三、电势的计算

步骤：

$$\varphi_A = \int_A^{\varphi=0\text{点}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

积分路径上场强的函数

（1） 求空间中的电场分布**E**

（2） 选取电势零点

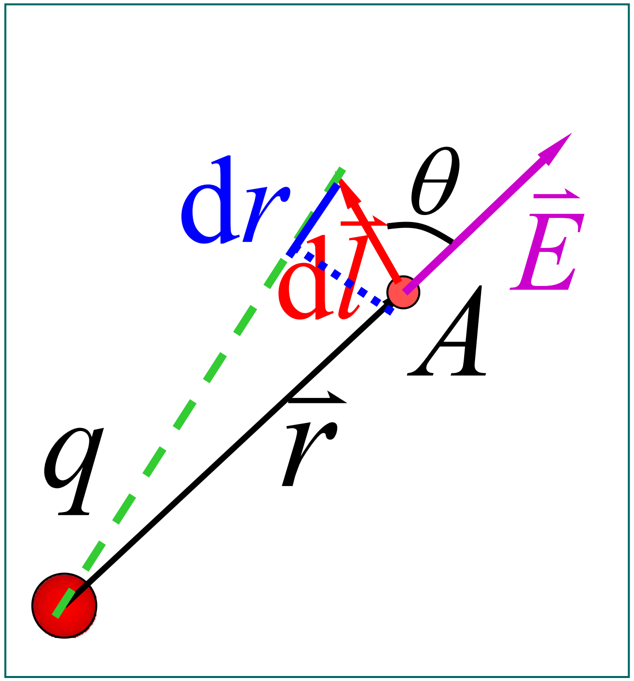
（通常选为无穷远为电势零点）

（3） 根据定义进行积分

1 点电荷的电势分布

令 $\varphi_\infty = 0$

$$\varphi_A = \int_A^{\varphi=0\text{点}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_A^{\infty} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{e}_r$$

$$\varphi = \int_r^{\infty} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{e}_r \cdot d\vec{l}$$

$$\hat{e}_r \cdot d\vec{l} = dl\cdot\cos\theta = dr$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

讨论

点电荷的电势

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\begin{cases} q>0, & \varphi>0 \\ q<0, & \varphi<0 \end{cases}$$

