

循人中学

TSUN JIN HIGH SCHOOL

---

2017 年第二学期期末考  
高一数学

---

《高一备考数学题精选集之：  
一题都别想做》

Reserved for Dexter Woo Teng Koon

A、必答题	90 分
B、选答题	10 分 (2 选 1)
总分	100 分

由于题量太大, 作答时间为 24 小时, 作答愉快!

**A、必答题 (90%)**

1. (a) 若
- $\theta$
- 为锐角, 试证

$$\tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}$$

据此, 试证

$$\tan \theta + \tan \frac{\theta}{2} = \csc \theta - 2 \cot 2\theta$$

(4 分)

由恒等式

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2}, \quad \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2}$$

有

$$\tan^2 \frac{\theta}{2} = \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}$$

由于  $\theta$  为锐角, 于是

$$\tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} > 0$$

且有

$$\begin{aligned} \tan \theta + \tan \frac{\theta}{2} &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} \\ &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \sqrt{\frac{(1 - \cos \theta)^2}{1 - \cos^2 \theta}} \\ &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{\cos \theta - (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{1}{\sin \theta} - \frac{2 \cos 2\theta}{2 \sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{1}{\sin \theta} - \frac{2 \cos 2\theta}{\sin 2\theta} \\ &= \csc \theta - 2 \cot 2\theta \end{aligned}$$

- (b) 已知
- $\sin \theta + \sec \theta = \cos \theta + \csc \theta$
- , 求证:

$$\cos 2\theta + 4 \cot 2\theta \csc 2\theta = 2(\tan \theta - \cot \theta)$$

(4 分)

$$\begin{aligned}
 \cos 2\theta + 4 \cot 2\theta \csc 2\theta &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta + \frac{4 \cos 2\theta}{\sin^2 2\theta} \\
 &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta + \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} \\
 &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta + \csc^2 \theta - \sec^2 \theta \\
 &= (\cos \theta + \csc \theta)^2 - 2 \cot \theta - (\sin \theta + \sec \theta)^2 + 2 \tan \theta \\
 &= 2(\tan \theta - \cot \theta)
 \end{aligned}$$

故得证。

2. (a) 解

$$(\cos^2 \theta - 1)(\sin^2 \theta - 1) < 0,$$

式中  $-2\pi \leq \theta \leq 2\pi$ 。 (2 分)

注意到

$$\cos^2 \theta - 1 = -\sin^2 \theta, \quad \sin^2 \theta - 1 = -\cos^2 \theta$$

因此

$$(\cos^2 \theta - 1)(\sin^2 \theta - 1) = (-\sin^2 \theta)(-\cos^2 \theta) = \sin^2 \theta \cos^2 \theta \geq 0$$

于是原不等式无解。

(b) 解三角方程式

$$16 \sin^2 \theta + \tan^2 \theta + 9(\csc^2 \theta + \cot^2 \theta) = 30,$$

其中  $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ 。 (5 分)

原方程式即

$$(4 \sin \theta - 3 \csc \theta)^2 + (\tan \theta - 3 \cot \theta)^2 = 0$$

于是

$$4 \sin \theta - 3 \csc \theta = 0 \Rightarrow \sin \theta = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ, 120^\circ, 240^\circ, 300^\circ$$

且

$$\tan \theta - 3 \cot \theta = 0 \Rightarrow \tan \theta = \pm \sqrt{3} \Rightarrow \theta = 60^\circ, 120^\circ, 240^\circ, 300^\circ$$

故原方程式的解为

$$\theta = 60^\circ, 120^\circ, 240^\circ, 300^\circ$$

(c) 解

$$\sin^8 \theta + \cos^8 \theta = \frac{17}{32},$$

式中  $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ 。 (5 分)

