2022~2023 学年第 2 学期 2022 级数学分析 II-*A* 卷解答与评分标准 2023-06

一. 填空题（每空 3 分，计 30 分.）

1. 反常积分$\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}dx$ 收敛于________ .

2. 若$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = A$，则 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx =$ ________ (用A 表示) .

3. 若$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = A$,则 $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\cdots =$ ________ (用A 表示).

   实际上，级数的具体结果为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} =$ ________ .

4. 圆柱面 $x^2+y^2=a^2, x^2+z^2=a^2\,(a>0)$所围成的立体—即刘徽名之为“牟合方盖”—

   的体积为 $V_{牟} =$ ________.

5. 幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{4^n\cdot n^2}$ 的收敛域为________.

6. 试问以下论断是否正确 ？你的回答是________(填:正确 或 错误).

   对一般项级数$\sum a_n$ 而言，如果$\sqrt[n]{|a_n|}\ge 1$，则级数$\sum a_n$ 必定发散 .

7. 设$z = f(x+y,\ x-y)$，函数 f 有连续的二阶偏导数，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} =$ ________ .

8. 设由方程组$\begin{cases} u^3+v^3=3x \\ -u+v=xy \end{cases}$确定了隐函数组$u,v$,则在$u^2+v^2\neq 0$ 时 $\frac{\partial u}{\partial x} =$ ________ .

9. $\int_0^1 dx\int_x^1 e^{y^2}dy =$ ________ .

1. $\underline{2}$;　2. $\underline{\frac{A}{\sqrt{2}}}$;　3. $\underline{\frac{3}{4}A}$; $\underline{\frac{\pi^2}{6}}$;　4. $\underline{\frac{16}{3}a^3}$;　5. $\underline{[-2,2]}$;　6. 正确 ;

7. $\underline{2(f_{11}+f_{22})}$;　8. $\underline{\frac{1-v^2y}{u^2+v^2}}$;　9. $\underline{\frac{e-1}{2}}$.

二. 解答题（ 每题 10 分，计 70 分 . 解答题须写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

10. 试求出反常积分$\int_0^{+\infty} x^{2022}e^{-3x}dx$ 的值 .

解 $\int_0^{+\infty} x^{2022}e^{-3x}dx \overset{3x=u}{=\!=\!=} \frac{1}{3^{2023}}\int_0^{+\infty} u^{2022}e^{-u}du = -\frac{1}{3^{2023}}\left(u^{2022}+2022u^{2021}+\cdots+2022!u+2022!\right)e^{-u}\Big|_0^{+\infty}$

$= \frac{2022!}{3^{2023}}$.……………………………………………………………………10分

11. 设方程 $2x+2y+z^2=e^{2z}$ 确定了函数$z=z(x,y)$，试计算 $dz,\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 方程两边作微分运算 $2dx+2dy+2zdz=2e^{2z}dz$,移项得$dz=\dfrac{dx+dy}{e^{2z}-z}$.$\therefore \dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{e^{2z}-z}$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left(\frac{1}{e^{2z}-z}\right)_y'=\frac{-\left(2e^{2z}-1\right)\frac{\partial z}{\partial y}}{\left(e^{2z}-z\right)^2}=\frac{1-2e^{2z}}{\left(e^{2z}-z\right)^3}.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 10\text{分}$$

12. 试给出$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$的收敛域.在该收敛域内记$C(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$，试验证$C(x)$满足 $C''(x)+C(x)=0,C(0)=1$，$C'(0)=0$.试给出$C(x)$初等函数形式的表达式(最后一问 2分，过程不作要求).

