

09. 积分部分习题课 2022-12

上页

下页

返回

1.积分计算问题

(1). (P192/ Ex.3) 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且除有限多个点外有 $F'(x) = f(x)$, 则有

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

(2). 计算 $\int_0^{\pi} \frac{1}{2 + \cos 2x} dx$.

(3). 计算 $\int_{-1}^1 \frac{1}{1 + x^4} dx$.

2.证明: $\int_0^{2\pi} e^{\sin^2 x} dx \geq 3\pi$.

3.设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续的导函数, 且 $f(a) = 0$,

$|f'(x)| \leq M, x \in [a, b]$. 求证: $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{1}{2} M (b - a)^2$.

4.设 $f \in C[0, 1], f(x) > 0$. 证明

$$\ln \int_0^1 f(x) dx \geq \int_0^1 \ln f(x) dx. \quad (\text{与 } P220/Ex.1, 8 \text{ 类同})$$

5.设 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续且同为单调增加或单调减少, 则有

$$\int_a^b f(x) dx \int_a^b g(x) dx \leq (b - a) \int_a^b f(x) g(x) dx .$$

6. 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则有:

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx \right]^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx .$$

(*Cauchy – Schwarz – Bunijakovsky* 不等式)

7. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 求证:

$$\left(\int_a^b f(x)dx \right)^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(x)dx .$$

8. (*P205/Ex.11*) 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上

二阶可导, 且 $f''(x) > 0$. 求证:

$$\int_a^b f(x)dx \geq (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

9. 计算不定积分

$$(1). \int \frac{dx}{x + \sqrt{1-x^2}} ; \quad (2). \int \sqrt{a^2 - x^2} dx ; \quad (3). \int \frac{dx}{1 + \sqrt{2x}} ;$$

$$(4). \int (x \ln x)^2 dx ; \quad (5). \int e^{-\sqrt[3]{x}} dx ;$$

$$(6). \int \frac{\arctan x}{\sqrt{(1+x^2)^3}} dx ; \quad (7). \int \sqrt{e^x - 1} dx ;$$

$$(8). \int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx ; \quad (9). \int \frac{x + 2x^3}{1+x+x^2} dx .$$

1.积分计算问题

(1).(P192/Ex.3)若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且除有限多个点外有 $F'(x)=f(x)$,则有

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

这叫作**推广的Newton-Leibniz公式**.

证明 取 $[a,b]$ 的一个划分 $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, $a = x_0, x_n = b$, 使得使 $F'(x) = f(x)$ 不成立的点成为划分 T 的部分分点, 在 $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k]$ 上由Lagrange微分中值定理得

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(\xi_k) \Delta x_k = f(\xi_k) \Delta x_k,$$

$$\text{则 } F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^n [F(x_k) - F(x_{k-1})] = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k,$$

$\because f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, $\therefore \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \int_a^b f(x)dx$.证毕

例如,计算积分: $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx$.

解 在 $(-\infty, +\infty)$ 上, $\arctan x$ 是 $\frac{1}{1+x^2}$ 的一个原函数,

$$\therefore \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctan x]_{-1}^1 = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

$x \neq 0$ 时, $\left(-\arctan \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{1+x^2}$, 但是 $-\arctan \frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 时没有定义,

所以 $-\arctan \frac{1}{x}$ 不是 $\frac{1}{1+x^2}$ 在 $[-1, 1]$ 上的一个原函数. 稍作改造,

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\arctan \frac{1}{x}, & x < 0 \\ \pi/2, & x = 0 \\ \pi - \arctan \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}, \Phi(x) \text{ 在 } [-1, 1] \text{ 上连续, 且 } x \neq 0 \text{ 时 } \Phi'(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

$$\text{于是, } \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \Phi(1) - \Phi(-1) = \pi - \arctan 1 - \left(-\arctan \frac{1}{(-1)}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

1.积分计算(2). $I = \int_0^{\pi} \frac{1}{2 + \cos 2x} dx$.

$$\int \frac{1}{2 + \cos 2x} dx = \int \frac{1}{1 + 2\cos^2 x} dx = \int \frac{\sec^2 x}{2 + \sec^2 x} dx$$

$$= \int \frac{(\tan x)'}{3 + \tan^2 x} dx = \int \frac{1}{(\sqrt{3})^2 + \tan^2 x} d(\tan x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\tan x}{\sqrt{3}} + C.$$

1.积分计算(2). $I = \int_0^{\pi} \frac{1}{2 + \cos 2x} dx$.

