2021 级数学分析 II 期中练习解答　　2021-04

一. 填空题或选择题（ 选择题正确选项唯一）

1. 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续,则有$\dfrac{d}{dx}\int_0^x f(x-t)dt=$ $\underline{\ f(x)\ }$.

解 $\int_0^x f(x-t)dt \overset{x-t=u}{=\!=\!=} \int_x^0 f(u)(-du)=\int_0^x f(u)du$,$\therefore \dfrac{d}{dx}\int_0^x f(x-t)dt=f(x)$.

2. 积分$\int_1^2 \dfrac{1}{x(\ln x)^p}dx$ 在p $\underline{\ <1\ }$ 时收敛 .

解 $\int_1^2 \dfrac{1}{x(\ln x)^p}dx=\int_{1+0}^2 \dfrac{1}{x(\ln x)^p}dx=\int_{1+0}^2 \dfrac{1}{(\ln x)^p}d(\ln x)=\int_{0+}^{\ln 2}\dfrac{1}{u^p}du$,$\therefore$ 在$p<1$ 时原积分收敛 .

3. 以下论断中正确的是___(B)___.

(A).由于$\dfrac{1}{x^3}$是奇函数，故有$\int_{-1}^1 \dfrac{1}{x^3}dx=0$;　　　　(B).瑕积分$\int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ 收敛 ;

(C).若$f(x),g(x)$在$[a,+\infty)$上连续, 则$\int_a^{+\infty}[f(x)+g(x)]dx=\int_a^{+\infty}f(x)dx+\int_a^{+\infty}g(x)dx$;

(D).若$u'(x),v'(x)$在$[a,+\infty)$上连续, 则$\int_a^{+\infty}(u'\cdot v)dx=(u\cdot v)\Big|_a^{+\infty}-\int_a^{+\infty}(u\cdot v')dx$.

解 (A).$\int_{-1}^1 \dfrac{1}{x^3}dx:=\int_{-1}^0 \dfrac{1}{x^3}dx+\int_0^1 \dfrac{1}{x^3}dx,\int_0^1 \dfrac{1}{x^3}dx$发散,原积分发散.

(B).$\int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^{1-}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x\Big|_0^{1-}=\dfrac{\pi}{2}$,收敛 ...

(C).在$\int_a^{+\infty}f(x)dx,\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 均收敛时结论方成立 .

(D).$(u\cdot v)\Big|_a^{+\infty},\int_a^{+\infty}(u\cdot v')dx$ 均收敛时结论方成立 .参见本卷题13.(2)

及PPT例 9.(3) $\int_0^{+\infty}\dfrac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$.

4. 以下反常积分中收敛的是____(C)______.

(A).$\int_0^2 \dfrac{1}{2-x}dx$;　　(B).$\int_{-1}^1 \dfrac{1}{x^5}dx$;　　(C).$\int_0^{+\infty}e^{-x}\cos 2x dx$;　　(D).$\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x dx$.

答 (A),(B),(D)均发散,这是显然的,(C)是.用定义直接来判定(C)收敛计算起来比较麻烦.

$\int e^{-x}\cos 2x dx=\dfrac{1}{5}e^{-x}(2\sin 2x-\cos 2x)+C,\Rightarrow \int_0^{+\infty}e^{-x}\cos 2x dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-x}\cos 2x dx$

$=\lim\limits_{b\to+\infty}\dfrac{1}{5}e^{-x}(2\sin 2x-\cos 2x)\Big|_0^b=\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5}\lim\limits_{b\to+\infty}e^{-b}(2\sin 2b-\cos 2b)\overset{\text{有界量乘无穷小}}{\underset{\text{仍为无穷小}}{=\!=\!=\!=\!=}}\dfrac{1}{5}$.

5. 下列无穷级数中条件收敛的是 $\underline{(A)}$.

$(A).\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ ； $(B).\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$ ； $(C).\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ ； $(D).\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n}{n^2}-\frac{1}{n}\right)$.

答 $(C),(D)$均发散,(B)绝对收敛,(A)是.

6. 级数 $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=$ ________.

答 $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ ，著名的结果直接推导出来并非易事,记住 .

7. 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 在p $\underline{>0}$ 时收敛 .

答 $p>0$ 时$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 为*Leibniz* 级数,收敛 .

8. 记级数$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\frac{1}{13}-\frac{1}{16}+\cdots$的和为 A，则刻画级数和 A 大小的选项“$-1<A<0$”、“$0<A<1$”、“$1<A<2$”中正确的结果为 ________________.

答 $0<A<1$,基本结论,应熟知 .

