시계열자료분석팀

5팀

장다연

심현구

윤세인

이동기

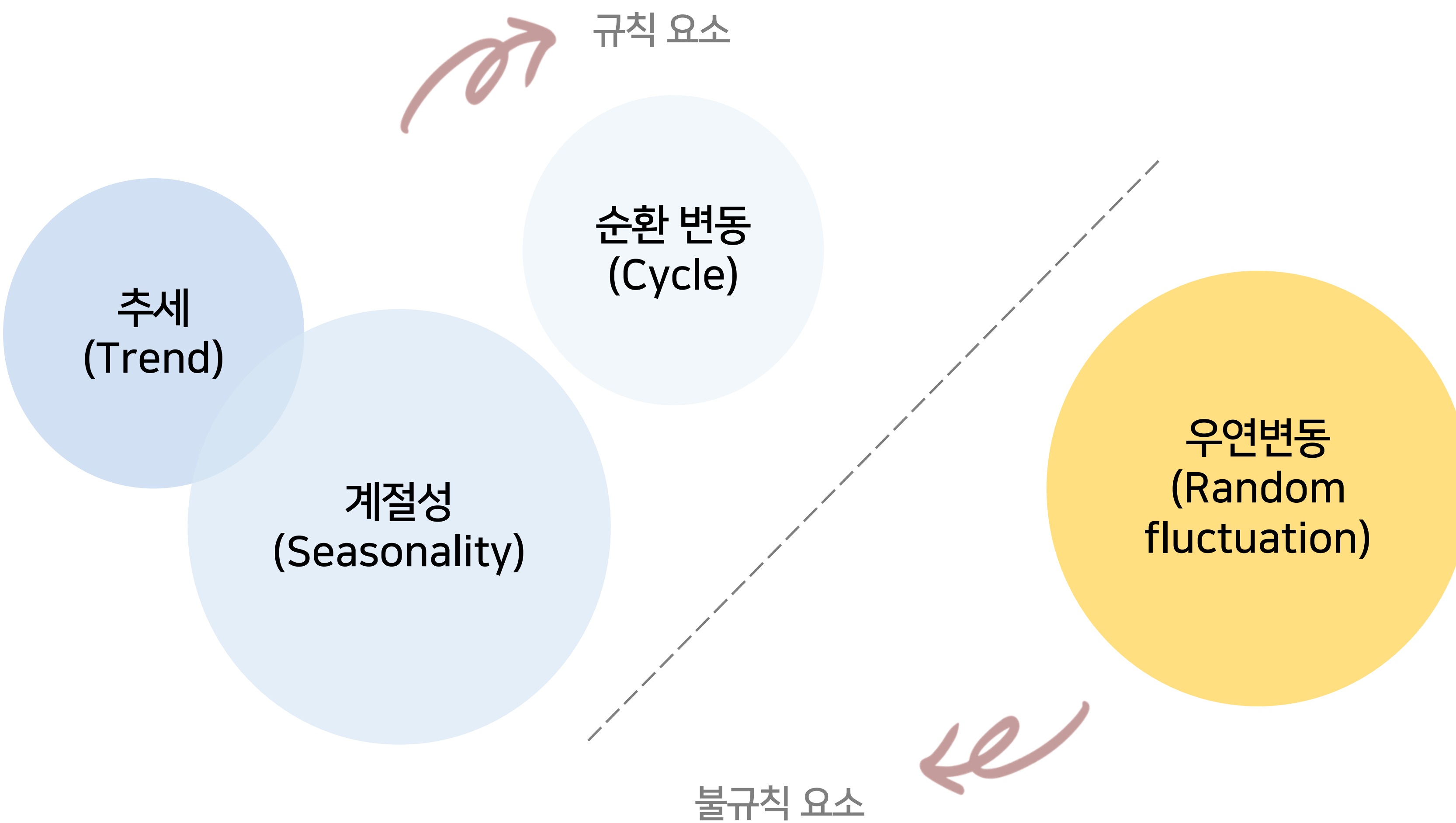
천예원

INDEX

1

1주차 복습

1주차 복습 | 시계열 자료의 구성 요소



1주차 복습 | 약정상성

강정상성 가정은 실제로 적용하기 힘든 엄격한 가정이기에,

현실에서는 주로 약정상성을 이용함.

약정상성의 조건

$E[\lvert X_t \rvert]^2 < \infty,\ \forall t \in \mathbb{Z}$	**2차 적률이 존재**하고 **시점 t에 관계없이** 일정함
$E[\lvert X_t \rvert]^2 = m,\ \forall t \in \mathbb{Z}$	**평균이 상수**로 시점 t에 관계없이 일정함
$\gamma_X(r,s) = \gamma_X(r+h, s+h)$ $, \forall r, s, h \in \mathbb{Z}$	공분산은 **시차 h에 의존**하며 **시점 t와 무관**함

1주차 복습 | 정상화

정상화

정상성을 만족하지 않는 비정상 시계열을 **정상 시계열로 변환**하는 것

분산이 일정하지 않은 경우	평균이 일정하지 않은 경우
로그 변환 (Log Transformation)	회귀 (Regression)
루트 변환 (Square Root Transformation)	평활 (Smoothing)
Box-Cox 변환	차분 (Differencing)

1주차 복습 | 정상화

정상화

정상성을 만족하지 않는 비정상 시계열을 **정상 시계열로 변환**하는 것

분산이 일정하지 않은 경우	평균이 일정하지 않은 경우
로그 변환 (Log Transformation)	회귀 (Regression)
루트 변환 (Square Ro	평활 (Smoothing)
Box-C	차분 (Differencing)

이거아님 …

1주차 복습 | 정상성 검정

자기공분산함수(ACVF)

$$\gamma_x(h) = \mathrm{Cov}(X_t, X_{t+h}) = E[(X_t - \mu)(X_{t+h} - \mu)]$$

자기상관함수(ACF)

$$\rho_X(h) = \frac{\gamma_X(h)}{\gamma_X(0)} = \mathrm{Corr}(X_t, X_{t+h}) = \frac{\mathrm{Cov}(X_t\,, X_{t+h})}{\sqrt{\mathrm{var}(X_t)}\sqrt{\mathrm{var}(X_{t+h})}}$$

을 이용하여 정상성 만족 여부를 확인

1주차 복습 | 백색잡음

정상 시계열의
대표적인 예!

백색잡음의 조건

평균이 0, 분산이 $\sigma^2 < \infty$인 시계열

자기상관이 존재하지 않는 시계열

자기상관 검정

ACF Plot

정규성 검정

QQ Plot

KS Test

Jarque-Bera Test

정상성 검정

KPSS Test

ADF Test

PP Test

2

모형 식별

2 모형 식별

시계열 모형의 필요성

오차항 Y_t에 대한 분산-공분산 행렬

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \mathrm{Cov}(Y_1, Y_1) & \mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) & \dots & \mathrm{Cov}(Y_1, Y_n) \\ \mathrm{Cov}(Y_2, Y_1) & \mathrm{Cov}(Y_2, Y_2) & \dots & \mathrm{Cov}(Y_2, Y_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathrm{Cov}(Y_n, Y_1) & \mathrm{Cov}(Y_n, Y_2) & \dots & \mathrm{Cov}(Y_n, Y_n) \end{pmatrix}$$

정상성 조건 ③ 자기공분산은 시차에만 의존

클린업 1주차 참고!

$$= \begin{pmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) & \dots & \gamma(n-1) \\ \gamma(1) & \gamma(0) & \dots & \gamma(n-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma(n-1) & \gamma(n-2) & \dots & \gamma(0) \end{pmatrix}$$

최종적으로 추정해야하는 분산-공분산 행렬

시계열 모형의 필요성

오차항 Y_t에 대한 분산-공분산 행렬

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \mathrm{Cov}(Y_1, Y_1) & \mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) & \dots & \mathrm{Cov}(Y_1, Y_n) \\ \mathrm{Cov}(Y_2, Y_1) & \mathrm{Cov}(Y_2, Y_2) & \dots & \mathrm{Cov}(Y_2, Y_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathrm{Cov}(Y_n, Y_1) & \mathrm{Cov}(Y_n, Y_2) & \dots & \mathrm{Cov}(Y_n, Y_n) \end{pmatrix}$$

정상성 조건 ③ 자기공분산은 시차에만 의존

클린업 1주차 참고!

$$= \begin{pmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) & \dots & \gamma(n-1) \\ \gamma(1) & \gamma(0) & \dots & \gamma(n-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma(n-1) & \gamma(n-2) & \dots & \gamma(0) \end{pmatrix}$$

