第六章 数值微分和数值积分

§1 数值微分的基本方法

1.1 差商型数值微分

1.2 插值型数值微分

1.3 用三次样条函数求数值微分（×）

§2 数值积分

2.1 牛顿—科特斯求积公式

2.2 复化求积公式

2.3 龙贝格法

2.4 切比雪夫求积（ × ）

2.5 高斯求积

2.6 重积分的求积公式

§ 6.1 数值微分的基本方法

1.1 差商型数值微分

差商型数值微分是用函数的差商近似函数的导数。

- 向前差商数值微分公式

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \quad R = \frac{h}{2} f''(x+\theta h) \qquad (0 \le \theta \le 1)$$

- 向后差商数值微分公式

$$f'(x) \approx \frac{f(x)-f(x-h)}{h}, \quad R = -\frac{h}{2} f''(x-\theta h) \qquad (0 \le \theta \le 1)$$

- 中心差商数值微分公式

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}, \quad R = \frac{h^2}{6} f'''(x+\theta h) \qquad (0 \le \theta \le 1)$$

§6.1 数值微分的基本方法

误差分析：

- 函数本身的解析性质；
- h的大小:越小，误差越小；

太小：引入较大舍入误差；(1)(2)

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \quad R = \frac{h}{2} f''(x+\theta h) \qquad (0 \le \theta \le 1)$$

§1.1 差商型数值微分

例6.1 用中心差商数值微分公式计算$f(x)=\sqrt{x}$在x=2处的一阶导数。

解：$$f'(2)=\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2-h}}{2h}$$

0.353553

h	0.001	0.005	0.01	0.05	0.1	0.5	1
f'(2)	0.3500	0.3500	0.3500	0.3530	0.3535	0.3564	0.3660

§6.1 数值微分的基本方法

1.2 插值型数值微分

思路：插值多项式的微分等于函数的微分。

（1）对于等距节点（以两点式为例）：

$$f(x)=\frac{x-x_1}{-h}y_0+\frac{x-x_0}{h}y_1+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)(x-x_1)$$

$$f'(x)=\frac{y_1-y_0}{h}+\frac{f''(\xi)}{2!}[2x-(x_0+x_1)]+\frac{f'''(\xi)}{2!}(x-x_0)(x-x_1)$$

$$f'(x_0)=\frac{y_1-y_0}{h}-\frac{h}{2!}f''(\xi)$$

$$f'(x_1)=\frac{y_1-y_0}{h}+\frac{h}{2!}f''(\xi)$$

§1.2 插值型数值微分

(2)三点式（n=2）

以等距的三点$x_0\,x_1\,x_2$作二次插值多项式，间距h

$$P_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2$$

$$=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{2\mathrm{h}^2}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{-\mathrm{h}^2}y_1+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2\mathrm{h}^2}y_2$$

$$P'_2(x)=\frac{(x-x_1)+(x-x_2)}{2\mathrm{h}^2}y_0+\frac{(x-x_0)+(x-x_2)}{-\mathrm{h}^2}y_1+\frac{(x-x_0)+(x-x_1)}{2\mathrm{h}^2}y_2$$

$$P'_2(x_0)=\frac{-\mathrm{h}+(-2h)}{2\mathrm{h}^2}y_0+\frac{-2\mathrm{h}}{-\mathrm{h}^2}y_1+\frac{-\mathrm{h}}{2\mathrm{h}^2}y_2=\frac{-3y_0+4y_1-y_2}{2h}$$

§1.2 插值型数值微分

例6.2 已知函数$y=e^x$的下列数值求$x=2.7$处一、二阶导数。 h=0.1

x	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9
y	12.1825	13.4637	14.8797	16.4446	18.1741

解：取h=0.2

用两点式公式 $f'(x_1)\approx\frac{1}{h}(y_1-y_0)=\frac{1}{0.2}(14.8797-12.1825)$ =13.486

=14.160

用三点式公式 $f'(x_1)\approx\frac{1}{2h}(y_2-y_0)=\frac{1}{0.2*2}(18.1741-12.1825)$ =14.979

=14.9045

$f''(x_1)\approx\frac{1}{h^2}(y_0-2y_1+y_2)=\frac{1}{0.2^2}(12.1825-2*14.8797+18.1741)$ =14.930

