6.4三维图形的几何变换技术

谢忠红
南京农业大学

三维图形变换

- 复习二维图形的图形变换

$$T=\begin{pmatrix} a & b & p \\ c & d & q \\ l & m & s \end{pmatrix}_{3*3}$$

$$T=\begin{pmatrix} a & b & p \\ c & d & q \\ l & m & s \end{pmatrix}_{3*3}$$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$：对图形进行缩放、旋转、对称、错切等变换。

$\begin{pmatrix} l & m \end{pmatrix}$：对图形进行平移变换。

$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$：对图形做投影变换。

$\begin{pmatrix} s \end{pmatrix}$：对整体图形进行伸缩变换。

- 三维图形的几何变换
- 是不是也是有一个变
- 换矩阵构成呢？

答案：Yes

$$[x \quad y \quad z \quad 1] \cdot T = [x' \quad y' \quad z' \quad 1]$$

$$T=\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & p \\ d & e & f & q \\ g & h & i & r \\ \hline l & m & n & s \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

可使三维图形实现比例、对称和旋转变换

$[l \quad m \quad n]$ 可使图形实现平移变换

$[s]$ 可使图形实现全比例变换

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

可是使图形实现透视变换

比例变换

$$T=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[x\ \ y\ \ z\ \ 1] \cdot T = [\,ax\quad ey\quad iz\quad 1\,]$$

$$= [\,x'\quad y'\quad z'\quad 1\,]$$

三维平移变换

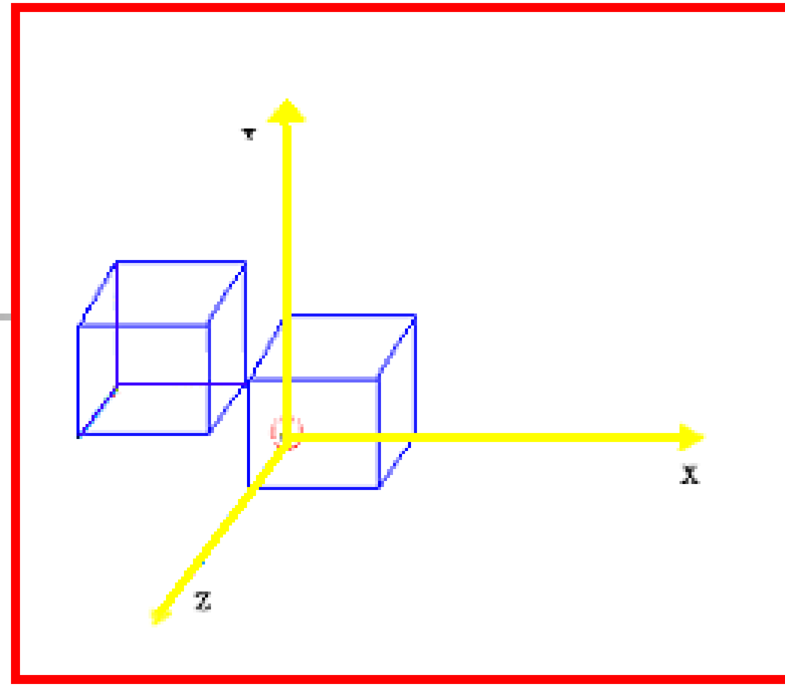
$$T=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ L & m & n & 1 \end{pmatrix}$$

