§4. 定积分的性质

1.定积分的基本性质

2.积分中值定理

3. 改进版积分中值定理

上页 下页 返回

1.定积分的 性质

我们有对定积分的补充规定:

(1). $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;

(2). $\int_a^a f(x)dx = 0$.

说明:在下面的讨论中,若没有特别的说明,我们默认函数在相应的区间上可积.

又,显然有 $\int_a^b 1dx = b - a$.

积分性质：

$$1.\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx\ .$$

$$2.\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx\ ,k\text{为常数}\ .$$

两者结合起来可写作为：

$$\int_a^b [kf(x)+lg(x)]dx = k\int_a^b f(x)dx + l\int_a^b g(x)dx\ ,$$

其中k,l为常数．

这两条性质称为积分的线性性质．

性质 1. $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

证明 $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[f(\xi_i)+g(\xi_i)]\Delta x_i$

$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i$

$= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

性质 1.可以推广至有限多个函数和的情形 .

同理,可证得性质 2 .

上页 下页 返回

性质3. (1).若$f(x),g(x)$在$[a,b]$上均可积,则$f(x)g(x)$在$[a,b]$上也可积．

(2).若$f(x)$在$[a,b]$上可积,且存在$A>0,\forall x\in[a,b]$,有$|f(x)|\geq A$,则$\dfrac{1}{f(x)}$在$[a,b]$上也可积．

这样不难得到两个函数商的可积条件：若$f(x),g(x)$在$[a,b]$上可积,且存在$A>0,\forall x\in[a,b]$,有$|f(x)|\geq A$,则$\dfrac{g(x)}{f(x)}$在$[a,b]$上也可积.

由积分的定义,性质3 的证明不难得到,在此从略.

需要注意的是,两个可积函数的复合函数未必可积.例如 $x\in[0,1]$, $u=R(x)$为*Riemann* 函数,

$$u=R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}\ , & x=\dfrac{p}{q},p,q\in\mathbb{N}^*,p,q\text{互素}\\ 0, & x=0,1\text{ 以及}(0,1)\text{内的无理数}\end{cases}$$

$(Vol.1,P196,\text{例}3)$,及$f(u)=\begin{cases}1\ ,0<u\le 1\\ 0\ ,\ \ u=0\end{cases}$在$[0,1]$上可积 . $f[R(x)]=\begin{cases}1\ ,\ x\in(0,1)\cap\mathbb{Q}\\ 0\ ,\ x\in\{0,1\}\cup((0,1)\cap\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\end{cases}$

与*Dirichlet* 函数$D(x)=\begin{cases}1\ ,\ x\in\mathbb{Q}\\ 0\ ,\ x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$一样,在$[0,1]$上不可积$(Vol.1,P193,\text{例}1)$.

上页 下页 返回

性质 4. 函数$f(x)$在区间$[a,b]$上可积$\Leftrightarrow$

$\forall c: a \le c \le b$, $f(x)$在$[a,c]$,$[c,b]$上均可积,

且有$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

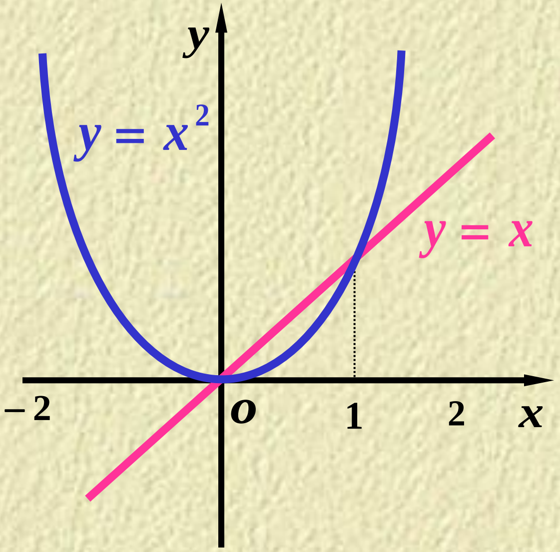
由积分中的约定可知,不论数a,b,c的大小,上式皆成立.

