3-04 两个重要极限

上页 下页 返回

下面我们将给出两个重要的极限

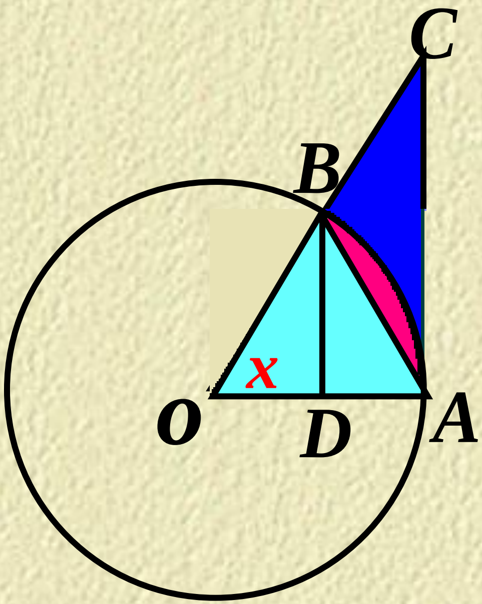
(1). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$;

(2). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$.

这两个极限结果是极限计算中十分重要今后经常要用到的基本公式.

上页 下页 返回

$$(1).\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$



设单位圆O,圆心角$\angle AOB = x$, $x\in\left(0,\pi/2\right)$,作圆的切线,得ΔOAC.扇形OAB的圆心角为x, ΔOAB的高为BD,

于是有$\sin x = BD$, $\tan x = AC$,

$\because S_{\Delta OAB} < S_{扇形OAB} < S_{\Delta OAC}$,

即 $\sin x < x < \tan x$.

上页 下页 返回

$\therefore \sin x < x < \tan x$,即

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

(1)式当$-\frac{\pi}{2} < x < 0$时也成立.当$0 < |x| < \frac{\pi}{2}$时,

$$0 < 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} < 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2},$$

$$\because \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2} = 0, \therefore \lim_{x\to 0}(1-\cos x) = 0,$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\cos x = \lim_{x\to 0}1 = 1, \therefore \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

例1.求出正弦曲线$y=\sin x$在点$O(0,0)$处的切线方程.

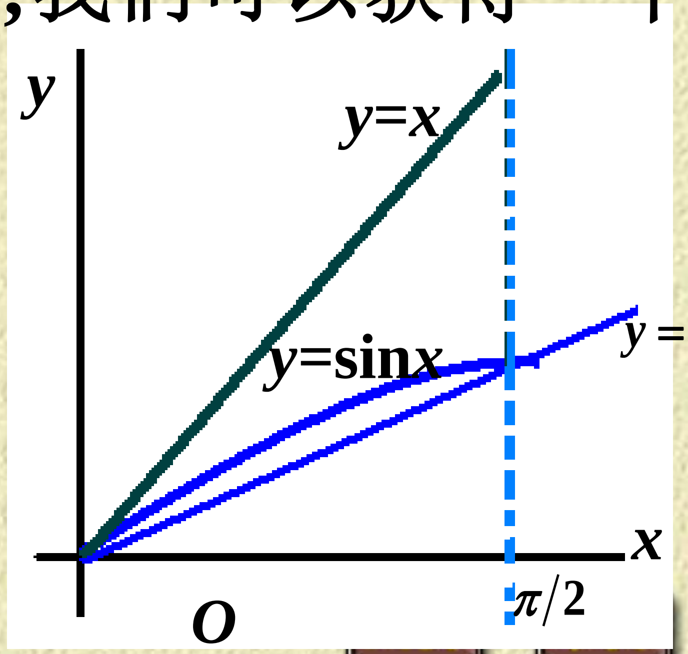
解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\sin 0}{x-0}=1,$

