第三章 解线性方程组的直接法

§1消元法

1.1 消元法的描述

1.2 高斯消元法

1.3 克劳特消元法

1.4 平方根法

1.5 追赶法

1.6 消元法的应用条件

§2 选主元的高斯消元法

2.1 列主元素法

2.2 全主元素法

§1.1 消元法的描述

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

矩阵形式:

$\longrightarrow AX = B$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

§1.1 消元法的描述

线性方程组解唯一的条件：

$|A| \neq 0$ 或者 $\det(A) \neq 0$

其解为： $x_i = \dfrac{\det(A_i)}{\det(A)}$ **克莱姆(Cramer)法则**

其中， A_i为方程组右端向量B代替A中第i列向量所得的矩阵。

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

§1. 1 消元法的描述

直接法：假设计算过程中不产生舍入误差，经过有限次运算可求得方程组的精确解法。

思路：将线性方程组变形成等价的三角方程组。

例：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 12x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 15 \\ -18x_1 + 3x_2 - x_3 = -15 \end{cases}$$

先消去方程组中后两个方程中的变量x_1，得同解方程组：

§ 1. 1 消元法的描述

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ -15x_2 - 9x_3 = -57 \\ 21x_2 + 17x_3 = 93 \end{cases}$$

再消去上方程组第三个方程中的变量x_2，得同解方程组：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ -15x_2 - 9x_3 = -57 \\ \dfrac{22}{5}x_3 = \dfrac{66}{5} \end{cases}$$

上三角
方程组

§1.1 消元法的描述

1.1 方法描述

思路: 先逐次消去变量，将方程组化解成同解的上三角方程组，此过程称为消元过程；然后按方程相反顺序求解上三角方程组，得到原方程的解，此过程称为回代过程。

设有线方程组:

$$
\begin{cases}
a_{11}^{(0)}x_1 + a_{12}^{(0)}x_2 + \cdots + a_{1n}^{(0)}x_n = b_1^{(0)} & (1) \\
a_{21}^{(0)}x_1 + a_{22}^{(0)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(0)}x_n = b_2^{(0)} & (2) \\
a_{31}^{(0)}x_1 + a_{32}^{(0)}x_2 + \cdots + a_{3n}^{(0)}x_n = b_3^{(0)} & (3) \\
\qquad\cdots
\end{cases}
\qquad (1)
$$

§1.1 消元法的描述

(1) 为消元方便，经常用l_{11}除(3.1)$_1$:

$$(3.1)_1 / l_{11}: \quad u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + u_{13}x_3 = z_1 \quad (3.2)$$

其中: $u_{11} = \frac{a_{11}}{l_{11}}, u_{12} = \frac{a_{12}}{l_{11}}, u_{13} = \frac{a_{13}}{l_{11}}, z_1 = \frac{b_1}{l_{11}}$

(2)为把(3.1)$_2$, (3.1)$_3$中的x_1项消去，引入如下参数:

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}}, l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}}$$

§1.1 消元法的描述

(3)按以下方式消去式$(3.1)_2$,$(3.1)_3$中的x_1项：

$(3.1)_2 - l_{21} \times (3.2)$：

$$0+(a_{22}-l_{21}u_{12})\, x_2+(a_{23}-l_{21}u_{13})x_3 = b_2-l_{21}z_1$$

$(3.1)_3 - l_{31} \times (3.2)$

$$0+(a_{32}-l_{31}u_{12})\, x_2+(a_{33}-l_{31}u_{13})x_3 = b_3-l_{31}z_1$$

简记为 $$a_{22}^{(1)}x_2+a_{23}^{(1)}x_3=b_2^{(1)} \qquad (3.3)$$

$$a_{32}^{(1)}x_2+a_{33}^{(1)}x_3=b_3^{(1)} \qquad (3.4)$$

§1.1 消元法的描述

其中 $a_{ij}^{(1)}=a_{ij}^{(0)}-l_{i1}u_{1j}$， $b_i^{(1)}=b_i^{(0)}-l_{i1}z_1$

$a_{ij}^{(0)}=a_{ij}$， $b_i^{(0)}=b_i$

(4)用l_{22}除(3.3)式得:

$$u_{22}x_2+u_{23}x_3=z_2 \quad (3.5)$$

其中

$$u_{22}=\frac{a_{22}^{(1)}}{l_{22}}=\frac{a_{22}-l_{21}u_{12}}{l_{22}},u_{23}=\frac{a_{23}^{(1)}}{l_{22}}=\frac{a_{23}-l_{21}u_{13}}{l_{22}},$$

$$z_2=\frac{b_2^{(1)}}{l_{22}}=\frac{b_2-l_{21}z_1}{l_{22}}$$

§1.1 消元法的描述

(5)为将(3.4) 中的x_2项消去，引入乘数

$$l_{32}=\frac{a_{32}^{(1)}}{u_{22}}=\frac{a_{32}-l_{31}u_{12}}{u_{22}}$$

(6)消去(3.4) 式中的x_2项：

(3.4)-l_{32}(3.5)： $0+(a_{33}^{(1)}-l_{32}u_{23})\,x_3=b_3^{(1)}-l_{32}z_2$

简记为:

$$a_{33}^{(2)}x_3=b_3^{(2)} \qquad (3.6)$$

其中

$a_{33}^{(2)}=a_{33}^{(1)}-l_{32}u_{23}=a_{33}-l_{31}u_{13}-l_{32}u_{23}$,

$b_3^{(2)}=b_3^{(1)}-l_{32}z_2=b_3-l_{31}z_1-l_{32}z_2$

§1.1 消元法的描述

同样对(3.6)式遍除l_{33}得

$$u_{33}x_3=z_3 \tag{3.7}$$

其中

$$u_{33}=\frac{a_{33}^{(2)}}{l_{33}}=\frac{a_{33}-l_{31}u_{13}-l_{32}u_{23}}{l_{33}},$$

$$z_3=\frac{b_3^{(2)}}{l_{33}}=\frac{b_3-l_{31}z_1-l_{32}z_2}{l_{33}}$$

以上的计算过程称为消元过程。

§1.1 消元法的描述

❖消元过程结束就可得到下列线组：

$$\begin{cases} u_{11}x_1+u_{12}x_2+u_{13}x_3=z_1 \\ \qquad\qquad u_{22}x_2+u_{23}x_3=z_2 \\ \qquad\qquad\qquad\quad u_{33}x_3=z_3 \end{cases} \qquad (3.8)$$

❖简记为$UX=Z$，其中

$$U=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ & u_{22} & u_{23} \\ 0 & & u_{33} \end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, Z=\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

§1.1 消元法的描述

❖其中(3.8)式右端的z由下列公式确定：

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{b_1}{l_{11}} \\ z_2 = \dfrac{b_2 - l_{21}z_1}{l_{22}} \\ z_3 = \dfrac{b_3 - l_{31}z_1 - l_{32}z_2}{l_{33}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l_{11}z_1 = b_1 \\ l_{21}z_1 + l_{22}z_2 = b_2 \\ l_{31}z_1 + l_{32}z_2 + l_{33}z_3 = b_3 \end{cases}$$

❖简记为$LZ=B$，其中

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

§1.1 消元法的描述

❖ 由UX=Z, LZ=B

得LUX=B，与AX=B比较知:

$$A=LU \qquad (3.9)$$

消元过程实质上就是将原线组AX=B分解为两个三角形线组LZ=B和UX=Z的计算过程.

❖ 按照线组(3.8)可以逐次求出x_1、x_2、x_3，称为回代过程。

§1. 1 消元法的描述

❖ 系数l_{ij}、u_{ij}的计算公式:

$u_{11}=\frac{a_{11}}{l_{11}}$ l_{11}（择定）	$u_{12}=\frac{a_{12}}{l_{11}}$	$u_{13}=\frac{a_{13}}{l_{11}}$	$z_1=\frac{b_1}{l_{11}}$
$l_{21}=\frac{a_{21}}{u_{11}}$	$u_{22}=\frac{a_{22}-l_{21}u_{12}}{l_{22}}$ l_{22}（择定）	$u_{23}=\frac{a_{23}-l_{21}u_{13}}{l_{22}}$	$z_2=\frac{b_2-l_{21}z_1}{l_{22}}$
$l_{31}=\frac{a_{31}}{u_{11}}$	$l_{32}=\frac{a_{32}-l_{31}u_{12}}{u_{22}}$	$u_{33}=\frac{a_{33}-l_{31}u_{13}-l_{32}u_{23}}{l_{33}}$ l_{33}（择定）	$z_3=\frac{b_3-l_{31}z_1-l_{32}z_2}{l_{33}}$

