Ch. 7 선형대수학: 행렬, 벡터, 행렬식, 선형연립방정식

(Linear Algebra : Matrices, Vectors, Determinants. Linear Systems)

- 선형연립방정식은 전기회로, 기계 구조물, 경계모델, 최적화 문제, 미분방정식의 수치해 등을 다룰 때 나타남
- 선형연립방정식의 문제를 해결하는데, 행렬과 벡터 이용
- 내용 : 행렬 및 벡터 간의 연산에 대한 정의, 선형연립방정식에 관한 것(Gauss 소거법, 행렬의 계수의 역할), 역행렬, 행렬식의 정의와 응용

7.1 행렬, 벡터: 합과 스칼라곱 (Matrices, Vectors: Addition and Scalar Multiplication)

- **행렬**(Matrix) : 수(혹은 함수)를 직사각형 모양으로 괄호 안에 배열한 것
  - **원소**(Entry) 또는 **요소**(Element): 행렬에 배열되는 수(혹은 함수)
  - **행**(Row) : 수평선
  - **열**(Column) : 수직선
- **벡터**(Vector) : 한 개의 행이나 열로 구성된 행렬
  - **행벡터**(Row Vector) : 하나의 행으로 구성
  - **열벡터**(Column Vector) : 하나의 열로 구성

- 일반적인 표기법과 개념

$$\mathbf{A} = \left[a_{jk}\right] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} : m \times n \text{ 행렬}$$

- 행렬은 굵은 대문자로 나타낸다
- 첫 번째 아래 첨자 j는 행(Row)
- 두 번째 아래 첨자 k는 열(Column)
- a_{jk}: j행, k열의 원소(Element)

- **정방행렬(Square Matrix)**

- $m = n$이라면 $\mathbf{A}$는 정사각형 모양이다
- 정방행렬에서 원소 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$을 포함하는 대각선을 행렬 $\mathbf{A}$의 주대각선 (Principal Diagonal)이라고 한다

- **벡터**(Vectors) : 하나의 행(열)으로 이루어진 $1\times n$ $(m\times 1)$ 행렬

■ Ex. n 차원 행벡터(Row Vector) : $\mathbf{a}=[a_1,\quad a_2,\quad \cdots \quad a_n]$

m 차원 열벡터(Column Vector) : $\mathbf{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

- 행렬의 상등(Equality of Matrices)

  : 행렬의 크기가 같으며 대응되는 원소들이 모두 같은 경우

- 행렬의 가법(Matrix Addition)

  : 같은 크기의 행렬에 대해서만 정의되고, 그 합은 대응하는 원소를 각각 합함으로 얻어진다.

- 스칼라곱(Scalar Multiplication)

  : 행렬의 각 원소에 상수를 곱하여 얻어진다.

- 행렬의 가법과 스칼라곱에 대한 연산법칙

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A} \qquad c(\mathbf{A}+\mathbf{B})=c\mathbf{A}+c\mathbf{B}$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C}) \qquad (c+k)\mathbf{A}=c\mathbf{A}+k\mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}+\mathbf{0}=\mathbf{A} \qquad c(k\mathbf{A})=(ck)\mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=\mathbf{0} \qquad 1\mathbf{A}=\mathbf{A}$$

7.2 행렬의 곱(Matrix Multiplication)

- 행렬과 행렬의 곱(Matrix Multiplication)

: $r \times p$ 행렬 $\mathbf{B} = \left[b_{jk}\right]$의 행수 r와 $m \times n$ 행렬 $\mathbf{A} = \left[a_{jk}\right]$의 열수 n가 서로 같아야 정의되며 $c_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a_{jl}b_{lk} = a_{j1}b_{1k} + a_{j2}b_{2k} + \cdots + a_{jn}b_{nk}$ 를 원소로 하는 $m \times p$ 행렬로 정의된다.

