第四章 解线性方程组的迭代法

§1　向量范数,矩阵范数,谱半径及有关性质

§2　简单迭代法

§3　赛德尔迭代法

§4　松弛迭代法

§1　向量范数，矩阵范数，谱半径及有关性质

1. 范数的定义

对任一向量$X\in R^n$，按照一定规则确定一个实数与它对应，该实数记为$\|X\|$，若$\|X\|$满足下面三个性质：

- $\|X\|\geq 0$；$\|X\|=0$当且仅当$X=0$；(正定性)
- 对任意实数α，$\|\alpha X\|=|\alpha|\,\|X\|$；(齐次性)
- 对任意向量$Y\in R^n$，$\|X+Y\|\leq\|X\|+\|Y\|$

则称该实数$\|X\|$为向量X的<u>范数</u>　(半可加性)

§1　向量范数，矩阵范数，谱半径及有关性质

2. R^n中常用的几种向量范数

$$\|X\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

1-范数

$$\|X\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

2-范数

$$\|X\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\} = \max_{1\le i\le n}\{|x_i|\}$$

∞ -范数

其中$x_1, x_2, \dots, x_n$分别是X的n个分量

上述范数都是p范数的特例$\|X\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

§1 向量范数，矩阵范数，谱半径及有关性质

3. 关于范数的几点说明

- 当不需要指明使用哪一种向量范数时，就用记号$\|\cdot\|$泛指任何一种向量范数。
- 向量的范数可以用来衡量向量的大小和表示向量的误差。
- 设α为$AX=B$的精确解，X为其近似解，则其绝对误差可表示成$\|X-\alpha\|$，其相对误差可表示成$\|X-\alpha\|/\|\alpha\|$或$\|X-\alpha\|/\|X\|$

§1　向量范数，矩阵范数，谱半径及有关性质

4. 矩阵范数的引入

设A,B为n阶方阵，若对应的非负实数||A||满足：

- ||A||≥0; ||A||=0，当且仅当A=0时；
- 对任意实数α， ||αA||=|α| ||A||;
- ||A+B|| ≤ ||A||+||B||
- ||AB|| ≤ ||A|| ||B||(相容性)

则称||A||为矩阵A的范数。

§1 向量范数, 矩阵范数, 谱半径及有关性质

5. 向量范数和矩阵范数的关系

❖矩阵范数和向量范数相容

设R^n中规定的向量范数为$\|X\|_\alpha$,在R^{n*n}中规定的矩阵范数为$\|A\|_\beta$，若以下不等式成立时，

$$\|AX\|_\alpha \le \|A\|_\beta \|X\|_\alpha$$

称矩阵范数$\|A\|_\beta$和向量范数$\|X\|_\alpha$相容

§1　向量范数, 矩阵范数, 谱半径及有关性质

- 定义一种矩阵范数时, 应当使它能与某种向量范数相容。
- 在同一个问题中需要同时使用矩阵范数和向量范数时，这两种范数应当是相容的。

定理4.1　设在R^n中给定了一种向量范数$\|X\|$, 对任一n阶方阵A, 令

$$\|A\| = \max_{\|X\|=1} \|AX\|$$

则由上式所定义的$\|.\|$是一种矩阵范数，并且它与所给定的向量范数$\|X\|$相容

§1　向量范数, 矩阵范数, 谱半径及有关性质

矩阵的算子范数（向量范数导出的矩阵范数）

❖算子范数的必要条件:

任何一个算子范数，当A为单位矩阵I时，必有$||I||=1$

§1 向量范数，矩阵范数，谱半径及有关性质

❖向量范数1-范数,2-范数及∞-范数,从属于它们的矩阵范数分别为:

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$$

列范数：A的列向量中1−范数的最大值

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A'A)}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$$

行范数：A的行向量中1−范数的最大值

$\lambda_{\max}$表示$A'A$的最大特征值

§1　向量范数，矩阵范数，谱半径及有关性质

例子：设有方阵A，求其1-范数,2-范数及∞-范数。

其中

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_1=\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|=\max(2,1,1)=2$$

$$\|A\|_\infty=\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|=\max(2,1,1)=2$$

§1　向量范数，矩阵范数，谱半径及有关性质

$\because \lambda X = BX \Rightarrow (\lambda I - B)X = 0$

$\because X \neq 0, \therefore (\lambda I - B) = 0 \Rightarrow \det(\lambda I - B) = 0$

$$A'A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A'A)} = \sqrt{4} = 2$$

§1 向量范数，矩阵范数，谱半径及有关性质

❖F-范数(Frobenius OR Euclid范数)

$$\| A \|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2}$$

F-范数不是算子范数

它与向量范数中的2-范数相容:

$$\|AX\|_F \le \|A\|_F \|X\|_2$$

矩阵的从属范数必与给定的向量范数相容，但是矩阵范数与向量范数相容，却未必有从属关系。

§1 向量范数，矩阵范数，谱半径及有关性质

6. 向量收敛的定义

对于$\mathbf{R}^n$中的向量序列$\{\mathbf{X}^{(k)}\}$，如果

$$\lim_{k\to\infty}\|X^{(K)}-X\|=0$$

则称向量序列$\{\mathbf{X}^{(k)}\}$收敛于$\mathbf{R}^n$中的向量$\mathbf{X}$。

上式通常表示成： $\lim\limits_{k\to\infty}X^{(K)}=X$

§1　向量范数，矩阵范数，谱半径及有关性质

7. 向量收敛的充分必要条件

定理4.2 R^n中的向量序列$\{X^{(k)}\}$收敛于R^n中的向量X的必要充分条件是

$$\lim_{k\to\infty} x_j^{(K)} = x_j \quad (j = 1,2,\ldots,n)$$

其中$x_j^{(k)}$和x_j分别表示$X^{(k)}$和X中的第j个分量

向量序列的收敛可以归结为对应元素序列的收敛。

§1　向量范数, 矩阵范数, 谱半径及有关性质

8. 方阵收敛的定义

对于n阶方阵序列{A$^{(k)}$},如果

$$\lim_{k\to\infty}\|A^{(K)}-A\|=0$$

则称方阵序列{A$^{(k)}$}收敛于n阶方阵A。

上式通常表示成:　$\lim\limits_{k\to\infty}A^{(K)}=A$

§1　向量范数, 矩阵范数, 谱半径及有关性质

9. 方阵收敛的充分必要条件(1)

定理4.3 n阶方阵序列$\{A^{(k)}\}$收敛于n阶方阵A的充分必要条件是：

$$\lim_{k\to\infty} a_{ij}^{(K)} = a_{ij} (i, j = 1,2,\ldots,n)$$

矩阵序列的收敛可以归结为对应元素序列的收敛。

§1　向量范数, 矩阵范数, 谱半径及有关性质

10. 谱半径

设n阶方阵序列A的特征值为λ_i $(i=1,2,\ldots,n)$,则则称 $\rho(A)=\max\limits_{1\le i\le n}|\lambda_i|$为矩阵A的谱半径,即A的绝对值最大的特征值。

❖矩阵范数和谱半径的关系:

$$\rho(A)\le\|A\|$$

矩阵的谱半径小于等于矩阵的任何一种范数.