我们常称此性质为积分的区间可加性 .

根据积分的几何意义与物理意义:面积 ,路程 ,变力作功——来理解,性质4 结论是显然的 .

例 1.计算积分$I=\int_{-2}^{2}\max\left\{x,x^2\right\}dx$.

解 由函数图形可知



$$f(x)=\max\left\{x,x^2\right\}$$

$$=\begin{cases} x^2, & -2\le x\le 0 \\ x, & 0\le x\le 1 \\ x^2, & 1\le x\le 2 \end{cases},$$

$$\therefore I=\int_{-2}^{0}x^2dx+\int_{0}^{1}xdx+\int_{1}^{2}x^2dx=\frac{11}{2}.$$

性质5. 若在区间$[a,b]$上函数$f(x)$可积且

$f(x)\geq 0$,则$\int_a^b f(x)dx\geq 0$.(注意条件 $a\leq b$)

证明 设$T=\{\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_n\}$为区间$[a,b]$

的一个划分,$\|T\|=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$,

$\because f(x)\geq 0,\therefore f(\xi_i)\geq 0,\xi_i\in\Delta_i,(i=1,2,\cdots,n)$

$\because \Delta x_i\geq 0,\ \therefore \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\geq 0,$

$\therefore \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)dx\geq 0.$

性质5常称为积分的保号性 .

性质5推论1: 保向(保序)不等式

若在$[a,b]$上$f(x), g(x)$可积且$f(x) \le g(x)$,

则$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.(注意 $a \le b$).

证明$\because$ $f(x) \le g(x)$, $\therefore$ $g(x) - f(x) \ge 0$,

$$\therefore \int_a^b [g(x) - f(x)]dx \ge 0,$$

$$\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \ge 0,$$

$$\therefore \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx .$$

上页 下页 返回

性质5推论2：绝对不等式

函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上可积,则$|f(x)|$在$[a,b]$上亦可积,且有$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$.

证明 由于$f(x)$在$[a,b]$上可积,所以$\forall \varepsilon > 0$,

存在$[a,b]$的某个划分T,使得$\sum_T \omega_i^f \Delta x_i < \varepsilon$.

由绝对不等式 $\big||a|-|b|\big| \le |a-b|$,

$$\Rightarrow \omega_i^{|f|} \le \omega_i^f \Rightarrow \sum_T \omega_i^{|f|} \Delta x_i \le \sum_T \omega_i^f \Delta x_i < \varepsilon,$$

$\therefore |f|$在$[a,b]$上可积.

上页 下页 返回

性质5推论2：绝对不等式

函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上可积，则$|f(x)|$在$[a,b]$上亦可积，且有$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$.

证明 $\because$ 在$[a,b]$上有$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$,

$\therefore -\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx$,

于是 $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$.

Q：上述不等式中何时“$=$”成立？

绝对不等式：

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

Q：上述不等式中何时“$=$”成立？

A：若在区间$[a,b]$上$f(x)\ge 0$或$f(x)\le 0$，

则不等式中“$=$”成立.

$\longrightarrow$由曲线$y=f(x)$与直线$x=a, x=b$

$(a<b)$以及x轴围成的图形的面积为

$$A=\int_a^b |f(x)|dx.$$

性质5推论2:(绝对不等式)

函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上可积,则$|f(x)|$在

$[a,b]$上亦可积,且有$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$.

注意,该命题的逆命题不成立 .

例如,由于$f(x)=\begin{cases} 1, & x\in\mathbb{Q} \\ -1, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$

在$[0,1]$上不可积(类似于*Dirichlet* 函数).

但$|f(x)|=1$,所以$|f(x)|$在$[0,1]$上可积.

