2025 年循人中学高三期末考兼统考预试

高中组

高级数学 (III)

(SC007)

训练集

采题: 李冬恒

January 27, 2026

前言

此训练集的雏形要追溯到 2019 年, 依稀记得为当时的备赛爬了大量的 AMC 历届考题, 创了“AMC 10 精选”的文档, 其中我认为是属于统考范围的难题, 便收录于另一个文档。

尘封已久, 直到今年 5 月, 我在整理电脑资料时偶然翻出, 看着当年的内容, 心想: 读了一个数学系, 难免觉得发展空间实属不少。在这几个月内, 我随性地在网络上寻找、采集、整理更有趣 (恶心)、更值得深思 (烧脑) 的题目, 于是诞生了——高级数学 (III) 训练集。

起初, 我并没想过要为每一题整理出解析, 但发现到不少当年的题目只附答案没附解法。可惜的是, 我的脑袋算是停止运作了一年, 发现有一些题目对于现在的我实在是难以下咽。好吧, 此乃下下策, 但我决定用 LaTeX 开始动手为每一题补上解法、重写排版、增加新的内容。也好, 既是备忘录, 也是为了防止未来的我看到这些题目时会再次怀疑人生:「咦? 是不是百尺竿头, 更蠢一步?」

依据统考范围, 我把训练集大致分为代数、组合数学、几何及微积分。若你想自行动手尝试, 可以在 `preamble` 中将 `\printanswers` 这行注释掉。

绝大部分解法都由官方或我提供, 只有某些是 ChatGpt 生成后由我再校对, 之中一定会有纰漏, 欢迎批评指正, 也希望这份训练集能助你一路披荆斩棘、越战越勇!

——冬恒

目录

代数

组合数学

几何

微积分

总题数: 1509

代数

一元二次方程、多项式

1. 已知方程

$$x^2 - mx - m + 3 = 0$$

的两根满足下列条件, 求 m 的取值范围:

(a) 一根大于 1, 另一根小于 1

设 $f(x) = x^2 - mx - m + 3$, 所求即

$$f(1) = 1 - m - m + 3 < 0 \Rightarrow m > 2$$

(b) 一根小于 0, 另一根大于 2

即

$$\begin{cases} f(0) = -m + 3 < 0 \\ f(2) = 4 - 2m - m + 3 < 0 \end{cases} \Rightarrow m > 3$$

(c) 一根在 0 与 1 之间, 另一根在 1 与 2 之间

即

$$\begin{cases} f(0) = -m + 3 > 0 \\ f(1) = 1 - m - m + 3 < 0 \\ f(2) = 4 - 2m - m + 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow 2 < m < \frac{7}{3}$$

(d) 两根都在 -4 与 0 之间

即

$$\begin{cases} f(-4) = 16 + 4m - m + 3 > 0 \\ f(0) = -m + 3 > 0 \\ -4 < \dfrac{m}{2} < 0 \\ f\left(\dfrac{m}{2}\right) = \dfrac{m^2}{4} - \dfrac{m^2}{2} - m + 3 \leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{19}{3} < m < -6$$

(e) 两根都大于 -5

即

$$\begin{cases} f(-5)=25+5m-m+3>0 \\ \dfrac{m}{2}>-5 \\ f\left(\dfrac{m}{2}\right)=\dfrac{m^2}{4}-\dfrac{m^2}{2}-m+3\leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow -7<m\leqslant -6 \quad \text{或} \quad m\geqslant 2$$

(f) 有且仅有一根在 0 与 2 之间

即

$$\begin{cases} 0<\dfrac{m}{2}<2, \\ f\left(\dfrac{m}{2}\right)=\dfrac{m^2}{4}-\dfrac{m^2}{2}-m+3=0 \end{cases}$$

或

$$f(0)\cdot f(2)=(-m+3)(4-2m-m+3)<0$$

解得

$$m=2 \quad \text{或} \quad \frac{7}{3}<m<3$$

2. 已知 $y=x^3-x^2+3x-4$ 与 $y=ax^2-x-4$ 恰好相交于两点, 求 a 的可能值。

联立方程得

$$x[x^2-(a+1)x+4]=0$$

已知两线交于恰好两点, 其中一点为 $(0,4)$, 则意味

$$x^2-(a+1)x+4=0$$

有重根, 其判别式为零:

$$[-(a+1)]^2-4\cdot 1\cdot 4=0$$

解得 $a=3,-5$

3. 已知由 $f(x)=-x^2+4x+1$ 和 $g(x)=-x+5$ 所围成的封闭区域 A, 若作一直线 L 垂直于 x 轴, 分别与封闭区域 A 的边界交于 P,Q 两点, 求在封闭区域内的 $\overline{PQ}$ 长的最大值为多少?

令 $f(x)=g(x)$, 则

$$-x^2+4x+1=-x+5 \Rightarrow (x-1)(x-4)=0 \Rightarrow x=1,\ 4$$

所以封闭区域的 x 范围为 $[1,4]$, 而 $\overline{PQ}$ 即

$$f(x)-g(x)=(-x^2+4x+1)-(-x+5)=-x^2+5x-4=-\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$$

在 $x=\frac{5}{2}$ 时有最大值 $\frac{9}{4}$

4. 已知 k 为有理数, 且使得方程式 $kx^2+(k-1)x+(k+1)=0$ 只有整数解, 求 k 的所有可能值。

情况一:$k=0$, 则原方程式为

$$-x+1=0 \Rightarrow x=1 \in \mathbb{Z}$$

情况二:$k \neq 0$, 原方程式变为

$$k(x^2+x+1)=x-1 \Rightarrow k=\frac{x-1}{x^2+x+1} \tag{1}$$

设 α,β 为 $kx^2+(k-1)x+(k+1)=0$ 的两根, 则

$$\alpha+\beta=\frac{1-k}{k}=\frac{1}{k}-1$$

将 (1) 代入上式,

$$\alpha+\beta=\frac{x^2+x+1}{x-1}-1=x+1+\frac{3}{x-1} \in \mathbb{Z}$$

解得

$$x-1=\pm1,\pm3 \Rightarrow \begin{cases} x=2,4 \Rightarrow k=\frac{1}{7} \\ x=0,-2 \Rightarrow k=-1 \end{cases}$$

故 k 的所有可能值为 $-1,0,\frac{1}{7}$

5. 若抛物线 $y=mx^2-1$ 上必存在相异两点对称于直线 $x+y=0$, 求 m 的范围。

设 A, B 在抛物线 $\Gamma: y=mx^2-1$ 上且对称于直线 $L_1: x+y=0$, 则 A, B 同在直线

$$L_2: y=x+k$$

上, 其中 $L_1 \perp L_2$, 抛物线与 L_2 联立得

$$mx^2-x-1-k=0 \tag{1}$$

设 (1) 的解为 a, b, 则 $A(a, a+k), B(b, b+k)$ 的中点 $C\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}+k\right)$ 在 L_1 上, 得

$$\frac{a+b}{2}+\frac{a+b}{2}+k=0 \Rightarrow k=-(a+b)$$

由韦达定理,

$$k=-(a+b)=-\frac{1}{m}$$

且两实根相异, 则判别式大于 0:

$$\Delta=(-1)^2-4m(-\frac{1}{m}+1)>0 \Rightarrow m>\frac{3}{4}$$

6. 实系数二次多项方程 $f(x)=0$ 有一根为 2, 且方程 $f(f(x))=0$ 恰只有一实根为 5, 求 $f(0)$。

设

$$f(x)=a(x-2)(x-b)$$

则

$$\begin{aligned} g(x)=f(f(x)) &= a\left[a(x-2)(x-b)-2\right]\left[a(x-2)(x-b)-b\right] \\ &= a^3\left(x^2-(b+2)x+2b-\frac{2}{a}\right)\left(x^2-(b+2)x+2b-\frac{b}{a}\right) \quad \equiv a^3 f_1(x) f_2(x) \end{aligned}$$

若 $f_1=(x-5)^2$, f_2的判别式 <0, 可得

$$a=-\frac{2}{9},\ b=8$$

若 $f_2=(x-5)^2$, f_1的判别式 <0, 可得

$$a=-\frac{8}{9},\ b=8$$

但 f_1 判别式 >0, 故舍去; 因此

$$f(0)=2ab=2\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)\cdot 8=-\frac{32}{9}$$

7. 求所有实数 c, 使得 $f(x)=x^2+4x+c$ 满足 $f(f(x))$ 恰好有三个相异实根。

若 f 的根为重根, 则 $f\circ f$ 至多只有两个相异根, 因此 f 必须有两个相异根。设 r 为其中一根使得 $f(x)=r$ 有重根, 解

$$x^2+4x+c-r=(x+2)^2$$

得 $r=c-4$ 是 f 的根, 故

$$(c-4)^2+4(c-4)+c=0 \Rightarrow c=0 \text{ 或} c=3.$$

当 $c=0$, 解 $x^2+4x=0$ 及 $x^2+4x=-4$ 得

$$x=0,-4,-2,$$

当 $c=3$, 解 $x^2+4x+3=-3$ 及 $x^2+4x+3=-1$, 发现其中

$$x^2+4x+6$$

判别式为负, 故唯一满足条件的 c 为 0。

8. 求非零实数三元组 (a,b,c), 使得

$$(x^2+2ax+b)^2+2a(x^2+2ax+b)-b=(x-c)^4$$

是多项式恒等式。

设

$$P(x)=x^2+2ax+b, Q(x)=x^2+2ax-b,$$

且 $Q(P(x))$ 的根满足 $P(x)=r_1$ 或 $P(x)=r_2$, 其中 r_1,r_2 是 Q 的根。欲使 $Q(P(x))$ 只有一个四重根,Q 必须有重根, 因此判别式为

$$4a^2+4b=0 \Rightarrow b=-a^2,$$

其中根为 $-a$, 此时 $P(x)=-a$ 也必须有重根, 因此 $P(x)+a=x^2+2ax+b+a=0$ 的判别式为

$$4a^2-4(a+b)=0.$$

代入 $b=-a^2$ 解得

$$a=\frac{1}{2},\quad b=-\frac{1}{4}.$$

c 是 $P(x)+a=0$ 的解, 即 $c=-a=-\frac{1}{2}$, 所以三元组为

$$(a,b,c)=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4},-\frac{1}{2}\right)$$

9. 求所有实数 k, 使方程

$$4x^2+4(2-k)x-k^2=0$$

有两个实数解 x_1,x_2 满足 $|x_1|=2+|x_2|$。

由韦达定理,

$$x_1+x_2=k-2,\quad x_1x_2=-\frac{k^2}{4}\leqslant 0$$

条件 $|x_1|=2+|x_2|$ 等价于

$$4=(|x_1|-|x_2|)^2=x_1^2+x_2^2-2|x_1x_2|=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2+2x_1x_2$$

解得

$$k=0 \text{ 或 } 4$$

10. 解方程

$$(x+1)(x+2)(x+3)^2(x+4)(x+5)=360$$

排版后有

$$\begin{aligned}(x+1)(x+5)(x+2)(x+4)(x+3)(x+3)&=360\\(x^2+6x+5)(x^2+6x+8)(x^2+6x+9)&=360\end{aligned}$$

设 $y=x^2+6x$, 变为

$$\begin{aligned}(y+5)(y+8)(y+9)&=360\\y(y^2+22y+157)&=0\end{aligned}$$

其中 $y^2+22y+157=0$ 无实数解, 解 $x^2+6x=0$ 可得

$$x=0,-6$$

11. 解方程

$$9x^4-24x^3-2x^2-24x+9=0 \quad x\in\mathbb{R}$$

此方程为倒数方程式, 将原方程写成

$$9x^2-24x-2-\frac{24}{x}+\frac{9}{x^2}=0$$
$$9\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-24\left(x+\frac{1}{x}\right)-2=0$$

设 $y=x+\frac{1}{x}$, 则

$$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$$

代入方程得

$$9(y^2-2)-24y-2=0\Rightarrow y=\frac{10}{3},-\frac{2}{3}$$

当 $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{10}{3}$, 解得

$$x=\frac{1}{3},\quad x=3$$

当 $x+\dfrac{1}{x}=-\dfrac{2}{3}$, 方程

$$3x^2+2x+3=0$$

的判别式 $2^2-4\cdot3\cdot3=-32<0$, 故无实数解, 因此原方程式的实根为

$$x=\frac{1}{3},\quad x=3$$

12. 解

$$\frac{x^2+16x+54}{x^2+11x+35}=\frac{x^2+13x+35}{x^2+14x+54}$$

使得原式交叉相乘时能顺利平方差, 写成

$$\frac{x^2+15x+54+x}{x^2+12x+35-x}=\frac{x^2+12x+35+x}{x^2+15x+54-x}$$

$$(x^2+15x+54)^2-x^2=(x^2+12x+35)^2-x^2$$

$$(x^2+15x+54)^2-(x^2+12x+35)^2=0$$

再平方差得

$$(3x+19)(2x^2+27x+89)=0$$

经检验, 原方程的解为 $x=-\dfrac{19}{3},\dfrac{-27\pm\sqrt{17}}{4}$

13. 解

$$(x+1)^5+(x+1)^4(x-1)+(x+1)^3(x-1)^2+(x+1)^2(x-1)^3+(x+1)(x-1)^4+(x-1)^5=0$$

其中 $x\in\mathbb{C}$。

利用恒等式

$$\frac{a^6-b^6}{a-b}=a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5$$

则原式可写为

$$\frac{(x+1)^6-(x-1)^6}{(x+1)-(x-1)}=0(x+1)^6-(x-1)^6=0$$

展开并化简得

$$x(3x^2+1)(x^2+3)=0$$

解得

$$x=0,\quad x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}i,\quad x=\pm\sqrt{3}i$$

14. 已知 α,β 是方程

$$x^2+(m-2)x+1=0$$

的根, 求

$$(1+m\alpha+\alpha^2)(1+m\beta+\beta^2).$$

由于 α,β 是方程

$$x^2+mx-2x+1=0$$

的根, 故满足

$$\alpha^2+m\alpha+1=2\alpha,\quad \beta^2+m\beta+1=2\beta$$

于是

$$(1+m\alpha+\alpha^2)(1+m\beta+\beta^2)=(2\alpha)(2\beta)=4\alpha\beta$$

由韦达定理,$\alpha\beta=1$, 因此

$$(1+m\alpha+\alpha^2)(1+m\beta+\beta^2)=4\cdot 1=4$$

15. 若三次多项式 $x^3+3x-2=0$ 的根为 a,b,c, 求以 $(a-b)^2,(b-c)^2,(c-a)^2$ 为根且首项系数为 1 的三次多项式。

由韦达定理,

$$a+b+c=0,\quad ab+bc+ca=3,\quad abc=2.$$

且有

$$a^3+3a=b^3+3b=c^3+3c=2.$$

因此

$$a^3-b^3+3(a-b)=0\Rightarrow (a-b)\big(a^2+ab+b^2+3\big)=0\Rightarrow a^2+ab+b^2=-3$$

于是

$$(a-b)^2=-3-3ab=-3(ab+1)$$

同理,

$$(b-c)^2=-3(bc+1),\quad (c-a)^2=-3(ca+1)$$

故

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=-3(3+ab+bc+ca)=-18$$

$$\begin{aligned}&(a-b)^2(b-c)^2+(b-c)^2(c-a)^2+(c-a)^2(a-b)^2\\&=9\big((ab+1)(bc+1)+(bc+1)(ca+1)+(ca+1)(ab+1)\big)\\&=9\big(2(a+b+c)+2(ab+bc+ca)+3\big)=81\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2&=-27(ab+1)(bc+1)(ca+1)\\&=-27\big(abc(a+b+c)+(abc)^2+ab+bc+ca+1\big)=-216\end{aligned}$$

所求三次多项式为

$$x^3+18x^2+81x+216$$

16. 设 $a, b, c \in \mathbb{R}$, 证明方程式

$$\frac{b+c}{x-a}+\frac{c+a}{x-b}+\frac{a+b}{x-c}=3$$

的根都是实根。

有

$$\begin{aligned}
\frac{b+c}{x-a}+\frac{c+a}{x-b}+\frac{a+b}{x-c}&=3\\
1-\frac{b+c}{x-a}+1-\frac{c+a}{x-b}+1-\frac{a+b}{x-c}&=0\\
\frac{x-a-b-c}{x-a}+\frac{x-a-b-c}{x-b}+\frac{x-a-b-c}{x-c}&=0\\
(x-a-b-c)\left(\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}\right)&=0
\end{aligned}$$

$$(x-a-b-c)\frac{x^2-(b+c)x+bc+x^2-(a+c)x+ac+x^2-(a+b)x+ab}{(x-a)(x-b)(x-c)}=0$$

$$(x-a-b-c)\left(3x^2-2(a+b+c)x+ab+bc+ca\right)=0$$

故方程式

$$\frac{b+c}{x-a}+\frac{c+a}{x-b}+\frac{a+b}{x-c}=3$$

有一实根 $x=a+b+c$, 现探讨另两根, 方程式

$$3x^2-2(a+b+c)x+ab+bc+ca=0.$$

的判别式为

$$\Delta=4(a+b+c)^2-12(ab+bc+ca)=4\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right).$$

由 AM-GM 不等式,

$$ab+bc+ca\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2+c^2}{2}+\frac{c^2+a^2}{2}=a^2+b^2+c^2.$$

故判别式为非负, 于是方程式 $3x^2-2(a+b+c)x+ab+bc+ca=0$ 的根都是实根, 得证原方程式的根都是实根。

17. 设 $f(x)=x^3+4x^2+8x+16$, 计算

$$f(x+7)-f(x+6)-f(x+5)+f(x+4)-f(x+3)+f(x+2)+f(x+1)-f(x).$$

设 $g(x)=f(x+1)-f(x)$, 则

$$g(x)=3x^2+10x+12$$

同理设 $h(x)=g(x+2)-g(x)=12x+24$, 原式可写成

$$g(x+6)-g(x+4)-g(x+2)+g(x)=h(x+4)-h(x)=12(x+4)-12x=48$$

18. 已知关于 x 的方程 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 的三个非零实数根成等比数列, 求 a^3c-b^3 的值。

设方程 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 的三根为 $\frac{\alpha}{r},\alpha,\alpha r,\alpha\neq 0$, 由韦达定理,

$$\begin{aligned} -a &= \frac{\alpha}{r}+\alpha+\alpha r=\alpha(\frac{1}{r}+1+r) && (1)\\ b &= \frac{\alpha^2}{r}+\alpha^2+\alpha^2 r=\alpha^2(\frac{1}{r}+1+r) && (2)\\ -c &= \alpha^3 && (3) \end{aligned}$$

由 (1),(2) 得 $-\frac{b}{a}=\alpha$, 代入 (3) 得

$$-c=-\frac{b^3}{a^3}\Rightarrow a^3c-b^3=0$$

19. 已知 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=3$, 求

$$x^{63}+x^{44}+x^{37}+x^{31}+x^{26}+x^9+6$$

的值。

由已知得

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=x^3+\frac{1}{x^3}+3(1)(\sqrt{3})=3\sqrt{3}$$

给出

$$x^3+\frac{1}{x^3}=0$$

同理可得,

$$x^9+\frac{1}{x^9}=0,\quad x^{27}+\frac{1}{x^{27}}=0$$

故

$$
\begin{aligned}
&x^{63}+x^{44}+x^{37}+x^{31}+x^{26}+x^{9}+6\\
&=x^{36}\left(x^{27}+\frac{1}{x^{27}}\right)+x^{35}\left(x^{9}+\frac{1}{x^{9}}\right)+x^{34}\left(x^{3}+\frac{1}{x^{3}}\right)+6=6
\end{aligned}
$$

20. 已知实数 x 满足

$$x^3+\frac{1}{x^3}=18$$

求

$$x^{11}+\frac{1}{x^{11}}.$$

设 $a=x+\frac{1}{x}$, 则

$$a^3-3a=18\Rightarrow(a-3)(a^2+3a+6)=0$$

所以

$$a=x+\frac{1}{x}=3\in\mathbb{R}$$

则

$$x^2+\frac{1}{x^2}=3^2-2=7$$

同理得

$$x^4+\frac{1}{x^4}=47,\quad x^8+\frac{1}{x^8}=2207$$

于是

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)=x^5+\frac{1}{x^5}+x+\frac{1}{x}=126\Rightarrow x^5+\frac{1}{x^5}=123$$

且

$$\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)\left(x^8+\frac{1}{x^8}\right)=x^{11}+\frac{1}{x^{11}}+x^5+\frac{1}{x^5}=39726$$

故

$$x^{11}+\frac{1}{x^{11}}=39726-123=39603$$

21. 已知 α,β,γ 是方程

$$x^3-x-1=0$$

的三根, 计算

$$\frac{1-\alpha}{1+\alpha}+\frac{1-\beta}{1+\beta}+\frac{1-\gamma}{1+\gamma}$$

的值。

由韦达定理, $\alpha+\beta+\gamma=0,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-1,\ \alpha\beta\gamma=1$, 故

$$\begin{aligned}\frac{1-\alpha}{1+\alpha}+\frac{1-\alpha}{1+\beta}+\frac{1-\gamma}{1+\gamma}&=\frac{2}{1+\alpha}+\frac{2}{1+\beta}+\frac{2}{1+\gamma}-3\\&=2\cdot\frac{(1+\alpha)(1+\beta)+(1+\beta)(1+\gamma)+(1+\gamma)(1+\alpha)}{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)}-3\\&=2\cdot\frac{3+2(\alpha+\beta+\gamma)+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{1+\alpha+\beta+\gamma+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta\gamma}-3\\&=2\cdot\frac{3-1}{1-1+1}-3\\&=1\end{aligned}$$

22. 已知 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 为 $x^4+2x^3+x^2+2x+1=0$ 的四根, 试求

$$(\alpha^2+\alpha+1)(\beta^2+\beta+1)(\gamma^2+\gamma+1)(\delta^2+\delta+1)$$

的值。

α 是方程

$$x^4+2x^3+x^2+2x+1=0$$

的根, 则

$$\alpha^4+2\alpha^3+\alpha^2+2\alpha+1=0\Rightarrow(\alpha^2+\alpha+1)^2=2\alpha^2\Rightarrow\alpha^2+\alpha+1=\sqrt{2}\alpha$$

同理可得

$$\beta^2+\beta+1=\sqrt{2}\beta,\quad \gamma^2+\gamma+1=\sqrt{2}\gamma,\quad \delta^2+\delta+1=\sqrt{2}\delta$$

由韦达定理,

$$(\alpha^2+\alpha+1)(\beta^2+\beta+1)(\gamma^2+\gamma+1)(\delta^2+\delta+1)=(\sqrt{2})^4\cdot\alpha\beta\gamma\delta=4\cdot1=4$$

23. 设方程 $x^3-4x+1=0$ 的三个相异复数根为 a,b,c, 求

$$\frac{a+1}{(a-1)^4}+\frac{b+1}{(b-1)^4}+\frac{c+1}{(c-1)^4}$$

的值。

发现
$$\frac{a+1}{(a-1)^4}=\frac{1}{(a-1)^3}+\frac{2}{(a-1)^4}$$
, 因此欲求以 $\dfrac{1}{a-1},\dfrac{1}{b-1},\dfrac{1}{c-1}$ 为三根的多项式, 令 $x_1=x-1$ 代入原方程式
$$(x_1+1)^3-4(x_1+1)+1=0\Rightarrow x_1^3+3x_1^2-x_1-2=0$$
再令 $x_2=\frac{1}{x_1}$ 代入可得
$$\frac{1}{x_2^3}+\frac{3}{x_2^2}-\frac{1}{x_2}-2=0\Rightarrow x_2^3+\frac{1}{2}x_2^2-\frac{3}{2}x_2-\frac{1}{2}=0$$
故
$$\frac{a+1}{(a-1)^4}+\frac{b+1}{(b-1)^4}+\frac{c+1}{(c-1)^4}=(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)+2(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4) \tag{1}$$
设 $f(x)=x^3+\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{2}$, 则 $f'(x)=3x^2+x-\dfrac{3}{2}$, 利用长除法计算 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$:
$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{3}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{13}{4}\cdot\frac{1}{x^3}-\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{x^4}+\frac{81}{16}\cdot\frac{1}{x^5}+\cdots$$
由系数比较得
$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=-\frac{7}{8},\quad \alpha^4+\beta^4+\gamma^4=\frac{81}{16}$$
故所求为
$$-\frac{7}{8}+2\cdot\frac{81}{16}=\frac{37}{4}$$

24. 已知 $f(x)=x^4+px^3+qx^2+rx+s$ 且 $f(1)=59, f(2)=118, f(3)=177$, 求 $f(9)+f(-5)$ 。

考虑函数 $g(x)=59x$, 则
$$f(1)=g(1)=59,\quad f(2)=g(2)=118,\quad f(3)=g(3)=177$$
定义 $h(x)=f(x)-g(x)$, 则 $x=1,2,3$ 为 $h(x)$ 的根且 $h(x)$ 首项系数为 1, 所以设
$$h(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-a)$$
其中 a 是一实数, 于是
$$\begin{aligned}f(9)+f(-5)&=h(9)+g(9)+h(-5)+g(-5)\\&=336(9-a)+9\cdot 59+336(5+a)-5\cdot 59\\&=4940\end{aligned}$$

25. 已知 x_1, x_2, x_3 是方程

$$x^3-6x^2+ax-a=0$$

的根, 且满足

$$(x_1-3)^3+(x_2-3)^3+(x_3-3)^3=0,$$

求 a 的值。

令 $r_i=x_i-3$, 则 r_1, r_2, r_3 是方程

$$(x+3)^3-6(x+3)^2+a(x+3)-a=0$$

即方程

$$x^3+3x^2+(a-9)x+(2a-27)=0$$

的根, 由韦达定理,

$$r_1+r_2+r_3=-3, \quad r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1=a-9, \quad r_1r_2r_3=27-2a$$

由立方和公式,

$$r_1^3+r_2^3+r_3^3=-3(9-3(a-9))+3(27-2a)=0$$

解得

$$a=9$$

26. 已知 x_1, x_2, x_3 为方程 $\sqrt{123}x^3-247x^2+2=0$ 的相异实根, 且 $x_1<x_2<x_3$, 求 $x_2(x_3^2-x_1^2)$ 的值。

设 $\sqrt{123}=a$, 则方程 $\sqrt{123}x^3-247x^2+2=0$ 化为

$$ax^3-(2a^2+1)x^2+2=0 \Rightarrow (ax-1)(x^2-2ax-2)=0$$

所以方程的 3 个实数根为

$$\frac{1}{a}, a+\sqrt{a^2+2}, a-\sqrt{a^2+2}$$

因为 $a=\sqrt{123}>1$, 所以

$$a-\sqrt{a^2+2}<0<\frac{1}{a}<1<a+\sqrt{a^2+2}$$

因此 $x_1=a-\sqrt{a^2+2}, x_2=\frac{1}{a}, x_3=a+\sqrt{a^2+2}$, 而

$$x_2(x_3^2-x_1^2)=\frac{1}{a}\cdot 2\sqrt{a^2+2}\cdot 2a=20\sqrt{5}$$

27. 已知正整数 m,n 满足 $m^2-n=32$, 且 $\sqrt[5]{m+\sqrt{n}}+\sqrt[5]{m-\sqrt{n}}$ 是方程

$$x^5-10x^3+20x-40=0$$

的一个实根, 求 m,n 的值。

令 $a=\sqrt[5]{m+\sqrt{n}}, b=\sqrt[5]{m-\sqrt{n}}$, 则 $x=a+b$ 是该方程的一个实根, 且

$$a^5+b^5=2m, \quad a^5b^5=m^2-n=32 \Rightarrow ab=2$$

考虑 $(a+b)^5$ 的展开式:

$$x^5=a^5+b^5+5ab(a^3+b^3)+10a^2b^2(a+b)$$

由 $a^3+b^3=(a+b)\left[(a+b)^2-3ab\right]=x(x^2-6)$, 得

$$x^5=2m+10x(x^2-6)+40x$$

整理得:

$$x^5-10x^3+20x-2m=0$$

对比原方程式得

$$m=20, n=368$$

28. 设方程式 $x^5+x^4-x^2+1=0$ 的五个根为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$, 若 $P(x)=x^4-1$, 求

$$P(\alpha_1)P(\alpha_2)P(\alpha_3)P(\alpha_4)P(\alpha_5)$$

的值。

设

$$f(x)=x^5+x^4-x^2+1=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)(x-\alpha_5)$$

令 $x=1$ 得

$$f(1)=(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)(1-\alpha_4)(1-\alpha_5)=0$$

由于

$$P(x)=x^4-1=(x^2+1)(x-1)(x+1)$$

故

$$
\begin{aligned}
&P(\alpha_1)P(\alpha_2)P(\alpha_3)P(\alpha_4)P(\alpha_5)\\
&=-(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)(1-\alpha_4)(1-\alpha_5)\prod_{k=1}^{5}(\alpha_k^2+1)(\alpha_k+1)\\
&=0
\end{aligned}
$$

29. 已知 $p(x)$ 是一个整系数多项式, 定义 $q(x)=\dfrac{p(x)}{x(1-x)}$, 若对所有 $x\neq 0,1$ 都有

$$q(x)=q\left(\frac{1}{1-x}\right),$$

且 $p(2)=p(3)=5$, 求 $p(4)$ 的值。

由 $q(x)=q\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$ 可得

$$\frac{p(x)}{x(1-x)}=\frac{p\left(\frac{1}{1-x}\right)}{\frac{1}{1-x}\left(1-\frac{1}{1-x}\right)}\Rightarrow p(x)=(1-x)^3p\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

这说明 $\deg(p)\leqslant 3$, 设 $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, 则

$$(1-x)^3p\left(\frac{1}{1-x}\right)=d(1-x)^3+c(1-x)^2+b(1-x)+a$$

比较 x^3,x^2 系数得

$$a=d,\quad b=-c-3d$$

且由 $p(2)=p(3)=5$ 得

$$-3a-2c=a-6c=5\Rightarrow a=c=-1$$

于是

$$p(x)=-x^3+4x^2-x-1\Rightarrow p(4)=-5$$

30. 已知多项式 x^7-5 的七个相异根为 $r_1,\ldots,r_7$, 求

$$\prod_{1\leqslant i<j\leqslant 7}(r_i+r_j)^2$$

的值。

设所求乘积为 P, 由韦达定理, 考虑

$$\begin{aligned}2^7\cdot 5\cdot P&=\prod_{i=1}^{7}2r_i\prod_{1\leqslant i<j\leqslant 7}(r_i+r_j)^2\\&=\prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant 7}(r_i+r_j)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant 7}(r_i+r_j)\prod_{1\leqslant j<i\leqslant 7}(r_i+r_j)\\&=\prod_{i=1}^{7}\prod_{j=1}^{7}(r_i+r_j)\end{aligned}$$

且注意到

$$\prod_{j=1}^{7}(x-r_j)=x^7-5\Rightarrow\prod_{j=1}^{7}(x+r_j)=x^7+5,$$

故

$$\prod_{j=1}^{7}(r_i+r_j)=r_i^7+5=10$$

因此

$$2^7\cdot 5\cdot P=10^7\Rightarrow P=5^6$$

31. 设 $P(x)$ 为次数为 10 的多项式, 且满足

$$P(2^i)=i,0\leqslant i\leqslant 10,$$

求 $P(x)$ 中 x 项的系数。

令 $Q(x)=P(2x)-P(x)-1$, 则 $Q(2^i)=0,0\leqslant i\leqslant 9$, 所以

$$Q(x)=\alpha\prod_{k=0}^{9}(x-2^k)$$

其中 α 为一常数, 又 $Q(0)=P(0)-P(0)-1=-1$, 且

$$\prod_{k=0}^{9}(0-2^k)=2^{45},$$

因此 $\alpha=-\dfrac{1}{2^{45}}$, 记

$$R(x)=\prod_{k=0}^{9}(x-2^k),$$

其 x 项系数为

$$\operatorname{coef}_x(R) = -\left(\prod_{k=0}^{9} 2^k\right) \sum_{k=0}^{9} \frac{1}{2^k} = -2^{45}\left(2 - \frac{1}{2^9}\right)$$

因为 $P(2x) - P(x) - 1$ 的 x 项系数恰好等于 $P(x)$ 的 x 项系数, 故

$$\operatorname{coef}_x(Q) = \alpha \cdot \operatorname{coef}_x(R) = -\frac{1}{2^{45}} \cdot \left(-2^{45} \cdot \frac{1023}{512}\right) = \frac{1023}{512}$$

32. 已知 $x_1, x_2, \ldots, x_{2015}$ 是方程

$$x^{2015} + x^{2014} + \cdots + x^2 + x + 1 = 0$$

的根, 求

$$\frac{1}{1-x_1} + \frac{1}{1-x_2} + \cdots + \frac{1}{1-x_{2015}}.$$

设

$$a_k = \frac{1}{1-x_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, 2015.$$

则

$$x_k = \frac{a_k - 1}{a_k}.$$

代入原方程, 得到

$$\frac{(a_k-1)^{2015}}{a_k^{2015}} + \frac{(a_k-1)^{2014}}{a_k^{2014}} + \cdots + \frac{a_k-1}{a_k} + 1 = 0.$$

两边同时乘以 a_k^{2015}, 得

$$(a_k-1)^{2015} + a_k(a_k-1)^{2014} + \cdots + a_k^{2014}(a_k-1) + a_k^{2015} = 0.$$

因此

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2015} = \frac{{}^{2015}C_1 + {}^{2014}C_1 + {}^{1}C_1}{2016} = \frac{2015}{2}$$

而当 $k = 1, 2, \ldots, n, a_1 + a_2 + \cdots + a_{2015} = \dfrac{n}{2}$

设

$$f(x)=x^{2015}+x^{2014}+\cdots+x+1,$$

则

$$f(x)=\prod_{k=1}^{2015}(x-x_k)\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\sum_{k=1}^{2015}\frac{1}{x-x_k}.$$

取 $x=1$, 得到

$$\sum_{k=1}^{2015}\frac{1}{1-x_k}=\frac{f'(1)}{f(1)}=\frac{2015}{2}$$

其中

$$f(1)=2016,\quad f'(1)=2015+2014+\cdots+1=\frac{2015\cdot 2016}{2}$$

33. (a) 已知 α,β,γ 为三实数, 设 $t=-(\alpha+\beta+\gamma),v=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, 且满足

$$\alpha\beta\gamma=-1,\quad t+v=-3,$$

试证

$$\alpha^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{1}{3}}+\gamma^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{(-t-6)+3\sqrt[3]{t^2+3t+9}}.$$

设

$$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=x^3+tx^2+vx+1,$$
$$g(y)=(y-\alpha^{\frac{1}{3}})(y-\beta^{\frac{1}{3}})(y-\gamma^{\frac{1}{3}})=y^3+ay^2+by+1$$

由 $g(y)=0$ 得 $y^3+1=-y(ay+b)$, 于是

$$(y^3+1)^3=-y^3\left(a^3y^3+b^3+3aby(ay+b)\right)=-y^3\left(a^3y^3+b^3-3ab(y^3+1)\right)$$

令 $x=y^3$, 展开整理得

$$x^3+(a^3-3ab+3)x^2+(b^3-3ab+3)x+1=0$$

于是 $a^3-3ab+3=t,b^3-3ab+3=v$, 令 $z=ab$, 则

$$\begin{aligned}z^3&=(t+3z-3)(v+3z-3)\\&=tv+3z(t+v)-3(t+v)+9z^2-18z+9\\&=t(-3-t)+3z(-3)-3(-3)+9z^2-18z+9\\&=9z^2-27z+(-t^2-3t+18)\end{aligned}$$

即

$$(z-3)^3=-t^2-3t-9 \Rightarrow z=3-\sqrt[3]{t^2+3t+9}$$

由韦达定理,

$$\alpha^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{1}{3}}+\gamma^{\frac{1}{3}}=-a=-\sqrt[3]{t+3z-3}=\sqrt[3]{(-t-6)+3\sqrt[3]{t^2+3t+9}}$$

故证毕。

(b) 据此, 试证

$$\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{9}}+\sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{9}}+\sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{9}}=\sqrt[3]{\frac{3}{2}(\sqrt[3]{9}-2)}$$

考虑

$$\alpha=2\cos\frac{2\pi}{9},\quad \beta=2\cos\frac{4\pi}{9},\quad \gamma=2\cos\frac{8\pi}{9}.$$

则由

$$\begin{aligned}
\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}\cos\frac{8\pi}{9}&=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{6\pi}{9}+\cos\frac{2\pi}{9}\right)\cos\frac{8\pi}{9}\\
&=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+\cos\frac{2\pi}{9}\right)\cos\frac{8\pi}{9}\\
&=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos\frac{8\pi}{9}+\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{8\pi}{9}\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos\frac{8\pi}{9}+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{10\pi}{9}+\cos\frac{6\pi}{9}\right)\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{9}-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{9}-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{8}
\end{aligned}$$

满足已知 $\alpha\beta\gamma=-1$, 此时

$$\begin{aligned}
t=-(\alpha+\beta+\gamma)&=-2\left(\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{8\pi}{9}\right)\\
&=-2\left(2\cos\frac{3\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{8\pi}{9}\right)\\
&=-2\left(\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{8\pi}{9}\right)\\
&=-2\cdot 2\cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{7\pi}{18}=0
\end{aligned}$$

故

$$\alpha^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{1}{3}}+\gamma^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{-6+3\sqrt[3]{9}}$$

且
$$\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{9}}+\sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{9}}+\sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{9}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}(\alpha^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{1}{3}}+\gamma^{\frac{1}{3}})=\sqrt[3]{\frac{3}{2}(\sqrt[3]{9}-2)}.$$
证毕。

34. 求
$$\frac{(1^4+18^2)(11^4+18^2)(23^4+18^2)(35^4+18^2)(47^4+18^2)}{(5^4+18^2)(7^4+18^2)(17^4+18^2)(29^4+18^2)(41^4+18^2)}$$
的值。

因式分解给出
$$a^4+18^2=(a^2+18)^2-(6a)^2=(a^2+6a+18)(a^2-6a+18)=((a+3)^2+9)((a-3)^2+9)$$
故
$$\begin{aligned}&\frac{(1^4+18^2)(11^4+18^2)(23^4+18^2)(35^4+18^2)(47^4+18^2)}{(5^4+18^2)(7^4+18^2)(17^4+18^2)(29^4+18^2)(41^4+18^2)}\\&=\frac{(4^2+9)(2^2+9)(14^2+9)(8^2+9)(26^2+9)(20^2+9)(38^2+9)(32^2+9)(50^2+9)(44^2+9)}{(8^2+9)(2^2+9)(10^2+9)(4^2+9)(20^2+9)(14^2+9)(32^2+9)(26^2+9)(44^2+9)(38^2+9)}\\&=\frac{50^2+9}{10^2+9}=\frac{2509}{109}\end{aligned}$$

35. 已知三实数 a,b,c 满足 $\sqrt{3}(a-b)+3(b-c)+(c-a)=0$, 且 $b\neq c$, 求
$$\frac{(a-b)(a-c)}{(b-c)^2}$$
的值。

令 $\alpha=a-b,\beta=b-c,\gamma=c-a$, 则
$$\alpha+\beta+\gamma=\sqrt{3}\alpha+3\beta+\gamma=0$$
由此得
$$\gamma=-(\alpha+\beta),\quad \alpha+\beta=\sqrt{3}\alpha+3\beta\Rightarrow\beta=\frac{1-\sqrt{3}}{2}\alpha$$
因此
$$\frac{(a-b)(a-c)}{(b-c)^2}=\frac{-\alpha\gamma}{\beta^2}=\frac{\alpha(\alpha+\beta)}{\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2\alpha^2}=\frac{\frac{3-\sqrt{3}}{2}\alpha^2}{\frac{4-2\sqrt{3}}{4}\alpha^2}=\frac{3-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\cdot\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=3+\sqrt{3}$$

36. 已知 $a+b+c=6$, 且

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=2,$$

求

$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}$$

的值。

不难发现

$$\begin{aligned}
&\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\\
&=\left(\frac{b+c}{a}+1\right)+\left(\frac{c+a}{b}+1\right)+\left(\frac{a+b}{c}+1\right)-3\\
&=\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c}-3\\
&=6\cdot 2-3=9
\end{aligned}$$

37. 已知 a,b,c 皆为实数, 若

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1$$

求

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}$$

的值。

有

$$\frac{a(a+b+c)}{b+c}+\frac{b(a+b+c)}{c+a}+\frac{c(a+b+c)}{a+b}=a+b+c$$

于是

$$\frac{a^2}{b+c}+a+\frac{b^2}{c+a}+b+\frac{c^2}{a+b}+c=a+b+c$$

即

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}=0$$

38. 已知 $abc=1$, 证明

(a)

$$\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ca+c+1}=1$$

由 $abc=1$,

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ca+c+1}\\
&=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{ab}{abc+ab+a}+\frac{abc}{abca+abc+ab}\\
&=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{ab}{1+ab+a}+\frac{1}{a+1+ab}\\
&=\frac{a+ab+1}{ab+a+1}\\
&=1
\end{aligned}$$

(b)

$$\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+c+1}=1$$

由 (a),

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ac+c+1}\\
&=\frac{c}{abc+ac+c}+\frac{a}{abc+ab+a}+\frac{b}{abc+bc+b}\\
&=\frac{c}{1+ac+c}+\frac{a}{1+ab+a}+\frac{b}{1+bc+b}\\
&=1
\end{aligned}$$

39. 已知 a,b,c 为非零相异实数, 且 $a+b+c=0$, 求

$$\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\right)\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)$$

的值。

首先有

$$\begin{aligned}
\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}&=\frac{b^2c-bc^2+ac^2-a^2c+a^2b-ab^2}{abc}\\
&=-\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}
\end{aligned}$$

现令 $a'=b-c,b'=c-a,c'=a-b$, 发现

$$b'-c'=(c-a)-(a-b)=b+c-2a=-3a$$

由此得 $a=-\dfrac{b'-c'}{3}$, 同理有

$$b=-\frac{c'-a'}{3},\quad c=-\frac{a'-b'}{3}$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}&=\frac{a}{a'}+\frac{b}{b'}+\frac{c}{c'}\\&=-\frac{1}{3}\left(\frac{b'-c'}{a'}+\frac{c'-a'}{b'}+\frac{a'-b'}{c'}\right)\\&=-\frac{1}{3}\left[-\frac{(a'-b')(b'-c')(c'-a')}{a'b'c'}\right]\\&=\frac{1}{3}\frac{(-3c)(-3a)(-3b)}{(b-c)(c-a)(a-b)}\\&=-9\frac{abc}{(a-b)(b-c)(c-a)}\end{aligned}$$

故所求的值为

$$\begin{aligned}&\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\right)\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)\\&=\left[-\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}\right]\left[-9\frac{abc}{(a-b)(b-c)(c-a)}\right]\\&=9\end{aligned}$$

40. 已知 $x^5=1$ 且 $x\neq 1$, 求

$$\frac{x}{1+x^2}+\frac{x^2}{1+x^4}+\frac{x^3}{1+x}+\frac{x^4}{1+x^3}$$

的值。

由 $x^5=1$,

$$\begin{aligned}\frac{x}{1+x^2}+\frac{x^2}{1+x^4}+\frac{x^3}{1+x}+\frac{x^4}{1+x^3}&=\frac{x}{1+x^2}+\frac{x^3}{x+1}+\frac{x^3}{1+x}+\frac{x}{x^2+1}\\&=2\left(\frac{x}{1+x^2}+\frac{x^3}{x+1}\right)\\&=2\left(\frac{x+x^2+x^3+x^5}{1+x+x^2+x^3}\right)\\&=2\end{aligned}$$

41. 设 $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ 且 $abcd\neq 0$, 又 $a+b+c+d=0$, 求

$$S=a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+d\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

的值。

由 $a+b+c+d=0$, 得

$$\begin{aligned}S&=a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+d\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\\&=-(b+c+d)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)-(a+c+d)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{a}\right)\\&\quad-(a+b+d)\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)-(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\\&=-12-\frac{2(b+c+d)}{a}-\frac{2(a+c+d)}{b}-\frac{2(a+b+d)}{c}-\frac{2(a+b+c)}{d}\\&=-12-\frac{-2a}{a}-\frac{-2b}{b}-\frac{-2c}{c}-\frac{-2d}{d}\\&=-4\end{aligned}$$

42. 设 a,b,c 满足 $a+b+c=a^3+b^3+c^3=0$, n 为任意实数, 求 $a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}$ 的值。

由恒等式

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

将已知代入得

$$0-3abc=0\Rightarrow abc=0.$$

若 $c=0$, 由 $a+b+c=0$ 可得 $b=-a$, 则

$$a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}=a^{2n+1}+(-a)^{2n+1}+0=0$$

同理若 $a=0$ 或 $b=0$, $a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}=0$

43. 已知 x,y,p,q 为实数, 且满足 $2x^2+3p^2=2y^2+3q^2=(xq-yp)^2=6$, 求

$$(x^2+y^2)(p^2+q^2)$$

的值。

(待另三种解)

解法一:

设

$$x=\sqrt{3}\cos\alpha,\quad p=\sqrt{2}\sin\alpha,\quad y=\sqrt{3}\cos\beta,\quad q=\sqrt{2}\sin\beta$$

则

$$6=(xq-yp)^2=(\sqrt{6}(\cos\alpha\sin\beta-\cos\beta\sin\alpha))^2=6\sin^2(\beta-\alpha)$$

于是 $\sin^2(\beta-\alpha)=1\Rightarrow\beta-\alpha=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi$, 因此有

$$\cos\beta=\mp\sin\alpha,\quad \sin\beta=\pm\cos\alpha$$

故

$$(x^2+y^2)(p^2+q^2)=(\underbrace{3\cos^2\alpha+3\cos^2\beta}_{=3(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=3})(\underbrace{2\sin^2\alpha+2\sin^2\beta}_{=2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=2})=6$$

44. 解方程

$$(x+1)^6-2(x-1)^6=(x^2-1)^3$$

原方程两边除以 $(x-1)^6$, 得

$$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^6-2=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$$

设 $y=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$, 得到二次方程:

$$y^2-y-2=0\Rightarrow y=2\quad\text{或}\quad y=-1$$

解为

$$\frac{x+1}{x-1}=2^{\frac{1}{3}}\Rightarrow x=\frac{2^{\frac{1}{3}}+1}{2^{\frac{1}{3}}-1}=3+2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}$$

或

$$\frac{x+1}{x-1}=-1\Rightarrow x=0$$

45. 若 a,b 为正实数, 解方程

$$(a+b)(ax+b)(a-bx)=(a^2x-b^2)(a+bx), \quad x\in\mathbb{R}.$$

首先设

$$f(x)=(a+b)(ax+b)(a-bx)-(a^2x-b^2)(a+bx)$$

不难发现 $f(1)=0$, 故 $(x-1)$ 是 $f(x)$ 的因式。正所谓: 解决问题仍需暴力, 展开并整理得

$$\begin{aligned}
f(x)&=a^3x+a^2bx^2-a^2b-b^3x-(a^3x-a^2bx^2+a^2b-ab^2x+a^2bx-ab^2x^2+ab^2-b^3x)\\
&=(2a^2b+ab^2)x^2+(ab^2-a^2b)x-(a^2b+ab^2)\\
&=ab[(2a+b)x^2+(b-a)x-(a+2b)]\\
&=ab(x-1)((2a+b)x+a+2b)
\end{aligned}$$

故 $f(x)=0$ 给出了

$$x=1 \quad 或 \quad x=-\frac{a+2b}{2a+b}$$

因式定理、余式定理

1. 设 $f(x)=ax^3+bx^2-18x+3, g(x)=ax^3+9x^2+bx-9$。当 $f(x)$ 和 $g(x)$ 除以 $2x-1$ 时所得余数相同，且当 $f(x)$ 除以 $x-2$ 时余数是 -5。

   (a) 求 a, b 的值。

   令 $x=\frac{1}{2}$，有：

   $$f\left(\frac{1}{2}\right)=g\left(\frac{1}{2}\right)\Rightarrow a\cdot\frac{1}{8}+b\cdot\frac{1}{4}-9+3=a\cdot\frac{1}{8}+\frac{9}{4}+\frac{b}{2}-9\Rightarrow b=3$$

   又

   $$f(2)=8a+4b-36+3=-5\Rightarrow a=2$$

   $\therefore a=2,\ b=3$

   (b) 若 $x+4$ 整除 $f(x)+kg(x)$，求 k。

   有

   $$f(-4)+kg(-4)=0\Rightarrow -128a+16b+72+3+k(-128a+144-4b-9)=0$$

   代入 $a=2,\ b=3$ 得：

   $$-133(1+k)=0\Rightarrow k=-1$$

2. 已知 $f(x)$ 为三次多项式，以 x^2+x+2 除之得余式 $x+3$，以 x^2+x-2 除之得余式 $5x+7$，求 $f(x)$。

   据题意有 $f(1)=5(1)+7=12, f(-2)=5(-2)+7=-3$，设

   $$f(x)=(x^2+x+2)(ax+b)+x+3$$

   令 $x=1$，

   $$f(1)=(1+1+2)(a+b)+1+3=12\Rightarrow a+b=2$$

   令 $x=-2$，

   $$f(-2)=(4-2+2)(-2a+b)-2+3=-3\Rightarrow -2a+b=-1$$

解得 $a=1,\ b=1$，所以

$$f(x)=(x^2+x+2)(x+1)+x+3=x^3+2x^2+4x+5$$

3. 若 $f(x)$ 以 x^2-1 除余 $3x+2$,$g(x)$ 以 x^2+2x-3 除余 $5x+2$，求 $(x+3)f(x)+(5x^2+1)g(x)$ 除以 $x-1$ 的余式。

即求 $(1+3)f(1)+(5+1)g(1)=4f(1)+6g(1)$ 的值，由已知

$$f(1)=3\cdot 1+2=5,\ g(1)=5\cdot 1+2=7$$

故 $(x+3)f(x)+(5x^2+1)g(x)$ 除以 $x-1$ 的余式为

$$4\cdot 5+6\cdot 7=62$$

4. 以 x^2+2x+3 除 $f(x)$ 余 $x+12$，以 $(x+1)^2$ 除 $f(x)$ 余 $5x+4$，求以 $(x+1)(x^2+2x+3)$ 除 $f(x)$ 的余式。

同上，设

$$f(x)=(x+1)(x^2+2x+3)Q(x)+a(x^2+2x+3)+x+12$$

据题意 $f(-1)=-5+4=-1$，现令 $x=-1$ 有

$$f(-1)=a(1-2+3)-1+12=-1\Rightarrow a=-6$$

$\therefore$ 以 $(x+1)(x^2+2x+3)$ 除 $f(x)$ 的余式为 $-6(x^2+2x+3)+x+12=-6x^2-11x-6$

5. $f(x)$ 以 $x(x-1)$ 除之，余式为 $-x+3$；以 $x(x+1)$ 除之，余式为 $-3x+3$，则 $f(x)$ 除以 $x(x^2-1)$ 的余式为?

设

$$f(x)=x(x^2-1)Q(x)+ax(x-1)-x+3$$

据题意 $f(-1)=3+3=6$，令 $x=-1$ 有

$$f(-1)=a(-1)(-2)+1+3=6\Rightarrow a=1$$

$\therefore f(x)$ 除以 $x(x^2-1)$ 的余式为 $x(x-1)-x+3=x^2-2x+3$

6. 设多项式 $f(x)$ 除以 $(x+1)^3$ 得余式 $2x^2+8$, 除以 $(x-2)^2$ 得余式 $15x+40$, 且 $\deg f(x) \geqslant 4$, 则 $f(x)$ 除以 $(x+1)^3(x-2)$ 的余式为?

设

$$f(x)=(x+1)^3(x-2)Q(x)+a(x+1)^3+2x^2+8$$

据题意 $f(2)=15\cdot 2+40=70$, 令 $x=2$ 有

$$f(2)=a(2+1)^3+2\cdot 2^2+8=70 \Rightarrow a=2$$

$\therefore f(x)$ 除以 $(x+1)^3(x-2)$ 的余式为 $2(x+1)^3+2x^2+8=2x^3+8x^2+6x+10$

7. 设 $\deg f(x) \geqslant 3$, 且 $f(x)$ 以 $(x-1)^2$ 除之余 $3x+2$, 以 $(x+2)^2$ 除之余 $5x-3$, 求:

   (a) 以 $x-1$ 除之的余式。

   即 $f(1)=3\cdot 1+2=5$

   (b) 以 $(x-1)(x+2)$ 除之的余式。

   设

   $$f(x)=(x-1)(x+2)Q(x)+ax+b$$

   令 $x=1$,

   $$f(1)=a+b=5$$

   令 $x=-2$,

   $$f(-2)=-2a+b=-13$$

   解得 $a=6,\ b=-1$, 故余式为 $6x-1$

   (c) 以 $(x-1)^2(x+2)$ 除之的余式。

   设

   $$f(x)=(x-1)^2(x+2)Q(x)+a(x-1)^2+3x+2$$

   令 $x=-2$,

   $$f(-2)=9a+-4=-13$$

   解得 $a=-1$, 故余式为 $-x^2+5x+1$

8. $f(x)$ 为一多项式, 若 $(x+1)f(x)$ 除以 x^2+x+1 的余式为 $5x+3$, 则 $f(x)$ 除以 x^2+x+1 的余式为何?

据题意有

$$(x+1)f(x) = (x+1)(x^2+x+1)Q(x) + a(x^2+x+1) + 5x + 3$$

且设

$$f(x) = (x^2+x+1)Q(x) + ax + b$$

两边乘 $x+1$ 有

$$(x+1)f(x) = (x+1)(x^2+x+1)Q(x) + (x+1)(ax+b)$$

比较得

$$a(x^2+x+1) + 5x + 3 = (x+1)(ax+b)$$

即

$$ax^2 + (a+b)x + b = ax^2 + (a+5)x + a + 3$$

得知 $a=2$, $b=5$, 余式为 $2x+5$

9. 以 $(x+1)^3$ 除 $f(x)$ 余式为 x^2-2x+3, 求以 $(x+1)^2$ 除 $f(x)$ 所得余式。

设

$$f(x) = Q(x)(x+1)^3 + x^2 - 2x + 3$$

有

$$f(x) = Q(x)(x+1)^3 + (x+1)^2 + (-4x+2) = (x+1)^2[Q(x)(x+1)+1] + (-4x+2)$$

轻而易举得知余式为 $-4x+2$.

10. 设 $f(x)$ 为实系数三次多项式, 若 $f(x)$ 除以 $x-2$ 的余式为 -5, 且 $(x+1)f(x)$ 除以 x^3-3 的余式为 $3x-1$, 求多项式 $f(x)$

设

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

则

$$(x+1)f(x) = ax^4 + (a+b)x^3 + (b+c)x^2 + (c+d)x + d.$$

由题意,

$$f(2) = 8a + 4b + 2c + d = -5 \tag{1}$$

且有

$$(x+1)f(x)=(x^3-3)(ax+(a+b))+3x-1,$$

比较系数得:

$$b+c=0 \tag{2}$$

$$3a+3b+d=-1 \tag{3}$$

$$3a+c+d=3 \tag{4}$$

由 $(1)-(4)$ 联立解得

$$a=-1,\quad b=-1,\quad c=1,\quad d=5$$

因此

$$f(x)=-x^3-x^2+x+5$$

11. 已知一多项式 $f(x)=x^{2025}(x^2+ax+b)$, 其中 a,b 为实数, 如果将 $f(x)$ 除以 $(x-2)^2$ 得余式 $2^{2025}(x-2)$, 求 a,b。

设

$$f(x)=x^{2025}(x^2+ax+b)=(x-2)^2p(x)+2^{2025}(x-2)$$

对 x 求导有

$$f'(x)=2025x^{2024}(x^2+ax+b)+x^{2025}(2x+a)=2(x-2)p(x)+(x-2)^2p'(x)+2^{2025}$$

现令 $x=2$, 则

$$\begin{cases} 2^{2025}(4+2a+b)=0 \\ 2025\cdot 2^{2024}(4+2a+b)+2^{2025}(4+a)=2^{2025} \end{cases}$$

解得

$$a=-3,b=2$$

12. 设 $f(x)=x^4+5x^3+ax^2+bx+c$ 可被 $(x-1)^3$ 整除, 求 a,b,c 的值。

1	5	a	b	c	1
	1	6	$a+6$	$a+b+6$	
1	6	$a+6$	$a+b+6$	$a+b+c+6$	
	1	7	$a+13$		
1	7	$a+13$	$2a+b+19$		
	1	8			
1	8	$a+21$			
	1				
1	9				

连续综合除法得

$$f(x)=(x-1)^4+9(x-1)^3+(a+21)(x-1)^2+(2a+b+19)(x-1)+(a+b+c+6)$$

已知 $f(x)$ 可被 $(x-1)^3$ 整除，则

$$\begin{cases} a+21=0 \\ 2a+b+19=0 \\ a+b+c+6=0 \end{cases} \Rightarrow (a,b,c)=(-21,23,-8)$$

13. 已知 x^2-x+b 为多项式 $6x^4-7x^3+ax^2+3x+2$ 的因式，求 a,b 的值。

设 $f(x)=6x^4-7x^3+ax^2+3x+2=(x^2-x+b)(6x^2+px+q)$，展开右边得

$$(x^2-x+b)(6x^2+px+q)=6x^4+(p-6)x^3+(q-p+6b)x^2+(pb-q)x+bq$$

比较系数得

$$p-6=-7 \tag{1}$$
$$q-p+6b=a \tag{2}$$
$$pb-q=3 \tag{3}$$
$$bq=2 \tag{4}$$

由 (3) 得 $q=-b-3$，代入 (4) 得

$$b(-b-3)=2 \Rightarrow (b+1)(b+2)=0 \Rightarrow b=-1 \text{ 或 } -2$$

当 $b=-1$ 时, $q=-2, a=-7$; 当 $b=-2$ 时, $q=-1, a=-12$

$\therefore (a, b)=(-7,-1)$ 或 $(-12,-2)$

14. 若 a, b, c 为相异实数, 分别用 $x-a, x-b, x-c$ 除多项式 $p(x)$, 所得的余数分别为 a, b, c, 求以 $(x-a)(x-b)(x-c)$ 除 $p(x)$ 的余式。

设

$$p(x)=(x-a)(x-b)(x-c)q(x)+r(x-a)(x-b)+s(x-a)+a,$$

令 $x=b$, 由 $a \neq b$,

$$p(b)=s(b-a)+a=b \Rightarrow s(b-a)=b-a \Rightarrow s=1$$

令 $x=c$, 由 $a \neq c, b \neq c$,

$$p(c)=r(c-a)(c-b)+(c-a)+a=c \Rightarrow r(c-a)(c-b)=0 \Rightarrow r=0$$

因此以 $(x-a)(x-b)(x-c)$ 除 $p(x)$ 的余式为 x

15. 若 $g(x)$ 除以 $2x-3$ 的余式为 1, 且 $f(x)=g(x)(2x-3)+5$, 求 $[f(x)]^2$ 除以 $(2x-3)^2$ 的余式。

设

$$g(x)=(2x-3)Q(x)+1$$

由 $f(x)=g(x)(2x-3)+5$,

$$\begin{aligned}
[f(x)]^2 &= [g(x)]^2(2x-3)^2+10g(x)(2x-3)+25 \\
&= [g(x)]^2(2x-3)^2+10[(2x-3)Q(x)+1](2x-3)+25 \\
&= [g(x)]^2(2x-3)^2+10Q(x)(2x-3)^2+10(2x-3)+25 \\
&= [g(x)]^2(2x-3)^2+10Q(x)(2x-3)^2+20x-5
\end{aligned}$$

故 $[f(x)]^2$ 除以 $(2x-3)^2$ 的余式为 $20x-5$

16. 若多项式 $p(x)=x^2+bx+c$, 其中 b, c 为实数, 且 $p(p(1))=p(p(2))=0$, 且 $p(1) \neq p(2)$, 求 b, c 的值。

由 $p(p(1))=p(p(2))=0$, 意味 $p(1)$ 和 $p(2)$ 是方程 $x^2+bx+c=0$ 的两根, 且

$$p(1)+p(2)=-b, \quad p(1)p(2)=c$$

即

$$(1+b+c)+(4+2b+c)=-b \tag{1}$$

$$(1+b+c)(4+2b+c)=c \tag{2}$$

由 (1) 得 $2b+c=-\frac{5}{2}$, 代入 (2):

$$(1-\frac{5}{2}-b)(4-\frac{5}{2})=-\frac{5}{2}-2b \Rightarrow b=-\frac{1}{2}, c=-\frac{3}{2}$$

17. a,b,c 为整数, 且 $0<a<b$, 若 $x-c$ 是多项式 $x(x-a)(x-b)-17$ 的因式, 求 (a,b,c)。

已知 $f(x)=x(x-a)(x-b)-17$ 且 $x-c$ 是它的因式, 于是

$$f(c)=c(c-a)(c-b)-17=0 \Rightarrow c(c-a)(c-b)=17.$$

由于 a,b,c 均为整数, 且 $0<a<b$, 我们只需枚举整数三元组使得左边乘积为 17。

因为 17 是质数, 其非零整数因式只有:

$$(\pm1,\pm1,\pm17) \text{ 的排列组合。}$$

枚举 $c=1$,

$$1(1-a)(1-b)=17 \Rightarrow (1-a)(1-b)=17.$$

由于 $17=1\times17=(-1)\times(-17)$, 列出可能组合:

- $1-a=1,\ 1-b=17 \Rightarrow a=0,\ b=-16$, 不满足 $0<a<b$。
- $1-a=-1,\ 1-b=-17 \Rightarrow a=2,\ b=18$, 满足条件!

若 $c=-1$:

$$(-1)(-1-a)(-1-b)=17 \Rightarrow -(a+1)(b+1)=17 \Rightarrow (a+1)(b+1)=-17$$

没有满足 $0<a<b$ 的整数解, 尝试 $c=17,-17$ 会得到更大的数, 不满足 $0<a<b$。

因此, 唯一符合题意的解为:

$$(a,b,c)=(2,18,1)$$

18. 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均为实系数二次多项式且首项系数都是 2。已知 $(f(x))^2$ 除以 $g(x)$ 的余式为 $5x+3$, 而 $(g(x))^2$ 除以 $f(x)$ 的余式为 $x+1$, 求 $f(x), g(x)$。

设

$$f(x)=2x^2+ax+b,\quad g(x)=f(x)-cx-d=2x^2+(a-c)x+b-d.$$

则

$$(f(x))^2=(g(x)+cx+d)^2=(g(x))^2+2(cx+d)g(x)+(cx+d)^2.$$

由已知 $(f(x))^2$ 除以 $g(x)$ 的余式为 $5x+3$,

$$(cx+d)^2=c^2x^2+2cdx+d^2=\frac{c^2}{2}g(x)+\Big(2cd-\frac{c^2}{2}(a-c)\Big)x+\Big(d^2-\frac{c^2}{2}(b-d)\Big).$$

比较系数得

$$\begin{cases}4cd-ac^2+c^3=10,\\ 2d^2-bc^2+c^2d=6.\end{cases}$$

同理, 由 $(g(x))^2$ 除以 $f(x)$ 的余式为 $x+1$ 得

$$\begin{cases}4cd-ac^2=2,\\ 2d^2-bc^2=2.\end{cases}$$

解得

$$c^3=8\Rightarrow c=2,\quad c^2d=4\Rightarrow d=1,\quad a=\frac{3}{2},\quad b=0.$$

于是

$$f(x)=2x^2+\frac{3}{2}x,\quad g(x)=2x^2-\frac{1}{2}x-1.$$

19. 求多项式 $(x+1)^6$ 除以 x^2+1 的余式。

有 $x^2\equiv-1\pmod{x^2+1}$, 则

$$(x+1)^6=(x^2+2x+1)^3\equiv(2x)^3=8x\cdot x^2\equiv 8x\cdot(-1)=-8x\pmod{x^2+1}$$

20. 设 $f(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$, 求 $f(x^5)$ 除以 $f(x)$ 所得余式。

首先注意到

$$f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \frac{x^5 - 1}{x - 1}, \quad x \neq 1,$$

所以 $f(x) \mid x^5 - 1$, 即

$$x^5 \equiv 1 \pmod{f(x)}$$

故

$$f(x^5) = (x^5)^4 + (x^5)^3 + (x^5)^2 + x^5 + 1 \equiv 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5 \pmod{f(x)}$$

21. 求以 $x^2 + 2x + 3$ 除 $(x^2 + 3x + 4)^4$ 所得的余式。

有

$$(x^2 + 3x + 4)^4 \equiv (x + 1)^4 = (x^2 + 2x + 1)^2 \equiv (-2)^2 = 4 \pmod{x^2 + 2x + 3}$$

22. 设 $f(x) = x^{37} - 2x^{26} + 4x^7 - 3$, 则

(a) 求 $f(x)$ 除以 $x^2 + 1$ 的余式。

有

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{37} - 2x^{26} + 4x^7 - 3 \\ &= (x^2)^{18} \cdot x - 2(x^2)^{13} + 4(x^2)^3 \cdot x - 3 \\ &= (-1)^{18} \cdot x - 2(-1)^{13} + 4(-1)^3 \cdot x - 3 \\ &= x + 2 - 4x - 3 \\ &= -3x - 1 \pmod{x^2 + 1} \end{aligned}$$

(b) 求 $f(x)$ 除以 $x^2 + x + 1$ 的余式。

有 $x^3 \equiv 1 \pmod{x^2 + x + 1}$, 于是

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{37} - 2x^{26} + 4x^7 - 3 \\ &= (x^3)^{12} \cdot x - 2(x^3)^8 \cdot x^2 + 4(x^3)^2 \cdot x - 3 \\ &\equiv x - 2x^2 + 4x - 3 \\ &= -2x^2 + 5x - 3 \\ &\equiv -2(-x - 1) + 5x - 3 \\ &= 7x - 1 \pmod{x^2 + x + 1} \end{aligned}$$

23. 求以 x^4-x 除 $x^{87}-2x^{44}-x^3+3x^2+1$ 所得的余式。

有 $x^4\equiv x\Rightarrow x^3\equiv 1\pmod{x^4-x}$, 故

$$x^{87}-2x^{44}-x^3+3x^2+1\equiv 1-2x^2-1+3x^2+1=x^2+1$$

24. 求 x^{100} 除以 x^3+2x^2+2x+1 的余式。

x^{100} 除以 $x+1$ 的余式即 $(-1)^{100}=1$, 又

$$x^3\equiv 1\pmod{x^2+x+1}$$

故 x^{100} 除以 x^2+x+1 的余式为 $x^{100}\equiv x\pmod{x^2+x+1}$, 现设

$$x^{100}=(x+1)(x^2+x+1)Q(x)+a(x^2+x+1)+x$$

令 $x=-1$ 有

$$1=a(1-1+1)-1\Rightarrow a=2$$

$\therefore x^{100}$ 除以 x^3+2x^2+2x+1 的余式为 $2x^2+3x+2$

25. 求 x^{200} 除以 $(x-1)^2$ 的余式。

发现 $f(x)$ 除以 $(x-1)$ 的余式为 $f(1)=1^{200}=1$, 将所求写成

$$\begin{aligned}
x^{200}&=(x-1)^2Q(x)+a(x-1)+1\\
x^{200}-1&=(x-1)^2Q(x)+a(x-1)\\
(x-1)(x^{199}+\cdots+x+1)&=(x-1)^2Q(x)+a(x-1)\\
x^{199}+\cdots+x+1&=(x-1)Q(x)+a
\end{aligned}$$

两边代 $x=1$, 得到

$$200=0+a$$

故余式为 $200(x-1)+1=200x-199$

设 $t=x-1$, 则题目变成 $x^{200}=(t+1)^{200}$ 除以 t^2 的余式。由二项式定理,

$$(t+1)^{200}={}^{200}C_{200}t^{200}+\cdots+{}^{200}C_2t^2+{}^{200}C_1t+{}^{200}C_0$$

则显然, $(t+1)^{200}$ 除以 t^2 的余式即为 ${}^{200}C_1t+{}^{200}C_0=200(x-1)+1=200x-199$

26. 已知多项式 $f(x)=x^{130}-1, g(x)=x^4-x^3+2x^2-x+1$, 求 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的余式。

设

$$x^{130}-1=(x^2+1)(x^2-x+1)Q(x)+Ax^3+Bx^2+Cx+D.$$

令 $x=i$, 则

$$-1-1=Ai^3+Bi^2+Ci+D=(-B+D)+(-A+C)i,$$

得

$$\begin{cases}-B+D=-2,\\ -A+C=0\end{cases}$$

令 $\omega=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$,

$$\omega^{130}-1=-\omega-1=-A+B(\omega-1)+C\omega+D=(B+C)\omega-A-B+D$$

得到方程组

$$\begin{cases}B+C=-1\\ -A-B+D=-1\end{cases}$$

解得 $A=-1,B=0,C=-1,D=-2$, 因此余式为 $-x^3-x-2$

27. 设 $f(x)$ 是一个次数有限的多项式, 且满足

$$(x+9)f(x+1)=(x+3)f(x+3),$$

已知 $f(0)=1$, 求 $f(1)$ 的值。

令 $x=-3$ 得 $f(-2)=0$, 所以 $f(x)$ 有因式 $(x+2)$, 设 $f(x)=(x+2)g(x)$ 得

$$(x+9)(x+3)g(x+1)=(x+3)(x+5)g(x+3)\Rightarrow(x+9)g(x+1)=(x+5)g(x+3)$$

同理, 令 $x=-5$ 得 $g(-4)=0$, 故 $g(x)$ 有因式 $(x+4)$, 设 $g(x)=(x+4)h(x)$ 得

$$(x+9)(x+5)h(x+1)=(x+5)(x+7)h(x+3)\Rightarrow(x+9)h(x+1)=(x+7)h(x+3)$$

令 $x=-7$ 得 $h(-6)=0$, 故 $h(x)$ 有因式 $(x+6)$, 设 $h(x)=(x+6)p(x)$ 得

$$(x+9)(x+7)p(x+1)=(x+7)(x+9)p(x+3) \Rightarrow p(x+1)=p(x+3)$$

即 $p(x)$ 是周期为 2 的函数, 因为 $p(x)$ 是次数有限的多项式, 故 $p(x)=c, c\in\mathbb{R}$

于是 $f(x)=c(x+2)(x+4)(x+6)$, 由 $f(0)=1$ 得 $c=\frac{1}{48}$, 故

$$f(1)=\frac{1}{48}(3)(5)(7)=\frac{35}{16}$$

根式、绝对值

1. 求

$$\frac{\sqrt{10+\sqrt{1}}+\sqrt{10+\sqrt{2}}+\cdots+\sqrt{10+\sqrt{99}}}{\sqrt{10-\sqrt{1}}+\sqrt{10-\sqrt{2}}+\cdots+\sqrt{10-\sqrt{99}}}$$

之值。

由

$$\left(\sqrt{10+\sqrt{a}}-\sqrt{10-\sqrt{a}}\right)^2=20-2\sqrt{100-a}$$

于是有

$$\sqrt{10+\sqrt{a}}-\sqrt{10-\sqrt{a}}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{10-\sqrt{100-a}}$$

令

$$L=\frac{\sqrt{10+\sqrt{1}}+\sqrt{10+\sqrt{2}}+\cdots+\sqrt{10+\sqrt{99}}}{\sqrt{10-\sqrt{1}}+\sqrt{10-\sqrt{2}}+\cdots+\sqrt{10-\sqrt{99}}}$$

则

$$\begin{aligned}L-1&=\frac{(\sqrt{10+\sqrt{1}}-\sqrt{10-\sqrt{1}})+\cdots+(\sqrt{10+\sqrt{99}}-\sqrt{10-\sqrt{99}})}{\sqrt{10-\sqrt{1}}+\cdots+\sqrt{10-\sqrt{99}}}\\&=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{10-\sqrt{99}}+\sqrt{10-\sqrt{98}}+\cdots+\sqrt{10-\sqrt{1}}\right)}{\sqrt{10-\sqrt{1}}+\sqrt{10-\sqrt{2}}+\cdots+\sqrt{10-\sqrt{99}}}=\sqrt{2}\end{aligned}$$

因此

$$L=\sqrt{2}+1$$

2. 求根式方程

$$\sqrt{6x-9}+\sqrt{2x-5}=x-1$$

的实数根。

原方程式两边平方得

$$6x-9+2x-5+2\sqrt{(6x-9)(2x-5)}=x^2-2x+1$$

看来并不是明智之举。考虑

$$(\sqrt{6x-9}+\sqrt{2x-5})(\sqrt{6x-9}-\sqrt{2x-5})=(6x-9)-(2x-5)=4x-4$$

由于 $x \neq 1$, 化为

$$\sqrt{6x-9}-\sqrt{2x-5}=4$$

消去 $\sqrt{2x-5}$ 可得

$$\sqrt{6x-9}=\frac{1}{2}(x-1+4)$$

两边平方,

$$4(6x-9)=x^2+6x+9 \Rightarrow (x-3)(x-15)=0$$

经检验得 $x=3$ 是增根, 且 $x=15$ 是原方程式的解。

3. 解方程

$$4+\sqrt{x^2-6x+13}=x+\sqrt{2x-5}$$

由

$$\sqrt{x^2-6x+13}=x-4+\sqrt{2x-5}$$

设 $x-4=y$, 化简得

$$\sqrt{y^2+2y+5}=y+\sqrt{2y+3}$$

两边平方,

$$y^2+2y+5=y^2+2y\sqrt{2y+3}+2y+3 \Rightarrow 1=y\sqrt{2y+3}$$

再次平方得

$$2y^3+3y^2-1=0 \Rightarrow (y+1)(2y^2+y-1)=0$$

解得

$$y=-1, \quad y=\frac{1}{2} \Rightarrow x=3, \quad x=\frac{9}{2}$$

经检验 $x=3$ 是增根, 原方程式的解为

$$x=\frac{9}{2}$$

4. 求所有实数 x 满足

$$x=\sqrt{x-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}.$$

原方程式变为

$$x-\sqrt{x-\frac{1}{x}}=\sqrt{1-\frac{1}{x}}$$

两边平方得

$$(x^2-1)-2\sqrt{x(x^2-1)}+x=0 \implies (\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x})^2=0$$

解得

$$x^2-x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}>0$$

5. 解方程

$$\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}+2\sqrt{49x^2+7x-42}=181-14x$$

由原方程

$$\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}+2\sqrt{(7x+7)(7x-6)}=181-14x$$

设 $ya=\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}$, 则

$$y^2=14x+1+2\sqrt{(7x+7)(7x-6)}$$

代回原方程得

$$y^2-(14x+1)+y=181-14x \Rightarrow (y+14)(y-13)=0$$

由于平方根之和为非负, 舍去 $y=-14$, 于是由

$$\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}=13$$

两边平方,

$$14x+1+2\sqrt{(7x+7)(7x-6)}=169 \Rightarrow \sqrt{49x^2-6}=84-7x$$

再次平方,

$$49x^2-6=7056-1176x+49x^2 \Rightarrow x=6$$

经检验, 原方程式的解为

$$x=6$$

6. 解

$$x-\sqrt{\frac{x}{2}+\frac{7}{8}-\sqrt{\frac{x}{8}+\frac{13}{64}}}=179$$

将两边乘以 4 得

$$4x-\sqrt{8x+14-2\sqrt{8x+13}}=716$$

观察到

$$8x+14-2\sqrt{8x+13}=(8x+13)-2\sqrt{8x+13}+1=(\sqrt{8x+13}-1)^2$$

且由原方程知 $x\geqslant 179$, 故 $\sqrt{8x+13}-1>0$, 方程变为

$$4x-(\sqrt{8x+13}-1)=716\Rightarrow 8x+13-2\sqrt{8x+13}-1443=0$$

因式分解得

$$(\sqrt{8x+13}-39)(\sqrt{8x+13}+37)=0$$

由于 $\sqrt{8x+13}\geqslant 0$, 所以

$$\sqrt{8x+13}=39\Rightarrow x=188.5$$

经检验, 原方程式的解为

$$x=188.5$$

7. 解

$$\frac{x-7}{2+\sqrt{x-3}}+\frac{x-5}{1+\sqrt{x-4}}=\sqrt{10}$$

首先有

$$-\frac{4-(x-3)}{2+\sqrt{x-3}}-\frac{1-(x-4)}{1+\sqrt{x-4}}=\sqrt{10}$$

于是

$$-(2-\sqrt{x-3})-(1-\sqrt{x-4})=\sqrt{10}\Rightarrow\sqrt{x-3}-\sqrt{x-4}=\sqrt{10}+3$$

两边移项得到

$$\sqrt{x-3}-\sqrt{10}=3+\sqrt{x-4}$$

两边平方,

$$x-3+10-2\sqrt{10(x-3)}=9+x-4-6\sqrt{x-4}\Rightarrow\sqrt{10(x-3)}-1=3\sqrt{x-4}$$

再次平方,

$$10(x-3)+1-2\sqrt{10(x-3)}=9(x-4)\Rightarrow x+7=2\sqrt{10(x-3)}$$

再再次平方,

$$x^2+14x+49=40(x-3)\Rightarrow (x-13)^2=0$$

经检验, 原方程式的解为

$$x=13$$

8. (a) 已知相异非零实数 a,b,c,d 满足

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

证明

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$$

由 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 得

$$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1,\quad \frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$$

即

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d},\quad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$

两式相除, 得

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$$

证毕。

(b) 利用 (a) 或其他方法, 解方程

$$\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}=\frac{4x-1}{2}$$

由 (a), 原方程化为

$$\frac{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})+(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})-(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}=\frac{(4x-1)+2}{(4x-1)-2}$$

即

$$\frac{2\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x-1}}=\frac{4x+1}{4x-3}$$

两边平方,

$$\frac{x+1}{x-1}=\frac{(4x+1)^2}{(4x-3)^2}=\frac{16x^2+8x+1}{16x^2-24x+9}.$$

再由 (a) 得

$$\frac{(x+1)+(x-1)}{(x+1)-(x-1)}=\frac{(16x^2+8x+1)+(16x^2-24x+9)}{(16x^2+8x+1)-(16x^2-24x+9)}.$$

化简得

$$\frac{2x}{2}=\frac{32x^2-16x+10}{32x-8}\Rightarrow x=\frac{5}{4}$$

经检验, 原方程的解为

$$x=\frac{5}{4}$$

9. 解方程

$$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3}=\sqrt[3]{12(x-1)}.$$

两边立方得

$$x+2x-3+3\sqrt[3]{x(2x-3)}(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3})=12(x-1)$$

由原方程 $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3}=\sqrt[3]{12(x-1)}$ 代入得

$$\sqrt[3]{x(2x-3)12(x-1)}=3(x-1)$$

两边再立方,

$$(x-1)(x-3)^2=0\Rightarrow x=1,3$$

经检验, 原方程式的解为

$$x=1\quad \text{或}\quad x=3$$

10. 证明

$$\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}=3$$

设

$$x=\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$$

完全立方展开得

$$x^3=9+4\sqrt{5}+9-4\sqrt{5}+3\sqrt[3]{81-80}(x)$$

即解得

$$x^3-3x-18=0\Rightarrow(x-3)(x^2+3x+6)=0\Rightarrow x=3\in\mathbb{R}$$

因此得证

$$\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}=3$$

11. 解方程

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\frac{199}{100}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}.$$

设 $a=x+\sqrt{x},b=x-\sqrt{x}$, 则 $a-b=\sqrt{a}-\sqrt{b}=2\sqrt{x}$, 原方程化为

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\frac{200}{199}\sqrt{x+\sqrt{x}},\quad \sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{199}{100}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

两式相加得

$$2\sqrt{x+\sqrt{x}}=\frac{200}{199}\sqrt{x+\sqrt{x}}+\frac{199}{100}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

解得

$$\sqrt{x}(19800\sqrt{x}-19801)=0\Rightarrow\sqrt{x}=\frac{19801}{19800}>0\Rightarrow x=\frac{19801^2}{19800^2}$$

12. 设 a,b 为正实数, 且

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1,\quad 2022a^2=2023b^2,$$

求 $\sqrt{2022a+2023b}$ 的值。

由 $2022a^2=2023b^2$ 得

$$\frac{b}{a}=\sqrt{\frac{2022}{2023}}.$$

记 $k=\sqrt{\frac{2022}{2023}}$, 则 $b=ka$。由 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$ 得

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{ka}=1\Rightarrow a=1+\frac{1}{k}.$$

于是

$$
\begin{aligned}
2022a+2023b &= 2022a+2023ka \\
&= a(2022+2023k) \\
&= \left(1+\frac{1}{k}\right)(2022+2023k) \\
&= 2022+2023+2022\cdot\frac{1}{k}+2023k \\
&= 2022+2023+2022\sqrt{\frac{2023}{2022}}+2023\sqrt{\frac{2022}{2023}} \\
&= 2022+2023+\sqrt{2022\cdot 2023}+\sqrt{2022\cdot 2023} \\
&= (\sqrt{2022}+\sqrt{2023})^2
\end{aligned}
$$

故

$$\sqrt{2022a+2023b}=\sqrt{2022}+\sqrt{2023}.$$

13. 若

$$(x-\sqrt{x^2-2011})(y+\sqrt{y^2-2011})+2011=0,$$

求 $2x+y$ 的值。

原式两边乘于 $x+\sqrt{x^2-2011}$ 可得

$$2011(y+\sqrt{y^2-2011})+2011(x+\sqrt{x^2-2011})=0$$

$$2011(x+y+\sqrt{x^2-2011}+\sqrt{y^2-2011})=0$$

即

$$x+y=-(\sqrt{x^2-2011}+\sqrt{y^2-2011}) \tag{1}$$

同理, 原式两边乘于 $y-\sqrt{y^2-2011}$ 可得

$$(x-\sqrt{x^2-2011})2011+2011(y-\sqrt{y^2-2011})=0$$

$$2011(x+y-(\sqrt{x^2-2011}+\sqrt{y^2-2011}))=0$$

$$x+y=\sqrt{x^2-2011}+\sqrt{y^2-2011} \tag{2}$$

由 (1) 及 (2) 可得

$$\sqrt{x^2-2011}+\sqrt{y^2-2011}=0\Rightarrow x=\pm\sqrt{2011}, y=\mp\sqrt{2011}\quad (\because x+y=0)$$

故

$$2x+y=x+y+x=\pm\sqrt{2011}$$

14. 求

$$\left|\sqrt{x+1}-2\right|+\left|\sqrt{x+1}-3\right|=1$$

的整数解集。

令 $t=\sqrt{x+1}$, 其中 $t\geqslant 0$, 则方程变为

$$|t-2|+|t-3|=1$$

分三种情况讨论:

情况 1: 当 $0\leqslant t<2$ 时,

$$(2-t)+(3-t)=1\Rightarrow t=2$$

这与 $t<2$ 矛盾, 无解。

情况 2: 当 $2\leqslant t\leqslant 3$ 时,

$$(t-2)+(3-t)=1\Rightarrow 1=1$$

恒成立, 因此 $t\in[2,3]$。

情况 3: 当 $t>3$ 时,

$$(t-2)+(t-3)=1\Rightarrow t=3$$

这与 $t>3$ 矛盾, 无解。

综合得 $2\leqslant\sqrt{x+1}\leqslant 3$, 平方得

$$4\leqslant x+1\leqslant 9\Rightarrow 3\leqslant x\leqslant 8$$

因此整数解集为 $\{3,4,5,6,7,8\}$。

15. 解

$$|x+1|-|x|+3|x-1|-2|x-2|=x+2$$

分情况讨论:

情况 1: 当 $x < -1$ 时,

$$-(x+1) + x - 3(x-1) + 2(x-2) = x + 2 \Rightarrow x = -2$$

得一解 $x = -2$。

情况 2: 当 $-1 \leqslant x < 0$ 时,

$$(x+1) + x - 3(x-1) + 2(x-2) = x + 2 \Rightarrow x = x + 2$$

故无解。

情况 3: 当 $0 \leqslant x < 1$ 时,

$$(x+1) - x - 3(x-1) + 2(x-2) = x + 2 \Rightarrow x = -1$$

这与 $0 \leqslant x < 1$ 矛盾, 故无解。

情况 4: 当 $1 \leqslant x < 2$ 时,

$$(x+1) - x + 3(x-1) + 2(x-2) = x + 2 \Rightarrow x = 2$$

这与 $1 \leqslant x < 2$ 矛盾, 故无解。

情况 4: 当 $x \geqslant 2$ 时,

$$(x+1) - x + 3(x-1) - 2(x-2) = x + 2 \Rightarrow x = x$$

恒成立, 因此 $x \geqslant 2$ 都是解。

结论: 原方程的解为 $x = -2$ 以及所有满足 $x \geqslant 2$ 的实数。

指数与对数

1. 设 $a=2019^{2017}, b=2019^{2018}, c=2019^{2019}$, 计算

$$\frac{1}{2019^{a-a}+2019^{a-b}+2019^{a-c}}+\frac{1}{2019^{b-a}+2019^{b-b}+2019^{b-c}}+\frac{1}{2019^{c-a}+2019^{c-b}+2019^{c-c}}$$

观察到原式为

$$\frac{2019^{-a}}{2019^{-a}+2019^{-b}+2019^{-c}}+\frac{2019^{-b}}{2019^{-a}+2019^{-b}+2019^{-c}}+\frac{2019^{-c}}{2019^{-a}+2019^{-b}+2019^{-c}}$$

答案呼之欲出 $\Rightarrow 1$

2. 试证

$$2^{\sqrt{\log_2 3}}=3^{\sqrt{\log_3 2}}$$

注意到

$$2^{\sqrt{\log_2 3}}=2^{\frac{\log_2 3}{\sqrt{\log_2 3}}}=\left(2^{\log_2 3}\right)^{\sqrt{\log_3 2}}=3^{\sqrt{\log_3 2}}$$

故左式等于右式, 得证。

设 $x=2^{\sqrt{\log_2 3}}, y=3^{\sqrt{\log_3 2}}$, 则

$$\log x=\sqrt{\log_2 3}\cdot\log 2=\sqrt{\frac{\log 3}{\log 2}}\cdot\log 2=\sqrt{\log 2\log 3}$$

同理

$$\log y=\sqrt{\log_3 2}\cdot\log 3=\sqrt{\frac{\log 2}{\log 3}}\cdot\log 3=\sqrt{\log 2\log 3}$$

故

$$\log x=\log y\Rightarrow x=y \quad \text{（得证）}$$

3. 解方程

$$2^{x+2}5^{6-x}=10^{x^2},$$

两边取 log 得

$$(x+2)\log 2+(6-x)\log 5=x^2\Rightarrow x^2-\left(\log\frac{2}{5}\right)x-2\log 250=0$$

因式分解给出

$$(x-2)(x+\log 250)=0\Rightarrow x=2,-\log 250$$

4. 求解方程

$$\frac{e^{2x}+16^x}{(4e)^x}=\frac{4+e}{2\sqrt{e}}.$$

原方程即

$$\left(\frac{e}{4}\right)^x+\left(\frac{4}{e}\right)^x=\frac{\sqrt{e}}{2}+\frac{2}{\sqrt{e}}$$

令

$$y=\left(\frac{e}{4}\right)^x$$

则由

$$y^2-\left(\left(\frac{e}{4}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{e}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)y+1=0$$

因式分解得

$$\left(y-\left(\frac{e}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\left(y-\left(\frac{e}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)=0$$

