7.6 等价关系与划分

定义7.15 设R为非空集合上的关系。如果R是自反的、对称的和传递的，则称R为A上的等价关系(equivalent relation)。设R是一个等价关系，若<x，y>∈R，称x等价于y，记做x～y。

举例 平面上三角形集合中，三角形的相似关系。

等价(equivalence)关系定义

例：判断是否等价关系(A是某班学生)：

- $R_1=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A\wedge x$与$y$同年生$\}$
- $R_2=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A\wedge x$与$y$同姓$\}$
- $R_3=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A\wedge x$的年龄不比$y$小$\}$
- $R_4=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A\wedge x$与$y$选修同门课程$\}$
- $R_5=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A\wedge x$的体重比$y$重$\}$

例 (续)

	定义	自反	对称	传递	等价关系
R_1	x与y同年生	√	√	√	√
R_2	x与y同姓	√	√	√	√
R_3	x的年龄不比y小	√	×	√	×
R_4	x与y选修同门课程	√	√	×	×
R_5	x的体重比y重	×	×	√	×

例7.16

例7.16 设A＝{1,2,...,8}，如下定义A上的关系R：

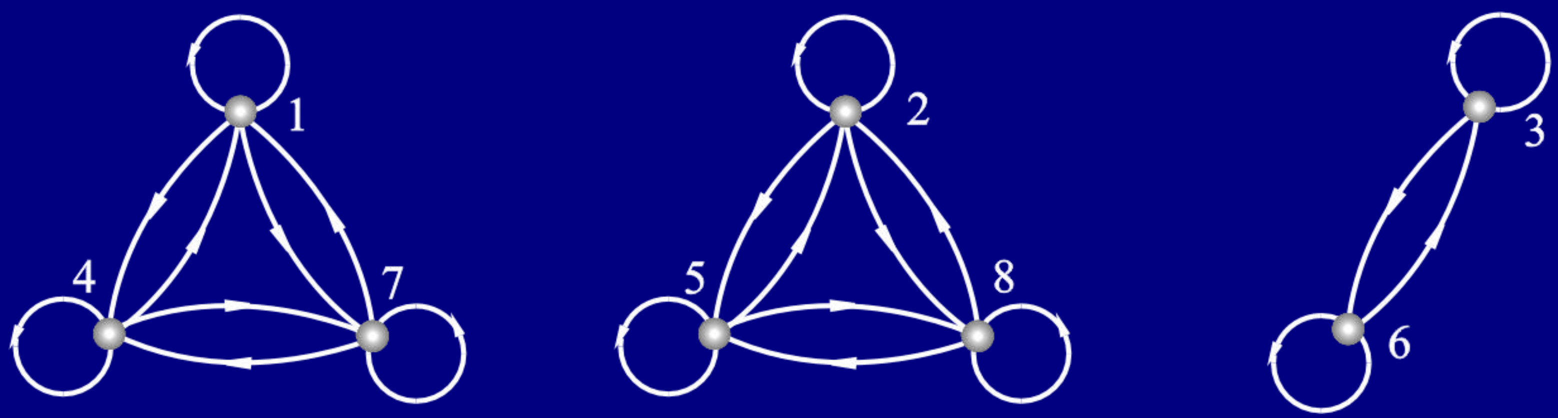
$$R=\{\langle x, y\rangle \mid x, y \in A \wedge x \equiv y \pmod 3\}$$

其中$x \equiv y \pmod 3$叫做x与y模3相等，即x除以3的余数与y除以3的余数相等。不难验证R为A上的等价关系，因为

$\forall x \in A$，有$x \equiv x \pmod 3$

$\forall x, y \in A$，若$x \equiv y \pmod 3$，则有$y \equiv x \pmod 3$

$\forall x, y, z \in A$，若$x \equiv y \pmod 3$，$y \equiv z \pmod 3$，则有$x \equiv z \pmod 3$



