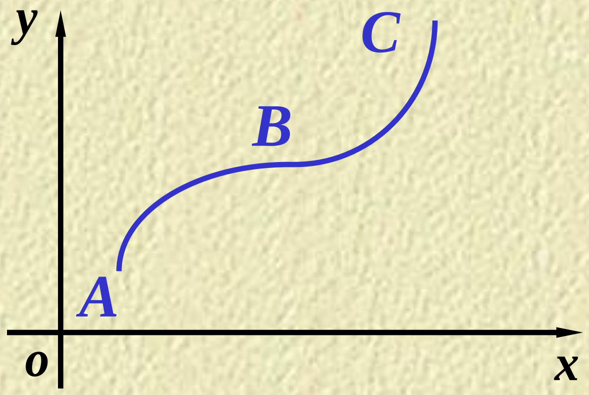
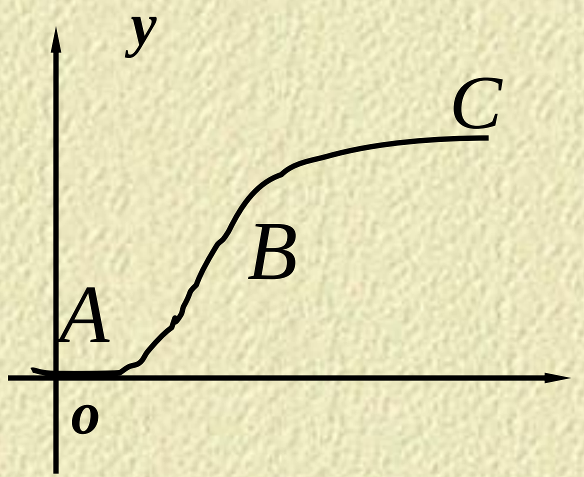
§ 6.5 函数的凸性

问题:如何研究曲线的弯曲方向?

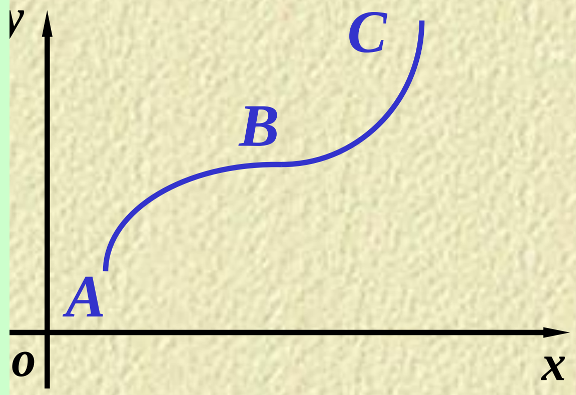


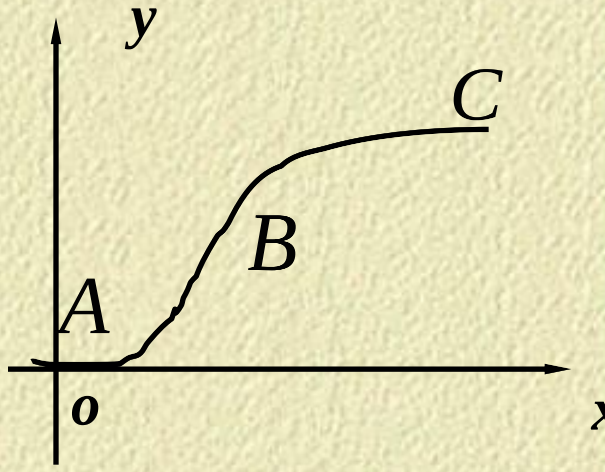
上下两条曲线的弯曲状况不同，意味着什么？如何描述？



上页 下页 返回

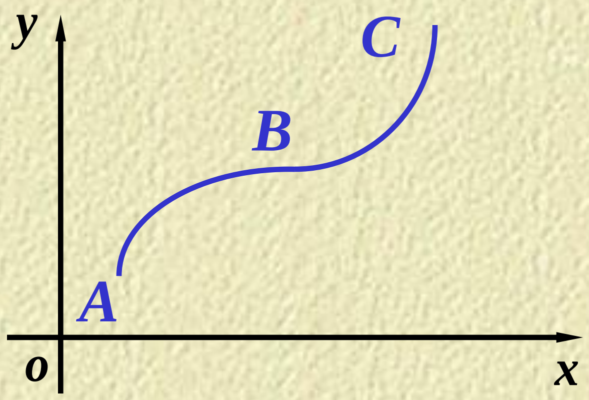
记得在一本书上看到过这样一段话：**1972**年当时的美国总统 ***Nixon*** 一次在为谋求连任而作的一场演讲中讲到：“近一段时间，国内的通货膨胀率的增长率在降低。”一位数学教授 ***Hugo Rocci*** 就记下了这一段话，说这是美国首位在任总统在进行演讲时援引了高阶导数。

