Chap.**01** ***Exercises*:**

***P*09/ 4,5,7;**

***P*15/ 9,12;**

***P*20/ 6,10,11,12;**

***P*21/总练习 1,7,8.**

§1.2 数集·确界原理

一. 区间与邻域

二. 上确界、下确界

一.区间与邻域

1.集合:具有某种特定性质的事物的总体.

组成这个集合的事物称为该集合的元素.

$\rightarrow$ 有限集 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$

$\rightarrow$ 无限集

(1).无限可列集 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$

(2).无限不可列集,如$A = \{x \mid 0 \le x < 1\} = [0,1)$.

若$x \in A$,则必$x \in B$,就说A是B的子集,记作 $A \subset B$.

若$A \subset B$,且$B \subset A$,就称集合A与B相等,记作 $A = B$.

空集$\varnothing$,

约定:空集$\varnothing$为任意集合的子集.

上页 下页 返回

数集分类

自然数集 $\mathbb{N}$, 整数集 $\mathbb{Z}$,

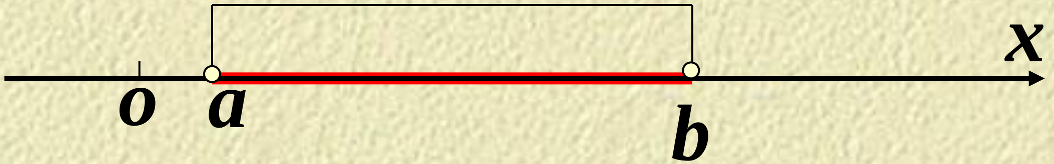
有理数集 $\mathbb{Q}$, 实数集 $\mathbb{R}$

数集关系 $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}, \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}, \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

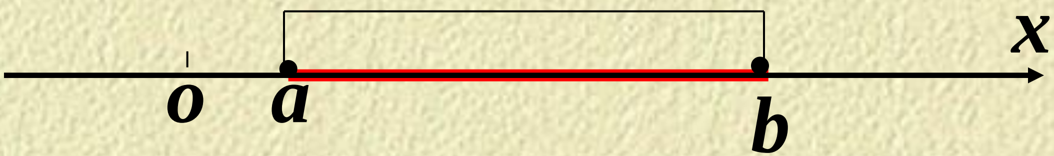
2.区间:是指介于某两个实数之间的全体实数.这两个实数叫做区间的端点.

$\forall a,b \in \mathbb{R}$,且$a<b$.

$\{x \mid a<x<b\}=(a,b)$ 开区间



$\{x \mid a \le x \le b\}=[a,b]$ 闭区间



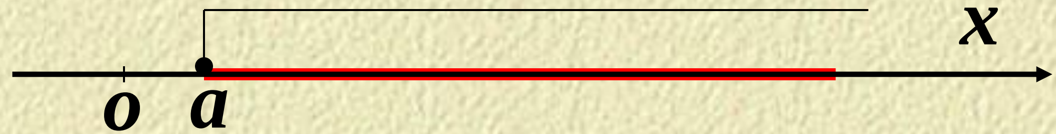
$\{x \mid a \le x<b\}=[a,b)$ 左闭右开区间

$\{x \mid a<x \le b\}=(a,b]$ 左开右闭区间

有限区间

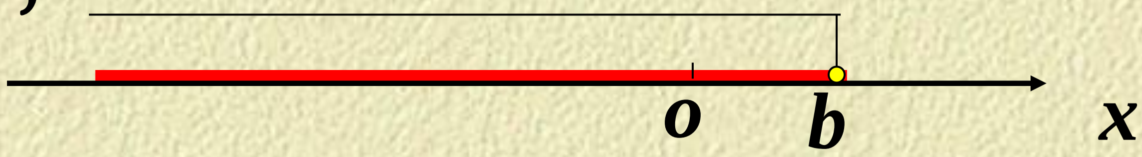
上页 下页 返回

$$[a,+\infty)=\{x \mid a \le x\}$$



无限区间

$$(-\infty,b)=\{x \mid x < b\}$$



区间长度的定义:

两端点间的距离(线段的长度)称为区间的长度.