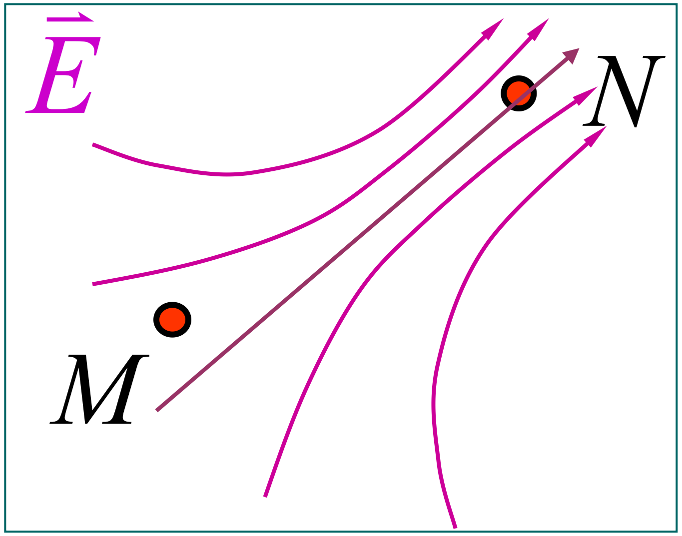
判断：电场线方向就是电势**降落**的方向 （ ）

练习：如图所示，

在电场中有M、N两点，其场强分别为E_M与E_N，电势分别为φ_M与φ_N，则

$$E_M \underline{\;<\;} E_N$$

$$\varphi_M \underline{\;>\;} \varphi_N$$

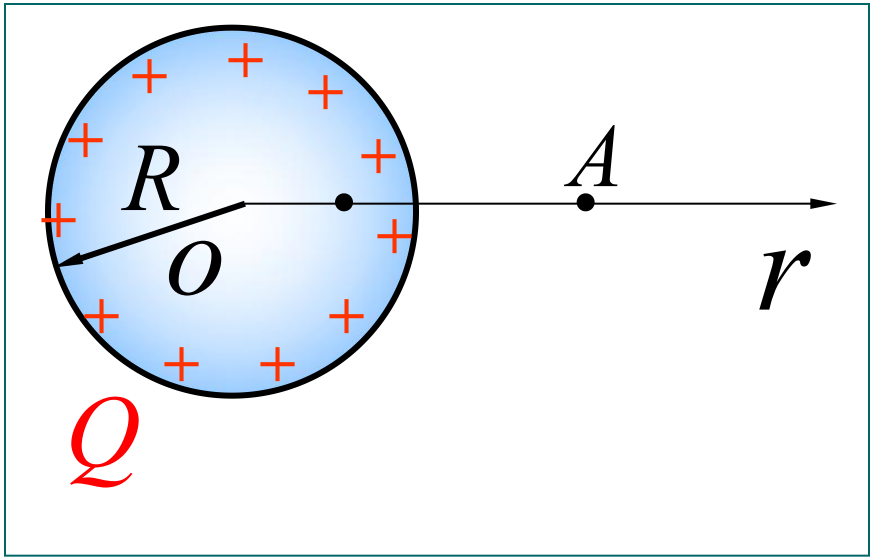


电荷－Q在M点和N点电势能哪个大？

$$W_M \underline{\;<\;} W_N$$

例2 均匀带电球壳的电势分布.

真空中，有一带电为 Q ，半径为 R 的带电球壳. 试求球壳内外任意点的电势



解:

由高斯定理得电场分布

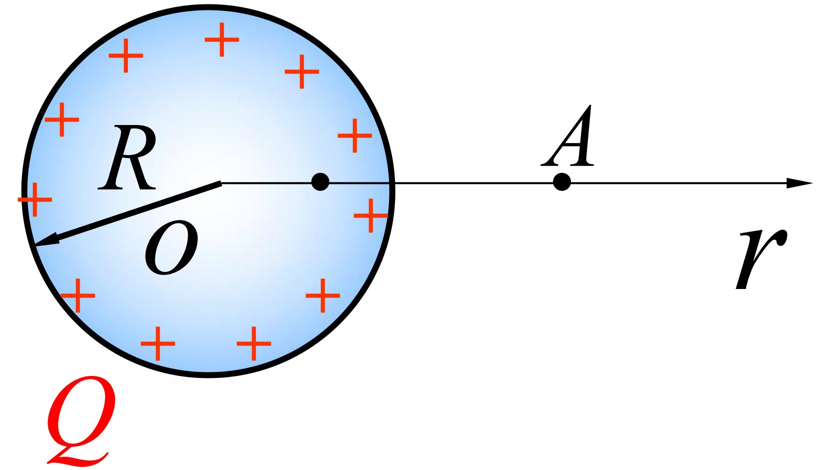
$$\begin{cases} r < R, & \vec{E}_1 = 0 \\ r > R, & \vec{E}_2 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r \end{cases}$$

◆当 $r > R$

$$\varphi_{外}(r)=\int_r^{\infty}\vec{E}_2\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

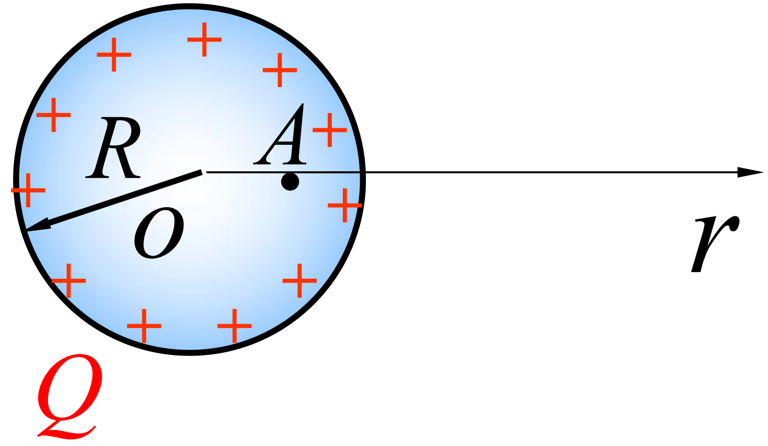
$$=\int_r^{\infty}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r$$

