§ 21.3 反常二重积分

二重积分的应用

1. 反常二重积分

2.二重积分的应用——几何应用:

体积 ，曲面的面积

3.二重积分的应用——物理应用:

几何体对质点的引力

1. 反常二重积分

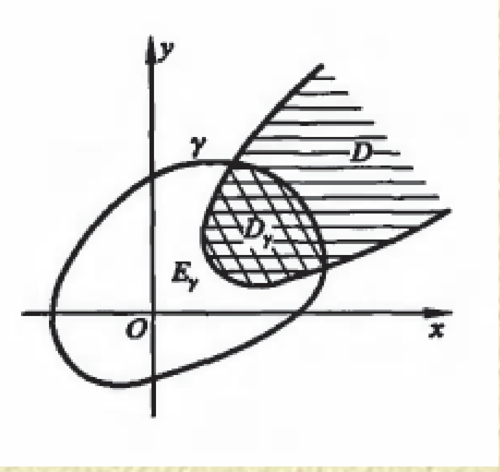
我们仅讨论无界区域上的反常二重积分.

设D是$\mathbb{R}^2$中的无界区域,其边界由有限条(分段)光滑曲线组成.

函数$f(x,y)$在D上有定义,且在D的任一可求面积的有界子区域上可积.设$\mathbb{R}^2$上任一围绕O点的光滑简单闭曲线γ围成有界区域E_γ,$E_\gamma \cap D = D_\gamma$,记 $d_\gamma = \inf\left\{\sqrt{x^2+y^2},(x,y)\in\gamma\right\}$.

若$\forall$曲线γ,$\lim\limits_{d_\gamma\to+\infty}\iint\limits_{D_\gamma} f(x,y)d\sigma$ 存在且有限,则称$f(x,y)$在D上的反常二重积分收敛,并记为

$$\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma = \lim_{d_\gamma\to+\infty}\iint\limits_{D_\gamma} f(x,y)d\sigma,$$

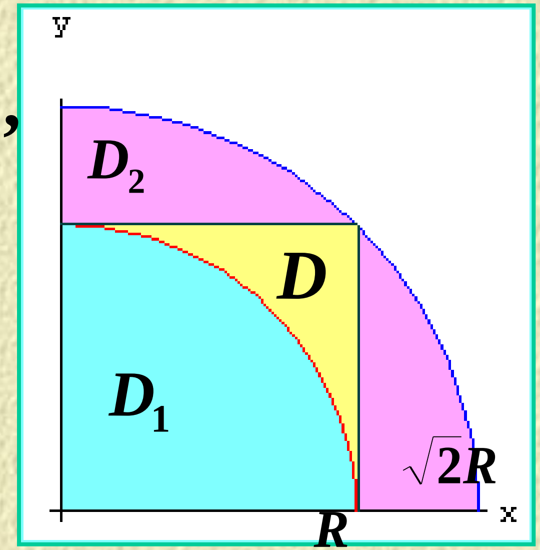


否则称$f(x,y)$在D上的反常二重积分$\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma$发散.

上页 下页 返回

例 1.计算概率积分$I=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$.

解 由于$\int e^{-x^2}dx$ 无法用初等函数表达,



所以上述积分的计算必另选别法.

在第一象限$\{x\ge 0, y\ge 0\}$中考察区域

$$D=\{(x,y)|0\le x\le R, 0\le y\le R\},$$

$$D_1: x^2+y^2\le R^2, x\ge 0, y\ge 0,$$

$$D_2: x^2+y^2\le 2R^2, x\ge 0, y\ge 0.$$

显然 $D_1\subset D\subset D_2$, $\because\ e^{-x^2-y^2}>0$,

$$\therefore \iint_{D_1}e^{-x^2-y^2}dxdy\le\iint_{D}e^{-x^2-y^2}dxdy\le\iint_{D_2}e^{-x^2-y^2}dxdy .$$

$D_1: x^2+y^2 \le R^2, x\ge 0, y\ge 0 \Leftrightarrow 0\le r\le R, 0\le\theta\le \pi/2$.

$$J_1=\iint_{D_1} e^{-x^2-y^2}dxdy=\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^R e^{-r^2}rdr=\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-R^2}\right),$$

