集合恒等式

内容提要

- 1. 集合恒等式与对偶原理
- 2. 集合恒等式的证明
- 3. 集合列的极限
- 4. 集合论悖论与集合论公理

集合恒等式(关于∪与∩)

- 等幂律(idempotent laws)

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

- 交换律(commutative laws)

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

集合恒等式(关于∪与∩、续)

- 结合律(associative laws)

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$$
$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$$

- 分配律(distributive laws)

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$
$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

集合恒等式(关于∪与∩、续)

- 吸收律(absorption laws)

$$A\cup(A\cap B)=A$$

$$A\cap(A\cup B)=A$$

集合恒等式(关于~)

- 双重否定律(double complement law)

$$\sim\sim A=A$$

- 德●摩根律(DeMorgan's laws)

$$\sim(A\cup B)=\sim A\cap\sim B$$

$$\sim(A\cap B)=\sim A\cup\sim B$$

$$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$$

$$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$$

集合恒等式(关于$\varnothing$与E)

- 零律(dominance laws)

$$A\cup E=E$$

$$A\cap\varnothing=\varnothing$$

- 同一律(identity laws)

$$A\cup\varnothing=A$$

$$A\cap E=A$$

集合恒等式(关于∅,E)

- 排中律(excluded middle)

$$A \cup \sim A = E$$

- 矛盾律(contradiction)

$$A \cap \sim A = \varnothing$$

- 全补律

$$\sim \varnothing = E$$

$$\sim E = \varnothing$$

集合恒等式(关于-)

- 补交转换律(difference as intersection)

$$A-B=A\cap\sim B$$

集合恒等式(推广到集族)

- 分配律

$$B \cup (\bigcap\{A_\alpha\}_{\alpha\in S}) = \bigcap_{\alpha\in S}(B \cup A_\alpha)$$

$$B \cap (\bigcup\{A_\alpha\}_{\alpha\in S}) = \bigcup_{\alpha\in S}(B \cap A_\alpha)$$

- 德●摩根律

$$\sim(\bigcup\{A_\alpha\}_{\alpha\in S}) = \bigcap_{\alpha\in S}(\sim A_\alpha)$$

$$\sim(\bigcap\{A_\alpha\}_{\alpha\in S}) = \bigcup_{\alpha\in S}(\sim A_\alpha)$$

$$B-(\bigcup\{A_\alpha\}_{\alpha\in S}) = \bigcap_{\alpha\in S}(B - A_\alpha)$$

$$B-(\bigcap\{A_\alpha\}_{\alpha\in S}) = \bigcup_{\alpha\in S}(B - A_\alpha)$$

对偶(dual)原理

- 对偶式(dual): 一个集合关系式, 如果只含有$\cap$, $\cup$, ~, $\varnothing$, E, =, $\subseteq$, 那么, 同时把$\cup$与$\cap$互换, 把$\varnothing$与E互换, 把$\subseteq$与$\supseteq$互换, 得到的式子称为原式的对偶式.
- 对偶原理: 对偶式同真假. 或者说, 集合恒等式的对偶式还是恒等式.

集合运算性质的一些重要结果

$A\cap B\subseteq A$，$A\cap B\subseteq B$ (6.24)

$A\subseteq A\cup B$，$B\subseteq A\cup B$ (6.25)

$A-B\subseteq A$ (6.26)

$A-B=A\cap\sim B$ (6.27)

$A\cup B=B \Leftrightarrow A\subseteq B \Leftrightarrow A\cap B=A \Leftrightarrow A-B=\varnothing$ (6.28)

$A\oplus B=B\oplus A$ (6.29)

$(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$ (6.30)

$A\oplus\varnothing=A$ (6.31)

$A\oplus A=\varnothing$ (6.32)

$A\oplus B=A\oplus C \Rightarrow B=C$ (6.33)

对偶原理(举例)

- 分配律

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

- 排中律

$$A \cup \sim A = E$$

- 矛盾律

$$A \cap \sim A = \varnothing$$

对偶原理(举例、续)

- 零律

$$A \cup E = E$$

$$A \cap \varnothing = \varnothing$$

- 同一律

$$A \cup \varnothing = A$$

$$A \cap E = A$$

对偶原理(举例、续)

- $A \cap B \subseteq A$

  $A \cup B \supseteq A$

- $\varnothing \subseteq A$

  $E \supseteq A$

集合恒等式证明(方法)

- 逻辑演算法:

  利用逻辑等值式和推理规则

- 集合演算法:

  利用集合恒等式和已知结论

逻辑演算法的格式

题目：$A=B$

证明：$\forall x$,

$x \in A$

$\Leftrightarrow$ …… ……

$\Leftrightarrow x \in B$

所以 $A=B$

或证 $P \subseteq Q \land Q \subseteq P$

题目：$A \subseteq B$

证明：$\forall x$,

$x \in A$

$\Rightarrow$ … …

$\Rightarrow x \in B$

所以 $A \subseteq B$

集合演算法的格式

题目：A＝B

证明：A

＝ …… ……

＝ B

所以 A＝B

题目：A⊆B

证明：A

⊆ … … …

⊆ B

所以 A⊆B

分配律(证明)

