

南京农业大学本科生课程

离散数学

∴ 第 5 章 一阶逻辑等值演算与推理



数学系

∴ 本章说明

□ 本章的主要内容

- ▮ 一阶逻辑等值式与基本等值式
- ▮ 置换规则、换名规则、代替规则
- ▮ 前束范式
- ▮ 一阶逻辑推理理论

□ 本章与其他各章的关系

- ▮ 本章先行基础是前四章
- ▮ 本章是集合论各章的先行基础

∴ 本章主要内容

- 5.1 一阶逻辑等值式与置换规则
- 5.2 一阶逻辑前束范式
- 5.3 一阶逻辑的推理理论

∴ 5.1 一阶逻辑等值式与置换规则

□ 在一阶逻辑中，有些命题可以有不同的符号化形式。

□ 例如：没有不犯错误的人

令 $M(x)$: x 是人。 $F(x)$: x 犯错误。

则将上述命题的符号化有以下两种正确形式：

$$(1) \neg \exists x (M(x) \wedge \neg F(x))$$

$$(2) \forall x (M(x) \rightarrow F(x))$$

说明

□ 我们称 (1) 和 (2) 是等值的。

::: 等值式的定义

定义 5.1 设 A , B 是一阶逻辑中任意两个公式, 若 $A \leftrightarrow B$ 是永真式, 则称 A 与 B 是**等值的**。
记做 $A \leftrightarrow B$, 称 $A \leftrightarrow B$ 是**等值式**。

例如: $\neg \exists x(F(x) \wedge \neg G(x)) \Leftrightarrow \forall x(F(x) \rightarrow G(x))$

说明

□ 判断公式 A 与 B 是否等值, 等价于判断公式

$A \leftrightarrow B$ 是否为永真式。

□ 谓词逻辑中关于联结词的等值式与命题逻辑中相关等值式类似。

::: 一阶逻辑中的一些基本而重要等值式

- 代换实例
- 消去量词等值式
- 量词否定等值式
- 量词辖域收缩与扩张等值式
- 量词分配等值式

∴ 代换实例

□ 由于命题逻辑中的重言式的代换实例都是一阶逻辑中的永真式，而命题逻辑中的矛盾式的代换实例都是一阶逻辑中的永假式，因而第二章的 24 个等值式模式给出的代换实例都是一阶逻辑的等值式的模式。

□ 例如：

$$(1) \forall x F(x) \Leftrightarrow \neg \neg \forall x F(x) \quad (\text{双重否定律})$$

$$(2) F(x) \rightarrow G(y) \Leftrightarrow \neg F(x) \vee G(y) \quad (\text{蕴涵等值式})$$

$$(3) \forall x (F(x) \rightarrow G(y)) \rightarrow \exists z H(z)$$

$$\Leftrightarrow \neg \forall x (F(x) \rightarrow G(y)) \vee \exists z H(z) \quad (\text{蕴涵等值式})$$

∴ 消去量词等值式

设个体域为有限集 $D=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, 则有

$$\begin{aligned} (1) \quad \Box x A(x) &\Leftrightarrow A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \dots \wedge A(a_n) \\ (2) \quad \Box x A(x) &\Leftrightarrow A(a_1) \vee A(a_2) \vee \dots \vee A(a_n) \end{aligned} \quad (5.1)$$

□ 这些公式都可应用于多个个体变元的情况,
设 $D=\{a, b, c\}$, 则:

$$(i). \forall x \forall y A(x, y) \Leftrightarrow \forall y A(a, y) \wedge \forall y A(b, y) \wedge \forall y A(c, y)$$

$$\begin{aligned} \square \Leftrightarrow & (A(a, a) \wedge A(a, b) \wedge A(a, c)) \wedge (A(b, a) \wedge A(b, b) \\ & \wedge A(b, c)) \wedge (A(c, a) \wedge A(c, b) \wedge A(c, c)) \end{aligned}$$

∴ 消去量词等值式

$$\begin{aligned} \text{(ii). } \forall x \exists y A(x, y) &\Leftrightarrow \exists y A(a, y) \wedge \exists y A(b, y) \wedge \exists y A(c, y) \\ &\Leftrightarrow (A(a, a) \vee A(a, b) \vee A(a, c)) \wedge (A(b, a) \vee A(b, b) \vee A(b, c)) \\ &\quad \wedge (A(c, a) \vee A(c, b) \vee A(c, c)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(iii). } \exists x \forall y A(x, y) &\Leftrightarrow \forall y A(a, y) \vee \forall y A(b, y) \vee \forall y A(c, y) \\ &\Leftrightarrow (A(a, a) \wedge A(a, b) \wedge A(a, c)) \vee (A(b, a) \wedge A(b, b) \wedge A(b, c)) \\ &\quad \vee (A(c, a) \wedge A(c, b) \wedge A(c, c)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(iv). } \exists x \exists y A(x, y) &\Leftrightarrow \exists y A(a, y) \vee \exists y A(b, y) \vee \exists y A(c, y) \\ &\Leftrightarrow (A(a, a) \vee A(a, b) \vee A(a, c)) \vee (A(b, a) \vee A(b, b) \vee A(b, c)) \vee (A(c, a) \vee A(c, b) \vee A(c, c)) \end{aligned}$$

∴ 量词否定等值式

设 $A(x)$ 是任意的含自由出现个体变项 x 的公式，
则

$$(1) \neg \forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x) \quad (5.2)$$

设 $P(x)$ ： $\neg \forall x A(x)$ 来上课 $\Leftrightarrow \forall x$ 则本(是)所有人今天都来上课与
今天有人没来上课在意义上相同 $\neg \forall x P(x) \Leftrightarrow$
 $\exists x \neg P(x)$;

又，不是存在一些人今天来上课与所有的人今天都没来上课在意义上相同，即 $\neg (\exists x P(x)) \Leftrightarrow \forall x (\neg P(x))$

说明

□ “并不是所有的 x 都有性质 A ” 与 “存在 x 没有性质 A ” 是一回事。

□ “不存在有性质 A 的 x ” 与 “所有 x 都没有性质 A ” 是一回事。

∴ 量词否定等值式

推广到多个个体变元的情况有：

$$(i). \neg(\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n A(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

$$\Leftrightarrow \exists x_1 (\neg(\forall x_2 \dots \forall x_n A(x_1, x_2, \dots, x_n)))$$

$$\Leftrightarrow \exists x_1 \exists x_2 (\neg(\dots \forall x_n A(x_1, x_2, \dots, x_n)))$$

$$\Leftrightarrow \exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n \neg A(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$(ii). \neg(\exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n A(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

$$\Leftrightarrow \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n \neg A(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

(iii)

$$\neg(\forall x \exists y A(x, y)) \Leftrightarrow \exists x \neg(\exists y A(x, y)) \Leftrightarrow \exists x \forall y \neg A(x, y)$$

$$(iv). \neg(\exists x \forall y A(x, y)) \Leftrightarrow \forall x (\neg(\forall y A(x, y)))$$

$$\forall x \exists y \neg A(x, y)$$

::: 量词辖域收缩与扩张等值式

设 $A(x)$ 是任意的含自由出现个体变项 x 的公式, B 中不含 x 的出现, 则

$$\begin{aligned}(1) \quad & \Box x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \vee B \\ & \forall x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge B \\ & \forall x(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \rightarrow B \\ & \forall x(B \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B \rightarrow \forall x A(x)\end{aligned}\tag{5.3}$$

$$\begin{aligned}(2) \quad & \Box x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee B \\ & \exists x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \wedge B \\ & \exists x(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \rightarrow B \\ & \exists x(B \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B \rightarrow \exists x A(x)\end{aligned}\tag{5.4}$$

