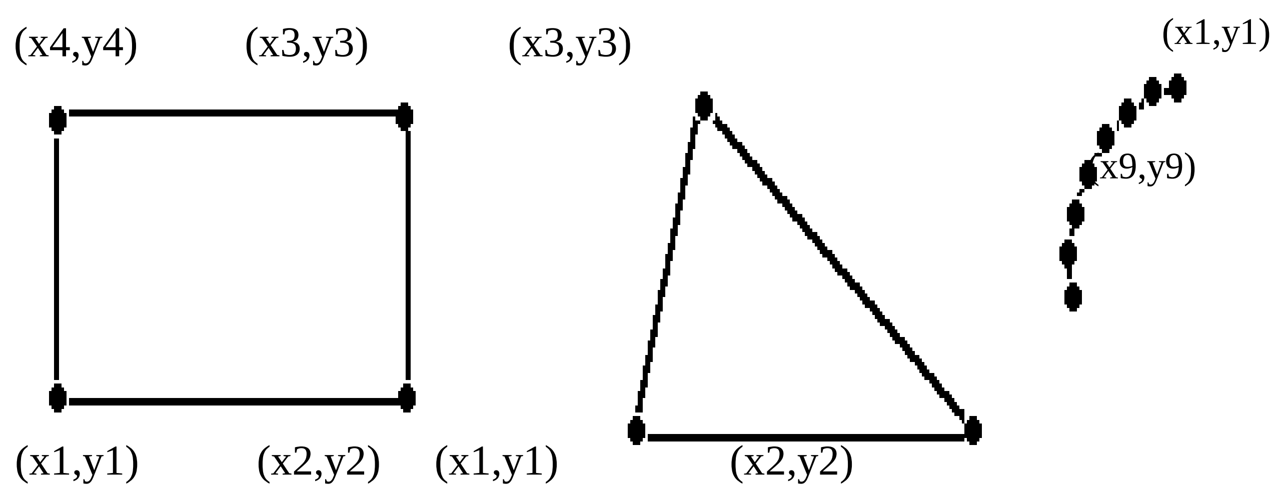
第五章二维图形的变换

南京农业大学
谢忠红

几何变换的**矩阵**表示形式

- **点是构成二维图形的几何元素**
- 说明：二维图形的轮廓线不论是由直线段组成（多边形）还是由曲线段组成，都是可以用它轮廓线上顺序排列的平面点集来描述。例：



图形变换的矩阵表示

•例：比例变换（在x方向上比例系数a,在y方向上比例系数d）

原来的图形矩阵 $\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} ? \end{bmatrix} =$ 比例变换后的图形矩阵 $\begin{bmatrix} ax_1 & dy_1 \\ \vdots & \vdots \\ ax_2 & dy_2 \\ ax_n & dy_n \end{bmatrix}$

- 变换后的图形矩阵

原图坐标矩阵　变换矩阵　变换后坐标矩阵

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + c\,y_1 & b\,x_1 + d\,y_1 \\ ax_2 + c\,y_2 & bx_2 + dy_2 \\ \vdots & \vdots \\ ax_n + cy_n & bx_n + dy_n \end{pmatrix}$$

$$X' = aX + cY$$

$$Y' = bX + dY$$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X'} & \mathbf{Y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{Y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{aX+cY} & \mathbf{bX+dY} \end{pmatrix}$$

$$X' = aX + cY$$

$$Y' = bX + dY$$

- -比例变换（x方向上的比例系数a
- Y方向比例系数d）

- 令 • $T=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} X' & Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aX & dY \end{pmatrix}$$

对称变换

- 令$x' = -x \quad y' = y$
- 使图形对Y轴对称(y值相等，x值相反)