解得

$$x=\frac{1}{2},\quad x=-\frac{1}{2}$$

5. 解

$$x^{x^x}=(x^x)^x$$

原方程即

$$x^{x^x} = x^{x^2}$$

先考虑指数方程的特殊情况 $x=-1,0,1$, 可得解

$$x = -1, 1$$

当 $x \neq -1,0,1$ 时, 由底数相等所以指数相等的性质得,

$$x = 2$$

故原方程式的解为

$$x=-1 \quad 或 \quad x=1 \quad 或 \quad x=2$$

6. 已知

$$(x\sqrt{x}\sqrt[3]{x})^x = x^{x\sqrt{x}\sqrt[3]{x}},$$

试求 x^5 的值。

$$(x\sqrt{x}\sqrt[3]{x})^x = x^{x\sqrt{x}\sqrt[3]{x}}$$
$$x^{(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})x} = x^{x^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}}$$
$$x^{(\frac{11}{6})x} = x^{x^{\frac{11}{6}}}$$

考虑特殊情况 $x=-1,0,1$, 可得解 $x=1$, 此时因底数相等所以指数相等, 得

$$\frac{11}{6}x = x^{\frac{11}{6}} \Rightarrow x^5 = \left(\frac{11}{6}\right)^6$$

故 x^5 的可能值为

$$x^5 = 1 \quad 或 \quad x^5 = \left(\frac{11}{6}\right)^6$$

7. 求满足方程

$$(x^2+2x)^{x^2-3x+2} = 1$$

的实数解。

设 $A=x^2+2x$, $B=x^2-3x+2$。欲使 $A^B=1$, 仅以下三种情况成立:

- $B=0$:
$$x^2-3x+2=0 \quad\Rightarrow\quad (x-1)(x-2)=0 \Rightarrow \quad x=1,2$$
- $A=1$:
$$x^2+2x=1 \quad\Rightarrow\quad x=-1\pm\sqrt{2}$$
- $A=-1$ 且 B 为偶数:
$$x^2+2x=-1 \quad\Rightarrow\quad (x+1)^2=0 \quad\Rightarrow\quad x=-1$$
此时
$$B=(-1)^2-3(-1)+2=6$$
为偶数, 成立。

综上, 解为
$$x\in\{1,2,-1+\sqrt{2},-1-\sqrt{2},-1\}$$

8. 计算
$$5^{(\log 2)^3}\cdot 8^{(\log 5)^2}\cdot 5^{(\log 5)^3}$$

令 $a=\log 2, b=\log 5$, 则 $a+b=1$, 原式为
$$L=5^{a^3}\cdot 8^{b^2}\cdot 5^{b^3}$$
两边取对数, 则
$$\log L=(a^3+b^3)b+3ab^2=(a+b)(a^2-ab+b^2)b+3ab^2=b(a+b)^2=\log 5$$
因此
$$L=5$$

9. 已知正实数 x 满足
$$\log_2 x\log_4 x\log_6 x=\log_2 x\log_4 x+\log_2 x\log_6 x+\log_4 x\log_6 x,$$

求 x。

设 $\log_2 x = a, \log_6 x = b$, 则 $\log_4 x = \dfrac{1}{2}a$, 原式为

$$\frac{1}{2}a^2 b = \frac{1}{2}a^2 + ab + \frac{1}{2}ab \Rightarrow ab = a + 3b$$

将 $a = \dfrac{\log x}{\log 2}, b = \dfrac{\log x}{\log 6}$ 代入得

$$\frac{(\log x)^2}{(\log 2)(\log 6)} = \frac{\log x(\log 6 + 3\log 2)}{(\log 2)(\log 6)} \Rightarrow \log x(\log x - \log 48) = 0$$

所以

$$x = 1 \quad 或 \quad x = 48$$

10. 求

$$\sqrt{\log_3 \sqrt{6} + \sqrt{\log_3 2}} + \sqrt{\log_3 \sqrt{6} - \sqrt{\log_3 2}}$$

之值。

令

$$a = \log_3 \sqrt{6} = \frac{1}{2}(1 + \log_3 2), \quad b = \sqrt{\log_3 2} < 1$$

则有

$$a = \frac{b^2 + 1}{2}$$

因此

$$\begin{aligned}
\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b} &= \sqrt{\frac{b^2+1}{2} + b} + \sqrt{\frac{b^2+1}{2} - b} \\
&= \sqrt{\frac{1}{2}(b+1)^2} + \sqrt{\frac{1}{2}(b-1)^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(b+1) + \frac{1}{\sqrt{2}}(1-b) = \sqrt{2}
\end{aligned}$$

11. 解不等式

$$\sqrt{\log_2 x - 1} + \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} x^3 + 2 > 0$$

设 $y=\log_2 x$, 则不等式化为

$$\sqrt{y-1}-\frac{3}{2}y+2>0,\quad 且\ y\geqslant 1.$$

设 $z=\sqrt{y-1}$, 则 $y=z^2+1$, 方程变为

$$z-\frac{3}{2}(z^2+1)+2>0\Rightarrow(3z+1)(z-1)<0$$

于是

$$-\frac{1}{3}<z<1\Rightarrow 0\leqslant z^2<1\Rightarrow 1\leqslant y<2$$

再考虑 y 的定义域 $y\geqslant 1$, 经检验有

$$2\leqslant x<4$$

12. 求不等式的解集

$$\log(x-40)+\log(60-x)<2$$

变为

$$(x-40)(60-x)<100$$

注意到 $(x-40)(60-x)=-(x-50)^2+100$, 所以不等式等价于

$$-(x-50)^2+100<100\Rightarrow(x-50)^2>0\Rightarrow x\neq 50$$

且由定义域

$$\begin{cases}x-40>0\\60-x>0\end{cases}\Rightarrow 40<x<60$$

经检验得解集

$$(40,\ 50)\cup(50,\ 60).$$

13. 解不等式:

$$\left(\log_{\frac{1}{3}}x-1\right)\left(\log_{\frac{1}{4}}x+2\right)\left(\log_{\frac{1}{5}}x-3\right)>0.$$

换底得

$$\left(\frac{\log x}{-\log 3}-1\right)\left(\frac{\log x}{-\log 4}+2\right)\left(\frac{\log x}{-\log 5}-3\right)>0$$

即

$$(\log x+\log 3)(\log x-2\log 4)(\log x+3\log 5)<0$$

符号分析得

$$-\log 3<\log x<2\log 4,\quad \log x<-3\log 5$$

解集为

$$\frac{1}{3}<x<16 \quad \text{或} \quad 0<x<\frac{1}{125}$$

14. 求

$$|x-1|^{\log_2(4-x)}<|x-1|^{\log_2(1+x)}$$

的解之范围。

由 $\log_2(4-x)$ 及 $\log_2(1+x)$ 的定义域, 得

$$x<4 \quad \text{且} \quad x>-1$$

即 $x\in(-1,4)$, 且 $x\neq 0,1,2$, 否则不等式不成立。分四种情况讨论:

情况 1: $x\in(-1,0)$, 则

$$\begin{aligned}(1-x)^{\log_2(4-x)}<(1-x)^{\log_2(1+x)} &\Rightarrow \log_2(4-x)<\log_2(1+x)\\ &\Rightarrow 4-x<1+x\\ &\Rightarrow x>\frac{3}{2}\end{aligned}$$

此情况解集为 $(-1,0)\cap\left(\frac{3}{2},\infty\right)=\emptyset$, 无解。

情况 2: $x\in(0,1)$, 则

$$\begin{aligned}(1-x)^{\log_2(4-x)}<(1-x)^{\log_2(1+x)} &\Rightarrow \log_2(4-x)>\log_2(1+x)\\ &\Rightarrow 4-x>1+x\\ &\Rightarrow x<\frac{3}{2}\end{aligned}$$

此情况解集为 $(0,1)\cap\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)=(0,1)$。

情况 3: $x \in (1,2)$, 则

$$\begin{aligned}(x-1)^{\log_2(4-x)} < (x-1)^{\log_2(1+x)} &\Rightarrow \log_2(4-x) > \log_2(1+x)\\ &\Rightarrow 4-x > 1+x\\ &\Rightarrow x < \frac{3}{2}\end{aligned}$$

此情况解集为 $(1,2) \cap \left(-\infty, \frac{3}{2}\right) = \left(1, \frac{3}{2}\right)$。

情况 4: $x \in (2,4)$, 则

$$\begin{aligned}(x-1)^{\log_2(4-x)} < (x-1)^{\log_2(1+x)} &\Rightarrow \log_2(4-x) < \log_2(1+x)\\ &\Rightarrow 4-x < 1+x\\ &\Rightarrow x > \frac{3}{2}\end{aligned}$$

此情况解集为 $(2,4) \cap \left(\frac{3}{2}, \infty\right) = (2,4)$。

综上所述, 原方程式的解集为 $\left(0, \frac{3}{2}\right) \cup (2,4) \setminus \{1\}$。

15. 求所有实数 x, 使得

$$\sqrt{\log_2 x \cdot \log_2(4x) + 1} + \sqrt{\log_2 x \cdot \log_2\left(\frac{x}{64}\right) + 9} = 4$$

发现

$$\begin{aligned}f(x) &= \sqrt{\log_2 x \cdot \log_2(4x) + 1} + \sqrt{\log_2 x \cdot \log_2\left(\frac{x}{64}\right) + 9}\\ &= \sqrt{\log_2 x(2+\log_2 x) + 1} + \sqrt{\log_2 x(\log_2 x - 6) + 9}\\ &= \sqrt{(\log_2 x + 1)^2} + \sqrt{(\log_2 x - 3)^2}\\ &= \begin{cases} -2\log_2 x + 2 & , \log_2 x \leqslant -1\\ 4 & , -1 < \log_2 x \leqslant 3\\ 2\log_2 x - 2 & , \log_2 x > 3\end{cases}\end{aligned}$$

欲使 $f(x) = 4$, 当 $\log_2 x \leqslant -1, \log_2 x = -1$; 当 $-1 < \log_2 x \leqslant 3, f(x) = 4$ 恒成立; 当

$\log_2 x > 3$, 无解; 因此解为

$$-1 \leqslant \log_2 x \leqslant 3 \Rightarrow \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 8$$

16. 已知

$$\frac{\log a}{b-c} = \frac{\log b}{c-a} = \frac{\log c}{a-b},$$

其中 $a \neq b \neq c$, 试求 $a^a b^b c^c$ 的值。

设

$$\frac{\log a}{b-c} = \frac{\log b}{c-a} = \frac{\log c}{a-b} = k$$

则

$$\log a = k(b-c), \quad \log b = k(c-a), \quad \log c = k(a-b)$$

因此

$$\begin{aligned}\log(a^a b^b c^c) &= a\log a + b\log b + c\log c \\ &= ak(b-c) + bk(c-a) + ck(a-b) \\ &= k[ab - ac + bc - ab + ca - cb] \\ &= 0\end{aligned}$$

即

$$a^a b^b c^c = 1$$

17. 设 a, b 同号, 且 $a^2 - 2ab - 9b^2 = 0$, 求

$$\log(a^2 + ab - 6b^2) - \log(a^2 + 4ab + 15b^2)$$

的值。

由 $a^2 - 2ab - 9b^2 = 0$ 解得

$$a = (\sqrt{10} + 1)b$$

故

$$
\begin{aligned}
&\log(a^2+ab-6b^2)-\log(a^2+4ab+15b^2)\\
&=\log(3ab+3b^2)-\log(6ab+24b^2)\\
&=\log\left(\frac{3b(a+b)}{6b(a+4b)}\right)\\
&=\log\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{a+b}{a+4b}\right)\\
&=\log\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{(\sqrt{10}+2)b}{(\sqrt{10}+5)b}\right)\\
&=\log\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{(\sqrt{10}+2)(5-\sqrt{10})}{(\sqrt{10}+5)(5-\sqrt{10})}\right)\\
&=\log\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{10}}{15}\right)=\log\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)=-\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

18. 设正实数 x, y（$x \neq 1, y \neq 1$）满足

$$\log_2 x = \log_y 16, \quad xy = 64,$$

求

$$\left(\log_2 \frac{x}{y}\right)^2$$

由 $xy = 64$ 得 $x = \frac{64}{y}$, 代入第一式:

$$\log_2\left(\frac{64}{y}\right) = \log_y 16 \Rightarrow 6 - \log_2 y = \frac{4}{\log_2 y}$$

设 $a = \log_2 y$, 则变为

$$6 - a = \frac{4}{a} \Rightarrow a^2 - 6a + 4 = 0$$

解得

$$\log_2 y = a = 3 \pm \sqrt{5}$$

所求为

$$(\log_2 x - \log_2 y)^2 = (a-(6-a))^2 = (2a-6)^2 = (\pm 2\sqrt{5})^2 = 20$$

19. 已知 $a^x=bc, b^y=ac, c^z=ab$, 证明

$$xyz=x+y+z+2$$

由 $a^x=bc$, 两边取 yz 次方

$$(a^x)^{yz}=(bc)^{yz} \Rightarrow a^{xyz}=b^{yz}\cdot c^{yz}$$

由 $b^y=ac$, 得 $b^{yz}=(ac)^z=a^zc^z$; 由 $c^z=ab$, 得 $c^{yz}=(ab)^y=a^yb^y$; 于是

$$a^{xyz}=(a^zc^z)(a^yb^y)=a^{z+y}b^yc^z=a^{z+y}\cdot ac\cdot ab=a^{z+y+2}bc$$

又 $a^x=bc$, 故

$$a^{xyz}=a^{z+y+2}\cdot a^x=a^{x+y+z+2} \Rightarrow xyz=x+y+z+2$$

20. 设 a,b,c 均为异于 1 的正数, 且满足 $abc=1$, 证明

$$\log_a b+\log_a c+\log_b c+\log_b a+\log_c b+\log_c a=-3$$

有

$$\begin{aligned}&\log_a a+\log_a b+\log_a c+\log_b b+\log_b c+\log_b a+\log_c c+\log_c b+\log_c a\\&=\log_a(abc)+\log_b(abc)+\log_c(abc)\\&=0\end{aligned}$$

故原式得证。

21. 已知

$$\log_{10}\sin x+\log_{10}\cos x=-1,$$

且整数 n 满足

$$\log_{10}(\sin x+\cos x)=\frac{1}{2}(\log_{10}n-1),$$

求 n。

由

$$\log_{10}\sin x+\log_{10}\cos x=-1\Rightarrow \sin x\cos x=10^{-1}=\frac{1}{10}$$

又 $\sin x+\cos x=\sqrt{1+2\cdot\frac{1}{10}}=\sqrt{\frac{6}{5}}$ ，则

$$\log_{10} n=2\log_{10}\sqrt{\frac{6}{5}}+1=\log_{10}\frac{6}{5}+\log_{10}10=\log_{10}12\Rightarrow n=12$$

22. 解方程式

$$(\log_5 x)^2+\log_{5x}\left(\frac{5}{x}\right)=1$$

设 $\log_5 x=t$, 则

$$\log_{5x}\left(\frac{5}{x}\right)=\frac{\log_5\frac{5}{x}}{\log_5(5x)}=\frac{\log_5 5-\log_5 x}{\log_5 5+\log_5 x}=\frac{1-t}{1+t}$$

原方程式变为

$$\begin{gathered}t^2+\frac{1-t}{1+t}=1\\ t^2(1+t)+1-t=1+t\\ t^3+t^2-2t=0\\ t(t+2)(t-1)=0\end{gathered}$$

解得 $t=0,-2,1$, 即

$$x=5^0=1,\quad \text{或}\quad x=5^{-2}=\frac{1}{25},\quad \text{或}\quad x=5^1=5$$

经检验得 $x=1,x=\frac{1}{25},x=5$ 都是原方程的解。

23. 解方程

$$\log_{2x}\left(48\sqrt[3]{3}\right)=\log_{3x}\left(162\sqrt[3]{2}\right)$$

原式变为

$$\frac{\log(48\sqrt[3]{3})}{\log(2x)}=\frac{\log(162\sqrt[3]{2})}{\log(3x)}.$$

又因

$$\log(48\sqrt[3]{3})=4\log 2+\frac{4}{3}\log 3,\quad \log(162\sqrt[3]{2})=\frac{4}{3}\log 2+4\log 3.$$

于是有

$$\frac{4\log 2+\frac{4}{3}\log 3}{\log 2+\log x}=\frac{\frac{4}{3}\log 2+4\log 3}{\log 3+\log x}.$$

化简最终得到

$$\log x=\frac{1}{2}\log 6\Rightarrow x=\sqrt{6}.$$

24. 求所有实数 x, 使得

$$\log_{5x+9}(x^2+6x+9)+\log_{x+3}(5x^2+24x+27)=4.$$

原方程式化为

$$\begin{aligned}\frac{\log(x^2+6x+9)}{\log(5x+9)}+\frac{\log(5x^2+24x+27)}{\log(x+3)}&=4\\ \frac{2\log(x+3)}{\log(5x+9)}+\frac{\log(5x+9)+\log(x+3)}{\log(x+3)}&=4\\ 2\frac{\log(x+3)}{\log(5x+9)}+\frac{\log(5x+9)}{\log(x+3)}+1&=4\end{aligned}$$

令 $t=\frac{\log(x+3)}{\log(5x+9)}$, 解得

$$2t+\frac{1}{t}=3\Rightarrow t=1\text{ 或 }t=\frac{1}{2}$$

当 $t=1$, 解得

$$\log(x+3)=\log(5x+9)\Rightarrow x=-\frac{3}{2}$$

当 $t=\frac{1}{2}$, 则 $2\log(x+3)=\log(5x+9)$, 即

$$2\log(x+3)=\log(5x+9)\Rightarrow x=0\text{ 或 }x=-1$$

经检验得, 原方程的实数解为

$$x=0,-1,-\frac{3}{2}$$

25. 求解下列方程组:

$$\begin{cases}(2x)^{\ln 2} = (3y)^{\ln 3} \\ 3^{\ln x} = 2^{\ln y}\end{cases}$$

两边取对数,

$$(\ln 2)^2 + \ln 2 \cdot \ln x = (\ln 3)^2 + \ln 3 \cdot \ln y \tag{1}$$

$$\ln x \cdot \ln 3 = \ln y \cdot \ln 2 \Rightarrow \ln x = \frac{\ln y \cdot \ln 2}{\ln 3} \tag{2}$$

将 (2) 代入 (1), 可解得

$$x = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{1}{3}$$

26. 求下列方程组的所有实数解:

$$\begin{cases}x + \log_{10} x = y - 1 \\ y + \log_{10}(y-1) = z - 1 \\ z + \log_{10}(z-2) = x + 2\end{cases}$$

将方程组改写为

$$x + \log_{10} x = y - 1$$
$$(y-1) + \log_{10}(y-1) = z - 2$$
$$(z-2) + \log_{10}(z-2) = x$$

令 $a = x, b = y - 1, c = z - 2$, 方程组可改写为:

$$a + \log_{10} a = b \tag{1}$$
$$b + \log_{10} b = c \tag{2}$$
$$c + \log_{10} c = a \tag{3}$$

容易验证 $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ 是一解, 现考虑 $a > 1$, 则

$$\log_{10} a > 0 \Rightarrow b = a + \log_{10} a > a > 1 \Rightarrow c = b + \log_{10} b > b > a > 1$$

由 (3) 得 $a=c+\log_{10}c>c>b>a$, 矛盾。而当 $0<a<1$,

$$\log_{10}a<0\Rightarrow b=a+\log_{10}a<a<1\Rightarrow c=b+\log_{10}b<b<a<1$$

由 (3) 得 $a=c+\log_{10}c<c<b<a$, 矛盾。因此 $(a,b,c)=(1,1,1)$ 是唯一解, 即

$$(x,y,z)=(1,2,3)$$

27. 若正实数 x,y,z 满足

$$\begin{cases}\log_2 x+\log_4 y+\log_4 z=2\\ \log_3 y+\log_9 z+\log_9 x=2\\ \log_4 z+\log_{16} x+\log_{16} y=2\end{cases}$$

求 xyz。

原方程组给出

$$\begin{cases}\log_2 x+\log_2\sqrt{y}+\log_2\sqrt{z}=2\Rightarrow x\sqrt{yz}=2^2\\ \log_3 y+\log_3\sqrt{z}+\log_3\sqrt{x}=2\Rightarrow y\sqrt{xz}=3^2\\ \log_4 z+\log_4\sqrt{x}+\log_4\sqrt{y}=2\Rightarrow z\sqrt{xy}=4^2\end{cases}$$

将三式相乘得

$$(xyz)^2=2^6\cdot 3^2\Rightarrow xyz=24$$

28. 解联立方程组

$$\begin{cases}\log x\log y-3\log 5y-\log 8x=-4\\ \log y\log z-4\log 5y-\log 16z=4\\ \log z\log x-4\log 8x-3\log 625z=-18\end{cases}$$

三式化简得

$$\log x\log y-3\log y-\log x=-1$$
$$\log y\log z-4\log y-\log z=8$$
$$\log z\log x-4\log x-3\log z=-6$$

因式分解:

$$(\log x-3)(\log y-1)=2 \tag{1}$$

$$(\log y-1)(\log z-4)=12 \tag{2}$$

$$(\log z-4)(\log x-3)=6 \tag{3}$$

三式相乘可得

$$(\log x-3)(\log y-1)(\log z-4)=\pm\sqrt{2\cdot 6\cdot 12}=\pm 12 \tag{4}$$

分别作 $\frac{(4)}{(2)},\frac{(4)}{(3)},\frac{(4)}{(1)}$ 得解 $\log x-3=\pm 1,\log y-1=\pm 2,\log z-4=\pm 6$, 即

$$(x,y,z)=(10^4,10^3,10^{10})\quad \text{或} \quad (10^2,10^{-1},10^{-2})$$

方程组

1. 若 x, y, z 都是正数且满足

$$\begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=4, \\ y+\dfrac{1}{z}=1, \\ z+\dfrac{1}{x}=\dfrac{7}{3}, \end{cases}$$

求 xyz 的值。

$$\begin{aligned} \left(x+\frac{1}{y}\right)\left(y+\frac{1}{z}\right)\left(z+\frac{1}{x}\right) &= xyz+x+\frac{1}{y}+y+\frac{1}{z}+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{xyz} \\ &= xyz+4+1+\frac{7}{3}+\frac{1}{xyz}=\frac{28}{3} \end{aligned}$$

于是

$$xyz+\frac{1}{xyz}=2 \Rightarrow (xyz)^2-2(xyz)+1=0 \Rightarrow xyz=1$$

2. 求满足方程组

$$\begin{cases} x^2+x^2y^2+x^2y^4=525 \\ x+xy+xy^2=35 \end{cases}$$

的所有实数序对 (x, y)。

$$x^2+x^2y^2+x^2y^4=525 \tag{1}$$
$$x+xy+xy^2=35 \tag{2}$$

发现

$$525=x^2+x^2y^2+x^2y^4=(x-xy+xy^2)(x+xy+xy^2)$$

于是得到

$$x-xy+xy^2=15 \tag{3}$$

(2) − (3) 得

$$2xy = 20 \Rightarrow x = \frac{10}{y}$$

代回 (3) 解得

$$(x, y) = (5, 2), \left(20, \frac{1}{2}\right)$$

3. 若两正数 a, b 满足

$$\begin{cases} a\sqrt{a} + b\sqrt{b} = 50 \\ a\sqrt{b} + b\sqrt{a} = 25 \end{cases}$$

求 ab 之值。

$$a\sqrt{a} + b\sqrt{b} = 50 \tag{1}$$

$$a\sqrt{b} + b\sqrt{a} = 25 \tag{2}$$

由 $\dfrac{(1)}{(2)}$ 得

$$\frac{(\sqrt{a})^3 + (\sqrt{b})^3}{\sqrt{ab}(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \frac{a - \sqrt{ab} + b}{\sqrt{ab}} = 2 \Rightarrow a + b = 3\sqrt{ab} \Rightarrow a^2 + b^2 = 7ab \tag{3}$$

又由 (1) × (2) 得

$$(a\sqrt{a} + b\sqrt{b})(a\sqrt{b} + b\sqrt{a}) = \sqrt{ab}(a^2 + b^2) + ab(a + b) = 1250 \tag{4}$$

将 (3) 代入 (4),

$$\sqrt{ab}(7ab) + ab(3\sqrt{ab}) = 10(\sqrt{ab})^3 = 1250 \Rightarrow ab = 25$$

4. 求正实数对 (x, y) 满足

$$\begin{cases} x^2 + x\sqrt[3]{xy^2} = 208 \\ y^2 + y\sqrt[3]{yx^2} = 1053 \end{cases}$$

原方程即

$$x^{\frac{4}{3}}(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}})=208 \tag{1}$$

$$y^{\frac{4}{3}}(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}})=1053 \tag{2}$$

两式相除得

$$\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{4}{3}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{4} \Rightarrow \frac{y}{x}=\left(\frac{3}{2}\right)^{3}=\frac{27}{8},$$

将 $y=\frac{27}{8}x$ 代入 (1), 解得

$$x^2\left(1+\frac{9}{4}\right)=208 \Rightarrow (x,y)=(8,27).$$

5. 设相异实数 x,y 满足

$$\begin{cases} x^2+\sqrt{3}y=4 \\ y^2+\sqrt{3}x=4 \end{cases}$$

求 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ 的值。

$$x^2+\sqrt{3}y=4 \tag{1}$$

$$y^2+\sqrt{3}x=4 \tag{2}$$

由于 $x\neq y,(1)-(2)$ 得

$$x^2-y^2=\sqrt{3}(x-y) \Rightarrow x+y=\sqrt{3}.$$

且 $(1)+(2)$ 得

$$x^2+y^2+\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=8 \Rightarrow x^2+y^2=(\sqrt{3})^2-2xy=5 \Rightarrow xy=-1$$

因此

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{5}{-1}=-5.$$

6. 已知实数 x, y, z 满足

$$\begin{cases} xy + 4z = 60 \\ yz + 4x = 60 \\ zx + 4y = 60 \end{cases}$$

求 x 的可能值。

$$xy + 4z = 60 \tag{1}$$

$$yz + 4x = 60 \tag{2}$$

$$zx + 4y = 60 \tag{3}$$

由 (1) -(2) 得

$$y(x-z) + 4(z-x) = 0 \Rightarrow (x-z)(y-4) = 0 \Rightarrow y = 4 \text{ 或 } x = z$$

同理有

$$z = 4 \text{ 或 } x = y$$

及

$$x = 4 \text{ 或 } y = z$$

若 $x = 4$, 由 (1) 及 (2) 得

$$y + z = 15, \quad yz = 44$$

由此可知 y, z 是方程

$$t^2 - 15t + 44 = 0$$

的根, 解得

$$(x, y, z) = (4, 4, 11), (4, 11, 4)$$

若 $y = z$, 由 (2)-(1) 得

$$y^2 - (x+4)y + 4x = 0 \Rightarrow (y-4)(y-x) = 0$$

当 $y = 4$ 有

$$(x, y, z) = (11, 4, 4)$$

而当 $y = x$ 有 $x = y = z$, 代入 (1) 得

$$x^2 + 4x - 60 = 0 \Rightarrow (x+10)(x-6) = 0$$

给出

$$(x,y,z)=(-10,-10,-10),(6,6,6)$$

所以原方程组的解为

$$(x,y,z)=(-10,-10,-10),(6,6,6),(11,4,4),(4,11,4),(4,4,11)$$

7. 解方程组

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ x^2+y^2+z^2=18 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=4 \end{cases}$$

由

$$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)$$

给出

$$xy+xz+yz=\frac{1}{2}(6^2-18)=9$$

又由

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2=x+y+z+2(\sqrt{xy}+\sqrt{xz}+\sqrt{yz})$$

所以

$$4^2=6+2(\sqrt{xy}+\sqrt{xz}+\sqrt{yz})\Rightarrow\sqrt{xy}+\sqrt{xz}+\sqrt{yz}=5$$

对上式两边平方, 有

$$xy+xz+yz+2\sqrt{xyz}(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})=25$$

即

$$9+2\sqrt{xyz}\cdot 4=25\Rightarrow xyz=4$$

由韦达定理, x,y,z 为三次方程

$$t^3-6t^2+9t-4=0$$

的根, 因式分解得

$$(t-1)^2(t-4)=0\Rightarrow t=1,4$$

所以方程组的解为

$$(x,y,z)=(1,1,4),(1,4,1),(4,1,1)$$

8. 若 x, y, z 满足

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{3+\log 2}+\dfrac{z}{3+\log 5}=1 \\ \dfrac{x}{7}+\dfrac{y}{7+\log 2}+\dfrac{z}{7+\log 5}=1 \\ \dfrac{x}{11}+\dfrac{y}{11+\log 2}+\dfrac{z}{11+\log 5}=1 \end{cases}$$

求 $x+y+z$ 之值。

不妨设

$$\frac{a}{t}+\frac{b}{t+\log 2}+\frac{c}{t+\log 5}=1$$

则

$$f(t)=a(t+\log 2)(t+\log 5)+b\,t(t+\log 5)+c\,t(t+\log 2)-t(t+\log 2)(t+\log 5)=0$$

由韦达定理, 三根之和为

$$a+b+c-1=3+7+11=21 \Rightarrow a+b+c=22$$

9. 已知 $x, y \in \mathbb{R}$, 求解方程组

$$\begin{cases} \sqrt{x}\left(1+\dfrac{1}{x+y}\right)=2 \\ \sqrt{y}\left(1-\dfrac{1}{x+y}\right)=\sqrt{2} \end{cases}$$

$$1+\frac{1}{x+y}=\frac{2}{\sqrt{x}} \tag{1}$$

$$1-\frac{1}{x+y}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{y}} \tag{2}$$

$(1)^2-(2)^2$:

$$\left(1+\frac{1}{x+y}\right)^2-\left(1-\frac{1}{x+y}\right)^2=\frac{4}{x}-\frac{2}{y} \Rightarrow \frac{4}{x+y}=\frac{4y-2x}{xy}$$

整理得

$$x^2+xy-2y^2=0 \Rightarrow (x+2y)(x-y)=0$$

由于 $x, y \geqslant 0$, 取 $x=y$, 代入 (1) 解得

$$1+\frac{1}{2x}=\frac{2}{\sqrt{x}} \Rightarrow 4x^2-12x+1=0 \Rightarrow x=y=\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$$

10. 解方程组

$$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x+y}{x}}+\sqrt{\dfrac{x}{x+y}}=\dfrac{5}{2}\\ 2x^2+y^2=176\end{cases}$$

$$\sqrt{\frac{x+y}{x}}+\sqrt{\frac{x}{x+y}}=\frac{5}{2} \tag{1}$$

$$2x^2+y^2=176 \tag{2}$$

设

$$u=\sqrt{\frac{x+y}{x}}$$

方程 (1) 变为

$$u+\frac{1}{u}=\frac{5}{2}\Rightarrow(2u-1)(u-2)=0$$

当 $u=\frac{1}{2}$,

$$\frac{x+y}{x}=\frac{1}{4}\Rightarrow y=-\frac{3}{4}x$$

代入 (2), 解得

$$x=\pm16\sqrt{\frac{11}{41}},\quad y=-\frac{3}{4}x=\mp12\sqrt{\frac{11}{41}}$$

而当 $u=2$,

$$\frac{x+y}{x}=16\Rightarrow y=3x$$

代入 (2), 解得

$$x=\pm4,\quad y=3x=\pm12$$

故原方程组解为

$$(x,y)=(4,12),(-4,-12),\left(16\sqrt{\frac{11}{41}},-12\sqrt{\frac{11}{41}}\right),\left(-16\sqrt{\frac{11}{41}},12\sqrt{\frac{11}{41}}\right)$$

11. 解方程组

$$\begin{cases}(91-2x)^3=216xy^2\\ (37-2y)^3=216x^2y\end{cases}$$

$$(91-2x)^3=216xy^2 \tag{1}$$

$$(37-2y)^3=216x^2y \tag{2}$$

令

$$x=u^3,\quad y=v^3.$$

将 (1),(2) 两边开立方得

$$91-2u^3=6uv^2,\quad 37-2v^3=6u^2v.$$

两式相加,

$$2(u+v)^3=128 \Rightarrow u+v=4$$

将 $v=4-u$ 代入 (1),

$$6u(4-u)^2+2u^3=91 \Rightarrow (2u-7)(4u^2-10u+13)=0 \Rightarrow u=\frac{7}{2}\in\mathbb{R}$$

因此

$$v=4-u=\frac{1}{2}$$

最终解为

$$x=\frac{343}{8},\quad y=\frac{1}{8}$$

12. 解

$$\begin{cases} 3(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}=125a \\ 4(a^2+b^2)=-25b \end{cases}$$

$$3(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}=125a \tag{1}$$

$$4(a^2+b^2)=-25b \tag{2}$$

由 $\frac{(1)}{(2)}$ 得

$$-\frac{20a}{3b}=(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}$$

平方得

$$\frac{400a^2}{9b^2}=a^2+b^2 \Rightarrow a^2=\frac{9b^2}{400-9b^2}$$

代入 (2) 得

$$4\left(\frac{9b^2}{400-9b^2}+b^2\right)+25b=0 \Rightarrow b(b+4)(9b-100)=0$$

经检验得 $b=\dfrac{100}{9}$ 是增根, 原方程组的解为

$$(a,b)=(0,0) \quad \text{或} \quad (3,-4)$$

13. 解方程组

$$\begin{cases} x^3+9x^2y=-28 \\ y^3+xy^2=1 \end{cases}$$

$$x^3+9x^2y=-28 \tag{1}$$

$$y^3+xy^2=1 \tag{2}$$

$(1)+27\cdot(2)$, 得

$$x^3+9x^2y+27xy^2+27y^3=-1$$

即

$$(x+3y)^3=-1 \Rightarrow x+3y=-1$$

将 $x=-1-3y$ 代入 (2),

$$y^3+(-1-3y)y^2=1 \Rightarrow (y+1)(2y^2-y+1)=0$$

其中 $2y^2-y+1$ 的判别式

$$\Delta=(-1)^2-4\cdot 2\cdot 1=-7<0$$

故 $2y^2-y+1=0$ 无实数解, 因此唯一实数解为

$$(x,y)=(2,-1)$$

14. 解方程组

$$\begin{cases} x^3+6xy^2=99 \\ 2y^3+3x^2y=70 \end{cases}$$

$$x^3 + 6xy^2 = 99 \tag{1}$$

$$2y^3 + 3x^2y = 70 \tag{2}$$

观察到方程式齐次, 不妨设 $y = mx$, 其中 $m \neq 0$, 代入方程得到

$$x^3(1 + 6m^2) = 99, \quad x^3(2m^3 + 3m) = 70.$$

两式相除得

$$\frac{1 + 6m^2}{2m^3 + 3m} = \frac{99}{70} \Rightarrow (3m - 2)(66m^2 - 96m + 35) = 0$$

其中 $66m^2 - 96m + 35$ 的判别式为

$$\Delta = (-96)^2 - 4 \cdot 66 \cdot 35 = -24 < 0$$

故 $66m^2 - 96m + 35 = 0$ 无实根, 因此唯一实根为

$$m = \frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{2}{3}x$$

将之代入 (1),

$$x^3 + 6x\left(\frac{2}{3}x\right)^2 = 99 \Rightarrow x = 3$$

得到

$$(x, y) = (3, 2)$$

15. 求方程

$$\begin{cases} 36y^2(x+1) + 36x^2(y+1) = 7x^2y^2 \\ 6x + 6y + xy = 0 \end{cases}$$

的实数解。

$$36y^2(x+1) + 36x^2(y+1) = 7x^2y^2 \tag{1}$$

$$6x + 6y + xy = 0$$

由 (1),

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} = \frac{7}{36} \tag{3}$$

由 (2),

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{1}{6} \tag{4}$$

将 (3) 代入 (4), 得

$$\frac{1}{x^2}+\left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{6}\right)^2=\frac{13}{36}\Rightarrow(x-3)(x+2)=0$$

故原方程式的解为

$$(x,y)=(3,6),\quad\left(-2,-\frac{3}{2}\right)$$

16. 设 a,b,c 为相异非零实数, 且

$$\frac{1+a^3}{a}=\frac{1+b^3}{b}=\frac{1+c^3}{c}.$$

求 $a^3+b^3+c^3$ 的所有可能值。

设

$$\frac{1+a^3}{a}=\frac{1+b^3}{b}=\frac{1+c^3}{c}=k$$

则 a,b,c 是方程

$$x^3-kx+1=0$$

的三根, 故设

$$x^3-kx+1=(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc$$

比较系数得

$$a+b+c=0,\quad abc=-1$$

故

$$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc0+3(-1)=-3$$

17. 若 $a,b,c\in\mathbb{R}^+$ 满足

$$abc=120,\quad a+b+c=a^2+b^2+c^2=a^3+b^3+c^3=\lambda,$$

求 $\lambda\in\mathbb{Z}^+$。

已知

$$a+b+c=a^2+b^2+c^2=a^3+b^3+c^3=\lambda.$$

由 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$,

$$ab+bc+ca=\frac{\lambda^2-\lambda}{2}.$$

由 $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3(a+b+c)(ab+bc+ca)+3abc$,

$$\lambda=\lambda^3-3\lambda\left(\frac{\lambda^2-\lambda}{2}\right)+3\cdot 120$$

解得

$$(\lambda-10)(\lambda^2+7\lambda+72)=0 \Rightarrow \lambda=10\in\mathbb{Z}^+$$

18. 已知

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=6\\ \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=87\\ (\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)=33\end{cases}$$

求

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}.$$

由 $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)\big((\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\big)$, 则

$$87-3\alpha\beta\gamma=6\big(36-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\big)\Rightarrow 6(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma=43 \tag{1}$$

又由 $33=(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)=1+6+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta\gamma$,

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta\gamma=26 \tag{2}$$

联立 (1),(2) 得,

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{69}{7},\quad \alpha\beta\gamma=\frac{113}{7}$$

因此

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\frac{69}{113}.$$

19. 已知 x,y,z 为实数满足

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1\\ x^2+y^2+z^2=\dfrac{3}{2}\\ x^3+y^3+z^3=1\end{cases}$$

且 $x+y+z$ 为整数, 求 $x+y+z$ 的值。

$$\begin{cases}xy+yz+zx=xyz\\ x^2+y^2+z^2=\dfrac{3}{2}\\ x^3+y^3+z^3=1\end{cases}$$

令 $a=xyz$, 则

$$(x+y+z)^2=\frac{3}{2}+2a,\quad 1-3a=(x+y+z)\left(\frac{3}{2}-a\right)$$

联立得

$$\left(\frac{1-3a}{\frac{3}{2}-a}\right)^2=\frac{3}{2}+2a$$

解得

$$(4a+1)(4a^2-28a+19)=0\Rightarrow a=xyz=-\frac{1}{4}$$

故

$$x+y+z=\frac{1-3xyz}{\frac{3}{2}-xyz}=\frac{\frac{7}{4}}{\frac{7}{4}}=1$$

20. 已知存在实数 a,b,x,y 满足以下方程:

$$\begin{cases}ax^{2014}+by^{2014}=6\\ ax^{2015}+by^{2015}=7\\ ax^{2016}+by^{2016}=3\\ ax^{2017}+by^{2017}=50\end{cases}$$

求 $ax^{2018}+by^{2018}$ 的值。

不妨设 $f(n)=ax^n+by^n$，于是

$$f(2014)=6, f(2015)=7, f(2016)=3, f(2017)=50,$$

发现

$$(x+y)f(2015)=ax^{2016}+by^{2016}+ax^{2015}y+bxy^{2015}=f(2016)+xyf(2014)$$

$$(x+y)f(2016)=ax^{2017}+by^{2017}+ax^{2016}y+bxy^{2016}=f(2017)+xyf(2015)$$

解得

$$x+y=-9,\ xy=-11$$

故

$$(x+y)f(2017)=f(2018)+xyf(2016)\Rightarrow ax^{2018}+by^{2018}=f(2018)=-417$$

21. 求联立方程

$$\begin{cases} x\left(2x^2+y-\dfrac{1}{2}\right)=0 \\ y\left(x-y+\dfrac{5}{2}\right)=0 \end{cases}$$

的所有实数解 (x,y)。

$$x\left(2x^2+y-\frac{1}{2}\right)=0 \tag{1}$$

$$y\left(x-y-\frac{5}{2}\right)=0 \tag{2}$$

情况一: 若 $x=0$，由 (2) 得

$$y\left(0-y-\frac{5}{2}\right)=0\Rightarrow y=0 \text{ 或 } y=-\frac{5}{2}.$$

解为

$$(0,0),\left(0,-\frac{5}{2}\right)$$

情况二: 若 $y=0$，由 (1) 得

$$x\left(2x^2+0-\frac{1}{2}\right)=0\Rightarrow x=0 \text{ 或 } x=\pm\frac{1}{2}.$$

其中 $x=0$ 已考虑, 解为

$$\left(\frac{1}{2},0\right),\left(-\frac{1}{2},0\right)$$

情况三: 若 $x\neq 0$ 且 $y\neq 0$,

$$\begin{cases}2x^2+y-\dfrac{1}{2}=0\\ x-y-\dfrac{5}{2}=0\end{cases}$$

两式相加得

$$2x^2+x-3=0\Rightarrow x=\frac{3}{2}\text{ 或 }x=-1$$

解为

$$\left(\frac{3}{2},-1\right),\ \left(-1,-\frac{7}{2}\right)$$

$\therefore$ 原方程组的所有解为

$$(0,0),\ \left(0,-\frac{5}{2}\right),\ \left(\frac{1}{2},0\right),\ \left(-\frac{1}{2},0\right),\ \left(\frac{3}{2},-1\right),\ \left(-1,-\frac{7}{2}\right)$$

22. 求联立方程

$$\begin{cases}x^2-y-2z=4\\ y^2-2z-3x=-2\\ 2z^2-3x-5y=-22\end{cases}$$

的所有实数解 (x,y,z)。

三式相加得

$$x^2-6x+y^2-6y+2z^2-4z=-20,$$

经配方后变为

$$(x-3)^2+(y-3)^2+2(z-1)^2=0$$

故 $x-3=0,y-3=0,z-1=0$, 解为 $(3,3,1)$

23. 设实数 x,y,z 满足以下方程

$$\begin{cases}4x+2yz-6z+9xz^2=4\\ xyz=1\end{cases}$$

求 $x+y+z$ 的所有可能值。

眼光发现 $xyz=1$ 提示了换元 $x=\frac{a}{b}$, $y=\frac{b}{c}$, $z=\frac{c}{a}$, 第一式变为

$$4\left(\frac{a}{b}\right)+2\left(\frac{b}{c}\right)\left(\frac{c}{a}\right)-6\left(\frac{c}{a}\right)+9\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{a}\right)^2=4$$

化简得

$$4a^2-4ab+2b^2-6bc+9c^2=0\Rightarrow(2a-b)^2+(b+3c)^2=0$$

于是 $2a-b=0, b+3c=0$, 即

$$x=\frac{a}{b}=\frac{1}{2},\ y=\frac{b}{c}=-3,\ z=\frac{1}{xy}=-\frac{2}{3}$$

解得

$$(x,y,z)=\left(\frac{1}{2},-3,-\frac{2}{3}\right)\Rightarrow x+y+z=-\frac{13}{6}$$

24. 求所有非零实数对 (x,y), 使得满足

$$\frac{x}{x^2+y}+\frac{y}{x+y^2}=-1 \quad 且 \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$$

令 $u=x+y$, $v=xy$, 则第二式化为 $\frac{u}{v}=1\Rightarrow u=v$。

由第一式得

$$x(x+y^2)+y(x^2+y)=-[(x^2+y)(x+y^2)]$$

展开并代换为 u,v 得

$$u^2-2v+uv=-(u^3-3uv+v+v^2)\Rightarrow u^3+u^2-2v+v^2-v=0$$

代入 $u=v$

$$v^3-v=0\Rightarrow v(v^2-1)=0$$

因 $xy\neq0$, 故 $v=\pm1$

若 $v=1$, 则 $x+y=1$, $xy=1\Rightarrow x^2-x+1=0$, 无实根。

若 $v=-1$, 则 $x+y=-1$, $xy=-1\Rightarrow x^2+x-1=0$

解得

$$(x,y)=\left(\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2},\ \frac{-1\mp\sqrt{5}}{2}\right)$$

25. 解方程组

$$\begin{cases} x+y+z=9 \\ x^2+y^2+z^2=41 \\ x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)=180 \end{cases}$$

$$x+y+z=9 \tag{1}$$

$$x^2+y^2+z^2=41 \tag{2}$$

$$x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)=180 \tag{3}$$

由 (2),

$$(x+y+z)^2-2(xy+xz+yz)=41 \Rightarrow xy+xz+yz=20$$

由 (3),

$$\begin{aligned} x^2(9-x)+y^2(9-y)+z^2(9-z)&=180 \\ 9(x^2+y^2+z^2)-(x^3+y^3+z^3)&=180 \\ 9(41)-[(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz]&=180 \\ 369-[9(41-20)+3xyz]&=180 \\ xyz&=0 \end{aligned}$$

由韦达定理, 实数 x,y,z 为方程式

$$t^3-9t^2+20t=0 \Rightarrow t(t-5)(t-4)=0.$$

的三根, 于是解为

$$(0,5,4),(0,4,5),(4,5,0),(4,0,5),(5,0,4),(5,4,0)$$

26. 已知实数 x,y,z 满足方程组

$$\begin{cases} x+y+z=-3 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=-\dfrac{1}{3} \\ x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)=-24 \end{cases}$$

求 $x^2+y^2+z^2$ 的值。

$$x+y+z=-3 \tag{1}$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=-\frac{1}{3} \tag{2}$$

$$x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)=-24 \tag{3}$$

设 $x^2+y^2+z^2=a$, 由 (1) 可得

$$(x+y+z)^2=9=a+2(xy+yz+zx) \Rightarrow xy+yz+zx=\frac{9-a}{2}$$

由 (2) 得

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{xy+yz+zx}{xyz}=-\frac{1}{3} \Rightarrow xyz=\frac{3(a-9)}{2}$$

由 (3) 得

$$\begin{aligned}
&x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)\\
&=x^2(-3-x)+y^2(-3-y)+z^2(-3-z)\\
&=-3(x^2+y^2+z^2)-(x^3+y^3+z^3)\\
&=-3a-\left[(x+y+z)((x^2+y^2+z^2)-(xy+yz+zx))+3xyz\right]\\
&=-3a-[(-3)\left(a-\frac{9-a}{2}\right)+3\cdot\frac{3(a-9)}{2}]\\
&=-3a+\frac{-9a+27}{2}+\frac{9a-81}{2}\\
&=-3a+27=-24 \Rightarrow a=17
\end{aligned}$$

27. 已知方程组

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=6 \\ x^3+y^3+z^3=-3 \end{cases}$$

求 $x^4+y^4+z^4$ 之值。

$$x+y+z=0 \tag{1}$$

$$x^2+y^2+z^2=6 \tag{2}$$

$$x^3+y^3+z^3=-3 \tag{3}$$

由 (2),

$$(x+y+z)^2-2(xy+yz+xz)=6 \Rightarrow xy+yz+xz=-3$$

由 (3),

$$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)+3xyz \Rightarrow xyz=-1$$

因此 x, y, z 为方程式

$$t^3-3t+1=0$$

的三根，于是有

$$x^3=3x-1, \quad y^3=3y-1, \quad z^3=3z-1$$

故

$$x^4+y^4+z^4=3(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)=3\cdot 6-0=18$$

28. 求序对 (x, y, z) 满足

$$\begin{cases}(x+y)^3=z,\\(y+z)^3=x,\\(z+x)^3=y.\end{cases}$$

不失一般性，设 $x \geqslant y \geqslant z$，则有

$$2x \geqslant x+y \geqslant x+z, \quad x+y \geqslant 2y \geqslant y+z, \quad x+z \geqslant y+z \geqslant 2z$$

立方可得

$$\begin{cases}8x^3 \geqslant (x+y)^3 \geqslant (x+z)^3\\(x+y)^3 \geqslant 8y^3 \geqslant (y+z)^3\\(x+z)^3 \geqslant (y+z)^3 \geqslant 8z^3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}8x^3 \geqslant z \geqslant y\\z \geqslant 8y^3 \geqslant x\\y \geqslant x \geqslant z^3\end{cases} \Rightarrow z \geqslant y \geqslant x$$

因此 $x=y=z$，解 $(x+x)^3=x$ 得

$$(x, y, z)=(0,0,0), \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

29. 求满足

$$\begin{cases}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)=1+y^7,\\(1+y)(1+y^2)(1+y^4)=1+x^7\end{cases}$$

的实数序对 (x,y) 个数。

情况一:$xy=0$, 得解 $(0,0)$。

情况二:$xy<0$。不失一般性设 $x>0>y$, 则

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)>1$$

且 $1+y^7<1$, 故无解。

情况三:$x,y>0,x\neq y$。不失一般性设 $x>y>0$, 则

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)>1+x^7>1+y^7$$

无解。

情况四:$x,y<0,x\neq 0$。不失一般性设 $x<y<0$, 则

$$1-x^8=(1+y^7)(1-x)=1-x+y^7-xy^7 \tag{1}$$

$$1-y^8=(1+x^7)(1-y)=1-y+x^7-x^7y \tag{2}$$

$(2)-(1)$ 得,

$$x^8-y^8=x-y+x^7-y^7-xy(x^6-y^6)$$

由于 $x<y<0$, 则 $x^8-y^8>0,x-y<0,x^7-y^7<0,-xy<0,x^6-y^6>0$, 左式为正, 右式为负, 故无解。

情况五:$x=y$, 则

$$1-x^8=1-x+y^7-xy^7=1-x+x^7-x^8\Rightarrow x=-1,0,1$$

其中只有 $(0,0),(-1,-1)$ 成立。

综上, 解为 $(0,0),(-1,-1)$, 共有 2 个实数序对。

30. 若非零实数 a,b,c 满足

$$\begin{cases}a^2+b^2+c^2=1,\\ a\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)+b\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}\right)+c\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)=-3,\end{cases}$$

求 $a+b+c$ 可能的取值个数。

由第二个方程式,

$$a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)=-3abc \Rightarrow (a+b+c)(ab+bc+ca)=0.$$

又 $(a+b+c)^2=1-2(ab+bc+ca)$, 所以

$$\frac{1}{2}(a+b+c)((a+b+c)^2-1)=0 \Rightarrow a+b+c=-1,0,1$$

因此 $a+b+c$ 共有 3 个可能值。

31. 求在区间 $[0,2]$ 内满足方程组

$$\begin{cases} 2x^2-4x+7=y, \\ 2y^2-4y+7=z, \\ 2z^2-4z+7=x \end{cases}$$

的无序三元组 (x,y,z) 个数。

令 $a=x-1, b=y-1, c=z-1$, 则 $a,b,c\in[-1,1]$, 方程组化为

$$\begin{cases} 2a^2-1=b, \\ 2b^2-1=c, \\ 2c^2-1=a. \end{cases}$$

令 $a=\cos\theta, b=\cos 2\theta, c=\cos 4\theta, \theta\in[0,\pi]$, 得到

$$\cos\theta=\cos 8\theta \Rightarrow -2\sin\frac{9\theta}{2}\sin\frac{7\theta}{2}=0.$$

解得

$$\theta-2n\pi=0,\frac{2\pi}{9},\frac{4\pi}{9},\frac{6\pi}{9},\frac{8\pi}{9},\frac{2\pi}{7},\frac{4\pi}{7},\frac{6\pi}{7},n\in\mathbb{Z}$$

在区间 $[-1,1]$ 内的无序三元组 (a,b,c) 为

$$(0,0,0),\left(\cos\frac{2\pi}{7},\cos\frac{4\pi}{7},\cos\frac{8\pi}{7}\right),\left(\cos\frac{2\pi}{9},\cos\frac{4\pi}{9},\cos\frac{8\pi}{9}\right),\left(\cos\frac{2\pi}{3},\cos\frac{2\pi}{3},\cos\frac{2\pi}{3}\right)$$

故原方程式无序三元组个数为 4。

32. 若 x, y, z 为相异复数, 满足

$$\begin{cases} x+y+z=1, \\ x^2+y=y^2+z=z^2+x, \end{cases}$$

求 $(x-y)(y-z)(z-x)$ 的值。

由 $x^2+y=y^2+z$, 得

$$x^2-y^2=(x+y)(x-y)=(1-z)(x-y)=z-y$$

同理得

$$(1-x)(y-z)=x-z, \quad (1-y)(z-x)=y-x$$

由于 $x \neq y \neq z$, 三式相乘可得

$$(1-x)(1-y)(1-z)=-1 \tag{1}$$

且由 $(1-z)(x-y)=z-y$ 展开得

$$x-z=xz-yz=z(x-y)$$

同理得

$$y-x=x(y-z), \quad z-y=y(z-x)$$

由于 $x \neq y \neq z$, 三式相乘可得

$$xyz=-1$$

现由 (1), 得

$$1-(x+y+z)+xy+yz+zx-xyz=-1 \Rightarrow xy+yz+zx=-2$$

设 $k=x^2+y=y^2+z=z^2+x$, 则

$$3k=x^2+y^2+z^2+x+y+z=1-2(-2)+1=6 \Rightarrow x^2+y=k=2$$

则

$$x-y=x-(2-x^2)=x^2+x-2=(x-1)(x+2),$$

同理

$$y-z=(y-1)(y+2), \quad z-x=(z-1)(z+2)$$

于是

$$\begin{aligned} &(x-y)(y-z)(z-x) \\ &=(x-1)(y-1)(z-1)(x+2)(y+2)(z+2) \\ &=[xyz-(xy+yz+zx)+x+y+z-1][xyz+2(xy+yz+zx)+4(x+y+z)+8]=7 \end{aligned}$$

33. 已知 $xyz \neq 0, a, b, c$ 不全为零, 且满足方程组

$$\begin{cases} a = \dfrac{by}{z} + \dfrac{cz}{y} \\ b = \dfrac{cz}{x} + \dfrac{ax}{z} \\ c = \dfrac{ax}{y} + \dfrac{by}{x} \end{cases}$$

(a) 证明 $a^3x^3 + b^3y^3 + c^3z^3 + abcxyz = 0$。

将方程组改写为

$$\begin{cases} (-ax)\dfrac{1}{x} + (cz)\dfrac{1}{y} + (by)\dfrac{1}{z} = 0 \\ (cz)\dfrac{1}{x} + (-by)\dfrac{1}{y} + (ax)\dfrac{1}{z} = 0 \\ (by)\dfrac{1}{x} + (ax)\dfrac{1}{y} + (-cz)\dfrac{1}{z} = 0 \end{cases}$$

由与存在非零解 $\left(\dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{y}, \dfrac{1}{z}\right)$, 则

$$\begin{vmatrix} -ax & cz & by \\ cz & -by & ax \\ by & ax & -cz \end{vmatrix} = 0$$

展开可得

$$a^3x^3 + b^3y^3 + c^3z^3 + abcxyz = 0$$

(b) 证明 $\dfrac{yz}{x^2} + \dfrac{zx}{y^2} + \dfrac{xy}{z^2} = -1$。

改写成

$$\begin{cases} -a + \dfrac{y}{z}b + \dfrac{z}{y}c = 0 \\ \dfrac{z}{x}a - b + \dfrac{x}{z}c = 0 \\ \dfrac{x}{y}a + \dfrac{y}{x}b - c = 0 \end{cases}$$

同理,

$$\begin{vmatrix} -1 & \dfrac{y}{z} & \dfrac{z}{y} \\ \dfrac{z}{x} & -1 & \dfrac{x}{z} \\ \dfrac{x}{y} & \dfrac{y}{x} & -1 \end{vmatrix} = 0$$

展开行列式可得

$$\frac{yz}{x^2}+\frac{zx}{y^2}+\frac{xy}{z^2}=-1$$

(c) 证明 $a^3+b^3+c^3-5abc=0$。

由原方程组, 有

$$a^3=\left(\frac{by}{z}\right)^3+\left(\frac{cz}{y}\right)^3+3abc,\ b^3=\left(\frac{cz}{x}\right)^3+\left(\frac{ax}{z}\right)^3+3abc,\ c^3=\left(\frac{ax}{y}\right)^3+\left(\frac{by}{x}\right)^3+3abc$$

于是

$$2(a^3+b^3+c^3)=(a^3x^3+b^3y^3+c^3z^3)\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}\right)+9abc$$

由 $(a),(b)$ 得

$$2(a^3+b^3+c^3)=-abcxyz\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}\right)+9abc=10abc$$

即得证

$$a^3+b^3+c^3-5abc=0$$

34. 求实数解 (a,b,c,d) 满足方程组

$$\begin{cases}a+4b+8c+4d=53\\3a^2+4b^2+12c^2+2d^2=159\\9a^3+4b^3+18c^3+d^3=477\end{cases}$$

由柯西不等式,

$$53\cdot 477=(a+4b+8c+4d)(9a^3+4b^3+18c^3+d^3)\geqslant(3a^2+4b^2+12c^2+2d^2)^2=159^2$$

此时等号成立, 有

$$\frac{a}{3a^2}=\frac{4b}{4b^2}=\frac{8c}{12c^2}=\frac{4d}{2d^2}.$$

设

$$\lambda=\frac{1}{3a}=\frac{1}{b}=\frac{2}{3c}=\frac{2}{d}.$$

则

$$a=\frac{1}{3\lambda},\quad b=\frac{1}{\lambda},\quad c=\frac{2}{3\lambda},\quad d=\frac{2}{\lambda}$$

代入第一式得

$$\frac{1}{3\lambda}+\frac{4}{\lambda}+\frac{16}{3\lambda}+\frac{8}{\lambda}=\frac{29}{3\lambda}=53\Rightarrow\lambda=\frac{29}{159}$$

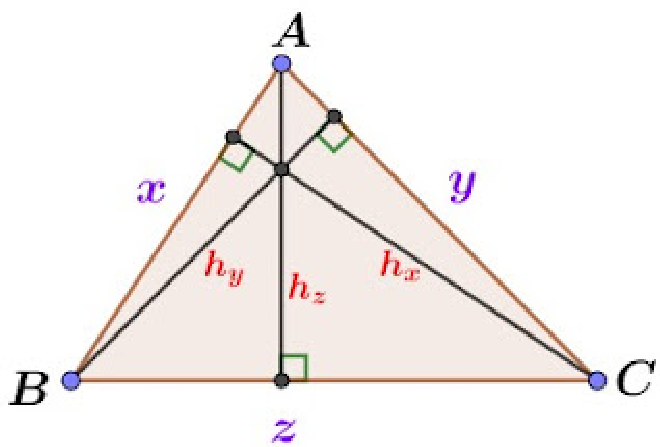
故实数解为

$$\left(\frac{159}{87},\frac{159}{29},\frac{106}{87},\frac{318}{29}\right)$$

35. 设正实数 x, y, z 满足

$$\begin{cases} x=\sqrt{y^2-\dfrac{1}{49}}+\sqrt{z^2-\dfrac{1}{49}} \\ y=\sqrt{x^2-\dfrac{1}{64}}+\sqrt{z^2-\dfrac{1}{64}} \\ z=\sqrt{x^2-\dfrac{1}{81}}+\sqrt{y^2-\dfrac{1}{81}} \end{cases}$$

求 $x+y+z$。



考虑一边长为 x,y,z, 对应高为

$$h_x=\frac{1}{7},\quad h_y=\frac{1}{8},\quad h_z=\frac{1}{9}$$

的 $\triangle ABC$, 则 x,y,z 满足题意;$\triangle ABC$ 面积为

$$S=\frac{1}{2}xh_x=\frac{1}{2}yh_y=\frac{1}{2}zh_z\Rightarrow x:y:z=7:8:9$$

设 $x=7k$, $y=8k$, $z=9k$, 半周长 $s=\frac{1}{2}(x+y+z)=12k$, 面积又为

$$S=\sqrt{12k\cdot 5k\cdot 4k\cdot 3k}=12\sqrt{5}k^2$$

联立得

$$S = \frac{1}{2}xh_x = \frac{k}{2} = 12\sqrt{5}k^2 \Rightarrow k = \frac{1}{24\sqrt{5}}$$

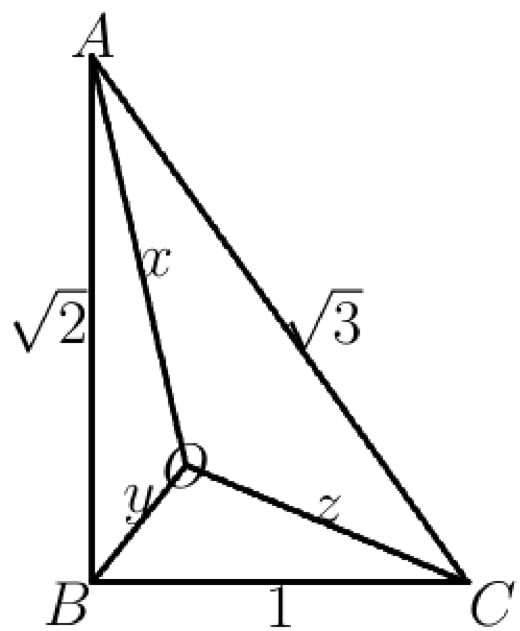
因此

$$x + y + z = 24k = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

36. 已知正数 x, y, z 满足

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 2 \\ y^2 + yz + z^2 = 1 \\ z^2 + zx + x^2 = 3 \end{cases}$$

求 $xy + yz + zx$。



方程组改写成

$$\begin{cases} x^2 - 2xy\cos 120^\circ + y^2 = (\sqrt{2})^2 \\ y^2 - 2yz\cos 120^\circ + z^2 = 1^2 \\ z^2 - 2zx\cos 120^\circ + x^2 = (\sqrt{3})^2 \end{cases}$$

考虑一边长为 $AB = \sqrt{2}, BC = 1, CA = \sqrt{3}$ 的 $\triangle ABC$, 其中

$$OA = x, OB = y, OC = z, \angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 120^\circ$$

且满足

$$AB^2 + BC^2 = CA^2$$

故 $\triangle ABC$ 为直角三角形，面积为

$$[ABC] = \frac{1}{2}(xy + yz + zx)\sin 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{2}$$

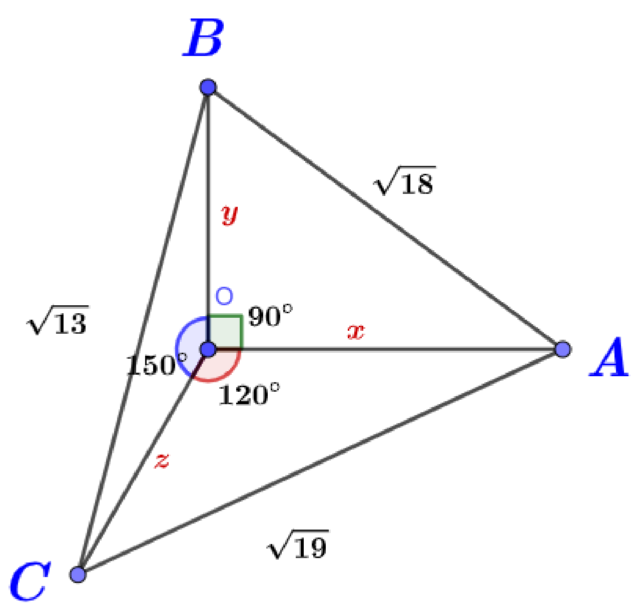
解得

$$xy + yz + zx = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

37. 已知 x, y, z 为实数且满足

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 18 \\ y^2 + \sqrt{3}yz + z^2 = 13 \\ x^2 + xz + z^2 = 19 \end{cases}$$

求 $2xy + yz + \sqrt{3}xz$。



方程组改写成

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2xy\cos 90^\circ = (3\sqrt{2})^2 \\ y^2 + z^2 - 2yz\cos 150^\circ = (\sqrt{13})^2 \\ x^2 + z^2 - 2xz\cos 120^\circ = (\sqrt{19})^2 \end{cases}$$

构造 $\triangle ABC$, 满足边长:

$$AB = \sqrt{18}, \quad BC = \sqrt{13}, \quad AC = \sqrt{19}, \quad OA = x, \quad OB = y, \quad OC = z$$

及夹角

$$\angle AOB = 90^\circ, \quad \angle BOC = 150^\circ, \quad \angle AOC = 120^\circ$$

设半周长

$$s = \frac{\sqrt{18}+\sqrt{13}+\sqrt{19}}{2},$$

三角形面积为

$$S = \sqrt{s(s-\sqrt{18})(s-\sqrt{13})(s-\sqrt{19})} = 3\sqrt{\frac{11}{2}}.$$

面积也等于

$$\frac{1}{2}\left(xy\sin 90^\circ + yz\sin 150^\circ + zx\sin 120^\circ\right) = \frac{1}{2}\left(xy + \frac{1}{2}yz + \frac{\sqrt{3}}{2}xz\right).$$

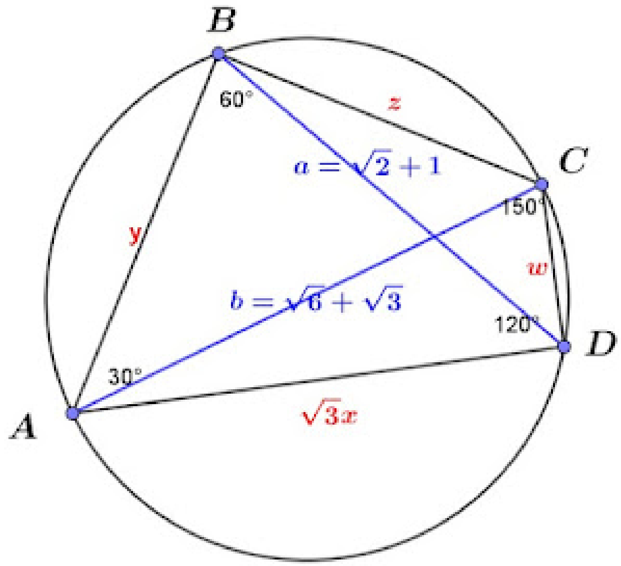
因此

$$\frac{1}{2}\left(xy + \frac{1}{2}yz + \frac{\sqrt{3}}{2}xz\right) = 3\sqrt{\frac{11}{2}} \implies 2xy + yz + \sqrt{3}xz = 6\sqrt{22}.$$

38. 已知联立方程组

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 - 3xy = 3 + 2\sqrt{2} \\ y^2 + z^2 - yz = 9 + 6\sqrt{2} \\ z^2 + w^2 + \sqrt{3}zw = 3 + 2\sqrt{2} \\ w^2 + 3x^2 + \sqrt{3}wx = 9 + 6\sqrt{2} \end{cases},$$

求 $\sqrt{3}xz + yw$ 之值。



设

$$3x^2+y^2-3xy=3+2\sqrt{2}=(\sqrt{2}+1)^2=a^2,$$

$$y^2+z^2-yz=9+6\sqrt{2}=(\sqrt{6}+\sqrt{3})^2=b^2,$$

$$z^2+w^2+\sqrt{3}zw=3+2\sqrt{2}=a^2,$$

$$w^2+3x^2+\sqrt{3}wx=9+6\sqrt{2}=b^2.$$

考虑一圆内接四边形, 边长分别为 $\sqrt{3}x$, y, z, w, 对角线长为 a,b; 由托勒密定理,

$$\sqrt{3}xz+yw=(\sqrt{2}+1)(\sqrt{6}+\sqrt{3})=3\sqrt{3}+2\sqrt{6}.$$

39. 已知实数 $x,y\in(0,1)$ 满足

$$\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}+\dfrac{2y}{1+\sqrt{1-y^2}+y}=1,\\ 25(1-y^2)=41-40\sqrt{1-x^2}\end{cases}$$

求 (x,y) 的所有解。

设 $x=\sin\alpha, y=\sin\beta, 0<\alpha,\beta<\dfrac{\pi}{2}$, 则第一式变为

$$\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{2\sin\beta}{1+\cos\beta+\sin\beta}=1$$

继续化简得

$$\tan\frac{\alpha}{2}=1-\frac{2\sin\beta}{1+\cos\beta+\sin\beta}=\frac{1+\cos\beta-\sin\beta}{1+\cos\beta+\sin\beta}=\frac{1-\tan\frac{\beta}{2}}{1+\tan\frac{\beta}{2}}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)$$

故

$$\frac{\alpha}{2}=\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}+n\pi,n\in\mathbb{Z}\Rightarrow\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}\Rightarrow y=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$$

于是第二方程可化为

$$25(1-y^2)=41-40y$$

解得

$$x=\frac{3}{5},\quad y=\frac{4}{5}$$

40. 已知实数 $x>0$ 且 y,z 均为实数, 求联立方程组

$$\begin{cases}5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=12\left(y+\dfrac{1}{y}\right)=13\left(z+\dfrac{1}{z}\right),\\ xy+yz+zx=1\end{cases}$$

的解 (x,y,z)。

由条件 $x>0$, $x,y,z\in\mathbb{R}$, 可设

$$x=\tan A,\quad y=\tan B,\quad z=\tan C,$$

其中 $0<A<\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}<B,C<\frac{\pi}{2}$, 于是

$$5\left(x+\frac{1}{x}\right)=12\left(y+\frac{1}{y}\right)=13\left(z+\frac{1}{z}\right)\implies 5\cdot\frac{2}{\sin 2A}=12\cdot\frac{2}{\sin 2B}=13\cdot\frac{2}{\sin 2C},$$

且

$$\tan A\tan B+\tan B\tan C+\tan C\tan A=1.$$

因此

$$\frac{5}{\sin 2A}=\frac{12}{\sin 2B}=\frac{13}{\sin 2C},\quad A+B+C=90^\circ.$$

由此得

$$\tan 2A=\frac{5}{12},\quad \tan 2B=\frac{12}{5},\quad \tan 2C=\infty,$$

故

$$\tan A=\frac{1}{5},\quad \tan B=\frac{2}{3},\quad \tan C=1.$$

即

$$(x,y,z)=\left(\frac{1}{5},\frac{2}{3},1\right)$$

41. 已知正实数 x,y,z 满足

$$\begin{cases}x+y+z=xyz\\ \dfrac{x^2}{16(1+x^2)}=\dfrac{y^2}{25(1+y^2)}=\dfrac{z^2}{36(1+z^2)}\end{cases}$$

求

$$\frac{x^2(1+x^2)^2}{z^2(1+z^2)^2}$$

的值。

考虑换元 $x=\tan A, y=\tan B, z=\tan C$, 其中 $A,B,C\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, 且注意到

$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C\iff A+B+C=\pi$$

于是可以将 A,B,C 视为某三角形的内角; 由

$$\frac{x^2}{16(1+x^2)}=\frac{y^2}{25(1+y^2)}=\frac{z^2}{36(1+z^2)}$$

化简得

$$\frac{4}{\sin A}=\frac{5}{\sin B}=\frac{6}{\sin C}$$

由正弦定理, 不妨设 $\triangle ABC$ 边长为 $a=4k, b=5k, c=6k, k\neq 0$, 则由余弦定理,

$$\cos A=\frac{(5k)^2+(6k)^2-(4k)^2}{2\cdot 5k\cdot 6k}=\frac{3}{4},\quad \cos C=\frac{(4k)^2+(5k)^2-(6k)^2}{2\cdot 4k\cdot 5k}=\frac{1}{8}$$

故

$$\frac{x^2(1+x^2)^2}{z^2(1+z^2)^2}=\frac{\tan^2 A\sec^4 A}{\tan^2 C\sec^4 C}=\frac{(\frac{\sqrt{7}}{3})^2(\frac{4}{3})^4}{(\sqrt{63})^2\cdot 8^4}=\frac{1}{186624}$$

42. 求所有 $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ 满足方程组

$$\begin{cases}a^2=\dfrac{b^3+9\sqrt{3}}{3b}=\dfrac{c^3+16}{3c}\\ b^2=\dfrac{a^3-10}{3a}=\dfrac{c^3+28}{3c}\\ c^2=\dfrac{b^3+45\sqrt{3}}{3b}=\dfrac{a^3-88}{3a}\end{cases}$$

由 (1),(2)

$$3a^2b-b^3=9\sqrt{3},\quad a^3-3ab^2=10$$

此时展开式

$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$$

毫无帮助, 不妨考虑

$$(a+bi)^3=a^3-3ab^2+(3a^2b-b^3)i=10+9\sqrt{3}i$$

两边取模得

$$(\sqrt{a^2+b^2})^3=\sqrt{10^2+(9\sqrt{3})^2}\Rightarrow a^2+b^2=7 \tag{3}$$

同理可得

$$b^2+c^2=19,\quad c^2+a^2=20 \tag{4}$$

由 (3),(4) 解得 $a^2=4,b^2=3,c^2=16$, 经检验得原方程组的解为

$$a=-2,\ b=\sqrt{3},\ c=-4$$

取整

1. 求满足

$$\lfloor 0.5+\lfloor x\rfloor\rfloor=20$$

的所有 x 的取值范围。

由下取整定义，原方程即

$$20\leqslant 0.5+\lfloor x\rfloor<21\Rightarrow 19.5\leqslant\lfloor x\rfloor<20.5$$

由于 $\lfloor x\rfloor\in\mathbb{Z}$,

$$\lfloor x\rfloor=20\Rightarrow 20\leqslant x<21$$

2. 求满足

$$\lceil\lceil x\rceil-1.3\rceil=16$$

的所有 x。

由上取整定义，原方程即

$$15\leqslant\lceil x\rceil-1.3<16\Rightarrow 16.3\leqslant\lceil x\rceil<17.3$$

由于 $\lceil x\rceil\in\mathbb{Z}$,

$$\lceil x\rceil=17\Rightarrow 16<x\leqslant 17$$

3. 解方程

$$2x=\lfloor x\rfloor+\frac{16}{5}$$

发现 $x\neq\lfloor x\rfloor$, 由于

$$\lfloor x\rfloor<x<\lfloor x\rfloor+1\Rightarrow 2\lfloor x\rfloor<2x<2\lfloor x\rfloor+2,$$

观察右式的取值范围可知

$$2\lfloor x\rfloor < \lfloor x\rfloor + \frac{16}{5} < 2\lfloor x\rfloor + 2 \Rightarrow \frac{6}{5} < \lfloor x\rfloor < \frac{16}{5}$$

因此

$$\lfloor x\rfloor = 2, 3 \Rightarrow x = \frac{13}{5}, \frac{31}{10}$$

4. 解方程

$$2\lfloor x\rfloor + 3x = 4 - 5\{x\}$$

设 $x = n + r$, 其中 $n = \lfloor x\rfloor, r = \{x\}$, 代入方程得

$$2n + 3(n + r) = 4 - 5r \Rightarrow 5x = 4 - 3r$$

由 $0 \leqslant r < 1$, 有

$$1 < 4 - 3r \leqslant 4 \Rightarrow \frac{1}{5} < x \leqslant \frac{4}{5}$$

由此可得 $x = \{x\}$, 即 $\lfloor x\rfloor = 0$, 此时

$$2 \cdot 0 + 3x = 4 - 5x \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

5. 令

$$f(x) = \left\lfloor x + \frac{1}{2}\right\rfloor + \left\lfloor x - \frac{1}{2}\right\rfloor - \lfloor 2x\rfloor,$$

证明只有当 $\frac{1}{2} \leqslant \{x\} < 1$ 时, 满足方程 $f(x) = 0$ 。

设 $x = n + \{x\}$, 其中 n 为整数, 且 $0 \leqslant \{x\} < 1$, 将 n 从取整符号中提出,

$$f(x) = \left\lfloor \{x\} + \frac{1}{2}\right\rfloor + \left\lfloor \{x\} - \frac{1}{2}\right\rfloor - \lfloor 2\{x\}\rfloor$$

当 $0 \leqslant \{x\} < \frac{1}{2}$ 时,

$$f(x) = 0 + (-1) - 0 = -1 \neq 0$$

而当 $\frac{1}{2} \leqslant \{x\} < 1$ 时,

$$f(x) = 1 + 0 - 1 = 0$$

得证只有当 $\frac{1}{2} \leqslant \{x\} < 1$ 时,$f(x) = 0$。

6. 解

$$8\lfloor 3x\rfloor - 5\lfloor 2x\rfloor = 3$$

令 $x = n + r$, 其中 $n \in \mathbb{Z}, 0 \leqslant r < 1$, 原方程变为

$$3n + 8\lfloor 3r\rfloor - 5\lfloor 2r\rfloor = 3$$

当 $0 \leqslant r < \frac{1}{3}$ 时,$\lfloor 3r\rfloor = 0, \lfloor 2r\rfloor = 0$, 有

$$3n = 3 \Rightarrow n = 1$$

当 $\frac{1}{3} \leqslant r < \frac{1}{2}$ 时,$\lfloor 3r\rfloor = 1, \lfloor 2r\rfloor = 0$, 有

$$3n + 8 = 3 \Rightarrow n = -\frac{5}{3} \notin \mathbb{Z}$$

当 $\frac{1}{2} \leqslant r < \frac{2}{3}$ 时, $\lfloor 3r\rfloor = 1, \lfloor 2r\rfloor = 1$, 有

$$3n + 8 - 5 = 3 \Rightarrow n = 0$$

当 $\frac{2}{3} \leqslant r < 1$ 时,$\lfloor 3r\rfloor = 2, \lfloor 2r\rfloor = 1$, 有

$$3n + 16 - 5 = 3 \Rightarrow n = -\frac{8}{3} \notin \mathbb{Z}$$

综上, 解为

$$n = 1, 0 \leqslant r < \frac{1}{3} \Rightarrow 1 \leqslant x < \frac{4}{3}$$

或

$$n = 0, \frac{1}{2} \leqslant r < \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} \leqslant x < \frac{2}{3}$$

7. 已知

$$\begin{cases} \lfloor b\rfloor + \lceil a\rceil + \{c\} = 16 \\ \lfloor c\rfloor + \lceil b\rceil + \{a\} = 11.3 \\ \lfloor a\rfloor + \lceil c\rceil + \{b\} = 9.7 \end{cases}$$

求 $a + b + c$ 的值。

由题意可知，小数部分分别为

$$\{a\} = 0.3, \quad \{b\} = 0.7, \quad \{c\} = 0$$

原方程组变为

$$\begin{cases} \lfloor b \rfloor + \lfloor a \rfloor + 1 = 16 \\ \lfloor c \rfloor + \lfloor b \rfloor + 1 = 11 \\ \lfloor a \rfloor + \lfloor c \rfloor = 9 \end{cases}$$

由第二式与第三式可得

$$\lfloor a \rfloor = 7, \quad \lfloor b \rfloor = 9 - 1 = 8, \quad \lfloor c \rfloor = 2$$

因此

$$a = 7.3, \quad b = 8.7, \quad c = 2 \Rightarrow a + b + c = 18$$

8. 已知 $\dfrac{1}{3-\sqrt{7}}$ 的整数部分为 a，小数部分为 b，求 $a^2 + (1+\sqrt{7})ab$。

有理化得

$$\frac{1}{3-\sqrt{7}} = \frac{3+\sqrt{7}}{2}$$

由

$$2 < \sqrt{7} < 3 \Rightarrow \frac{5}{2} < \frac{3+\sqrt{7}}{2} < 3,$$

得

$$a = 2, \quad b = \frac{3+\sqrt{7}}{2} - a = \frac{\sqrt{7}-1}{2}$$

故

$$\begin{aligned} a^2 + (1+\sqrt{7})ab &= 4 + (1+\sqrt{7}) \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{7}-1}{2} \\ &= 4 + (\sqrt{7}+1)(\sqrt{7}-1) \\ &= 10 \end{aligned}$$

9. 求大于 $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^6$ 的最小整数。

令

$$a=\sqrt{3}+\sqrt{2},\quad b=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

则

$$a^2=5+2\sqrt{6},\quad b^2=5-2\sqrt{6},\quad ab=1$$

所以

$$a^6+b^6=(a^2+b^2)(a^4+b^4-a^2b^2)=10(10^2-3)=970$$

由于 $0<b^2<1$, 所以

$$969<a^6<970\quad\Rightarrow\quad\lceil a^6\rceil=970$$

10. 求满足

$$\lfloor\sqrt{x}\rfloor=\lfloor\sqrt{x+34}\rfloor$$

的最小整数 x。

设 $y,y+1$ 为连续正整数, 使得他们的平方根的差不小于 34, 则

$$(y+1)^2-y^2>34\Rightarrow y>16.5$$

由于 $y\in\mathbb{Z}$, 最小的 x 为

$$x=y^2=17^2=289$$

11. 解

$$\lceil x\rceil\lceil 2x\rceil=15$$

设

$$x=n-r,\quad n\in\mathbb{Z},\quad 0<r\leqslant 1$$

当 $r<\dfrac{1}{2}$, 原方程即

$$n(2n)=15\Rightarrow n=\sqrt{\frac{15}{2}}\notin\mathbb{Z}$$

当 $r\geqslant\dfrac{1}{2}$, 原方程即

$$n(2n-1)=15\Rightarrow(n-3)(2n+5)=0\Rightarrow n=3\in\mathbb{Z}$$

故 x 的取值范围为

$$2 < x \leqslant 2.5$$

12. 求正实数 x 满足

$$x^2 + \{x\}^2 = 27$$

设

$$x = n + r, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad 0 < r \leqslant 1$$

且注意到

$$x^2 \leqslant x^2 + \{x\}^2 < x^2 + 1$$

因此

$$26 < x^2 \leqslant 27 \Rightarrow n = 5$$

代入原方程得

$$(5 + r)^2 + r^2 = 27 \Rightarrow r = \frac{-5 + \sqrt{29}}{2}$$

于是

$$x = 5 + r = \frac{5 + \sqrt{29}}{2}$$

13. 解

$$x^2 - 6\lfloor x \rfloor + 5 = 0$$

原方程化为

$$x^2 - 6\lfloor x \rfloor + 5 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = -6\{x\}$$

$-6\{x\}$ 的值域为 $(-6, 0]$, 且对于 $x \in [1, 5]$, 有

$$x^2 - 6x + 5 \in (-6, 0]$$

当 $x \in [1, 2)$, 有 $\lfloor x \rfloor = 1$, 则

$$x^2 = 6 \cdot 1 - 5 \Rightarrow x = 1$$

类似地,

$$\lfloor x\rfloor = 2 \Rightarrow x^2 = 7 \Rightarrow x = \sqrt{7}$$
$$\lfloor x\rfloor = 3 \Rightarrow x^2 = 13 \Rightarrow x = \sqrt{13}$$
$$\lfloor x\rfloor = 4 \Rightarrow x^2 = 19 \Rightarrow x = \sqrt{19}$$
$$\lfloor x\rfloor = 5 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = 5$$

因此, 方程的解为

$$x = 1, \sqrt{7}, \sqrt{13}, \sqrt{19}, 5$$

14. 解

$$\lfloor x^2\rfloor - \lfloor x\rfloor^2 = 1999$$

设 $x = n + r$, 其中 $n = \lfloor x\rfloor$, $r = \{x\}$, 则

$$\lfloor x^2\rfloor - n^2 = \lfloor (n+r)^2 - n^2\rfloor = \lfloor 2nr + r^2\rfloor$$

故

$$\lfloor x^2\rfloor - \lfloor x\rfloor^2 = 1999 \Rightarrow 2nr + r^2 \geqslant 1999$$

最小的 n 满足

$$2nr \geqslant 1999 \implies n \geqslant \lceil 1999/2\rceil = 1000.$$

此时有

$$r^2 + 2000r - 1999 = 0 \Rightarrow r = -1000 + \sqrt{1001999}$$

所以

$$x = n + r = \sqrt{1001999}$$

15. 解

$$\left\lfloor \frac{4x+3}{5} \right\rfloor = \frac{3(2x+1)}{4}$$

令

$$m=\frac{3(2x+1)}{4}\Rightarrow x=\frac{4m-3}{6},$$

代回原方程化简得到

$$\left\lfloor\frac{8m+3}{15}\right\rfloor=m$$

有

$$0\leqslant\frac{8m+3}{15}-m<1\Rightarrow-\frac{12}{7}<m\leqslant\frac{3}{7}$$

由于 $m\in\mathbb{Z}$ 于是

$$m=0,-1\Rightarrow x=-\frac{1}{2},-\frac{7}{6}$$

16. 求满足以下条件的正整数 x 的个数:

$$\left\lfloor\frac{x}{99}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{x}{101}\right\rfloor.$$

设

$$\left\lfloor\frac{x}{99}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{x}{101}\right\rfloor=m\in\mathbb{Z}$$

由定义有

$$m\leqslant\frac{x}{99}<m+1\Rightarrow 99m\leqslant x<99(m+1)$$
$$m\leqslant\frac{x}{101}<m+1\Rightarrow 101m\leqslant x<101(m+1)$$

因此

$$101m\leqslant x<99(m+1)$$

当 $m>49$ 时, $101m>99(m+1)$, 无解。对于 $0\leqslant m\leqslant 49$, 由于 $x=0$ 不是正整数, 可行整数个数为

$$\sum_{m=0}^{49}(99(m+1)-101m)=\sum_{m=0}^{49}(99-2m)-1=99\cdot 50-2\cdot\frac{49\cdot 50}{2}-1=2499$$

17. 求解 $x\in\mathbb{Z}$ 满足

$$\left\lfloor\frac{x}{1!}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{x}{2!}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{x}{3!}\right\rfloor=224$$

原方程给出

$$\frac{x}{1}+\frac{x}{2}+\frac{x}{6}-3<224<\frac{x}{1}+\frac{x}{2}+\frac{x}{6}$$

化简得

$$134.4 \leqslant x<136.2$$

由于 $x \in \mathbb{Z}$, 且 $x=136$ 不满足原方程, 故原方程式的解只有

$$x=135$$

18. 求满足

$$\frac{\lfloor x\rfloor}{x}=\frac{9}{10}$$

的最大实数 x。

由 $x=\lfloor x\rfloor+\{x\}$, 交叉相乘得

$$10\lfloor x\rfloor=9(\lfloor x\rfloor+\{x\}) \Rightarrow\lfloor x\rfloor=9\{x\}$$

由于 $0 \leqslant\{x\}<1,\{x\}$ 的可能值为

$$\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \ldots, \frac{8}{9},$$

取最大值 $\{x\}=\frac{8}{9}$, 于是

$$x=\lfloor x\rfloor+\{x\}=\frac{80}{9}$$

19. 18. 如 $x>0$ 且满足 $\lfloor x\rfloor^{2}=x(x-\lfloor x\rfloor)$, 求 $x-\frac{1}{x}$ 。

设 $n=\lfloor x\rfloor$。由于 $x>0$, 故 $n \geqslant 0$。方程变为

$$n^{2}=x(x-n) \Rightarrow x^{2}-n x-n^{2}=0$$

由于 $x>0$, 取正根

$$x=\frac{(1+\sqrt{5}) n}{2}$$

根据 $\lfloor x\rfloor=n$ 的定义, 必须满足

$$n \leqslant \frac{(1+\sqrt{5}) n}{2}<n+1 \tag{1}$$

对于 $n=0$,(1) 成立但 $x=0$, 与 $x>0$ 矛盾。对于 $n\geqslant 1$,(1) 左侧

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.618\geqslant 1$$

恒成立, 而右侧

$$\frac{(1+\sqrt{5})n}{2}<n+1 \implies 0.618n<1 \implies n<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

故只能 $n=1$, 此时

$$x-\frac{1}{x}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{2}{1+\sqrt{5}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{\sqrt{5}-1}{2}=1$$

20. 证明方程 $\lfloor x\rfloor+\lfloor 2x\rfloor+\lfloor 4x\rfloor+\lfloor 8x\rfloor=147$ 无实数解。

设 $x=n+\alpha$, 其中 $n=\lfloor x\rfloor$ 为整数部分,$\alpha\in[0,1)$ 为小数部分。将 α 表示为二进制形式:

$$\alpha=(0.b_1b_2b_3b_4\dots)_2=\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{4}+\frac{b_3}{8}+\frac{b_4}{16}+\dots$$

