10.1 定积分的应用

一.微元法的思想与方法

二.定积分在几何方面的应用

——面积,体积,弧长,

旋转曲面的面积…

一.微元法的思想与方法

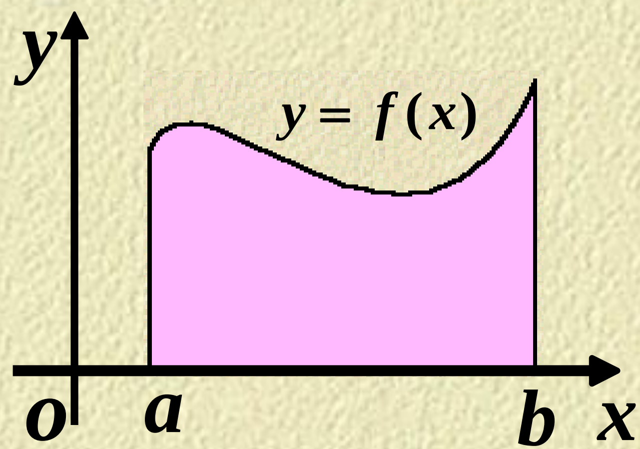
回顾　曲边梯形面积计算问题

由连续曲线$y = f(x)$

$\left(f(x) \geq 0, x \in [a,b]\right)$,

x轴与直线$x = a, x = b$

所围成曲边梯形的面积



$$A = \int_a^b f(x)dx$$

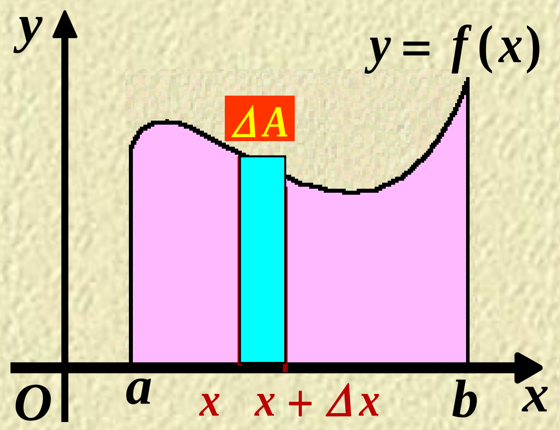
上页 下页 返回

在计算曲边梯形的面积的过程中,我们经过

分割,近似,求和,取极限

这四个步骤得到

$$A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)dx.$$



若用ΔA表示小区间$[x, x+\Delta x]$上的小的曲边梯形的面积,且

$\Delta A\approx f(x)\Delta x$,则

$$A=\sum \Delta A\approx \sum f(x)\Delta x.$$

上页 下页 返回

用微元法建立积分式

(1).待计算量A与区间$[a,b]$有关.A对于区间$[a,b]$具有可加性：如果把$[a,b]$分成若干个小区间,则A相应地分成若干个部分量,而所有部分量之和等于总量A.

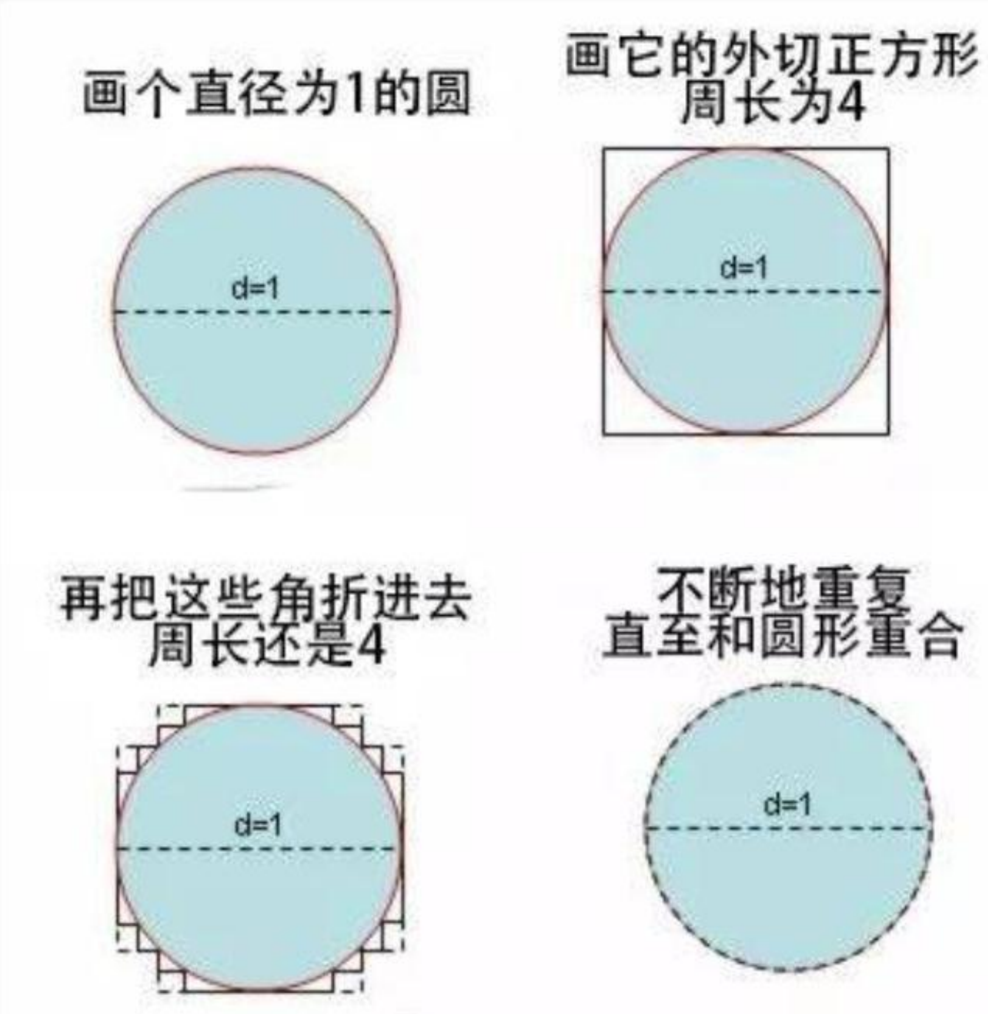
(2).$[a,b]$中的小区间$[x,x+\Delta x]$上的部分量ΔA有$\Delta A\approx f(x)\Delta x$, $\Delta x=dx$,记$dA=f(x)dx$,

若当$dx=\Delta x\to 0$时,有$\Delta A-dA=o(\Delta x)$,则

$$A=\int_a^b dA=\int_a^b f(x)dx.$$

上页 下页 返回

网上常能见到“$\pi=4$”的神奇证明,常常让人不明觉厉.



$$\Rightarrow \pi = 4$$

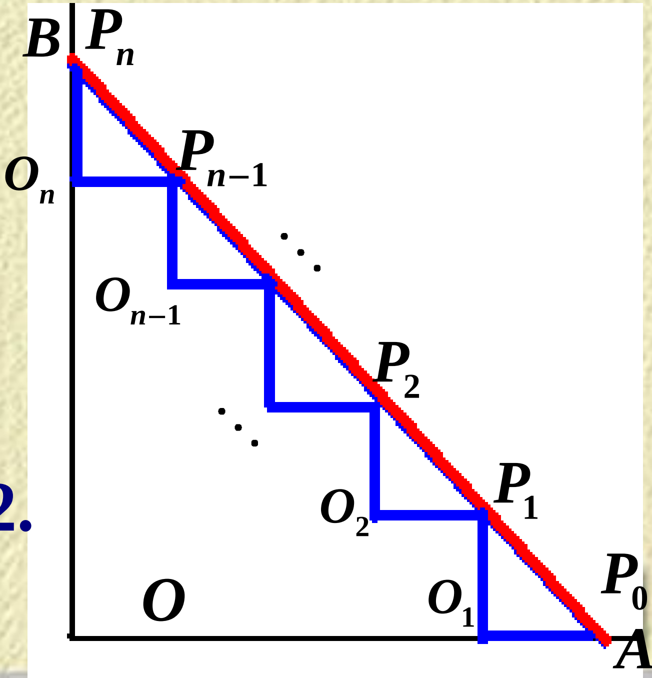
例如,对于平面上点$A(1,0)$, $B(0,1)$所连线段AB长度的计算问题.我们把区间$[0,1]$ n等份分成n个小区间,则线段AB相应地n等份分成$P_0P_1, P_1P_2, \cdots, P_{n-1}P_n$,用连续的折线$P_0O_1P_1O_2P_2\cdots P_{n-1}O_nP_n$的长度作为线段$AB$长度的近似值,

当$P_{i-1}O_i = \Delta x \to 0$时, $P_{i-1}O_iP_i - P_{i-1}P_i = \left(2-\sqrt{2}\right)\Delta x$并不是$\Delta x$的高阶无穷小量,所以,尽管$n$无限增大以致无穷时,

$P_0O_1P_1O_2P_2\cdots P_{n-1}O_nP_n$似乎与直线段$AB$贴近得越来越好,但

$P_0O_1P_1O_2P_2\cdots P_{n-1}O_nP_n$长度的极限不等于$AB$的长,

$P_0O_1P_1O_2P_2\cdots P_{n-1}O_nP_n$的长度恒等于2.



用微元法建立积分式

(1).待计算量A与区间$[a,b]$有关.A对于区间$[a,b]$具有可加性：如果把$[a,b]$分成若干个小区间,则A相应地分成若干个部分量,而所有部分量之和等于总量A.

(2).$[a,b]$中的小区间$[x,x+\Delta x]$上的部分量ΔA有$\Delta A\approx f(x)\Delta x$,$\Delta x=dx$,记$dA=f(x)dx$,

若当$dx=\Delta x\to 0$时,有$\Delta A-dA=o(\Delta x)$,则

$$A=\int_a^b dA=\int_a^b f(x)dx.$$

积分微元 $dA = f(x)dx$

$$\Rightarrow A = \int_a^b dA = \int_a^b f(x)dx.$$

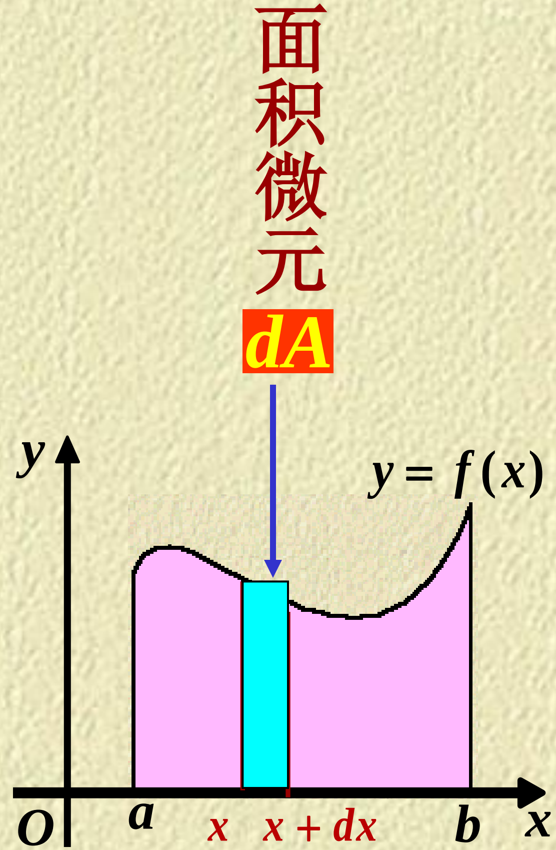
这种建立积分表达式的方法称为微元法.