∴ 证明 : $\forall x A(x) \rightarrow B \Leftrightarrow \exists x (A(x) \rightarrow B)$

$$\forall x A(x) \rightarrow B$$

$$\Leftrightarrow \neg \forall x A(x) \vee B$$

$$\Leftrightarrow \exists x \neg A(x) \vee B$$

$$\Leftrightarrow \exists x (\neg A(x) \rightarrow B)$$

$$\Leftrightarrow \exists x (A(x) \rightarrow B)$$



定理中的条件 **B** 中不出现变元 x , 但对于等值式的左边, 如果 x 在 **B** 中约束出现, 则可先使用换名规则将 x 换成其它合式的变元, 然后使用该等值式, 例如:

$$\begin{aligned} \text{(i). } & (\forall x A(x)) \vee (\forall x B(x)) \Leftrightarrow (\forall x A(x)) \vee (\forall y B(y)) \\ & \Leftrightarrow \forall x (A(x) \vee (\forall y B(y))) \Leftrightarrow \forall x \forall y (A(x) \vee B(y)) \quad // \text{ 最} \\ & \text{后一步假设 } y \text{ 不在 } A(x) \text{ 中出现} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii). } & (\forall x A(x)) \rightarrow (\forall x B(x)) \Leftrightarrow (\forall x A(x)) \rightarrow (\forall y B(y)) \\ & \Leftrightarrow \forall y ((\forall x A(x)) \rightarrow B(y)) \Leftrightarrow \forall y \exists x (A(x) \rightarrow B(y)) \quad // \text{ 最} \\ & \text{后一步假设 } x \text{ 不在 } B(y) \text{ 中出现} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(iii). } & (\forall x A(x)) \rightarrow (\forall x B(x)) \Leftrightarrow (\forall x A(x)) \rightarrow (\forall y B(y)) \\ & \Leftrightarrow \exists x (A(x) \rightarrow (\forall y B(y))) \Leftrightarrow \exists x \forall y (A(x) \rightarrow B(y)) \quad // \text{ 最} \\ & \text{后一步假设 } y \text{ 不在 } A(x) \text{ 中出现} \end{aligned}$$

注意由 (ii) 和 (iii) 得到： $\neg y \exists x(A(x) \rightarrow B(y)) \Leftrightarrow \exists x \forall y(A(x) \rightarrow B(y))$ 。实际上，量词的顺序不能随意变换只有在两个不同的量词所约束的变元出现在同一个谓词时。所以对于量词顺序的改变要具体情况具体分析！例如，我们还可得到：

$$\begin{aligned} \text{iv). } & (\forall x A(x))^\forall (\exists y B(y)) \Leftrightarrow \forall x (A(x)^\forall (\exists y B(y))) \\ & \Leftrightarrow \forall x \exists y (A(x)^\forall B(y)) \Leftrightarrow \exists y ((\forall x A(x))^\forall B(y)) \\ & \Leftrightarrow \exists y \forall x (A(x)^\forall B(y)) \end{aligned}$$

由于运用等值式的顺序不会改变等值关系，因此在运用量词辖域的扩张等值式，肯定会产生许多不同的量词约束顺序来。



如果等值式左边的 B 中约束出现 x ，也还可以使用换名规则将 x 换成其它合式的个体变元，注意这时实际上出现了量词辖域的嵌套问题，我们需要更加小心处理：

$$\begin{aligned} \text{(v). } & \forall x(A(x) \vee \forall x B(x)) \Leftrightarrow \forall x(A(x) \vee \forall y B(y)) \\ & \Leftrightarrow \forall x A(x) \vee \forall y B(y) \Leftrightarrow \forall x \forall y (A(x) \vee B(y)) \end{aligned}$$

总的来说，定理 3 中的条件精确来说，应该是说 B 中不自由出现变元 x ，但因为当 B 中约束出现 x 时，容易产生混淆，所以书中没有明确指出 B 中可以约束出现 x 。

∴ 量词分配等值式

设 $A(x)$, $B(x)$ 是任意的含自由出现个体变项 x 的公式, 则

$$(1) \quad \Box x(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge \forall x B(x) \quad (5.5)$$

$$(2) \quad \Box x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$$

□ 例如, “联欢会上所有人既唱歌又跳舞” 和 “联欢会上所有人唱歌且所有人跳舞”, 这两个语句意义相同。故有 (1) 式。

□ 由 (1) 式推导 (2) 式

$$\forall x(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$$

$$\forall x(\neg A(x) \wedge \neg B(x)) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x) \wedge \forall x \neg B(x)$$

$$\neg \exists x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \neg (\exists x A(x) \vee \exists x B(x))$$

$$\exists x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$$

∴ 量词分配等值式

可推广到多个变元的情况:

$$(i). \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n (A(x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge B(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

$$\Leftrightarrow (\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n A(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

$$\wedge \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n B(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

$$(ii). \exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n (A(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee B(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

$$\Leftrightarrow (\exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n A(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

$$\vee (\exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n B(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

容易理解 \square 对 \square 有分配律²，是因为从某种意义上来说 \square 是 \square 的扩充，同样 \square 对 \square 有分配律，也是因为从某种意义上来说 \square 是 \square 的扩充。但虽然 \square 对 \square 有分配律，

∴ 量词分配等值式

□ 对 □ 却没有分配律，这是因为，设个体域 $D = \{a, b, c\}$ ：

$$\begin{aligned} & \forall x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow (A(a) \vee B(a)) \wedge (A(b) \vee B(b)) \\ & \wedge (A(c) \vee B(c)) \Leftrightarrow (A(a) \vee B(a)) \wedge (A(b) \vee B(b)) \wedge \\ & (A(c) \vee B(c)) \Leftrightarrow (A(a) \wedge A(b) \wedge A(c)) \vee (B(a) \wedge B(b) \wedge B(c)) \quad \vee \\ & (A(a) \wedge B(b) \wedge A(c)) \vee (B(a) \wedge B(b) \wedge A(c)) \\ & \vee (A(a) \wedge A(b) \wedge B(c)) \vee (B(a) \wedge A(b) \wedge B(c)) \\ & \vee (A(a) \wedge B(b) \wedge B(c)) \vee (B(a) \wedge B(b) \wedge B(c)) \\ & \text{而 } (\forall x A(x)) \vee (\forall x B(x)) \Leftrightarrow (A(a) \wedge A(b) \wedge A(c)) \\ & \vee (B(a) \wedge B(b) \wedge B(c)) \end{aligned}$$

显然这两者不等值，但可以看出，如果 $(\forall x A(x)) \vee (\forall x B(x))$ 是永真式，则 $\forall x (A(x) \vee B(x))$ 是永真式，或者说 $(\forall x A(x)) \vee (\forall x B(x)) \rightarrow \forall x (A(x) \vee B(x))$ 是永真式，即 $(\forall x A(x)) \vee (\forall x B(x)) \Rightarrow \forall x (A(x) \vee B(x))$ ，这就是后面的量词分配推理定律，由此我们易得 $(\exists x A(x) \rightarrow \forall x B(x)) \Rightarrow \forall x (A(x) \rightarrow B(x))$ 。同样，读者可验证对于等值演算来说， \forall 对 \exists 没有分配律，而是 $\forall x (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow (\exists x A(x)) \wedge (\exists x B(x))$ 。

这是因为，设个体域 $D = \{a, b, c\}$

$$\exists x (A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow (A(a) \wedge B(a)) \vee (A(b) \wedge B(b)) \vee (A(c) \wedge B(c))$$

$$(\exists x A(x)) \wedge (\exists x B(x)) \Leftrightarrow (A(a) \vee A(b) \vee A(c)) \wedge (B(a) \vee B(b) \vee B(c))$$