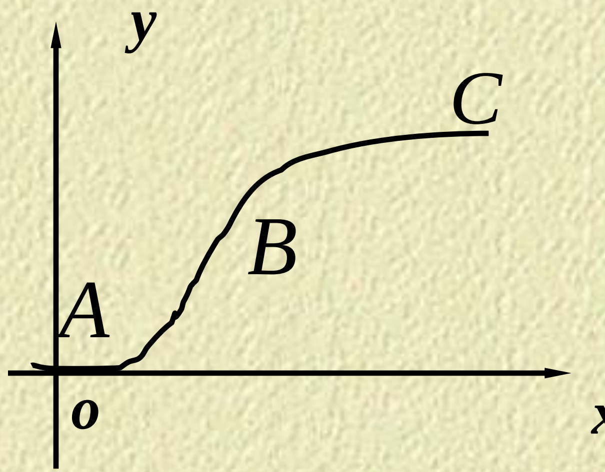




上页 下页 返回

右边两条曲线反映了函数都是单调增加的，但是增加的情况大不相同。上图的函数变化过程是：快增—缓增—快增，而下图函数的变化过程是：缓增—快增—缓增。这就反映了事物发展的本质的差别。

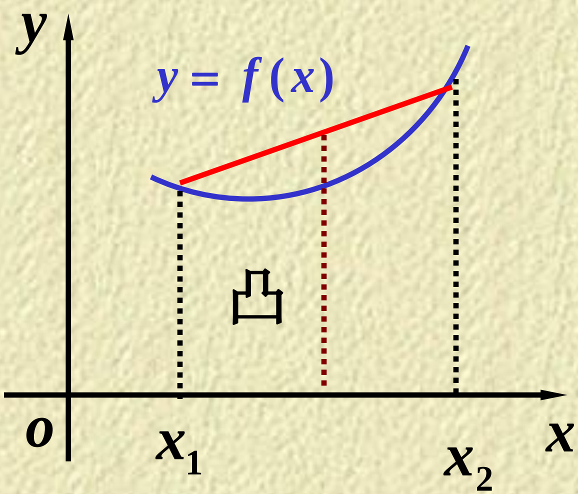




所以说，我们研究曲线的弯曲情况仍是为了研究函数的性状。

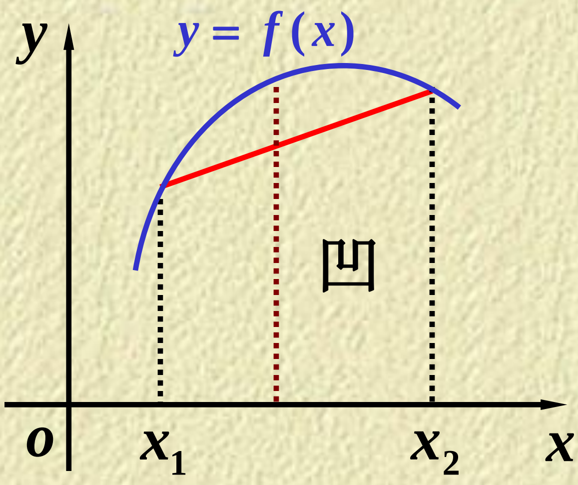
上页 下页 返回

问题:如何研究曲线的弯曲方向?