在$D_2: x^2+y^2\le 2R^2, x\ge 0, y\ge 0$ 上，

$$J_2=\iint_{D_2} e^{-x^2-y^2}dxdy=\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2R^2}\right).$$

对于$J=\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy$ 有 $J_1<J<J_2$,

$$\lim_{R\to+\infty} J_1=\lim_{R\to+\infty} J_2=\frac{\pi}{4}\Rightarrow \lim_{R\to+\infty} J=\frac{\pi}{4}.$$

对于$J=\iint\limits_{D} e^{-x^2-y^2}dxdy=\left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right)^2$有$\lim\limits_{R\to+\infty} J=\dfrac{\pi}{4}$,

记$D=[0,+\infty)\times[0,+\infty)=[0,+\infty)^2$,

由于$I=\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\int_0^{+\infty} e^{-y^2}dy$,

$\therefore I^2=\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx\int_0^{+\infty} e^{-y^2}dy=\iint\limits_{[0,+\infty)^2} e^{-x^2-y^2}dxdy=\lim\limits_{R\to+\infty} J$,

$\therefore I=\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

上页 下页 返回

例1.计算概率积分$I=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$.

以下是一个简便但稍稍不严格的做法.

解 $\because I=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\int_0^{+\infty}e^{-y^2}dy$,

$$\therefore I^2=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx\int_0^{+\infty}e^{-y^2}dy=\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy\ ,$$

$$D=[0,+\infty)\times[0,+\infty)=[0,+\infty)^2,$$

$$I^2=\iint_{[0,+\infty)^2}e^{-x^2-y^2}dxdy=\iint_{\substack{x^2+y^2<+\infty\\ x\ge0,\,y\ge0}}e^{-x^2-y^2}dxdy$$

$$=\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^{+\infty}e^{-r^2}rdr=\frac{\pi}{4},\ \therefore I=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

人们常称上述积分为*Euler* – *Poisson*积分.

上页 下页 返回

2. 二重积分的应用

用微元法建立积分式

(1).待计算量A与区域D有关.A对于区域D具有可加性:如果把区域D分成若干个小区域,则A相应地分成若干个部分量,而所有部分量之和等于总量A.

(2).区域D中的小区域ΔD上的部分量ΔA有

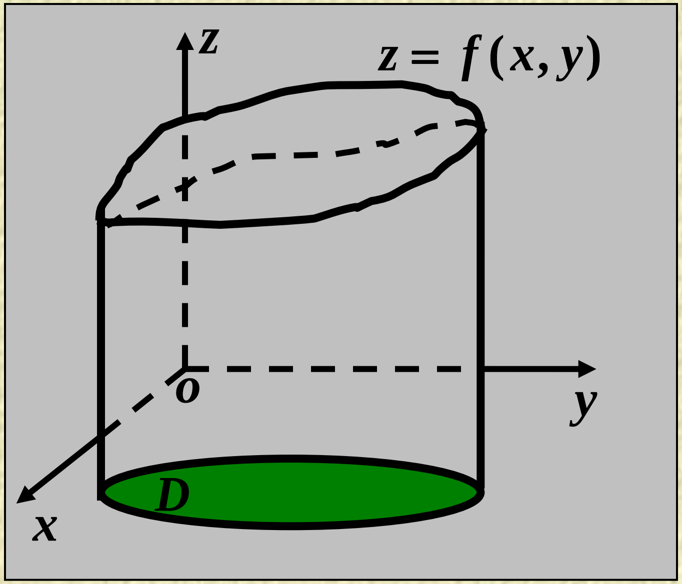
$$\Delta A \approx f\left(M\right)d\sigma, M \in \Delta D,$$

记$dA = f\left(M\right)d\sigma$,$d\sigma$为$\Delta D$的几何度量(面积,体积等). 若当$\Delta D$的直径$\lambda \to 0$时,有

$$\Delta A - dA = o\left(\lambda\right),\text{则 } A = \int_D f\left(M\right)d\sigma.$$