性质6.(估值不等式)

若在$[a,b]$上$f(x)$可积,且有常数m,M,

使得 $m \le f(x) \le M, x \in [a,b]$.则

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \;.$$

性质6的证明是容易的 .

根据积分的几何意义来理解性质4,5,6, 结论是显然而又易于理解的 .

在性质5,6这些不等式性质中,须注意 $a \le b$.

上页 下页 返回

例 1.估计积分$\int_0^{\pi}\frac{1}{2+\cos 2x}dx$值的范围.

解 $x\in[0,\pi]$时有 $\frac{1}{3}\le\frac{1}{2+\cos 2x}\le 1$,

于是,$\frac{\pi}{3}=\int_0^{\pi}\frac{1}{3}dx\le\int_0^{\pi}\frac{1}{2+\cos 2x}dx\le\int_0^{\pi}1dx=\pi$.

由此可知 $\int_0^{\pi}\frac{1}{2+\cos 2x}dx=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{3}}\Big|_0^{\pi}=0$

大谬矣!

上页 下页 返回

例1.(2).估计积分$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{x}dx$的范围.

解 $\varphi(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x},x\neq 0\\ 1,\quad x=0\end{cases}$在$[0,\pi/2]$上连续.

$\because\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin 0}{x-0}=1$,曲线$y=\sin x$在点

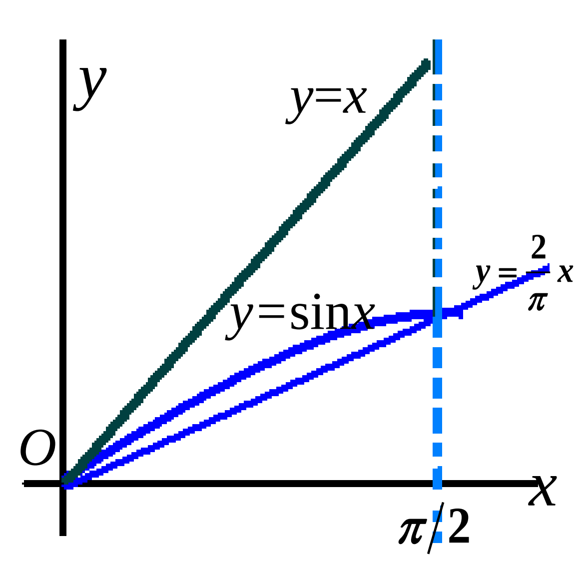
$O(0,0)$处切线斜率$=1$,$\therefore$ 切线方程为 $y=x$.

由此,借助于数形结合,有*Jordan*不等式:

$$0\le x\le\frac{\pi}{2}\text{时有}\ \frac{2}{\pi}x\le\sin x\le x.$$

$$\therefore x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\text{时},\frac{2}{\pi}\le\varphi(x)\le 1.$$

$$\therefore 1\le\int_0^{\pi/2}\varphi(x)dx=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{x}dx\le\frac{\pi}{2}.$$



例1.(2).估计积分$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{x}dx$的范围.

法二　$\because x=0$是函数$\frac{\sin x}{x}$的可去间断点,

$$\therefore \varphi(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, x\neq 0\\ 1,\quad x=0\end{cases}$$ 在$[0,\pi/2]$上连续.

$\because x\in(0,\pi/2)$时 $0<\sin x<x<\tan x$,

$$\varphi'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{\cos x(x-\tan x)}{x^2}<0,$$

$\therefore \varphi(x)$在$[0,\pi/2]$上严格单调递减.

$x\in[0,\pi/2]$时$\frac{2}{\pi}\leq\varphi(x)\leq 1$.

$$\therefore 1\leq\int_0^{\pi/2}\varphi(x)dx=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{x}dx\leq\frac{\pi}{2}.$$

2. 积分中值定理

$Th.9.7$（积分第一中值定理）

若函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续,则必存在$\xi\in[a,b]$,

使得 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$.

证明 $a=b$时结论显然成立.下设$a<b$.

