09. 积分部分习题课 2022-12

上页 下页 返回

1.积分计算问题

(1).$\left(P192/Ex.3\right)$若$f(x)$在$\left[a,b\right]$上可积，$F(x)$在$\left[a,b\right]$上连续，且除有限多个点外有$F'(x)=f(x)$，则有

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a).$$

(2).计算$\int_0^{\pi}\frac{1}{2+\cos 2x}dx$.

(3).计算$\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^4}dx$.

上页 下页 返回

2.证明: $\int_0^{2\pi} e^{\sin^2 x} dx \geq 3\pi$.

3.设$f(x)$在$[a,b]$上有连续的导函数,且$f(a)=0$,

$|f'(x)| \leq M, x \in [a,b]$.求证: $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{1}{2}M(b-a)^2$.

4.设$f \in C[0,1], f(x)>0$.证明

$$\ln\int_0^1 f(x)dx \geq \int_0^1 \ln f(x)dx.$$（与$P220/Ex.1,8$ 类同）

5.设$f(x), g(x)$在区间$[a,b]$上连续且同为单调增加或单调减少,则有

$$\int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx \leq (b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx\ .$$

上页 下页 返回

6. 设$f(x),g(x)$在$[a,b]$上可积,则有:

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \le \int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx\ .$$

$(Cauchy - Schwarz - Bunijiakovsky$ 不等式$)$

7.设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续,求证:

$$\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2 \le (b-a)\int_a^b f^2(x)dx\ .$$

8.$(P205/Ex.11)$若$f(x)$在$[a,b]$上二阶可导,且$f''(x)>0$.求证:

$$\int_a^b f(x)dx \ge (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

9.计算不定积分

$$(1).\int \frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}};\quad (2).\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx;\quad (3).\int \frac{dx}{1+\sqrt{2x}};$$

$$(4).\int (x\ln x)^2\,dx;\quad (5).\int e^{-\sqrt[3]{x}}\,dx;$$

$$(6).\int \frac{\arctan x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\,dx;\quad (7).\int \sqrt{e^x-1}\,dx;$$

$$(8).\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx;\quad (9).\int \frac{x+2x^3}{1+x+x^2}\,dx.$$

1.积分计算问题

(1).(P192/Ex.3)若$f(x)$在$[a,b]$上可积,$F(x)$在$[a,b]$上连续,且除有限多个点外有$F'(x)=f(x)$,则有

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

这叫作拓广的Newton – Leibniz公式.

证明　取$[a,b]$的一个划分$T=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\},a=x_0,x_n=b$,使得使$F'(x)=f(x)$不成立的点成为划分$T$的部分分点,

在$\Delta_k=[x_{k-1},x_k]$上由Lagrange微分中值定理得

$$F(x_k)-F(x_{k-1})=F'(\xi_k)\Delta x_k=f(\xi_k)\Delta x_k,$$

则$F(b)-F(a)=\sum_{k=1}^{n}\left[F(x_k)-F(x_{k-1})\right]=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k,$

$\because f(x)$在$[a,b]$上可积,$\therefore \lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k=\int_a^b f(x)dx$.证毕

上页　下页　返回

例如,计算积分：$\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx.$

解 在$(-\infty,+\infty)$上,$\arctan x$是$\frac{1}{1+x^2}$的一个原函数,

$$\therefore \int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx=\left[\arctan x\right]_{-1}^{1}=\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

$x\neq 0$时,$\left(-\arctan\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{1+x^2}$,但是$-\arctan\frac{1}{x}$在$x=0$时没有定义,

所以$-\arctan\frac{1}{x}$不是$\frac{1}{1+x^2}$在$[-1,1]$上的一个原函数.稍作改造,

$$\Phi(x)=\begin{cases}-\arctan\frac{1}{x}, x<0\\ \pi/2 \quad , \quad x=0\\ \pi-\arctan\frac{1}{x}, x>0\end{cases}$$

,$\Phi(x)$在$[-1,1]$上连续,且$x\neq 0$时$\Phi'(x)=\frac{1}{1+x^2}$,

于是,$\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx=\Phi(1)-\Phi(-1)=\pi-\arctan 1-\left(-\arctan\frac{1}{(-1)}\right)=\frac{\pi}{2}.$

