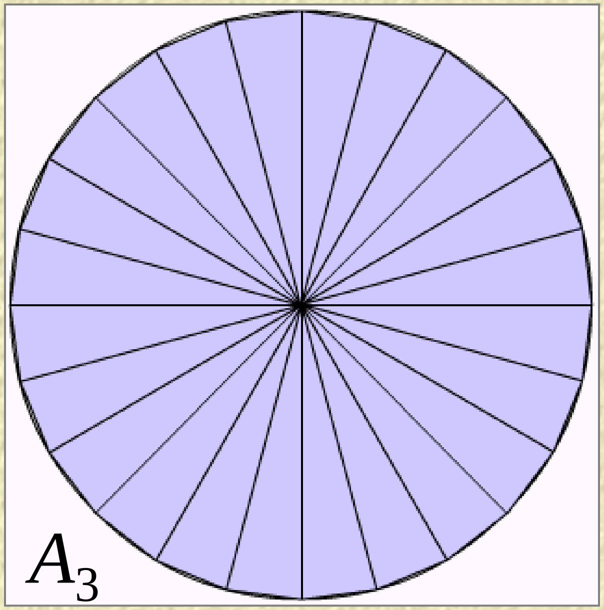
2-01 数列的极限的概念

一.概念的引入

1. 如何用渐近的方法求圆的面积A?

用圆内接正多边形的面积近似圆的面积A.



A_1表示圆内接正6边形面积,

A_2表示圆内接正12边形面积,

A_3表示圆内接正24边形面积,

$\cdots\cdots$,

A_n表示圆内接正$6\times 2^{n-1}$边形面积,

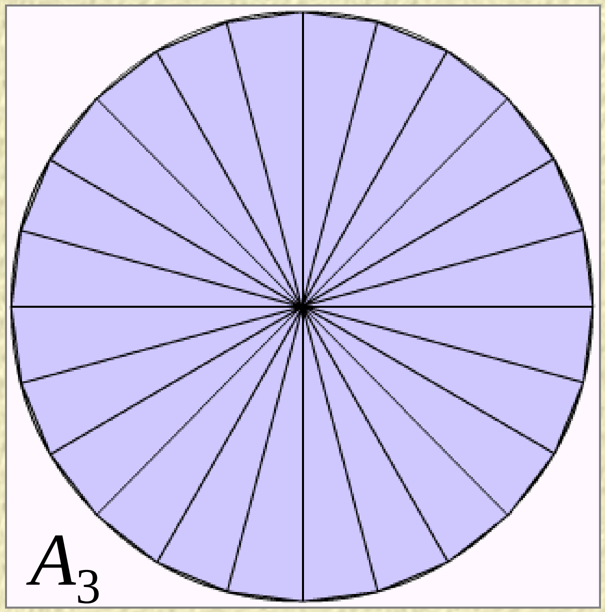
显然n越大, A_n越接近于A.

$$A_n = R^2 \cdot 3 \cdot 2^{n-1} \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}$$

因此, 需要考虑当$n \to \infty$时, A_n的变化趋势.

1. 如何用渐近的方法求圆的面积A?

用圆内接正多边



刘徽割圆术:

“…割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣”

