2025 年循人中学高三期末考兼统考预试

高中组

高级数学 (III)

(SC007)

训练集

采题: 李冬恒

February 3, 2026

前言

此训练集的雏形要追溯到 2019 年，依稀记得为当时的备赛爬了大量的 AMC 历届考题，创了“AMC 10 精选”的文档，其中我认为是属于统考范围的难题，便收录于另一个文档。

尘封已久，直到今年 5 月，我在整理电脑资料时偶然翻出，看着当年的内容，心想：读了一个数学系，难免觉得发展空间实属不少。在这几个月内，我随性地在网络上寻找、采集、整理更有趣 (恶心)、更值得深思 (烧脑) 的题目，于是诞生了——高级数学 (III) 训练集。

起初，我并没想过要为每一题整理出解析，但发现到不少当年的题目只附答案没附解法。可惜的是，我的脑袋算是停止运作了一年，发现有一些题目对于现在的我实在是难以下咽。好吧，此乃下下策，但我决定用 LaTeX 开始动手为每一题补上解法、重写排版、增加新的内容。也好，既是备忘录，也是为了防止未来的我看到这些题目时会再次怀疑人生：「咦？是不是百尺竿头，更蠢一步？」

依据统考范围，我把训练集大致分为代数、组合数学、几何及微积分。若你想自行动手尝试，可以在 `preamble` 中将 `\printanswers` 这行注释掉。

绝大部分解法都由官方或我提供，只有某些是 `ChatGpt` 生成后由我再校对，之中一定会有纰漏，欢迎批评指正，也希望这份训练集能助你一路披荆斩棘、越战越勇！

——冬恒

目录

代数

数论

组合数学

几何

微积分

总题数: 1613

数论

整除

考点：整除基本性质、最小公倍数、最大公因数、因数函数、勒让德定理、贝祖等式

1. 已知 $n|10a-b, n|10c-d$。证明 $n|ad-bc$。

由于

$$n|(10a-b)c+(10c-d)a$$

于是

$$n|ad-bc$$

2. 例 5、已知 $1987|\underbrace{11\ldots1}_{n个}$，证明 $1987|\underbrace{11\ldots1}_{n个}\underbrace{99\ldots9}_{n个}\underbrace{88\ldots8}_{n个}\underbrace{77\ldots7}_{n个}$。

证：$\underbrace{11\ldots1}_{n个}\underbrace{99\ldots9}_{n个}\underbrace{88\ldots8}_{n个}\underbrace{77\ldots7}_{n个}=\underbrace{11\ldots1}_{n个}\times10^{3n}+9\times\underbrace{11\ldots1}_{n个}\times10^{2n}+8\times\underbrace{11\ldots1}_{n个}\times10^{n}+7\times\underbrace{11\ldots1}_{n个}$

为 $\underbrace{11\ldots1}_{n个}$ 的倍数，由于 $1987|\underbrace{11\ldots1}_{n个}$ 且 $\underbrace{11\ldots1}_{n个}|\underbrace{11\ldots1}_{n个}\underbrace{99\ldots9}_{n个}\underbrace{88\ldots8}_{n个}\underbrace{77\ldots7}_{n个}$，

因此 $1987|\underbrace{11\ldots1}_{n个}\underbrace{99\ldots9}_{n个}\underbrace{88\ldots8}_{n个}\underbrace{77\ldots7}_{n个}$。

3. 例 6、正整数 n 使得 n^2+2005 是完全平方数，则 $(n^2+2005)^2$ 的个位数字是 _____。

解：设 $n^2+2005=m^2(m>0)$，则 $(m-n)(m+n)=2005=1\times2005=5\times401$，得

$$\begin{cases}m-n=1\\ m+n=2005\end{cases}\quad 或 \quad\begin{cases}m-n=5\\ m+n=401\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}m=1003\\ n=1002\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m=203\\ n=198\end{cases}$。由 1003^2 个位数字是 9，由 203^2 个位数字也是 9，知它的个位数字也是 9。

4. 例 9、求 2004! 末尾零的个数。

解：因为 $10=2\times 5$，而 2 比 5 多，所以只要考虑 2004! 中 5 的幂指数，即

$$\lfloor\frac{2004}{5}\rfloor+\lfloor\frac{2004}{25}\rfloor+\lfloor\frac{2004}{125}\rfloor+\lfloor\frac{2004}{625}\rfloor=400+80+16+3=499$$

（注：原文中使用了分式形式表示取整逻辑）。

5. 例 10、设 $72|\overline{a679b}$，求 a，b 的值。

解：$72=8\times 9$，且 $(8,9)=1$，所以只需讨论 8、9 都整除 $\overline{a679b}$ 时 a，b 的值。若 $8|\overline{a679b}$，则 $8|\overline{79b}$，由除法可得 $b=2$。若 $9|\overline{a679b}$，则 $9|(a+6+7+9+2)$，得 $a=3$。（一个整数被 9 整除的充要条件是它的各位数字之和能被 9 整除。）

6. 4、若 $(p,6)=1$，证明 p^2-1 能被 24 整除。

证：因为 $(p,6)=1$，所以 p 不是 2 的倍数，也不是 3 的倍数。由于 p 是奇数，可设 $p=2k+1$，则 $p^2-1=(p-1)(p+1)=(2k)(2k+2)=4k(k+1)$。因为 $k(k+1)$ 是两个连续整数之积，必能被 2 整除，故 $8|(p^2-1)$。又因为 p 不被 3 整除，由费马小定理或余数分类可知 $p\equiv 1$ 或 $2 \pmod 3$，则 $p^2\equiv 1 \pmod 3$，即 $3|(p^2-1)$。由于 $(3,8)=1$，所以 $3\times 8=24|(p^2-1)$。

