ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

Đề tài: PHƯƠNG PHÁP GIẢI GẦN ĐÚNG PHƯƠNG TRÌNH PHI TUYẾN

CHUYÊN ĐỀ ĐẠI SỐ

Đại học Quốc gia Hà Nội
Đại học Khoa học Tự nhiên
Khoa Toán-Cơ-Tin học

Giảng viên: TS. Trần Hiếu

Học viên: Khải - 2100xxx
Nguyễn Thị Đông - 21007930
Vũ Thảo - 2300xxx

Mục lục

Giới thiệu

1 Nghiệm của phương trình một ẩn

Trong nhiều lĩnh vực khoa học và kỹ thuật, việc giải phương trình phi tuyến đóng vai trò quan trọng. Một ví dụ tiêu biểu là mô hình tăng trưởng dân số, trong đó tốc độ tăng trưởng tỉ lệ thuận với quy mô hiện tại của quần thể. Khi bổ sung thêm yếu tố nhập cư với tốc độ hằng, ta thu được phương trình vi phân phức tạp hơn. Xét trường hợp một cộng đồng có dân số ban đầu $N(0) = 1{,}000{,}000$, sau một năm có thêm 435,000 người nhập cư và tổng dân số đạt $N(1) = 1{,}564{,}000$. Để xác định tỉ lệ sinh λ, ta cần giải phương trình

$$1{,}564{,}000 \;=\; 1{,}000{,}000e^{\lambda} + \frac{435{,}000}{\lambda}\big(e^{\lambda} - 1\big).$$

Rõ ràng phương trình này không thể giải chính xác bằng các phương pháp đại số thông thường. Trong những tình huống như vậy, các kỹ thuật số trở thành công cụ thiết yếu, cho phép tìm nghiệm xấp xỉ với độ chính xác tùy ý.

Mục tiêu của Chương 2 là trình bày và phân tích một số phương pháp số cơ bản để giải các phương trình một biến, bao gồm *phương pháp chia đôi*, *lặp điểm cố định*, *Newton–Raphson* và *Secant*. Những phương pháp này không chỉ minh họa cách tiếp cận bài toán nghiệm phi tuyến, mà còn cho thấy sức mạnh của tính toán số trong việc giải quyết các phương trình mà giải tích không xử lý được.

1.1 The Bisection Method

Một trong những kỹ thuật cơ bản nhất để giải phương trình phi tuyến $f(x) = 0$ là *phương pháp chia đôi* (Bisection Method). Ý tưởng dựa trên *Định lý Giá trị Trung gian*: nếu f liên tục trên khoảng $[a, b]$ và $f(a)f(b) < 0$, thì tồn tại ít nhất một nghiệm $p \in (a, b)$ sao cho $f(p) = 0$.

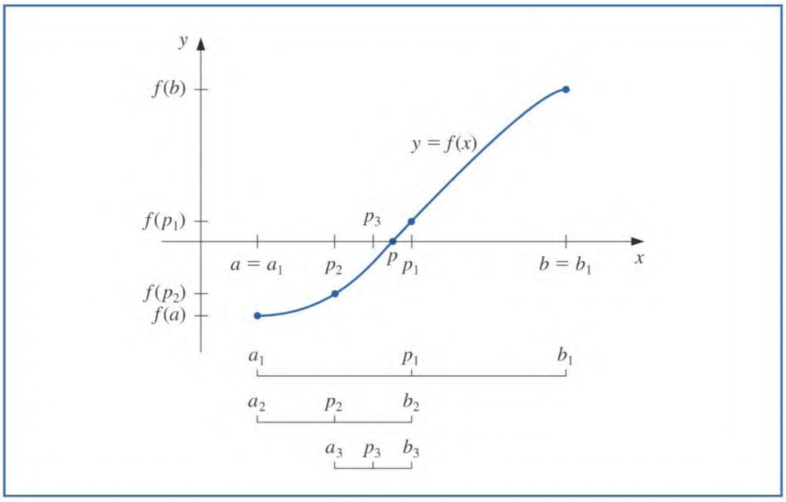
Phương pháp tiến hành như sau: bắt đầu với khoảng $[a, b]$, ta tính trung điểm

$$p = \frac{a + b}{2}.$$

Nếu $f(p) = 0$, nghiệm đã được tìm thấy. Ngược lại, tùy thuộc vào dấu của $f(p)$, ta chọn nửa khoảng chứa nghiệm:

$$[a, p] \quad \text{nếu } f(a)f(p) < 0, \qquad \text{hoặc} \qquad [p, b] \quad \text{nếu } f(p)f(b) < 0.$$

Quy trình này được lặp lại cho đến khi khoảng có độ dài nhỏ hơn sai số cho phép TOL.



Hình 1.1: Minh họa phương pháp chia đôi (Figure 2.1).

Thuật toán (Bisection Method)

(1) Chọn a, b sao cho $f(a)f(b) < 0$, cùng số lần lặp tối đa N và sai số TOL.

(2) Với $i = 1, 2, \dots, N$:

(a) Tính $p = \frac{a+b}{2}$.

(b) Nếu $|f(p)| <$ TOL hoặc $\frac{b-a}{2} <$ TOL, kết thúc và nhận p là nghiệm gần đúng.

