

一. 填空题或选择题 (每题 3 分, 计 30 分. 选择题正确选项唯一)

1. 若  $\int_1^A e^{x^2} dx = 0$ , 则  $A =$  \_\_\_\_\_ .

2. 积分  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p} dx$  在  $p$  \_\_\_\_\_ 时收敛 .

3. 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$  在  $p$  \_\_\_\_\_ 时绝对收敛 .

4. 幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^n \cdot n^3}$  的收敛半径为 \_\_\_\_\_ .

5. 试问以下论断是否正确 ? 你的回答是 \_\_\_\_\_ (填: 正确 或 错误).

对正项级数  $\sum a_n$  而言, 如果  $\sqrt[n]{a_n} < 1$ , 则级数  $\sum a_n$  收敛 .

6. 设  $z = f(x+y, x-y)$ , 函数  $f$  有连续的偏导数, 则  $\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} =$  \_\_\_\_\_ .

7. 曲线  $r^2 = 2\cos\theta$  围成图形的面积为  $A =$  \_\_\_\_\_ .

8. 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛于  $S$ , 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1} - a_{n+2})$  收敛于 \_\_\_\_\_ .

A.  $S + a_1$  ;      B.  $S + a_2$  ;      C.  $S + a_1 - a_2$  ;      D.  $S - a_1 + a_2$  .

9. 设  $f(x, y)$  在  $\mathbb{R}^2$  上可微, 且对任意  $(x, y)$  均有  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} > 0$ ,  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} < 0$ , 则 \_\_\_\_\_ .

A.  $f(0,0) > f(1,1)$ ;    B.  $f(0,0) < f(1,1)$ ;    C.  $f(0,1) < f(1,0)$ ;    D.  $f(0,1) > f(1,0)$ .

10. 设  $f(x)$  为连续函数,  $F(u) = \int_1^u dy \int_y^u f(x) dx$ , 则  $F'(2) =$  \_\_\_\_\_ .

A.  $2f(2)$ ;      B.  $f(2)$  ;      C.  $-f(2)$ ;      D. 0 .

1. 1 ;    2. >1 ;    3. >1 ;    4.  $\sqrt{3}$  ;    5. 错误 ;    6.  $2f_2$  ;    7. 2 ;

8. B ;    9. C ;    10. B ;

二. 解答题 I. (每题 8 分, 计 24 分)(解答题须写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

11. 试求出反常积分  $\int_0^{+\infty} (\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}})^2 dx$  的值.

$$\text{解 } \int_0^{+\infty} (\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}})^2 dx \stackrel{\sqrt{x}=u}{=} 2 \int_0^{+\infty} u^3 e^{-2u} du \stackrel{2u=t}{=} \frac{1}{8} \int_0^{+\infty} t^3 e^{-t} dt = -\frac{1}{8} (t^3 + 3t^2 + 6t + 6) e^{-t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}. \dots\dots 8 \text{分}$$

12. 设函数  $z = z(x, y)$  满足  $x^2 + y^2 - 2z = e^{2z}$ . 计算  $dz, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

$$\text{解 } 2x - 2 \frac{\partial z}{\partial x} = 2e^{2z} \frac{\partial z}{\partial x}, \text{ 解得 } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{e^{2z} + 1}, \text{ 由形式对称性得 } \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{e^{2z} + 1} \therefore dz = \frac{xdx + ydy}{e^{2z} + 1}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \left( \frac{x}{e^{2z} + 1} \right)'_y = \frac{-xe^{2z} \cdot 2 \frac{\partial z}{\partial y}}{(e^{2z} + 1)^2} = -\frac{2xye^{2z}}{(e^{2z} + 1)^3}. \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

13. 试给出  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$  的收敛域. 在该收敛域内记  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ . 验证  $S(x)$  满足  $S''(x) = 1 + S(x)$ ,  $S(0) = S'(0) = 0$ . 试求出  $S(x)$  初等函数形式的表达式.

