简谐运动的合成

什么是运动的合成与分解？

一个质点同时参与几个简谐运动时，质点的运动规律的研究

——— 简谐运动的合成

一 、两个同方向、同频率简谐运动的合成(多个)

二、　两个同方向、不同频率简谐运动的合成

三、　两个相互垂直的同频率简谐运动的合成

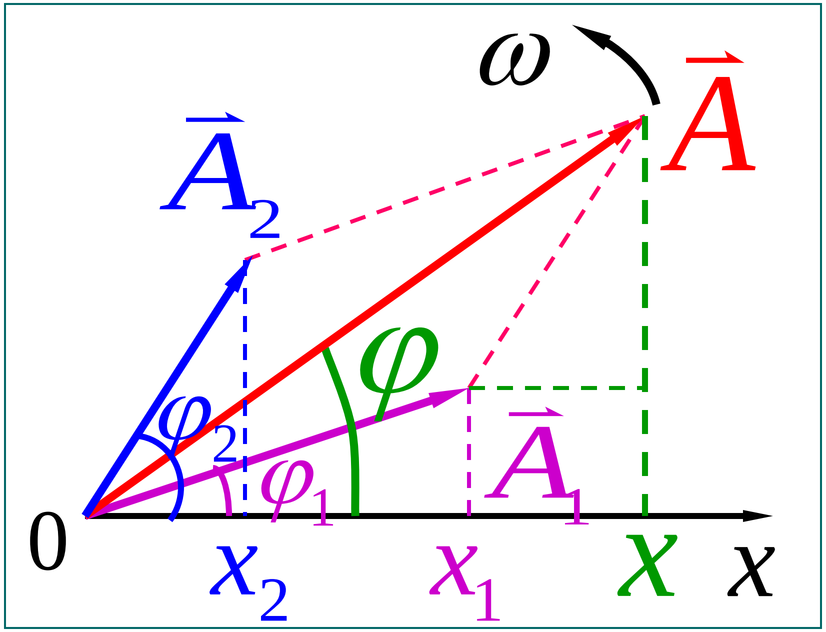
四、　两个相互垂直的不同频率简谐运动的合成

一　两个同方向同频率简谐运动的合成（动画）

$$\begin{cases} x_1 = A_1\cos(\omega t+\varphi_1) \\ x_2 = A_2\cos(\omega t+\varphi_2) \end{cases}$$

$$x = x_1 + x_2$$

$$\boxed{x = A\cos(\omega t+\varphi)}$$



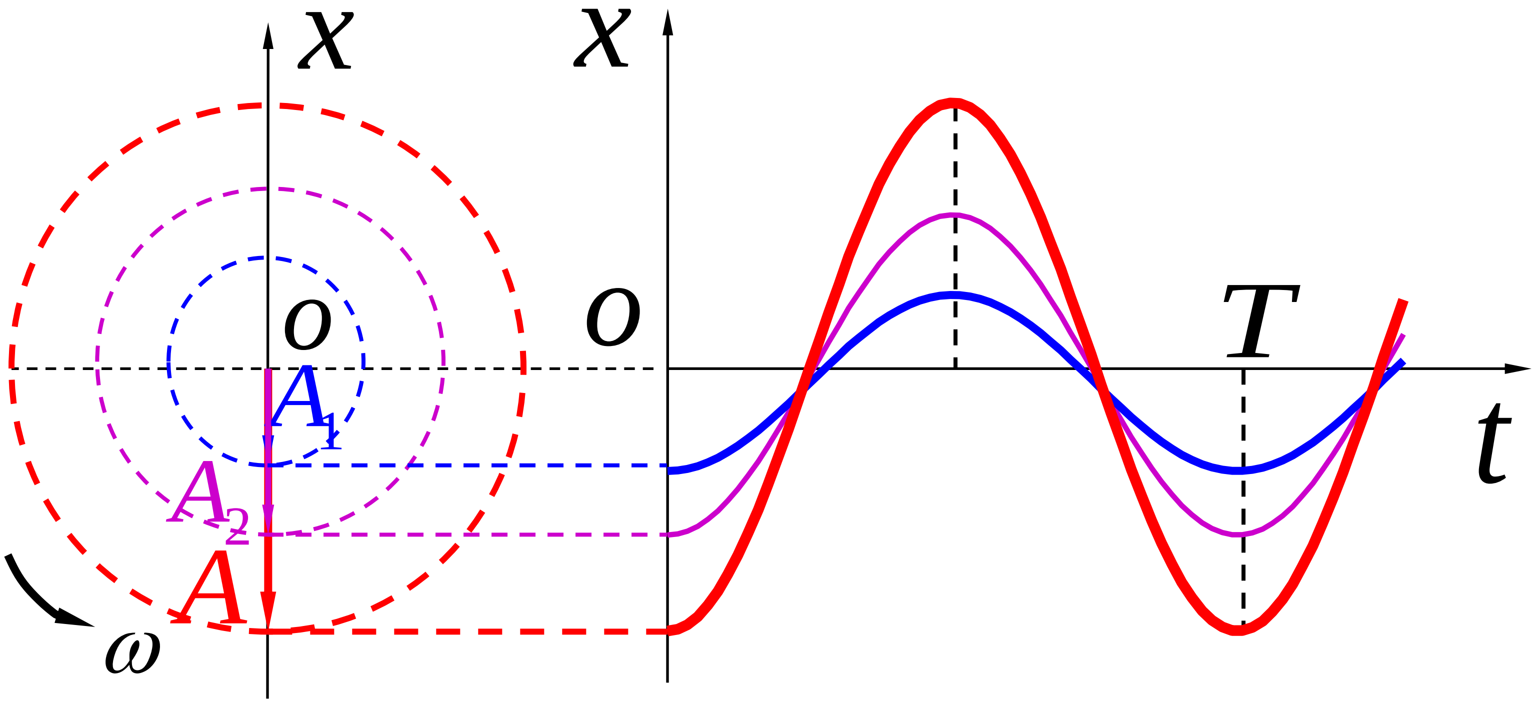
$$\begin{cases} A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)} \\ \tan\varphi = \dfrac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} \end{cases}$$

