6. 微分复习课2022-12

上页 下页 返回

B. 微分与导数应用

$B1.\ f(x) = x(2x-1)(3x-2)\cdots(2023x-2022)$,

则 $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \cdots$

重视导数/微分的几何意义,可导/可微的条件.

B1.(2).下列函数中在$x=0$处可导的是

$(A).\ |x|$; $(B).\ |\sin x|$; $(C).\ f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$;

$(D).\ f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\le 0 \\ x, & x>0 \end{cases}$.

B.1.(3).设函数$f(x)$可导且$f'(x)$有界,$g(x)=f(x)\sin^2 x$,则$g''(0)=$______.

解 $g'(x)=f'(x)\sin^2 x+f(x)\sin 2x$,

题中没有$f''(x)$存在的条件,故只能如下处理

$$g''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)-g'(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)\sin^2 x+f(x)\sin 2x}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[f'(x)\frac{\sin^2 x}{x}+f(x)\frac{\sin 2x}{x}\right]=2f(0).$$

$B1.(4)$.设$f(x)$的二阶导函数在$(-\infty,+\infty)$上连续,

$f(0)=0, g(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x)}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x=0 \end{cases}$,试确定$a$的值,

使得$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续.

证明在此条件下,$g'(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续.

解 $a=\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$$

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{x}-f'(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-xf'(0)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{2}=\frac{f''(0)}{2}.$$

$$\therefore g'(x)=\begin{cases}\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}, & x\neq 0\\[2ex] \dfrac{1}{2}f''(0)\ , & x=0\end{cases}$$

上页 下页 返回

$$g'(x)=\begin{cases}\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}, & x\neq 0\\[2ex] \dfrac{1}{2}f''(0), & x=0\end{cases}$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} g'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{xf''(x)+f'(x)-f'(x)}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f''(0)}{2}=g'(0)$$

$\therefore g'(x)$在$x=0$处连续,即在$(-\infty,+\infty)$上连续.

上页 下页 返回

$B1.(5)$.设连续函数$f(x)$满足$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x^2-1}=1$,试给出曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线,法线方程.

解 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x^2-1}=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0,$

由$f(x)$连续得$f(1)=0.$

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left[\frac{f(x)}{x^2-1}(x+1)\right]=2,$$

切线方程 $y-f(1)=2(x-1),$

法线方程 $y-f(1)=-\dfrac{1}{2}(x-1).$

B1.(6).如果$f'(a)$存在,那么$A=?$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a-h)}{h}=A$$

解 $\because f'(a)$存在,$\therefore f(a)$存在,

$$A=\lim_{h\to 0}\left[2\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}+\frac{f\big(a+(-h)\big)-f(a)}{-h}\right]$$

$$=3f'(a)$$

上页 下页 返回

函数$f(x)$在$U(a)$内有定义,

则(D)是$f'(a)$存在的充分条件.

(A). $\lim\limits_{h\to+\infty} h\left[f\left(a+\frac{1}{h}\right)-f(a)\right]$存在;

(B). $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f\left(a+h^3\right)-f(a)}{h}$存在;

(C). $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$存在;

(D). $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}$存在.

$$(A).\lim_{h\to+\infty} h\left[f\left(a+\frac{1}{h}\right)-f(a)\right]$$

$$=\lim_{h\to+\infty}\frac{f\left(a+1/h\right)-f(a)}{1/h}=f'_{+}(a)$$

$$(B).\lim_{h\to 0}\frac{f\left(a+h^{3}\right)-f(a)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f\left(a+h^{3}\right)-f(a)}{h^{3}}\cdot h^{2}\right]\text{存在；}$$

$$(C).\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}\text{存在;}$$

$$f(x)=\begin{cases}1, x\neq a\\ 0, x=a\end{cases}\text{在}x=a\text{处不连续当然不可导,}$$

但是$h\neq 0, f(a+h)-f(a-h)=1-1\equiv 0.$

$B2.$ 求由 $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ 表示的函数的导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解 $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{3a\sin^2 t\cos t}{3a\cos^2 t(-\sin t)} = -\tan t,$$

$$y''_x = \frac{d(y'_x)}{dx} = \frac{d(y'_x)}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}.$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{(-\tan t)'}{(a\cos^3 t)'} = \frac{\sec^4 t}{3a\sin t}.$$

上页 下页 返回

$B2.(2).y=f(x):\begin{cases}x=t^3+3t+1\\ y=t^3-3t+1\end{cases}$,求出凹弧与凸弧所对应$x$的取值范围以及曲线的拐点.