$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



$$\begin{cases} r<R, & \vec{E}_1=0 \\ r>R, & \vec{E}_2=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r \end{cases}$$

◆当 $r<R$



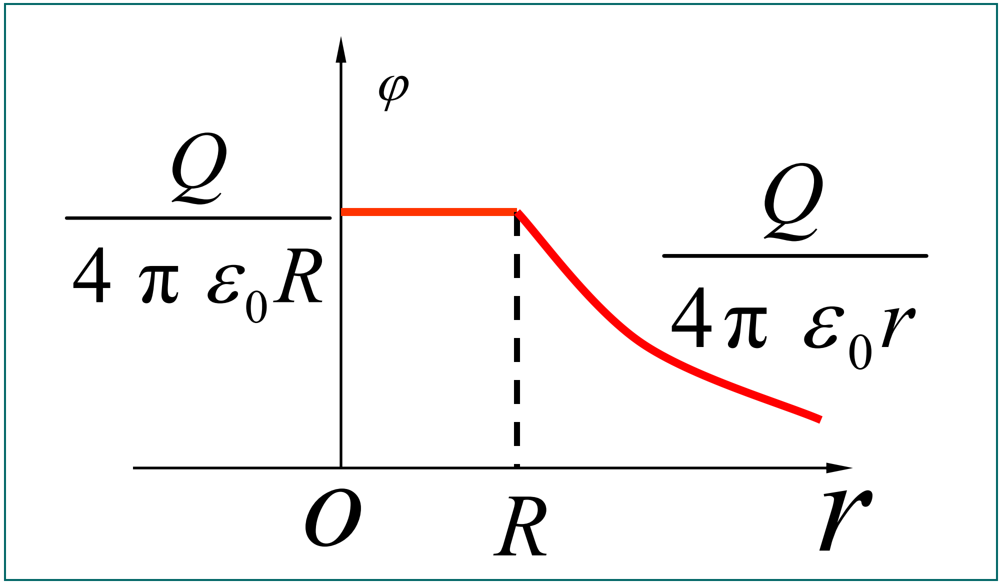
$$\varphi_{内}(r)=\int_r^R \vec{E}_1\cdot \mathrm{d}\vec{l}+\int_R^\infty \vec{E}_2\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0 R}$$

$$\begin{cases} r<R, & \vec{E}_1=0 \\ r>R, & \vec{E}_2=\dfrac{q}{4\pi\,\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r \end{cases}$$

◆ 均匀带电球壳的电势分布

$$\begin{cases} \varphi_{外}(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \\[2ex] \varphi_{内}(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \end{cases}$$



