循人中学

TSUN JIN HIGH SCHOOL

2017 年第二学期期末考

高一数学

《高一备考数学题精选集之:
一题都别想做》

Reserved for Dexter Woo Teng Koon

A、必答题	90 分
B、选答题	10 分 (2 选 1)
总分	100 分

由于题量太大, 作答时间为 *24* 小时, 作答愉快!

A、必答题 (90%)

1. (a) 若 θ 为锐角, 试证

$$\tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

据此, 试证

$$\tan\theta+\tan\frac{\theta}{2}=\csc\theta-2\cot 2\theta$$

(4 分)

由恒等式

$$\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2},\quad \cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{2}$$

有

$$\tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

由于 θ 为锐角, 于是

$$\tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}>0$$

且有

$$\begin{aligned}
\tan\theta+\tan\frac{\theta}{2}&=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}\\
&=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\sqrt{\frac{(1-\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta}}\\
&=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\\
&=\frac{\cos\theta-(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{\sin\theta\cos\theta}\\
&=\frac{1}{\sin\theta}-\frac{2\cos 2\theta}{2\sin\theta\cos\theta}\\
&=\frac{1}{\sin\theta}-\frac{2\cos 2\theta}{\sin 2\theta}\\
&=\csc\theta-2\cot 2\theta
\end{aligned}$$

(b) 已知 $\sin\theta+\sec\theta=\cos\theta+\csc\theta$, 求证:

$$\cos 2\theta+4\cot 2\theta\csc 2\theta=2(\tan\theta-\cot\theta)$$

(4 分)

$$\begin{aligned}\cos 2\theta+4\cot 2\theta\csc 2\theta &= \cos^2\theta-\sin^2\theta+\frac{4\cos 2\theta}{\sin^2 2\theta}\\ &= \cos^2\theta-\sin^2\theta+\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}\\ &= \cos^2\theta-\sin^2\theta+\csc^2\theta-\sec^2\theta\\ &= (\cos\theta+\csc\theta)^2-2\cot\theta-(\sin\theta+\sec\theta)^2+2\tan\theta\\ &= 2(\tan\theta-\cot\theta)\end{aligned}$$

故得证。

2. (a) 解

$$(\cos^2\theta-1)(\sin^2\theta-1)<0,$$

式中 $-2\pi\leqslant\theta\leqslant 2\pi$。 (2 分)

注意到

$$\cos^2\theta-1=-\sin^2\theta,\quad \sin^2\theta-1=-\cos^2\theta$$

因此

$$(\cos^2\theta-1)(\sin^2\theta-1)=(-\sin^2\theta)(-\cos^2\theta)=\sin^2\theta\cos^2\theta\geqslant 0$$

于是原不等式无解。

(b) 解三角方程式

$$16\sin^2\theta+\tan^2\theta+9(\csc^2\theta+\cot^2\theta)=30,$$

其中 $0^\circ\leqslant\theta\leqslant 360^\circ$。 (5 分)

原方程式即

$$(4\sin\theta-3\csc\theta)^2+(\tan\theta-3\cot\theta)^2=0$$

于是

$$4\sin\theta-3\csc\theta=0\Rightarrow\sin\theta=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\theta=60^\circ,120^\circ,240^\circ,300^\circ$$

且

$$\tan\theta-3\cot\theta=0\Rightarrow\tan\theta=\pm\sqrt{3}\Rightarrow\theta=60^\circ,120^\circ,240^\circ,300^\circ$$

故原方程式的解为

$$\theta=60^\circ,120^\circ,240^\circ,300^\circ$$

(c) 解

$$\sin^8\theta+\cos^8\theta=\frac{17}{32},$$

式中 $0^\circ\leqslant\theta\leqslant 360^\circ$。 (5 分)