等价类

定义7.16 设R为非空集合A上的等价关系，$\forall x \in A$，令

$$[x]_R=\{y \mid y \in A \land xRy\}$$

称$[x]_R$为x关于R的等价类，简称为x的等价类，简记为$[x]$或$\overline{x}$。

- x的等价类是A中所有与x等价的元素构成的集合。
- 例7.16中的等价类是：

$$[1]=[4]=[7]=\{1,4,7\}$$

$$[2]=[5]=[8]=\{2,5,8\}$$

$$[3]=[6]=\{3,6\}$$

整数集合Z上的模n等价关系

设x是任意整数，n为给定的正整数，则存在唯一的整数q和r，使得

$x=qn+r$

其中$0 \leqslant r \leqslant n-1$，称r为x除以n的余数。

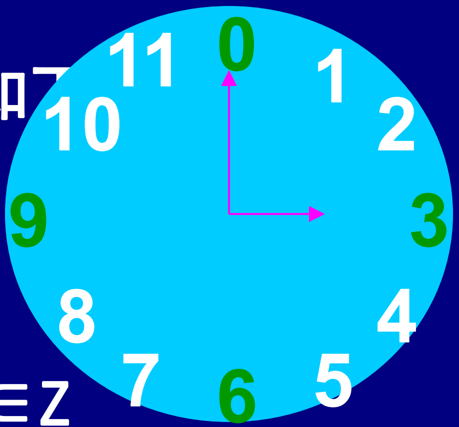
例如n＝3，那么－8除以3的余数为1，因为 $-8=-3\times 3+1$

对于任意的整数x和y，定义模n相等关系～

$x \sim y \Leftrightarrow x \equiv y \pmod{n}$

不难验证它是整数集合Z上的等价关系。

将Z中的所有整数根据它们除以n的余数分类如下



余数为0的数，其形式为nz，$z \in Z$
余数为1的数，其形式为nz+1，$z \in Z$
…
余数是n-1的数，其形式为nz+n-1，$z \in Z$

以上构成了n个等价类，使用等价类的符号可记为

$[i]=\{nz+i \mid z \in Z\}$，$i=0, 1, \ldots, n-1$

等价类的性质

定理7.14 设R是非空集合A上的等价关系，则

（1）$\forall x \in A$，$[x]$是A的非空子集。

（2）$\forall x, y \in A$，如果xRy，则$[x]=[y]$。

（3）$\forall x, y \in A$，如果$\langle x, y\rangle \notin R$，则$[x]$与$[y]$不交。

（4）$\cup\{[x] \mid x \in A\}=A$。

证明（1） 由等价类的定义可知， $\forall x \in A$有$[x] \subseteq A$。

又由于等价关系的自反性有$x \in [x]$，即$[x]$非空。

定理7.14

（2）$\forall x, y \in A$，如果xRy，则$[x]=[y]$。

任取z，则有

$$
\begin{aligned}
& z \in [x] \\
\Rightarrow\ & \langle x, z\rangle \in R \\
\Rightarrow\ & \langle z, x\rangle \in R && \text{(因为R是对称的)} \\
\Rightarrow\ & \langle z, x\rangle \in R \ \wedge\ \langle x, y\rangle \in R \\
\Rightarrow\ & \langle z, y\rangle \in R && \text{(因为R是传递的)} \\
\Rightarrow\ & \langle y, z\rangle \in R && \text{(因为R是对称的)} \\
\Rightarrow\ & z \in [y]。
\end{aligned}
$$