两个同方向同频率简谐运动合成后仍为简谐运动

讨论

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

1）相位差 $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=2k\pi \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

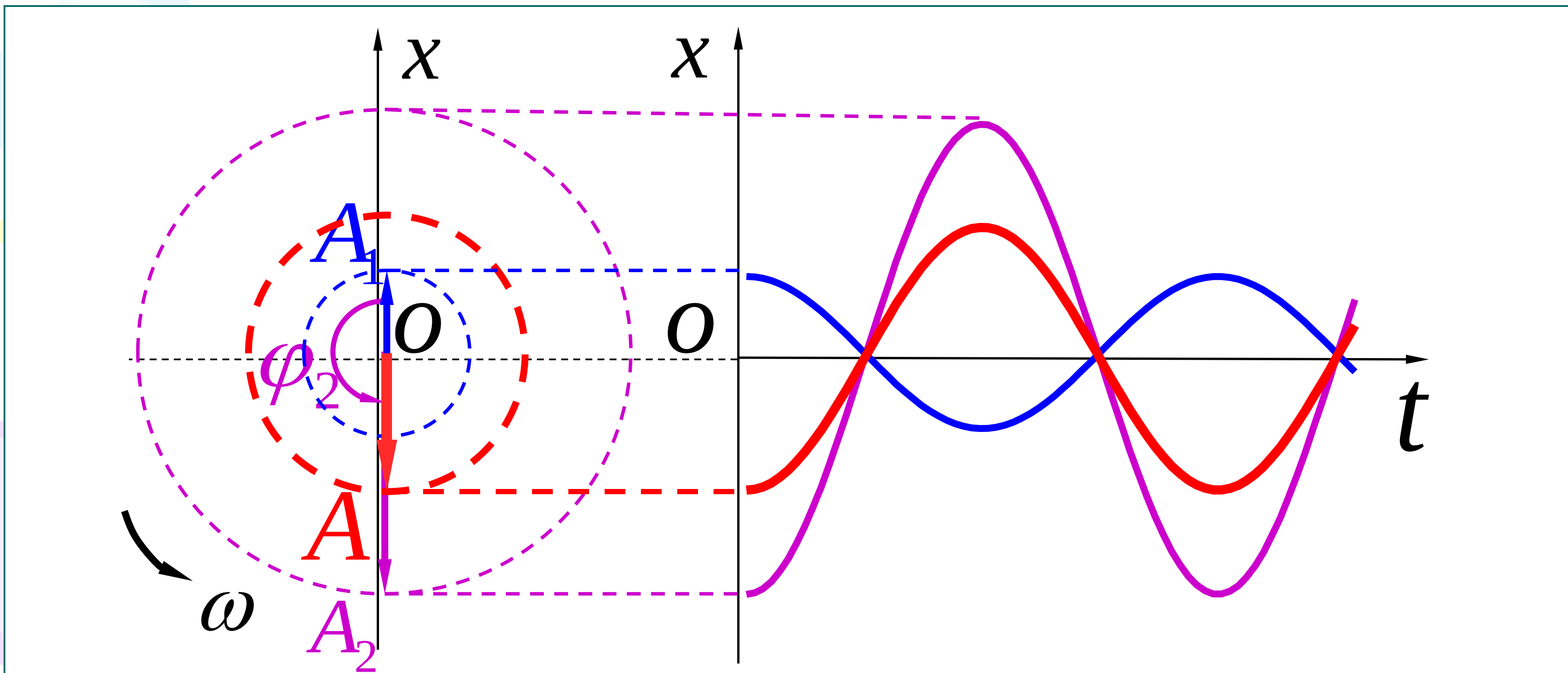


$$A=A_1+A_2$$

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

2）相位差 $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=(2k+1)\pi \quad (k=0,\pm1,\cdots)$

$$A=\left|A_1-A_2\right|$$



1）相位差 $\varphi_2-\varphi_1=2k\pi \qquad (k=0,\pm1,\cdots)$

$$A=A_1+A_2$$ 相互加强

2）相位差 $\varphi_2-\varphi_1=(2k+1)\pi \quad (k=0,\pm1,\cdots)$

$$A=\left|A_1-A_2\right|$$ 相互削弱

3）一般情况

$$A_1+A_2>A>\left|A_1-A_2\right|$$

练习：简谐运动方程为

$$x_1 = 0.3\cos(3\pi t + \frac{\pi}{3})\ m$$

$$x_2 = 0.4\cos(3\pi t + \frac{\pi}{3})\ m$$

$$x_3 = 0.4\cos(3\pi t - \frac{2\pi}{3})\ m$$

$x_1 + x_2$ 的振动方程为________________

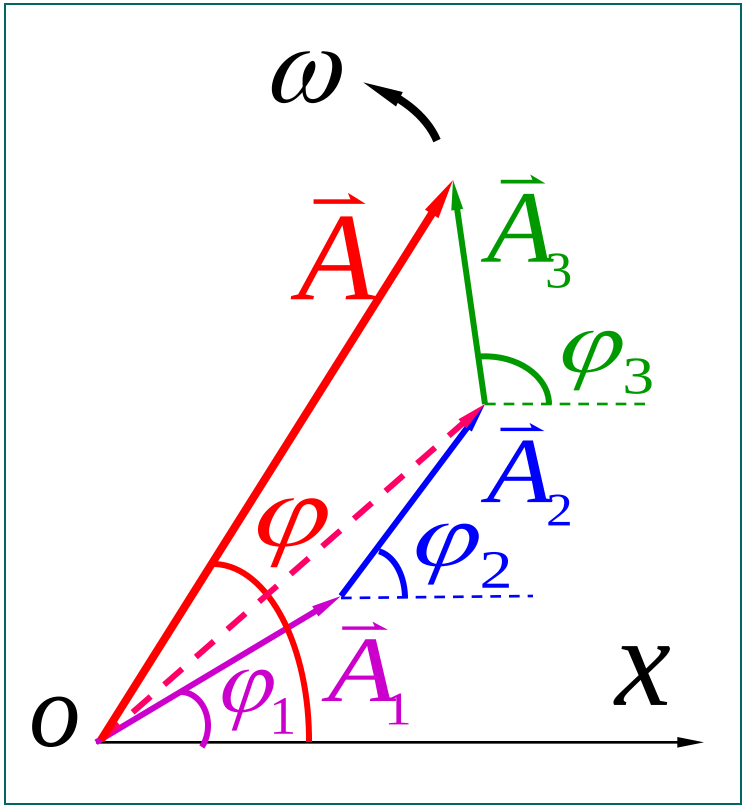
$x_1 + x_3$ 的振动方程为________________

拓展： 多个同方向同频率简谐运动的合成

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \\ \cdots\cdots \\ x_n = A_n \cos(\omega t + \varphi_n) \end{cases}$$

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi)}$$



多个同方向同频率简谐运动合成仍为简谐运动

例：

$$\begin{cases} x_1 = A_0 \cos \omega t \\ x_2 = A_0 \cos(\omega t + \Delta\varphi) \\ x_3 = A_0 \cos(\omega t + 2\Delta\varphi) \\ \quad \cdots\cdots \\ x_N = A_0 \cos[\omega t + (N-1)\Delta\varphi] \end{cases}$$

