§4 定积分的性质

一、定积分的基本性质

二、积分中值定理

一、定积分的基本性质

前面已经对定积分作了**补充规定**:

（1）当$a=b$时，$\int_a^b f(x)dx=0$；

（2）当$a>b$时，$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$.

说明　在下面的性质中，假定定积分都存在，且不考虑积分上下限的大小。

另外，显然 $\int_a^b 1\cdot dx=\int_a^b dx=b-a$.

性质1 $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$

证

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)]\Delta x_i$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \pm \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i$$

$$= \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

（此性质可以推广到有限多个函数作和的情况）

性质2 $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ （ k 为常数).

证 $\int_a^b kf(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} kf(\xi_i)\Delta x_i$

$$= \lim_{\lambda\to 0} k\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = k\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$= k\int_a^b f(x)dx.$$

性质1、2常被称为定积分的 **线性性质**。

上页 下页 返回

性质3 (1)若 f、g 在$[a,b]$上均可积，则 $f\cdot g$ 在$[a,b]$上也可积。

(2)若 f 在$[a,b]$上可积，且$\exists A>0,\forall x\in[a,b]$，有$|f(x)|\geq A$，则 $\dfrac{1}{f}$ 在$[a,b]$上也可积。

利用定积分的定义，性质3的证明不难得到，在此从略。

这样不难得到两个函数商的可积条件：

f、g 在$[a,b]$上可积，且$\exists A>0,\forall x\in[a,b]$，有$|g(x)|\geq A$，则 $\dfrac{f}{g}$ 在$[a,b]$上也可积。

下面提醒大家注意，两个可积函数的复合函数不一定可积。例如，

$x \in [0,1], u=\varphi(x)$为$Riemann$ 函数,

$$u=\varphi(x)=\begin{cases} 1/q & , x=p/q, p、q\text{互素}, p<q \\ 0, x=0,1\text{以及}(0,1)\text{内的无理数} \end{cases}$$

(教材$P196$, 例3),及$f(u)=\begin{cases} 1, 0<u\le 1 \\ 0, \quad u=0 \end{cases}$在$[0,1]$上可积

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases} 1 \quad , \quad x\text{取}(0,1)\text{内的有理数} \\ 0, x=0,1\text{以及}(0,1)\text{内的无理数} \end{cases}$$

与$Dirichlet$函数$D(x)=\begin{cases} 1, x\text{取有理数} \\ 0, x\text{取无理数} \end{cases}, x\in[0,1]$,

一样,在$[0,1]$上不可积(教材$P193$, 例1).

性质4　函数 f 在$[a, b]$上可积的充要条件为：对任意的$a<c<b$，函数 f 在$[a,c]$和$[c,b]$上均可积，并且

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

补充：不论 a,b,c的相对位置如何, 上式总成立.

例如，若　$a<b<c,$

$$\int_a^c f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx$$

则 $$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx-\int_b^c f(x)dx$$
$$=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

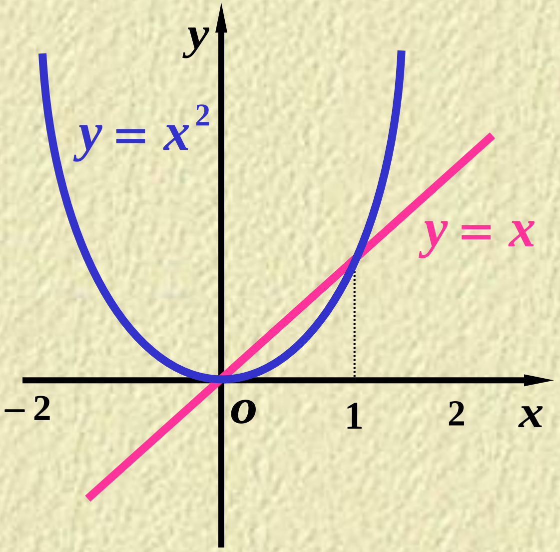
定积分对于积分区间具有可加性.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