9. 幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n\cdot n^3}$ 的收敛域为 $\underline{[-3,3]}$.

解 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{3^n\cdot n^3}\right|}=\frac{|x|}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^3}=\frac{|x|}{3}$,故幂级数收敛半径$R=3$.$x=3$ 时,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ 收敛,

$x=-3$ 时,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}$ 绝对收敛.$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n\cdot n^3}$ 的收敛域为$[-3,3]$.

10. 试问以下论断是否正确 ？你的回答是___正确___.

对数项级数$\sum a_n$ 而言，如果$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=r<1$，则级数$\sum a_n$ 收敛 .

解 正确! $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=r<1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛即$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

二. 解答题

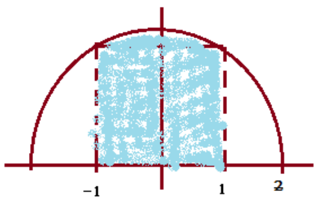
11. 计算积分$\int_{-1}^{1}\left(x^{2021}\sqrt{4+x^2}+\sqrt{4-x^2}\right)dx$.

解 $x^{2021}\cdot\sqrt{4+x^2}$是$[-1,1]$上的奇函数,$\therefore\int_{-1}^{1}x^{2021}\cdot\sqrt{4+x^2}dx=0.$

$$\therefore 原式=\int_{-1}^{1}\sqrt{4-x^2}dx=2\int_0^1\sqrt{4-x^2}dx\xlongequal[t=\pi/6时\atop x=1]{x=2\sin t}2\int_0^{\pi/6}4\cos^2 tdt=4\int_0^{\pi/6}(1+\cos 2t)dt=(4t+2\sin 2t)\Big|_0^{\pi/6}$$

$$=\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3} .$$

注:利用积分的几何意义知$\int_{-1}^{1}\sqrt{4-x^2}dx$ 表示如图阴影部分的面积,其结果是显然的.



12. 试求出反常积分的值：(1). $\int_0^1\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx$； (2). $\int_0^{+\infty}\left(xe^{-x}\right)^3dx$.

解 (1). $\int_0^1\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx=\int_0^{1-0}\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx \overset{x=\sin^2 t}{\underset{\substack{t=0\text{时}x=0\\ t\to\frac{\pi}{2}^-\text{时}x\to1^-}}{=\!=\!=\!=}} \int_0^{\frac{\pi}{2}^-}\left|\frac{\sin t}{\cos t}\right|\cdot 2\sin t\cos tdt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^2 tdt$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)dt=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$.

解 (2). $\int_0^{+\infty}\left(xe^{-x}\right)^3dx=\int_0^{+\infty}x^3e^{-3x}dx\overset{3x=t}{=\!=\!=}\frac{1}{81}\int_0^{+\infty}t^3e^{-t}dt=-\frac{1}{81}\left(t^3+3t^2+6t+6\right)e^{-t}\Big|_0^{+\infty}=\frac{6}{81}=\frac{2}{27}$.

注：Γ 函数$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ 在$\alpha>0$时收敛,且有$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$,所以$\Gamma(n+1)=n!$.
这是一个比较常用的特殊函数,结果容易记住 .

13. 试求出反常积分的值：(1). $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}dx$； (2). $\int_0^{\pi/2}\cos x\ln\cos xdx$.

解 (1). $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}dx\overset{\arctan x=t}{=\!=\!=\!=}\int_0^{\frac{\pi}{2}-0}\frac{1}{\left(\sec^2 t\right)^2}\sec^2 tdt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt=\frac{1}{4}(2t+\sin 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$.

法二 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}dx=\int_0^1\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}dx+\int_1^{+\infty}\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}dx\overset{x=\frac{1}{t}}{=\!=}\int_{+\infty}^1\frac{1}{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)^2}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt+\int_1^{+\infty}\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}dx$

$=\int_1^{+\infty}\frac{t^2}{\left(1+t^2\right)^2}dt+\int_1^{+\infty}\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}dx=\int_1^{+\infty}\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2}dx+\int_1^{+\infty}\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}dx=\int_1^{+\infty}\frac{1+x^2}{\left(1+x^2\right)^2}dx$

$=\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x\Big|_1^{+\infty}=\frac{\pi}{4}$.

注：$\int\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}dx=\int\frac{1+x^2-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}dx=\int\frac{1}{1+x^2}dx-\int x\cdot\left(-\frac{1}{2\left(1+x^2\right)}\right)'dx$

$=\arctan x+\frac{x}{2\left(1+x^2\right)}-\int\frac{1}{2\left(1+x^2\right)}dx=\frac{1}{2}\arctan x+\frac{x}{2\left(1+x^2\right)}+C$.