化简得

$$\begin{aligned}
\sin^8\theta+\cos^8\theta &= \frac{17}{32}\\
(\sin^4\theta+\cos^4\theta)^2-2\sin^4\theta\cos^4\theta &= \frac{17}{32}\\
\big((\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta\big)^2-2\sin^4\theta\cos^4\theta &= \frac{17}{32}\\
(1-2\sin^2\theta\cos^2\theta)^2-2\sin^4\theta\cos^4\theta &= \frac{17}{32}\\
2\sin^4\theta\cos^4\theta-4\sin^2\theta\cos^2\theta+\frac{15}{32} &= 0\\
4\sin^2 2\theta-32\sin^2 2\theta+15 &= 0\\
(2\sin^2 2\theta-1)(2\sin^2 2\theta-15) &= 0
\end{aligned}$$

于是由 $\sin^2 2\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow\sin 2\theta=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，解为

$$\begin{aligned}
2\theta &= 45^\circ,135^\circ,225^\circ,315^\circ,405^\circ,495^\circ,585^\circ,675^\circ\\
\theta &= 22.5^\circ,67.5^\circ,112.5^\circ,157.5^\circ,202.5^\circ,247.5^\circ,292.5^\circ,337.5^\circ
\end{aligned}$$

其中由于 $0\leqslant\sin^2\alpha\leqslant 1,\alpha\in\mathbb{R}$，方程式 $\sin^2 2\theta=\frac{15}{2}$ 无解。

3. (a) 若 $\alpha=\frac{2\pi}{1999}$，试求

$$\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 3\alpha\ldots\cos 998\alpha\cos 999\alpha$$

的值。 (6 分)

记 $S=\cos\alpha\cos 2\alpha\cdots\cos 999\alpha, T=\sin\alpha\sin 2\alpha\cdots\sin 999\alpha$，则

$$ST=\sin\alpha\cos\alpha\sin 2\alpha\cos 2\alpha\cdots\sin 999\alpha\cos 999\alpha$$

即

$$2^{999}ST=\sin 2\alpha\sin 4\alpha\cdots\sin 1998\alpha$$

且注意到

$$\sin 1998\alpha=-\sin(2\pi-1998\alpha)=-\sin\frac{2\pi}{1999}=-\sin\alpha$$

同理,

$$\sin 1996\alpha=-\sin 3\alpha,\quad \sin 1994\alpha=-\sin 5\alpha,\cdots$$

因此

$$2^{999}ST=\sin\alpha\sin 4\alpha\cdots(-\sin 3\alpha)(-\sin\alpha)=\sin\alpha\sin 4\alpha\cdots\sin 3\alpha\sin\alpha=T$$

由于 $T \neq 0$, 故

$$S = \cos\alpha\cos 2\alpha\cos 3\alpha\cdots\cos 998\alpha\cos 999\alpha = \frac{1}{2^{999}}$$

(b) 证对于任意角 A, B, C, 均有

$$\sin A + \sin B + \sin C - \sin(A+B+C) = 4\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+A}{2}$$

(6 分)

由和差化积公式,

$$\begin{aligned}
&\sin A + \sin B + \sin C - \sin(A+B+C) \\
&= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \sin C - (\sin(A+B)\cos C + \cos(A+B)\sin C) \\
&= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} - 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}\cos C + \sin C(1-\cos(A+B)) \\
&= 2\sin\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\cos C\right) + \sin C\left(2\sin^2\frac{A+B}{2}\right) \\
&= 2\sin\frac{A+B}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} - \left(\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)\right] \\
&= 2\sin\frac{A+B}{2}\left[\cos\left(\frac{A+C}{2} - \frac{B+C}{2}\right) - \cos\left(\frac{C+A}{2} + \frac{B+C}{2}\right)\right] \\
&= 4\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+A}{2}
\end{aligned}$$

4. (a) 解方程式

$$\log_x x + \log_x 3 = 1$$

(2 分)

