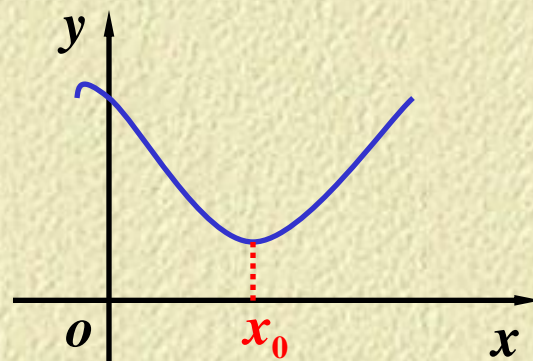
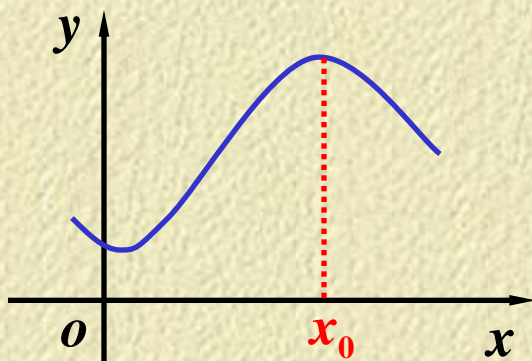
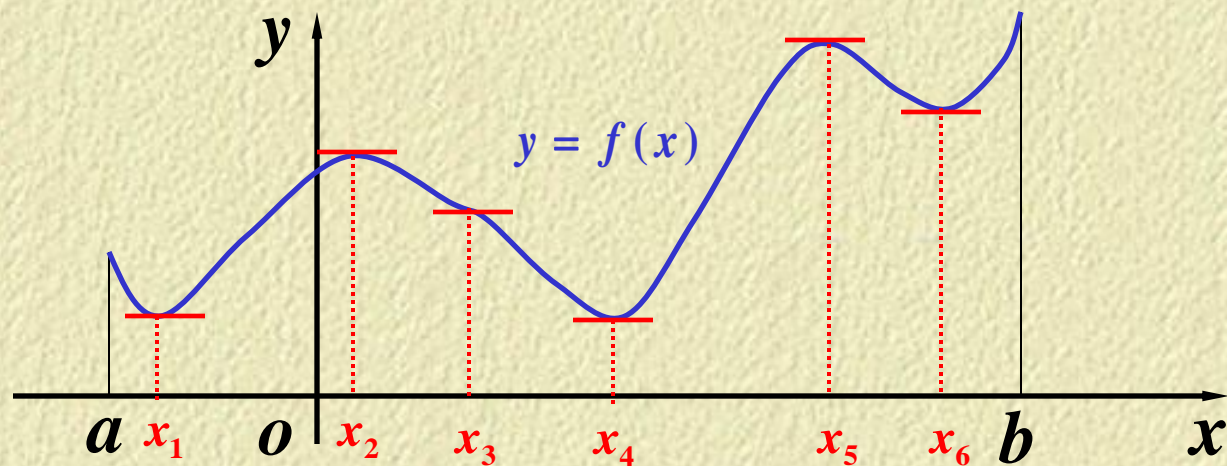


6-04. 极值与最值

——利用导数研究函数的性状

1. 函数极值的判定法；
2. 最值的计算.

1. 函数极值的判定法



定义：方程 $f'(x) = 0$ 的实根叫做函数 $f(x)$ 的驻点。

可以注意到,随着自变量的增加,函数值由小到大增加,再由大到小减少,则在此过程中连续函数 $f(x)$ 取得极大值;

随着自变量的增加,函数值大到小减少,再由小到大增加,则在此过程中连续函数 $f(x)$ 取得极小值.

所以如果清楚了函数的单调情况,我们就可以判断清楚函数的极值情况.

