7.7 偏序(partial order)关系

定义7.19 设R为非空集合A上的关系。如果R是**自反**的、**反对称**的和**传递**的，则称R为A上的**偏序关系**，记作≼。

设≼为偏序关系，如果<x, y>∈≼，则记作x≼y，读作“x小于或等于y”。

注意 这里的“小于或等于”不是指数的大小，而是**在偏序关系中的顺序性**。x“小于或等于”y的含义是：依照这个序，x排在y的前边或者x就是y。根据不同偏序的定义，对序有着不同的解释。

偏序关系举例

集合A上的恒等关系I_A　　小于或等于关系

整除关系　　包含关系

可比

定义7.20 设R为非空集合A上的偏序关系，定义

(1) $\forall x,y \in A$，$x \prec y \Leftrightarrow x \preccurlyeq y \wedge x \neq y$。

(2) $\forall x,y \in A$，x与y**可比** $\Leftrightarrow x \preccurlyeq y \vee y \preccurlyeq x$。

鏓其中$x \prec y$读作x“小于”y。这里所说的“小于”是指在偏序中x排在y的前边。

- 在具有偏序关系的集合A中任取两个元素x和y，可能有下述几种情况发生：

  $x \prec y$（或$y \prec x$），$x = y$，x与y不是可比的。

- 例如A＝{1，2，3}，$\preccurlyeq$是A上的整除关系，则有

  $1 \prec 2$，$1 \prec 3$，

  1=1，2=2，3=3，

  2和3不可比。

全序关系

定义7.21 设R为非空集合A上的偏序关系，如果∀x，y∈A，x与y都是可比的，则称R为A上的全序关系(或线序关系)。

例如

数集上的小于或等于关系是全序关系，因为任何两个数总是可比大小的。

整除关系一般来说不是全序关系，如集合{1,2,3}上的整除关系就不是全序关系，因为2和3不可比。

偏序集

定义7.22 集合A和A上的偏序关系≼一起叫做偏序集，记作 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$。

例如

整数集合Z和数的小于或等于关系≤构成偏序集 $\langle Z, \leq \rangle$

集合A的幂集P(A)和包含关系 $R_{\subseteq}$ 构成偏序集 $\langle P(A), R_{\subseteq} \rangle$。

覆盖(*cover*)

定义7.23 设<A, ≼>为偏序集。 $\forall x, y \in$ A，如果 $x \prec y$ 且不存在 $z \in$ A使得$x \prec z \prec y$，则称y**覆盖**x。

例如 {1, 2, 4, 6}集合上的整除关系，

有2覆盖1，4和6都覆盖2。但4不覆盖1，因为有1＜2＜4。6也不覆盖4，因为4＜6不成立。

哈斯图(*Hasse diagram*)

