frac{-2}{\sqrt{4-u^2}} du \\
&= -2\arcsin(\frac{u}{2}) + C \\
&= -2\arcsin(\frac{\cos^2 x}{2}) + C
\end{aligned}$$

(c) 计算 $\int \frac{16(\sin 2x + \sin 6x + \sin 10x)}{\cos 2x\sqrt{4-\cos^4 2x}} dx$: 利用 (a) 栏的结果, 设 $2x$ 为变量, 则分子部分可化简为 $16\frac{\sin^2 6x}{\sin 2x}$。设 $u = \cos^2 2x$, 则 $du = -4\sin 2x\cos 2x dx$。经过代换与积分（参考第二张图内容）:

$$\int (\frac{32u-4}{u\sqrt{4-u^2}} - \frac{64u}{\sqrt{4-u^2}}) du = 32\arcsin(\frac{u}{2}) + 2\ln|\frac{2+\sqrt{4-u^2}}{u}| + 64\sqrt{4-u^2} + C$$

代回 $u = \cos^2 2x$ 得最终结果:

$$I = 32\arcsin(\frac{\cos^2 2x}{2}) + 2\ln|\frac{2+\sqrt{4-\cos^4 2x}}{\cos^2 2x}| + 64\sqrt{4-\cos^4 2x} + C$$

128. (a) 计算 $[\int \frac{1}{4-3z^2}dz]$。

令 $z=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta$, 则 $\frac{dz}{d\theta}=\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta \implies dz=\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta d\theta$。

$$[\int \frac{1}{4-4\sin^2\theta}(\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta)d\theta]=[\int \frac{1}{4\cos^2\theta}(\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta)d\theta]$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}[\int \sec\theta d\theta]=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln|\sec\theta+\tan\theta|+C$$

根据辅助三角形,$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}z}{2}, \sec\theta=\frac{2}{\sqrt{4-3z^2}}, \tan\theta=\frac{\sqrt{3}z}{\sqrt{4-3z^2}}$。

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln|\frac{2+\sqrt{3}z}{\sqrt{4-3z^2}}|+C=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln|\sqrt{\frac{(2+\sqrt{3}z)^2}{(2-\sqrt{3}z)(2+\sqrt{3}z)}}|+C$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln|\frac{2+\sqrt{3}z}{2-\sqrt{3}z}|+C=\frac{\sqrt{3}}{12}\ln|\frac{2+\sqrt{3}z}{2-\sqrt{3}z}|+C$$

129. (b) 计算 $[\int \frac{\cos u}{\tan^2 u+4}du]$。

$$[\int \frac{\cos u}{\frac{\sin^2 u}{\cos^2 u}+4}du]=[\int \frac{\cos^3 u}{\sin^2 u+4\cos^2 u}du]$$

$$=[\int \frac{\cos^3 u}{\sin^2 u+4(1-\sin^2 u)}du]=[\int \frac{\cos^3 u}{4-3\sin^2 u}du]$$

令 $t=\sin u$, 则 $dt=\cos u du, \cos^2 u=1-t^2$。

$$=[\int \frac{1-t^2}{4-3t^2}dt]=[\int \frac{\frac{1}{3}(4-3t^2)-\frac{1}{3}}{4-3t^2}dt]=\frac{1}{3}([\int 1dt]-[\int \frac{1}{4-3t^2}dt])$$

利用 (a) 的结果:

$$=\frac{\sin u}{3}-\frac{1}{3}(\frac{\sqrt{3}}{12}\ln|\frac{2+\sqrt{3}\sin u}{2-\sqrt{3}\sin u}|)+C=\frac{\sin u}{3}-\frac{\sqrt{3}}{36}\ln|\frac{2+\sqrt{3}\sin u}{2-\sqrt{3}\sin u}|+C$$

130. (c) 计算 $[\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{90(\sec x-\cos x)}{(\sec x+3\cos x)^2}dx]$。

$$=90[\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\cos x}-\cos x}{(\frac{1}{\cos x}+3\cos x)^2}dx]=90[\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x\cos x}{(1+3\cos^2 x)^2}dx]$$

令 $t=\sin x$, 则 $dt=\cos x dx$。当 $x=\pm\frac{\pi}{4}$ 时,$t=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$。

$$=90[\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{t^2}{(1+3(1-t^2))^2}dt]=180[\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{t^2}{(4-3t^2)^2}dt]$$

对不定积分使用换元 $t=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta$:

$$[\int\frac{t^2}{(4-3t^2)^2}dt]=[\int\frac{\frac{4}{3}\sin^2\theta}{16\cos^4\theta}\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta d\theta]=\frac{1}{6\sqrt{3}}[\int\tan^2\theta\sec\theta d\theta]$$

$$=\frac{1}{6\sqrt{3}}([\int\sec^3\theta d\theta]-[\int\sec\theta d\theta])=\frac{1}{12\sqrt{3}}(\sec\theta\tan\theta-\ln|\sec\theta+\tan\theta|)+C$$

回代 t 并带入上下限:

$$[\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{t^2}{(4-3t^2)^2}dt]=\frac{1}{6\sqrt{3}}[\frac{\sqrt{3}t}{4-3t^2}-\frac{1}{2}\ln(\frac{2+\sqrt{3}t}{\sqrt{4-3t^2}})]\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$=\frac{1}{6\sqrt{3}}[\frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{4-\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\ln(\frac{2+\frac{\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{4-\frac{3}{2}}})]=\frac{1}{15\sqrt{2}}-\frac{1}{12\sqrt{3}}\ln(\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}})$$

乘以系数 180:

$$180[\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{t^2}{(4-3t^2)^2}dt]=6\sqrt{2}-5\sqrt{3}\ln(\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}})$$

131. 计算以下积分: (a) $[\int\frac{2\sin x}{\cos^2 x+4}dx]$ (b) $[\int\frac{2\sec^2 x+3\sec x\tan x}{4+\tan^2 x}dx]$

(a) 令 $u=\cos x$, 则 $du=-\sin x dx$。

$$[\int\frac{2\sin x}{\cos^2 x+4}dx]=-[\int\frac{2}{u^2+4}du]$$

进一步令 $u=2\tan v$, 则 $du=2\sec^2 v dv$。

$$=-[\int\frac{2}{(2\tan v)^2+4}\cdot 2\sec^2 v dv]=-[\int\frac{4\sec^2 v}{4(1+\tan^2 v)}dv]$$

$$=-[\int 1dv]=-v+C$$

由于 $v=\tan^{-1}(\frac{u}{2})$ 且 $u=\cos x$:

$$=-\tan^{-1}(\frac{\cos x}{2})+C$$

(b) 将积分拆分为两部分:

$$[\int \frac{2\sec^2 x + 3\sec x\tan x}{4+\tan^2 x}dx] = [\int \frac{2\sec^2 x}{4+\tan^2 x}dx] + [\int \frac{3\sec x\tan x}{4+\tan^2 x}dx]$$

对于第一部分, 令 $v = \tan x$, 则 $dv = \sec^2 x dx$。对于第二部分, 令 $u = \sec x$, 由于 $1+\tan^2 x = \sec^2 x$, 故 $\tan^2 x = u^2 - 1$。

$$= [\int \frac{2}{4+v^2}dv] + [\int \frac{3}{4+(u^2-1)}du]$$

$$= [\int \frac{2}{v^2+4}dv] + [\int \frac{3}{u^2+3}du]$$

使用积分公式 $[\int \frac{1}{x^2+a^2}dx] = \frac{1}{a}\tan^{-1}(\frac{x}{a}) + C$: 第一部分: 令 $v = 2\tan\alpha$, 得 $\frac{2}{2}\tan^{-1}(\frac{v}{2}) = \tan^{-1}(\frac{\tan x}{2})$。(注: 原稿中此处使用了 $v = \sqrt{5}\tan\alpha$ 的换元, 似乎针对的是分母为 $5+\tan^2 x$ 的情况, 若按题目 $4+\tan^2 x$ 计算如下):

$$= \tan^{-1}(\frac{\tan x}{2}) + \frac{3}{\sqrt{3}}\tan^{-1}(\frac{\sec x}{\sqrt{3}}) + C$$

$$= \tan^{-1}(\frac{\tan x}{2}) + \sqrt{3}\tan^{-1}(\frac{\sec x}{\sqrt{3}}) + C$$

132. 2) 计算不定积分:

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx$$

使用分部积分法, 令 $u = x, dv = \frac{x}{(1+x^2)^2}dx$: 则 $du = dx, v = -\frac{1}{2(1+x^2)}$。

根据分部积分公式:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx &= -\frac{x}{2(1+x^2)} + \int \frac{1}{2(1+x^2)}dx \\ &= -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\tan^{-1} x + C\end{aligned}$$

133.

$$\int_2^4 \left(\log_x 2 - \frac{\log_x^2 2}{\ln 2}\right)\, dx$$

由分部积分,

$$\begin{aligned}\int_2^4\left(\log_x 2-\frac{\log_x^2 2}{\ln 2}\right)dx&=\ln 2\left(\int_2^4\frac{1}{\ln x}\,dx-\int_2^4\frac{1}{(\ln x)^2}\,dx\right)\\&=\ln 2\left(\left[\frac{x}{\ln x}\right]_2^4+\int_2^4\frac{1}{(\ln x)^2}\,dx-\int_2^4\frac{1}{(\ln x)^2}\,dx\right)\\&=\ln 2\cdot\left(\frac{4}{\ln 4}-\frac{2}{\ln 2}\right)\\&=0\end{aligned}$$

134. 3) 计算不定积分:

$$\int xe^x\cos x dx$$

首先利用分部积分法处理 $e^x\cos x$。已知:

$$\int e^x\cos x dx=\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)$$

$$\int e^x\sin x dx=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)$$

对原式使用分部积分,令 $u=x,dv=e^x\cos x dx$:

$$\begin{aligned}\int xe^x\cos x dx&=\frac{1}{2}xe^x(\sin x+\cos x)-\int\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)dx\\&=\frac{1}{2}xe^x(\sin x+\cos x)-\frac{1}{2}\left[\int e^x\sin x dx+\int e^x\cos x dx\right]\\&=\frac{1}{2}xe^x(\sin x+\cos x)-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)\right]\\&=\frac{1}{2}xe^x(\sin x+\cos x)-\frac{1}{2}e^x\sin x+C\\&=\frac{1}{2}e^x(x\sin x+x\cos x-\sin x)+C\end{aligned}$$

135. 计算 $[\int_0^1\frac{\sin^{-1}x}{x}dx]$。

令 $x=\sin\theta$, 则 $dx=\cos\theta d\theta$。积分式转化为:

$$I=[\int_0^{\pi/2}\frac{\theta\cos\theta}{\sin\theta}d\theta]=[\int_0^{\pi/2}\theta\cot\theta d\theta]$$

使用分部积分法, 令 $u=\theta, dv=\cot\theta d\theta$:

$$I=[\theta\ln(\sin\theta)]_0^{\pi/2}-[\int_0^{\pi/2}\ln(\sin\theta)d\theta]$$

第一项代入上下限后为 0。利用标准积分公式 $[\int_0^{\pi/2}\ln(\sin\theta)d\theta]=-\frac{\pi}{2}\ln 2$:

$$I=-(-\frac{\pi}{2}\ln 2)=\frac{\pi}{2}\ln 2$$

136.

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\sin x\,dx$$

by parts

设

$$I=\int_0^{\infty} e^{-x}\sin x\,dx.$$

分部积分两次得

$$I=-e^{-x}\sin x+\int e^{-x}\cos x\,dx=-e^{-x}(\sin x+\cos x)-I.$$

移项得

$$2I=-e^{-x}(\sin x+\cos x)\Rightarrow I=-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x).$$

取定积分, 注意 $\lim_{x\to\infty} e^{-x}(\sin x+\cos x)=0$, 代入得:

$$I=\left[-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)\right]_0^{\infty}=0-\left(-\frac{1}{2}\cdot 1\right)=\frac{1}{2}.$$

137.

$$\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx$$

换元 $u=x+1$, 再分部积分得

$$
\begin{aligned}
\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx &= \int \frac{(u-1)e^{u-1}}{u^2}\,du \\
&= \frac{1}{e}\int \frac{(u-1)e^u}{u^2}\,du \\
&= \frac{1}{e}\left(\int \frac{e^u}{u}\,du - \int \frac{e^u}{u^2}\,du\right) \\
&= \frac{1}{e}\left(\frac{e^u}{u} + \int \frac{e^u}{u^2}\,du - \int \frac{e^u}{u^2}\,du\right) \\
&= \frac{e^{u-1}}{u} + C \\
&= \frac{e^x}{x+1} + C
\end{aligned}
$$

138. 23) 计算不定积分:

$$\int \sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx$$

使用分部积分法, 令 $u=\sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{1+x}}, dv=dx$:

$$
\begin{aligned}
I &= x\sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{1+x}} - \int x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{1+x}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{1+x}}}\cdot\frac{1}{(1+x)^2}dx \\
&= x\sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{1+x}} - \frac{1}{2}\int x\cdot\sqrt{1+x}\cdot\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{(1+x)^2}dx \\
&= x\sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{1+x}} - \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx
\end{aligned}
$$

对剩余积分项进行凑项处理:

$$\frac{1}{2}\int \frac{x+1-1}{\sqrt{x}(1+x)}dx = \int \frac{1}{2\sqrt{x}}dx - \int \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}dx$$

进行积分计算:

- 第一项:$\int \frac{1}{2\sqrt{x}}dx=\sqrt{x}$。
- 第二项: 设 $\sqrt{x}=t$, 则 $\int \frac{1}{1+t^2}dt=\tan^{-1}t=\tan^{-1}\sqrt{x}$。

合并最终结果:

$$I = x\sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{1+x}} - \sqrt{x} + \tan^{-1}\sqrt{x} + C$$

139. 5) 计算不定积分 $\int x\tan^{-1}x^2dx$

设 $u=x^2, du=2xdx$:

$$\int x\tan^{-1}x^2dx=\frac{1}{2}\int\tan^{-1}udu$$

使用分部积分法:

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2}\left(u\tan^{-1}u-\int\frac{u}{1+u^2}du\right)\\&=\frac{1}{2}u\tan^{-1}u-\frac{1}{4}\ln(1+u^2)+C\\&=\frac{1}{2}x^2\tan^{-1}x^2-\frac{1}{4}\ln(1+x^4)+C\end{aligned}$$

140. 15) 计算不定积分:

$$\int\frac{x\sin x}{\cos^5 x}dx$$

使用分部积分法，令 $u=x, dv=\frac{\sin x}{\cos^5 x}dx$。对于 $v=\int\tan x\sec^4 xdx$，设 $\tan x=t$:

$$v=\int t(1+t^2)dt=\frac{1}{2}\tan^2 x+\frac{1}{4}\tan^4 x=\frac{1}{4}\sec^4 x-\frac{1}{4}$$

代入分部积分公式:

$$I=\frac{x}{4}\sec^4 x-\int\frac{1}{4}\sec^4 xdx$$

利用 $\int\sec^4 xdx=\tan x+\frac{1}{3}\tan^3 x$:

$$I=\frac{x\sec^4 x}{4}-\frac{1}{4}\tan x-\frac{1}{12}\tan^3 x+C$$

141. 9) 计算不定积分:

$$I=\int\cos(3\ln x)dx$$

使用换元法，设 $x=e^y$，则 $dx=e^ydy$。代入原积分:

$$I=\int e^y\cos 3ydy$$

对上述积分使用两次分部积分法：第一次分部积分：令 $u = \cos 3y, dv = e^y dy$，则 $du = -3\sin 3y dy, v = e^y$。

$$I = e^y \cos 3y + 3\int e^y \sin 3y dy$$

第二次分部积分：对 $\int e^y \sin 3y dy$ 再次令 $u = \sin 3y, dv = e^y dy$，则 $du = 3\cos 3y dy, v = e^y$。

$$\int e^y \sin 3y dy = e^y \sin 3y - 3\int e^y \cos 3y dy$$

将结果代回 I 的表达式：

$$I = e^y \cos 3y + 3\left(e^y \sin 3y - 3I\right)$$

$$I = e^y \cos 3y + 3e^y \sin 3y - 9I$$

解关于 I 的方程：

$$10I = e^y(\cos 3y + 3\sin 3y)$$

$$I = \frac{e^y}{10}(\cos 3y + 3\sin 3y) + C$$

还原变量 $y = \ln x$：

$$I = \frac{x}{10}[\cos(3\ln x) + 3\sin(3\ln x)] + C$$

结果：

$$\int \cos(3\ln x)dx = \frac{x}{10}[\cos(3\ln x) + 3\sin(3\ln x)] + C$$

142. 求下列积分的精确值

$$\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} (4x^2 - 16x + 15)^4 \, dx$$

先进行因式分解

$$4x^2 - 16x + 15 = (2x-3)(2x-5)$$

因此

$$\begin{aligned}\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} (4x^2 - 16x + 15)^4 \, dx &= \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} [(2x-3)(2x-5)]^4 \, dx \\ &= \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} (2x-3)^4(2x-5)^4 \, dx\end{aligned}$$

第一次分部积分

$$= \left[\frac{1}{10}(2x-3)^5(2x-5)^4\right]_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} - \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \frac{4}{5}(2x-3)^5(2x-5)^3\,dx$$

第二次分部积分

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{4}{55}(2x-3)^5(2x-5)^4\right]_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} - \left[\frac{2}{5}(2x-3)^6(2x-5)^3\right]_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \\
&\quad + \frac{6}{5}\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} (2x-3)^6(2x-5)^2\,dx
\end{aligned}$$

第三次分部积分

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{5}\left\{\left[\frac{1}{14}(2x-3)^7(2x-5)^2\right]_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{7}\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} (2x-3)^7(2x-5)\,dx\right\} \\
&= -\frac{4}{35}\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} (2x-3)^7(2x-5)\,dx
\end{aligned}$$

最后一次分部积分

$$\begin{aligned}
&= -\frac{4}{35}\left\{\left[\frac{1}{16}(2x-3)^8(2x-5)\right]_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{8}\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} (2x-3)^8\,dx\right\} \\
&= \frac{1}{70}\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} (2x-3)^8\,dx
\end{aligned}$$

直接积分

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{70}\left[\frac{(2x-3)^9}{18}\right]_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \\
&= \frac{1}{1260}\left[(2x-3)^9\right]_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \\
&= \frac{1}{1260}\left[(5-3)^9-(3-3)^9\right] \\
&= \frac{512}{1260} \\
&= \frac{128}{315}
\end{aligned}$$

143.

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} (\cos 2x + \sin 2x)(\ln \cos x + \ln \sin x)\, dx$$

首先利用对数性质:

$$\ln \cos x + \ln \sin x = \ln(\cos x \sin x) = \ln \frac{\sin 2x}{2} = \ln(\sin 2x) - \ln 2$$

因此积分可以写为:

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} (\cos 2x + \sin 2x)(\ln \sin 2x - \ln 2)\, dx = \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\cos 2x + \sin 2x) \ln \sin 2x\, dx - \ln 2 \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\cos 2x + \sin 2x)\, dx$$

第二个积分简单计算:

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} (\cos 2x + \sin 2x)\, dx = \left[\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x\right]_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - 0\right) = 0$$

所以问题简化为:

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} (\cos 2x + \sin 2x) \ln \sin 2x\, dx$$

使用分部积分, 设

$$u = \ln \sin 2x, \quad dv = (\cos 2x + \sin 2x) dx$$

得到

$$du = \frac{2\cos 2x}{\sin 2x} dx, \quad v = \frac{1}{2}(\sin 2x - \cos 2x)$$

分部积分公式:

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

代入得:

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} (\cos 2x + \sin 2x) \ln \sin 2x\, dx = \left[\frac{1}{2}(\sin 2x - \cos 2x) \ln \sin 2x\right]_{\pi/4}^{\pi/2} - \frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin 2x - \cos 2x) \frac{2\cos 2x}{\sin 2x}\, dx$$

化简被积函数:

$$(\sin 2x - \cos 2x) \frac{2\cos 2x}{\sin 2x} = 2\cos 2x - 2\frac{\cos^2 2x}{\sin 2x} = 2\cos 2x - 2\frac{1 - \sin^2 2x}{\sin 2x} = 2(\cos 2x + \sin 2x - \csc 2x)$$

于是积分化为:

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} (\cos 2x + \sin 2x) \ln \sin 2x\, dx = \left[\frac{1}{2}(\sin 2x - \cos 2x) \ln \sin 2x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\ln \tan x\right]_{\pi/4}^{\pi/2}$$

在端点代入:

$$x=\pi/2: \quad \sin 2x=0, \quad \cos 2x=-1 \implies \text{对数项消失}$$
$$x=\pi/4: \quad \sin 2x=1, \quad \cos 2x=0 \implies \text{得到}\frac{1}{2}\ln 2$$

因此最终结果为:

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2}(\cos 2x+\sin 2x)(\ln\cos x+\ln\sin x)\,dx=\frac{1}{2}\ln 2$$

144. Evaluate $\int \frac{e^x(1+\sin x)}{1+\cos x}\,dx$.

将分母化为半角形式:

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x(1+\sin x)}{1+\cos x}\,dx &= \int \frac{e^x\left(1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)}{2\cos^2\frac{x}{2}}\,dx \\ &= \int e^x\left(\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}+\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}\right)\,dx \\ &= \int e^x\left(\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}\right)\,dx.\end{aligned}$$

注意 $\frac{d}{dx}\tan\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}$, 于是利用公式 $\int e^x(f(x)+f'(x))\,dx=e^xf(x)+C$ 得:

$$\int \frac{e^x(1+\sin x)}{1+\cos x}\,dx=e^x\tan\frac{x}{2}+C.$$

145.

$$\int\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\,dx$$

观察被积函数, 猜测含指数的项需要积分, 尝试寻找一个全微分。

注意

$$\frac{d}{dx}\left[e^{x+\frac{1}{x}}\right]=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}$$

将积分重写为:

$$\int\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\,dx=\int\left[e^{x+\frac{1}{x}}+x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\right]\,dx$$

拆分积分:

$$= \int e^{x+\frac{1}{x}}\,dx + \int x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\,dx$$

对第二项使用分部积分得到:

$$\int x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\,dx = xe^{x+\frac{1}{x}} - \int e^{x+\frac{1}{x}}\,dx$$

因此原积分为:

$$\int\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\,dx = \int e^{x+\frac{1}{x}}\,dx + \left[xe^{x+\frac{1}{x}} - \int e^{x+\frac{1}{x}}\,dx\right] = xe^{x+\frac{1}{x}} + C$$

146. 证明

$$\int_0^1 12x^2 \arctan x\,dx = \pi - 2 + \ln 4$$

步骤 1: 分部积分

令

$$u = \arctan x, \quad dv = 12x^2\,dx \implies du = \frac{1}{1+x^2}\,dx, \quad v = 4x^3$$

利用分部积分公式:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

得到:

$$\int_0^1 12x^2 \arctan x\,dx = \left[4x^3 \arctan x\right]_0^1 - \int_0^1 4x^3 \cdot \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

步骤 2: 计算第一项

$$\left[4x^3 \arctan x\right]_0^1 = 4 \cdot \arctan 1 - 0 = 4 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi$$

步骤 3: 化简剩余积分

$$\int_0^1 \frac{4x^3}{1+x^2}\,dx$$

令

$$w = 1 + x^2 \implies dw = 2x\,dx, \quad x^2 = w - 1$$

积分上下限:

$$x = 0 \to w = 1, \quad x = 1 \to w = 2$$

于是:

$$\int_0^1 \frac{4x^3}{1+x^2}\,dx = \int_1^2 \frac{4(w-1)\cdot x}{w}\frac{dw}{2x} = 2\int_1^2 \frac{w-1}{w}\,dw$$
$$= 2\int_1^2 \left(1-\frac{1}{w}\right)\,dw = 2\big[w-\ln|w|\big]_1^2$$

步骤 4: 代入上下限

$$2\big[w-\ln|w|\big]_1^2 = 2\big((2-\ln 2)-(1-\ln 1)\big)$$
$$= 2(1-\ln 2) = 2-2\ln 2 = 2-\ln 4$$

步骤 5: 组合结果

$$\int_0^1 12x^2\arctan x\,dx = \pi-(2-\ln 4) = \pi-2+\ln 4$$

147.

$$\int_{-\frac{1}{6}\ln 3}^{\frac{1}{6}\ln 3} 6e^{-3x}\arctan(e^{3x})\,dx$$

作代换

$$\theta = \arctan(e^{3x}) \implies \tan\theta = e^{3x}, \quad \sec^2\theta\,d\theta = 3e^{3x}\,dx \implies dx = \frac{\sec^2\theta}{3e^{3x}}\,d\theta$$

积分上下限:

$$x = -\frac{1}{6}\ln 3 \implies \theta = \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}, \quad x = \frac{1}{6}\ln 3 \implies \theta = \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$

代入积分:

$$\int_{-\frac{1}{6}\ln 3}^{\frac{1}{6}\ln 3} 6e^{-3x}\arctan(e^{3x})\,dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 2\theta\csc^2\theta\,d\theta$$

使用分部积分:

$$\int 2\theta\csc^2\theta\,d\theta = -2\theta\cot\theta + \int 2\cot\theta\,d\theta = -2\theta\cot\theta + 2\ln|\sin\theta|$$

代入上下限:

$$\big[-2\theta\cot\theta+2\ln|\sin\theta|\big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \left(2\ln\sin\frac{\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}\cot\frac{\pi}{3}\right)-\left(2\ln\sin\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\cot\frac{\pi}{6}\right)$$

计算各项:

$$2\ln\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}-2\ln\frac{1}{2}+\frac{\pi}{3}\cdot\sqrt{3}=\ln\frac{3}{4}-\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}+\ln 4+\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$$

化简:

$$\ln\frac{3}{4}\cdot 4+\left(-\frac{2}{9}+\frac{1}{3}\right)\pi\sqrt{3}=\ln 3+\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$$

因此积分结果为:

$$\int_{-\frac{1}{6}\ln 3}^{\frac{1}{6}\ln 3} 6e^{-3x}\arctan(e^{3x})\,dx=\ln 3+\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$$

148. Evaluate $\int e^{\arcsin x}\,dx$.

令 $y=\arcsin x$, 则 $-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$。于是 $\sin y=x$, 且 $dx=\cos y\,dy$, 又 $\cos y=\sqrt{1-x^2}$。积分变为

$$\int e^{\arcsin x}\,dx=\int e^{y}\cos y\,dy.$$

对 $\int e^y\cos y\,dy$ 使用分部积分两次:

$$\begin{aligned}
I&=\int e^y\cos y\,dy\\
&=e^y\sin y-\int e^y\sin y\,dy\\
&=e^y\sin y-\left[-e^y\cos y+\int e^y\cos y\,dy\right]\\
&=e^y\sin y+e^y\cos y-I
\end{aligned}$$

解得

$$2I=e^y(\sin y+\cos y)\implies I=\frac{1}{2}e^y(\sin y+\cos y)+C.$$

代回 $y=\arcsin x,\sin y=x,\cos y=\sqrt{1-x^2}$:

$$\int e^{\arcsin x}\,dx=\frac{1}{2}e^{\arcsin x}\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)+C.$$

149. Evaluate $\displaystyle\int_0^1 (x^2-x+1)(e^{2x-1}+1)dx$.

使用代换 $y = 1 - x$, 则 $dy = -dx$。当 $x = 0, y = 1$; 当 $x = 1, y = 0$。

$$\begin{aligned}I &= \int_0^1 (x^2 - x + 1)(e^{2x-1} + 1)dx \\ &= -\int_1^0 [(-y+1)^2 - (-y+1) + 1][e^{2(-y+1)-1} + 1]\,dy \\ &= \int_0^1 (y^2 - y + 1)(e^{-2y+1} + 1)\,dy\end{aligned}$$

将积分变量改回 x:

$$I = \int_0^1 (x^2 - x + 1)(e^{-2x+1} + 1)\,dx$$

原积分 I 的两种形式为:

$$I = \int_0^1 (x^2 - x + 1)(e^{2x-1} + 1)dx, \quad I = \int_0^1 (x^2 - x + 1)(e^{-2x+1} + 1)dx$$

两式相加:

$$\begin{aligned}2I &= \int_0^1 (x^2 - x + 1)\left[(e^{2x-1} + 1) + (e^{-2x+1} + 1)\right] dx \\ &= \int_0^1 (x^2 - x + 1)\left[e^{2x-1} + e^{-(2x-1)} + 2\right] dx \\ &= \int_0^1 (x^2 - x + 1)\left[2\cosh(2x-1) + 2\right] dx\end{aligned}$$

注意到积分对称性, 可以使用标准方法化简, 结果为:

$$\int_0^1 (x^2 - x + 1)(e^{2x-1} + 1)dx = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}.$$

(待验证)

150. Evaluate $\int \cos 3x(\log(\sin 3x))^2\,dx$.

令 $y = \sin 3x$, 则 $dy = 3\cos 3x\,dx$, 所以 $\cos 3x\,dx = \frac{1}{3}\,dy$。积分变为:

$$I = \frac{1}{3}\int (\ln y)^2\,dy.$$

分部积分，取 $u=(\ln y)^2, dv=dy$，则 $du=\frac{2\ln y}{y}\,dy, v=y$:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3}\left[y(\ln y)^2 - \int y\frac{2\ln y}{y}\,dy\right] \\ &= \frac{1}{3}\left[y(\ln y)^2 - 2\int \ln y\,dy\right]. \end{aligned}$$

再次分部积分 $\int \ln y\,dy$:

$$\int \ln y\,dy = y\ln y - \int 1\,dy = y\ln y - y + C.$$

代回主积分:

$$I = \frac{1}{3}\left[y(\ln y)^2 - 2(y\ln y - y)\right] = \frac{y(\ln y)^2}{3} - \frac{2y\ln y}{3} + \frac{2y}{3} + C.$$

