第五章 插值法

预备知识

- 实践中有些函数解析式未知，或虽有明确解析式，但计算复杂，这时需要用比较简单且易于计算的函数$p(x)$去近似代替它，使得

$$p(x_i)=y_i \quad (i=0,1,2,\ldots,n)$$

这类问题称为插值问题。函数$p(x_i)$称为插值函数。 $x_0,x_1,\ldots x_n$称为插值节点或简称节点。插值节点所在的区间称为插值区间。$p(x_i)=y_i$称为插值条件。

预备知识

多项式的插值问题

构造n次多项式

$$P_n(x)= a_0 + a_1x + a_2x^2+\dots+ a_nx^n$$

使满足$P_n(x_i)= y_i$ $(i=0,1,2,\dots,n)$，及利用多项式$P_n(x)$进行插值计算的问题。

多项式插值的优点

多项式函数计算简便，只需用加减乘等运算，而且其导数与积分仍为多项式。

§1　不等距条件下的牛顿基本差商公式

§1.1 差 商

- 差商的定义

✦ $f(x)$在x_i点的零阶差商为

$$f[x_i]=f(x_i) \qquad (i=0,1,2,\ldots,n)$$

✦ $f(x)$在$[x_i,x_j]$上的一阶差商为

$$f[x_i,x_j]=\frac{f[x_j]-f[x_i]}{x_j-x_i}=\frac{f(x_j)-f(x_i)}{x_j-x_i}$$

✦ $f(x)$在$[x_i,x_j,x_k]$区间上一阶差商之差商为二阶差商

$$f[x_i,x_j,x_k]=\frac{f[x_j,x_k]-f[x_i,x_j]}{x_k-x_i}$$

例如：$f[x_0,x_1,x_2]=\dfrac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$

§1.1 差商

例如：$f[x_1,x_2,x_3]=\dfrac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$

区间$[x_i,x_{i+1},\dots,x_{i+n}]$上的$n$阶差商为：

$$f[x_i,x_{i+1},\dots,x_{i+n-1},x_{i+n}]$$

$$=\frac{f[x_{i+1},x_{i+2},\dots,x_{i+n}]-f[x_i,x_{i+1},\dots,x_{i+n-1}]}{x_{i+n}-x_i}$$

§ 1.1 差商

差商表

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$
x_0	$f(x_0)$			
		$f[x_0,x_1]$		
x_1	$f(x_1)$		$f[x_0,x_1,x_2]$	
		$f[x_1,x_2]$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$
x_2	$f(x_2)$		$f[x_1,x_2,x_3]$	
		$f[x_2,x_3]$		
x_3	$f(x_3)$			
…	…		…	

§ 1.1 差 商

例5。 试列出$f(x_i)=x^3$在节点$x=0,2,3,5,6$上的各阶差商值。

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$
0	0			
		(8-0)/(2-0)=4		
2	8		(19-4)/(3-0)=5	
		(27-8)/(3-2)=19		(10-5)/(5-0)=1
3	27		(49-19)/(5-2)=10	
		(125-27)/(5-3)=49		(14-10)/(6-2)=1
5	125		(91-49)/(6-3)=14	
		(216-125)/(6-5)=91		
6	216			

§1.1 差 商

如以x代表时间t,$f(x)$代表路程s,则一阶差商为$\Delta s_i/\Delta t_i=V_i$，它相当于在$[t_i, t_{i+1}]$范围内的一种平均速度，二阶差商则为上述平均速度的平均变化率，即平均加速度,…,所以差商表的数值可以直接反映出函数值的变化情况。

- 差商的重要特性——对称性，即差商的值与同组节点排列的次序无关。

§ 1.1 差 商

$$f[x_0,x_1]=\frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}=\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}=\frac{f(x_0)}{x_0-x_1}+\frac{f(x_1)}{x_1-x_0}=f[x_1,x_0]$$

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}=\frac{\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}-\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2-x_0}$$

$$=\frac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}-\frac{f(x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}-\frac{f(x_1)}{(x_2-x_0)(x_1-x_0)}+\frac{f(x_0)}{(x_1-x_0)(x_2-x_0)}$$

$$=\frac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}-\frac{f(x_1)}{(x_2-x_0)}\left[\frac{x_1-x_0+x_2-x_1}{(x_2-x_1)(x_1-x_0)}\right]+\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

$$=\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+\frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+\frac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

§1.1 差 商

$$f[x_0,x_2,x_1]=\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+\frac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}+\frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

结论：

✦差商值与变量的排列次序无关。

✦当$f(x)=P_n(x)$为n次多项式时,可以证明它的n阶差商是一个常量

§1.2 牛顿基本差商公式

- 设x为插值区间内的一个节点，按照差商定义，有如下关系式

$$f[x_0,x]=\frac{f[x]-f[x_0]}{x-x_0}$$

$$f[x_1,x_0,x]=\frac{f[x_0,x]-f[x_1,x_0]}{x-x_1}$$

$$f[x_2,x_1,x_0,x]=\frac{f[x_1,x_0,x]-f[x_2,x_1,x_0]}{x-x_2}$$

……………………………………

§1.2 牛顿基本差商公式

由上式逐次解出$f(x), f[x_0, x], f[x_1, x_0, x], f[x_2, x_1, x_0, x], \ldots$,并代入$f(x)$得：