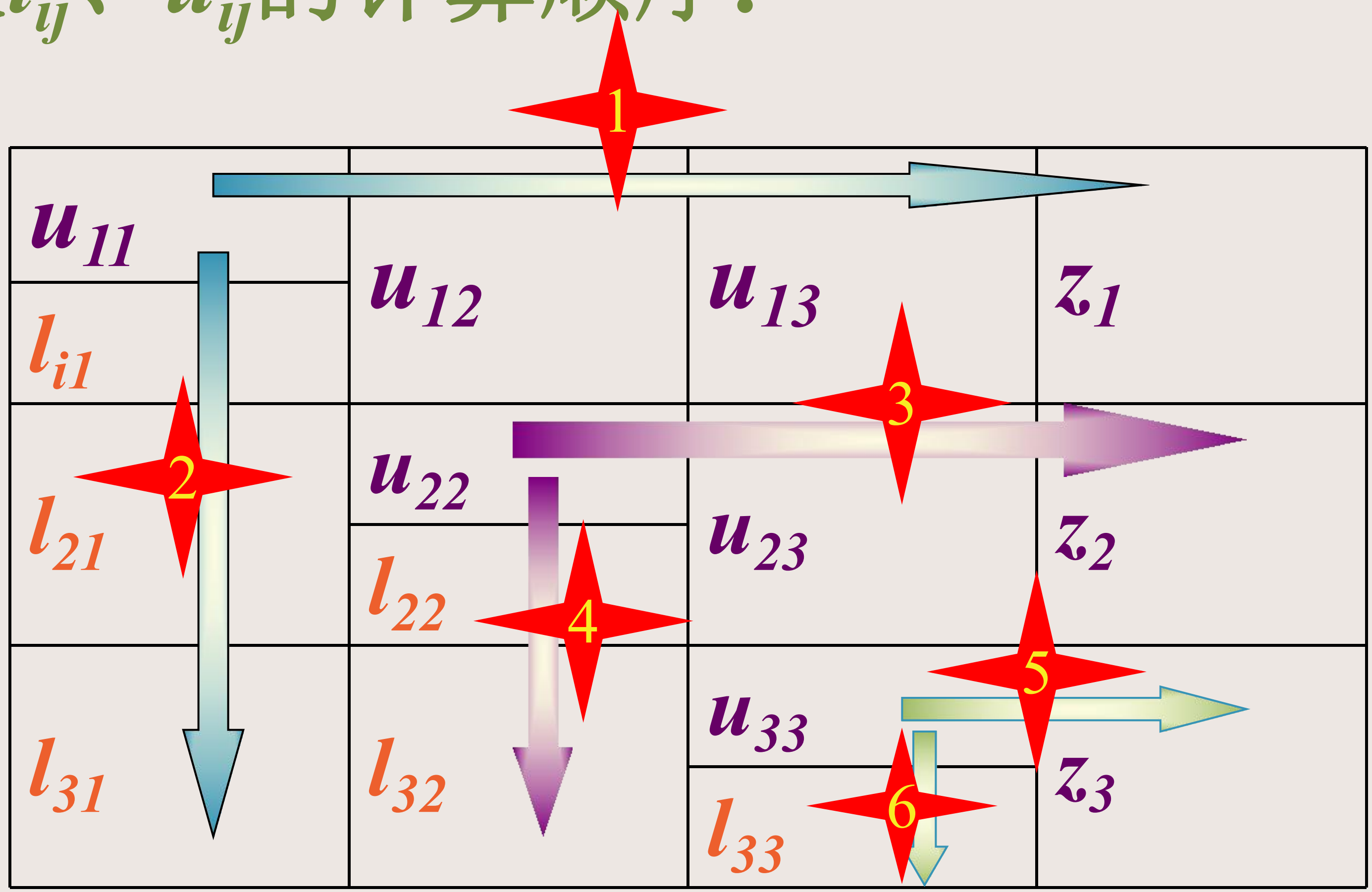
§1.1 消元法的描述

系数l_{ij}、u_{ij}的计算公式规律:

- 系数由上三角、下三角和z向量组成，上三角为u系数矩阵，下三角为l系数矩阵。
- u,z系数矩阵元素的分母为所在行对应的l对角线元素；l系数矩阵的分母为所在列对应的u对象线元素；
- u_{ij},z_i,l_{ij}系数矩阵的分子为原方程对应的系数a_{ij}与LU矩阵中i行j列的对应元素乘积之和的差；

§1.1 消元法的描述

系数l_{ij}、u_{ij}的计算顺序:



§1.1 消元法的描述

❖这种计算规律可用一般公式表示为

$$l_{ij}=\frac{a_{ij}-l_{i1}u_{1j}-l_{i2}u_{2j}-\ldots-l_{ij-1}u_{j-1j}}{u_{jj}}=\frac{a_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1}l_{ik}u_{kj}}{u_{jj}}\quad(i\ge j)$$

$$u_{ij}=\frac{a_{ij}-l_{i1}u_{1j}-l_{i2}u_{2j}-\ldots-l_{ii-1}u_{i-1j}}{l_{ii}}=\frac{a_{ij}-\sum_{k=1}^{i-1}l_{ik}u_{kj}}{l_{ii}}\quad(i\le j)$$

$$z_i=\frac{b_i-\sum_{k=1}^{i-1}l_{ik}z_k}{l_{ii}}\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

§1.1 消元法的描述

❖回代过程:在已知l_{ij}的基础上,建立求解x_1, x_2，…, x_n的三角形线组，按由上而下的方程次序解出x_1,x_2,…,x_n。

$$\begin{cases} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \cdots + u_{1n}x_n = z_1 \\ \qquad\qquad u_{22}x_2 + \cdots + u_{2n}x_n = z_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad u_{nn}x_n = z_n \end{cases} \uparrow \qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{z_1 - u_{12}x_2 - u_{13}x_3 - \cdots - u_{1n}x_n}{u_{11}} \\ x_2 = \dfrac{z_2 - u_{23}x_3 - u_{24}x_4 - \cdots - u_{2n}x_n}{u_{22}} \\ \cdots \\ x_n = \dfrac{z_n}{u_{nn}} \end{cases}$$

§1.1 消元法的描述

$$x_i = \frac{z_i - \sum_{k=i+1}^{n} u_{ik} x_k}{u_{ii}} \quad (i = n, n-1, \cdots, 2, 1)$$

§1.2 高斯(Gauss)消元法

思路：取$l_{ii}=1(i=1,2,\ldots,n)$

相应的计算公式为：

$$l_{ij}=\frac{a_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1}l_{ik}u_{kj}}{u_{jj}}(i>j),u_{ij}=a_{ij}-\sum_{k=1}^{i-1}l_{ik}u_{kj}(i\le j)$$

$$z_i=b_i-\sum_{k=1}^{i-1}l_{ik}z_k(i=1,2,\ldots,n)$$

$$x_i=\frac{z_i-\sum_{k=i+1}^{n}u_{ik}z_k}{u_{ii}}(i=n,n-1,\ldots,2,1)$$

§1.2 高斯消元法

例3.1：用高斯消元法解下列线性方程组

$$\begin{cases} -23x_1+11x_2+x_3=0 \\ 11x_1-3x_2-2x_3=3 \\ x_1-2x_2+2x_3=-1 \end{cases}$$

紧凑格式

解：

u系数的第一列值为原方程第一列的系数

$u_{11}=-23$ $l_{11}=1$	$u_{12}=11$	$u_{13}=1$	$z_1=0$
$l_{21}=\frac{a_{21}}{u_{11}}=\frac{11}{-23}$	$u_{22}=-3-(-0.47826\times 11)$ $l_{22}=1$	$u_{23}=-1.52174$	$z_2=3-(-0.47826)\times 0=3$
$l_{31}=-0.04348$	$l_{32}=-0.67307$	$u_{33}=1.01924$ $l_{33}=1$	$z_3=1.01921$