解 (2). $\int\cos x\ln\cos xdx=\sin x\ln\cos x-\int\sin x\cdot\frac{-\sin x}{\cos x}dx=\sin x\ln\cos x+\int\frac{\sin^2 x}{\cos x}dx$

$=\sin x\ln\cos x+\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos x}dx=\sin x\ln\cos x+\int\sec xdx-\int\cos xdx$

$=\sin x\ln\cos x+\ln|\sec x+\tan x|-\sin x+C$,

$I=\int_0^{\pi/2}\cos x\ln\cos xdx=\int_0^{\pi/2-}\cos x\ln\cos xdx=\left[\sin x\ln\cos x+\ln|\sec x+\tan x|-\sin x\right]_0^{\pi/2-}$

$=\left[(\sin x-1)\ln\cos x+\ln(1+\sin x)-\sin x\right]_0^{\pi/2-}=\ln 2-1$.

注1:上述反常积分过程那样书写只是为了简洁,实际上仍是函数的极限,如标准地按照定义来写就是如下表述:

$$I=\lim_{\varepsilon\to0+}\int_0^{\pi/2-\varepsilon}\cos x\ln\cos xdx=\lim_{\varepsilon\to0+}\left[\sin x\ln\cos x+\ln\left|\sec x+\tan x\right|-\sin x\right]_0^{\pi/2-\varepsilon}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0+}\left[(\sin x-1)\ln\cos x+\ln(1+\sin x)-\sin x\right]_0^{\pi/2-\varepsilon}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0+}\left\{\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)-1\right]\ln\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)+\ln\left[1+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\right]-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\right\}=\ln2-1.$$

注2:做法变化一下 $\int_0^{\pi/2-}\cos x\ln\cos xdx=\int_0^{\pi/2-}(\sin x-1)'\ln\cos xdx$

$$=(\sin x-1)\ln\cos x\Big|_0^{\pi/2-}-\int_0^{\pi/2-}(\sin x-1)\cdot\frac{-\sin x}{\cos x}dx=0-\int_0^{\pi/2-}\frac{1-\sin^2x}{1+\sin x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}dx$$

$$=-\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{1+\sin x}d(\sin x)=-\int_0^1\frac{t}{1+t}dt=-\int_0^1\frac{1+t-1}{1+t}dt=\left[\ln(1+t)-t\right]_0^1=\ln2-1.$$

法二 $\int\ln(1-t^2)dt=t\ln(1-t^2)-\int t\cdot\frac{-2t}{1-t^2}dt=t\ln(1-t^2)+2\int\frac{t^2}{1-t^2}dt=t\ln(1-t^2)+2\int\frac{1-(1-t^2)}{1-t^2}dt$

$$=t\ln(1-t^2)+\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)-2t+C,$$

$$\int_0^{\pi/2}\cos x\ln\cos xdx=\int_0^{\pi/2-}\cos x\ln\cos xdx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2-}\ln(\cos^2x)d(\sin x)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2-}\ln(1-\sin^2x)d(\sin x)$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{1-}\ln(1-t^2)dt=\frac{1}{2}\left[t\ln(1-t^2)+\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)-2t\right]_0^{1-}=\frac{1}{2}\left[(1+t)\ln(1+t)+(t-1)\ln(1-t)-2t\right]_0^{1-}$$

$$=\ln2-1.$$

注:$\int_0^{1-}\ln(1-t^2)dt=\int_0^{1-}\ln(1-t)dt+\int_0^{1-}\ln(1+t)dt=\int_1^{0+}\ln u(-du)+\int_1^2\ln sds=\int_{0+}^2\ln udu$

$$=(u\ln u-u)\Big|_{0+}^2=2\ln2-2.$$

14. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-x}{n+x}\right)^{\frac{n}{2}}$,试计算由曲线 $y=f(x)$,直线 $x=\ln2$ 以及两根坐标轴所围成的图形分别绕 x 轴、y 轴旋转一周所成旋转体的体积.

解 $x=0$ 时 $f(x)=1$;$x\neq0$ 时 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-x}{n+x}\right)^{\frac{n}{2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{-2x}{n+x}\right)^{\frac{n+x}{-2x}}\right]^{-x}=e^{-x},\Rightarrow\forall x,f(x)=e^{-x}$.

$$V_x=\pi\int_0^{\ln2}e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}\pi e^{-2x}\Big|_0^{\ln2}=\frac{3}{8}\pi,V_y=2\pi\int_0^{\ln2}xe^{-x}dx=-2\pi(1+x)e^{-x}\Big|_0^{\ln2}=\pi(1-\ln2).$$

注:由曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=a,x=b,y=0$ $(0\le a\le b,x\in[a,b]$ 时 $f(x)\ge0)$ 围成图形绕 y 轴旋转一周所成旋转体体积 $V_y=2\pi\int_a^b xf(x)dx$.