图形上任意弧段位

于所张弦的下方

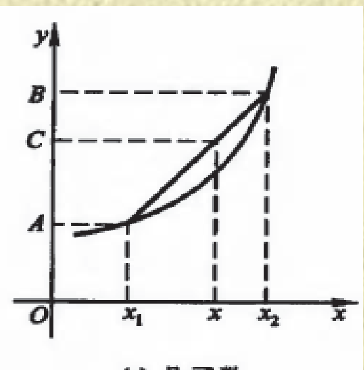


图形上任意弧段位

于所张弦的上方

上页 下页 返回

1. 曲线凹凸的判定

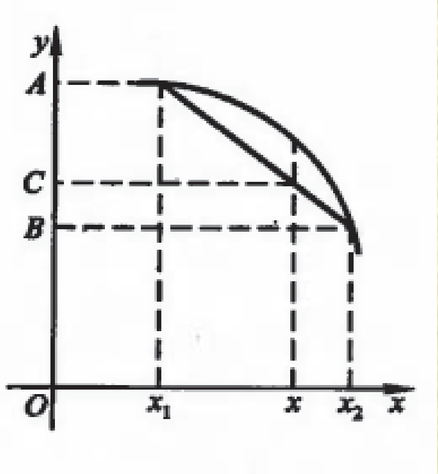


(a) 凸函数

定义1. 设 $f(x)$ 为定义在区间I上的函数,若$\forall\ x_1, x_2 \in I, \forall \lambda \in (0,1)$总有

$$f\left(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2\right) \le \lambda f\left(x_1\right) + (1-\lambda) f\left(x_2\right),$$

则称$f(x)$为区间I上的凸函数,相应的曲线 $y = f(x)$在区间I上是凸的曲线.



(b) 凹函数

反之,若总有

$$f\left(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2\right) \ge \lambda f\left(x_1\right) + (1-\lambda) f\left(x_2\right),$$

则称 $f(x)$为区间 I 上的凹函数.

定义1. 设 $f(x)$ 为定义在区间I上的函数,若 $\forall\ x_1, x_2 \in I, \forall \lambda \in (0,1)$总有

$$f\left(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2\right) \le \lambda f\left(x_1\right) + (1-\lambda) f\left(x_2\right),$$

则称$f(x)$为区间I上的凸函数,相应的曲线 $y = f(x)$在区间I上是凸的曲线.

特别地,上述定义中的$\lambda = 1/2$,

$\forall\ x_1, x_2 \in I$,有$f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right) \le \dfrac{1}{2}\left(f\left(x_1\right) + f\left(x_2\right)\right)$,

则称 $f(x)$是区间I上的凸函数.

注 1.由定义知,若 f 是区间I内的凹函数,
则 $-f$ 是区间I 内的凸函数.

2. 定义中的不等式

$$f\left(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\right)\le \lambda f\left(x_1\right)+(1-\lambda)f\left(x_2\right),$$

$\lambda\in(0,1)$等价于:对$\forall x\in\left(x_1,x_2\right)$,有

$$f(x)\le \frac{x_2-x}{x_2-x_1}f\left(x_1\right)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f\left(x_2\right),$$

记$\dfrac{x_2-x}{x_2-x_1}=\lambda\in(0,1)$,结论是显然的.

引理 f为I上的凸函数$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2, x_3 \in I$,

$x_1 < x_2 < x_3$,总有$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$.

证明 [必要性]记$\lambda = \dfrac{x_3-x_2}{x_3-x_1}$,则$x_2 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_3$.

由f的凸性知道

$$f(x_2) = f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_3) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_3)$$

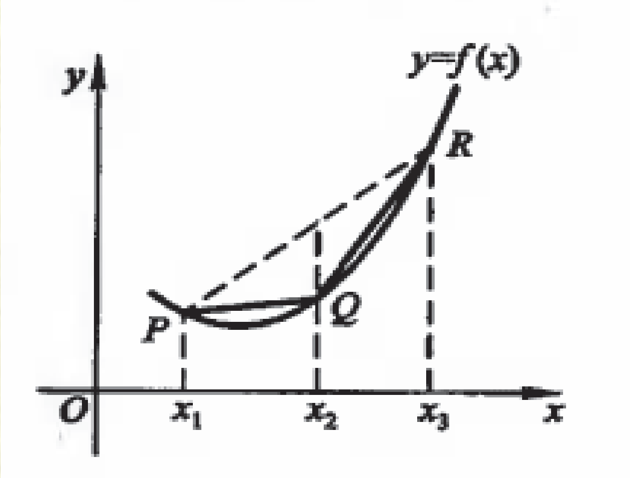
$= \dfrac{x_3-x_2}{x_3-x_1} f(x_1) + \dfrac{x_2-x_1}{x_3-x_1} f(x_3)$,从而有

$$(x_3-x_1) f(x_2) \le (x_3-x_2) f(x_1) + (x_2-x_1) f(x_3),$$

整理即得 $x_1 < x_2 < x_3$,$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$.

[充分性] 在$[x_1, x_3]$上任取一点 $x_2 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_3$,

$\lambda \in (0,1)$,即$\lambda = \dfrac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}$.



