§2.5 贝塞尔插值公式

$$p_n(x)=\frac{y_0+y_1}{2}+\frac{c_t^1+c_{t-1}^1}{2}\Delta y_0+c_t^2\,\frac{\Delta^2 y_0+\Delta^2 y_{-1}}{2}+\ldots$$

$$+\frac{c_{t+k-1}^{2k-1}+c_{t+k-2}^{2k-1}}{2}\Delta^{2k-1}y_{-k+1}+c_{t+k-1}^{2k}\,\frac{\Delta^{2k}y_{-k+1}+\Delta^{2k}y_{-k}}{2}+\ldots$$

x_{-1}	y_{-1}						
	1	Δy_{-1}		$\Delta^3 y_{-2}$		$\Delta^5 y_{-3}$	
x_0	y_0	C_t^1	$\Delta^2 y_{-1}$	C_{t+1}^3	$\Delta^4 y_{-2}$	C_{t+2}^5	$\Delta^6 y_{-3}$
	1	Δy_0	C_t^2	$\Delta^3 y_{-1}$	C_{t+1}^4	$\Delta^5 y_{-2}$	C_{t+2}^6
x_1	y_1	C_{t-1}^1	$\Delta^2 y_0$	C_t^3	$\Delta^4 y_{-1}$	C_{t+1}^5	$\Delta^6 y_{-3}$

斯梯林

贝塞尔

§ 2.5 贝塞尔插值公式

$$\frac{1}{2}[c_{t+k-1}^{2k-1}+c_{t+k-2}^{2k-1}]=\frac{1}{2}\frac{1}{(2k-1)!}[\boxed{(t+k-1)^{[2k-1]}+(t+k-2)^{[2k-1]}}]$$

$$(t+k-1)(t+k-2)^{[2k-2]}+(t+k-2)^{[2k-2]}(t+k-2-\overline{2k-2})$$

$$=(t+k-2)^{[2k-2]}[(t+k-1)+(t+k-2-2k+2)]$$

$$=(t+k-2)^{[2k-2]}(2t-1)$$

$$\frac{1}{2}[c_{t+k-1}^{2k}+c_{t+k}^{2k}]=\frac{1}{(2k-1)!}(t-\frac{1}{2})(t+k-2)^{[2k-2]}$$

$$C_{t+k-1}^{2k}=\frac{(t+k-1)^{[2k]}}{(2k)!}$$

§ 2.5 贝塞尔插值公式

$$P_n(x)=\frac{y_0+y_1}{2}+\frac{1}{1!}(t-\frac{1}{2})\Delta y_0+\frac{t^{[2]}}{2!}\frac{\Delta^2 y_{-1}+\Delta^2 y_0}{2}+\frac{1}{3!}(t-\frac{1}{2})t^{[2]}\Delta^3 y_{-1}$$

$$+\cdots+\frac{1}{(2k-1)!}(t-\frac{1}{2})(t+k-2)^{[2k-2]}\Delta^{2k-1}y_{-k+1}$$

$$+\frac{(t+k-1)^{[2k]}}{(2k)!}\frac{\Delta^{2k}y_{-k}+\Delta^{2k}y_{-k+1}}{2}+\cdots$$

注意观察通式变化的规律

$$\frac{1}{2}[c_{t+k-1}^{2k}+c_{t+k}^{2k}]=\frac{1}{(2k-1)!}(t-\frac{1}{2})(t+k-2)^{[2k-2]}$$

$$C_{t+k-1}^{2k}=\frac{(t+k-1)^{[2k]}}{(2k)!}$$

§2.5 贝塞尔插值公式

当**t=1/2**时，贝塞尔公式变为：

$$P_n(x)=\frac{y_0+y_1}{2}-\frac{1}{8}\frac{\Delta^2 y_{-1}+\Delta^2 y_0}{2}+\frac{3}{128}\frac{\Delta^4 y_{-2}+\Delta^2 y_1}{2}-\frac{5}{1024}\frac{\Delta^6 y_{-3}+\Delta^6 y_{-2}}{2}$$

$$+\cdots+(-1)^n\frac{[1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)]^2}{2^{2n}(2n)!}\frac{\Delta^{2n}y_{-n}+\Delta^{2n}y_{-n+1}}{2}+\cdots$$

称为中点贝塞尔插值公式。可利用该公式来加密表格值。

斯梯林插值公式和贝塞尔插值公式都称为中心差分公式，它们都可用于x位于插值区间中部插值计算用.

§ 2.5 贝塞尔插值公式

$$R_{2n}(x)=\frac{h^{2n+1}}{2(2n+1)!}[f^{(2n+1)}(\xi_1)(t-(n+1))+f^{(2n+1)}(\xi_2)(t+n)]$$

$$t(t^2-1)\cdots(t^2-(n-1)^2)(t-n)$$

$$R_{2n-1}(x)=\frac{h^{2n}}{(2n)!}\frac{f^{(2n)}(\xi_1)+f^{(2n)}(\xi_2)}{2}t(t^2-1)\cdots(t^2-(n-1)^2)(t-n)$$

§2.5 贝塞尔插值公式

例5.8 已知数值表，求sin0.57的近似值

x	$\sin x$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0.4	0.38942			
		0.09001		
0.5	0.47943		-0.00480	
		0.08521		-0.00083
0.6	0.56464		-0.00563	
		0.07958		
0.7	0.64422			

$x_0 = 0.5$

$$t = \frac{x - x_0}{h} = \frac{0.57 - 0.5}{0.1}$$

$=0.7$

$$P_3(0.57) = \frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{1}{1!}\left(t - \frac{1}{2}\right)\Delta y_0 + \frac{t^{[2]}}{2!}\frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} + \frac{1}{3!}\left(t - \frac{1}{2}\right)t^{[2]}\Delta^3 y_{-1}$$

0.4794
0.5646

t=0.7
Δy_0=0.085

t(t-1)
t=0.7

$\Delta^2 y_{-1}$=-0.00480
$\Delta^2 y_0$=-0.00563

$\Delta^3 y_{-1}$=-0.00083

$$\sin 0.57 \approx P_3(0.57)$$

§2.5 贝塞尔插值公式

斯梯林插值公式和贝塞尔插值公式的区别：

- 插值节点相对于*x*的对称分布-斯梯林插值

$$|t| = \left|\frac{x-x_0}{h}\right| \le \frac{1}{4}$$

*x*靠近某插值节点的对称分布
插值公式截止到偶阶差分

- 插值节点相对于*x*的对称分布-贝塞尔插值

$$\left|t-\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{x-x_0}{h}-\frac{1}{2}\right| \le \frac{1}{4}$$

*x*靠近相邻两节点的中点时
插值公式截止到奇阶差分

§ 3 不等距节点下的拉格朗日插值

3.1 公式的建立

思路:根据差商公式，求得的$f(x)$即可。

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_n,x]=\frac{f(x)}{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}+$$

$$\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)(x_0-x)}$$

$$+\frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)(x_1-x)}+$$

$$\cdots+\frac{f(x_n)}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})(x_n-x)}$$

§3 不等距节点下的拉格朗日插值

$l_i(x)$

$$f(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ \ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_n)}f(x_0)$$

$$+\ldots+\boxed{\frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}}f(x_i)$$

拉格朗日插值公式

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ \ldots\ (x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ \ldots\ (x_n-x_{n-1})}f(x_n)+\mathrm{R}_n(x)$$

$$=L_n(x)+R_n(x)$$

$$R_n(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)f[x_0,x_1,\cdots,x_n,x]$$