7. 7、证明 $5^{2n}+4\cdot 3^{2n}$（n 是自然数）不是质数。

证：$5^{2n}+4\cdot 3^{2n}=(5^n)^2+(2\cdot 3^n)^2$。利用恒等式 a^4+4b^4（苏菲•热尔曼恒等式）的思想进行配方：原式 $=(5^n)^2+2\cdot 5^n\cdot(2\cdot 3^n)+(2\cdot 3^n)^2-2\cdot 5^n\cdot(2\cdot 3^n)=(5^n+2\cdot 3^n)^2-4\cdot 15^n$。当 n 为偶数时（设 $n=2k$），原式可化为平方差：$=(5^n+2\cdot 3^n)^2-(2\cdot 15^k)^2=(5^n+2\cdot 3^n-2\cdot 15^k)(5^n+2\cdot 3^n+2\cdot 15^k)$。由于该数可以分解为两个大于 1 的整数之积，故不是质数。

8. 8、证明 $p^{k+2}+p^{k+1}+q^{k+2}+q^{k+1}$ 是合数。

证：原式可进行因式分解：$p^{k+2}+p^{k+1}+q^{k+2}+q^{k+1}=p^{k+1}(p+1)+q^{k+1}(q+1)$。若 p,q 同为奇数，则 $p+1$ 和 $q+1$ 均为偶数，原式必为偶数且大于 2，是合数。若 p,q 一奇一偶（如 $p=2$），则需根据 k 的取值进一步讨论。

9. 9、使 n^3+100 能被 $n+10$ 整除的正整数 n 的最大值是多少？

解：利用多项式除法或凑项法：$n^3+100=(n^3+1000)-900=(n+10)(n^2-10n+100)-900$。若 $(n+10)|(n^3+100)$，则必有 $(n+10)|900$。为了使 n 最大，$n+10$ 应取 900 的最大约数，即 $n+10=900$。解得 $n=890$。

10. 14、证明：三个连续奇数的平方和加 1，能被 12 整除，但不能被 24 整除。

证：设三个连续奇数为 $2k-2, 2k+1, 2k+3$（此处原图中手写建议为 $2k-1, 2k+1, 2k+3$）。设三个连续奇数为 $n-2, n, n+2$（其中 n 为奇数）。$(n-2)^2+n^2+(n+2)^2+1=n^2-4n+4+n^2+n^2+4n+4+1=3n^2+9=3(n^2+3)$。因为 n 是奇数，设 $n=2m+1$，则 $n^2+3=(2m+1)^2+3=4m^2+4m+4=4(m^2+m+1)$。所以原式 $=3\times 4(m^2+m+1)=12(m^2+m+1)$，显见能被 12 整除。又因为 $m^2+m=m(m+1)$ 必为偶数，故 m^2+m+1 必为奇数。因此 $12\times$ 奇数 不能被 24 整除。

11. 18、将自然数 N 接写在任意一个自然数的右面，如果得到的新数都能被 N 整除，那么 N 称为魔术数。问小于 2000 的自然数中有多少个魔术数？

解：设任意自然数为 M，N 是一个 k 位数。接写后的新数为 10^kM+N。由题意，$N|(10^kM+N)$ 对任意 M 成立，这意味着 $N|10^kM$ 对任意 M 成立。取 $M=1$，则必须满足 $N|10^k$。若 $k=1$，$N|10^1$，则 $N\in\{1,2,5\}$。若 $k=2$，$N|10^2$ 且 $N\geqslant 10$，则 $N\in\{10,20,25,50\}$。若 $k=3$，$N|10^3$ 且 $N\geqslant 100$，则 $N\in\{100,125,200,250,500\}$。若 $k=4$，$N|10^4$ 且 $1000\leqslant N<2000$，则 $N\in\{1000,1250\}$。综上所述，魔术数共有 $3+4+5+2=14$ 个。

12. 23、某正整数之平方，其末三位是相等的非零数字，求具有该性质的最小正整数。

解：设该正整数为 x，则 $x^2\equiv\overline{aaa}\pmod{1000}$，其中 $a\in\{1,2,\ldots,9\}$。即 $x^2\equiv 111a\pmod{1000}$。由于完全平方数的末位只能是 $0,1,4,5,6,9$，故 a 只能取 $1,4,5,6,9$。经检验：若 $a=4$，$x^2\equiv 444\pmod{1000}$。此时 x 必为偶数，设 $x=2y$，则 $4y^2\equiv 444\pmod{1000}\Rightarrow y^2\equiv 111\pmod{250}$。由 $y^2\equiv 1\pmod{10}$ 知 y 末位为 1 或 9。通过计算发现 $y=38$ 时，$38^2=1444$，满足末三位为 444。因此最小正整数 $x=38$。

同余

考点: 同余基本性质、模逆元、费马小定理、欧拉定理、中国剩余定理、威尔逊定理、阶与原根

1. 例 4、试证 $2^{3n+3}+41$ $(n \in N)$ 恒为 7 的倍数。

证：因为 $2^{3n+3}=8\times 8^n \equiv 1 \pmod 7$，$41 \equiv 6 \pmod 7$，相加即可得 $1+6=7\equiv 0 \pmod 7$。由此得证。

2. 例 6、求 3^{406} 的末二位数。

解法 1：$3^{406} = (3^4)^{101}\cdot 3^2 \equiv (81)^{101}\cdot 9 \equiv -19^{101}\times 9 \equiv -361^{50}\times 19\times 9 \equiv -39^{50}\times 171$ $\equiv 1521^{25}\times 29 \equiv 21^{25}\times 29 \equiv 441^{12}\times 21\times 29 \equiv 41^{12}\times 9 = 1681^6\times 9 = 81^6\times 9 \equiv 19^6\times 9 = 361^3\times 9 \equiv 61^3\times 9 \equiv -39^3\times 9 \equiv -1521\times 39\times 9 \equiv -21\times 351 \equiv -21\times 51 \equiv -1071 \equiv -71 \equiv 29$ $\pmod{100}$ $\therefore$ 末二位数为 29。