化简得

$$\begin{aligned}\sin^8 \theta + \cos^8 \theta &= \frac{17}{32} \\ (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta)^2 - 2 \sin^4 \theta \cos^4 \theta &= \frac{17}{32} \\ ((\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)^2 - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta)^2 - 2 \sin^4 \theta \cos^4 \theta &= \frac{17}{32} \\ (1 - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta)^2 - 2 \sin^4 \theta \cos^4 \theta &= \frac{17}{32} \\ 2 \sin^4 \theta \cos^4 \theta - 4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{15}{32} &= 0 \\ 4 \sin^2 2\theta - 32 \sin^2 2\theta + 15 &= 0 \\ (2 \sin^2 2\theta - 1)(2 \sin^2 2\theta - 15) &= 0\end{aligned}$$

于是由  $\sin^2 2\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2\theta = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 解为

$$\begin{aligned}2\theta &= 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ, 405^\circ, 495^\circ, 585^\circ, 675^\circ \\ \theta &= 22.5^\circ, 67.5^\circ, 112.5^\circ, 157.5^\circ, 202.5^\circ, 247.5^\circ, 292.5^\circ, 337.5^\circ\end{aligned}$$

其中由于  $0 \leq \sin^2 \alpha \leq 1, \alpha \in \mathbb{R}$ , 方程式  $\sin^2 2\theta = \frac{15}{2}$  无解。

3. (a) 若  $\alpha = \frac{2\pi}{1999}$ , 试求

$$\cos \alpha \cos 2\alpha \cos 3\alpha \cdots \cos 998\alpha \cos 999\alpha$$

的值。

(6 分)

记  $S = \cos \alpha \cos 2\alpha \cdots \cos 999\alpha, T = \sin \alpha \sin 2\alpha \cdots \sin 999\alpha$ , 则

$$ST = \sin \alpha \cos \alpha \sin 2\alpha \cos 2\alpha \cdots \sin 999\alpha \cos 999\alpha$$

即

$$2^{999} ST = \sin 2\alpha \sin 4\alpha \cdots \sin 1998\alpha$$

且注意到

$$\sin 1998\alpha = -\sin(2\pi - 1998\alpha) = -\sin \frac{2\pi}{1999} = -\sin \alpha$$

同理,

$$\sin 1996\alpha = -\sin 3\alpha, \quad \sin 1994\alpha = -\sin 5\alpha, \cdots$$

因此

$$2^{999} ST = \sin \alpha \sin 4\alpha \cdots (-\sin 3\alpha)(-\sin \alpha) = \sin \alpha \sin 4\alpha \cdots \sin 3\alpha \sin \alpha = T$$

由于  $T \neq 0$ , 故

$$S = \cos \alpha \cos 2\alpha \cos 3\alpha \cdots \cos 998\alpha \cos 999\alpha = \frac{1}{2^{999}}$$

(b) 证对于任意角  $A, B, C$ , 均有

$$\sin A + \sin B + \sin C - \sin(A + B + C) = 4 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{B+C}{2} \sin \frac{C+A}{2} \quad (6 \text{ 分})$$

由和差化积公式,

$$\begin{aligned} & \sin A + \sin B + \sin C - \sin(A + B + C) \\ &= 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + \sin C - (\sin(A+B) \cos C + \cos(A+B) \sin C) \\ &= 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} - 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A+B}{2} \cos C + \sin C(1 - \cos(A+B)) \\ &= 2 \sin \frac{A+B}{2} \left( \cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2} \cos C \right) + \sin C \left( 2 \sin^2 \frac{A+B}{2} \right) \\ &= 2 \sin \frac{A+B}{2} \left[ \cos \frac{A-B}{2} - \left( \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{C}{2} - \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{C}{2} \right) \right] \\ &= 2 \sin \frac{A+B}{2} \left[ \cos \left( \frac{A+C}{2} - \frac{B+C}{2} \right) - \cos \left( \frac{C+A}{2} + \frac{B+C}{2} \right) \right] \\ &= 4 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{B+C}{2} \sin \frac{C+A}{2} \end{aligned}$$