§3 不等距节点下的拉格朗日插值

$$l_i(x)=\frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}$$

3.2 拉格朗日插值公式的系数表达式

$$l_i(x)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\left(\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\right)$$

$$l_i(x)=\frac{x-x_0}{x_i-x_0}\bullet\cdots\bullet\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\bullet\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\bullet\cdots\bullet\frac{x-x_n}{x_i-x_n}$$

$$l_i(x)=\frac{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(x-x_j)}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(x_i-x_j)}$$

$$l_i(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

§ 3 不等距节点下的拉格朗日插值

$$l_i(x)=\frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}$$

$$l_i(x)=\frac{\omega_{n+1}(x)}{\boxed{\omega'_{n+1}(x_i)}(x-x_i)}\qquad \omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

$$l_i(x)=\frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}\ \frac{x-x_i}{x-x_i}$$

$$=\frac{\omega_{n+1}(x)}{\boxed{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}(x-x_i)}$$

§ 3 不等距节点下的拉格朗日插值

$$\omega_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$$

$$\omega'_{n+1}(x) = \{[(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ \ldots(x-x_n)].(x-x_i)\}'$$

$$=\cancel{(x-x_i)}'[(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ \ldots(x-x_n)]$$

$$+(x-x_i)[(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ \ldots(x-x_n)]'$$

$$=[(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ \ldots(x-x_n)]$$

$$\cancel{+(x-x_i)[(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ \ldots(x-x_n)]'}$$

$$\omega'_{n+1}(x_i) = [(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ \ldots(x_i-x_n)]$$

$$\therefore l_i(x) = \frac{\omega_{n+1}(x)}{\omega'_{n+1}(x_i)(x-x_i)}$$

§3 不等距节点下的拉格朗日插值

$$l_i(x)=\frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}$$

$$l_i(x)=\begin{cases}0 & x=x_j\neq x_i\\ 1 & x=x_i\end{cases}$$

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} l_i(x)y_i$$

设 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 为 $n+1$ 个互异节点，$l_i(x)(i=0,1,\cdots,n)$ 为这组节点上的Lagrange插值基函数，试证明：

$$\sum_{i=0}^{n} l_i(x)\equiv 1$$

§3 不等距节点下的拉格朗日插值

证明：如果$f(x)$=1,则n+1个节点处的值均为1，则它的n次插值多项式为：$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} l_i(x)$

对任意x，插值余项为：

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{\mathrm{n+1}}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)=0$$

则 $L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} l_i(x)=f(x)=1$

§ 3 不等距节点下的拉格朗日插值

例5.4 已知x=1,4,9的平方根值，用拉格朗日插值公式求$7^{1/2}$

解：
$$L_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1)+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)$$

$$x_0=1,\ x_1=4,\ x_2=9 \quad f(x_0)=1,\ f(x_1)=2,\ f(x_2)=3$$

$$L_2(7)=\frac{(7-4)(7-9)}{(1-4)(1-9)}*1+\frac{(7-1)(7-9)}{(4-1)(4-9)}*2+\frac{(7-1)(7-4)}{(9-1)(9-4)}*3$$

$$=2.7$$

§ 3.3 拉格朗日插值计算中的舍入误差

$$L_n^*(x)=\sum_{i=0}^{n} l_i^*(x) y_i^*$$

带星号的表达式为精确值

$$\Rightarrow \quad L_n(x)+\epsilon=\sum_{i=0}^{n}(l_i(x)+\Delta l_i)(y_i+\Delta y_i)$$

$$=\sum_{i=0}^{n} l_i(x) y_i+\sum_{i=0}^{n}\left[\Delta y_i l_i(x)+\Delta l_i y_i+\Delta l_i \Delta y_i\right]$$

高阶量可以略去

$$\Rightarrow \quad |\epsilon|=\left|\sum_{i=0}^{n}\left[l_i(x)\cdot \Delta y_i+\Delta l_i\cdot y_i\right]\right| \le \sum_{i=0}^{n}\left(|\Delta y_i|\,|l_i(x)|+|\Delta l_i|\,|y_i|\right)$$

当 $|\Delta y_i|=|\Delta l_i|=\Delta$ 时 $\quad |\epsilon| \le \sum_{i=0}^{n}\left(|l_i(x)|+|y_i|\right)\cdot\Delta$

当 $l_i(x)$ 为精确值时，$|\Delta l_i|=0 \quad |\epsilon| \le \left(\sum_{i=0}^{n}|l_i(x)|\right)\cdot|\Delta y|$

§ 3.3 拉格朗日插值计算中的舍入误差

$$\sum_{i=0}^{n}|l_i(x)|\begin{cases} =\sum_{i=0}^{n}l_i(x)=1, l_i(x)\text{全部大于}0 \\ >1, l_i(x)\text{部分大于}0\text{，部分小于}0 \end{cases}$$

当拉格朗日插值公式中有负系数出现时，会放大 y_i 的舍入误差。

§ 3.3 拉格朗日插值计算中的舍入误差

例5.10 估计用线性插值法计算lg47时的误差限。

解：应用n=1的拉格朗日插值公式 $y=\dfrac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1$

取$x_0=45$, $x_1=48$, $y=\lg 47=\dfrac{47-48}{45-48}y_0+\dfrac{47-45}{48-45}y_1$

$$=0.3333333\,y_0+0.6666667\,y_1=1.671898401$$

$$|R_1(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\right||(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)|$$

$$=\left|\frac{1}{2}\lg''\xi\cdot(x-x_0)(x-x_1)\right| \qquad (\xi\in[45,48])$$

$$(\lg x)'=\frac{\lg e}{x} \qquad (\lg x)''=\left(\frac{\lg e}{x}\right)'=-\frac{\lg e}{x^2}=-\frac{0.43}{x^2}$$

§ 3.3 拉格朗日插值计算中的舍入误差

$$R_1(x) \le \left| \frac{1}{2} \frac{0.43}{45^2} \times (47-45)(47-48) \right| = 0.2 \times 10^{-3}$$

截断误差

$$\in = \sum_{i=0}^{n} (|a_i(x)| + |y_i|) \cdot \Delta = (0.3333333 + 1.6532126) \times 0.5 \times 10^{-7}$$
$$+ (0.6666667 + 1.6812413) \times 0.5 \times 10^{-7}$$
$$\approx 0.2 \times 10^{-6}$$

舍入误差

总误差为： $\varepsilon = 0.2 \times 10^{-3} + 0.2 \times 10^{-6} = 0.2 \times 10^{-3}$