- 利用偏序关系的自反性、反对称性和传递性所得到的偏序集合图，称为哈斯图。
- 画偏序集<A，≤>的哈斯图的方法

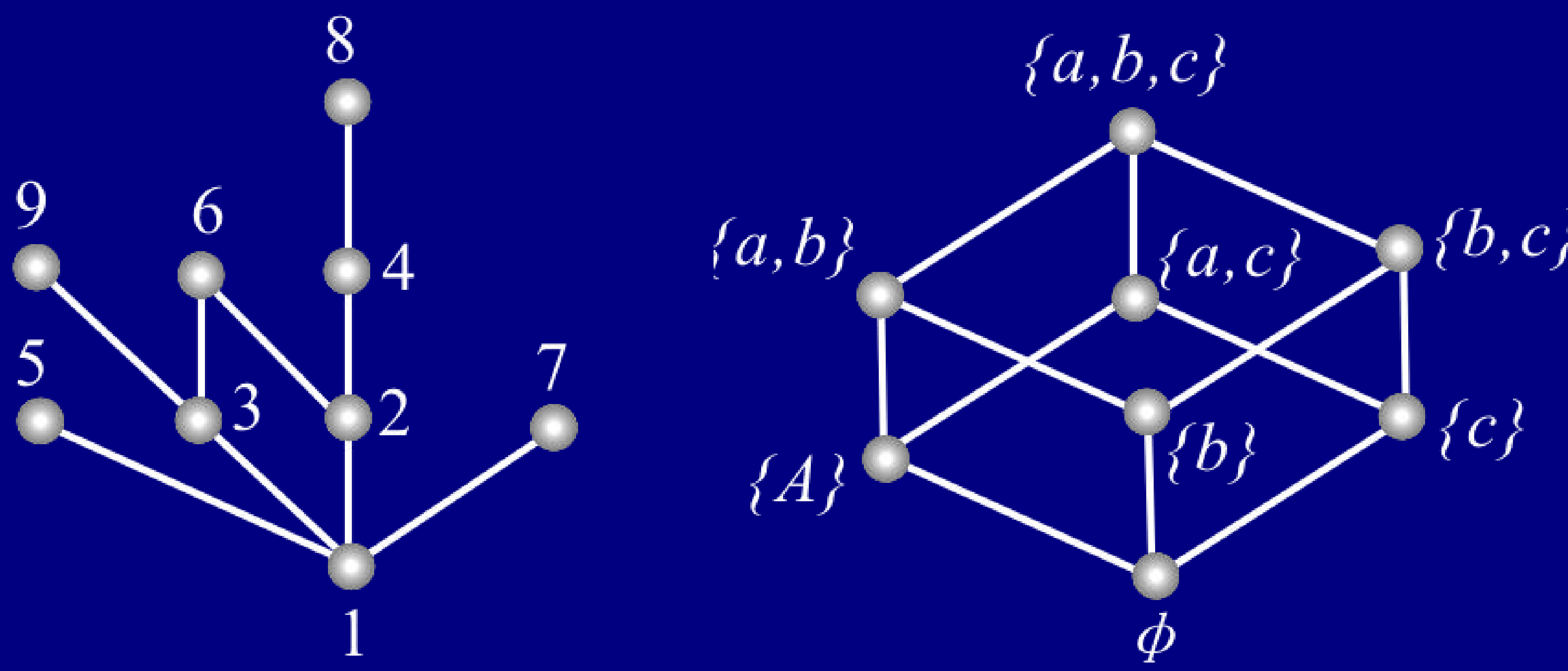
  (1) 用小圆圈代表元素。

  (2) $\forall x, y \in A$，若$x < y$，则将x画在y的下方。

  (3) 对于A中的两个不同元素x和y，如果y覆盖x，就用一条线段连接x和y。

例7.19

例7.19 画出偏序集<{1,2,3,4,5,6,7,8,9}，$R_{整除}$>和<P({a,b,c}),$R_{\subseteq}$>的哈斯图。



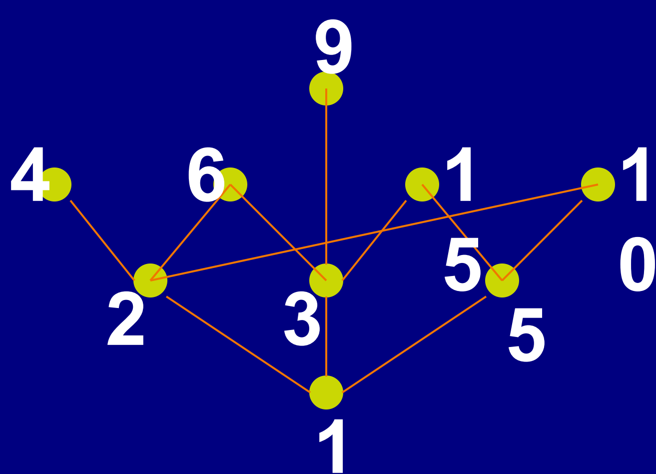
- 例：画出下列偏序关系的哈斯图.

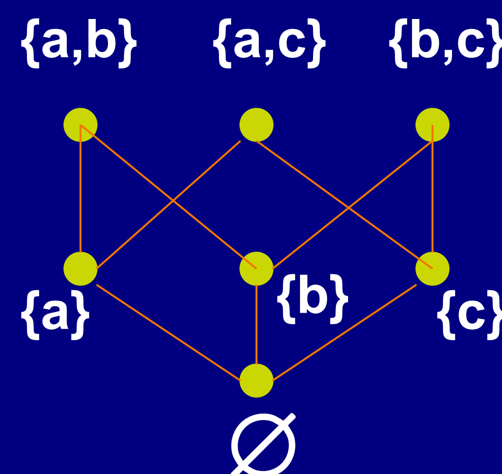
(1) $\langle A, | \rangle$， $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 15\}$

(2) $\langle \mathfrak{A}, \subseteq \rangle$， $A=\{a, b, c\}$， $\mathfrak{A} \subseteq P(A)$，

$$\mathfrak{A}=\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}\}$$

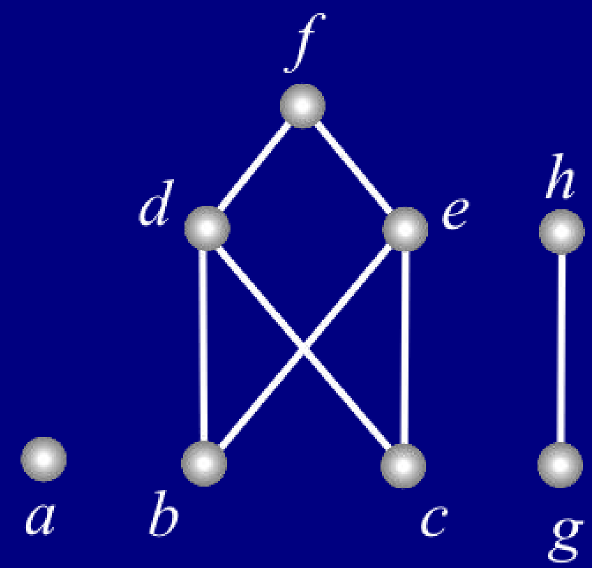
- 解：





例7.20

例7.20 已知偏序集<A, R>的哈斯图如右图所示，试求出集合A和关系R的表达式。



解答

A={a, b, c, d, e, f, g, h}

R={ <b, d>, <b, e>, <b, f>, <c, d>, <c, e>, <c, f>, <d, f>, <e, f>, <g, h>} ∪ I_A

