# 2016-01-南农大信科 2015 级数学分析 I 试卷 *A*-参考解答与评分标准

**一.客观题**（每题 3 分，计 30 分）

**名词解释或叙述定理：**1. 确界原理——非空有上（下）界的集合必有上（下）确界.

2. 拐点——连续曲线上凹弧与凸弧的分界点.

**命题正误判断：**3.（ $T$ ）； 4.（ $T$ ）； 5.（ $F$ ）；

**填空：**6. $\underline{y=2(x-1)}$；7. $\underline{\arctan e^x+C}$；8. $\underline{-2}$；9. $\underline{a\le 0}$（或 $\underline{a<0}$）； 10. $f(x)=\begin{cases}-1, x\le 0\\ 1, x>0\end{cases}$.

(有无穷多的适合的结果)

**二．解答题：**（11~15 题每题 8 分，16~18 题每题 10 分，计 70 分）

11. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{2x}=0\cdots\cdots\cdots\cdots 8$$

12. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2^n+\cdots+2016^n}{2016}\right)^{\frac{1}{n}}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2^n+\cdots+2016^n}{2016}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2016\left[1+\left(\dfrac{1}{2016}\right)^n+\cdots+\left(\dfrac{2015}{2016}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}}}{\sqrt[n]{2016}}=2016\cdots\cdots 8$$

或亦可用$L'Hopital$法则.此处略.

13. 计算 $\displaystyle\int\frac{x\arctan x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}dx$ .

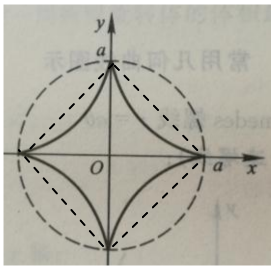
$$\int\frac{x\arctan x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}dx\overset{\arctan x=t}{\underset{t\in(-\pi/2,\pi/2)}{=\!=\!=\!=\!=\!=}}\int\frac{t\tan t}{|\sec^3 t|}\sec^2 tdt=\int t\sin tdt\cdots\cdots\cdots\cdots 4$$

$$=-t\cos t+\int\cos tdt=\sin t-t\cos t+C=\frac{x-\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}+C\cdots\cdots\cdots\cdots 4$$

14. 设 $a>0$. (1). 函数 $y=f(x)$ 由 $\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{cases}$ 确定，计算 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$. (6 分)

(2). 与圆周曲线 $C_1:\begin{cases}x=a\cos t\\ y=a\sin t\end{cases},t\in[0,2\pi]$，“菱形”曲线 $C_2:\begin{cases}|x|=a\cos^2 t\\ |y|=a\sin^2 t\end{cases},t\in[0,2\pi]$ 既关于 $x$ 轴对称又关于 $y$ 轴对称 因而是中心对称的曲线一样，曲线 $C_3:\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{cases},t\in[0,2\pi]$ 也是既关于 $x$ 轴对称又关于 $y$ 轴

对称的曲线。要了解曲线的特性，只需研究其在第一象限部分的性状即可。试根据$\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$的取值情况，了解曲线$C_3$的升降与凹凸的情况，描绘曲线$C_3$的草图。你知道曲线$C_3$通俗的名称吗？ (2 分)




$$(1).\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}, \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3a\sin^2 t\cos}{-3a\cos^2 t\sin t} = -\tan t,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{-\sec^2 t}{-3a\cos^2 t\sin t} = \frac{1}{3a\cos^4 t\sin t}.\cdots\cdots 6$$

$(2).t\in(0,\pi/2)$时$y'_x<0, y''_x>0$,故曲线在第一象限为递降的凸的曲线.$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2$

曲线通常称之为“星形线”.

15．证明不等式：$x>0$时，有 $0<\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}<1$.

$$x>0\text{时}\ln(1+x)>0,\therefore 0<\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}<1 \Leftrightarrow 0<x-\ln(1+x)<x\ln(1+x).\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2$$

$$(1).\varphi(x)=x-\ln(1+x),\varphi'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}, x>0\text{时}\varphi'(x)>0, x\ge 0\text{时}\varphi(x)\text{连续},$$

$\therefore x\ge 0$时$\varphi(x)$严格单调增加,$\therefore x>0$时$\varphi(x)>\varphi(0)=0$.

