2. 极限复习课 2022-12

上页 下页 返回

A. 函数、极限与连续

$$A1. f(x)=\frac{1}{2+x}, f\left[f(x)\right]=?$$

$$f\left[f(x)\right]=\frac{1}{2+f(x)}=\frac{1}{2+\frac{1}{2+x}}$$

$$=\frac{1}{\frac{2x+5}{2+x}}=\frac{2+x}{2x+5}\left(x\neq -2\right).$$

讲究严格,严谨!

$A1.(2)$. 试问 : $\sin(\arcsin x) = ?$ $\arcsin(\sin x) = ?$

解 $\forall x \in [-1,1], \sin(\arcsin x) = x$.

$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \arcsin(\sin x) = x,$

$\forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], \arcsin(\sin x) = \pi - x, \forall x \in \left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right], \arcsin(\sin x) = -\pi - x,$

$\forall x \in \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right], \arcsin(\sin x) = x - 2\pi, \forall x \in \left[-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}\right], \arcsin(\sin x) = x + 2\pi,$

$\forall x \in \left[\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right], \arcsin(\sin x) = 3\pi - x, \forall x \in \left[-\frac{7\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}\right], \arcsin(\sin x) = -3\pi - x,$

…… ……

$A2.$要$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+3x)}{\sin ax}, x>0 \\ 1+bx \quad , \quad x\le 0\end{cases}$在$x=0$

处连续,问$a,b=?$

解 $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-}\left(1+bx\right)=1,$

$$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln(1+3x)}{\sin ax}=\lim_{x\to 0+}\frac{3x}{ax}=\frac{3}{a},$$

$f(0)=1+b\times 0=1,$

$\therefore$当$a=3$时,函数在$x=0$处连续,

而对于数b没有任何要求.

A2.(2).设函数$f(x)=\dfrac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}$有无穷间断点$x=0$及可去间断点$x=1$，试确定常数$a,b$的值.

解 $\because\ x=0$是函数的无穷间断点,

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}=\infty \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x-a)(x-1)}{e^x-b}=\frac{a}{1-b}=0, \therefore a=0\ , b\neq 1.$$

$\because x=0$是$f(x)=\dfrac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}$的无穷间断点,

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}=\infty \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x-a)(x-1)}{e^x-b}=\frac{a}{1-b}=0, \therefore a=0\,, b\neq 1.$$

又$\because x=1$是函数的可去间断点,

$\therefore \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-b}{x(x-1)}$存在$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}(e^x-b)=0,$

$$b=\lim_{x\to 1}e^x=e.$$

上页 下页 返回

A2.(3). $f(x)=\dfrac{|x|(x+3)}{(x^2-9)\sin x}$的间断点为____，

分别是属于哪一种类型?连续区间为_____.

解 $f(x)=\dfrac{|x|(x+3)}{(x^2-9)\sin x}$为初等函数,故其间断

点就是函数没有定义的地方,间断点有

$x=-3$ 是可去间断点(第一类),

$x=0$ 是跳跃间断点(第一类,不可去),

$x=3, x=k\pi(k\in\mathbb{Z}, k\neq 0)$是无穷间断点(第二类).

连续区间为$\{x\,|\,x\in\mathbb{R}, x\neq\pm 3, x\neq k\pi(k\in\mathbb{Z})\}$中的区间.

$A2.(3).\ f(x)=\dfrac{|x|(x+3)}{(x^2-9)\sin x}$在下列区间

中的区间______上有界．

$(A).(-\pi,-3)$； $(B).(-3,0)$； $(C).(0,1)$；

$(D).(1,3)$； $(E).(3,\pi)$．

解
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a} f(x)=A\ \text{存在(为有限数)},\\ \quad\text{则在}\overset{\circ}{U}(a)\text{内}f(x)\text{有界}.\\ \text{在}[a,b]\text{上}f(x)\text{连续}\Rightarrow f(x)\text{在}[a,b]\text{上有界}.\end{array}\right\}$$

综合以上两点,知$f(x)$在区间 $\underline{\ B,C\ }$ 上有界．

上页 下页 返回

极限中一些重要的结果:

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0,\quad \lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sin(1/x)}{1/x} = 1.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x = \frac{\pi}{2},\quad \lim_{x\to-\infty}\arctan x = -\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x^2} = -\frac{1}{2},$$

… …

常用的等价无穷小量：

当$x \to 0$时,

$$x \sim \sin x \sim \tan x \sim$$

$$\arcsin x \sim \arctan x \sim \ln(1+x)$$

$$e^x - 1 \sim x, 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2,$$

$$(1+x)^\mu - 1 \sim \mu x (\mu \neq 0)$$

极限中一些重要的结论：

(1).若$\lim f(x)$存在,$\lim g(x)$不存在,

则$\lim\left[f(x)+g(x)\right]$必不存在.