❖ $\mathbf{AB}$는 정의되지만 $\mathbf{BA}$는 정의되지 않을 수 있다

- 행렬의 곱은 비가환적(Not Commutative)이다. $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$
- 행렬의 곱에 대한 연산법칙

$$(k\mathbf{A})\mathbf{B} = k(\mathbf{AB}) = \mathbf{A}(k\mathbf{B})$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C} \qquad \text{(결합법칙(Associative Low))}$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC} \ \text{(분배법칙(Distrivutive Low))}$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{CA} + \mathbf{CB} \ \text{(분배법칙(Distrivutive Low))}$$

행렬과 벡터의 전치(Transposition of Matrices)

: 열과 행이 서로 바뀌어 얻어진 행렬.

$$\mathbf{A}=\left[a_{jk}\right] \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^T=\left[a_{kj}\right]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

❖ 정방행렬에 대한 전치는 주대각선에 관하여 대칭으로 위치된 원소들을 서로 바꾼 것이다.

전치 연산에 대한 법칙

$$\left(\mathbf{A}^T\right)^T=\mathbf{A}$$

$$\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}\right)^T=\mathbf{A}^T+\mathbf{B}^T$$

$$\left(c\mathbf{A}\right)^T=c\mathbf{A}^T$$

$$\left(\mathbf{AB}\right)^T=\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$$

- 특수한 행렬(Special Matrices)
- 대칭행렬(Symmetric Matrix) : 전치가 본래의 행렬과 같은 정방행렬 $\left(\mathbf{A}^T = \mathbf{A}\right)$
- 반대칭행렬(Skew- symmetric Matrix)

  : 전치가 본래의 행렬의 음이 되는 정방행렬 $\left(\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}\right)$
- 삼각행렬(Triangular Matrix)
- 위삼각행렬(Upper Triangular Matrix)

  : 주대각선을 포함하여 그 위쪽으로만 0이 아닌 원소를 갖는 정방행렬
- 아래삼각행렬(Lower Triangular Matrix)

  : 주대각선을 포함하여 그 아래쪽으로만 0이 아닌 원소를 갖는 정방행렬
- 대각행렬(Diagonal Matrix)

  : 주대각선 상에서만 0이 아닌 원소를 가질 수 있는 정방행렬
- 스칼라 행렬(Scalar Matrix) : 주대각선 원소들이 모두 같은 대각행렬
- 단위행렬(Unit 또는 Identity Matrix) : 주대각선 원소들이 모두 1은 대각행렬

7.3 선형연립방정식, Gauss 소거법 (Linear Systems of Equations. Gauss Elimination)

- 선형연립방정식, 계수행렬, 첨가행렬
- 선형연립방정식 :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

- 제차연립방정식(Homogeneous Simultaneous System)

  : b_j가 모두 0인 경우

- 비제차연립방정식(Nonhomogeneous Simultaneous System)

  : b_j 중 적어도 하나는 0이 아닌 경우

● 선형연립방정식의 행렬표현 : $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

- 계수행렬(Coefficient Matrix) : $\mathbf{A}$
- 해벡터(Solution Vector) : $\mathbf{x}$
- 첨가행렬(Augmented matrix) : 계수행렬 $\mathbf{A}$에 열벡터 $\mathbf{b}$를 첨가한 행렬

$$\tilde{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{array}\right]$$

● 가우스 소거법과 후치환(Gauss Elimination and Back Substitution)

연립방정식

$$2x_1 + 5x_2 = 2$$
$$-4x_1 + 3x_2 = -30$$

첨가행렬

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ -4 & 3 & -30 \end{bmatrix}$$

Step 1 x_1을 소거 : 첫 번째 식에 두 배 한 후, 이를 두 번째 식에 더한다.

$$2x_1 + 5x_2 = 2$$
$$13x_2 = -26$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & 13 & -26 \end{bmatrix}$$

Step 2 후치환(Back Substitution)을 통해 x_2, x_1 순으로 해를 구한다.

