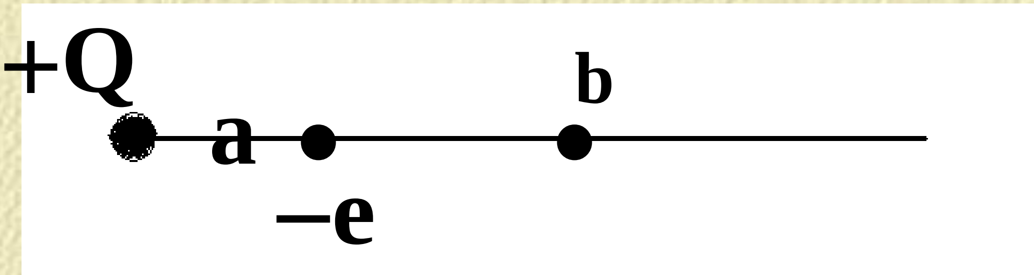
3-01 函数的极限

上页 下页 返回

在静电学中,一个点电荷$+Q$产生的静电场中与电荷$+Q$距离为a处的电位势定义为:将位于点a处的一个试验电荷(单位负电荷)$-e$沿电场线移至无穷远处,为克服*Coulomb*力所需作的功.



可以设想,将$-e$ 从点a处沿电场线移至与a点距离为b的地方所做的功 $W=W(b)$,点a处的电位势U_a就是$b\to+\infty$时的$W=W(b)$ 的取值的变化趋势,即$U_a=\lim\limits_{b\to+\infty}W(b)$.

上页 下页 返回

例如，我们知道一个阻尼振荡的波函数可设想为

$$x(t) = A(t)\sin(\omega t + \varphi_0)\ , t \geq 0$$

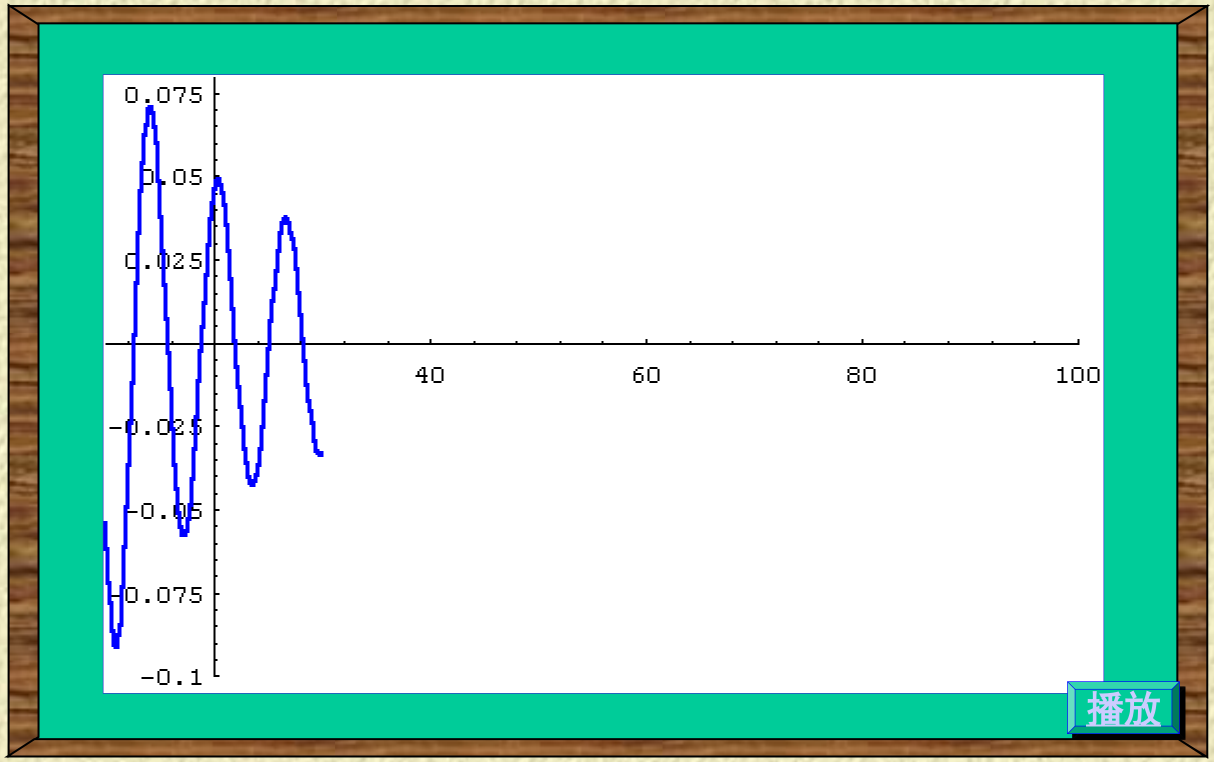
随着时间 t 的不断增加以至无穷,振荡的振幅 $A(t)$的数值越来越接近于零。那么,我们就说随着时间 t 的无限增大, $x(t)$的的值无限接近于零，或曰 $x(t)$以 0为极限。

所以,函数的极限首先就可以讨论自变量 $x \to +\infty$ 时的极限问题。

同时可以注意到，$x \to +\infty$ 时函数的极限问题是数列极限问题变量的连续化。

一.自变量趋向无穷大时函数的极限

观察函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 当 $x \to +\infty$ 时的变化趋势.



