7.2 二元关系(binary relation)

定义7.3　如果一个集合满足以下条件之一：

（1）集合非空，且它的元素都是有序对
（2）集合是空集

则称该集合为一个**二元关系**，记作R。二元关系也可简称为**关系**。对于二元关系R，如果$\langle x, y\rangle \in R$，可记作$xRy$；如果$\langle x, y\rangle \notin R$，则记作$x \not{R} y$。

举例

设$R_1 = \{\langle 1, 2\rangle, \langle a, b\rangle\}$，$R_2 = \{\langle 1, 2\rangle, a, b\}$。

则R_1是二元关系，R_2不是二元关系，只是一个集合，除非将a和b定义为有序对。

根据上面的记法可以写$1R_12$，aR_1b，$a \not{R}_1 c$等。

R＝{<上, 下>, <前, 后>, <正, 反>, <左, 右>} 是否为二元关系？

二元关系的记号

- 设F是二元关系，则

  $\langle x,y\rangle \in F \Leftrightarrow$ x与y具有F关系 $\Leftrightarrow xFy$

- 对比：　xFy　　（中缀(infix)记号）

  $F(x,y)$　　（前缀(prefix)记号）

  $\langle x,y\rangle \in F$　　（后缀(suffix)记号）

- 例如：$2<15 \Leftrightarrow <(2,15) \Leftrightarrow \langle 2,15\rangle \in <$.

7.2 二元关系

定义7.4 设A，B为集合，A×B的任何子集所定义的二元关系叫做**从A到B的二元关系**；特别当A=B时，则叫做**A上的二元关系**。

R是A到B的二元关系⇔ $R\subseteq A\times B$ ⇔ $R\in P(A\times B)$

举例 A={0, 1}，B={1, 2, 3}，那么

$R_1=\{\langle 0, 2\rangle\}$，$R_2=A\times B$，$R_3=\varnothing$ ，$R_4=\{\langle 0, 1\rangle\}$

等都是从A到B的二元关系，而R_3和R_4同时也是A上的二元关系。

说明

集合A上的二元关系的数目依赖于A中的元素数。
如果|A|=n，那么|A×A|=n^2， A×A的子集就有 2^{n^2} 个。
每一个子集代表一个A上的二元关系，所以A上有 2^{n^2} 个不同的二元关系。
例如|A|=3，则A上有 2^{3^2} 个不同的二元关系。

A到B的二元关系(举例)

例: 设 $A=\{a_1,a_2\}$, $B=\{b\}$,

则A到B的二元关系共有4个:

$R_1=\varnothing$, $R_2=\{<a_1,b>\}$,

$R_3=\{<a_2,b>\}$, $R_4=\{<a_1,b>,<a_2,b>\}$.

B到A的二元关系也有4个:

$R_5=\varnothing$, $R_6=\{<b,a_1>\}$,

$R_7=\{<b,a_2>\}$, $R_8=\{<b,a_1>,<b,a_2>\}$. #

A上的二元关系

- 例 设 $A=\{a_1, a_2\}$，

则A上的二元关系共有16个：

$R_1 = \varnothing$,

$R_2 = \{\langle a_1, a_1\rangle\}$,

$R_3 = \{\langle a_1, a_2\rangle\}$,

$R_4 = \{\langle a_2, a_1\rangle\}$,

$R_5 = \{\langle a_2, a_2\rangle\}$,

$R_6 = \{ \langle a_1, a_1\rangle, \langle a_1, a_2\rangle \}$,

$R_7 = \{ \langle a_1, a_1\rangle, \langle a_2, a_1\rangle \}$,

$R_8 = \{ \langle a_1, a_1\rangle, \langle a_2, a_2\rangle \}$,

A上的二元关系

$R_9 = \{ \langle a_1, a_2 \rangle, \langle a_2, a_1 \rangle \}$,

$R_{10} = \{ \langle a_1, a_2 \rangle, \langle a_2, a_2 \rangle \}$,

$R_{11} = \{ \langle a_2, a_1 \rangle, \langle a_2, a_2 \rangle \}$,

$R_{12} = \{ \langle a_1, a_1 \rangle, \langle a_1, a_2 \rangle, \langle a_2, a_1 \rangle \}$

$R_{13} = \{ \langle a_1, a_1 \rangle, \langle a_1, a_2 \rangle, \langle a_2, a_2 \rangle \}$

$R_{14} = \{ \langle a_1, a_1 \rangle, \langle a_2, a_1 \rangle, \langle a_2, a_2 \rangle \}$

$R_{15} = \{ \langle a_2, a_1 \rangle, \langle a_2, a_1 \rangle, \langle a_2, a_2 \rangle \}$

$R_{16} = \{ \langle a_1, a_1 \rangle, \langle a_1, a_2 \rangle, \langle a_2, a_1 \rangle, \langle a_2, a_2 \rangle \}$.

