Chap.11 反常积分

§ 01. 反常积分

一. 无穷区间上的反常积分

二. 无界函数的反常积分

三. 反常积分的性质与计算

四. 绝对收敛, Γ 函数

上页 下页 返回

在一些实际问题中,我们经常会遇到一些积分问题,需要突破定积分定义中的两个条件的限制:①无穷区间上的计算问题;②有限区间上的无界函数的有关积分计算问题.

例如,第二宇宙速度的推算,以及电学中一个带正电的点电荷产生的静电场中某点处的电位势的定义等等问题,都牵涉到问题①.

所谓“第二宇宙速度”就是将地球上的物体赋予其动能,使之脱离地球的引力场而给予的最小的初速度,俗称“逃逸速度”

(escape velocity).

计算第二宇宙速度,就是要计算:给予物体多大的初速度,将动能转变为势能,使之脱离地球的引力场,理论上也就是使其在外力的作用下能运动至距离地球无穷远处.

我们考虑简单化的数学模型——

①不考虑空气的阻力问题.

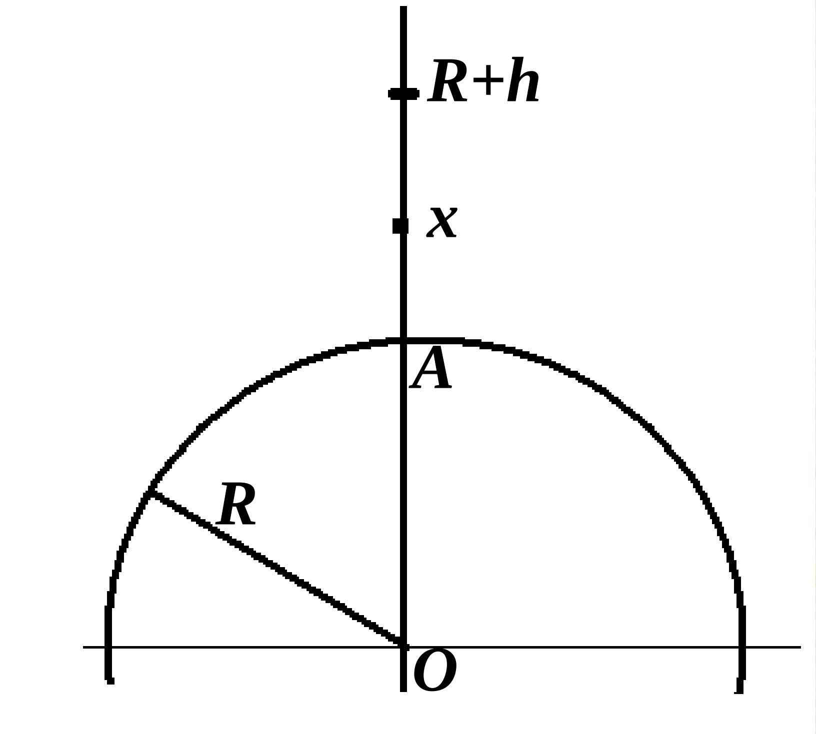
②在地球表面用外力垂直于地面朝着天空将物体发射至距离地球无穷远处.

实际上,空气阻力是绝对不可忽视的问题.

在地球上将物体发射至太空,人们通常不是垂直于地面而是朝着与地面有一锐角的方向发射诸如火箭、卫星等,是考虑到公转与自转等问题.

上页 下页 返回

考虑用求变力作功的方法解决.设在地球表面A处有一质量为m的物体,将该物体以初速度v_0发射至距离地面h处,地球半径R.由变力作功的计算方法(请见§2积分性质开头).



$$W=\int_R^{R+h}F(x)dx\le\frac{1}{2}mv_0^2\qquad F(x)=G\frac{mM}{x^2}$$

其中$F(x)$为物体与地球的引力——万有引力

地球、物体均视作质点

上页 下页 返回

$$W=\int_R^{R+h}F(x)dx=\int_R^{R+h}G\frac{mM}{x^2}dx$$

$$=-G\frac{mM}{x}\Bigg|_R^{R+h}=GmM\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h}\right)$$

将物体发射至距离地球无穷远处,即理解为

$$h\to+\infty,\therefore\frac{1}{2}mv_0^2\geq\lim_{h\to+\infty}W=\frac{GmM}{R}$$

$$\therefore\frac{1}{2}mv_0^2\geq\frac{GmM}{R}$$

又$\because$在地球表面的物体的重力就是物体与地球

间的引力$\therefore\frac{GmM}{R^2}=mg,\therefore\frac{1}{2}mv_0^2\geq\frac{GmM}{R}=mgR$

$$\frac{GmM}{R^2} = mg, \frac{1}{2}mv_0^2 \geq \frac{GmM}{R} = mgR,$$

$$v_0 \geq \sqrt{2gR}$$

$$g = 9.8\times 10^{-3}\left(km/s^2\right), R = 6371(km),$$

$$\therefore v_0 \geq \sqrt{2gR} \approx 11.2(km/s)$$

为方便表达,我们通常将上述计算过程中的积分表示为

$$\frac{1}{2}mv_0^2 \geq \lim_{h\to+\infty}\int_R^{R+h} F(x)dx = \int_R^{+\infty} F(x)dx$$

