数学建模模型算法精讲课——

多目标规划模型

—— 江北老师

既然目标是地平线，

留给世界的只能是背影

多目标规划模型

- 模型引出
- 模型原理
- 典型例题
- 代码求解

多目标规划模型——模型引出

➢ 衡量一个方案的角度往往不止一个

- 经济、管理、军事、科学和工程设计等领域衡量一个方案的好坏难以用一个指标来判断，而需要用多个目标来比较，而这些目标有时不甚协调，甚至是矛盾的。
- 设计一个导弹，既要射程远，命中率高，还要耗燃料少
- 选择新厂址，除了要考虑运费、造价、燃料供应费等经济指标外，还要考虑对环境的污染等社会因素

问题一：在满足客流需求的条件下，以企业运营成本最小化和服务水平最大化为目标，制定列车开行方案。即确定大交路区间列车的开行数量，小交路的运行区间以及开行数量。（输出格式详见附件 6）

问题二：在问题一制定的列车开行方案下，同样以企业运营成本最小化和服务水平最大化且尽量满足客流需求为目标，制定等间隔的平行运行图。（输出格式详见附件 7，并将附件 7 单独上传到竞赛系统中）

2023年 MathorCup B题

问题 2：针对给出的所有原料，请使用最少张数的原材料，满足对所有订单的要求（不考虑浮动比例），同时尽量提高总的成材率，给出切割方案。

问题 3：圆盘剪每次排刀需要人工更换刀在排刀架上的位置，同时若有材料需要被移到小机器上再次切割也需要人为操作。为减少人力成本，希望尽量减少换刀数和在小机器上切割数。

针对给出的所有原料，请使用最少张数的原材料，满足对所有订单的要求（不考虑浮动比例）。同时尽量减少换刀数和在小机器上切割数，并尽量提高总的成材率，给出切割方案。

2021年 MathorCup D题

多目标规划模型——模型引出

➤ 多目标规划

- 多目标规划是数学规划的一个分支。研究**多于一个的目标函数在给定区域上的最优化**。又称多目标最优化。通常记为 MOP(multi-objective programming)。
- 多目标规划的概念是 1961年由美国数学家查尔斯和库柏首先提出的。多目标最优化思想，最早是在1896年由法国经济学家V.帕雷托提出来的。他从政治经济学的角度考虑把本质上是不可比较的许多目标化成单个目标的最优化问题，从而涉及了多目标规划问题和多目标的概念。

➤ 投资组合问题

- 投资收益问题：给上述公司设计投资组合方案，用给定资金M，有选择地购买若干种资产或存银行生息，使净收益尽可能大，总体风险尽可能小。

目标函数为$\begin{cases} max\sum_{i=0}^{n}(r_i-p_i)x_i, \\ min\{max_{1\le i\le n}\{q_ix_i\}\} \end{cases}$　　约束条件为$\begin{cases} \sum_{i=0}^{n}(1+p_i)x_i=M, \\ x_i\ge 0,\quad i=0,1,\cdots,n. \end{cases}$

- 在线性规划一节我们已经讲过这个例题，解题思路是把**其中一个目标函数转换为约束条件**，把多目标规划转换为单目标的线性规划，这是一个比较常见的解题思路，哪还有没有别的解题思路呢？

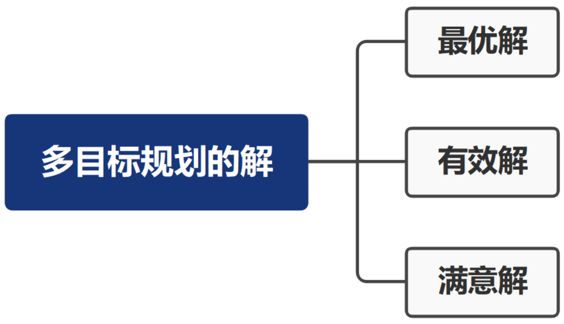
多目标规划模型——模型原理

➤ 多目标规划的一般形式

多目标规划是多目标决策的重要内容之一，在进行多目标决策时，当希望每个目标都尽可能的大（或尽可能的小）时，就形成了一个多目标规划问题，其一般形式为：

$$
\begin{aligned}
&\min \quad f(x) = [f_1(x),\ f_2(x), \cdots, f_m(x)]^T, \\
&\text{s.t.} \begin{cases} g_i(x) \le 0, & i = 1,2,\cdots,p, \\ h_j(x) = 0, & j = 1,2,\cdots,q, \end{cases}
\end{aligned}
$$