- $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

证明: $\forall x,\ \ x\in A\cup(B\cap C)$

$\Leftrightarrow x\in A \vee x\in(B\cap C)$ ($\cup$定义)

$\Leftrightarrow x\in A \vee (x\in B \wedge x\in C)$ ($\cap$定义)

$\Leftrightarrow (x\in A\vee x\in B)\wedge(x\in A\vee x\in C)$ (命题逻辑分配律)

$\Leftrightarrow (x\in A\cup B)\wedge(x\in A\cup C)$ ($\cup$定义)

$\Leftrightarrow x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$ ($\cap$定义)

$\therefore A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

零律(证明)

- $A \cap \varnothing = \varnothing$

证明: $\forall x,\ x \in A \cap \varnothing$

$\Leftrightarrow x \in A \land x \in \varnothing$ ($\cap$定义)

$\Leftrightarrow x \in A \land 0$ ($\varnothing$定义)

$\Leftrightarrow 0$ (命题逻辑零律)

$\therefore A \cap \varnothing = \varnothing$

排中律(证明)

- $A\cup\sim A = E$

证明: $\forall x,\ \ x\in A\cup\sim A$

$\Leftrightarrow x\in A \vee x\in\sim A$ (∪定义)

$\Leftrightarrow x\in A \vee x\notin A$ (~定义)

$\Leftrightarrow x\in A \vee \neg x\in A$ (∉定义)

$\Leftrightarrow 1$ (命题逻辑排中律)

$\therefore\ A\cup\sim A = E$

德摩根律(证明)

即：$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

证明: $\forall x,\quad x\in A-(B\cup C)$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin (B\cup C)$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge\neg(x\in(B\cup C))$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge\neg(x\in B\vee x\in C)$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge\neg(x\in B)\wedge\neg(x\in C)$

$\Leftrightarrow (x\in A\wedge\neg(x\in B))\wedge(x\in A\wedge\neg(x\in C))$

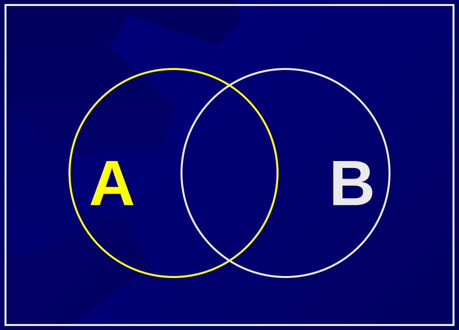
$\Leftrightarrow (x\in A\wedge x\notin B)\wedge(x\in A\wedge x\notin C)$

$\Leftrightarrow x\in(A-B)\wedge x\in(A-C)$

$\Leftrightarrow x\in(A-B)\cap(A-C)$

所以 $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

吸收律(证明)



- $A \cup (A \cap B) = A$

证明: $A \cup (A \cap B)$

$= (A \cap E) \cup (A \cap B)$ (同一律)

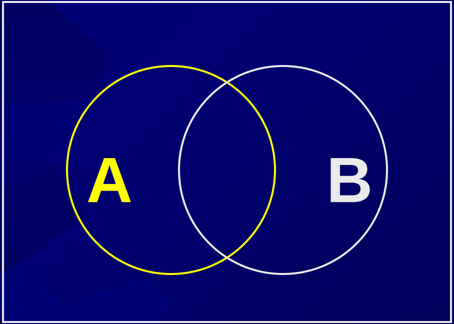
$= A \cap (E \cup B)$ (分配律)

$= A \cap E$ (零律)

$= A$ (同一律)

$\therefore A \cup (A \cap B) = A$

吸收律(证明、续)



- $A \cap (A \cup B) = A$

证明: $A \cap (A \cup B)$

$= (A \cap A) \cup (A \cap B)$ (分配律)

$= A \cup (A \cap B)$ (等幂律)

$= A$ (吸收律第一式)

$\therefore A \cap (A \cup B) = A$

例 证明 $(A-B)\cup B=A\cup B$

证明 $(A-B)\cup B$

$=(A\cap\sim B)\cup B$

$=(A\cup B)\cap(\sim B\cup B)$

$=(A\cup B)\cap E$

$=A\cup B$

集合恒等式证明(举例)

- 基本集合恒等式
- 对称差(⊕)的性质
- 集族($\{A_\alpha\}_{\alpha\in S}$)的性质
- 幂集(P( ))的性质

补交转换律

- $A-B = A\cap\sim B$

证明: $\forall x$,

$$
\begin{aligned}
& x\in A-B \\
\Leftrightarrow\ & x\in A \wedge x\notin B \\
\Leftrightarrow\ & x\subseteq A \wedge x\in \sim B \\
\Leftrightarrow\ & x\subseteq A\cap\sim B
\end{aligned}
$$

$\therefore A-B = A\cap\sim B.$ #

德●摩根律的相对形式

- $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$
- $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$