上页 下页 返回

一. 无穷区间上的反常积分

定义1.设函数$f(x)$在区间$[a,+\infty)$内的任一闭区间上可积(即内闭可积),$\forall b>a$,若$\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$存在,则称此极限为函数$f(x)$在区间$[a,+\infty)$上的反常积分(*improper integral*)或曰广义积分,记作$\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

当极限存在时,称此反常积分收敛;否则,称此反常积分发散.

类似地,有 $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx.$

同样,设函数$f(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$上内闭可积，

对任一确定常数c,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_{c}^{b} f(x)dx.$$

特别强调:$\int_{-\infty}^{c} f(x)dx, \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$都收敛

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \text{收敛}.$$

我们常称此类反常积分为无穷积分.

上页 下页 返回

例1.讨论反常积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$的敛散性.

解 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$

$$=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{1}{1+x^2}dx+\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\left[\arctan x\right]_a^0+\lim_{b\to+\infty}\left[\arctan x\right]_0^b$$

$$=-\lim_{a\to-\infty}\arctan a+\lim_{b\to+\infty}\arctan b$$

$$=-\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

例1.(2).讨论无穷积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx$的敛散性.

解$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{x}{1+x^2}dx+\int_{0}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx$

其中$\int_{0}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\frac{x}{1+x^2}dx$

$$=\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left[\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^b$$

$\because \lim\limits_{b\to+\infty}\left[\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^b=+\infty$, $\therefore \int_{0}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx$发散,

由定义可知,该无穷积分发散.

需要特别提醒：

(1).已知$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$收敛,那么$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=$

$$=\lim_{b\to+\infty}\int_{-b}^{b}\frac{1}{1+x^2}dx=2\lim_{b\to+\infty}\left[\arctan x\right]_0^b=\pi;$$

(2).虽然$\lim\limits_{b\to+\infty}\int_{-b}^{b}\frac{x}{1+x^2}dx=0$,但$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx$发散.

一般地,若$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$收敛,则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_{-b}^{b}f(x)dx\ ;$$

但若$\lim\limits_{b\to+\infty}\int_{-b}^{b}f(x)dx$存在,≠> $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$收敛.

例2.求无穷积分$I=\int_0^{+\infty}x^2e^{-2x}dx$ 的值.

解 $\int t^2e^{-t}dt=\int t^2\left(-e^{-t}\right)'dt=-t^2e^{-t}+2\int te^{-t}dt$

$$=\cdots=-e^{-t}\left(t^2+2t+2\right)+C,$$

$$\therefore \int x^2e^{-2x}dx \xlongequal{2x=t} \frac{1}{8}\int t^2e^{-t}dt$$

$$=-\frac{1}{8}e^{-2x}\left(4x^2+4x+2\right)+C,$$

$$\therefore I=-\frac{1}{8}e^{-2x}\left(4x^2+4x+2\right)\Big|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\lim_{x\to+\infty}e^{-2x}\left(2x^2+2x+1\right)=\frac{1}{4}.$$

用*L'Hopital*法则

上页 下页 返回

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-2x}\left(2x^2+2x+1\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+2x+1}{e^{2x}}$$

用*L'Hopital*法则

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x+2}{2e^{2x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{4e^{2x}}=0.$$

上页 下页 返回

$$\int xe^{-x}dx = -e^{-x}\left(x+1\right)+C,$$

$$\int x^2e^{-x}dx = -e^{-x}\left(x^2+2x+2\right)+C,$$

$$\int x^3e^{-x}dx =$$

$$= -e^{-x}\left(x^3+3x^2+6x+6\right)+C$$

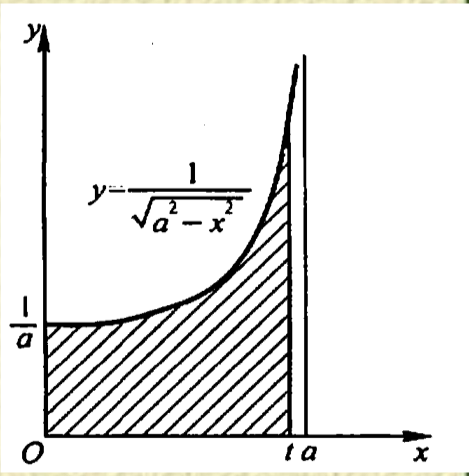
规律毕现.