◆ 内部电势处处相等

例3 “无限长”带电直导线的电势分布

解 无限长带电直线的场强：

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

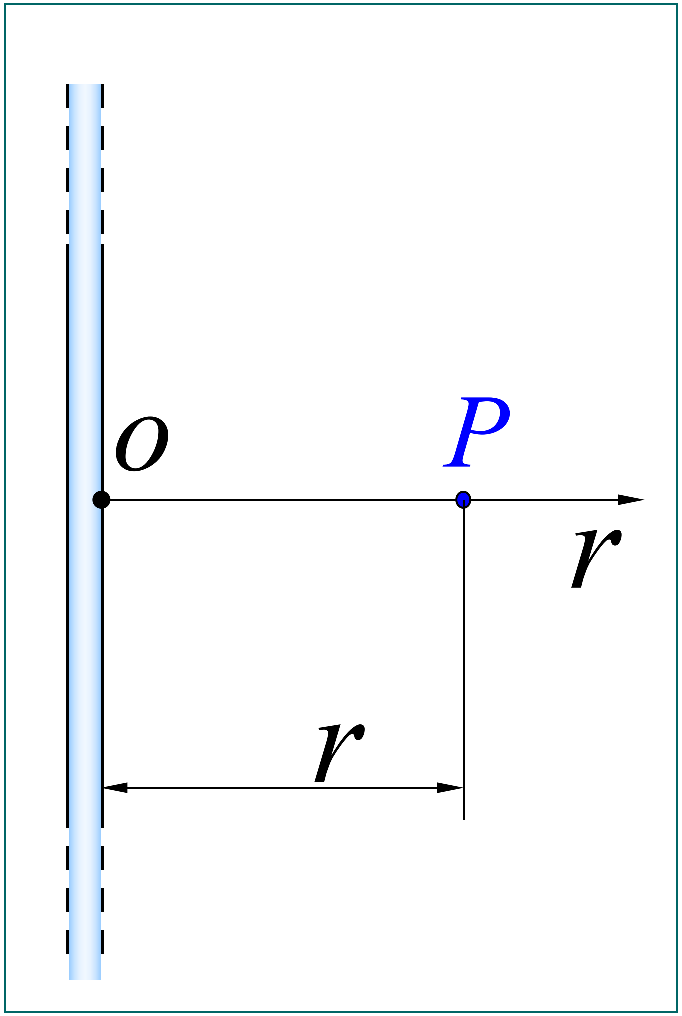
若选无穷远为电势 0 点，则

$$\varphi_P=\int_{(P)}^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_{(P)}^{\infty}Edr$$

$$=\int_r^{\infty}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}dr$$

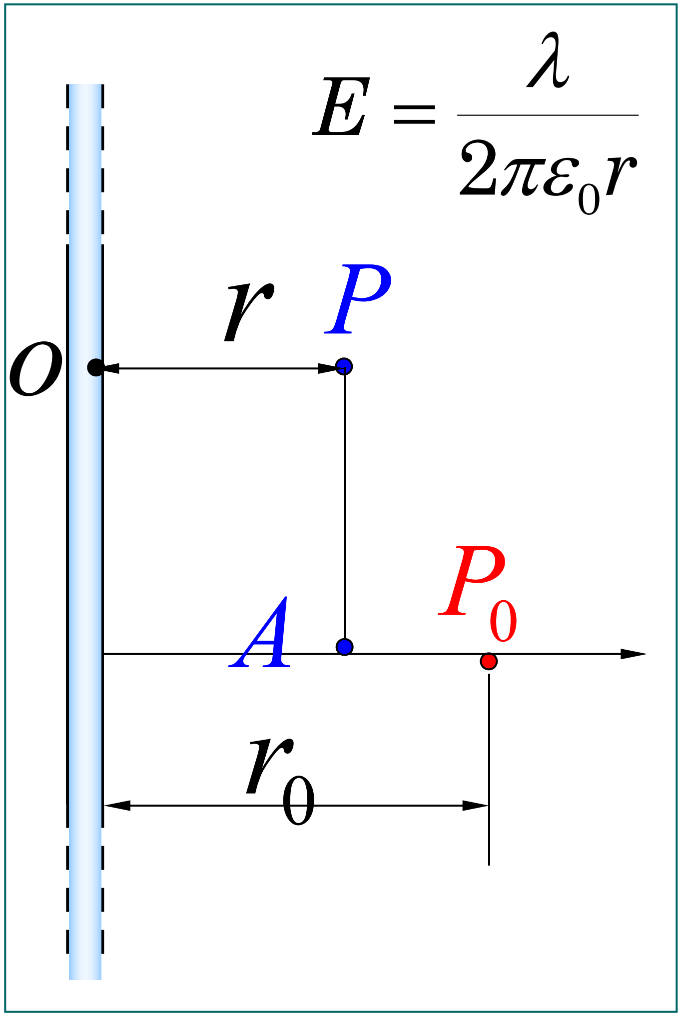
$$=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}(\ln\infty-\ln r)$$

