高斯定理

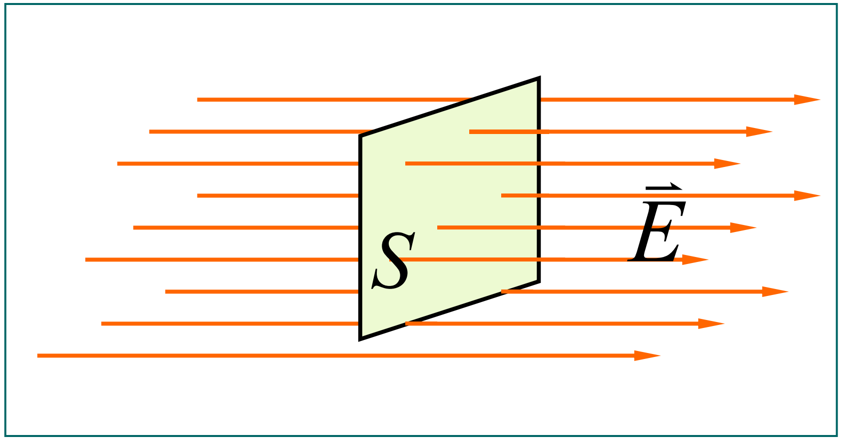
一　电场线 （Electric field lines）——电场的图示法

规定

1） 曲线上每一点切线方向为该点电场方向,

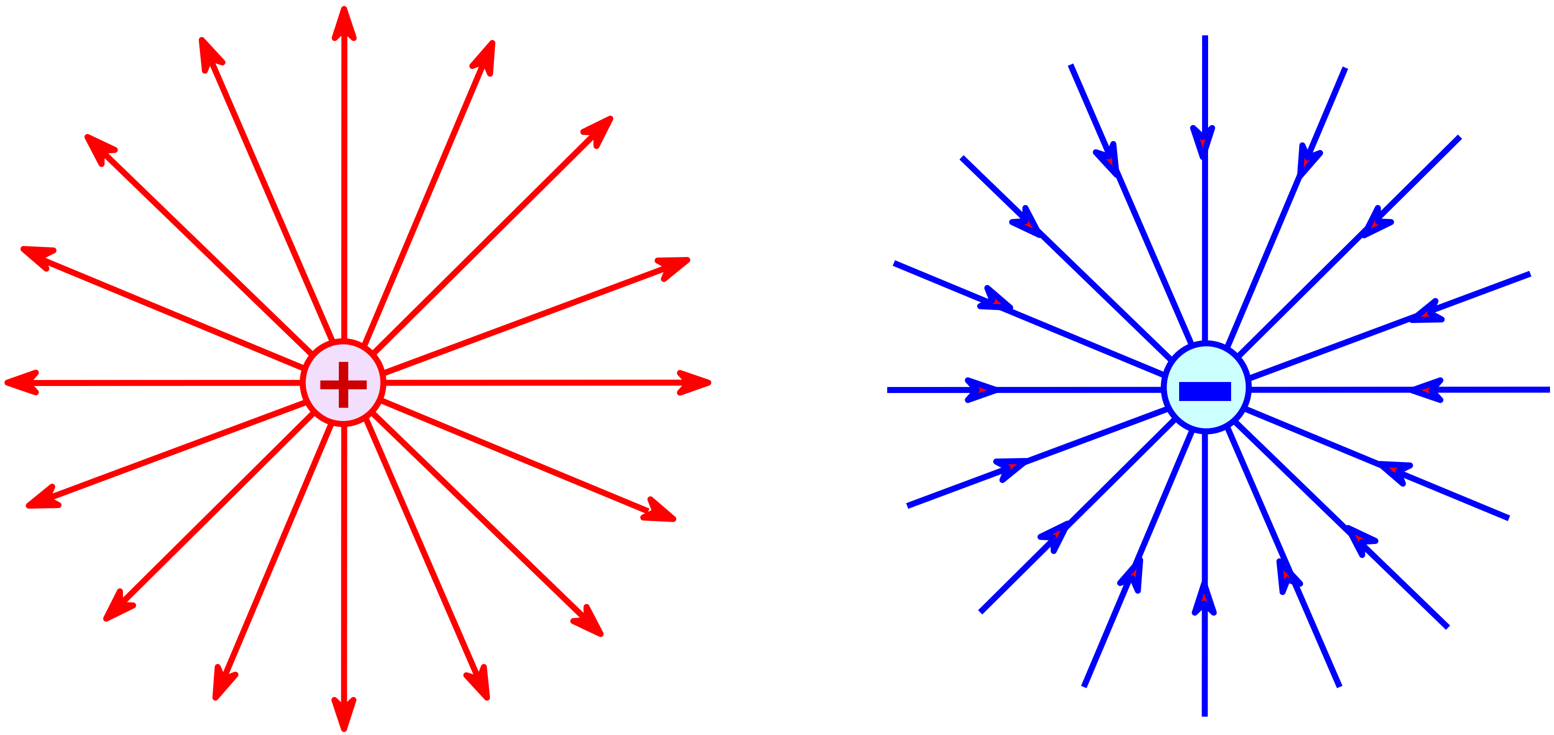
2） 通过垂直于电场方向单位面积电场线数为该点电场强度的大小.