由原方程,

$$1 + \log_x 3 = 1 \Rightarrow \log_x 3 = 0$$

此方程无解, 故原方程式无解。

(b) 解

$$x^{x^x} = (x^x)^x$$

(4 分)

原方程即

$$x^{x^x} = x^{x^2}$$

先考虑指数方程的特殊情况 $x=-1,0,1$, 可得解

$$x=-1,1$$

当 $x\neq -1,0,1$ 时, 由底数相等所以指数相等的性质得,

$$x=2$$

故原方程式的解为

$$x=-1 \quad \text{或} \quad x=1 \quad \text{或} \quad x=2$$

(c) 已知

$$\frac{\log a}{b-c}=\frac{\log b}{c-a}=\frac{\log c}{a-b},$$

其中 $a\neq b\neq c$, 试求 $a^a b^b c^c$ 的值。 (4 分)

设

$$\frac{\log a}{b-c}=\frac{\log b}{c-a}=\frac{\log c}{a-b}=k$$

则

$$\log a=k(b-c),\quad \log b=k(c-a),\quad \log c=k(a-b)$$

因此

$$\begin{aligned}\log(a^a b^b c^c)&=a\log a+b\log b+c\log c\\&=ak(b-c)+bk(c-a)+ck(a-b)\\&=k[ab-ac+bc-ab+ca-cb]\\&=0\end{aligned}$$

即

$$a^a b^b c^c=1$$

5. (a) 若正实数 x,y,z 满足

$$\begin{cases}\log_2 x+\log_4 y+\log_4 z=2\\ \log_3 y+\log_9 z+\log_9 x=2\\ \log_4 z+\log_{16} x+\log_{16} y=2\end{cases}$$

求 xyz。 (4 分)

原方程组给出

$$\begin{cases}\log_2 x+\log_2\sqrt{y}+\log_2\sqrt{z}=2\Rightarrow x\sqrt{yz}=2^2\\ \log_3 y+\log_3\sqrt{z}+\log_3\sqrt{x}=2\Rightarrow y\sqrt{xz}=3^2\\ \log_4 z+\log_4\sqrt{x}+\log_4\sqrt{y}=2\Rightarrow z\sqrt{xy}=4^2\end{cases}$$

将三式相乘得

$$(xyz)^2 = 2^6 \cdot 3^2 \Rightarrow xyz = 24 > 0$$

(b) 解方程式

$$(\log_5 x)^2 + \log_{5x}\left(\frac{5}{x}\right) = 1$$

(4 分)

设 $\log_5 x = t$, 则

$$\log_{5x}\left(\frac{5}{x}\right) = \frac{\log_5 \frac{5}{x}}{\log_5(5x)} = \frac{\log_5 5 - \log_5 x}{\log_5 5 + \log_5 x} = \frac{1-t}{1+t}$$

原方程式变为

$$\begin{gathered} t^2 + \frac{1-t}{1+t} = 1 \\ t^2(1+t) + 1 - t = 1 + t \\ t^3 + t^2 - 2t = 0 \\ t(t+2)(t-1) = 0 \end{gathered}$$

解得 $t = 0, -2, 1$, 即

$$x = 5^0 = 1, \quad 或 \quad x = 5^{-2} = \frac{1}{25}, \quad 或 \quad x = 5^1 = 5$$

经检验得 $x = 1, x = \dfrac{1}{25}, x = 5$ 都是原方程的解。

(c) 已知

$$(x\sqrt{x}\sqrt[3]{x})^x = x^{x\sqrt{x}\sqrt[3]{x}},$$

试求 x^5 的值。 (5 分)

$$\begin{gathered} (x\sqrt{x}\sqrt[3]{x})^x = x^{x\sqrt{x}\sqrt[3]{x}} \\ x^{(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})x} = x^{x^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}} \\ x^{(\frac{11}{6})x} = x^{x^{\frac{11}{6}}} \end{gathered}$$