최종적으로 추정해야하는 분산-공분산 행렬

모형 식별의 필요성

① Y_t가 백색잡음인 경우

$$\begin{pmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) & \dots & \gamma(n-1) \\ \gamma(1) & \gamma(0) & \dots & \gamma(n-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma(n-1) & \gamma(n-2) & \dots & \gamma(0) \end{pmatrix}$$

하삼각요소와 상삼각요소가 **모두 Zero**

분산만 추정하면
공분산 행렬을 구할 수 있음

2 모형 식별

모형 식별의 필요성

② Y_t가 백색잡음이 아닌 경우

$$\begin{pmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) & \dots & \gamma(n-1) \\ \gamma(1) & \gamma(0) & \dots & \gamma(n-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma(n-1) & \gamma(n-2) & \dots & \gamma(0) \end{pmatrix}$$

확률변수 사이에 상관관계 존재

→ **하삼각요소와 분산 모두 추정 필요**

하삼각요소는 SACVF를 통해 추정

$$\hat{\gamma}_x(h) = \frac{1}{n}\Sigma_{j=1}^{n-h}(X_j - \bar{X})(X_{j+h} - \bar{X})$$

분산만 추정하면

공분산 행렬을 구할 수 있음

2 모형의 식별

모형 식별의 필요성

② Yt가 백색잡음이 아닌 경우

$$\begin{pmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) & \cdots & \gamma(n-1) \\ \gamma(1) & \gamma(0) & \cdots & \gamma(n-2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma(n-1) & \gamma(n-2) & \cdots & \gamma(0) \end{pmatrix}$$

SACVF를 통해 추정할 경우

시차 h에 따라 정확도가 달라질 수 있다는 한계

시계열 모형 사용 !

삼각요소도 추정 필요

SAVCF를 통해 추정

$$\hat{\gamma}_x(h) = \frac{1}{n}\Sigma_{j=1}^{n-h}(X_j - \overline{X})(X_{j+h} - \overline{X})$$

공분산 행렬을 구할 수 있음

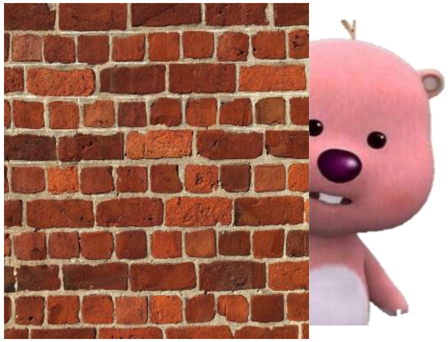
모형 식별의 필요성

시계열 모형이 필요한 이유 요약

정상화를 통해 비정상 시계열을 정상시계열로 변환했으나,

남아 있는 오차가 WN 또는 IID가 아닌 경우

$\gamma(h) \quad (h \neq 0)$ 를 추정하기 위해 시계열 모형이 필요



쓰라면 써.

ACF, PACF를 이용하여 어떤 시계열 모형을 사용할 것인지를 판단 가능!

2 모형 식별

자기상관함수

자기상관함수 (ACF, Auto-Correlation Function)

$$\rho_X(h) = \frac{\gamma_X(h)}{\gamma_X(0)} = \mathrm{Corr}(X_t, X_{t+h}) = \frac{\mathrm{Cov}(X_t\,, X_{t+h})}{\sqrt{\mathrm{var}(X_t)}\sqrt{\mathrm{var}(X_{t+h})}}$$

1주차에 했던 거니까
기억 나지?

$\rho_X(h)$: 시차가 h인 확률변수 간의 상관관계

자기상관함수 (ACF)는 **시차가 h인 시계열 간의 상관관계**를 의미.

시계열이 **정상성**을 만족하는 경우 ACF는 **시차에만 의존함**.

자기상관함수

자기상관함수 (ACF, Auto-Correlation Function)

$$\rho_X(h) = \frac{\gamma_X(h)}{\gamma_X(0)} = \mathrm{Corr}(X_t, X_{t+h}) = \frac{\mathrm{Cov}(X_t\,, X_{t+h})}{\sqrt{\mathrm{var}(X_t)}\sqrt{\mathrm{var}(X_{t+h})}}$$

$\rho_X(h)$: 시차가 h인 확률변수 간의 상관관계

- $\rho(0) = 1$ ----- 자기 자신과의 자기상관함수는 1
- $\rho(-h) = \rho(h)$ ----- 우함수
- $|\gamma(h)| \leq \gamma(0)$ for all $h \in \mathbb{Z}$ $\rightarrow$ $|\rho(h)| \leq 1$ ----- 절댓값 ≤ 1

부분자기상관함수

부분자기상관함수 (PACF, Partial Auto-Correlation Function)

X_1과 X_{k+1} 사이에 $X_2, \ldots, X_k$의 영향을 제거했을 때의

조건부 상관관계 (conditional correlation)

부..부분..

뭐라고요? ㅠㅠ

부분자기상관함수

부분자기상관함수 (PACF, Partial Auto-Correlation Function)

X_1과 X_{k+1} 사이에 $X_2, \ldots, X_k$의 영향을 제거했을 때의
조건부 상관관계 (conditional correlation)

부분자기상관함수의 쉬운 이해를 위해
부분상관계수를 먼저 알아보도록 하자!

부분자기상관함수

부분상관계수 (Partial Correlation Coefficient)

X : 아이스크림 판매량 Y : 범죄 발생 건수 Z : 인구수

"X가 Y에 미치는 영향을 알고 싶음"

부분자기상관함수

부분상관계수 (Partial Correlation Coefficient)

X : 아이스크림 판매량　Y : 범죄 발생 건수　Z : 인구수

“X가 Y에 미치는 영향을 알고 싶음”

X

순수한 영향력을 알 수 없음

Y

인구수 증가에 따라 증가

Z

인구수 증가에 따라 증가

시간에 따라 증가

부분상관계수 개념을 사용하면

순수한 영향력을 알 수 있음 !

부분자기상관함수

부분상관계수 (Partial Correlation Coefficient)

$$\rho_{XY,Z} = \frac{E[\{X - E(X|Z)\} \cdot \{Y - E(Y|Z)\}]}{\sqrt{E[X - E(X|Z)]^2}\sqrt{E[Y - E(Y|Z)]^2}} = \rho_{X^*,Y^*}$$

조건부 기대값 $E(X|Z)$: X가 Z에 의해 설명되는 부분

조건부 기대값 $E(Y|Z)$: Y가 Z에 의해 설명되는 부분

$X^* = X - E(X|Z)$: X에서 Z의 영향력을 제거하고 남은 부분

$Y^* = Y - E(Y|Z)$: Y에서 Z의 영향력을 제거하고 남은 부분

$\rho_{XY,Z} = \rho_{X^*,Y^*}$: X와 Y의 부분상관계수

부분자기상관함수

부분상관계수 (Partial Correlation Coefficient)

$$\rho_{XY,Z} = \frac{E[\{X - E(X|Z)\} \cdot \{Y - E(Y|Z)\}]}{\sqrt{E[X - E(X|Z)]^2}\sqrt{E[Y - E(Y|Z)]^2}} = \rho_{X^*,Y^*}$$

조건부 기대값 $E(X|Z)$: X가 Z에 의해 설명되는 부분

조건부 기대값 $E(Y|Z)$: Y가 Z에 의해 설명되는 부분

부분자기상관**함수**는 위 부분상관**계수**에

“Auto”가 추가된 개념

$X^* = X - E(X|Z)$: X에서 Z의 영향력을 제거하고 남은 부분

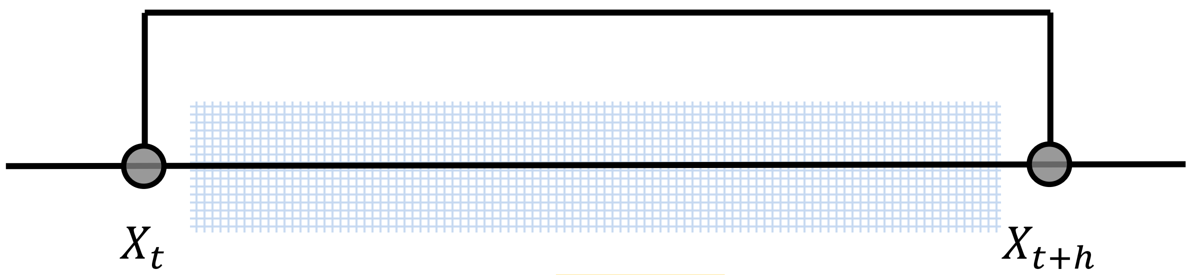
$Y^* = Y - E(Y|Z)$: Y에서 Z의 영향력을 제거하고 남은 부분

⋮

즉, 부분자기상관**함수**는 자기 자신과의 부분상관**계수**와 같음.