§1.2 高斯消元法

进一步求得:$z_1=0$, $z_2=3$, $z_3=1.01921$

$$\begin{cases} -23x_1 + 11x_2 + x_3 = 0 \\ 2.26086x_2 + 1.52174x_3 = 3 \\ 1.01924x_3 = 1.01921 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0.99999 \\ x_2 = 1.99999 \\ x_3 = 0.99997 \end{cases}$$

§1.3 克劳特(Crout)消元法

思路：取$l_{11}= a_{11}^{(0)}= a_{11}$, $l_{22}= a_{22}^{(1)}$, $l_{33}= a_{33}^{(2)}$,…, $l_{nn}= a_{nn}^{(n-1)}$ ，即$u_{ii}=1$

相应的计算公式为：

$$l_{ij}=a_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1}l_{ik}u_{kj}(i\geq j),$$

$$u_{ij}=\frac{a_{ij}-\sum_{k=1}^{i-1}l_{ik}u_{kj}}{l_{ii}}(i<j),z_i=\frac{b_i-\sum_{k=1}^{i-1}l_{ik}z_k}{l_{ii}}(i=1,2,\dots,n)$$

$$x_i=z_i-\sum_{k=i+1}^{n}u_{ik}z_k(i=n,n-1,\dots,2,1)$$

§1.3 克劳特消元法

例3.2:用克劳特消元法解下列线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 5 \\ 4x_1 + 3x_2 + 30x_3 = 32 \end{cases}$$

解:按克劳特消元法的计算公式, 计算结果如下:

§1.3 克劳特消元法

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 30 & 32 \end{bmatrix}$$

l系数的第一列值为原方程第一列的系数；

u系数对角线上的值为1

$u_{11}=1$ $l_{11}=2$	$u_{12}=\frac{3}{2}=1.5$	$u_{13}=\frac{4}{2}=2$	$z_1=\frac{6}{2}=3$
$l_{21}=\frac{3}{1}$	$u_{22}=1$ $l_{22}=5-3\times1.5$ $=0.5$	$u_{23}=\frac{(2-3\times2)}{0.5}$ $=-8$	$z_2=\frac{5-3\times3}{0.5}$ $=-8$
$l_{31}=\frac{4}{1}$	$l_{32}=3-1.5\times4$ $=-3$	$u_{33}=1$ $l_{33}=30-2\times4$ $-(-8)\times(-3)$ $=-2$	$z_3=\frac{1}{-2}(32$ $-4\times3-3\times8)$ $=2$

§1.3 克劳斯特消元法

$$\begin{cases} x_1 + 1.5x_2 + 2x_3 = 3 \\ \qquad\qquad x_2 - 8x_3 = -8 \\ \qquad\qquad\qquad x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 3-1.5*8-2*2=13 \\ x_2 = -8+8*2=8 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

§1.4 平方根法(Cholesky)

系数矩阵必须为对称矩阵才可用此法

❖取$l_{ii}= u_{ii}(i=1,2,\ldots,n)$，则：

$$l_{ii}=\frac{a_{ii}-\sum_{k=1}^{i-1}l_{ik}u_{kj}}{u_{ii}}=\frac{a_{ii}-\sum_{k=1}^{i-1}l_{ik}u_{kj}}{l_{ii}}$$

$$l_{ii}=\sqrt{a_{ii}-\sum_{k=1}^{i-1}l_{ik}u_{kj}}\,(i=j)$$

$$\Rightarrow\quad l_{11}=\sqrt{a_{11}}$$

§1.4 平方根法

- 线性方程组具有对称性，即$a_{ij}= a_{ji}$，则有

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}} = \frac{a_{12}}{l_{11}} = u_{12},$$

$$l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}} = \frac{a_{13}}{l_{11}} = u_{13},\ldots, l_{n1} = u_{1n}$$

$$l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}u_{12}}{u_{22}} = \frac{a_{23} - l_{21}u_{13}}{l_{22}} = u_{23},$$

$$l_{42} = u_{24},\ldots, l_{n2} = u_{2n}$$

………. ……

§1.4 平方根法

- 由此推得$u_{ij}=l_{ji}$，即l_{ij}与u_{ij}相对于对角线是对称分布的。这样得到消元的计算公式为：

$$l_{ij}=\frac{a_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1}l_{ik}u_{kj}}{\boxed{u_{jj}}}=\frac{a_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1}l_{ik}l_{jk}}{\boxed{l_{jj}}}(i>j),$$

$$l_{ii}=\sqrt{a_{ii}-\sum_{k=1}^{i-1}l_{ik}u_{ki}}=\sqrt{a_{ii}-\sum_{k=1}^{i-1}l_{ik}{}^{2}}\,(i=j)$$

P76页公式改正。

§1.4 平方根法

$$z_i = \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} z_k}{l_{ii}} \quad (i = 1,2,\dots, n),$$

$$x_i = \frac{z_i - \sum_{k=i+1}^{n} u_{ik} x_k}{u_{ii}} = \frac{z_i - \sum_{k=i+1}^{n} l_{ki} x_k}{l_{ii}}$$

$$(i = n, n-1, \dots, 2, 1)$$

§1.4 平方根法

例3.2：用平方根法解下列线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 0.42x_2 + 0.54x_3 = 0.3 \\ 0.42x_1 + x_2 + 0.32x_3 = 0.5 \\ 0.54x_1 + 0.32x_2 + x_3 = 0.7 \end{cases}$$