$$[x\ \ y\ \ z\ \ 1]\ .T=[\ x+L\ \ y+m\ \ z+n\ \ 1]$$

$$=[\ x'\ \ y'\ \ z'\ \ 1]$$

例： 设L=100, m=100, n=100对棱长=100的立体

- 作平移变换。



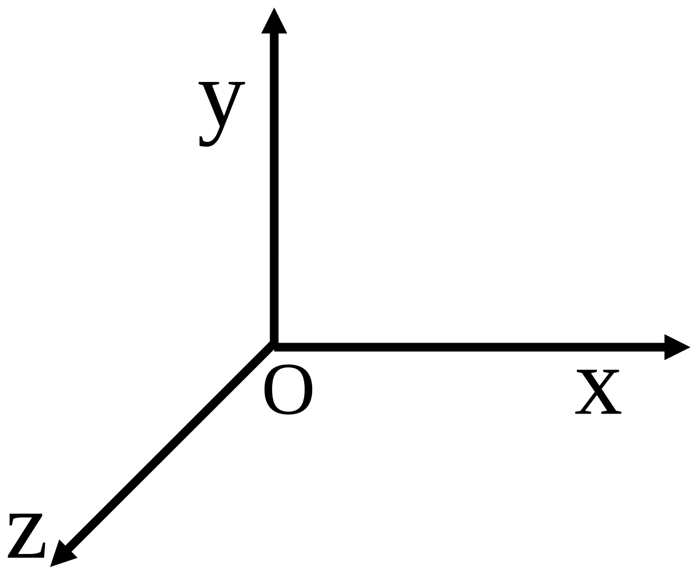
$$\begin{pmatrix} 0 & 100 & 100 & 1 \\ 0 & 0 & 100 & 1 \\ 100 & 0 & 100 & 1 \\ 100 & 100 & 100 & 1 \\ 0 & 100 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 100 & 0 & 0 & 1 \\ 100 & 100 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} ? \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$$

三维旋转变换(见课本185)

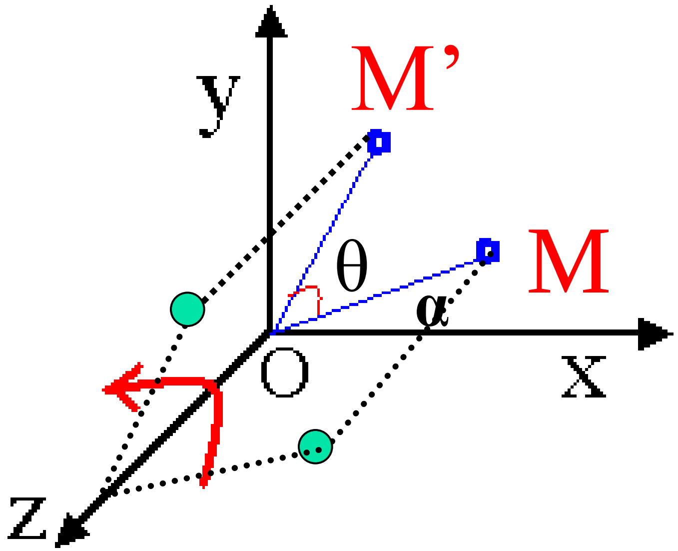
三种基本的旋转：绕x 轴旋转

绕y 轴旋转

绕z 轴旋转



(1)绕z轴旋转的公式为



- $x' = x\cos\theta - y\sin\theta$

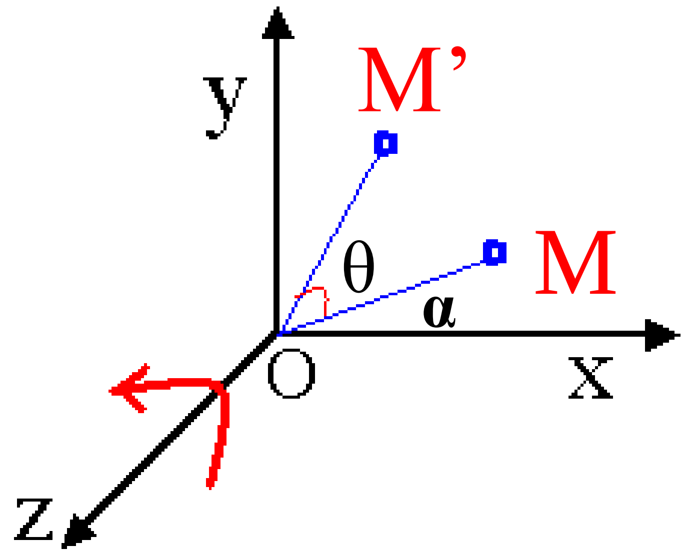
$y' = x\sin\theta + y\cos\theta$

$z' = z$

■ 证明令|OM|=|OM′|=R

- (1) $\begin{cases} x=R\cos\alpha \\ y=R\sin\alpha \end{cases}$

- (2) $\begin{cases} x' =R\cos(\alpha+\theta) \\ y' =R\sin(\alpha+\theta) \end{cases}$