可以解决的问题:

(1).平面图形的面积,立体的体积,旋转曲面的面积,曲线的弧长$\cdots$

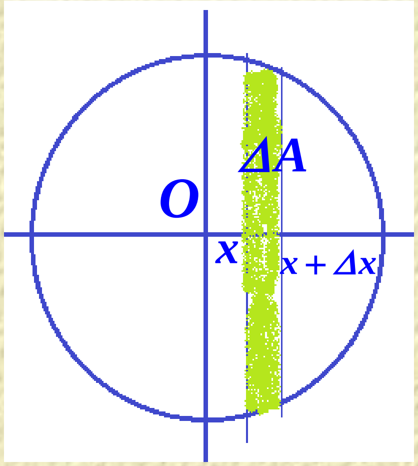
(2).功,水压力,物体的质量,引力$\cdots$

(3).连续函数在区间上的(算术)平均值.



$$\sum \to \int_a^b$$

例如,圆周方程为$x^2 + y^2 = R^2$,



用平行于y轴的直线分割圆,

当$\Delta x = dx \to 0$时,

$$dA = 2\sqrt{R^2 - x^2} \cdot dx,$$

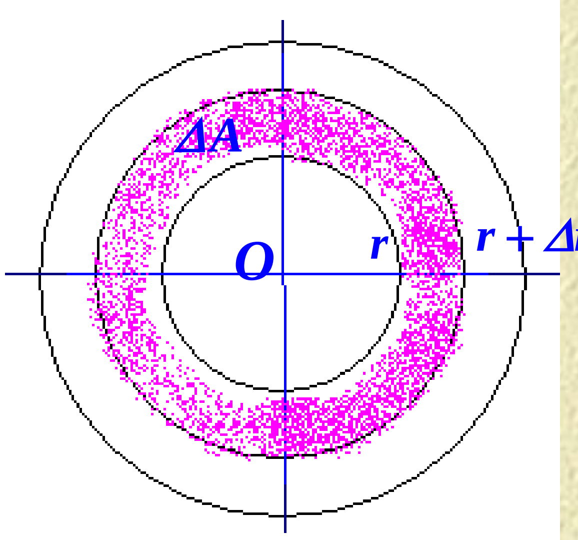
$$\therefore A = \int_{-R}^{R} dA = \int_{-R}^{R} 2\sqrt{R^2 - x^2}dx$$

$$= \cdots = \pi R^2.$$

上页 下页 返回

例如,圆的面积公式$A(r)=\pi r^2$,

当$\Delta r = dr \to 0$时,



$$\Delta A = \pi\left(r+\Delta r\right)^2 - \pi r^2$$

$$= 2\pi r\Delta r + \pi\left(\Delta r\right)^2,$$

$dA = 2\pi r\Delta r$, $\Delta A - dA = o\left(\Delta r\right)$,

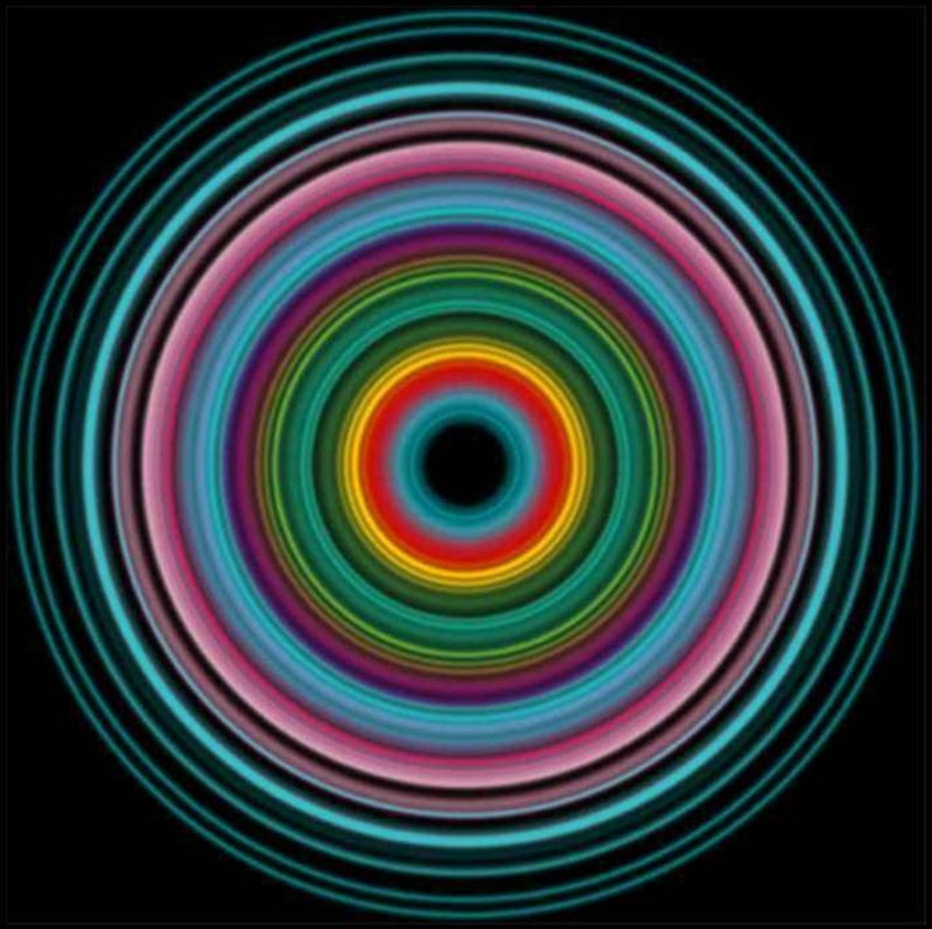
(圆的周长$L(r)=2\pi r.$)那么,由

$dA = 2\pi r\Delta r = 2\pi r dr$ 得半径为R的圆的面积为

$$A=\int_0^R dA=\int_0^R 2\pi r dr=\pi r^2\Big|_0^R=\pi R^2.$$

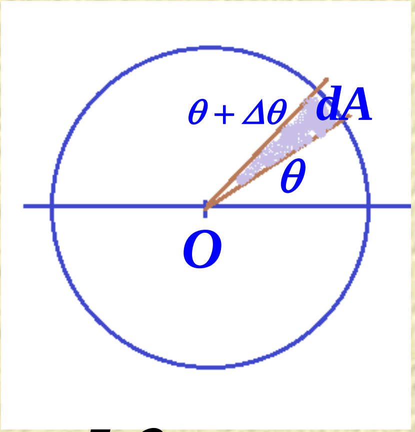
上页 下页 返回


1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1



例如,圆周方程为

$x^2+y^2=R^2 \Leftrightarrow r=R, \theta\in[0,2\pi]$



用从几点出发的射线$\theta=\theta, \theta=\theta+d\theta$

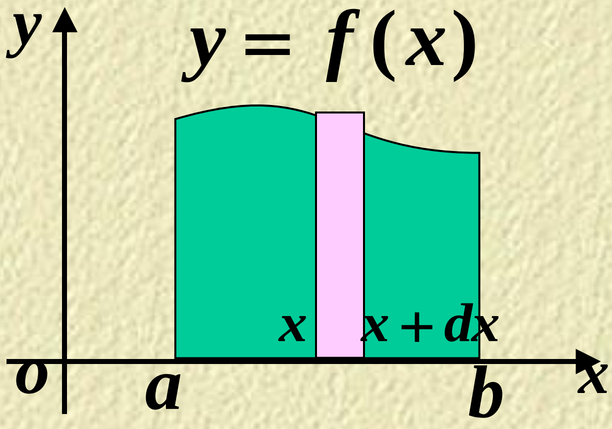
分割圆,当$\Delta\theta=d\theta\to 0$ 时,

$$dA=\frac{1}{2}R^2 d\theta,$$

$$\therefore A=\int_0^{2\pi} dA=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}R^2 d\theta=\pi R^2.$$

二.定积分在几何上的应用——面积

1.直角坐标系情形

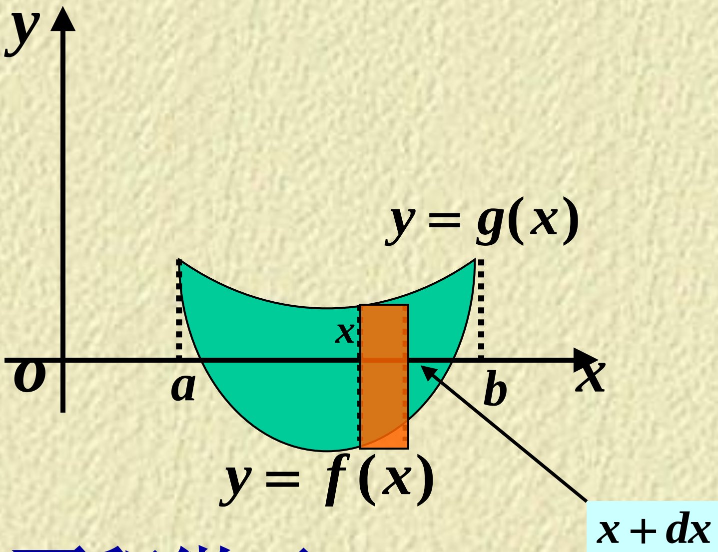


$[a,b]$上$f(x) \geq 0,$

面积微元$dA = f(x)dx$

曲边梯形的面积

$$A = \int_a^b f(x)dx$$



面积微元

$$dA = [g(x) - f(x)]dx$$

曲边梯形的面积

$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx$$

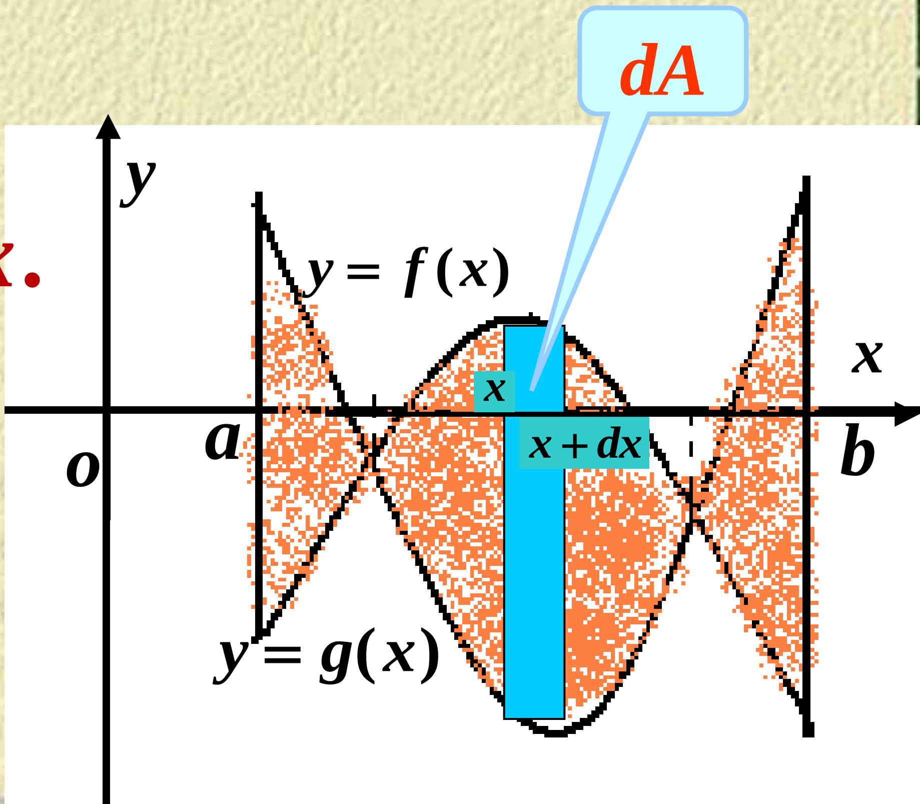
上页 下页 返回

由曲线$y = f(x), y = g(x)$与直线$x = a, x = b$所围成的图形的面积为

$$A = \int_a^b \left| f(x) - g(x) \right| dx,$$

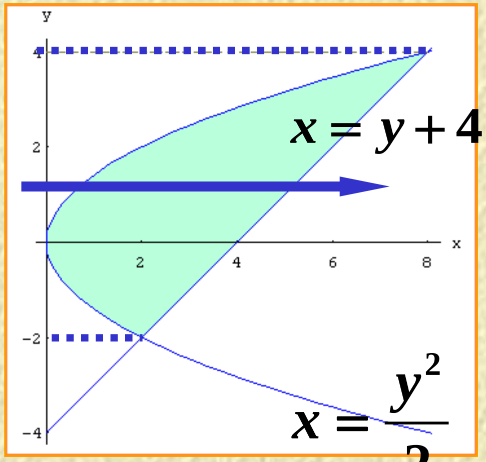
其中面积微元

$$dA = \left| f(x) - g(x) \right| dx.$$



例1.求由曲线$y^2=2x$与直线$y=x-4$围成图形的面积.