(2).若$\lim f(x)$存在,$\lim g(x)$不存在,

则 $\lim\left[f(x)g(x)\right]$未必存在/不存在.

(3).若$\lim f(x)=A\neq 0$存在,$\lim g(x)$不存在,

那么 $\lim\left[f(x)g(x)\right]$必不存在.

上页 下页 返回

(4).若$\lim f(x)=A\neq 0$存在,$\lim g(x)=0$,

那么$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$必不存在.换言之,若$\lim g(x)=0$,

而$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$存在,则必定$\lim f(x)=0$.

(5).若$\lim u(x)=A>0$,$\lim v(x)=B$均存在,

则 $\lim\left[u(x)^{v(x)}\right]=A^{B}$.

(6).若$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$,则$\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=A$.若要

求$\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$而不得,可考虑求$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$A3.\ x \to 0$时,下列四个无穷小量中是其它三个的高阶无穷小量的是____. $(A).1-\cos x$;

$(B).x^2$; $(C).\sqrt{1-x^2}-1$; $(D).\tan x - x.$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2},\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x^2}=-\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{2x}=0.$$

$$A3.(2).\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{x^3}+\frac{a}{x^2}+b\right)=0.$$

解 原问题就是 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x+ax}{x^3}=-b$ 存在.

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x+ax}{x^3}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{3\cos 3x+a}{3x^2}$ 要存在,

分母极限为零,那么分子极限也必须是零!

$\therefore \lim_{x\to 0}(3\cos 3x+a)=3+a=0,$ 从而

$$b=-\lim_{x\to 0}\frac{3\cos 3x-3}{3x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}-\lim_{x\to 0}\frac{-9\sin 3x}{6x}=\frac{9}{2}.$$

$A3.(3)$. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1+x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\ln(1+x)}$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1+x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\ln(1+x)}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2^x-1}{x}+\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{x}\right)$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x\ln 2}{1}=\ln 2,$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}\xlongequal[\text{仍为无穷小}]{\text{无穷小乘有界量}}0.$

上页 下页 返回

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\ln(1+x)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\frac{1}{1+x}}$$

既不存在,也非∞,　　说明

对本问题而言,*L' Hôpital*法则失效.

$A3.(4).\ \lim_{x\to 1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}.$

令$1-x=t$,将问题变化为熟悉的情形:

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}=\lim_{t\to 0}t\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi t}{2}\right)$$

$$=\lim_{t\to 0}t\cot\left(\frac{\pi t}{2}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{t\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)}=\frac{2}{\pi}.$$

$A3.(5)$. 由于$x \to 0$时$\sin x \sim x, \cos x \to 1$,

所以有 $\lim\limits_{x \to 0}\left(\cos x + \sin^2 x\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x \to 0}\left(1 + x^2\right)^{\frac{1}{x^2}} = e.$

试问以上解题过程是否正确?若否,则改之.

$$原 = \lim_{x \to 0}\left(1 + \cos x - 1 + \sin^2 x\right)^{\frac{1}{\cos x - 1 + \sin^2 x} \cdot \frac{\cos x - 1 + \sin^2 x}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to 0}\left[\left(1 + \cos x - 1 + \sin^2 x\right)^{\frac{1}{\cos x - 1 + \sin^2 x}}\right]^{\frac{\cos x - 1 + \sin^2 x}{x^2}}$$

$$= \left[\lim_{x \to 0}\left(1 + \cos x - 1 + \sin^2 x\right)^{\frac{1}{\cos x - 1 + \sin^2 x}}\right]^{\lim\limits_{x \to 0}\frac{\cos x - 1 + \sin^2 x}{x^2}}$$

$$= e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

上页 下页 返回

$A3.(6)$. 计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2^{\frac{1}{n}}+3^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n$，$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2^x+3^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

解 这是幂指函数的1^{∞}形未定型问题.