15. 用锤子敲击将一枚铁钉钉入木板，木板对钉子的阻力与铁钉钉入的深度成正比。若锤子每次敲击铁钉所作的功相同，锤子第一次敲击时铁钉钉入木板 1cm，问第二次敲击时铁钉又钉入木板多少?

解 木板对钉子的阻力$f(x)=kx$,k为常数 .锤子一次敲击所作的功为$W=\int_0^1 kxdx$,

锤子第二次敲击使钉子钉入木板深$b(cm)$,$\therefore \int_1^b kxdx=\int_0^1 kxdx, b=\sqrt{2}$,

所以,锤子第二次敲击使钉子又钉入木板$\sqrt{2}-1$ cm 深 .

16. (1). 求证 : $x\in\mathbb{R}$时有$e^{-x^2}\le\dfrac{1}{1+x^2}$.

(2). 已知广义积分$I=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx$ 收敛，试比较积分值I与数π 的大小.

证明 (1).$t>0, e^t-e^0=(t-0)e^{\xi}, 0<\xi<t, \Rightarrow t>0$ 时$e^t-1=te^{\xi}>t$,即$t>0$ 时$e^t>t+1$.

$\therefore \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$,有$e^{x^2}>1+x^2, \Rightarrow \forall x\in\mathbb{R}$,有$e^{-x^2}\le\dfrac{1}{1+x^2}$.

(2). $\forall[a,b]\subset\mathbb{R}$,显然有$\int_a^b e^{-x^2}dx\le\int_a^b\dfrac{1}{1+x^2}dx, \because I=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx$ 收敛,

$\therefore I=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx\le\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{1+x^2}dx=\arctan x\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\pi$.

17. 试判断级数敛散性.(1).$\sum_1^{\infty}\dfrac{1}{n^2-\ln n}$; (2).$\sum_2^{\infty}\dfrac{1}{\ln(n!)}$; (3).$\sum_1^{\infty}\dfrac{1}{3^{\ln n}}$.

解 (1). $\because \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n^2-\ln n}}{\frac{1}{n^2}}=1$,或由$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n^2}=0$,知$\exists n_0, n\ge n_0$时$\ln n<\dfrac{1}{2}n^2$,于是$n\ge n_0$时有

$0<\dfrac{1}{n^2-\ln n}<\dfrac{1}{n^2-\frac{1}{2}n^2}=\dfrac{2}{n^2}$,据比较判别法,由$\sum_1^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛$\Rightarrow\sum_1^{\infty}\dfrac{1}{n^2-\ln n}$ 收敛 .

(2). $n\ge2, \ln(n!)<\ln(n^n)=n\ln n$,于是$n\ge2$时$\dfrac{1}{\ln(n!)}>\dfrac{1}{n\ln n}$,据$Cauchy$积分判别法,

无穷积分$\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{x\ln x}dx$ 发散,知正项级数$\sum_2^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$ 发散$\Rightarrow\sum_2^{\infty}\dfrac{1}{\ln(n!)}$ 发散 .

(3). $3^{\ln n}=e^{\ln n\ln 3}=\left(e^{\ln n}\right)^{\ln 3}=n^{\ln 3}$,即$\dfrac{1}{3^{\ln n}}=\dfrac{1}{n^{\ln 3}}, \ln 3>1$,据$p-$级数结论知,$\sum_1^{\infty}\dfrac{1}{3^{\ln n}}$ 收敛 .

注1 : 这3个问题都是与$p-$级数相关,(广义的) $p-$级数问题用比值/根值法皆失效,
是因为用比值/根值法时极限为1,故方法失效.