$\therefore$ 曲线$y=\sin x$在点$O(0,0)$处的切线的斜率$=1,$

$\therefore$ 切线方程为 $y-0=1\cdot\left(x-0\right)$即 $y=x.$

由此,并借助于数形结合,我们可以获得一个以后很有用的**Jordan不等式**: $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$ 时有

$$\frac{2}{\pi}x\le\sin x\le x.$$



返回

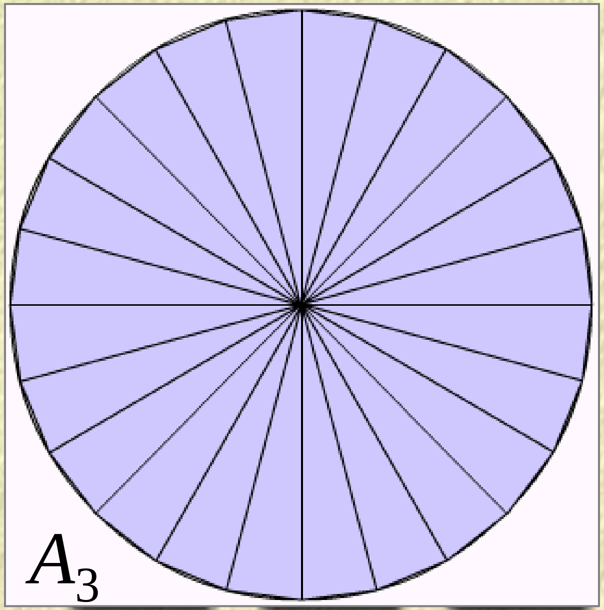
例1.(2). 刘徽割圆术用渐近的方法求圆的面积*A*.

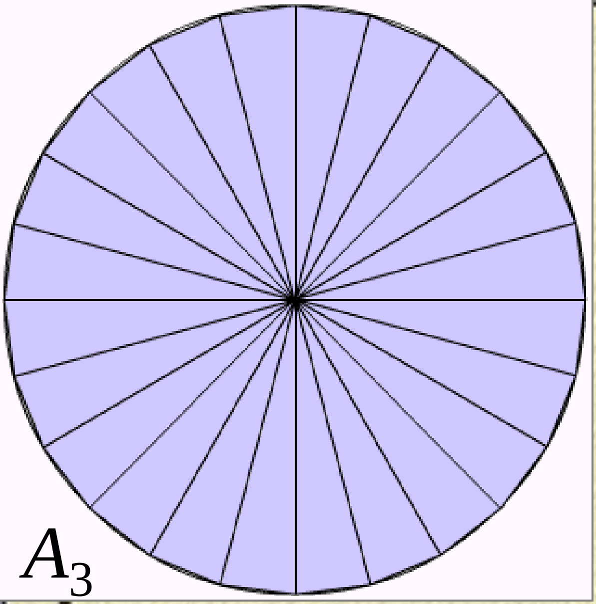
A_n表示圆内接正$6\times2^{n-1}$边形面积,

$$A_n = 6\cdot 2^{n-1}\cdot R\cos\frac{\pi}{6\cdot 2^{n-1}}\cdot R\sin\frac{\pi}{6\cdot 2^{n-1}}$$

$$= 3\cdot 2^{n-1}\cdot R^2\sin\frac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}$$

显然n越大, A_n越接近于A.





$$A_n = 6\cdot 2^{n-1}\cdot R\cos\frac{\pi}{6\cdot 2^{n-1}}\cdot R\sin\frac{\pi}{6\cdot 2^{n-1}}$$

$$= 3\cdot 2^{n-1}\cdot R^2\sin\frac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}$$

显然n越大，A_n越接近于A.

$$由\lim_{n\to\infty}A_n = \lim_{n\to\infty}\pi R^2\frac{\sin\dfrac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}}{\dfrac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}} = \pi R^2,$$

$\therefore$圆的面积公式为 $A = \pi R^2$.

上页 下页 返回

例2.(1).求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}$$

例2.(1).求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

$$\text{或原式}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos x}\right]=\frac{1}{2}.$$

上页 下页 返回

例2.(2).求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=\frac{1}{2}$$

上页 下页 返回

例2.(3).试问极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|\sin x|}{x}$ 是否存在?

解 $\because \lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{|\sin x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\sin x}{x}=1,$

$$\lim_{x\to 0-}\frac{|\sin x|}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{-\sin x}{x}=-1,$$

左、右极限存在但不相等,

$\therefore$ 原极限不存在.