考虑特殊情况 $x = -1, 0, 1$, 可得解 $x = 1$。若 $x \neq -1, 0, 1$, 因底数相等所以指数相等, 得

$$\frac{11}{6}x = x^{\frac{11}{6}} \Rightarrow x^5 = \left(\frac{11}{6}\right)^6$$

故 x^5 的可能值为

$$x^5 = 1 \quad 或 \quad x^5 = \left(\frac{11}{6}\right)^6$$

6. (a) 已知正实数 a, b 满足 $a+b=1$, 求

i. ab^{2017} 的最大值; (4 分)

由 AM-GM 不等式,

$$\frac{1}{2018}=\frac{a+\underbrace{\frac{b}{2017}+\cdots+\frac{b}{2017}}_{2017's}}{2018}\geqslant\sqrt[2018]{\frac{ab^{2017}}{2017^{2017}}}$$

即

$$ab^{2017}\leqslant\frac{2017^{2017}}{2018^{2018}}$$

当 $a=\frac{1}{2018}, b=\frac{2017}{2018}$ 时等号成立, 此时 ab^{2017} 有最大值 $\frac{2017^{2017}}{2018^{2018}}$

ii. $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2$ 的最小值。 (4 分)

由柯西不等式或 QM-AM 不等式,

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\geqslant\frac{1}{2}\left(a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{ab}\right)^2$$

又由 AM-GM 不等式,

$$ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

故

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\geqslant\frac{1}{2}\cdot(1+4)^2=\frac{25}{2}$$

当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时等号成立, 此时有最小值 $\frac{25}{2}$。

(b) 已知实数 a, b, c, d 满足

$$ab+bc+cd=8,\quad b^2+c^2=2,$$

试求 a^2+d^2 的最小值。 (5 分)

首先有

$$b^2+c^2\geqslant 2bc\Rightarrow bc\leqslant 1$$

由柯西不等式,

$$(a^2+d^2)(b^2+c^2)\geqslant(ab+cd)^2$$

即

$$(a^2+d^2)\geqslant\frac{(ab+cd)^2}{b^2+c^2}=\frac{(8-bc)^2}{2}\geqslant\frac{(8-1)^2}{2}=\frac{49}{2}$$

当 $b=c$ 且 $\frac{a}{c}=\frac{d}{b}$, 即 $b=c=-1, a=d=-\frac{7}{2}$ 时等号成立, 此时 a^2+d^2 取最小值 $\frac{49}{2}$。

(c) 已知实数 a,b,c 满足 $a^2+b^2+c^2=1$, 求

$$\left(\frac{1}{1+2ab-c^2}+\frac{1}{1+2bc-a^2}+\frac{1}{1+2ca-b^2}\right)^2$$

的最小值。 (5 分)

由柯西不等式,

$$\begin{aligned}&\frac{1^2}{1+2ab-c^2}+\frac{1^2}{1+2bc-a^2}+\frac{1^2}{1+2ca-b^2}\\ \geqslant\ &\frac{(1+1+1)^2}{(1+2ab-c^2)+(1+2bc-a^2)+(1+2ca-b^2)}\\ =\ &\frac{9}{2+2(ab+bc+ca)}\end{aligned}$$

由排序不等式,

$$1=a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$$

于是

$$\left(\frac{1}{1+2ab-c^2}+\frac{1}{1+2bc-a^2}+\frac{1}{1+2ca-b^2}\right)^2\geqslant\left(\frac{9}{2+2}\right)^2=\frac{81}{16}$$

等号成立当且仅当 $a=b=c=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$。

7. (a) 求

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r(r+1)(r+2)(r+3)}$$

(4 分)

利用部分分式分解得

$$\frac{1}{r(r+1)(r+2)(r+3)}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{r(r+1)(r+2)}-\frac{1}{(r+1)(r+2)(r+3)}\right]$$

因此原式是一裂项求和, 有

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r(r+1)(r+2)(r+3)} &= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{1\cdot2\cdot3}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right]\\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}-0\\ &= \frac{1}{18}\end{aligned}$$