$\rho_{XY,Z} = \rho_{X^*,Y^*}$: X와 Y의 부분상관계수

부분자기상관함수



Corr(X_t, X_{t+h})에 중간 시점의 영향 존재

X_t와 X_{t+h} 사이의 순수한 상관관계를 구하기 위해서는
t시점과 t+h시점 사이의 영향을 제거해 주어야 함

이 역할을 하는 것이 바로 **부분자기상관함수**!

부분자기상관함수

부분자기상관함수(PACF)는 보통 a(k)로 표현하며, 다음과 같이 정의됨

- ▶ $\alpha(0) = \mathrm{Corr}(X_1, X_1) = 1$
- ▶ $\alpha(1) = \mathrm{Corr}(X_2, X_1) = \rho(1)$
- ▶ $\alpha(k) = \mathrm{Corr}(X_{k+1} - P_k^* X_{k+1}, X_1 - P_k^* X_1), \quad k \geq 2$

$P_k^* X_{k+1} =$ Best Linear Predictor on $\{1, X_2, \cdots, X_k\}$

중간 시점인 $\{1, X_2, \cdots, X_k\}$만으로 X_{k+1}을 설명

$P_k^* X_1 =$ Best Linear Predictor on $\{1, X_2, \cdots, X_k\}$

중간 시점인 $\{1, X_2, \cdots, X_k\}$만으로 X_1을 설명

BLP(Best Linear Predictor)은 뒤에서 더 자세히 다루겠지만,

지금 단계에서는 $\{1, X_2, \cdots, X_k\}$ 가 X_{k+1} 과 X_1 에 미치는 영향 정도로 생각해주시면 됩니다!

부분자기상관함수

부분자기상관함수(PACF)는 보통 a(k)로 표현하며, 다음과 같이 정의됨

- $\alpha(0) = \mathrm{Corr}(X_1, X_1) = 1$
- $\alpha(1) = \mathrm{Corr}(X_2, X_1) = \rho(1)$
- $\alpha(k) = \mathrm{Corr}(X_{k+1} - P_k^* X_{k+1}, X_1 - P_k^* X_1), \quad k \geq 2$

$P_k^* X_{k+1} =$ Best Linear Predictor on $\{1, X_2, \cdots, X_k\}$

중간 시점인 $\{1, X_2, \cdots, X_k\}$만으로 X_{k+1}을 설명

$P_k^* X_1 =$ Best Linear Predictor on $\{1, X_2, \cdots, X_k\}$

중간 시점인 $\{1, X_2, \cdots, X_k\}$만으로 X_1을 설명

부분자기상관함수

Main Idea

"중간값들의 영향력을 선형회귀로 추정하여 제거하자"

추정량의 BLP(Best Linear Predictor) 구하는 과정

$$X_{k+1} = \phi_{11}X_k + \epsilon_{k+1}$$

$$X_{k+1} = \phi_{21}X_k + \phi_{22}X_{k-1} + \epsilon_{k+1}$$

$$\vdots$$

$$X_{k+1} = \phi_{k1}X_k + \phi_{k2}X_{k-1} + \cdots + \phi_{kk}X_1 + \epsilon_{k+1}$$

$$\therefore \hat{X}_{k+1} = \underset{\phi}{\operatorname{argmin}}\, E(X_{k+1} - \phi_{k1}X_k - \phi_{k2}X_{k-1} - \cdots - \phi_{kk}X_1)^2$$

2 모형 식별

부분자기상관함수

Main Idea

"중간값들의 영향력을 선형회귀로 추정하여 제거하자"

추정량의 BLP(Best Linear Predictor) 구하는 과정

$$X_{k+1} = \phi_{11}X_k + \epsilon_{k+1}$$

$$X_{k+1} = \phi_{21}X_k + \phi_{22}X_{k-1} + \epsilon_{k+1}$$

$$\vdots$$

ϕ_{kk} 는 $\{X_2, \dots X_k\}$가 고정되어 있을 때, X_{k+1}와 X_1간의 선형 상관관계를 의미

$$X_{k+1} = \phi_{k1}X_k + \phi_{k2}X_{k-1} + \cdots + \phi_{kk}X_1 + \epsilon_{k+1}$$

$$\therefore \hat{X}_{k+1} = \underset{\phi}{\operatorname{argmin}}\, E(X_{k+1} - \phi_{k1}X_k - \phi_{k2}X_{k-1} - \cdots - \phi_{kk}X_1)^2$$

부분자기상관함수

Main Idea

"중간값들의 영향력을 선형회귀로 추정하여 제거하자"

부분자기상관함수(PACF)

$$\alpha(k) = \phi_{kk}, \qquad k \geq 1$$

3

선형 과정

선형 과정

선형 과정 (Linear Process)

$\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$들의 선형결합으로 표현된 X_t를 선형과정이라고 함.

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}$$

선형결합의 계수는 $\sum_j |\psi_j| < \infty$ (absolutely summable) 조건을 만족해야 함.

선형 과정

선형 과정 (Linear Process)

$\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$들의 선형결합으로 표현된 X_t를 선형과정이라고 함.

후향 연산자를 이용한 표현

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j Z_{t-j} = \psi(B) Z_t \text{ where } \psi(B) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j B^j$$

$$\because \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j Z_{t-j} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j B^j Z_t = \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j B^j\right) Z_t$$

선형결합의 계수는 $\sum_j |\psi_j| < \infty$ (absolutely summable) 조건을 만족해야 함.

선형 과정

시계열을 선형과정으로 표현하는 이유

1) **공분산 계산**이 간단하다

$$\mathrm{Cov}(a_1Z_1 + a_2Z_2 + a_3Z_3, b_2Z_2 + b_3Z_3) = a_2b_2 + a_3b_3$$

$$\mathrm{Cov}(a_1Z_1, b_2Z_2 + b_3Z_3) = 0$$

2) **해석** 용이, **추정** 방법이 잘 발달되어 있음. (regression/linear algebra)

3) 정상 확률 과정의 선형 결합은 다시 **정상 확률 과정 조건**을 만족함.

4) 모든 약한 의미의 정상 확률 과정은 **선형 과정의 합과 결정적 과정으로 표현**될 수 있음.

(Wold decomposition)

시계열 분석에 사용되는 선형 과정 모형

AR 모형

MA 모형

ARMA 모형

에 대해 한번 알아봅시다!

4

AR 모형

AR 모형 | ① 정의

AR(Auto Regressive Model) : 자기회귀 모형

현 시점의 관측값을 과거 시점의 관측값과
현 시점의 오차의 선형결합 형태로 표현하는 모형

$Z_t \sim WN(0, \sigma^2)$ 일 때,

AR(1) 모형

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + Z_t$$

AR(p) 모형

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t$$

p : 몇 시점 전까지의 관측값을 사용했는지를 나타내는 모수

AR 모형 | ① 정의

AR(Auto Regressive Model) : 자기회귀 모형

현 시점의 관측값을 과거 시점의 관측값과
현 시점의 오차의 선형결합 형태로 표현하는 모형

AR 모형은 흔히 알고 있는 회귀식과 유사함.

AR 모형은 관측값을 자기 자신의 과거로 회귀시킨다는 의미에서
'**자기회귀 모형**'이라고 부름.

AR 모형 | ② 특성방정식

정의 이용 표현식

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t$$

후향연산자 이용 표현식

$$X_t = \phi_1 B X_t + \phi_2 B^2 X_t + \cdots + \phi_p B^P X_t + Z_t$$

AR 모형 | ② 특성방정식

정의 이용 표현식

$$X_t = \boxed{\phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} +} Z_t$$

후향연산자를 이용해 변환

후향연산자 이용 표현식

$$X_t = \boxed{\phi_1 B X_t + \phi_2 B^2 X_t + \cdots + \phi_p B^P X_t +} Z_t$$

AR 모형 | ② 특성방정식

후향 연산자 식에서 특성 방정식을 유도

$$X_t = \phi_1 B X_t + \phi_2 B^2 X_t + \cdots + \phi_p B^P X_t + Z_t$$

후향 연산자 식을 X_t에 대하여 간단히 정리

$$Z_t = \left(1 - \phi_1 B - \ \phi_2 B^2 - \cdots - \ \phi_p B^p\right) X_t$$

이 부분이 바로 AR(p)의 특성방정식!

$$Z_t = \phi(B) X_t$$

AR(p)의 특성방정식은 $\phi(B)$로 표현한다.