证明: $A-(B\cap C)$

$= A\cap\sim(B\cap C)$ (补交转换律)

$= A\cap(\sim B\cup\sim C)$ (德●摩根律)

$= (A\cap\sim B)\cup(A\cap\sim C)$ (分配律)

$= (A-B)\cup(A-C)$ (补交转换律). #

例 证明命题6.28是真命题。

$$A\cup B=B \Leftrightarrow A\subseteq B \Leftrightarrow A\cap B=A \Leftrightarrow A-B=\varnothing$$

说明 式6.28给出了$A\subseteq B$的另外三种等价的定义，这不仅为证明两个集合之间的包含关系提供了新方法，同时也可以用于集合公式的化简。

证明思路

$$A\cup B=B \Rightarrow A\subseteq B \Rightarrow A\cap B=A \Rightarrow A-B=\varnothing \Rightarrow A\cup B=B$$

证明 $A \cup B = B \Rightarrow A \subseteq B$

对于任意的x，有

$x \in A$

$\Rightarrow x \in A \vee x \in B$

$\Rightarrow x \in A \cup B$

$\Rightarrow x \in B$ （因为$A \cup B = B$）

所以 $A \subseteq B$。

证明　　$A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$

显然有 $A \cap B \subseteq A$，

下面证 $A \subseteq A \cap B$。

对于任意的x，有

$x \in A$

$\Rightarrow x \in A \wedge x \in A$

$\Rightarrow x \in A \wedge x \in B$　　(因为$A \subseteq B$)

$\Rightarrow x \in A \cap B$

所以 $A \subseteq A \cap B$

由集合相等的定义有 $A \cap B = A$。

证明 $A\cap B = A \Rightarrow A - B = \varnothing$

$$
\begin{aligned}
& A - B \\
= \ & A \cap \sim B \\
= \ & (A \cap B) \cap \sim B \qquad \text{(因为} A \cap B = A\text{)} \\
= \ & A \cap (B \cap \sim B) \\
= \ & A \cap \varnothing \\
= \ & \varnothing
\end{aligned}
$$

证明　$A-B=\varnothing \Rightarrow A\cup B=B$。

由 $(A-B)\cup B=A\cup B$ 及 $A-B=\varnothing$ 有

$$
\begin{aligned}
A\cup B &= B\cup(A-B)\\
&= B\cup\varnothing\\
&= B
\end{aligned}
$$

例 化简$((A\cup B\cup C)\cap(A\cup B))-((A\cup(B-C))\cap A)$

解答 因为 $A\cup B\subseteq A\cup B\cup C$，$A\subseteq A\cup(B-C)$，

由式6.28有：

$$((A\cup B\cup C)\cap(A\cup B))-((A\cup(B-C))\cap A)$$

$$=(A\cup B)-A$$

$$=B-A$$

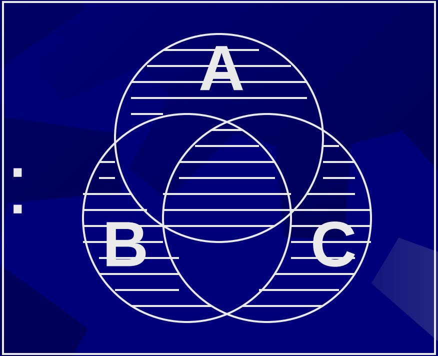
对称差的性质

1. 交换律: $A \oplus B = B \oplus A$
2. 结合律: $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$
3. 分配律: $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$
4. $A \oplus \varnothing = A$, $A \oplus E = \sim A$
5. $A \oplus A = \varnothing$, $A \oplus \sim A = E$

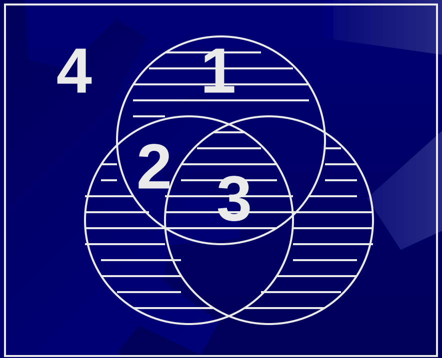
对称差的性质(证明2)

- 结合律: $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$
- 证明思路: 分解成“基本单位”, 例如:

1. $A \cap \sim B \cap \sim C$
2. $A \cap B \cap \sim C$
3. $A \cap B \cap C$
4. $\sim A \cap \sim B \cap \sim C$



$A \oplus B \oplus C$



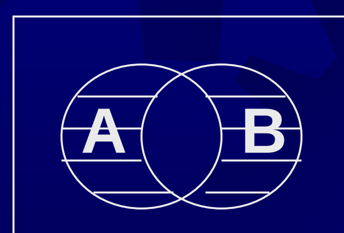
对称差的性质(证明2、续1)

- 结合律: $A\oplus(B\oplus C)=(A\oplus B)\oplus C$
- 证明: 首先,

$A\oplus B = (A-B)\cup(B-A)$ (⊕定义)

