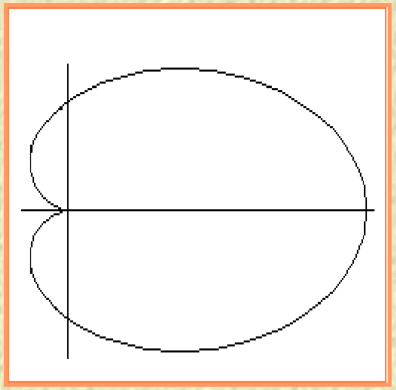
一个旋转体体积计算有力的公式

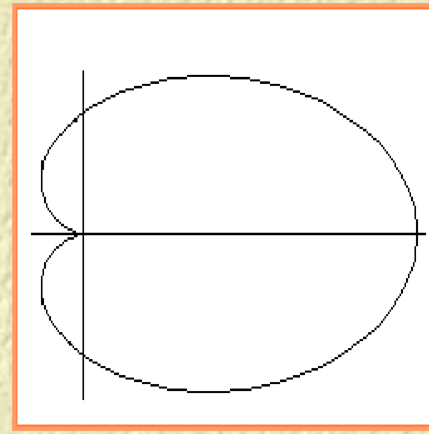
……*Guldin*第二定理.

$P229/Ex2.(3).$ 求心形线$r=a(1+\cos\theta)$所围成图形绕极轴旋转一周所成立体的体积 $(a>0)$.



上页 下页 返回

P229/Ex2.(3). 求心形线$r=a(1+\cos\theta)$所围成图形绕极轴旋转一周所成立体的体积 $(a>0)$.



解 $r=a(1+\cos\theta)\ge 0,\theta\in[0,2\pi]_{or}[-\pi,\pi]$,

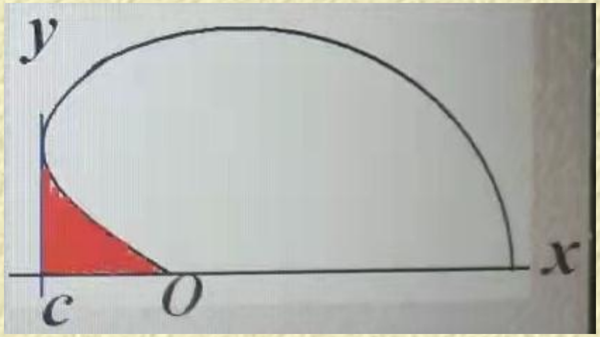
在普通直角坐标系中,由旋转体体积计算公式,

先求出图形中点横坐标的最小值c:

$$x=r\cos\theta=a(1+\cos\theta)\cos\theta,\text{由}\frac{dx}{d\theta}=0\text{解得}\theta=\frac{2\pi}{3}.\theta=\frac{2\pi}{3}\text{时}x=c.$$

$$\therefore V_x=\pi\int_c^{2a}y_1^2dx-\pi\int_c^{0}y_2^2dx\ ,$$

其中,
$$\begin{cases} x=a(1+\cos\theta)\cos\theta,\theta\in[0,\pi] \\ y_1=a(1+\cos\theta)\sin\theta,\theta\in\left[0,\dfrac{2\pi}{3}\right] \\ y_2=a(1+\cos\theta)\sin\theta,\theta\in\left[\dfrac{2\pi}{3},\pi\right] \end{cases}$$



上页 下页 返回

解 $r=a(1+\cos\theta)\geq 0,\theta\in[0,2\pi]_{or}[-\pi,\pi],$

$$\theta=\frac{2\pi}{3}\text{时}x=c.\text{设}\begin{cases} x=a(1+\cos\theta)\cos\theta,\theta\in[0,\pi] \\ y_1=a(1+\cos\theta)\sin\theta,\theta\in\left[0,\frac{2\pi}{3}\right], \\ y_2=a(1+\cos\theta)\sin\theta,\theta\in\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right] \end{cases}$$

$$\therefore V_x=\pi\int_c^{2a}y_1^2dx-\pi\int_c^0 y_2^2dx$$

$$=\pi a^3\int_{\frac{2\pi}{3}}^0(1+\cos\theta)^2\sin^2\theta(-\sin\theta-2\cos\theta\sin\theta)d\theta$$

$$-\pi a^3\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}(1+\cos\theta)^2\sin^2\theta(-\sin\theta-2\cos\theta\sin\theta)d\theta$$

$$=\pi a^3\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^2(1+2\cos\theta)\sin^3\theta d\theta=\cdots=\frac{8}{3}\pi a^3.$$

