Chap.12 无穷级数

Sec.12.1 无穷级数的概念

Sec.12.2 数项级数的审敛法

Sec.12.1 无穷级数的概念

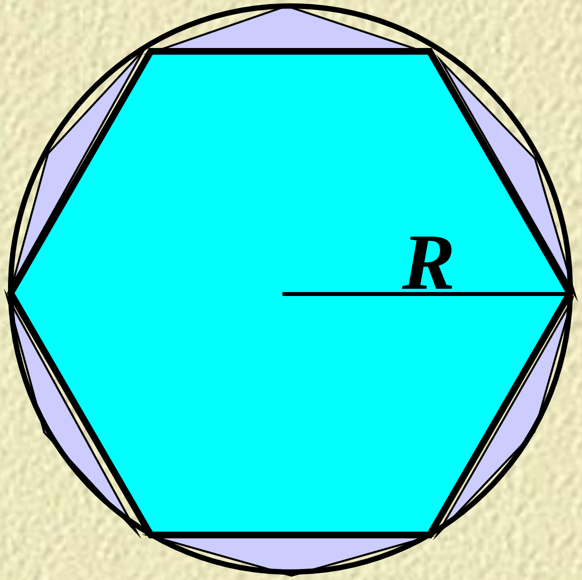
一.问题的提出

二.无穷级数的概念

三.无穷级数基本性质

四.无穷级数收敛的判断准则

一.问题的提出



例1.计算圆的面积

刘徽的割圆术——

正六边形的面积a_1,

正十二边形的面积$a_1 + a_2$,

正3×2^n边形的面积$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$,

即 $A \approx a_1 + a_2 + \cdots + a_n$,

$\therefore A = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$

上页 下页 返回

例2.数学分析(微积分)中一开始就有一个假设：$1=0.999\cdots\cdots$ 即

$$1=\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3}+\cdots+\frac{9}{10^n}+\cdots$$

这样,任何有理数都可表示为无穷小数.这是极限理论的发端.

例3.某种慢性病患者需长期服用一种药物,该药物24小时的代谢率为$q(0<q<1)$,据研究知,为控制病情的发展,患者的血液中该药物的浓度的范围应为:

$$d_1 \le \text{浓度} \le d_2,$$

换算成每千克体重,患者体内该药物应有的量为:$A \le \text{药量} \le B(mg)$,那么按每千克体重计,患者每天应该服用的药量应为多少呢?

上页 下页 返回

解　设每天服药量为$c\left(\frac{mg}{kg}\right)$,记 $r=1-q$,那么

按每千克体重计,患者体内该药物的含量为

服药第一天 c

服药第二天 $c+cr$

服药第三天 $c+cr+cr^2$　　$\cdots$

服药第 $n+1$ 天 $c+cr+\cdots+cr^n$

长期服用下去,那么患者体内该药物的含量为

$$c+cr+\cdots+cr^n+\cdots=\frac{c}{1-r}=\frac{c}{q}$$

$\therefore A\le\frac{c}{q}\le B\Rightarrow Aq\le c\le Bq.$

上页　下页　返回

二. 无穷级数的概念

1.无穷级数　收敛与发散

我们称无穷数列$\{u_n\}$的所有项的和

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

为无穷级数,简称级数.称u_n为级数的通项(一般项),称

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

为级数的部分和.

若无穷级数的部分和列$\{S_n\}$收敛,则称无穷级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛.

若$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$,则称$S$为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$的和,即

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = S.$$

若级数的部分和列$\{S_n\}$发散,

则称无穷级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$发散.

无穷级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的部分和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n,$$

余项$R_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}$,

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} S_n$存在$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} R_n = 0.$

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛时用$S_n \approx S$的绝对误差$|R_n|$.

上页 下页 返回

$Q:$研究无穷级数的意义,目的?

$A:$若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛于S,那么$S \approx S_n$,

而其绝对误差为$|R_n| = |S - S_n|$.