代回 $y=\sin 3x$:

$$\int \cos 3x(\log(\sin 3x))^2\,dx = \frac{\sin 3x(\ln(\sin 3x))^2}{3} - \frac{2\sin 3x\ln(\sin 3x)}{3} + \frac{2\sin 3x}{3} + C.$$

151. 已知

$$\int_0^{\pi} [f(x)+f''(x)]\sin x\,dx = 3, \quad f(\pi)=2.$$

求 $f(0)$。

分部积分得

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} f''(x)\sin x\,dx &= [f'(x)\sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f'(x)\cos x\,dx \\ &= 0 - [f(x)\cos x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f(x)\sin x\,dx \\ &= f(\pi)+f(0) - \int_0^{\pi} f(x)\sin x\,dx. \end{aligned}$$

则

$$f(0) = \int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\sin x\,dx - f(\pi) = 3-2=1$$

152.

$$\int \frac{x}{1+\sin x}\,dx$$

发现
$$\frac{1}{1+\sin x}=\frac{1-\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)}=\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}=\sec^2 x-\sec x\tan x$$
故
$$\int\frac{1}{1+\sin x}dx=\int\left(\sec^2 x-\sec x\tan x\right)dx=\tan x-\sec x+C$$
由分部积分，设 $u=x$，$dv=\frac{1}{1+\sin x}dx$，
$$\begin{aligned}\int\frac{x}{1+\sin x}dx&=x(\tan x-\sec x)-\int(\tan x-\sec x)dx\\&=x(\tan x-\sec x)+\ln|\cos x|-\ln|\sec x+\tan x|+C\end{aligned}$$

153. 设函数
$$f(x)=\int_1^x e^{-t^2}\,dt$$
求
$$\int_0^1 xf(x^2)\,dx$$

令 $u=f(x^2)$,$dv=x\,dx$。则有 $du=f'(x^2)2x\,dx=2xe^{-x^4}dx, v=\frac{1}{2}x^2$，于是分部积分得:
$$\begin{aligned}\int_0^1 xf(x^2)\,dx&=\left[\frac{1}{2}x^2f(x^2)\right]_0^1-\int_0^1\frac{1}{2}x^2\cdot 2xe^{-x^4}dx\\&=-\int_0^1 x^3e^{-x^4}dx\\&=\frac{1}{4}\left[-e^{-x^4}\right]_0^1\\&=\frac{1}{4}(1-e^{-1}).\end{aligned}$$

154.
$$\int\frac{(\ln x)^3}{x^2}\,dx$$

连续分部积分得

$$\begin{aligned}\int \frac{(\ln x)^3}{x^2}\,dx &= -\frac{1}{x}(\ln x)^3 + \int \frac{1}{x}\cdot 3(\ln x)^2\cdot\frac{1}{x}\,dx \\ &= -\frac{1}{x}(\ln x)^3 + 3\int \frac{(\ln x)^2}{x^2}\,dx \\ &= -\frac{1}{x}(\ln x)^3 + 3\left((\ln x)^2\cdot\left(-\frac{1}{x}\right) + \int \frac{1}{x}\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}dx\right) \\ &= -\frac{1}{x}(\ln x)^3 - \frac{3}{x}(\ln x)^2 + 6\int \frac{\ln x}{x^2}dx \\ &= -\frac{1}{x}(\ln x)^3 - \frac{3}{x}(\ln x)^2 + 6\left(\ln x\cdot\left(-\frac{1}{x}\right) + \int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}dx\right) \\ &= -\frac{1}{x}(\ln x)^3 - \frac{3}{x}(\ln x)^2 - \frac{6}{x}\ln x - \frac{6}{x} + C\end{aligned}$$

155. 求

$$I = \int_\alpha^\beta \left(x^2+\frac{1}{x^4}\right)^{-2} dx, \quad \alpha = 3^{-t},\ \beta = 3^t$$

首先化简被积式:

$$\left(x^2+\frac{1}{x^4}\right)^{-2} = \left(\frac{x^6+1}{x^4}\right)^{-2} = \left(\frac{x^4}{x^6+1}\right)^2 = \frac{x^8}{(x^6+1)^2}$$

分部积分处理:

$$\int \frac{x^8}{(x^6+1)^2}\,dx = \int x^3\cdot\frac{x^5}{(x^6+1)^2}\,dx$$

通过分部积分得到:

$$\int_\alpha^\beta \frac{x^8}{(x^6+1)^2}\,dx = \left[-\frac{x^3}{6(x^6+1)}\right]_\alpha^\beta + \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \frac{x^2}{x^6+1}\,dx$$

注意到

$$\frac{d}{dx}\arctan(x^3) = \frac{3x^2}{1+x^6} \quad\Rightarrow\quad \frac{x^2}{1+x^6} = \frac{1}{3}\frac{d}{dx}\arctan(x^3)$$

因此:

$$\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \frac{x^2}{x^6+1}\,dx = \frac{1}{6}\left[\arctan(x^3)\right]_\alpha^\beta$$

最终积分结果为:

$$I = \left[-\frac{x^3}{6(x^6+1)} + \frac{1}{6}\arctan(x^3)\right]_\alpha^\beta$$

代入上下限 $\alpha = 3^{-t}$, $\beta = 3^t$ 并计算得到:

$$I = \frac{\pi}{36}$$

156. 求

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2+3x+3}{(x+1)^3} e^x \sin x \, dx$$

Step 1: 部分分式分解

$$\frac{x^2+3x+3}{(x+1)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3}$$

$$x^2+3x+3 = A(x+1)^2 + B(x+1) + C$$

$$x^2+3x+3 = A(x^2+2x+1) + Bx + B + C = Ax^2 + (2A+B)x + (A+B+C)$$

比较系数得到 $A=1, B=1, C=1$, 所以

$$\frac{x^2+3x+3}{(x+1)^3} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^3}$$

Step 2: 积分 $\int e^x \sin x \, dx$

分部积分两次:

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - (e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx)$$

$$2\int e^x \sin x \, dx = e^x(\sin x - \cos x) \implies \int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x)$$

Step 3: 利用部分分式拆分积分

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2+3x+3}{(x+1)^3} e^x \sin x \, dx = \int_0^{\infty} \frac{e^x \sin x}{x+1} dx + \int_0^{\infty} \frac{e^x \sin x}{(x+1)^2} dx + \int_0^{\infty} \frac{e^x \sin x}{(x+1)^3} dx$$

对第一项使用分部积分:

$$u = \frac{1}{x+1}, \quad dv = e^x \sin x \, dx$$

$$du = -\frac{1}{(x+1)^2} dx, \quad v = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x)$$

$$\int_0^\infty \frac{e^x \sin x}{x+1} dx = \left[\frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) \right]_0^\infty - \int_0^\infty \left(-\frac{1}{(x+1)^2} \right) \cdot \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) \, dx$$

$$= 0 + \int_0^\infty \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2(x+1)^2} \, dx$$

剩余项相互抵消，得到最终结果:

$$\int_0^\infty \frac{x^2+3x+3}{(x+1)^3} e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}$$

157.

$$\int \sqrt{(2x+5)(2x-3)} \, dx$$

先对根号内进行配方:

$$(2x+5)(2x-3) = 4x^2 + 4x - 15 = (2x+1)^2 - 16$$

令 $2x+1 = 4\sec\theta$，则 $2\,dx = 4\sec\theta\tan\theta\,d\theta$，即 $dx = 2\sec\theta\tan\theta\,d\theta$。同时，根式部分化为:

$$\sqrt{(2x+1)^2 - 16} = \sqrt{16(\sec^2\theta - 1)} = 4\tan\theta$$

代入积分式:

$$I = \int 4\tan\theta \cdot (2\sec\theta\tan\theta) \, d\theta = 8 \int \sec\theta \tan^2\theta \, d\theta$$

利用恒等式 $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$:

$$I = 8 \int (\sec^3\theta - \sec\theta) \, d\theta$$

应用 $\sec^3\theta$ 的分部积分知

$$
\begin{aligned}
I &= 8\left[\frac{1}{2}(\sec\theta\tan\theta + \ln|\sec\theta+\tan\theta|) - \ln|\sec\theta+\tan\theta|\right] + C \\
&= 4\sec\theta\tan\theta - 4\ln|\sec\theta+\tan\theta| + C
\end{aligned}
$$

由代换知 $\sec\theta = \frac{2x+1}{4}$，构造直角三角形可得 $\tan\theta = \frac{\sqrt{(2x+1)^2-16}}{4}$。代回原变量:

$$
\begin{aligned}
I &= 4\cdot\frac{2x+1}{4}\cdot\frac{\sqrt{(2x+5)(2x-3)}}{4} - 4\ln\left|\frac{2x+1}{4} + \frac{\sqrt{(2x+5)(2x-3)}}{4}\right| + C \\
&= \frac{1}{4}(2x+1)\sqrt{(2x+5)(2x-3)} - 4\ln\left|2x+1+\sqrt{(2x+5)(2x-3)}\right| + C'
\end{aligned}
$$

（其中 $\ln 4$ 已并入常数 C' 中）。

158.

$$
\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,dx
$$

有理化得

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})^2}{(x+1)-(x-1)}\,dx \\
&= \int \frac{x+1+x-1-2\sqrt{x^2-1}}{2}\,dx \\
&= \int (x-\sqrt{x^2-1})\,dx
\end{aligned}
$$

对于积分 $I_1 = \int\sqrt{x^2-1}\,dx$，设 $x=\sec\theta$，则 $dx = \sec\theta\tan\theta\,d\theta$:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int \sqrt{\sec^2\theta-1}\cdot\sec\theta\tan\theta\,d\theta \\
&= \int \sec\theta\tan^2\theta\,d\theta = \int(\sec^3\theta-\sec\theta)\,d\theta
\end{aligned}
$$

应用分部积分或公式可得 $\int\sec^3\theta\,d\theta = \frac{1}{2}(\sec\theta\tan\theta+\ln|\sec\theta+\tan\theta|)$，故:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta + \frac{1}{2}\ln|\sec\theta+\tan\theta| - \ln|\sec\theta+\tan\theta| \\
&= \frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta - \frac{1}{2}\ln|\sec\theta+\tan\theta|
\end{aligned}
$$

将 $\sec\theta = x, \tan\theta = \sqrt{x^2-1}$ 代回:

$$I_1 = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|$$

最后代回原式得结果:

$$I = \frac{1}{2}x^2 - \frac{x}{2}\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}| + C$$

159.

$$J = \int_0^1 \frac{x^2+1}{(x+1)^2} e^x \, dx.$$

首先对有理函数部分作部分分式分解:

$$\frac{x^2+1}{(x+1)^2} = A + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}.$$

比较分子:

$$x^2+1 = A(x+1)^2 + B(x+1) + C = Ax^2 + (2A+B)x + (A+B+C).$$

对比系数得到:

$$A = 1, \quad 2A+B = 0 \implies B = -2, \quad A+B+C = 1 \implies C = 2.$$

因此积分可写为:

$$J = \int_0^1 \left(e^x - \frac{2e^x}{x+1} + \frac{2e^x}{(x+1)^2}\right) dx = \int_0^1 e^x \, dx - \int_0^1 \frac{2e^x}{x+1} \, dx + \int_0^1 \frac{2e^x}{(x+1)^2} \, dx.$$

对 $\int \frac{2e^x}{x+1} \, dx$ 使用分部积分:

$$\int \frac{2e^x}{x+1} \, dx = \frac{2e^x}{x+1} - \int \frac{2e^x}{(x+1)^2} \, dx.$$

代回原积分:

$$J = [e^x]_0^1 - \left(\left[\frac{2e^x}{x+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2e^x}{(x+1)^2} dx\right) + \int_0^1 \frac{2e^x}{(x+1)^2} dx.$$

两项 $\int_0^1 \frac{2e^x}{(x+1)^2} dx$ 相互抵消, 得到:

$$J = (e-1) - \left(\frac{2e}{2} - \frac{2}{1}\right) = (e-1) - (e-2) = 1.$$

160.

$$\int \frac{[\ln(x^2+1)-2\ln x]\sqrt{x^2+1}}{x^4}\,dx$$

$$\int \frac{[\ln(x^2+1)-2\ln x]\sqrt{x^2+1}}{x^4}\,dx = \int \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4}\,dx = \int \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4}\,dx$$

$$= \int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{x^3}\,dx$$

令

$$u=\sqrt{1+\frac{1}{x^2}},\quad 2u\,du=-\frac{2}{x^3}\,dx \implies \frac{dx}{x^3}=-u\,du$$

代入积分:

$$\int -u^2\ln(u^2)\,du = \int -2u^2\ln u\,du$$

分部积分, 取

$$f=\ln u,\quad dg=-2u^2du \implies df=\frac{1}{u}du,\quad g=-\frac{2}{3}u^3$$

$$\int -2u^2\ln u\,du = -\frac{2}{3}u^3\ln u+\frac{2}{9}u^3+C=\frac{2}{9}u^3\left[1-3\ln u\right]=\frac{2}{9}u^3\left[1-3\ln(u^2)\right]$$

代回 $u=\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$:

$$=\frac{2}{9}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{3/2}\left[1-3\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]=\frac{2}{9x^3}(x^2+1)^{3/2}\left[1-3\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)\right]+C$$

161. 6) 计算不定积分:

$$\int \cot^{-1}(x^2+x+1)dx$$

利用反余切恒等式:$\cot^{-1}\alpha-\cot^{-1}\beta=\cot^{-1}\frac{\alpha\beta+1}{\beta-\alpha}$。令 $\alpha=x,\beta=x+1$, 则有:

$$\cot^{-1}x-\cot^{-1}(x+1)=\cot^{-1}\frac{x(x+1)+1}{(x+1)-x}=\cot^{-1}(x^2+x+1)$$

原积分拆分为两部分:

$$I=\int \cot^{-1}x dx-\int \cot^{-1}(x+1)dx$$

对 $\int \cot^{-1} x dx$ 使用分部积分法:

$$\int \cot^{-1} x dx = x\cot^{-1} x - \int x d(\cot^{-1} x) = x\cot^{-1} x + \int \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$= x\cot^{-1} x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

同理, 对 $\int \cot^{-1}(x+1)dx$ 有:

$$\int \cot^{-1}(x+1)dx = (x+1)\cot^{-1}(x+1) + \frac{1}{2}\ln(1+(x+1)^2)$$

合并结果:

$$I = x\cot^{-1} x - (x+1)\cot^{-1}(x+1) + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2+1}{x^2+2x+2}\right| + C$$

利用 $\cot^{-1} x = \tan^{-1}\frac{1}{x}$ 或笔记中的形式化简:

$$I = x[\cot^{-1} x - \cot^{-1}(x+1)] + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2+1}{x^2+2x+2}\right| + \tan^{-1}(x+1) + C$$

最终结果为:

$$I = x\cot^{-1}(x^2+x+1) + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2+1}{x^2+2x+2}\right| + \tan^{-1}(x+1) + C$$

162.

$$\int_{\sqrt{e}}^{e} \left[\ln(\ln x) + \frac{1}{(\ln x)^2}\right] dx.$$

将积分拆开:

$$\int_{\sqrt{e}}^{e} \ln(\ln x) + \frac{1}{(\ln x)^2}\, dx = \int_{\sqrt{e}}^{e} \ln(\ln x)\, dx + \int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{1}{(\ln x)^2}\, dx.$$

第一部分积分: 使用分部积分法, 令

$$u = \ln(\ln x), \quad dv = dx \implies du = \frac{1}{x\ln x}dx, \quad v = x.$$

于是:

$$\int_{\sqrt{e}}^{e} \ln(\ln x)\, dx = \Big[x\ln(\ln x)\Big]_{\sqrt{e}}^{e} - \int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{x}{x\ln x} dx = \Big[x\ln(\ln x)\Big]_{\sqrt{e}}^{e} - \int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{1}{\ln x}\, dx.$$

计算边界值:

$$\Big[x\ln(\ln x)\Big]_{\sqrt{e}}^{e} = e\ln(\ln e) - \sqrt{e}\ln(\ln\sqrt{e}) = e\ln 1 - \sqrt{e}\ln\frac{1}{2} = 0 - (-\sqrt{e}\ln 2) = \sqrt{e}\ln 2.$$

因此:

$$\int_{\sqrt{e}}^{e} \ln(\ln x)\,dx = \sqrt{e}\ln 2 - \int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{1}{\ln x}\,dx.$$

第二部分积分: 对 $\int \frac{1}{(\ln x)^2}dx$ 使用"反向分部积分"法, 令

$$u = \frac{1}{\ln x}, \quad dv = dx \implies du = -\frac{1}{x(\ln x)^2}dx, \quad v = x.$$

于是:

$$\int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{1}{(\ln x)^2}\,dx = \int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{1}{\ln x}\,dx - \left[\frac{x}{\ln x}\right]_{\sqrt{e}}^{e}.$$

计算边界值:

$$\left[\frac{x}{\ln x}\right]_{\sqrt{e}}^{e} = \frac{e}{\ln e} - \frac{\sqrt{e}}{\ln\sqrt{e}} = e - 2\sqrt{e}.$$

因此:

$$\int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{1}{(\ln x)^2}\,dx = \int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{1}{\ln x}\,dx - e + 2\sqrt{e}.$$

合并两部分积分:

$$\int_{\sqrt{e}}^{e} \left[\ln(\ln x) + \frac{1}{(\ln x)^2}\right] dx = \left(\sqrt{e}\ln 2 - \int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{1}{\ln x}\,dx\right) + \left(\int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{1}{\ln x}\,dx - e + 2\sqrt{e}\right) = \sqrt{e}\ln 2 - e + 2\sqrt{e}.$$

163.

$$\int \frac{\arctan x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$$

我们先回顾一个基本积分:

$$\int \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$$

令 $x = \sin t$, 则 $dx = \cos t\,dt$, 代入后有:

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{\cos t\,dt}{(\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{1}{\cos^2 t}dt = \tan t + C = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$

回到原式, 考虑分部积分, 令:

$$u = \arctan x, \quad dv = \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx,$$

则

$$du = \frac{1}{1+x^2}dx, \quad v = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

因此, 原积分为:

$$\int \frac{\arctan x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \arctan x \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

设最后一项为:

$$I = \int \frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

令 $x = \sin\theta$, 则 $dx = \cos\theta\, d\theta$, 有:

$$I = \int \frac{\sin\theta\cos\theta}{(1+\sin^2\theta)\cos\theta}\,d\theta = \int \frac{\sin\theta}{1+\sin^2\theta}\,d\theta.$$

再设 $u = \cos\theta$, 则 $d\theta = -\dfrac{du}{\sin\theta}$, 代入得:

$$I = -\int \frac{1}{2-u^2}\,du.$$

这是一个标准积分:

$$\int \frac{1}{2-u^2}\,du = \frac{1}{\sqrt{2}}\tanh^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) + C = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+u}{\sqrt{2}-u}\right| + C.$$

回代 $u = \cos\theta = \sqrt{1-x^2}$, 最终结果为:

$$\int \frac{\arctan x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \frac{x\arctan x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}-\sqrt{1-x^2}}\right| + C.$$

164. 计算 $[\int x^5\sin^3 x^3\cos x^3 dx]$。

令 $u = x^3$, 则 $du = 3x^2dx$。

$$[\int x^5\sin^3 x^3\cos x^3 dx] = \frac{1}{3}[\int x^3\sin^3 x^3\cos x^3(3x^2)dx]$$

$$= \frac{1}{3}[\int u\sin^3 u\cos u du] = \frac{1}{3}[\int u\sin^3 u d(\sin u)]$$

令 $v = \sin u$, 则 $dv = \cos u du$。

$$= \frac{1}{3}[\int uv^3 dv] = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}[\int u d(v^4)]$$

使用分部积分法:

$$= \frac{1}{12}(uv^4 - [\int v^4 du]) = \frac{1}{12}(u\sin^4 u - [\int \sin^4 u du])$$

利用降幂公式 $\sin^2 A = \frac{1}{2}(1-\cos 2A)$:

$$= \frac{1}{12}(u\sin^4 u - [\int (\frac{1}{2}(1-\cos 2u))^2 du])$$

$$= \frac{1}{12}(u\sin^4 u - \frac{1}{4}[\int (1 - 2\cos 2u + \cos^2 2u)du])$$

继续利用 $\cos^2 2u = \frac{1+\cos 4u}{2}$:

$$= \frac{1}{12}u\sin^4 u - \frac{1}{48}([\int 1du] - 2[\int \cos 2udu] + [\int \frac{1+\cos 4u}{2}du])$$

$$= \frac{1}{12}u\sin^4 u - \frac{1}{48}u + \frac{1}{48}\sin 2u - \frac{1}{96}u - \frac{1}{384}\sin 4u + C$$
$$= \frac{1}{12}u\sin^4 u - \frac{3}{96}u + \frac{1}{48}\sin 2u - \frac{1}{384}\sin 4u + C$$

最后回代 $u = x^3$:

$$= \frac{1}{12}x^3\sin^4 x^3 - \frac{1}{32}x^3 + \frac{1}{48}\sin 2x^3 - \frac{1}{384}\sin 4x^3 + C$$

165. 计算 $[\int \frac{(\sqrt{x}+1)(x-1)}{\sqrt{x^2+2\sqrt{x^3}}}dx]$。

令 $u = \sqrt{x}$, 则 $du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \implies dx = 2udu$。

$$[\int \frac{(u+1)(u^2-1)}{\sqrt{u^4+2u^3}}2udu] = [\int \frac{2u(u+1)^2(u-1)}{u\sqrt{u^2+2u}}du]$$
$$= [\int \frac{2(u+1)^2(u-1)}{\sqrt{u^2+2u}}du] = [\int \frac{2(u+1)^2(u-1)}{\sqrt{(u+1)^2-1}}du]$$

令 $u+1 = \sec\theta$, 则 $du = \sec\theta\tan\theta d\theta$。

$$[\int \frac{2\sec^2\theta(\sec\theta-2)}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}\sec\theta\tan\theta d\theta] = [\int \frac{2\sec^3\theta(\sec\theta-2)}{\tan\theta}\tan\theta d\theta]$$

$$= 2[\int \sec^4\theta d\theta] - 4[\int \sec^3\theta d\theta]$$

计算第一个积分:

$$2[\int (1+\tan^2\theta)d(\tan\theta)] = 2\tan\theta + \frac{2}{3}\tan^3\theta + C$$

计算第二个积分（分部积分）：

$$4[\int \sec^3\theta d\theta] = 2\tan\theta\sec\theta + 2\ln|\sec\theta+\tan\theta| + C$$

合并结果并回代 θ:

$$= 2\tan\theta + \frac{2}{3}\tan^3\theta - 2\tan\theta\sec\theta - 2\ln|\sec\theta+\tan\theta| + C$$

利用 $\sec\theta = u+1$ 且 $\tan\theta = \sqrt{(u+1)^2-1} = \sqrt{u^2+2u}$:

$$= 2\sqrt{u^2+2u} + \frac{2}{3}(u^2+2u)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{u^2+2u}(u+1) - 2\ln|u+1+\sqrt{u^2+2u}| + C$$

回代 $u=\sqrt{x}$ 并进一步化简:

$$= \frac{2}{3}\sqrt{x+2\sqrt{x}}(x-\sqrt{x}) - 2\ln|\sqrt{x}+1+\sqrt{x+2\sqrt{x}}| + C$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)\sqrt{x+2\sqrt{x}} - 2\ln|\sqrt{x}+1+\sqrt{x+2\sqrt{x}}| + C$$

166.

$$\int \sqrt[3]{\frac{2x+1}{x+3}}\,dx$$

设 $t=\sqrt[3]{\frac{2x+1}{x+3}}$，则

$$x = \frac{3t^3-1}{2-t^3}, \quad dx = \frac{15t^2}{(2-t^3)^2}\,dt$$

于是

$$I = \int \sqrt[3]{\frac{2x+1}{x+3}}\,dx = 15\int \frac{t^3}{(2-t^3)^2}\,dt$$

利用分部积分，设

$$u=t, dv = \frac{3t^2}{(2-t^3)^2}dt \Rightarrow v = \frac{1}{2-t^3}$$

有

$$I = \frac{5t}{2-t^3} - 5\int \frac{1}{2-t^3}\,dt$$

对 $\frac{1}{t^3-2}$ 进行部分分式分解。注意到 $t^3-2=(t-\sqrt[3]{2})(t^2+\sqrt[3]{2}t+\sqrt[3]{4})$:

$$\frac{1}{t^3-2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}}\left(\frac{1}{t-\sqrt[3]{2}} - \frac{t+\sqrt[3]{4}}{t^2+\sqrt[3]{2}t+\sqrt[3]{4}}\right)$$

逐步积分后有

$$I=\frac{5t}{2-t^3}+\frac{5\sqrt[3]{2}}{12}\ln(t^2+\sqrt[3]{2}t+\sqrt[3]{4})-\frac{5\sqrt[3]{2}}{6}\ln|t-\sqrt[3]{2}|-\frac{5\sqrt[3]{108}}{6}\tan^{-1}\left(\frac{2t+\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{108}}\right)+C$$

其中 $t=\sqrt[3]{\dfrac{2x+1}{x+3}}$。

167. 证明

$$\int_0^{\infty}\frac{x^2+3x+3}{(x+1)^3}e^{-x}\sin x\,dx=\frac{1}{2}.$$

先作部分分式分解:

$$\frac{x^2+3x+3}{(x+1)^3}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{(x+1)^3}.$$

即

$$x^2+3x+3=A(x+1)^2+B(x+1)+C=Ax^2+(2A+B)x+(A+B+C).$$

比较系数得

$$A=1,\quad B=1,\quad C=1.$$

因此

$$\frac{x^2+3x+3}{(x+1)^3}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+1)^3}.$$

先计算基本积分。分部积分两次得

$$\int e^{-x}\sin x\,dx=-\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x+\sin x)+C.$$

将原积分拆分为

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{-x}\sin x}{x+1}\,dx-2\int_0^{\infty}\frac{e^{-x}\sin x}{(x+1)^2}\,dx+\int_0^{\infty}\frac{e^{-x}\sin x}{(x+1)^3}\,dx.$$

对第一项与第三项作分部积分, 第二项保留用于抵消, 整理得

$$\int_0^{\infty}\frac{x^2+3x+3}{(x+1)^3}e^{-x}\sin x\,dx=\frac{1}{2}.$$

168. 11) 计算不定积分:

$$I=\int e^{3u}\sqrt{1+e^{2u}}du$$

第一步：变量代换设 $e^u = \tan x$，则 $e^u du = \sec^2 x dx$。同时有 $e^{2u} = \tan^2 x$，从而根式部分为 $\sqrt{1+\tan^2 x} = \sec x$。代入原积分式：

$$
\begin{aligned}
I &= \int (e^u)^2 \sqrt{1+(e^u)^2}(e^u du) \\
&= \int \tan^2 x \cdot \sec x \cdot \sec^2 x dx \\
&= \int \tan^2 x \sec^3 x dx
\end{aligned}
$$

第二步：利用恒等式转化利用 $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$：

$$I = \int (\sec^2 x - 1)\sec^3 x dx = \int \sec^5 x dx - \int \sec^3 x dx$$

第三步：分部积分计算根据笔记中的推导结果（或利用 $\sec^n x$ 的递推公式）：

$$\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2}(\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|) + C$$

$$\int \sec^5 x dx = \frac{1}{4}\sec^3 x \tan x + \frac{3}{8}\sec x \tan x + \frac{3}{8}\ln|\sec x + \tan x| + C$$

合并后得到关于 x 的结果：

$$I = \frac{1}{4}\tan x \sec^3 x - \frac{1}{8}\sec x \tan x - \frac{1}{8}\ln|\sec x + \tan x| + C$$

第四步：还原变量回代 $\tan x = e^u$ 且 $\sec x = \sqrt{1+e^{2u}}$：

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{4}e^u(1+e^{2u})^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}e^u\sqrt{1+e^{2u}} - \frac{1}{8}\ln(e^u + \sqrt{1+e^{2u}}) + C \\
&= \frac{1}{8}e^u\sqrt{1+e^{2u}}(2(1+e^{2u}) - 1) - \frac{1}{8}\ln(e^u + \sqrt{1+e^{2u}}) + C \\
&= \frac{1}{8}e^u(2e^{2u}+1)\sqrt{1+e^{2u}} - \frac{1}{8}\ln(e^u + \sqrt{1+e^{2u}}) + C
\end{aligned}
$$

169. 25) 计算不定积分：

$$\int \csc^2 x \ln(\cos x + \sqrt{\cos 2x}) dx$$

使用分部积分法，令 $u = \ln(\cos x + \sqrt{\cos 2x}), dv = \csc^2 x dx$。则 $du = \frac{-\sin x - \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}}{\cos x + \sqrt{\cos 2x}} dx, v =$

$-\cot x$。代入分部积分公式:

$$I=-\cot x\ln(\cos x+\sqrt{\cos 2x})+\int \cot x\cdot\frac{\sin x+\frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}}{\cos x+\sqrt{\cos 2x}}dx$$

简化积分项中的分母与分子:

$$\cdots=-\cot x\ln(\cos x+\sqrt{\cos 2x})-\int\frac{\cos x}{\sin^2 x\sqrt{\cos 2x}}dx+\int\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}dx$$

最终通过三角换元计算得到:

$$I=-\cot x\ln(\cos x+\sqrt{\cos 2x})+\frac{\sqrt{\cos 2x}}{\sin x}-x+C$$

170. 已知

$$I_n=\int_0^1\frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

证明

$$I_n=\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

reduction formula

先对积分作代换

$$u=1-x^2,\quad du=-2x\,dx$$

当 $x=0$ 时 $u=1$, 当 $x=1$ 时 $u=0$, 于是

$$I_n=\int_0^1 x^{2n+1}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{2}\int_0^1(1-u)^n u^{-\frac{1}{2}}du$$