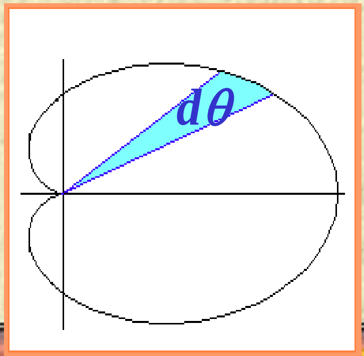
$P229/Ex2.(3)$.求心形线$r=a(1+\cos\theta)$所围成图形绕极轴旋转一周所成立体的体积 $(a>0)$.

法二 如图,取极角为$[\theta,\theta+d\theta]$的小曲边扇形,$d\theta$足够小,则小曲边扇形近似看作等腰Δ,

其形心坐标为$\left(\frac{2}{3}r,\theta\right)$,小扇形面积$=\frac{1}{2}r^2d\theta$,

小曲边扇形绕极轴旋转一周,得体积微元

$$dV=2\pi\cdot\frac{2}{3}r\sin\theta\cdot\frac{1}{2}r^2d\theta,$$



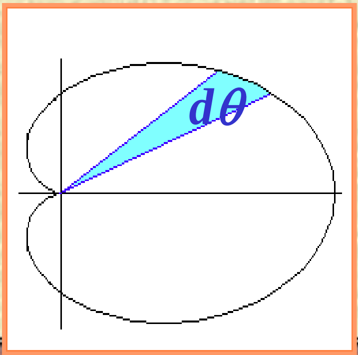
小曲边扇形绕极轴旋转一周,得体积微元

$$dV = 2\pi \cdot \frac{2}{3} r \sin\theta \cdot \frac{1}{2} r^2 d\theta \ ,$$

Guldin第二定理:一个平面区域绕同平面内一条不穿过区域的轴旋转一周所成立体的体积,等于区域面积乘以区域形心绕轴旋转一周所成轨迹的长度.

$$\therefore V = \int_0^{\pi} dV = \frac{2}{3}\pi a^3 \int_0^{\pi} (1+\cos\theta)^3 \sin\theta d\theta$$

$$= -\frac{2}{3}\pi a^3 \cdot \frac{1}{4}(1+\cos\theta)^4 \Big|_0^{\pi} = \frac{8}{3}\pi a^3 .$$



上页 下页 返回

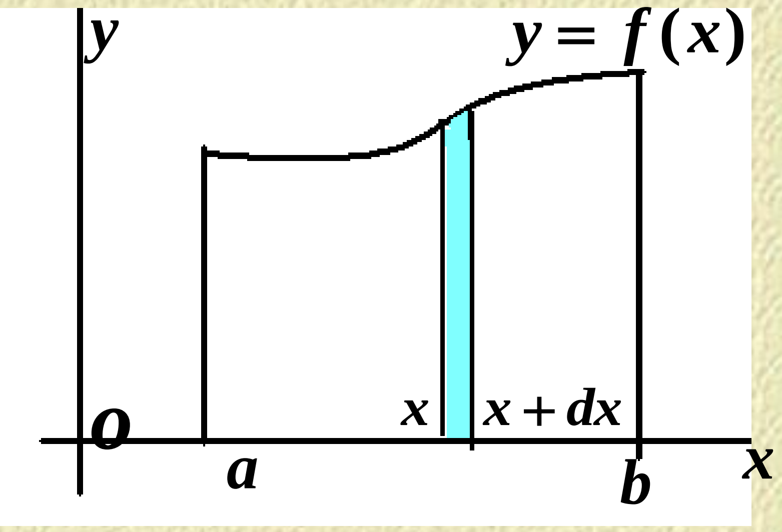
***Guldin*第二定理：**

一个平面区域绕同平面内一条不穿过区域的轴旋转一周所成立体的体积，等于区域面积乘以区域形心绕轴旋转一周所成轨迹的长度.