$= (A\cap\sim B)\cup(B\cap\sim A)$ (补交转换律)

$= (A\cap\sim B)\cup(\sim A\cap B)$ (∩交换律) (*)



A⊕B

对称差的性质(证明2、续2)

其次，　$A\oplus(B\oplus C)$

$= (A\cap\sim(B\oplus C))\cup(\sim A\cap(B\oplus C))$　　　(*)

$= (A\cap\sim((B\cap\sim C)\cup(\sim \mathbf{B}\cap \mathbf{C})))\cup$

$(\sim A\cap((B\cap\sim C)\cup(\sim \mathbf{B}\cap \mathbf{C})))$　　　(*)

$= (A\cap(\sim(B\cap\sim C)\cap\sim(\sim \mathbf{B}\cap \mathbf{C})))\cup$

$(\sim A\cap((B\cap\sim C)\cup(\sim \mathbf{B}\cap \mathbf{C})))$　(德•摩根律)

对称差的性质(证明2、续3)

$= (A\cap(\sim(B\cap\sim C)\cap\sim(\sim \mathbf{B}\cap\mathbf{C})))\cup$

$(\sim A\cap((B\cap\sim C)\cup(\sim \mathbf{B}\cap\mathbf{C})))$

$= (A\cap(\sim B\cup C)\cap(\mathbf{B}\cup\sim\mathbf{C}))\cup$

$(\sim A\cap((B\cap\sim C)\cup(\sim \mathbf{B}\cap\mathbf{C})))$ (德•摩根律)

$= (A\cap B\cap \mathbf{C})\cup(A\cap\sim B\cap\sim \mathbf{C})$

$\cup(\sim A\cap B\cap\sim C)\cup(\sim A\cap\sim B\cap C)$ (分配律…)

对称差的性质(证明2、续4)

同理，$(A\oplus B)\oplus C$

$= (A\oplus B)\cap\sim C)\cup(\sim(A\oplus B)\cap C)$ (*)

$= (((A\cap\sim B)\cup(\sim A\cap B))\cap\sim C)\cup$

$(\sim((A\cap\sim B)\cup(\sim A\cap B))\cap \mathbf{C})$ (*)

$= (((A\cap\sim B)\cup(\sim A\cap B))\cap\sim C)\cup$

$((\sim(A\cap\sim B)\cap\sim(\sim A\cap B))\cap \mathbf{C})$ (德•摩根律)

对称差的性质(证明2、续5)

$= (((A\cap\sim B)\cup(\sim A\cap B))\cap\sim C)\cup$

$((\sim(A\cap\sim B)\cap\sim(\sim A\cap B))\cap \mathbf{C})$

$= (((A\cap\sim B)\cup(\sim A\cap B))\cap\sim C)\cup$

$((\sim A\cup B)\cap(A\cup\sim B))\cap \mathbf{C})$ (德•摩根律)

$= (A\cap\sim B\cap\sim \mathbf{C})\cup(\sim A\cap B\cap\sim \mathbf{C})\cup$

$(\sim A\cap\sim B\cap C)\cup(A\cap B\cap C)$ (分配律…)

$\therefore\ A\oplus(B\oplus C)=(A\oplus B)\oplus C.$ #

对称差的性质(讨论)

- 有些作者用△表示对称差: $A\oplus B=A\triangle B$
- 消去律: $A\oplus B=A\oplus C \Leftrightarrow B=C$ (习题,19(3))

  $A=B\oplus C \Leftrightarrow B=A\oplus C \Leftrightarrow C=A\oplus B$
- 对称差与补: $\sim(A\oplus B) = \sim A\oplus B = A\oplus\sim B$

  $A\oplus B = \sim A\oplus\sim B$
- 问题: $A\oplus B\oplus C=\sim A\oplus\sim B\oplus\sim C$？

对称差的性质(讨论、续)

- 如何把对称差推广到n个集合:

$$A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus \ldots \oplus A_n = ?$$

- $\forall x,\quad x \in A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus \ldots \oplus A_n$

  $\Leftrightarrow$ x恰好属于$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$中的奇数个

- 特征函数表达: $\chi_{A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n}(x)$

$= \chi_{A_1}(x) + \chi_{A_2}(x) + \ldots + \chi_{A_n}(x)$ (mod 2)

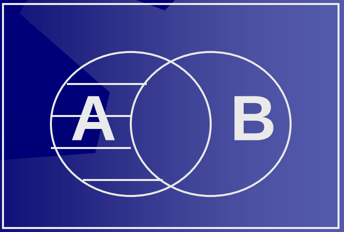
$= \chi_{A_1}(x) \oplus \chi_{A_2}(x) \oplus \ldots \oplus \chi_{A_n}(x)$

((mod 2),$\oplus$,都表示模2加法,即相加除以2取余数)

特征函数与集合运算:

- $\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x)\bullet\chi_B(x)$
- $\chi_{\sim A}(x) = 1-\chi_A(x)$
- $\chi_{A-B}(x) = \chi_{A\cap\sim B}(x)=\chi_A(x)\bullet(1-\chi_B(x))$
- $\chi_{A\cup B}(x) = \chi_{(A-B)\cup B}(x)$

  $= \chi_A(x)+\chi_B(x)-\chi_A(x)\bullet\chi_B(x)$



- $\chi_{A\oplus B}(x) = \chi_A(x)+\chi_B(x) \pmod 2$

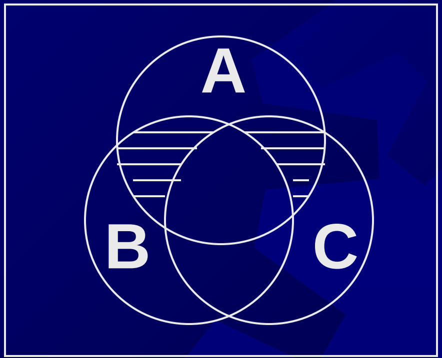
  $= \chi_A(x)\oplus\chi_B(x)$

对称差的性质(讨论、续)

- 问题: ~~A⊕B⊕C = ~A⊕~B⊕~C ?~~
  答案: $A \oplus B \oplus C = \sim(\sim A \oplus \sim B \oplus \sim C)$
  $= \sim(A \oplus B \oplus \sim C) = A \oplus \sim B \oplus \sim C$
- $A \oplus B \oplus C \oplus D = \sim A \oplus \sim B \oplus \sim C \oplus \sim D$
  $= A \oplus \sim B \oplus C \oplus \sim D = \sim(\sim A \oplus \sim B \oplus C \oplus \sim D)$
  $= \ldots$
- $A = \sim(\sim A)$

对称差的性质(证明3)

- 分配律: $A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$
- 证明



$A\cap(B\oplus C)$

$$A\cap(B\oplus C)$$
$$= A\cap((B\cap\sim C)\cup(\sim B\cap C))$$
$$= (A\cap B\cap\sim C)\cup (A\cap\sim B\cap C)$$

对称差分配律(证明3、续)

(续) $(A\cap B)\oplus(A\cap C)$

$= ((A\cap B)\cap\sim(A\cap C))\cup(\sim(A\cap B)\cap(A\cap C))$

$=((A\cap B)\cap(\sim A\cup\sim C))\cup((\sim A\cup\sim B)\cap(A\cap C))$

$=(A\cap B\cap\sim C)\cup(A\cap\sim B\cap C)$

$\therefore A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$. #

对称差分配律(讨论)

- $A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$ √
- $A\cup(B\oplus C)=(A\cup B)\oplus(A\cup C)$?
- $A\oplus(B\cap C)=(A\oplus B)\cap(A\oplus C)$?
- $A\oplus(B\cup C)=(A\oplus B)\cup(A\oplus C)$?

例如 设 **$A=\{1,2,3\}$,$B=\{1,2,4\}$,$C=\{1,3,5\}$,则有**

$B\oplus C=\{2,3,4,5\}$, $A\cup(B\oplus C)=\{1,2,3,4,5\}$

$A\cup B=\{1,2,3,4\}$,$A\cup C=\{1,2,3,5\}$

$(A\cup B)\oplus(A\cup C)=\{4,5\}$

即有 $A\cup(B\oplus C)\neq(A\cup B)\oplus(A\cup C)$

$A\oplus B=\{3,4\}$, $A\oplus B=\{2,5\}$, $(A\oplus B)\cap(A\oplus C)=\varnothing$