(1).实数的表示与近似计算,如:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1} + \cdots = \frac{\pi}{4},$$

$\therefore$ 对于某个足够大的数n_0,

$$\pi \approx 4\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^{n_0-1}\frac{1}{2n_0-1}\right]$$

那么这个近似计算的绝对误差为

$$|R_{n_0}| = 4\left|\frac{1}{2n_0+1} - \frac{1}{2n_0+3} + \frac{1}{2n_0+5} - \frac{1}{2n_0+7} + \cdots\right|$$

Q:研究无穷级数的意义,目的?

A:(2).我们可以得到函数的一种新的表示方式,进而我们可以去处理一些原先无法解决的如微分方程求解,积分计算等的问题.如今后我们可以获知有$x\in(-\infty,+\infty)$,

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},$$

那么就有 $e^{-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!},$

进而我们可以求$\int_0^1 e^{-x^2}dx$ 的近似值.

返回

由微分学中的*Taylor*定理我们可以得到

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x \in \mathbb{R},$$

那么$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \cdots, x \in \mathbb{R},$

则$\int_0^1 e^{-x^2} dx = \int_0^1 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \cdots \right) dx$

$$= \int_0^1 1dx - \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 \frac{x^4}{2!} dx - \int_0^1 \frac{x^6}{3!} dx + \int_0^1 \frac{x^8}{4!} dx + \cdots$$

$$= 1 - \frac{1}{1!\cdot 3} + \frac{1}{2!\cdot 5} - \frac{1}{3!\cdot 7} + \frac{1}{4!\cdot 9} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} + \cdots$$

那么我们可以取一个足够大的n,从而

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 1 - \frac{1}{1!\cdot 3} + \frac{1}{2!\cdot 5} - \frac{1}{3!\cdot 7} + \frac{1}{4!\cdot 9} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}.$$

回顾

数列极限的定义与性质

(1).定义：数列$\{u_n\}$收敛于$a \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N$,有$|u_n - a| < \varepsilon$.

数列$\{u_n\}$没有极限,则称数列发散.

(2).数列极限的四则运算法则

定理:若数列$\{x_n\}$,$\{y_n\}$都收敛,

且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$,$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$,则

(a).$\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n \pm y_n\right) = A \pm B$;

(b).$\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n \cdot y_n\right) = A \cdot B$;

(c).$B \neq 0$时有$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{A}{B}$.

(3).定理:收敛数列的任一子列都收敛,且极限值相同.

上页 下页 返回

(4).常用的数列极限结论：

$(A).a>0, \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1, \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1;$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \ ;$$

$(B).\lim_{n\to\infty}u_n = A>0, \lim_{n\to\infty}v_n = B \Rightarrow \lim_{n\to\infty}u_n^{v_n} = A^B;$

(C).迫敛性定理：若$y_n \le x_n \le z_n \quad (n \ge n_0)$,

且$\lim_{n\to\infty}y_n = \lim_{n\to\infty}z_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty}x_n = a.$

… …

例4.讨论等比级数(几何级数)

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots$$

$(a \neq 0)$的敛散性.

解　如果$q \neq 1$时

$$S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1}$$

$$= \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q},$$

当$|q|<1$时,$\lim\limits_{n\to\infty} q^n=0$ $\therefore \lim\limits_{n\to\infty} S_n=\dfrac{a}{1-q}$,级数收敛;

当$|q|>1$时,$\lim\limits_{n\to\infty} q^n=\infty$ $\therefore \lim\limits_{n\to\infty} S_n=\infty$,级数发散;

如果$|q|=1$时,

当$q=1$时,$S_n=na\to\infty$,级数发散;

当$q=-1$时,级数变为$a-a+a-a+\cdots$

此时$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$不存在,级数发散.

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} aq^n=\begin{cases}\text{当}|q|<1\text{时,级数收敛.}\\ \text{当}|q|\ge 1\text{时,级数发散.}\end{cases}$$

上页 下页 返回


$\sum_{n=0}^{\infty} 猫(\frac{1}{2})^n$
a_3
a_2
a_1

例5.判断无穷级数的敛散性：

$$\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots$$

解 $\because u_n=\dfrac{2}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}$,

$$\therefore S_n=\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{2n+1},\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=1,$$

$\therefore$ 级数收敛,和为 1.