- ✓ 其中x为决策向量，$f_1(x),\ f_2(x),\cdots,f_m(x)$为目标函数$s.t.$式为约束条件
- ✓ 记$\Omega = \{x | g_i(x) \le 0,\ i = 1,2,\cdots,p;\ h_j(x) = 0,\ j = 1,2,\cdots,q\}$
- ✓ 称Ω为多目标规划的可行域（决策空间），$f(\Omega) = \{f(x) | x \in \Omega\}$为多目标规划问题的像集（目标空间），多目标规划问题以下简称问题（MP）。



多目标规划的解

- **最优解**定义　设$\bar{x} \in \Omega$，若对于任意$i = 1,2,\cdots,m$及任意$x \in \Omega$，均有

$$f_i(\bar{x}) \le f_i(x),$$

则称$\bar{x}$为问题（MP）的绝对最优解，记问题（MP）的绝对最优解集为Ω_{ab}^*

一般来说，多目标规划问题的绝对最优解是不常见的，当绝对最优解不存在时，需要引入新的“解”的概念。多目标规划中最常用的解为非劣解或有效解，也称为Pareto最优解。

- **有效解**定义　考虑多目标规划问题（MP），设$\bar{x} \in \Omega$，若不存在$x \in \Omega$，使得

$$f_i(x) \le f_i(\bar{x}), \quad i = 1,2,\cdots,m,$$

且至少有一个

$$f_j(x) < f_j(\bar{x}),$$

则称$\bar{x}$为问题（MP）的有效解（或Pareto有效解），$f(\bar{x})$为有效点。

多目标规划问题中，
一般不提最优解的概念，只提
满意解或有效解

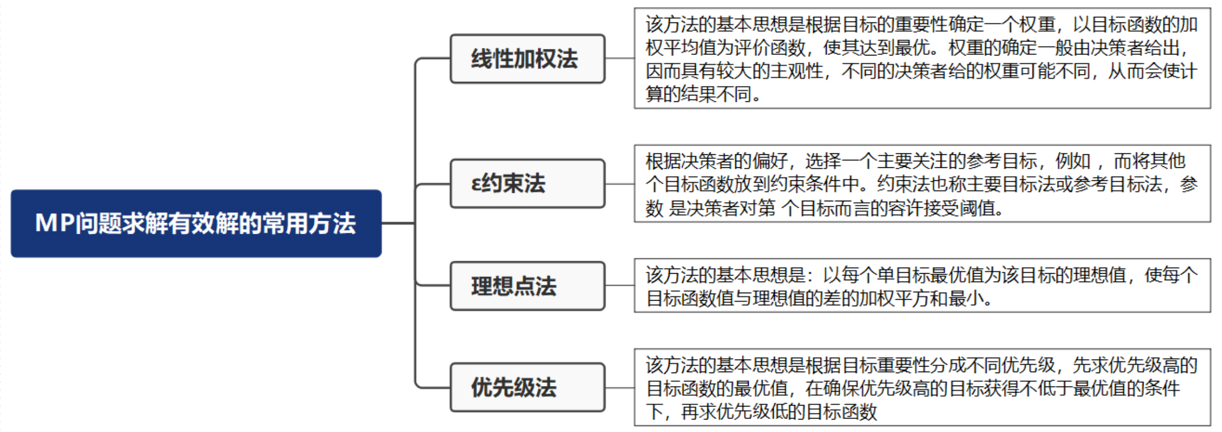
- **满意解**定义　主要是从决策过程角度，根据决策者的偏好与要求而提出的。

设可行域为Ω，要求m个目标函数$f_i(i = 1,2,\cdots,m)$越小越好。有时决策者的期望较低，给出了m个阈值α_i，当$\bar{x} \in \Omega$满足$f_i(\bar{x}) \le \alpha_i(i = 1,2,\cdots,m)$时，就认为$\bar{x}$是可以接受的、是满意的。这样的$\bar{x}$就称为一个满意解。

多目标规划模型——模型原理

➢ 多目标规划的求解

- 由于对绝大多数多目标决策实际问题，决策者最偏好的方案都是有效解，下面介绍几种常用的求解问题（MP）的有效解的常用方法
- 值得注意的是，在多目标规划中，除去目标函数一般是彼此冲突外，还有另一个特点：目标函数的不可公度性。所以通常在求解前，先对目标函数**进行预处理**。预处理的内容包括：无量纲化处理，归一化处理等



