3-05 无穷小量和无穷大量

1. 无穷小量的比较

当$x \to 0$时, $x, \sin x, x^2, x^3, 1-\cos x, x^2\sin\frac{1}{x}$ 都是无穷小 .

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{3x}=0$, 称$x\to 0$时$x^2$趋于0的速度比$3x$要快得多；

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, 则$\sin x$趋于0的速度与$x$大致相当；

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^3}=\infty$, 则 $1-\cos x$趋于0的速度比x^3要慢得多；

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$不存在 .

极限情况不同，反映了无穷小量趋近于零的“快慢”程度——数量级——的不同.

返回

定义1.设α,β是同一过程中的两个无穷小,且$\alpha \neq 0$.

(1). 若$\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 0$,就说$\beta$是比$\alpha$高阶的无穷小,

记作 $\beta = o(\alpha)$;

(2). 若$\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = C(C \neq 0)$,则称$\beta$与$\alpha$是同阶的无穷小,

记作 $\beta = O(\alpha)$; 特殊地 如果$\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 1$,则称$\beta$与$\alpha$是等价的无穷小 ,记作$\alpha \sim \beta$;

(3).若$\lim \dfrac{\beta}{\alpha^k} = C(C \neq 0, k > 0)$,就说$\beta$是$\alpha$的$k$阶无穷小,那么就有 $\beta \sim C\alpha^k$.

上页 下页 返回

例1. $\because \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1, \lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1, \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2},$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=\frac{1}{2},$$

$\therefore$ 当$x\to 0$ 时$\sin x\sim x, \tan x\sim x, 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,$

$$\tan x-\sin x=\tan x(1-\cos x)\sim\frac{1}{2}x^3,$$

$\tan x-\sin x$为x 的三阶无穷小 .

上述结果可以记作： $x\to 0$ 时

$$1-\cos x=O\left(x^2\right), 1-\cos x=o(x),$$

$$\tan x-\sin x=O\left(x^3\right), \tan x-\sin x=o\left(x^2\right),$$

$$\tan x-\sin x=o(x).\quad x=o(1).$$

高阶无穷小的运算规律：

当$x \to 0$时，$m,n \in \mathbb{Z}^{+}$，有

(1). $o\left(x^{m}\right) \pm o\left(x^{n}\right) = o\left(x^{k}\right)$,

其中$k = \min\{m,n\}$

(2). $o\left(x^{m}\right) \cdot o\left(x^{n}\right) = o\left(x^{m+n}\right)$,

(3). $x^{m} \cdot o\left(x^{n}\right) = o\left(x^{m+n}\right)$,

(4). 若$\exists M > K > 0$，使得$K < |\varphi(x)| < M$,

则 $\varphi(x) \cdot o\left(x^{n}\right) = o\left(x^{n}\right)$.

上页 下页 返回

2. 等价无穷小替换定理

定理 1. 设 $\alpha \to 0, \beta \to 0, \alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$,

且 $\lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在(或为∞),则 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

证明 (1).若 $\lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在(即有限),则

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim\left(\frac{\beta}{\beta'} \cdot \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \frac{\alpha'}{\alpha}\right) = \lim \frac{\beta}{\beta'} \cdot \lim \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \lim \frac{\alpha'}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}.$$

(2).若 $\lim \dfrac{\beta'}{\alpha'} = \infty$,则 $\lim \dfrac{\alpha'}{\beta'} = 0 \cdots$

在无穷小量作乘、除运算时,等价无穷小量可任意替换,而在作非乘、除运算时,等价无穷小量需谨慎使用.

上页 下页 返回

无穷小量的等价~是集合中元素的等价关系的一个特例 .集合$\mathbb{F}$到 $\mathbb{F}$的一个映射

$$\sim:\ \mathbb{F} \mapsto \mathbb{F}$$

是等价关系的充分必要条件是:

$\forall A, B, C \in \mathbb{F}$,"~" 具有性质

(1). 反身性 $A \sim A$;

(2). 对称性 $A \sim B \Rightarrow B \sim A$;

(3). 传递性 $A \sim B \;\&\; B \sim C \Rightarrow A \sim C$.

例2.求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$.

解 令 $e^x-1=u$,即 $x=\ln(1+u)$,

则当 $x\to 0$ 时,有 $u\to 0$,

$$\because \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\ln(1+u)}=\lim_{u\to 0}\frac{1}{\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}}$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{u\to 0}\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}}=\frac{1}{\ln e}=1,$$

$\therefore$ 当 $x\to 0$ 时,$e^x-1\sim x,\ln(1+x)\sim x$.

