3.2 自然推理系统P

- 判断推理是否正确的三种方法：真值表法、等值演算法和主析取范式法。
- 当推理中包含的命题变项较多时，上述三种方法演算量太大。
- 对于由前提$A_1, A_2, \ldots, A_k$推B的正确推理应该给出严谨的证明。
- 证明是一个描述推理过程的命题公式序列，其中的每个公式或者是前提，或者是由某些前提应用推理规则得到的结论（中间结论或推理中的结论）。
- 要构造出严谨的证明就必须在形式系统中进行。

形式系统的定义

定义3.2 一个形式系统I由下面四个部分组成：

（1）非空的字母表，记作A(I)。

（2）A(I)中符号构造的合式公式集，记作E(I)。

（3）E(I)中一些特殊的公式组成的公理集，记作A_X(I)。

（4）推理规则集，记作R(I)。

可以将I记为4元组<A(I)，E(I)，A_X(I)，R(I)>

<A(I)，E(I)> 是I的形式语言系统

<A_X(I)，R(I) > 是I的形式演算系统

形式系统的分类

（1）自然推理系统

从任意给定的前提出发，应用系统中的推理规则进行推理演算，得到的最后命题公式是推理的结论（有时称为有效的结论）。

（2）公理系统

从若干给定的公理出发，应用系统中推理规则进行推理演算，得到的结论是系统中的定理。

说明

❑本书只介绍自然推理系统P。

自然推理系统的定义

定义3.3 自然推理系统P的定义

1. 字母表

（1） 命题变项符号：p， q， r， …， p_i， q_i， r_i， …

（2） 联结词符号： $\neg$， $\wedge$， $\vee$， $\rightarrow$， $\leftrightarrow$

（3） 括号与逗号：( )，，

2. 合式公式（同定义1.6）

自然推理系统的定义

3. 推理规则

（1）前提引入规则

在证明的任何步骤上都可以引入前提。

（2）结论引入规则

在证明的任何步骤上所得到的结论都可以作为后继证明的前提。

（3）置换规则

在证明的任何步骤上，命题公式中的子公式都可以用与之等值的公式置换，得到公式序列中的又一个公式。

自然推理系统的定义

（4）假言推理规则

$$A \to B$$
$$A$$
$$\therefore\ B$$

（4）若今天下雪,则将去滑雪。今天下雪，所以去滑雪。

（5）附加规则

$$A$$
$$\therefore\ A \vee B$$

（5）现在气温在冰点以下。因此，要么现在气温在冰点以下，要么现在下雨。

（6）化简规则

$$A \wedge B$$
$$\therefore A$$

（6）现在气温在冰点以下并且正在下雨。因此，现在气温在冰点以下。

自然推理系统的定义

（7）拒取式规则

$$A \rightarrow B$$
$$\neg B$$
$$\therefore \neg A$$

（8） 假言三段论规则

$$A \rightarrow B$$
$$B \rightarrow C$$
$$\therefore A \rightarrow C$$

（9）析取三段论规则

$$A \vee B$$
$$\neg B$$
$$\therefore A$$

自然推理系统的定义

（10）构造性二难推理规则

$$A\to B$$
$$C\to D$$
$$A\vee C$$
$$\therefore\quad B\vee D$$

（11）破坏性二难推理规则

$$A\to B$$
$$C\to D$$
$$\neg B\vee\neg D$$
$$\therefore\quad \neg A\vee\neg C$$

（12） 合取引入规则

$$A$$
$$B$$
$$\therefore\quad A\wedge B$$

在自然推理系统P中构造证明

- P中构造证明就是由一组P中公式作为前提，利用P中的规则，推出结论。
- 构造形式结构$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \rightarrow B$ 的推理的书写方法：
  前提： $A_1, A_2, \ldots, A_k$
  结论： B
- 证明方法：
  - 直接证明法
  - 附加前提法
  - 归谬法（或称反证法）