마지막 방정식에서 $x_2 = -26/13 = -2$ 를 구한 후, 그 결과를 역순으로 첫째 방정식에 대입하여 x_1 에 대하여 정리하면, $x_1 = \frac{1}{2}(2 - 5x_2) = \frac{1}{2}(2 - 5(-2)) = 6$ 을 얻는다.

기본행연산. 행동치 연립방정식(Elementary Row Operations. Row-Equivalent Systems)

<방정식에 대한 기본연산>	↔	<행렬에 대한 기본행연산>
• 두 방정식을 교환하는 것		• 두 행을 교환하는 것
• 한 방정식의 상수배를 다른 방정식에 더하는 것		• 한 행의 상수배를 다른 행에 더하는 것
• 한 방정식에 0이 아닌 상수를 곱하는 것		• 한 행에 0이 아닌 상수를 곱하는 것

❖ 기본 행연산을 이용하여 미지수를 하나씩 소거하여 대각선 아래의 계수를 0으로 만든다

행동치(Row-Equivalent)

: 선형시스템 S_1이 선형시스템 S_2 에 유한번의 기본행연산을 가하여 얻어질 수 있다면 S_1을 S_2의 **행동치**라 한다.

행동치 연립방정식(Row-Equivalent Systems)

: 행동치 연립방정식들은 같은 해집합을 갖는다.

Gauss 소거법 : 연립방정식의 세가지 경우

- 무한히 많은 해가 존재하는 경우(미지수의 수가 방정식의 수보다 많은 경우)
- 유일한 해가 존재하는 경우
- 해가 존재하지 않는 경우(연립방정식의 해가 존재하지 않는 경우)

Ex.3 4개의 미지수를 갖는 3개의 선형연립방정식, 그리고 이에 대응하는 아래의 첨가행렬을 가진 연립방정식의 해를 구하라.

$$\begin{bmatrix} 3.0 & 2.0 & 2.0 & -5.0 & \vdots & 8.0 \\ 0.6 & 1.5 & 1.5 & -5.4 & \vdots & 2.7 \\ 1.2 & -0.3 & -0.3 & 2.4 & \vdots & 2.1 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} 3.0x_1 + 2.0x_2 + 2.0x_3 - 5.0x_4 &= 8.0 \\ 0.6x_1 + 1.5x_2 + 1.5x_3 - 5.4x_4 &= 2.7 \\ 1.2x_1 - 0.3x_2 - 0.3x_3 + 2.4x_4 &= 2.1 \end{aligned}$$

Step 1 x_1을 소거

첫째 방정식에 $-0.6/3.0 = -0.2$ 배 하여 두 번째 방정식에 더하라.

첫째 방정식에 $-1.2/3.0 = -0.4$ 배 하여 세 번째 방정식에 더하라.

$$\begin{array}{l} \begin{bmatrix} 3.0 & 2.0 & 2.0 & -5.0 & \vdots & 8.0 \\ 0 & 1.1 & 1.1 & -4.4 & \vdots & 1.1 \\ 0 & -1.1 & -1.1 & 4.4 & \vdots & -1.1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ 2\text{행} + (-0.2) \times 1\text{행} \\ 3\text{행} + (-0.4) \times 1\text{행} \end{array} \qquad \begin{aligned} 3.0x_1 + 2.0x_2 + 2.0x_3 - 5.0x_4 &= 8.0 \\ 1.1x_2 + 1.1x_3 - 4.4x_4 &= 1.1 \\ -1.1x_2 - 1.1x_3 + 4.4x_4 &= -1.1 \end{aligned}$$

Step 2 x_2 을 소거 : 두번째 방정식에 $1.1/1.1 = 1$ 배 하여 세 번째 방정식에 더하라

$$\begin{bmatrix} 3.0 & 2.0 & 2.0 & -5.0 & \vdots & 8.0 \\ 0 & 1.1 & 1.1 & -4.4 & \vdots & 1.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ 3\text{행} + 2\text{행} \end{array} \qquad \begin{aligned} 3.0x_1 + 2.0x_2 + 2.0x_3 - 5.0x_4 &= 8.0 \\ 1.1x_2 + 1.1x_3 - 4.4x_4 &= 1.1 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Step 3 후치환 $x_2 = 1 - x_3 + 4x_4$, $x_1 = 2 - x_4$

x_3와 x_4 는 임의로 결정할 수 있는 수이므로, 무한히 많은 해가 얻어진다.