例6.试将循环小数$2.3\overline{17} = 2.3171717\cdots$表示成分数的形式.

解 $2.3\overline{17} = 2.3 + \frac{17}{10^3} + \frac{17}{10^5} + \frac{17}{10^7} + \cdots$

$$= 2.3 + \frac{17}{10^3}\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{100}\right)^n}$$

几何级数

公比$q = \frac{1}{100}$

$$= 2.3 + \frac{17}{10^3} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \frac{1147}{495}.$$

上页 下页 返回

三. 无穷级数基本性质

2.无穷级数的性质是级数的重要内容.

性质1. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, C 为常数, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} Cu_n$ 亦收敛,

且 $\sum_{n=1}^{\infty} Cu_n = C\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

结论: $C \neq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} Cu_n$ 同敛散.

性质2. 设有两收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = A$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = B$,

则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 亦收敛, 其和为 $A \pm B$.

结论: 收敛级数可以逐项相加(或相减).

上页 下页 返回

说明:

(1).两收敛级数可以逐项相加.

(2).若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛,$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散,则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$发散.

(3).而若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$均发散,则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$敛散性不确定.比如,取 $u_n=(-1)^{n+1}, v_n=(-1)^n$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1-1+1-1+\cdots, \sum_{n=1}^{\infty} v_n = -1+1-1+1\cdots$$

都发散,而 $u_n+v_n=0, \sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)=0$收敛.

上页 下页 返回

例7.求无穷级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{5}{n(n+1)}+\frac{1}{2^n}\right]$的和.

解 $\because \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n(n+1)}=5\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$,

令$g_n=5\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$\therefore \lim_{n\to\infty} g_n=5\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=5.$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$是几何级数,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}=\frac{\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=1,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{5}{n(n+1)}+\frac{1}{2^n}\right]=5\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$$

$$=5+1=6.$$

上页 下页 返回

性质3.设$k \in \mathbb{Z}^+$,若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛,

则$\sum_{n=k+1}^{\infty} u_n$亦收敛,且其逆亦真.

结论:在级数前面加上或去掉有限项,

不会改变级数的敛散性.(或改变级数的和.)

证明 $\sum_{i=1}^{k} u_i = S_k$,若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛于S,

$\sigma_n = u_{k+1} + u_{k+2} + \cdots + u_{k+n} = S_{n+k} - S_k$,

则$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty}\left(S_{n+k} - S_k\right) = S - S_k$.

上页 下页 返回

性质4.收敛级数加括号后所成的级数仍然收敛,且其和不变.

结论:级数收敛时,无穷多个数的加法满足加法的结合律.

理论依据——定理:收敛数列的任一子列都收敛,且极限值相同.

性质4.收敛级数加括号后所成的级数仍然收敛,且其和不变.

解析　设级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S, \sum_{k=1}^{n} u_k = S_n,$

如$(u_1 + u_2) + (u_3 + u_4 + u_5) + (u_6 + u_7) + \cdots$

的前m项的部分和为σ_m,则

$$\sigma_1 = S_2, \sigma_2 = S_5, \sigma_3 = S_7, \cdots, \sigma_m = S_n, \cdots$$

则$\lim_{m\to\infty} \sigma_m = \lim_{n\to\infty} S_n = S.$

说明:

(1).对收敛级数可任意加括号,其和不变.

(2).等价地说,若一级数加括号后发散,

或者对级数做两种不同的加括号运算,

它们的和不同,则原级数发散.

(3).级数加括号后收敛,原级数未必收敛.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1-1+1-1+1-1+\cdots \text{发散},$$

$$\text{而}\ (1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots = 0,$$

$$1-(1-1)-(1-1)-(1-1)\cdots = 1.$$

上页 下页 返回

四.无穷级数收敛的判断准则

3.无穷级数收敛的必要条件.

定理12.1. 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛,则$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

证明 $\because \sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$,则$u_n = S_n - S_{n-1}$,

$$\therefore \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(S_n - S_{n-1}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

注意：

1.如果级数的一般项不趋近于零，则级数发散.例如

$$\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}+\cdots$$ 发散

2.必要条件不充分.