解：按平方根法的计算公式，计算结果如下：

系数矩阵为
对称矩阵

§1.4 平方根法

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.42 & 0.54 & 0.3 \\ 0.42 & 1 & 0.32 & 0.5 \\ 0.54 & 0.32 & 1 & 0.7 \end{bmatrix}$$

对角线上的l,u系数值为消元法对角线上分子的值开平方

$l_{11}=\sqrt{1}$ $=1=u_{11}$	$u_{12}=l_{21}=0.42$	$u_{13}=l_{31}=0.54$	$z_1=\frac{0.3}{1}=0.3$
$l_{21}=\frac{0.42}{1}$ $=0.42$	$l_{22}=\sqrt{1-0.42^2}$ $=0.90752=u_{22}$	$u_{23}=l_{32}$ $=0.10270$	$z_2=\frac{0.5-0.42\times0.3}{0.90752}$ $=0.41211$
$l_{31}=\frac{0.54}{1}$ $=0.54$	$l_{32}=(0.32-0.54$ $\times0.42)/0.90752$ $=0.10270$	$l_{33}=(1-0.54^2$ $-0.10270^2)^{\frac{1}{2}}$ $=0.83537=u_{33}$	$z_3=\frac{1}{0.83537}(0.7-$ $0.54\times0.3-0.10270$ $\times0.41211)$

§1.4 平方根法

$$\begin{cases} x_1 + 0.42x_2 + 0.54x_3 = 0.3 \\ 0.90752x_2 - 0.10270x_3 = 0.41211 \\ 0.83537x_3 = 0.59336 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -0.24052 \\ x_2 = 0.37372 \\ x_3 = 0.71030 \end{cases}$$

§1.5 追赶法

❖追赶法就是应用克劳特消元法求解三对角线形的线性方程组的解

$$
\begin{cases}
b_1x_1 + c_1x_2 & = d_1 \\
a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 & = d_2 \\
\qquad a_3x_2 + b_3x_3 + c_3x_4 & = d_3 \\
\qquad\qquad \ddots \qquad \ddots \qquad \ddots & \vdots \\
\qquad\qquad a_{n-1}x_{n-2}+b_{n-1}x_{n-1}+c_{n-1}x_n & = d_{n-1} \\
\qquad\qquad\qquad a_n x_{n-1} + b_nx_n & = d_n
\end{cases}
$$

§1.5 追赶法

（1） l_{ij} , u_{ij} (克劳特消元法的公式)

$$
\begin{array}{cccccc}
l_{11}=b_1 & u_{12}=c_1/l_{11} & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\
l_{21}=a_2 & l_{22}=b_2-a_2u_{12} & u_{23}=c_2/l_{22} & 0 & & \\
0 & l_{32}=a_3 & l_{33}=b_3-a_3u_{23} & u_{34}=c_3/l_{33} & & 0 \\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
 & l_{n-1\,n-2}=a_{n-1} & l_{n-1\,n-1}=b_{n-1}-a_{n-1}u_{n-2\,n-1} & u_{n-1\,n}=c_{n-1}/l_{n-1\,n-1} & & \\
0 & \cdots\cdots & 0 & l_{n\,n-1}=a_n & & l_{nn}=b_n-a_nu_{n-1\,n}
\end{array}
$$

$$l_{ii-1}=a_i \quad (i=2,3,\cdots,n)$$

$$l_{ii}=b_i-a_iu_{i-1i} \quad (i=2,3,\cdots,n),a_1=0,u_{01}=0$$

$$u_{ii+1}=c_i/l_{ii}\ (\text{i}=1,2,\ \cdots,\text{n-1})$$

§1.5 追赶法

（2）$z_i\ (i=1,2,\ \ldots,n)$

$$\begin{cases} l_{11}z_1 = d_1 \\ a_2 z_1 + l_{22} z_2 = d_2 \\ a_3 z_2 + l_{33} z_3 = d_3 \\ \cdots\cdots \\ a_{n-1} z_{n-2} + l_{n-1n-1} z_{n-1} = d_{n-1} \\ a_n z_{n-1} + l_{nn} z_n = d_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = d_1 / l_{11} \\ z_2 = (d_2 - a_2 z_1)/l_{22} \\ z_3 = (d_3 - a_3 z_2)/l_{33} \\ \cdots\cdots \\ z_{n-1} = \dfrac{(d_{n-1} - a_{n-1} z_{n-2})}{l_{n-1n-1}} \\ z_n = (d_n - a_n z_{n-1})/l_{nn} \end{cases}$$

或 $z_i = (d_i - a_i z_{i-1})/l_{ii} (i = 1,2,\ldots,n), z_0 = a_1 = 0$

§1.5 追赶法

（3）$x_i\,(i=n,n\text{-}1,\ \ldots,2,1)$

$$\begin{cases} x_1+u_{12}x_2=z_1 \\ x_2+u_{23}x_3=z_2 \\ \cdots\cdots \\ x_{n-1}+u_{n-1n}x_n=z_{n-1} \\ x_n=z_n \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1=z_1-u_{12}x_2 \\ x_2=z_2-u_{23}x_3 \\ \cdots\cdots \\ x_{n-1}=z_{n-1}-u_{n-1n}x_n \\ x_n=z_n \end{cases}$$