对于y=1.671898401可取y=1.672

§ 3.3 拉格朗日插值计算中的舍入误差

- 例5.11 有8位sin$x$的函数表，采用拉格朗日插值公式求1.75时的函数近似值，问公式应取几项?
- 解：采用尝试法确定公式项数
- （1）取x_0=1.74, x_1=1.76,

$$L_1(x)=\frac{1.75-1.76}{1.74-1.76}y_0+\frac{1.75-1.74}{1.76-1.74}y_1=\frac{1}{2}(y_0+y_1)$$

$$|R_1(1.75)|=\left|\frac{\sin''(\xi)}{2!}\right||(1.75-1.74)(1.75-1.76)|$$

$$\le 0.5|(1.75-1.74)(1.75-1.76)|=0.5\times 10^{-4}$$

$$\in \le 0.5\times(0.5\times 10^{-8}+0.5\times 10^{-8})=0.5\times 10^{-8}$$

§ 3.3 拉格朗日插值计算中的舍入误差

（2）取x_0=1.74, x_1=1.76, x_2=1.78,

$$L_2(x)=\frac{(1.75-1.76)(1.75-1.78)}{(1.74-1.76)(1.74-1.78)}y_0$$

$$+\frac{(1.75-1.74)(1.75-1.78)}{(1.76-1.74)(1.76-1.78)}y_1+\frac{(1.75-1.74)(1.75-1.76)}{(1.78-1.74)(1.78-1.76)}y_2$$

$$=0.375y_0+0.75y_1-0.125y_2$$

$$|R_2(1.75)|=\left|\frac{\sin'''(\xi)}{3!}\right||(1.75-1.74)(1.75-1.76)(1.75-1.78)|$$

$$\le 0.5\times10^{-6}$$

$$\in\le(0.375+0.75+0.125)\times0.5\times10^{-8}=0.625\times10^{-8}$$

§ 3.3 拉格朗日插值计算中的舍入误差

（3）取$x_0=1.72$, $x_1=1.74$ $x_2=1.76$, $x_3=1.78$,

$$L_3(x) = -0.062575y_0 + 0.5625y_1 + 0.5625y_2 - 0.0625y_3$$

$$|R_2(1.75)| \le \frac{1}{3!}|(1.75-1.72)(1.75-1.74)(1.75-1.76)(1.75-1.78)|$$

$=0.375*10^{-8}$

$$\in \le (0.0625+0.5625+0.5625+0.0625)\times 0.5\times 10^{-8}$$

$=0.625\times 10^{-8}$

取四项比较恰当.此时符合误差分配原则。

§4 等距节点下的拉格朗日插值公式

✦等距节点下的拉格朗日插值公式

$$x_i=x_0+ih \Rightarrow x_i-ih=x_0$$

$$t=\frac{x-x_0}{h}$$

$$\left.\begin{matrix} x_i-ih=x_0 \\ t=\frac{x-x_0}{h}\end{matrix}\right\} t=\frac{x-(x_i-ih)}{h} \Rightarrow t=\frac{x-x_i+ih}{h}$$

$$\Rightarrow x-x_0+x_0-x_i=th-ih \Rightarrow x-x_i=h(t-i)$$

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}f(x_i)$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\frac{th(t-1)h\cdots(t-\overline{i-1})h(t-\overline{i+1})h\cdots(t-n)h}{ih(i-1)h\cdots 2h\,1h(-1)h\cdots(-(n-i))h}f(x_i)$$

§4 等距节点下的拉格朗日插值公式

$$=\sum_{i=0}^{n}\frac{t\ (t-1)\cdots\overline{(t-i-1)}\ \overline{(t-i+1)}\cdots(t-n)}{\boxed{i\ (i-1)\cdots 2\ 1}\ (-1)\cdots(-(n-i))}f(x_i)$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\frac{\boxed{t\ (t-1)\cdots\overline{(t-i-1)}\ \overline{(t-i+1)}\cdots(t-n)\,(t-i)}}{i!\ (-1)^{n-i}\ (n-i)!\ (t-i)}f(x_i)$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^{n-i}\ \boxed{t^{[n+1]}}}{i!\ (n-i)!\ (t-i)}f(x_i)$$

§4 等距节点下的分段线性插值

$$h=\frac{b-a}{n} \qquad x_i=x_0+ih$$

1.等距零次多项式插值

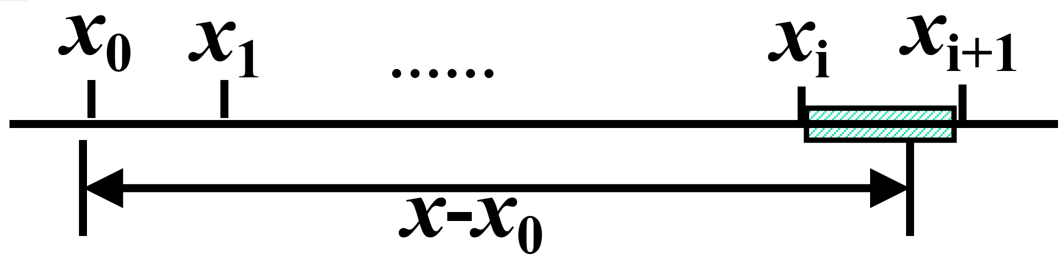
$$y=\begin{cases} y_0 & (x_0\le x<x_1) \\ y_1 & (x_1\le x<x_2) \\ \cdots\cdots\cdots & \\ y_n & (x_{n-1}\le x<x_n) \end{cases}$$

$$i=[\frac{x-x_0}{h}]$$

§4 分段插值

2.分段线性插值

$$h=\frac{b-a}{n}$$



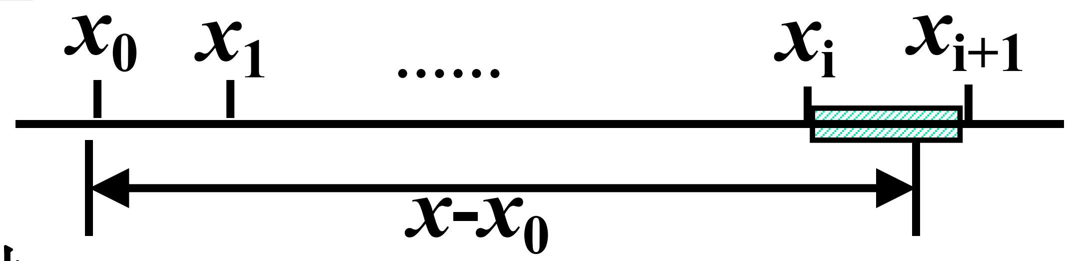
当n=1时，

$$\begin{cases} L_1(x)=\dfrac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1=\dfrac{(t-1)h}{-h}y_0+\dfrac{ht}{h}y_1 \\ \qquad\qquad =y_0+(y_1-y_0)t \\ t=\dfrac{x-x_0}{h} \end{cases}$$

§ 4 分段插值

2.分段线性插值

$$h=\frac{b-a}{n}$$



当 $x\in[x_i,x_{i+1}]$时，

$$\begin{cases} L_1(x)=\dfrac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}y_i+\dfrac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}y_{i+1}=\dfrac{(t-1)h}{-h}y_i+\dfrac{ht}{h}y_{i+1} \\ \qquad\quad =y_i+(y_{i+1}-y_i)t \\ t=\dfrac{x-x_i}{h} \end{cases}$$

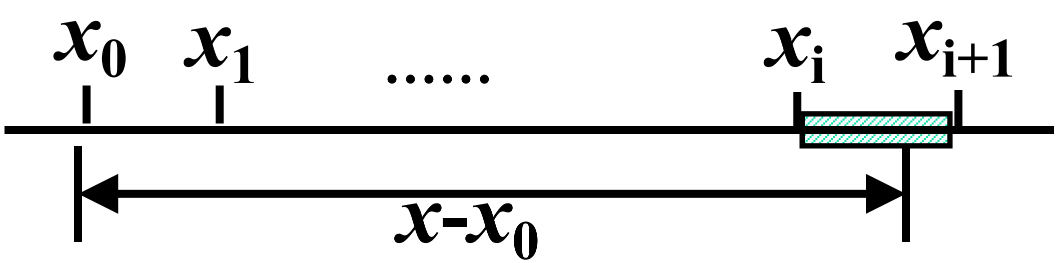
$$\left|R_1(x)\right|=\left|\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_i)(x-x_{i+1})\right|\le\left|\frac{M_2}{2}h^2t(t-1)\right|_{t=\frac{1}{2}}=\frac{M_2}{8}h^2$$

