선형대수학팀

3팀

김다민
이지원
조성우
김수인
방건우

CONTENTS

1

선형대수학

선형대수학의 개념

선형대수학 *Linear algebra*

벡터, 행렬, 선형 변환, 선형 연립 방정식 등을 연구하는 대수학의 한 분야

선형 VS 수학 아님

연립 방정식을 표현하기 위해 벡터와 행렬을 사용

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

2차원 이상의 공간을 가지는 데이터를 다루는데 효과적

선형대수학의 필요성

현실 속 데이터셋은 키, 몸무게로 끝나지 않음

경우에 따라 수십만 차원의 데이터를 다루어야 함

Ex)유전체 데이터,추천시스템…

Dataset Characteristics	Subject Area	Associated Tasks
Multivariate, Time-Series	Computer Science	Classification, Regression
Feature Type	**# Instances**	**# Features**
Real	2205	43680

Dataset Characteristics	Subject Area	Associated Tasks
Multivariate, Time-Series	Computer Science	Classification, Regression
Feature Type	**# Instances**	**# Features**
Real	180	150000

선형대수학의 필요성

현실 속 데이터셋은 키, 몸무게로 끝나지 않음

경우에 따라 수십만 차원의 데이터를 다루어야 함

Ex)유전체 데이터,추천시스템…

고차원 데이터를 이해하고 다루기 위해 필요한 여러 방법론들이

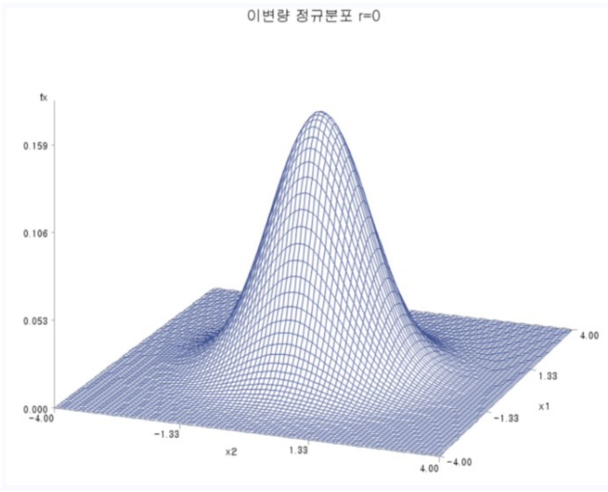
선형대수학에 근간을 둠

선형대수학의 필요성

통계학에서의 선형대수학

다변량 분석, 회귀분석, 머신러닝과 딥러닝 뿐만 아니라

다양한 통계 패키지 & 라이브러리에서 행렬대수학을 사용



$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} Var(X_1) & \cdots & Cov(X_1, X_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(X_n, X_n) & \cdots & Var(X_n) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix}$$

2

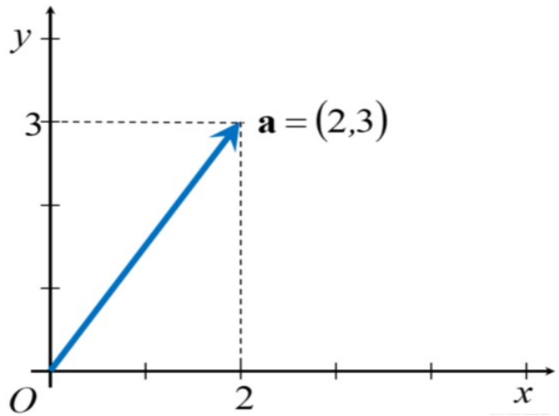
벡터와 행렬

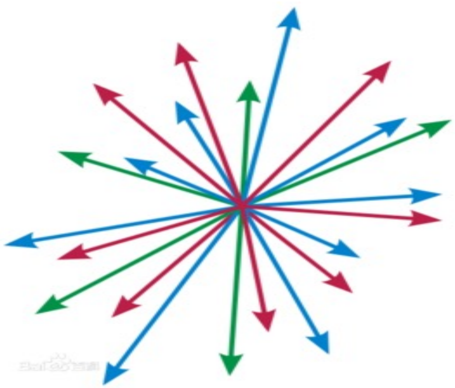
벡터

벡터 *Vector*

선형대수학의 **기본 단위**, 벡터 개념을 통해 고차원 자료를 표현

물리적으로 **방향**과 **크기**로 구성됨





벡터의 의미

컴퓨터과학적 의미

순서가 있는 숫자의 **리스트**로

행렬, 데이터프레임과 같이 데이터 형태의

기본 단위를 이룸

키:180, 몸무게:76, 나이:20

$$\begin{bmatrix} 180 \\ 76 \\ 20 \end{bmatrix}$$

기하학적 의미

값을 나열하여 모아 놓은 개념으로

벡터를 구성하는 값들을 **성분**이라 하고

성분의 개수가 곧 벡터의 **차원**

벡터의 의미

컴퓨터과학적 의미

순서가 있는 숫자의 리스트로

행렬, 데이터프레임과 같이 데이터 형태의

기본 단위를 이룸

키:180, 몸무게:76, 나이:20

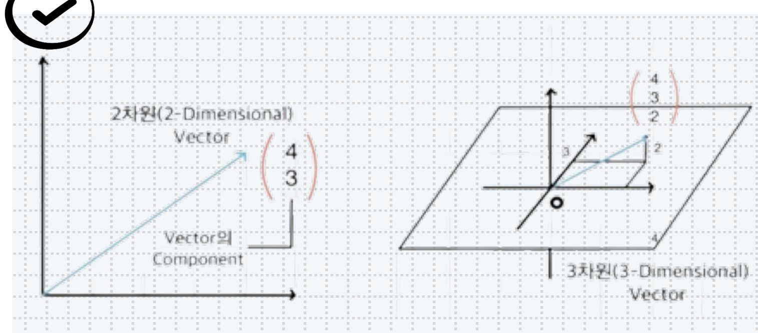
$$\begin{bmatrix} 180 \\ 76 \\ 20 \end{bmatrix}$$

기하학적 의미

값을 나열하여 모아 놓은 개념으로

벡터를 구성하는 값들을 **성분**이라 하고

성분의 개수가 곧 벡터의 **차원**



벡터의 연산

벡터의 연산법칙

벡터의 기본 연산은 크게 **상수배**와

벡터 간 덧셈/뺄셈으로 구성

(1) $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$

(2) $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$

(3) $\mathbf{u}+0=0+\boldsymbol{u}$

(4) $\boldsymbol{u}+(-\boldsymbol{u})=-\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}=0$

(5) $c(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=c\boldsymbol{u}+c\boldsymbol{v}$

(6) $(c+d)\boldsymbol{u}=c\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{u}$