或 $$x_i=z_i-u_{ii+1}x_{i+1}(i=n,n-1,\ldots,2,1),$$

$$x_{n+1}=u_{nn+1}=0$$

§1.5 追赶法

例3.2：用追赶法解下列线性方程组

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 - 2x_3 = -4 \end{cases}$$

解:按追赶法的计算公式, 计算结果如下:

§1.5 追赶法

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

$u_{11}=1$ $l_{11}=-2$	$u_{12}=\dfrac{1}{-2}=-0.5$	0	$z_1=\dfrac{-2}{-2}=1$
$l_{21}=1$	$u_{22}=1$ $l_{22}=-1.5$	$u_{23}=\dfrac{1}{-1.5}$ $=0.66667$	$z_2=\dfrac{1-1*1}{-1.5}=0$
0	$l_{32}=1$	$u_{33}=1$ $l_{33}=-2$ $-1*(-0.66667)$ $=-1.33333$	$z_3=\dfrac{-4-1*0}{-1.33333}$ $=3.00001$

§1.5 追赶法

$$\begin{cases} x_1 - 0.5x_2 = 1 \\ x_2 - 0.66667x_3 = 0 \\ x_3 = 3.00001 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2.00001 \\ x_2 = 2.00002 \\ x_3 = 3.00001 \end{cases}$$

§1.6 消元法的应用条件

定理1: 若A的各阶主子式均不为0,即

$$A_1 = |a_{11}| \neq 0$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \ldots, A_n = |A| \neq 0$$

则$l_{ii} \neq 0$, $u_{ii} \neq 0$，消元法可用。

§1.6 消元法的应用条件

证明：

因$A=LU$

$0\neq A_1=|a_{11}|=L_1U_1=|l_{11}|\ |u_{11}|=|l_{11}u_{11}|$，

所以, $l_{11}\neq 0$, $u_{11}\neq 0$

$$0\neq A_2=|L_2U_2|=|L_2||U_2|=\begin{vmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} l_{11}u_{11} & l_{11}u_{12} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12}+l_{22}u_{22} \end{vmatrix}=l_{11}l_{22}\cdot u_{11}u_{22}=|A_1|\,l_{22}u_{22},$$

$\therefore l_{22}\neq 0$, 和 $u_{22}\neq 0$

§1.6 消元法的应用条件

$$|A_3| = l_{11}l_{22}l_{33} \cdot u_{11}u_{22}u_{33} = |A_2| l_{33}u_{33}$$

……

$$|A_n| = |A_{n-1}| l_{nn}u_{nn}$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}|A_1| \neq 0 \Rightarrow l_{11}, u_{11} \neq 0 \\ \qquad |A_2| \neq 0\end{array}\right\} l_{22}, u_{22} \neq 0 \\ \qquad\qquad |A_3| \neq 0\end{array}\right\} l_{33}, u_{33} \neq 0$$

$\vdots$

$l_{nn}, u_{nn} \neq 0$　　命题得证

§1.6 消元法的应用条件

定理2　若A为实对称正定矩阵,则$l_{ii}\neq 0, u_{ii}\neq 0$ $(i=1,2, \ldots,n)$消元法可用。

证明：因实对称矩阵为正定的必要且充分条件是其所有的主子式都大于零，即

$|A_1|>0,|A_2|>0,\ldots,|A_n|>0$

显然满足定理1中$|A_i|\neq 0$的条件,因此定理2得证。

§1.6 消元法的应用条件

- 如果系数矩阵对称正定且采用平方根法进行求解，则必有$l_{ii}^2>0$ $(i=1,2,\ldots,n)$，这是因为

$$0<|A_1|=l_{11}^2$$

$$0<|A_2|=\begin{vmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{vmatrix}=l_{11}^2\cdot l_{22}^2, \therefore l_{22}^2>0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$0<|A_n|=l_{11}^2\cdot l_{22}^2\ldots l_{n-1\,n-1}^2 l_{nn}^2, \therefore l_{nn}^2>0,$$

不必进行复数运算

§1.6 消元法的应用条件

定理3 若A为强对角线优势矩阵，则

$$l_{ii}\neq 0, u_{ii}\neq 0 \ (i=1, 2,\ldots,n)$$

证明：所谓强对角线优势矩阵是指其对角线上元素的绝对值大于同行上其余元素绝对值之和的矩阵，用公式表示为:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad (i=1,2,\ldots,n)$$

在这种情况下，A的各阶主子矩阵$A_1, A_2 \ldots A_n$均是强对角线优势矩阵. 根据阿达马定理知, $|A_i|\neq 0$,按定理1知$l_{ii}\neq 0, u_{ii}\neq 0$ (i=1,2, …,n)，证毕。

§1.6 消元法的应用条件

阿达马定理 n阶线组$|A_n|\neq 0$的一个充分条件为下述强对角线条件

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad (i=1,2,\ldots,n)$$ 成立

证明：反证法（假设结论不成立）

假设$|A_n|=0$,则线组$A_nX=0$有非零解$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,$

设$\alpha_k=\max(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$，代入第$k$个方程，有如下等式与等式成立:

$$a_{k1}\alpha_1 + a_{k2}\alpha_2 + \cdots a_k\alpha_k + \cdots + a_{k(n-1)}\alpha_{n-1} + a_{kn}\alpha_n = 0$$

