4.2一阶逻辑公式及解释

- 同在命题逻辑中一样，为在一阶逻辑中进行演算和推理，必须给出一阶逻辑中公式的抽象定义，以及它们的分类及解释。
- **一阶语言**是用于一阶逻辑的形式语言，而一阶逻辑就是建立在一阶语言基础上的逻辑体系，一阶语言本身不具备任何意义，但可以根据需要被解释成具有某种含义。
- 一阶语言的形式是多种多样的，**本书给出的一阶语言是便于将自然语言中的命题符号化的一阶语言，记为F**。

一阶语言中的字母表

定义4.1 一阶语言F的**字母表**定义如下：

(1) 个体常项：$a, b, c, \ldots, a_i, b_i, c_i, \ldots, i \geq 1$

(2) 个体变项：$x, y, z, \ldots, x_i, y_i, z_i, \ldots, i \geq 1$

(3) 函数符号：$f, g, h, \ldots, f_i, g_i, h_i, \ldots, i \geq 1$

(4) 谓词符号：$F, G, H, \ldots, F_i, G_i, H_i, \ldots, i \geq 1$

(5) 量词符号：$\exists$, $\forall$

(6) 联结词符号：$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

(7) 括号与逗号：(,), ,

一阶语言中的项

定义4.2 一阶语言F的项的定义如下：

（1）个体常项和个体变项是项。

（2）若$\phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$是任意的n元函数，$t_1, t_2, \ldots, t_n$是任意的n个项，则$\phi(t_1, t_2, \ldots, t_n)$是项。

（3）所有的项都是有限次使用(1)，(2)得到的。

一阶语言中的原子公式

定义4.3 设$R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$是一阶语言F的任意n元谓词，$t_1, t_2, \ldots, t_n$是一阶语言F的任意的n个项，则称$R(t_1, t_2, \ldots, t_n)$是一阶语言F的**原子公式**。

例如：1元谓词$F(x)$，$G(x)$，2元谓词$H(x, y)$，$L(x, y)$，$A(f(x),y)$都是原子公式。

一阶语言F的合式公式

定义4.4　一阶语言F的合式公式定义如下：

(1) 原子公式是合式公式。

(2) 若A是合式公式，则(¬A)也是合式公式。

(3) 若A，B是合式公式，则(A∧B)，(A∨B)，(A→B)，(A↔B)也是合式公式。

(4) 若A是合式公式，则∀xA，∃xA也是合式公式。

(5) 只有有限次的应用(1)～(4)构成的符号串才是合式公式。

一阶语言F的合式公式也称为谓词公式，简称公式。

说明

- A，B代表任意公式，是元语言符号。
- 下文的讨论都是在一阶语言F中，因而不再提及。

【注解】

1.一阶逻辑语言的合式公式随着采用不同的非逻辑符号而不同，但对于不同的非逻辑符号采用相同的方式构造公式，一旦非逻辑符号确定之后，则一阶逻辑公式也就确定下来了，所以可以说一阶逻辑公式是某个非逻辑符号集生成的语言。

2.虽然说采用不同的非逻辑符号可生成不同的一阶逻辑公式，但所有一阶逻辑公式的逻辑符号是相同的，而我们在这里对一阶逻辑的讨论只是讨论这些逻辑符号的性质，而与非逻辑符号无关，则我们的讨论对于任意的非逻辑符号生成的一阶逻辑公式都是成立的。

3. 一阶逻辑语言的直观意义容易理解：“符号表”相当于英语的字母表，“项”相当于单词或词组，它们不表达完整的判断，还只是代表个体，而“公式”则代表完整的句子。而其中的函数符号用来构造复杂的个体（项），谓词符号则用来构造最原子的公式。

4.在定义4的[4]中,没有要求个体变项x一定要出现在合式公式A中，因此下述符号串都是合式公式：$(\forall x)F(x, y)$、$(\forall z)F(x, y)$。