偏序集中的特殊元素

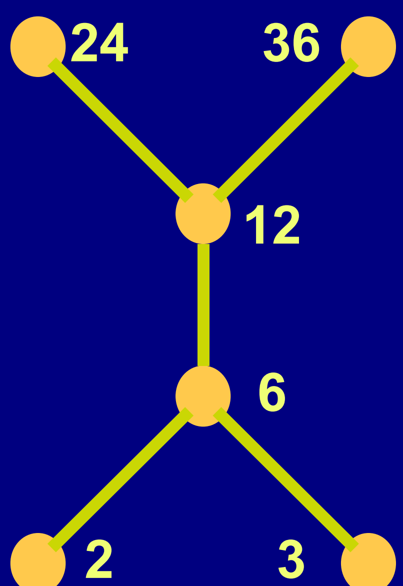
定义7.24 设$\langle A, \leqslant \rangle$为偏序集，$B \subseteq A$，$y \in B$。

（1）若$\forall x(x \in B \to y \leqslant x)$成立，则称$y$为B的**最小元**。

（2）若$\forall x(x \in B \to x \leqslant y)$成立，则称$y$为B的**最大元**。

（3）若$\forall x(x \in B \wedge x \leqslant y \to x = y)$成立，则称$y$为B的**极小元**。

（4）若$\forall x(x \in B \wedge y \leqslant x \to x = y)$成立，则称$y$为B的**极大元**。



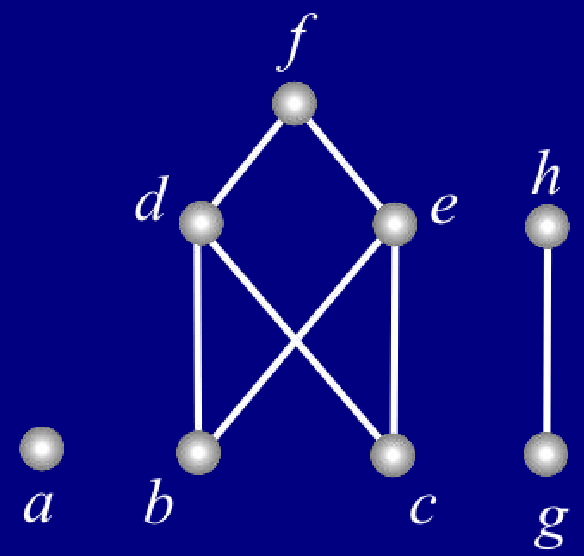
B	最大元	最小元	极大元	极小元
{2, 3, 6, 12, 24, 36}	无	无	24,26	2,3
{6, 12}	12	6	12	6
{2, 3, 6}	6	无	6	2,3
{6}	6	6	6	6

特殊元素的性质

- 最小元是B中最小的元素，它与B中其它元素都可比。
- 极小元不一定与B中元素可比，只要没有比它小的元素，它就是极小元。
- 对于有穷集B，极小元一定存在，但最小元不一定存在。最小元如果存在，一定是唯一的。
- 极小元可能有多个，但不同的极小元之间是不可比的（无关系）。
- 如果B中只有一个极小元，则它一定是B的最小元。
- 哈斯图中，集合B的极小元是B中各元素中的最底层。

例7.21

例7.21 设偏序集<A, ≤>如右图所示，求A的极小元、最小元、极大元、最大元。



解答

极小元：a, b, c, g

极大元：a, f, h。

没有最小元与最大元

说明

哈斯图中的孤立顶点既是极小元也是极大元。

例7.22

例7.22 设X为集合，$A=P(X)-\{\varnothing\}-\{X\}$，且$A\neq\varnothing$。若$|X|=n$，问：

（1）偏序集$\langle A,R_{\subseteq}\rangle$是否存在最大元？

（2）偏序集$\langle A,R_{\subseteq}\rangle$是否存在最小元？

（3）偏序集$\langle A,R_{\subseteq}\rangle$中极大元和极小元的一般形式是什么？并说明理由。

解答 $\langle A,R_{\subseteq}\rangle$不存在最小元和最大元，因为$n\geq 2$。

考察幂集P(X)的哈斯图，最底层的顶点是空集，记作第0层。由底向上，第1层是单元集，第2层是二元子集，...由$|X|=n$，则第$n-1$层是X的$n-1$元子集，第n层，也就是最高层只有一个顶点X。偏序集$\langle A,R_{\subseteq}\rangle$与$\langle P(X),R_{\subseteq}\rangle$相比，恰好缺少第0层与第n层(因为X是n元集)。因此$\langle A,R_{\subseteq}\rangle$的极小元就是X的所有单元集，即$\{x\}$，$x\in X$；而极大元恰好少一个元素，即$X-\{x\}$，$x\in X$。