(c) Nếu $f(a)f(p) > 0$, đặt $a = p$; ngược lại, đặt $b = p$.

Nếu sau N bước mà chưa đạt điều kiện dừng, thuật toán được xem là thất bại.

Ví dụ 1: Phương pháp chia đôi

Chứng minh rằng phương trình

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$$

có nghiệm trong khoảng $[1, 2]$, và sử dụng phương pháp chia đôi để tìm nghiệm xấp xỉ với độ chính xác ít nhất 10^{-4}.

Lời giải. Vì $f(1) = -5 < 0$ và $f(2) = 14 > 0$, nên theo Định lý Giá trị Trung gian, tồn tại ít nhất một nghiệm trong $[1, 2]$.

Ở lần lặp đầu tiên, $p_1 = 1.5$ và $f(1.5) = 2.375 > 0$, do đó nghiệm thuộc khoảng $[1, 1.5]$. Tiếp tục chia đôi, $p_2 = 1.25$ với $f(1.25) = -1.7969 < 0$, nên nghiệm nằm trong $[1.25, 1.5]$. Lặp lại quá trình này, ta thu được các giá trị trong Bảng 1.1.

Bảng 1.1: Các bước của phương pháp chia đôi cho $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$

n	a_n	b_n	p_n	$f(p_n)$
1	1.0000	2.0000	1.5000	2.3750
2	1.0000	1.5000	1.2500	-1.7969
3	1.2500	1.5000	1.3750	0.1621
4	1.2500	1.3750	1.3125	-0.8484
5	1.3125	1.3750	1.3438	-0.3510
6	1.3438	1.3750	1.3594	-0.0964
7	1.3594	1.3750	1.3672	0.0324
8	1.3594	1.3672	1.3633	-0.0322
9	1.3633	1.3672	1.3652	0.000072
10	1.3633	1.3652	1.3643	-0.01605
11	1.3643	1.3652	1.3647	-0.00799
12	1.3647	1.3652	1.3650	-0.00396
13	1.3650	1.3652	1.3651	-0.00194

Sau 13 lần lặp, ta được nghiệm xấp xỉ

$$p_{13} = 1.365112305,$$

với sai số

$$|p - p_{13}| < |p_{14} - p_{13}| = |1.365234375 - 1.365112305| = 0.00012207,$$

nên đảm bảo chính xác ít nhất 10^{-4}. Giá trị đúng của nghiệm (chính xác đến 9 chữ số thập phân) là

$$p = 1.365230013.$$

Định lý 2.1

Giả sử f là hàm liên tục trên đoạn $[a, b]$ và thỏa $f(a)f(b) < 0$. Khi áp dụng phương pháp chia đôi, ta thu được một dãy $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ về nghiệm p của $f(x) = 0$. Hơn nữa, sai số tại bước lặp thứ n được ước lượng bởi

$$|p_n - p| < \frac{b-a}{2^n}, \quad n \geq 1.$$

Hệ quả. Dãy $\{p_n\}$ hội tụ về p với tốc độ $O(2^{-n})$, tức là

$$p_n = p + O(2^{-n}).$$

Ví dụ 2: Ước lượng số lần lặp

Xác định số lần lặp cần thiết để giải phương trình

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$$

với độ chính xác 10^{-3}, sử dụng $a_1 = 1$ và $b_1 = 2$.

Lời giải. Theo Định lý 2.1, sai số sau N lần lặp thỏa

$$|p_N - p| \leq \frac{b-a}{2^N}.$$

Với $a = 1, b = 2$, ta có

$$|p_N - p| \leq \frac{1}{2^N}.$$

Để đạt độ chính xác 10^{-3}, cần

$$\frac{1}{2^N} \leq 10^{-3} \quad \Rightarrow \quad N \geq \frac{3}{\log_{10} 2} \approx 9.96.$$

Vậy cần ít nhất $N = 10$ lần lặp để đảm bảo nghiệm gần đúng nằm trong sai số 10^{-3}.

1.2 Fixed-Point Iteration

1.3 Newton's Method and Its Extensions

1.4 Error Analysis for Iterative Methods

1.5 Accelerating Convergence

2 Chương 2: Nghiệm của phương trình một ẩn

3 Chương 7

Tài liệu tham khảo

[1] Softmax function: https://machinelearningcoban.com/2017/02/17/softmax/

[2] Random Forest: https://machinelearningcoban.com/tabml_book/ch_model/random_forest.htm

[3] Grandient Boosting: https://en.wikipedia.org/wiki/Gradient_boosting

[4] PCA: https://machinelearningcoban.com/2017/06/15/pca/

Phụ lục

Chương trình chạy

- File code "analyze_dataset_fulldata.ipynb" chứa code phân tích và xây dựng mô hình trong trường hợp đầy đủ data không loại bỏ các data null
- File code "analyze_dataset_notnull_HRS1.ipynb" chứa code phân tích và xây dựng mô hình trong trường hợp đã loại bỏ các giá trị null trong biến HRS1
- File data "filtered_gss2016_data.csv" là data sau khi trích lọc các biến cần phân tích