例题

例3.3 在自然推理系统P中构造下面推理的证明：

前提：$\neg p \vee q$, $r \vee \neg q$, $r \to s$

结论：$p \to s$

① $\neg p \vee q$	前提引入
② $p \to q$	①置换
③ $r \vee \neg q$	前提引入
④ $q \to r$	③置换
⑤ $p \to r$	②④假言三段论
⑥ $r \to s$	前提引入
⑦ $p \to s$	⑤⑥假言三段论

例题

例3.3 在自然推理系统P中构造下面推理的证明：

前提：$p\rightarrow(q\rightarrow r)$，$p\wedge q$

结论：$\neg r\rightarrow s$

① $p\rightarrow(q\rightarrow r)$	前提引入
② $p\wedge q$	前提引入
③ p	②化简
④ q	②化简
⑤ $q\rightarrow r$	①③假言推理
⑥ r	④⑤假言推理
⑦ $r\vee s$	⑥附加
⑧ $\neg r\rightarrow s$	⑦置换

例题

例3.4 在自然推理系统P中构造下面推理的证明：

若数a是实数，则它不是有理数就是无理数；若a不能表示成分数，则它不是有理数；a是实数且它不能表示成分数。所以a是无理数。

构造证明：

（1）将简单命题符号化：

设 p：a是实数。 q：a是有理数。

r：a是无理数。 s：a能表示成分数。

（2）形式结构：

前提：$p \rightarrow (q \vee r)$，$\neg s \rightarrow \neg q$，$p \wedge \neg s$

结论：r

例题

① $p \wedge \neg s$	前提引入
② p	①化简
③ $\neg s$	①化简
④ $p \rightarrow (q \vee r)$	前提引入
⑤ $q \vee r$	②④假言推理
⑥ $\neg s \rightarrow \neg q$	前提引入
⑦ $\neg q$	③⑥假言推理
⑧ r	⑤⑦析取三段论

例题

例　写出对应下面推理的证明。

如果今天是星期一，则要进行英语或离散数学考试，如果英语老师有会，则不考英语。今天是星期一，英语老师有会，所以进行离散数学考试。

解 p：今天是星期一。 q：进行英语考试。 r：进行离散数学考试。 s：英语老师有会。

前提：$p \to (q \vee r)$，$s \to \neg q$，p，s。
结论：r。

例题

(1) $p \to (q \vee r)$　　前提引入

(2) p　　前提引入

(3) $q \vee r$　　(1)(2)假言推理

(4) $s \to \neg q$　　前提引入

(5) s　　前提引入

(6) $\neg q$　　(5)(4)假言推理

(7) r　　(6)(3) 析取三论

附加前提法

- 有时推理的形式结构具有如下形式 ：

  前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k$

  结论：$C \to B$

- 可将结论中的前件也作为推理的前提，使结论只为B。

  前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k, C$

  结论：B

- 理由：

$$
\begin{aligned}
&(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \to (C \to B) \\
\Leftrightarrow\ & \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \vee (\neg C \vee B) \\
\Leftrightarrow\ & \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge C) \vee B \\
\Leftrightarrow\ & (A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge C) \to B
\end{aligned}
$$

例题

例3.5 在自然推理系统P中构造下面推理的证明。

如果小张和小王去看电影，则小李也去看电影；小赵不去看电影或小张去看电影；小王去看电影。所以，当小赵去看电影时，小李也去看电影。

构造证明：

（1）将简单命题符号化：

设 p:小张去看电影。
q:小王去看电影。
r:小李去看电影。
s:小赵去看电影。

例题

（2） 形式结构：

前提：$(p\wedge q)\rightarrow r, \neg s\vee p, q$
结论：$s\rightarrow r$

（3）证明：用附加前提证明法

①	s	附加前提引入
②	$\neg s\vee p$	前提引入
③	p	①②析取三段论
④	$(p\wedge q)\rightarrow r$	前提引入
⑤	q	前提引入
⑥	$p\wedge q$	③⑤合取
⑦	r	④⑥假言推理