一生二,二生三,三生万物…

二.无界函数的反常积分

实例：设$a>0$.在$[0,a)$上$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}>0$,考虑$0<t<a$,

则由直线$x=0,x=t,y=0$与曲线$y=\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$围成的



曲边梯形的面积为$\displaystyle\int_0^t\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=A(t)$,由于

$$\lim_{t\to a-0}\int_0^t\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\lim_{t\to a-0}\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)\Bigg|_0^t=\frac{\pi}{2}.$$

那么,为简便计,我们一般就称由直线$x=0,x=a,y=0$

与$y=\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$围成的图形的面积为$\displaystyle\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{\pi}{2}$.

而函数$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$在$[0,a]$上不是有界的,所以$\displaystyle\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

已经不是定积分了.

上页 下页 返回

定义2.设函数$f(x)$在区间$(a,b]$上内闭可积,在点a的右邻域内无界,若$\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^{b}f(x)dx$存在,则称函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的反常积分收敛,记为

$$\int_{a}^{b}f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^{b}f(x)dx$$

习惯上,我们称点a为函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的**瑕点**,而称反常积分$\int_{a}^{b}f(x)dx$为**瑕积分**.

类似地,设函数$f(x)$在区间$[a,b)$上内闭可积,在点b的左邻域内无界,若$\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$存在,则称函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的反常积分收敛,

记为 $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$

习惯上,我们称点b为函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的**瑕点**,而称反常积分$\int_a^b f(x)dx$为**瑕积分**.

设函数$f(x)$在集合$[a,c)\cup(c,b]$上内闭可积，在点c的邻域内无界，即点c为函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的瑕点，则

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

$$=\lim_{\varepsilon_1\to+0}\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx+\lim_{\varepsilon_2\to+0}\int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx.$$

特别强调：$\int_a^c f(x)dx,\int_c^b f(x)dx$都收敛

$\Leftrightarrow\int_a^b f(x)dx$收敛.

定义3.设函数$f(x)$在区间$[a,b)\cup(b,+\infty)$上内闭可积,$b>a$,点b为函数$f(x)$在区间$[a,+\infty)$上唯一的瑕点,对任一确定的常数$c\in(b,+\infty)$,若瑕积分$\int_a^b f(x)dx,\int_b^c f(x)dx$与无穷积分$\int_c^{+\infty} f(x)dx$都收敛,则称此混合型反常积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛.

上页 下页 返回

若函数$f(x)$在点a的某邻域内无界,则称点a为函数$f(x)$的**瑕点**.

若点a是函数$f(x)$的**无穷间断点**,那么点a当然是函数$f(x)$的**瑕点**.

函数的瑕点未必是函数的无穷间断点.如

(1).当$x=\dfrac{1}{k\pi}$且$k\to\pm\infty$时, $f\left(\dfrac{1}{k\pi}\right)=k\pi(-1)^{k}\to\infty$,

所以在点0的邻域内$f(x)=\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$不是有界的;

(2).当$x=\dfrac{1}{k\pi+\dfrac{\pi}{2}}$时$f(x)=0$,所以$x\to 0$ 时, $f(x)$并

非是无穷大量.

所以,在点$x=0$的邻域内函数$\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$无界,点

0是函数的瑕点但不是函数的无穷间断点.

例3.计算积分$\int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx,(a>0)$

解 $\because \lim\limits_{x\to a-0}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}=+\infty,$

$\therefore\ x=a$是被积函数的无穷间断点,即是瑕点.

$$\int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{a-\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)\Bigg|_0^{a-\varepsilon}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\arcsin\frac{a-\varepsilon}{a}-0\right)=\frac{\pi}{2}$$

上页 下页 返回

无穷积分的特征是十分明显的，而瑕积分则较为隐蔽，倘若将瑕积分误认作定积分，如

$$\int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \left(\arcsin\frac{x}{a}\right)\Bigg|_0^a = \frac{\pi}{2},$$

我们发现其结果正确，但要知道这过程却是错的！

例3.(2).计算积分$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}dx$

解 $\int \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x}\sqrt{x}}dx$

$= 2\arcsin\sqrt{x} + C,$

倘若将之视作定积分,则有

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}dx = \left(2\arcsin\sqrt{x}\right)\Big|_0^1 = \pi.$$

那我们就错了!因为这是一个瑕积分.