例3.求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^2}$.

解 $\dfrac{x-\sin x}{x^2}$是奇函数,故只考虑$x>0$的情形.

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$时,$0<\sin x<x<\tan x$,

$\therefore\ 0<x-\sin x<\tan x-\sin x$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{2},\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^2}=0,$$

$$\therefore\ \lim_{x\to 0+}\frac{x-\sin x}{x^2}=0\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2}=0.$$

口头练习题:

$$1.\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\_\_\_\_,$$

$$2.\lim_{x\to 0}x\cdot\cot 3x=\_\_\_\_,$$

$$3.\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\sin\left(x^2\right)}=\_\_\_\_,$$

$$4.\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x+1}=\_\_\_\_.$$

$$1.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\underline{\quad\frac{2}{3}\quad},$$

$$2.\ \lim_{x\to 0}x\cdot\cot 3x=\underline{\quad\frac{1}{3}\quad},$$

$$3.\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\sin\left(x^2\right)}=\underline{\quad 2\quad},$$

$$4.\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x+1}=\underline{\quad 1\quad}.$$

上页 下页 返回

特别提醒：

$$1.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0.$$

$$2.\ \lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0,\qquad \lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=1.$$

$$(2).\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e\ .$$

记 $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$,我们知道$\{x_n\}$单调递增且有上界,

*Euler*记之为$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\ \ (e = 2.71828\cdots)$

1727年,瑞士数学家 *L.Euler* (1707~1783) 研究了这个数列的收敛性,并且用字母 e 表示了这个数列的极限.

下面先证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e,$

$[x] \le x < [x]+1,$

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} \le \left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{x} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$$

$$\le \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{x} < \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1},$$

$x \to +\infty$时$[x] \to +\infty$且$[x] \in \mathbb{Z}^+,$

上页 下页 返回

$$[x] \le x < [x] + 1,$$

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} < \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1},$$

$x \to +\infty$时$[x] \to +\infty$且$[x] \in \mathbb{Z}^{+}$,

$$\because \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} = e, \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} = e,$$

由函数形式的*Squeeze*定理得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e.$

又令 $t=-x$,

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t}=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t}$$

$$\xlongequal{t-1=s}\lim_{s\to+\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{s}\right)^{s}\cdot\left(1+\frac{1}{s}\right)\right\}=e.$$

$$\because \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e,$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

