

# Đề tài: PHƯƠNG PHÁP GIẢI GẦN ĐÚNG PHƯƠNG TRÌNH PHI TUYẾN

CHUYÊN ĐỀ ĐẠI SỐ

Đại học Quốc gia Hà Nội  
Đại học Khoa học Tự nhiên  
Khoa Toán-Cơ-Tin học

Giảng viên:

TS. Trần Hiếu

Học viên:

Khải - 2100xxx

Nguyễn Thị Đông - 21007930

Vũ Thảo - 2300xxx



**Mục lục**

1	Nghiệm của phương trình một ẩn .....	1
1.1	Phương pháp chia đôi (The Bisection Method) .....	1
1.2	Phương pháp lặp điểm cố định (Fixed-Point Iteration) .....	4
1.3	Phương pháp Newton và các mở rộng .....	8
1.4	Phân tích sai số cho các phương pháp lặp (Error Analysis for Iterative Methods) .....	15
1.5	Tăng tốc độ hội tụ (Accelerating Convergence) .....	18
2	Chương 2: Nghiệm của phương trình một ẩn .....	23
3	Chương 7 .....	24
	Phụ lục .....	III

## Giới thiệu

# 1 Nghiệm của phương trình một ẩn

Trong nhiều lĩnh vực khoa học và kỹ thuật, việc giải phương trình phi tuyến đóng vai trò quan trọng. Một ví dụ tiêu biểu là mô hình tăng trưởng dân số, trong đó tốc độ tăng trưởng tỉ lệ thuận với quy mô hiện tại của quần thể. Khi bổ sung thêm yếu tố nhập cư với tốc độ hằng, ta thu được phương trình vi phân phức tạp hơn. Xét trường hợp một cộng đồng có dân số ban đầu  $N(0) = 1,000,000$ , sau một năm có thêm 435,000 người nhập cư và tổng dân số đạt  $N(1) = 1,564,000$ . Để xác định tỉ lệ sinh  $\lambda$ , ta cần giải phương trình

$$1,564,000 = 1,000,000e^{\lambda} + \frac{435,000}{\lambda}(e^{\lambda} - 1).$$

Rõ ràng phương trình này không thể giải chính xác bằng các phương pháp đại số thông thường. Trong những tình huống như vậy, các kỹ thuật số trở thành công cụ thiết yếu, cho phép tìm nghiệm xấp xỉ với độ chính xác tùy ý.

Mục tiêu của Chương 2 là trình bày và phân tích một số phương pháp số cơ bản để giải các phương trình một biến, bao gồm *phương pháp chia đôi*, *lập điểm cố định*, *Newton–Raphson* và *Secant*. Những phương pháp này không chỉ minh họa cách tiếp cận bài toán nghiệm phi tuyến, mà còn cho thấy sức mạnh của tính toán số trong việc giải quyết các phương trình mà giải tích không xử lý được.

## 1.1 Phương pháp chia đôi (The Bisection Method)

Một trong những kỹ thuật cơ bản nhất để giải phương trình phi tuyến  $f(x) = 0$  là *phương pháp chia đôi* (Bisection Method). Ý tưởng dựa trên *Định lý Giá trị Trung gian*: nếu  $f$  liên tục trên khoảng  $[a, b]$  và  $f(a)f(b) < 0$ , thì tồn tại ít nhất một nghiệm  $p \in (a, b)$  sao cho  $f(p) = 0$ .

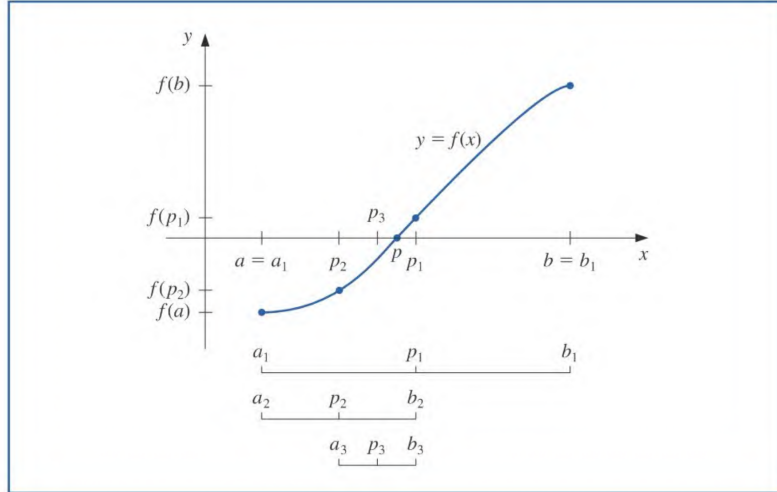
Phương pháp tiến hành như sau: bắt đầu với khoảng  $[a, b]$ , ta tính trung điểm

$$p = \frac{a + b}{2}.$$

Nếu  $f(p) = 0$ , nghiệm đã được tìm thấy. Ngược lại, tùy thuộc vào dấu của  $f(p)$ , ta chọn nửa khoảng chứa nghiệm:

$$[a, p] \quad \text{nếu } f(a)f(p) < 0, \quad \text{hoặc} \quad [p, b] \quad \text{nếu } f(p)f(b) < 0.$$

Quy trình này được lặp lại cho đến khi khoảng có độ dài nhỏ hơn sai số cho phép TOL.



Hình 1.1: Minh họa phương pháp chia đôi (Figure 2.1).

### Thuật toán (*Bisection Method*)

- (1) Chọn  $a, b$  sao cho  $f(a)f(b) < 0$ , cùng số lần lặp tối đa  $N$  và sai số TOL.
- (2) Với  $i = 1, 2, \dots, N$ :
  - (a) Tính  $p = \frac{a+b}{2}$ .
  - (b) Nếu  $|f(p)| < \text{TOL}$  hoặc  $\frac{b-a}{2} < \text{TOL}$ , kết thúc và nhận  $p$  là nghiệm gần đúng.
  - (c) Nếu  $f(a)f(p) > 0$ , đặt  $a = p$ ; ngược lại, đặt  $b = p$ .

Nếu sau  $N$  bước mà chưa đạt điều kiện dừng, thuật toán được xem là thất bại.

### Ví dụ 1: Phương pháp chia đôi

Chúng minh rằng phương trình

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$$

có nghiệm trong khoảng  $[1, 2]$ , và sử dụng phương pháp chia đôi để tìm nghiệm xấp xỉ với độ chính xác ít nhất  $10^{-4}$ .

**Lời giải.** Vì  $f(1) = -5 < 0$  và  $f(2) = 14 > 0$ , nên theo Định lý Giá trị Trung gian, tồn tại ít nhất một nghiệm trong  $[1, 2]$ .

Ở lần lặp đầu tiên,  $p_1 = 1.5$  và  $f(1.5) = 2.375 > 0$ , do đó nghiệm thuộc khoảng  $[1, 1.5]$ . Tiếp tục chia đôi,  $p_2 = 1.25$  với  $f(1.25) = -1.7969 < 0$ , nên nghiệm nằm trong  $[1.25, 1.5]$ . Lặp lại quá trình này, ta thu được các giá trị trong Bảng 1.1.