- (3) $\begin{cases} x'=R(\cos\alpha\cos\theta-\sin\alpha\sin\theta) \\ y'=R(\sin\alpha\cos\theta+\cos\alpha\sin\theta) \end{cases}$

•旋转变换的特点： 绕Z轴进行旋转，只能改变图形的方位而图形的大小和形状不变

- $x' = x\cos\theta - y\sin\theta$

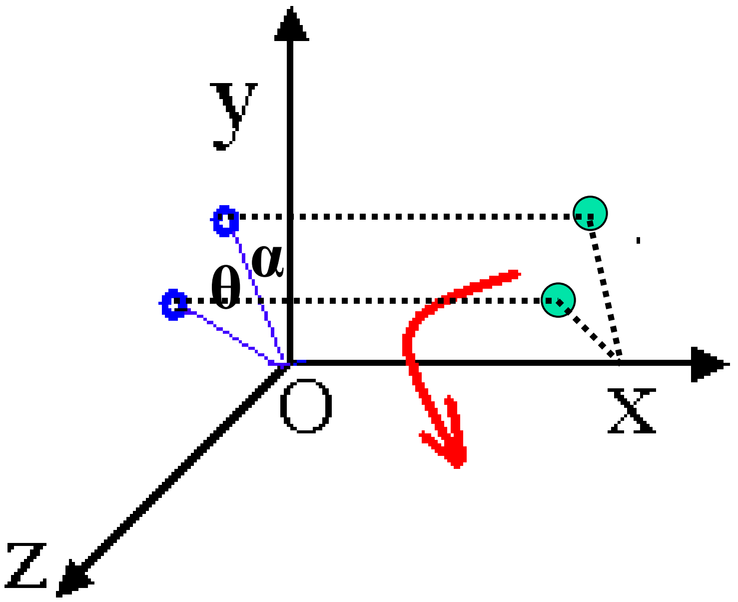
  $y' = x\sin\theta + y\cos\theta$

  $z' = z$

矩阵表示形式：

$$[x' \;\; y' \;\; z' \;\; 1] = [x \;\; y \;\; z \;\; 1]\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2)绕X轴旋转的公式为

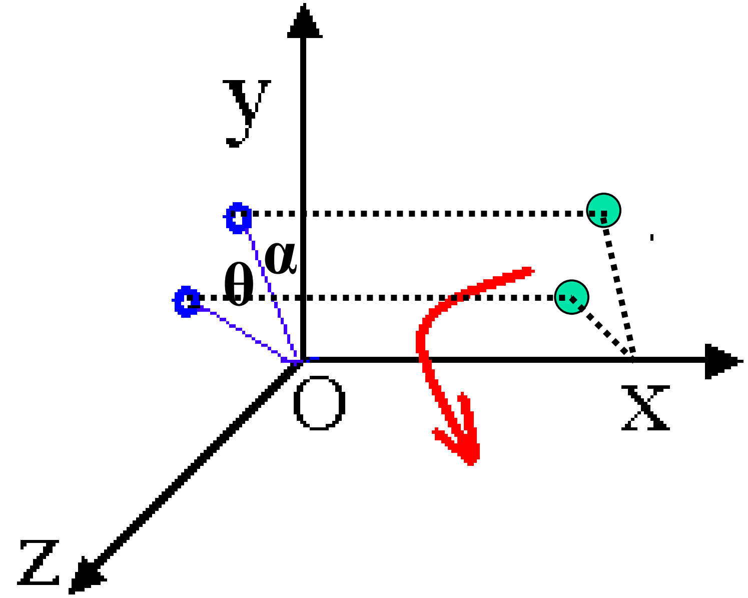


$$x' = x$$
$$y' = y\cos\theta - z\sin\theta$$
$$z' = y\sin\theta + z\cos\theta$$

证明令|OM|=|OM′|=

- $\begin{cases} y=R\cos\alpha \\ z=R\sin\alpha \end{cases}$ (1)

- (2) $\begin{cases} y'=R\cos(\alpha+\theta) \\ z'=R\sin(\alpha+\theta) \end{cases}$



- (3) $\begin{cases} y'=R(\cos\alpha\cos\theta-\sin\alpha\sin\theta) \\ z'=R(\sin\alpha\cos\theta+\cos\alpha\sin\theta) \end{cases}$

