2025 年循人中学高三期末考兼统考预试

高中组

高级数学 (III)

(SC007)

训练集

采题: 李冬恒

January 17, 2026

前言

此训练集的雏形要追溯到 2019 年，依稀记得为当时的备赛爬了大量的 AMC 历届考题，创了“AMC 10 精选”的文档，其中我认为是属于统考范围的难题，便收录于另一个文档。

尘封已久，直到今年 5 月，我在整理电脑资料时偶然翻出，看着当年的内容，心想：读了一个数学系，难免觉得发展空间实属不少。在这几个月内，我随性地在网络上寻找、采集、整理更有趣 (恶心)、更值得深思 (烧脑) 的题目，于是诞生了——高级数学 (III) 训练集。

起初，我并没想过要为每一题整理出解析，但发现到不少当年的题目只附答案没附解法。可惜的是，我的脑袋算是停止运作了一年，发现有一些题目对于现在的我实在是难以下咽。好吧，此乃下下策，但我决定用 LaTeX 开始动手为每一题补上解法、重写排版、增加新的内容。也好，既是备忘录，也是为了防止未来的我看到这些题目时会再次怀疑人生：「咦？是不是百尺竿头，更蠢一步？」

依据统考范围，我把训练集大致分为代数、组合数学、几何及微积分。若你想自行动手尝试，可以在 `preamble` 中将 `\printanswers` 这行注释掉。

绝大部分解法都由官方或我提供，只有某些是 `ChatGpt` 生成后由我再校对，之中一定会有纰漏，欢迎批评指正，也希望这份训练集能助你一路披荆斩棘、越战越勇！

——冬恒

目录

代数

组合数学

几何

微积分

代数

一元二次方程、多项式

1. 已知方程

$$x^2 - mx - m + 3 = 0$$

的两根满足下列条件, 求 m 的取值范围:

(a) 一根大于 1, 另一根小于 1

设 $f(x) = x^2 - mx - m + 3$, 所求即

$$f(1) = 1 - m - m + 3 < 0 \Rightarrow m > 2$$

(b) 一根小于 0, 另一根大于 2

即

$$\begin{cases} f(0) = -m + 3 < 0 \\ f(2) = 4 - 2m - m + 3 < 0 \end{cases} \Rightarrow m > 3$$

(c) 一根在 0 与 1 之间, 另一根在 1 与 2 之间

即

$$\begin{cases} f(0) = -m + 3 > 0 \\ f(1) = 1 - m - m + 3 < 0 \\ f(2) = 4 - 2m - m + 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow 2 < m < \frac{7}{3}$$

(d) 两根都在 -4 与 0 之间

即

$$\begin{cases} f(-4) = 16 + 4m - m + 3 > 0 \\ f(0) = -m + 3 > 0 \\ -4 < \dfrac{m}{2} < 0 \\ f\left(\dfrac{m}{2}\right) = \dfrac{m^2}{4} - \dfrac{m^2}{2} - m + 3 \leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{19}{3} < m < -6$$

(e) 两根都大于 -5

即

$$\begin{cases} f(-5) = 25 + 5m - m + 3 > 0 \\ \dfrac{m}{2} > -5 \\ f\left(\dfrac{m}{2}\right) = \dfrac{m^2}{4} - \dfrac{m^2}{2} - m + 3 \leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow -7 < m \leqslant -6 \quad \text{或} \quad m \geqslant 2$$

(f) 有且仅有一根在 0 与 2 之间

即

$$\begin{cases} 0 < \dfrac{m}{2} < 2, \\ f\left(\dfrac{m}{2}\right) = \dfrac{m^2}{4} - \dfrac{m^2}{2} - m + 3 = 0 \end{cases}$$

或

$$f(0) \cdot f(2) = (-m+3)(4 - 2m - m + 3) < 0$$

解得

$$m = 2 \quad \text{或} \quad \frac{7}{3} < m < 3$$

2. 已知 $y = x^3 - x^2 + 3x - 4$ 与 $y = ax^2 - x - 4$ 恰好相交于两点, 求 a 的可能值。

联立方程得

$$x[x^2 - (a+1)x + 4] = 0$$

已知两线交于恰好两点, 其中一点为 $(0, 4)$, 则意味

$$x^2 - (a+1)x + 4 = 0$$

有重根, 其判别式为零:

$$[-(a+1)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$$

解得 $a = 3, -5$

3. 已知由 $f(x) = -x^2 + 4x + 1$ 和 $g(x) = -x + 5$ 所围成的封闭区域 A, 若作一直线 L 垂直于 x 轴, 分别与封闭区域 A 的边界交于 P, Q 两点, 求在封闭区域内的 $\overline{PQ}$ 长的最大值为多少?

令 $f(x)=g(x)$, 则

$$-x^2+4x+1=-x+5 \Rightarrow (x-1)(x-4)=0 \Rightarrow x=1,\ 4$$

所以封闭区域的 x 范围为 $[1,4]$, 而 $\overline{PQ}$ 即

$$f(x)-g(x)=(-x^2+4x+1)-(-x+5)=-x^2+5x-4=-\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$$

在 $x=\dfrac{5}{2}$ 时有最大值 $\dfrac{9}{4}$

4. 已知 k 为有理数, 且使得方程式 $kx^2+(k-1)x+(k+1)=0$ 只有整数解, 求 k 的所有可能值。

情况一:$k=0$, 则原方程式为

$$-x+1=0 \Rightarrow x=1 \in \mathbb{Z}$$

情况二:$k \neq 0$, 原方程式变为

$$k(x^2+x+1)=x-1 \Rightarrow k=\frac{x-1}{x^2+x+1} \tag{1}$$

设 α,β 为 $kx^2+(k-1)x+(k+1)=0$ 的两根, 则

$$\alpha+\beta=\frac{1-k}{k}=\frac{1}{k}-1$$

将 (1) 代入上式,

$$\alpha+\beta=\frac{x^2+x+1}{x-1}-1=x+1+\frac{3}{x-1}\in\mathbb{Z}$$

解得

$$x-1=\pm1,\pm3 \Rightarrow \begin{cases} x=2,4 \Rightarrow k=\dfrac{1}{7} \\ x=0,-2 \Rightarrow k=-1 \end{cases}$$

故 k 的所有可能值为 $-1,0,\dfrac{1}{7}$

5. 若抛物线 $y=mx^2-1$ 上必存在相异两点对称于直线 $x+y=0$, 求 m 的范围。

设 A, B 在抛物线 $\Gamma: y = mx^2 - 1$ 上且对称于直线 $L_1: x + y = 0$, 则 A, B 同在直线

$$L_2: y = x + k$$

上, 其中 $L_1 \perp L_2$, 抛物线与 L_2 联立得

$$mx^2 - x - 1 - k = 0 \tag{1}$$

设 (1) 的解为 a, b, 则 $A(a, a+k), B(b, b+k)$ 的中点 $C\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2} + k\right)$ 在 L_1 上, 得

$$\frac{a+b}{2} + \frac{a+b}{2} + k = 0 \Rightarrow k = -(a+b)$$

由韦达定理,

$$k = -(a+b) = -\frac{1}{m}$$

且两实根相异, 则判别式大于 0:

$$\Delta = (-1)^2 - 4m(-\frac{1}{m} + 1) > 0 \Rightarrow m > \frac{3}{4}$$

6. 实系数二次多项方程 $f(x) = 0$ 有一根为 2, 且方程 $f(f(x)) = 0$ 恰只有一实根为 5, 求 $f(0)$。

设

$$f(x) = a(x-2)(x-b)$$

则

$$\begin{aligned} g(x) = f(f(x)) &= a\left[a(x-2)(x-b) - 2\right]\left[a(x-2)(x-b) - b\right] \\ &= a^3\left(x^2 - (b+2)x + 2b - \frac{2}{a}\right)\left(x^2 - (b+2)x + 2b - \frac{b}{a}\right) \quad \equiv a^3 f_1(x) f_2(x) \end{aligned}$$

若 $f_1 = (x-5)^2$, f_2的判别式 < 0, 可得

$$a = -\frac{2}{9},\ b = 8$$

若 $f_2 = (x-5)^2$, f_1的判别式 < 0, 可得

$$a = -\frac{8}{9},\ b = 8$$

但 f_1 判别式 > 0, 故舍去; 因此

$$f(0) = 2ab = 2 \cdot \left(-\frac{2}{9}\right) \cdot 8 = -\frac{32}{9}$$

7. 求所有实数 c, 使得 $f(x)=x^2+4x+c$ 满足 $f(f(x))$ 恰好有三个相异实根。

若 f 的根为重根, 则 $f\circ f$ 至多只有两个相异根, 因此 f 必须有两个相异根。设 r 为其中一根使得 $f(x)=r$ 有重根, 解

$$x^2+4x+c-r=(x+2)^2$$

得 $r=c-4$ 是 f 的根, 故

$$(c-4)^2+4(c-4)+c=0 \Rightarrow c=0 \text{ 或} c=3.$$

当 $c=0$, 解 $x^2+4x=0$ 及 $x^2+4x=-4$ 得

$$x=0,-4,-2,$$

当 $c=3$, 解 $x^2+4x+3=-3$ 及 $x^2+4x+3=-1$, 发现其中

$$x^2+4x+6$$

判别式为负, 故唯一满足条件的 c 为 0。

8. 求非零实数三元组 (a,b,c), 使得

$$(x^2+2ax+b)^2+2a(x^2+2ax+b)-b=(x-c)^4$$

是多项式恒等式。

设

$$P(x)=x^2+2ax+b, Q(x)=x^2+2ax-b,$$

且 $Q(P(x))$ 的根满足 $P(x)=r_1$ 或 $P(x)=r_2$, 其中 r_1,r_2 是 Q 的根。欲使 $Q(P(x))$ 只有一个四重根,Q 必须有重根, 因此判别式为

$$4a^2+4b=0 \Rightarrow b=-a^2,$$

其中根为 $-a$, 此时 $P(x)=-a$ 也必须有重根, 因此 $P(x)+a=x^2+2ax+b+a=0$ 的判别式为

$$4a^2-4(a+b)=0.$$

代入 $b=-a^2$ 解得

$$a=\frac{1}{2}, \quad b=-\frac{1}{4}.$$

c 是 $P(x)+a=0$ 的解, 即 $c=-a=-\frac{1}{2}$, 所以三元组为

$$(a,b,c)=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4},-\frac{1}{2}\right)$$

9. 求所有实数 k, 使方程

$$4x^2+4(2-k)x-k^2=0$$

有两个实数解 x_1,x_2 满足 $|x_1|=2+|x_2|$。

由韦达定理,

$$x_1+x_2=k-2,\quad x_1x_2=-\frac{k^2}{4}\leqslant 0$$

条件 $|x_1|=2+|x_2|$ 等价于

$$4=(|x_1|-|x_2|)^2=x_1^2+x_2^2-2|x_1x_2|=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2+2x_1x_2$$

解得

$$k=0\text{ 或 }4$$

10. 解方程

$$(x+1)(x+2)(x+3)^2(x+4)(x+5)=360$$

排版后有

$$\begin{aligned}(x+1)(x+5)(x+2)(x+4)(x+3)(x+3)&=360\\(x^2+6x+5)(x^2+6x+8)(x^2+6x+9)&=360\end{aligned}$$

设 $y=x^2+6x$, 变为

$$\begin{aligned}(y+5)(y+8)(y+9)&=360\\y(y^2+22y+157)&=0\end{aligned}$$

其中 $y^2+22y+157=0$ 无实数解, 解 $x^2+6x=0$ 可得

$$x=0,-6$$

11. 解方程

$$9x^4-24x^3-2x^2-24x+9=0 \quad x\in\mathbb{R}$$

此方程为倒数方程式, 将原方程写成

$$9x^2-24x-2-\frac{24}{x}+\frac{9}{x^2}=0$$
$$9\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-24\left(x+\frac{1}{x}\right)-2=0$$

设 $y=x+\frac{1}{x}$, 则

$$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$$

代入方程得

$$9(y^2-2)-24y-2=0\Rightarrow y=\frac{10}{3},-\frac{2}{3}$$

当 $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{10}{3}$, 解得

$$x=\frac{1}{3},\quad x=3$$

当 $x+\dfrac{1}{x}=-\dfrac{2}{3}$, 方程

$$3x^2+2x+3=0$$

的判别式 $2^2-4\cdot3\cdot3=-32<0$, 故无实数解, 因此原方程式的实根为

$$x=\frac{1}{3},\quad x=3$$

12. 解

$$\frac{x^2+16x+54}{x^2+11x+35}=\frac{x^2+13x+35}{x^2+14x+54}$$

使得原式交叉相乘时能顺利平方差, 写成

$$\frac{x^2+15x+54+x}{x^2+12x+35-x}=\frac{x^2+12x+35+x}{x^2+15x+54-x}$$
$$(x^2+15x+54)^2-x^2=(x^2+12x+35)^2-x^2$$

$$(x^2+15x+54)^2-(x^2+12x+35)^2=0$$

再平方差得

$$(3x+19)(2x^2+27x+89)=0$$

经检验，原方程的解为 $x=-\dfrac{19}{3},\dfrac{-27\pm\sqrt{17}}{4}$

13. 解

$$(x+1)^5+(x+1)^4(x-1)+(x+1)^3(x-1)^2+(x+1)^2(x-1)^3+(x+1)(x-1)^4+(x-1)^5=0$$

其中 $x\in\mathbb{C}$。

利用恒等式

$$\frac{a^6-b^6}{a-b}=a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5$$

则原式可写为

$$\frac{(x+1)^6-(x-1)^6}{(x+1)-(x-1)}=0(x+1)^6-(x-1)^6=0$$

展开并化简得

$$x(3x^2+1)(x^2+3)=0$$

解得

$$x=0,\quad x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}i,\quad x=\pm\sqrt{3}i$$

14. 已知 α,β 是方程

$$x^2+(m-2)x+1=0$$

的根，求

$$(1+m\alpha+\alpha^2)(1+m\beta+\beta^2).$$

由于 α,β 是方程

$$x^2+mx-2x+1=0$$

的根，故满足

$$\alpha^2+m\alpha+1=2\alpha,\quad \beta^2+m\beta+1=2\beta$$

于是

$$(1+m\alpha+\alpha^2)(1+m\beta+\beta^2)=(2\alpha)(2\beta)=4\alpha\beta$$

由韦达定理,$\alpha\beta=1$, 因此

$$(1+m\alpha+\alpha^2)(1+m\beta+\beta^2)=4\cdot 1=4$$

15. 若三次多项式 $x^3+3x-2=0$ 的根为 a,b,c, 求以 $(a-b)^2,(b-c)^2,(c-a)^2$ 为根且首项系数为 1 的三次多项式。

由韦达定理,

$$a+b+c=0,\quad ab+bc+ca=3,\quad abc=2.$$

且有

$$a^3+3a=b^3+3b=c^3+3c=2.$$

因此

$$a^3-b^3+3(a-b)=0\Rightarrow(a-b)\big(a^2+ab+b^2+3\big)=0\Rightarrow a^2+ab+b^2=-3$$

于是

$$(a-b)^2=-3-3ab=-3(ab+1)$$

同理,

$$(b-c)^2=-3(bc+1),\quad (c-a)^2=-3(ca+1)$$

故

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=-3(3+ab+bc+ca)=-18$$

$$\begin{aligned}&(a-b)^2(b-c)^2+(b-c)^2(c-a)^2+(c-a)^2(a-b)^2\\&=9\big((ab+1)(bc+1)+(bc+1)(ca+1)+(ca+1)(ab+1)\big)\\&=9\big(2(a+b+c)+2(ab+bc+ca)+3\big)=81\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2&=-27(ab+1)(bc+1)(ca+1)\\&=-27\big(abc(a+b+c)+(abc)^2+ab+bc+ca+1\big)=-216\end{aligned}$$

所求三次多项式为

$$x^3+18x^2+81x+216$$

16. 设 $a,b,c\in\mathbb{R}$, 证明方程式

$$\frac{b+c}{x-a}+\frac{c+a}{x-b}+\frac{a+b}{x-c}=3$$

的根都是实根。

有

$$\begin{aligned}
\frac{b+c}{x-a}+\frac{c+a}{x-b}+\frac{a+b}{x-c}&=3\\
1-\frac{b+c}{x-a}+1-\frac{c+a}{x-b}+1-\frac{a+b}{x-c}&=0\\
\frac{x-a-b-c}{x-a}+\frac{x-a-b-c}{x-b}+\frac{x-a-b-c}{x-c}&=0\\
(x-a-b-c)\left(\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}\right)&=0
\end{aligned}$$

$$(x-a-b-c)\frac{x^2-(b+c)x+bc+x^2-(a+c)x+ac+x^2-(a+b)x+ab}{(x-a)(x-b)(x-c)}=0$$

$$(x-a-b-c)\left(3x^2-2(a+b+c)x+ab+bc+ca\right)=0$$

故方程式

$$\frac{b+c}{x-a}+\frac{c+a}{x-b}+\frac{a+b}{x-c}=3$$

有一实根 $x=a+b+c$, 现探讨另两根, 方程式

$$3x^2-2(a+b+c)x+ab+bc+ca=0.$$

的判别式为

$$\Delta=4(a+b+c)^2-12(ab+bc+ca)=4\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right).$$

由 AM-GM 不等式,

$$ab+bc+ca\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2+c^2}{2}+\frac{c^2+a^2}{2}=a^2+b^2+c^2.$$

故判别式为非负, 于是方程式 $3x^2-2(a+b+c)x+ab+bc+ca=0$ 的根都是实根, 得证原方程式的根都是实根。

17. 设 $f(x)=x^3+4x^2+8x+16$, 计算

$$f(x+7)-f(x+6)-f(x+5)+f(x+4)-f(x+3)+f(x+2)+f(x+1)-f(x).$$

设 $g(x)=f(x+1)-f(x)$, 则

$$g(x)=3x^2+10x+12$$

同理设 $h(x)=g(x+2)-g(x)=12x+24$, 原式可写成

$$g(x+6)-g(x+4)-g(x+2)+g(x)=h(x+4)-h(x)=12(x+4)-12x=48$$

18. 已知关于 x 的方程 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 的三个非零实数根成等比数列, 求 a^3c-b^3 的值。

设方程 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 的三根为 $\dfrac{\alpha}{r},\alpha,\alpha r,\alpha\neq 0$, 由韦达定理,

$$-a=\frac{\alpha}{r}+\alpha+\alpha r=\alpha(\frac{1}{r}+1+r) \tag{1}$$

$$b=\frac{\alpha^2}{r}+\alpha^2+\alpha^2 r=\alpha^2(\frac{1}{r}+1+r) \tag{2}$$

$$-c=\alpha^3 \tag{3}$$

由 $(1),(2)$ 得 $-\dfrac{b}{a}=\alpha$, 代入 (3) 得

$$-c=-\frac{b^3}{a^3}\Rightarrow a^3c-b^3=0$$

19. 已知 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=3$, 求

$$x^{63}+x^{44}+x^{37}+x^{31}+x^{26}+x^9+6$$

的值。

由已知得

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=x^3+\frac{1}{x^3}+3(1)(\sqrt{3})=3\sqrt{3}$$

给出

$$x^3+\frac{1}{x^3}=0$$

同理可得,

$$x^9+\frac{1}{x^9}=0,\quad x^{27}+\frac{1}{x^{27}}=0$$

故

$$
\begin{aligned}
&x^{63}+x^{44}+x^{37}+x^{31}+x^{26}+x^{9}+6\\
&=x^{36}\left(x^{27}+\frac{1}{x^{27}}\right)+x^{35}\left(x^{9}+\frac{1}{x^{9}}\right)+x^{34}\left(x^{3}+\frac{1}{x^{3}}\right)+6=6
\end{aligned}
$$

20. 已知实数 x 满足

$$x^3+\frac{1}{x^3}=18$$

求

$$x^{11}+\frac{1}{x^{11}}.$$

设 $a=x+\frac{1}{x}$, 则

$$a^3-3a=18\Rightarrow(a-3)(a^2+3a+6)=0$$

所以

$$a=x+\frac{1}{x}=3\in\mathbb{R}$$

则

$$x^2+\frac{1}{x^2}=3^2-2=7$$

同理得

$$x^4+\frac{1}{x^4}=47,\quad x^8+\frac{1}{x^8}=2207$$

于是

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)=x^5+\frac{1}{x^5}+x+\frac{1}{x}=126\Rightarrow x^5+\frac{1}{x^5}=123$$

且

$$\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)\left(x^8+\frac{1}{x^8}\right)=x^{11}+\frac{1}{x^{11}}+x^5+\frac{1}{x^5}=39726$$

故

$$x^{11}+\frac{1}{x^{11}}=39726-123=39603$$

21. 已知 α,β,γ 是方程

$$x^3-x-1=0$$

的三根, 计算

$$\frac{1-\alpha}{1+\alpha}+\frac{1-\beta}{1+\beta}+\frac{1-\gamma}{1+\gamma}$$

的值。

由韦达定理, $\alpha+\beta+\gamma=0,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-1,\ \alpha\beta\gamma=1$, 故

$$\begin{aligned}\frac{1-\alpha}{1+\alpha}+\frac{1-\alpha}{1+\beta}+\frac{1-\gamma}{1+\gamma}&=\frac{2}{1+\alpha}+\frac{2}{1+\beta}+\frac{2}{1+\gamma}-3\\&=2\cdot\frac{(1+\alpha)(1+\beta)+(1+\beta)(1+\gamma)+(1+\gamma)(1+\alpha)}{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)}-3\\&=2\cdot\frac{3+2(\alpha+\beta+\gamma)+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{1+\alpha+\beta+\gamma+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta\gamma}-3\\&=2\cdot\frac{3-1}{1-1+1}-3\\&=1\end{aligned}$$

22. 已知 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 为 $x^4+2x^3+x^2+2x+1=0$ 的四根, 试求

$$(\alpha^2+\alpha+1)(\beta^2+\beta+1)(\gamma^2+\gamma+1)(\delta^2+\delta+1)$$

的值。

α 是方程

$$x^4+2x^3+x^2+2x+1=0$$

的根, 则

$$\alpha^4+2\alpha^3+\alpha^2+2\alpha+1=0\Rightarrow(\alpha^2+\alpha+1)^2=2\alpha^2\Rightarrow\alpha^2+\alpha+1=\sqrt{2}\alpha$$

同理可得

$$\beta^2+\beta+1=\sqrt{2}\beta,\quad \gamma^2+\gamma+1=\sqrt{2}\gamma,\quad \delta^2+\delta+1=\sqrt{2}\delta$$

由韦达定理,

$$(\alpha^2+\alpha+1)(\beta^2+\beta+1)(\gamma^2+\gamma+1)(\delta^2+\delta+1)=(\sqrt{2})^4\cdot\alpha\beta\gamma\delta=4\cdot1=4$$

23. 设方程 $x^3-4x+1=0$ 的三个相异复数根为 a,b,c, 求

$$\frac{a+1}{(a-1)^4}+\frac{b+1}{(b-1)^4}+\frac{c+1}{(c-1)^4}$$

的值。

发现

$$\frac{a+1}{(a-1)^4}=\frac{1}{(a-1)^3}+\frac{2}{(a-1)^4}$$

, 因此欲求以 $\frac{1}{a-1},\frac{1}{b-1},\frac{1}{c-1}$ 为三根的多项式, 令 $x_1=x-1$ 代入原方程式

$$(x_1+1)^3-4(x_1+1)+1=0\Rightarrow x_1^3+3x_1^2-x_1-2=0$$

再令 $x_2=\frac{1}{x_1}$ 代入可得

$$\frac{1}{x_2^3}+\frac{3}{x_2^2}-\frac{1}{x_2}-2=0\Rightarrow x_2^3+\frac{1}{2}x_2^2-\frac{3}{2}x_2-\frac{1}{2}=0$$

故

$$\frac{a+1}{(a-1)^4}+\frac{b+1}{(b-1)^4}+\frac{c+1}{(c-1)^4}=(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)+2(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4) \tag{1}$$

设 $f(x)=x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$, 则 $f'(x)=3x^2+x-\frac{3}{2}$, 利用长除法计算 $\frac{f'(x)}{f(x)}$:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{3}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{13}{4}\cdot\frac{1}{x^3}-\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{x^4}+\frac{81}{16}\cdot\frac{1}{x^5}+\cdots$$

由系数比较得

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=-\frac{7}{8},\quad \alpha^4+\beta^4+\gamma^4=\frac{81}{16}$$

故所求为

$$-\frac{7}{8}+2\cdot\frac{81}{16}=\frac{37}{4}$$

24. 已知 $f(x)=x^4+px^3+qx^2+rx+s$ 且 $f(1)=59, f(2)=118, f(3)=177$, 求 $f(9)+f(-5)$ 。

考虑函数 $g(x)=59x$, 则

$$f(1)=g(1)=59,\quad f(2)=g(2)=118,\quad f(3)=g(3)=177$$

定义 $h(x)=f(x)-g(x)$, 则 $x=1,2,3$ 为 $h(x)$ 的根且 $h(x)$ 首项系数为 1, 所以设

$$h(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-a)$$

其中 a 是一实数, 于是

$$\begin{aligned}f(9)+f(-5)&=h(9)+g(9)+h(-5)+g(-5)\\&=336(9-a)+9\cdot59+336(5+a)-5\cdot59\\&=4940\end{aligned}$$

25. 已知 x_1, x_2, x_3 是方程

$$x^3 - 6x^2 + ax - a = 0$$

的根, 且满足

$$(x_1 - 3)^3 + (x_2 - 3)^3 + (x_3 - 3)^3 = 0,$$

求 a 的值。

令 $r_i = x_i - 3$, 则 r_1, r_2, r_3 是方程

$$(x+3)^3 - 6(x+3)^2 + a(x+3) - a = 0$$

即方程

$$x^3 + 3x^2 + (a-9)x + (2a-27) = 0$$

的根, 由韦达定理,

$$r_1 + r_2 + r_3 = -3, \quad r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1 = a - 9, \quad r_1r_2r_3 = 27 - 2a$$

由立方和公式,

$$r_1^3 + r_2^3 + r_3^3 = -3(9 - 3(a-9)) + 3(27 - 2a) = 0$$

解得

$$a = 9$$

26. 已知 x_1, x_2, x_3 为方程 $\sqrt{123}x^3 - 247x^2 + 2 = 0$ 的相异实根, 且 $x_1 < x_2 < x_3$, 求 $x_2(x_3^2 - x_1^2)$ 的值。

设 $\sqrt{123} = a$, 则方程 $\sqrt{123}x^3 - 247x^2 + 2 = 0$ 化为

$$ax^3 - (2a^2+1)x^2 + 2 = 0 \Rightarrow (ax-1)(x^2 - 2ax - 2) = 0$$

所以方程的 3 个实数根为

$$\frac{1}{a}, a + \sqrt{a^2+2}, a - \sqrt{a^2+2}$$

因为 $a = \sqrt{123} > 1$, 所以

$$a - \sqrt{a^2+2} < 0 < \frac{1}{a} < 1 < a + \sqrt{a^2+2}$$

因此 $x_1 = a - \sqrt{a^2+2}, x_2 = \dfrac{1}{a}, x_3 = a + \sqrt{a^2+2}$, 而

$$x_2(x_3^2 - x_1^2) = \frac{1}{a} \cdot 2\sqrt{a^2+2} \cdot 2a = 20\sqrt{5}$$

27. 已知正整数 m,n 满足 $m^2-n=32$, 且 $\sqrt[5]{m+\sqrt{n}}+\sqrt[5]{m-\sqrt{n}}$ 是方程

$$x^5-10x^3+20x-40=0$$

的一个实根, 求 m,n 的值。

令 $a=\sqrt[5]{m+\sqrt{n}}, b=\sqrt[5]{m-\sqrt{n}}$, 则 $x=a+b$ 是该方程的一个实根, 且

$$a^5+b^5=2m, \quad a^5b^5=m^2-n=32 \Rightarrow ab=2$$

考虑 $(a+b)^5$ 的展开式:

$$x^5=a^5+b^5+5ab(a^3+b^3)+10a^2b^2(a+b)$$

由 $a^3+b^3=(a+b)\left[(a+b)^2-3ab\right]=x(x^2-6)$, 得

$$x^5=2m+10x(x^2-6)+40x$$

整理得:

$$x^5-10x^3+20x-2m=0$$

对比原方程式得

$$m=20, n=368$$

28. 设方程式 $x^5+x^4-x^2+1=0$ 的五个根为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$, 若 $P(x)=x^4-1$, 求

$$P(\alpha_1)P(\alpha_2)P(\alpha_3)P(\alpha_4)P(\alpha_5)$$

的值。

设

$$f(x)=x^5+x^4-x^2+1=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)(x-\alpha_5)$$

令 $x=1$ 得

$$f(1)=(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)(1-\alpha_4)(1-\alpha_5)=0$$

由于

$$P(x)=x^4-1=(x^2+1)(x-1)(x+1)$$

故

$$
\begin{aligned}
&P(\alpha_1)P(\alpha_2)P(\alpha_3)P(\alpha_4)P(\alpha_5)\\
&=-(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)(1-\alpha_4)(1-\alpha_5)\prod_{k=1}^{5}(\alpha_k^2+1)(\alpha_k+1)\\
&=0
\end{aligned}
$$

29. 已知 $p(x)$ 是一个整系数多项式，定义 $q(x)=\dfrac{p(x)}{x(1-x)}$，若对所有 $x\neq 0,1$ 都有

$$q(x)=q\left(\frac{1}{1-x}\right),$$

且 $p(2)=p(3)=5$，求 $p(4)$ 的值。

由 $q(x)=q\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$ 可得

$$\frac{p(x)}{x(1-x)}=\frac{p\left(\frac{1}{1-x}\right)}{\frac{1}{1-x}\left(1-\frac{1}{1-x}\right)}\Rightarrow p(x)=(1-x)^3p\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

这说明 $\deg(p)\leqslant 3$，设 $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，则

$$(1-x)^3p\left(\frac{1}{1-x}\right)=d(1-x)^3+c(1-x)^2+b(1-x)+a$$

比较 x^3,x^2 系数得

$$a=d,\quad b=-c-3d$$

且由 $p(2)=p(3)=5$ 得

$$-3a-2c=a-6c=5\Rightarrow a=c=-1$$

于是

$$p(x)=-x^3+4x^2-x-1\Rightarrow p(4)=-5$$

30. 已知多项式 x^7-5 的七个相异根为 $r_1,\ldots,r_7$，求

$$\prod_{1\leqslant i<j\leqslant 7}(r_i+r_j)^2$$

的值。

设所求乘积为 P, 由韦达定理, 考虑

$$
\begin{aligned}
2^7 \cdot 5 \cdot P &= \prod_{i=1}^{7} 2r_i \prod_{1\leqslant i<j\leqslant 7} (r_i+r_j)^2 \\
&= \prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant 7} (r_i+r_j) \prod_{1\leqslant i<j\leqslant 7} (r_i+r_j) \prod_{1\leqslant j<i\leqslant 7} (r_i+r_j) \\
&= \prod_{i=1}^{7}\prod_{j=1}^{7} (r_i+r_j)
\end{aligned}
$$

且注意到

$$\prod_{j=1}^{7}(x-r_j)=x^7-5 \Rightarrow \prod_{j=1}^{7}(x+r_j)=x^7+5,$$

故

$$\prod_{j=1}^{7}(r_i+r_j)=r_i^7+5=10$$

因此

$$2^7 \cdot 5 \cdot P = 10^7 \Rightarrow P = 5^6$$

31. 设 $P(x)$ 为次数为 10 的多项式, 且满足

$$P(2^i)=i, 0\leqslant i\leqslant 10,$$

求 $P(x)$ 中 x 项的系数。

令 $Q(x)=P(2x)-P(x)-1$, 则 $Q(2^i)=0, 0\leqslant i\leqslant 9$, 所以

$$Q(x)=\alpha\prod_{k=0}^{9}(x-2^k)$$

其中 α 为一常数, 又 $Q(0)=P(0)-P(0)-1=-1$, 且

$$\prod_{k=0}^{9}(0-2^k)=2^{45},$$

因此 $\alpha=-\dfrac{1}{2^{45}}$, 记

$$R(x)=\prod_{k=0}^{9}(x-2^k),$$

其 x 项系数为

$$\operatorname{coef}_x(R) = -\left(\prod_{k=0}^{9} 2^k\right)\sum_{k=0}^{9}\frac{1}{2^k} = -2^{45}\left(2-\frac{1}{2^9}\right)$$

因为 $P(2x)-P(x)-1$ 的 x 项系数恰好等于 $P(x)$ 的 x 项系数, 故

$$\operatorname{coef}_x(Q) = \alpha\cdot\operatorname{coef}_x(R) = -\frac{1}{2^{45}}\cdot\left(-2^{45}\cdot\frac{1023}{512}\right) = \frac{1023}{512}$$

32. 已知 $x_1, x_2, \ldots, x_{2015}$ 是方程

$$x^{2015}+x^{2014}+\cdots+x^2+x+1=0$$

的根, 求

$$\frac{1}{1-x_1}+\frac{1}{1-x_2}+\cdots+\frac{1}{1-x_{2015}}.$$

设

$$a_k = \frac{1}{1-x_k}, \quad k=1,2,\ldots,2015.$$

则

$$x_k = \frac{a_k-1}{a_k}.$$

代入原方程, 得到

$$\frac{(a_k-1)^{2015}}{a_k^{2015}}+\frac{(a_k-1)^{2014}}{a_k^{2014}}+\cdots+\frac{a_k-1}{a_k}+1=0.$$

两边同时乘以 a_k^{2015}, 得

$$(a_k-1)^{2015}+a_k(a_k-1)^{2014}+\cdots+a_k^{2014}(a_k-1)+a_k^{2015}=0.$$

因此

$$a_1+a_2+\cdots+a_{2015} = \frac{{}^{2015}C_1+{}^{2014}C_1+{}^{1}C_1}{2016} = \frac{2015}{2}$$

而当 $k=1,2,\ldots,n, a_1+a_2+\cdots+a_{2015}=\dfrac{n}{2}$

设

$$f(x)=x^{2015}+x^{2014}+\cdots+x+1,$$

则

$$f(x)=\prod_{k=1}^{2015}(x-x_k)\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\sum_{k=1}^{2015}\frac{1}{x-x_k}.$$

取 $x=1$, 得到

$$\sum_{k=1}^{2015}\frac{1}{1-x_k}=\frac{f'(1)}{f(1)}=\frac{2015}{2}$$

其中

$$f(1)=2016,\quad f'(1)=2015+2014+\cdots+1=\frac{2015\cdot 2016}{2}$$

33. (a) 已知 α,β,γ 为三实数, 设 $t=-(\alpha+\beta+\gamma),v=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, 且满足

$$\alpha\beta\gamma=-1,\quad t+v=-3,$$

试证

$$\alpha^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{1}{3}}+\gamma^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{(-t-6)+3\sqrt[3]{t^2+3t+9}}.$$

设

$$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=x^3+tx^2+vx+1,$$
$$g(y)=(y-\alpha^{\frac{1}{3}})(y-\beta^{\frac{1}{3}})(y-\gamma^{\frac{1}{3}})=y^3+ay^2+by+1$$

由 $g(y)=0$ 得 $y^3+1=-y(ay+b)$, 于是

$$(y^3+1)^3=-y^3\left(a^3y^3+b^3+3aby(ay+b)\right)=-y^3\left(a^3y^3+b^3-3ab(y^3+1)\right)$$

令 $x=y^3$, 展开整理得

$$x^3+(a^3-3ab+3)x^2+(b^3-3ab+3)x+1=0$$

于是 $a^3-3ab+3=t,b^3-3ab+3=v$, 令 $z=ab$, 则

$$\begin{aligned}z^3&=(t+3z-3)(v+3z-3)\\&=tv+3z(t+v)-3(t+v)+9z^2-18z+9\\&=t(-3-t)+3z(-3)-3(-3)+9z^2-18z+9\\&=9z^2-27z+(-t^2-3t+18)\end{aligned}$$

即

$$(z-3)^3=-t^2-3t-9 \Rightarrow z=3-\sqrt[3]{t^2+3t+9}$$

由韦达定理,

$$\alpha^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{1}{3}}+\gamma^{\frac{1}{3}}=-a=-\sqrt[3]{t+3z-3}=\sqrt[3]{(-t-6)+3\sqrt[3]{t^2+3t+9}}$$

故证毕。

(b) 据此, 试证

$$\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{9}}+\sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{9}}+\sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{9}}=\sqrt[3]{\frac{3}{2}(\sqrt[3]{9}-2)}$$

考虑

$$\alpha=2\cos\frac{2\pi}{9}, \quad \beta=2\cos\frac{4\pi}{9}, \quad \gamma=2\cos\frac{8\pi}{9}.$$

则由

$$\begin{aligned}
\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}\cos\frac{8\pi}{9}&=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{6\pi}{9}+\cos\frac{2\pi}{9}\right)\cos\frac{8\pi}{9}\\
&=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+\cos\frac{2\pi}{9}\right)\cos\frac{8\pi}{9}\\
&=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos\frac{8\pi}{9}+\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{8\pi}{9}\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos\frac{8\pi}{9}+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{10\pi}{9}+\cos\frac{6\pi}{9}\right)\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{9}-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{9}-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{8}
\end{aligned}$$

满足已知 $\alpha\beta\gamma=-1$, 此时

$$\begin{aligned}
t=-(\alpha+\beta+\gamma)&=-2\left(\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{8\pi}{9}\right)\\
&=-2\left(2\cos\frac{3\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{8\pi}{9}\right)\\
&=-2\left(\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{8\pi}{9}\right)\\
&=-2\cdot 2\cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{7\pi}{18}=0
\end{aligned}$$

故

$$\alpha^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{1}{3}}+\gamma^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{-6+3\sqrt[3]{9}}$$

且
$$\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{9}}+\sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{9}}+\sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{9}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}(\alpha^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{1}{3}}+\gamma^{\frac{1}{3}})=\sqrt[3]{\frac{3}{2}(\sqrt[3]{9}-2)}.$$
证毕。

34. 求
$$\frac{(1^4+18^2)(11^4+18^2)(23^4+18^2)(35^4+18^2)(47^4+18^2)}{(5^4+18^2)(7^4+18^2)(17^4+18^2)(29^4+18^2)(41^4+18^2)}$$
的值。

因式分解给出
$$a^4+18^2=(a^2+18)^2-(6a)^2=(a^2+6a+18)(a^2-6a+18)=((a+3)^2+9)((a-3)^2+9)$$
故
$$\begin{aligned}&\frac{(1^4+18^2)(11^4+18^2)(23^4+18^2)(35^4+18^2)(47^4+18^2)}{(5^4+18^2)(7^4+18^2)(17^4+18^2)(29^4+18^2)(41^4+18^2)}\\&=\frac{(4^2+9)(2^2+9)(14^2+9)(8^2+9)(26^2+9)(20^2+9)(38^2+9)(32^2+9)(50^2+9)(44^2+9)}{(8^2+9)(2^2+9)(10^2+9)(4^2+9)(20^2+9)(14^2+9)(32^2+9)(26^2+9)(44^2+9)(38^2+9)}\\&=\frac{50^2+9}{10^2+9}=\frac{2509}{109}\end{aligned}$$

35. 已知三实数 a,b,c 满足 $\sqrt{3}(a-b)+3(b-c)+(c-a)=0$, 且 $b\neq c$, 求
$$\frac{(a-b)(a-c)}{(b-c)^2}$$
的值。

令 $\alpha=a-b,\beta=b-c,\gamma=c-a$, 则
$$\alpha+\beta+\gamma=\sqrt{3}\alpha+3\beta+\gamma=0$$
由此得
$$\gamma=-(\alpha+\beta),\quad \alpha+\beta=\sqrt{3}\alpha+3\beta\Rightarrow\beta=\frac{1-\sqrt{3}}{2}\alpha$$
因此
$$\frac{(a-b)(a-c)}{(b-c)^2}=\frac{-\alpha\gamma}{\beta^2}=\frac{\alpha(\alpha+\beta)}{\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2\alpha^2}=\frac{\frac{3-\sqrt{3}}{2}\alpha^2}{\frac{4-2\sqrt{3}}{4}\alpha^2}=\frac{3-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\cdot\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=3+\sqrt{3}$$

36. 已知 $a+b+c=6$, 且

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=2,$$

求

$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}$$

的值。

不难发现

$$\begin{aligned}
&\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\\
&=\left(\frac{b+c}{a}+1\right)+\left(\frac{c+a}{b}+1\right)+\left(\frac{a+b}{c}+1\right)-3\\
&=\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c}-3\\
&=6\cdot 2-3=9
\end{aligned}$$

37. 已知 a,b,c 皆为实数, 若

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1$$

求

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}$$

的值。

有

$$\frac{a(a+b+c)}{b+c}+\frac{b(a+b+c)}{c+a}+\frac{c(a+b+c)}{a+b}=a+b+c$$

于是

$$\frac{a^2}{b+c}+a+\frac{b^2}{c+a}+b+\frac{c^2}{a+b}+c=a+b+c$$

即

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}=0$$

38. 已知 $abc=1$, 证明

(a)

$$\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ca+c+1}=1$$

由 $abc=1$,

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ca+c+1}\\
&=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{ab}{abc+ab+a}+\frac{abc}{abca+abc+ab}\\
&=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{ab}{1+ab+a}+\frac{1}{a+1+ab}\\
&=\frac{a+ab+1}{ab+a+1}\\
&=1
\end{aligned}$$

(b)

$$\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+c+1}=1$$

由 (a),

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ac+c+1}\\
&=\frac{c}{abc+ac+c}+\frac{a}{abc+ab+a}+\frac{b}{abc+bc+b}\\
&=\frac{c}{1+ac+c}+\frac{a}{1+ab+a}+\frac{b}{1+bc+b}\\
&=1
\end{aligned}$$

39. 已知 a,b,c 为非零相异实数, 且 $a+b+c=0$, 求

$$\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\right)\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)$$

的值。

首先有

$$\begin{aligned}
\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}&=\frac{b^2c-bc^2+ac^2-a^2c+a^2b-ab^2}{abc}\\
&=-\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}
\end{aligned}$$

现令 $a'=b-c,b'=c-a,c'=a-b$, 发现

$$b'-c'=(c-a)-(a-b)=b+c-2a=-3a$$

由此得 $a=-\dfrac{b'-c'}{3}$, 同理有

$$b=-\frac{c'-a'}{3},\quad c=-\frac{a'-b'}{3}$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}&=\frac{a}{a'}+\frac{b}{b'}+\frac{c}{c'}\\&=-\frac{1}{3}\left(\frac{b'-c'}{a'}+\frac{c'-a'}{b'}+\frac{a'-b'}{c'}\right)\\&=-\frac{1}{3}\left[-\frac{(a'-b')(b'-c')(c'-a')}{a'b'c'}\right]\\&=\frac{1}{3}\frac{(-3c)(-3a)(-3b)}{(b-c)(c-a)(a-b)}\\&=-9\frac{abc}{(a-b)(b-c)(c-a)}\end{aligned}$$

故所求的值为

$$\begin{aligned}&\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\right)\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)\\&=\left[-\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}\right]\left[-9\frac{abc}{(a-b)(b-c)(c-a)}\right]\\&=9\end{aligned}$$

40. 已知 $x^5=1$ 且 $x\neq 1$, 求

$$\frac{x}{1+x^2}+\frac{x^2}{1+x^4}+\frac{x^3}{1+x}+\frac{x^4}{1+x^3}$$

的值。

由 $x^5=1$,

$$\begin{aligned}\frac{x}{1+x^2}+\frac{x^2}{1+x^4}+\frac{x^3}{1+x}+\frac{x^4}{1+x^3}&=\frac{x}{1+x^2}+\frac{x^3}{x+1}+\frac{x^3}{1+x}+\frac{x}{x^2+1}\\&=2\left(\frac{x}{1+x^2}+\frac{x^3}{x+1}\right)\\&=2\left(\frac{x+x^2+x^3+x^5}{1+x+x^2+x^3}\right)\\&=2\end{aligned}$$

41. 设 $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ 且 $abcd\neq 0$, 又 $a+b+c+d=0$, 求

$$S=a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+d\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

的值。

由 $a+b+c+d=0$, 得

$$\begin{aligned}
S&=a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+d\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\\
&=-(b+c+d)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)-(a+c+d)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{a}\right)\\
&\quad-(a+b+d)\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)-(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\\
&=-12-\frac{2(b+c+d)}{a}-\frac{2(a+c+d)}{b}-\frac{2(a+b+d)}{c}-\frac{2(a+b+c)}{d}\\
&=-12-\frac{-2a}{a}-\frac{-2b}{b}-\frac{-2c}{c}-\frac{-2d}{d}\\
&=-4
\end{aligned}$$

42. 设 a,b,c 满足 $a+b+c=a^3+b^3+c^3=0$, n 为任意实数, 求 $a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}$ 的值。

由恒等式

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

将已知代入得

$$0-3abc=0\Rightarrow abc=0.$$

若 $c=0$, 由 $a+b+c=0$ 可得 $b=-a$, 则

$$a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}=a^{2n+1}+(-a)^{2n+1}+0=0$$

同理若 $a=0$ 或 $b=0$, $a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}=0$

43. 已知 x,y,p,q 为实数, 且满足 $2x^2+3p^2=2y^2+3q^2=(xq-yp)^2=6$, 求

$$(x^2+y^2)(p^2+q^2)$$

的值。

(待另三种解)

解法一:

设

$$x=\sqrt{3}\cos\alpha,\quad p=\sqrt{2}\sin\alpha,\quad y=\sqrt{3}\cos\beta,\quad q=\sqrt{2}\sin\beta$$

则

$$6=(xq-yp)^2=(\sqrt{6}(\cos\alpha\sin\beta-\cos\beta\sin\alpha))^2=6\sin^2(\beta-\alpha)$$

于是 $\sin^2(\beta-\alpha)=1\Rightarrow\beta-\alpha=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi$, 因此有

$$\cos\beta=\mp\sin\alpha,\quad \sin\beta=\pm\cos\alpha$$

故

$$(x^2+y^2)(p^2+q^2)=(\underbrace{3\cos^2\alpha+3\cos^2\beta}_{=3(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=3})(\underbrace{2\sin^2\alpha+2\sin^2\beta}_{=2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=2})=6$$

44. 解方程

$$(x+1)^6-2(x-1)^6=(x^2-1)^3$$

原方程两边除以 $(x-1)^6$, 得

$$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^6-2=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$$

设 $y=\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^3$, 得到二次方程:

$$y^2-y-2=0\Rightarrow y=2\quad\text{或}\quad y=-1$$

解为

$$\frac{x+1}{x-1}=2^{\frac{1}{3}}\Rightarrow x=\frac{2^{\frac{1}{3}}+1}{2^{\frac{1}{3}}-1}=3+2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}$$

或

$$\frac{x+1}{x-1}=-1\Rightarrow x=0$$

45. 若 a,b 为正实数, 解方程

$$(a+b)(ax+b)(a-bx)=(a^2x-b^2)(a+bx),\quad x\in\mathbb{R}.$$

首先设

$$f(x)=(a+b)(ax+b)(a-bx)-(a^2x-b^2)(a+bx)$$

不难发现 $f(1)=0$, 故 $(x-1)$ 是 $f(x)$ 的因式。正所谓: 解决问题仍需暴力, 展开并整理得

$$\begin{aligned}f(x)&=a^3x+a^2bx^2-a^2b-b^3x-(a^3x-a^2bx^2+a^2b-ab^2x+a^2bx-ab^2x^2+ab^2-b^3x)\\&=(2a^2b+ab^2)x^2+(ab^2-a^2b)x-(a^2b+ab^2)\\&=ab[(2a+b)x^2+(b-a)x-(a+2b)]\\&=ab(x-1)((2a+b)x+a+2b)\end{aligned}$$

故 $f(x)=0$ 给出了

$$x=1\quad\text{或}\quad x=-\frac{a+2b}{2a+b}$$

因式定理、余式定理

1. 设 $f(x)=ax^3+bx^2-18x+3, g(x)=ax^3+9x^2+bx-9$。当 $f(x)$ 和 $g(x)$ 除以 $2x-1$ 时所得余数相同，且当 $f(x)$ 除以 $x-2$ 时余数是 -5。

   (a) 求 a, b 的值。

   令 $x=\frac{1}{2}$, 有:

   $$f\left(\frac{1}{2}\right)=g\left(\frac{1}{2}\right)\Rightarrow a\cdot\frac{1}{8}+b\cdot\frac{1}{4}-9+3=a\cdot\frac{1}{8}+\frac{9}{4}+\frac{b}{2}-9\Rightarrow b=3$$

   又

   $$f(2)=8a+4b-36+3=-5\Rightarrow a=2$$

   $\therefore a=2,\ b=3$

   (b) 若 $x+4$ 整除 $f(x)+kg(x)$, 求 k。

   有

   $$f(-4)+kg(-4)=0\Rightarrow -128a+16b+72+3+k(-128a+144-4b-9)=0$$

   代入 $a=2,\ b=3$ 得:

   $$-133(1+k)=0\Rightarrow k=-1$$

2. 已知 $f(x)$ 为三次多项式，以 x^2+x+2 除之得余式 $x+3$, 以 x^2+x-2 除之得余式 $5x+7$, 求 $f(x)$。

   据题意有 $f(1)=5(1)+7=12, f(-2)=5(-2)+7=-3$, 设

   $$f(x)=(x^2+x+2)(ax+b)+x+3$$

   令 $x=1$,

   $$f(1)=(1+1+2)(a+b)+1+3=12\Rightarrow a+b=2$$

   令 $x=-2$,

   $$f(-2)=(4-2+2)(-2a+b)-2+3=-3\Rightarrow -2a+b=-1$$

解得 $a=1,\ b=1$, 所以

$$f(x)=(x^2+x+2)(x+1)+x+3=x^3+2x^2+4x+5$$

3. 若 $f(x)$ 以 x^2-1 除余 $3x+2$,$g(x)$ 以 x^2+2x-3 除余 $5x+2$, 求 $(x+3)f(x)+(5x^2+1)g(x)$ 除以 $x-1$ 的余式。

即求 $(1+3)f(1)+(5+1)g(1)=4f(1)+6g(1)$ 的值, 由已知

$$f(1)=3\cdot 1+2=5,\ g(1)=5\cdot 1+2=7$$

故 $(x+3)f(x)+(5x^2+1)g(x)$ 除以 $x-1$ 的余式为

$$4\cdot 5+6\cdot 7=62$$

4. 以 x^2+2x+3 除 $f(x)$ 余 $x+12$, 以 $(x+1)^2$ 除 $f(x)$ 余 $5x+4$, 求以 $(x+1)(x^2+2x+3)$ 除 $f(x)$ 的余式。

同上, 设

$$f(x)=(x+1)(x^2+2x+3)Q(x)+a(x^2+2x+3)+x+12$$

据题意 $f(-1)=-5+4=-1$, 现令 $x=-1$ 有

$$f(-1)=a(1-2+3)-1+12=-1\Rightarrow a=-6$$

$\therefore$ 以 $(x+1)(x^2+2x+3)$ 除 $f(x)$ 的余式为 $-6(x^2+2x+3)+x+12=-6x^2-11x-6$

5. $f(x)$ 以 $x(x-1)$ 除之, 余式为 $-x+3$; 以 $x(x+1)$ 除之, 余式为 $-3x+3$, 则 $f(x)$ 除以 $x(x^2-1)$ 的余式为?

设

$$f(x)=x(x^2-1)Q(x)+ax(x-1)-x+3$$

据题意 $f(-1)=3+3=6$, 令 $x=-1$ 有

$$f(-1)=a(-1)(-2)+1+3=6\Rightarrow a=1$$

$\therefore f(x)$ 除以 $x(x^2-1)$ 的余式为 $x(x-1)-x+3=x^2-2x+3$

6. 设多项式 $f(x)$ 除以 $(x+1)^3$ 得余式 $2x^2+8$, 除以 $(x-2)^2$ 得余式 $15x+40$, 且 $\deg f(x) \geqslant 4$, 则 $f(x)$ 除以 $(x+1)^3(x-2)$ 的余式为?

设

$$f(x) = (x+1)^3(x-2)Q(x) + a(x+1)^3 + 2x^2 + 8$$

据题意 $f(2) = 15 \cdot 2 + 40 = 70$, 令 $x = 2$ 有

$$f(2) = a(2+1)^3 + 2 \cdot 2^2 + 8 = 70 \Rightarrow a = 2$$

$\therefore f(x)$ 除以 $(x+1)^3(x-2)$ 的余式为 $2(x+1)^3 + 2x^2 + 8 = 2x^3 + 8x^2 + 6x + 10$

7. 设 $\deg f(x) \geqslant 3$, 且 $f(x)$ 以 $(x-1)^2$ 除之余 $3x+2$, 以 $(x+2)^2$ 除之余 $5x-3$, 求:

(a) 以 $x-1$ 除之的余式。

即 $f(1) = 3 \cdot 1 + 2 = 5$

(b) 以 $(x-1)(x+2)$ 除之的余式。

设

$$f(x) = (x-1)(x+2)Q(x) + ax + b$$

令 $x = 1$,

$$f(1) = a + b = 5$$

令 $x = -2$,

$$f(-2) = -2a + b = -13$$

解得 $a = 6,\ b = -1$, 故余式为 $6x - 1$

(c) 以 $(x-1)^2(x+2)$ 除之的余式。

设

$$f(x) = (x-1)^2(x+2)Q(x) + a(x-1)^2 + 3x + 2$$

令 $x = -2$,

$$f(-2) = 9a + -4 = -13$$

解得 $a = -1$, 故余式为 $-x^2 + 5x + 1$

8. $f(x)$ 为一多项式, 若 $(x+1)f(x)$ 除以 x^2+x+1 的余式为 $5x+3$, 则 $f(x)$ 除以 x^2+x+1 的余式为何?

据题意有

$$(x+1)f(x)=(x+1)(x^2+x+1)Q(x)+a(x^2+x+1)+5x+3$$

且设

$$f(x)=(x^2+x+1)Q(x)+ax+b$$

两边乘 $x+1$ 有

$$(x+1)f(x)=(x+1)(x^2+x+1)Q(x)+(x+1)(ax+b)$$

比较得

$$a(x^2+x+1)+5x+3=(x+1)(ax+b)$$

即

$$ax^2+(a+b)x+b=ax^2+(a+5)x+a+3$$

得知 $a=2$, $b=5$, 余式为 $2x+5$

9. 以 $(x+1)^3$ 除 $f(x)$ 余式为 x^2-2x+3, 求以 $(x+1)^2$ 除 $f(x)$ 所得余式。

设

$$f(x)=Q(x)(x+1)^3+x^2-2x+3$$

有

$$f(x)=Q(x)(x+1)^3+(x+1)^2+(-4x+2)=(x+1)^2[Q(x)(x+1)+1]+(-4x+2)$$

轻而易举得知余式为 $-4x+2$.

10. 设 $f(x)$ 为实系数三次多项式, 若 $f(x)$ 除以 $x-2$ 的余式为 -5, 且 $(x+1)f(x)$ 除以 x^3-3 的余式为 $3x-1$, 求多项式 $f(x)$

设

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d,$$

则

$$(x+1)f(x)=ax^4+(a+b)x^3+(b+c)x^2+(c+d)x+d.$$

由题意,

$$f(2)=8a+4b+2c+d=-5 \tag{1}$$

且有

$$(x+1)f(x)=(x^3-3)(ax+(a+b))+3x-1,$$

比较系数得:

$$b+c=0 \tag{2}$$

$$3a+3b+d=-1 \tag{3}$$

$$3a+c+d=3 \tag{4}$$

由 $(1)-(4)$ 联立解得

$$a=-1,\quad b=-1,\quad c=1,\quad d=5$$

因此

$$f(x)=-x^3-x^2+x+5$$

11. 已知一多项式 $f(x)=x^{2025}(x^2+ax+b)$, 其中 a,b 为实数, 如果将 $f(x)$ 除以 $(x-2)^2$ 得余式 $2^{2025}(x-2)$, 求 a,b。

设

$$f(x)=x^{2025}(x^2+ax+b)=(x-2)^2p(x)+2^{2025}(x-2)$$

对 x 求导有

$$f'(x)=2025x^{2024}(x^2+ax+b)+x^{2025}(2x+a)=2(x-2)p(x)+(x-2)^2p'(x)+2^{2025}$$

现令 $x=2$, 则

$$\begin{cases} 2^{2025}(4+2a+b)=0 \\ 2025\cdot 2^{2024}(4+2a+b)+2^{2025}(4+a)=2^{2025} \end{cases}$$

解得

$$a=-3,b=2$$

12. 设 $f(x)=x^4+5x^3+ax^2+bx+c$ 可被 $(x-1)^3$ 整除, 求 a,b,c 的值。

1	5	a	b	c	1
	1	6	$a+6$	$a+b+6$	
1	6	a+6	$a+b+6$	$a+b+c+6$	
	1	7	$a+13$		
1	7	$a+13$	$2a+b+19$		
	1	8			
1	8	$a+21$			
	1				
1	9				

连续综合除法得

$$f(x)=(x-1)^4+9(x-1)^3+(a+21)(x-1)^2+(2a+b+19)(x-1)+(a+b+c+6)$$

已知 $f(x)$ 可被 $(x-1)^3$ 整除，则

$$\begin{cases}a+21=0\\2a+b+19=0\\a+b+c+6=0\end{cases}\quad\Rightarrow(a,b,c)=(-21,23,-8)$$

13. 已知 x^2-x+b 为多项式 $6x^4-7x^3+ax^2+3x+2$ 的因式，求 a,b 的值。

设 $f(x)=6x^4-7x^3+ax^2+3x+2=(x^2-x+b)(6x^2+px+q)$，展开右边得

$$(x^2-x+b)(6x^2+px+q)=6x^4+(p-6)x^3+(q-p+6b)x^2+(pb-q)x+bq$$

比较系数得

$$p-6=-7 \tag{1}$$
$$q-p+6b=a \tag{2}$$
$$pb-q=3 \tag{3}$$
$$bq=2 \tag{4}$$

由 (3) 得 $q=-b-3$，代入 (4) 得

$$b(-b-3)=2\Rightarrow(b+1)(b+2)=0\Rightarrow b=-1\text{ 或 }-2$$

当 $b=-1$ 时, $q=-2, a=-7$; 当 $b=-2$ 时, $q=-1, a=-12$

$\therefore (a,b)=(-7,-1)$ 或 $(-12,-2)$

14. 若 a,b,c 为相异实数, 分别用 $x-a, x-b, x-c$ 除多项式 $p(x)$, 所得的余数分别为 a,b,c, 求以 $(x-a)(x-b)(x-c)$ 除 $p(x)$ 的余式。

设

$$p(x)=(x-a)(x-b)(x-c)q(x)+r(x-a)(x-b)+s(x-a)+a,$$

令 $x=b$, 由 $a\neq b$,

$$p(b)=s(b-a)+a=b \Rightarrow s(b-a)=b-a \Rightarrow s=1$$

令 $x=c$, 由 $a\neq c, b\neq c$,

$$p(c)=r(c-a)(c-b)+(c-a)+a=c \Rightarrow r(c-a)(c-b)=0 \Rightarrow r=0$$

因此以 $(x-a)(x-b)(x-c)$ 除 $p(x)$ 的余式为 x

15. 若 $g(x)$ 除以 $2x-3$ 的余式为 1, 且 $f(x)=g(x)(2x-3)+5$, 求 $[f(x)]^2$ 除以 $(2x-3)^2$ 的余式。

设

$$g(x)=(2x-3)Q(x)+1$$

由 $f(x)=g(x)(2x-3)+5$,

$$\begin{aligned}[f(x)]^2 &= [g(x)]^2(2x-3)^2+10g(x)(2x-3)+25\\ &= [g(x)]^2(2x-3)^2+10[(2x-3)Q(x)+1](2x-3)+25\\ &= [g(x)]^2(2x-3)^2+10Q(x)(2x-3)^2+10(2x-3)+25\\ &= [g(x)]^2(2x-3)^2+10Q(x)(2x-3)^2+20x-5\end{aligned}$$

故 $[f(x)]^2$ 除以 $(2x-3)^2$ 的余式为 $20x-5$

16. 若多项式 $p(x)=x^2+bx+c$, 其中 b,c 为实数, 且 $p(p(1))=p(p(2))=0$, 且 $p(1)\neq p(2)$, 求 b,c 的值。

由 $p(p(1))=p(p(2))=0$, 意味 $p(1)$ 和 $p(2)$ 是方程 $x^2+bx+c=0$ 的两根, 且

$$p(1)+p(2)=-b,\quad p(1)p(2)=c$$

即

$$(1+b+c)+(4+2b+c)=-b \tag{1}$$

$$(1+b+c)(4+2b+c)=c \tag{2}$$

由 (1) 得 $2b+c=-\frac{5}{2}$, 代入 (2):

$$(1-\frac{5}{2}-b)(4-\frac{5}{2})=-\frac{5}{2}-2b \Rightarrow b=-\frac{1}{2}, c=-\frac{3}{2}$$

17. a,b,c 为整数, 且 $0<a<b$, 若 $x-c$ 是多项式 $x(x-a)(x-b)-17$ 的因式, 求 (a,b,c)。

已知 $f(x)=x(x-a)(x-b)-17$ 且 $x-c$ 是它的因式, 于是

$$f(c)=c(c-a)(c-b)-17=0 \Rightarrow c(c-a)(c-b)=17.$$

由于 a,b,c 均为整数, 且 $0<a<b$, 我们只需枚举整数三元组使得左边乘积为 17。

因为 17 是质数, 其非零整数因式只有:

$$(\pm1,\pm1,\pm17)\text{ 的排列组合。}$$

枚举 $c=1$,

$$1(1-a)(1-b)=17 \Rightarrow (1-a)(1-b)=17.$$

由于 $17=1\times17=(-1)\times(-17)$, 列出可能组合:

- $1-a=1,\ 1-b=17 \Rightarrow a=0,\ b=-16$, 不满足 $0<a<b$。
- $1-a=-1,\ 1-b=-17 \Rightarrow a=2,\ b=18$, 满足条件!

若 $c=-1$:

$$(-1)(-1-a)(-1-b)=17 \Rightarrow -(a+1)(b+1)=17 \Rightarrow (a+1)(b+1)=-17$$

没有满足 $0<a<b$ 的整数解, 尝试 $c=17,-17$ 会得到更大的数, 不满足 $0<a<b$。

因此, 唯一符合题意的解为:

$$(a,b,c)=(2,18,1)$$

18. 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均为实系数二次多项式且首项系数都是 2。已知 $(f(x))^2$ 除以 $g(x)$ 的余式为 $5x+3$, 而 $(g(x))^2$ 除以 $f(x)$ 的余式为 $x+1$, 求 $f(x), g(x)$。

设

$$f(x) = 2x^2 + ax + b, \quad g(x) = f(x) - cx - d = 2x^2 + (a-c)x + b - d.$$

则

$$(f(x))^2 = (g(x) + cx + d)^2 = (g(x))^2 + 2(cx+d)g(x) + (cx+d)^2.$$

由已知 $(f(x))^2$ 除以 $g(x)$ 的余式为 $5x+3$,

$$(cx+d)^2 = c^2x^2 + 2cdx + d^2 = \frac{c^2}{2}g(x) + \Big(2cd - \frac{c^2}{2}(a-c)\Big)x + \Big(d^2 - \frac{c^2}{2}(b-d)\Big).$$

比较系数得

$$\begin{cases} 4cd - ac^2 + c^3 = 10, \\ 2d^2 - bc^2 + c^2d = 6. \end{cases}$$

同理, 由 $(g(x))^2$ 除以 $f(x)$ 的余式为 $x+1$ 得

$$\begin{cases} 4cd - ac^2 = 2, \\ 2d^2 - bc^2 = 2. \end{cases}$$

解得

$$c^3 = 8 \Rightarrow c = 2, \quad c^2d = 4 \Rightarrow d = 1, \quad a = \frac{3}{2}, \quad b = 0.$$

于是

$$f(x) = 2x^2 + \frac{3}{2}x, \quad g(x) = 2x^2 - \frac{1}{2}x - 1.$$

19. 求多项式 $(x+1)^6$ 除以 x^2+1 的余式。

有 $x^2 \equiv -1 \pmod{x^2+1}$, 则

$$(x+1)^6 = (x^2+2x+1)^3 \equiv (2x)^3 = 8x \cdot x^2 \equiv 8x \cdot (-1) = -8x \pmod{x^2+1}$$

20. 设 $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, 求 $f(x^5)$ 除以 $f(x)$ 所得余式。

首先注意到

$$f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \frac{x^5 - 1}{x - 1}, \quad x \neq 1,$$

所以 $f(x) \mid x^5 - 1$, 即

$$x^5 \equiv 1 \pmod{f(x)}$$

故

$$f(x^5) = (x^5)^4 + (x^5)^3 + (x^5)^2 + x^5 + 1 \equiv 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5 \pmod{f(x)}$$

21. 求以 $x^2 + 2x + 3$ 除 $(x^2 + 3x + 4)^4$ 所得的余式。

有

$$(x^2 + 3x + 4)^4 \equiv (x + 1)^4 = (x^2 + 2x + 1)^2 \equiv (-2)^2 = 4 \pmod{x^2 + 2x + 3}$$

22. 设 $f(x) = x^{37} - 2x^{26} + 4x^7 - 3$, 则

(a) 求 $f(x)$ 除以 $x^2 + 1$ 的余式。

有

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{37} - 2x^{26} + 4x^7 - 3 \\ &= (x^2)^{18} \cdot x - 2(x^2)^{13} + 4(x^2)^3 \cdot x - 3 \\ &= (-1)^{18} \cdot x - 2(-1)^{13} + 4(-1)^3 \cdot x - 3 \\ &= x + 2 - 4x - 3 \\ &= -3x - 1 \pmod{x^2 + 1} \end{aligned}$$

(b) 求 $f(x)$ 除以 $x^2 + x + 1$ 的余式。

有 $x^3 \equiv 1 \pmod{x^2 + x + 1}$, 于是

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{37} - 2x^{26} + 4x^7 - 3 \\ &= (x^3)^{12} \cdot x - 2(x^3)^8 \cdot x^2 + 4(x^3)^2 \cdot x - 3 \\ &\equiv x - 2x^2 + 4x - 3 \\ &= -2x^2 + 5x - 3 \\ &\equiv -2(-x - 1) + 5x - 3 \\ &= 7x - 1 \pmod{x^2 + x + 1} \end{aligned}$$

23. 求以 x^4-x 除 $x^{87}-2x^{44}-x^3+3x^2+1$ 所得的余式。

有 $x^4\equiv x\Rightarrow x^3\equiv 1 \pmod{x^4-x}$, 故

$$x^{87}-2x^{44}-x^3+3x^2+1\equiv 1-2x^2-1+3x^2+1=x^2+1$$

24. 求 x^{100} 除以 x^3+2x^2+2x+1 的余式。

x^{100} 除以 $x+1$ 的余式即 $(-1)^{100}=1$, 又

$$x^3\equiv 1 \pmod{x^2+x+1}$$

故 x^{100} 除以 x^2+x+1 的余式为 $x^{100}\equiv x \pmod{x^2+x+1}$, 现设

$$x^{100}=(x+1)(x^2+x+1)Q(x)+a(x^2+x+1)+x$$

令 $x=-1$ 有

$$1=a(1-1+1)-1\Rightarrow a=2$$

$\therefore x^{100}$ 除以 x^3+2x^2+2x+1 的余式为 $2x^2+3x+2$

25. 求 x^{200} 除以 $(x-1)^2$ 的余式。

发现 $f(x)$ 除以 $(x-1)$ 的余式为 $f(1)=1^{200}=1$, 将所求写成

$$\begin{aligned}
x^{200}&=(x-1)^2Q(x)+a(x-1)+1\\
x^{200}-1&=(x-1)^2Q(x)+a(x-1)\\
(x-1)(x^{199}+\cdots+x+1)&=(x-1)^2Q(x)+a(x-1)\\
x^{199}+\cdots+x+1&=(x-1)Q(x)+a
\end{aligned}$$

两边代 $x=1$, 得到

$$200=0+a$$

故余式为 $200(x-1)+1=200x-199$

设 $t=x-1$, 则题目变成 $x^{200}=(t+1)^{200}$ 除以 t^2 的余式。由二项式定理,

$$(t+1)^{200}={}^{200}C_{200}t^{200}+\cdots+{}^{200}C_2t^2+{}^{200}C_1t+{}^{200}C_0$$

则显然, $(t+1)^{200}$ 除以 t^2 的余式即为 ${}^{200}C_1t+{}^{200}C_0=200(x-1)+1=200x-199$

26. 已知多项式 $f(x)=x^{130}-1, g(x)=x^4-x^3+2x^2-x+1$, 求 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的余式。

设

$$x^{130}-1=(x^2+1)(x^2-x+1)Q(x)+Ax^3+Bx^2+Cx+D.$$

令 $x=i$, 则

$$-1-1=Ai^3+Bi^2+Ci+D=(-B+D)+(-A+C)i,$$

得

$$\begin{cases}-B+D=-2,\\-A+C=0\end{cases}$$

令 $\omega=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$,

$$\omega^{130}-1=-\omega-1=-A+B(\omega-1)+C\omega+D=(B+C)\omega-A-B+D$$

得到方程组

$$\begin{cases}B+C=-1\\-A-B+D=-1\end{cases}$$

解得 $A=-1, B=0, C=-1, D=-2$, 因此余式为 $-x^3-x-2$

27. 设 $f(x)$ 是一个次数有限的多项式, 且满足

$$(x+9)f(x+1)=(x+3)f(x+3),$$

已知 $f(0)=1$, 求 $f(1)$ 的值。

令 $x=-3$ 得 $f(-2)=0$, 所以 $f(x)$ 有因式 $(x+2)$, 设 $f(x)=(x+2)g(x)$ 得

$$(x+9)(x+3)g(x+1)=(x+3)(x+5)g(x+3)\Rightarrow(x+9)g(x+1)=(x+5)g(x+3)$$

同理, 令 $x=-5$ 得 $g(-4)=0$, 故 $g(x)$ 有因式 $(x+4)$, 设 $g(x)=(x+4)h(x)$ 得

$$(x+9)(x+5)h(x+1)=(x+5)(x+7)h(x+3)\Rightarrow(x+9)h(x+1)=(x+7)h(x+3)$$

令 $x=-7$ 得 $h(-6)=0$, 故 $h(x)$ 有因式 $(x+6)$, 设 $h(x)=(x+6)p(x)$ 得

$$(x+9)(x+7)p(x+1)=(x+7)(x+9)p(x+3) \Rightarrow p(x+1)=p(x+3)$$

即 $p(x)$ 是周期为 2 的函数, 因为 $p(x)$ 是次数有限的多项式, 故 $p(x)=c, c\in\mathbb{R}$

于是 $f(x)=c(x+2)(x+4)(x+6)$, 由 $f(0)=1$ 得 $c=\frac{1}{48}$, 故

$$f(1)=\frac{1}{48}(3)(5)(7)=\frac{35}{16}$$

根式、绝对值

1. 求

$$\frac{\sqrt{10+\sqrt{1}}+\sqrt{10+\sqrt{2}}+\cdots+\sqrt{10+\sqrt{99}}}{\sqrt{10-\sqrt{1}}+\sqrt{10-\sqrt{2}}+\cdots+\sqrt{10-\sqrt{99}}}$$

之值。

由

$$\left(\sqrt{10+\sqrt{a}}-\sqrt{10-\sqrt{a}}\right)^2=20-2\sqrt{100-a}$$

于是有

$$\sqrt{10+\sqrt{a}}-\sqrt{10-\sqrt{a}}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{10-\sqrt{100-a}}$$

令

$$L=\frac{\sqrt{10+\sqrt{1}}+\sqrt{10+\sqrt{2}}+\cdots+\sqrt{10+\sqrt{99}}}{\sqrt{10-\sqrt{1}}+\sqrt{10-\sqrt{2}}+\cdots+\sqrt{10-\sqrt{99}}}$$

则

$$\begin{aligned}L-1&=\frac{(\sqrt{10+\sqrt{1}}-\sqrt{10-\sqrt{1}})+\cdots+(\sqrt{10+\sqrt{99}}-\sqrt{10-\sqrt{99}})}{\sqrt{10-\sqrt{1}}+\cdots+\sqrt{10-\sqrt{99}}}\\&=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{10-\sqrt{99}}+\sqrt{10-\sqrt{98}}+\cdots+\sqrt{10-\sqrt{1}}\right)}{\sqrt{10-\sqrt{1}}+\sqrt{10-\sqrt{2}}+\cdots+\sqrt{10-\sqrt{99}}}=\sqrt{2}\end{aligned}$$

因此

$$L=\sqrt{2}+1$$

2. 求根式方程

$$\sqrt{6x-9}+\sqrt{2x-5}=x-1$$

的实数根。

原方程式两边平方得

$$6x-9+2x-5+2\sqrt{(6x-9)(2x-5)}=x^2-2x+1$$

看来并不是明智之举。考虑

$$(\sqrt{6x-9}+\sqrt{2x-5})(\sqrt{6x-9}-\sqrt{2x-5})=(6x-9)-(2x-5)=4x-4$$

由于 $x \neq 1$, 化为

$$\sqrt{6x-9}-\sqrt{2x-5}=4$$

消去 $\sqrt{2x-5}$ 可得

$$\sqrt{6x-9}=\frac{1}{2}(x-1+4)$$

两边平方,

$$4(6x-9)=x^2+6x+9 \Rightarrow (x-3)(x-15)=0$$

经检验得 $x=3$ 是增根, 且 $x=15$ 是原方程式的解。

3. 解方程

$$4+\sqrt{x^2-6x+13}=x+\sqrt{2x-5}$$

由

$$\sqrt{x^2-6x+13}=x-4+\sqrt{2x-5}$$

设 $x-4=y$, 化简得

$$\sqrt{y^2+2y+5}=y+\sqrt{2y+3}$$

两边平方,

$$y^2+2y+5=y^2+2y\sqrt{2y+3}+2y+3 \Rightarrow 1=y\sqrt{2y+3}$$

再次平方得

$$2y^3+3y^2-1=0 \Rightarrow (y+1)(2y^2+y-1)=0$$

解得

$$y=-1, \quad y=\frac{1}{2} \Rightarrow x=3, \quad x=\frac{9}{2}$$

经检验 $x=3$ 是增根, 原方程式的解为

$$x=\frac{9}{2}$$

4. 求所有实数 x 满足

$$x=\sqrt{x-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}.$$

原方程式变为

$$x-\sqrt{x-\frac{1}{x}}=\sqrt{1-\frac{1}{x}}$$

两边平方得

$$(x^2-1)-2\sqrt{x(x^2-1)}+x=0 \implies (\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x})^2=0$$

解得

$$x^2-x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}>0$$

5. 解方程

$$\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}+2\sqrt{49x^2+7x-42}=181-14x$$

由原方程

$$\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}+2\sqrt{(7x+7)(7x-6)}=181-14x$$

设 $ya=\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}$, 则

$$y^2=14x+1+2\sqrt{(7x+7)(7x-6)}$$

代回原方程得

$$y^2-(14x+1)+y=181-14x \Rightarrow (y+14)(y-13)=0$$

由于平方根之和为非负, 舍去 $y=-14$, 于是由

$$\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}=13$$

两边平方,

$$14x+1+2\sqrt{(7x+7)(7x-6)}=169 \Rightarrow \sqrt{49x^2-6}=84-7x$$

再次平方,

$$49x^2-6=7056-1176x+49x^2 \Rightarrow x=6$$

经检验, 原方程式的解为

$$x=6$$

6. 解

$$x-\sqrt{\frac{x}{2}+\frac{7}{8}-\sqrt{\frac{x}{8}+\frac{13}{64}}}=179$$

将两边乘以 4 得

$$4x-\sqrt{8x+14-2\sqrt{8x+13}}=716$$

观察到

$$8x+14-2\sqrt{8x+13}=(8x+13)-2\sqrt{8x+13}+1=(\sqrt{8x+13}-1)^2$$

且由原方程知 $x\geqslant 179$, 故 $\sqrt{8x+13}-1>0$, 方程变为

$$4x-(\sqrt{8x+13}-1)=716\Rightarrow 8x+13-2\sqrt{8x+13}-1443=0$$

因式分解得

$$(\sqrt{8x+13}-39)(\sqrt{8x+13}+37)=0$$

由于 $\sqrt{8x+13}\geqslant 0$，所以

$$\sqrt{8x+13}=39\Rightarrow x=188.5$$

经检验, 原方程式的解为

$$x=188.5$$

7. 解

$$\frac{x-7}{2+\sqrt{x-3}}+\frac{x-5}{1+\sqrt{x-4}}=\sqrt{10}$$

首先有

$$-\frac{4-(x-3)}{2+\sqrt{x-3}}-\frac{1-(x-4)}{1+\sqrt{x-4}}=\sqrt{10}$$

于是

$$-(2-\sqrt{x-3})-(1-\sqrt{x-4})=\sqrt{10}\Rightarrow\sqrt{x-3}-\sqrt{x-4}=\sqrt{10}+3$$

两边移项得到

$$\sqrt{x-3}-\sqrt{10}=3+\sqrt{x-4}$$

两边平方,

$$x-3+10-2\sqrt{10(x-3)}=9+x-4-6\sqrt{x-4}\Rightarrow\sqrt{10(x-3)}-1=3\sqrt{x-4}$$

再次平方,

$$10(x-3)+1-2\sqrt{10(x-3)}=9(x-4)\Rightarrow x+7=2\sqrt{10(x-3)}$$

再再次平方,

$$x^2+14x+49=40(x-3)\Rightarrow (x-13)^2=0$$

经检验, 原方程式的解为

$$x=13$$

8. (a) 已知相异非零实数 a,b,c,d 满足

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

证明

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$$

由 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 得

$$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1,\quad \frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$$

即

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d},\quad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$

两式相除, 得

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$$

证毕。

(b) 利用 (a) 或其他方法, 解方程

$$\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}=\frac{4x-1}{2}$$

由 (a), 原方程化为

$$\frac{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})+(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})-(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}=\frac{(4x-1)+2}{(4x-1)-2}$$

即

$$\frac{2\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x-1}}=\frac{4x+1}{4x-3}$$

两边平方,

$$\frac{x+1}{x-1}=\frac{(4x+1)^2}{(4x-3)^2}=\frac{16x^2+8x+1}{16x^2-24x+9}.$$

再由 (a) 得

$$\frac{(x+1)+(x-1)}{(x+1)-(x-1)}=\frac{(16x^2+8x+1)+(16x^2-24x+9)}{(16x^2+8x+1)-(16x^2-24x+9)}.$$

化简得

$$\frac{2x}{2}=\frac{32x^2-16x+10}{32x-8}\Rightarrow x=\frac{5}{4}$$

经检验, 原方程的解为

$$x=\frac{5}{4}$$

9. 解方程

$$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3}=\sqrt[3]{12(x-1)}.$$

两边立方得

$$x+2x-3+3\sqrt[3]{x(2x-3)}(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3})=12(x-1)$$

由原方程 $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3}=\sqrt[3]{12(x-1)}$ 代入得

$$\sqrt[3]{x(2x-3)12(x-1)}=3(x-1)$$

两边再立方,

$$(x-1)(x-3)^2=0\Rightarrow x=1,3$$

经检验, 原方程式的解为

$$x=1\quad 或\quad x=3$$

10. 证明

$$\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}=3$$

设

$$x=\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$$

完全立方展开得

$$x^3=9+4\sqrt{5}+9-4\sqrt{5}+3\sqrt[3]{81-80}(x)$$

即解得

$$x^3-3x-18=0\Rightarrow(x-3)(x^2+3x+6)=0\Rightarrow x=3\in\mathbb{R}$$

因此得证

$$\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}=3$$

11. 设 a,b 为正实数, 且

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1,\quad 2022a^2=2023b^2,$$

求 $\sqrt{2022a+2023b}$ 的值。

由 $2022a^2=2023b^2$ 得

$$\frac{b}{a}=\sqrt{\frac{2022}{2023}}.$$

记 $k=\sqrt{\frac{2022}{2023}}$, 则 $b=ka$。由 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$ 得

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{ka}=1\Rightarrow a=1+\frac{1}{k}.$$

于是

$$\begin{aligned}
2022a+2023b&=2022a+2023ka\\
&=a(2022+2023k)\\
&=\left(1+\frac{1}{k}\right)(2022+2023k)\\
&=2022+2023+2022\cdot\frac{1}{k}+2023k\\
&=2022+2023+2022\sqrt{\frac{2023}{2022}}+2023\sqrt{\frac{2022}{2023}}\\
&=2022+2023+\sqrt{2022\cdot2023}+\sqrt{2022\cdot2023}\\
&=(\sqrt{2022}+\sqrt{2023})^2
\end{aligned}$$

故

$$\sqrt{2022a+2023b}=\sqrt{2022}+\sqrt{2023}.$$

12. 若

$$(x-\sqrt{x^2-2011})(y+\sqrt{y^2-2011})+2011=0,$$

求 $2x+y$ 的值。

原式两边乘于 $x+\sqrt{x^2-2011}$ 可得

$$2011(y+\sqrt{y^2-2011})+2011(x+\sqrt{x^2-2011})=0$$

$$2011(x+y+\sqrt{x^2-2011}+\sqrt{y^2-2011})=0$$

即

$$x+y=-(\sqrt{x^2-2011}+\sqrt{y^2-2011}) \tag{1}$$

同理, 原式两边乘于 $y-\sqrt{y^2-2011}$ 可得

$$(x-\sqrt{x^2-2011})2011+2011(y-\sqrt{y^2-2011})=0$$

$$2011(x+y-(\sqrt{x^2-2011}+\sqrt{y^2-2011}))=0$$

$$x+y=\sqrt{x^2-2011}+\sqrt{y^2-2011} \tag{2}$$

由 (1) 及 (2) 可得

$$\sqrt{x^2-2011}+\sqrt{y^2-2011}=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2011}, y=\mp\sqrt{2011} \quad (\because x+y=0)$$

故

$$2x+y=x+y+x=\pm\sqrt{2011}$$

13. 求

$$\left|\sqrt{x+1}-2\right|+\left|\sqrt{x+1}-3\right|=1$$

的整数解集。

令 $t=\sqrt{x+1}$, 其中 $t\geqslant 0$, 则方程变为

$$|t-2|+|t-3|=1$$

分三种情况讨论:

情况 1: 当 $0\leqslant t<2$ 时,

$$(2-t)+(3-t)=1\Rightarrow t=2$$

这与 $t<2$ 矛盾，无解。

情况 2：当 $2 \leqslant t \leqslant 3$ 时，

$$(t-2)+(3-t)=1 \Rightarrow 1=1$$

恒成立，因此 $t \in [2,3]$。

情况 3：当 $t>3$ 时，

$$(t-2)+(t-3)=1 \Rightarrow t=3$$

这与 $t>3$ 矛盾，无解。

综合得 $2 \leqslant \sqrt{x+1} \leqslant 3$，平方得

$$4 \leqslant x+1 \leqslant 9 \Rightarrow 3 \leqslant x \leqslant 8$$

因此整数解集为 $\{3,4,5,6,7,8\}$。

14. 解

$$|x+1|-|x|+3|x-1|-2|x-2|=x+2$$

分情况讨论:

情况 1：当 $x<-1$ 时，

$$-(x+1)+x-3(x-1)+2(x-2)=x+2 \Rightarrow x=-2$$

得一解 $x=-2$。

情况 2：当 $-1 \leqslant x<0$ 时，

$$(x+1)+x-3(x-1)+2(x-2)=x+2 \Rightarrow x=x+2$$

故无解。

情况 3：当 $0 \leqslant x<1$ 时，

$$(x+1)-x-3(x-1)+2(x-2)=x+2 \Rightarrow x=-1$$

这与 $0 \leqslant x<1$ 矛盾，故无解。

情况 4：当 $1 \leqslant x<2$ 时，

$$(x+1)-x+3(x-1)+2(x-2)=x+2 \Rightarrow x=2$$

这与 $1 \leqslant x < 2$ 矛盾, 故无解。

情况 4: 当 $x \geqslant 2$ 时,

$$(x+1) - x + 3(x-1) - 2(x-2) = x + 2 \Rightarrow x = x$$

恒成立, 因此 $x \geqslant 2$ 都是解。

结论: 原方程的解为 $x = -2$ 以及所有满足 $x \geqslant 2$ 的实数。

指数与对数

1. 设 $a=2019^{2017}, b=2019^{2018}, c=2019^{2019}$, 计算

$$\frac{1}{2019^{a-a}+2019^{a-b}+2019^{a-c}}+\frac{1}{2019^{b-a}+2019^{b-b}+2019^{b-c}}+\frac{1}{2019^{c-a}+2019^{c-b}+2019^{c-c}}$$

观察到原式为

$$\frac{2019^{-a}}{2019^{-a}+2019^{-b}+2019^{-c}}+\frac{2019^{-b}}{2019^{-a}+2019^{-b}+2019^{-c}}+\frac{2019^{-c}}{2019^{-a}+2019^{-b}+2019^{-c}}$$

答案呼之欲出 $\Rightarrow 1$

2. 试证

$$2^{\sqrt{\log_2 3}}=3^{\sqrt{\log_3 2}}$$

注意到

$$2^{\sqrt{\log_2 3}}=2^{\frac{\log_2 3}{\sqrt{\log_2 3}}}=\left(2^{\log_2 3}\right)^{\sqrt{\log_3 2}}=3^{\sqrt{\log_3 2}}$$

故左式等于右式, 得证。

设 $x=2^{\sqrt{\log_2 3}}, y=3^{\sqrt{\log_3 2}}$, 则

$$\log x=\sqrt{\log_2 3}\cdot\log 2=\sqrt{\frac{\log 3}{\log 2}}\cdot\log 2=\sqrt{\log 2\log 3}$$

同理

$$\log y=\sqrt{\log_3 2}\cdot\log 3=\sqrt{\frac{\log 2}{\log 3}}\cdot\log 3=\sqrt{\log 2\log 3}$$

故

$$\log x=\log y\Rightarrow x=y \quad \text{（得证）}$$

3. 解方程

$$2^{x+2}5^{6-x} = 10^{x^2},$$

两边取 log 得

$$(x+2)\log 2 + (6-x)\log 5 = x^2 \Rightarrow x^2 - \left(\log \frac{2}{5}\right) x - 2\log 250 = 0$$

因式分解给出

$$(x-2)(x+\log 250) = 0 \Rightarrow x = 2, -\log 250$$

4. 求解方程

$$\frac{e^{2x}+16^x}{(4e)^x} = \frac{4+e}{2\sqrt{e}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

步骤 **1:** 化简方程两边

给定方程:

$$\frac{e^{2x}+16^x}{(4e)^x} = \frac{4+e}{2\sqrt{e}}$$

利用指数法则化简左边:

$$\frac{e^{2x}}{(4e)^x} + \frac{16^x}{(4e)^x} = \left(\frac{e}{4}\right)^x + \left(\frac{4}{e}\right)^x$$

右边化简为:

$$\frac{4+e}{2\sqrt{e}} = \frac{\sqrt{e}}{2} + \frac{2}{\sqrt{e}}$$

因此方程变为:

$$\left(\frac{e}{4}\right)^x + \left(\frac{4}{e}\right)^x = \frac{\sqrt{e}}{2} + \frac{2}{\sqrt{e}}$$

步骤 **2:** 代换化为二次方程

令

$$y = \left(\frac{e}{4}\right)^x$$

则方程可写作:

$$y + \frac{1}{y} = \left(\frac{e}{4}\right)^{1/2} + \frac{1}{\left(\frac{e}{4}\right)^{1/2}}$$

两边乘以 y 得到二次形式:

$$y^2-\left(\left(\frac{e}{4}\right)^{1/2}+\left(\frac{e}{4}\right)^{-1/2}\right)y+1=0$$

因式分解得到:

$$\left(y-\left(\frac{e}{4}\right)^{1/2}\right)\left(y-\left(\frac{e}{4}\right)^{-1/2}\right)=0$$

步骤 **3:** 求 x 的值

$$\left(\frac{e}{4}\right)^{x}=\left(\frac{e}{4}\right)^{1/2}\implies x=\frac{1}{2}$$
$$\left(\frac{e}{4}\right)^{x}=\left(\frac{e}{4}\right)^{-1/2}\implies x=-\frac{1}{2}$$

答案**:**

$$x=\frac{1}{2},\quad x=-\frac{1}{2}$$

5. 解

$$x^{x^x}=(x^x)^x$$

原方程即

$$x^{x^x}=x^{x^2}$$

先考虑指数方程的特殊情况 $x=-1,0,1$, 可得解

$$x=-1,1$$

当 $x\neq-1,0,1$ 时, 由底数相等所以指数相等的性质得,

$$x=2$$

故原方程式的解为

$$x=-1\quad 或\quad x=1\quad 或\quad x=2$$

6. 已知

$$(x\sqrt{x}\sqrt[3]{x})^x=x^{x\sqrt{x}\sqrt[3]{x}},$$

试求 x^5 的值。

$$(x\sqrt{x}\sqrt[3]{x})^x = x^{x\sqrt{x}\sqrt[3]{x}}$$
$$x^{(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})x} = x^{x^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}}$$
$$x^{(\frac{11}{6})x} = x^{x^{\frac{11}{6}}}$$

考虑特殊情况 $x=-1,0,1$, 可得解 $x=1$, 此时因底数相等所以指数相等, 得

$$\frac{11}{6}x = x^{\frac{11}{6}} \Rightarrow x^5 = \left(\frac{11}{6}\right)^6$$

故 x^5 的可能值为

$$x^5 = 1 \quad \text{或} \quad x^5 = \left(\frac{11}{6}\right)^6$$

7. 求满足方程

$$(x^2+2x)^{x^2-3x+2} = 1$$

的实数解。

设 $A=x^2+2x$, $B=x^2-3x+2$。欲使 $A^B=1$, 仅以下三种情况成立:

- $B=0$:

$$x^2-3x+2=0 \quad\Rightarrow\quad (x-1)(x-2)=0 \Rightarrow \quad x=1,2$$

- $A=1$:

$$x^2+2x=1 \quad\Rightarrow\quad x=-1\pm\sqrt{2}$$

- $A=-1$ 且 B 为偶数:

$$x^2+2x=-1 \quad\Rightarrow\quad (x+1)^2=0 \quad\Rightarrow\quad x=-1$$

  此时

$$B=(-1)^2-3(-1)+2=6$$

  为偶数, 成立。

综上, 解为

$$x\in\{1,2,-1+\sqrt{2},-1-\sqrt{2},-1\}$$

8. 计算

$$5^{(\log 2)^3}\cdot 8^{(\log 5)^2}\cdot 5^{(\log 5)^3}$$

令 $a=\log 2, b=\log 5$, 则 $a+b=1$, 原式为

$$L=5^{a^3}\cdot 8^{b^2}\cdot 5^{b^3}$$

两边取对数, 则

$$\log L=(a^3+b^3)b+3ab^2=(a+b)(a^2-ab+b^2)b+3ab^2=b(a+b)^2=\log 5$$

因此

$$L=5$$

9. 已知正实数 x 满足

$$\log_2 x\log_4 x\log_6 x=\log_2 x\log_4 x+\log_2 x\log_6 x+\log_4 x\log_6 x,$$

求 x。

设 $\log_2 x=a, \log_6 x=b$, 则 $\log_4 x=\dfrac{1}{2}a$, 原式为

$$\frac{1}{2}a^2b=\frac{1}{2}a^2+ab+\frac{1}{2}ab\Rightarrow ab=a+3b$$

将 $a=\dfrac{\log x}{\log 2}, b=\dfrac{\log x}{\log 6}$ 代入得

$$\frac{(\log x)^2}{(\log 2)(\log 6)}=\frac{\log x(\log 6+3\log 2)}{(\log 2)(\log 6)}\Rightarrow \log x(\log x-\log 48)=0$$

所以

$$x=1\quad 或\quad x=48$$

10. 求

$$\sqrt{\log_3\sqrt{6}+\sqrt{\log_3 2}}+\sqrt{\log_3\sqrt{6}-\sqrt{\log_3 2}}$$

之值。

令

$$a=\log_3\sqrt{6}=\frac{1}{2}(1+\log_3 2),\quad b=\sqrt{\log_3 2}<1$$

则有

$$a=\frac{b^2+1}{2}$$

因此

$$\begin{aligned}\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}&=\sqrt{\frac{b^2+1}{2}+b}+\sqrt{\frac{b^2+1}{2}-b}\\&=\sqrt{\frac{1}{2}(b+1)^2}+\sqrt{\frac{1}{2}(b-1)^2}\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}(b+1)+\frac{1}{\sqrt{2}}(1-b)=\sqrt{2}\end{aligned}$$

11. 解不等式

$$\sqrt{\log_2 x-1}+\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}x^3+2>0$$

设 $y=\log_2 x$, 则不等式化为

$$\sqrt{y-1}-\frac{3}{2}y+2>0,\quad \text{且 } y\geqslant 1.$$

设 $z=\sqrt{y-1}$, 则 $y=z^2+1$, 方程变为

$$z-\frac{3}{2}(z^2+1)+2>0\Rightarrow(3z+1)(z-1)<0$$

于是

$$-\frac{1}{3}<z<1\Rightarrow 0\leqslant z^2<1\Rightarrow 1\leqslant y<2$$

再考虑 y 的定义域 $y\geqslant 1$, 经检验有

$$2\leqslant x<4$$

12. 求不等式的解集

$$\log(x-40)+\log(60-x)<2$$

变为

$$(x-40)(60-x)<100$$

注意到 $(x-40)(60-x)=-(x-50)^2+100$, 所以不等式等价于

$$-(x-50)^2+100<100 \Rightarrow (x-50)^2>0 \Rightarrow x\neq 50$$

且由定义域

$$\begin{cases} x-40>0 \\ 60-x>0 \end{cases} \Rightarrow 40<x<60$$

经检验得解集

$$(40,\ 50)\cup(50,\ 60).$$

13. 解不等式:

$$\left(\log_{\frac{1}{3}} x-1\right)\left(\log_{\frac{1}{4}} x+2\right)\left(\log_{\frac{1}{5}} x-3\right)>0.$$

换底得

$$\left(\frac{\log x}{-\log 3}-1\right)\left(\frac{\log x}{-\log 4}+2\right)\left(\frac{\log x}{-\log 5}-3\right)>0$$

即

$$(\log x+\log 3)(\log x-2\log 4)(\log x+3\log 5)<0$$

符号分析得

$$-\log 3<\log x<2\log 4,\quad \log x<-3\log 5$$

解集为

$$\frac{1}{3}<x<16 \quad \text{或} \quad 0<x<\frac{1}{125}$$

14. 求

$$|x-1|^{\log_2(4-x)}<|x-1|^{\log_2(1+x)}$$

的解之范围。

由 $\log_2(4-x)$ 及 $\log_2(1+x)$ 的定义域, 得

$$x<4 \quad \text{且} \quad x>-1$$

即 $x\in(-1,4)$, 且 $x\neq 0,1,2$, 否则不等式不成立。分四种情况讨论:

情况 1: $x\in(-1,0)$, 则

$$\begin{aligned}(1-x)^{\log_2(4-x)}<(1-x)^{\log_2(1+x)} &\Rightarrow \log_2(4-x)<\log_2(1+x)\\ &\Rightarrow 4-x<1+x\\ &\Rightarrow x>\frac{3}{2}\end{aligned}$$

此情况解集为 $(-1,0)\cap\left(\dfrac{3}{2},\infty\right)=\emptyset$, 无解。

情况 2: $x\in(0,1)$, 则

$$\begin{aligned}(1-x)^{\log_2(4-x)}<(1-x)^{\log_2(1+x)} &\Rightarrow \log_2(4-x)>\log_2(1+x)\\ &\Rightarrow 4-x>1+x\\ &\Rightarrow x<\frac{3}{2}\end{aligned}$$

此情况解集为 $(0,1)\cap\left(-\infty,\dfrac{3}{2}\right)=(0,1)$。

情况 3: $x\in(1,2)$, 则

$$\begin{aligned}(x-1)^{\log_2(4-x)}<(x-1)^{\log_2(1+x)} &\Rightarrow \log_2(4-x)>\log_2(1+x)\\ &\Rightarrow 4-x>1+x\\ &\Rightarrow x<\frac{3}{2}\end{aligned}$$

此情况解集为 $(1,2)\cap\left(-\infty,\dfrac{3}{2}\right)=\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$。

情况 4: $x\in(2,4)$, 则

$$\begin{aligned}(x-1)^{\log_2(4-x)}<(x-1)^{\log_2(1+x)} &\Rightarrow \log_2(4-x)<\log_2(1+x)\\ &\Rightarrow 4-x<1+x\\ &\Rightarrow x>\frac{3}{2}\end{aligned}$$

此情况解集为 $(2,4)\cap\left(\dfrac{3}{2},\infty\right)=(2,4)$。

综上所述, 原方程式的解集为 $\left(0,\dfrac{3}{2}\right)\cup(2,4)\setminus\{1\}$。

15. 求所有实数 x, 使得

$$\sqrt{\log_2 x \cdot \log_2(4x)+1}+\sqrt{\log_2 x \cdot \log_2\left(\frac{x}{64}\right)+9}=4$$

发现

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{\log_2 x \cdot \log_2(4x)+1}+\sqrt{\log_2 x \cdot \log_2\left(\frac{x}{64}\right)+9} \\
&= \sqrt{\log_2 x(2+\log_2 x)+1}+\sqrt{\log_2 x(\log_2 x-6)+9} \\
&= \sqrt{(\log_2 x+1)^2}+\sqrt{(\log_2 x-3)^2} \\
&= \begin{cases} -2\log_2 x+2 & ,\log_2 x \leqslant -1 \\ 4 & ,-1<\log_2 x \leqslant 3 \\ 2\log_2 x-2 & ,\log_2 x>3 \end{cases}
\end{aligned}$$

欲使 $f(x)=4$, 当 $\log_2 x \leqslant -1, \log_2 x=-1$; 当 $-1<\log_2 x \leqslant 3, f(x)=4$ 恒成立; 当 $\log_2 x>3$, 无解; 因此解为

$$-1 \leqslant \log_2 x \leqslant 3 \Rightarrow \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 8$$

16. 已知

$$\frac{\log a}{b-c}=\frac{\log b}{c-a}=\frac{\log c}{a-b},$$

其中 $a \neq b \neq c$, 试求 $a^a b^b c^c$ 的值。

设

$$\frac{\log a}{b-c}=\frac{\log b}{c-a}=\frac{\log c}{a-b}=k$$

则

$$\log a=k(b-c), \quad \log b=k(c-a), \quad \log c=k(a-b)$$

因此

$$\begin{aligned}
\log(a^a b^b c^c) &= a\log a+b\log b+c\log c \\
&= ak(b-c)+bk(c-a)+ck(a-b) \\
&= k[ab-ac+bc-ab+ca-cb] \\
&= 0
\end{aligned}$$

即

$$a^a b^b c^c = 1$$

17. 设 a,b 同号, 且 $a^2-2ab-9b^2=0$, 求

$$\log(a^2+ab-6b^2)-\log(a^2+4ab+15b^2)$$

的值。

由 $a^2-2ab-9b^2=0$ 解得

$$a=(\sqrt{10}+1)b$$

故

$$\begin{aligned}
&\log(a^2+ab-6b^2)-\log(a^2+4ab+15b^2)\\
&=\log(3ab+3b^2)-\log(6ab+24b^2)\\
&=\log\left(\frac{3b(a+b)}{6b(a+4b)}\right)\\
&=\log\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{a+b}{a+4b}\right)\\
&=\log\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{(\sqrt{10}+2)b}{(\sqrt{10}+5)b}\right)\\
&=\log\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{(\sqrt{10}+2)(5-\sqrt{10})}{(\sqrt{10}+5)(5-\sqrt{10})}\right)\\
&=\log\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{10}}{15}\right)=\log\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)=-\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

18. 设正实数 x,y（$x\neq 1, y\neq 1$）满足

$$\log_2 x=\log_y 16,\quad xy=64,$$

求

$$\left(\log_2\frac{x}{y}\right)^2$$

由 $xy=64$ 得 $x=\frac{64}{y}$, 代入第一式:

$$\log_2\left(\frac{64}{y}\right)=\log_y 16 \Rightarrow 6-\log_2 y=\frac{4}{\log_2 y}$$

设 $a=\log_2 y$, 则变为

$$6-a=\frac{4}{a} \Rightarrow a^2-6a+4=0$$

解得

$$\log_2 y=a=3\pm\sqrt{5}$$

所求为

$$(\log_2 x-\log_2 y)^2=(a-(6-a))^2=(2a-6)^2=(\pm 2\sqrt{5})^2=20$$

19. 已知 $a^x=bc, b^y=ac, c^z=ab$, 证明

$$xyz=x+y+z+2$$

由 $a^x=bc$, 两边取 yz 次方

$$(a^x)^{yz}=(bc)^{yz} \Rightarrow a^{xyz}=b^{yz}\cdot c^{yz}$$

由 $b^y=ac$, 得 $b^{yz}=(ac)^z=a^z c^z$; 由 $c^z=ab$, 得 $c^{yz}=(ab)^y=a^y b^y$; 于是

$$a^{xyz}=(a^z c^z)(a^y b^y)=a^{z+y}b^y c^z=a^{z+y}\cdot ac\cdot ab=a^{z+y+2}bc$$

又 $a^x=bc$, 故

$$a^{xyz}=a^{z+y+2}\cdot a^x=a^{x+y+z+2} \Rightarrow xyz=x+y+z+2$$

20. 设 a,b,c 均为异于 1 的正数, 且满足 $abc=1$, 证明

$$\log_a b+\log_a c+\log_b c+\log_b a+\log_c b+\log_c a=-3$$

有

$$\begin{aligned}&\log_a a+\log_a b+\log_a c+\log_b b+\log_b c+\log_b a+\log_c c+\log_c b+\log_c a\\&=\log_a(abc)+\log_b(abc)+\log_c(abc)\\&=0\end{aligned}$$

故原式得证。

21. 已知

$$\log_{10}\sin x+\log_{10}\cos x=-1,$$

且整数 n 满足

$$\log_{10}(\sin x+\cos x)=\frac{1}{2}(\log_{10}n-1),$$

求 n。

由

$$\log_{10}\sin x+\log_{10}\cos x=-1\Rightarrow\sin x\cos x=10^{-1}=\frac{1}{10}$$

又 $\sin x+\cos x=\sqrt{1+2\cdot\frac{1}{10}}=\sqrt{\frac{6}{5}}$，则

$$\log_{10}n=2\log_{10}\sqrt{\frac{6}{5}}+1=\log_{10}\frac{6}{5}+\log_{10}10=\log_{10}12\Rightarrow n=12$$

22. 解方程式

$$(\log_5 x)^2+\log_{5x}\left(\frac{5}{x}\right)=1$$

设 $\log_5 x=t$，则

$$\log_{5x}\left(\frac{5}{x}\right)=\frac{\log_5\frac{5}{x}}{\log_5(5x)}=\frac{\log_5 5-\log_5 x}{\log_5 5+\log_5 x}=\frac{1-t}{1+t}$$

原方程式变为

$$\begin{aligned}t^2+\frac{1-t}{1+t}&=1\\t^2(1+t)+1-t&=1+t\\t^3+t^2-2t&=0\\t(t+2)(t-1)&=0\end{aligned}$$

解得 $t=0,-2,1$，即

$$x=5^0=1,\quad\text{或}\quad x=5^{-2}=\frac{1}{25},\quad\text{或}\quad x=5^1=5$$

经检验得 $x=1,x=\frac{1}{25},x=5$ 都是原方程的解。

23. 解方程

$$\log_{2x}\left(48\sqrt[3]{3}\right)=\log_{3x}\left(162\sqrt[3]{2}\right)$$

原式变为

$$\frac{\log(48\sqrt[3]{3})}{\log(2x)}=\frac{\log(162\sqrt[3]{2})}{\log(3x)}.$$

又因

$$\log(48\sqrt[3]{3})=4\log 2+\frac{4}{3}\log 3,\quad \log(162\sqrt[3]{2})=\frac{4}{3}\log 2+4\log 3.$$

于是有

$$\frac{4\log 2+\frac{4}{3}\log 3}{\log 2+\log x}=\frac{\frac{4}{3}\log 2+4\log 3}{\log 3+\log x}.$$

化简最终得到

$$\log x=\frac{1}{2}\log 6\Rightarrow x=\sqrt{6}.$$

24. 求所有实数 x, 使得

$$\log_{5x+9}(x^2+6x+9)+\log_{x+3}(5x^2+24x+27)=4.$$

原方程式化为

$$\begin{aligned}\frac{\log(x^2+6x+9)}{\log(5x+9)}+\frac{\log(5x^2+24x+27)}{\log(x+3)}&=4\\ \frac{2\log(x+3)}{\log(5x+9)}+\frac{\log(5x+9)+\log(x+3)}{\log(x+3)}&=4\\ 2\frac{\log(x+3)}{\log(5x+9)}+\frac{\log(5x+9)}{\log(x+3)}+1&=4\end{aligned}$$

令 $t=\dfrac{\log(x+3)}{\log(5x+9)}$, 解得

$$2t+\frac{1}{t}=3\Rightarrow t=1 \text{ 或 } t=\frac{1}{2}$$

当 $t=1$, 解得

$$\log(x+3)=\log(5x+9)\Rightarrow x=-\frac{3}{2}$$

当 $t=\frac{1}{2}$, 则 $2\log(x+3)=\log(5x+9)$, 即

$$2\log(x+3)=\log(5x+9)\Rightarrow x=0 \text{ 或 } x=-1$$

经检验得, 原方程的实数解为

$$x = 0, -1, -\frac{3}{2}$$

25. 求解下列方程组:

$$(2x)^{\ln 2} = (3y)^{\ln 3}$$
$$3^{\ln x} = 2^{\ln y}$$

步骤 **1:** 对方程取自然对数化简

对第一个方程两边取 ln:

$$\begin{aligned}\ln\left((2x)^{\ln 2}\right) &= \ln\left((3y)^{\ln 3}\right)\\(\ln 2)\ln(2x) &= (\ln 3)\ln(3y)\\(\ln 2)(\ln 2 + \ln x) &= (\ln 3)(\ln 3 + \ln y)\\(\ln 2)^2 + (\ln 2)\ln x &= (\ln 3)^2 + (\ln 3)\ln y \quad (\text{方程}1')\end{aligned}$$

对第二个方程取 ln:

$$\begin{aligned}\ln\left(3^{\ln x}\right) &= \ln\left(2^{\ln y}\right)\\(\ln x)\ln 3 &= (\ln y)\ln 2 \quad (\text{方程}2')\end{aligned}$$

步骤 **2:** 代换求解

令 $u = \ln x$,$v = \ln y$:

$$\begin{aligned}(\ln 2)^2 + u\ln 2 &= (\ln 3)^2 + v\ln 3\\u\ln 3 = v\ln 2 &\implies u = v\frac{\ln 2}{\ln 3}\end{aligned}$$

将 u 代入方程 $1'$:

$$\begin{aligned}(\ln 2)^2 + \left(v\frac{\ln 2}{\ln 3}\right)\ln 2 &= (\ln 3)^2 + v\ln 3\\(\ln 2)^2 + v\frac{(\ln 2)^2}{\ln 3} &= (\ln 3)^2 + v\ln 3\\v\left(\frac{(\ln 2)^2}{\ln 3} - \ln 3\right) &= (\ln 3)^2 - (\ln 2)^2\\v\left(\frac{(\ln 2)^2 - (\ln 3)^2}{\ln 3}\right) &= -((\ln 2)^2 - (\ln 3)^2)\\v &= -\ln 3\end{aligned}$$

步骤 **3:** 求 u,x 和 y

$$u = v\frac{\ln 2}{\ln 3} = -\ln 3 \cdot \frac{\ln 2}{\ln 3} = -\ln 2$$

转回 x 和 y:

$$\ln x = -\ln 2 \implies x = e^{-\ln 2} = \frac{1}{2}$$
$$\ln y = -\ln 3 \implies y = e^{-\ln 3} = \frac{1}{3}$$

26. 求下列方程组的所有实数解:

$$x + \log_{10} x = y - 1$$
$$y + \log_{10}(y-1) = z - 1$$
$$z + \log_{10}(z-2) = x + 2$$

将方程组改写为

$$x + \log_{10} x = y - 1$$
$$(y-1) + \log_{10}(y-1) = z - 2$$
$$(z-2) + \log_{10}(z-2) = x$$

令 $a = x, b = y - 1, c = z - 2$, 方程组可改写为:

$$a + \log_{10} a = b \tag{1}$$
$$b + \log_{10} b = c \tag{2}$$
$$c + \log_{10} c = a \tag{3}$$

容易验证 $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ 是一解, 现考虑 $a > 1$, 则

$$\log_{10} a > 0 \Rightarrow b = a + \log_{10} a > a > 1 \Rightarrow c = b + \log_{10} b > b > a > 1$$

由 (3) 得 $a = c + \log_{10} c > c > b > a$, 矛盾。而当 $0 < a < 1$,

$$\log_{10} a < 0 \Rightarrow b = a + \log_{10} a < a < 1 \Rightarrow c = b + \log_{10} b < b < a < 1$$

由 (3) 得 $a = c + \log_{10} c < c < b < a$, 矛盾。因此 $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ 是唯一解, 即

$$(x, y, z) = (1, 2, 3)$$

27. 若正实数 x, y, z 满足

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2 \\ \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2 \\ \log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2 \end{cases}$$

求 xyz。

原方程组给出

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_2 \sqrt{y} + \log_2 \sqrt{z} = 2 \Rightarrow x\sqrt{yz} = 2^2 \\ \log_3 y + \log_3 \sqrt{z} + \log_3 \sqrt{x} = 2 \Rightarrow y\sqrt{xz} = 3^2 \\ \log_4 z + \log_4 \sqrt{x} + \log_4 \sqrt{y} = 2 \Rightarrow z\sqrt{xy} = 4^2 \end{cases}$$

将三式相乘得

$$(xyz)^2 = 2^6 \cdot 3^2 \Rightarrow xyz = 24$$

28. 解联立方程组

$$\begin{cases} \log x \log y - 3\log 5y - \log 8x = -4 \\ \log y \log z - 4\log 5y - \log 16z = 4 \\ \log z \log x - 4\log 8x - 3\log 625z = -18 \end{cases}$$

三式化简得

$$\log x \log y - 3\log y - \log x = -1$$
$$\log y \log z - 4\log y - \log z = 8$$
$$\log z \log x - 4\log x - 3\log z = -6$$

因式分解:

$$(\log x - 3)(\log y - 1) = 2 \tag{1}$$
$$(\log y - 1)(\log z - 4) = 12 \tag{2}$$
$$(\log z - 4)(\log x - 3) = 6 \tag{3}$$

三式相乘可得

$$(\log x - 3)(\log y - 1)(\log z - 4) = \pm\sqrt{2 \cdot 6 \cdot 12} = \pm 12 \tag{4}$$

分别作 $\frac{(4)}{(2)}, \frac{(4)}{(3)}, \frac{(4)}{(1)}$ 得解 $\log x - 3 = \pm 1, \log y - 1 = \pm 2, \log z - 4 = \pm 6$, 即

$$(x, y, z) = (10^4, 10^3, 10^{10}) \quad \text{或} \quad (10^2, 10^{-1}, 10^{-2})$$

方程组

1. 若 x, y, z 都是正数且满足

$$\begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=4, \\ y+\dfrac{1}{z}=1, \\ z+\dfrac{1}{x}=\dfrac{7}{3}, \end{cases}$$

求 xyz 的值。

$$\begin{aligned}\left(x+\frac{1}{y}\right)\left(y+\frac{1}{z}\right)\left(z+\frac{1}{x}\right) &= xyz+x+\frac{1}{y}+y+\frac{1}{z}+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{xyz} \\ &= xyz+4+1+\frac{7}{3}+\frac{1}{xyz}=\frac{28}{3}\end{aligned}$$

于是

$$xyz+\frac{1}{xyz}=2 \Rightarrow (xyz)^2-2(xyz)+1=0 \Rightarrow xyz=1$$

2. 求满足方程组

$$\begin{cases} x^2+x^2y^2+x^2y^4=525 \\ x+xy+xy^2=35 \end{cases}$$

的所有实数序对 (x, y)。

$$x^2+x^2y^2+x^2y^4=525 \tag{1}$$

$$x+xy+xy^2=35 \tag{2}$$

发现

$$525=x^2+x^2y^2+x^2y^4=(x-xy+xy^2)(x+xy+xy^2)$$

于是得到

$$x-xy+xy^2=15 \tag{3}$$

$(2)-(3)$ 得

$$2xy = 20 \Rightarrow x = \frac{10}{y}$$

代回 (3) 解得

$$(x, y) = (5, 2), \left(20, \frac{1}{2}\right)$$

3. 若两正数 a, b 满足

$$\begin{cases} a\sqrt{a} + b\sqrt{b} = 50 \\ a\sqrt{b} + b\sqrt{a} = 25 \end{cases}$$

求 ab 之值。

$$a\sqrt{a} + b\sqrt{b} = 50 \tag{1}$$

$$a\sqrt{b} + b\sqrt{a} = 25 \tag{2}$$

由 $\dfrac{(1)}{(2)}$ 得

$$\frac{(\sqrt{a})^3 + (\sqrt{b})^3}{\sqrt{ab}(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \frac{a - \sqrt{ab} + b}{\sqrt{ab}} = 2 \Rightarrow a + b = 3\sqrt{ab} \Rightarrow a^2 + b^2 = 7ab \tag{3}$$

又由 $(1) \times (2)$ 得

$$(a\sqrt{a} + b\sqrt{b})(a\sqrt{b} + b\sqrt{a}) = \sqrt{ab}(a^2 + b^2) + ab(a + b) = 1250 \tag{4}$$

将 (3) 代入 (4),

$$\sqrt{ab}(7ab) + ab(3\sqrt{ab}) = 10(\sqrt{ab})^3 = 1250 \Rightarrow ab = 25$$

4. 求正实数对 (x, y) 满足

$$\begin{cases} x^2 + x\sqrt[3]{xy^2} = 208 \\ y^2 + y\sqrt[3]{yx^2} = 1053 \end{cases}$$

原方程即

$$x^{\frac{4}{3}}(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}})=208 \tag{1}$$

$$y^{\frac{4}{3}}(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}})=1053 \tag{2}$$

两式相除得

$$\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{4}{3}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{4} \Rightarrow \frac{y}{x}=\left(\frac{3}{2}\right)^{3}=\frac{27}{8},$$

将 $y=\dfrac{27}{8}x$ 代入 (1), 解得

$$x^2\left(1+\frac{9}{4}\right)=208 \Rightarrow (x,y)=(8,27).$$

5. 设相异实数 x,y 满足

$$\begin{cases} x^2+\sqrt{3}y=4 \\ y^2+\sqrt{3}x=4 \end{cases}$$

求 $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$ 的值。

$$x^2+\sqrt{3}y=4 \tag{1}$$

$$y^2+\sqrt{3}x=4 \tag{2}$$

由于 $x\neq y,(1)-(2)$ 得

$$x^2-y^2=\sqrt{3}(x-y) \Rightarrow x+y=\sqrt{3}.$$

且 $(1)+(2)$ 得

$$x^2+y^2+\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=8 \Rightarrow x^2+y^2=(\sqrt{3})^2-2xy=5 \Rightarrow xy=-1$$

因此

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{5}{-1}=-5.$$

6. 计算所有实数 (x,y,z) 可能的 x 值的平方和

$$\begin{cases} xy+4z=60 \\ yz+4x=60 \\ zx+4y=60 \end{cases}$$

由 ① - ② 得 $y(x-z)+4(z-x)=0$ 即 $(x-z)(y-4)=0$ 解得 $y=4$ 或 $x=z$

同理, 由 ② - ③ 得 $(y-x)(z-4)=0$, 即 $z=4$ 或 $x=y$ 由 ③ - ① 得 $(z-y)(x-4)=0$, 即 $x=4$ 或 $y=z$

情形 1:x,y,z 全相等, 即 $x=y=z$ 代入 ① 得 $x^2+4x-60=0$ 解得 $(x+10)(x-6)=0$ 此时 $x=-10$ 或 $x=6$

情形 2:x,y,z 中有两个相等, 另一个为 4 若 $y=z=4$, 代入 ① 得 $4x+16=60$, 解得 $4x=44$, 即 $x=11$ 若 $x=y=4$, 代入 ② 得 $4z+16=60$, 解得 $z=11$, 此时 $x=4$ 若 $x=z=4$, 代入 ① 得 $4y+16=60$, 解得 $y=11$, 此时 $x=4$

情形 3: 若 x 为 4, 且 y,z 不一定为 4 当 $x=4$ 时, 由 ① 和 ② 得: $4y+4z=60 \implies y+z=15$ $yz+16=60 \implies yz=44$ 由此可知 y,z 是方程 $t^2-15t+44=0$ 的根解得 $(t-4)(t-11)=0$, 即 $\{y,z\}=\{4,11\}$ 这涵盖了情形 2 中的情况, 此时 $x=4$ 或 $x=11$

综合以上所有情形,x 的所有可能取值为 $\{-10,6,4,11\}$ x 的平方和计算如下:

$$(-10)^2+6^2+4^2+11^2$$

$$100+36+16+121=273$$

所以所有可能的 x 的平方和为 273。

7. 解方程组

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ x^2+y^2+z^2=18 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=4 \end{cases}$$

根据韦达定理, 令 x,y,z 为三次方程

$$t^3-\alpha t^2+\beta t-\gamma=0$$

的根。

由题意可知,

$$\alpha = 6, \beta =?, \gamma =?$$

因为 $\beta = xy+xz+yz$ 且 $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)$ 所以 $6^2 = 18+2(xy+xz+yz)$ 解得 $9 = xy + xz + yz$。

又因为 $(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2 = x+y+z+2(\sqrt{xy}+\sqrt{xz}+\sqrt{yz})$ 所以 $4^2 = 6+2(\sqrt{xy}+\sqrt{xz}+\sqrt{yz})$ 由此可得

$$\sqrt{xy} + \sqrt{xz} + \sqrt{yz} = 5$$

对上式两边平方, 有

$$(\sqrt{xy} + \sqrt{xz} + \sqrt{yz})^2 = 5^2$$

展开得

$$xy + xz + yz + 2\sqrt{xyz}(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}) = 25$$

代入已知数值

$$9 + 2\sqrt{xyz} \cdot 4 = 25$$

解得 $\sqrt{xyz} = 2$, 即 $xyz = 4$。

因此, 该三次方程为

$$t^3 - 6t^2 + 9t - 4 = 0$$

利用有理根定理进行综合除法:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -6 & 9 & -4 \\ \hline & & 1 & -5 & 4 \\ \hline & 1 & -5 & 4 & 0 \end{array}$$

方程可分解为

$$(t-1)(t^2 - 5t + 4) = 0$$

进一步分解得

$$(t-1)(t-1)(t-4) = 0$$

解得根为 $t = 1, 1, 4$。所以, 方程组的解为 $(x, y, z) = (1, 1, 4), (1, 4, 1), (4, 1, 1)$。

8. 若 x,y,z 满足

$$\begin{cases}\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{3+\log 2}+\dfrac{z}{3+\log 5}=1\\ \dfrac{x}{7}+\dfrac{y}{7+\log 2}+\dfrac{z}{7+\log 5}=1\\ \dfrac{x}{11}+\dfrac{y}{11+\log 2}+\dfrac{z}{11+\log 5}=1\end{cases}$$

求 $x+y+z$ 之值。

不妨设

$$\frac{a}{t}+\frac{b}{t+\log 2}+\frac{c}{t+\log 5}=1$$

则

$$f(t)=a(t+\log 2)(t+\log 5)+b\,t(t+\log 5)+c\,t(t+\log 2)-t(t+\log 2)(t+\log 5)=0$$

由韦达定理, 三根之和为

$$a+b+c-1=3+7+11=21\Rightarrow a+b+c=22$$

9. 已知 $x,y\in\mathbb{R}$, 求解方程组

$$\begin{cases}\sqrt{x}\left(1+\dfrac{1}{x+y}\right)=2\\ \sqrt{y}\left(1-\dfrac{1}{x+y}\right)=\sqrt{2}\end{cases}$$

$$1+\frac{1}{x+y}=\frac{2}{\sqrt{x}} \tag{1}$$

$$1-\frac{1}{x+y}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{y}} \tag{2}$$

$(1)^2-(2)^2$:

$$\left(1+\frac{1}{x+y}\right)^2-\left(1-\frac{1}{x+y}\right)^2=\frac{4}{x}-\frac{2}{y}\Rightarrow\frac{4}{x+y}=\frac{4y-2x}{xy}$$

整理得

$$x^2+xy-2y^2=0\Rightarrow(x+2y)(x-y)=0$$

由于 $x,y\geqslant 0$, 取 $x=y$, 代入 (1) 解得

$$1+\frac{1}{2x}=\frac{2}{\sqrt{x}}\Rightarrow 4x^2-12x+1=0\Rightarrow x=y=\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$$

10. 解方程组

$$\sqrt{\frac{x+y}{x}}+\sqrt{\frac{x}{x+y}}=\frac{5}{2}, \quad 2x^2+y^2=176$$

步骤 1: 令代换

$$u=\sqrt{\frac{x+y}{x}} \implies \frac{x+y}{x}=u^2$$

方程变为

$$\begin{aligned} u+\frac{1}{u}&=\frac{5}{2}\\ 2u+2&=5\sqrt{u}\\ 2u-5\sqrt{u}+2&=0\\ (2\sqrt{u}-1)(\sqrt{u}-2)&=0 \end{aligned}$$

解得

$$\sqrt{u}=\frac{1}{2} \implies u=\frac{1}{4}, \quad \sqrt{u}=2 \implies u=4$$

步骤 2: 得到 y 与 x 的线性关系

$$\begin{aligned} \text{若}u^2=\frac{1}{4} &\implies \frac{x+y}{x}=\frac{1}{4} \implies y=-\frac{3}{4}x\\ \text{若}u^2=16 &\implies \frac{x+y}{x}=16 \implies y=3x \end{aligned}$$

步骤 3: 代入 $2x^2+y^2=176$ 求 x 和 y

情况 1: $y=-\frac{3}{4}x$

$$\begin{aligned} 2x^2+\left(-\frac{3}{4}x\right)^2&=176\\ 2x^2+\frac{9}{16}x^2&=176\\ \frac{41}{16}x^2&=176\\ x^2&=\frac{176\cdot 16}{41}=\frac{2816}{41}\\ x&=\pm 16\sqrt{\frac{11}{41}}\\ y&=-\frac{3}{4}x=\mp 12\sqrt{\frac{11}{41}} \end{aligned}$$

情况 **2:** $y = 3x$

$$\begin{aligned}
2x^2 + (3x)^2 &= 176\\
2x^2 + 9x^2 &= 176\\
11x^2 &= 176\\
x^2 &= 16\\
x &= \pm 4\\
y &= 3x = \pm 12
\end{aligned}$$

步骤 **4:** 解集

$$(x,y) = (4,12), \quad (-4,-12), \quad \left(16\sqrt{\frac{11}{41}}, -12\sqrt{\frac{11}{41}}\right), \quad \left(-16\sqrt{\frac{11}{41}}, 12\sqrt{\frac{11}{41}}\right)$$

11. 解方程组

$$(91-2x)^3 = 216xy^2, \quad (37-2y)^3 = 216x^2y.$$

注意到 $216 = 6^3$, 于是两边同时开立方更为直观。令

$$x = u^3, \quad y = v^3.$$

则方程组变为

$$(91-2u^3)^3 = 216u^3v^6, \quad (37-2v^3)^3 = 216u^6v^3.$$

开立方得

$$91 - 2u^3 = 6uv^2, \quad 37 - 2v^3 = 6u^2v.$$

移项整理:

$$6uv^2 + 2u^3 = 91, \quad 6u^2v + 2v^3 = 37.$$

两式相加:

$$\begin{aligned}
6uv^2 + 2u^3 + 6u^2v + 2v^3 &= 91 + 37 = 128\\
2(u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2) &= 128\\
u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 &= 64\\
(u+v)^3 &= 64\\
u + v &= 4.
\end{aligned}$$

代入 $v=4-u$ 至第一方程:

$$\begin{aligned}6u(4-u)^2+2u^3&=91\\6u(16-8u+u^2)+2u^3&=91\\96u-48u^2+6u^3+2u^3&=91\\8u^3-48u^2+96u&=91\\8(u^3-6u^2+12u)&=91.\end{aligned}$$

观察因式分解:

$$u^3-6u^2+12u=(u-2)^3+27/8?$$

更精确地:

$$u^3-6u^2+12u=(u-2)^3+27/8 \text{ (通过立方展开或系数对比)}.$$

于是

$$8(u-2)^3+64=91 \implies 8(u-2)^3=27 \implies u-2=\frac{3}{2} \implies u=\frac{7}{2}.$$

因此

$$v=4-u=4-\frac{7}{2}=\frac{1}{2}.$$

回代 $x=u^3$, $y=v^3$:

$$x=\left(\frac{7}{2}\right)^3=\frac{343}{8},\quad y=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}.$$

最终解为:

$$\boxed{x=\frac{343}{8},\quad y=\frac{1}{8}}.$$

12. 已知 $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$, 解方程组

$$3(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}-125a=0,\qquad 4(a^2+b^2)+25b=0.$$

先考虑是否存在平凡解。

若 $a^2+b^2=0$, 则 $a=b=0$, 代入原方程组显然成立, 故 $(a,b)=(0,0)$ 为一组解。

以下假设 $a^2+b^2\neq 0$。

由第一式得

$$125a = 3(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}.$$

由第二式得

$$-25b = 4(a^2 + b^2).$$

将第二式两边同乘 $(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$, 得

$$-25b(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} = 4(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}.$$

于是

$$125a = 3(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}, \qquad -125b = 20(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}.$$

两式相除, 得

$$\frac{-a}{b} = \frac{3}{20}(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}.$$

平方得

$$\frac{400a^2}{9b^2} = a^2 + b^2.$$

整理得

$$400a^2 = 9b^2(a^2 + b^2),$$

即

$$a^2(400 - 9b^2) = 9b^2,$$

从而

$$a^2 = \frac{9b^2}{400 - 9b^2}.$$

代入第二个原方程

$$4(a^2 + b^2) + 25b = 0,$$

得

$$\begin{aligned} 4\left(\frac{9b^2}{400 - 9b^2} + b^2\right) + 25b = 0 \\ 4\left(\frac{400b^2}{400 - 9b^2}\right) + 25b = 0 \\ \frac{1600b^2}{400 - 9b^2} + 25b = 0. \end{aligned}$$

两边同乘 $400 - 9b^2$, 得

$$1600b^2 + 25b(400 - 9b^2) = 0,$$

即

$$-225b^3+1600b^2+10000b=0.$$

提取公因式 $25b$:

$$25b(-9b^2+64b+400)=0.$$

因此

$$b=0 \quad 或 \quad 9b^2-64b-400=0.$$

当 $b=0$ 时, 由第二原方程得 $a=0$, 即平凡解。

解二次方程

$$9b^2-64b-400=0$$

得

$$b=\frac{64\pm 136}{18},$$

即

$$b=\frac{100}{9} \quad 或 \quad b=-4.$$

代入第二原方程检验: $b=\frac{100}{9}$ 使 $4(a^2+b^2)+25b>0$, 不成立, 舍去。

当 $b=-4$ 时,

$$4(a^2+16)-100=0,$$

得

$$a^2=9,$$

即

$$a=\pm 3.$$

代入第一原方程,$a=-3$ 不满足,$a=3$ 满足。

因此非平凡解为

$$(a,b)=(3,-4).$$

综上, 方程组的解为

$$(a,b)=(0,0) \quad 或 \quad (3,-4).$$

13. 解方程组

$$x^3+9x^2y=-28, \quad y^3+xy^2=1$$

将第二个方程乘以 27, 使方程的结构便于使用立方和公式:

$$x^3 + 9x^2y = -28, \quad 27y^3 + 27xy^2 = 27$$

将两式相加并整理:

$$\begin{aligned} x^3 + 9x^2y + 27xy^2 + 27y^3 &= -28 + 27 = -1 \\ x^3 + 3(x)^2(3y) + 3(x)(3y)^2 + (3y)^3 &= -1 \\ [x + 3y]^3 &= -1 \end{aligned}$$

取实数解:

$$x + 3y = -1 \quad \Longrightarrow \quad x = -1 - 3y$$

将 $x = -1 - 3y$ 代入较简单的方程 $y^3 + xy^2 = 1$:

$$\begin{aligned} y^3 + (-1 - 3y)y^2 &= 1 \\ y^3 - y^2 - 3y^3 &= 1 \\ -2y^3 - y^2 - 1 &= 0 \\ 2y^3 + y^2 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

通过观察,$y = -1$ 是一个解:

$$2(-1)^3 + (-1)^2 + 1 = -2 + 1 + 1 = 0$$

分解余式:

$$2y^3 + y^2 + 1 = (y + 1)(2y^2 - y + 1)$$

判别式:

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1 - 8 < 0$$

二次方程无实数解, 因此唯一实数解为 $y = -1$。

由 $x = -1 - 3y$ 得到:

$$x = -1 - 3(-1) = 2$$

最终实数解为

$$(x, y) = (2, -1).$$

14. 解方程组

$$x^3+6xy^2=99,\quad 2y^3+3x^2y=70$$

先设 $y=mx$, 其中 $m\neq 0$。代入方程得到

$$x^3+6x(m^2x^2)=x^3+6m^2x^3=x^3(1+6m^2)=99,$$

$$2(m^3x^3)+3x^2(mx)=2m^3x^3+3mx^3=x^3(2m^3+3m)=70.$$

两式相除消去 x^3:

$$\frac{1+6m^2}{2m^3+3m}=\frac{99}{70}.$$

交叉相乘得到

$$70(1+6m^2)=99(2m^3+3m)\quad\Longrightarrow\quad 198m^3-420m^2+297m-70=0.$$

通过观察可知 $m=\frac{2}{3}$ 是一个根。利用多项式除法可分解为

$$198m^3-420m^2+297m-70=(3m-2)(66m^2-96m+35).$$

检查二次项的判别式:

$$\Delta=(-96)^2-4\cdot 66\cdot 35=9216-9240=-24<0$$

二次方程无实根, 因此唯一实根为

$$m=\frac{2}{3}\quad\Longrightarrow\quad y=\frac{2}{3}x.$$

将 $y=\frac{2}{3}x$ 代入第一个方程:

$$x^3+6x\left(\frac{2}{3}x\right)^2=x^3+6x\cdot\frac{4}{9}x^2=x^3+\frac{24}{9}x^3=x^3+\frac{8}{3}x^3=\frac{11}{3}x^3=99,$$

$$x^3=27\quad\Longrightarrow\quad x=3.$$

得到

$$y=\frac{2}{3}x=2.$$

最终解为

$$(x,y)=(3,2).$$

15. 求实数解

$$36y^2(x+1)+36x^2(y+1)=7x^2y^2, \quad 6x+6y+xy=0$$

步骤 1: 对两个方程进行倒数代换

$$X=\frac{1}{x}, \quad Y=\frac{1}{y}$$

第一个方程:

$$\begin{aligned}\frac{36y^2(x+1)}{36x^2y^2}+\frac{36x^2(y+1)}{36x^2y^2}&=\frac{7x^2y^2}{36x^2y^2}\\ \frac{x+1}{x^2}+\frac{y+1}{y^2}&=\frac{7}{36}\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y}+\frac{1}{y^2}&=\frac{7}{36}\\ X+X^2+Y+Y^2&=\frac{7}{36} \quad (1)\end{aligned}$$

第二个方程:

$$\begin{aligned}\frac{6x}{xy}+\frac{6y}{xy}+\frac{xy}{xy}&=0\\ \frac{6}{y}+\frac{6}{x}+1&=0\\ X+Y&=-\frac{1}{6} \quad (2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}X^2+\left(-X-\frac{1}{6}\right)^2&=\frac{13}{36}\\ X^2+X^2+\frac{1}{3}X+\frac{1}{36}&=\frac{13}{36}\\ 2X^2+\frac{1}{3}X-\frac{12}{36}&=0\\ 2X^2+\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}&=0\\ 6X^2+X-1&=0\end{aligned}$$

$$6X^2+X-1=0 \implies (3X-1)(2X+1)=0$$

$$X = \frac{1}{3} \quad \text{or} \quad X = -\frac{1}{2}$$

$$Y = -X - \frac{1}{6} \implies Y = \frac{1}{6} \quad \text{or} \quad Y = -\frac{2}{3}$$

步骤 4: 返回到 x, y

$$x = \frac{1}{X}, \quad y = \frac{1}{Y}$$

$$(x, y) = (3, 6), \quad (-2, -\frac{3}{2})$$

结论: 实数解为

$$(x, y) = (3, 6), \quad (x, y) = (-2, -\frac{3}{2})$$

16. Solve the following simultaneous equations for real x and y:

$$x^4 + y^4 = 97, \quad x + y = 5$$

方法 A: 使用对称替换

设

$$x = u + v, \quad y = u - v$$

则第二个方程给出

$$\begin{aligned}(u + v) + (u - v) &= 5\\ 2u &= 5\\ u &= \frac{5}{2}\end{aligned}$$

第一个方程变为

$$\begin{aligned}(u + v)^4 + (u - v)^4 &= 97\\ (u^4 + 4u^3v + 6u^2v^2 + 4uv^3 + v^4) + (u^4 - 4u^3v + 6u^2v^2 - 4uv^3 + v^4) &= 97\\ 2u^4 + 12u^2v^2 + 2v^4 &= 97\\ u^4 + 6u^2v^2 + v^4 &= \frac{97}{2}\end{aligned}$$

代入 $u=\frac{5}{2}$:

$$\begin{aligned}\left(\frac{5}{2}\right)^4+6\left(\frac{5}{2}\right)^2v^2+v^4&=\frac{97}{2}\\ \frac{625}{16}+6\cdot\frac{25}{4}v^2+v^4&=\frac{97}{2}\\ v^4+\frac{75}{2}v^2+\frac{625}{16}-\frac{97}{2}&=0\\ v^4+\frac{75}{2}v^2-\frac{151}{16}&=0\\ 16v^4+600v^2-151&=0\\ (4v^2-1)(4v^2+151)&=0\end{aligned}$$

所以

$$4v^2-1=0\implies v^2=\frac{1}{4}\implies v=\pm\frac{1}{2}$$

回代得到:

$$x=u+v=\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2}=3\text{ 或}2,\quad y=u-v=\frac{5}{2}\mp\frac{1}{2}=2\text{ 或}3$$

解对称性**:**

$$(x,y)=(3,2),\quad(2,3)$$

方法 **B:** 直接代入法

由 $x+y=5$ 得 $y=5-x$, 代入第一个方程:

$$\begin{aligned}x^4+(5-x)^4&=97\\ x^4+625-500x+150x^2-20x^3+x^4&=97\\ 2x^4-20x^3+150x^2-500x+528&=0\\ x^4-10x^3+75x^2-250x+264&=0\end{aligned}$$

观察到整数根 $x=2$ 或 $x=3$, 所以

$$(x-2)(x-3)(x^2-5x+44)=0$$

二次方程无实根, 因此实数解为

$$(x,y)=(2,3),\quad(3,2)$$

17. 设 a,b,c 为相异非零实数, 且

$$\frac{1+a^3}{a}=\frac{1+b^3}{b}=\frac{1+c^3}{c}.$$

求 $a^3+b^3+c^3$ 的所有可能值。

设

$$\frac{1+a^3}{a}=\frac{1+b^3}{b}=\frac{1+c^3}{c}=k$$

则 a,b,c 是方程

$$x^3-kx+1=0$$

的三根, 故设

$$x^3-kx+1=(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc$$

比较系数得

$$a+b+c=0,\quad abc=-1$$

故

$$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc0+3(-1)=-3$$

18. 若 $a,b,c\in\mathbb{R}^+$ 满足

$$abc=120,\quad a+b+c=a^2+b^2+c^2=a^3+b^3+c^3=\lambda,$$

求 $\lambda\in\mathbb{Z}^+$。

已知

$$a+b+c=a^2+b^2+c^2=a^3+b^3+c^3=\lambda.$$

由 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$,

$$ab+bc+ca=\frac{\lambda^2-\lambda}{2}.$$

由 $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3(a+b+c)(ab+bc+ca)+3abc$,

$$\lambda=\lambda^3-3\lambda\left(\frac{\lambda^2-\lambda}{2}\right)+3\cdot 120$$

解得

$$(\lambda-10)(\lambda^2+7\lambda+72)=0\Rightarrow\lambda=10\in\mathbb{Z}^+$$

19. 已知

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=6 \\ \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=87 \\ (\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)=33 \end{cases}$$

求

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}.$$

由 $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)\big((\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\big)$, 则

$$87-3\alpha\beta\gamma=6\big(36-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\big)\Rightarrow 6(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma=43 \tag{1}$$

又由 $33=(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)=1+6+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta\gamma$,

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta\gamma=26 \tag{2}$$

联立 (1),(2) 得,

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{69}{7},\quad \alpha\beta\gamma=\frac{113}{7}$$

因此

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\frac{69}{113}.$$

20. 已知 x,y,z 为实数满足

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1 \\ x^2+y^2+z^2=\dfrac{3}{2} \\ x^3+y^3+z^3=1 \end{cases}$$

且 $x+y+z$ 为整数, 求 $x+y+z$ 的值。

$$\begin{cases} xy+yz+zx=xyz \\ x^2+y^2+z^2=\dfrac{3}{2} \\ x^3+y^3+z^3=1 \end{cases}$$

令 $a=xyz$, 则

$$(x+y+z)^2=\frac{3}{2}+2a,\quad 1-3a=(x+y+z)\left(\frac{3}{2}-a\right)$$

联立得

$$\left(\frac{1-3a}{\frac{3}{2}-a}\right)^2=\frac{3}{2}+2a$$

解得

$$(4a+1)(4a^2-28a+19)=0\Rightarrow a=xyz=-\frac{1}{4}$$

故

$$x+y+z=\frac{1-3xyz}{\frac{3}{2}-xyz}=\frac{\frac{7}{4}}{\frac{7}{4}}=1$$

21. 已知存在实数 a,b,x,y 满足以下方程:

$$\begin{cases}ax^{2014}+by^{2014}=6\\ax^{2015}+by^{2015}=7\\ax^{2016}+by^{2016}=3\\ax^{2017}+by^{2017}=50\end{cases}$$

求 $ax^{2018}+by^{2018}$ 的值。

不妨设 $f(n)=ax^n+by^n$, 于是 $f(2014)=6, f(2015)=7, f(2016)=3, f(2017)=50$,

发现

$$(x+y)f(2015)=ax^{2016}+by^{2016}+ax^{2015}y+bxy^{2015}=f(2016)+xyf(2014)$$

$$(x+y)f(2016)=ax^{2017}+by^{2017}+ax^{2016}y+bxy^{2016}=f(2017)+xyf(2015)$$

解得

$$x+y=-9,\ xy=-11$$

故

$$(x+y)f(2017)=f(2018)+xyf(2016)\Rightarrow ax^{2018}+by^{2018}=f(2018)=-417$$

22. 求联立方程

$$\begin{cases}x\left(2x^2+y-\frac{1}{2}\right)=0\\y\left(x-y+\frac{5}{2}\right)=0\end{cases}$$

的所有实数解 (x,y)。

$$x\left(2x^2+y-\frac{1}{2}\right)=0 \tag{1}$$

$$y\left(x-y-\frac{5}{2}\right)=0 \tag{2}$$

情况一: 若 $x=0$, 由 (2) 得

$$y\left(0-y-\frac{5}{2}\right)=0 \Rightarrow y=0 \text{ 或 } y=-\frac{5}{2}.$$

解为

$$(0,0),\left(0,-\frac{5}{2}\right)$$

情况二: 若 $y=0$, 由 (1) 得

$$x\left(2x^2+0-\frac{1}{2}\right)=0 \Rightarrow x=0 \text{ 或 } x=\pm\frac{1}{2}.$$

其中 $x=0$ 已考虑, 解为

$$\left(\frac{1}{2},0\right),\left(-\frac{1}{2},0\right)$$

情况三: 若 $x\neq 0$ 且 $y\neq 0$,

$$\begin{cases}2x^2+y-\dfrac{1}{2}=0\\ x-y-\dfrac{5}{2}=0\end{cases}$$

两式相加得

$$2x^2+x-3=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2} \text{ 或 } x=-1$$

解为

$$\left(\frac{3}{2},-1\right),\left(-1,-\frac{7}{2}\right)$$

$\therefore$ 原方程组的所有解为

$$(0,0),\left(0,-\frac{5}{2}\right),\left(\frac{1}{2},0\right),\left(-\frac{1}{2},0\right),\left(\frac{3}{2},-1\right),\left(-1,-\frac{7}{2}\right)$$

23. 求联立方程

$$\begin{cases}x^2-y-2z=4\\ y^2-2z-3x=-2\\ 2z^2-3x-5y=-22\end{cases}$$

的所有实数解 (x,y,z)。

三式相加得

$$x^2-6x+y^2-6y+2z^2-4z=-20,$$

经配方后变为

$$(x-3)^2+(y-3)^2+2(z-1)^2=0$$

故 $x-3=0, y-3=0, z-1=0$, 解为 $(3,3,1)$

24. 设实数 x,y,z 满足以下方程

$$\begin{cases}4x+2yz-6z+9xz^2=4\\ xyz=1\end{cases}$$

求 $x+y+z$ 的所有可能值。

眼光发现 $xyz=1$ 提示了换元 $x=\dfrac{a}{b}$, $y=\dfrac{b}{c}$, $z=\dfrac{c}{a}$, 第一式变为

$$4\left(\frac{a}{b}\right)+2\left(\frac{b}{c}\right)\left(\frac{c}{a}\right)-6\left(\frac{c}{a}\right)+9\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{a}\right)^2=4$$

化简得

$$4a^2-4ab+2b^2-6bc+9c^2=0\Rightarrow(2a-b)^2+(b+3c)^2=0$$

于是 $2a-b=0, b+3c=0$, 即

$$x=\frac{a}{b}=\frac{1}{2},\ y=\frac{b}{c}=-3,\ z=\frac{1}{xy}=-\frac{2}{3}$$

解得

$$(x,y,z)=\left(\frac{1}{2},-3,-\frac{2}{3}\right)\Rightarrow x+y+z=-\frac{13}{6}$$

25. 求所有非零实数对 (x,y), 使得满足

$$\frac{x}{x^2+y}+\frac{y}{x+y^2}=-1\quad 且\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$$

令 $u=x+y,\ v=xy$, 则第二式化为 $\dfrac{u}{v}=1\Rightarrow u=v$。

由第一式得

$$x(x+y^2)+y(x^2+y)=-[(x^2+y)(x+y^2)]$$

展开并代换为 u,v 得

$$u^2-2v+uv=-(u^3-3uv+v+v^2)\Rightarrow u^3+u^2-2v+v^2-v=0$$

代入 $u=v$

$$v^3-v=0\Rightarrow v(v^2-1)=0$$

因 $xy\neq 0$, 故 $v=\pm 1$

若 $v=1$, 则 $x+y=1,\ xy=1\Rightarrow x^2-x+1=0$, 无实根。

若 $v=-1$, 则 $x+y=-1,\ xy=-1\Rightarrow x^2+x-1=0$

解得

$$(x,y)=\left(\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2},\ \frac{-1\mp\sqrt{5}}{2}\right)$$

26. 解方程组

$$\begin{aligned}
&x+y+z=9 && (1)\\
&x^2+y^2+z^2=41 && (2)\\
&x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)=180 && (3)
\end{aligned}$$

由 (2) 式:

$$(x+y+z)^2-2(xy+xz+yz)=41 \implies 9^2-2(xy+xz+yz)=41 \implies 2(xy+xz+yz)=40 \implies xy+xz+yz$$

由 (3) 式:

$$\begin{aligned}
x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)&=180\\
x^2(9-x)+y^2(9-y)+z^2(9-z)&=180\\
9(x^2+y^2+z^2)-(x^3+y^3+z^3)&=180\\
9(41)-[(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz]&=180\\
369-[9(41-20)+3xyz]&=180\\
369-(189+3xyz)&=180\\
180-3xyz&=180\\
3xyz=0 &\implies xyz=0.
\end{aligned}$$

因此,x,y,z 为三根的方程式为:

$$t^3-9t^2+20t=0 \implies t(t^2-9t+20)=0 \implies t(t-5)(t-4)=0.$$

$$\therefore \text{解集}=\{(0,5,4),(0,4,5),(4,5,0),(4,0,5),(5,0,4),(5,4,0)\}.$$

27. 已知实数 x,y,z 满足方程组

$$\begin{cases}
x+y+z=-3\\
\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=-\dfrac{1}{3}\\
x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)=-24
\end{cases}$$

求 $x^2+y^2+z^2$ 的值。

$$x+y+z=-3 \tag{1}$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=-\frac{1}{3} \tag{2}$$

$$x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)=-24 \tag{3}$$

设 $x^2+y^2+z^2=a$, 由 (1) 可得

$$(x+y+z)^2=9=a+2(xy+yz+zx)\Rightarrow xy+yz+zx=\frac{9-a}{2}$$

由 (2) 得

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{xy+yz+zx}{xyz}=-\frac{1}{3}\Rightarrow xyz=\frac{3(a-9)}{2}$$

由 (3) 得

$$\begin{aligned}
&x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)\\
&=x^2(-3-x)+y^2(-3-y)+z^2(-3-z)\\
&=-3(x^2+y^2+z^2)-(x^3+y^3+z^3)\\
&=-3a-\Big[(x+y+z)((x^2+y^2+z^2)-(xy+yz+zx))+3xyz\Big]\\
&=-3a-[(-3)\left(a-\frac{9-a}{2}\right)+3\cdot\frac{3(a-9)}{2}]\\
&=-3a+\frac{-9a+27}{2}+\frac{9a-81}{2}\\
&=-3a+27=-24\Rightarrow a=17
\end{aligned}$$

28. 已知方程组

$$\begin{cases}x+y+z=0 & —(1)\\ x^2+y^2+z^2=6 & —(2)\\ x^3+y^3+z^3=-3 & —(3)\end{cases}$$

求 $x^4+y^4+z^4$ 之值。

由 (2) 式:

$$(x+y+z)^2-2(xy+yz+xz)=6\implies 0-2(xy+yz+xz)=6\implies xy+yz+xz=-3.$$

由 (3) 式:

$$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)+3xyz\implies -3=0+3xyz\implies xyz=-1.$$

因此, 以 x,y,z 为三根的方程式为:

$$t^3-3t+1=0.$$

于是有:

$$\begin{aligned}
x^3-3x+1=0&\implies x^4-3x^2+x=0,\\
y^3-3y+1=0&\implies y^4-3y^2+y=0,\\
z^3-3z+1=0&\implies z^4-3z^2+z=0.
\end{aligned}$$

三式相加:

$$x^4+y^4+z^4=3(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)=3\cdot 6-0=18.$$

$$\therefore x^4+y^4+z^4=18.$$

29. 求序对 (x,y,z) 满足

$$\begin{cases}(x+y)^3=z,\\(y+z)^3=x,\\(z+x)^3=y.\end{cases}$$

不失一般性, 设 $x\geqslant y\geqslant z$, 则有

$$2x\geqslant x+y\geqslant x+z,\quad x+y\geqslant 2y\geqslant y+z,\quad x+z\geqslant y+z\geqslant 2z$$

立方可得

$$\begin{cases}8x^3\geqslant (x+y)^3\geqslant (x+z)^3\\(x+y)^3\geqslant 8y^3\geqslant (y+z)^3\\(x+z)^3\geqslant (y+z)^3\geqslant 8z^3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}8x^3\geqslant z\geqslant y\\z\geqslant 8y^3\geqslant x\\y\geqslant x\geqslant z^3\end{cases}\Rightarrow z\geqslant y\geqslant x$$

因此 $x=y=z$, 解 $(x+x)^3=x$ 得

$$(x,y,z)=(0,0,0),\left(\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4}\right),\left(-\frac{\sqrt{2}}{4},-\frac{\sqrt{2}}{4},-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

30. 求满足

$$\begin{cases}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)=1+y^7,\\(1+y)(1+y^2)(1+y^4)=1+x^7\end{cases}$$

的实数序对 (x,y) 个数。

情况一:$xy=0$, 得解 $(0,0)$。

情况二:$xy<0$。不失一般性设 $x>0>y$, 则

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)>1$$

且 $1+y^7<1$, 故无解。

情况三:$x,y>0,x\neq y$。不失一般性设 $x>y>0$, 则

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)>1+x^7>1+y^7$$

无解。

情况四:$x,y<0,x\neq 0$。不失一般性设 $x<y<0$, 则

$$1-x^8=(1+y^7)(1-x)=1-x+y^7-xy^7 \tag{1}$$

$$1-y^8=(1+x^7)(1-y)=1-y+x^7-x^7y \tag{2}$$

$(2)-(1)$ 得,

$$x^8-y^8=x-y+x^7-y^7-xy(x^6-y^6)$$

由于 $x<y<0$, 则 $x^8-y^8>0,x-y<0,x^7-y^7<0,-xy<0,x^6-y^6>0$, 左式为正, 右式为负, 故无解。

情况五:$x=y$, 则

$$1-x^8=1-x+y^7-xy^7=1-x+x^7-x^8\Rightarrow x=-1,0,1$$

其中只有 $(0,0),(-1,-1)$ 成立。

综上, 解为 $(0,0),(-1,-1)$, 共有 2 个实数序对。

31. 若非零实数 a,b,c 满足

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2=1, \\ a\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)+b\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}\right)+c\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)=-3, \end{cases}$$

求 $a+b+c$ 可能的取值个数。

由第二个方程式,

$$a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)=-3abc\Rightarrow(a+b+c)(ab+bc+ca)=0.$$

又 $(a+b+c)^2=1-2(ab+bc+ca)$, 所以

$$\frac{1}{2}(a+b+c)((a+b+c)^2-1)=0\Rightarrow a+b+c=-1,0,1$$

因此 $a+b+c$ 共有 3 个可能值。

32. 求在区间 $[0,2]$ 内满足方程组

$$\begin{cases} 2x^2-4x+7=y, \\ 2y^2-4y+7=z, \\ 2z^2-4z+7=x \end{cases}$$

的无序三元组 (x,y,z) 个数。

令 $a=x-1,b=y-1,c=z-1$，则 $a,b,c\in[-1,1]$，方程组化为

$$\begin{cases} 2a^2-1=b, \\ 2b^2-1=c, \\ 2c^2-1=a. \end{cases}$$

令 $a=\cos\theta,b=\cos 2\theta,c=\cos 4\theta,\theta\in[0,\pi]$，得到

$$\cos\theta=\cos 8\theta \Rightarrow -2\sin\frac{9\theta}{2}\sin\frac{7\theta}{2}=0.$$

解得

$$\theta-2n\pi=0,\frac{2\pi}{9},\frac{4\pi}{9},\frac{6\pi}{9},\frac{8\pi}{9},\frac{2\pi}{7},\frac{4\pi}{7},\frac{6\pi}{7},n\in\mathbb{Z}$$

在区间 $[-1,1]$ 内的无序三元组 (a,b,c) 为

$$(0,0,0),\left(\cos\frac{2\pi}{7},\cos\frac{4\pi}{7},\cos\frac{8\pi}{7}\right),\left(\cos\frac{2\pi}{9},\cos\frac{4\pi}{9},\cos\frac{8\pi}{9}\right),\left(\cos\frac{2\pi}{3},\cos\frac{2\pi}{3},\cos\frac{2\pi}{3}\right)$$

故原方程式无序三元组个数为 4。

33. 解方程

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\frac{199}{100}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}.$$

设 $a=x+\sqrt{x},b=x-\sqrt{x}$，则 $a-b=\sqrt{a}-\sqrt{b}=2\sqrt{x}$，原方程化为

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\frac{200}{199}\sqrt{x+\sqrt{x}},\quad \sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{199}{100}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

两式相加得

$$2\sqrt{x+\sqrt{x}}=\frac{200}{199}\sqrt{x+\sqrt{x}}+\frac{199}{100}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

解得
$$\sqrt{x}(19800\sqrt{x}-19801)=0 \Rightarrow \sqrt{x}=\frac{19801}{19800}>0 \Rightarrow x=\frac{19801^2}{19800^2}$$

34. 若 x,y,z 为相异复数, 满足
$$\begin{cases} x+y+z=1, \\ x^2+y=y^2+z=z^2+x, \end{cases}$$
求 $(x-y)(y-z)(z-x)$ 的值。

由 $x^2+y=y^2+z$, 得
$$x^2-y^2=(x+y)(x-y)=(1-z)(x-y)=z-y$$
同理得
$$(1-x)(y-z)=x-z, \quad (1-y)(z-x)=y-x$$
由于 $x\neq y\neq z$, 三式相乘可得
$$(1-x)(1-y)(1-z)=-1 \tag{1}$$
且由 $(1-z)(x-y)=z-y$ 展开得
$$x-z=xz-yz=z(x-y)$$
同理得
$$y-x=x(y-z), \quad z-y=y(z-x)$$
由于 $x\neq y\neq z$, 三式相乘可得
$$xyz=-1$$
现由 (1), 得
$$1-(x+y+z)+xy+yz+zx-xyz=-1 \Rightarrow xy+yz+zx=-2$$
设 $k=x^2+y=y^2+z=z^2+x$, 则
$$3k=x^2+y^2+z^2+x+y+z=1-2(-2)+1=6 \Rightarrow x^2+y=k=2$$
则
$$x-y=x-(2-x^2)=x^2+x-2=(x-1)(x+2),$$

同理

$$y-z=(y-1)(y+2), \quad z-x=(z-1)(z+2)$$

于是

$$\begin{aligned}
&(x-y)(y-z)(z-x)\\
&=(x-1)(y-1)(z-1)(x+2)(y+2)(z+2)\\
&=[xyz-(xy+yz+zx)+x+y+z-1][xyz+2(xy+yz+zx)+4(x+y+z)+8]=7
\end{aligned}$$

35. 已知 $xyz\neq 0, a, b, c$ 不全为零, 且满足方程组

$$\begin{cases}
a=\dfrac{by}{z}+\dfrac{cz}{y}\\
b=\dfrac{cz}{x}+\dfrac{ax}{z}\\
c=\dfrac{ax}{y}+\dfrac{by}{x}
\end{cases}$$

(a) 证明 $a^3x^3+b^3y^3+c^3z^3+abcxyz=0$。

将方程组改写为

$$\begin{cases}
(-ax)\dfrac{1}{x}+(cz)\dfrac{1}{y}+(by)\dfrac{1}{z}=0\\
(cz)\dfrac{1}{x}+(-by)\dfrac{1}{y}+(ax)\dfrac{1}{z}=0\\
(by)\dfrac{1}{x}+(ax)\dfrac{1}{y}+(-cz)\dfrac{1}{z}=0
\end{cases}$$

由与存在非零解 $\left(\dfrac{1}{x},\dfrac{1}{y},\dfrac{1}{z}\right)$, 则

$$\begin{vmatrix}
-ax & cz & by\\
cz & -by & ax\\
by & ax & -cz
\end{vmatrix}=0$$

展开可得

$$a^3x^3+b^3y^3+c^3z^3+abcxyz=0$$

(b) 证明 $\dfrac{yz}{x^2}+\dfrac{zx}{y^2}+\dfrac{xy}{z^2}=-1$。

改写成

$$\begin{cases} -a+\dfrac{y}{z}b+\dfrac{z}{y}c=0 \\ \dfrac{z}{x}a-b+\dfrac{x}{z}c=0 \\ \dfrac{x}{y}a+\dfrac{y}{x}b-c=0 \end{cases}$$

同理,

$$\begin{vmatrix} -1 & \dfrac{y}{z} & \dfrac{z}{y} \\ \dfrac{z}{x} & -1 & \dfrac{x}{z} \\ \dfrac{x}{y} & \dfrac{y}{x} & -1 \end{vmatrix}=0$$

展开行列式可得

$$\frac{yz}{x^2}+\frac{zx}{y^2}+\frac{xy}{z^2}=-1$$

(c) 证明 $a^3+b^3+c^3-5abc=0$。

由原方程组, 有

$$a^3=\left(\frac{by}{z}\right)^3+\left(\frac{cz}{y}\right)^3+3abc,\ b^3=\left(\frac{cz}{x}\right)^3+\left(\frac{ax}{z}\right)^3+3abc,\ c^3=\left(\frac{ax}{y}\right)^3+\left(\frac{by}{x}\right)^3+3abc$$

于是

$$2(a^3+b^3+c^3)=(a^3x^3+b^3y^3+c^3z^3)\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}\right)+9abc$$

由 $(a),(b)$ 得

$$2(a^3+b^3+c^3)=-abcxyz\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}\right)+9abc=10abc$$

即得证

$$a^3+b^3+c^3-5abc=0$$

36. 求实数解 (a,b,c,d) 满足方程组

$$\begin{cases} a+4b+8c+4d=53 \\ 3a^2+4b^2+12c^2+2d^2=159 \\ 9a^3+4b^3+18c^3+d^3=477 \end{cases}$$

由柯西不等式,

$$53\cdot 477=(a+4b+8c+4d)(9a^3+4b^3+18c^3+d^3)\geqslant(3a^2+4b^2+12c^2+2d^2)^2=159^2$$

此时等号成立, 有

$$\frac{a}{3a^2}=\frac{4b}{4b^2}=\frac{8c}{12c^2}=\frac{4d}{2d^2}.$$

设

$$\lambda=\frac{1}{3a}=\frac{1}{b}=\frac{2}{3c}=\frac{2}{d}.$$

则

$$a=\frac{1}{3\lambda},\quad b=\frac{1}{\lambda},\quad c=\frac{2}{3\lambda},\quad d=\frac{2}{\lambda}$$

代入第一式得

$$\frac{1}{3\lambda}+\frac{4}{\lambda}+\frac{16}{3\lambda}+\frac{8}{\lambda}=\frac{29}{3\lambda}=53\Rightarrow\lambda=\frac{29}{159}$$

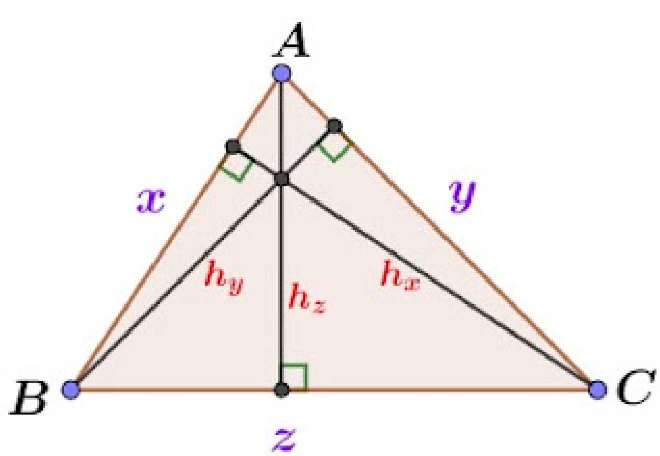
故实数解为

$$\left(\frac{159}{87},\frac{159}{29},\frac{106}{87},\frac{318}{29}\right)$$

37. 设正实数 x, y, z 满足

$$\begin{cases}x=\sqrt{y^2-\frac{1}{49}}+\sqrt{z^2-\frac{1}{49}}\\ y=\sqrt{x^2-\frac{1}{64}}+\sqrt{z^2-\frac{1}{64}}\\ z=\sqrt{x^2-\frac{1}{81}}+\sqrt{y^2-\frac{1}{81}}\end{cases}$$

求 $x+y+z$。



考虑一边长为 x, y, z, 对应高为

$$h_x = \frac{1}{7}, \quad h_y = \frac{1}{8}, \quad h_z = \frac{1}{9}$$

的 $\triangle ABC$, 则 x, y, z 满足题意;$\triangle ABC$ 面积为

$$S = \frac{1}{2}xh_x = \frac{1}{2}yh_y = \frac{1}{2}zh_z \Rightarrow x : y : z = 7 : 8 : 9$$

设 $x = 7k$, $y = 8k$, $z = 9k$, 半周长 $s = \frac{1}{2}(x + y + z) = 12k$, 面积又为

$$S = \sqrt{12k \cdot 5k \cdot 4k \cdot 3k} = 12\sqrt{5}k^2$$

联立得

$$S = \frac{1}{2}xh_x = \frac{k}{2} = 12\sqrt{5}k^2 \Rightarrow k = \frac{1}{24\sqrt{5}}$$

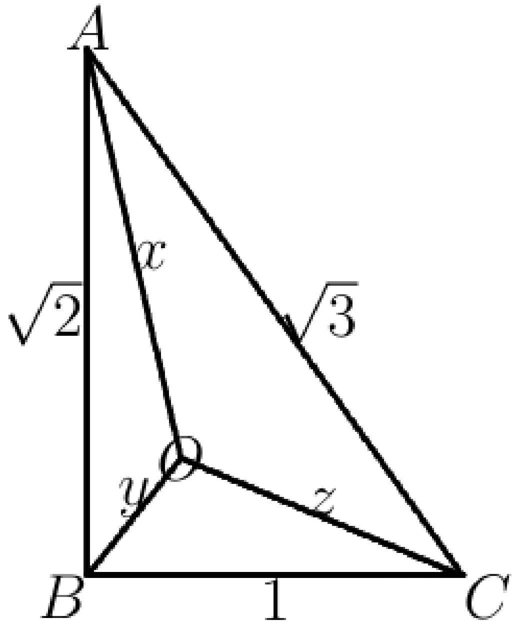
因此

$$x + y + z = 24k = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

38. 已知正数 x, y, z 满足

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 2 \\ y^2 + yz + z^2 = 1 \\ z^2 + zx + x^2 = 3 \end{cases}$$

求 $xy + yz + zx$。



方程组改写成

$$\begin{cases} x^2-2xy\cos 120^\circ+y^2=(\sqrt{2})^2 \\ y^2-2yz\cos 120^\circ+z^2=1^2 \\ z^2-2zx\cos 120^\circ+x^2=(\sqrt{3})^2 \end{cases}$$

考虑一边长为 $AB=\sqrt{2},BC=1,CA=\sqrt{3}$ 的 $\triangle ABC$, 其中

$$OA=x,OB=y,OC=z,\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=120^\circ$$

且满足

$$AB^2+BC^2=CA^2$$

故 $\triangle ABC$ 为直角三角形, 面积为

$$[ABC]=\frac{1}{2}(xy+yz+zx)\sin 120^\circ=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{2}$$

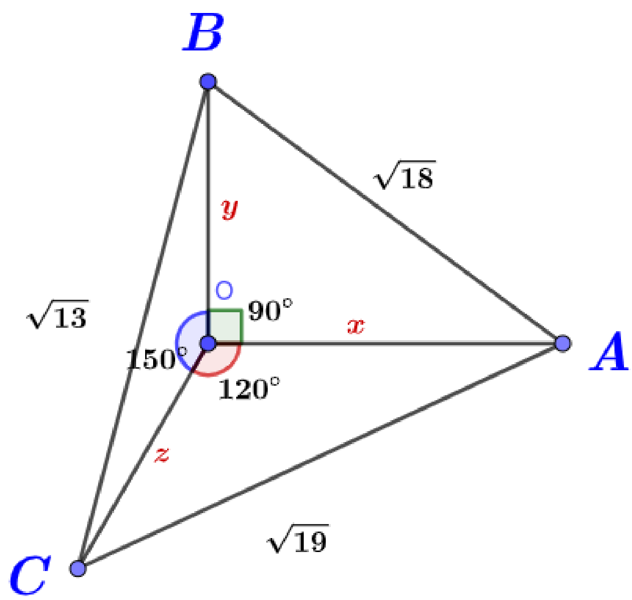
解得

$$xy+yz+zx=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

39. 已知 x, y, z 为实数且满足

$$\begin{cases} x^2+y^2=18 \\ y^2+\sqrt{3}yz+z^2=13 \\ x^2+xz+z^2=19 \end{cases}$$

求 $2xy+yz+\sqrt{3}xz$。



方程组改写成

$$\begin{cases} x^2+y^2-2xy\cos 90^\circ=(3\sqrt{2})^2 \\ y^2+z^2-2yz\cos 150^\circ=(\sqrt{13})^2 \\ x^2+z^2-2xz\cos 120^\circ=(\sqrt{19})^2 \end{cases}$$

构造 $\triangle ABC$, 满足边长:

$$\overline{AB}=\sqrt{18},\quad \overline{BC}=\sqrt{13},\quad \overline{AC}=\sqrt{19},\quad \overline{OA}=x,\quad \overline{OB}=y,\quad \overline{OC}=z$$

及夹角

$$\angle AOB=90^\circ,\quad \angle BOC=150^\circ,\quad \angle AOC=120^\circ$$

设半周长

$$s=\frac{\sqrt{18}+\sqrt{13}+\sqrt{19}}{2},$$

三角形面积为

$$S=\sqrt{s(s-\sqrt{18})(s-\sqrt{13})(s-\sqrt{19})}=3\sqrt{\frac{11}{2}}.$$

面积也等于

$$\frac{1}{2}\left(xy\sin 90^\circ + yz\sin 150^\circ + zx\sin 120^\circ\right) = \frac{1}{2}\left(xy + \frac{1}{2}yz + \frac{\sqrt{3}}{2}xz\right).$$

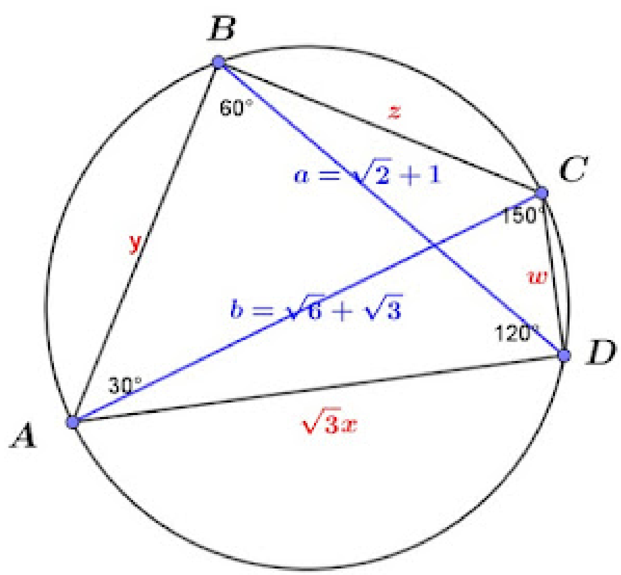
因此

$$\frac{1}{2}\left(xy + \frac{1}{2}yz + \frac{\sqrt{3}}{2}xz\right) = 3\sqrt{\frac{11}{2}} \implies 2xy + yz + \sqrt{3}xz = 6\sqrt{22}.$$

40. 已知联立方程组

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 - 3xy = 3 + 2\sqrt{2} \\ y^2 + z^2 - yz = 9 + 6\sqrt{2} \\ z^2 + w^2 + \sqrt{3}zw = 3 + 2\sqrt{2} \\ w^2 + 3x^2 + \sqrt{3}wx = 9 + 6\sqrt{2} \end{cases},$$

求 $\sqrt{3}xz + yw$ 之值。



设

$$3x^2 + y^2 - 3xy = 3 + 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} + 1)^2 = a^2,$$

$$y^2 + z^2 - yz = 9 + 6\sqrt{2} = (\sqrt{6} + \sqrt{3})^2 = b^2,$$

$$z^2 + w^2 + \sqrt{3}zw = 3 + 2\sqrt{2} = a^2,$$

$$w^2+3x^2+\sqrt{3}wx=9+6\sqrt{2}=b^2.$$

考虑一圆内接四边形, 边长分别为 $\sqrt{3}x$, y, z, w, 对角线长为 a,b; 由托勒密定理,

$$\sqrt{3}xz+yw=(\sqrt{2}+1)(\sqrt{6}+\sqrt{3})=3\sqrt{3}+2\sqrt{6}.$$

41. 已知实数 $x,y\in(0,1)$ 满足

$$\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}+\dfrac{2y}{1+\sqrt{1-y^2}+y}=1,\\ 25(1-y^2)=41-40\sqrt{1-x^2}\end{cases}$$

求 (x,y) 的所有解。

设 $x=\sin\alpha,y=\sin\beta,0<\alpha,\beta<\dfrac{\pi}{2}$, 则第一式变为

$$\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{2\sin\beta}{1+\cos\beta+\sin\beta}=1$$

继续化简得

$$\tan\frac{\alpha}{2}=1-\frac{2\sin\beta}{1+\cos\beta+\sin\beta}=\frac{1+\cos\beta-\sin\beta}{1+\cos\beta+\sin\beta}=\frac{1-\tan\frac{\beta}{2}}{1+\tan\frac{\beta}{2}}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)$$

故

$$\frac{\alpha}{2}=\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}+n\pi,n\in\mathbb{Z}\Rightarrow\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}\Rightarrow y=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$$

于是第二方程可化为

$$25(1-y^2)=41-40y$$

解得

$$x=\frac{3}{5},\quad y=\frac{4}{5}$$

42. 已知实数 $x>0$ 且 y,z 均为实数, 求联立方程组

$$\begin{cases}5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=12\left(y+\dfrac{1}{y}\right)=13\left(z+\dfrac{1}{z}\right),\\ xy+yz+zx=1\end{cases}$$

的解 (x,y,z)。

由条件 $x>0$, $x,y,z\in\mathbb{R}$, 可设

$$x=\tan A,\quad y=\tan B,\quad z=\tan C,$$

其中 $0<A<\dfrac{\pi}{2}$, $-\dfrac{\pi}{2}<B,C<\dfrac{\pi}{2}$, 于是

$$5\left(x+\frac{1}{x}\right)=12\left(y+\frac{1}{y}\right)=13\left(z+\frac{1}{z}\right)\implies 5\cdot\frac{2}{\sin 2A}=12\cdot\frac{2}{\sin 2B}=13\cdot\frac{2}{\sin 2C},$$

且

$$\tan A\tan B+\tan B\tan C+\tan C\tan A=1.$$

因此

$$\frac{5}{\sin 2A}=\frac{12}{\sin 2B}=\frac{13}{\sin 2C},\quad A+B+C=90^\circ.$$

由此得

$$\tan 2A=\frac{5}{12},\quad \tan 2B=\frac{12}{5},\quad \tan 2C=\infty,$$

故

$$\tan A=\frac{1}{5},\quad \tan B=\frac{2}{3},\quad \tan C=1.$$

即

$$(x,y,z)=\left(\frac{1}{5},\frac{2}{3},1\right)$$

43. 已知正实数 x,y,z 满足

$$x+y+z=xyz$$
$$\frac{x^2}{16(1+x^2)}=\frac{y^2}{25(1+y^2)}=\frac{z^2}{36(1+z^2)}$$

求 $\dfrac{x^2(1+x^2)^2}{z^2(1+z^2)^2}$.