§1.6 消元法的应用条件

$$a_{kk}\cdot\alpha_k=-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}a_{kj}\cdot\alpha_j$$

$$|a_{kk}|\le\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}|a_{kj}|\cdot\left|\frac{\alpha_j}{\alpha_k}\right|\le\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}|a_{kj}|$$

此结论与条件矛盾，故假设$|A_n|=0$不对，定理得证。

§2 主元素法

1. 消元法有缺点

❖对于几个公式l_{ij}=分子/$u_{jj,}$ u_{ij}=分子/$l_{ii,}$ z_i=分子/$l_{ii,}$ x_i=分子/u_{ii}, 如果分母小会把分子的误差放大

❖公式$\Sigma l_{ik} u_{kj}$，这些累计量在运算量大时累积的误差也会很大。

❖分母为零的时候无法计算

提出主元素法是为控制舍入误差

§2.1 列主元素法

思路: 列主元素法就是在待消元方程的所在列中选取主元素,经方程的行交换,置主元素于对角线位置后进行消元的方法.

主元素: 绝对值最大的元素。

列主元素法交换原则: 在第k列中将主元素所在的方程与第k个方程进行交换，使主元素位于第k个对角线元素位置上。

§2.1 列主元素法

例3. 2：用列主元素法解下列线性方程组

$$\begin{cases} 10x_1 - 19x_2 - 2x_3 = 3 & (1) \\ -20x_1 + 40x_2 + x_3 = 4 & (2) \\ 1\,x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 5 & (3) \end{cases}$$

解：第一列选择-20作为该列的主元素

§2.1 列主元素法

经过方程的行交换,将-20置于a_{11}的位置

$$\begin{cases} -20x_1+40x_2+x_3=3 & (4) \\ 10x_1-19x_2-2x_3=4 & (5) \\ x_1+4x_2+5x_3=5 & (6) \end{cases}$$

计算l_{21}, l_{31}(消去(5)(6)中的x_1)

$$l_{21}=-10/20=-0.5,\quad l_{31}=-1/20=-0.05$$

(5)- l_{21} ×(4) , (6)- l_{31} ×(4) 后得:

§2.1 列主元素法

$$\begin{cases} \boxed{1}x_2 - 1.5x_3 = 5 & (7) \\ \boxed{6}x_2 + 5.05x_3 = 5.2 & (8) \end{cases}$$

x_1被消去了

选6为主元素,同上方程换行,消去x_2

$$\begin{cases} 6x_2 + 5.05x_3 = 5.2 & (9) \\ x_2 - 1.5x_3 = 5 & (10) \end{cases}$$

(换行)

$$-2.34168x_3 = 4.13332 \quad (11)$$

(消去x_2)

§2.1 列主元素法

保留有主元素的方程:

$$\begin{cases} -2.34168x_3=4.13332 & (11) \\ -20x_1+40x_2+x_3=4 & (4) \\ 6x_2+5.05x_3=5.2 & (9) \end{cases}$$

回代

$$\begin{cases} x_3=-1.76511 \\ x_2=2.35230 \\ x_1=4.41634 \end{cases}$$

§2.2 全主元素法

- 如果不是按列选主元素，而是在全体待选系数中选取，则得全主元素法。

例3.3： 用全主元素法解下列线性方程组

$$\begin{cases} 10x_1 - 19x_2 - 2x_3 = 3 & (1) \\ -20x_1 + 40x_2 + x_3 = 4 & (2) \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 5 & (3) \end{cases}$$

解:

选择所有系数中绝对值最大的**40**作为主元素，交换第一、二行和交换第一、二列使该主元素位于对角线的第一个位置上，得

§2.2 全主元素法

$$\begin{cases} 40x_2 - 20x_1 + x_3 = 4 & (4) \\ -19x_2 + 10x_1 - 2x_3 = 3 & (5) \\ 4x_2 + x_1 + 5x_3 = 5 & (6) \end{cases}$$

计算$l_{21}=-19/40=0.475$， $l_{31}=4/40=0.1$

(5)- l_{21}(4)，(6)- l_{31}(4)得

$$\begin{cases} 0.5x_1 - 1.525x_3 = 4.9 & (7) \\ 3x_1 + 4.9x_3 = 4.6 & (8) \end{cases}$$

选4.9为主元素,重复前面两个步骤

§2.2 全主元素法

$$\begin{cases} 4.9x_3 + \quad 3x_1 = 4.6 & (9) \\ 1.525x_3 + 0.5x_1 = 4.9 & (10) \end{cases}$$

$$1.43366x_1 = 6.33161 \qquad (11)$$

保留有主元素的方程

$$\begin{cases} 40x_2 - 20x_1 + x_3 = 4 & (4) \\ 4.9x_3 + \quad 3x_1 = 4.6 & (9) \\ 1.43366x_1 = 6.33161 & (11) \end{cases}$$

回代
$$\begin{cases} x_1 = 4.41634 \\ x_3 = -1.76511 \\ x_2 = 2.35230 \end{cases}$$

§2.2 全主元素法

主元素高斯消元法较普通消元法的好处：

- 在消元过程中减小了舍入误差；在回代过程中采用数值较大的主元素作分母，可以减小除法运算的误差；
- 具有良好的数值稳定性
- 全主元素法的精度优于列主元素法，但排序时间较列主元素法长，既要进行行交换，又要进行列交换，还需要进行未知量序号的恢复，导致运算量较大。

