§5 微积分基本定理

一、积分上限函数及其导数

二、再说牛顿—莱布尼茨公式

三、定积分的计算

上页 下页 返回

一、积分上限函数及其导数

设函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上连续，并且设 x 为 $[a,b]$上的一点， 考察定积分

$$\int_a^x f(x)dx = \int_a^x f(t)dt$$

如果上限 x 在区间$[a,b]$上任意变动，则对于每一个取定的 x 值，定积分有一个对应值，所以它在$[a,b]$上定义了一个函数，

记 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt.$ 积分上限函数

上页 下页 返回

积分上限函数的性质

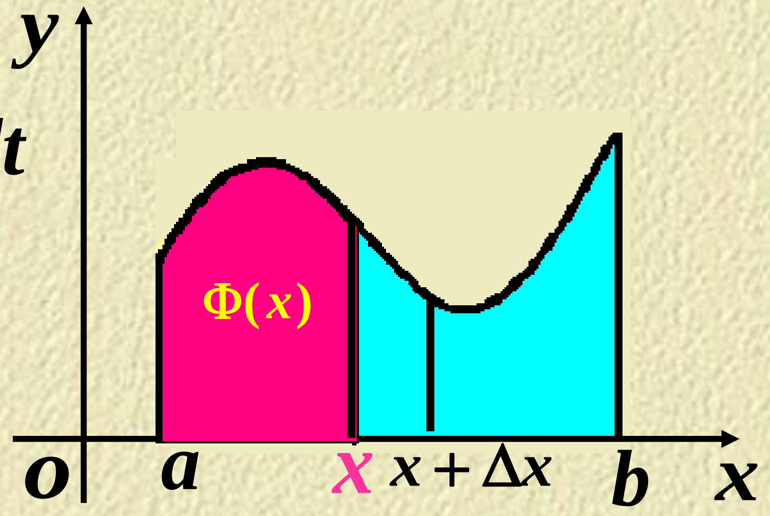
微积分基本定理

定理 9. 9 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则积分上限的函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上具有导数，且它的导数是 $\Phi'(x)=\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)\qquad(a\le x\le b)$

证 $\Phi(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt$

$$\Delta\Phi=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)$$

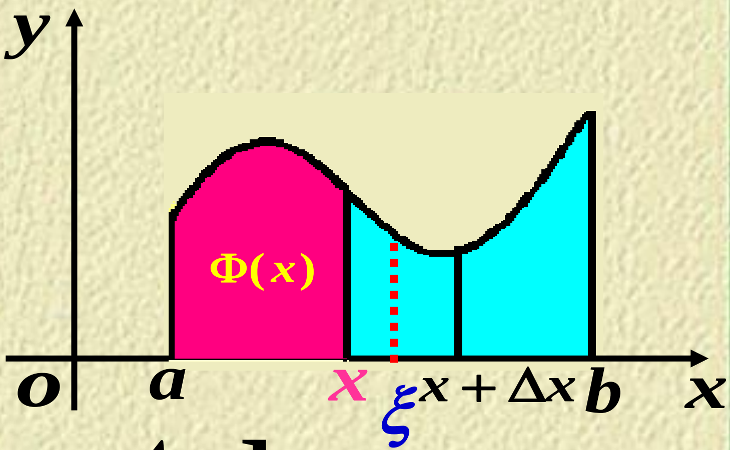
$$=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt$$



上页 下页 返回

$$= \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt$$

$$= \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt,$$



由积分中值定理可得

$$\Delta\Phi = f(\xi)\Delta x, \xi \in [x, x+\Delta x],$$

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = f(\xi), \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(\xi)$$

$$\Delta x \to 0, \xi \to x, \therefore \quad \Phi'(x) = f(x).$$

上页 下页 返回

*下面着重研究变上限定积分的求导.

设$f(x)$连续,$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$,

则$\Phi'(x)=f(x)$.

若$u(x)$可微,则$\int_a^{u(x)} f(t)dt$可微,且

$$\left(\int_a^{u(x)} f(t)dt\right)'=\left(\int_a^{u} f(t)dt\right)'_u\cdot(u(x))'_x$$

$$=f[u(x)]u'(x)$$

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt,\Phi'(x)=f(x).$$

$u(x)$可微,

$$\int_a^{u(x)} f(t)dt=\Phi(u),u=u(x).$$

$$\left(\int_a^{u(x)} f(t)dt\right)'=\Phi'(u)\cdot u'_x$$

$$=f\left[u(x)\right]u'(x)$$

上页 下页 返回

设$f(x)$连续，则$\dfrac{d}{db}\left(\int_a^b f(x)dx\right)=f(b)$,

$\dfrac{d}{dx}\left(\int_a^b f(x)dx\right)=0$, $\dfrac{d}{da}\left(\int_a^b f(x)dx\right)=-f(a)$,