倘由 $\int \frac{1}{2 + \cos 2x} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\tan x}{\sqrt{3}} + C$

得 $I = \int_0^{\pi} \frac{1}{2 + \cos 2x} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\tan x}{\sqrt{3}} \Big|_0^{\pi} = 0,$

在 $[0, \pi]$ 上 $\frac{1}{2 + \cos 2x} \geq \frac{1}{3} > 0$, 我们知道错了!

由 $\frac{1}{2 + \cos 2x}$ 在 $[0, \pi]$ 上连续, 因而其原函数也

必须是连续的. 故 $\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\tan x}{\sqrt{3}}$ 不是 $\frac{1}{2 + \cos 2x}$

在 $[0, \pi]$ 上的原函数.

$$\begin{aligned}
 \text{解 } \int_0^{\pi} \frac{1}{2 + \cos 2x} dx &= \int_0^{\pi} \frac{1}{1 + 2\cos^2 x} dx \\
 &= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{1 + 2\cos^2 x} dx + \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{1}{1 + 2\cos^2 x} dx + \int_{3\pi/4}^{\pi} \frac{1}{1 + 2\cos^2 x} dx \\
 &= \int_0^{\pi/4} \frac{\sec^2 x}{2 + \sec^2 x} dx + \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{\csc^2 x}{\csc^2 x + 2\cot^2 x} dx + \int_{3\pi/4}^{\pi} \frac{\sec^2 x}{2 + \sec^2 x} dx \\
 &= \int_0^{\pi/4} \frac{d(\tan x)}{(\sqrt{3})^2 + \tan^2 x} + \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{-d(\cot x)}{1 + (\sqrt{3}\cot x)^2} dx + \int_{3\pi/4}^{\pi} \frac{d(\tan x)}{(\sqrt{3})^2 + \tan^2 x} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\tan x}{\sqrt{3}} \Big|_0^{\pi/4} - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan(\sqrt{3}\cot x) \Big|_{\pi/4}^{3\pi/4} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\tan x}{\sqrt{3}} \Big|_{3\pi/4}^{\pi} \\
 &= \dots = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.
 \end{aligned}$$

（注：其中点 $\frac{\pi}{4}$ 的选取是随意的，只要取

$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内的点即可；同样， $\frac{3\pi}{4}$ 亦如此。）

1.积分计算(2). $I = \int_0^{\pi} \frac{1}{2 + \cos 2x} dx$.

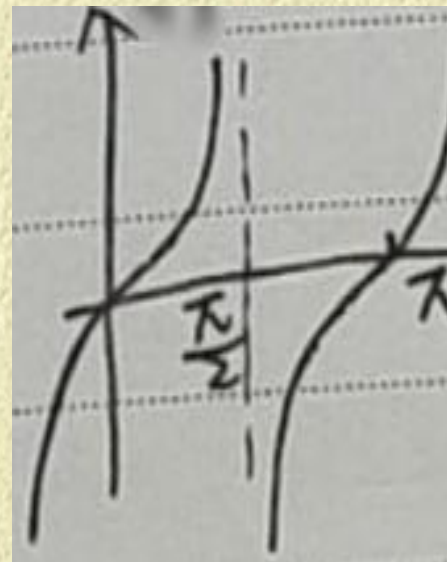
法二 由 $\int \frac{1}{2 + \cos 2x} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\tan x}{\sqrt{3}} + C$,

据拓广的 *Newton - Leibniz* 公式, 取

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\tan x}{\sqrt{3}}, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2\sqrt{3}}, & x = \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\tan x}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{\sqrt{3}}, & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}, \quad \Phi(x) \text{ 在 } [0, \pi] \text{ 上连续,}$$

在 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 时 $\Phi'(x) = \frac{1}{2 + \cos 2x}$.

$$\therefore I = \int_0^{\pi} \frac{1}{2 + \cos 2x} dx = \Phi(\pi) - \Phi(0) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} .$$



1.积分计算(3). $I = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^4} dx$.

