Sec.14.1 幂级数及其运算

一. 幂级数及其收敛性

二. 幂级数的性质及运算

上页 下页 返回

一.幂级数及其收敛性

由几何级数知,在$|x|<1$时有

$$1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\frac{1}{1-x}\cdots\cdots(1)$$

记 $1=:x^0$,那么(1)式可表示为$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$.

通常我们把形如的级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$称为幂级数.

更一般地有函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$$

我们可以得到函数的一种新的表示方式.

返回

有时**幂级数**也表示成 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$

$= a_0 + a_1 (x - x_0) + \cdots + a_n (x - x_0)^n + \cdots$

$(x_0 \in \mathbb{R})$的样子.

$x_0 = 0$ 时上式就变成了

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

说明:人们为简便地表达幂级数

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots,$$

发明了求和号“$\sum$”.

因为幂级数中可以$x = 0$,

$$\left(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots\right)\Big|_{x=0} = a_0,$$

$$\therefore a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n,$$

尽管0^0没有意义,为方便我们约定:$1 = x^0$,

于是 $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,

这样就得到了幂级数一种简练的表达法.

返回

1.幂级数的收敛性.

如(1).$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots$,当$|x| < 1$时级数收敛,当$|x| \geq 1$时级数发散.所以该幂级数的收敛点集为$(-1,1)$.

(2).$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$在$|x| \leq 1$时级数收敛,当$|x| > 1$时级数发散,该级数收敛点集为$[-1,1]$.

(3). $\sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n = 1 + x + 2!\,x^2 + \cdots$，仅当 $x = 0$ 时级数收敛，当 $x \neq 0$ 时级数发散。所以该幂级数的收敛点集为 $\{0\} = [0,0]$。

(4). $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$，$\forall x \in (-\infty, +\infty)$ 级数绝对收敛，该级数收敛点集为 $\mathbb{R}$。

使得函数项级数收敛的点集称为该函数项级数的<u>收敛域</u>。

上页 下页 返回

定理14.1(Abel定理).

(1).若级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$x=x_0\left(x_0\neq 0\right)$处收敛,则它在满足$|x|<|x_0|$的一切$x$处都绝对收敛;

(2).若级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$x=x_0$处发散,则它在满足$|x|>|x_0|$的一切$x$处都发散.

证明　(1). $\because \sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx_0^n$收敛,$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}a_nx_0^n=0$,

$\exists M$,使得$\left|a_n x_0^{\ n}\right| \le M \quad (n = 0,1,2,\cdots)$,

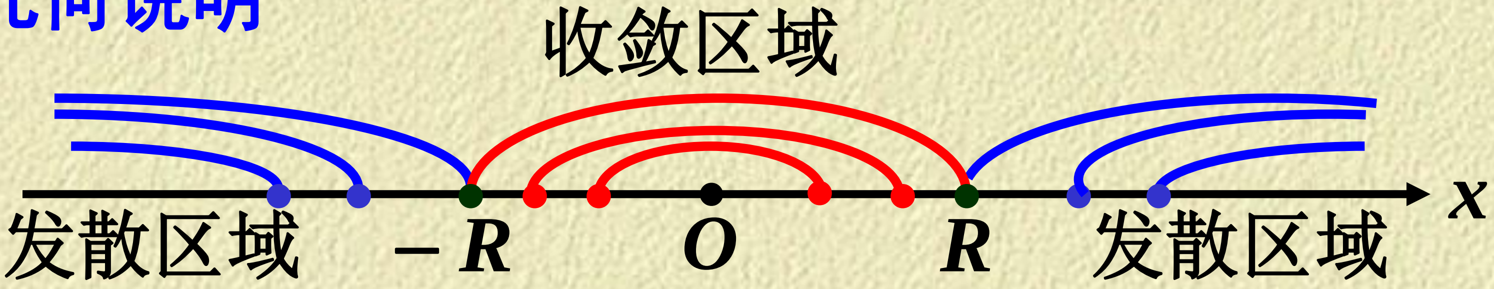
$$\left|a_n x^n\right| = \left|a_n x_0^{\ n} \cdot \frac{x^n}{x_0^n}\right| = \left|a_n x_0^{\ n}\right| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \le M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n,$$

$\because$ 当$\left|\dfrac{x}{x_0}\right| < 1$时,几何级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} M\left|\dfrac{x}{x_0}\right|^n$收敛,

$\therefore \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|a_n x^n\right|$收敛,即级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$绝对收敛.