- 本课程只介绍线性加权法，对别的方法有兴趣的可以参考《数学建模与应用》——司守奎

➢ 线性加权法

- 若一个规划问题中有多个目标，我们可以对多目标函数**进行加权组合**，使问题变为**单目标规划**，然后再利用之前学习的解法进行求解
- 线性加权法具体步骤如下:

第一步：确定每个目标的权系数。

$$0 \le w_j \le 1,\ j = 1, 2, \cdots, m; \quad \sum_{j=1}^{m} w_j = 1.$$

第二步：写出评价函数$\sum_{j=1}^{m} w_j f_j$

第三步：求评价函数最优值

$$\min \ \sum_{i=1}^{m} w_i f_i(x),$$

s. t. $\mathbf{x} \in \boldsymbol{\Omega}.$

注意:

1、要将多个目标函数统一为最大化和最小化问题（不同的加“-”号）才可以进行加权组合

2、如果目标函数量纲不同，则需要对其进行标准化再进行加权，标准化的方法一般是目标函数除以某一个常量，该常量是这个目标函数的某个取值，具体取何值可根据经验确定

3、对多目标函数进行加权求和是，**权重一般由该领域专家给定**，实际比赛中，若无特殊说明，我们可令权重相同

➢ 化工厂生产问题

- 某化工厂今年拟生产两种新产品A和B，其生产费用分别为2万元/吨和5万元/吨。这两种产品均将造成环境污染，每生产一吨A产品会产生0.4吨的污染，每生产一吨B产品会产生0.3吨的污染。由于条件限制，工厂生产产品A和B的最大生产能力各为每月5吨和6吨，而市场需要这两种产品的总量每月不少于7吨。该工厂决策认为，这两个目标中环境污染应该优先考虑，且根据经验生产费用的参考值为30万元，污染量参考值为2吨。试问工厂如何安排生产计划，在满足市场需要的前提下，使设备的话费和产生的污染均达到最小。

解：设工厂每月产品A生产x_1吨，B生产x_2吨，那么产生的污染分别为0.4 x_1吨和0.3 x_2吨

建立多目标规划模型：

$$\begin{cases} \min\ f_1 = 2x_1 + 5x_2 \\ \min\ f_2 = 0.4x_1 + 0.3x_2 \\ st.\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 7 \\ 0 \le x_1 \le 5 \\ 0 \le x_2 \le 6 \end{cases} \end{cases}$$

MATH 数模加油站

化工厂生产问题

- 多目标规划模型:

$$\begin{cases} \min f_1 = 2x_1 + 5x_2 \\ \min f_2 = 0.4x_1 + 0.3x_2 \\ st.\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 7 \\ 0 \leq x_1 \leq 5 \\ 0 \leq x_2 \leq 6 \end{cases} \end{cases}$$

- 下面我们将其转换为一个单目标规划问题，即对上面的两个目标函数进行加权，由于该工厂决策认为环境污染应**优先考虑**，因此我们可以选取f_1和f_2的权重分别为**0.4和0.6**。注意到两个目标函数的单位不同，**一个为“万元”，一个为“吨”**，因此我们需要首先对目标函数进行标准化来消除量纲的影响，然后再进行加权，由于题目中已经给了产品费用和污染量的参考值，因此我们**将这两个目标函数分别处以其参考值来消除量纲。**

- 加权组合后的目标函数:

$$f = 0.4 \times \frac{f_1}{30} + 0.6 \times \frac{f_2}{2} = \frac{0.4}{30} \times (2x_1 + 5x_2) + \frac{0.6}{2} \times (0.4x_1 + 0.3x_2)$$

➢ 化工厂生产问题

- 多目标规划模型：
$$\begin{cases} \min\ f_1 = 2x_1 + 5x_2 \\ \min\ f_2 = 0.4x_1 + 0.3x_2 \\ st. \begin{cases} x_1 + x_2 \ge 7 \\ 0 \le x_1 \le 5 \\ 0 \le x_2 \le 6 \end{cases} \end{cases}$$

- 下面我们将其转换为一个单目标规划问题，即对上面的两个目标函数进行加权，由于该工厂决策认为环境污染应优先考虑，因此我们可以选取f_1和f_2的权重分别为0.4和0.6。注意到两个目标函数的单位不同，一个为“万元”，一个为“吨”，因此我们需要首先对目标函数进行标准化来消除量纲的影响，然后再进行加权，由于题目中已经给了产品费用和污染量的参考值，因此我们将这两个目标函数分别处以其参考值来消除量纲。