上页 下页 返回

问题：在$x \to +\infty$的过程中，函数值是否无限趋近于定值A?

通过观察上面实验演示知，当x无限增大时，$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$无限接近于 0.

问题：如何用数学语言刻画函数无限趋近于定值?

$\forall \varepsilon > 0, |f(x) - A| < \varepsilon$表示任意小；

$X > 0, x > X$表示$x \to +\infty$的过程.

1. $x \to +\infty$ 的情形

定义1.对于函数$f(x)$而言,若存在一个数A,对于任意给定的正数ε,总存在正数X,使得对于$x > X$时的一切x, $|f(x) - A| < \varepsilon$都成立.则称函数$f(x)$在$x \to +\infty$时收敛于A,数A是函数的极限,记为

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \to A\left(x \to +\infty\right).$$

若在$x \to +\infty$时函数$f(x)$没有极限,则称函数$f(x)$在$x \to +\infty$时是发散的.

收敛定义对比——数列与函数:

变量离散地变化

(1).数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n > N, s.t. \left| x_n - a \right| < \varepsilon.$

(2).函数极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0, \forall x > X, s.t. \left| f(x) - A \right| < \varepsilon.$

变量连续地变化

$2. x \to -\infty$情形: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0, \forall x < -X, s.t. \left| f(x) - A \right| < \varepsilon.$

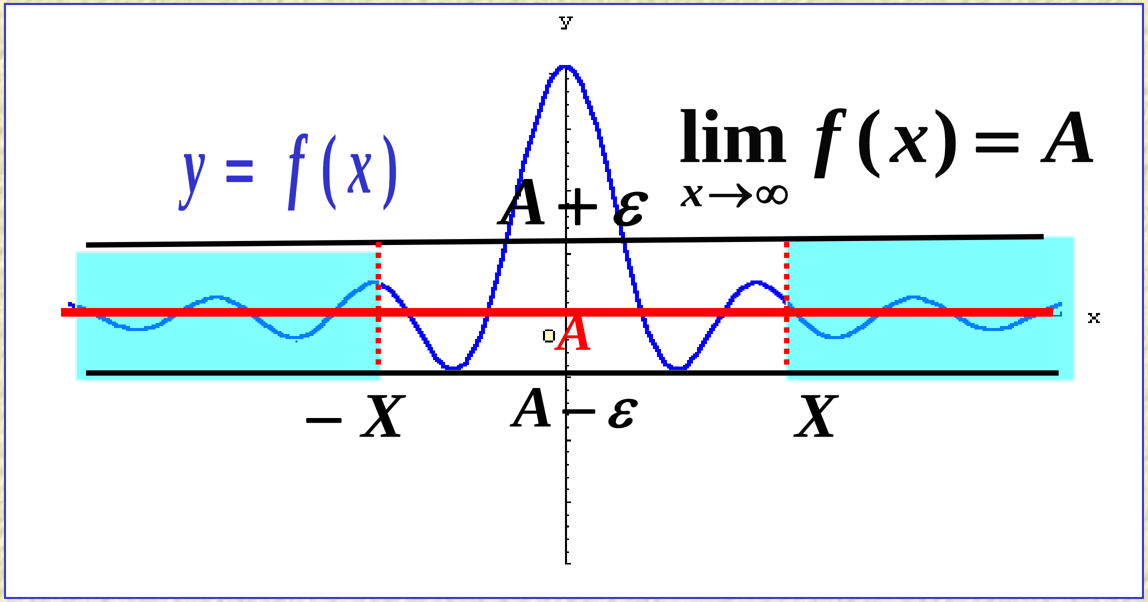
$3. x \to \infty$的情形 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0, \forall \left| x \right| > X, s.t. \left| f(x) - A \right| < \varepsilon.$

定理: $1.^{1}$ $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = A \ \& \ \lim_{x \to -\infty} f(x) = A.$$

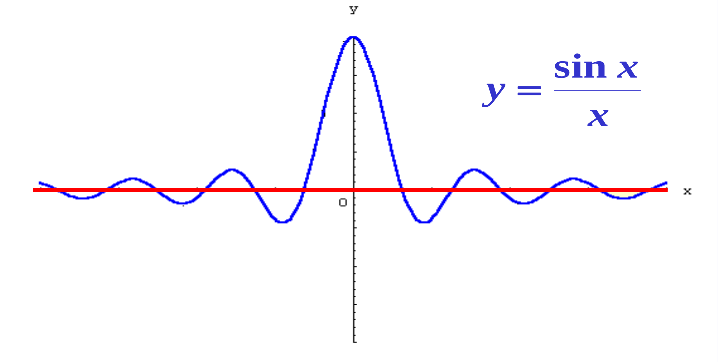
4.几何解释:



当$x < -X$或$x > X$时, 函数 $y = f(x)$ 图形完全落在以直线$y = A$为中心线, 宽为2ε的带形区域内.