AR 모형 | ③ AR 모형의 조건

정상성(Stationarity)

시계열의 확률적 특성이 시점에 의존하지 않는 특성

인과성(Causality)

t 시점의 관측값이 과거시점의 오차항으로 설명되는 특성

$$\psi_j = 0 \,, \forall j < 0 \;\leftrightarrow\; X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}$$

선형과정 $\{X_t\}$가 위 조건을 만족할 때, $\{X_t\}$는 인과성을 가짐

AR 모형 | ③ AR 모형의 조건

정상성(Stationarity)

시계열의 확률적 특성이 시점에 의존하지 않는 특성

인과성(Causality)

t 시점의 관측값이 과거시점의 오차항으로 설명되는 특성

$$\psi_j = 0\,, \forall j < 0 \;\leftrightarrow\; X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}$$

↓

선형과정 $\{X_t\}$가 위 조건을 만족할 때, $\{X_t\}$는 인과성을 가짐

AR 모형 | ③ AR 모형의 조건

AR 모형이 앞서 소개한 특성들을 어떻게 만족하는지 AR(1) 모형을 활용하여 알아보자.

$$
\begin{aligned}
X_t &= \phi_1 X_{t-1} + Z_t \\
&= \phi_1(\phi_1 X_{t-2} + Z_{t-1}) + Z_t = \phi_1^2 X_{t-2} + \phi_1 Z_{t-1} + Z_t \\
&= \phi_1^2(\phi_1 X_{t-3} + Z_{t-2}) + \phi_1 Z_{t-1} + Z_t = \phi_1^3 X_{t-3} + \phi_1^2 Z_{t-2} + \phi_1 Z_{t-1} + Z_t \\
&\ \ \vdots \\
&= \phi_1^{M+1} X_{t-M-1} + \Sigma_{j=0}^{M} \phi_1^{j} Z_{t-j}
\end{aligned}
$$

AR(1) 식은 위와 같이 과거 시점의 관측값과 오차들의 선형결합으로 정리할 수 있음.

AR 모형 | ③ AR 모형의 조건

AR 모형이 앞서 소개한 특성들을 어떻게 만족하는지 AR(1) 모형을 활용하여 알아보자.

$$\phi_1^{M+1}X_{t-M-1} + \Sigma_{j=0}^{M}\phi_1^{j}Z_{t-j}$$

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + Z_t$$

$$= \phi_1^2(\phi_1 X_{t-3} + Z_{t-2}) + \phi_1 Z_{t-1} + Z_t = \phi_1^3 X_{t-3} + \phi_1^2 Z_{t-2} + \phi_1 Z_{t-1} + Z_t$$

$$\vdots$$

$$= \phi_1^{M+1}X_{t-M-1} + \Sigma_{j=0}^{M}\phi_1^{j}Z_{t-j}$$

인과성을 만족하기 위해서는 오차항만으로 관측값을 설명해야함.

해당 조건의 만족 여부는 ϕ_1 **범위**에 따라 달라짐.

세 경우로 나누어 식을 통해 확인해보자!

AR(1) 식은 위와 같이 과거 시점의 관측값과 오차들의 선형결합으로 정리할 수 있음.

AR 모형 | ③ AR 모형의 조건

Case 1) $|\phi_1| < 1$

$X_t = \phi_1^{M+1} X_{t-M-1} + \Sigma_{j=0}^{M} \phi_1^j Z_{t-j}$ 에서 $M \rightarrow \infty$이면

$\phi_1^{M+1} X_{t-M-1} \rightarrow 0$ 으로 수렴, 나머지 부분은 $\Sigma_{j=0}^{\infty} \phi_1^j Z_{t-j}$ 이 됨.

⋮

위 결과와 같이 같이 $|\phi_1| < 1$**일 때는 오차항의 선형결합**(Z_t)만 남아 인과성을 만족함.

또한 정상 시계열의 선형결합은 여전히 정상 시계열임을 확인하였기 때문에

정상성 역시 만족함

AR 모형 | ③ AR 모형의 조건

Case 2) $|\phi_1| = 1$

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t \quad \text{or} \quad X_t = -X_{t-1} + \varepsilon_t$$

대표적인 비정상 확률 과정 중 하나인 확률보행과정(random walk process)임

따라서 AR모형 조건을 만족하지 못함.

AR 모형 | ③ AR 모형의 조건

Case 3) $|\phi_1| > 1$

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + Z_t = \phi_1^{M+1} X_{t-M-1} + \Sigma_{j=0}^{M} \phi_1^{j} Z_{t-j}$$

위 식을 통해 알 수 있는 것처럼, $|\phi_1| > 1$일 경우

$\phi_1^{M+1} X_{t-M-1}$ 부분을 제거하지 못해 인과성을 만족하지 못함

따라서 AR 모형 조건을 만족하지 못함.

4 AR 모형

AR 모형 | ③ AR 모형의 조건

Case 3: $|\phi_1| > 1$

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + Z_t = \phi_1^{M+1} X_{t-M-1} + \sum_{j=0}^{M} \phi_1^j Z_{t-j}$$

위 식을 통해 알 수 있는 것처럼 $|\phi_1| > 1$인 경우

$\phi_1^{M+1} X_{t-M-1}$ 부분을 제거하지 못해 인과성을 만족하지 못함

따라서 AR 모형 조건을 만족하지 못함.

정리하면, AR모형은 정상성과 인과성이 모두 만족되는

$|\phi_1| < 1$가 성립할 때만 사용할 수 있음.

이는 '$\phi(B) = 0$의 근의 절대값이 1보다 커야한다 ' 와 동치

흥미롭죠? 흥미롭죠?

$|\phi_1| > 1$일 경우 흥미로운 사실!

$$X_{t+1} = \phi_1 X_t + Z_{t+1}$$

$$\phi_1 X_t = X_{t+1} - Z_{t+1}$$

$$X_t = \frac{1}{\phi_1}X_{t+1} - \frac{1}{\phi_1}Z_{t+1} = \frac{1}{\phi_1}\left(\frac{1}{\phi_1}X_{t+2} - \frac{1}{\phi_1}Z_{t+2}\right) - \frac{1}{\phi_1}Z_{t+1}$$

$$= \frac{1}{\phi_1^2}X_{t+2} - \frac{1}{\phi_1^2}Z_{t+2} - \frac{1}{\phi_1}Z_{t+1}$$

$$= \left(\frac{1}{\phi_1}\right)^k X_{t+j} - \sum_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{\phi_1}\right)^j Z_{t+j}$$

위 식과 같이 과거의 값이 아닌 **미래 관측값**들의 선형결합으로 표현할 수 있음.

하지만 AR 모형으로는 사용할 수 없음

AR 모형 | ④ AR 모형의 ACF

AR(1) 모형을 이용하여 ACF를 계산해보자.

계산의 편의를 위해 $E(X_t) = 0$ 을 가정한다.

STEP 1) ACF식을 유도하기 위해 AR(1) 식 양변에 X_{t-h} 를 곱해줌

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + Z_t$$

$$X_t X_{t-h} = \phi_1 X_{t-1} X_{t-h} + Z_t X_{t-h}$$

AR 모형 | ④ AR 모형의 ACF

AR(1) 모형을 이용하여 ACF를 계산해보자.

STEP 2) STEP 1)의 식에 기댓값을 취해 ACF 식을 구함

$$\gamma(h) = \phi_1\gamma(h-1) + Cov(Z_t, X_{t-h}) = \phi_1\gamma(h-1)$$

$$\left(\because Cov(Z_t, X_{t-h}) = Cov\left(Z_t, \phi_1^{M+1}X_{t-h-M-1} + \Sigma_{j=0}^{M}\phi_1^{j}Z_{t-h-j}\right) = 0\right)$$

$$\gamma(h) = \phi_1\left(\phi_1\gamma(h-2)\right) = \cdots = \phi_1^h\gamma(0)$$

$$\frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \phi_1^h = \rho(h)$$

정상성을 만족하기 위해서 $|\phi_1| < 1$가 되어야 함을 확인했기 때문에,

h가 커짐에 따라 **AR모형의 ACF는 지수적으로 감소함**을 알 수 있음.