- 加权组合后的目标函数：

$$f = 0.4 \times \frac{f_1}{30} + 0.6 \times \frac{f_2}{2} = \frac{0.4}{30} \times (2x_1 + 5x_2) + \frac{0.6}{2} \times (0.4x_1 + 0.3x_2)$$

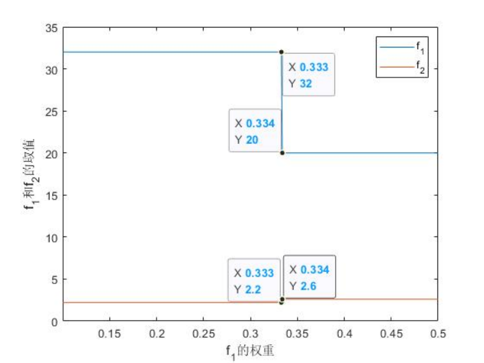
得到一个单目标规划问题，利用前面学习过得linprog函数进行求解可以得到：

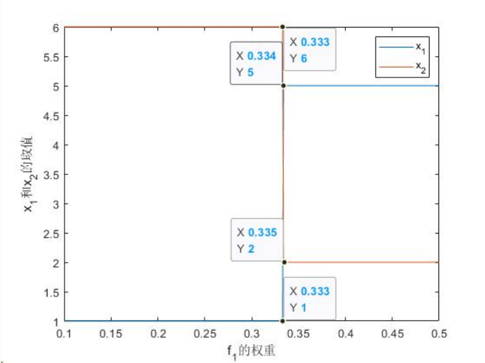
$x_1 = 5\,, x_2 = 2\,, f_1 = 20\,, f_2 = 2.6$

多目标规划模型——典型例题

➢ 敏感性分析

- 下面我们对结果进行敏感性分析，敏感性分析是**指从定量分析的角度研究有关因素发生某种变化对某一个或一组关键指标影响程度的一种不确定分析技术**。其实质是通过逐一改变相关变量数值的方法来解释关键指标受这些因素变动影响大小的规律。
- 我们改变f_1和f_2的权重，来观察对结果的影响。（由于两个权重和为1，因此我们只需要改变f_1的权重即可），下面是图形：





- 可以看出，f_1的权重的转折点在0.333-0.334之间，当f_1的权重小于这个转折点时，$x_1 = 1, x_2 = 6$，大于转折点时，$x_1 = 5, x_2 = 2$。其主要原因是：**当f_1的权重越小时，厂家对环境污染的权重就越大，那么厂家就更加倾向于生产污染较少的产品B，尽管B的生产费用要远高于产品A。**

多目标规划模型——代码求解

➢ 例题代码

```
%% 多目标规划问题
w1 = 0.4; w2 = 0.6; % 两个目标函数的权重 x1 = 5 x2 = 2
w1 = 0.5; w2 = 0.5; % 两个目标函数的权重 x1 = 5 x2 = 2
w1 = 0.3; w2 = 0.7; % 两个目标函数的权重 x1 = 1 x2 = 6
c = [w1/30*2+w2/2*0.4 ;w1/30*5+w2/2*0.3]; % 线性规划目标函数的系数
A = [-1 -1]; b = -7; % 不等式约束
lb = [0 0]'; ub = [5 6]'; % 上下界
[x,fval] = linprog(c,A,b,[],[],lb,ub)
f1 = 2*x(1)+5*x(2)
f2 = 0.4*x(1) + 0.3*x(2)
```

MATH 数模加油站

➢ 例题代码

```
% 「Matlab」 “LaTex字符汇总”讲解:
https://blog.csdn.net/Robot_Starscream/article/details/89386748
% 在图上可以加上数据游标，按住Alt加鼠标左键可以设置多个数据游标出来。
figure(1)
plot(W1,F1,W1,F2)
xlabel('f_{1}的权重')
ylabel('f_{1}和f_{2}的取值')
legend('f_{1}','f_{2}')
figure(2)
plot(W1,X1,W1,X2)
xlabel('f_{1}的权重')
ylabel('x_{1}和x_{2}的取值')
legend('x_{1}','x_{2}')
figure(3)
plot(W1,FVAL) % 看起来是两个直线组合起来的下半部分
xlabel('f_{1}的权重')
ylabel('综合指标的值')
```

欢迎关注数模加油站

THANKS