- **旋转变换的特点：** 绕x轴进行旋转，只能改变图形的方位而图形的大小和形状不变

$$x' = x$$
$$y' = y\cos\theta - z\sin\theta$$
$$z' = y\sin\theta + z\cos\theta$$

矩阵表示形式：

$$[x' \quad y' \quad z' \quad 1] = [x \quad y \quad z \quad 1]\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 绕y轴旋转的公式是？
- 如何用矩阵表示？

(3)绕y轴旋转的公式为

$$
\begin{aligned}
&\bullet x' = z\sin\theta + x\cos\theta \\
&y' = y \\
&z' = z\cos\theta - x\sin\theta
\end{aligned}
$$

$$
[x' \ y' \ z' \ 1] = [x \ y \ z \ 1]\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

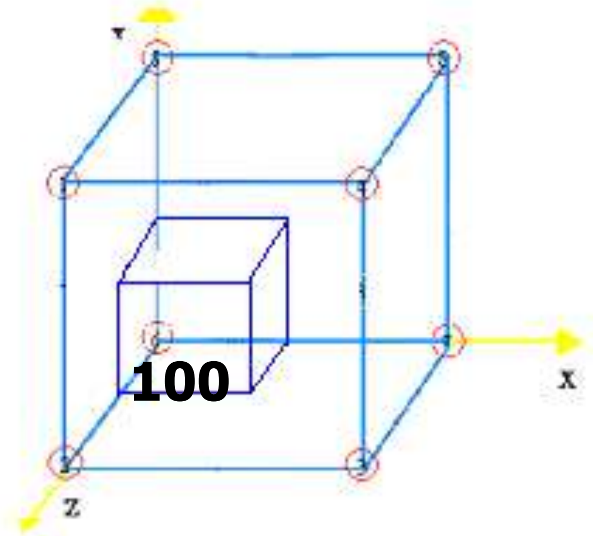
三维全比例变换

$$T=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{pmatrix}$$

$$[x\ \ y\ \ z\ \ 1]\ .T=[\,x\quad y\quad z\quad s]$$

$$=[\,x'\quad y'\quad z'\quad 1]$$

- **例：** 对棱长 =100的立体
- 作全比例变换。

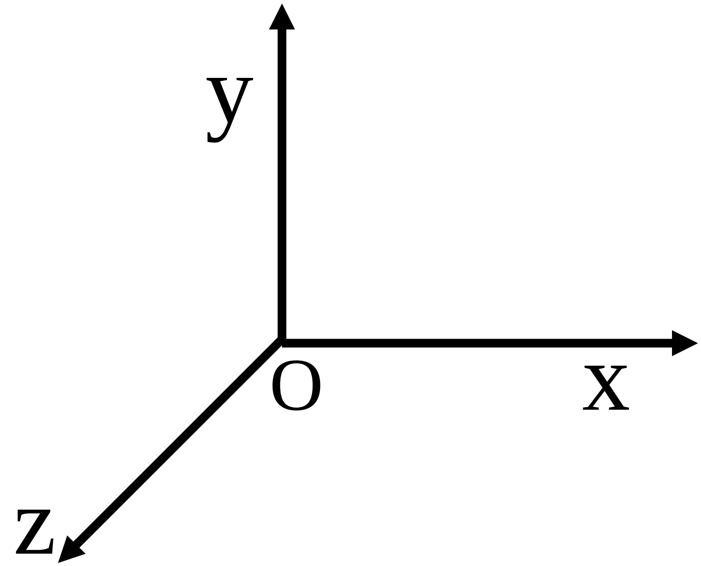


$$\begin{pmatrix} 0 & 100 & 100 & 1 \\ 0 & 0 & 100 & 1 \\ 100 & 0 & 100 & 1 \\ 100 & 100 & 100 & 1 \\ 0 & 100 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 100 & 0 & 0 & 1 \\ 100 & 100 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} ? \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$$