上页 下页 返回

1.积分计算(2).$I=\int_0^{\pi}\frac{1}{2+\cos 2x}dx$.

$$\int\frac{1}{2+\cos 2x}dx=\int\frac{1}{1+2\cos^2 x}dx=\int\frac{\sec^2 x}{2+\sec^2 x}dx$$

$$=\int\frac{(\tan x)'}{3+\tan^2 x}dx=\int\frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^2+\tan^2 x}d(\tan x)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{3}}+C.$$

1.积分计算(2).$I=\int_0^{\pi}\frac{1}{2+\cos 2x}dx$.

倘由$\int\frac{1}{2+\cos 2x}dx=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{3}}+C$

得$I=\int_0^{\pi}\frac{1}{2+\cos 2x}dx=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{3}}\Big|_0^{\pi}=0,$

在$[0,\pi]$上$\frac{1}{2+\cos 2x}\geq\frac{1}{3}>0$,我们知道错了!

由$\frac{1}{2+\cos 2x}$在$[0,\pi]$上连续,因而其原函数也

必须是连续的.故$\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{3}}$不是$\frac{1}{2+\cos 2x}$

在$[0,\pi]$上的原函数.

上页 下页 返回

解 $\int_0^{\pi}\frac{1}{2+\cos 2x}dx=\int_0^{\pi}\frac{1}{1+2\cos^2 x}dx$

$$=\int_0^{\pi/4}\frac{1}{1+2\cos^2 x}dx+\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\frac{1}{1+2\cos^2 x}dx+\int_{3\pi/4}^{\pi}\frac{1}{1+2\cos^2 x}dx$$

$$=\int_0^{\pi/4}\frac{\sec^2 x}{2+\sec^2 x}dx+\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\frac{\csc^2 x}{\csc^2 x+2\cot^2 x}dx+\int_{3\pi/4}^{\pi}\frac{\sec^2 x}{2+\sec^2 x}dx$$

$$=\int_0^{\pi/4}\frac{d(\tan x)}{(\sqrt{3})^2+\tan^2 x}+\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\frac{-d(\cot x)}{1+\left(\sqrt{3}\cot x\right)^2}dx+\int_{3\pi/4}^{\pi}\frac{d(\tan x)}{(\sqrt{3})^2+\tan^2 x}$$

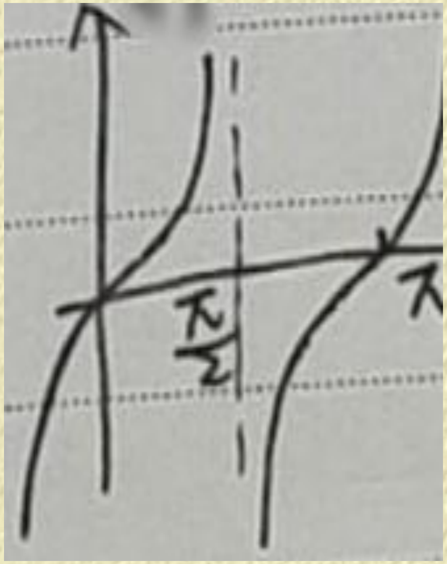
$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{3}}\Bigg|_0^{\pi/4}-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\sqrt{3}\cot x\right)\Bigg|_{\pi/4}^{3\pi/4}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{3}}\Bigg|_{3\pi/4}^{\pi}$$

$$=\cdots\cdots=\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

(注:其中点$\frac{\pi}{4}$的选取是随意的,只要取$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内的点即可;同样,$\frac{3\pi}{4}$亦如此.)

上页 下页 返回

1.积分计算(2).$I=\int_0^{\pi}\frac{1}{2+\cos 2x}dx$.



