§16.1 多元函数的概念

一、平面点集

二、R^2上的完备性定理

三、多元函数的概念

上页 下页 返回

一、平面点集

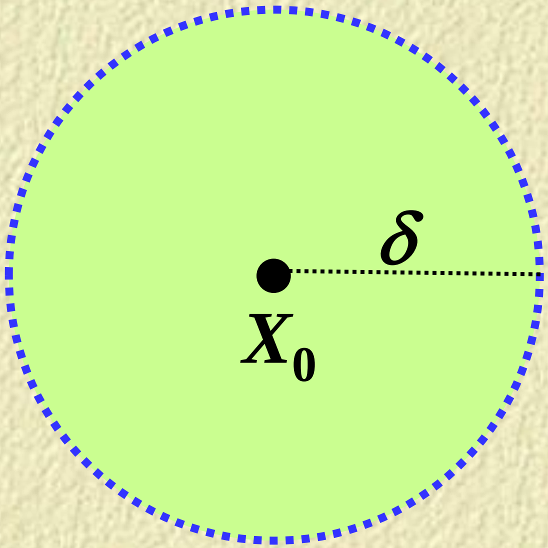
1. 邻域：以点 $X_0=(x_0,y_0)$为中心，以 δ 为半径的圆内部点的全体称为 X_0 的δ邻域.

记作$\cup(X_0,\delta)$,

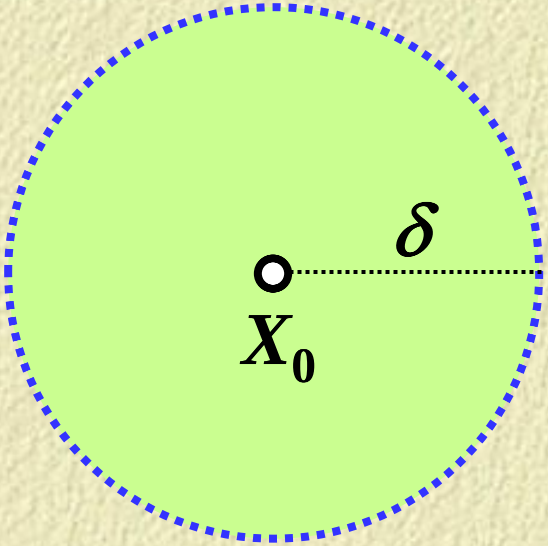
即 $\cup(X_0,\delta)=\{(x,y)\mid\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$

$=\{X=(x,y)\mid\ \ \|X-X_0\|<\delta\}$

记 $U^0(X_0,\delta)=U(X_0,\delta)-\{X_0\}$，称为 X_0 的去心 δ邻域. 如图



$U(X_0,\delta)$



$U^0(X_0,\delta)$

当不关心邻域半径时, 简记为$U(X_0)$和 $U^0(X_0)$.

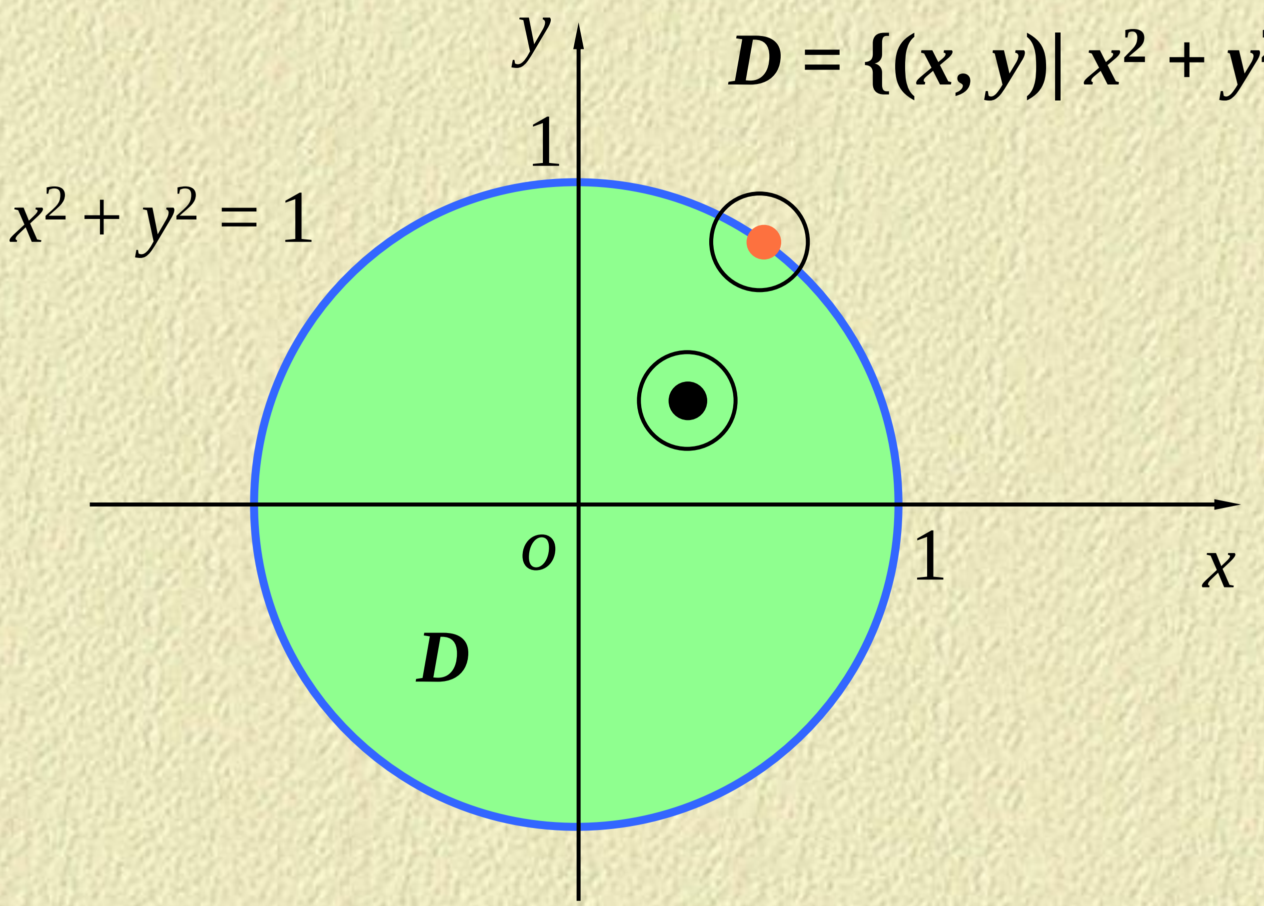
2. 内点： 设 E 是一平面点集，$X_0 = (x_0, y_0) \in E$，若存在邻域 $U(X_0, \delta) \subseteq E$，则称 X_0 为 E 的内点.