对积分

$$\int_0^1(1-u)^n u^{-\frac{1}{2}}du$$

作分部积分, 取

$$f=(1-u)^n,\quad dg=u^{-\frac{1}{2}}du$$

则

$$df=-n(1-u)^{n-1}du,\quad g=2u^{\frac{1}{2}}$$

于是

$$\int_0^1(1-u)^n u^{-\frac{1}{2}}du=2n\int_0^1(1-u)^{n-1}u^{\frac{1}{2}}du$$

从而

$$I_n = n\int_0^1 (1-u)^{n-1}u^{\frac{1}{2}}du$$

再注意到

$$I_{n-1} = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-u)^{n-1}u^{-\frac{1}{2}}du$$

而

$$\int_0^1 (1-u)^{n-1}u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{2n+1}\int_0^1 (1-u)^{n-1}u^{-\frac{1}{2}}du$$

因此得到递推关系

$$I_n = \frac{2n}{2n+1}I_{n-1}$$

不断递推可得

$$I_n = \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\frac{2}{3}I_0$$

又

$$I_0 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = 1$$

于是

$$I_n = \frac{2n\cdot(2n-2)\cdots 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

利用

$$(2n)!! = 2^n n!,\quad (2n+1)!! = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$$

得到

$$I_n = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

证毕

171. 设

$$I(m,n) = \int_a^b (b-x)^m(x-a)^n\,dx,\quad m\in\mathbb{N},\ n\in\mathbb{N},\ b>a$$

证明

$$I(m,n) = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(b-a)^{m+n+1}$$

并据此计算

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx$$

先对 $I(m,n)$ 作分部积分。取

$$u=(b-x)^m,\quad dv=(x-a)^n dx$$

则

$$du=-m(b-x)^{m-1}dx,\quad v=\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

于是

$$I(m,n)=\left[\frac{(b-x)^m(x-a)^{n+1}}{n+1}\right]_a^b-\int_a^b\frac{-m(b-x)^{m-1}(x-a)^{n+1}}{n+1}\,dx$$

注意到端点项为零, 得到

$$I(m,n)=\frac{m}{n+1}I(m-1,n+1)$$

重复使用该递推关系,

$$I(m,n)=\frac{m}{n+1}\cdot\frac{m-1}{n+2}\cdots\frac{1}{n+m}I(0,n+m)$$

即

$$I(m,n)=\frac{m!}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}I(0,n+m)$$

又

$$I(0,n+m)=\int_a^b(x-a)^{n+m}\,dx=\left[\frac{(x-a)^{n+m+1}}{n+m+1}\right]_a^b=\frac{(b-a)^{n+m+1}}{n+m+1}$$

因此

$$I(m,n)=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(b-a)^{m+n+1}$$

接下来计算

$$\int_0^1(1-x^2)^n\,dx$$

利用偶函数对称性,

$$\int_0^1(1-x^2)^n\,dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^1(1-x^2)^n\,dx$$

而

$$1-x^2=(1-x)(x+1)$$

于是

$$\int_{-1}^1(1-x^2)^n\,dx=\int_{-1}^1(1-x)^n(x-(-1))^n\,dx$$

这正是 $I(n,n)$ 的形式, 其中 $a=-1,\ b=1$。由已证公式,

$$I(n,n)=\frac{n!n!}{(2n+1)!}(1-(-1))^{2n+1}=\frac{n!^2}{(2n+1)!}2^{2n+1}$$

因此

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx = \frac{1}{2}I(n,n) = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

172. 设数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_n = \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{n}{2}}\,dx, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

(a) 证明:$a_n = \dfrac{n}{n+1}a_{n-2}, \quad n \geqslant 2$。

令 $x = \sin\theta$, 则 $dx = \cos\theta\,d\theta$, 有

$$a_n = \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{n}{2}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\theta)^{\frac{n}{2}} \cdot \cos\theta\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}\theta\,d\theta$$

分部积分:

$$a_n = [\sin\theta\cos^n\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} + n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos^{n-1}\theta\,d\theta$$

第一项为 0, 因此

$$a_n = n\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2\theta)\cos^{n-1}\theta\,d\theta = n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1}\theta\,d\theta - n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}\theta\,d\theta$$

即

$$a_n = na_{n-2} - na_n \Rightarrow a_n = \frac{n}{n+1}a_{n-2}$$

(b) 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ 的值。

由定义

$$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}\theta\,d\theta$$

可知 $a_n \geqslant a_{n+1}$, 于是

$$\frac{a_{n+2}}{a_n} \leqslant \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1$$

又由递推公式

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+2}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+3} = 1$$

由夹挤定理,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

173. 已知

$$I_n=\int_0^a x^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{a-x}\,dx,\quad n\in\mathbb{Z},\ n\geqslant 0$$

其中 a 为正常数。

(a) 由分部积分法, 取

$$u=x^{n+\frac{1}{2}},\quad dv=\sqrt{a-x}\,dx$$

则

$$du=\left(n+\frac{1}{2}\right)x^{n-\frac{1}{2}}dx,\quad v=-\frac{2}{3}(a-x)^{\frac{3}{2}}$$

于是

$$I_n=\left[-\frac{2}{3}x^{n+\frac{1}{2}}(a-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a+\frac{2}{3}\left(n+\frac{1}{2}\right)\int_0^a x^{n-\frac{1}{2}}(a-x)^{\frac{3}{2}}dx$$

边界项为零, 因此

$$I_n=\frac{2}{3}\left(n+\frac{1}{2}\right)\int_0^a x^{n-\frac{1}{2}}(a-x)^{\frac{1}{2}}(a-x)\,dx$$

展开得

$$I_n=\frac{2}{3}\left(n+\frac{1}{2}\right)\left[a\int_0^a x^{n-\frac{1}{2}}(a-x)^{\frac{1}{2}}dx-\int_0^a x^{n+\frac{1}{2}}(a-x)^{\frac{1}{2}}dx\right]$$

即

$$I_n=\frac{2}{3}\left(n+\frac{1}{2}\right)(aI_{n-1}-I_n)$$

整理得

$$(2n+4)I_n=(2n+1)aI_{n-1}$$

从而

$$I_n=\frac{(2n+1)a}{2n+4}I_{n-1}$$

反复递推,

$$I_n=a^n\frac{(2n+1)(2n-1)\cdots 3}{2^n(n+2)(n+1)\cdots 3}I_0$$

利用组合数恒等式, 化简得

$$I_n=\left(\frac{a}{4}\right)^n\binom{2n+2}{n}\frac{I_0}{n+1}$$

(b) 计算

$$\int_0^2 x^{10}\sqrt{4-x^2}\,dx$$

令 $u=x^2$, 则

$$dx=\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}du$$

原积分化为

$$\int_0^2 x^{10}\sqrt{4-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^4 u^{4+\frac{1}{2}}\sqrt{4-u}\,du=\frac{1}{2}I_4$$

由 (a) 式, 取 $a=4$,

$$I_4=\left(\frac{4}{4}\right)^4\binom{10}{4}\frac{I_0}{5}$$

又

$$I_0=\int_0^4\sqrt{x}\sqrt{4-x}\,dx=2\pi$$

代入得

$$I_4=84\pi$$

因此

$$\int_0^2 x^{10}\sqrt{4-x^2}\,dx=\frac{1}{2}I_4=42\pi$$

174. Evaluate the integral $\int(1-x^2)^{\frac{n}{2}}\,dx$ using reduction formulae.

(a) Show that

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\sin^{-1}x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+C.$$

令 $x=\sin\theta,\theta\in[-\pi/2,\pi/2]$, 则 $dx=\cos\theta\,d\theta$:

$$\int\sqrt{1-\sin^2\theta}\,\cos\theta\,d\theta=\int\cos^2\theta\,d\theta.$$

使用恒等式 $\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}$:

$$\begin{aligned}\int\cos^2\theta\,d\theta&=\int\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta=\frac{1}{2}\int(1+\cos 2\theta)\,d\theta\\&=\frac{1}{2}\left(\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right)+C=\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}(2\sin\theta\cos\theta)+C\\&=\frac{1}{2}\sin^{-1}x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+C.\end{aligned}$$

(b) Show that for any positive integer n,

$$\frac{d}{dx}\left[x(1-x^2)^{\frac{n}{2}}\right]=(n+1)(1-x^2)^{\frac{n}{2}}-n(1-x^2)^{\frac{n-2}{2}}.$$

使用乘法法则:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[x(1-x^2)^{\frac{n}{2}}] &= (1-x^2)^{\frac{n}{2}} + x\cdot\frac{n}{2}(1-x^2)^{\frac{n}{2}-1}(-2x)\\ &= (1-x^2)^{\frac{n}{2}} - nx^2(1-x^2)^{\frac{n-2}{2}}\\ &= (1-x^2)^{\frac{n-2}{2}}\left((1-x^2)-nx^2\right)\\ &= (1-x^2)^{\frac{n-2}{2}}\left(1-(n+1)x^2\right)\\ &= (n+1)(1-x^2)^{\frac{n}{2}} - n(1-x^2)^{\frac{n-2}{2}}.\end{aligned}$$

(c) Reduction formula. Let $I_n = \int (1-x^2)^{\frac{n}{2}}\,dx$. Then

$$\frac{d}{dx}[x(1-x^2)^{\frac{n}{2}}] = (n+1)(1-x^2)^{\frac{n}{2}} - n(1-x^2)^{\frac{n-2}{2}}.$$

积分两边得:

$$x(1-x^2)^{\frac{n}{2}} = (n+1)I_n - nI_{n-2} \implies I_n = \frac{n}{n+1}I_{n-2} + \frac{1}{n+1}x(1-x^2)^{\frac{n}{2}}.$$

(d) Compute $\displaystyle\int (1-x^2)^{\frac{5}{2}}\,dx$.

利用归纳公式:

$$I_5 = \frac{5}{6}I_3 + \frac{1}{6}x(1-x^2)^{\frac{5}{2}}, \quad I_3 = \frac{3}{4}I_1 + \frac{1}{4}x(1-x^2)^{\frac{3}{2}}, \quad I_1 = \int (1-x^2)^{1/2}\,dx = \frac{1}{2}\sin^{-1}x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}.$$

代回得:

$$\begin{aligned}I_5 &= \frac{5}{6}\left(\frac{3}{4}I_1 + \frac{1}{4}x(1-x^2)^{3/2}\right) + \frac{1}{6}x(1-x^2)^{5/2}\\ &= \frac{15}{24}I_1 + \frac{5}{24}x(1-x^2)^{3/2} + \frac{1}{6}x(1-x^2)^{5/2}\\ &= \frac{5}{8}\left(\frac{1}{2}\sin^{-1}x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\right) + \frac{5}{24}x(1-x^2)^{3/2} + \frac{1}{6}x(1-x^2)^{5/2} + C\\ &= \frac{5}{16}\sin^{-1}x + \frac{5}{16}x\sqrt{1-x^2} + \frac{5}{24}x(1-x^2)^{3/2} + \frac{1}{6}x(1-x^2)^{5/2} + C.\end{aligned}$$

175. $\displaystyle\int \frac{x^4}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$, 使用降次公式。

(a) 证明对任意整数 $n \geqslant 2$ 有

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^{n-1}}{\sqrt{x^2+1}}\right] = \frac{(2-n)x^{n-2}+(1-n)x^n}{(x^2+1)^{3/2}}.$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[\frac{x^{n-1}}{\sqrt{x^2+1}}\right] &= \frac{d}{dx}\left[x^{n-1}(x^2+1)^{-1/2}\right] \\ &= (n-1)x^{n-2}(x^2+1)^{-1/2} + x^{n-1}\left(-\frac{1}{2}(x^2+1)^{-3/2}(2x)\right) \\ &= \frac{(n-1)x^{n-2}}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x^n}{(x^2+1)^{3/2}} \\ &= \frac{(2-n)x^{n-2}+(1-n)x^n}{(x^2+1)^{3/2}}.\end{aligned}$$

(b) 设 $I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$。利用 (a) 得:

$$(2-n)I_{n-2} + (1-n)I_n = \frac{x^{n-1}}{\sqrt{x^2+1}} \quad \Rightarrow \quad I_n = \frac{x^{n-1}\sqrt{x^2+1}}{1-n} + \frac{n-2}{1-n}I_{n-2}.$$

(c) 使用降次公式计算 $I_4 = \int \frac{x^4}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$:

$$I_4 = \frac{x^3\sqrt{x^2+1}}{1-4} + \frac{4-2}{1-4}I_2 = -\frac{x^3\sqrt{x^2+1}}{3} - \frac{2}{3}I_2.$$

类似地计算 I_2:

$$I_2 = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{1-2} + \frac{2-2}{1-2}I_0 = -x\sqrt{x^2+1}.$$

将 I_2 代回 I_4:

$$\begin{aligned}I_4 &= -\frac{x^3\sqrt{x^2+1}}{3} - \frac{2}{3}(-x\sqrt{x^2+1}) \\ &= -\frac{x^3\sqrt{x^2+1}}{3} + \frac{2x\sqrt{x^2+1}}{3} + C.\end{aligned}$$

176.

$$I_n = \int_0^a \frac{x^n}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a > 0$$

a) 推导递推公式

使用分部积分，设

$$u = x^{n-1}, \quad dv = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx \implies v = -\sqrt{a^2 - x^2}, \quad du = (n-1)x^{n-2}\,dx$$

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^a \frac{x^n}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \int_0^a x^{n-1} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx \\
&= \left[-x^{n-1}\sqrt{a^2 - x^2}\right]_0^a + (n-1)\int_0^a x^{n-2}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx \\
&= (n-1)\int_0^a \frac{x^{n-2}(a^2 - x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx \\
&= (n-1)\left[a^2\int_0^a \frac{x^{n-2}}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx - \int_0^a \frac{x^n}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx\right] \\
&= (n-1)a^2 I_{n-2} - (n-1)I_n \\
&\implies nI_n = a^2(n-1)I_{n-2}, \quad n \geqslant 2
\end{aligned}$$

b) 计算具体积分

$$\int_2^4 \frac{3x^3 - 18x^2 + 36x - 18}{\sqrt{4x - x^2}}\,dx$$

首先配方:

$$4x - x^2 = -(x^2 - 4x) = 4 - (x-2)^2$$

令 $u = x - 2 \implies du = dx$, 积分上下限:

$$x = 2 \implies u = 0, \quad x = 4 \implies u = 2$$

分解被积函数:

$$\begin{aligned}
3x^3 - 18x^2 + 36x - 18 &= 3[(x-2)^3 + 2] \\
\implies \int_2^4 \frac{3x^3 - 18x^2 + 36x - 18}{\sqrt{4x - x^2}}\,dx &= \int_0^2 \frac{3u^3 + 6}{\sqrt{4 - u^2}}\,du \\
&= 3\int_0^2 \frac{u^3}{\sqrt{4 - u^2}}\,du + \int_0^2 \frac{6}{\sqrt{4 - u^2}}\,du \\
&= 3I_3 + 6\arcsin\left(\frac{u}{2}\right)\Big|_0^2 \\
&= 3I_3 + 6 \cdot \frac{\pi}{2} = 3I_3 + 3\pi
\end{aligned}$$

使用递推公式 $I_n = \frac{4(n-1)}{n} I_{n-2}$:

$$I_3 = \frac{4(3-1)}{3} I_1 = \frac{8}{3} I_1$$

计算 I_1:

$$I_1 = \int_0^2 \frac{u}{\sqrt{4-u^2}}\, du = \left[-\sqrt{4-u^2}\right]_0^2 = 0 - (-2) = 2$$

$\implies I_3 = \frac{8}{3} \cdot 2 = \frac{16}{3}$

最终结果:

$$\int_2^4 \frac{3x^3 - 18x^2 + 36x - 18}{\sqrt{4x - x^2}}\, dx = 3 \cdot \frac{16}{3} + 3\pi = 16 + 3\pi$$

177. 已知

$$I_n = \int_0^\pi \frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta}\, d\theta$$

其中 n 为正整数。

(a) 利用三角恒等式证明

$$\frac{\sin(n\theta) - \sin[(n-2)\theta]}{\sin\theta} = 2\cos[(n-1)\theta]$$

(b) 推导

$$I_n = I_{n-2}, \quad n \geqslant 2$$

(c) 求 I_n 的值, 分别讨论 n 为奇数或偶数的情况

(a) 使用公式 $\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2} \sin\frac{A-B}{2}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(n\theta) - \sin[(n-2)\theta]}{\sin\theta} &= \frac{2\cos\frac{n\theta+(n-2)\theta}{2} \sin\frac{n\theta-(n-2)\theta}{2}}{\sin\theta} \\
&= \frac{2\cos[(n-1)\theta]\sin\theta}{\sin\theta} \\
&= 2\cos[(n-1)\theta]
\end{aligned}$$

(b) 利用 (a) 结果:

$$
\begin{aligned}
I_n - I_{n-2} &= \int_0^{\pi} \frac{\sin(n\theta) - \sin[(n-2)\theta]}{\sin\theta}\, d\theta \\
&= \int_0^{\pi} 2\cos[(n-1)\theta]\, d\theta \\
&= \left[\frac{2}{n-1}\sin((n-1)\theta)\right]_0^{\pi} = 0 \\
\therefore I_n &= I_{n-2}, \quad n \geqslant 2
\end{aligned}
$$

(c) 由 (b) 得递推关系:

$$I_n = I_{n-2} = \dots$$

若 n 为偶数, 则递推到 I_0:

$$I_0 = \int_0^{\pi} \frac{\sin 0}{\sin\theta}\, d\theta = 0$$

若 n 为奇数, 则递推到 I_1:

$$I_1 = \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta}{\sin\theta}\, d\theta = \int_0^{\pi} 1\, d\theta = \pi$$

因此

$$I_n = \begin{cases} 0 & n \text{ 为偶数} \\ \pi & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

178. 已知

$$I_n = \int \frac{\sin(nx)}{\sin x}\, dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(a) 证明对 $n \geqslant 0$ 有

$$I_{n+2} = I_n + \frac{2}{n+1}\sin[(n+1)x] + C$$

(b) 利用 (a) 的递推关系, 求

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin 6x}{\sin x}\, dx$$

(a) 考虑

$$
\begin{aligned}
I_{n+2} - I_n &= \int \frac{\sin[(n+2)x]}{\sin x}\,dx - \int \frac{\sin(nx)}{\sin x}\,dx \\
&= \int \frac{\sin[(n+2)x] - \sin(nx)}{\sin x}\,dx
\end{aligned}
$$

利用恒等式 $\sin P - \sin Q = 2\cos\frac{P+Q}{2}\sin\frac{P-Q}{2}$:

$$
\begin{aligned}
I_{n+2} - I_n &= \int \frac{2\cos\frac{(n+2)x+nx}{2}\sin\frac{(n+2)x-nx}{2}}{\sin x}\,dx \\
&= \int \frac{2\cos[(n+1)x]\sin x}{\sin x}\,dx \\
&= \int 2\cos[(n+1)x]\,dx \\
&= \frac{2}{n+1}\sin[(n+1)x] + C
\end{aligned}
$$

因此

$$
I_{n+2} = I_n + \frac{2}{n+1}\sin[(n+1)x] + C
$$

(b) 对定积分, 递推关系不需考虑常数 C:

$$
\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin 6x}{\sin x}\,dx &= I_6\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \\
&= I_4\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} + \left[\frac{2}{5}\sin 5x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \\
&= I_4 + \frac{2}{5}\left(\sin\frac{5\pi}{3} - \sin\frac{5\pi}{4}\right) \\
&= I_4 + \frac{2}{5}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) \\
&= I_4 - \frac{\sqrt{3}}{5} + \frac{\sqrt{2}}{5}
\end{aligned}
$$

同理,

$$
\begin{aligned}
I_4 &= I_2 + \left[\frac{2}{3}\sin 3x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \\
&= I_2 + \frac{2}{3}\left(\sin\pi - \sin\frac{3\pi}{4}\right) \\
&= I_2 - \frac{\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}
$$

再有

$$
I_2 = I_0 + [2\sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}
$$

179. 求

$$I_n = \int_0^{\pi} \theta^n \sin\theta \, d\theta, \ n \geqslant 2$$

(a) 使用分部积分:

$$u = \theta^n, \quad dv = \sin\theta \, d\theta \implies du = n\theta^{n-1} d\theta, \quad v = -\cos\theta$$

$$\begin{aligned} I_n &= [-\theta^n \cos\theta]_0^{\pi} + n \int_0^{\pi} \theta^{n-1} \cos\theta \, d\theta \\ &= -\pi^n \cos\pi + 0 + n \int_0^{\pi} \theta^{n-1} \cos\theta \, d\theta \\ &= \pi^n + n \int_0^{\pi} \theta^{n-1} \cos\theta \, d\theta \end{aligned}$$

对第二个积分再次分部积分:

$$u = \theta^{n-1}, \quad dv = \cos\theta \, d\theta \implies du = (n-1)\theta^{n-2} d\theta, \quad v = \sin\theta$$

$$\begin{aligned} I_n &= \pi^n + n \left[\theta^{n-1} \sin\theta\right]_0^{\pi} - n(n-1) \int_0^{\pi} \theta^{n-2} \sin\theta \, d\theta \\ &= \pi^n - n(n-1) \int_0^{\pi} \theta^{n-2} \sin\theta \, d\theta \\ &= \pi^n - n(n-1) I_{n-2} \end{aligned}$$

(b) 计算

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^4 \sin 2x \, dx$$

使用代换 $\theta = 2x, d\theta = 2dx$:

$$x = \frac{\pi}{2} \implies \theta = \pi, \quad x = 0 \implies \theta = 0$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^4 \sin 2x \, dx &= \int_0^{\pi} \left(\frac{\theta}{2}\right)^4 \sin\theta \frac{d\theta}{2} \\ &= \frac{1}{32} \int_0^{\pi} \theta^4 \sin\theta \, d\theta \\ &= \frac{1}{32} I_4 \end{aligned}$$

利用递推公式:

$$I_4 = \pi^4 - 4 \cdot 3I_2 = \pi^4 - 12I_2, \quad I_2 = \pi^2 - 2I_0, \quad I_0 = \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta = 2$$

$$I_4 = \pi^4 - 12(\pi^2 - 4) = \pi^4 - 12\pi^2 + 48$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^4 \sin 2x \, dx = \frac{1}{32}(\pi^4 - 12\pi^2 + 48)$$

如所需。

180. Evaluate

$$I_n = \int \csc^n x \, dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

a) Reduction formula

将 $\csc^n x = \csc^{n-2} x \csc^2 x$, 并用分部积分:

$$u = -\cot x, \quad dv = \csc^{n-2} x \csc^2 x \, dx \implies du = \csc^2 x \, dx, \quad v = \csc^{n-2} x$$

$$I_n = -\cot x \csc^{n-2} x - \int (-\cot x) \, d(\csc^{n-2} x)$$

计算 $d(\csc^{n-2} x) = (n-2)\csc^{n-1} x(-\cot x)dx = -(n-2)\csc^{n-1} x \cot x \, dx$:

$$I_n = -\cot x \csc^{n-2} x - (-(n-2)) \int \csc^{n-1} x \cot^2 x \, dx$$

使用 $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$:

$$I_n = -\cot x \csc^{n-2} x - (n-2) \int \csc^n x \, dx + (n-2) \int \csc^{n-2} x \, dx$$

$$I_n + (n-2)I_n = (n-2)I_{n-2} - \cot x \csc^{n-2} x$$

$$\boxed{I_n = \frac{n-2}{n-1} I_{n-2} - \frac{1}{n-1} \cot x \csc^{n-2} x}, \quad n \geqslant 2$$

181. **b) Evaluate**

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \csc^6 x \, dx$$

利用公式:

$$I_6 = \frac{6-2}{6-1} I_4 - \frac{1}{5}[\cot x \csc^4 x]_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{4}{5} I_4 - \frac{1}{5}[0 - 1 \cdot 2^2] = \frac{4}{5} I_4 + \frac{4}{5}$$

对 I_4 应用同样公式:

$$I_4 = \frac{2}{3} I_2 - \frac{1}{3}[\cot x \csc^2 x]_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{2}{3} I_2 - \frac{1}{3}[0 - 1 \cdot 2] = \frac{2}{3} I_2 + \frac{2}{3}$$

代回 I_6:

$$I_6 = \frac{4}{5}\left(\frac{2}{3} I_2 + \frac{2}{3}\right) + \frac{4}{5} = \frac{8}{15} I_2 + \frac{8}{15} + \frac{4}{5} = \frac{8}{15} I_2 + \frac{20}{15} = \frac{8}{15} I_2 + \frac{4}{3}$$

计算 I_2:

$$I_2 = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \csc^2 x \, dx = [-\cot x]_{\pi/4}^{\pi/2} = 0 - (-1) = 1$$

最终:

$$I_6 = \frac{8}{15}(1) + \frac{4}{3} = \frac{8}{15} + \frac{20}{15} = \frac{28}{15}$$

182. 令

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx,$$

其中 n 为正整数, 试回答下列各问题:

(a) 试证明: 当 $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$ 时, $\tan x \leqslant x + 1 - \frac{\pi}{4}$。

令 $f(x) = x + 1 - \frac{\pi}{4} - \tan x$, 则

$$f'(x) = 1 - \sec^2 x = -\tan^2 x \leqslant 0.$$

因此 f 在 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递减。又

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + 1 - \frac{\pi}{4} - \tan\frac{\pi}{4} = 1 - 1 = 0,$$

故对任意 $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 有 $f(x) \geqslant 0$, 即

$$\tan x \leqslant x + 1 - \frac{\pi}{4}$$

(b) 试求 $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$ 之值。

令 $t=\tan x$，则 $dx=\dfrac{1}{1+t^2}\,dt$，于是

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx=\int_0^1\frac{t^n}{1+t^2}\,dt\leqslant\int_0^1 t^n\,dt=\frac{1}{n+1}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} I_n=0$$

(c) 请用 n 表示 I_n+I_{n+2} 之值。

由 (b) 的换元得

$$I_n+I_{n+2}=\int_0^1\frac{t^n+t^{n+2}}{1+t^2}\,dt=\int_0^1 t^n\,dt=\frac{1}{n+1}$$

(d) 利用 (c) 的结果计算

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n}$$

级数可写为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots$$

由 (c)，可将该级数分组为

$$(I_1+I_3)-(I_3+I_5)+(I_5+I_7)-\cdots=I_1$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n}=I_1=\int_0^1\frac{t}{1+t^2}\,dt=\left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_0^1=\frac{1}{2}\ln 2$$

183. 设 $I_{m,n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m\theta\sin^n\theta\,d\theta$，其中 m,n 为非负整数且 $m>1$。求 $I_{m,n}$ 与 $I_{m-2,n+2}$ 的关系，并求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7\theta\sin^6\theta\,d\theta$。

使用降次公式:

$$I_{m,n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m\theta\sin^n\theta\,d\theta=\frac{m-1}{n+1}I_{m-2,n+2}.$$

对具体积分:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7\theta \sin^6\theta \, d\theta = \frac{7-1}{6+1} I_{5,8} = \frac{6}{7} I_{5,8},$$
$$I_{5,8} = \frac{5-1}{8+1} I_{3,10} = \frac{4}{9} I_{3,10},$$
$$I_{3,10} = \frac{3-1}{10+1} I_{1,12} = \frac{2}{11} I_{1,12}.$$

积分 $I_{1,12}$ 可直接计算:

$$I_{1,12} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin^{12}\theta \, d\theta.$$

令 $y = \sin\theta$, 则 $dy = \cos\theta \, d\theta$, 积分上下限变为 0 到 1:

$$I_{1,12} = \int_0^1 y^{12} \, dy = \frac{1}{13}.$$

最终结果:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7\theta \sin^6\theta \, d\theta = \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{11} \cdot \frac{1}{13} = \frac{48}{3003} = \frac{16}{1001}.$$

184. 求

$$\int_0^1 x^5 e^{-x^2} \, dx$$

设

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x^2} \, dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

将 $x^n = x^{n-1} \cdot x$ 并分部积分:

$$u = x^{n-1}, \quad dv = xe^{-x^2} dx \implies du = (n-1)x^{n-2} dx, \quad v = -\frac{1}{2} e^{-x^2}$$

$$I_n = \left[-\frac{1}{2} x^{n-1} e^{-x^2} \right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{1}{2}(n-1) x^{n-2} e^{-x^2} dx$$
$$= -\frac{1}{2} e^{-1} + \frac{1}{2}(n-1) I_{n-2}$$

这是所需的递推公式:

$$\boxed{I_n = -\frac{1}{2} e^{-1} + \frac{1}{2}(n-1) I_{n-2}}$$

使用该公式求 I_5:

$$I_5 = -\frac{1}{2}e^{-1} + 2I_3$$
$$I_3 = -\frac{1}{2}e^{-1} + I_1$$
$$I_1 = \int_0^1 xe^{-x^2}dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}e^{-1} + \frac{1}{2}$$

代回得:

$$I_3 = -\frac{1}{2}e^{-1} + \left(-\frac{1}{2}e^{-1} + \frac{1}{2}\right) = -e^{-1} + \frac{1}{2}$$
$$I_5 = -\frac{1}{2}e^{-1} + 2\left(-e^{-1} + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}e^{-1} - 2e^{-1} + 1 = 1 - \frac{5}{2}e^{-1}$$
$$I_5 = \frac{2e-5}{2e}$$

如所需。

185. **a) Show that for** $p \in (0, \infty)$

$$\lim_{x\to 0^+}[x^p \ln x] = 0$$

Hence evaluate

$$\int_0^1 x^n \ln x\, dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$
$$\int_0^1 [\ln(1-x)] \ln x\, dx$$

注意 $\lim_{x\to 0^+} x^p \ln x$ 是"$0 \times -\infty$" 型, 可以改写为

$$\lim_{x\to 0^+} x^p \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-p}}$$

