Chap21. 二重积分

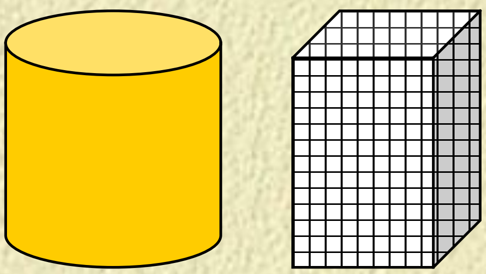
Sec.21.1 二重积分的概念

一. 二重积分的定义
二. 二重积分的性质

上页 下页 返回

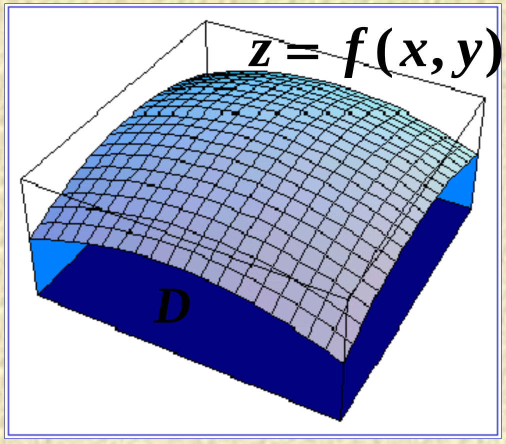
一.二重积分的定义

1.曲顶柱体的体积



柱体体积＝底面积×高,

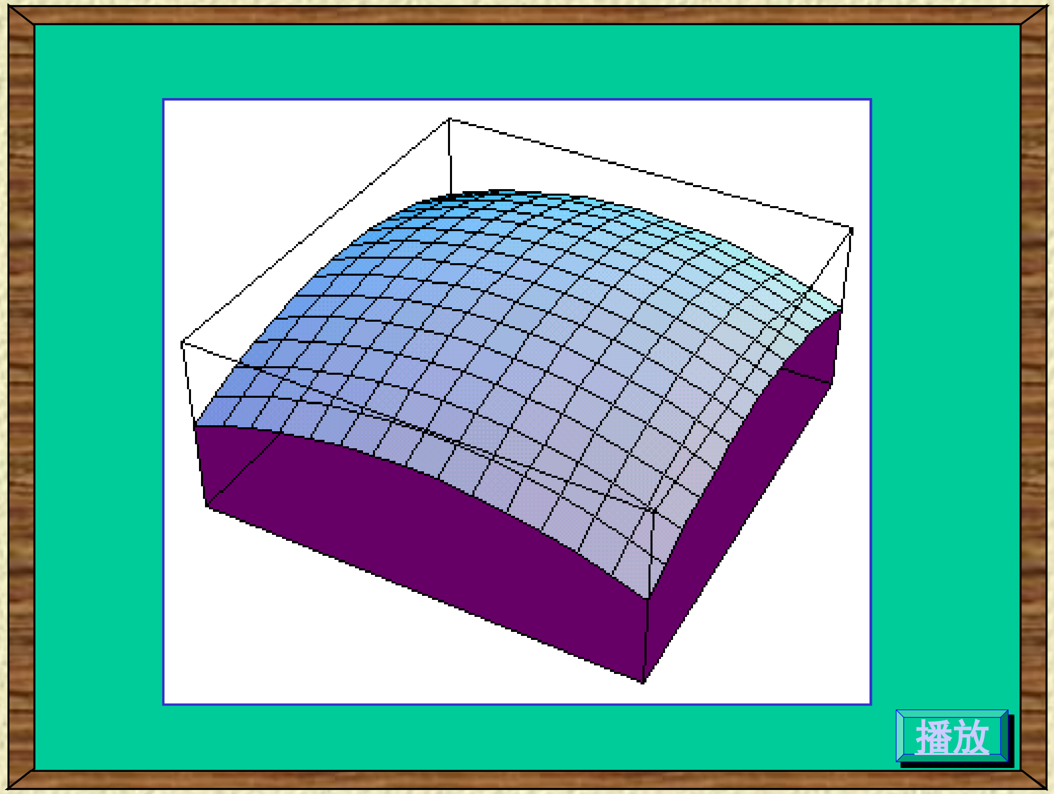
特点:平顶 .



曲顶柱体体积＝?

特点:曲顶 .

求曲顶柱体的体积采用 “分割、近似、求和、取极限”的方法,如下动画演示.