(2).假设当$x = x_0$时级数发散,而有一点x_1适合$|x_1| > |x_0|$使得级数收敛,那么由(1).结论知级数当$x = x_0$时应收敛,而这与假设矛盾.

几何说明



上页 下页 返回

是非题.

$\sum a_n(x-1)^n$在$x=-3$处收敛,

则它在$x=3$处亦收敛.

解 记$x-1=t$,

原$\Leftrightarrow \sum a_n t^n$在$t=-4$时收敛,

由$Abel-Th.$知在$t=2$时收敛.

A: T.

上页 下页 返回

由Abel定理知,若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$不是只在$x=0$一点收敛,也不是在整个实数域上收敛,则必有一个确定的正数R存在,它具有以下特点:

(1).当$|x| < R$时幂级数绝对收敛;

(2).当$|x| > R$时幂级数发散;

(3).当$|x| = R$时幂级数可能收敛可能发散.

2.幂级数的收敛区间与收敛域.

定义：上文所说的正数R称为幂级数的收敛半径,开区间$(-R,R)$称为幂级数的收敛区间,而收敛域是$(-R,R)$,$[-R,R)$,$(-R,R]$,$[-R,R]$之一(,需具体问题具体讨论).

约定：

(1).幂级数只在$x=0$处收敛,则$R=0$;

(2).幂级数对一切$x\in\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$都收敛,则$R=+\infty$,收敛域$(-\infty,+\infty)$.

Q.如何求幂级数的收敛半径?

定理14.2. 设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $a_n \neq 0$,

若$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$或$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho$,

则(1).$\rho \neq 0, R = \frac{1}{\rho}$; (2).$\rho = 0, R = +\infty$;

此时级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$(-R, R)$内绝对收敛.

(3).$\rho = +\infty, R = 0$.此时级数仅在$x = 0$收敛.

上页 下页 返回

证明　对于$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，$a_n \neq 0$,

由比值$(D'lembert)$判别法

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|}=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\rho|x|,$$

或根值$(Cauchy)$判别法

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n x^n|}=|x|\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho|x|,$$

$$\left[\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\rho\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho\right]$$

(1).若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|}=|x|\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\rho|x|$,

或者$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n x^n|}=|x|\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho|x|,\rho\neq 0$,

由比/根值法,当$|x|<\dfrac{1}{\rho}$时,级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$收敛,

从而级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$绝对收敛.

当$|x|>\dfrac{1}{\rho}$时,级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$发散,

并且从某个n开始$|a_{n+1}x^{n+1}|>|a_n x^n|,|a_n x^n|\not\to 0$

从而级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$发散.收敛半径$R=\dfrac{1}{\rho}$.

返回

(2).若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left|a_{n+1}x^{n+1}\right|}{\left|a_n x^n\right|}=|x|\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left|a_{n+1}\right|}{\left|a_n\right|}=\rho|x|$,

或者$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|a_n x^n\right|}=|x|\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|a_n\right|}=\rho|x|$,

由比/根值法知,

若$\rho=0, \forall x\in\mathbb{R}, \rho|x|\equiv 0<1$,

从而级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$在$(-\infty,+\infty)$上绝对收敛,

故级数收敛半径$R=+\infty$.

