4-02 连续函数的性质

上页 下页 返回

1.连续函数的四则运算性质

定理1. 若函数 $f(x)$, $g(x)$在点x_0处连续,

则 $f(x)\pm g(x), f(x)\cdot g(x), \dfrac{f(x)}{g(x)}(g(x_0)\neq 0)$

在点x_0处也连续.

证明 $\because$函数 $f(x), g(x)$在点x_0处连续,

$\therefore \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0), \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=g(x_0),$

而 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} \overset{}{\underset{g(x_0)\neq 0}{=\!=\!=\!=}} \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)},$

$\therefore \dfrac{f(x)}{g(x)}(g(x_0)\neq 0)$在点$x_0$处连续.

例如,$x^n\left(n\in\mathbb{N}\right)$在$\left(-\infty,+\infty\right)=\mathbb{R}$上连续,

故$P_n(x)=a_0x^n+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 在$\mathbb{R}$上连续.

$\Rightarrow$ 有理函数$Q(x)=\dfrac{P_m(x)}{P_n(x)}$在其定义域内连续.

又如,$\sin x,\cos x$在$\left(-\infty,+\infty\right)$内连续,

故 $\tan x,\cot x,\sec x,\csc x$ 在其定义域内连续.

2.反函数的连续性

定理2. 严格单调的连续函数必有严格单调的连续反函数.

例如, $x = \sin y$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调增加且连续,

故 $y = \arcsin x$ 在 $[-1,1]$ 上也是单调增加且连续.

同理 $y = \arccos x$ 在 $[-1,1]$ 上单调减少且连续；

$y = \arctan x, y = \operatorname{arc}\cot x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调且连续.

反三角函数在其定义域内皆连续.

$Th.2.$已知函数$y=f(x)$在(a,b)上连续且严格单调增加,则其反函数$x=f^{-1}(y)$在区间$(f(a),f(b))$上连续且严格单调增加.

证明: $\forall y_0\in(f(a),f(b))$,则$\exists\ x_0=f^{-1}(y_0)$,

$x_0\in(a,b).\forall\varepsilon>0,\exists\ x_1,x_2$,使得

$x_0-\varepsilon<x_1<x_0<x_2<x_0+\varepsilon$,

记$y_1=f(x_1),y_2=f(x_2)$,于是我们有

$y_1=f(x_1)<f(x_0)=y_0<f(x_2)=y_2$,

记$\delta=\min\{y_0-y_1,y_2-y_0\}$,

显然 $y_1\le y_0-\delta<y_0<y_0+\delta\le y_2$,

上页 下页 返回

$$x_0-\varepsilon<x_1<x_0<x_2<x_0+\varepsilon,$$

显然 $y_1\le y_0-\delta<y_0<y_0+\delta\le y_2,$

$\therefore \forall y\in U\left(y_0,\delta\right)\subset\left(f(a),f(b)\right),$

$\exists x\in\left(a,b\right),$使得$y=f(x),x=f^{-1}(y)$

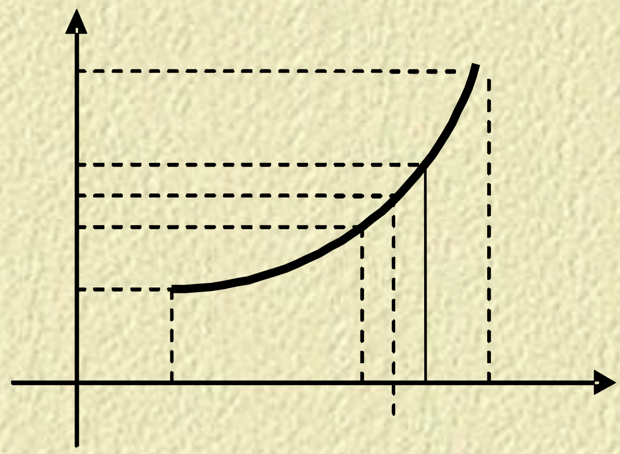
由于$y_1\le y_0-\delta<y<y_0+\delta\le y_2,$

因此$x_0-\varepsilon<x_1=f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y_2)=x_2<x_0+\varepsilon,$

$\therefore \forall y\in U\left(y_0,\delta\right),$有

$$\left|f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)\right|$$

$$=\left|f^{-1}(y)-x_0\right|<\varepsilon\ ,$$



所以说$x=f^{-1}(y)$在点y_0处连续.