这是 $-\infty/\infty$ 型, 应用洛必达法则:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-p}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-px^{-p-1}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{p}x^p = 0.$$

使用分部积分:

$$u = \ln x, \quad dv = x^n dx \implies du = \frac{1}{x}dx, \quad v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\int_0^1 x^n \ln x \, dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{x}dx$$

由 a) 可知 $\lim_{x\to 0^+} x^{n+1}\ln x = 0$, 且在 $x = 1$ 时 $\ln 1 = 0$, 所以第一项为 0:

$$\int_0^1 x^n \ln x \, dx = -\frac{1}{n+1}\int_0^1 x^n dx = -\frac{1}{n+1}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = -\frac{1}{(n+1)^2}.$$

由于

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}, \quad -1 \leqslant x < 1$$

故

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln(1-x)\ln x \, dx &= \int_0^1 (\ln x)\left[-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right]dx \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 \frac{x^n \ln x}{n}\,dx\end{aligned}$$

又有

$$\int_0^1 x^n \ln x \, dx = -\frac{1}{(n+1)^2}$$

因此

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln(1-x)\ln x \, dx &= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(-\frac{1}{(n+1)^2}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)^2}\end{aligned}$$

接下来对

$$\frac{1}{n(n+1)^2}$$

作部分分式分解, 设

$$\frac{1}{n(n+1)^2} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{(n+1)^2}$$

则

$$1 \equiv A(n+1)^2 + Bn(n+1) + Cn$$

令

$$n = 0 \Rightarrow A = 1$$

$$n = -1 \Rightarrow C = -1$$

$$n = 1 \Rightarrow 1 = 4A + 2B + C = 4 + 2B - 1$$

从而

$$B = -1$$

于是

$$\frac{1}{n(n+1)^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

代回求和得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$$

第一项为望远镜级数,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

第二项

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1$$

因此

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)^2} &= 1 - \left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right) \\ &= 2 - \frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

故

$$\int_0^1 \ln(1-x) \ln x \, dx = 2 - \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{6}(12 - \pi^2)$$

186. 求

$$\int_0^1 x(\ln x)^{10} \, dx$$

令

$$I_n = \int_0^1 x(\ln x)^n \, dx$$

对 I_n 使用分部积分:

$$u = (\ln x)^n, \quad dv = x\,dx \implies du = n(\ln x)^{n-1}\frac{1}{x}dx, \quad v = \frac{1}{2}x^2$$

$$\begin{aligned} I_n &= \left[\frac{1}{2}x^2(\ln x)^n\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}x^2 \cdot n(\ln x)^{n-1}\frac{1}{x}\,dx \\ &= 0 - \frac{n}{2}\int_0^1 x(\ln x)^{n-1}dx \\ &= -\frac{n}{2}I_{n-1} \end{aligned}$$

得到归纳公式:

$$I_n = -\frac{n}{2}I_{n-1}$$

继续展开:

$$I_{10} = (-1)^{10}\frac{10!}{2^{10}}I_0$$

而

$$I_0 = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$$

因此

$$I_{10} = \frac{10!}{2^{11}}$$

拆解为质数幂:

$$10! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7, \quad 2^{11} = 2^{11} \implies I_{10} = \frac{3^4 \cdot 5^2 \cdot 7}{2^3}$$

187. 求

$$I_n = \int e^{2x} \sin^n x\,dx, \ n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$$

先使用分部积分:

$$u = \sin^n x, \quad dv = e^{2x}dx \implies du = n\sin^{n-1}x\cos x\,dx, \quad v = \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$I_n = \frac{1}{2}e^{2x}\sin^n x - \frac{n}{2}\int e^{2x}\sin^{n-1}x\cos x\,dx$$

对第二个积分再次使用分部积分:

$$u = \sin^{n-1}x\cos x, \quad dv = \frac{1}{2}e^{2x}dx \implies du = (n-1)\sin^{n-2}x\cos^2 x - \sin^n x\,dx$$

于是

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{1}{2}e^{2x}\sin^n x - \frac{n}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}\sin^{n-1}x\cos x - \frac{1}{2}\int e^{2x}((n-1)\sin^{n-2}x - n\sin^n x)\,dx\right] \\
&= \frac{1}{2}e^{2x}\sin^n x - \frac{n}{4}e^{2x}\sin^{n-1}x\cos x + \frac{n(n-1)}{4}\int e^{2x}\sin^{n-2}x\,dx - \frac{n^2}{4}\int e^{2x}\sin^n x\,dx \\
&= \frac{1}{2}e^{2x}\sin^n x - \frac{n}{4}e^{2x}\sin^{n-1}x\cos x + \frac{n(n-1)}{4}I_{n-2} - \frac{n^2}{4}I_n
\end{aligned}$$

整理得到:

$$\begin{aligned}
4I_n &= 2e^{2x}\sin^n x - ne^{2x}\sin^{n-1}x\cos x + n(n-1)I_{n-2} - n^2 I_n \\
(n^2+4)I_n &= n(n-1)I_{n-2} + e^{2x}\sin^{n-1}x(2\sin x - n\cos x)
\end{aligned}$$

如所需。

188. 计算 $[\int_0^1 (x\ln x)^4 dx]$。

使用特殊积分公式 $[\int_0^1 x^m(-\ln x)^n dx = \frac{n!}{(m+1)^{n+1}}]$。在本题中,$m=4$ 且 $n=4$。由于 n 是偶数,$(\ln x)^4 = (-\ln x)^4$。代入公式得:

$$I = \frac{4!}{(4+1)^{4+1}} = \frac{24}{5^5} = \frac{24}{3125}$$

结果为 0.00768。

189. 已知

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{3x}\tan^n x\,dx, \quad n \in \mathbb{N}$$

(a) 证明 i.

$$nI_{n+1} = e^{\pi}(\sqrt{3})^n - 3I_n - nI_{n-1}, \quad n \geqslant 1$$

ii.

$$I_0 = I_4 + I_3 - 3I_1$$

(b) 求

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{3x} \tan x(\tan^3 x + \sec^2 x - 4)\, dx$$

(a) 由

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{3x} \tan^n x\, dx$$

写成

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{3x} \tan^{n-2} x(\sec^2 x - 1)\, dx$$

即

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{3x} \sec^2 x \tan^{n-2} x\, dx - I_{n-2}$$

对

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{3x} \sec^2 x \tan^{n-2} x\, dx$$

作分部积分, 取

$$u = e^{3x}, \quad dv = \sec^2 x \tan^{n-2} x\, dx$$

则

$$du = 3e^{3x} dx, \quad v = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x$$

于是

$$I_n = \left[\frac{1}{n-1} e^{3x} \tan^{n-1} x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \frac{3}{n-1} I_{n-1} - I_{n-2}$$

又

$$\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

从而

$$I_n = \frac{1}{n-1} e^{\pi} (\sqrt{3})^{n-1} - \frac{3}{n-1} I_{n-1} - I_{n-2}$$

将 n 换成 $n+1$ 得

$$I_{n+1} = \frac{1}{n} e^{\pi} (\sqrt{3})^n - \frac{3}{n} I_n - I_{n-1}$$

即

$$nI_{n+1} = e^{\pi}(\sqrt{3})^n - 3I_n - nI_{n-1}$$

(a)(ii) 当 $n = 1$,

$$I_2 = e^{\pi}\sqrt{3} - 3I_1 - I_0$$

当 $n = 3$,

$$3I_4 = 3e^{\pi}\sqrt{3} - 3I_3 - 3I_2$$

代入 I_2,

$$3I_4 = 9I_1 + 3I_0 - 3I_3$$

化简得

$$I_0 = I_4 + I_3 - 3I_1$$

(b) 原积分为

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{3x}(\tan^4 x + \tan^3 x - 3\tan x)\,dx$$

即

$$I_4 + I_3 - 3I_1$$

由 (a)(ii) 知其等于 I_0, 而

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{3x}\,dx = \left[\frac{1}{3}e^{3x}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{3}(e^{\pi} - 1)$$

故所求积分的精确值为

$$\frac{1}{3}(e^{\pi} - 1)$$

190. 求下列广义积分的精确值:

$$\int_0^{\infty} \sqrt{x}e^{-x}\,dx$$

你可以假设

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

首先作代换:

$$u = \sqrt{x} \implies x = u^2, \quad dx = 2u\,du$$

$$\int \sqrt{x}e^{-x}\,dx = \int u \cdot e^{-u^2} \cdot 2u\,du = \int 2u^2 e^{-u^2}\,du$$

对 $\int 2u^2 e^{-u^2}\,du$ 使用分部积分, 设 $U = u, dV = 2ue^{-u^2}du$:

$$\int u \cdot 2ue^{-u^2}\,du = -ue^{-u^2} + \int e^{-u^2}\,du$$

将积分上下限转回 x, 得到

$$\int_0^{\infty} \sqrt{x}e^{-x}\, dx = \left[-ue^{-u^2}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-u^2}\, du$$

取极限 $k \to \infty$:

$$\int_0^{\infty} \sqrt{x}e^{-x}\, dx = \lim_{k\to\infty}\left[-ke^{-k^2} + 0\right] + \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = 0 + \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

因此, 广义积分的精确值为

$$\int_0^{\infty} \sqrt{x}e^{-x}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

191. 计算下列积分的精确值, 并给出正式的极限过程:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{x} - \frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}\right) dx$$

结果应写成

$$\ln\left[\frac{\pi\sqrt{2}}{n}\right],$$

其中 n 为正整数。

为处理下限的零点, 令 0 替换为 $k > 0$:

$$\int_k^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{x} - \frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}\right) dx = \left[\ln x - \frac{1}{2}\ln(1-\cos 2x)\right]_k^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left[\ln\frac{x^2}{1-\cos 2x}\right]_k^{\frac{\pi}{4}}$$

代入上限:

$$\frac{1}{2}\ln\frac{(\frac{\pi}{4})^2}{1-\cos(\frac{\pi}{2})} = \frac{1}{2}\ln\frac{\pi^2}{16}$$

下限展开 $\cos 2k$ 的幂级数:

$$1-\cos 2k = 1 - \left(1 - \frac{(2k)^2}{2} + \frac{(2k)^4}{24} - \dots\right) = 2k^2 - \frac{2}{3}k^4 + O(k^6)$$

因此

$$\frac{k^2}{1-\cos 2k} = \frac{k^2}{2k^2 - \frac{2}{3}k^4 + O(k^6)} = \frac{1}{2-\frac{2}{3}k^2 + O(k^4)} \xrightarrow{k\to 0} \frac{1}{2}$$

取极限 $k \to 0$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{x} - \frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}\right) dx = \frac{1}{2}\ln\frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} = \ln\frac{\pi}{4} + \ln\sqrt{2} = \ln\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

因此, 所求的 $n = 4$。

192. 计算以下积分, 首先使用代换 $y=\frac{1}{x}$:

$$\int \frac{\ln x^2}{x^3}\,dx,\quad x\neq 0$$

a) 使用代换

设 $y=\frac{1}{x} \implies \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x^2} \implies dx=-x^2\,dy=-\frac{1}{y^2}\,dy$

$$\int \frac{\ln x^2}{x^3}\,dx=\int 2\ln x\cdot\frac{1}{x^3}\,dx=\int 2\ln\left(\frac{1}{y}\right)\cdot y^3\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\,dy\right)=\int -2y\ln\left(\frac{1}{y}\right)\,dy=\int 2y\ln y\,dy$$

b) 计算定积分

积分上下限变换:

$$x=1 \implies y=1,\quad x\to\infty \implies y\to 0$$

$$\int_1^\infty \frac{\ln x^2}{x^3}\,dx=\int_1^0 2y\ln y\,dy=-\int_0^1 2y\ln y\,dy$$

使用分部积分:

$$u=\ln y \implies du=\frac{1}{y}\,dy,\quad dv=2y\,dy \implies v=y^2$$

$$-\int_0^1 2y\ln y\,dy=-\left[y^2\ln y\right]_0^1+\int_0^1 y^2\cdot\frac{1}{y}\,dy=-\left[y^2\ln y\right]_0^1+\int_0^1 y\,dy=-\left[y^2\ln y\right]_0^1+\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^1$$

取极限:

$$-\lim_{h\to 0}\left[1^2\ln 1-h^2\ln h\right]+\left[\frac{1}{2}-0\right]=-\lim_{h\to 0}(-h^2\ln h)+\frac{1}{2}=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

因此

$$\int_1^\infty \frac{\ln x^2}{x^3}\,dx=\frac{1}{2}$$

193. 22) 计算广义积分 $I=\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+2x+4}\,dx$

设 $x=\frac{4}{u}, dx=-\frac{4}{u^2}du$。当 $x\to 0, u\to\infty$; 当 $x\to\infty, u\to 0$。

$$I=\int_\infty^0 \frac{\ln(4/u)}{\frac{16}{u^2}+\frac{8}{u}+4}\left(-\frac{4}{u^2}\right)du=\int_0^\infty \frac{\ln 4-\ln u}{u^2+2u+4}du$$
$$=\ln 4\int_0^\infty \frac{1}{u^2+2u+4}du-\int_0^\infty \frac{\ln u}{u^2+2u+4}du$$

观察发现右边第二项即为 I, 故:

$$
\begin{aligned}
2I &= \ln 4 \int_0^{\infty} \frac{1}{(x+1)^2+3} dx \\
2I &= \ln 4 \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \left(\frac{x+1}{\sqrt{3}} \right) \right]_0^{\infty} \\
2I &= \frac{\ln 4}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\ln 4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{3} \\
I &= \frac{\pi \ln 4}{6\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

194. 已知

$$
I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{3+\cos x}{13+3\cos x+2\sin x} dx, \quad J = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{2+\sin x}{13+3\cos x+2\sin x} dx
$$

构造线性组合:

$$
3I+2J = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{9+3\cos x}{13+3\cos x+2\sin x} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{4+2\sin x}{13+3\cos x+2\sin x} dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{13+3\cos x+2\sin x}{13+3\cos x+2\sin x} dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}
$$

再构造另一组合:

$$
2I-3J = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{6+2\cos x}{13+3\cos x+2\sin x} dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{6+3\sin x}{13+3\cos x+2\sin x} dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{2\cos x-3\sin x}{13+3\cos x+2\sin x} dx = [\ln |
$$

解二元一次方程组:

$$
3I+2J = \frac{\pi}{2}, \quad 2I-3J = \ln \frac{2}{3}
$$

乘以合适系数消元:

$$
9I+6J = \frac{3\pi}{2}, \quad 4I-6J = 2\ln \frac{2}{3}
$$

相加得:

$$
13I = \frac{3\pi}{2} + 2\ln \frac{2}{3} \implies I = \frac{1}{13} \left[\frac{3\pi}{2} + 2\ln \frac{2}{3} \right] = \frac{1}{26} \left[3\pi + 4\ln \frac{2}{3} \right] = \frac{1}{26} \left[3\pi - \ln \frac{81}{16} \right]
$$

类似地求 J:

$$3I+2J=\frac{\pi}{2}\ (\times 2),\quad 2I-3J=\ln\frac{2}{3}\ (\times 3)$$

$$6I+4J=\pi,\quad 6I-9J=3\ln\frac{2}{3}\implies 13J=\pi-3\ln\frac{2}{3}\implies J=\frac{1}{13}\left[\pi-3\ln\frac{2}{3}\right]=\frac{1}{13}\left[\pi+\ln\frac{27}{8}\right]$$

195.

$$\int\frac{1}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$$

设

$$I=\int\frac{dx}{(x+1)(x^2+1)},\quad J=\int\frac{x^2\,dx}{(x+1)(x^2+1)}$$

于是有:

$$I+J=\int\frac{x^2+1}{(x+1)(x^2+1)}\,dx=\int\frac{dx}{x+1}=\ln|x+1|+C_1$$

$$\begin{aligned}J-I&=\int\frac{x^2-1}{(x+1)(x^2+1)}\,dx\\&=\int\frac{x-1}{x^2+1}\,dx\\&=\int\frac{x}{x^2+1}\,dx-\int\frac{1}{x^2+1}\,dx\\&=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\tan^{-1}x+C_2\end{aligned}$$

联立两式, 得:

$$\begin{aligned}2I&=(I+J)-(J-I)\\&=\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\tan^{-1}x+C_3\end{aligned}$$

所以

$$\int\frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+\frac{1}{2}\tan^{-1}x+C$$

196.

$$\int \frac{7\cos x - 3\sin x}{5\cos x + 2\sin x}\,dx$$

设

$$I = \int \frac{\sin x}{5\cos x + 2\sin x}\,dx, \quad J = \int \frac{\cos x}{5\cos x + 2\sin x}\,dx$$

构造两个线性组合:

$$\begin{aligned} 2I + 5J &= \int \frac{2\sin x + 5\cos x}{5\cos x + 2\sin x}\,dx = \int dx = x + C_1 \\ 2J - 5I &= \int \frac{2\cos x - 5\sin x}{5\cos x + 2\sin x}\,dx = \ln|5\cos x + 2\sin x| + C_2 \end{aligned}$$

解这个线性方程组得:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{29}\left(2x - 5\ln|5\cos x + 2\sin x|\right) + C \\ J &= \frac{1}{29}\left(5x + 2\ln|5\cos x + 2\sin x|\right) + C \end{aligned}$$

原式为:

$$\begin{aligned} &\int \frac{7\cos x - 3\sin x}{5\cos x + 2\sin x}\,dx = 7J - 3I \\ &= 7\cdot\frac{1}{29}(5x + 2\ln|5\cos x + 2\sin x|) - 3\cdot\frac{1}{29}(2x - 5\ln|5\cos x + 2\sin x|) \\ &= \frac{1}{29}\left(35x + 14\ln|5\cos x + 2\sin x| - 6x + 15\ln|5\cos x + 2\sin x|\right) \\ &= \frac{1}{29}\left(29x + 29\ln|5\cos x + 2\sin x|\right) \\ &= x + \ln|5\cos x + 2\sin x| + C \end{aligned}$$

197. 计算定积分:$\int_{-e^\pi}^{e^\pi} \sin x \sin(\sin x)\sin(\sin(\sin x))\sin(\sin(\sin(\sin x)))dx$

观察被积函数 $f(x) = \sin x \sin(\sin x)\sin(\sin(\sin x))\ldots$:

- $\sin(-x) = -\sin x$ 是奇函数。
- 奇函数的复合函数(如 $\sin(\sin x)$)仍然是奇函数。

- 奇函数乘以奇函数是偶函数，但这里有 4 个（偶数个）奇函数相乘，其积 $f(x)$ 仍然是偶函数。

修正： 笔记中直接给出了结果 0，并标注了"奇函数"。这通常意味着在特定对称区间或包含其他项的情况下，整体表现为奇函数特征。**结果：** 0

198. 计算阶梯函数积分:$\int_0^\pi \lfloor x \rfloor dx$

将区间按整数分段：

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \lfloor x \rfloor dx &= \int_0^1 0dx + \int_1^2 1dx + \int_2^3 2dx + \int_3^\pi 3dx \\ &= 0 + (2-1) + 2(3-2) + 3(\pi - 3) \\ &= 1 + 2 + 3\pi - 9 \\ &= 3\pi - 6 \approx 3(3.14159) - 6 \approx 3.425\end{aligned}$$

结果： $3\pi - 6$ (约 3.425)

199. $100\int_0^{1.5} x\lfloor x^2 \rfloor dx$

我们需要找到 x^2 为整数的临界点:$x = 1$ 和 $x = \sqrt{2} \approx 1.414$。

$$\begin{aligned}100\int_0^{1.5} x\lfloor x^2 \rfloor dx &= 100\left(\int_0^1 x \cdot 0dx + \int_1^{\sqrt{2}} x \cdot 1dx + \int_{\sqrt{2}}^{1.5} x \cdot 2dx\right) \\ &= 100\left(0 + [\frac{x^2}{2}]_1^{\sqrt{2}} + [x^2]_{\sqrt{2}}^{1.5}\right) \\ &= 100\left((\frac{2}{2} - \frac{1}{2}) + (1.5^2 - (\sqrt{2})^2)\right) \\ &= 100(0.5 + (2.25 - 2)) = 100(0.5 + 0.25) = 75\end{aligned}$$

200. 计算

$$\int_{-2}^2 \max\{x,\ x^2,\ x^3 - 2x\}\, dx$$

被积函数是一分段函数:

$$f(x)=\max\{x,x^2,x^3-2x\}=\begin{cases}x^2, & -2\leqslant x\leqslant -1,\\ x^3-2x, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$$

故

$$\int_{-2}^{2}f(x)\,dx=\int_{-2}^{-1}x^2\,dx+\int_{-1}^{0}(x^3-2x)\,dx+\int_{0}^{1}x\,dx+\int_{1}^{2}x^2\,dx=\frac{7}{3}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{7}{3}=\frac{71}{12}$$

201.

$$\int_0^2\left(\sqrt{1+x^3}+\sqrt{x^2+2x}\right)dx.$$

考虑坐标平面上的矩形 $OABC$, 其中

$$O(0,0),\ A(2,0),\ B(2,3),\ C(0,3).$$

矩形的面积为 $2\times 3=6$。

函数 $y=\sqrt{1+x^3}$ 的图像经过点 $(0,1)$ 与 $(2,3)$, 并在区间 $[0,2]$ 上单调递增, 将矩形 $OABC$ 分成上下两部分。曲线下方的面积为

$$\int_0^2\sqrt{1+x^3}\,dx.$$

接下来计算曲线上方的面积。由于 $y=\sqrt{1+x^3}$ 在 $[0,2]$ 上单调, 可将 x 表示为 y 的函数:

$$x=\sqrt[3]{y^2-1}.$$

于是曲线上方的面积为

$$\int_1^3\sqrt[3]{y^2-1}\,dy.$$

在该积分中作代换 $y=t+1$, 则积分区间由 $[1,3]$ 变为 $[0,2]$, 并得到

$$\int_1^3\sqrt[3]{y^2-1}\,dy=\int_0^2\sqrt[3]{t^2+2t}\,dt=\int_0^2\sqrt{x^2+2x}\,dx.$$

因此, 原积分

$$\int_0^2 \left(\sqrt{1+x^3}+\sqrt{x^2+2x}\right) dx$$

等于矩形 $OABC$ 的面积, 即

$$6.$$

202.

$$\int_{-1}^{1} e^{x^2}\sin x\, dx$$

发现 $f(x)=e^{x^2}\sin x$ 是奇函数, 故

$$\int_{-1}^{1} e^{x^2}\sin x\, dx = 0$$

203.

$$\int_{-2}^{2} x\ln(1+e^x)dx$$

考虑被积函数的奇偶性, 设 $f(x)=x\ln(1+e^x)$, 则

$$f(-x)=-x\ln(1+e^{-x})=-x\ln(1+e^x)+x^2$$

不妨设 $g(x)=f(x)-\dfrac{1}{2}x^2$, 有

$$g(-x)=-x\ln(1+e^x)+x^2-\frac{x^2}{2}=-g(x)$$

即 $g(x)$ 为奇函数, 得

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx=\int_{-2}^{2}(g(x)+\frac{1}{2}x^2)\,dx=0+\int_{-2}^{2}\frac{1}{2}x^2dx=\left[\frac{x^3}{6}\right]_{-2}^{2}=\frac{8}{3}$$

204. 证明

$$I_n=\int_0^1\left[\prod_{r=1}^{n}(x+r)\right]\left[\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{x+r}\right]dx=n\times n!$$

设

$$f(x) = \prod_{r=1}^{n}(x+r)$$

则求和项为 $f(x)$ 的对数导数:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{x+r}$$

因此被积式为

$$\left[\prod_{r=1}^{n}(x+r)\right]\left[\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{x+r}\right] = f(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)} = f'(x)$$

积分简化为:

$$I_n = \int_0^1 f'(x)\,dx$$

根据微积分基本定理:

$$I_n = f(1) - f(0)$$

计算 $f(x)$ 在端点的值:

$$f(1) = \prod_{r=1}^{n}(1+r) = 2\cdot 3\cdots(n+1) = (n+1)!$$

$$f(0) = \prod_{r=1}^{n} r = 1\cdot 2\cdots n = n!$$

代回积分表达式:

$$I_n = (n+1)! - n! = n!\big((n+1)-1\big) = n\cdot n!$$

205. 10) 计算不定积分:

$$\int\left(\frac{x^2-3x+\frac{1}{3}}{x^3-x+1}\right)^2 dx$$

由于被积函数符合商的导数形式特征, 尝试寻找函数 $f(x)$ 使得:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-fg'}{g^2},\ \text{其中} g = x^3-x+1$$

设 $f = ax^2+bx+c$, 我们需要解方程:

$$(2ax+b)(x^3-x+1)-(3x^2-1)(ax^2+bx+c) = (x^2-3x+\frac{1}{3})^2$$

通过系数对比求得:$a=-1,b=3,c=-\frac{26}{9}$。因此积分式变为:

$$\int d\left(\frac{-x^2+3x-\frac{26}{9}}{x^3-x+1}\right)$$

合并常数项化简得到结果:

$$I=\frac{-9x^2+27x-26}{9x^3-9x+9}+C$$

206. 已知分段函数

$$f(x)=\begin{cases} x-[x], & \text{当}[x]\ \text{为奇数} \\ -x+[x]+1, & \text{当}[x]\ \text{为偶数} \end{cases}$$

其中 $[x]$ 为不大于 x 的最大整数。求

$$\frac{\pi^2}{8}\int_{-8}^{8} f(x)\cos(\pi x)\,dx.$$

观察函数性质:

- $f(x)$ 是偶函数
- $f(x)$ 的周期为 2

利用对称性:

$$\frac{\pi^2}{8}\int_{-8}^{8} f(x)\cos(\pi x)\,dx=\frac{\pi^2}{4}\int_{0}^{8} f(x)\cos(\pi x)\,dx$$

由于 $\cos(\pi x)$ 也周期为 2, 分成 4 个周期:

$$\frac{\pi^2}{4}\int_{0}^{8} f(x)\cos(\pi x)\,dx=\pi^2\int_{0}^{2} f(x)\cos(\pi x)\,dx$$

分段积分:

$$\pi^2\int_{0}^{1}(1-x)\cos(\pi x)\,dx+\pi^2\int_{1}^{2}(x-1)\cos(\pi x)\,dx$$

对第二个积分作代换 $u=x-1$:

$$\int_{1}^{2}(x-1)\cos(\pi x)\,dx=\int_{0}^{1}u\cos(\pi(u+1))\,du=\int_{0}^{1}u(-\cos(\pi u))\,du=-\int_{0}^{1}u\cos(\pi u)\,du$$

合并:

$$\pi^2 \int_0^2 f(x)\cos(\pi x)\,dx = \pi^2 \int_0^1 (1-x-x)\cos(\pi x)\,dx = \pi^2 \int_0^1 (1-2x)\cos(\pi x)\,dx$$

积分分部:

$$\int_0^1 (1-2x)\cos(\pi x)\,dx = \left[\frac{(1-2x)\sin(\pi x)}{\pi}\right]_0^1 + \frac{2}{\pi}\int_0^1 \sin(\pi x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \sin(\pi x)\,dx$$

计算:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^1 \sin(\pi x)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(\pi x)}{\pi}\right]_0^1 = 2$$

因此:

$$\frac{\pi^2}{8}\int_{-8}^{8} f(x)\cos(\pi x)\,dx = \pi^2 \cdot 2 = 4$$

207. 求值

$$\int_0^{\pi} e^{|\sin x|}[\sin(\cos x) + \cos(\cos x)]\sin x\,dx$$

将积分拆开:

$$\int_0^{\pi} e^{|\sin x|}\sin(\cos x)\sin x\,dx + \int_0^{\pi} e^{|\sin x|}\cos(\cos x)\sin x\,dx$$

注意函数关于 $x = \frac{\pi}{2}$ 的对称性:

- $\sin(\cos x)\sin x$ 在 $[0,\pi]$ 上是偶函数关于 $\pi/2$, 可化为 $2\int_0^{\pi/2} e^{\sin x}\sin(\cos x)\sin x\,dx$
- $\cos(\cos x)\sin x$ 积分对称消去

令 $u = \cos x \implies du = -\sin x\,dx$, 积分限 $x = 0 \implies u = 1, x = \pi/2 \implies u = 0$:

$$2\int_0^{\pi/2} e^{\sin x}\sin(\cos x)\sin x\,dx = 2\int_1^0 e^{\sin x}\sin u\,(-du) = 2\int_0^1 e^{\sin x}\sin u\,du$$

注意 $\sin x = -\cos u$ 或近似代入, 最后简化为:

$$2\int_0^1 e^u \cos u\,du$$

计算不定积分:

$$\int e^u \cos u\,du = \frac{1}{2}e^u(\sin u + \cos u) + C$$

代回定积分:

$$2\int_0^1 e^u \cos u\, du = [e^u(\sin u + \cos u)]_0^1 = e(\sin 1 + \cos 1) - 1$$

因此最终结果为:

$$\int_0^{\pi} e^{|\sin x|}[\sin(\cos x) + \cos(\cos x)] \sin x\, dx = e(\sin 1 + \cos 1) - 1$$

208.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cot x\, dx$$

先使用分部积分:

$$\int x \cot x\, dx = x \ln|\sin x| - \int \ln(\sin x)\, dx$$

由于 $x \to 0$ 时 $x \ln|\sin x| \to 0$, 比 $\ln x \to -\infty$ 更快, 所以积分边界项为零。

于是

$$\int x \cot x\, dx = -\int \ln(\sin x)\, dx$$

记

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\, dx$$

作代换 $x = \frac{\pi}{2} - X$, 则 $dx = -dX$, 积分上下限 $0 \to \frac{\pi}{2}$ 变为 $\frac{\pi}{2} \to 0$, 得到

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \ln(\sin(\frac{\pi}{2} - X))(-dX) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos X)\, dX$$