=14.890

$f'(x)=f''(x)=14.87973$（实际值）

§6.2 数值积分

? 被积函数的原函数不能用初等函数表示；

? 被积函数的原函数过于复杂；

? 被积函数以表格形式给出；

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx$$

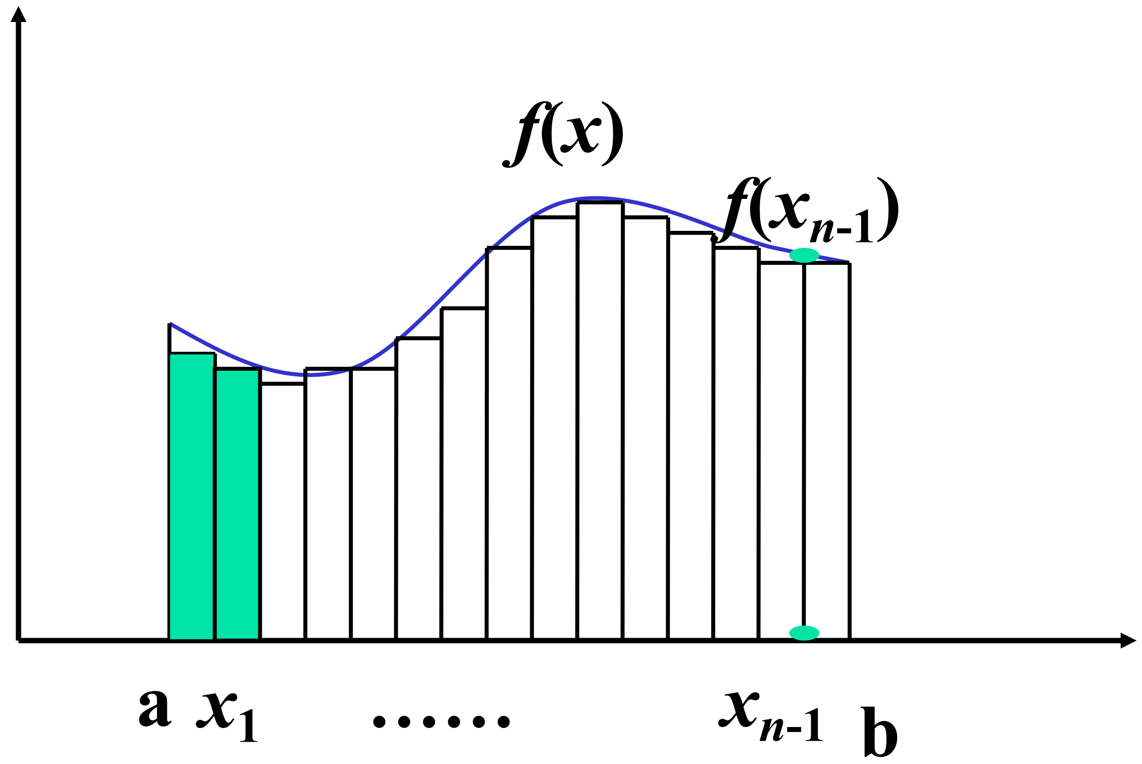
基本思想：

用简单函数近似代替被积函数，然后建立如下求积公式。

$$\int_a^b f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + \cdots + A_n f(x_n)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

§ 6.2 数值积分



§6.2 数值积分

求积公式具有最高的代数精确度；

求积公式的余式具有最小的绝对值；

求积公式的系数绝对值之和为最小；

对精度要求高

系数相等以便于计算

2.1 牛顿-柯斯特求积公式

已知：拉格朗日插值函数为：$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n} l_k(x) f(x_k)$

则插值型求积公式为：$I(f)\approx\int_a^b L_n(x)dx=\sum_{k=0}^{n}\left(\int_a^b l_k(x)dx\, f(x_k)\right)$

A_k

只与节点有关，与被积函数的形式无关。

§ 6.2 数值积分

$$A_k=\int_a^b l_k(x)dx=\int_a^b\Big(\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}dx\Big)$$

$$=\int_a^b\Big[\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}\frac{x-a-jh}{(k-j)h}\Big]dx \qquad (x_j=a+jh)$$

$$h=\frac{b-a}{n}$$

令$x=a+th$,则有：

$$A_k=\int_0^n\Big[\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}\frac{(t-j)h}{(k-j)h}\Big]hdt=\frac{(-1)^{n-k}h}{k!(n-k)!}\int_0^n\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}(t-j)dt$$

$$=\underbrace{\frac{(b-a)(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!n}\int_0^n\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}(t-j)dt}_{C_k^{(n)}}$$

§ 6.2 数值积分

$$I(f) \approx \sum_{k=0}^{n} \left(\int_a^b l_k(x)dx \, f(x_k) \right) = \boxed{(b-a)\sum_{k=0}^{n} \left(C_k^{(n)} f(x_k) \right)}$$

*n*阶Newton-Cotes公式

Newton-Cotes系数

N-C公式的截断误差为：

$$R_n(f) = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) dx$$

$$= \frac{h^{n+2}}{(n+1)!} \int_0^n f^{(n+1)}(\xi) \prod_{j=0}^{n} (t-j) dt$$

§6.2 数值积分

n	$C_k^{(n)}$						
1	1/2	1/2					
2	1/6	4/6	1/6				
3	1/8	3/8	3/8	1/8			
4	7/90	16/45	2/15	16/45	7/90		
5	19/288	25/96	25/144	25/144	25/96	19/288	
6	41/840	9/35	9/280	34/105	9/280	9/35	41/840

$C_k = C_{n-k}$ 柯特斯系数具有对称性

§6.2 数值积分

当**n=1**时， $C_0^{(1)}=C_1^{(1)}$,因此有：

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$

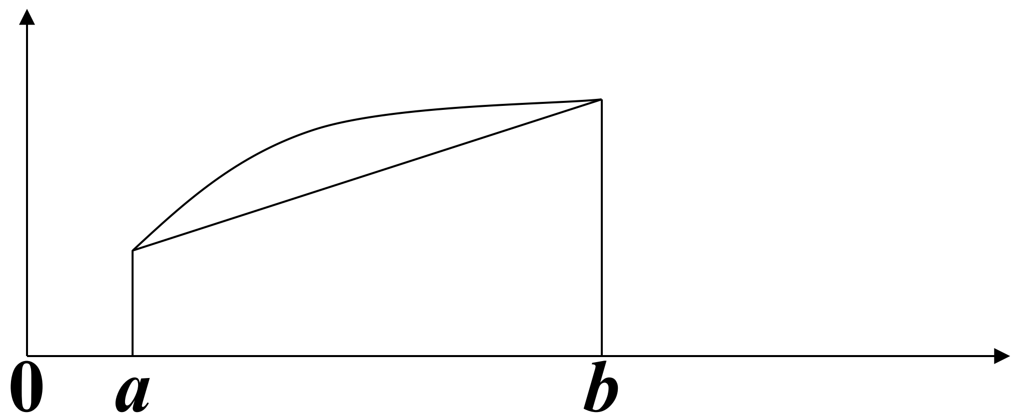
物理意义：以过点$(a,f(a))$, $(b,f(b))$的直线代替曲线$y=f(x)$,以梯形面积近似曲边梯形面积。所以又称为梯形公式。

当**n=2**时，*N-C*公式为：

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)]$$

物理意义：以过三点$(a,f(a))$, $((a+b)/2,f((a+b)/2))$,$(b,f(b))$的抛物线代替曲线$y=f(x)$,求曲边梯形面积的近似值。所以又称为辛普生公式（**Simpson**）。

§6.2 数值积分



2.3 误差公式

✦ 求积公式的代数精确度

若当$f(x)$为任意次数不高于m的多项式时，求积公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

均精确成立，而对某个$m+1$次多项式，公式不精确成立，则称该求积公式具有m次代数精确度。

§ 6.2 数值积分

✦**梯形求积公式(n=1)的代数精确度 为1**

若*f*(*x*)为一次多项式

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b xdx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\frac{1}{2}(f(a) + f(b)) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