5.可通过假设联结符号及量词之间的优先级而去掉一些括号，使得公式的书写更为简洁，约定：

(1). 公式的最外层括号可省略；

(2). 联结词¬的优先级高于∧,而∧高于∨,∨高于→,→高于↔,所以公式:$\neg F(x,y)\wedge Q(y,z)\vee\neg F(y,z)\rightarrow G(y,x)\leftrightarrow Q(x, z)\rightarrow F(y,z)$ 表示 $(((((\neg F(x,y))\wedge Q(y,z))\vee(\neg F(y,z)))\rightarrow G(y, x))\leftrightarrow(Q(x,z)\rightarrow F(y,z)))$，但通常在书写时也不可将所有的括号省略，应该既比较简洁，又比较容易理解，例如上述公式可写成：

$$((\neg F(x,y)\wedge Q(y,z)\vee\neg F(y,z))\rightarrow G(y,x))\leftrightarrow(Q(x,z)\rightarrow F(y,z))$$

由于一阶逻辑语言的公式比较复杂,其中的括号比较多，请注意讲究书写的方法。

(3). $A_1\rightarrow A_2\rightarrow\ldots\rightarrow A_{n-1}\rightarrow A_n$表示$(A_1\rightarrow(A_2\rightarrow\ldots\rightarrow(A_{n-1}\rightarrow A_n)\ldots))$。

(4). 量词的优先级高于任何联结符号,所以$(\forall x)A$、$(\exists x)A$可分别写成$\forall xA$、$\exists xA$，但要注意明确量词的辖域（下面定义什么是辖域）。

自由出现与约束出现

定义4.5 指导变元、辖域、约束出现、自由出现

- 在公式∀xA和∃xA中，称x为**指导变元**。
- 在公式∀xA和∃xA中，A为相应量词的**辖域**。
- 在∀x和∃x的辖域中，x的所有出现都称为**约束出现**。
- A中不是约束出现的其他变项均称为是**自由出现的**。

例题

例4.6 指出下列各公式中的指导变元，各量词的辖域，自由出现以及约束出现的个体变项。

(1) $\forall x(F(x,y)\rightarrow G(x,z))$

(2) $\forall x(F(x)\rightarrow G(y))\rightarrow \exists y(H(x)\land L(x,y,z))$

解答 (1) x是指导变元。量词∀的辖域$A=(F(x,y)\rightarrow G(x,z))$。在A中，x的两次出现均是约束出现。y和z均为自由出现。

(2) 前件上量词∀的指导变元为x，量词∀的辖域$A=(F(x)\rightarrow G(y))$，x在A中是约束出现的，y在A中是自由出现的。后件中量词∃的指导变元为y，量词∃的辖域为$B=(H(x)\land L(x,y,z))$，y在B中是约束出现的，x、z在B中均为自由出现的。

例 指出下列公式中，各量词的辖域以及变元的自由出现和约束出现：

[1]. $\forall x(F(x, y, z)\rightarrow\exists yG(x, y))$

[2]. $\exists xF(x, y)\wedge G(x, y)$

[3]. $\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x, y))$

【解答】

[1].量词$\forall x$的辖域为：$(F(x, y, z)\rightarrow\exists yG(x, y))$，而量词$\exists y$的辖域为$G(x, y)$。变元的自由出现和约束出现分别为：

$$\forall \underset{\text{约束}}{\underset{\uparrow}{x}} (F (\underset{\text{约束}}{\underset{\uparrow}{x}}, \underset{\text{自由}}{\underset{\uparrow}{y}}, \underset{\text{自由}}{\underset{\uparrow}{z}})\rightarrow\exists \underset{\text{约束}}{\underset{\uparrow}{y}}\, G (\underset{\text{约束}}{\underset{\uparrow}{x}}, \underset{\text{约束}}{\underset{\uparrow}{y}}))$$

[2]. 量词$\exists x$的辖域为：$F(x, y)$。变元的自由出现和约束出现分别为：

$$\exists x \quad F(x, \quad y) \wedge G(x, \quad y)$$

$$\begin{array}{ccccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{约束} & \text{约束} & \text{自由} & \text{自由} & \text{自由} \end{array}$$

[3]. 量词$\forall x$的辖域为：$\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x, y))$，量词$\forall y$的辖域为$(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x, y))$。变元的自由出现和约束出现分别为：

$$\forall x \quad \forall y \quad (F(x) \wedge G(y)\rightarrow H(x, \quad y))$$

$$\begin{array}{cccccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{约束} & \text{约束} & \text{约束} & \text{约束} & \text{约束} & \text{约束} \end{array}$$