解法 2：$100=4\times 25$ (一) $3^{406}\equiv(-1)^{406}\equiv 1\equiv 29 \pmod 4$ (二) $3^{406}=27^{135}\times 3\equiv 2^{135}\times 3 = 32^{27}\times 3\equiv 7^{27}\times 3 = 49^{13}\times 7\times 3\equiv -1\times 21 = -21\equiv 4 \pmod{25}$ 由 (一)(二) $3^{406}\equiv 1\equiv 29$ $\pmod 4$，$3^{406}\equiv 4\equiv 29 \pmod{25}$ 所以 $3^{406}\equiv 29 \pmod{100}$，末两位为 29。

解法 3：利用二项式定理展开，$9^{203}=(10-1)^{203}\equiv \binom{203}{202}(10)(-1)^{202}+(-1)^{203} = 2030-1 = 2029\equiv 29 \pmod{100}$ $\therefore$ 末二位数为 29。

3. 例 7、求 243^{402} 的末两位数。

解：$243^{402}\equiv 3^{402}\equiv 9^{201}\equiv 1^{201}=1\equiv 49 \pmod 4$，$243^{402}\equiv 7^{402}\equiv 49^{201}\equiv -1^{201}=-1\equiv 49$ $\pmod{25}$ 因此 $243^{402}\equiv 49 \pmod{[4,25]=100}$，末两位为 49。

4. 例 9、已知 $7^x\equiv 1 \pmod{500}$，求最小的正整数 x。

解：$7^x-1\equiv 0 \pmod{500}$，已知 500 的倍数末位数字一定是 0，因此若 7^x-1 要被 500 整除，其末位也必须是 0。由此可推出 7^x 的末位必须是 1。我们知道 $7^4=2401\Rightarrow 7^4$ 末位必也是 1，设 $x=4n$ 代回同余式得到

$$7^{4n}\equiv 1 \pmod{500}$$

$$2401^n \equiv 1 \pmod{500}$$

$$401^n \equiv 1 \pmod{500}$$

$$(1+400)^n \equiv 1 \pmod{500}$$

$$1+\binom{n}{1}400+\binom{n}{2}400^2+\cdots+400^n \equiv 1 \pmod{500}$$

$$400n \equiv 0 \pmod{500}$$

n 最小为 5，因此 $x=20$。

5. 例 10、证明 $5y^2+3=x^2$ 无解，$x,y\in\mathbb{Z}$。

证：若 $5y^2+3=x^2$ 有解，则两边关于模 5 同余，有 $5y^2+3\equiv x^2 \pmod 5$ 即 $3\equiv x^2 \pmod 5$，而任一个平方数 $x^2\equiv 0,1,4 \pmod 5$ $\therefore 3\not\equiv 0,1,4 \pmod 5$ $\therefore$ 即得矛盾，即 $5y^2+3=x^2$ 无解。

6. 例 11、证明 $x^2-2y^2=77$ 无解，$x,y\in\mathbb{Z}$。

证 1：11 和 y 必互质，即 $(11,y)=1$，否则的话设 $y=11k$，必导致 $x=11j$，但右式只有一个 11 的因数，矛盾，因此 $(11,y)=1$。假设存在解 (x_0,y_0)，则有同余式 $x_0^2-2y_0^2\equiv 0 \pmod{11}$，存在 $(y_0^{-1})^2$ 使得 $(y_0^{-1}x_0)^2-2\equiv 0 \pmod{11}$，因此 $(y_0^{-1}x_0)^2\equiv 2 \pmod{11}$，但 $X^2\equiv 1,4,3,5,9 \pmod{11}$ 矛盾，命题得证。

证 2：假设方程有解，则 (x_0,y_0) 只有两种情况一) $(x_0,y_0)=$ (奇数, 偶数)，则 $x_0^2-2y_0^2\equiv 77\Rightarrow 1-0\equiv 5 \pmod 8$，矛盾。二) $(x_0,y_0)=$ (奇数, 奇数)，则 $x_0^2-2y_0^2\equiv 77\Rightarrow 1-2(1)\equiv 5 \pmod 8$，矛盾。命题得证。

7. 例 12、证明 $x^2-3y^2+5z^2=0$ 无解。

证：设 (x_0,y_0,z_0) 是解，则 $x_0^2-3y_0^2+5z_0^2=0\Rightarrow x_0^2-3y_0^2\equiv 0 \pmod 5$ 有两种情况，一) $(x_0,5)=(y_0,5)=1$，则存在 $(y_0^{-1})^2$ 使得 $(y_0^{-1}x_0)^2-3\equiv 0 \pmod 5\Rightarrow (y_0^{-1}x_0)^2\equiv 3 \pmod 5$，但 $X^2\equiv 1,2,4 \pmod 5$，矛盾。二) 若 $x_0=5^ak$，必有 $y_0=5^aj$，其中 $(k,j)=1$。约去 5^a 后，得到 $k^2-3j^2\equiv 0 \pmod 5$，同理可证无解。

8. 例 13、已知 n 是正整数，且 $2n+1$，$3n+1$ 都是平方数，证明 $40|n$。

证：设 $2n+1=x^2$，$3n+1=y^2$。由于奇数的平方被 8 除余 1，因此

$$\begin{cases} 2n+1\equiv 1 \\ 3n+1\equiv 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n\equiv 0 \pmod 8 \Rightarrow n\equiv 0 \pmod 4 \\ 3n\equiv 0 \pmod 8 \Rightarrow n\equiv 0 \pmod 8 \end{cases}$$

因此 n 至少是 8 的倍数。又，对任意整数 z 有 $z^2\equiv 0,1,4 \pmod 5$ $x^2+y^2=(2n+1)+(3n+1)=5n+2$ 可能值 $x^2+y^2\equiv 1+1,1+0,0+1,1+4,4+1,0+0,4+4,0+4,4+0$ 只有 $x^2+y^2\equiv 1$ 满足$x^2+y^2\equiv 2$，因此 $x^2+y^2=2n+1+3n+1\equiv 2 \pmod 5$ 得到 $n\equiv 0$，因此 $5|n$。综上所述，n 为 40 的倍数。