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f[x_0, x]$$

$$= f(x_0) + (x - x_0)[f[x_1, x_0] + (x - x_1) f[x_1, x_0, x]]$$

$$= f(x_0) + (x - x_0) f[x_1, x_0]$$

$$+(x - x_0)(x - x_1)[f[x_2, x_1, x_0] + (x - x_2) f[x_2, x_1, x_0, x]]$$

$$= \ldots$$

$$= f(x_0) + (x - x_0) f[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_2, x_1, x_0]$$

$$+ \ldots + (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}) f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0]$$

$$+(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n) f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0, x]$$

$$= P_n(x) + R_n(x)$$

§1.2 牛顿基本差商公式

- 其中$P_n(x)$称为牛顿基本差商公式， $R_n(x)$称为牛顿基本差商公式的余式。
- 若用$P_n(x)$近似$f(x)$,则误差为$R_n(x)$。
  - 当$x=x_i(i=0,1, 2,\ldots,n)$时， $R_n(x_i)=0, P_n(x_i)= y_i$
  - 当$x\neq x_i(i=0,1, 2,\ldots,n)$时， $R_n(x_i) \neq 0, P_n(x)\approx f(x)$

§1.2 牛顿基本差商公式

例5.2 已知x=1,4,9的平方根值，求$7^{1/2}$

解：（1）建立差商表

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$
1	1		
		0.33333	
4	*2*		-0.01667
		0.2	
9	*3*		

§ 1.2 牛顿基本差商公式

（2）根据差商表建立牛顿基本差商插值公式

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$
1	1		
		0.33333	
4	2		-0.01667
		0.2	
9	3		

$$P_2(x)=f(x_0)+(x-x_0)f[x_1,x_0]+(x-x_0)(x-x_1)f[x_2,x_1,x_0]$$

$$P_2(7)=1+(7-1)\times 0.33333+(7-1)\times(7-4)\times(-0.01667)=2.69992$$

§1.3 牛顿基本差商公式的余式估计

✦差商与导数的关系

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x) \longrightarrow R_n(x)=f(x)-P_n(x)$$

对余式求其n阶导数:

$$R_n^{(n)}(x)=f^{(n)}(x)-P_n^{(n)}(x)$$

$$=f^{(n)}(x)-\{f(x_0)+(x-x_0)f[x_0,x_1]$$

$$+(x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2]$$

$$+\ldots+(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})f[x_0,x_1,\ldots,x_n]\}^{(n)}$$

§ 1.3 牛顿基本差商公式的余式估计

$R_n^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - P_n^{(n)}(x)$

$= f^{(n)}(x) - n!\, f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$

$$\begin{cases} R_n(x_i)=0 & (i=0,1,..,n) & n+1\text{个零点} \\ R'_n(\xi_i)=0 & (i=0,1,..,n-1) & n\text{个零点} \\ \vdots & \vdots & \\ R_n^{(n)}(\xi)=0 & (\xi\in[x_0,x_1,\ldots,x_n]) & 1\text{个零点} \end{cases}$$

$R_n^{(n)}(\xi)=0=f^{(n)}(\xi) - n!\, f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$

差商和导数的关系

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

§ 1.3 牛顿基本差商公式的余式估计

✦余式的估计

$$f[x_0,x_1,\ldots,x_n]=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\quad (\xi\in[x_0,x_1,\ldots,x_n])$$

增加新节点x，并且$f(x)$为$(n+1)$阶可导时，有

$$f[x_0,x_1,\ldots,x_n,x]=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\quad (\xi\in[x_0,x_1,\ldots,x_n,x])$$

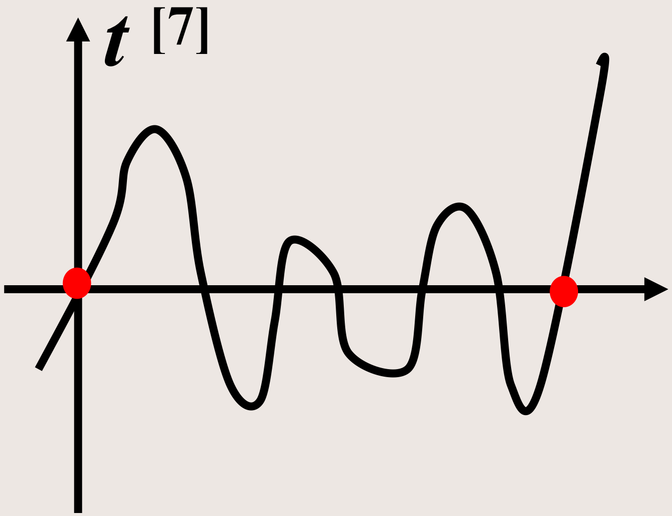
$$R_n(x)=(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)f[x_0,x_1,\ldots,x_n,x]$$

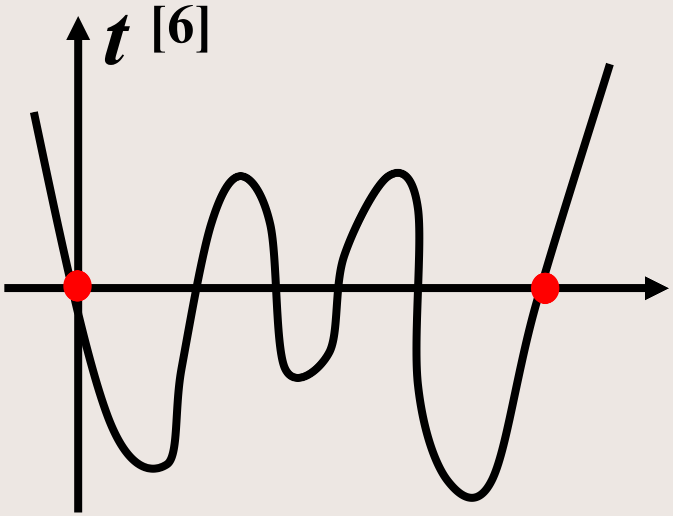
$$=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