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}$$

- 得出：

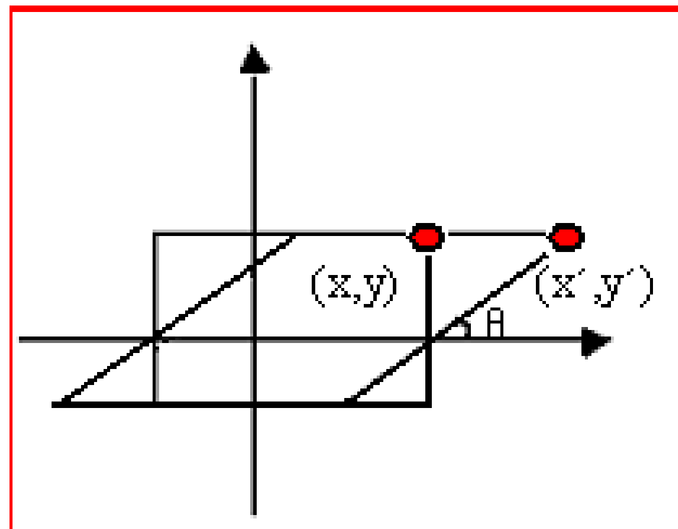
$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 讨论：
- (1)当图形对X轴对称（x值相等，y值
- 相反），矩阵T=?
- (2)当图形相对于原点对称时（x值和y
- 值取反）,矩阵T=?

错切变换

- 如果变换前坐标点(x,y)于变换后对应的新坐标点(x′,y′)的关系为 $x' = x + cy$ $y' = y$ 则称这一变换为沿x轴的错切变换，

令 $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$



$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+ky & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}$$

- 旋转变换
- **DEF:**若图形中的坐标点(x,y)绕原点逆时针旋转一个角度θ，则该点变换后的新坐标(x′,y′)于变换前的坐标(x,y)的关系为

$$T=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

齐次坐标

- 为什么要使用齐次坐标？
- -平移变换
- **DEF**:平面上的点P(x,y),如果在x轴方向的平移增量为t_x,在y轴方向的平移增量为t_y,则平移后所得新点p′(x′,y′)的坐标表达式为

> $x' = x + t_x$
>
> $y' = y + t_y$

(其中t_x和t_y为常量)

矩阵T能实现平移变换吗?

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

- 证明(能，不能)

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}_{1*2} * \begin{pmatrix} a & b & p \\ c & d & q \\ l & m & s \end{pmatrix}_{3*3} = ?$$

怎么办呢？

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix}_{1*3} * \begin{pmatrix} a & b & p \\ c & d & q \\ l & m & s \end{pmatrix}_{3*3}$$

令 $a=1\quad c=0\quad b=0$

$d=1\quad p=0\quad q=0\quad s=1$

则可实现平移变换

平移变换

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ l & m & 1 \end{pmatrix}_{3*3} = \begin{bmatrix} x+l & y+m & 1 \end{bmatrix}$$

平移变换得以实现。

齐次坐标

所谓齐次坐标表示法:就是由**n+1维向量**表示一个**n维向量**。

如**n维向量** (P1,P2, … ,Pn)表示为

n+1维的（hP1,hP2,hPn,h），其中**h称为哑坐标**。

- **举例:**
- 普通坐标系下的点（2,3）
- 变换为齐次坐标（h*2,h*3,h*1）
- h=1时　　（2, 3, 1）
- h=2时　　(4, 6, 2)
- h=0.5时　　(1, 1.5, 0.5)

齐次坐标的作用

将各种变换用阶数统一的矩阵来表示。提供了用矩阵运算把二维、三维甚至高维空间上的一个点从一个坐标系变换到另一坐标系的有效方法。

·-比例变换

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3*3} = \begin{pmatrix} ax & dy & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix}$$

• -对称变换

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3*3} = \begin{pmatrix} ax+cy & bx+dy & 1 \end{pmatrix}$$

- 讨论：

•-错切变换

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3*3} = \begin{pmatrix} x+cy & y+bx & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix}$$

•1) 当c<>0、b=0时，

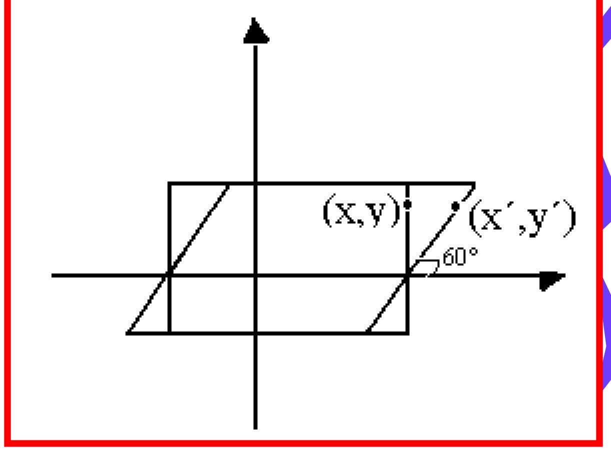
• $(x' \quad y' \quad 1) = (x+cy \quad y \quad 1)$

