2021~2022 学年第 1 学期 2021 级数学分析 I-*A* 卷解答与评分标准　2021-12

一. 填空题或选择题:（每空 3 分，计 30 分）

1. $\arcsin(\cos 0)=$ ______ (用实数表示结果).

2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x}\right)=$ ______.

3. 函数$f(x)$连续且有$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)}{x^2-4}=1$, 则函数在点$x=2$ 处的导数为$f'(2)=$ ______ .

4. 若$(1,2)$是曲线$y=ax^2+bx^3$ 的拐点，则函数$y=ax^2+bx^3$在$x=$ ______处取得极大值 .

5. 若e^{-x} 是$f(x)$的一个原函数, 则 $\int f'(x)dx=$ ______ .

6. $x\to+\infty$时函数形式的迫敛性定理:______

7. 确界原理:______ .

8. 若点 x_0 是函数 $f(x)$ 的间断点,那么点 x_0 必定也是函数______的间断点 .

　$(A).(f(x))^3$;　$(B).(f(x))^2$;　$(C).|f(x)|$;　$(D).\sin f(x)$.

9. 函数 $f(x)=|x|$ 在$x=0$处______ .

　(A).不连续 ;　　(B).连续但不可导 ;

　(C).可导但导函数不连续 ;　　(D).可导且导函数连续 .

10. 下列论断中正确的是______.

(A). 如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左右导数都存在，则函数 $f(x)$ 在 x_0 点处可导 .

(B). 由于$x\to0$时$\sin x\sim x$,所以$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{0}{x^3}=0$.

(C). $(-\infty,+\infty)$上可导的周期函数的导函数仍是周期函数 .

(D). 对于著名的*Heaviside* 函数$H(x)=\begin{cases}0\ ,x\le0\\1\ ,x>0\end{cases}$,存在函数$G(x)$,使得$G'(x)=H(x)$.

1. $\dfrac{\pi}{2}$;　2. -2 ;　3. 4 ;　4. 2 ;　5. $-e^{-x}+C$;

6. $x\to+\infty$时函数形式的迫敛性定理: 若函数$f(x),g(x)$及$h(x)$满足条件:(1). $g(x)\le f(x)\le h(x)$, $x\in U(+\infty)$; (2). $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=A$, 则函数$f(x)$极限存在,且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

7. 确界原理: 非空有上(下)界的集合必有上(下)确界.

8. A ;　9. B ;　10. C ;

二. 解答题 I . (每题 7 分，计 28 分)

11. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{3n+1}\right)^n$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{3n+1}\right)^n$: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+3}{3n+1}=\dfrac{2}{3}$,且 $\dfrac{2n+3}{3n+1}>\dfrac{2}{3}$.可以发现,$n>9$ 时有 $\dfrac{2n+3}{3n+1}<\dfrac{3}{4}$,

$\therefore n>9$ 时有 $\dfrac{2}{3}<\dfrac{2n+3}{3n+1}<\dfrac{3}{4}$.

$\therefore n>9$ 时有 $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n<\left(\dfrac{2n+3}{3n+1}\right)^n<\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$,$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n=0$,由*Squeeze th.*,原式 $=0.\cdots$7分

或者,$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{3n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\left(\dfrac{1+\dfrac{3}{2n}}{1+\dfrac{1}{3n}}\right)^n\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\dfrac{\left(1+\dfrac{3}{2n}\right)^{\frac{2n}{3}\cdot\frac{3}{2}}}{\left(1+\dfrac{1}{3n}\right)^{3n\cdot\frac{1}{3}}}\right]=0\cdot\dfrac{e^{\frac{3}{2}}}{e^{\frac{1}{3}}}=0.$

法三 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\dfrac{2n+3}{3n+1}\right)=\ln\dfrac{2}{3}<0,\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\left(\dfrac{2n+3}{3n+1}\right)=-\infty,\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{3n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}e^{n\ln\left(\frac{2n+3}{3n+1}\right)}=0.$

12. 设 $a>0,b>0$.试证明椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上点 (x_0,y_0) 处的切线方程为 $\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$.

解 (1).若 $y_0=0$,显然,则顶点 $(-a,0),(a,0)$ 处的切线方程分别为 $x=-a,x=a$.

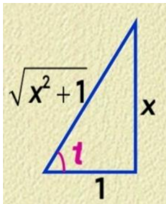
(2).若 $y_0\neq0$ ，则由 $\dfrac{2x}{a^2}+\dfrac{2yy'}{b^2}=0\Rightarrow y'|_{(x_0,y_0)}=-\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{x_0}{y_0}$,切线方程为 $y-y_0=-\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{x_0}{y_0}(x-x_0)$,

整理即为 $\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$.椭圆上任意一点 (x_0,y_0) 处的切线方程为 $\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$.………………7分

法二 设椭圆上点 (x_0,y_0) 处的切线为 $y-y_0=k(x-x_0)$,则 $\begin{cases}y-y_0=k(x-x_0)\\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\end{cases}$,

联立方程组,$\varDelta=0,\cdots$,得切线方程为 $\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$.

13. 计算不定积分 $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}dx$.



解 $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}dx\xlongequal[t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)]{x=\tan t}\int\frac{\sec^2t}{|\sec^3t|}dt=\int\cos t\,dt=\sin t+C=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$.

14. 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x+xf(x)}{x^3}=0$, 试计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3+f(x)}{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3+f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x+xf(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin3x+xf(x)}{x^3}+\dfrac{3x-\sin3x}{x^3}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x-\sin3x}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3-3\cos3x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{9\sin3x}{6x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{27x}{6x}=\dfrac{9}{2}$.……………………………………………7分

$\longrightarrow$ *L'Hopital* 法则是好东西，但极限的四则运算与复合运算法则(换元法则)是更重要的!