如果$|f^{(n+1)}(\xi)|\le M_{n+1}$ $\quad |R_n(x)|\le\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right|$

§ 1.3 牛顿基本差商公式的余式估计

$$|R_n(x)| = |\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}||(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\prod_{n+1}(x)|$$





结论:

✦振幅两头大中间小

✦当x在插值区间以外时，其幅值较大，应当尽量避免

§ 1.3 牛顿基本差商公式的余式估计

✦事后估计误差法

$P_n(x)$: 插值节点为$x_0, x_1, \ldots x_n$

$$R_n(x)=f(x)-P_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi_1)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$$

$P_n^{(1)}(x)$: 插值节点为$x_1, \ldots x_n, x_{n+1}$

$$R_n^{(1)}(x)=f(x)-P_n^{(1)}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi_2)}{(n+1)!}(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n+1})$$

$$\frac{f(x)-P_n(x)}{f(x)-P_n^{(1)}(x)}\approx\frac{x-x_0}{x-x_{n+1}}$$

$f^{(n+1)}(x)$ 在插值区间上变化不大时

§ 1.3 牛顿基本差商公式的余式估计

✦事后估计误差法

$$\frac{f(x)\text{-}P_n(x)}{f(x)\text{-}P_n^{(1)}(x)} \approx \frac{x-x_0}{x-x_{n+1}}$$

$$R_n(x)=f(x)\text{-}P_n(x) \approx \frac{x-x_0}{x_0-x_{n+1}}[P_n(x)-P_n^{(1)}(x)]$$

§ 1.3 牛顿基本差商公式的余式估计

例5.9 用插值法求$\sqrt{7}$的值。

- 解：作函数$f(x)=\sqrt{x}$

  取x_0=4, x_1=9, x_2=6.25 , x_3=4. 84建立差商表

x	$f(x)$	$f[x_i,x_{i+1},]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$
4	2		
		0.2	
9	3		-0.00808
		0.18182	
6.25	2.5		-0.00744
		0.21277	
4.84	2.2		

$P_2(7)$= 2+(7-4)×0.2+(7-4)×(7-9)×(-0.00808)=2.64848

§ 1.3 牛顿基本差商公式的余式估计

在区间[4,9]上，

$$f^{3}(x)=\frac{3}{8}(\frac{1}{\sqrt{x}})^{5}\le\frac{3}{8}(\frac{1}{\sqrt{4}})^{5}=0.011719=M_{3}$$

$$R_{n}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_{0})(x-x_{1})\cdots(x-x_{n})$$

$$R_{2}(7)=\frac{f^{(2+1)}(\xi)}{(2+1)!}(7-x_{0})(7-x_{1})\cdots(7-x_{n})$$

$$\le\frac{M_{3}}{3!}(7-4)(7-9)(7-6.25)\approx 0.00879$$

§ 1.3 牛顿基本差商公式的余式估计

采用事后估计误差方法：

x	$f(x)$	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$
4	2		
		0.2	
9	3		-0.00808
		0.18182	
6.25	2.5		-0.00744
		0.21277	
4.84	2.2		

$$P_2^{(1)}(7)=3+(7-9)\times 0.18182+(7-9)\times(7-6.25)\times(-0.00744)$$

$$=2.64752$$

§ 1.3 牛顿基本差商公式的余式估计

事后估计误差公式：

$$R_n(x) \approx \frac{x - x_0}{x_0 - x_{n+1}} [P_n(x) - P_n^{(1)}(x)]$$

$$\approx \frac{7-4}{4-4.84} [2.64848 - 2.64752]$$

$$= -0.00343$$

余式近似**0.5*10^{-2}, P$_2$(7)**可舍入为**2.65**。

§ 2.1 差分

✦差分的概念

函数在等距节点上的值为$y_0\ y_1 \dots\ y_n$，称

$$\Delta y_{i-1} = y_i - y_{i-1}$$

为函数$f(x)$ 在$[x_{i-1}, x_i]$上的一阶差分。称

$$\Delta^2 y_{i-1} = \Delta y_i - \Delta y_{i-1}$$

为函数$f(x)$ 在$[x_{i-1}, x_{i+1}]$上的二阶差分。称

$$\Delta^k y_{i-1} = \Delta^{k-1} y_i - \Delta^{k-1} y_{i-1}$$

为函数$f(x)$ 在$[x_{i-1}, x_{i+k-1}]$上的k阶差分。

§ 2.1 差分

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
x_0	y_0				
		Δy_0			
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$	
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$	
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		
		Δy_3			
x_4	y_4				

§ 2.1 差分

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0$$

$$\Delta y_1 = y_2 - y_1$$

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0$$

$$\Delta y_2 = y_3 - y_2$$

$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 = y_3 - 2y_2 + y_1$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = y_3 - 2y_2 + y_1 - (y_2 - 2y_1 + y_0)$$

$$= y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

§ 2.1 差分

同理:

$$\Delta^4 y_0 = \Delta^3 y_1 - \Delta^3 y_0 = y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1 - (y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0)$$

$$= y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0$$

$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^3$

结论:

