8.2 函数的复合与反函数

- 函数的复合就是关系的右复合，一切和关系右复合有关的定理都适用于函数的复合。本节重点考虑在复合中特有的性质。

- 函数复合： 设 $f:A\to B$， $g:B\to C$,

$$f\circ g=\{\langle x,z\rangle \mid (x\in A)\wedge(z\in C)\wedge\exists y(y\in B)\wedge(y=f(x))\wedge(z=g(y))\}$$

则 $f\circ g$ 为： $A\to C$, 称为函数f和g的合成(事实上, $f\circ g$ 是f和g的右合成, 对任意 $x\in A$, $f\circ g(x)=g(f(x))$.)

定理8.1(复合函数基本定理)

定理8.1 设F, G是函数，则$F \circ G$ 也是函数，且满足

（1）$\mathrm{dom}\ (F \circ G) = \{x \mid x \in \mathrm{dom}\ F \wedge F(x) \in \mathrm{dom}\ G\}$

（2）$\forall x \in \mathrm{dom}\ (F \circ G)$，有$F \circ G(x) = G(F(x))$

定理8.1的证明

证明：

先证明$F \circ G$是函数。

因为F、G是关系，所以$F \circ G$也是关系。

若对某个$x \in \mathrm{dom}\,(F \circ G)$，若有$xF \circ Gy_1$和 $xF \circ Gy_2$， 则

$$\langle x, y_1\rangle \in F \circ G \wedge \langle x, y_2\rangle \in F \circ G$$

$\Rightarrow \quad \exists t_1 (\langle x, t_1\rangle \in F \wedge \langle t_1, y_1\rangle \in G) \wedge \exists t_2 (\langle x, t_2\rangle \in F \wedge \langle t_2, y_2\rangle \in G)$

$\Rightarrow \quad \exists t_1 \exists t_2 (t_1 = t_2 \wedge \langle t_1, y_1\rangle \in G \wedge \langle t_2, y_2\rangle \in G)$ （F为函数）

$\Rightarrow \quad y_1 = y_2$ （G为函数）

所以$F \circ G$为函数。

定理8.1的证明

任取x，(要证明dom $(F\circ G)=\{x|x\in \mathrm{dom}\, F\wedge F(x)\in \mathrm{dom}\, G\}$)

$x\in \mathrm{dom}\,(F\circ G)$

$\Rightarrow \exists t\exists y(<x,t>\in F\wedge <t,y>\in G)$

$\Rightarrow \exists t(x\in \mathrm{dom}\, F\wedge t=F(x)\wedge t\in \mathrm{dom}\, G)$

$\Rightarrow x\in \{x|x\in \mathrm{dom}\, F\wedge F(x)\in \mathrm{dom}\, G\}$

所以（1）得证。

任取x，（要证明$\forall x\in \mathrm{dom}\,(F\circ G)$，有$F\circ G(x)=G(F(x))$）

$x\in \mathrm{dom}\, F\wedge F(x)\in \mathrm{dom}\, G$

$\Rightarrow <x,F(x)>\in F\wedge <F(x),G(F(x))>\in G$

$\Rightarrow <x,G(F(x))>\in F\circ G$

$\Rightarrow x\in \mathrm{dom}(F\circ G)\wedge F\circ G(x)=G(F(x))$

所以（2）得证。

定理8.1的推论1

推论1 设F, G, H为函数，则$(F\circ G)\circ H$和$F\circ(G\circ H)$都是函数，且 $(F\circ G)\circ H=F\circ(G\circ H)$

证明：由定理8.1（复合函数基本定理）和定理7.2（关系合成具有结合性）得证。

定理8.1的推论2

推论2 设f：$A\to B$，g：$B\to C$，则$f\circ g$：$A\to C$，且$\forall x\in A$都有$f\circ g(x)=g(f(x))$。

证明：由定理8.1（复合函数基本定理）可知$f\circ g$是函数，且

$$\begin{aligned}\mathrm{dom}\,(f\circ g) &= \{x \mid x\in \mathrm{dom}\, f \wedge f(x)\in \mathrm{dom}\, g\}\\ &= \{x \mid x\in A \wedge f(x)\in B\}\\ &= A\end{aligned}$$

$$\mathrm{ran}\,(f\circ g) \subseteq \mathrm{ran}\, g \subseteq C$$

因此 $f\circ g$：$A\to C$，且$\forall x\in A$有 $f\circ g(x)=g(f(x))$。

函数的复合运算的性质

定理8.2 设 $f: A \to B$，$g: B \to C$。

（1）如果 $f: A \to B$， $g: B \to C$都是满射的， 则$f \circ g: A \to C$也是满射的。

（2）如果 $f: A \to B$， $g: B \to C$都是单射的，则$f \circ g: A \to C$也是单射的。

（3）如果 $f: A \to B$， $g: B \to C$都是双射的，则$f \circ g: A \to C$也是双射的。

分析

说明

该定理说明函数的复合能够保持函数单射、满射、双射的性质。

定理8.2的证明

(1) 如果f：$A\rightarrow B$，g：$B\rightarrow C$都是满射的，则$f\circ g$：$A\rightarrow C$也是满射的。