- 三维对称变换（关于平面的对称变换）

例：关于平面O-XY对称

$$T=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

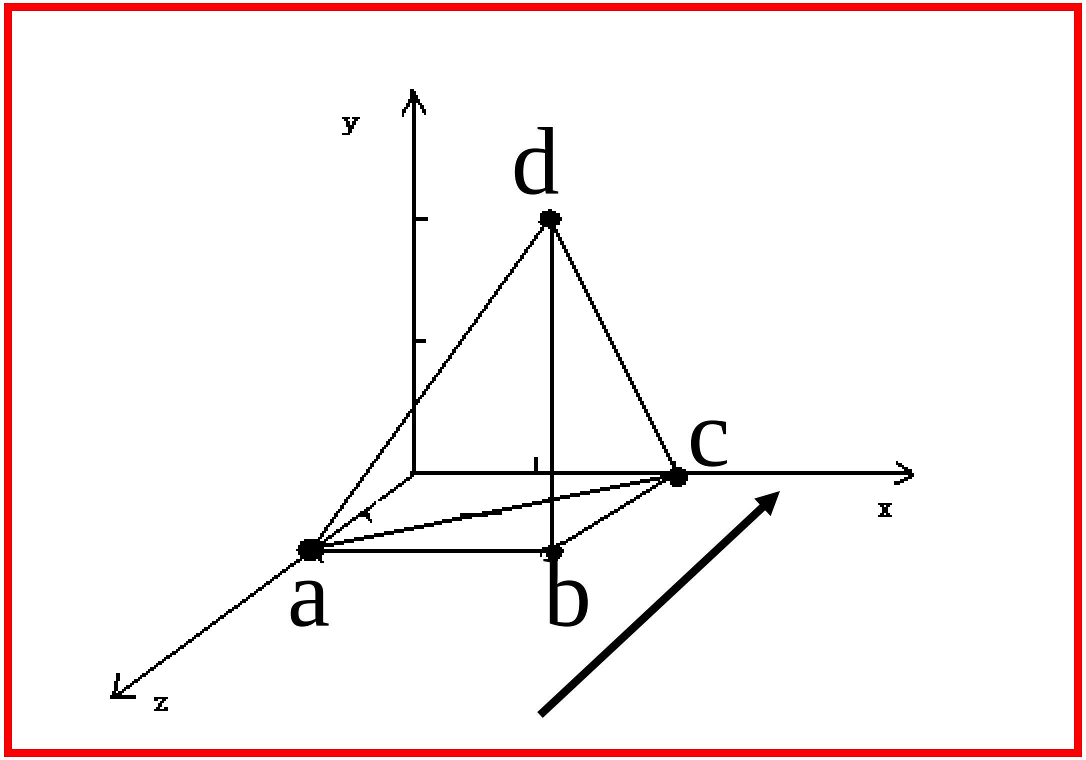


同理关于平面O-YZ平面对称、

关于O-XZ平面对称

- 例： 已知三棱锥各顶点坐标为(0,0,20), (20,0,20), (20,0,0), (10,20,10)
- （1）从Z轴方向向平面O-XY作平行投影，求出各顶点投影后的坐标。
- （2）先使得该三棱锥绕y轴旋转30º,然后再沿着y轴方向作平行投影，求出平行投影后的点的坐标

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 & 1 \\ 20 & 0 & 20 & 1 \\ 20 & 0 & 0 & 1 \\ 10 & 20 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