上页 下页 返回

曲顶柱体体积的计算

Q：设有界闭区域$D\subset\mathbb{R}^2,\forall(x,y)\in D$，

$z=f(x,y)\geq 0$.以D为底面,曲面

$z=f(x,y)$为顶的曲顶柱体体积$V=?$

A：(1).分割：对区域D做网格式的分割，

将D分割成n个小区域$\Delta_1,\Delta_2,\cdots\Delta_i,\cdots,\Delta_n$.

(2).近似：在小区域Δ_i内任取一点(ξ_i,η_i)，

则以Δ_i为底的小曲顶柱体体积为

$\Delta V_i\approx f(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta\sigma_i$，$\Delta\sigma_i$为$\Delta_i$的面积.

Q: 以 $D \subset \mathbb{R}^2$ 为底面,曲面 $z = f(x,y)$ 为顶的曲顶柱体体积 = ?

A: (3).求和: 所有小曲顶柱体体积之和即为曲顶柱体体积的近似值,

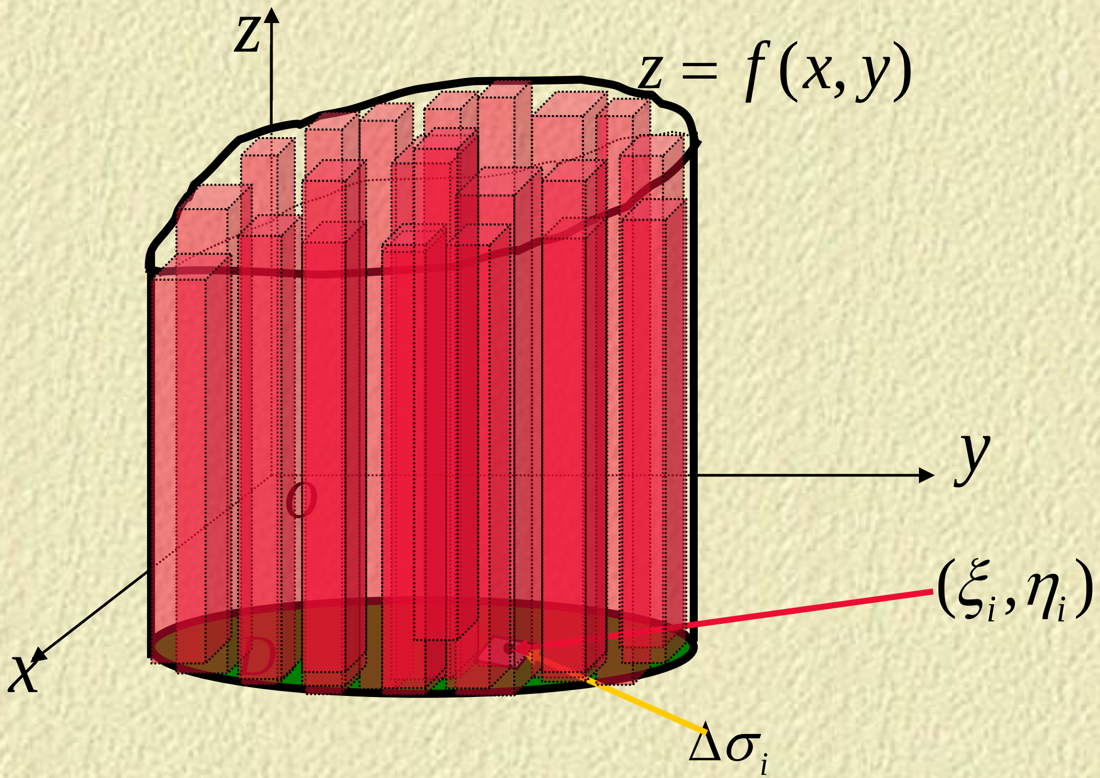
$$V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i .$$

(4).求极限: 曲顶柱体体积 V 为

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i ,$$

其中 $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \{ \Delta_i \text{ 的直径} \}$.

思想方法:以不变替代变化.



曲顶柱体体积$V=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$.