上页 下页 返回

例1.证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0.$



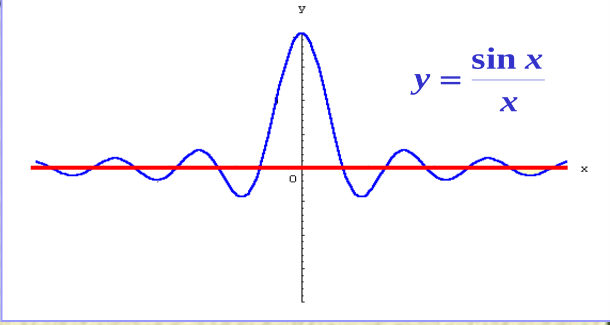
分析 $\because \left|\dfrac{\sin x}{x}-0\right|=\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|\le\dfrac{1}{|x|},$

$\forall\varepsilon>0,$要找到$X>0,$使得当$|x|>X$时有

$\left|\dfrac{\sin x}{x}-0\right|<\varepsilon,$故只要$\dfrac{1}{|x|}<\varepsilon,$

所以可取$X\ge\dfrac{1}{\varepsilon}.$

上页 下页 返回



例1.证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x} = 0.$

证明 $\forall \varepsilon > 0, \exists X \geq \dfrac{1}{\varepsilon}, \quad \forall |x| > X,$

有 $\left|\dfrac{\sin x}{x} - 0\right| \leq \dfrac{1}{|x|} < \dfrac{1}{X} \leq \dfrac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon,$

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x} = 0.$

定义：如果 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} f(x) = c$,则直线$y = c$

是函数$y = f(x)$图形的水平渐近线.

上页 下页 返回

例2.用函数极限定义证明

(1). $\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \arctan x = -\dfrac{\pi}{2}$.

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to \infty} \arctan x$不存在 .

(2). $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2+1}{x^2-3} = 1$;(证明从略)

(3). $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x+1}{x^2-x+3} = 0$.(证明从略)

例2.用函数极限定义证明

(1). $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$.

分析 $\forall\varepsilon>0$,要使得$\left|\arctan x-\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right|<\varepsilon$,

即$-\varepsilon-\dfrac{\pi}{2}<\arctan x<\varepsilon-\dfrac{\pi}{2}$,

此左半部分成立,只需考察右半部分.设$\varepsilon<\pi/2$,

则需有$x<\tan\left(\varepsilon-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\varepsilon\right)$.

证明 $\forall\dfrac{\pi}{2}>\varepsilon>0$,取$X\geq\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\varepsilon\right)$,则当$x<-X$时,

恒有$\left|\arctan x-\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right|<\varepsilon$,故$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$.

上页 下页 返回

用定义证明(1). $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$.

证明 $\forall\dfrac{\pi}{2}>\varepsilon>0$,取$X\geq\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\varepsilon\right)$,则当$x<-X$时,

有$\left|\arctan x-\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right|=\dfrac{\pi}{2}+\arctan x<\dfrac{\pi}{2}+\arctan(-X)$

$\leq\dfrac{\pi}{2}+\arctan\left[\tan\left(\varepsilon-\dfrac{\pi}{2}\right)\right]=\dfrac{\pi}{2}+\varepsilon-\dfrac{\pi}{2}=\varepsilon$,

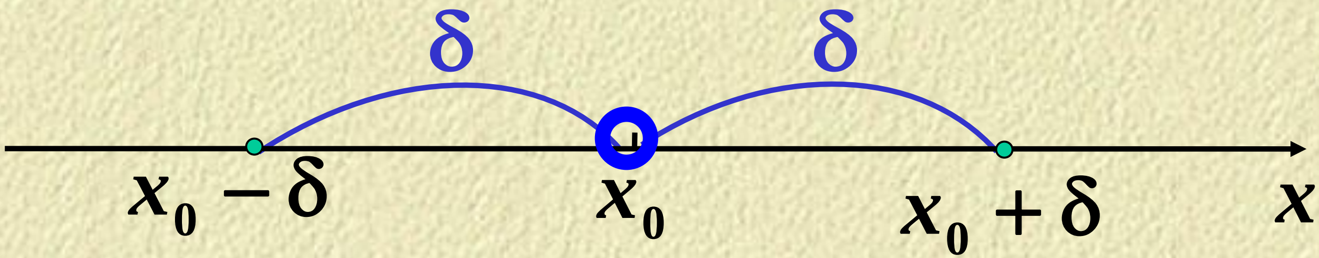
故 $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$.