Bảng 1.1: Các bước của phương pháp chia đôi cho  $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$

$n$	$a_n$	$b_n$	$p_n$	$f(p_n)$
1	1.0000	2.0000	1.5000	2.3750
2	1.0000	1.5000	1.2500	-1.7969
3	1.2500	1.5000	1.3750	0.1621
4	1.2500	1.3750	1.3125	-0.8484
5	1.3125	1.3750	1.3438	-0.3510
6	1.3438	1.3750	1.3594	-0.0964
7	1.3594	1.3750	1.3672	0.0324
8	1.3594	1.3672	1.3633	-0.0322
9	1.3633	1.3672	1.3652	0.000072
10	1.3633	1.3652	1.3643	-0.01605
11	1.3643	1.3652	1.3647	-0.00799
12	1.3647	1.3652	1.3650	-0.00396
13	1.3650	1.3652	1.3651	-0.00194

Sau 13 lần lặp, ta được nghiệm xấp xỉ

$$p_{13} = 1.365112305,$$

với sai số

$$|p - p_{13}| < |p_{14} - p_{13}| = |1.365234375 - 1.365112305| = 0.00012207,$$

nên đảm bảo chính xác ít nhất  $10^{-4}$ . Giá trị đúng của nghiệm (chính xác đến 9 chữ số thập phân) là

$$p = 1.365230013.$$

### ***Định lý***

Giả sử  $f$  là hàm liên tục trên đoạn  $[a, b]$  và thỏa  $f(a)f(b) < 0$ . Khi áp dụng phương pháp chia đôi, ta thu được một dãy  $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$  hội tụ về nghiệm  $p$  của  $f(x) = 0$ . Hơn nữa, sai số tại bước lặp thứ  $n$  được ước lượng bởi

$$|p_n - p| < \frac{b - a}{2^n}, \quad n \geq 1.$$

**Hệ quả.** Dãy  $\{p_n\}$  hội tụ về  $p$  với tốc độ  $O(2^{-n})$ , tức là

$$p_n = p + O(2^{-n}).$$

### ***Ví dụ 2: Ước lượng số lần lặp***

Xác định số lần lặp cần thiết để giải phương trình

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$$

với độ chính xác  $10^{-3}$ , sử dụng  $a_1 = 1$  và  $b_1 = 2$ .

**Lời giải.** Theo Định lý, sai số sau  $N$  lần lặp thỏa

$$|p_N - p| \leq \frac{b - a}{2^N}.$$

Với  $a = 1, b = 2$ , ta có

$$|p_N - p| \leq \frac{1}{2^N}.$$

Để đạt độ chính xác  $10^{-3}$ , cần

$$\frac{1}{2^N} \leq 10^{-3} \quad \Rightarrow \quad N \geq \frac{3}{\log_{10} 2} \approx 9.96.$$

Vậy cần ít nhất  $N = 10$  lần lặp để đảm bảo nghiệm gần đúng nằm trong sai số  $10^{-3}$ .

## 1.2 Phương pháp lặp điểm cố định (Fixed-Point Iteration)

**Định nghĩa** Một số  $p$  được gọi là *điểm cố định* của một hàm  $g$  nếu

$$g(p) = p.$$

Khái niệm điểm cố định xuất hiện trong nhiều lĩnh vực toán học và là một công cụ quan trọng cho các nhà kinh tế khi chứng minh các kết quả liên quan đến cân bằng. Thuật ngữ “điểm cố định” được giới thiệu bởi nhà toán học người Hà Lan **L. E. J. Brouwer (1882–1966)** vào đầu những năm 1900.

Trong phần này, chúng ta xét bài toán tìm điểm cố định của một hàm và mối quan hệ của nó với bài toán tìm nghiệm của phương trình phi tuyến. Hai bài toán này là tương đương theo nghĩa sau:

- Cho một bài toán tìm nghiệm  $f(p) = 0$ , có thể xác định một hàm  $g$  sao cho  $p$  là điểm cố định, ví dụ:

$$g(x) = x - f(x), \quad \text{hoặc} \quad g(x) = x + \lambda f(x),$$

với  $\lambda$  thích hợp.

- Ngược lại, nếu  $g$  có một điểm cố định tại  $p$ , thì hàm

$$f(x) = x - g(x)$$

có một nghiệm tại  $p$ .



Mặc dù thường thì chúng ta quan tâm đến việc giải phương trình  $f(x) = 0$ , nhưng việc đưa về dạng điểm cố định thường thuận lợi hơn cho việc phân tích, và trong nhiều trường hợp, sự lựa chọn thích hợp của hàm  $g$  có thể đem lại những thuật toán tìm nghiệm hiệu quả hơn.

Để gần đúng một điểm cố định của một hàm  $g$ , ta bắt đầu với một giá trị gần đúng ban đầu  $p_0$  và xác định một dãy  $\{p_n\}$  theo công thức lặp

$$p_n = g(p_{n-1}), \quad n \geq 1.$$

Nếu dãy  $\{p_n\}$  hội tụ và  $g$  liên tục, thì

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = g(p).$$

Do đó  $p$  là một nghiệm của phương trình điểm cố định  $x = g(x)$ . Phương pháp này được gọi là *lặp điểm cố định* (*fixed-point iteration*) hoặc *lặp hàm* (*functional iteration*).

### **Thuật toán – Lặp điểm cố định**

INPUT: giá trị gần đúng ban đầu  $p_0$ , sai số cho phép TOL, số lần lặp tối đa  $N_0$ .

OUTPUT: nghiệm xấp xỉ  $p$ , hoặc thông báo thất bại.

- (1) Đặt  $i = 1$ .
- (2) Trong khi  $i \leq N_0$ , thực hiện:
  - (a) Tính  $p = g(p_0)$ .
  - (b) Nếu  $|p - p_0| < \text{TOL}$ , thì xuất  $p$  và **STOP**.
  - (c) Tăng  $i = i + 1$ .
  - (d) Đặt  $p_0 = p$ .
- (3) Nếu chưa hội tụ sau  $N_0$  bước, xuất thông báo: “Phương pháp thất bại sau  $N_0$  lần lặp” và **STOP**.

### **Minh họa**

Xét phương trình

$$x^3 + 4x^2 - 10 = 0,$$

phương trình này có một nghiệm duy nhất trong khoảng  $[1, 2]$ .

Có nhiều cách biến đổi phương trình này sang dạng điểm cố định  $x = g(x)$  bằng các phép biến đổi đại số đơn giản. Ví dụ:

$$\begin{aligned} g_1(x) &= x - (x^3 + 4x^2 - 10), \\ g_2(x) &= \sqrt{\frac{10 - x^3}{4}}, \\ g_3(x) &= \frac{1}{2}\sqrt{10 - x^3}, \\ g_4(x) &= \sqrt{\frac{10}{x + 4}}, \\ g_5(x) &= x - \frac{x^3 + 4x^2 - 10}{3x^2 + 8x}. \end{aligned}$$

Với giá trị khởi đầu  $p_0 = 1.5$ , áp dụng phương pháp lặp điểm cố định cho từng hàm  $g_i(x)$ , ta thu được các dãy giá trị khác nhau. Kết quả được trình bày trong Bảng 1.2.