上页 下页 返回

(3).若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left|a_{n+1}x^{n+1}\right|}{\left|a_n x^n\right|}=|x|\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left|a_{n+1}\right|}{\left|a_n\right|}=\rho|x|$,

或者 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|a_n x^n\right|}=|x|\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|a_n\right|}=\rho|x|$,

由比/根值法知,若 $\rho=+\infty$, $\forall x\neq 0$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|a_{n+1}x^{n+1}\right|}{\left|a_n x^n\right|}=\infty \text{或} \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|a_n x^n\right|}=\infty$$

$\therefore\ x\neq 0$时, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n x^n\neq 0$, 级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$发散.

$\therefore$ 级数只在$x=0$处收敛,故曰级数收敛半径$R=0$.

例1. 判断下列级数的敛散性：

$$(1).\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!};\quad (2).\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!};\quad (3).\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}.$$

解 (1).当$x=0$时显然级数收敛,而当$x\neq 0$时

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{|x|^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1}=|x|\cdot 0=0,$$

$\therefore\ \forall x,\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|<1$恒成立,

故级数$\forall x\in(-\infty,+\infty)$绝对收敛,$R=+\infty.$

(2). $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$;

当$x=0$时显然级数收敛;而当$x\neq 0$时

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{(2n+2)!}|x|^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^2}{(2n+2)(2n+1)}=|x|^2\cdot 0=0<1,$$

$\forall x\in(-\infty,+\infty)$,上式恒成立,

故级数$\forall x\in(-\infty,+\infty)$都绝对收敛,$R=+\infty$.

上页 下页 返回

(3). $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$.

解 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}|x| = |x|$,

$\therefore |x| < 1$时级数绝对收敛,

$|x| > 1$时级数发散 ;(?)

而$|x| = 1$时, $x = 1$, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$是级数,

此时级数收敛—条件收敛;

$x = -1$,级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n}$,显然级数发散.

上页 下页 返回

$$(3).\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}.$$

$$\because\ \rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1,\therefore\ R=1.$$

当$x=1$时,级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$收敛,

当$x=-1$时,级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n}$发散,

$\therefore$ 级数收敛域为$(-1,1]$.

例1.(2).若$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\dfrac{1}{4}$,问$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n x^n}{2^n}$收敛半径 = ?

解 不单考虑系数,用一般法:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{a_{n+1}x^{n+1}}{2^{n+1}}}{\dfrac{a_n x^n}{2^n}}\right|=\frac{|x|}{2}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=2|x|,$$

$\therefore$ 当$2|x|<1$即$|x|<\dfrac{1}{2}$时级数收敛,

$\therefore$ 级数的收敛半径$R=\dfrac{1}{2}$.

上页 下页 返回

回 顾

命题：对于级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n (u_n \neq 0)$而言，

若$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = r$ 或者 $\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = r$,

那么

(1).$0 \leq r < 1, \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$收敛$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$绝对收敛;.

(2).$r > 1, \sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散.$\left(\because r > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n \neq 0\right)$

因而，对幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$而言，$x \neq 0$,

若$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = r$或$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = r$,

则(1).$0 \le r < 1$,幂级数绝对收敛;

(2).$r > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n x^n \neq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$发散.

上页 下页 返回

思考练习1.确定下列幂级数的收敛半径和收敛域.

(1).$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$； (2).$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$；

(3).$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot 2^n}x^{2n}$； (4).$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4+(-1)^n}{3^n}x^{2n}$；

(5).$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$；

(6).$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^{n^2}$.

参考解答.

$$(2).\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n;$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{3^{n+1}}{n+1}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{3^n}{n}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{2(n+1)}\left|x-1\right|=\frac{3}{2}\left|x-1\right|,$$

$$(2).\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n;$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{3}{2}|x-1|,$$

$\therefore$ 当 $\frac{3}{2}|x-1|<1$ 时级数绝对收敛,

当 $\frac{3}{2}|x-1|>1$ 时级数发散,

上页 下页 返回

(2). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$;

而当 $\frac{3}{2}(x-1)=1$ 时,级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,

当 $\frac{3}{2}(x-1)=-1$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 条件收敛,

$\therefore$ 级数收敛半径 $R=\frac{2}{3}$,级数在 $\left(\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right)$ 内绝对收敛.