二.自变量趋向有限值时函数的极限

问题: 函数 $y = f(x)$ 在 $x \to x_0$ 的过程中,对应函数值 $f(x)$ 无限趋近于确定值 A.

$|f(x) - A| < \varepsilon$ 表示 $|f(x) - A|$ 任意小;

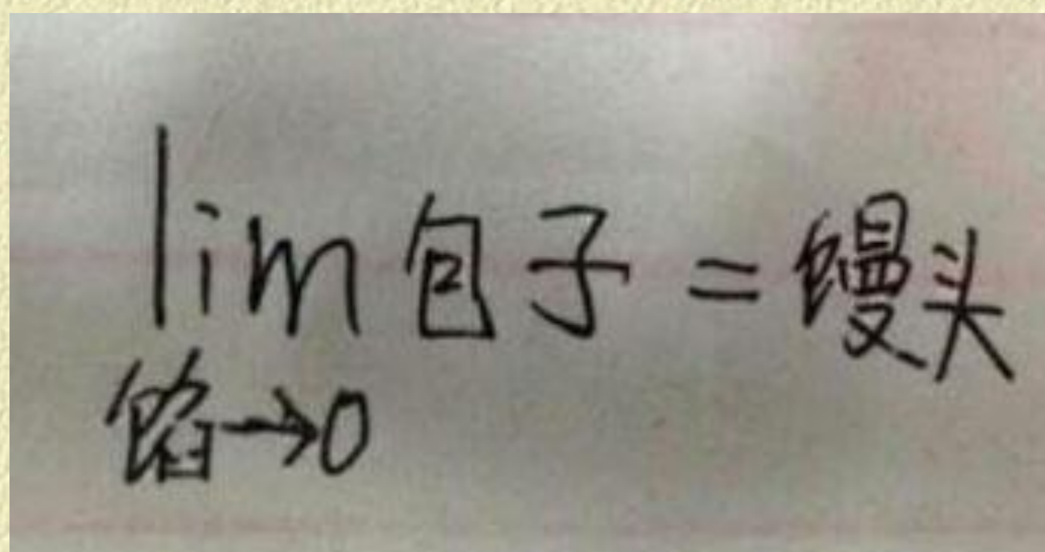
$0 < |x - x_0| < \delta$ 表示 $x \to x_0$ 的过程.



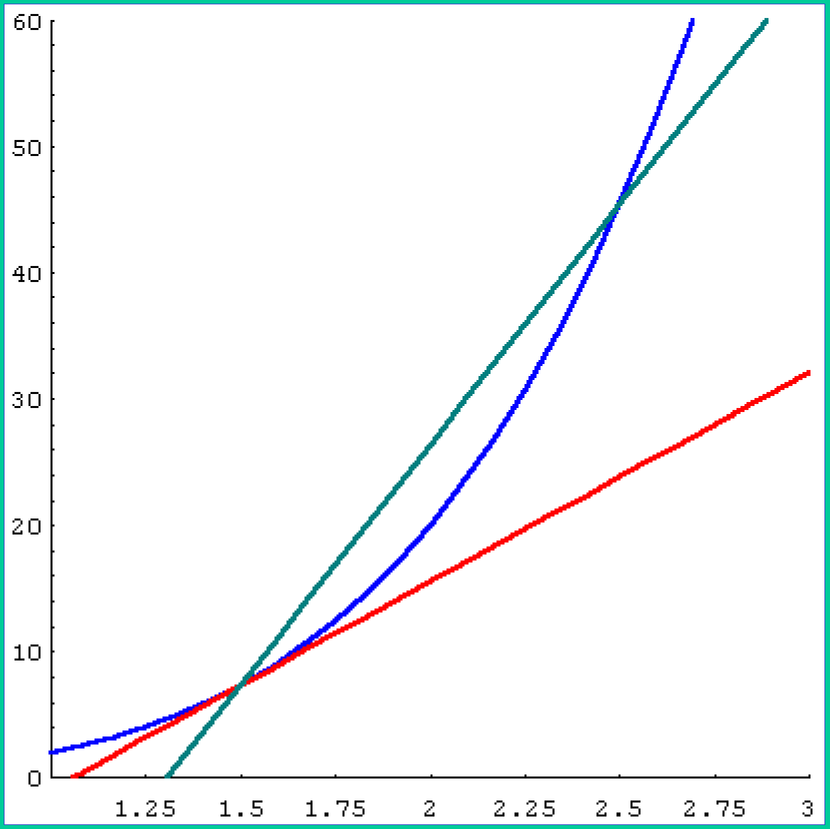
点 x_0 的去心 δ 邻域,　　δ 体现 x 接近 x_0 程度.