上页 下页 返回

例3.(2).计算积分$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}dx$

程序正义

解　点0,1是函数$\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$的无穷间断点,即瑕点.

$$\therefore \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}dx = \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} + \int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \to +0} \int_{\varepsilon_1}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} + \lim_{\varepsilon_2 \to +0} \int_{1/2}^{1-\varepsilon_2} \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \to +0} \left(2\arcsin\sqrt{x}\right)\Big|_{\varepsilon_1}^{1/2} + \lim_{\varepsilon_2 \to +0} \left(2\arcsin\sqrt{x}\right)\Big|_{1/2}^{1-\varepsilon_2}$$

$$= 2\left(\lim_{\varepsilon_2 \to +0} \arcsin\sqrt{1-\varepsilon_2} - \lim_{\varepsilon_1 \to +0} \arcsin\sqrt{\varepsilon_1}\right) = \pi.$$

上页　下页　返回

计算积分$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}dx$

$\longrightarrow$为书写简便起见,我们亦可如下表述：

解　点0,1是函数$\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$的无穷间断点.

$$\therefore \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}dx = \int_{0+}^{1-} \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}dx$$

$$= \left(2\arcsin\sqrt{x}\right)\Big|_{0+}^{1-} = \pi.$$

此之谓“点到为止”是也!

例3.(3).计算积分$\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x-x^2}}dx$

解 点0是被积函数的可去间断点,不是瑕点;

点1是被积函数的无穷间断点,即瑕点.

$$\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x-x^2}}dx \xlongequal[t\in(0,\pi/2)]{\arcsin\sqrt{x}=t} \int \frac{t}{|\sin t\cos t|}2\sin t\cos t dt$$

$$=\int 2t dt = t^2 + C = \left(\arcsin\sqrt{x}\right)^2 + C$$

$$\therefore \int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x-x^2}}dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x-x^2}}dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\arcsin\sqrt{x}\right)^2\Big|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\arcsin\sqrt{1-\varepsilon}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4}.$$

例4.(1).证明无穷积分($p-$积分)$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$

当$p>1$时收敛,当$p\le 1$时发散.

解(A).$p=1,\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx=[\ln x]_1^{+\infty}=+\infty,$

(B).$p\ne 1,\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^{+\infty}=\begin{cases}+\infty, & p<1\\ \frac{1}{p-1}, & p>1\end{cases}.$

由此可知,当$p>1$时该无穷积分收敛于$\frac{1}{p-1}$;

当$p\le 1$时该无穷积分发散.

例4.(2).证明反常积分($p-$积分) $\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx$

当$p<1$时收敛,当$p\geq 1$时发散.

解(A). $p=1$, $\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+}[\ln x]_\varepsilon^1 = +\infty$,

(B). $p\neq 1$, $\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^p}dx$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_\varepsilon^1 = \begin{cases} +\infty, & p>1 \\ \dfrac{1}{1-p}, & p<1 \end{cases}$$

$$\therefore \int_0^1 \frac{1}{x^p}dx = \begin{cases} +\infty, & p\geq 1 \\ \dfrac{1}{1-p}, & p<1 \end{cases}.$$

$p-$积分：

$$(1).\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\begin{cases}\dfrac{1}{p-1}, & p>1\\ \text{发散}, & p\le 1\end{cases};$$

$$(2).\int_0^{1}\frac{1}{x^p}dx=\begin{cases}\dfrac{1}{1-p}, & p<1\\ \text{发散}, & p\ge 1\end{cases}.$$

例5.求$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^3}dx$的值.

解 $\because \frac{1}{x^3}$是$[-1,1]$上的奇函数,

$\therefore \int_{-1}^{1}\frac{1}{x^3}dx=0.$ 你说这样做对么?

正解 $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^3}dx=\int_{-1}^{0}\frac{1}{x^3}dx+\int_{0}^{1}\frac{1}{x^3}dx,$

由$p-$积分的敛散性结论知:

瑕积分$\int_{0}^{1}\frac{1}{x^3}dx$发散.$\therefore \int_{-1}^{1}\frac{1}{x^3}dx$不存在.

上页 下页 返回

例5.(2).试判断反常积分$\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x}$的敛散性.

解 $\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{x\ln x}$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{1+\varepsilon}^2 \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left[\ln(\ln x)\right]_{1+\varepsilon}^2$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}\left[\ln(\ln 2) - \ln(\ln(1+\varepsilon))\right] = \infty.$$

我们也可以对该瑕积分作变量代换,

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x} = \int_1^2 \frac{d(\ln x)}{\ln x} \overset{\ln x = t}{=\!=\!=} \int_0^{\ln 2} \frac{1}{t}dt,$$

由$p-$积分的敛散性结论知:该瑕积分发散.

例5.(3).试问下列反常积分中被积函数的瑕点有哪些?

$$(1).\int_0^1 \frac{\ln x}{x-1}dx\ ;\quad (2).\int_0^3 \frac{1}{x\ln x}dx\ .$$

解(1). $\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{\ln x}{x-1}=1,\ \lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln x}{x-1}=+\infty,$

仅点0是被积函数的瑕点.