——刘徽

积,

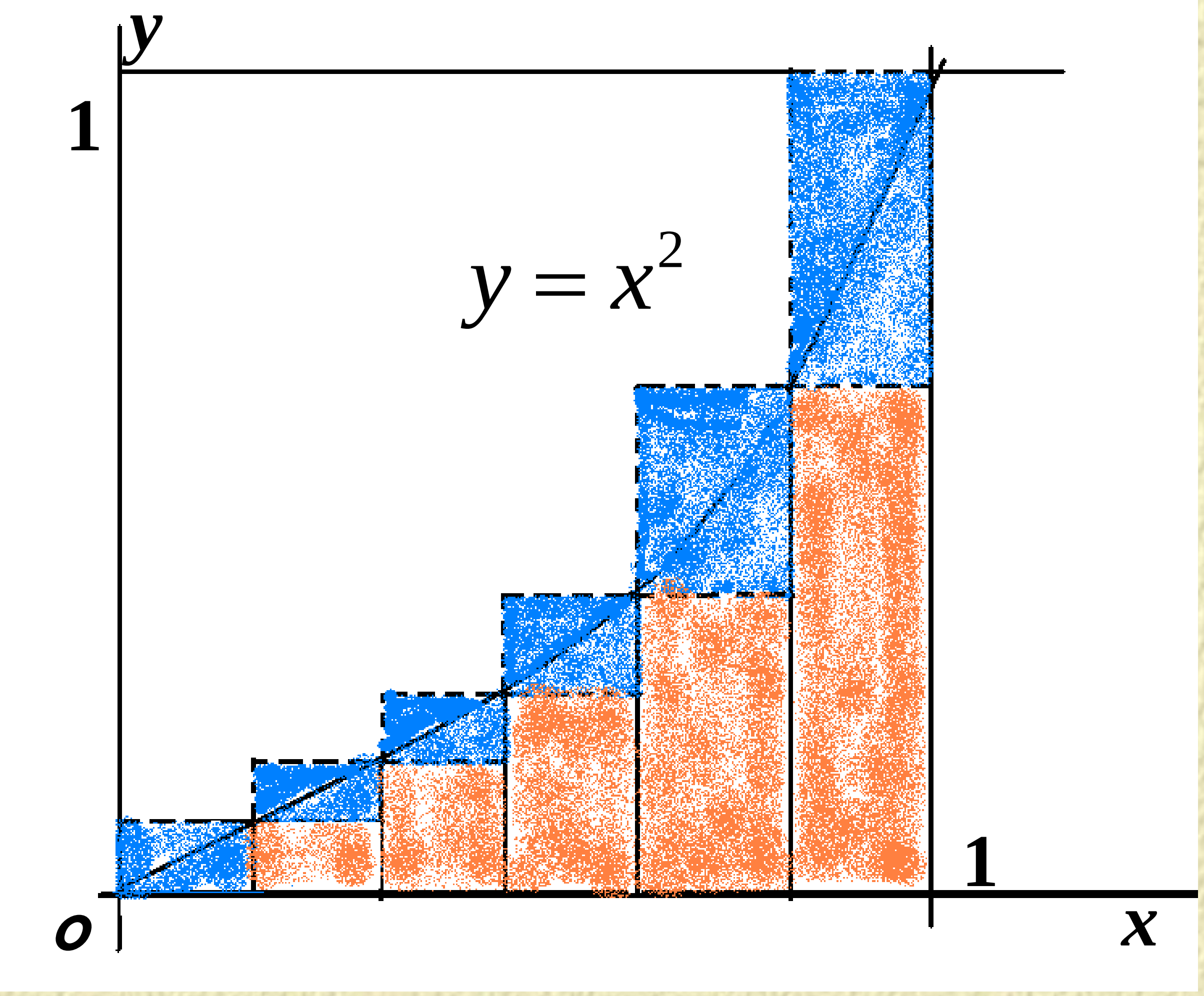
显然n越大, A_n越接近于A. $A_n = R^2 \cdot 3 \cdot 2^{n-1} \sin \dfrac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}$

因此, 需要考虑当$n \to \infty$时, A_n的变化趋势.

上页 下页 返回

2.曲边三角形的面积问题:

与割圆问题同样的是——**曲边三角形的面积*A***如何计算?



上页 下页 返回

我们通常的做法是:将[0,1]区间n 等份,计算一系列小矩形的面积,不足近似与过剩近似.

不足近似(橘色部分)

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{i-1}{n}\right)^2=\frac{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2}{n^3}$$

$$=\frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)$$

过剩近似(橘色加蓝色部分)

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2=\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

可以看到,随着 n 的不断增大,不足近似不断增加,过剩近似不断减少,两者都越来越接近于同一个数值,则该数值即为所求之曲边三角形的面积 A.

$$\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)\xrightarrow{n\to\infty} A=\frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\xrightarrow{n\to\infty} A=\frac{1}{3}.$$

3. 截杖问题:

"一尺之棰，日截其半，万世不竭"

第一天截下的杖长为$X_1 = \frac{1}{2}$;

第二天截下的杖长总和为 $X_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}$;

…… ……

第n天截下的杖长总和为$X_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$;

$$X_n = 1 - \frac{1}{2^n} \longrightarrow 1$$

上页 下页 返回

数列定义:

按正整数1,2,3,⋯编号依次排列的一列数

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\cdots (1)$$

称为无穷数列,简称数列,其中的每个数称为数列的项,称x_n为数列的通项(一般项).

数列(1)记为$\{x_n\}$.

例如,$2, 4, 8, \cdots, 2^n, \cdots$; $\{2^n\}$

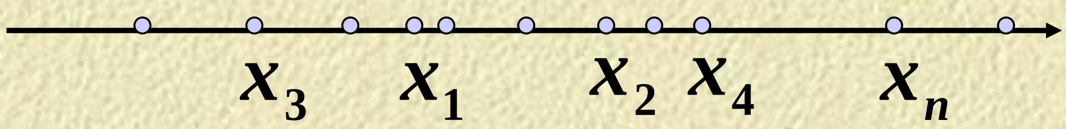
$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots; \quad \left\{\frac{1}{2^n}\right\}$$

$$1,-1,1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots;\left\{(-1)^{n-1}\right\}$$

$$2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\cdots,\frac{n+(-1)^{n-1}}{n},\cdots;\left\{\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}\right\}$$

$$\sqrt{2},\sqrt{2+\sqrt{2}},\cdots,\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{2}}}},\cdots$$

注意：数列对应着数轴上的一个点列,可看作一动点在数轴上依次取$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$



Q：当n无限增大时,x_n是否无限接近于某一确定的数值a?如果是,数值a如何确定?

上页 下页 返回

二. 数列极限的定义

Q:当n无限增大时,x_n是否无限接近于某一确定的数值a?如果是,数值a如何确定?

例如,当 n 无限增大时, $x_n = 1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 无限接近于 1.