上页 下页 返回

2.1 几何应用:体积



若在有界闭区域

$D \subset \mathbb{R}^2$上$f(x, y) \geq 0$,

则以$z = f(x, y)$为顶,

以D为底,以区域D的

边界为准线、母线平行于z轴的柱

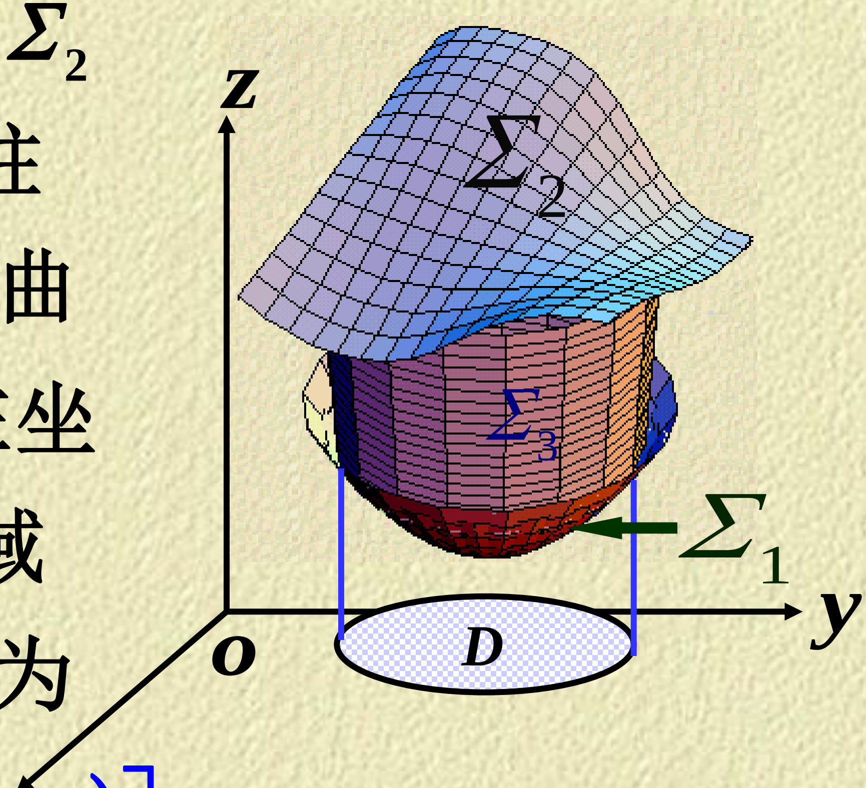
面为侧面的曲顶柱体体积为

$$V = \iint_D f(x, y) d\sigma \ .$$

若在有界闭区域$D\subset\mathbb{R}^2$上$f(x,y)\le g(x,y)$,

曲面$\Sigma_1: z=f(x,y)$,$\Sigma_2: z=g(x,y)$.

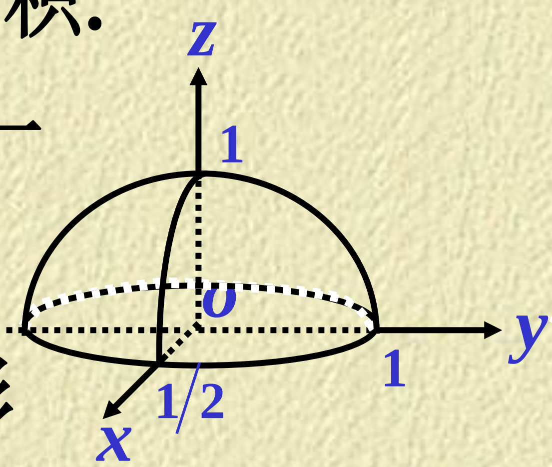
则以曲面Σ_1为底,曲面Σ_2为顶,以平行于z轴的柱面Σ_3为侧面形成一个曲顶柱体.该曲顶柱体在坐标面xOy上的投影区域为D.则曲顶柱体体积为