§4 分段插值

2.分段线性插值

$$h=\frac{b-a}{n} \qquad x_i=x_0+ih \qquad x\in[x_i,x_{i+1}] \qquad t=\frac{x-x_i}{h}$$

$$y(x)=y_i+(y_{i+1}-y_i)t$$



$$\frac{x-x_0}{h}=\frac{x-x_i+x_i-x_0}{h}=\;t\;+\;i$$

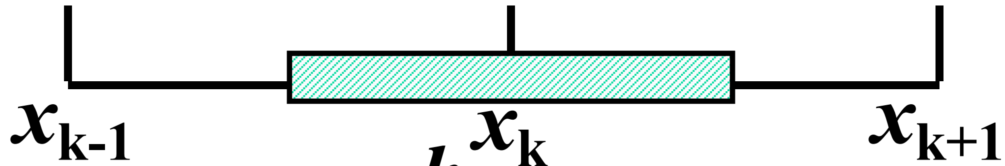
$$i=[\frac{x-x_0}{h}] \qquad t=\{\frac{x-x_0}{h}\}$$

取整运算

取小数运算

§ 4 分段插值

设 $x_i = x_0 + ih$



3.等距三点插值

$$x_k - \frac{h}{2} < x < x_k + \frac{h}{2} \qquad k = \left[\frac{(x+\frac{h}{2})-x_0}{h}\right] \qquad t = \frac{x - x_k}{h}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_k)(x-x_{k+1})}{(x_{k-1}-x_k)(x_{k-1}-x_{k+1})} y_{k-1} + \frac{(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})}{(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})} y_k + \frac{(x-x_{k-1})(x-x_k)}{(x_{k+1}-x_{k-1})(x_{k+1}-x_k)} y_{k+1}$$

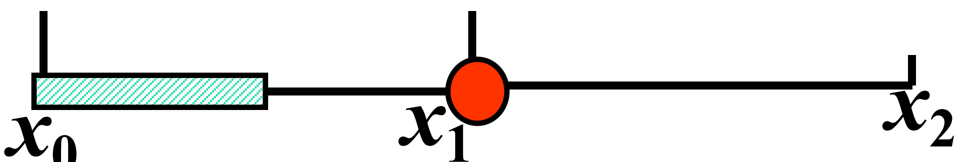
$$= \frac{th\,(t\text{-}1)h}{-h(-2h)} y_{k-1} + \frac{(t+1)h\,(t\text{-}1)h}{h(-h)} y_k + \frac{(t+1)h\,th}{2h\,h} y_{k+1}$$

$$= \frac{t(t\text{-}1)}{2} y_{k-1} + \frac{(t^2\text{-}1)}{-1} y_k + \frac{(t+1)\,t}{2} y_{k+1}$$

§ 4 分段插值

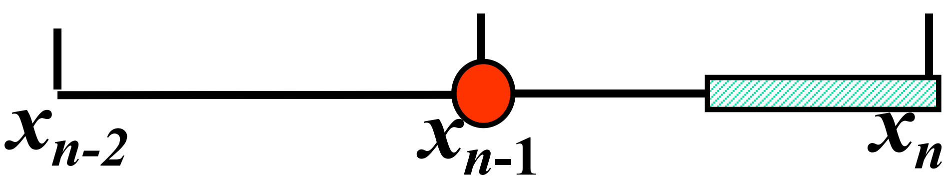
$$k=\left[\frac{\left(x+\frac{h}{2}\right)-x_0}{h}\right]$$

$$t=\frac{x-x_k}{h}=\frac{x-(x_0+kh)}{h}=\frac{(x-x_0)-kh}{h}=\frac{(x-x_0)}{h}-k$$



$x\le x_0+h/2, k\le 1$

$x_k=x_1$



$x\ge x_{n-1}+h/2, k\ge n$

$x_k=x_{n-1}$

或者利用x_0, x_1, x_2的三点插值公式计算出y_{-1}，然后使用x_{-1}，x_0, x_1来计算x;

§5 插值公式的唯一性及其应用

5.1 插值公式的唯一性

条件： 插值节点相同

反证法：

假设有两个不同的插值多项式$P_n(x)$,$Q_n(x)$，则

$G_n(x)=P_n(x)-Q_n(x)$为次数不超过n的多项式，根据插值条件可知，$G_n(x)$有$n+1$个零点。与其为不超过n次的多项式相矛盾。所以插值公式唯一。

§5 插值公式的唯一性及其应用

5.2 插值公式的应用

不等距节点的情况：

- 牛顿基本差商公式在精度不够的情况下，需再增加一个节点时，只需在原来的结果上增加一项。
- 采用拉格朗日插值公式时，则都要重新计算。
- 在估算结果的舍入误差时，使用拉格朗日插值公式比较容易。

等距节点的情况：

- 靠近表头：牛顿前向插值
- 靠近表末：牛顿后向插值
- 插值区间的中部：斯梯林插值或者贝塞尔插值。

§6 反插值

- 正插值：已知$x \to$求y
- 反插值：已知$y \to$求x
- 1. 使用反函数的插值法 $y = f(x), x = f(y)$

x	x_0	x_1	…	x_n
y	y_0	y_1	…	y_n

$\Rightarrow$

y	y_0	y_1	…	y_n
x	x_0	x_1	…	x_n

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} y_i$$

$$\Rightarrow \quad x = \sum_{i=0}^{n} \frac{(y-y_0)\dots(y-y_{i-1})(y-y_{i+1})\dots(y-y_n)}{(y_i-y_0)\dots(y_i-y_{i-1})(y_i-y_{i+1})\dots(y_i-y_n)} x_i$$