上页 下页 返回

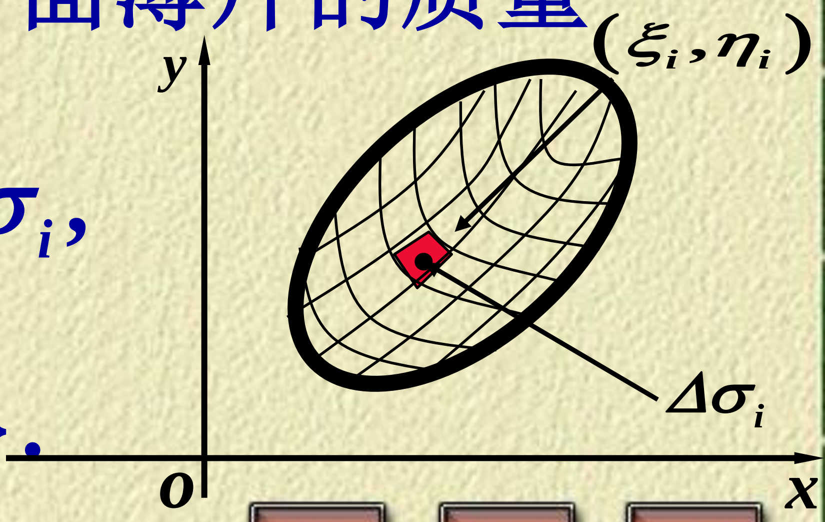
2.平面薄片的质量

Q: 设有界闭区域$D\subset\mathbb{R}^2, \forall(x,y)\in D,$
$\rho(x,y)\geq 0$.则面密度为$\rho(x,y)$的平面薄片D的质量$M=?$

A: 同样,我们由分割,近似,求和,求极限这四个步骤可以得到平面薄片的质量

$$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i,$$

其中$\lambda=\max\limits_{1\leq i\leq n}\{\Delta_i \text{ 的直径}\}$.



上页 下页 返回

3.二重积分定义

Def.1.设有界闭区域$D \subset \mathbb{R}^2$,在D上$f(x,y)$有界.

将区域D分割成n个小区域$\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_n$,$\Delta\sigma_i$为Δ_i的面积.在小区域Δ_i内任取一点(ξ_i,η_i),作近似$f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$,得Riemann和$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$.

若对区域D作任意的分割,在小区域内任取点(ξ_i,η_i),只要$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta_i\text{的直径}\}\to 0$都有

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i = I$$存在,则称I为函数$f(x,y)$在区域D上的二重积分.

上页 下页 返回

在有界闭区域$D\left(\subset \mathbb{R}^2\right)$上$f(x,y)$有界,

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

积分区域

被积函数

积分变量

被积表达式

面积微元

积分和

对二重积分定义的说明

(1).在上述极限中,要求对任意的分割及任意的介点极限均存在且相等.

当已知二重积分存在,要求其值时,可以采用特殊的分割,以方便计算.

(2).二重积分的几何意义与物理意义.

若在区域D上$f\left(x,y\right)\geq 0$,则$\iint_D f(x,y)d\sigma$是曲顶柱体的体积.若在D上$f\left(x,y\right)\leq 0$,则$\iint_D f(x,y)d\sigma$表示曲顶柱体体积的相反数.

$\left(A\right)$.以$z=f(x,y)$为顶,以D为底的曲顶柱体的体积$V=\iint_D \left|f(x,y)\right|d\sigma$.

$\left(B\right)$.面密度为$\rho(x,y)$的平面薄片D的质量

$$M=\iint_D \rho(x,y)d\sigma.$$

(3).在二重积分定义中,对区域D的划分是任意的,故如果在直角坐标系中用平行于坐标轴的直线网来划分D,则除了包含边界的一些小闭区域外,其余的小闭区域都是矩形闭区域.设矩形小闭区域 Δ_i 的边长为Δx_j和Δy_k,则