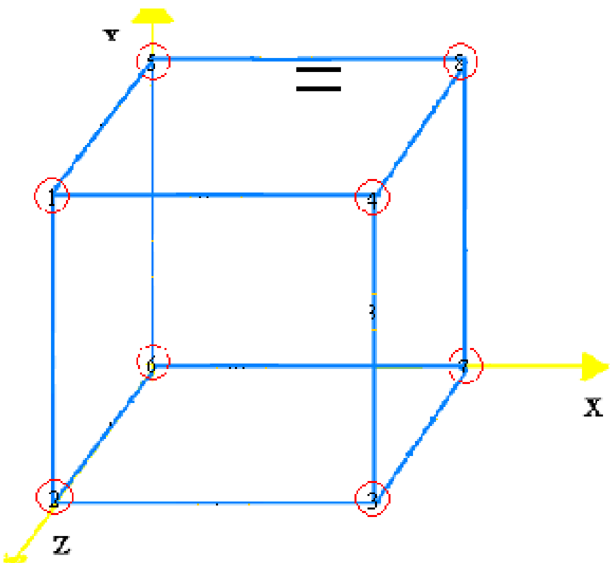


解题:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 & 1 \\ 20 & 0 & 20 & 1 \\ 20 & 0 & 0 & 1 \\ 10 & 20 & 10 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 & 1 \\ 20 & 0 & 20 & 1 \\ 20 & 0 & 0 & 1 \\ 10 & 20 & 10 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 30 & 0 & -\sin 30 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin 30 & 0 & \cos 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **例：** 已知某立方体棱长均为**100**，
- （**1**）试从（**0**，**0**，**400**）处向平面**O-XY**作透视投影，求出个顶点投影后的坐标并绘制投影图。
- **(2)**先使得该正方体绕**y**轴旋转**60**度，绕后再往**y**轴的正方向平移**50**，最后从（**0**，**0**，**400**）处向平面**O-XY**作透视投影试求出个顶点投影后的坐标并绘制投影图。

