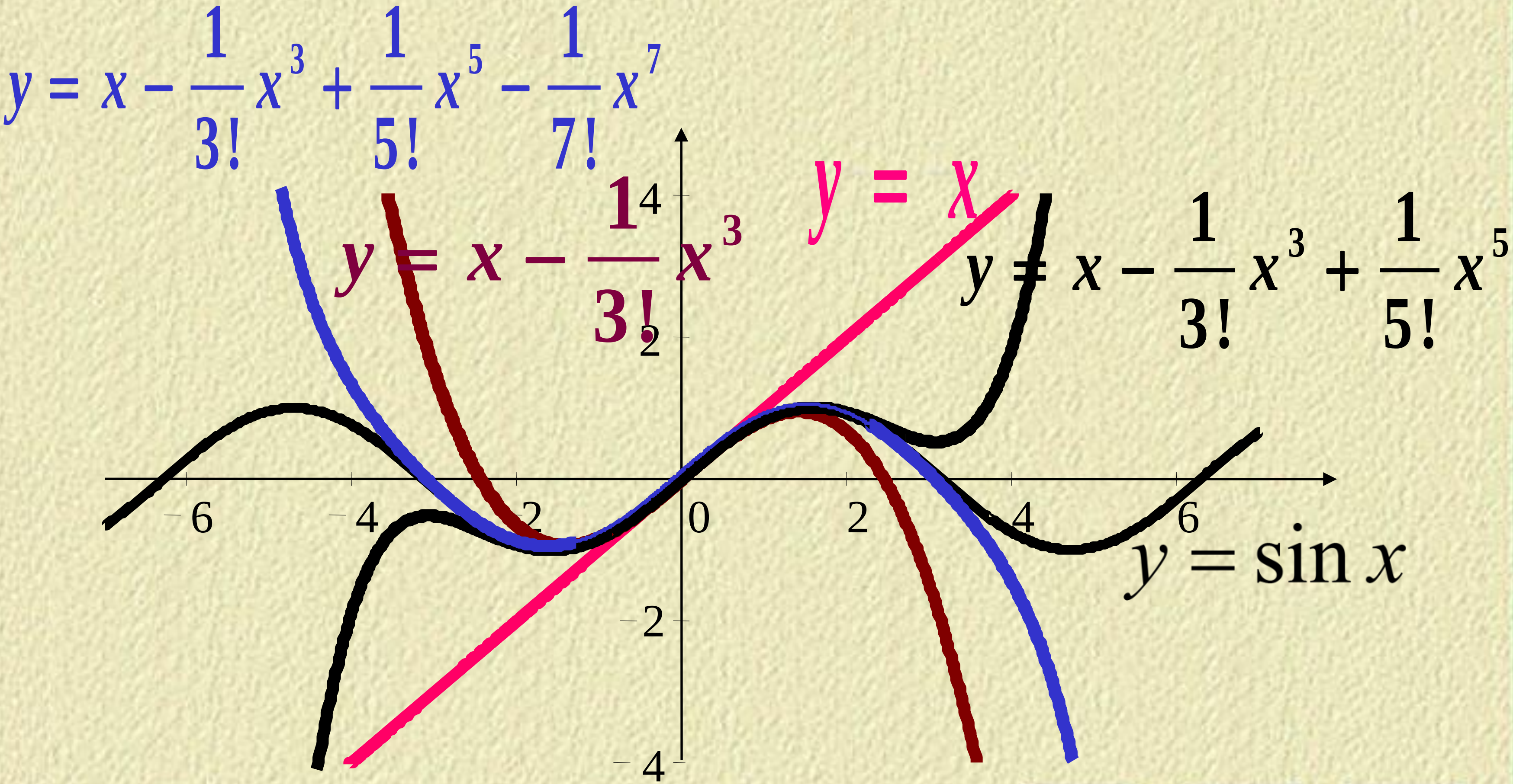
泰勒中值定理

B.Taylor	**1685-1731**	**(*G.B.*)**
Maclaurin	**1698-1746**	**(*G.B.*)**
Lagrange	**1736~1813**	**(*Fr.*)**
Cauchy	**1789~1857**	**(*Fr.*)**