E 的全体内点所成集合称为 E 的内部，记为 E^0.

例1 比如 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 的定义域 D 为单位圆盘，

$D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$　　如图

$$D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \le 1\}$$

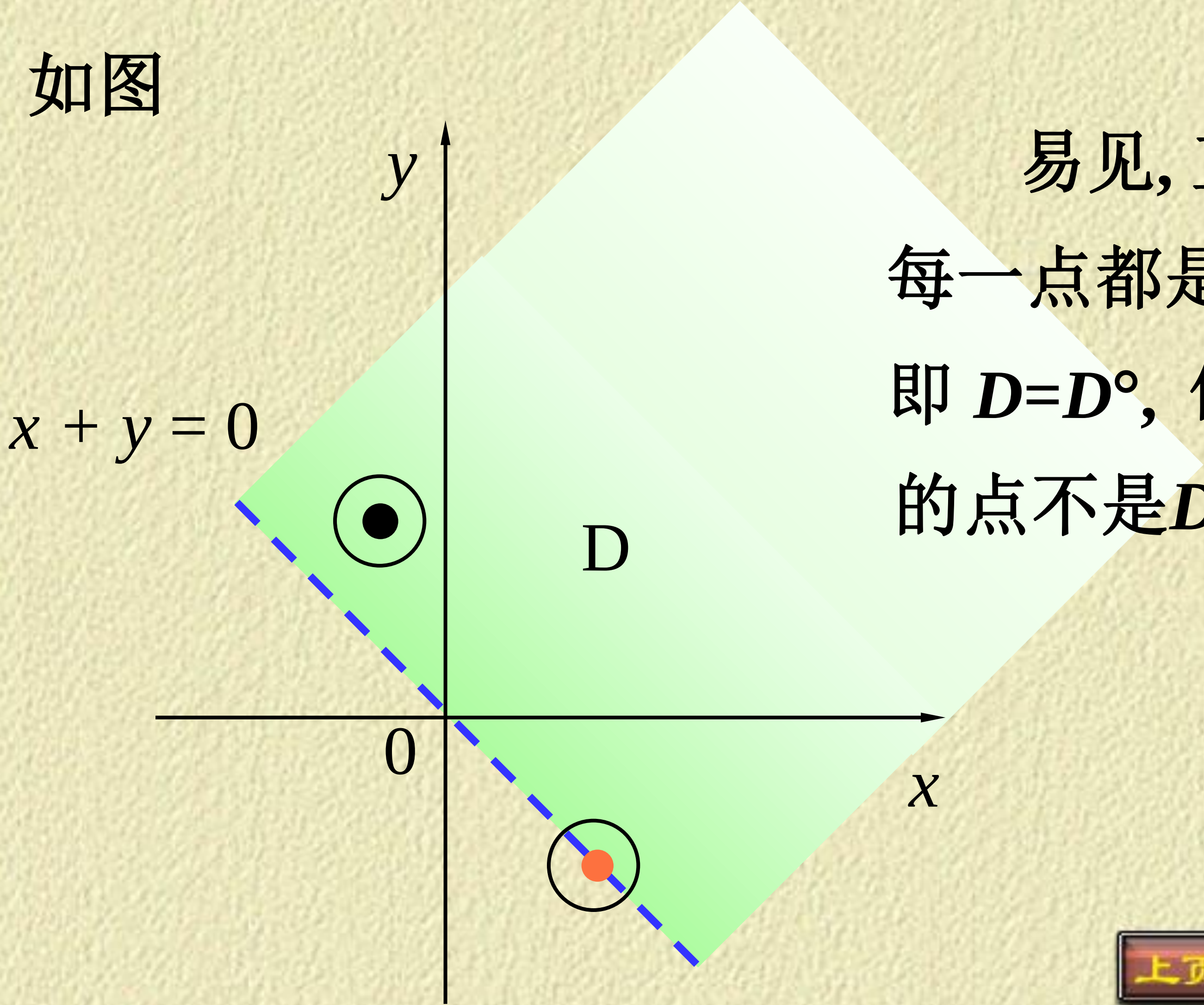


易知, 圆内部的每一点都是 D 的内点. 但圆周上的点不是 D 的内点.

