

南京农业大学本科生课程

离散数

学

∴ 第1章 命题逻辑基本概念



数学系

∴ 本章说明

□ 本章的主要内容

- 命题、联结词、复合命题
- 命题公式、赋值、命题公式的分类

□ 本章与后续各章的关系

- 本章是后续各章的准备或前提

∴ 1.1 命题与联结词

- 数理逻辑研究的**中心问题**是推理。
- 推理的**前提**和**结论**都是表达判断的陈述句。
- 表达判断的陈述句构成了推理的**基本单位**。

∴ 1.1 命题与联结词

- 称能判断真假而不是可真可假的陈述句为**命题** (*proposition*)。
- 作为命题的陈述句所表达得的判断结果称为命题的**真值**。
- **真值只取两个**：真与假。
- 真值为真的命题称为**真命题**。
- 真值为假的命题称为**假命题**。

说明

- 感叹句、疑问句、祈使句都不能称为命题。
- 判断结果不唯一确定的陈述句不是命题。
- 陈述句中的悖论不是命题。

∴ 例1.1 判断下列句子是否为命题。

(1) 4是素数。

(1) 是，假命题

(2) $\sqrt{2}$ 是无理数

(2) 是，真命题

(3) x 大于 y 。

(3) 不是，无确定的真值

(4) 充分大的偶数等于两个素数之和。

(4) 是，真值客观存在

(5) 今天是星期二。

(5) 是，真值根据具体情况而定。

(6) π 大于 $\sqrt{2}$ 吗？

(6) 不是，疑问句

(7) 请不要吸烟！

(7) 不是，祈使句

(8) 这朵花真美丽啊！

(8) 不是，感叹句

(9) 我正在说假话。

(9) 不是，悖论

∴ 命题和真值的符号化

□ 用小写英文字母 $p, q, r, \dots, p_i, q_i, r_i, \dots$ 表示命题

□ 用 “1” 表示真，用 “0” 表示假

p : 4是素数。

r : 充分大的偶数等于两个素数之和。

q : $\sqrt{2}$ 是无理数

s : 今天是星期二。

□ 不能被分解成更简单的陈述句，称这样的命题为**简单命题**或**原子命题**。

□ 由简单陈述句通过联结词而成的陈述句，称这样的命题为**复合命题**。

∴ 例1.2

将下面这段陈述中所出现的原子命题符号化，并指出它们的真值，然后再写出这段陈述。

$\sqrt{2}$ 是有理数是不对的；2是偶素数；2或4是素数；如果2是素数，则3也是素数；2是素数当且仅当3也是素数。

p : $\sqrt{2}$ 是有理数 0

q : 2是素数； 1

r : 2是偶数 1

s : 3是素数； 1

t : 4是素数 0

非 p ；

q 并且(与) r ；

q 或 t ；

如果 q ，则 s ；

q 当且仅当 s 。

∴ 例1.2的讨论

□ 半形式化形式

□ 数理逻辑研究方法的主要特征是将论述或推理中的**各种要素都符号化**。即构造各种符号语言来代替自然语言。

□ **形式化语言**：完全由符号所构成的语言。

□ 将联结词 (*connective*) 符号化，消除其二义性，对其进行严格定义。

□ 例如： 他是100米或400米赛跑的冠军。
鱼香肉丝或锅包肉，加一碗汤。

∴ 定义1.1 否定(*negation*)

□ 设 p 为命题，复合命题“非 p ”（或“ p 的否定”）称为 p 的否定式，记作 $\neg p$ ，符号 \neg 称作否定联结词，并规定 $\neg p$ 为真当且仅当 p 为假。

p	$\neg p$
1	0
0	1

例如： p ： 哈尔滨是一个大城市。

$\neg p$ ： 哈尔滨是一个不大城市。

$\neg p$ ： 哈尔滨不是一个大城市。

∴ 定义1.2 合取(*conjunction*)

□ 设 p, q 为二命题，复合命题“ p 并且 q ”（或“ p 与 q ”）称为 p 与 q 的**合取式**，记作 $p \wedge q$ ， \wedge 称作**合取联结词**，并规定 **$p \wedge q$ 为真当且仅当 p 与 q 同时为真**。

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

使用合取联结词时要注意的两点：

- 1) 描述合取式的灵活性与多样性。
自然语言中的“既……又……”、“不但……而且……”、“虽然……但是……”、“一面……一面……”等联结词都可以符号化为 \wedge 。
- 2) 分清简单命题与复合命题。
不要见到“与”或“和”就使用联结词 \wedge 。

:: 例1.3 将下列命题符号化

- (1) 吴颖既用功又聪明。
- (2) 吴颖不仅用功而且聪明。
- (3) 吴颖虽然聪明，但不用功。
- (4) 张辉与王丽都是三好学生。
- (5) 张辉与王丽是同学。

- p: 吴颖用功。
- q: 吴颖聪明。
- r: 张辉是三好学生。
- s: 王丽是三好学生。
- t: 张辉与王丽是同学。

解题要点:

