

## 종이 헬리콥터 낙하해석모델의 통계적 교정 및 검증

김길영\* · 유성범\* · 김동영\* · 김동성\*\* · 최주호†

\*한국항공대학교 항공우주 및 기계공학부, \*\*한국항공대학교 항공우주 및 기계공학과

### Statistical Calibration and Validation of Mathematical Model to Predict Motion of Paper Helicopter

Gil Young Kim\*, Sung Bum Yoo\*, Dong Young Kim\*,  
Dong Seong Kim\*\* and Joo Ho Choi\*†

\*Dept. of Mechanical and Aerospace Engineering, Korea Aerospace Univ.

\*\*School of Mechanical and Aerospace Engineering, Korea Aerospace Univ.

**Key Words:** Paper Helicopter(종이 헬리콥터), Predictive Validation(예측적 검증), Markov Chain Monte-Carlo Simulation(마코브 체인 몬테 카를로 시뮬레이션), Statistical Calibration(통계적 교정), Analysis of Variance(분산 분석)

**초록:** 수학적 해석모델은 물리적 현상을 파악하고 실험비용을 절감하는데 활발하게 사용되지만 편의를 위한 단순화 또는 파라미터가 가지고 있는 불확실성에 의해 해석모델에 의한 예측결과는 실제현상과 차이가 발생한다. 본 연구에서는 이러한 문제에 대해 통계적 기법을 이용하여 해석모델의 불확실성을 반영한 교정 및 검증 방법을 종이 헬리콥터를 통해 제시한다. 먼저, 같은 제원의 세 가지 종이 헬리콥터로 실시한 실험 데이터를 각 그룹으로 형성하여 두 가지 낙하해석모델에서 미지의 입력 파라미터인 항력계수를 교정하는데 사용했다. 그리고 확률분포로 예측된 낙하시간을 실험 데이터 분포와 비교하여 해석모델을 검증하였다. 이 때, Markov Chain Monte Carlo 기법을 활용하여 항력계수의 불확실성을 정량화하였다. 또한 종이 헬리콥터의 그룹별 데이터를 분산분석(Analysis of Variance)를 이용하여 제작오차와 실험오차의 관계를 비교하였고, 각 그룹이 모두 동일한 대상으로 간주해도 됨을 증명하였다.

**Abstract:** Mathematical model is actively used to reduce the experiment expenses for understanding physical phenomena. However, it is different to the real phenomena due to simplifying assumptions or uncertain parameters. In this study, the way of calibrating and validating will be presented through paper helicopter with statistical method to quantify the uncertainty. The data from the experiment using three nominally identical paper helicopters consists of each group and is used to calibrate the drag coefficient, the unknown input parameter in two analytical models. The predicted fall time data is presented on probability distributions. The analysis models are validated by comparing the predicted distribution and the experimental data distribution. Moreover, the uncertainty is quantified by using Markov Chain Monte Carlo. In addition, the manufacturing error and experimental error from the fall time data is compared using Analysis of Variance. As a result, all of the paper helicopters are concerned as one identical model.

† Joo Ho Choi, [jhchoi@kau.ac.kr](mailto:jhchoi@kau.ac.kr)

© 2014 The Korean Society of Mechanical Engineers

## 1. 서론

해석모델은 다양한 공학분야에서 물리적 현상을 파악하고 실험에 들어가는 시간적, 경제적 비용절감을 위해 활발하게 사용된다. 하지만 대부분의 경우 해석모델은 현상에 대한 지식부족 또는 편의를 위해 해석모델을 수학적으로 단순화하거나 입력 파라미터를 알 수 없는 경우가 존재하기 때문에, 해석모델이 시험 데이터를 완벽하게 반영하기가 매우 어렵다. 이 경우 예측모델의 정확도를 높이기 위해 실제 시험데이터를 이용하여 미지 파라미터를 교정(Calibration)하는 방법이 많이 이용되고 있다. 그러나 이 과정에서 해석모델이나 시험의 오차, 제한된 시험횟수 등에 의해 발생하는 불확실성을 제대로 반영하지 않은 채 파라미터를 단일 값으로 교정하여 해석에 활용한다면 이는 잘못된 결론으로 이어질 위험이 있다.