在 $x=\frac{1}{3}$ 处条件收敛,在 $x=\frac{5}{3}$ 处发散.

$\therefore$ 级数的收敛域为 $\left[\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right)$.

不妨对(2). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$ 作变形,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{3}{2}(x-1)\right]^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u^n}{n},u=\frac{3}{2}(x-1).$$

上页 下页 返回

$$(3).\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot 2^n}x^{2n}$$

若仅记得"$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$或$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$,

$R=\dfrac{1}{\rho}$,级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$在$(-R,R)$内绝对收敛."

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{n\cdot 2^n}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\sqrt[n]{n}}=\frac{1}{2},$$

得$R=2\Rightarrow$级数在$(-2,2)$内绝对收敛.

这样就错了:可注意到上述结论是对

于级数的标准形式$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x^n$而言的.

上页 下页 返回

(3).正解 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot 2^n}x^{2n}$

我们熟知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{n\cdot 2^n}x^{2n}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{2\sqrt[n]{n}}=\frac{x^2}{2}<1\text{时},$$

级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot 2^n}x^{2n}$ 绝对收敛,此时$x^2<2$,

$|x|<\sqrt{2}$,得$R=\sqrt{2}$.

当$x=\pm\sqrt{2}$即$x^2=2$时,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$是*Leibniz*级数,

$\therefore$ 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot 2^n}x^{2n}$ 的收敛域为$\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$.

$$(4).\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4+(-1)^n}{3^n}x^{2n}$$

$$\frac{3}{3^n}\le\frac{4+(-1)^n}{3^n}\le\frac{5}{3^n}\Rightarrow\frac{\sqrt[n]{3}}{3}\le\sqrt[n]{\frac{4+(-1)^n}{3^n}}\le\frac{\sqrt[n]{5}}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{5}=1\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{4+(-1)^n}{3^n}}=\frac{1}{3}$$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{4+(-1)^n}{3^n}x^{2n}\right|}=\frac{1}{3}x^2,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{4+(-1)^n}{3^n}x^{2n}\right|}=\frac{1}{3}x^2,$$

$\therefore x^2<3$,即$|x|<\sqrt{3}$时级数绝对收敛.

又$x=\pm\sqrt{3}$ 时,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4+(-1)^n}{3^n}x^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[4+(-1)^n\right]$$发散.

级数的收敛半径$\sqrt{3}$,收敛域为$\left(-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$.

上页 下页 返回

$$(5).\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^{n}\ ;$$

$$Hint:\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}=1.$$

$$R=1$$

上页 下页 返回

$$(6).\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^{n^2}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{2^n}x^{n^2}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^n}{2}=\begin{cases}0,|x|<1\\ \frac{1}{2},|x|=1\\ \infty,|x|>1\end{cases}$$

$\therefore$ 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^{n^2}$的收敛域为$[-1,1]$.

二. 幂级数的性质及运算

以下假设恒有$R>0$.

定理14.3.(1).幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数在收敛区间$(-R, R)$内连续.

(2).若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在收敛区间的右端点$x = R$(左端点$x = -R$)处收敛,则和函数在该点处左(右)连续.[$Abel$第二定理]

即幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数在收敛域上连续.