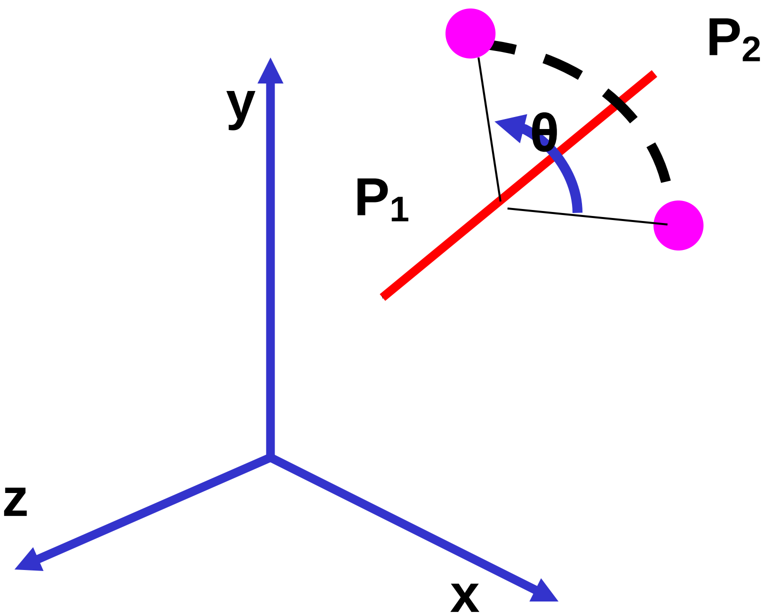


立体图形顶点坐标矩阵

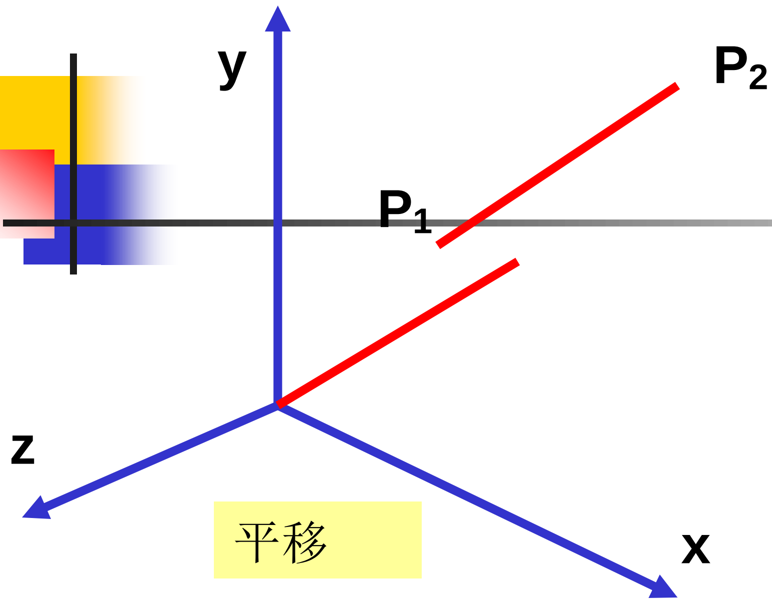
透视变换矩阵

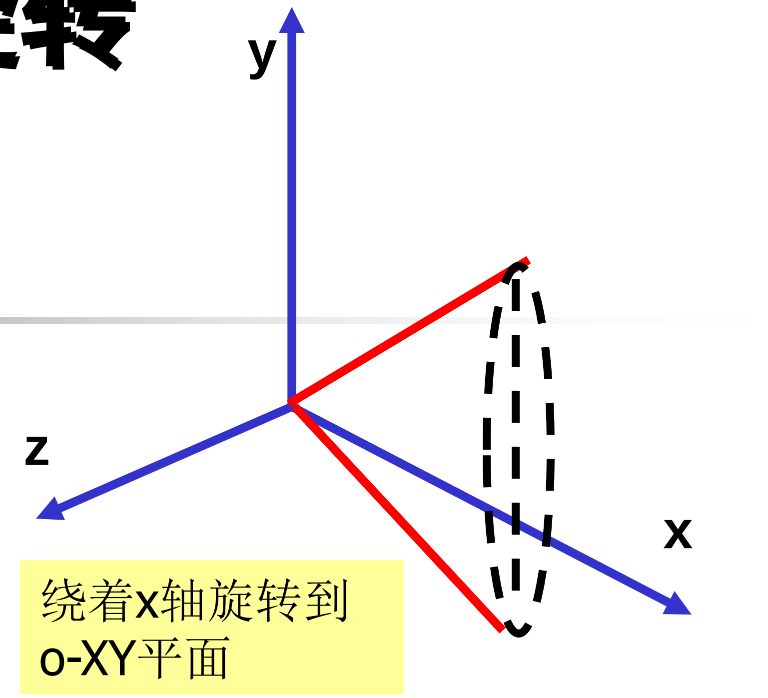
$$\begin{pmatrix} 0 & 100 & 100 & 1 \\ 0 & 0 & 100 & 1 \\ 100 & 0 & 100 & 1 \\ 100 & 100 & 100 & 1 \\ 0 & 100 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 100 & 0 & 0 & 1 \\ 100 & 100 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/400 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{变换后顶点地二维坐标矩阵} \end{pmatrix}$$