显然，上面两式不等价。

量词顺序变换等值式:

$$(1). \quad \forall x \forall y(A(x, y)) \Leftrightarrow \forall y \forall x(A(x, y))$$

$$(2). \quad \exists x \exists y(A(x, y)) \Leftrightarrow \exists y \exists x(A(x, y))$$

例如 设 x 的论域为甲村所有人的集合, y 的论域为乙村所有人的集合. $A(x, y)$: x 与 y 同姓;

甲村与乙村所有人同姓和乙村与甲村所有人同姓意义相同, 即 $\square x \forall y(A(x, y)) \Leftrightarrow \forall y \forall x(A(x, y))$

甲村与乙村有人同姓和乙村与甲村有人同姓意义相同, 即 $\square x \exists y(A(x, y)) \Leftrightarrow \exists y \exists x(A(x, y))$

$\forall x \exists y(A(x, y))$ 表示对于甲村任何一人, 乙村都有人和他同姓

$\exists y \forall x(A(x, y))$ 表示存在一个乙村的人, 甲村所有人和他同姓

显然, 上面两个语句意义不相同, 故 $\square x \exists y(A(x, y))$ 与 $\square y \forall x(A(x, y))$ 不等价.

推广到三个变元的情况是:

$$\begin{aligned} \text{(i). } & \forall x \forall y \forall z (A(x, y, z)) \Leftrightarrow \forall y \forall x \forall z (A(x, y, z)) \\ & \Leftrightarrow \forall y \forall z \forall x (A(x, y, z)) \Leftrightarrow \forall x \forall z \forall y (A(x, y, z)) \\ & \Leftrightarrow \forall z \forall x \forall y (A(x, y, z)) \Leftrightarrow \forall z \forall y \forall x (A(x, y, z)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii). } & \exists x \exists y \exists z (A(x, y, z)) \Leftrightarrow \exists y \exists x \exists z (A(x, y, z)) \\ & \Leftrightarrow \exists y \exists z \exists x (A(x, y, z)) \Leftrightarrow \exists x \exists z \exists y (A(x, y, z)) \\ & \Leftrightarrow \exists z \exists x \exists y (A(x, y, z)) \Leftrightarrow \exists z \exists y \exists x (A(x, y, z)) \end{aligned}$$

当约束变元的量词不同时, 不能随意变换量词的顺序, 上面已经讨论过这种情况, 此时有:

$$\forall x \forall y (A(x, y)) \Rightarrow \exists x \forall y (A(x, y)) \quad (\text{或 } \forall y \forall x (A(x, y)))$$

$$\exists x \forall y (A(x, y)) \Rightarrow \forall y \exists x (A(x, y))$$

$$\exists x \forall y (A(x, y)) \Rightarrow \forall x \exists y (A(x, y))$$

$$\forall x \exists y (A(x, y)) (\text{或 } \forall y \exists x (A(x, y))) \Rightarrow \exists x \exists y (A(x, y))$$

上述所有等值式中， $A(x)$ 既可代表任意只有自由变元 x 的公式，也可理解 A 为任意的一元谓词，同理 $A(x, y)$ 既可看成是有两个自由变元 x, y 的任意一阶逻辑公式，也可看成任意的二元谓词。

例。试证 $\exists x(A(x) \rightarrow B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \rightarrow \exists x B(x)$

证明：

$$\begin{aligned}\exists x(A(x) \rightarrow B(x)) &\Leftrightarrow \exists x(\neg A(x) \vee B(x)) \\ &\Leftrightarrow \exists x \neg A(x) \vee \exists x B(x) \\ &\Leftrightarrow \neg(\forall x A(x)) \vee \exists x B(x) \\ &\Leftrightarrow \forall x A(x) \rightarrow \exists x B(x)\end{aligned}$$

例 试证 $\forall x \forall y(A(x) \rightarrow B(y)) \Leftrightarrow \exists x A(x) \rightarrow \forall y B(y)$

证明：

$$\begin{aligned}\forall x \forall y(A(x) \rightarrow B(y)) &\Leftrightarrow \forall x(A(x) \rightarrow \forall y B(y)) \\ &\Leftrightarrow \exists x A(x) \rightarrow \forall y B(y)\end{aligned}$$

∴ 一阶逻辑等值演算的三条原则

- **置换规则**: 设 $\Phi(A)$ 是含公式 A 的公式, $\Phi(B)$ 是用公式 B 取代 $\Phi(A)$ 中所有的 A 之后的公式, 若 $A \Leftrightarrow B$, 则 $\Phi(A) \Leftrightarrow \Phi(B)$ 。
- **换名规则**: 设 A 为一公式, 将 A 中某量词辖域中某约束变项的所有出现及相应的指导变元改成该量词辖域中未曾出现过的某个体变项符号, 公式的其余部分不变, 设所得公式为 A' , 则 $A' \Leftrightarrow A$ 。
- **代替规则**: 设 A 为一公式, 将 A 中某个自由出现的个体变项的所有出现用 A 中未曾出现过的个体变项符号代替, A 中其余部分不变, 设所得公式为 A' , 则 $A' \Leftrightarrow A$ 。

说明

- 一阶逻辑中的置换规则与命题逻辑中的置换规则形式上完全相同, 只是在这里 A , B 是一阶逻辑公式。

∴ 例 5.1

例 5.1 将下面公式化成与之等值的公式，使其没有既是约束出现又是自由出现的个体变项。

$$(1) \forall x F(x, y, z) \rightarrow \exists y G(x, y, z)$$

$$(2) \forall x (F(x, y) \rightarrow \exists y G(x, y, z))$$

解答 (1) $\forall x F(x, y, z) \rightarrow \exists y G(x, y, z)$

$$\Leftrightarrow \forall t F(t, y, z) \rightarrow \exists y G(x, y, z) \quad (\text{换名规则})$$

$$\Leftrightarrow \forall t F(t, y, z) \rightarrow \exists w G(x, w, z) \quad (\text{换名规则})$$

$$\text{或 } \Box x F(x, y, z) \rightarrow \exists y G(x, y, z)$$

$$\Leftrightarrow \forall x F(x, t, z) \rightarrow \exists y G(x, y, z) \quad (\text{代替规则})$$

$$\Leftrightarrow \forall x F(x, t, z) \rightarrow \exists y G(w, y, z) \quad (\text{代替规则})$$

∴ 例 5.1 的解答

解答 (2) $\forall x(F(x, y) \rightarrow \exists yG(x, y, z))$

$\Leftrightarrow \forall x(F(x, t) \rightarrow \exists yG(x, y, z))$ (代替规则)

或 $\exists x(F(x, y) \rightarrow \exists yG(x, y, z))$

$\Leftrightarrow \forall x(F(x, y) \rightarrow \exists tG(x, t, z))$ (换名规则)

∴ 例 5.2

例 5.2 证明

$$(1) \quad \Box x(A(x) \vee B(x)) <\neq> \forall xA(x) \vee \forall xB(x)$$

$$(2) \quad \Box x(A(x) \wedge B(x)) <\neq> \exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$$

其中 $A(x)$, $B(x)$ 为含 x 自由出现的公式。

证明

只要证明在某个解释下两边的式子不等值。

取解释 \mathbf{I} : 个体域为自然数集合 \mathbf{N} ;

(1) 取 $F(x)$: x 是奇数, 代替 $A(x)$;

取 $G(x)$: x 是偶数, 代替 $B(x)$ 。

则 $\Box x(F(x) \vee G(x))$ 为真命题,

而 $\Box xF(x) \vee \forall xG(x)$ 为假命题。

两边不等值。

∴ 例 5.2

证明

$$(2) \exists x(A(x) \wedge B(x)) <\neq> \exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$$