由闭区间上连续函数性质知$f(x)$在$[a,b]$上必定取

得最小值m,最大值M,使得 $x\in[a,b]$,$m\le f(x)\le M$.

$\because\ m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$,

$\therefore\ m\le\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\le M$.

由闭区间上连续函数的介值定理知$\exists\xi\in[a,b]$,使得

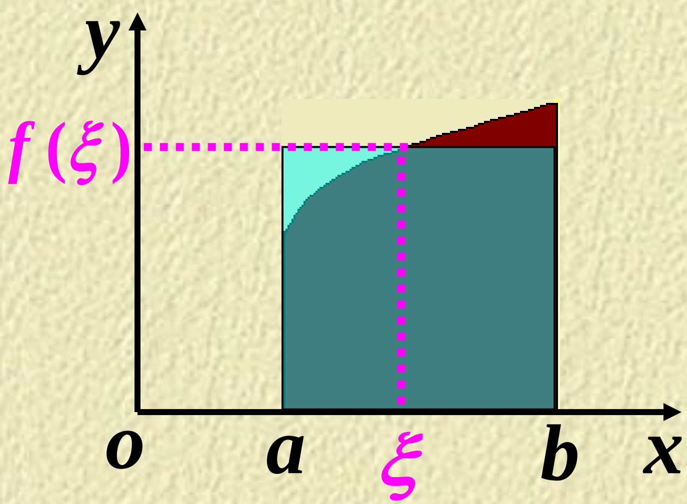
$\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(\xi)$,即$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$, $x\in[a,b]$.

$Th.9.7$ (积分第一中值定理)

若函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续,则必存在$\xi \in [a,b]$,

使得 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$.

积分中值公式的几何解释: 设在$[a,b]$上$f(x)$连续,且



$f(x) \geq 0$,则至少存在一点$\xi \in [a,b]$,使得以$[a,b]$为底边,以$y = f(x)$为曲边的曲边梯形的面积等于同一底边而高为$f(\xi)$的矩形的面积.

上页 下页 返回

$Th.9.7$ （积分第一中值定理）

若函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续,则必存在$\xi\in[a,b]$,

使得 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$.

积分中值公式的物理解释：质点以速率$f(x)$作直线

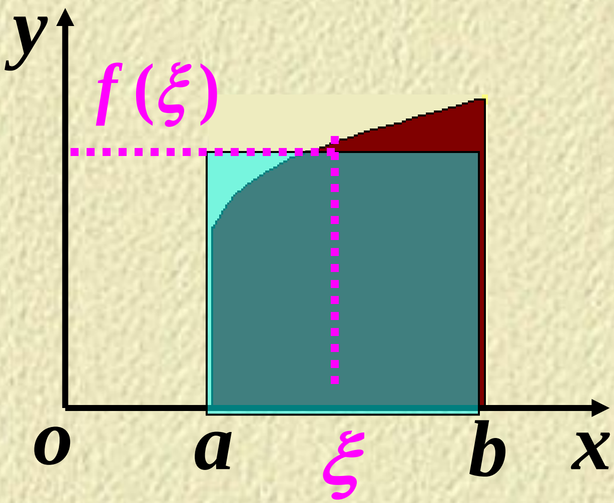
运动,从时刻a至时刻b,其

所走过的路程 $\int_a^b f(x)dx$

恰等于在时间段$[a,b]$内质

点以速率$f(\xi)$作匀速直线

运动所走过的路程.



上页 下页 返回

*Add.*闭区间上连续函数平均值的计算:

定积分可以用来计算连续函数在闭区间$[a,b]$上的平均值.

设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续,则函数$f(x)$在$[a,b]$上的(算术)平均值为

$$\overline{f(x)}_{[a,b]}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

连续函数在闭区间上的(算术)平均值.

设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续,则函数$f(x)$在$[a,b]$上的(算术)平均值为

$$\overline{\underset{[a,b]}{f(x)}}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

积分第一中值定理.