上页 下页 返回

定理14.4. 设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在收敛区间$(-R,R)$上的和函数为$S(x)$.则

(1).和函数$S(x)$在收敛区间$(-R,R)$内可导,并且有逐项求导公式:

$$S'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, |x|<R$$

级数求和运算与求导运算可交换次序

(2).和函数$S(x)$在收敛区间$(-R,R)$内可积,并且有逐项积分公式:

$$\int_0^x S(t)dt=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n t^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},$$

$|x|<R.$

级数求和运算与积分运算可交换次序

推论14.1.幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在收敛区间$(-R, R)$内的和函数$S(x)$,则$S(x)$在$(-R, R)$内任意次可导,且都可逐项求导,

$$S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

$$S'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots$$

$$S''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + \cdots + n(n-1) a_n x^{n-2} + \cdots$$

$\cdots \quad \cdots$

上页 下页 返回

推论14.2.幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在收敛区间

$(-R, R)$内的和函数$S(x)$,则

$$a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!} \left(n = 0,1,2,\cdots\right)$$

即幂级数的系数由和函数$S(x)$在$x = 0$

处的各阶导数唯一确定,

我们可以验证,

幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$与$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$

有相同的收敛半径(,但是收敛域未必相同).

$$\left.\begin{array}{l} \text{如}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\text{的收敛域为}[-1,1), \\ \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}\text{的收敛域为}(-1,1), \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\text{的收敛域为}[-1,1]. \end{array}\right\} \text{收敛区间均为}(-1,1)$$

上页 下页 返回

说明:

1. 幂级数经逐项积分后,所得之幂级数的收敛半径不变,但收敛域有可能扩大.

2. 幂级数经逐项求导后,所得之幂级数的收敛半径不变,但收敛域有可能缩小.

例如,由几何级数可得以下结论：

$$-1<x<1 \text{ 时 } 1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\frac{1}{1-x},$$

两边求导,得

$$1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots=\frac{1}{(1-x)^2},(-1<x<1)$$

对$1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+\cdots=\dfrac{1}{1+x},(-1<x<1)$

两边积分,得

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots=\ln(1+x),$$

$$(-1<x\le 1)$$

$$\Rightarrow 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots=\ln 2$$

补充内容.

命题14.1.

设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$(-R,R)$内收敛,若$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{n+1} R^{n+1}$收敛,

则$\displaystyle\int_0^R \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} R^{n+1}.$

上页 下页 返回

证明　由$Th.14.4$知$\forall x\in(-R,R)$,我们可以逐项积分：

$$\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n\right)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_nt^ndt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},$$

再由$Th.14.3$之 $Abel$第二定理得：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}R^{n+1}\text{收敛}\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}\text{在}x=R\text{处左连续},$$

$$\therefore\lim_{x\to R^-}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}R^{n+1}$$

$$\therefore\lim_{x\to R^-}\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n\right)dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}R^{n+1}=\int_0^R\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n\right)dt.$$

例如,$1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots=\dfrac{1}{1+x^2}$,

上述级数收敛域为$(-1,1)$,但逐项积分后的级数

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$$

在$x=\pm1$处收敛,所以我们可对原级数在$[-1,1]$上逐项积分,得 ·········· $x\in[-1,1]$时

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots=\arctan x,$$

$$\Rightarrow 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots=\arctan 1=\frac{\pi}{4}.$$

定理 14.5 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 在 $x = 0$ 的某邻域内相等，即在该邻域内它们有相同的和函数，则它们同次幂项的系数相等，即

$$a_n = b_n \quad (n = 1, 2, \ldots) .$$

若幂级数 $\sum a_n x^n$ 的和函数为奇函数，则偶次幂的系数 $a_{2n} = 0$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) .

若幂级数 $\sum a_n x^n$ 的和函数为偶函数，则奇次幂的系数 $a_{2n+1} = 0$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) .

我们知道,若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$(-R,R)$$(R>0)$内收敛,

则其和函数$S(x)$在$(-R,R)$内连续,任意多阶可导,

且$a_0 = S(0), a_n = \dfrac{S^{(n)}(0)}{n!} \ (n=1,2,\cdots)$.

如果一个函数$f(x)$在某区间I内可以用一个幂级数

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$来表示,即 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, x \in I$,则$f(x)$在区间

I内连续,且任意多阶导函数连续.所有这样的函数

构成一个函数空间,记为$C^{\infty}(I)$,可以证明,这个无穷

维的函数空间$C^{\infty}(I)$是一个向量空间.