法二 由$\int\frac{1}{2+\cos 2x}dx=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{3}}+C$,

据拓广的Newton – Leibniz公式,取

$$\Phi(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{3}}, & 0\le x<\frac{\pi}{2}\\ \frac{\pi}{2\sqrt{3}}, & x=\frac{\pi}{2}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{\sqrt{3}}, & \frac{\pi}{2}<x\le\pi\end{cases}$$, $\Phi(x)$在$[0,\pi]$上连续,

在$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$时$\Phi'(x)=\frac{1}{2+\cos 2x}$.

$$\therefore I=\int_0^{\pi}\frac{1}{2+\cos 2x}dx=\Phi(\pi)-\Phi(0)=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$$.

1.积分计算(3).$I=\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^4}dx$.

解 $\int\frac{1}{1+x^4}dx=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\left(\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}-\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)dx$

$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right|+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\arctan\left(\sqrt{2}x+1\right)+\arctan\left(\sqrt{2}x-1\right)\right]+C.$

$$\therefore I=\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^4}dx=\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right|\\ \qquad+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\arctan\left(\sqrt{2}x+1\right)+\arctan\left(\sqrt{2}x-1\right)\right]\end{array}\right\}_{-1}^{1}$$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\ln\left(\sqrt{2}+1\right)+\frac{\pi}{2}\right]=A.$

上页 下页 返回

1.积分计算(3). $I=\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^4}dx$.

解二 $\int\frac{1}{1+x^4}dx=\frac{1}{2}\left(\int\frac{1+x^2}{1+x^4}dx+\int\frac{1-x^2}{1+x^4}dx\right)$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right|+C_1$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right|+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}+C_1,$$

1.积分计算(3).$I=\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^4}dx$.

$$\int\frac{1}{1+x^4}dx=\frac{1}{4\sqrt2}\ln\left|\frac{x^2+\sqrt2x+1}{x^2-\sqrt2x+1}\right|+\frac{1}{2\sqrt2}\arctan\frac{x^2-1}{x\sqrt2}+C_1,$$

作与 1.(2)同样的改造,

$$G(x)=\begin{cases}\frac{1}{4\sqrt2}\ln\left|\frac{x^2+\sqrt2x+1}{x^2-\sqrt2x+1}\right|+\frac{1}{2\sqrt2}\arctan\frac{x^2-1}{x\sqrt2}, & x<0\\ \frac{\pi}{4\sqrt2}, & x=0\\ \frac{1}{4\sqrt2}\ln\left|\frac{x^2+\sqrt2x+1}{x^2-\sqrt2x+1}\right|+\frac{1}{2\sqrt2}\arctan\frac{x^2-1}{x\sqrt2}+\frac{\pi}{2\sqrt2}, & x>0\end{cases}$$ 连续,

在$x\neq0$ 时$G'(x)=\frac{1}{1+x^4}$.

则 $\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^4}dx=G(1)-G(-1)=\frac{1}{\sqrt2}\left[\ln\left(\sqrt2+1\right)+\frac{\pi}{2}\right]=A.$

2.证明：$\int_0^{2\pi} e^{\sin^2 x}dx \ge 3\pi$.

Hint. $\forall t \in \mathbb{R}$有$e^t \ge 1+t \ \cdots$

3.设$f(x)$在$[a,b]$上有连续的导函数,且$f(a)=0$,

$|f'(x)| \le M, x \in [a,b]$.求证：$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \frac{1}{2}M(b-a)^2$.

Hint. $x \in [a,b]$,

$$f(x) = f(a) + f'(\xi)(x-a) = f'(\xi)(x-a), \xi \in (a,x)$$

$$|f'(x)| \le M \Rightarrow -M(x-a) \le f(x) \le M(x-a), x \in [a,b]$$

$$\therefore -\frac{1}{2}M(b-a)^2 = -M\int_a^b (x-a)dx \le \int_a^b f(x)dx$$

$$\le M\int_a^b (x-a)dx = \frac{1}{2}M(b-a)^2.$$

4.设$f\in C[0,1]$, $f(x)>0$.证明

$$\ln\int_0^1 f(x)dx \geq \int_0^1 \ln f(x)dx.$$（与$P220/Ex.1,8$ 类同）

证明　由$[0,1]$上$f(x)>0$ 知$\int_0^1 f(x)dx = A > 0.$

$\because \forall t > -1, \ln(1+t) \leq t.$　$\therefore \forall x \in [0,1],$

$$\ln f(x) = \ln A + \ln\left(1 + \frac{f(x)}{A} - 1\right) \leq \ln A + \frac{f(x)}{A} - 1,$$