上页 下页 返回

例如,我们在前面已经证明了$y=a^x$ $(a>0,a\neq 1)$ 在$(-\infty,+\infty)$内连续,

$\because$ 对$\forall x_0\in(-\infty,+\infty)$,有 $\lim\limits_{x\to x_0} a^x=a^{x_0}$,

$$\lim_{x\to x_0} a^x=a^{x_0}\lim_{x\to x_0} a^{x-x_0}=a^{x_0}\cdot 1=a^{x_0}.$$

那么由此就可知对数函数

$x=\log_a y$ $(a>0,a\neq 1)$在其定义域

$(0,+\infty)$内连续.

上页 下页 返回

3.复合函数的连续性

定理3.设函数$u=\varphi(x)$在点$x=x_0$连续，且$\varphi(x_0)=u_0$，而函数$y=f(u)$在点$u=u_0$连续，则复合函数$y=f[\varphi(x)]$在点$x=x_0$也连续.

证明 $\because f(u)$在点$u=u_0$连续，

$\therefore \forall \varepsilon>0, \exists \eta>0$，使当$|u-u_0|<\eta$时，

恒有$|f(u)-f(u_0)|<\varepsilon$成立.

又$\because \lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(x_0)=u_0$，

$\therefore$ 对$\eta>0, \exists \delta>0$，使当$|x-x_0|<\delta$时，

上页 下页 返回

又 $\because \lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(x_0)=u_0,$

$\therefore$ 对 $\eta>0, \exists\delta>0,$ 使当 $|x-x_0|<\delta$ 时,

有 $|\varphi(x)-\varphi(x_0)|=|u-u_0|<\eta$ 成立.

因此, $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0,$ 使当 $|x-x_0|<\delta$ 时,

$|f(u)-f(u_0)|=|f[\varphi(x)]-f(u_0)|<\varepsilon$ 成立.

$\therefore \lim\limits_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=f(u_0)=f\left[\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\right].$

例如: $u=\dfrac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 内连续, $y=\sin u$

在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续, $\therefore\ y=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

内连续.

4.初等函数的连续性

★ 三角函数及反三角函数在它们的定义域内是连续的.

★ 指数函数 $y = a^x \ (a > 0, a \neq 1)$ 在$(-\infty, +\infty)$内单调且连续;

★ 对数函数 $y = \log_a x \ (a > 0, a \neq 1)$ 在$(0, +\infty)$内单调且连续;

对于幂函数 $y=x^{\mu}, \mu\in\mathbb{Q}$时可由连续的定义很容易地证明其在定义域内的连续性;

$\mu\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$时幂函数$x^{\mu}$在$(0,+\infty)$上有定义.

$\mu \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$时幂函数$x^{\mu}$在$(0,+\infty)$上有定义. $y = x^{\mu} = e^{\mu \ln x}$

$\Rightarrow y = e^{u}, u = \mu \ln x,$

由指数函数的连续性,对数函数的连续性,以及复合函数的连续性定理,可知函数 $x^{\mu} = e^{\mu \ln x}$ 在 $x \in (0,+\infty)$时处处连续.

上页 下页 返回

★ $y = x^{\mu} = e^{\mu \ln x} \Rightarrow y = e^{u}, u = \mu \ln x,$

在$(0, +\infty)$内连续.

命题1 基本初等函数在定义域内是连续的.

命题2 一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

定义区间是指包含在定义域内的区间.

注意　初等函数仅在其定义区间内连续，在其定义域内不一定连续.