(7) $c(d\boldsymbol{u})=(cd)\boldsymbol{u}$

(8) $1\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}$

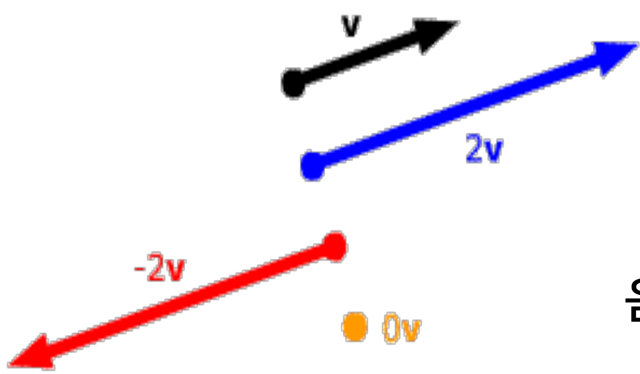
$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$는 벡터, c, d는 스칼라

벡터의 연산의 기하학적 의미

상수배 *Scalar multiplication*

스칼라 c를 곱하는 벡터의 곱셈은

기하학적으로 벡터의 **길이를** c**배** 한다는 것을 의미



벡터 $\boldsymbol{v}$ 에 **양수** 2를 곱해주면

$\boldsymbol{v}$와 같은 방향으로 2배 길어지며

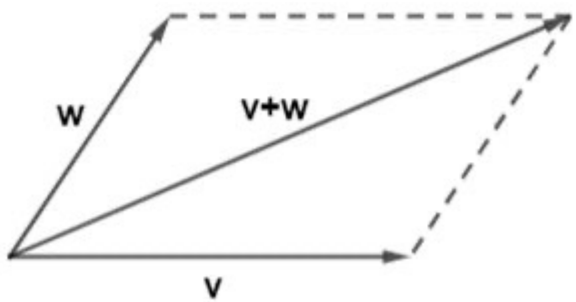
음수 -2를 곱하면 $\boldsymbol{v}$의 반대방향으로 2배 길어짐

벡터의 연산의 기하학적 의미

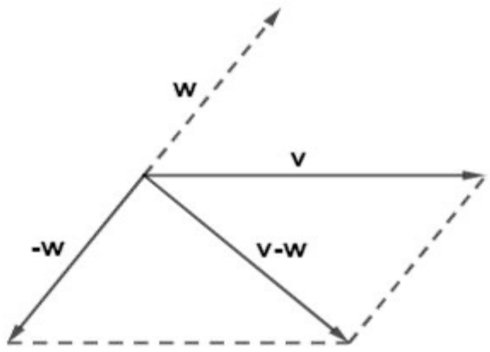
벡터 간 덧셈/뺄셈

원점에서 벡터 $\boldsymbol{v}$만큼 화살표 방향으로 이동하고,

$\boldsymbol{w}$만큼 추가로 이동하면 만들어지는 **평행사변형**의 대각선이 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$



$\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$



$\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}$

행렬

행렬의 개념

실수를 직사각형 모양의 **행**과 **열**로 배열한 것을 의미

원소(element): 배열 내의 수를 의미하여 **성분(entry)**라고도 함

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & & A_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$ 행렬

행렬의 연산

상수배

모든 원소에 같은 상수를 곱함

$$2 \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$1/2 \times \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

행렬의 합

크기가 같은 두 행렬에서

같은 위치에 있는 원소끼리 합함

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

행렬의 곱

앞 행렬의 i번째 행, 뒷 행렬의

j번째 열을 곱해 ij번째 원소를 구함

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 20 \\ 30 & 44 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1\times2 + 2\times6 & 1\times4 + 2\times8 \\ 3\times2 + 4\times6 & 3\times4 + 4\times8 \end{bmatrix}$$

앞 행렬의 열과 뒷 행렬의 행의 크기를 맞춰야 함

행렬의 연산

상수배

모든 원소에 같은 상수를 곱함

$$2 \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$1/2 \times \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

행렬의 합

크기가 같은 두 행렬에서

같은 위치에 있는 원소끼리 합함

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

행렬의 곱

앞 행렬의 i번째 행, 뒤 행렬의

j번째 열을 곱해 ij번째 원소를 구함

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 20 \\ 30 & 44 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1\times2 + 2\times6 & 1\times4 + 2\times8 \\ 3\times2 + 4\times6 & 3\times4 + 4\times8 \end{bmatrix}$$

앞 행렬의 열과 뒤 행렬의 행의 크기를 맞춰야 함

행렬의 연산

상수배

모든 원소에 같은 상수를 곱함

$$2 \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$1/2 \times \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

행렬의 합

크기가 같은 두 행렬에서

같은 위치에 있는 원소끼리 합함

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

행렬의 곱

앞 행렬의 i번째 행, 뒷 행렬의

j번째 열을 곱해 ij번째 원소를 구함

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 20 \\ 30 & 44 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1\times2 + 2\times6 & 1\times4 + 2\times8 \\ 3\times2 + 4\times6 & 3\times4 + 4\times8 \end{bmatrix}$$

앞 행렬의 열과 뒷 행렬의 행의 크기를 맞춰야 함

행렬의 종류

영행렬 *Zero matrix*

모든 원소가 0인 행렬

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

대각행렬 *Diagonal matrix*

대각 성분을 제외한

다른 성분이 모두 0인 행렬

$$\begin{bmatrix}10 & 0\\0 & 4\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

단위행렬 *Identity matrix*

대각행렬 중 주대각선이 1인 행렬

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}1 & \cdots & 0\\\vdots & \ddots & \vdots\\0 & \cdots & 1\end{bmatrix}$$

행렬의 종류

영행렬 *Zero matrix*

모든 원소가 0인 행렬

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

대각행렬 *Diagonal matrix*

대각 성분을 제외한

다른 성분이 모두 0인 행렬

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

단위행렬 *Identity matrix*

대각행렬 중 주대각선이 1인 행렬

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

행렬의 종류

영행렬 *Zero matrix*

모든 원소가 0인 행렬

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

대각행렬 *Diagonal matrix*

대각 성분을 제외한

다른 성분이 모두 0인 행렬

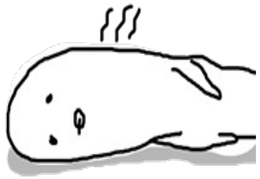
$$\begin{bmatrix}10 & 0\\0 & 4\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

단위행렬 *Identity matrix*

대각행렬 중 주대각선이 1인 행렬

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}1 & \cdots & 0\\\vdots & \ddots & \vdots\\0 & \cdots & 1\end{bmatrix}$$

행렬의 종류



삼각행렬 *Triangular matrix*

정방행렬 중 주 대각선 위 혹은 아래 성분이 모두 0인 행렬

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

전치행렬 *Transpose matrix*

행과 열을 교환하여 얻는 행렬

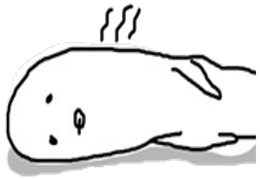
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