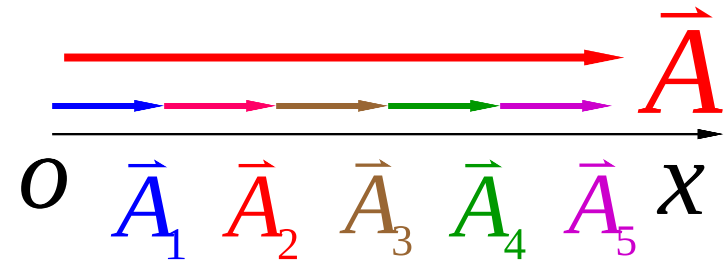
问：合成后，$\Delta\varphi$满足什么条件

（1）合振幅最大

（2）合振幅最小

简谐运动的合成

$$\begin{cases} x_1 = A_0 \cos \omega t \\ x_2 = A_0 \cos(\omega t + \Delta\varphi) \\ x_3 = A_0 \cos(\omega t + 2\Delta\varphi) \\ \quad \cdots\cdots \\ x_N = A_0 \cos[\omega t + (N-1)\Delta\varphi] \end{cases}$$



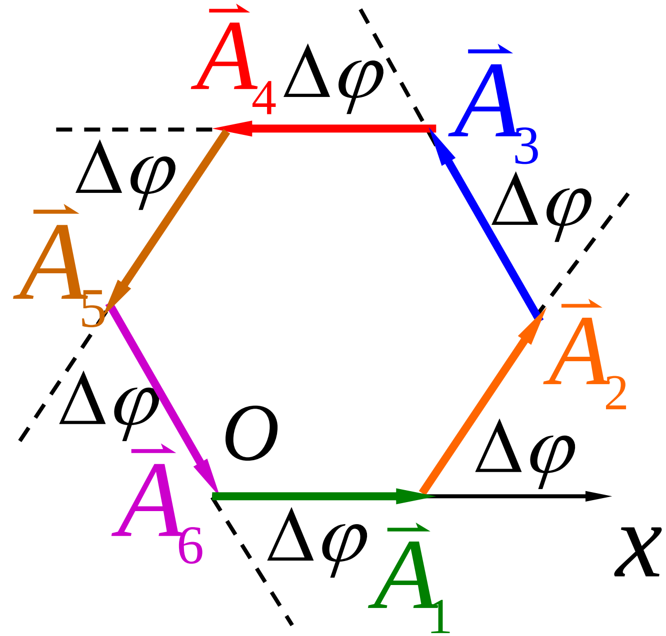
（1）合振幅最大

$$\Delta\varphi = 2k\pi$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

$$\boxed{A = \sum_i A_i = NA_0}$$

$$
\begin{cases}
x_1 = A_0 \cos \omega t \\
x_2 = A_0 \cos(\omega t + \Delta\varphi) \\
x_3 = A_0 \cos(\omega t + 2\Delta\varphi) \\
\cdots\cdots \\
x_N = A_0 \cos[\omega t + (N-1)\Delta\varphi]
\end{cases}
$$