根据定积分的几何意义与物理意义：面积、路程、变力作功——来理解性质4—关于积分区间的可加性，可以看到结论是十分显然的。

例1 求 $\int_{-2}^{2}\max\{x,x^2\}dx.$

解 由图形可知



$$f(x)=\max\{x,x^2\}$$

$$=\begin{cases} x^2 & -2\le x\le 0 \\ x & 0\le x\le 1 \\ x^2 & 1\le x\le 2 \end{cases},$$

$$\therefore \text{原式}=\int_{-2}^{0}x^2dx+\int_{0}^{1}xdx+\int_{1}^{2}x^2dx=\frac{11}{2}$$

上页 下页 返回

性质5 (保号不等式) 如果在区间$[a,b]$上可积函数

$$f(x)\ge 0,\ \text{则}\int_a^b f(x)dx \ge 0. \qquad (a\le b)$$

证 $\because\ f(x)\ge 0,\ \therefore\ f(\xi_i)\ge 0,\ (i=1,2,\cdots,n)$

$$\because\ \Delta x_i > 0,\quad \therefore\ \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \ge 0,$$

$\|T\| = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$ 由极限的保号性

$$\therefore\ \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx \ge 0.$$

上页 下页 返回

性质5的推论：(1)保向不等式（保号性）

如果在区间$[a,b]$上可积函数f、g有$f(x)\le g(x)$,

则$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$ $(a<b)$

证 $\because\ f(x)\le g(x),\quad \therefore\ g(x)-f(x)\ge 0,$

$\therefore\ \int_a^b [g(x)-f(x)]dx \ge 0,$

$\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \ge 0,$

于是 $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$

上页 下页 返回

例 2　比较积分值$\int_0^{-2} e^x dx$和$\int_0^{-2} x dx$的大小.

解　令 $f(x) = e^x - x, \quad x \in [-2, 0]$

$\because \ f(x) > 0, \quad \therefore \int_{-2}^{0} (e^x - x) dx > 0,$

$\therefore \int_{-2}^{0} e^x dx > \int_{-2}^{0} x dx,$

于是 $\int_0^{-2} e^x dx < \int_0^{-2} x dx.$

性质5的推论:（2）绝对不等式

若函数 f 在区间$[a,b]$上可积,则$|f(x)|$ 在$[a,b]$上也可积，且 $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$ $(a<b)$

证 由于f在$[a,b]$上可积，所以$\forall \varepsilon > 0,$

$\exists$对$[a,b]$的某个划分T,使的$\sum_T \omega_i^f \Delta x_i < \varepsilon$.

由绝对不等式 $\big||a|-|b|\big| \le |a-b|$

$$\Rightarrow \omega_i^{|f|} \le \omega_i^f \Rightarrow \sum_T \omega_i^{|f|} \Delta x_i \le \sum_T \omega_i^f \Delta x_i < \varepsilon,$$

$\therefore |f|$在$[a,b]$上可积.

上页 下页 返回

又 $\because -|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$,

$$\therefore -\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx,$$

即 $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$.

说明： 这个性质的逆命题不成立.

例如, 由于 $f(x)=\begin{cases} 1\ , & x\in Q \\ -1, & x\in R\setminus Q \end{cases}$

在 $[0,1]$ 上不可积 $\left(类似于 Dirichlet\ 函数\right)$.

但 $|f(x)|\equiv 1$, 所以 $|f(x)|$ 在 $[0,1]$ 上可积.

性质6（估值不等式）设M及m分别是可积函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的最大值及最小值，

则 $$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a).$$

证 $\because\ m\le f(x)\le M,$

$$\therefore\ \int_a^b m dx\le\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b M dx,$$

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a).$$

以上性质 4、5、6均可用定积分的几何意义来理解。

例 3.估计积分$\int_0^{\pi}\frac{1}{2+\cos 2x}dx$的值.

解 $f(x)=\frac{1}{2+\cos 2x}, x\in[0,\pi]$

$\therefore \frac{1}{3}\le f(x)\le 1$,于是

$$\int_0^{\pi}\frac{1}{3}dx\le\int_0^{\pi}\frac{1}{2+\cos 2x}dx\le\int_0^{\pi}1dx$$

$$\therefore \frac{\pi}{3}\le\int_0^{\pi}\frac{1}{2+\cos 2x}dx\le\pi.$$

上页 下页 返回

例3.(2).估计积分$\int_0^{\pi/2}\dfrac{\sin x}{x}dx$ 值的范围.

解 $\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, x\neq 0\\ 1,\quad x=0\end{cases}$在$[0,\pi/2]$上连续.