解 $\int \frac{1}{1+x^4} dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \left(\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} - \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1} \right) dx$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} \right| + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\arctan(\sqrt{2}x+1) + \arctan(\sqrt{2}x-1) \right] + C.$$

$$\therefore I = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^4} dx = \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} \right| \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\arctan(\sqrt{2}x+1) + \arctan(\sqrt{2}x-1) \right] \end{aligned} \right\}_{-1}^1$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\ln(\sqrt{2}+1) + \frac{\pi}{2} \right] = A.$$

1.积分计算(3). $I = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^4} dx$.

$$\text{解二 } \int \frac{1}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} \left(\int \frac{1+x^2}{1+x^4} dx + \int \frac{1-x^2}{1+x^4} dx \right)$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2} - \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}} \right| + C_1$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} \right| + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} + C_1,$$

1.积分计算(3). $I = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^4} dx$.

$$\int \frac{1}{1+x^4} dx = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right| + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{x^2 - 1}{x\sqrt{2}} + C_1,$$

作与 1.(2)同样的改造,

$$G(x) = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right| + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{x^2 - 1}{x\sqrt{2}}, & x < 0 \\ \frac{\pi}{4\sqrt{2}}, & x = 0 \\ \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right| + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{x^2 - 1}{x\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, & x > 0 \end{cases} \quad \text{连续,}$$

在 $x \neq 0$ 时 $G'(x) = \frac{1}{1+x^4}$.

则 $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^4} dx = G(1) - G(-1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\ln(\sqrt{2} + 1) + \frac{\pi}{2} \right] = A$.

上页

下页

返回

2.证明: $\int_0^{2\pi} e^{\sin^2 x} dx \geq 3\pi$.

Hint. $\forall t \in \mathbb{R}$ 有 $e^t \geq 1+t \dots$

3.设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续的导函数, 且 $f(a) = 0$,

$|f'(x)| \leq M, x \in [a, b]$. 求证: $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{1}{2} M (b-a)^2$.

Hint. $x \in [a, b]$,

$f(x) = f(a) + f'(\xi)(x-a) = f'(\xi)(x-a), \xi \in (a, x)$

$|f'(x)| \leq M \Rightarrow -M(x-a) \leq f(x) \leq M(x-a), x \in [a, b]$

$\therefore -\frac{1}{2} M (b-a)^2 = -M \int_a^b (x-a) dx \leq \int_a^b f(x) dx$

$\leq M \int_a^b (x-a) dx = \frac{1}{2} M (b-a)^2$.

4. 设 $f \in C[0,1]$, $f(x) > 0$. 证明

$$\ln \int_0^1 f(x) dx \geq \int_0^1 \ln f(x) dx. \quad (\text{与 } P220/Ex.1,8 \text{ 类同})$$

证明 由 $[0,1]$ 上 $f(x) > 0$ 知 $\int_0^1 f(x) dx = A > 0$.

$$\because \forall t > -1, \ln(1+t) \leq t. \quad \therefore \forall x \in [0,1],$$

$$\ln f(x) = \ln A + \ln \left(1 + \frac{f(x)}{A} - 1 \right) \leq \ln A + \frac{f(x)}{A} - 1,$$

$$\therefore R \leq \int_0^1 \left[\ln A + \frac{f(x)}{A} - 1 \right] dx = \ln A + \int_0^1 \frac{f(x)}{A} dx - 1$$

$$= \ln A = L.$$

5. 设 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续且同为单调增加或单调减少, 则有

$$\int_a^b f(x) dx \int_a^b g(x) dx \leq (b-a) \int_a^b f(x) g(x) dx .$$

证明

6. 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则有:

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx \right]^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx .$$

(Cauchy – Schwarz – Bunijakovsky 不等式)

证明 据离散形式的Cauchy不等式 $\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)$,

$f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积 $\Rightarrow f(x)g(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积 ,