解 $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{3\left(t^2-1\right)}{3\left(t^2+1\right)}=\frac{t^2-1}{t^2+1},$$

$$y''_x=\frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}=\frac{\left(\dfrac{t^2-1}{t^2+1}\right)'}{3\left(t^2+1\right)}=\frac{4t}{3\left(t^2+1\right)^3}.$$

$\therefore t<0$时$y''_x<0$,此时曲线是凹弧,

$t>0$时$y''_x>0$,此时曲线是凸弧.

上页 下页 返回

$$\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1 \\ y = t^3 - 3t + 1 \end{cases}, \quad y''_x = \frac{4t}{3\left(t^2+1\right)^3}.$$

$\therefore t < 0$时$y''_x < 0$,此时曲线是凹弧,

$t > 0$时$y''_x > 0$,此时曲线是凸弧,

$t = 0$时对应曲线上点即曲线拐点为$(1,1)$,

$\because x'_t = 3\left(t^2+1\right) > 0$,即$x$是$t$的严格单调递增的函数,

$\therefore t < 0$ 即$x < 1$ 时曲线是凹弧,

$t > 0$ 即$x > 1$ 时曲线是凸弧.

$$B3.\ f(x)=\frac{2x^2}{x^2-1},\quad f^{(n)}(0)=?$$

解 $$f(x)=\frac{2\left(x^2-1\right)+2}{x^2-1}=2+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}$$

$$\left(\frac{1}{x-1}\right)'=\left(\left(x-1\right)^{-1}\right)'=-\left(x-1\right)^{-2},\left(\frac{1}{x-1}\right)''=-\left(-2\right)\left(x-1\right)^{-3},$$

$$\left(\frac{1}{x-1}\right)'''=-\left(-2\right)\left(-3\right)\left(x-1\right)^{-4},\cdots\therefore\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}=\left(-1\right)^n n!\left(x-1\right)^{-(n+1)},$$

$$\therefore\left(f(x)\right)^{(n)}=\left(-1\right)^n n!\left[\frac{1}{\left(x-1\right)^{n+1}}-\frac{1}{\left(x+1\right)^{n+1}}\right],$$

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n=2k+1\\ -2n!, & n=2k\end{cases}.$$

上页 下页 返回

$B3.\ f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-1},\ f^{(n)}(0)=?$

又解　由于$f(x)$是$(-1,1)$内可导的偶函数,

所以$f^{(2n+1)}(x)$是$(-1,1)$内的奇函数,

故$f^{(2n+1)}(0)=0.$

上页 下页 返回

$B3.\ f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-1},\ f^{(n)}(0)=?$

解二　由$|t|<1$ 时有$1+t+t^2+\cdots+t^n+\cdots=\dfrac{1}{1-t}$,

由*Taylor*定理可知函数的*Taylor*多项式唯一，

$$\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+\cdots+t^n+r_n(t),$$

$$\therefore\ f(x)=-2x^2\cdot\frac{1}{1-x^2}=-2x^2\left(1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n-2}+r_{n-1}(x^2)\right)$$

$$=-2x^2-2x^4-2x^6-\cdots-2x^{2n}+R_{2n}(x),$$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots+\frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}x^{2n}+R_{2n}(x),$$

再由*Taylor*定理的*Taylor*多项式唯一得：$f^{(2k+1)}(0)=0, k\in\mathbb{N}.$

$$\frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!}=-2\ ,\Rightarrow\ f^{(2k)}(0)=-2(2k)!\ .$$

上页　下页　返回

$B4.$(1).已知连续函数$f(x)$有$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{(x-a)^4}=2,$

那么，$f(x)$在点$x=a$处取得极____值$=$____.

(2).二阶可导函数$f(x)$有$f'(a)=0,\ f''(a)<0,$

那么，$f(x)$在点$x=a$处取得极_____值.

(3).三阶可导函数$f(x)$有$f'(a)=f''(a)=0,$

$f'''(a)>0,$那么，$f(x)$在点$x=a$处是否取得极值？

$\big(a,f(a)\big)$是否是曲线$y=f(x)$的拐点？在点a的

一个小的左邻域内曲线的凹凸情况如何？

上页 下页 返回

$B4.(1)$.已知连续函数$f(x)$有$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{(x-a)^4}=2$,

那么, $f(x)$在点$x=a$处取得极____值$=$____.