所以 $[x]\subseteq[y]$。

同理可证 $[y]\subseteq[x]$。

因此，$[x]=[y]$。

定理7.14

（3）$\forall x, y \in A$，如果$\langle x, y\rangle \notin R$，则$[x]$与$[y]$不交。

假设 $[x] \cap [y] \neq \varnothing$ ，

则存在 $z \in [x] \cap [y]$，

从而有 $z \in [x] \land z \in [y]$，

即$\langle x, z\rangle \in R \land \langle y, z\rangle \in R$成立。

根据R的对称性和传递性，必有$\langle x, y\rangle \in R$，与$\langle x, y\rangle \notin R$矛盾，

即假设错误，原命题成立。

定理7.14

（4）$\cup\{[x]\mid x\in A\}=A$。

先证 $\cup\{[x]\mid x\in A\}\subseteq A$

任取y，$y\in\cup\{[x]\mid x\in A\}$

$\Rightarrow \exists x(x\in A\wedge y\in[x])$

$\Rightarrow y\in A$ （因为$[x]\subseteq A$）

从而有$\cup\{[x]\mid x\in A\}\subseteq A$。

再证 $A\subseteq\cup\{[x]\mid x\in A\}$

任取y，$y\in A \Rightarrow y\in[y]\wedge y\in A$

$\Rightarrow y\in\cup\{[x]\mid x\in A\}$

从而有$A\subseteq\{[x]\mid x\in A\}$成立。

综上所述得 $\cup\{[x]\mid x\in A\}=A$。

商集

定义7.17 设R为非空集合A上的等价关系，以R的所有等价类作为元素的集合称为**A关于R的商集**(quotient set)，记做A/R，即

$$A/R=\{[x]_R \mid x\in A\}$$

例7.16中的商集为

$$\{\{1,4,7\},\{2,5,8\},\{3,6\}\}$$

整数集合Z上模n等价关系的商集是

$$\{\{nz+i \mid z\in Z\} \mid i=0,1,\ldots,n-1\}$$

- **例**：设$A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$，$I_A$，$E_A$，
  - $R_{ij}=I_A \cup \{\langle a_i, a_j\rangle, \langle a_j, a_i\rangle\}$
- 都是A上等价关系，求对应的商集，其中$a_i, a_j \in A$，$i \neq j$. $\varnothing$是A上等价关系吗?
- **解**：$A/I_A=\{\{a_1\}, \{a_2\}, \ldots, \{a_n\}\}$
- $A/E_A=\{\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}\}$
- $A/R_{ij}= A/I_A \cup \{\{a_i, a_j\}\} - \{\{a_i\}, \{a_j\}\}$.
- $\varnothing$不是A上等价关系(非自反). #

划分

定义7.18 设A为非空集合，若A的子集族π（π⊆P(A)，是A的子集构成的集合）满足下面的条件：

（1）$\varnothing \notin \pi$

（2）$\forall x \forall y (x, y \in \pi \land x \neq y \rightarrow x \cap y = \varnothing)$

（3）$\cup \pi = A$

则称π是A的一个**划分(partitions)**，称π中的元素为A的**划分块**。

说明

- 设集合π是A的非空子集的集合，若这些非空子集两两不相交，且它们的并等于A，则称π是集合A的划分。

例7.17

例7.17 设A＝{a, b, c, d}，给定$\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6$,如下：