이러한 문제를 해결하기 위해 최근에는 통계기법을 이용하여 불확실성을 정량화하고 이를 해석의 교정에 활용하는 연구들이 많이 발표되고 있다. 대표적 연구로 Bayarri<sup>(1)</sup> 등이 있는데, 저항점 용접과 자동차 충돌문제에 대해서 필드데이터(field data)를 바탕으로 해석모델의 입력 파라미터를 교정하였다. 교정 방법으로 베이지안 확률이론을 활용하였으며, 그 결과 미지의 파라미터는 필드데이터에 의해 교정된 확률분포로 구해졌다.

본 연구에서는 이러한 기법을 종이 헬리콥터 낙하해석모델에 적용하고 불확실성을 반영한 신뢰성 있는 낙하시간 예측을 하고자 한다. 낙하실험 결과를 좌우하는 파라미터들 중에는 클립의 개수, 낙하높이, 항력계수, 제원이 있는데 그 중 항력계수가 불확실성을 가진 유일한 파라미터이다. 그러므로 앞서 언급한 Bayarri의 연구에서처럼 예측모델과 실제모델 사이에서 발생하는 결과의 차이를 교정하는 연구를 진행하기에 적합하다. 또한 종이 헬리콥터는 적은 비용으로 제한적인 환경 속에서도 실험이 가능하여, 학부과정에서 최적설계 또는 통계적 기법을 배우기에 유용하다.

지금까지 종이 헬리콥터와 관련된 다양한 연구가 진행되어 왔는데, 주로 최적설계에 초점이 맞춰져 있었다. Siorek<sup>(2)</sup>이 종이 헬리콥터를 최적설계 강의에서 사용하였는데, 뉴턴 제 2법칙에 기반한 낙하해석모델을 이용해 해석적 및 실험적 측면에서의 최적화를 진행하였다. Annis<sup>(3)</sup>는 종이 헬리콥터의 날개의 기울어짐과 회전속도를 고려하여 통계적 기법을 이용한 최적설계를 진행하였다.

Kevin<sup>(4)</sup>은 Annis가 제시한 모델을 더 발전시켜 특정 조건에서 각종 파라미터를 모두 측정 및 가정하였는데, 측정이 어렵고 불확실한 다수의 파라미터로 인해 본 논문의 목적인 통계적 기법의 이용에 적합하지 않았다.

본 연구와 유사한 주제로 최근 Park<sup>(5)</sup>의 통계적 기법을 통한 낙하해석모델의 교정 및 검증에 관한 연구가 있었다. 그 연구에서는 두 가지 낙하해석모델의 검증을 위해 같은 제원의 세 가지 종이 헬리콥터를 선정하여 불확실성을 가진 파라미터를 통계적 기법을 통해 교정하였다. Park의 결과는 제원이 동일함에도 불구하고 각 종이 헬리콥터에 적합한 낙하해석모델은 상이했다. 이러한 Park의 결과에 의문점이 남아 ANOVA를 이용하여 세 가지 종이 헬리콥터의 제작오차와 측정오차의 관계를 확인하였으며, 이를 통해 Park의 연구에서 간과되었던 측정 및 제작적 측면에서의 문제점을 확인하고 본 연구에 사용된 세 가지 종이 헬리콥터의 동일성을 증명하였다.

2장에서는 본 논문의 실험에 사용했던 종이 헬리콥터 제원, 낙하 해석모델과 실험방법을 언급한다. 3장에서는 낙하해석모델에서 미지의 파라미터인 항력계수에 대한 통계적 교정 및 검증에 대한 소개와 절차를 언급한다. 또한 실험 데이터에 관해 ANOVA를 수행하여 종이 헬리콥터의 제작오차와 측정오차의 비교와 해석모델의 교정 및 검증에

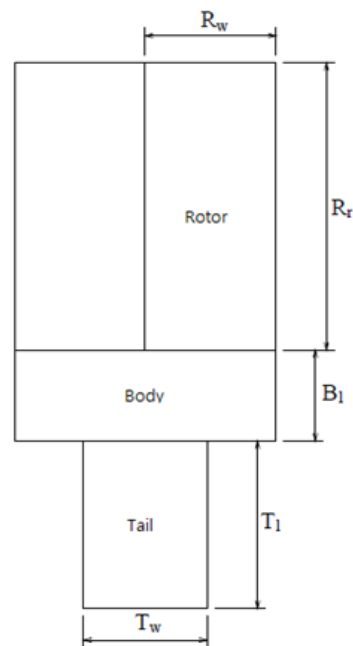


Figure 1 Specifications of paper helicopter used in the experiment ( $R_r=72\text{mm}$ ,  $R_w=32.4\text{mm}$ ,  $B_1=22.8\text{mm}$ ,  $T_1=42\text{mm}$ ,  $T_w=30.6\text{mm}$ )

대한 결과분석을 한다. 그리고 종이 헬리콥터 해석모델에 대한 본 논문과 Park의 논문의 검증결과를 ANOVA를 통해 비교 분석한다.