若*f*(*x*)=*x*²为二次多项式

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}(a^2 + b^2)$$

§6.2 数值积分

定理：2n阶N-C公式至少具有2n+1阶代数精度。

例1：判别求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{1}{9}[5f(\sqrt{0.6})+8f(0)+5f(-\sqrt{0.6})]$$

的代数精度。

§6.2 数值积分

- 思路：
- 当$f(x)=1,x,x^2,x^3\ldots$, 分别求 $\int_a^b f(x)dx$ 以及其近似值。

答案：具有5次代数精度。

梯形公式和辛普生公式的误差估计：

$$R_1(f)=\int_a^b f(x)dx-\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]=-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi)\quad \xi\in[a,b]$$

$$R_2(f)=\int_a^b f(x)dx-\frac{b-a}{6}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)]$$

$$=-\frac{(b-a)^5}{2880}f^{(4)}(\xi)=-\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi)\quad \xi\in[a,b]$$

§2.1 牛顿—柯特斯求积公式(误差估计)

$$I=\sum_{i=0}^{n}c_i f(x_i)=(b-a)\sum_{i=0}^{n}c_i^{(n)}f(x_i)$$

结论：当n=7即，选用N-C公式最多可用8个节点。

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b Cdx=(b-a)\sum_{i=0}^{n}c_i^{(n)}C$$

$$(b-a)C=(b-a)\sum_{i=0}^{n}c_i^{(n)}C$$

$$c_i^{(n)}>0$$

$$c_i^{(n)}><0$$

$$\sum_{i=0}^{n}c_i^{(n)}\equiv 1$$

$$\in\le(b-a)e\sum_{i=0}^{n}(|c_i^{(n)}|+|f(x_i)|)\qquad \sum_{i=0}^{n}|c_i^{(n)}|=\begin{cases}1\\ >1\end{cases}$$

$c_i^{(n)}$和 $f(x_i)$的舍入误差

§ 2.1 牛顿——柯特斯求积公式

例6.3 用n=6牛顿—柯特斯公式计算下列定积分值 $\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx \Rightarrow f(x)=\frac{1}{1+x}$

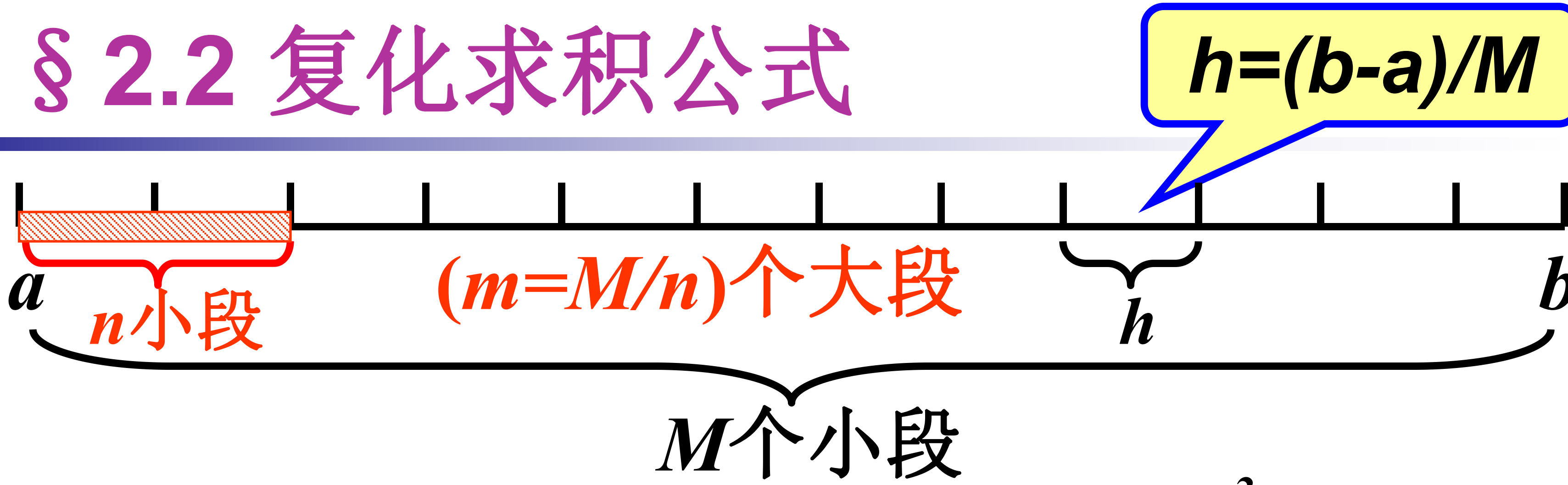
解：h=(b-a)/n=(1-0)/6=1/6　$x_i=0+i/6$

$$I=(b-a)\sum_{i=0}^{n} c_i^{(n)} f(x_i)$$

$$=\frac{41}{840}+\frac{9}{35}\times\frac{6}{7}+\frac{9}{280}\times\frac{1}{1+\frac{1}{3}}+\frac{34}{105}\times\frac{1}{1+\frac{1}{2}}+\frac{9}{280}\times\frac{1}{1+\frac{2}{3}}+\frac{9}{35}\times\frac{1}{1+\frac{5}{6}}+\frac{41}{840}\times\frac{1}{2}$$

=0.6933

§ 2.2 复化求积公式



梯形公式 $\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}(f_0 + f_1) - \frac{h^3}{12} f''(\zeta)$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}(f_0 + f_1) + \frac{h}{2}(f_1 + f_2) + \ldots + \frac{h}{2}(f_{M-1} + f_M) + R$$