对区间 $[a, b]$ 作划分 $T = \{\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n\}$, 则相应的Riemann积分和

有 $\left(\sum_{i=1}^n f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n f^2(\xi_i)\Delta x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n g^2(\xi_i)\Delta x_i \right)$, 于是,

$$\lim_{\|T\| \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^n f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i \right)^2 \leq \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^n f^2(\xi_i)\Delta x_i \right) \cdot \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^n g^2(\xi_i)\Delta x_i \right),$$

$$\text{即得} \left[\int_a^b f(x)g(x)dx \right]^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx .$$

6. 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则有:

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx \right]^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx .$$

(Cauchy – Schwarz – Bunijakovsky 不等式)

证二 $\forall x \in [a, b], \forall \lambda \in \mathbb{R}, (\lambda f(x) + g(x))^2 \geq 0 \Rightarrow$

$\int_a^b [\lambda f(x) + g(x)]^2 dx \geq 0, \therefore \forall \lambda \in \mathbb{R},$ 有

$$\lambda^2 \int_a^b f^2(x)dx + 2\lambda \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx \geq 0,$$

$$\int_a^b f^2(x)dx > 0, \Delta \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx \geq \left[\int_a^b f(x)g(x)dx \right]^2 .$$

(2). $\int_a^b f^2(x)dx = 0, \dots$ (回到证法一)

上页

下页

返回

6. 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则有:

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx \right]^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx .$$

(Cauchy - Schwarz - Bunijakovsky 不等式)

7. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 求证:

$$\left(\int_a^b f(x)dx \right)^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(x)dx .$$

证明...

上页

下页

返回

8. 若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上二阶可导的凸函数,

$$\text{求证: } \int_a^b f(x)dx \geq (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

证明 $\because f(x)$ 是 $[a,b]$ 上可导的凸函数,

$$\therefore x \in [a,b] \text{ 时有 } f(x) \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right),$$

$$\therefore \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b \left[f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) \right] dx$$

$$= (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx$$

$$= (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + 0 = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

8. 若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上二阶可导的凸函数,

$$\text{求证: } \int_a^b f(x)dx \geq (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

证二 $\because f(x)$ 是 $[a,b]$ 上二阶可导函数,

$$\forall x \in [a,b], f(x) =$$

$$= f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{f''(\xi)}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2,$$

$\because f(x)$ 是 $[a,b]$ 上二阶可导的凸函数,故 $f''(x) \geq 0$,

$$\therefore f(x) \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) \dots$$

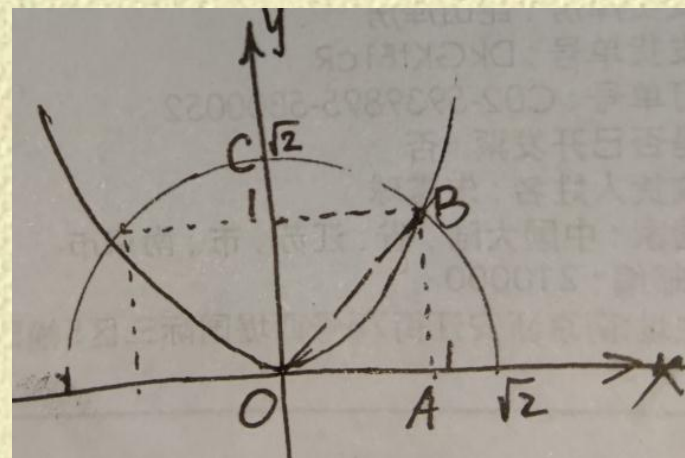
$$\int_0^1 \sqrt{2-x^2} dx = ?$$

利用积分几何意义, 得 $\int_0^1 \sqrt{2-x^2} dx$

$$= A_{\triangle OAB} + A_{\text{扇形}OBC} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (\sqrt{2})^2 = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{硬算} \int_0^1 \sqrt{2-x^2} dx = \left(\arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} x \sqrt{2-x^2} \right) \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}.$$



例.计算积分. $\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$ ($a > 0$);