## 2. 종이 헬리콥터의 낙하모델

### 2.1 종이 헬리콥터 제원

종이 헬리콥터는 로터(Rotor), 몸체(Body), 꼬리(Tail), 그리고 비행 안정장치(flight stabilizer)로 작용하는 클립으로 구성되어 있다.<sup>(5)</sup> 종이 헬리콥터는 Figure 1과 같은 형태로 종이를 자르고 접은 후, 클립을 꼬리의 하단부에 끼워 제작한다. 일반적으로 A4용지를 사용한다.

### 2.2 종이 헬리콥터 낙하해석모델

종이 헬리콥터가 자유낙하 할 때 공기저항력( $F_D$ )을 고려하면 뉴턴 제 2법칙을 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sum F = m \frac{dV}{dt} = W - F_D \quad (1)$$

Reynolds number( $Re$ )에 따라 공기저항력이 낙하속도의 제곱에 비례하는 Quadratic 모델과 속도에 비례하는 Linear 모델의 2가지로 나타낼 수 있다.

$$F_{D,quadratic} = \frac{1}{2} \rho_{air} V^2 A C_D \quad (2)$$

$$F_{D,linear} = \frac{1}{2} \rho_{air} V_0 V A C_D \quad (3)$$

위의 두 가지 해석 모델은 Park<sup>(5)</sup>의 논문에서 제시한 것이고, 이때,  $A = \pi R_f^2$ ,  $V_0 = 3\text{ft/s}$ 와 같다. 일반적으로 높은 Reynolds number ( $10^3 < Re < 2 \times 10^5$ )에서는 Quadratic 모델을 사용하고 낮은 Reynolds number ( $Re < 1$ )에서는 Linear 모델을 사용한다.

#### 2.2.1 Linear 모델

식 (3)에서 언급한 Linear 모델을 적용하여 뉴턴 제 2법칙으로 나타내면 다음과 같다.

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kV \quad (4)$$

이때,  $k = \frac{1}{2} \rho_{air} A C_D V_0$ 로 정의된다.

$$V_{ss} = \frac{mg}{k} \quad (5)$$

와 같이 정의되고, 속도는 시간에 대한 함수로 다음과 같은 식으로 나타내어진다.

$$V(t) = -V_{ss} e^{-\frac{k}{m}t} + V_{ss} = V_{ss}(1 - e^{-\frac{k}{m}t}) \quad (6)$$

속도 식을 적분하면 높이에 대한 식이 다음과 같이 나타내어진다. 이때,  $c = k/m$ 로 정의된다.

$$h(t) = V_{ss} \left( t + \frac{e^{-ct}}{c} \right) - \frac{V_{ss}}{c} \quad (7)$$

#### 2.2.2 Quadratic 모델

식 (2)에서 언급한 Quadratic 모델을 적용하여 뉴턴 제 2법칙으로 나타내면 다음과 같다.

$$m \frac{dV}{dt} = mg - kV^2 \quad (8)$$

이때,  $k = \frac{1}{2} \rho_{air} A C_D$ 로 정의된다.

$$V_{ss} = \sqrt{\frac{mg}{k}} \quad (9)$$

과 같이 정의되고, 속도는 시간에 대한 함수로 다음과 같은 식으로 나타내어진다.

$$V(t) = V_{ss} \tanh\left(\frac{g}{V_{ss}} t\right) \quad (10)$$

속도의 식을 적분을 하면 높이에 대한 식이 다음과 같이 나타내어진다.

$$h(t) = \frac{V_{ss}^2}{g} \ln \cosh \frac{g}{V_{ss}} t \quad (11)$$

### 2.3 실험방법

Linear 및 Quadratic 모델들이 실제 낙하시간 예측에 적합한지를 검증하기 위해 클립개수와 높이에 대해 따른 총 4가지 조건에서 실험을 수행하였다. 그 조건 중 한 가지는 교정을 위한 기준 데이터로 활용되었으며 나머지 3가지 조건에서의 데이터는 예측의 타당성을 검증하기 위해 활용되었다. 서로 다른 조건에서 수집되는 데이터들을 서로 독립이라 가정하였다.