解　求曲线与直线的交点



$$\begin{cases} y^2=2x \\ y=x-4 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 得交点为$(2,-2),(8,4)$.

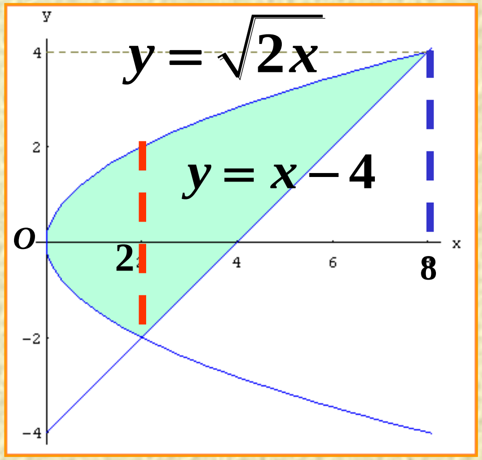
选择y为积分变量，$y\in[-2,4]$,

$$dA=\left(y+4-\frac{y^2}{2}\right)dy,\ A=\int_{-2}^{4}dA=18.$$

上页　下页　返回

求由曲线$y^2=2x$与直线$y=x-4$围成图形的面积.

解 求曲线与直线的交点



$$\begin{cases} y^2=2x \\ y=x-4 \end{cases} \Rightarrow$$ 得交点为 $(2,-2),(8,4)$.

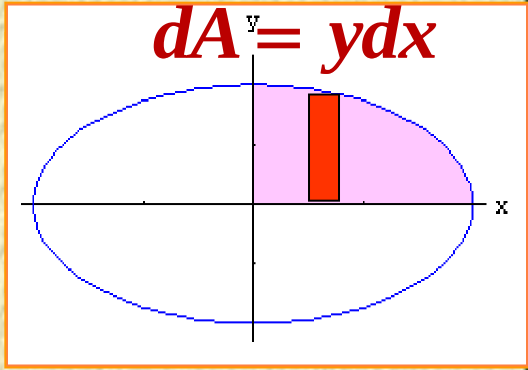
选择x为积分变量,$x\in[0,8]$,

$$A=2\int_0^2\sqrt{2x}\,dx+\int_2^8\left[\sqrt{2x}-(x-4)\right]dx$$

例2.推导椭圆的面积公式.

解 椭圆的面积公式不受曲线的方程形式的影响,

故考虑标准方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.由对称性知椭圆的面积等于其第一象限部分的4倍.曲线的参数方程 $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$.



曲线用参数方程表示对应就是作积分变量代换.

$$\therefore A = 4\int_0^a dA = 4\int_0^a y dx = \frac{4b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx$$

$$= 4\int_{\pi/2}^0 b\sin t d\left(a\cos t\right) = 4ab\int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt = \pi ab.$$

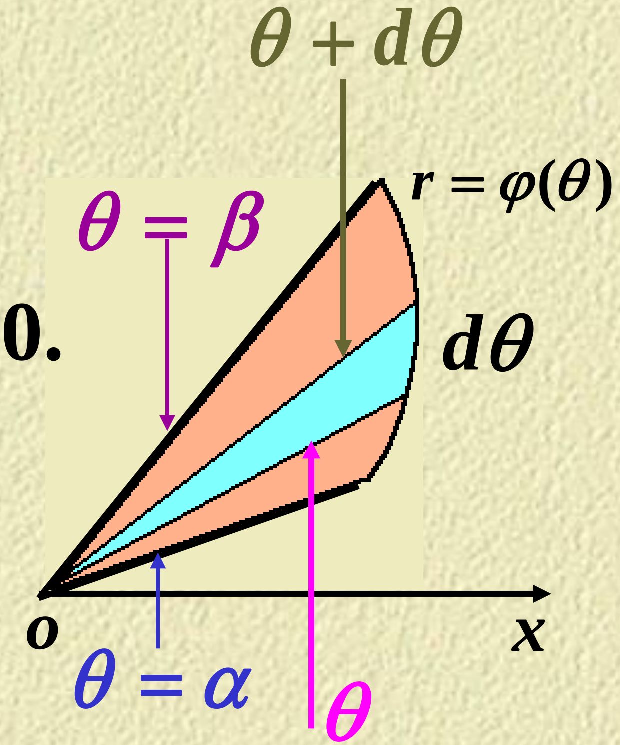
2⊙.极坐标系情形(参考内容)

这是在作特别的积分变量代换.

设由曲线$r=\varphi(\theta)$以及射线

$\theta=\alpha,\theta=\beta$围成一曲边扇形.

$\varphi(\theta)$在$[\alpha,\beta]$上连续且$\varphi(\theta)\geq 0$.



则面积微元$dA=\dfrac{1}{2}[\varphi(\theta)]^2d\theta$,

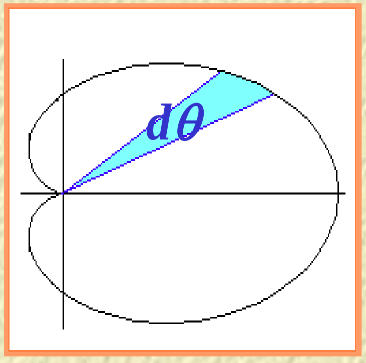
于是,曲边扇形的面积

$$A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta[\varphi(\theta)]^2d\theta$$

想象中国的纸折扇

上页

例3*.求心形线$r = a(1+\cos\theta)$所围成图形的面积,$(a>0)$.



解 面积微元$dA = \frac{1}{2}a^2(1+\cos\theta)^2 d\theta$,

由$r \geq 0$知$1+\cos\theta \geq 0 \Rightarrow \theta \in [0, 2\pi]$ or $[-\pi, \pi]$.

$\because r = a(1+\cos\theta)$是$\theta$的偶函数,

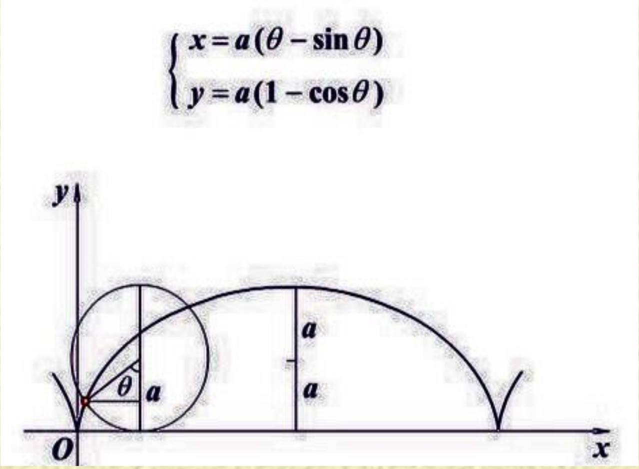
故由对称性可得

$$A = 2\cdot\frac{1}{2}a^2\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^2 d\theta$$

$$= a^2\int_0^{\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta$$

$$= a^2\left(\frac{3}{2}\theta + 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

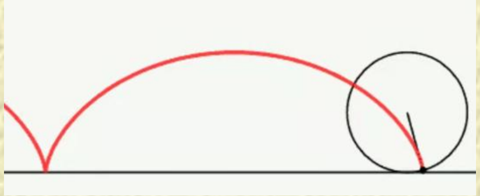
例4.求旋轮线$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases}$



的一拱与x轴所围成图形的面积，$(a > 0)$.

解 面积$A = \int_0^{2\pi a} y\,dx = \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos\theta)^2 d\theta$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos\theta + \frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right) d\theta$$



$$= a^2 \left(\frac{3}{2}\theta - 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 3\pi a^2.$$

二.定积分在几何上的应用——体积

1.平行截面面积为已知的立体体积

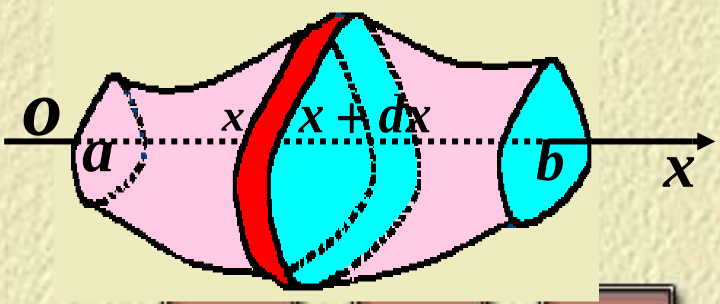
如果我们知道该立体上垂直于一定轴的各个截面面积,那么,这个立体的体积可用定积分来计算.

$A(x)$表示垂直于x轴且过点x的截面面积,

$A(x)$为$[a,b]$上的连续函数.

体积微元$dV = A(x)dx$,

立体体积$V = \int_a^b A(x)dx.$



上页 下页 返回

这一做法就是中国古代学者祖暅的思想——“祖暅原理”“夫叠棊成立积,缘幂势既同,则积不容异”——的应用.

人们也常把上述原理称为“刘(徽)祖(暅)原理”.直到一千多年后,意大利人卡瓦来利才提出同样的理论.不过,西方人还给出了具体的计算方法——积分计算的技术,是一大进步.

上页 下页 返回

刘(徽) 祖 (暅)原理

——夫叠棊成立积,缘幂势既同,

则积不容异.