（2）合振幅最小

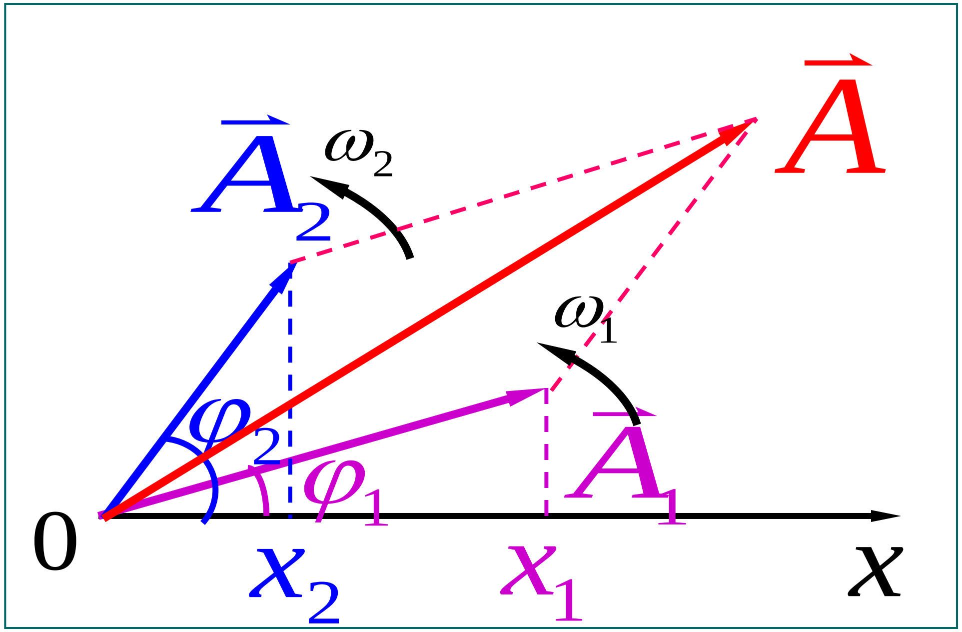
$$N\Delta\varphi = 2k'\pi$$

$$(k' \neq kN, k' = \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

N 个矢量依次相接构成一个闭合的多边形．

$$\boxed{A = 0}$$

二、两个同方向不同频率简谐运动的合成



两个同方向不同频率简谐运动的合成不再是简谐运动

二、两个同方向不同频率简谐运动的合成

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos 2\pi\, \nu_1 t + A_2 \cos 2\pi\, \nu_2 t$$

$$x = \underbrace{\left(2A_1 \cos 2\pi \frac{\nu_2 - \nu_1}{2} t\right)}_{\text{振幅部分}} \cos 2\pi \underbrace{\frac{\nu_2 + \nu_1}{2}}_{\text{合振动频率}} t$$