AR 모형 | ⑤ AR 모형의 PACF

AR(1) 모형을 이용하여 PACF를 계산해보자.

STEP 1) AR(p), 식으로 표현

$$\hat{X}_{k+1} = \phi_1 X_k + \phi_2 X_{k-1} + \cdots + \phi_p X_{k+1-p}$$

X_{k+1}을 p 시점 이전 값들로만 표현

AR 모형 | ⑤ AR 모형의 PACF

AR(1) 모형을 이용하여 PACF를 계산해보자.

STEP 2) PACF를 유도하기 위해 식 풀어서 쓰기

$$\hat{X}_{k+1} = \phi_1 X_k + \phi_2 X_{k-1} + \cdots + \phi_p X_{k+1-p} + 0X_{k-p} + \cdots + 0X_1$$

위 식과 PACF의 성질을 이용, AR 모형의 PACF를 정리하면 …

$$\alpha(0) := 1, \qquad \alpha(p) = \phi_p \quad \& \quad \alpha(k) = 0 \quad \text{if } k > p$$

AR 모형 | ⑤ AR 모형의 PACF

AR(1) 모형을 이용 PACF를 계산해보자.

STEP 2) PACF를 유도하기 위해 식 풀어서 쓰기

즉, AR 모형의 PACF는 p 시차 전까지만 존재하며,

$$\hat{X}_{k+1} = \phi_1 X_k + \phi_2 X_{k-1} + \cdots + \phi_p X_{k+1-p} + 0X_{k-p} + \cdots + 0X_1$$

p 이후로는 모두 0이 됨.

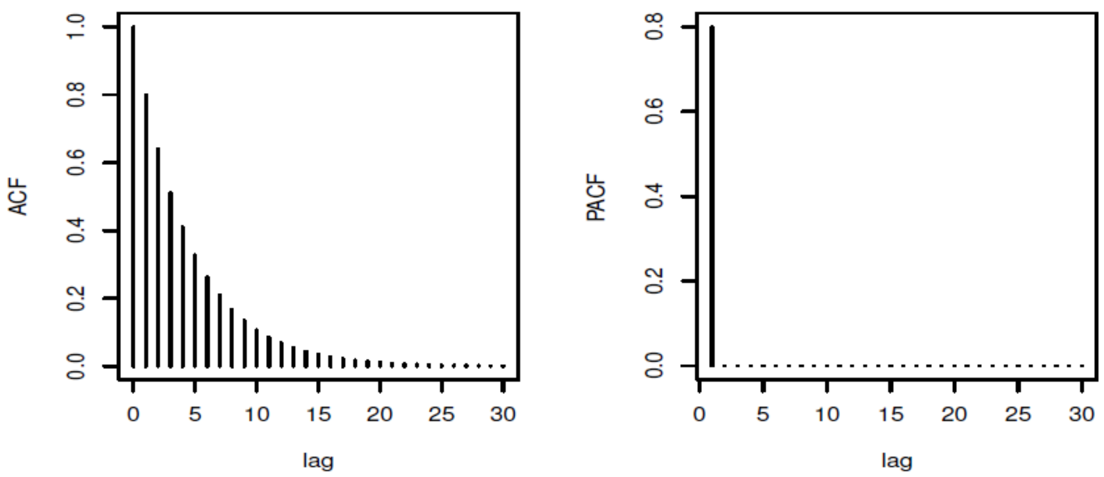
이를 **"AR(p) 모형의 PACF는 시차 p 이후에 절단된다"**라고 표현

위 식과 PACF의 성질을 이용, AR 모형의 PACF를 정리하면 …

$$\alpha(0) := 1, \qquad \alpha(p) = \phi_p \;\; \& \;\; \alpha(k) = 0 \;\; if \; k > p$$

AR 모형 | AR 모형의 ACF & PACF

AR(1) : ACF　　　　AR(1) : PACF



그림을 통해 AR 모형의 ACF와 PACF를 살펴보면,

앞에서 확인한 바와 같이 **ACF는 지수적으로 감소,**

PACF는 p 이후(위 그림에서 p=1)에 절단된 양상을 보이고 있음.

5

MA 모형

MA 모형 | ① 정의

MA 모형

과거 시점의 **오차항**을 이용해 관측값을 설명하는 모형

MA(1)모형

$$X_t = Z_t + \theta_1 Z_{t-1}$$

MA(q)모형

$$X_t = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \theta_2 Z_{t-2} + \cdots + \theta_q Z_{t-q}$$

모형의 Z_t는 $Z_t \sim WN(0, \sigma^2)$를 만족하는 백색잡음

MA 모형 | ② 특성방정식

후향연산자 이용 표현식

$$X_t = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \theta_2 Z_{t-2} + \cdots + \theta_q Z_{t-q}$$

$$= Z_t + \theta_1 B Z_t + \theta_2 B^2 Z_t - \cdots + \theta_q B^q Z_t$$

$$= \left(1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \cdots + \theta_q B^q\right) Z_t$$

이 부분이 바로 MA(q)의 특성방정식!

$$X_t = \theta(B) Z_t$$

MA(q)의 특성방정식은 $\theta(B)$로 표현한다.

MA 모형 | ② 특성방정식

MA(q)의 표현법 정리

1) 정의를 이용

$$X_t = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \theta_2 Z_{t-2} + \cdots + \theta_q Z_{t-q}$$

2) 후향연산자를 이용

$$X_t = Z_t + \theta_1 B Z_t + \theta_2 B^2 Z_t - \cdots + \theta_q B^q Z_t$$

3) 특성방정식을 이용

$$X_t = \theta(B) Z_t$$

MA 모형 | ③ MA 모형의 조건

정상성	시계열의 확률적 특성이 시점에 의존하지 않음
인과성	t 시점의 관측값이 과거시점의 오차항으로 설명
가역성	t 시점의 오차항이 과거 시점의 관측값으로 설명

AR 모형에는 없는 조건!

MA 모형 | ③ MA 모형의 조건

정상성	시계열의 확률적 특성이 시점에 의존하지 않음
인과성	t 시점의 관측값이 과거시점의 오차항으로 설명
가역성	t 시점의 오차항이 과거 시점의 관측값으로 설명

AR 모형에는 없는 조건!

정상성과 인과성

MA모형은 백색잡음을 만족하는

오차들의 선형결합

정상성과 인과성 만족

가역성 조건 만족 여부만 확인하면 된다!

MA 모형 | ③ MA 모형의 조건 - 가역성

가역성

t 시점의 오차항이 과거 시점의 관측값으로 설명되는 특성

$\sum_{j=0}^{\infty}|\pi_j| < \infty$ 인 $\{\pi_j\}$가 존재하며, 아래 식을 만족할 때 가역성을 가짐

$$\boxed{Z_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j X_{t-j} \quad \text{for all } t}$$

즉, Z_t에 대한 식을 **X_t에 대한 식으로 표현할 수 있는지** 여부를 따지는 조건

MA 모형 | ③ MA 모형의 조건 - 가역성

MA(1)을 통해 가역성 만족 여부를 확인해보자.

$$X_t = Z_t + \theta Z_{t-1} = (1 + \theta B)Z_t$$

$$(1 + \theta B)^{-1} X_t = Z_t$$

$$(1 + \theta B)^{-1} = \frac{1}{1 - (-\theta B)} = 1 - \theta B + (\theta B)^2 - (\theta B)^3 + \cdots$$

MA(1) 식을 X_t 에 대해 정리한 후 식을 풀어보면 **무한 등비급수의 합** 형태

가역성 조건은 $|\theta| < 1$일 때만 성립하며,

이는 특성방정식 $\theta(B) = 0$의 근의 절댓값이 1보다 커야 한다는 조건과 동치

MA 모형 | ④ MA 모형의 ACF

MA(1) 모형을 이용하여 ACF를 계산해보자.

STEP 1) MA(1), 식으로 표현

양 변에 X_{t-h}를 곱하고, 기댓값을 취하여 ACF를 구하도록 한다.

$$X_{t-h}X_t = X_{t-h}(Z_t + \theta_1 Z_{t-1}) = X_{t-h}Z_t + \theta_1 X_{t-h}Z_{t-1}$$

$$\gamma(h) = \mathrm{Cov}(X_{t-h}, Z_t + \theta_1 Z_{t-1}) = \mathrm{Cov}(Z_{t-h} + \theta_1 Z_{t-h-1}, Z_t + \theta_1 Z_{t-1})$$

MA 모형 | ④ MA 모형의 ACF

MA(1) 모형을 이용하여 ACF를 계산해보자.