卡瓦列利原理

刘徽,约225~约295 ,中

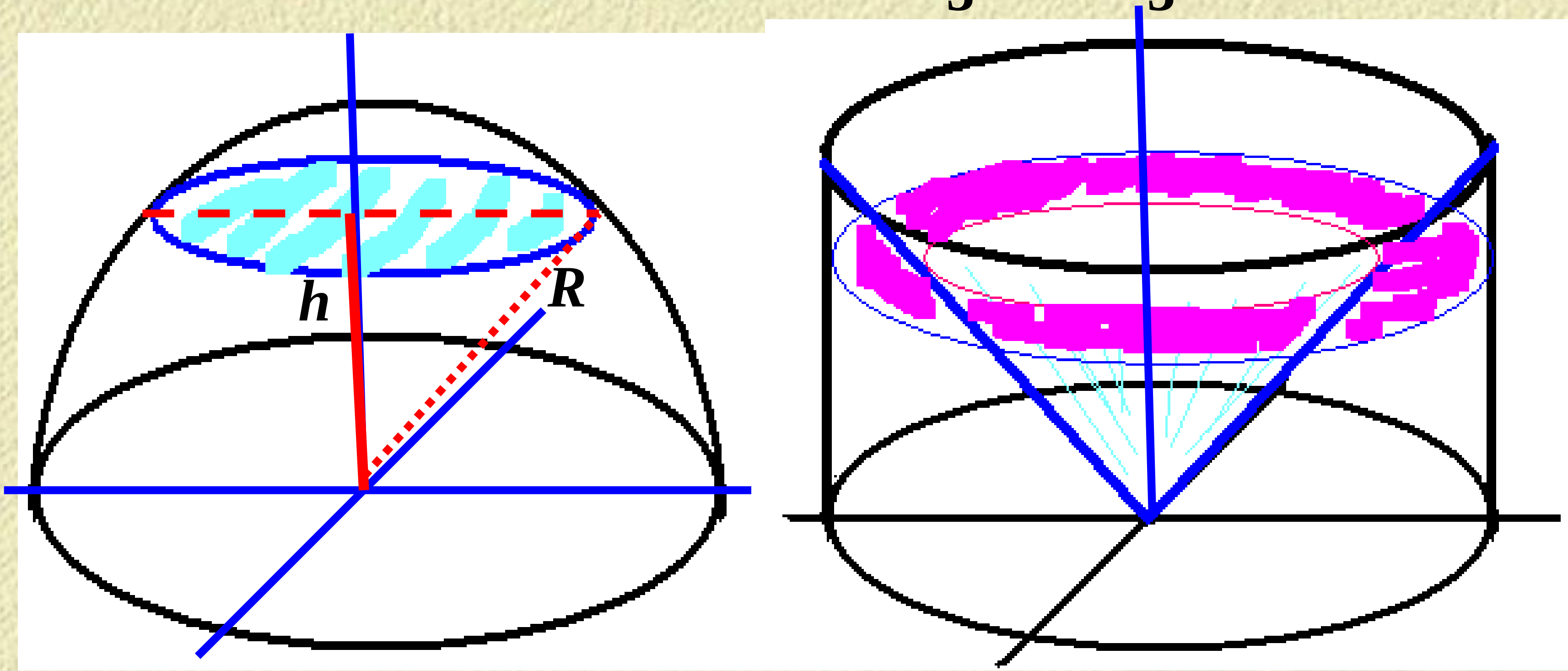
祖暅,公元5~6世纪 ,中

卡瓦列利F.B.Cavalieri ,1589~1647 ,意

在初等数学中,我们是利用“刘－祖原理”来推导得到球的体积公式的.考虑一个底面半径与球体半径同为R,高为R的圆柱体,中间挖去一个圆锥体,则余下部分与半球体高为h之处的水平截面面积都等于 $A(h)=\pi(R^2-h^2), 0\le h\le R$,

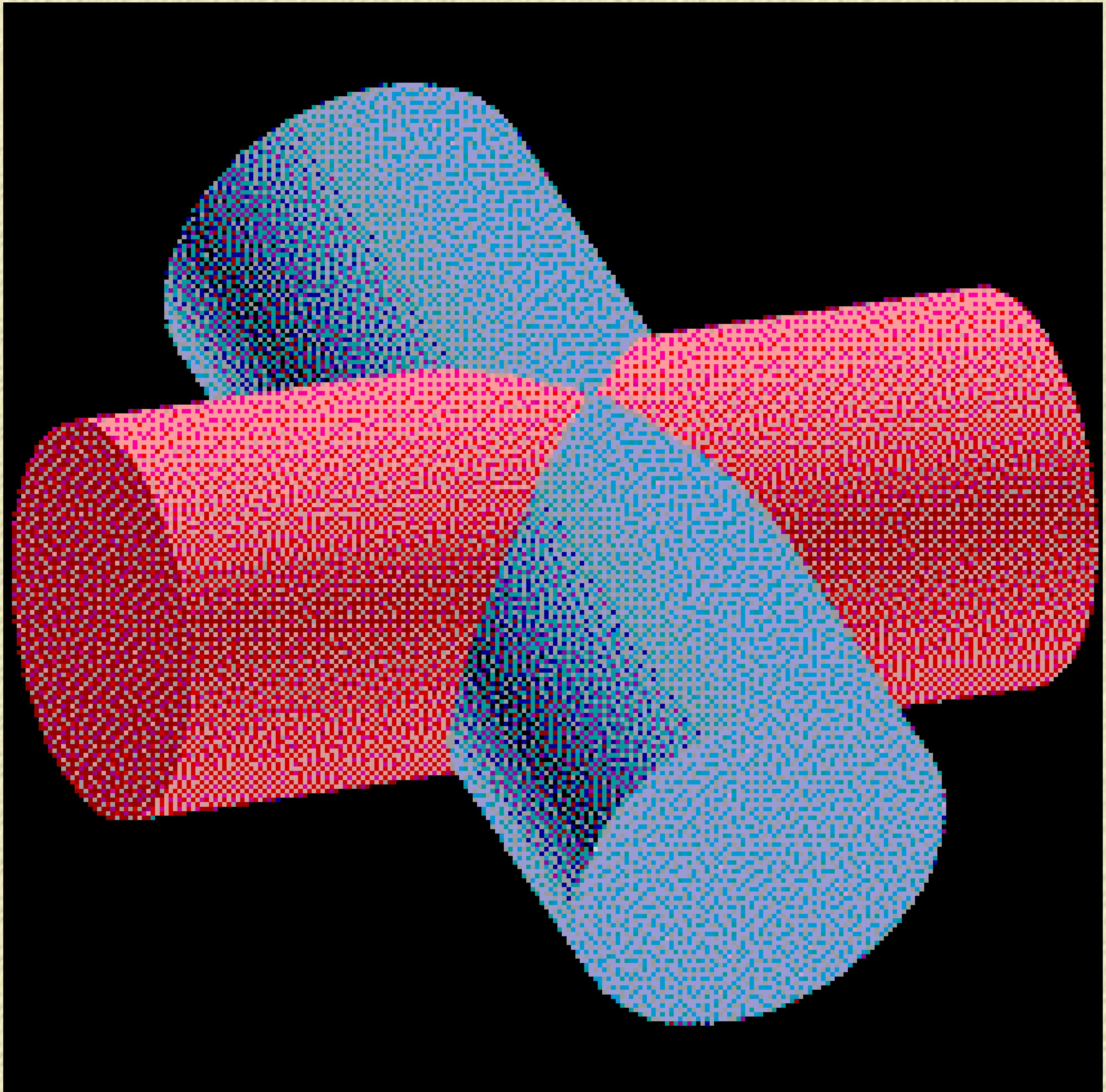
所以两者的体积相等:

$$V_{半球体}=V_{圆柱体}-V_{圆锥体}=\pi R^3-\frac{1}{3}\pi R^3=\frac{2}{3}\pi R^3$$



容易看出旋转体的体积计算公式是平行截面面积为已知的立体的体积计算公式的特殊情形.

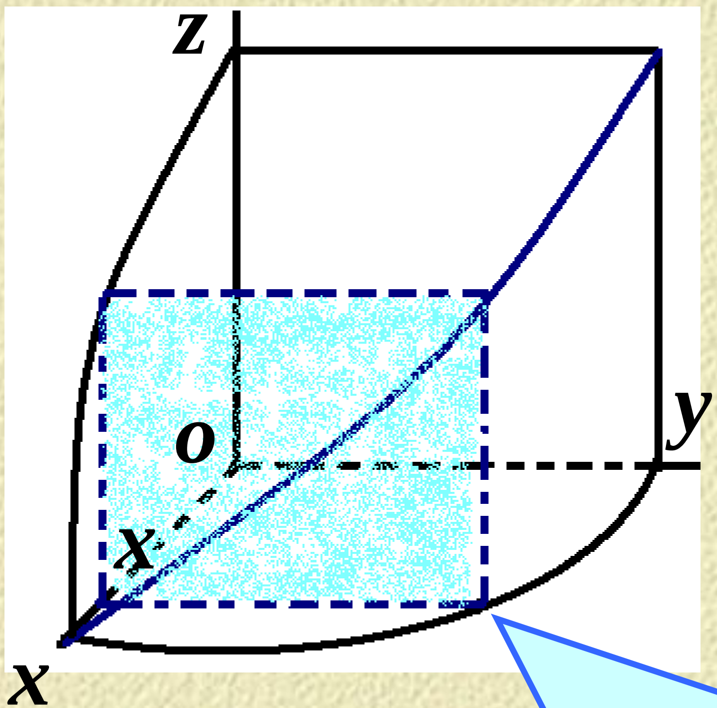
历史上的例子——“牟合方盖”——两个半径相同的圆柱其中心轴垂直相交所成的那一部分的立体——体积的计算.东汉末的刘徽就是通过计算出牟合方盖的体积从而推算出…牟合方盖的体积:其内切球的体积=4 :圆周率,这一成果为后人祖冲之推算出圆周率之祖率奠定了基础.

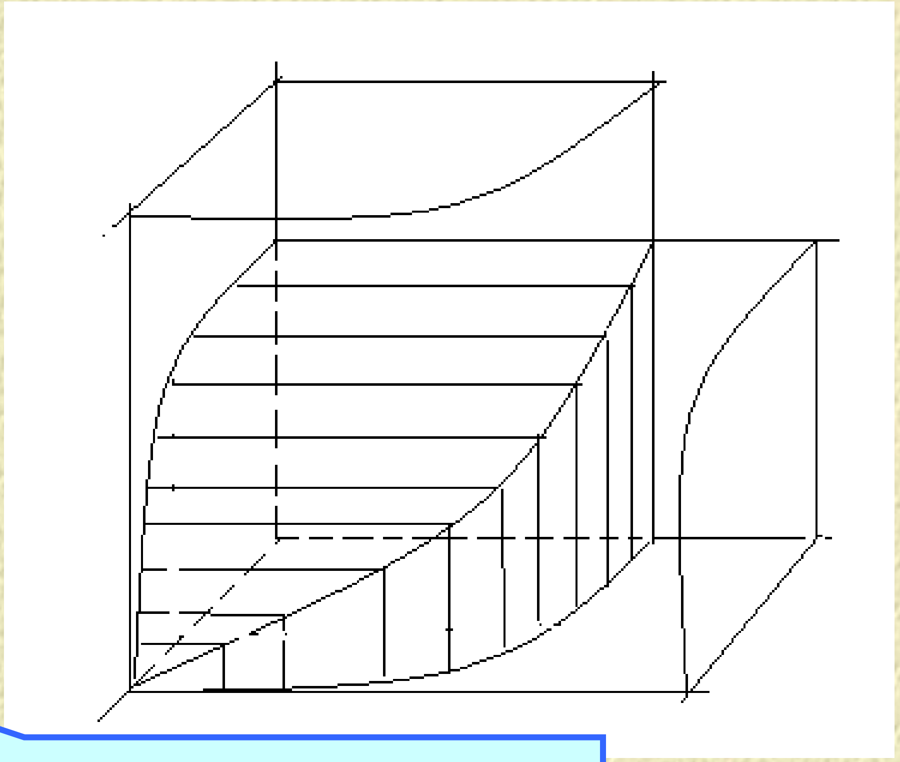


刘徽——牟合方盖

下页 返回

例5.刘徽——牟合方盖的体积——两个半径相同的圆柱其中心轴垂直相交所成的那一部分的立体,利用其对称性,考虑其1/8的那一部分之体积计算.