9. 例 14、求最小的整数 n，使得 $\sum_{i=1}^{n} x_i^4=1599$，$x_i$ 为整数。据此，求出其中一组解。

解：由于 $a^4\equiv 0 \pmod{16}$（偶数），$a^4\equiv 1 \pmod{16}$（奇数），因此 $a^4\equiv 0,1 \pmod{16}$。$\sum_{i=1}^{n} x_i^4=1599\equiv -1\equiv 15 \pmod{16}$，因此 n 最小是 15。现在求 x_i。由于有 15 个数，且 $x_i^4\equiv 1 \pmod{16}$，它们都是奇数。x_i 最小是 $1,3,5$ 这些数。（$7^4=2401>1599$）$5^4\times 3=1875>1599$，因此不能超过两个解是 5，考虑只有一个解是 5 的情况。此时 $\sum_{i=1}^{14} x_i^4=1599-5^4=974$。由于 $974=81\times 12+2$，可得出 12 个 3^4 和两个 1。猜测有 12 个 x_i 是 3，两个 x_i 是 1。得到一组解是 $1,1,3,3,\ldots,3,5$。即 $2\times 1^4+12\times 3^4+5^4=1599$。

10. 9、Prove that the number $\underbrace{11\ldots1}_{n}$ (in the decimal notation) is not a perfect square.

证：$\underbrace{11\ldots1}_{n}$ 的末两位数是 11。由于一个完全平方数被 4 除的余数只能是 0 或 1，而 $11\equiv 3 \pmod 4$。因此该数不可能是完全平方数。

11. 10、已知 $n!=1\times 2\times\cdots\times(n-1)\times n$。若 $A=\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\frac{4}{5!}+\cdots+\frac{11}{12!}$，试求 A 除以 10 的余数。

解：观察通项 $\frac{k}{(k+1)!}=\frac{(k+1)-1}{(k+1)!}=\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}$。则 $A=(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!})+(\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!})+\cdots+(\frac{1}{11!}-\frac{1}{12!})=\frac{1}{2}-\frac{1}{12!}$。若求 $12!A \pmod{10}$，则 $12!A=\frac{12!}{2}-1\equiv -1\equiv 9 \pmod{10}$。

12. 12、求证 $8888^{8888}+7777^{7777}$ 能被 37 整除。

证：因为 $111 = 3 \times 37 \equiv 0 \pmod{37}$，所以 $1111 \equiv 1 \pmod{37}$。$8888^{8888} + 7777^{7777} \equiv (8 \times 1)^{8888} + (7 \times 1)^{7777} \equiv 8^{8888} + 7^{7777} \pmod{37}$。利用费马小定理 $a^{36} \equiv 1 \pmod{37}$ 可化简指数进一步证明其余数为 0。

13. 13、证明 504 整除 $n^9 - n^3$。

证：$n^9 - n^3 = n^3(n^6 - 1) = n^3(n^3 - 1)(n^3 + 1)$。由于 $504 = 7 \times 8 \times 9$：1) 由费马小定理可知 $n^7 - n$ 被 7 整除，可推导原式被 7 整除。2) 任意整数立方模 9 的余数为 $0, 1, 8$，可知原式被 9 整除。3) 讨论 n 的奇偶性，可知原式被 8 整除。

14. 17、证明 $x^2 + 2y^2 = 203$ 无整数解。

证：考虑模 7。$x^2+2y^2 \equiv 203 \equiv 0 \pmod 7$。由于 2 不是模 7 的二次剩余，同余式 $x^2+2y^2 \equiv 0 \pmod 7$ 仅当 x, y 均为 7 的倍数时成立。设 $x = 7k, y = 7m$，则 $49k^2 + 98m^2 = 203$。方程左边能被 49 整除，但右边 203 不能被 49 整除，矛盾，故无解。

15. 18、求 3^{1998} 的末两位数。

解：$3^{1998} = (3^4)^{499} \cdot 3^2 = 81^{499} \cdot 9$。$81^{499} = (80 + 1)^{499} \equiv \binom{499}{1} \cdot 80 + 1 \equiv 499 \cdot 80 + 1 \equiv 21 \pmod{100}$。$21 \times 9 = 189 \equiv 89 \pmod{100}$，所以末两位数是 89。

16. 19、证明当 p 不少于 5 的质数时，$p^2 + 2$ 为一合数。

证：因 $p \geqslant 5$ 且为质数，则 p 不被 3 整除。故 $p \equiv 1, 2 \pmod 3 \Rightarrow p^2 \equiv 1 \pmod 3$。$p^2 + 2 \equiv 1 + 2 = 3 \equiv 0 \pmod 3$。由于 $p^2 + 2 > 3$ 且能被 3 整除，所以 $p^2 + 2$ 是合数。

17. 20、证明 701 以及 61 被 71 除时，它们的余数相等。

证：计算两数之差：$701 - 61 = 640$。若余数相等，差值应能被 71 整除。计算 $640 \div 71 = 9 \ldots 1$。注：若原题中 61 为 62，则 $701 - 62 = 639 = 71 \times 9$，余数才相等。

18. 21、若 a 为自然数，证明 $10 | (a^{1993} - a^{1949})$。

证：$a^{1993}-a^{1949}=a^{1949}(a^{44}-1)$。1) 易证其为偶数，即被 2 整除。2) 由费马小定理 $a^5\equiv a \pmod 5$，当 $(a,5)=1$ 时 $a^4\equiv 1 \pmod 5$，故 $a^{44}\equiv 1 \pmod 5$。因为能同时被 2 和 5 整除，所以能被 10 整除。

19. 23、求被 3 除余 2，被 5 除余 3，被 7 除余 5 的最小三位数。

解：设该数为 x。由题意 $x\equiv -1 \pmod 3$，$x\equiv -2 \pmod 5$，$x\equiv -2 \pmod 7$。由后两项得 $x\equiv -2\equiv 33 \pmod{35}$。经检验，当 $x=35\times 4+33=173$ 时，满足 $173\equiv 2 \pmod 3$。故最小三位数为 173。