STEP 2) h의 범위에 따른 $\gamma(h)$ 확인

h=0	$\gamma(0)$	$\mathrm{Cov}(Z_t + \theta_1 Z_{t-1}, Z_t + \theta_1 Z_{t-1}) = \sigma^2 + \theta_1^2\sigma^2 = (1+\theta_1^2)\sigma^2$
h=1	$\gamma(1)$	$\mathrm{Cov}(Z_{t-1} + \theta_1 Z_{t-2}, Z_t + \theta_1 Z_{t-1}) = \theta_1\sigma^2$
h≥2	$\gamma(h)$	$\mathrm{Cov}(Z_{t-h} - \theta_1 Z_{t-h-1}, Z_t - \theta_1 Z_{t-1}) = 0$

MA 모형 | ④ MA 모형의 ACF

MA(1) 모형을 이용하여 ACF를 계산해보자.

유도된 식을 간단히 정리하면 …

h=0		$= (1+\theta_1^2)\sigma^2$
h=1		$\theta_1\sigma^2$
h≥2	$\gamma(h)$	$cov(Z_{t-h}-\theta_1 Z_{t-h-1}, Z_t-\theta_1 Z_{t-1}) = 0$

$$\rho(k) = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \begin{cases} \dfrac{\theta}{(1+\theta^2)}, & k = 1 \\ 0 \quad , & k \geq 2 \end{cases}$$

즉, ACF는 시차 q 이후에 **단절**

MA 모형 | ⑤ MA 모형의 PACF

MA모형의 PACF는 Crammer 공식을 통해 구할 수 있음.

MA(1) 모형의 PACF

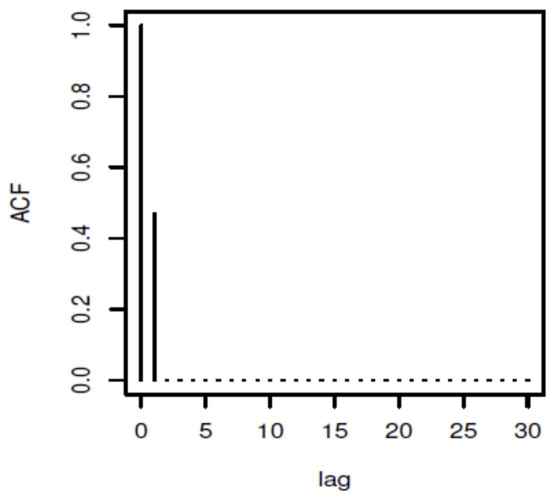
$$\alpha(k) = \phi_{kk} = \frac{-(-\theta)^k}{(1 + \theta^2 + \cdots + \theta^{2k})}, k \geq 1$$

MA모형은 $|\theta| < 1$일 때 성립함을 배웠으므로,

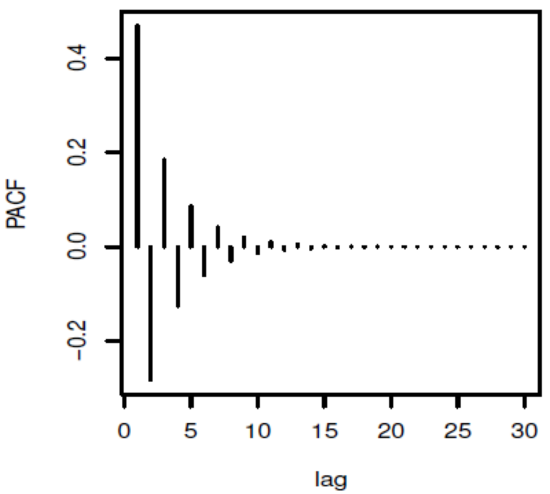
위 식은 **시차 k가 커질수록 0에 수렴**

MA 모형 | MA 모형의 ACF & PACF

MA(1) : ACF



MA(1) : PACF



그림을 통해 MA 모형의 ACF와 PACF를 살펴보면,

앞에서 확인한 바와 같이 **ACF는 시차 1에서 절단,**

PACF는 점점 0으로 수렴된 양상을 보이고 있음.

6

AR과 MA의 쌍대성

AR 모형과 MA 모형의 쌍대성

AR 모형과 MA 모형의 쌍대성

유한차수 AR 모형은 무한차수 MA로,

유한차수 MA 모형은 무한차수 AR로 표현될 수 있는 특성

AR(1) -> MA(∞)

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + Z_t$$

$$= \phi_1(\phi_1 X_{t-2} + Z_{t-1}) + Z_t$$

$$= \phi_1^2 X_{t-2} + \phi_1 Z_{t-1} + Z_t$$

$$= \phi_1^2(\phi_1 X_{t-3} + Z_{t-2}) + \phi_1 Z_{t-1} + Z_t = \phi_1^3 X_{t-3} + \phi_1^2 Z_{t-2} + \phi_1 Z_{t-1} + Z_t$$

$$= \cdots = \phi_1^{M+1} X_{t-M-1} + \Sigma_{j=0}^{M} \phi_1{}^{j} Z_{t-j}$$

AR 모형과 MA 모형의 쌍대성

AR 모형과 MA 모형의 쌍대성

유한차수 AR 모형은 무한차수 MA로,
유한차수 MA 모형은 무한차수 AR로 표현될 수 있는 특성

AR(1) -> MA(∞)

AR 모형의 성질 및 조건을 활용하면

$X_t = \Sigma_{j=0}^{\infty}\phi_1^j Z_{t-j}$로 **MA 모형**이 됨

$$= \phi_1(\phi_1 X_{t-2} + Z_{t-1}) + Z_t$$

$$= \phi_1^2 X_{t-2} + \phi_1 Z_{t-1} + Z_t$$

$$= \phi_1^2(\phi_1 X_{t-3} + Z_{t-2}) + \phi_1 Z_{t-1} + Z_t = \phi_1^3 X_{t-3} + \phi_1^2 Z_{t-2} + \phi_1 Z_{t-1} + Z_t$$

$$\boxed{= \cdots = \phi_1^{M+1} X_{t-M-1} + \Sigma_{j=0}^{M}\phi_1^{j} Z_{t-j}}$$

AR 모형과 MA 모형의 쌍대성

MA(1) -> AR(∞)

$$X_t = \theta_1 B Z_t + Z_t$$

$$X_t = (1 + \theta_1 B) Z_t \rightarrow Z_t = \frac{1}{1 - (-\theta_1 B)} X_t$$

$$(1 - \theta_1 B + \theta_1^2 B^2 - \cdots) X_t = Z_t$$

$$X_t - \theta_1 B X_t + \theta_1^2 B^2 X_t - \cdots = Z_t$$

$$X_t = \theta_1 B X_t - \theta_1^2 B^2 X_t + \cdots + Z_t$$

관측값이 과거 관측값과 현 시점 오차항으로 표현되어

AR 모형으로 표현

7

ARMA

7 ARMA

AR모형과 MA모형의 한계

AR 모형이나 MA 모형만 사용할 경우 **모수 p나 q가 너무 커져**

효율성이 떨어지고 해석이 어려워짐

모수의 절약을 위해 AR 모형과 MA 모형을 반영한 **ARMA모형** 사용

7 ARMA

ARMA

ARMA 모형 수식

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} - \cdots - \phi_p X_{t-p} = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \theta_2 Z_{t-2} + \cdots + \theta_q Z_{t-q}$$

ARMA 특성방정식

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} - \cdots - \phi_p X_{t-p}$$

$$= Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \theta_2 Z_{t-2} + \cdots + \theta_q Z_{t-q}$$

$$X_t - \phi_1 B X_t - \phi_2 B^2 X_t - \cdots - \phi_p B^p X_t$$
$$= Z_t + \theta_1 B Z_t + \theta_2 B^2 Z_{t-2} + \cdots + \theta_q B^q Z_t$$

$$\left(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p\right) X_t = \left(1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \cdots + \theta_q B^q\right) Z_t$$

$$\phi(B) X_t = \theta(B) Z_t$$

ARMA

ARMA 모형 수식

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} - \cdots - \phi_p X_{t-p} = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \theta_2 Z_{t-2} + \cdots + \theta_q Z_{t-q}$$

ARMA 특성방정식

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} - \cdots - \phi_p X_{t-p}$$
$$= Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \theta_2 Z_{t-2} + \cdots + \theta_q Z_{t-q}$$

AR 모형의 특성방정식

MA 모형의 특성방정식

$$X_t - \phi_1 B X_t - \phi_2 B^2 X_t - \cdots - \phi_p B^p X_t$$
$$= Z_t + \theta_1 B Z_t + \theta_2 B^2 Z_{t-2} + \cdots + \theta_q B^q Z_t$$

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p) X_t = (1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \cdots + \theta_q B^q) Z_t$$

$$\phi(B) X_t = \theta(B) Z_t$$

ARMA | 모형의 조건

정상성	시계열의 확률적 특성이 시점에 의존하지 않음
인과성	t 시점의 관측값이 과거시점의 오차항으로 설명
가역성	t 시점의 오차항이 과거 시점의 관측값으로 설명
식별성	주어진 파라미터 조합에 대해 단 하나의 모형이 대응되는 특성

새로 추가된 조건 !

