数模加油站

数学建模模型算法精讲课——

整数规划和0-1规划

—— 江北老师

成功不仅需要努力和勇气,

还需要一颗追求卓越的心灵

有兴趣的小伙伴可以关注微信公众号或加入建模交流群获取更多免费资料 公众号:数模加油站 交流群:709718660



数模加油站

整数规划和0-1规划

- □ 模型引出
- □ 模型原理
- □ 典型例题
- □ 代码求解





整数规划和0-1规划——模型引出



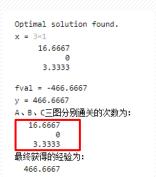
> 我们再来看游戏升级的问题

- 游戏每天有100点体力, 我们可以通过反复通关A、B、C三张地图来获取经验升级
- 通关A图可以获得20点经验,通关B图可以获得30点经验,通关C图可以获得40点经验
- 通关地图会消耗体力,通关A图消耗4点体力,通关B图消耗8点体力,通关C图消耗10点体力
- 同时A、B、C三图每天加在一起最多通关20次
- PP应该怎么组合通关ABC三个地图的次数,来使今天获得的经验最大?

$$\max \quad y = 20x_1 + 30x_2 + 40x_3, \qquad \min \quad -y = -20x_1 - 30x_2 - 40x_3,$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 4x_1 + 8x_2 + 10x_3 \le 100, \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 20, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 4x_1 + 8x_2 + 10x_3 \le 100, \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 20, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

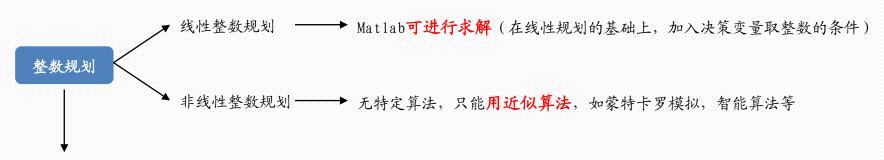


整数规划和0-1规划——模型原理



> 整数规划和0-1规划

• 在规划问题中,有些最优解可能是分数或小数,但对于某些具体问题,常要求某些变量(全部或部分)的解必须是整数。例如,当变量代表的是机器的台数,工作的人数或装货的车数等。为了满足整数的要求,初看起来似乎只要把已得的非整数解舍入化整就可以了。实际上化整后的数不见得是可行解和最优解,所以应该有特殊的方法来求解整数规划。在整数规划中,如果所有变量都限制为整数,则称为纯整数规划;如果仅一部分变量限制为整数,则称为混合整数规划。整数规划的一种特殊情形是0-1规划,它的变数仅限于0或1。



0-1规划: 特殊的整数规划, Matlab中也只能求解线性0-1规划, 对于非线性0-1规划也只能求近似解

有兴趣的小伙伴可以关注微信公众号或加入建模交流群获取更多免费资料

公众号: 数模加油站

交流群: 709718660

整数规划和0-1规划——模型原理



> 线性整数规划求解

• [x, fval] = intlinprog(f, intcon, A, b, Aeq, beq, lb, ub, x0)

f——目标函数的系数向量(必须是求最小值形式下的) intcon——intcon中的值指示决策变量 x 中应取整数值的分量 A,b——不等式约束条件的变量系数矩阵和常数项矩阵(必须是 \leq 形式) Aeq,beq——等式约束条件的系数矩阵和常数项矩阵 lb,ub——决策变量的最小取值和最大取值

> 线性0-1规划求解

- 仍然使用intlinprog函数求解,只需要限定lb 和ub即可
- 例如: 三个决策变量: x_1 , x_2 , x_3 , x_1 和 x_3 是0-1变量, x_2 不限制,则intcon=[1,3], lb=[0;-inf;0], ub=[1;+inf;1]

整数规划和0-1规划——典型例题



▶ 例1:背包问题

• 有10件货物要从甲地运送到乙地,每件货物的重量(单位:吨)和利润(单位:元)如下表所示

物品	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
重量 (t)	6	3	4	5	1	2	3	5	4	2
利润 (元)	540	200	180	350	60	150	280	450	320	120