$B\cap C=\{1\}$, $A\oplus(B\cap C)=\{2,3\}$

所以 $A\oplus(B\cap C)\neq(A\oplus B)\cap(A\oplus C)$

$(A\oplus B)\cup(A\oplus C)=\{2,3,4,5\}$, $B\cup C=\{1,2,3,4,5\}$

$A\oplus(B\cup C)=\{4,5\}$

所以 $A\oplus(B\cup C)\neq(A\oplus B)\cup(A\oplus C)$

例题 已知$A\cup B=A\cup C$且$A\cap B=A\cap C$，是否有$B=C$,若有证明之，若没有，举出反例说明之。

解 由$A\cup B=A\cup C$且$A\cap B=A\cap C$可得出$B=C$,下面我们用来两种方法来证明之。

方法1 由$A\cup B=A\cup C$且$A\cap B=A\cap C$可得出

$$(A\cup B)-(A\cap B)=(A\cup C)-(A\cap C)$$

$$\Leftrightarrow A\oplus B=A\oplus C$$

$$\Leftrightarrow A\oplus(A\oplus B)=A\oplus(A\oplus C)$$

$$\Leftrightarrow (A\oplus A)\oplus B=(A\oplus A)\oplus C$$

$$\Leftrightarrow \varnothing\oplus B=\varnothing\oplus C$$

$$\Leftrightarrow B=C$$

方法2

$B=B\cup(A\cap B)$ 吸收律

$=B\cup(A\cap C)$ $A\cap B=A\cap C$

$=(A\cup B)\cap(B\cup C)$ 分配律

$=(A\cup C)\cap(B\cup C)$ $A\cup C=A\cup B$

$=(A\cap B)\cup C$ 分配律

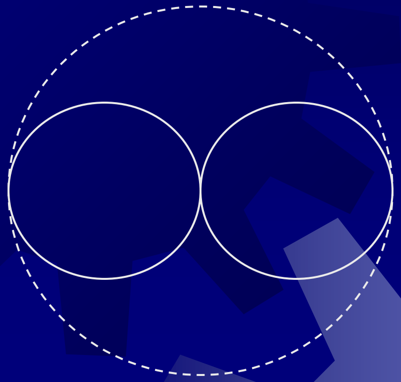
$=(A\cap C)\cup C$ $A\cap B=A\cap C$

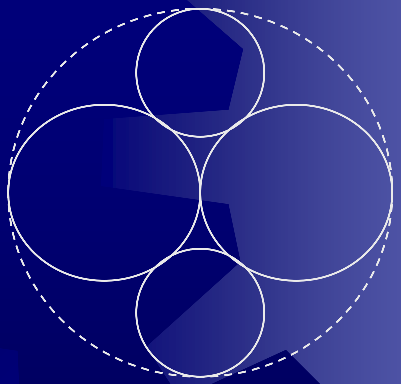
$=C$ 吸收律

集族的性质

设$\mathcal{A}$,$\mathcal{B}$为**集族**, 则

- 1. $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}\Rightarrow\bigcup\mathcal{A}\subseteq\bigcup\mathcal{B}$
- 2. $\mathcal{A}\in\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{A}\subseteq\bigcup\mathcal{B}$
- 3. $\mathcal{A}\neq\varnothing\wedge\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}\Rightarrow\bigcap\mathcal{B}\subseteq\bigcap\mathcal{A}$
- 4. $\mathcal{A}\in\mathcal{B}\Rightarrow\bigcap\mathcal{B}\subseteq\mathcal{A}$
- 5. $\mathcal{A}\neq\varnothing\Rightarrow\bigcap\mathcal{A}\subseteq\bigcup\mathcal{A}$





集族的性质(证明1)

- $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \Rightarrow \cup\mathcal{A} \subseteq \cup\mathcal{B}$

证明: $\forall x$,

$x \in \cup\mathcal{A}$

$\Leftrightarrow \exists A(A \in \mathcal{A} \wedge x \in A)$ $(\cup\mathcal{A}$定义$)$

$\Rightarrow \exists A(A \in \mathcal{B} \wedge x \in A)$ $(\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B})$

$\Leftrightarrow x \in \cup\mathcal{B}$ $(\cup\mathcal{B}$定义$)$

$\therefore \cup\mathcal{A} \subseteq \cup\mathcal{B}$. #

集族的性质(证明2)

- $\mathcal{A}\in\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}\subseteq\bigcup\mathcal{B}$

证明: $\forall x$,

$$x\in\mathcal{A}$$

$\Rightarrow \quad \mathcal{A}\in\mathcal{B}\wedge x\in\mathcal{A} \qquad$ ($\mathcal{A}\in\mathcal{B}$, 合取)

$\Rightarrow \exists A(A\in\mathcal{B}\wedge x\in A) \qquad$ (EG)

$\Leftrightarrow x\in\bigcup\mathcal{B}$

$\therefore \mathcal{A}\subseteq\bigcup\mathcal{B}$. #

集族的性质(证明3)

- $\mathcal{A}\neq\varnothing \land \mathcal{A}\subseteq\mathcal{B} \Rightarrow \cap\mathcal{B}\subseteq \cap\mathcal{A}$

说明: 若约定$\cap\varnothing=E$, 则$\mathcal{A}\neq\varnothing$的条件可去掉.

证明: $\forall x$,

$$x\in\cap\mathcal{B} \Leftrightarrow \forall y(\, y\in\mathcal{B}\rightarrow x\in y\,)$$

$$\Rightarrow \forall y(\, y\in\mathcal{A}\rightarrow x\in y\,) \qquad (\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B})$$

$$\Leftrightarrow x\in\cap\mathcal{A}$$

$$\therefore\ \cap\mathcal{B}\subseteq\cap\mathcal{A}\,. \qquad \#$$

集族的性质(证明4)

- $\mathcal{A} \in \mathcal{B} \Rightarrow \cap\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$

证明: $\forall x$,

$x \in \cap\mathcal{B} \Leftrightarrow \forall y(\, y \in \mathcal{B} \rightarrow x \in y \,)$

$\Rightarrow \mathcal{A} \in \mathcal{B} \rightarrow x \in \mathcal{A}$ (UI)

$\Rightarrow x \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A} \in \mathcal{B}$)

$\therefore \cap\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$. #

集族的性质(证明5)

- $\mathcal{A}\neq\varnothing \Rightarrow \cap\mathcal{A} \subseteq \cup\mathcal{A}$

说明: $\mathcal{A}\neq\varnothing$的条件不可去掉!