§1 向量范数, 矩阵范数, 谱半径及有关性质

❖矩阵范数和谱半径的关系:

$$\rho(A) \leq \| A \|$$

矩阵的谱半径小于等于矩阵的任何一种范数.

证明:

矩阵A的任一特征值λ_i与其对应的特征

向量X_i有关系式 $AX_i = \lambda_i X_i$

§1 向量范数, 矩阵范数, 谱半径及有关性质

对上式两端取范数，再利用相容性质

$$\|AX\|_\alpha \le \|A\|_\beta \|X\|_\alpha$$

得 $|\lambda_i| \|X_i\| = \|AX_i\| \le \|A\| \|X_i\|$

由于$X_i \neq 0$, $\|X_i\| \neq 0$,所以$|\lambda_i| \le \|A\|$，故

$$\rho(A) \le \|A\|$$

结论:

矩阵**A**的任何一种范数都大于它的谱半径,
即矩阵的范数是矩阵特征值的上界。

§1　向量范数,矩阵范数,谱半径及有关性质

11. 谱范数

定理4.4 如果A∈$R^{n\times n}$，则

1) $\| A \|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A'A)} = \sqrt{\rho(A'A)}$

2）若A为对称矩阵，则 $\| A \|_2 = \rho(A)$

由于2-范数具有上面的关系式，所以称$\|A\|_2$(矩阵的2范数)为谱范数。

§1 向量范数, 矩阵范数, 谱半径及有关性质

11. 谱范数

证明:

$$AX_i = \lambda_i X_i \quad AAX_i = A\lambda_i X_i$$

$$A^2 X_i = \lambda_i AX_i = \lambda_i^2 X_i$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A'A)} = \sqrt{\lambda_{\max}(A^2)}$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max_{1\le i\le n} \lambda_i^2} = \max_{1\le i\le n} |\lambda_i| = \rho(A)$$

§1 向量范数，矩阵范数，谱半径及有关性质

12. 方阵收敛的充分必要条件

定理4.5 设A是任意n阶方阵，由A的各次幂所组成的矩阵序列 $I, A, A^2, \ldots, A^k, \ldots$ 收敛于零，即

$$\lim_{k \to \infty} A^k = 0$$

的充分必要条件是

$$\rho(A) < 1$$

即，A的绝对值最大的特征值小于1。

§2 简单迭代法

2.1.1 迭代格式1

将$AX=B$改写为$0=-AX+B$，两边加上X后，

得　$X=(I-A)X+B=CX+B$

或写成　$$x_i=\sum_{j=1}^{n}C_{ij}x_j+b_i(i=1,2,\ldots,n)$$

其中$C_{ij}=-a_{ij}(i\neq j)$, $C_{ii}=1-a_{ii}(i=j)$

相应的迭代公式为: $X^{(k+1)}=CX^{(k)}+B$

或写成　$$x_i^{(k+1)}=\sum_{j=1}^{n}C_{ij}x_j^{(k)}+b_i(i=1,2,\ldots,n)$$

§ 2.1.1 迭代格式1

式中C=I-A称为迭代矩阵，它等于

$$C=\begin{bmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 1-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 1-a_{nn} \end{bmatrix}$$

§ 2.1.2 迭代格式2

- 对于方程$AX=B$,若$a_{ii}\neq 0(i=1,2,\ldots,n)$,可按照方程的顺序依次地解出$x_1, x_2,\ldots,x_n$得

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1j}x_j+\cdots a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2j}x_j+\cdots a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{ii}x_i+\cdots a_{in}x_n=b_i \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nj}x_j+\cdots a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_{ii}x_i=b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j$$

§ 2.1.2 迭代格式2

$$a_{ii}x_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j$$

$$x_i = \sum_{j=1}^{i-1}(-\frac{a_{ij}}{a_{ii}})x_j + \sum_{j=i+1}^{n}(-\frac{a_{ij}}{a_{ii}})x_j + \frac{b_i}{a_{ii}}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} g_{ij}x_j + f_i (i = 1, 2, \ldots, n)$$

其中$g_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}(i \neq j), g_{ii} = 0(i = j), f_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$

§ 2.1.2 迭代格式2

$$G=\begin{bmatrix} 0 & g_{12} & g_{13} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & 0 & g_{23} & \cdots & g_{2n} \\ g_{31} & g_{32} & 0 & \cdots & g_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & g_{n2} & g_{n3} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \qquad F=\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

则上式可以用矩阵表示为**X=GX+F**

§ 2.1.2 迭代格式2

$$G=\begin{bmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & \cdots & -a_{1n}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & \cdots & -a_{2n}/a_{22} \\ & \cdots & \cdots & \\ -a_{n1}/a_{nn} & -a_{n2}/a_{nn} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

迭代矩阵的特点：

对角线上的元素全部为0；

其它元素为原系数矩阵的元素除以所在行对角线上的元素，然后在前面加负号。

§ 2.1.2 迭代格式2

$$D=\begin{bmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$D^{-1}=\begin{bmatrix} 1/a_{11} & & & 0 \\ & 1/a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1/a_{nn} \end{bmatrix}$$

§2.1.2 迭代格式2

$$D^{-1}A=\begin{bmatrix}1/a_{11} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1/a_{22} & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 1/a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & a_{12}/a_{11} & \cdots & a_{1n}/a_{11}\\ a_{21}/a_{22} & 1 & \cdots & a_{2n}/a_{22}\\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1}/a_{nn} & a_{n2}/a_{nn} & \cdots & 1\end{bmatrix}$$

§2.1.2 迭代格式2

$$D^{-1}A=\begin{bmatrix}1 & a_{12}/a_{11} & \cdots & a_{1n}/a_{11} \\ a_{21}/a_{22} & 1 & \cdots & a_{2n}/a_{22} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1}/a_{nn} & a_{n2}/a_{nn} & \cdots & 1\end{bmatrix}$$

$$G=\begin{bmatrix}0 & -a_{12}/a_{11} & \cdots & -a_{1n}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & \cdots & -a_{2n}/a_{22} \\ & \cdots & \cdots & \\ -a_{n1}/a_{nn} & -a_{n2}/a_{nn} & \cdots & 0\end{bmatrix}$$