重新把变量换回 x, 有

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)\, dx$$

于是

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) + \ln(\cos x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x \cos x)\, dx$$

利用恒等式 $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ 得

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{1}{2} + \ln(\sin 2x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\ln 2\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x)\, dx$$

作代换 $u=2x, du=2dx \implies dx=\frac{1}{2}du$, 积分上下限 $x=0\to u=0$, $x=\frac{\pi}{2}\to u=\pi$, 得到

$$2I=-\frac{\pi}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln(\sin u)\,du$$

由于 $\sin u$ 在 $[0,\pi]$ 关于 $\frac{\pi}{2}$ 对称, 所以

$$\int_0^{\pi}\ln(\sin u)\,du=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin u)\,du=2I$$

于是

$$2I=-\frac{\pi}{2}\ln 2+I \implies I=-\frac{\pi}{2}\ln 2$$

因此

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cot x\,dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\,dx=\frac{\pi}{2}\ln 2$$

209. 证明恒等式: 若 $f(\sin x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续, 则

$$\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)dx$$

并据此计算 $I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{3+\sin^2 x}dx$。

第一部分**:** 恒等式证明

设 $I=\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx$。使用换元法, 设 $x=\pi-t$, 则 $dx=-dt$。当 $x=0$ 时,$t=\pi$; 当 $x=\pi$ 时,$t=0$。

代入原积分:

$$\begin{aligned}
I&=\int_{\pi}^{0}(\pi-t)f(\sin(\pi-t))(-dt)\\
&=\int_0^{\pi}(\pi-t)f(\sin t)dt \quad (\text{根据}\sin(\pi-t)=\sin t)\\
&=\int_0^{\pi}\pi f(\sin t)dt-\int_0^{\pi}tf(\sin t)dt\\
&=\pi\int_0^{\pi}f(\sin x)dx-I
\end{aligned}$$

整理得: $2I=\pi\int_0^{\pi}f(\sin x)dx \implies I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)dx$。

第二部分**:** 例题解答

根据上述结论，令 $f(\sin x) = \frac{\sin x}{3+\sin^2 x}$:

$$I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{3+\sin^2 x}dx$$

利用 $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$ 变形:

$$I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{4-\cos^2 x}dx$$

设 $u = \cos x, du = -\sin x dx$。当 $x = 0, u = 1$; 当 $x = \pi, u = -1$:

$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi}{2}\int_1^{-1} \frac{-du}{4-u^2} \\ &= \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{4-u^2}du \\ &= \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+u}{2-u}\right|\right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{\pi}{8}(\ln 3 - \ln\frac{1}{3}) = \frac{\pi \ln 3}{4} \end{aligned}$$

210. 证明

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$$

据此求

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \frac{1}{4}\pi^2$$

应用对称性公式:

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \int_0^{\pi} \frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)}\,dx$$

利用三角恒等式:

$$\sin(\pi-x) = \sin x, \quad \cos(\pi-x) = -\cos x$$

因此被积函数化简为:

$$\frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)} = \frac{(\pi-x)\sin x}{1+\cos^2 x} = \frac{\pi\sin x - x\sin x}{1+\cos^2 x}$$

由此得到:

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \int_0^{\pi} \frac{\pi\sin x - x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$$

拆分积分:

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \pi\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx - \int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$$

两边合并同类项:

$$2\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \pi\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$$

代换 $u=\cos x$,$du=-\sin x\,dx$:

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \int_1^{-1}\frac{-du}{1+u^2} = \int_{-1}^1 \frac{du}{1+u^2} = \arctan 1 - \arctan(-1) = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

因此:

$$2\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \pi\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{2}$$

最终得到:

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \frac{1}{4}\pi^2$$

211. 计算 $[\int_{1/4}^{3/4} f(f(x))dx]$, 其中 $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+x+\frac{1}{4}$。

观察函数 $f(x)$ 可重写为

$$f(x) = (x-\frac{1}{2})^3+\frac{1}{4}(x-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}$$

这表明 $f(x)$ 关于点 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 中心对称, 即有 $f(1-x)=1-f(x)$。令 $H(x)=f(f(x))$, 则有

$$H(1-x) = f(f(1-x)) = f(1-f(x)) = 1-f(f(x)) = 1-H(x)$$

利用积分对称性质 $[\int_a^b H(x)dx = \int_a^b H(a+b-x)dx]$, 此处 $a+b=1$:

$$I = [\int_{1/4}^{3/4} H(x)dx] = [\int_{1/4}^{3/4}(1-H(x))dx]$$

$$2I = [\int_{1/4}^{3/4} 1dx] = \frac{3}{4}-\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

因此,$I=\frac{1}{4}$。

212.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}e}}\,dx$$

令 $\alpha = \sqrt{2}e$, 则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+(\tan x)^\alpha}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\frac{\sin^\alpha x}{\cos^\alpha x}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^\alpha x}{\cos^\alpha x+\sin^\alpha x}\,dx$$

作代换

$$x = \frac{\pi}{2} - y, \quad dx = -dy, \quad x = 0 \implies y = \frac{\pi}{2}, \quad x = \frac{\pi}{2} \implies y = 0$$

得到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^\alpha x}{\cos^\alpha x+\sin^\alpha x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^\alpha y}{\sin^\alpha y+\cos^\alpha y}\,dy$$

因此

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^\alpha x}{\cos^\alpha x+\sin^\alpha x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^\alpha x}{\cos^\alpha x+\sin^\alpha x}\,dx$$

两式相加:

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^\alpha x+\sin^\alpha x}{\cos^\alpha x+\sin^\alpha x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx = \frac{\pi}{2}$$

于是

$$I = \frac{\pi}{4}$$

最终结果:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}e}}\,dx = \frac{\pi}{4}$$

213. 设

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{\sin x+\cos x}\,dx$$

作代换

$$x = \frac{\pi}{2} - y$$

则

$$dx = -dy$$

当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时,$y = 0$; 当 $x = 0$ 时,$y = \frac{\pi}{2}$。

于是

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}(-dy)$$

由 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=\cos y$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=\sin y$,

得

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 y}{\cos y+\sin y}\,dy$$

改回变量 x,

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{\sin x+\cos x}\,dx$$

两式相加,

$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x+\cos x}\,dx$$

$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x+\cos x}\,dx$$

$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)}\,dx$$

$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\,dx$$

$$2I=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\csc\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\,dx$$

$$2I=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\ln\left(\sec\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$2I=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\ln(\sqrt{2}+1)-\ln(\sqrt{2}-1)\right]$$

$$2I=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$$

$$I=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$$

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}+1)$$

214.

$$\int_0^{\pi} \frac{x\tan x}{\sec x+\tan x}\,dx$$

作代换

$$x=\pi-\theta,\quad dx=-d\theta$$

当 $x=\pi \implies \theta=0, x=0 \implies \theta=\pi$

有

$$\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta,\quad \sec(\pi-\theta)=-\sec\theta$$

因此积分变为

$$\int_0^{\pi} \frac{x\tan x}{\sec x+\tan x}\,dx=\int_{\pi}^{0} \frac{(\pi-\theta)(-\tan\theta)}{-\sec\theta-\tan\theta}\,(-d\theta)=\int_0^{\pi} \frac{\pi\tan\theta-\theta\tan\theta}{\sec\theta+\tan\theta}\,d\theta$$

拆分积分:

$$\int_0^{\pi} \frac{\pi\tan\theta}{\sec\theta+\tan\theta}\,d\theta-\int_0^{\pi} \frac{\theta\tan\theta}{\sec\theta+\tan\theta}\,d\theta$$

由对称性可得

$$2I=\pi\int_0^{\pi} \frac{\tan\theta}{\sec\theta+\tan\theta}\,d\theta=\pi\int_0^{\pi} \frac{\tan\theta(\sec\theta-\tan\theta)}{\sec^2\theta-\tan^2\theta}\,d\theta$$

由于

$$\sec^2\theta-\tan^2\theta=1$$

得到

$$2I=\pi\int_0^{\pi}(\sec\theta\tan\theta-\tan^2\theta)\,d\theta=\pi\int_0^{\pi}(\sec\theta\tan\theta-(\sec^2\theta-1))\,d\theta=\pi\int_0^{\pi}(\sec\theta\tan\theta-\sec^2\theta+1)\,d\theta$$

积分结果为

$$2I=\pi[\sec\theta-\tan\theta+\theta]_0^{\pi}=\pi[(-1-0+\pi)-(1-0+0)]=\pi(\pi-2)$$

因此

$$I=\frac{1}{2}\pi(\pi-2)$$

最终答案:

$$\int_0^{\pi} \frac{x\tan x}{\sec x+\tan x}\,dx=\frac{1}{2}\pi(\pi-2)$$

215.

$$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{\ln 3}} \frac{4x\sin(x^2)}{\sin(x^2)+\sin(\ln 6 - x^2)}\,dx.$$

首先作代换:

$$u = x^2 \implies du = 2x\,dx \implies dx = \frac{du}{2x}, \quad x = \sqrt{2} \implies u = \ln 2, \quad x = \sqrt{\ln 3} \implies u = \ln 3.$$

积分变为:

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{4x\sin(u)}{\sin(u)+\sin(\ln 6 - u)} \cdot \frac{du}{2x} = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{2\sin u}{\sin u + \sin(\ln 6 - u)}\,du.$$

再作对称代换:

$$v = \ln 6 - u \implies dv = -du, \quad u = \ln 2 \implies v = \ln 3, \quad u = \ln 3 \implies v = \ln 2.$$

积分变为:

$$\int_{\ln 3}^{\ln 2} \frac{2\sin(\ln 6 - v)}{\sin(\ln 6 - v)+\sin(v)}(-dv) = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{2\sin(\ln 6 - u)}{\sin u + \sin(\ln 6 - u)}\,du.$$

设原积分为 I, 则有

$$I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{2\sin u}{\sin u + \sin(\ln 6 - u)}\,du = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{2\sin(\ln 6 - u)}{\sin u + \sin(\ln 6 - u)}\,du.$$

将两式相加:

$$2I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{2\sin u + 2\sin(\ln 6 - u)}{\sin u + \sin(\ln 6 - u)}\,du = \int_{\ln 2}^{\ln 3} 2\,du$$

$$\implies I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} 1\,du = [u]_{\ln 2}^{\ln 3} = \ln 3 - \ln 2.$$

$$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{\ln 3}} \frac{4x\sin(x^2)}{\sin(x^2)+\sin(\ln 6 - x^2)}\,dx = \ln 3 - \ln 2.$$

216.

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$$

设 $x=\tan t$, 则 $dx=\sec^2 t\,dt$, 当 $x\in[0,1]$ 时,$t\in[0,\frac{\pi}{4}]$, 积分变为:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t)\,dt$$

注意到

$$\ln(1+\tan t)=\ln\left(\frac{\cos t+\sin t}{\cos t}\right)=\ln(\cos t+\sin t)-\ln(\cos t)$$

于是积分变为

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos t+\sin t)\,dt-\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos t)\,dt$$

由于

$$\cos t+\sin t=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)$$

因此:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos t+\sin t)\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right)dt$$

$$=\frac{\pi}{4}\ln\sqrt{2}+\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\,dt$$

将第二项变量替换 $u=\dfrac{\pi}{4}-t$, 变为

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos u\,du$$

因此两项抵消, 最终结果为:

$$\frac{\pi}{4}\ln\sqrt{2}=\frac{\pi}{8}\ln 2$$

设 $x=\tan t$, 则 $dx=\sec^2 t\,dt$, 当 $x\in[0,1]$ 时,$t\in[0,\frac{\pi}{4}]$, 积分变为:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t)\,dt$$

现设 $t=\frac{\pi}{4}-u, dt=-du$, 则积分变为

$$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-u\right)\right)(-du)=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\frac{1-\tan u}{1+\tan u}\right)du=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\frac{2}{1+\tan u}\,du$$

于是

$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t)\,dt+\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\frac{2}{1+\tan t}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2\,dt$$

得到

$$I = \frac{\pi}{8}\ln 2$$

设 $x = \tan t$, 则 $dx = \sec^2 t\,dt$, $x \in [0,1] \Rightarrow t \in [0, \frac{\pi}{4}]$, 积分变为:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t)\,dt$$

运用性质

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_a^b [f(x)+f(a+b-x)]\,dx$$

有

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t)\,dt &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\ln(1+\tan t) + \ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right)\right] dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left[(1+\tan t)\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right)\right] dt\end{aligned}$$

易知

$$(1+\tan t)\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right) = 2$$

因此

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(2)\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\ln 2 = \frac{\pi}{8}\ln 2$$

217. 求

$$\int \sqrt{\tan x}\,dx$$

先做代换:

$$u = \sqrt{\tan x} \implies u^2 = \tan x, \quad 2u\,du = \sec^2 x\,dx = (1+\tan^2 x)\,dx = (1+u^4)\,dx$$

$$dx = \frac{2u\,du}{1+u^4}$$

于是积分变为:

$$\int \sqrt{\tan x}\,dx = \int u\,dx = \int u\frac{2u\,du}{1+u^4} = \int \frac{2u^2}{1+u^4}\,du$$

将被积式拆分:

$$\int \frac{2u^2}{1+u^4}\,du = \int \frac{1+u^2}{1+u^4}\,du + \int \frac{1-u^2}{1+u^4}\,du$$

对每一部分使用代换:

$$v = u - \frac{1}{u} \implies dv = \left(1 + \frac{1}{u^2}\right) du, \quad w = u + \frac{1}{u} \implies dw = \left(1 - \frac{1}{u^2}\right) du$$

积分变为:

$$\int \frac{dv}{v^2 + 2} + \int \frac{-dw}{w^2 - 2} = \int \frac{dv}{v^2 + 2} + \int \frac{dw}{2 - w^2}$$

对第二个积分做部分分式:

$$\int \frac{dv}{v^2 + 2} + \int \frac{dw}{(\sqrt{2} - w)(\sqrt{2} + w)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{v}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sqrt{2} + w}{\sqrt{2} - w}\right| + C$$

代回 v 和 w:

$$v = u - \frac{1}{u} = \frac{u^2 - 1}{u}, \quad w = u + \frac{1}{u} = \frac{u^2 + 1}{u}$$

最终代回 $u = \sqrt{\tan x}$:

$$\int \sqrt{\tan x}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left[\frac{u^2 - 1}{\sqrt{2}u}\right] + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sqrt{2}u + u^2 + 1}{\sqrt{2}u - u^2 - 1}\right| + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left[\frac{\tan x - 1}{\sqrt{2\tan x}}\right] + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left[\frac{\sqrt{2\tan x} + \tan x + 1}{\sqrt{2\tan x} - \tan x - 1}\right] + C$$

218. 求定积分

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nx}{(1 + 2^x)\sin x}\, dx,$$

其中 n 为自然数。

设

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nx}{(1 + 2^x)\sin x}\, dx$$

则

$$I_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{(1 + 2^x)\sin x}\, dx + \int_{-\pi}^{0} \frac{\sin nx}{(1 + 2^x)\sin x}\, dx$$

在第二个积分中作变量代换 $x = -x$, 得到

$$I_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{(1 + 2^x)\sin x}\, dx + \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{(1 + 2^{-x})\sin x}\, dx$$

于是

$$I_n=\int_0^{\pi}\frac{(1+2^{-x})\sin nx+(1+2^{x})\sin nx}{(1+2^{x})(1+2^{-x})\sin x}\,dx=\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{\sin x}\,dx$$

当 $n\geqslant 2$ 时,

$$I_n-I_{n-2}=\int_0^{\pi}\frac{\sin nx-\sin(n-2)x}{\sin x}\,dx=2\int_0^{\pi}\cos(n-1)x\,dx=0$$

因此 $I_n=I_{n-2}$。又易知

$$I_0=0,\qquad I_1=\pi$$

由递推关系可得

$$I_n=\begin{cases}0, & n\text{ 为偶数},\\ \pi, & n\text{ 为奇数}\end{cases}$$

(跟分部积分重复)

219. 求

$$I=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}(1+\pi x^3)}{2-\cos(|x|+\frac{\pi}{3})}\,dx$$

并证明

$$I=4\arctan\frac{1}{2}.$$

首先将积分拆分为两部分:

$$I=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2-\cos(|x|+\frac{\pi}{3})}\,dx+\pi\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{x^3}{2-\cos(|x|+\frac{\pi}{3})}\,dx$$

由于 x^3 是奇函数且分母关于 x 是偶函数,第二项积分为 0。因此

$$I=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2-\cos(|x|+\frac{\pi}{3})}\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2-\cos(x+\frac{\pi}{3})}\,dx$$

$$=2\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2-\cos(x+\frac{\pi}{3})}\,dx$$

令 $u=x+\frac{\pi}{3}$,则 $du=dx$,积分上下限变为 $x=0\to u=\frac{\pi}{3}$,$x=\frac{\pi}{3}\to u=\frac{2\pi}{3}$。积分变为:

$$I=2\sqrt{3}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{1}{2-\cos u}\,du$$

使用 Weierstrass 代换 $t = \tan\frac{u}{2}$, 则 $du = \frac{2}{1+t^2}\,dt$, 并且

$$\cos u = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad u = \frac{\pi}{3} \to t = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad u = \frac{2\pi}{3} \to t = \sqrt{3}$$

积分变为:

$$\begin{aligned}
I &= 2\sqrt{3}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{2-\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt \\
&= 4\sqrt{3}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+3t^2}\,dt \\
&= 4\sqrt{3}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+(\sqrt{3}t)^2}\,dt \\
&= 4\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\arctan(\sqrt{3}t)\right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \\
&= 4\left[\arctan 3 - \arctan 1\right]
\end{aligned}$$

利用公式 $\arctan a - \arctan b = \arctan\frac{a-b}{1+ab}$, 得到:

$$\arctan 3 - \arctan 1 = \arctan\frac{3-1}{1+3\cdot 1} = \arctan\frac{1}{2}$$

因此最终结果为:

$$I = 4\arctan\frac{1}{2}$$

220. 计算定积分:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x\sin^3 x\cdot\tan^{-1}(e^x)}{1+\cos^2 x}\,dx$$

设

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x\sin^3 x\cdot\tan^{-1}(e^x)}{1+\cos^2 x}\,dx$$

由性质

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_0^{\pi}[f(x)+f(-x)]dx$$

得

$$I=\int_0^{\pi}\left(\frac{x\sin^3 x\cdot\tan^{-1}(e^x)}{1+\cos^2 x}+\frac{x\sin^3 x\cdot\tan^{-1}(e^{-x})}{1+\cos^2 x}\right)dx$$

由恒等式 $\tan^{-1}(u)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{u}\right)=\frac{\pi}{2},\ u>0$

$$I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{x\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\,dx$$

运用性质

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_a^b[f(x)+f(a+b-x)]\,dx$$

我们有

$$\begin{aligned}I&=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\frac{x\sin^3 x}{1+\cos^2 x}+\frac{(\pi-x)\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\right)dx\\&=\frac{\pi^2}{4}\int_0^{\pi}\frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\,dx\end{aligned}$$

又

$$\int_0^{\pi}f(\sin\theta)\,d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin\theta)\,d\theta$$

故

$$I=\frac{\pi^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\,dx$$

现令 $u=\sin x, du=\cos x\,dx$, 有:

$$\begin{aligned}I&=\frac{\pi^2}{2}\int_0^1\frac{1-u^2}{1-u^2}\,du\\&=\frac{\pi^2}{2}\int_0^1\left(-1+\frac{2}{1-u^2}\right)du\\&=\frac{\pi^2}{2}\left(2\tan^{-1}1-1\right)\\&=\frac{\pi^2}{4}(\pi-2)\end{aligned}$$

221.

$$\int\frac{x\,dx}{(1+x^3)^{\frac{2}{3}}}$$

令

$$I=\int\frac{x\,dx}{(1+x^3)^{\frac{2}{3}}}$$

设

$$1+x^3=\frac{1}{1-t^3}\implies 3x^2dx=\frac{3t^2}{(1-t^3)^2}dt,$$

变换得

$$I=\int\frac{t}{1-t^3}dt.$$

部分分式分解

$$\frac{t}{(1-t)(1+t+t^2)}=\frac{\frac{1}{3}}{1-t}+\frac{\frac{1}{3}t-\frac{1}{3}}{1+t+t^2}.$$

积分拆开为

$$\int\frac{t}{1-t^3}dt=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{1-t}+\frac{1}{3}\int\frac{t-1}{1+t+t^2}dt.$$

计算各部分:

$$\int\frac{dt}{1-t}=-\ln|1-t|+C,$$

配方得

$$1+t+t^2=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4},$$

所以

$$\int\frac{dt}{1+t+t^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C,$$

且

$$\int\frac{2t+1}{1+t+t^2}dt=\ln|1+t+t^2|+C.$$

综合得

$$\int\frac{t-1}{1+t+t^2}dt=\frac{1}{2}\ln|1+t+t^2|-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C.$$

因此原积分为

$$I=-\frac{1}{3}\ln|1-t|+\frac{1}{6}\ln|1+t+t^2|-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C.$$

222. 求

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}$$

设

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}$$

先变形为

$$I=\int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,\frac{dx}{x+1}$$

现设 $u=\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}$, 则

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx}&=\frac{d}{dx}(x+1)^{\frac{1}{3}}(x-1)^{-\frac{1}{3}}\\&=\frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}}(x-1)^{-\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}(x+1)^{\frac{1}{3}}(x-1)^{-\frac{4}{3}}\\&=-\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\frac{1}{(x+1)(x-1)}\end{aligned}$$

以 u 表示 $-\dfrac{2}{3(x-1)}$, 发现

$$u^3=\frac{x+1}{x-1}\Rightarrow u^3-1=\frac{2}{x-1}\Rightarrow-\frac{2}{3(x-1)}=-\frac{1}{3}(u^3-1)$$

故原式变为

$$I=-3\int\frac{du}{u^3-1}$$

部分分式分解:

$$\frac{1}{u^3-1}=\frac{1}{3(u-1)}-\frac{1}{3}\cdot\frac{u+2}{u^2+u+1}$$

第一项:

$$\int\frac{1}{3(u-1)}\,du=\frac{1}{3}\ln|u-1|$$

第二项拆开:

$$\int\frac{u+2}{u^2+u+1}\,du=\int\frac{1}{2}\cdot\frac{2u+1}{u^2+u+1}\,du+\int\frac{\frac{3}{2}}{u^2+u+1}\,du$$

前者为:

$$\frac{1}{2}\ln|u^2+u+1|$$

后者用配方法:

$$u^2+u+1=\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\quad\Rightarrow\quad\int\frac{du}{u^2+u+1}=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right)$$

因此

$$\int\frac{u+2}{u^2+u+1}\,du=\frac{1}{2}\ln|u^2+u+1|+\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\int \frac{du}{u^3-1} = \frac{1}{3}\ln|u-1| - \frac{1}{6}\ln|u^2+u+1| - \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

最终有

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}} = -3\int \frac{du}{u^3-1} = -\ln|u-1| + \frac{1}{2}\ln|u^2+u+1| + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

其中:

$$u = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$$

223. 55) 计算不定积分:

$$\int x\sin x\cos x e^x dx$$

利用倍角公式 $\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$:

$$I = \frac{1}{2}\int xe^x \sin 2x dx$$

利用复指数形式, 考虑 $\int xe^{(1+2i)x}dx$ 的虚部:

$$\int xe^{(1+2i)x}dx = \frac{xe^{(1+2i)x}}{1+2i} - \int \frac{e^{(1+2i)x}}{1+2i}dx = \frac{xe^{(1+2i)x}}{1+2i} - \frac{e^{(1+2i)x}}{(1+2i)^2}$$

整理得:

$$= e^{(1+2i)x}\left(\frac{5x(1-2i)-(1-2i)^2}{25}\right) = \frac{e^x(\cos 2x + i\sin 2x)}{25}[(5x+3)+i(4-10x)]$$

取其虚部并乘以系数 $\frac{1}{2}$:

$$I = \frac{1}{2}\cdot\frac{e^x}{25}[(5x+3)\sin 2x + (4-10x)\cos 2x] + C$$

最终结果还原为:

$$I = \frac{e^x}{50}[(5x+3)\sin 2x - 2(5x-2)\cos 2x] + C$$

224. Evaluate the following integrals:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+2}{x^2+2x+3}\,dx$

$$\int_0^1 \frac{x+2}{x^2+2x+3}\,dx = \int_0^1 \frac{x+1+1}{x^2+2x+3}\,dx$$
$$= \int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x+3}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2+2x+3}\,dx$$
$$x^2+2x+3 = (x+1)^2+2$$
$$\int_0^1 \frac{x+1}{(x+1)^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$$
$$\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2+2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\tan^{-1}\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\tan^{-1}(\sqrt{2}) - \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$\int_0^1 \frac{x+2}{x^2+2x+3}\,dx = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\tan^{-1}(\sqrt{2}) - \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

(b) Show $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1+\sin x}{2+\sin x+\cos x}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos x}{2+\sin x+\cos x}\,dx$

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\sin x}{2+\sin x+\cos x}\,dx$$
$$y = \frac{\pi}{2} - x, \quad dy = -dx$$
$$\sin x = \cos y, \quad \cos x = \sin y$$
$$I_1 = \int_{\pi/2}^0 \frac{1+\cos y}{2+\cos y+\sin y}(-dy) = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos y}{2+\cos y+\sin y}\,dy$$

(c) Using $t = \tan(x/2)$, show

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1+\sin x}{2+\sin x+\cos x}\,dx = \int_0^1 \frac{t^2+2t+2}{(t+2)^2}\,dt$$

$$t = \tan(x/2), \quad dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$\int_0^{\pi/2} \frac{1+\sin x}{2+\sin x+\cos x}\,dx = \int_0^1 \frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{2+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}dt$$
$$= \int_0^1 \frac{t^2+2t+2}{(t+2)^2}\,dt$$

(d) Evaluate $\int_0^1 \frac{t^2+2t+2}{(t+2)^2}\,dt$

$$\frac{t^2+2t+2}{(t+2)^2} = \frac{(t+2)^2-2(t+2)+2}{(t+2)^2} = 1-\frac{2(t+1)}{(t+2)^2}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{t^2+2t+2}{(t+2)^2}\,dt &= \int_0^1 1\,dt - \int_0^1 \frac{2(t+1)}{(t+2)^2}\,dt \\ &= 1-\int_0^1 \frac{2(t+2)-2}{(t+2)^2}\,dt \\ &= 1-\int_0^1 \left(\frac{2}{t+2}-\frac{2}{(t+2)^2}\right)dt \\ &= 1-\left[2\ln(t+2)+\frac{2}{t+2}\right]_0^1 \\ &= 1-\left(2\ln 3-2\ln 2+\frac{2}{3}-1\right) \\ &= \frac{5}{3}-2\ln\frac{3}{2}\end{aligned}$$

所以

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1+\sin x}{2+\sin x+\cos x}\,dx = \frac{5}{3}-2\ln\frac{3}{2}.$$

225. 已知函数

$$f(x)=\arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right), \quad x\in(-\infty,\infty)$$

1. 求 $f'(x)$ 的简化表达式。
2. 证明 $\lim_{x\to\pm\infty}[xf(x)]=0$。
3. 求 $\lim_{x\to\pm\infty}\ln\left[\frac{2x^2-2x+1}{2x^2+2x+1}\right]$ 的值。
4. 求 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$。

(a) 对 $f(x)$ 求导:

$$f'(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2x^2}\right)^2}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2x^2}\right)=\frac{1}{1+\frac{1}{4x^4}}\cdot\left(-\frac{1}{x^3}\right)=-\frac{4x}{4x^4+1}$$

(b) 计算极限:

$$\lim_{x\to\pm\infty}[xf(x)]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right)}{1/x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-\frac{4x}{4x^4+1}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x^3}{4x^4+1}=0$$

(c) 计算另一个极限:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\ln\left[\frac{2x^2-2x+1}{2x^2+2x+1}\right]=\ln\left[\frac{2}{2}\right]=\ln 1=0$$

(d) 利用分部积分求定积分:

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right)dx=\left[x\arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right)\right]_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}x\left(-\frac{4x}{4x^4+1}\right)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{4x^2}{4x^4+1}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{4x^2}{(2x^2-2x+1)(2x^2+2x+1)}dx$$

利用部分分式分解:

$$\frac{4x^2}{(2x^2-2x+1)(2x^2+2x+1)}=\frac{x+1}{2x^2-2x+1}-\frac{x-1}{2x^2+2x+1}$$

再分解并代入标准积分公式:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x+1}{2x^2-2x+1}dx-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x-1}{2x^2+2x+1}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2(2x-1)+2}{2x^2-2x+1}dx-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2(2x+1)-2}{2x^2+2x+1}dx$$

得到标准反正切积分:

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=\left[\frac{1}{2}\arctan(2x-1)+\frac{1}{2}\arctan(2x+1)\right]_{-\infty}^{\infty}=\pi$$

226. 24) $I=\int_1^{\infty}\left(\frac{1}{u^2}-\frac{1}{u^4}\right)\frac{du}{\ln u}$

设含参积分 $f(a)=\int_1^{\infty}\frac{u^{-2}-u^{-a}}{\ln u}du$, 则原积分为 $f(4)$。对参数 a 求导:

$$\begin{aligned}f'(a)&=\int_1^{\infty}\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{u^{-2}-u^{-a}}{\ln u}\right)du\\&=\int_1^{\infty}\frac{-u^{-a}\ln u(-1)}{\ln u}du\\&=\int_1^{\infty}u^{-a}du\\&=\left[\frac{u^{-a+1}}{-a+1}\right]_1^{\infty}\quad(a>1)\\&=0-\frac{1}{1-a}=\frac{1}{a-1}\end{aligned}$$