4. (a) 解方程式

$$\log_x x + \log_x 3 = 1 \quad (2 \text{ 分})$$

由原方程,

$$1 + \log_x 3 = 1 \Rightarrow \log_x 3 = 0$$

此方程无解, 故原方程式无解。

(b) 解

$$x^{x^x} = (x^x)^x \quad (4 \text{ 分})$$

原方程即

$$x^{x^x} = x^{x^2}$$

先考虑指数方程的特殊情况  $x = -1, 0, 1$ , 可得解

$$x = -1, 1$$

当  $x \neq -1, 0, 1$  时, 由底数相等所以指数相等的性质得,

$$x = 2$$

故原方程式的解为

$$x = -1 \quad \text{或} \quad x = 1 \quad \text{或} \quad x = 2$$

(c) 已知

$$\frac{\log a}{b-c} = \frac{\log b}{c-a} = \frac{\log c}{a-b},$$

其中  $a \neq b \neq c$ , 试求  $a^a b^b c^c$  的值。 (4 分)

设

$$\frac{\log a}{b-c} = \frac{\log b}{c-a} = \frac{\log c}{a-b} = k$$

则

$$\log a = k(b-c), \quad \log b = k(c-a), \quad \log c = k(a-b)$$

因此

$$\begin{aligned} \log(a^a b^b c^c) &= a \log a + b \log b + c \log c \\ &= ak(b-c) + bk(c-a) + ck(a-b) \\ &= k[ab - ac + bc - ab + ca - cb] \\ &= 0 \end{aligned}$$

即

$$a^a b^b c^c = 1$$

5. (a) 若正实数  $x, y, z$  满足

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2 \\ \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2 \\ \log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2 \end{cases}$$

求  $xyz$ 。 (4 分)

原方程组给出

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_2 \sqrt{y} + \log_2 \sqrt{z} = 2 \Rightarrow x\sqrt{yz} = 2^2 \\ \log_3 y + \log_3 \sqrt{z} + \log_3 \sqrt{x} = 2 \Rightarrow y\sqrt{xz} = 3^2 \\ \log_4 z + \log_4 \sqrt{x} + \log_4 \sqrt{y} = 2 \Rightarrow z\sqrt{xy} = 4^2 \end{cases}$$

将三式相乘得

$$(xyz)^2 = 2^6 \cdot 3^2 \Rightarrow xyz = 24 > 0$$

(b) 解方程式

$$(\log_5 x)^2 + \log_{5x} \left( \frac{5}{x} \right) = 1$$

(4 分)

设  $\log_5 x = t$ , 则

$$\log_{5x} \left( \frac{5}{x} \right) = \frac{\log_5 \frac{5}{x}}{\log_5 (5x)} = \frac{\log_5 5 - \log_5 x}{\log_5 5 + \log_5 x} = \frac{1-t}{1+t}$$

原方程式变为

$$\begin{aligned} t^2 + \frac{1-t}{1+t} &= 1 \\ t^2(1+t) + 1-t &= 1+t \\ t^3 + t^2 - 2t &= 0 \\ t(t+2)(t-1) &= 0 \end{aligned}$$

解得  $t = 0, -2, 1$ , 即

$$x = 5^0 = 1, \quad \text{或} \quad x = 5^{-2} = \frac{1}{25}, \quad \text{或} \quad x = 5^1 = 5$$

经检验得  $x = 1, x = \frac{1}{25}, x = 5$  都是原方程的解。

(c) 已知

$$(x\sqrt{x}\sqrt[3]{x})^x = x^{x\sqrt{x}\sqrt[3]{x}},$$

试求  $x^5$  的值。

(5 分)

$$\begin{aligned} (x\sqrt{x}\sqrt[3]{x})^x &= x^{x\sqrt{x}\sqrt[3]{x}} \\ x^{(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})x} &= x^{x^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}} \\ x^{(\frac{11}{6})x} &= x^{x^{\frac{11}{6}}} \end{aligned}$$