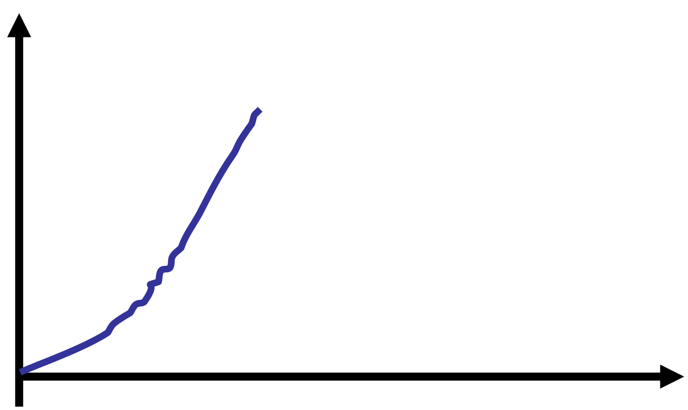
§ 6.1 使用反函数的插值法

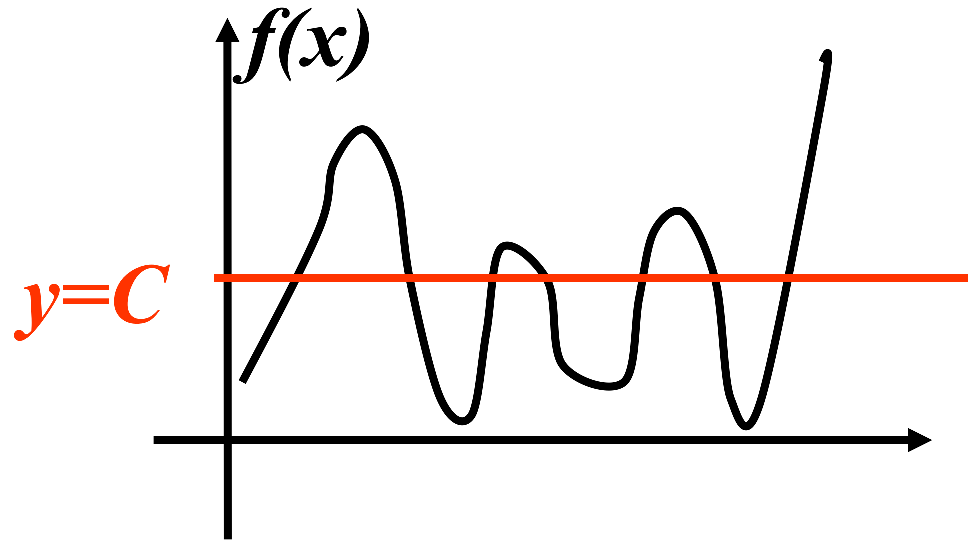
$$P(x) = f(x_0) + (x - x_0) f[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_2, x_1, x_0]$$
$$+ \ldots + (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}) f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0]$$

牛顿基本差商公式

$$x = x_0 + (y - y_0)\varphi[y_1, y_0] + (y - y_0)(y - y_1)\varphi[y_2, y_1, y_0]$$
$$+ \ldots + (y - y_0)(y - y_1)\ldots(y - y_{n-1})\varphi[y_n, y_{n-1}, \ldots, y_0]$$

应用条件：$y=f(x)$是单调函数





§6.1 使用反函数的插值法

x	1.74	1.76	1.78	1.80	1.82
sinx	0.985719	0.982154	0.978196	0.97847	0.969109

例5.15 给出sinx的函数表，对y=0.98000000利用y=sinx的反函数进行反插值.

$$x=\sum_{i=0}^{n}\frac{(y-y_0)(y-y_1)\cdots(y-y_n)}{(y_i-y_0)(y_i-y_1)\cdots(y_i-y_n)}x_i$$

$$=\frac{(0.98-y_1)(0.98-y_2)(0.98-y_3)}{(y_0-y_1)(y_0-y_2)(y_0-y_3)}\times 1.74+\frac{(0.98-y_0)(0.98-y_2)(0.98-y_3)}{(y_1-y_0)(y_1-y_2)(y_1-y_3)}\times 1.76$$

$$+\frac{(0.98-y_0)(0.98-y_1)(0.98-y_3)}{(y_2-y_0)(y_2-y_1)(y_2-y_3)}\times 1.78+\frac{(0.98-y_0)(0.98-y_1)(0.98-y_2)}{(y_3-y_0)(y_3-y_1)(y_3-y_2)}\times 1.80$$

$$=1.77113820$$

§ 6.1 使用反函数的插值法

例5.16 已知$f(x)=x^3-3x^2-x+9$的函数值，求方程$f(x)=0$在区间[-1.7,-1.3]上的根的近似值。

解：建立反函数的差商表

y	x	$\varphi[y_i, y_{i+1}]$	$\varphi[y_i,y_{i+1},y_{i+2}]$	$\varphi[y_i,y_{i+1},y_{i+2},y_{i+3}]$	$\varphi[y_i,y_{i+1},y_{i+2},y_{i+3}]$
3.033	-1.3				
		0.0795545			
1.776	-1.4		0.0030763		
		0.0752445		0.0001753	
0.375	-1.5		0.0028044		0.0000104
		0.0712758		0.0001575	
-1.176	-1.6		0.0025630		
		0.0676133			
-2.883	-1.7				

$$P(y)=-1.3+(y-3.033)\times 0.0795545+(y-3.033)\times(y-1.776)\times 0.0030763+(y-3.033)\times(y-1.776)\times(y-2.883)\times 0.0001753+\dots$$

$$x=P(0)=-1.525097$$

§ 6.2 利用插值多项式反插法

$$y = P(x) = f(x_0) + \boxed{(x-x_0)f[x_1,x_0]} + (x-x_0)(x-x_1)f[x_2,x_1,x_0]$$
$$+\ldots+(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})f[x_n,x_{n-1},\ldots,x_0]$$

$$\Rightarrow \quad y - f(x_0) - (x-x_0)(x-x_1)f[x_2,x_1,x_0]$$
$$-\ldots-(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})f[x_n,x_{n-1},\ldots,x_0] = \boxed{(x-x_0)f[x_1,x_0]}$$

$$\Rightarrow \quad x = \underbrace{\boxed{x_0 + \frac{y-f(x_0)}{f[x_1,x_0]}}}_{m_1} \underbrace{\boxed{-\frac{f[x_2,x_1,x_0]}{f[x_1,x_0]}}}_{m_2}(x-x_0)(x-x_1)$$
$$-\ldots\underbrace{\boxed{-\frac{f[x_n,x_{n-1},\ldots,x_0]}{f[x_1,x_0]}}}_{m_n}(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}) = \phi(x)$$

§6.2 利用插值多项式反插法

- $x^{(0)}=m_1$
- $x^{(1)}=m_1+m_2(x^{(0)}-x_0)(x^{(0)}-x_1)=\phi(x^{(0)})$
- $x^{(2)}=m_1+m_2(x^{(1)}-x_0)(x^{(1)}-x_1)+m_3(x^{(1)}-x_0)(x^{(1)}-x_1)(x^{(1)}-x_1)$
- ……..
- $x^{(n-1)}=\phi(x^{(n-2)})$
- $x^{(n)}=\phi(x^{(n-1)})$
- …….

§ 6.2 利用插值多项式反插法

$$P(x)=f(x_0)+(x-x_0)f[x_1,x_0]+(x-x_0)(x-x_1)f[x_2,x_1,x_0]$$
$$+\ldots+(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})f[x_n,x_{n-1},\ldots,x_0]$$

$$y-f(x_0)=(x-x_0)f[x_1,x_0]+(x-x_0)(x-x_1)f[x_2,x_1,x_0]$$
$$-\ldots-(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})f[x_n,x_{n-1},\ldots,x_0]$$

$$y-f(x_0)=(x-x_0)\{f[x_1,x_0]+(x-x_1)f[x_2,x_1,x_0]$$
$$-\ldots-(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})f[x_n,x_{n-1},\ldots,x_0]\}$$

$$x=$$

$\phi(x)$

$$x_0+\frac{y-f(x_0)}{f[x_1,x_0]+(x-x_1)f[x_2,x_1,x_0]-\ldots-(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})f[x_n,x_{n-1},\ldots,x_0]}$$

§ 6.2 利用插值多项式反插法

$$x^{(0)}=x_0+\frac{y-f(x_0)}{f[x_1,x_0]}$$

$$x^{(1)}=x_0+\frac{y-f(x_0)}{f[x_0,x_1]+(x^{(0)}-x_1)f[x_0,x_1,x_2]}=\phi(x^{(0)})$$

$$x^{(2)}=x_0+\frac{y-f(x_0)}{f[x_0,x_1]+(x^{(1)}-x_1)f[x_0,x_1,x_2]+(x^{(1)}-x_1)(x^{(1)}-x_2)f[x_0,x_1,x_2,x_3]}$$

$$=\phi(x^{(1)})$$

$\cdots\cdots$

$$x^{(n-1)}=\phi(x^{(n-2)})$$

$$x^{(n)}=\phi(x^{(n-1)})$$

§ 6.2 利用插值多项式反插法

- 等距情况下，可以选择牛顿前向插值公式 $t=\dfrac{x-x_0}{h}$

$$y=P_n(x)=y_0+\frac{t\cdot\Delta y_0}{1!}+t(t-1)\frac{\Delta^2 y_0}{2!}+\dots+t(t-1)\dots(t-\overline{n-1})\frac{\Delta^n y_0}{n!}$$