실험 수행 과정에서는 다양한 오차 요인들이 존재한다. 첫째는 제작오차로, 같은 제원의 종이 헬리콥터를 반복하여 만든다 할지라도 완벽하게 동

일한 모델을 만들 수 없기 때문에 발생하는 오차를 말한다. 두 번째는 측정 오차로서, 낙하높이, 시간측정의 부정확성으로 인한 인적 요인과 외란으로 인한 환경적 요인을 포함한다. 따라서 본 연구에서는 제작오차를 줄이기 위하여 도면은 제도 소프트웨어를 이용하여 만들었으며, 한 사람이 제작과정을 모두 맡았다. 낙하시간 측정을 위하여 낙하자 1명과 시간을 측정하는 관측자 4명을 두어 그 평균시간을 사용하였다. 제작오차와 실험오차의 크기를 비교하기 위해서 동일한 재원을 가진 3개의 종이 헬리콥터를 만들어 실험하였으며, 실험을 7회씩 반복하였다. 실험높이는 6.82m, 10.67m로 충분히 높게 설정하고 종이 헬리콥터의 크기를 충분히 작게 하였는데, 이는 과도구간의 영향을 최소화하기 위함이었다.

데이터 분석을 위해서는 실험에 사용되는 종이 헬리콥터 도면 및 클립의 무게를 측정해야 한다. 종이 헬리콥터 무게의 경우 사용할 제품 30장의 무게를 잴 후 평균값을 내어 평량을 계산하고, 도면의 면적과 곱하여 구하는 방식을 택하였다. 클립 또한 30개 표본의 무게를 잴 후 평균값을 계산하였다. 측정값은 다음과 같다.

$$M_{clip} = 0.595g$$

$$\rho_{paper} = 76.843g/m^2$$

### 3. 통계적 교정 및 검증

통계적 교정 및 검증 시스템은 해석모델의 불확실성을 정량화하여 신뢰성을 수치적으로 입증하는 방법으로 교정 (Calibration), 검증 (Validation), 예측 (Prediction) 의 과정을 이루어지며 이는 Figure 2에서 도시적으로 나타내어진다.

교정은 실험 데이터를 이용하여 파라미터의 값을 조정하는 과정으로 예측모델이 실험 데이터를 반영하기 위해 실시된다. 하지만 불확실성을 고려하지 않은 채 파라미터의 값을 결정한다면 좋은 결과를 얻지 못할 것이다. 불확실성을 정량화하여 파라미터를 교정시키는 방법 중, 본 연구에서는 Markov Chain Monte Carlo(MCMC) 기법을 사용하였다. 이 기법은 미지의 파라미터에 대한 실측 데이터가 주어졌을 때 Markov Chain 샘플링 방법을 통해 파라미터의 불확실성을 확률적으로 추정하는 방법이다. 이를 위해  $10^4$  회의 계산을 시행하였다.

그러나 MCMC 는 추정 파라미터가 많을수록 샘플링에 영향을 미치는 요소가 많아 지기 때문에 성능이 저하된다는 단점이 있지만 본 연구에서는 추정 파라미터가 항력계수로 하나이기 때문에 사용하기에 적합하다고 판단했다. 또한 본 연구에서는 MCMC 기법을 구현하는 방법들 중 가장 널리 쓰이는 Metropolis-Hasting algorithm을 이용하였다.<sup>(6)</sup>

앞서 언급된 Linear와 Quadratic 낙하모델에 의하면 종이 헬리콥터의 낙하시간은 다양한 미지의 파라미터에 의해 영향을 받는다. 그 중에서 항력계수  $C_D$  는 유체역학적으로 형상에 의해 값이 결정되는 것이 일반적인데, 종이 헬리콥터의 낙하형상이 일정하지 않기 때문에 단일 값으로 결정하기 어렵다. 따라서 항력계수를 불확실성을 가진 미지의 파라미터로 정의하였고, MCMC 기법으로 불확실성이 반영된 낙하시간을 확률분포로 예측할 수 있다.

예측모델로 나온 확률분포와 실험에서 얻은 데이터 분포의 비교를 통해 검증을 하는 방법을 예측적 검증(Predictive Validation)이라 한다.