无意义



例3 “无限长”带电直导线的电势

解 选取距带电直导线为 r_0 的 P_0 点为电势零点



$$\varphi_P=\int_p^{P_0}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

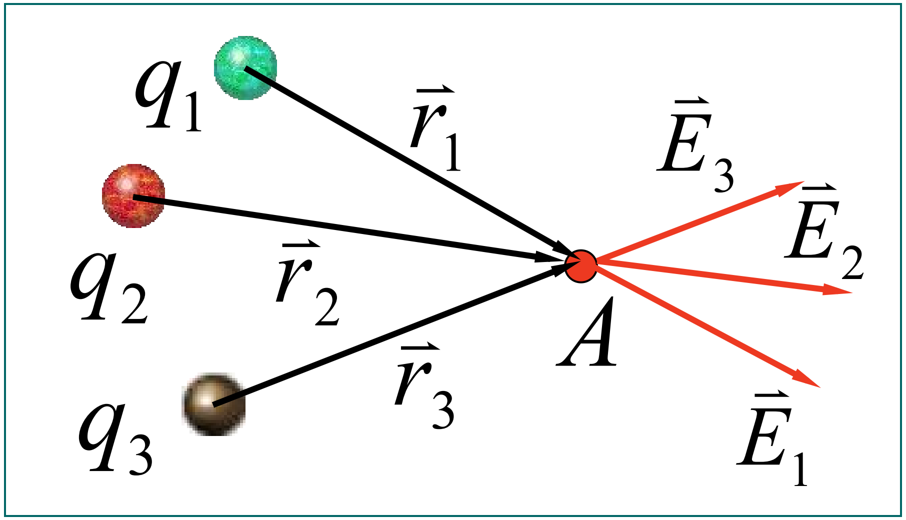
$$=\int_P^A\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}+\int_A^{P_0}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

$$=0+\int_r^{r_0}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}(\ln r_0-\ln r)$$

四　电势的叠加原理

- 点电荷系 $\vec{E}=\sum_i \vec{E}_i$



$$\varphi_A=\int_A^{\infty}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\sum_i\int_A^{\infty}\vec{E}_i\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\sum_i \varphi_{Ai}=\sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$

$$\boxed{\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}} \Rightarrow \boxed{\varphi=\sum_i \varphi_i}$$

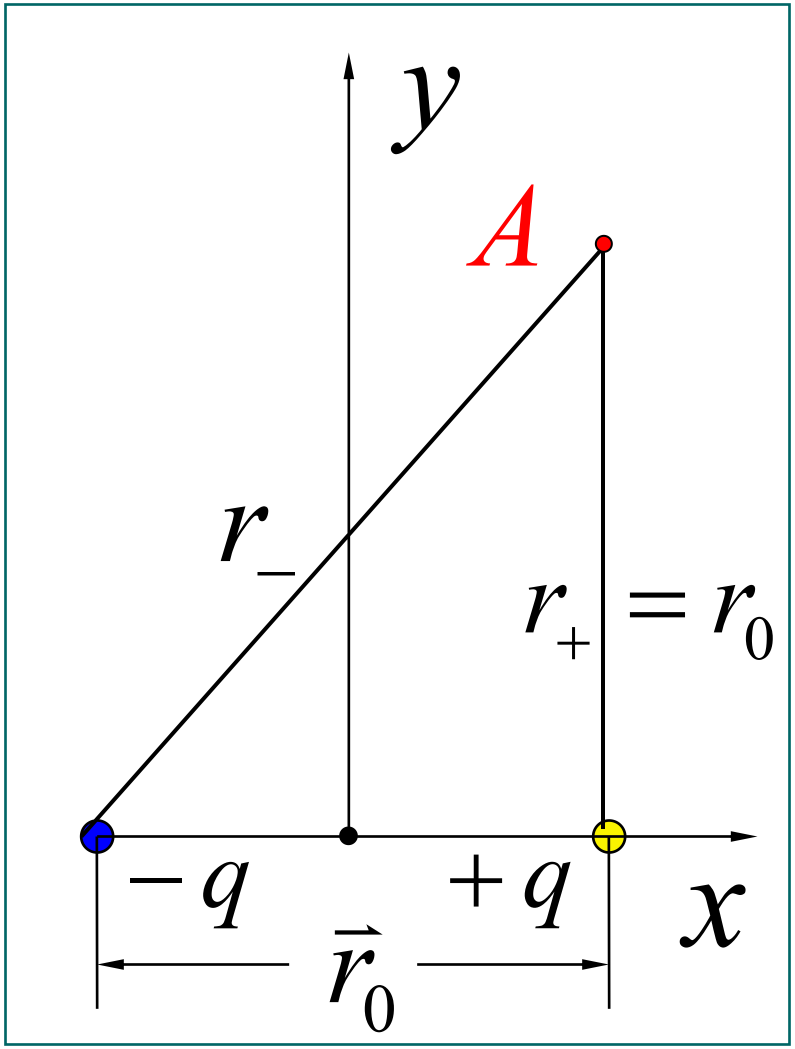
例 求电偶极子电场中一点 A 的电势.