$$\Delta\sigma_i = \Delta x_j \times \Delta y_k$$

故在直角坐标系中,

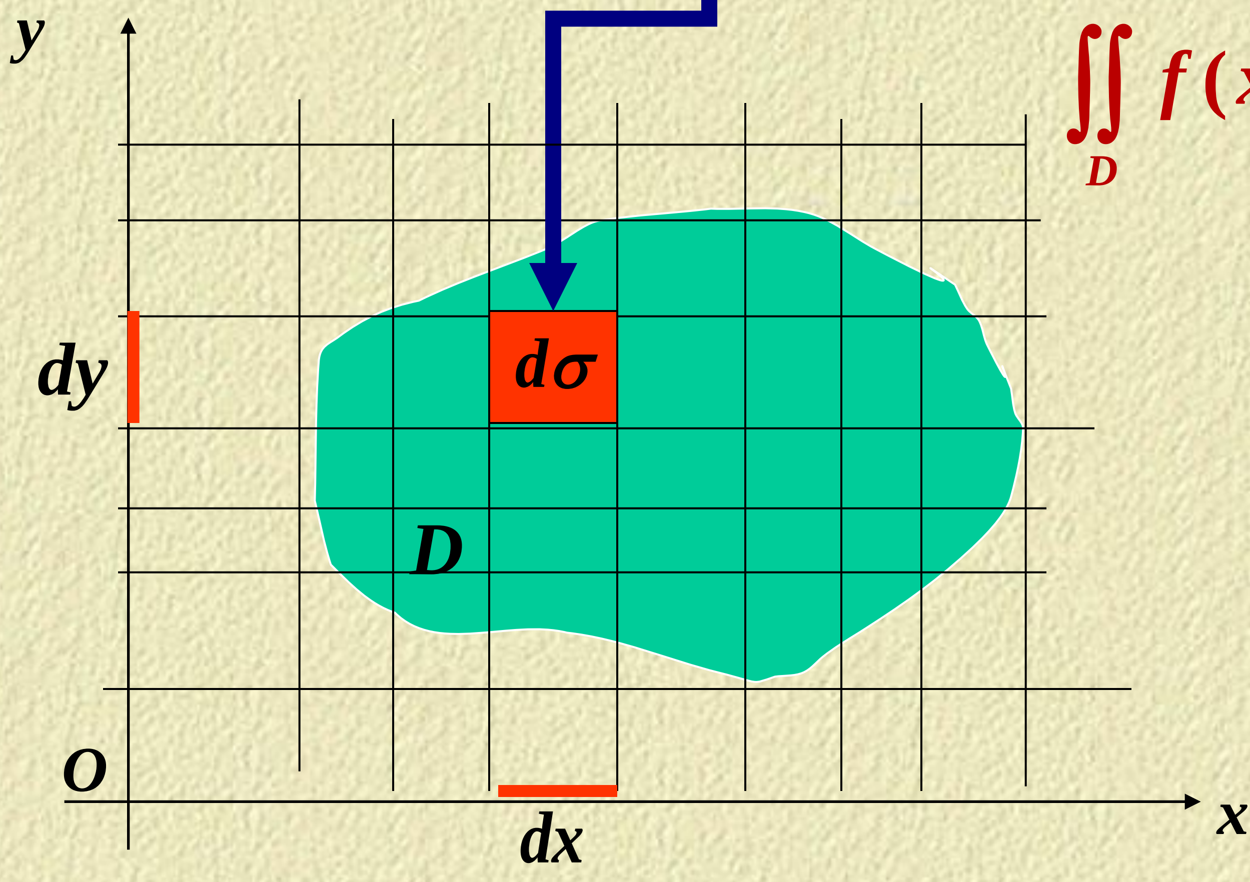
直角坐标系下面积微元$d\sigma$图示：

$$d\sigma = dxdy$$

$$\iint_D f(x,y)d\sigma$$

$$\|$$

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$



上页 下页 返回

4. 可积条件：

(*A*).可积的必要条件:

函数在实平面上的边界为分段光滑的简单闭曲线(即:不自相交) 围成的有界闭区域D上有界.

(*B*).可积的充分条件:

有界闭区域D上的连续函数必可积.

上页 下页 返回

例1.利用二重积分的几何意义给出结果：

(1). $I=\iint_D \sqrt{9-x^2-y^2}\,dxdy$，$D$为坐标面$xoy$上由曲线$x=\sqrt{9-y^2}$与$x=0$围成的区域.