例如，$y=\sqrt{\cos x-1}$, $D: x=0,\pm 2\pi,\pm 4\pi,\cdots$

这些孤立点的邻域内没有定义.

$y=\sqrt{x^2(x-1)^3}$, $D: x=0$, 及$x\geq 1$,

在0点的邻域内没有定义.

函数在区间$[1,+\infty)$上连续.

上页　下页　返回

5.闭区间上连续函数的性质

闭区间上的连续函数具有性质:
最大值和最小值存在定理;
介值定理或曰零点存在定理.

定理4（最大值和最小值定理）在闭区间上连续的函数一定有最大值和最小值.

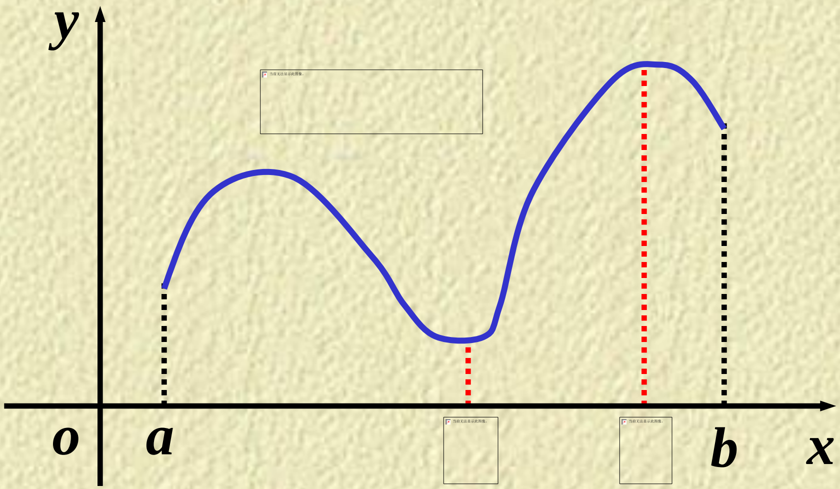
若 $f(x) \in C[a,b]$,

则 $\exists \xi_1, \xi_2 \in [a,b]$,

使得 $\forall x \in [a,b]$,

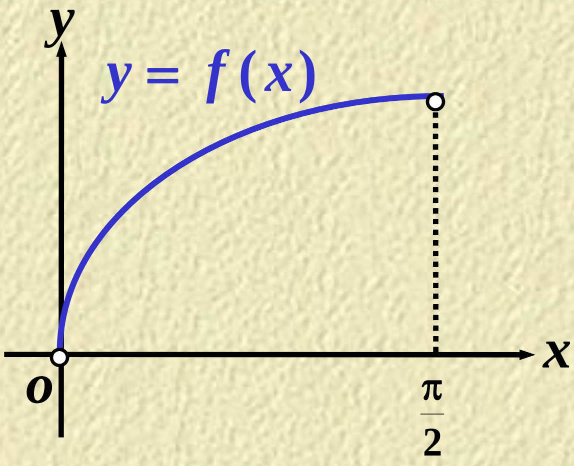
有 $f(\xi_1) \geq f(x)$,

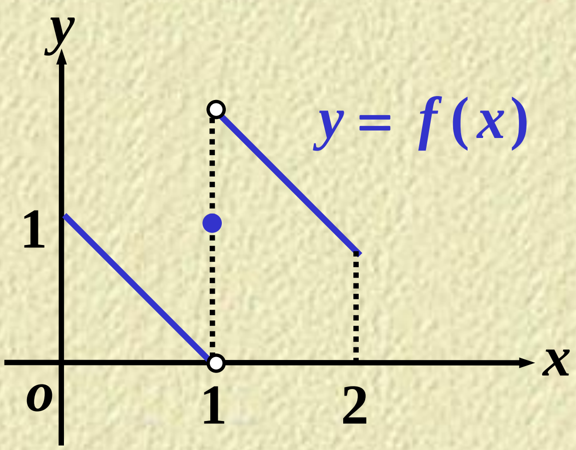
$f(\xi_2) \leq f(x)$.



