LIS问题

问题描述：

对序列 X： $X(0)$ $X(1)$ $\cdots$ $X(n)$

有子序列 a： $a(0)$ $a(1)$ $\cdots$ $a(m)$ $m \leq n$

满足 $\forall i < j$，$a(i) < a(j)$，且 a 为 X 中满足条件的最长子序列

记 $C(i)$ 为以 $X(i)$ 结尾的 LIS 长度

则 $C(i) = \max\{C(P_j)\} + 1$ P_j 满足 $\begin{cases} P_j < i \\ X[P_j] < X[i] \end{cases}$

例如 $X = \{ 1 \quad 6 \quad 4 \quad 5 \quad 3 \quad 8 \quad 2 \}$

标号 $0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6$

$C(0) = 1$

$C(1) = \max \begin{cases} C(0)+1 \\ 1 \end{cases} = 2$

$C(2) = \max \begin{cases} C(0)+1 \\ 1 \end{cases} = 2$

$C(3) = \max \begin{cases} C(0)+1 \\ C(2)+1 \\ 1 \end{cases} = 3$

$C(4) = \max \begin{cases} C(0)+1 \\ 1 \end{cases} = 2$ $1 \quad 4 \quad 5 \quad 8$

$C(5) = \max \begin{cases} C(0)+1 \\ C(1)+1 \\ C(4)+1 \\ 1 \end{cases} = 4$

$C(6) = \max \begin{cases} C(0)+1 \\ 1 \end{cases} = 2$

$LIS = \max \{ C(0), C(1) \cdots C(6) \} = 4$

若采用递归会产生大量重复计算，故采用DP

$C(6)$

$\underline{C(0) \quad C(1) \quad \cdots \quad C(5)}$

$\underline{C(0) \quad C(1) \quad C(2) \cdots C(4)}$
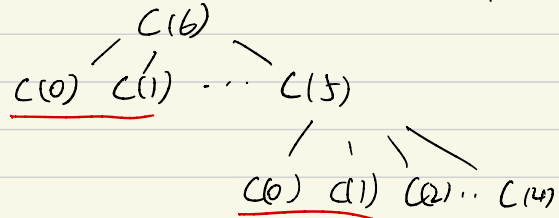
伪代码   求 $X(n)$ 的 LIS

```
main
for i in (0:n)
    tempn , tempC = cacul_c(i)
    if tempC > Max
        Max = tempC
        if num_list don't have tempn
            num-list.insert(tempn)
return num_list , Max
```

```
cacul_C(i)     // 计算 C(i)
    max = 0
    for j in (0:i)
        if  max < X[j] < X[i]
            max = X[j]
            max-num = j
    return  max-num , max+1
```

num-list 为 LIS 下标，Max 为 LIS长度

当有 $C(i)$ 成为最大值时，设 $C(i) = C(p)+1$，则 $X(p)$ 应为 LIS 中的一元素。