#### 3.1 통계적 교정 및 예측적 검증 절차

본 절에서는 항력계수를 이용한 통계적 교정 및 예측적 검증의 절차를 설명한다. 본 실험에서는 4가지 실험 조건 중 10.67m / 1 clip을 교정의 기준 조건으로 설정하고 예측된 시간의 확률분포와 실험으로 얻어진 데이터 분포의 비교를 통해 해석모델의 검증을 시행하였다. 이를 통해 종이 헬리콥터의 무게와 낙하높이의 변화에 따른 예측 낙하시간이 실험에서 측정된 낙하시간과 얼마나 일치하는지를 알아 볼 수 있다.

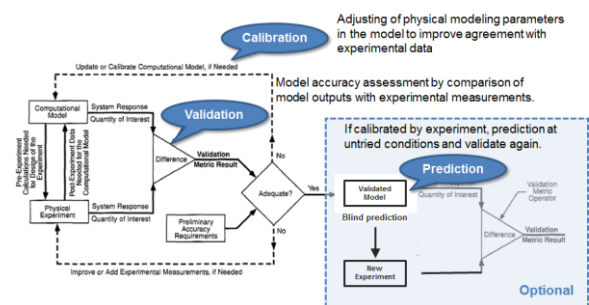


Figure 2 Overall procedures of calibration, validation, and prediction (Oberkampf and Barone, 2004)

1. 하나의 공기저항력 모델을 이용하여 교정 조건에서 측정된 7회의 측정 시간에 대한 항력계수를 구한다. 항력계수의 평균과 표준편차를 기준으로 MCMC 샘플링 기법을 이용하여 N개의 평균과 표준편차 그룹을 생성한다. 이때 N개의 평균과 표준편차 그룹은 정규분포를 따른다고 가정한다.

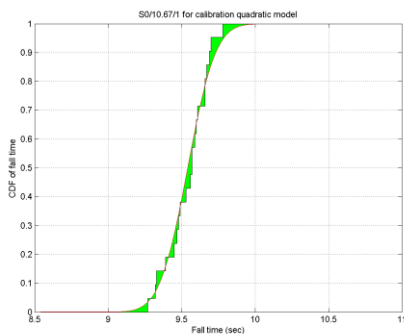
2. 정규분포를 따르는 각 평균과 표준편차 그룹에서 한 개의 항력계수 샘플을 무작위로 생성하여 총 N개의 항력계수를 생성한다. 선택된 공기저항력 모델에 검증을 위한 다른 실험조건을 적용시키고 이를 이용해 N개의 항력계수에 대한 N개의 낙하시간을 계산한다. 예측된 시간 분포를 Cumulative Distribution Function(CDF)로 나타낸다.

3. 예측에 대한 검증을 위해 다른 조건에서 구해진 낙하시간 데이터를 이용하여 Empirical Distribution Function(EDF)로 나타내어 예측시간의 CDF와 비교해서 생기는 면적(area metric)을 구한다. 예측된 CDF( $F$ )와 EDF( $S_n$ )사이의 면적  $d(F, S_n)$ 은

$$d(F, S_n) = \int_{-\infty}^{\infty} |F(x) - S_n(x)| dx \quad (12)$$

로 나타내어진다.<sup>(7)</sup> 면적이 예측에 대한 검증의 지표가 되는데 교정된 항력계수를 적용하여 구해진 면적 대비 큰 차이를 보이지 않으면 적합한 예측임이 판단된다.<sup>(5)</sup>

Figure 3은 예측적 검증의 예로 10.67m / 1clip 조건에서 예측된 낙하시간의 확률분포와 실험에서 얻은 데이터 분포를 나타낸 것이다. 초록색 영역이 예측된 결과와 실제 데이터 결과의 차이를 나타내고 있고, 이것은 해석모델이 실제현상을 적합한지에 대한 결정을 하는 것의 기준이 된다.



**Figure 3** Predictive Validation area metric for 10.67m / 1clip condition

**Table 1** One-way ANOVA (10.67m / 1 clip)

Source	DF	SS	MS	F	P
Factor	2	0.036	0.018	0.95	0.404
Error	18	0.336	0.019		
Total	20	0.372			

S = 0.1366 R-Sq = 9.57% R-Sq(adj) = 0.00%

### 3.2 실험결과 분석

#### 3.2.1 분산분석(Analysis of variance)을 통한 결과

세 가지 종이 헬리콥터에 대한 제작오차와 측정오차의 차이를 비교하기 위해 One-way ANOVA를 시행하였다. Table 1은 10.67m / 1Clip의 실험 결과를 One-way ANOVA를 통해 분석한 결과이다. Error는 실험의 반복회수에 대한 측정오차를 나타내고, Factor는 같은 제원의 3개 종이 헬리콥터간의 제작오차를 나타내고 있다. 그리고 F-value는 Error의 MS에 대한 Factor의 MS의 비로 나타낸다. F-value < 1 이므로 제작오차가 실험에 미치는 영향력은 측정오차와 비교하여 미미하다 볼 수 있다. 이를 통해 세 가지 종이 헬리콥터는 동일한 모델로의 가정이 성립된다.