由必要性的推导逆过程,

可证得

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_3) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_3),$$

同理可证, f为I上的凸函数的充要条件是:

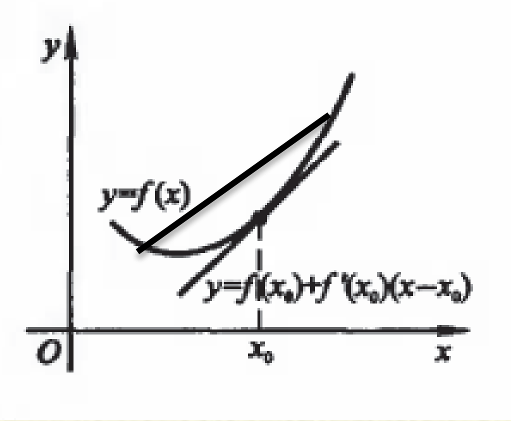
对于I上任意三点$x_1 < x_2 < x_3$,有

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \le \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

上页 下页 返回

定理1. 设为区间上的可导函数,

则下述论断互相等价:



1° f为 I上凸函数;

2° f'为 I上的增函数;

3° 对 I上的任意两点x_0, x,有

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

注意:论断3°的几何意义是,

曲线总是在它的任一切线的上方.

这是可导凸函数的几何特征.

上页 下页 返回

$1^\circ \Rightarrow 2^\circ$ f为 I上凸函数 $\Rightarrow f'$为 I上增函数.

任取 I上两点$x_1, x_2\left(x_1 < x_2\right)$及充分小的正数 h

由于 $x_1 - h < x_1 < x_2 < x_2 + h$

$$\frac{f\left(x_1\right)-f\left(x_1-h\right)}{x_1-\left(x_1-h\right)} \le \frac{f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)}{x_2-x_1} \le \frac{f\left(x_2+h\right)-f\left(x_2\right)}{\left(x_2+h\right)-x_2}$$

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f\left(x_1\right)-f\left(x_1-h\right)}{h} \le \lim_{h\to 0+}\frac{f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)}{x_2-x_1}$$

$$\le \lim_{h\to 0+}\frac{f\left(x_2+h\right)-f\left(x_2\right)}{h},$$

$$f'\left(x_1\right) \le \frac{f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)}{x_2-x_1} \le f'\left(x_2\right) \Rightarrow f'\text{为 } I\text{上增函数.}$$

$2^\circ \Rightarrow 3^\circ$ 设$x_0, x \in I, x_0 \neq x$,则

(1). $x_0 < x$ 时,在$[x_0, x]$上应用

*Lagrange – th.*和 f'递增条件,有

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) \geq f'(x_0)(x - x_0),$$

移项得 $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$

(2). $x_0 > x$ 时,在$[x, x_0]$上应用

*Lagrange – th.*和 f'递增条件,有

$$f(x_0) - f(x) = f'(\xi)(x_0 - x) \leq f'(x_0)(x_0 - x)$$

同样得 $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$

$3^\circ \Rightarrow 1^\circ$ 设以 x_1, x_2为 I上任意两点，

$$x_0 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, 0<\lambda<1$$

$$x_1 - x_0 = x_1 - \lambda x_1 - (1-\lambda)x_2 = (1-\lambda)(x_1 - x_2),$$

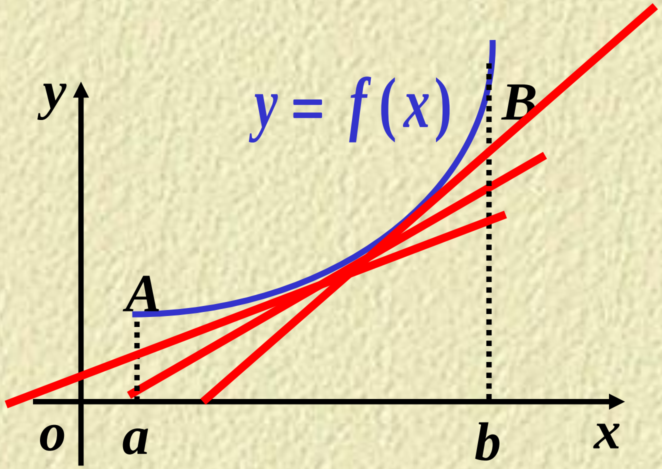
$$x_2 - x_0 = x_2 - \lambda x_1 - (1-\lambda)x_2 = \lambda(x_2 - x_1),$$