上页 下页 返回

常用的等价无穷小量：

当$x \to 0$ 时,

$$\sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim x,$$

$$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2,$$

$$e^x - 1 \sim \ln(1+x) \sim x,$$

$$(1+x)^a - 1 \sim ax \ (a \neq 0), \sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{1}{2}x.$$

例3.求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{\sin^3 2x}$.

错解 当$x \to 0$时, $\tan x \sim x, \sin x \sim x$.

原式 $\cancel{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - x}{(2x)^3} = 0$.

正解 当$x \to 0$ 时, $\sin 2x \sim 2x$,

$$\tan x - \sin x = \tan x (1 - \cos x) \sim \frac{1}{2} x^3,$$

$$原式 = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2} x^3}{(2x)^3} = \frac{1}{16}.$$

注意

1. 若未定式的分子或分母为若干个因子的乘积，则可对其中的任意一个或几个无穷小因子作等价无穷小代换，而不会改变原式的极限.

2. 切记，只可对函数的乘积因子作等价无穷小代换，对于代数和中各无穷小不能随意代换. 不能滥用等价无穷小代换 .

例4.求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$. (1^{∞})

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3(1+\sin x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^3}{x^3(1+\sin x)}=\dfrac{1}{2}$,

$$原式=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1+\sin x}{\tan x-\sin x}}\right]^{\frac{\tan x-\sin x}{x^3(1+\sin x)}}$$

$$=e^{\frac{1}{2}}.$$

$$x \to 0 \text{ 时} \tan x - \sin x = \tan x(1-\cos x) \sim \frac{1}{2}x^3,$$

$$\Rightarrow \frac{\tan x - \sin x}{1+\sin x} \sim \frac{1}{2}x^3,$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\tan x - \sin x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{1}{2}x^3\right)^{\frac{2}{x^3}}\right]^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}}.$$

上页 下页 返回

将上述过程一般化，可得

Add.命题：设 $\lim f(x)=0, \lim g(x)=\infty$,

则 $\ln[1+f(x)] \sim f(x)$.

若 $\lim g(x) f(x)=A$ 存在，

则 $\lim g(x) \ln[1+f(x)]=\lim g(x) f(x)=A$,

由复合函数极限计算的变量代换定理知：

$$\lim[1+f(x)]^{g(x)}=\lim e^{g(x)\ln[1+f(x)]}$$

$$=\lim e^{g(x) f(x)}=e^{A}.$$

上页 下页 返回

3. 无穷大量的比较

定义2.设α,β是同一过程中的两个无穷大量,

(1). 如果$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\infty$,就说$\beta$是比$\alpha$高阶的无穷大量,且记为$\beta\gg\alpha$;

(2). 如果$\lim\frac{\beta}{\alpha}=C\ (C\neq 0)$,则称$\beta$与$\alpha$是同阶的无穷大量;特别地,若$\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$,则称$\beta$与$\alpha$是等价的无穷大量,记作$\alpha\sim\beta$.

相仿地，我们也有相应的等价无穷大量替换定理.

上页 下页 返回

等价无穷大替换定理

定理 $1'$.设 $\alpha \to \infty, \beta \to \infty, \alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$,

且 $\lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在(或为∞),则 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

证明 $$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \left(\frac{\beta}{\beta'} \cdot \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \frac{\alpha'}{\alpha} \right)$$

$$= \lim \frac{\beta}{\beta'} \cdot \lim \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \lim \frac{\alpha'}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}.$$

在无穷大量作乘、除运算时,等价无穷大量可任意替换,而在作非乘、除运算时,等价无穷大量需谨慎使用.

例如$x\to\infty$时，$\sqrt{x^2+a}\sim|x|$，

$$x^3+a_1x^2+a_2x+a_3\sim x^3.$$

$$\left.\begin{array}{l} x\to 0\text{ 时}, 2x^2+x^5\sim 2x^2 \\ x\to\infty\text{ 时}, 2x^2+x^5\sim x^5 \\ x\to 0^+\text{时}, \sqrt{x+\sqrt{x}}\sim\sqrt[4]{x} \\ x\to+\infty\text{时}, \sqrt{x+\sqrt{x}}\sim\sqrt{x} \end{array}\right\}\Leftarrow$$

比较大小，

以大为准！

上页 下页 返回

例5.已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+4x}{x+1}+ax+3\right)=b$,求$a,b$.

若不加分析地直接使用无穷大的等价替换,

$\because x\to\infty$时,$x^2+4x\sim x^2, x+1\sim x$,

则 原式左$\overset{(1)}{=\!=}\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x}+ax+3\right)$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left[(a+1)x+3\right]=b$ 要存在,

$\therefore a=-1, b=3$.这样就错了!错就错在步骤(1),

错误地使用了无穷大的等价替换.