证明：

任取$c\in C$， 由g：$B\rightarrow C$的满射性，所以 $\exists b\in B$使得$g(b)=c$。

对于这个b，由f：$A\rightarrow B$的满射性，所以$\exists a\in A$使得$f(a)=b$。

由合成定理有

$$f\circ g(a) = g(f(a))=g(b)=c$$

所以，$f\circ g$：$A\rightarrow C$是满射的。

定理8.2的证明

(2)如果f：$A\to B$，g：$B\to C$都是单射的，则$f\circ g$：$A\to C$也是单射的。

证明：假设存在$x_1, x_2\in A$使得$f\circ g(x_1)=f\circ g(x_2)$，由合成定理有

$$g(f(x_1))=g(f(x_2))$$

因为g：$B\to C$是单射的，故$f(x_1)=f(x_2)$。

又由于f：$A\to B$也是单射的，所以$x_1=x_2$。

所以，$f\circ g$：$A\to C$是单射的。

(3)如果f：$A\to B$，g：$B\to C$都是双射的，则$f\circ g$：$A\to C$也是双射的。

证明：由（1）和（2）得证。

定理8.2之逆不为真

- 考虑集合$A=\{a_1,a_2,a_3\}$， $B=\{b_1,b_2,b_3,b_4\}$， $C=\{c_1,c_2,c_3\}$。

  令 $f=\{<a_1, b_1>,<a_2, b_2>,<a_3, b_3>\}$

  $g=\{<b_1, c_1>,<b_2, c_2>,<b_3, c_3>,<b_4, c_3>\}$

  则 $f\circ g=\{<a_1, c_1>,<a_2, c_2>,<a_3, c_3>\}$

  那么$f: A\to B$和$f\circ g: A\to C$都是单射的，但$g: B\to C$不是单射的。

- 考虑集合$A=\{a_1,a_2,a_3\}$，$B=\{b_1,b_2,b_3\}$，$C=\{c_1,c_2\}$。

  令 $f=\{<a_1,b_1>,<a_2,b_2>,<a_3,b_2>\}$

  鍶 $g=\{<b_1,c_1>,<b_2,c_2>,<b_3,c_2>\}$

  则 $f\circ g=\{<a_1,c_1>,<a_2,c_2>,<a_3,c_2>\}$

  那么$g: B\to C$和$f\circ g: A\to C$是满射的，但$f: A\to B$不是满射的。

合成的性质(续)

- 命题：设 $f:A\to B$，$g:B\to C$，则

  (1) 若$f\circ g$ 为满射，则g是满射.

  (2) 若$f\circ g$ 为单射，则f是单射.

  (3) 若$f\circ g$为双射，则f是单射,g是满射.　#

命题的证明

(1) 如果$f\circ g$是满射的，则g也是满射的。

证明：

任取$c\in C$, 由$f\circ g$：$A\to C$的满射性，所以 $\exists a\in A$使得$f\circ g(a)=c$。

即$g(f(a))=c$,令$b=f(a)$,由f：$A\to B$的映射，知$b=f(a)\in B$，

使得 $g(b)=g(f(a))=c$

所以，g：$B\to C$是满射的。

定理的证明

(2)如果$f \circ g$是单射的，则f也是单射的。

证明：假设存在$x_1, x_2 \in A$使得$f(x_1)=f(x_2)$，由于f是A到B的函数，所以$f(x_1)=f(x_2) \in B$，而g是B到C的函数，所以有$g(f(x_1))=g(f(x_2))$，既$f \circ g(x_1)=f \circ g(x_2)$，因为$f \circ g$是单射的，所以 $x_1,=x_2$。由于f：$A \to B$也是单射的，所以$x_1=x_2$。