例如调和级数 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$

虽有 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$，但级数不收敛.

调和级数$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$

虽有$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, 但级数不收敛!

$$\because S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2},$$

假设调和级数收敛,其和为S.

于是$\lim_{n\to\infty}\left(S_{2n} - S_n\right) = S - S = 0,$

便有$0 \ge \frac{1}{2}\ (n\to\infty)$,这是不可能的.

$\therefore$ 调和级数发散.

上页 下页 返回

例8.判断下列级数的敛散性.

$$(1).\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n^2}};\qquad (2).\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right);$$

$$(3).\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n};\qquad (4).\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{3^n}+\frac{1}{2n-1}\right].$$

解(1). $\because \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1, \therefore \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n^2}}=1\neq 0,$

$\therefore$ 该无穷级数发散.

$$(2).\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right),\ S_n=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right),$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)=\ln 2-\ln 1+\ln 3-\ln 2$$

$$+\cdots+\ln n-\ln(n-1)+\ln(n+1)-\ln n\ ,$$

$$\therefore S_n=\ln(n+1),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\ln(n+1)=+\infty.$$

$$(3).\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n},$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\cdots+\frac{n}{2^n},$$

$$\frac{1}{2}S_n=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\cdots+\frac{n-1}{2^n}+\frac{n}{2^{n+1}},$$

两式相减,得:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}},$$

$$\therefore S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n},$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n},$$

$$\Rightarrow S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n},$$

$$S_n=\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^n}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}S_n=2.$$

上页 下页 返回

通常,在确知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$收敛后,我们可直接用所谓“错位相减法”求其值:

$$S=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\cdots,$$

$$\frac{1}{2}S==\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\cdots,$$ 两式相减,得:

逐项相加性质

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)S=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1, S=2.$$

上页 下页 返回

$$(4).\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{3^n}+\frac{1}{2n-1}\right],$$

不难说明, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}$ 收敛,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\text{发散},$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{3^n}+\frac{1}{2n-1}\right]\text{发散}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\text{发散.}$$

$$\because \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}$$

$$>\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

上页 下页 返回

$$\because \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}$$

$$>\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right),$$

由调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散知

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=+\infty$,极限不存在,

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)=+\infty\ ,$$

即 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ 发散.

上页 下页 返回

4.无穷级数的Cauchy收敛准则*.

定理12.2. (1).级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛$\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}, s.t.$

$$\left| u_{n+1} + \cdots + u_{n+p} \right| < \varepsilon.$$

立此存照
述而不证

(2).$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散$\Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0, \forall N, \exists n_0 > N,$

$\exists p_0 \in \mathbb{N}, s.t.$ $\left| u_{n_0+1} + \cdots + u_{n_0+p_0} \right| \geq \varepsilon_0.$

判断无穷级数收敛的最重要的充要条件——*Cauchy*收敛准则：

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{收敛} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N,$$

$$\forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}, s.t. \left| u_{n+1} + \cdots + u_{n+p} \right| < \varepsilon.$$

揭示了无穷级数收敛的实质：

项数足够大时,从某一项起的任意多项的和是无穷小.

上页 下页 返回

*Cauchy*收敛准则：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N},$

$$s.t. \left| u_{n+1} + \cdots + u_{n+p} \right| < \varepsilon.$$

$\Rightarrow$ 涵盖了级数收敛的必要条件：

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛 $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 0.$

$\Rightarrow$ 涵盖了级数收敛的定义：

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛 $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k} = 0.$

例9*.利用*Cauchy*收敛准则判断级数的敛散性.

(1). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{2^n}$; (2). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$;

(3). $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$.

解 (1). $\forall\varepsilon>0,\exists N\ge\frac{1}{\varepsilon},\forall n>N,\forall m\in\mathbb{Z}^+$,有

$$\left|S_{n+m}-S_n\right|=\left|\frac{\sin(n+1)x}{2^{n+1}}+\frac{\sin(n+2)x}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{\sin(n+m)x}{2^{n+m}}\right|$$

$$\le\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+m}}=\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{n+m}}<\frac{1}{2^n}<\frac{1}{n}<\frac{1}{N}\le\frac{1}{1/\varepsilon}=\varepsilon,$$

由*Cauchy*收敛准则知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{2^n}$ 收敛.