注意: 1.若区间是开区间，定理不一定成立;

2.若区间内有间断点，定理不一定成立.





定理5(有界性定理）在闭区间上连续的函数一定在该区间上有界.

证 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续， $\forall x \in [a,b]$,

有 $m \le f(x) \le M$， 取 $K = \max\{|m|, |M|\}$,

则有 $|f(x)| \le K$. $\therefore$ 函数$f(x)$在$[a,b]$上有界.

上页 下页 返回

定理 6（介值定理） 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且在这区间的端点取不同的函数值

$$f(a)=A \text{ 及 } f(b)=B,$$

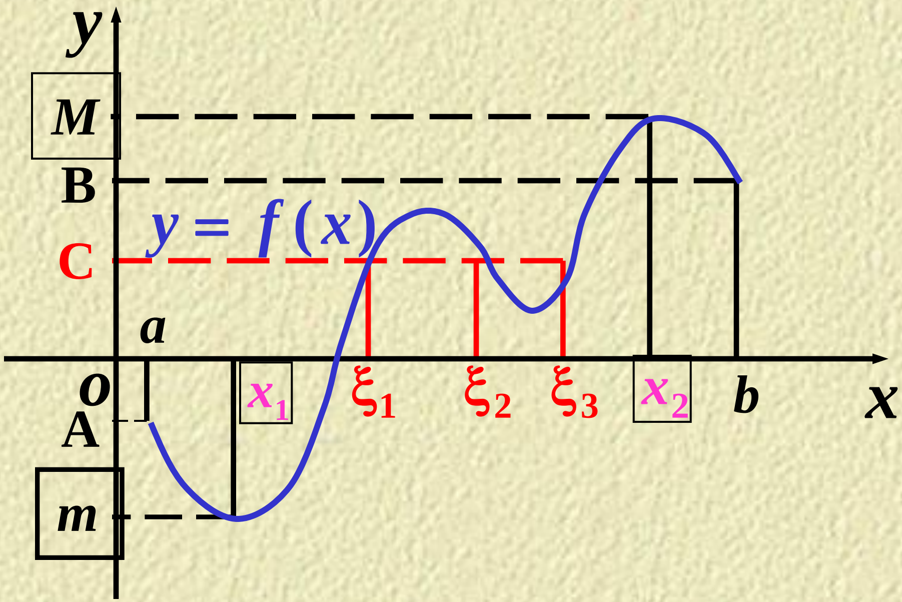
那末，对于 A 与 B 之间的任意一个数 C，在开区间 (a,b) 内**至少存在一点** ξ，使得 $f(\xi)=C$ $(a<\xi<b)$.

介值定理的一个等价的表述

定理 6′（介值定理） 在闭区间上连续的函数必取得介于最大值 M 与最小值 m 之间的任何值.

上页 下页 返回

几何解释:



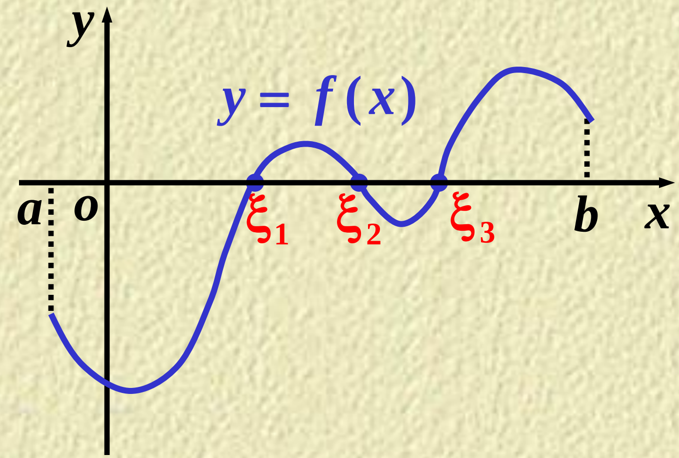
上页 下页 返回

定义. 如果x_0使$f(x_0)=0$,则x_0称为函数$f(x)$的零点.