但是：驻点 \neq 极值点

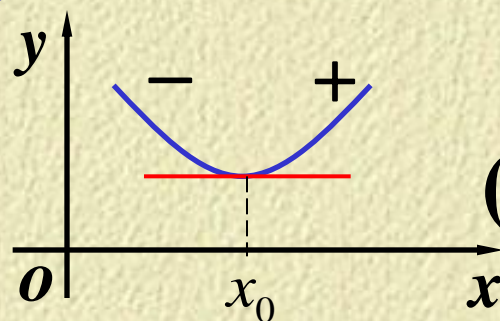
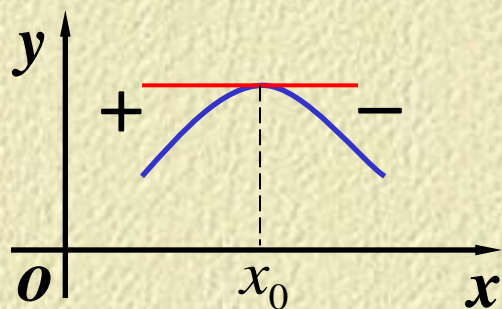
定理1.(极值判断第一充分条件)

若 x_0 是连续函数 $f(x)$ 的驻点或不可导的点, $\delta > 0$.

(1).若 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时 $f'(x) < 0$, $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时 $f'(x) > 0$,则函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值.

(2).若 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时 $f'(x) > 0$, $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时 $f'(x) < 0$,则函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值.

(3).若 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 或 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时 $f'(x)$ 不变号,则函数 $f(x)$ 在 x_0 处不取得极值.

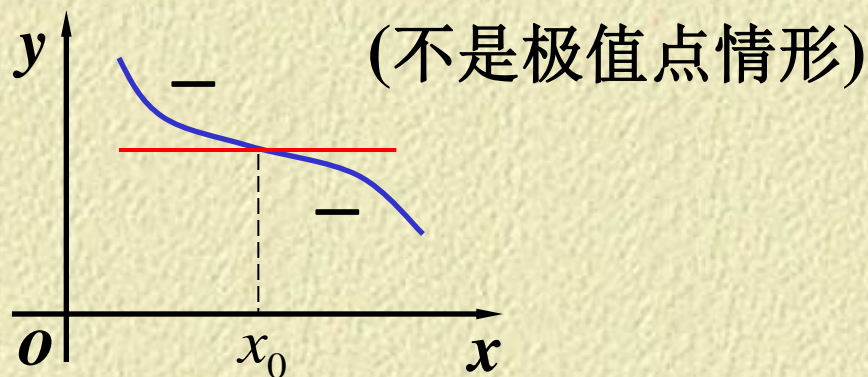
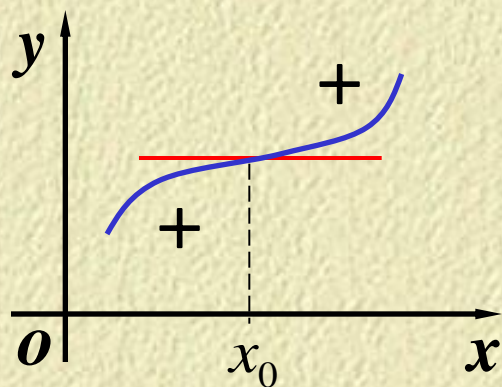


(是极值点情形)

上页

下页

返回



求极值的步骤：

(1).求导数 $f'(x)$;

(2).求驻点…方程 $f'(x)=0$ 的实根

或 $f'(x)$ 不存在的点 x_0 ;

(3).检查 $f'(x)$ 在点 x_0 左右的正负号,判断极值点;

(4).求极值.

上页

下页

返回

例1.求函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ 的极值.

