2022-12 数学分析 I 阶段练习 2022-12

班级____________学号____________姓名______________

1. 求极限 (1). $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)$; (2). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}$; (3). $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e}\right)^n$.

2. (1). 讨论函数$f(x)=(x-2)\sqrt[3]{x^2}$ 的极值情况.

(2). 讨论函数$f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$ 的单调性,极值情况,凹凸区间,给出曲线$y=f(x)$的拐点.

(3). 给出曲线$y=\sqrt[3]{x}$ 的拐点.

3. 设在$[0,c]$上 $f(x)$ 二阶可导且为凸函数， $f(0)=0$，证明：当$0\le a\le b\le a+b\le c$时有

$f(a+b)\ge f(a)+f(b)$.

4. 给出函数 $f(x)=xe^{-x^2}$ 的带 Peano 型余项的 Maclaurin 展开式，给出 $f^{(9)}(0), f^{(10)}(0)$.

5. 设 $x>0$, 证明: $e^x>1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}$.

6. 证明: 在 $x>0$时函数 $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 严格单调递增 .

7. 求证 : $x>0, x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$;

8. 设a为常数，求证：$\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}\right)=a$.

9. 证明可导的奇函数的导函数是偶函数.又问：连续的偶函数的原函数是奇函数吗?

10. 若$x\ln x$是函数$f(x)$的一个原函数,问$\int xf'(2x)dx=?$

11.计算不定积分

(1).$\int\frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}}$; (2).$\int\sqrt{a^2-x^2}dx$; (3).$\int\frac{dx}{1+\sqrt{2x}}$; (4).$\int(x\ln x)^2dx$; (5).$\int e^{-\sqrt[3]{x}}dx$;

(6).$\int\frac{\arctan x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}dx$; (7).$\int\sqrt{e^x-1}\,dx$.

12. 不等式证明一箩筐:

(1). $|\sin x-\sin y|\le|x-y|$;

(2). $\forall x\in\mathbb{R},e^{x}\ge 1+x$;

(3). $x>0,\ln x\le x-1$;

(4). $0<x<\dfrac{\pi}{2},\dfrac{x}{\sin x}<\dfrac{\tan x}{x}$;

(5). $x<1$ 时有$e^{x}\le\dfrac{1}{1-x}$;

(6). $x\in[0,1],p\ge 1,\dfrac{1}{2^{p-1}}\le x^{p}+(1-x)^{p}\le 1$;

(7). $a\ne b$,有 $e^{\frac{a+b}{2}}\le\dfrac{e^{b}-e^{a}}{b-a}\le\dfrac{e^{a}+e^{b}}{2}$.

(7).分析:(A).$a\ne b,\dfrac{e^{b}-e^{a}}{b-a}\le\dfrac{e^{a}+e^{b}}{2}\Leftrightarrow\dfrac{e^{b-a}-1}{b-a}\le\dfrac{1+e^{b-a}}{2},b-a\triangleq t,$

$\Leftrightarrow t\ne 0,\dfrac{e^{t}-1}{t}\le\dfrac{1+e^{t}}{2}$ …这种做法形象地称为“降维‘打击’”.