■ **Ex.4** Gauss 소거법을 해가 존재하지 않는 연립방정식에 적용

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & \vdots & 3 \\ 2 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 6 & 2 & 4 & \vdots & 6 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 6x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 6 \end{aligned}$$

Step 1 x_1을 소거

첫째 방정식에 $-2/3$ 배 하여 두 번째 방정식에 더하라.

첫째 방정식에 $-6/3 = -2$ 배 하여 두 번째 방정식에 더하라.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \vdots & -2 \\ 0 & -2 & 2 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ 2\text{행} + \left(-\frac{2}{3}\right) \times 1\text{행} \\ 3\text{행} + (-2) \times 1\text{행} \end{array} \qquad \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ -\frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 &= -2 \\ -2x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Step 2 x_2 을 소거 : 세 번째 식에서 x_2 를 소거

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 12 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ 3\text{행} + (-6) \times 2\text{행} \end{array} \qquad \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ -\frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 &= -2 \\ 0 &= 12 \end{aligned}$$

모순이 되어 연립방정식은 해를 갖지 않는다.

7.4 일차 독립. 행렬의 계수. 벡터공간 **(Linear Independence. Rank of a Matrix. Vector Space)**

● 벡터의 일차 독립과 종속성

$$c_1\mathbf{a}_{(1)} + c_2\mathbf{a}_{(2)} + \cdots + c_m\mathbf{a}_{(m)} = \mathbf{0} \quad (c: \text{스칼라},\ \mathbf{a}: \text{벡터})$$

- 일차 독립(Linearly Independent) : 모든 $c_j = 0$일 때만 위 식이 만족
- 일차 종속(Linearly Dependent) : 어떤 $c_j \neq 0$ 이어도 위 식이 만족

- **행렬의 계수**(Rank) : 행렬에서 1차독립인 행벡터의 최대 수이며 $\operatorname{rank}(\mathbf{A})$라 표시

- **행동치인 행렬**

  행동치인 행렬들은 같은 계수를 갖는다.

- **일차종속성**과 **일차독립성**

  각각 n개의 성분을 갖는 p개의 벡터들은 이 벡터들을 행벡터로 취하여 구성된 행렬의 계수가 p이면 일차독립이고, 그 계수가 p보다 작으면 일차종속이다.

- **열벡터에 의한 계수**

  행렬의 계수는 행렬의 일차독립인 열벡터의 최대수와 같다.

  $\Rightarrow$ 행렬과 행렬의 전치는 같은 계수를 갖는다.

- **벡터의 일차종속**

  $n(< p)$개의 성분을 갖는 p개의 벡터들은 항상 일차종속이다.

- 벡터공간 (Vector Space)

  : 공집합이 아닌 벡터의 집합에 속해 있는 임의의 두 원소에 대하여, 이들의 일차결합이 다시 집합의 원소가 되며 다음 법칙을 만족하는 벡터들의 집합

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A} \qquad c(\mathbf{A}+\mathbf{B})=c\mathbf{A}+c\mathbf{B}$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C}) \qquad (c+k)\mathbf{A}=c\mathbf{A}+k\mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}+\mathbf{0}=\mathbf{A} \qquad c(k\mathbf{A})=(ck)\mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=\mathbf{0} \qquad 1\mathbf{A}=\mathbf{A}$$

- 차원(Dimension): 벡터공간내의 일차독립인 벡터들의 최대수이며 $\dim(V)$로 표기
- 기저(Basis)

  : 벡터공간내의 최대로 가능한 수의 일차독립인 벡터로 구성되는 부분집합이며 기저가 되는 벡터의 수는 차원과 같다.
- 생성공간(Span)

  : 성분의 수가 같은 벡터들에 관한 일차결합으로 표환되는 모든 벡터들의 집합
- 부분공간(Subspace)

  : 벡터공간에서 정의된 벡터합과 스칼라곱에 관하여 닫혀있는 부분집합

- $\mathbf{R}^n$ 벡터공간

  n개의 성분을 갖는 모든 벡터들로 이루어진 벡터공간 $\mathbf{R}^n$의 차원 n 이다.