解

$$\begin{cases} \varphi_+ = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r_+} \\ \varphi_- = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{(-q)}{r_-} \end{cases}$$

$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_-$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_- - r_+}{r_+ r_-}$$

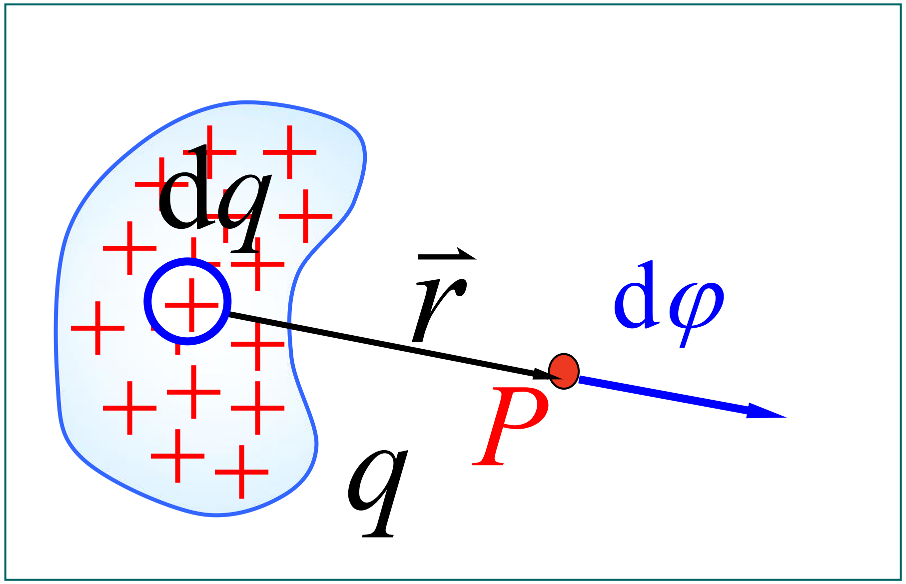


四　电势的叠加原理

- 电荷连续分布

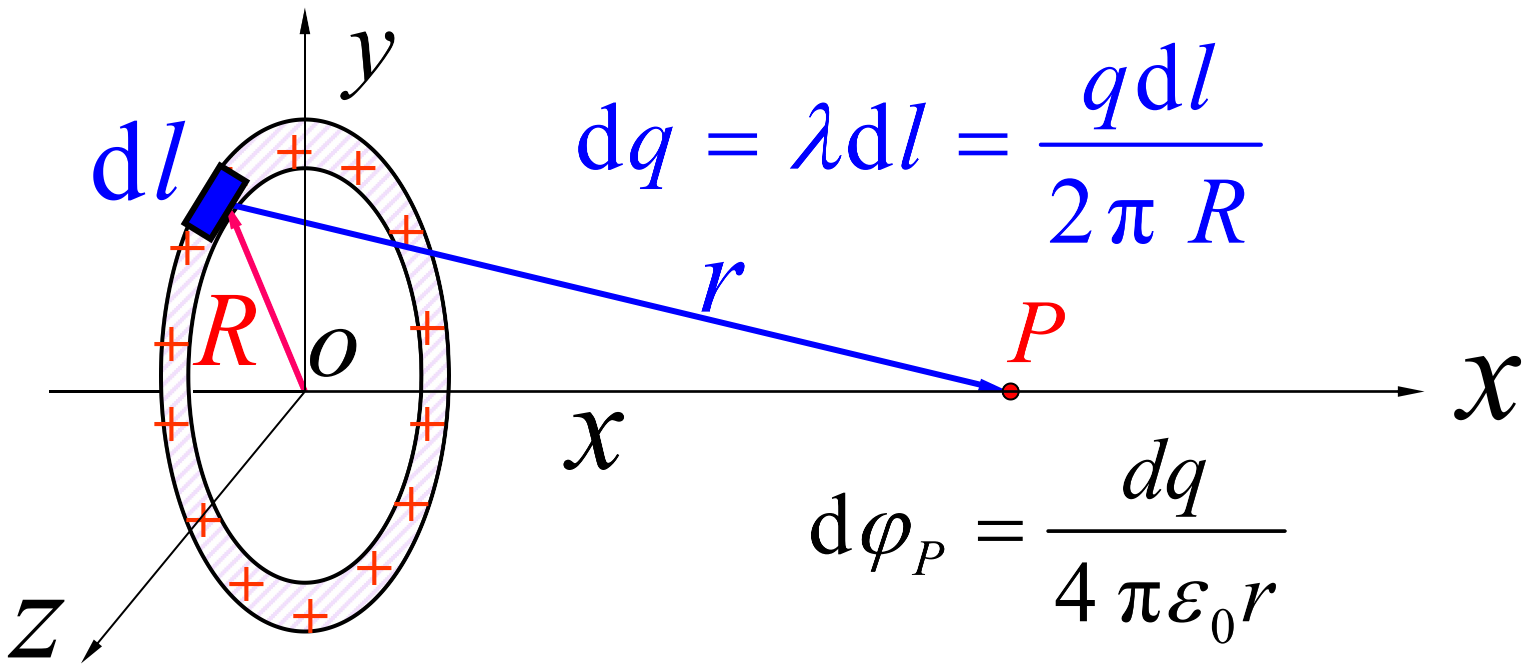
$$\varphi = \frac{\boxed{q}}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$d\varphi = \frac{\boxed{\mathrm{d}q}}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