问题:"无限接近"意味着什么?如何用数学的语言刻画它.

在数轴上,动点x_n与定点a的距离是$|x_n - a|$,所以,x_n与数a无限接近就相当于$|x_n - a|$无限接近于0.

上页 下页 返回

对于$x_n = 1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, $|x_n - 1| = \left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$,

给定10^{-2},只要$n > 10^2$时,就有$|x_n - 1| < 10^{-2}$,

给定10^{-3},只要$n > 10^3$时,就有$|x_n - 1| < 10^{-3}$,

给定10^{-4},只要$n > 10^4$时,就有$|x_n - 1| < 10^{-4}$,

$\cdots \quad \cdots$

给定$\varepsilon > 0$,存在$N \geq \frac{1}{\varepsilon}$,只要$n > N$,

就有$|x_n - 1| < \varepsilon$成立.

上页 下页 返回

定义1.对于数列$\{x_n\}$而言,若存在一个确定的数a,当n不断增大以致无穷时,x_n与定值a无限接近,则称数列$\{x_n\}$收敛于a,数a是数列的极限,记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad 或 \quad x_n \to a \ (n \to \infty).$$

若数列$\{x_n\}$没有极限,则称数列$\{x_n\}$发散.

以上用自然语言来描述的极限定义,缺点有二:

(1).语言的模糊性,何为“不断增大以致无穷”,“无限接近”?

(2).不利于作逻辑推理.

定义1′.对于数列$\{x_n\}$而言,若存在一个确定的数a,对于任意给定的正数ε(无论它多么小)*,总存在正数N,使得对于$n > N$时的一切x_n,$|x_n - a| < \varepsilon$都成立.则称数列$\{x_n\}$收敛于a,数a是数列的极限,记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{或} \quad x_n \to a \ (n \to \infty).$$

若数列$\{x_n\}$没有极限,则称数列$\{x_n\}$是发散的.

(无论它多么小)* ⟵ 实数的稠密性.

数列收敛的表述——用逻辑符号:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n > N, s.t. |x_n - a| < \varepsilon.$$

$\forall \leftarrow$ *for every, for each*; *for all, for any*

$\exists \leftarrow$ *exist*

$s.t. \leftarrow$ *such that*

数理逻辑中称∀为全称量词,∃为存在量词.

$\varepsilon \leftarrow$ ['epsilɪ∂n] ε – error

上页 下页 返回

例1.(1).用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1.$

分析 $\left|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|=\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}-n}{n}=\dfrac{a^2}{n\left(\sqrt{n^2+a^2}+n\right)}\le\dfrac{a^2}{n},$

$\therefore$ 当 $\dfrac{a^2}{n}<\varepsilon$ 时当然有 $\left|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon.$

$\therefore\ \forall\varepsilon>0,$只要 $\dfrac{a^2}{n}<\varepsilon$ 即 $n>\dfrac{a^2}{\varepsilon}$,就有 $\left|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon.$

$\therefore$ 任给 $\varepsilon>0$,我们可取 $N\ge\dfrac{a^2}{\varepsilon}.$

用定义证数列极限存在时,关键是对任意给定的 $\varepsilon>0$ 确认 N 的存在性.

证明 当$a=0$时结论显然成立.

下设$a\neq 0$.$\forall\varepsilon>0$,取$N\geq\dfrac{a^2}{\varepsilon}$,则

当$n>N$时,$\left|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|=\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}-n}{n}$

$$=\frac{a^2}{n\left(\sqrt{n^2+a^2}+n\right)}\leq\frac{a^2}{n}<\frac{a^2}{N}\leq\frac{a^2}{a^2/\varepsilon}=\varepsilon,$$

即$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$.

$$\left.\begin{aligned}\frac{a^2}{n\left(\sqrt{n^2+a^2}+n\right)}&\leq\frac{a^2}{2n^2}\\ \frac{a^2}{n\left(\sqrt{n^2+a^2}+n\right)}&\leq\frac{a^2}{2n}\end{aligned}\right\}\text{均可}$$

求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1.$

分析 法二 $\left|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|\le\dfrac{n+|a|}{n}-1$

$=\dfrac{|a|}{n}<\varepsilon$,只要$n>\dfrac{|a|}{\varepsilon}$.

$\therefore N$的取值显然只要合适、够用即可.

上页 下页 返回

例1.(2).用定义证明$\alpha\in\mathbb{R}^{+}$时, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}}=0.$

证明 (i).$\alpha\geq 1$ 时, $\dfrac{1}{n^{\alpha}}\leq\dfrac{1}{n}$, $\therefore\ \forall\varepsilon>0,\exists N\geq\dfrac{1}{\varepsilon},\forall n>N,$

有$\left|\dfrac{1}{n^{\alpha}}-0\right|=\dfrac{1}{n^{\alpha}}\leq\dfrac{1}{n}<\dfrac{1}{N}\leq\dfrac{1}{1/\varepsilon}=\varepsilon.$

(ii).$0<\alpha<1$ 时, 由实数的*Archimedes*性,

$\exists m\in\mathbb{N}$,使$m\alpha>1.$

由$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^{m\alpha}}=0\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N>0,\forall n>N,0<\dfrac{1}{n^{m\alpha}}<\varepsilon^{m},$

$\therefore\ 0<\dfrac{1}{n^{\alpha}}<\varepsilon,\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}}=0.$

上页 下页 返回

注意

1.不等式$|x_n - a| < \varepsilon$,ε取值的任意性刻划了x_n与a的无限接近.