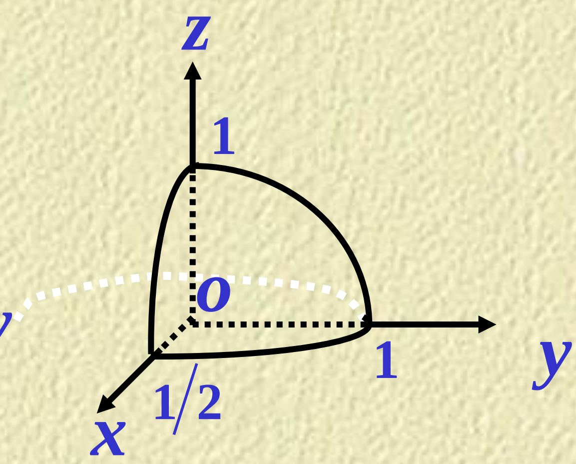


$$V=\iint_D\left[g(x,y)-f(x,y)\right]d\sigma \ .$$

上页 下页 返回

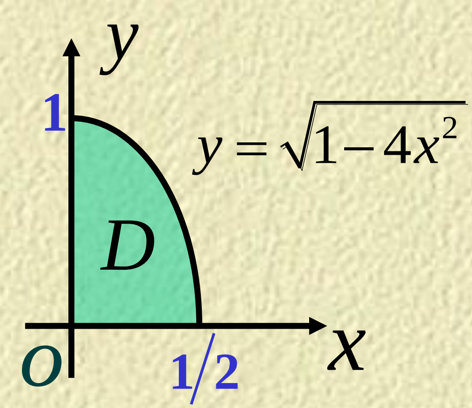
例2.计算由曲面 $z=1-4x^2-y^2$ 及坐标面xOy所围成立体的体积.





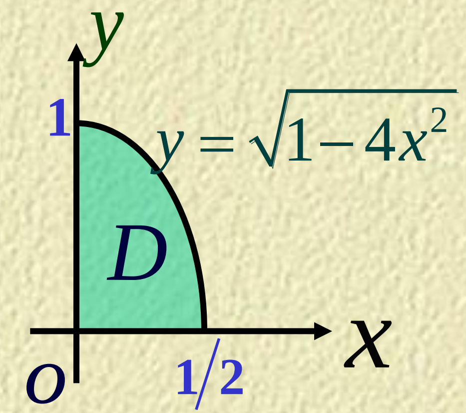
解 设立体在第一卦限部分的体积为V_1,由几何图形对称性知$V=4V_1$

$$=4\iint_D\left(1-4x^2-y^2\right)d\sigma$$



区域D为椭圆$4x^2+y^2\le 1$在第一象限的部分.

区域$D: 0 \le y \le \sqrt{1-4x^2}$,$0 \le x \le 1/2$,



$$V_1 = \iint_D \left(1-4x^2-y^2\right) d\sigma$$

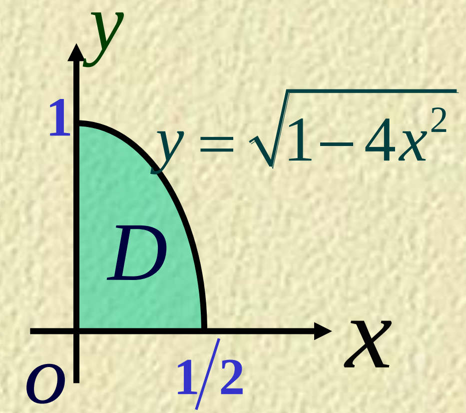
$$= \int_0^{1/2} dx \int_0^{\sqrt{1-4x^2}} \left(1-4x^2-y^2\right) dy$$

$$= \int_0^{1/2} \left[\left(1-4x^2\right) y - \frac{y^3}{3}\right]_0^{\sqrt{1-4x^2}} dx$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{1/2} \left(1-4x^2\right)^{3/2} dx \xlongequal[\substack{t=0\text{时}x=0 \\ t=\frac{\pi}{2}\text{时}x=\frac{1}{2}}]{2x=\sin t} \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos^4 t \, dt$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{16}, \; V = 4V_1 = \frac{\pi}{4}.$$

区域$D: 0 \le y \le \sqrt{1-4x^2}$,$0 \le x \le 1/2$,



作变量代换 $2x = u, y = v$,则区域D

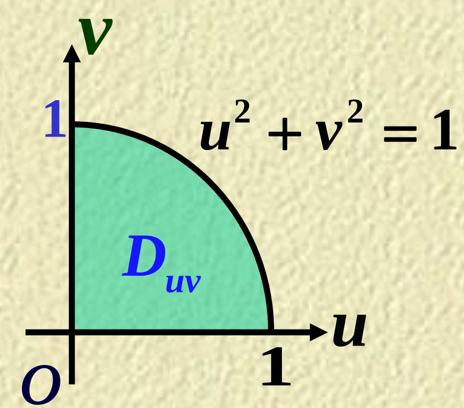
变换为$D_{uv}: u^2 + v^2 \le 1, u \ge 0, v \ge 0$.

