1.2 命题公式及其赋值

- 简单命题是真值唯一确定的命题逻辑中最基本的研究单位，所以也称简单命题为命题常项或命题常元。(*proposition constant*)
- 称真值可以变化的陈述句为命题变项或命题变元(*proposition variable*)。也用 **p,q,r,…** 表示命题变项。
- 当 **p,q,r,…** 表示命题变项时，它们就成了取值 **0** 或 **1** 的变项，因而命题变项已不是命题。
- 这样一来， **p,q,r,…** 既可以表示命题常项，也可以表示命题变项。在使用中，需要由上下文确定它们表示的是常项还是变项。
- 将命题变项用联结词和圆括号按一定的逻辑关系联结起来的符号串称为合式公式或命题公式。

定义 1.6 合式公式（*wff*）

(1) 单个命题变项是合式公式，并称为原子命题公式。

(2) 若 **A** 是合式公式，则 **(┐A)** 也是合式公式。

(3) 若 **A**，**B** 是合式公式，则 **(A∧B)**，**(A∨B)**，**(A→B)**，**(A↔B)** 也是合式公式。

(4) 只有有限次地应用 **(1)** ～ **(3)** 形式的符号串才是合式公式。

合式公式也称为命题公式或命题形式，并简称为公式。

设 **A** 为合式公式，**B** 为 **A** 中一部分，若 **B** 也是合式公式，则称 **B** 为 **A** 的子公式。

合式公式：***Well Formed Formula***

关于合式公式的说明

- 定义 **1.6** 给出的合式公式的定义方式称为归纳定义或递归定义方式。
- 定义中引进了 **A,B** 等符号，用它们表示任意的合式公式，而不是某个具体的公式，这与 **p, p∧q, (p∧q)→r** 等具体的公式是有所不同的。
- **A,B** 等符号被称作元语言符号。 **p,q** 等被称作对象语言符号。
- 所谓对象语言是指用来描述研究对象的语言，而元语言是指用来描述对象的语言，这两种语言是不同层次的语言。
- 例如中国人学习英语时，英语为对象语言，而用来学习英语的汉语则是元语言。

关于合式公式的说明

- $(\neg A)$、$(A \wedge B)$ 等公式单独出现时，外层括号可以省去，写成 $\neg A$、$A \wedge B$ 等。
- 公式中不影响运算次序的括号可以省去，
  如公式 $(p \vee q) \vee (\neg r)$ 可以写成 $p \vee q \vee \neg r$。
- 合式公式的例子：
  $(p \to q) \wedge (q \leftrightarrow r)$
  $(p \wedge q) \wedge \neg r$
  $p \wedge (q \wedge \neg r)$
- 不是合式公式的例子
  $pq \to r$
  $(p \to (r \to q)$

定义 1.7 公式层次

(1) 若公式 **A** 是单个的命题变项，则称 **A** 为 **0 层合式**。

(2) 称 **A** 是 **n+1(n≥0)** 层公式是指下面情况之一：

(a) $A = \neg B$，B 是 n 层公式；

(b) $A = B \wedge C$，其中 B,C 分别为 i 层和 j 层公式，且 $n=\max(i,j)$；

(c) $A = B \vee C$，其中 B,C 的层次及 n 同 **(b)**；

(d) $A = B \rightarrow C$，其中 B,C 的层次及 n 同 **(b)**；

(e) $A = B \leftrightarrow C$，其中 B,C 的层次及 n 同 **(b)**。

(3) 若公式 **A** 的层次为 **k**，则称 **A** 是 **k 层公式**。

例如：$(\neg p \wedge q) \rightarrow r$，$(\neg(p \rightarrow \neg q)) \wedge ((r \vee s) \leftrightarrow \neg p)$

分别为 **3** 层和 **4** 层公式

公式的解释

- 在命题公式中，由于有命题符号的出现，因而真值是不确定的。当将公式中出现的全部命题符号都解释成具体的命题之后，公式就成了真值确定的命题了。
- **(p∨q)→r**
- 若 **p** ： **2** 是素数， **q** ： **3** 是偶数， **r** ： **π** 是无理数，则 **p** 与 **r** 被解释成真命题， **q** 被解释成假命题，此时公式 **(p∨q)→r** 被解释成：若 **2** 是素数或 **3** 是偶数，则 **π** 是无理数。（真命题）
- **r** 被解释为： **π** 是有理数，则 **(p∨q)→r** 被解释成：若 **2** 是素数或 **3** 是偶数，则 **π** 是有理数。（假命题）
- 将命题变项 **p** 解释成真命题，相当于指定 **p** 的真值为 **1** ，解释成假命题，相当于指定 **p** 的真值为 **0** 。