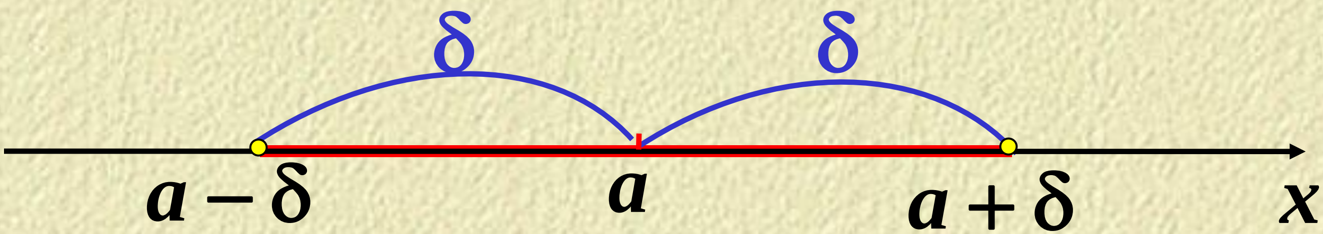
上页 下页 返回

3.邻域：设a与δ是两个实数，且$\delta > 0$.

数集$\left\{ x \middle| \, |x-a| < \delta \right\}$称为点$a$的$\delta$邻域，

点a为该邻域的中心，δ为邻域的半径.

记为$U_\delta(a) = \left\{ x \middle| a-\delta < x < a+\delta \right\}$.



点a的去心δ邻域，记作$U_\delta^0(a)$，

$$U_\delta^0(a) = \left\{ x \middle| \, 0 < |x-a| < \delta \right\}.$$

上页 下页 返回

点a的δ去心邻域$U_{\delta}^{o}(a)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$;

点a的δ右去心邻域$U_{+}^{o}(a)=\{x \mid 0<x-a<\delta\}$;

点a的δ左去心邻域$U_{-}^{o}(a)=\{x \mid -\delta<x-a<0\}$.

设M为正实数,

∞的邻域$U(\infty)=\{x \mid |x|>M\}$;

$+\infty$的邻域$U(+\infty)=\{x \mid x>M\}$;

$-\infty$的邻域$U(-\infty)=\{x \mid x<-M\}$.

二. 有界集 确界原理

有界/无界数集的定义:

数集S有界 $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}^+, \forall x \in S$有$|x| \le M$;

数集S无界 $\Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R}^+, \exists x_0 \in S$有$|x_0| > M$;

数集S有上界 $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in S$有$x \le M$;

数集S无上界 $\Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in S$有$x_0 > M$;

数集S有下界 $\Leftrightarrow \cdots$

数集S无下界 $\Leftrightarrow \cdots$

a,b为有限数,区间$[a,b],(a,b),[a,b),(a,b]$是有界数集,

$(-\infty,+\infty)=\mathbb{R},(-\infty,0)=\mathbb{R}^-,[1,+\infty)$是无界数集.

$E_1=\{y \mid y=\sin x, x\in(-\infty,+\infty)\}$是有界数集,

$E_2=\left\{y \mid y=\dfrac{1}{x}, x\in(0,1)\right\}$是无界数集.

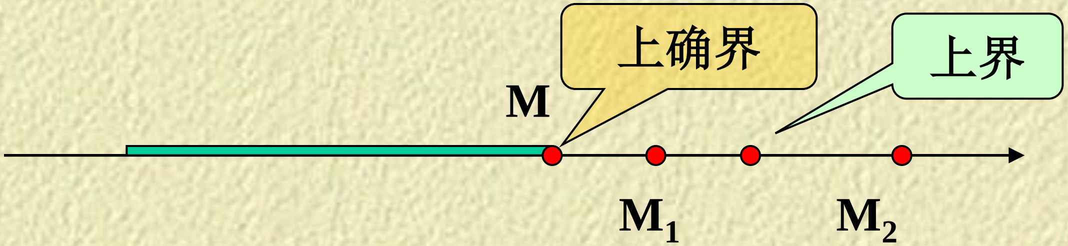
证明 $\forall M>0,\exists\ x=\dfrac{1}{M+1}\in(0,1)$,

$y=\dfrac{1}{x}\in E_2, y=M+1>M$.由定义知$E_2$为无界集.

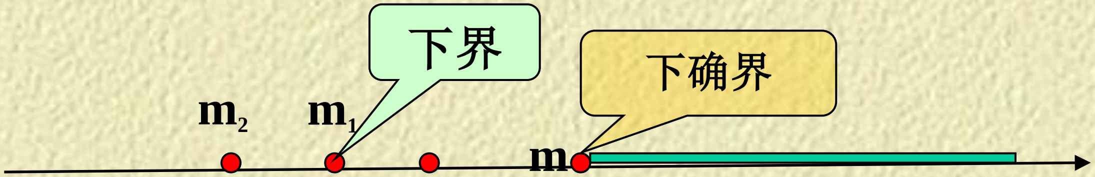
Ex.求证 $E_3=\{y \mid y=x\cos x, x\in\mathbb{R}\}$是无界数集.