上页 下页 返回

由$\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{t}=e$知,

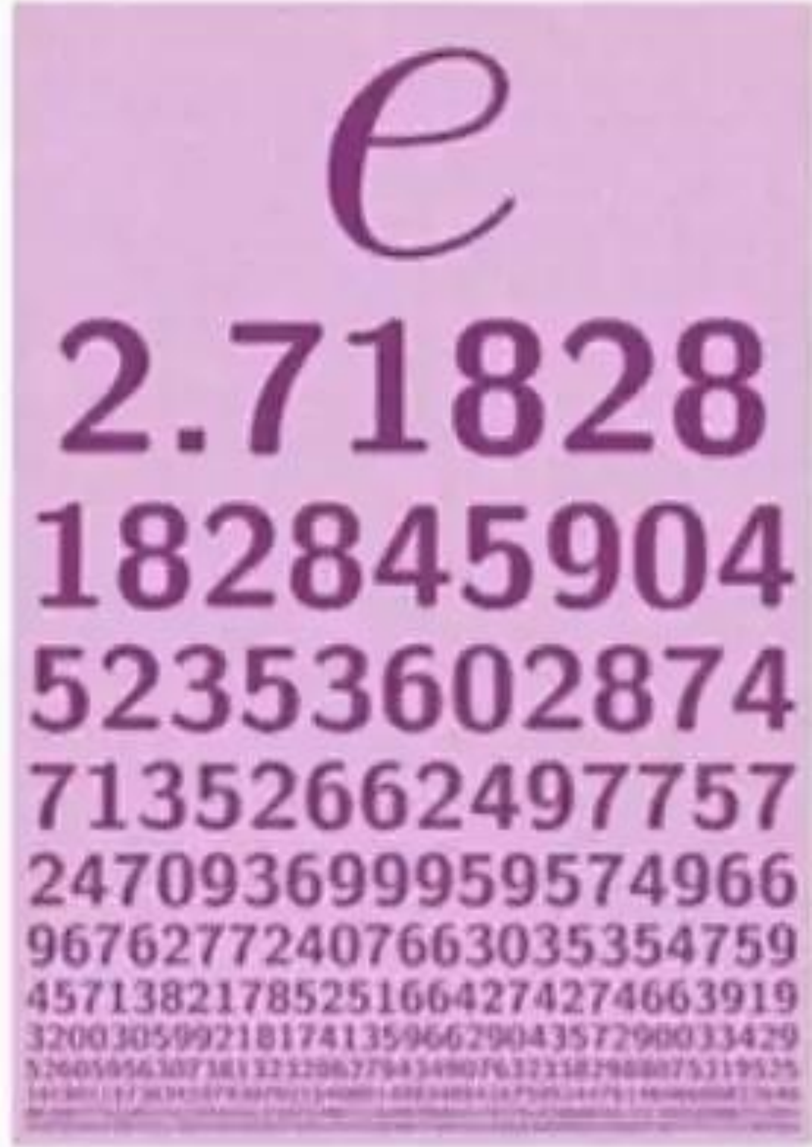
令 $t=\dfrac{1}{x}$,

则$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{t}=e$,

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$

Google 致敬无理数e

$$e \approx 2.718281828$$



关于e 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \quad (e\approx 2.71828)$

瑞士数学家$L.Euler$(1707～1783)在1727年

研究了数列$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$的单调性和有界性,并

且用字母e来记该极限值 $(e\approx 2.71828)$.

后人逐渐了解到e的性质:e是无理数,超越数.

以e为底数的对数称为自然对数,指数函数e^x

性质优美.数e与数π都是无理数、超越数,都

非常重要.自然界与人类社会的许多事物的

数量规律多与e和π这两个实数有关.

上页 下页 返回

特别提醒：

$a>0$时，$a^{b}\cdot a^{c}=a^{b+c}$；

$a>0,b>0$时，$(ab)^{c}=a^{c}\cdot b^{c}$；

$a>0$时，

$a^{bc}=\left(a^{b}\right)^{c}=\left(a^{c}\right)^{b}$.

上页 下页 返回

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \leftarrow \text{幂指函数的}1^{\infty}\text{形未定型的极限.}$$

幂指函数 $u(x)^{v(x)}=\varphi(x)$,

$$D_{\varphi}=\left\{x \mid x\in\mathbb{R}, \text{使得}u(x),v(x)\text{有定义且}u(x)>0\right\}$$

若$\begin{cases}\lim u(x)=1\\ \lim v(x)=\infty\end{cases}$,则称$\lim u(x)^{v(x)}$为

1^{∞}形未定型(或曰:不定式)的极限问题.

上页 下页 返回

例4.求极限：(1). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}$；

(2). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{2+x}\right)^{2x}$.

解 (1). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-1}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{-x}\right)^{-x}}=\frac{1}{e}=e^{-1}.$$

$$(2).\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{2+x}\right)^{2x} \cdots (1^{\infty})$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{2(x+2-2)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{x+2}\cdot\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{-2}\right]^{2}$$

$$=\left(e\cdot 1^{-2}\right)^{2}=e^{2}.$$

例4.求极限：(3). $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^{n}$.

解 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{2n+2}\right)^{n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-(2n+2)}\right)^{-(2n+2)}\cdot\left(1-\frac{1}{2n+2}\right)^{2}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\left(e\cdot 1^{2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

以前我们只能如下处理,颇有缚手缚脚之感：

$$(3).\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{-n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{-\frac{1}{2}(2n+1)+\frac{1}{2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left[\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1}\right]^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$$=e^{-\frac{1}{2}}\cdot 1^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

例4.求极限：(4). $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2-4}\right)^x$.

