# 本章说明

- 本章的主要内容
  - 集合的基本概念—集合、相等、（真）包含、子集、空集、全集、幂集
  - 集合运算—交、并、（相对和绝对）补、对称差、广义交、广义并
  - 文氏图—有穷集计数问题
  - 集合恒等式
- 本章与后续各章的关系
  - 是集合论后面各章的基础
  - 是典型的布尔代数系统

# 集合的概念与运算

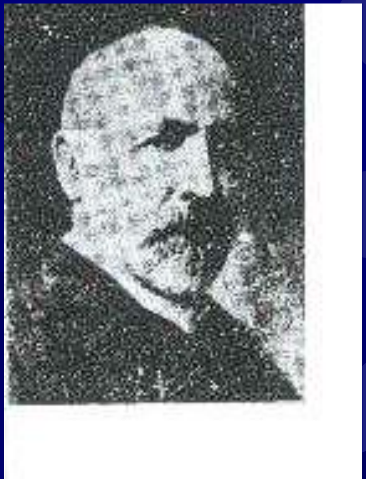
- 1. 集合的概念
- 2. 集合之间的关系
- 3. 集合的运算
- 4. 文氏图、容斥原理

# 集合论(set theory)

- 十九世纪数学最伟大成就之一
- 集合论体系
  - 朴素(naive)集合论
  - 公理(axiomatic)集合论
- 创始人康托(Cantor)

Georg Ferdinand Philip Cantor
1845 ~ 1918

德国数学家, 集合论创始人.



# 什么是集合(set)

- 集合：不能精确定义。一些对象的整体就构成集合,这些对象称为元素(element)或成员(member)
- 用大写英文字母A,B,C,…表示集合
- 用小写英文字母a,b,c,…表示元素
- $a \in A$：表示a是A的元素，读作“a属于A”

$a \notin A$：表示a不是A的元素，读作“a不属于A”

例如：

方程$x^2-1=0$的实数解集合；

26个英文字母的集合；

坐标平面上所有点的集合；

… …

# 集合的表示

- 列举法
- 描述法
- 特征函数法

# 列举法(roster)

- 列出集合中的全体元素，元素之间用逗号分开，然后用花括号括起来，例如

$$A=\{a,b,c,d,\ldots,x,y,z\}$$

$$B=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

- 集合中的元素不规定顺序

$$C=\{2,1,3\}=\{1,2,3\}$$

- 集合中的元素各不相同,如果同一个元素在集合中多次出现应该认为是一个元素。

$$C=\{2,1,1,2,1,3\}=\{1,2,3\}$$

# 描述法(defining predicate)

- 用谓词P(x)表示x具有性质P，用{x|P(x)}表示具有性质 P 的集合，例如
- $P_1(x)$: x是英文字母

  A={x|$P_1(x)$}={x| x是英文字母}

  ={a,b,c,d,…,x,y,z}
- $P_2(x)$: x是十进制数字

  B={x|$P_2(x)$}= {x|x是十进制数字}

  ={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}

# 描述法（续）

- 两种表示法可以互相转化，例如

$$E=\{2,4,6,8,\ldots\}$$
$$=\{x|x>0\text{且}x\text{是偶数}\}$$
$$=\{x|x=2(k+1)\text{，}k\text{为非负整数}\}$$
$$=\{2(k+1)\ |\ k\text{为非负整数}\}$$

- 有些书在列举法中用:代替|, 例如

$$\{2(k+1):\ k\text{为非负整数}\}$$

# 特征函数法(characteristic function)

- 集合A的特征函数是$\chi_A(x)$:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1，若 x \in A \\ 0，若 x \notin A \end{cases}$$