$\dfrac{d}{dx}\left(\int_a^x xf(x)dx\right)=\dfrac{d}{dx}\left(\int_a^x tf(t)dt\right)=xf(x)$,

$\dfrac{d}{dx}\left(\int_a^x xf(t)dt\right)=\dfrac{d}{dx}\left(x\int_a^x f(t)dt\right)=\int_a^x f(t)dt+xf(x)$,

$$\left(\int_a^x (x-t)f(t)dt\right)_x'=\left(x\int_a^x f(t)dt-\int_a^x tf(t)dt\right)_x'$$

$$=\int_a^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=\int_a^x f(t)dt.$$

例1.设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续,且$f(x)>0$.

求证:$F(x)=\dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$在$(0,+\infty)$内单调增加.

证明 $\because \left(\int_0^x tf(t)dt\right)'=xf(x)$,

$$\therefore F'(x)=\frac{xf(x)\int_0^x f(t)dt-f(x)\int_0^x tf(t)dt}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2},$$

$$F'(x)=\frac{xf(x)\int_0^x f(t)dt-f(x)\int_0^x tf(t)dt}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2}$$

$$=\frac{f(x)\int_0^x (x-t)f(t)dt}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2},$$

$\because x>0$时$f(x)>0$, $0\le t\le x$, 故$(x-t)f(t)\ge 0$,

$\therefore \int_0^x f(t)dt\ge 0$, $\int_0^x (x-t)f(t)dt\ge 0$,

$\therefore x>0$时$F'(x)\ge 0\Rightarrow F(x)\nearrow(0,+\infty)$.

定理9.10（原函数存在定理）

如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则积分上限的函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ 就是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数.

定理的重要意义：

（1）肯定了连续函数的原函数是存在的.

（2）揭示了积分学中的定积分与原函数之间的 联系.

上页 下页 返回

二、再说牛顿—莱布尼茨公式

定理 9.1′（牛顿—莱布尼茨公式/微积分基本定理）

如果$F(x)$是连续函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的一个原函数，则$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

证 $\because$ 已知$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，

又$\because$ $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$也是$f(x)$的一个原函数，

$\therefore F(x) - \Phi(x) = C \qquad x \in [a,b]$

上页 下页 返回

令$x = a \Rightarrow F(a) - \Phi(a) = C,$

$\because \quad \Phi(a) = \int_a^a f(t)dt = 0 \Rightarrow F(a) = C,$

$\because \quad F(x) - \int_a^x f(t)dt = C,$

$\therefore \quad \int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a),$

令$x = b \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$

牛顿—莱布尼茨公式

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = \left[F(x)\right]_a^b$$

微积分基本公式表明：

一个连续函数在区间$[a,b]$上的定积分等于它的任意一个原函数在区间$[a,b]$上的增量.

求定积分问题转化为求原函数的问题.

上页 下页 返回

有了 牛顿—莱布尼茨公式后，

积分中值定理

$$\int_a^b f(x)dx == F(b) - F(a)$$

微分中值定理

$$\|$$

$$\|$$

$$\boxed{f(\xi)(b-a)}$$

$$\boxed{F'(\xi)(b-a)}$$

$$\boxed{(a<\xi<b)}$$

定积分中值定理 与

微分中值定理 合二为一！

小 结

1.积分上限函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$

2.积分上限函数的导数 $\Phi'(x)=f(x)$

3.微积分基本公式 $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$

牛顿—莱布尼茨公式沟通了微分学与积分学之间的关系。

练习题（一）

1. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\int_0^x e^{t^2}dt)^2}{\int_0^x e^{2t^2}dt}$；　(2) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(\int_0^x e^{t^2}dt)^2}{\int_0^x e^{2t^2}dt}$.

2. 设 $f(x)$为连续函数，证明：

$$\int_0^x f(t)(x-t)dt = \int_0^x (\int_0^t f(u)du)dt \quad .$$

上页　下页　返回

3. 设 $f(x)$在$[a, b]$上连续且 $f(x) > 0$,

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + \int_b^x \frac{dt}{f(t)}$$,证明:

（1）、 $F'(x) \geq 2$;

（2）、方程$F(x) = 0$在(a, b)内有且仅有一个根 .