20. 24、已知 7^n 有 k 个重数 $7\ldots 7$，i) 证明它被 4 除余 3；ii) 求它的末两位数。

解：i) $\underbrace{77\ldots 7}_{k}=\underbrace{77\ldots 7}_{k-1}0+7\equiv 0+7\equiv 3 \pmod 4$。ii) $7^1=07, 7^2=49, 7^3=43, 7^4=01\ldots$ 模 100 的周期为 4。根据 n 的具体取值可确定末两位。

21. 25、设 $m>n\geqslant 1$，求最小的 $m+n$ 使得 $1000|1978^m-1978^n$。

解：$1978^m-1978^n=1978^n(1978^{m-n}-1)$ 需被 8 和 125 整除。1) 为被 8 整除，因 1978 仅含一个因数 2，故 $n\geqslant 3$。2) 为被 125 整除，$1978^{m-n}\equiv 3^{m-n}\equiv 1 \pmod{125}$。由欧拉函数可知最小 $m-n=100$。故 $n=3, m=103$，最小 $m+n=106$。

不定方程

考点：线性不定方程、常数配方法、佩尔方程

1. 例 2、求方程 $5x+3y=22$ 的所有正整数解。

解：方程 $5x+3y=1$ 有一组解 $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$，所以方程 $5x+3y=22$ 有一组解 $\begin{cases} x=-22 \\ y=44 \end{cases}$。

又因为 $5x+3y=0$ 的所有整数解为 $\begin{cases} x=3k \\ y=-5k \end{cases}$，$k$ 为整数，所以方程 $5x+3y=22$ 的所有整数解为 $\begin{cases} x=3k-22 \\ y=-5k+44 \end{cases}$，$k$ 为整数。由 $\begin{cases} 3k-22>0 \\ -5k+44>0 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k>\frac{22}{3} \\ k<\frac{44}{5} \end{cases}$，所以 $k=8$，原方程的正整数解为 $\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$。

2. 例 5、求不定方程 $3x+2y+8z=40$ 的正整数解。

解：显然此方程有整数解。先确定系数最大的未知数 z 的取值范围，因为 x,y,z 的最小值位 1，所以 $1\leqslant z\leqslant\lfloor\frac{40-3-2}{8}\rfloor=4$。

当 $z=1$ 时，原方程变形为 $3x+2y=32$，即 $y=\frac{32-3x}{2}$，由上式知 x 是偶数且 $2\leqslant x\leqslant 10$ 故方程组有 5 组正整数解，分别为 $\begin{cases} x=2 \\ y=13 \end{cases}$，$\begin{cases} x=4 \\ y=10 \end{cases}$，$\begin{cases} x=6 \\ y=7 \end{cases}$，$\begin{cases} x=8 \\ y=4 \end{cases}$，$\begin{cases} x=10 \\ y=1 \end{cases}$；

当 $z=2$ 时，原方程变形为 $3x+2y=24$，即 $y=\frac{24-3x}{2}$，故方程只有 3 组正整数解，分别为 $\begin{cases} x=2 \\ y=9 \end{cases}$，$\begin{cases} x=4 \\ y=6 \end{cases}$，$\begin{cases} x=6 \\ y=3 \end{cases}$；

当 $z=3$ 时，原方程变形为 $3x+2y=16$，即 $y=\frac{16-3x}{2}$，故方程只有 2 组正整数解，分别为 $\begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases}$，$\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$；

当 $z=4$ 时，原方程变形为 $3x+2y=8$，即 $y=\frac{8-3x}{2}$，故方程只有一组正整数解，为 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$。

故原方程有 11 组正整数解（如下表）：

x	2	4	6	8	10	2	4	6	2	4	2
y	13	10	7	4	1	9	6	3	5	2	1
z	1	1	1	1	1	2	2	2	3	3	4

3. 例 6、求 $x^2+xy-6=0$ 的正整数解。

解：原方程等价于 $x(x+y)=6$，故有

$$\begin{cases} x=2 \\ x+y=3 \end{cases} \quad \begin{cases} x=3 \\ x+y=2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1 \\ x+y=6 \end{cases} \quad \begin{cases} x=6 \\ x+y=1 \end{cases}$$

即有 $x=2, y=1$ 或 $x=1, y=5$。

4. 例 7、求 $x^2+y^2=328$ 的正整数解。

解：$\because$ 328 为偶数，$\therefore x, y$ 奇偶性相同，即 $x \pm y$ 为偶数。设 $x+y=2u, x-y=2v$，代入原方程即为 $u^2+v^2=164$。同理令 $u+v=2u_1, u-v=2v_1$ 有 $u_1^2+v_1^2=82, u_1+v_1=2u_2, u_1-v_1=2v_2$。$u_2^2+v_2^2=41$，$u_2, v_2$ 为一偶一奇，且 $0<u_2<6$。$u_2=1,2,3,4,5$ 代入方程，有解 $(4,5),(5,4)$。$\therefore$ 原方程解 $x=18, y=2$ 或 $x=2, y=18$。

5. 例 8、证明：$x^2+y^2+z^2=8a+7$ 无整数解。

证：若原方程有解，则有 $x^2+y^2+z^2 \equiv 8a+7 \pmod 8$。注意到对于模 8，有 $0^2=0, 1^2=1, 2^2=4, 3^2=1, 4^2=0, 5^2=1, 6^2=4, 7^2=1$。因而每一个整数对于模 8，必同余于 0，1，4 这三个数。不管 x^2, y^2, z^2 如何变化，只能有 $x^2+y^2+z^2 \equiv 0,1,2,3,4,5,6 \pmod 8$。而 $8a+7 \equiv 7 \pmod 8$，故 $8a+7$ 不同余于 $x^2+y^2+z^2$ 关于模 8，所以假设错误。从而证明了原方程无解。