$$(2).\psi(x)=x\ln(1+x)-x+\ln(1+x),\psi'(x)=\frac{x}{1+x}+\ln(1+x)-1+\frac{1}{1+x}=\ln(1+x),$$

$x>0$时$\psi'(x)>0,\because x\ge 0$时$\psi(x)$连续,$\therefore x\ge 0$时$\psi(x)$严格单调增加,

$\therefore x>0$时$\psi(x)>\psi(0)=0.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 6$

法二 $x>0,\ln(1+x)-\ln 1=\dfrac{1}{1+\theta x}x,\theta\in(0,1)$.

$$\therefore \frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}=\frac{1+\theta x}{x}-\frac{1}{x}=\theta\in(0,1)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 8$$

16. 叙述关于数列极限的柯西（Cauchy）收敛准则.由此证明数列$x_n=1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}$收敛.

**解**（1）数列极限的 *Cauchy* 收敛准则——

$$\lim_{n\to\infty}a_n\text{存在}\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists N,\forall m>n\ge N,\text{有}|a_m-a_n|<\varepsilon\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 4.$$

$$(2).x_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2},$$

$$|x_n-x_{n+m}|=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+m)^2}<\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+m-1)(n+m)}$$

$$<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+m-1}-\frac{1}{n+m}<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+m}<\frac{1}{n},$$

$$\therefore\forall\varepsilon>0,\exists N\ge\frac{1}{\varepsilon},\forall n>N,\forall m\in\mathbb{Z}^+,\text{有}|x_n-x_{n+m}|<\varepsilon,\therefore\lim_{n\to\infty}x_n\text{存在}.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 6$$

17. 设 $p,q$ 为常数. (1). 试问：数 $p,q$ 需满足什么条件时，函数 $\varphi(x)=x^3-3px-q$ 可取得极值?

(2). 试问：数 $p,q$ 需满足什么条件时，方程 $x^3=3px+q$ 有三个不同的实根?

$(1).\varphi(x)=x^3-3px-q,\varphi'(x)=3x^2-3p,\therefore$ 必得 $p>0$.

否则 $\varphi(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 内单调增加,就不能取得极值.$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots4$

$(2).\varphi'(x)=3x^2-3p,\ p>0$ 时, $x=\sqrt{p}$ 或 $-\sqrt{p}$ 时 $\varphi'(x)=0.\varphi''(x)=6x,\cdots$

$\therefore \max\limits_{\mathbb{R}}\varphi(x)=\varphi\left(-\sqrt{p}\right)=2p\sqrt{p}-q,\min\limits_{\mathbb{R}}\varphi(x)=\varphi\left(\sqrt{p}\right)=-2p\sqrt{p}-q,$

$\therefore$ 要使 $x^3=3px+q$ 在 $\mathbb{R}$ 内有3个不同的实根,就必得 $\max\limits_{\mathbb{R}}\varphi(x)>0,\min\limits_{\mathbb{R}}\varphi(x)<0.$

$$\therefore\begin{cases}p>0\\2p\sqrt{p}-q>0\\-2p\sqrt{p}-q<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p>0\\-2p\sqrt{p}<q<2p\sqrt{p}\end{cases}.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots6$$

18. (1). 判断函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 上的单调性; (2). 证明数列 $\left\{n\sin\dfrac{1}{n}\right\}$ 单调有界;

(3). 记 $A=\left\{n\sin\dfrac{1}{n},n=1,2,3,\cdots\right\}$, 给出 $\sup A,\inf A$，并简要地说明理由.

(1).设 $\varphi(x)=\dfrac{\sin x}{x},x\in(0,1).\varphi'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\dfrac{\cos x(x-\tan x)}{x^2},$

$x\in(0,1)$ 时 $\tan x>x$, 知 $\varphi'(x)<0.\therefore x\in(0,1)$ 时 $\dfrac{\sin x}{x}$ 单调递降.$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots4$

(2).由(1).知数列 $\left\{n\sin\dfrac{1}{n}\right\}$ 单调递增.由 $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\dfrac{1}{n}=1$, 由数列极限性质知该数列有界.

(3).由命题“若数列 $\{x_n\}$ 单调递增,则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sup\{x_n\}$.”知:

记 $A=\left\{n\sin\dfrac{1}{n},n=1,2,3,\cdots\right\}$, 则 $\sup A=\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\dfrac{1}{n}=1,\inf A=\min A=\sin1.\cdots\cdots\cdots\cdots6$