上页 下页 返回

4.设函数$f(x)$和$g(x)$在$[a,b]$上连续,

证明:(1).若在$[a,b]$上$f(x)\geq 0$且$\int_a^b f(x)dx=0$,

则在$[a,b]$上 $f(x)\equiv 0$;

(2).若在$[a,b]$上$f(x)\geq 0$且不恒等于零,

则$\int_a^b f(x)dx>0$;

(3).若在$[a,b]$上$f(x)\leq g(x)$且$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$,

则在$[a,b]$上 $f(x)\equiv g(x)$.

(1). 设$f(x)$在$[a,b]$上连续且非负,

且$\int_a^b f(x)dx = 0$,则在$[a,b]$上 $f(x) \equiv 0$;

证明$\because$ 在$[a,b]$上函数$f(x)$连续、非负,

$$\therefore \forall u \in [a,b], 0 \le \int_a^u f(x)dx \le \int_a^b f(x)dx = 0,$$

$$\therefore \forall u \in [a,b], \int_a^u f(x)dx \equiv 0,$$

$$\therefore \forall u \in [a,b], \left(\int_a^u f(x)dx\right)' = f(u) = 0.$$

上页 下页 返回

三、定积分的计算

1. 积分换元公式

2. 分部积分公式

上页 下页 返回

微积分基本公式表明：一个连续函数在区间[a,b]上的定积分等于它的任意一个原函数在区间［a,b］上的增量。而在求原函数时，我们常常要使用换元积分法和分部积分法。那么在定积分的计算中如果要使用换元积分法和分部积分法，那么就会有一些新的问题需要我们的注意。

1.定积分换元公式

定理9.12（定积分换元公式）

设(1).函数$f(x)$在$[a,b]$上连续;

(2).$x=\varphi(t)$在$t\in[\alpha,\beta]$（或$[\beta,\alpha]$）时严格单调且有连续的导数;

(3).当$t\in[\alpha,\beta]$（或$[\beta,\alpha]$）时$x=\varphi(t)$的值域为$[a,b]$,且$\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b.$

则有 $\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$

证明 设$F(x)$是$f(x)$的一个原函数,

$$\therefore \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

$$\because \Phi(t) = F[\varphi(t)],$$

$$\Phi'(t) = \frac{dF}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = f(x)\varphi'(t) = f[\varphi(t)]\varphi'(t),$$

$\therefore \Phi(t)$是$f[\varphi(t)]\varphi'(t)$的一个原函数,

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha),$$

$$\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$$

$$\Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a),$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$$

应用定积分换元公式时应注意

(1).用$x=\varphi(t)$把变量x变为新的积分变量t时,积分的上下限也要作相应的改变.当$\alpha>\beta$时,结论也是成立的.其实,α或β甚至$\to\infty$都是可能的,也是可行的.

因此,定积分换元时要恪守一个原则:

<u>上限对上限</u>　　<u>下限对下限</u>

(2).在求得$f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)$的原函数$\Phi(t)$后,直接计算$\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)$即可,不必象不定积分中那样再把$\Phi(t)$变换成$x$的函数.

例2. $\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx,$

令$\sqrt{e^x-1}=t, e^x=t^2+1$

$$x=\ln(t^2+1), dx=\frac{2t}{t^2+1}dt,$$

$$x=0\leftrightarrow t=0, x=\ln 2\leftrightarrow t=1,$$

原式$=\int_0^1\frac{2t^2}{t^2+1}dt=2\int_0^1\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt$

$$=2\left(t-\arctan t\right)\Big|_0^1=2-\frac{\pi}{2}$$

上页 下页 返回

例3.(1).计算$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx,(a>0)$

解 令$x=a\sin t, dx=a\cos t dt,$

$x=0$时$t=0, x=a$时取$t=\frac{\pi}{2},$

[作三角代换时,一般选择所取三角函数对应的反三角函数的值域内的数值]

$$I=\int_0^{\pi/2}|a\cos t|a\cos t dt=\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{1}{4}\pi a^2$$

$$x \in [-1,1],$$

$$\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \operatorname{arccos} x \in [0,\pi]$$

$$x \in (-\infty,+\infty),$$

$$\arctan x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \operatorname{arccot} x \in (0,\pi)$$

$$(1).I=\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx, a>0.$$

令 $x=a\cos t, dx=-a\sin t dt,$

$x=0$时$t=\dfrac{\pi}{2}, x=a$时取$t=0,$

$$I=\int_{\pi/2}^{0}\left|a\sin t\right|\left(-a\sin t\right)dt=\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/2}\left(1-\cos 2t\right)dt$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{1}{4}\pi a^2.$$