正确理解命题含义。
找出原子命题并符号化。
选择恰当的联结词。

- (1) $p \wedge q$
- (2) $p \wedge q$
- (3) $q \wedge \neg p$
- (4) $r \wedge s$
- (5) t

∴ 合取举例

□ p : 我们去看电影。

q : 房间里有十张桌子。

$p \wedge q$: 我们去看电影并且房间里有十张桌子。

说明

在数理逻辑中，关心的只是复合命题与构成复合命题的各原子命题之间的真值关系，即抽象的逻辑关系，并不关心各语句的具体内容。

∴ 定义1.3 析取(*disjunction*)

□ 设 p , q 为二命题, 复合命题“ p 或 q ”称作 p 与 q 的析取式, 记作 $p \vee q$, \vee 称作析取联结词, 并规定 $p \vee q$ 为假当且仅当 p 与 q 同时为假。

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

说明

自然语言中的“或”具有二义性, 用它联结的命题有时具有相容性, 有时具有排斥性, 对应的联结词分别称为相容或和排斥或(排异或)。

∴ 例1.4 将下列命题符号化

- (1) 张晓静爱唱歌或爱听音乐。
- (2) 张晓静只能挑选202或203房间。
- (3) 张晓静是江西人或安徽人。
- (4) 他昨天做了二十或三十道习题。

(1) 设 p : 张晓静爱唱歌, q : 张晓静爱听音乐。
相容或, 符号化为 $p \vee q$

(2) 设 t : 张晓静挑选202房间, u : 张晓静挑选203房间。
排斥或, 符号化为: $(t \wedge \neg u) \vee (\neg t \wedge u)$

(3) 设 r : 张晓静是江西人, s : 张晓静是安徽人。
排斥或, 符号化为: $r \vee s$ 。

(排斥或联结的两个命题事实上不可能同时为真)
或符号化为: $(r \wedge \neg s) \vee (\neg r \wedge s)$

(4) 原子命题, 因为“或”只表示了习题的近似数目。



析取联结词的实例

□ 例 将下列命题符号化

□ (1) 2 或 4 是素数.

□ (2) 2 或 3 是素数.

□ (3) 4 或 6 是素数.

□ (4) 小元元只能拿一个苹果或一个梨.

□ (5) 王小红生于 1975 年或 1976 年.



析取联结词的实例

□ 解

□ (1) 令 p :2是素数, q :4是素数, $p \vee q$

□ (2) 令 p :2是素数, q :3是素数, $p \vee q$

□ (3) 令 p :4是素数, q :6是素数, $p \vee q$

□ (4) 令 p :小元元拿一个苹果, q :小元元拿一个梨

□ $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

□ (5) p :王小红生于 1975 年, q :王小红生于1976 年,

□ $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ 或 $p \vee q$

□ (1)—(3) 为相容或

□ (4)—(5) 为排斥或, 符号化时(5)可有两种形式, 而(4)则不能

::: 定义1.4 蕴涵(*implication*)

- 设 p, q 为二命题，复合命题“如果 p ，则 q ”称作 p 与 q 的**蕴涵式**，记作 $p \rightarrow q$ ，并称 p 是蕴涵式的**前件**， q 为蕴涵式的**后件**， \rightarrow 称作**蕴涵联结词**，并规定 $p \rightarrow q$ 为假当且仅当 p 为真 q 为假。

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

说明

- $p \rightarrow q$ 的逻辑关系表示 q 是 p 的必要条件。
- q 是 p 的必要条件有许多不同的叙述方式
 - 只要 p ，就 q
 - 因为 p ，所以 q
 - p 仅当 q
 - 只有 q 才 p
 - 除非 q 才 p
 - 除非 q ，否则非 p

∴ 例1.5 将下列命题符号化，并指出其真值

- (1) 如果 $3+3=6$ ，则雪是白的。
- (2) 如果 $3+3\neq 6$ ，则雪是白的。
- (3) 如果 $3+3=6$ ，则雪不是白的。
- (4) 如果 $3+3\neq 6$ ，则雪不是白的。