常用的关系

定义7.5 对任意集合A，定义

全域关系 $E_A=\{\langle x,y\rangle \mid x\in A\wedge y\in A\}=A\times A$

恒等关系 $I_A=\{\langle x,x\rangle \mid x\in A\}$

空关系 $\varnothing$

举例 设 $A=\{1,2\}$，那么

$E_A=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}$

$I_A=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}$

其它常用的关系

- 小于或等于关系：$LE_A=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A\wedge x\leqslant y\}$，其中 $A\subseteq R$。
- 整除关系：$D_B=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in B\wedge x$整除$y\}$，其中 $B\subseteq Z^*$
  Z^*是非零整数集
- 包含关系：$R_\subseteq=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A\wedge x\subseteq y\}$，其中 A是集合族。

举例

(1) 设 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{a,b\}$则

$L_A=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,3\rangle\}$

$D_A=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$

(2) 令$A=P(B)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$，则A上的包含关系是

$$R_\subseteq=\{\langle\varnothing,\varnothing\rangle,\langle\varnothing,\{a\}\rangle,\langle\varnothing,\{b\}\rangle,\langle\varnothing,\{a,b\}\rangle,\langle\{a\},\{a\}\rangle,\langle\{a\},\{a,b\}\rangle,\langle\{b\},\{b\}\rangle,\langle\{b\},\{a,b\}\rangle,\langle\{a,b\},\{a,b\}\rangle\}$$

特殊关系(续)

设A⊆R，则可以定义A上的:

- 小于等于(less than or equal to)关系:

$$LE_A = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A \land y \in A \land x \le y \}$$

- 小于(less than)关系,

$$L_A = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A \land y \in A \land x < y \}$$

- 大于等于(greater than or equal to)关系
- 大于(great than)关系,...

例7.4

例7.4 设A={1, 2, 3, 4}，下面各式定义的R都是A上的关系，试用列元素法表示R。

(1) $R=\{\langle x, y\rangle \mid x$是$y$的倍数$\}$

(2) $R=\{\langle x, y\rangle \mid (x-y)^2 \in A\}$

(3) $R=\{\langle x, y\rangle \mid x/y$是素数$\}$

(4) $R=\{\langle x, y\rangle \mid x \neq y\}$

解答

(1) $R=\{\langle 4,4\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 1,1\rangle\}$

(2) $R=\{\langle 2,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 4,3\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 1,2\rangle\}$

(3) $R=\{\langle 2,1\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 4,2\rangle\}$

(4) $R=E_A-I_A=\{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 4,3\rangle\}$

关系的表示方法

- 关系的三种表示方法：
  - 集合表达式
  - 关系矩阵
  - 关系图
- 关系矩阵和关系图可以表示有穷集上的关系。

关系的集合表示

二元关系的集合表示即用列出关系中所有有序来构成的集合来表示的方法。例如**A={1,2,3}**，则**A**上的小于关系**R**可表示为R={$\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,3\rangle$}，这就是关系的集合表示法表示。

除了用集合来表示关系外，我们还有时用矩阵或图的形式来表示二元关系。用矩阵表示关系，给在计算机中表示关系提供了一种有效的方法。用图来表示关系则具有一定的简便和直观的特点。另外，关系的图形表示，使得在图论和关系之间建立了某种联系。

关系矩阵(matrix)

- 设 A={$a_1, a_2, \ldots, a_n$}, R⊆A×A, 则R的关系矩阵$M_R=(r_{ij})_{n\times n}$, 其中 $r_{ij}=\begin{cases}1, & a_i R a_j\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$
- 例如, A={a, b, c},

R_1={<a, a>, <a, b>, <b, a>, <b, c>},

R_2={<a, b>, <a, c>, <b, c>}, 则

$$M_{R_1}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad M_{R_2}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