上页 下页 返回

$$(1).\ I=\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx,\ (a>0)$$

解 令 $x=a\sin t,\ dx=a\cos t\,dt,$

$x=0$时$t=\pi,\ x=a$时取$t=\dfrac{\pi}{2}.$

$$\therefore I=\int_{\pi}^{\pi/2} a^2|\cos t|\cos t\,dt=\frac{a^2}{2}\int_{\pi/2}^{\pi}(1+\cos 2t)\,dt$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{\pi/2}^{\pi}=\frac{1}{4}\pi a^2.$$

上页 下页 返回

例3.(2).计算$I=\int_0^a \frac{1}{x+\sqrt{a^2-x^2}}dx,\left(a>0\right)$

解　令$x=a\sin t, dx=a\cos t dt,$

$x=0$时$t=0, x=a$时取$t=\frac{\pi}{2},$

$$I=\int_0^{\pi/2}\frac{a\cos t}{a\sin t+\sqrt{a^2(1-\sin^2 t)}}dt=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\cos t+\sin t}{\sin t+\cos t}+\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left(1+\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+\left(\frac{1}{2}\ln\left|\sin t+\cos t\right|\right)_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{4}.$$

$$\int\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt=\int\frac{\cos t}{\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}dt\xlongequal{令t+\frac{\pi}{4}=s}\cdots$$

或者$\displaystyle\int\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{\cos t+\sin t}{\sin t+\cos t}+\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\int dt+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(\sin t+\cos t\right)}{\sin t+\cos t}$$

下面的做法有一点技巧性：

$$\int_0^a \frac{1}{x+\sqrt{a^2-x^2}}dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt$$

$$\overset{t=\frac{\pi}{2}-s}{=\!=\!=\!=}\int_{\pi/2}^{0} \frac{\sin s}{\sin s+\cos s}(-ds) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin s}{\sin s+\cos s}ds$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin s}{\sin s+\cos s}ds\right)$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \left(\frac{\cos t}{\sin t+\cos t} + \frac{\sin t}{\sin t+\cos t}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{4}.$$

例4. 试问下述求定积分的解法是否正确? 如有错误, 请给出正确的做法.

计算 $\int_{-\sqrt{2}}^{-2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

解　令$x=\sec t$,则当$t\in\left[\frac{2\pi}{3},\frac{3\pi}{4}\right]$时

$x\in\left[-2,-\sqrt{2}\right]$, $dx=\tan t\sec t dt$,

$$\int_{-\sqrt{2}}^{-2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{\sec t\tan t}\sec t\tan t dt$$

$$=\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}} dt=\frac{\pi}{12}.$$

解 计算是错误的.正确的解法是

$$x=\sec t, t=\frac{2\pi}{3}\to x=-2,$$

$$t=\frac{3\pi}{4}\to x=-\sqrt{2},\qquad dx=\tan t\sec t dt,$$

$$\int_{-\sqrt{2}}^{-2}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{1}{\sec t\left|\tan t\right|}\sec t\tan t dt$$

$$=\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{1}{\sec t\tan t}\sec t\tan t dt=\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}}dt=\frac{\pi}{12}.$$

上页 下页 返回

例5.设$f(x)$在$[-a,a]$上连续,则有

奇零

偶倍

(1). $f(x)$为奇函数, $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$;

(2). $f(x)$为偶函数, $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$.

证明 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$,

在$\int_{-a}^{0} f(x)dx$中令 $x = -t$,

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{a}^{0} f(-t)(-dt) = \int_{0}^{a} f(-t)dt,$$

$$\therefore \int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a}[f(x) + f(-x)]dx,$$

上页 下页 返回

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a}[f(x)+f(-x)]dx,$$

(1).若$f(x)$是奇函数, $f(-x)=-f(x)$,

则$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a}[f(x)+f(-x)]dx = 0.$

(2).若$f(x)$是偶函数, $f(-x)=f(x)$,

则$\int_{-a}^{a} f(x)dx =$

$$= \int_{0}^{a}[f(x)+f(-x)]dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$$

例5.(2).计算$I=\int_{-2}^{2}\left(x^3\cos\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{4-x^2}dx$

解 $I=\int_{-2}^{2}x^3\cos\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}dx+\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}dx$

函数$x^3\cos\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}$是$[-2,2]$上连续的奇函数,

$\therefore \int_{-2}^{2}x^3\cos\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}dx=0.$

$\sqrt{4-x^2}$是$[-2,2]$上连续的偶函数,$y=\sqrt{4-x^2}$表示上半圆周,由积分的几何意义知

$\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}dx=2\int_{0}^{2}\sqrt{4-x^2}dx=2\pi,$