考虑换元 $x=\tan A, y=\tan B, z=\tan C$, 其中 $A,B,C\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, 且注意到

$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C\iff A+B+C=\pi$$

于是可以将 A,B,C 视为某三角形的内角; 由

$$\frac{x^2}{16(1+x^2)}=\frac{y^2}{25(1+y^2)}=\frac{z^2}{36(1+z^2)}$$

化简得

$$\frac{4}{\sin A}=\frac{5}{\sin B}=\frac{6}{\sin C}$$

由正弦定理, 不妨设 $\triangle ABC$ 边长为 $a=4k, b=5k, c=6k, k\neq 0$, 则由余弦定理,

$$\cos A=\frac{(5k)^2+(6k)^2-(4k)^2}{2\cdot 5k\cdot 6k}=\frac{3}{4},\quad \cos C=\frac{(4k)^2+(5k)^2-(6k)^2}{2\cdot 4k\cdot 5k}=\frac{1}{8}$$

故

$$\frac{x^2(1+x^2)^2}{z^2(1+z^2)^2}=\frac{\tan^2 A\sec^4 A}{\tan^2 C\sec^4 C}=\frac{(\frac{\sqrt{7}}{3})^2(\frac{4}{3})^4}{(\sqrt{63})^2\cdot 8^4}=\frac{1}{186624}$$

44. 求所有 $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ 满足方程组

$$\begin{cases} a^2=\dfrac{b^3+9\sqrt{3}}{3b}=\dfrac{c^3+16}{3c} \\ b^2=\dfrac{a^3-10}{3a}=\dfrac{c^3+28}{3c} \\ c^2=\dfrac{b^3+45\sqrt{3}}{3b}=\dfrac{a^3-88}{3a} \end{cases}$$

由 (1), (2)

$$3a^2b-b^3=9\sqrt{3},\quad a^3-3ab^2=10$$

此时展开式

$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$$

毫无帮助, 不妨考虑

$$(a+bi)^3=a^3-3ab^2+(3a^2b-b^3)i=10+9\sqrt{3}i$$

两边取模得

$$(\sqrt{a^2+b^2})^3=\sqrt{10^2+(9\sqrt{3})^2}\Rightarrow a^2+b^2=7 \tag{3}$$

同理可得

$$b^2+c^2=19,\quad c^2+a^2=20 \tag{4}$$

由 (3), (4) 解得 $a^2=4, b^2=3, c^2=16$, 经检验得原方程组的解为

$$a=-2,\ b=\sqrt{3},\ c=-4$$

取整

1. 求大于 $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^6$ 的最小整数。

令
$$a=\sqrt{3}+\sqrt{2}, \quad b=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$
则
$$a^2=5+2\sqrt{6}, \quad b^2=5-2\sqrt{6}, \quad ab=1$$
所以
$$a^6+b^6=(a^2+b^2)(a^4+b^4-a^2b^2)=10(10^2-3)=970$$
由于 $0<b^2<1$, 所以
$$969<a^6<970 \quad \Rightarrow \quad \lceil a^6 \rceil=970$$

2. 求所有满足
$$\lfloor 0.5+\lfloor x \rfloor \rfloor=20$$
的 x 的取值范围

设
$$\lfloor x \rfloor=y$$
则
$$\lfloor 0.5+y \rfloor=20$$
由于 y 为整数, 所以 $0.5+y$ 必须满足
$$20 \leqslant 0.5+y<21$$
化简得
$$19.5 \leqslant y<20.5$$
因为 y 为整数, 所以
$$y=20$$

代回 $\lfloor x \rfloor = y$, 得

$$\lfloor x \rfloor = 20$$

因此

$$20 \leqslant x < 21$$

3. 求满足条件的 x 的取值范围

$$\lceil y - 1.3 \rceil = 16$$

其中 $y = \lceil x \rceil$

设

$$\lceil x \rceil = y$$

则

$$\lceil y - 1.3 \rceil = 16$$

根据取整定义, 有

$$15 \leqslant y - 1.3 < 16$$

两边同时加 1.3, 得

$$16.3 \leqslant y < 17.3$$

由于 y 为整数, 所以

$$y = 17$$

即

$$\lceil x \rceil = 17$$

因此

$$16 < x \leqslant 17$$

4. 求满足

$$\lceil x \rceil \lceil 2x \rceil = 15$$

的 x 的取值范围

设

$$x = n - r$$

其中 n 为整数,$0 < r \leqslant 1$, 则 $\lceil 2x \rceil = 2n$ 或 $2n - 1$.

当 $r < 1/2$,

$$\lceil x \rceil = n, \quad \lceil 2x \rceil = 2n$$

$$\Longrightarrow \; n(2n) = 15$$

当 $r \geqslant 1/2$,

$$\lfloor x \rceil = n, \quad \lceil 2x \rceil = 2n - 1$$

$$\Longrightarrow \; n(2n - 1) = 15$$

$$2n^2 - n - 15 = 0$$

$$(n - 3)(2n + 5) = 0$$

$$\therefore n = 3$$

x 的取值范围 $(2, 2.5]$

5. 计算

$$\sum_{r=1}^{34} \left\lfloor \frac{18r}{35} \right\rfloor$$

解法一

将整数部分与小数部分分开,

$$\sum_{r=1}^{34} \left\lfloor \frac{18r}{35} \right\rfloor = \sum_{r=1}^{34} \frac{18r}{35} - \sum_{r=1}^{34} \left\{ \frac{18r}{35} \right\}$$

先计算第一项,

$$\sum_{r=1}^{34} \frac{18r}{35} = \frac{18}{35} \sum_{r=1}^{34} r = \frac{18}{35} \cdot \frac{34 \cdot 35}{2} = 18 \cdot 17 = 306$$

注意到对任意 r,

$$\left\{ \frac{18r}{35} \right\} + \left\{ \frac{18(35 - r)}{35} \right\} = 1$$

当 r 从 1 到 34 时, 可以配成 17 对, 因此

$$\sum_{r=1}^{34} \left\{ \frac{18r}{35} \right\} = 17$$

于是

$$\sum_{r=1}^{34}\left\lfloor\frac{18r}{35}\right\rfloor=306-17=289$$

解法二

注意到

$$\frac{18r}{35}+\frac{18(35-r)}{35}=18$$

因此

$$\left\lfloor\frac{18r}{35}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{18(35-r)}{35}\right\rfloor+\left\{\frac{18r}{35}\right\}+\left\{\frac{18(35-r)}{35}\right\}=18$$

又因为

$$\left\{\frac{18r}{35}\right\}+\left\{\frac{18(35-r)}{35}\right\}=1$$

所以

$$\left\lfloor\frac{18r}{35}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{18(35-r)}{35}\right\rfloor=17$$

当 r 从 1 到 34 时, 可配成 17 组

$$(1,34),(2,33),\ldots,(17,18)$$

每一组的和均为 17, 因此

$$\sum_{r=1}^{34}\left\lfloor\frac{18r}{35}\right\rfloor=17\times17=289$$

6. 已知

$$\begin{cases}\lfloor b\rfloor+\lceil a\rceil+\{c\}=16\\ \lceil c\rceil+\lfloor b\rfloor+\{a\}=11.3\\ \lceil a\rceil+\lceil c\rceil+\{b\}=9.7\end{cases}$$

求 $a+b+c$

由题意可知, 小数部分分别为

$$\{a\}=0.3,\quad\{b\}=0.7,\quad\{c\}=0$$

代入原方程组, 得

$$\lfloor b\rfloor+\lceil a\rceil=16$$

$$\lceil c \rceil + \lfloor b \rfloor = 11$$

$$\lceil a \rceil + \lceil c \rceil = 9$$

由第二式与第三式可得

$$\lceil c \rceil = 2$$

$$\lfloor b \rfloor = 9 - 1 = 8$$

$$\lceil a \rceil = 9 - 2 = 7$$

因此

$$\lfloor a \rfloor = 7, \quad \lfloor b \rfloor = 8, \quad \lfloor c \rfloor = 2$$

结合小数部分,

$$a = 7.3, \quad b = 8.7, \quad c = 2$$

于是

$$a + b + c = 18$$

7. 设 x 为正实数, 且满足

$$x^2 + \{x\}^2 = 27$$

求 x

设

$$x = n + r$$

其中 n 为整数,$0 \leqslant r < 1$

注意到

$$x^2 \leqslant x^2 + \{x\}^2 < x^2 + 1$$

因此

$$26 < x^2 \leqslant 27$$

从而

$$n = 5$$

代入 $x=5+r$, 得

$$
\begin{aligned}
(5+r)^2+r^2&=27\\
25+10r+r^2+r^2&=27\\
2r^2+10r-2&=0\\
r^2+5r-1&=0
\end{aligned}
$$

解得

$$r=\frac{-5\pm\sqrt{29}}{2}$$

由于 $0\leqslant r<1$, 故

$$r=\frac{-5+\sqrt{29}}{2}$$

于是

$$x=5+r=\frac{5+\sqrt{29}}{2}$$

8. 设 r 为实数, 且满足

$$\left\lfloor r+\frac{19}{100}\right\rfloor+\left\lfloor r+\frac{20}{100}\right\rfloor+\cdots+\left\lfloor r+\frac{97}{100}\right\rfloor=546$$

求 $\lfloor 100r\rfloor$

从 $\frac{19}{100}$ 到 $\frac{97}{100}$, 共有

$$97-19+1=79$$

项

设这些取整值只可能为 7 或 8

若全部等于 7, 则和为

$$79\times 7=553$$

若全部等于 8, 则和为

$$79\times 8=632$$

由于

$$553>546,\quad 632>546$$

说明其中既有 7 也有 8

设前 k 项等于 7, 其余 $79-k$ 项等于 8, 则

$$\begin{aligned} 7k+8(79-k) &= 546 \\ 7k+632-8k &= 546 \\ 632-k &= 546 \\ k &= 86 \end{aligned}$$

这表示

$$\left\lfloor r+\frac{56}{100}\right\rfloor = 7, \quad \left\lfloor r+\frac{57}{100}\right\rfloor = 8$$

于是

$$7 \leqslant r+\frac{56}{100} < 8$$
$$8 \leqslant r+\frac{57}{100} < 9$$

化简得

$$7.43 \leqslant r < 7.44$$

两边同乘 100, 得到

$$743 \leqslant 100r < 744$$

因此

$$\lfloor 100r \rfloor = 743$$

9. 5) 求

$$\sum_{k=1}^{202} \lfloor \sqrt{k} \rfloor$$

因为

$$\lfloor \sqrt{202} \rfloor = 14$$

所以 $\lfloor \sqrt{k} \rfloor \in \{1,2,3,\ldots,14\}$

当

$$(n-1)^2 < k \leqslant n^2$$

时, 有

$$\lfloor\sqrt{k}\rfloor = n$$

对应的 k 的个数为

$$n^2-(n-1)^2=2n-1$$

其中 $n=1,2,\ldots,13$

当 $n=14$ 时, 对应的个数为

$$202-13^2=202-169=33$$

因此

$$\sum_{k=1}^{202}\lfloor\sqrt{k}\rfloor=\sum_{n=1}^{13}n(2n-1)+14\times 33$$

$$\begin{aligned}
&=\sum_{n=1}^{13}(2n^2-n)+462\\
&=2\sum_{n=1}^{13}n^2-\sum_{n=1}^{13}n+462\\
&=2\left(\frac{13\times 14\times 27}{6}\right)-\frac{13\times 14}{2}+462\\
&=1638-91+462\\
&=2009
\end{aligned}$$

10. 6) 求满足

$$\lfloor\sqrt{x}\rfloor-\lfloor\sqrt{x+34}\rfloor=0$$

的最小整数 x

设

$$\lfloor\sqrt{x}\rfloor=\lfloor\sqrt{x+34}\rfloor=y$$

则 x 与 $x+34$ 必须落在同一个平方区间内, 即

$$y^2\leqslant x<x+34<(y+1)^2$$

于是有

$$(y+1)^2 - y^2 > 34$$

化简得

$$\begin{aligned} 2y+1 &> 34 \\ 2y &> 33 \\ y &> 16.5 \end{aligned}$$

因此

$$y = 17$$

最小的 x 为

$$x = y^2 = 17^2 = 289$$

11. 7)

$$\lceil 1 \rceil + \lceil 1.7 \rceil + \lceil 2.4 \rceil + \lceil 3.1 \rceil + \cdots + \lceil 999.9 \rceil$$

$$\lceil 1 \rceil + \lceil 8 \rceil + \cdots + \lceil 995 \rceil = \frac{143}{2}(1+995)$$

$$\lceil 1.7 \rceil + \lceil 8.7 \rceil + \cdots + \lceil 995.7 \rceil = \frac{143}{2}(2+996)$$

$$\lceil 6.6 \rceil + \lceil 13.6 \rceil + \cdots + \lceil 993.6 \rceil = \frac{142}{2}(7+994)$$

$$\lceil 7.3 \rceil + \lceil 14.3 \rceil + \cdots + \lceil 994.3 \rceil = \frac{142}{2}(8+995)$$

$$\text{最终结果} = 715285$$

12. 8)

$$x^2 - 6\lfloor x \rfloor + 5 = 0$$

令 $\lfloor x\rfloor = n$, 代入方程得

$$x^2-6n+5=0 \implies x^2=6n-5$$

检查每个可能的 n 值:

$$\begin{aligned}
n=1: x^2=1 &\implies x=1 \quad (\text{有效}, 1\leqslant x<2)\\
n=2: x^2=7 &\implies x=\sqrt{7} \quad (2<\sqrt{7}<3)\\
n=3: x^2=13 &\implies x=\sqrt{13} \quad (3<\sqrt{13}<4)\\
n=4: x^2=19 &\implies x=\sqrt{19} \quad (4<\sqrt{19}<5)\\
n=5: x^2=25 &\implies x=5 \quad (\text{有效})
\end{aligned}$$

因此, 方程的解为

$$x=1,\sqrt{7},\sqrt{13},\sqrt{19},5$$

13. 9)

$$\lceil x\lfloor x\rfloor\rceil+\lfloor x\lceil x\rceil\rfloor=111$$

令 $x=n+r$, $0\leqslant r<1$. 则

$$\lceil (n+r)\lfloor (n+r)\rfloor\rceil+\lfloor (n+r)\lceil (n+r)\rceil\rfloor=111$$

展开得:

$$2n^2+n+\lceil nr\rceil+\lfloor (n+1)r\rfloor=111$$

解不等式:

$$2n^2+n+1\leqslant 111, \quad 2n^2+3n\geqslant 111$$

得 $n=7$, 因此解

$$\lceil 7r\rceil+\lfloor 8r\rfloor=6$$

得

$$\frac{3}{8}\leqslant r\leqslant\frac{3}{7}\Rightarrow 7+\frac{3}{8}\leqslant x\leqslant 7+\frac{3}{7}$$

14. 12)

$$\left\lfloor \frac{1^2}{2016} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{2^2}{2016} \right\rfloor, \ldots, \left\lfloor \frac{2016^2}{2016} \right\rfloor$$

要找序列中不同整数的个数，考虑连续两项的差:

$$\frac{n^2}{2016} - \frac{(n-1)^2}{2016} = \frac{2n-1}{2016} < 1 \implies n < 1007.5$$

前 1007 项: $n = 1, 2, \ldots, 1007$

$$\frac{1007^2}{2016} \approx 503.0005 > 503$$

因此前 1007 项产生整数 $0, 1, 2, \ldots, 503$，共有 504 个不同整数。

第 1008 项到 2016 项: 每项至少比前一项大 1，因此产生 $2016 - 1008 + 1 = 1009$ 个不同整数。

总不同整数数:

$$504 + 1009 = 1513$$

因此序列中共有 1513 个不同整数。

15. 13)

$$\sum_{n=0}^{1000} \left\lfloor \frac{2^n}{3} \right\rfloor$$

令

$$A_n = \left\lfloor \frac{2^n}{3} \right\rfloor$$

注意到

$$A_n = \frac{2^n}{3} - \frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{6}.$$

因此

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{n=0}^{1000} A_n = \sum_{n=0}^{1000} \left(\frac{2^n}{3} - \frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{6} \right) \\
&= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{1000} 2^n - \frac{1001}{2} + \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{1000} (-1)^n \\
&= \frac{1}{3}(2^{1001} - 1) - \frac{1001}{2} + \frac{1}{6} \cdot 0 \\
&= \frac{2^{1001} - 1}{3} - \frac{1001}{2} + \frac{1}{6} \\
&= \frac{2(2^{1001} - 1) - 3 \cdot 1001 + 1}{6} \\
&= \frac{2^{1002} - 3004}{6} = \frac{2^{1001} - 1502}{3}.
\end{aligned}
$$

因此和可表示为

$$S = 2^{1001}/3 - 1502/3 = 2^{1001} - 1502 \text{ (經約分後)}.$$

16. 14)

$$\lfloor x^2 \rfloor - \lfloor x \rfloor^2 = 1999$$

設 $x = n + r$, 其中 $n = \lfloor x \rfloor$, $r = \{x\}$. 則

$$\lfloor x^2 \rfloor - n^2 = \lfloor 2nr + r^2 \rfloor = 1999.$$

最小的 n 滿足

$$2nr \geqslant 1999 \implies n \geqslant \lceil 1999/2 \rceil = 1000.$$

因此

$$2 \cdot 1000 \cdot r + r^2 = 1999 \implies r^2 + 2000r - 1999 = 0$$

解得

$$r = -1000 + \sqrt{1001999}.$$

所以

$$x = n + r = 1000 + (-1000 + \sqrt{1001999}) = \sqrt{1001999}.$$

17. 16) 求方程
$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor = n - 1$$
在 $n \in \mathbb{N}$ 且 $1 \leqslant n \leqslant 100$ 的解的个数。

设 $f(n) = \lfloor n/2 \rfloor + \lfloor n/3 \rfloor + \lfloor n/6 \rfloor$, 则
$$f(n+6) = f(n) + 6$$
成立。

定义 $g(n) = f(n) - (n-1)$, 则
$$g(n+6) = g(n).$$

检查前几个值:
$$g(1) = g(2) = g(3) = g(4) = 0, \quad g(5) \neq 0, \quad g(6) \neq 0.$$

因此在 1 到 100 之间共有 68 个解。

18. 17) 求方程
$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor = \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \frac{n}{5}$$
的解。

右边为整数, 左边为整数, 因此 $n/2, n/3, n/5$ 都必须为整数, 即 n 为 30 的倍数。

在允许范围内, 共有 3 个解。

19. 18) 求方程
$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor = n$$
的解。

由于
$$\lfloor n/2 \rfloor + \lfloor n/3 \rfloor + \lfloor n/6 \rfloor \leqslant n/2 + n/3 + n/6 = n,$$
因此等号成立的情况共有 16 个。

20. 19) 求 x 满足方程

$$2\lfloor x\rfloor + 3x = 4 - 5\{x\}$$

设 $x = n + r$, 其中 $n = \lfloor x\rfloor$ 是整数部分, $r = \{x\}$ 是小数部分 $(0 \leqslant r < 1)$。代入方程得

$$2n + 3(n + r) = 4 - 5r$$

化简得

$$5n + 3r = 4 - 5r$$

$$5n + 8r = 4$$

由 $0 \leqslant r < 1$, 有

$$0 \leqslant 8r < 8$$

$$-4 < 5n \leqslant 4$$

唯一满足该不等式的整数是 $n = 0$, 因此

$$n = \lfloor x\rfloor = 0$$

代入 $n = 0$ 回到方程 $5n + 8r = 4$:

$$8r = 4 \implies r = \frac{1}{2}$$

因此解为

$$x = n + r = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

21. 20) 求满足条件的正整数 x 的个数

$$\left\lfloor \frac{x}{99} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{101} \right\rfloor$$

设

$$\left\lfloor \frac{x}{99} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{101} \right\rfloor = m \in \mathbb{Z}$$

由定义有

$$m \leqslant \frac{x}{99} < m + 1 \implies 99m \leqslant x < 99(m + 1)$$

$$m \leqslant \frac{x}{101} < m+1 \implies 101m \leqslant x < 101(m+1)$$

因此

$$101m \leqslant x < 99(m+1)$$

当 $m > 49$ 时，$101m > 99(m+1)$，无解。

对于 $0 \leqslant m \leqslant 49$，可行整数个数为

$$(99(m+1)-1) - 101m + 1 = 99(m+1) - 101m = 99 - 2m$$

总和为

$$\sum_{m=0}^{49}(99-2m) = 99 \cdot 50 - 2 \cdot \frac{49 \cdot 50}{2} = 4950 - 2450 = 2500$$

排除 $x = 0$ 不是正整数，最终答案为

$$\boxed{2499}$$

22. 21) 求满足条件的整数 x

$$\left\lfloor \frac{x}{1!} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{2!} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{3!} \right\rfloor = 224$$

首先近似使用不取整的值：

$$\frac{x}{1} + \frac{x}{2} + \frac{x}{6} - 3 < 224 < \frac{x}{1} + \frac{x}{2} + \frac{x}{6}$$

$$\frac{6x+3x+x}{6} - 3 < 224 < \frac{6x+3x+x}{6} \implies \frac{10x}{6} - 3 < 224 < \frac{10x}{6}$$

$$\frac{5x}{3} - 3 < 224 < \frac{5x}{3} \implies 134.4 \leqslant x < 136.2$$

由于 x 为整数，只有 $x = 135$ 可行。

$$\therefore x = 135$$

23. 22) 求满足条件的最大实数 x

$$\frac{\lfloor x \rfloor}{x} = \frac{9}{10}$$

设 $x=\lfloor x\rfloor+\{x\}$, 则有

$$10\lfloor x\rfloor=9x=9(\lfloor x\rfloor+\{x\})$$

$$10\lfloor x\rfloor=9\lfloor x\rfloor+9\{x\}\implies\lfloor x\rfloor=9\{x\}$$

由于 $0\leqslant\{x\}<1$, 可得 $\lfloor x\rfloor=1,2,\ldots,8$, 对应 $\{x\}=1/9,2/9,\ldots,8/9$

取最大值 $\{x\}=8/9$, $\lfloor x\rfloor=8$

$$x=\lfloor x\rfloor+\{x\}=8+\frac{8}{9}=\frac{80}{9}$$

函数

1. 求下列函数的值域:

   (a) $f(x) = x^2 - 2x + 5$, 其中 $D_f = [-1, 2]$

   配方法得
   $$f(x) = x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 4$$
   当 $x = 1, f_{\min} = 4$; 当 $x = -1, f_{\max} = 8$, 故
   $$R_f = [4, 8]$$

   (b) $f(x) = x + \sqrt{x(2-x)}$

   设 $y = x + \sqrt{x(2-x)}$, 则
   $$2x^2 - 2(y+1)x + y^2 = 0$$
   由于 $x \in \mathbb{R}$, 判别式为非负,
   $$4(y+1)^2 - 8y \geqslant 0 \Rightarrow 1 - \sqrt{2} \leqslant y \leqslant 1 + \sqrt{2}$$
   但 $0 \leqslant x \leqslant 2, y = x + \sqrt{x(2-x)} \geqslant 0$, 故 $y_{\min} = 0$。

   而当 $y = 1 + \sqrt{2}, x_1 = \dfrac{2 + \sqrt{2} - 2\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}} \in [0, 2]$, 故 $y_{\max} = 1 + \sqrt{2}$。

   于是
   $$R_f = [0, 1 + \sqrt{2}]$$

   (c) $f(x) = \dfrac{3x+4}{5x+6}$

   设 $y = \dfrac{3x+4}{5x+6}$, 则 $x = \dfrac{4-6y}{5y-3}$, 故反函数
   $$f^{-1}(x) = \frac{4-6x}{5x-3}$$
   的定义域为
   $$D_{f^{-1}} = \left(-\infty, \frac{3}{5}\right) \cup \left(\frac{3}{5}, \infty\right)$$
   即 R_f。

(d) $f(x)=\dfrac{3x+2}{x+1}$

发现

$$f(x)=\frac{3x+2}{x+1}=3-\frac{1}{x+1}\neq 3$$

故

$$R_f=(-\infty,3)\cup(3,\infty)$$

(e) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x-3}$

设 $y=\dfrac{\cos x}{\sin x-3}$, 则

$$3y=y\sin x-\cos x=\sqrt{y^2+1}\cos(x-\alpha)\Rightarrow\cos(x-\alpha)=\frac{3y}{\sqrt{y^2+1}}$$

由于 $\cos(x-\alpha)\in[-1,1]$, 解得

$$-1\leqslant\frac{3y}{\sqrt{y^2+1}}\leqslant 1\Rightarrow-\frac{\sqrt{2}}{4}\leqslant y\leqslant\frac{\sqrt{2}}{4}$$

即

$$R_f=\left[-\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4}\right]$$

(f) $f(x)=2^{x-5}+\log_3\sqrt{x-1}$, 其中 $D_f=[2,10]$

由于 2^{x-5} 与 $\log_3\sqrt{x-1}$ 在 $[2,10]$ 上皆为增函数, 故 $f(x)$ 也为增函数。
当 $x=2, f(x)=\dfrac{1}{8}$; 当 $x=10, f(x)=33$。故

$$R_f=\left[\frac{1}{8},33\right]$$

(g) $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$

发现

$$f(x)=\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$$

由 $x\geqslant 1$, 得 $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\geqslant 2$, 于是

$$0<\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\leqslant\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

即

$$R_f = (0, \sqrt{2}]$$

(h) $f(x) = x + 2 + \sqrt{1 - (x+1)^2}$

由于 $1 - (x+1)^2 \geqslant 0$，有 $(x+1)^2 \leqslant 1$，不妨设 $x + 1 = \cos\alpha, \alpha \in [0, \pi]$，则

$$f(x) = \cos\alpha + 1 + \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sin\alpha + \cos\alpha + 1 = \sqrt{2}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) + 1$$

由 $\alpha \in [0, \pi]$，可知

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant \sqrt{2}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) + 1 \leqslant 1 + \sqrt{2}$$

即

$$R_f = [0, 1 + \sqrt{2}]$$

(i) $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{x^4 + 2x^2 + 1}$

首先有

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{1 + x^2} \cdot \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$$

令 $x = \tan\beta$，则

$$f(x) = \frac{1}{2}\sin 2\beta \cos 2\beta = \frac{1}{4}\sin 4\beta$$

若 $k \in \mathbb{Z}$，当 $\beta = \dfrac{k\pi}{2} - \dfrac{\pi}{8}, f_{\max} = \dfrac{1}{4}$；当 $\beta = \dfrac{k\pi}{2} + \dfrac{\pi}{8}, f_{\min} = -\dfrac{1}{4}$，且此时 $\tan\beta$ 有意义，于是

$$R_f = \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$$

(j) $f(x) = x + 4 + \sqrt{5 - x^2}$

由 $5 - x^2 \geqslant 0$ 得 $|x| \leqslant \sqrt{5}$，令 $x = \sqrt{5}\cos\alpha, \alpha \in [0, \pi]$，则

$$f(x) = \sqrt{5}\cos\alpha + 4 + \sqrt{5}\sin\alpha = 4 + \sqrt{10}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$$

由于 $\alpha \in [0, \pi], \alpha - \dfrac{\pi}{4} \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right]$，故

$$f_{\max} = 4 + \sqrt{10} \cdot 1, \quad f_{\min} = 4 + \sqrt{10} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

故

$$R_f = [4-\sqrt{5}, 4+\sqrt{10}]$$

(k) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}}{x+3}$

设 $t=\sqrt{x+2}, t \geqslant 0$，则 $x+3=t^2+1$。当 $t>0$,

$$f(x) = \frac{t}{t^2+1} = \frac{1}{t+\frac{1}{t}} \leqslant \frac{1}{2}$$

等号成立当且仅当 $t=1$ 即 $x=-1$，于是

$$0 < f(x) \leqslant \frac{1}{2}$$

而当 $t=0$ 时,$f(x)=0$，故

$$R_f = \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

(l) $f(x) = (\sin x+1)(\cos x+1), x \in \left[-\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

由

$$f(x) = \sin x\cos x + \sin x + \cos x + 1$$

令 $t=\sin x+\cos x$，则 $\sin x\cos x = \dfrac{1}{2}(t^2-1)$，化为

$$f(x) = \frac{1}{2}(t^2-1)+t+1 = \frac{1}{2}(t+1)^2$$

又由 $t=\sin x+\cos x = \sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right), x \in \left[-\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 知

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant t \leqslant \sqrt{2}$$

当 $t=\sqrt{2}, f_{\max} = \dfrac{3}{2}+\sqrt{2}$；当 $t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}, f_{\min} = \dfrac{3}{4}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，于是

$$R_f = \left[\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{2}+\sqrt{2}\right]$$

(m) $f(x) = \left(\sin x + \dfrac{1}{\sin x}\right)^2 + \left(\cos x + \dfrac{1}{\cos x}\right)^2$

展开得

$$f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x+\csc^2 x+\sec^2 x+4=7+\tan^2 x+\cot^2 x$$

由 AM-GM 不等式,

$$f(x)\geqslant 7+2\sqrt{1}=9$$

等号成立当且仅当 $\tan x=\cot x$ 即 $x=k\pi\pm\dfrac{\pi}{4},k\in\mathbb{Z}$, 故

$$R_f=[9,\infty)$$

(n) $f(x)=2\sin x\sin 2x$

由 AM-GM 不等式,

$$[f(x)]^2=16\sin^4 x\cos^2 x=8\sin^2 x\sin^2 x(2-2\sin^2 x)\leqslant 8\cdot\left(2\cdot\frac{1}{3}\right)^3=\frac{64}{27}$$

等号成立当且仅当 $\sin^2 x=2-2\sin^2 x$ 即 $\sin^2 x=\dfrac{2}{3}$, 故

$$R_f=\left[-\frac{8\sqrt{3}}{9},\frac{8\sqrt{3}}{9}\right]$$

(o) $f(x)=|x-2|+|x+8|$

在一维数轴上设 $A=-8,B=2$, 当动点 P 在线段 AB 上,

$$f(x)=|x-2|+|x+8|=|AB|=10$$

当动点 P 在线段 AB 外,

$$f(x)=|x-2|+|x+8|>|AB|=10$$

故

$$R_f=[10,\infty)$$

(p) $f(x)=\sqrt{x^2-6x+13}+\sqrt{x^2+4x+5}$

写成

$$f(x)=\sqrt{(x-3)^2+(0-2)^2}+\sqrt{(x+2)^2+(0+1)^2}$$

即 x 轴上的动点 $P(x,0)$ 到两定点 $A(3,2),B(-2,-1)$ 的距离之和, 而当 P 为线段与 x

轴的交点时,

$$f_{\min} = |AB| = \sqrt{(3+2)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{43}$$

于是

$$R_f = [\sqrt{43}, \infty)$$

(q) $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 13} - \sqrt{x^2 + 4x + 5}$

写成

$$f(x) = \sqrt{(x-3)^2 + (0-2)^2} - \sqrt{(x+2)^2 + (0-1)^2}$$

即 AP 距离与 BP 距离之差, 其中 $A(3,2), B(-2,1), P(x,0)$。当 P 在 x 轴上且不是直线 AB 与 x 轴的交点时, 即 P', 则构成 $\triangle ABP'$, 有

$$\big||AP'| - |BP'|\big| < |AB| = \sqrt{(3+2)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{26}$$

即

$$-\sqrt{26} < f(x) < \sqrt{26}$$

而当 P 恰好在直线 AB 与 x 轴的交点时, 有

$$\big||AP'| - |BP'|\big| = |AB| = \sqrt{26}$$

故

$$R_f = (-\sqrt{26}, \sqrt{26}]$$

(r) $f(x) = x^2 + \sqrt{x^4 - 3x^2 + 2x + 5}$

变形可得

$$f(x) = x^2 + \sqrt{(x^2-2)^2 + (x+1)^2}$$

发现 $f(x)$ 表示抛物线 $y = x^2$ 上动点 $P(x, x^2)$ 到点 $A(-1,2)$ 和 x 轴的距离之和。

过 P 点作 $PB \perp x$ 轴于 B, 过 A 点作 $AC \perp x$ 轴于 C, BC 交抛物线 $y = x^2$ 于点 P_0, 故

$$|PA| + |PB| \geqslant |P_0A| + |P_0C| = |AC| = 2$$

所以

$$R_f = [2, \infty)$$

2. 设函数 $f:\mathbb{R}\setminus\{0,-b\}\to\mathbb{R}\setminus\{1\}$ 满足

$$f(x)=\frac{x+a}{x+b}$$

求出所有实数对 (a,b) 使得

$$f(f(x))=-\frac{1}{x}$$

据题意,

$$f(f(x))=\frac{\frac{x+a}{x+b}+a}{\frac{x+a}{x+b}+b}=\frac{(1+a)x+a+ab}{(1+b)x+a+b^2}=-\frac{1}{x}$$

整理得

$$(1+a)x^2+(a(1+b)+1+b)x+a+b^2=0.$$

解得

$$\begin{cases}1+a=0\\ a+b^2=0\end{cases}\quad\Rightarrow a=-1,b=\pm1$$

经检验,$(-1,-1)$ 不合题意, 故解为 $(-1,1)$

3. 已知函数 $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 互为反函数, 且函数

$$F(x)=f(x+1)-2,\quad G(x)=g(2x+1),$$

也互为反函数, 若 $f(1)=4$, 求 $f(100)$。

由于 F,G 互为反函数, 有

$$G(F(x))=g(2F(x)+1)=g(2(f(x+1)-2)+1)=x$$

又 f,g 互为反函数, 则

$$2f(x+1)-3=f(x)\Rightarrow f(x+1)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{3}{2}$$

由 $f(1)=4$, 可依次得到

$$f(2)=3+\frac{1}{2},\quad f(3)=3+\frac{1}{4},\dots$$

归纳可得

$$f(n)=3+\frac{1}{2^{n-1}},\ n\in\mathbb{N}$$

因此

$$f(100)=3+\frac{1}{2^{99}}$$

4. 已知函数 $g(x)=2x-4$，其反函数为 g^{-1}，且函数 f 对任意实数 x 皆满足

$$g(f(g^{-1}(x)))=2x^2+16x+26,$$

求 $f(\pi)$ 的值。

已知 g 可逆，令 $x=g(y)$，则 $y=g^{-1}(x)$，由题意得

$$g(f(y))=2(g(y))^2+16g(y)+26=2(2y-4)^2+16(2y-4)+26=8y^2-6$$

于是有

$$f(y)=g^{-1}(g(f(y)))=g^{-1}(8y^2-6)=\frac{8y^2-6+4}{2}=4y^2-1$$

所以

$$f(\pi)=4\pi^2-1$$

由 $y=g(x)=2x-4$，得

$$x=g^{-1}(y)=\frac{y+4}{2}$$

由 $g(f(g(x)))=2x^2+16x+26$，

$$f(g(x))=g^{-1}(2x^2+16x+26)=x^2+8x+15=(x+4)^2-1$$

且

$$f(g(x))=f\left(\frac{x+4}{2}\right)=(x+4)^2-1$$

令 $\dfrac{x+4}{2}=\pi$，则

$$f(\pi)=4\pi^2-1.$$

请问是哪一行有误？

5. 已知 $f(x)+2f(4-x)=x+8$，求 $f(16)$。

令 $x=-12,16$，可得联立方程

$$\begin{cases} f(-12)+2(16)=-4 \\ f(16)+2f(-12)=24 \end{cases}$$

解得

$$f(16)=-\frac{32}{3}$$

6. 若 $f(x)$ 为实系数二次多项式，已知 p,q,r 为三相异非零实数，使得 $f(p)=qr, f(q)=rp, f(r)=pq$，证明 $f(p+q+r)=f(p)+f(q)+f(r)$。

取 $g(x)=xf(x)-pqr$，则 $g(p)=g(q)=g(r)=0$，且有

$$g(x)=xf(x)-pqr=a(x-p)(x-q)(x-r)$$

于是

$$f(x)=\frac{1}{x}\left(ax^3-a(p+q+r)x^2+a(pq+qr+rp)x-apqr+pqr\right)$$

由于 $f(x)$ 为二次多项式，因此 $-apqr+pqr=0 \Rightarrow a=1$，得

$$f(x)=x^2-(p+q+r)x+pq+qr+rp$$

故得证

$$f(p+q+r)=pq+qr+rp=f(p)+f(q)+f(r)$$

7. 设 $Q(x)$ 是一个 2017 次多项式，且满足

$$Q'(r)=\frac{2017!}{r} \quad ,r=1,2,3,\cdots,2017$$

另定义

$$P(x)=xQ(x)-\int Q(x)\,dx.$$

若多项式 $P(x)$ 的所有根之和为 a，求 $a \pmod{1000}$。

有

$$P'(x)=xQ'(x)+Q(x)-Q(x) \Rightarrow P(x)=\int xQ'(x)\,dx$$

考虑函数

$$R(x)=xQ(x)-2017!$$

则 $R(r)=0, r=1,2,3,\cdots,2017$，故可设

$$R(x)=A(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-2017)$$

令 $x=0$ 可得 $A=1$，故

$$Q'(x)=\frac{(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-2017)+2017!}{x}$$

且

$$\begin{aligned}P(x)=\int xQ'(x)\,dx&=\int((x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-2017)+2017!)\,dx\\&=\int\left(x^{2017}-\frac{2017\cdot 2018}{2}x^{2016}+\cdots\right)\,dx\\&=\frac{1}{2018}x^{2018}-1009x^{2017}+\cdots\end{aligned}$$

由韦达定理, $P(x)$ 的所有根之和为

$$a=1009\cdot 2018\equiv 162\pmod{1000}$$

8. 定义函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 使得对所有实数 x 有

$$f(f(x))=x^2-x+1.$$

求 $f(0)$。

设 $f(0)=b$, 则

$$f(b)=f(f(0))=0^2-0+1=1$$

又有

$$f(f(b))=f(1)=b^2-b+1$$

因为 $f(b)=1$, 所以

$$f(f(b))=f(1)=1=b^2-b+1\implies b(b-1)=0.$$

若 $b=0$, 则 $f(0)=0$, 但 $f(f(0))=f(0)=0\neq 1$, 矛盾。故 $b=1$, 即

$$f(0)=1$$

9. 已知 $f(x)=e(x)+o(x)$, 其中 $e(x)$ 为偶函数,$o(x)$ 为奇函数, 且

$$e(x)+x^2=o(x),$$

求 $f(2)$。

由已知 $e(x)=f(x)-o(x)$, 换元得

$$e(-x)=f(-x)-o(-x)\Rightarrow e(x)=f(-x)+o(x)$$

故

$$f(-x)=-x^2\Rightarrow f(2)=4$$

10. 定义 f 在 $[0,1]$ 上满足

$$2f\left(\frac{x}{3}\right)=f(x),\quad f(x)+f(1-x)=1,$$

求 $f\left(\frac{1}{3}\right)$。

由递推公式, 则

$$f\left(\frac{1}{13}\right)+f\left(\frac{12}{13}\right)=1,$$

且

$$f\left(\frac{12}{13}\right)=2f\left(\frac{4}{13}\right)=2\left[1-f\left(\frac{9}{13}\right)\right]=2-2f\left(\frac{9}{13}\right)=2-4f\left(\frac{3}{13}\right)=2-8f\left(\frac{1}{13}\right)$$

解得

$$f\left(\frac{1}{13}\right)=\frac{1}{7}.$$

11. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数, 且对任意实数 x 均有 $2f(x)+f(x^2-1)=1$, 试求 $f(\sqrt{2})$ 的值。

分别令 $x=-1,0,1,\sqrt{2}$ 可得

$$2f(-1)+f(0)=1 \tag{1}$$
$$2f(0)+f(-1)=1 \tag{2}$$
$$2f(1)+f(0)=1 \tag{3}$$
$$2f(\sqrt{2})+f(1)=1 \tag{4}$$

由 (1), (2), (3) 解得

$$f(-1)=f(0)=f(1)=\frac{1}{3}$$

故由 (4) 得

$$f(\sqrt{2})=\frac{1}{3}$$

12. 设函数 $f(x)=\cos x+\log_2 x$, 其中 $x>0$, 若正实数 a 满足 $f(a)=f(2a)$, 求 $f(2a)-f(4a)$ 的值。

由条件得

$$\cos a+\log_2 a=\cos 2a+\log_2 2a=2\cos^2 a-1+\log_2 a+1$$

所以

$$\cos a(2\cos a-1)=0\Rightarrow(\cos a,\cos 2a)=(0,-1)\text{或}\,(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$$

于是

$$\begin{aligned}f(2a)-f(4a)&=\cos 2a+\log_2 2a-\cos 4a-\log_2 4a\\&=\cos 2a-2\cos^2 2a\\&=\begin{cases}-3, & \text{若}\cos 2a=-1,\\-1, & \text{若}\cos 2a=-\frac{1}{2}\end{cases}\end{aligned}$$

13. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 且 $f(x+2)-2$ 为奇函数, $f(2x+1)$ 为偶函数。若 $f(1)=0$, 求 $f(1)+f(2)+\cdots+f(2023)$ 的值。

$f(x+2)-2$ 为奇函数, 则

$$f(-x+2)-2+f(x+2)-2=0\Rightarrow f(2-x)+f(2+x)=4$$

于是 $f(2)=2$, $f(x)$ 的图象关于点 $(2,2)$ 对称, 又由 $f(2x+1)$ 为偶函数,

$$f(-2x+1)=f(2x+1)\Rightarrow f(1-2x)=f(1+2x)$$

即

$$f(1-x)=f(1+x)$$

$f(x)$ 图象关于直线 $x=1$ 对称, 由上可得

$$f(x)=f(2-x)=4-f(2+x)=4-f(-x)=4-[4-f(x+4)]=f(x+4)$$

所以 $f(x)$ 是周期为 4 的函数, 且

$$f(1)=0, f(2)=2, f(3)=4, f(4)=2$$

故

$$\begin{aligned}
& f(1)+f(2)+\cdots+f(2023) \\
& =505[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)]+f(1)+f(2)+f(3) \\
& =4046
\end{aligned}$$

14. 设 f 为实值函数, 且对任意实数 x 满足

1. $f(10+x)=f(10-x)$;
2. $f(20+x)=-f(20-x)$。

证明 f 是奇函数并且是周期函数。

令 $x=n-10$ 在 (a) 中, 则

$$f(n)=f(20-n)$$

又令 $x=n$ 在 (b) 中, 则

$$f(20-n)=-f(20+n)$$

因此

$$f(n)=-f(20+n)$$

再令 $x=n+10$ 在 (a) 中, 则

$$f(n+20)=f(-n)$$

结合上式可得

$$f(n)=-f(20+n)=f(-n),$$

所以 f 是奇函数。

最后, 令 $x=n-20$ 在 (b) 中, 则

$$f(n)=-f(40-n)$$

由于 f 是奇函数,$-f(40-n)=f(n-40)$, 所以

$$f(n)=f(n-40),$$

因此 f 是周期函数, 周期为 40。

15. 若整数 $m\geqslant 1$, 函数 f 满足

$$f(m+1)=m(-1)^{m+1}-2f(m),\quad f(1)=f(2001),$$

求 $f(1)+f(2)+\cdots+f(2000)$。

由递推式可得

$$f(2)=1-2f(1),\quad f(3)=-2-2f(2),\quad f(4)=3-2f(3),\ \ldots,\quad f(2001)=2000-2f(2000),$$

将 $f(2001)$ 替换为 $f(1)$ 并将所有式子相加, 得

$$\sum_{i=1}^{2000} f(i)=1-2+3-4+\cdots+1999-2000-2\sum_{i=1}^{2000} f(i).$$

所以

$$\sum_{i=1}^{2000} f(i)=\frac{1}{3}\left(\frac{2000}{2}-2000\right)=-\frac{1000}{3}.$$

16. 若实数 x,y,z 满足

$$\begin{cases}\dfrac{x}{1^2+4^2}+\dfrac{y}{1^2+5^2}+\dfrac{z}{1^2+6^2}=1\\ \dfrac{x}{2^2+4^2}+\dfrac{y}{2^2+5^2}+\dfrac{z}{2^2+6^2}=1\\ \dfrac{x}{3^2+4^2}+\dfrac{y}{3^2+5^2}+\dfrac{z}{3^2+6^2}=1\end{cases}$$

求 $x+y+z$。

设

$$f(k)=\frac{x}{k+4^2}+\frac{y}{k+5^2}+\frac{z}{k+6^2}-1,$$

据题意

$$f(1^2)=f(1)=0,\quad f(2^2)=f(4)=0,\quad f(3^2)=f(9)=0$$

因此 $f(k)$ 有三个根 $k=1,4,9$, 所以

$$(k-1)(k-4)(k-9)$$

与

$$(k+4^2)(k+5^2)(k+6^2)-x(k+5^2)(k+6^2)-y(k+4^2)(k+6^2)-z(k+4^2)(k+5^2)$$

相等, 比较 k^2 系数得

$$-(1+4+9)=4^2+5^2+6^2-(x+y+z)\Rightarrow x+y+z=91$$

17. 已知实数 α、β 满足

$$3^{\frac{\alpha}{2}}=\sqrt{3}-\alpha,\quad \log_3\beta=2\sqrt{3}-2\beta$$

求

$$(\alpha+\beta)^2-2(\sqrt{3})^\alpha-\log_3\beta$$

将底改为 $\sqrt{3}$:

$$\sqrt{3}^\alpha=\sqrt{3}-\alpha,\quad \log_{\sqrt{3}}\beta=\sqrt{3}-\beta$$

设 $A(\alpha,\sqrt{3}-\alpha)$ 为两图形 $y=\sqrt{3}^x$ 与 $y=\sqrt{3}-x$ 的交点 , $B(\beta,\sqrt{3}-\beta)$ 为两图形 $y=\log_{\sqrt{3}}x$ 与 $y=\sqrt{3}-x$ 的交点。

由于 $y=\sqrt{3}^x$ 与 $y=\log_{\sqrt{3}}x$ 关于 $y=x$ 对称,

$$\alpha=\sqrt{3}-\beta\Rightarrow\alpha+\beta=\sqrt{3}$$

因此

$$(\alpha+\beta)^2-2(\sqrt{3})^\alpha-\log_3\beta=(\sqrt{3})^2-2(\sqrt{3}-\alpha)-2(\sqrt{3}-\beta)=3-2\sqrt{3}$$

18. 设实数 α、β 满足

$$\begin{cases}\alpha^3-6\alpha^2+13\alpha=6\\ \beta^3-6\beta^2+13\beta=14\end{cases}$$

求 $\alpha+\beta$。

令

$$f(x)=x^3-6x^2+13x \Rightarrow f(\alpha)=6,\ \ f(\beta)=14$$

又

$$f'(x)=3x^2-12x+13 \Rightarrow f''(x)=6x-12=0 \Rightarrow x=2$$

因此图形 $y=f(x)$ 的对称中心为 $(2, f(2)=10)$, 所以 $P(\alpha,6), Q(\beta,14)$ 的对称点为

$$P'=(4-\alpha,14), Q'=(4-\beta,6)$$

于是由 $P=Q',\quad Q=P'$ 解得

$$\alpha=4-\beta,\quad \beta=4-\alpha \Rightarrow \alpha+\beta=4$$

19. 解方程

$$e^{x-1}\ln x+e^{y-1}\ln y=\ln(xy)$$

原式化为:

$$(e^{x-1}-1)\ln x+(e^{y-1}-1)\ln y=0$$

考虑函数 $f(t)=(e^{t-1}-1)\ln t$,

- 当 $t>1$ 时, $e^{t-1}-1>0, \ln t>0$, 故 $f(t)>0$
- 当 $0<t<1$ 时, $e^{t-1}-1<0, \ln t<0$, 故 $f(t)>0$
- 当 $t=1$ 时, $e^{t-1}-1=0, \ln 1=0$, 故 $f(1)=0$

故

$$f(x)+f(y)=0 \Rightarrow x=y=1$$

20. 已知 $x, y\in\mathbb{R}$, 且满足

$$\begin{cases}(x+1)^3+2023(x+1)=-2023\\(y+1)^3+2023(y+1)=2023\end{cases}$$

求 $x+y$ 的值。

考虑函数 $f(t)=t^3+2023t$, 据题意有

$$f(x+1)=-2023,\quad f(y+1)=2023$$

注意到 $f(t)$ 是奇函数,

$$f(x+1)=-f(y+1)=f(-(y+1))$$

且导数为

$$f'(t)=3t^2+2023>0,\quad \forall\, t\in\mathbb{R}$$

所以 f 在 $\mathbb{R}$ 上严格递增, 故 f 一对一, 因此有

$$x+1=-(y+1)\Rightarrow x+y=-2$$

21. 设函数 $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, 满足

$$f\left(1-\frac{1}{1+t}\right)+f\left(\frac{1+t}{t}\right)\log(1+t)=f\left(\frac{1+t}{t}\right)\log t+2022,$$

求 $f(1000)$。

令

$$x=\frac{t}{1+t}=1-\frac{1}{1+t},$$

则原式变为

$$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)\log(1+t)=f\left(\frac{1}{x}\right)\log t+2022$$

即

$$f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)\log x=2022 \tag{1}$$

再换元得

$$f\left(\frac{1}{x}\right)-f(x)\log\frac{1}{x}=2022\Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)\log x=2022$$

代入 (1) 得

$$f(x)-2022\log x+f(x)(\log x)^2=2022\Rightarrow f(x)=\frac{2022(1+\log x)}{1+(\log x)^2}$$

故

$$f(1000)=\frac{2022\cdot 4}{1+9}=808.8$$

22. 设函数 $f:\mathbb{R}\setminus\{0,1\}\to\mathbb{R}$ 使得

$$f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{x(1-x)}.$$

求 $f(x)$。

代入 x, $\dfrac{1}{1-x}$, 及 $\dfrac{x-1}{x}$ 得

$$f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{x(1-x)} \tag{1}$$

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=-\frac{(x-1)^2}{x} \tag{2}$$

$$f\left(\frac{x-1}{x}\right)+f(x)=\frac{x^2}{x-1} \tag{3}$$

$(1)+(3)-(2)$, 得

$$\begin{aligned}2f(x)&=\frac{1}{x(1-x)}+\frac{x^2}{x-1}+\frac{(x-1)^2}{x}\\&=\frac{-1+x^3+(x-1)^3}{x(x-1)}\\&=\frac{(x^2+x+1)+(x^2-2x+1)}{x}\\&=\frac{2x^2-x+2}{x}\end{aligned}$$

故

$$f(x)=x+\frac{1}{x}-\frac{1}{2}$$

23. 已知函数 $f(x)$ 定义在 $\mathbb{R}$ 上, 且满足 $f(1)=1$, 对所有实数 x 有

$$f(x+5)\geqslant x+5,\quad f(x+1)\leqslant f(x)+1.$$

若定义函数 $g(x)=f(x)+1-x$, 求 $g(2002)$。

$\forall x\in\mathbb{R}$, 由 $f(x+1)\leqslant f(x)+1$,

$$g(x+1)=f(x+1)+1-(x+1)\leqslant f(x)+1-x=g(x)$$

即 $g(x)$ 是递减函数, 且由 $f(x+5) \geqslant x+5$,

$$g(x+5)=f(x+5)+1-(x+5) \geqslant x+5+1-(x+5)=1$$

因为 $g(1)=f(1)+1-1=1$, 故 $g(x)=1\ \forall x \in \mathbb{R}$, 即 $g(2002)=1$

24. 设 $f: R \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, 使得对于所有非零实数 x, y 有

$$xy(f(x)-f(y))+2x=xf(x)-yf(y)+2y$$

若 $f'(1)=2018$, 求 $f(2018)$。

令 $y=1$, 有

$$xf(x)-xf(1)+2x=xf(x)-f(1)+2 \Rightarrow f(1)=2$$

令 $y=-1$, 有

$$-x(f(x)-f(-1))+2x=xf(x)+f(-1)-2 \Rightarrow f(x)=\frac{f(-1)+2}{2}+\frac{2-f(-1)}{2x}$$

求导得

$$f'(x)=\frac{f(-1)-2}{2x^2}$$

故由

$$f'(1)=\frac{f(-1)-2}{2}=2018$$

得 $f(-1)=4038$, 于是

$$f(x)=2020-\frac{2018}{x}$$

经检验, 原方程式左式 $=$ 右式 $=2020x-2018y$, 故

$$f(2018)=2019$$

将原式写成

$$xf(x)(y-1)+2x=yf(y)(x-1)+2y$$

$$xf(x)(y-1)+2(x-1)=yf(y)(x-1)+2(y-1)$$

$$\frac{xf(x)}{x-1}+\frac{2}{y-1}=\frac{yf(y)}{y-1}+\frac{2}{x-1}$$

$$\frac{xf(x)-2}{x-1}=\frac{yf(y)-2}{y-1}\quad \forall x,y\neq 0,1$$

设

$$\frac{xf(x)-2}{x-1}=c\Rightarrow f(x)=\frac{c(x-1)+2}{x}=c+\frac{2-c}{x}$$

求导得

$$f'(x)=\frac{c-2}{x^2}$$

由 $f'(1)=2018$ 得 $c=2020$, 故

$$f(x)=2020-\frac{2018}{x}$$

经检验, 原方程式左式 $=$ 右式 $=2020x-2018y$, 故

$$f(2018)=2019$$

25. 设函数 $f(x),g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续且满足

$$\begin{cases}f(x+y)=f(x)g(y)+g(x)f(y)\\ g(x+y)=f(x)f(y)+g(x)g(y)\end{cases}$$

且 $g(x)$ 为偶函数, $g(x)>0$ 恒成立, $g(0)\neq\frac{1}{2}$, 已知 $f(2)+g(2)=\frac{\sqrt{5}}{15}$, 求 $f(8)-g(8)$。

两式相加得

$$f(x+y)+g(x+y)=(f(x)+g(x))(f(y)+g(y))$$

设 $h(x)=f(x)+g(x)$, 则 $h(x+y)=h(x)h(y)$, 得 $h(x)=a^x$。两式相减得

$$g(x+y)-f(x+y)=(g(x)-f(x))(g(y)-f(y))$$

设 $k(x)=g(x)-f(x)$, 同理得 $k(x)=b^x$, 于是

$$f(x)=\frac{h(x)-k(x)}{2}=\frac{a^x-b^x}{2},\quad g(x)=\frac{h(x)+k(x)}{2}=\frac{a^x+b^x}{2}$$

由于 $g(x)$ 为偶函数, $g(x)=g(-x)$, 即

$$\frac{a^x+b^x}{2}=\frac{a^{-x}+b^{-x}}{2}\Rightarrow(a^x+b^x)a^xb^x=b^x+a^x\Rightarrow(ab)^x=1\Rightarrow ab=1,\ b=\frac{1}{a}$$

故

$$f(x)=\frac{a^x-a^{-x}}{2},\quad g(x)=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$$

由 $f(2)+g(2)=\dfrac{\sqrt{5}}{15}$ 可知

$$h(2)=a^2=\frac{\sqrt{5}}{15}\Rightarrow a^8=\left(\frac{\sqrt{5}}{15}\right)^4=\frac{1}{2025}$$

所以

$$f(8)-g(8)=-k(8)=-b^8=-\frac{1}{a^8}=-2025$$

26. 设 $a,b>0$ 使得关于 x 的方程 $\sqrt{|x|}+\sqrt{|x+a|}=b$ 恰有三个相异实数解 x_1,x_2,x_3，且 $x_1<x_2<x_3=b$，求 $a+b$ 的值。

令 $t=x+\frac{a}{2}$，则关于 t 的方程

$$\sqrt{\left|t-\frac{a}{2}\right|}+\sqrt{\left|t+\frac{a}{2}\right|}=b$$

恰有三个不同的实数解

$$t_i=x_i+\frac{a}{2},i=1,2,3$$

由于 $f(t)=\sqrt{|t-\frac{a}{2}|}+\sqrt{|t+\frac{a}{2}|}$ 为偶函数，故方程 $f(t)=b$ 的三个实数解关于原点对称分布，从而必有 $b=f(0)=\sqrt{2a}$

现求方程 $f(t)=\sqrt{2a}$ 的实数解:

- 当 $|t|\leqslant\frac{a}{2}$ 时，$f(t)=\sqrt{\frac{a}{2}-t}+\sqrt{\frac{a}{2}+t}=\sqrt{a+\sqrt{a^2-4t^2}}\leqslant\sqrt{2a}$，等号成立当且仅当 $t=0$
- 当 $t>\frac{a}{2}$ 时，$f(t)$ 单调递增，且当 $t=\frac{5a}{8}$ 时 $f(t)=\sqrt{2a}$
- 当 $t<-\frac{a}{2}$ 时，$f(t)$ 单调递减，且当 $t=-\frac{5a}{8}$ 时 $f(t)=\sqrt{2a}$

从而方程 $f(t)=\sqrt{2a}$ 恰有三个实数解

$$t_1=-\frac{5a}{8},\ t_2=0,\ t_3=\frac{5a}{8}$$

由条件知 $b=x_3=t_3-\frac{a}{2}=\frac{a}{8}$，结合 $b=\sqrt{2a}$ 得 $a=128$，于是 $a+b=\frac{9a}{8}=144$

不等式

1. 求满足不等式

$$\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2} < 2x+9$$

的实数 x 的集合。

首先定义域要求 $1+2x \geqslant 0$, 即 $x \geqslant -\frac{1}{2}$, 且分母不为零, 即 $1-\sqrt{1+2x} \neq 0$, 得 $x \neq 0$, 发现

$$\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2} = \left(\frac{1-(1+2x)}{1-\sqrt{1+2x}}\right)^2 = (1+\sqrt{1+2x})^2$$

由 $(1+\sqrt{1+2x})^2 < 2x+9$ 解得

$$\sqrt{1+2x} < \frac{7}{2} \Rightarrow x < \frac{45}{8}.$$

故 x 的取值范围为

$$\left[-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{45}{8}\right).$$

2. 已知

$$\begin{cases} \sqrt{x(x-3)} + \dfrac{8}{y^2} + \dfrac{y^2}{\sqrt{x(x-3)}} = 6, \\ x+y<0 \end{cases}$$

求 (x, y)。

据题意,

$$6 = \sqrt{x(x-3)} + \frac{8}{y^2} + \frac{y^2}{\sqrt{x(x-3)}} \geqslant 2|y| + \frac{8}{y^2} \Rightarrow 3y^2 \geqslant y^2|y| + 4 \tag{1}$$

当 $y > 0$, 化简得

$$y^3 - 3y^2 + 4 = (y+1)(y-2)^2 \leqslant 0$$

由于 $(y-2)^2 \geqslant 0$ 且 $y+1>0$, 故

$$y = 2 \Rightarrow x = -1, 4$$

经检验得 (-1,2),(4,2) 均不合题意; 同理当 $y<0$ 可解得

$$y=-2,\Rightarrow x=-1,4$$

经检验得, 原方程式只有唯一解 $(-1,-2)$

3. 解不等式
$$|x|^3-2x^2-4|x|+3<0,$$

令 $t=|x|$, 不等式化为
$$t^3-2t^2-4t+3<0$$
求根得 $t=3$ 和 $t=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$。于是

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}<|x|<3$$

解得

$$x\in\left(-3,-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2},3\right)$$

4. 假设 $a>1$ 且 $x,y>0$ 满足

$$(\log_a x)^2+(\log_a y)^2-\log_a(x^2y^2)\leqslant 2,\quad \log_a y\geqslant 1.$$

求 $\log_a(x^2y)$ 的取值区间。

设 $u=\log_a x$, $v=\log_a y$。不等式化为

$$u^2+v^2-2(u+v)\leqslant 2,\quad v\geqslant 1.$$

这是以 $(1,1)$ 为圆心、半径为 2 的半圆的上半部分。我们要求 $2u+v$ 的取值范围。

最小值在左下角 $(-1,1)$, 得 $2u+v=-1$。

最大值出现在斜率为 -2 的直线与半圆切点, 即联立

$$v-1=\frac{1}{2}(u-1),\quad (u-1)^2+(v-1)^2=4.$$

解得

$$(u,v)=\left(1+\frac{4}{\sqrt{5}},1+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\implies 2u+v=3+2\sqrt{5}.$$

因此区间为 $[-1,3+2\sqrt{5}]$。

5. 已知不等式 $|x^2+ax+2|\geqslant|x+1|$ 对任意 $x\in\mathbb{R}$ 恒成立，求实数 a 的取值范围。

将不等式两边平方得

$$(x^2+ax+2)^2\geqslant(x+1)^2$$

$$(x^2+ax+2)^2-(x+1)^2\geqslant 0$$

$$[(x^2+ax+2)-(x+1)][(x^2+ax+2)+(x+1)]\geqslant 0$$

$$[x^2+(a-1)x+1][x^2+(a+1)x+3]\geqslant 0$$

因为两个二次式领导系数为正，两个因式需对任意 x 恒非负。

对二次式 $x^2+(a-1)x+1$，

$$\Delta_1=(a-1)^2-4\leqslant 0\Rightarrow -1\leqslant a\leqslant 3$$

对二次式 $x^2+(a+1)x+3$，

$$\Delta_2=(a+1)^2-12\leqslant 0\Rightarrow -1-2\sqrt{3}\leqslant a\leqslant -1+2\sqrt{3}$$

综上所述，

$$a\in[-1,-1+2\sqrt{3}]$$

6. 求

$$|2|x-2|-5|\leqslant 3$$

的正整数解。

情况一：$|2|x-2|-5|=3$

$$\Rightarrow\begin{cases}2|x-2|-5=3\Rightarrow|x-2|=4\Rightarrow\begin{cases}x-2=4\Rightarrow x=6\\x-2=-4\Rightarrow x=-2\notin\mathbb{N}\end{cases}\\2|x-2|-5=-3\Rightarrow|x-2|=1\Rightarrow\begin{cases}x=3\\x=1\end{cases}\end{cases}$$

情况二: $|2|x-2|-5|=2$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2|x-2|-5=2 \Rightarrow |x-2|=\frac{7}{2} \notin \mathbb{Z} \\ 2|x-2|-5=-2 \Rightarrow |x-2|=\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

情况三: $|2|x-2|-5|=1$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2|x-2|-5=1 \Rightarrow |x-2|=3 \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=-1 \notin \mathbb{N} \end{cases} \\ 2|x-2|-5=-1 \Rightarrow |x-2|=2 \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=0 \notin \mathbb{N} \end{cases} \end{cases}$$

情况四: $|2|x-2|-5|=0$

$$\Rightarrow |x-2|=\frac{5}{2} \notin \mathbb{Z}$$

综上, 正整数解为 $x=1,3,4,5,6$

7. 若实数 a 可使得对任意实数 x, 不等式

$$|4x-3a|+|5x-4a| \geqslant a^2$$

恒成立, 求 a 的范围。

记

$$f(x)=|4x-3a|+|5x-4a|=4\left(\left|x-\frac{3}{4}a\right|+\left|x-\frac{4}{5}a\right|\right)+\left|x-\frac{4}{5}a\right|$$

由三角不等式得

$$f(x) \geqslant 4\left|\left(x-\frac{3}{4}a\right)-\left(x-\frac{4}{5}a\right)\right|+\left|x-\frac{4}{5}a\right|=\frac{|a|}{5}+\left|x-\frac{4}{5}a\right|$$

取 $x=\dfrac{4}{5}a$, 得 $f(x)$ 的最小值为 $\dfrac{|a|}{5}$, 欲使不等式对任意 x 恒成立需有

$$\frac{|a|}{5} \geqslant |a|^2 \Rightarrow |a|(5|a|-1) \leqslant 0 \Rightarrow \quad 0 \leqslant |a| \leqslant \frac{1}{5}$$

8. 已知实数 a,b 满足 $a+b \geqslant 3$, 试证

$$|a-2b^2|+|b-2a^2| \geqslant 6$$

由三角不等式,

$$\begin{aligned}
\left|a-2b^2\right|+\left|b-2a^2\right| &\geqslant \left|a-2b^2+b-2a^2\right| \\
&= \left|2(a^2+b^2)-(a+b)\right| \\
&\geqslant 2(a^2+b^2)-(a+b) \\
&= (a+b)^2+(a-b)^2-(a+b) \\
&\geqslant 3^2-3=6
\end{aligned}$$

故原不等式得证。

9. 若二次实系数多项式函数 $f(x)$ 满足

$$\begin{cases} -1 \leqslant f(1) \leqslant 3 \\ 6 \leqslant f(2) \leqslant 10 \\ 2 \leqslant f(4) \leqslant 24 \end{cases}$$

求 $f(7)$ 的最大值。

设 $f(x)=ax^2+bx+c$, 则

$$f(1)=a+b+c, \quad f(2)=4a+2b+c, \quad f(4)=16a+4b+c$$

解得

$$a=\frac{1}{3}f(1)-\frac{1}{2}f(2)+\frac{1}{6}f(4),\ b=-2f(1)+\frac{5}{2}f(2)-\frac{1}{2}f(4),\ c=\frac{8}{3}f(1)-2f(2)+\frac{1}{3}f(4)$$

因此

$$f(7)=49a+7b+c=5f(1)-9f(2)+5f(4)$$

取 $f(1)=3, f(2)=6, f(4)=24$, 得

$$f(7)_{\max}=5\cdot 3-9\cdot 6+5\cdot 24=81$$

10. 若 $a<b$, 已知对任意实数 x, 均有 $ax^2+bx+c \geqslant 0$, 且 $m<\dfrac{4a+3b+2c}{b-a}$ 恒成立, 求实数 m 的范围。

由 $ax^2+bx+c\geqslant 0\ (\forall x)$, 可知二次项系数满足

$$a>0,\quad b^2-4ac\leqslant 0$$

写成

$$\frac{4a+3b+2c}{b-a}=\frac{4\cdot\frac{a}{b}+3+2\cdot\frac{c}{b}}{1-\frac{a}{b}}$$

记 $t=\dfrac{a}{b}$, 则 $0<t<1$。由 $b^2-4ac\leqslant 0$ 得 $\dfrac{c}{b}\geqslant\dfrac{b}{4a}=\dfrac{1}{4t}$, 于是

$$\frac{4a+3b+2c}{b-a}\geqslant\frac{4t+3+2\cdot\frac{1}{4t}}{1-t}=\frac{4t+3+\frac{1}{2t}}{1-t}$$

记

$$k=\frac{4t+3+\frac{1}{2t}}{1-t}$$

其中 $0<t<1$, 整理得关于 t 的二次方程

$$(2k+8)t^2+(6-2k)t+1=0$$

为使该方程在 $0<t<1$ 上有解, 判别式必须非负,

$$(6-2k)^2-4(2k+8)\geqslant 0\Rightarrow k^2-8k+1\geqslant 0$$

解得

$$k\geqslant 4+\sqrt{15}>0$$

于是对任意符合条件的 a,b,c, 都有

$$\frac{4a+3b+2c}{b-a}\geqslant 4+\sqrt{15}$$

由题意 m 满足 $m<\dfrac{4a+3b+2c}{b-a}$ 恒成立, 故

$$m<4+\sqrt{15}$$

11. 已知 $a>0,b>0,a+b=1$, 证明不等式

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}\geqslant 8$$

由 AM-GM 不等式,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab} &= \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{a+b}{ab} \\
&= 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \\
&= 2\cdot\frac{a+b}{ab} \\
&= 4+2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right) \\
&\geqslant 4+2\cdot 2=8
\end{aligned}$$

12. 设 a,b 均为正数, 求

$$f(a,b)=ab(72-3a-4b)$$

的最大值。

由 AM-GM 不等式,

$$\begin{aligned}
f(a,b) &= \frac{1}{12}\cdot 3a\cdot 4b\cdot(72-3a-4b) \\
&\leqslant \frac{1}{12}\left(\frac{3a+4b+72-3a-4b}{3}\right)^3=1152
\end{aligned}$$

当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时等号成立。

13. 设 a,b,c 为正实数且满足 $a+b^2+c^3=11$, 求 abc 的最大值。

由 AM-GM 不等式,

$$\begin{aligned}
11 &= \frac{a}{6}+\frac{a}{6}+\frac{a}{6}+\frac{a}{6}+\frac{a}{6}+\frac{a}{6}+\frac{b^2}{3}+\frac{b^2}{3}+\frac{b^2}{3}+\frac{c^3}{2}+\frac{c^3}{2} \\
&= 11\sqrt[11]{\left(\frac{a}{6}\right)^6\left(\frac{b^2}{3}\right)^3\left(\frac{c^3}{2}\right)^2}=11\sqrt[11]{\frac{(abc)^6}{6^6\cdot 27\cdot 4}}
\end{aligned}$$

即

$$abc\leqslant 6\sqrt{3}\,\sqrt[3]{2}$$

当且仅当

$$\frac{a}{6}=\frac{b^2}{3}=\frac{c^3}{2}=1,$$

即 $a=6,\ b=\sqrt{3},\ c=\sqrt[3]{2}$ 时等号成立。

14. 实数 x,y,z 满足 $x^2+y^2+z^2=1$, 求 $\sqrt{2}xy+yz$ 的最大值。

由 AM-GM 不等式,

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x^2+\frac{1}{\sqrt{3}}y^2 \geqslant 2\sqrt{\frac{1}{2}x^2y^2}=\sqrt{2}xy,$$

$$\frac{1}{2\sqrt{3}}y^2+\frac{\sqrt{3}}{2}z^2 \geqslant 2\sqrt{\frac{1}{4}y^2z^2}=yz.$$

将两式相加得

$$\sqrt{2}xy+yz \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}(x^2+y^2+z^2)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

15. 设 x,y,z 为不全为 0 的实数, 求分式

$$\frac{xy+2yz}{x^2+y^2+z^2}$$

的最大值。

由 AM-GM 不等式,

$$x^2+\frac{1}{5}y^2 \geqslant 2sqrt\frac{1}{5}x^2y^2=\frac{2}{\sqrt{5}}xy$$

同理,

$$\frac{4}{5}y^2+z^2 \geqslant 2\sqrt{\frac{4}{5}y^2z^2}=\frac{4}{\sqrt{5}}yz$$

两式相加得

$$x^2+y^2+z^2 \geqslant \frac{2}{\sqrt{5}}(xy+2yz) \quad \Rightarrow \quad \frac{xy+2yz}{x^2+y^2+z^2} \leqslant \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

16. 求

$$f(x)=\frac{x^4+2x^3+3x^2+2x+10}{x^2+x+1}$$

的最小值。

由 AM-GM 不等式,

$$\begin{aligned} f(x)&=x^2+x+1+\frac{9}{x^2+x+1} \\ &\geqslant 2\sqrt{(x^2+x+1)\cdot\frac{9}{x^2+x+1}}=6 \end{aligned}$$

当 $(x^2+x+1)^2=9$ 即 $x=2$ 或 $x=-1$ 时, $f(x)$ 取得最大值 6

17. 求函数

$$y=\frac{4^x+1}{2^x+1}$$

的最小值。

由 AM-GM 不等式,

$$\begin{aligned}y=\frac{4^x-1}{2^x+1}+\frac{2}{2^x+1}&=2^x+1+\frac{2}{2^x+1}-2\\&\geqslant 2\sqrt{(2^x+1)\cdot\frac{2}{2^x+1}}-2=2\sqrt{2}-2\end{aligned}$$

当 $(2^x+1)^2=2$ 即 $x=\log_2(\sqrt{2}-1)$ 时, y 取得最大值 $2\sqrt{2}-2$

18. 求函数

$$f(x)=\log 2\log 5-\log 2x\log 5x$$

的最大值。

$$\begin{aligned}f(x)&=\log 2\log 5-(\log 2+\log x)(\log 5+\log x)\\&=-(\log 2+\log 5)\log x-\log^2 x\\&=-\log x-\log^2 x\\&=-\left(\log x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\leqslant\frac{1}{4}\end{aligned}$$

当 $\log x=-\frac{1}{2}$ 即 $x=\frac{\sqrt{10}}{10}$ 时, $f(x)$ 取得最大值 $\frac{1}{4}$.

19. 求函数

$$f(x,y)=x^2+2xy+2y^2+2x+4y+5$$

的最小值。

配方求最小值:

$$\begin{aligned}f(x,y)&=x^2+2xy+2y^2+2x+4y+5\\&=x^2+2(y+1)x+(y+1)^2+y^2+2y+4\\&=[x+(y+1)]^2+(y+1)^2+3\geqslant 3\end{aligned}$$

当 $x=0,y=-1$ 时 $f(x,y)$ 取到最小值 3。

20. $x,y\in\mathbb{R}$, 求

$$x^4+4x^3+8x^2+4xy+6x+4y^2+10$$

的最小值。

先配 y 项, 写成

$$f(x,y)=(x+2y)^2+x^4+4x^3+7x^2+6x+10$$

再用火眼金睛注意到

$$x^4+4x^3+7x^2+6x+2=(x+1)^2(x^2+2x+2)$$

故原式为

$$(x+2y)^2+(x+1)^2(x^2+2x+2)+8\geqslant 8$$

当 $x=-1,y=\dfrac{1}{2}$ 时, $f(x,y)$ 取得最小值 8.