ARMA | 식별성

$$X_t = Z_t$$

위 식은 $(1-\phi B)X_t = (1+\theta B)Z_t \leftrightarrow \phi = -\theta$을 만족하는 ARMA(1, 1)

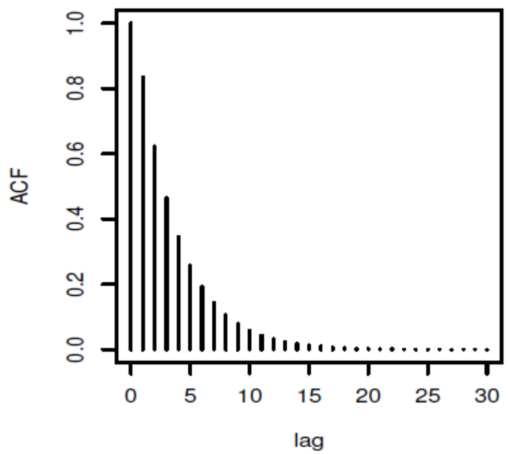
그러나, $(1-\phi B) = (1+\theta B)$ 조건 만족시

$X_t = Z_t$, 즉 WN이 되어 모형 식별 어려우므로

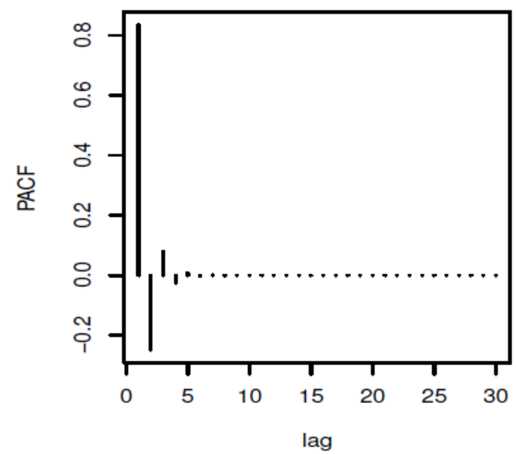
추가적으로 $\phi + \theta \neq 0$ 식별성 조건 필요

ARMA 모형 | ARMA 모형의 ACF & PACF

ARMA(1,1) : ACF



ARMA(1,1) : PACF



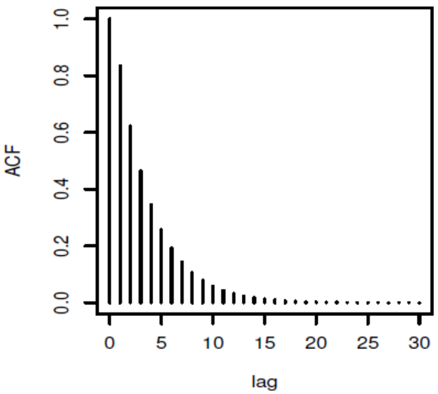
그림을 통해 ARMA 모형의 ACF와 PACF를 살펴보면,

두 그래프 모두 지수적으로 감소하거나

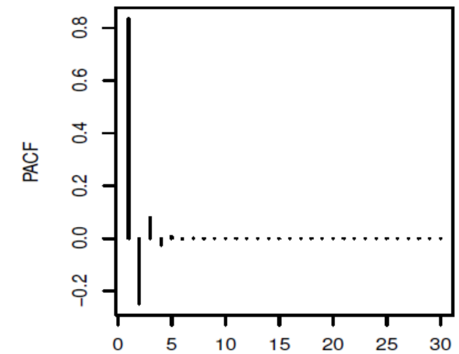
싸인함수 형태로 소멸되는 양상이 나타남

ARMA 모형 | ARMA 모형의 ACF & PACF

ARMA(1,1) : ACF



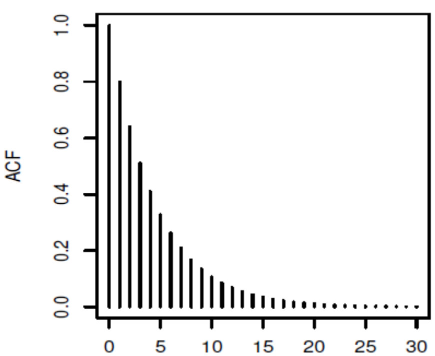
ARMA(1,1) : PACF



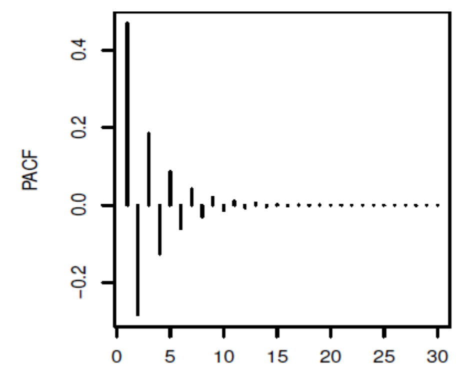
ARMA ACF 와 AR ACF,
ARMA PACF 와 MA PACF 그래프가 유사

모형 식별을 위한
추가적인 방법 필요

AR(1) : ACF



MA(1) : PACF



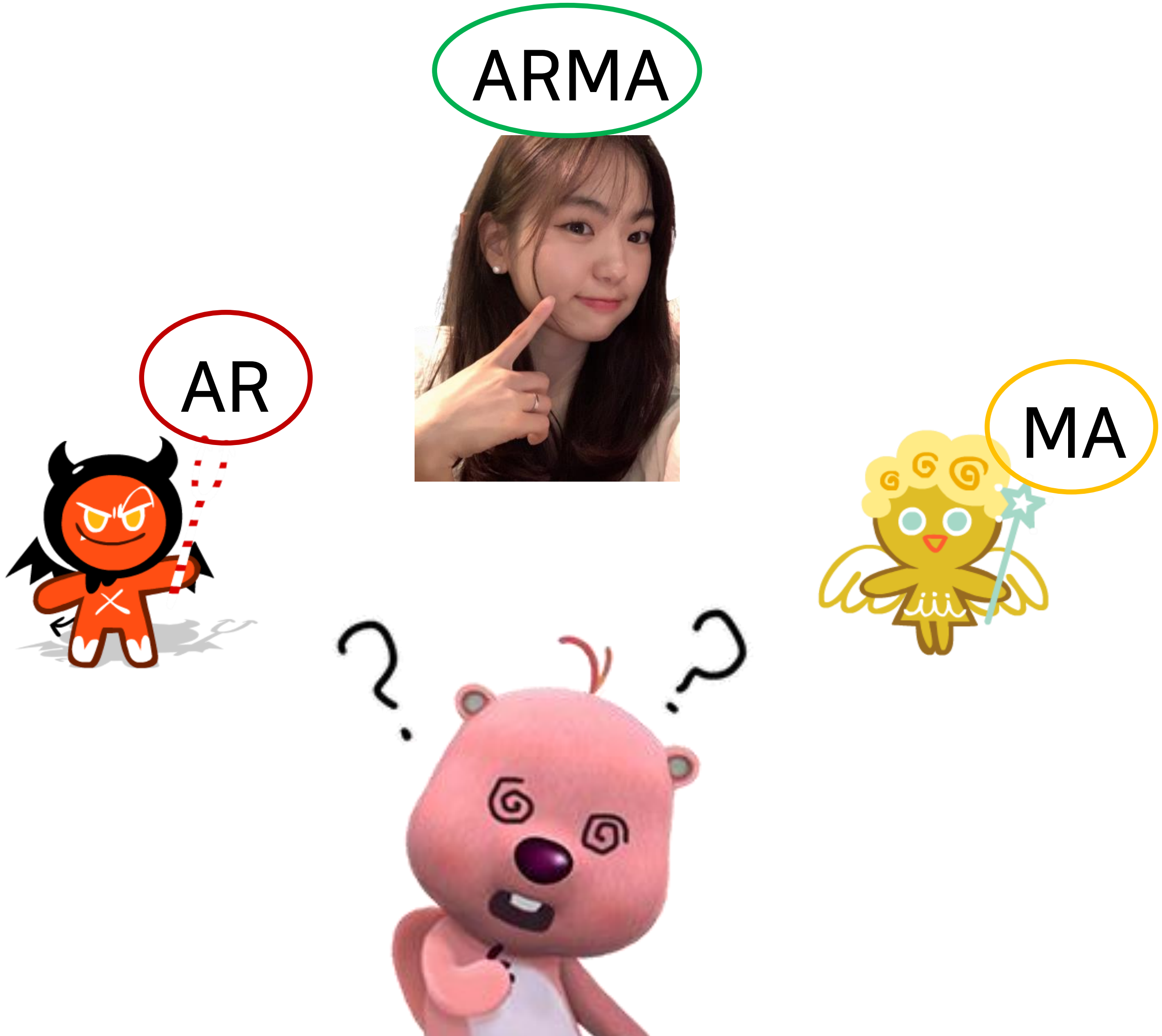
모형적합에서 이를 알아보자!