$\pi_1=\{\{a, b, c\}, \{d\}\}$

$\pi_2=\{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}\}$

$\pi_3=\{\{a\}, \{a, b, c, d\}\}$

$\pi_4=\{\{a, b\}, \{c\}\}$

$\pi_5=\{\varnothing, \{a, b\}, \{c, d\}\}$

$\pi_6=\{\{a, \{a\}\}, \{b, c, d\}\}$

判断哪一个是A的划分

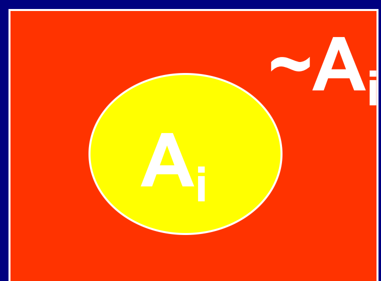
π_1和π_2是A的划分，其它都不是A的划分。

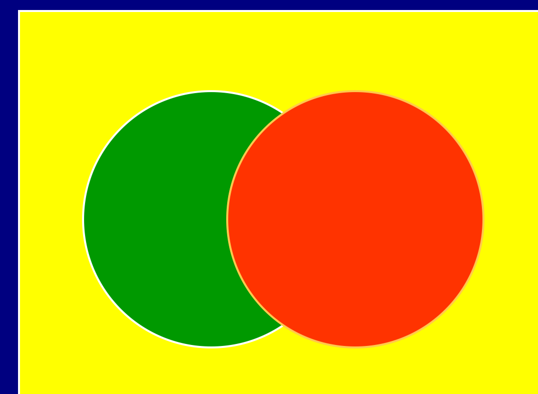
因为π_3中的子集{a}和{a, b, c, d}有交，$\cup\pi_4\neq A$，π_5中含有空集，而π_6根本不是A的子集族。

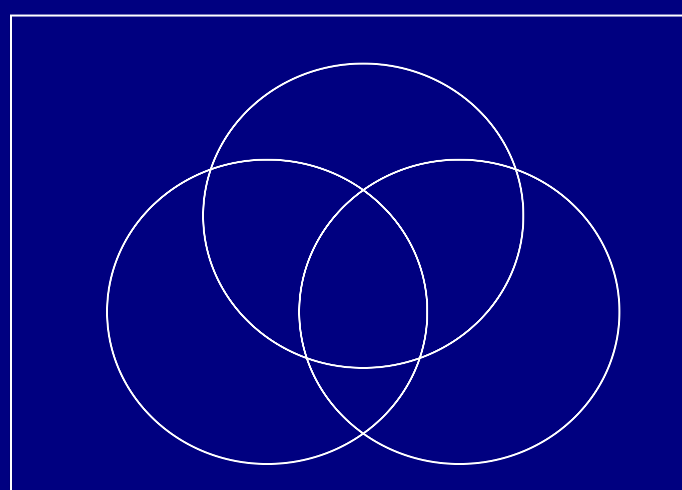
划分(举例)

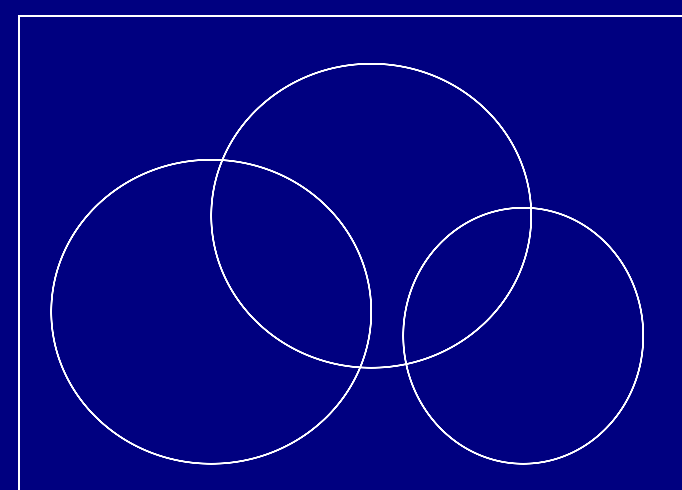
- 设 $\varnothing \neq A_1, A_2, \ldots, A_n \subset E$, 则以下都是划分:
- $\pi_i = \{A_i, \sim A_i\}$, ($i=1, 2, \ldots, n$)
- $\pi_{ij} = \{A_i \cap A_j, \sim A_i \cap A_j, A_i \cap \sim A_j, \sim A_i \cap \sim A_j\} - \{\varnothing\}$
- ($i, j = 1, 2, \ldots, n \wedge i \neq j$) ……
- $\pi_{12\ldots n} = \{\sim A_1 \cap \sim A_2 \cap \ldots \cap \sim A_n, \ldots,$
- $\sim A_1 \cap \sim A_2 \cap \ldots \cap \sim A_{n-1} \cap A_n, \ldots$
- $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n\} - \{\varnothing\}$. #