Bảng 1.2: Kết quả lặp điểm cố định cho  $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$  với các lựa chọn  $g(x)$  khác nhau, bắt đầu từ  $p_0 = 1.5$

$n$	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
0	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5
1	-0.875	0.8165	1.286953768	1.348399725	1.373333333
2	6.732	2.9969	1.402540804	1.367376372	1.365262015
3	-469.7	$(-8.65)^{1/2}$	1.345458374	1.364957015	1.365230014
4	$1.03 \times 10^8$		1.375170253	1.365264748	1.365230013
5			1.360094193	1.365225594	
6			1.367846968	1.365230576	
7			1.363887004	1.365229942	
8			1.365916734	1.365230022	
9			1.364878217	1.365230012	
10			1.365410062	1.365230014	
15			1.365223680	1.365230013	
20			1.365230236	1.365230013	
25			1.365230006	1.365230013	
30			1.365230013	1.365230013	

**Giải thích.** Bảng 1.2 minh họa rõ ràng rằng cách chọn hàm  $g(x)$  ảnh hưởng trực tiếp đến sự hội tụ của phương pháp lặp điểm cố định:

- **(a)** Dãy lặp nhanh chóng phân kỳ. Các giá trị trở nên cực lớn (bùng nổ) sau vài bước.
- **(b)** Sau hai bước thì giá trị  $p_2 = 2.9969$ , dẫn đến  $p_3 = \sqrt{-8.65}$  là vô nghĩa (không xác định trên  $\mathbb{R}$ ). Do đó quá trình lặp dừng lại.

- (c) Dãy lặp hội tụ đến nghiệm đúng  $p \approx 1.365230$ , nhưng tốc độ hội tụ chậm; cần khoảng 30 bước mới đạt chính xác  $10^{-9}$ .
- (d) Dãy lặp hội tụ nhanh chóng về nghiệm đúng  $p \approx 1.365230$ , với sai số giảm nhanh chỉ sau vài bước.
- (e) Đây là dạng công thức Newton cho phương trình  $f(x) = 0$ . Dãy lặp hội tụ cực nhanh (hội tụ bậc hai) và đạt chính xác  $10^{-9}$  chỉ sau 5 bước.

Kết quả này cho thấy rằng mặc dù có nhiều cách viết lại phương trình  $f(x) = 0$  thành dạng  $x = g(x)$ , nhưng chỉ một số lựa chọn  $g$  mang lại sự hội tụ hiệu quả. Tiêu chuẩn quan trọng để đảm bảo hội tụ là điều kiện  $|g'(p)| < 1$  trong một lân cận của nghiệm  $p$ .

### ***Định lý (Định lý điểm cố định)***

Giả sử  $g \in C[a, b]$  và  $g(x) \in [a, b]$  với mọi  $x \in [a, b]$ . Giả sử thêm rằng  $g'$  tồn tại trên  $(a, b)$  và tồn tại một hằng số  $0 < k < 1$  sao cho

$$|g'(x)| \leq k, \quad \forall x \in (a, b).$$

Khi đó, với mọi giá trị khởi đầu  $p_0 \in [a, b]$ , dãy được xác định bởi

$$p_n = g(p_{n-1}), \quad n \geq 1,$$

hội tụ về điểm cố định duy nhất  $p \in [a, b]$ .

—

### ***Hệ quả***

Nếu  $g$  thỏa mãn các giả thiết của Định lý điểm cố định, thì ta có các cận sai số khi dùng  $p_n$  để xấp xỉ  $p$  như sau:

$$|p_n - p| \leq k^n \max\{p_0 - a, b - p_0\}, \quad (2.5)$$

và

$$|p_n - p| \leq \frac{k^n}{1 - k} |p_1 - p_0|, \quad \text{với mọi } n \geq 1. \quad (2.6)$$

### ***Minh họa***

Xét lại các dạng lặp điểm cố định trong Bảng 1.2 dựa trên Định lý điểm cố định và Hệ quả:

- (a) Với  $g_1(x) = x - (x^3 + 4x^2 - 10)$ , ta có  $g_1(1) = 6$  và  $g_1(2) = -12$ , nên  $g_1$  không ánh xạ  $[1, 2]$  vào chính nó. Ngoài ra,  $g'_1(x) = 1 - 3x^2 - 8x$ , và  $|g'_1(x)| > 1$  với mọi  $x \in [1, 2]$ . Do đó, không có lý do để mong đợi sự hội tụ, và thực tế dãy lặp phân kỳ.
- (b) Với  $g_2(x) = \sqrt{\frac{10}{x} - 4x}$ , dễ thấy  $g_2$  không ánh xạ  $[1, 2]$  vào  $[1, 2]$ , và dãy  $\{p_n\}$  không xác định khi bắt đầu từ  $p_0 = 1.5$ . Ngoài ra,  $|g'_2(p)| \approx 3.4 > 1$ , nên điều kiện hội tụ của Định lý điểm cố định không thỏa mãn. Vì vậy, không thể mong đợi hội tụ.
- (c) Với  $g_3(x) = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x^3}$ , ta có  $g'_3(x) = -\frac{3}{4}x^2(10 - x^3)^{-1/2} < 0$  trên  $[1, 2]$ , tức là  $g_3$  giảm nghiêm ngặt. Tuy nhiên,  $|g'_3(2)| \approx 2.12 > 1$ , nên điều kiện của Định lý điểm cố định không thỏa trên toàn khoảng  $[1, 2]$ . Nhưng nếu thu hẹp miền lại còn  $[1, 1.5]$ , thì  $g_3$  ánh xạ  $[1, 1.5]$  vào chính nó và  $|g'_3(x)| \leq 0.66 < 1$ , do đó hội tụ được đảm bảo (như đã quan sát trong Bảng 1.2).
- (d) Với  $g_4(x) = \sqrt{\frac{10}{x+4}}$ , ta có  $|g'_4(x)| < 0.15$  với mọi  $x \in [1, 2]$ . Theo Hệ quả điểm cố định, phương pháp này phải hội tụ rất nhanh, và thực tế cho thấy đúng như vậy.
- (e) Với

$$g_5(x) = x - \frac{x^3 + 4x^2 - 10}{3x^2 + 8x},$$

ta thu được công thức Newton áp dụng cho phương trình  $f(x) = 0$ . Đây là lý do giải thích tại sao cột (e) trong Bảng 1.2 cho thấy sự hội tụ cực kỳ nhanh (hội tụ bậc hai).