#### 3.2.2 Predictive Validation area metric

세 가지 종이 헬리콥터는 분산분석을 통해서 하나의 헬리콥터라는 가정이 성립되었기 때문에 각 종이 헬리콥터의 측정 데이터는 하나의 헬리콥터에서 측정된 데이터라 볼 수 있다. 이에 따라 총 21개의 측정데이터를 이용해서 낙하모델에 관한 교정 및 검증을 시행하여 Table 2에 정리하였다.

Table 2는 각각 1차와 2차 공기저항력 모델을 이

**Table 2** Predictive Validation area metrics of one helicopter for four conditions under the quadratic and linear model

Conditions	Quadratic model	Linear model
10.67m / 1clip (for calibrations)	0.0221 (1.00)	0.0229 (1.00)
6.82m / 1clip	0.0561 (2.53)	0.0681 (2.97)
6.82m / 2clips	0.0422 (1.91)	0.8157 (35.58)
10.67m / 2clips	0.0227 (1.02)	1.3632 (59.46)

용하여 교정 조건의 항력계수를 구하고 이것으로 다른 조건에서의 낙하시간을 예측했을 때의 오차를 Validation area metric의 수치로 나타낸 것이다. 괄호 안의 숫자는 교정 조건의 area metric에 대한 각 조건의 area metric의 비를 나타낸 것이다. 교정 조건이 area metric의 수치를 판단하는 기준이 되고 기준에 비해 얼마나 큰 지에 따라 공기저항력 모델의 적합성을 판단할 수 있다. Quadratic 모델에서는 교정 조건에서 0.0571의 area metric을 나타낸 것을 기준으로 6.82m / 1clip은 2.53배, 6.82m / 2clips에서는 1.91배, 10.67m / 2clips 조건에서는 기준의 1.02배에 해당하는 area metric을 나타냄으로써 quadratic 모델을 이용하여 구한 항력계수가 낙하시간을 예측하는 것에 적합하다는 것을 알려준다. Linear 모델에서는 교정 조건에서의 area metric을 기준으로 높이만 변한 조건에서는 2.97배 정도의 area metric을 나타내었다. 하지만 클립 개수에 대한 변화가 있는 조건들에서는 10배 이상의 area metric을 나타낸다. 이는 종이 헬리콥터의 무게가 변해버리는 경우에는 linear 모델을 이용해 얻은 항력계수가 쓸모가 없어지고 높이만 변하는 경우에 대해 사용이 적합하다는 것을 의미한다.

### 3.2.3 기존 연구사례와의 비교 분석

같은 주제와 동일한 실험방법을 가지고 연구를 했던 Park의 논문에서는 H1, H2, H3의 총 3가지 종이 헬리콥터에 적합한 낙하 모델이 각각 달랐다. H1, H3는 quadratic 모델이 더 적합하였고, H2는 linear 모델이 적합하다는 결론이 나왔었다. 이를 본 실험결과와 비교하기 위해 3가지 종이 헬리콥터에 대해 각각 Predictive Validation area metric를 확인하였다.

Table 3, 4는 본 실험의 3가지 동일 제원의 종이 헬리콥터에 대해 linear와 quadratic 모델을 적용해 보았을 때 낙하시간에 대한 Predictive Validation area metric을 나타낸 것이고, Table 5, 6은 Park의 논문에서 Student A가 시행했던 3가지 동일 제원의 종이 헬리콥터의 낙하 시간 데이터에 대해 linear와 quadratic 모델의 Predictive Validation area metric의 결과이다. Table 3에서 볼 수 있듯이 quadratic 모델을 적용하였을 때 3가지 종이 헬리콥터에 대한 area metric의 수치가 모든 조건에서 교정 조건에서의 수치에 비해 최대 1.63배로 quadratic 모델이 시간예측에 적합함을 보이고 있다. 이는 본 실험 데이터에 대한 One-way ANOVA에서 F-value가 0.95의 값으로 세 가지 종이 헬리콥터를 같은 모