解 $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{(-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}}{(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\dfrac{x^2}{(2n+1)(2n+2)}=0$,$\therefore$ 级数对任意的$x\in\mathbb{R}$都绝对收敛,

幂级数的收敛域为$(-\infty,+\infty)$. $C(x)=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$,

$$C'(x)=\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}+\cdots\right)'$$

$$=-x+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$$

$$C''(x)=\left(-x+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\right)'=-\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots\right)$$

$\therefore C''(x)+C(x)=0,C(0)=1,C'(0)=0.$ $C(x)=\cos x.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 10$分

注：可由 $\sum_0^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}=e^x$ 及Euler公式$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta,\theta\in\mathbb{R}$ 推得$C(x)$.

$$\sum_0^{\infty}\frac{(ix)^n}{n!}=e^{ix}\Leftrightarrow \cos x+i\sin x=1+ix-\frac{x^2}{2!}-i\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+i\frac{x^5}{5!}-\frac{x^6}{6!}-i\frac{x^7}{7!}+\frac{x^8}{8!}+\cdots$$

$$=\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}+\cdots\right)+i\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\right),\Rightarrow$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}+\cdots,\ \sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

13. 二重积分的估值不等式主要是其理论价值，具体问题积分估值所得往往范围过大而并无太大用处．如对于$I=\iint\limits_D\left(x^2+4y^2+9\right)d\sigma,D:x^2+y^2\le 4$,区域$D$的面积$\sigma(D)=4\pi$,

$\because$ 在区域D上 $9\le x^2+4y^2+9\le 25$，$\therefore 36\pi\le\iint\limits_D\left(x^2+4y^2+9\right)d\sigma\le 100\pi$,其范围就很大．

现在请你求出积分$I=\iint\limits_D\left(x^2+4y^2+9\right)d\sigma,D:x^2+y^2\le 4$ 的精确值．

解 由于区域D关于$y=x$对称，由形式对称性知$\iint\limits_D x^2d\sigma=\iint\limits_D y^2d\sigma$,

$$\therefore I=\iint\limits_D\left(x^2+4y^2+9\right)d\sigma=9\sigma(D)+\frac{5}{2}\iint\limits_D\left(x^2+y^2\right)dxdy=36\pi+\frac{5}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^2\cdot rdr=56\pi\ .\cdots\cdots 10\text{分}$$

14. 设向量$a,x\in\mathbb{R}^n, a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\neq o, x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 试求出函数 $f(x)=\sum_{k=1}^{n}a_kx_k$在条件 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$ 下的最大值．并在$n=2$或3 时函数取得最大值时的情形作几何解释．

解 记$\|a\|=\sqrt{\sum_1^n a_k^2}$, 设$L=\sum_{k=1}^{n}a_kx_k-\frac{1}{2}\lambda\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2-1\right)$,

由$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x_k}=0,k=1,2,\cdots,n\\ \dfrac{\partial L}{\partial\lambda}=0\end{cases}$ 即$\begin{cases}a_k-\lambda x_k=0,k=1,2,\cdots,n\\ x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1\end{cases}$得驻点$\begin{cases}x_k=\pm\dfrac{a_k}{\|a\|},k=1,2,\cdots,n\\ \lambda^2=\sum_1^n a_k^2=\|a\|^2\end{cases}$,

由问题的实际意义知其必存在最大值，故知$x_k=\dfrac{a_k}{\|a\|},k=1,2,\cdots,n$ 时$f(x)$取得最大值

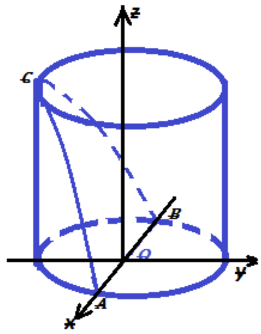
$\max f(x)=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{a_k^2}{\|a\|}=\dfrac{\|a\|^2}{\|a\|}=\|a\|$. $\left(x_k=-\dfrac{a_k}{\|a\|}\right.$ 时$f(x)$取得最小值$\left.\min f(x)=-\|a\|\ .\right)$

$n=2$或3 时函数取得最大值时,向量a,x 的夹角为0, 其内积$\sum_{k=1}^{n}a_kx_k$ 自然就取得最大值．……10分

(向量a,x 的夹角为π 时, 其内积$\sum_{k=1}^{n}a_kx_k$ 自然就取得最小值．)

或者，可由$Cauchy\ ineq.$ $\left(\sum_{k=1}^{n}a_kx_k\right)^2\le\left(\sum_1^n a_k^2\right)\left(\sum_1^n x_k^2\right)$得最大、小值结果．

15. 如图,过圆柱体底部直径和顶部边沿点的平面将柱体分成两部分, 问其中小块的体积占原圆柱体体积的比例是多少?