坐标x处的截面面积$A(x)$

牟合方盖的体积——两个半径相同的圆柱其中心轴垂直相交所成的那一部分的立体，利用其对称性，考虑其1/8的那一部分之体积计算.

考虑两个圆柱面

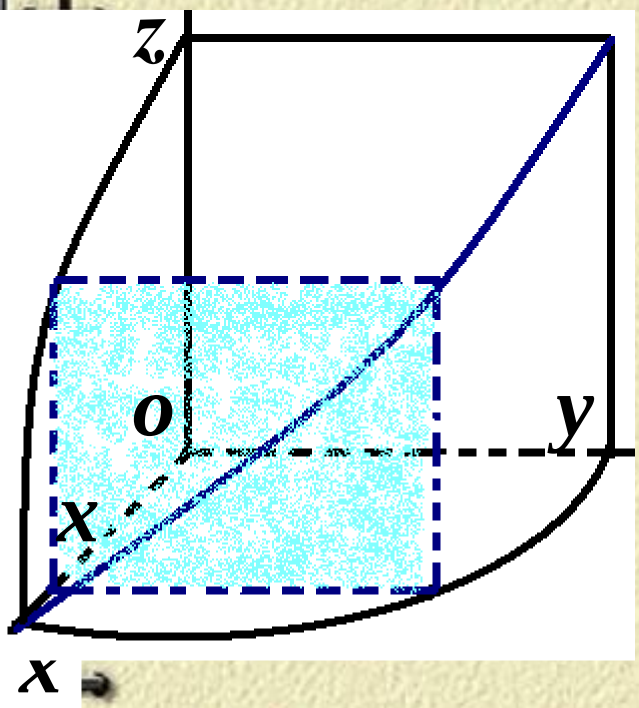
$$x^2+y^2=a^2, x^2+z^2=a^2,$$

考虑在第一卦限内的部分：

就是以

$$D=\left\{(x,y)\middle|\, x^2+y^2\le a^2, x\ge 0, y\ge 0\right\}$$

为底，以曲面$z=\sqrt{a^2-x^2}$为顶部的曲顶柱体的立体.



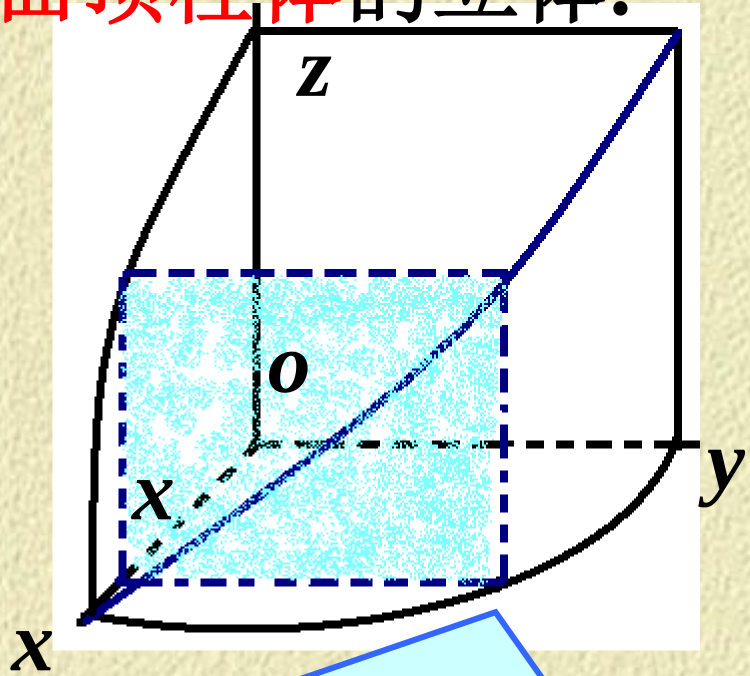
上页 下页 返回

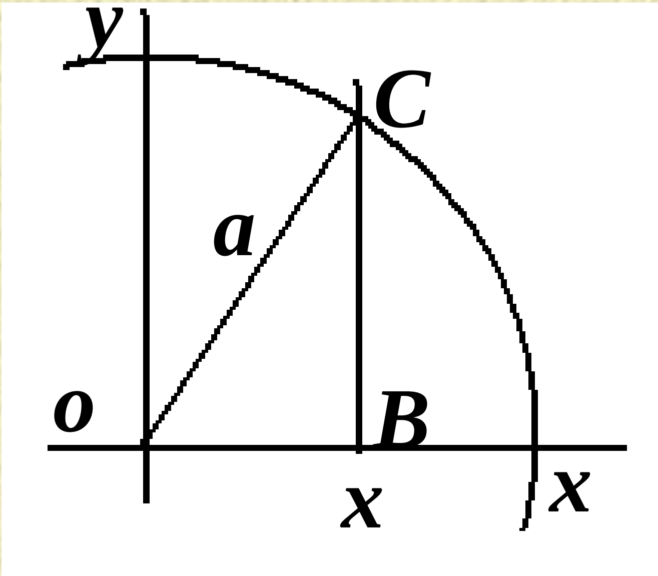
考虑在第一卦限内的部分:即以

$$D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\le a^2, x\ge 0, y\ge 0\right\}$$

为底,以曲面$z=\sqrt{a^2-x^2}$为顶部的曲顶柱体的立体.

$$A(x)=BC^2=a^2-x^2$$





坐标x处的截面面积$A(x)$

$$V = 8\int_0^a A(x)\,dx$$

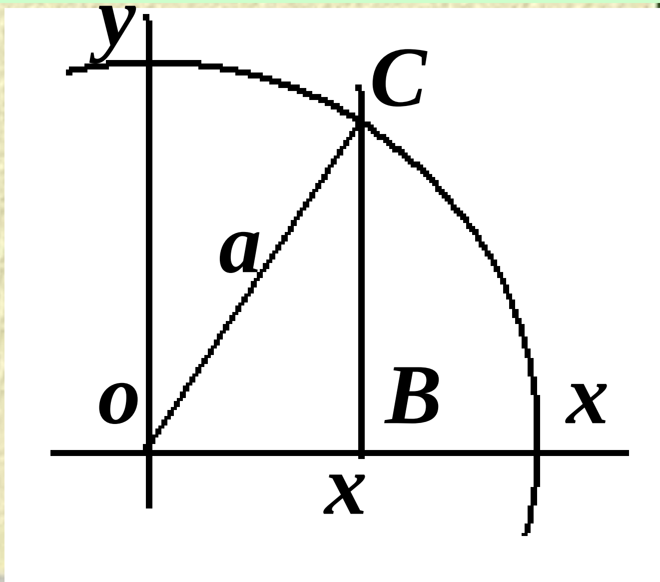
$$= 8\int_0^a \left(a^2 - x^2\right)dx = \frac{16}{3}a^3$$

$$V_{牟} : V_{球} =$$

$$\frac{16}{3}a^3 : \frac{4}{3}\pi a^3 = 4 : \pi$$

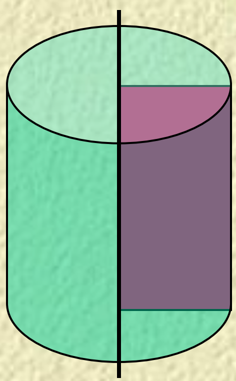
想想：在**刘徽**的那个时代能得到这一结果是多么了不起啊！

$$A(x) = BC^2 = a^2 - x^2$$

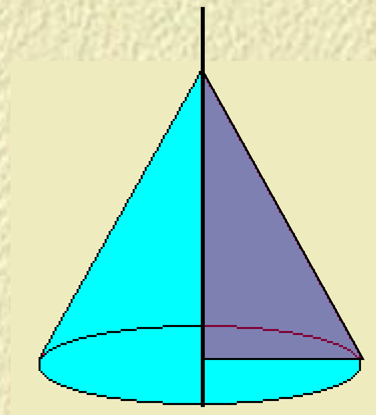


2.旋转体的体积

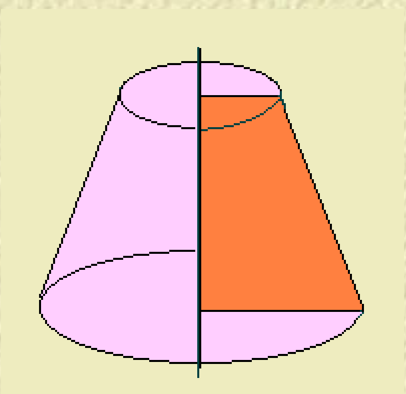
旋转体就是由一个平面图形绕这平面内一条直线旋转一周而成的立体. 这直线叫做旋转轴.



圆柱



圆锥

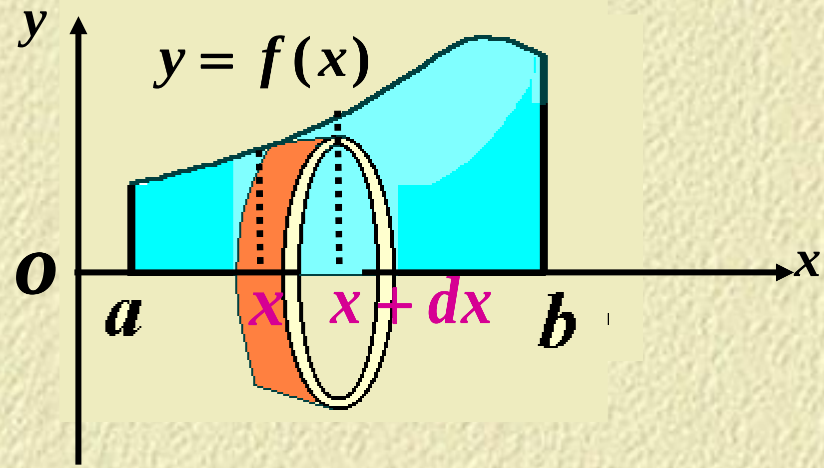


圆台

设由连续曲线$y = f(x)$,直线$x = a, x = b$及x轴所围成的图形绕x轴旋转一周所成一旋转体.

取x为积分变量,

$x \in [a,b]$,在$[a,b]$中取$[x, x+dx]$,取以dx为底的小曲边梯形绕x轴旋转而的小薄片的体积为体积微元



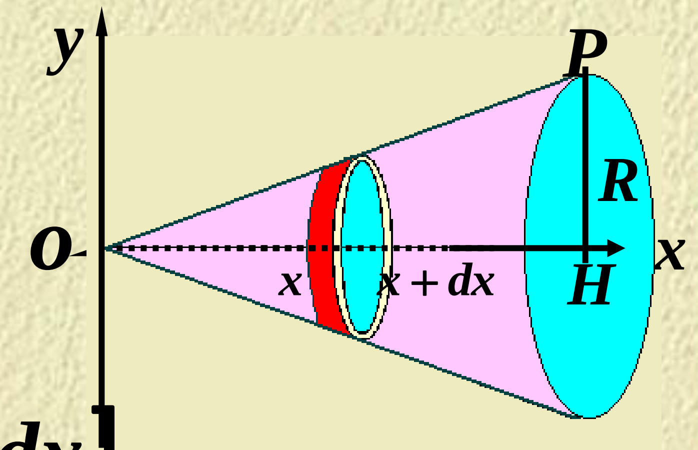
$$dV = \pi[f(x)]^2 dx,$$

旋转体的体积为$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx.$

例6.连接坐标原点O及点$P(H,R)$的直线,直线$x=H$及x轴围成一个直角三角形.将它绕x轴旋转构成一个底半径为R,高为H的圆锥体.计算圆锥体的体积.