上页 下页 返回

观察 sin x 与一个多项式函数 $f(x)$ 的图象：

$$f(x)=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$



上页 下页 返回

一.问题的提出

1.若$f(x)$在x_0处连续,则有

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

$$\therefore f(x) = f(x_0) + \alpha, \lim_{x \to x_0} \alpha = 0,$$

$\therefore$ 当x很接近x_0,即$|x - x_0|$很小时

有 $f(x) \approx f(x_0)$;

以平直代曲

2.若$f(x)$在x_0处可导,则有

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0),$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0),$$

$\therefore$ 当x很接近x_0,即$|x - x_0|$很小时

有$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

以切直代曲

例如,当$|x|$很小时,

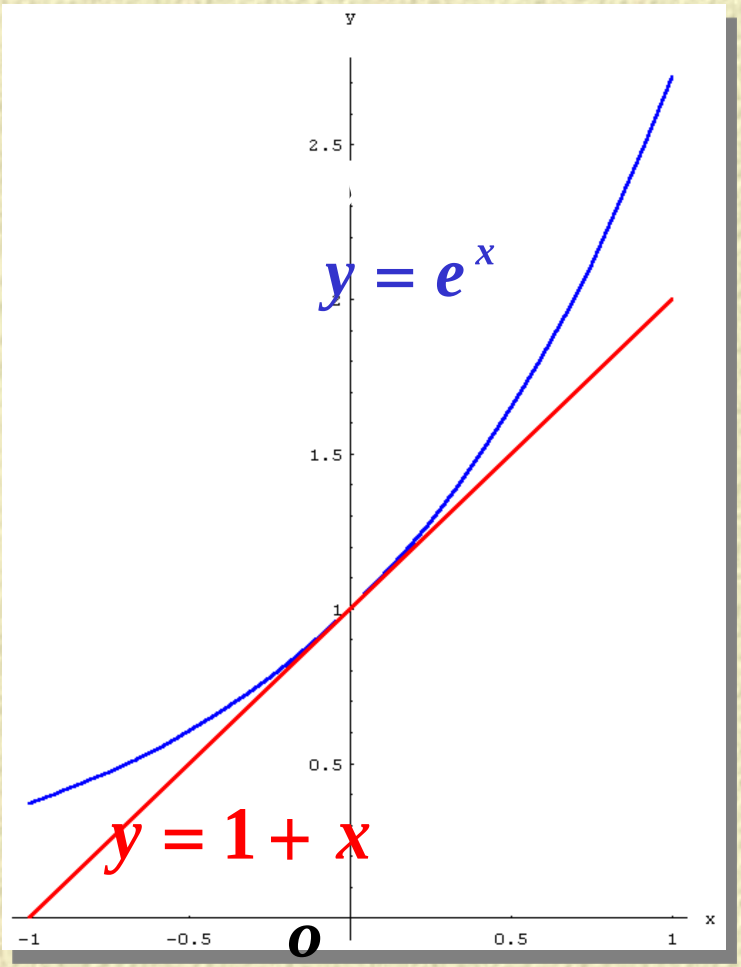
$$e^x \approx 1 + x \quad \ln(1 + x) \approx x$$