设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续,则$\exists\xi\in[a,b]$,使得 $\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$.

上页 下页 返回

设想将$[a,b]$ n等份成$[x_0,x_1]$,$[x_1,x_2]$,$\cdots$,

$[x_{n-1},x_n]$, $x_0=a, x_n=b.$

则n个分点的算术平均值为

$$\frac{1}{n}\left[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\right]=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k),$$

$$\text{则}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\cdot\frac{b-a}{n}$$

$=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$，就是连续函数 $f(x)$

在$[a,b]$上的(算术)平均值,为记$\overline{\underset{[a,b]}{f(x)}}$.

上页 下页 返回

Th.9.8 (拓广的积分第一中值定理)

若函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续,$g(x)$在$[a,b]$上不变号且可积 ,则必存在$\xi\in[a,b]$,使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx \ .$$

显然,当$g(x)\equiv 1$ 时该定理即为*Th*.9.7 .

证明 不妨设$g(x)\geq 0 \ \ x\in[a,b]$,这时有

$$mg(x)\leq f(x)g(x)\leq Mg(x) \ ,x\in[a,b]$$

$$M=\max_{[a,b]} f(x) \ , \ m=\min_{[a,b]} f(x).$$

由积分性质5之推论1——保向不等式知

$$m\int_a^b g(x)dx\leq\int_a^b f(x)g(x)dx\leq M\int_a^b g(x)dx \ .$$

证明 不妨设$g(x)\geq 0\ \ x\in[a,b]$,这时有

$$mg(x)\leq f(x)g(x)\leq Mg(x)\ ,x\in[a,b]$$

$$M=\max_{[a,b]} f(x)\ ,\ m=\min_{[a,b]} f(x).$$

由积分性质5之推论1——保向不等式知

$$m\int_a^b g(x)dx\leq\int_a^b f(x)g(x)dx\leq M\int_a^b g(x)dx\ ,$$

(1).若$\int_a^b g(x)dx=0\Rightarrow\int_a^b f(x)g(x)dx=0$,结论成立.

(2). 若$\int_a^b g(x)dx>0\Rightarrow m\leq\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}\leq M$,

由闭区间上连续函数的介值定理知$\exists\xi\in[a,b]$,使得

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}=f(\xi),$$于是，结论成立 .

例2.设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可微,且满足$f(1)=2\int_0^{1/2} f(x)dx$.

证明:存在$\xi\in(0,1)$,使得$f'(\xi)=0$.

分析:结论有典型的使用*Rolle th.*的味道!要使用*Rolle th.*,关键是条件3.

据题,$f(1)=2\int_0^{1/2} f(x)dx \Rightarrow \exists c\in[0,1/2]$,

$f(1)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot f(c) \Rightarrow f(1)=f(c)$.事备矣!

上页 下页 返回

例2.设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可微,且满足$f(1)=2\int_0^{1/2} f(x)dx$.

证明:存在$\xi\in(0,1)$,使得$f'(\xi)=0$.

证明　据题,$f(1)=2\int_0^{1/2} f(x)dx \Rightarrow$

$\exists c\in[0,1/2]$, $f(1)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot f(c)=f(c)$,

$\therefore$ 在$[c,1]$上函数$f(x)$满足*Rolle th.*的条件,

$\therefore \exists\xi\in(c,1)\subset(0,1)$,使得$f'(\xi)=0$.

3. 改进版积分中值定理

Th.9.7′ (改进版积分第一中值定理)

若函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续,则必存在$\xi \in (a,b)$,使得

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

证明 由定理9.1 ($Newton-Leibniz$公式)知,若$F(x)$是$f(x)$在区间$[a,b]$上的一个原函数,则在$[a,b]$上$F(x)$可导,且$F'(x)=f(x)$.