则有 $f(x_1) \ge f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0),$

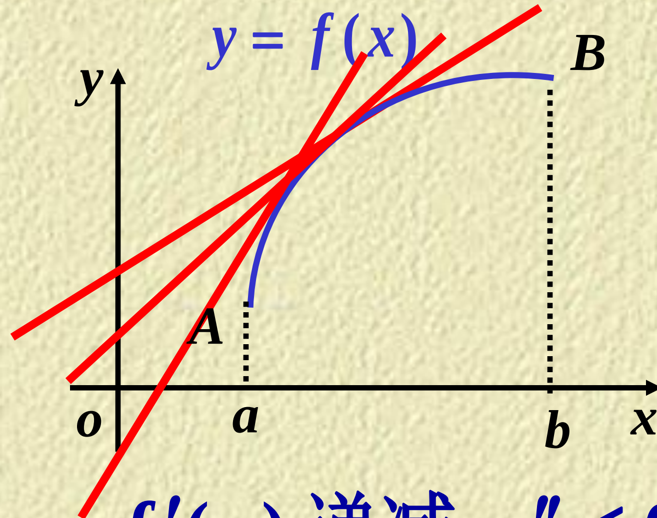
$$f(x_2) \ge f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0),$$

于是经整理得，$\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$

$$\ge f(x_0) = f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2).$$



$f'(x)$ 递增 $y'' \ge 0$



$f'(x)$ 递减 $y'' \le 0$

定理2. 设f为区间I上的二阶可导函数,

则在I上f为凸函数 $\Leftrightarrow f''(x) \ge 0, x \in I$.

证明 [充分性] $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2, \forall \lambda \in (0,1)$,

记 $x_0 = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2, h = x_2 - x_1$,

则 $x_0 - x_1 = (1-\lambda) h$, $x_2 - x_0 = \lambda h$,

对$f(x)$在$[x_1, x_0]$,$[x_0, x_2]$上应用$Lagrange-th.$

$$f(x_0) - f(x_1) = f'(\xi_1)(x_0 - x_1), (x_1 < \xi_1 < x_0)$$

$$f(x_2) - f(x_0) = f'(\xi_2)(x_2 - x_0), (x_0 < \xi_2 < x_2)$$

$$\therefore \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) - f(x_0)$$

$$= \lambda(1-\lambda)h\left[f'(\xi_2) - f'(\xi_1)\right]$$

上页 下页 返回

$$\lambda f\left(x_1\right)+\left(1-\lambda\right)f\left(x_2\right)-f\left(x_0\right)$$

$$=\lambda\left(1-\lambda\right)h\left[f'\left(\xi_2\right)-f'\left(\xi_1\right)\right],\left(\xi_1<x_0<\xi_2\right),$$

$f''(x)\geq 0 \Rightarrow f'(x)$在区间 I 内单调增加，

由$\xi_2>\xi_1, f'\left(\xi_2\right)-f'\left(\xi_1\right)\geq 0,$

$$\Rightarrow \lambda f\left(x_1\right)+\left(1-\lambda\right)f\left(x_2\right)-f\left(x_0\right)\geq 0,$$

即$\forall x_1, x_2\in I, x_1<x_2, \forall\lambda\in\left(0,1\right),$

$$f\left(\lambda x_1+\left(1-\lambda\right)x_2\right)\leq \lambda f\left(x_1\right)+\left(1-\lambda\right)f\left(x_2\right).$$

以上证明对于$x_1>x_2$的情形也是成立的,

$\therefore\ f''(x)\geq 0, x\in I \Rightarrow f(x)$在区间 I 内是凸函数.

以上各步骤逆推就得到了必要性的证明.

证二 $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2, \forall \lambda \in (0,1)$,

记 $x_0 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, h = x_2 - x_1$,

则 $x_0 - x_1 = (1-\lambda)h, x_2 - x_0 = \lambda h$,

应用$Taylor - th.$

$$f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) + \frac{1}{2!}f''(\xi)(x_1 - x_0)^2,$$

$$f(x_2) = f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0) + \frac{1}{2!}f''(\eta)(x_2 - x_0)^2,$$

其中 $x_1 < \xi < x_0 < \eta < x_2$,

$$\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) - f(x_0)$$

$$= \frac{1}{2!}\lambda(1-\lambda)\left[(1-\lambda) f''(\xi) + \lambda f''(\eta)\right]h^2,$$