$\therefore I=\pi.$

$$I=\int_{-2}^{2}\left(x^{3}\cos\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{4-x^{2}}dx$$

$$=\int_{-2}^{2}x^{3}\cos\frac{x}{2}\sqrt{4-x^{2}}dx+\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^{2}}dx=0+\pi=\pi.$$

例5.(3).计算$I=\int_{-2}^{2}\left[x^{2022}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+\sqrt{4-x^2}\right]dx$

解 虽然用分部积分法可以求出$x^{2022}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

的原函数,$\left[\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]'=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdots$

但可注意到$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$是一个奇函数,

$$\ln\left(\sqrt{1+(-x)^2}-x\right)=\ln\frac{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x}=-\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right),$$

再由积分的几何意义立得

$$I=0+\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}dx=2\pi.$$

上页 下页 返回

我们知道,若函数$f(x)$在$[-a,a]$上有定义,则

$f(x)$可表示为一个奇函数与一个偶函数之和,

$$f(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)].$$

因此有

命题.设函数$f(x)$在$[-a,a]$上连续,

则$\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_{0}^{a}[f(x)+f(-x)]dx.$

此结论告诉我们,在对称区间$[-a,a]$上计算

定积分时,若函数没有奇偶性我们可以制造

奇偶性.

上页 下页 返回

例6.设$f(x)$是以l为周期的连续函数,

证明:$I=\int_a^{a+l} f(x)dx$的值与a无关.

证明 $\because$ $f(x)$是以l为周期的连续函数,

$$\int_l^{a+l} f(x)dx \xlongequal{x=l+t} \int_0^a f(l+t)dt = \int_0^a f(t)dt,$$

$$\therefore I = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^l f(x)dx + \int_l^{a+l} f(x)dx$$

$$= \int_a^0 f(x)dx + \int_0^l f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$$

$$= \int_0^l f(x)dx.$$ 结论得证!

上页 下页 返回

又一证明：

将$\int_a^{a+l} f(x)dx$视作是a的函数，

$$\Phi(a)=\int_a^{a+l} f(x)dx,$$

$$\Phi'(a)=\left(\int_a^{a+l} f(x)dx\right)'$$

$$= f(a+l)-f(a)\equiv 0,$$

$\therefore \int_a^{a+l} f(x)dx$与$a$无关.

例6.(2).计算 $\int_0^{1011\pi}\sqrt{1+\sin 2x}dx.$

解 $\because \sqrt{1+\sin 2x}$是以$\pi$为周期的连续函数,

$$\therefore \int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\sqrt{1+\sin 2x}dx=\int_0^{\pi}\sqrt{1+\sin 2x}dx$$

$$=\int_0^{\pi}\left|\sin x+\cos x\right|dx=\sqrt{2}\int_0^{\pi}\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|dx$$

$$\overset{x+\frac{\pi}{4}=t}{=\!=\!=\!=}\sqrt{2}\int_{\pi/4}^{5\pi/4}\left|\sin t\right|dt=\sqrt{2}\int_0^{\pi}\left|\sin t\right|dt$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sin t dt=2\sqrt{2}\quad\left(k\in\mathbb{Z}^{+}\right)$$

$$\int_0^{1011\pi}\sqrt{1+\sin 2x}dx$$

$$=\sum_{k=1}^{1011}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\sqrt{1+\sin 2x}dx$$

$$=1011\int_0^{\pi}\sqrt{1+\sin 2x}dx=2022\sqrt{2}.$$

思考练习:

$$(1).\int_0^{2022\pi}\left|\sin x\cos x\right|=?$$

上页 下页 返回

例7.若函数$f(x)$在$[0,1]$上连续.证明:

(1).$\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx$;

(2).$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$.

并由此计算$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

证明 (1).设$x = \frac{\pi}{2} - t \Rightarrow dx = -dt$,

$$x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2},\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0,$$

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx = -\int_{\pi/2}^0 f\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right]dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} f(\cos t)dt = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx \ .$$

(2).设$x = \pi - t \Rightarrow dx = -dt,$

$x = 0 \Rightarrow t = \pi, x = \pi \Rightarrow t = 0,$

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = -\int_{\pi}^0 (\pi - t) f[\sin(\pi - t)]dt$$

$$= \int_0^{\pi} (\pi - t) f(\sin t)dt,$$

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \pi\int_0^{\pi} f(\sin t)dt - \int_0^{\pi} tf(\sin t)dt$$

$$= \pi\int_0^{\pi} f(\sin x)dx - \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx \ ,$$

$$\therefore \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx.$$

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

$$= -\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2 x}d(\cos x)$$

$$= -\frac{\pi}{2}\left[\arctan(\cos x)\right]_0^{\pi} = -\frac{\pi}{2}\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{4}.$$

例7.(2)*.计算$\int_0^{\pi} x\sin^4 x dx$.

