§3. 函数的可积性问题(I)

牛顿—莱布尼茨公式的证明过程显示了：闭区间上的连续函数是*Riemann*可积的。

那么，一般而言，闭区间上的函数需满足怎样的条件，使其是*Riemann*可积的呢？

函数的可积性问题是一个复杂的问题。

1、可积的必要条件

定理9.2 函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，则 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界。

证明 用反证法。若 f 在 $[a,b]$ 上无界，则对于 $[a,b]$ 上的任意一个分割 T，必定存在属于 T 的某个小区间 Δ_k， f 在 Δ_k 上无界。在 $i\neq k$ 的各个小区间 Δ_i 上任意取 ξ_i，并记

$$G=\left|\sum_{i\neq k} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i\right|$$

现在对于任意大的正数M，由于 f 在 Δ_k 上无界，故存在 $\xi_k\in\Delta_k$，使得

上页 下页 返回

$$G=\left|\sum_{i\neq k} f(\xi_i)\Delta x_i\right|, \left|f(\xi_k)\right|>\frac{G+M}{\Delta x_k},$$

于是有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right| \geq \left|f(\xi_k)\Delta x_k\right|-\left|\sum_{i\neq k} f(\xi_i)\Delta x_i\right|$$

$$>\frac{G+M}{\Delta x_k}\Delta x_k-G=M$$

由此可见，对于无论多么小的 $\|T\|$,按上述方法选取点集 $\{\xi_i\}$时，总能使得积分和的绝对值大于任意给定的M>0,而这与 f 在[a,b] 上可积矛盾。

定理9.2 函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上可积，则 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上有界。

证明2 我们也可从正面来证明：可积 $\Longrightarrow$ 有界。

因为 f 在$[a,b]$ 上可积，记f 在$[a,b]$ 上的积分为I ，

则对于$\varepsilon=1$, 必定存在$[a,b]$ 的一个分割T，使得

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| < \varepsilon = 1$$

$$\therefore \left|f(\xi_1)\right| < \frac{1}{\Delta x_k}\left\{[I]+1+\left|\sum_{i=2}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right|\right\}$$

此时，把在$[x_{i-1}, x_i]$中的ξ_i固定下来,$i=2,3,\cdots,n$,

所以上式右边是一个确定的正数，而ξ_1是在

$[x_0, x_1]$上任意活动的.

这样，我们可以证明 f 在$\Delta_1=[x_0, x_1]$上是有界的，同样，可以证明 f 在$\Delta_i=[x_{i-1}, x_i]$上都是有界的，所以 f 在$[a,b]$上是有界的。

在$[a,b]$ 上f 有界是可积的必要条件,即有界未必可积。

比如，因为函数$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$在$[0,1]$上无界，所以

符号$\int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$表示的不是一个定积分。

例 1　在[0,1] 上 *Dirichlet* 函数 有界但不可积。

$$D(x)=\begin{cases}1\ , & x\in Q\\ 0, & x\in R\setminus Q\end{cases}$$

显然$\left|D(x)\right|\le 1, x\in[0,1]$。

对于$[0,1]$的任一分割T，由有理数与无理数在实数中的稠密性，在分割T的任一Δ_i上，当ξ_i都取有理数时，$\sum_{i=1}^{n}D(\xi_i)\Delta x_i=1$，而当$\xi_i$都取无理数时，

$\sum_{i=1}^{n}D(\xi_i)\Delta x_i=0$。所以无论$\|T\|$多么小，只要$\{\xi_i\}$取法不同，积分和就有不同的极限，说明$D(x)$在$[0,1]$上不可积。

上页 下页 返回

2、可积的充要条件

设$T=\{\Delta_i, i=1,2,\cdots,n\}$为对$[a,b]$的任意一个分割，由

f 在$[a,b]$上有界，则 f 在每个Δ_i上有上、下确界：

$$M_i=\sup_{\Delta_i} f(x),\quad m_i=\inf_{\Delta_i} f(x)$$

于是我们分别称$S(T)=\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$, $s(T)=\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$

为f关于分割T的达布(*Darboux*)上和与达布下和，

任取$\xi_i\in\Delta_i$，显然有$s(T)\le\sum_{T} f(\xi_i)\Delta x_i\le S(T)$

与积分和相比，达布和只与分割T有关，而与$\{\xi_i\}$无关。

上页 下页 返回

定理 9.3 函数f在$[a,b]$上可积的充要条件是：$\forall \varepsilon > 0, \exists [a,b]$的分割$T = \{\Delta_i\}$，使得$S(T) - s(T) < \varepsilon$.

记$\omega_i = M_i - m_i$，称为是函数f在Δ_i上的**振幅**，

$$\therefore S(T) - s(T) = \sum_T \omega_i \Delta x_i$$

定理 9.3′ 函数f在$[a,b]$上可积的充要条件是：$\forall \varepsilon > 0, \exists [a,b]$的分割$T = \{\Delta_i\}$，

使得 $\sum_T \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$.

返回

3.可积的充分条件

在前面定理 9.1 证明的中我们已经看到了：函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续，则 $f(x)$在区间$[a,b]$ 上可积。

定理 9.4　函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续，则 $f(x)$在区间$[a,b]$上可积。

定理 9.5　设函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上有界，且只有有限多个间断点，则 $f(x)$在区间$[a,b]$上可积。

定理 9.6 如果函数 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的单调函数，则函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积。

证明

不失一般性，设 f 为增函数，且 $f(b) > f(a)$，

否则, 如果 $f(b) = f(a)$，则 f 在 $[a,b]$ 上为常数，当然是可积的。

对$[a,b]$的任一分割T，f在T所属的每个小区间$\Delta_i=[x_{i-1},x_i]$上的振幅为$\omega_i=f(x_i)-f(x_{i-1})$.

于是有 $\sum\limits_T \omega_i \Delta x_i \le \sum\limits_1^n \left[f(x_i)-f(x_{i-1})\right]\|T\|$

$$=\left[f(b)-f(a)\right]\|T\|,$$

由此可见，$\forall \varepsilon>0$, 只要$\|T\|<\dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$,

就有$\sum\limits_T \omega_i \Delta x_i<\varepsilon$，所以$f$在$[a,b]$上可积。

上页 下页 返回

注1　单调函数如果有间断点，则其间断点必定为第一类间断点。

注2　单调函数可以有至多可列多个间断点，但其仍然是*Riemann*可积的。

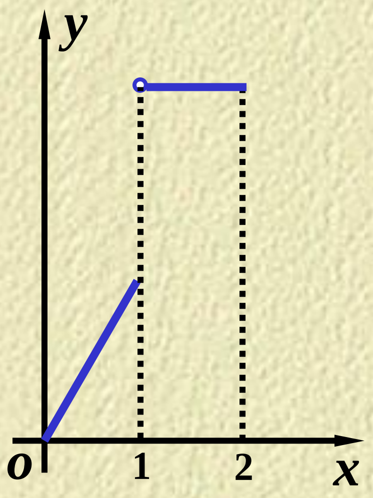
上页　下页　返回

例2　设 $f(x)=\begin{cases}2x & 0\le x\le 1\\ 5 & 1<x\le 2\end{cases}$，求 $\int_0^2 f(x)dx$.

解　根据定理可知，该函数的定积分是存在的。并且可以利用积分的区间可加性得到：

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx$$

在[1,2]上规定当 $x=1$ 时，$f(x)=5$,



$$原式=\int_0^1 2xdx+\int_1^2 5dx=6$$

上页　下页　返回