**Table 3** Predictive Validation area metrics of three helicopters for three conditions under the quadratic model

Conditions	H1	H2	H3
10.67m / 1clip (for calibrations)	0.057 (1.00)	0.067 (1.00)	0.052 (1.00)
6.82m / 1clip	0.040 (0.71)	0.056 (0.84)	0.085 (1.63)
6.82m / 2clips	0.032 (0.55)	0.056 (0.83)	0.082 (1.57)
10.67m / 2clips	0.068 (1.19)	0.097 (1.44)	0.053 (1.01)

**Table 4** Predictive Validation area metrics of three helicopters for three conditions under the linear model

Conditions	H1	H2	H3
10.67m / 1clip (for calibrations)	0.057 (1.00)	0.069 (1.00)	0.043 (1.00)
6.82m / 1clip	0.054 (0.95)	0.075 (1.08)	0.098 (2.27)
6.82m / 2clips	0.832 (14.70)	0.819 (11.83)	0.781 (18.11)
10.67m / 2clips	1.376 (24.30)	1.310 (18.93)	1.392 (32.29)

**Table 5** Predictive Validation area metrics of three helicopters of Student A for three conditions in Park's paper (quadratic model)

Conditions	H1	H2	H3
3.78m / 2 clips (for calibrations)	0.032 (1.00)	0.017 (1.00)	0.028 (1.00)
3.78m / 1 clip	0.091 (2.84)	0.475 (27.94)	0.091 (3.25)
4.39m / 2 clips	0.043 (1.34)	0.060 (3.53)	0.078 (2.79)

**Table 6** Predictive Validation area metrics of three helicopters of Student A for three conditions in Park's paper (linear model)

Conditions	H1	H2	H3
3.78m / 2 clips (for calibrations)	0.032 (1.00)	0.018 (1.00)	0.028 (1.00)
3.78m / 1 clip	0.642 (20.06)	0.040 (2.22)	0.464 (16.57)

델로 간주하는 것이 타당함을 알 수 있다. Table 5, 6에서는 같은 제원임에도 각 종이 헬리콥터에 적합한 모델이 다를 수 있다. Park논문의 실험 데이터에 대한 One-way ANOVA를 통한 분석을 진

**Table 7** One-way ANOVA (Student A of the Park's paper)

Source	DF	SS	MS	F	P
Factor	2	0.628	0.314	34.33	0.000
Error	27	0.247	0.009		
Total	29	0.874			

$S = 0.0956$   $R\text{-Sq} = 71.77\%$   $R\text{-Sq}(\text{adj}) = 69.68\%$

행해보았다. (Table 7) 그 결과 F-value는  $34.33 > 1$  이므로 제작오차가 실험에 미치는 영향력은 측정 오차보다 매우 크다는 것을 볼 수 있고, 모델 H1, H2, H3을 동일한 모델로 가정 할 수 없다는 것을 알 수 있다. 그 결과 본 실험에서 제작오차를 줄이기 위한 노력들을 하였고 그 효과가 나타남이 증명되었다.

#### 4. 결론

본 논문에서는 통계적 교정 및 검증 기법을 종이 헬리콥터의 낙하해석모델에 적용하여 보았다. 종이 헬리콥터는 제작비용이 적고, 해석모델도 간단하여 통계적 기법에 적용하기 좋은 모델이었다. 클립 수와 높이에 따라 총 4가지 조건을 설정하여 그 중 한 가지 조건을 항력계수 교정의 기준으로 설정하고, 다른 조건에서 낙하시간 예측을 위한 데이터를 얻기 위해 활용되었으며, 나머지 3가지 조건에서의 데이터는 그 예측의 타당성을 검증하기 위해 활용되었다.

먼저, ANOVA를 이용하여 3가지 동일 제원을 가진 종이 헬리콥터에서 제작오차의 영향이 반복측정오차에 비해 작아 각각의 데이터를 한 개체의 데이터로 볼 수 있었다. 그리고 낙하해석모델에서 항력계수가 가지고 있는 불확실성을 정량적으로 나타내어 낙하시간을 확률분포로 예측하기 위해 MCMC기법을 활용하였고, 실제 낙하시간 데이터 분포와 비교하여 해석모델에 대한 검증을 하였다. 그 결과 Quadratic 모델을 이용하였을 때 무게나 높이의 변화에 따른 조건들에 대해 적합한 해석모델이라는 것이 검증되었다. Linear 모델은 종이 헬리콥터의 낙하 높이에 따른 변화가 있을 경우에만 시간예측에 대한 적합성을 보였고, 무게에 대한 변화에 따른 시간예측에 적합하지 않았다.