定理 6″（零点定理）设函数 $f(x)$在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$与 $f(b)$异号（即 $f(a)\cdot f(b)<0$）, 那末在开区间(a,b)内至少有函数 $f(x)$的一个零点, 即至少有一点$\xi(a<\xi<b)$，使 $f(\xi)=0$.

即方程 $f(x)=0$在(a,b)内至少存在一个实根 .

几何解释:



连续曲线弧 $y = f(x)$ 的两个端点位于 x 轴的不同侧, 则曲线弧与 x 轴至少有一个交点.

上页 下页 返回

例1.设函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续,且$f(a)<a$, $f(b)>b$. 证明$\exists\xi\in(a,b)$, 使得 $f(\xi)=\xi$.

解 令$F(x)=f(x)-x$,则$F(x)$在$[a,b]$上连续,

而$F(a)=f(a)-a<0$,

$F(b)=f(b)-b>0$,由零点定理,

$\exists\xi\in(a,b)$,使$F(\xi)=f(\xi)-\xi=0$,

即$f(\xi)=\xi$.

我们习惯称此ξ为函数$f(x)$的不动点 (*fixed point*).“不动点”在微观经济学中的蛛网模型中有重要的作用.

上页 下页 返回

数学家的笑话-----解是存在的

工程师、化学家和数学家住在一家老客栈的三个相邻房间里。当晚先是工程师的咖啡机着了火,他嗅到烟味醒来,拔出咖啡机的电插头,将之扔出窗外,然后接着睡觉。过一会儿化学家也嗅到烟味醒来,他发现原来是烟头燃着了垃圾桶。他自言自语道:“怎样灭火呢?应该把燃料温度降低到燃点以下,把燃烧物与氧气隔离.浇水可以同时做到这两点。”于是他把垃圾桶拖进浴室,打开水龙头浇灭了火,就回去接着睡觉。

数学家在窗外看到了这一切,所以,当过了一会儿他发现他自己的烟灰燃着了床单时,他可一点儿也不担心。说:“嗨,解是存在的!”就接着睡觉了…

上页 下页 返回

例1$^{(2)}$.函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续,$a < x_1 < x_2 < \cdots$

$\cdots < x_n < b$.求证:$\exists \xi \in (a,b)$,使得$f(\xi) = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)}{n}$.

证明　函数$f(x)$在区间$[x_1, x_n]$上连续,由最值存在

定理知,有m, M,使得$\forall x \in [x_1, x_n]$,有$m \le f(x_k) \le M$,

$$\therefore m \le \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)}{n} = A \le M.$$

由介值定理知,$\exists \xi \in [x_1, x_n] \subset (a,b)$,使得$f(\xi) = A$.

例2.证明方程$x^3-4x^2+1=0$在区间$(0,1)$内至少有一根.

证明　令 $f(x)=x^3-4x^2+1,$

则 $f(x)$在$[0,1]$上连续.

又 $f(0)=1>0,\ f(1)=-2<0,$由零点定理,

$\exists\,\xi\in(a,b),$ 使$f(\xi)=0,$即 $\xi^3-4\xi^2+1=0,$

$\therefore$ 方程$x^3-4x^2+1=0$在$(0,1)$内至少有一根ξ.

至于方程的根的计算, 以后有 “闭区间套定理” 予以解释, 并可用所谓的 “二分法” 进行近似计算得到, 或使用*Newton*切线法求解.

上页 下页 返回

如果某人第一天6:00从山脚出发于17:00到达山顶,歇宿一夜以后第二天一早6:00从山顶出发沿着原路于17:00到达山脚原先出发处.那么,途中必定有那么一个地方,两天中该人到达此处的时刻相同!

你理解吗?? ... ...