解 令 $x = a \sin t, dx = a \cos t dt, t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int |a \cos t| \cdot a \cos t dt$$

$$= a^2 \int \cos^2 t dt = \frac{1}{2} a^2 \int (1 + \cos 2t) dt$$

$$= \frac{1}{2} a^2 \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C = \frac{1}{2} a^2 t + \frac{1}{2} a^2 \sin t \cos t + C$$

$$= \frac{1}{2} a^2 \arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

上页

下页

返回

$$\begin{aligned}
 9.(1). & \int \frac{dx}{x + \sqrt{1-x^2}} \stackrel{x=\sin t}{=} \int_{t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]} \frac{\cos t}{\sin t + |\cos t|} dt \\
 & = \int \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\cos t}{\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)} dt \stackrel{t+\frac{\pi}{4}=u}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\cos\left(u - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin u} du \\
 & = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\cos u \cos \frac{\pi}{4} + \sin u \sin \frac{\pi}{4}}{\sin u} du = \frac{1}{2} \int \left(1 + \frac{\cos u}{\sin u}\right) du \\
 & = \frac{1}{2} \left(u + \ln|\sin u|\right) + C = \frac{1}{2} \left(t + \frac{\pi}{4} + \ln\left|\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\right|\right) + C \\
 & = \frac{1}{2} \left(t + \ln|\sin t + \cos t|\right) + C_1 = \frac{1}{2} \left(\arcsin x + \ln\left|x + \sqrt{1-x^2}\right|\right) + C_1 .
 \end{aligned}$$

$$9.(1). \int \frac{dx}{x + \sqrt{1-x^2}} \stackrel{x=\sin t}{t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]} = \int \frac{\cos t}{\sin t + |\cos t|} dt = \int \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} dt$$

或者, 令 $\int \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} dt = J_C, \int \frac{\sin t}{\sin t + \cos t} dt = J_S,$

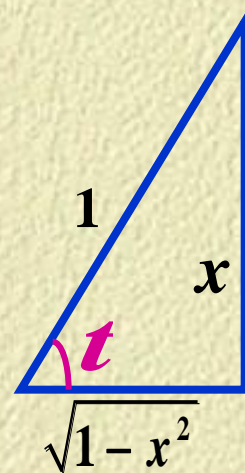
则 $J_C + J_S = \int 1 dt = t + C_1,$

$$J_C - J_S = \int \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t} dt = \int \frac{(\sin t + \cos t)'}{\sin t + \cos t} dt$$

$$= \ln |\sin t + \cos t| + C_2,$$

$$\therefore J_C = \frac{1}{2} (t + \ln |\sin t + \cos t|) + C_3$$

$$= \frac{1}{2} \left(\arcsin x + \ln \left| x + \sqrt{1-x^2} \right| \right) + C_3 .$$



9.(2). $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad (a > 0);$

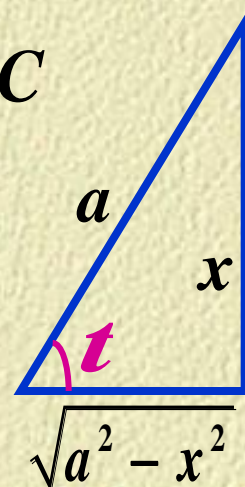
解 令 $x = a \sin t, dx = a \cos t dt, t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int |a \cos t| \cdot a \cos t dt$$

$$= a^2 \int \cos^2 t dt = \frac{1}{2} a^2 \int (1 + \cos 2t) dt$$

$$= \frac{1}{2} a^2 \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C = \frac{1}{2} a^2 t + \frac{1}{2} a^2 \sin t \cos t + C$$

$$= \frac{1}{2} a^2 \arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$



$$9.(4). \int u^2 e^u du = u^2 e^u - \int 2ue^u du = u^2 e^u - \left(2ue^u - \int 2e^u du \right) \\ = u^2 e^u - 2ue^u + 2e^u + C_1,$$

