Chap02.数列极限习题讲解

上页 下页 返回

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+, \forall n > N, s.t. |x_n - a| < \varepsilon.$$

1.不等式$|x_n - a| < \varepsilon$,ε取值的任意性刻划了x_n与a的无限接近;

2.N与任意给定的正数ε有关,而$n > N$刻划了n的无限增大;

3. 改变或去掉数列的有限项, 不影响数列的收敛性和极限. 重排不改变数列敛散性.

上页 下页 返回

例1 证明$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$，其中$|q| < 1$.

分析 若$0 < |q| < 1$，任给$\varepsilon > 0$，要找N，使当$n > N$时，有

$|x_n - 0| = |q^n| < \varepsilon$，$n \ln|q| < \ln\varepsilon$，$\therefore n > \dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$，所以可取$N \geq \dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$，

证 若$q = 0$，则$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$；

若$0 < |q| < 1$，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \geq \dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$，$\forall n > N$，

有$|q^n - 0| = |q|^n < |q|^N \leq |q|^{\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}} = |q|^{\log_{|q|}\varepsilon} = \varepsilon$，

$\therefore |q| < 1$时，$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

例2 证明 $\alpha > 0, \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha}} = 0.$

证明 (1).$\alpha \geq 1, 0 < \dfrac{1}{n^{\alpha}} \leq \dfrac{1}{n}, \therefore \forall \varepsilon > 0, \exists N \geq \dfrac{1}{\varepsilon},$

$\forall n > N, s.t. \left|\dfrac{1}{n^{\alpha}} - 0\right| \leq \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{N} \leq \dfrac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon\ ;$

(2).$0 < \alpha < 1,$由实数的Achimedes性,

$\exists m \in \mathbb{Z}^{+}, m\alpha > 1, \therefore \dfrac{1}{n^{m\alpha}} \to 0,$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N, s.t.\ 0 < \dfrac{1}{n^{m\alpha}} < \varepsilon^{m},$

$\Rightarrow 0 < \dfrac{1}{n^{\alpha}} < \varepsilon,$即$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha}} = 0, \alpha > 0.$

例3 证明$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1.(a>0)$

证 $a>1$,记$\alpha=a^{\frac{1}{n}}-1$,则$\alpha>0$,

由$a=(1+\alpha)^n\geq 1+n\alpha=1+n(a^{\frac{1}{n}}-1)$,

得$a^{\frac{1}{n}}-1\leq\dfrac{a-1}{n}$,

任给$\varepsilon>0$,要$\left|\sqrt[n]{a}-1\right|<\varepsilon$,只要$\dfrac{a-1}{n}<\varepsilon$,或$n>\dfrac{a-1}{\varepsilon}$,

故可取$N\geq\dfrac{a-1}{\varepsilon}$,则$\forall n>N$,有$\left|\sqrt[n]{a}-1\right|<\varepsilon$,即$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$;

$0<a<1$,$\sqrt[n]{\dfrac{1}{a}}\to 1(n\to\infty)\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1.$

例4 求数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 的极限。

解： 记 $a_n=\sqrt[n]{n}=1+h_n$ ，这里 $h_n>0(n>1)$ ，

则有： $n=(1+h_n)^n=1+nh_n+C_n^2h_n^2+\cdots>1+C_n^2h_n^2$，

$$\therefore 1<a_n=1+h_n<1+\sqrt{\frac{2}{n-1}},$$

上式左右两边极限均为1， 由夹逼准则得结果。

法二

$$1\le\sqrt[n]{n}=\left(1\cdots1\cdot\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\le\frac{n-2+2\sqrt{n}}{n}<1+\frac{2}{\sqrt{n}},\therefore 0\le\sqrt[n]{n}-1<\frac{2}{\sqrt{n}}.$$

上页 下页 返回

数列极限的“ε—N”形式的定义语言是抽象的，意味是深刻的. 诚所谓“言已尽而意无穷.”