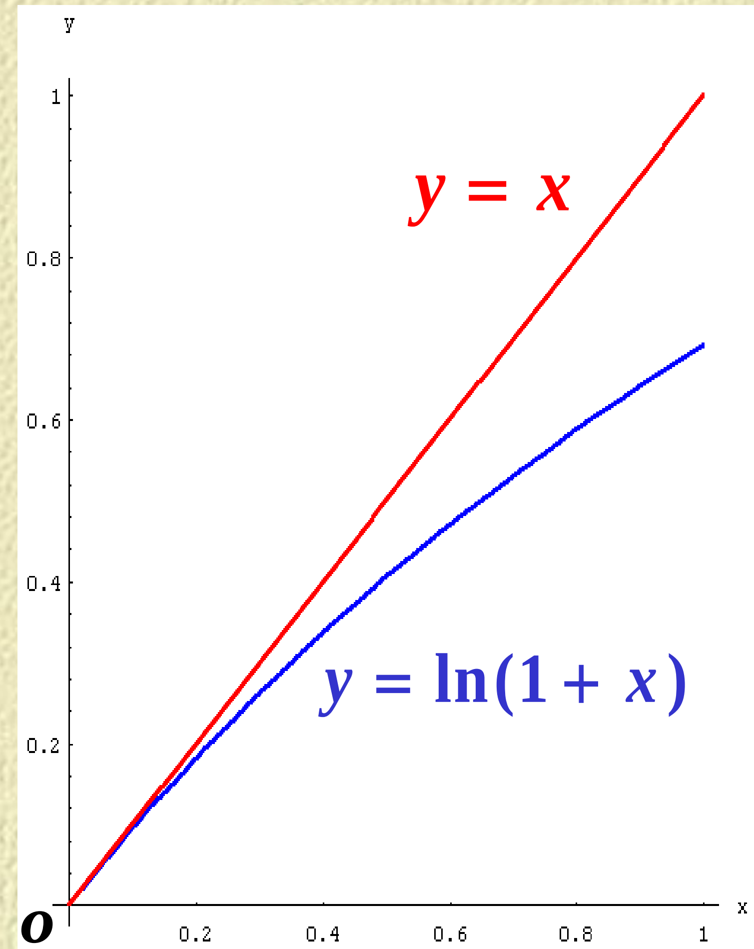
如下图

上页 下页 返回

例如,当$|x|$很小时,

$e^x \approx 1 + x$　　　　$\ln(1+x) \approx x$





不足　1.精确度不高,2.误差无法估计.

问题　寻找多项式函数$P_n(x)$,使得

$$1.\ f(x) \approx P_n(x),$$

2.误差$R(x) = f(x) - P_n(x)$可估计.

由于$P_n(x)$任意多阶可导,故要求$f(x)$在包含x_0的区间(a,b)内有高阶导数是合理的,

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n$$

误差 $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$

$P_n(x)$和$R_n(x)$的确定：

分析 $y = f(x)$与$y = P_n(x)$的图象

近似程度越来越好

1.都过x_0点,则$P_n(x_0) = f(x_0)$;

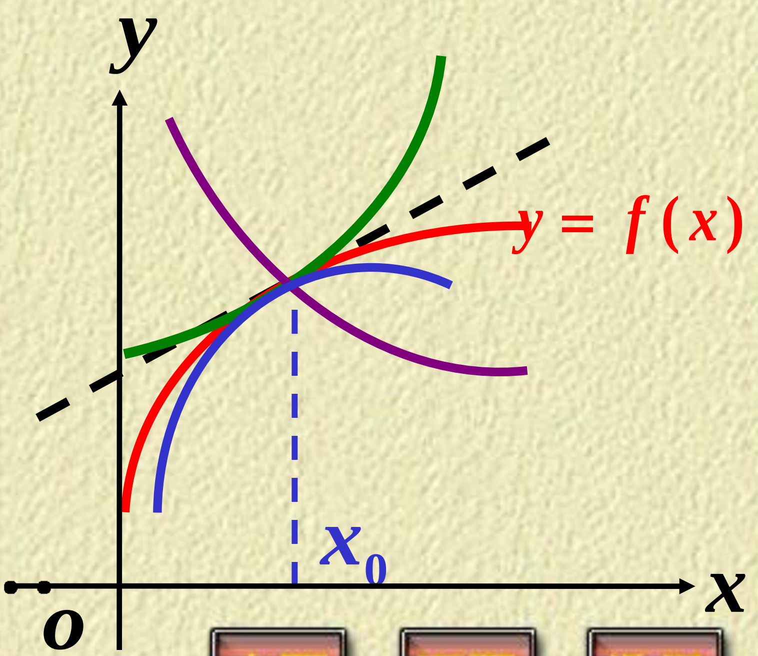
2.在点x_0处相切,

则$P_n'(x_0) = f'(x_0)$;

3.在点x_0的某邻域

内弯曲方向相同,

则 $P_n''(x_0) = f''(x_0)$. · · ·



上页 下页 返回

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n$$

$$P_n'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+\cdots+na_n(x-x_0)^{n-1}$$

$$P_n''(x)=2a_2+3\cdot 2a_3(x-x_0)+\cdots+n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}$$