$$\therefore R \leq \int_0^1 \left[\ln A + \frac{f(x)}{A} - 1\right]dx = \ln A + \int_0^1 \frac{f(x)}{A}dx - 1$$

$$= \ln A = L.$$

5.设$f(x),g(x)$在区间$[a,b]$上连续且同为单调增加或单调减少,则有

$$\int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx \le (b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx\ .$$

证明

6. 设$f(x),g(x)$在$[a,b]$上可积,则有：

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \le \int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx \ .$$

(*Cauchy – Schwarz – Bunijiakovsky* 不等式)

证明 据离散形式的*Cauchy*不等式$\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)$,

$f(x),g(x)$在$[a,b]$上可积$\Rightarrow f(x)g(x)$在$[a,b]$上可积 ,

对区间$[a,b]$作划分$T=\{\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_n\}$,则相应的*Riemann*积分和

有$\left(\sum_{i=1}^n f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^n f^2(\xi_i)\Delta x_i\right)\left(\sum_{i=1}^n g^2(\xi_i)\Delta x_i\right)$,于是,

$$\lim_{\|T\|\to 0}\left(\sum_{i=1}^n f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i\right)^2 \le \lim_{\|T\|\to 0}\left(\sum_{i=1}^n f^2(\xi_i)\Delta x_i\right)\cdot\lim_{\|T\|\to 0}\left(\sum_{i=1}^n g^2(\xi_i)\Delta x_i\right),$$

即得$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \le \int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx$.

6. 设$f(x), g(x)$在$[a,b]$上可积,则有:

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \le \int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx \ .$$

$\left(Cauchy - Schwarz - Bunijiakovsky\right.$ 不等式$\left.\right)$

证二 $\forall x \in [a,b], \forall \lambda \in \mathbb{R}, (\lambda f(x) + g(x))^2 \ge 0 \Rightarrow$

$\int_a^b [\lambda f(x) + g(x)]^2 dx \ge 0, \therefore \forall \lambda \in \mathbb{R}$,有

$\lambda^2 \int_a^b f^2(x)dx + 2\lambda \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx \ge 0,$

$\int_a^b f^2(x)dx > 0, \Delta \le 0 \Leftrightarrow$

$$\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx \ge \left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2.$$

$(2). \int_a^b f^2(x)dx = 0, \cdots$(回到证法一)

上页 下页 返回

6. 设$f(x),g(x)$在$[a,b]$上可积,则有:

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \le \int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx \ .$$

$(Cauchy-Schwarz-Bunijiakovsky$ 不等式$)$

7.设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续,求证:

$$\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2 \le (b-a)\int_a^b f^2(x)dx \ .$$

证明…

上页 下页 返回

8. 若$f(x)$是$[a,b]$上二阶可导的凸函数,

求证: $\int_a^b f(x)dx \ge (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

证明 $\because f(x)$是$[a,b]$上可导的凸函数,

$\therefore x\in[a,b]$时有$f(x)\ge f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)$,

$$\therefore \int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right]dx$$

$$=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx$$

$$=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+0=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

8. 若$f(x)$是$[a,b]$上二阶可导的凸函数,

求证:$\int_a^b f(x)dx \ge (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

证二 $\because f(x)$是$[a,b]$上二阶可导函数,

$\forall x \in [a,b], f(x) =$

$$= f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right) + \frac{f''(\xi)}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