考虑特殊情况  $x = -1, 0, 1$ , 可得解  $x = 1$ 。若  $x \neq -1, 0, 1$ , 因底数相等所以指数相等, 得

$$\frac{11}{6}x = x^{\frac{11}{6}} \Rightarrow x^5 = \left( \frac{11}{6} \right)^6$$

故  $x^5$  的可能值为

$$x^5 = 1 \quad \text{或} \quad x^5 = \left( \frac{11}{6} \right)^6$$

6. (a) 已知正实数  $a, b$  满足  $a + b = 1$ , 求

i.  $ab^{2017}$  的最大值; (4 分)

由 AM-GM 不等式,

$$\frac{1}{2018} = \frac{a + \underbrace{\frac{b}{2017} + \cdots + \frac{b}{2017}}_{2017 \text{ 个 } s}}{2018} \geq \sqrt[2018]{\frac{ab^{2017}}{2017^{2017}}}$$

即

$$ab^{2017} \leq \frac{2017^{2017}}{2018^{2018}}$$

当  $a = \frac{1}{2018}, b = \frac{2017}{2018}$  时等号成立, 此时  $ab^{2017}$  有最大值  $\frac{2017^{2017}}{2018^{2018}}$

ii.  $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2$  的最小值。 (4 分)

由柯西不等式或 QM-AM 不等式,

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{1}{2} \left(a + b + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{ab}\right)^2$$

又由 AM-GM 不等式,

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

故

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{1}{2} \cdot (1+4)^2 = \frac{25}{2}$$

当且仅当  $a = b = \frac{1}{2}$  时等号成立, 此时有最小值  $\frac{25}{2}$ 。

(b) 已知实数  $a, b, c, d$  满足

$$ab + bc + cd = 8, \quad b^2 + c^2 = 2,$$

试求  $a^2 + d^2$  的最小值。 (5 分)

首先有

$$b^2 + c^2 \geq 2bc \Rightarrow bc \leq 1$$

由柯西不等式,

$$(a^2 + d^2)(b^2 + c^2) \geq (ab + cd)^2$$

即

$$(a^2 + d^2) \geq \frac{(ab + cd)^2}{b^2 + c^2} = \frac{(8 - bc)^2}{2} \geq \frac{(8 - 1)^2}{2} = \frac{49}{2}$$



当  $b = c$  且  $\frac{a}{c} = \frac{d}{b}$ , 即  $b = c = -1, a = d = -\frac{7}{2}$  时等号成立, 此时  $a^2 + d^2$  取最小值  $\frac{49}{2}$ 。

(c) 已知实数  $a, b, c$  满足  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ , 求

$$\left( \frac{1}{1+2ab-c^2} + \frac{1}{1+2bc-a^2} + \frac{1}{1+2ca-b^2} \right)^2$$

的最小值。

(5 分)

由柯西不等式,

$$\begin{aligned} & \frac{1^2}{1+2ab-c^2} + \frac{1^2}{1+2bc-a^2} + \frac{1^2}{1+2ca-b^2} \\ & \geq \frac{(1+1+1)^2}{(1+2ab-c^2) + (1+2bc-a^2) + (1+2ca-b^2)} \\ & = \frac{9}{2+2(ab+bc+ca)} \end{aligned}$$

由排序不等式,

$$1 = a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

于是

$$\left( \frac{1}{1+2ab-c^2} + \frac{1}{1+2bc-a^2} + \frac{1}{1+2ca-b^2} \right)^2 \geq \left( \frac{9}{2+2} \right)^2 = \frac{81}{16}$$

等号成立当且仅当  $a = b = c = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ 。

7. (a) 求

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r(r+1)(r+2)(r+3)}$$

(4 分)

利用部分分式分解得

$$\frac{1}{r(r+1)(r+2)(r+3)} = \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{r(r+1)(r+2)} - \frac{1}{(r+1)(r+2)(r+3)} \right]$$

因此原式是一裂项求和, 有

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r(r+1)(r+2)(r+3)} &= \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right] \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} - 0 \\ &= \frac{1}{18}\end{aligned}$$