上页 下页 返回

例2 $z = \ln(x+y)$的定义域 $D = \{(x, y) | x+y > 0\}$

如图



易见, 直线上方每一点都是D的内点. 即 $D=D°$, 但直线上的点不是D的内点.

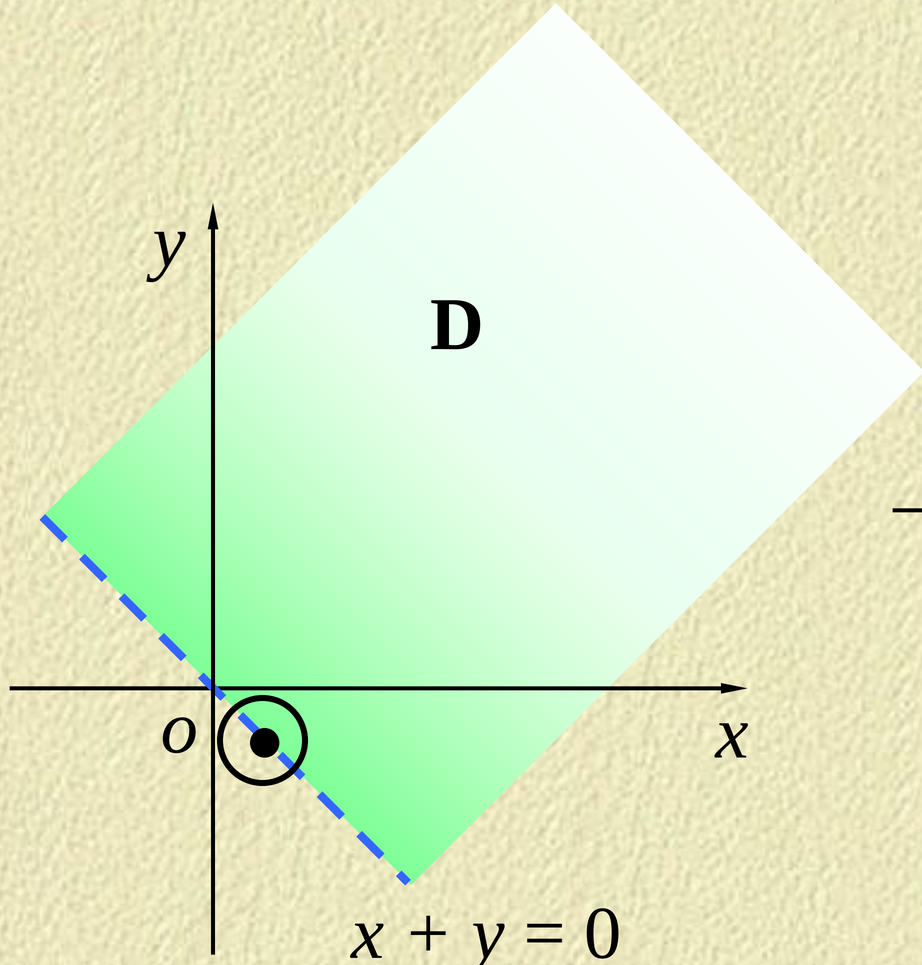
3. 边界点:

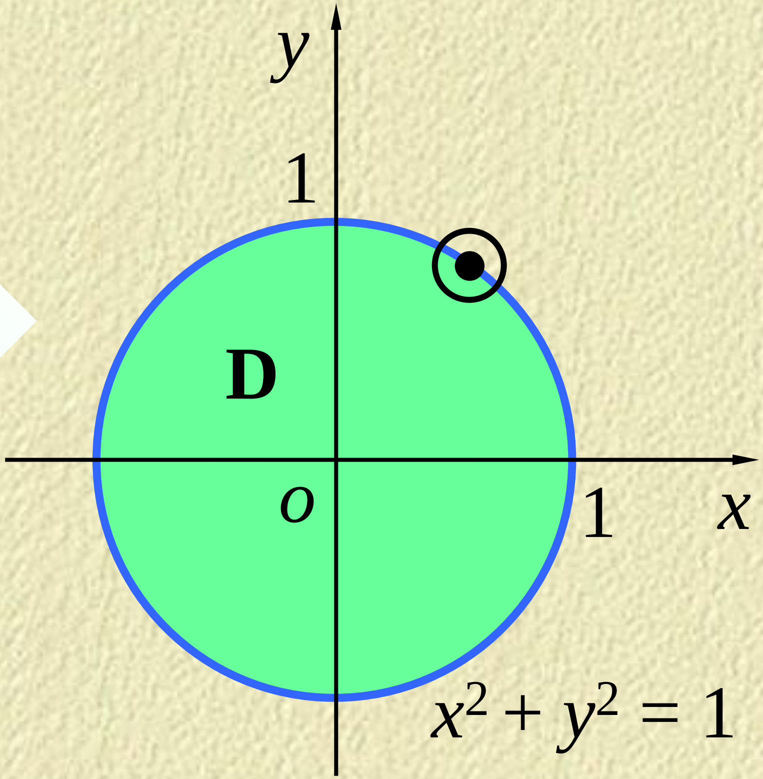
设 E 是一平面点集, $X_0=(x_0,y_0)$是平面上一个点. 若 X_0的任何邻域 $U(X_0,\delta)$内既有属于 E 的点, 又有不属于 E的点, 则称 X_0 为 E 的边界点.

E 的全体边界点所成集合称为 E 的边界. 记作 ∂E.