$\exists x(F(x) \wedge G(x))$: 有些 x 既是奇数又是偶数为假命题;

而 $\exists xF(x) \wedge \exists xG(x)$: 有些 x 是奇数并且有些 x 是偶数为真命题。

两边不等值。

说明

- ❑ 全称量词 “ \forall ” 对 “ \vee ” 无分配律。
- ❑ 存在量词 “ \exists ” 对 “ \wedge ” 无分配律。
- ❑ 当 $B(x)$ 换成没有 x 出现的 B 时, 则有
$$\forall x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \forall xA(x) \vee B$$
$$\exists x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \exists xA(x) \wedge B$$

∴ 例 5.3—消去量词

例 5.3 设个体域为 $D = \{a, b, c\}$ ，将下面各公式的量词消去：

(1) $\forall x (F(x) \rightarrow G(x))$

(2) $\forall x (F(x) \vee \exists y G(y))$

(3) $\exists x \forall y F(x, y)$

解答

(1) $\forall x (F(x) \rightarrow G(x))$

$$\Leftrightarrow (F(a) \rightarrow G(a)) \quad \wedge \quad (F(b) \rightarrow G(b)) \quad \wedge \quad (F(c) \rightarrow G(c))$$

(2) $\forall x (F(x) \vee \exists y G(y))$

$$\Leftrightarrow \forall x F(x) \vee \exists y G(y) \quad (\text{公式 5.3})$$

$$\Leftrightarrow (F(a) \wedge F(b) \wedge F(c)) \vee (G(a) \vee G(b) \vee G(c))$$

说明

□ 如果不用公式 (5.3) 将量词的辖域缩小，演算过程较长。注意，此时 $\exists y G(y)$ 是与 x 无关的公式 B 。

∴ 例 5.3—消去量词

$$(3) \exists x \forall y F(x, y)$$

$$\Leftrightarrow \exists x (F(x, a) \wedge F(x, b) \wedge F(x, c))$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (F(a, a) \wedge F(a, b) \wedge F(a, c)) \\ &\quad \vee (F(b, a) \wedge F(b, b) \wedge F(b, c)) \\ &\quad \vee (F(c, a) \wedge F(c, b) \wedge F(c, c)) \end{aligned}$$

在演算中先消去存在量词也可以，得到结果是等值的。

$$\exists x \forall y F(x, y)$$

$$\Leftrightarrow \forall y F(a, y) \vee \forall y F(b, y) \vee \forall y F(c, y)$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (F(a, a) \wedge F(a, b) \wedge F(a, c)) \\ &\quad \vee (F(b, a) \wedge F(b, b) \wedge F(b, c)) \\ &\quad \vee (F(c, a) \wedge F(c, b) \wedge F(c, c)) \end{aligned}$$

∴ 例 5.4

例 5.4 给定解释 I 如下：

- (a) 个体域 $D = \{2, 3\}$
- (b) D 中特定元素 $\bar{a} = 2$
- (c) D 上的特定函数 (x) 为 $\bar{f}(2)=3, \bar{f}(3)=2$ 。
- (d) D 的特定谓词

$\bar{G}(x,y)$ 为： $\bar{G}(2,2)=\bar{G}(2,3)=\bar{G}(3,2)=1, \bar{G}(3,3)=0$ 。

$\bar{L}(x,y)$ 为： $\bar{L}(2,2)=\bar{L}(3,3)=1, \bar{L}(2,3)=\bar{L}(3,2)=0$ 。

$\bar{F}(x)$ 为： $\bar{F}(2)=0, \bar{F}(3)=1$ 。

在解释 I 下求下列各式的值：

- (1) $\neg x(F(x) \wedge G(x, a))$
- (2) $\neg x(F(f(x)) \wedge G(x, f(x)))$
- (3) $\neg x \exists y L(x, y)$
- (4) $\neg y \forall x L(x, y)$

∴ 例 5.4 的解答

$$(1) \quad \neg x(F(x) \wedge G(x, a))$$

$$\Leftrightarrow (F(2) \wedge G(2, 2)) \wedge (F(3) \wedge G(3, 2))$$

$$\Leftrightarrow (0 \wedge 1) \wedge (1 \wedge 1)$$

$$\Leftrightarrow 0$$

$$(2) \quad \neg x(F(f(x)) \wedge G(x, f(x)))$$

$$\Leftrightarrow (F(f(2)) \wedge G(2, f(2))) \vee \\ (F(f(3)) \wedge G(3, f(3)))$$

$$\Leftrightarrow (F(3) \wedge G(2, 3)) \vee (F(2) \wedge G(3, 2))$$

$$\Leftrightarrow (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1)$$

$$\Leftrightarrow 1$$

∴ 例 5.4 的解答

$$(3) \quad \neg x \exists y L(x, y)$$

$$\Leftrightarrow (L(2, 2) \vee L(2, 3)) \wedge (L(3, 2) \vee L(3, 3))$$

$$\Leftrightarrow (1 \vee 0) \wedge (0 \vee 1)$$

$$\Leftrightarrow 1$$

$$(4) \quad \neg y \forall x L(x, y)$$

$$\Leftrightarrow \exists y (L(2, y) \wedge L(3, y))$$

$$\Leftrightarrow (L(2, 2) \wedge L(3, 2)) \vee (L(2, 3) \wedge L(3, 3))$$

$$\Leftrightarrow (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1)$$

$$\Leftrightarrow 0$$

说明

□ 由 (3), (4) 的结果进一步可以说明量词的次序不能随意颠倒。

∴ 例 5.5

例 5.5 证明下列等值式。

$$(1) \neg \Box x(M(x) \wedge F(x)) \Leftrightarrow \forall x(M(x) \rightarrow \neg F(x))$$

$$(2) \neg \Box x(F(x) \rightarrow G(x)) \Leftrightarrow \exists x(F(x) \wedge \neg G(x))$$

$$(3) \neg \Box x \forall y (F(x) \wedge G(y) \rightarrow H(x, y)) \\ \Leftrightarrow \exists x \exists y (F(x) \wedge G(y) \wedge \neg H(x, y))$$

$$(4) \neg \Box x \exists y (F(x) \wedge G(y) \wedge L(x, y)) \\ \Leftrightarrow \forall x \forall y (F(x) \wedge G(y) \rightarrow \neg L(x, y))$$

∴ 例 5.5 的证明

$$(1) \quad \neg \Box x(M(x) \wedge F(x)) \Leftrightarrow \forall x(M(x) \rightarrow \neg F(x))$$

$$\neg \exists x(M(x) \wedge F(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x \neg (M(x) \wedge F(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x (\neg M(x) \vee \neg F(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x (M(x) \rightarrow \neg F(x))$$

$$(2) \quad \neg \Box x(F(x) \rightarrow G(x)) \Leftrightarrow \exists x(F(x) \wedge \neg G(x))$$

$$\neg \forall x(F(x) \rightarrow G(x))$$

$$\Leftrightarrow \exists x \neg (F(x) \rightarrow G(x))$$

$$\Leftrightarrow \exists x \neg (\neg F(x) \vee G(x))$$

$$\Leftrightarrow \exists x(F(x) \wedge \neg G(x))$$

∴ 例 5.5 的证明

$$\begin{aligned}(3) \quad & \neg \Box x \forall y (F(x) \wedge G(y) \rightarrow H(x, y)) \\ & \Leftrightarrow \exists x \exists y (F(x) \wedge G(y) \wedge \neg H(x, y)) \\ & \neg \forall x \forall y (F(x) \wedge G(y) \rightarrow H(x, y)) \\ & \Leftrightarrow \exists x \neg (\forall y (F(x) \wedge G(y) \rightarrow H(x, y))) \\ & \Leftrightarrow \exists x \exists y \neg (\neg (F(x) \wedge G(y)) \vee H(x, y)) \\ & \Leftrightarrow \exists x \exists y (F(x) \wedge G(y) \wedge \neg H(x, y))\end{aligned}$$