下面稍作解释

计算由平面图形$0 \le a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)$

绕y轴旋转所成的旋转体的体积V_y.



如图,小曲边梯形绕着y轴旋转一周所成的立体我们称为圆柱壳,该柱壳的体积就是旋转体的体积微元,$dV = 2\pi x f(x)dx$

这是理解为沿着平行于y轴的方向把柱壳剖开摊平,该柱壳的体积就近似于一个长方体的体积:长$2\pi x$宽$f(x)$高dx.

柱(壳)切法

这是理解为沿着平行于y轴的方向把柱壳剖开摊平,该柱壳的体积就近似于一个长方体的体积:长$2\pi x$宽$f(x)$高dx,

$$dV = 2\pi x f(x) dx$$

把所有的柱壳的体积累积起来,就是

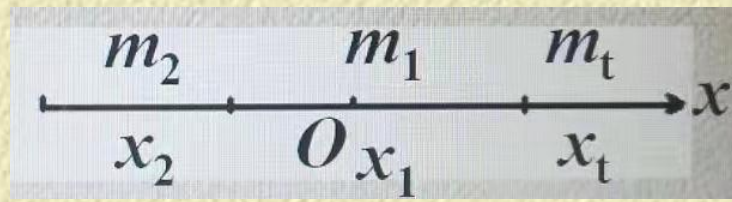
$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$$

想象那种京葱的生理结构——(鳞茎结构)——由一层一层的组织叠加而成.

上页 下页 返回

如果现在我们将一轻质刚性的杆子放置在一数轴上,在该杆子上坐标分别为$x_1, x_2, \cdots, x_n$的地方放置质量依次为$m_1, m_2, \cdots, m_n$的质点,那么这些质点的重力相对于坐标轴原点O产生的力矩就是

$$M_O = g\sum_{k=1}^{n} m_k x_k \ ,$$



设该质点系统的质心坐标为$\bar{x}$,那么有

$$g\left(\sum_{k=1}^{n} m_k x_k\right) = g\left(\sum_{k=1}^{n} m_k\right)\bar{x} \ .$$

上页 下页 返回

$$\therefore \bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{m_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k} \right) x_k,$$ 这就是加权平均.

那么,如果现在有一质地不均匀的直线状物体其质量连续地分布在一带数轴的轻质刚性杆子上,该物体的线密度为

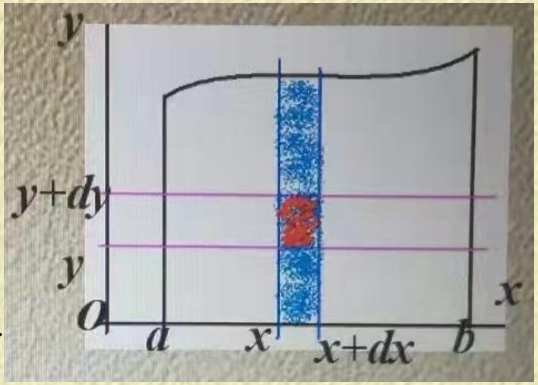
$$\rho = \rho(x) \geq 0, x \in [a,b].$$

利用微元法的方法,将前面离散形式的结果连续化,于是就知上述线物体的质心坐标为

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x\rho(x)dx}{\int_a^b \rho(x)dx} .$$

上页 下页 返回

现有平面图形 $0 \le a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)$.若有一以此为形的平面薄片,面密度$\rho = 1$.此物关于$x$轴的力矩$M_x$,关于$y$轴的力矩$M_y$.先取一位于$[x, x+dx]$的小曲边梯形,再取其中位于$[y, y+dy]$的一小矩形,此小矩形片关于$x$轴的力矩微元 $y\rho dxdy$,