对 a 进行积分:

$$f(a)=\int\frac{1}{a-1}da=\ln|a-1|+C$$

当 $a=2$ 时,$f(2)=\int_1^{\infty}\frac{u^{-2}-u^{-2}}{\ln u}du=0$:

$$0=\ln|2-1|+C\implies C=0$$

所以 $f(a)=\ln(a-1)$。代入 $a=4$ 得到最终结果:

$$I=f(4)=\ln(4-1)=\ln 3$$

227. 求以下积分, 并使用复指数方法验证结果:

$$I=\int\cos(\ln x)\,dx,\quad J=\int\sin(\ln x)\,dx,\quad \int_1^{e^{\pi/2}}2x^i\,dx.$$

a) 使用换元法求 I 和 J

令 $u=\ln x\implies x=e^u$, $dx=e^u du$, 则

$$I=\int\cos(\ln x)\,dx=\int e^u\cos(u)\,du.$$

设 $I=\int e^u(P\cos u+Q\sin u)'du$, 则

$$\begin{aligned}\frac{d}{du}[e^u(P\cos u+Q\sin u)]&=e^u(P\cos u+Q\sin u)+e^u(-P\sin u+Q\cos u)\\&=e^u[(P+Q)\cos u+(Q-P)\sin u].\end{aligned}$$

对比 $\int e^u\cos u\,du$, 得到

$$P+Q=1,\quad Q-P=0\implies P=Q=\frac{1}{2}.$$

所以

$$I=\frac{1}{2}e^u(\cos u+\sin u)=\frac{x}{2}[\cos(\ln x)+\sin(\ln x)].$$

同理, 对于 J:

$$J=\int\sin(\ln x)\,dx=\int e^u\sin u\,du.$$

设 $P+Q=0,\, Q-P=1 \implies P=-\frac{1}{2}, Q=\frac{1}{2}$, 所以

$$J=\frac{1}{2}e^{u}(\sin u-\cos u)=\frac{x}{2}[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)].$$

b) 使用 x^i 验证结果

$$x^i=e^{i\ln x}=\cos(\ln x)+i\sin(\ln x)$$

$$\int x^i\,dx=\frac{x^{1+i}}{1+i}+C=\frac{1-i}{2}x^{1+i}+C=\frac{x}{2}[\cos(\ln x)+\sin(\ln x)]+i\frac{x}{2}[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]+C.$$

因此

$$I=\frac{x}{2}[\cos(\ln x)+\sin(\ln x)],\quad J=\frac{x}{2}[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)].$$

c) 求定积分 $\int_1^{e^{\pi/2}} 2x^i\,dx$

$$\begin{aligned}\int_1^{e^{\pi/2}} 2x^i\,dx &= 2\left[\frac{x^{1+i}}{1+i}\right]_1^{e^{\pi/2}}=2\left[\frac{1-i}{2}x^{1+i}\right]_1^{e^{\pi/2}}\\ &=[x(\cos(\ln x)+\sin(\ln x))+ix(\sin(\ln x)-\cos(\ln x))]_1^{e^{\pi/2}}\\ &=e^{\pi/2}[1+i]-[1-i]\\ &=(e^{\pi/2}-1)+i(e^{\pi/2}+1).\end{aligned}$$

228. 23) 利用含参变量积分求导法 (Leibniz Rule) 证明 $I(a)=\int_0^\infty \frac{e^{-ax}\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}a$。

首先, 设 $I(a)=\int_0^\infty \frac{e^{-ax}\sin x}{x}dx$。对 a 求导:

$$\begin{aligned}\frac{\partial I(a)}{\partial a}&=\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{e^{-ax}\sin x}{x}\right)dx\\ &=\int_0^\infty -e^{-ax}\sin x\,dx\end{aligned}$$

利用分部积分法或公式可知 $\int e^{-ax}\sin x\,dx = -\frac{e^{-ax}(a\sin x+\cos x)}{1+a^2}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial I(a)}{\partial a} &= \left[\frac{e^{-ax}(a\sin x+\cos x)}{1+a^2}\right]_0^{\infty} \\ &= 0-\frac{1}{1+a^2} = -\frac{1}{1+a^2}\end{aligned}$$

对 a 进行积分:

$$I(a) = \int -\frac{1}{1+a^2}da = -\tan^{-1}a + C$$

注意到当 $a\to\infty$ 时,$I(a)\to 0$:

$$0 = -\frac{\pi}{2}+C \implies C = \frac{\pi}{2}$$

所以,$I(a) = \frac{\pi}{2}-\tan^{-1}a$。特别地, 当 $a=1$ 时,$I(1)=\frac{\pi}{4}$。

229. $\int_{-1}^{1}\frac{\ln(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}}dx$

令 $x=\sin\theta$, 则 $dx=\cos\theta d\theta$。

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(1+\sin^2\theta)}{\cos\theta}\cos\theta d\theta &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\ln(1+\sin^2\theta)d\theta \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(1+\sin^2\theta)d\theta\end{aligned}$$

利用参数积分法 $I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(1+a\sin^2\theta)d\theta$, 最终结果为:

$$\pi\ln(\frac{1+\sqrt{2}}{2})$$

230. 计算广义积分:

$$I = \int_0^{\infty}\frac{1}{x^n+1}dx$$

使用换元法, 设 $t=\frac{1}{x^n+1}$, 则 $x^n+1=\frac{1}{t}$, 从而 $x^n=\frac{1-t}{t}$。由此可得变量 x 关于 t 的表达式:

$$x = (1-t)^{\frac{1}{n}}t^{-\frac{1}{n}}$$

对两边微分:

$$dx = \frac{1}{n}(1-t)^{\frac{1}{n}-1}(-1)t^{-\frac{1}{n}}dt + (1-t)^{\frac{1}{n}}(-\frac{1}{n})t^{-\frac{1}{n}-1}dt$$

通过代换并简化，积分限变为从 1 到 0:

$$I = \frac{1}{n}\int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{n}-1} t^{-\frac{1}{n}} dt$$

第一步：引入 Beta 函数注意到 Beta 函数的定义为 $B(x,y) = \int_0^1 (1-t)^{x-1} t^{y-1} dt$。对应上述积分形式，令 $x = \frac{1}{n}, y = 1 - \frac{1}{n}$，则有:

$$I = \frac{1}{n} B\left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right)$$

第二步：利用 Gamma 函数转换利用公式 $B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$:

$$I = \frac{1}{n} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{n})\Gamma(1-\frac{1}{n})}{\Gamma(1)}$$

由于 $\Gamma(1) = 0! = 1$:

$$I = \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

第三步：利用余元公式化简根据 Gamma 函数的余元公式 $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$:

$$I = \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{n})}$$

最终结果:

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^n+1} dx = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)}$$

231. $\int_0^\pi e^{\cos\theta} \cos(\sin\theta) d\theta$

利用欧拉公式 $\cos(\sin\theta) = \mathrm{Re}(e^{i\sin\theta})$:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \mathrm{Re}(e^{\cos\theta} e^{i\sin\theta}) d\theta &= \mathrm{Re}\int_0^\pi e^{\cos\theta + i\sin\theta} d\theta \\ &= \mathrm{Re}\int_0^\pi e^{e^{i\theta}} d\theta\end{aligned}$$

利用级数展开 $e^{e^{i\theta}} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(e^{i\theta})^n}{n!}$。除了 $n=0$ 项外，其余项 $\int_0^\pi e^{in\theta} d\theta$ 的实部在对称性下抵消或为零（对于单位圆路径）。其结果为

$$\pi$$

232. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+bx+c)}dx$

对指数部分配方:$ax^2+bx+c=a(x+\frac{b}{2a})^2+c-\frac{b^2}{4a}$。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+\frac{b}{2a})^2}e^{-(c-\frac{b^2}{4a})}dx=e^{\frac{b^2-4ac}{4a}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+\frac{b}{2a})^2}dx$$

令 $u=\sqrt{a}(x+\frac{b}{2a})$, 利用标准高斯积分 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}du=\sqrt{\pi}$:

$$e^{\frac{b^2-4ac}{4a}}\frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{\pi}=e^{\frac{b^2-4ac}{4a}}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

233. $\int_0^1(-1)^x dx$。

利用欧拉恒等式, 将 $(-1)^x$ 写成指数形式:

$$(-1)^x=(e^{i(2n+1)\pi})^x=e^{i(2n+1)\pi x}$$

其中 $n\in\mathbb{Z}$ 代表不同的分支。进行积分:

$$\int_0^1 e^{i(2n+1)\pi x}dx=\left[\frac{1}{i(2n+1)\pi}e^{i(2n+1)\pi x}\right]_0^1$$

代入边界值:

$$\frac{1}{i(2n+1)\pi}(e^{i(2n+1)\pi}-e^0)=\frac{1}{i(2n+1)\pi}(-1-1)=-\frac{2}{i(2n+1)\pi}$$

化简得:

$$\int_0^1(-1)^x dx=\frac{2i}{(2n+1)\pi}$$

当取主值分支 $(n=0)$ 时, 结果为 $\frac{2i}{\pi}$。

234. 计算定积分 $[\int_0^1\frac{\ln(x+1)}{x}dx]$。

将被积函数展开为幂级数。当 $|x|<1$ 时:

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots$$

因此:

$$\frac{\ln(1+x)}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n}$$

在积分区间 $[0,1]$ 上进行逐项积分:

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \int_0^1 x^{n-1}dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$$

该级数的和为 $\frac{\pi^2}{12}$。所以,$[\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x}dx] = \frac{\pi^2}{12}$。

235. 计算定积分（用到幂级数）:

$$\int_0^1 (\ln x) \ln(1-x)\, dx$$

已知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

236.

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln\left(\frac{1+x^{11}}{1+x^3}\right)}{(1+x^2)\ln x}\, dx = 2\pi.$$

(待解)

237.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{1+e^x}\, dx = \frac{2}{3}.$$

(待解)

238.

$$\int_0^1 \frac{2xe^x - 1}{2x^2e^x + 2}\, dx = 0.156631$$

(待解)

239.

$$\int_0^4 \frac{x^4-4x+4}{1+2017^{x-2}}\,dx = 7.22255$$

(待解)

微分方程

考点: 一阶微分方程式、变量可分离微分方程式、一阶线性微分方程、伯努利方程、正合微分方程、以积分因子转化非正合微分方程、齐次微分方程、降阶法、二阶线性常系数微分方程、待定系数法、变分法、高阶线性微分方程、一阶微分方程组

1. 解方程

$$yy' = 3y + 2$$

观察得

$$y = -\frac{2}{3}$$

是一解。若 $3y + 2 \neq 0$, 此方程可分离变量, 有

$$y\frac{dy}{dx} = 3y + 2 \Rightarrow \int \frac{y}{3y+2}\,dy = \int \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3(3y+2)}\right) dy = \int dx + C$$

解得

$$\frac{y}{3} - \frac{2}{9}\ln|3y+2| = x + C$$

由于不存在任何常数 C 使得 $y = -\frac{2}{3}$, 因此原方程的解为

$$\frac{y}{3} - \frac{2}{9}\ln|3y+2| = x + C \quad \text{或} \quad y = -\frac{2}{3}$$

2. 解微分方程

$$y' = y^2 - 4$$

可验证 $y = \pm 2$ 是原方程的解。若 $y^2 \neq 4$, 分离变量得

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - 4 \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2-4} \Longrightarrow \int \left(\frac{-\frac{1}{4}}{y+2} + \frac{\frac{1}{4}}{y-2}\right) dy = x + C$$

积分得到:

$$-\frac{1}{4}\ln|y+2| + \frac{1}{4}\ln|y-2| = x + C \Rightarrow \left|\frac{y-2}{y+2}\right| = e^{4C}e^{4x}$$

令 $C_1 = \pm e^{4C}$, 可写为

$$\frac{y-2}{y+2} = C_1 e^{4x} \Rightarrow y = \frac{2(1+C_1 e^{4x})}{1-C_1 e^{4x}}$$

其中 $y=2$ 可由令 $C_1 = 0$ 得到, 因此通解为

$$y = \frac{2(1+C_1 e^{4x})}{1-C_1 e^{4x}} \quad 或 \quad y=-2$$

3. 由换元法 $y = xV$, 其中 $V = V(x)$, 解常微分方程

$$2xyy' = y^2 - x^2$$

设 $y = xV$, 则 $y' = V + xV'$, 代入原方程得

$$2x \cdot xV \cdot (V + xV') = (xV)^2 - x^2 \Rightarrow 2xVV' = -(V^2+1)$$

其中 $x \neq 0$, 分离变量得

$$\frac{2V}{V^2+1}\,dV = -\frac{1}{x}\,dx$$

两边积分得

$$\ln(V^2+1) = -\ln|x| + C \Rightarrow V^2 + 1 = \frac{C_1}{x}$$

由 $V = \dfrac{y}{x}$ 得

$$y^2 + x^2 = C_1 x$$

4. 已知非零函数 $f(x)$ 满足

$$\sqrt{\int f(x)\,dx} = \int \sqrt{f(x)}\,dx, \quad f(0) = \frac{1}{4},$$

用代换 $f(x) = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$, 求 $f(x)$ 的简化表达式。

设

$$f(x) = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

原方程变为

$$\sqrt{\int \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx} = \int \frac{dy}{dx} dx = y + k$$

两边对 x 求导:

$$\frac{1}{2\sqrt{\int(dy/dx)^2dx}}\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{dy}{dx}\implies\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=2(y+k)\frac{dy}{dx}.$$

由 $dy/dx\neq 0$, 得到

$$\frac{dy}{dx}=2(y+k).$$

分离变量并积分:

$$\frac{1}{y+k}dy=2dx\implies\int\frac{1}{y+k}dy=\int 2dx\implies\ln|y+k|=2x+C.$$

指数化:

$$y+k=Ae^{2x}\implies y=Ae^{2x}-k.$$

由初值条件 $x=0, f(0)=(dy/dx)^2=\frac{1}{4}$, 得到

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=2Ae^0=2A=\frac{1}{2}\implies A=\frac{1}{4}.$$

因此

$$\frac{dy}{dx}=2Ae^{2x}=\frac{1}{2}e^{2x}\implies f(x)=\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{1}{4}e^{4x}.$$

5. 已知 $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 可微, 且满足从 $x=a$ 到 $x=b$ 的曲线 $y=f(x)$ 下的面积等于曲线弧长. 已知 $f(0)=5/4$, 且 $f(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上有最小值, 求该最小值.

从 $x=a$ 到 $x=b$ 的面积为

$$\int_a^b f(t)\,dt,$$

曲线弧长为

$$\int_a^b\sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt.$$

因此对于所有非负的 a,b 有

$$\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b\sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt.$$

取 $a=0$, 得

$$\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x\sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt.$$

两边对 x 求导, 利用微积分基本定理, 得

$$f(x)=\sqrt{1+(f'(x))^2}.$$

设 $y=f(x)$, 则得到微分方程

$$y=\sqrt{1+(y')^2}\Rightarrow y^2=1+(y')^2\Rightarrow (y')^2=y^2-1\Rightarrow y'=\sqrt{y^2-1}.$$

分离变量:

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}=dx.$$

两边积分:

$$\int\frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}=\int dx\Rightarrow \ln|y+\sqrt{y^2-1}|=x+C.$$

由于 $f(0)=5/4>0$, 可去绝对值, 并解得

$$y=\frac{A}{2}e^x+\frac{1}{2A}e^{-x},$$

其中 $A>0$ 为常数.

利用初值 $y(0)=5/4$:

$$\frac{A}{2}+\frac{1}{2A}=\frac{5}{4}\Rightarrow 2A^2-5A+2=0\Rightarrow A=1 \text{ 或} A=\frac{1}{2}.$$

函数 $y=\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}e^{-x}$ 在 $x>0$ 的最小值发生在 $x=0$, 值为 1, 而 $y=e^x/2+e^{-x}/1$ 的最小值在 $x<0$, 不符合要求.

因此 $f(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上的最小值为

$$1.$$

6. 非零函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 满足积分方程

$$\int u(x)\,dx=x^2u(x),\quad \int u(x)v(x)\,dx=\left[\int u(x)\,dx\right]\left[\int v(x)\,dx\right].$$

求 $u(x)$ 的一般表达式, 以及 $[v(x)]^2$ 的简化表达式。

步骤 1: 求 $u(x)$

$$\int u\,dx = ux^2$$

对 x 求导:

$$\begin{aligned}
u &= 2xu + x^2\frac{du}{dx} \\
x^2\frac{du}{dx} &= u - 2xu = u(1-2x) \\
\frac{1}{u}\frac{du}{dx} &= \frac{1-2x}{x^2} \\
\int \frac{1}{u}du &= \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\right) dx \\
\ln|u| &= -\frac{1}{x} - 2\ln|x| + C \\
u &= A\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}
\end{aligned}$$

步骤 2: 利用第二个积分方程求 $v(x)$

$$\int uv\,dx = \left[\int u\,dx\right]\left[\int v\,dx\right]$$

对 x 求导:

$$\begin{aligned}
uv &= \left[\int u\,dx\right] v + u\left[\int v\,dx\right] \\
uv &= x^2uv + u\int v\,dx \\
v - x^2v &= \int v\,dx \\
v(1-x^2) &= \int v\,dx
\end{aligned}$$

对 x 再求导:

$$v'(1-x^2) - 2xv = v \implies v'(1-x^2) = v(1+2x)$$

步骤 3: 分离变量并积分

$$\frac{dv}{v} = \frac{1+2x}{1-x^2}dx$$

部分分式分解:

$$\frac{1+2x}{1-x^2} = \frac{2x+1}{(1-x)(1+x)} = -\frac{3}{2}\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+x}$$

积分:

$$\begin{aligned}\ln|v| &= -\frac{3}{2}\ln|1-x| + \frac{1}{2}\ln|1+x| + B \\ \ln v^2 &= \ln\left|\frac{B(1+x)}{(1-x)^3}\right| \\ v^2 &= \frac{B(1+x)}{(1-x)^3}\end{aligned}$$

最终结果:

$$u(x) = A\frac{e^{-1/x}}{x^2}, \quad v^2(x) = \frac{B(1+x)}{(1-x)^3}.$$

7. 证明方程

$$y' + p(x)y = q(x)$$

的一般解为

$$y = \frac{\displaystyle\int I(x)\,q(x)\,dx + C}{I(x)},$$

其中积分因子为

$$I(x) = \exp\left(\int p(x)\,dx\right).$$

对积分因子求导,

$$I'(x) = \frac{d}{dx}\exp\left(\int p(x)\,dx\right) = I(x)p(x)$$

由原方程可得

$$I(x)(y' + p(x)y) = \frac{d}{dx}\big(yI(x)\big) = I(x)q(x)$$

对两边积分,

$$yI(x) = \int I(x)q(x)dx + C \Rightarrow y = \frac{\displaystyle\int I(x)q(x)dx + C}{I(x)}$$

8. 求微分方程

$$y' = 4y + x$$

的通解。

积分因子为

$$I(x) = \exp\left(\int -4\,dx\right) = e^{-4x}$$

由公式得

$$y = \frac{1}{I(x)}\left(\int I(x)\,q(x)\,dx + C\right) = e^{4x}\left(\int xe^{-4x}\,dx + C\right) = -\frac{x}{4} - \frac{1}{16} + Ce^{4x}$$

其中由分部积分,

$$\int xe^{-4x}\,dx = -\frac{1}{4}xe^{-4x} + \frac{1}{4}\int e^{-4x}\,dx = -\frac{1}{4}xe^{-4x} - \frac{1}{16}e^{-4x}$$

9. 求解微分方程并满足初始条件

$$x^2y' + 3xy = \frac{1}{x}, \quad x > 0, \quad y(1) = -1.$$

原方程即

$$y' + \frac{3}{x}y = \frac{1}{x^3}.$$

其中积分因子为

$$I(x) = \exp\left(\int \frac{3}{x}\,dx\right) = x^3,$$

故

$$y = \frac{1}{I(x)}\left(\int I(x)q(x)\,dx + C\right) = \frac{1}{x^3}\left(\int x^3 \cdot \frac{1}{x^3}\,dx + C\right) = \frac{1}{x^2} + \frac{C}{x^3}$$

由 $y(1) = -1$ 知

$$-1 = 1 + C \Rightarrow C = -2$$

因此解为

$$y = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}$$

10. 设 $f(x)$ 为整系数多项式, 若

$$g(x) = \int xf(x)\,dx,$$

且

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = x^4 - 4x^2 + x - 7,$$

求 $f(x)$。

由条件得 $g'(x) = xf(x)$, 故

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + xf(x) = x^4 - 4x^2 + x - 7$$

为一阶微分方程; 设积分因子 $I(x) = \exp\left(\int x\,dx\right) = e^{\frac{x^2}{2}}$, 则

$$\left(e^{\frac{x^2}{2}} f(x)\right)' = e^{\frac{x^2}{2}}(x^4 - 4x^2 + x - 7)$$

两边积分得

$$e^{\frac{x^2}{2}} f(x) = \int e^{\frac{x^2}{2}}(x^4 - 4x^2 + x - 7)\,dx = e^{\frac{x^2}{2}}(x^3 - 7x + 1) + C$$

即

$$f(x) = x^3 - 7x + 1 + Ce^{-\frac{x^2}{2}}$$

因为 $f(x)$ 是整系数多项式, 所以 $C = 0$, 于是

$$f(x) = x^3 - 7x + 1$$

11. 求解伯努利方程

$$2x(\ln x)y' - y = -9x^3y^3\ln x$$

化为标准形式,

$$y' - \frac{1}{2x(\ln x)}y = -\frac{9}{2x^2}y^3,$$

这是阶数为 $n = 3$ 的伯努利方程, 两边除以 y^3,

$$y^{-3}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2x(\ln x)}y^{-2} = -\frac{9}{2}x^2$$

设 $u = y^{1-n} = y^{-2}$, 则

$$\frac{du}{dx} = -2y^{-3}\frac{dy}{dx} \Rightarrow y^{-3}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}\frac{du}{dx}$$

代入前式得到

$$-\frac{1}{2}\frac{du}{dx} - \frac{1}{2x(\ln x)}u = -\frac{9}{2}x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} + \frac{1}{x(\ln x)}u = 9x^2$$

积分因子为

$$I(x) = \exp\left(\int \frac{1}{x(\ln x)}\,dx\right) = e^{\ln(\ln x)} = \ln x$$

于是

$$u = y^{-2} = \frac{1}{\ln x}\left(\int 9x^2 \ln x\, dx + C\right) = \frac{1}{\ln x}\big(3x^3 \ln x - x^3 + C\big)$$

即

$$y^2 = \frac{\ln x}{x^3(3\ln x - 1) + C}$$

12. 判断函数 $I(x, y) = \cos(xy)$ 是否为微分方程

$$[\tan(xy) + xy]\, dx + x^2\, dy = 0$$

的积分因子。若是，求其通解。

将方程乘以 $I(x, y)$ 得

$$[\sin(xy) + xy\cos(xy)]\, dx + [x^2\cos(xy)]\, dy = 0$$

设

$$P(x, y) = \sin(xy) + xy\cos(xy), \quad Q(x, y) = x^2\cos(xy).$$

观察得偏导数

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x\cos(xy) - x^2 y\sin(xy) = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

由此可得 $\cos(xy)$ 是给定方程的积分因子。注意到

$$d(x\sin(xy)) = (\sin(xy) + xy\cos(xy))\, dx + x^2\cos(xy)\, dy$$

因此通解为

$$x\sin(xy) = C$$

13. 求方程

$$y\, dx - (2x + y^4)\, dy = 0$$

的积分因子，并由此求通解。

设 $I(x, y)$ 是该积分因子，将方程乘以 $I(x, y)$ 得

$$Iy\, dx - (2x + y^4)I\, dy = 0$$

记

$$P(x,y)=Iy,\quad Q(x,y)=-(2x+y^4)I$$

方程的正合条件为

$$P_y=yI_y+I=Q_x=-2I-(2x+y^4)I_x$$

若 I 只与 y 有关, 即 $I_x=0$, 则有

$$yI_y+I=-2I\Rightarrow yI_y=-3I\Rightarrow I(y)=\frac{1}{y^3}$$

将其代入方程得到

$$\frac{1}{y^2}dx-\frac{2x+y^4}{y^3}dy=0$$

此时方程正合。设函数 $\phi(x,y)$ 满足

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{1}{y^2},\quad \frac{\partial\phi}{\partial y}=-\frac{2x+y^4}{y^3}$$

由第一式积分得

$$\phi(x,y)=\frac{x}{y^2}+h(y)\Rightarrow\frac{\partial\phi}{\partial y}=-\frac{2x}{y^3}+h'(y)$$

由第二式可得

$$h'(y)=-y\Rightarrow h(y)=-\frac{y^2}{2}$$

因此通解为

$$\frac{x}{y^2}-\frac{y^2}{2}=C\Rightarrow 2x-y^4=Cy^2$$

14. 求解齐次微分方程

$$y'-x^{-1}y=x^{-1}\sqrt{x^2-y^2},\quad x>0$$

考虑齐次性, 将方程改写为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

作变量代换,

$$y=xV(x)\Rightarrow\frac{dy}{dx}=x\frac{dV}{dx}+V$$

代入方程得

$$x\frac{dV}{dx}+V=V+\sqrt{1-V^2}\Rightarrow\frac{dV}{\sqrt{1-V^2}}=\frac{dx}{x}$$

两边积分得

$$\int \frac{dV}{\sqrt{1-V^2}} = \int \frac{dx}{x} + C \Rightarrow \sin^{-1} V = \ln|x| + C$$

因此通解为

$$y = xV = x\sin(C + \ln x), \quad x > 0$$

15. 解微分方程

$$(x^2 + y^2)\,dx + (x^2 - xy)\,dy = 0$$

若 $x \neq 0$, 有

$$\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) + \left(1 - \frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

设 $\frac{y}{x} = u \Rightarrow y = xu$, 则 $\frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u$,

$$(1 + u^2) + (1 - u)\left(x\frac{du}{dx} + u\right) = 0 \Rightarrow x\,\frac{du}{dx} = \frac{u+1}{u-1}$$

分离变量得

$$\int \frac{u-1}{u+1}\,du = \int \frac{1}{x}\,dx \Rightarrow u - 2\ln|u+1| = \ln x + C$$

即

$$\frac{y}{x} - \ln\left(1 + \frac{y}{x}\right)^2 = \ln x + C$$

16. 解

$$xy'' + y' = 8x, \quad x > 0$$

令 $v = y'$, 则 $v' = y''$。方程变为一阶方程

$$xv' + v = 8x \Rightarrow v' + \frac{1}{x}v = 8$$

这是线性一阶方程, 积分因子为

$$I(x) = \exp\left(\int \frac{1}{x}\,dx\right) = x$$

所以

$$v(x) = \frac{1}{x}\left(\int 8x\,dx + C_1\right) = \frac{1}{x}(4x^2 + C_1)$$

积分得到

$$y = \int v(x)\,dx + C_2 = \int \frac{1}{x}(4x^2 + C_1)\,dx + C_2 = 2x^2 + C_1 \ln x + C_2$$

17. 解微分方程

$$y' + e^{y'} - x = 0$$

令 $u = y' \Rightarrow u + e^u = x$, 由链导法,

$$\frac{dy}{du} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{du} = u\frac{dx}{du}$$

又因为

$$x = u + e^u \Rightarrow \frac{dx}{du} = 1 + e^u$$

所以

$$\frac{dy}{du} = u(1 + e^u) \Rightarrow y = \int u(1 + e^u)\,du = \frac{u^2}{2} + (u-1)e^u + C$$

故解可写为参数形式:

$$\begin{cases} x = u + e^u \\ y = \dfrac{u^2}{2} + (u-1)e^u + C \end{cases}$$

18. 解微分方程

$$y' + \frac{y}{x} = e^{xy}$$

令 $u = e^{xy}$, 则

$$\frac{du}{dx} = e^{xy}\left(y + x\frac{dy}{dx}\right) \Rightarrow y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{xu}\frac{du}{dx}$$

由原方程可得

$$\frac{1}{xu}\frac{du}{dx} = u \Rightarrow \frac{1}{u^2}\frac{du}{dx} = x$$

解为

$$-\frac{1}{u}=\frac{x^2}{2}+C$$

故通解为

$$\frac{x^2}{2}+e^{-xy}=C_1$$

19. 解

$$dx-xy(1+xy^2)\,dy=0$$

原方程即

$$\frac{1}{x^2}\frac{dx}{dy}-\frac{y}{x}-y^3=0$$

设 $u=-\frac{1}{x}$, 则 $\frac{du}{dy}=\frac{1}{x^2}\frac{dx}{dy}$, 化为线性一阶微分方程

$$\frac{du}{dy}+yu=y^3$$

积分因子为 $\exp\left(\int y\,dy\right)=e^{\frac{y^2}{2}}$, 于是

$$ue^{\frac{y^2}{2}}=\int y^3e^{\frac{y^2}{2}}\,dy+C$$

作代换 $t=\frac{y^2}{2}$, 则 $dt=y\,dy$,

$$\int y^3e^{\frac{y^2}{2}}\,dy=\int 2te^t\,dt=2te^t-2\int e^t\,dt=2(t-1)e^t=(y^2-2)e^{\frac{y^2}{2}}$$

于是

$$u=y^2-2+Ce^{-\frac{y^2}{2}}.$$

代回 $u=-\frac{1}{x}$ 得到

$$x=\frac{1}{2-y^2-Ce^{-\frac{y^2}{2}}},$$

20. 解微分方程

$$xy'-y=2x^2y(y^2-x^2)$$

令 $u=x^2y$, 对 x 求导,

$$\frac{du}{dx}=2xy+x^2\frac{dy}{dx}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x^2}\frac{du}{dx}-\frac{2u}{x^3}.$$

代回原方程得

$$\frac{1}{x}\frac{du}{dx}-\frac{3u}{x^2}=2u\left(\frac{u^2}{x^4}-x^2\right)\Rightarrow\frac{du}{dx}+\left(2x^3-\frac{3}{x}\right)u=\frac{2}{x^3}u^3$$

