Chap.9 定积分习题课
202203

定积分精选练习 2022－03

1.(1).(教材 $P214/Ex.7$)若函数$f(x)$在$[0,1]$上连续.

证明:$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$.

(2).计算(A).$\int_0^{\pi} x\sin^2 xdx$ ，(B).$\int_0^{\pi} x\sin^4 xdx$.

2.(1).(教材 $P214/Ex.6$)设$f(x)$是$\mathbb{R}$上以$T(T>0)$为周期的连续函数,证明:$I=\int_a^{a+T} f(x)dx$的值与a无关.

(1).计算$\int_0^{2022\pi} |\sin x\cos x|dx$.

(2).(教材 $P220/Ex.4$)设$f(x)$是$\mathbb{R}$上以$T(T>0)$为周期的连续函数,证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^{x} f(t)dt=\frac{1}{T}\int_0^{T} f(t)dt$.

3.计算积分

(1). $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin x + \cos x}{1 + \sin^2 x} dx.$

(2). $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(1 + x^{2022} \ln \frac{2 + x}{2 - x}\right) dx.$

(3). $\displaystyle\int_{0}^{2} x(x-1)^n (2-x) dx, n \in \mathbb{N}.$

上页 下页 返回

4.积分计算问题

(1).$\left(P192/Ex.3\right)$若$f(x)$在$\left[a,b\right]$上可积，$F(x)$在$\left[a,b\right]$上连续，且除有限多个点外有$F'(x)=f(x)$，则有

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a).$$

(2).计算$\int_0^{\pi}\frac{1}{2+\cos 2x}dx$.

(3).计算$\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^4}dx$.

上页　下页　返回

5. $f(x), g(x)$在$[-a,a]$上连续, $g(x)$为偶函数,

且$f(x)$满足$f(x)+f(-x)=A$, A为常数.

求证 $\int_{-a}^{a} f(x)g(x)dx = A\int_{0}^{a} g(x)dx$,

并由此计算$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\arctan e^{x}\cdot\cos x\right)dx$.

6.证明: $\int_{0}^{\pi} e^{\sin^2 x}dx \geq \frac{3}{2}\pi$.

7.证明: $\int_{0}^{\sqrt{2\pi}} \sin\left(x^2\right)dx > 0$.(与$P214/Ex.12$ 同)

8.设$f \in C[0,1]$, $f(x)>0$.证明:

$$\ln\int_{0}^{1} f(x)dx \geq \int_{0}^{1}\ln f(x)dx.$$

(与$P220/Ex.1,8$ 类同)

9. 求极限

(1). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}dt}$.

(2). $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}dt}$.

(3). $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\int_0^x (\arctan t)^2 dt}$.

10.设$f(x)$在$[a,b]$上连续,且$f(x)>0$,

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_b^x \frac{dt}{f(t)}, x\in[a,b].$$

证明:(1).$\Phi'(x)\geq 2$；(2).方程$\Phi(x)=0$在(a,b)内有唯一的实根.

11.设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续,

证明:$\int_0^x (x-u)f(u)du=\int_0^x\left[\int_0^u f(x)dx\right]du$.

12.(P214/Ex.9)设函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上连续,$\forall a,b\in(0,+\infty)$,$I=\int_a^{ab} f(x)dx$与$a$无关.

证明: $f(x)=\dfrac{C}{x}$,C任意常数.

13.(P214/Ex.13)若$x>0,c>0$,则有

$$\left|\int_x^{x+c}\sin\left(t^2\right)dt\right|\le\frac{1}{x}.$$

上页 下页 返回

14.设函数$f(x)$和$g(x)$在$[a,b]$上连续,

证明:(1).若在$[a,b]$上$f(x)\geq 0$且$\int_a^b f(x)dx=0$,

则在$[a,b]$上 $f(x)\equiv 0$.

(2).若在$[a,b]$上$f(x)\geq 0$且不恒等于零,

则 $\int_a^b f(x)dx>0$.

(3).若在$[a,b]$上$f(x)\leq g(x)$且$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$,

则在$[a,b]$上 $f(x)\equiv g(x)$.

15.(1).设$f(x),g(x)$在$[a,b]$上可积,则有:

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \le \int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx \ .$$

(*Cauchy – Schwarz – Bunijiakovsky* 不等式)

15.(2).设$f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续,则有:

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \le \int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx \ .$$

16.(1).设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续,

求证:$\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2 \le (b-a)\int_a^b f^2(x)dx \ .$

16.(1).设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续,求证:

$$\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2 \le (b-a)\int_a^b f^2(x)dx \ .$$

16.(2).设$f(x)$ 在$[a,b]$上连续,且$f(x) > 0$.求证:

$$\int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \ge (b-a)^2 .$$

17.设$f(x)$在$[a,b]$上有连续的导函数,且$f(a) = 0$,

$|f'(x)| \le M, x \in [a,b]$.求证:$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \frac{1}{2}M(b-a)^2$.

18.设$f(x), g(x)$在区间$[a,b]$上连续且同为单调增加或单调减少,则有

$$\int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx \le (b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx \ .$$

19. 若$f(x)$是$[a,b]$上连续的凸函数,

求证：$\int_a^b f(x)dx \geq (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

19.$(P205/Ex.11)$若$f(x)$在$[a,b]$上

二阶可导,且$f''(x)>0$.求证：

$$\int_a^b f(x)dx \geq (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

20.设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续且单调递增,

证明$(a+b)\int_a^b f(x)dx \leq 2\int_a^b xf(x)dx$.