显然有 $dudv = 2dxdy$.

$$V_1 = \iint_D \left(1 - 4x^2 - y^2\right) dxdy$$

$$= \frac{1}{2} \iint_{D_{uv}} \left(1 - u^2 - v^2\right) dudv$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 \left(1 - r^2\right) \cdot rdr = \frac{\pi}{16}.$$



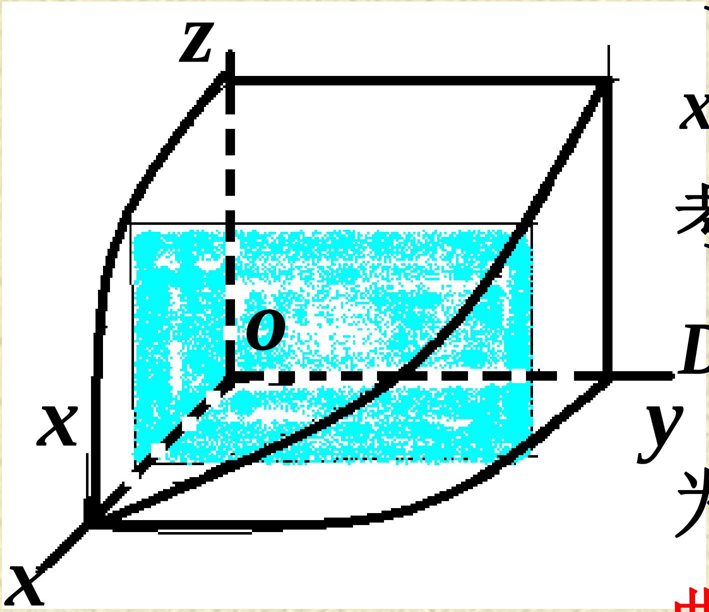
上页 下页 返回

例3. 历史上的例子—“牟合方盖”—两个半径相同的圆柱其中心轴垂直相交所成的那一部分的立体——体积的计算.东汉末的刘徽就是通过计算出牟合方盖的体积从而推算出:牟合方盖的体积:其内切球的体积=4 :圆周率,这一成果为后人祖冲之推算出圆周率之祖率奠定了基础.

在一元函数的定积分中我们用平行截面面积已知的立体体积的计算方法已经做过一次了.

刘徽—牟合方盖的体积

两个半径相同的圆柱其中心轴垂直相交所成的那一部分的立体，利用其对称性，考虑其1/8的那一部分之体积计算.



考虑两个圆柱面

$$x^2+y^2=a^2, x^2+z^2=a^2,$$

考虑在第一卦限内的部分：就是以

$$D=\{(x,y):x^2+y^2\le a^2, x\ge 0, y\ge 0\}$$

为底,以曲面 $z=\sqrt{a^2-x^2}$ 为顶部的

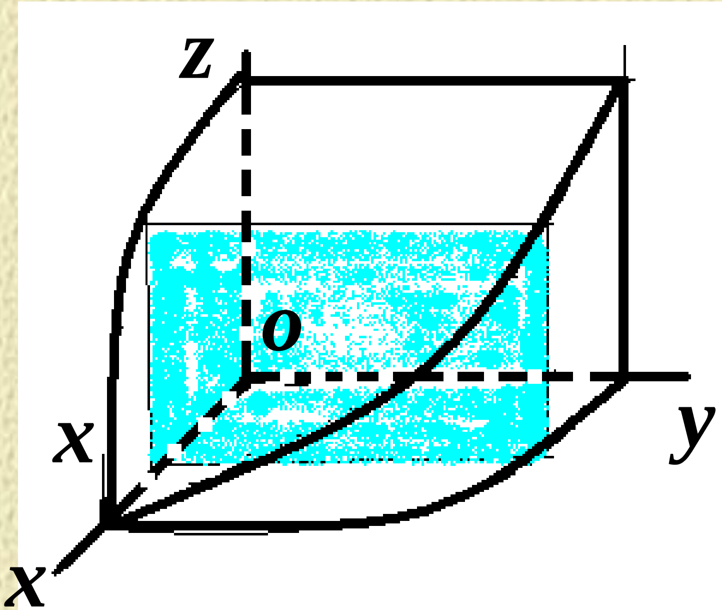
曲顶柱体的立体.