6. 例 9、正整数 x, y 满足 $3x^2-8y^2+3x^2y^2=2008$，求 xy。

解：$3x^2-8y^2+3x^2y^2=2000+8 \Rightarrow 3x^2y^2+3x^2-8y^2-8=2000 \Rightarrow (3x^2-8)(y^2+1)=2000$
$2000=1\times 2000, 2\times 1000, 4\times 500, 5\times 400, 8\times 250, 10\times 200, 20\times 100, 40\times 50, 80\times 25$
$y^2+1=1,4,8,20,40,80$，它只能等于 2, 10, 5, 50。得出 $y=1,3,2,7$，但是对 1, 3, 2 来说，另外一个式子 $3x^2-8$ 无整数解。因此得出唯一的答案 $y=7, x=4$，对 $2000=40\times 50$ 的分解成立，$\therefore xy=28$。

7. 有一根长 5.8 米的木料，现在要把它分割成每根长 0.9 米和 0.4 米的两种规格，求恰好没有剩余的所有有分割法。

设分割成 0.9 米的木料 x 根，0.4 米的木料 y 根，其中 x, y 为非负整数。根据题意得：

$$0.9x+0.4y=5.8$$

等式两边同乘以 10 得：

$$9x+4y=58$$

由于 $4y$ 和 58 都是偶数，则 $9x$ 必须是偶数，所以 x 是偶数。当 $x=0$ 时，$4y=58$，$y=14.5$（不合题意）。当 $x=2$ 时，$18+4y=58$，$4y=40$，$y=10$。当 $x=4$ 时，$36+4y=58$，$4y=22$，$y=5.5$（不合题意）。当 $x=6$ 时，$54+4y=58$，$4y=4$，$y=1$。当 $x\geqslant 8$ 时，$9x\geqslant 72>58$（无自然数解）。所以分割法有两种：1. 0.9 米的 2 根，0.4 米的 10 根；2. 0.9 米的 6 根，0.4 米的 1 根。

8. 一次数学竞赛准备了 22 支铅笔作为奖品发给一、二、三等奖的学生，原计划发给一等奖每人 6 支，二等奖每人 3 支，三等奖每人 2 支，后来改为一等奖每人 9 支，二等奖每人 4 支，三等奖每人 1 支，问获一、二、三等奖的学生各几人？

设获一、二、三等奖的学生人数分别为 x, y, z，其中 x, y, z 为正整数。根据题意列方程组：

$$\begin{cases} 6x+3y+2z=22 \\ 9x+4y+z=22 \end{cases}$$

由第二个方程得 $z=22-9x-4y$，代入第一个方程：

$$6x+3y+2(22-9x-4y)=22$$

$$6x+3y+44-18x-8y=22$$

$$-12x-5y=-22$$

$$12x + 5y = 22$$

因为 x, y 是正整数：若 $x = 1$，则 $12 + 5y = 22$，$5y = 10$，$y = 2$。将 $x = 1, y = 2$ 代入 $z = 22 - 9(1) - 4(2) = 22 - 9 - 8 = 5$。若 $x \geqslant 2$，则 $12x \geqslant 24 > 22$（无正整数解）。所以一、二、三等奖的学生人数分别为 1 人，2 人，5 人。

9. 求方程 $6x + 22y = 90$ 的非负整数解。

方程两边约去 2 得：

$$3x + 11y = 45$$

由此得 $3x = 45 - 11y$。因为 $x \geqslant 0$，所以 $45 - 11y \geqslant 0$，$y \leqslant 4.09$。又因为 $3x$ 是 3 的倍数，且 45 是 3 的倍数，所以 $11y$ 必须是 3 的倍数，即 y 是 3 的倍数。在 $0 \leqslant y \leqslant 4$ 范围内的 3 的倍数有 $y = 0$ 和 $y = 3$。当 $y = 0$ 时，$3x = 45$，$x = 15$。当 $y = 3$ 时，$3x = 45 - 33 = 12$，$x = 4$。所以非负整数解为：

$$\begin{cases} x = 15 \\ y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$

10. 求不定方程 $2(x + y) = xy + 7$ 的整数解。

方程整理为：

$$xy - 2x - 2y + 7 = 0$$

$$x(y - 2) - 2(y - 2) - 4 + 7 = 0$$

$$(x - 2)(y - 2) = -3$$

由于 x, y 是整数，则 $x - 2$ 和 $y - 2$ 是 -3 的约数。1. $x - 2 = 1, y - 2 = -3 \implies x = 3, y = -1$ 2. $x - 2 = -1, y - 2 = 3 \implies x = 1, y = 5$ 3. $x - 2 = 3, y - 2 = -1 \implies x = 5, y = 1$ 4. $x - 2 = -3, y - 2 = 1 \implies x = -1, y = 3$ 所以整数解为 $(3, -1), (1, 5), (5, 1), (-1, 3)$。

11. 求满足方程 $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{12}$ 且使 y 是最大的正整数解 x, y。

方程变形为：

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{12} + \frac{1}{y} = \frac{y + 12}{12y}$$

$$x = \frac{12y}{y + 12} = \frac{12(y + 12) - 144}{y + 12} = 12 - \frac{144}{y + 12}$$

要使 x 为正整数，则 $y+12$ 必须是 144 的约数，且 $12-\frac{144}{y+12}>0$。即 $\frac{144}{y+12}<12$，所以 $y+12>12$，得 $y>0$。为了使 y 最大，我们需要 $y+12$ 是 144 的最大约数。但题目要求 x 也是正整数。若 $y+12=144$，则 $y=132$。此时 $x=12-\frac{144}{144}=12-1=11$。所以使 y 最大的正整数解为 $x=11, y=132$。

12. 满足 $0<x<y$ 及 $\sqrt{1984}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ 的不同的整数解 (x, y) 个数是多少？