# 数的集合

- N： 自然数(natural numbers)集合

  N={0,1,2,3,…}

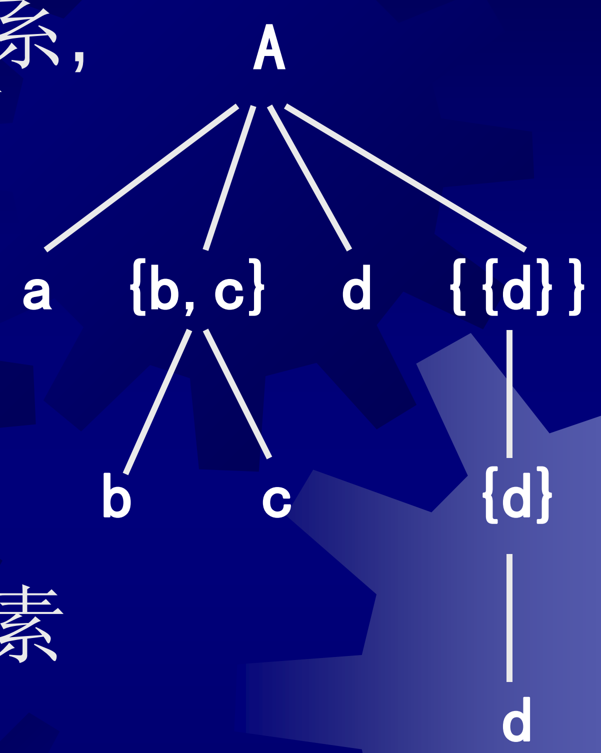
- Z： 整数(integers)集合

  Z={0,±1,±2,…}={…,-2,-1,0,1,2,…}

- Q： 有理数(rational numbers)集合
- R： 实数(real numbers)集合
- C： 复数(complex numbers)集合

# 元素和集合之间的关系

- 元素和集合之间的关系是隶属关系，即**属于**或**不属于**,属于记作∈，不属于记作∉。
- 例如:A＝{a,{b,c},d,{{d}}},a∈A,{b,c}∈A,d∈A,{{d}}∈A,b∉A,{d}∉A。
- b和{d}是A的元素的元素。
- 可以用一种树形图表示集合与元素的隶属关系。




说明

- ❑ 隶属关系可以看作是处在不同层次上的集合之间的关系。
- ❑ 规定：对任何集合A都有A∉A。

# 集合之间的关系

- 子集、相等、真子集
- 空集、全集
- 幂集、n元集、有限集
- 集族

# 子集(subset)

- 子集: 若B中的元素也都是A中的元素, 则称B为A的子集, 或说B包含于A, 或说A包含B, 记作$B \subseteq A$

$$B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x(x \in B \rightarrow x \in A)$$

- 若B不是A的子集, 则记作$B \not\subseteq A$

$$B \not\subseteq A \Leftrightarrow \exists x(x \in B \land x \notin A)$$

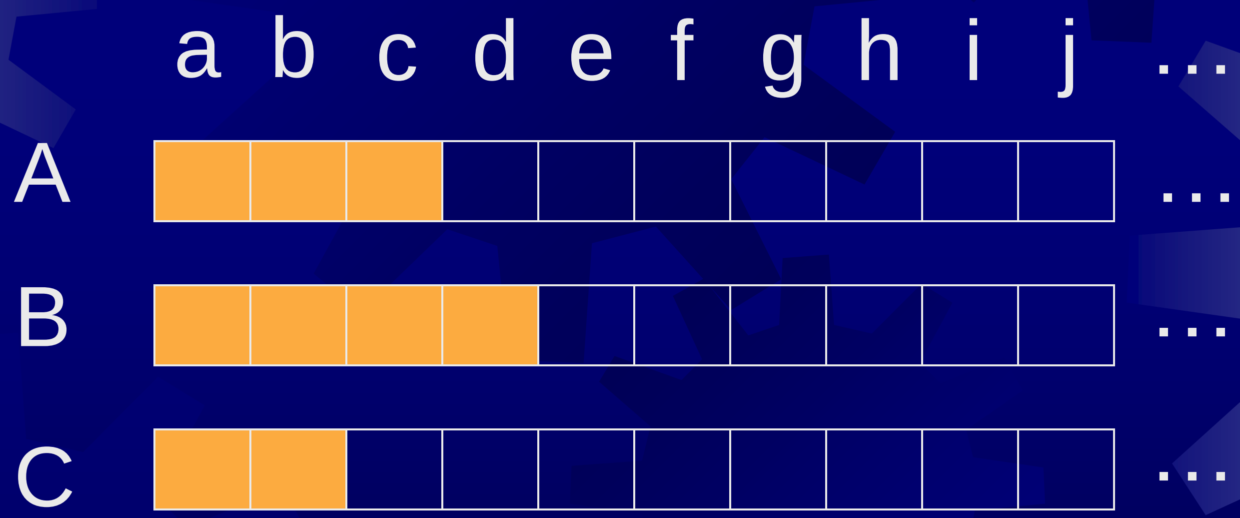
- $\neg \forall x(x \in B \rightarrow x \in A) \Leftrightarrow \exists x \neg(\neg x \in B \lor x \in A)$