直观分析,发现结论.考虑特殊情形

$f(x)=2(x-a)^4$,极小值$f(a)=0$.

理性推导

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{(x-a)^4}=2>0\Rightarrow\lim_{x\to a}f(x)=0\overset{\text{函数}}{\underset{\text{连续}}{=\!=\!=}}f(a),$$

$\exists$点a的某去心邻域,在该邻域内, $\dfrac{f(x)}{(x-a)^4}>0$,

$\therefore\ x\neq a, f(x)>f(a)=0$.

B4.(2).二阶可导函数$f(x)$有$f'(a)=0$,

$f''(a)<0$,

那么,$f(x)$在点$x=a$处取得极__大__值.

可以$f(x)=\cos x, a=0$,为例给出结果.

有关一些的基本结论是需要了解的.

B4.(3). 三阶可导函数$f(x)$有$f'(a)=f''(a)=0$, $f'''(a)>0$,那么, $f(x)$在点$x=a$处是否取得极值? $\big(a, f(a)\big)$是否是曲线$y=f(x)$的拐点?在点a的一个小的左邻域内曲线的凹凸情况如何?

直观分析,发现结论:考察特殊函数$f(x)=x^3, a=0$.

理性推导

$$f'''(a)=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)-f''(a)}{x-a}>0 \Rightarrow$$

$\exists$点a的某去心邻域,在该邻域内, $\dfrac{f''(x)}{x-a}>0$,

$\therefore\ x<a, f''(x)<0, x>a, f''(x)>0$,

$\therefore$ 在点a的小的邻域内曲线是左凸右凹.

上页 下页 返回

$B5.$ 求证 在$(-\infty,+\infty)$上点点可导的偶(奇)函数的导函数是奇(偶)函数.

证明 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上点点可导,偶函数,

则$\forall x\in(-\infty,+\infty)$, $f(-x)=f(x)$,

$$f'(-x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-x+h)-f(-x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{h}\overset{-h=t}{=\!=\!=}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t)-f(x)}{-t}$$

上页 下页 返回

$$f'(-x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-x+h)-f(-x)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{h}\overset{-h=t}{=\!=\!=}\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t)-f(x)}{-t}$$

$$=-\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}=-f'(x)$$

$\forall x\in(-\infty,+\infty), f'(-x)=-f'(x)$

$\therefore$ 在$(-\infty,+\infty)$上,可导的偶函数$f(x)$

$\Rightarrow f'(x)$是奇函数.

*B*5. 求证 在$(-\infty,+\infty)$上点点可导的偶(奇)函数的导函数是奇(偶)函数.

证二 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上点点可导,偶函数,

则$\forall x\in(-\infty,+\infty)$, $f(-x)=f(x)$,

$\left(f(-x)\right)'=f'(x)$即$f'(-x)\cdot(-1)=f'(x)$,

$\therefore\ f'(-x)=-f'(x)$,

$\therefore$ 在$(-\infty,+\infty)$上, $f(x)$可导的偶函数

$\Rightarrow f'(x)$是奇函数.

上页 下页 返回

$(A1)$. 在$(-a,a)$上可导的偶函数的导函数是奇函数.

$(A2)$. 在$(-a,a)$上可导的奇函数的导函数是偶函数.

$(B1)$. 在$(-a,a)$上连续的奇函数的任一原函数都是偶函数.

$(B2)$. Q.在$(-a,a)$上连续的偶函数的原函数一定是奇函数么?

A. 非也 .

设$f(x)$是连续的偶函数,$F(x)$是$f(x)$在$(-a,a)$上的一个原函数,若$F(0)=0$,则$F(x)$是奇函数 .

*B*5.(2). 设函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上有定义,$\forall x, y\in(0,+\infty)$有$f(xy)=f(x)+f(y)$.若$f(x)$在$x_0=1$处可导,证明函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上可导.又若$f'(1)=2$,求$f(x)$.