1.复化梯形公式

$$= h(\frac{1}{2} f_0 + f_1 + f_2 + f_{M-1} + \frac{1}{2} f_M) + R$$

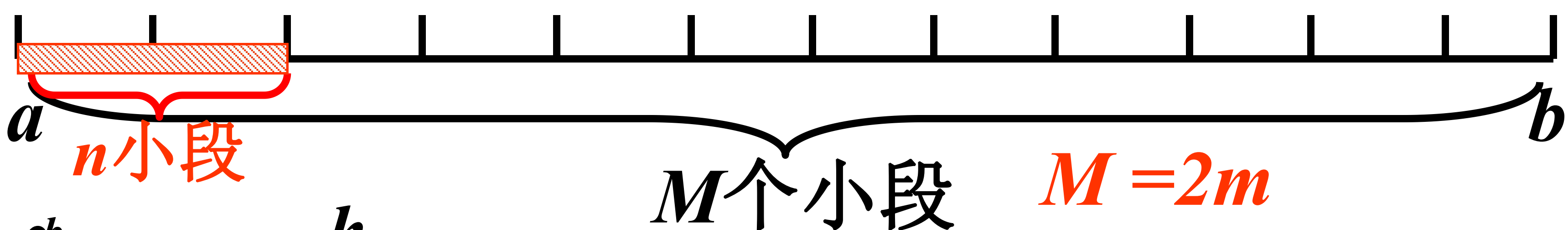
$$R = -\frac{Mh^3}{12} f''(\zeta) = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\zeta) = -\frac{(b-a)^3}{12M^2} f''(\zeta)$$

§ 2.2 复化求积公式

$$\frac{(b-a)^3}{12M^2}f''(\zeta)<\varepsilon \qquad -\frac{(b-a)^3}{12M^2}m_2<\varepsilon \qquad M\geq[\frac{(b-a)^3}{12\varepsilon}m_2]+1$$

2.复化辛卜生公式

辛卜生公式 $\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx=\frac{h}{3}(f_0+4f_1+f_2)-\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\zeta)$



$M=2m$

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{h}{3}[(f_0+4f_1+f_2)+(f_2+4f_3+f_4)+\ldots$$

$$+(f_{M-2}+4f_{M-1}+f_M)]+R$$

§ 2.2 复化求积公式

$$f_0+4f_1+f_2$$
$$f_2+4f_3+f_4$$
$$f_4+4f_5+f_6$$
$$f_6+4f_7+f_8$$

1 4 2 4 2 4 2 4 1

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{h}{3}[(f_0+f_M)+4(f_1+f_3+\ldots+f_{M-1})$$
$$+2(f_2+f_4+\ldots+f_{M-2})]+R$$

§2.2 复化求积公式

$$\left.\begin{array}{l} R=-\dfrac{h^5}{90}f^{(4)}(\zeta)\cdot\dfrac{M}{2} \\ h=(b\text{-}a)/M \end{array}\right\} R=-\dfrac{(b-a)h^4}{180}f^{(4)}(\zeta)$$

$$\left.\begin{array}{l} R=-\dfrac{(b-a)h^4}{180}f^{(4)}(\zeta) \\ h=(b\text{-}a)/2m \end{array}\right\} R=-\dfrac{(b-a)^5}{180\times 2^4 m^4}f^{(4)}(\zeta)$$

$$\frac{(b-a)^5}{2880m^4}f^{(4)}(\zeta)<\varepsilon \qquad \frac{(b-a)^5}{2880m^4}m_4<\varepsilon$$

$$m\geq\left[\sqrt[4]{\frac{(b-a)^5 m_4}{2880\varepsilon}}\right]+1$$

§2.2 复化求积公式

例6.4 对定积分 $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx, \varepsilon = 10^{-6}$ 分别用复化梯形公式或复化辛卜生公式计算时，需要M=?

解：先确定m_2, m_4, $f(x) = \frac{\sin x}{x} = \int_0^1 \cos tx dt$

$f'(x) = -\int_0^1 t \sin tx dt$ $\quad f''(x) = -\int_0^1 t^2 \cos tx dt$

$$f^{(k)}(x) = \int_0^1 t^k \cos(tx + \frac{k\pi}{2})dt$$

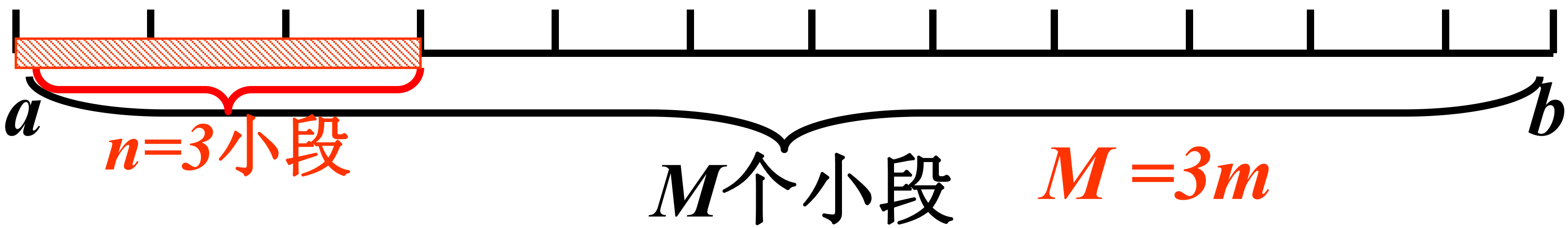
$$|f^{(k)}(x)| \le \int_0^1 t^k |\cos(tx + \frac{k\pi}{2})| dt < \frac{1}{k+1}$$ $\therefore m_2<1/3,\ m_4<1/5$

复化梯形公式 $M \ge [\frac{(b-a)^3}{12\varepsilon} m_2] + 1$ $\quad M \ge [\frac{1}{12*10^{-6}} \cdot \frac{1}{3}] + 1 = 167$

复化辛卜生公式 $m \ge [\sqrt[4]{\frac{(b-a)^5 m_4}{2880\varepsilon}}] + 1$ $\quad$ M=2m=6