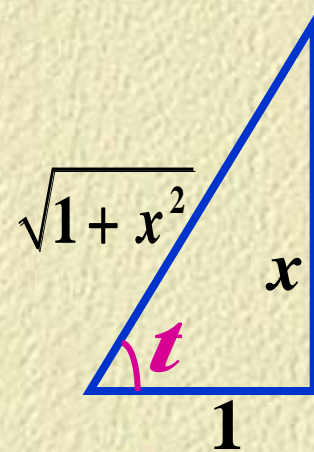
$$\int (x \ln x)^2 dx \stackrel{\substack{\ln x = t \\ x = e^t}}{=} \int t^2 e^{2t} \cdot e^t dt = \int t^2 e^{3t} dt \stackrel{3t=u}{=} \frac{1}{27} \int u^2 e^u du \\ = \frac{1}{27} (u^2 e^u - 2ue^u + 2e^u + C_1) = \frac{1}{27} (u^2 - 2u + 2) e^u + C_2 \\ = \frac{1}{27} (9t^2 - 6t + 2) e^{3t} + C_2 = \frac{1}{27} x^3 [9(\ln x)^2 - 6(\ln x) + 2] + C_2.$$

$$\int (x \ln x)^2 dx = \frac{1}{3} x^3 (\ln x)^2 - \frac{1}{3} \int x^3 \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx \\ = \frac{1}{3} x^3 (\ln x)^2 - \frac{2}{3} \int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3} x^3 (\ln x)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^3 \cdot \frac{1}{x} dx \right) \\ = \frac{1}{3} x^3 (\ln x)^2 - \frac{2}{9} x^3 \ln x + \frac{2}{27} x^3 + C = \frac{1}{27} x^3 [9(\ln x)^2 - 6(\ln x) + 2] + C.$$

$$9.(3). \int \frac{dx}{1 + \sqrt{2x}}, \quad \sqrt{2x} = t,$$

$$9.(5). \int e^{-\sqrt[3]{x}} dx \stackrel[\substack{\sqrt[3]{x}=t \\ x=t^3}]{=} 3 \int t^2 e^{-t} dt = \cdots = -3e^{-t} (t^2 + 2t + 2) + C \\ = -3e^{-\sqrt[3]{x}} \left(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 2 \right) + C.$$

$$9.(6). \int \frac{\arctan x}{\sqrt{(1+x^2)^3}} dx \stackrel[\substack{\arctan x=t \\ t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}]{=} \int \frac{t}{|\sec t|^3} \cdot \sec^2 t dt = \int t \cos t dt \\ = t \sin t - \int \sin t dt = t \sin t + \cos t + C \\ = \frac{x \arctan x + 1}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$



1

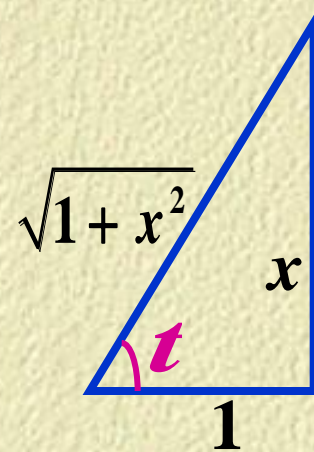
$$9.(7). \int \sqrt{e^x - 1} dx \stackrel{\substack{\sqrt{e^x - 1} = t \\ x = \ln(1+t^2)}}{=} \int t \cdot \frac{2t}{1+t^2} dt = 2 \int \left(1 - \frac{1}{1+t^2} \right) dt$$

$$= 2t - 2\arctan t + C = 2\sqrt{e^x - 1} - 2\arctan \sqrt{e^x - 1} + C .$$

$$9.(8). \int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx \stackrel{\substack{x = \tan t \\ t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}}{=} \int \frac{1}{\sec^4 t} \cdot \sec^2 t dt = \int \cos^2 t dt$$

$$= \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C$$

$$= \frac{1}{2} \left(\arctan x + \frac{x}{1+x^2} \right) + C .$$



$$9.(9). 2x^3 + x = 2x^3 + 2x^2 + 2x - (2x^2 + 2x + 2) + x + 2 ,$$

$$\int \frac{x + 2x^3}{1 + x + x^2} dx = \int \left(2x - 2 + \frac{x + 2}{1 + x + x^2} \right) dx$$