各阶差分中函数值的系数正好等于 $(a-b)^r$ 展开式中的系数

§ 2.1 差分

✦等距节点情况下$x_i = x_0 + ih$，用差分表示差商：

$$f[x_0,x_1]=\frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}=\frac{y_1-y_0}{h}=\frac{\Delta y_0}{1!h}$$

$$f[x_1,x_2]=\frac{y_2-y_1}{h}=\frac{\Delta y_1}{1!h}$$

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}=\frac{\frac{\Delta y_1}{1!h}-\frac{\Delta y_0}{1!h}}{2h}=\frac{\Delta y_1-\Delta y_0}{2h^2}=\frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}$$

$$f[x_1,x_2,x_3]=\frac{f[x_3,x_2]-f[x_2,x_1]}{x_3-x_2}=\frac{\frac{\Delta y_2}{1!h}-\frac{\Delta y_1}{1!h}}{2h}=\frac{\Delta y_2-\Delta y_1}{2!h^2}=\frac{\Delta^2 y_1}{2!h^2}$$

§2.1 差分

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\frac{\dfrac{\Delta^2 y_1}{2!h^2}-\dfrac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}}{3h}=\frac{\Delta^2 y_1-\Delta^2 y_0}{2*3h^3}=\frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}$$

$$f\left[x_i,x_{i+1},\cdots,x_{i+n}\right]=\frac{\Delta^n y_i}{n!h^n}$$

§2.2 牛顿前向插值公式

✦建立等距节点的牛顿基本差商公式:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(x_0)+(x-x_0)f[x_0,x_1] \\
&+(x-x_0)(x-x_1)f[x_2,x_1,x_0] \\
&+\ldots+(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})f[x_n,x_{n-1},\ldots,x_0] \\
&+(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)f[x_n,x_{n-1},\ldots,x_0,x]
\end{aligned}
$$

✦根据等距节点条件下，差分与差商的关系，用差分代替差商:

$$f[x_0,x_1]=\frac{\Delta y_0}{1!h} \qquad f[x_0,x_1,x_2]=\frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}$$

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}$$

§2.2 牛顿前向插值公式

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f[x_0,x_1]$$
$$+(x-x_0)(x-x_1)f[x_2,x_1,x_0]$$
$$+\dots+(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})f[x_n,x_{n-1},\dots,x_0]$$
$$+(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)f[x_n,x_{n-1},\dots,x_0,x]$$

$$f[x_i,x_{i+1},\dots,x_{i+n}]=\frac{\Delta^n y_i}{n!h^n}$$

$$f[x_n,x_{n-1},\dots,x_0]=\frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}$$

✦牛顿前向插值公式

$$P_n(x)=y_0+(x-x_0)\frac{\Delta y_0}{1!h}+(x-x_0)(x-x_1)\frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}$$
$$+\dots+(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})\frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}$$

§ 2.2 牛顿前向插值公式

令 $t = \dfrac{x - x_0}{h}$

$x\text{-}x_i=(x\text{-}x_0)\text{-}(x_i\text{-}x_0)=(t\text{-}i)h$

牛顿前向插值公式变为:

$$P_n(x)=y_0+(x-x_0)\frac{\Delta y_0}{1!h}+(x-x_0)(x-x_1)\frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}+\ldots+(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})\frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}$$

$$P_n(x)=y_0+th\frac{\Delta y_0}{1!h}+th(t-1)h\frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}+\ldots+th(t-1)h\ldots(t-\overline{n-1})h\frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}$$

§ 2.2 牛顿前向插值公式

$$P_n(x)=y_0+th\frac{\Delta y_0}{1!h}+th(t-1)h\frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}+\ldots+th(t-1)h\ldots(t-\overline{n-1})h\frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}$$

$$P_n(x)=y_0+t\frac{\Delta y_0}{1!}+t(t-1)\frac{\Delta^2 y_0}{2!}+\ldots+t(t-1)\ldots(t-\overline{n-1})\frac{\Delta^n y_0}{n!}$$

$$=y_0+c_t^1\Delta y_0+c_t^2\Delta^2 y_0+\ldots+c_t^n\Delta^n y_0$$

$$c_t^i=\frac{t(t-1)(t-2)\ldots(t-i+1)}{i!}=\frac{t^{[i]}}{i!}$$

§ 2.2 牛顿前向插值公式

牛顿前向插值余项公式:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1} t(t-1)\cdots(t-n)$$

§ 2.3 牛顿后向插值公式

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
x_0	y_0				
		Δy_0			
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$	
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\boxed{\Delta^4 y_0}$
		Δy_2		$\boxed{\Delta^3 y_1}$	
x_3	y_3		$\boxed{\Delta^2 y_2}$		
		$\boxed{\Delta y_3}$			
x_4	y_4				

§2.3 牛顿后向插值公式

在等距节点情况下，以$x_n\, x_{n-1} \ldots x_0$顺序建立牛顿基本差商公式

$$P_n(x) = f(x_n) + (x - x_n) f[x_n, x_{n-1}]$$
$$+ (x - x_n)(x - x_{n-1}) f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}]$$
$$+ \ldots + (x - x_n)(x - x_{n-1}) \ldots (x - x_1) f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0]$$

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n}] = \frac{\Delta^n y_i}{n!h^n}$$

$$f[x_n, x_{n-1}] = f[x_{n-1}, x_n] = \frac{\Delta y_{n-1}}{1!h}$$

$$f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}] = f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] = \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}$$

§2.3 牛顿后向插值公式

$$f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3}] = f[x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] = \frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3!h^3}$$

$$P_n(x) = f(x_n) + (x - x_n) f[x_n, x_{n-1}]$$
$$+ (x - x_n)(x - x_{n-1}) f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}]$$
$$+ \ldots + (x - x_n)(x - x_{n-1}) \ldots (x - x_1) f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0]$$