$\because f(x)$是$[a,b]$上二阶可导的凸函数,故$f''(x) \ge 0$,

$$\therefore f(x) \ge f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right) \cdots$$

$$9.(1).\int\frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}}\overset{x=\sin t}{\underset{t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}{=\!=\!=\!=\!=\!=}}\int\frac{\cos t}{\sin t+\left|\cos t\right|}dt$$

$$=\int\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\cos t}{\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}dt\overset{t+\frac{\pi}{4}=u}{=\!=\!=\!=}\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\cos\left(u-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin u}du$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\cos u\cos\frac{\pi}{4}+\sin u\sin\frac{\pi}{4}}{\sin u}du=\frac{1}{2}\int\left(1+\frac{\cos u}{\sin u}\right)du$$

$$=\frac{1}{2}\left(u+\ln\left|\sin u\right|\right)+C=\frac{1}{2}\left(t+\frac{\pi}{4}+\ln\left|\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right)+C$$

$$=\frac{1}{2}\left(t+\ln\left|\sin t+\cos t\right|\right)+C_1=\frac{1}{2}\left(\arcsin x+\ln\left|x+\sqrt{1-x^2}\right|\right)+C_1\ .$$

上页 下页 返回

$$9.(1).\int\frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}} \overset{x=\sin t}{\underset{t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}{=\!=\!=\!=\!=\!=}} \int\frac{\cos t}{\sin t+|\cos t|}dt=\int\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt$$

或者,令$\int\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt=J_C,\int\frac{\sin t}{\sin t+\cos t}dt=J_S,$

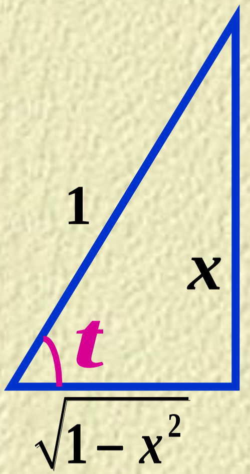
则$J_C+J_S=\int 1dt=t+C_1,$

$$J_C-J_S=\int\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}dt=\int\frac{(\sin t+\cos t)'}{\sin t+\cos t}dt$$

$$=\ln|\sin t+\cos t|+C_2,$$

$$\therefore J_C=\frac{1}{2}\left(t+\ln|\sin t+\cos t|\right)+C_3$$

$$=\frac{1}{2}\left(\arcsin x+\ln\left|x+\sqrt{1-x^2}\right|\right)+C_3\ .$$



$$9.(2).\int\sqrt{a^2-x^2}dx \quad (a>0);$$

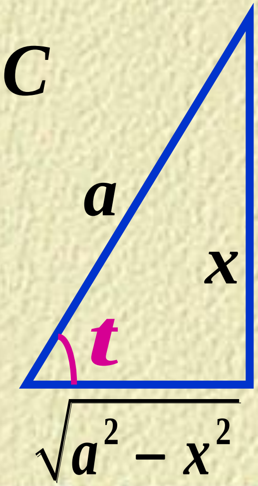
解 令$x=a\sin t$, $dx=a\cos t dt, t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\int|a\cos t|\cdot a\cos t dt$$

$$=a^2\int\cos^2 t dt=\frac{1}{2}a^2\int(1+\cos 2t)dt$$

$$=\frac{1}{2}a^2\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C=\frac{1}{2}a^2t+\frac{1}{2}a^2\sin t\cos t+C$$

$$=\frac{1}{2}a^2\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C.$$



上页 下页 返回

$$9.(4).\int u^2e^u du = u^2e^u - \int 2ue^u du = u^2e^u - \left(2ue^u - \int 2e^u du\right)$$

$$= u^2e^u - 2ue^u + 2e^u + C_1,$$

$$\int (x\ln x)^2 dx \overset{\ln x = t}{\underset{x=e^t}{=\!=\!=}} \int t^2e^{2t}\cdot e^t dt = \int t^2e^{3t}dt \overset{3t=u}{=\!=\!=} \frac{1}{27}\int u^2e^u du$$

$$= \frac{1}{27}\left(u^2e^u - 2ue^u + 2e^u + C_1\right) = \frac{1}{27}\left(u^2 - 2u + 2\right)e^u + C_2$$

$$= \frac{1}{27}\left(9t^2 - 6t + 2\right)e^{3t} + C_2 = \frac{1}{27}x^3\left[9(\ln x)^2 - 6(\ln x) + 2\right] + C_2.$$