$$P_n'''(x)=3!a_3+4\cdot 3\cdot 2a_4(x-x_0)+\cdots$$

$$\cdots+n(n-1)(n-2)a_n(x-x_0)^{n-3}$$

$\cdots \quad \cdots$

$$P_n(x_0)=a_0, P_n'(x)=a_1, P_n''(x_0)=2a_2=2!a_2,$$

$$P_n'''(x_0)=3!a_3,\cdots,P_n^{(n)}(x_0)=n!a_n$$

设想 $P_n^{(k)}(x_0)=f^{(k)}(x_0), k=1,2,\cdots,n$

$a_0=f(x_0), 1\cdot a_1=f'(x_0), 2!\cdot a_2=f''(x_0)$

$\cdots, n!\cdot a_n=f^{(n)}(x_0)$

则$a_k=\dfrac{1}{k!}f^{(k)}(x_0), (k=0,1,2,\cdots,n)$

代入$P_n(x)$中得到

$$P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

上页 下页 返回

二.泰勒(Taylor)中值定理

*Th.*1.(*Taylor Theorem*)

如果函数$f(x)$在包含x_0的区间(a,b)内有

$n+1$ 阶导数,则 $f(x)=P_n(x)+R_n(x)$,

$$P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

其中ξ介于x_0与x之间.

证明　由条件知$R_n(x)$在(a,b)内有 $n+1$ 阶导数，

$$R_n(x_0)=R_n'(x_0)=R_n''(x_0)=\cdots=R_n^{(n)}(x_0)=0$$

函数$R_n(x)$与$\left(x-x_0\right)^{n+1}$在以x_0,x为端点的区间上满足Cauchy中值定理的条件，

$$\frac{R_n(x)}{\left(x-x_0\right)^{n+1}}=\frac{R_n(x)-R_n(x_0)}{\left(x-x_0\right)^{n+1}-0}$$

$$=\frac{R_n'(\xi_1)}{(n+1)\left(\xi_1-x_0\right)^{n}}\left(\xi_1\text{在}x_0\text{与}x\text{之间}\right)$$

函数$R_n'(x)$与$(n+1)(x-x_0)^n$在以x_0与ξ_1为端点的区间上满足$Cauchy$中值定理的条件,

$$\frac{R_n'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n}=\frac{R_n'(\xi_1)-R_n'(x_0)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n-0}$$

$$=\frac{R_n''(\xi_2)}{n(n+1)(\xi_2-x_0)^{n-1}}\quad(\xi_2\text{在}x_0\text{与}\xi_1\text{之间})$$

如此下去,经$(n+1)$次使用$Cauchy$中值定理

可得 $$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=\frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

(ξ在x_0与ξ_n之间也即在x_0与x之间)

上页 下页 返回

$\because P_n^{(n+1)}(x)=0, \therefore R_n^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)$

则由上式得

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}(\xi\text{在}x_0\text{与}x\text{之间})$$

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\text{称为是函数}f(x)$$

在x_0点处的n次*Taylor*多项式;

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)\text{称为是函数}f(x)$$

在x_0点处的(n次)*Taylor*展开.

上页 下页 返回

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x),$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},(\xi\text{在}x_0\text{与}x\text{间})$$

$R_n(x)$为*Lagrange*型余项.

现在我们所看到的*Taylor*定理是*Lagrange*在*B.Taylor*工作的基础上给出的更为精确而严格的命题.

麦克劳林(*Maclaurin*)公式

Maclaurin 公式是*Taylor*中值定理的特殊形式，但却是独立于*Taylor*中值定理并且迟于它被提出来的. *Maclaurin* 1698-1746 英国

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\left(0<\theta<1\right)$$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+$$

$$\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)$$

小结

(1).当$n=0$时*Taylor*公式就是*Lagrange*中值公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0),\left(\xi\text{在}x_0\text{与}x\text{之间}\right).$$

(2).多数情况下,*Taylor*定理说明用一个*Taylor*多项式近似表示函数,“以曲代曲”可以获得较好的精确度,但要求函数有高阶导数.(但有条件)

(3).大凡一元微分学中需用高阶导数解决的问题大部分都可以用*Taylor*定理来解决.掌握了*Taylor*定理以后,回过头来看前面的那些理论,似乎一切都在你的掌握之中了,你或许会有一种“会当凌绝顶,一览众山小”的感觉.说“*Taylor*定理是一元微分学的顶峰”并非妄言.

*Taylor*定理的出现是现实的需要对数学的推动的结果.在大航海时代/探索时代(*Age of Discovery*),人们在海洋上航行是根据海图来确定航向,而这中间需要用到三角函数的近似值计算,为了能较为精确地导航,要求能得到较高精确度的函数值近似计算的方法与技术,在这样的环境下,英国数学家*B.Taylor*给出了后世著名的*Taylor*定理.利用*Taylor*定理,人们可以得到函数值的任意精确度的近似值.