$\because \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\sin 0}{x-0}=1$,曲线$y=\sin x$在点

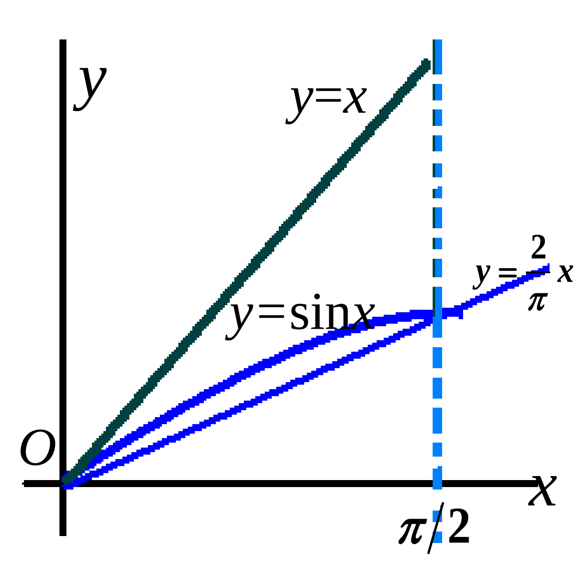
$O(0,0)$处切线斜率$=1$,$\therefore$ 切线方程为 $y=x$.

由此,并借助于数形结合,我们得到不等式:

$0\leq x\leq\dfrac{\pi}{2}$时有 $\dfrac{2}{\pi}x\leq\sin x\leq x.$

$\therefore\ x\in[0,\pi/2]$时$\dfrac{2}{\pi}\leq\varphi(x)\leq 1.$

$\therefore 1\leq\int_0^{\pi/2}\varphi(x)dx=\int_0^{\pi/2}\dfrac{\sin x}{x}dx\leq\dfrac{\pi}{2}.$



例3.(2).估计积分$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}dx$ 值的范围.

法二 $\because x=0$是函数$\frac{\sin x}{x}$的可去间断点,

$$\therefore \varphi(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, x\neq 0\\ 1, \quad x=0\end{cases}$$ 在$[0,\pi/2]$上连续.

$\because x\in(0,\pi/2)$时 $0<\sin x<x<\tan x$,

$$\varphi'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{\cos x(x-\tan x)}{x^2}<0,$$

$\therefore \varphi(x)$在$[0,\pi/2]$上严格单调递减.

$x\in[0,\pi/2]$时$\frac{2}{\pi}\le\varphi(x)\le 1.$

$$\therefore 1\le\int_0^{\pi/2}\varphi(x)dx=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{x}dx\le\frac{\pi}{2}.$$

上页 下页 返回

二、积分中值定理

定理 9.7 （定积分第一中值定理）

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,

则在积分区间 $[a,b]$ 上至少存在一个点 ξ,

使 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$. $\quad (a \le \xi \le b)$

积分中值公式

证 $\because\ m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

$$\therefore\ m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$$

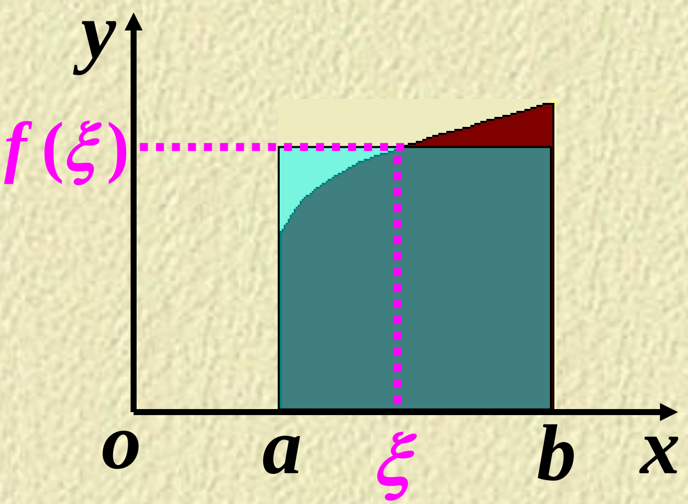
由闭区间上连续函数的介值定理知

在区间$[a,b]$上至少存在一个点ξ ，

使 $$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx,$$

即 $$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a). \quad (a \le \xi \le b)$$