(b) 已知

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6},$$

试求

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots$$

的值。

(4 分)

设

$$S = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots$$

则

$$\frac{\pi^2}{6} = S + \left( \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots \right) = S + \frac{1}{2^2} \left( 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots \right) = S + \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6}$$

解得

$$S = \frac{\pi^2}{8}$$

8. (a) 试证

$$8 + 88 + 888 + \cdots + \underbrace{888 \dots 88}_{88\text{'s}} = \frac{8}{81}(10^{89} - 802)$$

(4 分)

考虑到

$$\underbrace{99 \dots 99}_{n\text{'s}} = 10^n - 1$$

于是

$$\begin{aligned}
 8 + 88 + 888 + \cdots + \underbrace{888 \dots 88}_{88's} &= \frac{8}{9}(9 + 99 + 999 + \cdots + \underbrace{99 \dots 99}_{88's}) \\
 &= \frac{8}{9}(10 + 10^2 + 10^3 + \cdots + 10^{88} - 88) \\
 &= \frac{8}{9} \left[ \frac{10(10^{88} - 1)}{10 - 1} - 88 \right] \\
 &= \frac{8}{81}(10^{89} - 802)
 \end{aligned}$$

故得证。

(b) 求无穷级数

$$\frac{1^2}{11} + \frac{5^2}{11^2} + \frac{9^2}{11^3} + \frac{13^2}{11^4} + \cdots + \frac{(4n-3)^2}{11^n} + \cdots$$

(5 分)

设原式为

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n-3)^2}{11^n}$$

由  $(4n-3)^2 = 16n^2 - 24n + 9$ , 有

$$S = 16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{11^n} - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{11^n} + 9 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{11^n}$$

当  $|x| < 1$  时, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

令  $x = \frac{1}{11}$ , 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{11^n} = \frac{1}{10}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{11^n} = \frac{11}{100}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{11^n} = \frac{33}{250}$$

于是

$$S = 16 \cdot \frac{33}{250} - 24 \cdot \frac{11}{100} + 9 \cdot \frac{1}{10} = \frac{93}{250}$$

设

$$S = \frac{1^2}{11} + \frac{5^2}{11^2} + \frac{9^2}{11^3} + \frac{13^2}{11^4} + \frac{17^2}{11^5} + \cdots \quad (1)$$

则

$$\frac{1}{11}S = \frac{1^2}{11^2} + \frac{5^2}{11^3} + \frac{9^2}{11^4} + \frac{13^2}{11^5} + \frac{17^2}{11^6} + \cdots \quad (2)$$

(1) - (2) 得

$$\frac{10}{11}S = \frac{1}{11} + \frac{5^2 - 1^2}{11^2} + \frac{9^2 - 5^2}{11^3} + \frac{13^2 - 9^2}{11^4} + \frac{17^2 - 13^2}{11^5} + \cdots \quad (3)$$

$$\frac{10}{121}S = \frac{1}{11^2} + \frac{5^2 - 1^2}{11^3} + \frac{9^2 - 5^2}{11^4} + \frac{13^2 - 9^2}{11^5} + \frac{17^2 - 13^2}{11^6} + \cdots \quad (4)$$

(3) - (4) 得

$$\frac{100}{121}S = \frac{1}{11} + \frac{23}{11^2} + \frac{32}{11^3} + \frac{32}{11^4} + \frac{32}{11^5} + \cdots = \frac{1}{11} + \frac{23}{11^2} + \frac{32}{11^3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{11}}$$

故可得

$$S = \frac{93}{250}$$

## B、选答题 (2 选 1) (10%)

1. (a) 试证

$$2\sqrt{\log_2 3} = 3\sqrt{\log_3 2}$$

(2 分)

注意到

$$2\sqrt{\log_2 3} = 2^{\frac{\log_2 3}{\sqrt{\log_2 3}}} = (2^{\log_2 3})^{\frac{1}{\sqrt{\log_2 3}}} = 3^{\frac{1}{\sqrt{\log_2 3}}} = 3\sqrt{\log_3 2}$$