其中 $b_i\in\{0,1\}$。

利用性质 $\lfloor m+y\rfloor=m+\lfloor y\rfloor$ (m 为整数) 以及二进制移位性质:

$$\begin{aligned}
\lfloor x\rfloor&=n\\
\lfloor 2x\rfloor&=2n+\lfloor 2\alpha\rfloor=2n+b_1\\
\lfloor 4x\rfloor&=4n+\lfloor 4\alpha\rfloor=4n+2b_1+b_2\\
\lfloor 8x\rfloor&=8n+\lfloor 8\alpha\rfloor=8n+4b_1+2b_2+b_3
\end{aligned}$$

将上述结果代入原方程左式 (LHS):

$$\begin{aligned}
\text{LHS}&=(n+2n+4n+8n)+(b_1+2b_1+4b_1)+(b_2+2b_2)+b_3\\
&=15n+7b_1+3b_2+b_3
\end{aligned}$$

已知方程为 $15n+7b_1+3b_2+b_3=147$。由于 $b_1,b_2,b_3\in\{0,1\}$, 系数部分 $7b_1+3b_2+b_3$ 的最大取值为:

$$7(1)+3(1)+1(1)=11$$

这意味着对于特定的 n, 函数值的波动范围仅为 $[15n,15n+11]$。

若 $n=9$, 最大值为 $15(9)+11=135+11=146$。若 $n=10$, 最小值为 $15(10)+0=150$。数值 147 恰好落在两个区间之间（$146<147<150$）, 因此该方程在实数范围内无解。(待验证)

21. 解

$$\lceil x\lfloor x\rfloor\rceil+\lfloor x\lceil x\rceil\rfloor=111$$

令 $x=n+r$, 其中 $n\in\mathbb{Z},0\leqslant r<1$, 则

$$\lceil(n+r)\lfloor(n+r)\rfloor\rceil+\lfloor(n+r)\lceil(n+r)\rceil\rfloor=111$$

展开得

$$2n^2+n+\lceil nr\rceil+\lfloor(n+1)r\rfloor=111$$

解不等式组

$$\begin{cases}2n^2+n+1\leqslant 111\\ 2n^2+3n\geqslant 111\end{cases}$$

得 $n=7$, 因此解

$$\lceil 7r\rceil+\lfloor 8r\rfloor=6$$

得

$$\frac{3}{8}\leqslant r\leqslant\frac{3}{7}\Rightarrow\frac{59}{8}\leqslant x\leqslant\frac{52}{7}$$

22. (a) 求方程

$$\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{6}\right\rfloor=n$$

的正整数解个数, 其中 $1\leqslant n\leqslant 100$。

原方程化为

$$\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{6}\right\rfloor=\frac{n}{2}+\frac{n}{3}+\frac{n}{6}$$

明示了

$$\frac{n}{2},\frac{n}{3},\frac{n}{6}$$

皆为整数, 于是 n 必须为 6 的倍数, 因此正整数解共有 $\left\lfloor\dfrac{100}{6}\right\rfloor=16$ 个。

(b) 求方程

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor = n - 1$$

的正整数解个数，其中 $1 \leqslant n \leqslant 100$。

设

$$f(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor,$$

则

$$f(n+6) = f(n) + 6$$

定义 $g(n) = f(n) - (n-1)$，则

$$g(n+6) = g(n).$$

且有

$$g(1) = g(2) = g(3) = g(4) = 0, \quad g(5) \neq 0, \quad g(6) \neq 0.$$

因此正整数解共有

$$17 + 17 + 17 + 17 = 68$$

个。

23. 求数列

$$\left\lfloor \frac{1^2}{2016} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{2^2}{2016} \right\rfloor, \ldots, \left\lfloor \frac{2016^2}{2016} \right\rfloor$$

中相异整数的个数。

考虑连续两项的差

$$\frac{n^2}{2016} - \frac{(n-1)^2}{2016} = \frac{2n-1}{2016} < 1 \implies n < 1007.5$$

由于

$$\frac{1007^2}{2016} \approx 503.0005 > 503$$

前 1007 项即整数 $0, 1, 2, \ldots, 503$，共有 504 个不同整数。对于第 1008 项到 2016 项，每项至少比前一项大 1，因此产生

$$2016 - 1008 + 1 = 1009$$

个不同整数，因此数列中相异整数的个数为

$$504 + 1009 = 1513$$

24. 求

$$\sum_{k=1}^{512} \lfloor \log_2 k \rfloor$$

一般地, 对所有整数 $n \geqslant 0, k \geqslant 1$,

$$2^n \leqslant k \leqslant 2^{n+1} \lfloor \log_2 k \rfloor = n$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{512} \lfloor \log_2 k \rfloor &= 0 + (4-2) \cdot 1 + (8-4) \cdot 2 + \cdots + (512-256) \cdot 8 + 9 \\ &= 2 \cdot 1 + 2^2 \cdot 2 + \cdots + 2^8 \cdot 8 + 9 \\ &= 3595\end{aligned}$$

25. 计算

$$\sum_{r=1}^{34} \left\lfloor \frac{18r}{35} \right\rfloor$$

将整数部分与小数部分分开,

$$\sum_{r=1}^{34} \left\lfloor \frac{18r}{35} \right\rfloor = \sum_{r=1}^{34} \frac{18r}{35} - \sum_{r=1}^{34} \left\{ \frac{18r}{35} \right\}$$

其中

$$\sum_{r=1}^{34} \frac{18r}{35} = \frac{18}{35} \cdot \frac{34 \cdot 35}{2} = 306$$

注意到对任意正整数 $1 \leqslant r \leqslant 34$,

$$\left\{ \frac{18r}{35} \right\} + \left\{ \frac{18(35-r)}{35} \right\} = 1$$

当 r 从 1 到 34 时, 可以配成 17 对, 因此

$$\sum_{r=1}^{34} \left\{ \frac{18r}{35} \right\} = 17$$

于是

$$\sum_{r=1}^{34} \left\lfloor \frac{18r}{35} \right\rfloor = 289$$

对任意正整数 $1 \leqslant r \leqslant 34$, 有

$$\frac{18r}{35} + \frac{18(35-r)}{35} = 18$$

因此

$$\left\lfloor \frac{18r}{35} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{18(35-r)}{35} \right\rfloor + \left\{ \frac{18r}{35} \right\} + \left\{ \frac{18(35-r)}{35} \right\} = 18$$

又因为

$$\left\{ \frac{18r}{35} \right\} + \left\{ \frac{18(35-r)}{35} \right\} = 1$$

所以

$$\left\lfloor \frac{18r}{35} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{18(35-r)}{35} \right\rfloor = 17$$

因此

$$\sum_{r=1}^{34} \left\lfloor \frac{18r}{35} \right\rfloor = 17 \cdot 17 = 289$$

26. 设 r 为实数, 且满足

$$\left\lfloor r + \frac{19}{100} \right\rfloor + \left\lfloor r + \frac{20}{100} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor r + \frac{91}{100} \right\rfloor = 546$$

求 $\lfloor 100r \rfloor$ 的值。

从 $\frac{19}{100}$ 到 $\frac{91}{100}$, 共有

$$91 - 19 + 1 = 73$$

项, 这些取整值只可能为 7 或 8。

若全部等于 7, 则和为 $73 \cdot 7 = 521$; 若全部等于 8, 则和为 $73 \cdot 8 = 581$,

设前 k 项等于 7, 其余 $79 - k$ 项等于 8, 则

$$7k + 8(73 - k) = 546 \Rightarrow k = 38$$

这表示

$$\left\lfloor r + \frac{56}{100} \right\rfloor = 7, \quad \left\lfloor r + \frac{57}{100} \right\rfloor = 8$$

于是

$$\lfloor 100r \rfloor = \lfloor r \rfloor + \cdots + \left\lfloor r + \frac{56}{100} \right\rfloor + \left\lfloor r + \frac{57}{100} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor r + \frac{99}{100} \right\rfloor = 57 \cdot 7 + 43 \cdot 8 = 743$$

27. 证明

$$\lfloor\sqrt{1}\rfloor+\lfloor\sqrt{2}\rfloor+\cdots+\lfloor\sqrt{n^2-1}\rfloor=\frac{n(n-1)(4n+1)}{6}$$

考虑满足

$$\lfloor\sqrt{k}\rfloor=m \tag{1}$$

的正整数 k 的个数。(1) 等价于

$$m\leqslant\sqrt{k}<m+1\Longleftrightarrow m^2\leqslant k<(m+1)^2$$

因此, 对于每一个确定的 m , 满足条件的 k 有

$$(m+1)^2-m^2=2m+1$$

个, 于是

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n^2-1}\lfloor\sqrt{k}\rfloor&=\sum_{m=1}^{n-1}m(2m+1)\\&=2\sum_{m=1}^{n-1}m^2+\sum_{m=1}^{n-1}m\\&=2\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+\frac{(n-1)n}{2}\\&=\frac{n(n-1)(4n+1)}{6}\end{aligned}$$

得证。

28. 计算

$$\lceil\sqrt{1}\rceil+\lceil\sqrt{2}\rceil+\lceil\sqrt{3}\rceil+\cdots+\lceil\sqrt{2025}\rceil$$

注意到 $\sqrt{2025}=45$, 当 $(m-1)^2<k\leqslant m^2$ 时有

$$\lceil\sqrt{k}\rceil=m$$

因此可按 $m=1,2,\ldots,45$ 分组求和,

$$\sum_{k=1}^{2025}\lceil\sqrt{k}\rceil=\sum_{m=1}^{45}\sum_{k=(m-1)^2+1}^{m^2}m$$

对固定的 m, 求和的项数为 $m^2-(m-1)^2=2m-1$, 于是

$$\sum_{k=1}^{2025}\lceil\sqrt{k}\rceil=\sum_{m=1}^{45}m(2m-1)=2\sum_{m=1}^{45}m^2-\sum_{m=1}^{45}m=2\cdot\frac{45\cdot46\cdot91}{6}-\frac{45\cdot46}{2}=61755$$

29. 求

$$\lceil 1\rceil+\lceil 1.7\rceil+\lceil 2.4\rceil+\lceil 3.1\rceil+\cdots+\lceil 999.9\rceil$$

首先发现

$$\lceil 1\rceil+\lceil 8\rceil+\cdots+\lceil 995\rceil=\frac{143}{2}(1+995)$$

$$\lceil 1.7\rceil+\lceil 8.7\rceil+\cdots+\lceil 995.7\rceil=\frac{143}{2}(2+996)$$

以此类推, 原式即

$$\begin{aligned}&\lceil 1\rceil+\lceil 8\rceil+\cdots+\lceil 995\rceil+\lceil 1.7\rceil+\lceil 8.7\rceil+\cdots+\lceil 995.7\rceil\\&+\cdots+\lceil 6.6\rceil+\lceil 13.6\rceil+\cdots+\lceil 993.6\rceil+\lceil 7.3\rceil+\lceil 14.3\rceil+\cdots+\lceil 994.3\rceil\\&=\frac{143}{2}(1+995+2+996+3+997+4+998+4+998+5+999+6+1000+6+1000)\\&\quad+\frac{142}{2}(7+994+8+995)\\&=715285\end{aligned}$$

30. 求

$$\sum_{n=0}^{1000}\left\lfloor\frac{2^n}{3}\right\rfloor$$

利用二项式展开,

$$\begin{aligned}a_n&=\left\lfloor\frac{(3-1)^n}{3}\right\rfloor\\&=\left\lfloor 3^{n-1}-n\cdot3^{n-2}+n(n-1)3^{n-3}+\cdots+(-1)^{n-1}+\frac{(-1)^n}{3}\right\rfloor\\&=3^{n-1}-n\cdot3^{n-2}+n(n-1)3^{n-3}+\cdots+(-1)^{n-1}\end{aligned}$$

且注意到

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{2^n-1}{3}, & n\text{为偶数}\\ \dfrac{2^n-2}{3}, & n\text{为奇数}\end{cases}=\frac{2^n}{3}-\frac{1}{2}+\frac{(-1)^n}{6}$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{1000}\left\lfloor\frac{2^n}{3}\right\rfloor&=\sum_{n=0}^{1000}\left(\frac{2^n}{3}-\frac{1}{2}+\frac{(-1)^n}{6}\right)\\&=\frac{1}{3}\cdot\frac{2^{1001}-1}{2-1}-\frac{1001}{2}+\frac{1}{6}\\&=\frac{2^{1001}-1502}{3}\end{aligned}$$

31. 设 m,n 是整数,$n\geqslant 1$, 证明

$$\left\lfloor\frac{m+1}{n}\right\rfloor=\begin{cases}\left\lfloor\dfrac{m}{n}\right\rfloor & ,n\nmid m+1\\ \left\lfloor\dfrac{m}{n}\right\rfloor+1 & ,n\mid m+1\end{cases}$$

当 n 不整除 $m+1$, 有 $m+1=kn+r$, 其中 $k\in\mathbb{Z},1\leqslant r\leqslant n-1$, 此时欲证

$$\left\lfloor\frac{m+1}{n}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{m}{n}\right\rfloor \tag{1}$$

观察左式为

$$\left\lfloor\frac{m+1}{n}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{kn+r}{n}\right\rfloor=\left\lfloor k+\frac{r}{n}\right\rfloor=k$$

右式为

$$\left\lfloor\frac{m}{n}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{kn+r-1}{n}\right\rfloor=\left\lfloor k+\frac{r-1}{n}\right\rfloor=k$$

故 (1) 得证。当 n 整除 $m+1$ 时, 即 $m+1=kn$, 欲证

$$\left\lfloor\frac{m+1}{n}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{m}{n}\right\rfloor+1 \tag{2}$$

此时左式为

$$\left\lfloor\frac{m+1}{n}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{kn}{n}\right\rfloor=\lfloor k\rfloor=k$$

右式为

$$\left\lfloor\frac{m}{n}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{kn-1}{n}\right\rfloor=\left\lfloor k-\frac{1}{n}\right\rfloor=k-1$$

故 (2) 得证。

32. 证明对任意实数 α,β 有

$$\lfloor 2\alpha\rfloor+\lfloor 2\beta\rfloor\geqslant\lfloor\alpha\rfloor+\lfloor\beta\rfloor+\lfloor\alpha+\beta\rfloor$$

令

$$\alpha=n_1+r_1,\beta=n_2+r_2,\quad n_1,n_2\in\mathbb{Z},\quad 0\leqslant r_1,r_2<1$$

则原不等式等价于

$$\lfloor 2r_1\rfloor+\lfloor 2r_2\rfloor\geqslant\lfloor r_1+r_2\rfloor \tag{1}$$

若 $0\leqslant r_1<\dfrac{1}{2}$ 且 $0\leqslant r_2<\frac{1}{2}$, 则左式 $=0+0=0$ 。由于 $r_1+r_2<1$, 右式 $=0$,(1) 成立;

若 r_1,r_2 中有一个大于等于 $\frac{1}{2}$, 不妨设 $r_1\geqslant\dfrac{1}{2}$, 则左式 $\geqslant 1+0=1$ 。而 $r_1+r_2<2$, 右式最大为 1 ,(1) 成立;

若 $r_1\geqslant\dfrac{1}{2}$ 且 $r_2\geqslant\frac{1}{2}$, 则左式 $=1+1=2$ 。由于 $r_1+r_2<2$, 右式最大为 1 ,(1) 也成立。

综上, 原不等式成立。

33. 证明对任意实数 x,y 有

$$\lfloor x-y\rfloor\leqslant\lfloor x\rfloor-\lfloor y\rfloor\leqslant\lfloor x-y\rfloor+1$$

由取整函数的性质可知

$$x-1<\lfloor x\rfloor\leqslant x,\quad -(y-1)>-\lfloor y\rfloor\geqslant -y$$

由 $x=(x-y)+y$ 得

$$\lfloor x\rfloor=\lfloor (x-y)+y\rfloor\geqslant\lfloor x-y\rfloor+\lfloor y\rfloor$$

移项得

$$\lfloor x\rfloor-\lfloor y\rfloor\geqslant\lfloor x-y\rfloor$$

得证左边不等式, 又因 $x-y=x+(-y)$ 得

$$\lfloor x-y\rfloor=\lfloor x+(-y)\rfloor\geqslant\lfloor x\rfloor+\lfloor -y\rfloor$$

由于

$$\lfloor -y\rfloor=\begin{cases}-\lfloor y\rfloor & ,y\in\mathbb{Z}\\ -\lfloor y\rfloor-1 & ,y\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

即

$$\lfloor -y \rfloor \geqslant -\lfloor y \rfloor - 1$$

代入得

$$\lfloor x-y \rfloor \geqslant \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor - 1$$

得证右边不等式, 综上原不等式成立。

34. 证明埃尔米特恒等式：对所有实数 x 及所有正整数 n , 以下恒等式成立：

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor x+\frac{k}{n}\right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$$

将 x 分解为整数部分和小数部分, 即

$$x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$$

在 $\{1,\ldots,n\}$ 中, 恰好存在一个 k' 使得：

$$\lfloor x \rfloor = \left\lfloor x+\frac{k'-1}{n}\right\rfloor \leqslant x < \left\lfloor x+\frac{k'}{n}\right\rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$$

通过在不等式左右两边的取整符号内减去同一个整数 $\lfloor x \rfloor$, 可以重写为：

$$0 = \left\lfloor \{x\}+\frac{k'-1}{n}\right\rfloor \leqslant \{x\} < \left\lfloor \{x\}+\frac{k'}{n}\right\rfloor = 1$$

因此有

$$1-\frac{k'}{n} \leqslant \{x\} < 1-\frac{k'-1}{n}$$

即求点

$$n-k' \leqslant n\{x\} < n-k'+1$$

这意味着 $\lfloor n\{x\} \rfloor = n-k'$, 于是

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor x+\frac{k}{n}\right\rfloor &= \sum_{k=0}^{k'-1}\lfloor x \rfloor + \sum_{k=k'}^{n-1}(\lfloor x \rfloor + 1) \\
&= k'\lfloor x \rfloor + (n-k')(\lfloor x \rfloor + 1) \\
&= n\lfloor x \rfloor + n - k' \\
&= n\lfloor x \rfloor + \lfloor n\{x\} \rfloor \\
&= \lfloor n\lfloor x \rfloor + n\{x\} \rfloor \\
&= \lfloor nx \rfloor
\end{aligned}$$

得证。

函数

1. 求下列函数的值域:

   (a) $f(x) = x^2 - 2x + 5$, 其中 $D_f = [-1, 2]$

   配方法得
   $$f(x) = x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 4$$
   当 $x = 1, f_{\min} = 4$; 当 $x = -1, f_{\max} = 8$, 故
   $$R_f = [4, 8]$$

   (b) $f(x) = x + \sqrt{x(2-x)}$

   设 $y = x + \sqrt{x(2-x)}$, 则
   $$2x^2 - 2(y+1)x + y^2 = 0$$
   由于 $x \in \mathbb{R}$, 判别式为非负,
   $$4(y+1)^2 - 8y \geqslant 0 \Rightarrow 1 - \sqrt{2} \leqslant y \leqslant 1 + \sqrt{2}$$
   但 $0 \leqslant x \leqslant 2, y = x + \sqrt{x(2-x)} \geqslant 0$, 故 $y_{\min} = 0$。

   而当 $y = 1 + \sqrt{2}, x_1 = \dfrac{2 + \sqrt{2} - 2\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}} \in [0, 2]$, 故 $y_{\max} = 1 + \sqrt{2}$。

   于是
   $$R_f = [0, 1 + \sqrt{2}]$$

   (c) $f(x) = \dfrac{3x+4}{5x+6}$

   设 $y = \dfrac{3x+4}{5x+6}$, 则 $x = \dfrac{4-6y}{5y-3}$, 故反函数
   $$f^{-1}(x) = \frac{4-6x}{5x-3}$$
   的定义域为
   $$D_{f^{-1}} = \left(-\infty, \frac{3}{5}\right) \cup \left(\frac{3}{5}, \infty\right)$$
   即 R_f。

(d) $f(x)=\dfrac{3x+2}{x+1}$

发现

$$f(x)=\frac{3x+2}{x+1}=3-\frac{1}{x+1}\neq 3$$

故

$$R_f=(-\infty,3)\cup(3,\infty)$$

(e) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x-3}$

设 $y=\dfrac{\cos x}{\sin x-3}$，则

$$3y=y\sin x-\cos x=\sqrt{y^2+1}\cos(x-\alpha)\Rightarrow\cos(x-\alpha)=\frac{3y}{\sqrt{y^2+1}}$$

由于 $\cos(x-\alpha)\in[-1,1]$，解得

$$-1\leqslant\frac{3y}{\sqrt{y^2+1}}\leqslant 1\Rightarrow-\frac{\sqrt{2}}{4}\leqslant y\leqslant\frac{\sqrt{2}}{4}$$

即

$$R_f=\left[-\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4}\right]$$

(f) $f(x)=2^{x-5}+\log_3\sqrt{x-1}$，其中 $D_f=[2,10]$

由于 2^{x-5} 与 $\log_3\sqrt{x-1}$ 在 $[2,10]$ 上皆为增函数，故 $f(x)$ 也为增函数。
当 $x=2, f(x)=\dfrac{1}{8}$；当 $x=10, f(x)=33$。故

$$R_f=\left[\frac{1}{8},33\right]$$

(g) $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$

发现

$$f(x)=\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$$

由 $x\geqslant 1$，得 $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\geqslant 2$，于是

$$0<\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\leqslant\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

即

$$R_f = (0, \sqrt{2}]$$

(h) $f(x) = x + 2 + \sqrt{1-(x+1)^2}$

由于 $1-(x+1)^2 \geqslant 0$，有 $(x+1)^2 \leqslant 1$，不妨设 $x+1=\cos\alpha, \alpha \in [0,\pi]$，则

$$f(x) = \cos\alpha + 1 + \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sin\alpha + \cos\alpha + 1 = \sqrt{2}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) + 1$$

由 $\alpha \in [0,\pi]$，可知

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant \sqrt{2}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) + 1 \leqslant 1 + \sqrt{2}$$

即

$$R_f = [0, 1+\sqrt{2}]$$

(i) $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{x^4 + 2x^2 + 1}$

首先有

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{1+x^2} \cdot \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

令 $x = \tan\beta$，则

$$f(x) = \frac{1}{2}\sin 2\beta\cos 2\beta = \frac{1}{4}\sin 4\beta$$

若 $k \in \mathbb{Z}$，当 $\beta = \dfrac{k\pi}{2} - \dfrac{\pi}{8}$, $f_{\max} = \dfrac{1}{4}$；当 $\beta = \dfrac{k\pi}{2} + \dfrac{\pi}{8}$, $f_{\min} = -\dfrac{1}{4}$，且此时 $\tan\beta$ 有意义，于是

$$R_f = \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$$

(j) $f(x) = x + 4 + \sqrt{5 - x^2}$

由 $5 - x^2 \geqslant 0$ 得 $|x| \leqslant \sqrt{5}$，令 $x = \sqrt{5}\cos\alpha, \alpha \in [0,\pi]$，则

$$f(x) = \sqrt{5}\cos\alpha + 4 + \sqrt{5}\sin\alpha = 4 + \sqrt{10}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$$

由于 $\alpha \in [0,\pi], \alpha - \dfrac{\pi}{4} \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right]$，故

$$f_{\max} = 4 + \sqrt{10} \cdot 1, \quad f_{\min} = 4 + \sqrt{10} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

故

$$R_f = [4-\sqrt{5}, 4+\sqrt{10}]$$

(k) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}}{x+3}$

设 $t = \sqrt{x+2}, t \geqslant 0$, 则 $x+3 = t^2+1$。当 $t > 0$,

$$f(x) = \frac{t}{t^2+1} = \frac{1}{t+\frac{1}{t}} \leqslant \frac{1}{2}$$

等号成立当且仅当 $t=1$ 即 $x=-1$, 于是

$$0 < f(x) \leqslant \frac{1}{2}$$

而当 $t=0$ 时,$f(x)=0$, 故

$$R_f = \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

(l) $f(x) = (\sin x+1)(\cos x+1), x \in \left[-\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

由

$$f(x) = \sin x\cos x + \sin x + \cos x + 1$$

令 $t = \sin x + \cos x$, 则 $\sin x \cos x = \dfrac{1}{2}(t^2-1)$, 化为

$$f(x) = \frac{1}{2}(t^2-1) + t + 1 = \frac{1}{2}(t+1)^2$$

又由 $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right), x \in \left[-\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 知

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant t \leqslant \sqrt{2}$$

当 $t = \sqrt{2}, f_{\max} = \dfrac{3}{2} + \sqrt{2}$; 当 $t = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, f_{\min} = \dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 于是

$$R_f = \left[\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{2} + \sqrt{2}\right]$$

(m) $f(x) = \left(\sin x + \dfrac{1}{\sin x}\right)^2 + \left(\cos x + \dfrac{1}{\cos x}\right)^2$

展开得

$$f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x+\csc^2 x+\sec^2 x+4=7+\tan^2 x+\cot^2 x$$

由 AM-GM 不等式,

$$f(x)\geqslant 7+2\sqrt{1}=9$$

等号成立当且仅当 $\tan x=\cot x$ 即 $x=k\pi\pm\dfrac{\pi}{4}, k\in\mathbb{Z}$, 故

$$R_f=[9,\infty)$$

(n) $f(x)=2\sin x\sin 2x$

由 AM-GM 不等式,

$$[f(x)]^2=16\sin^4 x\cos^2 x=8\sin^2 x\sin^2 x(2-2\sin^2 x)\leqslant 8\cdot\left(2\cdot\frac{1}{3}\right)^3=\frac{64}{27}$$

等号成立当且仅当 $\sin^2 x=2-2\sin^2 x$ 即 $\sin^2 x=\dfrac{2}{3}$, 故

$$R_f=\left[-\frac{8\sqrt{3}}{9},\frac{8\sqrt{3}}{9}\right]$$

(o) $f(x)=|x-2|+|x+8|$

在一维数轴上设 $A=-8, B=2$, 当动点 P 在线段 AB 上,

$$f(x)=|x-2|+|x+8|=|AB|=10$$

当动点 P 在线段 AB 外,

$$f(x)=|x-2|+|x+8|>|AB|=10$$

故

$$R_f=[10,\infty)$$

(p) $f(x)=\sqrt{x^2-6x+13}+\sqrt{x^2+4x+5}$

写成

$$f(x)=\sqrt{(x-3)^2+(0-2)^2}+\sqrt{(x+2)^2+(0+1)^2}$$

即 x 轴上的动点 $P(x,0)$ 到两定点 $A(3,2), B(-2,-1)$ 的距离之和, 而当 P 为线段与 x

轴的交点时,

$$f_{\min} = |AB| = \sqrt{(3+2)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{43}$$

于是

$$R_f = [\sqrt{43}, \infty)$$

(q) $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 13} - \sqrt{x^2 + 4x + 5}$

写成

$$f(x) = \sqrt{(x-3)^2 + (0-2)^2} - \sqrt{(x+2)^2 + (0-1)^2}$$

即 AP 距离与 BP 距离之差, 其中 $A(3,2), B(-2,1), P(x,0)$。当 P 在 x 轴上且不是直线 AB 与 x 轴的交点时, 即 P', 则构成 $\triangle ABP'$, 有

$$\big||AP'| - |BP'|\big| < |AB| = \sqrt{(3+2)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{26}$$

即

$$-\sqrt{26} < f(x) < \sqrt{26}$$

而当 P 恰好在直线 AB 与 x 轴的交点时, 有

$$\big||AP'| - |BP'|\big| = |AB| = \sqrt{26}$$

故

$$R_f = (-\sqrt{26}, \sqrt{26}]$$

(r) $f(x) = x^2 + \sqrt{x^4 - 3x^2 + 2x + 5}$

变形可得

$$f(x) = x^2 + \sqrt{(x^2-2)^2 + (x+1)^2}$$

发现 $f(x)$ 表示抛物线 $y = x^2$ 上动点 $P(x, x^2)$ 到点 $A(-1,2)$ 和 x 轴的距离之和。

过 P 点作 $PB \perp x$ 轴于 B, 过 A 点作 $AC \perp x$ 轴于 C, BC 交抛物线 $y = x^2$ 于点 P_0, 故

$$|PA| + |PB| \geqslant |P_0A| + |P_0C| = |AC| = 2$$

所以

$$R_f = [2, \infty)$$

2. 设函数 $f:\mathbb{R}\setminus\{0,-b\}\to\mathbb{R}\setminus\{1\}$ 满足

$$f(x)=\frac{x+a}{x+b}$$

求出所有实数对 (a,b) 使得

$$f(f(x))=-\frac{1}{x}$$

据题意,

$$f(f(x))=\frac{\frac{x+a}{x+b}+a}{\frac{x+a}{x+b}+b}=\frac{(1+a)x+a+ab}{(1+b)x+a+b^2}=-\frac{1}{x}$$

整理得

$$(1+a)x^2+(a(1+b)+1+b)x+a+b^2=0.$$

解得

$$\begin{cases}1+a=0\\ a+b^2=0\end{cases}\quad\Rightarrow a=-1,b=\pm1$$

经检验,$(-1,-1)$ 不合题意, 故解为 $(-1,1)$

3. 已知函数 $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 互为反函数, 且函数

$$F(x)=f(x+1)-2,\quad G(x)=g(2x+1),$$

也互为反函数, 若 $f(1)=4$, 求 $f(100)$。

由于 F,G 互为反函数, 有

$$G(F(x))=g(2F(x)+1)=g(2(f(x+1)-2)+1)=x$$

又 f,g 互为反函数, 则

$$2f(x+1)-3=f(x)\Rightarrow f(x+1)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{3}{2}$$

由 $f(1)=4$, 可依次得到

$$f(2)=3+\frac{1}{2},\quad f(3)=3+\frac{1}{4},\dots$$

归纳可得

$$f(n)=3+\frac{1}{2^{n-1}},\ n\in\mathbb{N}$$

因此

$$f(100)=3+\frac{1}{2^{99}}$$

4. 已知函数 $g(x)=2x-4$, 其反函数为 g^{-1}, 且函数 f 对任意实数 x 皆满足

$$g(f(g^{-1}(x)))=2x^2+16x+26,$$

求 $f(\pi)$ 的值。

已知 g 可逆, 令 $x=g(y)$, 则 $y=g^{-1}(x)$, 由题意得

$$g(f(y))=2(g(y))^2+16g(y)+26=2(2y-4)^2+16(2y-4)+26=8y^2-6$$

于是有

$$f(y)=g^{-1}(g(f(y)))=g^{-1}(8y^2-6)=\frac{8y^2-6+4}{2}=4y^2-1$$

所以

$$f(\pi)=4\pi^2-1$$

由 $y=g(x)=2x-4$, 得

$$x=g^{-1}(y)=\frac{y+4}{2}$$

由 $g(f(g(x)))=2x^2+16x+26$,

$$f(g(x))=g^{-1}(2x^2+16x+26)=x^2+8x+15=(x+4)^2-1$$

且

$$f(g(x))=f\left(\frac{x+4}{2}\right)=(x+4)^2-1$$

令 $\dfrac{x+4}{2}=\pi$, 则

$$f(\pi)=4\pi^2-1.$$

请问是哪一行有误?

5. 已知 $f(x)+2f(4-x)=x+8$, 求 $f(16)$。

令 $x=-12,16$, 可得联立方程

$$\begin{cases} f(-12)+2(16)=-4 \\ f(16)+2f(-12)=24 \end{cases}$$

解得

$$f(16)=-\frac{32}{3}$$

6. 若 $f(x)$ 为实系数二次多项式, 已知 p,q,r 为三相异非零实数, 使得 $f(p)=qr, f(q)=rp, f(r)=pq$, 证明 $f(p+q+r)=f(p)+f(q)+f(r)$。

取 $g(x)=xf(x)-pqr$, 则 $g(p)=g(q)=g(r)=0$, 且有

$$g(x)=xf(x)-pqr=a(x-p)(x-q)(x-r)$$

于是

$$f(x)=\frac{1}{x}\left(ax^3-a(p+q+r)x^2+a(pq+qr+rp)x-apqr+pqr\right)$$

由于 $f(x)$ 为二次多项式, 因此 $-apqr+pqr=0 \Rightarrow a=1$, 得

$$f(x)=x^2-(p+q+r)x+pq+qr+rp$$

故得证

$$f(p+q+r)=pq+qr+rp=f(p)+f(q)+f(r)$$

7. 设 $Q(x)$ 是一个 2017 次多项式, 且满足

$$Q'(r)=\frac{2017!}{r} \quad ,r=1,2,3,\cdots,2017$$

另定义

$$P(x)=xQ(x)-\int Q(x)\,dx.$$

若多项式 $P(x)$ 的所有根之和为 a, 求 $a \pmod{1000}$。

有

$$P'(x)=xQ'(x)+Q(x)-Q(x) \Rightarrow P(x)=\int xQ'(x)\,dx$$

考虑函数

$$R(x)=xQ(x)-2017!$$

则 $R(r)=0, r=1,2,3,\cdots,2017$, 故可设

$$R(x)=A(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-2017)$$

令 $x=0$ 可得 $A=1$, 故

$$Q'(x)=\frac{(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-2017)+2017!}{x}$$

且

$$\begin{aligned}P(x) = \int xQ'(x)\,dx &= \int ((x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-2017)+2017!)\,dx \\ &= \int \left(x^{2017} - \frac{2017\cdot 2018}{2}x^{2016} + \cdots\right)\,dx \\ &= \frac{1}{2018}x^{2018} - 1009x^{2017} + \cdots\end{aligned}$$

由韦达定理, $P(x)$ 的所有根之和为

$$a = 1009\cdot 2018 \equiv 162 \pmod{1000}$$

8. 定义函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 使得对所有实数 x 有

$$f(f(x)) = x^2 - x + 1.$$

求 $f(0)$。

设 $f(0)=b$, 则

$$f(b) = f(f(0)) = 0^2 - 0 + 1 = 1$$

又有

$$f(f(b)) = f(1) = b^2 - b + 1$$

因为 $f(b)=1$, 所以

$$f(f(b)) = f(1) = 1 = b^2 - b + 1 \implies b(b-1) = 0.$$

若 $b=0$, 则 $f(0)=0$, 但 $f(f(0))=f(0)=0\neq 1$, 矛盾。故 $b=1$, 即

$$f(0) = 1$$

9. 已知 $f(x)=e(x)+o(x)$, 其中 $e(x)$ 为偶函数,$o(x)$ 为奇函数, 且

$$e(x) + x^2 = o(x),$$

求 $f(2)$。

由已知 $e(x)=f(x)-o(x)$, 换元得

$$e(-x)=f(-x)-o(-x)\Rightarrow e(x)=f(-x)+o(x)$$

故

$$f(-x)=-x^2\Rightarrow f(2)=4$$

10. 定义 f 在 $[0,1]$ 上满足

$$2f\left(\frac{x}{3}\right)=f(x),\quad f(x)+f(1-x)=1,$$

求 $f\left(\frac{1}{3}\right)$。

由递推公式, 则

$$f\left(\frac{1}{13}\right)+f\left(\frac{12}{13}\right)=1,$$

且

$$f\left(\frac{12}{13}\right)=2f\left(\frac{4}{13}\right)=2\left[1-f\left(\frac{9}{13}\right)\right]=2-2f\left(\frac{9}{13}\right)=2-4f\left(\frac{3}{13}\right)=2-8f\left(\frac{1}{13}\right)$$

解得

$$f\left(\frac{1}{13}\right)=\frac{1}{7}.$$

11. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数, 且对任意实数 x 均有 $2f(x)+f(x^2-1)=1$, 试求 $f(\sqrt{2})$ 的值。

分别令 $x=-1,0,1,\sqrt{2}$ 可得

$$2f(-1)+f(0)=1 \tag{1}$$
$$2f(0)+f(-1)=1 \tag{2}$$
$$2f(1)+f(0)=1 \tag{3}$$
$$2f(\sqrt{2})+f(1)=1 \tag{4}$$

由 (1), (2), (3) 解得

$$f(-1)=f(0)=f(1)=\frac{1}{3}$$

故由 (4) 得

$$f(\sqrt{2})=\frac{1}{3}$$

12. 设函数 $f(x)=\cos x+\log_2 x$, 其中 $x>0$, 若正实数 a 满足 $f(a)=f(2a)$, 求 $f(2a)-f(4a)$ 的值。

由条件得

$$\cos a+\log_2 a=\cos 2a+\log_2 2a=2\cos^2 a-1+\log_2 a+1$$

所以

$$\cos a(2\cos a-1)=0\Rightarrow(\cos a,\cos 2a)=(0,-1)\text{或}\ (\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$$

于是

$$\begin{aligned}f(2a)-f(4a)&=\cos 2a+\log_2 2a-\cos 4a-\log_2 4a\\&=\cos 2a-2\cos^2 2a\\&=\begin{cases}-3, & \text{若}\cos 2a=-1,\\ -1, & \text{若}\cos 2a=-\frac{1}{2}\end{cases}\end{aligned}$$

13. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 且 $f(x+2)-2$ 为奇函数, $f(2x+1)$ 为偶函数。若 $f(1)=0$, 求 $f(1)+f(2)+\cdots+f(2023)$ 的值。

$f(x+2)-2$ 为奇函数, 则

$$f(-x+2)-2+f(x+2)-2=0\Rightarrow f(2-x)+f(2+x)=4$$

于是 $f(2)=2$, $f(x)$ 的图象关于点 $(2,2)$ 对称, 又由 $f(2x+1)$ 为偶函数,

$$f(-2x+1)=f(2x+1)\Rightarrow f(1-2x)=f(1+2x)$$

即

$$f(1-x)=f(1+x)$$

$f(x)$ 图象关于直线 $x=1$ 对称, 由上可得

$$f(x)=f(2-x)=4-f(2+x)=4-f(-x)=4-[4-f(x+4)]=f(x+4)$$

所以 $f(x)$ 是周期为 4 的函数, 且

$$f(1)=0, f(2)=2, f(3)=4, f(4)=2$$

故

$$\begin{aligned}
& f(1)+f(2)+\cdots+f(2023) \\
& =505[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)]+f(1)+f(2)+f(3) \\
& =4046
\end{aligned}$$

14. 设 f 为实值函数, 且对任意实数 x 满足

$$f(10+x)=f(10-x), \quad f(20+x)=-f(20-x)$$

(a) 证明 f 是奇函数。

$$f(10+x)=f(10-x) \tag{1}$$

$$f(20+x)=-f(20-x) \tag{2}$$

由 (1), 令 $x=y-10$,

$$f(y)=f(20-y)$$

由 (2), 令 $x=-y$,

$$f(20-y)=-f(20+y)$$

因此

$$f(y)=-f(20+y)$$

由 (1), 令 $x=y+10$,

$$f(y+20)=f(-y)$$

结合上式可得

$$f(y)=-f(20+y)=f(-y),$$

所以得证 f 是奇函数。

(b) 证明 f 是周期函数。

由 (2), 令 $x=y-20$ 在 (b) 中, 则

$$f(y)=-f(40-y)$$

由于 f 是奇函数，有 $-f(40-y)=f(y-40)$，所以

$$f(y)=f(y-40),$$

因此得证 f 是周期函数。

15. 函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上定义，且满足

$$f(-x)=f(x), f(0)=993,$$

若另一函数 $g(x)$ 满足

$$g(-x)=-g(x), g(x)=f(x-1)$$

求 $f(1992)$ 的值。

由 $g(-x)=-g(x)$ 及 $g(x)=f(x-1)$ 得

$$f(-x-1)=-f(x-1)$$

结合 $f(x)$ 为偶函数，有

$$f(x+1)=f(-x-1)=-f(x-1)$$

从而 $f(x+2)=-f(x)$，进而 $f(x+4)=f(x)$，发现 $f(x)$ 是周期为 4 的函数，故

$$f(1992)=f(4\cdot 498)=f(0)=993$$

16. 若实数 x,y,z 满足

$$\begin{cases}\dfrac{x}{1^2+4^2}+\dfrac{y}{1^2+5^2}+\dfrac{z}{1^2+6^2}=1\\ \dfrac{x}{2^2+4^2}+\dfrac{y}{2^2+5^2}+\dfrac{z}{2^2+6^2}=1\\ \dfrac{x}{3^2+4^2}+\dfrac{y}{3^2+5^2}+\dfrac{z}{3^2+6^2}=1\end{cases}$$

求 $x+y+z$。

设

$$f(k)=\frac{x}{k+4^2}+\frac{y}{k+5^2}+\frac{z}{k+6^2}-1,$$

据题意

$$f(1^2)=f(1)=0,\quad f(2^2)=f(4)=0,\quad f(3^2)=f(9)=0$$

因此 $f(k)$ 有三个根 $k=1,4,9$, 所以

$$(k-1)(k-4)(k-9)$$

与

$$(k+4^2)(k+5^2)(k+6^2)-x(k+5^2)(k+6^2)-y(k+4^2)(k+6^2)-z(k+4^2)(k+5^2)$$

相等, 比较 k^2 系数得

$$-(1+4+9)=4^2+5^2+6^2-(x+y+z)\Rightarrow x+y+z=91$$

17. 已知实数 α,β 满足

$$3^{\frac{\alpha}{2}}=\sqrt{3}-\alpha,\quad \log_3\beta=2\sqrt{3}-2\beta$$

求

$$(\alpha+\beta)^2-2(\sqrt{3})^\alpha-\log_3\beta$$

将底改为 $\sqrt{3}$:

$$\sqrt{3}^\alpha=\sqrt{3}-\alpha,\quad \log_{\sqrt{3}}\beta=\sqrt{3}-\beta$$

设 $A(\alpha,\sqrt{3}-\alpha)$ 为两图形 $y=\sqrt{3}^x$ 与 $y=\sqrt{3}-x$ 的交点 , $B(\beta,\sqrt{3}-\beta)$ 为两图形 $y=\log_{\sqrt{3}}x$ 与 $y=\sqrt{3}-x$ 的交点。

由于 $y=\sqrt{3}^x$ 与 $y=\log_{\sqrt{3}}x$ 关于 $y=x$ 对称,

$$\alpha=\sqrt{3}-\beta\Rightarrow\alpha+\beta=\sqrt{3}$$

因此

$$(\alpha+\beta)^2-2(\sqrt{3})^\alpha-\log_3\beta=(\sqrt{3})^2-2(\sqrt{3}-\alpha)-2(\sqrt{3}-\beta)=3-2\sqrt{3}$$

18. 设实数 α,β 满足

$$\begin{cases}\alpha^3-6\alpha^2+13\alpha=6\\ \beta^3-6\beta^2+13\beta=14\end{cases}$$

求 $\alpha+\beta$。

令

$$f(x)=x^3-6x^2+13x \Rightarrow f(\alpha)=6,\ f(\beta)=14$$

又

$$f'(x)=3x^2-12x+13 \Rightarrow f''(x)=6x-12=0 \Rightarrow x=2$$

因此图形 $y=f(x)$ 的对称中心为 $(2, f(2)=10)$, 所以 $P(\alpha,6), Q(\beta,14)$ 的对称点为

$$P'=(4-\alpha,14), Q'=(4-\beta,6)$$

于是由 $P=Q', \quad Q=P'$ 解得

$$\alpha=4-\beta, \quad \beta=4-\alpha \Rightarrow \alpha+\beta=4$$

19. 解方程

$$e^{x-1}\ln x+e^{y-1}\ln y=\ln(xy)$$

原式化为:

$$(e^{x-1}-1)\ln x+(e^{y-1}-1)\ln y=0$$

考虑函数 $f(t)=(e^{t-1}-1)\ln t$,

- 当 $t>1$ 时, $e^{t-1}-1>0, \ln t>0$, 故 $f(t)>0$
- 当 $0<t<1$ 时, $e^{t-1}-1<0, \ln t<0$, 故 $f(t)>0$
- 当 $t=1$ 时, $e^{t-1}-1=0, \ln 1=0$, 故 $f(1)=0$

故

$$f(x)+f(y)=0 \Rightarrow x=y=1$$

20. 已知 $x, y\in\mathbb{R}$, 且满足

$$\begin{cases}(x+1)^3+2023(x+1)=-2023\\(y+1)^3+2023(y+1)=2023\end{cases}$$

求 $x+y$ 的值。

考虑函数 $f(t)=t^3+2023t$, 据题意有

$$f(x+1)=-2023,\quad f(y+1)=2023$$

注意到 $f(t)$ 是奇函数,

$$f(x+1)=-f(y+1)=f(-(y+1))$$

且导数为

$$f'(t)=3t^2+2023>0,\quad \forall t\in\mathbb{R}$$

所以 f 在 $\mathbb{R}$ 上严格递增, 故 f 一对一, 因此有

$$x+1=-(y+1)\Rightarrow x+y=-2$$

21. 求定义于 $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 上的所有实值函数满足

$$\frac{1}{x}f(-x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=x$$

令 $x=\dfrac{1}{y}$,

$$yf\left(-\frac{1}{y}\right)+f(y)=\frac{1}{y}\tag{1}$$

令 $x=-y$ 代入, 得

$$-\frac{1}{y}f(y)+f\left(-\frac{1}{y}\right)=-y\tag{2}$$

联立 (1),(2), 解得

$$f(x)=\frac{x^3+1}{2x},\quad x\neq 0$$

22. 解函数方程

$$xf(y)+yf(x)=(x+y)f(x)f(y)$$

令 $x=y=1$, 得 $2f(1)=2f^2(1)$, 因此 $f(1)=0$ 或 1。若 $f(1)=0$, 令 $y=1$, 得

$$xf(1)+1\cdot f(x)=(x+1)f(x)f(1)\Rightarrow f(x)=0$$

若 $f(1)=1$，令 $y=1$，得

$$x+f(x)=(x+1)f(x) \Rightarrow x[f(x)-1]=0$$

故解为

$$f(x)=0 \quad 或 \quad f(x)=\begin{cases}1 & ,x\neq 0\\ a & ,x=0,a\in\mathbb{R}\end{cases}$$

23. 已知函数 $f(x)$ 满足

$$f(m+n)=f(m)+f(n)+mn, \quad \forall m,n\in\mathbb{N}$$

且 $f(1)=1$，求 $f(x)$。

令 $m=1$，则

$$f(n+1)=f(n)+f(1)+n=f(n)+(n+1)$$

当 $n=1,\ldots,n-1$ 时，由累加法，

$$f(n)=f(1)+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

即

$$f(x)=\frac{x(x+1)}{2}, \quad x\in\mathbb{N}$$

24. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=1, f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$，且对任意的 $x,y\in\mathbb{R}$，

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cos y,$$

求 $f(x)$。

令 $x=0,y=t$，

$$f(t)+f(-t)=2f(0)\cos t=2\cos t \tag{1}$$

令 $x=\frac{\pi}{2}+t, y=\frac{\pi}{2}$，

$$f(t+\pi)+f(t)=2f\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\frac{\pi}{2}=0 \Rightarrow f(t+\pi)=-f(t) \tag{2}$$

再令 $x=\dfrac{\pi}{2}, y=\dfrac{\pi}{2}+t$,

$$f(\pi+t)+f(-t)=2f\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=-4\sin t \tag{3}$$

将 (2) 代入 (3),

$$-f(t)+f(-t)=-4\sin t \tag{4}$$

(1) + (4), 给出

$$f(-t)=\cos t-2\sin t$$

于是

$$f(x)=\cos(-x)-2\sin(-x)=\cos x+2\sin x$$

25. 已知 $f(x)$ 为多项式, 解

$$f(x+1)+f(x-1)=2x^2-4x$$

若 $f(x)$ 是一 n 次多项式, 则不难看出 $f(x+1)+f(x-1)$ 也为 n 次多项式, 据此 $f(x)$ 必为二次多项式, 设

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

代入原式, 整理得

$$2ax^2+2bx+2a+2c=2x^2-4x$$

比较系数, 解得

$$a=1, b=-2, c=-1$$

故

$$f(x)=x^2-2x-1$$

26. 设函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=1, f(2)=8$ 且

$$f(n)=\sqrt{f(n-1)f(n-2)}, \quad n\geqslant 3$$

求 $f(n)$。

令 $g(n)=\log_2 f(n)$, 对方程两边取以 2 为底的对数, 则

$$g(n)=\frac{1}{2}[g(n-1)+g(n-2)],$$

特征方程为

$$2r^2-r-1=0$$

解得 $r_1=1, r_2=-\frac{1}{2}$, 故

$$g(n)=c_1+c_2\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

代入 $g(1)=\log_2 1=0, g(2)=\log_2 8=3$ 可解得 $c_1=2, c_2=-2$, 于是

$$g(n)=2-2\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=2+4\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$$

最后由 $f(n)=2^{g(n)}$ 可得

$$f(n)=2^{2+(-2)^{2-n}}$$

27. 设 $ab\neq 0, a^2\neq b^2$, 求方程

$$af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=cx$$

的解。

已知

$$af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=cx \tag{1}$$

以 $\frac{1}{x}$ 代替 x 得

$$af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=\frac{c}{x} \tag{2}$$

联立 (1),(2) 解得

$$f(x)=\frac{c}{a^2-b^2}\left(ax-\frac{b}{x}\right),\quad x\neq 0$$

其中 $ab\neq 0, a^2\neq b^2$。

28. 求函数 $f(x)$ 满足

$$af(x^n)+f(-x^n)=bx,$$

其中 $a^2\neq 1, n$ 是奇数。

已知
$$af(x^n)+f(-x^n)=bx \tag{1}$$
以 $-x$ 代替 x, 由于 n 为奇数, 得
$$af(-x^n)+f(x^n)=-bx \tag{2}$$
联立 (1),(2) 解得
$$f(x^n)=\frac{bx(a+1)}{(a+1)(a-1)}=\frac{bx}{a-1}$$
即
$$f(x)=\frac{bx^{\frac{1}{n}}}{a-1}$$

29. 解函数方程
$$2f(x^2)+f\left(\frac{1}{x^2}\right)=x$$
其中 $x>0$。

已知
$$2f(x^2)+f\left(\frac{1}{x^2}\right)=x \tag{1}$$
以 $\frac{1}{x}$ 代替 x 得
$$2f\left(\frac{1}{x^2}\right)+f(x^2)=\frac{1}{x} \tag{2}$$
联立 (1),(2) 得
$$3f(x^2)=2x-\frac{1}{x}$$
令 $t=x^2 \Rightarrow x=\sqrt{t}$, 则
$$f(t)=\frac{1}{3}\left(2\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$
即
$$f(x)=\frac{2x-1}{3\sqrt{x}},\quad x>0$$

30. 已知 $f(1)=\dfrac{1}{5}$, 且当 $n>1$ 时,
$$\frac{f(n-1)}{f(n)}=\frac{2nf(n-1)+1}{1-2f(n)},$$

求 $f(n)$。

原方程式即

$$\frac{1}{f(n)}-\frac{1}{f(n-1)}=2(n+1)$$

利用累加法,

$$\frac{1}{f(n)}=\frac{1}{f(1)}+\sum_{i=2}^{n}2(i+1)=5+2\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}-3\right]$$

整理得

$$f(n)=\frac{1}{n^2+3n+1},\quad n>1$$

31. 解函数方程

$$[f(x+y)]^2=[f(x)]^2+[f(y)]^2$$

令 $x=y=0$, 则有

$$[f(0)]^2=2[f(0)]^2\Rightarrow f(0)=0$$

令 $y=-x$, 得到

$$[f(x)]^2+[f(-x)]^2=[f(0)]^2=0$$

由于平方数在 $\mathbb{R}$ 是非负的, 解为

$$f(x)=0,\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

32. 设函数 $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, 满足

$$f\left(1-\frac{1}{1+t}\right)+f\left(\frac{1+t}{t}\right)\log(1+t)=f\left(\frac{1+t}{t}\right)\log t+2022,$$

求 $f(1000)$。

令

$$x=\frac{t}{1+t}=1-\frac{1}{1+t},$$

则原式变为

$$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)\log(1+t)=f\left(\frac{1}{x}\right)\log t+2022$$

即

$$f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)\log x=2022 \tag{1}$$

再换元得

$$f\left(\frac{1}{x}\right)-f(x)\log\frac{1}{x}=2022\Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)\log x=2022$$

代入 (1) 得

$$f(x)-2022\log x+f(x)(\log x)^2=2022\Rightarrow f(x)=\frac{2022(1+\log x)}{1+(\log x)^2}$$

故

$$f(1000)=\frac{2022\cdot 4}{1+9}=808.8$$

33. 设函数 $f:\mathbb{R}\setminus\{0,1\}\to\mathbb{R}$ 使得

$$f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{x(1-x)}.$$

求 $f(x)$。

代入 x, $\dfrac{1}{1-x}$, 及 $\dfrac{x-1}{x}$ 得

$$f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{x(1-x)} \tag{1}$$

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=-\frac{(x-1)^2}{x} \tag{2}$$

$$f\left(\frac{x-1}{x}\right)+f(x)=\frac{x^2}{x-1} \tag{3}$$

$(1)+(3)-(2)$, 得

$$\begin{aligned}2f(x)&=\frac{1}{x(1-x)}+\frac{x^2}{x-1}+\frac{(x-1)^2}{x}\\&=\frac{-1+x^3+(x-1)^3}{x(x-1)}\\&=\frac{(x^2+x+1)+(x^2-2x+1)}{x}\\&=\frac{2x^2-x+2}{x}\end{aligned}$$

故

$$f(x)=x+\frac{1}{x}-\frac{1}{2}$$

34. 已知函数 $f(x)$ 定义在 $\mathbb{R}$ 上, 且满足 $f(1)=1$, 对所有实数 x 有

$$f(x+5) \geqslant x+5, \quad f(x+1) \leqslant f(x)+1.$$

若定义函数 $g(x)=f(x)+1-x$, 求 $g(2002)$。

$\forall x \in \mathbb{R}$, 由 $f(x+1) \leqslant f(x)+1$,

$$g(x+1)=f(x+1)+1-(x+1) \leqslant f(x)+1-x=g(x)$$

即 $g(x)$ 是递减函数, 且由 $f(x+5) \geqslant x+5$,

$$g(x+5)=f(x+5)+1-(x+5) \geqslant x+5+1-(x+5)=1$$

因为 $g(1)=f(1)+1-1=1$, 故 $g(x)=1\ \forall x \in \mathbb{R}$, 即 $g(2002)=1$

35. 设 $f: R \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, 使得对于所有非零实数 x, y 有

$$xy(f(x)-f(y))+2x=xf(x)-yf(y)+2y$$

若 $f'(1)=2018$, 求 $f(2018)$。

令 $y=1$, 有

$$xf(x)-xf(1)+2x=xf(x)-f(1)+2 \Rightarrow f(1)=2$$

令 $y=-1$, 有

$$-x(f(x)-f(-1))+2x=xf(x)+f(-1)-2 \Rightarrow f(x)=\frac{f(-1)+2}{2}+\frac{2-f(-1)}{2x}$$

求导得

$$f'(x)=\frac{f(-1)-2}{2x^2}$$

故由

$$f'(1)=\frac{f(-1)-2}{2}=2018$$

得 $f(-1)=4038$, 于是

$$f(x)=2020-\frac{2018}{x}$$

经检验, 原方程式左式 $=$ 右式 $=2020x-2018y$, 故

$$f(2018)=2019$$

将原式写成

$$xf(x)(y-1)+2x=yf(y)(x-1)+2y$$

$$xf(x)(y-1)+2(x-1)=yf(y)(x-1)+2(y-1)$$

$$\frac{xf(x)}{x-1}+\frac{2}{y-1}=\frac{yf(y)}{y-1}+\frac{2}{x-1}$$

$$\frac{xf(x)-2}{x-1}=\frac{yf(y)-2}{y-1}\quad \forall x,y\neq 0,1$$

设

$$\frac{xf(x)-2}{x-1}=c\Rightarrow f(x)=\frac{c(x-1)+2}{x}=c+\frac{2-c}{x}$$

求导得

$$f'(x)=\frac{c-2}{x^2}$$

由 $f'(1)=2018$ 得 $c=2020$, 故

$$f(x)=2020-\frac{2018}{x}$$

经检验, 原方程式左式 $=$ 右式 $=2020x-2018y$, 故

$$f(2018)=2019$$

36. 设函数 $f(x),g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续且满足

$$\begin{cases}f(x+y)=f(x)g(y)+g(x)f(y)\\ g(x+y)=f(x)f(y)+g(x)g(y)\end{cases}$$

且 $g(x)$ 为偶函数, $g(x)>0$ 恒成立, $g(0)\neq\frac{1}{2}$, 已知 $f(2)+g(2)=\frac{\sqrt{5}}{15}$, 求 $f(8)-g(8)$。

两式相加得

$$f(x+y)+g(x+y)=(f(x)+g(x))(f(y)+g(y))$$

设 $h(x)=f(x)+g(x)$, 则 $h(x+y)=h(x)h(y)$, 得 $h(x)=a^x$。两式相减得

$$g(x+y)-f(x+y)=(g(x)-f(x))(g(y)-f(y))$$

设 $k(x)=g(x)-f(x)$, 同理得 $k(x)=b^x$, 于是

$$f(x)=\frac{h(x)-k(x)}{2}=\frac{a^x-b^x}{2},\quad g(x)=\frac{h(x)+k(x)}{2}=\frac{a^x+b^x}{2}$$

由于 $g(x)$ 为偶函数, $g(x)=g(-x)$, 即

$$\frac{a^x+b^x}{2}=\frac{a^{-x}+b^{-x}}{2}\Rightarrow (a^x+b^x)a^xb^x=b^x+a^x\Rightarrow (ab)^x=1\Rightarrow ab=1,\ b=\frac{1}{a}$$

故

$$f(x)=\frac{a^x-a^{-x}}{2},\quad g(x)=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$$

由 $f(2)+g(2)=\dfrac{\sqrt{5}}{15}$ 可知

$$h(2)=a^2=\frac{\sqrt{5}}{15}\Rightarrow a^8=\left(\frac{\sqrt{5}}{15}\right)^4=\frac{1}{2025}$$

所以

$$f(8)-g(8)=-k(8)=-b^8=-\frac{1}{a^8}=-2025$$

37. 设 $a,b>0$ 使得关于 x 的方程 $\sqrt{|x|}+\sqrt{|x+a|}=b$ 恰有三个相异实数解 x_1,x_2,x_3, 且 $x_1<x_2<x_3=b$, 求 $a+b$ 的值。

令 $t=x+\frac{a}{2}$, 则关于 t 的方程

$$\sqrt{\left|t-\frac{a}{2}\right|}+\sqrt{\left|t+\frac{a}{2}\right|}=b$$

恰有三个不同的实数解

$$t_i=x_i+\frac{a}{2},i=1,2,3$$

由于 $f(t)=\sqrt{|t-\frac{a}{2}|}+\sqrt{|t+\frac{a}{2}|}$ 为偶函数, 故方程 $f(t)=b$ 的三个实数解关于原点对称分布, 从而必有 $b=f(0)=\sqrt{2a}$

现求方程 $f(t)=\sqrt{2a}$ 的实数解:

- 当 $|t|\leqslant\frac{a}{2}$ 时, $f(t)=\sqrt{\frac{a}{2}-t}+\sqrt{\frac{a}{2}+t}=\sqrt{a+\sqrt{a^2-4t^2}}\leqslant\sqrt{2a}$, 等号成立当且仅当 $t=0$
- 当 $t>\frac{a}{2}$ 时, $f(t)$ 单调递增, 且当 $t=\frac{5a}{8}$ 时 $f(t)=\sqrt{2a}$
- 当 $t<-\frac{a}{2}$ 时, $f(t)$ 单调递减, 且当 $t=-\frac{5a}{8}$ 时 $f(t)=\sqrt{2a}$

从而方程 $f(t)=\sqrt{2a}$ 恰有三个实数解

$$t_1=-\frac{5a}{8},\ t_2=0,\ t_3=\frac{5a}{8}$$

由条件知 $b=x_3=t_3-\frac{a}{2}=\frac{a}{8}$, 结合 $b=\sqrt{2a}$ 得 $a=128$, 于是 $a+b=\frac{9a}{8}=144$

不等式

1. 求满足不等式

$$\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2} < 2x+9$$

的实数 x 的集合。

首先定义域要求 $1+2x \geqslant 0$, 即 $x \geqslant -\frac{1}{2}$, 且分母不为零, 即 $1-\sqrt{1+2x} \neq 0$, 得 $x \neq 0$, 发现

$$\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2} = \left(\frac{1-(1+2x)}{1-\sqrt{1+2x}}\right)^2 = (1+\sqrt{1+2x})^2$$

由 $(1+\sqrt{1+2x})^2 < 2x+9$ 解得

$$\sqrt{1+2x} < \frac{7}{2} \Rightarrow x < \frac{45}{8}.$$

故 x 的取值范围为

$$\left[-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{45}{8}\right).$$

2. 已知

$$\begin{cases} \sqrt{x(x-3)} + \dfrac{8}{y^2} + \dfrac{y^2}{\sqrt{x(x-3)}} = 6, \\ x+y<0 \end{cases}$$

求 (x,y)。

据题意,

$$6 = \sqrt{x(x-3)} + \frac{8}{y^2} + \frac{y^2}{\sqrt{x(x-3)}} \geqslant 2|y| + \frac{8}{y^2} \Rightarrow 3y^2 \geqslant y^2|y| + 4 \tag{1}$$

当 $y>0$, 化简得

$$y^3 - 3y^2 + 4 = (y+1)(y-2)^2 \leqslant 0$$

由于 $(y-2)^2 \geqslant 0$ 且 $y+1>0$, 故

$$y = 2 \Rightarrow x = -1, 4$$

经检验得 (-1,2),(4,2) 均不合题意; 同理当 $y<0$ 可解得

$$y=-2, \Rightarrow x=-1,4$$

经检验得, 原方程式只有唯一解 $(-1,-2)$

3. 解不等式

$$|x|^3-2x^2-4|x|+3<0,$$

令 $t=|x|$, 不等式化为

$$t^3-2t^2-4t+3<0$$

求根得 $t=3$ 和 $t=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$。于是

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}<|x|<3$$

解得

$$x \in\left(-3,-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \cup\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 3\right)$$

4. 假设 $a>1$ 且 $x, y>0$ 满足

$$\left(\log_a x\right)^2+\left(\log_a y\right)^2-\log_a\left(x^2 y^2\right) \leqslant 2, \quad \log_a y \geqslant 1.$$

求 $\log_a\left(x^2 y\right)$ 的取值区间。

设 $u=\log_a x$, $v=\log_a y$。不等式化为

$$u^2+v^2-2(u+v) \leqslant 2, \quad v \geqslant 1.$$

这是以 $(1,1)$ 为圆心、半径为 2 的半圆的上半部分。我们要求 $2u+v$ 的取值范围。

最小值在左下角 $(-1,1)$, 得 $2u+v=-1$。

最大值出现在斜率为 -2 的直线与半圆切点, 即联立

$$v-1=\frac{1}{2}(u-1), \quad (u-1)^2+(v-1)^2=4.$$

解得
$$(u,v)=\left(1+\frac{4}{\sqrt{5}},1+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\implies 2u+v=3+2\sqrt{5}.$$
因此区间为 $[-1,3+2\sqrt{5}]$。

5. 已知不等式
$$|x^2+ax+2|\geqslant|x+1|$$
对任意 $x\in\mathbb{R}$ 恒成立，求实数 a 的取值范围。

将不等式两边平方得
$$(x^2+ax+2)^2\geqslant(x+1)^2$$
$$(x^2+ax+2)^2-(x+1)^2\geqslant0$$
$$[(x^2+ax+2)-(x+1)][(x^2+ax+2)+(x+1)]\geqslant0$$
$$[x^2+(a-1)x+1][x^2+(a+1)x+3]\geqslant0$$
因为两个二次式领导系数为正，两个因式需对任意 x 恒非负。

对二次式 $x^2+(a-1)x+1$,
$$\Delta_1=(a-1)^2-4\leqslant0\Rightarrow-1\leqslant a\leqslant3$$
对二次式 $x^2+(a+1)x+3$,
$$\Delta_2=(a+1)^2-12\leqslant0\Rightarrow-1-2\sqrt{3}\leqslant a\leqslant-1+2\sqrt{3}$$
综上所述,
$$a\in[-1,-1+2\sqrt{3}]$$

6. 求
$$|2|x-2|-5|\leqslant3$$
的正整数解。

情况一: $|2|x-2|-5|=3$
$$\Rightarrow\begin{cases}2|x-2|-5=3\Rightarrow|x-2|=4\Rightarrow\begin{cases}x-2=4\Rightarrow x=6\\x-2=-4\Rightarrow x=-2\notin\mathbb{N}\end{cases}\\2|x-2|-5=-3\Rightarrow|x-2|=1\Rightarrow\begin{cases}x=3\\x=1\end{cases}\end{cases}$$

情况二: $|2|x-2|-5|=2$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2|x-2|-5=2 \Rightarrow |x-2|=\frac{7}{2} \notin \mathbb{Z} \\ 2|x-2|-5=-2 \Rightarrow |x-2|=\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

情况三: $|2|x-2|-5|=1$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2|x-2|-5=1 \Rightarrow |x-2|=3 \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=-1 \notin \mathbb{N} \end{cases} \\ 2|x-2|-5=-1 \Rightarrow |x-2|=2 \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=0 \notin \mathbb{N} \end{cases} \end{cases}$$

情况四: $|2|x-2|-5|=0$

$$\Rightarrow |x-2|=\frac{5}{2} \notin \mathbb{Z}$$

综上, 正整数解为

$$x=1,3,4,5,6$$

7. 若实数 a 可使得对任意实数 x, 不等式

$$|4x-3a|+|5x-4a| \geqslant a^2$$

恒成立, 求 a 的范围。

记

$$f(x)=|4x-3a|+|5x-4a|=4\left(\left|x-\frac{3}{4}a\right|+\left|x-\frac{4}{5}a\right|\right)+\left|x-\frac{4}{5}a\right|$$

由三角不等式得

$$f(x) \geqslant 4\left|\left(x-\frac{3}{4}a\right)-\left(x-\frac{4}{5}a\right)\right|+\left|x-\frac{4}{5}a\right|=\frac{|a|}{5}+\left|x-\frac{4}{5}a\right|$$

取 $x=\dfrac{4}{5}a$, 得 $f(x)$ 的最小值为 $\dfrac{|a|}{5}$, 欲使不等式对任意 x 恒成立需有

$$\frac{|a|}{5} \geqslant |a|^2 \Rightarrow |a|(5|a|-1) \leqslant 0 \Rightarrow \quad 0 \leqslant |a| \leqslant \frac{1}{5}$$

8. 已知实数 a,b 满足 $a+b \geqslant 3$, 试证

$$|a-2b^2|+|b-2a^2| \geqslant 6$$

由三角不等式,

$$\begin{aligned}\left|a-2b^2\right|+\left|b-2a^2\right| &\geqslant \left|a-2b^2+b-2a^2\right| \\ &= \left|2(a^2+b^2)-(a+b)\right| \\ &\geqslant 2(a^2+b^2)-(a+b) \\ &= (a+b)^2+(a-b)^2-(a+b) \\ &\geqslant 3^2-3=6\end{aligned}$$

故原不等式得证。

9. 若二次实系数多项式函数 $f(x)$ 满足

$$\begin{cases}-1 \leqslant f(1) \leqslant 3 \\ 6 \leqslant f(2) \leqslant 10 \\ 2 \leqslant f(4) \leqslant 24\end{cases}$$

求 $f(7)$ 的最大值。

设 $f(x)=ax^2+bx+c$, 则

$$f(1)=a+b+c, \quad f(2)=4a+2b+c, \quad f(4)=16a+4b+c$$

解得

$$a=\frac{1}{3}f(1)-\frac{1}{2}f(2)+\frac{1}{6}f(4),\ b=-2f(1)+\frac{5}{2}f(2)-\frac{1}{2}f(4),\ c=\frac{8}{3}f(1)-2f(2)+\frac{1}{3}f(4)$$

因此

$$f(7)=49a+7b+c=5f(1)-9f(2)+5f(4)$$

取 $f(1)=3, f(2)=6, f(4)=24$, 得

$$f(7)_{\max}=5\cdot 3-9\cdot 6+5\cdot 24=81$$

10. 若 $a<b$, 已知对任意实数 x, 均有 $ax^2+bx+c \geqslant 0$, 且 $m<\dfrac{4a+3b+2c}{b-a}$ 恒成立, 求实数 m 的范围。

由 $ax^2+bx+c\geqslant 0\ (\forall x)$, 可知二次项系数满足

$$a>0,\quad b^2-4ac\leqslant 0$$

写成

$$\frac{4a+3b+2c}{b-a}=\frac{4\cdot\frac{a}{b}+3+2\cdot\frac{c}{b}}{1-\frac{a}{b}}$$

记 $t=\dfrac{a}{b}$, 则 $0<t<1$。由 $b^2-4ac\leqslant 0$ 得 $\dfrac{c}{b}\geqslant\dfrac{b}{4a}=\dfrac{1}{4t}$, 于是

$$\frac{4a+3b+2c}{b-a}\geqslant\frac{4t+3+2\cdot\frac{1}{4t}}{1-t}=\frac{4t+3+\frac{1}{2t}}{1-t}$$

记

$$k=\frac{4t+3+\frac{1}{2t}}{1-t}$$

其中 $0<t<1$, 整理得关于 t 的二次方程

$$(2k+8)t^2+(6-2k)t+1=0$$

为使该方程在 $0<t<1$ 上有解, 判别式必须非负,

$$(6-2k)^2-4(2k+8)\geqslant 0\Rightarrow k^2-8k+1\geqslant 0$$

解得

$$k\geqslant 4+\sqrt{15}>0$$

于是对任意符合条件的 a,b,c, 都有

$$\frac{4a+3b+2c}{b-a}\geqslant 4+\sqrt{15}$$

由题意 m 满足 $m<\dfrac{4a+3b+2c}{b-a}$ 恒成立, 故

$$m<4+\sqrt{15}$$

11. 已知 $a>0,b>0,a+b=1$, 证明不等式

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}\geqslant 8$$

由 AM-GM 不等式,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab} &= \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{a+b}{ab} \\
&= 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \\
&= 2\cdot\frac{a+b}{ab} \\
&= 4+2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right) \\
&\geqslant 4+2\cdot 2 = 8
\end{aligned}
$$

12. 设 a, b 均为正数, 求

$$f(a,b) = ab(72-3a-4b)$$

的最大值。

由 AM-GM 不等式,

$$
\begin{aligned}
f(a,b) &= \frac{1}{12}\cdot 3a\cdot 4b\cdot(72-3a-4b) \\
&\leqslant \frac{1}{12}\left(\frac{3a+4b+72-3a-4b}{3}\right)^3 = 1152
\end{aligned}
$$

当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时等号成立。

13. 设 a, b, c 为正实数且满足 $a+b^2+c^3=11$, 求 abc 的最大值。

由 AM-GM 不等式,

$$
\begin{aligned}
11 &= \frac{a}{6}+\frac{a}{6}+\frac{a}{6}+\frac{a}{6}+\frac{a}{6}+\frac{a}{6}+\frac{b^2}{3}+\frac{b^2}{3}+\frac{b^2}{3}+\frac{c^3}{2}+\frac{c^3}{2} \\
&= 11\sqrt[11]{\left(\frac{a}{6}\right)^6\left(\frac{b^2}{3}\right)^3\left(\frac{c^3}{2}\right)^2} = 11\sqrt[11]{\frac{(abc)^6}{6^6\cdot 27\cdot 4}}
\end{aligned}
$$

即

$$abc \leqslant 6\sqrt{3}\,\sqrt[3]{2}$$

当且仅当

$$\frac{a}{6}=\frac{b^2}{3}=\frac{c^3}{2}=1,$$

即 $a=6,\ b=\sqrt{3},\ c=\sqrt[3]{2}$ 时等号成立。

14. 实数 x,y,z 满足 $x^2+y^2+z^2=1$, 求 $\sqrt{2}xy+yz$ 的最大值。

由 AM-GM 不等式,

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x^2+\frac{1}{\sqrt{3}}y^2 \geqslant 2\sqrt{\frac{1}{2}x^2y^2}=\sqrt{2}xy,$$

$$\frac{1}{2\sqrt{3}}y^2+\frac{\sqrt{3}}{2}z^2 \geqslant 2\sqrt{\frac{1}{4}y^2z^2}=yz.$$

将两式相加得

$$\sqrt{2}xy+yz \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}(x^2+y^2+z^2)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

15. 设 x,y,z 为不全为 0 的实数, 求分式

$$\frac{xy+2yz}{x^2+y^2+z^2}$$

的最大值。

由 AM-GM 不等式,

$$x^2+\frac{1}{5}y^2 \geqslant 2sqrt\frac{1}{5}x^2y^2=\frac{2}{\sqrt{5}}xy$$

同理,

$$\frac{4}{5}y^2+z^2 \geqslant 2\sqrt{\frac{4}{5}y^2z^2}=\frac{4}{\sqrt{5}}yz$$

两式相加得

$$x^2+y^2+z^2 \geqslant \frac{2}{\sqrt{5}}(xy+2yz) \quad \Rightarrow \quad \frac{xy+2yz}{x^2+y^2+z^2} \leqslant \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

16. 求

$$f(x)=\frac{x^4+2x^3+3x^2+2x+10}{x^2+x+1}$$

的最小值。

由 AM-GM 不等式,

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2+x+1+\frac{9}{x^2+x+1} \\ &\geqslant 2\sqrt{(x^2+x+1)\cdot\frac{9}{x^2+x+1}}=6 \end{aligned}$$

当 $(x^2+x+1)^2=9$ 即 $x=2$ 或 $x=-1$ 时, $f(x)$ 取得最大值 6

17. 求函数

$$y=\frac{4^x+1}{2^x+1}$$

的最小值。

由 AM-GM 不等式,

$$\begin{aligned}y&=\frac{4^x-1}{2^x+1}+\frac{2}{2^x+1}=2^x+1+\frac{2}{2^x+1}-2\\&\geqslant 2\sqrt{(2^x+1)\cdot\frac{2}{2^x+1}}-2=2\sqrt{2}-2\end{aligned}$$

当 $(2^x+1)^2=2$ 即 $x=\log_2(\sqrt{2}-1)$ 时, y 取得最大值 $2\sqrt{2}-2$

18. 求函数

$$f(x)=\log 2\log 5-\log 2x\log 5x$$

的最大值。

$$\begin{aligned}f(x)&=\log 2\log 5-(\log 2+\log x)(\log 5+\log x)\\&=-(\log 2+\log 5)\log x-\log^2 x\\&=-\log x-\log^2 x\\&=-\left(\log x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\leqslant\frac{1}{4}\end{aligned}$$

当 $\log x=-\frac{1}{2}$ 即 $x=\frac{\sqrt{10}}{10}$ 时, $f(x)$ 取得最大值 $\frac{1}{4}$.

19. 求函数

$$f(x,y)=x^2+2xy+2y^2+2x+4y+5$$

的最小值。

配方求最小值:

$$\begin{aligned}f(x,y)&=x^2+2xy+2y^2+2x+4y+5\\&=x^2+2(y+1)x+(y+1)^2+y^2+2y+4\\&=[x+(y+1)]^2+(y+1)^2+3\geqslant 3\end{aligned}$$

当 $x=0,y=-1$ 时 $f(x,y)$ 取到最小值 3。

20. $x, y \in \mathbb{R}$, 求

$$x^4+4x^3+8x^2+4xy+6x+4y^2+10$$

的最小值。

先配 y 项，写成

$$f(x,y)=(x+2y)^2+x^4+4x^3+7x^2+6x+10$$

再用火眼金睛注意到

$$x^4+4x^3+7x^2+6x+2=(x+1)^2(x^2+2x+2)$$

故原式为

$$(x+2y)^2+(x+1)^2(x^2+2x+2)+8 \geqslant 8$$

当 $x=-1, y=\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x,y)$ 取得最小值 8.