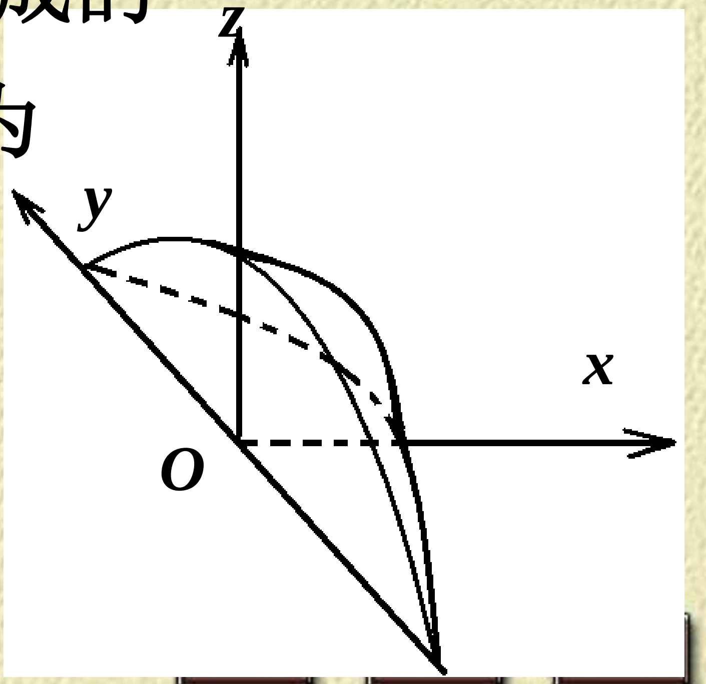
(2). $I=\iint_D (6-3x-2y)\,dxdy$，$D$为坐标面$xoy$上由直线$3x+2y=6$，$x=0$及$y=0$围成的区域.

上页 下页 返回

利用二重积分的几何意义给出结果:

(1). $I=\iint_D \sqrt{9-x^2-y^2}\,dxdy$, D为坐标面xoy上由曲线$x=\sqrt{9-y^2}$与$x=0$围成的区域.

解　曲线$x=\sqrt{9-y^2}$与$x=0$围成的区域D就是坐标面xoy上以O为圆心,半径为3的右半圆,所以该积分表示处于I,IV卦限的$\frac{1}{4}$球的体积.



区域D由$x=\sqrt{9-y^2}$与$x=0$围成,即坐标面xoy上以O为圆心,半径为3的右半圆,

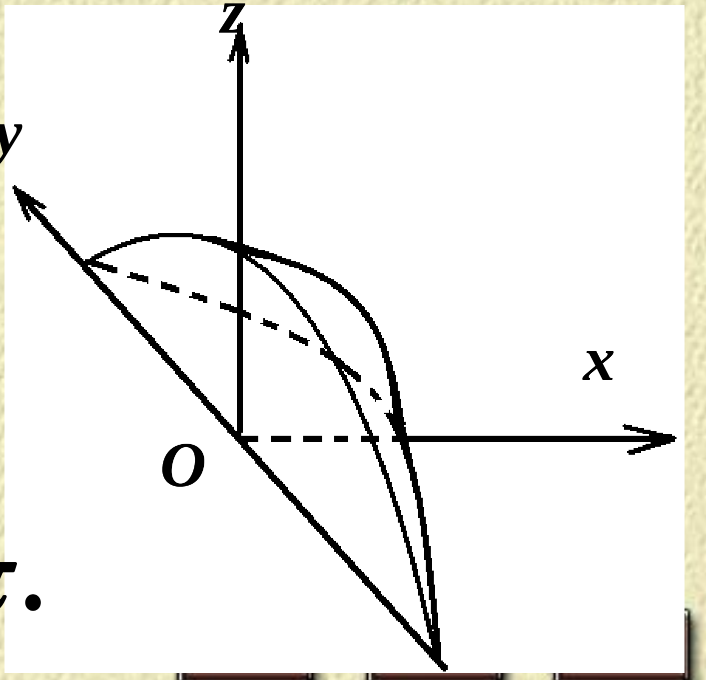
被积函数$z=\sqrt{9-x^2-y^2}$,即上半球面,

$\therefore$ 该积分表示处于

I, IV卦限的$\frac{1}{4}$球的

体积:$I=$

$\iint_D \sqrt{9-x^2-y^2}dxdy=9\pi.$



利用二重积分的几何意义给出结果：

(2). $I=\iint_D (6-3x-2y)dxdy$, D为坐标面xoy上

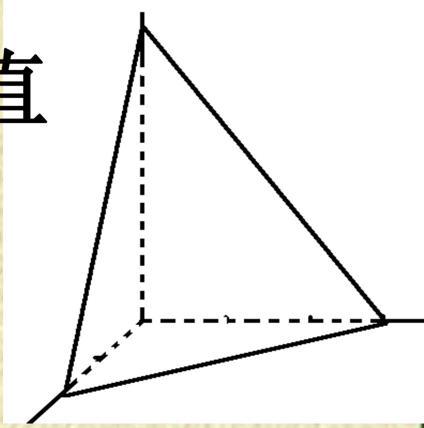
由直线$3x+2y=6, x=0$及$y=0$围成的区域.