### 1.3 Phương pháp Newton và các mở rộng

Isaac Newton (1643–1727) là một trong những nhà khoa học vĩ đại nhất mọi thời đại. Vào cuối thế kỷ 17, các công trình của ông đã chạm đến hầu hết các lĩnh vực toán học. Phương pháp mang tên ông được giới thiệu nhằm tìm nghiệm của phương trình

$$y^3 - 2y - 5 = 0.$$

Mặc dù Newton minh họa phương pháp chủ yếu cho đa thức, ông đã nhận ra khả năng ứng dụng rộng hơn của nó.

Phương pháp Newton (Newton–Raphson) là một trong những kỹ thuật số mạnh mẽ và nổi tiếng để tìm nghiệm của phương trình phi tuyến. Có nhiều cách trình bày phương pháp: (i) trực quan bằng hình học/đồ thị như trong giải tích; (ii) như một

lược đồ có tốc độ hội tụ nhanh hơn so với một số lặp hàm khác; và (iii) dựa trên khai triển Taylor, vừa dẫn ra công thức, vừa cho phép ước lượng sai số xấp xỉ. Dưới đây là cách suy ra công thức bằng khai triển Taylor.

Giả sử  $f \in C^2[a, b]$ . Cho  $p_0 \in [a, b]$  là một xấp xỉ ban đầu của nghiệm  $p$  sao cho  $f'(p_0) \neq 0$  và  $|p - p_0|$  “nhỏ”. Khai triển Taylor bậc nhất của  $f$  tại  $x = p_0$ , đánh giá ở  $x = p$ , cho

$$f(p) = f(p_0) + (p - p_0) f'(p_0) + \frac{1}{2} f''(\xi) (p - p_0)^2,$$

với một  $\xi$  nằm giữa  $p$  và  $p_0$ . Vì  $f(p) = 0$ , ta được

$$0 = f(p_0) + (p - p_0) f'(p_0) + \frac{1}{2} f''(\xi) (p - p_0)^2.$$

Nếu  $|p - p_0|$  đủ nhỏ, bỏ qua hạng bậc hai cho xấp xỉ tuyến tính

$$0 \approx f(p_0) + (p - p_0) f'(p_0),$$

từ đó

$$p \approx p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)}.$$

Suy ra công thức truy hồi Newton

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}, \quad n \geq 1. \quad (2.7)$$

### ***Thuật toán – Phương pháp Newton***

INPUT: giá trị gần đúng ban đầu  $p_0$ , sai số cho phép TOL, số lần lặp tối đa  $N_0$ .

OUTPUT: nghiệm gần đúng  $p$ , hoặc thông báo thất bại.

(1) Đặt  $i = 1$ .

(2) Trong khi  $i \leq N_0$ , thực hiện:

(a) Tính

$$p = p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)}.$$

(b) Nếu  $|p - p_0| < \text{TOL}$ , thì xuất  $p$  và **STOP**.

(c) Đặt  $i = i + 1$ ,  $p_0 = p$ .

(3) Nếu chưa hội tụ sau  $N_0$  bước, xuất thông báo: “Phương pháp thất bại sau  $N_0$  lần lặp.” và **STOP**.

*Điều kiện dừng và dạng lặp của phương pháp Newton*

Các bất đẳng thức dừng được dùng trong phương pháp chia đôi cũng có thể áp dụng cho phương pháp Newton. Cụ thể, chọn một ngưỡng sai số  $\varepsilon > 0$  và xây dựng dãy  $\{p_n\}$  cho đến khi đạt một trong các điều kiện:

$$|p_N - p_{N-1}| < \varepsilon \quad (2.8)$$

$$\frac{|p_N - p_{N-1}|}{|p_N|} < \varepsilon, \quad p_N \neq 0 \quad (2.9)$$

hoặc

$$|f(p_N)| < \varepsilon. \quad (2.10)$$

Một dạng của (2.8) thường được sử dụng ở bước 4 trong Thuật toán 2.3. Lưu ý rằng không bất đẳng thức nào trong (2.8)–(2.10) cung cấp thông tin chính xác về sai số thực sự  $|p_N - p|$ .

Phương pháp Newton cũng có thể được xem như một dạng lặp điểm cố định, với công thức

$$p_n = g(p_{n-1}) = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}, \quad n \geq 1. \quad (2.11)$$

Đây chính là dạng lặp đã mang lại sự hội tụ rất nhanh được quan sát ở cột (e) trong Bảng ?? . Tuy nhiên, phương pháp không thể tiếp tục nếu  $f'(p_{n-1}) = 0$  tại một bước nào đó. Trên thực tế, phương pháp Newton hiệu quả nhất khi  $f'$  không tiến gần 0 trong một lân cận của nghiệm  $p$ .

**Ví dụ 1**

Xét hàm  $f(x) = \cos x - x$ . Hãy xấp xỉ nghiệm của  $f$  bằng:

- (a) phương pháp lặp điểm cố định;
- (b) phương pháp Newton.

**Lời giải.**

(a) Nghiệm của bài toán tìm nghiệm cũng chính là nghiệm của bài toán điểm cố định  $x = \cos x$ . Đồ thị trong Hình ?? cho thấy có đúng một điểm cố định  $p$  trong khoảng  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .

Với giá trị khởi đầu  $p_0 = \pi/4$ , ta thu được kết quả ở Bảng 1.3.

Bảng 1.3: Lặp điểm cố định cho  $f(x) = \cos x - x$ ,  $p_0 = \pi/4$

$n$	$p_n$
0	0.7853981635
1	0.7071067810
2	0.7602445972
3	0.7246674808
4	0.7487198858
5	0.7325608446
6	0.7434642113
7	0.7361282565

Từ bảng trên, có thể kết luận nghiệm  $p \approx 0.74$ .

(b) Để áp dụng phương pháp Newton, ta có

$$f'(x) = -\sin x - 1.$$

Với  $p_0 = \pi/4$ , lần lượt tính được:

$$p_1 = p_0 - \frac{\cos(\pi/4) - \pi/4}{-\sin(\pi/4) - 1} \approx 0.7395361337,$$

$$p_2 = p_1 - \frac{\cos(p_1) - p_1}{-\sin(p_1) - 1} \approx 0.7390851781,$$

$$p_3 = p_2 - \frac{\cos(p_2) - p_2}{-\sin(p_2) - 1} \approx 0.7390851332.$$

Kết quả được trình bày trong Bảng 1.4.

Bảng 1.4: Phương pháp Newton cho  $f(x) = \cos x - x$ ,  $p_0 = \pi/4$

$n$	$p_n$
0	0.7853981635
1	0.7395361337
2	0.7390851781
3	0.7390851332
4	0.7390851332

Chỉ sau ba bước lặp, nghiệm gần đúng đã đạt  $p \approx 0.7390851332$ , chính xác hơn nhiều so với bảy bước lặp điểm cố định.

*Hội tụ khi dùng phương pháp Newton*

Ví dụ 1 đã cho thấy phương pháp Newton có thể tạo ra xấp xỉ cực kỳ chính xác chỉ với rất ít bước lặp. Trong ví dụ đó, chỉ một lần lặp Newton đã cho độ chính xác tốt hơn bảy lần lặp bằng phương pháp điểm cố định. Bây giờ, ta sẽ xem xét kỹ hơn để hiểu tại sao Newton lại hiệu quả như vậy.