✦牛顿向后插值公式

$$P_n(x) = y_n + (x - x_n) \frac{\Delta y_{n-1}}{1!h} + (x - x_n)(x - x_{n-1}) \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}$$
$$+ \ldots + (x - x_n)(x - x_{n-1}) \ldots (x - x_1) \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}$$

§2.3 牛顿后向插值公式

令 $t=\dfrac{x-x_n}{h}$

$x\text{-}x_{n\text{-}i}=(x\text{-}x_n)\text{-}(x_n\text{-}x_{n\text{-}i})=(t+i)h$

$$P_n(x)=y_n+(x-x_n)\frac{\Delta y_{n-1}}{1!h}+(x-x_n)(x-x_{n-1})\frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}$$

$$+\ldots+(x-x_n)(x-x_{n-1})\ldots(x-x_1)\frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}$$

$$P_n(x)=y_n+th\frac{\Delta y_{n-1}}{1!h}+th(t+1)h\frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}$$

$$+\ldots+th(t+1)h\ \ldots\ (t+n-1)h\frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}$$

§ 2.3 牛顿后向插值公式

$$P_n(x)=y_n+ th\frac{\Delta y_{n-1}}{1!h}+ th(t+1)h\frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}$$

$$+\ldots+th(t+1)h\ \ldots\ (t+n-1)h\frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}$$

$$P_n(x)=y_n+t\frac{\Delta y_{n-1}}{1!}+t(t+1)\frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!}$$

$$+\cdots+t(t+1)(t+2)\cdots(t+n-1)\frac{\Delta^n y_0}{n!}$$

$$= y_n+c_t^1\Delta y_{n-1}+c_{t+1}^2\Delta^2 y_{n-2}+\ldots+c_{t+n-1}^n\Delta^n y_0$$

$$c_t^i=\frac{t(t+1)(t+2)\ldots(t+i-1)}{i!}$$

§ 2.3 牛顿后向插值公式

牛顿后向插值余项公式:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1} t(t+1)\cdots(t+n)$$

§2.3 牛顿后向插值公式

例5-3 用牛顿等距插值公式求*y*(1.5)

根据已知条件可知x=1.5, h=1

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
-1	-1			
		2		
0	1		0	
		2		$\boxed{6}$
1	3		$\boxed{6}$	
		$\boxed{8}$		
2	11			

$$P_n(x) = y_n + t\frac{\Delta y_{n-1}}{1!} + t(t+1)\frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!}$$

$$+\cdots + t(t+1)(t+2)\cdots(t+n-1)\frac{\Delta^n y_0}{n!}$$

$$t = \frac{x - x_n}{h} = 1.5 - 2 = -0.5$$

$$P_3(1.5) = y_3 + \frac{t}{1!}\Delta y_2 + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_1 + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\Delta^3 y_0$$

§2.3 牛顿后向插值公式

$$t=\frac{x-x_n}{h}=\frac{1.5-2}{1}=-0.5$$

2

0

2

$\boxed{\underline{6}}$

$\boxed{\underline{6}}$

$\boxed{\underline{8}}$

$$P_3(x)=11+t\frac{8}{1!}+t(t+1)\frac{6}{2!}+t(t+1)(t+2)\frac{6}{3!}$$

$$P_3(1.5)=11+(-0.5)\frac{8}{1!}+(-0.5)(-0.5+1)\frac{6}{2!}$$

$$+(-0.5)(-0.5+1)(-0.5+2)\frac{6}{3!}$$

§2.4 斯梯林插值公式（1）

x_{-1}	$\boxed{y_{-1}}$		
		$\boxed{\Delta y_{-1}}$	
x_0	y_0		$\boxed{\Delta^2 y_{-1}}$
		Δy_0	
x_1	y_1		

$$P_2^{(1)}(x)=y_{-1}+t_{-1}\frac{\Delta y_{-1}}{1!}+t_{-1}(t_{-1}-1)\frac{\Delta^2 y_{-1}}{2!}$$

$$=y_{-1}+(t+1)\frac{\Delta y_{-1}}{1!}+(t+1)((t+1)-1)\frac{\Delta^2 y_{-1}}{2!}$$

$$=\underline{y_{-1}+\Delta y_{-1}}+t\frac{\Delta y_{-1}}{1!}+(t+1)t\frac{\Delta^2 y_{-1}}{2!}$$

$$=y_0+c_t^1\Delta y_{-1}+c_{t+1}^2\Delta^2 y_{-1}$$

$$t=\frac{x-x_0}{h}$$

$$t_{-1}=\frac{x-x_{-1}}{h}=t+1$$

$$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$$=\frac{n(n-1)\cdots(n-(m-1))(n-m)!}{m!(n-m)!}$$

§2.4 斯梯林插值公式（2）

x_{-1}	y_{-1}		
		Δy_{-1}	
x_0	y_0		$\boxed{\Delta^2 y_{-1}}$
		$\boxed{\Delta y_0}$	
x_1	$\boxed{y_1}$		

$$P_2^{(2)}(x)=y_1+t_1\frac{\Delta y_0}{1!}+t_1(t_1+1)\frac{\Delta^2 y_{-1}}{2!}$$

$$=y_1+(t-1)\frac{\Delta y_0}{1!}+(t-1)((t-1)+1)\frac{\Delta^2 y_{-1}}{2!}$$

$$=y_1-\Delta y_0+t\frac{\Delta y_0}{1!}+(t-1)t\frac{\Delta^2 y_{-1}}{2!}$$

$$=y_0+c_t^1\Delta y_0+c_t^2\Delta^2 y_{-1}$$

$$t=\frac{x-x_0}{h}$$

$$t_1=\frac{x-x_1}{h}=t-1$$

$$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$$=\frac{n(n-1)\cdots(n-(m-1))(n-m)!}{m!(n-m)!}$$