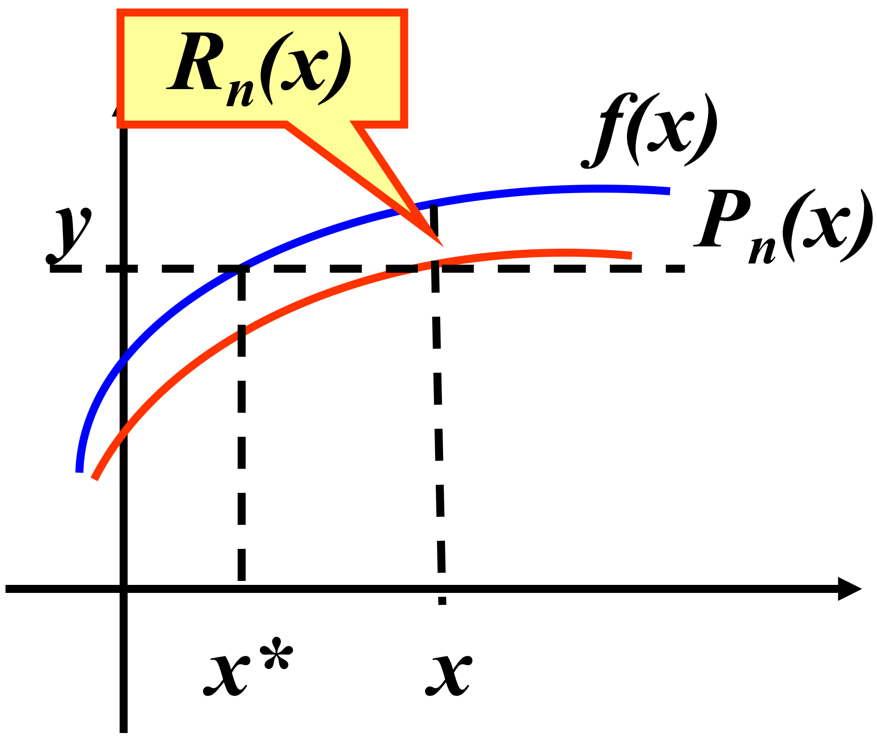
$$y-y_0=t\cdot\boxed{\Delta y_0}+t(t-1)\frac{\Delta^2 y_0}{2!}+\dots+t(t-1)\dots(t-\overline{n-1})\frac{\Delta^n y_0}{n!}$$

$$\begin{cases} t=\dfrac{y-y_0}{\Delta y_0}-t(t-1)\dfrac{\Delta^2 y_0}{2!\Delta y_0}-\dots-t(t-1)\dots(t-\overline{n-1})\dfrac{\Delta^n y_0}{n!\Delta y_0}=\phi(t) \\[2ex] t=\dfrac{y-y_0}{\Delta y_0+(t-1)\dfrac{\Delta^2 y_0}{2!}+\dots+(t-1)\dots(t-\overline{n-1})\dfrac{\Delta^n y_0}{n!}}=\phi(t) \end{cases}$$

$$x\approx x_0+th$$

§ 6.2 利用插值多项式反插法

✦讨论余式的大小



$f(x^*)=y$

$P_n(x)=y$

$f(x)= P_n(x)+ R_n(x)$

$f(x)- f(x^*) = R_n(x)$

$f'(\xi)\,(x-x^*) = R_n(x)$

$$|x^* - x| \le \frac{|R_n(x)|}{m_1} = \frac{M_{n+1}}{m_1(n+1)!}\left|\Pi_{n+1}(x)\right|, m_1 \le |f'(x)|$$

§ 6.2 利用插值多项式反插法

例5.17 求方程$x^5-5x+3=0$在[0, 1]上的根。

x	y	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0.5	0.53125				
		-0.45349			
0.6	0.07776		-0.04380		
		-0.40969		-0.02550	
0.7	-0.33193		-0.06930		-0.0084
		-0.34039		-0.03390	
0.8	-0.67232		-0.10320		
		-0.23719			
0.9	-0.90951				

取x_0=0. 6, y=0,

$$t=\frac{y-y_0}{\Delta y_0}-t(t-1)\frac{\Delta^2 y_0}{2!\Delta y_0}-\ldots-t(t-1)\ldots(t-\overline{n-1})\frac{\Delta^n y_0}{n!\Delta y_0}$$

$$=\frac{-0.07776}{-0.4096}-t(t-1)\frac{0.06930}{2*(-0.4096)}-t(t-1)(t-2)\frac{0.03390}{3!*(-0.4096)}$$

§ 6.2 利用插值多项式反插法

- $t=0.18980+0.08458t(t-1)+0.01379t(t-1)(t-2)$
- $t_0=0.18980$
- $t_1=0.18980+0.08458*0.18980(0.18980-1)$
  $=0.17679$
- $t_2=0.18980+0.08458*0.17679(0.17679-1)$
  $+0.01379*0.17679(0.17679-1)(0.17679-2)$
  $=0.18115$
- $t_3=0.18980+0.08458*0.18115(0.18115-1)$
  $+0.01379*0.18115(0.18115-1)(0.18115-2)$
  $=0.18097$
- $t_4=0.18098$ $t_5=0.18098$
- $x\approx x_0+th=0.6+0.18098*0.1=0.618098$

结束

§7 埃尔米特插值多项式

- 问题提出：
  - 不仅要求函数值重合，而且要求若干阶导数也重合
  - 目的：提高插值函数曲线的光滑度、使插值函数和被插函数的密合程度更好
- Hermite插值要构造的插值函数不但在给定的节点上取已知函数值，还要在插值节点上具有给定的导数值

§7 埃尔米特插值多项式

- 在节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 上已知下列函数值与导数值：

$$\begin{cases} y_0, y_0', y_0'', \cdots, y_0^{(m_0)} & m_0+1 \\ y_1, y_1', y_1'', \cdots, y_1^{(m_1)} & m_1+1 \\ \cdots & \\ y_n, y_n', y_n'', \cdots, y_n^{(m_n)} & m_n+1 \end{cases}$$

$$\sum_{i=0}^{n}(m_i+1) = m+1$$

根据m+1个条件，可以确定一个m次多项式：

$$P_m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m$$

§7 埃尔米特插值多项式

$$P_m(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m$$

埃米特型插值多项式

$$\begin{cases} y_0, y_0', y_0'', \cdots, y_0^{(m_0)} \\ y_1, y_1', y_1'', \cdots, y_1^{(m_1)} \\ \cdots \\ y_n, y_n', y_n'', \cdots, y_n^{(m_n)} \end{cases}$$

它应满足下式

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{m} x_i^k a_k = y_i \\ \sum_{k=1}^{m} k x_i^{k-1} a_k = y_i' \\ \cdots \\ \sum_{k=m_i}^{m} k(k-1)\cdots(k-m_i+1) x_i^{k-m_i} a_k = y_i^{(m_i)} \end{cases}$$