则$I-D^{-1}A=G$

§ 2.1.2 迭代格式2

- 同理 $F = D^{-1}B$
- 相应的迭代公式为$X^{(k+1)} = GX^{(k)} + F$

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{n} g_{ij} x_j^{(k)} + f_i \quad (i = 1,2,\dots,n)$$

这种迭代法称为雅克比迭代法(简单迭代法)

§2.1.2 迭代格式2

计算步骤：

- 任取一组初值$X^{(0)}=(x_1^{(0)}, x_2^{(0)},\ldots, x_n^{(0)})$作为$\alpha=(\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_n)$的零次近似值，按迭代公式$X^{(k+1)}=GX^{(k)}+F$进行迭代计算；

- 如果迭代序列$X^{(k+1)}$有极限存在，则此极限为线性方程组的根。

称这种解法为简单迭代法。

§2.2 简单迭代法的收敛条件

❖为叙述方便，把**AX=B**改写后的变形等价方程组表示为**X=MX+N**，或

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ij} x_j + n_i = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)(i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \ldots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \ldots & m_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ m_{n1} & m_{n2} & \ldots & m_{nn} \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \ldots \\ n_n \end{bmatrix}$$

§2.2 简单迭代法的收敛条件

定理4.6 对任何初始向量和$X^{(0)}$和常数项N，

由迭代公式：$X^{(k+1)}=MX^{(k)}+N \quad (k=0,1,2,\ldots)$

向量序列$\{X^{(k)}\}$收敛的**充分必要条件**是：

$$\rho(M)<1$$

证明：(1) 必要性（收敛=〉 $\rho(M)<1$ ）

设序列$\{X^{(k)}\}$收敛于α，则有$\alpha=M\alpha+N$

第k次迭代的近似值和精确解之差为

$$X^{(k+1)}-\alpha=MX^{(k)}-M\alpha=M(X^{(k)}-\alpha)$$

§2.2 简单迭代法的收敛条件

反复使用上式得

$$X^{(k+1)}-\alpha=M(X^{(k)}-\alpha)=M^2(X^{(k-1)}-\alpha)$$

$$=\ldots= M^{k+1}(X^{(0)}-\alpha)$$

对于任意初始向量$(X^{(0)}-\alpha)$，为使

$$\lim_{k\to\infty}(X^{(K+1)}-\alpha)=0,\text{必须}\lim_{k\to\infty}M^{K+1}=0$$

由定理4.5即知$\rho(M)<1$。

§2.2 简单迭代法的收敛条件

(2)充分性($\rho(M)<1$ => 收敛) $|\lambda I-M|=0$

若ρ(M)<1满足,则特征值|λ|<1, |I-M|≠0成立，从而方程组(I-M)X=N有唯一解,设为α,则 $X^{(k+1)}-\alpha=MX^{(k)}-M\alpha=M(X^{(k)}-\alpha)$

$$X^{(k+1)}-\alpha=M(X^{(k)}-\alpha)=M^2(X^{(k-1)}-\alpha)$$

$$=\ldots=M^{k+1}(X^{(0)}-\alpha)$$ 仍然成立

$\because \rho(M)<1 \quad \therefore \lim\limits_{k\to\infty} M^k=0$

(定理4.5)

$$\lim_{k\to\infty}(X^{(k+1)}-\alpha)=0$$

$$\lim_{k\to\infty}X^{(k+1)}=\alpha$$

§2.2 简单迭代法的收敛条件

即迭代过程收敛。（证毕）

从上述定理得出：

- 迭代的收敛性只与迭代矩阵的谱半径有关
- 迭代矩阵是由A演变来的，因此迭代是否收敛是与系数矩阵A以及演变的方式有关，与常数项和初始向量的选择无关。

§2.2 简单迭代法的收敛条件

定理4.7：设有迭代公式$X^{(k+1)}=MX^{(k)}+F$,若$\|M\|<1$,则对任意初始值$X^{(0)}$，与右端向量F,迭代方程产生的迭代序列为$\{X^{(k)}\}$收敛于方程$X=MX+F$的唯一解X^*,并且有误差估计式：

$$\| X^{(k)} - x^{*} \| \le \frac{\|M\|^{k}}{1-\|M\|} \| X^{(1)} - X^{(0)} \|$$

§2.2 简单迭代法的收敛条件

推导误差估计式

$$X^{(k+n)}-X^{(k)}=(X^{(k+n)}-X^{(k+n-1)})+(X^{(k+n-1)}-X^{(k+n-2)})+\cdots+(X^{(k+2)}-X^{(k+1)})+(X^{(k+1)}-X^{(k)})$$

两边取范数得:

$$\|X^{(k+n)}-X^{(k)}\|=\|(X^{(k+n)}-X^{(k+n-1)})+(X^{(k+n-1)}-X^{(k+n-2)})+\cdots+(X^{(k+2)}-X^{(k+1)})+(X^{(k+1)}-X^{(k)})\|$$

$$\leq\|X^{(k+n)}-X^{(k+n-1)}\|+\|X^{(k+n-1)}-X^{(k+n-2)}\|+\cdots+\|X^{(k+2)}-X^{(k+1)}\|+\|X^{(k+1)}-X^{(k)}\|$$

§2.2 简单迭代法的收敛条件

$$\le \|X^{(k+n)} - X^{(k+n-1)}\| + \|X^{(k+n-1)} - X^{(k+n-2)}\|$$

$$+ \cdots + \|X^{(k+2)} - X^{(k+1)}\| + \|X^{(k+1)} - X^{(k)}\|$$

$$\le \|\mathbf{M}\|^{n-1} \|X^{(k+1)} - X^{(k)}\|$$

$$+ \|\mathbf{M}\|^{n-2} \|X^{(k+1)} - X^{(k)}\| + \cdots$$

$$+ \|\mathbf{M}\| \|X^{(k+1)} - X^{(k)}\| + \|\mathbf{M}\|^{0} \|X^{(k+1)} - X^{(k)}\|$$

$$= \frac{1-\|M\|^{n}}{1-\|M\|} \left\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\right\|$$

§2.2 简单迭代法的收敛条件

$$=\frac{1-\|M\|^n}{1-\|M\|}\left\|X^{(k+1)}-X^{(k)}\right\|$$

$$\le\frac{1-\|M\|^n}{1-\|M\|}\|M\|^k\left\|X^{(1)}-X^{(0)}\right\|$$

令$n\to\infty$

$$\left\|x^*-X^{(k)}\right\|\le\frac{\|M\|^k}{1-\|M\|}\left\|X^{(1)}-X^{(0)}\right\|$$

§2.2 简单迭代法的收敛条件

2.2.2 简单迭代法的三个收敛充分条件

充分条件1：若$\mu = \| M \|_\infty < 1$则对任意初值,简单迭代法收敛,且

$$\| X^{(k)} - \alpha \|_\infty \le \frac{\mu^k}{1-\mu} \| X^{(1)} - X^{(0)} \|_\infty$$