解 原式 $=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\left(1+\frac{2}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)}\right]^x$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)^x}{\left(1+\frac{2}{x}\right)^x\cdot\left(1-\frac{2}{x}\right)^x}=\cdots=\frac{e\cdot e^{-1}}{e^2\cdot e^{-2}}=e^0=1.$$

例4.求极限：(5). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+4}{x^2+1}\right)^x$.

解 显然该幂指函数的极限问题,属于1^∞形未定型的问题,因而我们通常会做如下变形：

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4}{x^2+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{3}}\right]^{\frac{3x}{x^2+1}},$$

那么往下我们该怎么做呢?

Add.命题1.设$x_0>0$,求证：$\lim\limits_{x\to x_0}\ln x=\ln x_0$.

证明　已知$x>0$ 时,$\ln x$ 严格单调增加.

(1).设$x_0=1$,此时有$\lim\limits_{x\to 1}\ln x=0$,如若不然,

则对于$\varepsilon_0>0$,存在满足$x_n\to 1(n\to\infty)$的正数列,

使得$|\ln x_n|\geq\varepsilon_0$,由此可知,$\forall n\in N$,

由$\ln x_n\geq\varepsilon_0$可得$x_n\geq e^{\varepsilon_0}>1$

或 由$\ln x_n\leq-\varepsilon_0$可得$x_n\leq e^{-\varepsilon_0}<1$,

而这与$x_n\to 1(n\to\infty)$相矛盾,$\therefore\lim\limits_{x\to 1}\ln x=0$;

(2).$x_0\neq 1$ 时,$|\ln x_n-\ln x_0|=\left|\ln\dfrac{x_n}{x_0}\right|$,$x\to x_0$时$\dfrac{x_n}{x_0}\to 1$,

由(1)得$x\to x_0$时$\left|\ln\dfrac{x_n}{x_0}\right|\to 0$. $\therefore\forall x_0>0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\ln x=\ln x_0$.

上页　下页　返回

Add.命题2.设$a>0$,求证:$\forall x_0\in\mathbb{R}$,有 $\lim\limits_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$.

证明 (1).先证明$a>0,\lim\limits_{x\to 0} a^x=1$.

数列极限中我们已证明了结论$a>0,\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

先考虑$x\to 0^+$时的情形,记$n=\left[\dfrac{1}{x}\right]$,则$x\to 0^+$时$n\to\infty$,

$$n\le\frac{1}{x}<n+1\Rightarrow\frac{1}{n+1}<x\le\frac{1}{n},$$

$a>1$ 时,$a^{\frac{1}{n+1}}<a^x\le a^{\frac{1}{n}}$, $0<a<1$ 时,$a^{\frac{1}{n+1}}>a^x\ge a^{\frac{1}{n}}$,

由函数极限的夹逼性,可得 $\lim\limits_{x\to 0^+} a^x=1\ (a>0)$,

于是, $\lim\limits_{x\to 0^-} a^x \overset{-x=t}{=\!=\!=} \lim\limits_{t\to 0^+} a^{-t} = \lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{1}{a^t}=1.$

$\therefore a>0,\lim\limits_{x\to 0} a^x=1$.

上页 下页 返回

Add.命题2.

设$a>0$,求证:$\forall x_0\in\mathbb{R}$,有$\lim\limits_{x\to x_0}a^x=a^{x_0}$.

证明 (2).由$a>0,\lim\limits_{x\to 0}a^x=1$ 可得

$a>0,\forall x_0\in\mathbb{R}$ 时,

$$\lim_{x\to x_0}a^x=\lim_{x\to x_0}\left(a^{a^{x-x_0}}\cdot a^{x_0}\right)$$

$$=a^{x_0}\lim_{x\to x_0}a^{x-x_0}=a^{x_0}.$$

上页 下页 返回

Add.命题3.如果$\lim u(x)=A>0,\lim v(x)=B$

均存在,那么 $\lim u(x)^{v(x)}=A^B$.