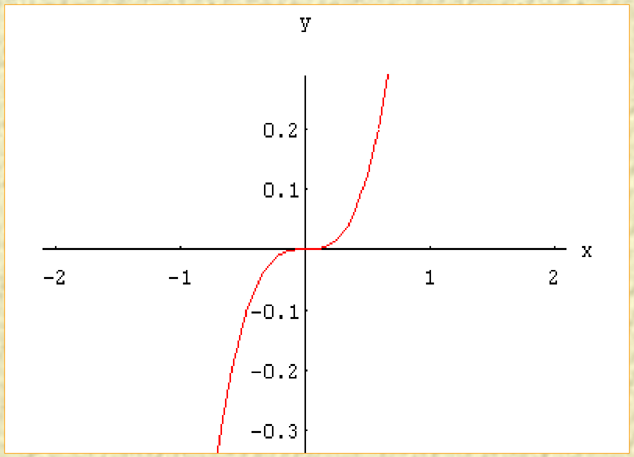
定理充分性的证明立得.

必要性的证明也是易给的.

上页 下页 返回

例1.判断曲线 $y=x^3$ 的凹凸性.

解 $\because y'=3x^2, y''=6x,$



当$x<0$时, $y''<0,$

$\therefore$ 曲线 在$(-\infty,0]$为凹的;

当$x>0$时, $y''>0,$

$\therefore$ 曲线 在$[0,+\infty)$为凸的;

点$(0,0)$是曲线由凹变凸的分界点.

上页 下页 返回

2.曲线的拐点

2.定义 连续曲线上凹弧与凸弧的分界点称为曲线的拐点.

定理3. 如果函数$f(x)$在$\left(x_0-\delta, x_0+\delta\right)$内二阶可导,则点$\left(x_0, f(x_0)\right)$是曲线$y=f(x)$的拐点的必要条件为 $f''(x_0)=0$.

上页 下页 返回

定理3. 如果函数$f(x)$在$(x_0-\delta, x_0+\delta)$内二阶可导,则点$(x_0, f(x_0))$是曲线$y=f(x)$的拐点的必要条件为 $f''(x_0)=0$.

证明$\because$ $f(x)$ 二阶可导,$\therefore$ $f'(x)$ 存在且连续,

又$\because (x_0, f(x_0))$是拐点,

则 $f''(x)=\left(f'(x)\right)'$ 在x_0两边变号,

$\therefore$ $f'(x)$在x_0取得极值,由可导函数取得极值的条件, $\therefore$ $f''(x_0)=0$.

上页 下页 返回

曲线的拐点 的确定方法

方法1.设函数$f(x)$在x_0的去心邻域内二阶可导,且$f''(x_0)=0$或不存在 .

(1). x_0近旁两侧$f''(x)$变号,点$(x_0, f(x_0))$是拐点 .

(2). x_0近旁两侧$f''(x)$不变号,点$(x_0, f(x_0))$不是拐点.

方法2.设函数 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内三阶可导,且 $f''(x_0)=0$,而 $f'''(x_0)\neq 0$,那末$(x_0, f(x_0))$是曲线 $y=f(x)$的拐点 .

思考题

设 $f(x)$在(a,b)内二阶可导，且 $f''(x_0)=0$，其中 $x_0\in(a,b)$，则$(x_0, f(x_0))$是否一定为曲线 $f(x)$的拐点？举例说明.

上页 下页 返回

思考题解答

具体例子 拐点情形 二阶导数情形 $x_0=0$	点 $(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点	点 $(x_0,f(x_0))$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点
x_0 处 $f(x_0)$ 二阶导数存在且 $f''(x_0)=0$	$f(x)=x^3$ (0,0)是 拐点	$f(x)=x^4$ (0,0)不是 拐点
x_0 处 $f(x_0)$ 二阶导数不存在	$f(x)=x^{1/3}$ (0,0)是 拐点	$f(x)=x^{2/3}$ (0,0)不是 拐点

上页 下页 返回

例2.证明不等式：在$x>0, y>0$时，

有 $x\ln x+y\ln y\geq(x+y)\ln\frac{x+y}{2}$.

证明 令 $f(t)=t\ln t, t>0$,

则 $f'(t)=\ln t+1$, $f''(t)=\frac{1}{t}$,

$t>0$ 时 $f''(t)>0$,

$\therefore f(t)=t\ln t$ 在 $\mathbb{R}^{+}$上是凸函数,

于是$\frac{1}{2}[f(x)+f(y)]\geq f\left(\frac{x+y}{2}\right)$.