$\therefore$ 小曲边梯形关于x轴的力矩微元为

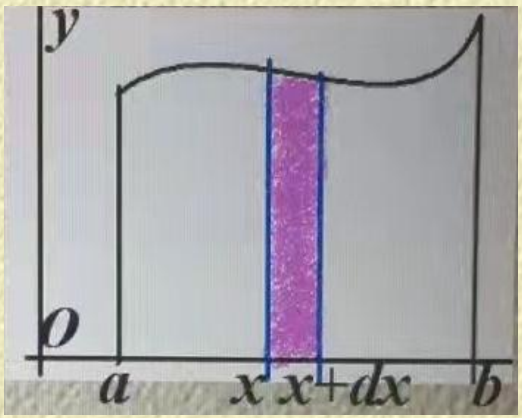
$$dM_x = \int_0^{f(x)} y\rho dxdy = \rho dx\int_0^{f(x)} ydy = \frac{1}{2}\rho f^2(x)dx,$$

于是,该平面薄片关于x轴的力矩为

$$M_x = \int_a^b dM_x = \frac{1}{2}\rho\int_a^b f^2(x)dx.$$

上页 下页 返回

取一位于$[x, x+dx]$的小曲边梯形,则此小曲边梯形关于y轴的力矩微元为



$$dM_y = \rho x f(x) dx,$$

$\therefore$ 该平面薄片关于y 轴的力矩为

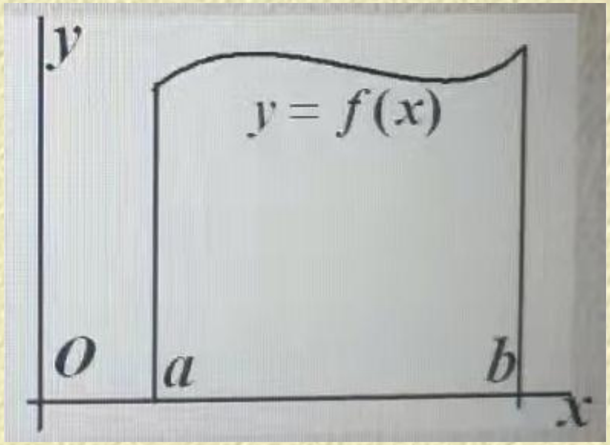
$$M_y = \int_a^b dM_y = \rho \int_a^b x f(x) dx.$$

又,该平面图形分别绕x轴,y 轴旋转一周所成的旋转体体积为

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx, V_y = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$

设平面图形 $0 \le a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)$ 的质心坐标为(x_c, y_c),此平面薄片面密度$\rho = 1$,则平面薄片质量为

$$M = \rho \int_a^b f(x)dx > 0,$$



$$\therefore \begin{cases} x_c = \dfrac{M_y}{M} = \dfrac{\int_a^b x f(x)dx}{\int_a^b f(x)dx} \\ y_c = \dfrac{M_x}{M} = \dfrac{\int_a^b f^2(x)dx}{2\int_a^b f(x)dx} \end{cases}.$$

上页 下页 返回

平面图形 $0 \le a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)$,
密度$\rho = 1$ 的以此为形的平面薄片

关于x轴的力矩 $M_x = \frac{1}{2}\rho\int_a^b f^2(x)dx$,

关于y 轴的力矩 $M_y = \rho\int_a^b xf(x)dx$.

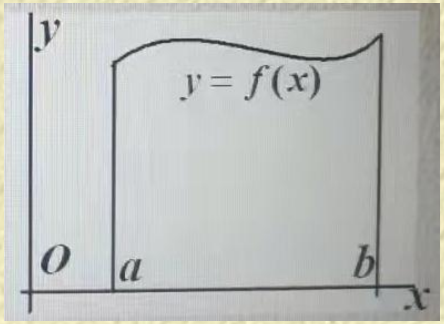
又,该平面图形分别绕x轴,y 轴旋转一周所成的旋转体体积为

$$V_x = \pi\int_a^b f^2(x)dx, V_y = 2\pi\int_a^b xf(x)dx.$$

上页 下页 返回

平面图形 $0 \le a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)$分别绕$x$ 轴,y轴旋转一周所成旋转体体积为

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)dx \ , V_y = 2\pi \int_a^b xf(x)dx.$$



该图形的质心(形心)坐标为(x_c, y_c),

$$x_c = \frac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}, y_c = \frac{\int_a^b f^2(x)dx}{2\int_a^b f(x)dx}.$$

由此可得 *Guldin*第二定理:

平面图形 $0 \le a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)$形心为$(x_c, y_c)$,则该平面图形分别绕$x$ 轴,y 轴旋转一周所成旋转体体积V_x, V_y依次为

$$V_x = 2\pi y_c \cdot A \ , \ V_y = 2\pi x_c \cdot A \ ,$$

其中A为该平面图形的面积.