$$\Leftrightarrow \exists x(x \in B \land \neg x \in A) \Leftrightarrow \exists x(x \in B \land x \notin A)$$

# 子集(举例)

- 设A={a,b,c},B={a,b,c,d},C={a,b},则

  $A\subseteq B$,　$C\subseteq A$,　$C\subseteq B$



# 隶属和包含的说明

- 隶属关系和包含关系都是两个集合之间的关系，对于某些集合可以同时成立这两种关系。
- 例如 A＝{a，{a}}和{a}

既有{a}∈A，又有{a}⊆A。

前者把它们看成是不同层次上的两个集合，

后者把它们看成是同一层次上的两个集合。

# 相等(equal)

- 相等: 互相包含的集合是相等的.

$$A=B \Leftrightarrow A\subseteq B \wedge B\subseteq A$$

$$A=B \Leftrightarrow \forall x(x\in A \leftrightarrow x\in B)$$

- $A=B \Leftrightarrow A\subseteq B \wedge B\subseteq A$　　　　(=定义)

$\Leftrightarrow \forall x(x\in A \to x\in B) \wedge \forall x(x\in B \to x\in A)$ ($\subseteq$定义)

$\Leftrightarrow \forall x((x\in A \to x\in B) \wedge (x\in B \to x\in A))$　(量词分配)

$\Leftrightarrow \forall x(x\in A \leftrightarrow x\in B)$　($\leftrightarrow$等值式)

# 包含($\subseteq$)的性质

- $A \subseteq A$

证明: $A \subseteq A \Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in A) \Leftrightarrow 1$

- 若$A \subseteq B$,且$A \neq B$,则 $B \not\subseteq A$

证明: $A \neq B \Leftrightarrow \neg(A=B)$

$\Leftrightarrow \neg(A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$ (定义)

$\Leftrightarrow \neg(A \subseteq B) \vee \neg(B \subseteq A)$ (德•摩根律)

$A \subseteq B$ (已知)

$\therefore \neg(B \subseteq A)$ (即$B \not\subseteq A$) (析取三段论) #

# 包含($\subseteq$)的性质(续)

- 若$A\subseteq B$,且$B\subseteq C$, 则$A\subseteq C$

证明: $A\subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x\in A\rightarrow x\in B)$

$\forall x,\ \ x\in A$

$\Rightarrow x\in B \qquad (A\subseteq B)$

$\Rightarrow x\in C \qquad (B\subseteq C)$

$\therefore\ \ \forall x(x\in A\rightarrow x\in C)$, 即$A\subseteq C$. #

# 真子集(proper subset)

- 真子集: B真包含A:

$$A\subset B \Leftrightarrow A\subseteq B \wedge A\neq B$$

- $A\not\subset B \Leftrightarrow \neg(A\subseteq B \wedge A\neq B)$ ($\subset$定义)