$$\boxed{\varphi_P = \int d\varphi = \int \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

例　正电荷 q 均匀分布在半径为 R 的细圆环上. 求圆环轴线上距环心为 x 处点 P 的电势.

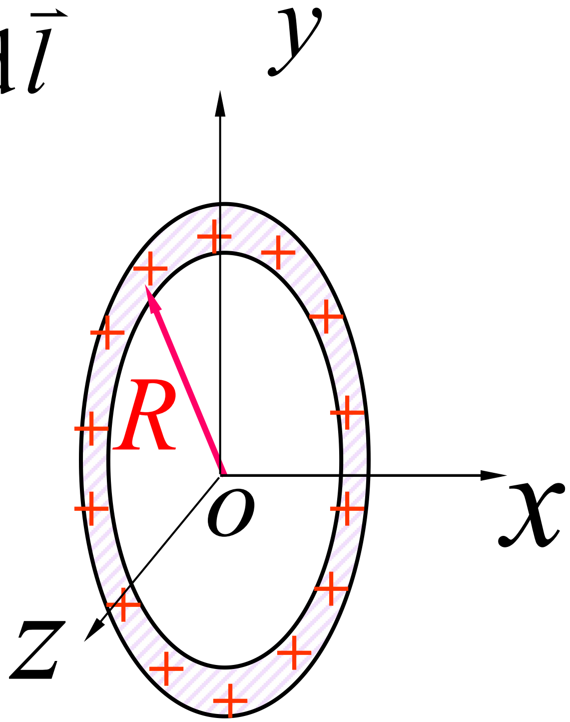


$$\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}l = \frac{q\mathrm{d}l}{2\pi R}$$

$$\mathrm{d}\varphi_P = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\varphi_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\int\frac{q\mathrm{d}l}{2\pi R} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+R^2}}$$

方法二 定义法 $\varphi_A = \int_A^{\varphi=0\text{点}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$