道可道,非常道. —《老子•一章》

道不可言,言而非也. —《庄子•知北游》

言者所以在意，得意而忘言. —《庄子•外物》

例5　求极限 (1) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2+1}\right)$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$,

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^{n+1}-(-4)^n}{3\cdot 5^n+2\cdot 3^n}$,

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+1}{2n+2}\right)^n$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n^2+4}{4n^2+1}\right)^n$.

例6 说明下列数列收敛，并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

(1) 设 $0 < x_1 < 1,\ x_{n+1} = x_n(1 - x_n),\ n = 1, 2, 3, \cdots$

(2) 设 $x_1 > 0,\ x_{n+1} = 1 + \dfrac{x_n}{1 + x_n},\ n = 1, 2, 3, \cdots$

解 (2) 首先观察数列的取值、变化情况，判断其取值趋势. $x_1 = a,\ x_2 = 1 + \dfrac{a}{1+a}, \cdots,$

可以发现：$0 < a < 1,\ x_n \nearrow;\ a > 2,\ x_n \searrow;$

$$(1)\ 1 < x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{1+x_n} < 1 + \frac{1+x_n}{1+x_n} = 2,$$

用归纳法证明 $1 < x_n < 2, \{x_n\}$有界;

$$(2)\ x_{n+1} - x_n = \cdots = \frac{x_n - x_{n-1}}{(1+x_n)(1+x_{n-1})},$$

可知$\{x_n\}$为单调列;

(2) $x_{n+1}-x_n=\cdots=\dfrac{x_n-x_{n-1}}{(1+x_n)(1+x_{n-1})}$,

可知$\{x_n\}$为单调列;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x_n}{1+x_n}\right)$,

$\therefore\quad x=1+\dfrac{x}{1+x},\ x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$,

$x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}<0$舍去(保号性)

$$(1)\ 1 < x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{1+x_n} < 1 + \frac{1+x_n}{1+x_n} = 2,$$

用归纳法证明 $1 < x_n < 2$, $\{x_n\}$有界;

$$(2)\ x_{n+1} - x_n = \cdots = \frac{x_n - x_{n-1}}{(1+x_n)(1+x_{n-1})},$$ 知$\{x_n\}$为单调列;

$$(3)\ \text{令} \lim_{n\to\infty} x_n = x, \text{则} \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x_n}{1+x_n}\right),$$

$$\therefore\ x = 1 + \frac{x}{1+x},$$

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$$ 舍去(保号性)

$$x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{1+x_n} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x_n}},$$

连分数– 用有理数生成无理数, $\forall a > 0,$

$$a, 1+\frac{1}{1+\frac{1}{a}}, 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{a}}}}, 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{a}}}}}},$$

$\cdots$

上页 下页 返回

如：$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cdots}}}}}}$$

$$\to\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.618$$ 黄金数.

上页 下页 返回

例 7 利用柯西收敛准则证明数列$\{x_n\}=\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin k}{2^k}\right\}$收敛。

证明：$\forall n, p\in\mathbb{Z}^+$ 有

$$\left|x_{n+p}-x_n\right|=\left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}}+\frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}}\right|$$

$$\le\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+p}}=\frac{1}{2^{n+1}}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{p-1}}\right)$$

$$=\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^p}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^n}\cdot\left(1-\frac{1}{2^p}\right)<\frac{1}{2^n}.$$

$$\forall n, p \in \mathbb{Z}^+, \left| x_{n+p} - x_n \right| < \frac{1}{2^n},$$

$$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists N \geq \log_2 \frac{1}{\varepsilon}, \forall n > N,$$

$$\forall p \in \mathbb{Z}^+, \exists \left| x_{n+p} - x_n \right| < \varepsilon.$$

$$\therefore \{x_n\} = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{2^k} \right\} \text{收敛}.$$

例8# 数列极限中的一个常用结论

(1)如果 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=a$;

(2)若 $x_n>0(n=1,2,\cdots)$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=a$.