本书中的记法

- 用$A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$表示含$x_1, x_2, \ldots, x_n$自由出现的公式。
- 用Δ表示任意的量词$\forall$或$\exists$，则$\Delta x_1 A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$是含有$x_2, x_3, \ldots, x_n$自由出现的公式，可记为$A_1(x_2, x_3, \ldots, x_n)$。
- 类似的，$\Delta x_2 \Delta x_1 A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$可记为$A_2(x_3, x_4, \ldots, x_n)$
- $\Delta x_{n-1} \Delta x_{n-2} \ldots \Delta x_1 A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$中只含有$x_n$是自由出现的个体变项，可以记为$A_{n-1}(x_n)$。
- $\Delta x_n \ldots \Delta x_1 A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$没有自由出现的个体变项。

举例

将例4.6(1)中的公式简记为$A(y, z)$，表明公式含有自由出现的个体变项y，z。而$\forall y A(y, z)$中只含有z为自由出现的公式，$\exists z \forall y A(y, z)$中已经没有自由出现的个体变项了，

闭式

定义4.6 设A是任意的公式，若A中不含有自由出现的个体变项，则称A为**封闭的公式**，简称**闭式**。

例如： $\forall x \forall y(F(x) \land G(y) \rightarrow H(x, y))$ 为闭式，

$\exists x(F(x) \land G(x, y))$ 不是闭式 。

一阶公式的解释

一阶公式没有确定的意义，一旦将其中的变项（项的变项、谓词变项）用指定的常项代替后，所得公式就具备一定的意义，有时就变成命题了。

例题4.7

例4.7 将下列两个公式中的变项指定成常项使其成为命题:

(1) $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$

(2) $\forall x \forall y(F(x) \wedge F(y) \wedge G(x,y) \rightarrow H(f(x,y),g(x,y)))$

(1)指定个体变项的变化范围，并且指定谓词F，G的含义，下面给出两种指定法:

(a)令个体域D_1为全总个体域，
F(x)为x是人，
G(x)为x是黄种人，

则命题为“所有人都是黄种人”，这是假命题。

(b)令个体域D_2为实数集合R，
F(x)为x是自然数，
G(x)为x是整数，

则命题为“自然数都是整数”，这是真命题。

例题4.7

(2) $\forall x \forall y (F(x) \wedge F(y) \wedge G(x,y) \rightarrow H(f(x,y), g(x,y)))$

含有两个2元函数变项，两个1元谓词变项，两个2元谓词变项。

指定个体域为全总个体域，

$F(x)$为x是实数，　　$G(x,y)$为$x \neq y$，

$H(x,y)$为$x>y$，　　$f(x,y)=x^2+y^2$，

$g(x,y)=2xy$，

则表达的命题为“对于任意的x，y，若x与y都是实数，且$x \neq y$，则$x^2+y^2>2xy$”，这是真命题。

如果$H(x,y)$改为$x<y$，

则所得命题为假命题。

一阶公式的解释

定义4.7 一阶公式的解释I由下面4部分组成：

(a)非空个体域D_I。

(b)D_I中一些特定元素的集合 $\{\overline{a_1},\overline{a_2},\cdots\overline{a_i},\cdots\}$ 。