$$\int (x\ln x)^2 dx = \frac{1}{3}x^3(\ln x)^2 - \frac{1}{3}\int x^3\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3(\ln x)^2 - \frac{2}{3}\int x^2\ln x dx = \frac{1}{3}x^3(\ln x)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{3}\int x^3\cdot\frac{1}{x}dx\right)$$

$$= \frac{1}{3}x^3(\ln x)^2 - \frac{2}{9}x^3\ln x + \frac{2}{27}x^3 + C = \frac{1}{27}x^3\left[9(\ln x)^2 - 6(\ln x) + 2\right] + C.$$

$$9.(3).\int\frac{dx}{1+\sqrt{2x}},\ \sqrt{2x}=t,$$

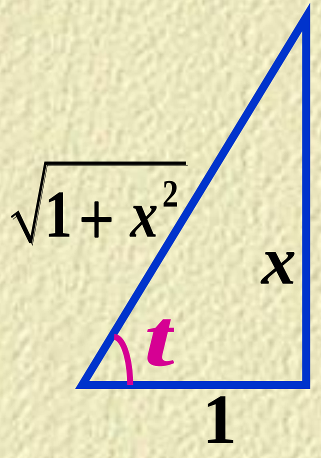
$$9.(5).\int e^{-\sqrt[3]{x}}dx \xlongequal[x=t^3]{\sqrt[3]{x}=t} 3\int t^2e^{-t}dt=\cdots=-3e^{-t}\left(t^2+2t+2\right)+C$$

$$=-3e^{-\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+2\right)+C.$$

$$9.(6).\int\frac{\arctan x}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}dx \xlongequal[t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)]{\arctan x=t} \int\frac{t}{\left|\sec t\right|^3}\cdot\sec^2 tdt=\int t\cos tdt$$

$$=t\sin t-\int\sin tdt=t\sin t+\cos t+C$$

$$=\frac{x\arctan x+1}{\sqrt{1+x^2}}+C.$$



上页 下页 返回

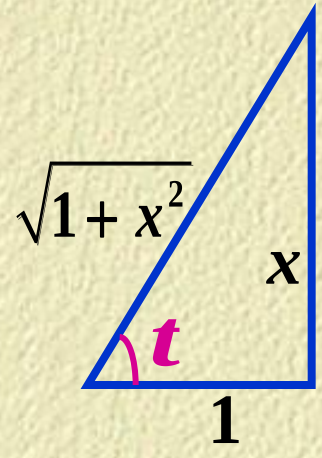
$$9.(7).\int \sqrt{e^x-1}\,dx \xlongequal[x=\ln\left(1+t^2\right)]{\sqrt{e^x-1}=t} \int t\cdot\frac{2t}{1+t^2}dt = 2\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt$$

$$= 2t-2\arctan t + C = 2\sqrt{e^x-1}-2\arctan\sqrt{e^x-1}+C\ .$$

$$9.(8).\int\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}dx \xlongequal[t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)]{x=\tan t} \int\frac{1}{\sec^4 t}\cdot\sec^2 t dt = \int\cos^2 t dt$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(1+\cos 2t\right)dt = \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C$$

$$= \frac{1}{2}\left(\arctan x + \frac{x}{1+x^2}\right)+C\ .$$



9.(9). $2x^3+x=2x^3+2x^2+2x-\left(2x^2+2x+2\right)+x+2$,

$$\int\frac{x+2x^3}{1+x+x^2}dx=\int\left(2x-2+\frac{x+2}{1+x+x^2}\right)dx$$

$$=x^2-2x+\int\frac{\frac{1}{2}\left(1+x+x^2\right)'+\frac{3}{2}}{1+x+x^2}dx$$

$$=x^2-2x+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(1+x+x^2\right)}{1+x+x^2}dx+\frac{3}{2}\int\frac{1}{1+x+x^2}dx$$

$$=x^2-2x+\frac{1}{2}\ln\left(1+x+x^2\right)+3\int\frac{1}{\left(2x+1\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}d\left(2x+1\right)$$

$$=x^2-2x+\ln\sqrt{1+x+x^2}+\frac{3}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$$

$$=x^2-2x+\ln\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

9.(10). $\int \frac{1}{1+e^x}dx$.