21. 已知 $x,y>0$, 证明

$$\sqrt{x^2+y^2}>\sqrt[3]{x^3+y^3}$$

发现 $\sqrt{x^2+y^2}>\sqrt[3]{x^3+y^3}$ 等价于

$$x^6+3x^4y^2+3x^2y^4+y^6>x^6+2x^3y^3+y^6\Leftrightarrow x^2y^2(3x^2-2xy+3y^2)>0$$

其中关于 x 的两次函数 $3x^2-2xy+3y^2$ 判别式为

$$\Delta=4y^2-4(3)(3)(y^2)=-32y^2<0$$

故 $3x^2-2xy+3y^2>0$, 得证

$$x^2y^2(3x^2-2xy+3y^2)>0$$

22. 已知实数 a,b,c 满足 $c<b<a,a+b+c=1,a^2+b^2+c^2=1$, 求证

$$1<a+b<\frac{4}{3}.$$

由 $a^2+b^2+c^2=1, a+b+c=1$ 可得

$$ab=\frac{(a+b)^2-(a^2+b^2)}{2}=\frac{(1-c)^2-(1-c^2)}{2}=c^2-c.$$

所以 $a+b=1-c$, 且 a,b 是方程

$$x^2-(1-c)x+c^2-c=0$$

的两个相异实根, 其中判别式为

$$\Delta=(1-c)^2-4(c^2-c)>0 \Rightarrow -\frac{1}{3}<c<1.$$

又有

$$(c-a)(c-b)=c^2-c(a+b)+ab=c^2-c(1-c)+c^2-c=3c^2-2c.$$

因为 $c<b<a$, 所以 $c-a<0$, $c-b<0$, 故 $(c-a)(c-b)>0$, 即

$$3c^2-2c>0 \implies c<0 \text{ 或 } c>\frac{2}{3}.$$

综合 $-\frac{1}{3}<c<1$ 与上述条件, 得到

$$-\frac{1}{3}<c<0 \quad \text{或} \quad \frac{2}{3}<c<1.$$

若 $\dfrac{2}{3}<c<1$, 则

$$0<a+b<\frac{1}{3}$$

但由 $c<b<a$ 得 $a+b>c>\dfrac{2}{3}$, 矛盾, 因此只能有 $-\dfrac{1}{3}<c<0$, 则

$$1<a+b<\frac{4}{3}$$

23. 已知 a,b,c 为正实数, 求

$$\left\lfloor\frac{a+b}{c}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{b+c}{a}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{c+a}{b}\right\rfloor$$

的最小值。

由 $\lfloor x\rfloor > x-1,\ x\notin\mathbb{Z}$ 及 AM-GM 不等式,

$$\begin{aligned}S=\left\lfloor\frac{a+b}{c}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{b+c}{a}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{c+a}{b}\right\rfloor &> \frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}-3\\ &\geqslant 2+2+2-3=3\end{aligned}$$

由于 $S\in\mathbb{Z}$, 最小值为 $S_{\min}=4$, 例如可在 $a=6,b=8,c=9$ 时取得。

24. 已知 $x>0$, 求

$$x\lfloor x\rfloor+\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor+x+\frac{1}{x}+x\lceil x\rceil+\left\lceil\frac{1}{x}\right\rceil$$

的最小值。

设

$$f(x)=x\lfloor x\rfloor+\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor+x+\frac{1}{x}+x\lceil x\rceil+\left\lceil\frac{1}{x}\right\rceil$$

观察到 $f(1)=6$, 若 $x>1$, 即 $0<\dfrac{1}{x}\leqslant 1$,

$$x\lfloor x\rfloor+\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor\geqslant x>1,\quad x\lceil x\rceil+\left\lceil\frac{1}{x}\right\rceil\geqslant 2x+1>3,\quad x+\frac{1}{x}>2$$

于是当 $x>1, f(x)>6=f(1)$。若 $0<x\leqslant\dfrac{1}{2}$, 即 $2\leqslant\dfrac{1}{x}$

$$x\lfloor x\rfloor+\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor\geqslant 2,\quad x\lceil x\rceil+\left\lceil\frac{1}{x}\right\rceil\geqslant x+2>2,\quad x+\frac{1}{x}>2$$

于是当 $0<x\leqslant\dfrac{1}{2}, f(x)>6=f(1)$。若 $\dfrac{1}{2}<x<1$, 即 $1<\dfrac{1}{x}<2$,

$$f(x)=1+x+\frac{1}{x}+x+2=3+2x+\frac{1}{x}\geqslant 3+2\sqrt{2}$$

等号成立当且仅当

$$2x=\frac{1}{x}$$

即 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$。由于 $3+2\sqrt{2}<6, f(x)$ 的最小值为 $3+2\sqrt{2}$。

25. 若实数 x,y 满足 $4x^2-2xy+2y^2=1$, 则 $3x^2+xy+y^2$ 的最大值与最小值的和为

(待解)

26. 实数 x,y,z,t 满足

$$x^2+y^2=16,\quad z^2+t^2=25,\quad xt-yz=20,$$

求 xz 的最大值。

由柯西不等式,

$$16\cdot 25=(x^2+y^2)(t^2+(-z)^2)\geqslant(xt-yz)^2=20^2$$

此时等号成立,可解得

$$\frac{x}{t}=\frac{y}{-z}=\frac{4}{5}\Rightarrow xz=-\frac{5}{4}xy$$

由 $x^2+y^2=16$ 可得

$$|xy|\leqslant\frac{x^2+y^2}{2}=8$$

所以

$$-10=-\frac{5}{4}\cdot 8\leqslant xz\leqslant-\frac{5}{4}\cdot(-8)=10$$

因此 xz 的最大值为 10。

27. 设 $a_1,a_2,\ldots,a_{18}$ 均为大于 1 的实数,求

$$\frac{\log_{a_1}2023+\log_{a_2}2023+\cdots+\log_{a_{18}}2023}{\log_{a_1a_2\cdots a_{18}}2023}$$

的最小值。

利用换底公式,原式即

$$\frac{\sum_{i=1}^{18}\frac{1}{\log_{2023}a_i}}{\frac{1}{\sum_{i=1}^{18}\log_{2023}a_i}}=\left(\sum_{i=1}^{18}\frac{1}{\log_{2023}a_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{18}\log_{2023}a_i\right).$$

由柯西不等式,

$$\left(\sum_{i=1}^{18}\log_{2023}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{18}\frac{1}{\log_{2023}a_i}\right)\geqslant\left(\sum_{i=1}^{18}1\right)^2=18^2=324.$$

28. 存在 2017 个正实数 $x_1,x_2,\ldots,x_{2017}$ 使得

$$\sum_{i=1}^{2017}x_i=\sum_{i=1}^{2017}\frac{1}{x_i}=2018,$$

求

$$x_1+\frac{1}{x_1}$$

的最大可能值。

由柯西不等式,

$$(2018-x_1)\left(2018-\frac{1}{x_1}\right)=\left(\sum_{i=2}^{2017}x_i\right)\left(\sum_{i=2}^{2017}\frac{1}{x_i}\right)\geqslant 2016^2.$$

展开左边得

$$2018^2-2018\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)+1\geqslant 2016^2.$$

于是

$$x_1+\frac{1}{x_1}\leqslant\frac{8069}{2018}.$$

等号成立当且仅当 $x_i=\frac{1}{x_i}$, 即 $x_i=1, i=2,3,\ldots,2017$

29. 已知 a,b,c 为正数, 且 $a+b+c=1$。求

$$\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right)$$

的最小值。

由 AM-GM 不等式,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right)&=\left(\frac{1-a}{a}\right)\left(\frac{1-b}{b}\right)\left(\frac{1-c}{c}\right)\\&=\left(\frac{b+c}{a}\right)\left(\frac{a+c}{b}\right)\left(\frac{a+b}{c}\right)\\&\geqslant\left(\frac{2\sqrt{bc}}{a}\right)\left(\frac{2\sqrt{ac}}{b}\right)\left(\frac{2\sqrt{ab}}{c}\right)=8\end{aligned}$$

当且仅当 $a=b=c=\frac{1}{3}$ 时等号成立。

30. 已知 a,b,c 为三角形三边, 证明不等式

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geqslant 3$$

发现

$$
\begin{aligned}
&\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c} \geqslant 3 \\
\Longleftrightarrow\ &\left(\frac{2a}{b+c-a}+1\right)+\left(\frac{2b}{c+a-b}+1\right)+\left(\frac{2c}{a+b-c}+1\right) \geqslant 9 \\
\Longleftrightarrow\ &(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}+\frac{1}{a+b-c}\right) \geqslant 9
\end{aligned}
$$

由于

$$(b+c-a)+(c+a-b)+(a+b-c)=a+b+c,$$

且

$$b+c-a>0,\ c+a-b>0,\ a+b-c>0$$

由 AM-HM 不等式或柯西不等式, 原不等式得证。

31. 设 x, y, z 为正实数且 $xyz=1$, 证明:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x} \geqslant x+y+z.$$

由 AM-GM 不等式,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{3}\left(\frac{x}{y}+\frac{x}{y}+\frac{y}{z}\right) &\geqslant \sqrt[3]{\frac{x^2}{yz}}=x, \\
\frac{1}{3}\left(\frac{y}{z}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right) &\geqslant \sqrt[3]{\frac{y^2}{xz}}=y, \\
\frac{1}{3}\left(\frac{z}{x}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}\right) &\geqslant \sqrt[3]{\frac{z^2}{xy}}=z.
\end{aligned}
$$

三式相加得

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x} \geqslant x+y+z.$$

故证毕。

32. 若 $x^2+y^2+z^2=1$, 求 $x+2y+3z$ 的最大值。

由柯西不等式，

$$(x^2+y^2+z^2)(1^2+2^2+3^2) \geqslant (x+2y+3z)^2 \Rightarrow x+2y+3z \leqslant \sqrt{14}$$

当且仅当 $(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3)$ 时等号成立。

33. 若 $x,y,z\in\mathbb{R}^+$ 且 $x+y+z=3$，求 $\dfrac{yz+4xz+9xy}{xyz}$ 的最小值。

由柯西不等式，

$$\frac{x^2}{1^2}+\frac{y^2}{2^2}+\frac{z^2}{3^2} \geqslant \frac{(x+y+z)^2}{1+4+9}=\frac{9}{14}.$$

当且仅当 $(x,y,z)=\left(\dfrac{1}{2},1,\dfrac{3}{2}\right)$ 时等号成立。

34. 若 $a,b,c\in\mathbb{R}^+$ 且 $a+b+c=6$，求

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{c}\right)^2+\left(c+\frac{1}{a}\right)^2$$

的最小值。

由柯西不等式，

$$\begin{aligned}\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{c}\right)^2+\left(c+\frac{1}{a}\right)^2 &\geqslant \frac{\left(a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}{1+1+1}\\ &\geqslant \frac{\left(6+\frac{9}{a+b+c}\right)^2}{1+1+1}=\frac{75}{4}\end{aligned}$$

等号成立当且仅当 $a=b=c=2$。

35. 已知实数 a,b,c,d 满足

$$ab+bc+cd=8,\quad b^2+c^2=2,$$

试求 a^2+d^2 的最小值。

首先有

$$b^2+c^2\geqslant 2bc \Rightarrow bc\leqslant 1$$

由柯西不等式,

$$(a^2+d^2)(b^2+c^2)\geqslant(ab+cd)^2$$

即

$$(a^2+d^2)\geqslant\frac{(ab+cd)^2}{b^2+c^2}=\frac{(8-bc)^2}{2}\geqslant\frac{(8-1)^2}{2}=\frac{49}{2}$$

当 $bc=1$ 且 $\frac{a}{c}=\frac{d}{b}$, 即 $b=c=-1, a=d=-\frac{7}{2}$ 时等号成立, 此时 a^2+d^2 取最小值 $\frac{49}{2}$。

36. 若 $3a+4b=15$, 求 $\sqrt{a^2+b^2}$ 的最小值。

由柯西不等式,

$$5\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3^2+4^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}\geqslant|3a+4b|=15 \implies \sqrt{a^2+b^2}\geqslant 3$$

当且仅当 $a=\frac{9}{5}, b=\frac{12}{5}$ 时等号成立。

37. 若 $abcd=1$, 求 $(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)$ 的最小值。

由 AM-GM 不等式,

$$(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)\geqslant(2\sqrt{a})(2\sqrt{b})(2\sqrt{c})(2\sqrt{d})=16$$

等号成立当且仅当 $a=b=c=d=1$。

38. 若 $x\in\mathbb{R}$, 求

$$\frac{x^2+2-\sqrt{x^4+4}}{x}$$

的最大值。

设 $x>0$, 由 AM-GM 不等式,

$$\begin{aligned}\frac{x^2+2-\sqrt{x^4+4}}{x}&=x+\frac{2}{x}-\sqrt{x^2+\frac{4}{x^2}}\\&=\sqrt{x^2+\frac{4}{x^2}+4}-\sqrt{x^2+\frac{4}{x^2}}\\&=\frac{4}{\sqrt{x^2+\frac{4}{x^2}+4}+\sqrt{x^2+\frac{4}{x^2}}}\\&\leqslant\frac{4}{\sqrt{4+4}+\sqrt{4}}=2\sqrt{2}-2\end{aligned}$$

当且仅当 $x=\sqrt{2}$ 时等号成立。

39. 若 a,b 为正实数且满足 $ab(a+b)=2000$, 求 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{ab}$ 的最小值。

由 AM-GM 不等式,

$$2000=ab(a+b)\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)(a+b)\Rightarrow a+b\geqslant 20$$

再由 AM-GM 不等式,

$$\begin{aligned}\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}&=\frac{1}{2a}+\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{a+b}\\&\geqslant 5\sqrt[5]{\frac{1}{16a^2b^2(a+b)}}\\&=5\sqrt[5]{\frac{a+b}{16a^2b^2(a+b)^2}}\\&\geqslant 5\sqrt[5]{\frac{20}{16\cdot 2000^2}}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

等号成立当且仅当 $a=b=10$。以下为错误示范:

由 AM-GM 不等式,

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{ab(a+b)}}=3\sqrt[3]{\frac{1}{2000}}=\frac{3\sqrt[3]{4}}{20}$$

但等号成立当且仅当 $a=b=0$, 不合题意。

由 AM-GM 不等式,

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}=\frac{a+b}{ab}+\frac{1}{ab}=\frac{(a+b)^2}{2000}+\frac{1}{2(a+b)}+\frac{1}{2(a+b)}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{8000}}=\frac{3}{20}$$

但等号成立当且仅当 $a+b=10$ 且 $ab=200$, 解得 a,b 为非实数, 不合题意。

40. 若 a,b,c 皆为正实数满足 $a+b+c=100$, 求 $\sqrt{a}+\sqrt{ab}+\sqrt{abc}$ 的最大值。

由 AM-GM 不等式,

$$\sqrt{a}+\sqrt{ab}+\sqrt{abc}=a+2\sqrt{\frac{a}{4}\cdot b}+3\sqrt{\frac{a}{12}\cdot\frac{b}{3}\cdot\frac{4c}{3}}\leqslant a+\frac{a}{4}+b+\frac{a}{12}+\frac{b}{3}+\frac{4c}{3}=\frac{4}{3}(a+b+c)=\frac{400}{3}$$

等号成立当且仅当 $a=\dfrac{160}{21},b=\dfrac{40}{21},c=\dfrac{10}{21}$。

41. 若 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 为实数，且

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=8, \quad x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2=16$$

求 x_5 的最大值。

由柯西不等式，

$$(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)(1+1+1+1) \geqslant (x_1+x_2+x_3+x_4)^2 \Rightarrow 4(16-x_5^2) \geqslant (8-x_5)^2$$

解得

$$0 \leqslant x_5 \leqslant \frac{16}{5}$$

当 $x_1=x_2=x_3=x_4=\dfrac{6}{5}, x_5=\dfrac{16}{5}$ 时等号成立。

42. 若 a, b, c 为正实数且 $a+b+c \leqslant 9$，求 $(a^2+b^2+c^2)(2ab+2bc+2ca+5)$ 的最大值。

由 AM-GM 不等式，

$$\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2)(2ab+2bc+2ca+5) &\leqslant \left(\frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca+5}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{(a+b+c)^2+5}{2}\right)^2 \\ &\leqslant \left(\frac{9^2+5}{2}\right)^2 = 1849\end{aligned}$$

当 $a^2+b^2+c^2=43, ab+bc+ca=19$ 时等号成立。

43. x, y, z 为正实数且满足 $x+y+z=91$，求

$$\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y}+\frac{xy}{z}$$

的最小值。

由排序不等式，

$$\sum_{cyc}\frac{xy}{z} \geqslant \sum_{cyc}\frac{xy}{y} = x+y+z = 91$$

44. 已知正实数 a,b 满足 $a+b=1$, 求

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2$$

的最小值。

由柯西不等式或 QM-AM 不等式,

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\geqslant\frac{1}{2}\left(a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{ab}\right)^2$$

又由 AM-GM 不等式,

$$ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

故

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\geqslant\frac{1}{2}\cdot(1+4)^2=\frac{25}{2}$$

当且仅当 $a=b=\dfrac{1}{2}$ 时等号成立, 此时有最小值 $\dfrac{25}{2}$。

45. 已知 x,y,z 为正实数, 求 $\dfrac{(x^4+1)(y^4+1)(z^4+1)}{xy^2z}$ 的最小值。

由 AM-GM 不等式,

$$\begin{aligned}\frac{(x^4y^4+1)(y^4z^4+1)(z^4x^4+1)}{xy^2z}&=\left(x^3+\frac{1}{3x}+\frac{1}{3x}+\frac{1}{3x}\right)\left(y^2+\frac{1}{y^2}\right)\left(z^3+\frac{1}{3z}+\frac{1}{3z}+\frac{1}{3z}\right)\\&\geqslant 4\sqrt[3]{\frac{1}{27}}\cdot 2\cdot 4\sqrt[3]{\frac{1}{27}}=\frac{32\sqrt{3}}{9}\end{aligned}$$

46. 已知 $x\in[0,2]$, 求 $\sqrt{x}+4\sqrt{1-\dfrac{x}{2}}$ 的最大值。

发现

$$\sqrt{x}+4\sqrt{1-\frac{x}{2}}=\sqrt{x}+\sqrt{2^3}\cdot\sqrt{2-x}$$

由柯西不等式,

$$(\sqrt{x}+\sqrt{2^3}\cdot\sqrt{2-x})^2\leqslant(1+8)(x+2-x)=18\Leftrightarrow\sqrt{x}+4\sqrt{1-\frac{x}{2}}\leqslant 3\sqrt{2}$$

等号成立当且仅当 $x=\dfrac{2}{9}$

47. 若 x,y 为正数，且

$$x^2+\frac{y^2}{45}=1,$$

试求

$$\frac{2}{1-x}+\frac{75}{10-y}$$

的最小值。

由 AM-GM 不等式，

$$\frac{1-x+\frac{x}{2}+\frac{x}{2}}{3}\geqslant\sqrt[3]{\frac{x^2(1-x)}{4}}$$

于是

$$\frac{2}{1-x}=\frac{x^2}{2}\cdot\frac{4}{x^2(1-x)}\geqslant\frac{x^2}{2}\cdot\left(\frac{3}{1-x+\frac{x}{2}+\frac{x}{2}}\right)^3=\frac{27x^2}{2} \tag{1}$$

由 AM-GM 不等式，

$$\frac{y+(10-y)}{2}\geqslant\sqrt{y(10-y)}$$

故

$$\frac{75}{10-y}=\frac{75}{10}\left(\frac{y}{10-y}+1\right)\geqslant\frac{15}{2}\cdot\frac{y^2}{\left(\frac{y+(10-y)}{2}\right)^2}+\frac{15}{2}=\frac{15}{2}\cdot\frac{y^2}{25}+\frac{15}{2} \tag{2}$$

由 (1), (2),

$$\frac{2}{1-x}+\frac{75}{10-y}\geqslant\frac{27}{2}\left(x^2+\frac{y^2}{45}\right)+\frac{15}{2}=21$$

等号成立当且仅当 $x=\dfrac{2}{3},y=5$。

48. 若正实数 a,b,c 满足 $a+b+c=21$，求 $a^2+3b^2+5c^2$ 的最小值。

由排序不等式，

$$\begin{aligned}a^2+3b^2+5c^2&=a^2+b^2+c^2+2b^2+2c^2+2c^2\\&\geqslant a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=(a+b+c)^2=441\end{aligned}$$

当 $(a,b,c)=(21,0,0),\left(\dfrac{21}{2},\dfrac{21}{2},0\right),(7,7,7)$ 时等号成立。

49. 已知 x,y 为实数，求 x^6+y^6-54xy 的最小值。

由 AM-GM 不等式,

$$\frac{x^6+y^6+27+27+27+27}{6} \geqslant \sqrt[6]{x^6y^6\cdot 3^{12}} \Rightarrow x^6y^6-54xy \geqslant -108$$

当 $x=y=\pm\sqrt{3}$ 时等号成立。

50. 若 x,y,z 为正实数, 且满足 $x+y+z=1$, 求 $x(x+y)^2(y+z)^3(z+x)^4$ 的最大值。

由 AM-GM 不等式,

$$\frac{5(x+y+z)}{10} = \frac{x+2(x+y)+3(y+z)+4\left(\frac{z+x}{2}\right)}{10} \geqslant \sqrt[10]{\frac{x(x+y)^2(y+z)^3(z+x)^4}{2^4}}$$

故

$$x(x+y)^2(y+z)^3(z+x)^4 \leqslant \frac{1}{64}$$

等号成立 $y=0, x=z=\frac{1}{2}$?

51. 设 a,b,c,d 为正实数且 $abcd=1$。证明

$$a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ac+ad+bc+bd+cd \geqslant 10.$$

由算术几何均值不等式（A.M.-G.M.）, 有

$$\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4} \geqslant \sqrt[4]{a^2b^2c^2d^2} = \sqrt[4]{(abcd)^2} = 1,$$

因此

$$a^2+b^2+c^2+d^2 \geqslant 4.$$

同样地, 对六个二次项之和应用 A.M.-G.M.:

$$\frac{ab+ac+ad+bc+bd+cd}{6} \geqslant \sqrt[6]{(ab)(ac)(ad)(bc)(bd)(cd)} = \sqrt[6]{a^3b^3c^3d^3} = \sqrt[6]{(abcd)^3} = 1,$$

于是

$$ab+ac+ad+bc+bd+cd \geqslant 6.$$

将两式相加得到

$$a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ac+ad+bc+bd+cd \geqslant 4+6 = 10,$$

证毕。

52. 设 a, b 和 c 为正实数, 且满足 $a^2+b^2+c^2=1$。证明:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \geqslant 3+\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}.$$

考虑左边减右边:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-3-\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}\\
&=\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2}+\frac{a^2+b^2+c^2}{b^2}+\frac{a^2+b^2+c^2}{c^2}-3-2\left(\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\right)\\
&=\left(1+\frac{b^2+c^2}{a^2}\right)+\left(1+\frac{a^2+c^2}{b^2}\right)+\left(1+\frac{a^2+b^2}{c^2}\right)-3-2\left(\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\right)\\
&=\frac{b^2+c^2}{a^2}+\frac{a^2+c^2}{b^2}+\frac{a^2+b^2}{c^2}-2\left(\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\right)\\
&=a^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+b^2\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)+c^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)-2\left(\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\right)\\
&=a^2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2+b^2\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2+c^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

等号成立当且仅当 $a=b=c$。

53. 若 a,b,c 为实数且 $a+b+c=12$, 且

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{abc}=1,$$

求 $abc-(a+2b-3c)$ 的最大值。

由

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{abc}=1,$$

则

$$2abc=2ab+2bc+2ca+2=144-a^2-b^2-c^2+2$$

所以

$$\begin{aligned}
2abc-2(a+2b-3c)&=146-(a^2+2a)-(b^2+4b)-(c^2-6c)\\
&=160-[(a+1)^2+(b+2)^2+(c-3)^2]\\
&\leqslant 160-3\left(\frac{a+1+b+2+c-3}{3}\right)^2=112
\end{aligned}$$

因此

$$abc-(a+2b-3c)\leqslant 56$$

等号成立当且仅当 $a=3,b=2,c=7$。

54. 设 a,b,c 为正实数，且 $a+b+c=1$，求

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}$$

的最小值。

由柯西不等式，

$$(1^2+1^2)(a^2+b^2)\geqslant(a+b)^2\Rightarrow\sqrt{a^2+b^2}\geqslant\frac{a+b}{\sqrt{2}},$$

同理

$$\sqrt{b^2+c^2}\geqslant\frac{b+c}{\sqrt{2}},\quad \sqrt{c^2+a^2}\geqslant\frac{c+a}{\sqrt{2}}.$$

相加得

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\frac{2(a+b+c)}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$$

当 $a=b=c=\frac{1}{3}$ 时取等号，故最小值为 $\sqrt{2}$。

55. 已知 $x>1,y>1,z>1$ 且 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$，试证

$$\sqrt{x+y+z}\geqslant\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}$$

首先有

$$\frac{x-1}{x}+\frac{y-1}{y}+\frac{z-1}{z}=3-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=3-2=1$$

由柯西不等式，

$$\left(\frac{x-1}{x}+\frac{y-1}{y}+\frac{z-1}{z}\right)(x+y+z)\geqslant\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}\right)^2$$

左式为 $1\cdot(x+y+z)=x+y+z$，因此

$$\sqrt{x+y+z}\geqslant\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}$$

故证毕。

56. (a) 已知 $a, b, c > 0$, 证明

$$\frac{a^2}{2a+b} + \frac{b^2}{2b+c} + \frac{c^2}{2c+a} \geqslant \frac{a+b+c}{3}$$

由柯西不等式,

$$\left(\frac{a^2}{2a+b} + \frac{b^2}{2b+c} + \frac{c^2}{2c+a}\right)(2a+b+2b+c+2c+a) \geqslant (a+b+c)^2$$

所以得证

$$\frac{a^2}{2a+b} + \frac{b^2}{2b+c} + \frac{c^2}{2c+a} \geqslant \frac{a+b+c}{3}$$

(b) 已知 $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 > 0$, 证明

$$(a_1^3 + a_2^3)(b_1^3 + b_2^3)(c_1^3 + c_2^3) \geqslant (a_1 b_1 c_1 + a_2 b_2 c_2)^3$$

令

$$r_1 = \frac{a_2}{a_1}, \quad r_2 = \frac{b_2}{b_1}, \quad r_3 = \frac{c_2}{c_1}$$

则

$$(a_1^3 + a_2^3)(b_1^3 + b_2^3)(c_1^3 + c_2^3) = a_1^3 b_1^3 c_1^3 (1 + r_1^3)(1 + r_2^3)(1 + r_3^3)$$

$$(a_1 b_1 c_1 + a_2 b_2 c_2)^3 = a_1^3 b_1^3 c_1^3 (1 + r_1 r_2 r_3)^3$$

由 AM-GM 不等式,

$$\begin{aligned}(1 + r_1^3)(1 + r_2^3)(1 + r_3^3) &= 1 + (r_1^3 + r_2^3 + r_3^3) + (r_1 r_2)^3 + (r_2 r_3)^3 + (r_3 r_1)^3 + r_1^3 r_2^3 r_3^3 \\ &\geqslant 1 + 3 r_1 r_2 r_3 + 3 r_1^2 r_2^2 r_3^2 + r_1^3 r_2^3 r_3^3 \\ &= (1 + r_1 r_2 r_3)^3\end{aligned}$$

因此得证

$$(a_1^3 + a_2^3)(b_1^3 + b_2^3)(c_1^3 + c_2^3) \geqslant (a_1 b_1 c_1 + a_2 b_2 c_2)^3$$

57. 设 a, b, c 均为正数, 且 $a + b + c = 3$, 证明

$$\frac{a}{b^2+1} + \frac{b}{c^2+1} + \frac{c}{a^2+1} \geqslant \frac{3}{2}.$$

由不等式

$$(b-1)^2=b^2+1-2b\geqslant 0\Rightarrow\frac{1}{b^2+1}\leqslant\frac{1}{2b},$$

因此

$$\frac{a}{b^2+1}=a-\frac{ab^2}{b^2+1}\geqslant a-\frac{ab^2}{2b}=a-\frac{ab}{2}.$$

同理得

$$\frac{b}{c^2+1}\geqslant b-\frac{bc}{2},\quad\frac{c}{a^2+1}\geqslant c-\frac{ac}{2}.$$

又由柯西不等式,

$$(a^2+b^2+c^2)(1^2+1^2+1^2)\geqslant(a+b+c)^2\Rightarrow a^2+b^2+c^2\geqslant 3.$$

因为

$$ab+bc+ca=\frac{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)}{2}\leqslant\frac{9-3}{2}=3$$

故

$$\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}\geqslant(a+b+c)-\frac{1}{2}(ab+bc+ca)\geqslant 3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}.$$

故证毕。

58. 设 a,b,c 为正实数, 证明

$$\sqrt{ab(a+b)}+\sqrt{bc(b+c)}+\sqrt{ca(c+a)}\leqslant\frac{3}{2}\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

由 AM-GM 不等式,

$$\begin{aligned}3&=\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}+\frac{a}{a+b}+\frac{c}{b+c}+\frac{b}{a+b}+\frac{a}{c+a}\\&\geqslant 2\left(\sqrt{\frac{ab}{(b+c)(c+a)}}+\sqrt{\frac{bc}{(a+b)(c+a)}}+\sqrt{\frac{ca}{(a+b)(b+c)}}\right)\end{aligned}$$

即得证

$$\sqrt{ab(a+b)}+\sqrt{bc(b+c)}+\sqrt{ca(c+a)}\leqslant\frac{3}{2}\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

59. 证明对任意实数 x,y,z 皆有

$$\frac{y^2-x^2}{2x^2+1}+\frac{z^2-y^2}{2y^2+1}+\frac{x^2-z^2}{2z^2+1}\geqslant 0$$

由 AM-GM 不等式,

$$
\begin{aligned}
\frac{y^2-x^2}{2x^2+1}+\frac{z^2-y^2}{2y^2+1}+\frac{x^2-z^2}{2z^2+1}+\frac{3}{2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{2y^2+1}{2x^2+1}+\frac{2z^2+1}{2y^2+1}+\frac{2x^2+1}{2z^2+1}\right)\\
&\geqslant \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{2y^2+1}{2x^2+1}\cdot\frac{2z^2+1}{2y^2+1}\cdot\frac{2x^2+1}{2z^2+1}}=\frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

故

$$
\frac{y^2-x^2}{2x^2+1}+\frac{z^2-y^2}{2y^2+1}+\frac{x^2-z^2}{2z^2+1}\geqslant 0
$$

60. 设 $a>0, b>0, c>0$, 求

$$
\frac{a+3c}{a+2b+c}+\frac{4b}{a+b+2c}-\frac{8c}{a+b+3c}+17
$$

的最小值。

由于

$$
\begin{cases}
a+2b+c=x\\
a+b+2c=y\\
a+b+3c=z
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
a=-x+5y-3z\\
b=x-2y+z\\
c=-y+z
\end{cases}
$$

故

$$
\begin{aligned}
&\frac{a+3c}{a+2b+c}+\frac{4b}{a+b+2c}-\frac{8c}{a+b+3c}+17\\
&=\frac{-x+2y}{x}+\frac{4x-8y+4z}{y}-\frac{-8y+8z}{z}+17\\
&=\left(\frac{2y}{x}+\frac{4x}{y}\right)+\left(\frac{4z}{y}+\frac{8y}{z}\right)\\
&\geqslant 2\sqrt{\frac{2y}{x}\cdot\frac{4x}{y}}+2\sqrt{\frac{4z}{y}\cdot\frac{8y}{z}}=12\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

61. 证明对所有自然数 n, 有

$$
1+\frac{2}{3n-2}\leqslant\sqrt[n]{3}\leqslant 1+\frac{2}{n}.
$$

由 AM-GM 不等式,

$$\frac{n+2}{n}=\frac{3+\overbrace{1+\cdots+1}^{n-1\text{个 }1}}{n}\geqslant\sqrt[n]{3\cdot 1^{n-1}}=\sqrt[n]{3}\Rightarrow\sqrt[n]{3}\leqslant 1+\frac{2}{n}$$

且

$$\frac{3n-2}{3n}=\frac{1/3+\overbrace{1+\cdots+1}^{n-1\text{个 }1}}{n}\geqslant\sqrt[n]{(1/3)\cdot 1^{n-1}}=\frac{1}{\sqrt[n]{3}}\Rightarrow\sqrt[n]{3}\geqslant 1+\frac{2}{3n-2}.$$

综上得到

$$1+\frac{2}{3n-2}\leqslant\sqrt[n]{3}\leqslant 1+\frac{2}{n}$$

62. 已知 $0\leqslant x\leqslant 1$, $n\in\mathbb{N}$, 证明:

$$0\leqslant x^n-x^{n+1}\leqslant\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

由 $0\leqslant x\leqslant 1$, 有

$$0\leqslant 1-x\quad\Rightarrow\quad 0\leqslant x^n(1-x)=x^n-x^{n+1}\tag{1}$$

由 AM-GM 不等式,

$$\frac{\overbrace{\frac{x}{n}+\cdots+\frac{x}{n}}^{n\text{ 个}}+(1-x)}{n+1}\geqslant\sqrt[n+1]{\left(\frac{x}{n}\right)^n(1-x)}$$

即

$$\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\geqslant x^n(1-x)=x^n-x^{n+1}\tag{2}$$

由 (1) 与 (2), 得证

$$0\leqslant x^n-x^{n+1}\leqslant\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

63. 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 27, R 为其外接圆半径,r 为其内切圆半径。求 Rr^3 的最大值。

设 $\triangle ABC$ 边长为 $a,b,c>0$, 面积为

$$[\triangle ABC]=\frac{1}{2}(a+b+c)r=\frac{abc}{4R}=27$$

由 AM-GM 不等式,

$$\frac{2\cdot 27}{3r}=\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}=\sqrt[3]{4R\cdot 27}\Rightarrow Rr^3\leqslant 54$$

等号成立当且仅当 $a=b=c$ 即 $\triangle ABC$ 为等边三角形。

64. 设实数 x,y 满足 $\sin x+\cos y=1$, 求 $\cos x+\sin y$ 的最大值。

注意到

$$(\sin x+\cos y)^2+(\cos x+\sin y)^2=2+2\sin(x+y)\leqslant 4$$

由题设 $\sin x+\cos y=1$, 代入上式

$$1^2+(\cos x+\sin y)^2\leqslant 4\Rightarrow\cos x+\sin y\leqslant\sqrt{3}$$

当 $x=\frac{\pi}{6}$, $y=\frac{\pi}{3}$ 时, $\sin x+\cos y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1,\cos x+\sin y=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$ 取到最大值。

65. 若 $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$, 试求

$$f(x)=|\sin x+\cos x+\tan x+\cot x+\sec x+\csc x|$$

的最小值。

设 $t=\cos x+\sin x$, 有

$$\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$$

且

$$\tan x+\cot x=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x}=\frac{2}{t^2-1}$$
$$\sec x+\csc x=\frac{\sin x+\cos x}{\cos x\sin x}=\frac{2t}{t^2-1}$$

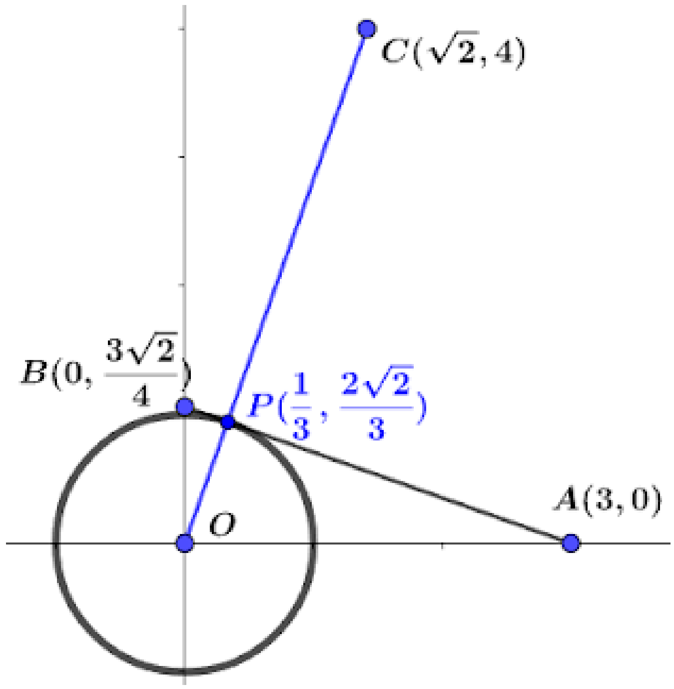
故

$$f(x)=g(t)=\left|t+\frac{2}{t^2-1}+\frac{2t}{t^2-1}\right|=\left|t-1+\frac{2}{t-1}+1\right|\geqslant\left|-2\sqrt{2}+1\right|=2\sqrt{2}-1$$

66. 试求

$$\sqrt{10-6\cos\theta}+\frac{1}{4}\sqrt{34-24\sqrt{2}\sin\theta}+\sqrt{19-2\sqrt{2}\cos\theta-8\sin\theta}$$

的最小值。



发现

$$\sqrt{10-6\cos\theta}=\sqrt{(\cos\theta-3)^2+\sin^2\theta}$$

$$\frac{1}{4}\sqrt{34-24\sqrt{2}\sin\theta}=\sqrt{\cos^2\theta-\left(\sin\theta-\frac{3}{4}\sqrt{2}\right)^2}$$

$$\sqrt{19-2\sqrt{2}\cos\theta-8\sin\theta}=\sqrt{(\cos\theta-\sqrt{2})^2+(\sin\theta-4)^2}$$

构造坐标系，设 $P(\cos\theta,\sin\theta)$ 在单位圆上,$A(3,0)$，$B(0,\frac{3\sqrt{2}}{4})$，$C(\sqrt{2},4)$，原式即为

$$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$$

直线 AB 方程式为

$$\sqrt{2}x+4y=3\sqrt{2},$$

故圆心 O 到 AB 的距离为 1，且当 $P=\left(\frac{1}{3},\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$,$OPC$ 共线，于是 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$ 最小值为

$$\overline{AB}+\overline{OC}-1=\sqrt{9+\frac{18}{16}}+\sqrt{18}-1=\frac{21}{4}\sqrt{2}-1$$

67. 若锐角 A,B,C 满足 $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2$, 求

$$\frac{1}{\sin^2 A\cos^4 B}+\frac{1}{\sin^2 B\cos^4 C}+\frac{1}{\sin^2 C\cos^4 A}$$

的最小值。

由柯西不等式,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sin^2 A\cos^4 B}+\frac{1}{\sin^2 B\cos^4 C}+\frac{1}{\sin^2 C\cos^4 A}\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin^2 A\cos^4 B}+\frac{1}{\sin^2 B\cos^4 C}+\frac{1}{\sin^2 C\cos^4 A}\right)(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)\\
&\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos^2 B}+\frac{1}{\cos^2 C}+\frac{1}{\cos^2 A}\right)^2\\
&=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{\cos^2 A}+\frac{1}{\cos^2 B}+\frac{1}{\cos^2 C}\right)(\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C)\right]^2\geqslant\frac{81}{2}
\end{aligned}$$

当 $\sin^2 A=\sin^2 B=\sin^2 C=\frac{2}{3},\cos^2 A=\cos^2 B=\cos^2 C=\frac{1}{3}$ 时等号成立,

$$\frac{1}{\sin^2 A\cos^4 B}+\frac{1}{\sin^2 B\cos^4 C}+\frac{1}{\sin^2 C\cos^4 A}=\frac{27}{2}\cdot 3=\frac{81}{2}.$$

68. 设 $\theta_1,\theta_2,\theta_3,\ldots,\theta_{2025}$ 皆为锐角, 且

$$\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2+\cdots+\sin^2\theta_{2025}=1,$$

求

$$\frac{\sin\theta_1+\sin\theta_2+\cdots+\sin\theta_{2025}}{\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cdots+\cos\theta_{2025}}$$

的最大值。

由题意,

$$\sin^2\theta_2+\cdots+\sin^2\theta_{2025}=1-\sin^2\theta_1=\cos^2\theta_1$$

由柯西不等式,

$$\cos^2\theta_1=(\sin^2\theta_2+\cdots+\sin^2\theta_{2025})(1^2+1^2+\cdots+1^2)\geqslant(\sin\theta_2+\sin\theta_3+\cdots+\sin\theta_{2025})^2$$

即

$$\cos\theta_1\geqslant\frac{\sin\theta_2+\cdots+\sin\theta_{2025}}{\sqrt{2024}}$$

同理,

$$\cos\theta_2 \geqslant \frac{\sin\theta_1+\sin\theta_3+\cdots+\sin\theta_{2025}}{\sqrt{2024}},\ \cdots\ ,\cos\theta_{2025} \geqslant \frac{\sin\theta_1+\cdots+\sin\theta_{2024}}{\sqrt{2024}}$$

将以上不等式相加得

$$\cos\theta_1+\cdots+\cos\theta_{2025} \geqslant \frac{2024}{\sqrt{2024}}(\sin\theta_1+\cdots+\sin\theta_{2025})$$

故

$$\frac{\sin\theta_1+\cdots+\sin\theta_{2025}}{\cos\theta_1+\cdots+\cos\theta_{2025}} \leqslant \frac{\sqrt{2024}}{2024} = \frac{\sqrt{506}}{1012}$$

69. 设 a,b,c 为三角形的三边长,Δ 为此三角形面积, 试证:

$$\Delta \leqslant \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$$

且等号成立当且仅当 $a=b=c$。

由海伦公式, 三角形面积为

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

其中 s 为半周长, 由 AM-GM 不等式,

$$\frac{s}{3} = \frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3} \geqslant \sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)}$$

故

$$\Delta \leqslant \sqrt{s\cdot\left(\frac{s}{3}\right)^3} = \frac{s^2}{3\sqrt{3}} = \frac{(a+b+c)^2}{12\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$$

等号成立条件为 $s-a=s-b=s-c$, 即 $a=b=c$ 时, 该三角形为正三角形, 面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

70. 设 a,b,c 是一个三角形的三边, 周长为 2。证明

$$\frac{3}{2} < a^2+b^2+c^2+2abc < 2.$$

由于周长为 2, 任意一边都不大于 1, 则三角形面积

$$A = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$$

小于 1/2。又 $A^2 = (1-a)(1-b)(1-c)$, 因此

$$\begin{aligned}
&0 < (1-a)(1-b)(1-c) < \frac{1}{4},\\
&0 < 1-(a+b+c)+(ab+ac+bc)-abc < \frac{1}{4},\\
&0 < 1-2+(ab+ac+bc)-abc < \frac{1}{4},\\
&1 < (ab+ac+bc)-abc < \frac{5}{4},
\end{aligned}$$

于是

$$2 < 2(ab+ac+bc)-2abc < \frac{5}{2}.$$

另一方面,

$$a^2+b^2+c^2+2abc = (a+b+c)^2+(2abc-2(ab+ac+bc)),$$

因此

$$4-\frac{5}{2} < a^2+b^2+c^2+2abc < 4-2,$$

即

$$\frac{3}{2} < a^2+b^2+c^2+2abc < 2.$$

71. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A,B,C 所对的边为 a,b,c, 且

$$a^2+b^2+2c^2 = 8$$

求 $\triangle ABC$ 面积的最大值。

解法一

由余弦定理

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{8-3c^2}{2ab}$$

又

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ab\sqrt{1-\left(\frac{8-3c^2}{2ab}\right)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2-(8-3c^2)^2}$$

由不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$,

$$S\leqslant\frac{1}{4}\sqrt{(a^2+b^2)^2-(8-3c^2)^2}=\frac{1}{4}\sqrt{(8-2c^2)^2-(8-3c^2)^2}=\frac{1}{4}\sqrt{16c^2-5c^4}$$

对于 c^2 的函数 $f(c^2)=16c^2-5c^4$, 令导数为零得 $c^2=\dfrac{8}{5}$, 代入得

$$S_{\max}=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{64}{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

解法二

以 AB 所在直线为 x 轴,AB 中垂线为 y 轴, 设 $A(-\dfrac{c}{2},0),B(\dfrac{c}{2},0),C(x,y)$, 由条件

$$a^2+b^2+2c^2=8$$

得

$$(x-\frac{c}{2})^2+y^2+(x+\frac{c}{2})^2+y^2+2c^2=8$$

即

$$x^2+y^2=4-\frac{5c^2}{4}$$

$\triangle ABC$ 面积为

$$S=\frac{1}{2}c|y|$$

由 $y^2\leqslant 4-\dfrac{5c^2}{4}$, 得

$$S\leqslant\frac{1}{2}c\sqrt{4-\frac{5c^2}{4}}=\frac{1}{4}\sqrt{16c^2-5c^4}$$

解法同上。

72. 在 $\triangle ABC$ 中, 试求

$$\frac{2\sin^2 A+\sin B\sin C}{\sin A\sin B\sin C}$$

的最小值。

由余弦定理,

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\geqslant 1-\frac{a^2}{2bc}\Rightarrow\frac{2a^2}{bc}\geqslant 4-4\cos A$$

由正弦定理,

$$\frac{2\sin^2 A+\sin B\sin C}{\sin A\sin B\sin C}=\frac{1}{\sin A}\left(\frac{2a^2}{bc}+1\right)\geqslant\frac{5-4\cos A}{\sin A}$$

设 $\tan\dfrac{A}{2}=t>0$, 则

$$\cos A=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \sin A=\frac{2t}{1+t^2}$$

代入得

$$\frac{5-4\cos A}{\sin A}=\frac{5-4\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{9t^2+1}{2t}$$

由 AM-GM 不等式:

$$\frac{9t^2+1}{2t}\geqslant\frac{2\sqrt{9t^2\cdot 1}}{2t}=3$$

当 $A=\arcsin\dfrac{3}{5}$, $B=C=\dfrac{\pi-A}{2}$ 时等号成立, 原式取最小值 3

73. 在锐角三角形 $\triangle ABC$ 中, 角 A,B,C 所对的边为 a,b,c, 且

$$a^2+2ab\cos C=3b^2$$

求 $\tan A\tan B\tan C$ 的最小值。

解法一

由余弦定理, 有

$$2ab\cos C=a^2+b^2-c^2$$

代入原式得

$$a^2+(a^2+b^2-c^2)=3b^2\Rightarrow c^2=2a^2-2b^2\Rightarrow b^2+c^2-a^2=\frac{c^2}{2}\Rightarrow\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{c^2}{4bc}$$

由正、余弦定理得

$$\cos A=\frac{\sin C}{4\sin B}\Rightarrow 4\sin B\cos A=\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$$

有 $3\sin B\cos A=\sin A\cos B$.

$\because\triangle ABC$ 是锐角三角形, $\cos A\neq 0,\cos B\neq 0,\therefore\tan A=3\tan B$

现设 $\tan B=t$, 又

$$\tan C=-\tan(A+B)=-\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=\frac{4t}{3t^2-1}$$

所以

$$\tan A\tan B\tan C = 3t\cdot t\cdot\frac{4t}{3t^2-1} = \frac{12t^3}{3t^2-1}$$

对函数

$$f(t) = \frac{12t^3}{3t^2-1}, t > 0$$

求导

$$f'(t) = \frac{36t^2(3t^2-1) - 12t^3\cdot 6t}{(3t^2-1)^2} = \frac{36t^2(t^2-1)}{(3t^2-1)^2}$$

令 $f'(t) = 0$, 解得 $t = 1$; 当 $t\in(0,1), f'(t) < 0$, 当 $t\in(1,\infty), f'(t) > 0$,

$\therefore$ $f(t)$ 在 $t = 1$ 有最小值 $f(1) = 6$。

解法二

以 AB 所在直线为 x 轴, AB 中垂线为 y 轴, 设 $A(-\frac{c}{2},0), B(\frac{c}{2},0), C(x,y)$, 由距离公式

$$a^2 = (x-\frac{c}{2})^2 + y^2,\quad b^2 = (x+\frac{c}{2})^2 + y^2$$

代入已知条件

$$2b^2 + c^2 - 2a^2 = 0 \implies 2\left[(x+\frac{c}{2})^2 + y^2\right] + c^2 - 2\left[(x-\frac{c}{2})^2 + y^2\right] = 0$$

展开化简得

$$4cx + c^2 = 0 \implies x = -\frac{c}{4}$$

作 $CD\perp AB$ 于 D, 则 D 点坐标为 $(x,0) = \left(-\frac{c}{4},0\right)$。发现

$$AD = \left|-\frac{c}{2} - \left(-\frac{c}{4}\right)\right| = \frac{c}{4} \quad 且 \quad BD = \left|\frac{c}{2} - \left(-\frac{c}{4}\right)\right| = \frac{3c}{4}$$

所以 $BD = 3AD$, 又

$$\tan A = \frac{CD}{AD} = \frac{y}{\frac{c}{4}}$$

$$\tan B = \frac{CD}{BD} = \frac{y}{\frac{3c}{4}}$$

因此有

$$\tan A = 3\tan B$$

解法同上。

74. 已知非负实数 a,b,c,d 满足 $a \leqslant 1, a+b \leqslant 5, a+b+c \leqslant 14, a+b+c+d \leqslant 30$, 试证

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d} \leqslant 10$$

由柯西不等式,

$$\begin{aligned}
&(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d})^2 \\
&=\left(\sqrt{a}+\frac{\sqrt{b}}{2}+\frac{\sqrt{b}}{2}+\frac{\sqrt{c}}{3}+\frac{\sqrt{c}}{3}+\frac{\sqrt{c}}{3}+\frac{\sqrt{d}}{4}+\frac{\sqrt{d}}{4}+\frac{\sqrt{d}}{4}+\frac{\sqrt{d}}{4}\right)^2 \\
&\leqslant\left(a+\frac{b}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{9}+\frac{c}{9}+\frac{c}{9}+\frac{d}{16}+\frac{d}{16}+\frac{d}{16}+\frac{d}{16}\right)(1+\ldots+1)=10(a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}+\frac{d}{4})
\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}
a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}+\frac{d}{4}&=\frac{1}{4}(a+b+c+d)+\frac{1}{12}(a+b+c)+\frac{1}{6}(a+b)+\frac{1}{2}a \\
&\leqslant \frac{30}{4}+\frac{14}{12}+\frac{5}{6}+\frac{1}{2}=10
\end{aligned}$$

故

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d} \leqslant 10$$

75. 已知 a,b,c 为正实数, 且满足 $abc=1$, 试证明:

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}$$

由柯西不等式,

$$\left(\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\right)(a(b+c)+b(a+c)+c(a+b)) \geqslant\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2$$

注意到

$$a(b+c)+b(a+c)+c(a+b)=2(ab+bc+ca),$$

且

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2=\left(\frac{ab+bc+ca}{abc}\right)^2=(ab+bc+ca)^2$$

故由 AM-GM 不等式,

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{1}{2}(ab+bc+ca) \geqslant \frac{3}{2}\sqrt[3]{(abc)^2}=\frac{3}{2}$$

由 $abc=1$, 有

$$\sum_{cyc}\frac{1}{a^3(b+c)}=\sum_{cyc}\frac{bc}{a^2(b+c)}=\sum_{cyc}\frac{(\frac{1}{a})^2}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}.$$

利用不等式

$$\frac{x^2}{y}\geqslant x-\frac{y}{4},\quad x,y>0,$$

得到

$$\sum_{cyc}\frac{(\frac{1}{a})^2}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\geqslant\sum_{cyc}\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

由 AM-GM 不等式:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqslant\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}=\frac{3}{2}.$$

因此原不等式成立。

76. 已知 $0\leqslant x,y,z\leqslant 1$ 且

$$xyz=(1-x)(1-y)(1-z),$$

证明

$$x(1-z)+y(1-x)+z(1-y)\geqslant\frac{3}{4}.$$

由于 $0\leqslant x\leqslant 1$, 有 $(x-\frac{1}{2})^2\geqslant 0$, 从而 $0\leqslant x(1-x)\leqslant\frac{1}{4}$。对 y,z 同理成立。于是

$$xyz(1-x)(1-y)(1-z)\leqslant\frac{1}{64}.$$

由已知关系 $xyz=(1-x)(1-y)(1-z)$, 左端等于 $(xyz)^2$, 因此

$$(xyz)^2\leqslant\frac{1}{64}\quad\Longrightarrow\quad xyz\leqslant\frac{1}{8}.$$

再利用已知等式可得

$$x(1-z)+y(1-x)+z(1-y)=x+y+z-(xy+yz+zx)=1-2xyz,$$

其中最后一步由 $xyz=(1-x)(1-y)(1-z)$ 展开并化简得到。于是

$$x(1-z)+y(1-x)+z(1-y)=1-2xyz\geqslant 1-2\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{4}.$$

当 $x=y=z=\frac{1}{2}$ 时取等号。因此不等式成立, 且在 $x=y=z=\frac{1}{2}$ 时达等号。

77. 设正实数 a,b,c,x,y,z 满足 $a+b+c=x+y+z$, 证明

$$\frac{2a^2}{a+x}+\frac{2b^2}{b+y}+\frac{2c^2}{c+z}\geqslant a+b+c$$

由柯西不等式,

$$\left(\frac{2a^2}{a+x}+\frac{2b^2}{b+y}+\frac{2c^2}{c+z}\right)(2(a+x)+2(b+y)+2(c+z))\geqslant(2a+2b+2c)^2$$

又 $a+b+c=x+y+z$, 得

$$\frac{2a^2}{a+x}+\frac{2b^2}{b+y}+\frac{2c^2}{c+z}\geqslant a+b+c.$$

78. 已知 $a,b,c,d>0$, 证明不等式

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2}+\frac{b^3+c^3+d^3}{b^2+c^2+d^2}+\frac{c^3+d^3+a^3}{c^2+d^2+a^2}+\frac{d^3+a^3+b^3}{d^2+a^2+b^2}\geqslant a+b+c+d.$$

由 $a,b>0$, 有

$$0\leqslant(a+b)(a-b)^2=(a^2-b^2)(a-b)=a^3-a^2b-b^2a+b^3$$

可知

$$a^3+b^3\geqslant a^2b+ab^2,\quad b^3+c^3\geqslant b^2c+bc^2,\quad c^3+a^3\geqslant c^2a+ca^2.$$

于是

$$\begin{aligned}3(a^3+b^3+c^3)&\geqslant a^3+b^3+c^3+a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2\\&=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\end{aligned}$$

因此

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2}\geqslant\frac{a+b+c}{3}$$

故

$$\begin{aligned}&\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2}+\frac{b^3+c^3+d^3}{b^2+c^2+d^2}+\frac{c^3+d^3+a^3}{c^2+d^2+a^2}+\frac{d^3+a^3+b^3}{d^2+a^2+b^2}\\&\geqslant\frac{1}{3}\cdot3(a+b+c+d)=a+b+c+d\end{aligned}$$

79. 已知正实数 a,b,c,d, 求

$$\frac{ab+bc+cd}{a^2+b^2+c^2+d^2}$$

的最大值。

对任意正数 t, 由 AM-GM 不等式,

$$ab \leqslant \frac{t}{2}a^2+\frac{1}{2t}b^2, \quad bc \leqslant \frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}c^2, \quad cd \leqslant \frac{1}{2t}c^2+\frac{t}{2}d^2.$$

取 $t=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$, 使得

$$\frac{t}{2}=\frac{1}{2t}+\frac{1}{2}$$

则

$$ab+bc+cd \leqslant \frac{t}{2}(a^2+b^2+c^2+d^2).$$

因此最大值为

$$\frac{t}{2}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

当 $ta=b=c=td$ 时等号成立。

80. 已知正数 a,b,c 满足 $abc>1$, 求 $\dfrac{abc(a+b+c+8)}{abc-1}$ 的最小值。

设 $\lambda=\dfrac{abc(a+b+c+8)}{abc-1}>0$, 整理得

$$a+b+c+\frac{\lambda}{abc}=\lambda-8$$

由 AM-GM 不等式得

$$a+b+c+\frac{\lambda}{abc} \geqslant 4\sqrt[4]{abc\cdot\frac{\lambda}{abc}}=4\sqrt[4]{\lambda}$$

于是

$$\lambda-8 \geqslant 4\sqrt[4]{\lambda}$$

令 $k=\sqrt[4]{\lambda}>0$, 则不等式转化为

$$k^4-4k-8 \geqslant 0 \Rightarrow (k-2)(k^3+2k^2+4k+4) \geqslant 0$$

由于 $k>0, k^3+2k^2+4k+4>0$, 故 $k \geqslant 2$, 即

$$\lambda \geqslant 2^4=16$$

等号成立当且仅当 $a=b=c=2$

81. 已知 $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$, 求 $x^2+2y-2z+3$ 的取值范围。

由柯西不等式,

$$[y+(-z)]^2\leqslant(1+1)[y^2+(-z)^2]\leqslant 2(x^2+y^2+z^2)\leqslant 2$$

则 $y-z\geqslant-\sqrt{2}$, 且 $x^2\geqslant 0$, 可得

$$x^2+2y-2z+3\geqslant 0+2(-\sqrt{2})+3=3-2\sqrt{2}$$

当且仅当 $x=0,y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2},z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 等号成立;
又因为 $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$, 则 $x^2\leqslant 1-y^2-z^2$, 可得

$$x^2+2y-2z+3\leqslant 4-(y^2+z^2-2y+2z)$$

且

$$y^2+z^2-2y+2z=(y-1)^2+(z+1)^2-2,$$

设点 $A(-1,1)$ 和标准单位圆上一点 $P(y,z)$, 则

$$(y-1)^2+(z+1)^2-2=|PA|^2-2,$$

又因为 $|PA|^2\geqslant(|OA|-1)^2=3-2\sqrt{2}$, 可得 $(y-1)^2+(z+1)^2-2\geqslant 1-2\sqrt{2}$, 则

$$x^2+2y-2z+3\leqslant 4-(y^2+z^2-2y+2z)\leqslant 3+2\sqrt{2},$$

当且仅当 $x=0,y=\dfrac{\sqrt{2}}{2},z=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 等号成立。
$\therefore$ 取值范围是 $[3-2\sqrt{2},3+2\sqrt{2}]$.

82. 已知 $x,y,z>0$, 求

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{y^2+4z^2}+\sqrt{z^2+16x^2}}{9x+3y+5z}$$

的最小值。

(待解)

83. 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}<2.$$

我们证明对任意正整数 n, 都有

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}<\frac{2}{\sqrt{n}}-\frac{2}{\sqrt{n+1}}.$$

将不等式两边同乘以 $\sqrt{n(n+1)}$, 等价于

$$1<2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}.$$

等价地,

$$2\sqrt{n(n+1)}<n+(n+1).$$

由于 n 与 $n+1$ 均为正数, 由算术平均与几何平均不等式可知

$$2\sqrt{n(n+1)}\leqslant n+(n+1),$$

且不等号严格成立, 因此上述不等式成立。

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}<\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{n}}-\frac{2}{\sqrt{n+1}}\right).$$

右端为裂项求和,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{n}}-\frac{2}{\sqrt{n+1}}\right)=2.$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}<2.$$

84. 假设实数 $a,b,c\in[-1,1]$ 并且满足

$$1+2abc\geqslant a^2+b^2+c^2.$$

证明对所有正整数 n 有

$$1+2(abc)^n\geqslant a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}.$$

约束条件可以改写为

$$(a-bc)^2\leqslant(1-b^2)(1-c^2). \tag{1}$$

利用 Cauchy-Schwarz 不等式, 有

$$\begin{aligned}(a^{n-1}+a^{n-2}bc+\cdots+b^{n-1}c^{n-1})^2 &\leqslant (|a|^{n-1}+|a|^{n-2}|bc|+\cdots+|bc|^{n-1})^2\\ &\leqslant (1+|bc|+\cdots+|bc|^{n-1})^2\\ &\leqslant (1+|b|^2+\cdots+|b|^{2(n-1)})(1+|c|^2+\cdots+|c|^{2(n-1)}).\end{aligned}$$

将不等式 (1) 乘以上式得到

$$\begin{aligned}(a-bc)^2(a^{n-1}+a^{n-2}bc+\cdots+b^{n-1}c^{n-1})^2 &\leqslant ((1-b^2)(1+|b|^2+\cdots+|b|^{2(n-1)}))\\ &\quad\times((1-c^2)(1+|c|^2+\cdots+|c|^{2(n-1)}))\\ (a^n-b^nc^n)^2 &\leqslant (1-b^{2n})(1-c^{2n}),\end{aligned}$$

从而得到

$$1+2(abc)^n \geqslant a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}.$$

85. 设 $a_1,\ldots,a_n$ 为正实数, 且设 $s=a_1+\cdots+a_n$。证明

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\leqslant 1+\frac{s}{1!}+\frac{s^2}{2!}+\cdots+\frac{s^n}{n!}.$$

由算术—几何均值不等式 (A.M.-G.M.), 有

$$\left(\prod_{j=1}^{n}(1+a_j)\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(1+a_j)=1+\frac{s}{n}.$$

因此

$$\prod_{j=1}^{n}(1+a_j)\leqslant\left(1+\frac{s}{n}\right)^n.$$

对右端使用二项展开得

$$\left(1+\frac{s}{n}\right)^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{s^j}{n^j}=\sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{(n-j)!\,j!}\,\frac{s^j}{n^j}.$$

注意当 $0\leqslant j\leqslant n$ 时

$$\frac{n!}{(n-j)!\,n^j}=\prod_{k=0}^{j-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)\leqslant 1,$$

因此每一项满足

$$\frac{n!}{(n-j)!\,j!}\,\frac{s^j}{n^j}\leqslant\frac{s^j}{j!}.$$

将这些不等式代入二项和得到

$$\prod_{j=1}^{n}(1+a_j)\leqslant\sum_{j=0}^{n}\frac{s^j}{j!},$$

即

$$(1+a_1)\cdots(1+a_n)\leqslant 1+\frac{s}{1!}+\frac{s^2}{2!}+\cdots+\frac{s^n}{n!},$$

证毕。

86. 设 n 个正实数的最小值为 m, 最大值为 M, 记它们的算术平均为 A, 几何平均为 G。证明

$$A-G\geqslant\frac{1}{n}\left(\sqrt{M}-\sqrt{m}\right)^2.$$

设这 n 个正实数为 $x_1,\ldots,x_n$, 且不妨令 $x_1=m,\ x_n=M$。由题不等式等价于

$$A-G\geqslant\frac{(\sqrt{M}-\sqrt{m})^2}{n},$$

即等价于

$$\sum_{j=1}^{n}x_j-n\Big(\prod_{j=1}^{n}x_j\Big)^{1/n}\geqslant M-2\sqrt{Mm}+m.$$

移项得等价形式

$$\sum_{j=2}^{n-1}x_j+2\sqrt{Mm}\geqslant n\Big(\prod_{j=1}^{n}x_j\Big)^{1/n}.$$

把右端的几何平均下界由算术—几何均值不等式给出: 对这 n 个数

$$\sqrt{Mm},\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_{n-1},\ \sqrt{Mm}$$

应用 A.M.-G.M., 有

$$\frac{1}{n}\Big(\sum_{j=2}^{n-1}x_j+2\sqrt{Mm}\Big)\geqslant\Big(\sqrt{Mm}\cdot\prod_{j=2}^{n-1}x_j\cdot\sqrt{Mm}\Big)^{1/n}.$$

右端化简为

$$\Big(Mm\prod_{j=2}^{n-1}x_j\Big)^{1/n}=\Big(x_1x_n\prod_{j=2}^{n-1}x_j\Big)^{1/n}=\Big(\prod_{j=1}^{n}x_j\Big)^{1/n}.$$

两边同时乘以 n 即得

$$\sum_{j=2}^{n-1}x_j+2\sqrt{Mm}\geqslant n\Big(\prod_{j=1}^{n}x_j\Big)^{1/n},$$

从而恢复到所需不等式

$$A-G\geqslant\frac{1}{n}\left(\sqrt{M}-\sqrt{m}\right)^2.$$

证毕。

87. 设 $x_1, \ldots, x_n \geqslant -1$, 且

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^3 = 0$$

证明

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant \frac{n}{3}$$

当 $x \geqslant -1$ 时, 有不等式

$$0 \leqslant x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} = (x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

将 $x_1, \ldots, x_n$ 代入上式并求和, 得到

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{n}\left(x_i^3 - \frac{3}{4}x_i + \frac{1}{4}\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i^3 - \frac{3}{4}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{n}{4}$$

由已知条件 $\sum_{i=1}^{n} x_i^3 = 0$, 可得

$$0 \leqslant -\frac{3}{4}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{n}{4},$$

从而

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant \frac{n}{3}$$

注: 当且仅当 $n = 9k$, 其中 k 个 $x_i = -1$, 其余 $8k$ 个 $x_i = \frac{1}{2}$ 时取等号。

88. 已知非负实数 $x_1, x_2, \ldots, x_5$ 满足 $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_5^2 = 4$. 求下列表达式的最大值:

$$S = \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{x_i + 1} \sum_{i=1}^{5} x_i$$

当 $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1, x_5 = 0$ 时, $S = 12$, 下面证明 $S \leqslant 12$. 注意到

$$\frac{x(x-1)^2}{x+1} \geqslant 0$$

对 $x \geqslant 0$ 成立, 由此可得

$$\sum_{i=1}^{5} \frac{x_i(x_i-1)^2}{x_i+1} \geqslant 0$$

展开可知

$$\sum_{i=1}^{5}\left(x_i^2-3x_i+4-\frac{4}{x_i+1}\right)\geqslant 0$$

整理得

$$\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{x_i+1}\leqslant 6-\frac{3}{4}\sum_{i=1}^{5}x_i$$

由上式及 AM-GM 不等式可知

$$S\leqslant\frac{4}{3}\left(6-\frac{3}{4}\sum_{i=1}^{5}x_i\right)\left(\frac{3}{4}\sum_{i=1}^{5}x_i\right)\leqslant\frac{4}{3}\times 3^2=12$$

数列与级数

1. 设 a,b,c 三数成等比数列，且满足 $a+b+c=9$ 及 $a^2+b^2+c^2=189$，求 b。

关键：运用恒等式

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$$

又已知 $b^2=ac$，故

$$81=189+2(b(9-b)+b^2)\Rightarrow b=6$$

2. 已知 a,b,c,d 成等差数列，且实数 x,y,z,u 满足

$$\begin{cases}a+b+c+d=60\\x+y+z+u=12\\az+bu+cx+dy=168\end{cases}$$

求 $ay+bx+cu+dz$。

已知 a,b,c,d 成等差数列，于是

$$\begin{aligned}ay+bx+cu+dz+168&=ay+bx+cu+dz+(az+bu+cx+dy)\\&=(a+d)(y+z)+(b+c)(x+u)\\&=30(x+y+z+u)=360\end{aligned}$$

故

$$ay+bx+cu+dz=192$$

3. 已知 $a_1=-1$，$a_{n+1}=2a_n-3$，求 a_{2017}。

由递推式，

$$a_{n+1}-3=2(a_n-3),$$

所以 $a_1-3,a_2-3,\ldots$ 成等比数列，公比为 2。

$$a_{n+1}-3=2^n(a_1-3)=2^n(-1-3)=-2^{n+2}\Rightarrow a_{2017}=-2^{2018}+3.$$

由

$$a_{n+1}-a_n=2a_n-3-(2a_{n-1}-3)=2(a_n-a_{n-1}),$$

所以 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 为等比数列, 公比为 2, 因此

$$\begin{aligned}a_n&=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})+a_1\\&=\frac{(a_2-a_1)(2^{n-1}-1)}{2-1}-1\\&=(2a_1-3-a_1)(2^{n-1}-1)=-2^{n+1}+3\end{aligned}$$

所以

$$a_{2017}=-2^{2018}+3$$

4. 已知数列 $\{a_r\}$ 定义为

$$a_{r+1}=a_r+\frac{2r}{r^4+r^2+1},\quad a_1=0,\quad r\in\mathbb{N},$$

求 a_{61} 的精确值。

由递推关系, 对 $r=1,2,\ldots,60$ 累加得

$$a_{61}-a_1=\sum_{r=1}^{60}\frac{2r}{r^4+r^2+1}.$$

由于 $a_1=0$, 因此

$$a_{61}=\sum_{r=1}^{60}\frac{2r}{r^4+r^2+1}.$$

注意到

$$r^4+r^2+1=(r^2-r+1)(r^2+r+1),$$

于是

$$\frac{2r}{r^4+r^2+1}=\frac{2r}{(r^2-r+1)(r^2+r+1)}=\frac{1}{r^2-r+1}-\frac{1}{r^2+r+1}.$$

因此

$$a_{61}=\sum_{r=1}^{60}\left(\frac{1}{r^2-r+1}-\frac{1}{r^2+r+1}\right).$$

这是一个望远镜求和，展开可得

$$a_{61}=\left(\frac{1}{1^2-1+1}-\frac{1}{1^2+1+1}\right)+\left(\frac{1}{2^2-2+1}-\frac{1}{2^2+2+1}\right)+\cdots$$
$$+\left(\frac{1}{60^2-60+1}-\frac{1}{60^2+60+1}\right).$$

中间项两两抵消，最终剩下

$$a_{61}=1-\frac{1}{60^2+60+1}=1-\frac{1}{3661}.$$

因此

$$a_{61}=\frac{3660}{3661}.$$

5. 数列 $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots$ 满足 $a_0=3$，且

$$(3-a_{n-1})(6+a_n)=18,$$

证明

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\frac{1}{3}\left(2^{n+2}-n-4\right)$$

由递推关系

$$(3-a_{n+1})(a_n+6)=18 \implies a_{n+1}=\frac{3a_n}{a_n+6} \tag{1}$$

两边加 3 得到

$$a_{n+1}+3=\frac{3a_n}{a_n+6}+3=\frac{6(a_n+3)}{a_n+6} \tag{2}$$

两式相比得

$$\frac{a_{n+1}+3}{a_{n+1}}=\frac{2(a_n+3)}{a_n}$$

故数列 $\left\{\dfrac{a_n+3}{a_n}\right\}$ 是首项为 2，公比为 2 的等比数列，解得

$$\frac{a_n+3}{a_n}=2^{n+1}\Rightarrow a_n=\frac{3}{2^{n+1}-1}$$

因此

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{k+1}-1}{3}=\frac{1}{3}\left(2^{n+2}-n-4\right)$$

6. 设一函数 f 的定义域为所有正整数, 如果 $f(1)=101$, 且对所有正整数 $n>1$ 皆有

$$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n)=n^2 f(n)$$

求 $f(100)$ 的值。

发现

$$f(n)=\sum_{k=1}^{n} f(k)-\sum_{k=1}^{n-1} f(k)=n^2 f(n)-(n-1)^2 f(n-1)$$

即

$$f(n)=\frac{n-1}{n+1} f(n-1)$$

于是

$$f(100)=\frac{99\cdot 98\cdots 1}{101\cdot 100\cdots 3} f(1)=\frac{2}{101\cdot 100}\cdot 101=\frac{1}{50}$$

7. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{a_n}$, 则 $\lfloor a_{2025}\rfloor=$

由题意可知

$$a_{n+1}^2=a_n^2+\frac{1}{a_n^2}+2$$

所以有

$$a_{2025}^2=a_1^2+2\times(2025-1)+\left(\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\cdots+\frac{1}{a_{2024}^2}\right)$$

又因为 $a_1=1$, 且有

$$\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\cdots+\frac{1}{a_{2024}^2}<47$$

所以

$$63=\sqrt{3969}<a_{2025}<\sqrt{4096}=64$$

故 $[a_{2025}]=63$.

8. 设 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ 满足 $f(1)=\frac{3}{2}$, 且对所有 $n\in\mathbb{N}$ 且满足

$$f(n+1)=\left(1+\frac{1}{n+1}\right) f(n)+\left(1+\frac{n}{2}\right) f(1)+n^2+2n,$$

求 $f(40)$。

将递推式改写为

$$f(n+1)=\frac{n+2}{n+1}f(n)+g(n),$$

其中 $g(n)=(n+2)\left(n+\frac{3}{4}\right)$, 于是

$$\begin{aligned}
f(40)&=\frac{41}{40}f(39)+g(39)\\
&=\frac{41}{39}f(38)+\frac{41}{40}g(38)+g(39)\\
&=\cdots\\
&=\frac{41}{2}f(1)+\sum_{k=1}^{39}\frac{41}{k+2}\ g(k)\\
&=\frac{41}{2}\cdot\frac{3}{2}+41\sum_{k=1}^{39}(k+\frac{3}{4})\\
&=\frac{123}{4}+\frac{39\cdot 40}{2}+39\cdot\frac{3}{4}\\
&=33210
\end{aligned}$$

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=a_2=a_3=1$, 令 $b_n=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}$, $n\in\mathbb{N}$, 若 $\{b_n\}$ 是公比为 3 的等比数列, 求 a_{100} 的值。

由条件知

$$b_n=b_1\cdot 3^{n-1}=3^n$$

因此

$$a_{n+3}-a_n=b_{n+1}-b_n=3^{n+1}-3^n=2\cdot 3^n$$

于是

$$a_{100}=a_1+\sum_{k=1}^{33}(a_{3k+1}-a_{3k-2})=1+\sum_{k=1}^{33}2\cdot 3^{3k-2}$$

$$=1+6\cdot\frac{27^{33}-1}{27-1}=1+\frac{3}{13}(3^{99}-1)=\frac{3^{100}+10}{13}$$

10. 已知递归数列满足

$$a_1=\frac{1}{2},\quad a_{n+1}=\frac{a_n+3}{2a_n-4},$$

求通项公式 a_n。

先求不动点, 设 $x=\dfrac{x+3}{2x-4}$, 得 $2x^2-5x-3=0$, 所以不动点为 $x=-\dfrac{1}{2}, 3$, 于是

$$R_n=\frac{a_n+\frac{1}{2}}{a_n-3}.$$

且

$$R_{n+1}=\frac{a_{n+1}+\frac{1}{2}}{a_{n+1}-3}=-\frac{2}{5}R_n,$$

即 $\{R_n\}$ 为公比 $-\dfrac{2}{5}$ 的等比数列, 由于 $R_1=\frac{a_1+\frac{1}{2}}{a_1-3}=-\frac{2}{5}$, 故

$$R_n=\left(-\frac{2}{5}\right)^n$$

于是

$$a_n=\frac{3R_n+\frac{1}{2}}{R_n-1}=\frac{6\left(-\frac{2}{5}\right)^n+1}{2\left(\left(-\frac{2}{5}\right)^n-1\right)}=\frac{5^n+6(-2)^n}{2\left((-2)^n-5^n\right)}.$$

11. 设实数数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_na_{n+2}-a_{n+1}^2-(n+1)a_na_{n+1}=0$$

已知 $a_1=1, a_2=2018$, 求

$$\frac{a_{2018}\cdot a_{2016}}{a_{2017}^2}$$

由递推关系得

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}}{a_n}+(n+1)$$

由 $\dfrac{a_2}{a_1}=2018$, 有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=2018+\sum_{k=2}^{n}k=2017+\frac{n(n+1)}{2}$$

故

$$\frac{a_{2018}a_{2016}}{a_{2017}^2}=\frac{2017\left(1+\frac{2018}{2}\right)}{2017\left(1+\frac{2016}{2}\right)}=\frac{1010}{1009}$$

12. 已知数列 $\{a_n\}$ 由递推关系定义如下:

$$a_0=1,\quad a_{n+1}=\frac{a_n}{2(n+1)},\quad n\geqslant 0,$$

若函数 f 定义为

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

求 $f(2)$ 的精确值。

根据递推关系，可以看出所有奇数项 $a_{2n+1}=0$。偶数项为

$$a_0=1,\quad a_2=\frac{1}{2},\quad a_4=\frac{1}{8},\quad a_6=\frac{1}{48},\ldots$$

满足公式

$$a_{2n}=\frac{1}{2^n n!}.$$

因此函数 f 可表示为

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n=e^{x^2/2}.$$

所以

$$f(2)=e^{2^2/2}=e^2.$$

13. 设 $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为一列正实数，且 $b_0=1$,

$$b_n=2+\sqrt{b_{n-1}}-2\sqrt{1+\sqrt{b_{n-1}}}$$

计算

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n 2^n$$

令 $a_n=1+\sqrt{b_n}$，其中 $n\geqslant 0$。则 $a_n>1$,$a_0=2$，并且

$$a_n=1+\sqrt{1+a_{n-1}-2\sqrt{a_{n-1}}}=\sqrt{a_{n-1}}$$

因此

$$a_n=2^{2^{-n}}$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} b_n 2^n &= \sum_{n=1}^{N}(a_n-1)^2 2^n \\ &= \sum_{n=1}^{N}\left(a_n^2 2^n - a_n 2^{n+1} + 2^n\right) \\ &= \sum_{n=1}^{N}\left((a_{n-1}-1)^2 2^n - (a_n-1)^2 2^{n+1}\right) \\ &= (a_0-1)^2 2 - (a_N-1)^2 2^{N+1} \\ &= 2 - 2\frac{2^{2^{-N}}-1}{2^{-N}}\end{aligned}$$

令 $x=2^{-N}$, 当 $N\to\infty$ 时有 $x\to 0$, 从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n 2^n = \lim_{N\to\infty}\left(2-2\frac{2^{2^{-N}}-1}{2^{-N}}\right) = \lim_{x\to 0}\left(2-2\frac{2^x-1}{x}\right) = 2-2\ln 2$$

14. 一列 11 个正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_{11}$ 满足 $a_1=4$, $a_{11}=1024$, 并且对 $2\leqslant n\leqslant 11$ 有

$$a_n + a_{n-1} = \frac{5}{2}\sqrt{a_n a_{n-1}}.$$

求满足条件的序列数量 S 。

设 $a_n=x, a_{n-1}=y$, 解

$$x+y=\frac{5}{2}\sqrt{xy}$$

得

$$x=4y \text{ 或 } x=\frac{y}{4}.$$

考虑二叉树, 每一步可以乘以 4 或除以 4。从 $a_1=4$ 到 $a_{11}=1024$ 共 10 步:

$$4^m\cdot 4^{-(10-m)} = 4^4 \Rightarrow m=7$$

即有 7 步乘以 4,3 步除以 4。可能序列数为选择 3 步除以 4 的位置数:

$$S={}^{10}C_3=120$$

15. 已知复数列 $\{z_n\}$ 满足 $z_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}, z_{n+1}=\overline{z_n}(1+z_n i)$, 其中 $n\in\mathbb{N}$, 求 z_{2021} 的值。

对 $n \in \mathbb{N}$, 设 $z_n = a_n + b_n i,\ a_n, b_n \in \mathbb{R}$, 则

$$a_{n+1} + b_{n+1} i = z_{n+1} = \overline{z_n}(1 + z_n i) = \overline{z_n} + |z_n|^2 i = a_n - b_n i + (a_n^2 + b_n^2) i$$

因此

$$a_{n+1} = a_n = a_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, b_{n+1} = a_n^2 + b_n^2 - b_n = b_n^2 - b_n + \frac{3}{4}$$

即

$$b_{n+1} - \frac{1}{2} = b_n^2 - b_n + \frac{1}{4} = (b_n - \frac{1}{2})^2$$

所以当 $n \geqslant 2$,

$$b_n = \frac{1}{2} + (b_1 - \frac{1}{2})^{2^{n-1}} = \frac{1}{2} + (-\frac{1}{2})^{2^{n-1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{2^{n-1}}}$$

于是

$$z_{2021} = a_{2021} + b_{2021} i = \frac{\sqrt{3}}{2} + (\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{2^{2020}}}) i$$

16. 已知

$$a_0 = \frac{1}{2}, a_n = \left(\frac{1 + a_{n-1}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, \forall n \in \mathbb{N},$$

求 $\lim\limits_{n \to \infty} 4^n \cdot (1 - a_n)$。

由

$$\cos\theta = \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

可得 $a_0 = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, 从而

$$a_1 = \cos\frac{\pi}{3 \cdot 2} = \left(\frac{1 + \frac{1}{2}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, a_2 = \cos\frac{\pi}{3 \cdot 2^2}, \cdots, a_n = \cos\frac{\pi}{3 \cdot 2^n}$$

由泰勒展开,

$$a_n = \cos\frac{\pi}{3 \cdot 2^n} = 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{3 \cdot 2^n}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{\pi}{3 \cdot 2^n}\right)^4}{4!} - \cdots$$

因此

$$\lim_{n \to \infty} 4^n \cdot (1 - a_n) = \lim_{n \to \infty} 4^n \cdot \left(\frac{\left(\frac{\pi}{3 \cdot 2^n}\right)^2}{2!} - \frac{\left(\frac{\pi}{3 \cdot 2^n}\right)^4}{4!} + \cdots\right) = \frac{\pi^2}{9} \cdot \frac{1}{2!} = \frac{\pi^2}{18}$$

17. Let $a_1, a_2, \ldots$ be a sequence of real numbers satisfying

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} - \frac{a_{n+2}}{a_n} - \frac{a_{n+1} a_{n+2}}{a_n^2} = \frac{n a_{n+2} a_{n+1}}{a_n}.$$

Given that $a_1 = -1$ and $a_2 = -\frac{1}{2}$, find the value of $\frac{a_9}{a_{20}}$.

(待解)

18. 数列 $1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, \ldots$ 的第 100 项是?

一般地, 数字 n 出现 n 项, 因此从数字 1 到数字 n 共出现

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

项, 由 $\dfrac{n(n+1)}{2} \leqslant 100$ 得 $n < 14$, 取 $n = 13$ 时共有 91 项, 因此第 100 项为 14。

19. 等差数列 $1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots$ 按如下方法分组

$$(1), (3, 5), (7, 9, 11), (13, 15, 17, 19), \ldots$$

求第 n 组中 n 个数的和 S_n。

等差数列 $1, 3, 5, 7, \ldots$ 的通项公式为

$$a_n = 2n - 1.$$

第 n 组有 n 个奇数, 因此第 n 组的第 n 个奇数是等差数列中的第

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

个奇数, 且第 n 组的第 1 个奇数是等差数列中的第

$$\frac{n(n+1)}{2} - (n-1) = \frac{n^2 - n + 2}{2}$$

故第 n 组中第 n 个奇数是

$$2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - 1 = n^2 + n - 1$$

第 n 组中第 1 个奇数是

$$2 \cdot \frac{n^2 - n + 2}{2} - 1 = n^2 - n + 1$$

所以

$$S_n = \frac{n[(n^2 + n - 1) - (n^2 - n + 1)]}{2} = n^3$$

20. 已知数列 $\{a_n\}$, 且 $a_1=1$, 定义 $S_n=n^2a_n$. 求 a_n 和 S_n。

由
$$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2a_n-(n-1)^2a_{n-1}\Rightarrow(n^2-1)a_n=(n-1)^2a_{n-1}$$
于是
$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n-1}{n+1}.$$
因此
$$a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{2}{n(n+1)}$$
且
$$S_n=n^2a_n=\frac{2n}{n+1}.$$

21. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 公差 $d=2$, $a_1+a_2+\cdots+a_{100}=100$, 求 $a_4+a_8+\cdots+a_{100}$ 的值。

由
$$a_1+a_2+\cdots+a_{100}=100,$$
解得
$$100a_1+\frac{100\cdot 99}{2}\cdot 2=100\Rightarrow a_1=-98$$
于是 $a_4=-92, a_100=100$,
$$a_4+a_8+\cdots+a_{100}=\frac{25}{2}(-92+100)=100.$$

22. 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$ 且 $a_na_{n+1}=4^n$, 求前 n 项和 S_n。

由题意,
$$\frac{a_{n+2}}{a_n}=\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\cdot\frac{a_{n+1}}{a_n}=4,$$
故 $\{a_1,a_3,a_5,\dots\}$ 与 $\{a_2,a_4,a_6,\dots\}$ 皆为公比为 4 的等比数列, 其中
$$a_1=1,a_2=4,$$
当 n 为奇数,
$$\begin{aligned}S_n&=(a_1+a_3+\cdots+a_n)+(a_2+a_4+\cdots+a_{n-1})\\&=\frac{1(1-4^{\frac{n+1}{2}})}{1-4}+\frac{4(1-4^{\frac{n-1}{2}})}{1-4}=\frac{2^{n+1}-1}{3}+\frac{2^{n+1}-4}{3}=\frac{4}{3}\cdot 2^n-\frac{5}{3}.\end{aligned}$$

当 n 为偶数,

$$\begin{aligned}S_n &= (a_1+a_3+\cdots+a_{n-1})+(a_2+a_4+\cdots+a_n)\\ &= \frac{1(1-4^{\frac{n}{2}})}{1-4}+\frac{4(1-4^{\frac{n}{2}})}{1-4}=\frac{5}{3}\cdot 2^n-\frac{5}{3}.\end{aligned}$$

综上,

$$S_n=\frac{9+(-1)^n}{3}\cdot 2^{n-1}-\frac{5}{3}$$

23. 15.(浙江 18)(本题 14 分) 已知数列 $\{x_n\}$ 的首项 $x_1=3$, 通项 $x_n=2^np+nq$ ($n\in\mathbf{N}^*$, p,q 为常数), 且 x_1,x_4,x_5 成等差数列, 求:

(I) p,q 的值;

(II) 数列 $\{x_n\}$ 的前 n 项的和 S_n 的公式。

(I) 解: 由 $x_1=3$, 得 $2p+q=3$,

又 $x_4=2^4p+4q$, $x_5=2^5p+5q$, 且 $x_1+x_5=2x_4$, 得

$3+2^5p+5q=2(2^4p+4q)$,

解得 $p=1,q=1$.

(II) 解: $S_n=(2^1+2^2+\cdots+2^n)+(1+2+\cdots+n)$

$=2^{n+1}-2+\frac{n(n+1)}{2}$.

24. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为

$$S_n=2a_n-2^n.$$

(I) 求 a_1,a_4;

(II) 证明:$\{a_{n+1}-2a_n\}$ 是等比数列;

(III) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

(I) 当 $n=1$ 时,

$$S_1=a_1=2a_1-2,$$

解得

$$a_1=2,\ S_1=2.$$

由

$$S_n = 2a_n - 2^n$$

得

$$2a_n = S_n + 2^n.$$

于是

$$2a_{n+1} = S_{n+1} + 2^{n+1} = a_{n+1} + S_n + 2^{n+1},$$

从而

$$a_{n+1} = S_n + 2^{n+1}.$$

因此

$$a_2 = S_1 + 2^2 = 6,\ \ S_2 = 8,$$

$$a_3 = S_2 + 2^3 = 16,\ \ S_3 = 24,$$

$$a_4 = S_3 + 2^4 = 40.$$

(I) 得 $a_1 = 2,\ a_4 = 40$。

(II) 由上式可得

$$\begin{aligned} a_{n+1} - 2a_n &= (S_n + 2^{n+1}) - (S_n + 2^n) \\ &= 2^n. \end{aligned}$$

故数列 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ 是首项为 2、公比为 2 的等比数列。

(III) 由

$$a_{n+1} - 2a_n = 2^n$$

得

$$a_n = (a_n - 2a_{n-1}) + 2(a_{n-1} - 2a_{n-2}) + \cdots + 2^{n-2}(a_2 - 2a_1) + 2^{n-1}a_1.$$

代入 $a_1 = 2,\ a_2 = 6$, 并利用 $a_{k+1} - 2a_k = 2^k$, 可得

$$a_n = 2^{n-1}(n+1).$$

25. 18.（陕西 20）（本小题满分 12 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = \frac{2}{3}$, 且

$$a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n + 1} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

(I) 证明: 数列 $\left\{\frac{1}{a_n}-1\right\}$ 是等比数列;

(II) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n。

(I) 由

$$a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+1}$$

得

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{a_n+1}{2a_n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a_n}.$$

于是

$$\frac{1}{a_{n+1}}-1=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_n}-1\right).$$

又

$$a_1=\frac{2}{3},\quad \frac{1}{a_1}-1=\frac{1}{2}.$$

因此, 数列 $\left\{\frac{1}{a_n}-1\right\}$ 是首项为 $\frac{1}{2}$、公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列。

(II) 由 (I) 可得

$$\frac{1}{a_n}-1=\frac{1}{2^n},$$

即

$$\frac{1}{a_n}=1+\frac{1}{2^n},$$

从而

$$a_n=\frac{2^n}{2^n+1}.$$

于是

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{2^k+1}=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{2^k+1}\right)=n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k+1}.$$

设

$$T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k},$$

则

$$\frac{1}{2}T_n=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{2^{k+1}}+\frac{n}{2^{n+1}}.$$

两式相减得

$$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}.$$

由等比数列求和公式,

$$\frac{1}{2}T_n=1-\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}},$$

从而
$$T_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n}.$$
又
$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$
可得数列 $\left\{\frac{k}{2^k}\right\}$ 的前 n 项和为
$$2 - \frac{n+2}{2^n}.$$
因此
$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} + 2 - \frac{n+2}{2^n} = \frac{n^2+n+4}{2} - \frac{n+2}{2^n}.$$

26. 6.(江西 19) 等差数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, $a_1 = 3$, 前 n 项和为 S_n, $\{b_n\}$ 为等比数列, $b_1 = 1$, 且
$$b_2S_2 = 64, \quad b_3S_3 = 960.$$
(1) 求 a_n 与 b_n;

(2) 求 $\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \cdots + \frac{1}{S_n}$。

(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d, 等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q。则
$$a_n = 3 + (n-1)d, \quad b_n = q^{n-1}.$$
由
$$S_2 = 3 + (3+d) = 6 + d, \quad S_3 = 3 + (3+d) + (3+2d) = 9 + 3d,$$
代入已知条件得
$$\begin{cases} (6+d)q = 64, \\ (9+3d)q^2 = 960. \end{cases}$$
解得
$$\begin{cases} d = 2, \\ q = 8 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} d = -\frac{6}{5}, \\ q = \frac{40}{3}. \end{cases}$$
因 $\{a_n\}$ 各项均为正数, 舍去第二组解。故
$$a_n = 3 + 2(n-1) = 2n + 1, \quad b_n = 8^{n-1}.$$

(2) 由 $a_n=2n+1$ 得

$$S_n=3+5+\cdots+(2n+1)=n(n+2).$$

因此

$$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_n}=\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{2\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}.$$

将其拆分为

$$\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right),$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\\&=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}.\end{aligned}$$

27. 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 前 n 项的和, 已知 $\frac{1}{3}S_3$ 与 $\frac{1}{4}S_4$ 的等比中项为 $\frac{1}{5}S_5$, 等差中项为 1, 求等差数列的通项 a_n。

由 $(S_3)(S_4)=(S_5)^2$ 及 $\frac{1}{3}S_3+\frac{1}{4}S_4=2$ 得

$$\begin{cases}\frac{1}{3}\left(3a+\frac{3\cdot 2}{2}d\right)\cdot\frac{1}{4}\left(4a+\frac{4\cdot 3}{2}d\right)=\frac{1}{25}\left(5a+\frac{5\cdot 4}{2}d\right)^2\\ \frac{1}{3}\left(3a+\frac{3\cdot 2}{2}d\right)+\frac{1}{4}\left(4a+\frac{4\cdot 3}{2}d\right)=2\end{cases}$$

解得

$$d=0,a=1\ \text{或}\ d=-\frac{12}{5},a=4$$

经检验得通项解为 $a_n=1$ 或

$$a_n=4-\frac{12}{5}(n-1)=\frac{32}{5}-\frac{12}{5}n.$$

28. 已知数列 $\{a_n\}$ 中每一项均为正数，且数列前 n 项之和为 S_n，若

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{4S_k}{a_k+2}=S_n$$

试求 a_n 及 S_n。

由递推关系得

$$S_1=a_1=\frac{4a_1}{a_1+2}\Rightarrow a_1^2-2a_1=0$$

因 $a_1\neq 0$，解得 $a_1=2$，于是

$$a_n=S_n-S_{n-1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{4S_k}{a_k+2}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{4S_k}{a_k+2}=\frac{4S_n}{a_n+2}\Rightarrow S_n=\frac{1}{4}a_n(a_n+2)$$

又

$$S_{n-1}=S_n-a_n=\frac{1}{4}a_n^2-\frac{1}{2}a_n=\frac{1}{4}a_{n-1}(a_{n-1}+2)$$

因此

$$a_n^2-2a_n=a_{n-1}^2+2a_{n-1}\Rightarrow (a_n-1)^2=(a_{n-1}+1)^2\Rightarrow a_n-1=a_{n-1}+1$$

即

$$a_n=a_{n-1}+2=\cdots=a_1+2(n-1)=2n,S_n=n^2+n$$

29. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\begin{cases}a_0=1\\ a_{2k+1}=a_k\\ a_{2k+2}=a_k+a_{k+1}\end{cases}$ ，$k\in N\cup\{0\}$，求 $\sum\limits_{k=0}^{63}a_k$。

记

$$S(n)=\sum_{k=0}^{2^n-1}a_k$$

则

$$S(n)=(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{2^n-2})+(a_1+a_3+\cdots+a_{2^n-1})$$

其中偶数项为

$$a_0+(a_0+a_1)+(a_1+a_2)+(a_2+a_3)+\cdots+(a_{2^{n-1}-2}+a_{2^{n-1}-1})=2(a_0+a_1+\cdots+a_{2^{n-1}-2})+a_{2^{n-1}-1}$$

奇数项为

$$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{2^{n-1}-1}$$

所以

$$S(n)=3(a_0+a_1+\cdots+a_{2^{n-1}-2})+2a_{2^{n-1}-1}=3(a_0+a_1+\cdots+a_{2^{n-1}-1})-a_{2^{n-1}-1}$$

由 $a_{2^{n-1}-1}=1$, 得

$$S(n)=3S(n-1)-1$$

于是

$$S(8)=3S(7)-1=3^2S(6)-3-1=\cdots=3^5S(1)-(1+3+\cdots+3^4)$$

又 $S(1)=a_0+a_1=2$, 所以

$$S(8)=243\cdot 2-121=365$$

30. 已知各项皆为正整数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 且对任意正整数 n 有

$$\sqrt{S_n}=\lambda(a_n-1)+1,$$

其中 λ 为正实数。若 $2a_2=a_1+a_3$, 试求数列 $\{a_n\}$ 的一般项。

由 $2a_2=a_1+a_3$, 设

$$d=a_2-a_1=a_3-a_2$$

则

$$\sqrt{S_2}-\sqrt{S_1}=\lambda(a_2-a_1)=\lambda(a_3-a_2)=\sqrt{S_3}-\sqrt{S_2}\Rightarrow 2\sqrt{S_2}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_3}$$

两边平方得

$$4S_2=S_1+S_3+2\sqrt{S_1S_3}\Rightarrow 4(2a_1+d)=4a_1+3d+2\sqrt{a_1(3a_1+3d)}$$

解得 $d=2a_1$, 则

$$S_1=a_1,\ S_2=4a_1,\ S_3=9a_1$$

解

$$\lambda=\sqrt{S_2}-\frac{1}{a_2-1}=\sqrt{S_3}-\frac{1}{a_3-1}$$

得 $a_1=1,\lambda=\dfrac{1}{2}$, 于是

$$\begin{aligned}\sqrt{S_n}&=\frac{1}{2}(a_n-1)+1\\a_n=S_n-S_{n-1}&=2\sqrt{S_n}-1\\(\sqrt{S_n}-1)^2&=S_{n-1}\\\sqrt{S_n}&=\sqrt{S_{n-1}}+1\\\frac{a_n+1}{2}&=\frac{a_{n-1}+1}{2}+1\end{aligned}$$

故

$$a_n=a_{n-1}+2=a_{n-2}+4=\cdots=a_1+2(n-1)=2n-1$$

31. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1,\ a_{n+1}=\dfrac{a_n^2}{2a_n+1}$, 求通项公式并证明

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{1+a_k}<\frac{7}{8}.$$

由递推式

$$a_{n+1}=\frac{a_n^2}{2a_n+1},$$

可得

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2a_n+1}{a_n^2}=\frac{2}{a_n}+\frac{1}{a_n^2},$$

从而

$$1+\frac{1}{a_{n+1}}=1+\frac{2}{a_n}+\frac{1}{a_n^2}=\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^2.$$

取对数, 得

$$\log\left(1+\frac{1}{a_{n+1}}\right)=2\log\left(1+\frac{1}{a_n}\right).$$

因此数列 $\left\{\log\left(1+\frac{1}{a_n}\right)\right\}$ 是首项为 $\log 2$、公比 2 的等比数列, 于是

$$\log\left(1+\frac{1}{a_n}\right)=2^{n-1}\log 2=\log\left(2^{2^{n-1}}\right),$$

即

$$1+\frac{1}{a_n}=2^{2^{n-1}}\Rightarrow a_n=\frac{1}{2^{2^{n-1}}-1}.$$

且有

$$\frac{a_n}{1+a_n}=\frac{1}{2^{2^{n-1}}}.$$

所以

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{1+a_k}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^{2^{n-1}}}.$$

注意当 $n\geqslant 4$ 时, 有

$$2^{n-1}>n+1\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n-1}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{1+a_k}&<\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\sum_{k=5}^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{5}\left(1-(\frac{1}{2})^{n-3}\right)}{1-\frac{1}{2}}\\&=\frac{7}{8}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}<\frac{7}{8}\end{aligned}$$

当 $n=1,2,3$ 时直接检验, 亦满足不等式, 故

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{1+a_k}<\frac{7}{8},\quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

32. 16. (重庆 22)(本小题满分 12 分, (I) 小问 6 分. (II) 小问 6 分)

设各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2, a_n=a_{n+1}^{\frac{3}{1}}+2$ $(n\in\mathbf{N}^*)$. (I) 若 $a_2=\frac{1}{4}$, 求 a_3,a_4, 并猜想 a_{2008} 的值 (不需证明); (II) 若 $2\sqrt{2}\leqslant a_1a_2\cdots a_n<4$ 对 $n\geqslant 2$ 恒成立, 求 a_2 的值.

解: (I) 因 $a_1=2, a_2=2^{-2}$, 故

由此有 $a_1=2\left(-2\right)^{0}, a_2=2\left(-2\right)^{\frac{1}{4}}, a_3=2\left(-2\right)^{\frac{1}{2}}, a_4=2\left(-2\right)^{\frac{3}{4}}$,

从而猜想 a_n 的通项为

$a_n=2\left(-2\right)^{\frac{n-1}{4}}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$,

所以 $a_{2008}=2\left(-2\right)^{\frac{2007}{4}}$.

(II) 令 $x_n=\log_2 a_n$, 则 $a_1a_2\cdots a_n=2^{x_1+x_2+\cdots+x_n}$, 故只需求 x_2 的值。

设 S_n 表示 x_2 的前 n 项和, 则 $a_1a_2\cdots a_n=2^{S_n}$, 由 $2\sqrt{2}\leqslant a_1a_2\cdots a_n<4$ 得

$2^{\frac{3}{2}} \leqslant 2^{S_n} < 2^2\ (n \geqslant 2)$.

因上式对 $n=2$ 成立, 可得 $\frac{3}{2} \leqslant S_2 < 2$, 又由 $a_1=2$, 得 $x_1=1$, 故 $x_2 \geqslant \frac{1}{2}$.

由于 $a_1=2$, $a_n = a_{n+1} + \frac{3}{2^{n+2}}\ (n \in \mathbf{N}^*)$, 得 $x_n = x_{n+1} + \frac{1}{2^{n+2}}\ (n \in \mathbf{N}^*)$, 即 $\frac{1}{x_{n+2}+2x_{n+1}} = (\frac{1}{x_{n+2}+x_{n+1}}) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x_{n+1}+x_n} = \frac{1}{2}(\frac{1}{x_{n+1}+2x_n})$,

因此数列 $\{\frac{1}{x_{n+1}+2x_n}\}$ 是首项为 $\frac{1}{x_2+2x_1}$, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列, 故

$\frac{1}{x_{n+1}+2x_n} = (\frac{1}{x_2+2})\frac{1}{2^{n-1}}\ (n \in \mathbf{N}^*)$.

将上式对 n 求和得

$S_{n+1} - x_1 + 2S_n = (\frac{1}{x_2+2})(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}) = (\frac{1}{x_2+2})(2-\frac{1}{2^{n-1}})\ (n \geqslant 2)$.

因 $S_n < 2$, $S_{n+1} < 2\ (n \geqslant 2)$ 且 $x_1 = 1$, 故

$(\frac{1}{x_2+2})(2-\frac{1}{2^{n-1}}) < 5\ (n \geqslant 2)$.

因此 $2x_2 - 1 < \frac{x_2+2}{2^{n-1}}\ (n \geqslant 2)$.

下证 $x_2 \leqslant \frac{1}{2}$, 若淆, 假设 $x_2 > \frac{1}{2}$, 则由上式知, 不等式 $2^{n-1} < \frac{x_2+2}{2x_2-1}$

对 $n \geqslant 2$ 恒成立, 但这是不可能的, 因此 $x_2 \leqslant \frac{1}{2}$.

又 $x_2 \geqslant \frac{1}{2}$, 故 $x_2 = \frac{1}{2}$, 所以 $a_2 = 2^{x_2} = \sqrt{2}$.

8.(辽宁 20)(本小题满分 12 分)

在数列 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$ 是各项均为正数的等比数列, 设

$$c_n = \frac{b_n}{a_n}\ (n \in \mathbf{N}^*).$$

(I) 数列 $\{c_n\}$ 是否为等比数列？证明你的结论;

(II) 设数列 $\{\ln a_n\}$,$\{\ln b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n,T_n。若 $a_1=2$,$\frac{S_n}{T_n} = \frac{n}{2n+1}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和。

解:

(I) $\{c_n\}$ 是等比数列。

证明: 设 $\{a_n\}$ 的公比为 $q_1(q_1>0)$,$\{b_n\}$ 的公比为 $q_2(q_2>0)$, 则

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} \cdot \frac{a_n}{b_n} = \frac{b_{n+1}}{b_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{q_2}{q_1} \neq 0,$$

故 $\{c_n\}$ 为等比数列。

(II) 因 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$ 为等比数列,

$$S_n = n\ln a_1 + \frac{n(n-1)}{2}\ln q_1, \qquad T_n = n\ln b_1 + \frac{n(n-1)}{2}\ln q_2.$$

由题意

$$\frac{n\ln a_1 + \frac{n(n-1)}{2}\ln q_1}{n\ln b_1 + \frac{n(n-1)}{2}\ln q_2} = \frac{n}{2n+1},$$

化简得对一切 n 成立的恒等式

$$(2\ln q_1 - \ln q_2)n^2 + (4\ln a_1 - \ln q_1 - 2\ln b_1 + \ln q_2)n + (2\ln a_1 - \ln q_1) = 0.$$

于是

$$\begin{cases} 2\ln q_1 - \ln q_2 = 0, \\ 4\ln a_1 - \ln q_1 - 2\ln b_1 + \ln q_2 = 0, \\ 2\ln a_1 - \ln q_1 = 0. \end{cases}$$

由 $a_1 = 2$ 解得

$$q_1 = 4, \qquad q_2 = 16, \qquad b_1 = 8.$$

故

$$c_n = \frac{b_n}{a_n} = \frac{8\cdot 16^{n-1}}{2\cdot 4^{n-1}} = 4^n.$$

所以数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_n = 4 + 4^2 + \cdots + 4^n = \frac{4}{3}\left(4^n - 1\right).$$

33.(山东 20)(本小题满分 12 分)

将数列 $\{a_n\}$ 中的所有项按每一行比上一行多一项的规则排成如下数表:

$$\begin{array}{l} a_1 \\ a_2,\ a_3 \\ a_4,\ a_5,\ a_6 \\ a_7,\ a_8,\ a_9,\ a_{10} \end{array}$$

记表中的第一列数 $a_1, a_2, a_4, a_7, \cdots$ 构成的数列为 $\{b_n\}$, $b_1 = a_1 = 1$。S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 且满足

$$\frac{2b_n}{b_nS_n - S_n^2} = 1 \quad (n \geqslant 2).$$

(I) 证明数列 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 成等差数列, 并求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(II) 上表中，若从第三行起，每一行中的数按从左到右的顺序均构成等比数列，且公比为同一个正数。当 $a_{81}=-\frac{4}{91}$ 时，求上表中第 $k(k\geqslant 3)$ 行所有项的和。

解:

(I) 由已知，当 $n\geqslant 2$ 时，

$$\frac{2b_n}{b_nS_n-S_n^2}=1.$$

又

$$S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n,\qquad b_n=S_n-S_{n-1}\ (n\geqslant 2),$$

代入得

$$\frac{2(S_n-S_{n-1})}{(S_n-S_{n-1})S_n-S_n^2}=1.$$

化简得

$$-S_{n-1}S_n-S_{n-1}^2=2S_n-2S_{n-1}.$$

于是

$$\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n-1}}=\frac{1}{2}.$$

又 $S_1=b_1=1$，故数列 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 是首项为 1，公差为 $\frac{1}{2}$ 的等差数列，

$$\frac{1}{S_n}=1+\frac{1}{2}(n-1)=\frac{n+1}{2},$$

从而

$$S_n=\frac{2}{n+1}.$$

当 $n\geqslant 2$ 时，

$$b_n=S_n-S_{n-1}=\frac{2}{n+1}-\frac{2}{n}=-\frac{2}{n(n+1)}.$$

因此

$$b_n=\begin{cases}1, & n=1,\\ -\dfrac{2}{n(n+1)}, & n\geqslant 2.\end{cases}$$

(II) 设从第三行起，每一行的公比为 $q(q>0)$。因为

$$1+2+\cdots+12=\frac{12\times 13}{2}=78,$$

所以表中第 1 行至第 12 行共含有数列 $\{a_n\}$ 的前 78 项，故 a_{81} 在表中第 13 行第 3 列。于是

$$a_{81}=b_{13}q^2=-\frac{4}{91}.$$

又

$$b_{13} = -\frac{2}{13 \times 14},$$

解得 $q = 2$。

记表中第 $k(k \geqslant 3)$ 行所有项的和为 S, 则

$$S = b_k \frac{1-q^k}{1-q} = -\frac{2}{k(k+1)} \cdot \frac{1-2^k}{1-2} = \frac{2}{k(k+1)}(1-2^k), \quad k \geqslant 3.$$

34. 7.(湖南 20) 数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_1 = 0,\ a_2 = 2,\ a_{n+2} = \left(1 + \cos^2 \frac{n\pi}{2}\right) a_n + 4\sin^2 \frac{n\pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

(1) 求 a_3, a_4, 并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设

$$S_k = a_1 + a_3 + \cdots + a_{2k-1}, \quad T_k = a_2 + a_4 + \cdots + a_{2k}, \quad W_k = \frac{2S_k}{2+T_k}\ (k \in \mathbb{N}^*),$$

求使 $W_k > 1$ 的所有 k 的值, 并说明理由。

(1) 由已知 $a_1 = 0, a_2 = 2$。

当 $n = 1$ 时,

$$a_3 = \left(1 + \cos^2 \frac{\pi}{2}\right) a_1 + 4\sin^2 \frac{\pi}{2} = 0 + 4 = 4.$$

当 $n = 2$ 时,

$$a_4 = \left(1 + \cos^2 \pi\right) a_2 + 4\sin^2 \pi = 2a_2 = 4.$$

一般地, 当 $n = 2k-1\ (k \in \mathbb{N}^*)$ 时,

$$a_{2k+1} = \left(1 + \cos^2 \frac{(2k-1)\pi}{2}\right) a_{2k-1} + 4\sin^2 \frac{(2k-1)\pi}{2} = a_{2k-1} + 4,$$

即

$$a_{2k+1} - a_{2k-1} = 4.$$

因此 $\{a_{2k-1}\}$ 为首项为 0, 公差为 4 的等差数列,

$$a_{2k-1} = 4(k-1).$$

当 $n=2k\ (k\in\mathbb{N}^*)$ 时,

$$a_{2k+2}=\left(1+\cos^2\frac{2k\pi}{2}\right)a_{2k}+4\sin^2\frac{2k\pi}{2}=2a_{2k}.$$

因此 $\{a_{2k}\}$ 为首项为 2, 公比为 2 的等比数列,

$$a_{2k}=2^k.$$

综上,

$$a_n=\begin{cases}4(k-1), & n=2k-1\ (k\in\mathbb{N}^*),\\ 2^k, & n=2k\ (k\in\mathbb{N}^*).\end{cases}$$

(2) 由 (1) 得

$$S_k=0+4+\cdots+4(k-1)=2k(k-1),$$
$$T_k=2+2^2+\cdots+2^k=2^{k+1}-2.$$

于是

$$W_k=\frac{2S_k}{2+T_k}=\frac{4k(k-1)}{2^{k+1}}=\frac{k(k-1)}{2^{k-1}}.$$

计算得

$$W_1=0,\quad W_2=1,\quad W_3=\frac{3}{2},\quad W_4=\frac{3}{2},\quad W_5=\frac{5}{4},\quad W_6=\frac{15}{16}.$$

当 $k\geqslant 6$ 时,

$$\begin{aligned}W_{k+1}-W_k&=\frac{(k+1)k}{2^k}-\frac{k(k-1)}{2^{k-1}}\\&=\frac{k(3-k)}{2^k}<0,\end{aligned}$$

故 $\{W_k\}$ 单调递减。又 $W_6<1$, 因此当 $k\geqslant 6$ 时 $W_k<1$。

综上, 满足 $W_k>1$ 的所有 k 为

$$k=3,4,5.$$

35. 证明由正实数组成的数列 $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n$ 是等比数列当且仅当

$$\left(a_0a_1+a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_{n-1}a_n\right)^2=\left(a_0^2+a_1^2+\cdots+a_{n-1}^2\right)\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)$$

充分条件: 已知 $a_0, a_1, \ldots, a_n$ 是等比数列, 设 $a_k = a_0 r^k$, $1 \leqslant k \leqslant n$, 于是

$$a_0a_1 + a_1a_2 + \ldots + a_{n-1}a_n = a_0^2(r + r^3 + \ldots + r^{2n-1}) = a_0^2 r \left(1 + r^2 + \ldots + r^{2n-2}\right)$$

且

$$\begin{aligned}(a_0^2 + a_1^2 + \ldots + a_{n-1}^2)(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) &= a_0^4(1 + r^2 + \ldots + r^{2n-2})(r^2 + r^4 + \ldots + r^{2n}) \\ &= a_0^4 r^2 \left(1 + r^2 + \ldots + r^{2n-2}\right)^2\end{aligned}$$

故得证

$$(a_0a_1 + a_1a_2 + \ldots + a_{n-1}a_n)^2 = (a_0^2 + a_1^2 + \ldots + a_{n-1}^2)(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)$$

必要条件: 已知

$$(a_0a_1 + a_1a_2 + \ldots + a_{n-1}a_n)^2 = (a_0^2 + a_1^2 + \ldots + a_{n-1}^2)(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)$$

考虑函数

$$f(r) = \sum_{k=1}^{n}(a_k - r a_{k-1})^2 = r^2 \sum_{k=1}^{n} a_{k-1}^2 - 2r \sum_{k=1}^{n} a_k a_{k-1} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2$$

观察得 $f(r) \geqslant 0 \quad \forall r$, 又关于 r 方程式的判别式为

$$4\left[(a_0a_1 + a_1a_2 + \ldots + a_{n-1}a_n)^2 - (a_0^2 + a_1^2 + \ldots + a_{n-1}^2)(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)\right] = 0$$

, 所以得知 $f(r) = 0$ 有重根 $r = r_0$, 且只有当

$$a_k = r_0 a_{k-1}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n$$

才成立, 意味 $a_0, a_1, \ldots, a_n$ 是一个公比为 r_0 的等比数列。

36. 用标准求和公式证明:

$$\sum_{r=n}^{2n}(n-r)^2 = \sum_{r=1}^{n} r^2.$$

首先展开平方:

$$\sum_{r=n}^{2n}(n-r)^2 = \sum_{r=n}^{2n}(n^2 - 2nr + r^2) = \sum_{r=n}^{2n} n^2 - 2n \sum_{r=n}^{2n} r + \sum_{r=n}^{2n} r^2.$$

利用标准求和公式:

$$\sum_{r=a}^{b} 1 = b-a+1, \quad \sum_{r=a}^{b} r = \frac{(b-a+1)(a+b)}{2}, \quad \sum_{r=a}^{b} r^2 = \frac{(b-a+1)(2a^2+2ab+b^2+a+b)}{6}.$$

代入 $a = n, b = 2n$:

$$\sum_{r=n}^{2n} n^2 = n^2(2n-n+1) = n^2(n+1),$$

$$\sum_{r=n}^{2n} r = \frac{(n+1)(n+2n)}{2} = \frac{(n+1)(3n)}{2} = \frac{3n(n+1)}{2},$$

$$\sum_{r=n}^{2n} r^2 = \frac{(n+1)(n^2+2n^2+(2n)^2+\dots)}{6} \quad (\text{整理后为})\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{}{6}.$$

代入到展开式:

$$\sum_{r=n}^{2n} (n-r)^2 = n^2(n+1) - 2n \cdot \frac{3n(n+1)}{2} + \sum_{r=n}^{2n} r^2.$$

化简系数:

$$n^2(n+1) - 3n^2(n+1) + \sum_{r=n}^{2n} r^2 = -2n^2(n+1) + \sum_{r=n}^{2n} r^2.$$

进一步整理 $\sum_{r=n}^{2n} r^2$ 并化简, 可得:

$$\sum_{r=n}^{2n} (n-r)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \sum_{r=1}^{n} r^2.$$

$$\therefore \sum_{r=n}^{2n} (n-r)^2 = \sum_{r=1}^{n} r^2$$

如所要求。

37. 设 $m, n \in \mathbb{N}$, 证明:

$$\sum_{r=m}^{m+n} (m-r)^2 = \sum_{r=0}^{n} r^2.$$

首先展开平方:

$$\sum_{r=m}^{m+n} (m-r)^2 = \sum_{r=m}^{m+n} (r-m)^2 \quad (\text{因为平方对符号不变}).$$

令 $k=r-m$, 则 $r=k+m$, 当 $r=m$ 时 $k=0$, 当 $r=m+n$ 时 $k=n$, 于是:

$$\sum_{r=m}^{m+n}(m-r)^2=\sum_{k=0}^{n}(-k)^2=\sum_{k=0}^{n}k^2=\sum_{r=0}^{n}r^2.$$

$$\therefore \sum_{r=m}^{m+n}(m-r)^2=\sum_{r=0}^{n}r^2,$$

如所要求。

38. 求和

$$\sum_{n=2}^{20}\frac{n^3-n^2+1}{n^2-n}.$$

首先将被加数进行拆分:

$$\frac{n^3-n^2+1}{n^2-n}=\frac{n(n^2-n)+1}{n^2-n}=n+\frac{1}{n^2-n}=n+\frac{1}{n(n-1)}$$

将分式拆成部分分式:

$$\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$$

因此

$$\frac{n^3-n^2+1}{n^2-n}=n+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}.$$

写出前几项:

$$n=2:2+1-\frac{1}{2},\quad n=3:3+\frac{1}{2}-\frac{1}{3},\quad n=4:4+\frac{1}{3}-\frac{1}{4},\dots,\quad n=20:20+\frac{1}{19}-\frac{1}{20}.$$

求和时, 分式部分是望远镜求和:

$$\sum_{n=2}^{20}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{20}.$$

整数部分求和:

$$\sum_{n=2}^{20}n=\frac{19}{2}(2+20)=209.$$

因此总和为:

$$\sum_{n=2}^{20}\frac{n^3-n^2+1}{n^2-n}=209+1-\frac{1}{20}=210-\frac{1}{20}=\frac{4199}{20}.$$

39. 试求级数

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5}{3^6-64}+\frac{3\cdot 5\cdot 7}{5^6-64}+\frac{5\cdot 7\cdot 9}{7^6-64}+\cdots+\frac{19\cdot 21\cdot 23}{21^6-64}$$

之和。

注意到

$$\begin{aligned}
&\frac{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}{(2k+1)^6-64}\\
&=\frac{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}{((2k+1)^3-8)((2k+1)^3+8)}\\
&=\frac{(2k+1)}{((2k+1)^2+2(2k+1)+4)((2k+1)^2-2(2k+1)+4)}\\
&=\frac{2k+1}{(4k^2+3)(4k^2+8k+7)}\\
&=\frac{2k+1}{(4k^2+3)(4(k+1)^2+3)}\\
&=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4k^2+3}-\frac{1}{4(k+1)^2+3}\right)
\end{aligned}$$

故

$$\sum_{k=1}^{10}\frac{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}{(2k+1)^6-64}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{487}\right)=\frac{120}{3409}$$

40. 求和

$$\sum_{n=1}^{24}\frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}}$$

不难发现

$$\frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}}=\sqrt{n-\sqrt{n^2-1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$$

进行裂项求和,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{24}\frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}}&=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{24}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})\\
&=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{25}+\sqrt{24}-\sqrt{1}-\sqrt{0})\\
&=2\sqrt{2}+2\sqrt{3}
\end{aligned}$$

41. 若 $f(n)=(n^2-2n+1)^{\frac{1}{3}}+(n^2-1)^{\frac{1}{3}}+(n^2+2n+1)^{\frac{1}{3}}$, 求

$$\sum_{k=1}^{500}\frac{1}{f(2k-1)}$$

首先有

$$\begin{aligned}\frac{1}{f(n)}&=\frac{1}{\sqrt[3]{(n-1)^2}+\sqrt[3]{(n+1)(n-1)}+\sqrt[3]{(n+1)^2}}\\&=\frac{\sqrt[3]{(n+1)}-\sqrt[3]{(n-1)}}{(n+1)-(n-1)}\\&=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{(n+1)}-\sqrt[3]{(n-1)})\end{aligned}$$

故

$$\sum_{k=1}^{500}\frac{1}{f(2k-1)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{500}\left(\sqrt[3]{2k}-\sqrt[3]{2k-2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt[3]{1000}=5$$

42. 设数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为

$$a_n=\frac{1}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2})(\sqrt{n}+\sqrt{n+2})},$$

求

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k$$

的值。

发现

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}\left(\frac{1}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n}+\sqrt{n+2})}-\frac{1}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+2})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2})}\right)\\&=\frac{1}{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})(\sqrt{n}+\sqrt{n+2})}\left(\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}\right)\end{aligned}$$

由 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=0$, 故

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

43. 求

$$\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{2025^2}+\frac{1}{2026^2}}$$

的值。

注意到

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}&=\sqrt{1+\frac{(n+1)^2+n^2}{n^2(n+1)^2}}\\&=\sqrt{1+\frac{2n(n+2)+1}{n^2(n+1)^2}}=\sqrt{1+\frac{2}{n(n+1)}+\frac{1}{n^2(n+1)^2}}\\&=\sqrt{\left(1+\frac{1}{n(n+1)}\right)^2}=1+\frac{1}{n(n+1)}=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

因此原式为

$$\sum_{n=1}^{2025}\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=2025+\left(1-\frac{1}{2026}\right)=2016-\frac{1}{2026}$$

44. (a) 已知

$$f(x,n)=\sum_{r=1}^{n}\left[\frac{1}{(x-1)^r}\right]$$

其中 $x\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$。通过观察

$$\frac{1}{(x-2)(x-1)^r}-\frac{1}{(x-2)(x-1)^{r+1}}$$

的化简，求 $f(x,n)$ 的简化表达式。

先化简给定的差:

$$\frac{1}{(x-1)^r(x-2)}-\frac{1}{(x-2)(x-1)^{r+1}}=\frac{(x-1)-1}{(x-1)^{r+1}(x-2)}=\frac{1}{(x-1)^{r+1}}$$

因此

$$\frac{1}{(x-1)^{r+1}}=\frac{1}{(x-1)^r(x-2)}-\frac{1}{(x-1)^{r+1}(x-2)}$$

对 $r=0,1,2,\dots,n-1$ 求和,

$$\sum_{r=0}^{n-1}\frac{1}{(x-1)^{r+1}}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{(x-1)^n(x-2)}$$

即

$$f(x,n)=\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{(x-1)^r}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{(x-1)^n(x-2)}$$

(b) 当 $|x-1|>1$ 时, 求

$$\lim_{n\to\infty} f(x,n)$$

由 (a) 得

$$f(x,n)=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{(x-1)^n(x-2)}$$

当 $|x-1|>1$ 时, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(x-1)^n}=0$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} f(x,n)=\frac{1}{x-2}$$

45. 求

$$\sum_{r=2}^{\infty}\left[\frac{4r-1}{r(r-1)}\left(-\frac{1}{3}\right)^r\right]$$

先对一般项作部分分式分解, 有

$$\frac{4r-1}{r(r-1)}=\frac{1}{r}+\frac{3}{r-1}$$

因此

$$\frac{4r-1}{r(r-1)}\left(-\frac{1}{3}\right)^r=\frac{1}{r}\left(-\frac{1}{3}\right)^r+\frac{3}{r-1}\left(-\frac{1}{3}\right)^r$$

将第二项改写为

$$\frac{3}{r-1}\left(-\frac{1}{3}\right)^r=\frac{3}{r-1}\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^{r-1}=-\frac{1}{r-1}\left(-\frac{1}{3}\right)^{r-1}$$

于是一般项可写成差分形式

$$\frac{4r-1}{r(r-1)}\left(-\frac{1}{3}\right)^r=\frac{1}{r}\left(-\frac{1}{3}\right)^r-\frac{1}{r-1}\left(-\frac{1}{3}\right)^{r-1}$$

考虑前 n 项和

$$\sum_{r=2}^{n}\left[\frac{4r-1}{r(r-1)}\left(-\frac{1}{3}\right)^{r}\right]=\sum_{r=2}^{n}\left[\frac{1}{r}\left(-\frac{1}{3}\right)^{r}-\frac{1}{r-1}\left(-\frac{1}{3}\right)^{r-1}\right]$$

这是一个伸缩和, 化简得

$$\sum_{r=2}^{n}\left[\frac{4r-1}{r(r-1)}\left(-\frac{1}{3}\right)^{r}\right]=\frac{1}{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}+\frac{1}{3}$$

令 $n\to\infty$, 由于

$$\frac{1}{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}\to 0$$

从而

$$\sum_{r=2}^{\infty}\left[\frac{4r-1}{r(r-1)}\left(-\frac{1}{3}\right)^{r}\right]=\frac{1}{3}$$

46. 求级数的和

$$\frac{1}{4\times 2!}+\frac{1}{5\times 3!}+\frac{1}{6\times 4!}+\frac{1}{7\times 5!}+\frac{1}{8\times 6!}+\cdots$$

将级数写成求和符号形式:

$$S_{\infty}=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{(r+3)(r+1)!}$$

对一般项进行拆项:

$$\frac{1}{(r+3)(r+1)!}=\frac{1}{(r+2)!}-\frac{1}{(r+3)!}$$

因此有限部分和为:

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{N}\frac{1}{(r+3)(r+1)!}&=\sum_{r=1}^{N}\left(\frac{1}{(r+2)!}-\frac{1}{(r+3)!}\right)\\&=\frac{1}{3!}-\frac{1}{(N+3)!}\end{aligned}$$

令 $N\to\infty$, 由于

$$\frac{1}{(N+3)!}\to 0$$

可得无穷级数的和:

$$S_{\infty}=\frac{1}{3!}=\frac{1}{6}$$

47. 已知

$$S_n = (2 \times 1!) + (5 \times 2!) + (10 \times 3!) + (17 \times 4!) + \cdots + (n^2 + 1)n!$$

用适当的方法证明

$$S_n = n(n+1)!$$

先将数列写成求和形式:

$$S_n = \sum_{r=1}^{n} (r^2 + 1)r!$$

为了使用差分法, 尝试将 $(r^2 + 1)r!$ 表示成阶乘的差。注意

$$(r+2)! = (r+2)(r+1)r! = (r^2 + 3r + 2)r!,$$

因此

$$(r+2)! - r! = (r^2 + 3r + 1)r!$$

又因为

$$(r+1)! - r! = r \cdot r!,$$

于是

$$(r+2)! - r! = (r^2 + 1)r! + 3r \cdot r!$$

代入 $r \cdot r! = (r+1)! - r!$, 得

$$(r+2)! - r! = (r^2 + 1)r! + 3[(r+1)! - r!],$$

即

$$(r+2)! - 3(r+1)! + 2r! = (r^2 + 1)r!$$

因此

$$(r^2 + 1)r! = (r+2)! - 3(r+1)! + 2r!$$

将其代入求和式:

$$\sum_{r=1}^{n} (r^2 + 1)r! = \sum_{r=1}^{n} \left[(r+2)! - 3(r+1)! + 2r!\right]$$

写出部分项可以发现大量抵消, 最后只剩下

$$S_n = (n+2)! - 2(n+1)!$$

提取 $(n+1)!$:

$$S_n = [(n+2)-2](n+1)!$$

于是

$$S_n = n(n+1)!$$

48. 求

$$\sum_{r=1}^{n}\left[\frac{r^2+9r+19}{(r+5)!}\right]$$

的化简表达式, 并由此求

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left[\frac{r^2+7r+11}{(r+4)!}\right]$$

先对一般项作拆分。注意到

$$\frac{r^2+9r+19}{(r+5)!} = \frac{1}{(r+3)!} - \frac{1}{(r+5)!}$$

因此

$$\sum_{r=1}^{n}\left[\frac{r^2+9r+19}{(r+5)!}\right] = \sum_{r=1}^{n}\left[\frac{1}{(r+3)!} - \frac{1}{(r+5)!}\right]$$

将各项写出:

$$\begin{aligned}
r=1: &\quad \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!},\\
r=2: &\quad \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!},\\
&\quad \vdots\\
r=n: &\quad \frac{1}{(n+3)!} - \frac{1}{(n+5)!}.
\end{aligned}$$

相加后发生抵消, 得到

$$\sum_{r=1}^{n}\left[\frac{r^2+9r+19}{(r+5)!}\right] = \left(\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}\right) - \left(\frac{1}{(n+4)!}+\frac{1}{(n+5)!}\right)$$

化简常数项:

$$\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!} = \frac{5}{120}+\frac{1}{120} = \frac{1}{20}$$

故

$$\sum_{r=1}^{n}\left[\frac{r^2+9r+19}{(r+5)!}\right] = \frac{1}{20} - \left(\frac{1}{(n+4)!}+\frac{1}{(n+5)!}\right)$$

再考虑

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left[\frac{r^2+7r+11}{(r+4)!}\right]$$

令 $k=r-1$, 则

$$\frac{r^2+7r+11}{(r+4)!}=\frac{k^2+9k+19}{(k+5)!}$$

于是

$$\sum_{r=1}^{n}\left[\frac{r^2+7r+11}{(r+4)!}\right]=\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{k^2+9k+19}{(k+5)!}\right]$$

由前一结果可得

$$\sum_{r=1}^{n}\left[\frac{r^2+7r+11}{(r+4)!}\right]=\frac{25}{5!}-\frac{n+6}{(n+5)!}$$

令 $n\to\infty$, 因

$$\frac{n+6}{(n+5)!}\to 0,$$

故

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left[\frac{r^2+7r+11}{(r+4)!}\right]=\frac{25}{5!}=\frac{5}{24}$$

49. 求级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2011^{2^n}-2011^{-2^n}}=\frac{1}{2011^1-2011^{-1}}+\frac{1}{2011^2-2011^{-2}}+\frac{1}{2011^4-2011^{-4}}+\cdots$$

并将其表示为一个有理数。

更一般地, 设

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}},\qquad S_N(x)=\sum_{n=0}^{N}\frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}.$$

注意到题目中的级数正是 $S(1/2011)$。下面证明当 $0<x<1$ 时,

$$S(x)=\frac{x}{1-x}.$$

利用恒等式

$$\frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}=\frac{1}{1-x^{2^n}}-\frac{1}{1-x^{2^{n+1}}},$$

代入部分和 $S_N(x)$, 得

$$S_N(x) = \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^2}\right) + \left(\frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{1-x^4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{1-x^{2^N}} - \frac{1}{1-x^{2^{N+1}}}\right).$$

这是一个望远镜求和, 因此

$$S_N(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^{2^{N+1}}}.$$

当 $N \to \infty$ 时, 由于 $0 < x < 1$, 有 $x^{2^{N+1}} \to 0$, 从而

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{1-x^{2^{N+1}}} = 1.$$

于是

$$S(x) = \lim_{N\to\infty} S_N(x) = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}.$$

因此

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2011^{2^n} - 2011^{-2^n}} = S\left(\frac{1}{2011}\right) = \frac{\frac{1}{2011}}{1-\frac{1}{2011}} = \frac{1}{2010}.$$

50. 求下列无穷乘积的值:

$$\left(\frac{7}{9}\right) \cdot \left(\frac{26}{28}\right) \cdot \left(\frac{63}{65}\right) \cdot \cdots = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1}.$$

将部分积改写为两个可望远镜相消的乘积:

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1} = \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k+1} \prod_{k=2}^{n} \frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}.$$

注意

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k^2+k+1}{k^2-k+1} = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^2+k+1}{(k-1)^2+(k-1)+1}.$$

同时

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k+1} = \frac{1\cdot 2}{3\cdot 4} \cdot \frac{2\cdot 3}{4\cdot 5} \cdots \frac{(n-1)n}{(n+1)n} = \frac{2}{n(n+1)}.$$

望远镜消去后得到

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1} = \frac{2}{n(n+1)} \cdot \frac{n^2+n+1}{3} = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{n(n+1)}\right).$$

因此

$$\prod_{k=2}^{\infty}\frac{k^3-1}{k^3+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{n(n+1)}\right)=\frac{2}{3}.$$

51. 计算无穷乘积

$$\prod_{n=3}^{\infty}\frac{(n^3+3n)^2}{n^6-64}.$$

设

$$a_n=\frac{(n^3+3n)^2}{n^6-64}.$$

注意到

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{(n^3+3n)^2}{(n^3-8)(n^3+8)}=\frac{n^2(n^2+3)^2}{(n-2)(n^2+2n+4)(n+2)(n^2-2n+4)}\\&=\frac{n}{n-2}\cdot\frac{n}{n+2}\cdot\frac{n^2+3}{(n-1)^2+3}\cdot\frac{n^2+3}{(n+1)^2+3}.\end{aligned}$$

因此当 $N\geqslant 3$ 时,

$$\begin{aligned}\prod_{n=3}^{N}a_n&=\left(\prod_{n=3}^{N}\frac{n}{n-2}\right)\left(\prod_{n=3}^{N}\frac{n}{n+2}\right)\left(\prod_{n=3}^{N}\frac{n^2+3}{(n-1)^2+3}\right)\left(\prod_{n=3}^{N}\frac{n^2+3}{(n+1)^2+3}\right)\\&=\frac{N(N-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{3\cdot 4}{(N+1)(N+2)}\cdot\frac{N^2+3}{2^2+3}\cdot\frac{3^2+3}{(N+1)^2+3}\\&=\frac{72}{7}\cdot\frac{N(N-1)(N^2+3)}{(N+1)(N+2)((N+1)^2+3)}\\&=\frac{72}{7}\cdot\frac{(1-\frac{1}{N})(1+\frac{3}{N^2})}{(1+\frac{1}{N})(1+\frac{2}{N})((1+\frac{1}{N})^2+\frac{3}{N^2})}.\end{aligned}$$

令 $N\to\infty$, 得到

$$\prod_{n=3}^{\infty}a_n=\lim_{N\to\infty}\prod_{n=3}^{N}a_n=\frac{72}{7}.$$

52. 设

$$f(r)=\sum_{j=2}^{2013}\frac{1}{j^r}=\frac{1}{2^r}+\frac{1}{3^r}+\cdots+\frac{1}{2013^r}$$

求

$$\sum_{k=2}^{\infty}f(k)$$

交换求和次序, 并注意到内层和是收敛的等比级数, 有

$$\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{j=2}^{2013}\frac{1}{j^k}=\sum_{j=2}^{2013}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{j^k}=\sum_{j=2}^{2013}\frac{1/j^2}{1-1/j}$$

因此

$$=\sum_{j=2}^{2013}\frac{1}{j^2-j}=\sum_{j=2}^{2013}\frac{1}{j(j-1)}=\sum_{j=2}^{2013}\left(\frac{1}{j-1}-\frac{1}{j}\right)$$

于是

$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2012}-\frac{1}{2013}=\frac{2012}{2013}$$

53. 计算

$$\lceil\sqrt{1}\rceil+\lceil\sqrt{2}\rceil+\lceil\sqrt{3}\rceil+\cdots+\lceil\sqrt{2025}\rceil$$

注意到 $\sqrt{2025}=45$, 当 $(m-1)^2<k\leqslant m^2$ 时有

$$\lceil\sqrt{k}\rceil=m$$

因此可按 $m=1,2,\ldots,45$ 分组求和,

$$\sum_{k=1}^{2025}\lceil\sqrt{k}\rceil=\sum_{m=1}^{45}\sum_{k=(m-1)^2+1}^{m^2}m$$

对固定的 m, 求和的项数为 $m^2-(m-1)^2=2m-1$, 于是

$$\sum_{k=1}^{2025}\lceil\sqrt{k}\rceil=\sum_{m=1}^{45}m(2m-1)=2\sum_{m=1}^{45}m^2-\sum_{m=1}^{45}m=2\cdot\frac{45\cdot46\cdot91}{6}-\frac{45\cdot46}{2}=61755$$

54. 试证

$$8+88+888+\ldots+\underbrace{888\ldots88}_{88\text{'s}}=\frac{8}{81}(10^{89}-802)$$

考虑到

$$\underbrace{99\dots99}_{\text{n's}} = 10^n - 1$$

于是

$$\begin{aligned}
8 + 88 + 888 + \cdots + \underbrace{888\dots88}_{\text{88's}} &= \frac{8}{9}(9 + 99 + 999 + \cdots + \underbrace{99\dots99}_{\text{88's}}) \\
&= \frac{8}{9}(10 + 10^2 + 10^3 + \cdots + 10^{88} - 88) \\
&= \frac{8}{9}\left[\frac{10(10^{88}-1)}{10-1} - 88\right] \\
&= \frac{8}{81}(10^{89} - 802)
\end{aligned}$$

故得证。

55. 求无穷级数

$$\frac{1^2}{11} + \frac{5^2}{11^2} + \frac{9^2}{11^3} + \frac{13^2}{11^4} + \cdots + \frac{(4n-3)^2}{11^n} + \cdots$$

设原式为

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n-3)^2}{11^n}$$

由 $(4n-3)^2 = 16n^2 - 24n + 9$，有

$$S = 16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{11^n} - 24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{11^n} + 9\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{11^n}$$

当 $|x| < 1$ 时，有

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

令 $x = \dfrac{1}{11}$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{11^n} = \frac{1}{10}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{11^n} = \frac{11}{100}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{11^n} = \frac{33}{250}$$

于是

$$S = 16\cdot\frac{33}{250} - 24\cdot\frac{11}{100} + 9\cdot\frac{1}{10} = \frac{93}{250}$$

设

$$S=\frac{1^2}{11}+\frac{5^2}{11^2}+\frac{9^2}{11^3}+\frac{13^2}{11^4}+\frac{17^2}{11^5}+\cdots \tag{1}$$

则

$$\frac{1}{11}S=\frac{1^2}{11^2}+\frac{5^2}{11^3}+\frac{9^2}{11^4}+\frac{13^2}{11^5}+\frac{17^2}{11^6}+\cdots \tag{2}$$

(1) - (2) 得

$$\frac{10}{11}S=\frac{1}{11}+\frac{5^2-1^2}{11^2}+\frac{9^2-5^2}{11^3}+\frac{13^2-9^2}{11^4}+\frac{17^2-13^2}{11^5}+\cdots \tag{3}$$

$$\frac{10}{121}S=\frac{1}{11^2}+\frac{5^2-1^2}{11^3}+\frac{9^2-5^2}{11^4}+\frac{13^2-9^2}{11^5}+\frac{17^2-13^2}{11^6}+\cdots \tag{4}$$

(3) - (4) 得

$$\frac{100}{121}S=\frac{1}{11}+\frac{23}{11^2}+\frac{32}{11^3}+\frac{32}{11^4}+\frac{32}{11^5}+\cdots=\frac{1}{11}+\frac{23}{11^2}+\frac{32}{11^3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{11}}$$

故可得

$$S=\frac{93}{250}$$

56. 已知

$$1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{7}{x^3}+\frac{9}{x^4}+\cdots=91,$$

求

$$S=1+\frac{4}{x}+\frac{9}{x^2}+\frac{16}{x^3}+\frac{25}{x^4}+\cdots$$

发现

$$91=1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{7}{x^3}+\cdots=\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\cdots\right)+2\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}+\cdots\right)$$

考虑

$$\sum_{n=1}^{\infty}ny^{n-1}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}y^n\right)'=\left(\frac{y}{1-y}\right)'=\frac{1}{(1-y)^2}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}ny^n=\frac{y}{(1-y)^2}$$

记 $y=\dfrac{1}{x}$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{(1-\frac{1}{x})^2}=\frac{x}{(x-1)^2}$$

所以

$$91=\frac{x}{x-1}+\frac{2x}{(x-1)^2}=\frac{x^2+x}{(x-1)^2}\Rightarrow 90x^2-183x+91=0\Rightarrow x=\frac{7}{6}\text{ 或 }\frac{13}{15}$$

级数收敛需满足 $|x| > 1$, 故取 $x = \dfrac{7}{6}$, 现考虑

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{x^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 y^{n-1}$$

由上,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n y^n = \frac{y}{(1-y)^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^2 y^{n-1} = \left(\frac{y}{(1-y)^2}\right)' = \frac{1+y}{(1-y)^3}$$

取 $y = \dfrac{6}{7}$ 即得 $S = 637$; 又解: 发现 $S = 91 + \dfrac{6}{7}S \Rightarrow S = 637$

57. 求

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

发现

$$\begin{aligned}
1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots &= \left[x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \cdots\right]_0^1 \\
&= \int_0^1 (1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 + \cdots)\, dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx \\
&= \left[\tan^{-1} x\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

58. 求下列级数的值或证明其发散:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \arctan\left(-\frac{2}{k^2}\right)$$

由

$$\arctan\left(-\frac{2}{k^2}\right) = \arctan\left(\frac{(k-1)-(k+1)}{1+(k-1)(k+1)}\right) = \arctan(k-1) - \arctan(k+1),$$

知原级数是一列项求和, 于是

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty}[\arctan(k-1)-\arctan(k+1)] \\
&=\lim_{N\to\infty}(\arctan 0+\arctan 1-\arctan N-\arctan(N+1)) \\
&=0+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=-\frac{3\pi}{4}
\end{aligned}$$

级数收敛, 其值为 $-\dfrac{3\pi}{4}$。

59. 求

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{1+2^{2^{-n}}}$$

注意到:

$$\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{(1-x)(1+x)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)$$

令 $x=2^{2^{-n}}$, 则

$$\frac{1}{1+2^{2^{-n}}}=\frac{2}{1-2^{2^{1-n}}}-\frac{1}{1-2^{2^{-n}}}$$

因此原式化为

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\left(\frac{2}{1-2^{2^{1-n}}}-\frac{1}{1-2^{2^{-n}}}\right) \\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{1-2^{2^{-(n-1)}}}-\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{1-2^{2^{-n}}}\right) \\
&=-1-\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{2^N}\cdot\frac{1}{1-2^{2^{-N}}}\right)
\end{aligned}$$

现设 $x=2^{-N}$, 则当 $N\to\infty, x\to 0^+$, 且

$$\frac{1}{2^N}\cdot\frac{1}{1-2^{2^{-N}}}=\frac{x}{1-2^x}=-\frac{x}{2^x-1}$$

由洛必达法则,

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{2^x-1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln 2\cdot 2^x}=\frac{1}{\ln 2}$$

故原式为 $-1+\dfrac{1}{\ln 2}$.

60. 设

$$f(x)=\frac{2016^x}{2016^x+\sqrt{2016}},$$

求

$$\sum_{k=0}^{2016} f\left(\frac{k}{2016}\right)$$

记 $a=2016$, 观察到

$$f(x)+f(1-x)=\frac{a^x}{a^x+a^{\frac{1}{2}}}+\frac{a^{1-x}}{a^{1-x}+a^{\frac{1}{2}}}=\frac{a^x(a^{1-x}+a^{\frac{1}{2}})+a^{1-x}(a^x+a^{\frac{1}{2}})}{(a^x+a^{\frac{1}{2}})(a^{1-x}+a^{\frac{1}{2}})}=1.$$

于是

$$\sum_{k=0}^{2016} f\left(\frac{k}{2016}\right)=\underbrace{\sum_{k=0}^{1007}\left[f\left(\frac{k}{2016}\right)+f\left(1-\frac{k}{2016}\right)\right]}_{1008\text{ 个 “1”}}+f\left(\frac{1008}{2016}\right)=1008+f\left(\frac{1}{2}\right).$$

而 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2}$, 故

$$\sum_{k=0}^{2016} f\left(\frac{k}{2016}\right)=1008+\frac{1}{2}=\frac{2017}{2}.$$

61. 求级数

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\sin^4(\pi x 2^{r-2})}{4^r}$$

在 $x=1$ 的情况下的值。

先化简 $\sin^4\theta$:

$$\begin{aligned}\sin^4\theta &= (\sin^2\theta)^2\\ &= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)^2\\ &= \frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{1}{4}\cos^2 2\theta\\ &= \frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{1}{4}\cdot\frac{1+\cos 4\theta}{2}\\ &= \frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{1}{8}\cos 4\theta\end{aligned}$$

等价地, 可利用恒等式

$$\sin^4\theta=\sin^2\theta-\frac{1}{4}\sin^2 2\theta$$

考虑前 n 项和:

$$\begin{aligned}\sum_{r=0}^{n}\frac{\sin^4(\pi x2^{r-2})}{4^r} &= \sum_{r=0}^{n}\frac{1}{4^r}\left[\sin^2(\pi x2^{r-2})-\frac{1}{4}\sin^2(\pi x2^{r-1})\right]\\ &= \sum_{r=0}^{n}\left[\frac{1}{4^r}\sin^2(\pi x2^{r-2})-\frac{1}{4^{r+1}}\sin^2(\pi x2^{r-1})\right]\end{aligned}$$

这是一个望远镜求和, 展开可得:

$$\begin{aligned}&\sin^2\frac{\pi x}{4}-\frac{1}{4}\sin^2\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\pi x}{2}-\frac{1}{16}\sin^2(\pi x)\\ &\quad+\cdots-\frac{1}{4^{n+1}}\sin^2(\pi x2^{n-1})\end{aligned}$$

中间项相互抵消, 因此

$$\sum_{r=0}^{n}\frac{\sin^4(\pi x2^{r-2})}{4^r}=\sin^2\frac{\pi x}{4}-\frac{1}{4^{n+1}}\sin^2(\pi x2^{n-1})$$

当 $x=1$ 时,

$$\sum_{r=0}^{n}\frac{\sin^4(\pi 2^{r-2})}{4^r}=\sin^2\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4^{n+1}}\sin^2(\pi 2^{n-1})$$

令 $n\to\infty$, 由于

$$0\leqslant\frac{1}{4^{n+1}}\sin^2(\pi 2^{n-1})\leqslant\frac{1}{4^{n+1}}\to 0$$

可得无穷级数的和:

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\sin^4(\pi 2^{r-2})}{4^r}=\sin^2\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}$$

62. 求下列级数的和:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^2\left(\frac{n\pi}{6}\right)}{2^n}.$$

步骤 1: 使用余弦平方恒等式:

$$\cos^2 \frac{n\pi}{6} = \frac{1+\cos\frac{n\pi}{3}}{2} \implies \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^2(n\pi/6)}{2^n} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+\cos(n\pi/3)}{2^n}.$$

步骤 2: 拆分为两部分:

$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(n\pi/3)}{2^n} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2}\Re\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{in\pi/3}}{2^n}.$$

步骤 3: 求几何级数和:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-1/2} = 2.$$

步骤 4: 复数形式求和:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e^{i\pi/3}}{2}\right)^n = \frac{1}{1-e^{i\pi/3}/2} \implies \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(n\pi/3)}{2^n} = \Re\frac{1}{1-e^{i\pi/3}/2}.$$

步骤 5: 提取实部:

$$\frac{1}{1-e^{i\pi/3}/2} = \frac{2-e^{-i\pi/3}}{4-2(e^{i\pi/3}+e^{-i\pi/3})+1} = \frac{2-e^{-i\pi/3}}{5-4\cos(\pi/3)} = \frac{2-(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})}{3} = \frac{3/2+i\sqrt{3}/2}{3}.$$

$$\Re\frac{3/2+i\sqrt{3}/2}{3} = \frac{3/2}{3} = \frac{1}{2}.$$

步骤 6: 求最终和:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos^2(n\pi/6)}{2^n} = \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

63. 求

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}\cos\frac{n\pi}{3}$$

设
$$z=\frac{1}{2}e^{i\pi/3}=\frac{1}{4}(1+\sqrt{3}\,i)$$
则
$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}z^n=\frac{z}{1-z}\Rightarrow zf'(z)=\frac{z}{(1-z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nz^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}e^{n\pi i/3}$$
于是
$$zf'(z)=\frac{\frac{1}{4}(1+\sqrt{3}\,i)}{\left(\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)^2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1+\sqrt{3}\,i}{1-\sqrt{3}\,i}=-\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}i$$
故
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}\cos\frac{n\pi}{3}=\Re(zf'(z))=-\frac{1}{3}$$

64. 证明不等式: (1)
$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2}$$
(2)
$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}<\frac{3}{4}+\frac{1}{n}$$

(a) 首先, 容易看出:
$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$$
上述不等式右边共有 n 项。

但同时, 我们可以将第二部分的和式通过倒序相加（或首尾配对）的方法重写:
$$\begin{aligned}\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}&=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2n}\right)+\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n-1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{n}\right)\right]\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{3n}{2n^2}+\frac{3n}{2n^2+(n-1)}+\frac{3n}{2n^2+2(n-2)}+\cdots+\frac{3n}{2n^2}\right]\end{aligned}$$
由于分母中的项 $k(n-k)\geqslant 0$, 我们可以通过放缩去掉这些正项从而增大分数值:
$$<\frac{1}{2}\left[\frac{3n}{2n^2}+\frac{3n}{2n^2}+\cdots+\frac{3n}{2n^2}\right]$$
上式括号内共有 $n+1$ 项。于是:
$$=\frac{1}{2}(n+1)\frac{3}{2n}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4n}<\frac{3}{4}+\frac{1}{n}$$
这就证明了题目中的结论。

65. 计算数 $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1{,}000{,}000}}$ 的整数部分。

(a) 首先我们证明不等式:

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}<\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}$$

对于左边的不等式, 我们将分子有理化:

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}=\frac{2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}$$

同理可证右边的不等式。

现在利用上述不等式对原和式进行估计。对于下界, 我们利用左边的不等式 $\frac{1}{\sqrt{n}}>2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$:

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1,000,000}}&>1+2[(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{1,000,001}-\sqrt{1,000,000})]\\&=1+2(\sqrt{1,000,001}-\sqrt{2})\\&>2\cdot 1000-\sqrt{8}+1>2000-3+1=1998\end{aligned}$$

对于上界, 我们利用右边的不等式 $\frac{1}{\sqrt{n}}<2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$:

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1,000,000}}&<1+2[(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{1,000,000}-\sqrt{999,999})]\\&=1+2(\sqrt{1,000,000}-1)\\&=1+2\cdot 999=1999\end{aligned}$$

综上所述, 该数的整数部分等于 1998。

66. 求数 $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\frac{1}{\sqrt[3]{5}}+\frac{1}{\sqrt[3]{6}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{1{,}000{,}000}}$ 的整数部分。

首先, 通过比较二项式展开式, 我们注意到对于每一个自然数 n:

$$\left(1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n}\right)^3>\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$$

两边开立方根并整理可得:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}>\frac{3}{2}[\sqrt[3]{(n+1)^2}-\sqrt[3]{n^2}]$$

同理, 利用类似的展开比较可以得到下界放缩:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} < \frac{3}{2}[\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{(n-1)^2}]$$

由此我们得到关键的不等式:

$$\frac{3}{2}[\sqrt[3]{(n+1)^2} - \sqrt[3]{n^2}] < \frac{1}{\sqrt[3]{n}} < \frac{3}{2}[\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{(n-1)^2}]$$

现在利用此不等式对原和式进行估计。对于下界:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{1,000,000}} &> \frac{3}{2}[(\sqrt[3]{5^2} - \sqrt[3]{4^2}) + \cdots + (\sqrt[3]{1,000,001^2} - \sqrt[3]{1,000,000^2})] \\
&= \frac{3}{2}(\sqrt[3]{1,000,002,000,001} - \sqrt[3]{16}) \\
&> \frac{3}{2} \cdot 10,000 - \sqrt[3]{54} \\
&> 15,000 - 4 = 14,996
\end{aligned}$$

对于上界:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{1,000,000}} &< \frac{3}{2}[(\sqrt[3]{4^2} - \sqrt[3]{3^2}) + \cdots + (\sqrt[3]{1,000,000^2} - \sqrt[3]{999,999^2})] \\
&= \frac{3}{2}(\sqrt[3]{1,000,000,000,000} - \sqrt[3]{9}) \\
&< \frac{3}{2}(10,000 - 2) = 14,997
\end{aligned}$$

综上所述, 该数的整数部分等于 14,996。

67. 求

$$\sum_{m=1}^{19} \sum_{n=m}^{19} (2m+n).$$

首先, 将求和顺序交换, 更容易计算:

$$\sum_{m=1}^{19} \sum_{n=m}^{19} (2m+n) = \sum_{n=1}^{19} \sum_{m=1}^{n} (2m+n).$$

将内层求和拆开:

$$\sum_{n=1}^{19} \sum_{m=1}^{n} (2m+n) = \sum_{n=1}^{19} \left[2\sum_{m=1}^{n} m + \sum_{m=1}^{n} n \right].$$

利用标准求和公式:

$$\sum_{m=1}^{n} m = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{m=1}^{n} n = n \times n = n^2.$$

于是:

$$\sum_{n=1}^{19}\left[2\sum_{m=1}^{n} m + \sum_{m=1}^{n} n\right] = \sum_{n=1}^{19}[2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n^2] = \sum_{n=1}^{19}[n^2 + n + n^2] = \sum_{n=1}^{19}(2n^2 + n).$$

再分开求和:

$$\sum_{n=1}^{19}(2n^2 + n) = 2\sum_{n=1}^{19} n^2 + \sum_{n=1}^{19} n.$$

代入求和公式:

$$\sum_{n=1}^{19} n^2 = \frac{19 \cdot 20 \cdot 39}{6}, \quad \sum_{n=1}^{19} n = \frac{19 \cdot 20}{2}.$$

于是:

$$2\sum_{n=1}^{19} n^2 + \sum_{n=1}^{19} n = 2 \cdot \frac{19 \cdot 20 \cdot 39}{6} + \frac{19 \cdot 20}{2} = \frac{19 \cdot 20 \cdot 39}{3} + 190.$$

计算:

$$\frac{19 \cdot 20 \cdot 39}{3} + 190 = 19 \cdot 20 \cdot 13 + 190 = 4940 + 190 = 5130.$$

$$\therefore \sum_{m=1}^{19}\sum_{n=m}^{19}(2m+n) = 5130.$$

68. 令

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{3^k(k+1)},$$

(a) 试证

$$S'(x) = \frac{3}{3+x} - 1$$

对各项微分, 有

$$S'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{x}{3}\right)^k = \frac{-\frac{x}{3}}{1+\frac{x}{3}} = \frac{-x}{3+x} = \frac{3}{3+x} - 1$$

(b) 据此, 证

$$S(x) = 3\ln(3+x) - 3\ln 3 - x$$

$$S(x) = \int \left(\frac{3}{3+x} - 1\right) dx = 3\ln(3+x) - x + C$$

由 $S(0) = 0$ 可得 $C = -3\ln 3$, 故

$$S(x) = 3\ln(3+x) - 3\ln 3 - x$$

(c) 求

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k \cdot 3^k}$$

改写求和,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k \cdot 3^k} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)3^{k+1}} = -\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)3^k} \\ &= -\frac{1}{3}(1 + S(1)) = -\frac{1}{3}(1 + 3\ln 4 - 3\ln 3 - 1) = \ln\frac{3}{4}\end{aligned}$$

69. 求

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\ln\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)$$

的值。

定义

$$f(n) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right), \quad n \geqslant 1.$$

注意到

$$f(2n) + f(2n+1) = f(n).$$

由不等式 $\ln(1+x) \leqslant x$ 可得

$$f(n) \leqslant \frac{1}{n}.$$

再定义

$$g(n) = \sum_{k=n}^{2n-1} f^3(k).$$

于是

$$g(n) < nf^3(n) \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

接下来计算

$$\begin{aligned}
g(n) - g(n+1) &= f^3(n) - f^3(2n) - f^3(2n+1) \\
&= (f(2n) + f(2n+1))^3 - f^3(2n) - f^3(2n+1) \\
&= 3(f(2n) + f(2n+1))f(2n)f(2n+1) \\
&= 3f(n)f(2n)f(2n+1).
\end{aligned}$$

因此

$$\sum_{n=1}^{N} f(n)f(2n)f(2n+1) = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{N}\big(g(n) - g(n+1)\big) = \frac{1}{3}\big(g(1) - g(N+1)\big).$$

由于当 $N \to \infty$ 时 $g(N+1) \to 0$, 于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)f(2n)f(2n+1) = \frac{1}{3}g(1) = \frac{1}{3}\ln^3 2.$$

这正是所求级数的值。

70. 考虑正整数 m, n, 且 $m \geqslant 2$。(m,n)-锯齿数列是从 1 开始的连续整数序列, 有 n 个“齿”, 每个齿从 2 上升到 m 再下降到 1, 如 $(3,4)$-锯齿数列为

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & 3 & & & & 3 & & & & 3 & & & & 3 & & \\
 & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & \\
1 & & & & 1 & & & & 1 & & & & 1 & & & & 1
\end{array}$$

该序列共有 17 项, 平均数为 $\dfrac{33}{17}$。

(a) 求 $(4,2)$-锯齿数列的项和。

$(4,2)$-锯齿数列的项为

$$1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1$$

其和为 31。

(b) 对任意正整数 $m \geqslant 2$, 求 $(m,3)$-锯齿数列中所有数字之和的通项。

$(m,3)$-锯齿数列由初始 1 和 3 个齿组成, 每个齿为 $2,3,\ldots,m-1,m,m-1,\ldots,2,1$, 项和为

$$2+3+\cdots+m+(m-1)+\cdots+1=2(1+2+\cdots+m)-1-m=m^2-1.$$

因此序列和为 $1+3(m^2-1)=3m^2-2$。

(c) 求所有使 (m,n)-锯齿数列的项和为 145 的 (m,n) 序对。

每个齿的和为 m^2-1, 整个序列和为

$$1+n(m^2-1)=145 \Rightarrow n(m^2-1)=144.$$

考虑 144 的因数分解, 当 $m \geqslant 2$ 时,m^2-1 可能值为

$$3,8,15,24,35,48,63,80,99,120,143,$$

其中 $3,8,24,48$ 能整除 144, 因此符合条件的序对为

$$(m,n)=(2,48),(3,18),(5,6),(7,3).$$

(d) 证明对于所有正整数对 (m,n) 且 $m \geqslant 2,(m,n)$-锯齿数列的平均数不是整数。

平均数为

$$\frac{1+n(m^2-1)}{1+n(2m-2)}$$

假设平均数为整数 k, 可得一关于 m 的二次方程式

$$\frac{1+n(m^2-1)}{1+n(2m-2)}=k \Rightarrow m^2n-2mnk+(2nk-n-k+1)=0$$

由于 m 为整数, 故判别式

$$\Delta=(-2nk)^2-4n(2nk-n-k+1)=(2n(k-1)+1)^2-1.$$

必须为完全平方数, 且两完全平方数差为 1 的只有当 0 和 1, 因此

$$2n(k-1)+1=1 \Rightarrow k=1$$

但若平均数为 1, 则

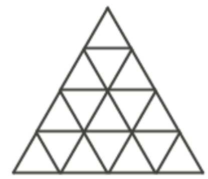
$$n(m^2-1)+1=n(2m-2)+1 \Rightarrow n(m-1)^2=0,$$

得 $n>0$ 且 $m \geqslant 2$, 矛盾, 因此 (m,n)-锯齿数列的平均数不可能为整数。

71. 已知正整数 n, 考虑一个边长为 n 、顶点朝上的等边三角形, 将其划分为单位等边三角形。对于每个 n, 记 $f(n)$ 为所有大小的顶点朝下等边三角形的总数, 例如 $f(3)=3, f(4)=7$。

$n=3$

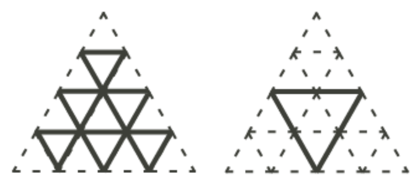
$n=4$



$n=3$

$f(3)=3$

$n=4$



$f(4)=6+1=7$

(a) 求 $f(5)$ 和 $f(6)$。

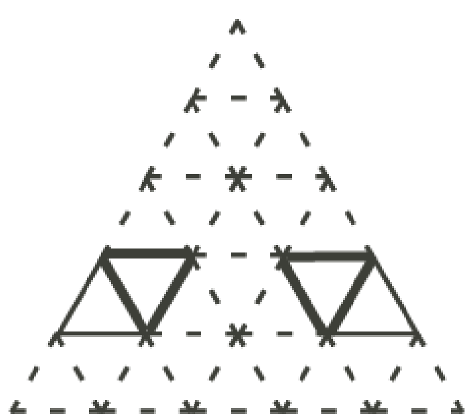
当 $n=5$ 时, 有 $1+2+3+4=10$ 个边长为 1、$1+2=3$ 个边长为 2 的三角形, 所以

$$f(5)=10+3=13$$

当 $n=6$ 时, 有 $1+2+3+4+5=15$ 个边长为 1、$1+2+3=6$ 个边长为 2、1 个边长为 3 的三角形, 所以

$$f(6)=15+6+1=22$$

(b) 证明对每个正整数 $k \geqslant 1$, 有 $f(2k)=f(2k-1)+k^2$。



设第 i 行有 $i+1$ 个单位点, 从左至右记为 $0,1,\cdots,i$, 考虑边长为 m 、顶点朝下的等边三角形, 且其底顶点位于行 i 时, 注意到每个这样的三角形都被其底顶点确定, 故可能的底点数为

$$(i-m)-m+1=i+1-2m,$$

要求 $2m\leqslant i\leqslant n$ 才能形成三角形, 因此边长为 m 、顶点朝下的三角形总数为

$$\sum_{i=2m}^{n}(i+1-2m)=\frac{(n+1-2m)(n+2-2m)}{2}.$$

若 $n=2k$, 则 $m=1,2,\ldots,k$, 所以

$$\begin{aligned}
f(2k)&=\sum_{m=1}^{k}\frac{(2k+1-2m)(2k+2-2m)}{2}\\
&=\sum_{l=1}^{k}(2l-1)l\quad(令 l=k+1-m)\\
&=2\sum_{l=1}^{k}l^2-\sum_{l=1}^{k}l\\
&=2\cdot\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}-\frac{k(k+1)}{2}\\
&=\frac{k(k+1)(4k-1)}{6}.
\end{aligned}$$

若 $n=2k-1$, 则 $m=1,2,\ldots,k-1$, 所以

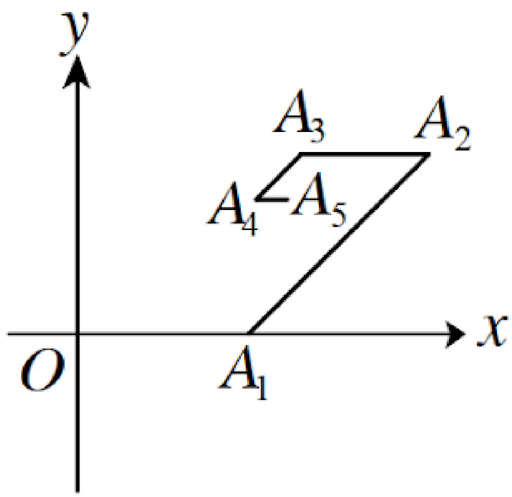
$$\begin{aligned}
f(2k-1)&=\sum_{m=1}^{k-1}\frac{(2k-2m)(2k+1-2m)}{2}\\
&=\sum_{l=1}^{k-1}l(2l+1)\quad(令 l=k-m)\\
&=2\sum_{l=1}^{k-1}l^2+\sum_{l=1}^{k-1}l\\
&=2\cdot\frac{(k-1)k(2k-1)}{6}+\frac{(k-1)k}{2}\\
&=\frac{k(k-1)(4k+1)}{6}.
\end{aligned}$$

因此,

$$f(2k)-f(2k-1)=\frac{k(k+1)(4k-1)}{6}-\frac{k(k-1)(4k+1)}{6}=k^2$$

证毕。

72. 如下图,$O(0,0)$, $A_1(8,0)$, $\overline{A_1A_2}$ 与 x 轴正向夹 $45°$ 角, 又 $\overline{A_1A_2}/\!/\overline{A_3A_4}/\!/\overline{A_5A_6}/\!/\ldots$, 且 $\overline{OA_1}/\!/\overline{A_2A_3}/\!/\overline{A_4A_5}/\!/\ldots$。已知 $\overline{A_1A_2}=8$, 且对所有 $k\in\mathbb{N}$, 有 $\overline{A_kA_{k+1}}=2\overline{A_{k+1}A_{k+2}}$。若点 A_n 的坐标为 (x_n,y_n), 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)$。



令 $a_n=\overline{A_nA_{n+1}}=2^{4-n}, n\in\mathbb{N}$, 有

$$
\begin{aligned}
x_\infty &= 8+\frac{a_1}{\sqrt{2}}-a_2-\frac{a_3}{\sqrt{2}}+a_4+\frac{a_5}{\sqrt{2}}-a_6-\frac{a_7}{\sqrt{2}}+a_8+\cdots\\
&= 8+(a_4+a_8+a_{12}+\cdots)+\frac{1}{\sqrt{2}}(a_1+a_5+a_9+\cdots)\\
&\quad -\frac{1}{\sqrt{2}}(a_3+a_7+a_{11}+\cdots)-(a_2+a_6+a_{10}+\cdots)\\
&= 8+\frac{1}{1-\frac{1}{16}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{8}{1-\frac{1}{16}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{1-\frac{1}{16}}-\frac{4}{1-\frac{1}{16}}=8+\frac{16}{5}(\sqrt{2}-1)\\
y_\infty &= \frac{a_1}{\sqrt{2}}-\frac{a_3}{\sqrt{2}}+\frac{a_5}{\sqrt{2}}-\frac{a_7}{\sqrt{2}}+\cdots\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1+a_5+a_9+\cdots)-\frac{1}{\sqrt{2}}(a_3+a_7+a_{11}+\cdots)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{8}{1-\frac{1}{16}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{1-\frac{1}{16}}=\frac{16\sqrt{2}}{5}
\end{aligned}
$$

所以

$$
x_\infty+y_\infty=\frac{24+32\sqrt{2}}{5}
$$

二项展开式

1. 求 $(x^2+x+y)^5$ 展开式中 x^5y^2 的系数。

系数为
$$^5C_2{}^3C_1{}^2C_2=30$$

2. 求 $\left(x\sqrt{y}-y\sqrt{x}\right)^4$ 的展开式中 xy 的系数。

观察发现
$$(x\sqrt{y}-y\sqrt{x})^4=x^2y^2(\sqrt{x}-\sqrt{y})^4$$
, 即只需求 $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^4$ 展开式中的含 xy 项的系数 $^4C_2=6$

3. 求在 $\left(x+\dfrac{4}{x}+4\right)^6$ 的展开式中 x^4 的系数。

原式可化为
$$\left(x+\frac{4}{x}+4\right)^6=\left(\frac{x^2+4x+4}{x}\right)^6=\frac{(x+2)^{12}}{x^6}$$
即求 $(x+2)^{12}$ 展开式中 x^{10} 的系数
$$^{12}C_2\cdot 2^2=264$$

4. 求 $(1+x^2)+(1+x^2)^2+\cdots+(1+x^2)^{10}$ 展开式中 x^6 的系数。

原式为
$$\frac{(1+x^2)\left[(1+x^2)^{10}-1\right]}{(1+x^2)-1}=\frac{(1+x^2)^{11}-(1+x^2)}{x^2}$$

展开式 $(1+x^2)^{11}$ 中 x^8 系数为 $^{10}C_4=\dfrac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{4\cdot 3\cdot 2}=330$, 故原式中 x^6 系数为 330.

5. 求下列多项式中 x^{50} 的系数:

(a) $(1+x)^{1000}+x(1+x)^{999}+x^2(1+x)^{998}+\cdots+x^{1000}$

(b) $(1+x)+2(1+x)^2+3(1+x)^3+\cdots+1000(1+x)^{1000}$

(a) 利用等比数列求和公式以及二项式定理, 我们得到:

$$
\begin{aligned}
(1+x)^{1000}+x(1+x)^{999}+\cdots+x^{1000} &= \frac{(1+x)^{1001}-x^{1001}}{(1+x)-x} \\
&= \frac{(1+x)^{1001}-x^{1001}}{1} \\
&= (1+x)^{1001}-x^{1001} \\
&= 1+{}^{1001}C_1x+{}^{1001}C_2x^2+\cdots+{}^{1001}C_{1001}x^{1001}-x^{1001}
\end{aligned}
$$

因此, 所求的系数等于:

$$
{}^{1001}C_{50}=\frac{1001!}{50!\,951!}
$$

(b) 设所给多项式为 $P(x)$。我们可以写出:

$$
\begin{aligned}
xP(x) &= (1+x)P(x)-P(x) \\
&= \left[(1+x)^2+2(1+x)^3+\cdots+999(1+x)^{1000}+1000(1+x)^{1001}\right] \\
&\quad -\left[(1+x)+2(1+x)^2+3(1+x)^3+\cdots+1000(1+x)^{1000}\right] \\
&= 1000(1+x)^{1001}-\left[(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+\cdots+(1+x)^{1000}\right] \\
&= 1000(1+x)^{1001}-\frac{(1+x)[(1+x)^{1000}-1]}{(1+x)-1} \\
&= 1000(1+x)^{1001}-\frac{(1+x)^{1001}-(1+x)}{x}
\end{aligned}
$$

从而得出:

$$
P(x)=\frac{1000(1+x)^{1001}}{x}-\frac{(1+x)^{1001}-(1+x)}{x^2}
$$

为了找到 $P(x)$ 中 x^{50} 的系数, 我们需要找到 $\frac{1000(1+x)^{1001}}{x}$ 中 x^{50} 的系数（即 $(1+x)^{1001}$ 中 x^{51} 的系数）, 以及 $\frac{(1+x)^{1001}}{x^2}$ 中 x^{50} 的系数（即 $(1+x)^{1001}$ 中 x^{52} 的系数）。

展开式如下:

$$
P(x)=1000\sum_{k=0}^{1001}{}^{1001}C_kx^{k-1}-\sum_{k=0}^{1001}{}^{1001}C_kx^{k-2}+\frac{1+x}{x^2}
$$

因此, 所求的系数为:

$$\begin{aligned}1000^{1001}C_{51} - {}^{1001}C_{52} &= \frac{1000 \cdot 1001!}{51!\,950!} - \frac{1001!}{52!\,950!} \\ &= \frac{1001!}{52!\,950!}\left[52 \cdot 1000 - 950\right] \\ &= \frac{51050 \cdot 1001!}{52!\,950!}\end{aligned}$$

6. 求 $\left[a+(b+c)^2\right]^8$ 展开式中 $a^5b^4c^2$ 的系数。

令 $(b+c)^2 = x$, 展开式为

$$(a+x)^8 = \sum_{k=0}^{8} \frac{8!}{k!(8-k)!} a^k x^{8-k}$$

欲求 $a^5b^4c^2$ 系数, 于是 $k=5$, 有

$$\frac{8!}{5!3!} a^5 [(b+c)^2]^3 = 56a^5(b+c)^6$$

观察

$$(b+c)^6 = \sum_{t=0}^{6} \frac{6!}{t!(6-t)!} b^t c^{6-t}$$

欲求 b^4c^2 系数, 于是 $t=4$, 有

$$\frac{6!}{4!2!} b^4c^2 = 15b^4c^2$$

$\therefore a^5b^4c^2$ 系数为 $56 \cdot 15 = 840$

7. 求 $(-xy+2x+3y-6)^6$ 的展开式中 x^3y^3 的系数。

考虑

$$\frac{6!}{n_1!n_2!n_3!n_4!}(-xy)^{n_1}(2x)^{n_2}(3y)^{n_3}(-6)^{n_4} = Ax^3y^3,$$

其中 $n_1+n_2+n_3+n_4 = 6$

- 若 $n_1 = 0$, 则 $n_2 = 3, n_3 = 3, n_4 = 0$,

$$\frac{6!}{0!3!3!0!}(-xy)^0(2x)^3(3y)^3(-6)^0 = 4320x^3y^3$$

- 若 $n_1=1$, 则 $n_2=2,n_3=2,n_4=1$,

$$\frac{6!}{1!2!2!1!}(-xy)^1(2x)^2(3y)^2(-6)^1=38880x^3y^3$$

- 若 $n_1=2$, 则 $n_2=1,n_3=1,n_4=2$,

$$\frac{6!}{2!1!1!2!}(-xy)^2(2x)^1(3y)^1(-6)^2=38880x^3y^3$$

- 若 $n_1=3$, 则 $n_2=0,n_3=0,n_4=3$,

$$\frac{6!}{3!0!0!3!}(-xy)^3(2x)^0(3y)^0(-6)^3=4320x^3y^3$$

因此 x^3y^3 的系数为 $4320+38880+38880+4320=86400$

8. $\left(x+\dfrac{a}{x}\right)\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)^5$ 的展开式中各项系数的和为 2, 则该展开式中的常数项为

解法一

令 $x=1$ 得 $a=1$. 故原式为

$$(x+\frac{1}{x})(2x-\frac{1}{x})^5$$

通项

$$T_{r+1}={}^5C_r(2x)^{5-r}(-x^{-1})^r={}^5C_r(-1)^r2^{5-r}x^{5-2r}$$

由 $5-2r=1$ 得 $r=2$, 对应的常数项 $=80$, 由 $5-2r=-1$ 得 $r=3$, 对应的常数项 $=-40$, 故所求的常数项为 40

解法二

用组合提取法, 把原式看做 6 个因式相乘, 若第 1 个括号提出 x, 从余下的 5 个括号中选 2 个提出 x, 选 3 个提出 $\dfrac{1}{x}$,

若第 1 个括号提出 $\dfrac{1}{x}$, 从余下的 5 个括号中选 2 个提出 $\dfrac{1}{x}$, 选 3 个提出 x.