$$\left|\vec{E}\right| = E = \mathrm{d}N / \mathrm{d}S_{\perp}$$

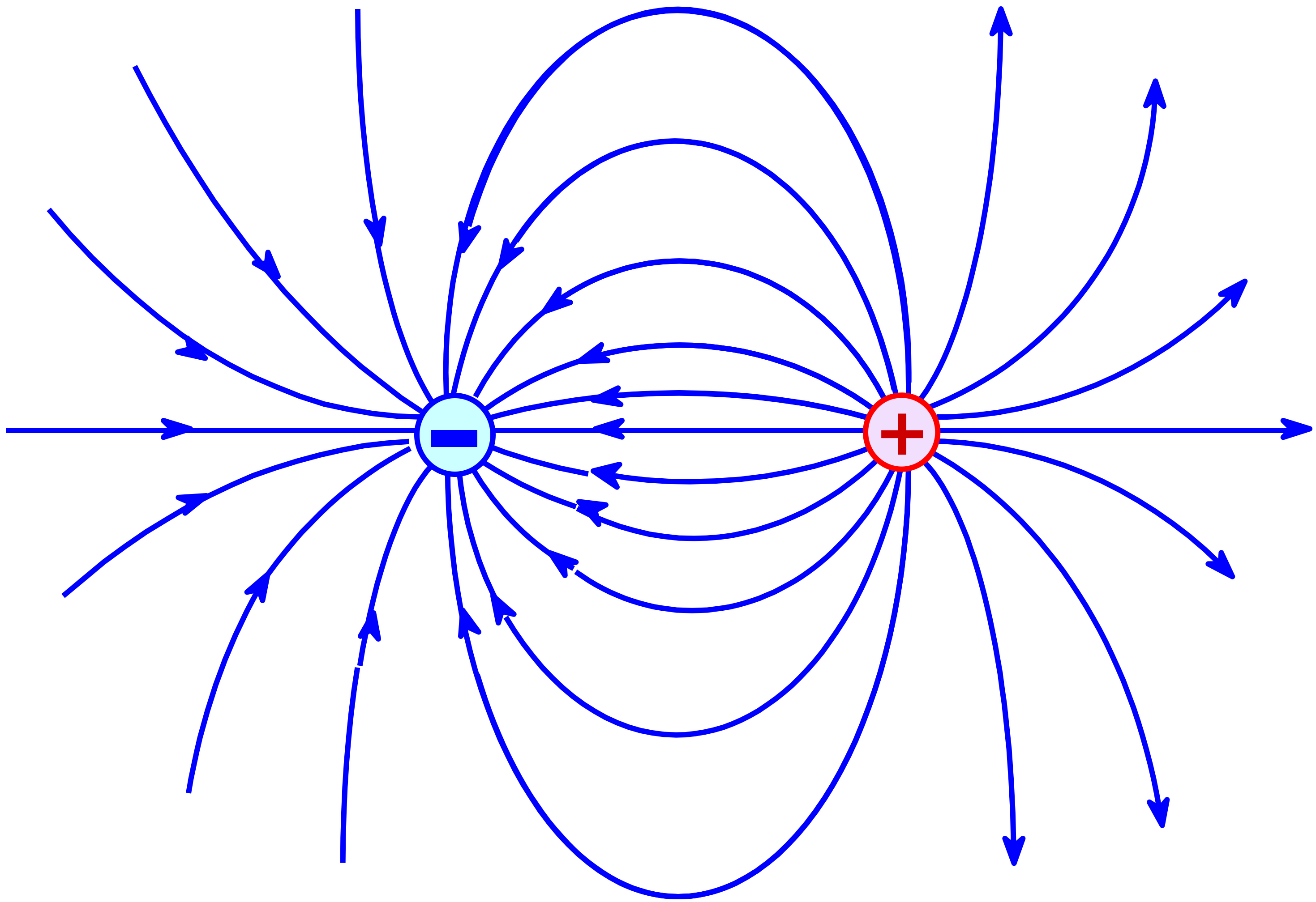


点电荷的电场线

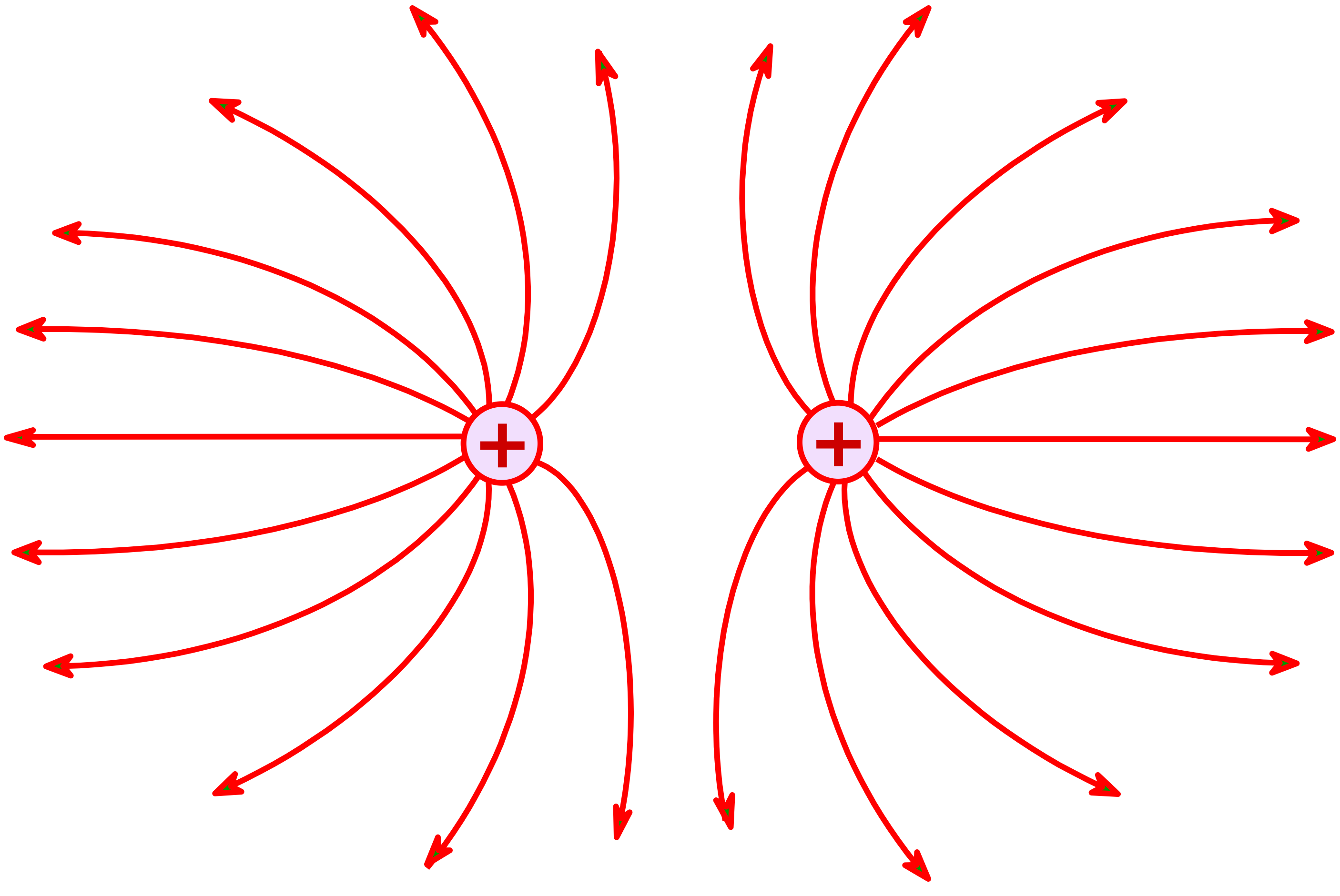
正 点 电 荷　　　　负 点 电 荷



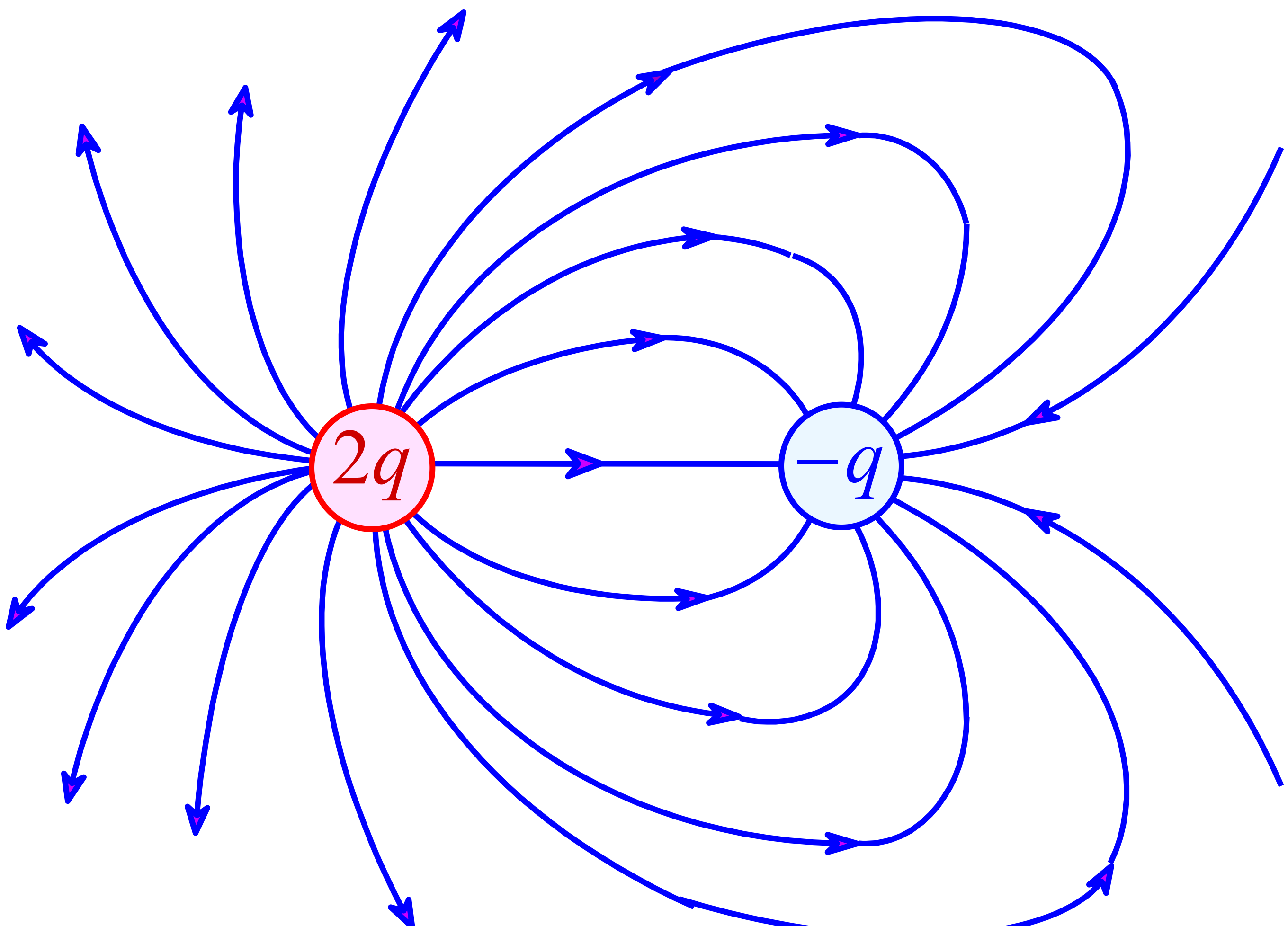
一对等量异号点电荷的电场线



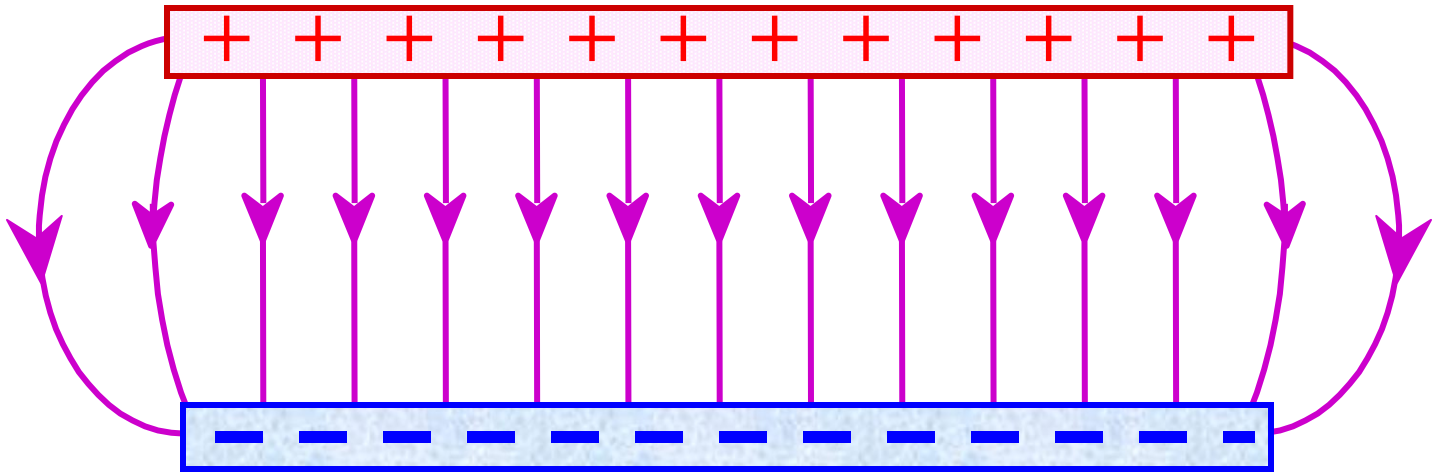
一对等量正点电荷的电场线



一对不等量异号点电荷的电场线



带电平行板电容器的电场线



电场线特性

1） 始于正电荷, 止于负电荷
(或来自无穷远, 去向无穷远)。

2） 电场线不相交，不闭合。

3） 并不真实存在。

二　电场强度通量（电通量）Φ_e

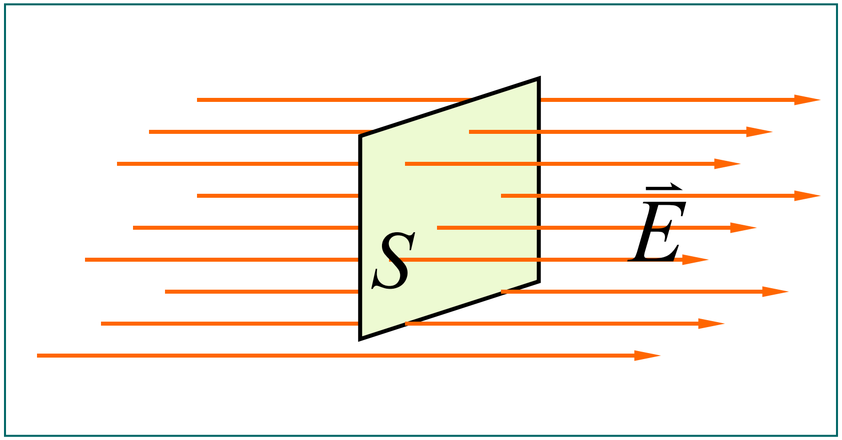
物理意义：

通过电场中某一个面的电场线条数

——电场强度通量

1. 均匀电场，$\vec{E}$ 垂直平面

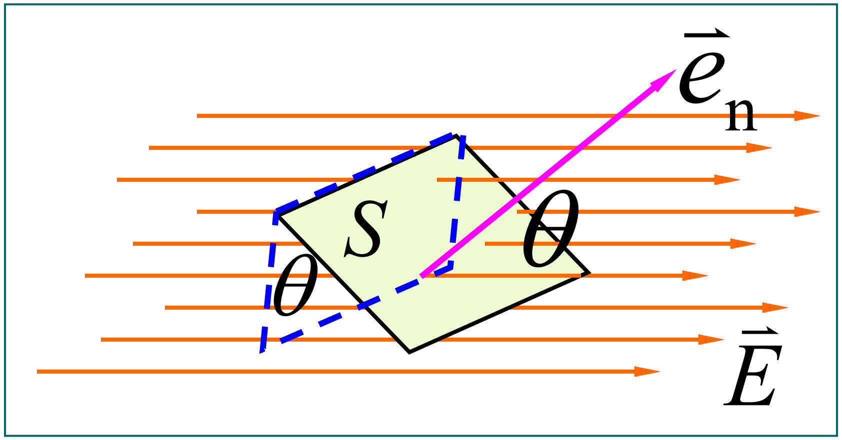
$$\Phi_{\mathrm{e}} = E \cdot S$$



二　电场强度通量（电通量）

通过电场中某一个面的电场线条数叫做通过这个面的电场强度通量.（标量）