4. 确界:

直观解释：若非空数集S有上界，则它有无穷多个上界，其中最小的一个上界称为数集S的上确界(supremum)，记作 supS .



同样，有下界数集S最大的一个下界称为数集S的下确界(infimum)，记作 infS .



上页 下页 返回

确界的精确定义：

定义1. 设S为$\mathbb{R}$的一个子集，若数η满足：

(1). $\forall x \in S$，有$x \le \eta$，即η是S的上界；

(2). $\forall \alpha < \eta, \exists x_0 \in S$，使得$x_0 > \alpha$，即$\eta$是$S$的最小上界，则称数$\eta$是数集$S$的上确界，记作

$$\eta = \sup S.$$

命题1. $\eta = \sup S \Leftrightarrow$

(1). 即η是S的上界；

(2). $\forall \varepsilon > 0, \exists y \in S$，使得$y > \eta - \varepsilon$.

命题1. $\eta = \sup S \Leftrightarrow$

(1). 即η是S的上界;

(2). $\forall \varepsilon > 0, \exists y \in S$,使得$y > \eta - \varepsilon$.

证明 必要性,用反证法.

设(2)不成立,则$\exists \varepsilon_0 > 0$,使得$\forall x \in S$,都有

$x \le \eta - \varepsilon_0$. 这与$\eta$是$S$的上确界矛盾.

充分性,用反证法.

设η不是S的上确界,即$\exists \lambda$是S的上界,且$\lambda < \eta$,

令$\varepsilon = \eta - \lambda > 0$,由(2)知$\exists y \in S$,使得$y > \eta - \varepsilon = \lambda$,

这与λ是S的上界矛盾. 证毕!

定义2. 设S为$\mathbb{R}$的一个子集,若数ξ满足:

(1). $\forall x \in S$,有$x \geq \xi$,即ξ是S的下界;

(2). $\forall \beta > \xi, \exists x_0 \in S$,使得$x_0 < \beta$,即$\xi$是$S$的最大下界,则称数$\xi$是数集$S$的下确界,记作

$$\xi = \inf S.$$

命题2. $\xi = \inf S \Leftrightarrow$

(1). 即ξ是S的下界;

(2). $\forall \varepsilon > 0, \exists y \in S$,使得$y < \xi + \varepsilon$.

由定义1,2可知，设$S \subset \mathbb{R}$,

记$T = \left\{ t \middle| t = -s, \forall s \in S \right\}$,

则$K = \sup S \Leftrightarrow -K = \inf T$

例2. (1).$S_1=\left\{1-\frac{1}{n}, n\in\mathbb{Z}^+\right\}$,

(2).$S_2=\left\{y \mid y=\sin x, x\in(0,\pi)\right\}$,

(3).$S_3=\left\{x \mid x\in(0,1)\cap\mathbb{Q}\right\}$,

(4).$S_4=\left\{\sqrt[n]{n}, n\in\mathbb{Z}^+\right\}$.

问 $\sup S=?\quad \max S=?$

$\inf S=?\quad \min S=?$

上页 下页 返回

$$(1).\ S_1 = \left\{ 1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}^+ \right\},$$

$$(2).\ S_2 = \left\{ y \mid y = \sin x, x \in (0, \pi) \right\},$$

解：(1). $\sup S_1 = 1$, $\max S_1$不存在,

$\inf S_1 = \min S_1 = 0.$

(2). $\sup S_2 = \max S_2 = 1,$

$\inf S_2 = 0$, $\min S_2$不存在.

$(3).S_3=\left\{x\,\middle|\,x\in(0,1)\cap\mathbb{Q}\right\},$

$(4).S_4=\left\{\sqrt[n]{n},n\in\mathbb{Z}^+\right\}.$

解 : $(3).\sup S_3=1,\inf S_3=0,$

$\max S_3$与$\min S_3$都不存在.

$(4).\sup S_4=?\quad \max S_4=?$

$\inf S_4=\min S_4=1.$

命题3 设数集S有上确界,则

$$\eta = \sup S \in S \Leftrightarrow \eta = \max S$$

命题 4：设数集 A 有上（下）确界，则这上（下）确界必是唯一的.

证：设 $\eta = \sup S, \lambda = \sup S$, 且 $\eta \neq \lambda$,

不失一般性，设 $\eta < \lambda$.

则：$\eta = \sup S \Rightarrow \forall x \in S$, 有 $x \leq \eta$;

$\lambda = \sup S \Rightarrow$ 对 $\eta < \lambda, \exists x_0 \in S$,

使得 $x_0 > \eta$, 矛盾！

上页 下页 返回

5. 确界原理：

定理1.(确界原理)

设S为$\mathbb{R}$的一个非空子集,

若S有上界,则S必有上确界;

若S有下界,则S必有下确界.