故左式等于右式, 得证。

(b) 求

$$|x-1|^{\log_2(4-x)} < |x-1|^{\log_2(1+x)}$$

的解之范围。

(4 分)

由  $\log_2(4-x)$  及  $\log_2(1+x)$  的定义域, 得

$$x < 4 \quad \text{且} \quad x > -1$$

即  $x \in (-1, 4)$ , 且  $x \neq 0, 1, 2$ , 否则不等式不成立。分四种情况讨论:情况 1:  $x \in (-1, 0)$ , 则

$$\begin{aligned} (1-x)^{\log_2(4-x)} < (1-x)^{\log_2(1+x)} &\Rightarrow \log_2(4-x) < \log_2(1+x) \\ &\Rightarrow 4-x < 1+x \\ &\Rightarrow x > \frac{3}{2} \end{aligned}$$

此情况解集为  $(-1, 0) \cap \left(\frac{3}{2}, \infty\right) = \emptyset$ , 无解。情况 2:  $x \in (0, 1)$ , 则

$$\begin{aligned} (1-x)^{\log_2(4-x)} < (1-x)^{\log_2(1+x)} &\Rightarrow \log_2(4-x) > \log_2(1+x) \\ &\Rightarrow 4-x > 1+x \\ &\Rightarrow x < \frac{3}{2} \end{aligned}$$

此情况解集为  $(0, 1) \cap \left(-\infty, \frac{3}{2}\right) = (0, 1)$ 。情况 3:  $x \in (1, 2)$ , 则

$$\begin{aligned} (x-1)^{\log_2(4-x)} < (x-1)^{\log_2(1+x)} &\Rightarrow \log_2(4-x) > \log_2(1+x) \\ &\Rightarrow 4-x > 1+x \\ &\Rightarrow x < \frac{3}{2} \end{aligned}$$

此情况解集为  $(1, 2) \cap \left(-\infty, \frac{3}{2}\right) = \left(1, \frac{3}{2}\right)$ 。

情况 4:  $x \in (2, 4)$ , 则

$$\begin{aligned}(x-1)^{\log_2(4-x)} &< (x-1)^{\log_2(1+x)} \Rightarrow \log_2(4-x) < \log_2(1+x) \\ &\Rightarrow 4-x < 1+x \\ &\Rightarrow x > \frac{3}{2}\end{aligned}$$

此情况解集为  $(2, 4) \cap \left(\frac{3}{2}, \infty\right) = (2, 4)$ 。

综上所述, 原方程式的解集为  $\left(0, \frac{3}{2}\right) \cup (2, 4) \setminus \{1\}$ 。

(c) 证明

$$\tan \theta + \tan(\theta + 120^\circ) + \tan(\theta + 240^\circ) = 3 \tan 3\theta$$

恒成立。

(4 分)

令  $t = \tan \theta$ , 由和角公式,

$$\begin{aligned}\tan(\theta + 120^\circ) &= \frac{\tan \theta + \tan 120^\circ}{1 - \tan \theta \tan 120^\circ} = \frac{t - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}t} \\ \tan(\theta + 240^\circ) &= \frac{\tan \theta + \tan 240^\circ}{1 - \tan \theta \tan 240^\circ} = \frac{t + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}t}\end{aligned}$$

故左式为

$$\begin{aligned}&t + \frac{t - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}t} + \frac{t + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}t} \\ &= t + \frac{(t - \sqrt{3})(1 - \sqrt{3}t) + (t + \sqrt{3})(1 + \sqrt{3}t)}{(1 + \sqrt{3}t)(1 - \sqrt{3}t)} \\ &= t + \frac{t - \sqrt{3}t^2 - \sqrt{3} + 3t + t + \sqrt{3}t^2 + \sqrt{3} + 3t}{1 - 3t^2} \\ &= t + \frac{8t}{1 - 3t^2} \\ &= \frac{9t - 3t^3}{1 - 3t^2}\end{aligned}$$