故f：$A \to \mathrm{B}$是单射的。

定理8.3

定理8.3 设 f：$A \rightarrow B$，则 $f = f \circ I_B = I_A \circ f$

证明：由定理8.1的推论2可知

$$f \circ I_B：A \rightarrow B \text{ 和 } I_A \circ f：A \rightarrow B$$

任取$<x,y>$，

$<x,y> \in f$

$\Rightarrow <x,y> \in f \wedge y \in B$

$\Rightarrow <x,y> \in f \wedge <y,y> \in I_B$

$\Rightarrow <x,y> \in f \circ I_B$

所以，$f \subseteq f \circ I_B$

$<x,y> \in f \circ I_B$

$\Rightarrow \exists t(<x,t> \in f \wedge <t,y> \in I_B)$

$\Rightarrow <x,t> \in f \wedge t=y$

$\Rightarrow <x,y> \in f$

所以，$f \circ I_B \subseteq f$

所以，$f = f \circ I_B$

同理可证$f = I_A \circ f$

反函数

什么样的函数 f：$A\to B$，它的逆f^{-1}是从B到A的函数呢？

- 任给函数F, 它的逆F^{-1}不一定是函数, 只是一个二元关系。

  $F=\{\langle x_1, y_1\rangle,\ \langle x_2, y_1\rangle\}$

  $F^{-1}=\{\langle y_1, x_1\rangle,\ \langle y_1, x_2\rangle\}$

- 任给单射函数f：$A\to B$, 则f^{-1}是函数, 且是从ran f到A的双射函数, 但不一定是从B到A的双射函数。

  因为对于某些$y\in B-\mathrm{ran}\, f$，f^{-1}没有值与之对应。

- 任给满射函数f：$A\to B$，则f^{-1}不一定是函数。
- 对于双射函数f：$A\to B$, f^{-1}：$B\to A$是从B到A的双射函数。

反函数存在的条件

定理8.4 设f：$A \to B$是双射的，则f^{-1}：$B \to A$也是双射的。

证明：

先证明f^{-1}：$B \to A$是函数，且dom f^{-1}＝B，ran f^{-1}＝A。

因为f是函数，所以f^{-1}是关系，且

$$\mathrm{dom}\, f^{-1} = \mathrm{ran}\ f = B, \quad \mathrm{ran}\ f^{-1} = \mathrm{dom}\ f = A,$$

对于任意的$x \in B = \mathrm{dom}\ f^{-1}$，

假设有$y_1, y_2 \in A$，使得$<x, y_1> \in f^{-1} \wedge <x, y_2> \in f^{-1}$成立，

则由逆的定义有，$<y_1, x> \in f \wedge <y_2, x> \in f$。

根据f的单射性，可得$y_1 = y_2$。

所以，f^{-1}是函数。

定理8.4的证明

再证明f^{-1}：$B\to A$的双射性质。

- （证明单射）若存在$x_1, x_2\in$B，使得$f^{-1}(x_1)=f^{-1}(x_2)=y$，

  从而有$<x_1, y>\in f^{-1}\land<x_2, y>\in f^{-1}$

  $\Rightarrow <y, x_1>\in f\land<y, x_2>\in f$

  $\Rightarrow x_1=x_2$ （因为 f 是函数）

  所以，f^{-1} 是单射的。

- （证明满射）对于任意的 $y\in$A，因为f 是双射的，

  所以必存在 $x\in B$，使得$<y, x>\in f$，所以$<x, y>\in f^{-1}$，

  所以，f^{-1} 是满射的。

综上所述，f^{-1} 是双射函数。

说明

对于双射函数f : $A\to B$，称f^{-1} : $B\to A$是它的反函数。

反函数的性质

定理8.5 设f：$A \to B$是双射的，则$f^{-1} \circ f = I_B$，$f \circ f^{-1} = I_A$

证明：根据定理可知f^{-1}：$B \to A$也是双射的，且

$f^{-1} \circ f$：$B \to B$，$f \circ f^{-1}$：$A \to A$。

任取$<x,y>$

$<x,y> \in f^{-1} \circ f$

$\Rightarrow \exists t(<x,t> \in f^{-1} \wedge <t,y> \in f)$

$\Rightarrow \exists t(<t,x> \in f \wedge <t,y> \in f)$

$\Rightarrow x=y \wedge x, y \in B$

$\Rightarrow <x,y> \in I_B$

所以，$f^{-1} \circ f \subseteq I_B$

$<x,y> \in I_B$

$\Rightarrow x=y \wedge x, y \in B$

$\Rightarrow \exists t(<t,x> \in f \wedge <t,y> \in f)$

$\Rightarrow \exists t(<x,t> \in f^{-1} \wedge <t,y> \in f)$

$\Rightarrow <x,y> \in f^{-1} \circ f$

所以，$I_B \subseteq f^{-1} \circ f$

综上所述，$f^{-1} \circ f = I_B$。同理可证$f \circ f^{-1} = I_A$

例8.8

例8.8 设 f：$R\to R$，g：$R\to R$

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x\ge 3 \\ -2 & x<3 \end{cases}$$