首先化简 $\sqrt{1984}$：

$$\sqrt{1984}=\sqrt{64\times 31}=8\sqrt{31}$$

方程变为 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=8\sqrt{31}$。由此可知 x 和 y 必须具有 $k^2\cdot 31$ 的形式。设 $\sqrt{x}=a\sqrt{31}, \sqrt{y}=b\sqrt{31}$，其中 a, b 为非负整数。则 $a+b=8$。又因为 $0<x<y$，所以 $0<a<b$。可能的 (a, b) 组合有：1. $a=1, b=7 \implies x=31, y=49\times 31=1519$ 2. $a=2, b=6 \implies x=4\times 31=124, y=36\times 31=1116$ 3. $a=3, b=5 \implies x=9\times 31=279, y=25\times 31=775$ 共有 3 组不同的整数解。

13. 求出任何一组满足方程 $x^2-51y^2=1$ 的自然数解 x, y。

这是一个佩尔方程 (Pell Equation)。观察 $\sqrt{51}$ 的渐近值。因为 $7^2=49$，尝试 y 的小值。若 $y=1, x^2=52$（不是平方数）。若 $y=2, x^2=1+51(4)=205$（不是平方数）。尝试通过连分数展开或观察法。发现 $50^2=2500$ 且 $51\times 7^2=51\times 49=(50+1)(50-1)=2500-1=2499$。所以 $50^2-51\times 7^2=2500-2499=1$。一组自然数解为 $x=50, y=7$。

14. 求满足条件 $\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}=\frac{3}{7}$ 的整数 x, y 的所有可能的值。

方程交叉相乘得：

$$7(x+y)=3(x^2-xy+y^2)$$

$$3x^2-(3y+7)x+(3y^2-7y)=0$$

将其看作关于 x 的一元二次方程，其判别式 Δ 必须是非负平方数：

$$\Delta=(3y+7)^2-4(3)(3y^2-7y)=9y^2+42y+49-36y^2+84y=-27y^2+126y+49$$

令 $-27y^2+126y+49\geqslant 0$。解得 y 大约在 $[-0.35, 5.02]$ 之间。检查整数 $y\in\{0,1,2,3,4,5\}$：1. $y=0 \implies \Delta=49=7^2$。$x=\frac{7\pm 7}{6} \implies x=0, \frac{7}{3}$（舍去），解 $(0,0)$ 代入原方程分母为

0 舍去。2. $y=1 \implies \Delta=-27+126+49=148$（不是平方数）。3. $y=2 \implies \Delta=-108+252+49=193$（不是平方数）。4. $y=3 \implies \Delta=-243+378+49=184$（不是平方数）。5. $y=4 \implies \Delta=-432+504+49=121=11^2$。$x=\frac{19\pm11}{6} \implies x=5,\frac{4}{3}$（舍去）。6. $y=5 \implies \Delta=-675+630+49=4$。$x=\frac{22\pm2}{6} \implies x=4,\frac{10}{3}$（舍去）。由对称性，当 $x=4,y=5$ 或 $x=5,y=4$ 时均成立。故所有可能的整数对为 $(4,5)$ 和 $(5,4)$。

15. 求方程 $x^2-y^2=105$ 的正整数解。

原方程可化为：

$$(x-y)(x+y)=105$$

因为 x,y 是正整数，所以 $x+y>x-y>0$，且 $x+y$ 与 $x-y$ 的奇偶性相同。由于 105 是奇数，故 $x+y$ 与 $x-y$ 均为奇数。将 105 分解为两个奇因数之积：1. $x-y=1,x+y=105 \implies x=53,y=52$ 2. $x-y=3,x+y=35 \implies x=19,y=16$ 3. $x-y=5,x+y=21 \implies x=13,y=8$ 4. $x-y=7,x+y=15 \implies x=11,y=4$ 所以正整数解为 $(53,52),(19,16),(13,8),(11,4)$。

16. 求证方程 $x^3+11^3=y^3$ 没有正整数解。

根据费马大定理，当 $n>2$ 时，方程 $x^n+y^n=z^n$ 没有正整数解。在本题中，$n=3$。方程 $x^3+11^3=y^3$ 等价于 $y^3-x^3=11^3$。根据费马大定理可知，不存在正整数 $x,11,y$ 使得该等式成立。(或者：利用因式分解 $(y-x)(y^2+yx+x^2)=1331$ 逐一讨论 $y-x$ 的因数，均可证明无正整数解。)

17. 求方程 $x+y=x^2-xy+y^2$ 的全部整数解。

整理方程得：

$$x^2-(y+1)x+(y^2-y)=0$$

将其看作关于 x 的一元二次方程，其判别式 Δ 必须是非负平方数：

$$\Delta=(y+1)^2-4(y^2-y)=y^2+2y+1-4y^2+4y=-3y^2+6y+1$$

由 $-3y^2+6y+1\geqslant 0$ 得：

$$3y^2-6y-1\leqslant 0$$

解得 $1-\frac{2}{\sqrt{3}}\leqslant y\leqslant 1+\frac{2}{\sqrt{3}}$,即大约 $-0.15\leqslant y\leqslant 2.15$。整数 y 可取 $0,1,2$。1. $y=0 \implies \Delta=1$，$x=\frac{1\pm1}{2} \implies x=1,0$。2. $y=1 \implies \Delta=4$，$x=\frac{2\pm2}{2} \implies x=2,0$。3. $y=2 \implies \Delta=1$，$x=\frac{3\pm1}{2} \implies x=2,1$。整数解为 $(1,0),(0,0),(2,1),(0,1),(2,2),(1,2)$。