8

모형 적합

8 모형 적합

모형 식별



모형 식별

STEP 1) 사용할 모형과 차수 결정

AR / MA : ACF 또는 PACF 확인을 통해 차수까지 쉽게 결정 가능

ARMA : ACF와 PACF 모두 지수적으로 감소

→ IC(Information Criteria) 사용

IC를 가장 작게 만드는 모형 선택하여 분석 !

모형 식별

① AIC (Akaike Information Criteria)

$$-2\ln L_n(\hat{\theta}) + 2(p+q+1)$$

IID 가정

② AICC (AIC bias corrected)

$$-2\ln L_n(\hat{\theta}) + \frac{2(p+q+1)n}{n-(p+q+1)+1}$$

time dependency 에 대한 correction

③ BIC(Bayesian information Criteria

$$-2\ln L_n(\hat{\theta}) + (p+q+1)\ln n$$

모수 추정

STEP 2) 모수 추정

모수의 차수를 결정했다면, 파라미터 ϕ, θ, σ^2을 추정

① 최대가능도추정법 (MLE)

관측된 시계열의 **결합확률밀도함수의 가능도 함수를 최대화**하는 모수를 추정량으로 함

② 최소제곱법 (LSE)

오차 제곱합이 가장 작게 되도록 모수의 추정량을 구함

③ 적률추정법 (MME/MoM)

모집단의 적률을 상응하는 **표본의 적률로 대체**한 후, 방정식을 풀어 모수의 추정량을 구함

모형 진단

STEP 3) 모형 진단

모형 식별과 모수 추정을 마쳤다면, 모형 적합성을 진단

모수에 대한 검정

1) 모형의 조건을 만족하는지 확인 : 정상성, 가역성, 식별성 조건 만족 여부

2) 모수의 유효성 확인 : 모수가 0이 아니라는 귀무가설 검정

모형 진단

STEP 3) 모형 진단

모형 식별과 모수 추정을 마쳤다면, 모형 적합성을 진단

잔차에 대한 검정

1) 추세, 계절성, 이상치가 없는지 확인
2) WN(0,σ^2)을 따르는지 확인 (자기상관성 유무)
3) 정규성을 만족하는지 확인

잔차에 대한 ACF, PACF 그래프 / Ljung-Box test / McLeod-Li test / Different sign test 등

예측 (Prediction)

STEP 4) 예측

과거의 모든 정보를 알고 있다고 가정하는 infinite한 방법

알고 있는 정보만을 사용해 예측하는 finite한 방법

가지고 있는 데이터의 **선형결합**을 활용해 미래를 예측

예측 (Prediction)

예측 시점을 선형결합으로 표현

$$P_n X_{n+h} = a_0 \cdot 1 + a_1 X_n + a_2 X_{n-1} + \cdots + a_n X_1$$

n개의 자료를 이용해 n+h 시점을 예측한 선형결합

MSPE 최소화

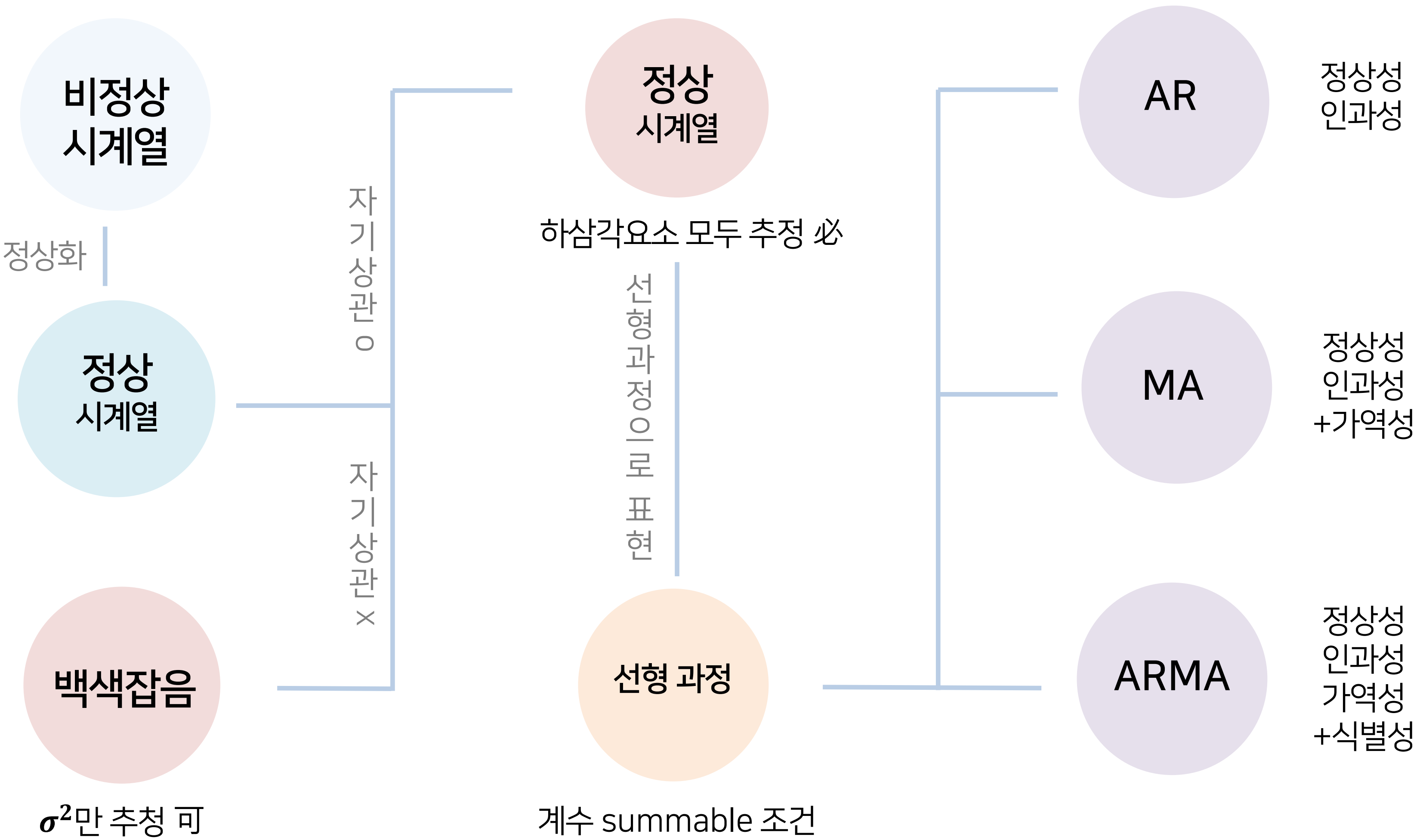
$$\mathrm{MSPE} = E[X_{n+h} - P_n X_{n+h}]^2 = E[X_{n+h} - a_0 \cdot 1 + a_1 X_n + a_2 X_{n-1} + \cdots + a_n X_1]^2$$

위 식을 최소화하는 계수 P_n 추정

회귀분석의 LSE와 동일한 계산 방식

흐름정리

시계열 자료 분석 흐름정리



감사합니다