$\therefore\ f(t)=t\ln t$ 在 $\mathbb{R}^{+}$上是凸函数,

于是$\frac{1}{2}[f(x)+f(y)]\geq f\left(\frac{x+y}{2}\right)$.

$\therefore \forall x,y\in\mathbb{R}^{+}$,有

$$\frac{1}{2}[x\ln x+y\ln y]\geq\frac{x+y}{2}\ln\frac{x+y}{2},$$

即 $x\ln x+y\ln y\geq(x+y)\ln\frac{x+y}{2}$.

上页 下页 返回

继续例2的讨论:证明不等式

$$x\ln x + y\ln y \geq (x+y)\ln\frac{x+y}{2},(x>0,y>0)$$

前面是使用函数的凸性来证明不等式的.可是稍作变化,我们就会发现,也可以用其他的方法来证明,我想“乐于尝试,善于变化”是我们大家在解决数学问题时都应该具有的意识.

$x>0,y>0,$令$t=y/x$,那么

$$x\ln x + y\ln y \geq (x+y)\ln\frac{x+y}{2}$$

$$\Leftrightarrow t\ln t \geq (1+t)\ln\frac{1+t}{2},t>0,$$

那么,现在的问题就是要证明

$$t>0\text{时},\varphi(t)=t\ln t-\left(1+t\right)\ln\frac{1+t}{2}\geq 0,$$

注意到,在$t=1$ 时$\varphi(1)=0$,

所以只要能证明$t>0$ 时,$\varphi(1)$是

函数$\varphi(t)$在$t>0$ 时的最小值即可.

$t>0$, $\varphi(t)=t\ln t-(1+t)\ln\dfrac{1+t}{2}$,

$$\varphi'(t)=1+\ln t-\ln\frac{1+t}{2}-(1+t)\frac{1}{1+t}=\ln\frac{2t}{1+t},$$

$\therefore 0<t<1$ 时, $\varphi'(t)<0, t>1$ 时, $\varphi'(t)>0$,

又$t>0$ 时$\varphi(t)$是一个连续函数,

$\therefore \varphi(1)=0$是函数$\varphi(t)$在$t>0$时取得的最小值.

于是,令$t=y/x, x>0, y>0$,那么

$$x\ln x+y\ln y\geq(x+y)\ln\frac{x+y}{2}.$$

模仿练习

证明不等式：$\forall x, y \in \mathbb{R}$，

$$4e^{x+y} \le \left(e^{x} + e^{y}\right)^{2}.$$

上页 下页 返回

命题 1. f 为开区间 I 上的凸函数, 则 f 在 I 内任一点 x_0 处的左、右导数均存在.

证明 先讨论函数 f 在 x_0 处的右导数情况:

设 $0 < h_1 < h_2$, 使得 $x_0 + h_2 \in I$,

$\because$ f 为开区间 I 上的凸函数 $\Rightarrow$

$$\frac{f\left(x_0 + h_1\right) - f(x_0)}{h_1} \le \frac{f\left(x_0 + h_2\right) - f(x_0)}{h_2},$$

记 $\varphi(h) = \dfrac{f\left(x_0 + h\right) - f(x_0)}{h}$, $\therefore \varphi(h) \nearrow$,

记$\varphi(h)=\dfrac{f\left(x_0+h\right)-f(x_0)}{h}$，$\therefore \varphi(h)\nearrow$,

$\therefore \forall t<x_0, t\in I, \forall h>0, x_0+h\in I$,有

$$\frac{f(x_0)-f(t)}{x_0-t}\le\frac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)}{h}=\varphi(h),$$

$\therefore \varphi(h)$是增函数且在$h>0$ 时有下界,

$$\therefore \lim_{h\to 0+}\varphi(h)=\lim_{h\to 0+}\frac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)}{h}=f'_+\left(x_0\right)\text{存在}.$$

同理可知, $f'_-\left(x_0\right)$存在 .

上页 下页 返回

既然开区间I上的凸函数在 I 内任一点 x_0处的左导数存在,那么该函数在点 x_0 处必定左连续；在点x_0处的右导数存在,那么该函数在点x_0处必定右连续．

一个函数在点x_0处既左连续又右连续,那么该函数在点x_0处必定连续.