解 $\int \frac{1}{1+e^x}dx = \int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}dx$

$= \int dx - \int \frac{1}{1+e^x}\left(1+e^x\right)' dx$

$= x - \ln\left(1+e^x\right) + C$.

以上均属基本题

$$10.(1).\ \int \frac{1+\cos x}{x+\sin x}dx = \int \frac{(x+\sin x)'}{x+\sin x}dx = \ln|x+\sin x| + C\ .$$

$$(2).\ \int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx = \int \frac{x+2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}dx$$

$$= \int x\cdot\frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)dx + \int \tan\left(\frac{x}{2}\right)dx = \int x\cdot\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)'dx + \int \tan\left(\frac{x}{2}\right)dx$$

$$= x\tan\left(\frac{x}{2}\right) - \int \tan\left(\frac{x}{2}\right)dx + \int \tan\left(\frac{x}{2}\right)dx = x\tan\left(\frac{x}{2}\right) + C\ .$$

这种特别的巧遇不必在意．

以下所示谓之“单元法”,甚至还有所谓“双元法”之类的问题,这种特别的巧遇不必在意 .若沉迷于其中，则或许是有害的 .

10.(3). $\int \frac{1+x\cos x}{x\left(1+xe^{\sin x}\right)}dx=\int \frac{\left(1+x\cos x\right)e^{\sin x}}{xe^{\sin x}\left(1+xe^{\sin x}\right)}dx=\int \frac{\left(xe^{\sin x}\right)'}{xe^{\sin x}\left(1+xe^{\sin x}\right)}dx$

$\overset{xe^{\sin x}=u}{=\!=\!=\!=}\int \frac{1}{u(1+u)}du=\int\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{1+u}\right)du=\ln\left|\frac{u}{1+u}\right|+C=\ln\left|\frac{xe^{\sin x}}{1+xe^{\sin x}}\right|+C$.

(4). $\int \frac{x^2-x}{\left(e^x-x\right)^2}dx=\int \frac{\left(x^2-x\right)e^{-2x}}{\left(1-xe^{-x}\right)^2}dx\overset{-x=u}{=\!=\!=}\int \frac{\left(u^2+u\right)e^{2u}}{\left(1+ue^u\right)^2}du$

$=\int \frac{ue^u\cdot(1+u)e^u}{\left(1+ue^u\right)^2}du=\int \frac{ue^u\cdot\left(ue^u\right)'}{\left(1+ue^u\right)^2}du=\int \frac{ue^u}{\left(1+ue^u\right)^2}d\left(ue^u\right)$

$\overset{ue^u=t}{=\!=\!=}\int \frac{t}{(1+t)^2}dt=\int \frac{1+t}{(1+t)^2}dt-\int \frac{1}{(1+t)^2}dt=\ln|1+t|+\frac{1}{1+t}+C$

$=\ln\left|1+ue^u\right|+\frac{1}{1+ue^u}+C=\ln\left|1-xe^{-x}\right|+\frac{1}{1-xe^{-x}}+C$.

Add.备注

由*Lagrange*微分中值定理我们可推知:

注 1. 区间I内可导函数的导函数要么连续,要么有第二类间断点.

也就是说,可导函数的导函数不可能有第一类间断点.

注 2. (原函数存在定理)区间I内连续函数必定有原函数.

注 3. 知道函数可积的必要条件与充分条件.

注4. 函数$f(x)$在$[a,b]$上*Riemann*可积与在$[a,b]$上函数$f(x)$有原函数是两回事.

由$Th.9.2$知，在区间$[a,b]$上函数有界是可积的必要条件．

若在$[a,b]$上函数$f(x)$无界，则$f(x)$在$[a,b]$上必定不可积．

当然，在$[a,b]$上$f(x)$有界，则在$[a,b]$上$f(x)$未必可积．

比如，因为函数$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$在$(0,1]$上无界，所以

符号$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$表示的不是一个定积分．

11. 关于原函数与可积性.

