Chap.01. 实数集与函数

§1.1　实数

0.记号与术语

自然数$(natural\ number)$集 $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\cdots\}$,

整数集 $\mathbb{Z}=\{\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots\}$,[德文]$Zahlen$

正整数集 $\mathbb{N}^{*}=\mathbb{Z}^{+}=\{1,2,3,\cdots\}$,

有理数$(rational\ number)$集 $\mathbb{Q}$,$quotient$

实数$(real\ number)$集 $\mathbb{R}$,

$\mathbb{R}^{+}$: 正实数集 $\mathbb{R}^{-}$: 负实数集

复数$(Complex\ number)$集 $\mathbb{C}$

上页 下页 返回

∃: 存在, *exist*　**存在量词**

∀ : *for every, for each*…对每一个√

全称量词

for any, for all…对任意的

上页　下页　返回

一.实数概念

1.回顾中学数学对有理数和无理数的定义:

$$
\text{实数}\begin{cases}
\text{有理数}\begin{cases}
\text{有限小数和无限循环小数,或} \\
\text{分数}\,\dfrac{q}{p}\left(p,q\text{为既约整数},\,p\in\mathbb{Z}^{+}\right)
\end{cases} \\
\text{无理数:无限不循环小数}\;.
\end{cases}
$$

约定:有限位十进制小数表示为无限循环小数

$$a_0.a_1a_2\cdots a_n = a_0.a_1a_2\cdots\left(a_n-1\right)999\cdots$$

对正整数 $x=a_0,\ x=\left(a_0-1\right).999\cdots$

之所以需要讨论实数问题,将实数表示为无穷小数,

是基于如如下的问题:

1. 边长为a,b的矩形的面积A,

(1). $a,b\in\mathbb{Z}^+, A=a\cdot b;$

(2). $a,b\in\mathbb{Q}^+, a=\dfrac{q}{p}, (p,q)=1\cdots A=a\cdot b;$

(3). $a\in(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})^+, b\in\mathbb{R}^+, A=\cdots=a\cdot b.$

2. $a>0, y=a^x=?$

(1). $x\in\mathbb{Z}^+, y=a^x=a\cdots a$,x个a相乘;

(2). $x=\dfrac{q}{p}\in\mathbb{Q}, p\in\mathbb{Z}^+, y=a^x=a^{\frac{q}{p}}=\left(a^{\frac{1}{p}}\right)^q;$

(3). $x\in(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}), y=a^x=?$

上页 下页 返回

2.两个实数的大小关系：

定义1.1 (A).给定两个非负实数

$x = a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots, y = b_0.b_1b_2\cdots b_n\cdots,$

$\forall n \in \mathbb{N}, a_n, b_n \in \mathbb{N}.$

(1).$\forall k \in \mathbb{N}$,有$a_k = b_k$,则$x = y$;

(2).若$a_0 > b_0$,或者$\exists$某个$l \in \mathbb{N}, \forall k = 0,1,\cdots,l$,

有$a_k = b_k$,但$a_{l+1} > b_{l+1}$,则$x > y$或$y < x$.

(B).对于两个负实数x, y,若$-x = -y$,则$x = y$;

若$-x > -y$,则$x < y$或$y > x$.

通过有限小数比较实数大小的等价条件：

定义1.2 (1).设$x = a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$为非负实数,称有理数$x_n = a_0.a_1a_2\ldots a_n$为实数$x$的$n$位不足近似,而$\overline{x}_n = x_n + \dfrac{1}{10^n}$为实数$x$的$n$位过剩近似,$n = 0,1,2,\cdots$

(2).对于负实数设$x = -a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$,其$n$位不足近似与$n$位过剩近似规定为

$$x_n = -a_0.a_1a_2\ldots a_n - \frac{1}{10^n}\text{和}\overline{x}_n = -a_0.a_1a_2\ldots a_n.$$

上页 下页 返回

$\forall$任意实数的不足近似与过剩近似,

$$x_0 \le x_1 \le x_2 \le \cdots,\ \bar{x}_0 \ge \bar{x}_1 \ge \bar{x}_2 \ge \cdots$$

命题1.1 设 $x = a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$,

$y = b_0.b_1b_2\cdots$为两个实数.

则$x > y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}$,使得 $x_n > \bar{y}_n$.

上页 下页 返回

命题1.1 设 $x=a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$, $y=b_0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$ 为两个实数.

则 $x>y \Leftrightarrow \exists n\in N$,使得 $x_n>\bar{y}_n$.

证明 为简便起见,只证$x>y>0$的情形.

设 $x=a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$, $y=b_0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$,

其中$a_n,b_n\in\{0,1,2,\cdots,9\},n\in Z^+$.