上界、下界

定义7.25 设$\langle A,\leqslant\rangle$为偏序集，$B\subseteq A$，$y\in A$。

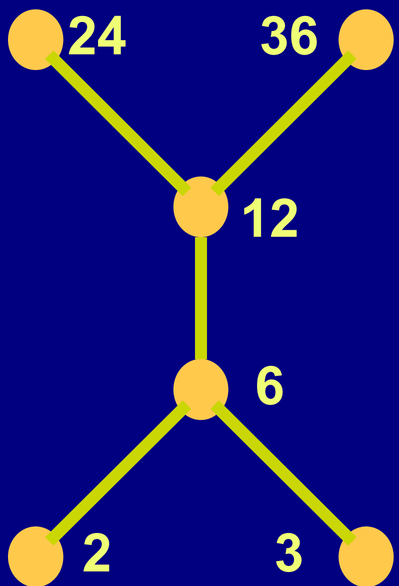
（1）若 $\forall x(x\in B\rightarrow x\leqslant y)$成立，则称$y$为B的上界。

（2）若 $\forall x(x\in B\rightarrow y\leqslant x)$成立，则称$y$为B的下界。

（3）令$C=\{y\mid y$为B的上界$\}$，则称C的最小元为B的最小上界或上确界。

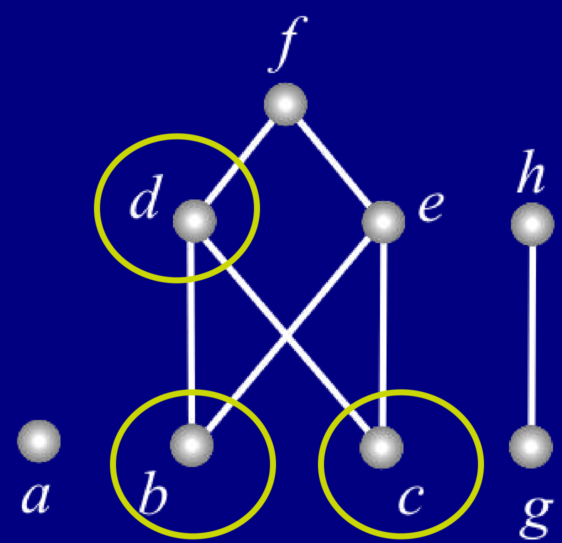
（4）令$D=\{y\mid y$为B的下界$\}$，则称D的最大元为B的最大下界或下确界。

上界与下界举例



B	上界	下界	上确界	下确界
{2, 3, 6, 12, 24, 36}	无	无	无	无
{6, 12}	12, 24, 36	2, 3, 6	12	6
{2, 3, 6}	6, 12, 24, 36	无	6	无
{6}	6, 12, 24, 36	2, 3, 6	6	6

- 考虑右图中的偏序集。令B＝{b，c，d}，则B的下界和最大下界都不存在，上界有d和f，最小上界为d。



上界与下界的性质

- B的最小元一定是B的下界，同时也是B的最大下界。
- B的最大元一定是B的上界，同时也是B的最小上界。
- B的下界不一定是B的最小元，因为它可能不是B中的元素。
- B的上界也不一定是B的最大元。
- B的上界、下界、最小上界、最大下界都可能不存在。如果存在，最小上界与最大下界是唯一的。

链(chain), 反链(antichain)

- 设<A,≼>为偏序集, $B \subseteq A$,
- 链(chain): B是A中的链 $\Leftrightarrow$

  $$\forall x \forall y (x \in B \wedge y \in B \rightarrow x\text{与}y\text{可比})$$

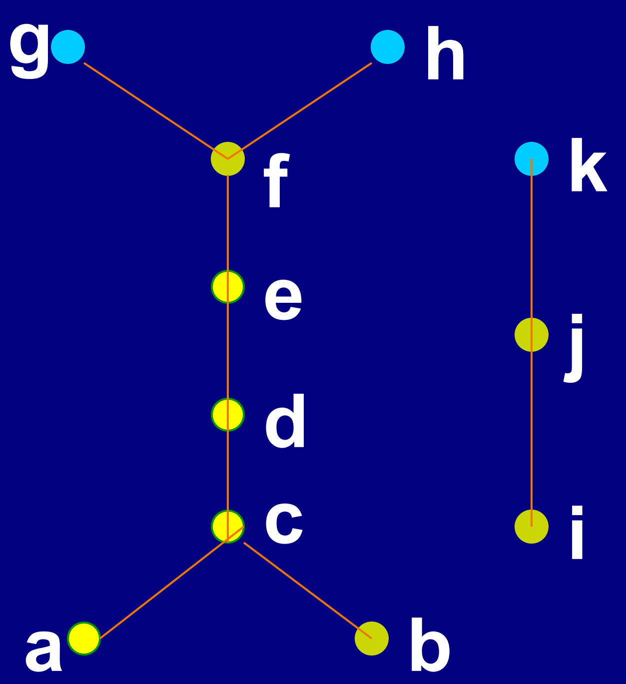
  $|B|$称为链的长度
- 反链(antichain): B是A中的反链 $\Leftrightarrow$