问题是在 $x \to x_0$ 的过程中讨论函数 $y = f(x)$ 的极限问题时，要考察点 x_0 的去心 δ 邻域 $0 < |x - x_0| < \delta$，这是为什么呢？

某抠门的食堂 $\Rightarrow$



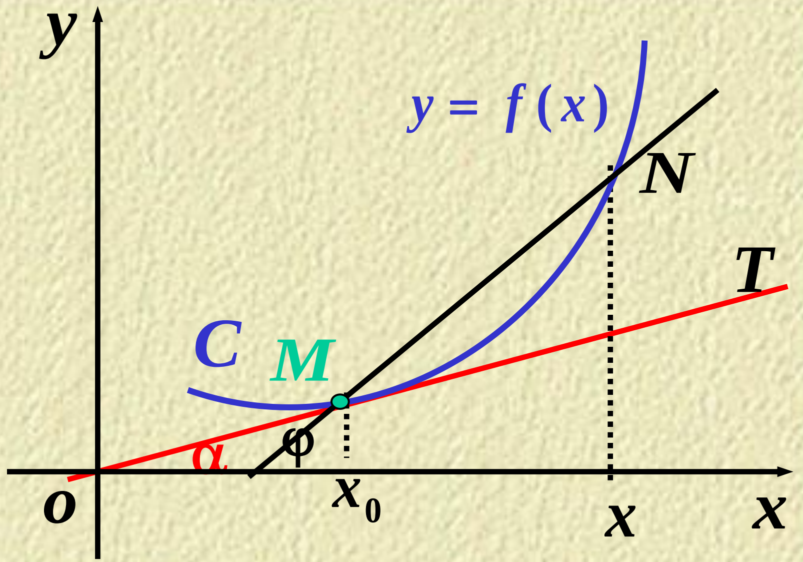
切线问题　割线的极限位置——切线位置



播放

上页　下页　返回

如图,如果割线MN绕点M旋转而趋向极限位置MT,直线MT就称为曲线C在点M处的切线.



极限位置即

$|MN| \to 0, \angle NMT \to 0.$设 $M(x_0, y_0), N(x, y).$

割线MN的斜率为$\tan\varphi = \dfrac{y - y_0}{x - x_0} = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$

$N \xrightarrow{\text{沿曲线}C} M,$即 $x \to x_0,$

切线MT的斜率为$k = \tan\alpha = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$

在讨论形如$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$的极限问题

时必须注意到 $x \to x_0$ 蕴含着 $x \neq x_0$.

例如抛物线$y = x^2$在点(2,4)处的切线斜率

为 $k = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x+2)(x-2)}{x-2}$

注意到 $x \to 2$ 蕴含着 $x \neq 2$,

因此,$k = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2}(x+2) = 4.$

上页 下页 返回

5.$x \to x_0$的情形

定义2.对于函数$f(x)$而言,若存在一个数A,对于任意给定的正数ε,总存在正数δ,使得对于$0<|x-x_0|<\delta$时的一切x,$|f(x)-A|<\varepsilon$都成立.则称函数$f(x)$在$x \to x_0$时收敛于A,记为 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=A$ 或 $f(x) \to A\left(x \to x_0\right)$.

"$\varepsilon-\delta$"定义$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$,使当$0<|x-x_0|<\delta$时,恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

上页 下页 返回

例3.证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-x-2}{x-1}=5.$

分析 $\forall\varepsilon>0$,要找到 $\delta>0$,使得 $\forall 0<|x-1|<\delta$,

有 $\left|\dfrac{3x^2-x-2}{x-1}-5\right|<\varepsilon$,

$$\because \left|\frac{3x^2-x-2}{x-1}-5\right|=\left|\frac{(3x+2)(x-1)}{x-1}-5\right|$$

$$=|3x+2-5|=3|x-1|,$$

$\therefore$ 只要 $3|x-1|<\varepsilon$ 即可,故可取 $0<\delta\le\dfrac{\varepsilon}{3}$.

上页 下页 返回

例3.证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-x-2}{x-1}=5.$

证明 $\forall\varepsilon>0,\exists 0<\delta\le\dfrac{\varepsilon}{3},\forall 0<|x-1|<\delta,$

有 $\left|\dfrac{3x^2-x-2}{x-1}-5\right|=3|x-1|<3\delta\le 3\cdot\dfrac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,$

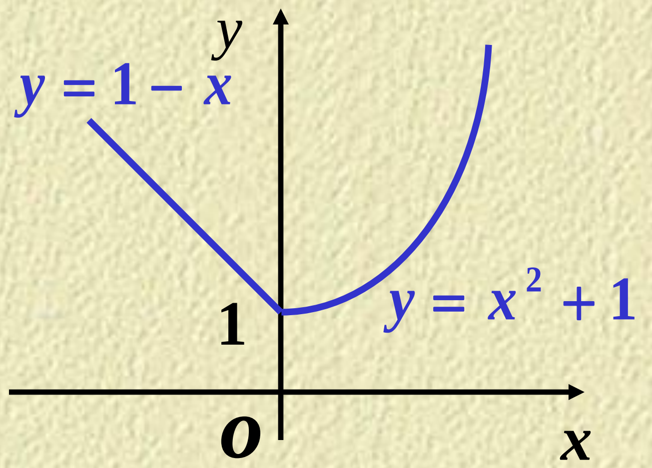
$\therefore \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-x-2}{x-1}=5.$

6.单侧极限:

例如,

设 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x<0\\ x^2+1, & x\geq 0\end{cases}$

证明 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1.$



分$x>0$和$x<0$两种情况分别讨论

x从左侧无限趋近x_0，记作$x\to x_0-0$;

x从右侧无限趋近x_0，记作$x\to x_0+0$;

上页 下页 返回

左极限 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,使当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

记作 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0-0\\(x\to x_0^-)}} f(x)=A$ 或 $f(x_0-0)=A$.