关系矩阵(matrix)

- 设 A={$a_1, a_2, \ldots, a_n$}, B={$b_1, b_2, \ldots, b_m$}, $R \subseteq A \times B$, 则R的关系矩阵 $M_R=(r_{ij})_{n\times m}$，其中

$$r_{ij}=\begin{cases}1, & a_i R b_j \\ 0, & \text{否则}\end{cases} \quad (i=1,2,\cdots,n; j=1,2,\cdots,m)$$

例如 A={1,2,3},B={a,b,c,d},R是A到B的关系，R={<1,a>,<1,d>,<2,a>,<2,c>,<3,b>,<3,d>}

则关系R的关系矩阵M_R为：

$$M_R=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

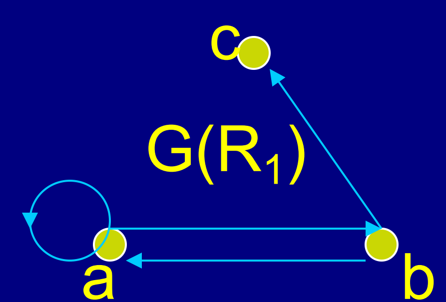
关系图(graph)

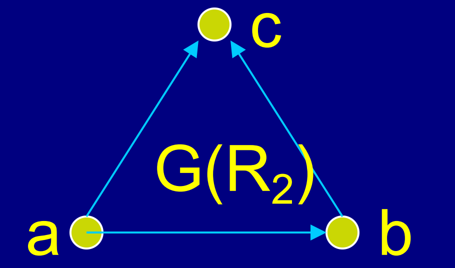
- 设 $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$，$R\subseteq A\times A$，则A中元素以“○”表示(称为顶点)，R中元素以“→”表示(称为有向边)；若x_iRx_j，则从顶点x_i向顶点x_j引有向边$\langle x_i, x_j\rangle$，这样得到的图称为R的关系图 G(R).

- 例如，$A=\{a, b, c\}$，

$R_1=\{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle\}$，

$R_2=\{\langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, c\rangle\}$，则

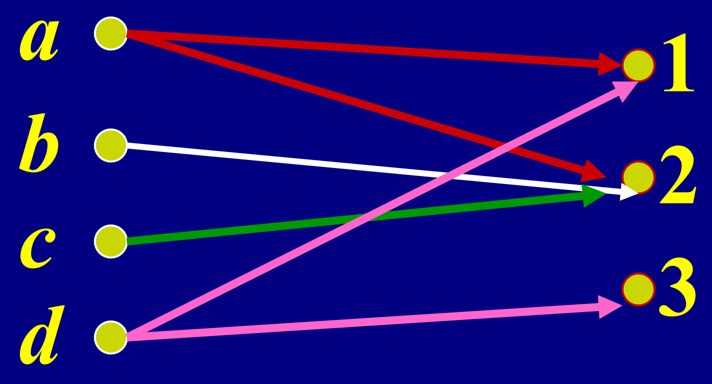




关系图(graph)

- 设 $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$, $B=\{b_1,b_2,\ldots,b_m\}$,$R\subseteq A\times B$, 则A和B中元素均以“○”表示(称为顶点), R中元素以“→”表示(称为有向边); 若a_iRb_j, 则从顶点a_i向顶点b_j引有向边$<a_i,b_j>$, 这样得到的图称为R的关系图 G(R).
- 例如, A={a,b,c,d},B={1,2,3} ,

R={<a,1>,<a,2>,<b,2>,<c,2>,<d,1>,<d,3>},则



关系矩阵,关系图(讨论)

- 当A中元素标定次序后， $R\subseteq A\times A$的关系图G(R)，R的关系矩阵M_R与R的集合表达式可以唯一互相确定
- R的集合表达式,关系矩阵,关系图三者均可以唯一互相确定
- 对于$R\subseteq A\times B$， $|A|=n$, $|B|=m$, 关系矩阵M(R)是$n\times m$阶的, 关系图G(R)中的边都是从A中元素指向B中元素的.

关系矩阵和关系图的实例

设 A={1, 2, 3, 4}， R={<1, 1>, <1, 2>, <2, 3>, <2, 4>, <4, 2>}，则R的关系矩阵和关系图分别是

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$