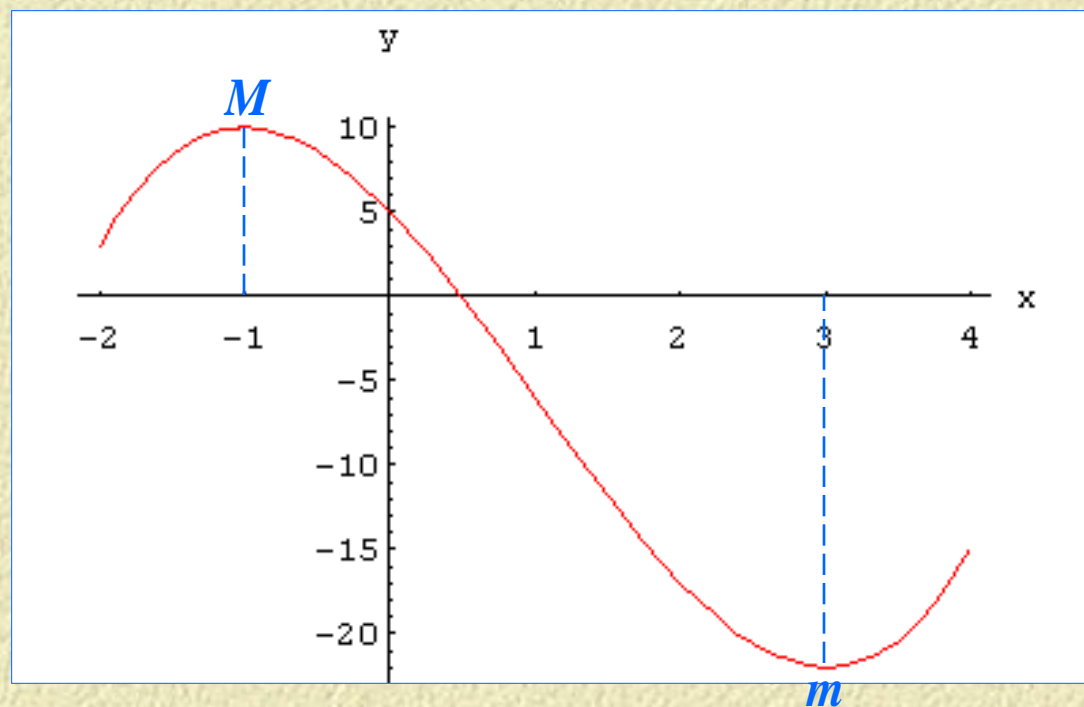
解 $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$

令 $f'(x) = 0$, 得驻点 $x_1 = -1, x_2 = 3$. 列表讨论

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↑	极大值	↓	极小值	↑

$\max f(x) = f(-1) = 10, \min f(x) = f(3) = -22.$

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ 图形如下



例2. 求出函数 $f(x) = (x-2)\sqrt[3]{x^2}$ 的极值.

$$\text{解 } f'(x) = \sqrt[3]{x^2} + (x-2) \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{5x-4}{3\sqrt[3]{x}},$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-2)\sqrt[3]{x^2}}{x} = \infty,$$

$\therefore x=0$ 时 $f'(x)$ 不存在, $x = \frac{4}{5}$ 时 $f'(x) = 0$.

在 $f(x)$ 的连续区间 $(-\infty, +\infty)$ 上

$$x < 0, f'(x) > 0, 0 < x < 4/5, f'(x) < 0,$$

$$x > 4/5, f'(x) > 0,$$

$$\therefore \max f(x) = f(0), \min f(x) = f(4/5).$$

定理1.(极值判断第一充分条件)若连续函数在驻点两侧近旁 $f'(x)$ 变号,那么函数在驻点处取得极值 .

驻点两侧 $f'(x)$ 变号是函数取得极值的充分而非必要条件 .

$$\text{例如, } f(x) = \begin{cases} x^2 \left(2 + \sin \frac{1}{x} \right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} .$$

由于 $x^2 \leq x^2 \left(2 + \sin \frac{1}{x} \right) \leq 3x^2$, 知 $f(0) = \min_{\mathbb{R}} f(x)$,

但是, $x \neq 0$ 时, $f'(x) = 2x \left(2 + \sin \frac{1}{x} \right) - \cos \frac{1}{x}$,

在 $x = 0$ 的两侧近旁 $f'(x)$ 无穷多次变号 .

定理2.(极值判断第二充分条件)

设 $f(x)$ 在 x_0 处二阶可导,且 $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0$.

(1).若 $f''(x_0) > 0$,则函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值;

(2).若 $f''(x_0) < 0$,则函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值.

证明(1). $\because f''(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x} > 0$,

\therefore 在 $U(x_0)$ 内 $\frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x} > 0$,

即在 $U(x_0)$ 内 $f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)$ 与 Δx 同号,

当 $\Delta x < 0$ 时有 $f'(x_0 + \Delta x) < f'(x_0) = 0$,

当 $\Delta x > 0$ 时有 $f'(x_0 + \Delta x) > f'(x_0) = 0$.

\therefore 函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值.同理可证(2).



定理2.(极值判断第二充分条件)

设 $f(x)$ 在 x_0 处二阶可导,且 $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0$.

(1).若 $f''(x_0) > 0$,则函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值;

(2).若 $f''(x_0) < 0$,则函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值.