振动频率 $\nu = (\nu_1 + \nu_2)/2$

振幅 $A = \left| 2A_1 \cos 2\pi \frac{\nu_2 - \nu_1}{2} t \right|$

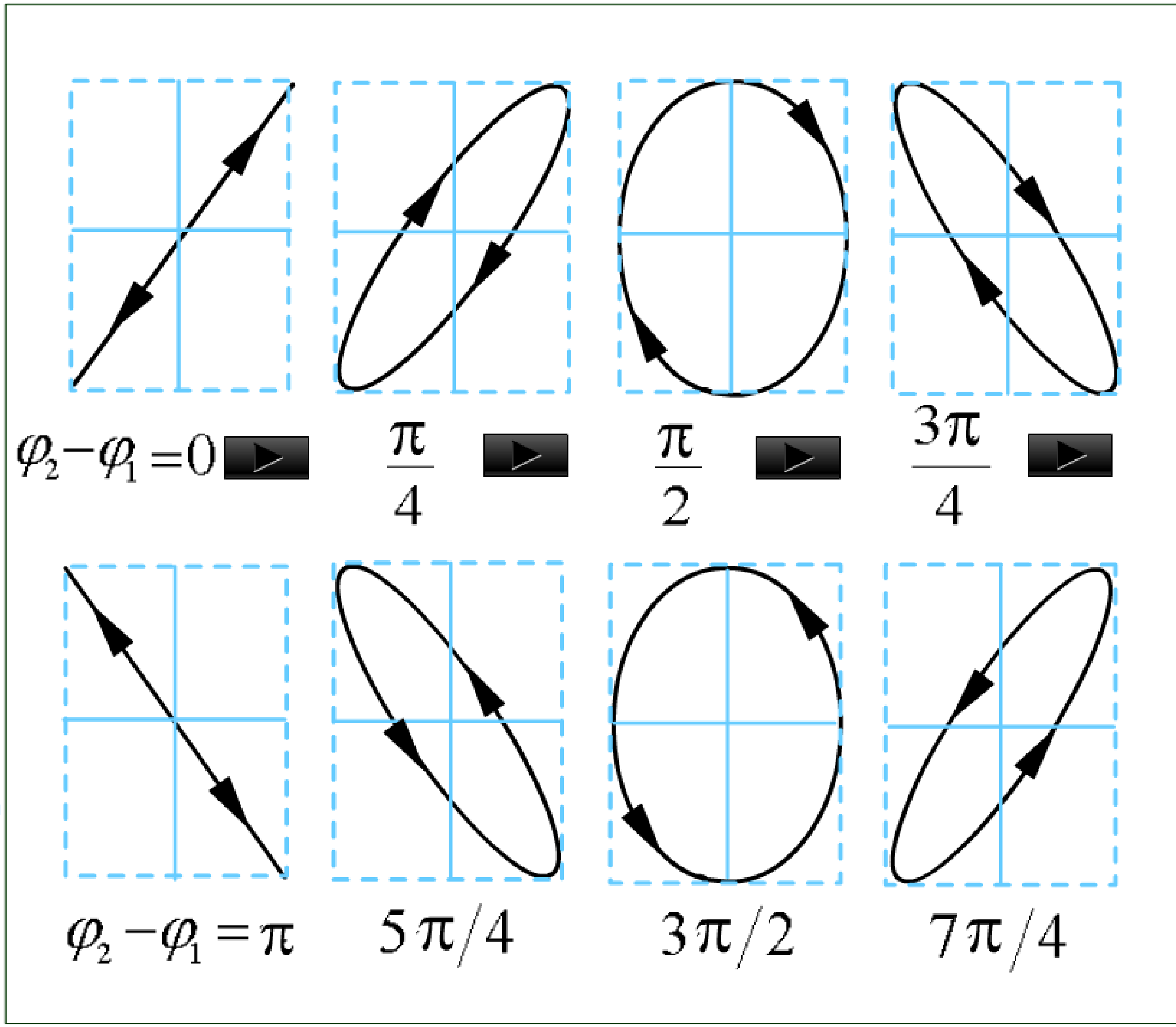
三 两个相互垂直的同频率简谐运动的合成

$$\begin{cases} x = A_1\cos(\omega t+\varphi_1) \\ y = A_2\cos(\omega t+\varphi_2) \end{cases}$$

质点运动轨迹 （椭圆方程）

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