充分条件2：若 $\upsilon = \| M \|_1 < 1$则对任意初值,简单迭代法收敛,且

$$\| X^{(k)} - \alpha \|_1 \le \frac{\upsilon^k}{1-\upsilon} \| X^{(1)} - X^{(0)} \|_1$$

§2.2 简单迭代法的收敛条件

充分条件3：若 $p = \| M \|_F < 1$,则对任意初值,简单迭代法收敛,且

$$\| X^{(k)} - \alpha \|_2 \leq \frac{p^k}{1-p} \| X^{(1)} - X^{(0)} \|_2$$

§2.2 简单迭代法的收敛条件

- 在线性方程组的情况下，由式

$$\left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right| = |m_{ij}| \quad (i, j = 1,2,\ldots,n)$$

知m_{ij}在任意初值下都为常数,因此上述三个充分条件都属大范围收敛充分条件(收敛性与初值的选取无关)。

§2.2 简单迭代法的收敛条件

定理4.8 若$\|M\|<1$，则迭代序列$\{X^{(k)}\}$的第k次迭代的近似值$X^{(k)}$和精确解α的误差有估计式

$$\|X^{(k)}-\alpha\| \le \frac{\|M\|}{1-\|M\|}\|X^{(k)}-X^{(k-1)}\|$$

- 实际计算时，若允许误差是ε，只需要相邻两次迭代向量的差满足关系式

$$\|X^{(k)}-X^{(k-1)}\| \leqslant \varepsilon_1$$

迭代即可停止,且

$$\varepsilon_1 \leqslant \frac{1-\|M\|}{\|M\|}\varepsilon$$

§2.2 简单迭代法的收敛条件

2.2.3 可约矩阵

若矩阵A不能通过行的次序的调换和相应列的次序的调换成为 $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$ 格式

(其中A_{11},A_{22}为方阵),则称A为不可约矩阵;否则称为可约矩阵.

[注]: 相应的含义为，将矩阵的第i行第j行互换后，再将第*i*列第*j*列互换，即线性代数中仅限于互换方式的合同变换。

A为可约矩阵时，则原来的线性方程组可以分割为阶数较低的两个线性方程组。

§2.2 简单迭代法的收敛条件

2.2.4 对角占优

若矩阵**A**的对角线元素满足

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad (i=1,\ldots,n)$$

且至少有一个*i*值，使上式中有严格不等号成立，则称**A**为弱严格对角占优矩阵；若上述**n**个不等式都严格成立，则称**A为严格对角占优矩阵**。

引理4.1 若**A**不可约，且弱严格对角占优，则**A**为非奇异矩阵(|**A**|≠**0**)，且$a_{ii}\neq 0$ $(i=1,2,\ldots,n)$

§2.2 简单迭代法的收敛条件

2.2.4 对角占优

定理4.9 若系数矩阵A不可约且弱严格对角占优，则雅可比迭代法必定收敛。

证明：反证法。

设迭代矩阵为M,要证明雅克比迭代法收敛，必有$\rho(M)<1$.

设矩阵有某个特征值λ，并且$|\lambda|\geq 1$,因λ是M的特征值，必满足特征值方程：$|\lambda I-M|=0$

由系数矩阵A不可约且弱严格对角占优可知：$a_{ii}\neq 0$（引理4.1）,即有$|D|\neq 0$,则D^{-1}则存在。

§2.2 简单迭代法的收敛条件

$$\lambda I - M = \lambda I - (I - D^{-1}A)$$

$$= \lambda I - I + D^{-1}A$$

$$= D^{-1}(\lambda D + A - D)$$

两边取行列式得：

$$|\lambda I - M| = |D^{-1}(\lambda D + A - D)|$$

$$= |D^{-1}||\lambda D + A - D| = 0$$

$$\because a_{ii} \neq 0 \Rightarrow |D^{-1}| \neq 0$$

$$|\lambda D + A - D| = |\overline{M}| = 0$$

§2.2 简单迭代法的收敛条件

$$\overline{\mathrm{M}}=\lambda D+A-D=\begin{bmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\left|\overline{\mathrm{M}}\right|=\left|\lambda D+A-D\right|=0$$

观察矩阵$\overline{\mathrm{M}}$，A可知，二者零元素的位置相同，

所以由A的不可约性可以知道$\overline{\mathrm{M}}$的不可约性。

$$\text{又}\because |\lambda|\geq 1\Rightarrow |\lambda a_{ii}|\geq |a_{ii}|\geq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|\,(i=1,\ldots,n)$$

所以$\overline{\mathrm{M}}$弱严格对角占优。$\Rightarrow \left|\overline{\mathrm{M}}\right|\neq 0$

§2.2 简单迭代法的收敛条件

结论:

(1) 系数矩阵不可约且对角占优:雅克比方法;

(2) 对不符合定理4.9条件的线性方程组：可以适当调整方程的次序，还可以兼用组合方程的方法，化成不可约、对角占优的等价方程组,然后求解.

§2.2 简单迭代法的收敛条件

例4.1 用雅可比迭代法解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 = -3 \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

解：迭代矩阵为

$$G = I - D^{-1}A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

§2.2 简单迭代法的收敛条件

解：判断收敛性

$$|\lambda I - G| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -2 & 2 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -2 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda(\lambda^2 - 2) + 2(-\lambda - 2) + 2(2 + 2\lambda) = 0$$

$$\lambda^3 - 2\lambda - 2\lambda - 4 + 4 + 4\lambda = 0$$

$$\lambda^3 = 0 \qquad \rho(G) = 0 < 1$$

所以，雅克比法收敛

§2.2 简单迭代法的收敛条件

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ -1 & 1 & -1\\ -2 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

解：迭代公式

$$X^{(k+1)}=GX^{(k)}+F$$

$$G=I-D^{-1}A=\begin{bmatrix}0 & 2 & -2\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

$$F=D^{-1}B=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -1\\ -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -1\\ -3\end{bmatrix}$$

取$X^{(0)}=[0,0,0]^T$

§2.2 简单迭代法的收敛条件

解：迭代公式

$$A=\begin{bmatrix}1&-2&2\\-1&1&-1\\-2&-2&1\end{bmatrix}$$

$$X^{(1)}=GX^{(0)}+F$$

$$X^{(1)}=\begin{bmatrix}0&2&-2\\1&0&1\\2&2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\-1\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\\-3\end{bmatrix}$$

$$X^{(2)}=\begin{bmatrix}0&2&-2\\1&0&1\\2&2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\-3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\-1\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\-2\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\-1\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-3\\-3\end{bmatrix}$$

$$X^{(2)}=\begin{bmatrix}0&2&-2\\1&0&1\\2&2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\-3\\-3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\-1\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\2\\4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\-1\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