上页 下页 返回

$$(2).\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n};$$

级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$是收敛的,由$Cauchy$收敛准则,

分析:对任意给定的$\varepsilon > 0$,要确认存在N,使得

对任意的$n > N$,对任意的$m \in \mathbb{Z}^{+}$,有

$$\left|S_{n+m} - S_{n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n}}{n+1} + \cdots + \frac{(-1)^{n+m-1}}{n+m}\right| < \varepsilon \text{成立}.$$

$$而\left|\frac{(-1)^n}{n+1}+\cdots+\frac{(-1)^{n+m-1}}{n+m}\right|=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}+\cdots+\frac{(-1)^{m-1}}{n+m}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{n+1}-\left(\dfrac{1}{n+2}-\dfrac{1}{n+3}+\cdots+\dfrac{1}{n+m-1}-\dfrac{1}{n+m}\right)<\dfrac{1}{n+1}<\dfrac{1}{n}, & m\text{奇}\\ \dfrac{1}{n+1}-\left(\dfrac{1}{n+2}-\dfrac{1}{n+3}+\cdots+\dfrac{1}{n+m-2}-\dfrac{1}{n+m-1}\right)-\dfrac{1}{n+m}<\dfrac{1}{n}, & m\text{偶}\end{cases}$$

所以只要 $\frac{1}{n}<\varepsilon$,即 $n>\frac{1}{\varepsilon}$ 可也,故可取 $N\geq\frac{1}{\varepsilon}$.

上页 下页 返回

$$(2).\because \forall\varepsilon>0,\exists N\ge\frac{1}{\varepsilon},\forall n>N,\forall m\in\mathbb{Z}^{+},$$

$$\text{对于}\left|S_{n+m}-S_{n}\right|=\left|\frac{(-1)^{n}}{n+1}+\cdots+\frac{(-1)^{n+m-1}}{n+m}\right|$$

$$=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}+\cdots+\frac{(-1)^{m-1}}{n+m}=$$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{n+1}-\left(\dfrac{1}{n+2}-\dfrac{1}{n+3}+\cdots+\dfrac{1}{n+m-1}-\dfrac{1}{n+m}\right)<\dfrac{1}{n},\quad m\text{奇}\\ \dfrac{1}{n+1}-\left(\dfrac{1}{n+2}-\dfrac{1}{n+3}+\cdots+\dfrac{1}{n+m-2}-\dfrac{1}{n+m-1}\right)-\dfrac{1}{n+m}<\dfrac{1}{n},m\text{偶}\end{cases}$$

$$\text{有}\frac{1}{n}<\frac{1}{N}\le\frac{1}{1/\varepsilon}=\varepsilon,\text{即}\left|S_{n+m}-S_{n}\right|<\varepsilon,\therefore\text{原级数收敛.}$$

上页 下页 返回

例9*.(3). $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots.$

解(3). $\exists\ 0<\varepsilon_0\le\frac{1}{4},\forall N,\forall n>N,\exists p=3n,$

$$\left|S_{n+p}-S_n\right|=\left|S_{4n}-S_n\right|=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}$$

$$+\frac{1}{n+4}+\frac{1}{n+5}-\frac{1}{n+6}+\cdots+\frac{1}{4n-2}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n}$$

$$>\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+4}+\cdots+\frac{1}{4n-2}$$

$$>\frac{1}{4n}+\frac{1}{4n}+\cdots+\frac{1}{4n}=\frac{1}{4}\ge\varepsilon_0\ ,$$

由 *Cauchy* 收敛准则知级数 发散.

上页 下页 返回

例10*.求证(1).$p\geq 2$时$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$收敛;(2).调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散.

证明:(1).法一:记 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}$,$\therefore \{S_n\}\uparrow$,且有

$$p\geq 2, S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$$

$$<1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}$$

$$=1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=2-\frac{1}{n}<2,$$

$\therefore\{S_n\}$有上界$\Rightarrow p\geq 2$时$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$收敛.