(2). $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=0,\ \lim\limits_{x\to 1} x\ln x=0,$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0+}\frac{1}{x\ln x}=\infty, \lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x\ln x}=\infty,$ 点0,1都是瑕点,

$$\therefore \int_0^3\frac{1}{x\ln x}dx=\int_0^{1/2}\frac{1}{x\ln x}dx+\int_{1/2}^1\frac{1}{x\ln x}dx+\int_1^3\frac{1}{x\ln x}dx\ .$$

例6.求无穷积分$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}dx$ 的值.

解 这是一个混合型反常积分问题,

点0是被积函数的瑕点.

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}dx=\int_0^{1}\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}dx+\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}dx$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0+}\int_\varepsilon^{1}\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}dx+\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}dx$$

$$=-2\lim_{\varepsilon\to0+}e^{-\sqrt{x}}\Big|_\varepsilon^1-2e^{-\sqrt{x}}\Big|_1^{+\infty}$$

$$=2\lim_{\varepsilon\to0+}e^{-\sqrt{\varepsilon}}-2\lim_{x\to+\infty}e^{-\sqrt{x}}=2.$$

$Ex.1.$下列反常积分中发散的是(　　).

$(A).\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$；　　$(B).\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^3}$；

$(C).\int_{0}^{+\infty}xe^{-x^2}dx$；　　$(D).\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}$.

解 $(C).\int_{0}^{+\infty}xe^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}e^{-x^2}d\left(x^2\right)$

$$=-\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_{0}^{+\infty}=\frac{1}{2};$$

$$(D).\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}=\int_{2}^{+\infty}\frac{1}{\ln^2 x}d(\ln x)$$

$$\overset{\ln x=t}{=\!=\!=\!=}\int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt,$$ $p-$积分....

Ex.2. 求常数c值,使得反常积分

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{2x}{x^2+1}-\frac{c}{x+2}\right)dx$$ 收敛,并求出该积分值.

解 首先不要误用积分的线性性质.

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{2x}{x^2+1}-\frac{c}{x+2}\right)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_0^{b}\left(\frac{2x}{x^2+1}-\frac{c}{x+2}\right)dx$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\ln\frac{x^2+1}{(x+2)^c}\Bigg|_0^b=\lim_{b\to+\infty}\left[\ln\frac{b^2+1}{(b+2)^c}-\ln\frac{1}{2^c}\right],$$

当且仅当$c=2$ 时反常积分收敛于$\ln 4$.

上页 下页 返回

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{2x}{x^2+1}-\frac{c}{x+2}\right)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_0^{b}\left(\frac{2x}{x^2+1}-\frac{c}{x+2}\right)dx$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\ln\frac{x^2+1}{(x+2)^c}\Bigg|_0^b=\lim_{b\to+\infty}\left[\ln\frac{b^2+1}{(b+2)^c}-\ln\frac{1}{2^c}\right],$$

当且仅当$c=2$ 时反常积分收敛于$\ln 4$.

$$\lim_{b\to+\infty}\frac{b^2+1}{(b+2)^c}=\begin{cases}+\infty, c<2\\ 1, c=2\\ 0, c>2\end{cases},$$

$$\Rightarrow\lim_{b\to+\infty}\ln\frac{b^2+1}{(b+2)^c}=\begin{cases}+\infty, c<2\\ 0,\ c=2\\ -\infty, c>2\end{cases}.$$

上页 下页 返回

三. 反常积分的性质与计算

定积分的性质在定积分的相关内容中，有着重要的地位. 定积分的线性性质，积分区间的可加性，积分的保号性、保序性、绝对不等式、估值不等式和积分中值定理, 在反常积分中相应的情形如何,请大家思考一下.

Q1.反常积分中有“保号性、保序性、绝对不等式、估值不等式和积分中值定理”相应的结论成立吗?

$Q2$.反常积分中有“积分的线性性质,积分区间的可加性”相应的结论成立吗?

$A1$.关于反常积分的区间的可加性,有如下结论:设函数$f(x)$在区间$\left[a,+\infty\right)$上内闭可积,$\forall b>a, \int_a^{+\infty} f(x)dx, \int_b^{+\infty} f(x)dx$ 同敛散,且有

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^{+\infty} f(x)dx \; .$$

上页 下页 返回

Q2.反常积分中有“积分的线性性质,积分区间的可加性”相应的结论成立吗?

$A2.$关于反常积分的线性性质,先看一个例子.

例7.讨论积分$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^2-1}dx$ 的敛散性.

