导函数极限定理

命题2：设函数$f(x)$在点x_0的某邻域$U(x_0)$内连续，在$U^o(x_0)$内可导，且$\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$存在，那么函数$f(x)$在点$x_0$可导，且$\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = f'(x_0)$.　【导函数的极限定理】

证明　(1)$\forall x \in U_+^o(x_0)$，函数$f(x)$在$[x_0, x]$上满足$L-Th.$的条件，则存在$\xi \in (x_0, x)$，使得$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(\xi)$，

$\because x_0 < \xi < x$，当$x \to x_0^+$时，$\xi \to x_0^+$，

$\because \lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$存在$\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)$存在，

$$\therefore f_+'(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0^+} f'(x) = f'(x_0+);$$

证明 (1)$\forall x \in \overset{o}{U}_{+}(x_0)$,函数$f(x)$在$[x_0, x]$上满足$L-Th.$的条件,则存在$\xi \in (x_0, x)$,使得$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(\xi)$,

$\because x_0 < \xi < x$,当$x \to x_0^{+}$时,$\xi \to x_0^{+}$,

$\because \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$存在$\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0^{+}} f'(x)$存在,

$$\therefore f'_{+}(x_0) = \lim_{x \to x_0^{+}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0^{+}} f'(x) = f'(x_0+);$$

(2)同理可得$f'_{-}(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0-} f'(x) = f'(x_0-)$;

(3)$\because \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$存在$\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0^{+}} f'(x) = \lim\limits_{x \to x_0-} f'(x)$存在,

$\therefore f'_{+}(x_0) = f'_{-}(x_0) \Rightarrow f'(x_0)$存在,$\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = f'(x_0)$

上页 下页 返回

特别提示：

注意 $f'_+(x_0)$与 $f'(x_0+)$的区别!

(1). $f'_+(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

为函数$f(x)$在点x_0的右导数,

(2). $f'(x_0+) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f'(x)$

为导函数$f'(x)$在点x_0的右极限.

命题3　一个在区间内点点可导的函数的导函数不可能有第一类的间断点.

证明　如果函数$\varphi(x)$在$x_0 \in (a,b)$可导,

而$\lim\limits_{x \to x_0^+} \varphi'(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0^-} \varphi'(x)$存在,但两者不相等,

由于$\varphi'_+(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \varphi'(x)$,$\varphi'_-(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \varphi'(x)$,

可得$\varphi'_+(x_0) \neq \varphi'_-(x_0)$,

而这与函数$\varphi(x)$在(a,b)内可导相矛盾,

$\therefore \varphi'(x)$在(a,b)内不可能有第一类的间断点.

上页　下页　返回

命题2 设函数$f(x)$在点x_0的某邻域$U(x_0)$内连续,在$U^o(x_0)$内可导,且$\lim_{x\to x_0} f'(x)$存在,那么函数$f(x)$在点x_0可导,且$\lim_{x\to x_0} f'(x) = f'(x_0)$.

命题3 一个在区间I内点点可导的函数的导函数不可能有第一类的间断点 .即一个函数的导函数要么连续要么只有第二类间断点 .

回忆之前关于导函数的命题:

达布(*Darboux*)定理　函数f在$[a,b]$上可导,$f_+'(a) \neq f_-'(b)$,k为介于$f_+'(a)$, $f_-'(b)$之间的任一实数,则至少存在一点$\xi \in (a,b)$,使$f'(\xi) = k$.

达布(*Darboux*)定理有以下的等价形式:

达布(*Darboux*)定理　函数f在$[a,b]$上可导,$f_+'(a) f_-'(b) < 0$,则$\exists \xi \in (a,b)$,使$f'(\xi) = 0$.

达布(*Darboux*)定理也叫做导数介值定理.

例4.(1).点x_0是函数$H(x)=\begin{cases}0, x<x_0\\1, x\geq x_0\end{cases}$的

第一类间断点,所以不存在这样的函数$G(x)$,使得$G'(x)=H(x)$.

(2). $$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0\\0, \quad x=0\end{cases},$$

$$f'(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, x\neq 0\\0, \quad x=0\end{cases},$$

$x=0$是$f'(x)$第二类间断点.

例5 设函数$g(x)=\begin{cases} e^x-1, & x<0 \\ \ln(1+x), & x\geq 0 \end{cases}$, 求$g'(x)$

解 显然函数$g(x)$在$x=0$处连续,

$x<0$时$g'(x)=(e^x-1)'=e^x$,

$x>0$时$g'(x)=\left(\ln(1+x)\right)'=\dfrac{1}{1+x}$,

又$\lim\limits_{x\to 0-} g'(x)=\lim\limits_{x\to 0-} e^x=1$, $\lim\limits_{x\to 0+} g'(x)=\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1}{1+x}=1$,

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} g'(x)=1$, $\therefore g'(0)=\lim\limits_{x\to 0} g'(x)=1$,

$$\therefore g'(x)=\begin{cases} e^x, & x<0 \\ \dfrac{1}{1+x}, & x\geq 0 \end{cases}$$

上页 下页 返回

特别提示:

1.注意导函数的极限定理的条件 (1). $f(x)$在$U(x_0)$内连续;(2). $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$存在.如$f(x)=\begin{cases}\cos x, x\neq 0\\ 0, \quad x=0\end{cases}$,

虽然$\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$存在,但是$f(x)$在$x=0$处不连续,结论不成立.

2.导函数的极限定理的条件是充分条件,并非必要条件:如$g(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, \quad x=0\end{cases}$, $g'(0)=0$存在,

但$\lim\limits_{x\to 0} g'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}\right)$不存在.