(b) 已知

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6},$$

试求

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots$$

的值。 (4 分)

设

$$S=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots$$

则

$$\frac{\pi^2}{6}=S+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots\right)=S+\frac{1}{2^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right)=S+\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi^2}{6}$$

解得

$$S=\frac{\pi^2}{8}$$

8. (a) 试证

$$8+88+888+\ldots+\underbrace{888\ldots88}_{88's}=\frac{8}{81}(10^{89}-802)$$

(4 分)

考虑到

$$\underbrace{99\ldots99}_{n's}=10^n-1$$

于是

$$\begin{aligned}8+88+888+\cdots+\underbrace{888\ldots88}_{88's} &= \frac{8}{9}(9+99+999+\cdots+\underbrace{99\ldots99}_{88's})\\ &= \frac{8}{9}(10+10^2+10^3+\cdots+10^{88}-88)\\ &= \frac{8}{9}\left[\frac{10(10^{88}-1)}{10-1}-88\right]\\ &= \frac{8}{81}(10^{89}-802)\end{aligned}$$

故得证。

(b) 求无穷级数

$$\frac{1^2}{11}+\frac{5^2}{11^2}+\frac{9^2}{11^3}+\frac{13^2}{11^4}+\cdots+\frac{(4n-3)^2}{11^n}+\cdots$$

(5 分)

设原式为

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4n-3)^2}{11^n}$$

由 $(4n-3)^2=16n^2-24n+9$, 有

$$S=16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{11^n}-24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{11^n}+9\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{11^n}$$

当 $|x|<1$ 时, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x},\quad \sum_{n=1}^{\infty}nx^n=\frac{x}{(1-x)^2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

令 $x=\frac{1}{11}$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{11^n}=\frac{1}{10},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{11^n}=\frac{11}{100},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{11^n}=\frac{33}{250}$$

于是

$$S=16\cdot\frac{33}{250}-24\cdot\frac{11}{100}+9\cdot\frac{1}{10}=\frac{93}{250}$$

设

$$S=\frac{1^2}{11}+\frac{5^2}{11^2}+\frac{9^2}{11^3}+\frac{13^2}{11^4}+\frac{17^2}{11^5}+\cdots \tag{1}$$

则

$$\frac{1}{11}S=\frac{1^2}{11^2}+\frac{5^2}{11^3}+\frac{9^2}{11^4}+\frac{13^2}{11^5}+\frac{17^2}{11^6}+\cdots \tag{2}$$

(1) - (2) 得

$$\frac{10}{11}S=\frac{1}{11}+\frac{5^2-1^2}{11^2}+\frac{9^2-5^2}{11^3}+\frac{13^2-9^2}{11^4}+\frac{17^2-13^2}{11^5}+\cdots \tag{3}$$

$$\frac{10}{121}S=\frac{1}{11^2}+\frac{5^2-1^2}{11^3}+\frac{9^2-5^2}{11^4}+\frac{13^2-9^2}{11^5}+\frac{17^2-13^2}{11^6}+\cdots \tag{4}$$

(3) - (4) 得

$$\frac{100}{121}S=\frac{1}{11}+\frac{23}{11^2}+\frac{32}{11^3}+\frac{32}{11^4}+\frac{32}{11^5}+\cdots=\frac{1}{11}+\frac{23}{11^2}+\frac{32}{11^3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{11}}$$

故可得

$$S=\frac{93}{250}$$

B、选答题 (2 选 1) (10%)

1. (a) 试证
$$2^{\sqrt{\log_2 3}} = 3^{\sqrt{\log_3 2}}$$
(2 分)

注意到
$$2^{\sqrt{\log_2 3}} = 2^{\frac{\log_2 3}{\sqrt{\log_2 3}}} = \left(2^{\log_2 3}\right)^{\sqrt{\log_3 2}} = 3^{\sqrt{\log_3 2}}$$
故左式等于右式，得证。