- 행공간(Row Space) : 행벡터들의 생성공간

- 열공간(Column Space) : 열벡터들의 생성공간

- 행공간과 열공간

  행렬의 행공간과 열공간은 차원이 같고, 행렬의 계수와도 동일하다.

- 영공간(Null Space) : $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 의 해집합

- 퇴화차수(Nullity) : 영공간의 차원

$$\mathbf{A}\text{의 계수} + \mathbf{A}\text{의 퇴화차수} = \mathbf{A}\text{의 행계수}$$

7.5 선형연립방정식의 해 : 존재성, 유일성 (Solutions of Linear Systems: Existence, Uniqueness)

● 선형연립방정식에 대한 기본정리

- 존재성(Existence)

: 선형연립방정식이 **모순이 없기 위한**(Consistent), 다시 말해서 해를 갖기 위한, 필요충분조건은 계수행렬과 첨가행렬이 같은 계수를 갖는 것이다.

- 유일성(Uniqueness)

: 선형연립방정식이 유일한 해를 갖기 위한 필요충분조건은 계수행렬과 첨가행렬이 같은 계수를 갖는 것이다.

- 무수히 많은 해(Infinitely Many Solutions)

: 계수행렬의 계수가 미지수의 개수보다 작으면 무수히 많은 해가 존재

- Gauss 소거법(Gauss Elimination)

: 해가 존재하면 Gauss 소거법에 의해 모두 구해질 수 있다.

제차연립방정식

- 제차연립방정식은 항상 자명한 해(Trivial Solution)을 갖는다.

  계수행렬의 계수 $= r$, 미지수의 갯수 $= n$라 하자.

- 자명하지 않은 해가 존재할 필요충분조건 : $r < n$
- $r < n$이면 해공간은 $n - r$ 차원 벡터공간이다.
- 제차연립방정식의 두 해벡터의 일차결합도 제차연립방정식의 해이다.

미지수보다 방정식의 수가 적은 제차 선형연립방정식

방정식의 수가 미지수의 수보다 적은 제차연립방정식은 항상 자명하지 않은 해 (Nontrivial Solution)를 갖는다.

비제차연립방정식

만약 비제차 연립방정식이 해를 갖는다면 모든 해는 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_h$ 와 같은 형태가 된다. $\mathbf{x}_0$은 고정된 임의의 해이고 $\mathbf{x}_h$ 는 대응하는 제차연립방정식의 모든 해를 대표한다.

7.6 참고사항 : 2차 및 3차 행렬식 (For Refernece : Second- and Third-Order Determinants)

- **2차 행렬식**(Determinant of Second Order)

$$D = \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- 선형연립방정식

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned} \xrightarrow[D \neq 0]{\text{Cramer의 법칙}} \begin{aligned} x_1 &= \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{D} = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{D} \\ x_2 &= \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{D} = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{D} \end{aligned}$$

- **3차 행렬식**(Determinant of Third Order)

$$D = \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{13}a_{32} + a_{21}a_{12}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{13}a_{22}$$

- 선형연립방정식

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned} \quad \xrightarrow[D \neq 0]{\text{Cramer의 법칙}} \quad x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ x_3 = \frac{D_3}{D}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

7.7 행렬식. Cramer의 법칙(Determinants. Cramer's Rule)

- n차 행렬식(Determinant of Third Order)

$$D = \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$n = 1$이면 $D = a_{11}$