∴ 例 5.5 的证明

$$(4) \quad \neg \Box x \exists y (F(x) \wedge G(y) \wedge L(x, y))$$

$$\Leftrightarrow \forall x \forall y (F(x) \wedge G(y) \rightarrow \neg L(x, y))$$

$$\neg \exists x \exists y (F(x) \wedge G(y) \wedge L(x, y))$$

$$\Leftrightarrow \forall x \neg (\exists y (F(x) \wedge G(y) \wedge L(x, y)))$$

$$\Leftrightarrow \forall x \forall y \neg (F(x) \wedge G(y) \wedge L(x, y))$$

$$\Leftrightarrow \forall x \forall y (\neg (F(x) \wedge G(y)) \vee \neg L(x, y))$$

$$\Leftrightarrow \forall x \forall y (F(x) \wedge G(y) \rightarrow \neg L(x, y))$$

5.2 一阶逻辑前束范式

定义 5.2 设 A 为一个一阶逻辑公式，若 A 具有如下形式

$$Q_1x_1Q_2x_2 \dots Q_kx_kB$$

则称 A 为**前束范式**，其中 $Q_i (1 \leq i \leq k)$ 为 \forall 或 \exists ， B 为不含量词的公式。

□ 前束范式的例子：

$$\forall x \forall y (F(x) \wedge G(y) \rightarrow H(x, y))$$

$$\forall x \forall y \exists z (F(x) \wedge G(y) \wedge H(z) \rightarrow L(x, y, z))$$

□ 不是前束范式的例子：

$$\forall x (F(x) \rightarrow \exists y (G(y) \wedge H(x, y)))$$

$$\exists x (F(x) \wedge \forall y (G(y) \rightarrow H(x, y)))$$

∴ 前束范式存在定理

定理 5.1 一阶逻辑中的任何公式都存在与之等值的前束范式。

(1) 利用量词转化公式，把否定深入到指导变元的后面。

$$\neg \forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$$

$$\neg \exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$$

(2) 利用 $\forall x (A(x) \vee B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \vee B$ 和

$\exists x (A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \wedge B$ 把量词移到全式的最前面，这样便得到前束范式。

说明

- 求前束范式的过程，就是制造量词辖域可以扩大的条件，进行量词辖域扩大。
- 任何公式的前束范式都是存在的，但一般说来，并不唯一。
- 利用一阶逻辑等值式以及三条变换规则（置换规则、换名规则、代替规则）就可以求出与公式等值的前束范式，或所谓公式的前束范式。

∴ 例 5.6 求公式的前束范式

$$(1) \quad \neg \exists x F(x) \wedge \neg \exists x G(x)$$

$$\Leftrightarrow \forall x F(x) \wedge \neg \exists y G(y) \quad (\text{换名规则})$$

$$\Leftrightarrow \forall x F(x) \wedge \forall y \neg G(y) \quad ((5.2) \text{ 第二式})$$

$$\Leftrightarrow \forall x (F(x) \wedge \forall y \neg G(y)) \quad ((5.3) \text{ 第二式})$$

$$\Leftrightarrow \forall x \forall y (F(x) \wedge \neg G(y)) \quad ((5.3) \text{ 第二式})$$

$$(\neg \forall y \forall x (F(x) \wedge \neg G(y)))$$

或者 $\neg \exists x F(x) \wedge \neg \exists x G(x)$

$$\Leftrightarrow \forall x F(x) \wedge \forall x \neg G(x) \quad ((5.2) \text{ 第二式})$$

$$\Leftrightarrow \forall x (F(x) \wedge \neg G(x)) \quad ((5.5) \text{ 第一式})$$

∴ 例 5.6 求公式的前束范式

$$(2) \quad \neg \exists x F(x) \vee \neg \exists x G(x)$$

$$\Leftrightarrow \forall x F(x) \vee \forall x \neg G(x) \quad ((5.2) \text{ 第二式})$$

$$\Leftrightarrow \forall x F(x) \vee \forall y \neg G(y) \quad (\text{换名规则})$$

$$\Leftrightarrow \forall x (F(x) \vee \forall y \neg G(y)) \quad ((5.3) \text{ 第一式})$$

$$\Leftrightarrow \forall x \forall y (F(x) \vee \neg G(y)) \quad ((5.3) \text{ 第一式})$$

说明

□ 公式的前束范式是不唯一的。

∴ 例 5.7 求前束范式

$$(1) \exists x F(x) \wedge \forall x G(x)$$

$$\Leftrightarrow \exists y F(y) \wedge \forall x G(x)$$

$$\Leftrightarrow \exists y \forall x (F(y) \wedge G(x))$$

$$(2) \forall x F(x) \rightarrow \exists x G(x)$$

$$\Leftrightarrow \forall y F(y) \rightarrow \exists x G(x)$$

$$\Leftrightarrow \exists y \exists x (F(y) \rightarrow G(x))$$

$$(3) \exists x F(x) \rightarrow \forall x G(x)$$

$$\Leftrightarrow \exists y F(y) \rightarrow \forall x G(x)$$

$$\Leftrightarrow \forall y \forall x (F(y) \rightarrow G(x))$$

$$(4) \forall x F(x) \rightarrow \exists y G(y)$$

$$\Leftrightarrow \exists x \exists y (F(x) \rightarrow G(y))$$

∴ 例 5.8 求公式的前束范式

$$(1) \forall x F(x, y) \rightarrow \exists y G(x, y)$$

$$\Leftrightarrow \forall t F(t, y) \rightarrow \exists w G(x, w) \quad (\text{换名规则})$$

$$\Leftrightarrow \exists t \exists w (F(t, y) \rightarrow G(x, w)) \quad ((5.3), (5.4))$$

或者

$$\forall x F(x, y) \rightarrow \exists y G(x, y)$$

$$\Leftrightarrow \forall x F(x, t) \rightarrow \exists y G(w, y) \quad (\text{代替规则})$$

$$\Leftrightarrow \exists x \exists y (F(x, t) \rightarrow G(w, y)) \quad ((5.3), (5.4))$$

说明

□ 解本题时一定注意，哪些个体变项是约束出现，哪些是自由出现，特别要注意那些既是约束出现又是自由出现的个体变项。不能混淆。

∴ 例 5.8 求公式的前束范式

$$(2) (\forall x_1 F(x_1, x_2) \rightarrow \exists x_2 G(x_2)) \rightarrow \forall x_1 H(x_1, x_2, x_3)$$

$$\Leftrightarrow (\forall x_4 F(x_4, x_2) \rightarrow \exists x_5 G(x_5)) \rightarrow \forall x_1 H(x_1, x_2, x_3)$$

$$\Leftrightarrow \exists x_4 \exists x_5 (F(x_4, x_2) \rightarrow G(x_5)) \rightarrow \forall x_1 H(x_1, x_2, x_3)$$

$$\Leftrightarrow \forall x_4 \forall x_5 \forall x_1 ((F(x_4, x_2) \rightarrow G(x_5)) \rightarrow H(x_1, x_2, x_3))$$