证明 由Add.命题1,Add.命题2 知:

$A>0$,则 $\lim \ln u(x)=\lim\limits_{u\to A}\ln u=\ln A$,

又 $\lim\left[v(x)\ln u(x)\right]=B\ln A$,

$\therefore \lim u(x)^{v(x)}=\lim e^{\ln u(x)^{v(x)}}=\lim e^{v(x)\ln u(x)}$

$\overset{v(x)\ln u(x)=s}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=} \lim\limits_{s\to B\ln A} e^s=e^{B\ln A}=e^{\ln A^B}=A^B$.

$\longrightarrow$此命题结论涵盖了$Vol.1,P32$

命题. 如果$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a>0$,证明$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=1$.

上页 下页 返回

例4.求极限：(5). $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4}{x^2+1}\right)^x$.

解　2016－10－11, 金融161王景瑞 给出了一种十分美妙的解法：

$$\because 1<\frac{x^2+4}{x^2+1}<\frac{x^2-1}{x^2-4}, \therefore 1<\left(\frac{x^2+4}{x^2+1}\right)^x<\left(\frac{x^2-1}{x^2-4}\right)^x,$$

由 $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2-4}\right)^x=1$, 由迫敛性得

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4}{x^2+1}\right)^x=1.$$

可是, 这么美妙的解法我可想不到. 你呢？

上页 下页 返回

解二 据Add.命题3,我们有如下做法:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4}{x^2+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{3}}\right]^{\frac{3x}{x^2+1}}$$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{3}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x}{x^2+1}}=e^0=1.$$

多么美妙!

上页 下页 返回

但是要注意不能把解题过程写成：

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4}{x^2+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{3}}\right]^{\frac{3x}{x^2+1}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{3x}{x^2+1}}=e^0=1.$$

但可以写成：

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4}{x^2+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{3}}\right]^{\frac{3x}{x^2+1}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x}{x^2+1}}=e^0=1.$$

力戒如下错误的解法：

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4}{x^2+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}(1)^x$$

$$=\lim_{x\to\infty}1=1.$$

上页 下页 返回

例4.求极限：(4). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2-4}\right)^x$.

解二 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{3}{x^2-4}\right)^{\frac{x^2-4}{3}}\right]^{\frac{3x}{x^2-4}}$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x^2-4}\right)^{\frac{x^2-4}{3}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x}{x^2-4}}=e^0=1.$$

上页 下页 返回

例5.求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+2^n+3^n\right)^{\frac{1}{n}}$.

解 $\because 0<2^n<3^n,$

$\therefore 3^n<1+2^n+3^n<3\cdot 3^n,$

$\therefore 3<\left(1+2^n+3^n\right)^{\frac{1}{n}}<3\cdot\sqrt[n]{3}$ ，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}=1.$

由迫敛性得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+2^n+3^n\right)^{\frac{1}{n}}=3.$

解二 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+2^n+3^n\right)^{\frac{1}{n}}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[3^n\left(\frac{1}{3^n}+\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right)\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$=3\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right]^{\frac{1}{n}}=3.$$

Exercises : 求极限

$$(1).\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{\sin x}\right)^{\frac{1}{x^2}};\qquad (2).\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{x};$$

$$(3).\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x};$$

$$(4).\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n+3^n}{2}\right)^{\frac{1}{n}};\qquad (5)^{*}.\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{3}}{2}\right)^{n}.$$

Answer :

$$(1).\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{\sin x}\right)^{\frac{1}{x^2}} \overset{1^{\infty}}{=\!=} \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1-\cos x}{\cos x}\right)^{\frac{\cos x}{1-\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2\cos x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{1-\cos x}{\cos x}\right)^{\frac{\cos x}{1-\cos x}}\right]^{\frac{1-\cos x}{x^2\cos x}}$$

$$=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}.$$

$$(1).\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{\sin x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\sec^2 x\right)^{\frac{1}{2x^2}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\tan^2 x\right)^{\frac{1}{2x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\tan^2 x\right)^{\frac{1}{\tan^2 x}}\right]^{\frac{\tan^2 x}{2x^2}}$$

$$=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}.$$

上页 下页 返回

(2). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^{x}$;

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2a}{x-a}\right)^{x-a+a}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^{x-a}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^{a}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{2a}}\right]^{2a}\cdot 1=e^{2a}.$$

可是,仔细端详,我们发现中间步骤有不严谨处:过程中出现了$\dfrac{x-a}{2a}$,可是$\dfrac{1}{0}$没有意义.