2. 均匀电场，$\vec{E}$ 与平面夹角 θ



$$\Phi_{\mathrm{e}} = ES\cos\theta$$

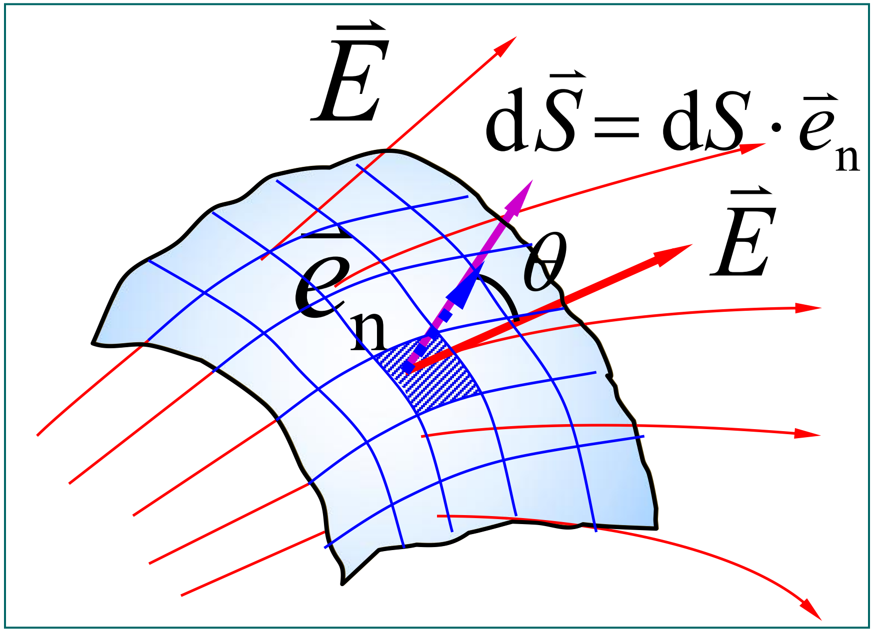
$$\Phi_{\mathrm{e}} = \vec{E} \cdot \vec{S}$$

面积矢量

$$\begin{cases} 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}, & \Phi_{\mathrm{e}} > 0 \\ \theta > \dfrac{\pi}{2}, & \Phi_{\mathrm{e}} < 0 \end{cases}$$

3. 非均匀电场或非平面情况下求电通量

$$\boxed{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{e}} = \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}}$$



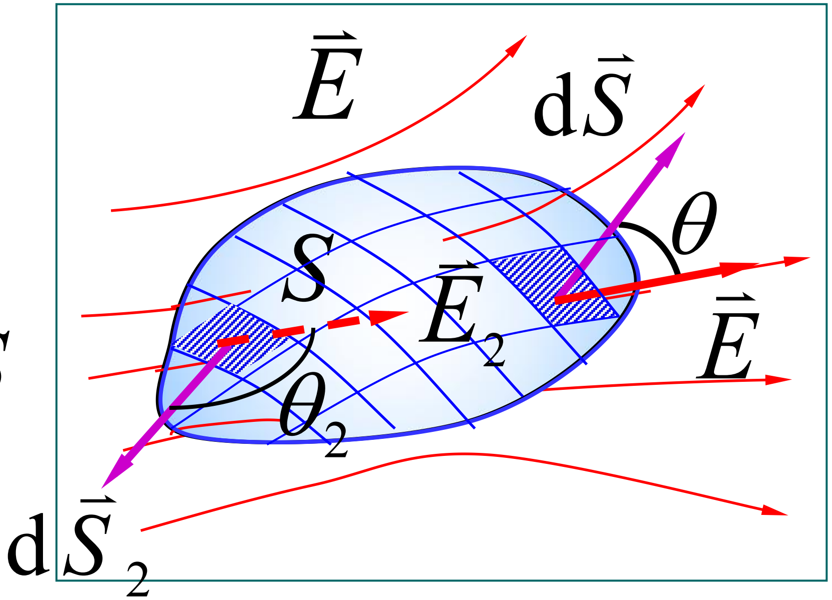
$$\Phi_{\mathrm{e}} = \int_S \mathrm{d}\Phi_{\mathrm{e}}$$

$$= \int_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_S E\cos\theta \mathrm{d}S$$