证明: $\mathcal{A}\neq\varnothing \Rightarrow \exists y(y\in\mathcal{A})$, 设 $A\in\mathcal{A}$.

$\forall x,\quad x\in\cap\mathcal{A} \Leftrightarrow \forall y(\, y\in\mathcal{A} \rightarrow x\in y\,)$

$\Rightarrow A\in\mathcal{A} \rightarrow x\in A \Rightarrow x\in A \qquad (A\in\mathcal{A})$

$\Rightarrow A\in\mathcal{A} \wedge x\in A \Rightarrow \exists y(\, y\in\mathcal{A} \wedge x\in y)$

$\Leftrightarrow x\in \cup\mathcal{A}$

$\therefore \cap\mathcal{A} \subseteq \cup\mathcal{A}$. #

幂集的性质

1. $A \subseteq B \Leftrightarrow P(A) \subseteq P(B)$
2. $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$
3. $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$
4. $P(A-B) \subseteq (P(A)-P(B)) \cup \{\varnothing\}$

幂集的性质(证明1)

- $A \subseteq B \Leftrightarrow P(A) \subseteq P(B)$

证明: $(\Rightarrow)$ $\forall x$,

$$
\begin{aligned}
& x \in P(A) \\
\Leftrightarrow\ & x \subseteq A \\
\Rightarrow\ & x \subseteq B \qquad (A \subseteq B) \\
\Leftrightarrow\ & x \in P(B) \\
\therefore\ & P(A) \subseteq P(B)
\end{aligned}
$$

幂集的性质(证明1、续)

- $A \subseteq B \Leftrightarrow P(A) \subseteq P(B)$

证明(续): ($\Leftarrow$) $\forall x$,

$$x \in A$$

$$\Leftrightarrow \{x\} \in P(A)$$

$$\Rightarrow \{x\} \in P(B) \qquad (P(A) \subseteq P(B))$$

$$\Leftrightarrow x \in B$$

$\therefore$ $A \subseteq B$. #

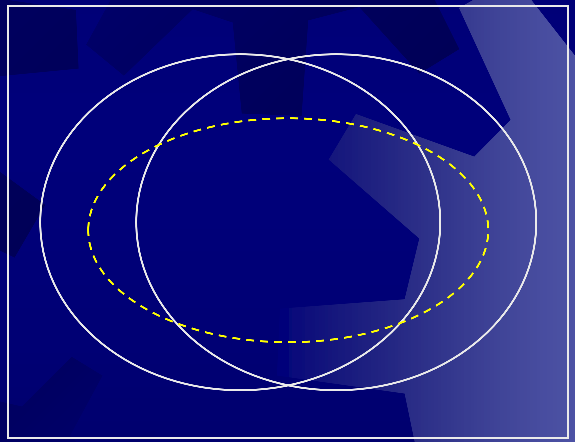
幂集的性质(证明2)

- $P(A)\cup P(B) \subseteq P(A\cup B)$

证明: $\forall x$,

$$
\begin{aligned}
& x\in P(A)\cup P(B) \\
\Leftrightarrow\ & x\in P(A)\vee x\in P(B) \\
\Leftrightarrow\ & x\subseteq A\vee x\subseteq B \\
\Rightarrow\ & x\subseteq A\cup B \\
\Leftrightarrow\ & x\in P(A\cup B)
\end{aligned}
$$

$\therefore\ P(A)\cup P(B) \subseteq P(A\cup B)$



幂集的性质(证明2、续)

- $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$

讨论：给出反例, 说明等号不成立:

$A=\{1\}$, $B=\{2\}$, $A \cup B=\{1,2\}$,

$P(A)=\{\varnothing,\{1\}\}$, $P(B)=\{\varnothing,\{2\}\}$,

$P(A \cup B)= \{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$

$P(A) \cup P(B) \subseteq \{\varnothing,\{1\},\{2\}\}$

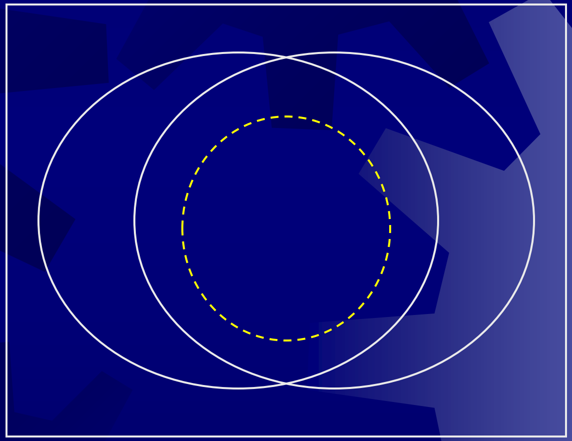
此时, $P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$. #

幂集的性质(证明3)