  $$\forall x \forall y (x \in B \wedge y \in B \wedge x \neq y \rightarrow x\text{与}y\text{不可比})$$

  $|B|$称为反链的长度

链, 反链(举例)

- 设偏序集<A, ≼ >如图所示, A={a, b, …, k}.



B_1={a,c,d,e}是长为4的链

上界{e,f,g,h}, 上确界{e}

下界{a}, 下确界{a}

B_2={a,e,h}是长为3的链

B_3={b,g}是长为2的链

B_4={g,h,k}是长为3的反链

上界,下界,上确界,下确界: 无

B_5={a}是长为1的链和反链

B_6={a,b,g,h}既非链,亦非反链

定理1

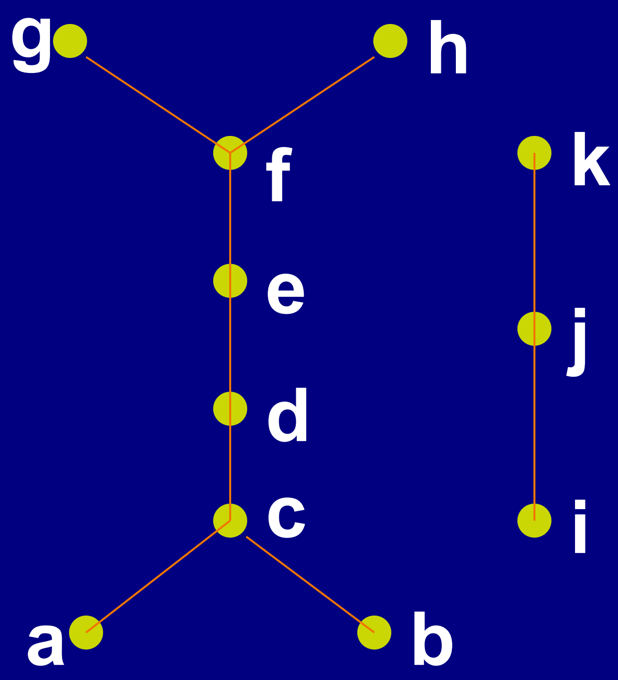
- 定理1：设<A,≼ >为偏序集，A中最长链的长度为n，则

  (1) A中存在极大元

  (2) A存在n个划分块的划分，每个划分块都是反链(即A划分成n个互不相交的反链)

- 推论：设<A,≼ >为偏序集，若|A|=mn+1,则A中要么存在长度为m+1的反链，要么存在长度为n+1的链.

定理1(举例)



最长链长度为6, 如

$B_1=\{a,c,d,e,f,h\}$,
$B_2=\{a,c,d,e,f,g\}$,

$A=\{a,b,\ldots,k\}$可以划分为

$\mathcal{A}_1= \{ \{a,b,i\}, \{c,j\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}, \{g,h,k\} \}$,

$\mathcal{A}_2= \{ \{a,b\}, \{c,i\}, \{d,j\}, \{e,k\}, \{f\}, \{g,h\} \}$

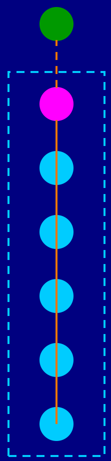
$|A|=11=2\times5+1$,

A中既有长度为$2+1=3$的反链,

定理1(证明(1))

- **定理1**：设<A,≼ >为偏序集，A中最长链的长度为n，则 （1）A中存在极大元

- **证明**：（1）设B是A中长度为n的最长链，B有极大元(也是最大元)y，则y也是A的极大元，否则A中还有比y“大”的元素z，B就不是最长链.