21. 已知 $x, y>0$, 证明

$$\sqrt{x^2+y^2}>\sqrt[3]{x^3+y^3}$$

发现 $\sqrt{x^2+y^2}>\sqrt[3]{x^3+y^3}$ 等价于

$$x^6+3x^4y^2+3x^2y^4+y^6>x^6+2x^3y^3+y^6 \Leftrightarrow x^2y^2(3x^2-2xy+3y^2)>0$$

其中关于 x 的两次函数 $3x^2-2xy+3y^2$ 判别式为

$$\Delta=4y^2-4(3)(3)(y^2)=-32y^2<0$$

故 $3x^2-2xy+3y^2>0$, 得证

$$x^2y^2(3x^2-2xy+3y^2)>0$$

22. 已知实数 a, b, c 满足 $c<b<a, a+b+c=1, a^2+b^2+c^2=1$, 求证

$$1<a+b<\frac{4}{3}.$$

由 $a^2+b^2+c^2=1, a+b+c=1$ 可得

$$ab=\frac{(a+b)^2-(a^2+b^2)}{2}=\frac{(1-c)^2-(1-c^2)}{2}=c^2-c.$$

所以 $a+b=1-c$, 且 a,b 是方程

$$x^2-(1-c)x+c^2-c=0$$

的两个相异实根, 其中判别式为

$$\Delta=(1-c)^2-4(c^2-c)>0 \Rightarrow -\frac{1}{3}<c<1.$$

又有

$$(c-a)(c-b)=c^2-c(a+b)+ab=c^2-c(1-c)+c^2-c=3c^2-2c.$$

因为 $c<b<a$, 所以 $c-a<0$, $c-b<0$, 故 $(c-a)(c-b)>0$, 即

$$3c^2-2c>0 \implies c<0 \text{ 或 } c>\frac{2}{3}.$$

综合 $-\frac{1}{3}<c<1$ 与上述条件, 得到

$$-\frac{1}{3}<c<0 \quad \text{或} \quad \frac{2}{3}<c<1.$$

若 $\dfrac{2}{3}<c<1$, 则

$$0<a+b<\frac{1}{3}$$

但由 $c<b<a$ 得 $a+b>c>\dfrac{2}{3}$, 矛盾, 因此只能有 $-\dfrac{1}{3}<c<0$, 则

$$1<a+b<\frac{4}{3}$$

23. 已知 a,b,c 为正实数, 求

$$\left\lfloor\frac{a+b}{c}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{b+c}{a}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{c+a}{b}\right\rfloor$$

的最小值。

由 $\lfloor x\rfloor > x-1,\ x\notin\mathbb{Z}$ 及 AM-GM 不等式,

$$S=\left\lfloor\frac{a+b}{c}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{b+c}{a}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{c+a}{b}\right\rfloor>\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}-3$$
$$\geqslant 2+2+2-3=3$$

由于 $S\in\mathbb{Z}$, 最小值为 $S_{\min}=4$, 例如可在 $a=6,b=8,c=9$ 时取得。

24. 已知 $x>0$, 求

$$x\lfloor x\rfloor+\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor+x+\frac{1}{x}+x\lceil x\rceil+\left\lceil\frac{1}{x}\right\rceil$$

的最小值。

设

$$f(x)=x\lfloor x\rfloor+\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor+x+\frac{1}{x}+x\lceil x\rceil+\left\lceil\frac{1}{x}\right\rceil$$

观察到 $f(1)=6$, 若 $x>1$, 即 $0<\frac{1}{x}\leqslant 1$,

$$x\lfloor x\rfloor+\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor\geqslant x>1,\quad x\lceil x\rceil+\left\lceil\frac{1}{x}\right\rceil\geqslant 2x+1>3,\quad x+\frac{1}{x}>2$$

于是当 $x>1, f(x)>6=f(1)$。若 $0<x\leqslant\frac{1}{2}$, 即 $2\leqslant\frac{1}{x}$

$$x\lfloor x\rfloor+\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor\geqslant 2,\quad x\lceil x\rceil+\left\lceil\frac{1}{x}\right\rceil\geqslant x+2>2,\quad x+\frac{1}{x}>2$$

于是当 $0<x\leqslant\frac{1}{2}, f(x)>6=f(1)$。若 $\frac{1}{2}<x<1$, 即 $1<\frac{1}{x}<2$,

$$f(x)=1+x+\frac{1}{x}+x+2=3+2x+\frac{1}{x}\geqslant 3+2\sqrt{2}$$

等号成立当且仅当

$$2x=\frac{1}{x}$$

即 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$。由于 $3+2\sqrt{2}<6, f(x)$ 的最小值为 $3+2\sqrt{2}$。

25. 若实数 x,y 满足 $4x^2-2xy+2y^2=1$, 则 $3x^2+xy+y^2$ 的最大值与最小值的和为

(待解)

26. 求函数

$$y=\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{2+3x-x^2}$$

的最大值和最小值。

考虑

$$1=\frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{y}+\frac{\sqrt{2+3x-x^2}}{y}$$

令

$$\cos^2\alpha=\frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{y},\sin^2\alpha=\frac{\sqrt{2+3x-x^2}}{y}$$

则

$$\cos^4\alpha+\sin^4\alpha=\frac{x^2-3x+2}{y^2}+\frac{2+3x-x^2}{y^2}=\frac{4}{y^2}$$

于是

$$y^2=\frac{4}{\cos^4\alpha+\sin^4\alpha}=\frac{8}{2-\sin^2 2\alpha}$$

由于 $0\leqslant\sin^2 2\alpha\leqslant 1$, 所以

$$4\leqslant y^2\leqslant 8\Rightarrow 2\leqslant y\leqslant 2\sqrt{2}$$

27. 若

$$x^6+\frac{y^3}{3}+\frac{z}{4}=1,$$

求 $x^{12}y^6z^3$ 的最大值, 其中 $x,y,z\in\mathbb{R}^+$。

由 AM-GM 不等式,

$$\begin{aligned}1=x^6+\frac{y^3}{3}+\frac{z}{4}&=\frac{x^6}{2}+\frac{x^6}{2}+\frac{y^3}{6}+\frac{y^3}{6}+\frac{z}{12}+\frac{z}{12}+\frac{z}{12}\\&\geqslant 7\sqrt[7]{\frac{x^{12}y^6z^3}{2^2\cdot 6^2\cdot 12^3}}\end{aligned}$$

因此

$$x^{12}y^6z^3\leqslant\frac{12^5}{7^7},$$

等号成立当且仅当

$$\frac{x^6}{2}=\frac{y^3}{6}=\frac{z}{12}=\frac{1}{7}$$

即

$$x=\sqrt[6]{\frac{2}{7}},\quad y=\sqrt[3]{\frac{6}{7}},\quad z=\frac{12}{7}$$

28. 已知正实数 x,y,z, 求函数

$$f(x,y,z)=\frac{x}{y}+\sqrt{\frac{y}{z}}+\sqrt[3]{\frac{z}{x}},$$

的最小值。

由 AM-GM 不等式,

$$\begin{aligned}
f(x,y,z)&=\frac{x}{y}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{z}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{z}}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{z}{x}}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{z}{x}}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{z}{x}}\\
&\geqslant 6\cdot\sqrt[6]{\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{z}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{z}}\cdot\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{z}{x}}\cdot\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{z}{x}}\cdot\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{z}{x}}}\\
&=6\cdot\sqrt[6]{\frac{1}{2^2\cdot 3^3}\cdot\frac{xyz}{yzx}}=\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{3}
\end{aligned}$$

等号成立当且仅当

$$\frac{x}{y}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{z}}=\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{z}{x}}\Rightarrow x:y:z=2:2\sqrt[3]{2}\sqrt{3}:3\sqrt{3}$$

29. 已知 x,y,z 均为正实数, 求

$$\frac{xy+yz}{x^2+y^2+z^2}$$

的最大值。

由 AM-GM 不等式,

$$\begin{aligned}
\frac{xy+yz}{x^2+y^2+z^2}&=\frac{\frac{x}{y}+\frac{z}{y}}{(\frac{x}{y})^2+1+(\frac{z}{y})^2}\\
&=\frac{\frac{x}{y}+\frac{z}{y}}{[(\frac{x}{y})^2+\frac{1}{2}]+[(\frac{z}{y})^2+\frac{1}{2}]}\\
&\leqslant\frac{\frac{x}{y}+\frac{z}{y}}{2(\frac{x}{y})\sqrt{\frac{1}{2}}+2(\frac{z}{y})\sqrt{\frac{1}{2}}}\\
&=\frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

等号成立当且仅当

$$\frac{1}{2}=(\frac{x}{y})^2=(\frac{z}{y})^2\Rightarrow x=z=\frac{\sqrt{2}}{2}y$$

30. 证明

$$x+\frac{4}{x-1}\geqslant 2\sqrt{x+3},$$

其中 $x>1$。

利用比较法。令 $u=x-1>0$, 原不等式即

$$u+1+\frac{4}{u}\geqslant 2\sqrt{u+4},$$

现在比较 $u+1+\frac{4}{u}$ 与 $2\sqrt{u+4}$ 的大小,

$$\frac{u+1+\frac{4}{u}}{2\sqrt{u+4}}=\frac{u^2+(u+4)}{2u\sqrt{u+4}}\geqslant\frac{2\sqrt{u^2(u+4)}}{2u\sqrt{u+4}}=1$$

等号在 $u^2=u+4$ 即 $u=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$ 时成立, 故原不等式得证。

31. 已知 $x_1+x_2=2$, 证

$$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}\geqslant\frac{x_1}{1+x_1^2}+\frac{x_2}{1+x_2^2},$$

其中 x_1,x_2 都是正数。

由右式

$$\frac{x_1}{1+x_1^2}+\frac{x_2}{1+x_2^2}=\frac{1}{\frac{1}{x_1}+x_1}+\frac{1}{\frac{1}{x_2}+x_2}\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

由左式

$$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{(1+x_1)(1+x_2)}}$$

考虑分母

$$(1+x_1)(1+x_2)=1+x_1+x_2+x_1x_2=1+2+x_1(2-x_1)=-x_1^2+2x_1+3=-(x_1-1)^2+4\leqslant 4$$

于是

$$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{4}}=1$$

因此左式 $\geqslant 1\geqslant$ 右式, 原不等式成立, 等号成立当且仅当 $x_1=x_2=1$。

32. 若 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三边, 证明

$$\frac{1}{4}<\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3}\leqslant\frac{8}{27}$$

由 AM-GM 不等式,

$$(a+b)+(b+c)+(c+a)\geqslant 3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

于是有

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3}\leqslant\frac{8}{27}$$

等号成立当且仅当 $a=b=c$, 又

$$a+b>c\Rightarrow 2a+2b>a+b+c\Rightarrow\frac{a+b}{a+b+c}>\frac{1}{2},$$

同理可得

$$\frac{b+c}{a+b+c}>\frac{1}{2},\quad\frac{c+a}{a+b+c}>\frac{1}{2}$$

设

$$\frac{a+b}{a+b+c}=\frac{1+x}{2},\quad\frac{b+c}{a+b+c}=\frac{1+y}{2},\quad\frac{c+a}{a+b+c}=\frac{1+z}{2}$$

由于

$$\frac{a+b}{a+b+c}+\frac{b+c}{a+b+c}+\frac{c+a}{a+b+c}=2\Rightarrow x+y+z=1$$

于是

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3}=\frac{(1+x)(1+y)(1+z)}{8}>\frac{1+x+y+z}{8}=\frac{1}{4}$$

故得证。

33. 若 $a>b>c$, 求证

$$frac1a-b+\frac{1}{b-c}\geqslant\frac{4}{a-c}$$

因为 $a-c>0$, 由柯西不等式,

$$(a-c)\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\right)=[(a-b)+(b-c)]\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\right)\geqslant(1+1)^2=4$$

故原不等式得证, 当 $a-b=b-c$, 即 $b=\dfrac{a+c}{2}$ 时等号成立。

34. 证

$$(x+y+z)(\frac{1}{y+z}+\frac{1}{x+z}+\frac{1}{x+y}) \geqslant \frac{9}{2}$$

由柯西不等式,

$$\begin{aligned}&(x+y+z)(\frac{1}{y+z}+\frac{1}{x+z}+\frac{1}{x+y})\\&=\frac{1}{2}[(x+y)+(y+z)+(z+x)](\frac{1}{y+z}+\frac{1}{x+z}+\frac{1}{x+y})\\&\geqslant \frac{1}{2}(1+1+1)^2=\frac{9}{2}\end{aligned}$$

等号成立当且仅当 $x=y=z$。

35. 设 a,b 为不相等的正数, 试证

$$(a+b)(a^3+b^3)>(a^2+b^2)^2$$

由柯西不等式, 左式改写为

$$[(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2][(\sqrt{a^3})^2+(\sqrt{b^3})^2] \geqslant (\sqrt{a}\cdot\sqrt{a^3}+\sqrt{b}\cdot\sqrt{b^3})^2=(a^2+b^2)^2$$

若等号成立, 则必有一实数 k 存在, 使得 $\sqrt{a^3}=k\sqrt{a}, \sqrt{b^3}=k\sqrt{b}$ 于是 $a=b=k$, 与 a,b 不相等的假设矛盾, 故得证

$$(a+b)(a^3+b^3)>(a^2+b^2)^2$$

36. 已知 a,b,c 为正实数, 求证

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}$$

由柯西不等式,

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+3\\
&=\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{b+c+a}{c+a}+\frac{c+a+b}{a+b}\\
&=(a+b+c)(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b})\\
&=\frac{1}{2}[(b+c)+(c+a)+(a+b)](\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b})\\
&\geqslant\frac{1}{2}(1+1+1)^2=\frac{9}{2}
\end{aligned}$$

故原不等式得证, 等号成立当且仅当 $a=b=c$。

37. 已知 a,b,c 为 $\triangle ABC$ 的三边, 求证

$$\frac{a^2}{b+c-a}+\frac{b^2}{c+a-b}+\frac{c^2}{a+b-c}\geqslant a+b+c.$$

由柯西不等式,

$$\begin{aligned}
&(a+b+c)\left(\frac{a^2}{b+c-a}+\frac{b^2}{c+a-b}+\frac{c^2}{a+b-c}\right)\\
&=[(b+c-a)+(c+a-b)+(a+b-c)]\left(\frac{a^2}{b+c-a}+\frac{b^2}{c+a-b}+\frac{c^2}{a+b-c}\right)\\
&\geqslant(a+b+c)^2
\end{aligned}$$

整理即得原不等式, 等号成立当且仅当 $a=b=c$。

38. 当 $\alpha,\beta\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, 求

$$\sin(\alpha-\beta)+2\sin(\alpha+\beta)$$

的最大值。

由柯西不等式，

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta)+2\sin(\alpha+\beta)&=3\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha\\&\leqslant\sqrt{(9\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\cos^2\beta+\sin^2\beta)}\\&=\sqrt{8\sin^2\alpha+1}\\&\leqslant\sqrt{8\sin^2\frac{\pi}{4}+1}=\sqrt{5}\end{aligned}$$

等号在 $\alpha=\dfrac{\pi}{4},\beta=\tan^{-1}\dfrac{1}{3}$ 成立。

39. 若 $x,y,z\in\mathbb{R}^+$ 满足

$$\frac{1}{x^3}+\frac{3}{y^3}+\frac{12}{z^3}=1,$$

求 xy^2z 的最小值。

由 AM-GM 不等式，

$$1=\frac{1}{x^3}+\frac{3}{2y^2}+\frac{3}{2y^2}+\frac{12}{z}\geqslant 4\sqrt[4]{\frac{27}{(xy^2z)^3}}$$

即

$$xy^2z\geqslant 12\sqrt[3]{4}$$

等号成立当且仅当 $x=\sqrt[3]{4},y=\sqrt[3]{6},z=2\sqrt[3]{6}$。

40. 求多元函数

$$f(x,y,z)=\sqrt[4]{\frac{2x}{y}}+\sqrt{\frac{3y}{2z}}+\frac{z}{2x}$$

的最小值，其中 $D_f=\mathbb{R}^+$。

由 AM-GM 不等式，

$$\begin{aligned}f(x,y,z)&=\frac{1}{4}\sqrt[4]{\frac{2x}{y}}+\frac{1}{4}\sqrt[4]{\frac{2x}{y}}+\frac{1}{4}\sqrt[4]{\frac{2x}{y}}+\frac{1}{4}\sqrt[4]{\frac{2x}{y}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3y}{2z}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3y}{2z}}+\frac{z}{2x}\\&=7\sqrt[7]{\frac{1}{4^4}\cdot\frac{1}{2^2}\cdot 2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{7}{4}\sqrt[7]{24}\end{aligned}$$

等号成立当且仅当

$$\frac{1}{4}\sqrt[4]{\frac{2x}{y}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3y}{2z}}=\frac{z}{2x}\Rightarrow x:y:z=2\cdot 24^{\frac{4}{7}}:4:24^{\frac{5}{7}}$$

41. 设 x, y, z 为实数, 若

$$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{4}+\frac{(z-2)^2}{3}=1,$$

求 $x+y+z$ 之最大值及最小值。

由柯西不等式,

$$1=\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{4}+\frac{(z-2)^2}{3}\geqslant\frac{(x-1+y+1+z-2)^2}{9+4+3}$$

给出

$$(x-1+y+1+z-2)^2\leqslant 16\Rightarrow -2\leqslant x+y+z\leqslant 6$$

等号成立当且仅当比例相等, 即

$$\frac{x-1}{9}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-2}{3}=k$$

代入约束条件:

$$9k^2+4k^2+3k^2=1\Rightarrow k=\pm\frac{1}{4}$$

当 $k=\frac{1}{4}$ 时,$x=\frac{13}{4}, y=0, z=\frac{11}{4}$, 取得最大值 6, 当 $k=-\frac{1}{4}$ 时,$x=-\frac{5}{4}, y=-2, z=\frac{5}{4}$, 此时取得最小值 -2。

42. 设 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$, 试求

$$\frac{3}{\cos\theta}+\frac{2}{\sin\theta}$$

的最小值。

由赫尔德不等式,

$$\left(\frac{3}{\cos\theta}+\frac{2}{\sin\theta}\right)^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\geqslant(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{4})^3$$

故最小值为 $(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{4})^{\frac{3}{2}}$, 当 $\tan\theta=\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ 时等号成立。不安全, 赫尔德不等式不给出最小值

43. 设实数 x, y 满足

$$x^2+y^2=6x-4y-9,$$

求 $2x-3y$ 的最大值和最小值。

原方程配方得圆的方程：

$$(x-3)^2+(y+2)^2=4$$

设 $x=3+2\cos\alpha, y=-2+2\sin\alpha$，则

$$\begin{aligned}2x-3y&=2(3+2\cos\alpha)-3(-2+2\sin\alpha)\\&=12+4\cos\alpha-6\sin\alpha\\&=12+2\sqrt{13}\sin(\phi-\alpha)\end{aligned}$$

其中 ϕ 满足

$$\sin\phi=\frac{2}{\sqrt{13}},\cos\phi=\frac{3}{\sqrt{13}},$$

当 $\sin(\phi-\alpha)=1$ 时，取得最大值 $12+2\sqrt{13}$，此时

$$x=3+\frac{4}{\sqrt{13}},y=-2-\frac{6}{\sqrt{13}}$$

当 $\sin(\phi-\alpha)=-1$ 时，取得最小值 $12-2\sqrt{13}$，此时

$$x=3-\frac{4}{\sqrt{13}},y=-2+\frac{6}{\sqrt{13}}$$

44. 若 a,b 均为实数且满足

$$a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}=1,$$

求 a^2+b^2 的值。

由根号的定义可知

$$1-a^2\geqslant 0,1-b^2\geqslant 0\Rightarrow a^2\leqslant 1,b^2\leqslant 1$$

设

$$a=\sin\alpha,\quad b=\sin\beta,\quad \alpha,\beta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

原式变为

$$\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha=\sin(\alpha+\beta)=1$$

由此得

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$$

则

$$b=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$$

因此

$$a^2+b^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

(移走)

由根号的定义可知

$$1-a^2\geqslant 0, 1-b^2\geqslant 0\Rightarrow a^2\leqslant 1, b^2\leqslant 1$$

由柯西不等式,

$$1=\left(a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}\right)^2\leqslant(a^2+b^2)(1-b^2+1-a^2)$$

设 $x=a^2+b^2$, 上式变为

$$1\leqslant x(2-x)\Rightarrow x^2-2x+1\leqslant 0\Rightarrow(x-1)^2\leqslant 0$$

由于实数的平方非负, 因此上述不等式只有在等号成立时有解

$$(x-1)^2=0\Rightarrow a^2+b^2=x=1$$

45. 当点 P 沿着直线 $y=2x+6$ 移动, 点 Q 在椭圆

$$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{4}=1$$

运动时, 求线段 PQ 的长度最小值。

线段 PQ 的最小值即为平行于已知直线的椭圆切线与该直线之间的距离。设与 $y=2x+6$ 平行的椭圆切线方程为 $y=2x+k$, 代入椭圆方程整理得,

$$2x^2+3(4x^2+4kx+k^2)=12\Rightarrow 14x^2+12kx+(3k^2-12)=0$$

令判别式 $\Delta=(12k)^2-4(14)(3k^2-12)=0$:

$$\Delta=(12k)^2-4(14)(3k^2-12)=144k^2-168k^2+672=0\Rightarrow k=\pm 2\sqrt{7}$$

取较近的切线 $y=2x+2\sqrt{7}$, 故

$$PQ_{min}=\frac{|6-2\sqrt{7}|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{6-2\sqrt{7}}{\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}-2\sqrt{35}}{5}$$

(移走)

46. 若 a,b 都是正数, 证明

$$a+b \geqslant \sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{b^2a}$$

由因式分解得

$$\begin{aligned}
&a+b-\left(\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{b^2a}\right)\\
&=(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})-\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})\\
&=(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})\\
&=(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})^2 \geqslant 0
\end{aligned}$$

故原不等式成立。

由赫尔德不等式,

$$(a+b)(a+b)(b+a) \geqslant \left(\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{b^2a}\right)^3$$

故原不等式成立。

47. 设 $a,b,c \in \mathbb{R}$, 证明

$$a^2+ac+c^2+3b(a+b+c) \geqslant 0.$$

欲证

$$3b^2+3(a+c)b+(a^2+ac+c^2) \geqslant 0$$

对于二次函数 $f(b)=3b^2+3(a+c)b+(a^2+ac+c^2)$, 其判别式为

$$\Delta=[3(a+c)]^2-4(3)(a^2+ac+c^2)=-3(a-c)^2$$

因为 $-3(a-c)^2 \leqslant 0$ 且二次项系数 $3>0$, 故该二次式恒大于或等于 0, 故原不等式得证。

由配方法,

$$a^2+ac+c^2+3b(a+b+c)=3\left(b+\frac{a+c}{2}\right)^2+\frac{1}{4}(a-c)^2 \geqslant 0$$

48. 已知 x, y, z 是正实数，求

$$\frac{x}{y}+\left(\frac{y}{z}\right)^2+\left(\frac{z}{x}\right)^3$$

的最小值。

由 AM-GM 不等式，原式即

$$6\cdot\frac{x}{6y}+3\cdot\frac{y^2}{3z^2}+2\cdot\frac{z^3}{2x^3}=\geqslant 11\sqrt[11]{\frac{1}{6^6\cdot 3^3\cdot 2^2}}=\frac{11}{6}\sqrt[11]{72}$$

49. 设 a, b, c, d 为实数，满足 $a^2+b^2=c^2+d^2$，求

$$\frac{20bc+14bd+20ad-14ac}{a^2+b^2+c^2+d^2}$$

的最大值。

由柯西不等式,

$$(a(20d-14c)+b(20c+14d))^2\leqslant(a^2+b^2)((20d-14c)^2+(20c+14d)^2)$$
$$596(c^2+d^2)$$

由此可知

$$|20bc+14bd+20ad-14ac|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{596(c^2+d^2)}$$

记 $a^2+b^2=c^2+d^2=S$，代入上式得

$$\frac{20bc+14bd+20ad-14ac}{2S}\leqslant\frac{\sqrt{S}\cdot\sqrt{596S}}{2S}=\frac{\sqrt{596}S}{2S}=\frac{\sqrt{596}}{2}=\sqrt{149}$$

50. 实数 x, y, z, t 满足

$$x^2+y^2=16,\quad z^2+t^2=25,\quad xt-yz=20,$$

求 xz 的最大值。

由柯西不等式,

$$16\cdot 25=(x^2+y^2)(t^2+(-z)^2)\geqslant(xt-yz)^2=20^2$$

此时等号成立，可解得

$$\frac{x}{t}=\frac{y}{-z}=\frac{4}{5}\Rightarrow xz=-\frac{5}{4}xy$$

由 $x^2+y^2=16$ 可得

$$|xy| \leqslant \frac{x^2+y^2}{2}=8$$

所以

$$-10=-\frac{5}{4}\cdot 8 \leqslant xz \leqslant -\frac{5}{4}\cdot(-8)=10$$

因此 xz 的最大值为 10。

51. 设 $a_1,a_2,\ldots,a_{18}$ 均为大于 1 的实数，求

$$\frac{\log_{a_1}2023+\log_{a_2}2023+\cdots+\log_{a_{18}}2023}{\log_{a_1a_2\cdots a_{18}}2023}$$

的最小值。

利用换底公式，原式即

$$\frac{\sum_{i=1}^{18}\frac{1}{\log_{2023}a_i}}{\frac{1}{\sum_{i=1}^{18}\log_{2023}a_i}}=\left(\sum_{i=1}^{18}\frac{1}{\log_{2023}a_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{18}\log_{2023}a_i\right).$$

由柯西不等式,

$$\left(\sum_{i=1}^{18}\log_{2023}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{18}\frac{1}{\log_{2023}a_i}\right)\geqslant\left(\sum_{i=1}^{18}1\right)^2=18^2=324.$$

52. 存在 2017 个正实数 $x_1,x_2,\ldots,x_{2017}$ 使得

$$\sum_{i=1}^{2017}x_i=\sum_{i=1}^{2017}\frac{1}{x_i}=2018,$$

求

$$x_1+\frac{1}{x_1}$$

的最大可能值。

由柯西不等式,

$$(2018-x_1)\left(2018-\frac{1}{x_1}\right)=\left(\sum_{i=2}^{2017}x_i\right)\left(\sum_{i=2}^{2017}\frac{1}{x_i}\right)\geqslant 2016^2.$$

展开左边得

$$2018^2 - 2018\left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) + 1 \geqslant 2016^2.$$

于是

$$x_1 + \frac{1}{x_1} \leqslant \frac{8069}{2018}.$$

等号成立当且仅当 $x_i = \dfrac{1}{x_i}$, 即 $x_i = 1, i = 2, 3, \ldots, 2017$

53. 已知 a, b, c 为正数, 且 $a + b + c = 1$。求

$$\left(\frac{1}{a} - 1\right)\left(\frac{1}{b} - 1\right)\left(\frac{1}{c} - 1\right)$$

的最小值。

由 AM-GM 不等式,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{a} - 1\right)\left(\frac{1}{b} - 1\right)\left(\frac{1}{c} - 1\right) &= \left(\frac{1-a}{a}\right)\left(\frac{1-b}{b}\right)\left(\frac{1-c}{c}\right) \\
&= \left(\frac{b+c}{a}\right)\left(\frac{a+c}{b}\right)\left(\frac{a+b}{c}\right) \\
&\geqslant \left(\frac{2\sqrt{bc}}{a}\right)\left(\frac{2\sqrt{ac}}{b}\right)\left(\frac{2\sqrt{ab}}{c}\right) = 8
\end{aligned}$$

当且仅当 $a = b = c = \dfrac{1}{3}$ 时等号成立。

54. 已知 a, b, c 为三角形三边, 证明不等式

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geqslant 3$$

发现

$$\begin{aligned}
& \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geqslant 3 \\
\Longleftrightarrow & \left(\frac{2a}{b+c-a} + 1\right) + \left(\frac{2b}{c+a-b} + 1\right) + \left(\frac{2c}{a+b-c} + 1\right) \geqslant 9 \\
\Longleftrightarrow & (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} + \frac{1}{a+b-c}\right) \geqslant 9
\end{aligned}$$

由于

$$(b+c-a)+(c+a-b)+(a+b-c)=a+b+c,$$

且

$$b+c-a>0,\ c+a-b>0,\ a+b-c>0$$

由 AM-HM 不等式或柯西不等式, 原不等式得证。

55. 设 x, y, z 为正实数且 $xyz=1$, 证明:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x} \geqslant x+y+z.$$

由 AM-GM 不等式,

$$\frac{1}{3}\left(\frac{x}{y}+\frac{x}{y}+\frac{y}{z}\right) \geqslant \sqrt[3]{\frac{x^2}{yz}}=x,$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{y}{z}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right) \geqslant \sqrt[3]{\frac{y^2}{xz}}=y,$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{z}{x}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}\right) \geqslant \sqrt[3]{\frac{z^2}{xy}}=z.$$

三式相加得

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x} \geqslant x+y+z.$$

故证毕。

56. 若 $x^2+y^2+z^2=1$, 求 $x+2y+3z$ 的最大值。

由柯西不等式,

$$(x^2+y^2+z^2)(1^2+2^2+3^2) \geqslant (x+2y+3z)^2 \Rightarrow x+2y+3z \leqslant \sqrt{14}$$

当且仅当 $(x, y, z)=\dfrac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3)$ 时等号成立。

57. 若 $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ 且 $x+y+z=3$, 求 $\dfrac{yz+4xz+9xy}{xyz}$ 的最小值。

由柯西不等式,

$$\frac{x^2}{1^2}+\frac{y^2}{2^2}+\frac{z^2}{3^2}\geqslant\frac{(x+y+z)^2}{1+4+9}=\frac{9}{14}.$$

当且仅当 $(x,y,z)=\left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}\right)$ 时等号成立。

58. 若 $a,b,c\in\mathbb{R}^+$ 且 $a+b+c=6$, 求

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{c}\right)^2+\left(c+\frac{1}{a}\right)^2$$

的最小值。

由柯西不等式,

$$\begin{aligned}\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{c}\right)^2+\left(c+\frac{1}{a}\right)^2&\geqslant\frac{\left(a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}{1+1+1}\\&\geqslant\frac{\left(6+\frac{9}{a+b+c}\right)^2}{1+1+1}=\frac{75}{4}\end{aligned}$$

等号成立当且仅当 $a=b=c=2$。

59. 已知实数 a,b,c,d 满足

$$ab+bc+cd=8,\quad b^2+c^2=2,$$

试求 a^2+d^2 的最小值。

首先有

$$b^2+c^2\geqslant 2bc\Rightarrow bc\leqslant 1$$

由柯西不等式,

$$(a^2+d^2)(b^2+c^2)\geqslant(ab+cd)^2$$

即

$$(a^2+d^2)\geqslant\frac{(ab+cd)^2}{b^2+c^2}=\frac{(8-bc)^2}{2}\geqslant\frac{(8-1)^2}{2}=\frac{49}{2}$$

当 $bc=1$ 且 $\frac{a}{c}=\frac{d}{b}$, 即 $b=c=-1,a=d=-\frac{7}{2}$ 时等号成立, 此时 a^2+d^2 取最小值 $\frac{49}{2}$。

60. 若 $3a+4b=15$, 求 $\sqrt{a^2+b^2}$ 的最小值。

由柯西不等式,

$$5\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3^2+4^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}\geqslant|3a+4b|=15 \implies \sqrt{a^2+b^2}\geqslant 3$$

当且仅当 $a=\frac{9}{5}, b=\frac{12}{5}$ 时等号成立。

61. 若 $abcd=1$, 求 $(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)$ 的最小值。

由 AM-GM 不等式,

$$(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)\geqslant(2\sqrt{a})(2\sqrt{b})(2\sqrt{c})(2\sqrt{d})=16$$

等号成立当且仅当 $a=b=c=d=1$。

62. 若 $x\in\mathbb{R}$, 求

$$\frac{x^2+2-\sqrt{x^4+4}}{x}$$

的最大值。

设 $x>0$, 由 AM-GM 不等式,

$$\begin{aligned}\frac{x^2+2-\sqrt{x^4+4}}{x}&=x+\frac{2}{x}-\sqrt{x^2+\frac{4}{x^2}}\\&=\sqrt{x^2+\frac{4}{x^2}+4}-\sqrt{x^2+\frac{4}{x^2}}\\&=\frac{4}{\sqrt{x^2+\frac{4}{x^2}+4}+\sqrt{x^2+\frac{4}{x^2}}}\\&\leqslant\frac{4}{\sqrt{4+4}+\sqrt{4}}=2\sqrt{2}-2\end{aligned}$$

当且仅当 $x=\sqrt{2}$ 时等号成立。

63. 若 a,b 为正实数且满足 $ab(a+b)=2000$, 求 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}$ 的最小值。

由 AM-GM 不等式,

$$2000=ab(a+b)\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)(a+b)\Rightarrow a+b\geqslant 20$$

再由 AM-GM 不等式,

$$\begin{aligned}\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}&=\frac{1}{2a}+\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{a+b}\\&\geqslant 5\sqrt[5]{\frac{1}{16a^2b^2(a+b)}}\\&=5\sqrt[5]{\frac{a+b}{16a^2b^2(a+b)^2}}\\&\geqslant 5\sqrt[5]{\frac{20}{16\cdot 2000^2}}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

等号成立当且仅当 $a=b=10$。以下为错误示范:

由 AM-GM 不等式,

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{ab(a+b)}}=3\sqrt[3]{\frac{1}{2000}}=\frac{3\sqrt[3]{4}}{20}$$

但等号成立当且仅当 $a=b=0$, 不合题意。

由 AM-GM 不等式,

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}=\frac{a+b}{ab}+\frac{1}{ab}=\frac{(a+b)^2}{2000}+\frac{1}{2(a+b)}+\frac{1}{2(a+b)}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{8000}}=\frac{3}{20}$$

但等号成立当且仅当 $a+b=10$ 且 $ab=200$, 解得 a,b 为非实数, 不合题意。

64. 若 a,b,c 皆为正实数满足 $a+b+c=100$, 求 $\sqrt{a}+\sqrt{ab}+\sqrt{abc}$ 的最大值。

由 AM-GM 不等式,

$$\sqrt{a}+\sqrt{ab}+\sqrt{abc}=a+2\sqrt{\frac{a}{4}\cdot b}+3\sqrt{\frac{a}{12}\cdot\frac{b}{3}\cdot\frac{4c}{3}}\leqslant a+\frac{a}{4}+b+\frac{a}{12}+\frac{b}{3}+\frac{4c}{3}=\frac{4}{3}(a+b+c)=\frac{400}{3}$$

等号成立当且仅当 $a=\frac{160}{21},b=\frac{40}{21},c=\frac{10}{21}$。

65. 若 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 为实数, 且

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=8,\quad x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2=16$$

求 x_5 的最大值。

由柯西不等式,

$$(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)(1+1+1+1)\geqslant(x_1+x_2+x_3+x_4)^2\Rightarrow 4(16-x_5^2)\geqslant(8-x_5)^2$$

解得

$$0\leqslant x_5\leqslant\frac{16}{5}$$

当 $x_1=x_2=x_3=x_4=\dfrac{6}{5},x_5=\dfrac{16}{5}$ 时等号成立。

66. 若 a,b,c 为正实数且 $a+b+c\leqslant 9$, 求 $(a^2+b^2+c^2)(2ab+2bc+2ca+5)$ 的最大值。

由 AM-GM 不等式,

$$\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2)(2ab+2bc+2ca+5)&\leqslant\left(\frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca+5}{2}\right)^2\\&=\left(\frac{(a+b+c)^2+5}{2}\right)^2\\&\leqslant\left(\frac{9^2+5}{2}\right)^2=1849\end{aligned}$$

当 $a^2+b^2+c^2=43,ab+bc+ca=19$ 时等号成立。

67. x,y,z 为正实数且满足 $x+y+z=91$, 求

$$\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y}+\frac{xy}{z}$$

的最小值。

由排序不等式,

$$\sum_{cyc}\frac{xy}{z}\geqslant\sum_{cyc}\frac{xy}{y}=x+y+z=91$$

68. 已知正实数 a,b 满足 $a+b=1$, 求

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2$$

的最小值。

由柯西不等式或 QM-AM 不等式,

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geqslant \frac{1}{2}\left(a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{ab}\right)^2$$

又由 AM-GM 不等式,

$$ab \leqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

故

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geqslant \frac{1}{2}\cdot(1+4)^2=\frac{25}{2}$$

当且仅当 $a=b=\dfrac{1}{2}$ 时等号成立, 此时有最小值 $\dfrac{25}{2}$。

69. 已知 x, y, z 为正实数, 求 $\dfrac{(x^4+1)(y^4+1)(z^4+1)}{xy^2z}$ 的最小值。

由 AM-GM 不等式,

$$\begin{aligned}\frac{(x^4y^4+1)(y^4z^4+1)(z^4x^4+1)}{xy^2z} &= \left(x^3+\frac{1}{3x}+\frac{1}{3x}+\frac{1}{3x}\right)\left(y^2+\frac{1}{y^2}\right)\left(z^3+\frac{1}{3z}+\frac{1}{3z}+\frac{1}{3z}\right) \\ &\geqslant 4\sqrt[3]{\frac{1}{27}}\cdot 2\cdot 4\sqrt[3]{\frac{1}{27}}=\frac{32\sqrt{3}}{9}\end{aligned}$$

70. 已知 $x\in[0,2]$, 求 $\sqrt{x}+4\sqrt{1-\dfrac{x}{2}}$ 的最大值。

发现

$$\sqrt{x}+4\sqrt{1-\frac{x}{2}}=\sqrt{x}+\sqrt{2^3}\cdot\sqrt{2-x}$$

由柯西不等式,

$$(\sqrt{x}+\sqrt{2^3}\cdot\sqrt{2-x})^2 \leqslant (1+8)(x+2-x)=18 \Leftrightarrow \sqrt{x}+4\sqrt{1-\frac{x}{2}} \leqslant 3\sqrt{2}$$

等号成立当且仅当 $x=\dfrac{2}{9}$

71. 若 x, y 为正数, 且

$$x^2+\frac{y^2}{45}=1,$$

试求

$$\frac{2}{1-x}+\frac{75}{10-y}$$

的最小值。

由 AM-GM 不等式,

$$\frac{1-x+\frac{x}{2}+\frac{x}{2}}{3} \geqslant \sqrt[3]{\frac{x^2(1-x)}{4}}$$

于是

$$\frac{2}{1-x}=\frac{x^2}{2}\cdot\frac{4}{x^2(1-x)} \geqslant \frac{x^2}{2}\cdot\left(\frac{3}{1-x+\frac{x}{2}+\frac{x}{2}}\right)^3=\frac{27x^2}{2} \tag{1}$$

由 AM-GM 不等式,

$$\frac{y+(10-y)}{2} \geqslant \sqrt{y(10-y)}$$

故

$$\frac{75}{10-y}=\frac{75}{10}\left(\frac{y}{10-y}+1\right) \geqslant \frac{15}{2}\cdot\frac{y^2}{\left(\frac{y+(10-y)}{2}\right)^2}+\frac{15}{2}=\frac{15}{2}\cdot\frac{y^2}{25}+\frac{15}{2} \tag{2}$$

由 (1), (2),

$$\frac{2}{1-x}+\frac{75}{10-y} \geqslant \frac{27}{2}\left(x^2+\frac{y^2}{45}\right)+\frac{15}{2}=21$$

等号成立当且仅当 $x=\dfrac{2}{3}, y=5$。

72. 若正实数 a,b,c 满足 $a+b+c=21$, 求 $a^2+3b^2+5c^2$ 的最小值。

由排序不等式,

$$\begin{aligned} a^2+3b^2+5c^2 &= a^2+b^2+c^2+2b^2+2c^2+2c^2 \\ &\geqslant a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=(a+b+c)^2=441 \end{aligned}$$

当 $(a,b,c)=(21,0,0),\left(\dfrac{21}{2},\dfrac{21}{2},0\right),(7,7,7)$ 时等号成立。

73. 已知 x,y 为实数, 求 x^6+y^6-54xy 的最小值。

由 AM-GM 不等式,

$$\frac{x^6+y^6+27+27+27+27}{6} \geqslant \sqrt[6]{x^6y^6\cdot 3^{12}} \Rightarrow x^6y^6-54xy \geqslant -108$$

当 $x=y=\pm\sqrt{3}$ 时等号成立。

74. 若 x,y,z 为正实数，且满足 $x+y+z=1$，求 $x(x+y)^2(y+z)^3(z+x)^4$ 的最大值。

由 AM-GM 不等式，

$$\frac{5(x+y+z)}{10}=\frac{x+2(x+y)+3(y+z)+4\left(\frac{z+x}{2}\right)}{10}\geqslant\sqrt[10]{\frac{x(x+y)^2(y+z)^3(z+x)^4}{2^4}}$$

故

$$x(x+y)^2(y+z)^3(z+x)^4\leqslant\frac{1}{64}$$

等号成立 $y=0,x=z=\frac{1}{2}$?

75. 设 a,b,c,d 为正实数，且满足 $abcd=1$，求

$$a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ac+ad+bc+bd+cd$$

的最小值。

由 AM-GM 不等式，有

$$a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ac+ad+bc+bd+cd\geqslant\sqrt[4]{(abcd)^2}+\sqrt[6]{(abcd)^3}=4+6=10$$

等号成立当且仅当 $a=b=c=d=1$。

76. 设 a,b,c 为正实数，且满足 $a^2+b^2+c^2=1$，证明

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geqslant 3+\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}.$$

考虑左式减右式，有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-3-\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}\\
&=\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2}+\frac{a^2+b^2+c^2}{b^2}+\frac{a^2+b^2+c^2}{c^2}-3-2\left(\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\right)\\
&=\frac{b^2+c^2}{a^2}+\frac{a^2+c^2}{b^2}+\frac{a^2+b^2}{c^2}-2\left(\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\right)\\
&=a^2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2+b^2\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2+c^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2\geqslant 0
\end{aligned}$$

等号成立当且仅当 $a=b=c$。

77. 若 a,b,c 为实数且 $a+b+c=12$, 且

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{abc}=1,$$

求 $abc-(a+2b-3c)$ 的最大值。

由

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{abc}=1,$$

则

$$2abc=2ab+2bc+2ca+2=144-a^2-b^2-c^2+2$$

所以

$$\begin{aligned}2abc-2(a+2b-3c)&=146-(a^2+2a)-(b^2+4b)-(c^2-6c)\\&=160-[(a+1)^2+(b+2)^2+(c-3)^2]\\&\leqslant 160-3\left(\frac{a+1+b+2+c-3}{3}\right)^2=112\end{aligned}$$

因此

$$abc-(a+2b-3c)\leqslant 56$$

等号成立当且仅当 $a=3,b=2,c=7$。

78. 设 a,b,c 为正实数, 且 $a+b+c=1$, 求

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}$$

的最小值。

由柯西不等式,

$$(1^2+1^2)(a^2+b^2)\geqslant(a+b)^2\Rightarrow\sqrt{a^2+b^2}\geqslant\frac{a+b}{\sqrt{2}},$$

同理

$$\sqrt{b^2+c^2}\geqslant\frac{b+c}{\sqrt{2}},\quad\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\frac{c+a}{\sqrt{2}}.$$

相加得

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\frac{2(a+b+c)}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$$

当 $a=b=c=\dfrac{1}{3}$ 时取等号，故最小值为 $\sqrt{2}$。

79. 已知 $x>1, y>1, z>1$ 且 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=2$，试证

$$\sqrt{x+y+z} \geqslant \sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}$$

首先有

$$\frac{x-1}{x}+\frac{y-1}{y}+\frac{z-1}{z}=3-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=3-2=1$$

由柯西不等式，

$$\left(\frac{x-1}{x}+\frac{y-1}{y}+\frac{z-1}{z}\right)(x+y+z) \geqslant\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}\right)^{2}$$

左式为 $1 \cdot(x+y+z)=x+y+z$，因此

$$\sqrt{x+y+z} \geqslant \sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}$$

故证毕。

80. (a) 已知 $a, b, c>0$，证明

$$\frac{a^{2}}{2 a+b}+\frac{b^{2}}{2 b+c}+\frac{c^{2}}{2 c+a} \geqslant \frac{a+b+c}{3}$$

由柯西不等式，

$$\left(\frac{a^{2}}{2 a+b}+\frac{b^{2}}{2 b+c}+\frac{c^{2}}{2 c+a}\right)(2 a+b+2 b+c+2 c+a) \geqslant(a+b+c)^{2}$$

所以得证

$$\frac{a^{2}}{2 a+b}+\frac{b^{2}}{2 b+c}+\frac{c^{2}}{2 c+a} \geqslant \frac{a+b+c}{3}$$

(b) 已知 $a_{1}, a_{2}, b_{1}, b_{2}, c_{1}, c_{2}>0$，证明

$$\left(a_{1}^{3}+a_{2}^{3}\right)\left(b_{1}^{3}+b_{2}^{3}\right)\left(c_{1}^{3}+c_{2}^{3}\right) \geqslant\left(a_{1} b_{1} c_{1}+a_{2} b_{2} c_{2}\right)^{3}$$

令

$$r_1 = \frac{a_2}{a_1}, \quad r_2 = \frac{b_2}{b_1}, \quad r_3 = \frac{c_2}{c_1}$$

则

$$(a_1^3 + a_2^3)(b_1^3 + b_2^3)(c_1^3 + c_2^3) = a_1^3 b_1^3 c_1^3 (1 + r_1^3)(1 + r_2^3)(1 + r_3^3)$$

$$(a_1 b_1 c_1 + a_2 b_2 c_2)^3 = a_1^3 b_1^3 c_1^3 (1 + r_1 r_2 r_3)^3$$

由 AM-GM 不等式,

$$\begin{aligned}(1 + r_1^3)(1 + r_2^3)(1 + r_3^3) &= 1 + (r_1^3 + r_2^3 + r_3^3) + (r_1 r_2)^3 + (r_2 r_3)^3 + (r_3 r_1)^3 + r_1^3 r_2^3 r_3^3 \\ &\geqslant 1 + 3 r_1 r_2 r_3 + 3 r_1^2 r_2^2 r_3^2 + r_1^3 r_2^3 r_3^3 \\ &= (1 + r_1 r_2 r_3)^3\end{aligned}$$

因此得证

$$(a_1^3 + a_2^3)(b_1^3 + b_2^3)(c_1^3 + c_2^3) \geqslant (a_1 b_1 c_1 + a_2 b_2 c_2)^3$$

81. 设 a, b, c 均为正数, 且 $a + b + c = 3$, 证明

$$\frac{a}{b^2+1} + \frac{b}{c^2+1} + \frac{c}{a^2+1} \geqslant \frac{3}{2}.$$

由不等式

$$(b-1)^2 = b^2 + 1 - 2b \geqslant 0 \Rightarrow \frac{1}{b^2+1} \leqslant \frac{1}{2b},$$

因此

$$\frac{a}{b^2+1} = a - \frac{ab^2}{b^2+1} \geqslant a - \frac{ab^2}{2b} = a - \frac{ab}{2}.$$

同理得

$$\frac{b}{c^2+1} \geqslant b - \frac{bc}{2}, \quad \frac{c}{a^2+1} \geqslant c - \frac{ac}{2}.$$

又由柯西不等式,

$$(a^2 + b^2 + c^2)(1^2 + 1^2 + 1^2) \geqslant (a + b + c)^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 3.$$

因为

$$ab + bc + ca = \frac{(a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2)}{2} \leqslant \frac{9-3}{2} = 3$$

故

$$\frac{a}{b^2+1} + \frac{b}{c^2+1} + \frac{c}{a^2+1} \geqslant (a+b+c) - \frac{1}{2}(ab + bc + ca) \geqslant 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

故证毕。

82. 设 a,b,c 为正实数, 证明

$$\sqrt{ab(a+b)}+\sqrt{bc(b+c)}+\sqrt{ca(c+a)}\leqslant\frac{3}{2}\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

由 AM-GM 不等式,

$$\begin{aligned}3&=\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}+\frac{a}{a+b}+\frac{c}{b+c}+\frac{b}{a+b}+\frac{a}{c+a}\\&\geqslant 2\left(\sqrt{\frac{ab}{(b+c)(c+a)}}+\sqrt{\frac{bc}{(a+b)(c+a)}}+\sqrt{\frac{ca}{(a+b)(b+c)}}\right)\end{aligned}$$

即得证

$$\sqrt{ab(a+b)}+\sqrt{bc(b+c)}+\sqrt{ca(c+a)}\leqslant\frac{3}{2}\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

83. 证明对任意实数 x,y,z 皆有

$$\frac{y^2-x^2}{2x^2+1}+\frac{z^2-y^2}{2y^2+1}+\frac{x^2-z^2}{2z^2+1}\geqslant 0$$

由 AM-GM 不等式,

$$\begin{aligned}\frac{y^2-x^2}{2x^2+1}+\frac{z^2-y^2}{2y^2+1}+\frac{x^2-z^2}{2z^2+1}+\frac{3}{2}&=\frac{1}{2}\left(\frac{2y^2+1}{2x^2+1}+\frac{2z^2+1}{2y^2+1}+\frac{2x^2+1}{2z^2+1}\right)\\&\geqslant\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{2y^2+1}{2x^2+1}\cdot\frac{2z^2+1}{2y^2+1}\cdot\frac{2x^2+1}{2z^2+1}}=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

故

$$\frac{y^2-x^2}{2x^2+1}+\frac{z^2-y^2}{2y^2+1}+\frac{x^2-z^2}{2z^2+1}\geqslant 0$$

84. 设 $a>0,b>0,c>0$, 求

$$\frac{a+3c}{a+2b+c}+\frac{4b}{a+b+2c}-\frac{8c}{a+b+3c}+17$$

的最小值。

由于

$$\begin{cases}a+2b+c=x\\a+b+2c=y\\a+b+3c=z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-x+5y-3z\\b=x-2y+z\\c=-y+z\end{cases}$$

故

$$\begin{aligned}&\frac{a+3c}{a+2b+c}+\frac{4b}{a+b+2c}-\frac{8c}{a+b+3c}+17\\=&\frac{-x+2y}{x}+\frac{4x-8y+4z}{y}-\frac{-8y+8z}{z}+17\\=&\left(\frac{2y}{x}+\frac{4x}{y}\right)+\left(\frac{4z}{y}+\frac{8y}{z}\right)\\\geqslant&2\sqrt{\frac{2y}{x}\cdot\frac{4x}{y}}+2\sqrt{\frac{4z}{y}\cdot\frac{8y}{z}}=12\sqrt{2}\end{aligned}$$

85. 证明对所有自然数 n, 有

$$1+\frac{2}{3n-2}\leqslant\sqrt[n]{3}\leqslant1+\frac{2}{n}.$$

由 AM-GM 不等式,

$$\frac{n+2}{n}=\frac{3+\overbrace{1+\cdots+1}^{n-1\text{个 }1}}{n}\geqslant\sqrt[n]{3\cdot1^{n-1}}=\sqrt[n]{3}\Rightarrow\sqrt[n]{3}\leqslant1+\frac{2}{n}$$

且

$$\frac{3n-2}{3n}=\frac{1/3+\overbrace{1+\cdots+1}^{n-1\text{个 }1}}{n}\geqslant\sqrt[n]{(1/3)\cdot1^{n-1}}=\frac{1}{\sqrt[n]{3}}\Rightarrow\sqrt[n]{3}\geqslant1+\frac{2}{3n-2}.$$

综上得到

$$1+\frac{2}{3n-2}\leqslant\sqrt[n]{3}\leqslant1+\frac{2}{n}$$

86. 已知 $0\leqslant x\leqslant1$, $n\in\mathbb{N}$, 证明:

$$0\leqslant x^n-x^{n+1}\leqslant\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

由 $0 \leqslant x \leqslant 1$, 有

$$0 \leqslant 1-x \quad \Rightarrow \quad 0 \leqslant x^n(1-x) = x^n - x^{n+1} \tag{1}$$

由 AM-GM 不等式,

$$\frac{\overbrace{\frac{x}{n}+\cdots+\frac{x}{n}}^{n\text{ 个}}+(1-x)}{n+1} \geqslant \sqrt[n+1]{\left(\frac{x}{n}\right)^n(1-x)}$$

即

$$\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \geqslant x^n(1-x) = x^n - x^{n+1} \tag{2}$$

由 (1) 与 (2), 得证

$$0 \leqslant x^n - x^{n+1} \leqslant \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

87. 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 27, R 为其外接圆半径, r 为其内切圆半径。求 Rr^3 的最大值。

设 $\triangle ABC$ 边长为 $a, b, c > 0$, 面积为

$$[\triangle ABC] = \frac{1}{2}(a+b+c)r = \frac{abc}{4R} = 27$$

由 AM-GM 不等式,

$$\frac{2 \cdot 27}{3r} = \frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc} = \sqrt[3]{4R \cdot 27} \Rightarrow Rr^3 \leqslant 54$$

等号成立当且仅当 $a=b=c$ 即 $\triangle ABC$ 为等边三角形。

88. 设实数 x, y 满足 $\sin x + \cos y = 1$, 求 $\cos x + \sin y$ 的最大值。

注意到

$$(\sin x + \cos y)^2 + (\cos x + \sin y)^2 = 2 + 2\sin(x+y) \leqslant 4$$

由题设 $\sin x + \cos y = 1$, 代入上式

$$1^2 + (\cos x + \sin y)^2 \leqslant 4 \Rightarrow \cos x + \sin y \leqslant \sqrt{3}$$

当 $x = \dfrac{\pi}{6}$, $y = \dfrac{\pi}{3}$ 时, $\sin x + \cos y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1, \cos x + \sin y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ 取到最大值。

89. 若 $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$, 试求

$$f(x) = |\sin x + \cos x + \tan x + \cot x + \sec x + \csc x|$$

的最小值。

设 $t=\cos x+\sin x$, 有

$$\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$$

且

$$\tan x+\cot x=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x}=\frac{2}{t^2-1}$$
$$\sec x+\csc x=\frac{\sin x+\cos x}{\cos x\sin x}=\frac{2t}{t^2-1}$$

故

$$f(x)=g(t)=\left|t+\frac{2}{t^2-1}+\frac{2t}{t^2-1}\right|=\left|t-1+\frac{2}{t-1}+1\right|\geqslant\left|-2\sqrt{2}+1\right|=2\sqrt{2}-1$$

90. 已知 $x^2+y^2=1$, 求 $\dfrac{y-3}{x+2}$ 的最大值。

设 $k=\dfrac{y-3}{x+2}$, 则直线方程为

$$kx-y+2k+3=0$$

当直线与圆 $x^2+y^2=1$ 相切时,k 取得最大值或最小值, 此时圆心 $(0,0)$ 到直线的距离等于半径:

$$\frac{|2k+3|}{\sqrt{k^2+1}}=1\Rightarrow 3k^2+12k+8=0$$

解得最大值为

$$k_{max}=\frac{-12+\sqrt{144-96}}{6}=\frac{-6+2\sqrt{3}}{3}$$

91. 已知实数 x,y 满足 $3x-4y=5$, 求 x^2+y^2 的最小值。

x^2+y^2 的最小值即为原点 $(0,0)$ 到直线 $3x-4y-5=0$ 距离的平方:

$$d=\frac{|-5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$$

所以最小值为 $1^2=1$。

92. 已知实数 x,y 满足 $12x+5y=1$, 求 $x^2+y^2+4x-6y+20$ 的最小值。

原式可配方为 $(x+2)^2+(y-3)^2+7$, 其几何意义为点 $(-2,3)$ 到直线 $12x+5y-1=0$ 距离的平方加 7, 该距离为

$$d=\frac{|12(-2)+5(3)-1|}{\sqrt{12^2+5^2}}=\frac{10}{13}$$

最小值即 $d^2+7=\frac{1283}{169}$。

93. 已知实数 x,y 满足 $x^2+y^2+2x-2y=7$, 求 $\sqrt{(x-5)^2+(y-6)^2}$ 的最小值。

圆方程配方为 $(x+1)^2+(y-1)^2=3^2$, 圆心 $A(-1,1)$, 半径 $r=3$。设点 $B(5,6)$, 则 $\sqrt{(x-5)^2+(y-6)^2}$ 的最小值即

$$AB-r=\sqrt{(5+1)^2+(6-1)^2}-3=\sqrt{61}-3$$

94. 求 $\sqrt{x^2+6x+73}+\sqrt{x^2-4x+8}$ 的最小值。

原式可化为

$$\sqrt{(x+3)^2+(0-8)^2}+\sqrt{(x-2)^2+(0-2)^2},$$

即为 x 轴上的点 $(x,0)$ 到两点 $A(-3,8)$ 和 $B(2,2)$ 距离之和, 找 B 关于 x 轴的对称点 $B'(2,-2)$, 最小值为线段 AB' 的长度

$$AB'=\sqrt{(-3-2)^2+(8+2)^2}=5\sqrt{5}$$

95. 求 $\dfrac{3-\sin x}{2+\cos x}$ 的最大值及最小值。

设 $y=\dfrac{3-\sin x}{2+\cos x}$, 则

$$3-2y=y\cos x+\sin x=\sqrt{y^2+1}\cos(x-\alpha)$$

其中 α 为锐角, 由 $|\cos(x-\alpha)|\leqslant 1$ 得

$$\left|\frac{3-2y}{\sqrt{y^2+1}}\right|\leqslant 1\Rightarrow 3y^2-12y+8\leqslant 0$$

解方程 $3y^2-12y+8=0$ 得

$$y=2\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

所以最大值为 $2+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, 最小值为 $2-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$。

96. 已知 a,b 为正实数，求 $\sqrt{49+a^2-7\sqrt{2}a}+\sqrt{a^2+b^2-\sqrt{2}ab}+\sqrt{50+b^2-10b}$ 的最小值。

由余弦定理，观察到

$$\sqrt{a^2+49-7\sqrt{2}a}=\sqrt{a^2+7^2-2\cdot a\cdot 7\cos 45^\circ}$$
$$\sqrt{a^2+b^2-\sqrt{2}ab}=\sqrt{a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cos 45^\circ}$$
$$\sqrt{b^2+50-10b}=\sqrt{b^2+(5\sqrt{2})^2-2\cdot b\cdot 5\sqrt{2}\cos 45^\circ}$$

在平面上构造三角形 $\triangle OAB,\triangle OBC,\triangle OCD$，使得

$$OA=7,\quad OB=a,\quad OC=b,\quad OD=5\sqrt{2},\quad \angle AOB=\angle BOC=\angle COD=45^\circ$$

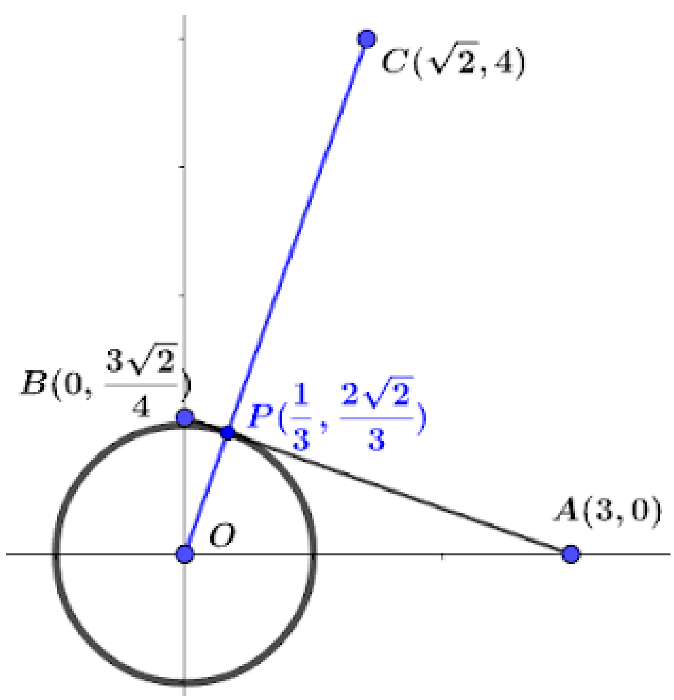
故原式即 $AB+BC+CD$ 的长度，欲使其为最小，调整正实数 a,b 使得 A,B,C,D 四点共线，在 $\triangle OAD$ 中，由余弦定理，最小值为

$$AD=\sqrt{7^2+50-2\cdot 7\cdot 5\sqrt{2}\cos 135^\circ}=13$$

97. 试求

$$\sqrt{10-6\cos\theta}+\frac{1}{4}\sqrt{34-24\sqrt{2}\sin\theta}+\sqrt{19-2\sqrt{2}\cos\theta-8\sin\theta}$$

的最小值。



发现

$$\sqrt{10-6\cos\theta}=\sqrt{(\cos\theta-3)^2+\sin^2\theta}$$

$$\frac{1}{4}\sqrt{34-24\sqrt{2}\sin\theta}=\sqrt{\cos^2\theta-\left(\sin\theta-\frac{3}{4}\sqrt{2}\right)^2}$$

$$\sqrt{19-2\sqrt{2}\cos\theta-8\sin\theta}=\sqrt{(\cos\theta-\sqrt{2})^2+(\sin\theta-4)^2}$$

构造坐标系，设 $P(\cos\theta,\sin\theta)$ 在单位圆上,$A(3,0)$，$B(0,\frac{3\sqrt{2}}{4})$，$C(\sqrt{2},4)$，原式即为

$$PA+PB+PC$$

直线 AB 方程式为

$$\sqrt{2}x+4y=3\sqrt{2},$$

故圆心 O 到 AB 的距离为 1，且当 $P=\left(\frac{1}{3},\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$,$OPC$ 共线，于是 $PA+PB+PC$ 最小值为

$$AB+OC-1=\sqrt{9+\frac{18}{16}}+\sqrt{18}-1=\frac{21\sqrt{2}}{4}-1$$

98. 若锐角 A,B,C 满足 $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2$，求

$$\frac{1}{\sin^2 A\cos^4 B}+\frac{1}{\sin^2 B\cos^4 C}+\frac{1}{\sin^2 C\cos^4 A}$$

的最小值。

由柯西不等式，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sin^2 A\cos^4 B}+\frac{1}{\sin^2 B\cos^4 C}+\frac{1}{\sin^2 C\cos^4 A}\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin^2 A\cos^4 B}+\frac{1}{\sin^2 B\cos^4 C}+\frac{1}{\sin^2 C\cos^4 A}\right)(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)\\
&\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos^2 B}+\frac{1}{\cos^2 C}+\frac{1}{\cos^2 A}\right)^2\\
&=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{\cos^2 A}+\frac{1}{\cos^2 B}+\frac{1}{\cos^2 C}\right)(\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C)\right]^2\geqslant\frac{81}{2}
\end{aligned}$$

当 $\sin^2 A=\sin^2 B=\sin^2 C=\frac{2}{3}, \cos^2 A=\cos^2 B=\cos^2 C=\frac{1}{3}$ 时等号成立，

$$\frac{1}{\sin^2 A\cos^4 B}+\frac{1}{\sin^2 B\cos^4 C}+\frac{1}{\sin^2 C\cos^4 A}=\frac{27}{2}\cdot 3=\frac{81}{2}.$$

99. 设 $\theta_1,\theta_2,\theta_3,\ldots,\theta_{2025}$ 皆为锐角，且

$$\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2+\cdots+\sin^2\theta_{2025}=1,$$

求

$$\frac{\sin\theta_1+\sin\theta_2+\cdots+\sin\theta_{2025}}{\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cdots+\cos\theta_{2025}}$$

的最大值。

由题意，

$$\sin^2\theta_2+\cdots+\sin^2\theta_{2025}=1-\sin^2\theta_1=\cos^2\theta_1$$

由柯西不等式，

$$\cos^2\theta_1=(\sin^2\theta_2+\cdots+\sin^2\theta_{2025})(1^2+1^2+\cdots+1^2)\geqslant(\sin\theta_2+\sin\theta_3+\cdots+\sin\theta_{2025})^2$$

即

$$\cos\theta_1\geqslant\frac{\sin\theta_2+\cdots+\sin\theta_{2025}}{\sqrt{2024}}$$

同理，

$$\cos\theta_2\geqslant\frac{\sin\theta_1+\sin\theta_3+\cdots+\sin\theta_{2025}}{\sqrt{2024}},\ \cdots\ ,\cos\theta_{2025}\geqslant\frac{\sin\theta_1+\cdots+\sin\theta_{2024}}{\sqrt{2024}}$$

将以上不等式相加得

$$\cos\theta_1+\cdots+\cos\theta_{2025}\geqslant\frac{2024}{\sqrt{2024}}(\sin\theta_1+\cdots+\sin\theta_{2025})$$

故

$$\frac{\sin\theta_1+\cdots+\sin\theta_{2025}}{\cos\theta_1+\cdots+\cos\theta_{2025}}\leqslant\frac{\sqrt{2024}}{2024}=\frac{\sqrt{506}}{1012}$$

100. 设 a,b,c 为三角形的三边长,Δ 为此三角形面积，试证:

$$\Delta\leqslant\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$$

且等号成立当且仅当 $a=b=c$。

由海伦公式，三角形面积为

$$\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

其中 s 为半周长, 由 AM-GM 不等式,

$$\frac{s}{3}=\frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3}\geqslant\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)}$$

故

$$\Delta\leqslant\sqrt{s\cdot\left(\frac{s}{3}\right)^3}=\frac{s^2}{3\sqrt{3}}=\frac{(a+b+c)^2}{12\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$$

等号成立条件为 $s-a=s-b=s-c$, 即 $a=b=c$ 时, 该三角形为正三角形, 面积为 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$

101. 设 a,b,c 是一个三角形的三边, 周长为 2。证明

$$\frac{3}{2}<a^2+b^2+c^2+2abc<2.$$

由于周长为 2, 有 $a,b,c<1$, 则三角形面积

$$A=\frac{1}{2}bc\sin\alpha<\frac{1}{2}$$

由海伦公式,

$$A^2=(1-a)(1-b)(1-c),$$

因此展开

$$0<(1-a)(1-b)(1-c)<\frac{1}{4}$$

可得

$$1<(ab+ac+bc)-abc<\frac{5}{4}$$

且由

$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+ac+bc),$$

因此

$$4-\frac{5}{2}<a^2+b^2+c^2+2abc<4-2\Rightarrow\frac{3}{2}<a^2+b^2+c^2+2abc<2$$

102. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A,B,C 所对的边为 a,b,c, 且

$$a^2+b^2+2c^2=8$$

求 $\triangle ABC$ 面积的最大值。

由余弦定理

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{8-3c^2}{2ab}$$

又

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ab\sqrt{1-\left(\frac{8-3c^2}{2ab}\right)^2}=\frac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2-(8-3c^2)^2}$$

由不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$,

$$S\leqslant\frac{1}{4}\sqrt{(a^2+b^2)^2-(8-3c^2)^2}=\frac{1}{4}\sqrt{(8-2c^2)^2-(8-3c^2)^2}=\frac{1}{4}\sqrt{16c^2-5c^4}$$

对于 c^2 的函数 $f(c^2)=16c^2-5c^4$, 令导数为零得 $c^2=\frac{8}{5}$, 代入得

$$S_{\max}=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{64}{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

以 AB 所在直线为 x 轴,AB 中垂线为 y 轴, 设 $A(-\frac{c}{2},0),B(\frac{c}{2},0),C(x,y)$, 由条件

$$a^2+b^2+2c^2=8$$

得

$$(x-\frac{c}{2})^2+y^2+(x+\frac{c}{2})^2+y^2+2c^2=8$$

即

$$x^2+y^2=4-\frac{5c^2}{4}$$

$\triangle ABC$ 面积为

$$S=\frac{1}{2}c|y|$$

由 $y^2\leqslant 4-\frac{5c^2}{4}$, 得

$$S\leqslant\frac{1}{2}c\sqrt{4-\frac{5c^2}{4}}=\frac{1}{4}\sqrt{16c^2-5c^4}$$

解法同上。

103. 在 $\triangle ABC$ 中, 试求

$$\frac{2\sin^2 A+\sin B\sin C}{\sin A\sin B\sin C}$$

的最小值。

由余弦定理,

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\geqslant 1-\frac{a^2}{2bc}\Rightarrow\frac{2a^2}{bc}\geqslant 4-4\cos A$$

由正弦定理,

$$\frac{2\sin^2 A+\sin B\sin C}{\sin A\sin B\sin C}=\frac{1}{\sin A}\left(\frac{2a^2}{bc}+1\right)\geqslant\frac{5-4\cos A}{\sin A}$$

设 $\tan\dfrac{A}{2}=t>0$, 则

$$\cos A=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \sin A=\frac{2t}{1+t^2}$$

代入得

$$\frac{5-4\cos A}{\sin A}=\frac{5-4\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{9t^2+1}{2t}$$

由 AM-GM 不等式:

$$\frac{9t^2+1}{2t}\geqslant\frac{2\sqrt{9t^2\cdot 1}}{2t}=3$$

当 $A=\arcsin\dfrac{3}{5}$, $B=C=\dfrac{\pi-A}{2}$ 时等号成立, 原式取最小值 3

104. 在锐角三角形 $\triangle ABC$ 中, 角 A,B,C 所对的边为 a,b,c, 且

$$a^2+2ab\cos C=3b^2$$

求 $\tan A\tan B\tan C$ 的最小值。

由余弦定理, 有

$$2ab\cos C=a^2+b^2-c^2$$

代入原式得

$$a^2+(a^2+b^2-c^2)=3b^2\Rightarrow c^2=2a^2-2b^2\Rightarrow b^2+c^2-a^2=\frac{c^2}{2}\Rightarrow\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{c^2}{4bc}$$

由正、余弦定理得

$$\cos A=\frac{\sin C}{4\sin B}\Rightarrow 4\sin B\cos A=\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$$

有 $3\sin B\cos A=\sin A\cos B$.

$\because\triangle ABC$ 是锐角三角形, $\cos A\neq 0,\cos B\neq 0,\therefore\tan A=3\tan B$

现设 $\tan B=t$, 又

$$\tan C=-\tan(A+B)=-\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=\frac{4t}{3t^2-1}$$

所以

$$\tan A\tan B\tan C = 3t\cdot t\cdot\frac{4t}{3t^2-1} = \frac{12t^3}{3t^2-1}$$

对函数

$$f(t)=\frac{12t^3}{3t^2-1}, t>0$$

求导

$$f'(t)=\frac{36t^2(3t^2-1)-12t^3\cdot 6t}{(3t^2-1)^2}=\frac{36t^2(t^2-1)}{(3t^2-1)^2}$$

令 $f'(t)=0$, 解得 $t=1$; 当 $t\in(0,1), f'(t)<0$, 当 $t\in(1,\infty), f'(t)>0$,

$\therefore$ $f(t)$ 在 $t=1$ 有最小值 $f(1)=6$。

以 AB 所在直线为 x 轴, AB 中垂线为 y 轴, 设 $A(-\frac{c}{2},0), B(\frac{c}{2},0), C(x,y)$, 由距离公式

$$a^2=(x-\frac{c}{2})^2+y^2,\quad b^2=(x+\frac{c}{2})^2+y^2$$

代入已知条件

$$2b^2+c^2-2a^2=0 \implies 2\left[(x+\frac{c}{2})^2+y^2\right]+c^2-2\left[(x-\frac{c}{2})^2+y^2\right]=0$$

展开化简得

$$4cx+c^2=0 \implies x=-\frac{c}{4}$$

作 $CD\perp AB$ 于 D, 则 D 点坐标为 $(x,0)=\left(-\frac{c}{4},0\right)$。发现

$$AD=\left|-\frac{c}{2}-\left(-\frac{c}{4}\right)\right|=\frac{c}{4}\quad 且\quad BD=\left|\frac{c}{2}-\left(-\frac{c}{4}\right)\right|=\frac{3c}{4}$$

所以 $BD=3AD$, 又

$$\tan A=\frac{CD}{AD}=\frac{y}{\frac{c}{4}}$$

$$\tan B=\frac{CD}{BD}=\frac{y}{\frac{3c}{4}}$$

因此有

$$\tan A=3\tan B$$

解法同上。

105. 已知非负实数 a,b,c,d 满足 $a\leqslant 1, a+b\leqslant 5, a+b+c\leqslant 14, a+b+c+d\leqslant 30$, 试证

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}\leqslant 10$$

由柯西不等式,

$$\begin{aligned}&(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d})^2\\&=\left(\sqrt{a}+\frac{\sqrt{b}}{2}+\frac{\sqrt{b}}{2}+\frac{\sqrt{c}}{3}+\frac{\sqrt{c}}{3}+\frac{\sqrt{c}}{3}+\frac{\sqrt{d}}{4}+\frac{\sqrt{d}}{4}+\frac{\sqrt{d}}{4}+\frac{\sqrt{d}}{4}\right)^2\\&\leqslant\left(a+\frac{b}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{9}+\frac{c}{9}+\frac{c}{9}+\frac{d}{16}+\frac{d}{16}+\frac{d}{16}+\frac{d}{16}\right)(1+...+1)=10(a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}+\frac{d}{4})\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}+\frac{d}{4}&=\frac{1}{4}(a+b+c+d)+\frac{1}{12}(a+b+c)+\frac{1}{6}(a+b)+\frac{1}{2}a\\&\leqslant\frac{30}{4}+\frac{14}{12}+\frac{5}{6}+\frac{1}{2}=10\end{aligned}$$

故

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}\leqslant 10$$

106. 已知 a,b,c 为正实数, 且满足 $abc=1$, 试证明:

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geqslant\frac{3}{2}$$

由柯西不等式,

$$\left(\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\right)(a(b+c)+b(a+c)+c(a+b))\geqslant\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2$$

注意到

$$a(b+c)+b(a+c)+c(a+b)=2(ab+bc+ca),$$

且

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2=\left(\frac{ab+bc+ca}{abc}\right)^2=(ab+bc+ca)^2$$

故由 AM-GM 不等式,

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geqslant\frac{1}{2}(ab+bc+ca)\geqslant\frac{3}{2}\sqrt[3]{(abc)^2}=\frac{3}{2}$$

由 $abc=1$, 有

$$\sum_{cyc}\frac{1}{a^3(b+c)}=\sum_{cyc}\frac{bc}{a^2(b+c)}=\sum_{cyc}\frac{(\frac{1}{a})^2}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$$

由 AM-GM 不等式, 可推出

$$\frac{x^2}{y}\geqslant x-\frac{y}{4},\quad x,y>0,$$

据此得到

$$\sum_{cyc}\frac{(\frac{1}{a})^2}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\geqslant\sum_{cyc}\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

再由 AM-GM 不等式,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqslant\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}=\frac{3}{2}$$

因此原不等式成立。

107. 已知 $0\leqslant x,y,z\leqslant 1$ 且

$$xyz=(1-x)(1-y)(1-z),$$

证明

$$x(1-z)+y(1-x)+z(1-y)\geqslant\frac{3}{4}.$$

由于 $0\leqslant x\leqslant 1$, 有

$$(x-\frac{1}{2})^2\geqslant 0\Rightarrow 0\leqslant x(1-x)\leqslant\frac{1}{4},$$

对 y,z 同理成立。于是

$$xyz(1-x)(1-y)(1-z)\leqslant\frac{1}{64}$$

由已知关系 $xyz=(1-x)(1-y)(1-z)$ 得

$$(xyz)^2\leqslant\frac{1}{64}\Rightarrow xyz\leqslant\frac{1}{8}$$

于是

$$x(1-z)+y(1-x)+z(1-y)=x+y+z-(xy+yz+zx)=1-2xyz\geqslant 1-2\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$$

当 $x=y=z=\frac{1}{2}$ 时等号成立,

108. 设正实数 a,b,c,x,y,z 满足 $a+b+c=x+y+z$, 证明

$$\frac{2a^2}{a+x}+\frac{2b^2}{b+y}+\frac{2c^2}{c+z}\geqslant a+b+c$$

由柯西不等式,

$$\left(\frac{2a^2}{a+x}+\frac{2b^2}{b+y}+\frac{2c^2}{c+z}\right)(2(a+x)+2(b+y)+2(c+z))\geqslant(2a+2b+2c)^2$$

又 $a+b+c=x+y+z$, 得

$$\frac{2a^2}{a+x}+\frac{2b^2}{b+y}+\frac{2c^2}{c+z}\geqslant a+b+c.$$

109. 已知 $a,b,c,d>0$, 证明不等式

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2}+\frac{b^3+c^3+d^3}{b^2+c^2+d^2}+\frac{c^3+d^3+a^3}{c^2+d^2+a^2}+\frac{d^3+a^3+b^3}{d^2+a^2+b^2}\geqslant a+b+c+d.$$

由 $a,b>0$, 有

$$0\leqslant(a+b)(a-b)^2=(a^2-b^2)(a-b)=a^3-a^2b-b^2a+b^3$$

可知

$$a^3+b^3\geqslant a^2b+ab^2,\quad b^3+c^3\geqslant b^2c+bc^2,\quad c^3+a^3\geqslant c^2a+ca^2.$$

于是

$$\begin{aligned}3(a^3+b^3+c^3)&\geqslant a^3+b^3+c^3+a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2\\&=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\end{aligned}$$

因此

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2}\geqslant\frac{a+b+c}{3}$$

故

$$\begin{aligned}&\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2}+\frac{b^3+c^3+d^3}{b^2+c^2+d^2}+\frac{c^3+d^3+a^3}{c^2+d^2+a^2}+\frac{d^3+a^3+b^3}{d^2+a^2+b^2}\\&\geqslant\frac{1}{3}\cdot 3(a+b+c+d)=a+b+c+d\end{aligned}$$

110. 已知正实数 a, b, c, d, 求

$$\frac{ab+bc+cd}{a^2+b^2+c^2+d^2}$$

的最大值。

对任意正数 t, 由 AM-GM 不等式,

$$ab \leqslant \frac{t}{2}a^2+\frac{1}{2t}b^2, \quad bc \leqslant \frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}c^2, \quad cd \leqslant \frac{1}{2t}c^2+\frac{t}{2}d^2.$$

取 $t=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$, 使得

$$\frac{t}{2}=\frac{1}{2t}+\frac{1}{2}$$

则

$$ab+bc+cd \leqslant \frac{t}{2}(a^2+b^2+c^2+d^2).$$

因此最大值为

$$\frac{t}{2}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

当 $ta=b=c=td$ 时等号成立。

111. 已知正数 a, b, c 满足 $abc>1$, 求 $\dfrac{abc(a+b+c+8)}{abc-1}$ 的最小值。

设 $\lambda=\dfrac{abc(a+b+c+8)}{abc-1}>0$, 整理得

$$a+b+c+\frac{\lambda}{abc}=\lambda-8$$

由 AM-GM 不等式得

$$a+b+c+\frac{\lambda}{abc} \geqslant 4\sqrt[4]{abc\cdot\frac{\lambda}{abc}}=4\sqrt[4]{\lambda}$$

于是

$$\lambda-8 \geqslant 4\sqrt[4]{\lambda}$$

令 $k=\sqrt[4]{\lambda}>0$, 则不等式转化为

$$k^4-4k-8 \geqslant 0 \Rightarrow (k-2)(k^3+2k^2+4k+4) \geqslant 0$$

由于 $k>0, k^3+2k^2+4k+4>0$, 故 $k \geqslant 2$, 即

$$\lambda \geqslant 2^4=16$$

等号成立当且仅当 $a=b=c=2$

112. 已知 $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$, 求 $x^2+2y-2z+3$ 的取值范围。

由柯西不等式,

$$[y+(-z)]^2\leqslant(1+1)[y^2+(-z)^2]\leqslant 2(x^2+y^2+z^2)\leqslant 2$$

则 $y-z\geqslant-\sqrt{2}$, 且 $x^2\geqslant 0$, 可得

$$x^2+2y-2z+3\geqslant 0+2(-\sqrt{2})+3=3-2\sqrt{2}$$

当且仅当 $x=0,y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2},z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 等号成立;
又因为 $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$, 则 $x^2\leqslant 1-y^2-z^2$, 可得

$$x^2+2y-2z+3\leqslant 4-(y^2+z^2-2y+2z)$$

且

$$y^2+z^2-2y+2z=(y-1)^2+(z+1)^2-2,$$

设点 $A(-1,1)$ 和标准单位圆上一点 $P(y,z)$, 则

$$(y-1)^2+(z+1)^2-2=|PA|^2-2,$$

又因为 $|PA|^2\geqslant(|OA|-1)^2=3-2\sqrt{2}$, 可得 $(y-1)^2+(z+1)^2-2\geqslant 1-2\sqrt{2}$, 则

$$x^2+2y-2z+3\leqslant 4-(y^2+z^2-2y+2z)\leqslant 3+2\sqrt{2},$$

当且仅当 $x=0,y=\dfrac{\sqrt{2}}{2},z=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 等号成立。
$\therefore$ 取值范围是 $[3-2\sqrt{2},3+2\sqrt{2}]$.

113. 已知 $x,y,z>0$, 求

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{y^2+4z^2}+\sqrt{z^2+16x^2}}{9x+3y+5z}$$

的最小值。

(待解)

114. 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}(n+1)}<2.$$

首先证明对任意正整数 n, 都有如下不等式成立

$$\frac{1}{\sqrt{n}(n+1)}<\frac{2}{\sqrt{n}}-\frac{2}{\sqrt{n+1}} \tag{1}$$

将不等式 (1) 两边同乘以 $\sqrt{n}(n+1)$, 可得其等价形式

$$1<2(n+1)-2\sqrt{n(n+1)} \Longleftrightarrow 2\sqrt{n(n+1)}<n+(n+1)$$

由 AM-GM 不等式, 显然上述等价形式成立, 故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}(n+1)}<\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{n}}-\frac{2}{\sqrt{n+1}}\right)$$

右端为裂项级数, 其前 k 项部分和为

$$\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{2}{\sqrt{n}}-\frac{2}{\sqrt{n+1}}\right)=2\left(1-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$$

当 $k\to\infty$ 时, $S_k\to 2$, 因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}(n+1)}<2$$

115. 设实数 $a,b,c\in[-1,1]$ 满足

$$1+2abc\geqslant a^2+b^2+c^2.$$

证明对所有正整数 n 有

$$1+2(abc)^n\geqslant a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}.$$

条件可改写为

$$(a-bc)^2\leqslant(1-b^2)(1-c^2). \tag{1}$$

由柯西不等式,

$$\begin{aligned}(a^{n-1}+a^{n-2}bc+\cdots+b^{n-1}c^{n-1})^2&\leqslant(|a|^{n-1}+|a|^{n-2}|bc|+\cdots+|bc|^{n-1})^2\\&\leqslant(1+|bc|+\cdots+|bc|^{n-1})^2\\&\leqslant(1+|b|^2+\cdots+|b|^{2(n-1)})(1+|c|^2+\cdots+|c|^{2(n-1)})\end{aligned}$$

乘以不等式 (1), 得到

$$(a-bc)^2(a^{n-1}+a^{n-2}bc+\cdots+b^{n-1}c^{n-1})^2 \leqslant ((1-b^2)(1+|b|^2+\cdots+|b|^{2(n-1)})) \cdot ((1-c^2)(1+|c|^2+\cdots+|c|^{2(n-1)}))$$

即

$$(a^n-b^nc^n)^2 \leqslant (1-b^{2n})(1-c^{2n})$$

从而得到

$$1+2(abc)^n \geqslant a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}$$

116. 设 $a_1,\ldots,a_n$ 为正实数, 且设 $s=a_1+\cdots+a_n$, 试证明

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \leqslant 1+\frac{s}{1!}+\frac{s^2}{2!}+\cdots+\frac{s^n}{n!}.$$

由 AM-GM 不等式,

$$\prod_{j=1}^{n}(1+a_j) \leqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(1+a_j)\right)^n = \left(1+\frac{s}{n}\right)^n$$

二项展开得

$$\left(1+\frac{s}{n}\right)^n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{s^j}{n^j} = \sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{(n-j)!\,j!}\,\frac{s^j}{n^j}.$$

注意当 $0 \leqslant j \leqslant n$ 时,

$$\frac{n!}{(n-j)!\,n^j} = \prod_{k=0}^{j-1}\left(1-\frac{k}{n}\right) \leqslant 1,$$

因此每一项满足

$$\frac{n!}{(n-j)!\,j!}\,\frac{s^j}{n^j} \leqslant \frac{s^j}{j!}.$$

代入二项和得到

$$\prod_{j=1}^{n}(1+a_j) \leqslant \sum_{j=0}^{n}\frac{s^j}{j!},$$

即

$$(1+a_1)\cdots(1+a_n) \leqslant 1+\frac{s}{1!}+\frac{s^2}{2!}+\cdots+\frac{s^n}{n!},$$

证毕。

117. 设 n 个正实数的最小值为 m, 最大值为 M, 记它们的算术平均为 A, 几何平均为 G。证明

$$A-G \geqslant \frac{1}{n}\left(\sqrt{M}-\sqrt{m}\right)^2.$$

设 n 个正实数为 $x_1,\ldots,x_n$, 不妨令 $x_1=m, x_n=M$。不等式等价于

$$\begin{aligned} & A-G \geqslant \frac{\left(\sqrt{M}-\sqrt{m}\right)^2}{n} \\ \Longleftrightarrow & \sum_{j=1}^{n} x_j - n\left(\prod_{j=1}^{n} x_j\right)^{\frac{1}{n}} \geqslant M-2\sqrt{Mm}+m \\ \Longleftrightarrow & \sum_{j=2}^{n-1} x_j + 2\sqrt{Mm} \geqslant n\left(\prod_{j=1}^{n} x_j\right)^{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

对这 n 个数

$$\sqrt{Mm},\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_{n-1},\ \sqrt{Mm}$$

应用 AM-GM 不等式, 有

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{j=2}^{n-1} x_j + 2\sqrt{Mm}\right) \geqslant \left(Mm\prod_{j=2}^{n-1} x_j\right)^{\frac{1}{n}} = \left(x_1 x_n \prod_{j=2}^{n-1} x_j\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\prod_{j=1}^{n} x_j\right)^{\frac{1}{n}}$$

即

$$\sum_{j=2}^{n-1} x_j + 2\sqrt{Mm} \geqslant n\left(\prod_{j=1}^{n} x_j\right)^{\frac{1}{n}}$$

故原不等式得证。

118. 设 $x_1,\ldots,x_n \geqslant -1$, 且

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^3 = 0,$$

证明

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant \frac{n}{3}.$$

当 $x \geqslant -1$ 时, 有不等式

$$0 \leqslant x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} = (x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

将 $x_1, \ldots, x_n$ 代入上式并求和, 得到

$$0 \leqslant= \sum_{i=1}^{n} x_i^3 - \frac{3}{4}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{n}{4}$$

由已知条件

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^3 = 0,$$

可得

$$0 \leqslant -\frac{3}{4}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{n}{4} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant \frac{n}{3}$$

当且仅当 $n = 9k$, 其中 k 个 $x_i = -1$, 其余 $8k$ 个 $x_i = \dfrac{1}{2}$ 时取等号。

119. 已知非负实数 $x_1, x_2, \ldots, x_5$ 满足 $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_5^2 = 4$. 求下式的最大值:

$$S = \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{x_i + 1} \sum_{i=1}^{5} x_i$$

当 $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1, x_5 = 0$ 时, $S = 12$, 下面证明 $S \leqslant 12$. 注意到

$$\frac{x(x-1)^2}{x+1} \geqslant 0$$

对 $x \geqslant 0$ 成立, 由此可得

$$\sum_{i=1}^{5} \frac{x_i(x_i-1)^2}{x_i+1} \geqslant 0$$

展开可知

$$\sum_{i=1}^{5} \left(x_i^2 - 3x_i + 4 - \frac{4}{x_i+1}\right) \geqslant 0$$

整理得

$$\sum_{i=1}^{5} \frac{1}{x_i+1} \leqslant 6 - \frac{3}{4}\sum_{i=1}^{5} x_i$$

由上式及 AM-GM 不等式可知

$$S \leqslant \frac{4}{3}\left(6-\frac{3}{4}\sum_{i=1}^{5} x_i\right)\left(\frac{3}{4}\sum_{i=1}^{5} x_i\right) \leqslant \frac{4}{3}\cdot 3^2 = 12$$

数列与级数

1. 设 a, b, c 三数成等比数列, 且满足 $a+b+c=9$ 及 $a^2+b^2+c^2=189$, 求 b。

关键: 运用恒等式

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$$

又已知 $b^2=ac$, 故

$$81 = 189+2(b(9-b)+b^2) \Rightarrow b=6$$

2. 已知 a, b, c, d 成等差数列, 且实数 x, y, z, u 满足

$$\begin{cases} a+b+c+d=60 \\ x+y+z+u=12 \\ az+bu+cx+dy=168 \end{cases}$$

求 $ay+bx+cu+dz$。

已知 a, b, c, d 成等差数列, 于是

$$\begin{aligned} ay+bx+cu+dz+168 &= ay+bx+cu+dz+(az+bu+cx+dy) \\ &= (a+d)(y+z)+(b+c)(x+u) \\ &= 30(x+y+z+u) = 360 \end{aligned}$$

故

$$ay+bx+cu+dz=192$$

3. 已知 $a_1=-1, a_{n+1}=2a_n-3$, 求 a_{2017}。

由递推式,

$$a_{n+1}-3=2(a_n-3),$$

所以 $a_1-3, a_2-3, \ldots$ 成等比数列, 公比为 2。

$$a_{n+1}-3=2^n(a_1-3)=2^n(-1-3)=-2^{n+2} \Rightarrow a_{2017}=-2^{2018}+3.$$

由

$$a_{n+1}-a_n=2a_n-3-(2a_{n-1}-3)=2(a_n-a_{n-1}),$$

所以 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 为等比数列, 公比为 2, 因此

$$\begin{aligned} a_n &= (a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})+a_1 \\ &= \frac{(a_2-a_1)(2^{n-1}-1)}{2-1}-1 \\ &= (2a_1-3-a_1)(2^{n-1}-1)=-2^{n+1}+3 \end{aligned}$$

所以

$$a_{2017}=-2^{2018}+3$$

4. 若整数 $m\geqslant 1$, 函数 f 满足

$$f(m+1)=m(-1)^{m+1}-2f(m), \quad f(1)=f(2001),$$

求 $f(1)+f(2)+\cdots+f(2000)$。

由递推式可得

$$f(2)=1-2f(1), \quad f(3)=-2-2f(2), \quad f(4)=3-2f(3), \ \ldots, \quad f(2001)=2000-2f(2000),$$

将 $f(2001)$ 替换为 $f(1)$ 并将所有式子相加, 得

$$\sum_{i=1}^{2000} f(i)=1-2+3-4+\cdots+1999-2000-2\sum_{i=1}^{2000} f(i)$$

所以

$$\sum_{i=1}^{2000} f(i)=\frac{1}{3}\left(\frac{2000}{2}-2000\right)=-\frac{1000}{3}$$

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 定义为

$$a_{n+1}=a_n+\frac{2n}{n^4+n^2+1}, \quad a_1=0, \quad n\in\mathbb{N},$$

求 a_{61} 的值。

由递推关系, 对 $n=1,2,\ldots,60$ 累加得

$$a_{61}=a_1+\sum_{n=1}^{60}\frac{2n}{n^4+n^2+1}=\sum_{n=1}^{60}\left(\frac{1}{n^2-n+1}-\frac{1}{n^2+n+1}\right)$$

再由累加法,

$$a_{61}=\frac{1}{1^2-1+1}-\frac{1}{60^2+60+1}=1-\frac{1}{3661}=\frac{3660}{3661}$$

6. 数列 $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots$ 满足 $a_0=3$, 且

$$(3-a_{n-1})(6+a_n)=18,$$

证明

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\frac{1}{3}\left(2^{n+2}-n-4\right)$$

由递推关系

$$(3-a_{n+1})(a_n+6)=18 \implies a_{n+1}=\frac{3a_n}{a_n+6} \tag{1}$$

两边加 3 得到

$$a_{n+1}+3=\frac{3a_n}{a_n+6}+3=\frac{6(a_n+3)}{a_n+6} \tag{2}$$

两式相比得

$$\frac{a_{n+1}+3}{a_{n+1}}=\frac{2(a_n+3)}{a_n}$$

故数列 $\left\{\dfrac{a_n+3}{a_n}\right\}$ 是首项为 2, 公比为 2 的等比数列, 解得

$$\frac{a_n+3}{a_n}=2^{n+1}\Rightarrow a_n=\frac{3}{2^{n+1}-1}$$

因此

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{k+1}-1}{3}=\frac{1}{3}\left(2^{n+2}-n-4\right)$$

7. 设一函数 f 的定义域为所有正整数, 如果 $f(1)=101$, 且对所有正整数 $n>1$ 皆有

$$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n)=n^2f(n)$$

求 $f(100)$ 的值。

发现

$$f(n)=\sum_{k=1}^{n} f(k)-\sum_{k=1}^{n-1} f(k)=n^{2} f(n)-(n-1)^{2} f(n-1)$$

即

$$f(n)=\frac{n-1}{n+1} f(n-1)$$

于是

$$f(100)=\frac{99 \cdot 98 \cdots 1}{101 \cdot 100 \cdots 3} f(1)=\frac{2}{101 \cdot 100} \cdot 101=\frac{1}{50}$$

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}$, 则 $\lfloor a_{2025}\rfloor=$

由题意可知

$$a_{n+1}^{2}=a_{n}^{2}+\frac{1}{a_{n}^{2}}+2$$

所以有

$$a_{2025}^{2}=a_{1}^{2}+2 \times(2025-1)+\left(\frac{1}{a_{1}^{2}}+\frac{1}{a_{2}^{2}}+\cdots+\frac{1}{a_{2024}^{2}}\right)$$

又因为 $a_1=1$, 且有

$$\frac{1}{a_{1}^{2}}+\frac{1}{a_{2}^{2}}+\cdots+\frac{1}{a_{2024}^{2}}<47$$

所以

$$63=\sqrt{3969}<a_{2025}<\sqrt{4096}=64$$

故 $[a_{2025}]=63$.