积分中值公式的几何解释：

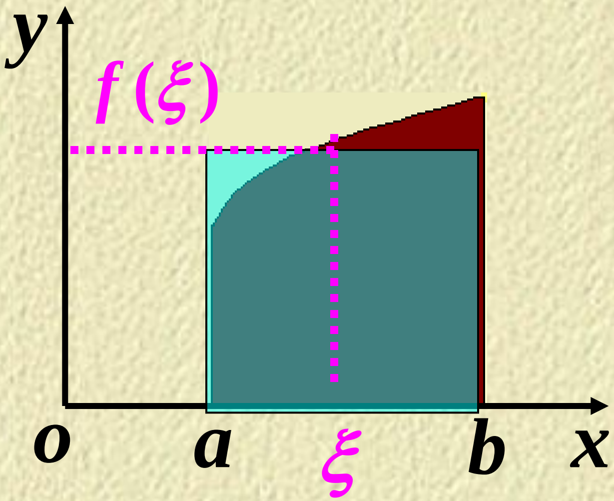


在区间$[a,b]$上至少存在一个点ξ，使得以区间$[a,b]$为底边， 以曲线$y=f(x)$为曲边的曲边梯形的面积等于同一底边而高为$f(\xi)$的一个矩形的面积。

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a),\ (a \le \xi \le b)$$

积分中值公式也完全可以借助于定积分的物理意义来解释：从时刻a到时刻b物体以变化的速率$f(x)$沿直线运动所走过的路程为

$$\int_a^b f(x)dx$$



其数值等于在时间段$[a, b]$内，物体以某个时刻ξ的速率$f(\xi)$作匀速直线运动所走过的路程。

Add.闭区间上连续函数平均值的计算:

定积分可以用来计算连续函数在闭区间$[a,b]$上的平均值.

设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续,则函数$f(x)$在$[a,b]$上的(算术)平均值为

$$\overline{f(x)}_{[a,b]}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

上页 下页 返回

连续函数在闭区间上的(算术)平均值.

设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续,则函数$f(x)$在$[a,b]$上的(算术)平均值为

$$\overline{f(x)}_{[a,b]} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

积分中值定理.

设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续,则$\exists \xi \in [a,b]$,

使得 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$.

设想将$[a,b]$ n等份成$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,$

$[x_{n-1},x_n], x_0=a, x_n=b.$

则n个分点的算术平均值为

$$\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)]=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k),$$

则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f(x_k)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{b-a}\sum\limits_{k=1}^{n}f(x_k)\cdot\frac{b-a}{n}$

$=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ 就是连续函数$f(x)$

在$[a,b]$上的(算术)平均值,为记$\overline{f(x)}_{[a,b]}$.

定理 9.8 （推广的定积分第一中值定理）

如果函数 f、g 在闭区间 $[a,b]$ 上都连续，且函数 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上不变号，则在区间 $[a,b]$ 上至少存在一个点 ξ ，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

当 $g(x)\equiv 1$ 时，该定理就是

定理 9.7=积分第一中值定理.

上页 下页 返回

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

证　不妨设 $g(x)\geq 0$ ，$x\in[a,b]$，这时有

$$mg(x)\leq f(x)g(x)\leq Mg(x)\ ,\ x\in[a,b]$$

$$M=\max_{[a,b]} f(x)\ ,\ \ m=\min_{[a,b]} f(x)$$

由定积分的基本性质5的推论1保向不等式知

$$m\int_a^b g(x)dx\leq\int_a^b f(x)g(x)dx\leq M\int_a^b g(x)dx\ ,$$

上页　下页　返回

$$m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx\ ,$$

如果 $\int_a^b g(x)dx = 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)g(x)dx = 0,$

结论显然成立.

若 $\int_a^b g(x)dx > 0 \Rightarrow m \le \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \le M$

由闭区间上连续函数的介值定理知,

$$\exists \xi \in [a,b]\ ,\ \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} = f(\xi)$$

结论成立!

上页 下页 返回

例4.设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可微,

且满足$f(1)=2\int_0^{1/2} f(x)dx$.

证明:存在$\xi\in(0,1)$,使得$f'(\xi)=0$.

分析:结论有典型的使用*Rolle Th.*的

味道!要使用*Rolle Th.*,关键是条件3.