命题2.开区间内的凸函数必是连续函数．

命题 2. 开区间内的凸函数必是连续函数．

可注意到,闭区间上的凸函数未必连续，

例如,(1). $f(x)=\begin{cases} 0\ ,\ 0<x<1 \\ 1\ ,\ x=0_{or}1 \end{cases}$ 是$[0,1]$上

的凸函数，在$x=0$ 与 1 处不连续．

(2).$g(x)=\begin{cases} x^2\ ,\ -1<x<1 \\ 2\ ,\ x=-1\ _{or}1 \end{cases}$ 是$[-1,1]$上的

凸函数，在$x=-1$ 与 1 处不连续．

上页 下页 返回

例3.设一组正数 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$,

若 $f''(x) \geq 0$,则 $f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i)$.

(*Jensen*不等式)

证明 记 $x_0 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$,则 $\min\limits_{1\leq i\leq n}\{x_i\} \leq x_0 \leq \max\limits_{1\leq i\leq n}\{x_i\}$,

由 *Taylor* 公式可知

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2,$$

上页 下页 返回

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2,$$

$$\because f''(x)\ge 0, \therefore f(x)\ge f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0),$$

$$\Rightarrow f(x_i)\ge f(x_0)+f'(x_0)(x_i-x_0), i=1,2,\cdots,n.$$

各式乘以 p_i 再相加得

$$\sum_{i=1}^{n}p_i f(x_i)\ge f(x_0)\underbrace{\sum_{i=1}^{n}p_i}_{=1}+f'(x_0)\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{n}p_i x_i}_{=x_0}-x_0\underbrace{\sum_{i=1}^{n}p_i}_{=1}\right)$$

$$=f(x_0),$$

$$\Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^{n}p_i x_i\right)\le\sum_{i=1}^{n}p_i f(x_i).$$

上页 下页 返回

*Jensen*不等式：设正数 $p_1,\cdots,p_n$满足$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$,

若$f''(x)\ge 0$,则 $f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} p_i f\left(x_i\right)$.

特别地,取$f(x)=-\ln x$, $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = \dfrac{1}{n}$,

$x_1,\cdots,x_n \in (0,+\infty)$,

则有 $-\ln\dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n} \le -\dfrac{\ln x_1+\cdots+\ln x_n}{n}$,

变形即得：$\forall x_1,\cdots,x_n \in (0,+\infty), n\in\mathbb{Z}^+$,

$$\sqrt[n]{x_1\cdot\cdots\cdot x_n} \le \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}.$$

上页 下页 返回

函数的凸性与*Jensen*不等式在实分析以及概率论、泛函分析、凸分析、最优化 等许多方面都有着十分重要的应用价值,是一个内涵丰富的话题 .

推荐阅读:

1.沈燮昌 《数学分析纵横谈》

2.史树中 《凸分析》

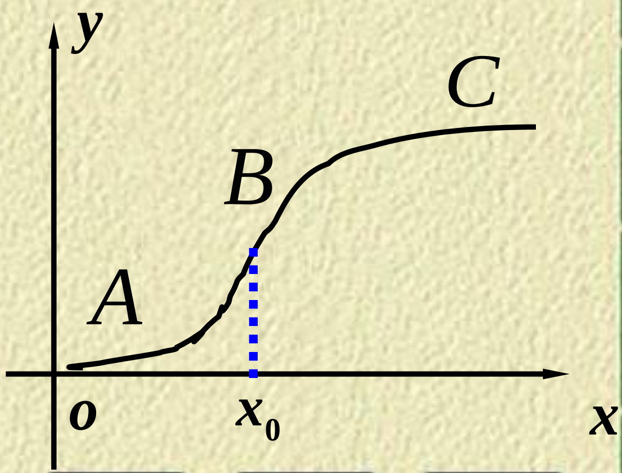
若$f(x)$在(a,b)内$f''(x)\le 0$,则在(a,b)上 $y=f(x)$是凹的曲线,而$f''(x)\le 0$意即:

在(a,b)上$f'(x)$单调递减.

在经济学中,由于市场竞争的作用,收益函数$R=R(x)$图形通常是**Logistic增长曲线,**

$x>x_0$时,$R''(x)<0$,这就是经济学中的

边际收益递减规律.



上页 下页 返回

关注连续函数的三种临界点:

1.函数的零点.

2.函数的极值点.

3.曲线的拐点.

理解:1.扭亏为盈.

2.月盈则亏;盛极而衰;否极泰来 .

3.阳光背后有阴影 ;黑暗之中见光明 .