已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+4x}{x+1}+ax+3\right)=b$,求$a,b$.

正解 $\because \dfrac{x^2+4x}{x+1}+ax+3=\dfrac{x^2+4x+(ax+3)(x+1)}{x+1}$

$=\dfrac{(a+1)x^2+(a+7)x+3}{x+1}$, 在$x\to\infty$时, $x+1\sim x$,

若$a+1\neq 0$, $(a+1)x^2+(a+7)x+3\sim(a+1)x^2$,

则原式左$=\infty$. $\therefore a+1=0$是必须的.

此时原式左$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x+3}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x}{x}=6$.

常用结论

若$\begin{matrix}\alpha\to\infty\\ \beta\to\infty\end{matrix}$,有$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\(x\to x_0)}}\dfrac{\alpha}{\beta}=0$,则记$\alpha\ll\beta$或$\beta\gg\alpha$.

$n\to\infty$时,$\ln n\ll n^a\ll b^n\ll n!\ll n^n\ll\cdots$

$x\to+\infty$时,$\ln x\ll x^a\ll b^x\ll x^x\ll\cdots$

$(a>0,b>1)$

所以,无穷大量没有最大,只有更大!

上页 下页 返回

$a > 0, b > 1, n \to \infty$时,

$\ln n \ll n^a \ll b^n \ll n! \ll n^n \ll \cdots$

$$0 < a \le 1, 0 < \frac{\ln n}{n} = \ln \sqrt[n]{n},$$

由 $\lim\limits_{x \to x_0} \ln x = \ln x_0 \left(x_0 > 0 \right)$

得 $\lim\limits_{n \to \infty} \ln \sqrt[n]{n} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} \frac{\ln n}{n} = 0,$

$$a > 1, 0 < \frac{\ln n}{n^a} < \frac{\ln n}{n} \to 0 (n \to \infty).$$

$a>0,b>1,n\to\infty$时,

$\ln n \ll n^a \ll b^n \ll n! \ll n^n \ll \cdots$

要证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^a}{b^n}=0\left(a>0,b>1\right)$,

对于$a>0$,∃正整数m, $m>a,b>1,\sqrt[m]{b}=c>1$,

$$0<\frac{n^a}{b^n}<\frac{n^m}{b^n}=\left(\frac{n}{c^n}\right)^m,$$

由$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{c^n}=0\ \left(c>1\right)\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^a}{b^n}=0.$

$a>0, b>1, n\to\infty$时，

$$\ln n \ll n^a \ll b^n \ll n! \ll n^n \ll \cdots$$

要证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b^n}{n!}=0$. 当 $b>1$ 时，记 $[b]=m$，则 $m\le b<m+1$，

$$0<\frac{b^n}{n!}=\frac{\overbrace{b\cdots b}^{m}\ \overbrace{b\cdots b}^{n-m}}{1\cdot 2\cdots m(m+1)\cdots n}<\frac{b^m}{m!}\cdot\frac{b}{n}=\frac{b^{m+1}}{m!}\cdot\frac{1}{n}\to 0,$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$ 是显然的.

上页 下页 返回

Q: 何时能用无穷小量的等价替换呢?

A: 我们的回答是:

乘除运算时可任意使用.

乘除运算时可任意使用.

乘除运算时可任意使用.

练习:计算极限

$$(1).\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1};$$

$$(2).\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{\left(\sqrt[3]{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+\sin x}-1\right)};$$

$$(3).\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}{\ln\cos x}.$$

上页 下页 返回

$$Ex.(1).\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}\overset{x-1=t}{\underset{t\to 0}{=\!=\!=\!=}}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^{\frac{1}{3}}-1}{(1+t)^{\frac{1}{4}}-1}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{3}t}{\frac{1}{4}t}=\frac{4}{3}.$$

上页 下页 返回

(2).计算$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{\left(\sqrt[3]{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+\sin x}-1\right)}$.

解　原先我们是先化简再用四则运算法则的:

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(\cos x-1)\left[\sqrt[3]{\left(1+x^2\right)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right]\left(\sqrt{1+\sin x}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{1+x^2}-1\right)\left[\sqrt[3]{\left(1+x^2\right)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right]\left(\sqrt{1+\sin x}-1\right)\left(\sqrt{1+\sin x}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(\cos x-1)\left[\sqrt[3]{\left(1+x^2\right)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right]\left(\sqrt{1+\sin x}+1\right)}{x^2\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)\left[\sqrt[3]{\left(1+x^2\right)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right]\left(\sqrt{1+\sin x}+1\right)}{x^2\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\cos^2 x-1\right)\left[\sqrt[3]{\left(1+x^2\right)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right]\left(\sqrt{1+\sin x}+1\right)}{x^2\cos x(\cos x+1)}=-3.$$

(2).计算 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - \tan x}{\left(\sqrt[3]{1+x^2} - 1\right)\left(\sqrt{1+\sin x} - 1\right)}$.