§2.2 复化求积公式

3.复化3/8公式



3/8公式 $\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \frac{3h}{8}(f_0+3f_1+3f_2+f_3) - \frac{3h^5}{80} f^{(4)}(\zeta)$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{3h}{8}[(f_0+3f_1+3f_2+f_3)+(f_3+3f_4+3f_5+f_6)+\ldots$$

$$+(f_{M-3}+3f_{M-2}+3f_{M-1}+f_M)]+R$$

§ 2.2 复化求积公式

$$f_0+3f_1+3f_2+f_3$$

$$f_3+3f_4+3f_5+f_6$$

$$f_6+3f_7+3f_8+f_9$$

$$f_9+3f_{10}+3f_{11}+f_{12}$$

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{3h}{8}[(f_0+f_M)+2(f_3+f_6+\ldots+f_{M-3})$$

$$+3(f_1+f_2+\ldots+f_{M-2}+f_{M-1})]+R$$

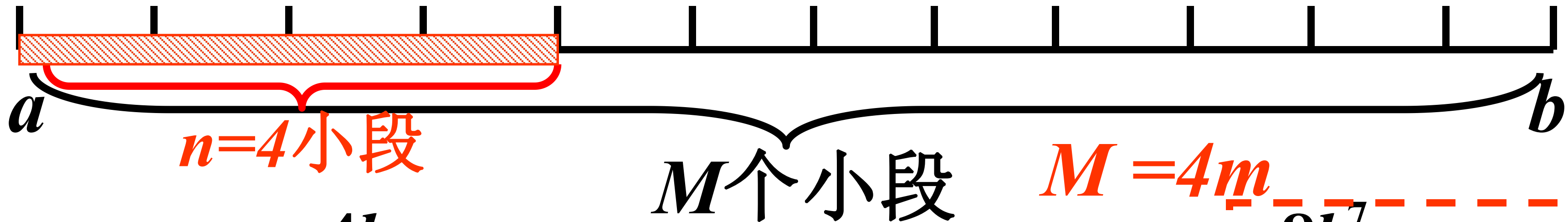
$$\left.\begin{array}{l} R=-\dfrac{3h^5}{80}mf^{(4)}(\zeta) \\ m=M/3 \end{array}\right\} R=-\frac{3h^5}{80}\frac{M}{3}f^{(4)}(\zeta)$$

$$\left.\begin{array}{l} h=(b\text{-}a)/M \\ R=-\dfrac{3h^5}{80}\dfrac{M}{3}f^{(4)}(\zeta) \end{array}\right\} R=-\frac{(b-a)^5}{80M^4}f^{(4)}(\zeta)$$

$$\left.\begin{array}{l} R=-\dfrac{3h^5}{80}\dfrac{M}{3}f^{(4)}(\zeta) \\ M=(b\text{-}a)/h \end{array}\right\} R=-\frac{(b-a)h^4}{80}f^{(4)}(\zeta)$$

§ 2.2 复化求积公式

4. 复化柯特斯公式



$M=4m$

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx = \frac{4h}{90}(7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4) \boxed{- \frac{8h^7}{945} f^{(6)}(\zeta) * M/4}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{4h}{90}[(7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4)$$

$$+(7f_4 + 32f_5 + 12f_6 + 32f_7 + 7f_8)$$

$$+\ldots] + R$$

$$= \frac{4h}{90}[(7f_0 + 32\sum_{i=1}^{n} f_{4i-3} + 12\sum_{i=1}^{n} f_{4i-2} + 32\sum_{i=1}^{n} f_{4i-1} + 14\sum_{i=1}^{n} f_{4i} + 7f_M) + R$$

§2.2 复化求积公式

例6.5 利用复化辛卜生公式计算积分$I=\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$

解：取M=2m=10,则$h=(b-a)/M=(1-0)/10=0.1$

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{h}{3}[(f_0+f_M)+4(f_1+f_3+\ldots+f_{M-1})+2(f_2+f_4+\ldots+f_{M-2})]+R$$

$$I\approx\frac{0.1}{3}[(\frac{1}{1+0}+\frac{1}{1+1})+4(\frac{1}{1+0.1}+\frac{1}{1+0.3}+\frac{1}{1+0.5}+\frac{1}{1+0.7}+\frac{1}{1+0.9})$$

$$+2(\frac{1}{1+0.2}+\frac{1}{1+0.4}+\frac{1}{1+0.6}+\frac{1}{1+0.8})]=0.03333*20.7945$$

$$=0.69315$$

估计截断误差 $f^{(4)}(x)=\frac{24}{(1+x)^5}$ $\quad \max\limits_{0\sim1}|f^{(4)}(x)|=24$

$$|R|=|-\frac{(b-a)h^4}{180}f^{(4)}(\zeta)|\le\frac{(1-0)\times0.1^4}{180}\times24=1.3\times10^{-5}$$

§2.2 复化求积公式

估计舍入误差，f_i的舍入误差$\varepsilon_i \le 0.5*10^{-5}$.

中括号内的舍入误差

$$=(\varepsilon_0+\varepsilon_{10})+4(\varepsilon_1+\varepsilon_3+\varepsilon_5+\varepsilon_7+\varepsilon_9)+2(\varepsilon_2+\varepsilon_4+\varepsilon_6+\varepsilon_8)$$

$$\le (2+4\times 5+2\times 4)\times 0.5\times 10^{-5} = 30\times 0.5\times 10^{-5}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&=0.03333*20.7945\\&=0.69315\end{aligned}}$$

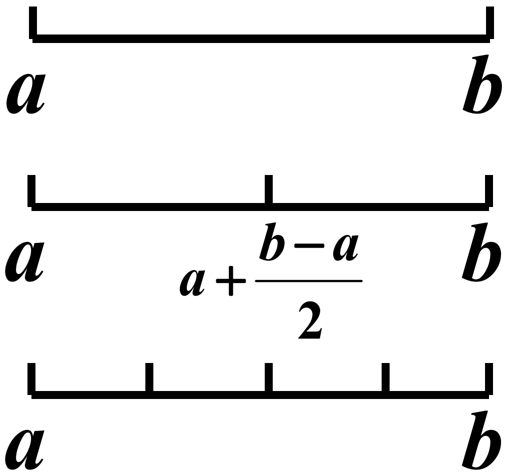
$$|\in| \le 0.03333*(30*0.5*10^{-5})+20.7945*0.5*10^{-5}$$

$$=0.1*10^{-3}$$

$$\varepsilon \le 1.3*10^{-5}+0.1*10^{-3}$$

§2.2 复化求积公式

5. 使用复化求积公式，当需要加密分点时，已算出的函数值及积分值仍有效



$$T_1=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$

$$T_2=\frac{b-a}{4}[f(a)+f(a+\frac{b-a}{2})+f(a+\frac{b-a}{2})+f(b)]$$

$$=\frac{1}{2}\underbrace{\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]}_{T_1}+\frac{b-a}{2}f(a+\frac{b-a}{2})$$