$n \geq 2$이면 $D = a_{j1}C_{j1} + a_{j2}C_{j2} + \cdots + a_{jn}C_{jn} \quad (j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

또는 $D = a_{1k}C_{1k} + a_{2k}C_{2k} + \cdots + a_{nk}C_{nk} \quad (k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n),$

$C_{jk} = (-1)^{j+k} M_{jk}, \quad M_{jk}$는 $n-1$차의 행렬식

- 소행렬식(Minor) : M_{jk}
- 여인수(Cofactor) : C_{jk}

- 기본행연산항(**Elementary Row Operation**)에서의 n차 행렬식의 양태
  - 두 행을 바꾸는 것은 행렬식의 값에 -1을 곱하는 것이다.
  - 한 행의 상수배를 다른 행에 더하는 것은 행렬식의 값에 변화를 주지 않는다.
  - 한 행에 상수를 곱하는 것은 행렬식의 값에 상수를 곱하는 것이다.
- 추가적인 n차 행렬식의 성질
  - 두 열을 바꾸는 것은 행렬식의 값에 -1을 곱하는 것이다.
  - 한 열의 상수배를 다른 열에 더하는 것은 행렬식의 값에 변화를 주지 않는다.
  - 한 열에 상수를 곱하는 것은 행렬식의 값에 상수를 곱하는 것이다.
  - 전치(Transposition)는 행렬식의 값에 변화를 주지 않는다.
  - **0행 또는 0열**은 행렬식의 값을 0으로 만든다.
  - **같은 비율의 행 또는 열**은 행렬식의 값을 0으로 만든다.

- 행렬식에 의한 계수

$m \times n$ 행렬 $\mathbf{A} = \left[a_{jk}\right]$ 가 계수 $r(\geq 1)$을 갖기 위한 필요충분조건은 $\mathbf{A}$ 의 $r \times r$ 부분행렬의 행렬식은 0이 되지 않는 반면, $\mathbf{A}$ 의 $(r+1)\times(r+1)$ 또는 그 이상의 행을 갖는 모든 정방 부분행렬의 행렬식은 0이 되는 것이다. 특히, $\mathbf{A}$ 가 정방행렬 $n \times n$ 일 때, 계수가 n일 필요충분조건은 $\det(\mathbf{A}) \neq 0$이다.

- **Cramer**의 정리(행렬식에 의한 선형연립방정식의 해)

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \quad \xrightarrow[D \neq 0]{\text{Cramer의 법칙}} \quad x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ \cdots,\ x_n = \frac{D_n}{D}$$

D_k는 D의 k번째 열을 $b_1, \cdots, b_n$인 원소로 갖는 열로 대치하여 얻은 행렬식

7.8 역행렬. Gauss-Jordan 소거법 (Inverse of a Matrix. Gauss-Jordan Elimination)

- 역행렬(Inverse Matrix)

$\mathbf{A}^{-1} : \mathbf{A} = [a_{jk}]$의 역행렬 $\Leftrightarrow$ $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$

- 정칙행렬(Nonsingular Matrix) : 역행렬을 갖는 경우
- 특이행렬(Singular Matrix) : 역행렬을 갖지 않는 경우
- 역행렬을 가지면 그 역행렬은 유일하다.

- 역행렬의 존재성

$\mathbf{A}$가 $n \times n$행렬일 때, 역행렬 $\mathbf{A}^{-1}$이 존재 $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = n$ $\Leftrightarrow$ $\det(\mathbf{A}) \neq 0$

$\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = n$ $\Leftrightarrow$ $\mathbf{A}$는 정칙행렬

$\operatorname{rank}(\mathbf{A}) < n$ $\Leftrightarrow$ $\mathbf{A}$는 특이행렬

Gauss-Jordan 소거법에 의한 역행렬의 결정

$n \times n$ 행렬 $\mathbf{A}$의 역행렬 $\mathbf{A}^{-1}$을 결정하기 위한 방법

$$\tilde{\mathbf{A}} = [\mathbf{A} \ \vdots \ \mathbf{I}] \xrightarrow{\text{Gauss 소거법}} [\mathbf{I} \ \vdots \ \mathbf{K}] \quad \Rightarrow \quad \therefore \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{K}$$