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2^{\frac{1}{n}}+3^{\frac{1}{n}}-2}{2}\right)^{\frac{2}{2^{\frac{1}{n}}+3^{\frac{1}{n}}-2}}\right]^{\frac{\frac{2^{\frac{1}{n}}+3^{\frac{1}{n}}-2}{2}}{\frac{2}{n}}}$$

上页 下页 返回

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{n}}+3^{\frac{1}{n}}-2}{\frac{2}{n}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{n}}-1+3^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}},$$

其中$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}\ln 2}-1}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\ln 2}{\frac{1}{n}}=\ln 2,$

同理,$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\ln 3,\therefore$ 原式$=e^{\ln\sqrt{6}}=\sqrt{6}.$

$$A3.(6).\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{2^x+3^x}{2}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(2^x+3^x\right)-\ln 2}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2^x\ln 2+3^x\ln 3}{2^x+3^x}-0}{1}=\frac{\ln 2+\ln 3}{2}=\ln\sqrt{6}\ ,$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{\frac{1}{n}}+3^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2^x+3^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\ln\left(\frac{2^x+3^x}{2}\right)}{x}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{2^x+3^x}{2}\right)}{x}}=e^{\ln\sqrt{6}}=\sqrt{6}\ .$$

上页 下页 返回

$A3.(7)$. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2^n+3^n}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$.

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\left[3^n\left(1+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right)\right]^{\frac{1}{n}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}\right\}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}3\left[1+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}=3\times1\times1=3.$

上页 下页 返回

解法二 或者亦可用迫敛性:

$$\because 3^n \cdot \frac{1}{2} < \frac{2^n + 3^n}{2} < 3^n,$$

$$\therefore 3 \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{2}} < \left(\frac{2^n + 3^n}{2}\right)^{\frac{1}{n}} < 3.$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2^n + 3^n}{2}\right)^{\frac{1}{n}} = 3.$

解三 要求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2^n+3^n}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$,转而求$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2^x+3^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

用$L'H\hat{o}pital$法则:

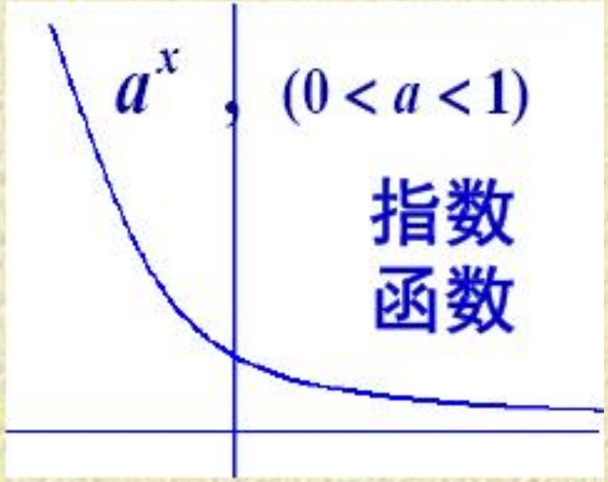
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2^x+3^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln\left(\frac{2^x+3^x}{2}\right)}{x}},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\dfrac{2^x+3^x}{2}\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(2^x+3^x\right)-\ln 2}{x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

上页 下页 返回

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(2^x+3^x\right)-\ln 2}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{2^x\ln 2+3^x\ln 3}{2^x+3^x}-0}{1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^x\ln 2+\ln 3}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^x+1}=\ln 3,$$



$$\therefore\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n+3^n}{2}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2^x+3^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\ln 3}=3.$$

A3.(8). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$.

分析 $\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$是一个偶函数,

由于 $0<|x|<\pi/2$ 时,有 $0<|\sin x|<|x|$,

结合$\cos x$的单调性,

$$\therefore \frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}>0,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}\geq 0.$$

上页 下页 返回

$$A3.(8).\ \ L=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^{4}}.\left(\frac{0}{0}\right)$$

解 $$L=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos(\sin x)-\cos x)'}{(x^{3})'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)\cos x}{4x^{3}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos(\sin x)\cos^{2}x+\sin(\sin x)\sin x}{12x^{2}}=\cdots$$

一味机械地用*L'Hopital* 法则 ,你会发现计算何其繁琐 .