$h=\frac{b-a}{4}$

$$T_4=\frac{b-a}{8}\{\boxed{f(a)+f(b)}+2[f(a+\frac{b-a}{4})+\boxed{f(a+\frac{b-a}{2})}+f(a+\frac{3(b-a)}{4})]\}$$

$$=\underbrace{\frac{1}{2}\{\frac{b-a}{4}[f(a)+f(b)]+\frac{b-a}{2}f(a+\frac{b-a}{2})\}}_{T_2}+\frac{b-a}{4}[f(a+\frac{b-a}{4})+f(a+\frac{3(b-a)}{4})]$$

§2.2 复化求积公式

- 当区间[a,b]分为2^k等分，步长$h=(b-a)/2^k$,复化梯形递推公式为

$$T_{2^k}=\frac{1}{2}T_{2^{k-1}}+h\sum_{i=1}^{2^{k-1}}f[a+\frac{b-a}{2^k}(2i-1)]$$

- 确定分段数m
  - 根据余式作估算
  - 事后估计误差法

T_M T_{2M} $I=\int_a^b f(x)dx$

$$I-T_M=-\frac{(b-a)h^2}{12}f''(\zeta_1)$$

$$I-T_{2M}=-\frac{(b-a)}{12}(\frac{h}{2})^2 f''(\zeta_2)$$

$$\frac{I-T_M}{I-T_{2M}}\approx 4$$

$$I\approx T_{2M}+\frac{1}{3}(T_{2M}-T_M)$$

§2.2 复化求积公式

- 复化辛卜生公式同样有$I \approx S_{2M} + \frac{1}{15}(S_{2M} - S_M)$

- 复化柯特斯公式同样有 $I \approx C_{2M} + \frac{1}{63}(C_{2M} - C_M)$

$$I \approx \frac{4}{4-1} T_{2M} - \frac{1}{4-1} T_M$$

$$I \approx \frac{4^2}{4^2-1} S_{2M} - \frac{1}{4^2-1} S_M$$

$$I \approx \frac{4^3}{4^3-1} C_{2M} - \frac{1}{4^3-1} C_M$$

§2.3 龙贝格法

=S_1

$$I\approx T_{2M}+\frac{1}{3}(T_{2M}-T_M)$$

$$\boxed{\frac{4}{4-1}T_2-\frac{1}{4-1}T_1}=\frac{4}{3}T_2-\frac{1}{3}T_1$$

$$=\frac{4}{3}\cdot\frac{b-a}{2}[\frac{1}{2}f(a)+f(a+\frac{b-a}{2})+\frac{1}{2}f(b)]-\frac{1}{3}\cdot\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$

$$=\frac{b-a}{2}\{[\frac{2}{3}f(a)+\frac{4}{3}f(a+\frac{b-a}{2})+\frac{2}{3}f(b)]-\frac{1}{3}f(a)-\frac{1}{3}f(b)\}$$

$$=\frac{b-a}{2}[\frac{1}{3}f(a)+\frac{4}{3}f(a+\frac{b-a}{2})+\frac{1}{3}f(b)]$$

$$\boxed{\text{辛卜生公式}\int_{x_0}^{x_2}f(x)dx=\frac{h}{3}(f_0+4f_1+f_2)-\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\zeta)}$$

§2.3 龙贝格法

$$S_1=\frac{4}{4-1}T_2-\frac{1}{4-1}T_1$$

$$S_2=\frac{4}{4-1}T_4-\frac{1}{4-1}T_2 \qquad S_{2^k}=\frac{4}{4-1}T_{2^{k+1}}-\frac{1}{4-1}T_{2^k}$$

$$C_1=\frac{4^2}{4^2-1}S_2-\frac{1}{4^2-1}S_1 \qquad C_{2^k}=\frac{4^2}{4^2-1}S_{2^{k+1}}-\frac{1}{4^2-1}S_{2^k}$$

复化梯形递推公式构成的序列$T_1\ T_2\ T_4\dots$

⇒ 辛卜生序列$S_1\ S_2\ S_4\dots$ ⇒ 柯特斯序列$C_1\ C_2\ C_4\dots$

⇒ 龙贝格序列$R_1\ R_2\ R_4\dots$龙贝格求积法

$$R_{2^k}=\frac{4^3}{4^3-1}C_{2^{k+1}}-\frac{1}{4^3-1}C_{2^k} \qquad \frac{1}{4^m-1}\le\frac{1}{255}=0.004$$

§2.3 龙贝格法

T_{2^k}	S_{2^k}	C_{2^k}	R_{2^k}
T_1			
T_2	S_1		
T_4	S_2	C_1	
T_8	S_4	C_2	R_1
T_{16}	S_8	C_4	R_2
…	…	…	…

§2.3 龙贝格法

例6.5 求 $I=\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx$ 的近似值，要求稳定到小数后5位

解： $f(x)=\frac{4}{1+x^2}$

$$T_{2^k}=\frac{1}{2}T_{2^{k-1}}+h\sum_{i=1}^{2^{k-1}} f[a+\frac{b-a}{2^k}(2i-1)]$$

$$T_1=\frac{1}{2}[f(0)+f(1)]=\frac{1}{2}[\frac{4}{1+0}+\frac{4}{1+2}]=3$$

$$T_2=\frac{1}{2}[T_1+f(\frac{1}{2})]=\frac{1}{2}[3+\frac{4}{1+\frac{1}{4}}]=\frac{1}{2}[3+\frac{16}{5}]=3.1$$

$$S_1=\frac{4}{3}T_2-\frac{1}{3}T_1=\frac{4}{3}*3.1-\frac{1}{3}*3=3.13333$$

$$T_4=\frac{1}{2}T_2+\frac{1}{4}[f(\frac{1}{4})+f(\frac{3}{4})]=3.13118 \quad S_2=\frac{4}{3}T_4-\frac{1}{3}T_2=3.14157$$

$$C_1=\frac{4^2}{4^2-1}S_2-\frac{1}{4^2-1}S_1=3.14212 \quad T_8=3.13899$$

$S_4=3.14159$ $C_4=3.14159$

§2.4 高斯求积公式

- 如果一个求积公式对任意n次多项式精确成立，而对大于n的多项式不精确成立，称该求积公式具有n次代数精确度。
- 高斯求积公式的方法原则是使求积公式$\int_{-1}^{1} f(t)dt = \sum_{i=0}^{n} c_i f(t_i)$ 对次数尽可能高的多项式精确成立。

$$L_{n-1}(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\prod_n(t)}{\prod'_n(t_i)(t-t_i)} y_i \qquad \prod_n(t) = (t-t_1)\ldots(t-t_n)$$