无穷小量等价替换的使用，需要谨慎，需要遵守法则.

三. 解答题 II (15~18 题每题 9 分，19 题 6 分，计 42 分)

15. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-x}{n+x}\right)^{\frac{n}{2}}$，试计算不定积分 $\int xf(x)dx$.

解 $x=0$ 时 $f(x)=1$；$x\neq0$ 时 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-x}{n+x}\right)^{\frac{n}{2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{-2x}{n+x}\right)^{\frac{n+x}{-2x}}\right]^{-x}=e^{-x},\Rightarrow\forall x,f(x)=e^{-x}$.

$\therefore\int xf(x)dx=\int xe^{-x}dx=-xe^{-x}+\int e^{-x}dx=-(x+1)e^{-x}+C$ ………………………………………9分

16. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，$\forall x,y\in(-\infty,+\infty)$ 有 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$，已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，$f'(0)=1$.试证明：函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导,并由此求出函数 $f(x)$ 的表达式 .

证明 $\because\forall x,y\in(-\infty,+\infty)$ 有 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy,\therefore f(0)=0.$

$\forall x\in\mathbb{R},f'(x)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x)+f(h)+2xh-f(x)}{h}=2x+\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}$

$=2x+f'(0)=2x+1$,即 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内点点可导,且 $f'(x)=2x+1$.

于是, $f(x)=x^2+x+C$,由 $f(0)=0$.得 $f(x)=x^2+x$ ………………………………………9分

17. 设 $a_n=1-\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$，试运用 Cauchy 收敛准则证明数列 $\{a_n\}$ 收敛 .

解 *Cauchy criterion*: $\{a_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N>0,\forall n>N,\forall p\in\mathbb{N}^*,s.t.\left|a_n-a_{n+p}\right|<\varepsilon$.

对于 $a_n=1-\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2},\forall\varepsilon>0,\exists N\geq\dfrac{1}{\varepsilon},\forall n>N,\forall p\in\mathbb{N}^*$,

$s.t.\left|a_n-a_{n+p}\right|=\dfrac{1}{(n+1)^2}-\dfrac{1}{(n+2)^2}+\dfrac{1}{(n+3)^2}+\cdots+(-1)^{p-1}\dfrac{1}{(n+p)^2}$

$\leq\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(n+p)^2}<\dfrac{1}{n(n+1)}+\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\dfrac{1}{(n+p-1)(n+p)}$

$=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+p-1}-\dfrac{1}{n+p}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+p}<\dfrac{1}{n}<\dfrac{1}{N}\leq\dfrac{1}{1/\varepsilon}=\varepsilon$.……………9分

18. (1). 求证：$x>0$ 时有 $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$；

(2).设 $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{3}{n^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)$,证明数列 $\{x_n\}$ 收敛,并求出 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

(1). 证明 设 $\varphi(t)=\ln(1+t)$,$\varphi(t)$在$[0,x]$上满足$L-Th.$的条件,

$\therefore\ \varphi(x)-\varphi(0)=\varphi'(\xi)(x-0),(0<\xi<x).\because\ \varphi(0)=0,\varphi'(t)=\dfrac{1}{1+t}\Rightarrow\ln(1+x)=\dfrac{x}{1+\xi}$,

又 $\because\ 0<\xi<x,1<1+\xi<1+x\Rightarrow\therefore\ x>0$时有 $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x.$

(2). 设 $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{3}{n^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)$,证明数列 $\{x_n\}$ 收敛,并求出 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

(2).证明 $\because\ x>0$ 时有 $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$,$\dfrac{k}{n^2+k}=\dfrac{\frac{k}{n^2}}{1+\frac{k}{n^2}}<\ln\left(1+\dfrac{k}{n^2}\right)<\dfrac{k}{n^2},k=1,2,\cdots,n.$

$\therefore\ \dfrac{1}{2}=\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}k}{n^2+n}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2+n}<\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2+k}<\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\dfrac{k}{n^2}\right)<\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2}=\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}k}{n^2}=\dfrac{n+1}{2n}$,

由$Squeeze\ th.$知,$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\dfrac{k}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\ln x_n=\dfrac{1}{2},\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_n=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$.……………………………9分

19. 证明：给定圆的内接正 $n(n\geq 3)$ 边形的面积随着 n 的增加而增加 .

证明 设圆的半径为R,则圆的内接正n边形的面积$A_n=\dfrac{1}{2}nR^2\sin\dfrac{2\pi}{n}=\pi R^2\cdot\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}},n\geq 3.$

显然,$A_4=2R^2\sin\dfrac{2\pi}{4}>\dfrac{3}{2}R^2\sin\dfrac{2\pi}{3}=A_3$.所以,下面我们考虑$n\geq 4$的情形.

设$\varphi(x)=\dfrac{\sin x}{x},x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. $\varphi'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$.

又记$\psi(x)=x\cos x-\sin x,\psi(x)$在$[0,\pi/2]$上连续,$x\in[0,\pi/2]$时$\psi'(x)=-x\sin x<0$,

$\therefore$ 在$[0,\pi/2]$上$\psi(x)$严格单调减少,即$x\in(0,\pi/2]$时$\psi(x)=x\cos x-\sin x<\psi(0)=0.$

$\therefore$ 在$(0,\pi/2]$上$\varphi'(x)<0$,即$\varphi(x)=\dfrac{\sin x}{x}$严格单调减少,

$\therefore\ A_n=\pi R^2\cdot\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}$随着$n$ 的增加而增加,且$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\pi R^2$.……………………………………6分