如, 例2中定义域 D 的边界是直线 $x+y=0$ 上点的全体. 例1中定义域 D 的边界是单位圆周 $x^2+y^2=1$上的点的全体. 如图

上页 下页 返回





E 的边界点可以是 *E* 中的点，
也可以不是 *E* 中的点.

上页 下页 返回

4. 开集

设 E 是一平面点集, 若 E 中每一点都是 E 的内点.

即 $E \subseteq E^0$, 则称 E 是一个开集. 规定, $\varnothing$, $\mathbf{R}^2$为开集.

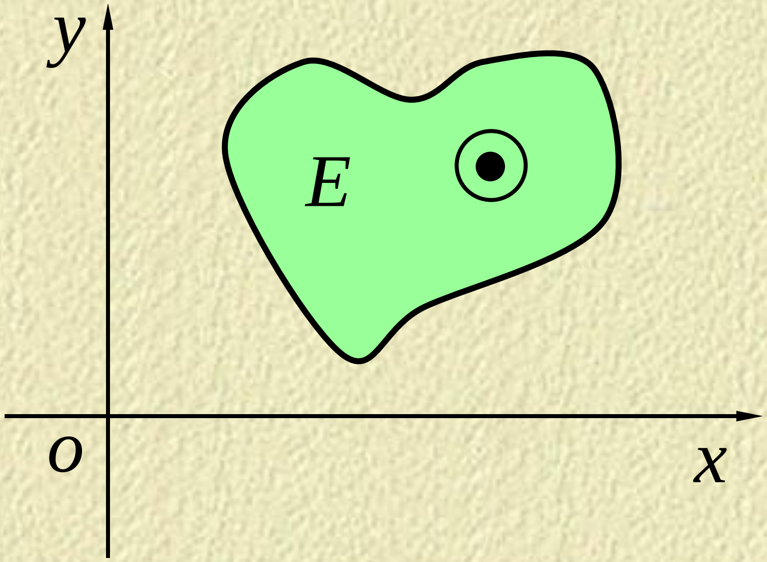
由于总有 $E^0 \subseteq E$, 因此, $E \subseteq E^0 \Leftrightarrow E = E^0$

故也可说, 若$E = E^0$, 则称 E 是一个开集.

比如, 例2中 D 是开集, $(D = D^0)$, 而例1 中 D 不是开集.

上页 下页 返回

又比如, E 如图



若 E 不包含边界, 则 E 为开集.

若 E 包含边界, 则 E 不是开集.

结论: 非空平面点集 E 为开集的充要条件是 E 中每一点都不是 E 的边界点. 即 E 不含有 E 的边界点.

证: 必要性. 设 E 为开集, $\forall X \in E$,

由开集定义知 X 为 E 的内点.

故 X 不是 E 的边界点.

充分性. 若 E 中每一点都不是 E 的边界点.

要证 E 为开集. $\forall X \in E$, 由于 X 不是 E 的边界点.

故必存在X的一个邻域$U(X,\delta)$,在这个邻域 $U(X, \delta)$

内或者全是 E 中的点. 或者全都不是 E 中的点, 两

者必居其一. 由于$X \in E$, 故后一情形不会发生.

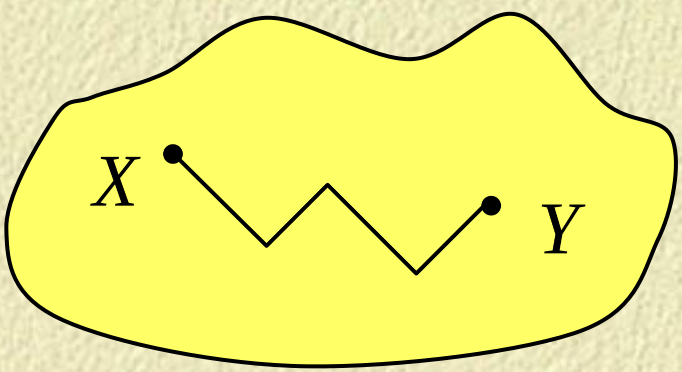
因此, $U(X, \delta)$内必全是 E 中的点. 故 $X \in E^0$, 即,

$E \subseteq E^0$, 所以 E 是开集.