2.N与任意给定的正数ε有关,而$n > N$刻划了n的无限增大.

3.由依定义讨论数列极限的过程可见,$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,

$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N$,使当$n > N$时有 $|x_n - a| < \varepsilon$.其中的N若存在则显然不唯一,即比前面的取定的N来得大的数都是适用的.所以用定义证明数列极限存在时只要给出一个适用的N即可.

上页 下页 返回

4. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n > N, s.t. \left| x_n - a \right| < \varepsilon.$

其中 $\left| x_n - a \right| < \varepsilon$ 写成

$\left| x_n - a \right| \le \varepsilon,\ \left| x_n - a \right| < 2\varepsilon,\ \left| x_n - a \right| < \varepsilon^2$

$n > N$ 写成 $n \ge N$

也是一样的意思.

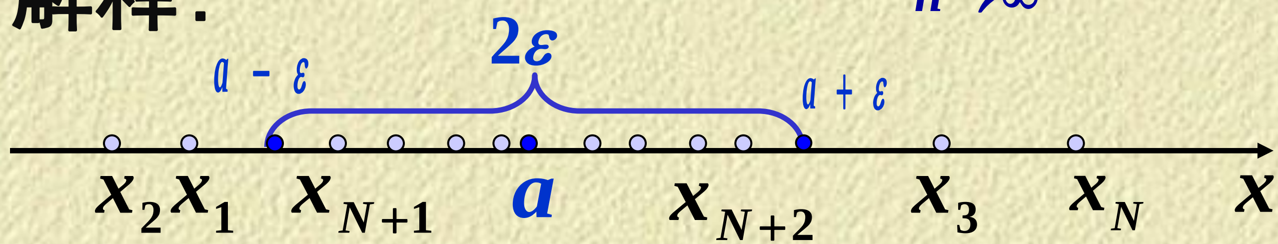
上页 下页 返回

5.对x_n而言,$\forall \varepsilon > 0$,有无限多个点x_n落在$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$内,也不能说有$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$.

$\forall \varepsilon > 0$,当$n > N$时,$\{x_n\}$对应的所有点都落在$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$内,至多只有有限个点$x_1, x_2, \cdots, x_N$落在$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$外

$\Leftrightarrow \lim\limits_{n \to \infty} x_n = a.$

几何解释:



定义1″.对于数列$\{x_n\}$,若存在数a,$\forall \varepsilon > 0$,若数列$\{x_n\}$中至多只有有限多个项落在$U(a,\varepsilon)$外,则称数列$\{x_n\}$收敛于a.

由此知:改变(如增加或去掉)数列的前有限多项,不改变数列的敛散性.对于收敛数列,其极限值不变.($P25$/例9)

三*. 数列发散的表述——用逻辑符号:

数列$\{x_n\}$发散

(1). $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq a \Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0, \forall N \in \mathbb{Z}^+,$

$\exists n_0 > N$, 有$|x_{n_0} - a| \geq \varepsilon_0$;

(2). 数列$\{x_n\}$发散$\Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon_0 > 0,$

$\forall N \in \mathbb{Z}^+, \exists n_0 > N$, 有$|x_{n_0} - a| \geq \varepsilon_0$.

例2.证明:数列$x_n = (-1)^{n+1}$是发散的.

证明(1). 若取$a = 1$,

则对于$\varepsilon_0 = 1, \forall N, \exists n_0 = 2N > N$,

有 $\left| x_{n_0} - a \right| = \left| (-1)^{n_0+1} - 1 \right| = 2 > 1 = \varepsilon_0$,

$\therefore$ 数列$x_n = (-1)^{n+1}$不以1为极限.

(过程显示ε_0可取值范围为$0 < \varepsilon_0 < 2$)

同理,数列$x_n = (-1)^{n+1}$不以-1为极限.

上页 下页 返回

数列$x_n=(-1)^{n+1}$不以任何实数a为极限.

证明(2). 若$-1<a<1$,

则对于$0<\varepsilon_0<\min\left(a+1,1-a\right)$,

$\forall N,\forall n_0\ge N$,

有 $\left|x_{n_0}-a\right|=\left|(-1)^{n_0+1}-a\right|>\varepsilon_0$,

$\therefore$ 数列$x_n=(-1)^{n+1}$不以$a\left(-1<a<1\right)$为极限.

同样,数列$x_n=(-1)^{n+1}$不以$a\left(|a|>1\right)$为极限.

上页 下页 返回

四.无穷小列与无穷大数列:

定义2.极限为0的数列称为无穷小列.

命题1.

(1).$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n - a\right) = 0$.