4 闭合曲面的电场强度通量

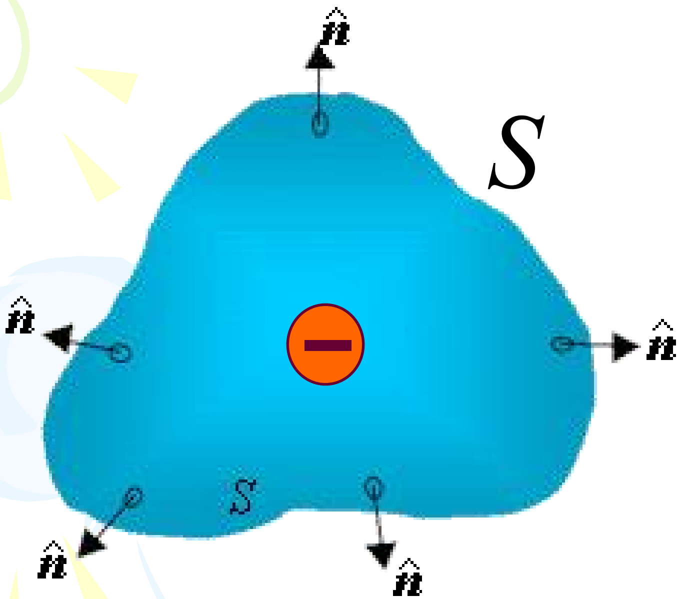
$$\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{e}} = \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

$$\Phi_{\mathrm{e}} = \oint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \oint_S E\cos\theta\,\mathrm{d}S$$



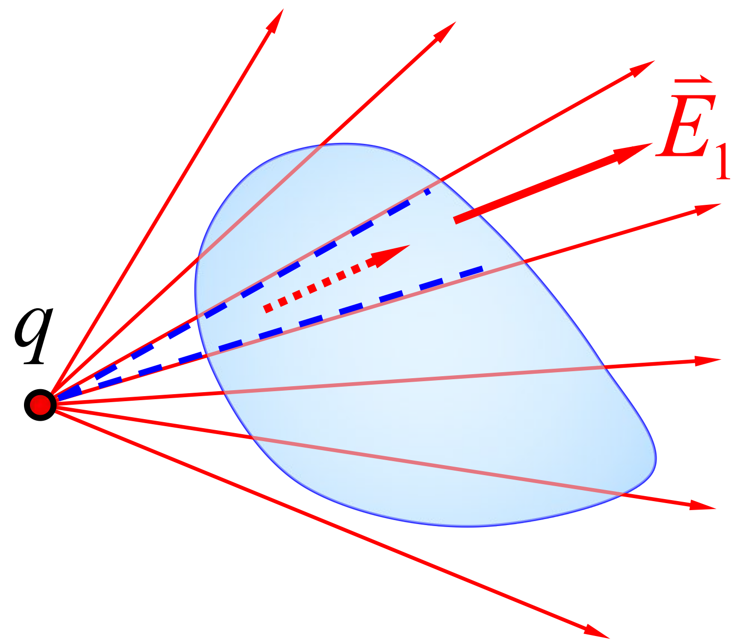
<u>规定</u>：法线的正方向为指向闭合曲面的外侧。

讨论：　判断通过闭合面S的电通量的正负



$$\Phi_e < 0$$

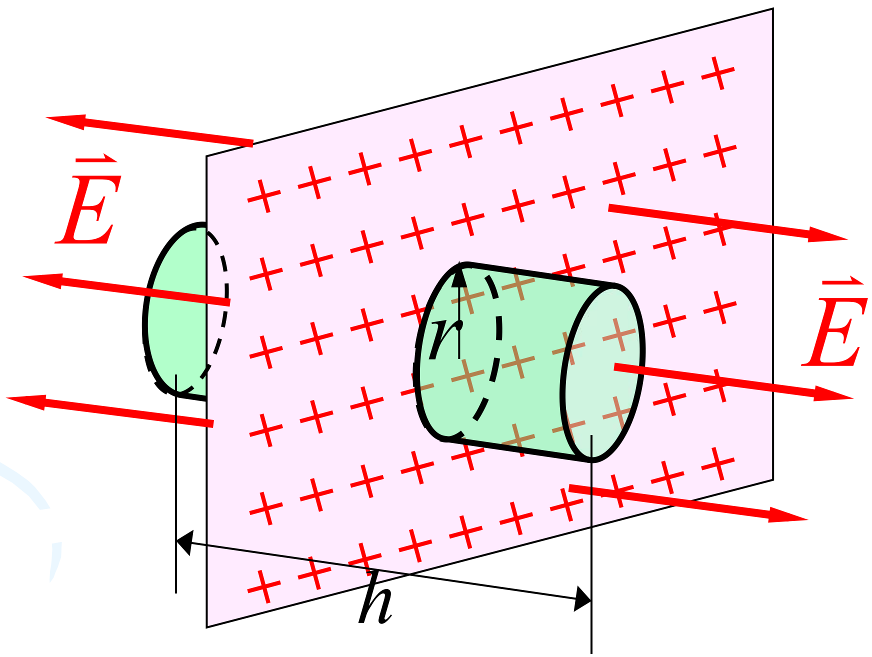
电场线穿入闭合曲面



$$\Phi_e = 0$$

有几条电场线穿进必然有同样数目的电场线从面内出来。

练习：　如图所示，已知一无限大平面带电周围电场为匀强电场 $\vec{E}$ ，一高度为h，横截面半径为r的圆柱垂直此平面，求 $\vec{E}$ 穿过圆柱体表面的电通量的表达式



练习2：正点电荷q在球心处，球半径为r，求通过球面的电通量。

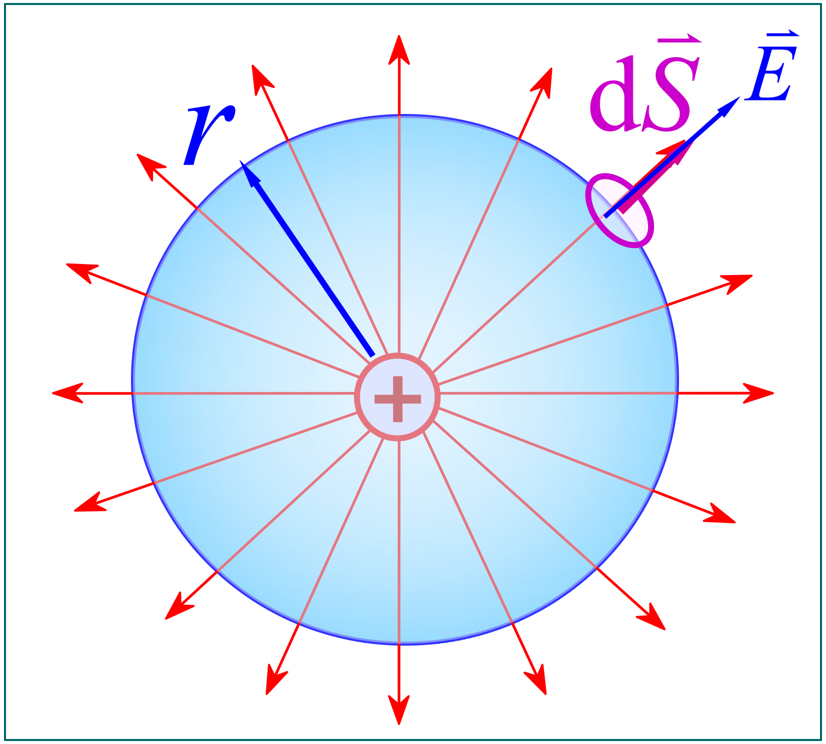
$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\Phi_e=\oint_S \mathrm{d}\Phi=\oint_S E\cdot\mathrm{d}S\cdot\cos\theta$$

$$=\oint_S \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}S$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\oint_S \mathrm{d}S$$

$$\Phi_e=\frac{q}{\varepsilon_0}$$



三　高斯定律

$$\Phi_{\mathrm{e}} = \oint_{S} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} q_i$$