上页 下页 返回

(1).法二：由$Cauchy$收敛准则判断：

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \ge \frac{1}{\varepsilon}, \forall n > N, \forall m \in \mathbb{Z}^{+},$$

有$$\left|S_{n+m} - S_n\right| = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+m)^2}$$

$$\le \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+m-1)(n+m)}$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+m-1} - \frac{1}{n+m}$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+m} < \frac{1}{n} \le \frac{1}{N} \le \frac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

(2).法一：由*Lagrange*微分中值定理

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln(n+1)-\ln n=\frac{1}{\xi},\xi\in(n,n+1).$$

$$\therefore \frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n},$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{n}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}>\ln\left(1+\frac{1}{1}\right)$$

$$+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln(n+1),$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\infty,\ \text{记为}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty.$$

法二：假设$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=S$收敛，则$\frac{S}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots,$

$\therefore 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots=\frac{S}{2}$，但是$1>\frac{1}{2},\frac{1}{3}>\frac{1}{4},\frac{1}{5}>\frac{1}{6},\cdots,$

$$\therefore 1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}>\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdots+\frac{1}{2n},$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)\geq\frac{1}{2}+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdots+\frac{1}{2n}\right),$$

$$\Rightarrow 1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\cdots\geq\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdots+\frac{1}{2n}+\cdots,$$

即$\frac{S}{2}\geq\frac{1}{2}+\frac{S}{2}$，由此矛盾可知假设$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=S$收敛不成立.

上页 下页 返回

法三:由*Cauchy*收敛准则判断:

对于$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}, \exists \varepsilon_0=\frac{1}{2}>0, \forall N, \forall n>N, \exists k=n,$

$$\left|S_{n+k}-S_n\right|=\left|S_{2n}-S_n\right|$$

$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}$$

$$>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2},$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,且$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$.

历史上,是伟大的*L.Euler* 首先给出了结果

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6},$$

Euler 使用的是类比的方法.

Q.试问 $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots=?$

$p \geq 2$时$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^p}$收敛,调和级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$发散.

更为一般的结论是:$p-$级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} p \leq 1\text{时级数发散.} \\ p > 1\text{时级数收敛.} \end{cases}$$

有一些有趣的方法可资证明

$p-$级数的敛散性.

上页 下页 返回

例10.(2)* .求证$p-$级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$在(1).$p\le 1$时发散;

(2).$p>1$时收敛.

证明:(1).记 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}$,$\therefore\{S_n\}\uparrow$,且有

$$p\le 1, S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}\ge\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$$

由$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty$知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$在$p\le 1$ 时发散.

上页 下页 返回

(2). $p-$级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p}}$在$p>1$时收敛.

法一:由*Lagrange*微分中值定理

$$p>1,\frac{1}{n^{p-1}}-\frac{1}{(n+1)^{p-1}}=\frac{p-1}{(n+\theta)^{p}}>\frac{p-1}{(n+1)^{p}},\theta\in(0,1),$$

$$\therefore\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{p}}<1+\frac{1}{p-1}\left[\left(1-\frac{1}{2^{p-1}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{(n-1)^{p-1}}-\frac{1}{n^{p-1}}\right)\right]$$

$$=1+\frac{1}{p-1}\left(1-\frac{1}{n^{p-1}}\right)<1+\frac{1}{p-1},$$

$$\therefore p>1\text{ 时}\left\{S_{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{p}}\right\}\text{有上界}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p}}<+\infty\ .$$

(2).求证：$p-$级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$在$p>1$时收敛.