证明 $\because\ f(1)=0,$

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)}{h}=a.$$

$\forall x>0,$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x(1+h/x)\right)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\frac{f\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}=\frac{1}{x}f'(1)=\frac{a}{x},$$

$$\therefore\ f'(x)=\frac{a}{x},x>0,\therefore\ f(x)=a\ln x.$$

*B*6. $f''(x)$存在,求证:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}=f''(x).$$

证明 $L\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)+f'(x-h)(-1)}{2h}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)+f'(x)-f'(x-h)}{h}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left[\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}+\frac{f'(x-h)-f'(x)}{-h}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[f''(x)+f''(x)\right]=f''(x).$$

倘若象下面这样来做,那就错了!

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x-h)}{2h}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim_{h\to 0}\frac{f''(x+h)+f''(x-h)}{2}\cdots\cdots(@)$$

$$=\frac{1}{2}\left[f''(x)+f''(x)\right]=f''(x).$$

$\because$ (@)这一步需要$f''(x)$的连续性!

不等式证明常用的做法:

1. 直接使用微分中值定理;

2. 利用单调性;

3. 极值法;

4. 最值法;

5. 利用函数的凹凸性.

*B*7.证明不等式

(1). $|\arctan a-\arctan b|\le|a-b|$;

(2). $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right),\sin x+\tan x>2x$;

(3). $0<a<b<\dfrac{\pi}{2},\dfrac{b}{a}<\dfrac{\tan b}{\tan a}$;

(4). $x\in[0,1],p\ge1,\dfrac{1}{2^{p-1}}\le x^p+(1-x)^p\le1$;

(5). $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right),\dfrac{2}{\pi}x<\sin x<x$;

(6). $x>0,\ln x\le x-1$;

(7).求证$x<1$时,有$e^x\le\dfrac{1}{1-x}$;

(8). $x>0,\dfrac{1}{1+x}<\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)<\dfrac{1}{x}$;

(9).证明: $\forall x,y\in\mathbb{R}$,有$\left(\dfrac{e^x+e^y}{2}\right)^2\ge e^{x+y}$.

$B7.(7)$. 求证 $x<1$时,有$e^x \le \dfrac{1}{1-x}$.

证明 法一 $\because x<1$时,$1-x>0$,

$\therefore x<1, e^x \le \dfrac{1}{1-x} \Leftrightarrow e^x(1-x) \le 1.$

设$\varphi(x)=e^x(1-x), x<1, \varphi'(x)=-xe^{-x}$,

$\therefore x<0$ 时,$\varphi'(x)>0, \varphi(x)\nearrow$,

$0<x<1$ 时,$\varphi'(x)<0, \varphi(x)\searrow$,

$\therefore$在 $x<1$ 时$\varphi(x)$的最大值为$\varphi(0)=1$,

$\therefore \forall x<1$时,有$\varphi(x)=e^x(1-x)\le 1.$

上页 下页 返回

$B7.(7)$.求证 $x<1$时,有$e^x \le \dfrac{1}{1-x}$.

法二 $\because x<1$时,令$t=-x>-1$,

$x<1$ 时,有$e^x \le \dfrac{1}{1-x}$

$\Leftrightarrow x<1$ 时,有$e^{-x} \ge 1-x$

$\Leftrightarrow t>-1\ ,e^t \ge 1+t.$

而这是不难证明的.

上页 下页 返回

下面证明 $t > -1, e^t \geq 1 + t.$

证明：设 $\varphi(t) = e^t - 1 - t,$

则 $\varphi(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续. $\varphi'(t) = e^t - 1,$

$t < 0, \varphi'(t) = e^t - 1 < 0, \varphi(t)$ 增,

$\therefore t < 0, \varphi(t) > \varphi(0) = 0;$

$t > 0, \varphi'(t) = e^t - 1 > 0, \varphi(t)$ 减,

$\therefore t > 0, \varphi(t) > \varphi(0) = 0.$

$\therefore \forall t \in (-\infty, +\infty), \varphi(t) = e^t - 1 - t \geq 0.$

$B8.$ 比较数的大小：$\ln\left(\sqrt{2}+1\right),\sqrt{2}-1.$

解：可证 $x>1,x\ln x$增.

$$\left(\sqrt{2}+1\right)\ln\left(\sqrt{2}+1\right)>(1+1)\ln(1+1)$$

$$=2\ln 2=\ln 4>1>\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1.$$

或者由 $x>0,\ln x$增.

$$\ln\left(\sqrt{2}+1\right)>\ln\sqrt{e}=\frac{1}{2}>\sqrt{2}-1.$$

$B8.(2).$ 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上二阶可导,

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$,且$f''(x)>0$.求证:(1). $f'(0)=1$;

(2).在$(-\infty,+\infty)$上恒有 $f(x)\geq x$.