(2).无穷小列与有界数列的乘积仍为无穷小列.

(3).有限多个无穷小列的和仍为无穷小列.

上页 下页 返回

(2).无穷小列与有界数列的乘积仍为无穷小列.

证明 设x_n有界,即存在$M>0,\forall n\in\mathbb{Z}^{+},\left|x_n\right|\le M$,

而当$n\to\infty$时y_n是无穷小数列,

$$\therefore \forall\varepsilon>0,\exists N>0,\forall n>N,\exists\left|y_n\right|<\frac{\varepsilon}{M},$$

$$\therefore \left|x_n y_n\right|=\left|x_n\right|\cdot\left|y_n\right|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon,$$

$$\therefore x_n y_n\to 0\ \left(n\to\infty\right).$$

上页 下页 返回

(3).有限多个无穷小列的和仍为无穷小列.

证明 设x_n及y_n是当$n\to\infty$时的两个无穷小数列,$\therefore \forall\varepsilon>0,\exists N_1>0,N_2>0$,使得

$$\forall n>N_1,\exists\left|x_n\right|<\frac{\varepsilon}{2},\forall n>N_2,\exists\left|y_n\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$,当$n>N$时,恒有

$$\left|x_n\pm y_n\right|\le\left|x_n\right|+\left|y_n\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

$$\therefore x_n\pm y_n\to 0\left(n\to\infty\right).$$

注意:无限多个无穷小的和未必是无穷小.

定义3.绝对值无限增大的数列称为无穷大列.

具体而言,$\forall M>0, \exists N>0, \forall n>N, s.t. \left|x_n\right| \geq M$,

称数列$\{x_n\}$为无穷大数列,记为$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$.

正无穷大　$\forall M>0, \exists N>0$,

$\forall n>N, s.t. x_n \geq M, \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$;

负无穷大　$\forall M>0, \exists N>0$,

$\forall n>N, s.t. x_n \leq -M, \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty$.

命题2.在$n\to\infty$时,无穷大列的倒数为无穷小列;不等于0的无穷小列的倒数为无穷大列.

$\longrightarrow$以后,我们可以将所有的极限问题都转化为无穷小的问题.

例题选粹

上页 下页 返回

例3.$\forall a\in\mathbb{R},\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0.$

证明　当$|a|\le 1$时，$\left|\dfrac{a^n}{n!}-0\right|\le\dfrac{1}{n},\forall\varepsilon>0,$

可取$N\ge\dfrac{1}{\varepsilon},\forall n>N,$有$\left|\dfrac{a^n}{n!}-0\right|\le\dfrac{1}{n}<\varepsilon.$

当$|a|>1$时，记$\big[|a|\big]=m,$则$m\le|a|<m+1,$

$$\left|\frac{a^n}{n!}-0\right|=\frac{\overbrace{|a|\cdot\cdots\cdot|a|}^{m个}\ \overbrace{|a|\cdot\cdots\cdot|a|}^{n-m个}}{1\cdot2\cdot\cdots\cdot m\cdot(m+1)\cdot\cdots\cdot n}\le\frac{|a|^m}{m!}\cdot\frac{|a|}{n},\left(\begin{matrix}此时\\ n>m\end{matrix}\right)$$

所以只要使得$\dfrac{|a|^{m+1}}{m!}\cdot\dfrac{1}{n}<\varepsilon$成立，$n>\dfrac{|a|^{m+1}}{\varepsilon\cdot m!}$即可.

当$|a|>1$时，$\forall\varepsilon>0, \exists N\geq\max\left(\frac{|a|^{m+1}}{\varepsilon\cdot m!}, m\right), \forall n>N,$

有$$\left|\frac{a^n}{n!}-0\right|=\frac{\overbrace{|a|\cdot\cdots\cdot|a|}^{m个}\ \overbrace{|a|\cdot\cdots\cdot|a|}^{n-m个}}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot m\cdot(m+1)\cdot\cdots\cdot n}\leq\frac{|a|^m}{m!}\cdot\frac{|a|}{n},$$

$$=\frac{|a|^{m+1}}{m!}\cdot\frac{1}{n}<\frac{|a|^{m+1}}{m!}\cdot\frac{1}{N}\leq\frac{|a|^{m+1}}{m!}\cdot\frac{1}{|a|^{m+1}/(\varepsilon\cdot m!)}=\varepsilon \text{成立},$$

$$\therefore\forall a\in\mathbb{R}, \lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0.$$

上页 下页 返回

例4.求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2}{n^2-3}=3.$

条件放大

证明 $\left|\dfrac{3n^2}{n^2-3}-3\right|=\dfrac{9}{n^2-3}<\dfrac{9}{n}$ $\left(n\geq 3\text{时}, n^2-3>n\right)$

任给 $\varepsilon>0$, 要 $|x_n-3|<\varepsilon$, 只要 $\dfrac{9}{n}<\varepsilon$, 或 $n>\dfrac{9}{\varepsilon}$,

所以, 取 $N\geq\max\left\{3,\dfrac{9}{\varepsilon}\right\}$, 则当 $n>N$ 时,

$|x_n-3|<\varepsilon$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2}{n^2-3}=3.$

前面证明中的条件放大并不必须.