若 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n, x\in I$,则$f(x)$在区间$I$内连续,

且任意多阶导函数连续.所有这样的函数构成

一个无穷维的向量空间$C^{\infty}(I)$.可以认为,

$$\left\{1, x, x^2,\cdots, x^n,\cdots\right\}$$

就构成了函数空间$C^{\infty}(I)$的一组基,

那么, *Th*.14.5的结论就相当于线性代数中的

结论:$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$是$n$维向量空间$E^n$的一组

基,$\alpha\in E^n$,那么

$$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n$$ 且表达式唯一.

上页 下页 返回

定理14.6. 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_a, R_b, 则有

(1). $\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n x^n, |x| < R_a$,

$$\left.\begin{array}{l} (2).\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n \\ (3).\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ \quad \text{其中 } c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}. \end{array}\right\} |x| < R_a \wedge R_b$$

上页 下页 返回

幂级数的乘积. → 按对角线法则的**Cauchy乘积.**

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,\ x\in(-R,R)$$

其中 $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0.$

柯西乘积

$$\begin{array}{ccccc}
1 & x & x^2 & x^3 & \cdots \\
a_0b_0 & a_0b_1 & a_0b_2 & a_0b_3 & \cdots \\
a_1b_0 & a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots \\
a_2b_0 & a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots \\
a_3b_0 & a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

上页 下页 返回

幂级数部分常见问题：

求幂级数的和函数/数项级数的和.

特别提醒：

(1).注意是$\sum\limits_{n=0}^{\infty}$ 还是$\sum\limits_{n=1}^{\infty}$.

(2).求级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$的和时,构作幂级数

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$,但一定具体问题具体分析.

例2.求级数$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$的和函数.

解 显然,级数收敛域为$(-1,1)$,

设$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$,

则$\int_0^x S(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}=\dfrac{x}{1-x}, x\in(-1,1)$

$$\therefore S(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}, x\in(-1,1)$$

用“+”号替代符号“Σ”,过程更直观:

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n,\ x\in(-1,1),$$

$$\therefore S(x)=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots$$

$$=\left(x+x^2+x^3+x^4+\cdots\right)'=\left(\frac{x}{1-x}\right)'$$

$$=\frac{1}{(1-x)^2},\ x\in(-1,1).$$

上页 下页 返回

求$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n, x\in(-1,1)$,可用错位相减法:

$$S(x)=1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+\cdots$$

$$xS(x)=\quad x+2x^2+3x^3+4x^4+\cdots$$

$$\therefore (1-x)S(x)=1+x+x^2+x^3+\cdots=\frac{1}{1-x},$$

$$\therefore S(x)=\frac{1}{(1-x)^2}, x\in(-1,1).$$

但是显然,逐项求导/逐项积分的方法更具有推广价值.

上页 下页 返回

例2.(2).求级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$的和函数.

解　易知级数收敛域为$(-1,1]$,

$$\because S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},\text{显然}S(0)=0,$$

$$S'(x)=\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right]'=\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right]'$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-x)^{n-1}=\frac{1}{1+x},\quad \cdots\cdots(-1<x<1)$$

$$\therefore S(x)=S(0)+\int_0^x S'(t)dt,\quad \Rightarrow$$

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=\ln(1+x),(-1<x\le 1).$$

$$S(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots, (-1 < x \le 1), S(0) = 0.$$

$$S'(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \frac{1}{1+x}, (-1 < x < 1),$$

$$\therefore \int_0^x \left(1 - t + t^2 - t^3 + \cdots\right) dt = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \ln(1+x),$$

即 $x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n} + \cdots$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \ln(1+x), (-1 < x \le 1).$$

在幂级数求和过程中,无非是

用到了:$(n+1)x^n=\left(x^{n+1}\right)'$,

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'=x^n,\quad \left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)'=x^{2n},$$

$$(2n+1)x^{2n}=\left(x^{2n+1}\right)',(n\in\mathbb{N}).$$

上页 下页 返回

例3.求$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{3^n}$的和.