若 $f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0$,则函数 $f(x)$ 在 x_0 处是否取得极值无法确定.

例如,(1). $f(x) = x^3, x_0 = 0$;

(2). $g(x) = x^4, x_0 = 0$.

小结

极值是函数的局部性概念:极大值可能小于极小值,极小值可能大于极大值.

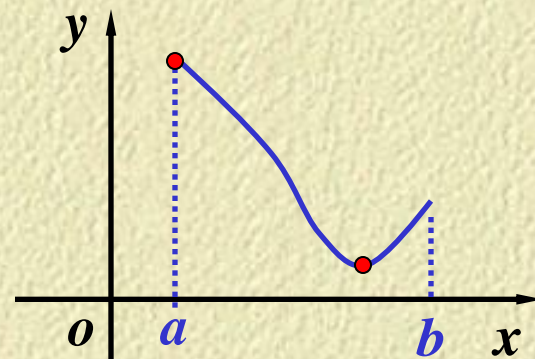
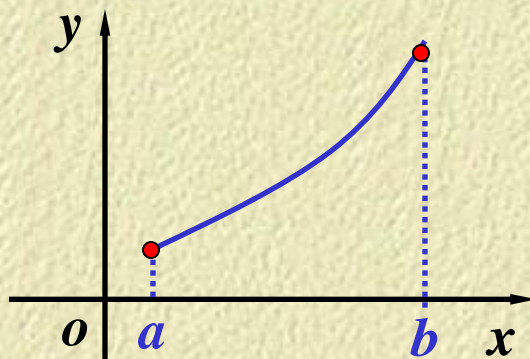
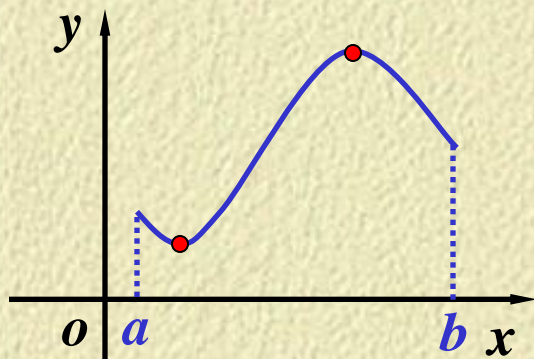
函数的极值必在**驻点或不可导点**取得。

判别法 { 第一充分条件;
第二充分条件; (注意使用条件)

2. 最值的求法

若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值与最小值存在.

在 (a,b) 内函数 $f(x)$ 除个别点外处处可导,并且至多有有限个驻点.



求 $[a,b]$ 上函数最值的步骤:

- 1.求 (a,b) 内函数的驻点和不可导点;
- 2.求区间端点、驻点和不可导点的函数值,比较大小:最大的那个就是最大值,最小的那个就是最小值.

注意:如果区间内函数**只有一个极值点**,则这个极值就是最值(最大值或最小值).

例3.求函数 $f(x) = (x-2)\sqrt[3]{x^2}$ 在 $[-1, 2]$ 上的最大、小值.

$$\text{解 } f'(x) = \sqrt[3]{x^2} + (x-2) \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{5x-4}{3\sqrt[3]{x}},$$

$x=0$ 时 $f'(x)$ 不存在, $x=\frac{4}{5}$ 时 $f'(x)=0$.

$$f(-1) = -3, f(0) = f(2) = 0, f\left(\frac{4}{5}\right) = -\frac{6 \cdot \sqrt[3]{80}}{25}.$$

\therefore 在 $[-1, 2]$ 上 $f(x)$ 的最小值为 $f(-1) = -3$,
最大值为 $f(0) = f(2) = 0$.

例4.考虑用某种材料做一个厚度相对于其尺寸而言很小的有盖有底圆桶形容器.问怎样设计其尺寸,使得容积一定时所用的材料最为节省.

解 忽略材料的厚度,那么问题就相当于一个圆柱体的体积固定,要使其表面积最小.

设容器容积为 V ,底半径为 r ,

$r \in (0, +\infty)$, 其高为 $h = \frac{V}{\pi r^2}$,

则表面积为 $A(r) = 2\pi r \cdot \frac{V}{\pi r^2} + 2\pi r^2$.