$\Leftrightarrow \neg(A\subseteq B) \vee (A=B)$ (德•摩根律)

$\Leftrightarrow \exists x(x\in A\wedge x\notin B) \vee (A=B)$ ($\not\subseteq$定义)

# 真包含($\subset$)的性质

- $A \not\subset A$

证明: $A \subset A \Leftrightarrow A \subseteq A \wedge A \neq A \Leftrightarrow 1 \wedge 0 \Leftrightarrow 0$.　　#

- 若$A \subset B$,则 $B \not\subset A$

证明: (反证) 设$B \subset A$, 则

$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B \Rightarrow A \subseteq B$ (化简)

$B \subset A \Leftrightarrow B \subseteq A \wedge B \neq A \Rightarrow B \subseteq A$

所以 $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Leftrightarrow A=B$ (=定义)

但是$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B \Rightarrow A \neq B$(化简)矛盾! #

# 真包含($\subset$)的性质(续)

- 若$A\subset B$,且$B\subset C$, 则$A\subset C$

证明: $A\subset B \Leftrightarrow A\subseteq B \wedge A\neq B \Rightarrow A\subseteq B$ (化简),

同理 $B\subset C \Rightarrow B\subseteq C$, 所以$A\subseteq C$.

假设$A=C$, 则$B\subseteq C\Leftrightarrow B\subseteq A$, 又$A\subseteq B$, 故 $A=B$, 此与$A\subset B$矛盾, 所以$A\neq C$.

所以, $A\subset C$. #

# 空集(empty set)

- 空集:没有任何元素的集合是空集,记作$\varnothing$
- 例如, $\{x\in R | x^2+1=0\}$
- 定理1: 对任意集合A, $\varnothing\subseteq A$

  证明: $\varnothing\subseteq A \Leftrightarrow \forall x(x\in\varnothing\rightarrow x\in A)$

  $\Leftrightarrow \forall x(0\rightarrow x\in A) \Leftrightarrow 1.$ #
- 推论: 空集是唯一的.

  证明: 设$\varnothing_1$与$\varnothing_2$都是空集, 则

  $\varnothing_1\subseteq\varnothing_2 \wedge \varnothing_2\subseteq\varnothing_1 \Leftrightarrow \varnothing_1=\varnothing_2.$ #

# 全集

- 全集:在一个具体问题中，如果所涉及的集合都是某个集合的子集，则称这个集合为全集，记作E。

说明

- **全集是有相对性的，不同的问题有不同的全集，即使是同一个问题也可以取不同的全集。**
- **例如，在研究平面上直线的相互关系时，可以把整个平面（平面上所有点的集合）取作全集，也可以把整个空间（空间上所有点的集合）取作全集。**
- **一般地说，全集取得小一些，问题的描述和处理会简单些。**

# 幂集(power set)

- 幂集: A的全体子集组成的集合,称为A的幂集,记作P(A)(或$2^A$)$\mathscr{P}$(A))

$$P(A)=\{x|x\subseteq A\}$$

- 注意: $x\in P(A) \Leftrightarrow x\subseteq A$
- 例子: $A=\{a,b\}$, $P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$. #

# n元集(n-set)

- n元集: 含有n个元素的集合称为n元集
- 0元集: ∅
- 1元集(或单元集),如{a}, {b}, {∅}, {{∅}},…
- |A|: 表示集合A中的元素个数,