•图形的沿x轴错切;

(2)当c=0、b<>0时

• $(x' \quad y' \quad 1) = (x \quad y+bx \quad 1)$

•图形的沿x轴错切;



•全比例变换

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix}_{3*3} = \begin{pmatrix} x/s & y/s & s/s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix}$$

s>1　时，图形产生？

s<1　时，图形产生？

s=1　时，图形大小？

组合变换

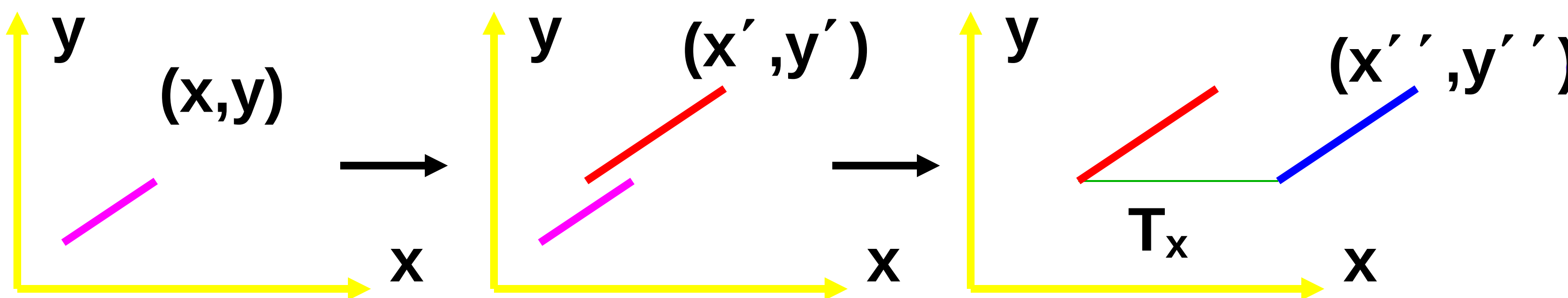
- 问题：如何实现复杂变换？

变换分解 → 变换合成

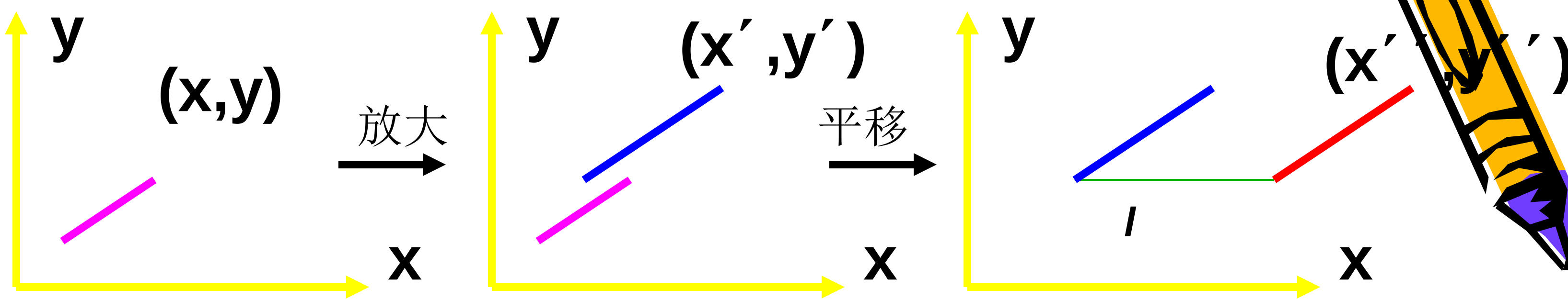
- 实际上，一般的图形变换更多的是组合变换，即由一系列基本的几何变换组合而成的。
- 任何一个线性变换都可以分解为上述几类变换。

组合变换举例（一）

例:对一线段先放大2倍(即a=d=2)，
再平移l=10, m=0。



解:设点(x, y, 1)为线段上的任意一点,
点(x′, y′, 1)为点(x, y, 1)放大后的坐标则:
设点(x′′, y′′, 1)为点(x′, y′, 1)经平移后的
坐标为:



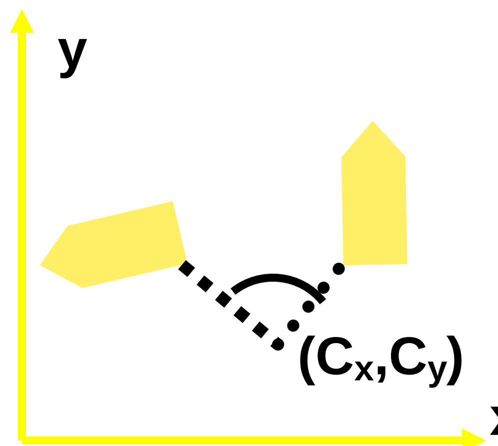
$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} * M = \begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix}$$

如果组合变换矩阵M′

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3*3} * \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3*3} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 20 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3*3}$$

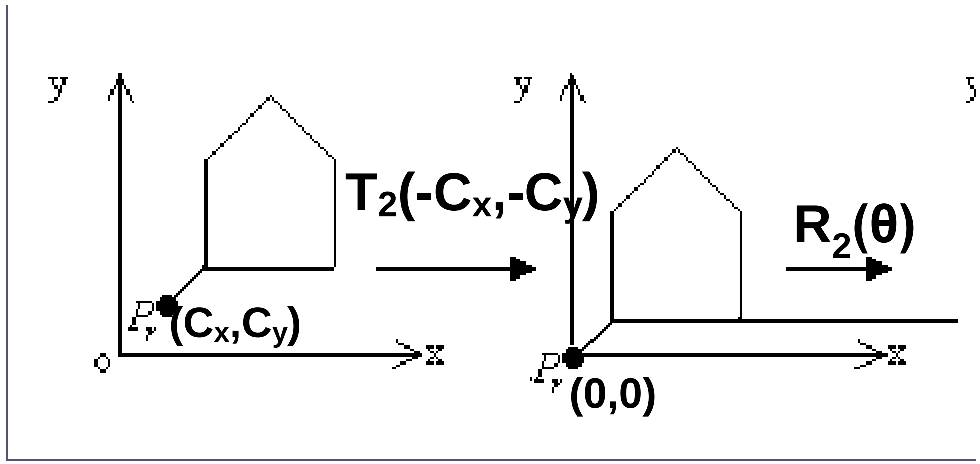
组合变换举例（二）

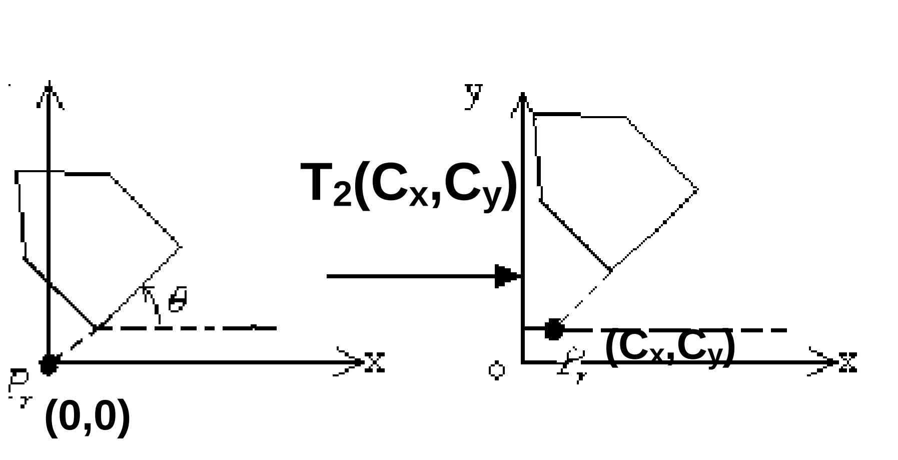
例：对一图形，绕平面上的一点(C_x,C_y)作旋转变换，旋转角度为θ，计算其变换矩阵。



