数学建模模型算法精讲课——

整数规划和0-1规划

—— 江北老师

成功不仅需要努力和勇气，

还需要一颗追求卓越的心灵

整数规划和0-1规划

- 模型引出
- 模型原理
- 典型例题
- 代码求解

整数规划和0-1规划——模型引出

➢ 我们再来看游戏升级的问题

- 游戏每天有100点体力，我们可以通过反复通关A、B、C三张地图来获取经验升级
- 通关A图可以获得20点经验，通关B图可以获得30点经验，通关C图可以获得40点经验
- 通关地图会消耗体力，通关A图消耗4点体力，通关B图消耗8点体力，通关C图消耗10点体力
- 同时A、B、C三图每天加在一起最多通关20次
- PP应该怎么组合通关ABC三个地图的次数，来使今天获得的经验最大？

$$\max \quad y = 20x_1 + 30x_2 + 40x_3,$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} 4x_1 + 8x_2 + 10x_3 \le 100, \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 20, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

$$\min \quad \text{-}y = -20x_1 - 30x_2 - 40x_3,$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} 4x_1 + 8x_2 + 10x_3 \le 100, \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 20, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

```
Optimal solution found.
x = 3×1
     16.6667
           0
      3.3333

fval = -466.6667
y = 466.6667
A、B、C三图分别通关的次数为:
   16.6667
         0
    3.3333
最终获得的经验为:
  466.6667
```

MATH 数模加油站

➢ 整数规划和0-1规划

- 在规划问题中，有些最优解可能是**分数或小数**，但对于某些具体问题，常要求某些变量（全部或部分）的解必须是**整数**。例如，当变量代表的是机器的台数，工作的人数或装货的车数等。为了满足整数的要求，初看起来似乎只要把已得的非整数解舍入化整就可以了。实际上化整后的数不见得是**可行解和最优解**，所以应该有特殊的方法来求解整数规划。在整数规划中，如果所有变量都限制为整数，则称为**纯整数规划**；如果仅一部分变量限制为整数，则称为**混合整数规划**。整数规划的一种特殊情形是**0-1规划**，它的变数仅限于0或1。

整数规划

线性整数规划 → Matlab**可进行求解**（在线性规划的基础上，加入决策变量取整数的条件）

非线性整数规划 → 无特定算法，只能**用近似算法**，如蒙特卡罗模拟，智能算法等

0-1规划：特殊的整数规划，Matlab中也**只能求解线性0-1规划**，对于非线性0-1规划也只能求近似解

线性整数规划求解

- $[x, fval] = intlinprog(f, intcon, A, b, Aeq, beq, lb, ub, x0)$

  f——目标函数的系数向量（必须是求最小值形式下的）
  $intcon$——$intcon$中的值指示决策变量 x 中应取整数值的分量
  A ,b——不等式约束条件的变量系数矩阵和常数项矩阵（必须是≤形式）
  Aeq ,beq——等式约束条件的系数矩阵和常数项矩阵
  lb ,ub——决策变量的最小取值和最大取值

- $intcon$的用法：决策变量如果有三个：x_1 ,x_2 ,x_3；若x_1 和x_2 是整数，则$intcon$=[1 ,3]

线性0-1规划求解

- 仍然使用$intlinprog$函数求解，只需要限定lb 和ub即可
- 例如：三个决策变量：x_1 ,x_2 ,x_3， x_1 和x_3 是0-1变量， x_2 不限制，则$intcon$=[1 ,3]， $lb = [0 ; -inf ; 0]$， $ub = [1 ; +\text{inf} ; 1]$

MATH 数模加油站

➢ 例1：背包问题

- 有10件货物要从甲地运送到乙地，每件货物的重量（单位：吨）和利润（单位：元）如下表所示

物品	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
重量（t）	6	3	4	5	1	2	3	5	4	2
利润（元）	540	200	180	350	60	150	280	450	320	120

- 由于只有一辆最大载重为30t的货车能用来运送货物，所以**只能选择部分货物进行运送。**
- 要求确定运送哪些货物，使得运送这些货物的**总利润最大。**

$$\text{记}x_i=\begin{cases}1,\text{运送了第}i\text{件货物}\\0,\text{没有运送第}i\text{件货物}\end{cases},i=1,2,\dots,10$$

记w_i表示第i件物品的重量，p_i表示第i件物品的利润

$$\max\ \sum_{i=1}^{10}p_ix_i \qquad s.t.\begin{cases}\sum_{i=1}^{10}w_ix_i\le 30\\x_i\in\{0,1\}\end{cases}$$

$$\min\ -\sum_{i=1}^{10}p_ix_i \qquad s.t.\begin{cases}\sum_{i=1}^{10}w_ix_i\le 30\\x_i\in\{0,1\}\end{cases}$$