(c)D_I上特定函数集合{$\overline{f_i^n}$ |i, n≥1}。

(d)D_I上特定谓词的集合{ $\overline{F_i^n}$ | i, n≥1}。

I下的赋值σ：对每一个体变项符号x指定 D_I中的一个值$\sigma(x)$

一阶公式的解释

设一阶公式A, 规定：在解释I和赋值σ下

1.取个体域D_I

2.A中个体常项符号a就将它替换成 $\overline{a}$

3.A中含函数符号*f*就将它替换成 $\overline{f}$

4.A中含谓词符号*F*就将它替换成 $\overline{F}$

5.A中含自由出现的个体变项谓词符号*x*就将它替换成$\sigma(x)$

把这样所得的公式记作A’，称A’为A在I下的解释。

对解释I的几点说明

- 在解释的定义中引进了几个元语言符号，如 $\overline{a_i}$ $\overline{f_i}^n$ $\overline{F_i}^n$
- 在解释的公式A中的个体变项均取值于D_I。
- 若A中含有个体常项，就解释成 $\overline{a_i}$ 。
- f_i^n 为第i个n元函数。例如，$i=1$，$n=2$时 f_1^2 表示第一个二元函数，它出现在解释中，可能是 $\overline{f_1}(x,y)=x^2+y^2$，$\overline{g_1}(x,y)=2xy$等，一旦公式中出现$f_1(x,y)$就解释成 $\overline{f_1}(x,y)$，出现$g_1(x,y)$就解释成 $\overline{g_1}(x,y)=2xy$。
- F_i^n 为第i个n元谓词，如$i=2$，$n=3$时 F_2^3 表示第2个3元谓词，它可能 $\overline{F_2}(x,y,z)$的形式出现在解释中，公式A若出现$F_2(x,y,z)$就解释成 $\overline{F_2}(x,y,z)$。
- 被解释的公式不一定全部包含解释中的四部分。

例题4.8

例4.8 给定解释I如下：

(a) 个体域D=N(N为自然数集合，即 N={0,1,2,...})

(b) $\overline{a}$=0

(c) $\overline{f}$(x,y)=x+y， $\overline{g}$(x,y)=x•y。

(d) $\overline{F}$(x,y)为x=y。

(e) $\sigma(x)=1, \sigma(y)=2, \sigma(z)=3.$

写出下列公式在I及σ下，下列哪些公式为真?哪些为假?哪些的真值还不能确定?

例题4.8

(1) $F(f(x,y),g(x,y))$

(2) $F(f(x,a),y) \rightarrow F(g(x,y),z)$

(3) $\neg F(g(x,y),g(y,z))$

(4) $\forall x\, F(g(x,y),z)$

(5) $\forall x\, F(g(x,a),x) \rightarrow F(x,y)$

(6) $\forall x\, F(g(x,a),x)$

(7) $\forall x \forall y (F(f(x,a),y) \rightarrow F(f(y,a),x))$

(8) $\forall x \forall y \exists z\, F(f(x,y),z)$

(9) $\exists x\, F(f(x,x),g(x,x))$

例题4.8

(1) $F(f(x,y),g(x,y))$

公式被解释成“$1+2=1\times 2$”，这是假命题。

(2) $F(f(x,a),y)\rightarrow F(g(x,y),z)$

公式被解释成“$(1+0=2)\rightarrow(1\times 2=3)$”，这是真命题。

(3) $\neg F(g(x,y),g(y,z))$

公式被解释成“$1\times 2\neq 2\times 3$”，这是真命题。

(4) $\forall x\, F(g(x,y),z)$

公式被解释成“$\forall x(2x=3)$”，这是假命题。

例题4.8

(5) $\forall x\ F(g(x,a),x) \rightarrow F(x,y)$

公式被解释成“$\forall x(x \cdot 0=x) \rightarrow (1=2)$”，由于前件为假，所以被 解释的公式为真。

(6) $\forall x\ F(g(x,a),x)$

公式被解释成“$\forall x(x \cdot 0=x)$”，为假命题。

(7) $\forall x \forall y(F(f(x,a),y) \rightarrow F(f(y,a),x))$

公式被解释成“$\forall x \forall y((x+0=y) \rightarrow (y+0=x))$”，为真命题。

例题4.8

(8) $\forall x \forall y \exists z\ F(f(x, y), z)$

公式被解释成“$\forall x \forall y \exists z(x+y=z)$”，这也为真命题。

(9) $\exists x\ F(f(x, x), g(x, x))$

公式被解释成“$\exists x(x+x=x \cdot x)$”，为真命题。

结论

1.给定解释I和I下的赋值σ，任何谓词公式都被解释成命题。
2.闭式在给定的解释中都变成了命题。如(6)~(8)。
3.不是闭式的公式在某些解释下和赋值下可能为真命题，而在另一个解释和赋值下可能变为假命题。

定理4.1 封闭的公式在任何解释下都变成命题。

一阶公式的分类

定义4.8　永真式、永假式、可满足式

- 设A为一个公式，若A在任何解释和该解释下的任何赋值下均为真，则称A为**永真式**(或称**逻辑有效式**)。
- 设A为一个公式，若A在任何解释和该解释下的任何赋值下均为假，则称A为**矛盾式**(或**永假式**)。
- 设A为一个公式，若至少存在一个解释和该解释下的一个赋值使A为真，则称A为**可满足式**。