下面我们用数学的语言予以解释:

设该人第一天从6:00开始经过时间t所走过的路程为$s=s(t)$,到达终点时所走过的路程为$s(11)=K$, 该人第二天从6:00开始经过时间t时距离山脚出发处$l=l(t)$,设 $d=d(t)=l(t)-s(t),t\in[0,11]$,显然$d(t)$在$[0,11]$上连续,且有$d(0)=l(0)-s(0)=K>0$, $d(11)=l(11)-s(11)=-K<0$, 由介值定理可知,$\exists\xi\in(0,11)$, $d(\xi)=0$. ……

思考题

下述命题是否正确？

如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，在 (a,b) 内连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，那么 $f(x)$ 在 (a,b) 内必有零点.

上页 下页 返回

思考题解答

不正确.

例函数 $f(x)=\begin{cases} e, & 0<x\le 1 \\ -2, & x=0 \end{cases}$

$f(x)$在$(0,1)$内连续, $f(0)\cdot(1)=-2e<0.$

但$f(x)$在$(0,1)$内无零点.

例3.证明$a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\cdots+a_{2n+1}=0$ $(a_0\neq 0)$在$(-\infty,+\infty)$内至少有一个实根.

证明$\because a_0\neq 0$,不妨设$a_0>0$,

记$P(x)=a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\cdots+a_{2n+1}$,

$\therefore \lim\limits_{x\to-\infty}P(x)=-\infty, \lim\limits_{x\to+\infty}P(x)=+\infty,$

$\lim\limits_{x\to+\infty}P(x)=+\infty \Leftrightarrow$ 任意取定 $M>0$,

$\exists\ X_1>0, \forall x>X_1$,有$P(x)>M$.

上页 下页 返回

$\lim\limits_{x\to+\infty} P(x)=+\infty \Leftrightarrow$ 任意取定 $M>0$,

$\exists\ X_1>0, \forall x>X_1$,有$P(x)>M$.

同样, $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x)=-\infty \Leftrightarrow$ 对于上述取定的

$M>0, \exists X_2>0, \forall\ x<-X_2$,有$P(x)<-M$.

$\because P(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续,

$\therefore P(x)$在$[-X_2-1, X_1+1]$上连续,且$P(-X_2-1)<0$,

$P(X_1+1)>0$,由零点存在定理可知,

至少存在一点 $\xi\in[-X_2-1, X_1+1]\subset(-\infty,+\infty)$,

使得$P(\xi)=0$.

下面我们给出如下拓广的零点定理.

拓广的零点定理1. 若函数$f(x)$在(a,b)上连续,而且$\lim\limits_{x\to a+} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to b-} f(x)=B$, $AB<0$,则必存在$\xi\in(a,b)$,使得$f(\xi)=0$.

证明 设$g(x)=\begin{cases} A \quad, \quad x=a \\ f(x), x\in(a,b), \\ B \quad, \quad x=b \end{cases}$

则函数$g(x)$在$[a,b]$上连续,且

$g(a)g(b)=AB<0$,由零点定理知,

$\exists\xi\in(a,b)$,使得$g(\xi)=0$,即得结论.

上页 下页 返回

拓广的零点定理1′. 若函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续,而且$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=B$, $AB<0$,则必存在$\xi\in(-\infty,+\infty)$,使得$f(\xi)=0$.

证明　设$g(t)=f(\tan t), t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,

于是 $\lim\limits_{t\to-\frac{\pi}{2}} g(t)=\lim\limits_{t\to-\frac{\pi}{2}} f(\tan t)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$,

$\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}} g(t)=\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}} f(\tan t)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=B$,

$g(t)$在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上连续,由**拓广的零点定理1.**知

$\exists\eta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,使得$g(\eta)=0, \tan\eta=\xi\in(-\infty,+\infty)$,

于是, $f(\xi)=0$.

上页 下页 返回

拓广的零点定理2. 若函数$f(x)$在(a,b)上连续,而且$\lim\limits_{x\to a+} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to b-} f(x)=+\infty$,则必存在$\xi\in(a,b)$,使得$f(\xi)=0$.