现在就是要求 $A(r)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最小值.

$$A(r) = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2, r \in (0, +\infty).$$

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2}, \text{因此 } A'(r) \text{ 在 } (0, +\infty)$$

上有唯一的零点 $r_0 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, 而没有导数

不存在的点, 同时对 $A'(r)$ 再求导, 有

$$A''(r) = 4\pi + \frac{4V}{r^3} > 0, r \in (0, +\infty).$$

$$A(r) = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2 \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上}$$

$$\text{唯一驻点 } r_0 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}, r \in (0, +\infty),$$

$A''(r_0) > 0$, 所以在 $(0, +\infty)$ 上, r_0 是 $A(r)$ 的最小值点, 这时相应的高为

$$h_0 = \frac{V}{\pi r_0^2} = \frac{V}{\pi \sqrt[3]{\left(\frac{V}{2\pi}\right)^2}} = 2r_0,$$

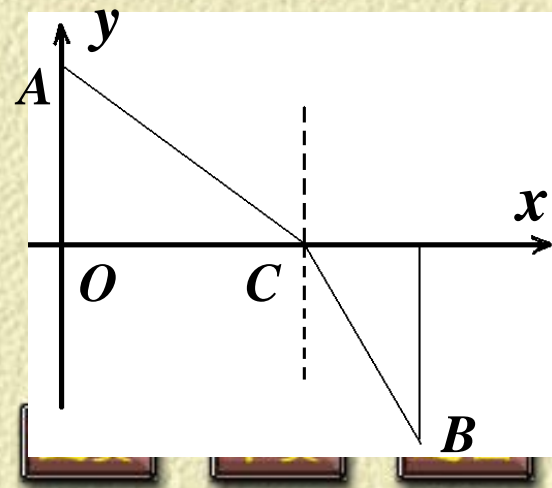
也就是说, 当容器的高等于底直径时所用材料最节省.



例5.光的折射定律的解释——*Fermat* 光行最速原理:光总是沿着耗时最少的路径前进——在一种媒介中总是沿着直线前进.

在某开阔的原野上有被一条直线分割成为甲、乙两部分的地方,人们进行一场汽车拉力赛,从甲地的A处出发跨过分界线到达乙地的B处,在甲、乙两种不同地质条件的地方汽车的速度分别为 v_1 、 v_2 .问:车手应选择怎样的行进路线呢?

解 如图建立直角坐标系.设点的坐标分别为 $A(0,a)$, $B(b,c)$,那么为尽快到达目的地,车手在甲乙两地应该均走直线,而在甲、乙两地的分界线上选择 $C(x,0)$,使得总的耗时最少.



总的耗时为 $T = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{c^2 + (b - x)^2}}{v_2}, x \in [0, b],$

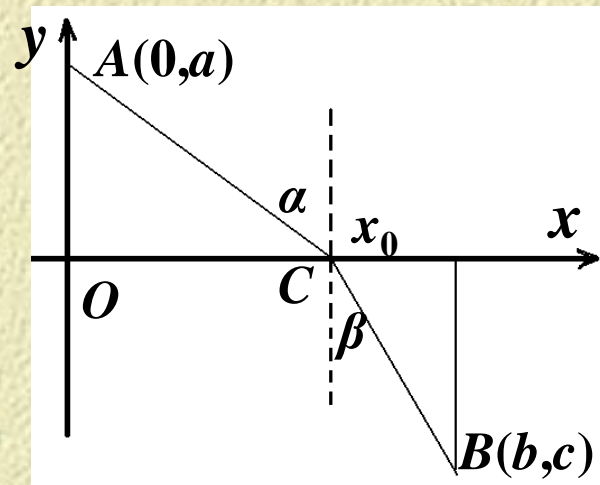
$$T' = \frac{x}{v_1 \sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{2(b - x)(-1)}{v_2 \sqrt{c^2 + (b - x)^2}} = 0 \text{求驻点,}$$

根据本问题的实际意义,知道在 $[0, b]$ 上 T 必有最小值,
而驻点 x_0 使得 $T'(x_0) = 0$,即

$$\frac{x_0}{v_1 \sqrt{a^2 + x_0^2}} + (-1) \frac{(b - x_0)}{v_2 \sqrt{c^2 + (b - x_0)^2}} = 0 \quad (*)$$

$$(*) \text{即} \frac{x_0 / \sqrt{a^2 + x_0^2}}{v_1} = \frac{(b - x_0) / \sqrt{c^2 + (b - x_0)^2}}{v_2}$$

Fermat 光行最速原理：
光总是沿着耗时最少的路径前进——在一种媒介中总是沿着直线前进。



$$\text{驻点 } x_0 : \frac{x_0 / \sqrt{a^2 + x_0^2}}{v_1} = \frac{(b - x_0) / \sqrt{c^2 + (b - x_0)^2}}{v_2},$$

经过计算,驻点 x_0 处 $T(x)$ 取得最小值 $T(x_0)$.