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt \approx \int_{-1}^{1} L_{n-1}(t)dt = \int_{-1}^{1} [\sum_{i=1}^{n} \frac{\prod_n(t)}{\prod_n'(t_i)(t-t_i)} y_i]dt$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [\underbrace{\int_{-1}^{1} \frac{\prod_n(t)}{\prod_n'(t_i)(t-t_i)} dt}_{c_i}] y_i$$

§ 2.4 高斯求积公式

$$\frac{t-t_i+t_i-t_{n+1}}{t_i-t_{n+1}}$$

- 增加m个新节点,t_{n+1} t_{n+2} … t_{n+m}

$$L_{m+n-1}(t)=\sum_{i=1}^{n}a_i^{(1)}y_i+\sum_{i=n+1}^{m}a_i^{(2)}y_i$$

$$a_i^{(1)}(t)=\frac{\prod_n(t)}{\prod'_n(t_i)(t-t_i)}\cdot\frac{\boxed{(t-t_{n+1})}(t-t_{n+2})\ldots(t-t_{n+m})}{\boxed{(t_i-t_{n+1})}(t_i-t_{n+2})\ldots(t_i-t_{n+m})}$$

$$=\frac{\prod_n(t)}{\prod'_n(t_i)(t-t_i)}[(1+\frac{t-t_i}{t_i-t_{n+1}})\cdot(1+\frac{t-t_i}{t_i-t_{n+2}})\ldots(1+\frac{t-t_i}{t_i-t_{n+m}})]$$

$$=\frac{\prod_n(t)}{\prod'_n(t_i)(t-t_i)}\cdot[1+k_0(t-t_i)+k_1(t-t_i)^2+\ldots+k_{m-1}(t-t_i)^m]$$

$$=\frac{\prod_n(t)}{\prod'_n(t_i)(t-t_i)}+\boxed{\frac{\prod_n(t)}{\prod'_n(t_i)}[k_0+k_1(t-t_i)+\ldots+k_{m-1}(t-t_i)^{m-1}]}$$

$Q_{m-1}(t)$

§ 2.4 高斯求积公式

$$a_i^{(2)}(t)=\frac{\prod_n(t)(t-t_{n+1})(t-t_{n+2})\ldots(t-t_{i-1})(t-t_{i+1})\ldots(t-t_{n+m})}{\prod_n(t_i)(t_i-t_{n+1})(t_i-t_{n+2})\ldots(t_i-t_{i-1})(t_i-t_{i+1})\ldots(t_i-t_{n+m})}$$

$\tilde{Q}_{m-1}(t)$

$$\int_{-1}^{1}f(t)dt\approx\int_{-1}^{1}L_{n+m-1}(t)dt$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\int_{-1}^{1}\frac{\prod_n(t)}{\prod'_n(t_i)(t-t_i)}dt\right]y_i+\sum_{i=1}^{n}\left[\int_{-1}^{1}\prod_n(t)Q_{m-1}(t)dt\right]y_i$$

$$+\sum_{i=n+1}^{n+m}\left[\int_{-1}^{1}\prod_n(t)\tilde{Q}_{m-1}(t)dt\right]y_i$$

取 $p_n(t)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ 作为 $\prod_n(t)$，并取 $m=n$

§2.4 高斯求积公式

勒让德多项式性质：

(1)勒让德多项式是[-1,1]区间上的正交函数组，即

$$\int_{-1}^{1} P_n(t)P_m(t)dt \begin{cases} = 0, (m \neq n) \\ \neq 0, (m = n) \end{cases}$$

(2)对一切k<n，有 $\int_{-1}^{1} P_n(t)Q_k(t)dt = 0$

$$Q_k(t) = c_0 P_k(t) + c_1 P_{k-1}(t) + \dots + c_k P_0(t)$$

$$\int_{-1}^{1} P_n(t)Q_k(t)dt = \int_{-1}^{1} P_n(t)[\sum_{i=0}^{k} c_i P_{k-i}(t)]dt$$

$$= \sum_{i=0}^{k} c_i \int_{-1}^{1} P_n(t)P_{k-i}(t)dt$$

(3) n次勒让德多项式有n个不同的零点。

$$P_n(t) = (t - t_1)(t - t_2)\dots(t - t_n)$$

§2.4 高斯求积公式

- 令m=n,取n次勒让德多项式的n个零点t_1 t_2 …t_n作为插值节点

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt \approx \int_{-1}^{1} L_{n+m-1}(t)dt$$

$$=\sum_{i=1}^{n}[\int_{-1}^{1}\frac{\prod_n(t)}{\prod'_n(t_i)(t-t_i)}dt]y_i+\sum_{i=1}^{n}[\int_{-1}^{1}\prod_n(t)Q_{m-1}(t)dt]y_i$$

$$+\sum_{i=n+1}^{n+m}[\int_{-1}^{1}\prod_n(t)\tilde{Q}_{m-1}(t)dt]y_i$$

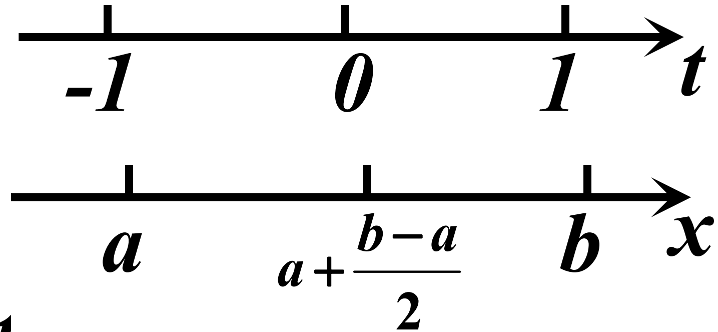
高斯求积公式

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} f(t)dt \approx \int_{-1}^{1} L_{2n-1}(t)dt=\sum_{i=1}^{n}[\int_{-1}^{1}\frac{P_n(t)}{P'_n(t)(t-t_i)}dt]y_i$$

$$R_n=\frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\int_{-1}^{1}P^2{}_n(t)dt=2^{2n+1}\frac{(n!)^4}{[(2n)!]^3}\frac{f^{(2n)}(\xi)}{2n+1}$$