$x>y\Leftrightarrow$ 有$a_0>b_0$,

或者$\exists$某个$m\in N,\forall k=0,1,\cdots,m$,有$a_k=b_k$,但$a_{m+1}>b_{m+1}$.

$a_{m+1}>b_{m+1}$,那么a_{m+1}至少比b_{m+1}大1,而$a_{m+2},\cdots$不可能全都是0.

记a_{m+1}后面第一个不为零的数为a_{m+k},那么有$x_{m+k}>\bar{y}_{m+k}$.

$\because \forall x\in R$,总有:不足近似$x_0\le x_1\le x_2\le\cdots$,

过剩近似 $\bar{x}_0\ge\bar{x}_1\ge\bar{x}_2\ge\cdots$.

于是当 $x>y>0$时,$\forall n\ge m+k$, $x_n>\bar{y}_n$恒成立.

$0>x>y$情形证明同理可得.　　结论成立!

上页 下页 返回

命题1.1 设 $x = a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$, $y = b_0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$为两个实数. 则 $x > y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}$,使得 $x_n > \bar{y}_n$.

举例说明:

$x > y > 0$

$x = 6.\quad 3\quad 0\quad 0\quad 1\quad \cdots$

$y = 6.\quad 2\quad 9\quad 9\quad 9\quad \cdots$

x_n	6	6.3	6.30	6.300	6.3001
$\bar{y}_n$	7	6.3	6.30	6.300	6.3000
n	0	1	2	3	4

二.实数的性质:

1. 实数集ℝ对加,减,乘,除(除数不为0)四则运算是封闭的.即任意两个实数和,差,积,商(除数不为0)仍然是实数.

›››实数集是一个域,故实数集也称为实数域.

2. 实数集是有序的.即任意两个实数a, b必满足下述三个关系之一(三歧性) : $a < b$, $a = b$, $a > b$.

3. 实数集的大小关系具有传递性.即若$a>b$, $b >c$,则有$a>c$.

上页 下页 返回

例1. 设 $a,b \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0$, 恒有 $a < b + \varepsilon$, 求证 : $a \le b$.

证明　用反证法

假设结论不成立, 根据实数的有序性,

则有 $a > b$. 令 $\varepsilon = a - b$,

则 $\varepsilon > 0$, 且 $a = b + \varepsilon$, 这与条件

"$\forall \varepsilon > 0$, 恒有 $a < b + \varepsilon$" 相矛盾.

假设不成立.　　$\therefore$ 结论成立.

思考题 :

1. 设 $a,b \in \mathbb{R}, \varepsilon$ 是任意给定的正数, 恒有关系式

$|a-b| < \varepsilon$ 成立, 请问 a,b 间关系如何?

上页　下页　返回

4.实数具有Archimedes性, 即$\forall a,b\in\mathbb{R}$,若

$b>a>0$,则$\exists n\in\mathbb{N}^*$,使得$na>b$.

理由如下:

设$a=a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots, a_0=k\in\mathbb{N}$,

则$a\le k+1<10^{k+1}$.

设 $b=b_0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$,

b_p为第一个不为零的正整数,

令 $n=10^{p+k+1}$,则 $nb\ge 10^{k+1}>a$.

上页 下页 返回

例2. 若 $b>0$,则 $\exists n\in\mathbb{Z}^{+}$, 使得 $\dfrac{1}{n}<b$.

证明　若 $b\ge 1$,只要 $n\ge 2$,就使得 $\dfrac{1}{n}<b$.

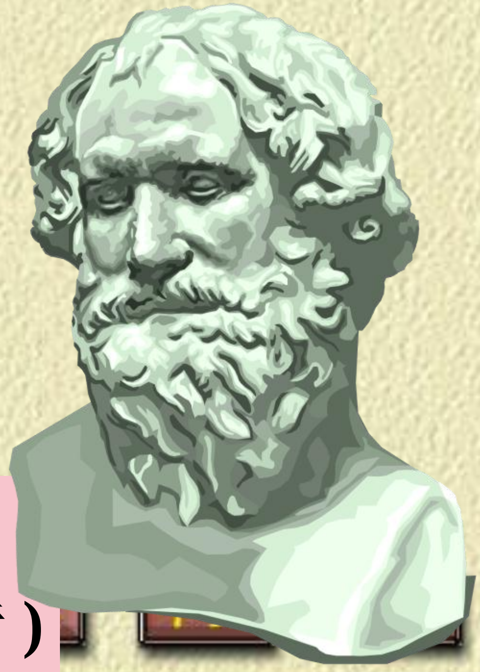
只需考虑 $0<b<1$ 的情形,由阿基米德性,

$\exists n\in\mathbb{Z}^{+}$,使 $nb>1$, 即 $\dfrac{1}{n}<b$.