대칭행렬 *Symmetric matrix*

자기자신과 전치행렬이 같은 행렬

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

행렬의 종류



삼각행렬 *Triangular matrix*

정방행렬 중 주 대각선 위 혹은 아래 성분이 모두 0인 행렬

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

전치행렬 *Transpose matrix*

행과 열을 교환하여 얻는 행렬

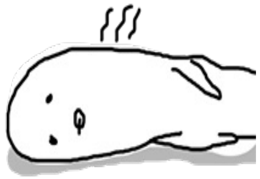
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

대칭행렬 *Symmetric matrix*

자기자신과 전치행렬이 같은 행렬

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

행렬의 종류



삼각행렬 *Triangular matrix*

정방행렬 중 주 대각선 위 혹은 아래 성분이 모두 0인 행렬

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

전치행렬 *Transpose matrix*

행과 열을 교환하여 얻는 행렬

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

대칭행렬 *Symmetric matrix*

자기자신과 전치행렬이 같은 행렬

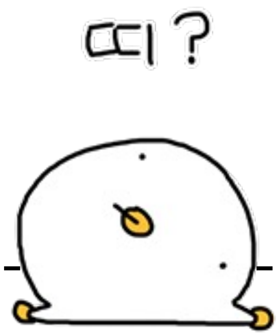
$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3

벡터와 행렬의 미분

행렬 미분

행렬 미분을 배울 필요성



LSE, Gradient Descent 등 **머신러닝의 최적화 기법**에서

벡터, 행렬 미분을 종종 접하게 됨.

행렬 미분을 정확히 알고 있으면 최적화 기법을 이해하는 데 도움

행렬 미분

벡터나 행렬을 입력하는 함수

벡터를 입력으로 갖는 함수

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2)$$

여러 개의 입력을 가지는 **다변수 함수**는 **벡터를 입력으로 받는 함수**로 볼 수 있음

확장!

행렬을 입력으로 갖는 함수

$$f\left(\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}\right) = f(X) = f(x_{11}, \dots, x_{22})$$

행렬 미분

벡터나 행렬을 출력하는 함수

벡터를 출력으로 받는 함수

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_{1(x)} \\ f_{2(x)} \end{bmatrix}$$

행렬을 출력으로 갖는 함수

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_{11(x)} & f_{12(x)} \\ f_{21(x)} & f_{22(x)} \end{bmatrix}$$

벡터나 행렬을 출력하는 함수는 **여러 개의 함수**를 **합쳐 놓은 것**으로 이해

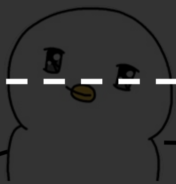
행렬 미분

행렬 미분 *matrix differentiation*

행렬을 입력 또는 출력으로 가지는 함수에 대해 미분하는 것

정확하게는 미분이 아닌 편미분!

행렬 미분



행렬미분 (matrix differentiation)

행렬을 입력 또는 출력으로 가지는 함수에 대해 미분하는 것

기존의 미분은 스칼라 값을 입출력하는 함수에 대해 다루었다면

행렬 미분은 행렬을 입출력하는 함수에 대해 다룸

정확하게는 미분이 아닌 편미분!

행렬 미분

행렬 미분은 다음과 같은 4가지 경우로 나눌 수 있음

행렬 미분

- **스칼라를 벡터로 미분** 주로 입력이 벡터, 출력이 스칼라
- **벡터를 스칼라로 미분** 주로 입력이 스칼라, 출력이 벡터
- **벡터를 벡터로 미분** 주로 입력이 벡터, 출력이 벡터
- **스칼라를 행렬로 미분** 주로 입력이 행렬, 출력이 스칼라

행렬 미분

행렬미분은 다음과 같은 4가지 경우로 나눌 수 있음

행렬미분

주로 입력이 벡터, 출력이 스칼라

주로 입력이 스칼라, 출력이 벡터

행렬 미분의 4가지 경우에 대해 하나씩 알아보자 ~!

벡터를 벡터로 미분 — 주로 입력이 벡터, 출력이 벡터

스칼라를 행렬로 미분 — 주로 입력이 행렬, 출력이 스칼라

① 스칼라를 벡터로 미분

그래디언트 벡터 (gradient vector)

스칼라를 벡터로 미분하는 경우에는 결과를 열벡터로 표시하며,

이렇게 만들어진 벡터를 **그래디언트 벡터**라 부름

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_N} \end{bmatrix}$$

① 스칼라를 벡터로 미분

그래디언트 벡터 (gradient vector)

스칼라를 벡터로 미분하는 경우에는 결과를 열벡터로 표시하며,
이렇게 만들어진 벡터를 그래디언트 벡터라 부름

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_N} \end{bmatrix}$$

다변수 함수를 미분하여 **그래디언트 벡터**를 구할 때
유용하게 쓰이는 것이 **행렬미분법칙**!

① 스칼라를 벡터로 미분

행렬미분법칙

행렬미분법칙1: 선형 모형

선형 모형을 미분하면

그래디언트 벡터는 가중치 벡터

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^T\mathbf{x}, \quad \nabla f = \frac{\partial \mathbf{w}^T\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{x}^T\mathbf{w}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{w}$$

(Proof)

$$\frac{\partial \mathbf{w}^T\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\mathbf{w}^T\mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial(\mathbf{w}^T\mathbf{x})}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial(\mathbf{w}^T\mathbf{x})}{\partial x_N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots w_Nx_N)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial(w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots w_Nx_N)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial(w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots w_Nx_N)}{\partial x_N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix} = \mathbf{w}$$

① 스칼라를 벡터로 미분

행렬미분법칙

행렬미분법칙2: 이차 형식

이차 형식을 미분하면 행렬과 벡터의 곱으로 나타남

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$$

$$\nabla f = \frac{\partial \mathbf{x}^T A\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = (A + A^T)\mathbf{x}$$

① 스칼라를 벡터로 미분

행렬미분법칙

(Proof)

$$\frac{\partial \mathbf{x}^T A \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial(\mathbf{x}^T A \mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial(\mathbf{x}^T A \mathbf{x})}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial(\mathbf{x}^T A \mathbf{x})}{\partial x_N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} x_i x_j\right)}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial\left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} x_i x_j\right)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial\left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} x_i x_j\right)}{\partial x_N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \displaystyle\sum_{i=1}^N a_{1i} x_i + \sum_{i=1}^N a_{i1} x_i \\ \displaystyle\sum_{i=1}^N a_{2i} x_i + \sum_{i=1}^N a_{i2} x_i \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{i=1}^N a_{NI} x_i + \sum_{i=1}^N a_{iN} x_i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N a_{1i} x_i \\ \sum_{i=1}^N a_{2i} x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^N a_{Ni} x_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N a_{i1} x_i \\ \sum_{i=1}^N a_{i2} x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^N a_{iN} x_i \end{bmatrix} = A\mathbf{x} + A^T\mathbf{x} = (A + A^T)\mathbf{x}$$

② 벡터를 스칼라로 미분

출력이 벡터인 함수 $f(x)$를 스칼라 x로

미분하는 경우에는 결과를 행 벡터로 표시

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_M \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{미분}} \frac{\partial f}{\partial x} = \left[\frac{\partial f_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x}, \cdots, \frac{\partial f_M}{\partial x}\right]$$