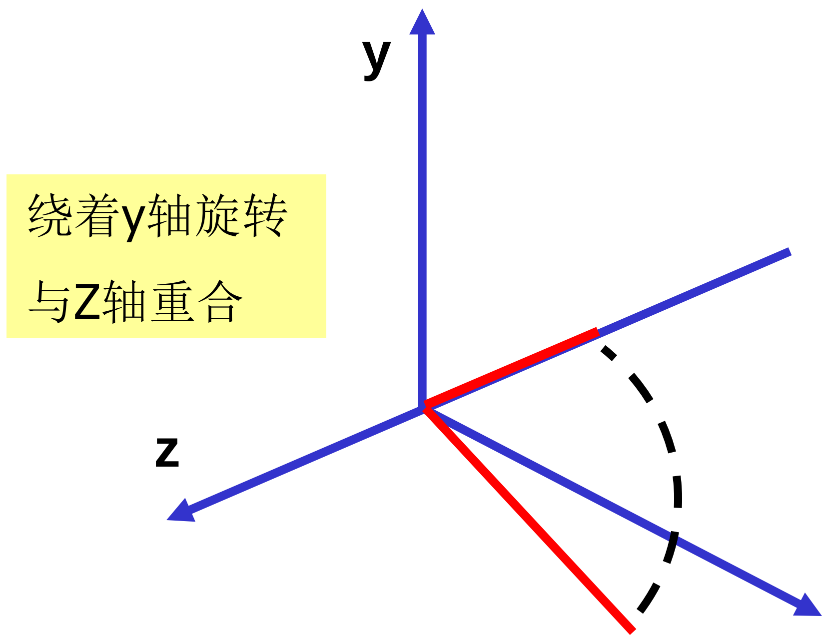
思考：物体绕着空间某根轴p1p2旋转θ角度的组合矩阵是什么？

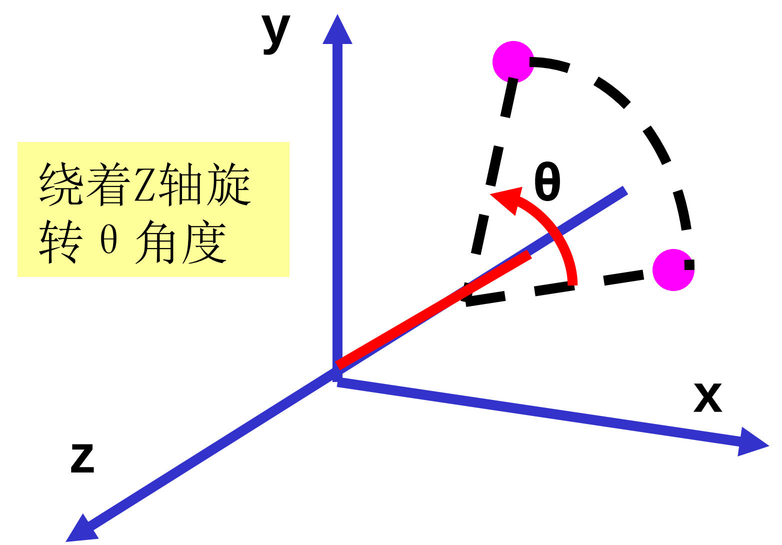


绕任意轴旋转

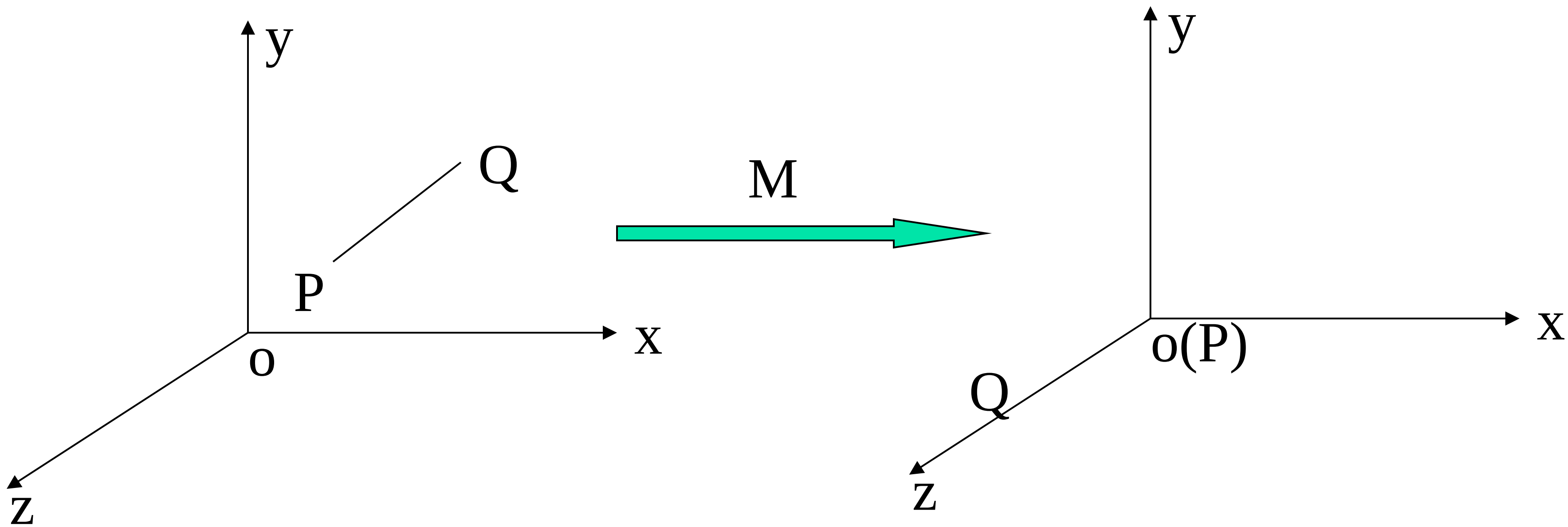

y
P2
P1
z
x
平移


y
z
x
绕着x轴旋转到
o-XY平面


y
绕着y轴旋转
与Z轴重合
z


y
绕着Z轴旋
转θ角度
θ
x
z

7、在坐标系oxyz中，求一个变换将P(1,1,1)Q(2,2,2)变换到z轴上：P在坐标原点，Q在z轴正半轴。



矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x_1 & -y_1 & -z_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & \sin a & 0 \\ 0 & -\sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos b & 0 & -\sin b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin b & 0 & \cos b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$