实数具有*Archimedes*性,

即 $\forall a,b\in\mathbb{R}$,若 $b>a>0$,

则 $\exists n\in\mathbb{N}^{*}$,使得 $na>b$.



阿基米德 (Archimedes,

287B.C.－212B.C. , 希腊)

5.实数集 $\mathbb{R}$ 具有**稠密性**.即任何两个不相等的实数之间必有另一个实数,且既有有理数,也有无理数.

(1). 任意两个不相等的实数 a 与 b 之间,必有另一个实数 c. 例如 $c=\dfrac{a+b}{2}$;

(2). 任意两个不相等的实数 a 与 b 之间,既有有理数又有无理数.

证明 若 $a<b$,则由例 1,存在 $n\in\mathbb{Z}^{+}$, 使

$$\frac{1}{n}<\frac{1}{2}(b-a).$$

设 k 是满足 $\frac{k}{n} \le a$ 的最大整数,即 $\frac{k+1}{n} > a$,

于是,$a < \frac{k+1}{n} < \frac{k+2}{n} = \frac{k}{n} + \frac{2}{n} < a + b - a = b$,

则 $\frac{k+1}{n}, \frac{k+2}{n}$ 是 a 与 b 之间的有理数,

$$a < \frac{k+1}{n} + \frac{\sqrt{2}}{2n} < \frac{k+1}{n} + \frac{1}{n} < b,$$

因而 $\frac{k+1}{n} + \frac{\sqrt{2}}{2n}$ 是 a 与 b 之间的无理数.

6.实数集与数轴上的点具有一一对应关系:即任一实数都对应数轴上唯一的一点,反之,数轴上的每一点也都唯一地代表一个实数.

(1).这种对应关系,粗略地说可这样描述:

设P是数轴上的一点,且点P在O的右边.

若P在整数n与$n+1$之间,则$a_0 = n$.将区间$(n,n+1]$10等分,

若点P在第$i+1$个区间,$i=0,1,2,\cdots,9$,则取$a_1 = i$.

类似地可取到$a_n, n=2,3,\cdots$

这样我们就说点P对应于实数$a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$.

若数轴上点P在O的左边,点P关于O点对称的点为Q,

若点Q对应于实数$b_0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$,则我们就说

点P对应于实数$-b_0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$.

上页 下页 返回

反之, 任何一实数也对应数轴上一点.

(2) 实数集与数轴上点的一一对应关系反映了实数的完备性. 我们将在后面有关章节中作进一步讨论.

实数的完备性

——有理数列1.4,1.41,1.414,1.4142,…在有理数集Q中没有极限,在实数集R中的极限 $\sqrt{2}$ 不是一个有理数.所以说,有理数集不完备.

实数的连续性

——实数的全体充满实数轴,实数轴上没有空隙.如果一刀砍向实数轴,那么必定砍到一个点,该点坐标是一个实数.

三. 绝对值与不等式

几个重要不等式:

$a, b \in \mathbb{R}$,

(1). $\big||a| - |b|\big| \le |a \pm b| \le |a| + |b|$;

(2). $a^2 + b^2 \ge 2|ab|$;

(3). $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \le 1,$

$|x| \le \dfrac{\pi}{2}, |\sin x| \le |x|$;

$|x| < \dfrac{\pi}{2}, |x| \le |\tan x|$;

(4).均值不等式　对$\forall a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbb{R}^+$,记

$$M(a_i)=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i,\cdots\cdots$$算术平均

$$G(a_i)=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)^{\frac{1}{n}},\cdots\cdots\cdots\cdots$$几何平均

$$H(a_i)=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}.\cdots\cdots$$调和平均

均值不等式　$H(a_i)\le G(a_i)\le M(a_i)$,

当且仅当$a_1=a_2=\cdots=a_n$时等号成立.

(5). 利用*Newton*二项展开式得到的不等式:

Newton二项展开式 : $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

$$= a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + C_n^3 a^{n-3} b^3 + \cdots + b^n,$$

其中规定 : $a^0 \triangleq 1, C_n^0 \triangleq 1.$

对$h \in \mathbb{R}$,由Newton二项展开式

$$(1+h)^n = 1 + nh + C_n^2 h^2 + C_n^3 h^3 + \cdots + h^n.$$

对$\forall h>0$,由Newton二项展开式

$$(1+h)^n = 1+nh+C_n^2h^2+C_n^3h^3+\cdots+h^n,$$

有：$(1+h)^n >$ 上式右端的任何有限项,

即 $$(1+h)^n > 1+nh,$$

$$(1+h)^n > 1+C_n^2h^2,\cdots$$

上页 下页 返回

(6). *Bernoulli*不等式：

$\forall x>-1$,有$(1+x)^n \geq 1+nx, n\in\mathbb{N}$.