③ 벡터를 벡터로 미분

$m{\times}1$ 벡터를 $\mathrm{n}{\times}1$ 벡터로 미분하면 입력변수와 출력변수 각각의 조합에 대해 모두 미분이 존재하므로 도함수는 $\mathrm{m}{\times}n$ 행렬이 됨

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left[\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{x}}, \cdots, \frac{\partial f_N}{\partial \mathbf{x}}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_N}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_N}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_M} & \frac{\partial f_2}{\partial x_M} & \cdots & \frac{\partial f_N}{\partial x_M} \end{bmatrix}$$

③ 벡터를 벡터로 미분

행렬미분법칙 3

행렬미분법칙3: 행렬과 벡터의 곱의 미분

행렬 $\mathbf{A}$와 벡터 $\mathbf{x}$의 곱 $A\mathbf{x}$를 벡터 $\mathbf{x}$로 미분하면 행렬 $A^{\boldsymbol{T}}$가 됨

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}, \quad \nabla f(x) = \frac{\partial (A\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = A^{\boldsymbol{T}}$$

$$A\mathbf{x} = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots c_M x_M$$

(Proof)

$$\frac{\partial (A\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial (c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots c_M x_M)^T}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial (c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots c_M x_M)^T}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial (c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots c_M x_M)^T}{\partial x_M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1^T \\ c_2^T \\ \vdots \\ c_M^T \end{bmatrix} = A^{\boldsymbol{T}}$$

④ 스칼라를 행렬로 미분

출력변수 f가 스칼라 값이고 입력변수 X가 행렬인 경우에는
도함수 행렬의 모양이 입력변수 행렬 X와 동일

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_{1,1}} & \frac{\partial f}{\partial x_{1,2}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{1,N}} \\ \frac{\partial f}{\partial x_{2,1}} & \frac{\partial f}{\partial x_{2,2}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{2,N}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_{M,1}} & \frac{\partial f}{\partial x_{M,2}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{M,N}} \end{bmatrix}$$

④ 스칼라를 행렬로 미분

행렬미분법칙 4

행렬미분법칙4: 행렬 곱의 대각성분

두 정방행렬을 곱해서 만들어진 행렬의 대각성분은 스칼라이며,

이 스칼라를 뒤의 행렬로 미분하면 앞 행렬의 전치행렬이 나옴

$$f(X) = tr(WX), \quad W \in \mathbb{R}^{N\times N}, X \in \mathbb{R}^{N\times N}$$

$$\frac{\partial f}{\partial X} = \frac{\partial tr(WX)}{\partial X} = W^T$$

(Proof)

$$tr(WX) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} w_{ji} x_{ij}$$

$$\frac{\partial tr(WX)}{\partial x_{ij}} = w_{ji}$$

4

선형 방정식과 선형 결합

선형 방정식

선형 방정식 *Linear equation*

양의 정수 n에 대하여,

$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ 형태로 표현되는 식

하나 이상의 선형 방정식 집합을 연립 선형 방정식 또는 선형시스템이라고 함

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + am_2x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_n \end{aligned} \rightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{b} \leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

선형 방정식

선형 방정식 *Linear equation*

양의 정수 n에 대하여,

$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ 형태로 표현되는 식

하나 이상의 선형 방정식 집합을 **연립 선형 방정식** 또는 **선형시스템**이라고 함

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + am_2x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{gathered}$$

$$\rightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{b} \leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

선형 결합

상수 a와 변수 x에 대해 덧셈으로 결합된 꼴

$$Ax = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

행렬×벡터의 결과는 두 열벡터의 **선형 결합**

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1\times a & 1\times b \\ 1\times a & 1\times b \end{bmatrix} \rightarrow a\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

선형 결합 Linear Combina

상수 a와 변수 x에 대해 덧셈으로 결합된 꼴

$$Ax = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + anxn$$

Ex) 행렬×벡터의 결과는 두 열벡터의 선형 결합으로 표현 가능!

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1\times a & 1\times b \\ 1\times a & 1\times b \end{bmatrix} \rightarrow a \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

다시 말해,

두 열벡터를 **기저**로 하는 새로운 **벡터공간 생성**

↓

그 공간 위의 좌표 a, b로 결과를 표현

자세히는 Ch. 5에서!

5

선형 변환

선형 변환

선형변환의 수식적 의미

$\mathbb{R}^n$에서 $\mathbb{R}^m$으로 변환하는 변환 T가 다음 조건을 만족하면 **선형 변환**

① $T(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v})$

② $T(k\boldsymbol{u}) = k\times T(\boldsymbol{u})$

Ex) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\mathbb{R}^2$의 벡터 $\boldsymbol{x}$에 2×2 크기의 행렬 A를 곱함 → 새로운 $\mathbb{R}^2$의 벡터 $\boldsymbol{b}$로 변환

선형 변환

선형변환의 수식적 의미

$\mathbb{R}^n$에서 $\mathbb{R}^m$으로 변환하는 변환 T가 다음 조건을 만족하면 **선형 변환**

$$① \ T(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v})$$

$$② \ T(k\boldsymbol{u}) = k \times T(\boldsymbol{u})$$

공간 위의 모든 직선은 변환 이후에도 **직선**

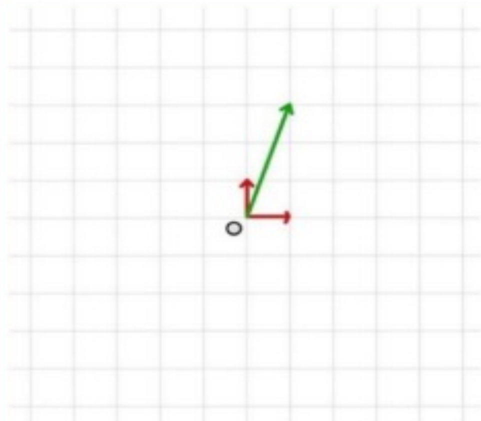
원점은 변환 이후에도 **원점**

Ex) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\mathbb{R}^2$의 벡터 $\boldsymbol{x}$에 2×2 크기의 행렬 A를 곱함 → 새로운 $\mathbb{R}^2$의 벡터 $\boldsymbol{b}$로 변환

선형 변환 *Linear Transformation*

기하학적 의미



변환 전

$$\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} = 1\times\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + 3\times\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