$$= x^2 - 2x + \int \frac{\frac{1}{2}(1 + x + x^2)' + \frac{3}{2}}{1 + x + x^2} dx$$

$$= x^2 - 2x + \frac{1}{2} \int \frac{d(1 + x + x^2)}{1 + x + x^2} dx + \frac{3}{2} \int \frac{1}{1 + x + x^2} dx$$

$$= x^2 - 2x + \frac{1}{2} \ln(1 + x + x^2) + 3 \int \frac{1}{(2x + 1)^2 + (\sqrt{3})^2} d(2x + 1)$$

$$= x^2 - 2x + \ln \sqrt{1 + x + x^2} + \frac{3}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C$$

$$= x^2 - 2x + \ln \sqrt{1 + x + x^2} + \sqrt{3} \arctan \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C.$$

$$9.(10). \int \frac{1}{1+e^x} dx .$$

$$\text{解 } \int \frac{1}{1+e^x} dx = \int \frac{1+e^x - e^x}{1+e^x} dx$$

$$= \int dx - \int \frac{1}{1+e^x} (1+e^x)' dx$$

$$= x - \ln(1+e^x) + C .$$

以上均属基本题

$$10.(1). \int \frac{1 + \cos x}{x + \sin x} dx = \int \frac{(x + \sin x)'}{x + \sin x} dx = \ln|x + \sin x| + C .$$

$$(2). \int \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx = \int \frac{x + 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} dx$$

$$= \int x \cdot \frac{1}{2} \sec^2\left(\frac{x}{2}\right) dx + \int \tan\left(\frac{x}{2}\right) dx = \int x \cdot \left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)' dx + \int \tan\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

$$= x \tan\left(\frac{x}{2}\right) - \int \tan\left(\frac{x}{2}\right) dx + \int \tan\left(\frac{x}{2}\right) dx = x \tan\left(\frac{x}{2}\right) + C .$$

这种特别的巧遇不必在意 .

以下所示谓之“单元法”,甚至还有所谓“双元法”之类的问题,这种特别的巧遇不必在意.若沉迷于其中,则或许是有害的.

$$10.(3). \int \frac{1+x \cos x}{x(1+x e^{\sin x})} dx = \int \frac{(1+x \cos x) e^{\sin x}}{x e^{\sin x} (1+x e^{\sin x})} dx = \int \frac{(x e^{\sin x})'}{x e^{\sin x} (1+x e^{\sin x})} dx$$

$$\stackrel{x e^{\sin x}=u}{=} \int \frac{1}{u(1+u)} du = \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u} \right) du = \ln \left| \frac{u}{1+u} \right| + C = \ln \left| \frac{x e^{\sin x}}{1+x e^{\sin x}} \right| + C .$$

$$(4). \int \frac{x^2-x}{(e^x-x)^2} dx = \int \frac{(x^2-x) e^{-2x}}{(1-x e^{-x})^2} dx \stackrel{-x=u}{=} \int \frac{(u^2+u) e^{2u}}{(1+u e^u)^2} du$$

$$= \int \frac{u e^u \cdot (1+u) e^u}{(1+u e^u)^2} du = \int \frac{u e^u \cdot (u e^u)'}{(1+u e^u)^2} du = \int \frac{u e^u}{(1+u e^u)^2} d(u e^u)$$

$$\stackrel{u e^u=t}{=} \int \frac{t}{(1+t)^2} dt = \int \frac{1+t}{(1+t)^2} dt - \int \frac{1}{(1+t)^2} dt = \ln |1+t| + \frac{1}{1+t} + C$$

$$= \ln |1+u e^u| + \frac{1}{1+u e^u} + C = \ln |1-x e^{-x}| + \frac{1}{1-x e^{-x}} + C .$$

Add.备注

由 $Lagrange$ 微分中值定理我们可推知：

注 1. 区间 I 内可导函数的导函数要么连续,要么有第二类间断点.

也就是说,可导函数的导函数不可能有第一类间断点.

注 2. (原函数存在定理)区间 I 内连续函数必定有原函数 .