上页 下页 返回

$A3.(8).\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}.$

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{(\sin x)^4}$$

$$\overset{\sin x=t}{\underset{\cos x=\sqrt{1-t^2}}{=\!=\!=\!=\!=\!=}}\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-\sqrt{1-t^2}}{t^4}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim_{t\to 0}\frac{-\sin t+\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}}{4t^3}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t-\sin t\sqrt{1-t^2}}{4t^3\sqrt{1-t^2}}=\lim_{t\to 0}\frac{t-\sin t\sqrt{1-t^2}}{4t^3}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t\sqrt{1-t^2}+\sin t\cdot\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}}{12t^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t\sqrt{1-t^2}+\sin t\cdot\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}}{12t^2}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{1-t^2}-\left(1-t^2\right)\cos t+t\sin t}{12t^2\sqrt{1-t^2}}$$

$$=\lim_{t\to 0}\left[\frac{\sqrt{1-t^2}-\left(1-t^2\right)\cos t}{12t^2}+\frac{t\sin t}{12t^2}\right]$$

$$=\frac{1}{12}+\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{-t}{\sqrt{1-t^2}}+2t\cos t+\left(1-t^2\right)\sin t}{24t}=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{6}.$$

上页 下页 返回

$A3.(8).\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}.$

解 $$\lim_{x\to0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{(\sin x)^4}\overset{\sin x=t}{\underset{\cos x=\sqrt{1-t^2}}{=\!=\!=\!=\!=\!=}}\lim_{t\to0}\frac{\cos t-\sqrt{1-t^2}}{t^4}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{-\sin t+\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}}{4t^3}=\lim_{t\to0}\frac{t-\sin t\sqrt{1-t^2}}{4t^3\sqrt{1-t^2}}=\lim_{t\to0}\frac{t-\sin t\sqrt{1-t^2}}{4t^3}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{1-\cos t\sqrt{1-t^2}+\sin t\cdot\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}}{12t^2}=\lim_{t\to0}\frac{\sqrt{1-t^2}-(1-t^2)\cos t+t\sin t}{12t^2\sqrt{1-t^2}}$$

$$=\lim_{t\to0}\left[\frac{\sqrt{1-t^2}-(1-t^2)\cos t}{12t^2}+\frac{t\sin t}{12t^2}\right]=\frac{1}{12}+\lim_{t\to0}\frac{\dfrac{-t}{\sqrt{1-t^2}}+2t\cos t+(1-t^2)\sin t}{24t}$$

$$=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{6}.$$

$$A3.(8).\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}.$$

解二 $x \neq 0$ 时 $\sin x \neq x$,由*Lagrange*中值定理

得 $\cos(\sin x)-\cos x = -\sin\xi\cdot(\sin x - x)$,

ξ介于 $\sin x, x$ 间,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin\xi\cdot(\sin x-x)}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\xi}{\xi}\cdot\frac{\xi}{x}\cdot\frac{x-\sin x}{x^3}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}\ .$$

$A3.(8)$. $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$.

法三 $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sin\left(\dfrac{\sin x-x}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\sin x+x}{2}\right)}{x^4}$

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-\sin x)(\sin x+x)}{x^4}$

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x+x}{x}\cdot\dfrac{x-\sin x}{x^3}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\dfrac{1}{6}$.

A3.(8). $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$.

法四 $x\to 0$ 时 $\cos(\sin x)-\cos x=$

$(1-\cos x)-(1-\cos(\sin x))\sim \dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}(\sin x)^2$,

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}(\sin x)^2}{x^4}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)(\sin x+x)}{x^4}$$

$=\cdots=\dfrac{1}{6}$.

法四中函数加减运算时用了等价无穷小量 ,这是需要特别当心的地方 . 非乘除运算时等价无穷小量能否使用并无规律 ,要谨慎使用…

A3.(8). $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$.

法五 $x\to 0$ 时 $\cos(\sin x)-\cos x=(1-\cos x)-(1-\cos(\sin x))$

$$=2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)-2\sin^2\left(\frac{1}{2}\sin x\right)\sim\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}(\sin x)^2,$$

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}(\sin x)^2}{x^4}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)(\sin x+x)}{x^4}=\cdots=\frac{1}{6}.$$

法五与法四同 .