기저벡터와 기저벡터의

선형 결합이 **직선**

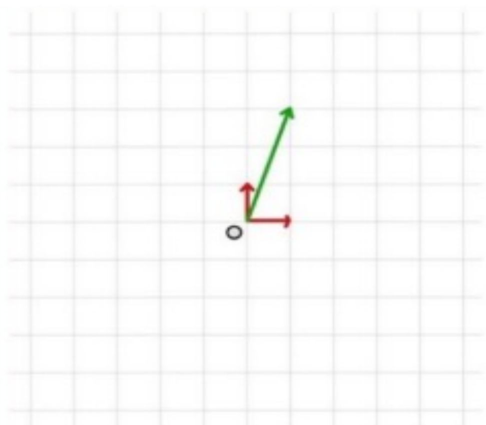
변환 후

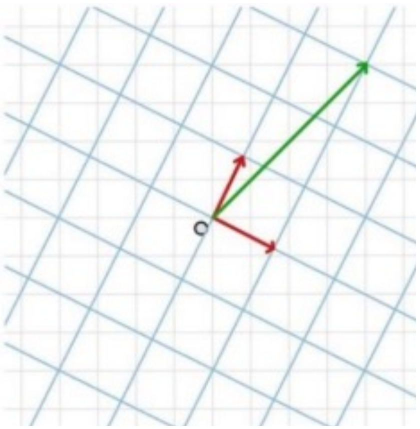
$$\begin{bmatrix}5\\5\end{bmatrix} = 1\times\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} + 3\times\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

여전히 직선인 상태

선형 변환 *Linear Transformation*

기하학적 의미





변환 전

$$\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} = 1\times\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + 3\times\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

기저벡터와 기저벡터의

선형 결합이 **직선**

변환 후

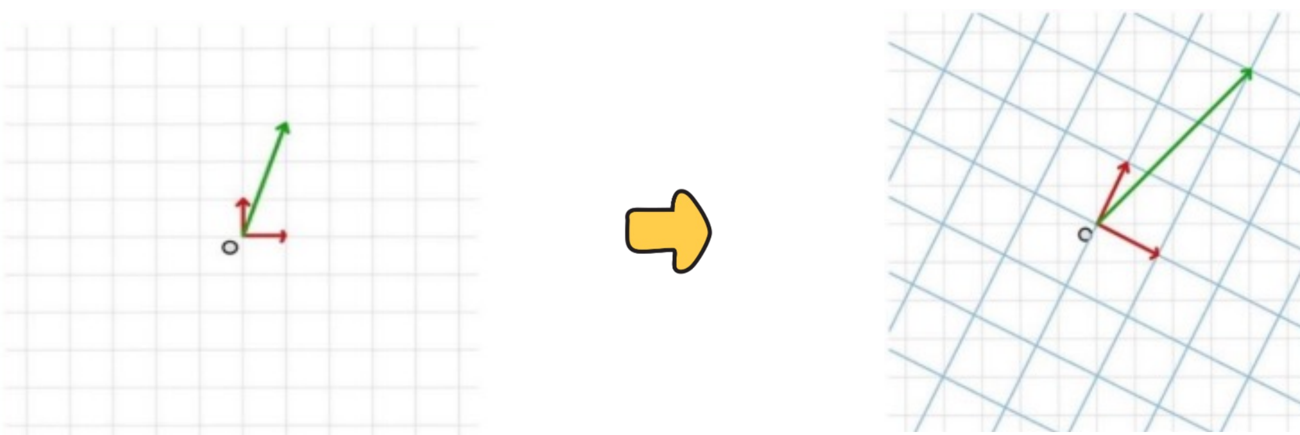
$$\begin{bmatrix}5\\5\end{bmatrix} = 1\times\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} + 3\times\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

여전히 **직선**인 상태

선형 변환 *Linear Transformation*

기하학적 의미

변환을 통해 기존 좌표계를 오른쪽으로 **회전**시키고 **늘린 상태**



선형 변환 *Linear Transformation*

기하학적 의미

변환을 통해 기존 좌표계를 오른쪽으로 **회전**시키고 **늘린 상태**

선형변환은 변환된 두 기저벡터를 갖는 행렬과 벡터의 곱으로 표현

행렬은 벡터의 선형변환과 동일한 기능

행렬×벡터 = 두 열 벡터의 선형 결합

곱해지는 **행렬**은 **선형 변환**을 의미함!

선형 변환 *Linear Transformation*

행렬곱 AB와 BA가 다른 이유

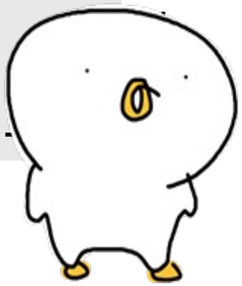
A: 공간을 좌우로 뒤집는 선형 변환

B: 공간을 90도 회전시키는 선형 변환이라고 한다면…

↓

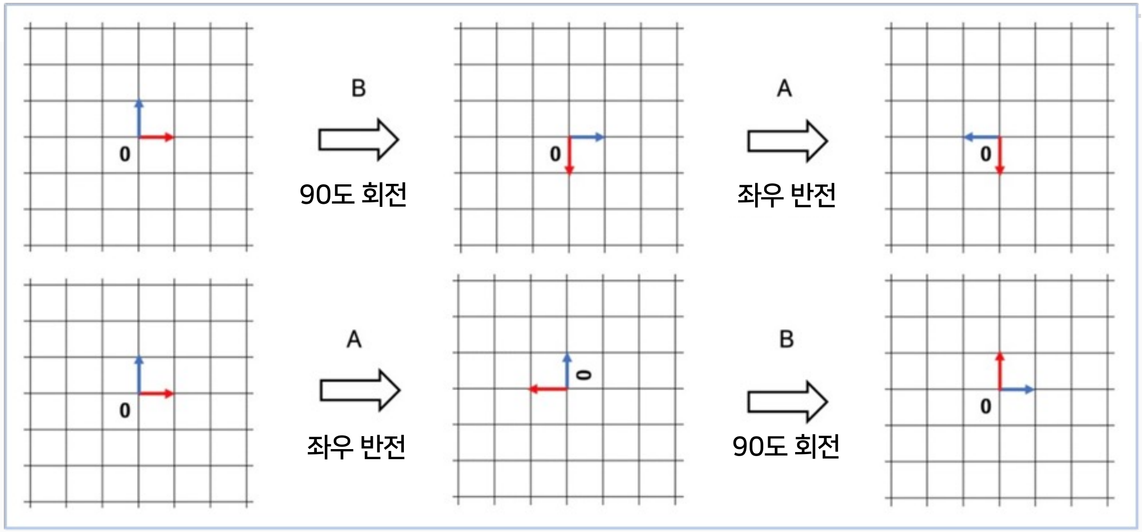
AB: 공간을 90도 회전시킨 다음, 좌우로 뒤집는 선형 변환

BA: 공간을 좌우로 뒤집은 다음, 90도 뒤집는 선형 변환



선형 변환 *Linear Transformation*

행렬곱 AB와 BA가 다른 이유



행렬 연산에서 **교환 법칙**이 **성립하지 않는** 이유를

기하학적으로 이해 가능!