苏轼__文与可画赏筜谷偃竹记：

…故画竹必先得成竹于胸中…

解 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n}$，

考察幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}=S(x)$,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}=S(x),S(0)=1,$$

显然该幂级数的收敛域为$(-1,1)$,

$$S(x)=1+3x^2+5x^4+\cdots+(2n+1)x^{2n}+\cdots$$

$$=\left(x+x^3+x^5+\cdots+x^{2n+1}+\cdots\right)'$$

$$=\left(\frac{x}{1-x^2}\right)'=\frac{(1-x^2)-x(-2x)}{(1-x^2)^2}=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$$

$$\therefore\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{3^n}=S\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=3.$$

例3.求$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{3^n}$的和.

法二 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{3^n}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{3^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}$,

而$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{3^n}$既可用错位相减法求之,

亦仍然可用构造幂级数,逐项求导法解得.

直接用错位相减法求$A=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{3^n}$.

$$A=\quad 1+\frac{3}{3}+\frac{5}{3^2}+\frac{7}{3^3}+\frac{9}{3^4}+\cdots,$$

$$3A=3+3+\frac{5}{3}+\frac{7}{3^2}+\frac{9}{3^3}+\cdots$$

下式减上式得

$$2A=3+2+\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\cdots=3+\frac{2}{1-\frac{1}{3}}=6,$$

$$\Rightarrow A=3.$$

上页 下页 返回

例4.试确定幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$的收敛域,在该收敛域内记$u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$.验证$u(x)$满足微分方程$u''(x)=u(x), u(0)=1, u'(0)=0$.

解 $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{(2n+2)(2n+1)}=0,$$

$\therefore$ 级数对任意的$x\in\mathbb{R}$都绝对收敛,

$\therefore$ 幂级数的收敛域为$(-\infty,+\infty)$.

幂级数的收敛域为$\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$.

$$u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!},u'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!},$$

$$u''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{2m}}{(2m)!}=u(x)$$

幂级数中

$x^0=1$

且 $u(0)=1,u'(0)=0.$

上页 下页 返回

为了更直观,我们用“+”号替代“Σ”:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=u(x)$$

$$=1+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}+\frac{x^{6}}{6!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots,$$

$$u'(x)=0+x+\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots,$$

$$u''(x)=1+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}+\frac{x^{6}}{6!}+\cdots+\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}+\cdots,$$

显然,$u''(x)=u(x)$,且$u(0)=1, u'(0)=0.$

例4.(2).求$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$的收敛域与和函数.

解 易得幂级数收敛域为$(-\infty,+\infty)$,

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

$S(0)=1$,可以发现$S'(x)=S(x)$,

由此不难得到 $S(x)=e^x$.

做法(1).用*Lagrange Th.*的推论;

(2).微分方程法解之.

上页 下页 返回

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=S(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

$$S'(x)=\left[1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\cdots\right]'$$

$$=0+1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=S(x),$$

$$\therefore S'(x)=S(x), S(0)=1.$$

$$S'(x) = S(x),\ S(0) = 1,$$

$$\left(猜想 S(x) = e^x, 故 \frac{S(x)}{e^x} \equiv 1 \right)$$

解法一　设 $\varphi(x) = \dfrac{S(x)}{e^x}$, 则

$$\varphi'(x) = \frac{S'(x)e^x - S(x)e^x}{e^{2x}} \equiv 0,$$

$$\therefore \varphi(x) \equiv C,\ S(0) = 1 \Rightarrow S = e^x.$$

$$S'(x) = S(x), S(0) = 1,$$

解二 微分方程—变量分离法解之.

$$\frac{dS}{dx} = S, \frac{dS}{S} = dx \Rightarrow \int \frac{dS}{S} = \int dx,$$

$$\ln|S| = x + C_1 \Rightarrow S = Ce^x,$$

$$S(0) = 1 \Rightarrow S(x) = e^x.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = e^x.$$

思考练习2.利用幂级数的性质

求下列级数的和：

(1). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{2^n}$ ；　(2). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot 2^n}$ ；

(3). $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$ ；

(4). $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(2n+1)}{3^n}$.