据题, $f(1)=2\int_0^{1/2} f(x)dx \Rightarrow \exists c\in\left[0,1/2\right]$,

$$f(1)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot f(c)\Rightarrow f(1)=f(c).$$

事备矣!

例4.设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可微,且满足$f(1)=2\int_0^{1/2} f(x)dx$,证明:存在$\xi\in(0,1)$,使得$f'(\xi)=0$.

证明　据题, $f(1)=2\int_0^{1/2} f(x)dx \Rightarrow$

$$\exists c\in\left[0,1/2\right],\ f(1)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot f(c)=f(c),$$

$\therefore$ 在$\left[c,1\right]$上函数$f(x)$满足*Rolle Th.*的条件,

$\therefore \exists\xi\in(c,1)\subset(0,1)$,使得$f'(\xi)=0$.

小 结

1.定积分的性质——线性性质与区间可加性 用于定积分的计算；

2. 定积分的性质——保号性、估值性质、绝对不等式与积分中值定理等着重于理论上的应用。

3. 典型问题：

（1）不计算定积分比较积分大小；

（2）估计积分值。

练 习 题

1. 下列两积分的大小关系是:

（1）$\int_0^1 x^2 dx$ ______ $\int_0^1 x^3 dx$

（2）$\int_1^2 \ln x dx$ ________ $\int_1^2 (\ln x)^2 dx$

（3）$\int_0^1 e^x dx$ ________ $\int_0^1 (x+1) dx$

2. 估计积分的取值范围，当然是不求最好，但求更好 :

（1）$\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x \arctan x dx$;

（2）$\int_0^1 \sqrt{x^4+1}\, dx$.

上页 下页 返回

3. 求下列极限：

（1） $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}\right)$；

（2） $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n x\,dx$；

（3） $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\,dx$

4. 计算：

（1） $\int_{1/e}^{e}\left|\ln x\right|dx$；

（2） 如果 $f(x)=\sin x+\int_0^{\pi}f(x)dx$，求 $\int_0^{\pi}f(x)dx$

上页 下页 返回

5. 证明：$\int_0^{2\pi}\left|a\cos x+b\sin x\right|dx\le 2\pi\sqrt{a^2+b^2}$.

6**.如果函数$f(x)$是区间$[a,b]$上的可积凸函数,

证明：$\int_a^b f(x)dx\ge(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$;

又:(1)如果还知道$f(x)$是$[a,b]$上的连续函数,你将如何解决该问题?

（2）如果$f(x)$在$[a,b]$上可导,你又如何?

（3）如果$f(x)$在$[a,b]$上二阶可导,请你证明结论. （P220）

7. 设 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，证明：

（1） 若在 $[a, b]$ 上 $f(x) \geq 0$，且 $\int_a^b f(x)dx = 0$，则在 $[a, b]$ 上 $f(x) \equiv 0$；

（2） 若在 $[a, b]$ 上，$f(x) \geq 0$，且 $f(x)$ 不恒等于 0，则 $\int_a^b f(x)dx > 0$；

（3） 若在 $[a, b]$ 上 $f(x) \leq g(x)$，且 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$，则在 $[a, b]$ 上 $f(x) \equiv g(x)$.

上页 下页 返回

求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx.$

解法一：当$x\in[0,1]$时，$\frac{1}{2}x^n \le \frac{x^n}{1+x} \le x^n$，

$$\therefore \frac{1}{2(1+n)} = \int_0^1 \frac{1}{2}x^n dx \le \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx \le \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{1+n},$$

由夹逼性可得$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = 0.$

求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx.$

解法二：根据定积分第一中值定理的

推广形式,当$x\in[0,1]$时$\frac{1}{1+x}$不变号,连续,

$$\therefore \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx=\frac{1}{1+\xi}\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{1+\xi}\bullet\frac{1}{1+n},$$

$\xi\in[0,1]$,由此可得$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx=0.$

求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx.$

注意：在利用定积分第一中值定理的推广

形式时,若用$x\in[0,1]$时x^n不变号,连续,

$$\therefore \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = \xi^n \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = \xi^n \ln 2,$$

$\xi\in(0,1)$,由$\lim\limits_{n\to\infty}\xi^n = 0$得$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = 0$

那就错了,$\because$ 说$\xi\in(0,1)$没错,但是$\xi=\xi_n$,

不能排除$\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n = 1$的可能,$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\xi_n^n = 0$未必成立!