2021-11 数学分析 I 阶段练习(一)　2021-11

班级____________学号____________姓名_______________

1. 用“$\varepsilon - N$”定义证明（两选一）：(1). $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-\sin n}{n^3+6}=0.$　　(2). $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+(-1)^n}{n^2-n}=1.$

2. 若 $x\to 0$ 时, $e^{x\cos(x^2)}-e^x$ 与 ax^n 为等价无穷小量，问 $n=?$

3. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[4]{1+x}-\sqrt[4]{1-x}}$.

4. 求极限 (1). $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3^n+4^n}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$;(2). $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3^{\frac{1}{n}}+4^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n$; (3). $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+5}{3n-2}\right)^n$. (4). $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-5}{n^2+5}\right)^n$.

5. 设 $a_n\le a\le b_n\ (n=1,2,\cdots)$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$. 求证：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a$.

6. 叙述关于数列极限的 Cauchy 收敛准则.试依此证明数列 $a_n=1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}$ 收敛.

7. 如果我们已经证明，$\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ 为递增数列，$\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ 为递减数列且均有界，因而它们都收敛.

(I).记 $A=\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}, n\in\mathbb{N}^*\right\}$, 问 $\sup A=?$ $\inf A=?$

(II).证明：(1). $n\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$;　　(2). $\left\{1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n\right\}$ 收敛；

(3). $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right)=\ln 2$;　　(4). $\left\{\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)\right\}$ 收敛.