解 $$\int_2^{+\infty}\frac{2}{x^2-1}dx=\int_2^{+\infty}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$=\int_2^{+\infty}\frac{1}{x-1}dx-\int_2^{+\infty}\frac{1}{x+1}dx\ ,$$

由于$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x-1}dx$与$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x+1}dx$均发散,

故而原积分发散.

你看此做法对否?

上页 下页 返回

关于反常积分敛散性的讨论,使用了函数极限这一工具,那就必须遵循函数极限的运算法则.

我们知道,两个函数的极限均不存在,那么它们和的极限未必存在亦未必不存在 .

例7.讨论积分$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^2-1}dx$的敛散性.

正解 $\int\frac{2dx}{x^2-1}=\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C,$

$$\therefore\int_2^{+\infty}\frac{2dx}{x^2-1}=\int_2^{+\infty}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|_2^{+\infty}=\ln 3.$$

A2.反常积分的线性性质的正确形式为：

若$\int_a^{+\infty} f(x)dx, \int_a^{+\infty} g(x)dx$ 都收敛,则

$\int_a^{+\infty} [f(x)+g(x)]dx$ 也收敛,且

$$\int_a^{+\infty} [f(x)+g(x)]dx$$

$$= \int_a^{+\infty} f(x)dx + \int_a^{+\infty} g(x)dx \ .$$

同样可得瑕积分形式的线性性质 .

上页 下页 返回

Q3.反常积分与定积分在进行变量代换时是可以相互转化的.

例8.(1).计算$\int_{2/\pi}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx$.

解 $\int_{2/\pi}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx \overset{\frac{1}{x}=t}{\underset{\substack{x\to+\infty,t\to0\\ x=2/\pi,t=\pi/2}}{=\!=\!=\!=\!=}}$

$-\int_{\pi/2}^{0}\sin t dt=\int_{0}^{\pi/2}\sin t dt=1.$

上页 下页 返回

例8.(2).计算$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\ (a>0)$.

解 $x=a$是被积函数的无穷间断点，

令$x=a\sin t$,则$t=0,x=0$;$t\to\frac{\pi}{2}-0, x\to a^{-}$.

$$\therefore \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\lim_{c\to a-}\int_0^c \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$\overset{x=a\sin t}{\underset{c=a\sin\beta}{=\!=\!=\!=}} \lim_{\beta\to\frac{\pi}{2}-}\int_0^{\beta}\frac{\cos t}{|\cos t|}dt=\lim_{\beta\to\frac{\pi}{2}-}\int_0^{\beta}1dt$$

$$=\int_0^{\pi/2}1dt=\frac{\pi}{2}.$$

例8.(3).计算积分$I=\int_0^{\pi}\frac{1}{2+\cos 2x}dx$.

解 $\int\frac{1}{2+\cos 2x}dx=\int\frac{1}{1+2\cos^2 x}dx=\int\frac{\sec^2 x}{2+\sec^2 x}dx$

$=\int\frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^2+\tan^2 x}d\left(\tan x\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{3}}+C,$

令$\tan x=t,\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\tan x=t=+\infty,\tan 0=0.$

$$I=\int_0^{\pi}\frac{1}{2+\cos 2x}dx=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{2+\cos 2x}dx=2\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2+\cos 2x}dx$$

$$=2\lim_{u\to\frac{\pi}{2}-0}\int_0^{u}\frac{1}{2+\cos 2x}dx=2\lim_{u\to\frac{\pi}{2}-0}\int_0^{u}\frac{1}{3+\tan^2 x}d\left(\tan x\right)$$

$$=2\int_0^{+\infty}\frac{1}{3+t^2}dt=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t}{\sqrt{3}}\bigg|_0^{+\infty}=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

例8.(4).计算积分$I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$.

解 $$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}=\lim_{b\to+\infty}\int_0^{b}\frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$$

$$\xlongequal[b=\tan\beta]{x=\tan t}\lim_{\beta\to\frac{\pi}{2}-}\int_0^{\beta}\frac{\sec^2 t}{\sqrt{(\sec^2 t)^3}}dt=\int_0^{\pi/2}\cos t\,dt=1.$$

今后,我们可将此过程直接表示为

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}\xlongequal[x\to+\infty\text{时}t\to\frac{\pi}{2}]{x=\tan t}\int_0^{\pi/2}\frac{\sec^2 t}{\sqrt{(\sec^2 t)^3}}dt=\int_0^{\pi/2}\cos t\,dt.$$

例8.(5).计算积分$I=\int_0^1 \ln x dx$.

解 $\int_0^1 \ln x dx \xlongequal[\substack{x\to 0+\\ 时t\to+\infty}]{-\ln x=t} \int_{+\infty}^0 (-t)\left(-e^{-t}\right)dt = -\int_0^{+\infty} te^{-t}dt = \cdots$

$A3.$反常积分与定积分在进行变量代换时相互转化的规律,请诸位自己归纳总结.