用一般的分部积分法求出原函数再求积分值的方法,计算比较麻烦.

由$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$

得$\int_0^{\pi} x\sin^4 x dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \sin^4 x dx$

$$= \frac{\pi}{8}\int_0^{\pi} (1-\cos 2x)^2 dx$$

$$= \frac{\pi}{8}\int_0^{\pi} \left(1-2\cos 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x\right)dx = \frac{3}{16}\pi^2.$$

Addendum.

在定积分计算中,我们常用到下面的“调头变换”(亦称“区间再现”)这一技巧.你可以发现,前面一些问题中所做的变量代换许多都是调头变换.这一方法值得大家细细品味.

命题(调头变换or区间再现)

设$f(x)$是$[a,b]$上的连续函数,则有

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx,$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}\int_a^b \left[f(x)+f(a+b-x)\right]dx.$$

证明:令$a+b-x=t$,则$dx=-dt$,

且 $x=a$时$t=b$, $x=b$时$t=a$.

左$=-\int_b^a f(a+b-t)dt = \int_a^b f(a+b-t)dt=$右.

象 $Sec.9.4/Ex.11.(1)$ 若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上连续的凸函数,求证 : $\int_a^b f(x)dx \geq (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$

证明 $\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}\int_a^b \left[f(x)+f(a+b-x)\right]dx$

$\because$ 函数 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上连续的凸函数,

$$\therefore \frac{1}{2}\left[f(x)+f(a+b-x)\right]$$

$$\geq f\left(\frac{x+(a+b-x)}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

这样一来结论就显然了!

上页 下页 返回

2.分部积分公式

设函数$u(x),v(x)$在上有连续的导数,

则有 $\int_a^b u'v\,dx = [uv]_a^b - \int_a^b uv'\,dx.$

推导:

$$(uv)' = u'v + uv' \Rightarrow \int_a^b (uv)'dx = [uv]_a^b,$$

$$\Rightarrow [uv]_a^b = \int_a^b u'v\,dx + \int_a^b uv'\,dx,$$

$$\therefore \int_a^b u'v\,dx = [uv]_a^b - \int_a^b uv'\,dx.$$

例8.计算 $I=\int_0^{\pi/4}\dfrac{x}{1+\cos 2x}dx.$

解 $\because \displaystyle\int\frac{2x}{1+\cos 2x}dx=\int\frac{x}{\cos^2 x}dx$

$$=\int x\sec^2 x dx=\int x(\tan x)' dx$$

$$=x\tan x-\int\tan x dx$$

$$=x\tan x-\ln|\cos x|+C,$$

$$\therefore I=\frac{1}{2}\Big[x\tan x-\ln|\cos x|\Big]_0^{\pi/4}=\frac{\pi}{8}-\frac{\ln 2}{4}.$$

例8.(2).设$f(x)=\int_1^{x^2}\frac{\sin t}{t}dt$, 求$\int_0^1 xf(x)dx$.

解 $\because \frac{\sin t}{t}$的原函数不是初等函数,虽不能求出

$f(x)$,但求$f'(x)$是简单的,故用分部积分法:

$$\int_0^1 xf(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)d(x^2)$$

$$=\frac{1}{2}\left[x^2 f(x)\right]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 df(x)$$

$$=\frac{1}{2}f(1)-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 f'(x)dx$$

$$\because\ f(x)=\int_1^{x^2}\frac{\sin t}{t}dt,\ f(1)=\int_1^1\frac{\sin t}{t}dt=0,$$

$$f'(x)=\frac{\sin x^2}{x^2}\cdot 2x=\frac{2\sin x^2}{x},$$

$$\therefore \int_0^1 xf(x)dx=\frac{1}{2}f(1)-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 f'(x)dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1 2x\sin x^2 dx=-\frac{1}{2}\int_0^1 \sin\left(x^2\right)d\left(x^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\cos\left(x^2\right)\right]_0^1=\frac{1}{2}(\cos 1-1).$$

例8.(3).设$f''(x)$在$[0,2]$上连续,且$f(0)=1$,

$f(2)=3$, $f'(2)=5$. 求$\int_0^1 xf''(2x)dx$.