역행렬 *Inverse matrix*

기하학적 의미

어떤 벡터 $\boldsymbol{x}$가 A라는 선형 변환을 통해 $\boldsymbol{b}$라는 벡터로 변환됐을 때
벡터 $\boldsymbol{b}$를 벡터 $\boldsymbol{x}$로 되돌리는 선형 변환

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

선형 변환을 **원상복구**

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

역행렬 *Inverse matrix*

기하학적 의미

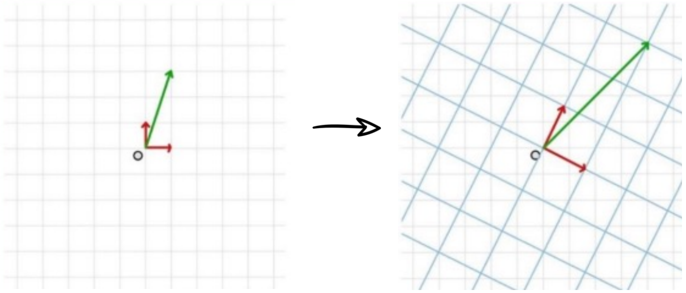
어떤 벡터 $\boldsymbol{x}$가 A라는 선형 변환을 통해 $\boldsymbol{b}$라는 벡터로 변환됐을 때

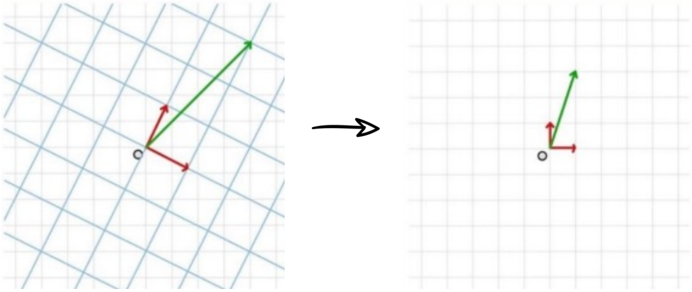
벡터 $\boldsymbol{b}$를 벡터 $\boldsymbol{x}$로 되돌리는 선형 변환

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

선형 변환을 **원상복구**

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$





역행렬 *Inverse matrix*

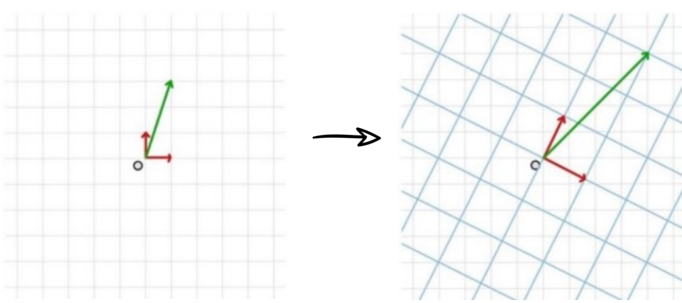
기하학적 의미

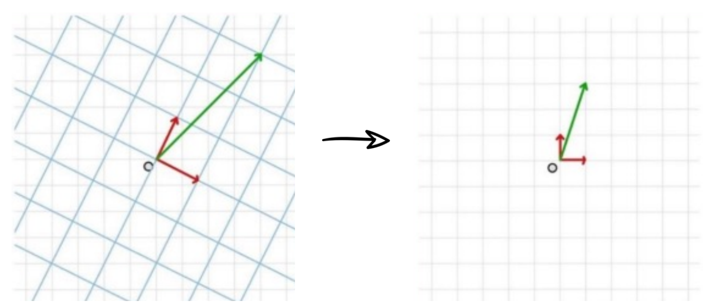
$AA^{-1}, A^{-1}A$ 모두 특정 변환을 가한 후 원상태로 되돌리는 변환
→ **단위행렬**(최초의 공간 그대로 유지)을 반환!

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

선형 변환을 **원상복구**

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$





역행렬이 존재하지 않는 경우

공간을 압축시키는 선형 변환을 가한 경우에는 **역행렬 존재 X**

Ex) $\mathbb{R}^2$공간이 압축되면서 하나의 축으로 표현된 경우

변형된 1차원 벡터가 어떤 2차원 벡터로

변환되어야 하는지 알 수 없음

↓

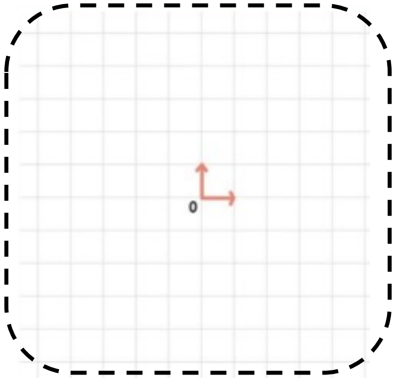
$\boldsymbol{x}$와 $A\boldsymbol{x}$가 서로 **일대일 대응 X**

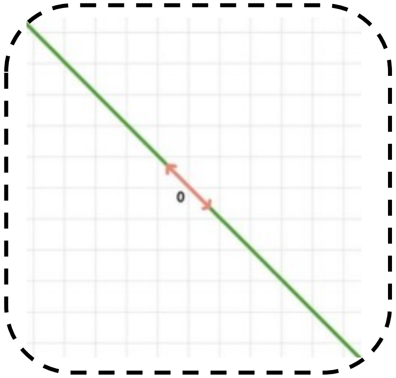
$\Leftrightarrow$ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$의 **해가 유일하지 않음**

$\Leftrightarrow$ **역행렬 존재 X**

역행렬이 존재하지 않는 경우

공간을 압축시키는 선형 변환을 가한 경우에는 역행렬 존재 X





Ex) $\mathbb{R}^2$공간이 압축되면서 하나의 축으로 표현된 경우

변형된 1차원 벡터가 어떤 2차원 벡터로

변환되어야 하는지 알 수 없음

↓

$\boldsymbol{x}$와 $A\boldsymbol{x}$가 서로 **일대일 대응** X

$\Leftrightarrow$ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$의 해가 유일하지 않음

$\Leftrightarrow$ 역행렬 존재 X

6

벡터공간과 기저

벡터공간과 부분공간

벡터공간 *Subspace*

선형결합에 대해 닫혀 있는 벡터들의 집합

선형결합에 대해 닫혀 있음

어떤 벡터공간 V에 속하는 벡터들을 이용해 선형결합한
벡터 $\boldsymbol{v}$ 는 여전히 본래 공간 V에 속함 ($\boldsymbol{v} \in V$)

벡터들의 집합, 선형결합을 통해 만들어진 새로운 벡터도
그 벡터공간에 속함

벡터공간과 부분공간

부분공간 *Subspace*

벡터공간 안의 **또 다른 벡터공간**

벡터공간이 집합이라면 **부분집합**에 대응하는 개념

부분공간의 조건

집합 S가 벡터공간 V의 부분공간이라면 다음 조건을 만족한다.