§2.4 斯梯林插值公式（3）

$$P_2^{(1)}(x) = y_0 + c_t^1 \Delta y_{-1} + c_{t+1}^2 \Delta^2 y_{-1}$$

$$P_2^{(2)}(x) = y_0 + c_t^1 \Delta y_0 + c_t^2 \Delta^2 y_{-1}$$

令$P_2(x) = \dfrac{P_2^{(1)}(x) + P_2^{(2)}(x)}{2}$

$$= \frac{y_0 + c_t^1 \Delta y_{-1} + c_{t+1}^2 \Delta^2 y_{-1} + y_0 + c_t^1 \Delta y_0 + c_t^2 \Delta^2 y_{-1}}{2}$$

$$= y_0 + c_t^1 \frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} + \frac{c_t^2 + c_{t+1}^2}{2} \Delta^2 y_{-1}$$

§2.4 斯梯林插值公式（3）

$$令P_2(x) = y_0 + c_t^1 \frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} + \frac{c_t^2 + c_{t+1}^2}{2} \Delta^2 y_{-1}$$

斯梯林插值公式

$$P_n(x) = y_0 + c_t^1 \frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} + \frac{c_t^2 + c_{t+1}^2}{2} \Delta^2 y_{-1}$$

$$+ c_{t+1}^3 \frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + \frac{c_{t+1}^4 + c_{t+2}^4}{2} \Delta^4 y_{-2}$$

$$+ \ldots\ldots$$

$$+ c_{t+k-1}^{2k-1} \frac{\Delta^{2k-1} y_{-k} + \Delta^{2k-1} y_{-k+1}}{2} + \frac{c_{t+k-1}^{2k} + c_{t+k}^{2k}}{2} \Delta^{2k} y_{-k}$$

$$+ \ldots\ldots$$

§ 2.4 斯梯林插值公式

$$
\begin{aligned}
p_n(x) = {} & y_0 + c_t^1 \frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} + \frac{c_t^2 + c_{t+1}^2}{2} \Delta^2 y_{-1} \\
& + c_{t+1}^3 \frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + \frac{c_{t+1}^4 + c_{t+2}^4}{2} \Delta^4 y_{-2} \\
& + \ldots. \\
& + c_{t+k-1}^{2k-1} \frac{\Delta^{2k-1} y_{-k} + \Delta^{2k-1} y_{-k+1}}{2} + \frac{c_{t+k-1}^{2k} + c_{t+k}^{2k}}{2} \Delta^{2k} y_{-k} \\
& + \ldots.
\end{aligned}
$$

x_{-1}	y_{-1}						
		Δy_{-1}	C_{t+1}^2	$\Delta^3 y_{-2}$	C_{t+2}^4	$\Delta^5 y_{-3}$	C_{t+3}^6
x_0	y_0	C_t^1	$\Delta^2 y_{-1}$	C_{t+1}^3	$\Delta^4 y_{-2}$	C_{t+2}^5	$\Delta^6 y_{-3}$
		Δy_0	C_t^2	$\Delta^3 y_{-1}$	C_{t+1}^4	$\Delta^5 y_{-2}$	C_{t+2}^6
x_1	y_1						

§ 2.4 斯梯林插值公式

$$\frac{1}{2}[C_{t+k-1}^{2k}+C_{t+k}^{2k}]=\frac{1}{2}[\frac{(t+k-1)!}{(2k)!(t+k-1-2k)!}+\frac{(t+k)!}{(2k)!(t+k-2k)!}]$$

$$=\frac{(t+k-1)!}{2(2k)!(t+k-1-2k)!}[1+\frac{t+k}{t-k}]=\frac{(t+k-1)!t}{(2k)!(t+k-1-2k)!(t-k)}$$

$$=\frac{1}{(2k)!}\frac{(t+k-1)(t+k-2)\cdots(t+k-(k-1))(t+k-k)}{t-k}$$

$$\underline{(t+k-(k+1))\cdots(t-k+1)(t-k)}$$

$$=\frac{1}{(2k)!}t^2(t^2-1)\cdots(t^2-(k-1)^2)$$

§2.4 斯梯林插值公式

$$\frac{1}{2}[c_{t+k-1}^{2k}+c_{t+k}^{2k}]=\frac{1}{2}\frac{1}{(2k)!}\boxed{[(t+k-1)^{[2k]}+(t+k)^{[2k]}]}$$

$$(t+k-1)^{[2k-1]}(t+k-1-(2k-1))+(t+k)(t+k-1)^{[2k-1]}$$

$$=(t+k-1)^{[2k-1]}[(t-k)+(t+k)]$$

$$=(t+k-1)^{[2k-1]}2t$$

$$\frac{1}{2}[c_{t+k-1}^{2k}+c_{t+k}^{2k}]=\frac{1}{2}\frac{1}{(2k)!}(t+k-1)^{[2k-1]}2t$$

$$=\frac{1}{(2k)!}(t+k-1)^{[2k-1]}t \quad =\frac{1}{(2k)!}t^2(t^2-1)(t^2-2^2)\ldots(t^2-\overline{k-1}^2)$$