例2：指派问题

- 已知5名游泳候选人的百米成绩，怎么选拔队员组成4×100米混合泳接力队伍

	蝶泳	仰泳	蛙泳	自由泳
甲	66.8	75.6	87	58.6
乙	57.2	66	66.4	53
丙	78	67.8	84.6	59.4
丁	70	74.2	69.6	57.2
戊	67.4	71	83.8	62.4

- 候选人：$i = 1,2,3,4,5$
- 泳姿：$j = 1,2,3,4$
- $x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{队员}i\text{参加第}j\text{种泳姿} \\ 0, \text{队员}i\text{不参加第}j\text{种泳姿} \end{cases}$
- t_{ij}：队员i参加第j种泳姿的耗时

$$min \quad \sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{5} t_{ij}x_{ij}$$

$$s.t.\begin{cases} \sum_{j=1}^{4} x_{ij} \le 1, i = 1,2,3,4,5 & \text{（每个人只能入选4种泳姿之一）} \\ \sum_{i=1}^{5} x_{ij} = 1, j = 1,2,3,4 & \text{（每种泳姿有且仅有1人参加）} \\ x_{ij} \in \{0,1\} \end{cases}$$

整数规划和0-1规划——代码求解

MATH 数模加油站

- **示例代码**

$$\min \quad -y = -20x_1 - 30x_2 - 40x_3,$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 4x_1 + 8x_2 + 10x_3 \le 100, \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 20, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

```
clc , clear
f = [-20 ;-30 ;-40];
intcon=[1; 2; 3]
A = [4 ,8 ,10;1 ,1 ,1;];
b = [100 ;20];
lb = zeros(3 ,1);
[x,fval] = intlinprog(f ,intcon, A ,b ,[] ,[] ,lb) %没有等号约束
y = -fval %目标函数为最大化
disp('A、B、C三图分别通关的次数为: ')
disp(x)
disp('最终获得的经验为: ')
disp(y)
```

➢ **例1背包问题代码**

```
%% 背包问题（货车运送货物的问题）
c = -[540 200 180 350 60 150 280 450 320 120]; % 目标函数的系数矩阵(最大化问题记得加负号)
intcon=[1:10]; % 整数变量的位置(一共10个决策变量，均为0-1整数变量)
A = [6 3 4 5 1 2 3 5 4 2]; b = 30; % 线性不等式约束的系数矩阵和常数项向量（物品的重量不能超过30）
Aeq = []; beq =[]; % 不存在线性等式约束
lb = zeros(10,1); % 约束变量的范围下限
ub = ones(10,1); % 约束变量的范围上限
%最后调用intlinprog()函数
[x,fval]=intlinprog(c,intcon,A,b,Aeq,beq,lb,ub)
fval = -fval
```

➢ 例2指派问题代码

```
%% 指派问题（选择队员去进行游泳接力比赛）
clear;clc
% 双下标要转换为单下标: x11→x1, x12→x2, …, x24→x8, …, x54→x20
c = [66.8 75.6 87 58.6 57.2 66 66.4 53 78 67.8 84.6 59.4 70 74.2 69.6 57.2 67.4 71 83.8
62.4]'; % 目标函数的系数矩阵（先列后行的写法）
intcon = [1:20]; % 整数变量的位置(一共20个决策变量, 均为0-1整数变量)
% 线性不等式约束的系数矩阵和常数项向量（每个人只能入选四种泳姿之一, 一共五个约束）
A = [1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1];
% A = zeros(5,20);
% for i = 1:5
% A(i, (4*i-3): 4*i) = 1;
% end
b = [1;1;1;1;1];
```

➢ 例2指派问题代码

```
% 线性等式约束的系数矩阵和常数项向量 （每种泳姿有且仅有一人参加，一共四个约束）
Aeq = [1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0;
0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0;
0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0;
0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1];
% Aeq = [eye(4),eye(4),eye(4),eye(4),eye(4)]; % 或者写成 repmat(eye(4),1,5)
beq = [1;1;1;1];
lb = zeros(20,1); % 约束变量的范围下限
ub = ones(20,1); % 约束变量的范围上限
%最后调用intlinprog()函数
[x,fval] = intlinprog(c,intcon,A,b,Aeq,beq,lb,ub)
% reshape(x,4,5)
% 0 0 0 1 甲自由泳
% 1 0 0 0 乙蝶泳
% 0 1 0 0 丙仰泳
% 0 0 1 0 丁蛙泳
% 0 0 0 0 戊不参加
```

欢迎关注数模加油站

THANKS