18. 求方程 $x^2+y^2=2x+2y+xy$ 的所有正整数解。

整理方程：

$$x^2-(y+2)x+(y^2-2y)=0$$

判别式 $\Delta=(y+2)^2-4(y^2-2y)=y^2+4y+4-4y^2+8y=-3y^2+12y+4$。由 $-3y^2+12y+4\geqslant 0$ 得：

$$3y^2-12y-4\leqslant 0$$

解得 $2-\frac{4}{\sqrt{3}}\leqslant y\leqslant 2+\frac{4}{\sqrt{3}}$，即大约 $-0.3\leqslant y\leqslant 4.3$。因要求正整数解，故 y 可取 $1,2,3,4$。1. $y=1 \implies \Delta=13$（非平方数）。2. $y=2 \implies \Delta=16=4^2$，$x=\frac{4\pm4}{2} \implies x=4,0$（0 舍去）。3. $y=3 \implies \Delta=13$（非平方数）。4. $y=4 \implies \Delta=4=2^2$，$x=\frac{6\pm2}{2} \implies x=4,2$。正整数解为 $(4,2),(2,4),(4,4)$。

19. 找出全部符合 $a^2+b=b^{2001}$ 的整数 (a,b)。

原方程化为 $a^2=b^{2001}-b=b(b^{2000}-1)$。1. 若 $b=0$，则 $a^2=0 \implies a=0$。解为 $(0,0)$。2. 若 $b=1$，则 $a^2=0 \implies a=0$。解为 $(0,1)$。3. 若 $b=-1$，则 $a^2=(-1)^{2001}-(-1)=-1+1=0 \implies a=0$。解为 $(0,-1)$。4. 若 $b>1$ 或 $b<-1$，则 $b^{2001}-b$ 不可能是一个完全平方数（除了 $b=0,\pm1$ 之外，$b^{2001}-b$ 介于两个连续平方数之间，此处省略具体不等式证明）。全部整数解为 $(0,0),(0,1),(0,-1)$。

20. 求方程 $y^2+3x^2y^2=30x^2+517$ 的所有正整数解。

整理方程得：

$$y^2(3x^2+1)=30x^2+517$$

$$y^2=\frac{30x^2+517}{3x^2+1}=\frac{10(3x^2+1)+507}{3x^2+1}=10+\frac{507}{3x^2+1}$$

因为 y 是正整数，所以 $3x^2+1$ 必须是 507 的约数。507 的约数有 $1,3,13,39,169,507$。由于 x 是正整数，$3x^2+1\geqslant 4$。1. $3x^2+1=13 \implies 3x^2=12 \implies x^2=4 \implies x=2$。此时 $y^2=10+\frac{507}{13}=10+39=49 \implies y=7$。2. $3x^2+1=39 \implies 3x^2=38$（无整数解）。3. $3x^2+1=169 \implies 3x^2=168 \implies x^2=56$（无整数解）。4. $3x^2+1=507 \implies 3x^2=506$（无整数解）。故正整数解为 $(2,7)$。

21. 求方程 $x^6+3x^3+1=y^4$ 的整数解。

当 $x=0$ 时，$1=y^4 \implies y=\pm1$。当 $x>0$ 时：$(x^3+1)^2=x^6+2x^3+1<x^6+3x^3+1$ $(x^3+2)^2=x^6+4x^3+4>x^6+3x^3+1$ 可见 y^4 处于两个连续整数的平方之间，故无解。当 $x=-1$ 时，$1-3+1=-1=y^4$（无实数解）。当 $x\leqslant -2$ 时，同理可证无解。整数解为 $(0,1),(0,-1)$。

22. 求方程 $3^x-5^y=z^2$ 的正整数解。

考虑模 3 情况：$-(-1)^y\equiv z^2 \pmod 3$。若 y 为偶数，则 $-1\equiv z^2 \pmod 3$，即 $2\equiv z^2 \pmod 3$，不可能。故 y 必须为奇数。考虑模 4 情况：$(-1)^x-1^y\equiv z^2 \pmod 4 \implies (-1)^x-1\equiv z^2 \pmod 4$。若 x 为奇数，则 $-2\equiv z^2 \pmod 4 \implies 2\equiv z^2 \pmod 4$，不可能。故 x 必须为偶数，设 $x=2k$。$3^{2k}-z^2=5^y \implies (3^k-z)(3^k+z)=5^y$。设 $3^k-z=5^m,3^k+z=5^n$，其中 $m+n=y,n>m$。两式相减：$2z=5^n-5^m=5^m(5^{n-m}-1)$。由于 $2z$ 不被 5 整除，故 $m=0$。则 $3^k-z=1$ 且 $3^k+z=5^y$。相加得 $2\cdot3^k=5^y+1$。当 $k=1$ 时，$2\cdot3=6=5^1+1 \implies y=1$。此时 $x=2k=2$，$3^2-5^1=4=2^2 \implies z=2$。当 $k>1$ 时，通过模 9 分析可知无其他解。正整数解为 $(2,1,2)$。

参考出处

- Arts of Problem Solving (AoPS): Contest Collections
- Brilliant (Kudos to the unmonetized version in the past)
- International Mathematics Competition (IMC) for University Students
- Missouri Collegiate Mathematics Competition
- American Mathematics Competition 10
- University of Waterloo CEMC - Euclid, Fermat, Cayley, Hypatia, Galois
- Lehigh University High School Math Contest
- Joint Entrance Examination (Advanced)
- The USSR Olympiad Problem Book: Selected Problems and Theorems of Elementary Mathematics
- LetsSolveMathProblems - Weekly Math Challenges
- Maths 505 - Differential Equations
- Michael Penn
- Prime Newtons
- TRML
- MadasMaths
- 日本留学試験-理系数学
- 中国复旦大学往年试题
- 雪隆森中学华罗庚杯数学比赛
- 厦门大学马来西亚分校-陈景润杯中学数学竞赛
- 微积分福音
- 线代启示录
- 福气老师
- 指考历届试题
- 统测历届试题与解答
- 印度人的作业
- 北京高考在线
- 朱式幸福教甄
- 普通型高级中学数学科能力竞赛 (决赛)
- 2014-2024 全国中学生数学竞赛联赛试题及答案汇总
- 如此醉的图书馆
- 菁优网
- 08 高考文科试题分类圆锥曲线
- 08 高考文科试题分类数列
- 福伦-隆中高数笔记
- 曾龙文师-高二数理培训队笔记