解　直线OP的方程为

$$y=\frac{R}{H}x,$$



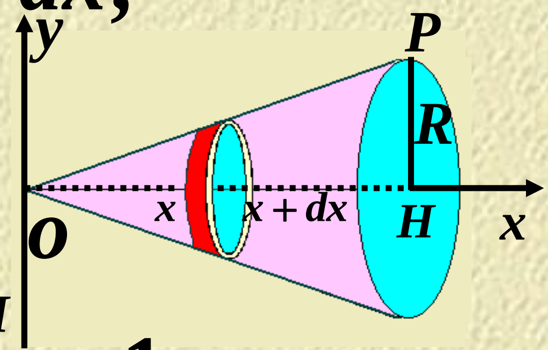
取积分变量为x, $x\in[0,H]$.

在$[0,H]$上取小区间$[x,x+dx]$.

上页　下页　返回

以dx为底的窄曲边梯形绕x轴旋转而成

的薄片的体积为 $dV=\pi\left(\frac{R}{H}x\right)^2dx,$



∴圆锥体体积

$$V=\int_0^H\pi\left(\frac{R}{H}x\right)^2dx=\frac{\pi R^2}{H^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^H=\frac{1}{3}\pi R^2H.$$

基于同样的原理,可证明:

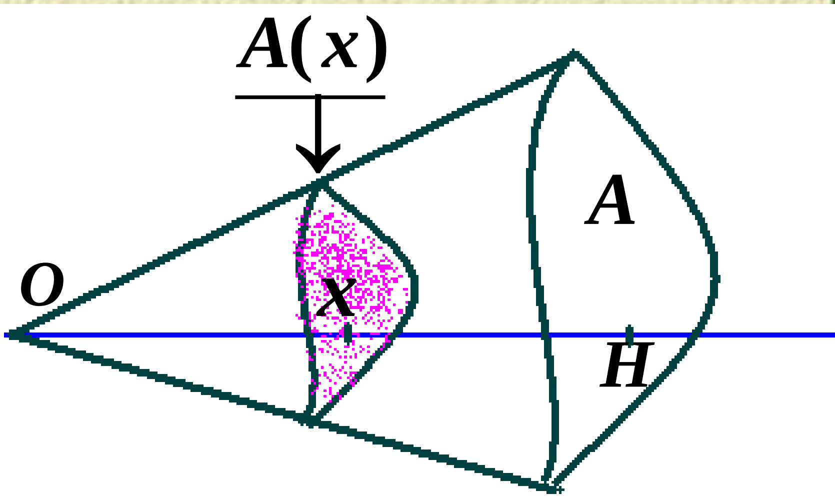
一般的锥体体积

$$V_{锥}=\frac{1}{3}\times 底面积\times 高=\frac{1}{3}A_{底}\cdot H.$$

上页 下页 返回

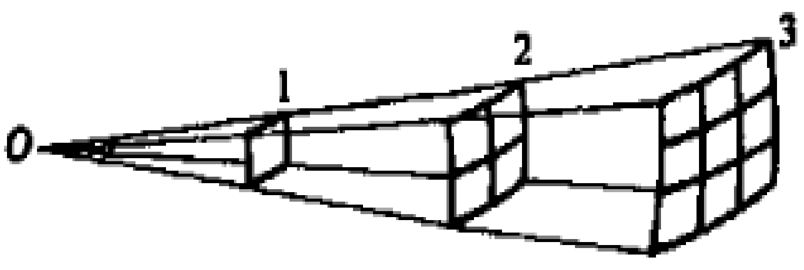
一般的锥面是由从锥体的顶点O出发的射线张成的直纹面.建立坐标轴,以O点为原点,坐标轴垂直于锥体底面.在坐标x处作平行于底面的平面,截面的面积为

$A(x), x \in [0, H]$.锥体底面面积为A.



由相似图形中的线段与面积的关系得

$$\frac{A(x)}{A} = \frac{x^2}{H^2}$$



面积与距离平方成正比

在坐标x处作平行于底面的平面,截面的面积为$A(x), x \in [0, H]$.锥体底面面积为A.

由相似图形中的线段与面积的关系得

$$\frac{A(x)}{A} = \frac{x^2}{H^2}$$

锥体体积

$$V_{锥} = \int_0^H \left(\frac{A}{H^2} x^2 \right) dx = \frac{A}{3H^2} x^3 \Big|_0^H = \frac{1}{3} AH,$$

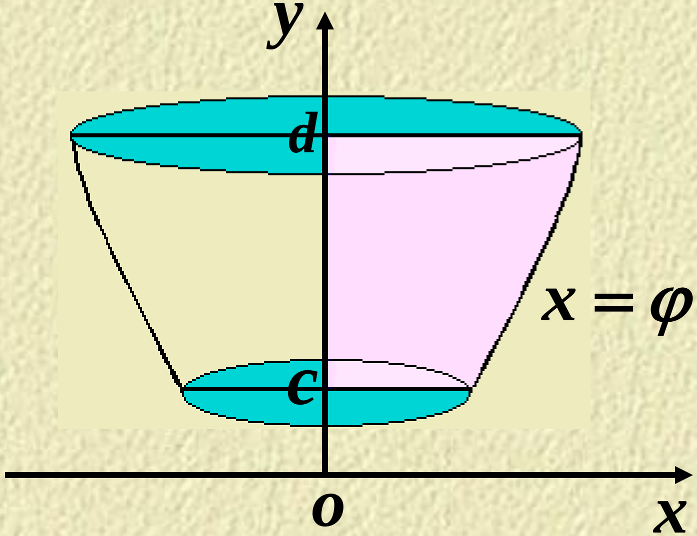
$$V_{锥} = \frac{1}{3} A_{底} \cdot H.$$

上页 下页 返回

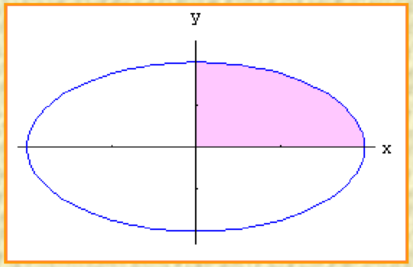
类似地,设旋转体由连续曲线$x=\varphi(y)$,直线$y=c, y=d$及y轴所围成的图形绕y轴旋转一周而成.

则其体积为

$$V=\int_c^d \pi[\varphi(y)]^2 dy$$



例7.求椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1$绕$y$轴旋转一周所成的旋转椭球体的体积.



解　旋转椭球体的体积

$$V_{椭球}=\pi\int_{-b}^{b}x^2dy=2\pi a^2\int_0^b\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy$$

$$=\frac{2\pi a^2}{b^2}\int_0^b\left(b^2-y^2\right)dy=\frac{2\pi a^2}{b^2}\left(b^2y-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^b=\frac{4}{3}\pi a^2 b.$$

$a=b$时就得球体的体积$V_{球}=\dfrac{4}{3}\pi a^3.$

上页　下页　返回

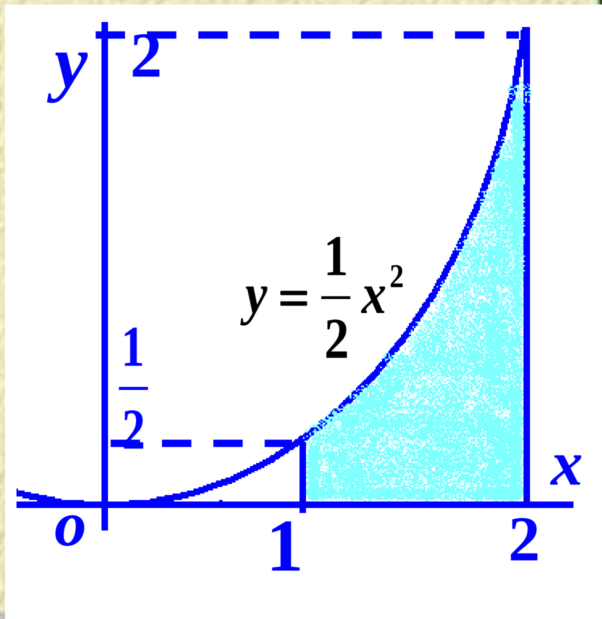
Exercise: 如图,求阴影部分绕 y 轴旋转一周所成立体的体积.

解

$$V=\pi\cdot 2^2\cdot 2-\pi\cdot 1^2\cdot\frac{1}{2}-\pi\int_{1/2}^{2}x^2dy$$

$$=\frac{15}{2}\pi-\pi\int_{1/2}^{2}2ydy$$

$$=\frac{15}{2}\pi-\pi\cdot y^2\Big|_{1/2}^{2}=\frac{15}{4}\pi$$



回顾微元法.

待计算量A对于区间$[a,b]$具有可加性,在

$[x,x+dx]$内$dA=f(x)dx$,则$A=\int_a^b f(x)dx$.

现在的问题是:我们如何对A进行分割呢?

前面,我们都是用直线分割平面图形,用平面剖分空间立体.但其实并非只能如此.

如计算圆的面积时,我们可以用半径为r和$r+dr$的同心圆周分割该圆,则所成圆环的面积即为圆的面积微元,$dA=2\pi r dr$.

在计算球的体积时,我们可以用半径为r和$r+dr$的同心球面切割该球体,则所成球壳的体积即为球体的体积微元,

球切法

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

这相当于将球壳“摊平”,球壳的体积就相当于以半径为r的球面为底,以dr为高的柱体体积.所有球壳体积的累加就是球体的体积

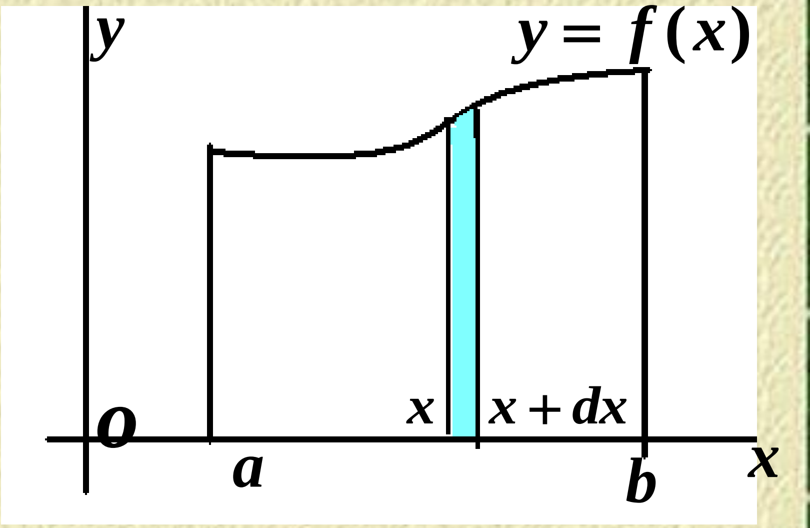
$$V = \int_0^a dV = \int_0^a 4\pi r^2 dr = \frac{4}{3}\pi a^3.$$

具象联想:珍珠的形成,结石,滚雪球,

夫子庙的老太叠元宵……

计算由平面图形$0 \le a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)$绕$y$轴旋转所成的旋转体的体积$V_y$.