§ 2.4 斯梯林插值公式

$$C_{t+k-1}^{2k-1}=\frac{(t+k-1)!}{(2k-1)!(t+k-1-2k+1)!}=\frac{(t+k-1)!}{(2k-1)!(t-k)!}$$

$$=\frac{(t+k-1)!}{(2k-1)!(t-k)!}$$

$$=\frac{(t+k-1)(t+k-2)\cdots(t+k-(k-1))(t+k-k)}{(2k-1)!}$$

$$\underline{(t+k-(k+1))\cdots(t-k+1)}$$

$$=\frac{1}{(2k-1)!}t(t^2-1)\cdots(t^2-(k-1)^2)$$

§2.4 斯梯林插值公式

$$p_n(x) = y_0 + \frac{t}{1!}\frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} + \frac{t^2}{2!}\Delta^2 y_{-1}$$

$$+ \frac{1}{3!}t(t^2 - 1)\frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + \frac{1}{4!}t^2(t^2 - 1)\Delta^4 y_{-2}$$

$$+ \frac{1}{5!}t(t^2 - 1)(t^2 - 2^2)\frac{\Delta^5 y_{-3} + \Delta^5 y_{-2}}{2} + \frac{1}{6!}t^2(t^2 - 1)(t^2 - 2^2)\Delta^6 y_{-3}$$

$$+ \ldots.$$

§2.4 斯梯林插值公式

余式：

$$R_{2n}(x)=\frac{f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!}h^{2n+1}t(t^2-1)\cdots(t^2-n^2)$$

$$R_{2n-1}(x)=\frac{(t-n)f^{(2n)}(\xi_1)+(t+n)f^{(2n)}(\xi_2)}{2(2n)!}$$

$$h^{2n}t(t^2-1)\cdots(t^2-(n-1)^2)$$

§ 2.4 斯梯林插值公式

例5. 7已知下述数值表，求当x=6. 1时对应的函数值。

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
6.00	1.8727			
		0.00612305		
6.04	1.8789		-0.00003718	
$x=6.1$		0.00608587		0.00000043
6.08	1.8849		-0.00003675	
		0.00604912		0.00000045
6.12	1.8910		-0.00003630	
		0.00601282		
6.16	1.8970			