Khai triển Taylor ở đầu mục 2.3 đã chỉ ra tầm quan trọng của việc chọn gần đúng ban đầu chính xác. Giả định then chốt là số hạng bậc hai  $(p - p_0)^2$  nhỏ hơn nhiều so với  $|p - p_0|$ , nên có thể bỏ qua. Điều này rõ ràng không đúng trừ khi  $p_0$  đủ gần nghiệm  $p$ . Nếu  $p_0$  không đủ gần nghiệm thực sự, thì khó có lý do để tin rằng Newton sẽ hội tụ về nghiệm. Tuy nhiên, trong một số trường hợp, ngay cả những xấp xỉ ban đầu kém cũng có thể dẫn đến hội tụ (xem thêm các Bài tập 15 và 16).

Định lý sau đây làm sáng tỏ sự hội tụ của phương pháp Newton và nhấn mạnh tầm quan trọng của việc chọn giá trị khởi đầu  $p_0$ .

*Định lý (Hội tụ của phương pháp Newton)*

Giả sử  $f \in C^2[a, b]$ . Nếu  $p \in (a, b)$  thỏa mãn  $f(p) = 0$  và  $f'(p) \neq 0$ , thì tồn tại một  $\delta > 0$  sao cho phương pháp Newton sinh ra dãy  $\{p_n\}_{n=1}^\infty$  hội tụ về  $p$  với mọi giá trị khởi đầu  $p_0 \in [p - \delta, p + \delta]$ .

**Phác thảo chứng minh.** Xem phương pháp Newton như một lặp điểm cố định:

$$p_n = g(p_{n-1}), \quad n \geq 1,$$

trong đó

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Ta cần tìm một khoảng  $[p - \delta, p + \delta]$  sao cho  $g$  ánh xạ khoảng này vào chính nó và tồn tại hằng số  $k < 1$  sao cho  $|g'(x)| \leq k$  trên đó.

Vì  $f'(p) \neq 0$  và  $f \in C^2$ , nên  $g$  khả vi và liên tục trong một lân cận của  $p$ . Hơn nữa,

$$g'(p) = \frac{f(p)f''(p)}{[f'(p)]^2} = 0,$$

vì  $f(p) = 0$ . Do đó, tồn tại  $\delta > 0$  sao cho  $|g'(x)| < k < 1$  với mọi  $x \in [p - \delta, p + \delta]$ .

Theo Định lý điểm cố định, dãy  $\{p_n\}$  sẽ hội tụ đến điểm cố định  $p$ .



### ***The Secant Method***

Phương pháp Newton là một kỹ thuật rất mạnh, nhưng có một nhược điểm lớn: cần biết giá trị của đạo hàm  $f'(x)$  tại mỗi bước lặp. Trong nhiều trường hợp, việc tính đạo hàm còn khó khăn và tốn nhiều phép tính hơn so với tính  $f(x)$ .

Để khắc phục vấn đề này, ta xét một biến thể: thay vì sử dụng  $f'(p_{n-1})$ , ta xấp xỉ nó bằng công thức sai phân

$$f'(p_{n-1}) \approx \frac{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}{p_{n-1} - p_{n-2}}.$$

Thay vào công thức Newton, ta thu được

$$p_n = p_{n-1} - f(p_{n-1}) \cdot \frac{p_{n-1} - p_{n-2}}{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}, \quad n > 1. \quad (2.12)$$

Kỹ thuật này được gọi là *phương pháp Secant* và được mô tả trong Thuật toán 2.4.

Phương pháp bắt đầu với hai giá trị khởi đầu  $p_0$  và  $p_1$ . Nghiệm gần đúng  $p_2$  chính là giao điểm với trục hoành của đường secant đi qua hai điểm  $(p_0, f(p_0))$  và  $(p_1, f(p_1))$ . Sau đó,  $p_3$  được tính bằng giao điểm của secant nối  $(p_1, f(p_1))$  và  $(p_2, f(p_2))$ , và tiếp tục như vậy.

Điểm quan trọng là, sau khi tính  $f(p_0)$  và  $f(p_1)$ , mỗi bước của phương pháp Secant chỉ cần thêm một phép tính giá trị hàm số. Trong khi đó, mỗi bước của Newton yêu cầu cả  $f$  và  $f'$ . Vì vậy, trong nhiều trường hợp phương pháp Secant là một lựa chọn kinh tế hơn.

—

### ***Thuật toán – Phương pháp Secant***

INPUT: hai giá trị khởi đầu  $p_0, p_1$ , sai số cho phép TOL, số lần lặp tối đa  $N_0$ .

OUTPUT: nghiệm gần đúng  $p$ , hoặc thông báo thất bại.

(1) Đặt  $i = 2$ .

(2) Trong khi  $i \leq N_0$ , thực hiện:

(a) Tính

$$p = p_{i-1} - f(p_{i-1}) \cdot \frac{p_{i-1} - p_{i-2}}{f(p_{i-1}) - f(p_{i-2})}.$$

- (b) Nếu  $|p - p_{i-1}| < \text{TOL}$ , thì xuất  $p$  và **STOP**.
  - (c) Đặt  $i = i + 1$ ,  $p_{i-2} = p_{i-1}$ ,  $p_{i-1} = p$ .
- (3) Nếu chưa hội tụ sau  $N_0$  bước, xuất thông báo: “Phương pháp thất bại sau  $N_0$  lần lặp.” và **STOP**.

### Phương pháp dây cung

Phương pháp Secant có thể hội tụ nhanh hơn phương pháp Newton trong một số trường hợp, nhưng nó không đảm bảo giữ nghiệm xấp xỉ trong khoảng ban đầu  $[a, b]$ . Nếu  $f(a)$  và  $f(b)$  trái dấu, phương pháp dây cung (*method of false position*, hay *Regula Falsi*) vừa tận dụng ý tưởng secant vừa giữ được tính chất “bracketing” như phương pháp chia đôi.

Ý tưởng cơ bản là: bắt đầu với  $a_0$  và  $b_0$  sao cho  $f(a_0)f(b_0) < 0$ . Xác định  $p_0$  là giao điểm trục hoành của đường secant qua  $(a_0, f(a_0))$  và  $(b_0, f(b_0))$ , tức là

$$p_0 = b_0 - f(b_0) \frac{b_0 - a_0}{f(b_0) - f(a_0)}.$$

Nếu  $f(p_0) = 0$  thì  $p_0$  chính là nghiệm. Nếu không, ta chọn cặp khoảng mới  $[a_1, b_1]$  sao cho  $f(a_1)f(b_1) < 0$ , trong đó một đầu mút là  $p_0$  và đầu mút còn lại được giữ từ bước trước. Tiếp tục quá trình để thu được dãy  $\{p_n\}$ .

### Thuật toán – Phương pháp dây cung

INPUT:  $a, b$  sao cho  $f(a)f(b) < 0$ ; sai số cho phép  $\text{TOL}$ ; số lần lặp tối đa  $N_0$ .