  A是n元集 ⇔ |A|=n
- 有限集 (fimite set): |A|是有限数, |A|<∞, 也叫有穷集

# n元集

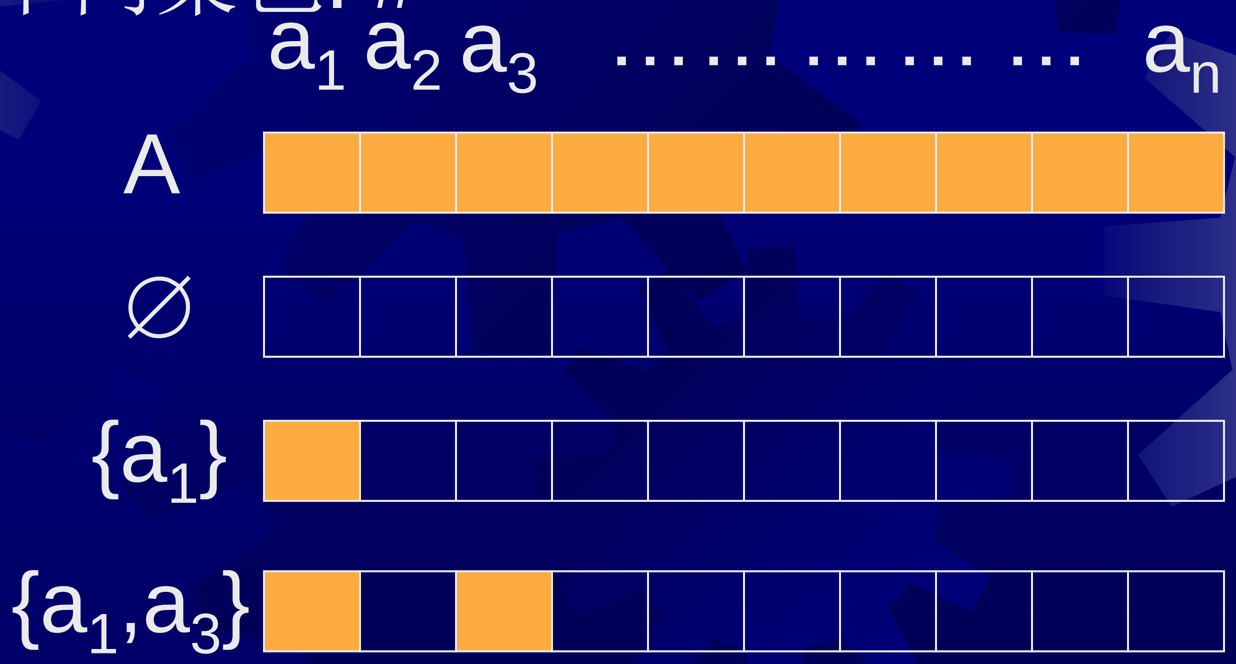
例1　A＝{1,2,3}，将A的子集分类：

| | |
|---|---|
| **0元子集（空集）** | $\varnothing$ |
| **1元子集（单元集）** | {1}，{2}，{3} |
| **2元子集** | {1, 2}，{1, 3}，{2, 3} |
| **3元子集** | {1, 2, 3} |

# 幂集(续)

- **定理**: $|A|=n \Rightarrow |P(A)|=2^n$.

证明：每个子集对应一种染色,一共有$2^n$种不同染色. #



# 集族(set family)

- 集族: 由集合构成的集合. 幂集都是集族.
- 指标集(index set): 设$\mathcal{A}$是集族, 若 $\mathcal{A}=\{A_\alpha|\alpha\in S\}$, 则S称为$\mathcal{A}$的指标集. S中的元素与$\mathcal{A}$中的集合是一一对应的. 也记作 $\mathcal{A}=\{A_\alpha|\alpha\in S\}=\{A_\alpha\}_{\alpha\in S}$
- 例2: $\{A_1,A_2\}$的指标集是$\{1,2\}$

# 集族(举例)

- 例3: $A_n=\{x\in N|x=n\}$, $A_0=\{0\}$, $A_1=\{1\},\ldots$
  $\{A_n|n\in N\}=\{\{0\},\{1\},\{2\},\ldots\}$
  $\{A_n|n\in N\}$的指标集是N
- 例4: 设$R_+=\{x\in R|x>0\}$, $A_a=[0,a)$,
  $\{A_a|a\in R_+\}$的指标集是$R_+$