① **영벡터**를 포함

② **선형결합**에 대해 닫혀 있음

벡터공간과 부분공간

부분공간의 조건

집합 S가 벡터공간 V의 부분공간이라면 다음 조건을 만족함

① **영벡터**를 포함

② **선형결합**에 대해 닫혀 있음

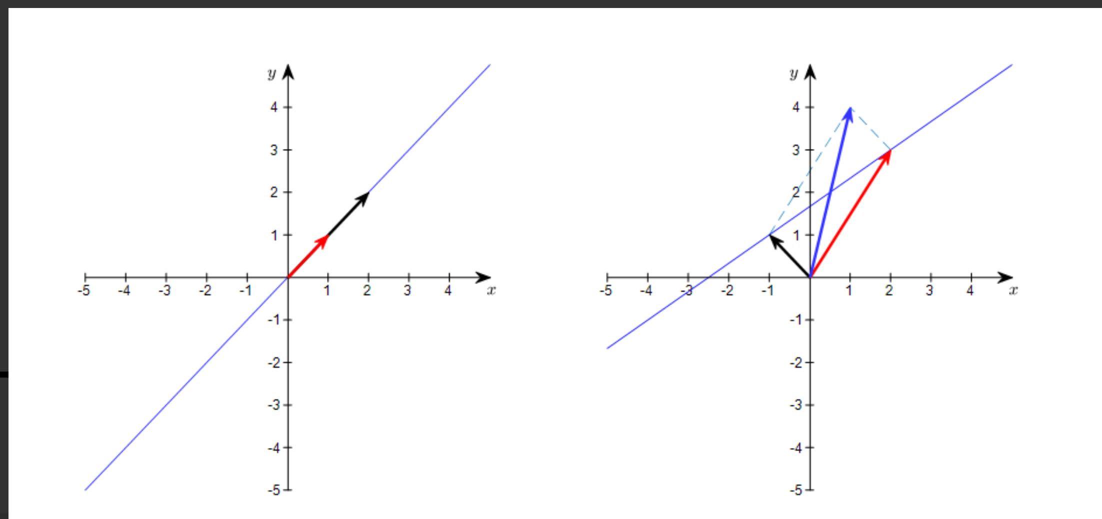
W 가 벡터공간 V 의 부분공간일 **필요충분조건**

$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in W,\ \ c, d \in \mathbb{R}$에 대해 선형결합 $c\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{w} \in W$이다.

벡터공간과 부분공간

부분공간의 조건

왜 영벡터를 포함해야 할까?



원점을 지나지 않는 직선은 선형변환이 직선 밖에 존재

어떤 벡터의 0 스칼라 곱은 영벡터이기 때문

기저와 선형 독립

선형 독립 *Linearly Independent*

집합 내의 **다른 벡터들의** **선형 결합**으로 **표현되지 않는 경우**

선형 독립의 조건

선형 결합 $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$을 만족하는

상수 a_i가 **전부 0**이어야 **선형 독립**

상수 a_i가 0이 아닌 조합이 존재할 경우 **선형 종속**

기저와 선형 독립

선형 독립 *Linearly Independent*

집합 내의 **다른 벡터들의** **선형 결합**으로 **표현되지 않는 경우**

선형 독립의 조건

선형 결합 $a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{x}_n = 0$을 만족하는

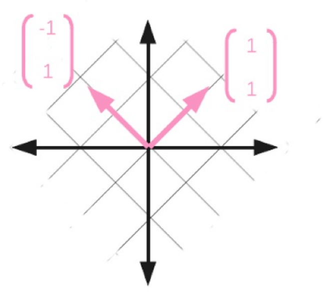
상수 a_i가 **전부 0**이어야 **선형 독립**

상수 a_i가 0이 아닌 조합이 존재할 경우 **선형 종속**

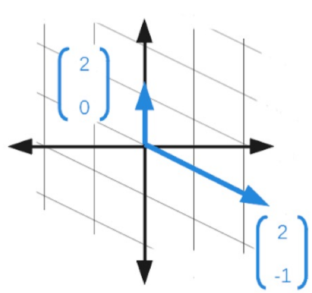
기저와 선형 독립

기저 *Basis*

벡터공간을 **선형 생성**하는 **선형 독립**인 벡터들



graph A

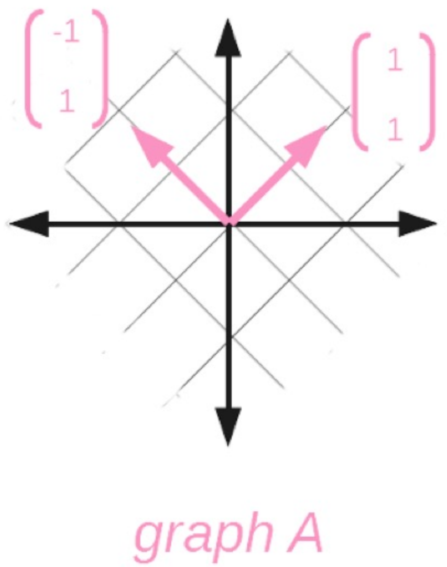


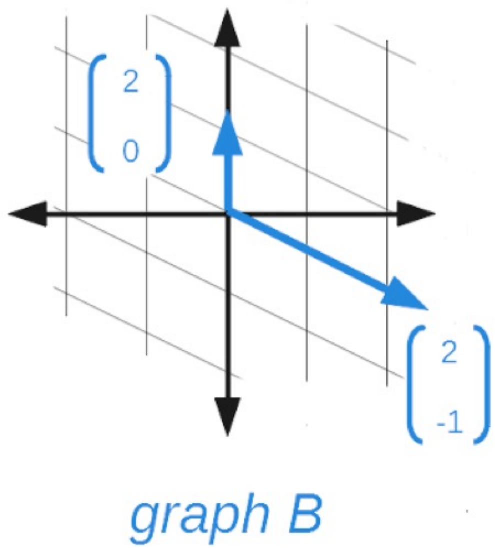
graph B

두 기저 쌍 모두 2차원 실수 공간($\mathbb{R}^2$)을 생성

→ 기저는 **유일하지 않음**

기저와 선형 독립





두 기저 쌍이 모두 2차원 실수 공간 ($\mathbb{R}^2$) 생성

→ 두 기저 쌍이 각각 $\mathbb{R}^2$을 **span함**

Basic Subspaces

열공간 *Column Space*

행렬의 **열벡터들로** 만들어지는 벡터 공간

$span\{\binom{2}{1}, \binom{-1}{2}\}$

$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 의 열 공간은 2차원 실수 공간 $\mathbb{R}^2$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

위 식에서 b_1, b_2 가 무엇이 오든 x, y를 구할 수 있음

Basic Subspaces

열공간 *Column Space*

행렬의 **열벡터들로 만들어지는** 벡터 공간

$span\{\binom{2}{1}, \binom{-1}{2}\}$

$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 의 열 공간은 2차원 실수 공간 $\mathbb{R}^2$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}y = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