본 연구에서는 물리적 예측모델이 주어 졌을 때

실제 모델과의 분명한 차이를 극복하기 위한 통계적 교정과 검증의 방법을 제시하였다. 최종적으로는 추가적인 실험을 통해 예측에 필요한 주요 파라미터들을 확인해 요구 조건에 맞는 최적설계가 될 수 있도록 본 연구를 발전시킬 계획이다.

#### 후기

“본 연구는 2014년도 한국항공대학교 항공우주 및 기계공학부 종합설계 프로젝트로 수행되었다. 참여했던 모든 학부 학생들 이동희, 조장남, 최웅, 현민철, 강선희, 유동우, 김종우, 김민성, 이우철, 한만주에 감사의 말씀을 전한다.”

#### 참고문헌

(References)

- (1) Bayarri, M.J., Berger, J.O., Higdon, D., Kennedy, M.C., Kottas, A., Paulo, R., Sacks, J., Cafeo, J.A., Cavendish, J., Lin, C.H. and Tu, J., 2002, “A Framework for Validation of Computer Models”, *National Institute of Statistical Sciences*.
- (2) Siorek, T., and Haftka, R.T., “Paper Helicopter – Experimental Optimum Engineering Design Classroom Problem,” AIAA Paper 98-4963 Proceedings, 7th AIAA/USAF/NASA/-ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization, pp. 2013-2020, St.Louis MO, Sept. 2-4, 1998.
- (3) Annis, D. (2005). "Rethinking the Paper Helicopter: Combining Statistical and Engineering Knowledge", *The American Statistician*, 59, No. 4, 320-326
- (4) Kevin J. LaTourette. "The application of differential equations to model the motion of a paper helicopter", *Saint John Fisher College*
- (5) Chanyoung Park, Joo-ho Choi and Raphael T. Haftka, “Teaching a Verification and Validation Course using Simulations and Experiments with Paper Helicopter”
- (6) Min Young Yoo and Joo Ho Choi, “Probabilistic Calibration of Computer Model and Application to Reliability Analysis of Elasto-Plastic Insertion Problem”



- (7) Ferson, S., Oberkampf, W. L., & Ginzburg, L. (2008). Model validation and predictive capability for the thermal challenge problem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(29), 2408-2430.

## Appendix Fall Time data

**Table 1** Fall time data for four conditions

Condition 1				Condition 2			
Height:10.67m and clips:1				Height:10.67m and clips:2			
M.N	H1	H2	H3	M.N	H1	H2	H3
1	9.67	9.60	9.48	1	7.77	7.62	7.55
2	9.57	9.70	9.78	2	7.86	7.83	7.88
3	9.45	9.27	9.53	3	7.73	7.73	7.90
4	9.32	9.69	9.47	4	7.71	7.88	8.00
5	9.33	9.66	9.56	5	7.93	7.68	7.84
6	9.39	9.49	9.61	6	7.69	7.71	7.95
7	9.66	9.57	9.59	7	7.72	7.73	7.68
AVG	9.48	9.57	9.57	AVG	7.77	7.74	7.83
STV	0.15	0.15	0.11	STV	0.09	0.09	0.16
COV	0.02	0.02	0.01	COV	0.01	0.01	0.02

Condition 3				Condition 4			
Height:6.82m and clips:1				Height:6.82m and clips:2			
M.N	H1	H2	H3	M.N	H1	H2	H3
1	6.24	6.01	6.05	1	5.06	5.01	5.05
2	6.03	6.16	5.99	2	4.94	5.05	4.79
3	6.16	6.12	6.12	3	4.85	4.95	4.93
4	6.09	6.14	6.10	4	4.94	5.05	5.00
5	6.00	5.84	6.15	5	5.02	5.01	4.99
6	5.85	6.12	5.96	6	4.95	5.01	4.96
7	6.06	6.23	6.06	7	5.04	4.91	4.99
AVG	6.06	6.09	6.06	AVG	4.97	5.00	4.96
STV	0.12	0.13	0.07	STV	0.07	0.05	0.08
COV	0.02	0.02	0.01	COV	0.01	0.01	0.02