7.1 牛顿型埃米特插值公式

- 根据差商和导数的关系：$f[x_0,x_1,\ldots,x_n]=\dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$

$$\lim f[x_0,x_0,\cdots,x_0]=\lim\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

$$f[\underbrace{x_0,x_0,\cdots,x_0}_{\text{n+1个}x_0}]=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

$$f[x_i,x_i]=\frac{f'(x_i)}{1!}=y_i'$$

$$\begin{cases} f[x_i,x_i]=\dfrac{f'(x_i)}{1!}=y_i' \\ f[x_i,x_i,x_i]=\dfrac{f''(x_i)}{2!}=y_i''/2! \\ \cdots \\ f[x_i,x_i,\cdots,x_i]=\dfrac{f^{(m_i)}(x_i)}{m_i!}=y_i^{(m_i)}/m_i! \end{cases}$$

7.1 牛顿型埃米特插值公式

- 将每一节点的个数增加到(导数+1)个后，问题可归结为在n+1个互异节点组上的插值问题：

$$\underbrace{\underbrace{x_0,x_0,\cdots,x_0}_{m_0+1},\underbrace{x_1,x_1,\cdots,x_1}_{m_1+1},\cdots,\underbrace{x_n,x_n,\cdots,x_n}_{m_n+1}}_{m}$$

$$\begin{aligned}
P_m(x)=f(x_0)&+(x-x_0)f[x_0,x_0]+(x-x_0)^2f[x_0,x_0,x_0]+\cdots\\
&+(x-x_0)^{m_0+1}f[x_0,\cdots,x_0,x_1]\\
&+(x-x_0)^{m_0+1}(x-x_1)f[x_0,\cdots,x_0,x_1,x_1]+\cdots+\\
&(x-x_0)^{m_0+1}(x-x_1)^{m_1+1}f[x_0,\cdots,x_0,x_1,\cdots,x_1,x_2]+\cdots+\\
(x-x_0)^{m_0+1}&(x-x_1)^{m_1+1}\cdots(x-x_n)^{m_n}f[x_0,\cdots,x_0,\cdots,x_n,\cdots,x_n]
\end{aligned}$$

7.1 牛顿型埃米特插值公式

- 例5.14 已知数值表，求符合表值的埃米特插值公式

x	y	y’	y”
0	3	4	
1	5	6	7

x	y	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
0	3				
0	3	$f[0,0]=f'(0)=4$	-2		
1	5	$f[0,1]=\frac{5-3}{1-0}=2$	4	6	-6.5
1	5	$f[1,1]=f'(1)=6$	3.5	-0.5	
1	5	$f[1,1]=f'(1)=6$			

$$P_4(x)=3+(x-0)\times4+(x-0)^2\times(-2)+(x-0)^2(x-1)\times6+(x-0)^2(x-1)^2\times(-6.5)$$

$$=3+4x-2x^2+6x^2(x-1)-6.5x^2(x-1)^2=-6.5x^4+19x^3-14.5x^2+4x+3$$

7.2 降阶型埃米特插值公式

- 这是一种把高次插值多项式逐次转化为低次插值多项式的求取方法
- 例5.15求符合表值的埃米特插值公式

x	y	y’	y”
0	2	2	-10
1	1	-1	0
2	2	6	30

$m=9-1=8$

x	0	1	2
y	2	1	2

建立插值公式: $L_{21}(x)=x^2-2x+2$

7.2 降阶型埃米特插值公式

$$L_{21}(x)=x^2-2x+2,\text{则}P_8(x)=L_{21}(x)+(x-0)(x-1)(x-2)P_5(x)$$

求导:

$$P_8'(x)=2x-2+(3x^2-6x+2)P_5(x)+(x-0)(x-1)(x-2)P_5'(x)$$

$$P_8''(x)=2+(6x-6)P_5(x)+2(3x^2-6x+2)P_5'(x)$$

$$+(x-0)(x-1)(x-2)P_5''(x)$$

利用条件 $P_8'(0)=2,P_8'(1)=-1,P_8'(2)=6$

可得: $P_5(0)=2,P_5(1)=1,P_5(2)=2$

利用条件: $P_8''(0)=-10,P_8''(1)=0,P_8''(2)=30$

可得: $P_5'(0)=0,P_5'(1)=1,P_5'(2)=4$

7.2 降阶型埃米特插值公式

x	0	1	2
$P_5(x)$	2	1	2
$P'_5(x)$	0	1	4

$$L_{22}=x^2-2x+2$$

$$P_5(x)=L_{22}(x)+(x-0)(x-1)(x-2)P_2(x)$$

$$P_5'(x)=(2x-2)+(3x^2-6x+2)P_2(x)+(x-0)(x-1)(x-2)P_2'(x)$$

$P_5'(0)=0, P_5'(1)=-1, P_5'(2)=4$代入，

可得：$\mathrm{P}_2(0)=1, \mathrm{P}_2(1)=-1, \mathrm{P}_2(2)=1$

7.2 降阶型埃米特插值公式

x	0	1	2
$P_2(x)$	1	-1	1

$$P_2(x) = L_{23}(x) = 2x^2 - 4x + 1$$

$$\text{则} P_5(x) = L_{22}(x) + (x-0)(x-1)(x-2)P_2(x)$$

$$= 2x^5 - 10x^4 + 17x^3 - 10x^2 + 2$$

$$P_8(x) = L_{21}(x) + (x-0)(x-1)(x-2)P_5(x)$$

$$= 2x^8 - 16x^7 + 51x^6 - 81x^5 + 64x^4 - 18x^3 - 5x^2 + 2x + 2$$

7.3 拉格朗日型埃米特插值

- 最常见的是要求在插值多项式与$f(x)$在节点上具有相同函数值和一阶导数值，即
  - 要求：$P(x_i) = f(x_i)$, $P'(x_i) = f'(x_i)$

$$\begin{cases} P_{2n+1}(x_i) = y_i \\ P'_{2n+1}(x_i) = y_i' \end{cases},(i = 0,1,2,\ldots,n)$$

7.3 拉格朗日型埃米特插值

- 构造类似于拉格朗日插值公式 $P(x_i) = f(x_i),\ P'(x_i) = f'(x_i)$

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n} [\alpha_i(x) y_i + \beta_i(x) y'_i]$$

$$\begin{cases} \alpha_i(x_j) = \begin{cases} 0, & j \neq i \\ 1, & j = i \end{cases} \\ \alpha'_i(x_j) = 0 \end{cases} \qquad (i, j = 0,1,\ldots,n)$$

埃尔米特插值基函数

$$\begin{cases} \beta_i(x_j) = 0 \\ \beta'_i(x_j) = \begin{cases} 0, & j \neq i \\ 1, & j = i \end{cases} \end{cases} \qquad (i, j = 0,1,\ldots,n)$$

7.3 拉格朗日型埃米特插值

$$\begin{cases} \beta_i(x_j) = 0 \\ \beta'_i(x_j) = \begin{cases} 0, & j \neq i \\ 1, & j = i \end{cases} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\beta_i(x)$以$x_j(j \neq i)$为二重零点

$(i, j = 0,1,\ldots, n)$

$$\begin{cases} \beta_i(x_i) = 0 \\ \beta'_i(x_i) = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\beta_i(x)$以x_i为一重零点