如图,小曲边梯形绕着y轴旋转一周所成的立体我们称为圆柱壳,该柱壳的体积就是旋转体的体积微元,$dV = 2\pi x f(x) dx$



这是理解为沿着平行于y轴的方向把柱壳剖开摊平,该柱壳的体积就近似于一个长方体的体积:长$2\pi x$宽$f(x)$高dx.

柱(壳)切法

这是理解为沿着平行于y轴的方向把柱壳剖开摊平,该柱壳的体积就近似于一个长方体的体积:长$2\pi x$宽$f(x)$高dx,

$$dV = 2\pi x f(x)dx$$

把所有的柱壳的体积累积起来,就是

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)dx$$

想象那种京葱的生理结构——(鳞茎结构)——由一层一层的组织叠加而成.

由柱切法得：

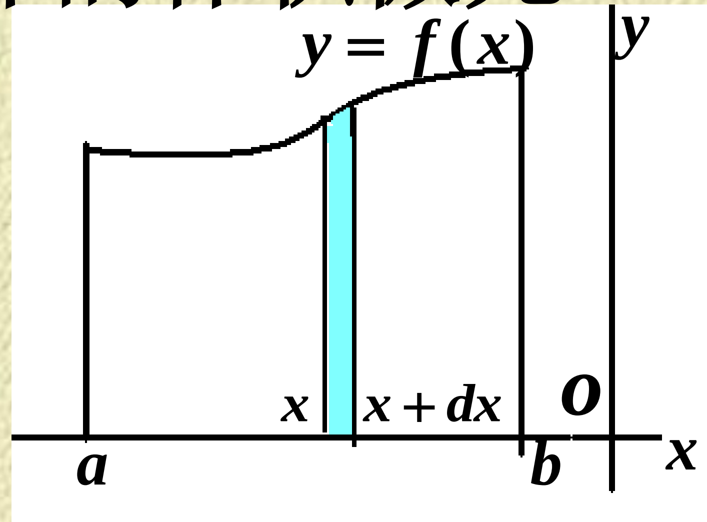
由平面图形$a \le x \le b \le 0, 0 \le y \le f(x)$

绕y轴旋转所成的旋转体的体积

$$V = \int_a^b 2\pi(-x) f(x) dx$$

其中,柱壳体积就是立体的体积微元

$$dV = 2\pi(-x) f(x) dx.$$



Exercise：如图,求阴影部分绕y轴旋转一周所成立体的体积.

解法一

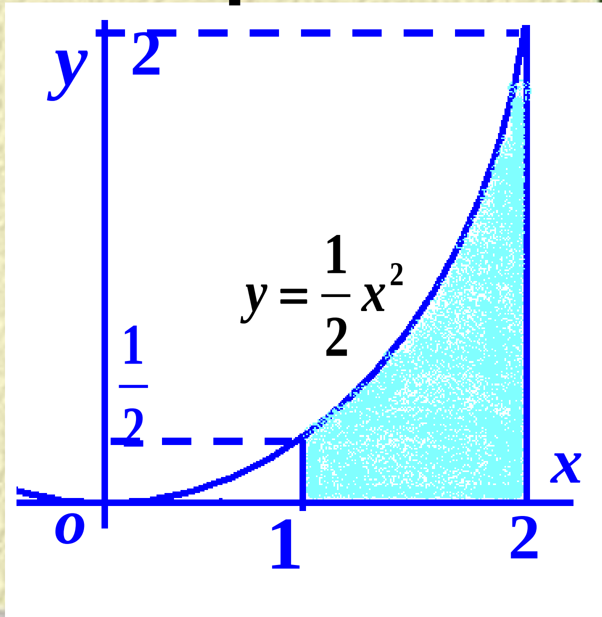
$$V=\pi\cdot 2^2\cdot 2-\pi\cdot 1^2\cdot\frac{1}{2}-\pi\int_{1/2}^{2}x^2dy$$

$$=\frac{15}{2}\pi-\pi\int_{1/2}^{2}2ydy=\frac{15}{2}\pi-\pi\cdot y^2\Big|_{1/2}^{2}=\frac{15}{4}\pi$$

法二 用柱切法的公式

$$V=\int_a^b 2\pi xf(x)dx$$

$$V=\int_1^2 2\pi x\cdot\frac{1}{2}x^2dx=\frac{15}{4}\pi$$



理解微元法
乃至为重要！

思考练习一

1.求由曲线$y=\sqrt{x-1}$,与其过点$(-1,0)$的切线,及直线$y=0$所围成的图形的面积,该图形绕x轴旋转一周所形成的旋转体的体积.

2.$\left(P145/6.\right)$求由$y=x^2-2x,\left(x\geq 1\right),y=0,$ $x=1,x=3$围成的图形$\cdots$面积A,绕y轴旋转的$\cdots$体积V.

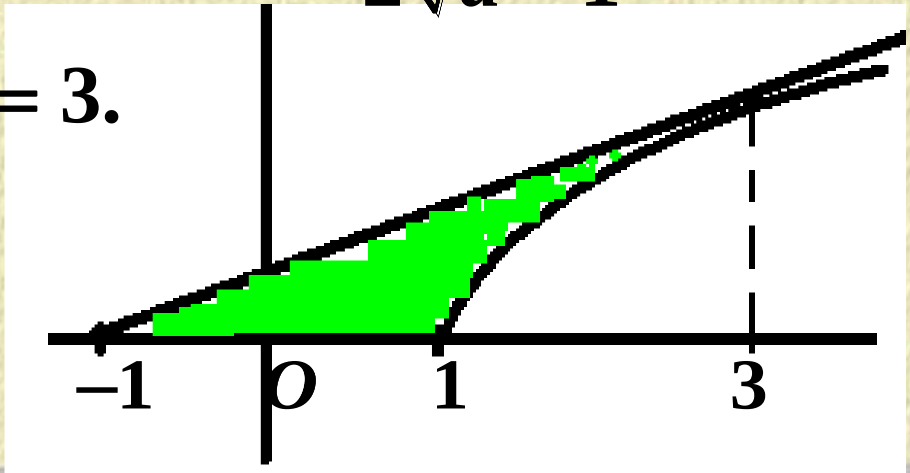
3.求由$x^2+y^2=a^2$围成的图形绕$x=-b$ $(b>a>0)$旋转一周所成的立体的体积.

$Ex.1$求由曲线$y=\sqrt{x-1}$,与其过点$(-1,0)$的切线,及直线$y=0$所围成的图形的面积,该图形绕x轴旋转一周所形成的旋转体的体积.

解 设曲线$y=\sqrt{x-1}$上切点$\left(a,\sqrt{a-1}\right)$,

$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$,切线为$y-\sqrt{a-1}=\dfrac{1}{2\sqrt{a-1}}(x-a)$,

由切线过点$(-1,0)$,得$a=3$.



设曲线$y=\sqrt{x-1}$上切点$\left(a,\sqrt{a-1}\right)$,

$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$,切线为$y-\sqrt{a-1}=\dfrac{1}{2\sqrt{a-1}}(x-a)$,

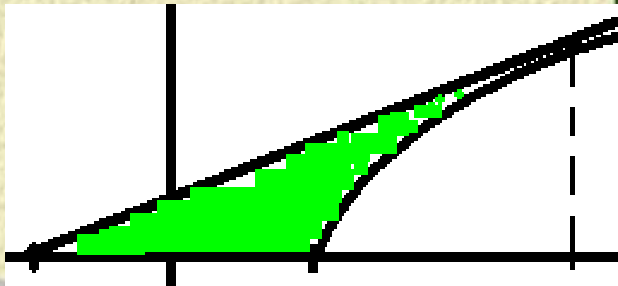
由切线过点$(-1,0)$,得$a=3$,

切线为$y-\sqrt{2}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}(x-3)$,

围成的图形的面积$A=\dfrac{1}{2}\times 4\times\sqrt{2}-\int_1^3\sqrt{x-1}\cdot dx$

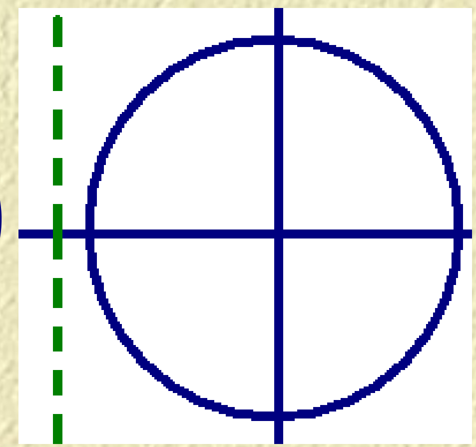
该图形绕x轴旋转一周所形成的旋转体的体积

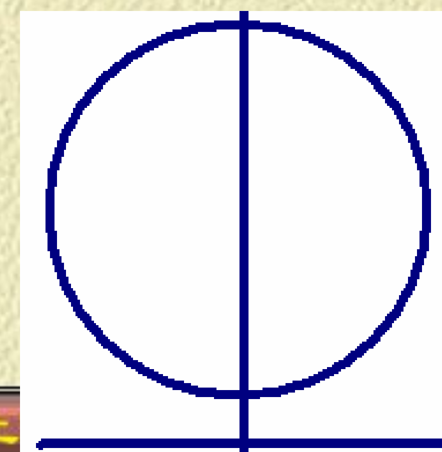
$$V_x=\frac{1}{3}\pi\left(\sqrt{2}\right)^2\cdot 4-\pi\int_1^3\left(\sqrt{x-1}\right)^2dx$$



2.求由$x^2+y^2=a^2$围成的图形绕$x=-b$ $(b>a>0)$旋转一周所成的立体的体积.

解 很明显,由$x^2+y^2=a^2$围成的图形绕$x=-b(b>a>0)$旋转一周所成的立体,就是由$x^2+(y-b)^2=a^2$绕x轴旋转一周所成的立体.