定义 1.8 赋值或解释

- 设 $p_1,p_2,\ldots,p_n$ 是出现在公式 A 中的全部命题变项，给 $p_1,p_2,\ldots,p_n$ 各指定一个真值，称为对 A 的一个赋值或解释。若指定的一组值使 A 的真值为 1 ，则称这组值为 A 的成真赋值；若使 A 的真值为 0 ，则称这组值为 A 的成假赋值。
- 对含 n 个命题变项的公式 A 的赋值情况做如下规定：
  (1) 若 A 中出现的命题符号为 $p_1,p_2,\ldots,p_n$ ，给定 A 的赋值 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 是指 $p_1=\alpha_1$ ，$p_2=\alpha_2,\ldots$ ，$p_n=\alpha_n$ 。
  (2) 若 A 中出现的命题符号为 p ，q ，r..., 给定 A 的赋值 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 是指 $p=\alpha_1$ ，$q=\alpha_2,\ldots$ ，最后一个字母赋值 α_n 。

赋值举例

- 在公式 $(\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3) \vee (p_1 \wedge p_2)$ 中，
  $000(p_1 = 0, p_2 = 0, p_3 = 0)$，
  $110(p_1 = 1, p_2 = 1, p_3 = 0)$ 都是成真赋值，
  $001(p_1 = 0, p_2 = 0, p_3 = 1)$，
  $011(p_1 = 0, p_2 = 1, p_3 = 1)$ 都是成假赋值。
- 在 $(p \wedge \neg q) \rightarrow r$ 中，
  $011(p_1 = 0, p_2 = 1, p_3 = 1)$ 为成真赋值，
  $100(p_1 = 1, p_2 = 0, p_3 = 0)$ 为成假赋值。
- 重要结论：
  含 $n(n \geq 1)$ 个命题变项的公式共有 2^n 个不同的赋值。

定义 1.9 真值表

- 将命题公式 **A** 在所有赋值下取值情况列成表，称作 **A** 的真值表。
- 构造真值表的具体步骤如下：

(1) 找出公式中所含的全体命题变项 $p_1,p_2,\ldots,p_n$ (若无下角标就按字典顺序排列)，列出 2^n 个赋值。本书规定，赋值从 **00…0** 开始，然后按二进制加法依次写出各赋值，直到 **11…1** 为止。

(2) 按从低到高的顺序写出公式的各个层次。

(3) 对应各个赋值计算出各层次的真值，直到最后计算出公式的真值。

说明

公式 **A** 与 **B** 具有相同的或不同的真值表，是指真值表的最后一列是否相同，而不考虑构造真值表的中间过程。

例 1.8

求下列公式的真值表，并求成真赋值和成假赋值。

(1)(┐p∧q)→┐r

(2)(p∧┐p)↔(q∧┐q)

(3)┐(p→q)∧q∧r

p q r	p→q	┐(p→q)	┐(p→q)∧q	┐(p→q)∧q∧r
0 0 0	1	0	0	0
0 0 1	1	0	0	0
0 1 0	1	0	0	0
0 1 1	1	0	0	0
1 0 0	0	1	0	0
1 0 1	0	1	0	0
1 1 0	1	0	0	0
1 1 1	1	0	0	0

定义 1.10 重言式、永真式、可满足式

设 **A** 为任一命题公式

(1) 若 **A** 在它的各种赋值下取值均为真，则称 **A** 是重言式 **(*tautology*)** 或永真式。

(2) 若 **A** 在它的各种赋值下取值均为假，则称 **A** 是矛盾式 **(*contradiction*)** 或永假式。

(3) 若 **A** 不是矛盾式，则称 **A** 是可满足式（ ***satisfactable formula*** ）。

定义 1.10 的进一步说明

- **A** 是可满足式的等价定义是： **A** 至少存在一个成真赋值。
- 重言式一定是可满足式，但反之不真。因而，若公式 **A** 是可满足式，且它至少存在一个成假赋值，则称 **A** 为非重言式的可满足式。
- 真值表可用来判断公式的类型：
  - 若真值表最后一列全为 **1** ，则公式为重言式。
  - 若真值表最后一列全为 **0** ，则公式为矛盾式。
  - 若真值表最后一列中至少有一个 **1** ，则公式为可满足式。

说明

- **n** 个命题变项共产生 **2^n** 个不同赋值
- 含 **n** 个命题变项的公式的真值表只有 2^{2^n} 种不同情况

例题

例题 1.9 下列各公式均含两个命题变项 **p** 与 **q** ，它们中哪些具有相同的真值表？

(1) $p \to q$ **(4)** $(p \to q) \land (q \to p)$

(2) $p \leftrightarrow q$ **(5)** $\neg q \lor p$

(3) $\neg(p \land \neg q)$

p q	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$	$\neg(p \land \neg q)$	$(p \to q) \land (q \to p)$	$\neg q \lor p$
0 0	1	1	1	1	1
0 1	1	0	1	0	0
1 0	0	0	0	0	1
1 1	1	1	1	1	1

哑元

- 设公式 A,B 中共含有命题变项 $\mathbf{p_1,p_2,\ldots,p_n}$ ，，而 **A** 或 **B** 不全含有这些命题变项，比如 **A** 中不含 $\mathbf{p_i,p_{i+1},\ldots,p_n}$ **,** 称这些命题变项为 **A** 的哑元， **A** 的取值与哑元的变化无关，因而在讨论 **A** 与 **B** 是否有相等的真值表时，将 **A,B** 都看成 $\mathbf{p_1,p_{2,}\ldots,p_n}$ 的命题公式。