定理1刻画了实数集的完备性.

上页 下页 返回

确界原理：若非空数集S有上界，则S必有上确界.

证明 不妨设集S含有非负数.

$\because$ 集S有上界，$\therefore \exists$非负整数n，使得

$(a).\forall x \in S, x < n+1;$

$(b).\exists a_0 \in S, a_0 \geq n.$

对$[n, n+1)$10等份，分点为$n.1, n.2, \cdots, n.9.$

则存在$0,1,2,\cdots,9$中的一个数n_1，使得

$$(a).\forall x \in S, x < n.n_1 + \frac{1}{10};$$

$(b).\exists a_1 \in S, a_1 \geq n.n_1 \ .$

再对$\left[n.n_1, n.n_1+\frac{1}{10}\right)$ 10等份,则存在

$0,1,2,\cdots,9$中的一个数n_2,使得

$(a).\forall x \in S, x < n.n_1n_2 + \frac{1}{10^2}$;

$(b).\exists a_2 \in S, a_2 \geq n.n_1n_2$.

这样可以不断地做下去,

上页 下页 返回

$\forall k \in \mathbb{Z}^+, \exists 0,1,2,\cdots,9$中的一个数$n_k$,

使得$(a). \forall x \in S, x < n.n_1 n_2 \cdots n_k + \dfrac{1}{10^k}$;

$(b). \exists a_k \in S, a_k \geq n.n_1 n_2 \cdots n_k$.

上述步骤无限次重复下去,我们得

到一个实数$\eta = n.n_1 n_2 \cdots n_k \cdots$.

可以证明 $\eta = \sup S$.

构造法证明

上页 下页 返回

例3 证明实数具有阿基米德性:

$\forall b>a>0$,要证存在自然数n,使$na>b$.

证明 假设结论不成立,即$\forall n\in \mathbb{Z}^+$, 总有$na\le b$, 那么$\forall n\in \mathbb{Z}^+$, 就有$n\le b/a$,而b/a是一个有限的定值,但$\forall n\in \mathbb{Z}^+$, n的取值可以永无止境,所以假设不成立.

$\forall b>a>0$,所以总存在自然数n,使$na>b$.

但是下面考虑用确界原理来证明命题.

实数有*Archimedes*性：

$$\forall b > a > 0, \exists n \in \mathbb{Z}^+, \text{有} na > b.$$

这儿我们用 确界原理 来证明之.

证法二：用反证法

假设结论不成立,即$\forall n \in \mathbb{Z}^+$,总有$na \le b$.

则数集$E = \{na\}$有上界b,因此有上确界c,使得

$na \le c\,(n = 1, 2, 3, \cdots)$,因而$\forall n \in \mathbb{Z}^+$,有$(n+1)a \le c$,

$\therefore na \le c - a \;\; (n = 1, 2, 3, \cdots)$,而这就表明$c - a$是集

E的上界,这与c是上确界矛盾.

$\therefore \forall b > a > 0, \exists n \in \mathbb{Z}^+$,使得$na > b$.

例4 设 A, B为非空数集,满足: $\forall x \in A, \forall y \in B$有$x \le y$

证明:数集 A有上确界, 数集B有下确界,且$\sup A \le \inf B$

证: 由假设,数集B中任一数 y 都是数集A的上界,

A中任一数 x 都是B的下界,

故由确界原理知,数集A有上确界,数集B有下确界.

$\forall y \in B$, y是数集A的一个上界,而由上确界的定义知

$\sup A$ 是数集A的最小上界, 故有 $\sup A \le y$

而此式又表明数 $\sup A$ 是数集B的一个下界,

故由下确界的定义证得 $\sup A \le \inf B$.

上页 下页 返回

例5.设A,B为非空有界数集,$S=A\cup B$. 求证:

$\sup S=\max\{\sup A,\sup B\},\inf S=\min\{\inf A,\inf B\}$.

证明 由于$S=A\cup B$显然是非空有界数集,

因此S的上、下确界都存在,

$\forall x\in S$,有$x\in A$或$x\in B\Rightarrow x\le\sup A$或$x\le\sup B$,

从而有$x\le\max\{\sup A,\sup B\}$,

$\therefore\sup S\le\max\{\sup A,\sup B\}$;

又$\because\forall x\in A\Rightarrow x\in S$, $\therefore x\le\sup S\Rightarrow\sup A\le\sup S$.

同理又有$\sup B\le\sup S$.

$\therefore\sup S\ge\max\{\sup A,\sup B\}$;

$\therefore\sup S=\max\{\sup A,\sup B\}$.