定理1(证明(2))

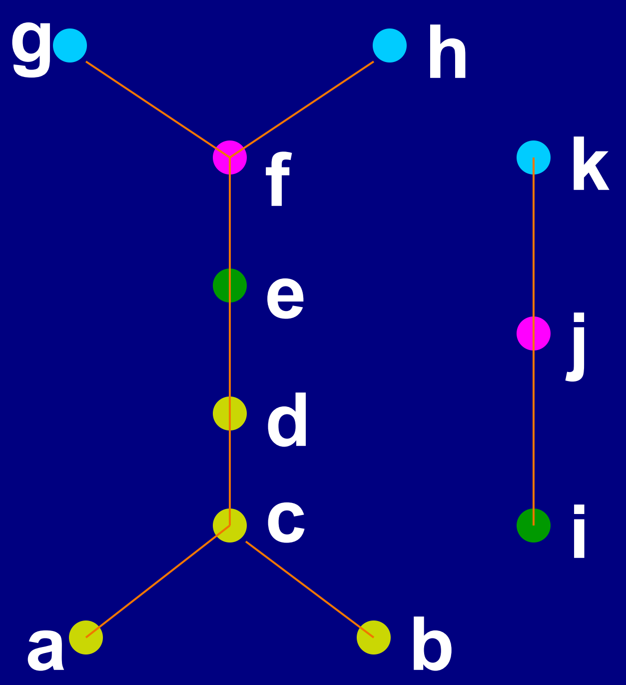
- 定理1：设<A,≤ >为偏序集，A中最长链的长度为n，则 (2) A存在n个划分块的划分，每个划分块都是反链(即A划分成n个互不相交的反链)
- 证明：(2) $A_1 = \{ x \mid x$是A中的极大元 $\}$,

  $A_2 = \{ x \mid x$是$(A-A_1)$中的极大元 $\}$, ...

  $A_n = \{ x \mid x$是$(A-A_1-...-A_{n-1})$中的极大元 $\}$,

  则 $\mathcal{A} = \{ A_1, A_2, ..., A_n \}$是满足要求的划分.

定理1(证明(2):举例)



最长链长度为6,

$A_1 = \{ g, h, k \}$,

$A_2 = \{ f, j \}$,

$A_3 = \{ e, i \}$,

$A_4 = \{ d \}$,

$A_5 = \{ c \}$,

$A_6 = \{ a, b \}$,

$\pi = \{ \{a,b\}, \{c\}, \{d\}, \{e,i\}, \{f,j\}, \{g,h,k\} \}$

定理1(证明(2)续)

- 证明(续)：[1]　$A_1 = \{ x \mid x$是A中的极大元$\}$，极大元互相之间不可比，所以A_1是反链，同理$A_2, \ldots, A_n$都是反链.

　[2]　显然$A_1, A_2, \ldots, A_n$互不相交.

　[3]　最长链上的元素分属$A_1, A_2, \ldots, A_n$，所以$A_1, A_2, \ldots, A_n$都非空.

　[4]　假设$z \in A-A_1-\ldots-A_n$，则最长链上的元素加上z就是长度为n+1的链，矛盾！所以$A=A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$.

综上所述，$\pi=\{ A_1, A_2, \ldots, A_n \}$确是所求划分. #

偏序关系的实例—调度问题

给定有穷的任务集T和m台相同的机器，T上存在偏序关系≼，

如果$t_1 \prec t_2$，那么任务t_1完成以后t_2才能开始工作。

$\forall t \in T$,

$l(t)$表示完成任务t所需要的时间，

$d(t)$表示任务t的截止时间，

$l(t), d(t) \in Z^+$。

设开始时间为0，

$f: T \to \{0, 1, \ldots, D\}$表示任务集T的一个调度方案，

其中 $f(t)$表示任务t的开始时间。

D表示完成所有任务的最终时间。

偏序关系的实例——调度问题

假设每项任务都可以安排在任何一台机器上进行工作，

如果f满足下述三个条件，则称T为可行调度。

(1) $\forall t \in T$，$f(t)+l(t) \leqslant d(t)$

（表示每项任务都要在截至时间内完成）

(2) $\forall i$，$0 \leqslant i \leqslant D$，$|\{t \in T: f(t) \leqslant i < f(t)+l(t)\}| \leqslant m$

（表示任何时刻同时工作的机器台数不超过m）

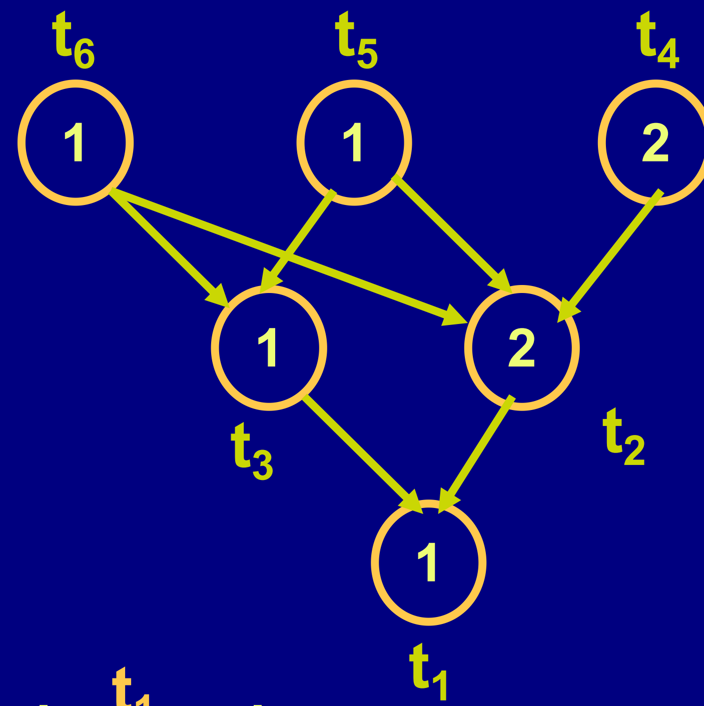
(3) $\forall t, t' \in T, t < t' \Leftrightarrow f(t)+l(t) \leqslant f(t')$