当 $x>-1$且$x\neq 0, n\in\mathbb{N}, n\geq 2$时,有严格

的不等式： $(1+x)^n > 1+nx$.

证明 由 $1+x>0$且$1+x\neq 1 \Rightarrow$

$(1+x)^n+n-1$

$=(1+x)^n+1+1+\cdots+1>n\cdot\sqrt[n]{(1+x)^n}$

$=n(1+x) \Rightarrow \quad (1+x)^n>1+nx.$

上页 下页 返回

思考题：

2.设 $a,b,c\in\mathbb{R}^{+}$ ($\mathbb{R}^{+}$ 表示全体正实数的集合)，则有关系式：

$$\left|\sqrt{a^{2}+b^{2}}-\sqrt{a^{2}+c^{2}}\right|\le|b-c|$$

成立.它的几何意义是什么?

上页 下页 返回

小结

实数中的规定：有限十进小数表示成无限循环小数

$$a_0.a_1a_2\cdots a_n = a_0.a_1\cdots(a_n - 1)99\cdots9\cdots$$

就是相当于首先承认以下结论：

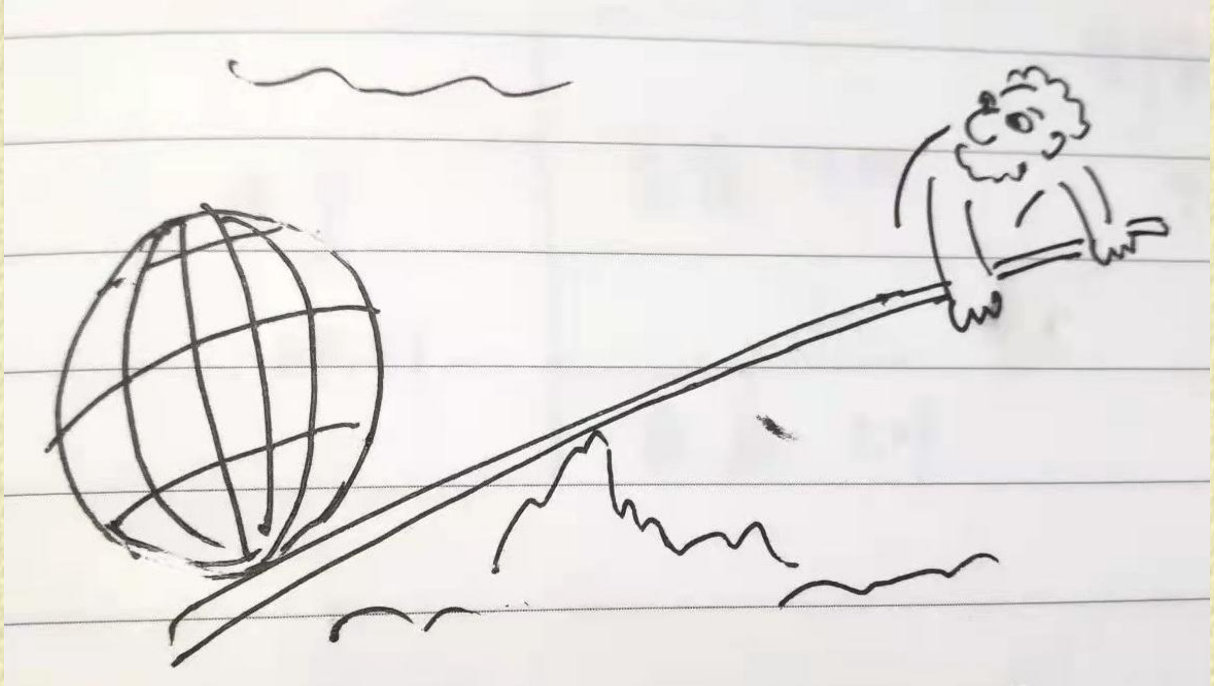
$$0.99\cdots9\cdots = 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \cdots + \frac{9}{10^n} + \cdots = \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 1$$

上页 下页 返回

在此基础上获得了 实数的完备性, 于是也就有了实数的 **Achimedes**性, 和实数的 稠密性 .而这正是后面我们将要讨论的极限理论的基础, 比如后面讨论的**确界原理**, 就是根据实数的无限十进小数表示法和不足近似与过剩近似 等的有关结论得到的.而本课程的教材是以 **确界原理** 为极限理论的基础!

实数中“有限十进小数表示成无限循环小数”的规定就是托起极限理论的支点



古希腊科学家阿基米德的豪言壮语：
给我一个支点，我就能撬动地球！