右极限 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,使当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

记作 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0+0\\(x\to x_0^+)}} f(x)=A$ 或 $f(x_0+0)=A$.

注意: $\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}$

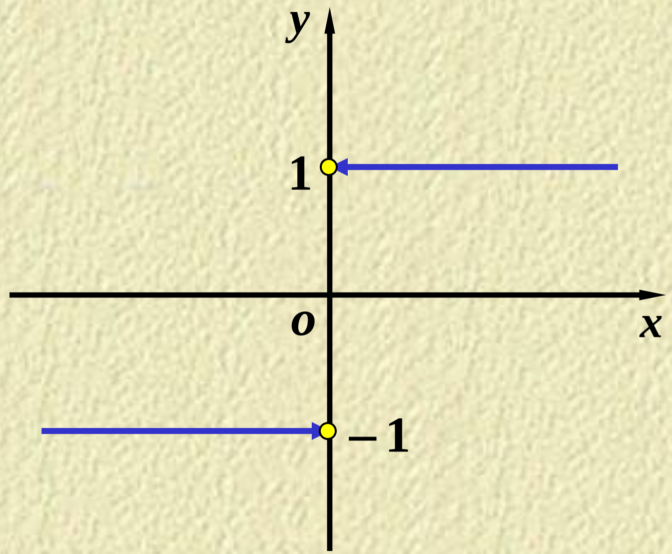
$=\{x \mid 0<x-x_0<\delta\}\cup\{x \mid -\delta<x-x_0<0\}$

定理1.2 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x_0-0)=f(x_0+0)=A.$

例4.验证 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ 不存在.

解 $\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{-x}{x}$

$=\lim\limits_{x\to -0}(-1)=-1,$



$\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x+0}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to +0}1=1.$

左右极限存在但不等, $\therefore \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

上页 下页 返回

定理:1.1 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=A=\lim_{x\to-\infty} f(x).$$

定理1.2 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0+0} f(x)=A=\lim_{x\to x_0-0} f(x).$$

上页 下页 返回

7. 极限的统一定义

$$\lim_{n\to\infty} f(n)=A;$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A, \lim_{x\to+\infty} f(x)=A, \lim_{x\to-\infty} f(x)=A;$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A, \lim_{x\to x_0^+} f(x)=A, \lim_{x\to x_0^-} f(x)=A.$$

$\lim f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$,$\exists$时刻,从此时刻以后,

恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

过　程	$n \to \infty$	$x \to \infty$	$x \to +\infty$	$x \to -\infty$
时　刻	N			
从此时刻以后	$n > N$	$\lvert x \rvert > N$	$x > N$	$x < -N$
$f(x)$	$\lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$			

过　程	$x \to x_0$	$x \to x_0^+$	$x \to x_0^-$
时　刻	δ		
从此时刻以后	$0 < \lvert x - x_0 \rvert < \delta$	$0 < x - x_0 < \delta$	$-\delta < x - x_0 < 0$
$f(x)$	$\lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$		

上页 下页 返回

三.无穷小量 无穷大量

定义3：极限为零的变量称为无穷小量.

函数$f(x)$在 $x \to x_0$(或 $x \to x_0 \pm 0$),

$x \to \infty$(或 $x \to \pm\infty$)时以0为极限,

笼统地记为 $\lim f(x) = 0.$

例如, $\because \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x}{x^2+3} = 0,$

$\therefore$ 当$x \to \infty$时函数$\dfrac{2x}{x^2+3}$是无穷小.

$\because \lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0, \therefore$ 当$x \to 0$时函数$\sin x$是无穷小.

上页 下页 返回

又如,函数$\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$当$x\to\infty$时的极限为 1,

而当$x\to\pm1$时的极限0,

$\therefore$ 函数$\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$本身不是无穷小量,

而当$x\to\pm1$ 时,函数$\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$才是无穷小量.

注意(1). 无穷小是变量,不是有穷小量,
不能与很小的数混淆;

(2).零是可以作为无穷小的唯一的常数.

上页 下页 返回

8.无穷小与函数极限的关系:

$$Th.2.\lim f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x),$$

其中$\alpha(x)$是自变量变化时的无穷小量.

意义:将一般极限问题转化为特殊极限 — 无穷小 —的问题.

上页 下页 返回

9.无穷小的运算性质:

定理3. 在同一自变量的变化过程中,有限个无穷小的代数和仍是无穷小.

