5.2 一阶逻辑前束范式

定义5.2 设A为一个一阶逻辑公式，若A具有如下形式

$$Q_1x_1Q_2x_2 \ldots Q_kx_kB$$

则称A为**前束范式**，其中$Q_i(1 \leqslant i \leqslant k)$为∀或∃，B为不含量词的公式。

- 前束范式的例子：

$$\forall x \forall y(F(x) \wedge G(y) \rightarrow H(x, y))$$

$$\forall x \forall y \exists z(F(x) \wedge G(y) \wedge H(z) \rightarrow L(x, y, z))$$

- 不是前束范式的例子：

$$\forall x(F(x) \rightarrow \exists y(G(y) \wedge H(x, y)))$$

$$\exists x(F(x) \wedge \forall y(G(y) \rightarrow H(x, y)))$$

前束范式存在定理

定理5.1 一阶逻辑中的任何公式都存在与之等值的前束范式。

(1) 利用量词转化公式，把否定深入到指导变元的后面。

$$\neg \forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$$

$$\neg \exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$$

(2) 利用$\forall x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \vee B$和$\exists x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \wedge B$把量词移到全式的最前面，这样便得到前束范式。

说明

- 求前束范式的过程，就是制造量词辖域可以扩大的条件，进行量词辖域扩大。
- 任何公式的前束范式都是存在的，但一般说来，并不唯一。
- 利用一阶逻辑等值式以及三条变换规则（置换规则、换名规则、代替规则）就可以求出与公式等值的前束范式，或所谓公式的前束范式。

例5.6 求公式的前束范式

（1） $\forall xF(x)\wedge\neg\exists xG(x)$

$\Leftrightarrow \forall xF(x)\wedge\neg\exists yG(y)$ （换名规则）

$\Leftrightarrow \forall xF(x)\wedge\forall y\neg G(y)$ （(5.2)第二式）

$\Leftrightarrow \forall x(F(x)\wedge\forall y\neg G(y))$ （(5.3)第二式）

$\Leftrightarrow \forall x\forall y(F(x)\wedge\neg G(y))$ （(5.3)第二式）

（ $\Leftrightarrow \forall y\forall x(F(x)\wedge\neg G(y))$ ）

或者 $\forall xF(x)\wedge\neg\exists xG(x)$

$\Leftrightarrow \forall xF(x)\wedge\forall x\neg G(x)$ （(5.2)第二式）

$\Leftrightarrow \forall x(F(x)\wedge\neg G(x))$ （(5.5)第一式）

例5.6 求公式的前束范式

（2） $\forall xF(x) \vee \neg \exists xG(x)$

$\Leftrightarrow \forall xF(x) \vee \forall x\neg G(x)$ （(5.2)第二式）

$\Leftrightarrow \forall xF(x) \vee \forall y\neg G(y)$ （换名规则）

$\Leftrightarrow \forall x(F(x) \vee \forall y\neg G(y))$ （(5.3)第一式）

$\Leftrightarrow \forall x\forall y(F(x) \vee \neg G(y))$ （(5.3)第一式）

说明

- 公式的前束范式是不唯一的。

例5.7 求前束范式

(1) $\exists xF(x) \wedge \forall xG(x)$

$\Leftrightarrow \exists yF(y) \wedge \forall xG(x)$

$\Leftrightarrow \exists y\forall x(F(y) \wedge G(x))$

(2) $\forall xF(x) \rightarrow \exists xG(x)$

$\Leftrightarrow \forall yF(y) \rightarrow \exists xG(x)$

$\Leftrightarrow \exists y\exists x(F(y) \rightarrow G(x))$

(3) $\exists xF(x) \rightarrow \forall xG(x)$

$\Leftrightarrow \exists yF(y) \rightarrow \forall xG(x)$

$\Leftrightarrow \forall y\forall x(F(y) \rightarrow G(x))$

(4) $\forall xF(x) \rightarrow \exists yG(y)$

$\Leftrightarrow \exists x\exists y(F(x) \rightarrow G(x))$

例5.8 求公式的前束范式

(1) $\forall xF(x,y)\rightarrow\exists yG(x,y)$

$\Leftrightarrow \forall tF(t,y)\rightarrow\exists wG(x,w)$　　（换名规则）

$\Leftrightarrow \exists t\exists w(F(t,y)\rightarrow G(x,w))$　　((5.3),(5.4))

或者

$\forall xF(x,y)\rightarrow\exists yG(x,y)$

$\Leftrightarrow \forall xF(x,t)\rightarrow\exists yG(w,y)$　　（代替规则）

$\Leftrightarrow \exists x\exists y(F(x,t)\rightarrow G(w,y))$　　((5.3),(5.4))

说明

- 解本题时一定注意，哪些个体变项是约束出现，哪些是自由出现，特别要注意那些既是约束出现又是自由出现的个体变项。不能混淆。

例5.8 求公式的前束范式

(2) $(\forall x_1 F(x_1, x_2) \to \exists x_2 G(x_2)) \to \forall x_1 H(x_1, x_2, x_3)$

$\Leftrightarrow (\forall x_4 F(x_4, x_2) \to \exists x_5 G(x_5)) \to \forall x_1 H(x_1, x_2, x_3)$

$\Leftrightarrow \exists x_4 \exists x_5 (F(x_4, x_2) \to G(x_5)) \to \forall x_1 H(x_1, x_2, x_3)$

$\Leftrightarrow \forall x_4 \forall x_5 \forall x_1 ((F(x_4, x_2) \to G(x_5)) \to H(x_1, x_2, x_3))$

- 例 求下列公式的前束范式
- (1) $\neg\exists x(M(x)\wedge F(x))$

- 解 $\neg\exists x(M(x)\wedge F(x))$
- $\Leftrightarrow \forall x(\neg M(x)\vee\neg F(x))$ （量词否定等值式）
- $\Leftrightarrow \forall x(M(x)\rightarrow\neg F(x))$
- 后两步结果都是前束范式，说明公式的前束范式不惟一.

- (2) $\forall x F(x) \wedge \neg \exists x G(x)$
  - 解　$\forall x F(x) \wedge \neg \exists x G(x)$
  - $\Leftrightarrow \forall x F(x) \wedge \forall x \neg G(x)$　（量词否定等值式）
  - $\Leftrightarrow \forall x (F(x) \wedge \neg G(x))$　（量词分配等值式）
  - 或
  - $\forall x F(x) \wedge \neg \exists x G(x)$
  - $\Leftrightarrow \forall x F(x) \wedge \forall x \neg G(x)$　量词否定等值式
  - $\Leftrightarrow \forall x F(x) \wedge \forall y \neg G(y)$　换名规则
  - $\Leftrightarrow \forall x \forall y (F(x) \wedge \neg G(y))$　辖域收缩扩张规则

- (3) $\forall xF(x)\rightarrow\exists y(G(x,y)\wedge\neg H(y))$
- 解 $\forall xF(x)\rightarrow\exists y(G(x,y)\wedge\neg H(y))$
- $\Leftrightarrow \forall zF(z)\rightarrow\exists y(G(x,y)\wedge\neg H(y))$ 换名规则
- $\Leftrightarrow \exists z\exists y(F(z)\rightarrow(G(x,y)\wedge\neg H(y)))$ 辖域收缩扩张规则

- 或
- $\Leftrightarrow \forall xF(x)\rightarrow\exists y(G(z,y)\wedge\neg H(y))$ 代替规则
- $\Leftrightarrow \exists x\exists y(F(x)\rightarrow(G(z,y)\wedge\neg H(y)))$