解 设圆柱体底半径为a高h,如图,建立直角坐标系．各点坐标

$A(a,0,0),B(-a,0,0),C(0,-a,h)$,经计算得平面$ABC$方程为 $z=-\dfrac{h}{a}y$.

记 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le a^2,-a\le y\le0\}=\{(r,\theta)|r\le a,\pi\le\theta\le2\pi\}$.

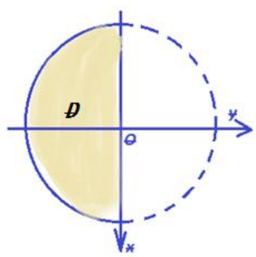
$V_{小块}=\iint_D\left(-\dfrac{h}{a}y\right)dxdy=-\dfrac{h}{a}\int_\pi^{2\pi}d\theta\int_0^a r\sin\theta\cdot rdr$

$=-\dfrac{h}{a}\cdot(-2)\cdot\dfrac{1}{3}a^3=\dfrac{2}{3}a^2h.$

或者$V_{小块}=\iint_D\left(-\dfrac{h}{a}y\right)dxdy=-\dfrac{h}{a}\int_{-a}^{0}ydy\int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}}dx=-\dfrac{2h}{a}\int_{-a}^{0}y\sqrt{a^2-y^2}dy$

$=\cdots=\dfrac{2}{3}a^2h$, $\therefore V_{小块}:V_{whole}=2:3\pi$.………………………………………………………10分

注:亦可用一元函数积分的方法来计算．



16. 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}\right)$，求证：(1). 该级数为正项级数；(2). 级数收敛；(3). 级数和小于 1 .

证明 我们知道 $,x>0$时有 $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x,$于是 $\frac{1}{1+n}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$,

(1). $-\frac{1}{\sqrt{1+n}}>-\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}>-\frac{1}{\sqrt{n}},\therefore\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}>\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}=0,$问题是正项级数 .

(2). $0<\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}<\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{1+n}}=\frac{\sqrt{1+n}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{1+n}}=\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{1+n}\left(\sqrt{1+n}+\sqrt{n}\right)}\sim\frac{1}{n^{3/2}},n\to\infty,$

由正项级数$\sum\frac{1}{n^{3/2}}<\infty\Rightarrow$原级数收敛 .

或者$,S_m=\sum\limits_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}\right)<\sum\limits_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{1+n}}\right)=1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{m}}-\frac{1}{\sqrt{1+m}}$

$=1-\frac{1}{\sqrt{1+m}}<1,\therefore\{S_m\}$有上界$\Rightarrow$原级数收敛 .

(3). $S_m=1-\sqrt{\ln 2}+\sum\limits_{n=2}^{m}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}\right)<1-\sqrt{\ln 2}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{m}}-\frac{1}{\sqrt{1+m}}$

$=1-\sqrt{\ln 2}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{1+m}},$

$S=\lim\limits_{m\to\infty}S_m\le\lim\limits_{m\to\infty}\left(1-\sqrt{\ln 2}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{1+m}}\right)=1-\sqrt{\ln 2}+\frac{1}{\sqrt{2}}=1+\frac{1-\sqrt{2\ln 2}}{\sqrt{2}}=1+\frac{1-\sqrt{\ln 4}}{\sqrt{2}}<1.$

……………………………………………………………………………………………10分

注:直接放大$S_m=\sum\limits_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}\right)<\sum\limits_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{1+n}}\right)=1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{m}}-\frac{1}{\sqrt{1+m}}$

$=1-\frac{1}{\sqrt{1+m}},$那么只能得到 $S=\lim\limits_{m\to\infty}S_m\le\lim\limits_{m\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+m}}\right)=1$.