证明法例3,在此从略.

拓广的零点定理2′. 若函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续,而且$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$,则必存在$\xi\in(-\infty,+\infty)$,使得$f(\xi)=0$.

证明从略.

思考练习

(1).证明方程 $x+x^2+\cdots+x^n=1$ $(n\geq 2)$有唯一的正实根.

(2).记(1).中方程的实根为x_n，证明数列$\{x_n\}$收敛，并求出$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

上页 下页 返回

Ex.(1).证明方程 $x+x^2+\cdots+x^n=1\ (n\geq 2)$有唯一的正实根.

(2).记(1).中方程的实根为x_n ,证明数列$\{x_n\}$收敛 ,并求出$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

(1).证明 设$\varphi(x)=x+x^2+\cdots+x^n-1$,

显然$\varphi(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续. $\varphi(0)=-1<0, n\geq 2$ 时,

$$\varphi\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\cdots+\left(\frac{3}{4}\right)^n-1>\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2-1=\frac{5}{16}>0,$$

由介值定理知 $\exists\xi\in\left(0,\frac{3}{4}\right)\subset(0,1)\subset(-\infty,+\infty)$,使$\varphi(\xi)=0$.

又$\forall x_2>x_1>0, \varphi(x_2)-\varphi(x_1)=$

$=(x_2-x_1)\left(1+x_2+x_1+\cdots+x_2^{n-1}+x_2^{n-2}x_1+\cdots+x_2x_1^{n-2}+x_1^{n-1}\right)>0,$

$\therefore\ x\in(0,+\infty)$时$\varphi(x)$严格单调增加,

故$\exists$ 唯一的$\xi\in\left(0,\frac{3}{4}\right)\subset(-\infty,+\infty)$,使$\varphi(\xi)=0$.

或者,$x\in(0,+\infty)$时$\varphi'(x)=1+2x+\cdots+nx^{n-1}>0$,故在$(0,+\infty)$

上$\varphi(x)$严格单调增加$\cdots$

上页 下页 返回

Ex.(1).证明方程 $x+x^2+\cdots+x^n=1\ (n\ge 2)$有唯一的正实根.

(2).记(1).中方程的实根为x_n ,证明数列$\{x_n\}$收敛 ,并求出$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

(2).$\because \xi+\xi^2+\cdots+\xi^n=1$,$\xi\in(0,1)$,$\therefore \xi+\xi^2+\cdots+\xi^n=\dfrac{\xi-\xi^{n+1}}{1-\xi}=1$,

即 $\xi-\xi^{n+1}=1-\xi$,$\xi=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\xi^{n+1}$,由$\xi\in\left(0,\dfrac{3}{4}\right)$,知$\lim\limits_{n\to\infty}\xi^{n+1}=0$,

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\xi=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\xi^{n+1}\right)=\dfrac{1}{2},\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{2}.$

注(1).若只说$\xi\in(0,1)$,由于$\xi=x_n$ 与n有关, 若$\xi\to 1^-$,则$\not\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\xi^{n+1}=0$.

这就是我们取$\xi\in\left(0,\dfrac{3}{4}\right)\subset(0,1)$的原因,此处的$\dfrac{3}{4}$是任意取定的$>\dfrac{1}{2}$

且<1 的数.

注(2).可证明数列$\{x_n\}$单调递减且$x_n>0$,故其收敛 .

上页 下页 返回

$Add.$(2014年辽宁高考数学理科卷第21题)

设函数 $f(x)=(\cos x-x)(\pi+2x)-\frac{8}{3}(\sin x+1)$,

$g(x)=3(x-\pi)\cos x-4(\sin x+1)\ln\left(3-\frac{2x}{\pi}\right)$.

证明:(1).存在唯一的$x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,使得 $f\left(x_0\right)=0$.

(2).存在唯一的$x_1\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,使$g\left(x_1\right)=0$,且对(1)

中的x_0,有$x_0+x_1<\pi$.

上页 下页 返回