如图,记两个角分别为 α, β .则上述驻点 x_0 满足的方程就可表示为

$$\frac{\sin \alpha}{v_1} = \frac{\sin \beta}{v_2}, \text{而这也就是光的折射定律结果的表达!}$$

上页

下页

返回



The calculus that you learn in this chapter will enable you to explain the location of rainbows in the sky and why the colors in the secondary rainbow appear in the opposite order to those in the primary rainbow. (See the project on pages 206–207.)

© Pictogen Online / Shutterstock

James Stewart — Calculus, 7ed.—P206

The Calculus of Rainbows

上页

下页

返回

彩虹是因为阳光射到空中接近球形的小水滴，造成色散及反射而成。阳光射入水滴时会同时以不同角度入射，在水滴内亦以不同的角度反射。当中以40至42度的反射最为强烈，造成我们所见到的彩虹。

造成这种反射时，阳光进入水滴，先折射一次，然后在水滴的背面反射，最后离开水滴时再折射一次，**总共经过一次反射两次折射**。因为水对光有色散的作用，不同波长的光的折射率有所不同，红光的折射率比蓝光小，而蓝光的偏向角度比红光大。

由于光在水滴内被反射，所以观察者看见的光谱是倒过来，红光在最上方，其他颜色在下。

当我们胸怀数学“内美”去感觉缤纷世界，就会感觉到“看不见的”前定和谐。当我们看到天上的彩虹，会发现写在空中的不是令人心旌摇荡的诗句，而是大自然的“最节省”法则（**最小作用量原理**）：自然不走中庸之道，它的和谐是在追求“极端”中实现的。它永远选择“最”，**最简、最好，当然也最美**。当数学的追求成为思维方式和生活态度，我们会更自然地追求卓越，追求纯净，追求美好。

——引自李泳 科学博客文章

[上页](#)

[下页](#)

[返回](#)

杜甫(公元712~~770)

自京赴奉先县咏怀五百字

杜陵有布衣,老大意转拙:

许身一何愚,窃比稷与契(音xiè)!...

穷年忧黎元,叹息肠内热. ...

葵藿倾太阳,物性固莫夺. ...

朱门酒肉臭,路有冻死骨! ...

忧端齐终南,湏臾不可掇!

注释: 1. 公元755年--天宝十四载十二月中
“安史之乱”爆发.此诗作于该年十一月.

2. 葵:冬葵菜. 藿:豆叶.

上页

下页

返回

我们看不见数学的存在,它却无所不在.正如开普勒所言:上帝是用数学创造的世界.

例6.求数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 的最大项.

分析 考虑求函数 $y = x^{\frac{1}{x}}, x > 0$ 的最大值.

解 设 $y = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln x}$,

$$y' = e^{\frac{1}{x} \ln x} \cdot \left(\frac{\ln x}{x} \right)' = x^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$\therefore \begin{cases} 0 < x < e, y' > 0, y \nearrow \\ x > e, y' < 0, y \searrow \end{cases}, y_{\text{最大}} = y|_{x=e} = e^{\frac{1}{e}},$$

$$1 < \sqrt{2} < e^{\frac{1}{e}}, e^{\frac{1}{e}} > \sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4} > \dots,$$

$$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{8} < \sqrt[6]{9} = 3^{\frac{2}{6}} = 3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3}$$

上页

下页

返回

思考练习.

1.证明不等式：

$$(1).x > 0, 1 + x \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) > \sqrt{1 + x^2}.$$

$$(2).x \geq 4, 2^x \geq x^2.$$

$$(3).x > 0, \sin x > x - \frac{1}{6}x^3.$$

2.比较 $\ln(1 + \sqrt{2})$ 与 $\sqrt{2} - 1$ 的大小.