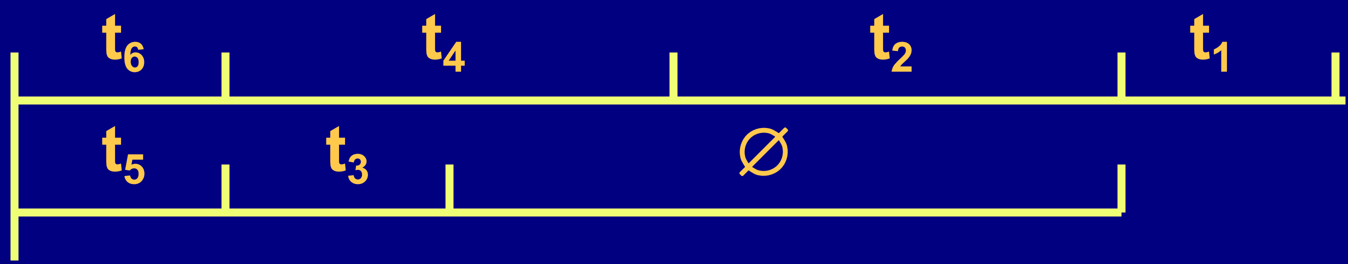
（表示任务安排必须满足任务集的偏序约束）

求使得D最小的可行调度。

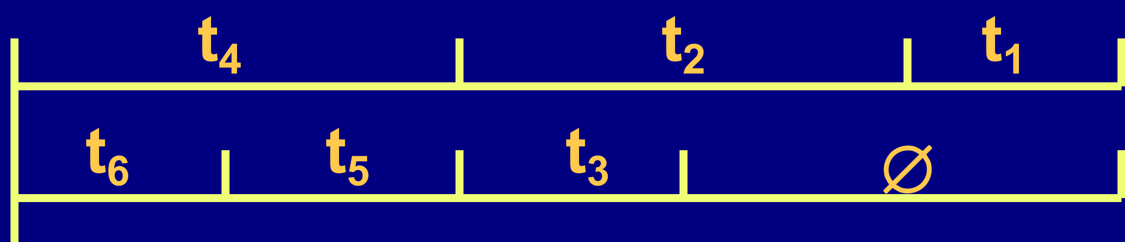
例7.23

- 设m＝2，T＝{t_1, t_2, …, t_6}，每项任务的截止时间都等于7。去掉自反成分，T的偏序约束如右图所示。每个任务结点中的数字表示完成该任务所有的时间。
- 下图中给出了两个可行的调度方案。





D＝6



D＝5

本章主要内容

- 有序对与卡氏积
- 二元关系（包括空关系，恒等关系，全域关系等）及其表示（关系矩阵，关系图）
- 关系的五种性质（自反性，反自反性，对称性，反对称性，传递性）
- 二元关系的幂运算
- 关系的三种闭包（自反闭包，对称闭包，传递闭包）
- 等价关系和划分（包括等价类，商集，划分块等）
- 偏序关系（包括哈斯图，最大元，最小元，极大元，极小元，上界，下界，最小上界，最大下界等）

本章学习要求

- 掌握：有序对及卡氏积的概念及卡氏积的性质
- 掌握：二元关系，A到B的二元关系，A上的二元关系，关系的定义域和值域，关系的逆，关系的合成，关系在集合上的限制，集合在关系下的象等概念，掌握关系的定义域、值域、逆、合成、限制、象等的主要性质
- 掌握：关系矩阵与关系图的概念及求法
- 掌握：集合A上的二元关系的主要性质（自反性，反自反性，对称性，反对称性，传递性）的定义及判别法，对某些关系证明它们有或没有中的性质

本章学习要求

- 掌握：A上二元关系的n次幂的定义及主要性质
- 掌握A上二元关系的自反闭包、对称闭包、传递闭包的定义及求法
- 掌握：等价关系、等价类、商集、划分、等概念，以及等价关系与划分之间的对应
- 掌握：偏序关系、偏序集、哈斯图、最大元、最小元、极大元、极小元、上界、下界、上确界、下确界等概念

关系性质的证明

- 通常的证明方法是利用定义证明。
- R在A上自反

  任取x，有

  $x \in A \Rightarrow \dots\dots\dots\dots \Rightarrow \langle x, x\rangle \in R$
- R在A上对称