证明(1). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$,

$\because$ $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可导当然连续,

$\therefore$ $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$,

$$\therefore\ f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1.$$

上页 下页 返回

(2).设$\varphi(x)=f(x)-x$,

则$\varphi(x)$在$(-\infty,+\infty)$上二阶可导,

$x=0$时$\varphi'(x)=f'(x)-1=0$.

又$\varphi''(x)=f''(x)>0$,即$\varphi''(0)>0$,

$\therefore x=0$处$\varphi(x)$取得$\varphi(x)$在$(-\infty,+\infty)$

上的最小值$\varphi(0)=0$,

即$\forall x\in(-\infty,+\infty), f(x)-x\geq 0$.

(2).法二：设$\varphi(x)=f(x)-x$连续,

$\varphi'(0)=f'(x)-1=0, \varphi''(x)=f''(x)>0,$

$\therefore$ 在$(-\infty,+\infty)$上$\varphi'(x)$严格递增.

$\therefore$ 在$(-\infty,0)$上,$\varphi'(x)<\varphi'(0)=0$

$\Rightarrow$ 在$(-\infty,0)$上,$\varphi(x)$递减,

在$(-\infty,0]$上,$\varphi(x)=f(x)-x\geq\varphi(0)=0.$

$\therefore$ 在$(0,+\infty)$上,$\varphi'(x)>\varphi'(0)=0$

$\Rightarrow$ 在$(0,+\infty)$上$\varphi(x)$递增,

在$[0,+\infty)$上,$\varphi(x)=f(x)-x\geq\varphi(0)=0.$

$B9.$ 证明方程$x^5-5x+1=0$有唯一的小于1 的正根.

解 $\varphi(x)=x^5-5x+1$在$[0,1]$上连续,

$\varphi(0)\varphi(1)<0,$

$\therefore \exists c\in(0,1),$使得$\varphi(c)=0.$

又$(0,1)$上$\varphi'(x)=5x^4-5<0, \therefore c$唯一.

或者由$Rolle$定理说明上述c的唯一性.

上页 下页 返回

$B9.(2)$. 设在区间$[0,1]$上函数$f(x)$可导,且

$0<f(x)<1, x\in(0,1)$时$f'(x)\neq 1.$

证明 存在唯一的$x_0\in(0,1)$,使得$f(x_0)=x_0.$

分析 显然,可设$\varphi(x)=f(x)-x$,证明函数$\varphi(x)$在$[0,1]$上有零点+唯一性$\cdots$

唯一性证明:对于已证$\exists\xi\in(0,1),\varphi(\xi)=0,$

欲证ξ唯一,反证法 假设$\exists\eta\in(0,1),\varphi(\eta)=0,$

$\eta\neq\xi$.由$Lagrange$中值定理知

$\exists$介于η,ξ间的c,使得$\varphi'(c)=0$,即$f'(c)=1,$

而这与题设条件矛盾.

所以$\exists$唯一的$\xi\in(0,1)$,使得$\varphi(\xi)=0.$

Addendum :

设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可微,且满足$f(a)=f(b)=0$.则:$\exists\xi\in(a,b)$,使得 $f'(\xi)+g(\xi)f(\xi)=0$.

分析:要用*Rolle th.*,要找的辅助函数即为 $\varphi(x)=f(x)e^{G(x)}, G'(x)=g(x)$.

上页 下页 返回

$Add.1.$设函数$f(x)$在$[0,a]$上连续,在$(0,a)$内可微,且$f(a)=0$,证明$\xi\in(0,a)$,使得 $\xi f'(\xi)+f(\xi)=0.$

分析 由问题的结论知,应由***Rolle th.***来证明之,而要使得$\varphi'(\xi)=\xi f'(\xi)+f(\xi)=0,$

那么$\varphi'(x)=xf'(x)+f(x),$

且$\varphi(x)$在某闭区间上满足***Rolle th.***的三个条件,其实主要是注意第三个条件,

我们可以发现 可取$\varphi(x)=xf(x),$

显然,$\varphi(a)=0$,又$\varphi(0)=0$,到此万事俱备.