比如,函数$f(x)$在区间$(a,b]$上只有一个无穷间断点a, $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$.那么作变量代换,可将瑕积分变化为无穷积分

$$\int_a^b f(x)dx \xlongequal[\frac{1}{b-a}=c]{\frac{1}{x-a}=t} \int_{+\infty}^c f\left(a+\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt = \int_c^{+\infty} \frac{1}{t^2} f\left(a+\frac{1}{t}\right)dt.$$

模仿练习：计算积分

(1). $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$；

(2). $\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x-x^2}}dx$；

(3). $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$；

(4). $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}dx$；

(5). $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(1+x^2\right)^n}dx$.

$$Ex.(3).\int_0^{+\infty}\frac{x\arctan x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}dx\ .$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\arctan x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_0^{b}\frac{x\arctan x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}dx$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left.\frac{x-\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}\right|_0^b$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\frac{b-\arctan b}{\sqrt{1+b^2}}=1.$$

$$J=\int\frac{x\arctan x}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}dx=?$$

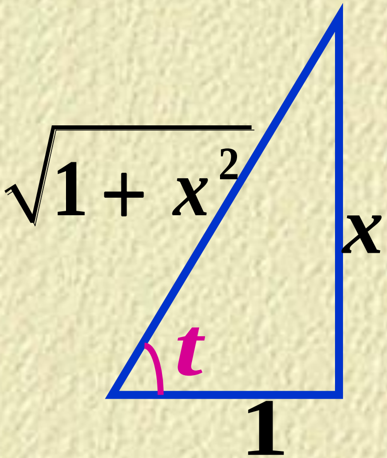
令 $\arctan x=t, t\in\left(-\pi/2,\pi/2\right),$

则 $$J=\int\frac{t\tan t}{\left|\sec^3 t\right|}\sec^2 t\,dt$$

$$=\int t\sin t\,dt=\int t(-\cos t)'dt$$

$$=-t\cos t+\int\cos t\,dt=\sin t-t\cos t+C$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}+C$$



$$Ex.(3).\int_0^{+\infty}\frac{x\arctan x}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}dx\ .$$

解二 $$\int_0^{+\infty}\frac{x\arctan x}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}dx \xlongequal[\arctan(+\infty)=\frac{\pi}{2}]{\arctan x=t}$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{t\tan t}{\sqrt{\left(\sec^2 t\right)^3}}\sec^2 t dt=\int_0^{\pi/2}t\sin t dt$$

$$=-t\cos t\Big|_0^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}\cos t dt=1.$$

Q4.反常积分中分部积分公式是否成立?

A4.反常积分中分部积分公式仍然成立,须注意书写正确,如对于无穷积分有

$$\int_a^{+\infty} v du = \left(uv - \int u dv \right)\Big|_a^{+\infty},$$

但请一定注意不要贸然写成

$$\int_a^{+\infty} v du = (uv)\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} u dv$$

以免犯错.原因同A2.

当然,若$(uv)\Big|_a^{+\infty}$, $\int_a^{+\infty} u dv$ 都收敛,那么$\int_a^{+\infty} v du$ 亦收敛,且有 $\int_a^{+\infty} v du = (uv)\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} u dv$.

上页 下页 返回

例9.计算积分$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(3+x)^2}dx$.

解 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(3+x)^2}dx=-\left.\frac{\ln x}{3+x}\right|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(3+x)}dx$

$=\frac{1}{3}\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{3+x}\right)dx=\frac{1}{3}\ln\left.\frac{x}{3+x}\right|_1^{+\infty}=\frac{1}{3}\ln 4$.

例9.(2).已知$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx = A$,问$\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = ?$

解 $$\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \int_0^{+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)'\sin^2 x dx$$

$$= -\left.\frac{\sin^2 x}{x}\right|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{1}{x}\cdot 2\sin x\cos x dx$$

$$= 0 + \int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x}dx \overset{2x=t}{=\!=\!=} \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt = \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx = A\ .$$

其实,$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$.

上页 下页 返回

例9.(3).计算积分$\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{\left(1+x^2\right)^2}dx$.

解 $\because \int\frac{x\ln x}{\left(1+x^2\right)^2}dx=\int\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\right)'\ln x dx$

$=-\frac{\ln x}{2\left(1+x^2\right)}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x\left(1+x^2\right)}dx$

$=-\frac{\ln x}{2\left(1+x^2\right)}+\frac{1}{2}\int\frac{xdx}{x^2\left(1+x^2\right)}=-\frac{\ln x}{2\left(1+x^2\right)}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x^2}{1+x^2}\right|+C$

倘若如下处理$\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{\left(1+x^2\right)^2}dx=-\frac{\ln x}{2\left(1+x^2\right)}\Bigg|_0^{+\infty}+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{x\left(1+x^2\right)}dx$

那就错了.因为虽然$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{2\left(1+x^2\right)}=0$,但是$\lim\limits_{x\to0+}\frac{\ln x}{2\left(1+x^2\right)}=\infty$.