划分(举例,续)









- **加细**：设$A\neq\varnothing$， π_1，$\pi_2\subseteq P(A)$，若π_1，π_2 是A的两个划分，且满足
- $$\forall x\exists y(x\in\pi_1\wedge y\in\pi_2\rightarrow x\subseteq y)$$
- 则称π_1为π_2的加细，也称划分π_1加细了划分π_2。

若π_1为π_2的加细，且$\pi_1\neq\pi_2$，则称π_1是π_2的真加细

例如 设$A=\{1,2,3,4,5,8,9,10\}$

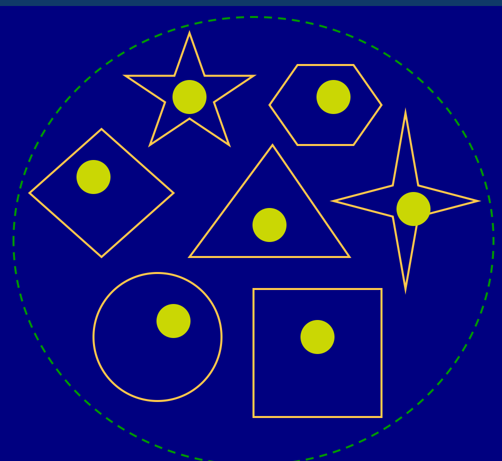
$\pi_1=\{\{1,2\},\{4,5\},\{3,8\},\{9,10\}\}$

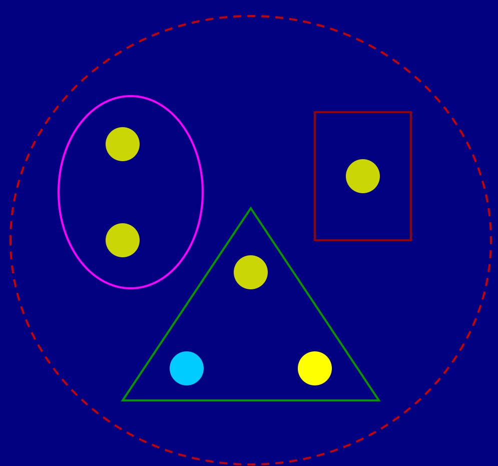
$\pi_2=\{\{1,2\},\{3\},\{4,5\},\{8\},\{9,10\}\}$

π_2是π_1的加细，且为真加细。

等价关系与划分是一一对应的

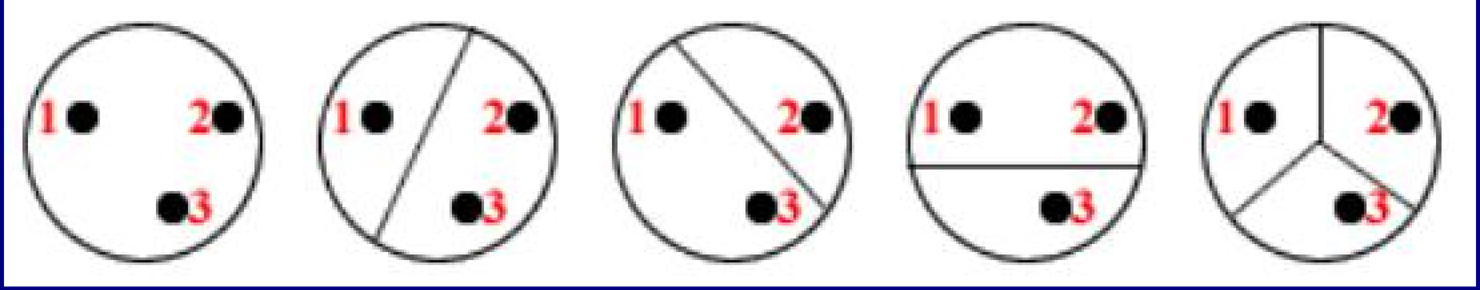
- 命题：设$A\neq\varnothing$，则
- (1) R是A上等价关系 $\Rightarrow$ A/R是A的划分(称为由A上的等价关系R所诱导出的划分)
- (2) $\mathcal{A}$是A的划分 $\Rightarrow$ $R_{\mathcal{A}}$是A上等价关系, 其中
  - $xR_{\mathcal{A}}y \Leftrightarrow \exists z(z\in\mathcal{A} \wedge x\in z \wedge y\in z)$
- $R_{\mathcal{A}}$称为由划分$\mathcal{A}$ 所定义的等价关系(同块关系)（称为由A上的划分$\mathcal{A}$所诱导出的等价关系）. #