OUTPUT: nghiệm gần đúng  $p$ , hoặc thông báo thất bại.

- (1) Đặt  $i = 1$ .
- (2) Trong khi  $i \leq N_0$ , thực hiện:
  - (a) Tính
 
$$p = b - f(b) \frac{b - a}{f(b) - f(a)}.$$
  - (b) Nếu  $|f(p)| < \text{TOL}$ , thì xuất  $p$  và **STOP**.
  - (c) Nếu  $f(a)f(p) < 0$ , đặt  $b = p$ ; ngược lại, đặt  $a = p$ .
  - (d) Đặt  $i = i + 1$ .
- (3) Nếu chưa hội tụ sau  $N_0$  bước, xuất thông báo: “Phương pháp thất bại sau  $N_0$  lần lặp.” và **STOP**.

## 1.4 Phân tích sai số cho các phương pháp lặp (Error Analysis for Iterative Methods)

Trong phần này, ta khảo sát *bậc hội tụ* của các sơ đồ lặp hàm, từ đó rút ra phương pháp Newton như một công cụ để đạt hội tụ nhanh. Đồng thời, ta cũng xem xét các cách cải thiện tốc độ hội tụ của Newton trong một số trường hợp đặc biệt.

Trước hết, cần một khái niệm để đo tốc độ hội tụ của một dãy.

*Định nghĩa 2.7 (Bậc hội tụ)*

Giả sử  $\{p_n\}$  là một dãy hội tụ về  $p$ , với  $p_n \neq p$  với mọi  $n$ . Nếu tồn tại các hằng số dương  $\lambda$  và  $\alpha$  sao cho

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|^\alpha} = \lambda,$$

thì ta nói dãy  $\{p_n\}$  hội tụ về  $p$  với **bậc**  $\alpha$ , và  $\lambda$  được gọi là *hằng số sai số tiệm cận*.

Một kỹ thuật lặp dạng  $p_n = g(p_{n-1})$  được gọi là *hội tụ bậc  $\alpha$*  nếu dãy  $\{p_n\}$  hội tụ về nghiệm  $p = g(p)$  với bậc  $\alpha$ .

Nói chung, bậc hội tụ càng cao thì dãy càng nhanh tiến tới nghiệm. Hằng số  $\lambda$  cũng ảnh hưởng đến tốc độ, nhưng yếu tố quyết định là bậc  $\alpha$ . Hai trường hợp thường gặp:

- (1) Nếu  $\alpha = 1$  và  $\lambda < 1$ , dãy hội tụ tuyến tính (*linear convergence*).
- (2) Nếu  $\alpha = 2$ , dãy hội tụ bậc hai (*quadratic convergence*).

Ví dụ minh họa tiếp theo sẽ so sánh một dãy hội tụ tuyến tính với một dãy hội tụ bậc hai, cho thấy lý do tại sao nên tìm các phương pháp có bậc hội tụ cao.

### **Minh họa**

Giả sử  $\{p_n\}$  là dãy hội tụ tuyến tính về 0 với hằng số sai số tiệm cận 0.5, tức là

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|p_{n+1}|}{|p_n|} = 0.5.$$

Đồng thời, xét một dãy  $\{q_n\}$  hội tụ bậc hai về 0 với cùng hằng số sai số tiệm cận 0.5, tức là

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|q_{n+1}|}{|q_n|^2} = 0.5.$$

Với giả thiết  $|p_0| = |q_0| = 1$ , Bảng 1.5 so sánh tốc độ hội tụ của hai dãy.

Bảng 1.5: So sánh tốc độ hội tụ tuyến tính và bậc hai

$n$	Tuyến tính: $(0.5)^n$	Bậc hai: $(0.5)^{2^{n-1}}$
1	$5.0000 \times 10^{-1}$	$5.0000 \times 10^{-1}$
2	$2.5000 \times 10^{-1}$	$1.2500 \times 10^{-1}$
3	$1.2500 \times 10^{-1}$	$7.8125 \times 10^{-3}$
4	$6.2500 \times 10^{-2}$	$3.0518 \times 10^{-5}$
5	$3.1250 \times 10^{-2}$	$4.6566 \times 10^{-10}$
6	$1.5625 \times 10^{-2}$	$1.0842 \times 10^{-19}$
7	$7.8125 \times 10^{-3}$	$5.8775 \times 10^{-39}$

Ta thấy dãy hội tụ bậc hai đạt độ chính xác  $10^{-38}$  chỉ sau 7 bước, trong khi dãy hội tụ tuyến tính cần ít nhất 126 bước để đạt cùng mức chính xác.

### **Định lý 2.8**

Giả sử  $g \in C[a, b]$  và  $g$  ánh xạ  $[a, b]$  vào chính nó. Giả sử thêm rằng  $g'$  liên tục trên  $(a, b)$  và tồn tại hằng số  $k < 1$  sao cho

$$|g'(x)| \leq k, \quad \forall x \in (a, b).$$

Nếu  $g'(p) \neq 0$ , thì với mọi giá trị khởi đầu  $p_0 \neq p$  trong  $[a, b]$ , dãy

$$p_n = g(p_{n-1}), \quad n > 1,$$

hội tụ tuyến tính về nghiệm duy nhất  $p \in [a, b]$ , với hằng số sai số tiệm cận  $|g'(p)|$ .

### **Định lý 2.9**

Giả sử  $p$  là nghiệm của phương trình  $x = g(x)$ . Nếu  $g'(p) = 0$  và  $g''$  liên tục với  $|g''(x)| < M$  trên một khoảng mở  $I$  chứa  $p$ , thì tồn tại  $\delta > 0$  sao cho, với mọi  $p_0 \in [p - \delta, p + \delta]$ , dãy

$$p_n = g(p_{n-1}), \quad n > 1,$$

hội tụ ít nhất bậc hai đến  $p$ . Hơn nữa, với  $n$  đủ lớn,

$$|p_{n+1} - p| \leq \frac{M}{2} |p_n - p|^2.$$

### **Multiple Roots**

Trong các phần trước, ta đã giả định rằng  $f'(p) \neq 0$ , với  $p$  là nghiệm của phương trình  $f(x) = 0$ . Tuy nhiên, trong thực tế, khi  $f'(p) = 0$  đồng thời với  $f(p) = 0$ , các phương pháp Newton và Secant thường gặp khó khăn. Để xem xét chi tiết hơn vấn đề này, ta đưa ra định nghĩa sau.

**Định nghĩa 2.10 (Nghiệm bội)**

Một nghiệm  $p$  của phương trình  $f(x) = 0$  được gọi là *nghiệm bội (zero of multiplicity)* bậc  $m$  của  $f$  nếu, với mọi  $x \neq p$ , ta có thể viết

$$f(x) = (x - p)^m q(x),$$

trong đó

$$\lim_{x \rightarrow p} q(x) \neq 0.$$

Với đa thức,  $p$  là nghiệm bội bậc  $m$  của  $f$  nếu  $f(x) = (x - p)^m q(x)$  và  $q(p) \neq 0$ .