- $P(A)\cap P(B) = P(A\cap B)$

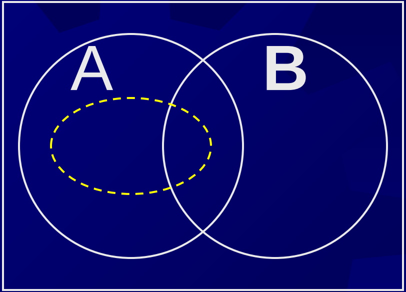
证明: $\forall x$,

$$
\begin{aligned}
& x\in P(A)\cap P(B) \\
\Leftrightarrow\ & x\in P(A) \wedge x\in P(B) \\
\Leftrightarrow\ & x\subseteq A \wedge x\subseteq B \\
\Leftrightarrow\ & x\subseteq A\cap B \\
\Leftrightarrow\ & x\in P(A\cap B)
\end{aligned}
$$



$\therefore\ P(A)\cap P(B) = P(A\cap B)$. #

幂集的性质(证明4)



- $P(A-B) \subseteq (P(A)-P(B)) \cup \{\varnothing\}$

证明: $\forall x$，分两种情况，(1) $x=\varnothing$，这时

$x \in P(A-B)$ 并且 $x \in (P(A)-P(B)) \cup \{\varnothing\}$

(2) $x \neq \varnothing$，这时

$x \in P(A-B) \Leftrightarrow x \subseteq A-B \Rightarrow x \subseteq A \wedge x \not\subseteq B$

$\Leftrightarrow x \in P(A) \wedge x \notin P(B) \Leftrightarrow x \in P(A)-P(B)$

$\therefore P(A-B) \subseteq (P(A)-P(B)) \cup \{\varnothing\}$.　　#

集合运算的优先级

- 分三级：第一级最高，依次降低
- 第一级：补~，幂P()
- 第二级：广义并∪，广义交∩
- 第三级：并∪，交∩，相对补-，对称差⊕
- 同一级：用括号表示先后顺序

集合论悖论

- 罗素悖论(Russell’s paradox)：

$$S = \{ x \mid x \notin x \}$$

$$S \in S \ ?$$

$$S \in S \Rightarrow S \notin S$$

$$S \notin S \Rightarrow S \in S$$

总结

- 集合恒等式
- 集合恒等式的证明
- 集合论悖论

学习要求

- 熟练掌握集合的子集、相等、空集、全集、幂集等概念及其符号化表示
- 熟练掌握集合的交、并、（相对和绝对）补、对称差、广义交、广义并的定义及其性质
- 掌握集合的文氏图的画法及利用文氏图解决有限集的计数问题的方法
- 牢记基本的集合恒等式（等幂律、交换律、结合律、分配律、德·摩根律、收律、零律、同一律、排中律、矛盾律、余补律、双重否定律、补交转换律）
- 准确地用逻辑演算或利用已知的集合恒等式或包含式证明新的等式或包含式

典型题

- 判断元素与集合的隶属关系以及集合之间的包含关系
- 集合的基本运算题
- 有关集合运算性质的分析题
- 集合相等或者包含的证明题
- 有穷集合的计数问题

典型例题一

判断下列命题是否为真

(1) $\{x\} \subseteq \{x\}$

(2) $\{x\} \in \{x\}$

(3) $\{x\} \in \{x,\{x\}\}$

(4) $\{x\} \subseteq \{x,\{x\}\}$

(5) $x \in \{x\} - \{\{x\}\}$

(6) $x \subseteq \{x\} \cup x$

(7) 若$x \in A$，$A \in P(B)$，则 $x \in P(B)$

(8) 若$x \subseteq A$，$A \subseteq P(B)$，则 $x \subseteq P(B)$

答案

(1) 真

(2) 假

(3) 真

(4) 真

(5) 真

(6) 真

(7) 假

(8) 真

典型例题一的分析

- 判断元素a与集合A的隶属关系是否成立的基本方法：把a作为一个整体，检查它在A中是否出现，注意这里的a可能是集合表达式。
- 判断集合包含$A \subseteq B$一般可以使用以下四种方法：
  - 若A、B是用枚举方式定义的，依次检查A的每个元素是否在B中出现。
  - 若A、B是用谓词法定义的，且A、B中元素性质分别为P和Q，那么"如果P则Q"意味着 $A \subseteq B$，"P当且仅当Q"意味着$A = B$。
  - 通过集合运算判断$A \subseteq B$，即$A \cup B = B$，$A \cap B = A$，$A - B = \varnothing$3个等式中有一个为真，则$A \subseteq B$。
  - 可以通过文氏图判断集合的包含（不是证明）。

典型例题二

判断以下命题的真假

(1) $A\cap(B-C)=(A\cap)-(A\cap C)$

(2) $(A-B)\cap(B-A)=\varnothing$

(3) $A-(B\cup C)=(A-B)\cup C$

(4) $\sim(A-B)=\sim(B-A)$

(5) $\sim(A\cap B)\subseteq A$

(6) $(A\cap B)\cup(B-A)\subseteq A$

(7) $A\cup B=A \Leftrightarrow B=\varnothing$

答案

(1) 真

(2) 真

(3) 假

(4) 假

(5) 假

(6) 假

(7) 假