注2：对于正项级数$\sum u_n$，若存在某$n_0 \in \mathbb{Z}^+$，(1).存在常数$r<1$，使对$\forall n>n_0$，有$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \le r$

或者 $\sqrt[n]{u_n} \le r$，则级数$\sum u_n$收敛．这里的“存在常数$r<1$”这一条件不可少，仅有条件

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<1$ 或 $\sqrt[n]{u_n}<1$ 是不够的，$p>0$时的$p-$级数$\sum\limits_{1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ 就是一个典型的例子．

(2).$\forall n>n_0$，$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \ge 1$ 或者$\sqrt[n]{u_n} \ge 1$，则$\sum u_n$发散．

18. 试问级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n\cos n+(-3)^n}{n\cdot 3^n}$ 是否收敛？给出结论，说明理由．

解 $\left|\dfrac{2^n\cos n}{n\cdot 3^n}\right|<\dfrac{2^n}{n\cdot 3^n}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{2^n}{n\cdot 3^n}}=\dfrac{2}{3}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}=\dfrac{2}{3}<1$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n\cos n}{n\cdot 3^n}$绝对收敛，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n\cos n}{n\cdot 3^n}$收敛；

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-3)^n}{n\cdot 3^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$是交错级数，满足*Leibniz*定理条件，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$收敛．

由收敛级数加法性质知原级数收敛．

注1：由$\dfrac{2^n\cos n}{n\cdot 3^n} \le \dfrac{2^n}{n\cdot 3^n}$而据$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n\cdot 3^n}$收敛$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n\cos n}{n\cdot 3^n}$收敛是不对的．须注意比较判别法

只适用于正项级数敛散性的判断．级数绝对收敛$\Rightarrow$收敛．

注2：关于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$敛散性的判断是点到为止即可．

19. 试给出$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$的收敛域．在该收敛域内记$S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$．验证$S(x)$满足$S''(x)=S(x)$，

$S(0)=0, S'(0)=1$．试求出$S(x)$初等函数形式的表达式．

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}}{(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2}{(2n+2)(2n+3)}=0$，

$\therefore$ 级数对任意的$x\in\mathbb{R}$都绝对收敛，幂级数的收敛域为$(-\infty,+\infty)$．

$$S(x)=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,$$

$$S'(x)=\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\right)'=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$$

$$S''(x)=\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots\right)'=0+x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\cdots+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots$$

$\therefore S''(x)=S(x), S(0)=0, S'(0)=1$．

由 $\sum\limits_{0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}=e^x$ 得$\sum\limits_{0}^{\infty}\dfrac{(-x)^n}{n!}=e^{-x}$，于是$\left(e^x-e^{-x}\right)=2\sum\limits_{0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$，$\therefore S(x)=\dfrac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)$．

注：用 “+” 表示比较直观：$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots=e^x,\cdots(A)$

$$1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots-\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots=e^{-x},\cdots(B),$$

$(A),(B)$两式相减，得：$2\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots\right)=e^x-e^{-x}.$

20. 求级数的和：(1).$\sum_0^\infty\frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$；　(2).$\sum_0^\infty\frac{(-1)^n(2n+1)}{3^n}$.

解 (1).$\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}=\sqrt{3}\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n+1}$，考察幂级数$\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}=S(x)$，

$S(x)=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\cdots,x\in[-1,1],S'(x)=1-x^2+x^4-x^6+\cdots=\frac{1}{1+x^2},x\in(-1,1).$

$S(0)=0,\Rightarrow S(x)-S(0)=\int_0^x S'(t)dt=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt=\arctan x.$

$\therefore\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}=\sqrt{3}S\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\sqrt{3}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}\pi.$

解 (2).$\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n(2n+1)}{3^n}=\sum_{n=0}^\infty(-1)^n(2n+1)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n}$，记$\sum_{n=0}^\infty(-1)^n(2n+1)x^{2n}=S(x),x\in(-1,1),$

$S(x)=1-3x^2+5x^4-7x^6+\cdots=\left(x-x^3+x^5-x^7+\cdots\right)'=\left(\frac{x}{1+x^2}\right)'=\frac{1+x^2-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2},$

$\therefore S=S\left(1/\sqrt{3}\right)=\frac{3}{8}.$

注：$\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n(2n+1)}{3^n}=2\sum_{n=0}^\infty n\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\sum_{n=0}^\infty\left(-\frac{1}{3}\right)^n$，而 $|q|<1$ 时求$\sum n\cdot q^n$用错位相减法是基本题.

21. 对于级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，(1). 举例说明：$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$未必收敛；

(2). 证明：若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$是正项级数，$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛 .

解 (1).对于级数$1-1+1-1+1-1+\cdots, S_{2n-1}=1, S_{2n}=0$,故$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$不存在,原级数发散,

但级数$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots$收敛.

(2).对于正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,若$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$收敛于$A$,则$S_{2n}=\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+a_{2k})\le A$,

于是有 $S_n \le S_{2n} \le A, \forall n=1,2,3,\cdots$. 又因为数列$\{S_n\}$单调递增,所以数列$\{S_n\}$收敛.

$\therefore$ 该级数收敛,且$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$.