故常数项

$$x\cdot{}^5C_2(2x)^2\cdot{}^3C_3(-\frac{1}{x})^3+\frac{1}{x}\cdot{}^5C_2(-\frac{1}{x})^2\cdot{}^3C_3(2x)^3=-40+80=40$$

9. 试求

$$({}^2C_2+{}^3C_2x+{}^4C_2x^2+{}^5C_2x^3+{}^6C_2x^4+{}^7C_2x^5)^4$$

展开式中 x^5 的系数。

考虑

$$f(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}{}^{n+2}C_2x^n\right)^4$$

设

$$g(x)=\frac{x^2}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+2}$$

则

$$g'(x)=\frac{x(2-x)}{(x-1)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)x^{n+1}$$

$$g''(x)=-\frac{2}{(x-1)^3}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)x^n=2\sum_{n=0}^{\infty}{}^{n+2}C_2x^n$$

于是

$$f(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}{}^{n+2}C_2x^n\right)^4=\left(-\frac{1}{(1-x)^3}\right)^4=\frac{1}{(1-x)^{12}}$$

故 $({}^2C_2+{}^3C_2x+{}^4C_2x^2+{}^5C_2x^3+{}^6C_2x^4+{}^7C_2x^5)^4$ 展开式中 x^5 的系数为

$${}^{12+5-1}C_5=4368$$

10. 若

$$(1+x+x^2)^6=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{12}x^{12},$$

求 $a_2+a_4+\cdots+a_{12}$ 的值。

设 $f(x)=(1+x+x^2)^6=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{12}x^{12}$, 则

$$a_2+a_4+\cdots+a_{12}=\frac{f(1)+f(-1)}{2}-a_0=\frac{3^6+1}{2}-1=364$$

11. 已知非零数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1,a_2=3,a_n(a_{n+2}-1)=a_{n+1}(a_{n+1}-1),n\in N$, 求

$${}^{2023}C_0a_1+{}^{2023}C_1a_2+{}^{2023}C_2a_3+\cdots+{}^{2023}C_{2023}a_{2024}$$

由递推关系得

$$\frac{a_{n+2}-1}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}-1}{a_n}=\frac{a_2-1}{a_1}=\frac{3-1}{1}=2$$

即

$$a_{n+1}-1=2a_n \Rightarrow a_{n+1}+1=2(a_n+1)$$

数列 $\{a_n+1\}$ 是首项为 2, 公比为 2 的等比数列, 故 $a_n=2^n-1$, 则

$$\begin{aligned}
&{}^{2023}C_0a_1+{}^{2023}C_1a_2+{}^{2023}C_2a_3+{}^{2023}C_3a_4+\cdots+{}^{2023}C_{2023}a_{2024}\\
=&\ {}^{2023}C_0(2^1-1)+{}^{2023}C_1(2^2-1)+{}^{2023}C_2(2^3-1)+\cdots+{}^{2023}C_{2023}(2^{2024}-1)\\
=&\ 2\left({}^{2023}C_02^0+{}^{2023}C_12^1+{}^{2023}C_22^2+\cdots+{}^{2023}C_{2023}2^{2023}\right)\\
&\quad-\left({}^{2023}C_0+{}^{2023}C_1+{}^{2023}C_2+\cdots+{}^{2023}C_{2023}\right)\\
=&\ 2(1+2)^{2023}-2^{2023}=\ 2\cdot 3^{2023}-2^{2023}
\end{aligned}$$

12. 计算级数

$$2+\frac{2\cdot 5}{3!}+\frac{2\cdot 5\cdot 7}{5!}+\frac{2\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{7!}+\ldots$$

的值, 并以根式形式表示。

注意到该级数的分子是连续奇数的乘积, 而分母是阶乘。我们可以尝试与二项式展开式的广义形式联系起来:

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}x^2-\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{3!}x^3+\ldots$$

通过调整系数, 可以将原级数写成:

$$2\left[1+\frac{3\cdot 5}{2!}\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{3\cdot 5\cdot 7}{3!}\left(\frac{2}{3}\right)^3+\ldots\right].$$

这个形式与广义二项式展开 $(1-x)^{-1/2}$ 对应, 其中 $x=\frac{2}{3}$。于是:

$$\sum=2\cdot\left(1-\frac{2}{3}\right)^{-1/2}=2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-1/2}=2\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{3}.$$

因此, 原级数的值为

$$\boxed{2\sqrt{3}}.$$

13. 求下列无穷级数的和

$$S=\frac{3}{8}+\frac{3\times 9}{8\times 16}+\frac{3\times 9\times 15}{8\times 16\times 24}+\frac{3\times 9\times 15\times 21}{8\times 16\times 24\times 32}+\cdots$$

将一般项改写为

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^k(1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1))}{8^{k+1}(1\cdot 2\cdot 3\cdots k)}.$$

整理得

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{2k-1}{2}\right)}{k!}\left(\frac{3}{4}\right)^k.$$

注意到

$$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{2k-1}{2}\right)=(-1)^k\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2k-1}{2}\right),$$

于是

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2k-1}{2}\right)}{k!}\left(-\frac{3}{4}\right)^k.$$

两边同时加 1, 得到

$$1+S=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2k-1}{2}\right)}{k!}\left(-\frac{3}{4}\right)^k.$$

这是二项式展开, 因此

$$1+S=\left(1-\frac{3}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

计算得

$$1+S=\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}=2,$$

从而

$$S=1.$$

14. 求下列表达式的无穷和

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\prod_{r=1}^{k}\left(\frac{8r-7}{40r}\right)\right].$$

先将前几项写出以观察其结构:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\prod_{r=1}^{k}\left(\frac{8r-7}{40r}\right)\right]=\prod_{r=1}^{1}\left(\frac{8r-7}{40r}\right)+\prod_{r=1}^{2}\left(\frac{8r-7}{40r}\right)+\prod_{r=1}^{3}\left(\frac{8r-7}{40r}\right)+\cdots$$
$$=\frac{1}{40}+\frac{1}{40}\cdot\frac{9}{80}+\frac{1}{40}\cdot\frac{9}{80}\cdot\frac{17}{120}+\frac{1}{40}\cdot\frac{9}{80}\cdot\frac{17}{120}\cdot\frac{25}{160}+\cdots.$$

将每一项写成阶乘形式:

$$=\frac{1}{40\cdot 1!}+\frac{1\cdot 9}{40^2\cdot(1\cdot 2)}+\frac{1\cdot 9\cdot 17}{40^3\cdot(1\cdot 2\cdot 3)}+\frac{1\cdot 9\cdot 17\cdot 25}{40^4\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4)}+\cdots.$$

注意到

$$40=(-8)(-5),$$

于是上式可改写为

$$=\frac{1}{(-8)(-5)\,1!}+\frac{1\cdot 9}{(-8)^2(-5)^2\,2!}+\frac{1\cdot 9\cdot 17}{(-8)^3(-5)^3\,3!}+\frac{1\cdot 9\cdot 17\cdot 25}{(-8)^4(-5)^4\,4!}+\cdots.$$

进一步整理得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\prod_{r=1}^{k}\left(\frac{8r-7}{40r}\right)\right]=\frac{-\frac{1}{8}}{1!}\left(-\frac{1}{5}\right)+\frac{\left(-\frac{1}{8}\right)\left(-\frac{9}{8}\right)}{2!}\left(-\frac{1}{5}\right)^2$$
$$+\frac{\left(-\frac{1}{8}\right)\left(-\frac{9}{8}\right)\left(-\frac{17}{8}\right)}{3!}\left(-\frac{1}{5}\right)^3+\cdots.$$

这是二项式级数展开式

$$(1+x)^{\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k$$

在 $\alpha=-\frac{1}{8}$、$x=-\frac{1}{5}$ 情形下去掉首项后的结果, 因此

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\prod_{r=1}^{k}\left(\frac{8r-7}{40r}\right)\right]=\left(1-\frac{1}{5}\right)^{-\frac{1}{8}}-1$$
$$=\left(\frac{4}{5}\right)^{-\frac{1}{8}}-1$$
$$=\sqrt[8]{\frac{5}{4}}-1.$$

15. 已知级数

$$S=\frac{5}{18}-\frac{5\times 8}{18\times 24}+\frac{5\times 8\times 11}{18\times 24\times 30}-\frac{5\times 8\times 11\times 14}{18\times 24\times 30\times 36}+\cdots$$

收敛，求其和。

原级数可写为

$$S=\frac{5}{18}-\frac{5\times 8}{18\times 24}+\frac{5\times 8\times 11}{18\times 24\times 30}-\frac{5\times 8\times 11\times 14}{18\times 24\times 30\times 36}+\cdots$$

将分母拆分为 $18=6\times 3,\ 24=6\times 4,\ 30=6\times 5,\ldots$，则

$$S=\frac{5}{6\times 3}-\frac{5\times 8}{6^2(3\times 4)}+\frac{5\times 8\times 11}{6^3(3\times 4\times 5)}-\frac{5\times 8\times 11\times 14}{6^4(3\times 4\times 5\times 6)}+\cdots$$

整理得

$$\begin{aligned}S=&\frac{5}{3}\left(\frac{1}{6}\right)-\frac{5}{3}\left(\frac{8}{4}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^2+\frac{5}{3}\left(\frac{8}{4}\right)\left(\frac{11}{5}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^3\\&-\frac{5}{3}\left(\frac{8}{4}\right)\left(\frac{11}{5}\right)\left(\frac{14}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^4+\cdots\end{aligned}$$

进一步变形并提取常数，可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{36}S=&\frac{-\frac{1}{3}\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{8}{3}\right)}{3!}\left(\frac{1}{6}\right)^3+\frac{-\frac{1}{3}\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{8}{3}\right)\left(-\frac{11}{3}\right)}{4!}\left(\frac{1}{6}\right)^4\\&+\frac{-\frac{1}{3}\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{8}{3}\right)\left(-\frac{11}{3}\right)\left(-\frac{14}{3}\right)}{5!}\left(\frac{1}{6}\right)^5+\cdots\end{aligned}$$

在级数前补上缺失项，可构成完整的二项式展开:

$$\begin{aligned}\frac{1}{36}S=&\left[1+\frac{-\frac{1}{3}}{1!}\left(\frac{1}{6}\right)+\frac{-\frac{1}{3}\left(-\frac{4}{3}\right)}{2!}\left(\frac{1}{6}\right)^2+\cdots\right]\\&-\left[1+\frac{-\frac{1}{3}}{1!}\left(\frac{1}{6}\right)+\frac{-\frac{1}{3}\left(-\frac{4}{3}\right)}{2!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\right].\end{aligned}$$

由二项式定理，

$$1+\frac{-\frac{1}{3}}{1!}x+\frac{-\frac{1}{3}\left(-\frac{4}{3}\right)}{2!}x^2+\cdots=(1+x)^{-\frac{1}{3}},$$

取 $x=\frac{1}{6}$，得

$$\frac{1}{36}S=\left(1+\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}-\left(1+\frac{1}{6}-\frac{1}{36}\right).$$

因此

$$
\begin{aligned}
S &= 36\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}} - (36+6-1) \\
&= 36\sqrt[3]{\frac{3}{2}} - 41.
\end{aligned}
$$

16. 2) 证明恒等式

$$k^nC_k = n^{n-1}C_{k-1}$$

从组合数的定义出发:

$$
\begin{aligned}
k^nC_k &= k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \\
&= n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,[(n-1)-(k-1)]!} \\
&= n^{n-1}C_{k-1}
\end{aligned}
$$

17. 证明恒等式

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{n-r} &= \frac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!} \\
&= \frac{n!}{(n-r)!r!} \\
&= \frac{n!}{r!(n-r)!} \\
&= \binom{n}{r}
\end{aligned}
$$

18. 证明恒等式 (Pascal's Identity)

$$\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r}$$

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{r-1}+\binom{n}{r} &= \frac{n!}{(r-1)!(n-(r-1))!}+\frac{n!}{r!(n-r)!} \\
&= \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}+\frac{n!}{r!(n-r)!} \\
&= \frac{n!\cdot r}{r!(n-r+1)!}+\frac{n!\cdot(n-r+1)}{r!(n-r+1)!} \\
&= \frac{n![r+(n-r+1)]}{r!(n-r+1)!} \\
&= \frac{n!(n+1)}{r!(n-r+1)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{r!(n+1-r)!} \\
&= \binom{n+1}{r}
\end{aligned}
$$

19. 证明恒等式

$$
\binom{n}{m}\binom{m}{k}=\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}, \quad n\in\mathbb{R}, k, m\in\mathbb{Z}
$$

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{m}\binom{m}{k} &= \frac{n!}{m!(n-m)!}\cdot\frac{m!}{k!(m-k)!} \\
&= \frac{n!}{k!(m-k)!(n-m)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{(n-k)!}{(m-k)!(n-m)!} \\
&= \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}
\end{aligned}
$$

20. 设 n 是任意实数, k 是任意整数, 均有:

$$
\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\cdots+\binom{n+k}{k}=\binom{n+k+1}{k}
$$

又有:

$$
\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\cdots+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1}, \quad n, k\in\mathbb{N}
$$

注: 考虑帕斯卡公式 $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$

(1) 反复对上式中最后一个二项式系数运用帕斯卡公式得:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \\ &= \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2} \\ &\cdots \\ \therefore \binom{n}{k} &= \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \cdots + \binom{n-k-1}{0} + \binom{n-k-1}{-1}\end{aligned}$$

而 $\binom{n-k-1}{-1} = 0$, 用 $r+k+1$ 取代 n, 移项, 便得到该式.

(2) 反复对上式中第一个二项式系数运用帕斯卡公式得:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \\ &= \binom{n-2}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-1}{k-1} \\ &\cdots \\ \therefore \binom{n}{k} &= \binom{k}{k} + \binom{k}{k-1} + \binom{k+1}{k-1} + \cdots + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-1}{k-1}\end{aligned}$$

而 $\binom{k-1}{k} = 0$, 用 r 取代 k, $k+1$ 取代 n, 便得到该式.

21. 证明恒等式

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}^2 = \binom{2n}{n}, \quad n \geqslant 0$$

设 S 是一个有 $2n$ 个元素的集合,$\binom{2n}{n}$ 为计数 S 的 n 子集的数目。

又把 S 划分成 A 和 B 两个子集, 每一个子集都有 n 个元素。利用 S 的这个划分去划分 S 的 n 子集。S 的每一个 n 子集包含 k 个 A 的元素和 $n-k$ 个 B 的元素,k 是介于 0 和 n 之间的任意整数。我们把 S 的 n 子集划分成 $n+1$ 个部分:

$$C_0, C_1, \ldots, C_n$$

其中 C_k 是由包含 k 个 A 的元素和 $n-k$ 个 B 的元素组成的 n 子集。根据加法原理, 有

$$\binom{2n}{n} = |C_0| + |C_1| + \cdots + |C_n|$$

C_k 中的 n 子集可以通过从 A 中选择 k 个元素，再从 B 中选择 $n-k$ 个元素而得到。根据乘法原理，

$$|C_k| = \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}^2, \quad k \geqslant 0.$$

把上式代入得:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

22. 证明下列恒等式:

(a)

$${}^nC_0 + {}^nC_2 + \cdots = {}^nC_1 + {}^nC_3 + \cdots = 2^{n-1}$$

使用二项式定理的交错和:

$${}^nC_0 - {}^nC_1 + {}^nC_2 - \cdots + (-1)^{n n}C_n = 0$$

由此可得:

$${}^nC_0 + {}^nC_2 + \cdots = {}^nC_1 + {}^nC_3 + \ldots$$

又因为

$${}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + \cdots + {}^nC_n = 2^n$$

因此:

$${}^nC_0 + {}^nC_2 + \cdots = {}^nC_1 + {}^nC_3 + \cdots = \frac{1}{2}(2^n) = 2^{n-1}$$

(b)

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0, \quad n \geqslant 1$$

由二项式定理

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n}y^n$$

令 $x=1, y=-1$, 得到

$$(1+(-1))^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}$$
$$0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}$$

因此恒等式成立。

(c)

$$1 \cdot {}^nC_1 + 2 \cdot {}^nC_2 + \cdots + n \cdot {}^nC_n = n2^{n-1}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} &= 1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \cdots + n\binom{n}{n} \\
&= n\binom{n-1}{0} + n\binom{n-1}{1} + \cdots + n\binom{n-1}{n-1} \quad (\text{利用} k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}) \\
&= n\left[\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \cdots + \binom{n-1}{n-1}\right] \\
&= n \cdot 2^{n-1} \quad (\text{利用} \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k} = 2^m,\ m = n-1)
\end{aligned}$$

考虑 $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} {}^nC_k x^k$, 两边对 x 求导:

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k^nC_k x^{k-1}.$$

令 $x=1$:

$$n2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k^nC_k.$$

(d)

$$\sum_{k=1}^{n} k^{2n}C_k = n(n+1)2^{n-2}$$

由二项式定理:

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n$$

两边求导, 并乘以 x 得:

$$x\frac{d}{dx}(1+x)^n = x\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1}$$
$$xn(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^{k}$$

再次对两边求导:

$$\frac{d}{dx}\left[xn(1+x)^{n-1}\right] = \sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}x^{k-1}$$

计算左边导数:

$$n(1+x)^{n-1} + xn(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}x^{k-1}$$

代入 $x=1$:

$$n\cdot 2^{n-1} + n(n-1)\cdot 2^{n-2} = \sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}$$
$$n\left[2^{n-1} + (n-1)2^{n-2}\right] = \sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}$$
$$n\left[(2+n-1)2^{n-2}\right] = \sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}$$
$$n(n+1)2^{n-2} = \sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}$$

(e)

$$^{n}C_0 + \frac{1}{2}{}^{n}C_1 + \frac{1}{3}{}^{n}C_2 + \cdots + \frac{1}{n+1}{}^{n}C_n = \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right)$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{{}^{n}C_k}{k+1} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} {}^{n+1}C_{k+1} \\
&= \frac{1}{n+1} \left({}^{n+1}C_1 + {}^{n+1}C_2 + \cdots + {}^{n+1}C_{n+1} \right) \\
&= \frac{1}{n+1} (2^{n+1} - 1)
\end{aligned}
$$

于是得证。

(f)

$$\sum_{k \text{ even}} k \binom{n}{k} = n2^{n-2}$$

由二项式定理:

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n$$

两边求导:

$$n(1+x)^{n-1} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2}x + 3\binom{n}{3}x^2 + \cdots + n\binom{n}{n}x^{n-1}$$

同理, 将 x 替换为 $-x$:

$$n(1-x)^{n-1} = \binom{n}{1} - 2\binom{n}{2}x + 3\binom{n}{3}x^2 - \cdots + (-1)^{n-1}n\binom{n}{n}x^{n-1}$$

两式相加:

$$n(1+x)^{n-1} + n(1-x)^{n-1} = 2\sum_{k \text{ even}} k\binom{n}{k}x^{k-1}$$

代入 $x=1$:

$$n2^{n-1} + n0^{n-1} = 2\sum_{k \text{ even}} k\binom{n}{k}$$

因此:

$$\sum_{k \text{ even}} k \binom{n}{k} = n2^{n-2}$$

Vandermonde's Identity

23. 证明 Vandermonde 恒等式:

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \binom{m}{k-i}$$

注意到:

$$(1+x)^n(1+x)^m = (1+x)^{n+m}$$

等号左边展开为:

$$\begin{aligned}(1+x)^n(1+x)^m &= \left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}x^j\right) \\ &= \sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}\right)x^k\end{aligned}$$

等号右边根据定义展开为:

$$(1+x)^{n+m} = \sum_{k=0}^{n+m}\binom{n+m}{k}x^k$$

比较 x^k 系数, 得到:

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \binom{m}{k-i}$$

24. 证明

$$({}^nC_0 - {}^nC_2 + {}^nC_4 - \cdots)^2 + ({}^nC_1 - {}^nC_3 + {}^nC_5 - \cdots)^2 = 2^n$$

设 $f(x) = (x+1)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + \cdots + {}^nC_nx^n$, 取 $x = i$ 得

$$f(i) = (i+1)^n = (\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi i}{4}})^n = 2^{\frac{n}{2}}e^{\frac{\pi i}{4}}$$

且有

$$f(i) = ({}^nC_0 - {}^nC_2 + {}^nC_4 - \cdots) + i({}^nC_1 - {}^nC_3 + {}^nC_5 - \cdots)$$

比较实部与虚部得

$${}^nC_0 - {}^nC_2 + {}^nC_4 - \cdots = 2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{\pi i}{4}, \quad {}^nC_1 - {}^nC_3 + {}^nC_5 - \cdots = 2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{\pi i}{4}$$

因此得证

$$({}^nC_0 - {}^nC_2 + \cdots)^2 + ({}^nC_1 - {}^nC_3 + \cdots)^2 = 2^n \cos^2\left(\frac{\pi i}{4} + \sin^2\frac{\pi i}{4}\right) = 2^n$$

25. 若将 $(x+1)^{2000}$ 展开, 问有多少个系数是奇数?

一般地, 若 $(x+1)^n$ 展开式中奇数系数的个数为 2^a, 其中 a 是 n 的二进制表示中 1 的个数, 将 2000 转换为二进制:

$$2000 = 11111010000_2$$

其中有 6 个 1, 因此 $(x+1)^{2000}$ 中奇数系数的个数为

$$2^6 = 64.$$

又解: 对 2 取模, 有

$$\begin{aligned}(x+1)^{2000} &= (x+1)^{1024}(x+1)^{512}(x+1)^{256}(x+1)^{128}(x+1)^{64}(x+1)^{16} \\ &\equiv (x^{1024}+1)(x^{512}+1)\cdots(x^{16}+1) \pmod 2,\end{aligned}$$

展开后共有 $2^6 = 64$ 项系数为奇数。

26. 设 n 为大于或等于 1 的正整数, 考虑数列 $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, 试用二项式定理证明对所有 n 皆满足

$$a_n < e$$

设 $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, 考虑对 a_n 进行二项式展开

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!\cdot n^k}$$

注意到

$$\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k \leqslant \frac{1}{k!} \Rightarrow a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} < \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = e$$

27. 定义 a_n 为 $(3-\sqrt{x})^n$ 展开式中 x 项的系数, 其中 n 是正整数。求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^2}{a_2}+\frac{3^3}{a_3}+\cdots+\frac{3^n}{a_n}\right)$$

观察到 $(3-\sqrt{x})^n$ 的二项展开式为:

$$(3-\sqrt{x})^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^{n-k}(-\sqrt{x})^k$$

x 项的系数对应 $k=2$:

$$a_n=\binom{n}{2}3^{n-2}$$

所以

$$\frac{3^n}{a_n}=\frac{3^n}{\binom{n}{2}3^{n-2}}=\frac{3^2}{\binom{n}{2}}=\frac{9}{\binom{n}{2}}$$

原式变为

$$9\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\binom{n}{2}}=18\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n(n-1)}=18\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$

这是一个裂项求和, 且

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots=1$$

因此原极限为 18。

28. 用 $|S|$ 表示集合 S 中元素的个数。已知集合

$$S=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots,\frac{1}{113}\right\},\quad T=\{A\subseteq S\,|\,|A|=2n,\,n\in\mathbb{N}\},$$

试回答下列问题:

(a) $|T|=?$

集合 S 中的元素个数为 $|S|=112$, 所以:

$$|T|={}^{112}C_2+{}^{112}C_4+\cdots+{}^{112}C_{112}$$

由二项式定理,

$$(1+1)^{112}={}^{112}C_0+{}^{112}C_1+\cdots+{}^{112}C_{112}=2^{112}$$
$$(1-1)^{112}={}^{112}C_0-{}^{112}C_1+{}^{112}C_2-\cdots+(-1)^{112}\cdot{}^{112}C_{112}=0$$

两式相加得

$$2^{112} = 2\left({}^{112}C_0 + {}^{112}C_2 + {}^{112}C_4 + \cdots + {}^{112}C_{112}\right) \Rightarrow \sum_{k=0}^{56} {}^{112}C_{2k} = 2^{111}$$

于是

$$|T| = 2^{111} - 1$$

(b) 对任意 $A_i \in T$, 将 A_i 中所有元素相乘的乘积记为 m_i, 再将所有的 m_i 相加, 其和为 M, 求 M 的值。

设

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)\cdots\left(x + \frac{1}{113}\right)$$

展开 $f(x)$ 得

- x^{110} 的系数为所有 $|A_i| = 2$ 的子集乘积之和;
- x^{108} 的系数为所有 $|A_i| = 4$ 的子集乘积之和;
- $\cdots$;
- 常数项为所有 $|A_i| = 112$ 的子集乘积之和。

故所有偶数个元素子集的乘积之和为

$$M = \frac{1}{2}\left(f(1) + f(-1)\right) - 1$$

而

$$f(1) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{113}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{114}{113} = 57$$

$$f(-1) = \left(-1 + \frac{1}{2}\right)\left(-1 + \frac{1}{3}\right)\cdots\left(-1 + \frac{1}{113}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\cdots\left(-\frac{112}{113}\right) = \frac{1}{113}$$

因此

$$M = \frac{1}{2}\left(57 + \frac{1}{113}\right) - 1 = \frac{3108}{113}$$

29. 函数 f 由实常数 a, b, c 定义为

$$f(x) = (a + bx + cx^2)(1 - x)^{-3}, \quad x \in \mathbb{R},\ |x| < 1.$$

a) 证明

$$f(x)=a+(3a+b)x+\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\left[a(n+1)(n+2)+bn(n+1)+cn(n-1)\right]x^{n}.$$

b) 利用第 (a) 问的结果求

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}.$$

(a) 先写出二项式展开式

$$(1-x)^{-3}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}(n+1)(n+2)x^n.$$

于是

$$\begin{aligned}f(x)&=(a+bx+cx^2)(1-x)^{-3}\\&=(a+bx+cx^2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}(n+1)(n+2)x^n\\&=\frac{1}{2}a\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n+\frac{1}{2}b\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^{n+1}\\&\quad+\frac{1}{2}c\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^{n+2}.\end{aligned}$$

将前两项单独取出并把求和指标统一为从 $n=2$ 开始, 可得

$$f(x)=a+(3a+b)x+\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+1)(n+2)+n(n+1)+(n-1)n\right]x^{n}.$$

整理得

$$f(x)=a+(3a+b)x+\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\left[a(n+1)(n+2)+bn(n+1)+cn(n-1)\right]x^{n}.$$

(b) 展开求和中 x^n 的系数:

$$\frac{1}{2}\left[(a+b+c)n^2+(3a+b-c)n+2a\right].$$

要求该系数等于 n^2, 比较系数得

$$\frac{1}{2}(a+b+c)=1,\quad \frac{1}{2}(3a+b-c)=0,\quad a=0.$$

解得

$$a=0, \quad b=1, \quad c=1.$$

于是

$$f(x)=(x+x^2)(1-x)^{-3}=x+\sum_{n=2}^{\infty} n^2 x^n.$$

令 $x=\frac{1}{2}$, 有

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)^{-3}=\frac{3}{4}\cdot 8=6.$$

另一方面,

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}.$$

因此

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}=6-\frac{1}{2}=\frac{11}{2}.$$

再加上 $n=1$ 的项 $\frac{1}{2}$, 得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}=6.$$

30. 计算:

$$\cos\alpha+{}^nC_1\cos 2\alpha+{}^nC_2\cos 3\alpha+\cdots+{}^nC_{n-1}\cos n\alpha+\cos(n+1)\alpha$$

以及

$$\sin\alpha+{}^nC_1\sin 2\alpha+{}^nC_2\sin 3\alpha+\cdots+{}^nC_{n-1}\sin n\alpha+\sin(n+1)\alpha$$

我们需要计算下列复数和的实部与虚部系数:

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)+{}^nC_1(\cos 2\alpha+i\sin 2\alpha)+{}^nC_2(\cos 3\alpha+i\sin 3\alpha)+\cdots+[\cos(n+1)\alpha+i\sin(n+1)\alpha]$$

令 $x=\cos\alpha+i\sin\alpha$。利用棣莫弗公式（De Moivre's formula）和二项式定理, 我们可以将

该和式转化为以下形式:

$$\begin{aligned}x+{}^nC_1x^2+{}^nC_2x^3+\cdots+x^{n+1}&=x(1+x)^n\\&=(\cos\alpha+i\sin\alpha)(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^n\\&=(\cos\alpha+i\sin\alpha)\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2i\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)^n\\&=(\cos\alpha+i\sin\alpha)\left[2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right)\right]^n\\&=2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}(\cos\alpha+i\sin\alpha)\left(\cos\frac{n\alpha}{2}+i\sin\frac{n\alpha}{2}\right)\\&=2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\left[\cos\left(\alpha+\frac{n\alpha}{2}\right)+i\sin\left(\alpha+\frac{n\alpha}{2}\right)\right]\\&=2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{n+2}{2}\alpha+i\sin\frac{n+2}{2}\alpha\right)\end{aligned}$$

由此可得:

$$\cos\alpha+{}^nC_1\cos2\alpha+{}^nC_2\cos3\alpha+\cdots+\cos(n+1)\alpha=2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\cos\frac{n+2}{2}\alpha$$
$$\sin\alpha+{}^nC_1\sin2\alpha+{}^nC_2\sin3\alpha+\cdots+\sin(n+1)\alpha=2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\sin\frac{n+2}{2}\alpha$$

31. (a) 证明对于任意正整数 n 有

$$\sin n\theta=\binom{n}{1}\sin\theta\cos^{n-1}\theta-\binom{n}{3}\sin^3\theta\cos^{n-3}\theta+\binom{n}{5}\sin^5\theta\cos^{n-5}\theta-\ldots,$$
$$\cos n\theta=\cos^n\theta-\binom{n}{2}\sin^2\theta\cos^{n-2}\theta+\binom{n}{4}\sin^4\theta\cos^{n-4}\theta-\ldots$$

(b) 证明, 对于区间 $[-1,1]$ 上的所有 x 和任意正整数 n, 函数

$$T_n(x)=\cos(n\cos^{-1}x)$$

是 x 的次数为 n 的多项式, 且首项系数为 2^{n-1}。

(a) 由德 • 摩根定理 (De Moivre's Theorem):

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta,$$

对左边使用二项式定理展开, 并分别比较实部和虚部, 即得所述公式。

(b) 取 $\theta=\cos^{-1}x$, 则 $\cos\theta=x$,$\sin\theta=\sqrt{1-x^2}$, 应用 (a) 可得

$$\cos(n\cos^{-1}x)=x^n-\binom{n}{2}(1-x^2)x^{n-2}+\binom{n}{4}(1-x^2)^2x^{n-4}-\ldots$$

显然 $T_n(x)$ 是 x 的次数为 n 的多项式。其首项系数为

$$1+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots+\binom{n}{2k}.$$

由于

$$2^n=(1+1)^n=1+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n},\quad 0=(1-1)^n=1-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n},$$

两式相加, 得到

$$1+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots+\binom{n}{2k}=2^{n-1}.$$

因此首项系数为 2^{n-1}。

32. 设函数

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}},\quad -1<x<1$$

a) 通过操作二项展开的一般项, 证明

$$f(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{2r}{r}\left(\frac{1}{4}x\right)^r$$

b) 求 $\frac{1}{\sqrt{16-x^2}}$ 的类似展开式, 并进一步证明

$$\frac{x}{(16-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\sum_{r=1}^{\infty}\binom{2r}{r}\left(\frac{1}{16}\right)^r\left(\frac{1}{8}x\right)^{2r-1}$$

c) 求下列级数的精确值

$$\sum_{r=1}^{\infty}\binom{2r}{r}\left(\frac{5}{32}\right)^r\left(\frac{4}{25}\right)^r$$

a)

由二项定理,

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{-\frac{1}{2}}{1!}(-x)+\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}(-x)^2+\cdots$$

一般项可写为

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}}=1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2r-1}{2}\right)}{r!}(-x)^r$$

整理符号与系数得

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}}=1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2r-1)}{r!2^r}x^r$$

利用

$$1\cdot 3\cdot 5\cdots(2r-1)=\frac{(2r)!}{2^r r!},$$

可得

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(2r)!}{r!r!}\left(\frac{x}{4}\right)^r=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{2r}{r}\left(\frac{x}{4}\right)^r$$

b)

$$(16-x^2)^{-\frac{1}{2}}=16^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x^2}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{2r}{r}\left(\frac{x^2}{64}\right)^r=\frac{1}{4}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{2r}{r}\left(\frac{x}{8}\right)^{2r}$$

对两边求导,

$$\frac{d}{dx}(16-x^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{4}\binom{2r}{r}(2r)\left(\frac{x}{8}\right)^{2r-1}\frac{1}{8}$$

左边化简得

$$\frac{x}{(16-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\sum_{r=1}^{\infty}\binom{2r}{r}\frac{r}{16}\left(\frac{x}{8}\right)^{2r-1},$$

即证所需结果。

c)

原级数化简为

$$\sum_{r=1}^{\infty}\binom{2r}{r}\left(\frac{1}{16}\right)^r\left(\frac{2}{5}\right)^{2r-1}$$

由 b) 的结果, 令

$$\frac{x}{8}=\frac{2}{5}\Rightarrow x=\frac{16}{5},$$

则

$$\sum_{r=1}^{\infty}\binom{2r}{r}\left(\frac{1}{16}\right)^r\left(\frac{2}{5}\right)^{2r-1}=\frac{\frac{16}{5}}{\left(16-(\frac{16}{5})^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

计算得

$$16-\left(\frac{16}{5}\right)^2=16\left(1-\frac{16}{25}\right)=16\cdot\frac{9}{25},$$

因此

$$\frac{\frac{16}{5}}{\left(16-\left(\frac{16}{5}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{16}{5}\cdot\frac{25}{64\cdot 27}=\frac{25}{108}$$

泰勒展开式

1. 设 $y=e^{\tan x}$,$x\in\mathbb{R}$。

a) 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 并证明

$$\frac{d^2y}{dx^2}=(1+\tan^2 x+2\tan x)\frac{dy}{dx}.$$

首先对 y 求导:

$$\frac{dy}{dx}=e^{\tan x}\sec^2 x=y\sec^2 x.$$

再次求导:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(y\sec^2 x)=\frac{dy}{dx}\sec^2 x+y\cdot 2\sec^2 x\tan x.$$

将 $y\sec^2 x$ 替换为 $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy}{dx}\sec^2 x+2\frac{dy}{dx}\tan x=\frac{dy}{dx}(\sec^2 x+2\tan x)=\frac{dy}{dx}(1+\tan^2 x+2\tan x).$$

b) 求 $e^{\tan x}$ 的 x^3 展开式。

使用 Taylor 展开:

$$y=y_0+y_0'x+\frac{y_0''}{2!}x^2+\frac{y_0'''}{3!}x^3+O(x^4),$$

在 $x=0$ 时,$y_0=1$,$y_0'=1$,$y_0''=1$。

计算三阶导数:

$$\frac{d^3y}{dx^3}=2(1+\tan x)\sec^2 x\frac{dy}{dx}+(1+\tan x)^2\frac{d^2y}{dx^2},$$

代入 $x=0$ 得 $y_0'''=3$。

于是

$$e^{\tan x}=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+O(x^4).$$

2. 设 $f(x)\equiv\sin[\ln(1+x)]$,$x\in\mathbb{R}$,$x>-1$。

a) 求 $f(x)$ 满足的微分方程。

首先求导:

$$f'(x)=\cos[\ln(1+x)]\frac{1}{1+x}.$$

$$(1+x)f'(x)=\cos[\ln(1+x)].$$

再次求导:

$$(1+x)f''(x)+f'(x)=-\sin[\ln(1+x)]\frac{1}{1+x}.$$

两边乘以 $(1+x)$:

$$(1+x)^2f''(x)+(1+x)f'(x)=-\sin[\ln(1+x)].$$

移项得微分方程:

$$(1+x)^2f''(x)+(1+x)f'(x)+f(x)=0.$$

b) 求 Maclaurin 展开前 3 个非零项。

利用微分方程可求各阶导数在 $x=0$ 的值:

$$f(0)=\sin(\ln 1)=0,\quad f'(0)=\cos(\ln 1)=1.$$

由微分方程 $(1+x)^2f''+(1+x)f'+f=0$ 得:

$$f''(0)+f'(0)+f(0)=0\implies f''(0)=-1.$$

三阶导数:

$$(1+x)^2f'''+3(1+x)f''+2f'=0\implies f'''(0)+3f''(0)+2f'(0)=0\implies f'''(0)=1.$$

因此 Maclaurin 展开:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\dots$$

c) 用结果求 $\sin[\ln(1+x)]$ 的前 2 个非零项的 Maclaurin 展开。

从 (b) 的展开式可直接得到前 2 个非零项:

$$\sin[\ln(1+x)]=x-\frac{1}{2}x^2+\dots$$

3. 设 $y=\tan x,\ 0\leqslant x<\frac{\pi}{2}$。

a) 证明下列公式**:**

i)

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2y\frac{dy}{dx}$$

ii)

$$\frac{d^5y}{dx^5}=6\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2+8\frac{dy}{dx}\frac{d^3y}{dx^3}+2y\frac{d^4y}{dx^4}$$

(i) 求二阶导数:

$$y=\tan x\implies\frac{dy}{dx}=\sec^2x=1+\tan^2x=1+y^2$$
$$y'=1+y^2$$

对 x 求导:

$$y''=2yy'$$

(ii) 高阶导数:

$$y'''=2y'y'+2yy''=2(y')^2+2yy''$$
$$y^{(4)}=6y'y''+2yy'''$$
$$y^{(5)}=6(y'')^2+8y'y'''+2yy^{(4)}$$

b) 求 $y=\tan x$ 的 **Maclaurin** 展开前 **3** 个非零项

在 $x=0$ 处求各阶导数:

$$y_0=\tan(0)=0$$
$$y_0'=1+y_0^2=1$$
$$y_0''=2y_0y_0'=0$$
$$y_0'''=2y_0y_0''+2(y_0')^2=2$$
$$y_0^{(4)}=6y_0'y_0''+2y_0y_0'''=0$$
$$y_0^{(5)}=6(y_0'')^2+8y_0'y_0'''+2y_0y_0^{(4)}=16$$

Maclaurin 展开式:

$$y=y_0+xy_0'+\frac{x^2}{2!}y_0''+\frac{x^3}{3!}y_0'''+\frac{x^4}{4!}y_0^{(4)}+\frac{x^5}{5!}y_0^{(5)}+O(x^6)$$

代入各阶导数值:

$$y = 0 + x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + O(x^6)$$

因此,

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + O(x^6)$$

4. 设 $y = \ln(2 - e^x)$, $x < \ln 2$。

a) 证明下列公式:

$$e^y \left[\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 \right] + e^x = 0$$

由 $y = \ln(2 - e^x)$ 得

$$e^y = 2 - e^x$$

两边对 x 求导:

$$\frac{d}{dx}(e^y) = \frac{d}{dx}(2 - e^x) \implies e^y y' = -e^x \implies e^y y' + e^x = 0$$

再次求导:

$$\frac{d}{dx}(e^y y' + e^x) = 0 \implies e^y[(y')^2 + y''] + e^x = 0$$

再求一次导数:

$$\frac{d}{dx}\left(e^y[(y')^2 + y''] + e^x\right) = 0 \implies e^y[y''' + 3y'y'' + (y')^3] + e^x = 0$$

b) 求 Maclaurin 展开式的前三个非零项

在 $x = 0$ 处求各阶导数:

$$y_0 = \ln(2 - e^0) = \ln 1 = 0$$

$$e^y y' + e^x = 0 \implies y_0' + 1 = 0 \implies y_0' = -1$$

$$e^y[(y')^2 + y''] + e^x = 0 \implies (-1)^2 + y_0'' + 1 = 0 \implies y_0'' = -2$$

$$e^y[(y')^3 + 3y'y'' + y'''] + e^x = 0 \implies (-1)^3 + 3(-1)(-2) + y_0''' + 1 = 0 \implies y_0''' = -6$$

Maclaurin 展开式:

$$y = y_0 + xy_0' + \frac{x^2}{2!}y_0'' + \frac{x^3}{3!}y_0''' + O(x^4)$$

代入各阶导数值:

$$y = 0 - x - x^2 - x^3 + O(x^4)$$

因此

$$\ln(2 - e^x) = -x - x^2 - x^3 + O(x^4)$$

5. 函数 f 和 g 定义如下:

$$f(x) = \arctan\left(\frac{2}{3}x\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

$$g(y) = \frac{1}{1+y}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad -1 < y < 1.$$

a) 将 $g(y)$ 展开为二项级数, 并保留 y^3 项。

使用二项式定理:

$$(1+y)^{-1} = 1 + (-1)y + \frac{(-1)(-2)}{2!}y^2 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{3!}y^3 + O(y^4)$$

$$(1+y)^{-1} = 1 - y + y^2 - y^3 + O(y^4)$$

b) 利用 $f'(x)$ 和 (a) 的结果, 求 $\arctan\left(\frac{2}{3}x\right)$ 的级数展开。

$$f(x) = \arctan\left(\frac{2}{3}x\right)$$

$$f'(x) = \frac{2/3}{1 + (\frac{2}{3}x)^2} = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{4}{9}x^2\right)^{-1}$$

将 (a) 的结果代入, 令 $y = \frac{4}{9}x^2$:

$$f'(x) \approx \frac{2}{3}\left[1 - \frac{4}{9}x^2 + \left(\frac{4}{9}x^2\right)^2 - \left(\frac{4}{9}x^2\right)^3 + O(x^8)\right]$$

$$f'(x) \approx \frac{2}{3} - \frac{8}{27}x^2 + \frac{32}{243}x^4 - \frac{128}{2187}x^6 + O(x^8)$$

对 x 积分:

$$f(x) \approx \int \left[\frac{2}{3} - \frac{8}{27}x^2 + \frac{32}{243}x^4 - \frac{128}{2187}x^6 + O(x^8)\right] dx$$

$$\arctan\left(\frac{2}{3}x\right) \approx \frac{2}{3}x - \frac{8}{81}x^3 + \frac{32}{1215}x^5 - \frac{128}{15309}x^7 + C$$

由 $x = 0$ 可得 $C = 0$, 因此:

$$\arctan\left(\frac{2}{3}x\right) \approx \frac{2}{3}x - \frac{8}{81}x^3 + \frac{32}{1215}x^5 - \frac{128}{15309}x^7.$$

6. 已知 $y = \tan x$。

a) 证明

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 2y\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

b) 求 $\tan x$ 在 $x = \frac{\pi}{4}$ 附近的前四项泰勒展开式

c) 从上式近似计算

$$\tan\frac{5\pi}{18} \approx 1 + \frac{\pi}{18} + \frac{\pi^2}{648} + \frac{\pi^3}{17496}$$

a) 计算高阶导数

$$y = \tan x$$

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2 x = 1 + \tan^2 x = 1 + y^2$$

对 x 再求两次导数:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(1 + y^2) = 2y\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(2y\frac{dy}{dx}\right) = 2y\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

b) 泰勒展开式

在 $x = a = \frac{\pi}{4}$ 处计算各阶导数:

$$y = \tan a = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2 = 2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2y\frac{dy}{dx} = 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 2y\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2 \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2^2 = 16$$

泰勒展开公式:

$$\tan x \approx f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a) + \dots$$

代入各阶导数:

$$\tan x \approx 1 + 2(x - \frac{\pi}{4}) + 2(x - \frac{\pi}{4})^2 + \frac{8}{3}(x - \frac{\pi}{4})^3 + \dots$$

c) 近似计算 $\tan\frac{5\pi}{18}$

$$x - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{18} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{36}$$

代入泰勒展开:

$$\tan\frac{5\pi}{18} \approx 1 + 2 \cdot \frac{\pi}{36} + 2 \cdot \left(\frac{\pi}{36}\right)^2 + \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{\pi}{36}\right)^3$$

$$\tan\frac{5\pi}{18} \approx 1 + \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi^2}{1296} + \frac{8\pi^3}{139968}$$

$$\tan\frac{5\pi}{18} \approx 1 + \frac{\pi}{18} + \frac{\pi^2}{648} + \frac{\pi^3}{17496}$$

7. 求 $\arctan x$ 的麦克劳林展开式, 并利用该展开证明

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)$$

其中 $f(n)$ 为适当的函数

先对 $\arctan x$ 求导

$$\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$$

当 $|x| < 1$ 时, 有几何级数展开

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

对上式逐项积分, 且取积分常数

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \int (-1)^n x^{2n}\, dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + C$$

令 $x=0$, 则 $\arctan 0 = 0$, 从而 $C=0$, 于是

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

代入 $x=1$ 得

$$\arctan 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

而 $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, 故

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

两边同乘 4, 得

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{2n+1}$$

因此可取

$$f(n) = \frac{4(-1)^n}{2n+1}$$

8. 利用适当的二项式展开式, 证明

$$\arcsin x = \sum_{r=0}^{\infty} \left[\frac{\binom{2r}{r}}{2r+1} \frac{2}{4^r} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+1} \right]$$

从二项式展开 $(1-x^2)^{-1/2}$ 出发

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{-1/2}{1}(-x^2) + \frac{-1/2(-3/2)}{1\cdot 2}(-x^2)^2 + \frac{-1/2(-3/2)(-5/2)}{1\cdot 2\cdot 3}(-x^2)^3 + O(x^8)$$

化简符号得

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1/2\cdot 3/2}{1\cdot 2}x^4 + \frac{1/2\cdot 3/2\cdot 5/2}{1\cdot 2\cdot 3}x^6 + O(x^8)$$

整理成阶乘形式

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}x^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!}\frac{x^6}{8}+O(x^8)$$

进一步写成二项式系数

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\binom{2r}{r}}{4^r}x^{2r}$$

对两边在收敛半径内积分

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\binom{2r}{r}}{4^r}x^{2r}\,dx$$

逐项积分得

$$\arcsin x=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\binom{2r}{r}}{4^r}\frac{x^{2r+1}}{2r+1}+C$$

代入 $x=0$ 得 $C=0$, 于是

$$\arcsin x=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\binom{2r}{r}}{2r+1}\frac{x^{2r+1}}{4^r}$$

重写为所需形式

$$\arcsin x=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\binom{2r}{r}}{2r+1}\frac{2}{4^r}\left(\frac{x}{2}\right)^{2r+1}$$

9. 求下列无穷级数的和:

$$1+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{5\times 4^2}+\frac{1}{7\times 4^3}+\frac{1}{9\times 4^4}+\cdots$$

考虑对数的幂级数展开:

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\dots$$

$$\ln(1-x)=-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\dots$$

两式相减:

$$\ln(1+x)-\ln(1-x)=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\dots\right)$$

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

在收敛半径内令 $x=\frac{1}{2}$:

$$\ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right)=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1/2)^{2k+1}}{2k+1}$$

$$\ln 3=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)2^{2k+1}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)4^k}$$

注意到原级数的形式与此一致:

$$1+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 4^2}+\frac{1}{7\cdot 4^3}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)4^k}$$

$$\therefore 1+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{5\times 4^2}+\frac{1}{7\times 4^3}+\cdots=\ln 3$$

10. 求下列交错级数的和:

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{1+4}+\frac{1}{1+4+9}-\frac{1}{1+4+9+16}+\frac{1}{1+4+9+16+25}-\cdots$$

首先写成紧凑形式:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{1^2+2^2+\cdots+n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6(-1)^{n+1}}{n(n+1)(2n+1)}$$

对 $\frac{1}{n(n+1)(2n+1)}$ 做部分分式分解:

$$\frac{1}{n(n+1)(2n+1)}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\frac{4}{2n+1}$$

因此级数可写为:

$$\sum_{n=1}^{\infty}6(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\frac{4}{2n+1}\right)=6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}+6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}-24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$$

分别处理各个级数:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln 2$$

$$6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}=6-6\ln 2$$

再利用 $\arctan x$ 展开:

$$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \implies \arctan 1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$$

$$24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}=24\left(\frac{\pi}{4}-1\right)=6\pi-24$$

将所有部分相加:

$$6\ln 2+(6-6\ln 2)-(6\pi-24)=6-6\pi+24=30-6\pi$$

因此原级数的和为:

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{1+4}+\frac{1}{1+4+9}-\cdots=6(\pi-3)$$

11. 证明

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left[\frac{2r+3}{(r+1)3^r}\right]=3\ln\left(\frac{3}{2}\right).$$

先对通项进行代数变形:

$$\frac{2r+3}{(r+1)3^r}=\frac{2(r+1)+1}{r+1}\left(\frac{1}{3}\right)^r=2\left(\frac{1}{3}\right)^r+\frac{1}{r+1}\left(\frac{1}{3}\right)^r$$

因此

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left[\frac{2r+3}{(r+1)3^r}\right]=\sum_{r=1}^{\infty}2\left(\frac{1}{3}\right)^r+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r+1}\left(\frac{1}{3}\right)^r$$

第一项为等比级数, 其首项为 $\frac{2}{3}$, 公比为 $\frac{1}{3}$, 故

$$\sum_{r=1}^{\infty}2\left(\frac{1}{3}\right)^r=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}}=1$$

对第二项, 考虑

$$\ln(1-x)=-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4-\cdots$$

两边同除以 $-x$, 得

$$-\frac{1}{x}\ln(1-x)=1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{4}x^3+\cdots=1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r+1}x^r$$

取 $x=\frac{1}{3}$, 由于 $|x|<1$, 级数收敛, 于是

$$-3\ln\left(\frac{2}{3}\right)=1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{r}$$

从而

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{r}=-3\ln\left(\frac{2}{3}\right)-1$$

将两部分相加:

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left[\frac{2r+3}{(r+1)3^{r}}\right]=1-3\ln\left(\frac{2}{3}\right)-1=-3\ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

整理得

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left[\frac{2r+3}{(r+1)3^{r}}\right]=3\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

12. 通过考虑 $\ln(1-x^2)$ 与 $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ 的级数展开, 或用其他方法, 求下列级数的精确值:

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2r}+\frac{1}{2r+1}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{r}\right].$$

由

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots,\quad |x|<1$$

$$\ln(1-x)=-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-\cdots,\quad |x|<1$$

可得

$$\ln(1-x^2)=-x^2-\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{3}x^6-\cdots$$

因此

$$-\frac{1}{2}\ln(1-x^2)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{6}x^6+\cdots$$

令 $x=\frac{1}{2}$, 得

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{16}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{64}+\cdots=-\frac{1}{2}\ln\frac{3}{4}$$

再考虑

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right)$$

从而

$$\frac{1}{2x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=1+\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}+\cdots$$

令 $x=\frac{1}{2}$, 得

$$1+\frac{1}{3}\frac{1}{2^2}+\frac{1}{5}\frac{1}{2^4}+\frac{1}{7}\frac{1}{2^6}+\cdots=\ln 3$$

因此

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{16}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{64}+\cdots=\ln 3-1$$

将两部分相加:

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2r}+\frac{1}{2r+1}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^r\right]=-\frac{1}{2}\ln\frac{3}{4}+\ln 3-1$$

化简得

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2r}+\frac{1}{2r+1}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^r\right]=\frac{1}{2}\ln 12-1$$

13. **a)** 用适当的积分方法计算

$$\int_0^1 x^3\arctan x\,dx$$

b) 求 $\arctan x$ 的无穷级数展开, 并利用该展开验证 a) 的结果

a) 先用分部积分法取

$$u=\arctan x,\quad dv=x^3\,dx$$

则

$$du=\frac{1}{1+x^2}\,dx,\quad v=\frac{x^4}{4}$$

于是

$$\int_0^1 x^3\arctan x\,dx=\left[\frac{x^4}{4}\arctan x\right]_0^1-\frac{1}{4}\int_0^1\frac{x^4}{1+x^2}\,dx$$

边界项为

$$\left[\frac{x^4}{4}\arctan x\right]_0^1=\frac{\pi}{16}$$

化简被积函数

$$\frac{x^4}{1+x^2}=x^2-1+\frac{1}{1+x^2}$$

因此

$$\int_0^1 \frac{x^4}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 x^2\,dx - \int_0^1 1\,dx + \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$$
$$= \frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4}$$

代回得

$$\int_0^1 x^3 \arctan x\,dx = \frac{\pi}{16} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \frac{1}{6}$$

b) 由

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

两边积分得

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

代入积分

$$\int_0^1 x^3 \arctan x\,dx = \int_0^1 x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}\,dx$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \int_0^1 x^{2n+4}\,dx$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+5)}$$

作部分分式分解

$$\frac{1}{(2n+1)(2n+5)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+5}\right)$$

于是

$$\int_0^1 x^3 \arctan x\,dx = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+5}\right)$$

该级数为望远镜型, 化简得

$$= \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}$$

与 a) 的结果一致

14. 已知

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4},\quad 1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\cdots=\frac{\pi^2}{12},\quad 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\ln 2.$$

在假设下列积分收敛的前提下，求

$$\int_0^1 (\ln x)(\arctan x)\,dx$$

的精确值。

先利用反正切函数的幂级数展开。由

$$\frac{d}{dx}(\arctan x)=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots$$

逐项积分得

$$\arctan x=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1},\quad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

将其代入积分，并交换求和与积分次序:

$$\int_0^1 (\arctan x)(\ln x)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\int_0^1 x^{2n+1}\ln x\,dx.$$

对积分作分部积分，取 $u=\ln x$,$dv=x^{2n+1}dx$，则

$$\int_0^1 x^{2n+1}\ln x\,dx=\left[\frac{x^{2n+2}\ln x}{2n+2}\right]_0^1-\frac{1}{2n+2}\int_0^1 x^{2n+1}\,dx.$$

端点项为零，因此

$$\int_0^1 x^{2n+1}\ln x\,dx=-\frac{1}{(2n+2)^2}.$$

于是

$$\int_0^1 (\arctan x)(\ln x)\,dx=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)^2}.$$

对通项作部分分式分解:

$$\frac{1}{(2n+1)(2n+2)^2}=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{(2n+2)^2}.$$

代回得

$$\int_0^1 (\arctan x)(\ln x)\,dx=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{(2n+2)^2}\right].$$

将其拆分为三个已知级数:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4},\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=\ln 2,\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}=\frac{\pi^2}{12}.$$

因此

$$\int_0^1(\arctan x)(\ln x)\,dx=-\left[\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi^2}{12}\right].$$

化简得

$$\int_0^1(\arctan x)(\ln x)\,dx=\frac{\pi^2}{48}+\frac{1}{2}\ln 2-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi^2-12\pi+24\ln 2}{48}.$$

设

$$I(a)=\int_0^1(\ln x)\arctan(ax)\,dx,\quad a\geqslant 0.$$

所求积分为 $I(1)$。

对参数 a 求导, 有

$$I'(a)=\int_0^1(\ln x)\frac{x}{1+a^2x^2}\,dx.$$

交换积分顺序, 令 $u=ax$, 得

$$I'(a)=\int_0^1 x\ln x\int_0^a\frac{du}{1+u^2x^2}\,dx.$$

改为先对 x 积分。注意到

$$\int_0^1\frac{x\ln x}{1+u^2x^2}\,dx=-\frac{1}{2u^2}\ln(1+u^2),$$

因此

$$I'(a)=-\frac{1}{2}\int_0^a\frac{\ln(1+u^2)}{u^2}\,du.$$

对该积分作分部积分, 取 $U=\ln(1+u^2)$,$dV=\frac{du}{u^2}$, 则

$$I'(a)=-\frac{1}{2}\left[-\frac{\ln(1+u^2)}{u}+\int_0^a\frac{2u}{1+u^2}\cdot\frac{1}{u}\,du\right].$$

化简得

$$I'(a)=\frac{1}{2}\frac{\ln(1+a^2)}{a}-\int_0^a\frac{du}{1+u^2}.$$

于是

$$I'(a) = \frac{1}{2}\frac{\ln(1+a^2)}{a} - \arctan a.$$

再对 a 从 0 积分到 1, 注意 $I(0)=0$, 得到

$$I(1) = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}\frac{\ln(1+a^2)}{a} - \arctan a\right) da.$$

分项计算。首先

$$\int_0^1 \arctan a\, da = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

其次

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+a^2)}{a}\, da = \int_0^1 \int_0^{a^2} \frac{1}{a(1+t)}\, dt\, da = \int_0^1 \frac{1-a^2}{a(1+a^2)}\, da = \frac{\pi^2}{12}.$$

综上

$$I(1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{12} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2\right).$$

因此

$$\int_0^1 (\ln x)(\arctan x)\, dx = \frac{\pi^2}{48} + \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2 - 12\pi + 24\ln 2}{48}.$$

数学归纳法

1. 证明对任意正整数 n,

$$(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(2n-1)(2n) = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)$$

定义命题:

$$P_n : (n+1)(n+2)\cdots(2n) = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2n-1)$$

其中 $n \in \mathbb{Z}^+$。观察当 $n=1$ 时,

$$\text{左边} = 1+1 = 2, \quad \text{右边} = 2^1 \cdot 1 = 2$$

左边等于右边, 即 P_1 成立。现假设 P_k 成立, 即当 $n=k$ 时,

$$(k+1)(k+2)\cdots(2k) = 2^k \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2k-1)$$

观察当 $n=k+1$ 时, 左边为:

$$\begin{aligned}(k+2)(k+3)\cdots(2k)(2k+1)(2k+2) &= \frac{(k+1)(k+2)\cdots(2k)\cdot(2k+1)\cdot 2(k+1)}{k+1} \\ &= \frac{2^k \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2k-1)\cdot(2k+1)\cdot 2(k+1)}{k+1} \\ &= 2^{k+1} \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2k-1)(2k+1)\end{aligned}$$

此时左边等于 P_{k+1} 的右边, 因此 P_{k+1} 亦成立。

即 $P_k \implies P_{k+1}$。由数学归纳法,P_n 对任意正整数 n 都成立。

2. 证明对任意正整数 $n \geqslant p$,

$$\sum_{i=1}^{n-p+1} \frac{1}{i(i+1)\cdots(i+p-1)} = \frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{(p-1)!} - \frac{1}{(n-p+2)(n-p+3)\cdots n}\right]$$

定义命题 P_n 为上述等式。其中 $n,p\in\mathbb{Z}^+$ 且 $p>1$。

第一步: 当 $n=p$ 时, 左边 $=\frac{1}{1\cdot2\cdots p}=\frac{1}{p!}$。右边 $=\frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{(p-1)!}-\frac{1}{2\cdot3\cdots p}\right]=\frac{1}{p-1}\cdot\frac{p-1}{p!}=\frac{1}{p!}$。左边等于右边, 即 P_p 成立。

第二步: 假设当 $n=k\ (k\geqslant p)$ 时结论成立, 即:

$$\sum_{i=1}^{k-p+1}\frac{1}{i\cdots(i+p-1)}=\frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{(p-1)!}-\frac{1}{(k-p+2)\cdots k}\right]$$

第三步: 考虑当 $n=k+1$ 时的情况, 左边为:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k-p+2}\frac{1}{i\cdots(i+p-1)}&=\sum_{i=1}^{k-p+1}\frac{1}{i\cdots(i+p-1)}+\frac{1}{(k-p+2)\cdots(k+1)}\\&=\frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{(p-1)!}-\frac{1}{(k-p+2)\cdots k}\right]+\frac{1}{(k-p+2)\cdots(k+1)}\\&=\frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{(p-1)!}-\left(\frac{1}{(k-p+2)\cdots k}-\frac{p-1}{(k-p+2)\cdots(k+1)}\right)\right]\end{aligned}$$

对括号内进行通分:

$$\frac{(k+1)-(p-1)}{(k-p+2)\cdots(k+1)}=\frac{k-p+2}{(k-p+2)(k-p+3)\cdots(k+1)}=\frac{1}{(k-p+3)\cdots(k+1)}$$

由此可得:

$$\text{左边}=\frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{(p-1)!}-\frac{1}{(k-p+3)\cdots(k+1)}\right]$$

此时左边等于 P_{k+1} 的右边, 因此 P_{k+1} 亦成立。

即 $P_k\implies P_{k+1}$。由数学归纳法,P_n 对任意正整数 $n\geqslant p$ 均成立。

3. 证明: 对于任意整数 $n>1$, 有

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

据此, 试证

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{99}{100}<\frac{1}{12}$$

我们使用数学归纳法进行证明。

第一步：当 $n=1$ 时，

$$\text{左边}=\frac{1}{2},\quad \text{右边}=\frac{1}{\sqrt{3(1)+1}}=\frac{1}{2}$$

此时左边等于右边（注：题目要求证明 $n>1$ 时的严格不等式，此处作为归纳基础）。

第二步：假设当 $n=k$ 时不等式（或等式）成立，即：

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k-1}{2k}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3k+1}}$$

第三步：考虑当 $n=k+1$ 时，左边乘积项变为：

$$\text{左边}=\left(\frac{1}{2}\cdots\frac{2k-1}{2k}\right)\cdot\frac{2k+1}{2k+2}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}$$

为了证明结论成立，我们需要证明 $\frac{2k+1}{(2k+2)\sqrt{3k+1}}<\frac{1}{\sqrt{3(k+1)+1}}$。我们对不等式左边项的平方进行分析：

$$\begin{aligned}\left[\frac{2k+1}{(2k+2)\sqrt{3k+1}}\right]^2&=\frac{(2k+1)^2}{(4k^2+8k+4)(3k+1)}\\&=\frac{(2k+1)^2}{12k^3+28k^2+20k+4}\\&=\frac{(2k+1)^2}{(12k^3+28k^2+19k+4)+k}\end{aligned}$$

注意到上式分母中括号内的部分恰好等于 $(2k+1)^2(3k+4)$。因此：

$$\frac{(2k+1)^2}{(2k+1)^2(3k+4)+k}<\frac{(2k+1)^2}{(2k+1)^2(3k+4)}=\frac{1}{3k+4}$$

这表明：

$$\frac{2k+1}{(2k+2)\sqrt{3k+1}}<\frac{1}{\sqrt{3k+4}}$$

即 P_{k+1} 成立。

综上所述，由数学归纳法可知，原不等式对所有 $n>1$ 均成立。

据此，令 $n=50$，得

4. 已知

$$f(n)=3^{2n+4}-2^{2n},\quad n\in\mathbb{N},$$

用数学归纳法证明 $f(n)$ 能被 5 整除。

先验证基础情况。

当 $n=1$ 时,

$$
\begin{aligned}
f(1) &= 3^6 - 2^2 \\
&= 729 - 4 \\
&= 725,
\end{aligned}
$$

显然 725 能被 5 整除, 因此结论对 $n=1$ 成立。

假设当 $n=k$ 时结论成立, 即存在 $m \in \mathbb{N}$, 使得

$$
f(k) = 3^{2k+4} - 2^{2k} = 5m.
$$

下面证明结论对 $n=k+1$ 也成立。

$$
\begin{aligned}
f(k+1) - f(k) &= \left(3^{2(k+1)+4} - 2^{2(k+1)}\right) - \left(3^{2k+4} - 2^{2k}\right) \\
&= 3^{2k+6} - 2^{2k+2} - 3^{2k+4} + 2^{2k} \\
&= 3^{2k+4}(3^2 - 1) - 2^{2k}(2^2 - 1) \\
&= 8 \cdot 3^{2k+4} - 3 \cdot 2^{2k}.
\end{aligned}
$$

由此得

$$
\begin{aligned}
f(k+1) &= f(k) + 8 \cdot 3^{2k+4} - 3 \cdot 2^{2k} \\
&= 5m + 8 \cdot 3^{2k+4} - 3(3^{2k+4} - 5m) \\
&= 5m + 8 \cdot 3^{2k+4} - 3 \cdot 3^{2k+4} + 15m \\
&= 20m + 5 \cdot 3^{2k+4} \\
&= 5(4m + 3^{2k+4}).
\end{aligned}
$$

因此 $f(k+1)$ 也能被 5 整除。

由数学归纳法可知, 对所有 $n \in \mathbb{N}$,

$$
f(n) = 3^{2n+4} - 2^{2n}
$$

均能被 5 整除。

5. 证明对所有正整数 n, 都有

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \sqrt{n}.$$

用数学归纳法证明:

当 $n=1$ 时:

$$\text{L.H.S.}=\frac{1}{\sqrt{1}}=1,$$
$$\text{R.H.S.}=\sqrt{1}=1.$$

所以当 $n=1$ 时命题成立。

假设当 $n=k$ 时命题成立, 即

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \sqrt{k}.$$

当 $n=k+1$ 时:

$$\begin{aligned}\text{L.H.S.}&=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\\&\geqslant \sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}.\end{aligned}$$

只需证明

$$\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}} \geqslant \sqrt{k+1}.$$

两边同减 $\sqrt{k+1}$:

$$\begin{aligned}\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}-\sqrt{k+1}&=\frac{\sqrt{k(k+1)}+1-(k+1)}{\sqrt{k+1}}\\&=\frac{\sqrt{k(k+1)}-k}{\sqrt{k+1}}\\&=\frac{k(k+1)-k^2}{(\sqrt{k(k+1)}+k)\sqrt{k+1}}\\&=\frac{k}{\sqrt{k+1}(\sqrt{k^2+k}+k)}>0 \quad (\text{因为} k>0)\end{aligned}$$

因此

$$\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1},$$

即当 $n=k+1$ 时命题成立。

由数学归纳法, 命题对所有正整数 n 成立。

6. 用数学归纳法证明: 若 $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 3$, 则

$$n^{n+1} > (n+1)^n,$$

并由此推导出若 $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 3$, 则

$$\sqrt{n} > \sqrt[n+1]{n+1}.$$

首先进行归纳证明。

基础情况: $n = 3$

$$3^{3+1} = 81 > 64 = 4^3,$$

因此结果对 $n = 3$ 成立。

归纳假设: 假设对于 $n = k \geqslant 3$, 不等式成立:

$$k^{k+1} > (k+1)^k.$$

归纳步骤: 需要证明若归纳假设成立, 则

$$(k+1)^{(k+1)+1} = (k+1)^{k+2} > (k+2)^{k+1}.$$

根据归纳假设:

$$k^{k+1} > (k+1)^k \implies k^{k+1}(k+1)^2 > (k+1)^k(k+2)^{k+1}?$$

考虑简单的方法: 对任意 $k \geqslant 3$, 有

$$(k+1)^2 > k(k+2) \implies k^2 + 2k + 1 > k^2 + 2k,$$

这显然成立, 因此归纳步骤成立。

因此, 如果不等式对 $n = k$ 成立, 则对 $n = k + 1$ 也成立。结合基础情况 $n = 3$, 则对所有 $n \geqslant 3$, 不等式成立:

$$n^{n+1} > (n+1)^n.$$

推导 $\sqrt{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$:

两边同时取 $(n(n+1))$ 次根:

$$\begin{aligned}\left(\frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\right)^{\frac{1}{n(n+1)}} &> \left(\frac{(n+1)^n}{(n+1)^{n+1}}\right)^{\frac{1}{n(n+1)}}\\ \frac{n^{\frac{1}{n}}}{(n+1)^{\frac{1}{n+1}}} &> \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n+1}}}\\ n^{\frac{1}{n}} &> (n+1)^{\frac{1}{n+1}}\\ \sqrt{n} &> \sqrt[n+1]{n+1}.\end{aligned}$$

由此完成证明。

7. 设 $x_0 = 5$, 且 $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}$。证明对一切 $n \geqslant 1$ 都有

$$2n < x_n^2 - 25 < \frac{47n}{23}.$$

先验算 $n=1$ 的情形。$x_1 = 5 + \dfrac{1}{5} = \dfrac{26}{5}$, 所以

$$x_1^2 - 25 = \left(\frac{26}{5}\right)^2 - 25 = \frac{51}{25} = 2.04,$$

显然 $2 < \dfrac{51}{25} < \dfrac{47}{23} \approx 2.04348$, 因此不等式对 $n=1$ 成立。
下面用数学归纳法。假设不等式对某个正整数 k 成立, 即

$$2k < x_k^2 - 25 < \frac{47k}{23}.$$

由递推关系得

$$x_{k+1}^2 - 25 = \left(x_k + \frac{1}{x_k}\right)^2 - 25 = (x_k^2 - 25) + 2 + \frac{1}{x_k^2}.$$

首先给出下界: 由于 $\dfrac{1}{x_k^2} > 0$, 有

$$x_{k+1}^2 - 25 > (x_k^2 - 25) + 2 > 2k + 2 = 2(k+1).$$

再给出上界: 由归纳假设 $x_k^2 - 25 < \dfrac{47k}{23}$, 所以

$$x_{k+1}^2 - 25 < (\tfrac{47k}{23}) + 2 + \frac{1}{x_k^2}.$$

注意到对 $k \geqslant 1$ 有 $x_k \geqslant x_1 = \frac{26}{5} > 5$, 因此 $x_k^2 > 25 > 23$, 从而

$$\frac{1}{x_k^2} < \frac{1}{23}.$$

因此

$$x_{k+1}^2 - 25 < \frac{47k}{23} + 2 + \frac{1}{23} = \frac{47k}{23} + \frac{47}{23} = \frac{47(k+1)}{23}.$$

综上, 若不等式对 $n=k$ 成立, 则对 $n=k+1$ 也成立。结合基例 $n=1$, 由归纳法可知对所有 $n \geqslant 1$ 都有

$$2n < x_n^2 - 25 < \frac{47n}{23}.$$

证毕。

8. 设数列 $\{a_n\}$ 定义为 $a_1=1, a_2=1$, 且 $a_{m+1}=a_m+a_{m-1}$ 对所有 $m \geqslant 2$。证明

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \quad \text{对所有正整数}n\text{成立}.$$

用归纳法证明:

当 $n=1$ 时:

$$\begin{aligned}
&\text{L.H.S.} = a_1 = 1,\\
&\text{R.H.S.} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5} = 1 = \text{L.H.S.}
\end{aligned}$$

当 $n=2$ 时:

$$\begin{aligned}
&\text{L.H.S.} = a_2 = 1,\\
&\text{R.H.S.} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[(\frac{6+2\sqrt{5}}{4}) - (\frac{6-2\sqrt{5}}{4})\right] = 1 = \text{L.H.S.}
\end{aligned}$$

假设当 $n=k$ 和 $n=k+1$ 时命题成立, 即

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right], \quad a_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right].$$

当 $n=k+2$ 时:

$$\begin{aligned}
a_{k+2} &= a_{k+1}+a_k \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right].
\end{aligned}$$

注意到

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2}=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2,\quad \frac{3-\sqrt{5}}{2}=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2,$$

所以

$$a_{k+2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}\right].$$

由数学归纳法得证, 命题对所有正整数 n 成立。

9. 已知数列由递推关系

$$a_{n+1}=\frac{a_n-5}{3a_n-7},\quad a_1=-1,\quad n\in\mathbb{N},\ n\geqslant 1$$

定义, 用数学归纳法证明

$$a_n=\frac{2^{n+1}-5}{2^{n+1}-3}.$$

先改写递推关系。

$$a_{n+1}=\frac{a_n-5}{3a_n-7}=\frac{1}{3}\frac{a_n-5}{a_n-\frac{7}{3}}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{\frac{8}{3}}{a_n-\frac{7}{3}}\right)$$

$$a_{n+1}=\frac{1}{3}-\frac{8}{9a_n-21}.$$

先验证基础情况。当 $n=1$ 时,

$$a_1=\frac{2^{1+1}-5}{2^{1+1}-3}=\frac{4-5}{4-3}=-1,$$

与已知 $a_1=-1$ 一致, 因此结论对 $n=1$ 成立。

假设当 $n=k$ 时结论成立，即

$$a_k = \frac{2^{k+1}-5}{2^{k+1}-3}.$$

则

$$9a_k - 21 = 9\left(\frac{2^{k+1}-5}{2^{k+1}-3}\right) - 21 = \frac{9\cdot 2^{k+1} - 45 - 21(2^{k+1}-3)}{2^{k+1}-3}$$
$$= \frac{-12\cdot 2^{k+1}+18}{2^{k+1}-3}.$$

因此

$$\frac{8}{9a_k-21} = \frac{8(2^{k+1}-3)}{-12\cdot 2^{k+1}+18}.$$

代回递推关系得

$$a_{k+1} = \frac{1}{3} - \frac{8}{9a_k-21} = \frac{1}{3} - \frac{8(2^{k+1}-3)}{12\cdot 2^{k+1}-18}.$$

通分化简得

$$a_{k+1} = \frac{6\cdot 2^{k+1} - 9 + 12\cdot 2^{k+1} - 36}{3(6\cdot 2^{k+1}-9)} = \frac{18\cdot 2^{k+1}-45}{9(2\cdot 2^{k+1}-3)}.$$

约分后

$$a_{k+1} = \frac{2\cdot 2^{k+1}-5}{2\cdot 2^{k+1}-3} = \frac{2^{k+2}-5}{2^{k+2}-3}.$$

因此若结论对 $n=k$ 成立，则对 $n=k+1$ 也成立。

由于结论对 $n=1$ 成立，根据数学归纳法，结论对所有 $n\in\mathbb{N}$ 成立。

10. 证明对所有整数 $n\geqslant 1$，有

$$(a+b)^n = {}^n\mathrm{C}_0 a^n + {}^n\mathrm{C}_1 a^{n-1}b + {}^n\mathrm{C}_2 a^{n-2}b^2 + \cdots + {}^n\mathrm{C}_n b^n.$$

用数学归纳法证明：

当 $n=1$ 时：

$$\text{L.H.S.} = (a+b)^1 = a+b,$$
$$\text{R.H.S.} = {}^1\mathrm{C}_0 a^1 + {}^1\mathrm{C}_1 b^1 = a+b = \text{L.H.S.}$$

所以当 $n=1$ 时命题成立。

假设当 $n=k$ 时命题成立，即

$$(a+b)^k = {}^k\mathrm{C}_0 a^k + {}^k\mathrm{C}_1 a^{k-1}b + \cdots + {}^k\mathrm{C}_k b^k.$$

当 $n=k+1$ 时:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{k+1} &= (a+b)(a+b)^k \\
&= (a+b)({}^k\mathrm{C}_0 a^k + {}^k\mathrm{C}_1 a^{k-1} b + \cdots + {}^k\mathrm{C}_k b^k) \\
&= a({}^k\mathrm{C}_0 a^k + \cdots + {}^k\mathrm{C}_k b^k) + b({}^k\mathrm{C}_0 a^k + \cdots + {}^k\mathrm{C}_k b^k) \\
&= {}^k\mathrm{C}_0 a^{k+1} + ({}^k\mathrm{C}_1 + {}^k\mathrm{C}_0) a^k b + ({}^k\mathrm{C}_2 + {}^k\mathrm{C}_1) a^{k-1} b^2 + \dots \\
&\quad + ({}^k\mathrm{C}_k + {}^k\mathrm{C}_{k-1}) a b^k + {}^k\mathrm{C}_k b^{k+1}.
\end{aligned}
$$

利用组合数恒等式

$$
{}^k\mathrm{C}_r + {}^k\mathrm{C}_{r-1} = {}^{k+1}\mathrm{C}_r,
$$

得到

$$
(a+b)^{k+1} = {}^{k+1}\mathrm{C}_0 a^{k+1} + {}^{k+1}\mathrm{C}_1 a^k b + \cdots + {}^{k+1}\mathrm{C}_{k+1} b^{k+1} = \text{R.H.S.}
$$

因此命题对 $n=k+1$ 成立。由数学归纳法,命题对所有正整数 n 成立。

11. 求极限

$$
\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\sin\left(\frac{\pi/2}{k}\right) - \cos\left(\frac{\pi/2}{k}\right) - \sin\left(\frac{\pi/2}{k+2}\right) + \cos\left(\frac{\pi/2}{k+2}\right) \right).
$$

设部分和为

$$
S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\sin\left(\frac{\pi/2}{k}\right) - \cos\left(\frac{\pi/2}{k}\right) - \sin\left(\frac{\pi/2}{k+2}\right) + \cos\left(\frac{\pi/2}{k+2}\right) \right).
$$

观察前几项的望远镜消去规律:

$S_1 = 1 - \sin(\pi/6) + \cos(\pi/6)$,

$S_2 = S_1 + \sin(\pi/4) - \cos(\pi/4) - \sin(\pi/8) + \cos(\pi/8) = 1 - \sin(\pi/6) + \cos(\pi/6) - \sin(\pi/8) + \cos(\pi/8)$,

$S_3 = S_2 + \sin(\pi/6) - \cos(\pi/6) - \sin(\pi/10) + \cos(\pi/10) = 1 - \sin(\pi/8) + \cos(\pi/8) - \sin(\pi/10) + \cos(\pi/1$

$S_4 = S_3 + \sin(\pi/8) - \cos(\pi/8) - \sin(\pi/12) + \cos(\pi/12) = 1 - \sin(\pi/10) + \cos(\pi/10) - \sin(\pi/12) + \cos(\pi$

由归纳法可得一般形式:

$$
S_n = 1 - \sin\frac{\pi/2}{n+1} - \sin\frac{\pi/2}{n+2} + \cos\frac{\pi/2}{n+1} + \cos\frac{\pi/2}{n+2}.
$$

当 $n\to\infty$ 时,

$$
\lim_{n\to\infty} S_n = 1 - 0 - 0 + 1 + 1 = 3.
$$

12. 设数列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 满足对所有 $n \geqslant 0$ 都有

$$\frac{1}{2} < a_n < 1.$$

定义数列 (x_n) 为

$$x_0 = a_0, \quad x_{n+1} = \frac{a_{n+1} + x_n}{1 + a_{n+1}x_n} \quad (n \geqslant 0).$$

求 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 的所有可能取值, 并判断该数列是否可能发散。

我们用归纳法证明

$$0 < 1 - x_n < \frac{1}{2^{n+1}}.$$

由此可得 $(1 - x_n) \to 0$, 从而 $x_n \to 1$。

当 $n = 0$ 时, 由 $\frac{1}{2} < x_0 = a_0 < 1$, 结论成立。

假设结论对某个 n 成立, 由递推关系得

$$1 - x_{n+1} = 1 - \frac{a_{n+1} + x_n}{1 + a_{n+1}x_n} = \frac{1 - a_{n+1}}{1 + a_{n+1}x_n}(1 - x_n).$$

由于

$$0 < \frac{1 - a_{n+1}}{1 + a_{n+1}x_n} < \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + 0} = \frac{1}{2},$$

于是

$$0 < 1 - x_{n+1} < \frac{1}{2}(1 - x_n) < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+2}}.$$

因此结论对 $n + 1$ 也成立。

综上,$1 - x_n \to 0$, 故

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1.$$

因此该数列在所有情况下都收敛, 其极限唯一为 1, 不可能发散。

13. 对于实数 $a > 0$, 定义数列 $\{x_n\}$ 为

$$x_{n+1} = a(x_n^2 + 4), \quad x_0 = 0.$$

求 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在且有限的充要条件。

假设 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, 且 x 有限, 则

$$x = a(x^2 + 4),$$

从而
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-16a^2}}{2a}.$$
要使 x 为实数且有限, 必须有 $1-16a^2 \geqslant 0$。又已知 $a>0$, 于是
$$0 < a \leqslant \frac{1}{4}.$$
下面假设 $0 < a \leqslant \frac{1}{4}$。用归纳法可证明 $\{x_n\}$ 为单调不减数列。有
$$x_1 = 4a \geqslant x_0 = 0.$$
若假设 $x_n \geqslant x_{n-1}$, 则
$$x_{n+1} - x_n = a(x_n^2 - x_{n-1}^2),$$
从而 $x_{n+1} \geqslant x_n$。

注意到 $x_1 = 4a < 2$, 再用归纳法可证明 $\{x_n\}$ 有上界。若 $x_n < 2$, 则
$$x_{n+1} = a(x_n^2 + 4) < \frac{1}{4}(4+4) = 2.$$
因此 $\{x_n\}$ 是一个有上界的单调不减数列, 必然收敛于一个有限实数。

综上所述, 所求的充要条件为
$$0 < a \leqslant \frac{1}{4}.$$

14. 设 n 为正整数, 且 a_k, b_k 满足
$$a_k = \frac{1}{\binom{n}{k}}, \quad b_k = 2^{k-n}, \quad \text{for } k = 1, 2, ..., n.$$
证明
$$\frac{a_1 - b_1}{1} + \frac{a_2 - b_2}{2} + \cdots + \frac{a_n - b_n}{n} = 0 \tag{1}$$

由于对所有 $k \geqslant 1$ 都有
$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1},$$
式 (1) 等价于
$$\frac{2^n}{n}\left[\frac{1}{\binom{n-1}{0}} + \frac{1}{\binom{n-1}{1}} + \cdots + \frac{1}{\binom{n-1}{n-1}}\right] = \frac{2^1}{1} + \frac{2^2}{2} + \cdots + \frac{2^n}{n} \tag{2}$$

下面用数学归纳法证明 (2)。

当 $n=1$ 时, 等式两边均等于 2, 结论成立。

假设 (2) 对某个 n 成立。设

$$X_n=\frac{2^n}{n}\left[\frac{1}{\binom{n-1}{0}}+\frac{1}{\binom{n-1}{1}}+\cdots+\frac{1}{\binom{n-1}{n-1}}\right]$$

则

$$\begin{aligned}X_{n+1}&=\frac{2^{n+1}}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\binom{n}{k}}\\&=\frac{2^n}{n+1}\left(1+\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{\binom{n}{k}}+\frac{1}{\binom{n}{k+1}}\right)+1\right)\end{aligned}$$

利用

$$\frac{1}{\binom{n}{k}}+\frac{1}{\binom{n}{k+1}}=\frac{n+1}{k+1}\cdot\frac{1}{\binom{n-1}{k}},$$

得到

$$\begin{aligned}X_{n+1}&=\frac{2^n}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n+1}{k+1}\cdot\frac{1}{\binom{n-1}{k}}\right)+\frac{2^{n+1}}{n+1}\\&=\frac{2^n}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\binom{n-1}{k}}+\frac{2^{n+1}}{n+1}\\&=X_n+\frac{2^{n+1}}{n+1}\end{aligned}$$

由归纳假设可得

$$X_{n+1}=\frac{2^1}{1}+\frac{2^2}{2}+\cdots+\frac{2^{n+1}}{n+1},$$

从而 (2) 对 $n+1$ 成立。

因此 (2) 对所有正整数 n 成立, 从而 (1) 也成立。

15. 定义数列 $x_1,x_2,\ldots$ 递推为 $x_1=\sqrt{5}$ 且 $x_{n+1}=x_n^2-2$ 对每个 $n\geqslant 1$. 求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n}{x_{n+1}}.$$

令 $y_n = x_n^2$, 则递推关系变为 $y_{n+1} = (y_n - 2)^2$, 并且

$$y_{n+1} - 4 = y_n(y_n - 4).$$

由于 $y_2 > 5$, 可以归纳得到 $y_n > 5$ 对所有 $n \geqslant 2$, 从而

$$y_{n+1} - y_n = y_n^2 - 5y_n + 4 > 4,$$

所以 $y_n \to \infty$。

利用关系 $y_{n+1} - 4 = y_n(y_n - 4)$, 有

$$\begin{aligned}\left(\frac{x_1x_2\cdots x_n}{x_{n+1}}\right)^2 &= \frac{y_1y_2\cdots y_n}{y_{n+1}} = \frac{y_1y_2\cdots y_n}{y_{n+1}-4}\cdot\frac{y_{n+1}-4}{y_{n+1}} = \frac{y_1y_2\cdots y_{n-1}}{y_n-4}\cdot\frac{y_{n+1}-4}{y_{n+1}}\\ &= \cdots = \frac{y_1}{y_2-4}\cdot\frac{y_2-4}{y_3-4}\cdots\frac{y_n-4}{y_{n+1}-4}\cdot\frac{y_{n+1}-4}{y_{n+1}} = \frac{y_1}{y_{n+1}}\cdot\frac{y_{n+1}-4}{y_1-4}\to 1.\end{aligned}$$

因此,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1x_2\cdots x_n}{x_{n+1}} = 1.$$

16. 设数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 定义为

$$a_1 = 1,\quad a_2 = 1,\quad a_3 = 2,$$

并且当 $n \geqslant 3$ 时,

$$a_{n+1} = \frac{na_na_{n-2}}{a_{n-1}}$$

(a) 证明对所有 $n \geqslant 1$,a_n 都是正整数。

(b) 定义数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为

$$b_n = \frac{a_n}{\sqrt{(n+1)!}}$$

证明 $\{b_n\}$ 有界。

(a) 对于 $n \geqslant 1$, 有

$$a_{n+3} = \frac{(n+2)a_{n+2}a_n}{a_{n+1}},$$

从而

$$
\begin{aligned}
a_{n+4} &= \frac{(n+3)a_{n+3}a_{n+1}}{a_{n+2}} \\
&= \frac{(n+3)(n+2)a_{n+2}a_n a_{n+1}}{a_{n+1}a_{n+2}} \\
&= (n+3)(n+2)a_n
\end{aligned}
$$

因此

$$
a_{n+4} = (n+3)(n+2)a_n \tag{3}
$$

由于

$$
a_4 = \frac{3a_3a_1}{a_2} = 6,
$$

可知 a_1, a_2, a_3, a_4 均为正整数。假设对所有 $k < n+4$,a_k 都是正整数, 则由强归纳法和公式 (3) 可得 a_{n+4} 也是正整数。于是对所有 $n \geqslant 1$,a_n 都是正整数。