- 由于只有一辆最大载重为30t的货车能用来运送货物,所以只能选择部分货物进行运送。
- 要求确定运送哪些货物,使得运送这些货物的总利润最大。

$$ix_i = \begin{cases} 1, 运送了第i件货物 \\ 0, 没有运送第i件货物 \end{cases}$$
 $i = 1, 2, ..., 10$

记 w_i 表示第i件物品的重量, p_i 表示第i件物品的利润

$$\max \sum_{i=1}^{10} p_i x_i \qquad \min -\sum_{i=1}^{10} p_i x_i$$

$$s.t. \begin{cases} \sum_{i=1}^{10} w_i x_i \le 30 \\ x_i \in \{0,1\} \end{cases}$$

$$s.t. \begin{cases} \sum_{i=1}^{10} w_i x_i \le 30 \\ x_i \in \{0,1\} \end{cases}$$

整数规划和0-1规划——典型例题



例2:指派问题

• 已知5名游泳候选人的百米成绩,怎么选拔队员组成4×100米混合泳接力队伍

	蝶泳	仰泳	蛙泳	自由泳
甲	66.8	75.6	87	58.6
Z	57.2	66	66.4	53
丙	78	67.8	84.6	59.4
丁	70	74.2	69.6	57.2
戊	67.4	71	83.8	62.4

• 候选人: *i* = 1,2,3,4,5

• \hat{x} \hat{y} : j = 1, 2, 3, 4

· tii: 队员i参加第j种泳姿的耗时

$$min \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{5} t_{ij} x_{ij}$$

整数规划和0-1规划——代码求解



> 示例代码

```
min -y = -20x_1 - 30x_2 - 40x_3,
   4x_1 + 8x_2 + 10x_3 \le 100,
s.t. \{x_1 + x_2 + x_3 \le 20,
   |x_1, x_2, x_3| \ge 0.
clc, clear
f = [-20; -30; -40];
intcon=[1; 2; 3]
A = [4, 8, 10; 1, 1, 1;];
b = [100; 20];
1b = zeros(3, 1);
[x, f val] = intlinprog(f, intcon, A, b, [], [], 1b) %没有等号约束
y = -fval %目标函数为最大化
disp('A、B、C三图分别通关的次数为: ')
disp(x)
disp('最终获得的经验为: ')
disp(y)
```

非线性规划——代码求解



> 例1背包问题代码

非线性规划——代码求解



> 例2指派问题代码

```
‰ 指派问题(选择队员去进行游泳接力比赛)
clear; clc
% 双下标要转换为单下标: x11→x1, x12→x2, ..., x24→x8, ..., x54→x20
c = [66.875.68758.657.26666.4537867.884.659.47074.269.657.267.47183.8
62.4]′; % 目标函数的系数矩阵(先列后行的写法)
intcon = [1:20]; % 整数变量的位置 (一共20个决策变量,均为0-1整数变量)
% 线性不等式约束的系数矩阵和常数项向量(每个人只能入选四种泳姿之一,一共五个约束)
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1];
% A = zeros(5, 20);
% \text{ for } i = 1:5
\% A(i, (4*i-3): 4*i) = 1;
% end
b = [1; 1; 1; 1; 1];
```

非线性规划——代码求解



> 例2指派问题代码

```
% 线性等式约束的系数矩阵和常数项向量 (每种泳姿有且仅有一人参加,一共四个约束)
0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0;
0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0;
0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1];
% Aeg = [eye(4), eye(4), eye(4), eye(4), eye(4)]; % 或者写成 repmat(eye(4), 1, 5)
beg = [1; 1; 1; 1];
1b = zeros (20, 1); % 约束变量的范围下限
ub = ones (20, 1); % 约束变量的范围上限
%最后调用intlinprog()函数
[x, fval] = intlingrog(c, intcon, A, b, Aeq, beq, 1b, ub)
\% reshape (x, 4, 5)
%0001甲自由泳
% 1 0 0 0 乙蝶泳
% 0 1 0 0 丙仰泳
% 0 0 1 0 丁蛙泳
%0000 戊不参加
```

欢迎关注数模加油站

THANKS