Về bản chất,  $q(x)$  biểu diễn phần của hàm  $f(x)$  không đóng góp vào nghiệm tại  $x = p$ . Kết quả tiếp theo sẽ giúp xác định các *nghiệm đơn (simple zeros)*, tức là những nghiệm có bội bằng 1.

**Định lý 2.11**

Giả sử  $f \in C^1[a, b]$ . Hàm  $f$  có *nghiệm đơn (simple zero)* tại  $p \in (a, b)$  khi và chỉ khi

$$f(p) = 0 \quad \text{và} \quad f'(p) \neq 0.$$

**Định lý 2.12**

Giả sử  $f \in C^m[a, b]$ . Hàm  $f$  có nghiệm bội  $m$  tại  $p \in (a, b)$  khi và chỉ khi

$$0 = f(p) = f'(p) = f''(p) = \cdots = f^{(m-1)}(p), \quad \text{nhưng} \quad f^{(m)}(p) \neq 0.$$

Kết quả trong Định lý 2.12 cho thấy rằng nếu tồn tại một lân cận của  $p$  mà tại đó phương pháp Newton được áp dụng, thì nó sẽ hội tụ bậc hai về  $p$  đối với mọi giá trị khởi đầu  $p_0$  đủ gần  $p$ , miễn là  $p$  là nghiệm đơn. Ví dụ tiếp theo sẽ minh họa rằng hội tụ bậc hai có thể không xảy ra khi nghiệm không phải là nghiệm đơn.

*Ví dụ 1 – Ảnh hưởng của nghiệm bội đến phương pháp Newton*

Xét hàm

$$f(x) = e^x - x - 1.$$

- (a) Chứng minh rằng  $f$  có nghiệm bội 2 tại  $x = 0$ .
- (b) Áp dụng phương pháp Newton với  $p_0 = 1$  để khảo sát tốc độ hội tụ.

**Lời giải.**

(a) Ta có

$$f'(x) = e^x - 1, \quad f''(x) = e^x.$$

Tại  $x = 0$ , ta nhận được

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = 1 \neq 0.$$

Do đó,  $x = 0$  là nghiệm bội 2 của  $f(x)$ .

(b) Áp dụng công thức Newton

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})} = p_{n-1} - \frac{e^{p_{n-1}} - p_{n-1} - 1}{e^{p_{n-1}} - 1}.$$

Với  $p_0 = 1$ , ta thu được:

$$\begin{aligned} p_1 &= 1 - \frac{e - 2}{e - 1} \approx 0.5819767, \\ p_2 &= 0.5819767 - \frac{e^{0.5819767} - 0.5819767 - 1}{e^{0.5819767} - 1} \approx 0.3190623, \\ p_3 &\approx 0.1729500, \\ p_4 &\approx 0.0906560, \\ p_5 &\approx 0.0460287. \end{aligned}$$

Bảng 1.6: Các giá trị lặp của phương pháp Newton cho  $f(x) = e^x - x - 1$

$n$	$p_n$
0	1.0000000
1	0.5819767
2	0.3190623
3	0.1729500
4	0.0906560
5	0.0460287

Ta thấy dãy  $\{p_n\}$  hội tụ đến nghiệm  $p = 0$ , nhưng tốc độ hội tụ chỉ là *tuyến tính*, không phải bậc hai như trường hợp nghiệm đơn. Đây chính là hiện tượng chung của phương pháp Newton khi áp dụng cho các nghiệm bội.

## 1.5 Tăng tốc độ hội tụ (Accelerating Convergence)

Định lý 2.8 cho thấy rằng hội tụ bậc hai là một tính chất hiếm khi đạt được. Phần này giới thiệu một kỹ thuật gọi là *phương pháp Aitken's  $\Delta^2$* , dùng để *tăng tốc quá*

trình hội tụ tuyến tính của một dãy, bất kể dãy đó bắt nguồn từ đâu hay áp dụng trong trường hợp nào.

Nhà toán học Alexander Aitken (1895–1967) đã đề xuất kỹ thuật này năm 1926 để tăng tốc hội tụ của các chuỗi trong nghiên cứu về phương trình đại số. Quá trình này tương tự với phương pháp đã được nhà toán học Nhật Bản Takakazu Seki Kowa (1642–1708) sử dụng từ thế kỷ 17.

### Phương pháp Aitken's $\Delta^2$

Giả sử  $\{p_n\}_{n=0}^\infty$  là dãy hội tụ tuyến tính đến giới hạn  $p$ . Để xây dựng một dãy hội tụ nhanh hơn, ta giả định rằng các sai số  $(p_n - p)$ ,  $(p_{n+1} - p)$  và  $(p_{n+2} - p)$  có cùng dấu và  $n$  đủ lớn sao cho

$$\frac{p_{n+1} - p}{p_n - p} = \frac{p_{n+2} - p}{p_{n+1} - p}.$$

Giải phương trình này theo  $p$  thu được:

$$p = p_n - \frac{(p_{n+1} - p_n)^2}{p_{n+2} - 2p_{n+1} + p_n}.$$

Công thức trên định nghĩa *một dãy mới* hội tụ nhanh hơn đến  $p$  so với dãy gốc  $\{p_n\}$ .

#### Ví dụ 1

Xét dãy  $p_n = \cos(1/n)$ , hội tụ tuyến tính đến  $p = 1$ . Dùng phương pháp Aitken's  $\Delta^2$  để tạo ra năm phần tử đầu tiên của dãy hội tụ nhanh hơn.

**Lời giải.** Để tính một phần tử  $p_n^{(A2)}$ , cần ba phần tử liên tiếp  $p_n, p_{n+1}, p_{n+2}$  của dãy gốc. Do đó, để xác định  $p_5^{(A2)}$ , cần bảy phần tử đầu tiên của  $\{p_n\}$ . Bảng dưới đây cho thấy dãy  $\{p_n^{(A2)}\}$  hội tụ đến  $p = 1$  nhanh hơn rõ rệt so với  $\{p_n\}$ .