要$\left|\dfrac{3n^2}{n^2-3}-3\right|=\dfrac{9}{n^2-3}<\varepsilon$,只要$n^2-3>\dfrac{9}{\varepsilon}$,

即$n>\sqrt{3+\dfrac{9}{\varepsilon}}$,所以,取$N\geq\sqrt{3+\dfrac{9}{\varepsilon}}$,则当$n>N$时,

$|x_n-3|<\varepsilon$,即$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2}{n^2-3}=3$.

适当放大

或者,由于$\dfrac{9}{n^2-3}<\dfrac{9}{n^2-4}<\dfrac{9}{n-2}$,所以,

要$\left|\dfrac{3n^2}{n^2-3}-3\right|=\dfrac{9}{n^2-3}<\varepsilon$,只要$\dfrac{9}{n-2}<\varepsilon$,即$n>2+\dfrac{9}{\varepsilon}$,

所以,取$N\geq 2+\dfrac{9}{\varepsilon}$,$\cdots$

上页 下页 返回

例5.求证 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$,其中$|q| < 1$.

分析 若$0 < |q| < 1$,任给$\varepsilon > 0$,要找N,使当

$n > N$时,有$|x_n - 0| = |q^n| < \varepsilon$, $n\ln|q| < \ln\varepsilon$,

$\therefore n > \dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$,所以可取$N \geq \dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$.

证明 若$q = 0$,则$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$;

若$0 < |q| < 1$, $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N \geq \dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$, $\forall n > N$,

有$|q^n - 0| = |q|^n < |q|^N \leq |q|^{\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}} = |q|^{\log_{|q|}\varepsilon} = \varepsilon$,

$\therefore |q| < 1$时, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

例5.证明 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$,其中 $|q| < 1$.

法二[分析] 若 $0 < |q| < 1$,则 $h = \dfrac{1}{|q|} - 1 > 0$,

$$|q^n - 0| = |q|^n = \frac{1}{(1+h)^n} = \frac{1}{1 + nh + \cdots + h^n} < \frac{1}{nh},$$

$\therefore$ 若 $\dfrac{1}{nh} < \varepsilon$ 则 $|q^n - 0| < \varepsilon$.故可取 $n > \dfrac{1}{\varepsilon h}$.

证明 $\forall \varepsilon > 0$,可取得 $N \geq \dfrac{1}{\varepsilon h}$,$\forall n > N$,有

$$|q^n - 0| = \frac{1}{(1+h)^n} < \frac{1}{nh} < \frac{1}{Nh} \leq \varepsilon.$$ 证毕!

上页 下页 返回

例6.求证: (1). $a>1, \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$; (2). $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

分析(1). $a>1$,则 $h=\sqrt[n]{a}-1>0$.

由$a=(1+h)^n\geq 1+nh=1+n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)$,

得 $0<\sqrt[n]{a}-1\leq\dfrac{a-1}{n}$.

证明(1). $\forall\varepsilon>0,\exists N\geq\dfrac{a-1}{\varepsilon}$,则当$n>N$时,

有$\left|\sqrt[n]{a}-1\right|<\varepsilon$,即$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

上页 下页 返回

法二[分析] $a>1, 1<\sqrt[n]{a}=(1\cdots\cdots 1\cdot a)^{\frac{1}{n}}$

(将$n-1$个1连乘)

$$<\frac{n-1+a}{n}=1+\frac{a-1}{n}, \therefore 0<\sqrt[n]{a}-1<\frac{a-1}{n}\cdots$$

证明 $\forall\varepsilon>0, \exists N\geq\frac{a-1}{\varepsilon}, \forall n>N,$

$$0\leq\sqrt[n]{a}-1=(1\cdots\cdots 1\cdot a)^{\frac{1}{n}}-1<\frac{n-1+a}{n}-1$$

$$=\frac{a-1}{n}<\frac{a-1}{N}\leq\frac{a-1}{a-1/\varepsilon}=\varepsilon.$$

求证(1). $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1,(a>1).$

证法三 $\forall\varepsilon>0$,要找N,使当$n>N$时,$\left|\sqrt[n]{a}-1\right|<\varepsilon.$

$\because a>1,\quad \therefore \sqrt[n]{a}>1, \therefore 0<\sqrt[n]{a}-1<\varepsilon,$

即 $a<(\varepsilon+1)^n, n>\log_{(\varepsilon+1)}a.$

$\therefore \forall\varepsilon>0, \exists N\geq\log_{(\varepsilon+1)}a, \forall n>N, s.t. \left|\sqrt[n]{a}-1\right|<\varepsilon.$

前面那样的放大技巧亦不是必须的.

发现数列$\left\{\sqrt[n]{n}\right\}$的极限.