考虑在第一卦限内的部分：就是以

$$D=\left\{(x,y): x^2+y^2\le a^2, x\ge 0, y\ge 0\right\}$$

为底,以曲面 $z=\sqrt{a^2-x^2}$ 为顶部的

曲顶柱体的立体.



$$V=8\iint_D \sqrt{a^2-x^2}\,dxdy$$

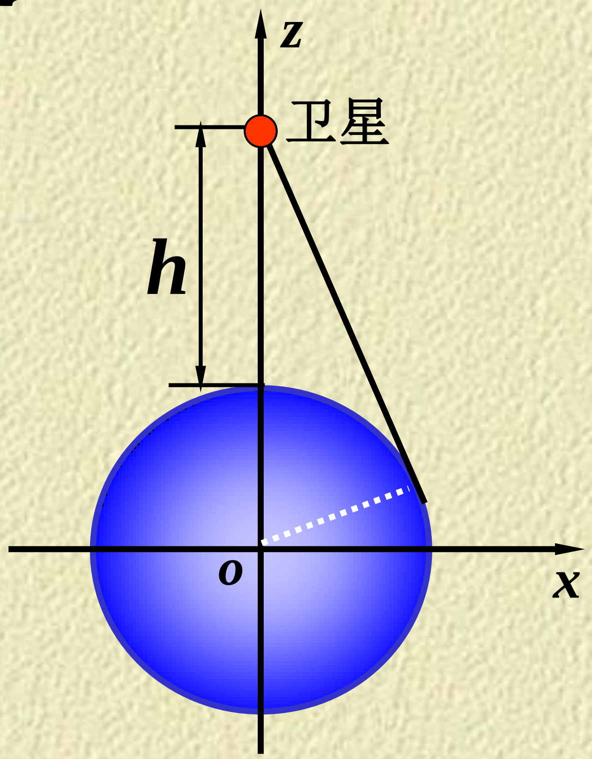
$$=8\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{a^2-x^2}\,dy$$

$$=8\int_0^a\left(a^2-x^2\right)dx=\frac{16}{3}a^3.$$

上页 下页 返回

2.2. 几何应用: 曲面的面积

实例 一颗地球的同步轨道通讯卫星的轨道位于地球的赤道平面内,且可近似认为是圆轨道.通讯卫星运行的角速率与地球自转的角速率相同,即人们看到它在天空不动. 若地球半径取为R,问卫星距地面的高度h应为多少?

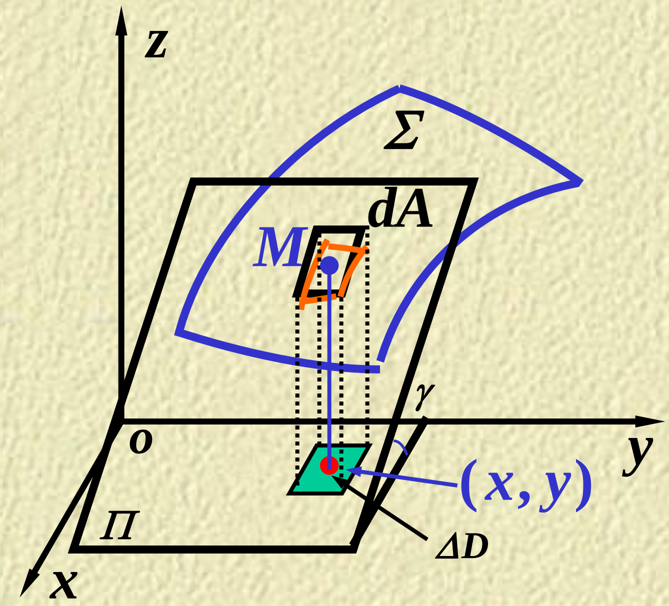


通讯卫星的覆盖面积是多大?

设光滑曲面片Σ的方程为 $z=f(x,y)$,

曲面Σ在坐标面xOy上的投影区域为D.设小区域$\Delta D\subset D$,点$(x,y)\in\Delta D$,

Π为Σ上$M(x,y,f(x,y))$点处的切平面.