위 식에서 b_1, b_2 가 무엇이 오든 x, y를 구할 수 있음

Basic Subspaces

열공간

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

이 경우 $A\boldsymbol{x} = b$에서 어떤 $\boldsymbol{b}$에 대해

해를 구하지 못할 수 있음

→ 각 열벡터는 3차원이나,

열공간은 3차원을 생성하지 못함

따라서 열벡터의 선형결합으로

만들 수 있는 **평면**만을 생성함

Basic Subspaces

열공간

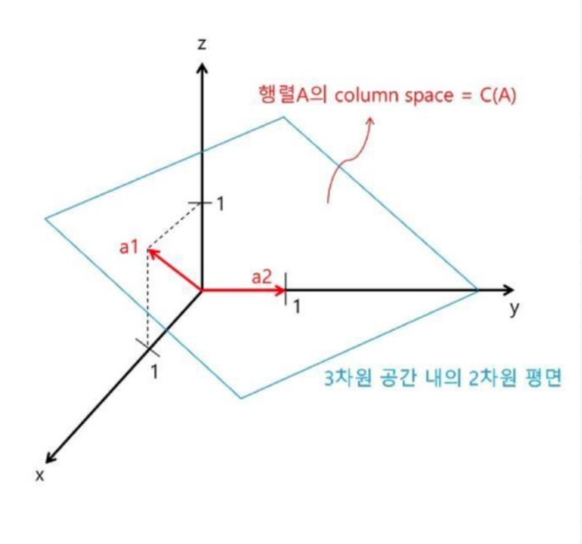
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

이 경우 $A\boldsymbol{x} = b$에서 어떤 $\boldsymbol{b}$에 대해

해를 구하지 못할 수 있음

→ 각 열벡터는 3차원이나,

열공간은 3차원을 생성하지 못함



따라서 열벡터의 선형결합으로

만들 수 있는 **평면**만을 생성함

Basic Subspaces

행공간 *Row Space*

행렬의 **행벡터들로 만들어지는** 벡터 공간

$span\{\binom{2}{-1}, \binom{1}{2}\}$

$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 의 행 공간은 2차원 실수 공간 $\mathbb{R}^2$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

위 식에서 b_1, b_2 가 무엇이 오든 x, y를 구할 수 있음

Basic Subspaces

영공간 *Null Space*

선형 동차방정식 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 을 만족시키는 **모든 $\mathbf{x}$의 해집합**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x = 0,\ \ y = 0,\ \ z = 0$이라는 특이해는

어떤 행렬이 와도 동일하게 존재하기에 영공간은 항상 영벡터를 포함

Basic Subspaces

영공간 *Null Space*

선형 동차방정식 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ **을 만족**시키는 **모든 x의 해집합**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x = 0,\ \ y = 0,\ \ z = 0$이라는 특이해는

어떤 행렬이 와도 동일하게 존재하기에 영공간은 항상 영벡터를 포함

Basic Subspaces

Basic Subspace들 간의 관계는?

행공간의 차원 = 열공간의 차원 = rank

영공간의 차원 = nullity

차원정리에 의해 m x n행렬일 때

rank + nullity = n

차원정리가 궁금하다면 선대 클린업 2주차에 관심을 ~

영공간 *Null Space*

선형 동차방정식 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 을 만족시키는 모든 **x**의 해집합

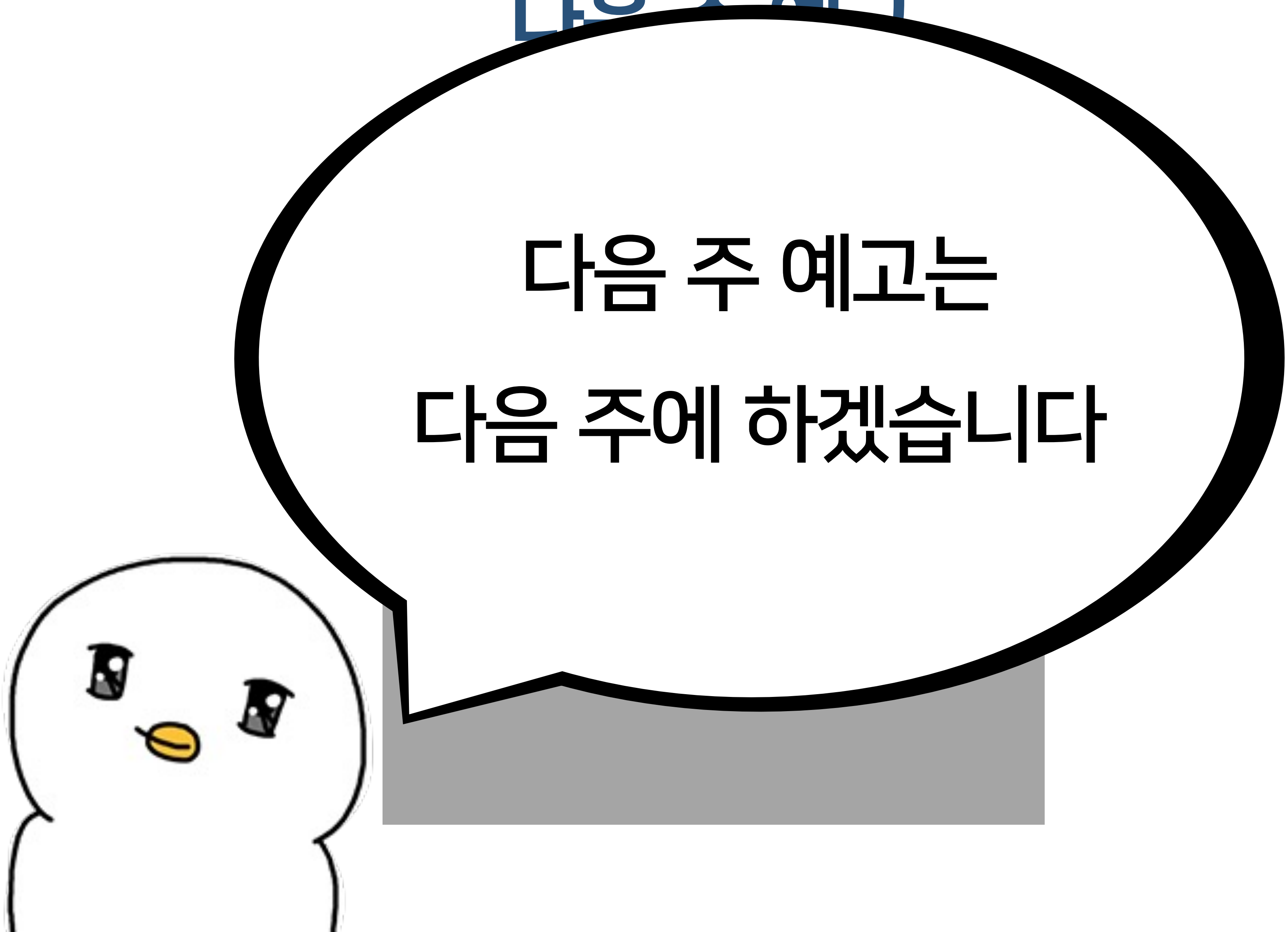
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x = 0,\ y = 0,\ z = 0$이라는 특이해는

어떤 행렬이 와도 동일하게 존재하기에 영공간은 항상 영벡터를 포함

다음 주 예고

다음 주 예고



THANK YOU