使用等价无穷小量就是要避免重复劳动,
使得过程更简洁:

当 $x \to 0$ 时, $\sin x \sim \tan x \sim x$,

$1 - \cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2, (1+x)^a - 1 \sim ax \left(a \in \mathbb{R}, a \neq 0\right)$

$$原式 = \lim_{x \to 0} \frac{\tan x\left(\cos x - 1\right)}{\left(\sqrt[3]{1+x^2} - 1\right)\left(\sqrt{1+\sin x} - 1\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot \left(-\dfrac{1}{2}x^2\right)}{\dfrac{1}{3}x^2\left(\dfrac{1}{2}\sin x\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot \left(-\dfrac{1}{2}x^2\right)}{\dfrac{1}{3}x^2\left(\dfrac{1}{2}x\right)} = -3.$$

常用的等价无穷小量：

当$x \to 0$ 时,

$$\sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim x,$$

$$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2,$$

$$e^x - 1 \sim \ln(1+x) \sim x,$$

$$(1+x)^a - 1 \sim ax, (a \in \mathbb{R}, a \neq 0).$$

(3).计算$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt{1+x\sin x}}{\ln\cos x}$.

$$原式=-2\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\cos x-1}-1-\left(\sqrt{1+x\sin x}-1\right)}{\ln\left(\sec^2 x\right)}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1-\left(\sqrt{1+\cos x-1}-1\right)}{\ln\left(1+\tan^2 x\right)}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x\sin x-\frac{1}{2}(\cos x-1)}{\tan^2 x}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^2\right)}{x^2}=\frac{3}{2}.$$

*.何时能用无穷小量的等价替换呢?

我们可以发现,若$x \to x_0$ (或$x \to \infty$)时,

$\alpha \to 0, \beta \to 0, \gamma \to 0, \alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$,且

α与β不是等价无穷小量,则有

$$\lim \frac{\alpha - \beta}{\gamma} = \lim \frac{\alpha_1 - \beta_1}{\gamma},$$

即此时可以用无穷小量的等价替换.

*B*站所见等价无穷小问题.

1.计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\dfrac{1+e^{2x}}{2}\right)^{\sin x}-1}{1-\cos x}$.

2.问以下解题过程是否正确:

$$x\to 0,\sin x\sim x,\text{故}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)}{x^2\sin\frac{1}{x}}\cdot\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}\right]=1\times 0=0\ \ ?$$

上页 下页 返回

$$1.\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1+e^{2x}}{2}\right)^{\sin x}-1}{1-\cos x}.$$

解 $x\to 0,\sin x\sim x,1-\cos x\sim \frac{1}{2}x^2,\ln(1+x)\sim x,e^x-1\sim x.$

$\because x\to 0$时$e^{2x}-1\to 0,\ln\left(1+\frac{e^{2x}-1}{2}\right)\to 0,$

$$\therefore 原=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x\ln\left(1+\frac{e^{2x}-1}{2}\right)}-1}{\frac{1}{2}x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\ln\left(1+\frac{e^{2x}-1}{2}\right)}{\frac{1}{2}x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot\frac{e^{2x}-1}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x}=2.$$

此之谓“疯狂的等价无穷小”.

此种题目极具中国特色,余以为意义不大,殊无趣味.

2.问以下解题过程是否正确：

$$x \to 0, \sin x \sim x, \text{故} \lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(x^2 \sin\frac{1}{x}\right)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin\left(x^2 \sin\frac{1}{x}\right)}{x^2 \sin\frac{1}{x}} \cdot \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{x}\right] = 1 \times 0 = 0 \quad ?$$

解 当然不对！$\because x \to 0, \sin x \sim x$, 蕴含了 $x \neq 0$,

而 $x \to 0$ 时, $x^2 \sin\frac{1}{x}$ 在可列多个点处取到0值.

正解为 $\left|\sin\left(x^2 \sin\frac{1}{x}\right)\right| \le x^2 \left|\sin\frac{1}{x}\right| \le x^2$, 由追敛性知

$$-|x| \le \frac{\sin\left(x^2 \sin\frac{1}{x}\right)}{x} \le \frac{x^2}{|x|} = |x| \Rightarrow \text{原极限} = 0.$$

上页 下页 返回