证明 设当$x \to \infty$时,$\alpha \to 0, \beta \to 0,$

$\forall \varepsilon > 0, \exists X_1 > 0, X_2 > 0,$使得

当$|x| > X_1$时恒有$|\alpha| < \varepsilon/2,$

当$|x| > X_2$时恒有$|\beta| < \varepsilon/2.$

取$X = \max\{X_1, X_2\}$,当$|x| > X$时,有

$$|\alpha \pm \beta| \le |\alpha| + |\beta| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

$$\therefore \alpha \pm \beta \to 0 \left(x \to \infty \right).$$

注意: 无穷多个无穷小的代数和未必是无穷小.

例如, $n \to \infty$时, $\dfrac{1}{n}$是无穷小,

n个$\dfrac{1}{n^2}$之和为$\dfrac{1}{n}$,是无穷小,

但n个$\dfrac{1}{n}$之和为1,不是无穷小,

而n^2个$\dfrac{1}{n}$之和为n,是无穷大.

定理4. 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

推论1. 在同一过程中,有极限的变量与无穷小的乘积是无穷小.

推论2. 常数与无穷小的乘积是无穷小.

推论3. 有限个无穷小的乘积也是无穷小.

例如,当$x \to 0$时, $x\sin\frac{1}{x}$,

当$x \to \infty$时, $\frac{\arctan x}{x^2} = \frac{1}{x^2} \cdot \arctan x$

都是有界量乘上无穷小量,故仍为无穷小量.

上页 下页 返回

$Th.4.$ 设函数$f(x)$在某$\cup(\infty)$内有界,

$\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0.$求证 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)g(x)=0.$

证明 $\because$ 函数$f(x)$在某$\cup(\infty)$内有界,

$\therefore \exists M>0, \exists X_0>0, \forall |x|>X_0,$有$|f(x)|\le M.$

$\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists X_1>0, \forall |x|>X_1,$

有$|g(x)|<\varepsilon/M.$

$\therefore$ 对于上述$\varepsilon>0, \exists X\ge\max(X_0, X_1), \forall |x|>X,$

有$|f(x)g(x)|\le M|g(x)|<\varepsilon.$ 结论成立

绝对值无限增大的变量称为无穷大(量).

定义4.设函数$f(x)$在x_0的某去心邻域内$\left(或|x|大于某一正数时\right)$有定义,则

$(A).\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0,\exists\delta>0,$

$$\forall x: 0<|x-x_0|<\delta, s.t. |f(x)|>M.$$

$(B).\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0,\exists X>0,$

$$\forall x: |x|>X, s.t. |f(x)|>M.$$

上页 下页 返回

特殊情形:正无穷大,　负无穷大

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=+\infty \quad \left(或 \lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=-\infty\right)$$

注意:

(1).无穷大是变量,不能与很大的定数混淆;

(2).切勿将 $\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=\infty$ 认为极限存在.

上页　下页　返回

无穷小与无穷大的关系

定理5:在同一自变量的变化过程中,无穷大的倒数为无穷小;不为零的无穷小的倒数为无穷大.

证明 设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$,

$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时

恒有 $|f(x)| > \dfrac{1}{\varepsilon}$,即 $\left|\dfrac{1}{f(x)}\right| < \varepsilon.$

$\therefore$ 当 $x \to x_0$ 时,$\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小.

反之,设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$,且 $f(x) \neq 0$.

$\therefore \forall M > 0, \exists \delta > 0$,使得当$0 < |x - x_0| < \delta$时

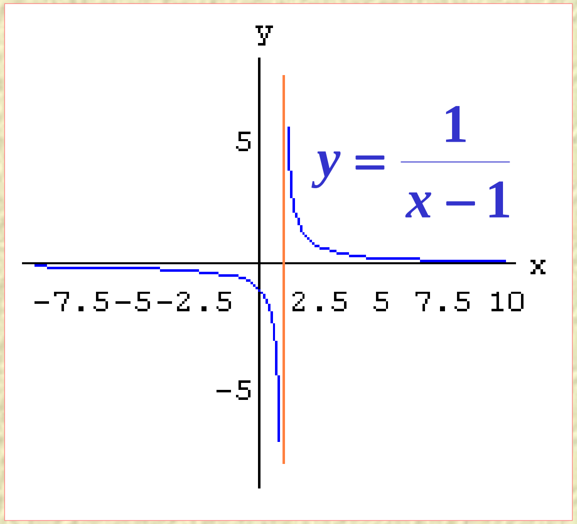
有$|f(x)| < \dfrac{1}{M}$,$\because f(x) \neq 0$,从而 $\left|\dfrac{1}{f(x)}\right| > M$.

$\therefore$ 当$x \to x_0$时,$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷大.

意义: 关于无穷大的讨论,都可归结为关于无穷小的讨论.