证明 (1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,不妨设 $a=0$,否则令 $x_n := x_n - a$,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists N_1,\forall n>N_1,\exists\left|x_n\right|<\varepsilon.$$

$$\therefore \left|\frac{x_1+\cdots+x_{N_1}+x_{N_1+1}+\cdots+x_n}{n}\right|$$

$$\le\left|\frac{x_1+\cdots+x_{N_1}}{n}\right|+\left|\frac{x_{N_1+1}+\cdots+x_n}{n}\right|$$

上页 下页 返回

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1, \forall n > N_1, \exists \left|x_n\right| < \varepsilon.$$

$$\therefore \left|\frac{x_1 + \cdots + x_{N_1} + x_{N_1+1} + \cdots + x_n}{n}\right|$$

$$\leq \left|\frac{x_1 + \cdots + x_{N_1}}{n}\right| + \left|\frac{x_{N_1+1} + \cdots + x_n}{n}\right|$$

$$\left|\frac{x_{N_1+1} + \cdots + x_n}{n}\right| \leq \frac{\left|x_{N_1+1}\right| + \cdots + \left|x_n\right|}{n}$$

$$< \frac{(n - N_1)\varepsilon}{n} < \varepsilon$$

上页 下页 返回

而N_1是取定之值,即$\left|x_1+\cdots+x_{N_1}\right|$为定值,

$$\therefore \forall\varepsilon>0,\exists N_2,\forall n>N_2,\exists\left|\frac{x_1+\cdots+x_{N_1}}{n}\right|<\varepsilon.$$

$$\therefore \forall\varepsilon>0,\exists N=\max(N_1,N_2),$$

$$\forall n>N,\exists\left|\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right|<2\varepsilon,$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}x_n=a\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=a\ ;$$

上页 下页 返回

下证(2)若 $x_n>0$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=a$.

由$x_n>0\Rightarrow a\geq 0.$

若$a>0$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=\frac{1}{a}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1/x_1+\cdots+1/x_n}{n}=\frac{1}{a}.$

$x_n>0$,由$\frac{n}{1/x_1+\cdots+1/x_n}\leq\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leq\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$,

由夹逼性,得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=a$;

若$a=0$,当然$0<\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leq\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\cdots$证明毕.

上页 下页 返回

例9 例8# 结论之应用举例

证明 $(1)\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e$,$(2)\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$.

解

(1)取$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n=e,$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\dfrac{2}{1}\right)^1\left(\dfrac{3}{2}\right)^2\cdots\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n}=e$,

或取$x_n=\dfrac{n^n}{n!}$,$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=e$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{x_2}{x_1}\dfrac{x_3}{x_2}\cdots\dfrac{x_{n+1}}{x_n}}=e$.

$$(2)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$$

法1 由(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e$ 可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=e\bullet 0=0;$$

法2 取$x_n=\frac{1}{n}$,由例8(2)结论得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$;

法3 由归纳法可得

$$n!>\left(\frac{n}{3}\right)^n,\left(\frac{n+1}{n}\right)^n<3,\cdots$$

上页 下页 返回

例10　证明下列数列极限结论

$$(1)\lim_{n\to\infty} n^2 q^n = 0\left(\left|q\right| < 1\right)\ ,$$

$$(2)\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0\ \ ,$$

$$(3)\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^\alpha} = 0\ \left(\alpha \ge 1\right),$$

$$(4)\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0\ \left(a > 1, k \in \mathbb{Z}^+\text{为定值}\right).$$

例11. 如果$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a > 0$,证明$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1.$

证明　$\because \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a > 0, \therefore$ 对于$\varepsilon_0 = \dfrac{a}{2} > 0, \exists N,$

$\forall n > N$,有$|x_n - a| < \varepsilon_0 = \dfrac{a}{2}$,即 $0 < \dfrac{a}{2} < x_n < \dfrac{3a}{2}.$

于是有 $\sqrt[n]{\dfrac{a}{2}} < \sqrt[n]{x_n} < \sqrt[n]{\dfrac{3a}{2}},$

据极限的夹逼性,由$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{a}{2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{3a}{2}} = 1$ 知

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1.$$