上页 下页 返回

Remark :

1.做法一我们用到了结论:

若$\lim u(x)=A>0,\lim(x)=B$ 均存在,那么

$$\lim u(x)^{v(x)}=A^{B}\ ;$$

2.我们需注意到,在乘除运算中等价无穷小量任可意使用,但是在乘除运算以外的其他运算中,等价无穷小量须谨慎使用.

如:$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{2}{x^2}}$,若$\because x\to 0,\sin x\sim x,$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{2}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{x}\right)^{\frac{2}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}1^{\frac{2}{x^2}}=1$,那就错了.

$A4.$ 设对任意的x有$h(x) \le f(x) \le g(x)$,

且$\lim\limits_{x\to 0}[g(x)-h(x)]=0$,则$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$____.

(A).存在且一定等于0;　(B).存在且不一定等于0;

(C).一定存在;　(D).不一定存在.

倘若知$\lim\limits_{x\to 0} g(x)$,$\lim\limits_{x\to 0} h(x)$中有一个存在,那么另一个也存在且相等,则$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$必存在且相等.否则未必,

如 $\dfrac{1}{x^2}-x^2 \le \dfrac{1}{x^2} \le \dfrac{1}{x^2}+x^2$有$\lim\limits_{x\to 0}[g(x)-h(x)]=0$,

但$\lim\limits_{x\to 0} g(x)$,$\lim\limits_{x\to 0} h(x)$,$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$均不存在.

A5. 证明 $x_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{2}}}}$ (n重根式)收敛.

$(Vol.1, P33, e.g.2)$

证 $\because x_{n+1}=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}$ ($n+1$重根式)

$$>\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{2+\sqrt{0}}}}}$$

$$=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{2}}}}=x_n \quad (n\text{重根式})$$

$\therefore \forall n, x_{n+1}>x_n, \{x_n\}$是单调递增的.

又 $\because \sqrt{2+x_n}=x_{n+1}>x_n,$

$\sqrt{2+x_n}>x_n,$于是 $x_n^2-x_n-2<0,$

$\therefore \sqrt{2}\le x_n<2, \{x_n\}$是有界的.

上页 下页 返回

$\because \{x_n\}$单调递增且有界,

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在.

记$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$,由$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$

得$\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{2 + x_n}$,

$\therefore A = \sqrt{2 + A}$,得$A = 2$.

$A5.(2)$. 设函数$f(x)$在$[1,+\infty)$上连续,在$(1,+\infty)$内可导,$f'(x)=\dfrac{1}{x^2+(f(x))^2}$,$f(1)=1$.

求证:(1).$f(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增;

(2).$\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$存在,且$\lim\limits_{n\to\infty} f(n)\le 1+\dfrac{\pi}{4}$.

证明 (1).$x\in[1,+\infty)$,$f'(x)=\dfrac{1}{x^2+(f(x))^2}>0$,

显然,$f(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增.

证明(2). $x \ge 1$时, $f(x) \ge f(1) = 1$,

$\therefore x \ge 1$时, $f'(x) = \dfrac{1}{x^2 + \left(f(x)\right)^2} \le \dfrac{1}{x^2+1}$,

$\therefore x \ge 1$时, $f(x) = \int_1^x f'(t)dt + f(1) \le \int_1^x \dfrac{1}{t^2+1}dt + 1$

$= \arctan x - \arctan 1 + 1 < \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4} + 1 = \dfrac{\pi}{4} + 1$,

$\because \{f(n)\}$单调增加且有上界,

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} f(n)$存在, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) \le 1 + \dfrac{\pi}{4}$.

上页 下页 返回

$A5.(3)$. 求证：在$\alpha>1$ 时,数列$\{a_n\}$收敛 ,其中

$$a_n=1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}.(Vol.1,P33,e.g.1)$$

证明 $\alpha>1$,$a_n<a_{2n+1}=1+\left(\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)^\alpha}\right)+\left(\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(2n)^\alpha}\right)$

$$<1+2\left(\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(2n)^\alpha}\right)=1+\frac{2}{2^\alpha}\left(1+\frac{1}{2^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}\right)=1+\frac{1}{2^{\alpha-1}}a_n,$$

$\therefore a_n<\dfrac{1}{1-\frac{1}{2^{\alpha-1}}}$.又,$\{a_n\}$单调递增是显然的.