Bảng 1.7: So sánh tốc độ hội tụ của dãy gốc và dãy Aitken's  $\Delta^2$

$n$	$p_n = \cos(1/n)$	$p_n^{(A2)}$
1	0.540302	—
2	0.877583	—
3	0.940007	0.998947
4	0.968912	1.000020
5	0.983347	1.000000
6	0.991698	1.000000
7	0.996043	1.000000

**Định nghĩa 2.13 (Sai phân tiến)**

Với dãy  $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ , *sai phân tiến* (*forward difference*) được định nghĩa là

$$\Delta p_n = p_{n+1} - p_n, \quad n \geq 0.$$

Sai phân bậc cao hơn được định nghĩa đệ quy:

$$\Delta^k p_n = \Delta(\Delta^{k-1} p_n), \quad k \geq 2.$$

Do đó,

$$\Delta^2 p_n = p_{n+2} - 2p_{n+1} + p_n.$$

Khi đó, công thức Aitken có thể được viết gọn dưới dạng:

$$p_n^{(A2)} = p_n - \frac{(\Delta p_n)^2}{\Delta^2 p_n}.$$

**Định lý 2.14**

Giả sử  $\{p_n\}$  hội tụ tuyến tính đến giới hạn  $p$  và

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n+1} - p}{p_n - p} = \lambda, \quad |\lambda| < 1.$$

Khi đó, dãy Aitken  $\{p_n^{(A2)}\}$  hội tụ đến  $p$  *nhANH hơn* dãy ban đầu, theo nghĩa:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n^{(A2)} - p}{p_n - p} = 0.$$

**Phương pháp Steffensen**

Bằng cách áp dụng một biến thể của phương pháp Aitken's  $\Delta^2$  cho một dãy hội tụ tuyến tính thu được từ quá trình lặp điểm cố định, ta có thể tăng tốc độ hội tụ lên bậc hai. Thủ tục này được gọi là *phương pháp Steffensen*, và chỉ khác một chút so với việc áp dụng trực tiếp công thức Aitken's  $\Delta^2$  cho dãy lặp điểm cố định hội tụ tuyến tính.

Phương pháp Aitken's  $\Delta^2$  xây dựng các phần tử theo thứ tự:

$$p_0, \quad p_1 = g(p_0), \quad p_2 = g(p_1), \quad \hat{p}_0 = [\Delta^2](p_0),$$

trong đó ký hiệu  $[\Delta^2]$  biểu thị công thức (2.15) được sử dụng, tức là

$$\hat{p}_0 = p_0 - \frac{(p_1 - p_0)^2}{p_2 - 2p_1 + p_0}.$$



Tiếp tục quá trình, ta có

$$p_3 = g(p_2), \quad \hat{p}_1 = [\Delta^2](p_1), \text{ v.v.}$$

Phương pháp Steffensen xây dựng các phần tử đầu tiên  $p_0, p_1, p_2$  và  $\hat{p}_0$  giống như phương pháp Aitken, nhưng sau đó sử dụng  $\hat{p}_0$  làm giá trị khởi đầu mới thay vì  $p_2$ .

Nói cách khác, ta có dãy được tạo thành:

$$p_0^{(0)}, \quad p_1^{(0)} = g(p_0^{(0)}), \quad p_2^{(0)} = g(p_1^{(0)}), \quad p_0^{(1)} = [\Delta^2](p_0^{(0)}), \quad p_1^{(1)} = g(p_0^{(1)}), \dots$$

Cứ mỗi ba phần tử, một phần tử mới của dãy Steffensen được sinh ra bằng công thức Aitken's  $\Delta^2$ , trong khi các phần tử còn lại được tính bằng phép lặp điểm cố định thông thường.

### ***Thuật toán – Phương pháp Steffensen***

INPUT: Giá trị khởi đầu  $p_0$ , sai số cho phép TOL, và số lần lặp tối đa  $N_0$ .

OUTPUT: Nghiệm gần đúng  $p$ , hoặc thông báo thất bại.

- (1) Đặt  $i = 1$ .
- (2) Trong khi  $i \leq N_0$ , thực hiện các bước 3–6:
  - (a) Tính  $p_1 = g(p_0)$ ;
  - (b) Tính  $p_2 = g(p_1)$ ;
  - (c) Tính
 
$$p = p_0 - \frac{(p_1 - p_0)^2}{p_2 - 2p_1 + p_0}.$$
  - (d) Nếu  $|p - p_0| < \text{TOL}$ , thì xuất  $p$  và **STOP** (thủ tục thành công).
- (3) Đặt  $i = i + 1$ .
- (4) Gán  $p_0 = p$  (cập nhật giá trị khởi đầu).
- (5) Nếu  $i > N_0$ , xuất thông báo: “Phương pháp thất bại sau  $N_0$  lần lặp.” và **STOP**.

*Ghi chú:* Nếu mẫu số  $(p_2 - 2p_1 + p_0)$  bằng 0, thì công thức Aitken's  $\Delta^2$  không xác định. Trong trường hợp đó, thuật toán sẽ dừng và lấy  $p_2$  làm xấp xỉ tốt nhất có thể.

*Minh hoạ*

Để giải phương trình

$$x^3 + 4x^2 - 10 = 0$$

bằng *phương pháp Steffensen*, ta viết lại

$$x^3 + 4x^2 = 10,$$

suy ra công thức lặp điểm cố định:

$$g(x) = \sqrt{\frac{10}{x+4}}.$$

Phương pháp lặp điểm cố định này đã được xét trong Bảng 2.2, cột (d) của Mục 2.2. Áp dụng quy trình Steffensen với  $p_0 = 1.5$ , ta thu được các giá trị trong Bảng 1.8. Giá trị  $p_0^{(2)} = 1.365230013$  chính xác đến chữ số thập phân thứ 9.

Trong ví dụ này, phương pháp Steffensen cho kết quả chính xác tương đương với phương pháp Newton, *nhưng không cần tính đạo hàm*. Kết quả tương tự có thể quan sát ở phần minh hoạ cuối của Mục 2.2.

Bảng 1.8: Các bước lặp của phương pháp Steffensen cho  $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$

$k$	$p_0^{(k)}$	$p_1^{(k)} = g(p_0^{(k)})$	$p_2^{(k)} = g(p_1^{(k)})$
0	1.5	1.348399725	1.367376372
1	1.365265224	1.365225534	1.365230583
2	1.365230013	—	—

***Định lý 2.15 (Hội tụ bậc hai của phương pháp Steffensen)***

Giả sử  $x = g(x)$  có nghiệm  $p$  với  $g'(p) \neq 0$ . Nếu tồn tại  $\delta > 0$  sao cho  $g \in C^3[p - \delta, p + \delta]$ , thì phương pháp Steffensen hội tụ *bậc hai* về  $p$  cho mọi giá trị khởi đầu  $p_0 \in [p - \delta, p + \delta]$ .

## **2      Chương 2: Nghiệm của phương trình một ẩn**

### 3 Chương 7

## Tài liệu tham khảo

- [1] Softmax function: <https://machinelearningcoban.com/2017/02/17/softmax/>
- [2] Random Forest: [https://machinelearningcoban.com/tabml\\_book/ch\\_model/random\\_forest.htm](https://machinelearningcoban.com/tabml_book/ch_model/random_forest.htm)
- [3] Gradient Boosting: [https://en.wikipedia.org/wiki/Gradient\\_boosting](https://en.wikipedia.org/wiki/Gradient_boosting)
- [4] PCA: <https://machinelearningcoban.com/2017/06/15/pca/>

## Phụ lục

### Chương trình chạy

- File code "analyze\_dataset\_fulldata.ipynb" chứa code phân tích và xây dựng mô hình trong trường hợp đầy đủ data không loại bỏ các data null
- File code "analyze\_dataset\_notnull\_HRS1.ipynb" chứa code phân tích và xây dựng mô hình trong trường hợp đã loại bỏ các giá trị null trong biến HRS1
- File data "filtered\_gss2016\_data.csv" là data sau khi trích lọc các biến cần phân tích