例7.18

例7.18 给出A＝{1, 2, 3}上所有的等价关系



这些划分与A上的等价关系之间的一一对应是:

π_1对应于全域关系E_A,

π_5的对应于恒等关系I_A,

π_2，π_3和π_4分别对应于等价关系R_2，R_3和R_4。 其中

$$R_2=\{\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle\}\cup I_A$$

$$R_3=\{\langle 1,3\rangle,\langle 3,1\rangle\}\cup I_A$$

$$R_4=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\}\cup I_A$$

例题

例题 问集合A＝{a, b, c, d}上有多少个不同的等价关系？

解答 只要求出A上的全部划分，即为等价关系。

划分为一个块的情况：1种，即{a, b, c, d}

划分为两个块的情况：7种，即

{{a, b}, {c, d}}， {{a, c}, {b, d}}， {{a, d}, {b, c}}

{{a}, {b, c, d}}， {{b}, {a, c, d}}， {{c}, {a, b, d}}，
{{d}, {a, b, c}}

划分为三个块的情况：6种，即

{{a, b}, {c}, {d}}， {{a, c}, {b}, {d}}， {{a, d}, {b}, {c}}，

{{a}, {b}, {c, d}}， {{a}, {c}, {b, d}}， {{a}, {d}, {b, c}}

划分为四个块的情况：1种，即{a}, {b}, {c}, {d}}

因此，共有15种不同的等价关系。

Bell数(Bell number)

- 问题：给n个对象分类，共有多少种分法?
- 答案：Bell数 B_n= $\sum_{k=1}^{n}\left\{{n \atop k}\right\} = \left\{{n \atop 1}\right\} + \left\{{n \atop 2}\right\} + \cdots + \left\{{n \atop n}\right\}.$
- (Eric Temple Bell, 1883~1960)
- Stirling子集数(Stirling subset number) $\left\{{n \atop k}\right\}$:
- 把n个对象分成k个非空子集的分法个数.