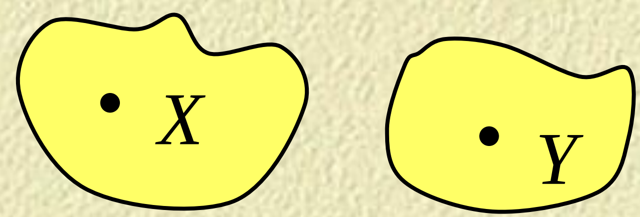
上页 下页 返回

5. 连通集

设 E 是一非空平面点集, 若$\forall X, Y \in E$. 都可用完全含于 E 的折线将它们连接起来, 则称 E 为连通集. 如图



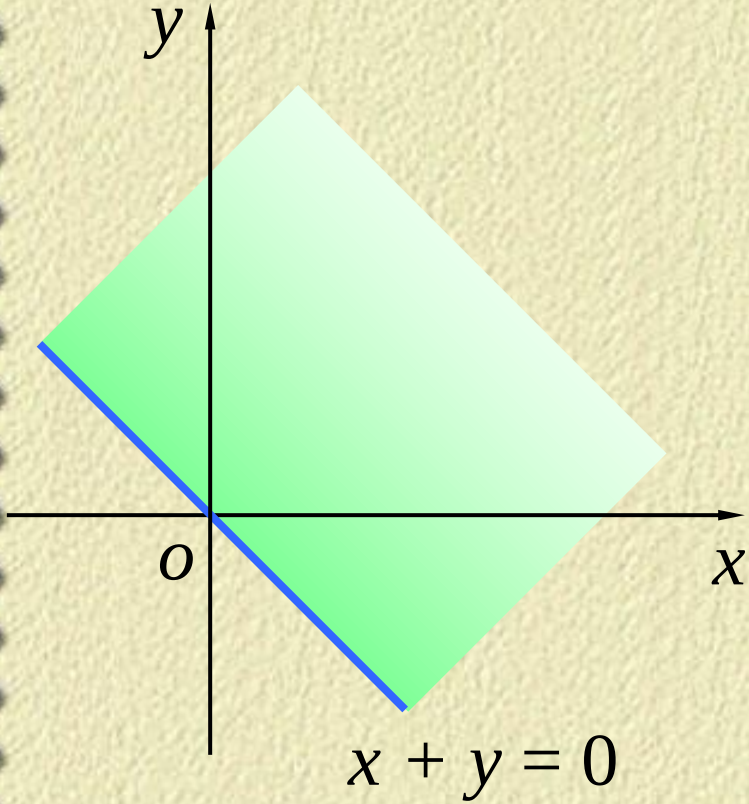
E 连通

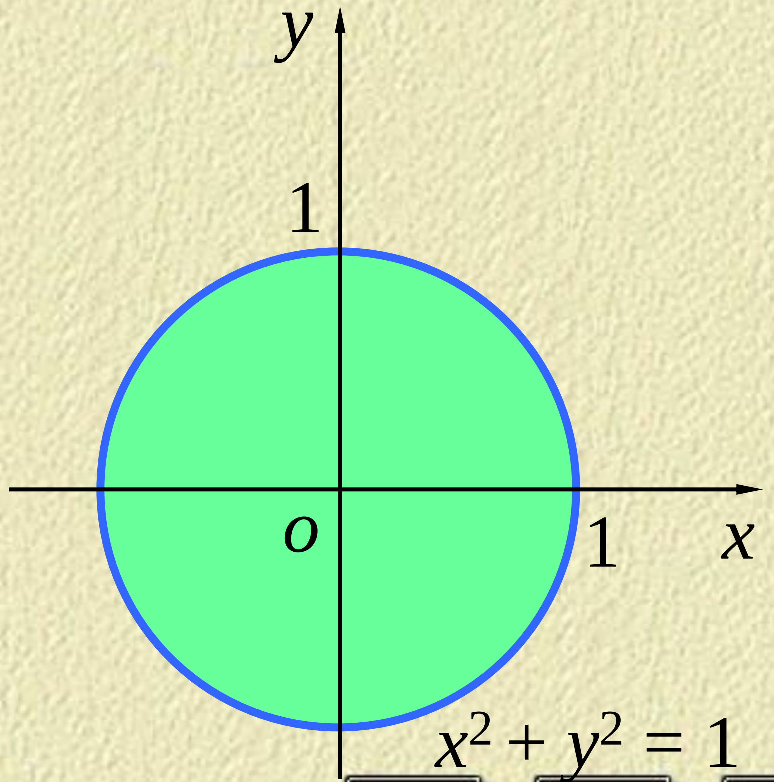


E 不连通

从直观上看, 所谓 E 是连通集, 是指 E 是连成一片的. E 中的点都可用折线连接.

例1, 2中的 D 都是连通集.　如图





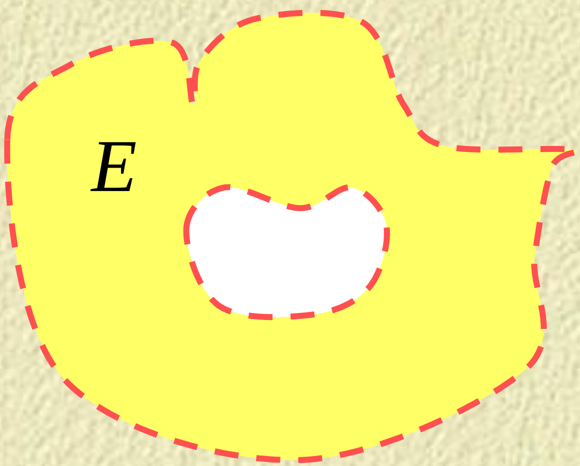
6. 开区域(开域)

设 E 是一平面点集.

若 E 是连通的非空开集, 则称 E 是开区域.

比如，例2中 D 是开区域. 从直观上看，开区域是连成一片的，不包括边界的平面点集.

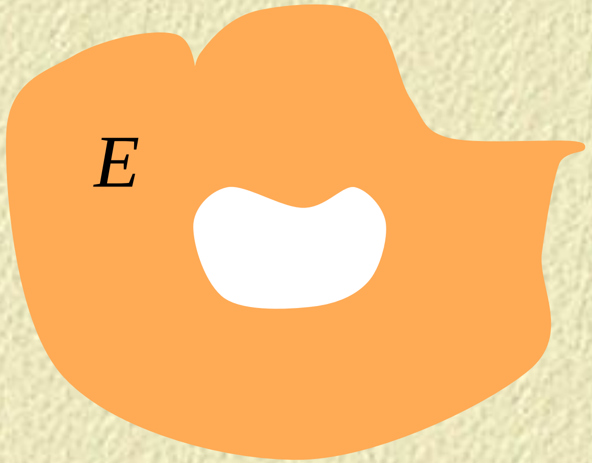
如图.