∴ 5.3 一阶逻辑的推理理论

- 在一阶逻辑中，从前提 A_1, A_2, \dots, A_k 出发推结论 B 的推理形式结构，依然采用如下的蕴涵式形式

$$A_1, A_2, \dots, A_k \rightarrow B \quad (5.6)$$

若式 (5.6) 为永真式，则称**推理正确**，否则称推理不正确。

- 于是，在一阶逻辑中判断推理是否正确也归结为判断 (5.6) 式是否为永真式了。
- 在一阶逻辑中称永真式的蕴涵式为**推理定律**，若一个推理的形式结构正是某条推理定律，则这个推理显然是正确的。
- 在一阶逻辑的推理中，某些前提与结论可能是受量词限制，为了使用命题逻辑中的等值式和推理定律，**必须在推理过程中有消去和添加量词的规则**，以便使谓词演算公式的推理过程可类似于命题演算中推理理论那样进行。

::: 推理定律的来源

- 命题逻辑推理定律的代换实例
- 由基本等值式生成的推理定律
- 量词分配等值式
- 推理规则—量词消去和引入规则

::: 命题逻辑推理定律的代换实例

- $\forall xF(x) \wedge \forall yG(y) \Rightarrow \forall xF(x)$ (化简律的代换实例)
- $\forall xF(x) \Rightarrow \forall xF(x) \vee \exists yG(y)$ (附加律的代换实例)
-

∴ 由基本等值式生成的推理定律

$$\square \quad \forall x F(x) \Rightarrow \neg \neg \forall x F(x)$$

$$\square \quad \neg \neg \forall x F(x) \Rightarrow \forall x F(x)$$

$$\square \quad \neg \forall x F(x) \Rightarrow \exists x \neg F(x)$$

$$\square \quad \exists x \neg F(x) \Rightarrow \neg \forall x F(x)$$

$$\square \quad \dots\dots\dots$$

∴ 其他推理定律

$$\square \forall x A(x) \vee \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \vee B(x))$$

$$\square \exists x (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$$

$$\square \forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \rightarrow \forall x B(x)$$

$$\square \exists x (A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \rightarrow \exists x B(x)$$

$$\square \dots\dots\dots$$

\square 对 $\exists x (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$ 的讨论

若 $\exists x (A(x) \wedge B(x))$ 为真, 则有一个客体 c , 使得 $A(c) \wedge B(c)$ 为真, 即 $A(c)$ 和 $B(c)$ 都为真, 所以 $\exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$ 也为真。

∴ 推理规则

□ 为了构造推理系统，还要给出 4 条重要的推理规则，即消去量词和引入量词的规则：

1. 全称量词消去规则（简记为 $\forall -$ 规则或 $\forall -$ ）
2. 全称量词引入规则（简记为 $\forall +$ 规则或 $\forall +$ ）
3. 存在量词引入规则（简称 $\exists +$ 规则或 $\exists +$ ）
4. 存在量词消去规则（简记为 $\exists -$ 规则或 $\exists -$ ）

设前提 $\Gamma = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$,

∴ 全称量词消去规则（简记为□-）

$$\frac{\forall x A(x)}{\therefore A(y)} \text{ 或 } \frac{\forall x A(x)}{\therefore A(c)}$$

含义：如果个体域的所有元素都具有性质 A，则个体域中的任一元素具有性质 A。

两式成立的条件：

- (1) 在第一式中，取代 x 的 y 应为任意的不在 A(x) 中约束出现的个体变项。
- (2) 在第二式中，c 为任意个体变项。
- (3) 用 y 或 c 去取代 A(x) 中自由出现的 x 时，一定要在 x 自由出现的一切地方进行取代。

∴ 全称量词消去规则（简记为 \forall -）

举例

当 $A(x)$ 为原子公式时，比如 $A(x)=F(x)$ ，则当 $\forall x A(x)$ 为真时，对于个体域中任意的个体变项 y ，不会出现 $F(y)$ 为假的情况。

当 $A(x)$ 不是原子公式时，如 y 已在 $A(x)$ 中约束出现了，就不能用 y 取代 x ，否则会出现 $\forall x A(x)$ 为真而 $A(y)$ 为假的情况。

考虑个体域为实数集合，公式 $A(x)=\exists y F(x,y)$ 为 $x>y$ 。

当对公式 $\forall x A(x)=\forall x \exists y F(x,y)$ 使用 \forall - 规则时，用 y 取代 x ，就会得到 $A(y)=\exists y F(y,y)$ ，即 $\forall y (y>y)$ ，这显然是假命题。原因是违背了条件 (1)。

若用 z 取代 x ，得 $A(z)=\exists y F(z,y)=\exists y (z>y)$ 就不会产生这种错误。

∴ 全称量词引入规则（简记为 $\forall +$ ）

$$\frac{A(y)}{\therefore \forall x A(x)}$$

该式成立的条件是：

- (1) 无论 $A(y)$ 中自由出现的个体变项 y 取何值， $A(y)$ 应该均为真。
- (2) 取代自由出现的 y 的 x 也不能在 $A(y)$ 中约束出现。

举例

取个体域为实数集， $F(x, y)$ 为 $x > y$ ， $A(y) = \exists x F(x, y)$ 。

显然 $A(y)$ 满足条件 (1)。

对 $A(y)$ 应用 \forall 规则时，若取已约束出现的 x 取代 y ，会得到 $\forall x A(x) = \forall x \exists x (x > x)$ ，这是假命题。

产生这种错误的原因是违背了条件 (2)。

若取 z 取代 y ，得 $\forall z A(z) = \forall z \exists x (x > z)$ 为真命题。

\therefore 存在量词引入规则（简称 \exists + 规则或 \exists +）

$$\frac{A(y)}{\therefore \exists x A(x)} \text{ 或 } \frac{B \rightarrow A(y)}{\therefore B \rightarrow \exists x A(x)}$$
$$\frac{A(c)}{\therefore \exists x A(x)} \text{ 或 } \frac{B \rightarrow A(c)}{\therefore B \rightarrow \exists x A(x)}$$

该式成立的条件是：

其中 x, y 为个体变元符号， c 是个体常项符号。

□(1) 取代 c 的 x 不能在 $A(c)$ 中出现过。

□(2) A 中 y 和 c 分别不在 $\forall x$ 和 $\forall x$ 的辖域内自由出现和出现。

∴ 存在量词引入规则（简称 \exists + 规则或 \exists +）

举例

取个体域为实数集， $F(x, y)$ 为 $x > y$ ，取
 $A(5) = \exists x F(x, 5)$ 。

显然 $A(5)$ 是真命题。

在应用 \exists + 规则时，若用 $A(5)$ 中已出现的 x 取代 5 ，得
 $\exists x \exists x F(x, x) = \exists x (x > x)$ ，这是假命题。

产生这种错误的原因是违背了条件 (2)。

若用 $A(5)$ 中未出现过的个体变项 y 取代 5 ，得
 $\exists y A(y) = \exists y \exists x F(x > y)$ ，这为真命题。

存在量词消去规则 (简记为 \exists -规则或 \exists -)

$$\frac{A(x) \rightarrow B}{\therefore \exists x A(x) \rightarrow B}$$

该式成立的条件是:

x 是个体变项符号, 且不在 Γ 的任何公式和 B 中自由出现。

∴ 定义 5.3 自然推理系统定义

1. 字母表。同一阶语言的字母表。
2. 合式公式。同合式公式的定义。
3. 推理规则:
 - (1) 前提引入规则。
 - (2) 结论引入规则。
 - (3) 置换规则。
 - (4) 假言推理规则。
 - (5) 附加规则。
 - (6) 化简规则。
 - (7) 拒取式规则。
 - (8) 假言三段论规则。
 - (9) 析取三段论规则。
 - (10) 构造性二难推理规则。
 - (11) 合取引入规则。
 - (12) \forall - 规则。
 - (13) $\forall+$ 规则。
 - (14) $\exists+$ 规则。
 - (15) \exists - 规则。