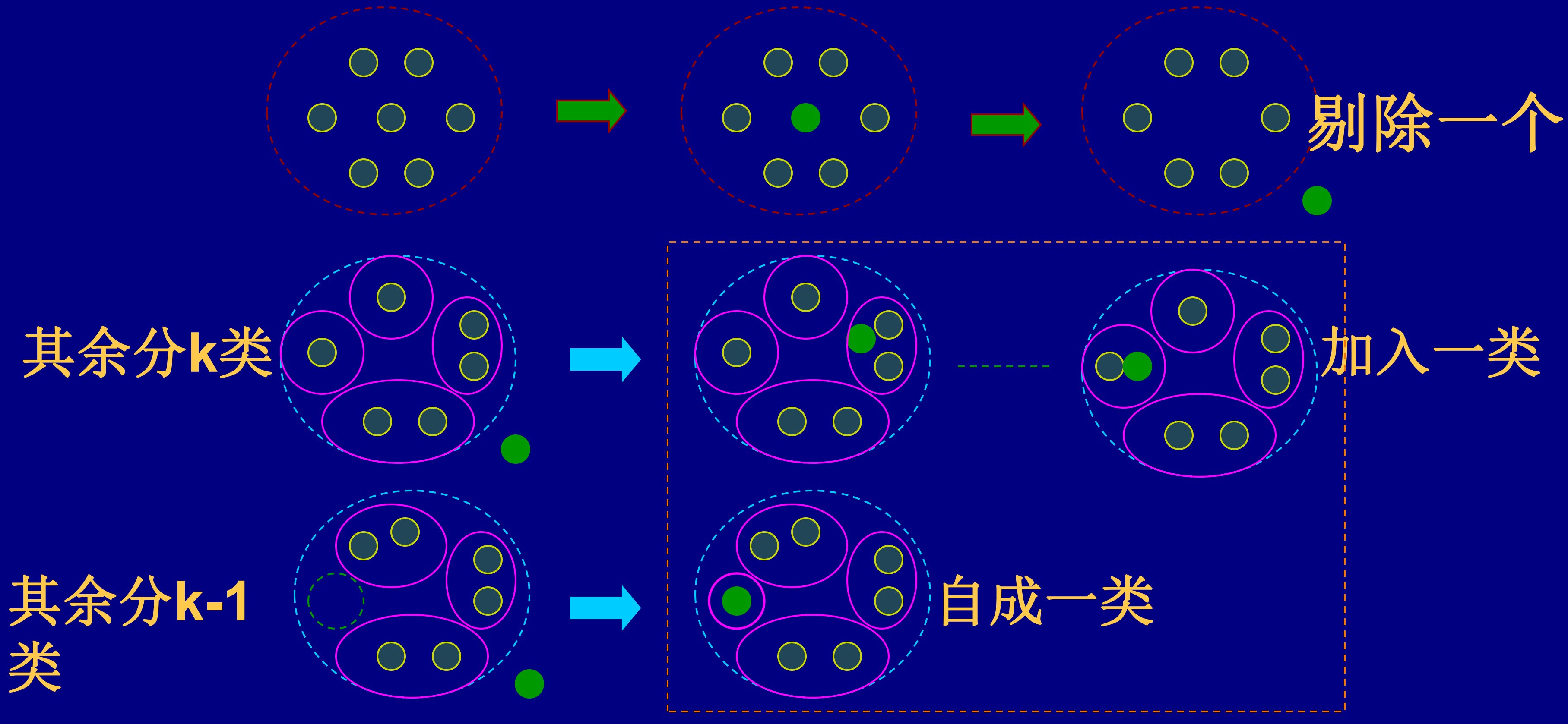
$$\left\{{n \atop 0}\right\} = 0, \left\{{n \atop 1}\right\} = 1, \left\{{n \atop 2}\right\} = 2^{n-1} - 1, \left\{{n \atop n-1}\right\} = C_n^2, \left\{{n \atop n}\right\} = 1.$$

- 递推公式:

$$\left\{{n \atop k}\right\} = k\left\{{n-1 \atop k}\right\} + \left\{{n-1 \atop k-1}\right\}.$$

Stirling子集数

- 递推公式：$$\left\{ {n \atop k} \right\} = k\left\{ {n-1 \atop k} \right\} + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}.$$



Bell数表

n	B_n	n	B_n
1	1	8	4, 140
2	2	9	21, 147
3	5	10	115, 975
4	15	11	678, 570
5	52	12	4, 213, 597
6	203	13	27, 644, 437
7	877	14	190, 899, 322

例7

- 问A={a, b, c, d}上有多少种等价关系?
- 解:

$$B_4 = \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 4 \end{matrix} \right\} = 1 + (2^3 - 1) + C_4^2 + 1 = 1 + 7 + 6 + 1 = 15.$$

-

#

第二类Stirling($S(n,k)=\left\{ {n \atop k} \right\}$)数表

n\k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	1	3	1						
4	0	1	7	6	1					
5	0	1	15	25	10	1				
6	0	1	31	90	65	15	1			
7	0	1	63	301	350	140	21	1		
8	0	1	127	966	1, 170	1, 050	266	28	1	
9	0	1	255	3, 035	7, 770	6, 951	2, 646	462	36	1
10	0	1	511	9, 330	34, 501	42, 525	22, 827	5, 880	750	45