$\because$由直线$3x+2y=6, x=0$及$y=0$围成的区域D

可表示为$D=\{(x,y) \mid x\ge 0, y\ge 0, 3x+2y\le 6\}$,

$\therefore$在区域D内 $z=6-3x-2y\ge 0.$

$\therefore$我们就可以看出该积分表示空间直



角坐标系中由平面 $3x+2y+z=6$

与坐标平面$x=0, y=0$及$z=0$围成

的四面体的体积.

上页 下页 返回

区域D由$3x+2y=6, x=0$及$y=0$围成,即坐标面xoy上的三角形区域,

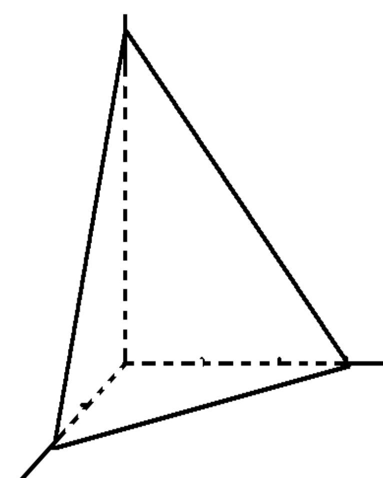
被积函数$z=6-3x-2y$,是一平面,注意平面方程$3x+2y+z=6$化成截距式:

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{6}=1$$

$\therefore$ 经过分析,可见该积分表示空间直角坐标系中由平面 $3x+2y+z=6$与坐标平面$x=0, y=0$及$z=0$围成的四面体的体积.

四面体的体积为

$$I=\iint_D (6-3x-2y)dxdy=\frac{1}{6}\times 2\times 3\times 6=6.$$



二. 二重积分的性质

二重积分与定积分有完全一样的性质.

以下假设有界闭区域D上$f(x,y)$可积.

性质1.(线性性质)

$$\iint_D kf(x,y)d\sigma = k\iint_D f(x,y)d\sigma, k\text{为常数},$$

$$\iint_D [f(x,y) \pm g(x,y)]d\sigma$$

$$= \iint_D f(x,y)d\sigma \pm \iint_D g(x,y)d\sigma.$$

上页 下页 返回

性质2.(区域可加性)

设区域D被分成D_1, D_2两部分,且D_1, D_2只有公共的边界.则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)d\sigma + \iint_{D_2} g(x,y)d\sigma.$$

性质3.$\iint_D 1d\sigma = \sigma(D)$,$\sigma(D)$为$D$的面积.

性质4.(保号性)在区域D上$f(x,y) \geq 0$,则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma \geq 0.$$

推论1.(保序性)在区域D上$f(x,y) \leq g(x,y)$,

则 $\iint_D f(x,y)d\sigma \leq \iint_D g(x,y)d\sigma.$

推论2.(绝对不等式)

$$\left|\iint_D f(x,y)d\sigma\right| \le \iint_D |f(x,y)|d\sigma,$$

当且仅当在D上f不变号时等号成立.

性质5.(估值不等式)

若在D上$m \le f(x,y) \le M$,

则$m\sigma(D) \le \iint_D f(x,y)d\sigma \le M\sigma(D)$.

性质6.若在D上$f(x,y)$连续,则$\exists(\xi,\eta)\in D$,

有 $\iint_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)\sigma(D)$.(积分中值定理)

例2.比较积分的大小：

$$\iint_D (x+y)d\sigma, \iint_D (x+y)^2 d\sigma \text{与} \iint_D e^{x+y} d\sigma,$$

其中$D: x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1.$

解　由$t \in \mathbb{R}, e^t \geq 1+t$得$e^{x+y} \geq x+y,$

在区域D内有$0 \leq x+y \leq 1,$

$$\Rightarrow 0 \leq (x+y)^2 \leq x+y \leq 1,$$

$$\therefore \iint_D e^{x+y} d\sigma \geq \iint_D (x+y) d\sigma \geq \iint_D (x+y)^2 d\sigma.$$

例3.不计算,估计积分

$$I=\iint_D\left(x^2+4y^2+9\right)d\sigma$$

的取值范围,$D: x^2+y^2\le 4.$

解 区域D的面积$\sigma\left(D\right)=4\pi,$

$\because$ 在区域D上 $9\le x^2+4y^2+9\le 25,$

$$\therefore 36\pi\le\iint_D\left(x^2+4y^2+9\right)d\sigma\le 100\pi.$$