::: 例题

例题 在自然推理系统中，构造下面推理的证明

所有的人都是要死的，苏格拉底是人，所以苏格拉底是要死的。

解：先将原子命题符号化。

设 $F(x):x$ 是一个人， $G(x):x$ 是要死的， s ：苏格拉底。

前提： $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$ ， $F(s)$

结论： $G(s)$

证明： ① $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$ 前提引入

② $F(s) \rightarrow G(s)$ ① \forall -

③ $F(s)$ 前提引入

④ $G(s)$ ②③ 假言推理

∴ 例 5.9

例 5.9 在自然推理系统中，构造下面推理的证明
任何自然数都是整数；存在着自然数。所以存在着整数。
个体域为实数集合 R 。

解：先将原子命题符号化。

设 $F(x):x$ 为自然数， $G(x):x$ 为整数。

前提： $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$ ， $\exists xF(x)$

结论： $\exists xG(x)$

证明：

- | | |
|---|------------------|
| ① $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$ | 前提引入 |
| ② $F(y) \rightarrow G(y)$ | ① \forall - 规则 |
| ③ $F(y) \rightarrow \exists xG(x)$ | ② \exists + 规则 |
| ④ $\exists xF(x) \rightarrow \exists xG(x)$ | ③ \exists - 规则 |
| ⑤ $\exists xF(x)$ | 前提引入 |
| ⑥ $\exists xG(x)$ | ④ ⑤ 假言推理 |

∴ 例 5.10

例 5.10 在自然推理系统 F 中，构造下面推理的证明。

前提: $\forall x (F(x) \rightarrow G(x))$, $\exists x (F(x) \wedge H(x))$

证明: 结论: $\forall x (G(x) \wedge H(x))$

① $\forall x (F(x) \rightarrow G(x))$

前提引入

② $F(x) \rightarrow G(x)$

① \forall -

③ $F(x) \wedge H(x) \rightarrow F(x)$

简规则

化

④ $F(x) \wedge H(x) \rightarrow G(x)$

②③ 假言

∴ 例 5.10 证明

$$\textcircled{6} \neg (F(x) \wedge H(x)) \vee G(x)$$

④ 置换

$$\textcircled{7} \neg (F(x) \wedge H(x)) \vee H(x)$$

⑤ 置换

$$\textcircled{8} (\neg (F(x) \wedge H(x)) \vee G(x)) \wedge (\neg (F(x) \wedge H(x)) \vee H(x))$$

⑥⑦ 合取

$$\textcircled{9} \neg (F(x) \wedge H(x)) \vee (G(x) \wedge H(x))$$

⑧ 置换

$$\textcircled{10} F(x) \wedge H(x) \rightarrow G(x) \wedge H(x)$$

⑨ 置换

$$\textcircled{11} F(x) \wedge H(x) \rightarrow \exists x (G(x) \wedge H(x))$$

⑩ \exists^+

$$\textcircled{12} \exists x (F(x) \wedge H(x)) \rightarrow \exists x (G(x) \wedge H(x))$$

(11) \exists^-

$$\textcircled{13} \exists x (F(x) \wedge H(x))$$

前提引入

$$\textcircled{14} \exists (G(x) \wedge H(x))$$

(12)(13) 假言推理

∴ 例 5.11

例 5.11 在自然推理系统 F 中，构造下面推理的证明：

不存在能表示成分数的无理数，有理数都能表示成分数。
因此，有理数都不是无理数。

个体域为实数集合。

解答

设 $F(x):x$ 为无理数，
 $G(x):x$ 为有理数，
 $H(x):x$ 能表示成分数。

前提： $\neg \exists x(F(x) \wedge H(x))$, $\forall x(G(x) \rightarrow H(x))$

结论： $\forall x(G(x) \rightarrow \neg F(x))$

∴ 例 5.11 证明

- | | |
|---|--------------|
| ① $\neg \exists x(F(x) \wedge H(x))$ | 前提引入 |
| ② $\forall x(\neg F(x) \vee \neg H(x))$ | ① 置换 |
| ③ $\forall x(H(x) \rightarrow \neg F(x))$ | ② 置换 |
| ④ $H(y) \rightarrow \neg F(y)$ | ③ $\forall-$ |
| ⑤ $\forall x(G(x) \rightarrow H(x))$ | 前提引入 |
| ⑥ $G(y) \rightarrow H(y)$ | ⑤ $\forall-$ |
| ⑦ $G(y) \rightarrow \neg F(y)$ | ⑥④ 假言三段论 |
| ⑧ $\forall x(G(x) \rightarrow \neg F(x))$ | ⑦ $\forall+$ |

说明

- 注意 $\neg \exists x(F(x) \wedge H(x))$ 不是前束范式，因而不能对它使用 **EI** 规则。
- 因为结论中的量词是全称量词 \forall ，因而在使用 $\forall-$ 规则时用第一式，而不能用第二式。

∴ 例 5.12

例 5.12 在自然推理系统 F 中，构造下面推理的证明：

每个学术会成员都是工人并且是专家，有些成员是青年人，所有有的成员是青年专家。

个体域为全总个体域。

解答

设 $F(x):x$ 为学术成员。 $G(x):x$ 是专家。
 $H(x):x$ 是工人。 $R(x):x$ 是青年人。

前提：

$\forall x(F(x) \rightarrow G(x) \wedge H(x)), \exists x(F(x) \wedge R(x))$ 。

结论： $\forall x(F(x) \wedge R(x) \rightarrow G(x))$

∴ 例 5.12 证明

$$\textcircled{1} \forall x (F(x) \rightarrow G(x) \wedge H(x))$$

前提引入 $\textcircled{2}$

$$F(x) \rightarrow G(x) \wedge H(x)$$

$\textcircled{1} \forall-$ $\textcircled{3} F$

$$(x) \wedge R(x) \rightarrow F(x)$$

化简规则 $\textcircled{4} G(x) \wedge$

$$H(x) \rightarrow G(x)$$

化简规则 $\textcircled{5} F(x) \wedge R(x) \rightarrow$

$$G(x) \wedge H(x)$$

$\textcircled{2} \textcircled{3}$ 假言三段论 $\textcircled{6} F(x) \wedge R(x) \rightarrow G(x)$

$\textcircled{4} \textcircled{5}$ 假言三段论 $\textcircled{7} \Box (F(x) \wedge R(x)) \vee G(x)$

$\textcircled{6}$ 置换 $\textcircled{8} \Box (F(x) \wedge R(x)) \vee (F(x) \wedge$

$$R(x) \wedge G(x))$$

$\textcircled{9} F(x) \wedge R(x) \rightarrow F(x) \wedge R(x) \wedge G$

$$(x)$$

$\textcircled{7}$ 置换 $\textcircled{10} F(x) \wedge R(x) \rightarrow \exists x (F(x) \wedge R(x))$

$$\wedge G(x))$$

$\textcircled{8}$ 置换 $\textcircled{11} \exists x (F(x) \wedge R(x)) \rightarrow \exists x (F$

$$(x) \wedge R(x) \wedge G(x))$$

$\textcircled{9} \exists+$ $\textcircled{12} \exists x (F(x) \wedge R(x))$

$\textcircled{10} \exists-$

$\textcircled{13} \Box x (F(x) \wedge R(x) \wedge G(x))$

前提引入
 $\textcircled{11} \textcircled{12}$ 假言推理



例 5.13 在自然推理系统 F 中，构造下面推理的证明：

所有的有理数都是实数；所有的无理数也是实数；虚数不是实数。因此，虚数既不是有理数，也不是无理数。

$Q(x)$: x 是有理数 ; $R(x)$: x 是实数 ; $N(x)$: x 是无理数;

$C(x)$: x 是虚数

前提可符号化为： $\forall x(Q(x) \rightarrow R(x)), \forall x(N(x) \rightarrow R(x)),$
 $\forall x(C(x) \rightarrow \neg R(x))$