高斯面

Gauss,德国

1777-1855

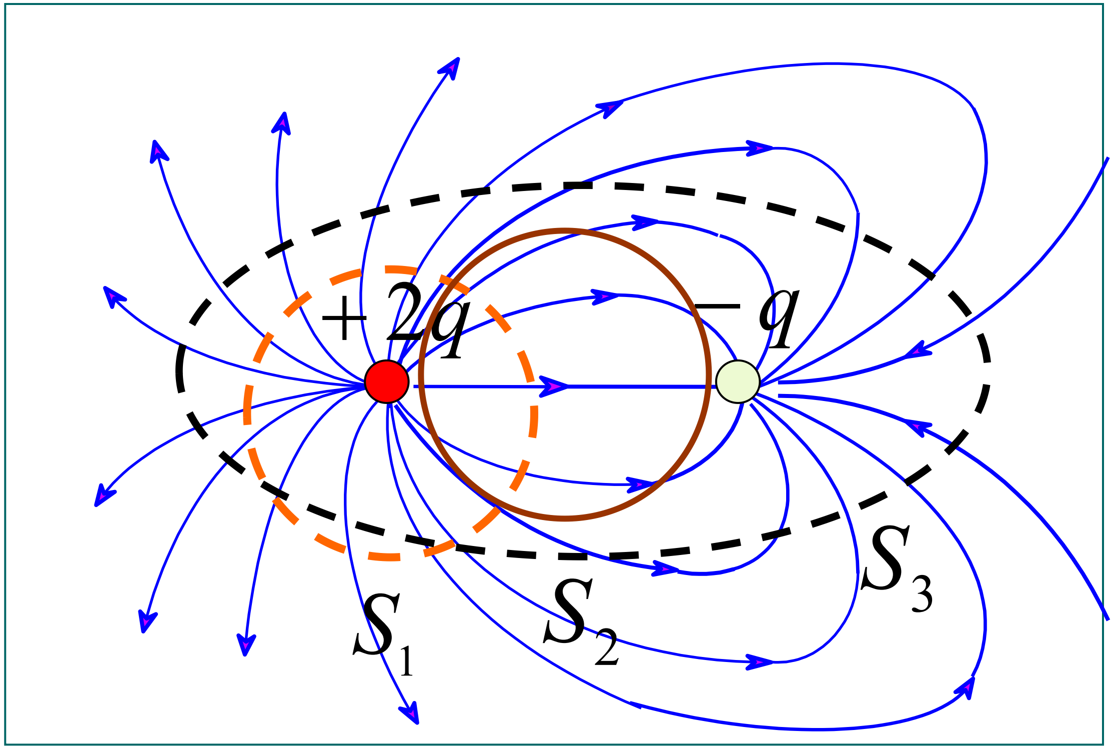
在真空中，通过任一闭合曲面的电场强度通量，等于该曲面所包围的所有电荷的代数和除以 ε_0 .

练习：　在点电荷$+2q$和$-q$的静电场中，做如下的三个闭合面 S_1, S_2, S_3，求通过各闭合面的电通量．

$$\Phi_{e1} = \oint_{S_1} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{2q}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi_{e2} = 0$$

$$\Phi_{e3} = \frac{2q+(-q)}{\varepsilon_0}$$



高斯定律 $\Phi_{\mathrm{e}} = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} q_i$

1）高斯面为任意的封闭曲面，人为选取

2）高斯面上的电场强度为所有内外电荷的总电场强度.

但仅高斯面内的电荷对高斯面的电通量有贡献.

3）此公式说明静电场是有源场.（物理意义）

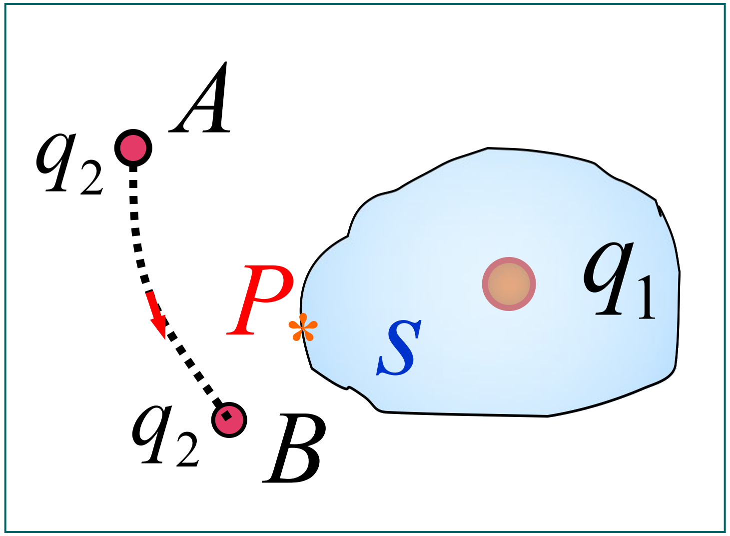
4）电磁场基本方程之一, 由库仑定律推出，但应用更广

讨论

- 将 q_2 从 A 移到 B

  点 P 电场强度是否变化?

  穿过高斯面 S 的 Φ_e 有否变化?



讨论

在静电场中，如果通过闭合曲面（高斯面）S的电通量为零，则下列说法中正确的是（　　）

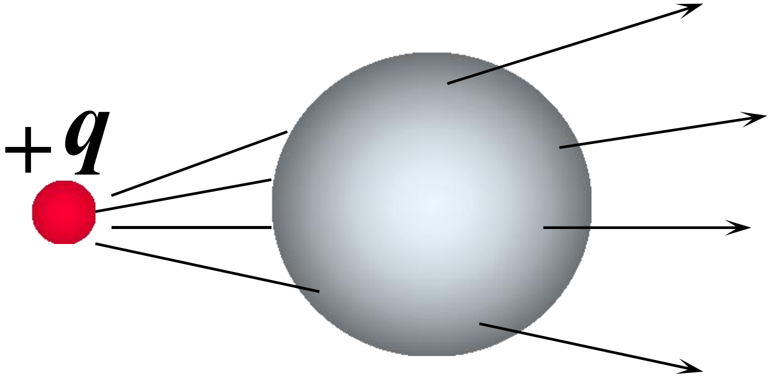
（A）高斯面上的场强一定处处为零;

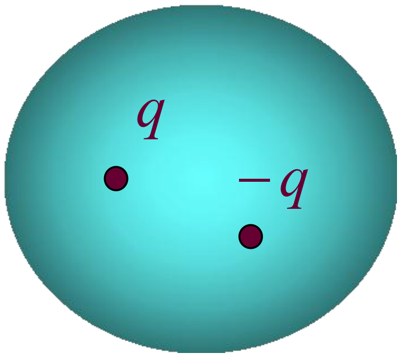
（B）高斯面内一定没有电荷;

（C）高斯面内的净电荷一定为零;

（D）以上说法都不对

$$\Phi_e = 0 \begin{cases} \text{没有电荷} \\ \text{电荷电量的代数和为零（净电荷为零）} \end{cases}$$



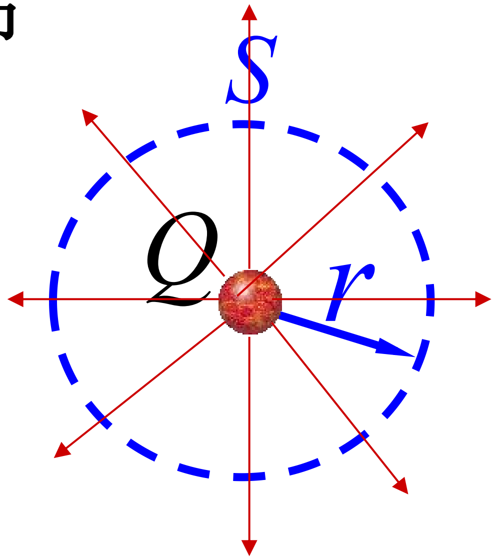


四　高斯定律的应用

——求静电场的分布

例 用高斯定律求点电荷的电场强度分布

解：以点电荷为球心，半径为r的球面为高斯面



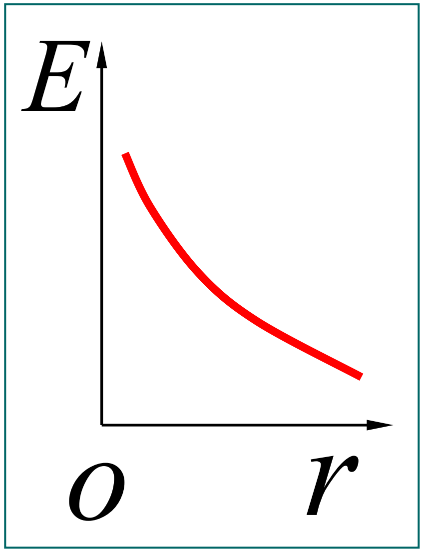
由高斯定理

$$\boxed{\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} q_i}$$

$$\Phi_e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint E \cdot dS = E\, 4\pi r^2$$

$$\sum q_i = Q \qquad 4\pi r^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r^2}}$$