解 为避免出错,最好一开始就作

变量代换!

$$\int_0^1 xf''(2x)dx \overset{2x=t}{=\!=\!=\!=} \frac{1}{4}\int_0^2 tf''(t)dt$$

$$=\frac{1}{4}\left[tf'(t)\right]_0^2-\frac{1}{4}\int_0^2 f'(t)dt$$

$$=\frac{1}{4}\left[tf'(t)\right]_0^2-\frac{1}{4}f(t)\Big|_0^2=2.$$

上页 下页 返回

例9*.推导积分公式

$$I_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n xdx=\int_0^{\pi/2}\cos^n xdx$$

$$=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{为正偶数}\\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}, & n\text{为大于1的正奇数}\end{cases}$$

证明 设$v=\sin^{n-1}x, du=\sin xdx$,

$dv=(n-1)\sin^{n-2}x\cos xdx, u=-\cos x$,

上页 下页 返回

$$I_n = \underbrace{\left[-\sin^{n-1}x\cos x\right]_0^{\pi/2}}_{0} + (n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}x\underbrace{\cos^2 x}_{1-\sin^2 x}dx$$

$$I_n = (n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}x\,dx - (n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx$$

$$= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n\ ,$$

$I_n = \dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$,积分$I_n$关于下标$n$的递推公式

$I_{n-2} = \dfrac{n-3}{n-2}I_{n-4},\cdots$,直至下标减至0或1为止.

$$\left.\begin{aligned} I_{2m} &= \frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdot\cdots\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}I_0, \\ I_{2m+1} &= \frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\cdots\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}I_1, \end{aligned}\right\} (m=1,2,\cdots)$$

$$I_0=\int_0^{\pi/2}dx=\frac{\pi}{2}, I_1=\int_0^{\pi/2}\sin x dx=1,$$

于是

$$I_{2m}=\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdot\cdots\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\cdot\frac{\pi}{2},$$

$$I_{2m+1}=\frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\cdots\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}.$$

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$$

$$= \begin{cases} = \dfrac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \cdot \dfrac{\pi}{2}, n = 2m \\ \dfrac{(2m)!!}{(2m+1)!!}, \quad n = 2m+1 \end{cases}.$$

由此可得著名的*Wallis*公式

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left[(2n)!!\right]^2}{(2n-1)!! \cdot (2n+1)!!} = \frac{\pi}{2}.$$

上页 下页 返回

如果我们证明了$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}\sin^n x dx = 0$,那么由

$$I_n = \int_0^{\pi/2}\sin^n x dx = \begin{cases} = \dfrac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, n = 2m \\ \dfrac{(2m)!!}{(2m+1)!!}, \quad n = 2m+1 \end{cases}$$

易得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\dfrac{(2n-1)}{(2n)}\right) = 0.$

$\longrightarrow (P32/Ex.8.(1))$

上页 下页 返回

小结

定积分的换元法

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

定积分的分部积分公式

$$\int_a^b u'vdx = [uv]_a^b - \int_a^b uv'dx$$

（注意与不定积分中换元积分法和分部积分法的区别。）

练 习 题

1. 计算下列定积分

(1) $\displaystyle\int_{\frac{3}{4}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x}-1}$;　　(2) $\displaystyle\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$;

(3) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(x^2\sqrt{1-x^2}+x^3\sqrt{1+x^2}\right)dx$;

(4) $\displaystyle\int_{0}^{2}\max\{x,x^3\}dx$;　　(5) $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{\ln(1+x)}{(2+x)^2}dx$;

(6) $\displaystyle\int_{0}^{\pi}x\cos^4 x\,dx$;

(7) $\displaystyle\int_{0}^{1}e^{2x}\cos x\,dx$;　(8) $\displaystyle\int_{a}^{2a}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}dx\ (a>0)$

2. 设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x}, x\geq 0,\\ \dfrac{1}{1+e^{x}}, x<0,\end{cases}$ 求$\int_0^2 f(x-1)dx$

3. 证明$\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_0^a[f(x)+f(-x)]dx$,

由此计算 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{dx}{1+\sin x}$

4. 计算$\int_0^{2a} x\sqrt{2ax-x^2}dx(a>0)$

1(1) $\int_{\frac{3}{4}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x}-1}$

令$\sqrt{1-x}=t$,则$x=1-t^2, dx=-2tdt$

$\therefore x=\frac{3}{4}, t=\frac{1}{2}; x=1, t=0.$

$$\int_{\frac{3}{4}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x}-1}=\int_{\frac{1}{2}}^{0}\frac{-2t}{t-1}dt=2\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{t-1+1}{t-1}dt$$

上页 下页 返回

1(2) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$;

令$x = \tan t, dx = \sec^2 t dt,$

则$x = 1$时取$t = \frac{\pi}{4}, x = \sqrt{3}$时取$t = \frac{\pi}{3}$.