两相互垂直同频率不同相位差简谐运动的合成图



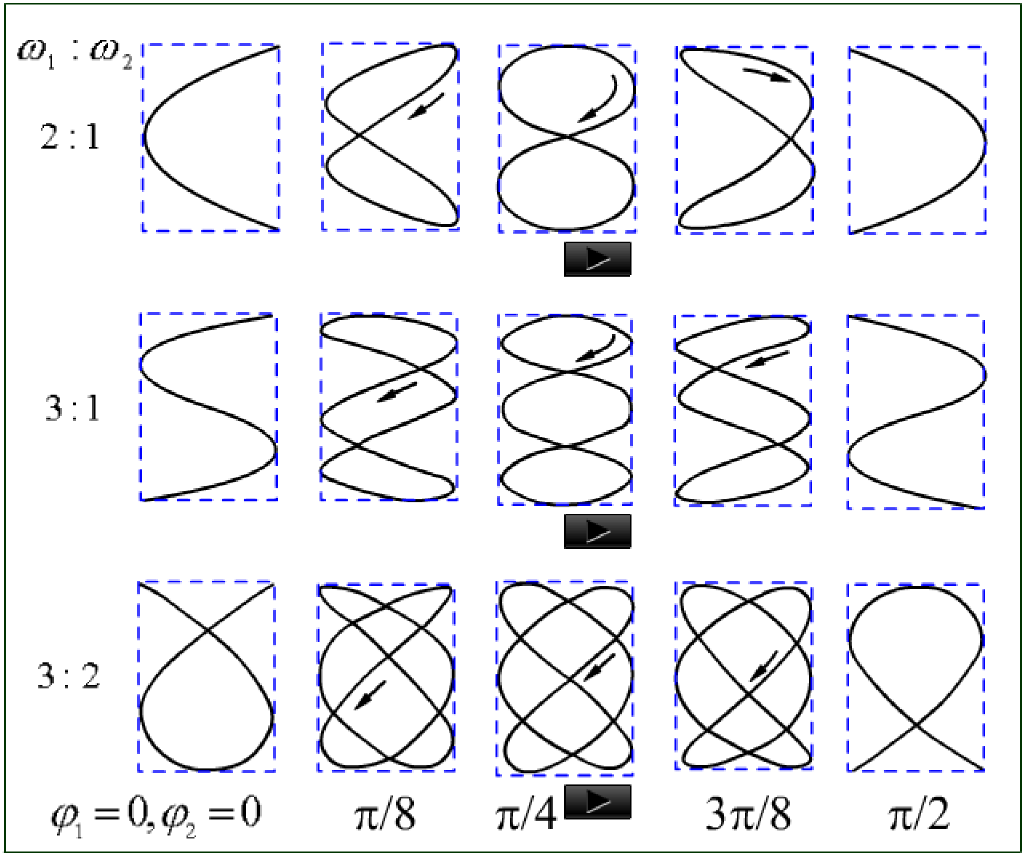
四　两相互垂直不同频率的简谐运动的合成

$$\begin{cases} x = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ y = A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{m}{n}$$

测量振动频率和相位的方法

李 萨 如 图



同方向
- 同频率 —— 简谐运动
- 不同频率 特例：拍

相互垂直
- 同频率 轨迹：椭圆
- 不同频率 特例：李萨如图形