§2.2 简单迭代法的收敛条件

解：迭代公式

$$X^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

则方程的解为:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

§3.1 赛德尔迭代法的解法

1.赛德尔迭代法计算过程

- 首先用$X^{(k)}$代入迭代公式的第一个方程中,计算出$x_1^{(k+1)}$
- 用$(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k)},\dots, x_n^{(k)})$代入第二个方程中,计算出$x_2^{(k+1)}$
- 用$(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)},\dots, x_n^{(k)})$代入第三个方程中,计算出$x_3^{(k+1)}$
- 如此下去,直到全部分量都用$X^{(k+1)}$取代$X^{(k)}$为止。

§3.1 赛德尔迭代法的解法

上述迭代方式可以表示为:

$i>j, x^{(k+1)}$

$i \le j, x^{(k)}$

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)} = m_{11}x_1^{(k)} + m_{12}x_2^{(k)} + \cdots + m_{1n}x_n^{(k)} + n_1 \\
x_2^{(k+1)} = m_{21}x_1^{(k+1)} + m_{22}x_2^{(k)} + \cdots + m_{2n}x_n^{(k)} + n_2 \\
x_3^{(k+1)} = m_{31}x_1^{(k+1)} + m_{32}x_2^{(k+1)} + m_{33}x_2^{(k)} + \cdots + m_{3n}x_n^{(k)} + n_3 \\
\cdots\cdots \\
x_n^{(k+1)} = m_{n1}x_1^{(k+1)} + m_{n2}x_2^{(k+1)} + \cdots + m_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)} + m_{nn}x_n^{(k)} + n_n
\end{cases}
$$

或$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} m_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^{n} m_{ij} x_j^{(k)} + n_i$

$$(i = 1, 2, \ldots, n, k = 0, 1, 2, \ldots)$$

§ 3.1 赛德尔迭代法的解法

- 用矩阵记为$X^{(k+1)}=L\ X^{(k+1)}+U\ X^{(k)}+N$

$$X^{(k+1)}=\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \cdots \\ x_n^{(k+1)} \end{bmatrix},\qquad X^{(k)}=\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \cdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix},$$

$$L=\begin{bmatrix} 0 & & & & 0 \\ m_{21} & 0 & & & \\ m_{31} & m_{32} & 0 & & \\ \cdots & & & \cdots & \\ m_{n1} & m_{n1} & \cdots & m_{nn-1} & 0 \end{bmatrix},\quad U=\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ & & \cdots & \cdots \\ 0 & & & m_{nn} \end{bmatrix}$$

§3.1 赛德尔迭代法的解法

- 高斯-赛德尔迭代法：

采用迭代格式2变形AX=B，其对应的赛德尔迭代公式为

$$x_i^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{ii}}\left[\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} - b_i\right]$$

$$(i = 1,2,\ldots,n, k = 0,1,2,\ldots)$$

§3.1 赛德尔迭代法的解法

$$L=\begin{bmatrix} 0 & & & & 0 \\ a_{21} & 0 & & & \\ a_{31} & a_{32} & 0 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & 0 \end{bmatrix},\qquad A=L+D+U$$

$$D=\begin{bmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \cdots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix},U=\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & 0 & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \cdots \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

§3.1 赛德尔迭代法的解法

- 高斯-赛德尔迭代法：

$$x_i^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{ii}}\left[\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} - b_i\right]$$

$$(i = 1,2,\dots,n, k = 0,1,2,\dots)$$

其矩阵形式为

$$X^{(k+1)} = -D^{-1}(LX^{(k+1)} + UX^{(k)} - B)$$

$$= -D^{-1}LX^{(k+1)} - D^{-1}UX^{(k)} + D^{-1}B,$$

其中$A = L + D + U$

§ 3.2 赛德尔迭代法的收敛条件 (充要条件)

塞德尔迭代格式： $X^{(k+1)}=M_1 X^{(k+1)} +M_2X^{(k)} +N$

把上式改写为

$$(I- M_1)X^{(k+1)}=M_2X^{(k)} +N$$

$$X^{(k+1)}= (I-M_1)^{-1} M_2X^{(k)} + (I- M_1)^{-1} N$$

结论:

★赛德尔迭代法相当于迭代矩阵为$(I-M_1)^{-1}$ M_2 的简单迭代法。

★由定理4.6知， 赛德尔迭代法对于任意初值X(0)和常数项N都收敛的必要充分条件是迭代矩阵 $(I-M_1)^{-1}$ M_2 的谱半径小于1

§3.2 赛德尔迭代法的收敛条件（充分条件）

充分条件1： 若$\mu=\|M\|_\infty<1$则对任意初值,塞德尔迭代法收敛,且

$$\|X^{(k)}-\alpha\|_\infty\le\frac{(\mu^*)^k}{1-\mu^*}\|X^{(1)}-X^{(0)}\|_\infty$$

其中，$\mu^*=\max\limits_i\frac{\mu_i}{1-r_i},r_i=\sum_{j=1}^{i-1}|m_{ij}|,\mu_i=\sum_{j=i}^{n}|m_{ij}|$

§3.2 赛德尔迭代法的收敛条件（充分条件）

$$r_1 = 0, \left|m_{11}\right| + \left|m_{12}\right| + \left|m_{13}\right| + \cdots + \left|m_{1n}\right| = \mu_1$$

$$r_2 = \left|m_{21}\right| \quad \left|m_{22}\right| + \left|m_{23}\right| + \cdots + \left|m_{2n}\right| = \mu_2$$

$$r_3 = \left|m_{31}\right| + \left|m_{32}\right| \quad \left|m_{33}\right| + \cdots + \left|m_{3n}\right| = \mu_3$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$r_n = \left|m_{n1}\right| + \left|m_{n2}\right| + \left|m_{n3}\right| + \cdots \quad \left|m_{nn}\right| = \mu_n$$

§ 3.2 赛德尔迭代法的收敛条件（充分条件）

充分条件2：若 $\upsilon = \| M \|_1 < 1$则对任意初值,简单迭代法收敛,且

$$\| X^{(k)} - \alpha \|_1 \le \frac{\rho^k}{(1-s)(1-\rho)} \| X^{(1)} - X^{(0)} \|_1$$