求由$x^2+(y-b)^2=a^2\ (b>a>0)$围成的图形绕x轴旋转一周所成立体的体积.

$$V=\pi\int_{-a}^{a}\left(b+\sqrt{a^2-x^2}\right)^2dx-\pi\int_{-a}^{a}\left(b-\sqrt{a^2-x^2}\right)^2dx$$

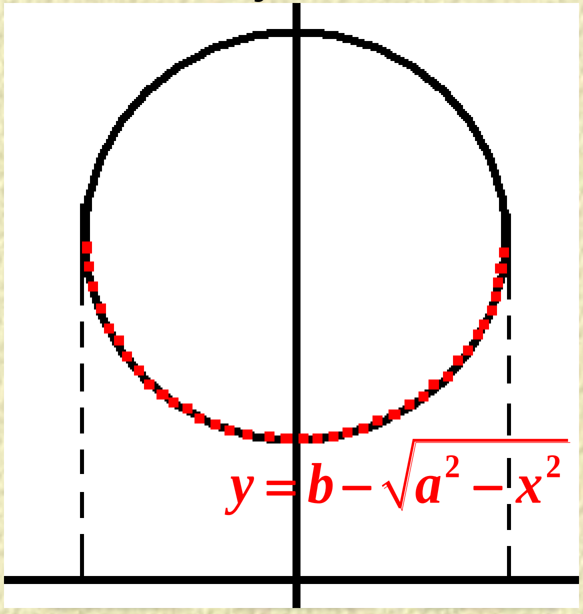
$$=\pi\int_{-a}^{a}\left[\left(b+\sqrt{a^2-x^2}\right)^2-\left(b-\sqrt{a^2-x^2}\right)^2\right]dx$$

$$=\pi\int_{-a}^{a}2b\cdot2\sqrt{a^2-x^2}dx$$

$$=4b\pi\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx$$

$$=4b\pi\cdot\frac{1}{2}\pi a^2=2\pi^2a^2b$$

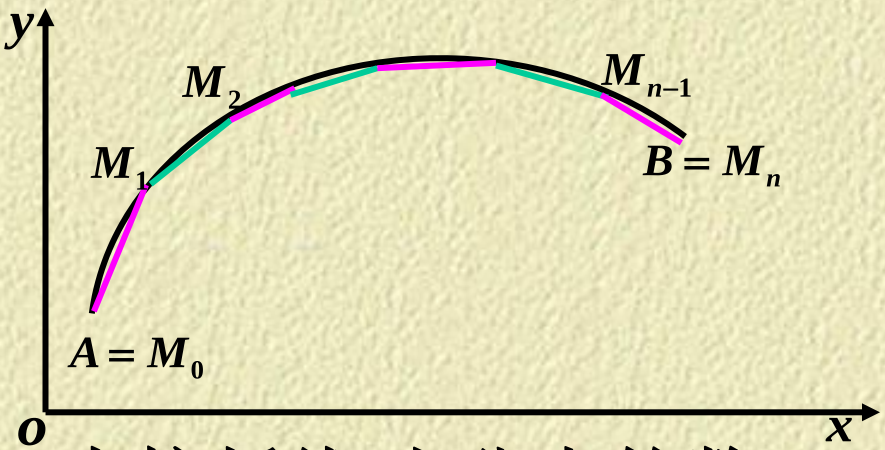
$y=b+\sqrt{a^2-x^2}$



二.定积分在几何上的应用——弧长

1.平面曲线的弧长

设A,B是曲线弧的两个端点,在弧上插入分点 $A=M_0,M_1,\cdots M_i,\cdots,M_{n-1},M_n=B,$



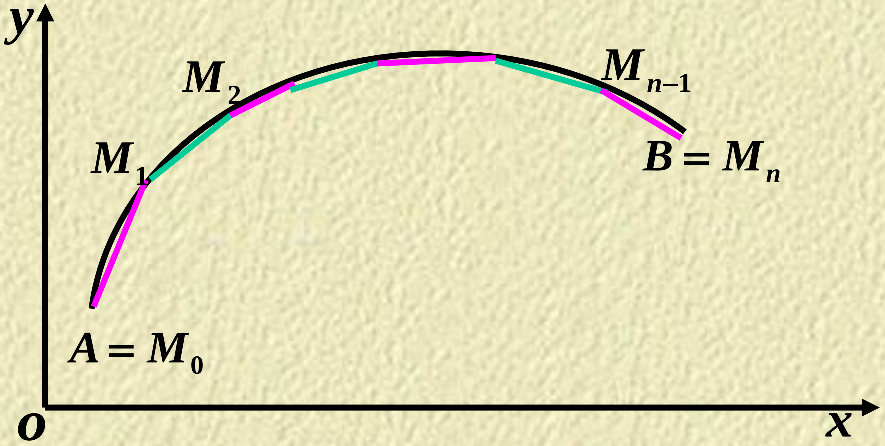
并依次连接相邻分点得一内接折线,当分点的数目无限增加且每个小弧段都缩向一点时,此折线 $\sum_{i=1}^{n}\left|M_{i-1}M_i\right|$ 的长的极限存在,则称此极限为曲线弧AB的弧长.

上页 下页 返回

定义1. 对于曲线段C,若作任意分割T,只要分割T的模$\|T\| = \max\limits_{i} |M_{i-1}M_i| \to 0$,存在有限数$s$,使得

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}|M_{i-1}M_i| = s,$$称

数s为曲线段C的弧长.



定义2. 对于平面曲线

$$C:\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [\alpha,\beta],$$

如果$x(t), y(t)$在$[\alpha,\beta]$上有连续的导数,

并且$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 \neq 0, t \in [\alpha,\beta]$,则

称C为一光滑曲线.

光滑曲线的显著几何特征是处处有切线

上页 下页 返回

定理1. 平面上的光滑曲线$C\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$,

$t\in[\alpha,\beta]$是可求长的,并且曲线段C的

弧长为 $s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt.$

其中弧长微元或曰弧微分

$$ds=\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt$$

$$=\sqrt{\left(dx\right)^2+\left(dy\right)^2}.$$

光滑曲线$C\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta]$

以直_切线_替代曲线弧

或曲线表示为$y = f(x)$

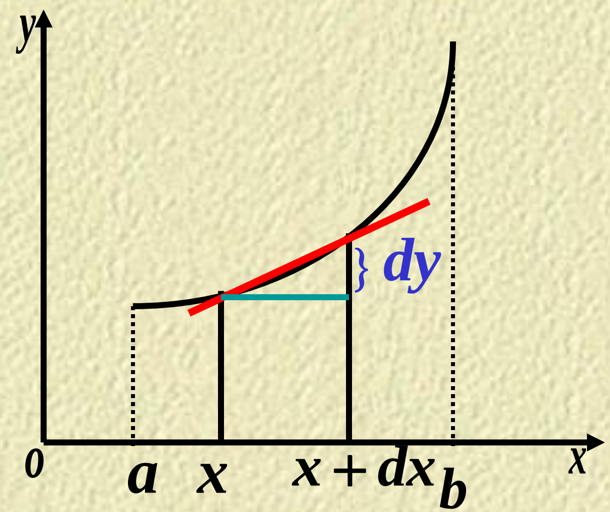
$(a \le x \le b)$,其中$f(x)$在$[a,b]$

上有一阶连续导数,取积分变

量x,在$[a,b]$上任取$[x, x+dx]$,

以对应小切线段的长替代小

曲线弧段的长



$$\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + (y')^2}\,dx,$$

弧长微元 = 弧微分$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$.

上页 下页 返回

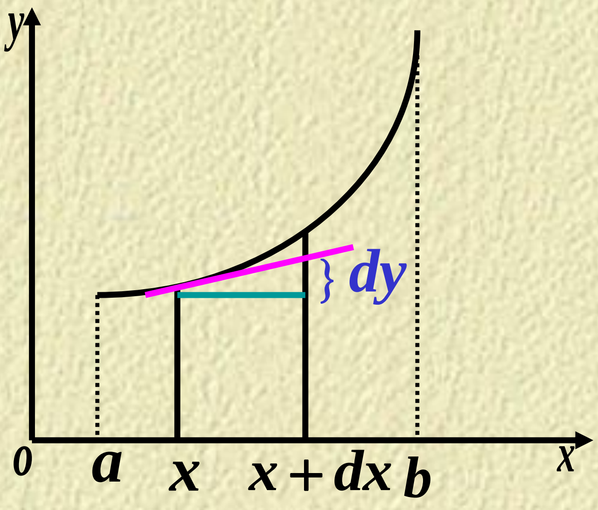
弧长微元 = 弧微分

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

$$\overset{\text{直角坐标}}{\underset{\text{情形}}{=\!=\!=\!=\!=}} \sqrt{1 + (y')^2}\,dx$$

$$\overset{\text{参数方程}}{\underset{\text{情形}}{=\!=\!=\!=\!=}} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$$

$$C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta].$$



上页 下页 返回

例8.计算椭圆的周长.

解　设椭圆方程为$L:\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, t\in[0,2\pi]$

则椭圆的周长为 $s=\int_0^{2\pi}\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}dt$$

$$=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}dt\ ,$$

若$a=b$,则圆的周长 $s=2\pi a$.

上页　下页　返回

设椭圆方程为$L:\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$,

则椭圆的周长为 $s = \int_0^{2\pi} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$

$= 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt$,设$b > a > 0$,

$\therefore s = 4b\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{b^2 - a^2}{b^2}\sin^2 t}\ dt$

$= 4b\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2\sin^2 t}\ dt, k \in (0,1).$

$I(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2\sin^2 t}\ dt, k \in (0,1)$就是以$k$为参数的积分.不过, $k \in (0,1)$时函数$\sqrt{1 - k^2\sin^2 t}$的原函数不能用初等函数表示,因此,这个积分只能用数值积分的方法来计算.在分析中,上述积分称为是第二类完全椭圆积分.

上页 下页 返回

弧长微元 = 弧微分 $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$,

设有极坐标形式曲线方程 $r = r(\theta), \theta \in [\alpha, \beta]$.

若 $r(\theta)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上有连续的导数,

$$\because \begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta \\ y = r(\theta)\sin\theta \end{cases}, \theta \in [\alpha, \beta].$$

$$\therefore ds = \sqrt{(r(\theta))^2 + (r'(\theta))^2}\,d\theta,$$

$$\Rightarrow s = \int_\alpha^\beta \sqrt{(r(\theta))^2 + (r'(\theta))^2}\,d\theta \ .$$

例如,我们可求得心形线 $r = a(1 + \cos\theta)$

的长度为 $s = 8a$.

二.定积分在几何上的应用——旋转曲面的面积

考虑平面上光滑曲线段 $y = f(x), x \in [a,b]$

绕 x 轴旋转一周所成旋转曲面片,其面积为S.

不妨设 $f(x) \geq 0, dx = \Delta x \to 0.$

$$\Delta S \approx \pi\left[f(x) + f(x+\Delta x)\right]\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$= \pi\left[2f(x) + \Delta y\right]\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

用计算圆台的侧面积方法解之

$$\therefore dS = 2\pi f(x)\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2},$$

$$\therefore S = \int_a^b dS = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

$$dS = 2\pi f(x)\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2},$$

$$S = \int_a^b dS = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx$$

作变量代换 $\begin{cases} x = \varphi(t), a = \varphi(\alpha) \\ y = \psi(t), b = \psi(\beta) \end{cases}$

$$t \in [\alpha, \beta] \ \left(or[\beta, \alpha]\right)$$

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2}\,dt.$$

上页 下页 返回

$$S = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$$

例9.求旋转椭球面的面积.

解 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(设 a \geq b)$ 绕 x 轴旋转,

椭圆的参数方程 $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, t \in [0,\pi].$

$$S = 2\pi b\int_0^{\pi}\sin t\sqrt{a^2-\left(a^2-b^2\right)\cos^2 t}\ dt$$

当 $a = b$ 时得到球面的面积 $S = 4\pi a^2$.

解 椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 绕x轴旋转所成旋转椭球面

的面积 $S=2\pi b\int_0^{\pi}\sin t\sqrt{a^2-\left(a^2-b^2\right)\cos^2 t}\,dt,$

当$a>b$时记 $c=\sqrt{a^2-b^2}>0,$

$$S=-\frac{2\pi b}{c}\int_0^{\pi}\sqrt{a^2-c^2\cos^2 t}\,d\left(c\cos t\right)$$

$$\overset{c\cos t=u}{=\!=\!=\!=\!=}-\frac{2\pi b}{c}\int_c^{-c}\sqrt{a^2-u^2}\,du=\frac{4\pi b}{c}\int_0^{c}\sqrt{a^2-u^2}\,du$$

$$=\frac{4\pi b}{c}\left(\frac{1}{2}u\sqrt{a^2-u^2}+\frac{1}{2}a^2\arcsin\frac{u}{a}\right)\Bigg|_0^c$$

$$=\frac{4\pi b}{c}\left(\frac{1}{2}bc+\frac{1}{2}a^2\arcsin\frac{c}{a}\right).$$

上页 下页 返回