则据$Lagrange$ 微分中值定理有

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) = F'(\xi)(b-a)$$

$$= f(\xi)(b-a), \xi \in (a,b) .$$

$Th.9.7'$ (改进版积分第一中值定理)

若函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续,则必存在

$\xi \in (a,b)$,使得

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

由$Th.9.7'$的证明过程可知,明明$Th.9.7$ 用的是闭区间上连续函数的介值定理 ,但人们没有称$Th.9.7$ 为积分介值定理,而称其为积分中值定理 ,这就是原因 .

由此亦可见,在$Newton-Leibniz$公式的基础上,积分中值定理与微分中值定理是一回事 .

$Th.9.8'$ (改进版拓广的积分第一中值定理)

若函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续,$g(x)$在$[a,b]$上不变号且可积 ,则必存在$\xi \in (a,b)$,使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx \ .$$

上页 下页 返回

例3. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$.

试问:如下做法是否正确?

解 由改进版拓广的积分第一中值定理知,

当 $x\in[0,1]$ 时 x^n 连续, $\frac{1}{1+x}$ 可积且不变号,

$$\therefore \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = \xi^n \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = \xi^n \ln 2,$$

$\xi\in(0,1)$,由 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi^n = 0$ 得 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = 0$.

例3. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx$.

解 由改进版拓广的积分第一中值定理知，

当$x\in[0,1]$时x^n 连续，$\frac{1}{1+x}$ 可积且不变号，

$$\therefore\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx=\xi^n\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\xi^n\ln 2,$$

$\xi\in(0,1)$,由$\lim\limits_{n\to\infty}\xi^n=0$ 得 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx=0$.

上述解法错误 .

因为，虽说$\xi\in(0,1)$没错,但是$\xi=\xi_n$,若$\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=1$，

那么$\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n^n=1$ 就未必成立了.

例3. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$.

正解 当 $x\in[0,1]$ 时, $\frac{1}{2}x^n \le \frac{x^n}{1+x} \le x^n$,

$$\therefore \frac{1}{2(1+n)} = \int_0^1 \frac{1}{2}x^n dx \le \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$$

$$\le \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{1+n},$$

由夹逼性可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = 0.$

例3. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$.

正解二 由拓广的积分第一中值定理知，

当 $x\in[0,1]$ 时 $\frac{1}{1+x}$ 连续，x^n 可积且不变号，

$$\therefore \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = \frac{1}{1+\xi}\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{1+\xi}\cdot\frac{1}{1+n},$$

$\xi\in[0,1]$,由此可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = 0$.

小 结

1. 积分的性质1,性质2—线性性质，性质4—积分的区间可加性，主要用于积分的计算．

2. 积分的性质5—保号性,性质5的两个推论,性质6—估值不等式，以及积分中值定理，主要用于积分相关的理论推导．

练习题

1. 不经计算 ,比较积分的大小.

(1). $\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx$, $\int_0^1 \sqrt{x^3+1}\,dx$;

(2). $\int_0^1 e^{x^2} dx$, $\int_0^1 \left(x^2+1\right) dx$.

2. 估计积分的取值范围(不求最好, 但求更好).

(1). $\int_0^1 \sqrt{x^4+1}\,dx$;

(2). $\int_{5\pi/4}^0 \frac{1}{2+\cos 2x} dx$.

上页 下页 返回

3. 求极限.

(1). $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}\right)$;

(2). $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\pi/4}\sin^n x dx$.

4. 计算.

(1). $\int_{1/e}^{e}\left|\ln x\right|dx$;

(2). 若$f(x)=\sin x+\int_0^{\pi} f(x)dx$,求$\int_0^{\pi} f(x)dx$.

上页 下页 返回

5. 设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续,求证:

(1).若在$[a,b]$上$f(x)\ge 0$,且$\int_a^b f(x)dx=0$,

则在$[a,b]$上$f(x)\equiv 0$.

(2).若在$[a,b]$上$f(x)\ge 0$,且$f(x)$不恒等于0 ,

则 $\int_a^b f(x)dx>0$.