利用高斯定律求静电场的分布（$\vec{E}$）

（用高斯定理求解的静电场必须具有一定的对称性）

步骤:

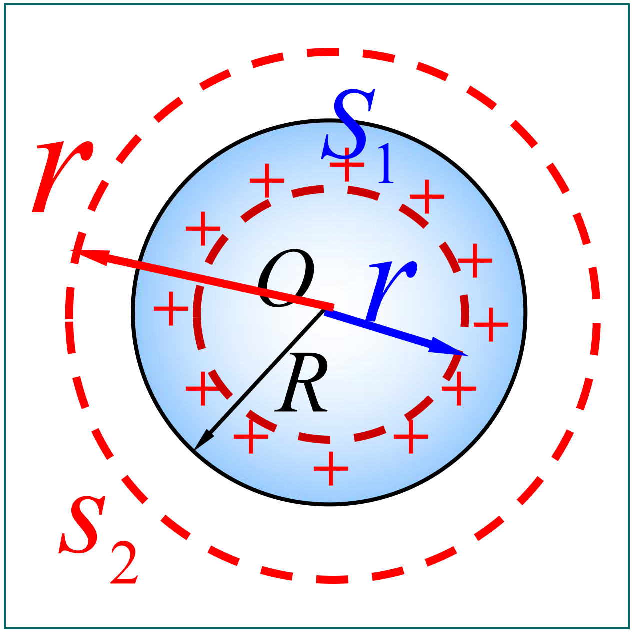
1.对称性分析，确定 $\vec{E}$ 的大小及方向分布特征

2.选择一合适的闭合曲面作高斯面，计算电通量及 $\sum q_i$

3.利用高斯定律求解 $\vec{E}$

例　均匀带电**球壳**的*电场强度分布*

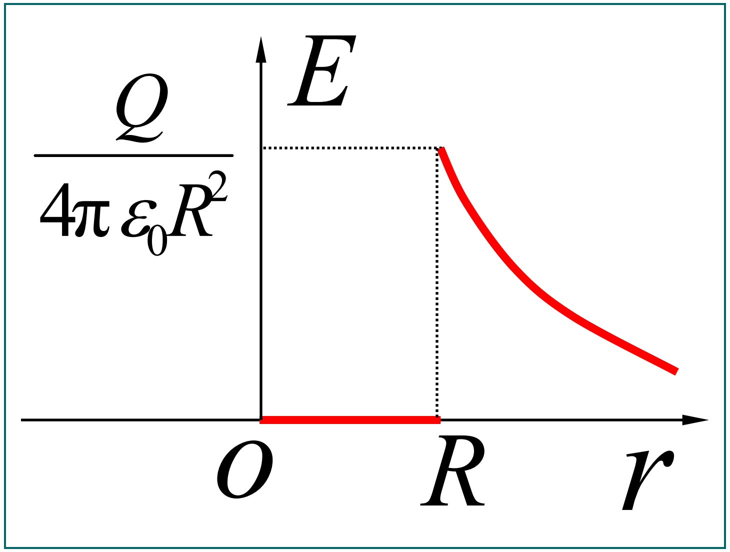
一半径为 R, 均匀带电 Q 的薄球壳．求球壳内外任意点的电场强度.



解: $$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i$$

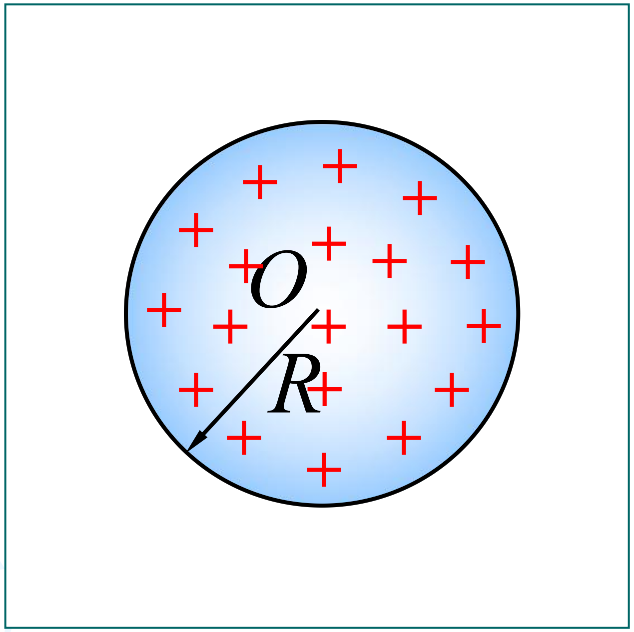
$$4\pi r^2 E = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$$

$$\begin{cases} 0<r<R & \boxed{\vec{E}=0} \\ r>R & \boxed{E=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}} \end{cases}$$