3.试问常数 p, q 满足什么条件时, 方程

$$x^3 - 3px + q = 0$$

有三个各不相同的实根?

上页

下页

返回

思考练习.

4.试问方程 $\ln x = ax$ ($a > 0$) 有几个实根?

5.设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内有 $f''(x) \geq 0$. 试证明: $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$, 有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

Ex.4.方程 $\ln x = ax$ ($a > 0$) 有几个实根?

解 $\ln x = ax$ ($a > 0$) 实根问题解题方法有几种.
一是数形结合,借助于结论的几何意义,方程 $\ln x = ax$ 的根就是平面曲线 $y = \ln x$ 与 $y = ax$ 有交点. 而其中临界的情况就是相切——一方程有唯一的实根,从而确定 a 的数值.然后就可以知道 a 取什么范围里的值时方程就有两个根,什么时候没有根.

方程 $\ln x = ax$ ($a > 0$) 有几个实根?

法二 另外一种解题方是把方程的根的讨论转化为函数的零点问题.

设函数 $y = \ln x - ax$ ($a > 0$), 讨论函数的取值情况, 只要看这一连续函数的取值的正、负, 大、小.

设 $y = \ln x - ax$ ($a > 0$), $y' = \frac{1}{x} - a$,

$\therefore x = a^{-1}$ 时 $y' = 0$,

$0 < x < a^{-1}$ 时, $y' > 0$, 函数 $y \nearrow$,

$a^{-1} < x$ 时, $y' < 0$, 函数 $y \searrow$,

$\therefore x = a^{-1}$ 时, 有 $y_{\max} = y_{\text{最大值}} = -(\ln a + 1)$

设 $y = \ln x - ax$ ($a > 0$),

$0 < x < a^{-1}$ 时, $y' > 0$, 函数 $y \nearrow$,

$a^{-1} < x$ 时, $y' < 0$, 函数 $y \searrow$,

$\therefore x = a^{-1}$ 时, 有 $y_{\text{最大值}} = -(\ln a + 1)$

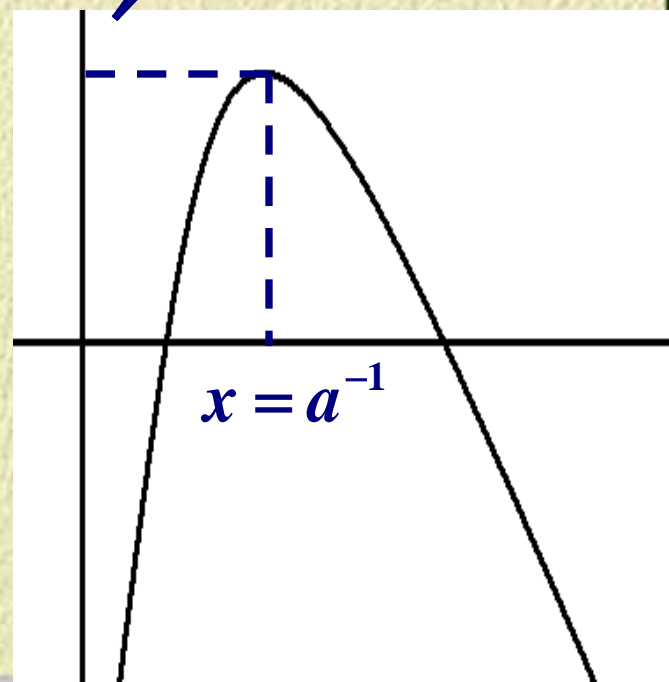
且 $\lim_{x \rightarrow 0+} y = \lim_{x \rightarrow 0+} (\ln x - ax) = -\infty$,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - ax)$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\ln x}{x} - a \right) = -\infty,$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$y_{\text{最大值}} = -(\ln a + 1)$$



设 $y = \ln x - ax$ ($a > 0$),

$\therefore x = a^{-1}$ 时, 有 $y_{\text{最大值}} = -(\ln a + 1)$

\therefore 当 $y_{\text{最大值}} = -(\ln a + 1) > 0$ 时, 原方程有两个不同的实根,

当 $y_{\text{最大值}} = -(\ln a + 1) = 0$ 时, 原方程有唯一的实根,

当 $y_{\text{最大值}} = -(\ln a + 1) < 0$ 时, 原方程没有实根.