6. 设函数$f(x),g(x)$在区间$[a,b]$上连续,求证:

(1).若在$[a,b]$上$f(x)\ge g(x)$,且$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$,

则在$[a,b]$上$f(x)\equiv g(x)$.

(2).若在$[a,b]$上$f(x)\ge g(x)$,且$f(x)$不恒等于$g(x)$,

则$\int_a^b f(x)dx>\int_a^b g(x)dx$.

7.证明(1).$\int_0^{2\pi} e^{\sin^2 x}dx \geq 3\pi$.

(2).$\int_0^{2\pi} |a\cos x + b\sin x|dx \leq 2\pi\sqrt{a^2+b^2}$.

8^*.(1). $f(x)$是区间$[a,b]$上的可积凸函数,

求证:$\int_a^b f(x)dx \geq (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

8^*.(2).若$f(x)$是$[a,b]$上连续的凸函数,

试证明上述结论.

8^*.(3).若$f(x)$是$[a,b]$上可导的凸函数,

试证明上述结论.

8^*.(4).若$f(x)$是$[a,b]$上二阶可导的凸函数,

试证明上述结论.$(Vol.1, P205, Ex.11)$

$$2.(1).\int_0^1 \sqrt{x^4+1}dx\ .$$

$$x \in [0,1], 1 \le \sqrt{x^4+1} \le \sqrt{2},$$

$$\Rightarrow 1 \le \int_0^1 \sqrt{x^4+1}dx \le \sqrt{2}\ .$$

$$or:$$

$$1 \le \sqrt{x^4+1} \le \sqrt{x^4+2x^2+1} = x^2+1,$$

$$\therefore 1 \le \int_0^1 \sqrt{x^4+1}dx \le \int_0^1 \left(x^2+1\right)dx = \frac{4}{3}.$$

上页 下页 返回

$$7.(2).\int_0^{2\pi}\left|a\cos x+b\sin x\right|dx\le 2\pi\sqrt{a^2+b^2}.$$

$$Hint:\sqrt{a^2+b^2}\triangleq r,$$

$$a\cos x+b\sin x=r\left(\frac{a}{r}\cos x+\frac{b}{r}\sin x\right)$$

$$=r\cos\left(x+\varphi_0\right)$$

8*.(1). $f(x)$是区间$[a,b]$上的可积凸函数,

求证: $\int_a^b f(x)dx \ge (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

分析 由$f(x)$是凸函数及结论中的

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right), \because \frac{1}{2}[f(a)+f(b)] \ge f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

$\therefore$ 我们可以想像,把区间$[a,b]$进行偶等分,

$$f(a+\tau)+f(b-\tau) \ge 2f\left(\frac{a+b}{2}\right), \exists \tau > 0,$$

$$f(a+2\tau)+f(b-2\tau) \ge 2f\left(\frac{a+b}{2}\right), \cdots$$

其做法呼之欲出矣!

上页 下页 返回

证明 $\because f(x)$是区间$[a,b]$上的可积函数,

$\therefore$ 我们可将区间$[a,b]$进行任意的分割,

现对$[a,b]$作$2n$ 等分,记$\tau=\dfrac{b-a}{2n}$,

$x_i=a+i\tau, i=0,1,2,\cdots,2n.$

在取*Riemann* 积分和中的ξ_i 时,

我们取$\xi_i=\begin{cases} x_{i-1} & ,i=1,2,\cdots,n, \\ x_i, & i=n+1,\cdots,2n, \end{cases}$

则$\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{2n} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b-a}{2n}\sum\limits_{i=1}^{2n} f\left(\xi_i\right)$,

上页 下页 返回

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{2n}\sum_{i=1}^{2n}f\left(\xi_i\right),$$

$$\sum_{i=1}^{2n}f\left(\xi_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\left[f\left(x_{i-1}\right)+f\left(x_{2n-i+1}\right)\right],$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\left[f\left(a+k\tau\right)+f\left(b-k\tau\right)\right]$$