结论可符号化为： $\Box x(C(x) \rightarrow (\neg Q(x) \wedge \neg N(x)))$

∴ 例 5.13 证明

(1) $\forall x(Q(x) \rightarrow R(x))$

前提引入

(2) $Q(x) \rightarrow R(x)$

(1) \forall -

(3) $\forall x(N(x) \rightarrow R(x))$

前提引入

(4) $N(x) \rightarrow R(x)$

(3) \forall -

(5) $\forall x(C(x) \rightarrow \neg R(x))$
引入

前提

(6) $C(x) \rightarrow \neg R(x)$
 \forall -

(5)

(7) $\neg R(x) \rightarrow \neg Q(x)$

(2) 置换

(8) $\neg R(x) \rightarrow \neg N(x)$

(4) 置换

(9) $C(x) \rightarrow \neg Q(x)$

(6)(7) 假言三

∴ 例 5.13 证明续

(10) $C(x) \rightarrow \neg N(x)$
论

(6)(8) 假言三段

(11) $\neg C(x) \vee \neg Q(x)$

(9) 置换

(12) $\neg C(x) \vee \neg N(x)$

(10) 置换

(13) $(\neg C(x) \vee \neg Q(x)) \wedge (\neg C(x) \vee \neg N(x))$
合取

(11)(12)

(14) $\neg C(x) \vee (\neg Q(x) \wedge \neg N(x))$
换

(13) 置

(15) $C(x) \rightarrow (\neg Q(x) \wedge \neg N(x))$
换

(14) 置

(16) $\forall x (C(x) \rightarrow (\neg Q(x) \wedge \neg N(x)))$
(15) $\forall +$

∴ 例 5.14

□ **例 5.14** 在自然推理系统 **F** 中，构造下面推理的证明：

证法 I 归谬法

(1) $\neg(\forall xP(x) \vee \exists xQ(x))$

否定结论引入

(2) $\neg(\forall xP(x)) \wedge (\forall x\neg Q(x))$

(1) 置换

(3) $\neg(\forall xP(x))$

(2) 化简

(4) $\forall x\neg Q(x)$

(2) 化简

(5) $\neg Q(y)$

(4) \forall -

(6) $\forall x(P(x) \vee Q(x))$

前提引入

(7) $P(y) \vee Q(y)$

(6) \forall -

∴ 例 5.14 证明续

(8) $p(y)$
三段论

(5)(7) 析取

(9) $\forall x p(x)$

(8) $\forall+$

(10) $\forall x p(x) \wedge (\forall x p(x))$

(2)(9) 合取

证法 II 因 $\Box xP(x) \vee \exists xQ(x) \Leftrightarrow \neg(\forall xP(x)) \rightarrow \exists xQ(x)$, 所以原题化为要证 $\Box x(P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow \neg(\forall xP(x)) \rightarrow \exists xQ(x)$

(1) $\neg(\forall xP(x))$

附加前提引入

(2) $\forall x(P(x) \vee Q(x))$

前提引入

(3) $P(y) \vee Q(y)$

(2) $\forall-$

(4) $\neg P(y) \rightarrow Q(y)$

(3) 置换

(5) $\exists x \neg P(x)$

(1) 置换

(6) $\neg P(y) \rightarrow \exists xQ(x)$

(4) $\exists+$

∴ 例 5.14 证明续

(7) $\exists x p(x) \rightarrow \exists x Q(x)$

(6) \exists -

(8) $\exists x Q(x)$

(5)

(7) 假言推理

::: 本章主要内容

□ 等值式与基本的等值式

① 在有限个体域中消去量词等值式

② 量词否定等值式

③ 量词辖域收缩与扩张等值式

④ 量词分配等值式

□ 基本规则：置换规则、换名规则、代替规则

□ 前束范式

□ 推理理论：推理的形式结构、推理正确、构造证明

□ 新的推理规则： $\neg -$ 、 $\neg +$ 、 $\vee -$ 、 $\vee +$

::: 学习要求

- 深刻理解重要的等值式，并能熟练地使用它们。
- 熟练地使用置换规则、换名规则和代替规则。
- 准确地求出给定公式的前束范式（形式可以不唯一）。
- 正确地使用 $\neg -$ 、 $\neg +$ 、 $\neg -$ 、 $\neg +$ 规则，特别地要注意它们之间的关系。
 - 一定对前束范式才能使用 $\neg -$ 、 $\neg +$ 、 $\neg -$ 、 $\neg +$ 规则，对不是前束范式的公式要使用它们，一定先求出公式的前束范式。
 - 记住 $\neg -$ 、 $\neg +$ 、 $\neg -$ 、 $\neg +$ 规则的各自使用条件。
- 对于给定的推理，正确地构造出它的证明。

::: 在自然推理系统 F 中构造推理的证明

前提: $\exists x F(x) \rightarrow \forall x G(x)$

结论: $\exists x (F(x) \rightarrow G(x))$

证明

- | | |
|---|------------------|
| ① $\exists x F(x) \rightarrow \forall x G(x)$ | 前提引入 |
| ② $\exists y F(y) \rightarrow \forall x G(x)$ | ① 置换 (换名规则) |
| ③ $\forall y \forall x (F(y) \rightarrow G(x))$ | ② 置换 |
| ④ $\forall x (F(z) \rightarrow G(x))$ | ③ \forall - 规则 |
| ⑤ $F(z) \rightarrow G(z)$ | ④ \forall - 规则 |
| ⑥ $\forall x (F(x) \rightarrow G(x))$ | ⑤ \forall + 规则 |

::: 在自然推理系统 F 中构造推理的证明

前提: $\Box x(F(x) \rightarrow G(x))$

结论: $\Box xF(x) \rightarrow \forall xG(x)$

证明

① $\forall xF(x)$ 附加前提引入

② $F(y)$ ① \forall - 规则

③ $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$ 前提引入

④ $F(y) \rightarrow G(y)$ ③ \forall - 规则

⑤ $G(y)$ ②④ 假言推理

⑥ $\forall xG(x)$ ⑤ \forall + 规则

∴ 例题选讲

例题 在自然推理系统 F 中，构造下面推理的证明：

实数不是有理数就是无理数，无理数都不是分数，所以，若有分数，则必有有理数（个体域为实数集合）

解答

设 $F(x):x$ 是有理数，
 $G(x):x$ 是无理数，
 $H(x):x$ 是分数。

前提： $\forall x(F(x) \vee G(x))$, $\forall x(G(x) \rightarrow \neg H(x))$

结论： $\forall xH(x) \rightarrow \exists xF(x)$

∴ 例题的证明

- | | |
|---|--------------|
| ① $\exists xH(x)$ | 附加前提引入 |
| ② $\forall x(F(x) \vee G(x))$ | 前提引入 |
| ③ $F(y) \vee G(y)$ | ② $\forall-$ |
| ④ $\forall x(G(x) \rightarrow \neg H(x))$ | 前提引入 |
| ⑤ $G(y) \rightarrow \neg H(y)$ | ④ $\forall-$ |
| ⑥ $H(y) \rightarrow \neg G(y)$ | ⑤ 置换 |
| ⑦ $\neg G(y) \rightarrow F(y)$ | ③ 置换 |
| ⑧ $H(y) \rightarrow F(y)$ | ⑥⑦ 假言三段论 |
| ⑨ $H(y) \rightarrow \exists xF(x)$ | ⑧ $\exists+$ |
| ⑩ $\exists xH(x) \rightarrow \exists xF(x)$ | ⑨ $\exists-$ |
| ⑪ $\exists(x)F(x)$ | ①⑩ 假言推理 |