三.应用举例

例1.给出$f(x)=e^x$的n阶$Maclaurin$展开式.

解 $\because f'(x)=f''(x)=\cdots=f^{(n)}(x)=e^x,$

$\therefore f(0)=f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=1,$

注意到 $f^{(n+1)}(\theta x)=e^{\theta x}$,代入公式得

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$(0<\theta<1).$$

由公式可知$e^x \approx 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}$

设 $x > 0$,估计误差

$$|R_n(x)| = \left|\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}\right| < \frac{e^x \cdot x^{n+1}}{(n+1)!} \quad (0 < \theta < 1)$$

取$x = 1$,得$e \approx 1 + 1 + \dfrac{1}{2!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}$

其误差为$|R_n(x)| < \dfrac{e}{(n+1)!} < \dfrac{3}{(n+1)!}$

取$x=1, e\approx 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$

$n=10$时$1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{10!}\approx 2.718\ 281\ 8\cdots$

相比之下,由于$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ 而用

$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$作$e$ 的近似计算,$n=100$,

$a_{100}\approx 2.70\cdots, n=10^4, a_{10^4}\approx 2.718\ 14\cdots$

其效果要差远了.

例1.(2).求证 $\forall n\in\mathbb{Z}^+, x\geq 0$时有

$$e^x \geq 1+x+\cdots+\frac{x^n}{n!}$$

证明 $\because e^x = 1+x+\cdots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x)$

$$R_n(x)=\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\left(0<\theta<1\right),$$

$x\geq 0$时有$R_n(x)\geq 0$, $\therefore \forall n\in\mathbb{Z}^+$,

$x\geq 0$时$e^x \geq 1+x+\cdots+\frac{x^n}{n!}$恒成立.

上页 下页 返回

例2.给出函数$\sin x$的*Maclaurin*展开式.

解 $\because (\sin x)^{(k)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\cdot k\right), k = 1, 2, \cdots$

$$(\sin x)^{(2n)}\Big|_{x=0} = 0, (\sin x)^{(2n+1)}\Big|_{x=0} = (-1)^n,$$

$$\therefore \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+2}(x)$$

$$R_{2n+2}(x) = \frac{\sin\left(\theta x + \frac{\pi}{2}\cdot(2n+3)\right)}{(2n+3)!} x^{2n+3}, (0 < \theta < 1)$$