Ex.1

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{A} \ \vdots \ \mathbf{I}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ 2\text{행} + 3 \times 1\text{행} \\ 3\text{행} - 1\text{행} \end{array}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -4 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ 3\text{행} - 2\text{행} \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3.5 & 1.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{array}\right] \begin{array}{l} -1\text{행} \\ 0.5 \times 2\text{행} \\ -0.2 \times 3\text{행} \end{array}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0.6 & 0.4 & -0.4 \\ 0 & 1 & 0 & -1.3 & -0.2 & 0.7 \\ 0 & 0 & 1 & 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{array}\right] \begin{array}{l} 1\text{행} + 2 \times 3\text{행} \\ 2\text{행} - 3.5 \times 3\text{행} \\ \\ \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -0.7 & 0.2 & 0.3 \\ 0 & 1 & 0 & -1.3 & -0.2 & 0.7 \\ 0 & 0 & 1 & 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{array}\right] \begin{array}{l} 1\text{행} + 2\text{행} \\ \\ \\ \end{array}$$

- 역행렬에 대한 유용한 식

$n \times n$ 행렬 $\mathbf{A} = [a_{jk}]$의 역행렬은 $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det \mathbf{A}}[\mathbf{C}_{jk}] = \dfrac{1}{\det \mathbf{A}}\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{21} & \cdots & \mathbf{C}_{n1} \\ \mathbf{C}_{12} & \mathbf{C}_{22} & \cdots & \mathbf{C}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}_{1n} & \mathbf{C}_{2n} & \cdots & \mathbf{C}_{nn} \end{bmatrix}$

$\mathbf{C}_{jk}$는 $\det \mathbf{A}$에서 a_{jk}의 여인수

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$의 역행렬은 $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det \mathbf{A}}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$

- **Ex.3** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

$\det \mathbf{A} = -1(-7) - 1 \cdot 13 + 2 \cdot 8 = 10, \quad \mathbf{C}_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -7, \ \mathbf{C}_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2, \ \mathbf{C}_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3,$

$\mathbf{C}_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -13, \ \mathbf{C}_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -2, \ \mathbf{C}_{32} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 7,$

$\mathbf{C}_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 8, \ \mathbf{C}_{23} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2, \ \mathbf{C}_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -0.7 & 0.2 & 0.3 \\ -1.3 & -0.2 & 0.7 \\ 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{bmatrix}$

- 대각행렬의 역행렬

대각행렬 $\mathbf{A} = \lfloor a_{jk} \rfloor$의 역행렬이 존재 $\Leftrightarrow$ $a_{jj} \neq 0 \ (j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

$\mathbf{A}^{-1}$은 $1/a_{11},\ \cdots,\ 1/a_{nn}$ 이 대각원소인 행렬

■ **Ex.4** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 두 행렬의 곱 : $(\mathbf{AC})^{-1} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

$$(\mathbf{AC}\cdots\mathbf{PQ})^{-1} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{P}^{-1}\cdots\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

- 역행렬의 역행렬 : $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$

● 행렬의 곱에 대한 특이 성질. 약분법

- 행렬의 곱은 교환법칙이 성립하지 않는다. $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$(일반적으로 성립하지 않는다.)
- $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$일 때 $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ 또는 $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ 이 아닐 수도 있다.

- 예) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

- $\mathbf{AC} = \mathbf{AD}$ 일 때 $\mathbf{C} \neq \mathbf{D}$ 일 수도 있다(심지어 $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$일 때에도).

● 약분법칙

$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$를 $n \times n$행렬이라 하자.