上页　下页　返回

$(2). \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$：利用$\left(\frac{x^n}{n}\right)' = x^{n-1}$,

考虑$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = S(x), x \in [-1,1)$,

用 "+" 号$S(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots$,

$\therefore S'(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$,

$S(0) = 0, S(x) - S(0) = \int_0^x S'(t)dt = \cdots$

$$(3).\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n};\quad (4).\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)}{3^n}.$$

解(3). $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}=\sqrt{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n+1}$,

考察幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}=S(x)$,

$$S(x)=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\cdots,x\in[-1,1].$$

$$\therefore S'(x)=1-x^2+x^4-x^6+\cdots=\frac{1}{1+x^2},x\in(-1,1).$$

$S(0)=0$,

$$\therefore S(x)-S(0)=\int_0^x S'(t)dt=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt=\arctan x.$$

$$(3).\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}=\sqrt{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n+1},$$

考察幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}=S(x),S(0)=0.$

$$S(x)=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\cdots,x\in[-1,1].$$

$$\therefore S'(x)=1-x^2+x^4-x^6+\cdots=\frac{1}{1+x^2},x\in(-1,1).$$

$$\therefore S(x)-S(0)=\int_0^x S'(t)dt=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt=\arctan x.$$

$$\therefore\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}=\sqrt{3}S\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\sqrt{3}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}\pi.$$

(4).求$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)}{3^n}$的和.

解(4).$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n}$,

考察幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)x^{2n}=S(x)$,

$S(x)=1-3x^2+5x^4-7x^6+\cdots, x\in(-1,1)$.

$\therefore S(x)=\left(x-x^3+x^5-x^7+\cdots\right)'=\left(\frac{x}{1+x^2}\right)'$,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n},$$

考察幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)x^{2n}=S(x)$,

$$S(x)=1-3x^2+5x^4-7x^6+\cdots,\ x\in(-1,1).$$

$$\therefore S(x)=\left(x-x^3+x^5-x^7+\cdots\right)'=\left(\frac{x}{1+x^2}\right)',$$

$$=\frac{1+x^2-x\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}\Rightarrow S=S\left(1/\sqrt{3}\right)=\frac{3}{8}.$$

上页 下页 返回

思考练习3.求下列级数的和函数：

$$(1).\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!};\quad (2).\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

解 易知两幂级数收敛域都是$(-\infty,+\infty)$.

$$(1).\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=C(x)$$

$$=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$$

$$C'(x)=-x+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots$$

$$C''(x)=-1+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}+\cdots$$

$\therefore C''(x)+C(x)=0, C(0)=1, C'(0)=0.$

上页 下页 返回

$$(1).\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=C(x),$$

$$C''(x)+C(x)=0,C(0)=1,C'(0)=0,$$

由二阶线性常系数齐次微分方程解法得

$C''(x)+C(x)=0$的特征方程为$\lambda^{2}+\lambda=0$

得特征方程的特征根 $\lambda=\pm i,$

方程通解为 $C(x)=C_{1}\cos x+C_{2}\sin x.$

$$\because C(0)=1,C'(0)=0,$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=C(x)=\cos x.$$

记 $$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=C(x),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=S(x),$$

则 $C'(x)=-S(x), S'(x)=C(x),$

$\therefore C''(x)+C(x)=0, C(0)=1, C'(0)=0,$

$\therefore S''(x)+S(x)=0, S(0)=0, S'(0)=1,$

$\Rightarrow C(x)=\cos x, S(x)=\sin x.$