例题

例 验证下述推理是否正确：

或者逻辑学难学，或者有少数学生不喜欢它；如果数学容易学，那么逻辑学并不难学。因此如果许多学生喜欢逻辑，那么数学并不易学。

解答 先将命题符号化，首先抽取的基本命题包括：

A: 逻辑学难学　　　　B: 有少数学生不喜欢逻辑学

C: 数学容易学

则前提是$A \vee B$，$C \rightarrow \neg A$，要证明的结论是$\neg B \rightarrow \neg C$，可进行如下的验证：

(1).	$\neg B$	附加前提引入
(2).	$A \vee B$	前提引入
(3).	A	(1)(2)析取三段论
(4).	$C \rightarrow \neg A$	前提引入
(5).	$\neg C$	(3)(4)拒取式

归谬法（反证法）

- 有时推理的形式结构具有如下形式：

  前提：A_1，A_2，…，A_k

  结论：B

- 如果将¬ B作为前提能推出矛盾来，则说明推理正确。

  前提：A_1，A_2，…，A_k，$\neg B$

  结论：矛盾

- 理由：$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$

  $$\Leftrightarrow \neg (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \vee B$$

  $$\Leftrightarrow \neg (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B)$$

- 若$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B$为矛盾式，则说明$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B)$为重言式。

例题

例3.6 在自然推理系统P中构造下面推理的证明。

如果小张守第一垒并且小李向B队投球，则A队将取胜；或者A队未取胜，或者A队获得联赛第一名；A队没有获得联赛的第一名；小张守第一垒。因此，小李没有向B队投球。

构造证明：

（1）将简单命题符号化：

设 p:小张守第一垒。 q:小李向B队投球。

r:A队取胜。 s:A队获得联赛第一名。

（2）形式结构：

前提：$(p \wedge q) \rightarrow r, \neg r \vee s, \neg s, p$

结论：$\neg q$

例题

（3）证明：用归谬法

① q	结论的否定引入
② $\neg r \lor s$	前提引入
③ $\neg s$	前提引入
④ $\neg r$	②③析取三段论
⑤ $(p \land q) \rightarrow r$	前提引人
⑥ $\neg (p \land q)$	④⑤拒取式
⑦ $\neg p \lor \neg q$	⑥置换
⑧ p	前提引入
⑨ $\neg q$	⑦⑧析取三段论
⑩ $q \land \neg q$	①⑨合取

小节结束

由于最后一步为矛盾式，所以推理正确。

例题

例 构造下列推理的证明：

前提：$\neg P \wedge \neg Q$　　结论：$\neg(P \wedge Q)$

证明：（1）$\neg\neg(P \wedge Q)$　　否定的结论的引入

（2）$P \wedge Q$　　（1）置换

（3）P　　（2）化简

（4）$\neg P \wedge \neg Q$　　前提引入

（5）$\neg P$　　（4）化简

（6）$P \wedge \neg P$　　（3）（5）合取引入规则

所以由前提可推出结论。

∴ 应用

例　公安人员审查一件盗窃案，已知事实如下：

（1）甲或乙盗窃了录音机；

（2）若甲盗窃了录音机，则作案时间不可能在午夜前；

（3）若乙的证词正确，则午夜时屋里灯光未灭；

（4）若乙的证词不正确，则作案时间发生在午夜之前。

(5) 午夜时屋里灯光灭了。

根据以上事实判断是谁盗窃了录音机。

应用

首先，将已知事实符号化。

设：p：甲盗窃录音机

q：乙盗窃录音机

r：作案时间发生在午夜前

s：乙的证词正确。

t：午夜时灯光未灭。

前提：$p \vee q$，$p \rightarrow \neg r$，$s \rightarrow t$，$\neg s \rightarrow r$，$\neg t$

应用

前提：$p\vee q$，$p\rightarrow\neg r$，$s\rightarrow t$，$\neg s\rightarrow r$，$\neg t$

(1)	$\neg t$	前提引入
(2)	$s\rightarrow t$	前提引入
(3)	$\neg s$	(1)(2) 拒取式
(4)	$\neg s\rightarrow r$	前提引入
(5)	r	(3)(4) 假言三段论
(6)	$p\rightarrow\neg r$	前提引入
(7)	$\neg p$	(5)(6) 拒取式
(8)	$p\vee q$	前提引入
(9)	q	(7)(8) 析取三段论