$h=0.04$

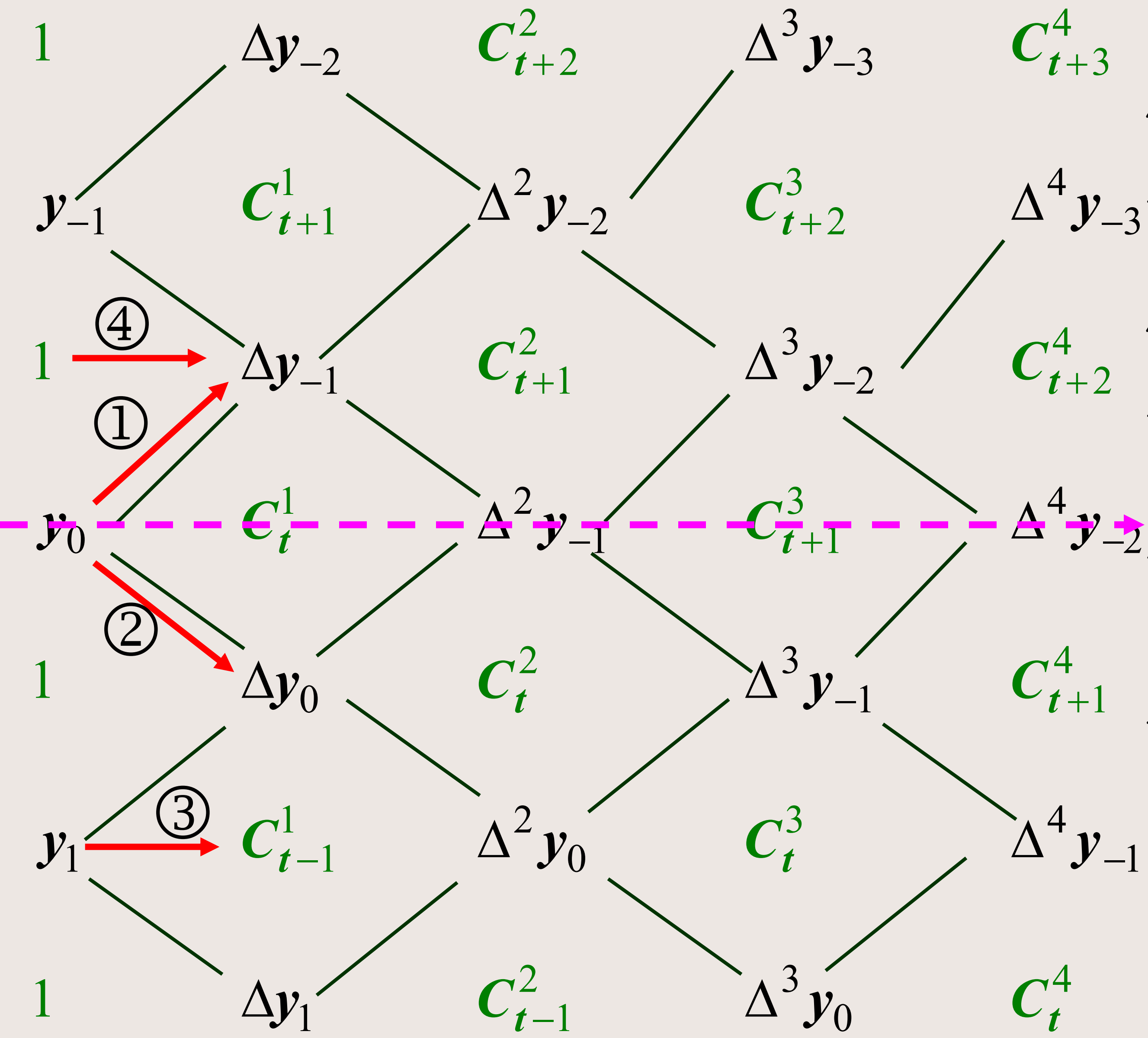
$x_0 = 6.08$

$$t=\frac{6.1-6.08}{0.04}=0.5$$

$$y \approx 1.8849+\frac{0.5}{1!}*\frac{0.00608587+0.00604912}{2}+\frac{0.5^2}{2!}*(-0.00003675)+\frac{0.5*(0.5^2-1)}{3!}*\frac{0.00000043+0.00000045}{2}$$

$$=1.88802239$$

§ 2.3 费雷瑟图表及使用方法



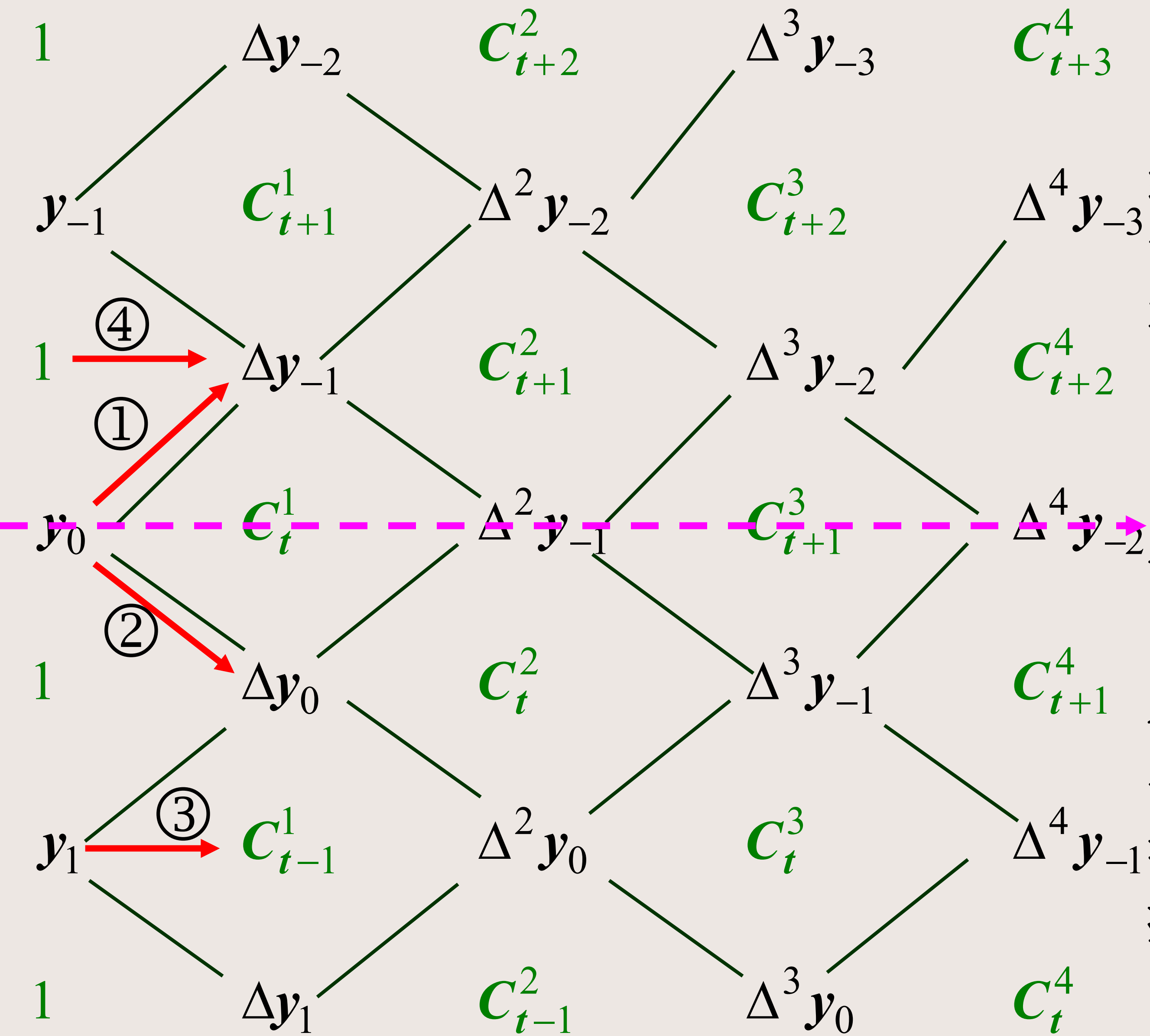
①正斜率：该差分与位于其下面的二项式系数之积作为项；

②负斜率：该差分与位于其上面的二项式系数之积作为项；

③水平：二项式系数与位于其上下的差分的算术平均值之积作为项；

④水平：差分与位于其上下的二项式系数的算术平均值之积作为项；

§ 2.3 费雷瑟图表及使用方法



⑤对每一条从右到左的连接线，可按照该线段从左到右地相交于差分的规则1—4计算项后乘—1。

⑥沿任何闭路径环绕时，按规则1—5所得各项之和为0。

⑦对起于函数列的某个函数值和终止于同一个差分的任何路径，按照规则1—5建立的插值公式等价。