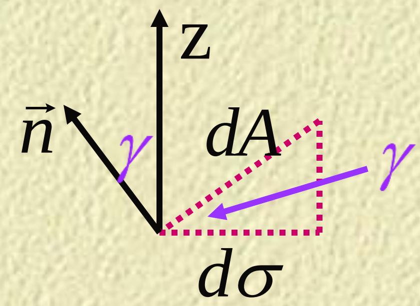
设以ΔD边界为准线、母线平行于 z 轴的柱面,截曲面Σ 截得部分面积为 dS,截切平面Π截得部分面积为 dA,则当ΔD的直径$\lambda\to 0$时有$dA=dS$.

上页 下页 返回

光滑曲面$\Sigma: z = f(x,y)$上$M(x,y,f(x,y))$

点处的法向量 $\vec{n} = \pm(-f_x, -f_y, 1)$,

单位法向量 $\overrightarrow{n^o} = \pm \dfrac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$



$$\overrightarrow{n^o} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma),$$

$\because d\sigma = dA \cdot |\cos\gamma|, \therefore dS = \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\, d\sigma$

$$\therefore S = \iint_D \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\, d\sigma.$$

$$S(\Sigma) = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy\ .$$

同理,若曲面Σ方程为 $x = g(y,z)$,

曲面片Σ 在坐标面yOz上的投影

区域为D_{yz},则

$$S(\Sigma) = \iint_{D_{yz}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\, dydz \ .$$

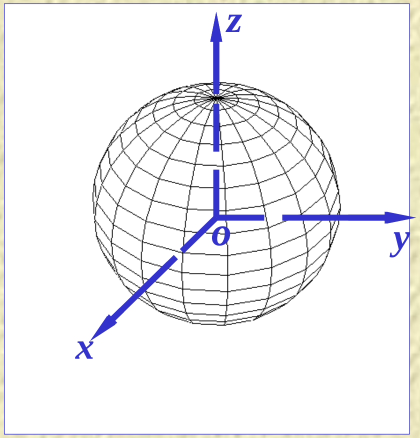
例4.推导球面积公式 .

亦可由旋转曲面面积公式解之

解 设球面方程为 $x^2+y^2+z^2=a^2$,

由几何对称知$S=8S_1$, S_1为球面第一卦限部分的面积.

在第一卦限部分, $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$,



$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

$$\therefore S=8\iint_{D_1}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=8\iint_{D_1}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$$

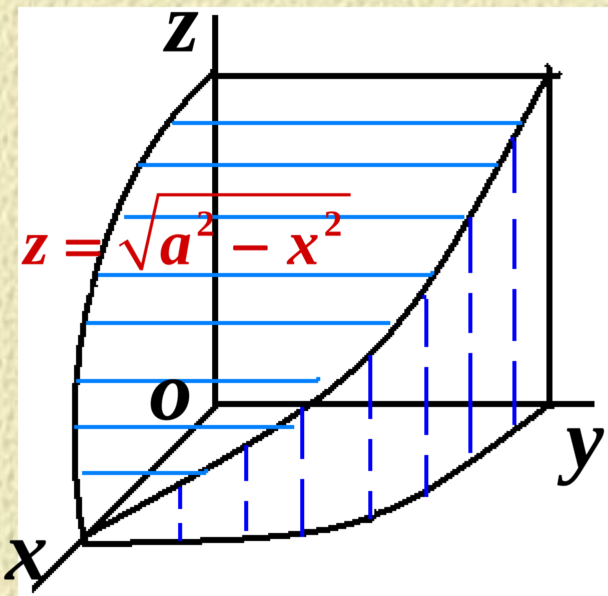
$$=8a\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^{a-0}\frac{1}{\sqrt{a^2-r^2}}\cdot rdr=-8a\cdot\frac{\pi}{2}\left[\sqrt{a^2-r^2}\right]_0^{a-0}=4\pi a^2.$$

可以注意到中间步骤出现了二重瑕积分.

上页 下页 返回

例5. 计算牟合方盖的表面积.

解 两个半径相同的圆柱其中心轴垂直相交所成的那一部分的立体,利用其对称性,考虑计算其表面积1/8的那一部分.



考虑两个圆柱面

$x^2+y^2=a^2, x^2+z^2=a^2,$

考虑在第一卦限内的部分,

就是以$D.x^2+y^2\le a^2, x\ge 0, y\ge 0$

为底,以曲面$z=\sqrt{a^2-x^2}$为曲顶柱体的顶部面积的两倍.