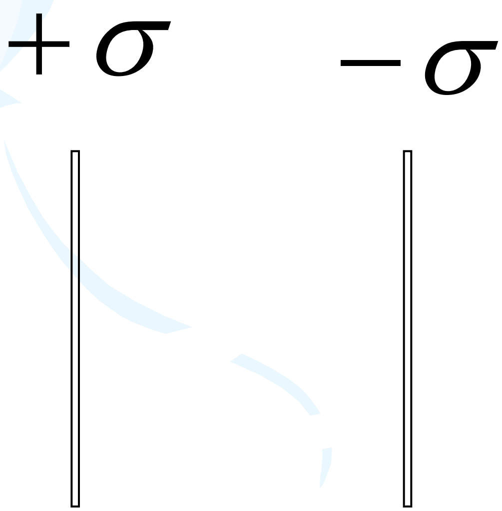
由电场强度的分布

$$E = \frac{qx}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+R^2)^{3/2}}$$

$$\varphi = \int_{x_p}^{\infty} E dx = \int_{x}^{\infty} \frac{qxdx}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+R^2)^{3/2}}$$

五 电势差的计算

$$U_{AB}=\varphi_A-\varphi_B=\int_A^B \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

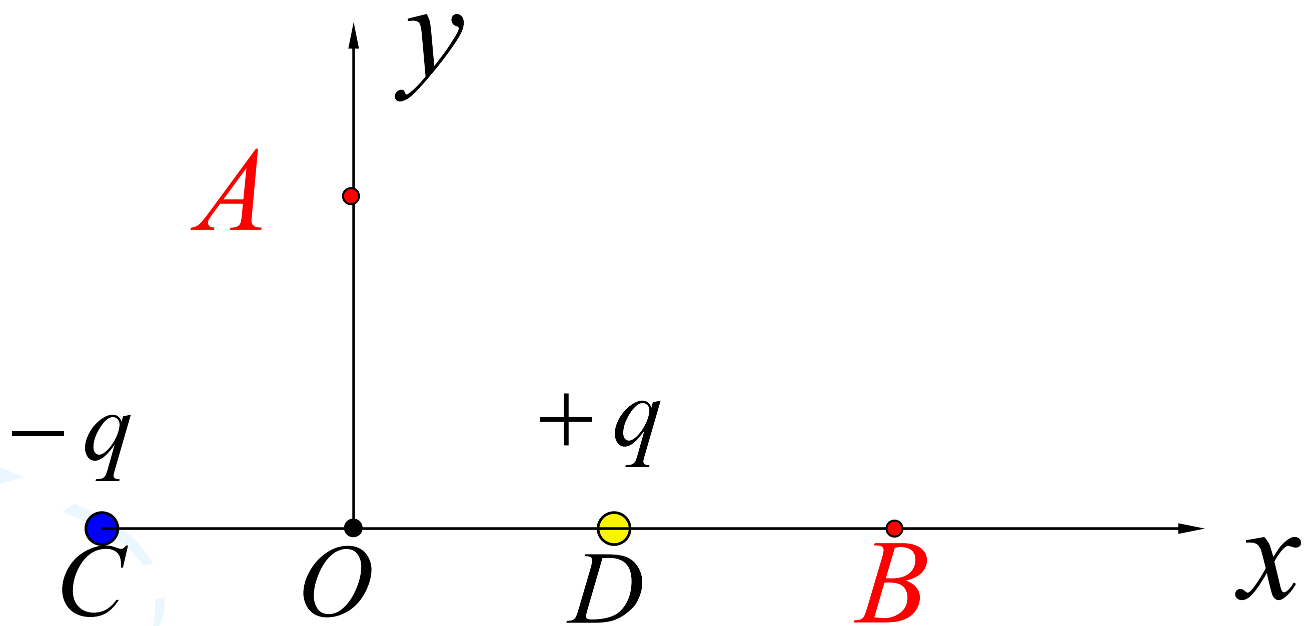


无限大两平板**A**、**B**，间距为**d**，带电如图

求：两板间 U_{AB}

练习 求电偶极子电场中 A、B 两点的电势差.

已知： $OC = OD = DB = l$



两个同心球面半径分别为 R_1 和 R_2，各自带有电荷 q_1、q_2，如图所示。

求：

（1）各区域的电势分布；

（2）两球面上的电势差