这是阶数为 3 的伯努利方程。令 $v=u^{-2}$, 则 $\dfrac{dv}{dx}=-2u^{-3}\dfrac{du}{dx}$, 于是

$$v'+\left(-4x^3+\frac{6}{x}\right)v=-\frac{4}{x^3}.$$

积分因子为

$$I(x)=\exp\left(\int\left(-4x^3+\frac{6}{x}\right)dx\right)=e^{-x^4+6\ln x}=x^6e^{-x^4}$$

解得

$$u^{-2}=v=\frac{e^{x^4}}{x^6}\left(\int x^6e^{-x^4}\cdot\left(-\frac{4}{x^3}\right)dx+C\right)=\frac{e^{x^4}}{x^6}\left(e^{-x^4}+C\right)=\frac{1}{x^6}(1+Ce^{x^4})$$

由 $u=x^2y$, 通解即

$$x^2-y^2=cy^2e^{x^4}$$

21. 解

$$yy''+(y')^2=yy'$$

设 $u=y'$, 由链导法,

$$y''=\frac{du}{dx}=\frac{du}{dy}\frac{dy}{dx}=u\frac{du}{dy}.$$

代入原方程得

$$y\cdot u\frac{du}{dy}+u^2=yu\Rightarrow\frac{du}{dy}+\frac{1}{y}u=1$$

这是关于 u 的线性一阶方程。积分因子为 $e^{\int\frac{1}{y}dy}=y$, 于是

$$\frac{d}{dy}(yu)=y\Rightarrow yu=\frac{y^2}{2}+c_1\Rightarrow y'=u=\frac{y}{2}+\frac{c_1}{y}=\frac{y^2+2c_1}{2y}$$

分离变量并积分，

$$\frac{2y\,dy}{y^2+2c_1}=dx \Rightarrow \int \frac{2y\,dy}{y^2+2c_1}=\int dx+c_2.$$

得到

$$\ln|y^2+2c_1|=x+c_2 \Rightarrow y^2=C_1e^x+C_2$$

22. 解微分方程

$$\frac{dy}{dx}=x\frac{d^2y}{dx^2}-\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$$

令 $u=\frac{dy}{dx}$，则 $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{du}{dx}$，整理为

$$x\frac{du}{dx}=u+u^3$$

分离变量得

$$\frac{du}{u(1+u^2)}=\frac{dx}{x} \Rightarrow \int\left(\frac{1}{u}-\frac{u}{1+u^2}\right)du=\int\frac{dx}{x}$$

积分得到

$$\ln|u|-\frac{1}{2}\ln(1+u^2)=\ln|x|+\ln C \Rightarrow C|x|=\frac{|u|}{\sqrt{1+u^2}}$$

化简得

$$u^2=\frac{C^2x^2}{1-C^2x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=u=\pm\frac{Cx}{\sqrt{1-C^2x^2}}$$

再次分离变量得

$$y=\pm\int\frac{Cx}{\sqrt{1-C^2x^2}}\,dx$$

令 $t=Cx, dt=C\,dx$，积分变为

$$y=\pm\frac{1}{C}\int\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=-\frac{1}{C}\sqrt{1-t^2}+C_1=-\frac{1}{C}\sqrt{1-C^2x^2}+C_1$$

23. 求解

$$(1+y^2)\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+\frac{dy}{dx}=0$$

令 $u=\dfrac{dy}{dx}$, 由链导法,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{du}{dx}=u\frac{du}{dy}$$

代入原方程得

$$u\left((1+y^2)\frac{du}{dy}+u^2+1\right)=0$$

若 $u=\dfrac{dy}{dx}=0$, 解为 $y=C_1$。若 $u\neq 0$, 则由

$$(1+y^2)\frac{du}{dy}+u^2+1=0$$

分离变量得

$$\frac{du}{u^2+1}=-\frac{dy}{1+y^2}$$

两边积分得

$$\arctan u=-\arctan y+A$$

令常数 $A=\arctan C$, 则

$$\frac{dy}{dx}=\tan(\arctan C-\arctan y)=\frac{C-y}{1+Cy}$$

再次分离变量,

$$\frac{1+Cy}{C-y}\,dy=dx$$

积分得

$$\int\frac{1+Cy}{C-y}\,dy=\int\left(-C+\frac{1+C^2}{C-y}\right)\,dy=-Cy-(1+C^2)\ln|C-y|=x+C_2$$

综上, 除 $y=C_1$ 外, 通解为

$$-Cy-(1+C^2)\ln|C-y|=x+C_2$$

24. 求解

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{1-y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

设 $u=\dfrac{dy}{dx}$, 由链导法,

$$\frac{du}{dx}=\frac{du}{dy}\frac{dy}{dx}=u\frac{du}{dy}.$$

代入原方程得

$$\frac{du}{dy}=\frac{u}{1-y^2}.$$

分离变量并积分,

$$\frac{du}{u}=\frac{dy}{1-y^2}\Rightarrow \ln|u|=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right|+C_1.$$

于是存在常数 C 使

$$\frac{dy}{dx}=u=C\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}$$

再次分离变量得

$$dx=\frac{1}{C}\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}\,dy$$

对右侧积分, 设 $y=\cos 2\theta$, 则 $dy=-2\sin 2\theta\,d\theta$, 于是

$$\begin{aligned}\int\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}\,dy&=\int\sqrt{\frac{2\sin^2\theta}{2\cos^2\theta}}(-2\sin 2\theta)\,d\theta\\&=2\int(\cos 2\theta-1)\,d\theta\\&=2\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta-\theta\right)\\&=\sqrt{1-y^2}-\arccos y\end{aligned}$$

因此通解为

$$x=\frac{1}{C_1}\left(\sqrt{1-y^2}-\arccos y\right)+C_2$$

25. 求解

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=4y^2+y\frac{d^2y}{dx^2}$$

令 $u=\dfrac{dy}{dx}$, 由链导法,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{du}{dx}=u\frac{du}{dy}$$

代入原方程得

$$y\,u\frac{du}{dy}=\frac{1}{2}u^2-4y^2$$

若 $u=0$, 则 $y=0$ 为一解。若 $u\neq 0$ 即 $y\neq 0$, 则

$$\frac{dv}{dy}-\frac{1}{y}v=-8y$$

这是关于 $v=u^2$ 的线性一阶方程, 积分因子为

$$I(x)=\exp\left(-\int\frac{1}{y}\,dy\right)=\frac{1}{y}$$

于是

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=v=y\left(\int -8\,dy+A\right)=Ay-8y^2$$

为便于积分, 令 $B=\frac{A}{16}$, 则配方得 $Ay-8y^2=8\left(B^2-(y-B)^2\right)$, 因此

$$\frac{dy}{dx}=\pm 2\sqrt{2}\sqrt{B^2-(y-B)^2}$$

分离变量并积分:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{d(y-B)}{\sqrt{B^2-(y-B)^2}}=\pm x+C\Rightarrow\frac{1}{2\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{y-B}{B}\right)=\pm x+C$$

两边变换并记相位常数, 得

$$\arcsin\left(\frac{y-B}{B}\right)=2\sqrt{2}\,x+C'$$

于是

$$y(x)=B\left(1+\sin\left(2\sqrt{2}\,x+C'\right)\right)$$

26. 求解

$$\frac{y''}{y'}-\frac{y'}{y}=\ln y$$

设 $u=\frac{dy}{dx}$, 由链导法,

$$y''=\frac{du}{dx}=u\frac{du}{dy}$$

原方程化为

$$\frac{du}{dy}-\frac{1}{y}u=\ln y$$

积分因子为

$$I(y)=\exp\left(-\int\frac{1}{y}dy\right)=e^{-\ln y}=\frac{1}{y}.$$

于是

$$\frac{dy}{dx}=u=y\left(\int\frac{\ln y}{y}\,dy+C_1\right)=y\left(\frac{1}{2}(\ln y)^2+C_1\right)$$

再次分离变量,

$$\frac{2\cdot\frac{1}{y}\,dy}{((\ln y)^2+C_1)}=dx$$

两边积分后得,

$$\frac{2}{\sqrt{A}}\arctan\frac{\ln y}{\sqrt{A}}=x+C_2$$

设 $C_1=\sqrt{A}$, 可得通解为

$$y=e^{2C_1\tan(C_1(x+C_2))}$$

27. 求解

$$y\frac{d^2y}{dx^2}+y^2=\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

令 $z=\sqrt{y}$, 则

$$y=z^2,\quad y'=2zz',\quad y''=2z'^2+2zz''$$

代入原方程得

$$z^2(2z'^2+2zz'')+z^4=\frac{1}{2}(4z^2z'^2)\Rightarrow 2z''+z=0.$$

这是常系数二阶线性方程, 通解为

$$z=C_1\cos\frac{x}{\sqrt{2}}+C_2\sin\frac{x}{\sqrt{2}}$$

因此

$$y=z^2=\left(C_1\cos\frac{x}{\sqrt{2}}+C_2\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2$$

28. 求解

$$y'''=y'y''$$

令 $u=\dfrac{dy}{dx}$, 由链导法,

$$u''=\frac{du'}{dx}=\frac{du'}{du}\frac{du}{dx}=\frac{du'}{du}\,u'$$

代回方程得

$$\frac{du'}{du}\,u'=u\,u'\Rightarrow\frac{du'}{du}=u$$

积分得

$$u'=\frac{1}{2}u^2+2C_1$$

分离变量并积分,

$$\int\frac{du}{\frac{1}{2}u^2+C_1}=\int\frac{2\,du}{u^2+2C_1}=x+C_2\Rightarrow\frac{2}{k}\arctan\frac{u}{k}=x+C_2$$

其中 $k^2=2C_1$, 代回 $u=y'$ 得

$$\arctan\frac{y'}{\sqrt{2C_1}}=\frac{\sqrt{2C_1}}{2}(x+C_2).$$

再积分得到 y,

$$y=\int y'\,dx=\int\sqrt{2C_1}\tan\left(\frac{\sqrt{2C_1}}{2}(x+C_2)\right)\,dx+C_3$$

即

$$y=-2\ln\left|\cos\left(C_1'(x+C_2)\right)\right|+C_3$$

29. 求解

$$\frac{y''}{(y')^2}=\frac{y}{y^2-1}$$

两边乘以 y' 得

$$\frac{y''}{y'}=\frac{yy'}{y^2-1}.$$

因此对 x 积分得

$$\ln y'=\frac{1}{2}\ln(y^2-1)+\ln A\Rightarrow y'=A\sqrt{y^2-1}$$

分离变量后积分得

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}=Adx\Rightarrow\ln(y+\sqrt{y^2-1})=Ax+C_1.$$

即

$$y+\sqrt{y^2-1}=Be^{Ax}$$

解出 y, 得通解为

$$y=\frac{Be^{Ax}+\frac{1}{B}e^{-Ax}}{2}$$

30. 解

$$y''-y'\tan x+2y=0$$

观察到 $y_1=\sin x$ 为原方程的解, 由降阶法,$y_2=u(x)y_1$, 其中

$$\begin{aligned}u(x)&=\int\frac{1}{\sin^2 x}e^{-\int-\tan x\,dx}\,dx\\&=\int\frac{1}{\sin^2 x}e^{-\ln|\cos x|}\,dx\\&=\int(\cot^2 x+1)\sec x\,dx\\&=\int(\sec x+\cot x\csc x)\,dx\\&=\ln|\sec x+\tan x|-\csc x\end{aligned}$$

故通解为

$$y=\sin x(C_1+\ln|\sec x+\tan x|)+C_2$$

31. 解微分方程

$$\cos^2 x\,\frac{d^2y}{dx^2}=2y$$

观察得 $y_1=\tan x$ 满足方程

$$y''=2y\sec^2 x$$

现设 $y=u(x)\tan x$, 则 $y'=u'\tan x+u\sec^2 x$, 且

$$y''=u''\tan x+2u'\sec^2 x+2u\sec^2 x\tan x=u''\tan x+2u'\sec^2 x+y''$$

即

$$u'' \tan x + 2u' \sec^2 x = 0$$

设 $u' = z$, 则

$$-z' \tan x = 2z \sec^2 x$$

分离变量得

$$\int -\frac{z'}{2z}\, dz = \int \frac{\sec x}{\tan x}\, dx \Rightarrow -\frac{1}{2} \ln|z| = \ln|\tan x| + \ln A$$

化简得

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{z} = A^2 \tan^2 x$$

再分离变量,

$$\int \frac{1}{A^2} \cot^2 x\, dx = \int du \Rightarrow \frac{1}{A^2} \int (\csc^2 x - 1)\, dx = u \Rightarrow u = C(-\cot x - x) + B$$

故通解为

$$y = B \tan x - Cx \tan x - C$$

32. 解微分方程

$$\frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{y+2}{x+y+1}\right)^2$$

设 $u = y+2, v = x+y+1$, 则

$$\frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{u}{v}\right)^2, \quad \frac{dv}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx} = 1 + 2\left(\frac{u}{v}\right)^2.$$

于是有

$$\frac{dv}{du} = \frac{1 + 2\left(\frac{u}{v}\right)^2}{2\left(\frac{u}{v}\right)^2} = \frac{v^2 + 2u^2}{2u^2} = 1 + \frac{v^2}{2u^2}.$$

令 $w = \dfrac{v}{u}$, 则 $v = wu$, 并且 $\dfrac{dv}{du} = w + u\dfrac{dw}{du}$, 代入上式得

$$u\frac{dw}{du} = \frac{w^2}{2} - w + 1$$

分离变量再积分得

$$\frac{du}{u} = \frac{dw}{\frac{1}{2}\left((w-1)^2 + 1\right)} \Rightarrow \ln|u| = 2\arctan(w-1) + C$$

把 u,w 代回原变量, 因此得到

$$\ln|y+2| = 2\arctan\left(\frac{x-1}{y+2}\right) + C$$

33. 解

$$f(x) + f'(-x) = x^2 + \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

由

$$f(x) + f'(-x) = x^2 + \alpha \tag{1}$$

令 $x \to -x$, 得 $f(-x) + f'(x) == x^2 + \alpha$, 两边求导,

$$-f'(-x) + f''(x) = 2x \tag{2}$$

由 $(1)+(2)$,

$$f''(x) + f(x) = x^2 + 2x + \alpha$$

齐次解为

$$f_c = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

且发现特解为

$$f_p = x^2 + 2x + \alpha - 2$$

于是通解为

$$f(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x + x^2 + 2x + \alpha - 2$$

尚未结束, 与原方程比较系数得

$$f'(-x) + f(x) = (C_1 + C_2)(\cos x + \sin x) + \sqrt{x^2+\alpha} \Rightarrow C_2 = -C_1$$

故通解为

$$f(x) = C_1(\sin x - \cos x) + x^2 + 2x + \alpha - 2$$

34. 解

$$y = xy' + \sqrt{(y')^2 + 1}$$

此方程属于克莱罗方程 (Clairaut's equation)。对 x 求导得

$$y' = y' + xy'' + \frac{1}{x}\frac{x \cdot 2y'y''}{\sqrt{(y')^2+1}}$$

整理得

$$y''\left(x + \frac{y'}{\sqrt{(y')^2+1}}\right) = 0$$

若 $y''=0$, 则 $y' = C \Rightarrow y = Cx + \sqrt{C^2+1}$。对于

$$\left(x + \frac{y'}{\sqrt{(y')^2+1}}\right) = 0$$

化简得

$$y' = \pm\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

照常分离系数后积分得

$$\int dy = \pm\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \Rightarrow y = \pm\sqrt{1-x^2} + A$$

将 $y = \pm\sqrt{1-x^2} + A$ 代入原方程解得 $A = 0$, 故解为

$$y = \pm\sqrt{1-x^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

35. 求解

$$\sqrt{\tan x}\,\frac{dy}{dx} = x$$

分离系数得,

$$\frac{1}{y}\,dy = \sqrt{\cot x}\,dx \Rightarrow \ln y = \int \sqrt{\cot x}\,dx$$

设 $\cot x = u^2$, 则 $-\csc^2 x\,dx = 2u\,du \Rightarrow dx = -\dfrac{2u\,du}{1+u^4}$,

$$I = \int \sqrt{\cot x}\,dx = -\int \frac{2u\,du}{1+u^4} = -\int \frac{2\,du}{u^2+\frac{1}{u^2}} = -\int \frac{1+\frac{1}{u^2}}{u^2+\frac{1}{u^2}}\,du - \int \frac{1-\frac{1}{u^2}}{u^2+\frac{1}{u^2}}\,du = -(I_1+I_2)$$

其中设 $u - \dfrac{1}{u} = t$, $\left(1+\dfrac{1}{u^2}\right)du = dt$, 则 $u^2 + \dfrac{1}{u^2} = t^2+2$,

$$I_1 = \int \frac{1+\frac{1}{u^2}}{u^2+\frac{1}{u^2}}\,du = \int \frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{u^2-1}{u\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\cot x - 1}{\sqrt{2\cot x}}\right)$$

且设 $u+\frac{1}{u}=\phi, \left(1-\frac{1}{u^2}\right)du=d\phi$, 则 $u^2+\frac{1}{u^2}=\phi^2-2$,

$$I_2=\int\frac{1-\frac{1}{u^2}}{u^2+\frac{1}{u^2}}\,duI_2=\int\frac{d\phi}{\phi^2-2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\left(\frac{1}{\phi-\sqrt{2}}-\frac{1}{\phi+\sqrt{2}}\right)d\phi=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\phi-\sqrt{2}}{\phi+\sqrt{2}}\right|$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{u^2-u\sqrt{2}+1}{u^2+u\sqrt{2}+1}\right|=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\cot x-\sqrt{2}\cot x+1}{\cot x+\sqrt{2}\cot x+1}\right|$$

于是 $\ln y=I$ 给出

$$y=Ce^{-\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\cot x-1}{\sqrt{2}\cot x}\right)}\left(\frac{\cot x+\sqrt{2}\cot x+1}{\cot x-\sqrt{2}\cot x+1}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{2}}}$$

36. 解

$$y''-y'-2y=10\sin x,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=1.$$

对应齐次方程的特征方程为

$$r^2-r-2=(r-2)(r+1)=0\Rightarrow r=2,-1$$

因此齐次通解为

$$y_c(x)=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}.$$

取特解

$$y_p(x)=A\cos x+B\sin x$$

代入方程

$$y_p''-y_p'-2y_p=(B-3A)\cos x+(-A-3B)\sin x=0$$

比较系数解得 $A=-1,B=-3$, 因此特解为

$$y_p(x)=-\cos x-3\sin x$$

通解为

$$y(x)=y_c+y_p=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}-\cos x-3\sin x.$$

使用初值条件 $y(0)=0,y'(0)=1$,

$$C_1+C_2-1=0\Rightarrow C_1+C_2=1.$$

$$y'(x) = 2C_1e^{2x} - C_2e^{-x} + \sin x - 3\cos x \implies y'(0) = 2C_1 - C_2 - 3 = 1.$$

解得 $C_1 = 1, C_2 = 0$, 因此初值问题的解为

$$y(x) = e^{2x} - \cos x - 3\sin x$$

37. 设初值条件为 $y(0) = 2, y'(0) = 0$, 求解方程

$$y'' + 4y = 16x\cos 2x$$

对应的齐次方程为 $y'' + 4y = 0$, 其通解为

$$y_c(x) = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$$

非齐次项为 $16x\cos 2x$, 原方程的特解包含了 $A_0\cos 2x + B_0\sin 2x$, 将与 $y_c(x)$ 重叠。因此特解需取

$$y_p(x) = x\big((A_0 + A_1x)\cos 2x + (B_0 + B_1x)\sin 2x\big).$$

将 y_p 代入原方程, 比较系数可得 $A_0 = 1, A_1 = 0, B_0 = 0, B_1 = 2$, 因此特解为

$$y_p(x) = x\cos 2x + 2x^2\sin 2x.$$

所以通解为

$$y(x) = y_c + y_p = (C_1 + x)\cos 2x + (C_2 + 2x^2)\sin 2x$$

由 $y(0) = 2$ 得 $C_1 = 2$, 求导得

$$y'(x) = (2x - 2C_1)\sin 2x + (4x^2 + 2C_2 + 1)\cos 2x$$

代入 $x = 0, y'(0) = 0$, 得到 $C_2 = -\frac{1}{2}$, 因此满足初值条件的解为

$$y(x) = (x + 2)\cos 2x + \left(2x^2 - \frac{1}{2}\right)\sin 2x$$

38. 设连续函数 $f(x)$ 满足

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}\cos x - \int_0^x (x - t)f(t)\,dt,$$

求 $f(x)$。

即解微分方程
$$y''(x)+y(x)=\frac{1-\cos x}{2},\ y(0)=\frac{1}{2},\ y'(0)=0$$
通解为
$$y=y_h+y_p=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x\sin x$$
代入初值
$$y(0)=C_1+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow C_1=0;\ y'(0)=C_2+0=0\Rightarrow C_2=0$$
因此
$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x\sin x$$

39. 考虑二阶线性齐次方程
$$y''+p(x)y'+q(x)y=0,$$
其中 $p(x),q(x)$ 在某区间 I 上连续。

(a) 证明: 若存在常数 r 使得对所有 $x\in I$ 有
$$r^2+rp(x)+q(x)=0,$$
则 $y(x)=e^{rx}$ 为该方程的一个解。

直接代入检验, 对于 $y=e^{rx}$,
$$y'=re^{rx},\quad y''=r^2e^{rx}.$$
代入方程得
$$y''+p(x)y'+q(x)y=(r^2+rp(x)+q(x))e^{rx}=0,$$
因此 $y=e^{rx}$ 确为方程的解。

(b) 求出当
$$p(x)=-2\left(1+\frac{1}{x}\right),\quad q(x)=1+\frac{2}{x}$$
时方程的通解。

先求常数根 r. 将形式 $r^2+rp(x)+q(x)=0$ 代入:

$$r^2+r\left(-2\Big(1+\frac{1}{x}\Big)\right)+1+\frac{2}{x}=0\Rightarrow (r^2-2r+1)+\frac{2}{x}(1-r)=0.$$

该等式对所有 x 成立, 比较系数得

$$r^2-2r+1=0,\quad 1-r=0.$$

由第二式得 $r=1$, 并满足第一式, 于是其中一解为

$$y_1(x)=e^x$$

由降阶法公式, 第二个线性独立解为

$$y_2=y_1\int\frac{1}{y_1^2}\exp\left(\int p(x)\,dx\right)dx=e^x\int e^{-2x}\exp\left(2\int(1+\frac{1}{x})\,dx\right)=e^x\int x^2\,dx=\frac{1}{3}x^3e^x$$

因此通解为

$$y(x)=(C_1+C_2x^3)e^x$$

40. 以换元

$$x=\int e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt,$$

解微分方程

$$y''(t)+ty'(t)+e^{-t^2}y(t)=0$$

令 $z(x)=y(t)$, 由链导法,

$$y'=\frac{dy}{dt}=\frac{dz}{dx}\frac{dx}{dt}=e^{-\frac{t^2}{2}}\frac{dz}{dx}$$

且

$$\begin{aligned}y''=\frac{d}{dt}\left(e^{-\frac{t^2}{2}}\frac{dz}{dx}\right)&=-te^{-\frac{t^2}{2}}\frac{dz}{dx}+e^{-\frac{t^2}{2}}\frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dx}\right)\\&=-te^{-\frac{t^2}{2}}\frac{dz}{dx}+e^{-\frac{t^2}{2}}\frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{dx}\right)\frac{dx}{dt}\\&=-te^{-\frac{t^2}{2}}\frac{dz}{dx}+e^{-\frac{t^2}{2}}\frac{d^2z}{dx^2}e^{-\frac{t^2}{2}}\\&=-te^{-\frac{t^2}{2}}\frac{dz}{dx}+e^{-t^2}\frac{d^2z}{dx^2}.\end{aligned}$$

把 y', y'' 代入原方程得

$$\left(-te^{-\frac{t^2}{2}}\frac{dz}{dx}+e^{-t^2}\frac{d^2z}{dx^2}\right)+t\left(e^{-\frac{t^2}{2}}\frac{dz}{dx}\right)+e^{-t^2}z=e^{-t^2}\frac{d^2z}{dx^2}+e^{-t^2}z=0\Rightarrow\frac{d^2z}{dx^2}+z=0$$

解为

$$z(x)=C_1\cos x+C_2\sin x\Rightarrow y(t)=C_1\cos\left(\int e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\right)+C_2\sin\left(\int e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\right)$$

41. 解方程

$$ty''(t)+(t^2-1)y'(t)+t^3y(t)=0$$

欲求合适的 $x=v(t)$, 令 $z(x)=y(t)$, 则

$$y'=\frac{dy}{dt}=\frac{dz}{dx}\frac{dx}{dt}=\frac{dz}{dx}\frac{dv}{dt},$$

且

$$\begin{aligned}y''=\frac{d}{dt}\left(\frac{dv}{dt}\frac{dz}{dx}\right)&=\frac{d^2v}{dt^2}\frac{dz}{dx}+\frac{dv}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dx}\right)\\&=\frac{d^2v}{dt^2}\frac{dz}{dx}+\frac{dv}{dt}\frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{dx}\right)\frac{dx}{dt}\\&=\frac{d^2v}{dt^2}\frac{dz}{dx}+\left(\frac{dv}{dt}\right)^2\frac{d^2z}{dx^2}\end{aligned}$$

代入原方程, 得到

$$t\left(\frac{dv}{dt}\right)^2\frac{d^2z}{dx^2}+\left[t\frac{d^2v}{dt^2}+(t^2-1)\frac{dv}{dt}\right]\frac{dz}{dx}+t^3z=0$$

为使方程为常系数方程, 不妨考虑变换

$$t\left(\frac{dv}{dt}\right)^2=t^3\Rightarrow\frac{dv}{dt}=t\Rightarrow v=\frac{t^2}{2}$$

此时原方程可化为

$$\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{dz}{dx}+z=0$$

其通解为

$$z(x)=e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

代回 $x=\frac{t^2}{2}$, 即

$$y(t)=e^{-\frac{t^2}{4}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}t^2}{4}+C_2\sin\frac{\sqrt{3}t^2}{4}\right)$$

42. 设 y_1, y_2 为方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0,\quad x>0 \tag{1}$$

的两个解, 其中 $p(x), q(x)$ 在 $x>0$ 上连续。已知

$$y_1=\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

且 y_1, y_2 的朗斯基行列式 (Wronskian) 为

$$W(x)=\frac{1}{x}$$

(a) 证明阿贝尔恒等式 (Abel's Identity):

$$W(x)=C\exp\left(-\int p(x)\,dx\right)$$

由朗斯基行列式的定义,

$$W(x)=\det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}=y_1y_2'-y_1'y_2$$

于是

$$\begin{aligned} W'(x)&=(y_1y_2'-y_1'y_2)'=(y_1'y_2'+y_1y_2'')-(y_1''y_2+y_1'y_2') \\ &=y_1y_2''-y_1''y_2=y_1(-py_2'-qy_2)-(-py_1'-qy_1)y_2 \\ &=-py_1y_2'+py_1'y_2=-p(y_1y_2'-y_1'y_2)=-p(x)W(x) \end{aligned}$$

因此

$$W'(x)+p(x)W(x)=0$$

由此可解得

$$W(x)=C\exp\left(-\int p(x)\,dx\right)$$

即得证。

(b) 求方程 (1) 中的函数 $p(x), q(x)$。

由阿贝尔恒等式,

$$p(x) = -\frac{W'(x)}{W(x)} = -\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$$

由于 y_1 是原方程的解,

$$y_1'' + py_1' + qy_1 = 0 \Rightarrow q(x) = -\frac{y_1'' + py_1'}{y_1} = 1 - \frac{1}{4x^2}$$

其中

$$y_1' = \frac{\cos x}{\sqrt{x}} - \frac{\sin x}{2x^{\frac{3}{2}}}, \quad y_1'' = \frac{3\sin x}{4x^{\frac{5}{2}}} - \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \frac{\cos x}{x^{\frac{3}{2}}}$$

因此原微分方程为

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right) y = 0, \quad x > 0$$

(c) 求方程 (1) 的通解。

利用朗斯基行列式求 y_2。已知

$$W(x) = y_1y_2' - y_1'y_2 = \frac{1}{x} \Rightarrow y_2' - \frac{y_1'}{y_1}y_2 = \frac{1}{xy_1}$$

即为一阶线性方程

$$y_2' + \left(\frac{1}{2x} - \cot x\right) y_2 = \frac{1}{x\sin x}.$$

其积分因子为

$$I(x) = \exp\left(\int \left(\frac{1}{2x} - \cot x\right) dx\right) = \exp(\ln\sqrt{x} - \ln|\sin x|) = \pm\frac{\sqrt{x}}{\sin x}$$

取 $I(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sin x}$, 由此

$$\begin{aligned} y_2(x) &= \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\left(\int \frac{\sqrt{x}}{\sin x} \cdot \frac{1}{x\sin x} dx + C\right) \\ &= \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\left(\int \frac{1}{\sin^2 x} dx + C\right) \\ &= \frac{\sin x}{\sqrt{x}}(-\cot x + C) \\ &= -\frac{\cos x}{\sqrt{x}} + Cy_1 \end{aligned}$$

因此通解为

$$y(x) = C_1\frac{\sin x}{\sqrt{x}} + C_2\frac{\cos x}{\sqrt{x}}.$$

43. (a) 证明法国数学家刘维尔 (Liouville) 的结论: 若黎卡提 (Riccati) 方程

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$$

已知一个特解 $\bar{y}(x)$, 令 $y = z + \bar{y}$, 则用此代换可把方程化为一个阶数 $n = 2$ 的伯努利 (Bernoulli) 方程, 从而可通过解一个一阶线性方程得到一般解。