9. 设 $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ 满足 $f(1)=\frac{3}{2}$, 且对所有 $n \in \mathbb{N}$ 且满足

$$f(n+1)=\left(1+\frac{1}{n+1}\right) f(n)+\left(1+\frac{n}{2}\right) f(1)+n^{2}+2 n,$$

求 $f(40)$。

将递推式改写为

$$f(n+1)=\frac{n+2}{n+1} f(n)+g(n),$$

其中 $g(n)=(n+2)\left(n+\frac{3}{4}\right)$，于是

$$\begin{aligned}
f(40)&=\frac{41}{40}f(39)+g(39)\\
&=\frac{41}{39}f(38)+\frac{41}{40}g(38)+g(39)\\
&=\cdots\\
&=\frac{41}{2}f(1)+\sum_{k=1}^{39}\frac{41}{k+2}\ g(k)\\
&=\frac{41}{2}\cdot\frac{3}{2}+41\sum_{k=1}^{39}(k+\frac{3}{4})\\
&=\frac{123}{4}+\frac{39\cdot 40}{2}+39\cdot\frac{3}{4}\\
&=33210
\end{aligned}$$

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=a_2=a_3=1$，令 $b_n=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}$，$n\in\mathbb{N}$，若 $\{b_n\}$ 是公比为 3 的等比数列，求 a_{100} 的值。

由条件知

$$b_n=b_1\cdot 3^{n-1}=3^n$$

因此

$$a_{n+3}-a_n=b_{n+1}-b_n=3^{n+1}-3^n=2\cdot 3^n$$

于是

$$\begin{aligned}
a_{100}=a_1+\sum_{k=1}^{33}(a_{3k+1}-a_{3k-2})=1+\sum_{k=1}^{33}2\cdot 3^{3k-2}\\
=1+6\cdot\frac{27^{33}-1}{27-1}=1+\frac{3}{13}(3^{99}-1)=\frac{3^{100}+10}{13}
\end{aligned}$$

11. 已知递归数列满足

$$a_1=\frac{1}{2},\quad a_{n+1}=\frac{a_n+3}{2a_n-4},$$

求通项公式 a_n。

先求不动点，设 $x=\dfrac{x+3}{2x-4}$，得 $2x^2-5x-3=0$，所以不动点为 $x=-\dfrac{1}{2}, 3$，于是

$$R_n=\frac{a_n+\frac{1}{2}}{a_n-3}.$$

且

$$R_{n+1}=\frac{a_{n+1}+\frac{1}{2}}{a_{n+1}-3}=-\frac{2}{5}R_n,$$

即 $\{R_n\}$ 为公比 $-\dfrac{2}{5}$ 的等比数列，由于 $R_1=\frac{a_1+\frac{1}{2}}{a_1-3}=-\frac{2}{5}$，故

$$R_n=\left(-\frac{2}{5}\right)^n$$

于是

$$a_n=\frac{3R_n+\frac{1}{2}}{R_n-1}=\frac{6\big(-\frac{2}{5}\big)^n+1}{2\Big(\big(-\frac{2}{5}\big)^n-1\Big)}=\frac{5^n+6(-2)^n}{2\big((-2)^n-5^n\big)}.$$

12. 设实数数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_na_{n+2}-a_{n+1}^2-(n+1)a_na_{n+1}=0$$

已知 $a_1=1, a_2=2018$，求

$$\frac{a_{2018}\cdot a_{2016}}{a_{2017}^2}$$

由递推关系得

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}}{a_n}+(n+1)$$

由 $\dfrac{a_2}{a_1}=2018$，有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=2018+\sum_{k=2}^{n}k=2017+\frac{n(n+1)}{2}$$

故

$$\frac{a_{2018}a_{2016}}{a_{2017}^2}=\frac{2017\left(1+\frac{2018}{2}\right)}{2017\left(1+\frac{2016}{2}\right)}=\frac{1010}{1009}$$

13. 设数列 $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ 满足 $a_1=a_2=1, a_3=2$，且对任意自然数 n，都有

$$a_na_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3},$$

且 $a_n a_{n+1} a_{n+2} \neq 1$, 求 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{100}$。

由

$$a_n a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3}$$

及

$$a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} a_{n+4} = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4}$$

两式相减得

$$(a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} - 1)(a_{n+4} - a_n) = 0$$

因为 $a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} \neq 1$ ，所以 $a_{n+4} = a_n$ ，数列 $\{a_n\}$ 周期为 4, 数列的前四项为 1, 1, 2, 4, 于是

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{100} = 25 \cdot (1 + 1 + 2 + 4) = 200$$

14. 已知函数

$$f(x) = \frac{(x+1)^4 + (x-1)^4}{(x+1)^4 - (x-1)^4}, \quad x \neq 0$$

在数列 $\{a_n\}$ 中,$a_1 = 2, a_{n+1} = f(a_n)$ 。求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

观察到

$$\frac{a_{n+1} - 1}{a_{n+1} + 1} = \frac{f(a_n) - 1}{f(a_n) + 1} = \frac{(a_n - 1)^4}{(a_n + 1)^4} = \left(\frac{a_n - 1}{a_n + 1}\right)^4$$

令 $b_n = \dfrac{a_n - 1}{a_n + 1}$ ，则有

$$b_{n+1} = b_n^4$$

已知 $b_1 = \dfrac{2-1}{2+1} = \dfrac{1}{3}$, 由此可得

$$b_n = b_1^{4^{n-1}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{4^{n-1}}$$

由

$$b_n = \frac{a_n - 1}{a_n + 1} \Rightarrow a_n = \frac{1 + b_n}{1 - b_n},$$

代入得

$$a_n = \frac{3^{4^{n-1}} + 1}{3^{4^{n-1}} - 1}$$

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 中,$a_1 = 2$,

$$a_n = \frac{1 + a_{n-1}}{1 - a_{n-1}},$$

求 $\{a_n\}$ 的通项公式。

通过计算数列的前几项寻找规律:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 2 \\
a_2 &= \frac{1+2}{1-2} = -3 \\
a_3 &= \frac{1-3}{1-(-3)} = -\frac{1}{2} \\
a_4 &= \frac{1-1/2}{1-(-1/2)} = \frac{1}{3} \\
a_5 &= \frac{1+1/3}{1-1/3} = 2 = a_1
\end{aligned}$$

由此可知数列 $\{a_n\}$ 是以 4 为周期的周期数列, 通项公式为

$$a_n = \begin{cases} 2 & n = 4k-3 \\ -3 & n = 4k-2 \\ -\dfrac{1}{2} & n = 4k-1 \\ \dfrac{1}{3} & n = 4k \end{cases}, k \in \mathbb{N}$$

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 由递推关系定义如下:

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2(n+1)}, \quad n \geqslant 0,$$

若函数 f 定义为

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

求 $f(2)$ 的精确值。

根据递推关系, 可以看出所有奇数项 $a_{2n+1} = 0$, 偶数项为

$$a_0 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_4 = \frac{1}{8}, \quad a_6 = \frac{1}{48}, \ldots$$

满足

$$a_{2n} = \frac{1}{2^n n!}$$

因此函数 f 可表示为

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^nn!}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n=e^{\frac{x^2}{2}}$$

所以

$$f(2)=e^2$$

17. 设 $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为一列正实数, 且 $b_0=1$,

$$b_n=2+\sqrt{b_{n-1}}-2\sqrt{1+\sqrt{b_{n-1}}},$$

计算

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n2^n.$$

令 $a_n=1+\sqrt{b_n}$, 其中 $n\geqslant 0$, 则 $a_n>1, a_0=2$, 并且

$$a_n=1+\sqrt{1+a_{n-1}-2\sqrt{a_{n-1}}}=\sqrt{a_{n-1}}$$

因此

$$a_n=2^{2^{-n}}$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}b_n2^n&=\sum_{n=1}^{N}(a_n-1)^22^n\\&=\sum_{n=1}^{N}\left(a_n^22^n-a_n2^{n+1}+2^n\right)\\&=\sum_{n=1}^{N}\left((a_{n-1}-1)^22^n-(a_n-1)^22^{n+1}\right)\\&=(a_0-1)^22-(a_N-1)^22^{N+1}\\&=2-2\frac{2^{2^{-N}}-1}{2^{-N}}\end{aligned}$$

令 $x=2^{-N}$, 当 $N\to\infty$ 时有 $x\to 0$, 由洛必达法则,

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n2^n=\lim_{N\to\infty}\left(2-2\frac{2^{2^{-N}}-1}{2^{-N}}\right)=\lim_{x\to 0}\left(2-2\frac{2^x-1}{x}\right)=2-2\ln 2$$

18. 一列 11 个正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_{11}$ 满足 $a_1 = 4$, $a_{11} = 1024$, 并且对 $2 \leqslant n \leqslant 11$ 有

$$a_n + a_{n-1} = \frac{5}{2}\sqrt{a_n a_{n-1}}.$$

求满足条件的序列数量 S 。

设 $a_n = x, a_{n-1} = y$, 解

$$x + y = \frac{5}{2}\sqrt{xy}$$

得

$$x = 4y \text{ 或 } x = \frac{y}{4}.$$

考虑二叉树, 每一步可以乘以 4 或除以 4。从 $a_1 = 4$ 到 $a_{11} = 1024$ 共 10 步:

$$4^m \cdot 4^{-(10-m)} = 4^4 \Rightarrow m = 7$$

即有 7 步乘以 4,3 步除以 4。可能序列数为选择 3 步除以 4 的位置数:

$$S = {}^{10}C_3 = 120$$

19. 已知复数列 $\{z_n\}$ 满足 $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, z_{n+1} = \overline{z_n}(1 + z_n i)$, 其中 $n \in \mathbb{N}$, 求 z_{2021} 的值。

对 $n \in \mathbb{N}$, 设 $z_n = a_n + b_n i,\ a_n, b_n \in \mathbb{R}$, 则

$$a_{n+1} + b_{n+1}i = z_{n+1} = \overline{z_n}(1 + z_n i) = \overline{z_n} + |z_n|^2 i = a_n - b_n i + (a_n^2 + b_n^2)i$$

因此

$$a_{n+1} = a_n = a_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, b_{n+1} = a_n^2 + b_n^2 - b_n = b_n^2 - b_n + \frac{3}{4}$$

即

$$b_{n+1} - \frac{1}{2} = b_n^2 - b_n + \frac{1}{4} = (b_n - \frac{1}{2})^2$$

所以当 $n \geqslant 2$,

$$b_n = \frac{1}{2} + (b_1 - \frac{1}{2})^{2^{n-1}} = \frac{1}{2} + (-\frac{1}{2})^{2^{n-1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{2^{n-1}}}$$

于是

$$z_{2021} = a_{2021} + b_{2021}i = \frac{\sqrt{3}}{2} + (\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{2^{2020}}})i$$

20. 已知 $a_0 = \frac{1}{2}$,

$$a_n = \left(\frac{1 + a_{n-1}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty} 4^n \cdot (1-a_n)$。

由

$$\cos\theta = \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

可得 $a_0 = \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$, 从而

$$a_1 = \cos\frac{\pi}{3\cdot 2} = \left(\frac{1+\frac{1}{2}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, a_2 = \cos\frac{\pi}{3\cdot 2^2}, \cdots, a_n = \cos\frac{\pi}{3\cdot 2^n}$$

由泰勒展开,

$$a_n = \cos\frac{\pi}{3\cdot 2^n} = 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{3\cdot 2^n}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{\pi}{3\cdot 2^n}\right)^4}{4!} - \cdots$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} 4^n \cdot (1-a_n) = \lim_{n\to\infty} 4^n \cdot \left(\frac{\left(\frac{\pi}{3\cdot 2^n}\right)^2}{2!} - \frac{\left(\frac{\pi}{3\cdot 2^n}\right)^4}{4!} + \cdots\right) = \frac{\pi^2}{9}\cdot\frac{1}{2!} = \frac{\pi^2}{18}$$

21. Let $a_1, a_2, \ldots$ be a sequence of real numbers satisfying

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} - \frac{a_{n+2}}{a_n} - \frac{a_{n+1}a_{n+2}}{a_n^2} = \frac{na_{n+2}a_{n+1}}{a_n}.$$

Given that $a_1 = -1$ and $a_2 = -\frac{1}{2}$, find the value of $\frac{a_9}{a_{20}}$.

(待解)

22. 数列 $1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, \ldots$ 的第 100 项是?

一般地, 数字 n 出现 n 项, 因此从数字 1 到数字 n 共出现

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

项, 由 $\dfrac{n(n+1)}{2} \leqslant 100$ 得 $n < 14$, 取 $n = 13$ 时共有 91 项, 因此第 100 项为 14。

23. 等差数列 $1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots$ 按如下方法分组

$$(1), (3, 5), (7, 9, 11), (13, 15, 17, 19), \ldots$$

求第 n 组中 n 个数的和 S_n。

等差数列 $1,3,5,7,...$ 的通项公式为

$$a_n = 2n - 1.$$

第 n 组有 n 个奇数, 因此第 n 组的第 n 个奇数是等差数列中的第

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

个奇数, 且第 n 组的第 1 个奇数是等差数列中的第

$$\frac{n(n+1)}{2} - (n-1) = \frac{n^2 - n + 2}{2}$$

故第 n 组中第 n 个奇数是

$$2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - 1 = n^2 + n - 1$$

第 n 组中第 1 个奇数是

$$2 \cdot \frac{n^2 - n + 2}{2} - 1 = n^2 - n + 1$$

所以

$$S_n = \frac{n[(n^2 + n - 1) - (n^2 - n + 1)]}{2} = n^3$$

24. 已知数列 $\{a_n\}$, 且 $a_1 = 1$, 定义 $S_n = n^2 a_n$. 求 a_n 和 S_n。

由

$$a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 a_n - (n-1)^2 a_{n-1} \Rightarrow (n^2 - 1)a_n = (n-1)^2 a_{n-1}$$

于是

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n-1}{n+1}.$$

因此

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \cdots \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{2}{n(n+1)}$$

且

$$S_n = n^2 a_n = \frac{2n}{n+1}.$$

25. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 公差 $d = 2$, $a_1 + a_2 + \cdots + a_{100} = 100$, 求 $a_4 + a_8 + \cdots + a_{100}$ 的值。

由

$$a_1+a_2+\cdots+a_{100}=100,$$

解得

$$100a_1+\frac{100\cdot 99}{2}\cdot 2=100 \Rightarrow a_1=-98$$

于是 $a_4=-92, a_100=100,$

$$a_4+a_8+\cdots+a_{100}=\frac{25}{2}(-92+100)=100.$$

26. 已知 $F_1=0, F_2=1$ ，求斐波那契数列 $F_n+F_{n+1}=F_{n+2}$ 的通项 F_n 。

数列

$$F_n+F_{n+1}=F_{n+2}$$

的特征方程为

$$1+\lambda=\lambda^2$$

解得

$$\lambda_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \lambda_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

于是

$$F_n=C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}+C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

代入初值 $F_1=0, F_2=1$ 解得

$$C_1=\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad C_2=-\frac{1}{\sqrt{5}}$$

因此

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right]$$

27. 已知数列 $a_1=1, a_2=5$ ，且 $a_{n+1}=4a_n-4a_{n-1}, n\geqslant 2$ ，求通项公式 a_n 。

此数列对应特征方程为

$$\lambda^2-4\lambda+4=0$$

解得 $\lambda_1=\lambda_2=2$, 设此数列的通项公式为

$$a_n=(C_1+nC_2)\cdot 2^n$$

代入初值 $a_1=1,a_2=5$ 可知

$$C_1=-\frac{1}{4},\quad C_2=\frac{3}{4}$$

所以

$$a_n=(3n-1)\cdot 2^{n-2}$$

28. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_0=1,a_1=4$, 且

$$a_{n+2}-14a_{n+1}+a_n+6=0.$$

求证 a_n 是完全平方数。

将递推式化为

$$\left(a_{n+2}-\frac{1}{2}\right)-14\left(a_{n+1}-\frac{1}{2}\right)+\left(a_n-\frac{1}{2}\right)=0$$

令 $b_n=a_n-\frac{1}{2}$, 且 $b_0=\frac{1}{2},b_1=\frac{7}{2}$, 则

$$b_{n+2}-14b_{n+1}+b_n=0$$

由特征方程 $\lambda^2-14\lambda+1=0$ 得两根

$$\lambda_1=7+4\sqrt{3},\lambda_2=7-4\sqrt{3}$$

故设

$$b_n=C_1\lambda_1^n+C_2\lambda_2^n,$$

由 $n=0,1$ 时条件解得 $C_1=C_2=\frac{1}{4}$, 因此

$$b_n=\frac{1}{4}(7+4\sqrt{3})^n+\frac{1}{4}(7-4\sqrt{3})^n=\frac{1}{4}(2+\sqrt{3})^{2n}+\frac{1}{4}(2-\sqrt{3})^{2n}$$

则

$$a_n=b_n+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}(2+\sqrt{3})^{2n}+\frac{1}{4}(2-\sqrt{3})^{2n}+\frac{1}{2}=\left[\frac{(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n}{2}\right]^2$$

因为 $(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n$ 为偶数, 所以 a_n 是完全平方数, 故得证。

29. 设

$$D_1=4,\quad D_2=\begin{vmatrix}4&2\\2&4\end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix}4&2&0\\2&4&2\\0&2&4\end{vmatrix},\ldots$$

求 D_{10} 。

观察到

$$D_n=4D_{n-1}-4D_{n-2}$$

特征方程为

$$\lambda^2=4\lambda-4$$

解得 $\lambda_1=\lambda_2=2$, 设

$$D_n=(C_1+nC_2)\cdot 2^{n-1}$$

由 $D_1=4,D_2=12$, 解得 $C_1=2,C_2=2$, 因此

$$D_n=(2+2n)\cdot 2^{n-1}=(n+1)\cdot 2^n$$

当 $n=10$ 时,

$$D_{10}=11\cdot 1024=11264$$

30. 已知对任意 x,

$$f(x+1)+f(x-1)=\sqrt{2}f(x),$$

且 $f(1)=2,f(2)=1$, 求 $f(2010)$ 。

将 $f(x+1)+f(x-1)=\sqrt{2}f(x)$ 化为

$$a_{n+2}+a_n=\sqrt{2}a_{n+1}$$

且 $a_1=2,a_2=1$, 特征方程为

$$\lambda^2-\sqrt{2}\lambda+1=0$$

解得

$$\lambda=\frac{\sqrt{2}}{2}\pm i\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4}\pm i\sin\frac{\pi}{4}$$

则

$$a_n=C_1\cos\frac{n\pi}{4}+C_2\sin\frac{n\pi}{4}$$

代入 $a_1=2, a_2=1$ 得 $C_1=2\sqrt{2}-1, C_2=1$, 于是

$$a_{2010}=(2\sqrt{2}-1)\cos\frac{2010\pi}{4}+\sin\frac{2010\pi}{4}=1$$

31. 一实数列 $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ 定义为

$$u_1=\sqrt{2}, \quad u_2=\pi, \quad u_n=u_{n-1}-u_{n-2} \quad \forall n\geqslant 3$$

求 u_n, u_{2008} 及 u_{2016}。

由递推关系 $u_n-u_{n-1}+u_{n-2}=0$, 其特征方程为

$$x^2-x+1=0$$

求得特征根为

$$x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}=\cos\frac{\pi}{3}\pm i\sin\frac{\pi}{3}$$

因此数列的通项公式形式为

$$u_n=C_1\cos\frac{n\pi}{3}+C_2\sin\frac{n\pi}{3}$$

代入初始条件 $u_1=\sqrt{2}, u_2=\pi$, 解得

$$C_1=\sqrt{2}-\pi, \quad C_2=\frac{\sqrt{2}+\pi}{\sqrt{3}}$$

故通项公式为

$$u_n=(\sqrt{2}-\pi)\cos\frac{n\pi}{3}+\frac{\sqrt{2}+\pi}{\sqrt{3}}\sin\frac{n\pi}{3}$$

令 $n=2016$, 可得

$$u_{2016}=\sqrt{2}-\pi$$

32. 已知数列 $\{a_n\}$ 中,$a_1=1$,

$$S_n=\frac{S_{n-1}}{2S_{n-1}+1},$$

求 $\{a_n\}$ 的通项公式。

有

$$\frac{1}{S_n}=\frac{2S_{n-1}+1}{S_{n-1}}=\frac{1}{S_{n-1}}+2$$

说明数列 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 是以 $\frac{1}{S_1}=\frac{1}{a_1}=1$ 为首项, 2 为公差的等差数列, 则

$$\frac{1}{S_n}=1+(n-1)\cdot 2=2n-1\Rightarrow S_n=\frac{1}{2n-1}$$

当 $n\geqslant 2$ 时,

$$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n-3}=-\frac{2}{(2n-1)(2n-3)}$$

故通项公式为

$$a_n=\begin{cases}1 & ,n=1\\ -\dfrac{2}{(2n-1)(2n-3)} & ,n\geqslant 2\end{cases}$$

33. 已知正数数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和

$$S_n=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right),$$

求 $\{a_n\}$ 的通项公式。

当 $n=1$ 时,

$$a_1=S_1=\frac{1}{2}\left(a_1+\frac{1}{a_1}\right)\Rightarrow a_1^2=1\Rightarrow a_1=1>0$$

当 $n\geqslant 2$ 时, 有

$$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}-a_{n-1}-\frac{1}{a_{n-1}}\right)$$

$$a_n+a_{n-1}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}=\frac{a_{n-1}-a_n}{a_na_{n-1}}$$

由于 $a_n+a_{n-1}>0$, 等式两边同除以 (a_n+a_{n-1}) 得:

$$1=\frac{a_{n-1}-a_n}{(a_n+a_{n-1})a_na_{n-1}}$$

经观察或递推可得 $S_n=\sqrt{n}$ 满足原式, 则 $a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$ 。验证: 当 $a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$ 时,$\frac{1}{a_n}=\sqrt{n}+\sqrt{n-1}$, 则 $\frac{1}{2}(a_n+\frac{1}{a_n})=\frac{1}{2}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}+\sqrt{n}+\sqrt{n-1})=\sqrt{n}=S_n$, 符合题意。故 $a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$ 。(待验证)

34. 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$ 且 $a_n a_{n+1} = 4^n$, 求前 n 项和 S_n。

由题意,

$$\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} = 4,$$

故 $\{a_1, a_3, a_5, \dots\}$ 与 $\{a_2, a_4, a_6, \dots\}$ 皆为公比为 4 的等比数列, 其中

$$a_1 = 1, a_2 = 4,$$

当 n 为奇数,

$$\begin{aligned} S_n &= (a_1 + a_3 + \cdots + a_n) + (a_2 + a_4 + \cdots + a_{n-1}) \\ &= \frac{1(1 - 4^{\frac{n+1}{2}})}{1-4} + \frac{4(1 - 4^{\frac{n-1}{2}})}{1-4} = \frac{2^{n+1} - 1}{3} + \frac{2^{n+1} - 4}{3} = \frac{4}{3} \cdot 2^n - \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

当 n 为偶数,

$$\begin{aligned} S_n &= (a_1 + a_3 + \cdots + a_{n-1}) + (a_2 + a_4 + \cdots + a_n) \\ &= \frac{1(1 - 4^{\frac{n}{2}})}{1-4} + \frac{4(1 - 4^{\frac{n}{2}})}{1-4} = \frac{5}{3} \cdot 2^n - \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

综上,

$$S_n = \frac{9 + (-1)^n}{3} \cdot 2^{n-1} - \frac{5}{3}$$

35. 已知数列 $\{x_n\}$ 的首项 $x_1 = 3$, 通项

$$x_n = 2^n p + nq, \quad n \in \mathbb{N}, \quad p, q \in \mathbb{R},$$

且 x_1, x_4, x_5 成等差数列, 求:

(a) p, q 的值;

由 $x_1 = 3$, 得

$$2p + q = 3 \tag{1}$$

又 $x_1 + x_5 = 2x_4$, 得

$$3 + 2^5 p + 5q = 2(2^4 p + 4q) \tag{2}$$

解得

$$p = 1, \quad q = 1$$

(b) 数列 $\{x_n\}$ 的前 n 项的和 S_n 的公式。

有

$$S_n = (2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n) + (1 + 2 + \cdots + n) = 2^{n+1} - 2 + \frac{n(n+1)}{2}$$

36. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为

$$S_n = 2a_n - 2^n.$$

(a) 求 a_1, a_4；

当 $n = 1$ 时，解得

$$S_1 = a_1 = 2a_1 - 2 \Rightarrow a_1 = 2$$

由 $S_n = 2a_n - 2^n$，得

$$2a_{n+1} = S_{n+1} + 2^{n+1} = a_{n+1} + S_n + 2^{n+1}$$

从而

$$a_{n+1} = S_n + 2^{n+1}$$

因此

$$a_2 = S_1 + 2^2 = 6,\ S_2 = 8,\ a_3 = S_2 + 2^3 = 16,\ S_3 = 24,\ a_4 = S_3 + 2^4 = 40.$$

(b) 证明 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ 是等比数列；

由上式可得

$$a_{n+1} - 2a_n = (S_n + 2^{n+1}) - (S_n + 2^n) = 2^n$$

故数列 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ 是首项为 2、公比为 2 的等比数列。

(c) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

由

$$a_{n+1} - 2a_n = 2^n$$

得

$$a_n = (a_n - 2a_{n-1}) + 2(a_{n-1} - 2a_{n-2}) + \cdots + 2^{n-2}(a_2 - 2a_1) + 2^{n-1}a_1.$$

代入 $a_1 = 2,\ a_2 = 6$，并利用 $a_{k+1} - 2a_k = 2^k$，可得

$$a_n = 2^{n-1}(n+1)$$

37. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = \frac{2}{3}$, 且

$$a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n + 1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

(a) 证明数列 $\left\{\frac{1}{a_n} - 1\right\}$ 是等比数列;

由

$$a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n + 1}$$

得

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{a_n + 1}{2a_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a_n}.$$

于是

$$\frac{1}{a_{n+1}} - 1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_n} - 1\right).$$

又

$$a_1 = \frac{2}{3}, \quad \frac{1}{a_1} - 1 = \frac{1}{2}.$$

因此, 数列 $\left\{\frac{1}{a_n} - 1\right\}$ 是首项为 $\frac{1}{2}$、公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列。

(b) 求数列 $\left\{\frac{n}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和 S_n。

由 (a) 可得

$$\frac{1}{a_n} - 1 = \frac{1}{2}\ cdot \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n} \Rightarrow \frac{n}{a_n} = \frac{n}{2^n} + n$$

设

$$T_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n},$$

则

$$\frac{1}{2}T_n = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \cdots + \frac{n-1}{2^n} + \frac{n}{2^{n+1}}$$

两式相减得

$$\frac{1}{2}T_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}} \Rightarrow T_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n}$$

又因为

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

所以数列 $\left\{\frac{n}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和 S_n 为

$$S_n = 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n + 4}{2} - \frac{n+2}{2^n}$$

38. 等差数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, $a_1=3$, 前 n 项和为 S_n, $\{b_n\}$ 为等比数列, $b_1=1$, 且

$$b_2S_2=64,\quad b_3S_3=960.$$

(a) 求 a_n 与 b_n;

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d, 等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q。则

$$a_n=3+(n-1)d,\quad b_n=q^{n-1}.$$

由

$$S_2=3+(3+d)=6+d,\quad S_3=3+(3+d)+(3+2d)=9+3d,$$

代入已知条件得

$$(6+d)q=64,\quad (9+3d)q^2=960$$

解得

$$d=2,\ q=8 \quad \text{或} \quad d=-\frac{6}{5},\ q=\frac{40}{3}$$

因 $\{a_n\}$ 各项均为正数, 舍去第二组解, 故

$$a_n=3+2(n-1)=2n+1,\quad b_n=8^{n-1}.$$

(b) 求

$$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_n}.$$

由 $a_n=2n+1$ 得

$$S_n=3+5+\cdots+(2n+1)=n(n+2).$$

因此

$$\begin{aligned}
\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_n}&=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}\\
&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\\
&=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

39. 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 前 n 项的和, 已知 $\frac{1}{3}S_3$ 与 $\frac{1}{4}S_4$ 的等比中项为 $\frac{1}{5}S_5$, 等差中项为 1, 求等差数列的通项 a_n。

由 $(S_3)(S_4)=(S_5)^2$ 及 $\frac{1}{3}S_3+\frac{1}{4}S_4=2$ 得

$$\begin{cases}\frac{1}{3}\left(3a+\frac{3\cdot 2}{2}d\right)\cdot\frac{1}{4}\left(4a+\frac{4\cdot 3}{2}d\right)=\frac{1}{25}\left(5a+\frac{5\cdot 4}{2}d\right)^2\\ \frac{1}{3}\left(3a+\frac{3\cdot 2}{2}d\right)+\frac{1}{4}\left(4a+\frac{4\cdot 3}{2}d\right)=2\end{cases}$$

解得

$$d=0,a=1 \text{ 或 } d=-\frac{12}{5},a=4$$

经检验得通项解为 $a_n=1$ 或

$$a_n=4-\frac{12}{5}(n-1)=\frac{32}{5}-\frac{12}{5}n$$

40. 已知数列 $\{a_n\}$ 中每一项均为正数, 且数列前 n 项之和为 S_n, 若

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{4S_k}{a_k+2}=S_n,$$

试求 a_n 及 S_n。

由递推关系得

$$S_1=a_1=\frac{4a_1}{a_1+2}\Rightarrow a_1^2-2a_1=0$$

因 $a_1\neq 0$, 解得 $a_1=2$, 于是

$$a_n=S_n-S_{n-1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{4S_k}{a_k+2}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{4S_k}{a_k+2}=\frac{4S_n}{a_n+2}\Rightarrow S_n=\frac{1}{4}a_n(a_n+2)$$

又

$$S_{n-1}=S_n-a_n=\frac{1}{4}a_n^2-\frac{1}{2}a_n=\frac{1}{4}a_{n-1}(a_{n-1}+2)$$

因此

$$a_n^2-2a_n=a_{n-1}^2+2a_{n-1}\Rightarrow(a_n-1)^2=(a_{n-1}+1)^2\Rightarrow a_n-1=a_{n-1}+1$$

即

$$a_n=a_{n-1}+2=\cdots=a_1+2(n-1)=2n,S_n=n^2+n$$

41. 已知 $n^2(n \geqslant 4)$ 个正数排成 n 行、n 列, 如下:

$$\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \ldots & a_{nn} \end{array}$$

且每一行的数成等差数列, 每一列的数成等比数列, 并且所有公比相等。已知

$$a_{24}=1, a_{42}=\frac{1}{8}, a_{43}=\frac{3}{16},$$

试求

$$a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$$

的值。

设每一列的公比为 q , 第 i 行的等差数列公差为 d_i, 由每一列成等比数列且公比相等可知

$$a_{ij}=a_{1j}\cdot q^{i-1}$$

对于第四行, $a_{42}=\frac{1}{8}, a_{43}=\frac{3}{16}$, 则公差为 $d_4=a_{43}-a_{42}=\frac{1}{16}$, 据此有

$$a_{44}=a_{43}+d_4=\frac{1}{4},$$

又已知 $a_{24}=1$, 且第四列成等比数列, 则

$$a_{44}=a_{24}\cdot q^2 \Rightarrow q=\frac{1}{2}>0$$

由

$$a_{1j}=a_{4j}\cdot 2^3=8\cdot\frac{j}{16}=\frac{j}{2}$$

因此

$$a_{ii}=a_{1i}\cdot q^{i-1}=\frac{i}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}=\frac{i}{2^i}$$

所求和为

$$S=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=\frac{1}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\cdots+\frac{n}{2^n}$$

利用错位相减法,

$$\frac{1}{2}S=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^{n+1}}$$

$$\frac{1}{2}S=\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}$$
$$\frac{1}{2}S=(1-\frac{1}{2^n})-\frac{n}{2^{n+1}}$$

得

$$S=2-\frac{n+2}{2^n}$$

42. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\begin{cases} a_0=1 \\ a_{2k+1}=a_k \\ a_{2k+2}=a_k+a_{k+1} \end{cases}, k\in N\cup\{0\}$，求 $\sum\limits_{k=0}^{63}a_k$。

记

$$S(n)=\sum_{k=0}^{2^n-1}a_k$$

则

$$S(n)=(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{2^n-2})+(a_1+a_3+\cdots+a_{2^n-1})$$

其中偶数项为

$$a_0+(a_0+a_1)+(a_1+a_2)+(a_2+a_3)+\cdots+(a_{2^{n-1}-2}+a_{2^{n-1}-1})=2(a_0+a_1+\cdots+a_{2^{n-1}-2})+a_{2^{n-1}-1}$$

奇数项为

$$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{2^{n-1}-1}$$

所以

$$S(n)=3(a_0+a_1+\cdots+a_{2^{n-1}-2})+2a_{2^{n-1}-1}=3(a_0+a_1+\cdots+a_{2^{n-1}-1})-a_{2^{n-1}-1}$$

由 $a_{2^{n-1}-1}=1$，得

$$S(n)=3S(n-1)-1$$

于是

$$S(8)=3S(7)-1=3^2S(6)-3-1=\cdots=3^5S(1)-(1+3+\cdots+3^4)$$

又 $S(1)=a_0+a_1=2$，所以

$$S(8)=243\cdot 2-121=365$$

43. 已知各项皆为正整数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 且对任意正整数 n 有

$$\sqrt{S_n}=\lambda(a_n-1)+1,$$

其中 λ 为正实数。若 $2a_2=a_1+a_3$, 试求数列 $\{a_n\}$ 的一般项。

由 $2a_2=a_1+a_3$, 设

$$d=a_2-a_1=a_3-a_2$$

则

$$\sqrt{S_2}-\sqrt{S_1}=\lambda(a_2-a_1)=\lambda(a_3-a_2)=\sqrt{S_3}-\sqrt{S_2}\Rightarrow 2\sqrt{S_2}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_3}$$

两边平方得

$$4S_2=S_1+S_3+2\sqrt{S_1S_3}\Rightarrow 4(2a_1+d)=4a_1+3d+2\sqrt{a_1(3a_1+3d)}$$

解得 $d=2a_1$, 则

$$S_1=a_1,\ S_2=4a_1,\ S_3=9a_1$$

解

$$\lambda=\sqrt{S_2}-\frac{1}{a_2-1}=\sqrt{S_3}-\frac{1}{a_3-1}$$

得 $a_1=1,\lambda=\dfrac{1}{2}$, 于是

$$\begin{aligned}\sqrt{S_n}&=\frac{1}{2}(a_n-1)+1\\ a_n=S_n-S_{n-1}&=2\sqrt{S_n}-1\\ (\sqrt{S_n}-1)^2&=S_{n-1}\\ \sqrt{S_n}&=\sqrt{S_{n-1}}+1\\ \frac{a_n+1}{2}&=\frac{a_{n-1}+1}{2}+1\end{aligned}$$

故

$$a_n=a_{n-1}+2=a_{n-2}+4=\cdots=a_1+2(n-1)=2n-1$$

44. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_{n+1}=\dfrac{a_n^2}{2a_n+1}$, 求通项公式并证明

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{1+a_k}<\frac{7}{8}.$$

由递推式

$$a_{n+1}=\frac{a_n^2}{2a_n+1},$$

可得

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2a_n+1}{a_n^2}=\frac{2}{a_n}+\frac{1}{a_n^2},$$

从而

$$1+\frac{1}{a_{n+1}}=1+\frac{2}{a_n}+\frac{1}{a_n^2}=\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^2.$$

取对数, 得

$$\log\left(1+\frac{1}{a_{n+1}}\right)=2\log\left(1+\frac{1}{a_n}\right).$$

因此数列 $\left\{\log\left(1+\frac{1}{a_n}\right)\right\}$ 是首项为 $\log 2$、公比 2 的等比数列, 于是

$$\log\left(1+\frac{1}{a_n}\right)=2^{n-1}\log 2=\log\left(2^{2^{n-1}}\right),$$

即

$$1+\frac{1}{a_n}=2^{2^{n-1}}\Rightarrow a_n=\frac{1}{2^{2^{n-1}}-1}.$$

且有

$$\frac{a_n}{1+a_n}=\frac{1}{2^{2^{n-1}}}.$$

所以

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{1+a_k}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^{2^{n-1}}}.$$

注意当 $n\geqslant 4$ 时, 有

$$2^{n-1}>n+1\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n-1}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{1+a_k}&<\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\sum_{k=5}^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^k\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}\right)}{1-\frac{1}{2}}\\&=\frac{7}{8}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}<\frac{7}{8}\end{aligned}$$

当 $n=1,2,3$ 时直接检验, 亦满足不等式, 故

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{1+a_k}<\frac{7}{8},\quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

45. 设各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_1=2,a_n=a_{n+1}^{\frac{3}{2}}a_{n+2}$$

其中 $n\geqslant 2$。

(a) 若 $a_2=\dfrac{1}{4}$, 求 a_3,a_4, 并猜想 a_{2008} 的值 (不需证明);

因

$$a_1=2\left(-2\right)^0,a_2=2\left(-2\right)^{\frac{1}{4}},a_3=2\left(-2\right)^{\frac{1}{2}},a_4=2\left(-2\right)^{\frac{3}{4}}$$

从而猜想 a_n 的通项为

$$a_n=2\left(-2\right)^{\frac{n-1}{4}}$$

据此有

$$a_{2008}=2\left(-2\right)^{\frac{2007}{4}}$$

(b) 若

$$2\sqrt{2}\leqslant a_1a_2\cdots a_n<4$$

对 $n\geqslant 2$ 恒成立, 求 a_2 的值.

令 $x_n=\log_2 a_n$, 则 $a_2=2^{x_2}$, 求 x_2 即可。设 S_n 表示 x_n 的前 n 项和, 则

$$a_1a_2\cdots a_n=2^{S_n}$$

由 $2\sqrt{2}\leqslant a_1a_2\cdots a_n<4$ 得

$$\frac{3}{2}\leqslant S_n=x_1+x_2+\cdots+x_n<2,\quad n\geqslant 2$$

由于上式对 $n=2$ 成立, 可得

$$\frac{3}{2}\leqslant x_1+x_2<2$$

由 $a_1=2$ 得 $x_1=1$, 故 $x_2\geqslant\dfrac{1}{2}$, 又由 $a_1=2,a_1=2,a_n=a_{n+1}^{\frac{3}{2}}a_{n+2}$ 得

$$x_n=\frac{3}{2}x_{n+1}+x_{n+2},\quad n\geqslant 2$$

即

$$x_{n+2}+2x_{n+1}=x_{n+2}+\frac{3}{2}x_{n+1}+\frac{1}{2}x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_{n+1}+2x_n)$$

由此可知数列 $\{x_{n+1}+2x_n\}$ 是首项为 x_2+2, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列, 故

$$x_{n+1}+2x_n=(x_2+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

对 n 求和得

$$S_{n+1}-x_1+2S_n=(x_2+2)\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)=(x_2+2)\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

因 $S_n<2, S_{n+1}<2$, 且 $x_1=1$, 故

$$(x_2+2)\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}\right)=S_{n+1}+2S_n-1<2+4-1=5$$

由此整理得:

$$2x_2-1<\frac{x_2+2}{2^{n-1}},\quad n\geqslant 2$$

下证 $x_2\leqslant\frac{1}{2}$。假设 $x_2>\frac{1}{2}$, 则由上式可知

$$2^{n-1}<\frac{x_2+2}{2x_2-1}$$

对 $n\geqslant 2$ 恒成立, 但这对于趋于无穷的 n 是不可能的, 因此必有

$$x_2\leqslant\frac{1}{2}$$

又已知 $x_2\geqslant\frac{1}{2}$, 故 $x_2=\frac{1}{2}$, 所以

$$a_2=2^{x_2}=\sqrt{2}$$

46. 在数列 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$ 是各项均为正数的等比数列, 设

$$c_n=\frac{b_n}{a_n},\quad n\in\mathbb{N}$$

(a) 数列 $\{c_n\}$ 是否为等比数列？证明你的结论。

设 $\{a_n\}$ 的公比为 $q_1 > 0, \{b_n\}$ 的公比为 $q_2 > 0$, 则

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} \cdot \frac{a_n}{b_n} = \frac{b_{n+1}}{b_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{q_2}{q_1} \neq 0,$$

故 $\{c_n\}$ 是公比为 $\frac{q_2}{q_1}$ 的等比数列。

(b) 设数列 $\{\ln a_n\}, \{\ln b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n, T_n。若 $a_1 = 2$,

$$\frac{S_n}{T_n} = \frac{n}{2n+1},$$

求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和。

因 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$ 为等比数列,

$$S_n = n \ln a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \ln q_1, \quad T_n = n \ln b_1 + \frac{n(n-1)}{2} \ln q_2$$

由题意

$$\frac{n \ln a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \ln q_1}{n \ln b_1 + \frac{n(n-1)}{2} \ln q_2} = \frac{n}{2n+1}$$

化简得对一切 n 成立的多项式恒等式:

$$(2 \ln q_1 - \ln q_2)n^2 + (4 \ln a_1 - \ln q_1 - 2 \ln b_1 + \ln q_2)n + (2 \ln a_1 - \ln q_1) = 0$$

于是由

$$\begin{cases} 2 \ln q_1 - \ln q_2 = 0 \\ 4 \ln a_1 - \ln q_1 - 2 \ln b_1 + \ln q_2 = 0 \\ 2 \ln a_1 - \ln q_1 = 0 \end{cases}$$

及 $a_1 = 2$ 解得

$$q_1 = 4, \quad q_2 = 16, \quad b_1 = 8$$

故

$$c_n = \frac{b_n}{a_n} = \frac{8 \cdot 16^{n-1}}{2 \cdot 4^{n-1}} = 4^n$$

所以数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_n = 4 + 4^2 + \cdots + 4^n = \frac{4}{3}(4^n - 1)$$

47. 将数列 $\{a_n\}$ 中的所有项按每一行比上一行多一项的规则排成如下

$$\begin{array}{l} a_1 \\ a_2,\ a_3 \\ a_4,\ a_5,\ a_6 \\ a_7,\ a_8,\ a_9,\ a_{10} \end{array}$$

记表中的第一列数 $a_1, a_2, a_4, a_7, \cdots$ 构成的数列为 $\{b_n\}$, 且 $b_1 = a_1 = 1$。S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 且满足

$$\frac{2b_n}{b_nS_n - S_n^2} = 1, \quad n \geqslant 2$$

(a) 证明数列 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 成等差数列, 并求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

由 $b_n = S_n - S_{n-1}$, 当 $n \geqslant 2$,

$$\frac{2(S_n - S_{n-1})}{(S_n - S_{n-1})S_n - S_n^2} = 1$$

化简得

$$\frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n-1}} = \frac{1}{2}.$$

又 $S_1 = b_1 = 1$, 故数列 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 是首项为 1, 公差为 $\frac{1}{2}$ 的等差数列,

$$\frac{1}{S_n} = 1 + \frac{1}{2}(n-1) = \frac{n+1}{2} \Rightarrow S_n = \frac{2}{n+1}$$

则

$$b_n = S_n - S_{n-1} = \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n} = -\frac{2}{n(n+1)}$$

因此

$$b_n = \begin{cases} 1 & , n = 1, \\ -\dfrac{2}{n(n+1)} & , n \geqslant 2 \end{cases}$$

(b) 若从第三行起, 每一行中的数按从左到右的顺序均构成等比数列, 且公比为同一个正数。当 $a_{81} = -\frac{4}{91}$ 时, 求上表中第 $k \geqslant 3$ 行所有项的和。

设从第三行起, 每一行的公比为 $q > 0$。因为

$$1 + 2 + \cdots + 12 = \frac{12 \cdot 13}{2} = 78,$$

所以表中第 1 行至第 12 行共含有数列 $\{a_n\}$ 的前 78 项, 故 a_{81} 在表中第 13 行第 3 列, 于是

$$a_{81} = b_{13}q^2 = -\frac{4}{91}.$$

又

$$b_{13} = -\frac{2}{13 \cdot 14},$$

解得 $q = 2$, 记表中第 $k \geqslant 3$ 行所有项的和为 S, 则

$$S = -\frac{2}{k(k+1)} \cdot \frac{1-2^k}{1-2} = \frac{2}{k(k+1)}(1-2^k), \quad k \geqslant 3$$

48. 数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_1 = 0,\ a_2 = 2,\ a_{n+2} = \left(1 + \cos^2 \frac{n\pi}{2}\right) a_n + 4\sin^2 \frac{n\pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

(a) 求 a_3, a_4, 并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

已知 $a_1 = 0, a_2 = 2$, 则

$$a_3 = \left(1 + \cos^2 \frac{\pi}{2}\right) a_1 + 4\sin^2 \frac{\pi}{2} = 4, \quad a_4 = \left(1 + \cos^2 \pi\right) a_2 + 4\sin^2 \pi = 4$$

一般地, 当 $n = 2k-1,\ k \in \mathbb{N}$ 时,

$$a_{2k+1} = \left(1 + \cos^2 \frac{(2k-1)\pi}{2}\right) a_{2k-1} + 4\sin^2 \frac{(2k-1)\pi}{2} = a_{2k-1} + 4$$

即

$$a_{2k+1} - a_{2k-1} = 4$$

因此 $\{a_{2k-1}\}$ 为首项为 0, 公差为 4 的等差数列,

$$a_{2k-1} = 4(k-1)$$

当 $n = 2k,\ k \in \mathbb{N}$ 时,

$$a_{2k+2} = \left(1 + \cos^2 \frac{2k\pi}{2}\right) a_{2k} + 4\sin^2 \frac{2k\pi}{2} = 2a_{2k}$$

因此 $\{a_{2k}\}$ 为首项为 2, 公比为 2 的等比数列,

$$a_{2k} = 2^k$$

综上,

$$a_n = \begin{cases} 4(k-1), & n = 2k-1,\ k \in \mathbb{N} \\ 2^k, & n = 2k,\ k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(b) 设

$$S_k = a_1 + a_3 + \cdots + a_{2k-1}, \quad T_k = a_2 + a_4 + \cdots + a_{2k}, \quad W_k = \frac{2S_k}{2+T_k}, \quad k \in \mathbb{N},$$

求使 $W_k > 1$ 的所有 k 的值。

由 (1) 得

$$S_k = 0 + 4 + \cdots + 4(k-1) = 2k(k-1), \quad T_k = 2 + 2^2 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 2$$

于是

$$W_k = \frac{2S_k}{2+T_k} = \frac{4k(k-1)}{2^{k+1}} = \frac{k(k-1)}{2^{k-1}}$$

计算得

$$W_1 = 0, \quad W_2 = 1, \quad W_3 = \frac{3}{2}, \quad W_4 = \frac{3}{2}, \quad W_5 = \frac{5}{4}, \quad W_6 = \frac{15}{16}$$

当 $k \geqslant 6$ 时,

$$W_{k+1} - W_k = \frac{(k+1)k}{2^k} - \frac{k(k-1)}{2^{k-1}} = \frac{k(3-k)}{2^k} < 0$$

故 $\{W_k\}$ 单调递减, 又 $W_6 < 1$, 因此当 $k \geqslant 6$ 时 $W_k < 1$。综上, 满足 $W_k > 1$ 的所有 k 为

$$k = 3, 4, 5$$

49. 证明由正实数组成的数列 $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是等比数列当且仅当

$$\left(a_0a_1 + a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n\right)^2 = \left(a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_{n-1}^2\right)\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right).$$

充分条件: 已知 $a_0, a_1, \ldots, a_n$ 是等比数列, 设 $a_k = a_0r^k$, $1 \leqslant k \leqslant n$, 于是

$$a_0a_1 + a_1a_2 + \ldots + a_{n-1}a_n = a_0^2(r + r^3 + \ldots + r^{2n-1}) = a_0^2r\left(1 + r^2 + \ldots + r^{2n-2}\right)$$

且

$$\begin{aligned}(a_0^2 + a_1^2 + \ldots + a_{n-1}^2)(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) &= a_0^4(1 + r^2 + \ldots + r^{2n-2})(r^2 + r^4 + \ldots + r^{2n}) \\ &= a_0^4r^2\left(1 + r^2 + \ldots + r^{2n-2}\right)^2\end{aligned}$$

故得证

$$(a_0a_1 + a_1a_2 + \ldots + a_{n-1}a_n)^2 = (a_0^2 + a_1^2 + \ldots + a_{n-1}^2)(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)$$

必要条件: 已知

$$(a_0a_1+a_1a_2+\ldots+a_{n-1}a_n)^2=(a_0^2+a_1^2+\ldots+a_{n-1}^2)(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)$$

考虑函数

$$f(r)=\sum_{k=1}^{n}(a_k-ra_{k-1})^2=r^2\sum_{k=1}^{n}a_{k-1}^2-2r\sum_{k=1}^{n}a_ka_{k-1}+\sum_{k=1}^{n}a_k^2$$

观察得 $f(r)\geqslant 0\quad \forall r$, 又关于 r 方程式的判别式为

$$4\left[(a_0a_1+a_1a_2+\ldots+a_{n-1}a_n)^2-(a_0^2+a_1^2+\ldots+a_{n-1}^2)(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)\right]=0,$$

所以得知 $f(r)=0$ 有重根 $r=r_0$, 且只有当

$$a_k=r_0a_{k-1},\quad 1\leqslant k\leqslant n$$

才成立, 意味 $a_0,a_1,\ldots,a_n$ 是一个公比为 r_0 的等比数列。

50. 求和

$$\sum_{n=2}^{20}\frac{n^3-n^2+1}{n^2-n}$$

注意到

$$\frac{n^3-n^2+1}{n^2-n}=n+\frac{1}{n(n-1)}=n+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$$

于是由累加法,

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{20}\frac{n^3-n^2+1}{n^2-n}&=\sum_{n=2}^{20}n+\sum_{n=2}^{20}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\\&=\frac{19}{2}(2+20)+1-\frac{1}{20}\\&=\frac{4199}{20}\end{aligned}$$

51. 试求级数

$$\frac{1\cdot3\cdot5}{3^6-64}+\frac{3\cdot5\cdot7}{5^6-64}+\frac{5\cdot7\cdot9}{7^6-64}+\cdots+\frac{19\cdot21\cdot23}{21^6-64}$$

之和。

注意到

$$\begin{aligned}
&\frac{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}{(2k+1)^6-64}\\
&=\frac{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}{((2k+1)^3-8)((2k+1)^3+8)}\\
&=\frac{(2k+1)}{((2k+1)^2+2(2k+1)+4)((2k+1)^2-2(2k+1)+4)}\\
&=\frac{2k+1}{(4k^2+3)(4k^2+8k+7)}\\
&=\frac{2k+1}{(4k^2+3)(4(k+1)^2+3)}\\
&=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4k^2+3}-\frac{1}{4(k+1)^2+3}\right)
\end{aligned}$$

故

$$\sum_{k=1}^{10}\frac{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}{(2k+1)^6-64}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{487}\right)=\frac{120}{3409}$$

52. 求和

$$\sum_{n=1}^{24}\frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}}$$

不难发现

$$\frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}}=\sqrt{n-\sqrt{n^2-1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}),$$

由累加法,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{24}\frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}}&=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{24}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})\\
&=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{25}+\sqrt{24}-\sqrt{1}-\sqrt{0})\\
&=2\sqrt{2}+2\sqrt{3}
\end{aligned}$$

53. 若 $f(n)=(n^2-2n+1)^{\frac{1}{3}}+(n^2-1)^{\frac{1}{3}}+(n^2+2n+1)^{\frac{1}{3}}$, 求

$$\sum_{k=1}^{500}\frac{1}{f(2k-1)}$$

首先有

$$\begin{aligned}\frac{1}{f(n)}&=\frac{1}{\sqrt[3]{(n-1)^2}+\sqrt[3]{(n+1)(n-1)}+\sqrt[3]{(n+1)^2}}\\&=\frac{\sqrt[3]{(n+1)}-\sqrt[3]{(n-1)}}{(n+1)-(n-1)}\\&=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{(n+1)}-\sqrt[3]{(n-1)})\end{aligned}$$

故

$$\sum_{k=1}^{500}\frac{1}{f(2k-1)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{500}\left(\sqrt[3]{2k}-\sqrt[3]{2k-2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt[3]{1000}=5$$

54. 设数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为

$$a_n=\frac{1}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2})(\sqrt{n}+\sqrt{n+2})},$$

求

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k$$

的值。

发现

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}\left(\frac{1}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n}+\sqrt{n+2})}-\frac{1}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+2})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2})}\right)\\&=\frac{1}{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})(\sqrt{n}+\sqrt{n+2})}\left(\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}\right)\end{aligned}$$

由 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=0$, 故

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

55. 求

$$\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{2025^2}+\frac{1}{2026^2}}$$

的值。

注意到

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}&=\sqrt{1+\frac{(n+1)^2+n^2}{n^2(n+1)^2}}\\&=\sqrt{1+\frac{2n(n+2)+1}{n^2(n+1)^2}}=\sqrt{1+\frac{2}{n(n+1)}+\frac{1}{n^2(n+1)^2}}\\&=\sqrt{\left(1+\frac{1}{n(n+1)}\right)^2}=1+\frac{1}{n(n+1)}=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

因此原式为

$$\sum_{n=1}^{2025}\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=2025+\left(1-\frac{1}{2026}\right)=2016-\frac{1}{2026}$$

56. 求

$$\sum_{r=2}^{\infty}\left[\frac{4r-1}{r(r-1)}\left(-\frac{1}{3}\right)^r\right]$$

作部分分式分解，有

$$\frac{4r-1}{r(r-1)}=\frac{1}{r}+\frac{3}{r-1}$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{4r-1}{r(r-1)}\left(-\frac{1}{3}\right)^r&=\frac{1}{r}\left(-\frac{1}{3}\right)^r+\frac{3}{r-1}\left(-\frac{1}{3}\right)^r\\&=\frac{1}{r}\left(-\frac{1}{3}\right)^r-\frac{1}{r-1}\left(-\frac{1}{3}\right)^{r-1}\end{aligned}$$

故由累加法，

$$\sum_{r=2}^{n}\left[\frac{4r-1}{r(r-1)}\left(-\frac{1}{3}\right)^r\right]=\frac{1}{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{3}$$

令 $n\to\infty$，由于 $\frac{1}{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\to 0$，从而

$$\sum_{r=2}^{\infty}\left[\frac{4r-1}{r(r-1)}\left(-\frac{1}{3}\right)^r\right]=\frac{1}{3}$$

57. 求以下级数的和

$$\frac{1}{4\cdot 2!}+\frac{1}{5\cdot 3!}+\frac{1}{6\cdot 4!}+\frac{1}{7\cdot 5!}+\frac{1}{8\cdot 6!}+\cdots$$

级数即

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{(r+3)(r+1)!}$$

发现

$$\frac{1}{(r+3)(r+1)!}=\frac{1}{(r+2)!}-\frac{1}{(r+3)!}$$

因此由累加法,

$$\sum_{r=1}^{N}\frac{1}{(r+3)(r+1)!}=\frac{1}{3!}-\frac{1}{(N+3)!}$$

令 $N\to\infty$, 由于 $\dfrac{1}{(N+3)!}\to 0$, 则无穷级数为

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{(r+3)(r+1)!}=\frac{1}{3!}=\frac{1}{6}$$

58. 证明

$$(2\cdot 1!)+(5\cdot 2!)+(10\cdot 3!)+(17\cdot 4!)+\cdots+(n^2+1)n!=n(n+1)!$$

先将数列写成求和形式

$$S_n=\sum_{r=1}^{n}(r^2+1)r!$$

尝试将 $(r^2+1)r!$ 表示成阶乘的差, 注意到

$$(r+2)!=(r+2)(r+1)r!=(r^2+3r+2)r!,$$

因此

$$(r+2)!-r!=(r^2+3r+1)r!$$

又因为 $(r+1)!-r!=r\cdot r!$, 于是

$$(r+2)!-r!=(r^2+1)r!+3r\cdot r!=(r^2+1)r!+3[(r+1)!-r!]$$

即

$$(r^2+1)r! = (r+2)! - 3(r+1)! + 2r!$$

故由累加法,

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{n}(r^2+1)r! &= \sum_{r=1}^{n}\left[(r+2)! - 3(r+1)! + 2r!\right] \\ &= (n+2)! - 2(n+1)! \\ &= n(n+1)!\end{aligned}$$

59. 求

$$\sum_{r=1}^{n}\left[\frac{r^2+9r+19}{(r+5)!}\right]$$

的化简表达式, 并据此求

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left[\frac{r^2+7r+11}{(r+4)!}\right]$$

注意到

$$\frac{r^2+9r+19}{(r+5)!} = \frac{1}{(r+3)!} - \frac{1}{(r+5)!}$$

由累加法,

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{n}\left[\frac{r^2+9r+19}{(r+5)!}\right] &= \left(\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}\right) - \left(\frac{1}{(n+4)!}+\frac{1}{(n+5)!}\right) \\ &= \frac{1}{20} - \left(\frac{1}{(n+4)!}+\frac{1}{(n+5)!}\right)\end{aligned}$$

改写变量, 令 $k=r-1$, 则

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{n}\left[\frac{r^2+7r+11}{(r+4)!}\right] &= \sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{(k+1)^2+7(k+1)+11}{(k+5)!}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{k^2+9k+19}{(k+5)!}\right] \\ &= \frac{19}{5!} + \frac{1}{20} - \left(\frac{1}{(n+4)!}+\frac{1}{(n+5)!}\right) \\ &= \frac{5}{24} - \frac{n+6}{(n+5)!}\end{aligned}$$

令 $n \to \infty$, 因 $\dfrac{n+6}{(n+5)!} \to 0$, 故

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left[\frac{r^2+7r+11}{(r+4)!}\right]=\frac{5}{24}$$

60. 求级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2011^{2^n}-2011^{-2^n}}=\frac{1}{2011^1-2011^{-1}}+\frac{1}{2011^2-2011^{-2}}+\frac{1}{2011^4-2011^{-4}}+\cdots$$

更一般地, 设

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}},\quad S_N(x)=\sum_{n=0}^{N}\frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}$$

所求即 $S\left(\dfrac{1}{2011}\right)$。下面证明当 $0<x<1$ 时,

$$S(x)=\frac{x}{1-x}$$

注意到

$$\frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}=\frac{1}{1-x^{2^n}}-\frac{1}{1-x^{2^{n+1}}},$$

代入部分和 $S_N(x)$, 由累加法

$$S_N(x)=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^{2^{N+1}}}$$

当 $N\to\infty$ 时, 由于 $0<x<1$, 有 $x^{2^{N+1}}\to 0$, 从而

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{1-x^{2^{N+1}}}=1$$

于是

$$S(x)=\lim_{N\to\infty}S_N(x)=\frac{1}{1-x}-1=\frac{x}{1-x}$$

因此

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2011^{2^n}-2011^{-2^n}}=S\left(\frac{1}{2011}\right)=\frac{\frac{1}{2011}}{1-\frac{1}{2011}}=\frac{1}{2010}$$

61. 求下列无穷乘积的值

$$\left(\frac{7}{9}\right)\cdot\left(\frac{26}{28}\right)\cdot\left(\frac{63}{65}\right)\cdots\cdots=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}$$

首先注意到部分和为

$$\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}=\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k+1}\ \prod_{k=2}^{n}\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$$

其中

$$\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}=\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2+k+1}{(k-1)^2+(k-1)+1}$$

同时

$$\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k+1}=\frac{1\cdot 2}{3\cdot 4}\cdot\frac{2\cdot 3}{4\cdot 5}\cdots\frac{(n-1)n}{(n+1)n}=\frac{2}{n(n+1)}$$

由累乘法,

$$\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}=\frac{2}{n(n+1)}\cdot\frac{n^2+n+1}{3}=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{n(n+1)}\right)$$

因此

$$\prod_{k=2}^{\infty}\frac{k^3-1}{k^3+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{n(n+1)}\right)=\frac{2}{3}$$

62. 计算无穷乘积

$$\prod_{n=3}^{\infty}\frac{(n^3+3n)^2}{n^6-64}$$

设

$$a_n=\frac{(n^3+3n)^2}{n^6-64}$$

注意到

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{(n^3+3n)^2}{(n^3-8)(n^3+8)}=\frac{n^2(n^2+3)^2}{(n-2)(n^2+2n+4)(n+2)(n^2-2n+4)}\\&=\frac{n}{n-2}\cdot\frac{n}{n+2}\cdot\frac{n^2+3}{(n-1)^2+3}\cdot\frac{n^2+3}{(n+1)^2+3}\end{aligned}$$

因此当 $N \geqslant 3$ 时,

$$\begin{aligned}\prod_{n=3}^{N} a_n &= \left(\prod_{n=3}^{N}\frac{n}{n-2}\right)\left(\prod_{n=3}^{N}\frac{n}{n+2}\right)\left(\prod_{n=3}^{N}\frac{n^2+3}{(n-1)^2+3}\right)\left(\prod_{n=3}^{N}\frac{n^2+3}{(n+1)^2+3}\right)\\ &= \frac{N(N-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{3\cdot 4}{(N+1)(N+2)}\cdot\frac{N^2+3}{2^2+3}\cdot\frac{3^2+3}{(N+1)^2+3}\\ &= \frac{72}{7}\cdot\frac{N(N-1)(N^2+3)}{(N+1)(N+2)((N+1)^2+3)}\\ &= \frac{72}{7}\cdot\frac{(1-\frac{1}{N})(1+\frac{3}{N^2})}{(1+\frac{1}{N})(1+\frac{2}{N})((1+\frac{1}{N})^2+\frac{3}{N^2})}\end{aligned}$$

令 $N\to\infty$, 得到

$$\prod_{n=3}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty}\prod_{n=3}^{N} a_n = \frac{72}{7}$$

63. 设

$$f(r)=\sum_{j=2}^{2013}\frac{1}{j^r}=\frac{1}{2^r}+\frac{1}{3^r}+\cdots+\frac{1}{2013^r},$$

求

$$\sum_{k=2}^{\infty} f(k).$$

交换求和次序, 并注意到内层和是收敛的等比级数, 有

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{j=2}^{2013}\frac{1}{j^k} &= \sum_{j=2}^{2013}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{j^k}\\ &= \sum_{j=2}^{2013}\frac{1/j^2}{1-1/j}\\ &= \sum_{j=2}^{2013}\frac{1}{j(j-1)}\\ &= \sum_{j=2}^{2013}\left(\frac{1}{j-1}-\frac{1}{j}\right)\\ &= \frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2012}-\frac{1}{2013}\\ &= \frac{2012}{2013}\end{aligned}$$

64. 试证

$$8+88+888+\ldots+\underbrace{888\ldots88}_{\text{88's}}=\frac{8}{81}(10^{89}-802)$$

考虑到

$$\underbrace{99\ldots99}_{\text{n's}}=10^n-1$$

于是

$$\begin{aligned}
8+88+888+\cdots+\underbrace{888\ldots88}_{\text{88's}} &= \frac{8}{9}(9+99+999+\cdots+\underbrace{99\ldots99}_{\text{88's}}) \\
&= \frac{8}{9}(10+10^2+10^3+\cdots+10^{88}-88) \\
&= \frac{8}{9}\left[\frac{10(10^{88}-1)}{10-1}-88\right] \\
&= \frac{8}{81}(10^{89}-802)
\end{aligned}$$

故得证。

65. 求无穷级数

$$\frac{1^2}{11}+\frac{5^2}{11^2}+\frac{9^2}{11^3}+\frac{13^2}{11^4}+\cdots+\frac{(4n-3)^2}{11^n}+\cdots$$

设原式为

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4n-3)^2}{11^n}$$

由 $(4n-3)^2=16n^2-24n+9$, 有

$$S=16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{11^n}-24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{11^n}+9\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{11^n}$$

当 $|x|<1$ 时, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x},\quad \sum_{n=1}^{\infty}nx^n=\frac{x}{(1-x)^2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

令 $x=\dfrac{1}{11}$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{11^n}=\frac{1}{10},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{11^n}=\frac{11}{100},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{11^n}=\frac{33}{250}$$

于是

$$S = 16\cdot\frac{33}{250} - 24\cdot\frac{11}{100} + 9\cdot\frac{1}{10} = \frac{93}{250}$$

设

$$S = \frac{1^2}{11} + \frac{5^2}{11^2} + \frac{9^2}{11^3} + \frac{13^2}{11^4} + \frac{17^2}{11^5} + \cdots \tag{1}$$

则

$$\frac{1}{11}S = \frac{1^2}{11^2} + \frac{5^2}{11^3} + \frac{9^2}{11^4} + \frac{13^2}{11^5} + \frac{17^2}{11^6} + \cdots \tag{2}$$

(1) - (2) 得

$$\frac{10}{11}S = \frac{1}{11} + \frac{5^2-1^2}{11^2} + \frac{9^2-5^2}{11^3} + \frac{13^2-9^2}{11^4} + \frac{17^2-13^2}{11^5} + \cdots \tag{3}$$

$$\frac{10}{121}S = \frac{1}{11^2} + \frac{5^2-1^2}{11^3} + \frac{9^2-5^2}{11^4} + \frac{13^2-9^2}{11^5} + \frac{17^2-13^2}{11^6} + \cdots \tag{4}$$

(3) - (4) 得

$$\frac{100}{121}S = \frac{1}{11} + \frac{23}{11^2} + \frac{32}{11^3} + \frac{32}{11^4} + \frac{32}{11^5} + \cdots = \frac{1}{11} + \frac{23}{11^2} + \frac{32}{11^3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{11}}$$

故可得

$$S = \frac{93}{250}$$

66. 已知

$$1 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2} + \frac{7}{x^3} + \frac{9}{x^4} + \cdots = 91,$$

求

$$S = 1 + \frac{4}{x} + \frac{9}{x^2} + \frac{16}{x^3} + \frac{25}{x^4} + \cdots$$

发现

$$91 = 1 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2} + \frac{7}{x^3} + \cdots = \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \cdots\right) + 2\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} + \cdots\right)$$

考虑

$$\sum_{n=1}^{\infty} ny^{n-1} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} y^n\right)' = \left(\frac{y}{1-y}\right)' = \frac{1}{(1-y)^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} ny^n = \frac{y}{(1-y)^2}$$

记 $y=\dfrac{1}{x}$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{(1-\frac{1}{x})^2}=\frac{x}{(x-1)^2}$$

所以

$$91=\frac{x}{x-1}+\frac{2x}{(x-1)^2}=\frac{x^2+x}{(x-1)^2}\Rightarrow 90x^2-183x+91=0\Rightarrow x=\frac{7}{6}\text{ 或 }\frac{13}{15}$$

级数收敛需满足 $|x|>1$, 故取 $x=\dfrac{7}{6}$, 现考虑

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{x^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}n^2y^{n-1}$$

由上,

$$\sum_{n=1}^{\infty}ny^n=\frac{y}{(1-y)^2}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}n^2y^{n-1}=\left(\frac{y}{(1-y)^2}\right)'=\frac{1+y}{(1-y)^3}$$

取 $y=\dfrac{6}{7}$ 即得 $S=637$; 又解: 发现 $S=91+\dfrac{6}{7}S\Rightarrow S=637$

67. 求

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

发现

$$\begin{aligned}1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots&=\left[x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\frac{1}{9}x^9-\cdots\right]_0^1\\&=\int_0^1(1-x^2+x^4-x^6+x^8+\cdots)\,dx\\&=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx\\&=\left[\tan^{-1}x\right]_0^1=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

68. 求下列级数的值或证明其发散:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\arctan\left(-\frac{2}{k^2}\right)$$

由

$$\arctan\left(-\frac{2}{k^2}\right)=\arctan\left(\frac{(k-1)-(k+1)}{1+(k-1)(k+1)}\right)=\arctan(k-1)-\arctan(k+1),$$

知原级数是一列项求和，于是

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{\infty}[\arctan(k-1)-\arctan(k+1)]\\&=\lim_{N\to\infty}(\arctan 0+\arctan 1-\arctan N-\arctan(N+1))\\&=0+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=-\frac{3\pi}{4}\end{aligned}$$

级数收敛，其值为 $-\dfrac{3\pi}{4}$。

69. 求

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{1+2^{2^{-n}}}$$

注意到：

$$\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{(1-x)(1+x)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)$$

令 $x=2^{2^{-n}}$，则

$$\frac{1}{1+2^{2^{-n}}}=\frac{2}{1-2^{2^{1-n}}}-\frac{1}{1-2^{2^{-n}}}$$

因此原式化为

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\left(\frac{2}{1-2^{2^{1-n}}}-\frac{1}{1-2^{2^{-n}}}\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{1-2^{2^{-(n-1)}}}-\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{1-2^{2^{-n}}}\right)\\&=-1-\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{2^N}\cdot\frac{1}{1-2^{2^{-N}}}\right)\end{aligned}$$

现设 $x=2^{-N}$，则当 $N\to\infty, x\to 0^+$，且

$$\frac{1}{2^N}\cdot\frac{1}{1-2^{2^{-N}}}=\frac{x}{1-2^x}=-\frac{x}{2^x-1}$$

由洛必达法则，

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{2^x-1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln 2\cdot 2^x}=\frac{1}{\ln 2}$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{1+2^{2-n}}=-1+\frac{1}{\ln 2}$$

70. 设

$$f(x)=\frac{2016^x}{2016^x+\sqrt{2016}},$$

求

$$\sum_{k=0}^{2016}f\left(\frac{k}{2016}\right)$$

记 $a=2016$, 观察到

$$f(x)+f(1-x)=\frac{a^x}{a^x+a^{\frac{1}{2}}}+\frac{a^{1-x}}{a^{1-x}+a^{\frac{1}{2}}}=\frac{a^x(a^{1-x}+a^{\frac{1}{2}})+a^{1-x}(a^x+a^{\frac{1}{2}})}{(a^x+a^{\frac{1}{2}})(a^{1-x}+a^{\frac{1}{2}})}=1$$

于是

$$\sum_{k=0}^{2016}f\left(\frac{k}{2016}\right)=\underbrace{\sum_{k=0}^{1007}\left[f\left(\frac{k}{2016}\right)+f\left(1-\frac{k}{2016}\right)\right]}_{1008\text{ 个 “1”}}+f\left(\frac{1008}{2016}\right)=1008+f\left(\frac{1}{2}\right)$$

而 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{1}{2}$, 故

$$\sum_{k=0}^{2016}f\left(\frac{k}{2016}\right)=1008+\frac{1}{2}=\frac{2017}{2}$$

71. 求级数

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\sin^4(\pi 2^{r-2})}{4^r}$$

利用恒等式

$$\sin^4\theta=\sin^2\theta-\frac{1}{4}\sin^2 2\theta$$

考虑前 n 项和:

$$\sum_{r=0}^{n} \frac{\sin^4(\pi 2^{r-2})}{4^r} = \sum_{r=0}^{n} \left[\frac{1}{4^r} \sin^2(\pi 2^{r-2}) - \frac{1}{4^{r+1}} \sin^2(\pi 2^{r-1})\right]$$

由累加法,

$$\sum_{r=0}^{n} \frac{\sin^4(\pi 2^{r-2})}{4^r} = \sin^2 \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4^{n+1}} \sin^2(\pi 2^{n-1})$$

由于

$$0 \leqslant \frac{1}{4^{n+1}} \sin^2(\pi 2^{n-1}) \leqslant \frac{1}{4^{n+1}}$$

且 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{4^{n+1}} = 0$, 由夹挤定理,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{4^{n+1}} \sin^2(\pi 2^{n-1}) = 0$$

于是

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\sin^4(\pi 2^{r-2})}{4^r} = \sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$$

72. 求下列级数的和

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^2 \frac{n\pi}{6}}{2^n}$$

先由三角恒等式降幂, 再由欧拉公式,

$$\begin{aligned} S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^2 \frac{n\pi}{6}}{2^n} &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + \cos \frac{n\pi}{3}}{2^n} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \Re \left[\frac{e^{in\pi/3}}{2^n}\right] \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} + \Re \left[\frac{1}{1 - \frac{e^{i\pi/3}}{2}}\right] \right) \end{aligned}$$

其中

$$\frac{1}{1-\frac{e^{i\pi/3}}{2}} = \frac{2-e^{-i\pi/3}}{4-2(e^{i\pi/3}+e^{-i\pi/3})+1}$$
$$= \frac{2-e^{-i\pi/3}}{5-4\cos\frac{\pi}{3}}$$
$$= \frac{2-(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})}{3}$$
$$= \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i$$

故

$$S = \frac{1}{2}\left(2+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

73. 求

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}\cos\frac{n\pi}{3}$$

设

$$z = \frac{1}{2}e^{i\pi/3} = \frac{1}{4}(1+\sqrt{3}\,i)$$

且

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{z}{1-z}$$

考虑

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}e^{n\pi i/3} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n = \frac{z}{(1-z)^2} = zf'(z)$$

由欧拉公式,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}\cos\frac{n\pi}{3} = \Re(zf'(z))$$

其中

$$zf'(z) = \frac{\frac{1}{4}(1+\sqrt{3}\,i)}{\left(\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)^2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1+\sqrt{3}\,i}{1-\sqrt{3}\,i} = -\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}i$$

故得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}\cos\frac{n\pi}{3} = -\frac{1}{3}$$

74. 证明不等式

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} < \frac{3}{4}$$

由放缩法,

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{n\ \text{个}} = \frac{1}{2}$$

故左侧不等式得证, 同由放缩法, 且注意到

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n}\right) + \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n-1}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{n}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{3n}{2n^2} + \frac{3n}{2n^2+(n-1)} + \frac{3n}{2n^2+2(n-2)} + \cdots + \frac{3n}{2n^2}\right] \\
&< \frac{1}{2}\underbrace{\left[\frac{3n}{2n^2} + \frac{3n}{2n^2} + \cdots + \frac{3n}{2n^2}\right]}_{(n+1)\ \text{个}} \\
&= \frac{1}{2}(n+1)\frac{3}{2n} \\
&= \frac{3}{4} + \frac{1}{4n} \\
&< \frac{3}{4} + \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

于是右侧不等式得证。

75. 计算

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1,000,000}}$$

的整数部分。

由放缩法, 注意到

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} = \frac{2(n+1-1)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \tag{1}$$

同理,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} < \frac{2(n-(n-1))}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1} \tag{2}$$

对于下界, 由 (1) 得

$$\begin{aligned}
&1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1,000,000}}\\
&>1+2\left[(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{1,000,001}-\sqrt{1,000,000})\right]\\
&=1+2(\sqrt{1,000,001}-\sqrt{2})\\
&>2\cdot 1000-\sqrt{8}+1\\
&>2000-3+1=1998
\end{aligned}$$

对于上界, 由 (2) 得

$$\begin{aligned}
&1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1,000,000}}\\
&<1+2\left[(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{1,000,000}-\sqrt{999,999})\right]\\
&=1+2(\sqrt{1,000,000}-1)\\
&=1+2\cdot 999=1999
\end{aligned}$$

综上, 该数的整数部分为 1998。

76. 求

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\frac{1}{\sqrt[3]{5}}+\frac{1}{\sqrt[3]{6}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{1,000,000}}$$

的整数部分。

需要前置作业, 观察到二项展开为

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2},\quad \left(1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n}\right)^3=1+\frac{2}{n}+\frac{4}{3n^2}+\frac{8}{27n^3}$$

由上可知

$$\left(1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n}\right)^3>\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$$

两边开立方根并乘以 $n^{\frac{2}{3}}$, 得

$$n^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}n^{-\frac{1}{3}}>(n+1)^{\frac{2}{3}}$$

即

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}>\frac{3}{2}\left[\sqrt[3]{(n+1)^2}-\sqrt[3]{n^2}\right]$$

同理,

$$\left(1-\frac{2}{3n}\right)^3=1-\frac{2}{n}+\frac{4}{3n^2}-\frac{8}{27n^3}>1-2\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}=\left(1-\frac{1}{n}\right)^2$$

其中

$$\frac{1}{3n^2}-\frac{8}{27n^3}=\frac{1}{3n^2}-\frac{1}{3n^3}\geqslant 0,$$

于是

$$1-\frac{2}{3n}>\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$n^{\frac{2}{3}}-\frac{2}{3}n^{-1/3}>(n-1)^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}<\frac{3}{2}\left[\sqrt[3]{n^2}-\sqrt[3]{(n-1)^2}\right]$$

由此对原和式进行估计。对于下界:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{1,000,000}}&>\frac{3}{2}\left[(\sqrt[3]{5^2}-\sqrt[3]{4^2})+\cdots+(\sqrt[3]{1,000,001^2}-\sqrt[3]{1,000,000^2})\right]\\&=\frac{3}{2}(\sqrt[3]{1,000,002,000,001}-\sqrt[3]{16})\\&>\frac{3}{2}\cdot 10,000-\sqrt[3]{54}\\&>15,000-4=14,996\end{aligned}$$

对于上界:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{1,000,000}}&<\frac{3}{2}\left[(\sqrt[3]{4^2}-\sqrt[3]{3^2})+\cdots+(\sqrt[3]{1,000,000^2}-\sqrt[3]{999,999^2})\right]\\&=\frac{3}{2}(\sqrt[3]{1,000,000,000,000}-\sqrt[3]{9})\\&<\frac{3}{2}(10,000-2)=14,997\end{aligned}$$

综上, 该数的整数部分等于 14,996。

77. 求

$$\sum_{m=1}^{19}\sum_{n=m}^{19}(2m+n).$$

将求和顺序交换, 得

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{m=1}^{19}\sum_{n=m}^{19}(2m+n) \\
&= \sum_{n=1}^{19}\sum_{m=1}^{n}(2m+n) \\
&= \sum_{n=1}^{19}\left[2\sum_{m=1}^{n}m+\sum_{m=1}^{n}n\right] \\
&= \sum_{n=1}^{19}[2\cdot\frac{n(n+1)}{2}+n^2] \\
&= \sum_{n=1}^{19}(2n^2+n) \\
&= 2\cdot\frac{19\cdot 20\cdot 39}{6}+\frac{19\cdot 20}{2} \\
&= 5130
\end{aligned}
$$

78. 令

$$
S(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{k+1}}{3^k(k+1)},
$$

(a) 试证

$$
S'(x)=\frac{3}{3+x}-1.
$$

对各项微分, 有

$$
S'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k x^k}{3^k}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{x}{3}\right)^k=\frac{-\frac{x}{3}}{1+\frac{x}{3}}=\frac{-x}{3+x}=\frac{3}{3+x}-1
$$

(b) 据此, 证

$$
S(x)=3\ln(3+x)-3\ln 3-x.
$$

$$
S(x)=\int\left(\frac{3}{3+x}-1\right)dx=3\ln(3+x)-x+C
$$

由 $S(0)=0$ 可得 $C=-3\ln 3$, 故

$$S(x)=3\ln(3+x)-3\ln 3-x$$

(c) 求

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k\cdot 3^k}$$

改写求和,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k\cdot 3^k}&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)3^{k+1}}\\&=-\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)3^k}\\&=-\frac{1}{3}(1+S(1))\\&=-\frac{1}{3}(1+3\ln 4-3\ln 3-1)\\&=\ln\frac{3}{4}\end{aligned}$$

79. (a) 定义

$$f(n)=\ln\left(\frac{n+1}{n}\right),\quad g(n)=\sum_{k=n}^{2n-1}[f(k)]^3,\quad n\geqslant 1,$$

证明对于任意正整数 n, 都有

$$g(n)-g(n+1)=3f(n)f(2n)f(2n+1)$$

已知

$$f(n)=\ln\left(\frac{n+1}{n}\right),\quad n\geqslant 1$$

注意到

$$f(2n)+f(2n+1)=\ln\left(\frac{2n+1}{2n}\cdot\frac{2n+2}{2n+1}\right)=\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=f(n)$$

因此

$$\begin{aligned}g(n)-g(n+1)&=[f(n)]^3-[f(2n)]^3-[f(2n+1)]^3\\&=[f(2n)+f(2n+1)]^3-[f(2n)]^3-[f(2n+1)]^3\\&=3(f(2n)+f(2n+1))f(2n)f(2n+1)\\&=3f(n)f(2n)f(2n+1)\end{aligned}$$

(b) 据此, 求

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\ln\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)$$

的值。

由累加法, 部分和即

$$\sum_{n=1}^{N}f(n)f(2n)f(2n+1)=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{N}\big(g(n)-g(n+1)\big)=\frac{1}{3}\big(g(1)-g(N+1)\big).$$

由不等式 $\ln(1+x)\leqslant x$ 可得

$$f(n)=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\leqslant\frac{1}{n}$$

由放缩法, 知

$$g(n)<n[f(n)]^3\leqslant\frac{1}{n^2}$$

因此当 $N\to\infty$ 时,$g(N+1)\to 0$, 于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)f(2n)f(2n+1)=\frac{1}{3}g(1)=\frac{1}{3}(\ln 2)^3$$

这正是所求级数的值。

80. 考虑正整数 m,n, 且 $m\geqslant 2$。(m,n)-锯齿数列是从 1 开始的连续整数序列, 有 n 个“齿”, 每个齿从 2 上升到 m 再下降到 1, 如 $(3,4)$-锯齿数列为

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} & & 3 & & & & 3 & & & & 3 & & & & 3 & & \\ & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & \\ 1 & & & & 1 & & & & 1 & & & & 1 & & & & 1\end{array}$$

该序列共有 17 项, 平均数为 $\dfrac{33}{17}$。

(a) 求 $(4,2)$-锯齿数列的项和。

$(4,2)$-锯齿数列的项为

$$1,2,3,4,3,2,1,2,3,4,3,2,1$$

其和为 31。

(b) 对任意正整数 $m \geqslant 2$, 求 $(m,3)$-锯齿数列中所有数字之和的通项。

$(m,3)$-锯齿数列由初始 1 和 3 个齿组成, 每个齿为 $2,3,\ldots,m-1,m,m-1,\ldots,2,1$, 项和为

$$2+3+\cdots+m+(m-1)+\cdots+1=2(1+2+\cdots+m)-1-m=m^2-1.$$

因此序列和为 $1+3(m^2-1)=3m^2-2$。

(c) 求所有使 (m,n)-锯齿数列的项和为 145 的 (m,n) 序对。

每个齿的和为 m^2-1, 整个序列和为

$$1+n(m^2-1)=145 \Rightarrow n(m^2-1)=144.$$

考虑 144 的因数分解, 当 $m \geqslant 2$ 时,m^2-1 可能值为

$$3,8,15,24,35,48,63,80,99,120,143,$$

其中 $3,8,24,48$ 能整除 144, 因此符合条件的序对为

$$(m,n)=(2,48),(3,18),(5,6),(7,3).$$

(d) 证明对于所有正整数对 (m,n) 且 $m \geqslant 2,(m,n)$-锯齿数列的平均数不是整数。

平均数为

$$\frac{1+n(m^2-1)}{1+n(2m-2)}$$

假设平均数为整数 k, 可得一关于 m 的二次方程式

$$\frac{1+n(m^2-1)}{1+n(2m-2)}=k \Rightarrow m^2n-2mnk+(2nk-n-k+1)=0$$

由于 m 为整数, 故判别式

$$\Delta=(-2nk)^2-4n(2nk-n-k+1)=(2n(k-1)+1)^2-1.$$

必须为完全平方数, 且两完全平方数差为 1 的只有当 0 和 1, 因此

$$2n(k-1)+1=1 \Rightarrow k=1$$

但若平均数为 1, 则

$$n(m^2-1)+1=n(2m-2)+1 \Rightarrow n(m-1)^2=0,$$

得 $n>0$ 且 $m \geqslant 2$, 矛盾, 因此 (m,n)-锯齿数列的平均数不可能为整数。

81. 已知正整数 n, 考虑一个边长为 n 、顶点朝上的等边三角形, 将其划分为单位等边三角形。对于每个 n, 记 $f(n)$ 为所有大小的顶点朝下等边三角形的总数, 例如 $f(3)=3, f(4)=7$。

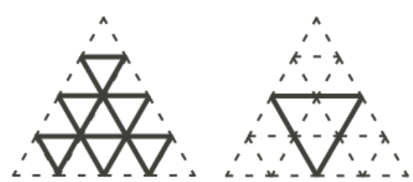
$n=3$

$n=4$

$n=3$

$f(3)=3$

$n=4$



$f(4)=6+1=7$

(a) 求 $f(5)$ 和 $f(6)$。

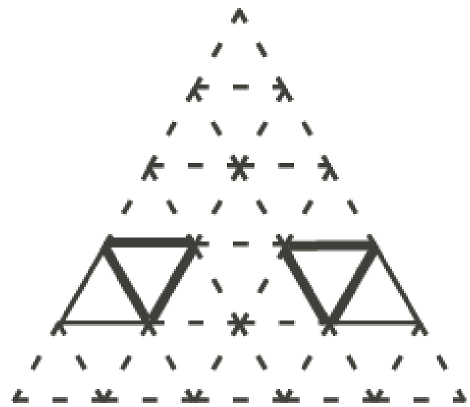
当 $n=5$ 时, 有 $1+2+3+4=10$ 个边长为 1、$1+2=3$ 个边长为 2 的三角形, 所以

$$f(5)=10+3=13$$

当 $n=6$ 时, 有 $1+2+3+4+5=15$ 个边长为 1、$1+2+3=6$ 个边长为 2、1 个边长为 3 的三角形, 所以

$$f(6)=15+6+1=22$$

(b) 证明对每个正整数 $k \geqslant 1$, 有 $f(2k) = f(2k-1) + k^2$。



设第 i 行有 $i+1$ 个单位点, 从左至右记为 $0, 1, \cdots, i$, 考虑边长为 m 、顶点朝下的等边三角形, 且其底顶点位于行 i 时, 注意到每个这样的三角形都被其底顶点确定, 故可能的底点数为

$$(i-m) - m + 1 = i + 1 - 2m,$$

要求 $2m \leqslant i \leqslant n$ 才能形成三角形, 因此边长为 m 、顶点朝下的三角形总数为

$$\sum_{i=2m}^{n} (i+1-2m) = \frac{(n+1-2m)(n+2-2m)}{2}$$

若 $n = 2k$, 则 $m = 1, 2, \ldots, k$, 所以

$$\begin{aligned} f(2k) &= \sum_{m=1}^{k} \frac{(2k+1-2m)(2k+2-2m)}{2} \\ &= \sum_{l=1}^{k} (2l-1)l \quad (\text{令} l = k+1-m) \\ &= 2\sum_{l=1}^{k} l^2 - \sum_{l=1}^{k} l \\ &= 2 \cdot \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} - \frac{k(k+1)}{2} \\ &= \frac{k(k+1)(4k-1)}{6} \end{aligned}$$

若 $n=2k-1$, 则 $m=1,2,\ldots,k-1$, 所以

$$
\begin{aligned}
f(2k-1) &= \sum_{m=1}^{k-1} \frac{(2k-2m)(2k+1-2m)}{2} \\
&= \sum_{l=1}^{k-1} l(2l+1) \quad (\text{令} l=k-m) \\
&= 2\sum_{l=1}^{k-1} l^2 + \sum_{l=1}^{k-1} l \\
&= 2\cdot\frac{(k-1)k(2k-1)}{6} + \frac{(k-1)k}{2} \\
&= \frac{k(k-1)(4k+1)}{6}
\end{aligned}
$$

因此,

$$
f(2k)-f(2k-1)=\frac{k(k+1)(4k-1)}{6}-\frac{k(k-1)(4k+1)}{6}=k^2
$$

证毕。

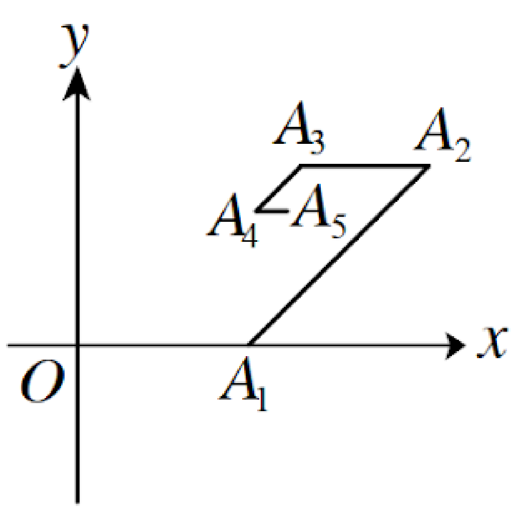
82. 如下图,$O(0,0), A_1(8,0), A_1A_2$ 与 x 轴正向夹 45° 角, 又

$$
A_1A_2 /\!/ A_3A_4 /\!/ A_5A_6 /\!/ \ldots, \quad OA_1 /\!/ A_2A_3 /\!/ A_4A_5 /\!/ \ldots.
$$

已知 $A_1A_2=8$, 且对所有 $k\in\mathbb{N}$, 有

$$
A_kA_{k+1}=2A_{k+1}A_{k+2}.
$$

若点 A_n 的坐标为 (x_n,y_n), 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)$。



令 $a_n = A_nA_{n+1} = 2^{4-n}, n \in \mathbb{N}$, 有

$$\begin{aligned}
x_\infty &= 8 + \frac{a_1}{\sqrt{2}} - a_2 - \frac{a_3}{\sqrt{2}} + a_4 + \frac{a_5}{\sqrt{2}} - a_6 - \frac{a_7}{\sqrt{2}} + a_8 + \cdots \\
&= 8 + (a_4 + a_8 + a_{12} + \cdots) + \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 + a_5 + a_9 + \cdots) \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{2}}(a_3 + a_7 + a_{11} + \cdots) - (a_2 + a_6 + a_{10} + \cdots) \\
&= 8 + \frac{1}{1 - \frac{1}{16}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{8}{1 - \frac{1}{16}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{1 - \frac{1}{16}} - \frac{4}{1 - \frac{1}{16}} = 8 + \frac{16}{5}(\sqrt{2} - 1) \\
y_\infty &= \frac{a_1}{\sqrt{2}} - \frac{a_3}{\sqrt{2}} + \frac{a_5}{\sqrt{2}} - \frac{a_7}{\sqrt{2}} + \cdots \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 + a_5 + a_9 + \cdots) - \frac{1}{\sqrt{2}}(a_3 + a_7 + a_{11} + \cdots) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{8}{1 - \frac{1}{16}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{16\sqrt{2}}{5}
\end{aligned}$$

所以

$$x_\infty + y_\infty = \frac{24 + 32\sqrt{2}}{5}$$

二项展开式

1. 求 $(x^2+x+y)^5$ 展开式中 x^5y^2 的系数。

系数为
$$^5C_2{}^3C_1{}^2C_2=30$$

2. 求 $\left(x\sqrt{y}-y\sqrt{x}\right)^4$ 的展开式中 xy 的系数。

观察发现
$$(x\sqrt{y}-y\sqrt{x})^4=x^2y^2(\sqrt{x}-\sqrt{y})^4,$$
即 $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^4$ 展开式中含 xy 项的系数 $^4C_2=6$。

3. 求在 $\left(x+\dfrac{4}{x}+4\right)^6$ 的展开式中 x^4 的系数。

原式可化为
$$\left(x+\frac{4}{x}+4\right)^6=\left(\frac{x^2+4x+4}{x}\right)^6=\frac{(x+2)^{12}}{x^6}$$
即求 $(x+2)^{12}$ 展开式中 x^{10} 的系数
$$^{12}C_2\cdot 2^2=264$$

4. 求 $(1+x^2)+(1+x^2)^2+\cdots+(1+x^2)^{10}$ 展开式中 x^6 的系数。

原式为
$$\frac{(1+x^2)\left[(1+x^2)^{10}-1\right]}{(1+x^2)-1}=\frac{(1+x^2)^{11}-(1+x^2)}{x^2}$$
而展开式 $(1+x^2)^{11}$ 中 x^8 系数为
$$^{10}C_4=\frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{4\cdot 3\cdot 2}=330$$
故原式中 x^6 系数为 330。

5. 求 $(1+x)^{1000}+x(1+x)^{999}+x^2(1+x)^{998}+\cdots+x^{1000}$ 展开式中 x^{50} 的系数。

由等比数列求和公式, 原式可化为

$$\begin{aligned}
&(1+x)^{1000}+x(1+x)^{999}+\cdots+x^{1000}\\
&=\frac{(1+x)^{1001}-x^{1001}}{(1+x)-x}\\
&=(1+x)^{1001}-x^{1001}\\
&=1+{}^{1001}C_1x+{}^{1001}C_2x^2+\cdots+{}^{1001}C_{1001}x^{1001}-x^{1001}
\end{aligned}$$

所求的系数为

$${}^{1001}C_{50}=\frac{1001!}{50!\,951!}$$

6. 求 $(1+x)+2(1+x)^2+3(1+x)^3+\cdots+1000(1+x)^{1000}$ 展开式中 x^{50} 的系数。

设已知多项式为 $P(x)$, 可以写出

$$\begin{aligned}
xP(x)&=(1+x)P(x)-P(x)\\
&=\left[(1+x)^2+2(1+x)^3+\cdots+999(1+x)^{1000}+1000(1+x)^{1001}\right]\\
&\quad-\left[(1+x)+2(1+x)^2+3(1+x)^3+\cdots+1000(1+x)^{1000}\right]\\
&=1000(1+x)^{1001}-\left[(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+\cdots+(1+x)^{1000}\right]\\
&=1000(1+x)^{1001}-\frac{(1+x)[(1+x)^{1000}-1]}{(1+x)-1}\\
&=1000(1+x)^{1001}-\frac{(1+x)^{1001}-(1+x)}{x}
\end{aligned}$$

从而得出

$$P(x)=\frac{1000(1+x)^{1001}}{x}-\frac{(1+x)^{1001}-(1+x)}{x^2}$$

$P(x)$ 中 x^{50} 的系数即为 $\dfrac{1000(1+x)^{1001}}{x}$ 中 x^{50} 的系数减去 $\dfrac{(1+x)^{1001}}{x^2}$ 中 x^{50} 的系数, 即 $(1+x)^{1001}$ 中 x^{51} 的系数减去 $(1+x)^{1001}$ 中 x^{52} 的系数:

$$1000\,{}^{1001}C_{51}-{}^{1001}C_{52}=\frac{1000\cdot 1001!}{51!\,950!}-\frac{1001!}{52!\,950!}=\frac{51050\cdot 1001!}{52!\,950!}$$

7. 求 $[a+(b+c)^2]^8$ 展开式中 $a^5b^4c^2$ 的系数。

令 $(b+c)^2=x$, 展开式为

$$(a+x)^8=\sum_{k=0}^{8}\frac{8!}{k!(8-k)!}a^k x^{8-k}$$

欲求 $a^5b^4c^2$ 系数, 于是 $k=5$, 有

$$\frac{8!}{5!3!}a^5[(b+c)^2]^3=56a^5(b+c)^6$$

观察

$$(b+c)^6=\sum_{t=0}^{6}\frac{6!}{t!(6-t)!}b^t c^{6-t}$$

欲求 b^4c^2 系数, 于是 $t=4$, 有

$$\frac{6!}{4!2!}b^4c^2=15b^4c^2$$

$\therefore a^5b^4c^2$ 系数为 $56\cdot 15=840$

8. 求 $(-xy+2x+3y-6)^6$ 的展开式中 x^3y^3 的系数。

考虑

$$\frac{6!}{n_1!n_2!n_3!n_4!}(-xy)^{n_1}(2x)^{n_2}(3y)^{n_3}(-6)^{n_4}=Ax^3y^3,$$

其中 $n_1+n_2+n_3+n_4=6$

- 若 $n_1=0$, 则 $n_2=3, n_3=3, n_4=0$,

$$\frac{6!}{0!3!3!0!}(-xy)^0(2x)^3(3y)^3(-6)^0=4320x^3y^3$$

- 若 $n_1=1$, 则 $n_2=2, n_3=2, n_4=1$,

$$\frac{6!}{1!2!2!1!}(-xy)^1(2x)^2(3y)^2(-6)^1=38880x^3y^3$$

- 若 $n_1=2$, 则 $n_2=1, n_3=1, n_4=2$,

$$\frac{6!}{2!1!1!2!}(-xy)^2(2x)^1(3y)^1(-6)^2=38880x^3y^3$$

- 若 $n_1=3$, 则 $n_2=0, n_3=0, n_4=3$,

$$\frac{6!}{3!0!0!3!}(-xy)^3(2x)^0(3y)^0(-6)^3=4320x^3y^3$$

因此 x^3y^3 的系数为 $4320+38880+38880+4320=86400$

9. $\left(x+\dfrac{a}{x}\right)\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)^5$ 的展开式中各项系数的和为 2, 则该展开式中的常数项为

解法一

令 $x=1$ 得 $a=1$. 故原式为

$$(x+\frac{1}{x})(2x-\frac{1}{x})^5$$

通项

$$T_{r+1}={}^5C_r(2x)^{5-r}(-x^{-1})^r={}^5C_r(-1)^r2^{5-r}x^{5-2r}$$

由 $5-2r=1$ 得 $r=2$, 对应的常数项 $=80$, 由 $5-2r=-1$ 得 $r=3$, 对应的常数项 $=-40$, 故所求的常数项为 40

解法二

用组合提取法, 把原式看做 6 个因式相乘, 若第 1 个括号提出 x, 从余下的 5 个括号中选 2 个提出 x, 选 3 个提出 $\frac{1}{x}$,

若第 1 个括号提出 $\frac{1}{x}$, 从余下的 5 个括号中选 2 个提出 $\frac{1}{x}$, 选 3 个提出 x.