(b) 求
$$|x-1|^{\log_2(4-x)} < |x-1|^{\log_2(1+x)}$$
的解之范围。 (4 分)

由 $\log_2(4-x)$ 及 $\log_2(1+x)$ 的定义域，得
$$x < 4 \quad 且 \quad x > -1$$
即 $x \in (-1,4)$，且 $x \neq 0,1,2$，否则不等式不成立。分四种情况讨论：

情况 1: $x \in (-1,0)$，则
$$\begin{aligned}(1-x)^{\log_2(4-x)} < (1-x)^{\log_2(1+x)} &\Rightarrow \log_2(4-x) < \log_2(1+x)\\ &\Rightarrow 4-x < 1+x\\ &\Rightarrow x > \frac{3}{2}\end{aligned}$$
此情况解集为 $(-1,0) \cap \left(\frac{3}{2}, \infty\right) = \emptyset$，无解。

情况 2: $x \in (0,1)$，则
$$\begin{aligned}(1-x)^{\log_2(4-x)} < (1-x)^{\log_2(1+x)} &\Rightarrow \log_2(4-x) > \log_2(1+x)\\ &\Rightarrow 4-x > 1+x\\ &\Rightarrow x < \frac{3}{2}\end{aligned}$$
此情况解集为 $(0,1) \cap \left(-\infty, \frac{3}{2}\right) = (0,1)$。

情况 3: $x \in (1,2)$，则
$$\begin{aligned}(x-1)^{\log_2(4-x)} < (x-1)^{\log_2(1+x)} &\Rightarrow \log_2(4-x) > \log_2(1+x)\\ &\Rightarrow 4-x > 1+x\\ &\Rightarrow x < \frac{3}{2}\end{aligned}$$
此情况解集为 $(1,2) \cap \left(-\infty, \frac{3}{2}\right) = \left(1, \frac{3}{2}\right)$。

情况 4: $x \in (2,4)$, 则

$$\begin{aligned}(x-1)^{\log_2(4-x)} < (x-1)^{\log_2(1+x)} &\Rightarrow \log_2(4-x) < \log_2(1+x)\\ &\Rightarrow 4-x < 1+x\\ &\Rightarrow x > \frac{3}{2}\end{aligned}$$

此情况解集为 $(2,4) \cap \left(\frac{3}{2}, \infty\right) = (2,4)$。

综上所述, 原方程式的解集为 $\left(0, \frac{3}{2}\right) \cup (2,4) \setminus \{1\}$。

(c) 证明

$$\tan\theta + \tan(\theta + 120^\circ) + \tan(\theta + 240^\circ) = 3\tan 3\theta$$

恒成立。 (4 分)

令 $t = \tan\theta$, 由和角公式,

$$\begin{aligned}\tan(\theta + 120^\circ) &= \frac{\tan\theta + \tan 120^\circ}{1 - \tan\theta\tan 120^\circ} = \frac{t - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}t}\\ \tan(\theta + 240^\circ) &= \frac{\tan\theta + \tan 240^\circ}{1 - \tan\theta\tan 240^\circ} = \frac{t + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}t}\end{aligned}$$

故左式为

$$\begin{aligned}&t + \frac{t-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}t} + \frac{t+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}t}\\ &= t + \frac{(t-\sqrt{3})(1-\sqrt{3}t) + (t+\sqrt{3})(1+\sqrt{3}t)}{(1+\sqrt{3}t)(1-\sqrt{3}t)}\\ &= t + \frac{t - \sqrt{3}t^2 - \sqrt{3} + 3t + t + \sqrt{3}t^2 + \sqrt{3} + 3t}{1-3t^2}\\ &= t + \frac{8t}{1-3t^2}\\ &= \frac{9t-3t^3}{1-3t^2}\end{aligned}$$