由三倍角公式, 右式为

$$3 \tan 3\theta = 3 \cdot \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2} = \frac{9t - 3t^3}{1 - 3t^2}$$

发现左边 = 右边, 故恒等式得证。

2. (a) 解

$$2^{\sin x - \cos x} = \tan x$$

(2 分)

由于指数函数为正, 即  $2^{\sin x - \cos x} > 0$ , 原方程有解必须满足  $\tan x > 0$ , 由此可知  $\sin x$  与  $\cos x$  同号, 可能性只有

$$\sin x, \cos x \in (0, 1) \quad \text{或} \quad \sin x, \cos x \in (-1, 0)$$

将原方程变形为

$$\frac{2^{\sin x}}{\sin x} = \frac{2^{\cos x}}{\cos x}$$

令函数  $f(t) = \frac{2^t}{t}$ , 其中  $t \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ 。求导得

$$f'(t) = \frac{2^t(t \ln 2 - 1)}{t^2},$$

当  $t < 1$  时,  $t \ln 2 - 1 < 0$ , 所以  $f'(t) < 0$  恒成立。这意味  $f(t)$  在区间  $(-1, 0)$  和  $(0, 1)$  上均严格单调递减, 且由于  $\sin x, \cos x$  同号, 于是在区间  $(-1, 0)$  和  $(0, 1)$  上均有

$$f(\sin x) = f(\cos x) \implies \sin x = \cos x$$

解得

$$\tan x = 1 \implies x = n\pi + \frac{\pi}{4}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

经检验, 所有上述  $x$  均满足原方程。

注: 若已知  $\sin x, \cos x$  同号, 不需讨论  $f(t)$  在区间  $(0, 1)$  及  $(-1, 0)$  上的值域是否相交。

(b) 求

$$\left| \sqrt{x+1} - 2 \right| + \left| \sqrt{x+1} - 3 \right| = 1$$

的整数解集。

(4 分)

令  $t = \sqrt{x+1}$ , 其中  $t \geq 0$ , 则方程变为

$$|t - 2| + |t - 3| = 1$$

分三种情况讨论:

情况 1: 当  $0 \leq t < 2$  时,

$$(2 - t) + (3 - t) = 1 \Rightarrow t = 2$$

这与  $t < 2$  矛盾, 无解。

情况 2: 当  $2 \leq t \leq 3$  时,

$$(t - 2) + (3 - t) = 1 \Rightarrow 1 = 1$$

恒成立, 因此  $t \in [2, 3]$ 。

情况 3: 当  $t > 3$  时,

$$(t-2) + (t-3) = 1 \Rightarrow t = 3$$

这与  $t > 3$  矛盾, 无解。

综合得  $2 \leq \sqrt{x+1} \leq 3$ , 平方得

$$4 \leq x+1 \leq 9 \Rightarrow 3 \leq x \leq 8$$

因此整数解集为  $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 。

(c) 若  $A, B, C$  为任意三角形的内角, 证明恒等式

$$\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} = 1 - 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

(4 分)

已知  $A + B + C = \pi$ . 利用半角公式, 有

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} &= \frac{1 - \cos A}{2} + \frac{1 - \cos B}{2} + \frac{1 - \cos C}{2} \\ &= \frac{3 - (\cos A + \cos B + \cos C)}{2} \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} \cos A + \cos B + \cos C &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 1 - 2 \sin^2 \frac{C}{2} \\ &= 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 1 - 2 \sin^2 \frac{C}{2} \\ &= 1 + 2 \sin \frac{C}{2} \left( \cos \frac{A-B}{2} - \sin \frac{C}{2} \right) \\ &= 1 + 2 \sin \frac{C}{2} \left( \cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2} \right) \\ &= 1 + 2 \sin \frac{C}{2} \left( 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \right) \\ &= 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \end{aligned}$$

于是原式得证

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} &= \frac{3 - (1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2})}{2} \\ &= 1 - 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \end{aligned}$$

采题、审题、题解: 李冬恒