- $\operatorname{rank}\mathbf{A} = n$ 이고 $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ 이면, $\mathbf{B} = \mathbf{C}$ 이다.
- $\operatorname{rank}\mathbf{A} = n$ 이면 $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ 은 $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ 을 의미한다.

  $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$이면서 $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$이고 $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$이면 $\operatorname{rank}\mathbf{A} < n$이고 $\operatorname{rank}\mathbf{B} < n$

- $\mathbf{A}$ 가 특이행렬이면 $\mathbf{AB}$ 와 $\mathbf{BA}$도 또한 특이행렬이다.

● 행렬곱의 행렬식 : $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{BA}) = \det\mathbf{A}\det\mathbf{B}$

7.9 벡터공간, 내적공간, 일차변환 (Vector Spaces, Inner Product Spaces, Linear Transformations)

실벡터공간(Real Vector Space)

- 벡터의 덧셈 : $\mathbf{a}+\mathbf{b}$

가환성(Commutativity) $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$

결합성(Associativity) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$

영벡터(Zero Vector) $\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$

$\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0}$

- 스칼라곱 : $k\mathbf{a}$

분배성(Distributivity) $c(\mathbf{a}+\mathbf{b})=c\mathbf{a}+c\mathbf{b}$

분배성(Distributivity) $(c+k)\mathbf{a}=c\mathbf{a}+k\mathbf{a}$

결합성(Associativity) $c(k\mathbf{a})=(ck)\mathbf{a}$

$1\mathbf{a}=\mathbf{a}$

실내적공간(Real Inner Product Space)

내적(Inner Product) : $(\mathbf{a},\mathbf{b})$

1. 선형성 $(q_1\mathbf{a}+q_2\mathbf{b},\mathbf{c})=q_1(\mathbf{a},\mathbf{c})+q_2(\mathbf{b},\mathbf{c})$
2. 대칭성 $(\mathbf{a},\mathbf{b})=(\mathbf{b},\mathbf{a})$
3. 양의 정치성 $(\mathbf{a},\mathbf{a})\geq 0,$

   $(\mathbf{a},\mathbf{a})=0$일 필요충분조건은 $\mathbf{a}=0$

- **직교**(Orthogonal) : 내적이 영인 두 벡터
- 벡터의 **길이** 또는 **노름**(Norm) : $\|\mathbf{a}\|=\sqrt{(\mathbf{a},\mathbf{a})}$
- **단위벡터**(Unit Vector) : 길이가 1인 벡터

기본부등식

- Cauchy - Schwarz 부등식 : $|(\mathbf{a},\mathbf{b})|\leq\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|$
- 삼각부등식 : $\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|\leq\|\mathbf{a}\|+\|\mathbf{b}\|$
- 평행사변형 등식 : $\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2+\|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|^2=2\left(\|\mathbf{a}\|^2+\|\mathbf{b}\|^2\right)$

● 일차변환(Linear Transformations)

- X에서 Y로의 **사상**(Mapping) 또는 **변환**(Transformation) 또는 **연산자**(Operator)

  : 공간 X 의 벡터 $\mathbf{x}$에 대하여 공간 Y 의 유일한 벡터 $\mathbf{y}$를 대응

- F를 **선형사상**(Linear Mapping) 또는 **일차변환**(Linear Transformation)

  : X 의 임의의 벡터 $\mathbf{v}, \mathbf{x}$와 임의의 스칼라 c에 대하여

  * $F(\mathbf{v}+\mathbf{x}) = F(\mathbf{v}) + F(\mathbf{x})$

  * $F(c\mathbf{x}) = cF(\mathbf{x})$

  를 만족

● $\mathbf{R}^n$ 공간에서 $\mathbf{R}^m$ 공간으로의 일차변환.

- $\mathbf{R}^n$ 에서 $\mathbf{R}^m$ 으로의 일차변환은 선형이다.
- $\mathbf{R}^n$ 에서 $\mathbf{R}^m$ 으로의 일차변환 F는 $m \times n$ 행렬 $\mathbf{A}$에 의해 주어진다.