上页 下页 返回

不难看出,对于图形 $0 \le a \le x \le b, 0 \le g(x) \le y \le f(x)$,

同样有 *Guldin* 第二定理:

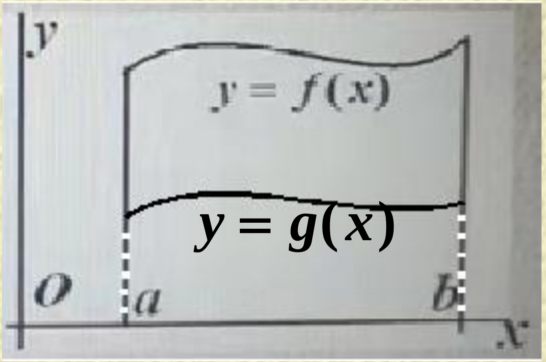
平面图形 $0 \le a \le x \le b, 0 \le g(x) \le y \le f(x)$ 形心为 (x_c, y_c),

则该平面图形分别绕 x 轴, y 轴旋转一周所成旋转体

体积 V_x, V_y 依次为

$$V_x = 2\pi y_c \cdot A\ ,\ V_y = 2\pi x_c \cdot A\ ,$$

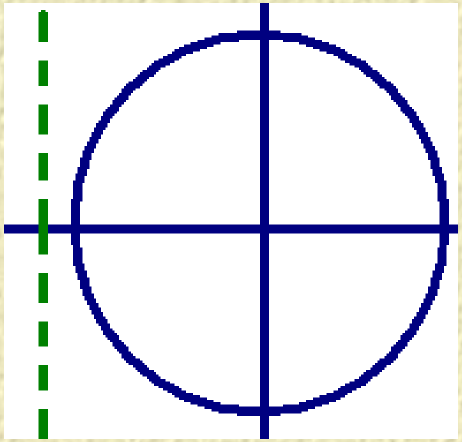
其中 A 为该平面图形的面积.

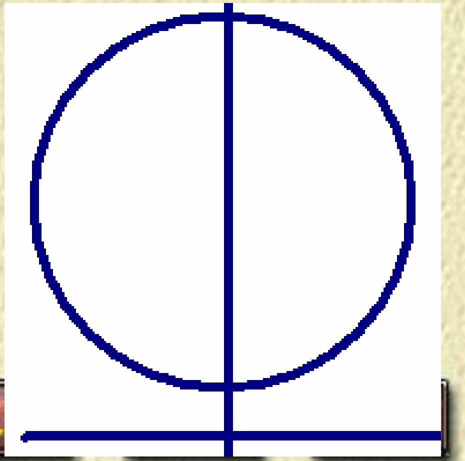


上页 下页 返回

看前例,求由$x^2+y^2=a^2$围成的图形绕$x=-b$ $(b>a>0)$旋转一周所成的立体的体积.

解　很明显,由$x^2+y^2=a^2$围成的图形绕$x=-b(b>a>0)$旋转一周所成的立体,就是由$x^2+(y-b)^2=a^2$绕x轴旋转一周所成的立体.





求由$x^2+(y-b)^2=a^2\ (b>a>0)$围成的图形绕x轴旋转一周所成立体的体积.

$$V=\pi\int_{-a}^{a}\left(b+\sqrt{a^2-x^2}\right)^2dx-\pi\int_{-a}^{a}\left(b-\sqrt{a^2-x^2}\right)^2dx$$

$$=\pi\int_{-a}^{a}\left[\left(b+\sqrt{a^2-x^2}\right)^2-\left(b-\sqrt{a^2-x^2}\right)^2\right]dx$$

$$=\pi\int_{-a}^{a}2b\cdot2\sqrt{a^2-x^2}dx$$

$$=4b\pi\cdot\frac{1}{2}\pi a^2=2\pi^2a^2b,$$

$V=2\pi b\cdot\pi a^2,$

对照 *Guldin*第二定理,信然.