上页 下页 返回

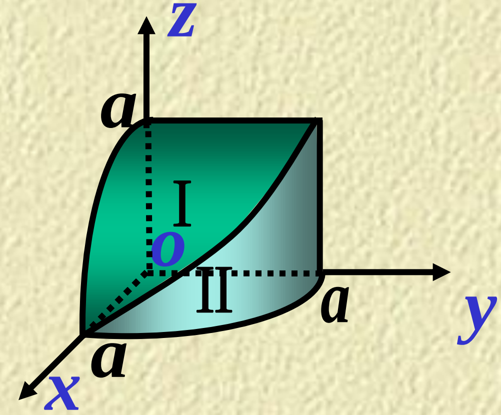
考虑在第一卦限内的部分,就是以

$D.x^2+y^2\le a^2, x\ge 0, y\ge 0$为底,以曲面$z=\sqrt{a^2-x^2}$

为曲顶柱体的顶部面积的两倍.

$$D: 0\le x\le a, 0\le y\le \sqrt{a^2-x^2},$$

$$\Sigma: z=\sqrt{a^2-x^2}, \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}, \frac{\partial z}{\partial y}=0,$$



$$S_{牟}=16\iint_D dS=16\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,d\sigma$$

$$=16\iint_D\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}+0}\,dxdy$$

$$=16\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dy=16a\int_0^a dx=16a^2.$$

上页 下页 返回

3. 物理应用: 几何体对质点的引力

设有一平面薄片位于xOy面上的闭区域D,在点(x,y)处的面密度为$\rho=\rho(x,y)$.设$\rho(x,y)$在D上连续.该薄片对位于z轴上点$M_0(0,0,a)$处的单位质点的引力$F=(F_x,F_y,F_z)$,$(a>0)$

$$F_x=G\iint_D \frac{x\rho(x,y)}{\sqrt{(x^2+y^2+a^2)^3}}d\sigma,$$

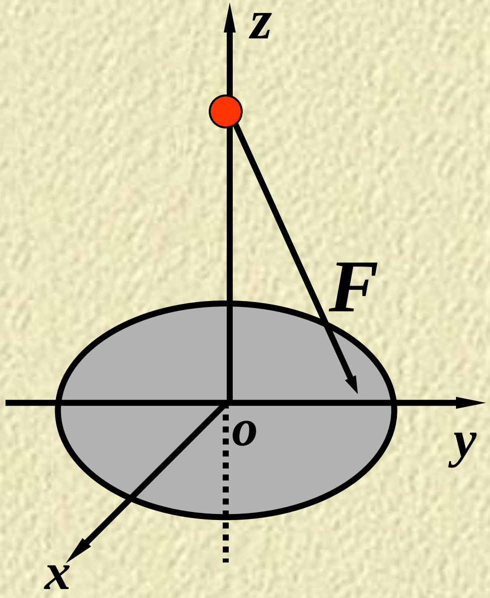
$$F_y=G\iint_D \frac{y\rho(x,y)}{\sqrt{(x^2+y^2+a^2)^3}}d\sigma,$$

$$F_z=-G\iint_D \frac{a\rho(x,y)}{\sqrt{(x^2+y^2+a^2)^3}}d\sigma,$$ G为引力常数.

例6.求面密度为常数ρ,半径为R的均匀圆盘$x^2+y^2\le R^2, z=0$对位于z轴上点$M_0(0,0,a)$处的单位质点的引力$F=(F_x,F_y,F_z),(a>0)$.

解　由于密度为常数,再加客观的对称性知

$$F_x=F_y=0,$$



$$F_z=-\iint_D \frac{\rho a G}{\sqrt{(x^2+y^2+a^2)^3}}d\sigma$$

$$=-\iint_{x^2+y^2\le R^2} \frac{\rho a G}{\sqrt{(x^2+y^2+a^2)^3}}dxdy$$

上页　下页　返回

$$F_z = -\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} \frac{\rho a G}{\sqrt{\left(x^2+y^2+a^2\right)^3}}dxdy$$

$$= -\rho a G\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{r}{\sqrt{\left(r^2+a^2\right)^3}}dr$$

$$= 2\pi\rho a G\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+a^2}} - \frac{1}{a}\right).$$

所求引力为

$$F = \left(F_x, F_y, F_z\right) = \left(0, 0, 2\pi\rho a G\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+a^2}} - \frac{1}{a}\right)\right).$$