$$\text{解 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}}{\frac{x^{2n}}{(2n)!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(2n+1)(2n+2)} = 0, \therefore \text{级数对任意的 } x \in \mathbb{R} \text{ 都绝对收敛,}$$

$$\text{幂级数的收敛域为 } (-\infty, +\infty). \quad S(x) = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots,$$

$$S'(x) = \left( \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} + \dots \right)' = x + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

$$S''(x) = \left( x + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \right)' = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

$$\therefore S''(x) = 1 + S(x), S(0) = S'(0) = 0. \quad \text{由 } \sum_0^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \text{ 得 } \sum_0^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = e^{-x},$$

$$\text{于是 } (e^x + e^{-x}) = 2 \sum_0^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \therefore S(x) = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) - 1. \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

三. 解答题 II (14~17 题各 8 分, 18,19 题各 7 分, 计 46 分) ( 解答题须写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

14. 试通过计算证明椭球体  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$  ( $a > 0, b > 0, c > 0$ ) 的体积公式为  $V_{\text{椭球体}} = \frac{4}{3} \pi abc$ .

解 椭球面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  的上半球面为  $z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ , 记  $D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ .

$$\begin{aligned} \text{则 } V_{\text{椭球体}} &= 2 \iint_D c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy \stackrel{\substack{x=au \\ y=bv}}{=} 2 \iint_D c \sqrt{1 - u^2 - v^2} \cdot ab du dv = 2abc \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{1-r^2} r dr \\ &= 4\pi abc \left[ -\frac{1}{3} \sqrt{(1-r^2)^3} \right]_0^1 = \frac{4}{3} \pi abc. \dots\dots\dots 8 \text{分} \end{aligned}$$

15. 证明: 曲面  $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$  ( $a > 0$ ) 上任一点处的切平面在三根坐标轴上的截距之和为常数.

解 曲面上点  $P(x_0, y_0, z_0)$  处的法向量  $\vec{n} = \left( \frac{1}{\sqrt{x_0}}, \frac{1}{\sqrt{y_0}}, \frac{1}{\sqrt{z_0}} \right)$ ,

曲面在  $P$  点处的切平面为:  $\frac{x-x_0}{\sqrt{x_0}} + \frac{y-y_0}{\sqrt{y_0}} + \frac{z-z_0}{\sqrt{z_0}} = 0$ , 其在  $x, y, z$  轴上截距依次为

$$x_0 + \sqrt{x_0 y_0} + \sqrt{x_0 z_0}, y_0 + \sqrt{x_0 y_0} + \sqrt{y_0 z_0}, z_0 + \sqrt{x_0 z_0} + \sqrt{y_0 z_0},$$

于是, 如此三个截距之和为  $x_0 + y_0 + z_0 + 2\sqrt{x_0 y_0} + 2\sqrt{y_0 z_0} + 2\sqrt{z_0 x_0} = (\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0})^2 = a$ ,  
得证.  $\dots\dots\dots 8 \text{分}$

16. 计算积分  $I = \iint_D (x-2y)^2 dx dy$ , 其中区域  $D: x^2 + y^2 \leq 2y$ .

解 作变换  $x = u, y - 1 = v, D: x^2 + y^2 \leq 2y \Rightarrow D_{uv}: u^2 + v^2 \leq 1, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = 1$ .

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (x-2y)^2 dx dy = \iint_{D_{uv}} (u-2v-2)^2 du dv = \iint_{D_{uv}} (u^2 + 4v^2 + 4 - 4uv - 4u + 8v) du dv \\ &= \iint_{D_{uv}} (u^2 + 4v^2 + 4) du dv + \iint_{D_{uv}} (8v - 4uv - 4u) du dv = 4\sigma(D_{uv}) + \iint_{D_{uv}} (u^2 + 4v^2) du dv + 0 \end{aligned}$$

由形式对称性可得  $\iint_{D_{uv}} u^2 du dv = \iint_{D_{uv}} v^2 du dv$ ,

$$\therefore I = 4\pi + \frac{5}{2} \iint_{D_{uv}} (u^2 + v^2) du dv = 4\pi + \frac{5}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^2 \cdot r dr = \frac{21\pi}{4}. \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

17. (1). 设函数  $z = f(x, y)$  在  $\mathbb{R}^2$  上可微, 且有  $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ . 试给出  $z$  关于  $x, y$  的函数式.