注 3. 知道函数可积的必要条件与充分条件 .

注4. 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 $Riemann$ 可积与在 $[a,b]$ 上函数 $f(x)$ 有原函数是两回事.

由 $Th.9.2$ 知,在区间 $[a,b]$ 上函数有界是可积的必要条件 .

若在 $[a,b]$ 上函数 $f(x)$ 无界,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必定不可积 .

当然,在 $[a,b]$ 上 $f(x)$ 有界,则在 $[a,b]$ 上 $f(x)$ 未必可积 .

比如,因为函数 $\frac{1}{\sqrt{x}}$ 在 $(0,1]$ 上无界,所以

符号 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ 表示的不是一个定积分 .

11. 关于原函数与可积性.

(1). 函数 $F_1(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \ln(1+x), & x > 0 \end{cases}$ 可导,

$$f_1(x) = F_1'(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ \frac{1}{1+x}, & x > 0 \end{cases},$$

所以 $F_1(x)$ 是 $f_1(x)$ 的原函数, 函数 $f_1(x)$ 连续, $f_1(x)$ 在任一闭区间上可积.

(2). 函数 $F_2(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 可导,

$$f_2(x) = F_2'(x) = \begin{cases} 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

所以 $F_2(x)$ 是 $f_2(x)$ 的原函数, $x=0$ 是函数 $f_2(x)$ 的第二类间断点. 函数 $f_2(x)$ 有界, 故在任一闭区间上可积.

11. 关于原函数与可积性.

(3). 函数 $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$, 每一点都是

函数 $D(x)$ 的第二类间断点. 根据 *Darboux th.*

(导函数介值定理) 知, 不存在函数 $F_3(x)$ 使得

$F_3'(x) = D(x)$. $D(x)$ 不存在原函数.

$D(x)$ 在任一闭区间上都不可积.

11.(3). *Dirichlet* 函数 $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$,

在任意一点 $x_0 \in \mathbb{R}$ 处的左右极限均不存在,
任意一点 $x_0 \in \mathbb{R}$ 都是 $D(x)$ 的第二类间断点,
但是不存在函数 $C(x)$, 使得 $C'(x) = D(x)$.

因为, 否则, 若存在 $C(x)$, 使得 $C'(x) = D(x)$,
 $C'(1) = 1, C'(\sqrt{2}) = 0$, 据 *Darboux* 定理 (*Th.4*)

知 $\exists \xi \in (1, \sqrt{2})$, 使得 $C'(\xi) = \frac{1}{2} = D(\xi)$,

而这是不可能的.



11.(3). 在 $[a,b]$ 上有界的函数未必可积. 如 $Dirichlet$

$$\text{函数 } D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}, \quad |D(x)| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

对于 $[0,1]$ 的任一分割 T ,由有理数与无理数在实数中的稠密性,在分割 T 的每一个 Δ_i 上,当 ξ_i 都取

有理数时, $\sum_{i=1}^n D(\xi_i) \Delta x_i = 1$, 而当 ξ_i 都取无理数时,

$\sum_{i=1}^n D(\xi_i) \Delta x_i = 0$. 所以无论 $\|T\|$ 多么小,积分和的

极限不存在,说明 $D(x)$ 在 $[0,1]$ 上不可积.

11.(4).函数 $H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$, $x = 0$

是函数 $H(x)$ 的第一类间断点, 所以函数 $H(x)$ 不存在原函数.

函数 $H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$, $x = 0$

是函数 $H(x)$ 的第一类间断点, 所以函数 $H(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上可积.

11.(5).函数 $F(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$

则 $F'(x) = f(x) = \begin{cases} 2x \cos \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$

$x = 0$ 是函数 $f(x)$ 的第二类间断点, 函数 $f(x)$ 有原函数 $F(x)$.

函数 $f(x) = \begin{cases} 2x \cos \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$

在 $U^\circ(0)$ 内 $f(x)$ 无界, 所以函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上不可积 .

复习课件,写来不易.

错讹难免,欢迎指正.

敬请勿予外传!

朱震球谨志

上页

下页

返回