例题

例 **1.10** 下列公式中，哪些具有相同的真值表？

(1)$p\to q$

(2)$\neg q\vee r$

(3)$(\neg p\vee q)\wedge((p\wedge r)\to p)$

(4)$(q\to r)\wedge(p\to p)$

p q r	$p\to q$	$\neg q\vee r$	$(\neg p\vee q)\wedge((p\wedge r)\to p)$	$(q\to r)\wedge(p\to p)$
0 0 0	1	1	1	1
0 0 1	1	1	1	1
0 1 0	1	0	1	0
0 1 1	1	1	1	1
1 0 0	0	1	0	1
1 0 1	0	1	0	1
1 1 0	1	0	1	0
1 1 1	1	1	1	1

本章主要内容

- 命题与真值（或真假值）。
- 简单命题与复合命题。
- 联结词：¬，∧，∨，→，▯。
- 命题公式（简称公式）。
- 命题公式的层次和公式的赋值。
- 真值表。
- 公式的类型：重言式（永真式），矛盾式（永假式），可满足式。

本章学习要求

- 在 **5** 种联结词中，要特别注意蕴涵联结的应用，要弄清三个问题：
  - **p→q** 的逻辑关系
  - **p→q** 的真值
  - **p→q** 的灵活的叙述方法
- 写真值表要特别仔细认真，否则会出错误。
- 深刻理解各联结词的逻辑含义。
- 熟练地将复合命题符号化。
- 会用真值表求公式的成真赋值和成假赋值。

本章典型习题

- 命题符号化
- 求复合命题的真值与命题公式的赋值
- 判断公式的类型

例题：命题符号化

(1) 我和他既是兄弟又是同学

p ：我和他是兄弟，**q** ：我和他是同学。

故命题可符号化为： **p∧q** 。

(2) 张三或李四都可以做这件事。

p ：张三可以做这件事。 **q** ：李四可以做这件事。

故命题可符号化为：**p∧q** 。

(3) 仅当我有时间且天不下雨，我将去镇上。

对于“仅当”，实质上是“当”的逆命题。“当 **A** 则 **B**” 是 **A→B** ，而“仅当 **A** 则 **B**” 是 **B→A** 。

p ：我有时间。 **q** ：天不下雨。 **r** ：我将去镇上。

故命题可符号化为：**r→(p∧q)** 。

例题：命题符号化

(4) 张刚总是在图书馆看书，除非图书馆不开门或张刚生病。

对于“除非”，只要记住，“除非”是条件。

p ：张刚在图书馆看书，**q** ：图书馆不开门，**r** ：张刚生病。

故命题可符号化为：$\neg(q \vee r) \rightarrow p$ 。

(5) 风雨无阻，我去上学。

可理解为“不管是否刮风、是否下雨，我都去上学”。

p ：天刮风，**q** ：天下雨，**r** ：我去上学。

故命题可符号化为：

$(p \wedge q \rightarrow r) \wedge (p \wedge \neg q \rightarrow r) \wedge (\neg p \wedge q \rightarrow r) \wedge (\neg p \wedge \neg q \rightarrow r)$

或 $(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$

理解为“四种情况必居其一，而每种情况下我都去上学”

命题符号化的要点

- 要准确确定原子命题，并将其形式化。
- 要选用恰当的联结词，尤其要善于识别自然语言中的联结词（有时它们被省略）。
- 否定词的位置要放准确。
- 需要的括号不能省略，而可以省略的括号，在需要提高公式可读性时亦可不省略。
- 要注意的是，语句的形式化未必是唯一的。

∵ 例题：求公式┐(p→(q∧r))的真值表。

p	q	r	q∧r	p→(q∧r)	┐(p→(q∧r))
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	0

真值表

- 写出下列公式的真值表，并求它们的成真赋值和成假
- 赋值：
- (1) $(p \vee q) \to \neg r$
- (2) $(q \to p) \wedge q \to p$
- (3) $\neg(\neg p \vee q) \wedge q$

真值表 1

(1) $A = (p \vee q) \to \neg r$

p q r	$p \vee q$	$\neg r$	$(p \vee q) \to \neg r$
0 0 0	0	1	1
0 0 1	0	0	1
0 1 0	1	1	1
0 1 1	1	0	0
1 0 0	1	1	1
1 0 1	1	0	0
1 1 0	1	1	1
1 1 1	1	0	0

成真赋值 :000,001,010,100,110; 成假赋值 :011,101,111

真值表 2

(2) $B = (q \to p) \wedge q \to p$

p q	$q \to p$	$(q \to p) \wedge q$	$(q \to p) \wedge q \to p$
0 0	1	0	1
0 1	0	0	1
1 0	1	0	1
1 1	1	1	1

成真赋值 :00,01,10,11; 无成假赋值

真值表 3

(3) $C = \neg\ (\neg p \vee q) \wedge q$ 的真值表

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$\neg\ (\neg p \vee q)$	$\neg\ (\neg p \vee q) \wedge q$
0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	1	0	1	0	0

成假赋值 :00,01,10,11; 无成真赋值