由此知数列$\{a_n\}$收敛 .

上页 下页 返回

准则II Cauchy收敛准则

对于数列$\{x_n\}$,如果$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n,m > N$, $s.t. \left| x_n - x_m \right| < \varepsilon$,则称数列$\{x_n\}$为$Cauchy$基本列,简称为$Cauchy$列或基本列.

定理 2 数列$\{x_n\}$收敛

$\Leftrightarrow$ 数列$\{x_n\}$为$Cauchy$基本列.

即: 数列$\left\{x_n\right\}$收敛

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n,m > N, s.t. \left| x_n - x_m \right| < \varepsilon$;

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N, \forall p \in \mathbb{Z}^+, s.t. \left| x_n - x_{n+p} \right| < \varepsilon.$

$A6.$ 设$a_n = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^n}$,

试用$Cauchy$收敛准则证明数列$\{a_n\}$收敛a_n.

证明　对于$a_n = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^n}, \forall \varepsilon > 0, \exists N \geq \frac{1}{\varepsilon}, \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}^*,$

$$s.t. \left|a_n - a_{n+p}\right| = \left|\frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+2)^{n+2}} + \cdots + \frac{(-1)^{n+p-1}}{(n+p)^{n+p}}\right|$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)^{n+1}} + \frac{1}{(n+2)^{n+2}} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^{n+p}}$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2}$$

$$< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)}$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + -\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} \leq \frac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon.$$

A6. 设$a_n = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^n}$,

试用Cauchy收敛准则证明数列$\{a_n\}$收敛a_n.

$\longrightarrow$另作不同的放大,$\frac{1}{(n+1)^{n+1}} + \frac{1}{(n+2)^{n+2}} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^{n+p}}$

$$< \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+p}} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+p+1}}}{1 - \frac{1}{2}} < \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n},$$

故亦可以取$N \ge \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$,或者径直由$\frac{1}{2^n} < \frac{1}{n} \cdots$

上页 下页 返回

A6.(2). 用定义证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+\sin n}{n^3-3n}=0$.

分析 $\forall\varepsilon>0$,欲找到N,使在$n>N$时有$\left|\dfrac{n^2+\sin n}{n^3-3n}-0\right|<\varepsilon$.

而$\left|\dfrac{n^2+\sin n}{n^3-3n}-0\right|\le\dfrac{2n^2}{|n^3-3n|}=\dfrac{2n}{|n^2-3|}$,$n\ge 3$ 时$\dfrac{1}{2}n^2>3$,

此时有$\dfrac{2n}{|n^2-3|}=\dfrac{2n}{n^2-3}<\dfrac{2n}{n^2-\frac{1}{2}n^2}=\dfrac{4}{n}$,

当$\dfrac{4}{n}<\varepsilon$时就有$\left|\dfrac{n^2+\sin n}{n^3-3n}-0\right|<\varepsilon$. $\dfrac{4}{n}<\varepsilon\Leftrightarrow n>\dfrac{4}{\varepsilon}$.

证明 $\forall\varepsilon>0,\exists N\ge\max\left(3,\dfrac{4}{\varepsilon}\right),\forall n>N$,

$$s.t.\left|\frac{n^2+\sin n}{n^3-3n}-0\right|\le\frac{2n^2}{|n^3-3n|}=\frac{2n}{n^2-3}<\frac{2n}{n^2-\frac{1}{2}n^2}$$

$$=\frac{4}{n}<\frac{4}{N}\le\frac{4}{4/\varepsilon}=\varepsilon.$$ 证毕

A6. 备忘

(1). $\varepsilon - N$, $\varepsilon - X$, $\varepsilon - \delta$ 式定义；

(2). 确界原理, 单调有界收敛定理,
归结原则；

(3). *Cauchy*收敛准则 ,*Squeeze* 定理；

(4). 极限的四则运算定理，
复合函数的极限运算定理；

(5). 极限的保号性 …

复习课件,写来不易.

错讹难免,欢迎指正.

敬请勿予外传!

朱震球谨志

上页 下页 返回