$\because$ $f(x)$是区间$[a,b]$上的凸函数,

$$\therefore f\left(a+k\tau\right)+f\left(b-k\tau\right)\geq 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{b-a}{2n}\sum_{i=1}^{2n}f\left(\xi_i\right)\geq(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{2n}f\left(\xi_i\right)\cdot\frac{b-a}{2n}\geq(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

8^*.(2).若$f(x)$是$[a,b]$上连续的凸函数,

求证:$\int_a^b f(x)dx \ge (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

证明$\because$函数$f(x)$是$[a,b]$上的连续的凸函数,

$$\therefore \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{f(x)+f(a+b-x)}{2}dx$$

$$\ge \int_a^b f\left(\frac{x+a+b-x}{2}\right)dx = \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right)dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

这里我们用到了定积分换元法中的“调头变换”

(或曰“区间再现变换”).

上页 下页 返回

8^*.(3).若$f(x)$是$[a,b]$上可导的凸函数,

求证：$\int_a^b f(x)dx \geq (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

证明$\because$ $f(x)$是$[a,b]$上可导的凸函数,

$\therefore x \in [a,b]$时有$f(x) \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)$,

$$\therefore \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b \left[f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\right]dx$$

$$= (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)dx$$

$$= (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + 0 = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

8*.(3).若$f(x)$是$[a,b]$上可导的凸函数,

求证:$\int_a^b f(x)dx \ge (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

证二 设$\varphi(u)=\int_a^u f(x)dx-(u-a)f\left(\frac{a+u}{2}\right)$,

$u\in[a,b]$时$\varphi(u)$是可导的函数,$\varphi(a)=0$,

欲证 $b\ge a,\varphi(b)\ge 0=\varphi(a)$,

$$\varphi'(u)=f(u)-f\left(\frac{a+u}{2}\right)-\frac{u-a}{2}f'\left(\frac{a+u}{2}\right)$$

$$=\frac{u-a}{2}f'(\xi)-\frac{u-a}{2}f'\left(\frac{a+u}{2}\right),$$

$$=\frac{u-a}{2}\left[f'(\xi)-f'\left(\frac{a+u}{2}\right)\right],\xi\in\left(\frac{a+u}{2},u\right)\cdots$$

8^*.(4).若$f(x)$是$[a,b]$上二阶可导的凸函数,

求证:$\int_a^b f(x)dx \geq (b-a) f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$.(Vol.1, P205, Ex.11)

证明 $\because f(x)$是$[a,b]$上二阶可导函数,

$\forall x \in [a,b], f(x) =$

$$= f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{f''(\xi)}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2,$$

$\because f(x)$是$[a,b]$上二阶可导的凸函数,故$f''(x) \geq 0$,

$$\therefore f(x) \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) \cdots$$

8^*.(4).若$f(x)$是$[a,b]$上二阶可导的凸函数,

求证：$\int_a^b f(x)dx \ge (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.$(Vol.1, P205, Ex.11)$

证二　设$\varphi(u)=\int_a^u f(x)dx-(u-a)f\left(\frac{a+u}{2}\right)$,

$u\in[a,b]$时$\varphi(u)$是可导的函数,$\varphi(a)=0$,

$$\varphi'(u)= f(u)-f\left(\frac{a+u}{2}\right)-\frac{u-a}{2}f'\left(\frac{a+u}{2}\right)$$

$$=\frac{u-a}{2}f'(\xi)-\frac{u-a}{2}f'\left(\frac{a+u}{2}\right),$$

$$=\frac{u-a}{2}\left[f'(\xi)-f'\left(\frac{a+u}{2}\right)\right]=\frac{u-a}{2}\cdot f''(\eta)\left(\xi-\frac{a+u}{2}\right)$$

$\xi\in\left(\frac{a+u}{2},u\right),\eta\in\left(\frac{a+u}{2},\xi\right)\cdots$