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sec^2 t dt}{\tan^2 t \cdot |\sec t|}$$

上页 下页 返回

$$1(3)\ \int_{-1}^{1}(x^2\sqrt{1-x^2}+x^3\sqrt{1+x^2})dx;$$

在对称区间上利用被积函数的奇偶性,

$$原 = 2\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx,$$

令$x=\sin t, dx=\cos t dt$,

则$x=0$时取$t=0$, $x=1$时取$t=\dfrac{\pi}{2}$.

$$\int_1^{\sqrt{3}} x^2\sqrt{1-x^2}dx=\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cdot|\cos t|\cos tdt$$

$$=\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos^2 tdt=\frac{1}{8}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 4t)dt$$

上页 下页 返回

1(4) $\int_0^2 \max\{x, x^3\}dx$;

$$\max\{x, x^3\} = \begin{cases} x, 0 \le x < 1 \\ x^3 \quad , \quad x \ge 1 \end{cases}$$

$$\therefore \int_0^2 \max\{x, x^3\}dx = \int_0^1 xdx + \int_1^2 x^3dx$$

$$1(5)\quad \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2+x)^2}dx = \int_0^1 \ln(1+x)\left(\frac{-1}{2+x}\right)' dx$$

$$= -\left[\frac{\ln(1+x)}{2+x}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{2+x}[\ln(1+x)]' dx$$

$$= -\frac{\ln 2}{3} + \int_0^1 \boxed{\frac{1}{2+x}\cdot\frac{1}{1+x}} dx \longrightarrow \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2+x}$$

$$= -\frac{\ln 2}{3} + \left[\ln(1+x) - \ln(2+x)\right]_0^1$$

$$= \frac{5}{3}\ln 2 - \ln 3.$$

1(6) $\int_0^{\pi} x\sin^4 x dx$

由$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$

得$\int_0^{\pi} x\sin^4 x dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \sin^4 x dx$

$= \frac{\pi}{8}\int_0^{\pi} (1-\cos 2x)^2 dx$

$= \frac{\pi}{8}\int_0^{\pi} (1-2\cos 2x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4x)dx = \frac{3}{16}\pi^2$

上页 下页 返回

$$1(8).\int_a^{2a}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}dx(a>0)$$

$$x=a\sec t,x=a,取t=0,x=2a,取t=\frac{\pi}{3},$$

$$\int_a^{2a}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}dx=\int_0^{\pi/3}\frac{a\tan t}{(a\sec t)^4}a\sec t\tan tdt$$

$$=\frac{1}{a^2}\int_0^{\pi/3}\sin^2 t\cos tdt$$

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x}, x\geq 0,\\ \dfrac{1}{1+e^{x}}, x<0,\end{cases}$ $\int_0^2 f(x-1)dx$,

$$\int_0^2 f(x-1)dx \overset{x-1=t}{=\!=\!=} \int_{-1}^1 f(t)dt=\int_{-1}^0 f(t)dt+\int_0^1 f(t)dt$$

$$=\int_{-1}^0 \frac{1}{1+e^t}dt+\int_0^1\frac{1}{1+t}dt=-\int_1^0\frac{1}{1+e^{-s}}ds+\int_0^1\frac{1}{1+t}dt$$

$$=\int_0^1\frac{e^s}{1+e^s}ds+\int_0^1\frac{1}{1+t}dt$$

$$=\ln(1+e^s)\Big|_0^1+\ln(1+t)\Big|_0^1=\ln(1+e)$$

3. 设函数$f(x)$在$[-a,a]$上连续,

证明$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} [f(x)+f(-x)]dx$,

进而计算$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\sin x}$

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx,$$

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx \overset{-x=t}{=\!=\!=} \int_{a}^{0} f(-t)d(-t) = \int_{0}^{a} f(-t)dt = \int_{0}^{a} f(-x)dx,$$

$$\therefore \int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} [f(x)+f(-x)]dx$$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\sin x} = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{1+\sin x} + \frac{1}{1-\sin x} \right) dx$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{2}{1-\sin^2 x} \right) dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x dx = 2\tan x \Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} = 2$$

上页 下页 返回

4. 计算$\int_0^{2a} x\sqrt{2ax - x^2}dx(a>0)$

$$\int_0^{2a} x\sqrt{2ax - x^2}dx = \int_0^{2a} x\sqrt{a^2 - (x-a)^2}dx$$

$$\overset{x-a=t}{=\!=\!=}\int_{-a}^{a}(a+t)\sqrt{a^2 - t^2}dt$$

$$= a\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2 - t^2}dt + \int_{-a}^{a} t\sqrt{a^2 - t^2}dt$$

$$= a\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2 - t^2}dt + 0 = \frac{1}{2}\pi a^3$$