解： 因为旋转变换是绕坐标原点旋转的，所以，此处不能直接使用旋转变换，怎么办？

将旋转中心(Cx, Cy)移至原点，
然后作旋转变换，
最后再把该点移回原处。


y
y
x
x
o
P_r (C_x,C_y)
$T_2(-C_x,-C_y)$
P_r (0,0)
$R_2(\theta)$

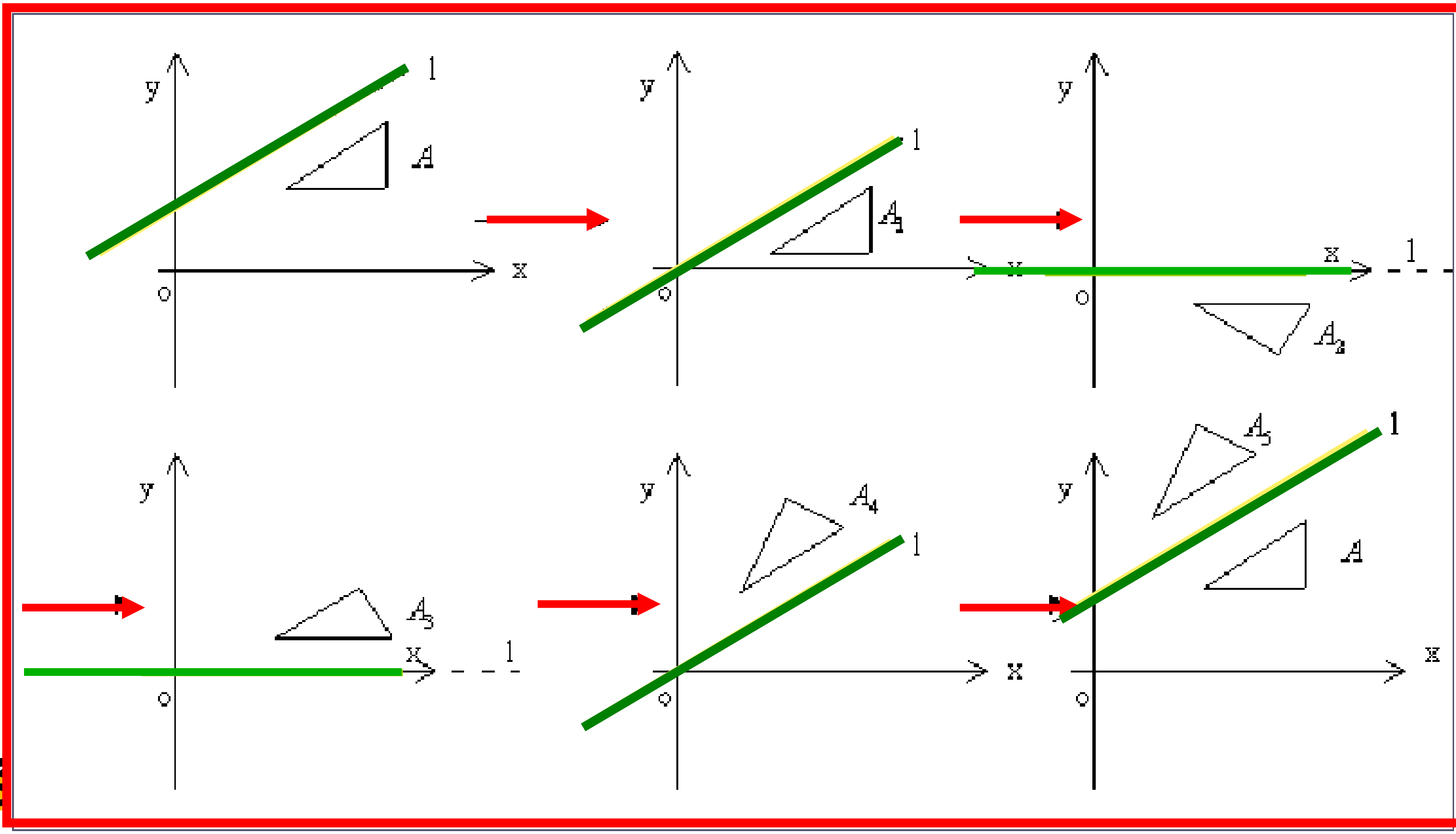

y
x
x
o
θ
P_r (0,0)
$T_2(C_x,C_y)$
P_r (C_x,C_y)

设点（x,y，1)为图形中的点，点(x′,y′，1)为变换后的坐标，M为变换矩阵

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -C_x & -C_y & 1 \end{pmatrix}_{3*3} * \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3*3} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ C_x & C_y & 1 \end{pmatrix}_{3*3}$$

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} * \mathbf{M} = \begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix}$$

对任意直线作对称变换



综合：通过以上5个步骤，即可实现图形推任意直线的对称变换。

$$M=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -b & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(-\alpha) & \sin(-\alpha) & 0\\ -\sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha & 0\\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & b & 1\end{pmatrix}$$