7. 闭区域（闭域）

若 E 是开域, 记 $\overline{E} = E \cup \partial E = E^0 \cup \partial E$ 称为闭区域.

如图



易见, 例1中的 D 是闭区域. 从直观上看, 闭区域是连成一片的. 包括边界的平面点集.

教材把开区域和闭区域都叫作区域.

上页 下页 返回

8. 设 $E \subseteq R^2$, 若存在 $r > 0$, 使 $E \subseteq U(O, r)$, 则称 E 为有界集. 否则称 E 为无界集.

易见, 例2中 D 是无界集, 它是无界开区域,

而例1中 D 是有界集, 它是有界闭区域.

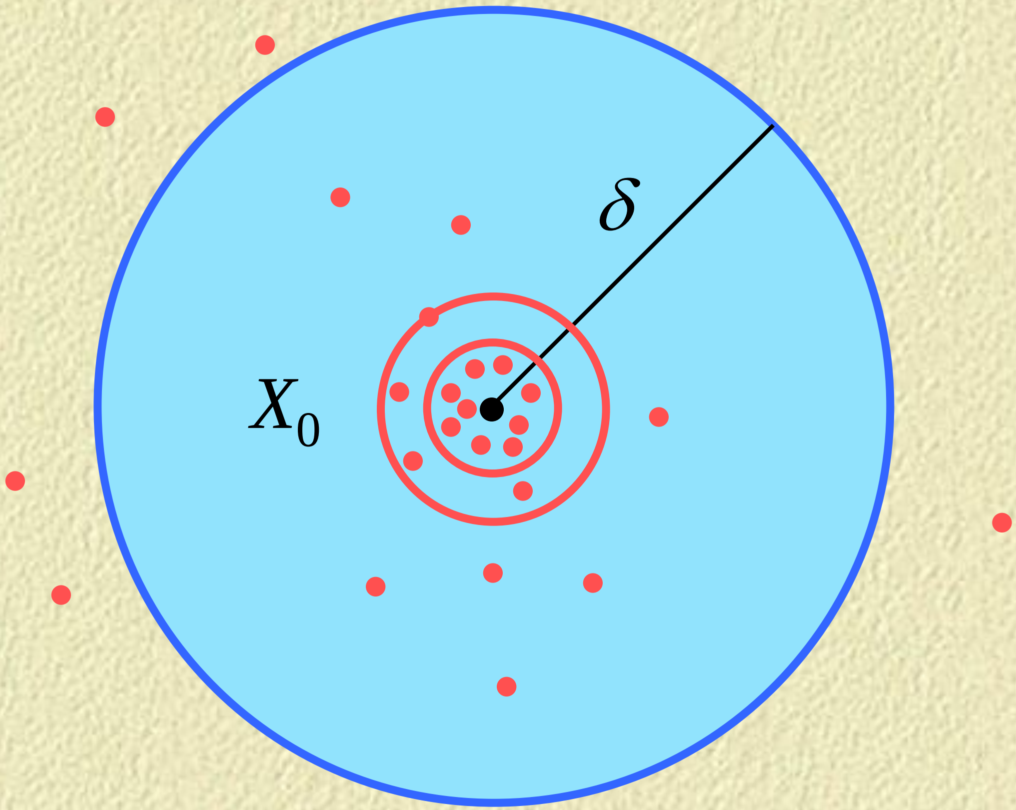
上页 下页 返回

9. 聚点

设 E 是平面点集, X_0 是平面上一个点. 若X_0的任一邻域内总有无限多个点属于 E . 则称 X_0 是E 的一个聚点.

从几何上看, 所谓 X_0 是 E 的聚点是指在 X_0 的附近聚集了无限多个 E 中的点. 即, 在 X_0 的任意近傍都有无限多个 E 中的点.

如图



(1) 聚点定义也可叙述为: 若 X_0 的任一邻域内至少含有 E 中一个异于 X_0 的点. 则称 X_0 为 E 的 一个聚点.

(2) E 的聚点 X_0可能属于 E , 也可能不属于E .

(3) E 的内点一定是 E 的聚点.

(4) 若 E 是开区域. 则 E 中每一点都是 E 的聚点.

若$\bar{E} = E \cup \partial E$为闭区域. 则$\bar{E}$中每一点都是$E$的聚点.
从而是$\bar{E}$的聚点. 即, 区域中的任一点都是该区域的聚点.

一般, 集合 E 的边界点不一定是 E 的聚点.
但若 E 是开集, 则 E 的边界点一定是 E 的聚点。

邻域，内点，边界点，开集，连通，有界，开区域，闭区域，聚点这些概念都可毫无困难地推广到三维空间 R^3 中去，且有类似的几何意义．它们还可推广到 4 维以上的空间中去，但不再有几何意义．

说明：

（1）内点一定是聚点；

（2）边界点可能是聚点；

例如，$\{(x,y) \mid 0 < x^2 + y^2 \le 1\}$

$(0,0)$ 既是边界点也是聚点.

（3）点集E的聚点可以属于E，也可以不属于E.

例如，$\{(x,y) \mid 0 < x^2 + y^2 \le 1\}$

$(0,0)$ 是聚点但不属于集合.

例如，$\{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$

边界上的点都是聚点也都属于集合.

（4）n 维空间

实数 $x \xleftrightarrow{\text{一一对应}}$ 数轴点.