分析 由近似计算,$\sqrt[1]{1}=1, \sqrt[2]{2}=\sqrt[4]{4}\approx 1.41421356,$

$\sqrt[3]{3}\approx 1.44224957,$ $\sqrt[5]{5}\approx 1.37972966,$

$\sqrt[6]{6}\approx 1.34800616,$ $\sqrt[7]{7}\approx 1.32046925,$

$\sqrt[8]{8}\approx 1.29683956,$ $\sqrt[9]{9}\approx 1.27651801,$

$\sqrt[10]{10}\approx 1.25892541,$ $\sqrt[11]{11}\approx 1.24357523,$

$\sqrt[12]{12}\approx 1.23007551,$ $\sqrt[13]{13}\approx 1.21811404,$

$\sqrt[14]{14}\approx 1.20744203,$ $\sqrt[15]{15}\approx 1.19786006,$

$\sqrt[16]{16}\approx 1.18920712,$ $\sqrt[17]{17}\approx 1.18135208,$

$\sqrt[18]{18}\approx 1.17418725,$ $\sqrt[19]{19}\approx 1.16762348,\cdots$

发现数列$\left\{\sqrt[n]{n}\right\}$的极限.

分析　由近似计算,$\sqrt[3]{3}\approx 1.44224957$,

$\sqrt[10]{10}\approx 1.25892541$,　$\sqrt[20]{20}\approx 1.16158635$,

$\sqrt[30]{30}\approx 1.12004991$,　$\sqrt[40]{40}\approx 1.09660823$,

$\sqrt[50]{50}\approx 1.08138266$,　$\sqrt[60]{60}\approx 1.07062124$,

$\sqrt[70]{70}\approx 1.06257243$,　$\sqrt[80]{80}\approx 1.05630327$,

$\sqrt[90]{90}\approx 1.05126887$,　$\sqrt[100]{100}\approx 1.04712855,\cdots$

$\sqrt[100]{100} \approx 1.04712855$, $\sqrt[200]{200} \approx 1.02684561$,

$\sqrt[300]{300} \approx 1.01919450$, $\sqrt[400]{400} \approx 1.01509140$,

$\sqrt[500]{500} \approx 1.01250678$, $\sqrt[600]{600} \approx 1.01071859$,

$\sqrt[700]{700} \approx 1.00940261$, $\sqrt[800]{800} \approx 1.00839077$,

$\sqrt[900]{900} \approx 1.00758685$, $\sqrt[1000]{1000} \approx 1.00693167$,

$\sqrt[2000]{2000} \approx 1.00380768$, $\sqrt[3000]{3000} \approx 1.00267235$,

$\sqrt[4000]{4000} \approx 1.00207566$, $\sqrt[5000]{5000} \approx 1.00170489$,

$\sqrt[10000]{10000} \approx 1.00092146$, $\sqrt[50000]{50000} \approx 1.00021642$,

$\sqrt[100000]{100000} \approx 1.00011514$, $\sqrt[500000]{500000} \approx 1.00002625$,

$\sqrt[1000000]{1000000} \approx 1.00001382$, $\sqrt[10000000]{10000000} \approx 1.00000161, \cdots$

我们猜测数列$\left\{\sqrt[n]{n}\right\}$的极限为1 .

上页 下页 返回

例6.求证：(2). $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$

(2).分析 记 $\sqrt[n]{n}=1+h_n, h_n>0\ (n>1)$

$$n=(1+h_n)^n=1+nh_n+C_n^2h_n^2+\cdots+h_n^n>1+C_n^2h_n^2,$$

即 $C_n^2h_n^2<n-1,\quad \therefore 0<\sqrt[n]{n}-1=h_n<\sqrt{\dfrac{2}{n}},$

$\therefore$ 当 $\sqrt{\dfrac{2}{n}}<\varepsilon$ 时,则有 $0<\sqrt[n]{n}-1<\varepsilon.$

而要使得 $\sqrt{\dfrac{2}{n}}<\varepsilon$ 即 $\dfrac{2}{n}<\varepsilon^2,$

只要 $n>\dfrac{2}{\varepsilon^2}$,故可取 $N\geq\dfrac{2}{\varepsilon^2}.$

上页 下页 返回

证明 记 $\sqrt[n]{n}=1+h_n, h_n>0\ (n>1)$

$$n=(1+h_n)^n=1+nh_n+C_n^2h_n^2+\cdots+h_n^n>1+C_n^2h_n^2,$$

$$\therefore 0<\sqrt[n]{n}-1=h_n<\sqrt{\frac{2}{n}}.$$

$$\therefore \forall\varepsilon>0, \exists N\ge\frac{2}{\varepsilon^2}, \forall n>N,$$

$$0<\sqrt[n]{n}-1<\sqrt{\frac{2}{n}}<\sqrt{\frac{2}{N}}\le\sqrt{\frac{2}{2/\varepsilon^2}}=\varepsilon,$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

上页 下页 返回

注意：在证明例6.求证：(2). $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ 时,

$\forall\varepsilon>0$,为简便地给出N,我们用了放大缩小的技巧,

但要注意放缩分寸的把握.