证明 设$\varphi(x) = xf(x)$,那么$\varphi(x)$

在$[0,a]$上连续,在$(0,a)$内可微,

且$\varphi(0) = \varphi(a) = 0$,

$\therefore$由*Rolle Th.*可得 $\exists \xi \in (0,a)$,

使得 $\varphi'(\xi) = \xi f'(\xi) + f(\xi) = 0$.

$Add.2.$设函数$f(x)$在$\left[0,1\right]$上连续,在$\left(0,1\right)$内可微,且$f(1)=0.$

证明:存在$\xi\in(0,1)$,使得$f'(\xi)=-\dfrac{2f(\xi)}{\xi}.$

分析 问题转化为证明 $\xi f'(\xi)+2f(\xi)=0.$

要使用$Rolle\ th.$,寻找辅助函数$\varphi(x)$,

使得$\varphi'(x)$含有因子 $xf'(x)+2f(x)$,

$\cdots$ $\cdots$可取 $\varphi(x)=x^2f(x)$

上页 下页 返回

$Add.3.$设$f(x)$在$[0,\pi]$上连续，在$(0,\pi)$内可导，证明$\exists\xi\in(0,\pi)$，使得 $f'(\xi)=-f(\xi)\cot\xi.$

$Hint:$根据结论知即要证

$$f'(\xi)\sin\xi+f(\xi)\cos\xi=0,$$

即$\left[f(x)\sin x\right]'\Big|_{x=\xi}=0,$

$\therefore$对$\varphi(x)=f(x)\sin x$在$[0,\pi]$上应用$Rolle\ th.$

$Add.4.$设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可微,

且满足$f(a)=f(b)=0$,

证明:(1).存在$\xi\in(a,b)$,使得$\xi f'(\xi)+f(\xi)=0$;

(2).存在$\eta\in(a,b)$,使得$f'(\eta)+f(\eta)=0$;

(3).存在$\zeta\in(a,b)$,使得$f'(\zeta)+\zeta f(\zeta)=0$.

分析　要使用*Rolle th.*,寻找辅助函数$\varphi(x)$,

(1).使得$\varphi'(x)=xf'(x)+f(x)$,$\cdots\varphi(x)=xf(x)$;

(2).使得$\varphi'(x)$含有$f'(x)+f(x)$因子,$\cdots\varphi(x)=e^{x}\cdot f(x)$;

(3).使得$\varphi'(x)$含有$f'(x)+xf(x)$因子,$\cdots\varphi(x)=f(x)e^{\frac{1}{2}x^{2}}$.

设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可微,

且满足$f(a)=f(b)=0$,

证明:$\exists\xi\in(a,b)$,使得(4). $f'(\xi)+\cos\xi f(\xi)=0$;

(5). $f'(\xi)-(1+2\xi)f(\xi)=0$;

(6). $f'(\xi)+g(\xi)f(\xi)=0$.

分析:要用*Rolle th.*,要找的辅助函数即为

(4). $\varphi(x)=f(x)e^{\sin x}$;

(5). $\varphi(x)=f(x)e^{-(x+x^2)}$;

(6). $\varphi(x)=f(x)e^{G(x)}$, $G'(x)=g(x)$.

$B.9.(3).$ 设函数$f(x)$在$\left[a,b\right]$上连续,在$\left(a,b\right)$内可导,

$f(a)=0,f(b)=1$.求证:(1).存在$c\in\left(a,b\right)$,使得$f(c)=\frac{1}{2}$;

(2).存在$\xi,\eta\in\left(a,b\right),\xi\neq\eta$,使得$\dfrac{1}{f'(\xi)}+\dfrac{1}{f'(\eta)}=2\left(b-a\right)$.

B.9.(3). 结论(2)变形: $\dfrac{1}{f'(\xi)}+\dfrac{1}{f'(\eta)}=2(b-a)$,

$$a<\xi<c<\eta<b, \Leftrightarrow \frac{1/2-0}{f'(\xi)}+\frac{1-1/2}{f'(\eta)}=b-a.$$

结论之物理解释: 一质点从时刻a至时刻b作直线运动,所产生的位移量为1.质点运动至位移为1/2的时刻为c.

在时间段$[a,c]$内位移从0到$\dfrac{1}{2}$,期间的平均速度为$\dfrac{1/2-0}{c-a}$,

由Lagrange中值定理知$\exists \xi\in(a,c)$使得$\dfrac{1/2-0}{c-a}=f'(\xi)$.