解：令 p ： $3+3=6$ ， p 的真值为1。

q ： 雪是白色的， q 的真值也为1。

$$(1) \quad p \rightarrow q \qquad 1$$

$$(2) \quad \neg p \rightarrow q \qquad 1$$

$$(3) \quad p \rightarrow \neg q \qquad 0$$

$$(4) \quad \neg p \rightarrow \neg q \qquad 1$$

∴ 例1.5 将下列命题符号化，并指出其真值

以下命题中出现的 a 是一个给定的正整数：

(5) 只要 a 能被4整除，则 a 一定能被2整除。

(6) a 能被4整除，仅当 a 能被2整除。

(7) 除非 a 能被2整除， a 才能被4整除。

(8) 除非 a 能被2整除，否则 a 不能被4整除。

(9) 只有 a 能被2整除， a 才能被4整除。

(10) 只有 a 能被4整除， a 才能被2整除。

解：令 r ： a 能被4整除 s ： a 能被2整除

(5) 至 (9) 五个命题均叙述的是 a 能被2整除是 a 能被4整除的必要条件，因而都符号化为 $r \rightarrow s$ 。其真值为1

在(10)中，将 a 能被4整除看成了 a 能被2整除的必要条件，因而应符号化为 $s \rightarrow r$ 。 a 值不定时，真值未知。

∴ 关于蕴含的进一步说明

- 作为一种规定，当 p 为假时，无论 q 是真是假， $p \rightarrow q$ 均为真。也就是说，只有 p 为真 q 为假这一种情况使得复合命题 $p \rightarrow q$ 为假。称为**实质蕴含**。
- 例：如果 $x > 5$ ，则 $x > 2$ 。
 - (1) $x=6$ 如果 $6 > 5$ ，则 $6 > 2$ 。
 - (2) $x=3$ 如果 $3 > 5$ ，则 $3 > 2$ 。
 - (3) $x=1$ 如果 $1 > 5$ ，则 $1 > 2$ 。
- 例：如果我有车，那么我去接你
- 常出现的错误，没有分清充分条件与必要条件。



蕴涵联结词的实例

□ 例 设 p : 天冷, q : 小王穿羽绒服, 将下列命题符号化

□ (1) 只要天冷, 小王就穿羽绒服. $p \rightarrow q$

□ (2) 因为天冷, 所以小王穿羽绒服. $p \rightarrow q$

□ (3) 若小王不穿羽绒服, 则天不冷. $p \rightarrow q$

□ (4) 只有天冷, 小王才穿羽绒服. $q \rightarrow p$

□ (5) 除非天冷, 小王才穿羽绒服. $q \rightarrow p$

□ (6) 除非小王穿羽绒服, 否则天不冷. $p \rightarrow q$

□ (7) 如果天不冷, 则小王不穿羽绒服. $q \rightarrow p$

□ (8) 小王穿羽绒服仅当天冷的时候. $q \rightarrow p$

注意: $p \rightarrow q$ 与 $\neg q \rightarrow \neg p$ 等值 (真值相同)

∴ 定义1.5 等价(*two-way-implication*)

- 设 p, q 为二命题，复合命题“ p 当且仅当 q ”称作 p 与 q 的**等式式**，记作 $p \leftrightarrow q$ ，称作**等价联结词**，并规定 $p \leftrightarrow q$ 为真当且仅当 p 与 q 同时为真或同时为假。

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

说明

- “当且仅当” (*if and only if*)
- $p \leftrightarrow q$ 的逻辑关系为 p 与 q 互为充分必要条件。
- $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ 与 $p \leftrightarrow q$ 的逻辑关系完全一致。

∴ 例1.6 将下列命题符号化，并讨论它们的真值

- (1) π 是无理数当且仅当加拿大位于亚洲。
- (2) $2+3=5$ 的充要条件是 π 是无理数。
- (3) 若两圆A, B的面积相等, 则它们的半径相等; 反之亦然。
- (4) 当王小红心情愉快时, 她就唱歌; 反之, 当她唱歌时, 一定心情愉快。

(1) 设 p : π 是无理数, q : 加拿大位于亚洲。

符号化为 $p \leftrightarrow q$, 真值为0。

(2) 设 p : $2+3=5$, q : π 是无理数。

符号化为 $p \leftrightarrow q$, 真值为1。

(3) 设 p : 两圆A, B的面积相等, q : 两圆A, B的半径相等。

符号化为 $p \leftrightarrow q$, 真值为1。

(4) 设 p : 王小红心情愉快, q : 王小红唱歌。

符号化为 $p \leftrightarrow q$, 真值由具体情况而定。

::: 关于基本联结词的说明

- $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, 称为一个联结词集。
- 由联结词集 $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ 中的一个联结词联结一个或两个原子命题组成的复合命题是最简单的复合命题, 可以称它们为**基本的复合命题**。
- 基本复合命题的真值见下表:

p q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
0 0	1	0	0	1	1
0 1	1	0	1	1	0
1 0	0	0	1	0	0
1 1	0	1	1	1	1

::: 关于基本联结词的说明

- 多次使用联结词集中的联结词，可以组成更为复杂的复合命题。
- 求复杂复合命题的真值时，除依据上表外，还要规定联结词的优先顺序，将括号也算在内。
- 本书规定的联结词优先顺序为：()， \neg ， \wedge ， \vee ， \rightarrow ， \leftrightarrow ，对于同一优先级的联结词，先出现者先运算。

∴ 例1.7

令 p : 北京比天津人口多。

q : $2 + 2 = 4$.

r : 乌鸦是白色的。

解: p 、 q 、 r 的真值分别为

1、1、0

求下列复合命题的真值:

(1) $((\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)) \rightarrow r$ (1) 1

(2) $(q \vee r) \rightarrow (p \rightarrow \neg r)$ (2) 1

(3) $(\neg p \vee r) \leftrightarrow (p \wedge \neg r)$ (3) 0

说明

我们关心的是复合命题中命题之间的真值关系，而不关心命题的内容。