说明

- 永真式一定是可满足式，但可满足式不一定是永真式。
- 在一阶逻辑中，到目前为止，还没有找到一种可行的算法，用来判断任意一个公式是否是可满足的，这与命题逻辑的情况是完全不同的。
- 但对某些特殊的公式还是可以判断的。

代换实例

定义4.9 设A_0是含有命题变项$p_1, p_2, \ldots, p_n$的命题公式，$A_1, A_2, \ldots, A_n$是n个谓词公式，用$A_i(1 \leqslant i \leqslant n)$处处代替$A_0$中的$p_i$，所得公式A称为$A_0$的**代换实例**。

例如，$F(x) \rightarrow G(x)$，$\forall x F(x) \rightarrow \exists y G(y)$等都是$p \rightarrow q$的代换实例，而$\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$等不是$p \rightarrow q$的代换实例。

定理4.2 重言式的代换实例都是永真式，矛盾式的代换实例都是矛盾式。

例题4.9

例4.9　判断下列公式中，哪些是永真式，哪些是矛盾式？

（1）$\forall x(F(x)\to G(x))$

（2）$\exists x(F(x)\wedge G(x))$

（3）$\forall xF(x)\to(\exists x\exists yG(x,y)\to\forall xF(x))$

（4）$\neg(\forall xF(x)\to\exists yG(y))\wedge\exists yG(y)$

解：（1）$\forall x(F(x)\to G(x))$

解释1：个体域为实数集合R，F(x)：x是整数，G(x)：x是有理数，因此公式真值为真。

解释2：个体域为实数集合R，F(x)：x是无理数，G(x)：x能表示成分数，因此公式真值为假。

所以公式为非永真式的可满足式。

例题4.9

（2）$\exists x(F(x)\wedge G(x))$

公式为非永真式的可满足式。

（3）$\forall xF(x)\to(\exists x\exists yG(x, y)\to\forall xF(x))$

为$p\to(q\to p)$（重言式）的代换实例，故为永真式。

（4）$\neg(\forall xF(x)\to\exists yG(y))\wedge\exists yG(y)$

为$\neg(p\to q)\wedge q$（矛盾式）的代换实例，故为永假式。

例题

例4.10 判断下列公式的类型。

(1) $\forall xF(x) \rightarrow \exists xF(x)$

(2) $\forall x\exists yF(x,y) \rightarrow \exists x\forall yF(x,y)$

(3) $\exists x(F(x)\wedge G(x)) \rightarrow \forall yG(y)$

解 记(1)，(2)，(3)中的公式分别为A,B,C。

(1)设I为任意一个解释，个体域为D。

若存在$x_0\in D$，使得$F(x_0)$为假，则$\forall xF(x)$为假，所以A的前件为假，故A为真。

若对于任意$x\in D$，$F(x)$均为真，则$\forall xF(x)$，$\exists xF(x)$都为真，从而A为真。

所以在I下A为真。由I的任意性可知，A是永真式。

例题

(2) $\forall x\exists yF(x,y)\rightarrow\exists x\forall yF(x,y)$

取解释I：个体域为自然数集合N，$F(x,y)$为$x\leqslant y$。

在I下B的前件与后件均为真，所以B为真。这说明B不是矛盾式。（ 在$\exists x\forall yF(x,y)$中，$x=0$ ）

再取I‘：个体域仍然为N，$F(x,y)$为$x=y$。

在I’下，B的前件真而后件假，所以B为假。这说明B不是永真式。

故B是非永真式的可满足式。

(3) $\exists x(F(x)\wedge G(x))\rightarrow\forall yG(y)$

C也是非永真式的可满足式。

小节结束

本章主要内容

- 个体词
  ①个体常项
  ②个体变项
  ③个体域
  ④全总个体域
- 谓词
  ①谓词常项
  ②谓词变项
  ③n(n≥1)元谓词
  ④特性谓词
- 量词
  ①全称量词
  ②存在量词

