ÁLGEBRA LINEAL

1º GRADO DE INGENIERÍA INFORMÁTICA

GREGORIO CORPAS PRIETO

PRÁCTICA 3

SISTEMAS DE ECUACIONES Y GAUSS

Ejercicio 1

Resolver la ecuación 3X - 2A = 5B siendo $A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

$$3\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} = 5B+2A \Rightarrow \begin{pmatrix}3a & 3b\\ 3c & 3d\end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}3 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}3a & 3b\\ 3c & 3d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}15 & 5\\ 0 & -5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}6 & 0\\ 4 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}21/3 & 5/3\\ 4/3 & -3/3\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix}7 & 5/3\\ 4/3 & -1\end{pmatrix}$$

Ejercicio 2

Resolver el siguiente sistema matricial:
$$\left.\begin{array}{l} 2A+B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \\ A-3B=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}-2A \\ \\ A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -7 & -2 \end{pmatrix}+3B \end{array}\right\} \Rightarrow B+2\left[\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -7 & -2 \end{pmatrix}+3B\right]=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$B+\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -14 & -4 \end{pmatrix}+6B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow 7B+\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -14 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$7\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -14 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 7a+2=2 \\ 7b+8=1 \\ 7c-14=7 \\ 7d-4=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{2-2}{7} \\ b=\frac{1-8}{7} \\ c=\frac{7+14}{7} \\ d=\frac{3+4}{7} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-7/7=-1 \\ c=21/7=3 \\ d=7/7=1 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -7 & -2 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -7 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}}$$

Ejercicio 3

Sea $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ Hallar $S=A^1 + A^2 + A^3 + A^4 + \cdots A^{50}$

$$A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix}1 & 2+2 & 3+3\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix}1 & 4 & 6\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2\cdot A \Rightarrow A^3 = \begin{pmatrix}1 & 4 & 6\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow A^3 = \begin{pmatrix}1 & 2+4 & 3+6\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow A^3 = \begin{pmatrix}1 & 6 & 9\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix}1 & 2n & 3n\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2}\, n$$

$$S = \frac{A^1 + A^{50}}{2}\cdot 50 \Rightarrow S = \frac{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 100 & 150\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}{2}\cdot 50 \Rightarrow$$

$$S = \frac{\begin{pmatrix}2 & 102 & 153\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}}{2}\cdot 50 \Rightarrow S = \begin{pmatrix}1 & 51 & 76'5\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot 50 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \begin{pmatrix}50 & 2550 & 3825\\ 0 & 50 & 0\\ 0 & 0 & 50\end{pmatrix}$$

Ejercicio 4

Resolver el ejercicio anterior con ordenador de una forma eficiente

```
clc;
numero=input('Introduce el numero de elementos de la sucesión a sumar: ');

P=eye(3);
S=zeros(3);

A=[1 2 3;0 1 0;0 0 1];

for i=1:numero
    P=P*A;
    S=S+P;
end

fprintf('La matriz resultante de sumar los %d elementos es:\n ',numero);
disp(S);
```

Ejercicio 5

Hallar una matriz triangular superior T tal que, si A es la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Se cumpla que A = T * T^2

$$A = T \cdot T^t \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & d & 0 \\ c & e & f \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a^2+b^2+c^2 & bd+ce & cf \\ db+ec & d^2+e^2 & ef \\ fc & ef & f^2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 6

Dadas dos matrices A y B, Matlab calcula el producto de ambas usando la orden *, siempre que las dimensiones de ambas matrices sean las adecuadas.

Haz un programa de ordenador que calcule el producto de ambas matrices sin usar el operador * del producto matricial.

```
clc;

A=[1 2; 2 3; 1 2]
B=[1 2 3; -1 1 0]

%Otro ejemplo que serviría:
%A=[1 2 3 4; 3 2 4 4]
%B=[4 5 5 5 5;6 8 8 9 0;0 8 7 6 6;0 9 8 8 8]

C=zeros(size(A)(1),size(B)(2)); % FILAS A, COLUMNAS B

if(size(A)(2)~=size(B)(1))
    fprintf('No se pueden multiplicar\n');
else
    for i=1:size(A)(1)
        for j=1:size(B)(2) % cada celda de C contendrá:
            for k=1:size(B)(1)
                C(i,j)=C(i,j)+A(i,k) * B(k,j);
            end
        end
    end
end

disp(C)
```