其中，$t_j = \sum_{i=1}^{j} |m_{ij}|, s_j = \sum_{i=j+1}^{n} |m_{ij}|,$

$$s = \max_j s_j, \rho^* = \max_j \frac{t_j}{1-s_j}$$

§ 3.2 赛德尔迭代法的收敛条件（充分条件）

$$
\begin{array}{ccccc}
t_1 & t_2 & t_3 & \cdots & t_n \\
|m_{11}| & |m_{12}| & |m_{13}| & \vdots & |m_{1n}| \\
 & + & + & \vdots & + \\
|m_{21}| & |m_{22}| & |m_{23}| & \vdots & |m_{2n}| \\
+ & & + & \vdots & + \\
|m_{31}| & |m_{32}| & |m_{33}| & \vdots & |m_{3n}| \\
+ & + & & & + \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & + \\
|m_{n1}| & |m_{n2}| & |m_{n3}| & \vdots & |m_{nn}|
\end{array}
$$

$$\max(s_1, \quad s_2, \quad s_3, \cdots, s_n = 0) = s$$

§3.2 赛德尔迭代法的收敛条件（充分条件）

充分条件3：若$p=\| M \|_F < 1$则对任意初值,塞德尔迭代法收敛,且

$$\| X^{(k)} - \alpha \|_2^2 \leq \frac{\rho^k}{(1-s)(1-\rho)} \| X^{(1)} - X^{(0)} \|_2^2$$

其中，$\theta_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ij}^{\ 2}, t_j = \sum_{i=1}^{j} \theta_i, s_j = \sum_{i=j+1}^{n} \theta_i,$

$$s = \max_j s_j, \rho^* = \max_j \frac{t_j}{1-s_j}$$

§3.2 赛德尔迭代法的收敛条件（充分条件）

$$
\begin{array}{lccccc}
 & t_1 & t_2 & t_3 & \cdots & t_n \\
\theta_1 = m_{11}^2 + m_{12}^2 + \cdots + m_{1n}^2 & \theta_1 & \theta_1 & \theta_1 & \vdots & \theta_1 \\
 & & + & + & \vdots & + \\
\theta_2 = m_{21}^2 + m_{22}^2 + \cdots + m_{2n}^2 & \theta_2 & \theta_2 & \theta_2 & \vdots & \theta_2 \\
 & + & & + & \vdots & + \\
\theta_3 = m_{31}^2 + m_{32}^2 + \cdots + m_{3n}^2 & \theta_3 & \theta_3 & \theta_3 & \vdots & \theta_3 \\
 & + & + & & \vdots & + \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & + & + & + & \vdots & + \\
\theta_n = m_{n1}^2 + m_{n2}^2 + \cdots + m_{nn}^2 & \theta_\mathrm{n} & \theta_\mathrm{n} & \theta_\mathrm{n} & \vdots & \theta_n
\end{array}
$$

$$\max(s_1,\ s_2,\ s_3, \cdots, s_n = 0) = s$$

§3.2 赛德尔迭代法的收敛条件（充分条件）

2. 高斯–赛德尔迭代法的收敛性

定理4. 10 若A为不可约,对角占优矩阵,则

高斯-赛德尔迭代法必定收敛.

证明：要证明高斯-赛德尔迭代法收敛，根据定理4.6，只要证明$\rho(G)<1$即可，G是高斯-赛德尔迭代法的迭代矩阵。

因为高斯-赛德尔迭代法的迭代公式为$X^{(k+1)}=-D^{-1}LX^{(k+1)}-D^{-1}UX^{(k)}+D^{-1}B$

将它化成等价的简单迭代法形式：

§3.2 赛德尔迭代法的收敛条件

$X^{(k+1)}=-D^{-1}LX^{(k+1)}-D^{-1}UX^{(k)}+D^{-1}B$

$(I+D^{-1}L)X^{(k+1)}=-D^{-1}UX^{(k)}+D^{-1}B$

两边同乘以$(I+D^{-1}L)^{-1}$

$X^{(k+1)}=-(I+D^{-1}L)^{-1}D^{-1}UX^{(k)}+(I+D^{-1}L)^{-1}D^{-1}B$

$=-[D(I+D^{-1}L)]^{-1}UX^{(k)}+[D(I+D^{-1}L)]^{-1}B$

$=-(D+L)^{-1}UX^{(k)}+(D+L)^{-1}B$

$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

$AA^{-1}=I$

所以高斯-赛德尔迭代法的迭代矩阵为:

$$G=-(D+L)^{-1}U$$

下面用反证法推证定理。假设G的特征值有$|\lambda|\geq 1$，则它必满足以下特征方程:

$$|\lambda I-G|=0$$

§3.2 赛德尔迭代法的收敛条件

代入迭代矩阵公式得

$$|\lambda I+(D+L)^{-1}U|=0$$

$$|(D+L)^{-1}[\lambda(D+L)+U]|=0$$

$$|(D+L)^{-1}|\,|\lambda(D+L)+U|=0$$

由于A不可约且对角占优,所以

$a_{ii}\neq 0(i=1,2,\ldots,n)$,因此有$|(D+L)^{-1}|\neq 0$,所以

$|G'|=|\lambda(D+L)+U|=0$

§3.2 赛德尔迭代法的收敛条件

则 $$G' = \lambda(D+L)+U = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \dots & \lambda a_{nn} \end{bmatrix}$$

矩阵G'中的零元素的位置与矩阵A中零元素的位置全同，由A的不可约性可以推得G'的不可约性；由A的对角占优得:

§ 3.2 赛德尔迭代法的收敛条件

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|$$

两边同乘|λ|得，（因为|λ| ≥1）

$$|\lambda a_{ii}| \geq \sum_{j=1}^{i-1} |\lambda a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{n} |\lambda a_{ij}| \geq \sum_{j=1}^{i-1} |\lambda a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|$$

所以G'也是不可约性对角占优的矩阵,根据引理4.1知|G'| ≠0,与假设矛盾,所以|λ|<1,即ρ(G)<1

定理得证。

§3.2 赛德尔迭代法的收敛条件

- 定理4.11 若A对称正定，则高斯-赛德尔迭代法收敛.
- 例4.3 讨论求解下列线性方程组AX=B迭代法的收敛性.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

解： 当采用雅可比迭代法时，其迭代矩阵的特征方程为

§ 3.2 赛德尔迭代法的收敛条件

$$\begin{vmatrix} \lambda & -2 & 2 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -2 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

解得$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$，雅可比迭代法收敛.

当采用高斯-赛德尔迭代法时，其迭代矩阵的特征方程为:

$$\begin{vmatrix} \lambda & -2 & 2 \\ -\lambda & \lambda & -1 \\ -2\lambda & -2\lambda & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

§ 3.2 赛德尔迭代法的收敛条件

解得$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2+\sqrt{8}, \lambda_3 = -2-\sqrt{8}$,其谱半径为$2+\sqrt{8} > 1$,高斯－赛德尔迭代法不收敛.