(2). 设函数  $z = f(x, y)$  在  $\mathbb{R}^2$  上可微, 且有  $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ . 求证: 必定有  $z = \varphi(x - y)$  的形式.

解 (1).  $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ , 则函数式必定有  $z = \varphi(x)$  的形式.

(2). 设  $\begin{cases} u = x - y \\ v = x \end{cases}$ , 这是一个可逆的线性变换, 且  $\begin{cases} x = v \\ y = -u + v \end{cases}$ .

$\because x, y$  是函数  $z = f(x, y)$  的两个独立的自变量,  $\therefore u, v$  是函数  $z = f(x, y) = g(u, v)$  的两个独立的自变量.

$\because f$  在  $\mathbb{R}^2$  上可微,  $\therefore \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \equiv 0$ ,

$\therefore z$  作为变量  $u, v$  的函数,  $z$  相对于变量  $v$  而言是常数, 故必定有  $z = \varphi(u) = \varphi(x - y)$  的形式. ....8分

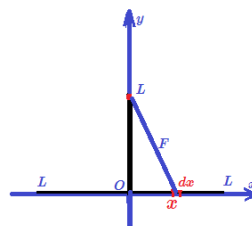
18. 求质地均匀、长为  $2L$  (m)、质量为  $M$  (kg) 的均匀细杆与放置在该细杆垂直平分线上距离细杆  $L$  (m) 处、质量为  $m$  (kg) 的质点间的万有引力, 引力常数为  $G$ .

解 在区间  $[-L, L]$  上取一小区间  $[x, x + dx] = \Delta$ . 小段细杆  $\Delta$  与质点  $m$  间的引力微元为  $dF = G \frac{m \cdot \frac{M}{2L} dx}{(x^2 + L^2)}$ ,

其在  $x$  轴上的分量为  $dF_x = \frac{GmMdx}{2L(x^2 + L^2)} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + L^2}}$ , 在  $y$  轴上的分量为  $dF_y = \frac{GmMdx}{2L(x^2 + L^2)} \cdot \frac{L}{\sqrt{x^2 + L^2}}$ ,

$$F_x = \int_{-L}^L \frac{GmMx}{2L\sqrt{(x^2 + L^2)^3}} dx = 0, F_y = \int_{-L}^L \frac{GmM}{2\sqrt{(x^2 + L^2)^3}} dx = \int_0^L \frac{GmM}{\sqrt{(x^2 + L^2)^3}} dx \stackrel{x=L\tan t}{=} \int_0^{\pi/4} \frac{GmM}{L^3 \sec^3 t} L \sec^2 t dt$$

$$= \frac{GmM}{L^2} \int_0^{\pi/4} \cos t dt = \frac{GmM}{L^2} \sin t \Big|_0^{\pi/4} = \frac{GmM}{L^2 \sqrt{2}} (N). \quad \therefore F = \left( 0, \frac{GmM}{L^2 \sqrt{2}} \right). \dots\dots\dots 7分$$



19. 试问级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$  是否收敛?是绝对收敛还是条件收敛?给出结论, 说明理由 .

(提示:  $\sin(\alpha - n\pi) = (-1)^n \sin \alpha$ )

$$\text{证明 } \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \pi(\sqrt{n^2+1} - n) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1} + n},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1} + n} = 0, \left\{ \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1} + n} \right\} \text{ 是单调递减数列. 又 } \sin t \text{ 在 } \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right] \text{ 内单调递增,}$$

所以,  $\forall a \in \mathbb{R}, \left\{ \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1} + n} \right\}$  是单调递减数列. 于是, 根据 *Leibniz th.* 知原级数收敛 .

$$\text{又 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1} + n}}{\frac{1}{n}} = \frac{\pi}{2}, \text{ 而级数 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ 发散, 据比较判别法知 } \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sin(\pi\sqrt{n^2+1}) \right| \text{ 发散,}$$

$\therefore$  原级数条件收敛 .....7分