故常数项

$$x\cdot{}^5C_2(2x)^2\cdot{}^3C_3(-\frac{1}{x})^3+\frac{1}{x}\cdot{}^5C_2(-\frac{1}{x})^2\cdot{}^3C_3(2x)^3=-40+80=40$$

10. 试求

$$({}^2C_2+{}^3C_2x+{}^4C_2x^2+{}^5C_2x^3+{}^6C_2x^4+{}^7C_2x^5)^4$$

展开式中 x^5 的系数。

考虑

$$f(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}{}^{n+2}C_2x^n\right)^4$$

设

$$g(x)=\frac{x^2}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+2}$$

则

$$g'(x)=\frac{x(2-x)}{(x-1)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)x^{n+1}$$

$$g''(x)=-\frac{2}{(x-1)^3}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)x^n=2\sum_{n=0}^{\infty}{}^{n+2}C_2x^n$$

于是

$$f(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}{}^{n+2}C_2x^n\right)^4=\left(-\frac{1}{(1-x)^3}\right)^4=\frac{1}{(1-x)^{12}}$$

故 $({}^2C_2+{}^3C_2x+{}^4C_2x^2+{}^5C_2x^3+{}^6C_2x^4+{}^7C_2x^5)^4$ 展开式中 x^5 的系数为

$${}^{12+5-1}C_5=4368$$

11. 若

$$(1+x+x^2)^6=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{12}x^{12},$$

求 $a_2+a_4+\cdots+a_{12}$ 的值。

设 $f(x)=(1+x+x^2)^6=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{12}x^{12}$, 则

$$a_2+a_4+\cdots+a_{12}=\frac{f(1)+f(-1)}{2}-a_0=\frac{3^6+1}{2}-1=364$$

12. 已知非零数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_2=3, a_n(a_{n+2}-1)=a_{n+1}(a_{n+1}-1), n\in N$, 求

$${}^{2023}C_0a_1+{}^{2023}C_1a_2+{}^{2023}C_2a_3+\cdots+{}^{2023}C_{2023}a_{2024}$$

的值。

由递推关系得

$$\frac{a_{n+2}-1}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}-1}{a_n}=\frac{a_2-1}{a_1}=\frac{3-1}{1}=2$$

即

$$a_{n+1}-1=2a_n\Rightarrow a_{n+1}+1=2(a_n+1)$$

数列 $\{a_n+1\}$ 是首项为 2, 公比为 2 的等比数列, 故 $a_n=2^n-1$, 则

$$\begin{aligned}
&{}^{2023}C_0a_1+{}^{2023}C_1a_2+{}^{2023}C_2a_3+{}^{2023}C_3a_4+\cdots+{}^{2023}C_{2023}a_{2024}\\
=&\ {}^{2023}C_0(2^1-1)+{}^{2023}C_1(2^2-1)+{}^{2023}C_2(2^3-1)+\cdots+{}^{2023}C_{2023}(2^{2024}-1)\\
=&\ 2\left({}^{2023}C_02^0+{}^{2023}C_12^1+{}^{2023}C_22^2+\cdots+{}^{2023}C_{2023}2^{2023}\right)\\
&\ -\left({}^{2023}C_0+{}^{2023}C_1+{}^{2023}C_2+\cdots+{}^{2023}C_{2023}\right)\\
=&\ 2(1+2)^{2023}-2^{2023}\\
=&\ 2\cdot3^{2023}-2^{2023}
\end{aligned}$$

13. 求级数

$$1+\frac{2}{4}+\frac{2\cdot 3}{4\cdot 8}+\frac{2\cdot 3\cdot 4}{4\cdot 8\cdot 12}+\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}+\dots$$

的和。

通过提取公因数，整理得

$$\begin{aligned}S&=1+\frac{2}{4}+\frac{2\cdot 3}{4\cdot 8}+\frac{2\cdot 3\cdot 4}{4\cdot 8\cdot 12}+\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}+\dots\\&=1+\frac{2}{1!}\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{2\cdot 3}{2!}\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{2\cdot 3\cdot 4}{3!}\left(\frac{1}{4}\right)^3+\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{4!}\left(\frac{1}{4}\right)^4+\dots\\&=1+\frac{-2}{1!}\left(-\frac{1}{4}\right)^1+\frac{(-2)(-3)}{2!}\left(-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{(-2)(-3)(-4)}{3!}\left(-\frac{1}{4}\right)^3\\&\quad+\frac{(-2)(-3)(-4)(-5)}{4!}\left(-\frac{1}{4}\right)^4+\dots\end{aligned}$$

发现这是广义二项式 $(1-x)^{-2}$ 在 $x=\frac{1}{4}$ 时的展开式，因此

$$S=\left(1-\frac{1}{4}\right)^{-2}=\frac{16}{9}$$

14. 求

$$1+\frac{1}{24}+\frac{1\cdot 4}{24\cdot 48}+\frac{1\cdot 4\cdot 7}{24\cdot 48\cdot 72}+\dots$$

整理得

$$\begin{aligned}S&=1+\frac{1}{24}+\frac{1\cdot 4}{24\cdot 48}+\frac{1\cdot 4\cdot 7}{24\cdot 48\cdot 72}+\dots\\&=1+\frac{3\cdot\frac{1}{3}}{24(1)}+\frac{3^2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}}{24^2\cdot 1\cdot 2}+\frac{3^3\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{7}{3}}{24^3\cdot 1\cdot 2\cdot 3}+\dots\\&=1+\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)}{1}\left(-\frac{1}{8}\right)+\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)}{1\cdot 2}\left(-\frac{1}{8}\right)^2+\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{7}{3}\right)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(-\frac{1}{8}\right)^3+\dots\end{aligned}$$

发现这是广义二项式 $(1-x)^{-\frac{1}{3}}$ 在 $x=\frac{1}{8}$ 时的展开式，因此

$$S=\left(1-\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{\sqrt[3]{7}}$$

15. 求

$$S=1-\frac{1}{4}+\frac{1\cdot 3}{4\cdot 8}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{4\cdot 8\cdot 12}+\dots$$

首先有

$$\begin{aligned}S&=1-\frac{1}{4}+\frac{1\cdot 3}{4\cdot 8}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{4\cdot 8\cdot 12}+\dots\\&=1-\frac{2^1\left(\frac{1}{2}\right)}{4^1\cdot 1}+\frac{2^2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)}{4^2(1\cdot 2)}-\frac{2^3\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)}{4^3(1\cdot 2\cdot 3)}+\dots\\&=1+\frac{-\frac{1}{2}}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1+\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\dots\end{aligned}$$

这是广义二项式 $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ 在 $x=\dfrac{1}{2}$ 时的展开式, 因此

$$S=\left(1+\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

16. 求下列无穷级数的和

$$\frac{3}{8}+\frac{3\cdot 9}{8\cdot 16}+\frac{3\cdot 9\cdot 15}{8\cdot 16\cdot 24}+\frac{3\cdot 9\cdot 15\cdot 21}{8\cdot 16\cdot 24\cdot 32}+\cdots$$

将一般项改写为

$$\begin{aligned}S&=\frac{3}{8}+\frac{3\cdot 9}{8\cdot 16}+\frac{3\cdot 9\cdot 15}{8\cdot 16\cdot 24}+\frac{3\cdot 9\cdot 15\cdot 21}{8\cdot 16\cdot 24\cdot 32}+\cdots\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^k(1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1))}{8^{k+1}(1\cdot 2\cdot 3\cdots k)}\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{2k-1}{2}\right)}{k!}\left(\frac{3}{4}\right)^k\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2k-1}{2}\right)}{k!}\left(-\frac{3}{4}\right)^k\end{aligned}$$

考虑广义二项式展开,

$$1+S=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2k-1}{2}\right)}{k!}\left(-\frac{3}{4}\right)^k=\left(1-\frac{3}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

给出

$$S = 1$$

17. 求下列无穷和

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\prod_{r=1}^{k}\left(\frac{8r-7}{40r}\right)\right].$$

观察到

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{\infty}\left[\prod_{r=1}^{k}\left(\frac{8r-7}{40r}\right)\right] \\
&= \frac{1}{40} + \frac{1}{40}\cdot\frac{9}{80} + \frac{1}{40}\cdot\frac{9}{80}\cdot\frac{17}{120} + \frac{1}{40}\cdot\frac{9}{80}\cdot\frac{17}{120}\cdot\frac{25}{160} + \cdots \\
&= \frac{1}{(-8)(-5)\,1!} + \frac{1\cdot 9}{(-8)^2(-5)^2\,2!} + \frac{1\cdot 9\cdot 17}{(-8)^3(-5)^3\,3!} + \frac{1\cdot 9\cdot 17\cdot 25}{(-8)^4(-5)^4\,4!} + \cdots \\
&= \frac{-\frac{1}{8}}{1!}\left(-\frac{1}{5}\right) + \frac{\left(-\frac{1}{8}\right)\left(-\frac{9}{8}\right)}{2!}\left(-\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{\left(-\frac{1}{8}\right)\left(-\frac{9}{8}\right)\left(-\frac{17}{8}\right)}{3!}\left(-\frac{1}{5}\right)^3 + \cdots
\end{aligned}$$

这是二项式级数展开式

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k$$

在 $\alpha = -\dfrac{1}{8}, x = -\dfrac{1}{5}$ 下去掉首项后的结果，因此

$$S = \left(1-\frac{1}{5}\right)^{-\frac{1}{8}} - 1 = \sqrt[8]{\frac{5}{4}} - 1$$

18. 已知级数

$$S = \frac{5}{18} - \frac{5\cdot 8}{18\cdot 24} + \frac{5\cdot 8\cdot 11}{18\cdot 24\cdot 30} - \frac{5\cdot 8\cdot 11\cdot 14}{18\cdot 24\cdot 30\cdot 36} + \cdots$$

收敛，求其和。

将原式写成

$$\begin{aligned}
S &= \frac{5}{18} - \frac{5\cdot 8}{18\cdot 24} + \frac{5\cdot 8\cdot 11}{18\cdot 24\cdot 30} - \frac{5\cdot 8\cdot 11\cdot 14}{18\cdot 24\cdot 30\cdot 36} + \cdots \\
&= \frac{5}{6\cdot 3} - \frac{5\cdot 8}{6^2(3\cdot 4)} + \frac{5\cdot 8\cdot 11}{6^3(3\cdot 4\cdot 5)} - \frac{5\cdot 8\cdot 11\cdot 14}{6^4(3\cdot 4\cdot 5\cdot 6)} + \ldots \\
&= \frac{\frac{5}{3}}{3}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{\frac{5}{3}\left(\frac{8}{3}\right)}{4\cdot 3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\frac{5}{3}\left(\frac{8}{3}\right)\left(\frac{11}{3}\right)}{5\cdot 4\cdot 3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{\frac{5}{3}\left(\frac{8}{3}\right)\left(\frac{11}{3}\right)\left(\frac{14}{3}\right)}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \ldots
\end{aligned}$$

为了构建二项式展开的形式, 写成

$$\begin{aligned}
& S\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} \\
&= \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{5}{3}\right)}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{8}{3}\right)}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \ldots \\
&= \frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)\left(-\frac{8}{3}\right)}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \ldots \\
&= \left[1 + \frac{\frac{1}{3}}{1!}\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots\right] - \left[1 + \frac{\frac{1}{3}}{1!}\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]
\end{aligned}$$

第一部分即为 $\left(1+\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ 的二项式展开:

$$\frac{1}{36}S = \left(1+\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(1+\frac{1}{6}-\frac{1}{36}\right)$$

故

$$S = 9\sqrt[3]{96} - 41$$

19. 根据组合数的定义, 证明下列恒等式:

(a)

$${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$$

有

$${}^nC_{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = {}^nC_r$$

(b)

$$k\cdot{}^nC_k = n\cdot{}^{n-1}C_{k-1}$$

有

$$\begin{aligned} k \cdot {}^{n}C_{k} &= k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \\ &= n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,[(n-1)-(k-1)]!} \\ &= n \cdot {}^{n-1}C_{k-1} \end{aligned}$$

(c) 帕斯卡公式:

$$ {}^{n}C_{r-1} + {}^{n}C_{r} = {}^{n+1}C_{r} $$

有

$$\begin{aligned} {}^{n}C_{r-1} + {}^{n}C_{r} &= \frac{n!}{(r-1)!(n-(r-1))!} + \frac{n!}{r!(n-r)!} \\ &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!} + \frac{n!}{r!(n-r)!} \\ &= \frac{n! \cdot r}{r!(n-r+1)!} + \frac{n! \cdot (n-r+1)}{r!(n-r+1)!} \\ &= \frac{n![r+(n-r+1)]}{r!(n-r+1)!} \\ &= \frac{n!(n+1)}{r!(n-r+1)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{r!(n+1-r)!} \\ &= {}^{n+1}C_{r} \end{aligned}$$

(d)

$$ {}^{n}C_{m} \cdot {}^{m}C_{k} = {}^{n}C_{k} \cdot {}^{n-k}C_{m-k} $$

有

$$
\begin{aligned}
{}^{n}C_m \cdot {}^{m}C_k &= \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \frac{m!}{k!(m-k)!} \\
&= \frac{n!}{k!(m-k)!(n-m)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{(m-k)!(n-m)!} \\
&= {}^{n}C_k \cdot {}^{n-k}C_{m-k}
\end{aligned}
$$

20. 设 $n, k \in \mathbb{N}$, 根据帕斯卡公式, 试证明

(a)

$$
{}^{n}C_0 + {}^{n+1}C_1 + \cdots + {}^{n+k}C_k = {}^{n+k+1}C_k
$$

反复对最后一个二项式系数运用帕斯卡公式, 得

$$
\begin{aligned}
{}^{n}C_k &= {}^{n-1}C_k + {}^{n-1}C_{k-1} \\
&= {}^{n-1}C_k + {}^{n-2}C_{k-1} + {}^{n-2}C_{k-2} \\
&\vdots \\
&= {}^{n-1}C_k + {}^{n-2}C_{k-1} + \cdots + {}^{n-k-2}C_0 \\
&= {}^{n-1}C_k + {}^{n-2}C_{k-1} + \cdots + {}^{n-k-1}C_0
\end{aligned}
$$

以 $n+k+1$ 取代 n, 即得证。

(b)

$$
{}^{k}C_k + {}^{k+1}C_k + \cdots + {}^{n}C_k = {}^{n+1}C_{k+1}
$$

反复对第一个二项式系数运用帕斯卡公式, 得

$$
\begin{aligned}
{}^{n}C_k &= {}^{n-1}C_k + {}^{n-1}C_{k-1} \\
&= {}^{n-2}C_k + {}^{n-2}C_{k-1} + {}^{n-1}C_{k-1} \\
&\vdots \\
&= {}^{0}C_k + {}^{0}C_{k-1} + {}^{1}C_{k-1} + \cdots + {}^{n-2}C_{k-1} + {}^{n-1}C_{k-1}
\end{aligned}
$$

而 ${}^{0}C_k = 0$, 以 $n+1$ 取代 n, 且以 $k+1$ 取代 k, 即得证。

21. 证明恒等式

$$\sum_{r=0}^{n}({}^{n}C_r)^2 = {}^{2n}C_n, \quad n \geqslant 0$$

设 S 是一个有 $2n$ 个元素的集合,${}^{2n}C_n$ 为计数 S 的 n 子集的数目。又把 S 划分成 A 和 B 两个子集, 每一个子集都有 n 个元素。利用 S 的这个划分去划分 S 的 n 子集。S 的每一个 n 子集包含 k 个 A 的元素和 $n-k$ 个 B 的元素,k 是介于 0 和 n 之间的任意整数。我们把 S 的 n 子集划分成 $n+1$ 个部分:

$$C_0, C_1, \ldots, C_n$$

其中 C_k 是由包含 k 个 A 的元素和 $n-k$ 个 B 的元素组成的 n 子集。根据加法原理, 有

$${}^{2n}C_n = |C_0| + |C_1| + \cdots + |C_n|$$

C_k 中的 n 子集可以通过从 A 中选择 k 个元素, 再从 B 中选择 $n-k$ 个元素而得到。根据乘法原理,

$$|C_k| = {}^{n}C_k {}^{n}C_{n-k} = {}^{n}C_k^2, \quad k \geqslant 0.$$

把上式代入得

$$\sum_{k=0}^{n}({}^{n}C_k)^2 = ({}^{n}C_0)^2 + ({}^{n}C_1)^2 + \cdots + ({}^{n}C_n)^2 = {}^{2n}C_n$$

22. 根据二项式定理, 证明下列恒等式:

(a)

$${}^{n}C_0 + {}^{n}C_2 + \cdots = {}^{n}C_1 + {}^{n}C_3 + \cdots = 2^{n-1}$$

由二项式定理,

$$(1-1)^n = 1^n + {}^{n}C_1 1^{n-1}(-1) + {}^{n}C_2 1^{n-2}(-1)^2 + \cdots + (-1)^n$$

即

$${}^{n}C_0 - {}^{n}C_1 + {}^{n}C_2 - \cdots + (-1)^n \cdot {}^{n}C_n = 0$$

由此可得

$${}^{n}C_0 + {}^{n}C_2 + \cdots = {}^{n}C_1 + {}^{n}C_3 + \ldots$$

由二项式定理,

$$(1+1)^n = 1^n + {}^nC_1 1^{n-1} 1 + {}^nC_2 1^{n-2} 1^2 + \cdots + 1^n$$

给出

$${}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + \cdots + {}^nC_n = 2^n$$

因此

$${}^nC_0 + {}^nC_2 + \cdots = {}^nC_1 + {}^nC_3 + \cdots = \frac{1}{2}(2^n) = 2^{n-1}$$

(b)

$$1 \cdot {}^nC_1 + 2 \cdot {}^nC_2 + \cdots + n \cdot {}^nC_n = n2^{n-1}$$

考虑二项式展开,

$$\sum_{k=0}^{n} {}^nC_k x^k = (1+x)^n$$

两边对 x 求导,

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot {}^nC_k x^{k-1} = n(1+x)^{n-1}$$

令 $x=1$,

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot {}^nC_k = n2^{n-1}$$

由恒等式

$$k \cdot {}^nC_k = n \cdot {}^{n-1}C_{k-1}, \quad \sum_{k=0}^{n} {}^nC_k = 2^n$$

有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k \cdot {}^nC_k &= 1^nC_1 + 2^nC_2 + \cdots + n^nC_n \\ &= n\left[{}^{n-1}C_0 + {}^{n-1}C_1 + \cdots + {}^{n-1}C_{n-1}\right] \\ &= n2^{n-1}\end{aligned}$$

(c)

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot {}^nC_k = n(n+1)2^{n-2}$$

考虑二项式展开,

$$\sum_{k=0}^{n} {}^nC_k x^k = (1+x)^n$$

两边求导, 并乘以 x 得

$$\sum_{k=1}^{n} k^nC_k x^k = x\frac{d}{dx}(1+x)^n = xn(1+x)^{n-1}$$

再次对两边求导,

$$\sum_{k=1}^{n} k^{2n}C_k x^{k-1} = n(1+x)^{n-1} + xn(n-1)(1+x)^{n-2}$$

代入 $x=1$, 化简得

$$\sum_{k=1}^{n} k^{2n}C_k = n \cdot 2^{n-1} + n(n-1) \cdot 2^{n-2} = n(n+1)2^{n-2}$$

(d)

$${}^nC_0 + \frac{1}{2}{}^nC_1 + \frac{1}{3}{}^nC_2 + \cdots + \frac{1}{n+1}{}^nC_n = \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right)$$

考虑二项式展开,

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} {}^nC_k x^k = {}^nC_0 + {}^nC_1 x + {}^nC_2 x^2 + \cdots + {}^nC_n x^n$$

对等式两边在区间 $[0,1]$ 上关于 x 进行定积分:

$$\int_0^1 (1+x)^n\, dx = \int_0^1 \left({}^nC_0 + {}^nC_1 x + {}^nC_2 x^2 + \cdots + {}^nC_n x^n\right)\, dx$$

左式为

$$\int_0^1 (1+x)^n\, dx = \left[\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

右式为

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} {}^nC_k x^k \, dx &= \sum_{k=0}^{n} {}^nC_k \int_0^1 x^k \, dx \\ &= \sum_{k=0}^{n} {}^nC_k \left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} {}^nC_k\end{aligned}$$

于是得证

$${}^nC_0 + \frac{1}{2}{}^nC_1 + \frac{1}{3}{}^nC_2 + \cdots + \frac{1}{n+1}{}^nC_n = \frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{{}^nC_k}{k+1} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} {}^{n+1}C_{k+1} \\ &= \frac{1}{n+1} \left({}^{n+1}C_1 + {}^{n+1}C_2 + \cdots + {}^{n+1}C_{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)\end{aligned}$$

于是得证。

(e)

$$\sum_{k \text{ even}} k \, {}^nC_k = n2^{n-2}$$

由二项式定理,

$$(1+x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 x + {}^nC_2 x^2 + \cdots + {}^nC_n x^n$$

两边求导得

$$n(1+x)^{n-1} = {}^nC_1 + 2\,{}^nC_2 x + 3\,{}^nC_3 x^2 + \cdots + n\,{}^nC_n x^{n-1}$$

将 x 替换为 $-x$, 得

$$n(1-x)^{n-1} = {}^nC_1 - 2{}^nC_2x + 3{}^nC_3x^2 - \cdots + (-1)^{n-1}n{}^nC_nx^{n-1}$$

两式相加

$$n(1+x)^{n-1} + n(1-x)^{n-1} = 2\sum_{k \text{ even}} k{}^nC_kx^{k-1}$$

代入 $x=1$, 得到

$$\sum_{k \text{ even}} k{}^nC_k = n2^{n-2}$$

23. 证明范德蒙恒等式

$${}^{n+m}C_k = \sum_{i=0}^{k} {}^nC_i{}^mC_{k-i}$$

注意到

$$(1+x)^n(1+x)^m = (1+x)^{n+m}$$

左式根据二项展开得

$$(1+x)^n(1+x)^m = \left(\sum_{i=0}^{n} {}^nC_ix^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m} {}^mC_jx^j\right) = \sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{i=0}^{k} {}^nC_i{}^mC_{k-i}\right)x^k$$

而右式为

$$(1+x)^{n+m} = \sum_{k=0}^{n+m} {}^{n+m}C_kx^k$$

比较 x^k 系数, 得到

$${}^{n+m}C_k = \sum_{i=0}^{k} {}^nC_i{}^mC_{k-i}$$

24. 证明

$$({}^nC_0 - {}^nC_2 + {}^nC_4 - \cdots)^2 + ({}^nC_1 - {}^nC_3 + {}^nC_5 - \cdots)^2 = 2^n$$

设 $f(x)=(x+1)^n={}^nC_0+{}^nC_1x+{}^nC_2x^2+\cdots+{}^nC_nx^n$, 取 $x=i$ 得

$$f(i)=(i+1)^n=(\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi i}{4}})^n=2^{\frac{n}{2}}e^{\frac{\pi i}{4}}$$

且有

$$f(i)=({}^nC_0-{}^nC_2+{}^nC_4-\cdots)+i({}^nC_1-{}^nC_3+{}^nC_5-\cdots)$$

比较实部与虚部得

$${}^nC_0-{}^nC_2+{}^nC_4-\cdots=2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{\pi i}{4},\quad {}^nC_1-{}^nC_3+{}^nC_5-\cdots=2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{\pi i}{4}$$

因此得证

$$({}^nC_0-{}^nC_2+\cdots)^2+({}^nC_1-{}^nC_3+\cdots)^2=2^n\cos^2\left(\frac{\pi i}{4}+\sin^2\frac{\pi i}{4}\right)=2^n$$

25. 若将 $(x+1)^{2000}$ 展开, 问有多少个系数是奇数?

一般地, 若 $(x+1)^n$ 展开式中奇数系数的个数为 2^a, 其中 a 是 n 的二进制表示中 1 的个数, 将 2000 转换为二进制:

$$2000=11111010000_2$$

其中有 6 个 1, 因此 $(x+1)^{2000}$ 中奇数系数的个数为

$$2^6=64.$$

又解: 对 2 取模, 有

$$\begin{aligned}(x+1)^{2000}&=(x+1)^{1024}(x+1)^{512}(x+1)^{256}(x+1)^{128}(x+1)^{64}(x+1)^{16}\\&\equiv(x^{1024}+1)(x^{512}+1)\cdots(x^{16}+1)\pmod 2,\end{aligned}$$

展开后共有 $2^6=64$ 项系数为奇数。

26. 设 n 为大于或等于 1 的正整数, 考虑数列 $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, 试用二项式定理证明对所有 n 皆满足

$$a_n<e$$

设 $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, 考虑对 a_n 进行二项式展开

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!\cdot n^k}$$

注意到

$$\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k\leqslant\frac{1}{k!}\Rightarrow a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}<\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=e$$

27. 定义 a_n 为 $(3-\sqrt{x})^n$ 展开式中 x 项的系数, 其中 n 是正整数。求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^2}{a_2}+\frac{3^3}{a_3}+\cdots+\frac{3^n}{a_n}\right)$$

观察到 $(3-\sqrt{x})^n$ 的二项展开式为:

$$(3-\sqrt{x})^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^{n-k}(-\sqrt{x})^k$$

x 项的系数对应 $k=2$:

$$a_n=\binom{n}{2}3^{n-2}$$

所以

$$\frac{3^n}{a_n}=\frac{3^n}{\binom{n}{2}3^{n-2}}=\frac{3^2}{\binom{n}{2}}=\frac{9}{\binom{n}{2}}$$

原式变为

$$9\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\binom{n}{2}}=18\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n(n-1)}=18\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$

由累加法,

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots=1$$

因此原极限为 18。

28. 用 $|S|$ 表示集合 S 中元素的个数。已知集合

$$S=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots,\frac{1}{113}\right\},\quad T=\{A\subseteq S\,|\,|A|=2n,\,n\in\mathbb{N}\},$$

试回答下列问题:

(a) 求 $|T|$。

集合 S 中的元素个数为 $|S|=112$, 所以:

$$|T| = {}^{112}C_2 + {}^{112}C_4 + \cdots + {}^{112}C_{112}$$

由二项式定理,

$$\begin{aligned}(1+1)^{112} &= {}^{112}C_0 + {}^{112}C_1 + \cdots + {}^{112}C_{112} = 2^{112} \\ (1-1)^{112} &= {}^{112}C_0 - {}^{112}C_1 + {}^{112}C_2 - \cdots + (-1)^{112} \cdot {}^{112}C_{112} = 0\end{aligned}$$

两式相加得

$$2^{112} = 2\left({}^{112}C_0 + {}^{112}C_2 + {}^{112}C_4 + \cdots + {}^{112}C_{112}\right) \Rightarrow \sum_{k=0}^{56} {}^{112}C_{2k} = 2^{111}$$

于是

$$|T| = 2^{111} - 1$$

(b) 对任意 $A_i \in T$, 将 A_i 中所有元素相乘的乘积记为 m_i, 再将所有的 m_i 相加, 其和为 M, 求 M 的值。

设

$$f(x) = \left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(x+\frac{1}{113}\right)$$

展开 $f(x)$ 得

- x^{110} 的系数为所有 $|A_i|=2$ 的子集乘积之和;
- x^{108} 的系数为所有 $|A_i|=4$ 的子集乘积之和;
- $\cdots$;
- 常数项为所有 $|A_i|=112$ 的子集乘积之和。

故所有偶数个元素子集的乘积之和为

$$M = \frac{1}{2}\left(f(1)+f(-1)\right) - 1$$

而

$$f(1) = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{113}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{114}{113} = 57$$

$$f(-1)=\left(-1+\frac{1}{2}\right)\left(-1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(-1+\frac{1}{113}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\cdots\left(-\frac{112}{113}\right)=\frac{1}{113}$$

因此

$$M=\frac{1}{2}\left(57+\frac{1}{113}\right)-1=\frac{3108}{113}$$

29. 函数 f 由实数 a,b,c 定义为

$$f(x)=(a+bx+cx^2)(1-x)^{-3},\quad x\in\mathbb{R},\ |x|<1.$$

(a) 证明

$$f(x)=a+(3a+b)x+\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\left[a(n+1)(n+2)+bn(n+1)+cn(n-1)\right]x^n.$$

考虑二项展开式

$$\begin{aligned}(1-x)^{-3}&=1+\frac{-3}{1!}(-x)+\frac{-3(-3-1)}{2!}(-x)^2+\frac{-3(-3-1)(-3-2)}{3!}(-x)^3+\cdots\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{(n+2)!}{n!}x^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}(n+1)(n+2)x^n\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}f(x)&=(a+bx+cx^2)(1-x)^{-3}\\&=(a+bx+cx^2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}(n+1)(n+2)x^n\\&=\frac{1}{2}a\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n+\frac{1}{2}b\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^{n+1}\\&\quad+\frac{1}{2}c\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^{n+2}.\end{aligned}$$

将求和指标统一从 $n=2$ 开始, 可得

$$f(x)=a+(3a+b)x+\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\left[a(n+1)(n+2)+bn(n+1)+cn(n-1)\right]x^n$$

(b) 据此, 求

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}.$$

强迫展开式中 x^n 的系数

$$\frac{1}{2}\left[(a+b+c)n^2+(3a+b-c)n+2a\right]$$

等于 n^2, 比较系数得

$$\frac{1}{2}(a+b+c)=1, \quad \frac{1}{2}(3a+b-c)=0, \quad a=0.$$

解得

$$a=0, \quad b=1, \quad c=1$$

于是

$$f(x)=(x+x^2)(1-x)^{-3}=x+\sum_{n=2}^{\infty} n^2 x^n$$

令 $x=\frac{1}{2}$, 有

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)^{-3}=\frac{1}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$$

因此

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}=6-\frac{1}{2}=\frac{11}{2}.$$

再加上 $n=1$ 的项 $\frac{1}{2}$, 得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}=6$$

30. 设函数

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}, \quad -1<x<1$$

(a) 证明

$$f(x)=\sum_{r=0}^{\infty} {}^{2r}C_r\left(\frac{1}{4}x\right)^r$$

由广义二项式定理,

$$\begin{aligned}(1-x)^{-\frac{1}{2}} &= 1+\frac{-\frac{1}{2}}{1!}(-x)+\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}(-x)^2+\cdots \\ &= 1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2r-1}{2}\right)}{r!}(-x)^r \\ &= 1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2r-1)}{r!2^r}x^r\end{aligned}$$

利用

$$1\cdot 3\cdot 5\cdots(2r-1)=\frac{(2r)!}{2^r r!}$$

可得

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(2r)!}{r!r!}\left(\frac{x}{4}\right)^r=\sum_{r=0}^{\infty}{}^{2r}C_r\left(\frac{x}{4}\right)^r$$

(b) 求

$$\frac{1}{\sqrt{16-x^2}}$$

的展开式, 并进一步证明

$$\frac{x}{(16-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\sum_{r=1}^{\infty}{}^{2r}C_r\left(\frac{1}{16}\right)^r\left(\frac{1}{8}x\right)^{2r-1}$$

由 (a), 二项展开得,

$$\begin{aligned}(16-x^2)^{-\frac{1}{2}} &= 16^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x^2}{16}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{r=0}^{\infty}{}^{2r}C_r\left(\frac{x^2}{64}\right)^r \\ &= \frac{1}{4}\sum_{r=0}^{\infty}{}^{2r}C_r\left(\frac{x}{8}\right)^{2r}\end{aligned}$$

对两边求导, 化简得

$$\frac{x}{(16-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{4}\sum_{r=1}^{\infty}{}^{2r}C_r(2r)\left(\frac{x}{8}\right)^{2r-1}\cdot\frac{1}{8}$$

(c) 求下列级数的值

$$\sum_{r=1}^{\infty} {}^{2r}C_r \left(\frac{5}{32}\right)^r \left(\frac{4}{25}\right)^r$$

原级数化简为

$$\sum_{r=1}^{\infty} {}^{2r}C_r \left(\frac{1}{16}\right)^r \left(\frac{2}{5}\right)^{2r-1}$$

由 (b), 令

$$\frac{x}{8} = \frac{2}{5} \Rightarrow x = \frac{16}{5}$$

则

$$\sum_{r=1}^{\infty} {}^{2r}C_r \left(\frac{1}{16}\right)^r \left(\frac{2}{5}\right)^{2r-1} = \frac{\frac{16}{5}}{\left(16 - \left(\frac{16}{5}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{25}{108}$$

泰勒展开式

1. 设

$$y = e^{\tan x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

(a) 证明

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (1 + \tan^2 x + 2\tan x)\frac{dy}{dx}.$$

首先对 y 求导

$$\frac{dy}{dx} = e^{\tan x}\sec^2 x = y\sec^2 x.$$

再次求导得

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{dy}{dx}\sec^2 x + y \cdot 2\sec^2 x\tan x \\
&= \frac{dy}{dx}\sec^2 x + 2\frac{dy}{dx}\tan x \\
&= \frac{dy}{dx}(\sec^2 x + 2\tan x) \\
&= \frac{dy}{dx}(1 + \tan^2 x + 2\tan x)
\end{aligned}$$

(b) 求 $e^{\tan x}$ 展开至 x^3 项的麦克劳林展开式。

在 $x = 0$ 处的泰勒展开式为

$$y = y_0 + y_0'x + \frac{y_0''}{2!}x^2 + \frac{y_0'''}{3!}x^3 + O(x^4),$$

其中 $y_0 = 1, y_0' = 1, y_0'' = 1$, 计算三阶导数:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 2(1 + \tan x)\sec^2 x\frac{dy}{dx} + (1 + \tan x)^2\frac{d^2y}{dx^2},$$

代入 $x = 0$ 得 $y_0''' = 3$, 于是

$$e^{\tan x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + O(x^4)$$

2. 设

$$f(x)=\sin[\ln(1+x)],\quad x\in\mathbb{R},\quad x>-1$$

(a) 求关于 $f(x)$ 的微分方程。

首先求导得

$$f'(x)=\cos[\ln(1+x)]\frac{1}{1+x}\Rightarrow(1+x)f'(x)=\cos[\ln(1+x)]$$

再次求导

$$(1+x)f''(x)+f'(x)=-\sin[\ln(1+x)]\frac{1}{1+x}$$

移项得微分方程

$$(1+x)^2f''(x)+(1+x)f'(x)+f(x)=0 \tag{1}$$

(b) 求 $f(x)$ 的麦克劳林展开前 3 个非零项。

利用微分方程可求各阶导数在 $x=0$ 的值, 首先有

$$f(0)=\sin(\ln 1)=0,\quad f'(0)=\cos(\ln 1)=1.$$

由 (1) 得,

$$f''(0)+f'(0)+f(0)=0\implies f''(0)=-1.$$

对 (1) 再求导得

$$(1+x)^2f'''+3(1+x)f''+2f'=0$$

于是

$$f'''(0)+3f''(0)+2f'(0)=0\Rightarrow f'''(0)=1.$$

因此麦克劳林展开为

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\dots$$

(c) 据此, 求 $\cos[\ln(1+x)]$ 的麦克劳林展开前 2 个非零项。

由 (b),

$$\sin[\ln(1+x)]=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\dots$$

两边关于 x 求导,

$$\cos[\ln(1+x)]\cdot\frac{1}{1+x}=1-x+\frac{1}{2}x^2+\dots$$

于是

$$
\begin{aligned}
\cos[\ln(1+x)] &= (1+x)(1-x+\frac{1}{2}x^2+\dots) \\
&= 1-x+\frac{1}{2}x^2+x-x^2+\dots \\
&= 1-\frac{1}{2}x^2+\dots
\end{aligned}
$$

3. 设

$$y=\tan x, \quad 0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$$

(a) 证明下列公式:

i.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2y\frac{dy}{dx}$$

对 x 求导得,

$$\frac{dy}{dx}=\sec^2 x=1+\tan^2 x=1+y^2$$

再求导得

$$y''=2yy'$$

ii.

$$\frac{d^5y}{dx^5}=6\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2+8\frac{dy}{dx}\frac{d^3y}{dx^3}+2y\frac{d^4y}{dx^4}$$

再次求导得,

$$y'''=2(y')^2+2yy''$$

$$y^{(4)}=4y'y''+2y'y''+2yy'''=6y'y''+2yy'''$$

$$y^{(5)}=6(y'')^2+6y'y'''+2y'y'''+2yy^{(4)}=6(y'')^2+8y'y'''+2yy^{(4)}$$

(b) 求 $y=\tan x$ 的麦克劳林展开前 3 个非零项。

在 $x=0$ 处求各阶导数为

$$y_0=\tan(0)=0, \quad y_0'=1, \quad y_0''=0, \quad y_0'''=2, \quad y_0^{(4)}=0, \quad y_0^{(5)}=16.$$

故麦克劳林展开式为

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + O(x^6)$$

4. 设

$$y = \ln(2 - e^x), \quad x < \ln 2$$

(a) 证明下列公式:

$$e^y\left[\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3\right] + e^x = 0$$

由 $y = \ln(2 - e^x)$ 得

$$e^y = 2 - e^x$$

两边对 x 求导,

$$e^y y' = -e^x \Rightarrow e^y y' + e^x = 0$$

再次求导,

$$e^y[(y')^2 + y''] + e^x = 0$$

再求一次导数,

$$e^y[y''' + 3y'y'' + (y')^3] + e^x = 0$$

(b) 求麦克劳林展开式的前三个非零项。

在 $x = 0$ 处求各阶导数:

$$y_0 = \ln(2 - e^0) = 0$$

$$y_0' + 1 = 0 \Rightarrow y_0' = -1$$

$$(-1)^2 + y_0'' + 1 = 0 \Rightarrow y_0'' = -2$$

$$(-1)^3 + 3(-1)(-2) + y_0''' + 1 = 0 \Rightarrow y_0''' = -6$$

故麦克劳林展开式为

$$\ln(2 - e^x) = -x - x^2 - x^3 + O(x^4)$$

5. 函数 f, g 定义如下

$$f(x) = \arctan\left(\frac{2}{3}x\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

$$g(y) = \frac{1}{1+y}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad -1 < y < 1.$$

(a) 将 $g(y)$ 展开为二项级数, 并保留 y^3 项。

二项展开得,

$$\begin{aligned} g(y) = (1+y)^{-1} &= 1 + (-1)y + \frac{(-1)(-2)}{2!}y^2 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{3!}y^3 + O(y^4) \\ &= 1 - y + y^2 - y^3 + O(y^4) \end{aligned}$$

(b) 利用 (a) 的结果, 证明

$$\arctan\left(\frac{2}{3}x\right) \approx \frac{2}{3}x - \frac{8}{81}x^3 + \frac{32}{1215}x^5 - \frac{128}{15309}x^7$$

对 x 求导,

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{3}}{1+(\frac{2}{3}x)^2} = \frac{2}{3}\left(1+\frac{4}{9}x^2\right)^{-1}$$

令 $y = \frac{4}{9}x^2$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{3}\left[1 - \frac{4}{9}x^2 + \left(\frac{4}{9}x^2\right)^2 - \left(\frac{4}{9}x^2\right)^3 + O(x^8)\right] \\ &= \frac{2}{3} - \frac{8}{27}x^2 + \frac{32}{243}x^4 - \frac{128}{2187}x^6 + O(x^8) \end{aligned}$$

两边积分得

$$\begin{aligned} \arctan\left(\frac{2}{3}x\right) &= \int \left[\frac{2}{3} - \frac{8}{27}x^2 + \frac{32}{243}x^4 - \frac{128}{2187}x^6 + O(x^8)\right] dx \\ &= \frac{2}{3}x - \frac{8}{81}x^3 + \frac{32}{1215}x^5 - \frac{128}{15309}x^7 + O(x^9) + C \end{aligned}$$

由 $x=0$ 可得 $C=0$, 因此

$$\arctan\left(\frac{2}{3}x\right) \approx \frac{2}{3}x - \frac{8}{81}x^3 + \frac{32}{1215}x^5 - \frac{128}{15309}x^7$$

6. 已知

$$y = \tan x$$

(a) 证明

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 2y\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

求导,

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2 x = 1 + \tan^2 x = 1 + y^2$$

再求两次导数得

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2y\frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = 2y\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

(b) 求 $\tan x$ 关于 $\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ 的泰勒级数展开式的前四项。

计算 $f(x)$ 及其各阶导数在 $x = \frac{\pi}{4}$ 的值:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

$$f'(x) = \sec^2 x, \quad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sec^2\frac{\pi}{4} = (\sqrt{2})^2 = 2$$

$$f''(x) = 2\sec x \cdot (\sec x \tan x) = 2\sec^2 x \tan x, \quad f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2(2)(1) = 4$$

$$f'''(x) = 4\sec x(\sec x \tan x)\tan x + 2\sec^2 x(\sec^2 x) = 4\sec^2 x \tan^2 x + 2\sec^4 x$$

$$f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4(2)(1)^2 + 2(2)^2 = 16$$

将上述数值代入泰勒公式:

$$\begin{aligned}\tan x &= 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{4}{2!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{16}{3!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \dots \\ &= 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{8}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \dots\end{aligned}$$

(c) 据此, 求证

$$\tan\frac{5\pi}{18} \approx 1 + \frac{\pi}{18} + \frac{\pi^2}{648} + \frac{\pi^3}{17496}$$

令 $x = \frac{5\pi}{18}$, 则

$$x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{36}$$

代入泰勒展开得

$$\tan\frac{5\pi}{18} \approx 1 + 2\cdot\frac{\pi}{36} + 2\cdot\left(\frac{\pi}{36}\right)^2 + \frac{8}{3}\cdot\left(\frac{\pi}{36}\right)^3$$

即

$$\tan\frac{5\pi}{18} \approx 1 + \frac{\pi}{18} + \frac{\pi^2}{648} + \frac{\pi^3}{17496}$$

7. 求 $\arctan x$ 的麦克劳林展开式, 并利用该展开证明

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)$$

其中 $f(n)$ 为某函数。

考虑

$$\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$$

当 $|x| < 1$ 时, 有几何级数展开

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

对上式逐项积分, 有

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \int (-1)^n x^{2n}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + C$$

令 $x = 0$, 则 $C = 0$, 于是

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

代入 $x = 1$ 得

$$\arctan 1 = \frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

即

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{2n+1}$$

其中

$$f(n) = \frac{4(-1)^n}{2n+1}$$

8. 选择适当的二项展开式, 证明

$$\arcsin x = \sum_{r=0}^{\infty} \left[\binom{2r}{r} \frac{2}{2r+1} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+1} \right]$$

从二项式展开 $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ 出发,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{-\frac{1}{2}}{1}(-x^2)+\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{3}{2})}{1\cdot 2}(-x^2)^2+\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{1\cdot 2\cdot 3}(-x^2)^3+O(x^8)$$

整理得

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}&=1+\frac{2!}{(1!)^2}\frac{x^2}{2^2}+\frac{4!}{(2!)^2}\frac{x^4}{2^4}+\frac{6!}{(3!)^2}\frac{x^6}{2^6}+O(x^8)\\&=\sum_{r=0}^{\infty}\left[\frac{(2r)!}{(r!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2r}\right]\\&=\sum_{r=0}^{\infty}\left[\binom{2r}{r}\left(\frac{x}{2}\right)^{2r}\right]\end{aligned}$$

在收敛半径内，对等式两边积分:

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\sum_{r=0}^{\infty}\left[\binom{2r}{r}\frac{x^{2r}}{2^{2r}}\right]dx$$

得到

$$\arcsin x=\sum_{r=0}^{\infty}\left[\binom{2r}{r}\frac{x^{2r+1}}{2r+1}\cdot\frac{1}{2^{2r}}\right]+C=\sum_{r=0}^{\infty}\left[\binom{2r}{r}\frac{2}{2r+1}\left(\frac{x}{2}\right)^{2r+1}\right]+C$$

当 $x=0$ 时，故 $C=0$, 因此

$$\arcsin x=\sum_{r=0}^{\infty}\left[\binom{2r}{r}\frac{2}{2r+1}\left(\frac{x}{2}\right)^{2r+1}\right]$$

9. 求下列无穷级数的和

$$1+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 4^2}+\frac{1}{7\cdot 4^3}+\frac{1}{9\cdot 4^4}+\cdots$$

考虑 $\ln(1+x)$ 及 $\ln(1-x)$ 的幂展开:

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\dots$$

$$\ln(1-x)=-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\dots$$

两式相减得

$$\ln(1+x)-\ln(1-x)=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\dots\right)$$

即

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

在收敛半径内令 $x=\frac{1}{2}$, 则

$$\ln 3=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)2^{2k+1}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)4^k}$$

即所求级数的和为 $\ln 3$。

10. 求下列交错级数的和

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{1+4}+\frac{1}{1+4+9}-\frac{1}{1+4+9+16}+\frac{1}{1+4+9+16+25}-\cdots$$

写成

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{1^2+2^2+\cdots+n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6(-1)^{n+1}}{n(n+1)(2n+1)}$$

部分分式分解得

$$\frac{1}{n(n+1)(2n+1)}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\frac{4}{2n+1}$$

因此级数可写为

$$6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}+6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}-24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$$

分别处理各个级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln 2,\quad 6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}=6-6\ln 2$$

而由 $\arctan x$ 的展开,

$$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

令 $x=1$, 易知

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$$

因此原级数的和为

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{1+4}+\frac{1}{1+4+9}-\cdots=6\ln 2+(6-6\ln 2)-24\left(\frac{\pi}{4}-1\right)=6(\pi-3)$$

11. 证明

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left[\frac{2r+3}{(r+1)3^r}\right]=3\ln\frac{3}{2}$$

首先注意到

$$\frac{2r+3}{(r+1)3^r}=2\left(\frac{1}{3}\right)^r+\frac{1}{r+1}\left(\frac{1}{3}\right)^r$$

因此

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left[\frac{2r+3}{(r+1)3^r}\right]=\sum_{r=1}^{\infty}2\left(\frac{1}{3}\right)^r+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r+1}\left(\frac{1}{3}\right)^r$$

第一项是首项为 $\frac{2}{3}$, 公比为 $\frac{1}{3}$ 的等比级数, 故

$$\sum_{r=1}^{\infty}2\left(\frac{1}{3}\right)^r=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}}=1$$

对第二项, 考虑

$$\ln(1-x)=-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4-\cdots$$

两边除以 $-x$, 得

$$-\frac{1}{x}\ln(1-x)=1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{4}x^3+\cdots=1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r+1}x^r$$

取 $x=\frac{1}{3}$, 由于 $|x|<1$, 级数收敛, 于是

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r+1}\left(\frac{1}{3}\right)^r=-3\ln\frac{2}{3}-1$$

故

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left[\frac{2r+3}{(r+1)3^r}\right]=1-3\ln\frac{2}{3}-1=3\ln\frac{3}{2}$$

12. 求下列级数的值:

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2r}+\frac{1}{2r+1}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^r\right]$$

由

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots,\quad |x|<1$$

$$\ln(1-x)=-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-\cdots,\quad |x|<1$$

两式相加得

$$\ln(1-x^2)=-x^2-\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{3}x^6-\cdots$$

即

$$-\frac{1}{2}\ln(1-x^2)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{6}x^6+\cdots$$

令 $x=\frac{1}{2}$, 得

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{2r}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^r=-\frac{1}{2}\ln\frac{3}{4}$$

同理, 两式相减得

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right)$$

从而

$$\frac{1}{2x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=1+\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}+\cdots$$

令 $x=\frac{1}{2}$, 得

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{2r+1}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^r=\ln 3-1$$

将两部分相加,

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2r}+\frac{1}{2r+1}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^r\right]=-\frac{1}{2}\ln\frac{3}{4}+\ln 3-1=\frac{1}{2}\ln 12-1$$

13. (a) 以适当的积分方法计算

$$\int_0^1 x^3\arctan x\,dx$$

先用分部积分法,

$$\int_0^1 x^3 \arctan x \, dx = \left[\frac{x^4}{4} \arctan x\right]_0^1 - \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{x^4}{1+x^2} \, dx$$

其中

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^4}{1+x^2} \, dx &= \int_0^1 \left(x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2}\right) dx \\
&= \left[\frac{x^3}{3} - x + \arctan x\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

代回得

$$\int_0^1 x^3 \arctan x \, dx = \frac{\pi}{16} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{6}$$

(b) 求 $\arctan x$ 的无穷级数展开, 并利用该展开验证 (a) 的结果

由

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

两边积分得

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

根据富比尼定理（在满足一致收敛或绝对收敛的条件下），可以将积分号与求和号交换。代入积分式得

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^3 \arctan x \, dx &= \int_0^1 x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \, dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \int_0^1 x^{2n+4} \, dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+5)}
\end{aligned}$$

部分分式分解,

$$\frac{1}{(2n+1)(2n+5)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+5}\right)$$

于是由累加法,

$$\int_0^1 x^3 \arctan x \, dx = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+5}\right) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}$$

与 (a) 的结果一致。

14. 已知

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

求

$$\int_0^1 (\ln x)(\arctan x)\, dx$$

的值。

考虑 $\arctan x$ 的幂级数展开，由

$$\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

逐项积分得

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

将其代入积分，并交换求和与积分次序:

$$\int_0^1 (\arctan x)(\ln x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \int_0^1 x^{2n+1} \ln x\, dx.$$

作分部积分，取 $u = \ln x, dv = x^{2n+1} dx$，则

$$\int_0^1 x^{2n+1} \ln x\, dx = \left[\frac{x^{2n+2} \ln x}{2n+2}\right]_0^1 - \frac{1}{2n+2} \int_0^1 x^{2n+1}\, dx.$$

化简得

$$\int_0^1 x^{2n+1} \ln x\, dx = -\frac{1}{(2n+2)^2}.$$

于是

$$\int_0^1 (\arctan x)(\ln x)\, dx = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)^2}.$$

作部分分式分解

$$\frac{1}{(2n+1)(2n+2)^2} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{(2n+2)^2}.$$

代回得

$$\int_0^1 (\arctan x)(\ln x)\, dx = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{(2n+2)^2}\right]$$

将其拆分为三个已知级数:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

因此

$$\int_0^1 (\arctan x)(\ln x)\, dx = -\left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi^2}{12}\right] = \frac{\pi^2 - 12\pi + 24\ln 2}{48}$$

使用莱布尼兹积分法则。设

$$I(a) = \int_0^1 (\ln x) \arctan(ax)\, dx, \quad a \geqslant 0.$$

所求积分为 $I(1)$, 对参数 a 求导, 有

$$I'(a) = \int_0^1 (\ln x) \frac{x}{1+a^2x^2}\, dx.$$

交换积分顺序, 令 $u = ax$, 得

$$I'(a) = \int_0^1 x \ln x \int_0^a \frac{du}{1+u^2x^2}\, dx.$$

改为先对 x 积分。注意到

$$\int_0^1 \frac{x\ln x}{1+u^2x^2}\, dx = -\frac{1}{2u^2}\ln(1+u^2),$$

因此

$$I'(a) = -\frac{1}{2}\int_0^a \frac{\ln(1+u^2)}{u^2}\, du.$$

对该积分作分部积分, 取 $U = \ln(1+u^2)$,$dV = \frac{du}{u^2}$, 则

$$I'(a) = -\frac{1}{2}\left[-\frac{\ln(1+u^2)}{u} + \int_0^a \frac{2u}{1+u^2}\cdot\frac{1}{u}\, du\right].$$

化简得

$$I'(a) = \frac{1}{2}\frac{\ln(1+a^2)}{a} - \int_0^a \frac{du}{1+u^2}.$$

于是

$$I'(a) = \frac{1}{2}\frac{\ln(1+a^2)}{a} - \arctan a.$$

再对 a 从 0 积分到 1, 注意 $I(0)=0$, 得到

$$I(1)=\int_0^1\left(\frac{1}{2}\frac{\ln(1+a^2)}{a}-\arctan a\right)da.$$

分项计算。首先

$$\int_0^1\arctan a\,da=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2.$$

其次

$$\int_0^1\frac{\ln(1+a^2)}{a}\,da=\int_0^1\int_0^{a^2}\frac{1}{a(1+t)}\,dt\,da=\int_0^1\frac{1-a^2}{a(1+a^2)}\,da=\frac{\pi^2}{12}$$

综上

$$I(1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{12}-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2\right)$$

因此

$$\int_0^1(\ln x)(\arctan x)\,dx=\frac{\pi^2}{48}+\frac{1}{2}\ln 2-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi^2-12\pi+24\ln 2}{48}$$

(待验证)

矩阵

1. 已知

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&3&0\\0&-4&5\end{bmatrix},\quad I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad B=(I+A)^{-1}(I-A),$$

求矩阵 $(I+B)^{-1}$。

由 $B=(I+A)^{-1}(I-A)$ 可得

$$(I+A)B=I-A$$

两边加上 $I+A$ 得

$$I+A+B+AB=(I+A)(I+B)=2I$$

因此

$$(I+B)^{-1}=\frac{1}{2}(I+A)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&0&0\\-2&4&0\\0&-4&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&2&0\\0&-2&3\end{bmatrix}$$

2. 已知

$$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p&q\\r&s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&3\\3&2\end{bmatrix}$$

且联立方程

$$\begin{cases}ax+by=5\\cx+dy=-3\end{cases}$$

恰有一组解 $(x,y)=(1,2)$, 求联立方程

$$\begin{cases}pu+qv=1\\ru+sv=2\end{cases}$$

的解 (u,v)。

已知

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

且

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

因此

$$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ -30 \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 19 \\ -30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

故联立方程的解为

$$(u, v) = (19, -30)$$

3. 设三阶方阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{10} = \begin{bmatrix} 1 & ka & pa^2 + qb \\ 0 & 1 & ka \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

其中 k, p, q 为常数，试求 $k + p + q$。

将 A 分解为 $A = I + B$，其中

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

注意到 $B^3 = 0$，且

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

由二项式定理，

$$A^{10} = (I + B)^{10} = \sum_{k=0}^{10} {}^{10}C_k B^k I^{10-k} = I + 10B + 45B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 10a & 45a^2 + 10b \\ 0 & 1 & 10a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

所以

$$k=10,\quad p=45,\quad q=10\quad\Rightarrow\quad k+p+q=65.$$

4. 设实数 $a>b$, 且有二阶方阵 X,Y 满足

$$X+Y=I,\quad XY=O,$$

其中

$$I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\quad O=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix},$$

且

$$A=\begin{bmatrix}2&4\\1&-1\end{bmatrix}=aX+bY,$$

求 a,b 的值。据此, 求 $X^{2025}-Y^{2025}$。

首先有

$$A=aX+bY=aX+b(I-X)=bI+(a-b)X,$$

故

$$X=\frac{A-bI}{a-b},\quad Y=\frac{aI-A}{a-b}.$$

所以

$$XY=\frac{1}{(a-b)^2}(A-bI)(aI-A)=O,$$

即

$$\begin{bmatrix}2-b&4\\1&-1-b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a-2&-4\\-1&a+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}.$$

得到方程组

$$\begin{cases}(2-b)(a-2)+4(-1)=0,\\(2-b)(-4)+4(a+1)=0,\\1\cdot(a-2)+(-1-b)(-1)=0,\\1\cdot(-4)+(-1-b)(a+1)=0.\end{cases}$$

由 $a>b$, 解得

$$a=3,b=-2$$

因此

$$X=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}4&4\\1&1\end{bmatrix},\quad Y=I-X=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1&-4\\-1&4\end{bmatrix}$$

且发现 $X^2=X$, $Y^2=Y$, 即 X,Y 是幂等矩阵, 故对任意正整数 n,

$$X^n=X,\quad Y^n=Y$$

因此

$$X^{2025}-Y^{2025}=X-Y=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3&8\\2&-3\end{bmatrix}$$

5. 设

$$A=\begin{bmatrix}4&4\\-1&-1\end{bmatrix}$$

满足

$$A+A^2+\cdots+A^n=\begin{bmatrix}2(3^n-1)&a\\b&c\end{bmatrix},$$

求 $b+c$。

发现

$$A^2=\begin{bmatrix}4&4\\-1&-1\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}12&12\\-3&-3\end{bmatrix}=3A,$$

于是对任意 $k\geqslant 1$ 有 $A^k=3^{k-1}A$, 因此

$$A+\cdots+A^n=A\sum_{k=0}^{n-1}3^k=\frac{3^n-1}{2}A=\begin{bmatrix}2(3^n-1)&2(3^n-1)\\\frac{1}{2}(1-3^n)&\frac{1}{2}(1-3^n)\end{bmatrix}$$

故

$$b+c=\frac{1}{2}(1-3^n)+\frac{1}{2}(1-3^n)=1-3^n$$

又解: 对角化 A 可得

$$A=\begin{bmatrix}4&4\\-1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-4\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{4}{3}\\-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\end{bmatrix}\equiv PDP^{-1}$$

由 $A^n=PD^nP^{-1}$,

$$A+A^2+\cdots+A^n=P(D+D^2+\cdots+D^n)P^{-1}$$

$$= P\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3+3^2+\cdots+3^n \end{bmatrix} P^{-1} = P\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{3^{n+1}-3}{2} \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} 2(3^n-1) & 2(3^n-1) \\ \dfrac{1}{2}(1-3^n) & \dfrac{1}{2}(1-3^n) \end{bmatrix}$$

同上。

6. 设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -8 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}$$

满足

$$(I+A)^n = I + a_n A,$$

其中 n 为自然数,

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

且 $\{a_n\}$ 为一个数列, 求 a_n 的通项公式。

求 A 的特征值:

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -8 \\ -7 & 8-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 15\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0,\ 15$$

设

$$f(\lambda) = (1+\lambda)^n = (\lambda^2 - 15\lambda)p(\lambda) + a\lambda + b,$$

令 $\lambda = 0, 15$, 解得

$$a = \frac{16^n - 1}{15}, \quad b = 1$$

由凯莱-哈密顿定理,

$$(I+A)^n = aA + bI = \frac{16^n-1}{15}A + I \Rightarrow a_n = \frac{1}{15}(16^n - 1)$$

7. 设矩阵

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 9 & 7 \end{bmatrix},$$

求

$$A^{51} - A^{50} + A^3 - 3A^2 - 2A + 4I_2,$$

其中 $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$。

发现

$$(A-I)^2 = \begin{bmatrix} -6 & -4 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = 2A - I$$

且考虑方程

$$\lambda^{50} = q(\lambda)(\lambda-1)^2 + c_1\lambda + c_0 \tag{1}$$

对 λ 求导，可得

$$50\lambda^{49} = q'(\lambda)(\lambda-1)^2 + 2q(\lambda)(\lambda-1) + c_1 \tag{2}$$

由 (1), (2), 代入 $\lambda = 1$ 得

$$c_0 = -49,\ \ c_1 = 50$$

由凯莱-哈密顿定理，

$$A^{50} = 50A - 49I$$

因此

$$A^{51} - A^{50} = (50A^2 - 49A) - (50A - 49I) = 100A - 50I - 99A - 49I = A - I$$

又

$$A^3 - 3A^2 - 2A + 4I = (A-I)^3 - 5(A-I) = -5(A-I)$$

故

$$A^{51} - A^{50} + A^3 - 3A^2 - 2A + 4I = -4(A-I) = \begin{bmatrix} 24 & 16 \\ -36 & -24 \end{bmatrix}$$

8. 已知

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}^{101} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

求 $a+b+c+d+e+f+g+h+i$。

设

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

解 $\det(A-\lambda I)=0$, 即

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0 \Rightarrow \lambda=1\ (m=2),\ \lambda=-1$$

对于 $\lambda=1$, 解 $(A-I)\mathbf{x}=\mathbf{0}$:

$$A-I=\begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1=-x_2-x_3,\ x_2,\ x_3\in\mathbb{R}$$

取两个线性无关解:

$$\vec{v}_1=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\quad \vec{v}_2=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

对于 $\lambda=-1$, 解 $(A+I)\mathbf{x}=\mathbf{0}$:

$$A+I=\begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1=x_3,\ x_2=-x_3$$

取

$$\vec{v}_3=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

于是

$$P=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

现计算逆矩阵 P^{-1}, 由 $|P|=2$ 得

$$P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

于是

$$A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

所以

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^{\frac{1}{101}} & 0 & 0 \\ 0 & 1^{\frac{1}{101}} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{\frac{1}{101}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

恰好也是原矩阵, 因此

$$a+b+c+d+e+f+g+h+i = -3$$

9. 设 A, B 为 $n \times n$ 实矩阵, 且满足

$$AB + A + B = 0,$$

证明 $AB = BA$。

注意到

$$(A+I)(B+I) = AB + A + B + I = I$$

其中 I 为单位矩阵, 因此 $A+I$ 及 $B+I$ 互为逆矩阵, 据此有

$$(A+I)(B+I) = (B+I)(A+I) = I$$

展开等式得到

$$AB + A + B + I = BA + B + A + I \Rightarrow AB = BA$$

10. 若 n 阶方阵 $A, B, A+B$ 皆可逆, 证明 $A^{-1} + B^{-1}$ 也是可逆矩阵。

需证明存在一个矩阵 C, 使得

$$(A^{-1} + B^{-1})C = I$$

设

$$C = B(A+B)^{-1}A$$

下面验证该选择可行, 观察

$$\begin{aligned}(A^{-1}+B^{-1})C &= (A^{-1}+B^{-1})B(A+B)^{-1}A\\ &= A^{-1}B(A+B)^{-1}A+(A+B)^{-1}A\\ &= A^{-1}[(A+B)-A](A+B)^{-1}A+(A+B)^{-1}A\\ &= [A^{-1}(A+B)-I](A+B)^{-1}A+(A+B)^{-1}A\\ &= A^{-1}A-(A+B)^{-1}A+(A+B)^{-1}A\\ &= I\end{aligned}$$

因此存在矩阵 $C=B(A+B)^{-1}A$ 使得 $(A^{-1}+B^{-1})C=I$, 从而 $A^{-1}+B^{-1}$ 可逆, 其逆矩阵为

$$(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=B(A+B)^{-1}A.$$

11. 设 A, B 均为 n 阶方阵, 且 $I+AB$ 可逆, 证明矩阵 $I+BA$ 也可逆。

首先发现到

$$(I+BA)B=B+BAB=B(I+AB)$$

由此观察

$$\begin{aligned}&(I+BA)\big[I-B(I+AB)^{-1}A\big]\\ &=I+BA-(I+BA)B(I+AB)^{-1}A\\ &=I+BA-B(I+AB)(I+AB)^{-1}A\\ &=I+BA-BA\\ &=I\end{aligned}$$

故得证 $I+BA$ 也可逆。

12. 设 A, B, C 为同阶实方阵, 且 A 可逆, 证明若

$$(A-B)C=BA^{-1},$$

则有

$$C(A-B)=A^{-1}B.$$

由假设

$$(A-B)C = BA^{-1}$$

在两边加上 $(A-B)A^{-1}$, 得到

$$(A-B)C + (A-B)A^{-1} = BA^{-1} + (A-B)A^{-1} = I$$

于是由

$$(A-B)(C + A^{-1}) = I$$

知 $A+B$ 可逆, 有

$$(C + A^{-1})(A-B) = I$$

展开即得到

$$C(A-B) = A^{-1}B$$

13. 对任意整数 $n \geqslant 2$, 设 A, B 为两个 $n \times n$ 实矩阵, 且满足

$$A^{-1} + B^{-1} = (A+B)^{-1}.$$

证明

$$\det A = \det B.$$

若 A, B 为复矩阵, 结论是否仍成立?

由条件

$$A^{-1} + B^{-1} = (A+B)^{-1}$$

有

$$I = (A+B)(A+B)^{-1} = (A+B)(A^{-1}+B^{-1}) = I + AB^{-1} + BA^{-1} + I$$

于是

$$AB^{-1} + BA^{-1} + I = 0$$

令 $X = AB^{-1}$, 则 $A = XB$, 且 $BA^{-1} = X^{-1}$, 因此

$$X + X^{-1} + I = 0$$

于是

$$X^3 - I = (X-I)X(X + X^{-1} + I) = 0 \Rightarrow X^3 = I$$

取行列式可得

$$(\det X)^3 = \det(X^3) = \det I = 1$$

由于 X 为实矩阵, 故 $\det X = 1$, 于是

$$\det A = \det(XB) = \det X \det B = \det B,$$

故得证。下面说明在复矩阵情形下结论不成立。设

$$\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \notin \mathbb{R}$$

其中 $\omega^3 = 1$, 且有

$$1 + \omega + \omega^2 = 0.$$

取 $A = I$, 且 B 为对角矩阵, 其对角元均取为 ω 或 ω^2 使得 $\det B \neq 1$(若 n 不是 3 的倍数可直接取 $B = \omega I$), 此时

$$A^{-1} = I, \quad B^{-1} = \overline{B}$$

且

$$I + B + \overline{B} = 0$$

因此

$$(A+B)^{-1} = (-\overline{B})^{-1} = -B = I + \overline{B} = A^{-1} + B^{-1}$$

但由构造可知

$$\det A = 1 \neq \det B$$

14. 设 A, B 为 $n \times n$ 实矩阵, 满足

$$A^2 + B^2 = AB.$$

证明若 $BA - AB$ 为可逆矩阵, 则 n 能被 3 整除。

设 $S = A + \omega B$, 其中 $\omega = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} i$, 则

$$S\bar{S} = (A + \omega B)(A + \bar{\omega} B) = A^2 + \omega BA + \bar{\omega} AB + B^2 = AB + \omega BA + \bar{\omega} AB$$

注意到 $\bar{\omega} + 1 = -\omega$, 于是

$$S\bar{S} = \omega(BA - AB)$$

两边取行列式, 有

$$\det S \cdot \det \bar{S} = \det(\omega(BA - AB)) = \omega^n \det(BA - AB)$$

由于 $\det S \cdot \det \bar{S} \in \mathbb{R}$, 且 $BA - AB$ 可逆, 故 $\det(BA - AB) \neq 0$, 从而 ω^n 必须为实数, 因此 n 必须是 3 的倍数。

15. 求所有复数 λ, 使得存在正整数 n 及实 $n \times n$ 矩阵 A, 满足

$$A^2 = A^T$$

且 λ 是 A 的一个特征值。

有

$$A^4 = (A^2)^2 = (A^T)^2 = (A^2)^T = (A^T)^T = A$$

所以

$$A^4 - A = 0$$

由此可知 A 的所有特征值都是多项式 $X^4 - X$ 的根, 而 $X^4 - X = X(X^3 - 1)$ 的根是

$$0, 1, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

考虑以下矩阵

$$A_0 = (0), \quad A_1 = (1), \quad A_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

0 和 1 分别是 1×1 矩阵 A_0 和 A_1 的特征值, $\frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ 是 A_2 的特征值, 不难看出

$$A_2^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = A_2^T$$

故矩阵 A_4 包含了所有四个可能特征值。

16. 已知 A 是 4×2 实矩阵, B 是 2×4 实矩阵, 且

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

求 BA。

将矩阵分块成

$$A=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}B_1 & B_2\end{pmatrix},$$

其中 A_1,A_2,B_1,B_2 为 2×2 矩阵, 于是

$$AB=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_1 & B_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1B_1 & A_1B_2\\A_2B_1 & A_2B_2\end{pmatrix}$$

比较得

$$A_1B_1=A_2B_2=I_2,\quad A_1B_2=A_2B_1=-I_2$$

即

$$B_1=A_1^{-1},\quad B_2=-A_1^{-1},\quad A_2=-A_1$$

于是

$$BA=\begin{pmatrix}B_1 & B_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}=B_1A_1+B_2A_2=A_1^{-1}A_1+(-A_1^{-1})(-A_1)=2I_2$$

17. 已知

$$A=\begin{bmatrix}2&4&0&0\\1&2&0&0\\0&0&2&4\\0&0&2&2\end{bmatrix},$$

求 A^n。

将 A 分块为

$$A=\begin{bmatrix}B&0\\0&C\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2&4\\1&2\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}2&4\\0&2\end{bmatrix}$$

注意到 $B=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\end{bmatrix}$, 所以可递推得

$$B^n=4^{n-1}B$$

且由于 $\begin{bmatrix}0&4\\0&0\end{bmatrix}^2=0$, 则

$$C^n=\left(2I+\begin{bmatrix}0&4\\0&0\end{bmatrix}\right)^n=2^nI+n2^{n-1}\begin{bmatrix}0&4\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2^n&4n2^{n-1}\\0&2^n\end{bmatrix}$$

因此

$$A^n = \begin{bmatrix} B^n & 0 \\ 0 & C^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 4^{n-1} & 4\cdot 4^{n-1} & 0 & 0 \\ 1\cdot 4^{n-1} & 2\cdot 4^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & n2^{n+1} \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{2n-1} & 2^{2n+1} & 0 & 0 \\ 2^{2n-2} & 2^{2n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & n2^{n+1} \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix}$$

18. 设 A 和 B 是 $n\times n$ 实矩阵, 且满足

$$\operatorname{rank}(AB - BA + I) = 1,$$

其中 I 是 $n\times n$ 单位矩阵。证明

$$\operatorname{tr}(ABAB) - \operatorname{tr}(A^2B^2) = \frac{1}{2}n(n-1).$$

令 $X = AB - BA$, 注意到

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(X^2) &= \operatorname{tr}(ABAB - ABBA - BAAB + BABA) \\ &= 2\operatorname{tr}(ABAB) - 2\operatorname{tr}(A^2B^2), \end{aligned}$$

因为迹具有循环性。因此只需证明 $\operatorname{tr}(X^2) = n(n-1)$。由假设,$X + I$ 的秩为 1, 所以

$$X + I = v^t w$$

其中 v, w 为向量, 于是

$$X^2 = (v^t w - I)^2 = I - 2v^t w + v^t w v^t w = I + (wv^t - 2)v^t w.$$

且有 $\operatorname{tr}(X) = 0$, 因此

$$wv^t = \operatorname{tr}(wv^t) = \operatorname{tr}(v^t w) = n$$

于是

$$\operatorname{tr}(X^2) = n + (n-2)n = n(n-1)$$

即得证。

由于 $X+I$ 的秩为 1, 它有特征值 0, 重数为 $n-1$。因此 X 有特征值 -1, 重数也为 $n-1$。由于 $\operatorname{tr}(X)=0$, 剩余的特征值只能为为 $n-1$, 于是

$$\operatorname{tr}(X^2)=(n-1)^2+(n-1)\cdot 1^2=n(n-1)$$

同样得证。

19. 确定是否存在奇正整数 n 和具有整数元素的 $n\times n$ 矩阵 A,B, 满足以下条件:

- $\det(B)=1$;
- $AB=BA$;
- $A^4+4A^2B^2+16B^4=2019I$

我们证明不存在这样的矩阵。注意到 $A^4+4A^2B^2+16B^4$ 可以因式分解为

$$A^4+4A^2B^2+16B^4=(A^2+2AB+4B^2)(A^2-2AB+4B^2)$$

令 $C=A^2+2AB+4B^2, D=A^2-2AB+4B^2$, 则

$$\det C\cdot\det D=\det(CD)=\det(2019I)=2019^n$$

矩阵 C,D 的元素皆为整数, 因此它们的行列式也为整数, 此外由 $C\equiv D\pmod 4$ 可知

$$\det C\equiv\det D\pmod 4$$

这意味 $\det C\cdot\det D\equiv(\det C)^2\pmod 4$, 但 $2019^n\equiv 3$ 是模 4 的二次非剩余, 矛盾。

注意

$$A^4\equiv A^4+4A^2B^2+16B^4=2019I\pmod 4$$

所以

$$(\det A)^4=\det A^4\equiv\det(2019I)=2019^n\pmod 4.$$

但是 $2019^n\equiv 3$ 是模 4 的二次非剩余, 矛盾。

20. 设 A 是 $n\times n$ 实矩阵, 且

$$A^3=0$$

证明存在唯一的 $n\times n$ 实矩阵 X 满足

$$X+AX+XA^2=A,$$

且以 A 表示 X。

首先假设某个矩阵 X 满足该方程。如果我们在给定方程的左侧乘以 A 的某个幂，右侧乘以 A 的另一个幂，就可以得到新的方程。例如，

$$A^2(X+AX+XA^2)A^2=A^2XA^2+A^3\cdot XA^2+A^2XA\cdot A^3=A^2XA^2.$$

所以

$$\begin{aligned}
A^2XA^2&=A^2(X+AX+XA^2)A^2=A^5=0\\
A^2X&=A^2(X+AX+XA^2)=A^3=0\\
AXA&=A(X+AX+XA^2)A=A^3=0\\
XA^2&=(X+AX+XA^2)A^2=A^3=0\\
AX&=A(X+AX+XA^2)A=A^2\\
X&=A-AX-XA^2=A-A^2
\end{aligned}$$

因此，除 $A-A^2$ 以外，没有其他矩阵能满足该方程。注意上述论证并未证明矩阵 $X=A-A^2$ 满足方程，因为这些步骤不能逆推。事实上，

$$X+AX+XA^2=(A-A^2)+A(A-A^2)+(A-A^2)A^2=A-A^4=A$$

因此,$X=A-A^2$ 是方程的唯一解。

我们使用另一种不同的方法来用 A 表示 X。如果存在某个矩阵 X 满足方程，那么

$$X=A-AX-XA^2.$$

让我们在右侧反复代入此恒等式，直到 X 在各处都被消去。注意到根据条件 $A^3=0$，我们

有 $A^3=A^4=A^5=A^3X=XA^4=AXA^4=A^3XA^2=0$, 所以

$$\begin{aligned}
X &= A-AX-XA^2\\
&= A-A(A-AX-XA^2)-(A-AX-XA^2)A^2\\
&= A-(A^2-A^2X-AXA^2)-(A^3-AXA^2-XA^4)\\
&= A-A^2+A^2X+2AXA^2\\
&= A-A^2+A^2(A-AX-XA^2)+2A(A-AX-XA^2)A^2\\
&= A-A^2+(A^3-A^3X-A^2XA^2)+2(A^4-A^2XA^2-AXA^4)\\
&= A-A^2-3A^2XA^2\\
&= A-A^2-3A^2(A-AX-XA^2)A^2\\
&= A-A^2-3(A^5-A^3XA^2-A^2XA^4)\\
&= A-A^2.
\end{aligned}$$

同上, 仍需验证 $X=A-A^2$ 确实是一个解, 这一步与解 1 相同。

设 $B=I-A+A^2$, 使得 B 是 $I+A$ 的逆矩阵。在左侧乘以 B, 方程等价于

$$X+BXA^2=BA. \tag{1}$$

现在假设 X 满足方程。在右侧乘以 A^2 并利用 $A^3=0$, 我们得到 $XA^2=0$。因此方程简化为

$$X=BA=A-A^2$$

另一方面,$X=BA$ 显然满足 (1)。

21. 设 A,B,C 为 $n\times n$ 复矩阵, 满足

$$A^2=B^2=C^2,\quad B^3=ABC+2I.$$

证明 $A^6=I$。

发现到 $B^3=A^2B$ 可得

$$B^3-ABC=A^2B-ABC=2I\Rightarrow A(AB-BC)=2I$$

同理由 $B^3 = BC^2$ 可得

$$BC^2 - ABC = 2I \implies (BC - AB)C = 2I$$

这说明 A 是 $\dfrac{AB - BC}{2}$ 的左逆矩阵, 而 $-C$ 是右逆矩阵, 所以 $A = -C$。因此

$$ABA = 2I - B^3$$

于是 ABA 与 B 交换, 由此得

$$(AB)^2 = (BA)^2$$

而

$$\begin{aligned}(AB - BA)(AB + BA) &= (AB)^2 + AB^2A - BA^2B - (BA)^2 \\ &= (AB)^2 + A^4 - B^4 - (AB)^2 = 0\end{aligned}$$

又因为 $AB - BC = AB + BA$ 可逆, 故 $AB = BA$, 于是 $ABA = A^2B = B^3$, 由此得

$$B^3 = I \Rightarrow A^6 = B^6 = (B^3)^2 = I^2 = I$$

22. 设 $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$, 且 $A = ab^T$, $B = ba^T$, 解矩阵方程

$$2B^2A^2X = A^4X + B^4X + c$$

(题目有误, 不符合矩阵乘法定义)

行列式

1. 若 $a+b+c=x+y+z=0$, 求行列式

$$\begin{vmatrix} xa & yb & zc \\ yc & za & xb \\ zb & xc & ya \end{vmatrix}$$

展开行列式得

$$\begin{vmatrix} xa & yb & zc \\ yc & za & xb \\ zb & xc & ya \end{vmatrix} = xyz(a^3+b^3+c^3)+abc(x^3+y^3+z^3)$$

由于

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$$

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=0$$

故

$$\begin{vmatrix} xa & yb & zc \\ yc & za & xb \\ zb & xc & ya \end{vmatrix} = xyz(3abc)-abc(3xyz)=0$$

2. 计算行列式

$$\begin{vmatrix} \log a & \log b & \log\dfrac{1}{ab} \\ \log b & \log c & \log\dfrac{1}{bc} \\ \log c & \log a & \log\dfrac{1}{ca} \end{vmatrix}$$

令

$$D=\begin{vmatrix} \log a & \log b & \log\dfrac{1}{ab} \\ \log b & \log c & \log\dfrac{1}{bc} \\ \log c & \log a & \log\dfrac{1}{ca} \end{vmatrix}$$

化为

$$D=\begin{vmatrix}\log a & \log b & -\log a-\log b\\ \log b & \log c & -\log b-\log c\\ \log c & \log a & -\log c-\log a\end{vmatrix}$$

进行列变换 $C_3 \leftarrow C_3-C_1-C_2$, 得到

$$D=\begin{vmatrix}\log a & \log b & 0\\ \log b & \log c & 0\\ \log c & \log a & 0\end{vmatrix}=0$$

3. 若 m 为正整数, 求行列式

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ {}^{m}C_1 & {}^{m+1}C_1 & {}^{m+2}C_1\\ {}^{m}C_2 & {}^{m+1}C_2 & {}^{m+2}C_2\end{vmatrix}$$

令

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ {}^{m}C_1 & {}^{m+1}C_1 & {}^{m+2}C_1\\ {}^{m}C_2 & {}^{m+1}C_2 & {}^{m+2}C_2\end{vmatrix}$$

由性质 ${}^{n-1}C_{k-1}+{}^{n-1}C_k={}^{n}C_k$, 有

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ {}^{m}C_1 & {}^{m+1}C_1 & {}^{m+1}C_0+{}^{m+1}C_1\\ {}^{m}C_2 & {}^{m+1}C_2 & {}^{m+1}C_1+{}^{m+1}C_2\end{vmatrix}$$

进行列变换 $C_3 \to C_3-C_2$,

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ {}^{m}C_1 & {}^{m+1}C_1 & {}^{m+1}C_0\\ {}^{m}C_2 & {}^{m+1}C_2 & {}^{m+1}C_1\end{vmatrix}$$

再由性质 ${}^{n-1}C_{k-1}+{}^{n-1}C_k={}^{n}C_k$,

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ {}^{m}C_1 & {}^{m}C_0+{}^{m}C_1 & {}^{m+1}C_0\\ {}^{m}C_2 & {}^{m}C_1+{}^{m}C_2 & {}^{m+1}C_1\end{vmatrix}$$

进行列变换 $C_2 \to C_2 - C_1$,

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ {}^{m}C_1 & {}^{m}C_0 & {}^{m+1}C_0 \\ {}^{m}C_2 & {}^{m}C_1 & {}^{m+1}C_1 \end{vmatrix}$$

按第一行展开得

$$D = {}^{m}C_0{}^{m+1}C_1 - {}^{m}C_1{}^{m+1}C_0 = 1 \cdot (m+1) - m \cdot 1 = 1$$

4. 已知 A, B, C 为 $\triangle ABC$ 的内角, 求

$$\begin{vmatrix} \tan A & 1 & 1 \\ 1 & \tan B & 1 \\ 1 & 1 & \tan C \end{vmatrix}$$

令

$$D = \begin{vmatrix} \tan A & 1 & 1 \\ 1 & \tan B & 1 \\ 1 & 1 & \tan C \end{vmatrix}$$

展开行列式:

$$D = \tan A \tan B \tan C - (\tan A + \tan B + \tan C) + 2$$

由于 $A + B + C = \pi$, 有

$$\tan(A+B) = \tan(\pi - C) = -\tan C$$

又

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

因此可得

$$\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} \Rightarrow \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$$

故得到

$$D = 2$$

5. 计算行列式

$$\begin{vmatrix} \tan 40^\circ & \tan 10^\circ & \tan 50^\circ \\ \tan 20^\circ & \tan 50^\circ & \tan 70^\circ \\ \tan 10^\circ & \tan 70^\circ & \tan 80^\circ \end{vmatrix}$$

令

$$D = \begin{vmatrix} \tan 40^\circ & \tan 10^\circ & \tan 50^\circ \\ \tan 20^\circ & \tan 50^\circ & \tan 70^\circ \\ \tan 10^\circ & \tan 70^\circ & \tan 80^\circ \end{vmatrix}$$

进行列变换 $C_3 \to -C_1 - C_2 + C_3$,

$$D = \begin{vmatrix} \tan 40^\circ & \tan 10^\circ & -\tan 10^\circ - \tan 40^\circ + \tan 50^\circ \\ \tan 20^\circ & \tan 50^\circ & -\tan 20^\circ - \tan 50^\circ + \tan 70^\circ \\ \tan 10^\circ & \tan 70^\circ & -\tan 10^\circ - \tan 70^\circ + \tan 80^\circ \end{vmatrix}$$

由

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

可得

$$\tan A \tan B \tan(A+B) = \tan(A+B) - \tan A - \tan B$$

且若 $A + B = 90^\circ$, 则

$$\tan A \tan B = 1$$

因此

$$D = \begin{vmatrix} \tan 40^\circ & \tan 10^\circ & \tan 10^\circ \cdot \tan 40^\circ \cdot \tan 50^\circ \\ \tan 20^\circ & \tan 50^\circ & \tan 20^\circ \cdot \tan 50^\circ \cdot \tan 70^\circ \\ \tan 10^\circ & \tan 70^\circ & \tan 10^\circ \cdot \tan 70^\circ \cdot \tan 80^\circ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tan 40^\circ & \tan 10^\circ & \tan 10^\circ \\ \tan 20^\circ & \tan 50^\circ & \tan 50^\circ \\ \tan 10^\circ & \tan 70^\circ & \tan 70^\circ \end{vmatrix} = 0$$

6. 已知 A, B, C 为 $\triangle ABC$ 的内角, 计算行列式

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & \cos A \\ b & b^2 & \cos B \\ c & c^2 & \cos C \end{vmatrix}$$

令

$$D=\begin{vmatrix} a & a^2 & \cos A \\ b & b^2 & \cos B \\ c & c^2 & \cos C \end{vmatrix}$$

由余弦定理,

$$D=\frac{1}{2abc}\begin{vmatrix} a & a^2 & a(b^2+c^2-a^2) \\ b & b^2 & b(a^2+c^2-b^2) \\ c & c^2 & c(a^2+b^2-c^2) \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & a & b^2+c^2-a^2 \\ 1 & b & a^2+c^2-b^2 \\ 1 & c & a^2+b^2-c^2 \end{vmatrix}$$

进行行变换 $R_2 \to R_2-R_1, R_3 \to R_3-R_1$

$$D=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & a & b^2+c^2-a^2 \\ 0 & b-a & 2a^2-2b^2 \\ 0 & c-a & 2a^2-2c^2 \end{vmatrix}$$