由三倍角公式, 右式为

$$3\tan 3\theta = 3 \cdot \frac{3t - t^3}{1-3t^2} = \frac{9t-3t^3}{1-3t^2}$$

发现左边 $=$ 右边, 故恒等式得证。

2. (a) 解

$$2^{\sin x - \cos x} = \tan x$$

(2 分)

由于指数函数为正, 即 $2^{\sin x-\cos x}>0$, 原方程有解必须满足 $\tan x>0$, 由此可知 $\sin x$ 与 $\cos x$ 同号, 可能性只有

$$\sin x, \cos x \in (0,1) \quad \text{或} \quad \sin x, \cos x \in (-1,0)$$

将原方程变形为

$$\frac{2^{\sin x}}{\sin x}=\frac{2^{\cos x}}{\cos x}$$

令函数 $f(t)=\dfrac{2^t}{t}$, 其中 $t\in(-1,0)\cup(0,1)$。求导得

$$f'(t)=\frac{2^t(t\ln 2-1)}{t^2},$$

当 $t<1$ 时,$t\ln 2-1<0$, 所以 $f'(t)<0$ 恒成立。这意味 $f(t)$ 在区间 $(-1,0)$ 和 $(0,1)$ 上均严格单调递减, 且由于 $\sin x, \cos x$ 同号, 于是在区间 $(-1,0)$ 和 $(0,1)$ 上均有

$$f(\sin x)=f(\cos x) \implies \sin x=\cos x$$

解得

$$\tan x=1 \implies x=n\pi+\frac{\pi}{4}, \quad n\in\mathbb{Z}$$

经检验, 所有上述 x 均满足原方程。

注: 若已知 $\sin x, \cos x$ 同号, 不需讨论 $f(t)$ 在区间 $(0,1)$ 及 $(-1,0)$ 上的值域是否相交。

(b) 求

$$\left|\sqrt{x+1}-2\right|+\left|\sqrt{x+1}-3\right|=1$$

的整数解集。 (4 分)

令 $t=\sqrt{x+1}$, 其中 $t\geqslant 0$, 则方程变为

$$|t-2|+|t-3|=1$$

分三种情况讨论:

情况 1: 当 $0\leqslant t<2$ 时,

$$(2-t)+(3-t)=1\Rightarrow t=2$$

这与 $t<2$ 矛盾, 无解。

情况 2: 当 $2\leqslant t\leqslant 3$ 时,

$$(t-2)+(3-t)=1\Rightarrow 1=1$$

恒成立, 因此 $t\in[2,3]$。

情况 3: 当 $t > 3$ 时,

$$(t-2)+(t-3)=1 \Rightarrow t=3$$

这与 $t > 3$ 矛盾, 无解。

综合得 $2 \leqslant \sqrt{x+1} \leqslant 3$, 平方得

$$4 \leqslant x+1 \leqslant 9 \Rightarrow 3 \leqslant x \leqslant 8$$

因此整数解集为 $\{3,4,5,6,7,8\}$。

(c) 若 A, B, C 为任意三角形的内角, 证明恒等式

$$\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

(4 分)

已知 $A+B+C=\pi$. 利用半角公式, 有

$$\begin{aligned}\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2} &= \frac{1-\cos A}{2}+\frac{1-\cos B}{2}+\frac{1-\cos C}{2}\\ &= \frac{3-(\cos A+\cos B+\cos C)}{2}\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\cos A+\cos B+\cos C &= 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+1-2\sin^2\frac{C}{2}\\ &= 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+1-2\sin^2\frac{C}{2}\\ &= 1+2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)\\ &= 1+2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)\\ &= 1+2\sin\frac{C}{2}\left(2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right)\\ &= 1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\end{aligned}$$

于是原式得证

$$\begin{aligned}\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2} &= \frac{3-(1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2})}{2}\\ &= 1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\end{aligned}$$

采题、审题、题解: 李冬恒