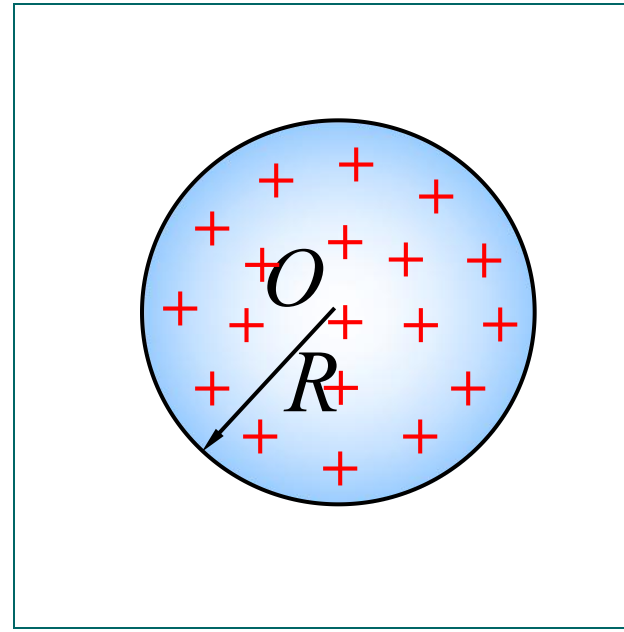
练习　均匀带电球体的电场强度

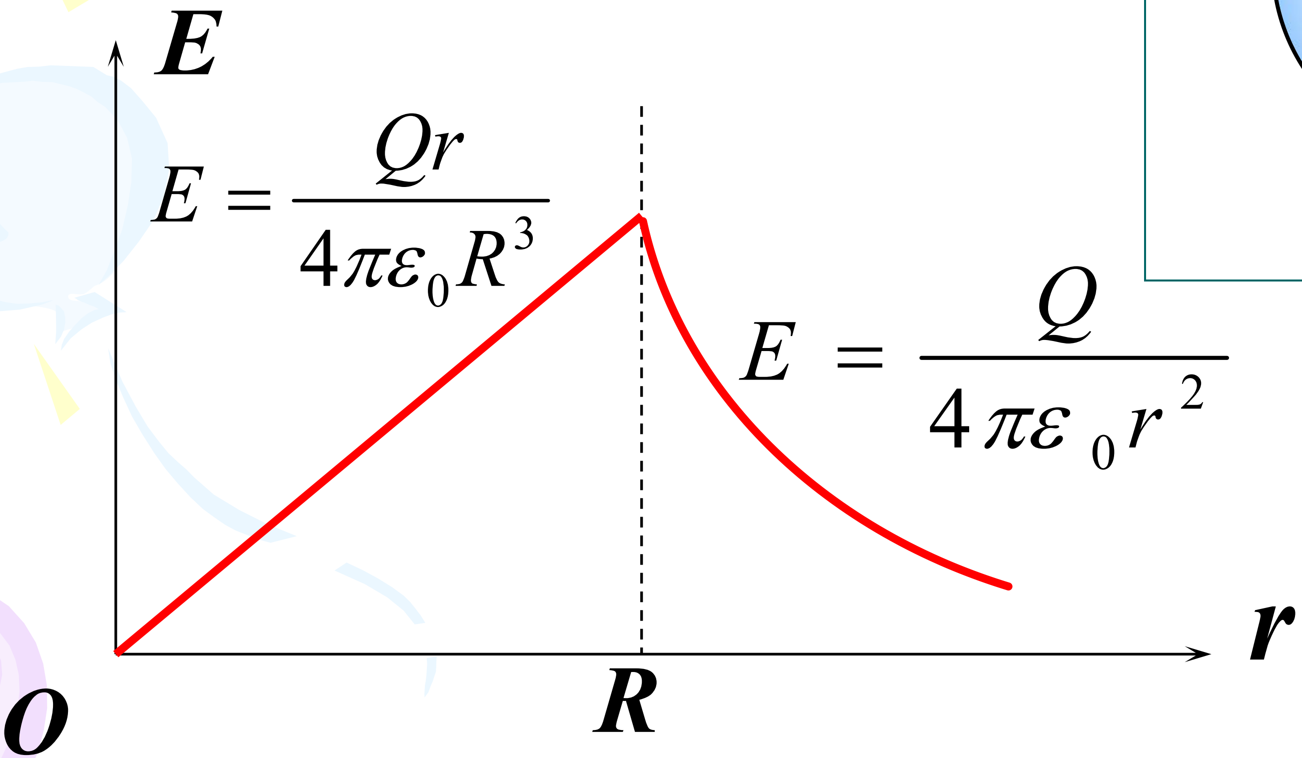
一半径为R，均匀带电Q的球体．



练习　均匀带电球体的电场强度

一半径为R，均匀带电Q的球体．





$$E=\frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

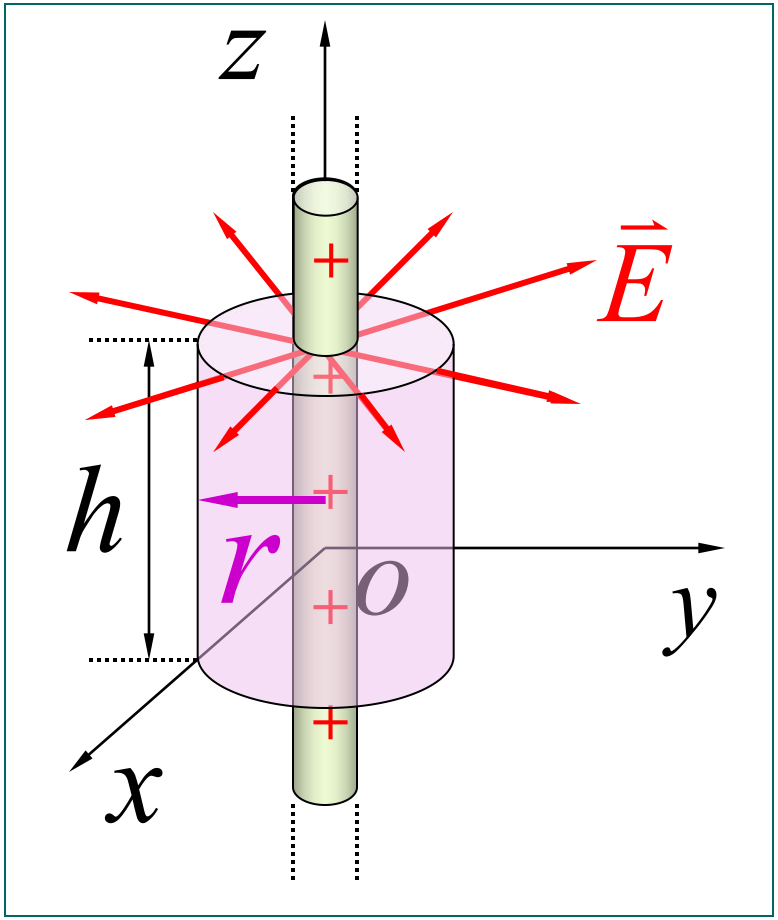
$$E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

例　无限长均匀带电直线的电场强度

　　无限长均匀带电直线，电荷线密度为λ，求距直线 r处的电场强度.

解　对称性分析：轴对称

　　选取闭合的柱形高斯面



$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} =$$

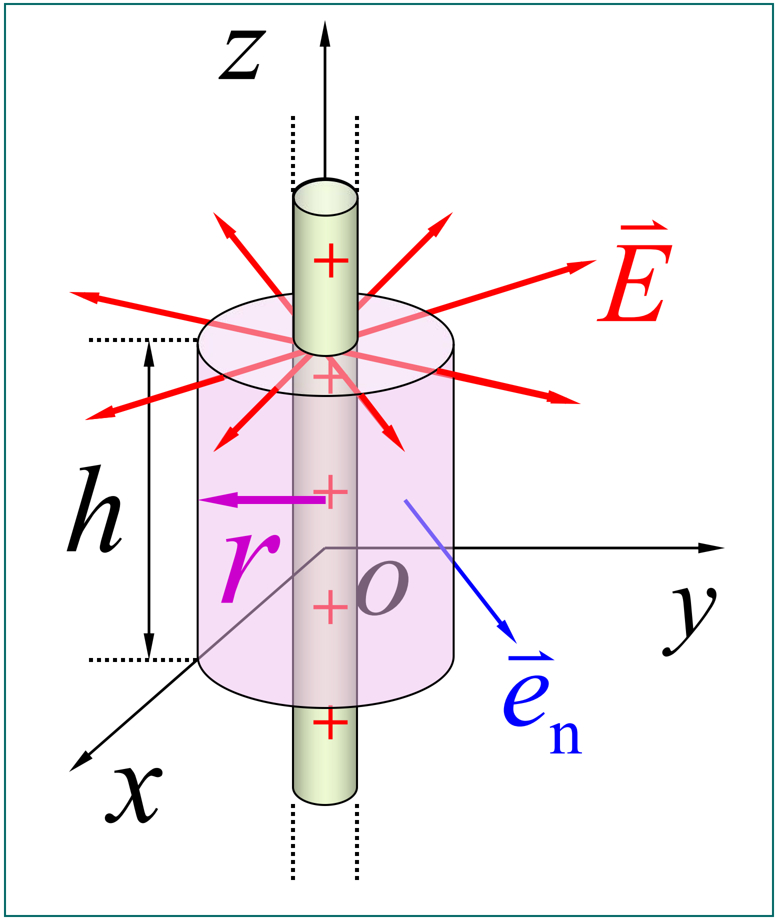
$$\int_{s(\text{柱面})} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{s(\text{上底})} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{s(\text{下底})} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \int_{s(\text{柱面})} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{s(\text{柱面})} E\mathrm{d}S = E\cdot 2\pi r h$$

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}}$$



例　无限大均匀带电平面的电场强度

无限大均匀带电平面，单位面积上的电荷，即电荷面密度为 σ，求距平面为 r 处的电场强度.

解 对称性分析：$\vec{E}$ 平面对称

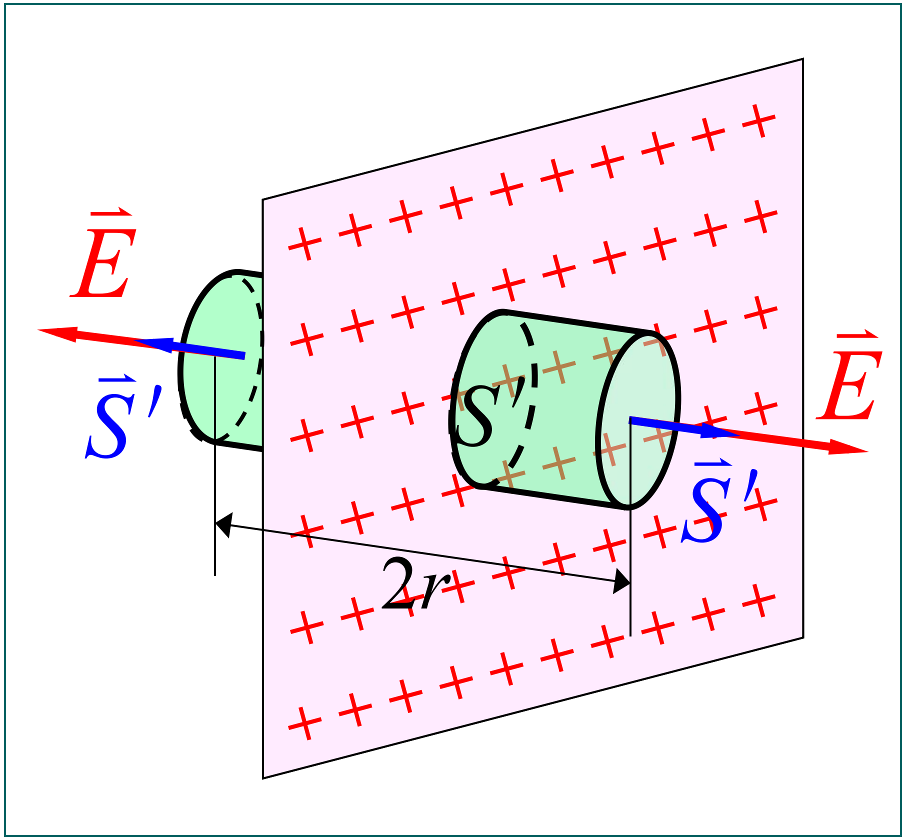
选取闭合的柱形高斯面

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{\sigma S'}{\varepsilon_0}$$