本章小结

1.消元法的过程（消元，回代）

2.消元过程的计算公式（紧凑格式）

3.几种经典算法

- 高斯消元法（l_{ii}=1）
- 克劳特消元法（ u_{ii}=1 ）
- 平方根法（系数矩阵为对称阵； $u_{ij}=l_{ji}$）
- 追赶法（系数矩阵为三对角矩阵）

4.上述4种消元法的应用条件

5.选主元的高斯消元法

- 列主元素法
- 全主元素法

本章小结

$$l_{ij}=\frac{a_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1}l_{ik}u_{kj}}{u_{jj}}\quad(i\geq j)\qquad u_{ij}=\frac{a_{ij}-\sum_{k=1}^{i-1}l_{ik}u_{kj}}{l_{ii}}\quad(i\leq j)$$

$$z_i=\frac{b_i-\sum_{k=1}^{i-1}l_{ik}z_k}{l_{ii}}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

$$x_i=\frac{z_i-\sum_{k=i+1}^{n}u_{ik}x_k}{u_{ii}}\quad(i=n,n-1,\cdots,2,1)$$

本章小结

❖ 系数l_{ij}、u_{ij}的计算公式:

$u_{11}=\frac{a_{11}}{l_{11}}$ l_{11}（择定）	$u_{12}=\frac{a_{12}}{l_{11}}$	$u_{13}=\frac{a_{13}}{l_{11}}$	$z_1=\frac{b_1}{l_{11}}$
$l_{21}=\frac{a_{21}}{u_{11}}$	$u_{22}=\frac{a_{22}-l_{21}u_{12}}{l_{22}}$ l_{22}（择定）	$u_{23}=\frac{a_{23}-l_{21}u_{13}}{l_{22}}$	$z_2=\frac{b_2-l_{21}z_1}{l_{22}}$
$l_{31}=\frac{a_{31}}{u_{11}}$	$l_{32}=\frac{a_{32}-l_{31}u_{12}}{u_{22}}$	$u_{33}=\frac{a_{33}-l_{31}u_{13}-l_{32}u_{23}}{l_{33}}$ l_{33}（择定）	$z_3=\frac{b_3-l_{31}z_1-l_{32}z_2}{l_{33}}$

本章小结

$$l_{ij}=\frac{a_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1}l_{ik}u_{kj}}{u_{jj}}\quad(i>j)\qquad u_{ij}=a_{ij}-\sum_{k=1}^{i-1}l_{ik}u_{kj}\quad(i\le j)$$

$$z_i=b_i-\sum_{k=1}^{i-1}l_{ik}z_k\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

高斯消元

$$x_i=\frac{z_i-\sum_{k=i+1}^{n}u_{ik}x_k}{u_{ii}}\quad(i=n,n-1,\cdots,2,1)$$

本章小结

$$l_{ij}=a_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1}l_{ik}u_{kj}\quad(i\ge j)\qquad u_{ij}=\frac{a_{ij}-\sum_{k=1}^{i-1}l_{ik}u_{kj}}{l_{ii}}\quad(i<j)$$

$$z_i=\frac{b_i-\sum_{k=1}^{i-1}l_{ik}z_k}{l_{ii}}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

克劳特消元

$$x_i=z_i-\sum_{k=i+1}^{n}u_{ik}x_k\quad(i=n,n-1,\cdots,2,1)$$

本章小结

平方根法

$$l_{ij}=\frac{a_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1}l_{ik}\boxed{u_{kj}}}{\boxed{u_{jj}}}\overset{j=i}{\Rightarrow} l_{ii}^{2}=a_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1}l_{ik}u_{ki}=a_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1}l_{ik}^{2}$$

$$l_{ij}=\frac{a_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1}l_{ik}\boxed{u_{kj}}}{\boxed{u_{jj}}}=\frac{a_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1}l_{ik}l_{jk}}{l_{jj}},z_{i}=\frac{b_{i}-\sum_{k=1}^{i-1}l_{ik}z_{k}}{l_{ii}}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

$$x_{i}=\frac{z_{i}-\sum_{k=i+1}^{n}\boxed{u_{ik}}x_{k}}{\boxed{u_{ii}}}=\frac{z_{i}-\sum_{k=i+1}^{n}l_{ki}x_{k}}{l_{ii}}\quad(i=n,n-1,\cdots,2,1)$$

本章小结

追赶法

$$l_{i(i-1)} = a_i \quad (i = 2,3,\ldots,n)$$

$$l_{ii} = b_i - u_{(i-1)i} \quad (i = 1,2,\ldots,n, a_1 = u_{01} = 0)$$

$$u_{i(i+1)} = \frac{c_i}{l_{ii}} \quad (i = 1,2,3,\ldots,n-1)$$

$$\mathrm{z_i} = \frac{d_i - a_i z_{i-1}}{l_{ii}} (i = 1,2,\cdots,n, z_1 = a_1 = 0)$$

$$x_i = z_i - u_{i(i+1)} x_{i+1} (i = n, n-1,\cdots,2,1)$$

本章小结

消元法应用条件:

定理1 若A的各阶主子式均不为0,则$l_{ii}\neq 0$, $u_{ii}\neq 0$, 消元法可用。

定理2 若A为实对称正定矩阵,则$l_{ii}\neq0$,$u_{ii}\neq0$ (i=1,2, …,n), 消元法可用。

定理3 若A为强对角线优势矩阵，则
$l_{ii}\neq0$,$u_{ii}\neq0$ (i=1, 2,…,n)消元法可用。

阿达马定理 r阶线组$|A_r|\neq0$的一个充分条件为强对角线条件成立。