所以乙盗窃了录音机。

本章主要内容

- 推理的形式结构：
  - 推理的前提
  - 推理的结论
  - 推理正确
- 判断推理是否正确的方法：
  - 真值表法
  - 等值演算法
  - 主析取范式法
- 对于正确的推理，在自然推理系统P中构造证明：
  - 自然推理系统P的定义
  - 自然推理系统P的推理规则：
  - 附加前提证明法
  - 归谬法

本章学习要求

- 理解并记住推理的形式结构的三种等价形式，即
  ①$\{A_1,A_2,\ldots,A_k\} \vdash B$
  ②$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$
  ③前提：$A_1,A_2,\ldots,A_k$
  结论：B

在判断推理是否正确时，用②；在P系统中构造证明时用③。

- 熟练掌握判断推理是否正确的三种方法（真值表法，等值演算法，主析取范式法）。
- 牢记P系统中的各条推理规则。
- 对于给定的正确推理，要求在P系统中给出严谨的证明序列。
- 会用附加前提证明法和归谬法。

小节结束

习题

1、用不同的方法验证下面推理是否正确。对于正确的推理还要在P系统中给出证明。

（1） 前提：$\neg p \rightarrow q$，$\neg q$

结论：$\neg p$

（2） 前提：$q \rightarrow r$，$p \rightarrow \neg r$

结论：$q \rightarrow \neg p$

（1）不正确。

验证答案，只需证明$(\neg p \to q) \wedge \neg q \to \neg p$不是重言式。

方法一　等值演算

$$(\neg p \to q) \wedge \neg q \to \neg p$$

$$\Leftrightarrow \neg((p \vee q) \wedge \neg q) \vee \neg p$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee q \vee \neg p$$

$$\Leftrightarrow ((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee q)) \vee \neg p$$

$$\Leftrightarrow \neg p \vee q$$

易知10是成假赋值，故$(\neg p \to q) \wedge \neg q \to \neg p$不是重言式，所以推理不正确。

方法二　主析取范式法

经过演算后可知

$(\neg p \to q) \wedge \neg q \to \neg p \Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_3$

未含m_2, 故$(\neg p \to q) \wedge \neg q \to \neg p$不是重言式。

方法三　直接观察出10是成假赋值。

方法四　真值表法

$(\neg p \to q) \wedge \neg q \to \neg p$的真值表为

p	q	$(\neg p \to q) \wedge \neg q \to \neg p$
0	0	1
1	0	1
0	1	0
1	1	1

结论（不正确）是对的。

（2）推理正确

方法一 真值表法（自己做）

方法二 等值演算法（自己做）

方法三 主析取范式法（自己做）

方法四 *P*系统中构造证明

证明：（直接证明法）

① $p\rightarrow\neg r$ （前提引入）

② $r\rightarrow\neg p$ （①置换）

③ $q\rightarrow r$ （前提引入）

④ $q\rightarrow\neg p$ （③②假言三段论）

2、在P系统中构造下面推理的证明：

如果今天是周六，我们就到颐和园或圆明园玩。如果颐和园游人太多，就不去颐和园。今天是周六，并且颐和园游人太多。所以我们去圆明园或动物园玩。

构造证明：

（1）设p：今天是周六。 q：到颐和园玩。

r：到圆明园玩。 s：颐和园游人太多。

t：到动物园玩。

（2）前提：$p\rightarrow(q\vee r)$，$s\rightarrow\neg q$，p，s

结论：$r\vee t$

（3）证明：

① $p\to(q\vee r)$	前提引入
② p	前提引入
③ $q\vee r$	①②假言推理
④ $s\to\neg q$	前提引入
⑤ s	前提引入
⑥ $\neg q$	④⑤假言推理
⑦ r	③⑥析取三段论
⑧ $r\vee t$	⑦附加

小节结束