§2.4 高斯求积公式

$$\int_a^b f(x)dx$$



$$=\frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t\right)dt$$

$$x=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t$$

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt \approx \sum_{i=1}^{n}\omega_i y_i \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n}\omega_i f(x_i)$$

其中 $x_i=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t_i$

$$R_n=(b-a)^{2n+1}\frac{(n!)^4}{[(2n)!]^3}\frac{f^{(2n)}(\xi)}{2n+1}$$

§2.4 高斯求积公式

例6.7 利用高斯求积公式(n=3)求下列积分$I=\int_0^1\sqrt{1+2x}dx$

解：按照公式$x_i=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t_i$ 求解以下节点值

$$x_0=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}*(-0.77460)=0.11270 \quad f(x_1)=\sqrt{1+2x_1}=1.10698$$

$$x_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}*0=0.50000 \quad f(x_2)=\sqrt{1+2x_2}=1.41421$$

$$x_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}*0.77460=0.88730 \quad f(x_3)=\sqrt{1+2x_3}=1.66571$$

$$I=\frac{1-0}{2}(0.55556*1.10698+0.88889*1.41421+0.55556*1.66571)$$

$$=1.39870$$

§2.4 高斯求积公式

$$f(x)=\sqrt{1+2x}=(1+2x)^{\frac{1}{2}}$$

$$f^{(6)}(x)=\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})(-\frac{7}{2})(-\frac{9}{2})2^6(1+2x)^{-\frac{11}{2}}=-945(1+2x)^{\frac{1}{2}}$$

$$\max_{0\le x\le 1}|f^{(6)}(x)|=945$$

$$R_3=\frac{1}{15750}(\frac{b-a}{2})^7 f^{(6)}(\xi)\le\frac{945}{15750}(\frac{1}{2})^7\approx\frac{1}{2000}=0.5*10^{-3}$$

$$|\in|\le\frac{1}{2}[(0.55556*1.10698)*0.5*10^{-5}+(0.88889*1.41421)*0.5*10^{-5}$$

$$+(0.55556*1.66571)*0.5*10^{-5}]=0.15*10^{-4}$$

$$|\varepsilon|\le 0.5*10^{-3}+0.15*10^{-4}\approx 0.5*10^{-3}$$

I=1.39870≈1.399

§2.5 重积分的求积公式

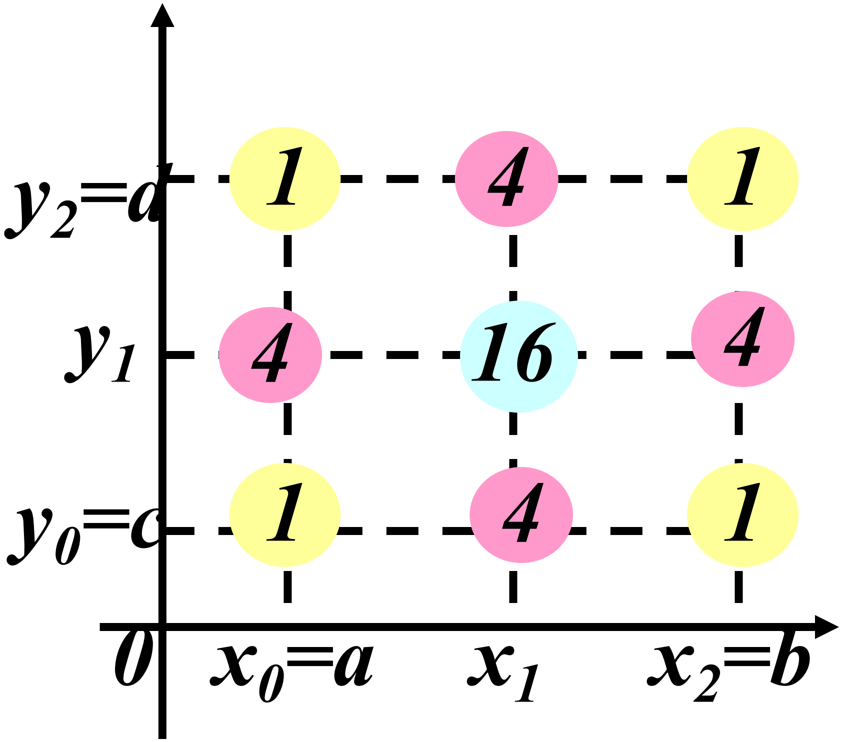
$$I=\int_a^b\int_c^d f(x,y)dxdy=\int_c^d[\int_a^b f(x,y)dx]dy$$

$$\approx\int_c^d[\sum_{i=1}^{m}c_i f(x_i,y)]dy=\sum_{i=1}^{m}c_i\int_c^d f(x_i,y)dy$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_i c_j f(x_i,y_j)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}f_{ij}$$

$$\int_a^b\int_c^d\int_e^f f(x,y,z)dxdydz\approx\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{r}c_i c_j c_k f(x_i,y_j,z_k)$$

§2.5 重积分的求积公式



$$I=\int_a^b\int_c^d f(x,y)dxdy$$

$$\approx\int_c^d\frac{h}{3}[f(x_0,y)+4f(x_1,y)+f(x_2,y)]dy$$

$$=\frac{h}{3}\{\frac{k}{3}[f(x_0,y_0)+4f(x_0,y_1)+f(x_0,y_2)]$$

$$+\frac{4k}{3}[f(x_1,y_0)+4f(x_1,y_1)+f(x_1,y_2)]$$

$$+\frac{k}{3}[f(x_2,y_0)+4f(x_2,y_1)+f(x_2,y_2)]\}$$

$$=\frac{hk}{9}[(f_{00}+f_{20}+f_{02}+f_{22})+4(f_{10}+f_{01}+f_{21}+f_{12})+16f_{11}]$$