结论：

- 有些线性方程组使用Jacobi迭代法收敛，有些线性方程组使用Gauss-Seidel法收敛；
- 即使使用两种方法都收敛，收敛速度未必相同

§4.1 松弛迭代法

4.1.1 松弛的含义

1. 方程的残差

设$x_1, x_2, \ldots, x_n$,为$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$的近似值，记

$$r_i = b_i - (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n) \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

则称r_i为线性方程组第i个方程的残差(残余或余量)。

2. 松弛

❖把上式中的一个方程中的一个变量进行修改,使该方程的残差为零.定义为该方程被松弛了或被削弱了。

§4.1.1 按$|r_i|$最大实施松弛方法

❖一般对第i个方程总是改变其第i个变量x_i的数值,使该方程的残差为零.(松弛原则)

将上式改写成便于松弛的形式:

$$\begin{cases} r_1^{(k)} = -x_1^{(k)} + b_{12}x_2^{(k)} + \ldots + b_{1n}x_n^{(k)} + c_1 \\ r_2^{(k)} = b_{21}x_1^{(k)} - x_2^{(k)} + b_{23}x_3^{(k)} + \ldots + b_{2n}x_n^{(k)} + c_2 \\ \ldots\ldots \\ r_n^{(k)} = b_{n1}x_1^{(k)} + b_{n2}x_2^{(k)} + \ldots + b_{nn-1}x_{n-1}^{(k)} - x_n^{(k)} + c_n \end{cases}$$

其中$b_{ij} = -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}(i \neq j), c_i = \dfrac{b_i}{a_{ii}}$

§4.1.1 按$|r_i|$最大实施松弛方法

或$$r_i^{(k)} = c_i - x_i^{(k)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} b_{ij} x_j^{(k)} (i = 1,2,\ldots,n)$$

- 设初始值为$x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$,代入上式得到零次残差

$$r_i^{(0)} = c_i - x_i^{(0)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} b_{ij} x_j^{(0)} (i = 1,2,\ldots,n)$$

§ 4.1.1 按$|r_i|$最大实施松弛方法

$$|r_s^{(0)}| = \max_i |r_i^{(0)}|$$

- 修改第s个方程的第s个变量值, 使新的残差 $r_s^{(1)}=0$, 令$\sigma x_s^{(0)}$为$x_s^{(0)}$的修正量, 则应取

$$r_s^{(0)} = c_s - x_s^{(0)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq s}}^{n} b_{sj} x_j^{(0)}$$

$$0 = c_s - x_s^{(0)} - r_s^{(0)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq s}}^{n} b_{sj} x_j^{(0)}$$

$\sigma x_s^{(0)} = r_s^{(0)}$

$$0 = c_s - (x_s^{(0)} + r_s^{(0)}) + \sum_{j=1}^{n} b_{sj} x_j^{(0)}$$

§ 4.1.1 按$|r_i|$最大实施松弛方法

经修改后的$x_s^{(0)}$设为$x_s^{(1)}$，有

$$x_s^{(1)} = x_s^{(0)} + \sigma x_s^{(0)} = x_s^{(0)} + r_s^{(0)}$$

其余方程的残差:

$$r_i^{(0)} = c_i - x_i^{(0)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{s-1} b_{ij} x_j^{(0)} + b_{is} x_s^{(0)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{s+1} b_{ij} x_j^{(0)}$$

$$x_s^{(1)} = x_s^{(0)} + r_s^{(0)}$$

$$r_i^{(1)} = c_i - x_i^{(0)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{s-1} b_{ij} x_j^{(0)} + b_{is} (x_s^{(0)} + r_s^{(0)}) + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{s+1} b_{ij} x_j^{(}$$

$$r_i^{(1)} = r_i^{(0)} + b_{is} r_s^{(0)}$$

§4.1.1 按$|r_i|$最大实施松弛方法

$$r_i^{(1)} = r_i^{(0)} + b_{is} r_s^{(0)}$$

$r_i^{(1)} = r_i^{(0)} + b_{is}\sigma x_s^{(0)}$ $(i \neq s)$,其中$b_{is}\sigma x_s^{(0)}$是因$x_s^{(0)}$的变化$\sigma x_s^{(0)}$而导致的改变量。

在求得一次残差的基础上，继续仿上推算，直到修正量小于给定的精度为止。

§4.1.2 按方程次序实施松弛的方法

1. 松弛方程的策略如按方程排列的顺序进行时，先取第一个方程

$$r_1^{(k)} = -x_1^{(k)} - \frac{1}{a_{11}}[a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)} + \ldots + a_{1n}x_n^{(k)} - b_1]$$

2. 修改$x_1^{(k)}$为$x_1^{(k+1)}$，使$r_1^{(k+1)} = 0$得

$$r_1^{(k+1)} = 0 = -x_1^{(k+1)} - \frac{1}{a_{11}}[a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)} + \ldots + a_{1n}x_n^{(k)} - b_1]$$

$$x_1^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{11}}[a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)} + \ldots + a_{1n}x_n^{(k)} - b_1]$$

3.将$r_2^{(k)}$, $r_3^{(k)}$,…, $r_n^{(k)}$中的$x_1^{(k)}$均更换为$x_1^{(k+1)}$。

§4.1.2 按方程次序实施松弛的方法

4.继续修改$x_2^{(k)}$ 为$x_2^{(k+1)}$，使第二个方程的残差$r_2^{(k+1)}=0$，得

$$r_2^{(k+1)}=0=-x_2^{(k+1)}-\frac{1}{a_{22}}[a_{21}x_1^{(k+1)}+a_{23}x_3^{(k)}+...+a_{2n}x_n^{(k)}-b_2]$$

$$x_2^{(k+1)}=-\frac{1}{a_{22}}[a_{21}x_1^{(k+1)}+a_{23}x_3^{(k)}+...+a_{2n}x_n^{(k)}-b_2]$$

5.将$r_3^{(k)}$, $r_4^{(k)}$,…, $r_n^{(k)}$中的$x_2^{(k)}$均更换为$x_2^{(k+1)}$。

§4.1.2 按方程次序实施松弛的方法

- 仿照上面推导，可得到:

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)} = -\dfrac{1}{a_{11}}[a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)} + \ldots + a_{1n}x_n^{(k)} - b_1] \\
x_2^{(k+1)} = -\dfrac{1}{a_{22}}[a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{23}x_3^{(k)} + \ldots + a_{2n}x_n^{(k)} - b_2] \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_n^{(k+1)} = -\dfrac{1}{a_{nn}}[a_{n1}x_1^{(k+1)} + a_{23}x_2^{(k+1)} + \ldots + a_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)} - b_n]
\end{cases}
$$

上述称为逐次松弛法，可见其完全等同于 Gauss-Seidel迭代法。

§4.1.3 带有松弛因子的逐次松弛法

1. 将逐次松弛法的迭代公式改写为:

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} - \dfrac{1}{a_{11}}[a_{11}x_1^{(k)} + a_{12}x_2^{(k)} + \ldots + a_{1n}x_n^{(k)} - b_1] = x_1^{(k)} + \delta x_1^{(k)} \\
x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} - \dfrac{1}{a_{22}}[a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{22}x_2^{(k)} + \ldots + a_{2n}x_n^{(k)} - b_2] = x_2^{(k)} + \delta x_2^{(k)} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_n^{(k+1)} = x_n^{(k)} - \dfrac{1}{a_{nn}}[a_{n1}x_1^{(k+1)} + \ldots + a_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)} + a_{nn}x_n^{(k)} - b_n] = x_n^{(k)} + \delta x_n^{(k)}
\end{cases}
$$

2. 上式中的$\sigma x_i^{(k)}$就是对$x_i^{(k)}$的修正量，引入一个松弛因子ω，用$\omega\sigma x_i^{(k)}$代替$\sigma x_i^{(k)}$来计算$x_i^{(k+1)}$的值

§4.1.3 带有松弛因子的逐次松弛法

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega\delta x_i^{(k)} = x_i^{(k)} + \omega\, r_i^{(k)}$$

$$= x_i^{(k)} - \frac{\omega}{a_{ii}}[a_{i1}x_1^{(k+1)} + \dots + a_{ii-1}x_{i-1}^{(k+1)} + a_{ii}x_i^{(k)} + \dots + a_{in}x_n^{(k)} - b_i]$$

$$= (1-\omega)x_i^{(k)} - \frac{\omega}{a_{ii}}[a_{i1}x_1^{(k+1)} + \dots + a_{ii-1}x_{i-1}^{(k+1)} + a_{ii+1}x_{i+1}^{(k)} + \dots + a_{in}x_n^{(k)} - b_i]$$

$$= (1-\omega)x_i^{(k)} + \omega[\sum_{j=1}^{i-1}(-\frac{a_{ij}}{a_{ii}})x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n}(-\frac{a_{ij}}{a_{ii}})x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}}]$$

$$= (1-\omega)x_i^{(k)} + \omega\widetilde{x_i^{(k+1)}}(i = 1, 2, \dots, n)$$

- 称这种迭代法为带松弛因子ω的逐次松弛法

§4.1.3 带有松弛因子的逐次松弛法

- 由上式可见，它就是高斯-赛德尔迭代法中新旧两个迭代值$x_i^{(k+1)}$与$x_i^{(k)}$按ω与(1- ω)加权的组合公式。

用矩阵的形式可以表示为:

$$x_i^{(k+1)}=(1-\omega)x_i^{(k)}+\frac{\omega}{a_{ii}}[b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}]$$

$$X^{(k+1)}=(1-\omega)X^{(k)}+\omega D^{-1}(B-LX^{(k+1)}-UX^{(k)})$$

$$DX^{(k+1)}=D(1-\omega)X^{(k)}+(\omega B-\omega LX^{(k+1)}-\omega UX^{(k)})$$

$$(D+\omega L)X^{(k+1)}=[D(1-\omega)-\omega U]X^{(k)}+\omega B$$

§4.1.3 带有松弛因子的逐次松弛法

则迭代公式为:

$$X^{(k+1)} = (D+\omega L)^{-1}[(1-\omega)D-\omega U]X^{(k)} + \omega(D+\omega L)^{-1}B$$

迭代矩阵为: $M = (D+\omega L)^{-1}[(1-\omega)D-\omega U]$

$$N = (D+\omega L)^{-1}\omega B$$

松弛因子的含义

- **ω=1** 恰好松弛法
- **ω>1** 超松弛法
- **ω<1** 低松弛法

§4.1.3 带有松弛因子的逐次松弛法

用矩阵的形式可以表示为:

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}]$$

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} + \omega[\sum_{j=1}^{i-1}(-\frac{a_{ij}}{a_{ii}})x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n}(-\frac{a_{ij}}{a_{ii}})x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}}]$$

$$X^{(k+1)} = (1-\omega)X^{(k)} + \omega(\tilde{L}X^{(k+1)} + \tilde{U}X^{(k)} + F)$$

$$F = \begin{bmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ \vdots \\ b_n/a_{nn} \end{bmatrix}$$

§4.1.3 带有松弛因子的逐次松弛法

用矩阵的形式可以表示为:

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} + \omega[\sum_{j=1}^{i-1}(-\frac{a_{ij}}{a_{ii}})x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n}(-\frac{a_{ij}}{a_{ii}})x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}}$$

$$X^{(k+1)} = (1-\omega)X^{(k)} + \omega(\tilde{L}X^{(k+1)} + \tilde{U}X^{(k)} + F)$$

$$\tilde{L} = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & & & \\ -a_{31}/a_{33} & -a_{32}/a_{33} & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ -a_{n1}/a_{nn} & \cdots & & -a_{n(n-1)}/a_{nn} & 0 \end{bmatrix}$$

§4.1.3 带有松弛因子的逐次松弛法

用矩阵的形式可以表示为:

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} + \omega\left[\sum_{j=1}^{i-1}\left(-\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right)x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n}\left(-\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right)x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}}\right]$$

$$X^{(k+1)} = (1-\omega)X^{(k)} + \omega(\tilde{L}X^{(k+1)} + \tilde{U}X^{(k)} + F)$$

$$\tilde{U} = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & -a_{13}/a_{11} & \cdots & -a_{1n}/a_{11} \\ 0 & 0 & -a_{23}/a_{22} & \cdots & -a_{2n}/a_{22} \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -a_{(n-1)n}/a_{(n-1)(n-1)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

§4.2 松弛法的收敛条件

- 松弛法收敛的必要条件是$0<\omega<2$
- 若A为对称正定矩阵，则当$0<\omega<2$时，松弛法恒收敛
- 若A为不可约、对角占优矩阵，且松弛因子ω满足$0<\omega\le 1$时，则松弛法必定收敛
- 使用松弛法求解线性方程组，关键是要选好松弛因子的数值。使松弛法收敛最快的松弛因子叫做最佳松弛因子。

§4.2 松弛法的收敛条件

例4.3 用带有松弛因子的逐次松弛法解线性方程组（ω=1.250）

$$\begin{cases} 4x_1+3x_2=24 \\ 3x_1+4x_2-x_3=30 \\ -x_2+4x_3=-24 \end{cases}$$

解：按照公式建立松弛迭代公式为：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=x_1^{(k)}+\dfrac{\omega}{4}(24-4x_1^{(k)}-3x_2^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)}=x_2^{(k)}+\dfrac{\omega}{4}(30-3x_1^{(k+1)}-4x_2^{(k)}+x_3) \\ x_3^{(k+1)}=x_3^{(k)}+\dfrac{\omega}{4}(-24+x_2^{(k+1)}-4x_3^{(k)}) \end{cases}$$