在区间$[0,\pi]$上,用11次多项式

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\frac{x^{11}}{11!}$$

来逼近 $\sin x$,则我们有

$$|R_{12}|\le\frac{|x^{13}|}{13!}<\frac{\pi^{13}}{13!}\approx 0.000\ 466\ 303$$

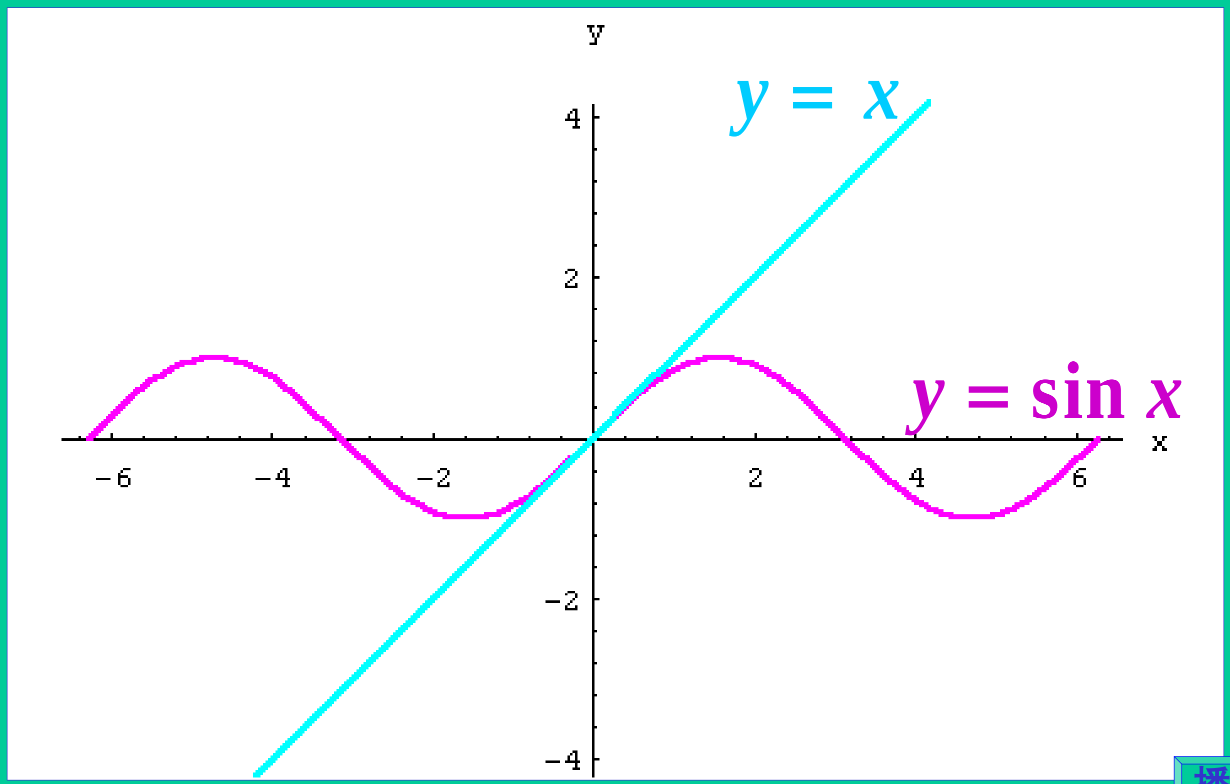
极好的近似结果

如果我们用更高次的*Maclaurin*多项式来逼近$\sin x$,那就可以使得变量的取值范围有所扩大.

$$\sin x \approx x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

所以,我们可以得到用n次多项式来近似表示正弦函数的近似计算结果,而且可以看到,随着n的增大,近似效果就越来越好,x的取值范围就可以随之而扩大.

Taylor 公式在近似计算中的应用;



特别地,如果$f^{(n+1)}(x)$在$U(x_0)$内有界,那么$\exists M$,

$$\left|R_n(x)\right| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\left(x-x_0\right)^{n+1}\right| \le \frac{M}{(n+1)!}\left(x-x_0\right)^{n+1},$$

$$\therefore \lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{\left(x-x_0\right)^n} = 0, \text{即} x \to x_0 \text{时} R_n(x) = o\left(\left(x-x_0\right)^n\right).$$

此时的余项称为是皮亚诺 (Peano) 型余项,

函数的带皮亚诺型余项的展开式主要用于函数的极限计算,并且对函数的要求也可以适当降低.

$$\therefore\ f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\left(x-x_0\right)^k + o\left[\left(x-x_0\right)^n\right]$$

返回

Th.2 若函数$f(x)$在包含x_0的区间(a,b)内有n阶导数,则在(a,b)内当$x \to x_0$时

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o\left((x-x_0)^n\right)$$

*Peano*型余项$o\left((x-x_0)^n\right)$只是定性地描述函数与*Taylor*多项式之间的差距.

相应地其证明方法也不同.

上页 下页 返回

例3.求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x - x(1+x)}{\ln(1+x^3)}$.

解 $x\to 0$时,$\ln(1+x^3)\sim x^3$,

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2),\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3),$$

$\therefore e^x\sin x - x(1+x) =$

$$\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) - x(1+x)$$

$=\dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$,所以所求极限为$\dfrac{1}{3}$.

上页 下页 返回

例3.(2).求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

解 $(\tan x)' = \sec^2 x, (\tan x)'' = 2\sec^2 x\tan x,$

$(\tan x)''' = 4\sec^2 x\tan^2 x + 2\sec^4 x,$

$(\tan x)'\big|_{x=0} = 1, (\tan x)''\big|_{x=0} = 0, (\tan x)'''\big|_{x=0} = 2,$

$\therefore x\to 0$时, $\tan x = x + \dfrac{2}{3!}x^3 + o\left(x^3\right),$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right),$$

$\therefore x\to 0$时, $\tan x - \sin x = \dfrac{3}{3!}x^3 + o\left(x^3\right),$

所以,所求极限为$\dfrac{1}{2}$.

上页 下页 返回