按 C_1 展开,

$$D=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} b-a & 2a^2-2b^2 \\ c-a & 2a^2-2c^2 \end{vmatrix}=-(b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a+b \\ 1 & a+c \end{vmatrix}=(a-b)(a-c)(b-c)$$

7. 在坐标平面上, 设 $\triangle ABC$ 经二阶方阵 $M=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 作线性变换后成 $\triangle A'B'C'$。若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\triangle, \triangle A'B'C'$ 的面积为 $\triangle'$, 试证

$$\triangle'=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\cdot\triangle$$

设 $A(x_a,y_a),B(x_b,y_b),C(x_c,y_c)$ 经变换后为

$$A'(ax_a+by_a,\ cx_a+dy_a),B'(ax_b+by_b,\ cx_b+dy_b),C'(ax_c+by_c,\ cx_c+dy_c)$$

则

$$\Delta'=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} ax_a+by_a & cx_a+dy_a & 1 \\ ax_b+by_b & cx_b+dy_b & 1 \\ ax_c+by_c & cx_c+dy_c & 1 \end{vmatrix}$$

变为

$$\Delta'=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} ax_a & dy_a & 1 \\ ax_b & dy_b & 1 \\ ax_c & dy_c & 1 \end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix} by_a & cx_a & 1 \\ by_b & cx_b & 1 \\ by_c & cx_c & 1 \end{vmatrix}+0+0=\frac{1}{2}(ad-bc)\begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\cdot\triangle$$

8. 求下列行列式的立方根:

$$\begin{vmatrix} -\dfrac{2019^2}{\sqrt[5]{80}} & \dfrac{2020^2}{\sqrt[5]{80^2}} & -\dfrac{2021^2}{\sqrt[5]{80^3}} \\ \dfrac{2022^2}{\sqrt[5]{80^4}} & -\dfrac{2023^2}{\sqrt[5]{80^5}} & \dfrac{2024^2}{\sqrt[5]{80^6}} \\ -\dfrac{2025^2}{\sqrt[5]{80^7}} & \dfrac{2026^2}{\sqrt[5]{80^8}} & -\dfrac{2027^2}{\sqrt[5]{80^9}} \end{vmatrix}$$

设 $a=2019, r=-\dfrac{1}{\sqrt[5]{80}}$, 原行列式为

$$D=\begin{vmatrix} a^2r & (a+1)^2r^2 & (a+2)^2r^3 \\ (a+3)^2r^4 & (a+4)^2r^5 & (a+5)^2r^6 \\ (a+6)^2r^7 & (a+7)^2r^8 & (a+8)^2r^9 \end{vmatrix}$$

进行列变换 $C_2\to C_2-C_1, C_3\to C_3-C_2$,

$$D=\begin{vmatrix} a^2r & (2a+1)r^2 & (2a+3)r^3 \\ (a+3)^2r^4 & (2a+7)r^5 & (2a+9)r^6 \\ (a+6)^2r^7 & (2a+13)r^8 & (2a+15)r^9 \end{vmatrix}$$

进行列变换 $C_3\to C_3-C_2$,

$$D=\begin{vmatrix} a^2r & (2a+1)r^2 & 2r^3 \\ (a+3)^2r^4 & (2a+7)r^5 & 2r^6 \\ (a+6)^2r^7 & (2a+13)r^8 & 2r^9 \end{vmatrix}$$

进行行变换 $R_3\to R_3-r^3R_2, R_2\to R_2-r^3R_1$

$$D=\begin{vmatrix} a^2r & (2a+1)r^2 & 2r^3 \\ (6a+9)r^4 & 6r^5 & 0 \\ (6a+27)r^7 & 6r^8 & 0 \end{vmatrix}$$

进行行变换 $R_3\to R_3-r^3R_2$,

$$D=\begin{vmatrix} a^2r & (2a+1)r^2 & 2r^3 \\ (6a+9)r^4 & 6r^5 & 0 \\ 18r^7 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

进行列变换 $C_1\leftrightarrow C_3$,

$$D=-\begin{vmatrix} 2r^3 & (2a+1)r^2 & a^2r \\ 0 & 6r^5 & (6a+9)r^4 \\ 0 & 0 & 18r^7 \end{vmatrix}=-(2r^3)(6r^5)(18r^7)=-216r^{15}=\frac{216}{80^3}$$

故原行列式的立方根为 $\dfrac{3}{40}$

9. 若 $a^2+b^2+c^2=47$, 求

$$\begin{vmatrix} a^2-1 & ab & ca \\ ab & b^2-1 & bc \\ ca & bc & c^2-1 \end{vmatrix}$$

令

$$D=\begin{vmatrix} a^2-1 & ab & ca \\ ab & b^2-1 & bc \\ ca & bc & c^2-1 \end{vmatrix}$$

进行行变换 $R_1\to aR_1, R_2\to bR_2, R_3\to cR_3$,

$$D=\frac{1}{abc}\begin{vmatrix} a(a^2-1) & a^2b & ca^2 \\ ab^2 & b(b^2-1) & b^2c \\ c^2a & bc^2 & c(c^2-1) \end{vmatrix}$$

进行列变换 $C_1\to \dfrac{C_1}{a}, C_2\to \dfrac{C_2}{b}, C_3\to \dfrac{C_3}{c}$,

$$D=\begin{vmatrix} a^2-1 & a^2 & a^2 \\ b^2 & b^2-1 & b^2 \\ c^2 & c^2 & c^2-1 \end{vmatrix}$$

进行行变换 $R_1\to R_1+R_2+R_3$,

$$\begin{aligned} D&=\begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2-1 & a^2+b^2+c^2-1 & a^2+b^2+c^2-1 \\ b^2 & b^2-1 & b^2 \\ c^2 & c^2 & c^2-1 \end{vmatrix} \\ &=(a^2+b^2+c^2-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b^2 & b^2-1 & b^2 \\ c^2 & c^2 & c^2-1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

进行列变换 $C_2\to -C_1+C_2, C_3\to -C_1+C_3$,

$$D=(a^2+b^2+c^2-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b^2 & -1 & 0 \\ c^2 & 0 & -1 \end{vmatrix}=(47-1)\cdot 1=46$$

10. 证明

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

令

$$D = \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix}$$

进行列变换 $C_3 \to C_3 - C_2$,

$$D = \begin{vmatrix} b+c & c+a & b-c \\ q+r & r+p & q-r \\ y+z & z+x & y-z \end{vmatrix}$$

进行列变换 $C_1 \to C_1 - C_3$,

$$D = 2\begin{vmatrix} b & c+a & b-c \\ q & r+p & q-r \\ y & z+x & y-z \end{vmatrix}$$

进行列变换 $C_3 \to C_3 - C_1$,

$$D = 2\begin{vmatrix} b & c+a & -c \\ q & r+p & -r \\ y & z+x & -z \end{vmatrix}$$

进行列变换 $C_2 \to C_2 + C_3$,

$$D = 2\begin{vmatrix} b & a & -c \\ q & p & -r \\ y & x & -z \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

故得证。

11. 证明

$$\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} = 4abc$$

令

$$D=\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix}$$

进行行变换 $R_1 \to R_1 - R_2 - R_3$,

$$D=\begin{vmatrix} 0 & -2c & -2b \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 0 & c & b \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix}$$

进行行变换 $R_2 \to R_2 - R_1, R_3 \to R_3 - R_1$,

$$D=-2\begin{vmatrix} 0 & c & b \\ b & a & 0 \\ c & 0 & a \end{vmatrix} = -2(-2abc) = 4abc$$

12. 证明

$$\begin{vmatrix} a^2 & b^2+c^2 & bc \\ b^2 & c^2+a^2 & ca \\ c^2 & a^2+b^2 & ab \end{vmatrix} = -(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$$

令

$$D=\begin{vmatrix} a^2 & b^2+c^2 & bc \\ b^2 & c^2+a^2 & ca \\ c^2 & a^2+b^2 & ab \end{vmatrix}$$

进行行变换 $R_2 \to R_2 - R_1$, $R_3 \to R_3 - R_1$,

$$D=\begin{vmatrix} a^2 & b^2+c^2 & bc \\ b^2-a^2 & a^2-b^2 & ca-bc \\ c^2-a^2 & a^2-c^2 & ab-bc \end{vmatrix}$$

化简得

$$D=\begin{vmatrix} a^2 & b^2+c^2 & bc \\ (b+a)(b-a) & (a+b)(a-b) & c(a-b) \\ (c+a)(c-a) & (a+c)(a-c) & b(a-c) \end{vmatrix}$$
$$=(a-b)(a-c)\begin{vmatrix} a^2 & b^2+c^2 & bc \\ -a-b & a+b & c \\ -a-c & a+c & b \end{vmatrix}$$

进行列变换 $C_1 \to C_1+C_2$,

$$D=(a-b)(a-c)\begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2 & b^2+c^2 & bc \\ 0 & a+b & c \\ 0 & a+c & b \end{vmatrix}$$

按第一列展开得

$$\begin{aligned} D&=(a-b)(a-c)(a^2+b^2+c^2)(ab+b^2-ac-c^2) \\ &=(a-b)(a-c)(a^2+b^2+c^2)(a(b-c)+(b+c)(b-c)) \\ &=-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \end{aligned}$$

13. 证明

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}=2abc(a+b+c)^3$$

令

$$D=\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

进行列变换 $C_2 \to C_2-C_1$, $C_3 \to C_3-C_1$, 得

$$D=\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2-(b+c)^2 & a^2-(b+c)^2 \\ b^2 & (c+a)^2-b^2 & 0 \\ c^2 & 0 & (a+b)^2-c^2 \end{vmatrix}$$

化简得

$$D=\begin{vmatrix}(b+c)^2 & (a+b+c)(a-b-c) & (a+b+c)(a-b-c)\\ b^2 & (a+b+c)(a-b+c) & 0\\ c^2 & 0 & (a+b+c)(a+b-c)\end{vmatrix}$$
$$=(a+b+c)^2\begin{vmatrix}(b+c)^2 & a-b-c & a-b-c\\ b^2 & a-b+c & 0\\ c^2 & 0 & a+b-c\end{vmatrix}$$

进行行变换 $R_1\to R_1-R_2-R_3$, 得

$$D=(a+b+c)^2\begin{vmatrix}2bc & -2c & -2b\\ b^2 & a-b+c & 0\\ c^2 & 0 & a+b-c\end{vmatrix}$$

再进行列变换 $C_2\to C_2+\dfrac{1}{b}C_1,\ C_3\to C_3+\dfrac{1}{c}C_1$, 得

$$D=(a+b+c)^2\begin{vmatrix}2bc & 0 & 0\\ b^2 & a+c & \dfrac{b^2}{c}\\ c^2 & \dfrac{c^2}{b} & a+b\end{vmatrix}$$

按第一行展开行列式得

$$D=(a+b+c)^2\cdot 2bc\left[(a+c)(a+b)-\frac{b^2}{c}\cdot\frac{c^2}{b}\right]$$
$$=2bc(a+b+c)^2\left(a^2+ab+ac+bc-bc\right)$$
$$=2abc(a+b+c)^3$$

14. 证明

$$\begin{vmatrix}ax+by & ay+bz & az+bx\\ ay+bz & az+bx & ax+by\\ az+bx & ax+by & ay+bz\end{vmatrix}=\left(a^3+b^3\right)\begin{vmatrix}x & y & z\\ y & z & x\\ z & x & y\end{vmatrix}$$

令

$$D=\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}$$

按 C_1 拆分

$$D=\begin{vmatrix} ax & ay+bz & az+bx \\ ay & az+bx & ax+by \\ az & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} by & ay+bz & az+bx \\ bz & az+bx & ax+by \\ bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}$$

$$= a\begin{vmatrix} x & ay+bz & az+bx \\ y & az+bx & ax+by \\ z & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} y & ay+bz & az+bx \\ z & az+bx & ax+by \\ x & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}$$

第一个行列式进行 $C_3 \to C_3 - bC_1$, 第二个行列式进行 $C_2 \to C_2 - aC_1$ 得

$$D=a\begin{vmatrix} x & ay+bz & az \\ y & az+bx & ax \\ z & ax+by & ay \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} y & bz & az+bx \\ z & bx & ax+by \\ x & by & ay+bz \end{vmatrix}$$

$$= a^2\begin{vmatrix} x & ay+bz & z \\ y & az+bx & x \\ z & ax+by & y \end{vmatrix} + b^2\begin{vmatrix} y & z & az+bx \\ z & x & ax+by \\ x & y & ay+bz \end{vmatrix}$$

第一个行列式进行 $C_2 \to C_2 - bC_3$, 第二个行列式进行 $C_3 \to C_3 - aC_2$ 得

$$D=a^2\begin{vmatrix} x & ay & z \\ y & az & x \\ z & ax & y \end{vmatrix} + b^2\begin{vmatrix} y & z & bx \\ z & x & by \\ x & y & bz \end{vmatrix}$$

$$=(a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

15. 证明

$$\begin{vmatrix} a+bx & c+dx & p+qx \\ ax+b & cx+d & px+q \\ u & v & w \end{vmatrix} = (1-x^2)\begin{vmatrix} a & c & p \\ b & d & q \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

令

$$D=\begin{vmatrix} a+bx & c+dx & p+qx \\ ax+b & cx+d & px+q \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

进行列行变换 $R_1 \to R_1 - R_2$, 得

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a+bx-x(ax+b) & c+dx-x(cx+d) & p+qx-x(px+q) \\ ax+b & cx+d & px+q \\ u & v & w \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a-ax^2 & c-cx^2 & p-px^2 \\ ax+b & cx+d & px+q \\ u & v & w \end{vmatrix} \\ &= (1-x^2)\begin{vmatrix} a & c & p \\ ax+b & cx+d & px+q \\ u & v & w \end{vmatrix} \end{aligned}$$

按 R_2 拆分, 得

$$D=0+(1-x^2)\begin{vmatrix} a & c & p \\ b & d & q \\ u & v & w \end{vmatrix}=(1-x^2)\begin{vmatrix} a & c & p \\ b & d & q \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

16. 证明

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b & b^2 & ca \\ c & c^2 & ab \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

令

$$D=\begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b & b^2 & ca \\ c & c^2 & ab \end{vmatrix}$$

将 a,b,c 分别乘入 R_1,R_2,R_3

$$D=\frac{1}{abc}\begin{vmatrix}a^2 & a^3 & abc\\ b^2 & b^3 & abc\\ c^2 & c^3 & abc\end{vmatrix}=\frac{abc}{abc}\begin{vmatrix}a^2 & a^3 & 1\\ b^2 & b^3 & 1\\ c^2 & c^3 & 1\end{vmatrix}$$

进行 $C_2\leftrightarrow C_3$, 再 $C_1\leftrightarrow C_2$ 得

$$D=-\begin{vmatrix}a^2 & 1 & a^3\\ b^2 & 1 & b^3\\ c^2 & 1 & c^3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & a^2 & a^3\\ 1 & b^2 & b^3\\ 1 & c^2 & c^3\end{vmatrix}$$

17. 证明

$$\begin{vmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha & \cos(\alpha+\delta)\\ \sin\beta & \cos\beta & \cos(\beta+\delta)\\ \sin\gamma & \cos\gamma & \cos(\gamma+\delta)\end{vmatrix}=0$$

令

$$D=\begin{vmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha & \cos(\alpha+\delta)\\ \sin\beta & \cos\beta & \cos(\beta+\delta)\\ \sin\gamma & \cos\gamma & \cos(\gamma+\delta)\end{vmatrix}$$

由三角公式 $\cos(\theta+\delta)=\cos\theta\cos\delta-\sin\theta\sin\delta$, 将 C_3 展开得

$$D=\begin{vmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha & \cos(\alpha+\delta)\\ \sin\beta & \cos\beta & \cos(\beta+\delta)\\ \sin\gamma & \cos\gamma & \cos(\gamma+\delta)\end{vmatrix}=\cos\delta\begin{vmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha & \cos\alpha\\ \sin\beta & \cos\beta & \cos\beta\\ \sin\gamma & \cos\gamma & \cos\gamma\end{vmatrix}-\sin\delta\begin{vmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\beta & \cos\beta & \sin\beta\\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin\gamma\end{vmatrix}$$

其中两个行列式都有两列成比例, 因此

$$D=0$$

18. 证明

$$\begin{vmatrix}\cos^2 a & \sin a & \sin^2 a\\ -\cos 2a & \cos a-\sin a & \cos 2a\\ -\sin 2a-\cos 2a & 2\cos a & 1+\sin 2a+\cos 2a\end{vmatrix}=\sin a\cos a(\cos a-\sin a)$$

令

$$D=\begin{vmatrix}\cos^2 a & \sin a & \sin^2 a\\ -\cos 2a & \cos a-\sin a & \cos 2a\\ -\sin 2a-\cos 2a & 2\cos a & 1+\sin 2a+\cos 2a\end{vmatrix}$$

进行列变换 $C_1\to C_1-C_3$,

$$D=\begin{vmatrix}1 & \sin a & \sin^2 a\\ 0 & \cos a-\sin a & \cos 2a\\ 1 & 2\cos a & 1+\sin 2a+\cos 2a\end{vmatrix}$$

进行行变换 $R_3\to R_3-R_2$,

$$D=\begin{vmatrix}1 & \sin a & \sin^2 a\\ 0 & \cos a-\sin a & \cos 2a\\ 1 & \cos a+\sin a & 1+\sin 2a\end{vmatrix}$$

进行行变换 $R_2\to R_2+R_1$, 化为一范德蒙行列式,

$$D=\begin{vmatrix}1 & \sin a & \sin^2 a\\ 1 & \cos a & \cos^2 a\\ 1 & \cos a+\sin a & (\cos a+\sin a)^2\end{vmatrix}=\sin a\cos a(\cos a-\sin a)$$

19. 证明

$$\begin{vmatrix}x-1 & x-2 & x-3 & x-4\\ x^2-1 & x^2-2^2 & x^2-3^2 & x^2-4^2\\ x^3-1 & x^3-2^3 & x^3-3^3 & x^3-4^3\\ x^4-1 & x^4-2^4 & x^4-3^4 & x^4-4^4\end{vmatrix}=12(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

令

$$D=\begin{vmatrix}x-1 & x-2 & x-3 & x-4\\ x^2-1 & x^2-2^2 & x^2-3^2 & x^2-4^2\\ x^3-1 & x^3-2^3 & x^3-3^3 & x^3-4^3\\ x^4-1 & x^4-2^4 & x^4-3^4 & x^4-4^4\end{vmatrix}$$

提取公因式得 $D=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)M$, 其中

$$M=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ x+1 & x+2 & x+3 & x+4 \\ x^2+x+1 & x^2+2x+2^2 & x^2+3x+3^2 & x^2+4x+4^2 \\ x^3+x^2+x+1 & x^3+2x^2+2^2x+2^3 & x^3+3x^2+3^2x+3^3 & x^3+4x^2+4^2x+4^3 \end{vmatrix}$$

依次进行行变换 $R_4\to R_4-xR_3, R_3\to R_3-xR_2, R_2\to R_2-xR_1$,

$$M=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1^3 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \\ 1^4 & 2^4 & 3^4 & 4^4 \end{vmatrix}$$

是一范德蒙行列式,

$$M=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant 4}(j-i)=(2-1)(3-1)(3-2)(4-1)(4-2)(4-3)=1\cdot 2\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 1=12$$

于是得证

$$D=12(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

20. 设 V_n 为 n 阶范德蒙行列式, 定义如下:

$$V_n=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

证明

$$V_n=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i).$$

设

$$V_n=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \dots & x_{n-1}^{n-1} \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

进行行变换 $R_2\to R_2-R_1,R_3\to R_3-R_1,\cdots R_n\to R_n-R_1$, 得

$$V_n=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1}\\ 0 & x_2-x_1 & x_2^2-x_1^2 & \dots & x_2^{n-2}-x_1^{n-2} & x_2^{n-1}-x_1^{n-1}\\ 0 & x_3-x_1 & x_3^2-x_1^2 & \dots & x_3^{n-2}-x_1^{n-2} & x_3^{n-1}-x_1^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & x_{n-1}-x_1 & x_{n-1}^2-x_1^2 & \dots & x_{n-1}^{n-2}-x_1^{n-2} & x_{n-1}^{n-1}-x_1^{n-1}\\ 0 & x_n-x_1 & x_n^2-x_1^2 & \dots & x_n^{n-2}-x_1^{n-2} & x_n^{n-1}-x_1^{n-1}\end{vmatrix}$$

进行列变换 $C_2\to C_2-C_1,C_3\to C_3-C_2,\cdots C_n\to C_n-C_{n-1}$, 得

$$V_n=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & x_2-x_1 & (x_2-x_1)x_2 & \cdots & (x_2-x_1)x_2^{n-3} & (x_2-x_1)x_2^{n-2}\\ 0 & x_3-x_1 & (x_3-x_1)x_3 & \cdots & (x_3-x_1)x_3^{n-3} & (x_3-x_1)x_3^{n-2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & x_{n-1}-x_1 & (x_{n-1}-x_1)x_{n-1} & \cdots & (x_{n-1}-x_1)x_{n-1}^{n-3} & (x_{n-1}-x_1)x_{n-1}^{n-2}\\ 0 & x_n-x_1 & (x_n-x_1)x_n & \cdots & (x_n-x_1)x_n^{n-3} & (x_n-x_1)x_n^{n-2}\end{vmatrix}$$

提取公因式,

$$V_n=\prod_{k=2}^{n}(x_k-x_1)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-3} & x_2^{n-2}\\ 0 & 1 & x_3 & \cdots & x_3^{n-3} & x_3^{n-2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 1 & x_{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-3} & x_{n-1}^{n-2}\\ 0 & 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-3} & x_n^{n-2}\end{vmatrix}$$

按 R_1 展开得

$$V_n=\prod_{k=2}^{n}(x_k-x_1)\begin{vmatrix}1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-3} & x_2^{n-2}\\ 1 & x_3 & \cdots & x_3^{n-3} & x_3^{n-2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 1 & x_{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-3} & x_{n-1}^{n-2}\\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-3} & x_n^{n-2}\end{vmatrix}=\prod_{k=2}^{n}(x_k-x_1)\,V_{n-1}$$

依次递推得证

$$V_n=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)$$

其中

$$V_2=\begin{vmatrix}1 & x_{n-1}\\ 1 & x_n\end{vmatrix}=x_n-x_{n-1}$$

21. 设

$$\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + kx_3 = 18 - 5k, \\ x_2 + 2x_3 = 2, \end{cases}$$

问 k 取何值时, 方程组无解、有唯一解、有无穷解？在有无穷解时, 求全部解。

原方程组为 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, 其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} k & 1 & 1 \\ 3 & 2 & k \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 18 - 5k \\ 2 \end{bmatrix}.$$

解

$$\det(\mathbf{A}) = 4k - 3 - k^2 - 6 = -k^2 + 4k - 3 = 0$$

得 $k = 1, 3$, 因此:

- 当 $k \neq 1, 3$ 时,$\det(\mathbf{A}) \neq 0$, 方程组有唯一解;
- 当 $k = 1$ 时, 代入方程组得:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 13, \\ x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

用第三式解出 $x_2 = 2 - 2x_3$, 代入前两式得

$$x_1 + (2 - 2x_3) + x_3 = 5 \Rightarrow x_1 = 3 + x_3,$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 13 \Rightarrow 3(3 + x_3) + 2(2 - 2x_3) + x_3 = 13.$$

检验等式成立:

$$9 + 3x_3 + 4 - 4x_3 + x_3 = 13 \Rightarrow 13 = 13.$$

成立, 说明方程组有无穷多解, 设 $x_3 = \lambda$, 则

$$x_1 = 3 + \lambda, \quad x_2 = 2 - 2\lambda, \quad x_3 = \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

- 当 $k=3$ 时, 代入原方程组得

$$\begin{cases} 3x_1+x_2+x_3=5, \\ 3x_1+2x_2+3x_3=3, \\ x_2+2x_3=2. \end{cases}$$

由前两式相减得:

$$(3x_1+2x_2+3x_3)-(3x_1+x_2+x_3)=-2 \Rightarrow x_2+2x_3=-2,$$

与第三式 $x_2+2x_3=2$ 矛盾, 因此方程组无解。

22. 将帕斯卡三角形（Pascal's Triangle）写成如下无穷矩阵的形式:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & \dots \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 & \dots \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

其中第一行和第一列全部由 1 组成, 其他每个元素由其左侧元素与上方元素之和构成。对于每个正整数 n, 令 D_n 表示由该阵列的前 n 行和前 n 列组成的 $n\times n$ 矩阵。求 D_n 的行列式并证明你的结论。

对较小 n 值的直接计算表明, 对于所有 n, 恒有 $\det(D_n)=1$。

证明大纲:

对 D_n 按顺序执行以下初等行变换, 依次处理第 n 行至第 2 行:

1. 从第 n 行减去第 $n-1$ 行;

2. 从第 $n-1$ 行减去第 $n-2$ 行;

...

$(n-1)$. 从第 2 行减去第 1 行。

由于该阵列的构造满足 $a_{i,j} = a_{i-1,j} + a_{i,j-1}$, 上述操作后,$D_n$ 的第 i 行第 j 列元素变为:

$$a'_{i,j} = a_{i,j} - a_{i-1,j} = a_{i,j-1}$$

这会将每一列向右"平移"一个位置, 并使第一列变为 $[1, 0, 0, \ldots, 0]^T$。

对剩余的子矩阵重复此过程（即对第 n 行至第 3 行执行减法, 以此类推）, 最终会将 D_n 转化为一个对角线元素均为 1 的上三角矩阵。由于上三角矩阵的行列式等于主对角线元素的乘积, 因此 $\det(D_n) = 1^n = 1$。

另一种方法（递推法）: 在进行第一组行变换后, 按第一列进行余子式展开, 可以直接得到递推关系:

$$\det(D_n) = 1 \cdot \det(D_{n-1})$$

由于 $D_1 = [1]$ 且 $\det(D_1) = 1$, 通过数学归纳法可知 $\det(D_n) = 1$。

23. 证明

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix} = \left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)^2$$

(待验证)

24. 求行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & -n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -n & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -n & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

这是一个 $n \times n$ 的行列式, 每一行有 $n{-}1$ 个 1 和一个 $-n$, 且 $-n$ 分别出现在每行的不同列。

设该行列式为 D_n, 我们将其简化。

第一步: 行变换。

令第 i 行减去第 n 行,$i = 1, 2, \ldots, n-1$, 则得到一个新行列式 D'_n, 变换后前 $n{-}1$ 行只有两个非零元素（$1{-}1 = 0$,$-n{-}1 = -(n{+}1)$,$1{-}(-n) = n{+}1$ 等等）, 便于处理。

经此变换, 前 $n{-}1$ 行在对角线上为 $n{+}1$, 其余为 0。

第二步：观察结构。

经过上述行变换,D_n' 为一个上三角矩阵, 其前 $n-1$ 个对角元为 $n+1$, 最后一行为原来的第 n 行, 未变动。

于是可得:

$$D_n = \begin{vmatrix} n+1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & n+1 & 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & n+1 & \cdots & 0 & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n+1 & a_{n-1} \\ -n & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

将该行列式按最后一列展开, 只需考虑对角线乘积（因为其余部分为 0）, 于是有:

$$D_n = (n+1)^{n-1} \cdot \text{余子式项}.$$

由于我们做了 $(n-1)$ 次行变换, 每次减去第 n 行, 所以符号为 $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$（由置换中逆序数判断）。

最终结果为:

$$\boxed{D_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(n+1)^{n-1}}.$$

(待验证)

25. 设 M 为一个任意 3×3 矩阵, 其每个项 m_{ij} 均选自集合 $\{-1,1\}$, 记 $\det M$ 为其行列式。证明 $|\det M| \leqslant 4$。

一个项为 ±1 的 2×2 矩阵, 其行列式必然为 0 或 ±2。对 3×3 的 $\det M$ 按第一行进行余子式展开：

$$\det M = m_{11}\begin{vmatrix} m_{22} & m_{23} \\ m_{32} & m_{33} \end{vmatrix} - m_{12}\begin{vmatrix} m_{21} & m_{23} \\ m_{31} & m_{33} \end{vmatrix} + m_{13}\begin{vmatrix} m_{21} & m_{22} \\ m_{31} & m_{32} \end{vmatrix}$$

由于每个余子式都是偶数, 左侧的结果必然也是偶数。同时由上式可知 $|\det M|$ 不可能超过 6。只有当所有余子式都不为 0 时才可能达到 6。但在由 1 和 -1 组成的 2×3 矩阵中, 总能找到一个 2×2 的子矩阵其行列式为 0。因此, 上述展开式中至少有一项为 0, 从而得出 $|\det M| \leqslant 4$。

26. 计算 $n \times n$ 矩阵 $A = [a_{ij}]$ 的行列式, 其中

$$a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{|i-j|}, & i \neq j, \\ 2, & i = j. \end{cases}$$

进行行变换 $R_1 \to R_1 + R_2, R_2 \to R_2 + R_3, \cdots R_{n-1} \to R_{n-1} + R_n$, 有

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & +1 & \cdots & \pm 1 & \mp 1 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & \pm 1 & \mp 1 \\ +1 & -1 & 2 & \cdots & \pm 1 & \mp 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mp 1 & \pm 1 & \mp 1 & \cdots & 2 & -1 \\ \pm 1 & \mp 1 & \pm 1 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \pm 1 & \mp 1 & \pm 1 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

进行列变换 $C_2 \to C_2 - C_1, C_3 \to C_3 - C_2, \cdots C_n \to C_n - C_{n-1}$, 得到

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n+1 \end{vmatrix} = n+1$$

27. 设对所有 $j = 0, \ldots, n$ 皆有

$$a_j = a_0 + jd,$$

其中 a_0, d 为实数, 令

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

计算 $\det(A)$, 其中 $\det(A)$ 表示 A 的行列式。

进行列变换 $C_{n+1}\to C_{n+1}+C_1$, 得到

$$\det(A)=(a_0+a_n)\det\begin{pmatrix}a_0&a_1&a_2&\cdots&1\\a_1&a_0&a_1&\cdots&1\\a_2&a_1&a_0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_n&a_{n-1}&a_{n-2}&\cdots&1\end{pmatrix}$$

进行行变换 $R_{n+1}\to R_{n+1}-R_n,R_n\to R_n-R_{n-1},\cdots R_2\to R_2-R_1$, 得到

$$\det(A)=(a_0+a_n)\det\begin{pmatrix}a_0&a_1&a_2&\cdots&1\\d&-d&-d&\cdots&0\\d&d&-d&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\d&d&d&\cdots&0\end{pmatrix}$$

按 C_{n+1} 展开得

$$\det(A)=(-1)^n(a_0+a_n)\det\begin{pmatrix}d&-d&-d&\cdots&-d\\d&d&-d&\cdots&-d\\d&d&d&\cdots&-d\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\d&d&d&\cdots&d\end{pmatrix}.$$

将上述矩阵的最后一行加至其他各行, 有

$$\det(A)=(-1)^n(a_0+a_n)\det\begin{pmatrix}2d&0&0&\cdots&0\\2d&2d&0&\cdots&0\\2d&2d&2d&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\d&d&d&\cdots&d\end{pmatrix}=(-1)^n(a_0+a_n)2^{n-1}d^n$$

28. 已知 $n>1$ 是一个奇正整数, 设 $A=(a_{ij})_{i,j=1\dots n}$ 是一个 $n\times n$ 矩阵, 其元素定义为:

$$a_{ij}=\begin{cases}2 & ,\ i=j\\1 & ,\ i-j\equiv\pm2\pmod n\\0 & ,\ \text{反之}\end{cases}$$

求 $\det A$。

注意到 $A = B^2$, 其中矩阵 B 的元素定义为:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & , i - j \equiv \pm 1 \pmod n \\ 0 & , 反之 \end{cases}$$

计算 $\det B$, 先按 R_1 展开行列式, 然后对得到的两项分别按 C_1 展开。

$$\det B = \begin{vmatrix} 0 & 1 & & & & & 1 \\ 1 & 0 & 1 & & & & \\ & 1 & 0 & 1 & & & \\ & & 1 & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & 0 & 1 & \\ & & & & 1 & 0 & 1 \\ 1 & & & & & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & 0 & 1 & \\ & & & 1 & 0 & 1 \\ 1 & & & & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & & & \\ & 1 & 0 & 1 & & \\ & & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 0 & 1 \\ & & & & 1 & 0 \\ 1 & & & & & 1 \end{vmatrix}$$

$$= - \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & 0 & 1 & \\ & & 1 & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ 1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & 0 & 1 & \\ & & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right) + \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{vmatrix} \right)$$

$$= -(0 - 1) + (1 - 0) = 2$$

其中第二和第三个矩阵是下/上三角矩阵, 而第一个和第四个矩阵满足

$$R_1 - R_3 + R_5 - \cdots \pm R_{n-2} = (0)_{1\times(n-2)},$$

故 $\det B = 2$, 从而

$$\det A = (\det B)^2 = 4$$

复数

1. 已知 $i=\sqrt{-1}$, 若

$$\frac{1}{i^{2025}}-\frac{2}{i^{2024}}+\frac{3}{i^{2023}}-\frac{4}{i^{2022}}+\cdots-\frac{2024}{i^{2}}+\frac{2025}{i}=a+bi$$

其中 a,b 为实数, 求 $a-b$。

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{i^{2025}}-\frac{2}{i^{2024}}+\frac{3}{i^{2023}}-\frac{4}{i^{2022}}+\cdots-\frac{2024}{i^{2}}+\frac{2025}{i}\\
&=\frac{1}{i}-2-\frac{3}{i}+4+\frac{5}{i}-6-\frac{7}{i}+8+\cdots+2024+\frac{2025}{i}\\
&=\frac{1}{i}(1+5+\cdots+2025)-(2+6+\cdots+2022)-\frac{1}{i}(3+7+\cdots+2023)+(4+8+\cdots+2024)\\
&=\frac{1}{i}\cdot\frac{2026\cdot 507}{2}-\frac{2024\cdot 506}{2}-\frac{1}{i}\cdot\frac{2026\cdot 506}{2}+\frac{2028\cdot 506}{2}\\
&=\frac{1013}{i}+1012\\
&=1012-1013i \quad\Rightarrow\quad a-b=2025
\end{aligned}$$

2. 设 z 是 1 的七次方根, 且 $z\neq 1$, 试求 $z+z^2+z^4$ 的值。

发现

$$z^7=1\Rightarrow 1+z+\cdots+z^6=0\Rightarrow z+z^2+\cdots+z^6=-1$$

设 $\alpha=z+z^2+z^4,\beta=z^3+z^5+z^6$, 则

$$\alpha+\beta=z+z^2+\cdots+z^6=-1$$

又

$$\alpha\beta=(z+z^2+z^4)(z^3+z^5+z^6)=z^4(1+z+z^2+\cdots+z^6+2z^3)=z^4(0+2z^3)=2z^7=2$$

因此 α,β 是方程 $x^2+x+2=0$ 的两根, 解得

$$\alpha=z+z^2+z^4=\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$$

3. 若 $z \in \mathbb{C}$ 满足 $z+\dfrac{1}{z}=\sqrt{3}$, 求 $z^{2025}+\dfrac{1}{z^{2025}}$ 的值。

先求 z,

$$z+\frac{1}{z}=\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad z^2-\sqrt{3}z+1=0 \quad \Rightarrow \quad z=\frac{\sqrt{3}+i}{2}=e^{\frac{\pi i}{6}}$$

于是

$$z^{2025}=e^{\frac{2025\pi i}{6}}=e^{\frac{3\pi i}{2}}=-i \quad \Rightarrow \quad z^{2025}+\frac{1}{z^{2025}}=-i+\frac{1}{-i}=0$$

4. 求

$$\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}i\right)^6$$

观察

$$\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}i\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ.$$

由棣莫弗定理, 原式为

$$(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)^3=\cos 90^\circ+i\sin 90^\circ=i.$$

5. 已知 $a,b,c\in\mathbb{C}$, 且 $a+b+c=a^2+b^2+c^2=3, a^3+b^3+c^3=6$, 试求

$$(a-1)^{2023}+(b-1)^{2023}+(c-1)^{2023}$$

的值。

由

$$3=3^2-2(ab+bc+ca), \quad 6-3abc=3(3-3)$$

解得

$$ab+bc+ca=3, abc=2$$

因此 a,b,c 是方程

$$x^3-3x^2+3x-2=0$$

即

$$(x-1)^3=1$$

的根, 因此

$$a-1,b-1,c-1\in\{1,\ \omega,\ \omega^2\},\omega=e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

不失一般性,

$$(a-1)^{2023}+(b-1)^{2023}+(c-1)^{2023}=1^{2023}+\omega^{2023}+(\omega^2)^{2023}=1+\omega+\omega^2=0$$

6. 证明

$$1+2i+3i^2+4i^3+\cdots+(4n+1)i^{4n}=(2n+1)-2ni,\quad n\in\mathbb{N}.$$

设

$$S=1+2i+3i^2+4i^3+\cdots+(4n+1)i^{4n}$$

则

$$iS=i+2i^2+3i^3+4i^4+\cdots+(4n)i^{4n}+(4n+1)i^{4n+1}$$

两式相减得

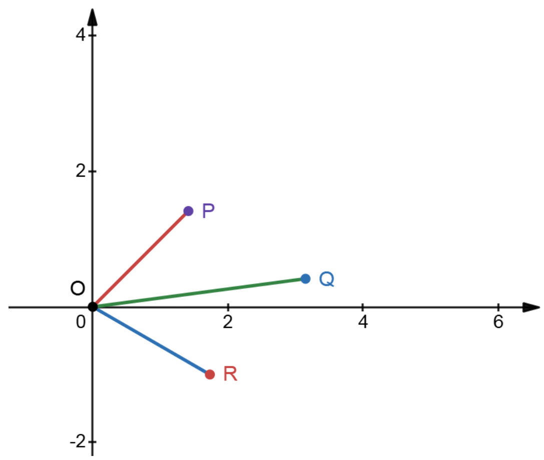
$$\begin{aligned}(1-i)S&=1+i+i^2+i^3+\cdots+i^{4n}-(4n+1)i^{4n+1}\\&=\frac{i^{4n+1}-1}{i-1}-(4n+1)i=1-(4n+1)i\end{aligned}$$

故

$$S=\frac{(1-(4n+1)i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=(2n+1)-2ni$$

7. 考虑复平面作图 $z=\sqrt{2}(1+i)$, $w=\sqrt{3}-i$, 证

$$\tan\frac{\pi}{24}=\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2$$



如图作 $z=\sqrt{2}(1+i)$, $w=\sqrt{3}-i$, 则

$$\arg(z)=\arctan\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}, \arg(w)=\arctan\frac{\sqrt{3}}{-1}=-\frac{\pi}{6}$$

于是

$$\begin{aligned}\arg(z+w)&=\angle QOR-|\arg w|\\&=\frac{1}{2}\angle POR-|\arg w|\\&=\frac{1}{2}(\angle POQ+|\arg w|)-|\arg w|\\&=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6})-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{24}\end{aligned}$$

又 $z+w=\sqrt{2}+\sqrt{3}+(\sqrt{2}-1)i$, 所以有

$$\tan\frac{\pi}{24}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2$$

8. 复平面上有三点 P,Q,R 对应三个复数 z_1,z_2,z_3, 且 $|z_1|=\sqrt{2},|z_2|=\sqrt{5},|z_3|=3$。若原点 O 为 $\triangle PQR$ 的重心, 求 $\Re(\overline{z_1}z_2)$ 。

设

$$z_1=a_1+b_1i,\quad z_2=a_2+b_2i,\quad z_3=a_3+b_3i$$

由于点 P,Q,R 的重心在原点, 故有

$$a_1+a_2+a_3=0,\quad b_1+b_2+b_3=0$$

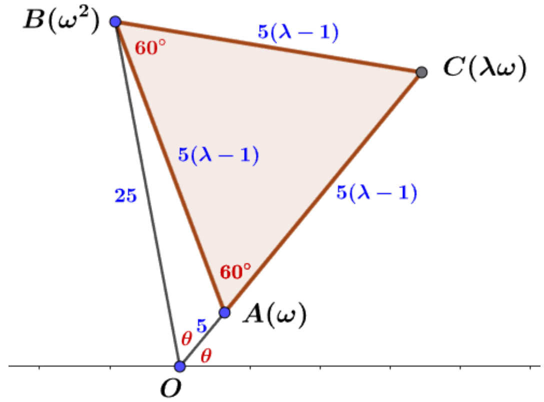
且 $a_1^2+b_1^2=2, a_2^2+b_2^2=5, a_3^2+b_3^2=9$, 又因为 $a_3=-a_1-a_2$, $b_3=-b_1-b_2$,

$$\begin{aligned} a_3^2+b_3^2 &= (a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2 \\ &= a_1^2+a_2^2+2a_1a_2+b_1^2+b_2^2+2b_1b_2 \\ &= 7+2(a_1a_2+b_1b_2)=9 \end{aligned}$$

故

$$\Re(\overline{z_1}z_2)=a_1a_2+b_1b_2=1$$

9. 设 ω 为复数, 且 $|\omega|=5$。存在一正实数 $\lambda>1$, 使得 $\omega, \omega^2, \lambda\omega$ 这三个复数在复平面上构成一个正三角形, 试求 λ 的值。



设 $O(0,0), A(\omega), B(\omega^2), C(\lambda\omega)$, 则

$$\begin{aligned} OA &= |\omega| = 5 \\ OB &= |\omega^2| = |\omega|^2 = 25 \\ AB &= AC = |\lambda\omega-\omega| = 5(\lambda-1) \end{aligned}$$

又由于 $\triangle ABC$ 是正三角形, 因此

$$\angle OAB = 180° - 60° = 120°$$

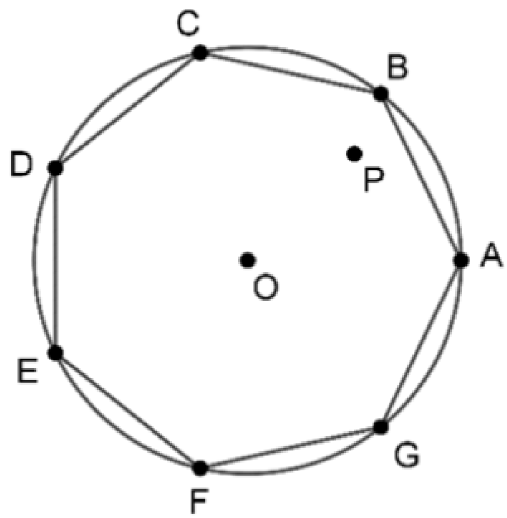
在 $\triangle OAB$ 中, 由余弦定理,

$$\cos\angle OAB = \frac{OA^2+AB^2-OB^2}{2\cdot OA\cdot AB} = \frac{5^2+(5(\lambda-1))^2-25^2}{2\cdot 5\cdot 5(\lambda-1)} = -\frac{1}{2}$$

解得

$$\lambda = \frac{1+\sqrt{97}}{2} > 1$$

10. 如图, 在坐标平面上有一个半径为 2 的圆, 其圆心 O 为原点, 且正七边形 $ABCDEFG$ 内接于此圆。若 $A(2,0), P(1,1)$, 求 $\overline{PA}\cdot\overline{PB}\cdot\overline{PC}\cdot\overline{PD}\cdot\overline{PE}\cdot\overline{PF}\cdot\overline{PG}$。



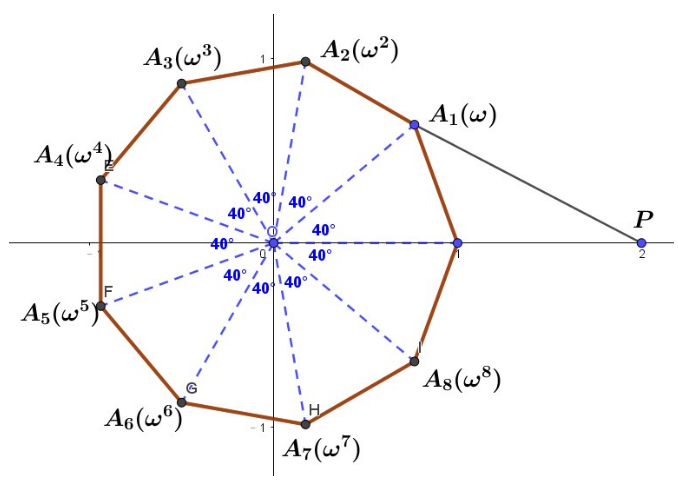
设 $x^7=2^7$ 的七根分别为 $2,\omega,\omega^2,\ldots,\omega^6$, 其中 $\omega=2e^{\frac{2\pi i}{7}}$, 则

$$f(x)=x^7-2^7=(x-2)(x-\omega)(x-\omega^2)\cdots(x-\omega^6)$$

令 $x=1+i$, 可得

$\overline{PA}\cdot\overline{PB}\cdot\overline{PC}\cdot\overline{PD}\cdot\overline{PE}\cdot\overline{PF}\cdot\overline{PG}=|f(1+i)|=|(1+i)^7-2^7|=|2i(1+i)-128|=8\sqrt{226}$

11. 已知 $\omega=\cos\dfrac{2\pi}{9}+i\sin\dfrac{2\pi}{9}$, 求 $|2-\omega|^2+|2-\omega^2|^2+\cdots+|2-\omega^8|^2$。



即求点 $P(2,0)$ 至单位圆上正九边形各顶点距离的平方和:

$$|2-\omega|^2+|2-\omega^2|^2+\cdots+|2-\omega^8|^2=\sum_{n=1}^{8}A_nP^2$$

在 $\triangle OA_nP$ 中, 由余弦定理,

$$A_nP^2=1^2+2^2-2\cdot 2\cdot 1\cdot\cos\angle A_nOP=5-4\cos(40^\circ\cdot n)$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{8}A_nP^2&=\sum_{n=1}^{8}(5-4\cos(40^\circ\cdot n))\\&=40-4(\cos 40^\circ+\cos 80^\circ+\cdots+\cos 320^\circ)\\&=40-8(\cos 40^\circ+\cos 80^\circ+\cos 120^\circ+\cos 160^\circ)\\&=40-8\left(2\cos 60^\circ\cos 20^\circ-\frac{1}{2}+\cos 160^\circ\right)\\&=40-8\left(\cos 20^\circ+\cos 160^\circ-\frac{1}{2}\right)\\&=40-8\left(2\cos 90^\circ\cos 70^\circ-\frac{1}{2}\right)\\&=40-8\left(-\frac{1}{2}\right)=44\end{aligned}$$

12. $\omega^{503}=1$, $\omega\neq 1$, 求

$$\frac{\omega^2}{\omega-1}+\frac{\omega^4}{\omega^2-1}+\frac{\omega^6}{\omega^3-1}+\cdots+\frac{\omega^{1004}}{\omega^{502}-1}$$

由 $\omega^{503}=1$ 得

$$(1-\omega)(1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{502})=0$$

所以

$$\sum_{k=0}^{502}\omega^k=0$$

又

$$\frac{1}{\omega^k-1}+\frac{1}{\omega^{503-k}-1}=\frac{1}{\omega^k-1}+\frac{1}{\omega^{-k}-1}=\frac{1}{\omega^k-1}+\frac{\omega^k}{1-\omega^k}=-1$$

原式

$$=\sum_{k=1}^{502}\frac{\omega^{2k}}{\omega^k-1}=\sum_{k=1}^{502}\left(\frac{\omega^{2k}-1}{\omega^k-1}+\frac{1}{\omega^k-1}\right)=\sum_{k=1}^{502}\left(\omega^k+1+\frac{1}{\omega^k-1}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= -1 + 502 + \sum_{k=1}^{502} \frac{1}{\omega^k - 1} \\
&= 501 + \left(\frac{1}{\omega - 1} + \frac{1}{\omega^{502} - 1}\right) + \left(\frac{1}{\omega^2 - 1} + \frac{1}{\omega^{501} - 1}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{\omega^{251} - 1} + \frac{1}{\omega^{252} - 1}\right) \\
&= 501 + (-1) \times 251 = 250
\end{aligned}
$$

13. 证明

$$|z+w|^2 - |z+\overline{w}|^2 = 4\Re(z)\Re(w)$$

设 $z = x + iy$, $w = u + iv$, 其中 $x, y, u, i \in \mathbb{R}$, 则

$$
\begin{aligned}
|z+w|^2 - |z-\overline{w}|^2 &= |(x+iy)+(u+iv)|^2 - |(x+iy)-(u-iv)|^2 \\
&= |(x+u)+i(y+v)|^2 - |(x-u)+i(y+v)|^2 \\
&= (x+u)^2 + (y+v)^2 - (x-u)^2 - (y+v)^2 \\
&= 4xu \\
&= 4\Re(z)\Re(w)
\end{aligned}
$$

又解:

$$
\begin{aligned}
|z+w|^2 - |z-w|^2 &= (z+w)(\overline{z+w}) - (z-\overline{w})(\overline{z-\overline{w}}) \\
&= (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) - (z-\overline{w})(\overline{z}-w) \\
&= z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} - (z\overline{z} - zw - \overline{w}\,\overline{z} + w\overline{w}) \\
&= zw + z\overline{w} + w\overline{z} + \overline{w}\,\overline{z} \\
&= (z+\overline{z})(w+\overline{w}) \\
&= 2\Re(z) \cdot 2\Re(w) \\
&= 4\Re(z)\Re(w)
\end{aligned}
$$

14. 已知 $z = \cos\theta + i\sin\theta$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$, 证明:

$$\frac{2}{1+z} = 1 - i\tan\frac{\theta}{2}$$

运用各位三角恒等式化简

$$\begin{aligned}
\frac{2}{1+z} &= \frac{2}{1+\cos\theta+i\sin\theta} \\
&= \frac{2(1+\cos\theta-i\sin\theta)}{(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta} \\
&= \frac{2(1+\cos\theta-i\sin\theta)}{1+2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta} \\
&= \frac{2(1+\cos\theta-i\sin\theta)}{2+2\cos\theta} \\
&= \frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta} - i\cdot\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} \\
&= 1 - i\cdot\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} \\
&= 1 - i\tan\frac{\theta}{2}
\end{aligned}$$

15. 设复数 z 满足 $|z|=1$ 且 $z=e^{i\theta}$, 求证

$$\Re\left[\frac{z(1-\bar{z})}{\bar{z}(1+z)}\right] = -2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

先将表达式化简,

$$\begin{aligned}
\frac{z(1-\bar{z})}{\bar{z}(1+z)} &= \frac{z-|z|^2}{\bar{z}+|z|^2} \\
&= \frac{e^{i\theta}-1}{e^{-i\theta}+1} \\
&= \frac{(e^{i\theta}-1)(e^{i\theta}+1)}{(e^{-i\theta}+1)(e^{i\theta}+1)} \\
&= \frac{e^{i2\theta}-1}{2+e^{i\theta}+e^{-i\theta}} \\
&= \frac{e^{i\theta}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})}{2+2\cos\theta} \\
&= \frac{e^{i\theta}\cdot 2i\sin\theta}{2(1+\cos\theta)} \\
&= \frac{e^{i\theta}\cdot i\sin\theta}{1+\cos\theta}
\end{aligned}$$

故

$$
\begin{aligned}
\Re\left[\frac{z(1-\bar{z})}{\bar{z}(1+z)}\right]=\Re\left[\frac{e^{i\theta}\cdot i\sin\theta}{1+\cos\theta}\right] &= \frac{1}{1+\cos\theta}\Re\left[i\sin\theta(\cos\theta+i\sin\theta)\right] \\
&= \frac{1}{1+\cos\theta}\Re\left[i\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta\right] \\
&= -\frac{\sin^2\theta}{1+\cos\theta} \\
&= -\frac{(2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2})^2}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} \\
&= -2\sin^2\frac{\theta}{2}
\end{aligned}
$$

16. 已知两个相异复数 z_1, z_2, 且 $|z_1|=|z_2|\neq 0$, 证明

$$
\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}
$$

是纯虚数。

设 $w=\dfrac{z_1+z_2}{z_1-z_2}$, 欲证 $\overline{w}=-w$, 因为 $|z_1|=|z_2|=r$, 且 $z_1, z_2\neq 0$, 根据性质

$$
\overline{z}=\frac{r^2}{z}\Rightarrow \overline{z_1}=\frac{r^2}{z_1},\quad \overline{z_2}=\frac{r^2}{z_2}
$$

因此

$$
\overline{w}=\overline{\left(\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}+\overline{z_2}}{\overline{z_1}-\overline{z_2}}=\frac{\dfrac{r^2}{z_1}+\dfrac{r^2}{z_2}}{\dfrac{r^2}{z_1}-\dfrac{r^2}{z_2}}=\frac{\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}}{\dfrac{1}{z_1}-\dfrac{1}{z_2}}=\frac{z_2+z_1}{z_2-z_1}=-\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}=-w
$$

17. 设复数 z_1, z_2 满足 $|z_1|=2, |z_2|=3, |z_1+z_2|=4$, 求 $\dfrac{z_1}{z_2}$。

设 $w=\dfrac{z_1}{z_2}$, 则 $z_1=wz_2$。由

$$
|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})=|z_1|^2+|z_2|^2+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}
$$

代入已知得

$$
z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}=3
$$

将 $z_1=wz_2$ 代入得

$$wz_2\cdot\overline{z_2}+z_2\cdot\overline{wz_2}=w|z_2|^2+\overline{w}|z_2|^2=(w+\overline{w})\cdot 9=3\Rightarrow w+\overline{w}=\frac{1}{3}$$

设 $w=x+iy,x,y\in\mathbb{R}$, 则 $w+\overline{w}=2x=\frac{1}{3}\Rightarrow x=\frac{1}{6}$; 又因 $|w|=\frac{|z_1|}{|z_2|}=\frac{2}{3}$, 所以

$$|w|^2=\frac{1}{36}+y^2=\frac{4}{9}\Rightarrow y=\pm\frac{\sqrt{15}}{6}\Rightarrow\frac{z_1}{z_2}=\frac{1}{6}\pm i\frac{\sqrt{15}}{6}$$

18. 若复数 z 使得 $\frac{z-3i}{z+i}$ 为负实数, $\frac{z-3}{z+1}$ 为纯虚数, 求 z。

设 $z=a+bi,a,b\in\mathbb{R}$, 由于

$$\frac{z-3i}{z+i}=\frac{a+(b-3)i}{a+(b+1)i}$$

为负实数, 则

$$(a+(b-3)i)(a-(b+1)i)<0$$

所以 $a^2+(b-3)(b+1)<0$ 且 $-4a=0$, 即 $a=0$ 且 $b-3,b+1$ 异号; 又此时

$$\frac{z-3}{z+1}=\frac{-3+bi}{1+bi}$$

为纯虚数, 故

$$\Re((-3+bi)(1-bi))=b^2-3=0$$

又 $b-3,b+1$ 异号知 $b=\sqrt{3}$, 所以 $z=\sqrt{3}i$.

19. 已知虚数 z 使得 $z_1=\frac{z}{1+z^2}$ 和 $z_2=\frac{z^2}{1+z}$ 都是实数, 求 z。

由已知 $(z^2+1)z_1=z,(1+z)z_2=z^2$, 联立两式

$$z=(z^2+1)z_1=((1+z)z_2+1)z_1$$

整理得

$$z_1+z_1z_2=z(1-z_1z_2)$$

由于 z 为虚数, $z_1+z_1z_2$ 与 $1-z_1z_2$ 为实数, 故

$$1-z_1z_2=0\Rightarrow z_1z_2=1$$

代入 $z_1=\dfrac{z}{1+z^2}, z_2=\dfrac{z^2}{1+z}$ 得

$$z_1z_2=\frac{z}{1+z^2}\cdot\frac{z^2}{1+z}=\frac{z^3}{(1+z)(1+z^2)}=1$$

给出

$$z^3=(1+z)(1+z^2)\Rightarrow z^2+z+1=0$$

即

$$z=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

20. 已知复数 $z\neq 0$, 满足方程 $z^2=z+i|z|$, 求 $|z|$ 的值。

设 $z=x+iy$, $x,y\in\mathbb{R}$, 则

$$z^2=z+i|z|\Rightarrow x^2-y^2+2ixy=x+i\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

比较实部与虚部得

$$x^2-y^2=x \tag{1}$$

$$2xy=y+\sqrt{x^2+y^2} \tag{2}$$

将 (2) 移项并平方

$$y^2(2x-1)^2=x^2+y^2$$

由 (1) 得

$$(x^2-x)(2x-1)^2=2x^2-x\Rightarrow x^2(2x-3)(2x-1)=0$$

解得 $x=0,\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}$, 其中 $x=0$ 不合理 $(z\neq 0)$, 且 $x=\dfrac{1}{2}$ 不合理 $(y^2=-\dfrac{1}{4}<0)$, 故

$$x=\frac{3}{2},\ y^2=\frac{3}{4}\Rightarrow |z|=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{3}$$

21. 确定所有满足 $|a|=|b|=1$ 且 $a+b+a\bar{b}\in\mathbb{R}$ 的复数对 (a,b)。

设 $a=e^{ix},b=e^{iy}$，其中 $x,y\in[0,2\pi)$，由欧拉公式，

$$
\begin{aligned}
\Im(a+b+a\bar{b}) &= (\sin x+\sin y)+\sin(x-y)\\
&= 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}+2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\\
&= 2\left(\sin\frac{x+y}{2}+\sin\frac{x-y}{2}\right)\cos\frac{x-y}{2}\\
&= 4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\cos\frac{x-y}{2}.
\end{aligned}
$$

因此 $a+b+a\bar{b}$ 为实数当且仅当

$$\sin\frac{x}{2}=0,\quad \cos\frac{y}{2}=0,\quad \text{或}\quad \cos\frac{x-y}{2}=0,$$

分别对应

$$x=2k\pi,\quad y=(2k+1)\pi,\quad x=y+(2k+1)\pi,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

所以解集为

$$(a,b)=(1,b),\quad (a,-1),\quad (a,-a),$$

其中 $|a|=|b|=1$。

注意到

$$a+b+a\bar{b}\in\mathbb{R}\iff 1+a+b+a\bar{b}\in\mathbb{R}.$$

设 $c\in\mathbb{C}$ 且 $a=c^2$，则

$$\bar{c}(1+a+b+a\bar{b})=\bar{c}+\bar{c}c^2+\bar{c}b+\bar{c}c^2\bar{b}=\bar{c}+c+\bar{c}b+c\bar{b}\in\mathbb{R},$$

因此 $c\in\mathbb{R}$ 或 $1+a+b+a\bar{b}=0$。第一种情况 $c=\pm1$，于是 $a=1$。第二种情况将等式因式分解为

$$(a+b)(1+\bar{b})=1+a+b+a\bar{b}=0,$$

得到 $a=-b$ 或 $b=-1$，所以得到解为

$$(a,b)=(1,b),\quad (a,-1),\quad (a,-a),\quad |a|=|b|=1.$$

22. 已知两复数 z_1,z_2 满足 $|z_1-(3+3i)|=2,|iz_2-1|=1$，求 $|z_1-z_2|$ 的最小值。

由 $|z_1-(3+3i)|=2, P(z_1)$ 在圆

$$C_1:(x-3)^2+(y-3)^2=2^2$$

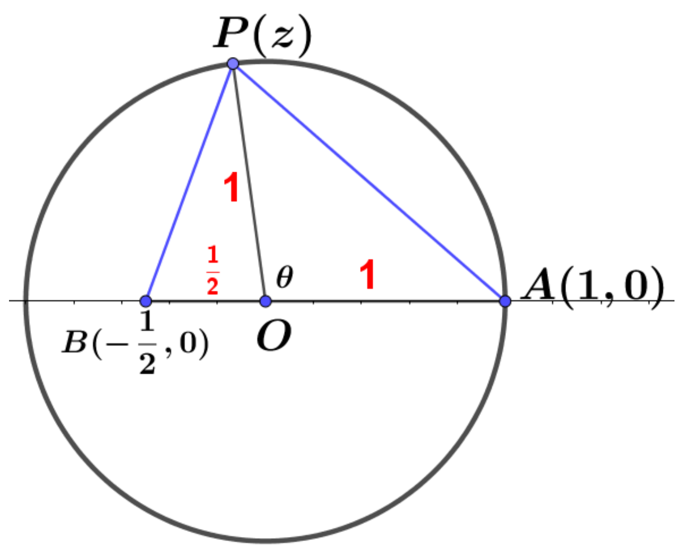
上, 设 $z_2=a+bi$, 则 $iz_2-1=(-1-b)+ai$, 故 $|iz_2-1|=1$ 意味 $Q(z_2)$ 在圆

$$C_2:x^2+(y+1)^2=1$$

上, 故 $|z_1-z_2|=PQ$ 的最小值为

$$\text{两圆心距离}-\text{两圆半径和}=\sqrt{3^2+4^2}-(2+1)=2$$

23. 设 α 为 $\left|(z-1)\left(z+\dfrac{1}{2}\right)\right|$ 在圆盘上 $\{z\in\mathbb{C}:|z|\leqslant 1\}$ 的最大值, 则 $\alpha^2=?$



如图,P 在圆周上,$A(1,0), B\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$, 则

$$PA\cdot PB=\left|(z-1)\left(z+\frac{1}{2}\right)\right|$$

设 $\theta=\angle POA$, 在 $\triangle POA$ 及 $\triangle POB$ 中, 由余弦定理,

$$PA^2=1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cdot\cos\theta=2-2\cos\theta$$

$$PB^2=1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\cdot1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\cos(\pi-\theta)=\cos\theta+\frac{5}{4}$$

因此

$$f(\theta)=(2-2\cos\theta)\left(\cos\theta+\frac{5}{4}\right)=-2\cos^2\theta-\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{5}{2}$$

且

$$\alpha^2=f\left(-\frac{1}{8}\right)=\frac{81}{32}$$

24. 设有一虚部不为零的复数 z, 其长度为 2, 且在复数平面上与 -2 及 z^2 刚好在同一直线上, 与 1 及 z^3 也同在另一直线上, 试求以 z,z^2,z^3 所围成的三角形面积。

由 $1,z,z^3$ 共线可得

$$\frac{z^3-z}{z-1}=k\in\mathbb{R}\Rightarrow z^2+z-k=0\Rightarrow z=\frac{-1\pm\sqrt{1+4k}}{2}$$

其中 z 实部为 $-\frac{1}{2}$, 由 $-2,z,z^2$ 共线可得

$$\frac{z^2-z}{z+2}=t\in\mathbb{R}\Rightarrow z^2-(t+1)z-2t=0\Rightarrow z=\frac{t+1\pm\sqrt{(t+1)^2+8t}}{2}$$

因此

$$\frac{t+1}{2}=-\frac{1}{2}\Rightarrow t=-2$$

代入得

$$z=\frac{-1\pm\sqrt{15}\,i}{2}.$$

取 $z=\dfrac{-1+\sqrt{15}\,i}{2}$, 则

$$z^2=\frac{-7-\sqrt{15}\,i}{2},\quad z^3=\frac{11-3\sqrt{15}\,i}{2}.$$

z,z^2,z^3 在复平面上的坐标为

$$A(z)=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{15}}{2}\right),\quad B(z^2)=\left(-\frac{7}{2},-\frac{\sqrt{15}}{2}\right),\quad C(z^3)=\left(\frac{11}{2},-\frac{3\sqrt{15}}{2}\right).$$

故所求面积为

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{15}}{2} & 1\\ -\frac{7}{2} & -\frac{\sqrt{15}}{2} & 1\\ \frac{11}{2} & -\frac{3\sqrt{15}}{2} & 1\end{vmatrix}=6\sqrt{15}$$

25. 若实数 m,n 使得关于 x 的方程 $x^3+mx+n=0$ 有模为 3 的虚根, 求 $m+n$ 的取值范围。

由于系数皆为实数, 设三根为 $a+bi$, $a-bi$, $-2a$, 其中 $a,b\in\mathbb{R}$, $a^2+b^2=9$, $b\neq 0$。

由韦达定理,

$$m=(a+bi)(a-bi)+(-2a)(a+bi+a-bi)=9-4a^2$$

$$n=(a+bi)(a-bi)(-2a)=-18a$$

所以

$$m+n=9-4a^2+18a=-4\left(a-\frac{9}{4}\right)^2+\frac{117}{4}$$

又 $a^2<9,-3<a<3$, 则

$$m+n\in\left(-81,\ \frac{117}{4}\right]$$

26. 关于 z 的方程 $z^{n+1}-\sqrt{3}z^n-1=0$ 存在一个模为 1 的虚根, 求正整数 n 的最小值。

设该虚根为 $z_0=e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$, 有

$$z_0^n(z_0-\sqrt{3})=1$$

两边取模得

$$|z_0^n||z_0-\sqrt{3}|=1$$

由于 $|z_0^n|=1$, 从而

$$|z_0-\sqrt{3}|=1$$

将 $z_0=e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 代入得

$$|(\cos\theta-\sqrt{3})+i\sin\theta|=1$$

于是

$$(\cos\theta-\sqrt{3})^2+\sin^2\theta=1\Rightarrow\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

得 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$, 即 $z_0=e^{i\frac{\pi}{6}}$, 代入 $z_0^n(z_0-\sqrt{3})=1$ 得:

$$\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^n\left(e^{i\frac{\pi}{6}}-\sqrt{3}\right)=e^{i\frac{n\pi}{6}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i-\sqrt{3}\right)=e^{i\frac{n\pi}{6}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=1$$

注意到 $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=e^{i\frac{5\pi}{6}}$, 变为

$$e^{i\frac{n\pi}{6}}\cdot e^{i\frac{5\pi}{6}}=e^{i\frac{(n+5)\pi}{6}}=1\Rightarrow\frac{(n+5)\pi}{6}=2k\pi\Rightarrow n=12k-5$$

令 $k=1$ 得最小正整数解为 $n=7$.

27. 已知复数 z_1, z_2, z_3 满足

$$\begin{cases} |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \\ \dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_3} + \dfrac{z_3}{z_1} = 1 \end{cases}$$

求 $|z_1 + 2z_2 + 3z_3|$ 最大可能值。

设存在一三次多项式, 根为 $\dfrac{z_1}{z_2}, \dfrac{z_2}{z_3}, \dfrac{z_3}{z_1}$, 则

$$\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} = 1$$

$$\frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_2}{z_3} \cdot \frac{z_3}{z_1} = 1$$

$$\frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_2}{z_3} \cdot \frac{z_3}{z_1} + \frac{z_3}{z_1} \cdot \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_3} + \frac{z_2}{z_1} + \frac{z_3}{z_2}$$
$$= \overline{\left(\frac{z_3}{z_1}\right)} + \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} + \overline{\left(\frac{z_2}{z_3}\right)} = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1}\right)} = 1$$

因此该多项式为

$$f(x) = x^3 - x^2 + x - 1 = (x^2 + 1)(x - 1),$$

根为 $x = 1, \pm i$; 为使 $|z_1 + 2z_2 + 3z_3|$ 最大, 取

$$\frac{z_2}{z_3} = 1, \quad \frac{z_3}{z_1} = i, \quad \frac{z_1}{z_2} = -i,$$

则

$$z_2 = z_3 = 1, \quad z_1 = -i,$$

所以

$$|z_1 + 2z_2 + 3z_3| = |-i + 5| = \sqrt{26}$$

28. 设 z 为复数, 且满足 $|z + 1| > 2$。证明

$$|z^3 + 1| > 1.$$

注意到

$$z^3+1=(z+1)(z^2-z+1),$$

因此只需证明

$$|z^2-z+1|>\frac{1}{2}.$$

设 $z+1=re^{i\varphi}$, 其中 $r=|z+1|>2,\varphi$ 为某个实数。于是

$$z^2-z+1=(re^{i\varphi}-1)^2-(re^{i\varphi}-1)+1=r^2e^{2i\varphi}-3re^{i\varphi}+3$$

于是

$$\begin{aligned}|z^2-z+1|^2&=(r^2e^{2i\varphi}-3re^{i\varphi}+3)(r^2e^{-2i\varphi}-3re^{-i\varphi}+3)\\&=r^4+9r^2+9-(6r^3+18r)\cos\varphi+6r^2\cos 2\varphi\\&=r^4+9r^2+9-(6r^3+18r)\cos\varphi+6r^2(2\cos^2\varphi-1)\\&=12\left(r\cos\varphi-\frac{r^2+3}{4}\right)^2+\frac{1}{4}(r^2-3)^2.\end{aligned}$$

由于 $r>2$, 可得

$$|z^2-z+1|^2>\frac{1}{4}\Rightarrow|z^2-z+1|>\frac{1}{2}$$

因此

$$|z^3+1|=|z+1|\,|z^2-z+1|>2\cdot\frac{1}{2}=1$$

证毕。

29. 复数 z_1,z_2,z_3,z_4,z_5 满足

$$\begin{cases}|z_1|\leqslant 1\\|z_2|\leqslant 1\\|2z_3-(z_1+z_2)|\leqslant|z_1-z_2|\\|2z_4-(z_1+z_2)|\leqslant|z_1-z_2|\\|2z_5-(z_3+z_4)|\leqslant|z_3-z_4|\end{cases}$$

求 $|z_5|$ 的最大值。

由

$$|z_1-z_2|\geqslant|2z_3-(z_1+z_2)|\geqslant|2|z_3|-|z_1+z_2||$$

我们有

$$|z_1+z_2|-|z_1-z_2|\leqslant 2|z_3|\leqslant |z_1+z_2|+|z_1-z_2|$$

由 AM-QM 不等式,

$$|z_3|\leqslant \frac{|z_1+z_2|+|z_1-z_2|}{2}\leqslant \sqrt{\frac{|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2}{2}}=\sqrt{\frac{2|z_1|^2+2|z_2|^2}{2}}\leqslant \sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$

同理可得 $|z_4|\leqslant\sqrt{2}$, 故

$$|z_5|\leqslant \frac{|z_3+z_4|}{2}\leqslant \frac{|z_3|+|z_4|}{2}\leqslant \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

考虑等号何时成立: 当 $z_1=1, z_2=i$ 时, $z_3=1+i$; 当 $z_1=-1, z_2=i$ 时, $z_4=-1+i$; 当 $z_3=1+i, z_4=-1+i$ 时, $z_5=2i$, 这时 $|z_5|=2$. 故 $|z_5|_{\max}=2$.

30. 设复数 z 满足 $|z|=1$, 则 $|z^7+\bar{z}^5-3z^3-3\bar{z}|$ 的最大值为

试 $z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, 算得值为:

$$|z^7+\bar{z}^5-3z^3-3\bar{z}|=|2i+2-6i-6|=|-4i-4|=\sqrt{16+16}=\boxed{4\sqrt{2}}$$

(待解)(设 $z=\cos\theta+i\sin\theta, \ldots$ 感觉是尝试因式分解再 AM-GM)

31. (a) 已知 $z=\cos\theta+i\sin\theta$, 证明

$$z^n+z^{-n}=2\cos n\theta, \quad z^n-z^{-n}=2i\sin n\theta.$$

由棣莫弗定理,

$$z^n=\cos n\theta+i\sin n\theta, \quad z^{-n}=\cos n\theta-i\sin n\theta$$

相加得到

$$z^n+z^{-n}=(\cos n\theta+i\sin n\theta)+(\cos n\theta-i\sin n\theta)=2\cos n\theta$$

而相减得到

$$z^n-z^{-n}=(\cos n\theta+i\sin n\theta)-(\cos n\theta-i\sin n\theta)=2i\sin n\theta$$

(b) 证明

$$16\sin^5\theta = \sin 5\theta - 5\sin 3\theta + 10\sin\theta,$$

且

$$32\cos^6\theta = \cos 6\theta + 6\cos 4\theta + 15\cos 2\theta + 10.$$

令 $n=1$, 则

$$2i\sin\theta = z - z^{-1}, \quad 2\cos\theta = z + z^{-1}$$

由第一式, 二项式展开得

$$\begin{aligned}
(2i\sin\theta)^5 &= (z - z^{-1})^5 \\
32i^5\sin^5\theta &= z^5 - 5z^3z^{-2} + 10zz^{-4} - 10z^2z^{-3} + 5zz^{-4} - z^{-5} \\
32i\sin^5\theta &= (z^5 - z^{-5}) - 5(z^3 - z^{-3}) + 10(z - z^{-1}) \\
32i\sin^5\theta &= 2i\sin 5\theta - 10i\sin 3\theta + 20i\sin\theta \\
16\sin^5\theta &= \sin 5\theta - 5\sin 3\theta + 10\sin\theta
\end{aligned}$$

由第二式,

$$\begin{aligned}
(2\cos\theta)^6 &= (z + z^{-1})^6 \\
64\cos^6\theta &= (z^6 + z^{-6}) + 6(z^4 + z^{-4}) + 15(z^2 + z^{-2}) + 20 \\
64\cos^6\theta &= 2\cos 6\theta + 12\cos 4\theta + 30\cos 2\theta + 20 \\
32\cos^6\theta &= \cos 6\theta + 6\cos 4\theta + 15\cos 2\theta + 10
\end{aligned}$$

故得证。

32. 证明

$$\cos^5\theta\sin^3\theta = \frac{1}{128}\Big(6\sin 2\theta + 2\sin 4\theta - 2\sin 6\theta - \sin 8\theta\Big)$$

设 $z = \cos\theta + i\sin\theta$, 由棣莫弗定理,

$$z^n = \cos n\theta + i\sin n\theta, \quad z^{-n} = \cos n\theta - i\sin n\theta,$$

且

$$z^n + z^{-n} = 2\cos n\theta, \quad z^n - z^{-n} = 2i\sin n\theta.$$

由 $2\cos\theta = z + z^{-1}$ 得

$$\begin{aligned}
(2\cos\theta)^5 &= (z+z^{-1})^5 \\
32\cos^5\theta &= z^5 + 5z^4z^{-1} + 10z^3z^{-2} + 10z^2z^{-3} + 5zz^{-4} + z^{-5} \\
32\cos^5\theta &= (z^5+z^{-5}) + 5(z^3+z^{-3}) + 10(z+z^{-1}) \\
16\cos^5\theta &= \cos 5\theta + 5\cos 3\theta + 10\cos\theta
\end{aligned}$$

由 $4\sin^3\theta = 3\sin\theta - \sin 3\theta$, 得到

$$16\cos^5\theta \cdot 4\sin^3\theta = (\cos 5\theta + 5\cos 3\theta + 10\cos\theta)(3\sin\theta - \sin 3\theta).$$

展开并和差化积,

$$\begin{aligned}
64\cos^5\theta\sin^3\theta &= 3\cos 5\theta\sin\theta - \cos 5\theta\sin 3\theta + 15\cos 3\theta\sin\theta - 5\cos 3\theta\sin 3\theta \\
&\quad + 30\cos\theta\sin\theta - 10\cos\theta\sin 3\theta \\
&= \frac{3}{2}(\sin 6\theta - \sin 4\theta) - \frac{1}{2}(\sin 8\theta - \sin 2\theta) + \frac{15}{2}(\sin 4\theta - \sin 2\theta) \\
&\quad - \frac{5}{2}\sin 6\theta + \frac{30}{2}\sin 2\theta - \frac{10}{2}\sin 4\theta \\
128\cos^5\theta\sin^3\theta &= 6\sin 2\theta + 2\sin 4\theta - 2\sin 6\theta - \sin 8\theta
\end{aligned}$$

因此得证

$$\cos^5\theta\sin^3\theta = \frac{1}{128}\left(6\sin 2\theta + 2\sin 4\theta - 2\sin 6\theta - \sin 8\theta\right)$$

33. 定义无穷级数

$$\begin{aligned}
C &= \cos\theta + \frac{1}{2}\cos 5\theta + \frac{1}{4}\cos 9\theta + \cdots \\
S &= \sin\theta + \frac{1}{2}\sin 5\theta + \frac{1}{4}\sin 9\theta + \cdots
\end{aligned}$$

证明

$$C + iS = \frac{2e^{i\theta}}{2 - e^{4i\theta}}, \quad S = \frac{4\sin\theta + 2\sin 3\theta}{5 - 4\cos 4\theta}$$

记

$$
\begin{aligned}
C+iS &= \cos\theta + i\sin\theta + \frac{1}{2}(\cos 5\theta + i\sin 5\theta) + \frac{1}{4}(\cos 9\theta + i\sin 9\theta) + \cdots \\
&= e^{i\theta} + \frac{1}{2}e^{i5\theta} + \frac{1}{4}e^{i9\theta} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}e^{i(4k+1)\theta} = e^{i\theta}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{e^{4i\theta}}{2}\right)^k
\end{aligned}
$$

这是一个公比为 $\frac{e^{4i\theta}}{2}$ 的等比级数, 其模为 $\frac{1}{2}<1$, 因此级数收敛:

$$
C+iS = \frac{e^{i\theta}}{1-\frac{1}{2}e^{4i\theta}} = \frac{2e^{i\theta}}{2-e^{4i\theta}}
$$

又

$$
C+iS = \frac{2e^{i\theta}}{2-e^{4i\theta}}\cdot\frac{2-e^{-4i\theta}}{2-e^{-4i\theta}} = \frac{4e^{i\theta}-2e^{-3i\theta}}{|2-e^{4i\theta}|^2} = \frac{(4\cos\theta-2\cos 3\theta)+i(4\sin\theta+2\sin 3\theta)}{(2-\cos 4\theta)^2+\sin^2 4\theta}
$$

因此

$$
S = \Im(C+iS) = \frac{4\sin\theta+2\sin 3\theta}{5-4\cos 4\theta}
$$

34. 证明

$$
\begin{aligned}
\cos\alpha + {}^nC_1\cos 2\alpha + {}^nC_2\cos 3\alpha + \cdots + \cos(n+1)\alpha &= 2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\cos\frac{n+2}{2}\alpha \\
\sin\alpha + {}^nC_1\sin 2\alpha + {}^nC_2\sin 3\alpha + \cdots + \sin(n+1)\alpha &= 2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\sin\frac{n+2}{2}\alpha
\end{aligned}
$$

考虑下列复数和的实部与虚部系数

$$
(\cos\alpha + i\sin\alpha) + {}^nC_1(\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha) + \cdots + [\cos(n+1)\alpha + i\sin(n+1)\alpha]
$$

令

$$
x = \cos\alpha + i\sin\alpha
$$

由棣莫弗定理及二项式定理,

$$\begin{aligned}
x + {}^nC_1x^2 + {}^nC_2x^3 + \cdots + x^{n+1} &= x(1+x)^n \\
&= (\cos\alpha + i\sin\alpha)(1+\cos\alpha + i\sin\alpha)^n \\
&= (\cos\alpha + i\sin\alpha)\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2} + 2i\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)^n \\
&= (\cos\alpha + i\sin\alpha)\left[2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right)\right]^n \\
&= 2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}(\cos\alpha + i\sin\alpha)\left(\cos\frac{n\alpha}{2} + i\sin\frac{n\alpha}{2}\right) \\
&= 2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{n+2}{2}\alpha + i\sin\frac{n+2}{2}\alpha\right)
\end{aligned}$$

比较实部与虚部, 可得

$$\cos\alpha + {}^nC_1\cos 2\alpha + {}^nC_2\cos 3\alpha + \cdots + \cos(n+1)\alpha = 2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\cos\frac{n+2}{2}\alpha$$
$$\sin\alpha + {}^nC_1\sin 2\alpha + {}^nC_2\sin 3\alpha + \cdots + \sin(n+1)\alpha = 2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\sin\frac{n+2}{2}\alpha$$

35. (a) 证明对于任意正整数 n 有

$$\sin n\theta = \binom{n}{1}\sin\theta\cos^{n-1}\theta - \binom{n}{3}\sin^3\theta\cos^{n-3}\theta + \binom{n}{5}\sin^5\theta\cos^{n-5}\theta - \ldots,$$
$$\cos n\theta = \cos^n\theta - \binom{n}{2}\sin^2\theta\cos^{n-2}\theta + \binom{n}{4}\sin^4\theta\cos^{n-4}\theta - \ldots$$

根据棣莫弗定理，我们有

$$\cos n\theta + i\sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n \tag{1}$$

利用二项式定理展开等式右边

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(i\sin\theta)^k(\cos\theta)^{n-k}$$

展开各项并提取 i 的幂次:

$$\begin{aligned}
(\cos\theta + i\sin\theta)^n = &\binom{n}{0}\cos^n\theta + i\binom{n}{1}\cos^{n-1}\theta\sin\theta + i^2\binom{n}{2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta \\
&+ i^3\binom{n}{3}\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta + i^4\binom{n}{4}\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta + \ldots
\end{aligned}$$

由于 $i^2=-1, i^3=-i, i^4=1, i^5=i, \dots$, 可将展开式整理为

$$\begin{aligned}
&(\cos\theta + i\sin\theta)^n \\
&= \left(\cos^n\theta - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta - \dots\right) \\
&+ i\left(\binom{n}{1}\cos^{n-1}\theta\sin\theta - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta + \binom{n}{5}\cos^{n-5}\theta\sin^5\theta - \dots\right)
\end{aligned}$$

由 (1), 比较实部和虚部即得

$$\begin{aligned}
\cos n\theta &= \cos^n\theta - \binom{n}{2}\sin^2\theta\cos^{n-2}\theta + \binom{n}{4}\sin^4\theta\cos^{n-4}\theta - \dots \\
\sin n\theta &= \binom{n}{1}\sin\theta\cos^{n-1}\theta - \binom{n}{3}\sin^3\theta\cos^{n-3}\theta + \binom{n}{5}\sin^5\theta\cos^{n-5}\theta - \dots
\end{aligned}$$

于是得证。

(b) 证明对于区间 $[-1,1]$ 上的所有 x 和任意正整数 n, 函数

$$T_n(x) = \cos(n\cos^{-1}x)$$

是 x 的次数为 n 的多项式, 且首项系数为 2^{n-1}。

取 $\theta=\cos^{-1}x$, 则 $\cos\theta=x$,$\sin\theta=\sqrt{1-x^2}$, 应用 (a) 可得

$$\cos(n\cos^{-1}x) = x^n - \binom{n}{2}(1-x^2)x^{n-2} + \binom{n}{4}(1-x^2)^2x^{n-4} - \dots$$

显然 $T_n(x)$ 是 x 的次数为 n 的多项式。其首项系数为

$$1+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\dots+\binom{n}{2k}$$

由于

$$\begin{aligned}
2^n = (1+1)^n = 1+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{n}, \\
0 = (1-1)^n = 1-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\dots+(-1)^n\binom{n}{n},
\end{aligned}$$

两式相加, 得到

$$1+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\dots+\binom{n}{2k} = 2^{n-1}.$$

因此首项系数为 2^{n-1}。

36. 证明下列无穷级数的和:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin(n\theta)}{n!}=e^{-\cos\theta}\sin(\sin\theta)$$

定义

$$C=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos(n\theta)}{n!},\quad S=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin(n\theta)}{n!}$$

则

$$C+iS=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(e^{i\theta})^n}{n!}$$

观察到指数函数的展开式为

$$e^{-z}=1-z+\frac{z^2}{2!}-\frac{z^3}{3!}+\cdots$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}z^n}{n!}=1-e^{-z}$$

取 $z=e^{i\theta}$, 得

$$\begin{aligned}C+iS&=1-e^{-e^{i\theta}}=1-e^{-(\cos\theta+i\sin\theta)}=1-e^{-\cos\theta}e^{-i\sin\theta}\\&=1-e^{-\cos\theta}[\cos(\sin\theta)-i\sin(\sin\theta)]\\&=[1-e^{-\cos\theta}\cos(\sin\theta)]+i[e^{-\cos\theta}\sin(\sin\theta)]\end{aligned}$$

取虚部得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin(n\theta)}{n!}=\Im(C+iS)=e^{-\cos\theta}\sin(\sin\theta)$$

37. 求下列多项式方程的所有实数解:

$$x^7-7x^6-21x^5+35x^4+35x^3-21x^2-7x+1=0.$$

设 $\cos\theta = c, \sin\theta = s$, 由棣莫弗定理,

$$(c+is)^7 = (\cos\theta + i\sin\theta)^7 = \cos 7\theta + i\sin 7\theta$$

且由二项展开得

$$(c+is)^7 = c^7 + 7ic^6s - 21c^5s^2 - 35ic^4s^3 + 35c^3s^4 + 21ic^2s^5 - 7cs^6 - is^7$$

比较实部与虚部, 得到

$$\begin{aligned}\cos 7\theta &= c^7 - 21c^5s^2 + 35c^3s^4 - 7cs^6,\\ \sin 7\theta &= 7c^6s - 35c^4s^3 + 21c^2s^5 - s^7.\end{aligned}$$

设 $t = \tan\theta = \dfrac{s}{c}$, 则

$$\tan 7\theta = \frac{\sin 7\theta}{\cos 7\theta} = \frac{7t - 35t^3 + 21t^5 - t^7}{1 - 21t^2 + 35t^4 - 7t^6}.$$

令 $\tan 7\theta = 1$, 得到

$$\frac{7t - 35t^3 + 21t^5 - t^7}{1 - 21t^2 + 35t^4 - 7t^6} = 1,$$

整理得

$$t^7 - 7t^6 - 21t^5 + 35t^4 + 35t^3 - 21t^2 - 7t + 1 = 0.$$

这正是题目所给的多项式方程, 其中 $t = x$。由 $\tan 7\theta = 1$,

$$7\theta = \frac{\pi}{4} + n\pi,$$

从而

$$\theta = \frac{(4n+1)\pi}{28}, \quad n = 0,1,2,3,4,5,6.$$

因此方程的所有实数解为

$$\tan\frac{\pi}{28}, \tan\frac{5\pi}{28}, \tan\frac{9\pi}{28}, \tan\frac{13\pi}{28}, \tan\frac{17\pi}{28}, \tan\frac{21\pi}{28}, \tan\frac{25\pi}{28}.$$

38. (a) 证明:

$$\sin 7\theta = 7\sin\theta - 56\sin^3\theta + 112\sin^5\theta - 64\sin^7\theta$$

从棣莫弗定理出发,

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^7 = \cos 7\theta + i\sin 7\theta$$

由二项式定理展开左式,

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^7 = \sum_{k=0}^{7} {}^7C_k \cos^{7-k}\theta (i\sin\theta)^k$$

比较虚部项系数得

$$\sin 7\theta = {}^7C_1 \cos^6\theta \sin\theta - {}^7C_3 \cos^4\theta \sin^3\theta + {}^7C_5 \cos^2\theta \sin^5\theta - {}^7C_7 \sin^7\theta$$

由恒等式 $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$, 令 $s = \sin\theta$, 则有

$$\sin 7\theta = 7(1-s^2)^3 s - 35(1-s^2)^2 s^3 + 21(1-s^2)s^5 - s^7 = 7s - 56s^3 + 112s^5 - 64s^7$$

故得证。

(b) 据此, 解方程

$$1 + 7x - 56x^3 + 112x^5 - 64x^7 = 0$$

原方程

$$1 + 7x - 56x^3 + 112x^5 - 64x^7 = 0$$

可写为

$$1 + \sin 7\theta = 0 \Rightarrow \sin 7\theta = -1$$

解得

$$7\theta = \ldots, -\frac{5\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \cdots \Rightarrow \theta = \ldots, -\frac{5\pi}{14}, -\frac{\pi}{14}, \frac{3\pi}{14}, \frac{7\pi}{14}, \ldots$$

所以

$$x = \sin\theta = \sin\left(-\frac{5\pi}{14}\right), \sin\left(-\frac{\pi}{14}\right), \sin\frac{3\pi}{14}, \sin\frac{7\pi}{14} = -0.901, -0.223, 0.623, 1$$