实数全体表示直线(一维空间) R

数组 $(x, y) \xleftrightarrow{\text{一一对应}}$ 平面点

(x, y) 全体表示平面(二维空间) R^2

数组 $(x, y, z) \xleftrightarrow{\text{一一对应}}$ 空间点

(x, y, z) 全体表示空间(三维空间) R^3

推广：

n 维数组 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 全体称为 n 维空间，记为 R^n.

n 维空间中两点间距离公式

设两点为 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $Q(y_1, y_2, \cdots, y_n)$,

$$\|PQ\| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2}.$$

特殊地，当 n =1, 2, 3时，便为数轴、平面、空间两点间的距离.

n 维空间中邻域概念：

$$U(P_0, \delta) = \left\{ P: \|PP_0\| < \delta, P \in R^n \right\}$$

区域、内点、边界点、区域、聚点等概念也可定义.

上页 下页 返回

二、R^2上的完备性定理

定义 1 设$\{P_n\}$（$\subset R^2$为平面点列，$P_0 \in R^2$为一固定点．若对任给的正数ε，存在正整数N，使得当$n > N$时，有$P_n \in U(P_0;\varepsilon)$，则称点列$\{P_n\}$收敛于点$P_0$，记作

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P_0 \quad \text{或} \quad P_n \to P_0,\ n \to \infty.$$

定理 16.1（柯西准则） 平面点列$\{P_n\}$收敛的充要条件是：任给正数ε，存在正整数N，使得当$n>N$时，对一切正整数p，都有

$$\rho(P_n, P_{n+p}) < \varepsilon$$

两点间的距离

上页 下页 返回

三、 多元函数的概念

回忆

设 x 和 y 是两个变量。D 是一个给定的数集，若对于每个数 $x \in D$，变量

y 按照一定法则总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y = f(x)$.

1.二元函数的定义

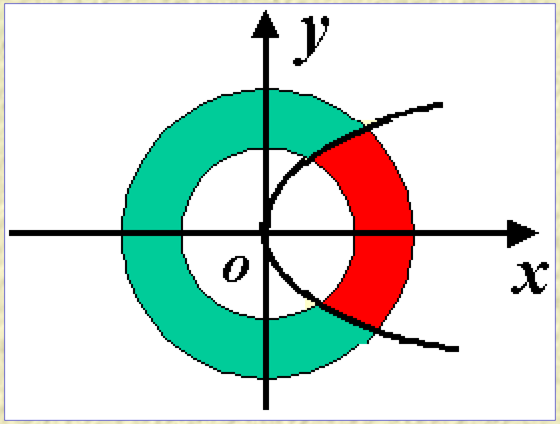
设 D 是平面上的一个点集，如果对于每个点 $P(x, y) \in D$, 变量 z 按照一定的法则总有确定的值和它对应，则称 z 是变量 x, y 的二元函数，记为 $z = f(x, y)$（或记为 $z = f(P)$）.

点集 D ---定义域， x、y ---自变量， z ---因变量.

$W = \{z \mid z = f(x, y), (x, y) \in D\}$ --- 值域.

例1　求 $f(x,y)=\dfrac{\arcsin(3-x^2-y^2)}{\sqrt{x-y^2}}$ 的定义域.

解　$\begin{cases} |3-x^2-y^2|\le 1 \\ x-y^2>0 \end{cases}$



$\Rightarrow \begin{cases} 2\le x^2+y^2\le 4 \\ x>y^2 \end{cases}$

所求定义域为 $D=\{(x,y)\,|\,2\le x^2+y^2\le 4,\ x>y^2\}$.

二元函数 $z = f(x,y)$ 的图形

设函数$z = f(x,y)$的定义域为D，对于任意取定的$P(x,y) \in D$，对应的函数值为$z = f(x,y)$.