$\therefore$ 对参数a的取值情况要讨论：

若$a \neq 0$,则 原式$= \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2a}{x-a}\right)^{x-a+a}$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^{x-a} \cdot \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^{a}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{2a}}\right]^{2a} = e^{2a},$$

上页 下页 返回

$$若 a=0, 则 \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{x}=1,$$

$$若 a\neq 0, 则 \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{x}=e^{2a},$$

$$\therefore \forall a\in\mathbb{R}, \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{x}=e^{2a}.$$

$$\tan 2x=\frac{\sin 2x}{\cos 2x}=\frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

(3). $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(1+\tan x-1)^{\frac{1}{\tan x-1}\cdot\frac{-2\tan x}{1+\tan x}}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[(1+\tan x-1)^{\frac{1}{\tan x-1}}\right]^{\frac{-2\tan x}{1+\tan x}}=e^{-1}.$$

(4). 3 ;　　(5)*.$\sqrt{6}$.

上页 下页 返回

关于复利

如果有一个银行账户本金$A_0=100$元,银行支付的年利率为$r=6\%$.

(1).如果银行每年支付一次利息,则一年后本利合计

$$A=100(1+0.06),$$

(2).如果银行按月计算利息,则一年后本利合计

$$A=100\left(1+\frac{0.06}{12}\right)^{12}\approx 106.167781,$$

那么对这种计息模式有下面的两种说法:按月计息,年利率(年百分率$APR-Annual\ \ percentage\ rate$,年率,票面利率)为$6\%$或者$6.167781\%$的年有效收益率.

银行账户本金$A_0=100$元,年利率为$r=6\%$.

(3).如果银行每天支付一次利息,则一年365天后本利合计

$$A=100\left(1+\frac{0.06}{365}\right)^{365}\approx 106.183131,\text{年有效收益率}6.183131\%$$

(4).一年支付利息1000次,则$A=100\left(1+\frac{0.06}{1000}\right)^{1000}\approx 106.183464$,

年有效收益率6.183464%

(5).一年支付利息10^4次,则$A=100\left(1+\frac{0.06}{10000}\right)^{10000}\approx 106.183636$,

年有效收益率6.183636%

(6).一年支付利息n次,则$A=100\left(1+\frac{0.06}{n}\right)^{n}$,随着$n$的不断增大,

A的值也不断增大,但似乎不会无限增大.

(6).一年支付利息n次,则$A=100\left(1+\frac{0.06}{n}\right)^n$,随着$n$的不断增大,$A$的值也不会无限增大,而是接近于一个有限的定值,这就是说数列$\left\{100\left(1+\frac{0.06}{n}\right)^n\right\}$单调增加有上界,所以收敛:$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{0.06}{n}\right)^n=e^{0.06}\approx 106.183655.$

在经济学上,所谓连续复利是理解为:计算复利的次数$n\to\infty$时的利息.所以,如果年利率为$r(\neq 0)$,A_0为本金.那么1年末的连续复利本利合计为

$$A=\lim_{n\to\infty}A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^n=A_0\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}}\right]^r=A_0e^r$$

上页 下页 返回

如果初始本金为A_0,年利率为 r,那么

t年末的连续复利本利合计为

$$A(t)=\lim_{n\to\infty} A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} \overset{r\neq 0}{=\!=\!=}$$

$$= A_0 \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}}\right]^{rt} = A_0e^{rt}$$

如果$r=0$, $A(t)=A_0=A_0e^{rt}$,

$\therefore A(t)=A_0e^{rt} \quad (r\in\mathbb{R})$.

上页 下页 返回

$$A(t) = A_0 e^{rt}$$

连续复利函数$A(t) = A_0 e^{rt}$是一个常见的增长函数.例如,以后我们将用其他方法讨论的*Malthus* 的人口增长问题,放射性物质由于衰变导致质量的变化规律等等,有许多事物的数量变化规律都服从此规律 .