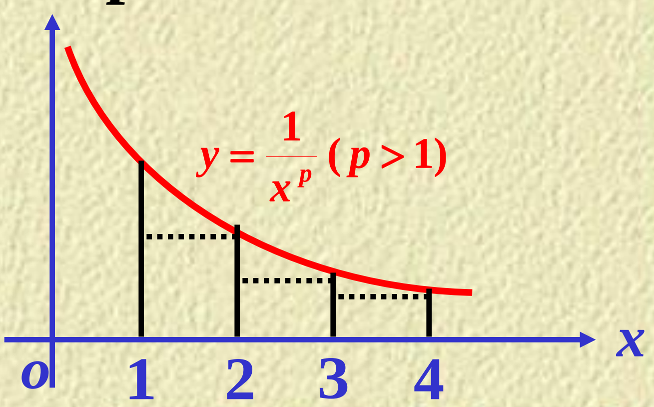
法二：$p>1$ 时,由$\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x^p}dx>\int_{k-1}^{k}\frac{1}{k^p}dx=\frac{1}{k^p},k\in\mathbb{Z}^+$,

$$\therefore \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^p}<1+\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x^p}dx=1+\int_{1}^{n}\frac{1}{x^p}dx$$

$$<1+\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=1+\frac{1}{1-p}\cdot\frac{1}{x^{p-1}}\Bigg|_{1}^{+\infty}=1+\frac{1}{p-1},$$

$\therefore p>1$ 时$\left\{S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}\right\}$有上界,

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}<+\infty .$$



法三：记$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}$，$\because \{S_n\}\uparrow$，$p>1$ 时

$$S_n<S_{2n+1}=1+\left[\frac{1}{2^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{(2n)^p}\right]+\left[\frac{1}{3^p}+\frac{1}{5^p}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)^p}\right]$$

$$<1+2\left[\frac{1}{2^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{(2n)^p}\right]=1+\frac{1}{2^{p-1}}\left(1+\frac{1}{2^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}\right)$$

$$=1+\frac{1}{2^{p-1}}S_n,\therefore \forall n\in\mathbb{Z}^+,S_n<\frac{1}{1-2^{1-p}}.$$

$$\Rightarrow p>1 \text{ 时}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}<\infty .$$

法四:记$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}$,$\therefore\{S_n\}\uparrow$,欲证明$p>1$ 时$\{S_n\}$有上界:

$$S_{2^n-1}=1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}\right)+\left(\frac{1}{8^p}+\cdots+\frac{1}{15^p}\right)$$

$$+\left(\frac{1}{16^p}+\cdots+\frac{1}{31^p}\right)+\left(\frac{1}{\left(2^{n-1}\right)^p}+\cdots+\frac{1}{\left(2^n-1\right)^p}\right)$$

$$<1+\frac{2}{2^p}+\frac{4}{4^p}+\frac{1}{8^p}+\cdots+\frac{2^{n-1}}{\left(2^{n-1}\right)^p}=1+\frac{1}{2^{p-1}}+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{1-\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^n}{1-\frac{1}{2^{p-1}}}<\frac{1}{1-\frac{1}{2^{p-1}}},\therefore\forall n\in\mathbb{Z}^+,S_n<\frac{1}{1-2^{1-p}},$$

$$\Rightarrow p>1\text{ 时}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}<\infty\ .$$

上页 下页 返回

小 结

1.无穷级数的概念.

2.基本审敛法:

(1).若 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, 则级数发散.

(2).定义, 若 $S_n \to S$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S$.

(3).按基本性质.

(4).据级数的*Cauchy*收敛准则*.

练习题

1. 判断下列级数的敛散性.

(1). $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots$;

(2). $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{9}+\cdots+\dfrac{1}{3n}+\cdots$;

(3). $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{20}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{10n}+\cdots$;

(4). $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}\right)+\left(\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{3^3}\right)+\cdots$;

(5)*. $\sum_{1}^{\infty}\arctan\dfrac{1}{2n^2}$.

上页 下页 返回

思考练习

1.设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 < \infty, \sum_{n=1}^{\infty} v_n^2 < \infty$,证明:

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$收敛且$\left|\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n\right| \le \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

这就是无穷级数形式的*Cauchy*不等式.

提示:在$n-\dim$ *Euclidean Spaces* 中的*Cauchy*不等式

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u_k v_k\right| \le \left(\sum_{k=1}^{n} u_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} v_k^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

或用范数的形式给出,即$|(u,v)| \le \|u\| \cdot \|v\|$,

$u = (u_1, \cdots, u_n), v = (v_1, \cdots, v_n)$