命题1 设R_1和R_2是非空集合X上的两个等价关系。若$R_1 \subseteq R_2$，则$\forall a \in X$，有$[a]_{R_1} \subseteq [a]_{R_2}$。

证明 $\forall a \in X$，$\forall x \in [a]_{R_1}$，$<x,a> \in R_1$又由于$R_1 \subseteq R_2$所以$<x,a> \in R_2$,从而有$x \in [a]_{R_2}$,因此$[a]_{R_1} \subseteq [a]_{R_2}$

设$X=\{1,2,3,4,5\}$, $R_1=I_X \cup \{<1,2>,<2,1>,<4,5>,<5,4>\}$,

$R_2=I_X \cup \{<1,2>,<2,1>,<2,3>,<3,2>,<1,3>,<3,1>,<4,5>,<5,4>\}$

$X/R_1=\{\{1,2\},\{3\},\{4,5\}\}$, $X/R_2=\{\{1,2,3\},\{4,5\}\}$

由命题1知，若两个等价关系相等，则每个元素所对应的等价类也相同。

命题2 设R_1和R_2是非空集合X上的两个等价关系。若$\forall a\in X$，有 $[a]_{R_1}\subseteq[a]_{R_2}$，则 $R_1\subseteq R_2$。

证明 $\forall\langle x,y\rangle\in R_1, y\in[x]_{R_1}$ 由$\forall a\in X$,有

$[a]_{R_1}\subseteq[a]_{R_2}$,知$[x]_{R_1}\subseteq[x]_{R_2}$,从而,$y\in[x]_{R_2}$，

因而有$\langle x,y\rangle\in R_2$ 由$\langle x,y\rangle$的任意性可得

$R_1\subseteq R_2$ 。

由**命题2**知，若两个等价关系的等价类集合相等，则两个等价关系相同。

例

例 设R_1和R_2是非空集合X上的两个等价关系，试问$R_1 \cup R_2$和$R_1 \cap R_2$是否是等价关系？试证明之。

解: $R_1 \cap R_2$是等价关系，而$R_1 \cup R_2$不是等价关系。

$\forall x \in X$,由于R_1和R_2是X上的等价关系，所以

$<x,x> \in R_1 \wedge <x,x> \in R_2 \Rightarrow <x,x> \in R_1 \cap R_2$,即$R_1 \cap R_2$是自反的。

$\forall <x,y> \in R_1 \cap R_2 \Leftrightarrow <x,y> \in R_1 \wedge <x,y> \in R_2$ 又R_1，R_2都是等价关系$\Rightarrow <y,x> \in R_1 \wedge <y,x> \in R_2 \Leftrightarrow <y,x> \in R_1 \cap R_2$，即$R_1 \cap R_2$是对称的。

$\forall <x,y> \in R_1 \cap R_2 \wedge <y,z> \in R_1 \cap R_2 \Leftrightarrow$

$<x,y> \in R_1 \wedge <x,y> \in R_2 \wedge <y,z> \in R_1 \wedge <y,z> \in R_2$

例（续解）

又R_1，R_2都是等价关系 $\Rightarrow <x,z>\in R_1 \wedge <x,z>\in R_2$
$\Leftrightarrow <x,z>\in R_1\cap R_2$，即$R_1\cap R_2$是传递的

所以$R_1\cap R_2$是X上的等价关系。

设$X=\{1,2,3\}$,$R_1=\{<1,1>,<2,2>,<2,3>,<3,2>,<3,3>\}$ $R_2=\{<1,1>,<1,2>,<2,1>,<2,2>,<3,3>\}$都是X上的等价关系,但$R_1\cup R_2=I_X\cup\{<1,2>,<2,1>,<2,3>,<3,2>\}$确不是X上的等价关系（因为它不满足传递性）。