上页 下页 返回

例5.求证 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x-1}=\infty.$



证明 $\forall M>0.$要使$\left|\dfrac{1}{x-1}\right|>M,$

只要$|x-1|<\dfrac{1}{M},\therefore$ 可取 $0<\delta\le\dfrac{1}{M}.$

当$0<|x-1|<\delta$时,就有$\left|\dfrac{1}{x-1}\right|>M.$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}=\infty.$$

定义:如果 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0+\\(x\to x_0-)}} f(x)=\infty$,则直线$x=x_0$

是函数$y=f(x)$的图形的铅直渐近线.

上页 下页 返回

思考练习

证明：

1. $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x+1}=2$;

2. $\lim\limits_{x\to 2}x^2=4$.

（此两题可以忽略，所附证明仅供参考.）

上页 下页 返回

思考1. $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x+1}=2;$

分析 $\forall\varepsilon>0$,要找到$\delta>0$,使得

$0<|x-3|<\delta$时,有$\left|\sqrt{x+1}-2\right|<\varepsilon.$

$$\because\left|\sqrt{x+1}-2\right|=\frac{|x-3|}{\sqrt{x+1}+2}<|x-3|,$$

$\therefore$只要$|x-3|<\varepsilon$就有$\left|\sqrt{x+1}-2\right|<\varepsilon.$

故可取 $0<\delta\le\varepsilon.$

$$1.\lim_{x\to 3}\sqrt{x+1}=2;$$

证明 $\forall\varepsilon>0,\exists 0<\delta\leq\varepsilon,$

$\forall x:0<|x-3|<\delta,$有

$$\left|\sqrt{x+1}-2\right|=\frac{|x-3|}{\sqrt{x+1}+2}$$

$$<|x-3|<\delta\leq\varepsilon,$$

$$\therefore\lim_{x\to 3}\sqrt{x+1}=2.$$

思考2.证明 $\lim_{x\to 2} x^2 = 4.$

有人说,函数x^2在点$x=2$处的值得不就是4么,

这还用证明?此言大谬矣! $\because \lim_{x\to 2}\frac{x^2(x-2)}{x-2}=4.$

$\because x\to a$蕴涵着$x\neq a$,故$x\to a$时函数$f(x)$的极限值与该点的函数值$f(a)$不相干.至于说若有$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$,只是说明了函数$f(x)$在点a处具有一个优美的性质———连续.

上页 下页 返回

思考2. 证明 $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4.$

分析 $\because \left|x^2-4\right| = |x-2||x+2|,$

我们可以如下处理:

$$|x-2||x+2| = |x-2||x-2+4| \le |x-2|\left(|x-2|+4\right),$$

那么$|x-2|\left(|x-2|+4\right) < \varepsilon \Rightarrow \left|x^2-4\right| < \varepsilon,$

不等式 $t(t+4) < \varepsilon, t > 0$的解为$0 < t < \sqrt{4+\varepsilon}-2.$

因此我们可取$0 < \delta \le \sqrt{4+\varepsilon}-2.$

2. 证明 $\lim_{x \to 2} x^2 = 4.$

证明 $\forall \varepsilon > 0, \exists 0 < \delta \le \sqrt{4+\varepsilon} - 2,$

$\forall x : 0 < |x-2| < \delta,$有

$$|x^2 - 4| = |x-2||x+2| \le |x-2|(|x-2|+4)$$

$$< \delta(\delta + 4) \le \left(\sqrt{4+\varepsilon} - 2\right)\left(\sqrt{4+\varepsilon} + 2\right) = \varepsilon,$$

$\therefore \lim_{x \to 2} x^2 = 4.$

上页 下页 返回

思考2. 证明 $\lim_{x\to 2} x^2 = 4.$

法二 $\because$ 问题中 $x \to 2,$

所以我们不妨只考虑 $|x-2|<1.$

条件放大

设 $|x-2|<1,$ 则 $1<x<3,$

$\therefore\ |x^2-4| = |x+2||x-2| < 5|x-2|,$

$\forall \varepsilon > 0,$ 在 $|x-2|<1$ 的条件下再使 $|x-2| < \varepsilon/5,$

则有 $|x^2-4| < \varepsilon.$

$\therefore$ 可取 $0 < \delta \le \min(1, \varepsilon/5).$

上页 下页 返回

2. 证明 $\lim_{x\to 2} x^2 = 4.$

证明二 $\forall \varepsilon > 0, \exists 0 < \delta \leq \min\left(1, \varepsilon/5\right),$

则$\forall x: 0 < |x-2| < \delta,$

有$|x-2| < 1,$则$1 < x < 3.$

$$|x^2 - 4| = |x+2||x-2|$$

$$< 5|x-2| < 5\delta \leq 5 \cdot \frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon,$$

$\therefore \lim_{x\to 2} x^2 = 4.$

上页 下页 返回

练习题

1.用函数极限的定义证明:

(1). $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\dfrac{1-4x^2}{2x+1}=2$; (2). $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$.

2.试证:函数$f(x)$当$x\to x_0$时极限存在的充分必要条件是左极限、右极限各自存在并且相等.

上页 下页 返回