可令$\beta_i(x) = c_i(x - x_i)l_i^2(x)$

其中$l_i(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}$

7.3 拉格朗日型埃米特插值

可令$\beta_i(x)=c_i(x-x_i)l_i^2(x)$

其中$l_i(x)=\dfrac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}$

$$\beta_i'(x)=c_i[l_i^2(x)+2(x-x_i)l_i(x)l_i'(x)]$$

$$\because \beta_i'(x_i)=1 \qquad l_i(x_i)=1$$

$$1=c_i[1+2(x_i-x_i)l_i(x)l_i'(x)] \qquad \therefore c_i=1$$

$$\therefore \beta_i(x)=(x-x_i)l_i^2(x)$$

7.3 拉格朗日型埃米特插值

$$\begin{cases} \alpha'_i(x_j)=0 \\ \alpha_i(x_j)=\begin{cases}0, & j\neq i \\ 1, & j=i\end{cases} \end{cases} \quad (i,j=0,1,\ldots,n)$$

二 $\Rightarrow$ $\alpha_i(x)$以$x_j(j\neq i)$为二重零点

二 $\Rightarrow$ x_i不是$\alpha_i(x)$的零点

可令$\alpha_i(x)=(ax+b)l_i^2(x)$ $\quad l_i(x)=\dfrac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}$

$$\alpha_i'(x)=al_i^2(x)+2(ax+b)l_i(x)l_i'(x)$$

$$\begin{aligned}&\alpha_i(x_i)=1\\&\alpha_i'(x_i)=0\end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} ax_i+b=1 \\ al_i^2(x_i)+2(ax_i+b)l_i(x_i)l_i'(x_i) \\ =a+2l_i'(x_i)=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=-2l_i'(x_i) \\ b=1+2x_il_i'(x_i) \end{cases}$$

7.3 拉格朗日型埃米特插值

求$l'_i(x)$ $$l_i(x)=\frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$$

$$\ln l_i(x)=\ln\frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$$

$$=\sum_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}\ln(x-x_j)-\sum_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}\ln(x_i-x_j)$$

两边求导得 $$\frac{l_i'(x)}{l_i(x)}=\sum_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}\frac{1}{\underline{x}-x_j}$$ $$l_i'(x_i)=l_i(x_i)\sum_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}\frac{1}{x-x_j}=\sum_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}\frac{1}{x_i-x_j}$$

7.3 拉格朗日型埃米特插值

$$\alpha_i(x)=(ax+b)l_i^{\ 2}(x)$$

$$\begin{cases} a=-2l_i'(x_i) \\ b=1+2x_il_i'(x_i) \end{cases} \Rightarrow \alpha_i(x)=[1-2(x-x_i)\sum_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}\frac{1}{x_i-x_j}]l_i^{\ 2}(x)$$

$$l_i'(x_i)=\sum_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}\frac{1}{x_i-x_j}$$

$$\beta_i(x)=(x-x_i)l_i^{\ 2}(x)$$

$$P_{2n+1}(x)=\sum_{i=0}^{n}[\alpha_i(x)y_i+\beta_i(x)y'_i]$$

误差估计：

设 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 为区间 $[a,b]$ 上的互异节点，$H(x)$ 为 $f(x)$ 的过这组节点的 $2n+1$ 次的 Hermite 插值多项式。如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 $2n+2$ 次连续可导，则对任意 $x\in[a,b]$，插值余项为：

$$R(x)=f(x)-\varphi(x)=\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\omega_{n+1}^2(x)$$

7.3 拉格朗日型埃米特插值

所以，**n=1时两个节点的三次*Hermite*插值多项式为：**

$$P_3(x)=\sum_{i=0}^{1}[\alpha_i(x)y_i+\beta_i(x)y'_i]$$

$$=(1-2\frac{x-x_0}{x_0-x_1})(\frac{x-x_1}{x_0-x_1})^2 y_0+(1-2\frac{x-x_1}{x_1-x_0})(\frac{x-x_0}{x_1-x_0})^2 y_1$$

$$+(x-x_0)(\frac{x-x_1}{x_0-x_1})^2 y_0'+(x-x_1)(\frac{x-x_0}{x_1-x_0})^2 y_1'$$

$$R_3(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)^2(x-x_1)^2,\xi\in[x_0,x_1]$$

7.3 拉格朗日型埃米特插值

- 例5.16 求符合下列表值的 *Hermite*插值多项式,计算$f(2.3)$

$$p_3(x)=(1-2\frac{x-x_0}{x_0-x_1})(\frac{x-x_1}{x_0-x_1})^2 y_0+(1-2\frac{x-x_1}{x_1-x_0})(\frac{x-x_0}{x_1-x_0})^2 y_1$$

$$+(x-x_0)(\frac{x-x_1}{x_0-x_1})^2 y_0'+(x-x_1)(\frac{x-x_0}{x_1-x_0})^2 y_1'$$

x	2.2	2.4
y	0.78846	0.87547
y’	0.45455	0.41667

$$p_3(x)=(1-2\frac{x-2.2}{2.2-2.4})(\frac{x-2.4}{2.2-2.4})^2*0.78846$$

$$+(1-2\frac{x-2.4}{2.4-2.2})(\frac{x-2.2}{2.4-2.2})^2*0.87547$$

$$+(x-2.2)(\frac{x-2.4}{2.2-2.4})^2*0.45455$$

$$+(x-2.4)(\frac{x-2.2}{2.4-2.2})^2 0.41667$$

7.3 拉格朗日型埃米特插值

- 将x=2.3代入，ln2.3≈P_3(2.3)=0.83291

$$R_3(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)^2(x-x_1)^2,\xi\in[x_0,x_1]$$

$$\because (\ln x)^{(4)}=-\frac{6}{x^4}$$

$$\therefore |R_3(2.3)|\le\frac{1}{4!}\cdot\frac{6}{2.2^4}(2.3-2.2)^2(2.3-2.4)^2\approx 1.067*10^{-6}$$

§9 多元函数插值

例5. 18 已知数值表，求$f(0.5,0.03)$的近似值

y \ x (z)	0.4	0.7	1.0
0.00	2.500	1.429	1.000
0.05	2.487	1.419	0.995
0.10	2.456	1.400	0.981

(1)当y_0=0.00时，利用以下数据建立差分表。

x	z	Δz	$\Delta^2 z$
0.4	2.500		
		-1.071	
0.7	1.429		0.642
		-0.429	
1.0	1.000		

§9 多元函数插值

x	z	Δz	$\Delta^2 z$
0.4	2.500		
		-1.071	
0.7	1.429		0.642
		-0.429	
1.0	1.000		

- 利用牛顿前向插值公式计算x=0.5时f(0.5,0.00)的近似值z_0;

$$t=(0.5-0.4)/0.3=1/3$$

$$z_0=2.500+\frac{1}{3}(-1.071)+\frac{1/3\times(-2/3)}{2}\times 0.642=2.072$$

同理，计算x=0.5时f(0.5,0.05)的近似值z_1以及x=0.5时f(0.5,0.10)的近似值z_2。

§9 多元函数插值

(2)利用以上计算结果的下面数值表：

y	z	Δz	$\Delta^2 z$
0.00	2.027		
		-0.003	
0.05	2.069		-0.033
		-0.036	
0.10	2.033		

✦利用牛顿前向插值公式计算y_0=0时f(0.5,0.03)的近似值f(0.5,0.03)；

$$t=(0.03-0)/0.05=3/5$$

$$f(0.5,0.03)=2.072+\frac{3}{5}(-0.003)+\frac{3/5\times(-2/5)}{2}\times(-0.033)=2.074$$

§9 多元函数插值

y \ z \ x	0.4	0.5	0.7	1.0
0.00	2.500	2.027	1.429	1.000
0.03		2.074		
0.05	2.487	2.069	1.419	0.995
0.10	2.456	2.033	1.400	0.981