同样,在时间段$[c,b]$内位移从$\dfrac{1}{2}$到1,其平均速度为$\dfrac{1-1/2}{b-c}$,

由Lagrange中值定理知$\exists \eta\in(c,b)$使得$\dfrac{1-1/2}{b-c}=f'(\eta)$.

$$\therefore \frac{1/2-0}{f'(\xi)}+\frac{1-1/2}{f'(\eta)}=c-a+b-c=b-a.$$

上页 下页 返回

B10. 设函数$f(x)$在(a,b)内有$f''(x)\ge 0$,

证明 $\forall x_1,x_2\in(a,b),\forall t\in[0,1]$有

$$f\left(tx_1+(1-t)x_2\right)\le tf\left(x_1\right)+(1-t)f\left(x_2\right)$$

这是函数凹凸性判断定理的最常用结论．

证明 $\forall x_1,x_2\in(a,b),t\in[0,1]$,

(1).如果$x_1=x_2$ 或者 $t=0$ 或 1,则 “$=$” 成立;

(2).不妨设 $x_1<x_2,0<t<1$,

记 $tx_1+(1-t)x_2=x_0$,则 $x_1<x_0<x_2$,

由$Taylor\ th.$得

$$f\left(x_1\right)=f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\left(x_1-x_0\right)+\frac{f''(\xi)}{2!}\left(x_1-x_0\right)^2$$

上页 下页 返回

(2).记 $tx_1+(1-t)x_2=x_0$,则 $x_1<x_0<x_2$,

由*Taylor th.*得

$$f(x_1)=f(x_0)+f'(x_0)(x_1-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x_1-x_0)^2$$

$$f(x_2)=f(x_0)+f'(x_0)(x_2-x_0)+\frac{f''(\eta)}{2!}(x_2-x_0)^2$$

其中 $x_1<\xi<x_0<\eta<x_2, tf(x_1)+(1-t)f(x_2)=$

$$=f(x_0)+f'(x_0)\left[t(x_1-x_0)+(1-t)(x_2-x_0)\right]$$

$$+\frac{1}{2!}\left[f''(\xi)t(x_1-x_0)^2+f''(\eta)(1-t)(x_2-x_0)^2\right]$$

$$t(x_1-x_0)+(1-t)(x_2-x_0)=tx_1+(1-t)(1-t)x_2-x_0=0,$$

$$\because f''(x)\ge 0, \therefore tf(x_1)+(1-t)f(x_2)\ge f\left(tx_1+(1-t)x_2\right)$$

将 (1),(2) 综合起来,知结论成立.

上页 下页 返回

B10.设函数$f(x)$在(a,b)内有$f''(x)\ge 0$,证明 $\forall x_1,x_2\in(a,b)$,

$\forall t\in[0,1]$有$f\left(tx_1+(1-t)x_2\right)\le tf\left(x_1\right)+(1-t)f\left(x_2\right)$

证明 $\forall x_1,x_2\in(a,b),t\in[0,1]$,

(1).如果$x_1=x_2$ 或者 $t=0$或1,则“$=$”成立;

(2).不妨设 $x_1<x_2,0<t<1$,记 $tx_1+(1-t)x_2=x_0$,则 $x_1<x_0<x_2$,

法二(分析法) $f\left(tx_1+(1-t)x_2\right)\le tf\left(x_1\right)+(1-t)f\left(x_2\right)$

即 $f\left(x_0\right)=tf\left(x_0\right)+(1-t)f\left(x_0\right)\le tf\left(x_1\right)+(1-t)f\left(x_2\right)$

$\Leftrightarrow t\left[f\left(x_0\right)-f\left(x_1\right)\right]\le(1-t)\left[f\left(x_2\right)-f\left(x_0\right)\right]$

即 $tf'(\xi)\left(x_0-x_1\right)\le(1-t)f'(\eta)\left(x_2-x_0\right)\cdots\cdots(*)$

$x_1<\xi<x_0<\eta<x_2$,又$t\left(x_0-x_1\right)=(1-t)\left(x_2-x_0\right)$,

$(*)\Leftrightarrow f'(\xi)\le f'(\eta),x_1<\xi<x_0<\eta<x_2$,

由(a,b)内$f''(x)\ge 0$,知结论成立.

复习课件,写来不易.

错讹难免,欢迎指正.

敬请勿予外传!

朱震球谨志

上页 下页 返回