(1). 函数$F_1(x)=\begin{cases} x \quad , \quad x\le 0 \\ \ln(1+x), x>0 \end{cases}$ 可导,

$$f_1(x)=F_1'(x)=\begin{cases} 1 \quad , \quad x\le 0 \\ \dfrac{1}{1+x}, x>0 \end{cases},$$

所以$F_1(x)$是$f_1(x)$的原函数 ,函数$f_1(x)$连续 ,

$f_1(x)$在任一闭区间上可积 .

(2). 函数$F_2(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x}, x\ne 0 \\ 0 \quad , \quad x=0 \end{cases}$ 可导,

$$f_2(x)=F_2'(x)=\begin{cases} 2x\cos\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x}, x\ne 0 \\ 0 \quad , \quad x=0 \end{cases},$$

所以$F_2(x)$是$f_2(x)$的原函数 ,$x=0$是函数$f_2(x)$的第二类间断点 .函数$f_2(x)$有界 ,故在任一闭区间上可积 .

11. 关于原函数与可积性.

(3). 函数$D(x)=\begin{cases} 1, & x\in\mathbb{Q} \\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$,每一点都是函数$D(x)$的第二类间断点.根据*Darboux th.*(导函数介值定理)知,不存在函数$F_3(x)$使得$F_3'(x)=D(x)$.$D(x)$不存在原函数.

$D(x)$在任一闭区间上都不可积.

上页 下页 返回

11.(3). $Dirichlet$ 函数$D(x)=\begin{cases}1\ ,\quad x\in\mathbb{Q}\\0\ ,x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$,

在任意一点$x_0\in\mathbb{R}$ 处的左右极限均不存在,

任意一点$x_0\in\mathbb{R}$ 都是$D(x)$的第二类间断点,

但是不存在函数$C(x)$,使得$C'(x)=D(x)$.

因为,否则,若存在$C(x)$,使得$C'(x)=D(x)$,

$C'(1)=1, C'\left(\sqrt{2}\right)=0$,据$Darboux$ 定理$(Th.4)$

知 $\exists\ \xi\in\left(1,\sqrt{2}\right)$,使得$C'(\xi)=\dfrac{1}{2}=D(\xi)$,

而这是不可能的 .

11.(3). 在$[a,b]$上有界的函数未必可积 .如$Dirichlet$函数 $D(x)=\begin{cases} 1\ \ ,\ \ x\in\mathbb{Q} \\ 0,\ x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$, $\left|D(x)\right|\le 1,\forall x\in\mathbb{R}.$

对于$[0,1]$的任一分割T,由有理数与无理数在实数中的稠密性,在分割T的每一个Δ_i上,当ξ_i都取有理数时,$\sum_{i=1}^{n}D(\xi_i)\Delta x_i=1$,而当$\xi_i$都取无理数时,

$\sum_{i=1}^{n}D(\xi_i)\Delta x_i=0$. 所以无论$\|T\|$多么小,积分和的极限不存在,说明$D(x)$在$[0,1]$上不可积.

11.(4).函数$H(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ 1, & x\geq 0 \end{cases}$, $x=0$

是函数$H(x)$的第一类间断点，所以函数

$H(x)$不存在原函数．

函数$H(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ 1, & x\geq 0 \end{cases}$, $x=0$

是函数$H(x)$的第一类间断点，所以函数

$H(x)$在区间$[-1,1]$上可积．

上页 下页 返回

11.(5).函数$F(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x^2}, x\neq 0 \\ 0 \quad , \quad x=0 \end{cases}$,

则$F'(x)= f(x)=\begin{cases} 2x\cos\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x}\sin\dfrac{1}{x^2}, x\neq 0 \\ 0 \quad , \quad x=0 \end{cases}$,

$x=0$是函数$f(x)$的第二类间断点 ,函数$f(x)$有原函数$F(x)$.

函数$f(x)=\begin{cases} 2x\cos\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x}\sin\dfrac{1}{x^2}, x\neq 0 \\ 0 \quad , \quad x=0 \end{cases}$,

在$U^o(0)$内$f(x)$无界,所以函数 $f(x)$在区间$[-1,1]$上不可积 .

上页 下页 返回