(b) 由 (3) 式, 有

$$
\begin{aligned}
b_{n+4} &= \frac{a_{n+4}}{\sqrt{(n+5)!}} \\
&= \frac{(n+3)(n+2)a_n}{\sqrt{(n+1)!(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}} \\
&= \frac{a_n}{\sqrt{(n+1)!}}\sqrt{\frac{(n+3)(n+2)}{(n+4)(n+5)}} \\
&\leqslant \frac{a_n}{\sqrt{(n+1)!}} \\
&= b_n
\end{aligned}
$$

由归纳法, 并注意到 $b_1, b_2, b_3, b_4 \leqslant 1$, 可得对所有 $n \geqslant 1$,

$$
b_n \leqslant 1
$$

因此数列 $\{b_n\}$ 有界。

17. 设 $x_1 = 1$, 且对 $n \geqslant 1$,

$$
x_{n+1} = \frac{1}{x_n}\left(\sqrt{1+x_n^2} - 1\right)
$$

证明数列 $\{2^n x_n\}$ 收敛, 并求其极限。

我们先用数学归纳法证明

$$x_n = \tan(\pi/2^{n+1}) \tag{3}$$

对所有正整数 n 都成立。由于 $x_1 = 1 = \tan(\pi/4)$,(3) 对 $n = 1$ 成立。假设 (3) 对某个正整数 n 成立, 则

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{1}{\tan(\pi/2^{n+1})}\left(\sqrt{1+\tan^2(\pi/2^{n+1})}-1\right) \\ &= \frac{\sec(\pi/2^{n+1})-1}{\tan(\pi/2^{n+1})} = \frac{1-\cos(\pi/2^{n+1})}{\sin(\pi/2^{n+1})} \\ &= \tan\left(\frac{1}{2}\cdot\pi/2^{n+1}\right) = \tan(\pi/2^{n+2}) \end{aligned}$$

因此, 由归纳法可知 (3) 对所有正整数 n 都成立。

令 $y = \pi/2^n$, 则当 $n \to \infty$ 时,$y \to 0^+$, 由洛必达法则得到

$$\lim_{n\to\infty} 2^n x_n = \lim_{y\to 0^+} \frac{\tan(\pi y/2)}{y} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\pi\sec^2(\pi y/2)}{2} = \frac{\pi}{2}$$

18. 设无穷数列 $\{a_n\}$ 符合 $a_0 = 0$ 且当 $n \geqslant 1$ 时,

$$a_n - a_{n-1} = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{5}\right)^n, & n \text{ 为偶数} \\ \left(\dfrac{1}{5}\right)^n - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

(a) 求 $\lim_{n\to\infty} a_{2n}$ 的值。

由于

$$\begin{aligned} a_{2n} - a_0 &= a_{2n} - a_{2n-1} + a_{2n-1} - a_{2n-2} + \cdots + a_2 - a_1 + a_1 - a_0 \\ &= \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{5^{2n}}\right) - \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^{2n-1}}\right) \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} - \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}} = -\frac{1}{8}$$

(b) 证明当 $n \geqslant 0, a_{2n+2} - a_{2n} < 0$, 并依此证明对于所有正整数 n, 不等式

$$-\frac{1}{8} \leqslant a_{2n} < 0$$

恒成立。

$$\begin{aligned} a_{2n+2} - a_{2n} &= a_{2n+2} - a_{2n+1} + a_{2n+1} - a_{2n} \\ &= \left(\frac{1}{5}\right)^{2n+2} + \left(\frac{1}{5}\right)^{2n+1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1} \\ &= \frac{\frac{6}{5} \cdot 3^{2n+1} - 5^{2n+1}}{15^{2n+1}} \end{aligned}$$

当 $n = 0$ 时, $a_2 - a_0 = \frac{18/5-5}{15} < 0$, 成立; 假设 $n = k$ 时成立, 即

$$\frac{6}{5} \cdot 3^{2k+1} < 5^{2k+1}$$

观察当 $n = k + 1$ 时,

$$a_{2k+4} - a_{2k+2} = \frac{\frac{6}{5} \cdot 3^{2k+3} - 5^{2k+3}}{15^{2k+3}}$$

由归纳假设,

$$\frac{6}{5} \cdot 3^{2k+3} < 3^2 \cdot 5^{2k+1} < 5^2 \cdot 5^{2k+1} = 5^{2k+3}$$

因此 $a_{2k+4} - a_{2k+2} < 0$, 即当 $n = k + 1$ 时也成立; 由数学归纳法, $a_{2n+2} - a_{2n} < 0$; 又

$$a_{2n} < a_{2n-2} < \cdots < a_2 < a_0 = 0,$$

故 $a_{2n} < 0$, 结合 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = -\dfrac{1}{8}$ 得

$$-\frac{1}{8} \leqslant a_{2n} < 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

19. 设正实数 $a_0, a_1, \ldots, a_n$ 满足 $a_{k+1} - a_k \geqslant 1$ 对所有 $k = 0, 1, \ldots, n-1$ 成立。证明

$$1 + \left(1 + \frac{1}{a_0}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{a_n - a_0}\right) \leqslant \left(1 + \frac{1}{a_0}\right)\left(1 + \frac{1}{a_1}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{a_n}\right).$$

用归纳法对 n 证明。空积视作 1, 则 $n = 0$ 时显然成立。

假设对某个 n 结论成立, 考虑 $n+1$。不等式可以拆为两部分:

$$1 + \left(1 + \frac{1}{a_0}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{a_n - a_0}\right) \leqslant \left(1 + \frac{1}{a_0}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)$$

（这是归纳假设）, 以及

$$\frac{1}{a_0}\left(1 + \frac{1}{a_1 - a_0}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{a_n - a_0}\right) \cdot \frac{1}{a_{n+1} - a_0} \leqslant \left(1 + \frac{1}{a_0}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{a_n}\right) \cdot \frac{1}{a_{n+1}}. \qquad (*)$$

只需证明不等式 $(*)$。

对 n 再用归纳法。$n=0$ 时，需要验证

$$\frac{1}{a_0}\cdot\frac{1}{a_1-a_0}\leqslant\left(1+\frac{1}{a_0}\right)\cdot\frac{1}{a_1}.$$

两边乘以 $a_0a_1(a_1-a_0)$，化简为

$$a_1\leqslant(a_0+1)(a_1-a_0)\implies a_0\leqslant a_0a_1-a_0^2\implies 1\leqslant a_1-a_0,$$

成立。

归纳步骤只需证明

$$\left(1+\frac{1}{a_{n+1}-a_0}\right)\cdot\frac{a_{n+1}-a_0}{a_{n+2}-a_0}\leqslant\left(1+\frac{1}{a_{n+1}}\right)\cdot\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}.$$

两边乘以 $(a_{n+2}-a_0)a_{n+2}$，得到

$$(a_{n+1}-a_0+1)a_{n+2}\leqslant(a_{n+1}+1)(a_{n+2}-a_0)\implies a_0\leqslant a_0a_{n+2}-a_0a_{n+1}\implies 1\leqslant a_{n+2}-a_{n+1},$$

成立。因此归纳完成。

20. 用数学归纳法证明

$$\sum_{r=1}^{n}\left[r(r+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{r-1}\right]=16-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(n^2+5n+8),\quad n\geqslant 1,\ n\in\mathbb{N}.$$

先验证基础情况。

当 $n=1$ 时，

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{1}\left[r(r+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{r-1}\right]&=1\cdot 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{0}\\&=2,\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}16-\left(\frac{1}{2}\right)^{1-1}(1^2+5\cdot 1+8)&=16-(1)(14)\\&=2.\end{aligned}$$

因此结论对 $n=1$ 成立。

假设当 $n=k$ 时结论成立, 即

$$\sum_{r=1}^{k}\left[r(r+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{r-1}\right]=16-\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}(k^2+5k+8).$$

下面证明结论对 $n=k+1$ 成立。

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{k+1}\left[r(r+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{r-1}\right]&=\sum_{r=1}^{k}\left[r(r+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{r-1}\right]+(k+1)(k+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\\&=16-\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}(k^2+5k+8)+(k+1)(k+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\\&=16+\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left[(k+1)(k+2)-2(k^2+5k+8)\right]\\&=16+\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left[k^2+3k+2-2k^2-10k-16\right]\\&=16-\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left[k^2+7k+14\right]\\&=16-\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left[(k+1)^2+5(k+1)+8\right]\\&=16-\left(\frac{1}{2}\right)^{(k+1)-1}\left[(k+1)^2+5(k+1)+8\right].\end{aligned}$$

因此若结论对 $n=k$ 成立, 则对 $n=k+1$ 也成立。

由数学归纳法可知, 该等式对所有 $n\in\mathbb{N}$ 成立。

21. 对每个 $n\geqslant 1$, 令

$$a_n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n}{k!},\quad b_n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k k^n}{k!}.$$

证明 $a_n\cdot b_n$ 是整数。

我们用归纳法证明: 对所有 $n\geqslant 0,a_n/e$ 与 b_ne 都是整数。这里也包含 $n=0$ 的情形 (在定义中约定 $0^0=1$)。

由指数函数的幂级数展开可知

$$a_0=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=e,\quad b_0=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}=e^{-1},$$

因此结论对 $n=0$ 成立。

假设对某个 $n\geqslant 0$,$a_0,a_1,\ldots,a_n$ 都是 e 的整数倍,$b_0,b_1,\ldots,b_n$ 都是 e^{-1} 的整数倍。下面证明结论对 $n+1$ 也成立。

由二项式定理, 有

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)^{n+1}}{(k+1)!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)^n}{k!}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}k^m=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^m}{k!}\\&=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}a_m.\end{aligned}$$

同理,

$$\begin{aligned}b_{n+1}&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(k+1)^{n+1}}{(k+1)!}=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(k+1)^n}{k!}\\&=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}k^m=-\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kk^m}{k!}\\&=-\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}b_m.\end{aligned}$$

由归纳假设,a_m 是 e 的整数倍,b_m 是 e^{-1} 的整数倍, 而上式中系数均为整数, 因此 a_{n+1} 仍是 e 的整数倍,b_{n+1} 仍是 e^{-1} 的整数倍。

由归纳法可知, 对所有 $n\geqslant 0$,a_n/e 与 b_ne 均为整数, 从而

$$a_nb_n=\left(\frac{a_n}{e}\right)(b_ne)$$

是整数。

22. 试证对任意正整数 n,

$$\lfloor\sqrt{n}\rfloor+\sum_{k=1}^{n}\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor$$

必为偶数, 其中 $\lfloor x\rfloor$ 为高斯函数。

定义命题:

$$P_n : a_n = \left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor + \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \text{ 为偶数},$$

其中 $n \in \mathbb{Z}^+$。观察当 $n=1$ 时,

$$a_1 = \left\lfloor \sqrt{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{1} \right\rfloor = 1+1=2$$

为偶数, 即 P_1 成立。现假设 P_n 成立, 即当 $n=\ell$ 时,

$$a_\ell = \left\lfloor \sqrt{\ell} \right\rfloor + \sum_{k=1}^{\ell} \left\lfloor \frac{\ell}{k} \right\rfloor$$

为偶数。观察当 $n=\ell+1$ 时:

- 若 $\ell+1$ 为完全平方数, 则
$$\left\lfloor \sqrt{\ell+1} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{\ell} \right\rfloor + 1,$$
且
$$\sum_{k=1}^{\ell+1} \left\lfloor \frac{\ell+1}{k} \right\rfloor = \sum_{k=1}^{\ell} \left\lfloor \frac{\ell}{k} \right\rfloor + m,$$
其中 m 为 $\ell+1$ 的正因数个数（奇数）。于是
$$a_{\ell+1} = a_\ell + m + 1 = \text{偶} + \text{奇} + \text{奇} = \text{偶}.$$

- 若 $\ell+1$ 不是完全平方数, 则
$$\left\lfloor \sqrt{\ell+1} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{\ell} \right\rfloor,$$
且
$$\sum_{k=1}^{\ell+1} \left\lfloor \frac{\ell+1}{k} \right\rfloor = \sum_{k=1}^{\ell} \left\lfloor \frac{\ell}{k} \right\rfloor + m,$$
此时 m 为偶数, 于是
$$a_{\ell+1} = a_\ell + m = \text{偶} + \text{偶} = \text{偶}.$$

因此 $P_{\ell+1}$ 亦成立。即 $P_n \implies P_{n+1}$。由数学归纳法,P_n 对任意正整数 n 都成立。

23. 票箱中有甲、乙两人的选票分别为 m 张和 n 张且 $m>n$。令 $P_{m,n}$ 表示开票的过程中甲的选票会一路领先乙的选票的概率,

 (a) 计算 $P_{m,1}$ 和 $P_{m,2}$。

视甲得 1 票为向上走一步，乙得 1 票为向右走一步，则 $P_{m,n}$ 表示从原点 $O(0,0)$ 走格点至 $P(n,m)$ 但不经过 (a,a) 的概率。

m 个上、1 个右的排列数为 $\dfrac{(m+1)!}{m!}=m+1$，其中

$$\begin{cases}\text{开头为右的数列有 } 1 \text{ 个}\\ \text{开头为上右的数列也只有 } 1 \text{ 个}\end{cases}$$

因此符合条件的数列有 $m+1-2=m-1$ 个，故

$$P_{m,1}=\frac{m-1}{m+1}$$

m 个上、2 个右的排列数为 $\dfrac{(m+2)!}{m!2!}=\dfrac{(m+2)(m+1)}{2}$，其中

$$\begin{cases}\text{开头为右的数列有 } m+1 \text{ 个}\\ \text{开头为上右的数列有 } m \text{ 个}\\ \text{开头为上上右右的数列有 } 1 \text{ 个}\end{cases}$$

因此符合条件的数列有

$$\frac{(m+2)(m+1)}{2}-(m+1)-m-1=\frac{(m+1)(m-2)}{2}$$

所以

$$P_{m,2}=\frac{m-2}{m+2}$$

(b) 证明 $P_{m,n}=\dfrac{m}{m+n}P_{m-1,n}+\dfrac{n}{m+n}P_{m,n-1}$。

从 $(0,0)$ 至 (n,m) 的方法数等于从 $(0,0)$ 至 $(n-1,m)$ 的方法数加上从 $(0,0)$ 至 $(n,m-1)$ 的方法数，因此

$$P_{m,n}=\frac{\frac{(m+n-1)!}{(m-1)!n!}P_{m-1,n}+\frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}P_{m,n-1}}{\frac{(m+n)!}{m!n!}}=\frac{m}{m+n}P_{m-1,n}+\frac{n}{m+n}P_{m,n-1}$$

(c) 先猜测 $P_{m,n}$ 的答案，再利用 (b) 用归纳法证明你的猜测。

由 (a) 可猜

$$P_{m,n}=\frac{m-n}{m+n},\ m\geqslant n$$

令 $k=m+n$, 观察当 $k=2$ 时,

$$\begin{cases} m=2, n=0 \Rightarrow P_{2,0}=\frac{2-0}{2+0}=1 \\ m=n=1 \Rightarrow P_{1,1}=\frac{1-1}{1+1}=0 \end{cases}$$

显然猜测成立。现假设 $k=N$ 时猜测成立, 观察当 $k=N+1$ 时,

$$\begin{aligned} P_{m,n} &= \frac{m}{m+n} P_{m-1,n} + \frac{n}{m+n} P_{m,n-1} \\ &= \frac{m}{m+n} \cdot \frac{m-n-1}{m+n-1} + \frac{n}{m+n} \cdot \frac{m-n+1}{m+n-1} \\ &= \frac{(m-n)(m+n-1)}{(m+n)(m+n-1)} = \frac{m-n}{m+n} \end{aligned}$$

猜测亦成立, 故猜测对所有 $m,n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 且 $m \geqslant n$ 皆成立。

24. 用数学归纳法证明: 若 $n \geqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$, 则

$$\prod_{r=1}^{n} \cos\left(2^{r-1}x\right) = \frac{\sin\left(2^n x\right)}{2^n \sin x}.$$

先将乘积符号展开:

$$\prod_{r=1}^{n} \cos\left(2^{r-1}x\right) = \cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x \cdots \cos\left(2^{n-1}x\right).$$

先验证基础情况。

当 $n=1$ 时,

$$\begin{aligned} \text{L.H.S.} &= \prod_{r=1}^{1} \cos\left(2^{r-1}x\right) = \cos\left(2^0 x\right) = \cos x, \\ \text{R.H.S.} &= \frac{\sin\left(2^1 x\right)}{2^1 \sin x} = \frac{\sin 2x}{2\sin x} = \frac{2\sin x \cos x}{2\sin x} = \cos x. \end{aligned}$$

左右两边相等, 结论对 $n=1$ 成立。

假设当 $n=k$ 时结论成立, 即

$$\prod_{r=1}^{k} \cos\left(2^{r-1}x\right) = \frac{\sin\left(2^k x\right)}{2^k \sin x}.$$

考虑 $n=k+1$ 的情形,

$$\begin{aligned}
\prod_{r=1}^{k+1}\cos\left(2^{r-1}x\right) &= \left(\prod_{r=1}^{k}\cos\left(2^{r-1}x\right)\right)\cos\left(2^{k}x\right)\\
&= \frac{\sin\left(2^{k}x\right)}{2^{k}\sin x}\cos\left(2^{k}x\right)\\
&= \frac{\sin\left(2^{k}x\right)\cos\left(2^{k}x\right)}{2^{k}\sin x}\\
&= \frac{2\sin\left(2^{k}x\right)\cos\left(2^{k}x\right)}{2^{k+1}\sin x}\\
&= \frac{\sin\left(2^{k+1}x\right)}{2^{k+1}\sin x}.
\end{aligned}$$

因此若结论对 $n=k$ 成立, 则对 $n=k+1$ 也成立。

由于结论对 $n=1$ 成立, 根据数学归纳法, 结论对所有 $n\geqslant 1$, $n\in\mathbb{N}$ 成立。

25. 用数学归纳法证明

$$\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cdots+\cos[(2n-1)x]=\frac{\sin(2nx)}{2\sin x}.$$

先验证基础情况。

当 $n=1$ 时,

$$\begin{aligned}
\text{L.H.S.} &= \cos(2\times 1-1)x=\cos x,\\
\text{R.H.S.} &= \frac{\sin(2\times 1\,x)}{2\sin x}=\frac{\sin(2x)}{2\sin x}=\frac{2\sin x\cos x}{2\sin x}=\cos x.
\end{aligned}$$

因此结论对 $n=1$ 成立。

假设当 $n=k$ 时结论成立, 即

$$\sum_{r=1}^{k}\cos[(2r-1)x]=\frac{\sin(2kx)}{2\sin x}.$$

为进行归纳步骤, 先推导一个恒等式。由

$$\begin{aligned}
\sin(A+B) &= \sin A\cos B+\cos A\sin B,\\
\sin(A-B) &= \sin A\cos B-\cos A\sin B,
\end{aligned}$$

两式相加得

$$2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B).$$

取 $A = x,\ B = (2k+1)x$，则

$$\begin{aligned} 2\sin x\cos[(2k+1)x] &= \sin[(2k+2)x] + \sin[-2kx] \\ &= \sin[(2k+2)x] - \sin(2kx). \end{aligned}$$

现在考虑 $n = k+1$:

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{k+1}\cos[(2r-1)x] &= \left(\sum_{r=1}^{k}\cos[(2r-1)x]\right) + \cos[(2k+1)x] \\ &= \frac{\sin(2kx)}{2\sin x} + \cos[(2k+1)x] \\ &= \frac{\sin(2kx) + 2\sin x\cos[(2k+1)x]}{2\sin x} \\ &= \frac{\sin(2kx) + \sin[(2k+2)x] - \sin(2kx)}{2\sin x} \\ &= \frac{\sin[(2k+2)x]}{2\sin x} \\ &= \frac{\sin[2(k+1)x]}{2\sin x}. \end{aligned}$$

因此若结论对 $n = k$ 成立，则对 $n = k+1$ 也成立。

由于结论对 $n = 1$ 成立，根据数学归纳法，结论对所有 $n \in \mathbb{N}$ 成立。

26. 用数学归纳法证明:

$$\frac{d^n}{dx^n}[e^x\cos x] = 2^{\frac{n}{2}}e^x\cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right), \quad n \geqslant 1,\ n \in \mathbb{N}.$$

先验证基础情况。

当 $n = 1$ 时，

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[e^x\cos x] &= e^x\cos x + e^x(-\sin x) \\ &= e^x(\cos x - \sin x). \end{aligned}$$

而右边为

$$
\begin{aligned}
2^{\frac{1}{2}} e^x \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) &= \sqrt{2} e^x \left(\cos x \cos\frac{\pi}{4} - \sin x \sin\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \sqrt{2} e^x \left(\cos x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \sin x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&= e^x(\cos x - \sin x).
\end{aligned}
$$

左右两边相等, 结论对 $n=1$ 成立。

假设当 $n=k$ 时结论成立, 即

$$
\frac{d^k}{dx^k}[e^x \cos x] = 2^{\frac{k}{2}} e^x \cos\left(x+\frac{k\pi}{4}\right).
$$

考虑 $n=k+1$ 的情形,

$$
\begin{aligned}
\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}[e^x \cos x] &= \frac{d}{dx}\left[2^{\frac{k}{2}} e^x \cos\left(x+\frac{k\pi}{4}\right)\right] \\
&= 2^{\frac{k}{2}}\left(e^x \cos\left(x+\frac{k\pi}{4}\right) - e^x \sin\left(x+\frac{k\pi}{4}\right)\right) \\
&= 2^{\frac{k}{2}} e^x \left[\cos\left(x+\frac{k\pi}{4}\right) - \sin\left(x+\frac{k\pi}{4}\right)\right].
\end{aligned}
$$

利用恒等式

$$
\cos A - \sin A = \sqrt{2}\cos\left(A+\frac{\pi}{4}\right),
$$

可得

$$
\begin{aligned}
\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}[e^x \cos x] &= 2^{\frac{k}{2}} e^x \cdot \sqrt{2}\cos\left(x+\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) \\
&= 2^{\frac{k+1}{2}} e^x \cos\left(x+\frac{(k+1)\pi}{4}\right).
\end{aligned}
$$

因此若结论对 $n=k$ 成立, 则对 $n=k+1$ 也成立。

由于结论对 $n=1$ 成立, 根据数学归纳法, 结论对所有 $n \geqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$ 成立。

27. 设 n 为正整数。计算

$$
\int_0^{\pi/2} \frac{\sin[(2n+1)x]}{\sin x}\, dx
$$

令

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin[(2n+1)x]}{\sin x}\,dx$$

当 $n = 1$ 时,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 3x}{\sin x}\,dx \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{3\sin x - 4\sin^3 x}{\sin x}\,dx \\
&= \int_0^{\pi/2} (3 - 4\sin^2 x)\,dx \\
&= \int_0^{\pi/2} [1 + 2\cos(2x)]\,dx \\
&= [x + \sin(2x)]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

假设结论对 $n-1$ 成立, 考虑 n 的情况。利用正弦的加角公式,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,dx &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2nx\cos x + \cos 2nx\sin x}{\sin x}\,dx \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2nx\cos x}{\sin x}\,dx + \int_0^{\pi/2} \cos 2nx\,dx \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin[(2n-1)x]\cos^2 x}{\sin x}\,dx + \int_0^{\pi/2} \cos x\cos[(2n-1)x]\,dx \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin[(2n-1)x](1-\sin^2 x)}{\sin x}\,dx + \int_0^{\pi/2} \cos x\cos[(2n-1)x]\,dx \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin[(2n-1)x]}{\sin x}\,dx - \int_0^{\pi/2} \sin x\sin[(2n-1)x]\,dx + \int_0^{\pi/2} \cos x\cos[(2n-1)x] \\
&= I_{n-1} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (\cos[(2n-2)x] - \cos 2nx)\,dx + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (\cos[(2n-2)x] + \cos 2nx)\,d \\
&= I_{n-1} + \int_0^{\pi/2} \cos(2nx)\,dx \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

由归纳法得

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin[(2n+1)x]}{\sin x}\,dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{对所有正整数 } n \text{ 成立。}$$

28. 已知矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

用数学归纳法证明

$$\mathbf{A}^n = n\mathbf{A} - (n-1)\mathbf{I}, \quad n \geqslant 1,\ n \in \mathbb{N}.$$

先验证基础情况。

当 $n = 1$ 时,

$$\mathbf{A}^1 = 1 \cdot \mathbf{A} - (1-1)\mathbf{I} = \mathbf{A},$$

结论成立。

假设当 $n = k$ 时结论成立, 即

$$\mathbf{A}^k = k\mathbf{A} - (k-1)\mathbf{I}.$$

则

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{k+1} &= \mathbf{A}^k\mathbf{A} \\ &= [k\mathbf{A} - (k-1)\mathbf{I}]\mathbf{A} \\ &= k\mathbf{A}^2 - (k-1)\mathbf{A}. \end{aligned}$$

为继续化简, 先将 $\mathbf{A}^2$ 表示成 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{I}$ 的线性组合。设

$$\mathbf{A}^2 = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{I}.$$

则

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

即

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + \mu & 0 \\ 2\lambda & \lambda + \mu \end{pmatrix}.$$

比较对应元素得

$$\begin{gathered} 2\lambda = 4 \Rightarrow \lambda = 2, \\ \lambda + \mu = 1 \Rightarrow \mu = -1. \end{gathered}$$

因此

$$\mathbf{A}^2 = 2\mathbf{A} - \mathbf{I}.$$

代回得

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{k+1} &= k(2\mathbf{A}-\mathbf{I})-(k-1)\mathbf{A}\\ &= 2k\mathbf{A}-k\mathbf{I}-k\mathbf{A}+\mathbf{A}\\ &= (k+1)\mathbf{A}-k\mathbf{I}\\ &= (k+1)\mathbf{A}-[(k+1)-1]\mathbf{I}.\end{aligned}$$

因此若结论对 $n=k$ 成立，则对 $n=k+1$ 也成立。

由于结论对 $n=1$ 成立，根据数学归纳法，结论对所有 $n\geqslant 1$, $n\in\mathbb{N}$ 成立。

29. 设 V_n 为 n 阶范德蒙行列式，定义如下：

$$V_n=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

试以数学归纳法证明

$$V_n=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i).$$

定义命题

$$P_n: V_n=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)\quad ,n\in\mathbb{N}$$

基础步骤：显然 P_1 成立，因 $V=1=|1|=1$，且显然 P_2 亦成立，因为

$$V_2=\begin{vmatrix}1 & x_1\\ 1 & x_2\end{vmatrix}=x_2-x_1$$

归纳步骤：假设命题 P_k 成立，即

$$V_k=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{k-1}\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{k-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & x_k & x_k^2 & \dots & x_k^{k-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant k}(x_j-x_i)$$

观察 V_{k+1}, 将 x_1 写成变量 x, 即

$$V_{k+1}=\begin{vmatrix}1 & x & x^2 & \ldots & x^k\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^k\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & x_k & x_k^2 & \ldots & x_k^k\\ 1 & x_{k+1} & x_{k+1}^2 & \ldots & x_{k+1}^k\end{vmatrix}$$

V_{k+1} 按 R_1 展开后是次数不大于 k 的多项式, 设 $f(x)=V_{k+1}$, 发现当 $x=x_2,x_3,\cdots,x_{k+1}$, 行列式 V_{k+1} 有相同的两行, 故

$$f(x_2)=f(x_3)=\ \ldots\ =f(x_{k+1})=0$$

故 $f(x)$ 是一个次数为 k 且以 $x_2,x_3,\cdot,x_{k+1}$ 为根的多项式, 由余氏定理,

$$f(x)=C(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_{k+1}) \tag{1}$$

且 C 是一常数。又 V_{k+1} 按 R_1 展开式中 x^k 的系数为

$$\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{k-1}\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{k-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & x_k & x_k^2 & \ldots & x_k^{k-1}\end{vmatrix}$$

由归纳假设知此系数为

$$\prod_{2\leqslant i<j\leqslant k+1}(x_j-x_i)$$

故由 (1) 知

$$C=\prod_{2\leqslant i<j\leqslant k+1}(x_j-x_i)$$

即

$$f(x)=(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_{k+1})\prod_{2\leqslant i<j\leqslant k+1}(x_j-x_i)$$

将 x 置换回 x_1, 即得命题 P_{k+1} 成立, 此时蕴含 $P_k\implies P_{k+1}$ 成立。

由数学归纳法, 命题 P_n 对所有正整数 n 皆成立。验证是 x_j-x_i 还是 x_i-x_j

30. 试证莱布尼茨公式: 设函数 f,g 定义在开区间 I 上,n 为正整数,$x\in I$ 为 I 内一点使得 f,g

均可导 n 次, 则有

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x),$$

其中 (n) 表示导数的阶数。

定义命题

$$P_n : (f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x) \quad ,n \in \mathbb{N}$$

基础步骤: 观察当 $n = 1$ 时, 由乘积求导法则, 左式为

$$(f(x)g(x))' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

而右式为

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} f^{(k)}(x)g^{(1-k)}(x) = \binom{1}{0} f^{(0)}(x)g^{(1)}(x) + \binom{1}{1} f^{(1)}(x)g^{(0)}(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x),$$

此时左式等于右式, 即 P_1 成立。

归纳步骤: 设 $n \in \mathbb{N}$, 假设归纳假设 P_n 成立, 有

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$$

欲证

$$(f(x)g(x))^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x)$$

由归纳假设,

$$\begin{aligned}
(f(x)g(x))^{(n+1)} &= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x) \right)' \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x) \right)' \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k+1)}(x)g^{(n-k)}(x) + f^{(k)}(x)g^{(n-k+1)}(x) \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)}(x)g^{(n-k)}(x) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n-k+1)}(x)
\end{aligned}$$

将第一个求和中 $k=n$ 的项分离, 第二个求和中 $k=0$ 的项分离, 得

$$\begin{aligned}(f(x)g(x))^{(n+1)} &= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}f^{(k+1)}(x)g^{(n-k)}(x)+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)g^{(n-k+1)}(x)\\ &\quad+\binom{n}{n}f^{(n+1)}(x)g^{(0)}(x)+\binom{n}{0}f^{(0)}(x)g^{(n+1)}(x)\\ &=\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k-1}f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x)+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)g^{(n-k+1)}(x)\\ &\quad+\binom{n}{n}f^{(n+1)}(x)g^{(0)}(x)+\binom{n}{0}f^{(0)}(x)g^{(n+1)}(x)\end{aligned}$$

由帕斯卡恒等式,

$$\begin{aligned}&(f(x)g(x))^{(n+1)}\\ &=\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x)+\binom{n}{0}f^{(0)}(x)g^{(n+1)}(x)+\binom{n}{n}f^{(n+1)}(x)g^{(0)}(x)\\ &=\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x)+\binom{n+1}{0}f(x)g^{(n+1)}(x)+\binom{n+1}{n+1}f^{(n+1)}(x)g(x)\\ &=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x)\end{aligned}$$

即命题 P_{n+1} 成立, 此时蕴含 $P_n \implies P_{n+1}$ 成立。

由数学归纳法, 命题 P_n 对所有正整数 n 皆成立。

31. 设 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ 为一无限实数数列, 且满足

$$\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}\geqslant a_n, \forall n\in\mathbb{N}$$

证明

$$\frac{a_0+a_{n+1}}{2}\geqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}, \forall n\in\mathbb{N}$$

解法一

先证明:

$$a_0+na_{n+1}\geqslant(n+1)a_n \tag{*}$$

当 $n=1$ 时, $a_0+a_2 \geqslant 2a_1$, 显然 (*) 成立; 假设 $n=k$ 时 (*) 成立, 即

$$a_0+ka_{k+1} \geqslant (k+1)a_k \tag{1}$$

又

$$a_{k+2}+a_k \geqslant 2a_{k+1} \tag{2}$$

由 (1), (2) 得

$$a_0+(k+1)a_{k+2} \geqslant (k+1)(a_{k+2}+a_k)-ka_{k+1} \geqslant 2(k+1)a_{k+1}-ka_{k+1}=(k+2)a_{k+1}$$

即 $n=k+1$ 时 (*) 也成立, 由数学归纳法知 (*) 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均成立。

现证:

$$n(a_n+a_{n+1}) \geqslant 2\sum_{i=1}^{n} a_i \tag{**}$$

当 $n=1$ 时, $a_0+a_2 \geqslant 2a_1$,(**) 成立; 假设 $n=k$ 时 (**) 成立, 即

$$k(a_0+a_{k+1}) \geqslant 2\sum_{i=1}^{k} a_i \tag{3}$$

由 $(*)$ 知

$$a_0+(k+1)a_{k+2} \geqslant (k+2)a_{k+1} \tag{4}$$

由 (3), (4) 得

$$(k+1)(a_0+a_{k+2}) \geqslant (k+2)a_{k+1}+2\sum_{i=1}^{k} a_i - ka_{k+1} = 2\sum_{i=1}^{k+1} a_i$$

即 $n=k+1$ 时 (**) 也成立, 由数学归纳法知 (**) 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均成立即

$$\frac{a_0+a_{n+1}}{2} \geqslant \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

证毕。

解法二

设 $a_{n+1}-a_n=d_n$, 由题意可知

$$a_{n+1}-a_n \geqslant a_n-a_{n-1} \Rightarrow d_n \geqslant d_{n-1}$$

且 $a_n = a_0 + d_1 + d_2 + \cdots + d_{n-1}$, 欲证等价于

$$\begin{aligned}
&\frac{a_0 + a_{n+1}}{2} \geqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \\
\iff & n(a_0 + a_{n+1}) \geqslant 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \\
\iff & na_0 + n(a_0 + d_0 + d_1 + \cdots + d_{n-1}) \\
& \geqslant 2[(a_0 + d_0) + (a_0 + d_0 + d_1) + \cdots + (a_0 + d_0 + d_1 + \cdots + d_{n-1})] \\
\iff & nd_n \geqslant nd_0 + (n-2)d_1 + (n-4)d_2 + (n-6)d_3 + \cdots + (4-n)d_{n-2} + (2-n)d_{n-1}
\end{aligned}$$

当 n 为奇数, 即证

$$n(d_0 - d_n) + (n-2)(d_1 - d_{n-1}) + (n-4)(d_2 - d_{n-2}) + \cdots + (d_{\frac{n-1}{2}} - d_{\frac{n+1}{2}}) \leqslant 0 \tag{1}$$

而 $d_n \geqslant d_{n-1}$, 则

$$d_0 - d_n \leqslant 0, d_1 - d_{n-1} \leqslant 0, \cdots, d_{\frac{n-1}{2}} - d_{\frac{n+1}{2}} \leqslant 0$$

此时 (1) 显然成立。

当 n 为偶数, 即证

$$n(d_0 - d_n) + (n-2)(d_1 - d_{n-1}) + (n-4)(d_2 - d_{n-2}) + \cdots + 2(d_{\frac{n-2}{2}} - d_{\frac{n+2}{2}}) \leqslant 0 \tag{2}$$

上式中 $d_{\frac{n}{2}}$ 这一项没有, 而 $d_n \geqslant d_{n-1}$ 则

$$d_0 - d_n \leqslant 0, d_1 - d_{n-1} \leqslant 0, \cdots, d_{\frac{n-2}{2}} - d_{\frac{n+2}{2}} \leqslant 0$$

此时 (2) 也成立。

故得证

$$\frac{a_0 + a_{n+1}}{2} \geqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

32. 已知多项式 $P(x) = x^2 + 2019x + 1$, 试证对任意正整数 n, 函数 $P^{(n)}(x) = 0$ 至少有一个实数根, 其中 $P^{(n)}(x)$ 表示 P 自身复合 n 次。

定义命题: 对任意正整数 $n, P^{(n)}(x)$ 有一个负实根 $-c_n$, 且 $0 < c_n < 2$。

当 $n = 1$ 时,

$$P^{(1)}(x) = P(x) = x^2 + 2019x + 1$$

其判别式为 $\Delta_1 = 2019^2 - 4 > 0$, 所以 $P^{(1)}(x)$ 有两个实数根, 设为 $-b_1, -c_1$, 其中 $c_1 \leqslant b_1$,

由韦达定理,

$$b_1 + c_1 = 2019, \quad b_1 c_1 = 1$$

因此 b_1, c_1 都为正数, 且因为乘积是 1, 可得 $c_1 \leqslant 1 < 2$, 所以 $-c_1$ 是一个负实根, 满足 $0 < c_1 < 2$, 故命题在 $n = 1$ 时成立。

假设命题在 $n = k$ 时成立, 即 $P^{(k)}(x)$ 有一负实根 $-c_k$, 其中 $0 < c_k < 2$, 即

$$P^{(k)}(x) = (x + c_k) Q_k(x)$$

其中 $Q_k(x)$ 为某多项式, 则有

$$P^{(k+1)}(x) = P^{(k)}(P(x)) = (P(x) + c_k) Q_k(P(x))$$

其中

$$P(x) + c_k = x^2 + 2019x + 1 + c_k$$

的判别式为

$$\Delta_{k+1} = 2019^2 - 4(1 + c_k) > 0$$

即 $P(x) + c_k$ 有两个实根, 设为 $-b_{k+1}, -c_{k+1}$, 其中 $c_{k+1} \leqslant b_{k+1}$, 由韦达定理,

$$b_{k+1} + c_{k+1} = 2019, \quad b_{k+1} c_{k+1} = 1 + c_k > 0$$

可知 b_{k+1}, c_{k+1} 都为正数, 且

$$c_{k+1} \leqslant \sqrt{1 + c_k} < \sqrt{3} < 2$$

所以 $-c_{k+1}$ 是 $P^{(k+1)}(x)$ 的负实根, 满足 $0 < c_{k+1} < 2$, 故命题在 $n = k + 1$ 时也成立。

由数学归纳法知, 对任意正整数 $n, P^{(n)}(x)$ 至少有一个实数根。

行列式

1. 求下列行列式的立方根:

$$\begin{vmatrix} -\dfrac{2019^2}{\sqrt[5]{80}} & \dfrac{2020^2}{\sqrt[5]{80^2}} & -\dfrac{2021^2}{\sqrt[5]{80^3}} \\ \dfrac{2022^2}{\sqrt[5]{80^4}} & -\dfrac{2023^2}{\sqrt[5]{80^5}} & \dfrac{2024^2}{\sqrt[5]{80^6}} \\ -\dfrac{2025^2}{\sqrt[5]{80^7}} & \dfrac{2026^2}{\sqrt[5]{80^8}} & -\dfrac{2027^2}{\sqrt[5]{80^9}} \end{vmatrix}$$

设 $a = 2019, r = -\dfrac{1}{\sqrt[5]{80}}$, 原行列式为

$$D = \begin{vmatrix} a^2r & (a+1)^2r^2 & (a+2)^2r^3 \\ (a+3)^2r^4 & (a+4)^2r^5 & (a+5)^2r^6 \\ (a+6)^2r^7 & (a+7)^2r^8 & (a+8)^2r^9 \end{vmatrix}$$

进行列变换 $C_2 \to C_2 - C_1, C_3 \to C_3 - C_2$,

$$D = \begin{vmatrix} a^2r & (2a+1)r^2 & (2a+3)r^3 \\ (a+3)^2r^4 & (2a+7)r^5 & (2a+9)r^6 \\ (a+6)^2r^7 & (2a+13)r^8 & (2a+15)r^9 \end{vmatrix}$$

进行列变换 $C_3 \to C_3 - C_2$,

$$D = \begin{vmatrix} a^2r & (2a+1)r^2 & 2r^3 \\ (a+3)^2r^4 & (2a+7)r^5 & 2r^6 \\ (a+6)^2r^7 & (2a+13)r^8 & 2r^9 \end{vmatrix}$$

进行行变换 $R_3 \to R_3 - r^3R_2, R_2 \to R_2 - r^3R_1$

$$D = \begin{vmatrix} a^2r & (2a+1)r^2 & 2r^3 \\ (6a+9)r^4 & 6r^5 & 0 \\ (6a+27)r^7 & 6r^8 & 0 \end{vmatrix}$$

进行行变换 $R_3 \to R_3 - r^3R_2$,

$$D = \begin{vmatrix} a^2r & (2a+1)r^2 & 2r^3 \\ (6a+9)r^4 & 6r^5 & 0 \\ 18r^7 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

进行列变换 $C_1 \leftrightarrow C_3$,

$$D = -\begin{vmatrix} 2r^3 & (2a+1)r^2 & a^2r \\ 0 & 6r^5 & (6a+9)r^4 \\ 0 & 0 & 18r^7 \end{vmatrix} = -(2r^3)(6r^5)(18r^7) = -216r^{15} = \frac{216}{80^3}$$

故原行列式的立方根为 $\dfrac{3}{40}$

2. 若 $a+b+c=x+y+z=0$, 求行列式

$$\begin{vmatrix} xa & yb & zc \\ yc & za & xb \\ zb & xc & ya \end{vmatrix}$$

展开行列式得

$$\begin{vmatrix} xa & yb & zc \\ yc & za & xb \\ zb & xc & ya \end{vmatrix} = xyz(a^3+b^3+c^3) + abc(x^3+y^3+z^3)$$

由于

$$a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = 0$$

$$x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) = 0$$

故

$$\begin{vmatrix} xa & yb & zc \\ yc & za & xb \\ zb & xc & ya \end{vmatrix} = xyz(3abc) - abc(3xyz) = 0$$

3. 计算行列式

$$\begin{vmatrix} \log a & \log b & \log \frac{1}{ab} \\ \log b & \log c & \log \frac{1}{bc} \\ \log c & \log a & \log \frac{1}{ca} \end{vmatrix}.$$

将乘积写成和:

$$\begin{vmatrix} \log a & \log b & -\log a - \log b \\ \log b & \log c & -\log b - \log c \\ \log c & \log a & -\log c - \log a \end{vmatrix}.$$

对第三列进行变换 $C_3 \leftarrow C_3 - C_1 - C_2$, 得到

$$\begin{vmatrix} \log a & \log b & 0 \\ \log b & \log c & 0 \\ \log c & \log a & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

因此该行列式的值为 0。

4. 若 m 为正整数, 求行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ {}^{m}C_1 & {}^{m+1}C_1 & {}^{m+2}C_1 \\ {}^{m}C_2 & {}^{m+1}C_2 & {}^{m+2}C_2 \end{vmatrix}$$

令

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ {}^{m}C_1 & {}^{m+1}C_1 & {}^{m+2}C_1 \\ {}^{m}C_2 & {}^{m+1}C_2 & {}^{m+2}C_2 \end{vmatrix}$$

由性质 ${}^{n-1}C_{k-1} + {}^{n-1}C_k = {}^{n}C_k$, 有

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ {}^{m}C_1 & {}^{m+1}C_1 & {}^{m+1}C_0 + {}^{m+1}C_1 \\ {}^{m}C_2 & {}^{m+1}C_2 & {}^{m+1}C_1 + {}^{m+1}C_2 \end{vmatrix}$$

进行列变换 $C_3 \rightarrow C_3 - C_2$,

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ {}^{m}C_1 & {}^{m+1}C_1 & {}^{m+1}C_0 \\ {}^{m}C_2 & {}^{m+1}C_2 & {}^{m+1}C_1 \end{vmatrix}$$

再由性质 ${}^{n-1}C_{k-1} + {}^{n-1}C_k = {}^{n}C_k$,

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ {}^{m}C_1 & {}^{m}C_0 + {}^{m}C_1 & {}^{m+1}C_0 \\ {}^{m}C_2 & {}^{m}C_1 + {}^{m}C_2 & {}^{m+1}C_1 \end{vmatrix}$$

进行列变换 $C_2 \to C_2 - C_1$,

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ {}^{m}C_1 & {}^{m}C_0 & {}^{m+1}C_0 \\ {}^{m}C_2 & {}^{m}C_1 & {}^{m+1}C_1 \end{vmatrix}$$

按第一行展开得

$$D = {}^{m}C_0{}^{m+1}C_1 - {}^{m}C_1{}^{m+1}C_0 = 1 \cdot (m+1) - m \cdot 1 = 1$$

5. 已知 $\triangle ABC$, 求

$$\begin{vmatrix} \tan A & 1 & 1 \\ 1 & \tan B & 1 \\ 1 & 1 & \tan C \end{vmatrix}.$$

展开行列式:

$$\begin{vmatrix} \tan A & 1 & 1 \\ 1 & \tan B & 1 \\ 1 & 1 & \tan C \end{vmatrix} = \tan A \tan B \tan C - (\tan A + \tan B + \tan C) + 2.$$

由于 $A + B + C = \pi$, 有

$$\tan(A+B) = \tan(\pi - C) = -\tan C,$$

又

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}.$$

因此

$$\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = -\tan C \implies \tan A + \tan B = -\tan C + \tan A \tan B \tan C \implies \tan A + \tan B + \tan C =$$

将其代入行列式表达式, 得到

$$\begin{vmatrix} \tan A & 1 & 1 \\ 1 & \tan B & 1 \\ 1 & 1 & \tan C \end{vmatrix} = \tan A \tan B \tan C - (\tan A + \tan B + \tan C) + 2 = 2.$$

6. 计算行列式

$$\begin{vmatrix} \tan 40^\circ & \tan 10^\circ & \tan 50^\circ \\ \tan 20^\circ & \tan 50^\circ & \tan 70^\circ \\ \tan 10^\circ & \tan 70^\circ & \tan 80^\circ \end{vmatrix}$$

令

$$D = \begin{vmatrix} \tan 40^\circ & \tan 10^\circ & \tan 50^\circ \\ \tan 20^\circ & \tan 50^\circ & \tan 70^\circ \\ \tan 10^\circ & \tan 70^\circ & \tan 80^\circ \end{vmatrix}$$

进行列变换 $C_3 \to -C_1 - C_2 + C_3$,

$$D = \begin{vmatrix} \tan 40^\circ & \tan 10^\circ & -\tan 10^\circ - \tan 40^\circ + \tan 50^\circ \\ \tan 20^\circ & \tan 50^\circ & -\tan 20^\circ - \tan 50^\circ + \tan 70^\circ \\ \tan 10^\circ & \tan 70^\circ & -\tan 10^\circ - \tan 70^\circ + \tan 80^\circ \end{vmatrix}$$

由

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

可得

$$\tan A \tan B \tan(A+B) = \tan(A+B) - \tan A - \tan B$$

且若 $A + B = 90^\circ$, 则

$$\tan A \tan B = 1$$

因此

$$D = \begin{vmatrix} \tan 40^\circ & \tan 10^\circ & \tan 10^\circ \cdot \tan 40^\circ \cdot \tan 50^\circ \\ \tan 20^\circ & \tan 50^\circ & \tan 20^\circ \cdot \tan 50^\circ \cdot \tan 70^\circ \\ \tan 10^\circ & \tan 70^\circ & \tan 10^\circ \cdot \tan 70^\circ \cdot \tan 80^\circ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tan 40^\circ & \tan 10^\circ & \tan 10^\circ \\ \tan 20^\circ & \tan 50^\circ & \tan 50^\circ \\ \tan 10^\circ & \tan 70^\circ & \tan 70^\circ \end{vmatrix} = 0$$

7. 已知 $\triangle ABC$, 计算行列式

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & \cos A \\ b & b^2 & \cos B \\ c & c^2 & \cos C \end{vmatrix}.$$

利用余弦定理 $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ 等, 代入行列式:

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ b & b^2 & \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \\ c & c^2 & \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \end{vmatrix}.$$

提取公因子 $\frac{1}{2abc}$:

$$= \frac{1}{2abc} \begin{vmatrix} a & a^2 & a(b^2+c^2-a^2) \\ b & b^2 & b(a^2+c^2-b^2) \\ c & c^2 & c(a^2+b^2-c^2) \end{vmatrix}.$$

提取 a, b, c:

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & a & b^2+c^2-a^2 \\ 1 & b & a^2+c^2-b^2 \\ 1 & c & a^2+b^2-c^2 \end{vmatrix}.$$

行变换:

$$R_2 \leftarrow R_2 - R_1, \quad R_3 \leftarrow R_3 - R_1 \implies \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & a & b^2+c^2-a^2 \\ 0 & b-a & 2a^2-2b^2 \\ 0 & c-a & 2a^2-2c^2 \end{vmatrix}.$$

按第一列展开:

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} b-a & 2a^2-2b^2 \\ c-a & 2a^2-2c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & (a-b)(a+b) \\ c-a & (a-c)(a+c) \end{vmatrix}.$$

提取公因子 $(b-a)(c-a)$:

$$= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & -(a+b) \\ 1 & -(a+c) \end{vmatrix} = -(b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a+b \\ 1 & a+c \end{vmatrix}.$$

计算 2×2 行列式:

$$= -(b-a)(c-a)((a+c)-(a+b)) = -(b-a)(c-a)(c-b) = (a-b)(a-c)(b-c).$$

最终结果:

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & \cos A \\ b & b^2 & \cos B \\ c & c^2 & \cos C \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(b-c).$$

8. 在坐标平面上，设 $\triangle ABC$ 经二阶方阵 $M=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 作线性变换后成 $\triangle A'B'C'$。若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\triangle$, $\triangle A'B'C'$ 的面积为 $\triangle'$, 试证

$$\triangle' = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \triangle$$

设 $A(x_a, y_a), B(x_b, y_b), C(x_c, y_c)$ 经变换后为

$$A'(ax_a+by_a,\ cx_a+dy_a), B'(ax_b+by_b,\ cx_b+dy_b), C'(ax_c+by_c,\ cx_c+dy_c)$$

则

$$\Delta' = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} ax_a+by_a & cx_a+dy_a & 1 \\ ax_b+by_b & cx_b+dy_b & 1 \\ ax_c+by_c & cx_c+dy_c & 1 \end{vmatrix}$$

变为

$$\Delta' = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} ax_a & dy_a & 1 \\ ax_b & dy_b & 1 \\ ax_c & dy_c & 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} by_a & cx_a & 1 \\ by_b & cx_b & 1 \\ by_c & cx_c & 1 \end{vmatrix} + 0 + 0 = \frac{1}{2}(ad-bc)\begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \triangle$$

9. 若 $a^2+b^2+c^2=47$, 求

$$\begin{vmatrix} a^2-1 & ab & ca \\ ab & b^2-1 & bc \\ ca & bc & c^2-1 \end{vmatrix}$$

令

$$D = \begin{vmatrix} a^2-1 & ab & ca \\ ab & b^2-1 & bc \\ ca & bc & c^2-1 \end{vmatrix}$$

进行行变换 $R_1 \to aR_1, R_2 \to bR_2, R_3 \to cR_3$,

$$D = \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} a(a^2-1) & a^2b & ca^2 \\ ab^2 & b(b^2-1) & b^2c \\ c^2a & bc^2 & c(c^2-1) \end{vmatrix}$$

进行列变换 $C_1 \to \dfrac{C_1}{a}, C_2 \to \dfrac{C_2}{b}, C_3 \to \dfrac{C_3}{c}$,

$$D = \begin{vmatrix} a^2-1 & a^2 & a^2 \\ b^2 & b^2-1 & b^2 \\ c^2 & c^2 & c^2-1 \end{vmatrix}$$

进行行变换 $R_1 \to R_1 + R_2 + R_3$,

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2-1 & a^2+b^2+c^2-1 & a^2+b^2+c^2-1 \\ b^2 & b^2-1 & b^2 \\ c^2 & c^2 & c^2-1 \end{vmatrix} \\ &= (a^2+b^2+c^2-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b^2 & b^2-1 & b^2 \\ c^2 & c^2 & c^2-1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

进行列变换 $C_2 \to -C_1 + C_2, C_3 \to -C_1 + C_3$,

$$D = (a^2+b^2+c^2-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b^2 & -1 & 0 \\ c^2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (47-1) \cdot 1 = 46$$

10. 已知

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ r & q & p \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5,$$

求

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix}.$$

先对行和列进行初等变换:

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} b+c & c+a & b-c \\ q+r & r+p & q-r \\ y+z & z+x & y-z \end{vmatrix} \\
&= 2\begin{vmatrix} b & c+a & b-c \\ q & r+p & q-r \\ y & z+x & y-z \end{vmatrix} \\
&= 2\begin{vmatrix} b & c+a & -c \\ q & r+p & -r \\ y & z+x & -z \end{vmatrix} \\
&= 2\begin{vmatrix} b & a & -c \\ q & p & -r \\ y & x & -z \end{vmatrix} \\
&= 2\begin{vmatrix} b & a & c \\ q & p & r \\ y & x & z \end{vmatrix} \\
&= 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} \\
&= 2 \times 5 = 10.
\end{aligned}
$$

因此, 该行列式的值为

$$\boxed{10}.$$

11. 计算行列式

$$\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix}.$$

先对第三列进行变换:

$$C_3 \leftarrow C_3 - C_2 \implies \begin{vmatrix} b+c & a & -b \\ b & c+a & -c \\ c & c & a \end{vmatrix}.$$

对第一行和第二行进行行变换:

$$R_1 \leftarrow R_1 + R_2, \quad R_2 \leftarrow R_2 + R_3 \implies \begin{vmatrix} 2b & a & -b \\ 2b & c+a & -c \\ 2c & c & a \end{vmatrix}.$$

提取公因子 2:

$$= 2\begin{vmatrix} b & a & -b \\ b & c+a & -c \\ c & c & a \end{vmatrix}.$$

对第三列进行列变换:

$$C_3 \leftarrow C_3 + C_1 \implies 2\begin{vmatrix} b & a & 0 \\ b & c+a & 0 \\ c & c & a+c \end{vmatrix}.$$

对第二行进行行变换:

$$R_2 \leftarrow R_2 - R_1 \implies 2\begin{vmatrix} b & a & 0 \\ 0 & c & 0 \\ c & c & a+c \end{vmatrix}.$$

展开计算:

$$2\big(b(c(a+c)) - a(0) + 0\big) = 2(abc + bc^2).$$

最后整理得到:

$$\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} = 4abc.$$

12. 证明

$$\begin{vmatrix} a^2 & b^2+c^2 & bc \\ b^2 & c^2+a^2 & ca \\ c^2 & a^2+b^2 & ab \end{vmatrix} = -(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$$

令

$$D = \begin{vmatrix} a^2 & b^2+c^2 & bc \\ b^2 & c^2+a^2 & ca \\ c^2 & a^2+b^2 & ab \end{vmatrix}$$

进行行变换 $R_2 \to R_2 - R_1$，$R_3 \to R_3 - R_1$，

$$D = \begin{vmatrix} a^2 & b^2+c^2 & bc \\ b^2-a^2 & a^2-b^2 & ca-bc \\ c^2-a^2 & a^2-c^2 & ab-bc \end{vmatrix}$$

化简得

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a^2 & b^2+c^2 & bc \\ (b+a)(b-a) & (a+b)(a-b) & c(a-b) \\ (c+a)(c-a) & (a+c)(a-c) & b(a-c) \end{vmatrix} \\ &= (a-b)(a-c)\begin{vmatrix} a^2 & b^2+c^2 & bc \\ -a-b & a+b & c \\ -a-c & a+c & b \end{vmatrix} \end{aligned}$$

进行列变换 $C_1 \to C_1 + C_2$，

$$D = (a-b)(a-c)\begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2 & b^2+c^2 & bc \\ 0 & a+b & c \\ 0 & a+c & b \end{vmatrix}$$

按第一列展开得

$$\begin{aligned} D &= (a-b)(a-c)(a^2+b^2+c^2)(ab+b^2-ac-c^2) \\ &= (a-b)(a-c)(a^2+b^2+c^2)(a(b-c)+(b+c)(b-c)) \\ &= -(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \end{aligned}$$

13. 证明

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3$$

令

$$D = \begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

进行列变换 $C_2 \to C_2 - C_1,\ C_3 \to C_3 - C_1$, 得

$$D = \begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2-(b+c)^2 & a^2-(b+c)^2 \\ b^2 & (c+a)^2-b^2 & 0 \\ c^2 & 0 & (a+b)^2-c^2 \end{vmatrix}$$

化简得

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} (b+c)^2 & (a+b+c)(a-b-c) & (a+b+c)(a-b-c) \\ b^2 & (a+b+c)(a-b+c) & 0 \\ c^2 & 0 & (a+b+c)(a+b-c) \end{vmatrix} \\ &= (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} (b+c)^2 & a-b-c & a-b-c \\ b^2 & a-b+c & 0 \\ c^2 & 0 & a+b-c \end{vmatrix} \end{aligned}$$

进行行变换 $R_1 \to R_1 - R_2 - R_3$, 得

$$D = (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} 2bc & -2c & -2b \\ b^2 & a-b+c & 0 \\ c^2 & 0 & a+b-c \end{vmatrix}$$

再进行列变换 $C_2 \to C_2 + \dfrac{1}{b}C_1,\ C_3 \to C_3 + \dfrac{1}{c}C_1$, 得

$$D = (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} 2bc & 0 & 0 \\ b^2 & a+c & \dfrac{b^2}{c} \\ c^2 & \dfrac{c^2}{b} & a+b \end{vmatrix}$$

按第一行展开行列式得

$$\begin{aligned} D &= (a+b+c)^2 \cdot 2bc \left[(a+c)(a+b) - \frac{b^2}{c} \cdot \frac{c^2}{b}\right] \\ &= 2bc(a+b+c)^2 \left(a^2+ab+ac+bc-bc\right) \\ &= 2abc(a+b+c)^3 \end{aligned}$$

14. 证明

$$\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} = \left(a^3+b^3\right) \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

令

$$D = \begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}$$

按 C_1 拆分

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} ax & ay+bz & az+bx \\ ay & az+bx & ax+by \\ az & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} by & ay+bz & az+bx \\ bz & az+bx & ax+by \\ bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} \\ &= a \begin{vmatrix} x & ay+bz & az+bx \\ y & az+bx & ax+by \\ z & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} y & ay+bz & az+bx \\ z & az+bx & ax+by \\ x & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} \end{aligned}$$

第一个行列式进行 $C_3 \to C_3 - bC_1$, 第二个行列式进行 $C_2 \to C_2 - aC_1$ 得

$$\begin{aligned} D &= a \begin{vmatrix} x & ay+bz & az \\ y & az+bx & ax \\ z & ax+by & ay \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} y & bz & az+bx \\ z & bx & ax+by \\ x & by & ay+bz \end{vmatrix} \\ &= a^2 \begin{vmatrix} x & ay+bz & z \\ y & az+bx & x \\ z & ax+by & y \end{vmatrix} + b^2 \begin{vmatrix} y & z & az+bx \\ z & x & ax+by \\ x & y & ay+bz \end{vmatrix} \end{aligned}$$

第一个行列式进行 $C_2 \to C_2 - bC_3$, 第二个行列式进行 $C_3 \to C_3 - aC_2$ 得

$$\begin{aligned} D &= a^2 \begin{vmatrix} x & ay & z \\ y & az & x \\ z & ax & y \end{vmatrix} + b^2 \begin{vmatrix} y & z & bx \\ z & x & by \\ x & y & bz \end{vmatrix} \\ &= (a^3+b^3) \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} \end{aligned}$$

15. 证明

$$\begin{vmatrix} a+bx & c+dx & p+qx \\ ax+b & cx+d & px+q \\ u & v & w \end{vmatrix} = (1-x^2)\begin{vmatrix} a & c & p \\ b & d & q \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

令

$$D = \begin{vmatrix} a+bx & c+dx & p+qx \\ ax+b & cx+d & px+q \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

进行列行变换 $R_1 \to R_1 - R_2$, 得

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a+bx-x(ax+b) & c+dx-x(cx+d) & p+qx-x(px+q) \\ ax+b & cx+d & px+q \\ u & v & w \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a-ax^2 & c-cx^2 & p-px^2 \\ ax+b & cx+d & px+q \\ u & v & w \end{vmatrix} \\ &= (1-x^2)\begin{vmatrix} a & c & p \\ ax+b & cx+d & px+q \\ u & v & w \end{vmatrix} \end{aligned}$$

按 R_2 拆分, 得

$$D = 0 + (1-x^2)\begin{vmatrix} a & c & p \\ b & d & q \\ u & v & w \end{vmatrix} = (1-x^2)\begin{vmatrix} a & c & p \\ b & d & q \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

16. 证明

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b & b^2 & ca \\ c & c^2 & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

令

$$D = \begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b & b^2 & ca \\ c & c^2 & ab \end{vmatrix}$$

将 a,b,c 分别乘入 R_1,R_2,R_3

$$D=\frac{1}{abc}\begin{vmatrix}a^2&a^3&abc\\b^2&b^3&abc\\c^2&c^3&abc\end{vmatrix}=\frac{abc}{abc}\begin{vmatrix}a^2&a^3&1\\b^2&b^3&1\\c^2&c^3&1\end{vmatrix}$$

进行 $C_2\leftrightarrow C_3$, 再 $C_1\leftrightarrow C_2$ 得

$$D=-\begin{vmatrix}a^2&1&a^3\\b^2&1&b^3\\c^2&1&c^3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&a^2&a^3\\1&b^2&b^3\\1&c^2&c^3\end{vmatrix}$$

17. 证明

$$\begin{vmatrix}\sin\alpha&\cos\alpha&\cos(\alpha+\delta)\\\sin\beta&\cos\beta&\cos(\beta+\delta)\\\sin\gamma&\cos\gamma&\cos(\gamma+\delta)\end{vmatrix}=0$$

令

$$D=\begin{vmatrix}\sin\alpha&\cos\alpha&\cos(\alpha+\delta)\\\sin\beta&\cos\beta&\cos(\beta+\delta)\\\sin\gamma&\cos\gamma&\cos(\gamma+\delta)\end{vmatrix}$$

由三角公式 $\cos(\theta+\delta)=\cos\theta\cos\delta-\sin\theta\sin\delta$, 将 C_3 展开得

$$D=\begin{vmatrix}\sin\alpha&\cos\alpha&\cos(\alpha+\delta)\\\sin\beta&\cos\beta&\cos(\beta+\delta)\\\sin\gamma&\cos\gamma&\cos(\gamma+\delta)\end{vmatrix}=\cos\delta\begin{vmatrix}\sin\alpha&\cos\alpha&\cos\alpha\\\sin\beta&\cos\beta&\cos\beta\\\sin\gamma&\cos\gamma&\cos\gamma\end{vmatrix}-\sin\delta\begin{vmatrix}\sin\alpha&\cos\alpha&\sin\alpha\\\sin\beta&\cos\beta&\sin\beta\\\sin\gamma&\cos\gamma&\sin\gamma\end{vmatrix}$$

其中两个行列式都有两列成比例, 因此

$$D=0$$

18. 证明

$$\begin{vmatrix}\cos^2a&\sin a&\sin^2a\\-\cos 2a&\cos a-\sin a&\cos 2a\\-\sin 2a-\cos 2a&2\cos a&1+\sin 2a+\cos 2a\end{vmatrix}=\sin a\cos a(\cos a-\sin a)$$

令

$$D=\begin{vmatrix}\cos^2 a & \sin a & \sin^2 a\\ -\cos 2a & \cos a-\sin a & \cos 2a\\ -\sin 2a-\cos 2a & 2\cos a & 1+\sin 2a+\cos 2a\end{vmatrix}$$

进行列变换 $C_1\to C_1-C_3$,

$$D=\begin{vmatrix}1 & \sin a & \sin^2 a\\ 0 & \cos a-\sin a & \cos 2a\\ 1 & 2\cos a & 1+\sin 2a+\cos 2a\end{vmatrix}$$

进行行变换 $R_3\to R_3-R_2$,

$$D=\begin{vmatrix}1 & \sin a & \sin^2 a\\ 0 & \cos a-\sin a & \cos 2a\\ 1 & \cos a+\sin a & 1+\sin 2a\end{vmatrix}$$

进行行变换 $R_2\to R_2+R_1$, 化为一范德蒙行列式,

$$D=\begin{vmatrix}1 & \sin a & \sin^2 a\\ 1 & \cos a & \cos^2 a\\ 1 & \cos a+\sin a & (\cos a+\sin a)^2\end{vmatrix}=\sin a\cos a(\cos a-\sin a)$$

19. 证明

$$\begin{vmatrix}x-1 & x-2 & x-3 & x-4\\ x^2-1 & x^2-2^2 & x^2-3^2 & x^2-4^2\\ x^3-1 & x^3-2^3 & x^3-3^3 & x^3-4^3\\ x^4-1 & x^4-2^4 & x^4-3^4 & x^4-4^4\end{vmatrix}=12(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

令

$$D=\begin{vmatrix}x-1 & x-2 & x-3 & x-4\\ x^2-1 & x^2-2^2 & x^2-3^2 & x^2-4^2\\ x^3-1 & x^3-2^3 & x^3-3^3 & x^3-4^3\\ x^4-1 & x^4-2^4 & x^4-3^4 & x^4-4^4\end{vmatrix}$$

提取公因式得 $D=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)M$, 其中

$$M=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ x+1 & x+2 & x+3 & x+4 \\ x^2+x+1 & x^2+2x+2^2 & x^2+3x+3^2 & x^2+4x+4^2 \\ x^3+x^2+x+1 & x^3+2x^2+2^2x+2^3 & x^3+3x^2+3^2x+3^3 & x^3+4x^2+4^2x+4^3 \end{vmatrix}$$

依次进行行变换 $R_4\to R_4-xR_3, R_3\to R_3-xR_2, R_2\to R_2-xR_1$,

$$M=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1^3 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \\ 1^4 & 2^4 & 3^4 & 4^4 \end{vmatrix}$$

是一范德蒙行列式,

$$M=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant 4}(j-i)=(2-1)(3-1)(3-2)(4-1)(4-2)(4-3)=1\cdot 2\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 1=12$$

于是得证

$$D=12(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

20. 设 V_n 为 n 阶范德蒙行列式, 定义如下:

$$V_n=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

证明

$$V_n=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i).$$

设

$$V_n=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \dots & x_{n-1}^{n-1} \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

进行行变换 $R_2 \to R_2 - R_1, R_3 \to R_3 - R_1, \cdots R_n \to R_n - R_1$, 得

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & \dots & x_2^{n-2} - x_1^{n-2} & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ 0 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1^2 & \dots & x_3^{n-2} - x_1^{n-2} & x_3^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & x_{n-1} - x_1 & x_{n-1}^2 - x_1^2 & \dots & x_{n-1}^{n-2} - x_1^{n-2} & x_{n-1}^{n-1} - x_1^{n-1} \\ 0 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_1^2 & \dots & x_n^{n-2} - x_1^{n-2} & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix}$$

进行列变换 $C_2 \to C_2 - C_1, C_3 \to C_3 - C_2, \cdots C_n \to C_n - C_{n-1}$, 得

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x_2 - x_1 & (x_2 - x_1)x_2 & \cdots & (x_2 - x_1)x_2^{n-3} & (x_2 - x_1)x_2^{n-2} \\ 0 & x_3 - x_1 & (x_3 - x_1)x_3 & \cdots & (x_3 - x_1)x_3^{n-3} & (x_3 - x_1)x_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & x_{n-1} - x_1 & (x_{n-1} - x_1)x_{n-1} & \cdots & (x_{n-1} - x_1)x_{n-1}^{n-3} & (x_{n-1} - x_1)x_{n-1}^{n-2} \\ 0 & x_n - x_1 & (x_n - x_1)x_n & \cdots & (x_n - x_1)x_n^{n-3} & (x_n - x_1)x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

提取公因式,

$$V_n = \prod_{k=2}^{n}(x_k - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-3} & x_2^{n-2} \\ 0 & 1 & x_3 & \cdots & x_3^{n-3} & x_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & x_{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-3} & x_{n-1}^{n-2} \\ 0 & 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-3} & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

按 R_1 展开得

$$V_n = \prod_{k=2}^{n}(x_k - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-3} & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 & \cdots & x_3^{n-3} & x_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-3} & x_{n-1}^{n-2} \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-3} & x_n^{n-2} \end{vmatrix} = \prod_{k=2}^{n}(x_k - x_1)\, V_{n-1}$$

依次递推得证

$$V_n = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$$

其中

$$V_2 = \begin{vmatrix} 1 & x_{n-1} \\ 1 & x_n \end{vmatrix} = x_n - x_{n-1}$$

21. 写出帕斯卡三角形的无限数组如下：其中首行和首列全为 1，其余每一项为左方和上方两项之和。对每个正整数 n，设 D_n 为取该数组前 n 行和前 n 列形成的 $n \times n$ 矩阵。求 $\det(D_n)$ 并证明。

对小的 n 直接计算表明 $\det(D_n) = 1$ 对所有 n 成立。

证明思路：

对 D_n 依次对行做初等变换，从第 n 行到第 2 行：

1. 第 n 行减去第 $n-1$ 行，
2. 第 $n-1$ 行减去第 $n-2$ 行，
3. …
4. 第 2 行减去第 1 行。

根据数组的构造方式，这将使每列向右平移一位，并使第一列变为首项为 1，其余 $n-1$ 项为 0。对行 n 到 3，再到 n 到 4 等重复此过程，可以得到上三角矩阵，且对角线上全为 1，显然行列式为 1。

另一种方法：在第一次行变换后展开第一列的余子式，可得到 $\det(D_n) = \det(D_{n-1})$。结合小 n 的值即可得出结果。

22. 证明

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix} = \left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2$$

23. 求行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & -n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -n & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -n & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

这是一个 $n \times n$ 的行列式，每一行有 $n-1$ 个 1 和一个 $-n$，且 $-n$ 分别出现在每行的不同列。

设该行列式为 D_n，我们将其简化。

第一步：行变换。

令第 i 行减去第 n 行,$i=1,2,\ldots,n-1$, 则得到一个新行列式 D'_n, 变换后前 $n-1$ 行只有两个非零元素（$1-1=0$,$-n-1=-(n+1)$,$1-(-n)=n+1$ 等等）, 便于处理。

经此变换, 前 $n-1$ 行在对角线上为 $n+1$, 其余为 0。

第二步：观察结构。

经过上述行变换,D'_n 为一个上三角矩阵, 其前 $n-1$ 个对角元为 $n+1$, 最后一行为原来的第 n 行, 未变动。

于是可得:

$$D_n = \begin{vmatrix} n+1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & n+1 & 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & n+1 & \cdots & 0 & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n+1 & a_{n-1} \\ -n & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

将该行列式按最后一列展开, 只需考虑对角线乘积（因为其余部分为 0）, 于是有:

$$D_n = (n+1)^{n-1} \cdot \text{余子式项}.$$

由于我们做了 $(n-1)$ 次行变换, 每次减去第 n 行, 所以符号为 $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$（由置换中逆序数判断）。

最终结果为:

$$\boxed{D_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(n+1)^{n-1}}.$$

(待验证)

24. 计算 $n \times n$ 矩阵 $A=[a_{ij}]$ 的行列式。

将第二行加到第一行, 再将第三行加到第二行, 依此类推, 将第 n 行加到第 $n-1$ 行, 行列式的值不变, 于是得到

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & +1 & \cdots & \pm1 & \mp1 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & \pm1 & \mp1 \\ +1 & -1 & 2 & \cdots & \pm1 & \mp1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mp1 & \pm1 & \mp1 & \cdots & 2 & -1 \\ \pm1 & \mp1 & \pm1 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \pm1 & \mp1 & \pm1 & \mp1 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

接着，用第一列减去第二列，再用所得的第二列减去第三列，依此类推，最后用第 $n-1$ 列减去第 n 列，得到

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n+1 \end{vmatrix} = n+1$$

25. 设

$$\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + kx_3 = 18 - 5k, \\ x_2 + 2x_3 = 2, \end{cases}$$

问 k 取何值时，方程组无解、有唯一解、有无穷解？在有无穷解时，求全部解。

原方程组为 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$，其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} k & 1 & 1 \\ 3 & 2 & k \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 18-5k \\ 2 \end{bmatrix}.$$

解

$$\det(\mathbf{A}) = 4k - 3 - k^2 - 6 = -k^2 + 4k - 3 = 0$$

得 $k = 1, 3$，因此:

- 当 $k \neq 1, 3$ 时,$\det(\mathbf{A}) \neq 0$，方程组有唯一解；
- 当 $k = 1$ 时，代入方程组得:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 13, \\ x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

  用第三式解出 $x_2 = 2 - 2x_3$，代入前两式得

$$x_1 + (2 - 2x_3) + x_3 = 5 \Rightarrow x_1 = 3 + x_3,$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 13 \Rightarrow 3(3 + x_3) + 2(2 - 2x_3) + x_3 = 13.$$

检验等式成立:

$$9+3x_3+4-4x_3+x_3=13 \Rightarrow 13=13.$$

成立, 说明方程组有无穷多解, 设 $x_3=\lambda$, 则

$$x_1=3+\lambda, \quad x_2=2-2\lambda, \quad x_3=\lambda \quad (\lambda\in\mathbb{R}).$$

- 当 $k=3$ 时, 代入原方程组得

$$\begin{cases} 3x_1+x_2+x_3=5, \\ 3x_1+2x_2+3x_3=3, \\ x_2+2x_3=2. \end{cases}$$

由前两式相减得:

$$(3x_1+2x_2+3x_3)-(3x_1+x_2+x_3)=-2 \Rightarrow x_2+2x_3=-2,$$

与第三式 $x_2+2x_3=2$ 矛盾, 因此方程组无解。

矩阵

1. 已知

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&3&0\\0&-4&5\end{bmatrix},\quad I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad B=(I+A)^{-1}(I-A),$$

求矩阵 $(I+B)^{-1}$。

由 $B=(I+A)^{-1}(I-A)$ 可得

$$(I+A)B=I-A$$

两边加上 $I+A$ 得

$$I+A+B+AB=(I+A)(I+B)=2I$$

因此

$$(I+B)^{-1}=\frac{1}{2}(I+A)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&0&0\\-2&4&0\\0&-4&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&2&0\\0&-2&3\end{bmatrix}$$

2. 已知

$$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p&q\\r&s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&3\\3&2\end{bmatrix}$$

且联立方程

$$\begin{cases}ax+by=5\\cx+dy=-3\end{cases}$$

恰有一组解 $(x,y)=(1,2)$, 求联立方程

$$\begin{cases}pu+qv=1\\ru+sv=2\end{cases}$$

的解 (u,v)。

已知

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

且

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

因此

$$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ -30 \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 19 \\ -30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

故联立方程的解为

$$(u, v) = (19, -30)$$

3. 设三阶方阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{10} = \begin{bmatrix} 1 & ka & pa^2 + qb \\ 0 & 1 & ka \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

其中 k, p, q 为常数，试求 $k + p + q$。

将 A 分解为 $A = I + B$，其中

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

注意到 $B^3 = 0$，且

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

由二项式定理，

$$A^{10} = (I + B)^{10} = \sum_{k=0}^{10} {}^{10}C_k B^k I^{10-k} = I + 10B + 45B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 10a & 45a^2 + 10b \\ 0 & 1 & 10a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

所以

$$k=10,\quad p=45,\quad q=10\quad\Rightarrow\quad k+p+q=65.$$

4. 设实数 $a>b$, 且有二阶方阵 X,Y 满足

$$X+Y=I,\quad XY=O,$$

其中

$$I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\quad O=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix},$$

且

$$A=\begin{bmatrix}2&4\\1&-1\end{bmatrix}=aX+bY,$$

求 a,b 的值。据此, 求 $X^{2025}-Y^{2025}$。

首先有

$$A=aX+bY=aX+b(I-X)=bI+(a-b)X,$$

故

$$X=\frac{A-bI}{a-b},\quad Y=\frac{aI-A}{a-b}.$$

所以

$$XY=\frac{1}{(a-b)^2}(A-bI)(aI-A)=O,$$

即

$$\begin{bmatrix}2-b&4\\1&-1-b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a-2&-4\\-1&a+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}.$$

得到方程组

$$\begin{cases}(2-b)(a-2)+4(-1)=0,\\(2-b)(-4)+4(a+1)=0,\\1\cdot(a-2)+(-1-b)(-1)=0,\\1\cdot(-4)+(-1-b)(a+1)=0.\end{cases}$$

由 $a>b$, 解得

$$a=3,b=-2$$

因此

$$X=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}4&4\\1&1\end{bmatrix},\quad Y=I-X=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1&-4\\-1&4\end{bmatrix}$$

且发现 $X^2=X$, $Y^2=Y$, 即 X,Y 是幂等矩阵, 故对任意正整数 n,

$$X^n=X,\quad Y^n=Y$$

因此

$$X^{2025}-Y^{2025}=X-Y=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3 & 8\\ 2 & -3\end{bmatrix}$$

5. 设

$$A=\begin{bmatrix}4 & 4\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

满足

$$A+A^2+\cdots+A^n=\begin{bmatrix}2(3^n-1) & a\\ b & c\end{bmatrix},$$

求 $b+c$。

发现

$$A^2=\begin{bmatrix}4 & 4\\ -1 & -1\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}12 & 12\\ -3 & -3\end{bmatrix}=3A,$$

于是对任意 $k\geqslant 1$ 有 $A^k=3^{k-1}A$, 因此

$$A+\cdots+A^n=A\sum_{k=0}^{n-1}3^k=\frac{3^n-1}{2}A=\begin{bmatrix}2(3^n-1) & 2(3^n-1)\\ \frac{1}{2}(1-3^n) & \frac{1}{2}(1-3^n)\end{bmatrix}$$

故

$$b+c=\frac{1}{2}(1-3^n)+\frac{1}{2}(1-3^n)=1-3^n$$

又解: 对角化 A 可得

$$A=\begin{bmatrix}4 & 4\\ -1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -4\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{4}{3}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}\equiv PDP^{-1}$$

由 $A^n=PD^nP^{-1}$,

$$A+A^2+\cdots+A^n=P(D+D^2+\cdots+D^n)P^{-1}$$

$$= P\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 3+3^2+\cdots+3^n\end{bmatrix}P^{-1} = P\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & \dfrac{3^{n+1}-3}{2}\end{bmatrix}P^{-1} = \begin{bmatrix}2(3^n-1) & 2(3^n-1)\\ \dfrac{1}{2}(1-3^n) & \dfrac{1}{2}(1-3^n)\end{bmatrix}$$

同上。

6. 设矩阵

$$A = \begin{pmatrix}7 & -8\\-7 & 8\end{pmatrix}$$

满足

$$(I+A)^n = I + a_nA,$$

其中 n 为自然数,

$$I = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix},$$

且 $\{a_n\}$ 为一个数列, 求 a_n 的通项公式。

求 A 的特征值:

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix}7-\lambda & -8\\-7 & 8-\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2 - 15\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0,\ 15$$

设

$$f(\lambda) = (1+\lambda)^n = (\lambda^2-15\lambda)p(\lambda) + a\lambda + b,$$

令 $\lambda = 0, 15$, 解得

$$a = \frac{16^n-1}{15}, \quad b = 1$$

由凯莱-哈密顿定理,

$$(I+A)^n = aA + bI = \frac{16^n-1}{15}A + I \Rightarrow a_n = \frac{1}{15}(16^n-1)$$

7. 设矩阵

$$A = \begin{bmatrix}-5 & -4\\9 & 7\end{bmatrix},$$

求

$$A^{51} - A^{50} + A^3 - 3A^2 - 2A + 4I_2,$$

其中 $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$。

发现

$$(A-I)^2 = \begin{bmatrix} -6 & -4 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = 2A - I$$

且考虑方程

$$\lambda^{50} = q(\lambda)(\lambda-1)^2 + c_1\lambda + c_0 \tag{1}$$

对 λ 求导, 可得

$$50\lambda^{49} = q'(\lambda)(\lambda-1)^2 + 2q(\lambda)(\lambda-1) + c_1 \tag{2}$$

由 (1), (2), 代入 $\lambda = 1$ 得

$$c_0 = -49,\ \ c_1 = 50$$

由凯莱-哈密顿定理,

$$A^{50} = 50A - 49I$$

因此

$$A^{51} - A^{50} = (50A^2 - 49A) - (50A - 49I) = 100A - 50I - 99A - 49I = A - I$$

又

$$A^3 - 3A^2 - 2A + 4I = (A-I)^3 - 5(A-I) = -5(A-I)$$

故

$$A^{51} - A^{50} + A^3 - 3A^2 - 2A + 4I = -4(A-I) = \begin{bmatrix} 24 & 16 \\ -36 & -24 \end{bmatrix}$$

8. 已知

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}^{101} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

求 $a+b+c+d+e+f+g+h+i$。

设

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

解 $\det(A-\lambda I)=0$, 即

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0 \Rightarrow \lambda=1\ (m=2),\ \lambda=-1$$

对于 $\lambda=1$, 解 $(A-I)\mathbf{x}=\mathbf{0}$:

$$A-I=\begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1=-x_2-x_3,\ x_2,\ x_3\in\mathbb{R}$$

取两个线性无关解:

$$\vec{v}_1=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

对于 $\lambda=-1$, 解 $(A+I)\mathbf{x}=\mathbf{0}$:

$$A+I=\begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1=x_3,\ x_2=-x_3$$

取

$$\vec{v}_3=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

于是

$$P=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

现计算逆矩阵 P^{-1}, 由 $|P|=2$ 得

$$P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

于是

$$A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

所以

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^{\frac{1}{101}} & 0 & 0 \\ 0 & 1^{\frac{1}{101}} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{\frac{1}{101}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

恰好也是原矩阵, 因此

$$a+b+c+d+e+f+g+h+i = -3$$

9. 设 A 和 B 为 $n \times n$ 实矩阵, 且满足

$$AB + A + B = 0.$$

证明 $AB = BA$。

注意到

$$(A+I)(B+I) = AB + A + B + I = I,$$

其中 I 为单位矩阵。因此 $A+I$ 和 $B+I$ 互为逆矩阵。

由于逆矩阵的性质, 有

$$(A+I)(B+I) = (B+I)(A+I) = I.$$

展开等式得到

$$AB + A + B + I = BA + B + A + I \implies AB = BA.$$

10. 已知矩阵 $A, B, A+B$ 都是可逆矩阵, 证明 $A^{-1} + B^{-1}$ 也是可逆矩阵。

我们需要证明存在一个矩阵 C, 使得

$$(A^{-1} + B^{-1})C = I.$$

设

$$C = B(A+B)^{-1}A.$$

下面验证该选择是可行的。计算

$$\begin{aligned}(A^{-1}+B^{-1})C &= (A^{-1}+B^{-1})B(A+B)^{-1}A \\ &= A^{-1}B(A+B)^{-1}A + B^{-1}B(A+B)^{-1}A \\ &= A^{-1}B(A+B)^{-1}A + I(A+B)^{-1}A \\ &= A^{-1}B(A+B)^{-1}A + (A+B)^{-1}A.\end{aligned}$$

利用恒等式 $B=(A+B)-A$, 代入上式得

$$\begin{aligned}(A^{-1}+B^{-1})C &= A^{-1}[(A+B)-A](A+B)^{-1}A + (A+B)^{-1}A \\ &= [A^{-1}(A+B) - A^{-1}A](A+B)^{-1}A + (A+B)^{-1}A \\ &= [A^{-1}(A+B) - I](A+B)^{-1}A + (A+B)^{-1}A \\ &= A^{-1}(A+B)(A+B)^{-1}A - I(A+B)^{-1}A + (A+B)^{-1}A \\ &= A^{-1}A - (A+B)^{-1}A + (A+B)^{-1}A \\ &= I.\end{aligned}$$

因此存在矩阵 $C = B(A+B)^{-1}A$ 使得 $(A^{-1}+B^{-1})C = I$, 从而 $A^{-1}+B^{-1}$ 可逆, 其逆矩阵为

$$(A^{-1}+B^{-1})^{-1} = B(A+B)^{-1}A.$$

11. 设 A, B 均为 n 阶方阵, 且 $I+AB$ 可逆, 化简

$$(I+BA)\big[I - B(I+AB)^{-1}A\big].$$

$$\begin{aligned}(I+BA)\big[I - B(I+AB)^{-1}A\big] &= I - B(I+AB)^{-1}A + \big[BA - BAB(I+AB)^{-1}A\big] \\ &= I - B(I+AB)^{-1}A + B\big(I + AB - AB\big)(I+AB)^{-1}A \\ &= I - B(I+AB)^{-1}A + B(I+AB)(I+AB)^{-1}A \\ &= I.\end{aligned}$$

12. 设 A, B 和 C 为同阶实方阵, 且 A 可逆。证明如果

$$(A-B)C = BA^{-1},$$

则有

$$C(A-B)=A^{-1}B.$$

由假设

$$(A-B)C=BA^{-1}.$$

在两边加上 $A^{-1}(A-B)$, 得到

$$(A-B)C+A^{-1}(A-B)=BA^{-1}+A^{-1}(A-B)=I.$$

于是

$$(A-B)(C+A^{-1})=I \implies (A-B)^{-1}=C+A^{-1}.$$

两边左乘 $(A-B)$ 得

$$(C+A^{-1})(A-B)=I.$$

展开即可得到

$$C(A-B)=A^{-1}B.$$

13. 对任意整数 $n\geqslant 2$, 设 A,B 为两个 $n\times n$ 的实矩阵, 且满足

$$A^{-1}+B^{-1}=(A+B)^{-1}.$$

证明 $\det A=\det B$。问: 若 A,B 为复矩阵, 结论是否仍成立?