本章主要内容

- 一阶逻辑中命题符号化
- 一阶逻辑公式
  ①原子公式
  ②合式公式（或公式）
  ③闭式
- 解释
- 一阶逻辑公式的分类
  ①逻辑有效式（或永真式）
  ②矛盾式（或永假式）
  ③可满足式

本章学习要求

- 要求准确地将给出的命题符号化：
  ①当给定个体域时，在给定个体域内将命题符号化。
  ②当没给定个体域时，应在全总个体域内符号化。
  ③在符号化时，当引入特性时，注意全称量词与蕴含联结词的搭配，存在量词与合取联结词的搭配。
- 深刻理解逻辑有效式、矛盾式、可满足式的概念。
- 记住闭式的性质：在任何解释下均为命题。
- 对给定的解释，会判别公式的真值或不能确定真值。

小节结束

习题选讲—命题符号化

1. 在一阶逻辑中将下列命题符号化。

（1） 每个人都有心脏。

（2） 有的狗会飞。

（3） 没有不犯错误的人。

（4） 发光的不都是金子。

（5） 一切人都不一样高。

（6） 并不是所有的汽车都比火车快。

（7） 没有一个自然数大于等于任何自然数。

（8） 有唯一的偶素数。

（9） 不管黑猫白猫，抓住老鼠就是好猫。

（10）对平面上任意两点，有且仅有一条直线通过这两点。

习题选讲—命题符号化

解：由于没指出个体域，故用全总个体域

（1）每个人都有心脏。

本命题的含义：对于每一个x，如果x是人，则x有心脏。

因而应首先从宇宙间的一切事物中，将人分离出来，这就必须引入特性谓词。

令$M(x)$:x是人，$H(x)$:x有心脏。

命题符号化为： $\forall x(M(x)\rightarrow H(x))$

如果将其中的→改为∧，即$\forall x(P(x)\wedge H(x))$，它表示的意思是：“对于每个x，x是人且x有心脏”。这是一个假命题，而“每个人都有心脏”是真命题。

这说明将命题“每个人都有心脏”符号化为$(x)(P(x)\wedge H(x))$是错误的。

习题选讲—命题符号化

（2）有的狗会飞。

命题的意思是：存在一个x，使得x是狗，并且x会飞。

设D(x)：x是狗，F(x)：x会飞。

命题符号化为：$\exists x(D(x) \land F(x))$

如果将其中的∧改为→，即$\exists x(D(x) \rightarrow F(x))$，

如果用a表示某只猫，则D(a)为假，因而，$D(a) \rightarrow F(a)$为真，所以$\exists x(D(x) \rightarrow F(x))$为真，而“有的狗会飞”为假，

这说明将“有的狗会飞”符号化为$(x)(D(x) \rightarrow F(x))$是错误的。

习题选讲—命题符号化

(3) 没有不犯错误的人。

命题的意思是： ① 存在不犯错误的人是不可能的。

② 只要是人，必然犯错误。

设 $M(x)$： x是人，$F(x)$:x犯错误

命题符号化为

① $\neg \exists x(M(x) \land \neg F(x))$

② $\forall x(M(x) \rightarrow F(x))$

习题选讲—命题符号化

（4）发光的不都是金子。

命题的意思是： ① 不是发光的东西都是金子。

② 存在着发光的东西不是金子。

设 L(x)：x是发光的东西，G(x)：x是金子。

命题符号化为

① $\neg\forall x(L(x)\rightarrow G(x))$

② $\exists x(L(x)\wedge\neg G(x))$

习题选讲—命题符号化

（5）一切人都不一样高。

设 F(x):x是人， H(x, y)， x与y相同， L(x, y)： x与y一样高，

命题符号化为

$$\forall x(F(x) \rightarrow \forall y(F(y) \wedge \neg H(x,y) \rightarrow \neg L(x,y)))$$

或 $$\forall x \forall y(F(x) \wedge F(y) \wedge \neg H(x,y) \rightarrow \neg L(x,y))$$