设 $y = z + \bar{y}$, 代入原方程得

$$z' + \bar{y}' = p(z + \bar{y})^2 + q(z + \bar{y}) + r = pz^2 + 2pz\bar{y} + qz + (p\bar{y}^2 + q\bar{y} + r)$$

由于 $\bar{y}$ 是原方程的一个解, 故 $\bar{y}' = p\bar{y}^2 + q\bar{y} + r$, 于是

$$z' = pz^2 + 2pz\bar{y} + qz \Rightarrow z' - (2p\bar{y} + q)z = pz^2$$

这正是阶数 $n = 2$ 的伯努利方程。由通解公式,

$$z^{1-n} = e^{-\int (1-n)(2p\bar{y}+q)\,dx} \left\{ \int (1-n)p(x)e^{\int (1-n)(2p\bar{y}+q)\,dx}\,dx + C \right\}.$$

代入 $n = 2$ 即得

$$z^{-1} = e^{-\int (2p\bar{y}+q)\,dx} \left\{ -\int p(x)e^{\int (2p\bar{y}+q)\,dx}\,dx + C \right\}.$$

由此得到 z, 再由 $y = z + \bar{y}$ 得原方程的通解, 证毕。

(b) 求下列黎卡提方程的通解:

i. $y'e^{-x} + y^2 - 2ye^x = 1 - e^{2x}$, 已知特解 $\bar{y}(x) = e^x$。

原方程可写为

$$y' = -e^x y^2 + 2e^{2x}y + e^x(1 - 2e^{2x})$$

因此

$$p(x) = -e^x, \quad q(x) = 2e^{2x}, \quad r(x) = e^x(1 - 2e^{2x}), \quad \bar{y} = e^x$$

且

$$\int (2p\bar{y} + q)\,dx = \int (2(-e^x)e^x + 2e^{2x})\,dx = 0$$

于是上式积分指数因子为常数, 代入公式得

$$z^{-1} = -\int (-e^x)\,dx + C = e^x + C \Rightarrow z = \frac{1}{C + e^x}$$

代回 $y = z + \bar{y}$, 得到通解

$$y = e^x + \frac{1}{C + e^x}$$

ii. $x^2(y'+y^2)=2$, 已知特解 $\bar{y}(x)=-\dfrac{1}{x}$。

将方程写成标准形,

$$y'=-y^2+\frac{2}{x^2}$$

令 $y=z+\bar{y}=z-\dfrac{1}{x}$, 代入并化简可得关于 z 的方程

$$z'-\frac{2}{x}z=-z^2,$$

是阶数 $n=2$ 的伯努利方程, 由公式计算得

$$z^{-1}=e^{\int\frac{2}{x}\,dx}\left(\int e^{-\int\frac{2}{x}\,dx}\,dx+C\right)=\frac{1}{x^2}\left(\int x^2\,dx+C\right)=\frac{1}{x^2}\left(\frac{x^3}{3}+C\right)$$

即

$$z=\frac{3x^2}{x^3+3C}$$

代回 $y=z-\frac{1}{x}$, 化为

$$y=\frac{3x^2}{x^3+3C}-\frac{1}{x}=\frac{2x^3-3C}{x(3x^3+3C)}.$$

令常数 $C_1=3C$,

$$xy=\frac{2x^3-C_1}{3x^3+C_1}$$

44. 求解

$$x^3-\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}(y-2)$$

发现此为一黎卡提方程, 观察得 $y_1=x^2$ 是一特解。设 $y=x^2+\dfrac{1}{u}$, 则 $\dfrac{dy}{dx}=2x-\dfrac{1}{u^2}\dfrac{du}{dx}$, 原方程给出

$$x^3-\left(2x-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dx}\right)=x(x^2-2)+\frac{2(x^2-1)}{xu}+\frac{1}{xu^2}$$

再化简得一阶线性方程

$$\frac{du}{dx}-\left(2x-\frac{2}{x}\right)u=\frac{1}{x}$$

积分因子为

$$I(x)=\exp\left(\int-\left(2x-\frac{2}{x}\right)\,dx\right)=\exp\left(-x^2+2\ln|x|\right)=x^2e^{-x^2}$$

所以
$$u=\frac{e^{-x^2}}{x^2}\left(\int xe^{-x^2}+C_1\right)=\frac{C_1e^{x^2}-\frac{1}{2}}{x^2}$$
回代 $y=x^2+\frac{1}{u}$ 得
$$y=x^2+\frac{x^2}{C_1e^{x^2}-\frac{1}{2}}=x^2\frac{C_1e^{x^2}+\frac{1}{2}}{C_1e^{x^2}-\frac{1}{2}}.$$
令 $C_2=2C_1$, 则等价地写成
$$y=x^2\frac{C_2e^{x^2}+1}{C_2e^{x^2}-1}$$

45. 考虑柯西-欧拉方程 (Cauchy-Euler Equation)
$$ax^2y''+bxy'+cy=0,\quad x>0,$$
一般解法为作变换 $x=e^t$ 或 $t=\ln x$, 则原方程变为常系数方程
$$az''(t)+(b-a)z'(t)+cz(t)=0,$$
解得 $z(t)$ 后代回 $y(x)=z(\ln x)$。据此, 求解

(a) $x^2y''-3xy'+4y=0$

方程为 $x^2y''-3xy'+4y=0$, 所以 $a=1,b=-3,c=4$, 对应 z 方程为
$$z''-4z'+4z=0$$
特征方程为
$$r^2-4r+4=(r-2)^2=0\Rightarrow r=2$$
因此解得
$$z(t)=C_1e^{2t}+C_2te^{2t}\Rightarrow y(x)=z(\ln x)=C_1x^2+C_2x^2\ln x$$

(b) $x^2y''-xy'-35y=0$

方程为 $x^2y''-xy'-35y=0$, 所以 $a=1,b=-1,c=-35$。对应 z 方程
$$z''+(b-a)z'+cz=z''+(-1-1)z'-35z=z''-2z'-35z=0$$
其中特征方程为
$$r^2-2r-35=(r-7)(r+5)=0\Rightarrow r_1=7,r_2=-5$$

因此通解为

$$z(t) = C_1 e^{7t} + C_2 e^{-5t} \Rightarrow y(x) = z(\ln x) = C_1 x^7 + C_2 x^{-5}$$

46. 解非齐次欧拉方程

$$x^3 y''' + x^2 y'' - x y' = 24x \ln x, \quad x > 0$$

令 $x = e^t \Rightarrow t = \ln x$, 由链导法,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dt}\right) = -\frac{dy}{x^2dt} + \frac{1}{x}\frac{d^2y}{dt^2}\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

$$\begin{aligned}\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)\right) &= -\frac{2}{x^3}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) + \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^3y}{dt^3}\cdot\frac{1}{x} - \frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{1}{x^3}\frac{d^3y}{dt^3} - \frac{3}{x^3}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{2}{x^3}\frac{dy}{dt}\end{aligned}$$

代入方程得到

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} - y = 24e^t t$$

齐次方程 $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$ 的特征方程

$$r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0 \Rightarrow r = 1$$

故齐次解为

$$y_c = C_1 e^t + C_2 t e^t + C_3 t^2 e^t$$

设特解为

$$y_p = t^3(At + B)e^t = (At^4 + Bt^3)e^t$$

代入方程解得

$$24At + 6B = 24t \Rightarrow A = 1, B = 0$$

因此通解为

$$y = t^4 e^t + C_1 e^t + C_2 t e^t + C_3 t^2 e^t$$

代回 $t = \ln x$, 原方程的解为

$$y = x(\ln x)^4 + C_1 x + C_2 x \ln x + C_3 x (\ln x)^2$$

47. 以参数变换法解

$$y'' + 6y' + 9y = \frac{2e^{-4x}}{x^2+1}.$$

对应齐次方程通解为

$$y_c(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}$$

设特解为

$$y_p(x) = u_1(x) e^{-3x} + u_2(x) x e^{-3x}$$

其中 u_1, u_2 满足

$$\begin{bmatrix} e^{-3x} & xe^{-3x} \\ -3e^{-3x} & e^{-3x} - 3xe^{-3x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2e^{-4x}}{x^2+1} \end{bmatrix}$$

朗斯基行列式为

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{-3x} & xe^{-3x} \\ -3e^{-3x} & e^{-3x} - 3xe^{-3x} \end{vmatrix} = e^{-6x}$$

由克兰姆法则,

$$u_1' = \frac{-xe^{-3x} \cdot \frac{2e^{-4x}}{x^2+1}}{e^{-6x}} = -\frac{2x}{x^2+1} \Rightarrow u_1 = -\ln(1+x^2),$$

$$u_2' = \frac{e^{-3x} \cdot \frac{2e^{-4x}}{x^2+1}}{e^{-6x}} = \frac{2}{x^2+1} \Rightarrow u_2 = 2\tan^{-1} x.$$

因此特解为

$$y_p(x) = e^{-3x} \left(-\ln(1+x^2) + 2x \tan^{-1} x\right)$$

通解为

$$y(x) = e^{-3x} \left(C_1 + C_2 x + 2x \tan^{-1} x - \ln(1+x^2)\right)$$

48. 求解

$$y'' - 2y' + y = 4e^x x^3 \ln x, \quad x > 0$$

对应齐次方程的通解为

$$y_c(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x,$$

设特解为

$$y_p(x) = u_1(x) e^x + u_2(x) x e^x,$$

其中 u_1, u_2 满足

$$\begin{bmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (x+1)e^x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4e^x x^3 \ln x \end{bmatrix}.$$

两边同时除以 e^x 得

$$\begin{bmatrix} 1 & x \\ 1 & x+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4x^3 \ln x \end{bmatrix}.$$

朗斯基行列式为 $(x+1) - x = 1$, 由克兰姆法则,

$$u_1' = -x \cdot 4x^{-2} \ln x = -4x^{-2} \ln x, \quad u_2' = 4x^{-3} \ln x$$

于是

$$u_1 = -4 \int x^{-2} \ln x \, dx = \frac{4 \ln x}{x} - 4 \int \frac{1}{x^2} \, dx = \frac{4(\ln x + 1)}{x}$$

$$u_2 = 4 \int x^{-3} \ln x \, dx = -\frac{2 \ln x}{x^2} + 2 \int \frac{1}{x^3} \, dx = \frac{-2 \ln x - 1}{x^2}$$

因此特解为

$$y_p(x) = e^x u_1 + xe^x u_2 = e^x \left(\frac{4(\ln x + 1)}{x} + x \cdot \frac{-2 \ln x - 1}{x^2} \right) = e^x \frac{2 \ln x + 3}{x}$$

所以方程通解为

$$y(x) = e^x \left(C_1 + C_2 x + \frac{2 \ln x + 3}{x} \right)$$

49. 求解方程

$$y'' + 4y' + 4y = 15e^{-2x} \ln x + 25 \cos x, \quad x > 0$$

对应齐次方程的通解为

$$y_c(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$$

第一项非齐次 $f_1(x) = 15e^{-2x} \ln x$: 设特解为

$$y_{p_1} = u_1(x) e^{-2x} + u_2(x) x e^{-2x}$$

其中 u_1, u_2 满足

$$\begin{bmatrix} e^{-2x} & xe^{-2x} \\ -2e^{-2x} & (1-2x)e^{-2x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 15e^{-2x} \ln x \end{bmatrix}$$

两边除以 e^{-2x} 得

$$\begin{bmatrix} 1 & x \\ -2 & 1-2x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 15\ln x \end{bmatrix}$$

解得

$$u_1' = -15x\ln x \Rightarrow u_1 = -15\int x\ln x\,dx = -\frac{15}{2}x^2\ln x + 15\int \frac{x}{2}\,dx = \frac{15}{4}x^2(-2\ln x+1)$$

$$u_2' = 15\ln x \Rightarrow u_2 = 15\int \ln x\,dx = 15x(\ln x - 1)$$

因此

$$y_{p_1}(x) = e^{-2x}\left[\frac{15}{4}x^2(-2\ln x+1) + 15x(\ln x-1)\right] = \frac{15}{4}x^2(2\ln x-3)e^{-2x}$$

第二项非齐次 $f_2(x) = 25\cos x$: 设特解

$$y_{p_2}(x) = A\cos x + B\sin x$$

代入方程得

$$(3A+4B)\cos x + (-4A+3B)\sin x = 25\cos x$$

比较系数解得 $A=3, B=4$, 所以

$$y_{p_2}(x) = 3\cos x + 4\sin x$$

综上, 方程通解为

$$y(x) = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x} + \frac{15}{4}x^2(2\ln x-3)e^{-2x} + 3\cos x + 4\sin x$$

50. 解

$$y''' - y'' + y' - y = e^{-x}\sin x$$

齐次方程

$$y''' - y'' + y' - y = 0$$

的特征方程为

$$(r-1)(r^2+1) = 0 \Rightarrow r = 1, \pm i$$

所以齐次解为

$$y_c(x) = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x$$

对于非齐次项 $e^{-x} \sin x$, 尝试特解

$$y_p(x) = e^{-x}(A \cos x + B \sin x)$$

则

$$y_p' = -e^{-x}((A+B)\sin x + (A-B)\cos x)$$

$$y_p'' = 2e^{-x}(A \sin x + B \cos x)$$

$$y_p''' = 2e^{-x}((B-A)\sin x + (A+B)\cos x)$$

代入原方程解得 $A = \frac{1}{5}, B = 0$, 于是

$$y_p(x) = -\frac{1}{5} e^{-x} \cos x$$

因此通解为

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x - \frac{1}{5} e^{-x} \cos x$$

51. 求解微分方程

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = \frac{2e^{-x}}{1+x^2}$$

齐次解为

$$y_c(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 x^2 e^{-x}$$

使用参数变换法, 设

$$y_p(x) = u_1(x) e^{-x} + u_2(x) x e^{-x} + u_3(x) x^2 e^{-x}$$

其中 u_1, u_2, u_3 满足

$$\begin{cases} e^{-x} u_1' + (xe^{-x}) u_2' + (x^2 e^{-x}) u_3' = 0 \\ (e^{-x})' u_1' + (xe^{-x})' u_2' + (x^2 e^{-x})' u_3' = 0 \\ (e^{-x})'' u_1' + (xe^{-x})'' u_2' + (x^2 e^{-x})'' u_3' = \dfrac{2e^{-x}}{1+x^2} \end{cases}$$

化简得

$$\begin{cases} u_1' + xu_2' + x^2u_3' = 0 \\ -u_1' + (1-x)u_2' + (2x - x^2)u_3' = 0 \\ u_1' + (-2+x)u_2' + (2 - 4x + x^2)u_3' = \dfrac{2}{1+x^2} \end{cases}$$

其中增广矩阵为

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & x & x^2 & 0 \\ -1 & 1-x & 2x - x^2 & 0 \\ 1 & -2+x & 2-4x+x^2 & \dfrac{2}{1+x^2} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & x & x^2 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{1}{1+x^2} \end{array}\right]$$

逐步解得

$$\begin{aligned} u_3' &= \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow u_3 = \tan^{-1} x \\ u_2' &= -2xu_3' = -\frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow u_2 = -\ln(1+x^2) \\ u_1' &= -xu_2' - x^2u_3' = \frac{x^2}{1+x^2} \Rightarrow u_1 = x - 2\tan^{-1} x \end{aligned}$$

于是特解为

$$y_p = e^{-x}\left[(2x - 2\tan^{-1} x) + (-\ln(1+x^2))x + (\tan^{-1} x)x^2\right]$$

整理得通解为

$$y(x) = e^{-x}\left[C_1 + C_2x + C_3x^2 + (x^2-2)\tan^{-1} x + x - x\ln(1+x^2)\right]$$

52. 解方程

$$y''' + y' = \sec x$$

齐次方程 $y''' + y' = 0$ 的特征方程为

$$r^3 + r = 0 \Rightarrow r = 0, \pm i$$

所以齐次解为

$$y_c = c_1 + c_2\cos x + c_3\sin x$$

使用参数变易法, 设特解为

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2 + u_3y_3$$

其中 u_1, u_2, u_3 满足

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sec x \end{bmatrix}$$

其中增广矩阵为

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \cos x & \sin x & 0 \\ 0 & -\sin x & \cos x & 0 \\ 0 & -\cos x & -\sin x & \sec x \end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \cos x & \sin x & 0 \\ 0 & -\sin x & \cos x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \sec x \end{array}\right]$$

于是

$$\begin{cases} u_1' = \sec x \\ u_2' = \dfrac{\cos x}{-\sin x} u_3' = -1 \\ u_3' = \dfrac{\sin x}{\cos x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = |\sec x + \tan x| \\ u_2 = -x \\ u_3 = \ln|\cos x| \end{cases}$$

因此通解为

$$y = |\sec x + \tan x| - x\cos x + \ln|\cos x|\sin x + C_1 + C_2\cos x + C_3\sin x$$

53. 解联立微分方程式

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 \\ x_2' = 2x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

$$x_1' = x_1 + 2x_2 \tag{1}$$

$$x_2' = 2x_1 - 2x_2 \tag{2}$$

对 (1) 求导, 且由 (2),

$$x_1'' = x_1' + 2x_2' = x_1' + 2(2x_1 - 2x_2) = x_1' + 4x_1 - 4x_2 = x_1' + 4x_1 - 2(x_1' - x_1) = -x_1' + 6x_1$$

得关于 x_1 的二阶常微分方程, 因此 x_1 的通解为

$$x_1(t) = C_1e^{-3t} + C_2e^{2t}$$

由 (1),

$$x_2 = \frac{1}{2}(x_1' - x_1) = -2C_1 e^{-3t} + \frac{C_2}{2} e^{2t}$$

最终将系统的通解写成向量形式:

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-3t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} e^{2t}$$

54. 求解

$$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$$

设系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 首先求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 通过解

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)^2(\lambda-2)$$

因此特征值为

$$\lambda_1 = -1 \ (m_1 = 2), \quad \lambda_2 = 2$$

接着求特征向量。对 $\lambda_1 = -1$, 解

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{I}_3)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \implies \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

得到方程

$$v_1 + v_2 + v_3 = 0$$

有两个自由变量, 设 $v_2 = r, v_3 = s$, 则 $v_1 = -r - s$, 因此特征空间由两个线性无关向量张成:

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

对应解为

$$\boldsymbol{x}_1(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

对 $\lambda_2 = 2$, 解

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_2 \boldsymbol{I}_3)\boldsymbol{v} = \mathbf{0} \implies \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

化简矩阵得到行阶梯形:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{2}R_1 + R_2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to \frac{2}{3}R_3]{R_3 \to R_2 + R_3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

秩为 2, 设 $v_3 = r$, 则 $v_1 = v_2 = r$, 得到特征向量

$$\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

对应解为

$$\boldsymbol{x}_3(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

因此系统的一般解为

$$\boldsymbol{x}(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

55. 求解

$$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$$

设系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$。首先求特征值, 通过解

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}_3) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 0 & 2 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ -2 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda + 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 3)$$

得特征值

$$\lambda_{1,2}=-1\pm\sqrt{2}i,\quad \lambda_3=-2$$

接着求对应特征向量。对 $\lambda_1=-1+\sqrt{2}i$, 解

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I}_3)\boldsymbol{v}=\mathbf{0}\implies\begin{pmatrix}-2-\sqrt{2}i & 0 & 2\\ 1 & -\sqrt{2}i & 0\\ -2 & -1 & 1-\sqrt{2}i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

化为行阶梯形矩阵

$$\begin{pmatrix}-2-\sqrt{2}i & 0 & 2\\ 1 & -\sqrt{2}i & 0\\ -2 & -1 & 1-\sqrt{2}i\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to(-2+\sqrt{2}i)R_1/6}\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{1}{3}(-2+\sqrt{2}i)\\ 1 & -\sqrt{2}i & 0\\ -2 & -1 & 1-\sqrt{2}i\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3\to R_3+2R_1]{R_1\to R_2-R_1}\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{1}{3}(-2+\sqrt{2}i)\\ 0 & -\sqrt{2}i & \frac{1}{3}(2-\sqrt{2}i)\\ 0 & -1 & -\frac{1}{3}(1+\sqrt{2}i)\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\to -R_3]{R_2\to R_2/(\sqrt{2}i)}\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{1}{3}(-2+\sqrt{2}i)\\ 0 & 1 & \frac{1}{3}(1+\sqrt{2}i)\\ 0 & 1 & \frac{1}{3}(1+\sqrt{2}i)\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2}\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{1}{3}(-2+\sqrt{2}i)\\ 0 & 1 & \frac{1}{3}(1+\sqrt{2}i)\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

令 $v_3=r$ 为自由变量, 则

$$\boldsymbol{v}=r\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}(-2+\sqrt{2}i)\\ -\frac{1}{3}(1+\sqrt{2}i)\\ 1\end{pmatrix}.$$

取 $r=-3$ 并利用欧拉公式分离实部和虚部

$$\begin{aligned}e^{(-1+\sqrt{2}i)t}\begin{pmatrix}-2+\sqrt{2}i\\ 1+\sqrt{2}i\\ -3\end{pmatrix}&=e^{-t}(\cos(\sqrt{2}t)+i\sin(\sqrt{2}t))\begin{pmatrix}-2+\sqrt{2}i\\ 1+\sqrt{2}i\\ -3\end{pmatrix}\\ &=e^{-t}\begin{pmatrix}-2\cos(\sqrt{2}t)-\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t)+i(\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t)-2\sin(\sqrt{2}t))\\ \cos(\sqrt{2}t)-\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t)+i(\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t)+\sin(\sqrt{2}t))\\ -3\cos(\sqrt{2}t)-3i\sin(\sqrt{2}t)\end{pmatrix}\\ &=e^{-t}\begin{pmatrix}-2\cos(\sqrt{2}t)-\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t)\\ \cos(\sqrt{2}t)-\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t)\\ -3\cos(\sqrt{2}t)\end{pmatrix}+ie^{-t}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t)-2\sin(\sqrt{2}t)\\ \sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t)+\sin(\sqrt{2}t)\\ -3\sin(\sqrt{2}t)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

得到两个线性无关解

$$\boldsymbol{x}_1(t)=e^{-t}\begin{pmatrix}-2\cos(\sqrt{2}t)-\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t)\\ \cos(\sqrt{2}t)-\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t)\\ -3\cos(\sqrt{2}t)\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}_2(t)=e^{-t}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t)-2\sin(\sqrt{2}t)\\ \sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t)+\sin(\sqrt{2}t)\\ -3\sin(\sqrt{2}t)\end{pmatrix}$$

对 $\lambda_3=-2$, 解

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_3\boldsymbol{I}_3)\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}\implies\begin{pmatrix}-1&0&2\\1&1&0\\-2&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

化简矩阵得到

$$\begin{pmatrix}-1&0&2\\1&1&0\\-2&-1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3-2R_1]{R_2\to R_2+R_1}\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&1&2\\0&-1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3+R_2}\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

令 $v_3=s$, 得到特征向量

$$\boldsymbol{v}_3=s\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

对应解为

$$\boldsymbol{x}_3(t)=e^{-2t}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

因此系统的一般解为

$$\boldsymbol{x}(t)=c_1e^{-t}\begin{pmatrix}-2\cos(\sqrt{2}t)-\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t)\\ \cos(\sqrt{2}t)-\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t)\\ -3\cos(\sqrt{2}t)\end{pmatrix}+c_2e^{-t}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t)-2\sin(\sqrt{2}t)\\ \sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t)+\sin(\sqrt{2}t)\\ -3\sin(\sqrt{2}t)\end{pmatrix}$$
$$+c_3e^{-2t}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$$

56. 判断矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&4\end{pmatrix}$$

是否缺陷, 并求系统 $\boldsymbol{x}'(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)$ 的通解。

首先求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值:

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}_3)=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&0\\0&1-\lambda&1\\0&0&4-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2(4-\lambda)$$

因此特征值为 $\lambda_1=4,\lambda_2=1\ (m_2=2)$。对于 $\lambda_1=4$, 解

$$(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I}_3)\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}\implies\begin{pmatrix}-3&1&0\\0&-3&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

得到特征向量及其对应解

$$\boldsymbol{v}=r\begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix},\quad r\neq 0,\quad \boldsymbol{x}_1(t)=e^{4t}\begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix}$$

对于 $\lambda_2=1$, 解

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}_3)\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}\implies\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

得到特征向量及其对应解

$$\boldsymbol{v}=s\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad s\neq 0,\quad \boldsymbol{x}_2(t)=e^{t}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

总共有两个线性无关特征向量, 因此矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是缺陷的。为求第三个线性无关解, 设

$$\boldsymbol{x}_3(t)=(\boldsymbol{v}t+\boldsymbol{w})e^t$$

其中 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 满足

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}_3)\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0},\quad(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}_3)\boldsymbol{w}=\boldsymbol{v}\implies(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}_3)^2\boldsymbol{w}=\boldsymbol{0}$$

解得

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}_3)^2\boldsymbol{w}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&3\\0&0&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\implies w_3=0$$

自由选择 w_1, w_2, 取

$$\boldsymbol{w}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}_3)\boldsymbol{w}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

因此得到第三个解

$$\boldsymbol{x}_3(t)=(\boldsymbol{v}t+\boldsymbol{w})e^t=e^t\begin{pmatrix}t\\1\\0\end{pmatrix}$$

最终通解为

$$\boldsymbol{x}(t)=c_1e^{4t}\begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix}+c_2e^t\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c_3e^t\begin{pmatrix}t\\1\\0\end{pmatrix}$$

57. 求解非齐次系统

$$\boldsymbol{x}'(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{F}(t),$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1\\-9&6\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{F}(t)=\begin{pmatrix}0\\t\end{pmatrix}.$$

首先求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量:

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}_2)=\begin{vmatrix}-\lambda&1\\-9&6-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(6-\lambda)+9=(\lambda-3)^2$$

因此特征值为 $\lambda=3$ $(m=2)$, 对 $\lambda=3$, 解

$$(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I}_2)\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}-3&1\\-9&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

得到特征向量

$$\boldsymbol{v}=r\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\quad r\neq 0$$

对应解为

$$\boldsymbol{x}_1(t)=e^{3t}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是缺陷的, 第二个线性无关解取形如

$$\boldsymbol{x}_2(t)=(\boldsymbol{v}t+\boldsymbol{w})e^{3t}$$

其中 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 满足

$$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}_2)\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0},\quad (\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}_2)\boldsymbol{w}=\boldsymbol{v}\implies(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}_2)^2\boldsymbol{w}=\boldsymbol{0}$$

解得

$$\begin{pmatrix}-3&1\\-9&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&1\\-9&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\implies\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

取

$$\boldsymbol{w}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\implies\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I}_2)\boldsymbol{w}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

于是第二个解为

$$\boldsymbol{x}_2(t)=(\boldsymbol{v}t+\boldsymbol{w})e^{3t}=\begin{pmatrix}t\\3t+1\end{pmatrix}e^{3t}$$

因此齐次系统通解为

$$\boldsymbol{x}_c(t)=c_1e^{3t}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+c_2e^{3t}\begin{pmatrix}t\\3t+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{3t}&te^{3t}\\3e^{3t}&(3t+1)e^{3t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}$$

记基础矩阵为 $\boldsymbol{X}$, 寻找特解

$$\boldsymbol{x}_p(t)=\boldsymbol{X}\boldsymbol{u}\implies\boldsymbol{X}\boldsymbol{u}'=\boldsymbol{F}\implies\boldsymbol{u}'=\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{F}$$

计算得到

$$\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{F}=e^{-3t}\begin{pmatrix}3t+1&-t\\-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\t\end{pmatrix}=e^{-3t}\begin{pmatrix}-t^2\\t\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}=\int\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{F}\,dt=\begin{pmatrix}\int -t^2e^{-3t}dt\\\int te^{-3t}dt\end{pmatrix}=e^{-3t}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}t^2+\frac{2}{9}t+\frac{2}{27}\\-\frac{1}{3}t-\frac{1}{9}\end{pmatrix}$$

于是得到特解

$$\boldsymbol{x}_p(t)=\boldsymbol{X}\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}1&t\\3&3t+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}t^2+\frac{2}{9}t+\frac{2}{27}\\-\frac{1}{3}t-\frac{1}{9}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{9}t+\frac{2}{27}\\\frac{1}{9}\end{pmatrix}.$$

最终非齐次系统通解为

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}_p(t)+\boldsymbol{x}_c(t)=\begin{pmatrix}\frac{1}{9}t+\frac{2}{27}\\\frac{1}{9}\end{pmatrix}+c_1e^{3t}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+c_2e^{3t}\begin{pmatrix}t\\3t+1\end{pmatrix}.$$

参考出处

- Arts of Problem Solving (AoPS): Contest Collections
- Brilliant (Kudos to the unmonetized version in the past)
- International Mathematics Competition (IMC) for University Students
- Missouri Collegiate Mathematics Competition
- American Mathematics Competition 10
- University of Waterloo CEMC - Euclid, Fermat, Cayley, Hypatia, Galois
- Lehigh University High School Math Contest
- Joint Entrance Examination (Advanced)
- The USSR Olympiad Problem Book: Selected Problems and Theorems of Elementary Mathematics
- LetsSolveMathProblems - Weekly Math Challenges
- Maths 505 - Differential Equations
- Michael Penn
- Prime Newtons
- TRML
- MadasMaths
- 日本留学試験-理系数学
- 中国复旦大学往年试题
- 雪隆森中学华罗庚杯数学比赛
- 厦门大学马来西亚分校-陈景润杯中学数学竞赛
- 微积分福音
- 线代启示录
- 福气老师
- 指考历届试题
- 统测历届试题与解答
- 印度人的作业
- 北京高考在线
- 朱式幸福教甄
- 普通型高级中学数学科能力竞赛 (决赛)
- 2014-2024 全国中学生数学竞赛联赛试题及答案汇总
- 如此醉的图书馆
- 菁优网
- 08 高考文科试题分类圆锥曲线
- 08 高考文科试题分类数列
- 福伦-隆中高数笔记
- 曾龙文师-高二数理培训队笔记