$$g(x)=x+2$$

求 $f\circ g$，$g\circ f$。如果 f 和 g 存在反函数，求出它们的反函数。

解答

$$f\circ g: R\to R$$

$$f\circ g(x)=\begin{cases} x^2+2 & x\ge 3 \\ 0 & x<3 \end{cases}$$

$$g\circ f: R\to R$$

$$g\circ f(x)=\begin{cases} (x+2)^2 & x\ge 1 \\ -2 & x<1 \end{cases}$$

g：$R\to R$ 是双射的，它的反函数是

g^{-1}：$R\to R$，$g^{-1}(x)=x-2$

本章主要内容

- 函数的基本概念与性质（单射，满射，双射）。
- 函数的合成与反函数。

本章学习要求

- 掌握函数、A到B的函数、集合在函数下的像、集合在函数下的完全原像的概念及表示法；当A与B都是有穷集时，会求A到B的函数的个数。
- 掌握A到B的函数是单射、满射、和双射的定义及证明方法。
- 掌握常函数、恒等函数、单调函数、特征函数、自然映射等概念。
- 掌握合成函数的主要性质和求合成函数的方法。
- 掌握反函数的概念及主要性质。

例题

证明f既是满射的，也是单射的。其中

$$f: R\times R \to R\times R,$$
$$f(<x,y>) = <x+y, x-y>$$

证明： 任取$<u,v>\in R\times R$，存在 $<\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2}>\in R\times R$，使得

$$f(<\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2}>) = <u,v>$$

因此f是满射的。

对于任意的$<x,y>$, $<u,v>\in R\times R$, 有

$$f(<x,y>) = f(<u,v>) \Leftrightarrow <x+y, x-y> = <u+v, u-v>$$
$$\Leftrightarrow x+y = u+v,\ x-y = u-v \Leftrightarrow x = u,\ y = v$$
$$\Leftrightarrow <x,y> = <u,v>$$

因此f是单射的。

例题

令$X=\{x_1,x_2,\ldots,x_m\}$，$Y=\{y_1,y_2,\ldots,y_n\}$，问

（1） 有多少不同的由X到Y的关系？

（2） 有多少不同的X到Y的映射？

（3） 有多少不同的由X到Y的单射、双射？

解：（1） 有2^{mn}不同的由X到Y的关系。

（2） 有n^m不同的X到Y的映射。

（3） X到Y的单射个数为：

①若$m<n$，有 $m!C_n^m$ 个单射。

②若$m>n$，有0个单射。

③若m＝n，有m!个单射。

只有m＝n时，才存在X到Y的双射，个数为m! 。

例题

设A、B、C、D是任意集合，f是A到B的双射，g是C到D的双射。令h:A×C→B×D，且$\forall<a,c>\in$A×C，$h(<a,c>)=<f(a),g(c)>$，那么h是双射吗？请证明你的判断。

证明：先证明h是满射。

$\forall<b,d>\in$B×D，则$b\in$B，$d\in$D，

因为f是A到B的双射，g是C到D的双射，

所以，$\exists a\in$A，$c\in$C，使得$f(a)=b$，$g(c)=d$，

也就是$\exists<a,c>\in$A×C，使得$h(<a,c>)= <f(a),g(c)> =<b,d>$，

所以，h是满射。

例题

再证h是单射。

$\exists\langle a_1,c_1\rangle, \langle a_2,c_2\rangle \in A\times C$，若$h(\langle a_1,c_1\rangle)= h(\langle a_2,c_2\rangle)$，则

$$\langle f(a_1),g(c_1)\rangle = \langle f(a_2),g(c_2)\rangle$$

所以，$f(a_1) = f(a_2)$， $g(c_1) = g(c_2)$。

因为 f是A到B的双射，g是C到D的双射,

所以，$a_1 = a_2$，$c_1 = c_2$。

所以，$\langle a_1,c_1\rangle = \langle a_2,c_2\rangle$，

所以，h是单射。

综上所述，h是双射。

单射和满射的证明方法

- 证明函数 f:A→B是满射的，基本方法是：

  任取y∈B，找到x∈A(x与y相关，可能是一个关于y的表达式)或者证明存在x∈A，使得f(x)＝y。

- 证明函数 f:A→B是单射的，基本方法是：

  假设A中存在x_1和x_2，使得 $f(x_1)=f(x_2)$，利用已知条件或者相关的定理最终证明$x_1=x_2$。

实数集合上函数性质的判断方法

- 对于实数集合上的函数，通常可以通过求导找到极值点。而有的极小值（或极大值）恰好是函数的最小值（或最大值），这样就可以求出函数的值域，从而判断函数是否为满射的。
- 如果函数存在极值，那么可以断定函数不是单射的，因为在极值点两侧可以找到不相等的x_1和x_2满足 $f(x_1)=f(x_2)$。
- 证明函数不具有某种性质的一般方法就是给出反例。
- 为证明函数不是单射的，需要找到$x_1 \neq x_2$且$f(x_1)=f(x_2)$。

  有时可能不容易找到具体的x_1和x_2，但是可以证明这样的x_1和x_2是存在的。
- 证明函数不是满射的一般方法就是找到 $y \in B-\mathrm{ran}\ f$。