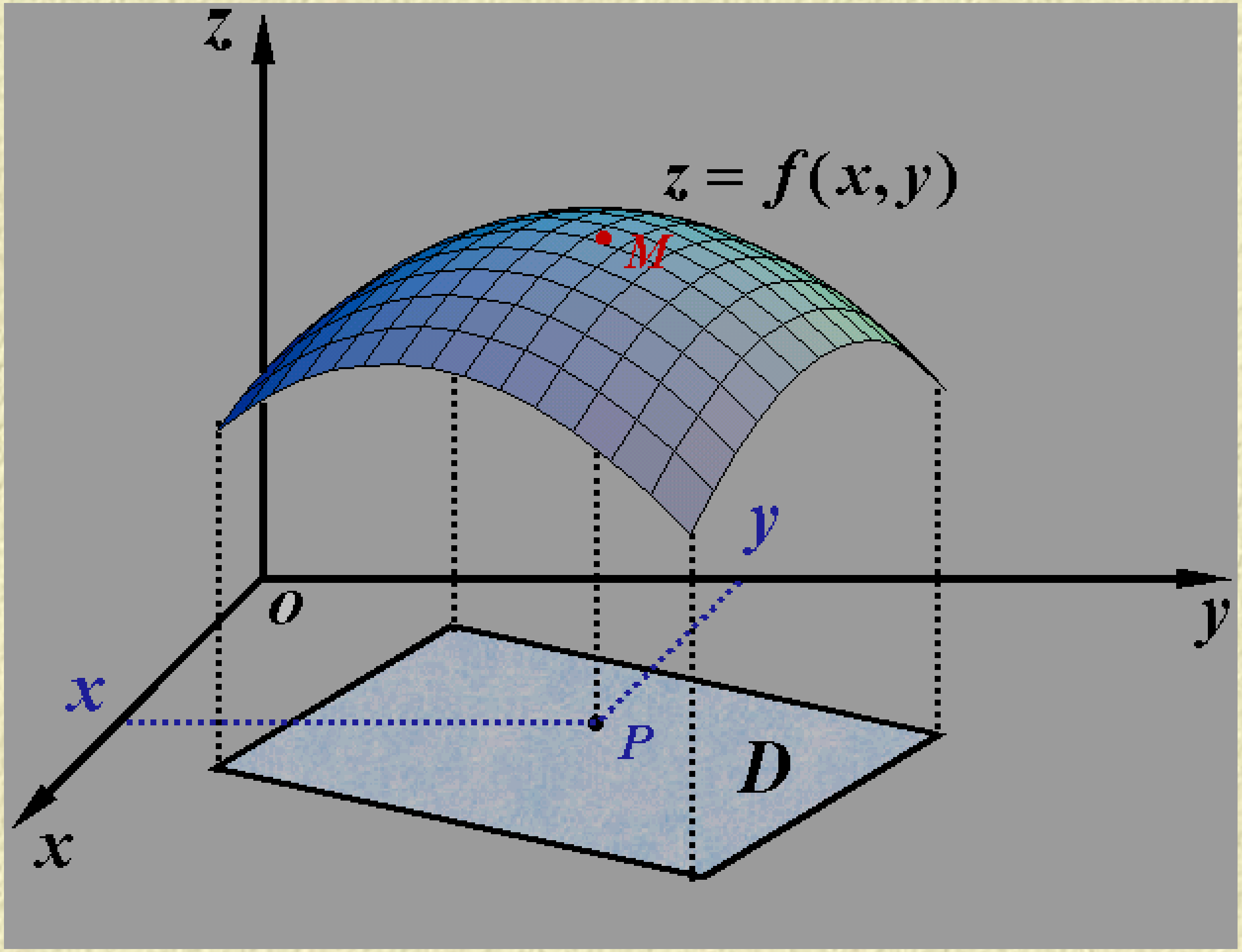
以x为横坐标、y为纵坐标、z为竖坐标在空间就确定一点$M(x,y,z)$，当(x,y)取遍D上一切点时，得一个空间点集

$$\{(x,y,z) \mid z = f(x,y), (x,y) \in D\},$$

这个点集称为二元函数的图形.

（如下页图）

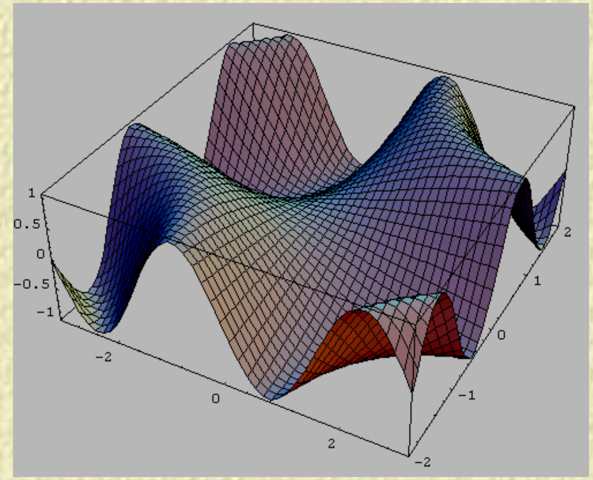
上页 下页 返回



二元函数的图形通常是一张曲面.

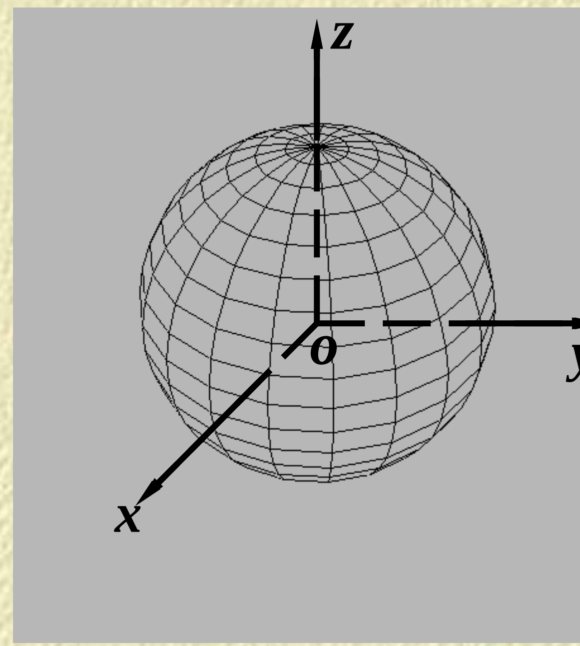
例如 $z = \sin xy$

图形如右图.



例如 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

左图球面.



$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le a^2\}$$

单值 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$

分支: $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$

2.多元函数的概念

定义　设D是R^n的一个非空子集，从D到实数集R的任一映射f称为定义在D上的一个n元（实值）函数，记作$f : D \subset R^n \to R$

或$y = f(x) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n), x \in D$

其中$x_1, x_2, \cdots, x_n$称为自变量，y称为因变量，D称为函数f的定义域，$f(D) = \{f(x) | x \in D\}$称为函数$f$的值域，并且称$R^{n+1}$中的子集$\{(x_1, x_2, \cdots, x_n, y) | y = f(x), x \in D\}$为函数$y = f(x)$（在$D$上）的图形（或图像）。