两边同乘以 $(A+B)$, 得

$$\begin{aligned}I&=(A+B)(A+B)^{-1}\\&=(A+B)(A^{-1}+B^{-1})\\&=AA^{-1}+AB^{-1}+BA^{-1}+BB^{-1}\\&=I+AB^{-1}+BA^{-1}+I.\end{aligned}$$

于是

$$AB^{-1}+BA^{-1}+I=0.$$

令 $X=AB^{-1}$, 则 $A=XB$, 且

$$BA^{-1}=X^{-1}.$$

因此
$$X+X^{-1}+I=0.$$
两边左乘 $(X-I)X$, 得
$$\begin{aligned}0&=(X-I)X(X+X^{-1}+I)\\&=(X-I)(X^2+X+I)\\&=X^3-I.\end{aligned}$$
从而
$$X^3=I.$$
取行列式可得
$$(\det X)^3=\det(X^3)=\det I=1,$$
由于 X 为实矩阵, 故
$$\det X=1.$$
又因为
$$\det A=\det(XB)=\det X\det B=\det B,$$
从而 $\det A=\det B$。

下面说明在复矩阵情形下结论不成立。设
$$\omega=\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3}),$$
则 $\omega\notin\mathbb{R}$, 且 $\omega^3=1$, 并有
$$1+\omega+\omega^2=0.$$
取 $A=I$,B 为对角矩阵, 其对角元均取为 ω 或 ω^2, 并使得 $\det B=1$。若 n 不是 3 的倍数, 可直接取 $B=\omega I$。

此时
$$A^{-1}=I,\quad B^{-1}=\overline{B},$$
且
$$I+B+\overline{B}=0.$$
因此
$$(A+B)^{-1}=(-\overline{B})^{-1}=-\overline{B}^{-1}=-B=I+\overline{B}=A^{-1}+B^{-1}.$$
但由构造可知
$$\det A=1\neq\det B.$$
因此在复矩阵情形下结论不成立。

14. 设 A, B 为实 $n \times n$ 矩阵, 满足

$$A^2 + B^2 = AB$$

证明: 若 $BA - AB$ 为可逆矩阵, 则 n 能被 3 整除。

设

$$S = A + \omega B,$$

其中

$$\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

则

$$\begin{aligned} S\bar{S} &= (A + \omega B)(A + \bar{\omega} B) \\ &= A^2 + \omega BA + \bar{\omega} AB + B^2 \end{aligned}$$

由已知条件 $A^2 + B^2 = AB$, 可得

$$S\bar{S} = AB + \omega BA + \bar{\omega} AB$$

注意到 $\bar{\omega} + 1 = -\omega$, 于是

$$S\bar{S} = \omega(BA - AB)$$

对两边取行列式, 有

$$\det(S\bar{S}) = \det S \cdot \det \bar{S},$$

这是一个实数。同时,

$$\det(S\bar{S}) = \det(\omega(BA - AB)) = \omega^n \det(BA - AB)$$

由于 $BA - AB$ 可逆, 故 $\det(BA - AB) \neq 0$, 从而 ω^n 必须为实数。

而 ω 是三次单位根,ω^n 为实数当且仅当 n 能被 3 整除。因此 n 必须是 3 的倍数。

15. 求所有复数 Λ, 使得存在正整数 n 以及实 $n \times n$ 矩阵 A, 满足

$$A^2 = A^T,$$

并且 Λ 是 A 的一个特征值。

由条件 $A^2 = A^T$, 两边平方可得

$$A^4 = (A^2)^2 = (A^T)^2 = (A^2)^T = (A^T)^T = A.$$

因此

$$A^4 - A = 0.$$

于是 A 的任一特征值 Λ 必须满足多项式方程

$$\Lambda^4 - \Lambda = 0.$$

即

$$\Lambda(\Lambda^3 - 1) = 0.$$

其全部根为

$$\Lambda = 0, \quad \Lambda = 1, \quad \Lambda = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

下面验证这些值均可实现。考虑如下矩阵:

$$A_0 = (0), \qquad A_1 = (1),$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

显然,0 和 1 分别是 1×1 矩阵 A_0 与 A_1 的特征值。矩阵 A_2 的特征值为

$$\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2},$$

并且可以直接计算验证

$$A_2^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = A_2^T.$$

矩阵 A_4 则在同一矩阵中同时包含上述四个可能的特征值。

综上, 满足条件的全部复数 Λ 为

$$\Lambda \in \left\{ 0,\ 1,\ \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

16. 已知 A 是 4×2 实矩阵,B 是 2×4 实矩阵, 且

$$AB=\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\-1&0&1&0\\0&-1&0&1\end{pmatrix}.$$

求 BA。

将矩阵分块表示:

$$A=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}B_1&B_2\end{pmatrix},$$

其中 A_1,A_2,B_1,B_2 为 2×2 矩阵。于是

$$AB=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_1&B_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1B_1&A_1B_2\\A_2B_1&A_2B_2\end{pmatrix}.$$

比较分块得到:

$$A_1B_1=A_2B_2=I_2,\quad A_1B_2=A_2B_1=-I_2.$$

于是可解得:

$$B_1=A_1^{-1},\quad B_2=-A_1^{-1},\quad A_2=-A_1.$$

最后

$$BA=\begin{pmatrix}B_1&B_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}=B_1A_1+B_2A_2=A_1^{-1}A_1+(-A_1^{-1})(-A_1)=2I_2.$$

17. 已知

$$A=\begin{bmatrix}2&4&0&0\\1&2&0&0\\0&0&2&4\\0&0&2&2\end{bmatrix},$$

求 A^n。

将 A 分块为

$$A=\begin{bmatrix}B&0\\0&C\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2&4\\1&2\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}2&4\\0&2\end{bmatrix}.$$

对 B, 可写为 $B=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}$, 所以

$$B^n=4^{n-1}B.$$

对 C, 注意 $\begin{bmatrix}0 & 4\\0 & 0\end{bmatrix}^2=0$, 则

$$C^n=\left(2E+\begin{bmatrix}0 & 4\\0 & 0\end{bmatrix}\right)^n=2^nE+n2^{n-1}\begin{bmatrix}0 & 4\\0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2^n & 4n2^{n-1}\\0 & 2^n\end{bmatrix}.$$

因此

$$A^n=\begin{bmatrix}B^n & 0\\0 & C^n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot 4^{n-1} & 4\cdot 4^{n-1} & 0 & 0\\1\cdot 4^{n-1} & 2\cdot 4^{n-1} & 0 & 0\\0 & 0 & 2^n & n2^{n+1}\\0 & 0 & 0 & 2^n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2^{2n-1} & 2^{2n+1} & 0 & 0\\2^{2n-2} & 2^{2n} & 0 & 0\\0 & 0 & 2^n & n2^{n+1}\\0 & 0 & 0 & 2^n\end{bmatrix}.$$

18. 设 A 和 B 是 $n\times n$ 实矩阵, 且满足

$$\operatorname{rk}(AB-BA+I)=1,$$

其中 I 是 $n\times n$ 单位矩阵。证明

$$\operatorname{trace}(ABAB)-\operatorname{trace}(A^2B^2)=\frac{1}{2}n(n-1).$$

令 $X=AB-BA$。注意

$$\begin{aligned}\operatorname{trace}(X^2)&=\operatorname{trace}(ABAB-ABBA-BAAB+BABA)\\&=2\operatorname{trace}(ABAB)-2\operatorname{trace}(A^2B^2),\end{aligned}$$

因为迹具有循环性。因此只需证明 $\operatorname{trace}(X^2)=n(n-1)$。

由假设,$X+I$ 的秩为 1, 所以可以写成

$$X+I=v^tw$$

对某些向量 v,w。于是

$$X^2=(v^tw-I)^2=I-2v^tw+v^twv^tw=I+(wv^t-2)v^tw.$$

由 X 的定义, 有 $\operatorname{trace}(X)=0$, 因此 $\operatorname{trace}(wv^t)=\operatorname{trace}(vw)=n$, 于是

$$\operatorname{trace}(X^2)=n+(n-2)n=n(n-1).$$

另一种方法是利用秩为 1 的条件: 因为 $X+I$ 的秩为 1, 它有 0 的特征值, 重数为 $n-1$。因此 X 有 -1 的特征值, 重数为 $n-1$。由于 $\operatorname{trace}(X)=0$, 剩余的特征值为 $n-1$。于是

$$\operatorname{trace}(X^2)=(n-1)^2+(n-1)\cdot 1^2=n(n-1).$$

由 $\operatorname{trace}(X^2)=2(\operatorname{trace}(ABAB)-\operatorname{trace}(A^2B^2))$, 得到

$$\operatorname{trace}(ABAB)-\operatorname{trace}(A^2B^2)=\frac{1}{2}n(n-1).$$

19. 设 A 是 $n\times n$ 实矩阵, 且 $A^3=0$。

(a) 证明存在唯一的 $n\times n$ 实矩阵 X 满足

$$X+AX+XA^2=A.$$

(b) 用 A 表示 X。

首先假设某矩阵 X 满足方程。考虑通过左右乘以 A 的幂得到的新方程。例如,

$$A^2(X+AX+XA^2)A^2=A^2XA^2+A^3XA^2+A^2XA^4=A^2XA^2.$$

右边为零, 因为 $A^3=0$, 所以

$$A^2XA^2=0.$$

同理可得:

$$A^2X=A^2(X+AX+XA^2)=A^3=0,$$
$$AXA=A(X+AX+XA^2)A=A^3=0,$$
$$XA^2=(X+AX+XA^2)A^2=A^3=0.$$

此外,

$$AX=A(X+AX+XA^2)=A^2,$$

于是
$$X = A - AX - XA^2 = A - A^2.$$
因此，唯一可能的解为 $X = A - A^2$。为了验证其确实满足方程：
$$X + AX + XA^2 = (A - A^2) + A(A - A^2) + (A - A^2)A^2 = A - A^4 = A.$$
综上,$X = A - A^2$ 是方程的唯一解。

20. 设 A, B, C 为 $n \times n$ 复矩阵，满足
$$A^2 = B^2 = C^2, \quad B^3 = ABC + 2I.$$
证明 $A^6 = I$。

由 $A^2 = B^2 = C^2$，可得
$$B^3 - ABC = B^2B - ABC = A^2B - ABC = 2I.$$
于是
$$A(AB - BC) = 2I.$$
同理，由 $B^2 = C^2$，可得
$$BC^2 - ABC = 2I \implies (BC - AB)C = 2I.$$
这说明 A 是 $\frac{AB-BC}{2}$ 的左逆矩阵，而 $-C$ 是右逆矩阵，所以 $A = -C$。因此
$$ABA = A^2B = B^3.$$
由于 ABA 与 B 交换，得到 $(AB)^2 = (BA)^2$。计算
$$\begin{aligned}(AB - BA)(AB + BA) &= (AB)^2 + AB^2A - BA^2B - (BA)^2 \\ &= (AB)^2 + A^4 - B^4 - (BA)^2 = 0.\end{aligned}$$
又因为 $AB - BC = AB + BA$ 可逆，故 $AB = BA$，于是 $ABA = A^2B = B^3$。由此得
$$B^3 = I \implies A^6 = B^6 = I.$$

21. 设 $a=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}, c=\begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix}$, 且 $A=ab^T$, $B=ba^T$, 解矩阵方程

$$2B^2A^2X=A^4X+B^4X+c$$

(题目有误, 不符合矩阵乘法定义)

复数

1. 已知 $i=\sqrt{-1}$, 若

$$\frac{1}{i^{2025}}-\frac{2}{i^{2024}}+\frac{3}{i^{2023}}-\frac{4}{i^{2022}}+\cdots-\frac{2024}{i^{2}}+\frac{2025}{i}=a+bi$$

其中 a,b 为实数, 求 $a-b$。

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{i^{2025}}-\frac{2}{i^{2024}}+\frac{3}{i^{2023}}-\frac{4}{i^{2022}}+\cdots-\frac{2024}{i^{2}}+\frac{2025}{i}\\
&=\frac{1}{i}-2-\frac{3}{i}+4+\frac{5}{i}-6-\frac{7}{i}+8+\cdots+2024+\frac{2025}{i}\\
&=\frac{1}{i}(1+5+\cdots+2025)-(2+6+\cdots+2022)-\frac{1}{i}(3+7+\cdots+2023)+(4+8+\cdots+2024)\\
&=\frac{1}{i}\cdot\frac{2026\cdot 507}{2}-\frac{2024\cdot 506}{2}-\frac{1}{i}\cdot\frac{2026\cdot 506}{2}+\frac{2028\cdot 506}{2}\\
&=\frac{1013}{i}+1012\\
&=1012-1013i \quad\Rightarrow\quad a-b=2025
\end{aligned}$$

2. 设 z 是 1 的七次方根, 且 $z\neq 1$, 试求 $z+z^2+z^4$ 的值。

发现

$$z^7=1\Rightarrow 1+z+\cdots+z^6=0\Rightarrow z+z^2+\cdots+z^6=-1$$

设 $\alpha=z+z^2+z^4,\beta=z^3+z^5+z^6$, 则

$$\alpha+\beta=z+z^2+\cdots+z^6=-1$$

又

$$\alpha\beta=(z+z^2+z^4)(z^3+z^5+z^6)=z^4(1+z+z^2+\cdots+z^6+2z^3)=z^4(0+2z^3)=2z^7=2$$

因此 α,β 是方程 $x^2+x+2=0$ 的两根, 解得

$$\alpha=z+z^2+z^4=\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$$

3. 若 $z \in \mathbb{C}$ 满足 $z + \frac{1}{z} = \sqrt{3}$, 求 $z^{2025} + \frac{1}{z^{2025}}$ 的值。

先求 z,

$$z + \frac{1}{z} = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{\sqrt{3}+i}{2} = e^{\frac{\pi i}{6}}$$

于是

$$z^{2025} = e^{\frac{2025\pi i}{6}} = e^{\frac{3\pi i}{2}} = -i \quad \Rightarrow \quad z^{2025} + \frac{1}{z^{2025}} = -i + \frac{1}{-i} = 0$$

4. 求

$$\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}i\right)^6$$

观察

$$\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}i\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \cos 30^\circ + i\sin 30^\circ.$$

由棣莫弗定理, 原式为

$$(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)^3 = \cos 90^\circ + i\sin 90^\circ = i.$$

5. 已知 $a, b, c \in \mathbb{C}$, 且 $a + b + c = a^2 + b^2 + c^2 = 3, a^3 + b^3 + c^3 = 6$, 试求

$$(a-1)^{2023} + (b-1)^{2023} + (c-1)^{2023}$$

的值。

由

$$3 = 3^2 - 2(ab + bc + ca), \quad 6 - 3abc = 3(3-3)$$

解得

$$ab + bc + ca = 3, abc = 2$$

因此 a, b, c 是方程

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 2 = 0$$

即

$$(x-1)^3 = 1$$

的根, 因此

$$a-1, b-1, c-1 \in \{1,\ \omega,\ \omega^2\}, \omega = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

不失一般性,

$$(a-1)^{2023} + (b-1)^{2023} + (c-1)^{2023} = 1^{2023} + \omega^{2023} + (\omega^2)^{2023} = 1 + \omega + \omega^2 = 0$$

6. 证明

$$1 + 2i + 3i^2 + 4i^3 + \cdots + (4n+1)i^{4n} = (2n+1) - 2ni, \quad n \in \mathbb{N}.$$

设

$$S = 1 + 2i + 3i^2 + 4i^3 + \cdots + (4n+1)i^{4n}.$$

两边乘以 i:

$$iS = i + 2i^2 + 3i^3 + 4i^4 + \cdots + (4n)i^{4n} + (4n+1)i^{4n+1}.$$

原式减去该式:

$$(1-i)S = 1 + i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{4n} - (4n+1)i^{4n+1}.$$

右边的几何级数求和（注意 $i^{4n+1} = i$）:

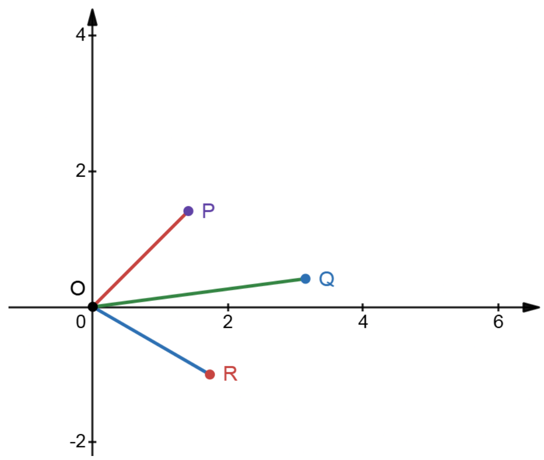
$$(1-i)S = \frac{i^{4n+1} - 1}{i - 1} - (4n+1)i = 1 - (4n+1)i.$$

解 S:

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1-(4n+1)i}{1-i} = \frac{(1-(4n+1)i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} \\
&= \frac{1 + i - (4n+1)i - (4n+1)i^2}{1-i^2} \\
&= \frac{1 + i - 4ni - i + 4n + 1}{2} \\
&= \frac{2 + 4n - 4ni}{2} \\
&= 1 + 2n - 2ni \\
&= (2n+1) - 2ni.
\end{aligned}$$

7. 考虑极坐标作图 $z = \sqrt{2}(1+i)$, $w = \sqrt{3} - i$, 证

$$\tan\frac{\pi}{24} = \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2$$



如图作 $z=\sqrt{2}(1+i)$, $w=\sqrt{3}-i$, 则

$$\arg(z)=\arctan\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}, \arg(w)=\arctan\frac{\sqrt{3}}{-1}=-\frac{\pi}{6}$$

于是

$$\begin{aligned}\arg(z+w)&=\angle QOR-|\arg w|\\&=\frac{1}{2}\angle POR-|\arg w|\\&=\frac{1}{2}(\angle POQ+|\arg w|)-|\arg w|\\&=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6})-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{24}\end{aligned}$$

又 $z+w=\sqrt{2}+\sqrt{3}+(\sqrt{2}-1)i$, 所以有

$$\tan\frac{\pi}{24}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2$$

8. 复平面上有三点 P,Q,R 对应三个复数 z_1,z_2,z_3, 且 $|z_1|=\sqrt{2},|z_2|=\sqrt{5},|z_3|=3$。若原点 O 为 $\triangle PQR$ 的重心, 求 $\Re(\overline{z_1}z_2)$ 。

设

$$z_1=a_1+b_1i,\quad z_2=a_2+b_2i,\quad z_3=a_3+b_3i$$

由于点 P,Q,R 的重心在原点, 故有

$$a_1+a_2+a_3=0,\quad b_1+b_2+b_3=0$$

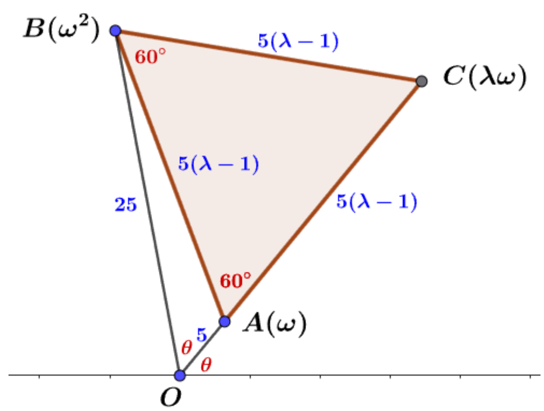
且 $a_1^2+b_1^2=2, a_2^2+b_2^2=5, a_3^2+b_3^2=9$, 又因为 $a_3=-a_1-a_2$, $b_3=-b_1-b_2$,

$$\begin{aligned}a_3^2+b_3^2&=(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2\\&=a_1^2+a_2^2+2a_1a_2+b_1^2+b_2^2+2b_1b_2\\&=7+2(a_1a_2+b_1b_2)=9\end{aligned}$$

故

$$\Re(\overline{z_1}z_2)=a_1a_2+b_1b_2=1$$

9. 设 ω 为复数, 且 $|\omega|=5$。存在一正实数 $\lambda>1$, 使得 $\omega,\omega^2,\lambda\omega$ 这三个复数在复平面上构成一个正三角形, 试求 λ 的值。



设 $O(0,0), A(\omega), B(\omega^2), C(\lambda\omega)$, 则

$$\begin{aligned}OA&=|\omega|=5\\OB&=|\omega^2|=|\omega|^2=25\\AB&=AC=|\lambda\omega-\omega|=5(\lambda-1)\end{aligned}$$

又由于 $\triangle ABC$ 是正三角形, 因此 $\angle OAB=180^\circ-60^\circ=120^\circ$。

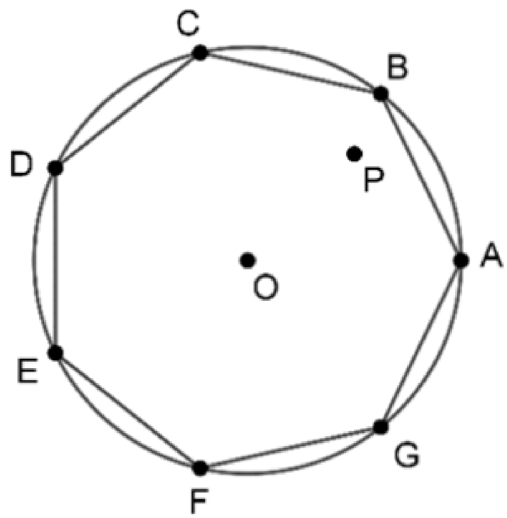
在 $\triangle OAB$ 中, 由余弦定理,

$$\cos\angle OAB=\frac{OA^2+AB^2-OB^2}{2\cdot OA\cdot AB}=\frac{5^2+(5(\lambda-1))^2-25^2}{2\cdot5\cdot5(\lambda-1)}=-\frac{1}{2}$$

解得

$$\lambda=\frac{1+\sqrt{97}}{2}>1$$

10. 如图, 在坐标平面上有一个半径为 2 的圆, 其圆心 O 为原点, 且正七边形 $ABCDEFG$ 内接于此圆。若 $A(2,0), P(1,1)$, 求 $\overline{PA}\cdot\overline{PB}\cdot\overline{PC}\cdot\overline{PD}\cdot\overline{PE}\cdot\overline{PF}\cdot\overline{PG}$。



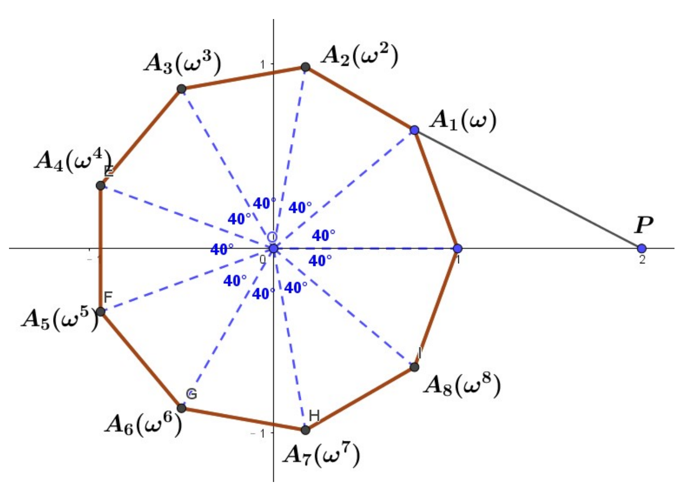
设 $x^7=2^7$ 的七根分别为 $2,\omega,\omega^2,\ldots,\omega^6$, 其中 $\omega=2e^{\frac{2\pi i}{7}}$, 则

$$f(x)=x^7-2^7=(x-2)(x-\omega)(x-\omega^2)\cdots(x-\omega^6)$$

令 $x=1+i$, 可得

$$\overline{PA}\cdot\overline{PB}\cdot\overline{PC}\cdot\overline{PD}\cdot\overline{PE}\cdot\overline{PF}\cdot\overline{PG}=|f(1+i)|=|(1+i)^7-2^7|=|2i(1+i)-128|=8\sqrt{226}$$

11. 已知 $\omega=\cos\dfrac{2\pi}{9}+i\sin\dfrac{2\pi}{9}$, 求 $|2-\omega|^2+|2-\omega^2|^2+\cdots+|2-\omega^8|^2$。



即求点 $P(2,0)$ 至单位圆上正九边形各顶点距离的平方和:

$$|2-\omega|^2+|2-\omega^2|^2+\cdots+|2-\omega^8|^2=\sum_{n=1}^{8}A_nP^2$$

在 $\triangle OA_nP$ 中, 由余弦定理,

$$A_nP^2=1^2+2^2-2\cdot 2\cdot 1\cdot\cos\angle A_nOP=5-4\cos(40^\circ\cdot n)$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{8}A_nP^2&=\sum_{n=1}^{8}(5-4\cos(40^\circ\cdot n))\\&=40-4(\cos 40^\circ+\cos 80^\circ+\cdots+\cos 320^\circ)\\&=40-8(\cos 40^\circ+\cos 80^\circ+\cos 120^\circ+\cos 160^\circ)\\&=40-8\left(2\cos 60^\circ\cos 20^\circ-\frac{1}{2}+\cos 160^\circ\right)\\&=40-8\left(\cos 20^\circ+\cos 160^\circ-\frac{1}{2}\right)\\&=40-8\left(2\cos 90^\circ\cos 70^\circ-\frac{1}{2}\right)\\&=40-8\left(-\frac{1}{2}\right)=44\end{aligned}$$

12. $\omega^{503}=1$, $\omega\neq 1$, 求

$$\frac{\omega^2}{\omega-1}+\frac{\omega^4}{\omega^2-1}+\frac{\omega^6}{\omega^3-1}+\cdots+\frac{\omega^{1004}}{\omega^{502}-1}$$

由 $\omega^{503}=1$ 得

$$(1-\omega)(1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{502})=0$$

所以

$$\sum_{k=0}^{502}\omega^k=0$$

又

$$\frac{1}{\omega^k-1}+\frac{1}{\omega^{503-k}-1}=\frac{1}{\omega^k-1}+\frac{1}{\omega^{-k}-1}=\frac{1}{\omega^k-1}+\frac{\omega^k}{1-\omega^k}=-1$$

原式

$$=\sum_{k=1}^{502}\frac{\omega^{2k}}{\omega^k-1}=\sum_{k=1}^{502}\left(\frac{\omega^{2k}-1}{\omega^k-1}+\frac{1}{\omega^k-1}\right)=\sum_{k=1}^{502}\left(\omega^k+1+\frac{1}{\omega^k-1}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= -1 + 502 + \sum_{k=1}^{502} \frac{1}{\omega^k - 1} \\
&= 501 + \left(\frac{1}{\omega - 1} + \frac{1}{\omega^{502} - 1}\right) + \left(\frac{1}{\omega^2 - 1} + \frac{1}{\omega^{501} - 1}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{\omega^{251} - 1} + \frac{1}{\omega^{252} - 1}\right) \\
&= 501 + (-1) \times 251 = 250
\end{aligned}
$$

13. 证明

$$
|z+w|^2 - |z+\overline{w}|^2 = 4\Re(z)\Re(w)
$$

解法一

设 $z = x + iy$, $w = u + iv$, 其中 $x, y, u, i \in \mathbb{R}$, 则

$$
\begin{aligned}
|z+w|^2 - |z-\overline{w}|^2 &= |(x+iy) + (u+iv)|^2 - |(x+iy) - (u-iv)|^2 \\
&= |(x+u) + i(y+v)|^2 - |(x-u) + i(y+v)|^2 \\
&= (x+u)^2 + (y+v)^2 - (x-u)^2 - (y+v)^2 \\
&= 4xu \\
&= 4\Re(z)\Re(w)
\end{aligned}
$$

解法二

$$
\begin{aligned}
|z+w|^2 - |z-w|^2 &= (z+w)(\overline{z+w}) - (z-\overline{w})(\overline{z-\overline{w}}) \\
&= (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) - (z-\overline{w})(\overline{z}-w) \\
&= z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} - (z\overline{z} - zw - \overline{w}\,\overline{z} + w\overline{w}) \\
&= zw + z\overline{w} + w\overline{z} + \overline{w}\,\overline{z} \\
&= (z+\overline{z})(w+\overline{w}) \\
&= 2\Re(z) \cdot 2\Re(w) \\
&= 4\Re(z)\Re(w)
\end{aligned}
$$

14. 已知 $z=\cos\theta+i\sin\theta$, $0\leqslant\theta<2\pi$, 证明:

$$\frac{2}{1+z}=1-i\tan\frac{\theta}{2}$$

运用各位三角恒等式化简

$$\begin{aligned}
\frac{2}{1+z} &= \frac{2}{1+\cos\theta+i\sin\theta} \\
&= \frac{2(1+\cos\theta-i\sin\theta)}{(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta} \\
&= \frac{2(1+\cos\theta-i\sin\theta)}{1+2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta} \\
&= \frac{2(1+\cos\theta-i\sin\theta)}{2+2\cos\theta} \\
&= \frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}-i\cdot\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} \\
&= 1-i\cdot\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} \\
&= 1-i\tan\frac{\theta}{2}
\end{aligned}$$

15. 设复数 z 满足 $|z|=1$ 且 $z=e^{i\theta}$, 求

$$\Re\left[\frac{z(1-\bar{z})}{\bar{z}(1+z)}\right].$$

先将表达式化简:

$$\begin{aligned}
\Re\left[\frac{z(1-\bar{z})}{\bar{z}(1+z)}\right] &= \Re\left[\frac{z-z\bar{z}}{\bar{z}+z\bar{z}}\right]=\Re\left[\frac{z-|z|^2}{\bar{z}+|z|^2}\right] \\
&= \Re\left[\frac{z-1}{\bar{z}+1}\right]=\Re\left[\frac{e^{i\theta}-1}{e^{-i\theta}+1}\right].
\end{aligned}$$

乘以共轭以简化:

$$\begin{aligned}
\Re\left[\frac{e^{i\theta}-1}{e^{-i\theta}+1}\right] &= \Re\left[\frac{(e^{i\theta}-1)(e^{i\theta}+1)}{(e^{-i\theta}+1)(e^{i\theta}+1)}\right] \\
&= \Re\left[\frac{e^{i2\theta}-1}{2+e^{i\theta}+e^{-i\theta}}\right] = \Re\left[\frac{e^{i\theta}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})}{2+2\cos\theta}\right] \\
&= \Re\left[\frac{e^{i\theta}\cdot 2i\sin\theta}{2(1+\cos\theta)}\right] = \Re\left[\frac{e^{i\theta}\cdot i\sin\theta}{1+\cos\theta}\right] \\
&= \frac{1}{1+\cos\theta}\Re\left[i\sin\theta(\cos\theta+i\sin\theta)\right] \\
&= \frac{1}{1+\cos\theta}\Re\left[i\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta\right] \\
&= -\frac{\sin^2\theta}{1+\cos\theta}.
\end{aligned}$$

使用半角公式化简:

$$-\frac{\sin^2\theta}{1+\cos\theta} = -\frac{(2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2})^2}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = -2\sin^2\frac{\theta}{2}.$$

$$\therefore \Re\left[\frac{z(1-\bar{z})}{\bar{z}(1+z)}\right] = -2\sin^2\frac{\theta}{2}.$$

16. 已知两个相异复数 z_1, z_2, 且 $|z_1| = |z_2| \neq 0$, 证明

$$\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}$$

是纯虚数。

设 $w = \dfrac{z_1+z_2}{z_1-z_2}$, 欲证 $\overline{w} = -w$。

因为 $|z_1| = |z_2| = r$, 且 $z_1, z_2 \neq 0$, 根据性质

$$\overline{z} = \frac{r^2}{z} \Rightarrow \overline{z_1} = \frac{r^2}{z_1}, \quad \overline{z_2} = \frac{r^2}{z_2}$$

因此

$$\overline{w} = \overline{\left(\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}+\overline{z_2}}{\overline{z_1}-\overline{z_2}} = \frac{\frac{r^2}{z_1}+\frac{r^2}{z_2}}{\frac{r^2}{z_1}-\frac{r^2}{z_2}} = \frac{\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}}{\frac{1}{z_1}-\frac{1}{z_2}} = \frac{z_2+z_1}{z_2-z_1} = -\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2} = -w$$

17. 设复数 z_1, z_2 满足 $|z_1| = 2, |z_2| = 3, |z_1+z_2| = 4$, 求 $\dfrac{z_1}{z_2}$。

设 $w = \dfrac{z_1}{z_2}$, 则 $z_1 = wz_2$。由

$$|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2}) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}$$

代入已知得

$$z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} = 3$$

将 $z_1 = wz_2$ 代入得

$$wz_2 \cdot \overline{z_2} + z_2 \cdot \overline{wz_2} = w|z_2|^2 + \overline{w}|z_2|^2 = (w+\overline{w}) \cdot 9 = 3 \Rightarrow w + \overline{w} = \frac{1}{3}$$

设 $w = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$, 则 $w + \overline{w} = 2x = \dfrac{1}{3} \Rightarrow x = \dfrac{1}{6}$; 又因 $|w| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} = \dfrac{2}{3}$, 所以

$$|w|^2 = \frac{1}{36} + y^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{15}}{6} \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{6} \pm i\frac{\sqrt{15}}{6}$$

18. 若复数 z 使得 $\dfrac{z-3i}{z+i}$ 为负实数, $\dfrac{z-3}{z+1}$ 为纯虚数, 求 z。

设 $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$, 由于

$$\frac{z-3i}{z+i} = \frac{a+(b-3)i}{a+(b+1)i}$$

为负实数, 则

$$(a+(b-3)i)(a-(b+1)i) < 0$$

所以 $a^2 + (b-3)(b+1) < 0$ 且 $-4a = 0$, 即 $a = 0$ 且 $b-3, b+1$ 异号; 又此时

$$\frac{z-3}{z+1} = \frac{-3+bi}{1+bi}$$

为纯虚数, 故

$$\Re((-3+bi)(1-bi)) = b^2 - 3 = 0$$

又 $b-3, b+1$ 异号知 $b = \sqrt{3}$, 所以 $z = \sqrt{3}i$.

19. 已知虚数 z 使得 $z_1 = \dfrac{z}{1+z^2}$ 和 $z_2 = \dfrac{z^2}{1+z}$ 都是实数, 求 z。

由已知 $(z^2+1)z_1=z,(1+z)z_2=z^2$, 联立两式

$$z=(z^2+1)z_1=((1+z)z_2+1)z_1$$

整理得

$$z_1+z_1z_2=z(1-z_1z_2)$$

由于 z 为虚数, $z_1+z_1z_2$ 与 $1-z_1z_2$ 为实数, 故

$$1-z_1z_2=0\Rightarrow z_1z_2=1$$

代入 $z_1=\dfrac{z}{1+z^2},z_2=\dfrac{z^2}{1+z}$ 得

$$z_1z_2=\frac{z}{1+z^2}\cdot\frac{z^2}{1+z}=\frac{z^3}{(1+z)(1+z^2)}=1$$

给出

$$z^3=(1+z)(1+z^2)\Rightarrow z^2+z+1=0$$

即

$$z=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

20. 已知复数 $z\neq 0$, 满足方程 $z^2=z+i|z|$, 求 $|z|$ 的值。

设 $z=x+iy,\ x,y\in\mathbb{R}$, 则

$$z^2=z+i|z|\Rightarrow x^2-y^2+2ixy=x+i\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

比较实部与虚部得

$$x^2-y^2=x \tag{1}$$

$$2xy=y+\sqrt{x^2+y^2} \tag{2}$$

将 (2) 移项并平方

$$y^2(2x-1)^2=x^2+y^2$$

由 (1) 得

$$(x^2-x)(2x-1)^2=2x^2-x\Rightarrow x^2(2x-3)(2x-1)=0$$

解得 $x=0,\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}$, 其中 $x=0$ 不合理 $(z\neq 0)$, 且 $x=\dfrac{1}{2}$ 不合理 $(y^2=-\dfrac{1}{4}<0)$, 故

$$x=\frac{3}{2},\ y^2=\frac{3}{4}\Rightarrow |z|=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{3}$$

21. 确定所有满足 $|a|=|b|=1$ 且 $a+b+a\bar{b}\in\mathbb{R}$ 的复数对 (a,b)。

方法一: 设 $a=e^{ix}$,$b=e^{iy}$, 其中 $x,y\in[0,2\pi)$。利用欧拉公式以及恒等式

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},\quad \sin(x-y)=2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$

得到

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(a+b+a\bar{b})&=(\sin x+\sin y)+\sin(x-y)\\&=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}+2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\\&=2\left(\sin\frac{x+y}{2}+\sin\frac{x-y}{2}\right)\cos\frac{x-y}{2}\\&=4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\cos\frac{x-y}{2}.\end{aligned}$$

因此,$a+b+a\bar{b}$ 为实数当且仅当

$$\sin\frac{x}{2}=0,\quad \cos\frac{y}{2}=0,\quad \text{或}\quad \cos\frac{x-y}{2}=0,$$

分别对应

$$x=2k\pi,\quad y=(2k+1)\pi,\quad x=y+(2k+1)\pi,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

所以解集为

$$(a,b)=(1,b),\quad (a,-1),\quad (a,-a),\quad \text{其中}|a|=|b|=1.$$

方法二: 注意到

$$a+b+a\bar{b}\in\mathbb{R}\iff 1+a+b+a\bar{b}\in\mathbb{R}.$$

设 $c\in\mathbb{C}$ 且 $a=c^2$, 则

$$\bar{c}(1+a+b+a\bar{b})=\bar{c}+\bar{c}c^2+\bar{c}b+\bar{c}c^2\bar{b}=\bar{c}+c+\bar{c}b+c\bar{b}\in\mathbb{R},$$

利用 $\bar{c}c=1$ 以及 $z+\bar{z}\in\mathbb{R}$。因此要么 $c\in\mathbb{R}$, 要么 $1+a+b+a\bar{b}=0$。第一种情况 $c=\pm1$, 于是 $a=1$。第二种情况将等式因式分解为

$$(a+b)(1+\bar{b})=1+a+b+a\bar{b}=0,$$

得到 $a=-b$ 或 $b=-1$。所以得到的三族解为:

$$(a,b)=(1,b),\quad (a,-1),\quad (a,-a),\quad |a|=|b|=1.$$

22. 已知两复数 z_1,z_2 满足 $|z_1-(3+3i)|=2, |iz_2-1|=1$, 求 $|z_1-z_2|$ 的最小值。

由 $|z_1-(3+3i)|=2, P(z_1)$ 在圆

$$C_1:(x-3)^2+(y-3)^2=2^2$$

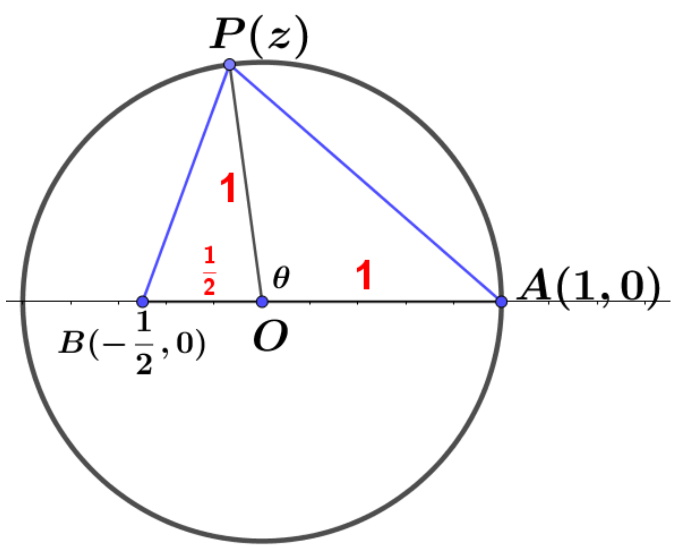
上, 设 $z_2=a+bi$, 则 $iz_2-1=(-1-b)+ai$, 故 $|iz_2-1|=1$ 意味 $Q(z_2)$ 在圆

$$C_2:x^2+(y+1)^2=1$$

上, 故 $|z_1-z_2|=PQ$ 的最小值为

$$\text{两圆心距离}-\text{两圆半径和}=\sqrt{3^2+4^2}-(2+1)=2$$

23. 设 α 为 $\left|(z-1)\left(z+\dfrac{1}{2}\right)\right|$ 在圆盘上 $\{z\in\mathbb{C}:|z|\leqslant 1\}$ 的最大值, 则 $\alpha^2=?$



如图,P 在圆周上,$A(1,0), B\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$, 则

$$PA\cdot PB=\left|(z-1)\left(z+\frac{1}{2}\right)\right|$$

设 $\theta=\angle POA$, 在 $\triangle POA$ 及 $\triangle POB$ 中, 由余弦定理,

$$PA^2=1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cdot\cos\theta=2-2\cos\theta$$

$$PB^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\cdot 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\cos(\pi-\theta) = \cos\theta + \frac{5}{4}$$

因此

$$f(\theta) = (2-2\cos\theta)\left(\cos\theta + \frac{5}{4}\right) = -2\cos^2\theta - \frac{1}{2}\cos\theta + \frac{5}{2}$$

且

$$\alpha^2 = f\left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{81}{32}$$

24. 设有一虚部不为零的复数 z, 其长度为 2, 且在复数平面上与 -2 及 z^2 刚好在同一直线上, 与 1 及 z^3 也同在另一直线上, 试求以 z, z^2, z^3 所围成的三角形面积。

由 $1, z, z^3$ 共线可得

$$\frac{z^3-z}{z-1} = k \in \mathbb{R} \Rightarrow z^2 + z - k = 0 \Rightarrow z = \frac{-1\pm\sqrt{1+4k}}{2}$$

其中 z 实部为 $-\frac{1}{2}$, 由 $-2, z, z^2$ 共线可得

$$\frac{z^2-z}{z+2} = t \in \mathbb{R} \Rightarrow z^2 - (t+1)z - 2t = 0 \Rightarrow z = \frac{t+1\pm\sqrt{(t+1)^2+8t}}{2}$$

因此

$$\frac{t+1}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow t = -2$$

代入得

$$z = \frac{-1\pm\sqrt{15}\,i}{2}.$$

取 $z = \frac{-1+\sqrt{15}\,i}{2}$, 则

$$z^2 = \frac{-7-\sqrt{15}\,i}{2}, \quad z^3 = \frac{11-3\sqrt{15}\,i}{2}.$$

z, z^2, z^3 在复平面上的坐标为

$$A(z) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right), \quad B(z^2) = \left(-\frac{7}{2}, -\frac{\sqrt{15}}{2}\right), \quad C(z^3) = \left(\frac{11}{2}, -\frac{3\sqrt{15}}{2}\right).$$

故所求面积为

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{15}}{2} & 1 \\ -\frac{7}{2} & -\frac{\sqrt{15}}{2} & 1 \\ \frac{11}{2} & -\frac{3\sqrt{15}}{2} & 1 \end{vmatrix} = 6\sqrt{15}$$

25. 若实数 m,n 使得关于 x 的方程 $x^3+mx+n=0$ 有模为 3 的虚根, 求 $m+n$ 的取值范围。

由于系数皆为实数, 设三根为 $a+bi$, $a-bi$, $-2a$, 其中 $a,b\in\mathbb{R}$, $a^2+b^2=9$, $b\neq 0$。

由韦达定理,

$$m=(a+bi)(a-bi)+(-2a)(a+bi+a-bi)=9-4a^2$$

$$n=(a+bi)(a-bi)(-2a)=-18a$$

所以

$$m+n=9-4a^2+18a=-4\left(a-\frac{9}{4}\right)^2+\frac{117}{4}$$

又 $a^2<9, -3<a<3$, 则

$$m+n\in\left(-81,\ \frac{117}{4}\right]$$

26. 关于 z 的方程 $z^{n+1}-\sqrt{3}z^n-1=0$ 存在一个模为 1 的虚根, 求正整数 n 的最小值。

设该虚根为 $z_0=e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$, 有

$$z_0^n(z_0-\sqrt{3})=1$$

两边取模得

$$|z_0^n||z_0-\sqrt{3}|=1$$

由于 $|z_0^n|=1$, 从而

$$|z_0-\sqrt{3}|=1$$

将 $z_0=e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 代入得

$$|(\cos\theta-\sqrt{3})+i\sin\theta|=1$$

于是

$$(\cos\theta-\sqrt{3})^2+\sin^2\theta=1\Rightarrow\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

得 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$, 即 $z_0=e^{i\frac{\pi}{6}}$, 代入 $z_0^n(z_0-\sqrt{3})=1$ 得:

$$\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^n\left(e^{i\frac{\pi}{6}}-\sqrt{3}\right)=e^{i\frac{n\pi}{6}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i-\sqrt{3}\right)=e^{i\frac{n\pi}{6}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=1$$

注意到 $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=e^{i\frac{5\pi}{6}}$, 变为

$$e^{i\frac{n\pi}{6}}\cdot e^{i\frac{5\pi}{6}}=e^{i\frac{(n+5)\pi}{6}}=1\Rightarrow\frac{(n+5)\pi}{6}=2k\pi\Rightarrow n=12k-5$$

令 $k=1$ 得最小正整数解为 $n=7$.

27. 已知复数 z_1, z_2, z_3 满足

$$\begin{cases} |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \\ \dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_3} + \dfrac{z_3}{z_1} = 1 \end{cases}$$

求 $|z_1 + 2z_2 + 3z_3|$ 最大可能值。

设存在一三次多项式, 根为 $\dfrac{z_1}{z_2}, \dfrac{z_2}{z_3}, \dfrac{z_3}{z_1}$, 则

$$\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} = 1$$

$$\frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_2}{z_3} \cdot \frac{z_3}{z_1} = 1$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_2}{z_3} \cdot \frac{z_3}{z_1} + \frac{z_3}{z_1} \cdot \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1}{z_3} + \frac{z_2}{z_1} + \frac{z_3}{z_2} \\ &= \overline{\left(\frac{z_3}{z_1}\right)} + \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} + \overline{\left(\frac{z_2}{z_3}\right)} = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1}\right)} = 1 \end{aligned}$$

因此该多项式为

$$f(x) = x^3 - x^2 + x - 1 = (x^2 + 1)(x - 1),$$

根为 $x = 1, \pm i$; 为使 $|z_1 + 2z_2 + 3z_3|$ 最大, 取

$$\frac{z_2}{z_3} = 1, \quad \frac{z_3}{z_1} = i, \quad \frac{z_1}{z_2} = -i,$$

则

$$z_2 = z_3 = 1, \quad z_1 = -i,$$

所以

$$|z_1 + 2z_2 + 3z_3| = |-i + 5| = \sqrt{26}$$

28. 设 z 为复数, 且满足 $|z + 1| > 2$。证明

$$|z^3 + 1| > 1.$$

注意到

$$z^3 + 1 = (z + 1)(z^2 - z + 1),$$

因此只需证明

$$|z^2-z+1|\geqslant\frac{1}{2}.$$

设

$$z+1=re^{i\varphi},$$

其中 $r=|z+1|>2$,φ 为某个实数。于是

$$\begin{aligned}z^2-z+1&=(re^{i\varphi}-1)^2-(re^{i\varphi}-1)+1\\&=r^2e^{2i\varphi}-3re^{i\varphi}+3.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}|z^2-z+1|^2&=(r^2e^{2i\varphi}-3re^{i\varphi}+3)(r^2e^{-2i\varphi}-3re^{-i\varphi}+3)\\&=r^4+9r^2+9-(6r^3+18r)\cos\varphi+6r^2\cos 2\varphi\\&=r^4+9r^2+9-(6r^3+18r)\cos\varphi+6r^2(2\cos^2\varphi-1)\\&=12\left(r\cos\varphi-\frac{r^2+3}{4}\right)^2+\frac{1}{4}(r^2-3)^2.\end{aligned}$$

由于 $r>2$, 可得

$$|z^2-z+1|^2>\frac{1}{4},$$

从而

$$|z^2-z+1|>\frac{1}{2}.$$

因此

$$|z^3+1|=|z+1|\,|z^2-z+1|>2\cdot\frac{1}{2}=1.$$

证毕。

29. 复数 z_1,z_2,z_3,z_4,z_5 满足

$$\begin{cases}|z_1|\leqslant 1\\|z_2|\leqslant 1\\|2z_3-(z_1+z_2)|\leqslant|z_1-z_2|\\|2z_4-(z_1+z_2)|\leqslant|z_1-z_2|\\|2z_5-(z_3+z_4)|\leqslant|z_3-z_4|\end{cases}$$

求 $|z_5|$ 的最大值.

由

$$|z_1 - z_2| \geqslant |2z_3 - (z_1 + z_2)| \geqslant |2|z_3| - |z_1 + z_2||$$

我们有

$$|z_1 + z_2| - |z_1 - z_2| \leqslant 2|z_3| \leqslant |z_1 + z_2| + |z_1 - z_2|$$

由 AM-QM 不等式,

$$|z_3| \leqslant \frac{|z_1 + z_2| + |z_1 - z_2|}{2} \leqslant \sqrt{\frac{|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2}{2}} = \sqrt{\frac{2|z_1|^2 + 2|z_2|^2}{2}} \leqslant \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

同理可得 $|z_4| \leqslant \sqrt{2}$, 故

$$|z_5| \leqslant \frac{|z_3 + z_4|}{2} \leqslant \frac{|z_3| + |z_4|}{2} \leqslant \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

考虑等号何时成立: 当 $z_1 = 1, z_2 = i$ 时, $z_3 = 1 + i$; 当 $z_1 = -1, z_2 = i$ 时, $z_4 = -1 + i$; 当 $z_3 = 1 + i, z_4 = -1 + i$ 时, $z_5 = 2i$, 这时 $|z_5| = 2$. 故 $|z_5|_{\max} = 2$.

30. 设复数 z 满足 $|z| = 1$, 则 $|z^7 + \bar{z}^5 - 3z^3 - 3\bar{z}|$ 的最大值为

试 $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, 算得值为:

$$|z^7 + \bar{z}^5 - 3z^3 - 3\bar{z}| = |2i + 2 - 6i - 6| = | - 4i - 4| = \sqrt{16 + 16} = \boxed{4\sqrt{2}}$$

(待解)(设 $z = \cos\theta + i\sin\theta, \ldots$ 感觉是尝试因式分解再 AM-GM)

31. 证明:

(a) 如果 $z = \cos\theta + i\sin\theta$, 则

$$z^n + z^{-n} = 2\cos n\theta, \quad z^n - z^{-n} = 2i\sin n\theta.$$

由 De Moivre 定理:

$$z^n = \cos n\theta + i\sin n\theta, \quad z^{-n} = \cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta) = \cos n\theta - i\sin n\theta.$$

相加得到:

$$z^n + z^{-n} = (\cos n\theta + i\sin n\theta) + (\cos n\theta - i\sin n\theta) = 2\cos n\theta.$$

相减得到:

$$z^n - z^{-n} = (\cos n\theta + i\sin n\theta) - (\cos n\theta - i\sin n\theta) = 2i\sin n\theta.$$

(b) 证明

$$16\sin^5\theta = \sin 5\theta - 5\sin 3\theta + 10\sin\theta, \quad 32\cos^6\theta = \cos 6\theta + 6\cos 4\theta + 15\cos 2\theta + 10.$$

对于第一个恒等式，使用 $2i\sin\theta = z - z^{-1}$:

$$\begin{aligned}
(2i\sin\theta)^5 &= (z - z^{-1})^5 \\
32i^5\sin^5\theta &= z^5 - 5z^3z^{-2} + 10zz^{-4} - 10z^2z^{-3} + 5zz^{-4} - z^{-5} \\
32i\sin^5\theta &= (z^5 - z^{-5}) - 5(z^3 - z^{-3}) + 10(z - z^{-1}) \\
32i\sin^5\theta &= 2i\sin 5\theta - 10i\sin 3\theta + 20i\sin\theta \\
16\sin^5\theta &= \sin 5\theta - 5\sin 3\theta + 10\sin\theta.
\end{aligned}$$

对于第二个恒等式，使用 $2\cos\theta = z + z^{-1}$:

$$\begin{aligned}
(2\cos\theta)^6 &= (z + z^{-1})^6 \\
64\cos^6\theta &= (z^6 + z^{-6}) + 6(z^4 + z^{-4}) + 15(z^2 + z^{-2}) + 20 \\
64\cos^6\theta &= 2\cos 6\theta + 12\cos 4\theta + 30\cos 2\theta + 20 \\
32\cos^6\theta &= \cos 6\theta + 6\cos 4\theta + 15\cos 2\theta + 10.
\end{aligned}$$

32. 证明:

$$\cos^5\theta\sin^3\theta = \frac{1}{128}\Big(6\sin 2\theta + 2\sin 4\theta - 2\sin 6\theta - \sin 8\theta\Big)$$

设 $z = \cos\theta + i\sin\theta$，则

$$z^n = \cos n\theta + i\sin n\theta, \quad z^{-n} = \cos n\theta - i\sin n\theta,$$

并且

$$z^n + z^{-n} = 2\cos n\theta, \quad z^n - z^{-n} = 2i\sin n\theta.$$

使用 $2\cos\theta = z + z^{-1}$ 得:

$$\begin{aligned}
(2\cos\theta)^5 &= (z + z^{-1})^5 \\
32\cos^5\theta &= z^5 + 5z^4z^{-1} + 10z^3z^{-2} + 10z^2z^{-3} + 5zz^{-4} + z^{-5} \\
32\cos^5\theta &= (z^5 + z^{-5}) + 5(z^3 + z^{-3}) + 10(z + z^{-1}) \\
16\cos^5\theta &= \cos 5\theta + 5\cos 3\theta + 10\cos\theta.
\end{aligned}$$

利用 $4\sin^3\theta = 3\sin\theta - \sin 3\theta$，得到

$$16\cos^5\theta \cdot 4\sin^3\theta = (\cos 5\theta + 5\cos 3\theta + 10\cos\theta)(3\sin\theta - \sin 3\theta).$$

展开并使用和差化积公式:

$$\begin{aligned}
64\cos^5\theta\sin^3\theta &= 3\cos 5\theta\sin\theta - \cos 5\theta\sin 3\theta + 15\cos 3\theta\sin\theta - 5\cos 3\theta\sin 3\theta \\
&\quad + 30\cos\theta\sin\theta - 10\cos\theta\sin 3\theta \\
&= \frac{3}{2}(\sin 6\theta - \sin 4\theta) - \frac{1}{2}(\sin 8\theta - \sin 2\theta) + \frac{15}{2}(\sin 4\theta - \sin 2\theta) \\
&\quad - \frac{5}{2}\sin 6\theta + \frac{30}{2}\sin 2\theta - \frac{10}{2}\sin 4\theta \\
128\cos^5\theta\sin^3\theta &= 6\sin 2\theta + 2\sin 4\theta - 2\sin 6\theta - \sin 8\theta.
\end{aligned}$$

因此

$$\cos^5\theta\sin^3\theta = \frac{1}{128}\Big(6\sin 2\theta + 2\sin 4\theta - 2\sin 6\theta - \sin 8\theta\Big).$$

33. 定义无穷级数

$$\begin{aligned}
C &= \cos\theta + \frac{1}{2}\cos 5\theta + \frac{1}{4}\cos 9\theta + \cdots \\
S &= \sin\theta + \frac{1}{2}\sin 5\theta + \frac{1}{4}\sin 9\theta + \cdots
\end{aligned}$$

证明

$$C + iS = \frac{2e^{i\theta}}{2 - e^{4i\theta}}, \qquad S = \frac{4\sin\theta + 2\sin 3\theta}{5 - 4\cos 4\theta}$$

记

$$\begin{aligned}
C + iS &= \cos\theta + i\sin\theta + \frac{1}{2}(\cos 5\theta + i\sin 5\theta) + \frac{1}{4}(\cos 9\theta + i\sin 9\theta) + \cdots \\
&= e^{i\theta} + \frac{1}{2}e^{i5\theta} + \frac{1}{4}e^{i9\theta} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}e^{i(4k+1)\theta} = e^{i\theta}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{e^{4i\theta}}{2}\right)^k
\end{aligned}$$

这是一个公比为 $\dfrac{e^{4i\theta}}{2}$ 的等比级数，其模为 $\dfrac{1}{2} < 1$，因此级数收敛:

$$C + iS = \frac{e^{i\theta}}{1 - \frac{1}{2}e^{4i\theta}} = \frac{2e^{i\theta}}{2 - e^{4i\theta}}$$

又

$$C + iS = \frac{2e^{i\theta}}{2 - e^{4i\theta}} \cdot \frac{2 - e^{-4i\theta}}{2 - e^{-4i\theta}} = \frac{4e^{i\theta} - 2e^{-3i\theta}}{|2 - e^{4i\theta}|^2} = \frac{(4\cos\theta - 2\cos 3\theta) + i(4\sin\theta + 2\sin 3\theta)}{(2 - \cos 4\theta)^2 + \sin^2 4\theta}$$

因此
$$S=\Im(C+iS)=\frac{4\sin\theta+2\sin 3\theta}{5-4\cos 4\theta}$$

34. 证明下列无穷级数的和:
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin(n\theta)}{n!}=e^{-\cos\theta}\sin(\sin\theta).$$

步骤 1: 定义两个级数 C 与 S

$$C=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos(n\theta)}{n!},\quad S=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin(n\theta)}{n!}.$$

步骤 2: 使用复数形式合并

$$C+iS=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(e^{i\theta})^n}{n!}.$$

步骤 3: 识别指数级数

$$C+iS=e^{i\theta}-\frac{(e^{i\theta})^2}{2!}+\frac{(e^{i\theta})^3}{3!}-\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(e^{i\theta})^n}{n!}.$$

利用指数函数展开式:
$$e^{-z}=1-z+\frac{z^2}{2!}-\frac{z^3}{3!}+\cdots\implies\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}z^n}{n!}=1-e^{-z}.$$

取 $z=e^{i\theta}$, 得到:
$$C+iS=1-e^{-e^{i\theta}}=1-e^{-(\cos\theta+i\sin\theta)}=1-e^{-\cos\theta}e^{-i\sin\theta}.$$

步骤 4: 分离实部和虚部

$$C+iS=1-e^{-\cos\theta}[\cos(\sin\theta)-i\sin(\sin\theta)]=[1-e^{-\cos\theta}\cos(\sin\theta)]+i[e^{-\cos\theta}\sin(\sin\theta)].$$

步骤 5: 取虚部得到原级数和

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin(n\theta)}{n!}=\Im(C+iS)=e^{-\cos\theta}\sin(\sin\theta).$$

35. 求下列多项式方程的所有实数解，并在适当情况下用精确的三角形式表示:

$$x^7-7x^6-21x^5+35x^4+35x^3-21x^2-7x+1=0.$$

注意到系数呈现正负交替的规律，并且与二项式系数有关，因此考虑利用三角恒等式进行处理。

设

$$\cos\theta=C,\quad \sin\theta=S,$$

则

$$C+iS=\cos\theta+i\sin\theta.$$

由棣莫弗定理，

$$(C+iS)^7=\cos 7\theta+i\sin 7\theta.$$

另一方面，展开得

$$\begin{aligned}(C+iS)^7=&C^7+7iC^6S-21C^5S^2-35iC^4S^3\\&+35C^3S^4+21iC^2S^5-7CS^6-iS^7.\end{aligned}$$

比较实部与虚部，得到

$$\begin{aligned}\cos 7\theta&=C^7-21C^5S^2+35C^3S^4-7CS^6,\\ \sin 7\theta&=7C^6S-35C^4S^3+21C^2S^5-S^7.\end{aligned}$$

于是

$$\tan 7\theta=\frac{\sin 7\theta}{\cos 7\theta}.$$

令

$$T=\tan\theta=\frac{S}{C},$$

则

$$\tan 7\theta=\frac{7T-35T^3+21T^5-T^7}{1-21T^2+35T^4-7T^6}.$$

令 $\tan 7\theta=1$，得到

$$\frac{7T-35T^3+21T^5-T^7}{1-21T^2+35T^4-7T^6}=1,$$

整理可得

$$T^7-7T^6-21T^5+35T^4+35T^3-21T^2-7T+1=0.$$

这正是题目所给的多项式方程，其中 $T = x$。

由 $\tan 7\theta = 1$,

$$7\theta = \frac{\pi}{4} + n\pi,$$

从而

$$\theta = \frac{(4n+1)\pi}{28}, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

因此方程的所有实数解为

$$x_0 = \tan\frac{\pi}{28},$$
$$x_1 = \tan\frac{5\pi}{28},$$
$$x_2 = \tan\frac{9\pi}{28},$$
$$x_3 = \tan\frac{13\pi}{28},$$
$$x_4 = \tan\frac{17\pi}{28},$$
$$x_5 = \tan\frac{21\pi}{28} = -1,$$
$$x_6 = \tan\frac{25\pi}{28}.$$

36. (a) 证明:

$$\sin 7\theta = 7\sin\theta - 56\sin^3\theta + 112\sin^5\theta - 64\sin^7\theta$$

从棣莫弗定理出发，

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^7 = \cos 7\theta + i\sin 7\theta$$

由二项式定理展开左式，

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^7 = \sum_{k=0}^{7} {}^7C_k \cos^{7-k}\theta (i\sin\theta)^k$$

比较虚部项系数得

$$\sin 7\theta = {}^7C_1\cos^6\theta\sin\theta - {}^7C_3\cos^4\theta\sin^3\theta + {}^7C_5\cos^2\theta\sin^5\theta - {}^7C_7\sin^7\theta$$

由恒等式 $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$，令 $s = \sin\theta$，则有

$$\sin 7\theta = 7(1-s^2)^3 s - 35(1-s^2)^2 s^3 + 21(1-s^2)s^5 - s^7 = 7s - 56s^3 + 112s^5 - 64s^7$$

故得证。

(b) 据此, 解方程

$$1+7x-56x^3+112x^5-64x^7=0$$

原方程

$$1+7x-56x^3+112x^5-64x^7=0$$

可写为

$$1+\sin 7\theta=0 \Rightarrow \sin 7\theta=-1$$

解得

$$7\theta=\ldots,-\frac{5\pi}{2},-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{7\pi}{2},\cdots \Rightarrow \theta=\ldots,-\frac{5\pi}{14},-\frac{\pi}{14},\frac{3\pi}{14},\frac{7\pi}{14},\ldots$$

所以

$$x=\sin\theta=\sin\left(-\frac{5\pi}{14}\right),\sin\left(-\frac{\pi}{14}\right),\sin\frac{3\pi}{14},\sin\frac{7\pi}{14}=-0.901,-0.223,0.623,1$$

(c) 通过构造合适的多项式方程式, 证明

$$\csc^2\left(\frac{\pi}{7}\right)+\csc^2\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\csc^2\left(\frac{3\pi}{7}\right)=8.$$

由

$$\sin 7\theta=0$$

可得解

$$\theta=0,\ \frac{\pi}{7},\ \frac{2\pi}{7},\ \frac{3\pi}{7},\ \ldots$$

利用三角恒等式

$$\sin 7\theta=7\sin\theta-56\sin^3\theta+112\sin^5\theta-64\sin^7\theta,$$

得

$$-\sin\theta\big(64\sin^6\theta-112\sin^4\theta+56\sin^2\theta-7\big)=0.$$

对非零解 $\theta\neq 0$, 令

$$Z=\sin^2\theta,$$

则

$$64Z^3 - 112Z^2 + 56Z - 7 = 0.$$

设该三次方程的三个正根为

$$\alpha = \sin^2 \frac{\pi}{7}, \quad \beta = \sin^2 \frac{2\pi}{7}, \quad \gamma = \sin^2 \frac{3\pi}{7}.$$

由韦达定理,

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= \frac{112}{64} = \frac{7}{4}, \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha &= \frac{56}{64} = \frac{7}{8}, \\ \alpha\beta\gamma &= \frac{7}{64}. \end{aligned}$$

注意到

$$\sin \frac{\pi}{7} = \sin \frac{6\pi}{7}, \quad \sin \frac{2\pi}{7} = \sin \frac{5\pi}{7}, \quad \sin \frac{3\pi}{7} = \sin \frac{4\pi}{7},$$

因此上述三根正好对应所需角度。

于是

$$\begin{aligned} \csc^2 \frac{\pi}{7} + \csc^2 \frac{2\pi}{7} + \csc^2 \frac{3\pi}{7} &= \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \\ &= \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} \\ &= \frac{\frac{7}{8}}{\frac{7}{64}} \\ &= 8. \end{aligned}$$

证毕。

37. (a) 证明

$$(1 + i \tan \theta)^4 + (1 - i \tan \theta)^4 = \frac{2 \cos 4\theta}{\cos^4 \theta}.$$

(b) 利用 (a) 的结果, 通过构造合适的多项式, 进一步证明:

i. $\tan^2 \left(\frac{\pi}{8}\right) \tan^2 \left(\frac{3\pi}{8}\right) = 1$

ii. $\tan^2 \left(\frac{\pi}{8}\right) + \tan^2 \left(\frac{3\pi}{8}\right) = 6$

(a) 从左边开始:

$$\begin{aligned}(1+i\tan\theta)^4+(1-i\tan\theta)^4 &= \left(1+i\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^4+\left(1-i\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^4\\ &= \left(\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta}\right)^4+\left(\frac{\cos\theta-i\sin\theta}{\cos\theta}\right)^4\\ &= \frac{(\cos\theta+i\sin\theta)^4+(\cos\theta-i\sin\theta)^4}{\cos^4\theta}.\end{aligned}$$

由棣莫弗定理,

$$(\cos\theta\pm i\sin\theta)^4=\cos 4\theta\pm i\sin 4\theta.$$

因此

$$\begin{aligned}(1+i\tan\theta)^4+(1-i\tan\theta)^4 &= \frac{\cos 4\theta+i\sin 4\theta+\cos 4\theta-i\sin 4\theta}{\cos^4\theta}\\ &= \frac{2\cos 4\theta}{\cos^4\theta},\end{aligned}$$

结论得证。

(b) 当 $\cos 4\theta=0$ 时, 由 (a) 可得

$$(1+i\tan\theta)^4+(1-i\tan\theta)^4=0.$$

令 $z=i\tan\theta$, 则

$$(1+z)^4+(1-z)^4=0.$$

展开得

$$\begin{aligned}(1+4z+6z^2+4z^3+z^4)+(1-4z+6z^2-4z^3+z^4) &= 0\\ 2+12z^2+2z^4 &= 0,\end{aligned}$$

即

$$z^4+6z^2+1=0.$$

设其四个根为

$$i\tan\frac{\pi}{8},\quad i\tan\frac{3\pi}{8},\quad i\tan\frac{5\pi}{8},\quad i\tan\frac{7\pi}{8}.$$

(i) 由常数项与首项系数之比,

$$\alpha\beta\gamma\delta=1.$$

利用 $\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$,
$$\tan^2\left(\frac{\pi}{8}\right)\tan^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)=1.$$

(ii) 由二次项系数,
$$\alpha\beta+\alpha\gamma+\cdots+\gamma\delta=6,$$
同样配对并利用对称性, 可得
$$\tan^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+\tan^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)=6.$$

38. 设 $w=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$, (a) 证明 $1+w+w^2+w^3+w^4=0$. (b) 求 $(1-w)(1-w^2)(1-w^3)(1-w^4)$. (c) 证明 $(1-w)(1-w^4)=4\sin^2\frac{\pi}{5}$. (d) 证明 $(1-w^2)(1-w^3)=4\sin^2\frac{2\pi}{5}$. (e) 证明 $\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}}{4}$.

(a) 因为 $w^5=(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5})^5=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$, 且 $w\neq 1$, 所以
$$w^5-1=0\implies (w-1)(1+w+w^2+w^3+w^4)=0\implies 1+w+w^2+w^3+w^4=0.$$

(b) 考虑乘积 $P=(1-w)(1-w^2)(1-w^3)(1-w^4)$。使用共轭与代数关系:
$$\begin{aligned}
P&=(1-w)(1-w^2)(1-w^3)(1-w^4)\\
&=(1-w)(1-w^4)(1-w^2)(1-w^3)\\
&=[2-(w+w^4)][2-(w^2+w^3)]\\
&=4-2(w+w^4+w^2+w^3)+(w+w^4)(w^2+w^3)\\
&=4-2(-1)+(w+w^4)(w^2+w^3)\quad(\text{由}1+w+\cdots+w^4=0)\\
&=6+(w^3+w^4+w^6+w^7)\\
&=6+(w^3+w^4+w+w^2)\quad(w^5=1\implies w^6=w,w^7=w^2)\\
&=6+(-1)\\
&=5.
\end{aligned}$$

(c) $(1-w)(1-w^4)$:

$$\begin{aligned}(1-w)(1-w^4) &= 1-w-w^4+w^5 = 2-(w+w^4)\\ &= 2-\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}+i\sin\frac{8\pi}{5}\right)\\ &= 2-2\cos\frac{2\pi}{5}\\ &= 2\left(1-\cos\frac{2\pi}{5}\right) = 2\cdot 2\sin^2\frac{\pi}{5} = 4\sin^2\frac{\pi}{5}.\end{aligned}$$

(d) $(1-w^2)(1-w^3)$:

$$\begin{aligned}(1-w^2)(1-w^3) &= 1-w^2-w^3+w^5 = 2-(w^2+w^3)\\ &= 2-(\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5})\\ &= 2-2\cos\frac{4\pi}{5}\\ &= 2\left(1-\cos\frac{4\pi}{5}\right) = 2\cdot 2\sin^2\frac{2\pi}{5} = 4\sin^2\frac{2\pi}{5}.\end{aligned}$$

(e) 由前面结果可知:

$$\begin{aligned}16\sin^2\frac{\pi}{5}\sin^2\frac{2\pi}{5} &= (1-w)(1-w^2)(1-w^3)(1-w^4) = 5,\\ \sin^2\frac{\pi}{5}\sin^2\frac{2\pi}{5} &= \frac{5}{16},\\ \sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5} &= \pm\frac{\sqrt{5}}{4}.\end{aligned}$$

因为 $0<\frac{\pi}{5}<\frac{\pi}{2}$ 且 $0<\frac{2\pi}{5}<\frac{\pi}{2}$, 所以

$$\sin\frac{\pi}{5}>0,\quad \sin\frac{2\pi}{5}>0,$$

于是

$$\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5}>0 \implies \sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}}{4}.$$

39. 设 $S_n = a^n + b^n$, 其中 a, b 是方程 $x^2+x+1=0$ 的根, 求

$$\sum_{n=0}^{1729}(-1)^n S_n$$

方程根为 $a=\omega$, $b=\omega^2$, 其中 $\omega=e^{2\pi i/3}$, 满足 $\omega^3=1$。

设 $S_n=\omega^n+\omega^{2n}$, 发现 S_n 是周期为 3 的数列:

$$S_0=2,\quad S_1=-1,\quad S_2=-1$$

将原式写成

$$\sum_{k=0}^{576}\left[(-1)^{3k}S_{3k}+(-1)^{3k+1}S_{3k+1}+(-1)^{3k+2}S_{3k+2}\right]+(-1)^{1728}S_{1728}+(-1)^{1729}S_{1729}$$

前面 576 组和为 0, 剩余

$$(-1)^{1728}S_{1728}+(-1)^{1729}S_{1729}=1\cdot 2+(-1)\cdot(-1)=3$$

40. 设 $\omega\in\mathbb{C}$、$\omega\neq 1$、且 $\omega^7=1$, 计算:

$$\prod_{k=0}^{6}(\omega^{2k}+2\omega^k+4)$$

设方程 $x^7-1=0$ 的根为 $1,\omega,\omega^2,\ldots,\omega^6$, 则

$$\prod_{k=0}^{6}\left((\omega^k)^2+2\omega^k+4\right)=\prod_{k=0}^{6}\frac{(\omega^k)^3-8}{\omega^k-2}$$

由于 $(\omega^0,\omega^3,\omega^6,\omega^9,\omega^{12},\omega^{15},\omega^{18})=(\omega^0,\omega^3,\omega^6,\omega^2,\omega^5,\omega^1,\omega^4)$, 因此:

$$\prod_{k=0}^{6}((\omega^k)^3-8)=\prod_{j=0}^{6}(\omega^j-8)$$

又因为 $x^7-1=\prod_{j=0}^{6}(x-\omega^j)$, 令 $x=8$, 得

$$\prod_{j=0}^{6}(\omega^j-8)=-(8^7-1)=1-8^7$$

同理, 令 $x=2$ 得

$$\prod_{j=0}^{6}(\omega^j-2)=-(2^7-1)=1-2^7$$

因此原式为:

$$\frac{1-8^7}{1-2^7}=16513$$

41. 令 $\omega=\cos\dfrac{2\pi}{111}+i\sin\dfrac{2\pi}{111}$, 其中 $i=\sqrt{-1}$, 求

$$\sum_{k=1}^{110}\frac{\omega^{2k}}{\omega^k-1}$$

由 $\omega=\cos\dfrac{2\pi}{111}+i\sin\dfrac{2\pi}{111}$ 可知

$$\omega^{111}-1=0\Rightarrow\sum_{k=0}^{110}\omega^k=0$$

因此

$$\sum_{k=1}^{110}\frac{\omega^{2k}}{\omega^k-1}=\sum_{k=1}^{110}\left(\omega^k+1+\frac{1}{\omega^k-1}\right)=-1+110+\sum_{k=1}^{110}\frac{1}{\omega^k-1}\tag{1}$$

设

$$f(x)=\sum_{k=0}^{110}x^k=\prod_{k=1}^{110}(x-\omega^k)$$

则

$$f'(x)=\sum_{k=1}^{110}kx^{k-1}=\sum_{m=1}^{110}\prod_{k=1,k\neq m}^{110}(x-\omega^k)$$

于是

$$g(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}=\sum_{k=1}^{110}\frac{1}{x-\omega^k}$$

令 $x=1$,

$$g(1)=\frac{111\cdot\frac{110}{2}}{111}=\sum_{k=1}^{110}\frac{1}{1-\omega^k}\Rightarrow\sum_{k=1}^{110}\frac{1}{\omega^k-1}=-55$$

代入 (1) 得

$$\sum_{k=1}^{110}\frac{\omega^{2k}}{\omega^k-1}=-1+110-55=54$$

42. 设 $z=\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}$, 求

$$\left|1+2z+3z^2+\cdots+2016z^{2015}\right|$$

记

$$S=1+2z+3z^2+\cdots+2016z^{2015}$$

考虑函数

$$f(x)=x+x^2+\cdots+x^{2016}=\frac{x(x^{2016}-1)}{x-1},$$

则有

$$S=f'(z)$$

求导:

$$f'(x)=\frac{[(x^{2016}-1)+2016x^{2016}](x-1)-x(x^{2016}-1)}{(x-1)^2}$$

设 $z=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=e^{\frac{i\pi}{6}}$, 由棣莫弗定理得

$$z^{2016}=\left(e^{i\pi/6}\right)^{2016}=e^{i\cdot 336\pi}=1$$

于是

$$f'(z)=\frac{2016(z-1)}{(z-1)^2}=\frac{2016}{z-1}\Rightarrow|S|=\frac{2016}{|z-1|}$$

而

$$z-1=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)+\frac{1}{2}i$$

$$|z-1|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$

所以

$$|S|=\frac{2016\cdot 2}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=1008\sqrt{2}+1008\sqrt{6}$$

43. 设 $\omega=e^{\frac{2\pi i}{n}}$, 求

$$-\sum_{k=1}^{n-1}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n-1}(\omega^k-\omega^j).$$

设

$$P(x)=\prod_{k=1}^{n-1}(x-\omega^k)=\frac{x^n-1}{x-1}=x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1$$

则

$$P'(x) = (n-1)x^{n-2} + (n-2)x^{n-3} + \cdots + 1$$

于是

$$\sum_{k=1}^{n-1}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n-1}(\omega^k - \omega^j) = -\sum_{k=1}^{n-1} P'(\omega^k)$$

观察到由于 $\omega^n = 1$,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{(n-1)k} = \begin{cases} n, & k=0 \\ \dfrac{1-\omega^{nk}}{1-\omega^k} = 0, & k\neq 0 \end{cases}$$

因此

$$\sum_{k=0}^{n-1} P'(\omega^k) = 0 + \cdots + 0 + n = n$$

故

$$\sum_{k=1}^{n-1}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n-1}(\omega^k - \omega^j) = -\sum_{k=1}^{n-1} P'(\omega^k) = -(n - P'(1)) = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$$

44. 设复数平面上三点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ 可连成正三角形 ABC, 已知 α, β, γ 满足

$$\alpha^4 - 2\alpha^3\beta + (\beta^2 - 4)\alpha^2 + 8\alpha\gamma - 4\gamma^2 = 0$$

且 α 的实部和虚部均为正数, 当 $\triangle ABC$ 的重心 G 为 $\frac{\alpha}{2^{110}}$ 时, 求 β 及 γ 各为何?

由 $G = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} = \frac{\alpha}{2^{110}}$, 可得

$$\beta + \gamma = \frac{3\alpha}{2^{110}} - \alpha.$$

又因 ABC 是正三角形, 满足

$$\beta = \alpha + (\gamma - \alpha)\omega,$$

其中 $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$。

将 β 与 γ 表示式代入原方程, 化简可得

$$\alpha^4 - 2\alpha^3\left[\alpha + (\gamma-\alpha)\omega\right] + \left[(\alpha + (\gamma-\alpha)\omega)^2 - 4\right]\alpha^2 + 8\alpha\gamma - 4\gamma^2 = 0.$$

经过整理与代数运算, 可解得

$$\alpha = 2 + 2i.$$

代回 $\beta+\gamma$ 与正三角形条件, 可得

$$\beta=1+(2+\sqrt{3})i,\quad \gamma=1+(2-\sqrt{3})i$$

(待验证)

45. 设 $P(z)$ 是一个 n 次复系数多项式, 其所有零点都位于复平面的单位圆上。证明多项式

$$\tilde{P}(z)=2zP'(z)-nP(z)$$

的所有零点也都位于同一单位圆上。

不妨只考虑首项系数为 1 的多项式。设

$$P(z)=(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n),$$

其中 $|\alpha_j|=1, j=1,2,\ldots,n$, 并允许这些复数 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 相同。

计算得

$$\tilde{P}(z)=2zP'(z)-nP(z)=(z+\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n)+\cdots+(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z+\alpha_n)$$

因此

$$\frac{\tilde{P}(z)}{P(z)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{z+\alpha_k}{z-\alpha_k}$$

注意到对任意复数 z,α 且 $z\neq\alpha$, 都有

$$\operatorname{Re}\frac{z+\alpha}{z-\alpha}=\frac{|z|^2-|\alpha|^2}{|z-\alpha|^2}$$

于是, 在当前情形下,

$$\operatorname{Re}\frac{\tilde{P}(z)}{P(z)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{|z|^2-|\alpha_k|^2}{|z-\alpha_k|^2}$$

由于 $|\alpha_k|=1$, 可知当 $|z|\neq 1$ 时, 上式不为零。

因此, 若 $\tilde{P}(z)=0$, 则必有

$$\operatorname{Re}\frac{\tilde{P}(z)}{P(z)}=0,$$

从而推出 $|z|=1$。这说明 $\tilde{P}(z)$ 的所有零点也都位于单位圆上。

46. 复数平面上以原点为中心的单位圆中, 有一内接四边形, 其顶点为 z_1, z_2, z_3, z_4, 设

$$S_n = z_1^n + z_2^n + z_3^n + z_4^n$$

且 $S_1 = 0$ 且 $S_2 = 1$,

(a) 证明: 若

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = 1, \quad z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$$

则 z_1, z_2, z_3, z_4 为一个矩形的顶点。

设

$$f(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4) = z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d$$

由 $S_1 = z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$ 得 $a = 0$, 又由于 $|z_k| = 1$, 有 $\bar{z}_k = \dfrac{1}{z_k}$, 于是

$$\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3} + \overline{z_4} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} + \frac{1}{z_4} = 0$$

即

$$z_2z_3z_4 + z_1z_3z_4 + z_1z_2z_4 + z_1z_2z_3 = 0$$

所以 $c = 0$, 因此

$$f(z) = z^4 + bz^2 + d$$

为偶函数, 四根关于原点成对对称, 于是可设

$$z_1 + z_3 = 0, z_2 + z_4 = 0$$

此时两对顶点互为相反数, 对角线过原点, 且 $|z_1| = |z_2| = 1$, 故为内接矩形。

(b) 计算该矩形的面积。

设

$$z_1 = a + bi, \quad z_2 = -a + bi, \quad z_3 = -a - bi, \quad z_4 = a - bi$$

由 $S_2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = 4(a^2 - b^2) = 1$ 得

$$a^2 - b^2 = \frac{1}{4}$$

又因 $|z_1| = 1$, 有 $a^2 + b^2 = 1$, 解得

$$a = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}, \quad b = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

故矩形面积为

$$2a\cdot 2b=\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{15}}{2}$$

参考出处

- Arts of Problem Solving (AoPS): Contest Collections
- Brilliant (Kudos to the unmonetized version in the past)
- International Mathematics Competition (IMC) for University Students
- Missouri Collegiate Mathematics Competition
- American Mathematics Competition 10
- University of Waterloo CEMC - Euclid, Fermat, Cayley, Hypatia, Galois
- Lehigh University High School Math Contest
- The USSR Olympiad Problem Book: Selected Problems and Theorems of Elementary Mathematics
- LetsSolveMathProblems - Weekly Math Challenges
- Maths 505 - Differential Equations
- Michael Penn
- TRML
- MadasMaths
- 中国复旦大学往年试题
- 雪隆森中学华罗庚杯数学比赛
- 厦门大学马来西亚分校-陈景润杯中学数学竞赛
- 微积分福音
- 线代启示录
- 福气老师
- 指考历届试题
- 统测历届试题与解答
- 印度人的作业
- 北京高考在线
- 朱式幸福教甄
- 普通型高级中学数学科能力竞赛 (决赛)
- 2014-2024 全国中学生数学竞赛联赛试题及答案汇总
- 如此醉的图书馆
- 菁优网
- 08 高考文科试题分类圆锥曲线
- 08 高考文科试题分类数列
- 福伦的数学笔记

总题数: 1441