（6）并不是所有的汽车都比火车快。

设 F(x):x是汽车， G(y):y是火车， H(x, y):x比y快，

命题符号化为

$$\neg \forall x \forall y(F(x) \wedge G(y) \rightarrow H(x,y))$$

或 $$\exists x \exists y(F(x) \wedge G(y) \wedge \neg H(x,y))$$

习题选讲—命题符号化

（7）没有一个自然数大于等于任何自然数。

设 $N(x)$:x是自然数，$G(x,y)$:$x\geq y$

命题符号化为：

$$\neg\exists x(N(x)\wedge\forall y(N(y)\rightarrow G(x,y)))$$

（8）有唯一的偶素数。

设：$Q(x)$:x是偶数，$P(x)$:x是素数， $E(x,y)$:$x=y$

命题符号化为：

$$\exists x(Q(x)\wedge P(x)\wedge\neg\exists y(Q(y)\wedge P(y)\wedge\neg E(x,y)))$$

习题选讲—命题符号化

（9）不管黑猫白猫，抓住老鼠就是好猫。

需要考虑问题：

①只是限制黑猫白猫，还是包含其它颜色的猫？

②是指至少抓住一只就可以，还是抓住所有的？

因此在描述命题时，总是将这些模糊概念做某种确切理解。

设 $C(x)$：x是猫， $W(x)$：x是白的， $B(x)$：x是黑的

$G(x)$：x是好的，$M(x)$：x是老鼠， $K(x)$：x抓住y

命题符号化为

$$\forall x \forall y (C(x) \wedge M(y) \wedge (B(x) \vee W(x)) \wedge K(x,y)) \to G(x))$$

习题选讲—命题符号化

（10）对平面上任意两点，有且仅有一条直线通过这两点。

设 $P(x)$：x是一个点，$L(x)$：x是一条直线

$R(x,y,z)$：z通过x, y，$E(x,y)$：x等于y

命题符号化为

$\forall x\forall y(P(x)\wedge P(y)\wedge\neg E(x,y))$

$\rightarrow\exists z(L(z)\wedge R(x,y,z)\wedge\forall u((L(u)\wedge R(x,y,u))\rightarrow E(u,z)))$

习题选讲—公式判断

2、判断下列各式是否是永真式？证明你的判断。

（1） $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$

（2） $\exists x(F(x) \land G(x))$

（3） $\forall x \forall y(F(x) \land G(y) \rightarrow H(x, y))$

（4） $\exists x \forall y(P(x, y) \land Q(a, y)) \rightarrow \exists x \forall y(P(x, y) \land Q(x, y))$
其中a是个体常元。

解：

（1） 不是永真式。

（2） 不是永真式。

（3） 不是永真式。

（4） 不是永真式。

(4) $\exists x\forall y(P(x,y)\wedge Q(a,y))\rightarrow\exists x\forall y(P(x,y)\wedge Q(x,y))$
其中a是个体常元。

令个体域为某个元素个数大于等于2的有限整数集，其中a为最小的数。
$P(x,y)$：x大于等于y，
$Q(x,y)$：x小于等于y。

$\exists x\forall yP(x,y)\wedge Q(a,y)$解释为：存在一个x，对于所有的y，有x大于等于y，并且a小于等于y。命题为真，只要取x为个体域中最大数即可。

$\exists x\forall y(P(x,y)\wedge Q(x,y))$解释为：存在一个x，对于所有的y，有x大于等于y，并且x小于等于y。命题为假。

习题选讲—公式判断

3、判断下列公式是否为永真公式。

（1） $(\exists x\ A(x)\rightarrow \exists x\ B(x)) \rightarrow \exists x\ (A(x)\rightarrow B(x))$

（2） $(\forall x\ A(x)\rightarrow \forall x\ B(x)) \rightarrow \forall x\ (A(x)\rightarrow B(x))$

（3） $(\exists x\ A(x)\rightarrow \forall x\ B(x)) \rightarrow \forall x\ (A(x)\rightarrow B(x))$

（4） $(\forall x\ A(x)\rightarrow \exists x\ B(x)) \rightarrow \exists x\ (A(x)\rightarrow B(x))$

解:

（1） 永真公式。

（2） 不是永真公式。

（3） 永真公式 。

（4） 永真公式。

小节结束

习题说明

- 判断下面推理是否正确。先将简单命题符号化，再写出前提、结论、推理的形式结构（以蕴涵式的形式给出）和判断过程（至少给出两种判断方法）：

（5）若今天是星期一，则明天是星期二或星期三。

推理形式结构为

$$p \rightarrow (q \vee r)$$

它不是重言式，故推理不正确。