(c) 通过构造合适的多项式方程, 证明

$$\csc^2\frac{\pi}{7} + \csc^2\frac{2\pi}{7} + \csc^2\frac{3\pi}{7} = 8$$

考虑解为

$$\theta = \cdots, 0, \frac{\pi}{7}, \frac{2\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}, \cdots 2$$

的方程

$$\sin 7\theta = 0,$$

由三角恒等式

$$\sin 7\theta = 7\sin\theta - 56\sin^3\theta + 112\sin^5\theta - 64\sin^7\theta,$$

方程变为

$$-\sin\theta\big(64\sin^6\theta - 112\sin^4\theta + 56\sin^2\theta - 7\big) = 0.$$

注意到

$$\sin\frac{\pi}{7} = \sin\frac{6\pi}{7}, \quad \sin\frac{2\pi}{7} = \sin\frac{5\pi}{7}, \quad \sin\frac{3\pi}{7} = \sin\frac{4\pi}{7},$$

则对非零解 $\sin\theta \neq 0$, 令 $z = \sin^2\theta$, 则方程

$$64z^3 - 112z^2 + 56z - 7 = 0$$

的三根为

$$\alpha = \sin^2\frac{\pi}{7}, \quad \beta = \sin^2\frac{2\pi}{7}, \quad \gamma = \sin^2\frac{3\pi}{7}.$$

由韦达定理,

$$\alpha+\beta+\gamma = \frac{112}{64} = \frac{7}{4}, \quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = \frac{56}{64} = \frac{7}{8}, \quad \alpha\beta\gamma = \frac{7}{64}$$

于是

$$\csc^2\frac{\pi}{7} + \csc^2\frac{2\pi}{7} + \csc^2\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} = 8$$

证毕。

39. (a) 证明

$$(1+i\tan\theta)^4 + (1-i\tan\theta)^4 = \frac{2\cos 4\theta}{\cos^4\theta}.$$

由

$$\begin{aligned}(1+i\tan\theta)^4+(1-i\tan\theta)^4&=\left(1+\frac{i\sin\theta}{\cos\theta}\right)^4+\left(1-\frac{i\sin\theta}{\cos\theta}\right)^4\\&=\left(\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta}\right)^4+\left(\frac{\cos\theta-i\sin\theta}{\cos\theta}\right)^4\\&=\frac{\cos 4\theta+i\sin 4\theta}{\cos^4\theta}+\frac{\cos 4\theta-i\sin 4\theta}{\cos^4\theta}\\&=\frac{2\cos 4\theta}{\cos^4\theta}\end{aligned}$$

故左式 = 右式，等式得证。

(b) 通过构造合适的多项式方程，证明

$$\tan^2\frac{\pi}{8}\tan^2\frac{3\pi}{8}=1,\quad \tan^2\frac{\pi}{8}+\tan^2\frac{3\pi}{8}=6$$

考虑 $\cos 4\theta=0$ 的解

$$4\theta=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2},\frac{7\pi}{2},\cdots\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{8},\frac{5\pi}{8},\frac{7\pi}{8},\cdots$$

则

$$z=i\tan\frac{\pi}{8},\ i\tan\frac{3\pi}{8},\ i\tan\frac{5\pi}{8},\ i\tan\frac{7\pi}{8}$$

为方程

$$(1+z)^4+(1-z)^4=0\Rightarrow z^4+6z^2+1=0$$

的解，由韦达定理，

$$i\tan\frac{\pi}{8}\cdot i\tan\frac{3\pi}{8}\cdot i\tan\frac{5\pi}{8}\cdot i\tan\frac{7\pi}{8}=1$$

又因为

$$\tan\frac{7\pi}{8}=-\tan\frac{\pi}{8},\quad \tan\frac{5\pi}{8}=-\tan\frac{3\pi}{8}$$

故得证

$$\tan^2\frac{\pi}{8}\tan^2\frac{3\pi}{8}=1$$

又由韦达定理，

$$i\tan\frac{\pi}{8}+i\tan\frac{3\pi}{8}+i\tan\frac{5\pi}{8}+i\tan\frac{7\pi}{8}=0$$

两边平方得

$$\left(i\tan\frac{\pi}{8}\right)^2+\left(i\tan\frac{3\pi}{8}\right)^2+\left(i\tan\frac{5\pi}{8}\right)^2+\left(i\tan\frac{7\pi}{8}\right)^2+2\cdot 6=0$$

给出

$$\tan^2\frac{\pi}{8}+\tan^2\frac{3\pi}{8}=6$$

40. 设

$$w=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5},$$

(a) 证明

$$1+w+w^2+w^3+w^4=0.$$

由棣莫弗定理,

$$w^5=(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5})^5=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1,$$

由于 $w\neq 1$, 所以由 $w^5-1=0$ 得

$$(w-1)(1+w+w^2+w^3+w^4)=0\Rightarrow 1+w+w^2+w^3+w^4=0.$$

(b) 求

$$(1-w)(1-w^2)(1-w^3)(1-w^4)$$

的值。

有

$$\begin{aligned}
&(1-w)(1-w^2)(1-w^3)(1-w^4)\\
&=(1-w)(1-w^4)(1-w^2)(1-w^3)\\
&=[2-(w+w^4)][2-(w^2+w^3)]\\
&=4-2(w+w^4+w^2+w^3)+(w+w^4)(w^2+w^3)\\
&=4-2(-1)+w^3+w^4+w^6+w^7\\
&=6+w^3+w^4+w+w^2\\
&=6-1\\
&=5
\end{aligned}$$

(c) 证明

$$(1-w)(1-w^4)=4\sin^2\frac{\pi}{5}.$$

由于 w 与 w^4 共轭, 有

$$\begin{aligned}(1-w)(1-w^4) &= 1-w-w^4+w^5\\ &= 2-(w+w^4)\\ &= 2-2\cos\frac{2\pi}{5}\\ &= 4\sin^2\frac{\pi}{5}\end{aligned}$$

(d) 证明

$$(1-w^2)(1-w^3) = 4\sin^2\frac{2\pi}{5}.$$

同理由于 w^2 与 w^3 共轭, 有

$$\begin{aligned}(1-w^2)(1-w^3) &= 1-w^2-w^3+w^5\\ &= 2-(w^2+w^3)\\ &= 2-2\cos\frac{4\pi}{5}\\ &= 4\sin^2\frac{2\pi}{5}\end{aligned}$$

(e) 证明

$$\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}}{4}.$$

由 (b),(c),(d) 得

$$16\sin^2\frac{\pi}{5}\sin^2\frac{2\pi}{5} = (1-w)(1-w^2)(1-w^3)(1-w^4) = 5,$$

即

$$\sin^2\frac{\pi}{5}\sin^2\frac{2\pi}{5} = \frac{5}{16},$$

由于 $\frac{\pi}{5},\frac{2\pi}{5}$ 为锐角, 所以 $\sin\frac{\pi}{5},\sin\frac{2\pi}{5} > 0$, 故取正值

$$\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

41. 设 $S_n = a^n + b^n$, 其中 a, b 是方程 $x^2 + x + 1 = 0$ 的根, 求

$$\sum_{n=0}^{1729} (-1)^n S_n$$

方程根为 $a = \omega$, $b = \omega^2$, 其中 $\omega = e^{2\pi i/3}$, 满足 $\omega^3 = 1$。设

$$S_n = \omega^n + \omega^{2n},$$

发现 S_n 是周期为 3 的数列:

$$S_0 = 2, \quad S_1 = -1, \quad S_2 = -1$$

将原式写成

$$\sum_{k=0}^{576} \left[(-1)^{3k} S_{3k} + (-1)^{3k+1} S_{3k+1} + (-1)^{3k+2} S_{3k+2}\right] + (-1)^{1728} S_{1728} + (-1)^{1729} S_{1729}$$

前面 576 组和为 0, 剩余

$$(-1)^{1728} S_{1728} + (-1)^{1729} S_{1729} = 1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) = 3$$

42. 设 $\omega \in \mathbb{C}$、$\omega \neq 1$、且 $\omega^7 = 1$, 计算:

$$\prod_{k=0}^{6} (\omega^{2k} + 2\omega^k + 4)$$

设方程 $x^7 - 1 = 0$ 的根为 $1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^6$, 则

$$\prod_{k=0}^{6} \left((\omega^k)^2 + 2\omega^k + 4\right) = \prod_{k=0}^{6} \frac{(\omega^k)^3 - 8}{\omega^k - 2}$$

由于 $(\omega^0, \omega^3, \omega^6, \omega^9, \omega^{12}, \omega^{15}, \omega^{18}) = (\omega^0, \omega^3, \omega^6, \omega^2, \omega^5, \omega^1, \omega^4)$, 因此:

$$\prod_{k=0}^{6} ((\omega^k)^3 - 8) = \prod_{j=0}^{6} (\omega^j - 8)$$

又因为 $x^7 - 1 = \prod_{j=0}^{6} (x - \omega^j)$, 令 $x = 8$, 得

$$\prod_{j=0}^{6} (\omega^j - 8) = -(8^7 - 1) = 1 - 8^7$$

同理, 令 $x=2$ 得

$$\prod_{j=0}^{6}(\omega^j-2)=-(2^7-1)=1-2^7$$

因此原式为:

$$\frac{1-8^7}{1-2^7}=16513$$

43. 令 $\omega=\cos\frac{2\pi}{111}+i\sin\frac{2\pi}{111}$, 其中 $i=\sqrt{-1}$, 求

$$\sum_{k=1}^{110}\frac{\omega^{2k}}{\omega^k-1}$$

由 $\omega=\cos\frac{2\pi}{111}+i\sin\frac{2\pi}{111}$ 可知

$$\omega^{111}-1=0\Rightarrow\sum_{k=0}^{110}\omega^k=0$$

因此

$$\sum_{k=1}^{110}\frac{\omega^{2k}}{\omega^k-1}=\sum_{k=1}^{110}\left(\omega^k+1+\frac{1}{\omega^k-1}\right)=-1+110+\sum_{k=1}^{110}\frac{1}{\omega^k-1}\tag{1}$$

设

$$f(x)=\sum_{k=0}^{110}x^k=\prod_{k=1}^{110}(x-\omega^k)$$

则

$$f'(x)=\sum_{k=1}^{110}kx^{k-1}=\sum_{m=1}^{110}\prod_{k=1,k\neq m}^{110}(x-\omega^k)$$

于是

$$g(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}=\sum_{k=1}^{110}\frac{1}{x-\omega^k}$$

令 $x=1$,

$$g(1)=\frac{111\cdot\frac{110}{2}}{111}=\sum_{k=1}^{110}\frac{1}{1-\omega^k}\Rightarrow\sum_{k=1}^{110}\frac{1}{\omega^k-1}=-55$$

代入 (1) 得

$$\sum_{k=1}^{110}\frac{\omega^{2k}}{\omega^k-1}=-1+110-55=54$$

44. 设 $z=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$, 求

$$\left|1+2z+3z^2+\cdots+2016z^{2015}\right|$$

记

$$S=1+2z+3z^2+\cdots+2016z^{2015}$$

考虑函数

$$f(x)=x+x^2+\cdots+x^{2016}=\frac{x(x^{2016}-1)}{x-1},$$

则有

$$S=f'(z)$$

求导:

$$f'(x)=\frac{[(x^{2016}-1)+2016x^{2016}](x-1)-x(x^{2016}-1)}{(x-1)^2}$$

设 $z=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=e^{\frac{i\pi}{6}}$, 由棣莫弗定理得

$$z^{2016}=\left(e^{i\pi/6}\right)^{2016}=e^{i\cdot 336\pi}=1$$

于是

$$f'(z)=\frac{2016(z-1)}{(z-1)^2}=\frac{2016}{z-1}\Rightarrow|S|=\frac{2016}{|z-1|}$$

而

$$z-1=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)+\frac{1}{2}i$$

$$|z-1|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$

所以

$$|S|=\frac{2016\cdot 2}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=1008\sqrt{2}+1008\sqrt{6}$$

45. 设 $\omega=e^{\frac{2\pi i}{n}}$, 求

$$-\sum_{k=1}^{n-1}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n-1}(\omega^k-\omega^j).$$

设

$$P(x)=\prod_{k=1}^{n-1}(x-\omega^k)=\frac{x^n-1}{x-1}=x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1$$

则

$$P'(x)=(n-1)x^{n-2}+(n-2)x^{n-3}+\cdots+1$$

于是

$$\sum_{k=1}^{n-1}\prod_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n-1}(\omega^k-\omega^j)=-\sum_{k=1}^{n-1}P'(\omega^k)$$

观察到由于 $\omega^n=1$,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{(n-1)k}=\begin{cases}n, & k=0\\ \dfrac{1-\omega^{nk}}{1-\omega^k}=0, & k\neq 0\end{cases}$$

因此

$$\sum_{k=0}^{n-1}P'(\omega^k)=0+\cdots+0+n=n$$

故

$$\sum_{k=1}^{n-1}\prod_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n-1}(\omega^k-\omega^j)=-\sum_{k=1}^{n-1}P'(\omega^k)=-(n-P'(1))=\frac{n(n-1)}{2}-n=\frac{n(n-3)}{2}$$

46. 设复数平面上三点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ 可连成正三角形 ABC, 已知 α, β, γ 满足

$$\alpha^4-2\alpha^3\beta+(\beta^2-4)\alpha^2+8\alpha\gamma-4\gamma^2=0$$

且 α 的实部和虚部均为正数, 当 $\triangle ABC$ 的重心 G 为 $\frac{\alpha}{2^{110}}$ 时, 求 β 及 γ 各为何?

求解 α 的值由原式因式分解得:

$$(\alpha^2-\alpha\beta)^2-4(\alpha-\gamma)^2=0 \implies \alpha(\alpha-\beta)=\pm2(\alpha-\gamma)$$

由于 $\triangle ABC$ 为正三角形, 满足 $\alpha-\beta=(\alpha-\gamma)e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$, 代入上式:

$$\alpha(\alpha-\gamma)e^{\pm i\frac{\pi}{3}}=\pm2(\alpha-\gamma) \implies \alpha=\pm2e^{\mp i\frac{\pi}{3}}$$

已知 α 的实部与虚部均为正, 故:

$$\alpha=2e^{i\frac{\pi}{3}}=1+\sqrt{3}i$$

利用重心与旋转性质求解 β,γ

已知重心 $G=\frac{\alpha}{2^{1110}}$。根据正三角形的几何性质，顶点 β 和 γ 是由顶点 α 绕重心 G 分别旋转 120° 和 -120° 得到的：

$$\beta = G+(\alpha-G)e^{i\frac{2\pi}{3}}=\frac{\alpha}{2^{1110}}+\alpha\left(1-\frac{1}{2^{1110}}\right)e^{i\frac{2\pi}{3}}$$
$$\gamma = G+(\alpha-G)e^{-i\frac{2\pi}{3}}=\frac{\alpha}{2^{1110}}+\alpha\left(1-\frac{1}{2^{1110}}\right)e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

具体数值计算将 $\alpha=2e^{i\frac{\pi}{3}}$ 代入 β:

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2^{1110}}+2e^{i\frac{\pi}{3}}\left(1-\frac{1}{2^{1110}}\right)e^{i\frac{2\pi}{3}}\\ &= \frac{1+\sqrt{3}i}{2^{1110}}+2\left(1-\frac{1}{2^{1110}}\right)e^{i\pi}\\ &= \frac{1+\sqrt{3}i}{2^{1110}}-2+\frac{2}{2^{1110}}\\ &= \left(\frac{3}{2^{1110}}-2\right)+\frac{\sqrt{3}}{2^{1110}}i\end{aligned}$$

将 $\alpha=2e^{i\frac{\pi}{3}}$ 代入 γ:

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2^{1110}}+2e^{i\frac{\pi}{3}}\left(1-\frac{1}{2^{1110}}\right)e^{-i\frac{2\pi}{3}}\\ &= \frac{1+\sqrt{3}i}{2^{1110}}+2\left(1-\frac{1}{2^{1110}}\right)e^{-i\frac{\pi}{3}}\\ &= \frac{1+\sqrt{3}i}{2^{1110}}+2\left(1-\frac{1}{2^{1110}}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\\ &= \frac{1+\sqrt{3}i}{2^{1110}}+\left(1-\frac{1}{2^{1110}}\right)-\sqrt{3}\left(1-\frac{1}{2^{1110}}\right)i\\ &= 1+\sqrt{3}\left(\frac{2}{2^{1110}}-1\right)i\end{aligned}$$

综上所述：

$$\beta=\left(\frac{3}{2^{1110}}-2\right)+\frac{\sqrt{3}}{2^{1110}}i$$

$$\gamma=1+\left(\frac{\sqrt{3}}{2^{1109}}-\sqrt{3}\right)i$$

(待验证)

47. 设 $P(z)$ 是一个 n 次复系数多项式, 其所有零点都位于复平面的单位圆上。证明多项式

$$\tilde{P}(z) = 2zP'(z) - nP(z)$$

的所有零点也都位于同一单位圆上。

不失一般性, 考虑首项系数为 1 的多项式。设

$$P(z) = (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n),$$

其中 $|\alpha_j| = 1, j = 1, 2, \ldots, n$, 并允许这些复数 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 相同, 则

$$\begin{aligned}\tilde{P}(z) &= 2zP'(z) - nP(z) \\ &= (z+\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n) + \cdots + (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z+\alpha_n)\end{aligned}$$

因此

$$\frac{\tilde{P}(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{z+\alpha_k}{z-\alpha_k}$$

注意到, 对任意复数 z, α 且 $z \neq \alpha$, 皆有

$$\Re\left[\frac{z+\alpha}{z-\alpha}\right] = \frac{|z|^2 - |\alpha|^2}{|z-\alpha|^2}$$

于是

$$\Re\left[\frac{\tilde{P}(z)}{P(z)}\right] = \sum_{k=1}^{n} \frac{|z|^2 - |\alpha_k|^2}{|z-\alpha_k|^2}$$

由于 $|\alpha_k| = 1$, 可知当 $|z| \neq 1$ 时, 上式不为零, 因此若 $\tilde{P}(z) = 0$, 则必有

$$\Re\left[\frac{\tilde{P}(z)}{P(z)}\right] = 0,$$

从而推出 $|z| = 1$, 这说明 $\tilde{P}(z)$ 的所有零点也都位于单位圆上。

48. 复数平面上以原点为中心的单位圆中, 有一内接四边形, 其顶点为 z_1, z_2, z_3, z_4, 设

$$S_n = z_1^n + z_2^n + z_3^n + z_4^n$$

且 $S_1 = 0$ 且 $S_2 = 1$,

(a) 证明: 若

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = 1, \quad z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$$

则 z_1, z_2, z_3, z_4 为一个矩形的顶点。

设

$$f(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4) = z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d$$

由 $S_1 = z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$ 得 $a = 0$, 又由于 $|z_k| = 1$, 有 $\bar{z}_k = \dfrac{1}{z_k}$, 于是

$$\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3} + \overline{z_4} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} + \frac{1}{z_4} = 0$$

即

$$z_2z_3z_4 + z_1z_3z_4 + z_1z_2z_4 + z_1z_2z_3 = 0$$

所以 $c = 0$, 因此

$$f(z) = z^4 + bz^2 + d$$

为偶函数, 四根关于原点成对对称, 于是可设

$$z_1 + z_3 = 0, z_2 + z_4 = 0$$

此时两对顶点互为相反数, 对角线过原点, 且 $|z_1| = |z_2| = 1$, 故为内接矩形。

(b) 计算该矩形的面积。

设

$$z_1 = a + bi, \quad z_2 = -a + bi, \quad z_3 = -a - bi, \quad z_4 = a - bi$$

由 $S_2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = 4(a^2 - b^2) = 1$ 得

$$a^2 - b^2 = \frac{1}{4}$$

又因 $|z_1| = 1$, 有 $a^2 + b^2 = 1$, 解得

$$a = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}, \quad b = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

故矩形面积为

$$2a \cdot 2b = \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

数学归纳法

1. 证明对任意正整数 n,

$$(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(2n-1)(2n)=2^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)$$

定义命题:

$$P_n:(n+1)(n+2)\cdots(2n)=2^n\cdot 1\cdot 3\cdots(2n-1)$$

其中 $n\in\mathbb{Z}^+$。观察当 $n=1$ 时,

$$\text{左边}=1+1=2,\quad \text{右边}=2^1\cdot 1=2$$

左边等于右边, 即 P_1 成立。现假设 P_k 成立, 即当 $n=k$ 时,

$$(k+1)(k+2)\cdots(2k)=2^k\cdot 1\cdot 3\cdots(2k-1)$$

观察当 $n=k+1$ 时, 左边为:

$$\begin{aligned}(k+2)(k+3)\cdots(2k)(2k+1)(2k+2)&=\frac{(k+1)(k+2)\cdots(2k)\cdot(2k+1)\cdot 2(k+1)}{k+1}\\&=\frac{2^k\cdot 1\cdot 3\cdots(2k-1)\cdot(2k+1)\cdot 2(k+1)}{k+1}\\&=2^{k+1}\cdot 1\cdot 3\cdots(2k-1)(2k+1)\end{aligned}$$

此时左边等于 P_{k+1} 的右边, 因此 P_{k+1} 亦成立。

即 $P_k \implies P_{k+1}$。由数学归纳法,P_n 对任意正整数 n 都成立。

2. 证明对任意正整数 $n\geqslant p$,

$$\sum_{i=1}^{n-p+1}\frac{1}{i(i+1)\cdots(i+p-1)}=\frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{(p-1)!}-\frac{1}{(n-p+2)(n-p+3)\cdots n}\right]$$

定义命题 P_n 为上述等式。其中 $n,p\in\mathbb{Z}^+$ 且 $p>1$。

第一步: 当 $n=p$ 时, 左边 $=\frac{1}{1\cdot2\cdots p}=\frac{1}{p!}$。右边 $=\frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{(p-1)!}-\frac{1}{2\cdot3\cdots p}\right]=\frac{1}{p-1}\cdot\frac{p-1}{p!}=\frac{1}{p!}$。左边等于右边, 即 P_p 成立。

第二步: 假设当 $n=k$ $(k\geqslant p)$ 时结论成立, 即:

$$\sum_{i=1}^{k-p+1}\frac{1}{i\cdots(i+p-1)}=\frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{(p-1)!}-\frac{1}{(k-p+2)\cdots k}\right]$$

第三步: 考虑当 $n=k+1$ 时的情况, 左边为:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k-p+2}\frac{1}{i\cdots(i+p-1)}&=\sum_{i=1}^{k-p+1}\frac{1}{i\cdots(i+p-1)}+\frac{1}{(k-p+2)\cdots(k+1)}\\&=\frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{(p-1)!}-\frac{1}{(k-p+2)\cdots k}\right]+\frac{1}{(k-p+2)\cdots(k+1)}\\&=\frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{(p-1)!}-\left(\frac{1}{(k-p+2)\cdots k}-\frac{p-1}{(k-p+2)\cdots(k+1)}\right)\right]\end{aligned}$$

对括号内进行通分:

$$\frac{(k+1)-(p-1)}{(k-p+2)\cdots(k+1)}=\frac{k-p+2}{(k-p+2)(k-p+3)\cdots(k+1)}=\frac{1}{(k-p+3)\cdots(k+1)}$$

由此可得:

$$\text{左边}=\frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{(p-1)!}-\frac{1}{(k-p+3)\cdots(k+1)}\right]$$

此时左边等于 P_{k+1} 的右边, 因此 P_{k+1} 亦成立。

即 $P_k\implies P_{k+1}$。由数学归纳法,P_n 对任意正整数 $n\geqslant p$ 均成立。

3. 证明: 对于任意整数 $n>1$, 有

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

据此, 试证

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{99}{100}<\frac{1}{12}$$

我们使用数学归纳法进行证明。

第一步：当 $n=1$ 时，

$$左边 = \frac{1}{2}, \quad 右边 = \frac{1}{\sqrt{3(1)+1}} = \frac{1}{2}$$

此时左边等于右边（注：题目要求证明 $n>1$ 时的严格不等式，此处作为归纳基础）。

第二步：假设当 $n=k$ 时不等式（或等式）成立，即：

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k-1}{2k} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3k+1}}$$

第三步：考虑当 $n=k+1$ 时，左边乘积项变为：

$$左边 = \left(\frac{1}{2}\cdots\frac{2k-1}{2k}\right)\cdot\frac{2k+1}{2k+2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}$$

为了证明结论成立，我们需要证明 $\frac{2k+1}{(2k+2)\sqrt{3k+1}} < \frac{1}{\sqrt{3(k+1)+1}}$。我们对不等式左边项的平方进行分析：

$$\begin{aligned}
\left[\frac{2k+1}{(2k+2)\sqrt{3k+1}}\right]^2 &= \frac{(2k+1)^2}{(4k^2+8k+4)(3k+1)} \\
&= \frac{(2k+1)^2}{12k^3+28k^2+20k+4} \\
&= \frac{(2k+1)^2}{(12k^3+28k^2+19k+4)+k}
\end{aligned}$$

注意到上式分母中括号内的部分恰好等于 $(2k+1)^2(3k+4)$。因此：

$$\frac{(2k+1)^2}{(2k+1)^2(3k+4)+k} < \frac{(2k+1)^2}{(2k+1)^2(3k+4)} = \frac{1}{3k+4}$$

这表明：

$$\frac{2k+1}{(2k+2)\sqrt{3k+1}} < \frac{1}{\sqrt{3k+4}}$$

即 P_{k+1} 成立。

综上所述，由数学归纳法可知，原不等式对所有 $n>1$ 均成立。

据此，令 $n=50$，得

4. 已知

$$f(n) = 3^{2n+4} - 2^{2n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

用数学归纳法证明 $f(n)$ 能被 5 整除。

先验证基础情况。

当 $n=1$ 时，

$$
\begin{aligned}
f(1) &= 3^6 - 2^2 \\
&= 729 - 4 \\
&= 725,
\end{aligned}
$$

显然 725 能被 5 整除，因此结论对 $n=1$ 成立。

假设当 $n=k$ 时结论成立，即存在 $m \in \mathbb{N}$，使得

$$
f(k) = 3^{2k+4} - 2^{2k} = 5m.
$$

下面证明结论对 $n=k+1$ 也成立。

$$
\begin{aligned}
f(k+1) - f(k) &= \left(3^{2(k+1)+4} - 2^{2(k+1)}\right) - \left(3^{2k+4} - 2^{2k}\right) \\
&= 3^{2k+6} - 2^{2k+2} - 3^{2k+4} + 2^{2k} \\
&= 3^{2k+4}(3^2 - 1) - 2^{2k}(2^2 - 1) \\
&= 8 \cdot 3^{2k+4} - 3 \cdot 2^{2k}.
\end{aligned}
$$

由此得

$$
\begin{aligned}
f(k+1) &= f(k) + 8 \cdot 3^{2k+4} - 3 \cdot 2^{2k} \\
&= 5m + 8 \cdot 3^{2k+4} - 3(3^{2k+4} - 5m) \\
&= 5m + 8 \cdot 3^{2k+4} - 3 \cdot 3^{2k+4} + 15m \\
&= 20m + 5 \cdot 3^{2k+4} \\
&= 5(4m + 3^{2k+4}).
\end{aligned}
$$

因此 $f(k+1)$ 也能被 5 整除。

由数学归纳法可知，对所有 $n \in \mathbb{N}$，

$$
f(n) = 3^{2n+4} - 2^{2n}
$$

均能被 5 整除。

5. 证明对所有正整数 n, 都有

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \sqrt{n}.$$

用数学归纳法证明:

当 $n=1$ 时:

$$\begin{aligned}\text{L.H.S.}&=\frac{1}{\sqrt{1}}=1,\\ \text{R.H.S.}&=\sqrt{1}=1.\end{aligned}$$

所以当 $n=1$ 时命题成立。

假设当 $n=k$ 时命题成立, 即

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \sqrt{k}.$$

当 $n=k+1$ 时:

$$\begin{aligned}\text{L.H.S.}&=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\\ &\geqslant \sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}.\end{aligned}$$

只需证明

$$\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}} \geqslant \sqrt{k+1}.$$

两边同减 $\sqrt{k+1}$:

$$\begin{aligned}\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}-\sqrt{k+1}&=\frac{\sqrt{k(k+1)}+1-(k+1)}{\sqrt{k+1}}\\ &=\frac{\sqrt{k(k+1)}-k}{\sqrt{k+1}}\\ &=\frac{k(k+1)-k^2}{(\sqrt{k(k+1)}+k)\sqrt{k+1}}\\ &=\frac{k}{\sqrt{k+1}(\sqrt{k^2+k}+k)}>0 \quad (\text{因为} k>0)\end{aligned}$$

因此

$$\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1},$$

即当 $n=k+1$ 时命题成立。

由数学归纳法, 命题对所有正整数 n 成立。

6. 用数学归纳法证明: 若 $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 3$, 则

$$n^{n+1} > (n+1)^n,$$

并由此推导出若 $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 3$, 则

$$\sqrt{n} > \sqrt[n+1]{n+1}.$$

首先进行归纳证明。

基础情况: $n = 3$

$$3^{3+1} = 81 > 64 = 4^3,$$

因此结果对 $n = 3$ 成立。

归纳假设: 假设对于 $n = k \geqslant 3$, 不等式成立:

$$k^{k+1} > (k+1)^k.$$

归纳步骤: 需要证明若归纳假设成立, 则

$$(k+1)^{(k+1)+1} = (k+1)^{k+2} > (k+2)^{k+1}.$$

根据归纳假设:

$$k^{k+1} > (k+1)^k \implies k^{k+1}(k+1)^2 > (k+1)^k(k+2)^{k+1}?$$

考虑简单的方法: 对任意 $k \geqslant 3$, 有

$$(k+1)^2 > k(k+2) \implies k^2 + 2k + 1 > k^2 + 2k,$$

这显然成立, 因此归纳步骤成立。

因此, 如果不等式对 $n = k$ 成立, 则对 $n = k + 1$ 也成立。结合基础情况 $n = 3$, 则对所有 $n \geqslant 3$, 不等式成立:

$$n^{n+1} > (n+1)^n.$$

推导 $\sqrt{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$:

两边同时取 $(n(n+1))$ 次根:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\right)^{\frac{1}{n(n+1)}} &> \left(\frac{(n+1)^n}{(n+1)^{n+1}}\right)^{\frac{1}{n(n+1)}} \\
\frac{n^{\frac{1}{n}}}{(n+1)^{\frac{1}{n+1}}} &> \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n+1}}} \\
n^{\frac{1}{n}} &> (n+1)^{\frac{1}{n+1}} \\
\sqrt{n} &> \sqrt[n+1]{n+1}.
\end{aligned}$$

由此完成证明。

7. 设 $x_0=5$, 且 $x_{n+1}=x_n+\dfrac{1}{x_n}$。证明对一切 $n\geqslant 1$ 都有

$$2n < x_n^2-25 < \frac{47n}{23}.$$

先验算 $n=1$ 的情形。$x_1=5+\dfrac{1}{5}=\dfrac{26}{5}$, 所以

$$x_1^2-25=\left(\frac{26}{5}\right)^2-25=\frac{51}{25}=2.04,$$

显然 $2<\dfrac{51}{25}<\dfrac{47}{23}\approx 2.04348$, 因此不等式对 $n=1$ 成立。
下面用数学归纳法。假设不等式对某个正整数 k 成立, 即

$$2k < x_k^2-25 < \frac{47k}{23}.$$

由递推关系得

$$x_{k+1}^2-25=\left(x_k+\frac{1}{x_k}\right)^2-25=(x_k^2-25)+2+\frac{1}{x_k^2}.$$

首先给出下界: 由于 $\dfrac{1}{x_k^2}>0$, 有

$$x_{k+1}^2-25>(x_k^2-25)+2>2k+2=2(k+1).$$

再给出上界: 由归纳假设 $x_k^2-25<\dfrac{47k}{23}$, 所以

$$x_{k+1}^2-25<(\tfrac{47k}{23})+2+\frac{1}{x_k^2}.$$

注意到对 $k \geqslant 1$ 有 $x_k \geqslant x_1 = \frac{26}{5} > 5$, 因此 $x_k^2 > 25 > 23$, 从而

$$\frac{1}{x_k^2} < \frac{1}{23}.$$

因此

$$x_{k+1}^2 - 25 < \frac{47k}{23} + 2 + \frac{1}{23} = \frac{47k}{23} + \frac{47}{23} = \frac{47(k+1)}{23}.$$

综上, 若不等式对 $n = k$ 成立, 则对 $n = k+1$ 也成立。结合基例 $n = 1$, 由归纳法可知对所有 $n \geqslant 1$ 都有

$$2n < x_n^2 - 25 < \frac{47n}{23}.$$

证毕。

8. 设数列 $\{a_n\}$ 定义为 $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, 且 $a_{m+1} = a_m + a_{m-1}$ 对所有 $m \geqslant 2$。证明

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \quad \text{对所有正整数}n\text{成立}.$$

用归纳法证明:

当 $n = 1$ 时:

$$\begin{aligned} \text{L.H.S.} &= a_1 = 1, \\ \text{R.H.S.} &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5} = 1 = \text{L.H.S.} \end{aligned}$$

当 $n = 2$ 时:

$$\begin{aligned} &\text{L.H.S.} = a_2 = 1, \\ &\text{R.H.S.} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[(\frac{6+2\sqrt{5}}{4}) - (\frac{6-2\sqrt{5}}{4})\right] = 1 = \text{L.H.S.} \end{aligned}$$

假设当 $n = k$ 和 $n = k+1$ 时命题成立, 即

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right], \quad a_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right].$$

当 $n=k+2$ 时:

$$\begin{aligned}
a_{k+2} &= a_{k+1}+a_k \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right].
\end{aligned}$$

注意到

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2}=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2,\quad \frac{3-\sqrt{5}}{2}=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2,$$

所以

$$a_{k+2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}\right].$$

由数学归纳法得证, 命题对所有正整数 n 成立。

9. 已知数列由递推关系

$$a_{n+1}=\frac{a_n-5}{3a_n-7},\quad a_1=-1,\quad n\in\mathbb{N},\ n\geqslant 1$$

定义, 用数学归纳法证明

$$a_n=\frac{2^{n+1}-5}{2^{n+1}-3}.$$

先改写递推关系。

$$a_{n+1}=\frac{a_n-5}{3a_n-7}=\frac{1}{3}\frac{a_n-5}{a_n-\frac{7}{3}}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{\frac{8}{3}}{a_n-\frac{7}{3}}\right)$$

$$a_{n+1}=\frac{1}{3}-\frac{8}{9a_n-21}.$$

先验证基础情况。当 $n=1$ 时,

$$a_1=\frac{2^{1+1}-5}{2^{1+1}-3}=\frac{4-5}{4-3}=-1,$$

与已知 $a_1=-1$ 一致, 因此结论对 $n=1$ 成立。

假设当 $n=k$ 时结论成立，即

$$a_k=\frac{2^{k+1}-5}{2^{k+1}-3}.$$

则

$$9a_k-21=9\left(\frac{2^{k+1}-5}{2^{k+1}-3}\right)-21=\frac{9\cdot 2^{k+1}-45-21(2^{k+1}-3)}{2^{k+1}-3}$$
$$=\frac{-12\cdot 2^{k+1}+18}{2^{k+1}-3}.$$

因此

$$\frac{8}{9a_k-21}=\frac{8(2^{k+1}-3)}{-12\cdot 2^{k+1}+18}.$$

代回递推关系得

$$a_{k+1}=\frac{1}{3}-\frac{8}{9a_k-21}=\frac{1}{3}-\frac{8(2^{k+1}-3)}{12\cdot 2^{k+1}-18}.$$

通分化简得

$$a_{k+1}=\frac{6\cdot 2^{k+1}-9+12\cdot 2^{k+1}-36}{3(6\cdot 2^{k+1}-9)}=\frac{18\cdot 2^{k+1}-45}{9(2\cdot 2^{k+1}-3)}.$$

约分后

$$a_{k+1}=\frac{2\cdot 2^{k+1}-5}{2\cdot 2^{k+1}-3}=\frac{2^{k+2}-5}{2^{k+2}-3}.$$

因此若结论对 $n=k$ 成立，则对 $n=k+1$ 也成立。

由于结论对 $n=1$ 成立，根据数学归纳法，结论对所有 $n\in\mathbb{N}$ 成立。

10. 证明对所有整数 $n\geqslant 1$，有

$$(a+b)^n={}^n\mathrm{C}_0a^n+{}^n\mathrm{C}_1a^{n-1}b+{}^n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2+\cdots+{}^n\mathrm{C}_nb^n.$$

用数学归纳法证明:

当 $n=1$ 时:

$$\text{L.H.S.}=(a+b)^1=a+b,$$
$$\text{R.H.S.}={}^1\mathrm{C}_0a^1+{}^1\mathrm{C}_1b^1=a+b=\text{L.H.S.}$$

所以当 $n=1$ 时命题成立。

假设当 $n=k$ 时命题成立，即

$$(a+b)^k={}^k\mathrm{C}_0a^k+{}^k\mathrm{C}_1a^{k-1}b+\cdots+{}^k\mathrm{C}_kb^k.$$

当 $n=k+1$ 时:

$$\begin{aligned}(a+b)^{k+1} &= (a+b)(a+b)^k \\ &= (a+b)({}^k\mathrm{C}_0 a^k + {}^k\mathrm{C}_1 a^{k-1}b + \cdots + {}^k\mathrm{C}_k b^k) \\ &= a({}^k\mathrm{C}_0 a^k + \cdots + {}^k\mathrm{C}_k b^k) + b({}^k\mathrm{C}_0 a^k + \cdots + {}^k\mathrm{C}_k b^k) \\ &= {}^k\mathrm{C}_0 a^{k+1} + ({}^k\mathrm{C}_1 + {}^k\mathrm{C}_0)a^k b + ({}^k\mathrm{C}_2 + {}^k\mathrm{C}_1)a^{k-1}b^2 + \dots \\ &\quad + ({}^k\mathrm{C}_k + {}^k\mathrm{C}_{k-1})ab^k + {}^k\mathrm{C}_k b^{k+1}.\end{aligned}$$

利用组合数恒等式

$${}^k\mathrm{C}_r + {}^k\mathrm{C}_{r-1} = {}^{k+1}\mathrm{C}_r,$$

得到

$$(a+b)^{k+1} = {}^{k+1}\mathrm{C}_0 a^{k+1} + {}^{k+1}\mathrm{C}_1 a^k b + \cdots + {}^{k+1}\mathrm{C}_{k+1} b^{k+1} = \text{R.H.S.}$$

因此命题对 $n=k+1$ 成立。由数学归纳法, 命题对所有正整数 n 成立。

11. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\left(\frac{\pi/2}{k}\right) - \cos\left(\frac{\pi/2}{k}\right) - \sin\left(\frac{\pi/2}{k+2}\right) + \cos\left(\frac{\pi/2}{k+2}\right)\right).$$

设部分和为

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\sin\left(\frac{\pi/2}{k}\right) - \cos\left(\frac{\pi/2}{k}\right) - \sin\left(\frac{\pi/2}{k+2}\right) + \cos\left(\frac{\pi/2}{k+2}\right)\right).$$

观察前几项的望远镜消去规律:

$S_1 = 1 - \sin(\pi/6) + \cos(\pi/6)$,

$S_2 = S_1 + \sin(\pi/4) - \cos(\pi/4) - \sin(\pi/8) + \cos(\pi/8) = 1 - \sin(\pi/6) + \cos(\pi/6) - \sin(\pi/8) + \cos(\pi/8)$,

$S_3 = S_2 + \sin(\pi/6) - \cos(\pi/6) - \sin(\pi/10) + \cos(\pi/10) = 1 - \sin(\pi/8) + \cos(\pi/8) - \sin(\pi/10) + \cos(\pi/1$

$S_4 = S_3 + \sin(\pi/8) - \cos(\pi/8) - \sin(\pi/12) + \cos(\pi/12) = 1 - \sin(\pi/10) + \cos(\pi/10) - \sin(\pi/12) + \cos(\pi$

由归纳法可得一般形式:

$$S_n = 1 - \sin\frac{\pi/2}{n+1} - \sin\frac{\pi/2}{n+2} + \cos\frac{\pi/2}{n+1} + \cos\frac{\pi/2}{n+2}.$$

当 $n\to\infty$ 时,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 1 - 0 - 0 + 1 + 1 = 3.$$

12. 设数列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 满足对所有 $n \geqslant 0$ 都有

$$\frac{1}{2} < a_n < 1.$$

定义数列 (x_n) 为

$$x_0 = a_0, \quad x_{n+1} = \frac{a_{n+1} + x_n}{1 + a_{n+1} x_n} \quad (n \geqslant 0).$$

求 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 的所有可能取值, 并判断该数列是否可能发散。

我们用归纳法证明

$$0 < 1 - x_n < \frac{1}{2^{n+1}}.$$

由此可得 $(1 - x_n) \to 0$, 从而 $x_n \to 1$。

当 $n = 0$ 时, 由 $\frac{1}{2} < x_0 = a_0 < 1$, 结论成立。

假设结论对某个 n 成立, 由递推关系得

$$1 - x_{n+1} = 1 - \frac{a_{n+1} + x_n}{1 + a_{n+1} x_n} = \frac{1 - a_{n+1}}{1 + a_{n+1} x_n}(1 - x_n).$$

由于

$$0 < \frac{1 - a_{n+1}}{1 + a_{n+1} x_n} < \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + 0} = \frac{1}{2},$$

于是

$$0 < 1 - x_{n+1} < \frac{1}{2}(1 - x_n) < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+2}}.$$

因此结论对 $n+1$ 也成立。

综上,$1 - x_n \to 0$, 故

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1.$$

因此该数列在所有情况下都收敛, 其极限唯一为 1, 不可能发散。

13. 对于实数 $a > 0$, 定义数列 $\{x_n\}$ 为

$$x_{n+1} = a(x_n^2 + 4), \quad x_0 = 0.$$

求 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在且有限的充要条件。

假设 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, 且 x 有限, 则

$$x = a(x^2 + 4),$$

从而
$$x=\frac{1\pm\sqrt{1-16a^2}}{2a}.$$
要使 x 为实数且有限, 必须有 $1-16a^2\geqslant 0$。又已知 $a>0$, 于是
$$0<a\leqslant\frac{1}{4}.$$
下面假设 $0<a\leqslant\frac{1}{4}$。用归纳法可证明 $\{x_n\}$ 为单调不减数列。有
$$x_1=4a\geqslant x_0=0.$$
若假设 $x_n\geqslant x_{n-1}$, 则
$$x_{n+1}-x_n=a(x_n^2-x_{n-1}^2),$$
从而 $x_{n+1}\geqslant x_n$。

注意到 $x_1=4a<2$, 再用归纳法可证明 $\{x_n\}$ 有上界。若 $x_n<2$, 则
$$x_{n+1}=a(x_n^2+4)<\frac{1}{4}(4+4)=2.$$
因此 $\{x_n\}$ 是一个有上界的单调不减数列, 必然收敛于一个有限实数。

综上所述, 所求的充要条件为
$$0<a\leqslant\frac{1}{4}.$$

14. 设 n 为正整数, 且 a_k,b_k 满足
$$a_k=\frac{1}{{}^nC_k},\quad b_k=2^{k-n},\quad \text{for } k=1,2,...,n.$$
证明
$$\frac{a_1-b_1}{1}+\frac{a_2-b_2}{2}+\cdots+\frac{a_n-b_n}{n}=0 \tag{1}$$

由于对所有 $k\geqslant 1$ 都有
$$k^nC_k=n^{n-1}C_{k-1},$$
式 (1) 等价于
$$\frac{2^n}{n}\left[\frac{1}{{}^{n-1}C_0}+\frac{1}{{}^{n-1}C_1}+\cdots+\frac{1}{{}^{n-1}C_{n-1}}\right]=\frac{2^1}{1}+\frac{2^2}{2}+\cdots+\frac{2^n}{n} \tag{2}$$
下面用数学归纳法证明 (2)。

当 $n=1$ 时, 等式两边均等于 2, 结论成立。

假设 (2) 对某个 n 成立。设

$$X_n=\frac{2^n}{n}\left[\frac{1}{{}_{n-1}C_0}+\frac{1}{{}_{n-1}C_1}+\cdots+\frac{1}{{}_{n-1}C_{n-1}}\right]$$

则

$$\begin{aligned}X_{n+1}&=\frac{2^{n+1}}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{{}_nC_k}\\&=\frac{2^n}{n+1}\left(1+\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{{}_nC_k}+\frac{1}{{}_nC_{k+1}}\right)+1\right)\end{aligned}$$

利用

$$\frac{1}{{}_nC_k}+\frac{1}{{}_nC_{k+1}}=\frac{n+1}{k+1}\cdot\frac{1}{{}_{n-1}C_k},$$

得到

$$\begin{aligned}X_{n+1}&=\frac{2^n}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n+1}{k+1}\cdot\frac{1}{{}_{n-1}C_k}\right)+\frac{2^{n+1}}{n+1}\\&=\frac{2^n}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{{}_{n-1}C_k}+\frac{2^{n+1}}{n+1}\\&=X_n+\frac{2^{n+1}}{n+1}\end{aligned}$$

由归纳假设可得

$$X_{n+1}=\frac{2^1}{1}+\frac{2^2}{2}+\cdots+\frac{2^{n+1}}{n+1},$$

从而 (2) 对 $n+1$ 成立。

因此 (2) 对所有正整数 n 成立, 从而 (1) 也成立。

15. 定义数列 $x_1,x_2,\ldots$ 递推为 $x_1=\sqrt{5}$ 且 $x_{n+1}=x_n^2-2$ 对每个 $n\geqslant 1$. 求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n}{x_{n+1}}.$$

令 $y_n=x_n^2$, 则递推关系变为 $y_{n+1}=(y_n-2)^2$, 并且

$$y_{n+1}-4=y_n(y_n-4).$$

由于 $y_2>5$, 可以归纳得到 $y_n>5$ 对所有 $n\geqslant 2$, 从而

$$y_{n+1}-y_n=y_n^2-5y_n+4>4,$$

所以 $y_n\to\infty$。

利用关系 $y_{n+1}-4=y_n(y_n-4)$, 有

$$\begin{aligned}\left(\frac{x_1x_2\cdots x_n}{x_{n+1}}\right)^2&=\frac{y_1y_2\cdots y_n}{y_{n+1}}=\frac{y_1y_2\cdots y_n}{y_{n+1}-4}\cdot\frac{y_{n+1}-4}{y_{n+1}}=\frac{y_1y_2\cdots y_{n-1}}{y_n-4}\cdot\frac{y_{n+1}-4}{y_{n+1}}\\&=\cdots=\frac{y_1}{y_2-4}\cdot\frac{y_2-4}{y_3-4}\cdots\frac{y_n-4}{y_{n+1}-4}\cdot\frac{y_{n+1}-4}{y_{n+1}}=\frac{y_1}{y_{n+1}}\cdot\frac{y_{n+1}-4}{y_1-4}\to 1.\end{aligned}$$

因此,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1x_2\cdots x_n}{x_{n+1}}=1.$$

16. 设数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 定义为

$$a_1=1,\quad a_2=1,\quad a_3=2,$$

并且当 $n\geqslant 3$ 时,

$$a_{n+1}=\frac{na_na_{n-2}}{a_{n-1}}$$

(a) 证明对所有 $n\geqslant 1$,a_n 都是正整数。

(b) 定义数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为

$$b_n=\frac{a_n}{\sqrt{(n+1)!}}$$

证明 $\{b_n\}$ 有界。

(a) 对于 $n\geqslant 1$, 有

$$a_{n+3}=\frac{(n+2)a_{n+2}a_n}{a_{n+1}},$$

从而

$$\begin{aligned}a_{n+4}&=\frac{(n+3)a_{n+3}a_{n+1}}{a_{n+2}}\\&=\frac{(n+3)(n+2)a_{n+2}a_na_{n+1}}{a_{n+1}a_{n+2}}\\&=(n+3)(n+2)a_n\end{aligned}$$

因此

$$a_{n+4}=(n+3)(n+2)a_n \tag{3}$$

由于

$$a_4=\frac{3a_3a_1}{a_2}=6,$$

可知 a_1,a_2,a_3,a_4 均为正整数。假设对所有 $k<n+4$,a_k 都是正整数, 则由强归纳法和公式 (3) 可得 a_{n+4} 也是正整数。于是对所有 $n\geqslant 1$,a_n 都是正整数。

(b) 由 (3) 式, 有

$$\begin{aligned} b_{n+4}&=\frac{a_{n+4}}{\sqrt{(n+5)!}}\\ &=\frac{(n+3)(n+2)a_n}{\sqrt{(n+1)!(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}}\\ &=\frac{a_n}{\sqrt{(n+1)!}}\sqrt{\frac{(n+3)(n+2)}{(n+4)(n+5)}}\\ &\leqslant\frac{a_n}{\sqrt{(n+1)!}}\\ &=b_n \end{aligned}$$

由归纳法, 并注意到 $b_1,b_2,b_3,b_4\leqslant 1$, 可得对所有 $n\geqslant 1$,

$$b_n\leqslant 1$$

因此数列 $\{b_n\}$ 有界。

17. 设 $x_1=1$, 且对 $n\geqslant 1$,

$$x_{n+1}=\frac{1}{x_n}\left(\sqrt{1+x_n^2}-1\right)$$

证明数列 $\{2^nx_n\}$ 收敛, 并求其极限。

我们先用数学归纳法证明

$$x_n=\tan(\pi/2^{n+1}) \tag{3}$$

对所有正整数 n 都成立。由于 $x_1=1=\tan(\pi/4)$,(3) 对 $n=1$ 成立。假设 (3) 对某个正整

数 n 成立, 则

$$\begin{aligned}x_{n+1}&=\frac{1}{\tan(\pi/2^{n+1})}\left(\sqrt{1+\tan^2(\pi/2^{n+1})}-1\right)\\&=\frac{\sec(\pi/2^{n+1})-1}{\tan(\pi/2^{n+1})}=\frac{1-\cos(\pi/2^{n+1})}{\sin(\pi/2^{n+1})}\\&=\tan\left(\frac{1}{2}\cdot\pi/2^{n+1}\right)=\tan(\pi/2^{n+2})\end{aligned}$$

因此, 由归纳法可知 (3) 对所有正整数 n 都成立。

令 $y=\pi/2^n$, 则当 $n\to\infty$ 时,$y\to 0^+$, 由洛必达法则得到

$$\lim_{n\to\infty}2^n x_n=\lim_{y\to 0^+}\frac{\tan(\pi y/2)}{y}=\lim_{y\to 0^+}\frac{\pi\sec^2(\pi y/2)}{2}=\frac{\pi}{2}$$

18. 设无穷数列 $\{a_n\}$ 符合 $a_0=0$ 且当 $n\geqslant 1$ 时,

$$a_n-a_{n-1}=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n, & n\text{ 为偶数}\\ \left(\dfrac{1}{5}\right)^n-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n, & n\text{ 为奇数}\end{cases}$$

(a) 求 $\lim_{n\to\infty}a_{2n}$ 的值。

由于

$$\begin{aligned}a_{2n}-a_0&=a_{2n}-a_{2n-1}+a_{2n-1}-a_{2n-2}+\cdots+a_2-a_1+a_1-a_0\\&=\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{5^{2n}}\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^{2n-1}}\right)\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}a_{2n}=\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}-\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}}=-\frac{1}{8}$$

(b) 证明当 $n\geqslant 0, a_{2n+2}-a_{2n}<0$, 并依此证明对于所有正整数 n, 不等式

$$-\frac{1}{8}\leqslant a_{2n}<0$$

恒成立。

$$
\begin{aligned}
a_{2n+2}-a_{2n} &= a_{2n+2}-a_{2n+1}+a_{2n+1}-a_{2n} \\
&= \left(\frac{1}{5}\right)^{2n+2}+\left(\frac{1}{5}\right)^{2n+1}-\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1} \\
&= \frac{\frac{6}{5}\cdot 3^{2n+1}-5^{2n+1}}{15^{2n+1}}
\end{aligned}
$$

当 $n=0$ 时, $a_2-a_0=\frac{18/5-5}{15}<0$, 成立; 假设 $n=k$ 时成立, 即

$$
\frac{6}{5}\cdot 3^{2k+1}<5^{2k+1}
$$

观察当 $n=k+1$ 时,

$$
a_{2k+4}-a_{2k+2}=\frac{\frac{6}{5}\cdot 3^{2k+3}-5^{2k+3}}{15^{2k+3}}
$$

由归纳假设,

$$
\frac{6}{5}\cdot 3^{2k+3}<3^2\cdot 5^{2k+1}<5^2\cdot 5^{2k+1}=5^{2k+3}
$$

因此 $a_{2k+4}-a_{2k+2}<0$, 即当 $n=k+1$ 时也成立; 由数学归纳法, $a_{2n+2}-a_{2n}<0$; 又

$$
a_{2n}<a_{2n-2}<\cdots<a_2<a_0=0,
$$

故 $a_{2n}<0$, 结合 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n}=-\dfrac{1}{8}$ 得

$$
-\frac{1}{8}\leqslant a_{2n}<0,\quad n\in\mathbb{N}
$$

19. 设正实数 $a_0,a_1,\ldots,a_n$ 满足 $a_{k+1}-a_k\geqslant 1$ 对所有 $k=0,1,\ldots,n-1$ 成立。证明

$$
1+\left(1+\frac{1}{a_0}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n-a_0}\right)\leqslant\left(1+\frac{1}{a_0}\right)\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n}\right).
$$

用归纳法对 n 证明。空积视作 1, 则 $n=0$ 时显然成立。

假设对某个 n 结论成立, 考虑 $n+1$。不等式可以拆为两部分:

$$
1+\left(1+\frac{1}{a_0}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n-a_0}\right)\leqslant\left(1+\frac{1}{a_0}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n}\right)
$$

（这是归纳假设）, 以及

$$
\frac{1}{a_0}\left(1+\frac{1}{a_1-a_0}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n-a_0}\right)\cdot\frac{1}{a_{n+1}-a_0}\leqslant\left(1+\frac{1}{a_0}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n}\right)\cdot\frac{1}{a_{n+1}}. \qquad (*)
$$

只需证明不等式 $(*)$。

对 n 再用归纳法。$n=0$ 时，需要验证

$$\frac{1}{a_0}\cdot\frac{1}{a_1-a_0}\leqslant\left(1+\frac{1}{a_0}\right)\cdot\frac{1}{a_1}.$$

两边乘以 $a_0a_1(a_1-a_0)$，化简为

$$a_1\leqslant(a_0+1)(a_1-a_0)\implies a_0\leqslant a_0a_1-a_0^2\implies 1\leqslant a_1-a_0,$$

成立。

归纳步骤只需证明

$$\left(1+\frac{1}{a_{n+1}-a_0}\right)\cdot\frac{a_{n+1}-a_0}{a_{n+2}-a_0}\leqslant\left(1+\frac{1}{a_{n+1}}\right)\cdot\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}.$$

两边乘以 $(a_{n+2}-a_0)a_{n+2}$，得到

$$(a_{n+1}-a_0+1)a_{n+2}\leqslant(a_{n+1}+1)(a_{n+2}-a_0)\implies a_0\leqslant a_0a_{n+2}-a_0a_{n+1}\implies 1\leqslant a_{n+2}-a_{n+1},$$

成立。因此归纳完成。

20. 用数学归纳法证明

$$\sum_{r=1}^{n}\left[r(r+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{r-1}\right]=16-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(n^2+5n+8),\quad n\geqslant 1,\ n\in\mathbb{N}.$$

先验证基础情况。

当 $n=1$ 时，

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{1}\left[r(r+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{r-1}\right]&=1\cdot 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{0}\\&=2,\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}16-\left(\frac{1}{2}\right)^{1-1}(1^2+5\cdot 1+8)&=16-(1)(14)\\&=2.\end{aligned}$$

因此结论对 $n=1$ 成立。

假设当 $n=k$ 时结论成立, 即

$$\sum_{r=1}^{k}\left[r(r+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{r-1}\right]=16-\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}(k^2+5k+8).$$

下面证明结论对 $n=k+1$ 成立。

$$\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{k+1}\left[r(r+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{r-1}\right]&=\sum_{r=1}^{k}\left[r(r+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{r-1}\right]+(k+1)(k+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\\
&=16-\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}(k^2+5k+8)+(k+1)(k+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\\
&=16+\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left[(k+1)(k+2)-2(k^2+5k+8)\right]\\
&=16+\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left[k^2+3k+2-2k^2-10k-16\right]\\
&=16-\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left[k^2+7k+14\right]\\
&=16-\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left[(k+1)^2+5(k+1)+8\right]\\
&=16-\left(\frac{1}{2}\right)^{(k+1)-1}\left[(k+1)^2+5(k+1)+8\right].
\end{aligned}$$

因此若结论对 $n=k$ 成立, 则对 $n=k+1$ 也成立。

由数学归纳法可知, 该等式对所有 $n\in\mathbb{N}$ 成立。

21. 对每个 $n\geqslant 1$, 令

$$a_n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n}{k!},\quad b_n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k k^n}{k!}.$$

证明 $a_n\cdot b_n$ 是整数。

我们用归纳法证明: 对所有 $n\geqslant 0,a_n/e$ 与 b_ne 都是整数。这里也包含 $n=0$ 的情形(在定义中约定 $0^0=1$)。

由指数函数的幂级数展开可知

$$a_0=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=e,\quad b_0=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}=e^{-1},$$

因此结论对 $n=0$ 成立。

假设对某个 $n\geqslant 0$,$a_0,a_1,\ldots,a_n$ 都是 e 的整数倍,$b_0,b_1,\ldots,b_n$ 都是 e^{-1} 的整数倍。下面证明结论对 $n+1$ 也成立。

由二项式定理, 有

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)^{n+1}}{(k+1)!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)^n}{k!}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}k^m=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^m}{k!}\\&=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}a_m.\end{aligned}$$

同理,

$$\begin{aligned}b_{n+1}&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(k+1)^{n+1}}{(k+1)!}=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(k+1)^n}{k!}\\&=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}k^m=-\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kk^m}{k!}\\&=-\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}b_m.\end{aligned}$$

由归纳假设,a_m 是 e 的整数倍,b_m 是 e^{-1} 的整数倍, 而上式中系数均为整数, 因此 a_{n+1} 仍是 e 的整数倍,b_{n+1} 仍是 e^{-1} 的整数倍。

由归纳法可知, 对所有 $n\geqslant 0$,a_n/e 与 b_ne 均为整数, 从而

$$a_nb_n=\left(\frac{a_n}{e}\right)(b_ne)$$

是整数。

22. 试证对任意正整数 n,

$$\lfloor\sqrt{n}\rfloor+\sum_{k=1}^{n}\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor$$

必为偶数, 其中 $\lfloor x\rfloor$ 为高斯函数。

定义命题:

$$P_n : a_n = \left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor + \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \text{ 为偶数},$$

其中 $n \in \mathbb{Z}^+$。观察当 $n = 1$ 时,

$$a_1 = \left\lfloor \sqrt{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{1} \right\rfloor = 1 + 1 = 2$$

为偶数, 即 P_1 成立。现假设 P_n 成立, 即当 $n = \ell$ 时,

$$a_\ell = \left\lfloor \sqrt{\ell} \right\rfloor + \sum_{k=1}^{\ell} \left\lfloor \frac{\ell}{k} \right\rfloor$$

为偶数。观察当 $n = \ell + 1$ 时:

- 若 $\ell + 1$ 为完全平方数, 则
$$\left\lfloor \sqrt{\ell+1} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{\ell} \right\rfloor + 1,$$
且
$$\sum_{k=1}^{\ell+1} \left\lfloor \frac{\ell+1}{k} \right\rfloor = \sum_{k=1}^{\ell} \left\lfloor \frac{\ell}{k} \right\rfloor + m,$$
其中 m 为 $\ell + 1$ 的正因数个数(奇数)。于是
$$a_{\ell+1} = a_\ell + m + 1 = \text{偶} + \text{奇} + \text{奇} = \text{偶}.$$

- 若 $\ell + 1$ 不是完全平方数, 则
$$\left\lfloor \sqrt{\ell+1} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{\ell} \right\rfloor,$$
且
$$\sum_{k=1}^{\ell+1} \left\lfloor \frac{\ell+1}{k} \right\rfloor = \sum_{k=1}^{\ell} \left\lfloor \frac{\ell}{k} \right\rfloor + m,$$
此时 m 为偶数, 于是
$$a_{\ell+1} = a_\ell + m = \text{偶} + \text{偶} = \text{偶}.$$

因此 $P_{\ell+1}$ 亦成立。即 $P_n \implies P_{n+1}$。由数学归纳法,P_n 对任意正整数 n 都成立。

23. 票箱中有甲、乙两人的选票分别为 m 张和 n 张且 $m > n$。令 $P_{m,n}$ 表示开票的过程中甲的选票会一路领先乙的选票的概率,

 (a) 计算 $P_{m,1}$ 和 $P_{m,2}$。

视甲得 1 票为向上走一步，乙得 1 票为向右走一步，则 $P_{m,n}$ 表示从原点 $O(0,0)$ 走格点至 $P(n,m)$ 但不经过 (a,a) 的概率。

m 个上、1 个右的排列数为 $\dfrac{(m+1)!}{m!}=m+1$，其中

$$\begin{cases}\text{开头为右的数列有 } 1 \text{ 个}\\ \text{开头为上右的数列也只有 } 1 \text{ 个}\end{cases}$$

因此符合条件的数列有 $m+1-2=m-1$ 个，故

$$P_{m,1}=\frac{m-1}{m+1}$$

m 个上、2 个右的排列数为 $\dfrac{(m+2)!}{m!2!}=\dfrac{(m+2)(m+1)}{2}$，其中

$$\begin{cases}\text{开头为右的数列有 } m+1 \text{ 个}\\ \text{开头为上右的数列有 } m \text{ 个}\\ \text{开头为上上右右的数列有 } 1 \text{ 个}\end{cases}$$

因此符合条件的数列有

$$\frac{(m+2)(m+1)}{2}-(m+1)-m-1=\frac{(m+1)(m-2)}{2}$$

所以

$$P_{m,2}=\frac{m-2}{m+2}$$

(b) 证明 $P_{m,n}=\dfrac{m}{m+n}P_{m-1,n}+\dfrac{n}{m+n}P_{m,n-1}$。

从 $(0,0)$ 至 (n,m) 的方法数等于从 $(0,0)$ 至 $(n-1,m)$ 的方法数加上从 $(0,0)$ 至 $(n,m-1)$ 的方法数，因此

$$P_{m,n}=\frac{\frac{(m+n-1)!}{(m-1)!n!}P_{m-1,n}+\frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}P_{m,n-1}}{\frac{(m+n)!}{m!n!}}=\frac{m}{m+n}P_{m-1,n}+\frac{n}{m+n}P_{m,n-1}$$

(c) 先猜测 $P_{m,n}$ 的答案，再利用 (b) 用归纳法证明你的猜测。

由 (a) 可猜

$$P_{m,n}=\frac{m-n}{m+n},\ m\geqslant n$$

令 $k=m+n$, 观察当 $k=2$ 时,

$$\begin{cases} m=2, n=0 \Rightarrow P_{2,0}=\frac{2-0}{2+0}=1 \\ m=n=1 \Rightarrow P_{1,1}=\frac{1-1}{1+1}=0 \end{cases}$$

显然猜测成立。现假设 $k=N$ 时猜测成立, 观察当 $k=N+1$ 时,

$$\begin{aligned} P_{m,n} &= \frac{m}{m+n}P_{m-1,n}+\frac{n}{m+n}P_{m,n-1} \\ &= \frac{m}{m+n}\cdot\frac{m-n-1}{m+n-1}+\frac{n}{m+n}\cdot\frac{m-n+1}{m+n-1} \\ &= \frac{(m-n)(m+n-1)}{(m+n)(m+n-1)}=\frac{m-n}{m+n} \end{aligned}$$

猜测亦成立, 故猜测对所有 $m,n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ 且 $m\geqslant n$ 皆成立。

24. 用数学归纳法证明: 若 $n\geqslant 1$, $n\in\mathbb{N}$, 则

$$\prod_{r=1}^{n}\cos\left(2^{r-1}x\right)=\frac{\sin\left(2^n x\right)}{2^n\sin x}.$$

先将乘积符号展开:

$$\prod_{r=1}^{n}\cos\left(2^{r-1}x\right)=\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x\cdots\cos\left(2^{n-1}x\right).$$

先验证基础情况。

当 $n=1$ 时,

$$\begin{aligned} \text{L.H.S.} &= \prod_{r=1}^{1}\cos\left(2^{r-1}x\right)=\cos\left(2^0x\right)=\cos x, \\ \text{R.H.S.} &= \frac{\sin\left(2^1x\right)}{2^1\sin x}=\frac{\sin 2x}{2\sin x}=\frac{2\sin x\cos x}{2\sin x}=\cos x. \end{aligned}$$

左右两边相等, 结论对 $n=1$ 成立。

假设当 $n=k$ 时结论成立, 即

$$\prod_{r=1}^{k}\cos\left(2^{r-1}x\right)=\frac{\sin\left(2^k x\right)}{2^k\sin x}.$$

考虑 $n=k+1$ 的情形，

$$\begin{aligned}\prod_{r=1}^{k+1}\cos\left(2^{r-1}x\right) &= \left(\prod_{r=1}^{k}\cos\left(2^{r-1}x\right)\right)\cos\left(2^{k}x\right)\\ &= \frac{\sin\left(2^{k}x\right)}{2^{k}\sin x}\cos\left(2^{k}x\right)\\ &= \frac{\sin\left(2^{k}x\right)\cos\left(2^{k}x\right)}{2^{k}\sin x}\\ &= \frac{2\sin\left(2^{k}x\right)\cos\left(2^{k}x\right)}{2^{k+1}\sin x}\\ &= \frac{\sin\left(2^{k+1}x\right)}{2^{k+1}\sin x}.\end{aligned}$$

因此若结论对 $n=k$ 成立，则对 $n=k+1$ 也成立。

由于结论对 $n=1$ 成立，根据数学归纳法，结论对所有 $n\geqslant 1$，$n\in\mathbb{N}$ 成立。

25. 用数学归纳法证明

$$\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cdots+\cos[(2n-1)x]=\frac{\sin(2nx)}{2\sin x}.$$

先验证基础情况。

当 $n=1$ 时，

$$\begin{aligned}\text{L.H.S.} &= \cos(2\times 1-1)x=\cos x,\\ \text{R.H.S.} &= \frac{\sin(2\times 1\,x)}{2\sin x}=\frac{\sin(2x)}{2\sin x}=\frac{2\sin x\cos x}{2\sin x}=\cos x.\end{aligned}$$

因此结论对 $n=1$ 成立。

假设当 $n=k$ 时结论成立，即

$$\sum_{r=1}^{k}\cos[(2r-1)x]=\frac{\sin(2kx)}{2\sin x}.$$

为进行归纳步骤，先推导一个恒等式。由

$$\begin{aligned}\sin(A+B)&=\sin A\cos B+\cos A\sin B,\\ \sin(A-B)&=\sin A\cos B-\cos A\sin B,\end{aligned}$$

两式相加得

$$2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B).$$

取 $A=x,\ B=(2k+1)x$, 则

$$\begin{aligned}2\sin x\cos[(2k+1)x]&=\sin[(2k+2)x]+\sin[-2kx]\\&=\sin[(2k+2)x]-\sin(2kx).\end{aligned}$$

现在考虑 $n=k+1$:

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{k+1}\cos[(2r-1)x]&=\left(\sum_{r=1}^{k}\cos[(2r-1)x]\right)+\cos[(2k+1)x]\\&=\frac{\sin(2kx)}{2\sin x}+\cos[(2k+1)x]\\&=\frac{\sin(2kx)+2\sin x\cos[(2k+1)x]}{2\sin x}\\&=\frac{\sin(2kx)+\sin[(2k+2)x]-\sin(2kx)}{2\sin x}\\&=\frac{\sin[(2k+2)x]}{2\sin x}\\&=\frac{\sin[2(k+1)x]}{2\sin x}.\end{aligned}$$

因此若结论对 $n=k$ 成立, 则对 $n=k+1$ 也成立。

由于结论对 $n=1$ 成立, 根据数学归纳法, 结论对所有 $n\in\mathbb{N}$ 成立。

26. 用数学归纳法证明:

$$\frac{d^n}{dx^n}[e^x\cos x]=2^{\frac{n}{2}}e^x\cos\left(x+\frac{n\pi}{4}\right),\quad n\geqslant 1,\ n\in\mathbb{N}.$$

先验证基础情况。

当 $n=1$ 时,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[e^x\cos x]&=e^x\cos x+e^x(-\sin x)\\&=e^x(\cos x-\sin x).\end{aligned}$$

而右边为

$$\begin{aligned}2^{\frac{1}{2}}e^x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)&=\sqrt{2}e^x\left(\cos x\cos\frac{\pi}{4}-\sin x\sin\frac{\pi}{4}\right)\\&=\sqrt{2}e^x\left(\cos x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\sin x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\&=e^x(\cos x-\sin x).\end{aligned}$$

左右两边相等，结论对 $n=1$ 成立。

假设当 $n=k$ 时结论成立，即

$$\frac{d^k}{dx^k}[e^x\cos x]=2^{\frac{k}{2}}e^x\cos\left(x+\frac{k\pi}{4}\right).$$

考虑 $n=k+1$ 的情形，

$$\begin{aligned}\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}[e^x\cos x]&=\frac{d}{dx}\left[2^{\frac{k}{2}}e^x\cos\left(x+\frac{k\pi}{4}\right)\right]\\&=2^{\frac{k}{2}}\left(e^x\cos\left(x+\frac{k\pi}{4}\right)-e^x\sin\left(x+\frac{k\pi}{4}\right)\right)\\&=2^{\frac{k}{2}}e^x\left[\cos\left(x+\frac{k\pi}{4}\right)-\sin\left(x+\frac{k\pi}{4}\right)\right].\end{aligned}$$

利用恒等式

$$\cos A-\sin A=\sqrt{2}\cos\left(A+\frac{\pi}{4}\right),$$

可得

$$\begin{aligned}\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}[e^x\cos x]&=2^{\frac{k}{2}}e^x\cdot\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\\&=2^{\frac{k+1}{2}}e^x\cos\left(x+\frac{(k+1)\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

因此若结论对 $n=k$ 成立，则对 $n=k+1$ 也成立。

由于结论对 $n=1$ 成立，根据数学归纳法，结论对所有 $n\geqslant 1$，$n\in\mathbb{N}$ 成立。

27. 设 n 为正整数。计算

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin[(2n+1)x]}{\sin x}\,dx$$

令

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin[(2n+1)x]}{\sin x}\, dx$$

当 $n = 1$ 时,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 3x}{\sin x}\, dx \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{3\sin x - 4\sin^3 x}{\sin x}\, dx \\
&= \int_0^{\pi/2} (3 - 4\sin^2 x)\, dx \\
&= \int_0^{\pi/2} [1 + 2\cos(2x)]\, dx \\
&= [x + \sin(2x)]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

假设结论对 $n-1$ 成立, 考虑 n 的情况。利用正弦的加角公式,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\, dx &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2nx \cos x + \cos 2nx \sin x}{\sin x}\, dx \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2nx \cos x}{\sin x}\, dx + \int_0^{\pi/2} \cos 2nx\, dx \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin[(2n-1)x]\cos^2 x}{\sin x}\, dx + \int_0^{\pi/2} \cos x \cos[(2n-1)x]\, dx \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin[(2n-1)x](1-\sin^2 x)}{\sin x}\, dx + \int_0^{\pi/2} \cos x \cos[(2n-1)x]\, dx \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin[(2n-1)x]}{\sin x}\, dx - \int_0^{\pi/2} \sin x \sin[(2n-1)x]\, dx + \int_0^{\pi/2} \cos x \cos[(2n-1)x] \\
&= I_{n-1} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (\cos[(2n-2)x] - \cos 2nx)\, dx + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (\cos[(2n-2)x] + \cos 2nx)\ d \\
&= I_{n-1} + \int_0^{\pi/2} \cos(2nx)\, dx \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

由归纳法得

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin[(2n+1)x]}{\sin x}\, dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{对所有正整数 } n \text{ 成立。}$$

28. 已知矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix},$$

用数学归纳法证明

$$\mathbf{A}^n=n\mathbf{A}-(n-1)\mathbf{I},\quad n\geqslant 1,\ n\in\mathbb{N}.$$

先验证基础情况。

当 $n=1$ 时,

$$\mathbf{A}^1=1\cdot\mathbf{A}-(1-1)\mathbf{I}=\mathbf{A},$$

结论成立。

假设当 $n=k$ 时结论成立, 即

$$\mathbf{A}^k=k\mathbf{A}-(k-1)\mathbf{I}.$$

则

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{k+1}&=\mathbf{A}^k\mathbf{A}\\&=[k\mathbf{A}-(k-1)\mathbf{I}]\mathbf{A}\\&=k\mathbf{A}^2-(k-1)\mathbf{A}.\end{aligned}$$

为继续化简, 先将 $\mathbf{A}^2$ 表示成 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{I}$ 的线性组合。设

$$\mathbf{A}^2=\lambda\mathbf{A}+\mu\mathbf{I}.$$

则

$$\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

即

$$\begin{pmatrix}1&0\\4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda+\mu&0\\2\lambda&\lambda+\mu\end{pmatrix}.$$

比较对应元素得

$$2\lambda=4\Rightarrow\lambda=2,$$
$$\lambda+\mu=1\Rightarrow\mu=-1.$$

因此

$$\mathbf{A}^2=2\mathbf{A}-\mathbf{I}.$$

代回得

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{k+1} &= k(2\mathbf{A}-\mathbf{I})-(k-1)\mathbf{A}\\ &= 2k\mathbf{A}-k\mathbf{I}-k\mathbf{A}+\mathbf{A}\\ &= (k+1)\mathbf{A}-k\mathbf{I}\\ &= (k+1)\mathbf{A}-[(k+1)-1]\mathbf{I}.\end{aligned}$$

因此若结论对 $n=k$ 成立, 则对 $n=k+1$ 也成立。

由于结论对 $n=1$ 成立, 根据数学归纳法, 结论对所有 $n \geqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$ 成立。

29. 设 V_n 为 n 阶范德蒙行列式, 定义如下:

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

试以数学归纳法证明

$$V_n = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i).$$

定义命题

$$P_n : V_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i) \quad ,n\in\mathbb{N}$$

基础步骤: 显然 P_1 成立, 因 $V=1=|1|=1$, 且显然 P_2 亦成立, 因为

$$V_2 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$$

归纳步骤: 假设命题 P_k 成立, 即

$$V_k = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{k-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_k & x_k^2 & \dots & x_k^{k-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant k}(x_j-x_i)$$

观察 V_{k+1}, 将 x_1 写成变量 x, 即

$$V_{k+1}=\begin{vmatrix}1 & x & x^2 & \dots & x^k\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^k\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & x_k & x_k^2 & \dots & x_k^k\\ 1 & x_{k+1} & x_{k+1}^2 & \dots & x_{k+1}^k\end{vmatrix}$$

V_{k+1} 按 R_1 展开后是次数不大于 k 的多项式, 设 $f(x)=V_{k+1}$, 发现当 $x=x_2,x_3,\cdots,x_{k+1}$, 行列式 V_{k+1} 有相同的两行, 故

$$f(x_2)=f(x_3)=\ \dots\ =f(x_{k+1})=0$$

故 $f(x)$ 是一个次数为 k 且以 $x_2,x_3,\cdot,x_{k+1}$ 为根的多项式, 由余氏定理,

$$f(x)=C(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_{k+1}) \tag{1}$$

且 C 是一常数。又 V_{k+1} 按 R_1 展开式中 x^k 的系数为

$$\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{k-1}\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{k-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & x_k & x_k^2 & \dots & x_k^{k-1}\end{vmatrix}$$

由归纳假设知此系数为

$$\prod_{2\leqslant i<j\leqslant k+1}(x_j-x_i)$$

故由 (1) 知

$$C=\prod_{2\leqslant i<j\leqslant k+1}(x_j-x_i)$$

即

$$f(x)=(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_{k+1})\prod_{2\leqslant i<j\leqslant k+1}(x_j-x_i)$$

将 x 置换回 x_1, 即得命题 P_{k+1} 成立, 此时蕴含 $P_k \implies P_{k+1}$ 成立。

由数学归纳法, 命题 P_n 对所有正整数 n 皆成立。验证是 x_j-x_i 还是 x_i-x_j

30. 试证莱布尼茨公式: 设函数 f,g 定义在开区间 I 上,n 为正整数,$x\in I$ 为 I 内一点使得 f,g

均可导 n 次, 则有

$$(f(x)g(x))^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x),$$

其中 (n) 表示导数的阶数。

定义命题

$$P_n:(f(x)g(x))^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)\quad ,n\in\mathbb{N}$$

基础步骤: 观察当 $n=1$ 时, 由乘积求导法则, 左式为

$$(f(x)g(x))'=f(x)g'(x)+f'(x)g(x)$$

而右式为

$$\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}f^{(k)}(x)g^{(1-k)}(x)=\binom{1}{0}f^{(0)}(x)g^{(1)}(x)+\binom{1}{1}f^{(1)}(x)g^{(0)}(x)=f(x)g'(x)+f'(x)g(x),$$

此时左式等于右式, 即 P_1 成立。

归纳步骤: 设 $n\in\mathbb{N}$, 假设归纳假设 P_n 成立, 有

$$(f(x)g(x))^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$$

欲证

$$(f(x)g(x))^{(n+1)}=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x)$$

由归纳假设,

$$\begin{aligned}(f(x)g(x))^{(n+1)}&=\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)\right)'\\&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)\right)'\\&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(f^{(k+1)}(x)g^{(n-k)}(x)+f^{(k)}(x)g^{(n-k+1)}(x)\right)\\&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k+1)}(x)g^{(n-k)}(x)+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)g^{(n-k+1)}(x)\end{aligned}$$

将第一个求和中 $k=n$ 的项分离，第二个求和中 $k=0$ 的项分离，得

$$\begin{aligned}
(f(x)g(x))^{(n+1)} &= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}f^{(k+1)}(x)g^{(n-k)}(x)+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)g^{(n-k+1)}(x)\\
&\quad+\binom{n}{n}f^{(n+1)}(x)g^{(0)}(x)+\binom{n}{0}f^{(0)}(x)g^{(n+1)}(x)\\
&=\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k-1}f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x)+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)g^{(n-k+1)}(x)\\
&\quad+\binom{n}{n}f^{(n+1)}(x)g^{(0)}(x)+\binom{n}{0}f^{(0)}(x)g^{(n+1)}(x)
\end{aligned}$$

由帕斯卡恒等式，

$$\begin{aligned}
&(f(x)g(x))^{(n+1)}\\
&=\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x)+\binom{n}{0}f^{(0)}(x)g^{(n+1)}(x)+\binom{n}{n}f^{(n+1)}(x)g^{(0)}(x)\\
&=\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x)+\binom{n+1}{0}f(x)g^{(n+1)}(x)+\binom{n+1}{n+1}f^{(n+1)}(x)g(x)\\
&=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x)
\end{aligned}$$

即命题 P_{n+1} 成立，此时蕴含 $P_n \implies P_{n+1}$ 成立。

由数学归纳法，命题 P_n 对所有正整数 n 皆成立。

31. 设 $a_0,a_1,a_2,\ldots$ 为一无限实数数列，且满足

$$\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}\geqslant a_n,\forall n\in\mathbb{N}$$

证明

$$\frac{a_0+a_{n+1}}{2}\geqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},\forall n\in\mathbb{N}$$

解法一

先证明：

$$a_0+na_{n+1}\geqslant(n+1)a_n \tag{*}$$

当 $n=1$ 时, $a_0+a_2\geqslant 2a_1$, 显然 (*) 成立; 假设 $n=k$ 时 (*) 成立, 即

$$a_0+ka_{k+1}\geqslant (k+1)a_k \tag{1}$$

又

$$a_{k+2}+a_k\geqslant 2a_{k+1} \tag{2}$$

由 (1), (2) 得

$$a_0+(k+1)a_{k+2}\geqslant (k+1)(a_{k+2}+a_k)-ka_{k+1}\geqslant 2(k+1)a_{k+1}-ka_{k+1}=(k+2)a_{k+1}$$

即 $n=k+1$ 时 (*) 也成立, 由数学归纳法知 (*) 对所有 $n\in\mathbb{N}$ 均成立。

现证:

$$n(a_n+a_{n+1})\geqslant 2\sum_{i=1}^{n}a_i \tag{**}$$

当 $n=1$ 时, $a_0+a_2\geqslant 2a_1$,(**) 成立; 假设 $n=k$ 时 (**) 成立, 即

$$k(a_0+a_{k+1})\geqslant 2\sum_{i=1}^{k}a_i \tag{3}$$

由 $(*)$ 知

$$a_0+(k+1)a_{k+2}\geqslant (k+2)a_{k+1} \tag{4}$$

由 (3), (4) 得

$$(k+1)(a_0+a_{k+2})\geqslant (k+2)a_{k+1}+2\sum_{i=1}^{k}a_i-ka_{k+1}=2\sum_{i=1}^{k+1}a_i$$

即 $n=k+1$ 时 (**) 也成立, 由数学归纳法知 (**) 对所有 $n\in\mathbb{N}$ 均成立即

$$\frac{a_0+a_{n+1}}{2}\geqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},\forall n\in\mathbb{N}$$

证毕。

解法二

设 $a_{n+1}-a_n=d_n$, 由题意可知

$$a_{n+1}-a_n\geqslant a_n-a_{n-1}\Rightarrow d_n\geqslant d_{n-1}$$

且 $a_n = a_0 + d_1 + d_2 + \cdots + d_{n-1}$, 欲证等价于

$$\begin{aligned}
&\frac{a_0 + a_{n+1}}{2} \geqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \\
\Longleftrightarrow\ & n(a_0 + a_{n+1}) \geqslant 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \\
\Longleftrightarrow\ & na_0 + n(a_0 + d_0 + d_1 + \cdots + d_{n-1}) \\
&\geqslant 2[(a_0 + d_0) + (a_0 + d_0 + d_1) + \cdots + (a_0 + d_0 + d_1 + \cdots + d_{n-1})] \\
\Longleftrightarrow\ & nd_n \geqslant nd_0 + (n-2)d_1 + (n-4)d_2 + (n-6)d_3 + \cdots + (4-n)d_{n-2} + (2-n)d_{n-1}
\end{aligned}$$

当 n 为奇数, 即证

$$n(d_0 - d_n) + (n-2)(d_1 - d_{n-1}) + (n-4)(d_2 - d_{n-2}) + \cdots + (d_{\frac{n-1}{2}} - d_{\frac{n+1}{2}}) \leqslant 0 \quad (1)$$

而 $d_n \geqslant d_{n-1}$, 则

$$d_0 - d_n \leqslant 0, d_1 - d_{n-1} \leqslant 0, \cdots, d_{\frac{n-1}{2}} - d_{\frac{n+1}{2}} \leqslant 0$$

此时 (1) 显然成立。

当 n 为偶数, 即证

$$n(d_0 - d_n) + (n-2)(d_1 - d_{n-1}) + (n-4)(d_2 - d_{n-2}) + \cdots + 2(d_{\frac{n-2}{2}} - d_{\frac{n+2}{2}}) \leqslant 0 \quad (2)$$

上式中 $d_{\frac{n}{2}}$ 这一项没有, 而 $d_n \geqslant d_{n-1}$ 则

$$d_0 - d_n \leqslant 0, d_1 - d_{n-1} \leqslant 0, \cdots, d_{\frac{n-2}{2}} - d_{\frac{n+2}{2}} \leqslant 0$$

此时 (2) 也成立。

故得证

$$\frac{a_0 + a_{n+1}}{2} \geqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

32. 已知多项式 $P(x) = x^2 + 2019x + 1$, 试证对任意正整数 n, 函数 $P^{(n)}(x) = 0$ 至少有一个实数根, 其中 $P^{(n)}(x)$ 表示 P 自身复合 n 次。

定义命题: 对任意正整数 $n, P^{(n)}(x)$ 有一个负实根 $-c_n$, 且 $0 < c_n < 2$。

当 $n = 1$ 时,

$$P^{(1)}(x) = P(x) = x^2 + 2019x + 1$$

其判别式为 $\Delta_1 = 2019^2 - 4 > 0$, 所以 $P^{(1)}(x)$ 有两个实数根, 设为 $-b_1, -c_1$, 其中 $c_1 \leqslant b_1$,

由韦达定理,

$$b_1 + c_1 = 2019, \quad b_1 c_1 = 1$$

因此 b_1, c_1 都为正数, 且因为乘积是 1, 可得 $c_1 \leqslant 1 < 2$, 所以 $-c_1$ 是一个负实根, 满足 $0 < c_1 < 2$, 故命题在 $n = 1$ 时成立。

假设命题在 $n = k$ 时成立, 即 $P^{(k)}(x)$ 有一负实根 $-c_k$, 其中 $0 < c_k < 2$, 即

$$P^{(k)}(x) = (x + c_k)Q_k(x)$$

其中 $Q_k(x)$ 为某多项式, 则有

$$P^{(k+1)}(x) = P^{(k)}(P(x)) = (P(x) + c_k)Q_k(P(x))$$

其中

$$P(x) + c_k = x^2 + 2019x + 1 + c_k$$

的判别式为

$$\Delta_{k+1} = 2019^2 - 4(1 + c_k) > 0$$

即 $P(x) + c_k$ 有两个实根, 设为 $-b_{k+1}, -c_{k+1}$, 其中 $c_{k+1} \leqslant b_{k+1}$, 由韦达定理,

$$b_{k+1} + c_{k+1} = 2019, \quad b_{k+1}c_{k+1} = 1 + c_k > 0$$

可知 b_{k+1}, c_{k+1} 都为正数, 且

$$c_{k+1} \leqslant \sqrt{1 + c_k} < \sqrt{3} < 2$$

所以 $-c_{k+1}$ 是 $P^{(k+1)}(x)$ 的负实根, 满足 $0 < c_{k+1} < 2$, 故命题在 $n = k + 1$ 时也成立。

由数学归纳法知, 对任意正整数 $n, P^{(n)}(x)$ 至少有一个实数根。

参考出处

- Arts of Problem Solving (AoPS): Contest Collections
- Brilliant (Kudos to the unmonetized version in the past)
- International Mathematics Competition (IMC) for University Students
- Missouri Collegiate Mathematics Competition
- American Mathematics Competition 10
- University of Waterloo CEMC - Euclid, Fermat, Cayley, Hypatia, Galois
- Lehigh University High School Math Contest
- Joint Entrance Examination (Advanced)
- The USSR Olympiad Problem Book: Selected Problems and Theorems of Elementary Mathematics
- LetsSolveMathProblems - Weekly Math Challenges
- Maths 505 - Differential Equations
- Michael Penn
- Prime Newtons
- TRML
- MadasMaths
- 中国复旦大学往年试题
- 雪隆森中学华罗庚杯数学比赛
- 厦门大学马来西亚分校-陈景润杯中学数学竞赛
- 微积分福音
- 线代启示录
- 福气老师
- 指考历届试题
- 统测历届试题与解答
- 印度人的作业
- 北京高考在线
- 朱式幸福教甄
- 普通型高级中学数学科能力竞赛 (决赛)
- 2014-2024 全国中学生数学竞赛联赛试题及答案汇总
- 如此醉的图书馆
- 菁优网
- 08 高考文科试题分类圆锥曲线
- 08 高考文科试题分类数列
- 福伦-隆中高数笔记
- 曾龙文师-高二数理培训队笔记