Ejercicio 7

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ calcula la matriz B = A^2 - 6A + 5I

El programa ha de ser genérico y válido para cualquier matriz A que escribamos al principio del programa.

```
clc
A=[1 -1 3;2 0 4;3 4 3]
if(size(A)(1)==size(A)(2))
    I=eye(size(A)(1),size(A)(2))
    disp('Solución generada elevando al cuadrado');
    A^2 - 6*A + 5*I
    C=zeros(size(A)(1),size(A)(2));
    for i=1:size(A)(1)
        for j=1:size(A)(2)
            for k=1:size(A)(1)
                C(i,j)=C(i,j)+A(i,k)*A(k,j);
            end
        end
    end
    disp('Solución generada multiplicando mediante bucles');
    C-6*A+5*I
else
    disp('Imposible operar, tamaño de matriz incorrecto')
end
```

Ejercicio 8

Dada la matriz $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 2 & -1/2 \\ 1 & -1 & -1/2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, aplica el método de Gauss

```
clc
format rat
A=[-1 -2 0 -1 0; -2 1 1 2 -1/2; 1 -1 -1/2 2 2; 0 0 -1 2 2]

A(2,:)=A(2,:)+A(1,:)*(-2);
A(3,:)=A(3,:)+A(1,:);

disp('Primera iteracion')
A

A(3,:)=A(3,:)+A(2,:)*(3/5);

disp('Segunda iteracion')
A

A(4,:)=A(4,:)+A(3,:)*(1/(1/10));

disp('Tercera iteracion')
A
```

Primera iteracion

A =

-1	-2	0	-1	0
0	5	1	4	-1/2
0	-3	-1/2	1	2
0	0	-1	2	2

Segunda iteracion

A =

-1	-2	0	-1	0
0	5	1	4	-1/2
0	0	1/10	17/5	17/10
0	0	-1	2	2

Tercera iteracion

A =

-1	-2	0	-1	0
0	5	1	4	-1/2
0	0	1/10	17/5	17/10
0	0	0	36	19

Ejercicio 9

Para la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ calcular la matriz reducida de Gauss

```
clc

format rat

A=[2 2 0 1 0; 3 1 1 2 -1; 1 0 -1 2 2; 2 0 -1 2 2]

%Unitarizando
A(1,:)=A(1,:)/2;
%Convirtiendo en cero
A(2,:)=A(2,:)+A(1,:)*(-3);
A(3,:)=A(3,:)+A(1,:)*(-1);
A(4,:)=A(4,:)+A(1,:)*(-2);

disp('Primera iteracion')
A

%Unitarizando
A(2,:)=A(2,:)/(-2);
%Convirtiendo en cero
A(3,:)=A(3,:)+A(2,:);
A(4,:)=A(4,:)+A(2,:)*(2);

disp('Segunda iteracion')
A

%Unitarizando
A(3,:)=A(3,:)*(-2/3)
%Convirtiendo en cero
A(4,:)=A(4,:)+A(3,:)*2;

disp('Tercera iteracion')
A

%Unitarizando

A(4,:)=A(4,:)*(-6/7);
disp('Cuarta iteracion')
A
```

Primera iteracion

A =

1	1	0	1/2	0
0	-2	1	1/2	-1
0	-1	-1	3/2	2
0	-2	-1	1	2

Segunda iteracion

A =

1	1	0	1/2	0
-0	1	-1/2	-1/4	1/2
0	0	-3/2	5/4	5/2
0	0	-2	1/2	3

A =

1	1	0	1/2	0
-0	1	-1/2	-1/4	1/2
-0	-0	1	-5/6	-5/3
0	0	-2	1/2	3

Tercera iteracion

A =

1	1	0	1/2	0
-0	1	-1/2	-1/4	1/2
-0	-0	1	-5/6	-5/3
0	0	0	-7/6	-1/3

Cuarta iteracion

A =

1	1	0	1/2	0
-0	1	-1/2	-1/4	1/2
-0	-0	1	-5/6	-5/3
-0	-0	-0	1	2/7