底面积

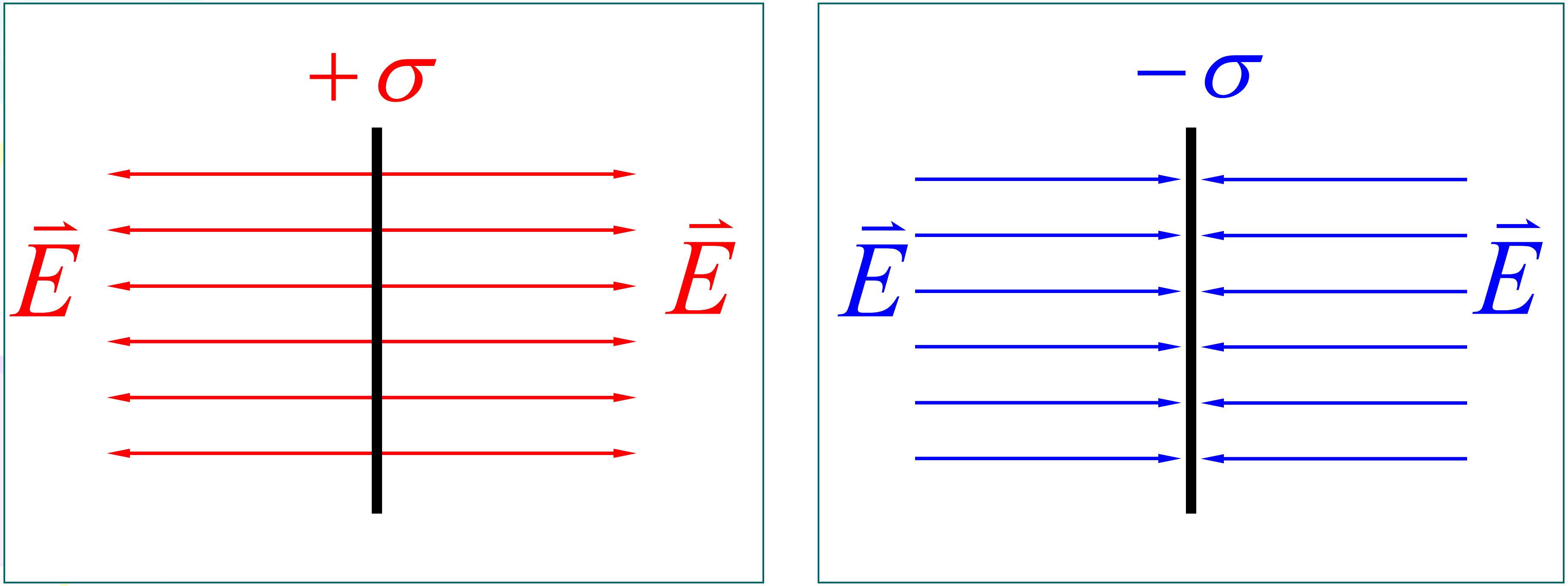
$$2S'E = \frac{\sigma S'}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \sigma/2\varepsilon_0}$$



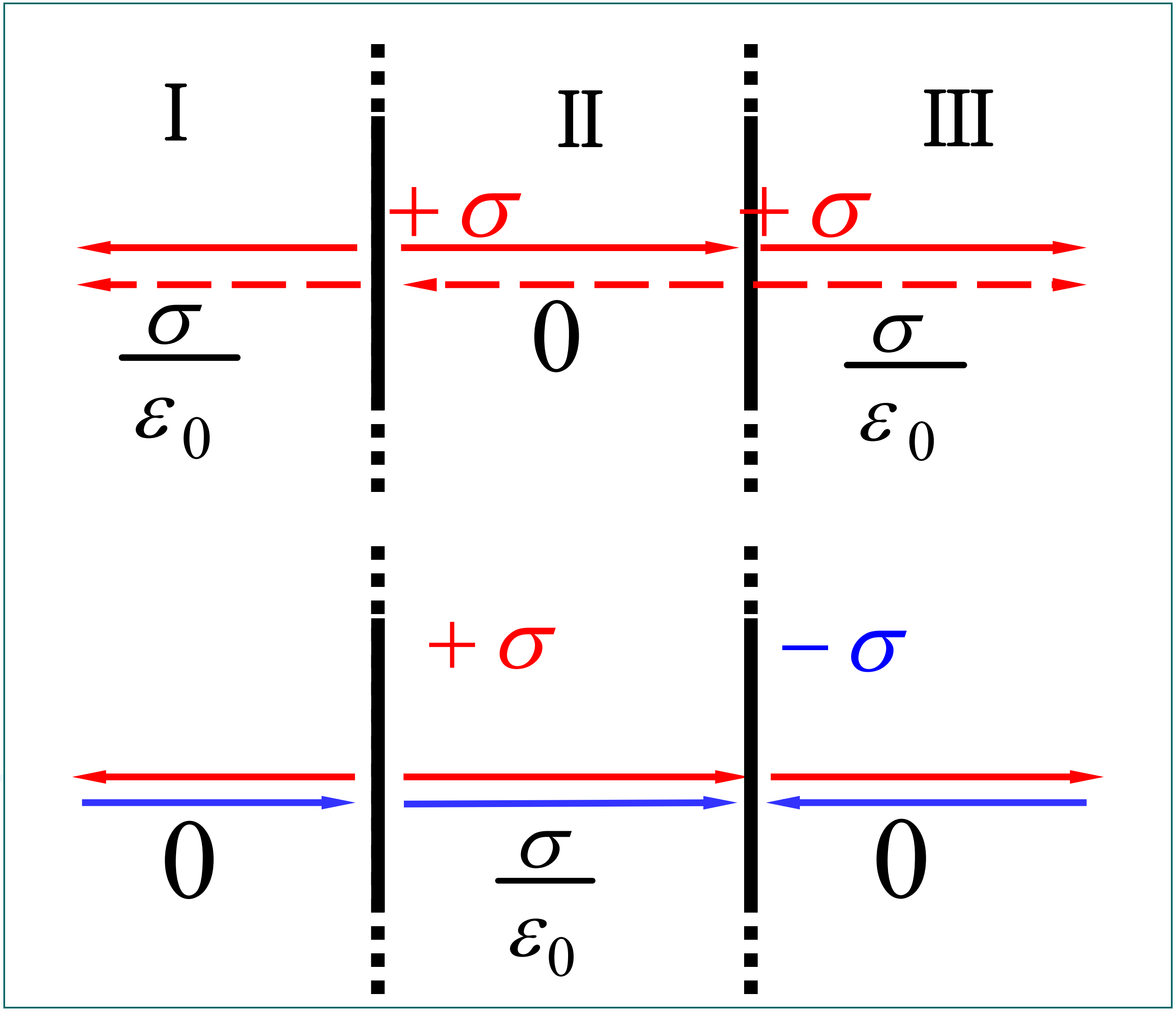
匀 强 电 场：

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



讨论

无限大带电平面的电场叠加问题



小结

- **电场线**

①方向　②疏密　$E = \dfrac{d\Phi_e}{dS_\perp}$

- **电通量**

① 计算公式　② 物理意义

$$\Phi_e = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S E \cdot dS \cdot \cos\theta$$

$$\Phi_e = \oint_S E\cos\theta dS = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

小结

高斯定律 $\Phi_{\mathrm{e}}=\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\dfrac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i$

步骤:

1.对称性分析，确定 $\vec{E}$ 的大小及方向分布特征

2.选择一合适的闭合曲面作高斯面

3.利用高斯定律求解 $\vec{E}$