  任取$\langle x, y\rangle$，有

  $\langle x, y\rangle \in R \Rightarrow \dots\dots\dots\dots \Rightarrow \langle y, x\rangle \in R$
- R在A上反对称

  任取$\langle x, y\rangle$，有

  $\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle x, y\rangle \in R \Rightarrow \dots\dots\dots \Rightarrow x = y$
- R在A上传递

  任取$\langle x, y\rangle$，$\langle y, z\rangle$，有

  $\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in R \Rightarrow \dots\dots\dots \Rightarrow \langle x, z\rangle \in R$

有关关系性质的练习题

- 在正整数集合上定义关系R：

  $\langle x,y\rangle \in R$，如果x和y的最大公因子是1。

  判断R是否满足关系的五条性质？

- 设A={a,b,c}，试给出A的一个二元关系R，使其同时不满足五个性质。

- N元素集合上有多少个自反的关系？

例题

例题 在正整数集合上定义关系R：

<x, y>∈R，如果x和y的最大公因子是1。

判断R是否满足关系的五条性质？

分析 按增序系统地列出所有的序对，然后观察。

<x, y>	x＋y	最大公因子	是否在R中
<1, 1>	2	1	是
<1, 2>	3	1	是
<2, 1>	3	1	是
<1, 3>	4	1	是
<2, 2>	4	2	否
<3, 1>	4	1	是
……	…	…	…

例题

解答

自反	否	$\langle 2,2\rangle \notin R$
反自反	否	$\langle 1,1\rangle \notin R$
对称	是	$\langle x,y\rangle \in R \rightarrow \langle y,x\rangle \in R$
反对称	否	$\langle 1,2\rangle \in R \wedge \langle 2,1\rangle \in R$ 但 $1 \neq 2$
传递	否	$\langle 2,1\rangle \in R \wedge \langle 1,2\rangle \in R$ 但 $\langle 2,2\rangle \notin R$

扩展

(1) 从列出的若干序偶来考察是否属于关系。

(2) 按一定规则列出序偶。

(3) 一个范例即可证明不满足某种性质。

(4) 证明某种性质成立，必须取出关系中的每个元素。

例题

例题　设A={a, b, c}，试给出A的一个二元关系R，使其同时不满足五个性质。

分析　因为关系的各种性质的存在，都要求满足一定的条件，要做的就是创造或破坏这些条件。

从A×A出发，通过删除某些序偶，使其不满足那些性质。

解答　令$R=\{\langle a,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,b\rangle, \langle c,a\rangle\}$

$\langle c,c\rangle \notin R$	不满足自反性
$\langle a,a\rangle \in R$	不满足反自反性
$\langle c,a\rangle \in R \land \langle a,c\rangle \notin R$	不满足对称性
$\langle b,c\rangle \in R \land \langle c,b\rangle \in R \land b \neq c$	不满足反对称性
$\langle b,c\rangle \in R \land \langle c,a\rangle \in R \land \langle b,a\rangle \notin R$	不满足传递性

习题

设$R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in N$ 且 $x+3y=12\}$

	解答:
(1) 求R的集合表达式	$\{\langle 0,4\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 6,2\rangle,\langle 9,1\rangle,\langle 12,0\rangle\}$
(2) 求 dom R,	$\{0,3,6,9,12\}$,
ran R	$\{0,1,2,3,4\}$
(3) 求$R\circ R$	$\{\langle 3,3\rangle,\langle 12,4\rangle\}$
(4) 求$R\upharpoonright\{2,3,4,6\}$	$\{\langle 3,3\rangle,\langle 6,2\rangle\}$
(5) 求$R[\{3\}]$	$\{3\}$
(6) R^3	$\{\langle 3,3\rangle\}$

习题

- 设R是复数集合C上的关系，且满足$xRy \Leftrightarrow x-y=a+bi$，a和b为给定的非负整数，试确定R的性质并证明之。

解答

（1）当a＝b＝0时，满足自反性、对称性、反对称性和传递性，不满足反自反性。

（2）当a、b不全为0时，只满足反自反性、反对称性。

习题

例题 设I为整数集，$R=\{\langle x, y\rangle \mid x \equiv y \pmod{k}\}$，证明R是等价关系。

证明 设任意$a, b, c \in I$

(1) 因为$a-a=0$，所以$\langle a, a\rangle \in R$。

(2) 若$a \equiv b \pmod{k}$，$a-b=kt$（t为整数），则

$b-a=-kt$，所以$b \equiv a \pmod{k}$。

(3) 若$a \equiv b \pmod{k}$，$b \equiv c \pmod{k}$，则

$a-b=kt$，$b-c=ks$（t和s为整数），

$a-c=a-b+b-c=kt+ks=k(t+s)$，

所以$a \equiv c \pmod{k}$

因此，R是等价关系。