记 $\sqrt[n]{n}=1+h_n, h_n>0\ (n>1)$,

$$(1+h_n)^n=n=1+nh_n+C_n^2h_n^2+\cdots+h_n^n>1+C_n^2h_n^2,$$

$\therefore 0<\sqrt[n]{n}-1=h_n<\sqrt{\dfrac{2}{n}}$,这个放缩就合适.

而$(1+h_n)^n=n=1+nh_n+C_n^2h_n^2+\cdots+h_n^n>1+nh_n$

就不合用了,你得到的是 $0<\sqrt[n]{n}-1=h_n<\dfrac{n-1}{n}$.

若你作$(1+h_n)^n=n=1+nh_n+C_n^2h_n^2+\cdots+h_n^n>1+C_n^3h_n^3$

(当然此时$n\ge3$)这样 $C_n^3h_n^3<n-1\cdots$也是可以的.

还可以注意到,在证明例6.求证:(2). $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ 时,

我们用了放缩的技巧,可行的不同的放缩只是得到了不同的N而已.

如记 $\sqrt[n]{n}=1+h_n, h_n>0\ (n>1)$,

$(1+h_n)^n=n=1+nh_n+C_n^2h_n^2+\cdots+h_n^n>C_n^2h_n^2$,

$\therefore 0<\sqrt[n]{n}-1=h_n<\sqrt{\dfrac{2}{n-1}}$,这个放缩也是合适的.

要使得$\sqrt{\dfrac{2}{n-1}}<\varepsilon$ 那只要$n>\dfrac{2}{\varepsilon^2}+1$,

故可取$N\geq\dfrac{2}{\varepsilon^2}+1$.

例6.求证：(2). $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$

法二[分析] $1\le\sqrt[n]{n}=\left(1\cdots\cdots1\cdot\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\right)^{\frac{1}{n}}$

（将 $n-2$ 个1连乘）

$$\le\frac{n-2+2\sqrt{n}}{n}<1+\frac{2}{\sqrt{n}},\therefore 0\le\sqrt[n]{n}-1<\frac{2}{\sqrt{n}}\cdots$$

证明 $\forall\varepsilon>0,\exists N\ge\frac{4}{\varepsilon^2},\forall n>N,$ 有

$$0\le\sqrt[n]{n}-1=\left(1\cdots\cdots1\cdot\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\right)^{\frac{1}{n}}-1$$

$$\le\frac{n-2+2\sqrt{n}}{n}-1<\frac{2}{\sqrt{n}}<\frac{2}{\sqrt{N}}\le\frac{2}{\sqrt{4/\varepsilon^2}}=\varepsilon.$$

要注意到,在用极限定义证明时,我们用放缩的技巧,有的放缩奏效有的放缩不奏效,这需要我们探索.如

$$(1).\ 1 \le \sqrt[n]{n} = \left(1\cdot\cdots\cdot1\cdot\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\right)^{\frac{1}{n}} \quad (\text{将}n-2\text{个}1\text{连乘})$$

$$\le \frac{n-2+2\sqrt{n}}{n} < 1+\frac{2}{\sqrt{n}},\ \therefore 0 \le \sqrt[n]{n}-1 < \frac{2}{\sqrt{n}},\text{合用.}$$

$$(2).\ 1 \le \sqrt[n]{n} = \left(1\cdot\cdots\cdot1\cdot n\right)^{\frac{1}{n}} \quad (\text{将}n-1\text{个}1\text{连乘})$$

$$\le \frac{n-1+n}{n} < 2-\frac{1}{n},\ \therefore 0 \le \sqrt[n]{n}-1 < 1-\frac{1}{n},\text{不合用.}$$

$$(3).\ 1 \le \sqrt[n]{n} = \left(1\cdot\cdots\cdot1\cdot\sqrt[3]{n}\cdot\sqrt[3]{n}\cdot\sqrt[3]{n}\right)^{\frac{1}{n}} \quad (\text{将}n-3\text{个}1\text{连乘})$$

$$\le \frac{n-3+3\cdot\sqrt[3]{n}}{n} < 1+\frac{3}{\sqrt[3]{n^2}},\ \therefore 0 \le \sqrt[n]{n}-1 < \frac{3}{\sqrt[3]{n^2}},\text{亦合用.}$$

由前面的讨论我们可以获知一些简单的数列极限的结果,如(1).$\alpha > 0$时, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha}} = 1$,

(2). $|q| < 1$时有 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0\cdots$

但是,人的直觉/感性认识能走多远?我们只有学会理性地思考问题,利用逻辑推理的方法才能确定更为复杂的极限问题,如

(1). $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = ?$ (2). $a > 1, b\in\mathbb{R}, \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^b}{a^n} = ?$

(3). $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^n = ?$

思考练习

1.利用定义证明:

(1). $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n+1}=\dfrac{3}{2}$;　(2). $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$;

(3). $a>1,\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{a^n}=0$.

2.证明: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$.

又问:反之是否成立?

上页　下页　返回

3.给出结论,并说明理由.

(1).$|q|<1, \lim\limits_{n\to\infty} n^2 q^n = ?$

(2).$a>1, k\in\mathbb{Z}^+$为定值,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n} = ?$

上页 下页 返回