例9.(3).计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{\left(1+x^2\right)^2}dx$.

正解 $\because \int\frac{x\ln x}{\left(1+x^2\right)^2}dx=\int\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\right)'\ln x dx$

$$=-\frac{\ln x}{2\left(1+x^2\right)}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x^2}{1+x^2}\right|+C,$$

$$\therefore \int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{\left(1+x^2\right)^2}dx$$

$$=\left[-\frac{\ln x}{2\left(1+x^2\right)}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x^2}{1+x^2}\right|\right]_0^{+\infty}=0.$$

上页 下页 返回

例9.(3).计算积分$I=\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{\left(1+x^2\right)^2}dx$.

解二 $I=\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{\left(1+x^2\right)^2}dx$

$$=\int_0^{1}\frac{x\ln x}{\left(1+x^2\right)^2}dx+\int_1^{+\infty}\frac{x\ln x}{\left(1+x^2\right)^2}dx$$

$$\overset{x=\frac{1}{t}}{=\!=}\int_{+\infty}^{1}\frac{t\ln t}{\left(1+t^2\right)^2}dt+\int_1^{+\infty}\frac{x\ln x}{\left(1+x^2\right)^2}dx$$

$$=-\int_1^{+\infty}\frac{t\ln t}{\left(1+t^2\right)^2}dt+\int_1^{+\infty}\frac{x\ln x}{\left(1+x^2\right)^2}dx=0.$$

四. 绝对收敛,Γ函数

定义3.若$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛,则称$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 绝对收敛.若$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛,而$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$发散,则称$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 条件收敛.

定理1.若$f(x)$在$[a,+\infty)$上内闭可积,$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$收敛,则$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 亦收敛且有

$$\left|\int_a^{+\infty}f(x)dx\right|\le\int_a^{+\infty}|f(x)|dx.$$

定理1的逆命题不成立.有些反常积分就是条件收敛.如$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 就是条件收敛.(原因从略)

例10.通常称$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx$ 为$\Gamma\left(Gamma\right)$函数.若我们已知在$\left(0,+\infty\right)$内$\Gamma(s)$有定义.

(1).证明: $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$. (2). 问$\Gamma\left(1/2\right)=?$

解(1).$\Gamma(s+1)=\int_0^{+\infty} x^s e^{-x}dx$

$$=-x^s e^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty} sx^{s-1}e^{-x}dx,$$

$$=0+s\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx=s\Gamma(s).$$

$\therefore \Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n!\Gamma(1)$, 而$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty} e^{-x}dx=1$,

$\therefore \Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n!$.

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}dx, s\in(0,+\infty).$$

$$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)\Rightarrow\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n!\ .$$

故人们常称Γ函数是阶乘运算的拓广.

予曾见网上有人问 $(1/2)!=?$想来是其搞

错了.或许是问$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=?$

$$(2).\ \Gamma\left(1/2\right)=\int_0^{+\infty}x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}dx \overset{t=\sqrt{x}}{=\!=\!=} 2\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt$$

记$J=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$，则$J^2=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx\int_0^{+\infty}e^{-y^2}dy$

$$=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-x^2-y^2}dxdy=\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^{+\infty}e^{-r^2}rdr=\frac{\pi}{4},$$

$$\therefore \Gamma\left(1/2\right)=\sqrt{\pi}\quad .$$

概率论中一个重要的积分$\int_0^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$.

Ex.下列广义积分中哪个是收敛的?

$(a).\int_0^{+\infty} e^{-2x}\cos x dx$ ； $(b).\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{2+x^2}dx$ ；

$(c).\int_{-2}^{2} \frac{1}{x^3}dx$ ； $(d).\int_0^{+\infty} x^2 e^{-2x}dx$ ；

$(e).\int_{1/2}^{1} \frac{1}{x\ln x}dx$.

上页 下页 返回

Ex.下列广义积分中哪个是收敛的?

$(a).\int_0^{+\infty} e^{-2x}\cos x dx$; $(b).\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{2+x^2}dx$;

$(c).\int_{-2}^{2} \frac{1}{x^3}dx$; $(d).\int_0^{+\infty} x^2 e^{-2x}dx$;

$(e).\int_{1/2}^{1} \frac{1}{x\ln x}dx$. 收敛的是:$(a),(d)$.

广义积分中如$p-$积分等常用结果要熟悉.

上页 下页 返回