模拟试卷三

一、选择题（每题 3 分，共 15 分）

1. 设 X 是随机变量，c 为任意实数，μ 是 X 的数学期望，则【　　】

A. $E(X-c)^2=E(X-\mu)^2$　　　　B. $E(X-c)^2 \ge E(X-\mu)^2$

C. $E(X-c)^2 \le E(X-\mu)^2$　　　　D. $E(X-\mu)^2=0$

2. 若 X 的概率密度 $f(x)$ 满足 $f(-x)=f(x)$，其分布函数为 $F(x)$，则对于任意实数 t【　　】

A. $F(-t)=-F(t)$　　　　B. $F(-t)=0.5-\int_0^t f(t)dt$

C. $F(-t)=1-\int_0^t f(t)dt$　　　　D. $F(-t)=2F(t)-1$

3. 设 A 和 B 是任意两事件，则下列正确的是【　　】

A. $P(A-B)=P(A)-P(B)$　　　　B. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

C. $P(A-B)=P(A)-P(AB)$　　　　D. $P(A-B)=P(B)-P(AB)$

4. 在假设检验中，犯第一类错误的概率 α 与犯第二类错误的概率 β 之间的关系错误的是【　　】

A. 样本容量一定时，α 变小，则 β 变大　　　　B. 样本容量一定时，α 变大，则 β 变小

C. 若要同时降低 α，β，唯有增加样本容量　　　　D. $\alpha+\beta=1$

5. 设 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量，且 $D(\hat{\theta})>0$，则 $\hat{\theta}^2$ 必为 θ^2 的【　　】。

A. 有偏估计　　　　B. 无偏估计

C. 一致估计　　　　D. 有效估计

二、填空题（每题 3 分，共 15 分）

1. 已知一批产品中一、二、三等品各占60%，30%，10%，从中任取一件，已知取的不是一等品，则取得的是三等品的概率为________。

2. 设随机变量 X 和 Y 独立同分布，服从 $N(0,1)$，则 $P\{\max(X,\ Y)\geq 0\}=$ ________。

3. 已知电气元件寿命 X 服从指数分布：$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1000}e^{-\frac{x}{1000}}, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$，假设仪器装有5个这样元件且其中任一个元件损坏时仪器即停止工作，则仪器无故障工作1000小时以上的概率为________。

4. 若 X_1，X_2，...，X_n 是总体 X 的一个样本，设 $EX=\mu$，$DX=\sigma^2$，则确定常数 $c=$________，使得 $c\sum_{i=1}^{n-1}\left(X_{i+1}-X_i\right)^2$ 为 σ^2 的无偏估计量。

5. 已知正常男性成人血液中，每一毫升白细胞数平均是7300，均方差是700。利用切比雪夫不等式估计每毫升含白细胞数在5200～9400之间的概率 p ________.

三、计算题 （共62分）

1. （10分）大家都听过伊索寓言“狼来了”的故事。记“小孩说谎”为事件B，“小孩可信”为事件A，不妨设村民过去对小孩的印象为 $P(A)=0.8,\ P(\overline{A})=0.2$，设可信小孩说谎的可能性和不可信的小孩说谎的可能性分别为0.1，0.5，即 $P(B\mid A)=0.1,\ P(B\mid \overline{A})=0.5$。试用贝叶斯公式来分析此故事中小孩第一次说谎后村民对这个小孩的可信程度的改变.

2. （10 分）某商店对某种家用电器销售采用先使用后付款的方式，记使用寿命为 X(年)，规定，

$X \le 1$，一台付款 1500 元；$1 < X \le 2$，一台付款 2000 元；

$2 < X \le 3$，一台付款 2500 元；$X > 3$，一台付款 3000 元.

设寿命 X 服从指数分布，概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{10}\mathrm{e}^{-x/10}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$

试求该商店一台家用电器收费 Y 的数学期望。

3. （10 分）设 X 服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的泊松分布，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自 X 的一个样本，求 λ 的矩估计量和极大似然估计量。

4. （10 分）某砖厂制成两批机制红砖，抽样检查测量砖的抗折强度(千克)，得到结果如下，第一批：$n_1=10$，$\overline{x}=27.3$，$S_1^2=6.4$，第二批：$n_2=8$，$\overline{y}=30.5$，$S_2^2=3.8$，已知砖的抗折强度服从正态分布，试检验：(1)两批红砖的抗折强度的方差是否有显著差异？(2)两批红砖的抗折强度的数学期望是否有显著差异？

5. （10 分）对于一个学生而言，来参加家长会的家长人数是一个随机变量. 设一个学生无家长、1 名家长、 2 名家长来参加会议的概率分别为 0.05，0.8，0.15. 若学校共有 400 名学生，设各学生参加会议的家长数相互独立，且服从同一分布. 求参加会议的家长数 X 超过 450 的概率.

6.（12 分）设随机变量 (X,Y) 具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{8}(x+y), 0\le x\le 2, 0\le y\le 2\\ 0, \quad 其他\end{cases},$$

求 $E(X)$, $E(Y)$, $Cov(X,Y)$, ρ_{XY}.

四、证明题　（共 8 分）

设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，$\overline{X}, S^2$ 分别是样本均值和样本方差，试证明：$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$.