4-01 连续函数的概念

上页 下页 返回

1. 函数的连续性

在函数的极限部分,我们看到:

$\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$,恰等于函数$x^2$在$x_0 = 2$处的函数值,

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$,但函数$\dfrac{\sin x}{x}$在$x_0 = 0$处没有定义,

对于$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, x \neq 0 \\ 0, \quad x = 0 \end{cases}$而言,$\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x) = 1 \neq \varphi(0)$.

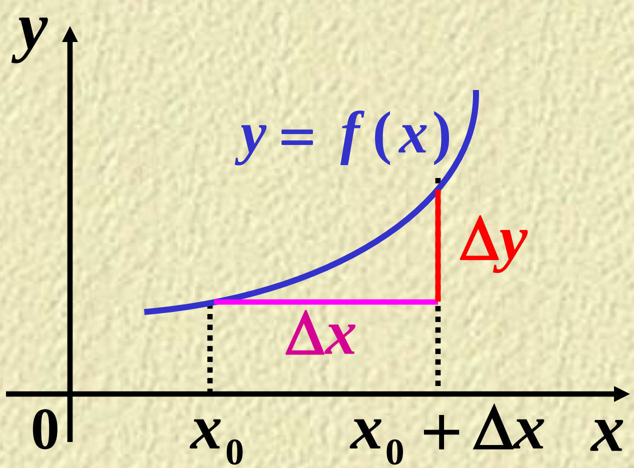
以上各种情形,其实是反映了函数在一点处的连续情况.

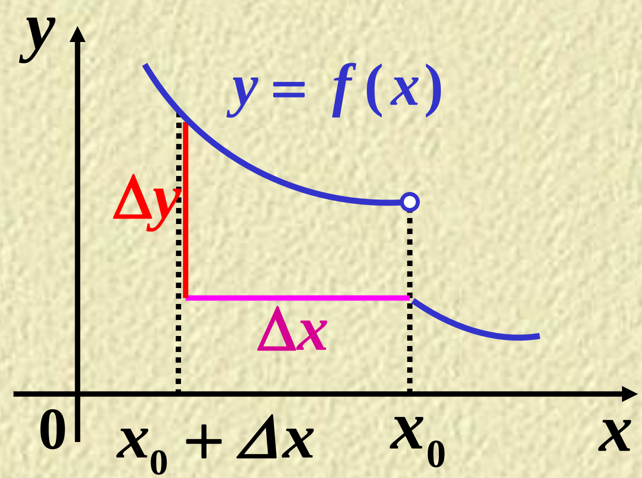
函数的增量

设函数 $f(x)$ 在 $U_\delta(x_0)$ 内有定义,

$\forall\ x \in U_\delta(x_0)$, $\Delta x = x - x_0$, 称为自变量在点 x_0 的增量. $\Delta y = f(x) - f(x_0)$,

称为函数 $f(x)$ 相应于 Δx 的增量.





定义1.设函数$f(x)$在$U_\delta(x_0)$内有定义,

记$\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0 = f(x) - f(x_0)$,

如果 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$,则称函数$f(x)$在点$x_0$处

连续.

稍作变化,等价地有

定义1′.*设函数$f(x)$在$U_\delta(x_0)$内有定义,

如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$,则称函数$f(x)$在

点x_0处连续.

定义1′. 设函数$f(x)$在$U_\delta(x_0)$内有定义,如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

则称函数$f(x)$在点x_0处连续.

定义1″. 设函数$f(x)$在$U_\delta(x_0)$内有定义,函数$f(x)$在点x_0处连续

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall |x - x_0| < \delta,$

$s.t. |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$

上页 下页 返回

单侧连续

(1).若函数$f(x)$在$(a, x_0]$有定义,且

$f(x_0-0)=f(x_0)$,则称$f(x)$在点x_0处左连续;

(2).若函数$f(x)$在$[x_0, b)$有定义,且

$f(x_0+0)=f(x_0)$,则称$f(x)$在点x_0处右连续.

命题1. 函数$f(x)$在x_0处连续$\Leftrightarrow$

函数$f(x)$在x_0处既左连续又右连续.

例1.试证$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0\ , & x=0 \end{cases}$

在$x=0$处连续.

证明 $\because \lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0,$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)= f(0),$

由定义知函数$f(x)$在$x=0$处连续.

例2.讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x+2, & x \ge 0, \\ x-2, & x<0, \end{cases}$ 在 $x=0$

处的连续性.

解 $\because \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x+2)=2 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(x-2)=-2 \end{cases}$

即 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$不存在,

$\therefore$ 函数 $f(x)$在点 $x=0$处不连续.

但 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \ne f(0)$,

习惯上我们称 函数 $f(x)$在点 $x=0$

处 右连续但不左连续.

上页 下页 返回

对于函数

$$f(x)=x^2+2x+4,\ g(x)=\frac{x^3-8}{x-2},$$

我们知道$\lim\limits_{x\to 2} g(x)=\lim\limits_{x\to 2} f(x)=12,$

$f(2)=12$, $g(x)$在$x=2$处没有定义.

于是我们就说:函数$f(x)$在$x=2$处连续,而函数$g(x)$在$x=2$处不连续(或曰间断).

2. 连续函数与连续区间

在区间上每一点都连续的函数,叫做在该区间上的连续函数,或者说函数在该区间上连续.

如果函数在开区间 (a,b)内连续，并且在左端点 $x=a$处右连续，在右端点 $x=b$处左连续，则称函数 $f(x)$在闭区间 $[a,b]$上连续.

比如,任意一个多项式函数在区间 $(-\infty,+\infty)$内都是连续的。

上页 下页 返回

例3.证明函数 $y=\sin x$在区间$(-\infty,+\infty)$内连续.

证明　任取 $x\in(-\infty,+\infty)$,

有界函数与无穷小
量的乘积是无穷小

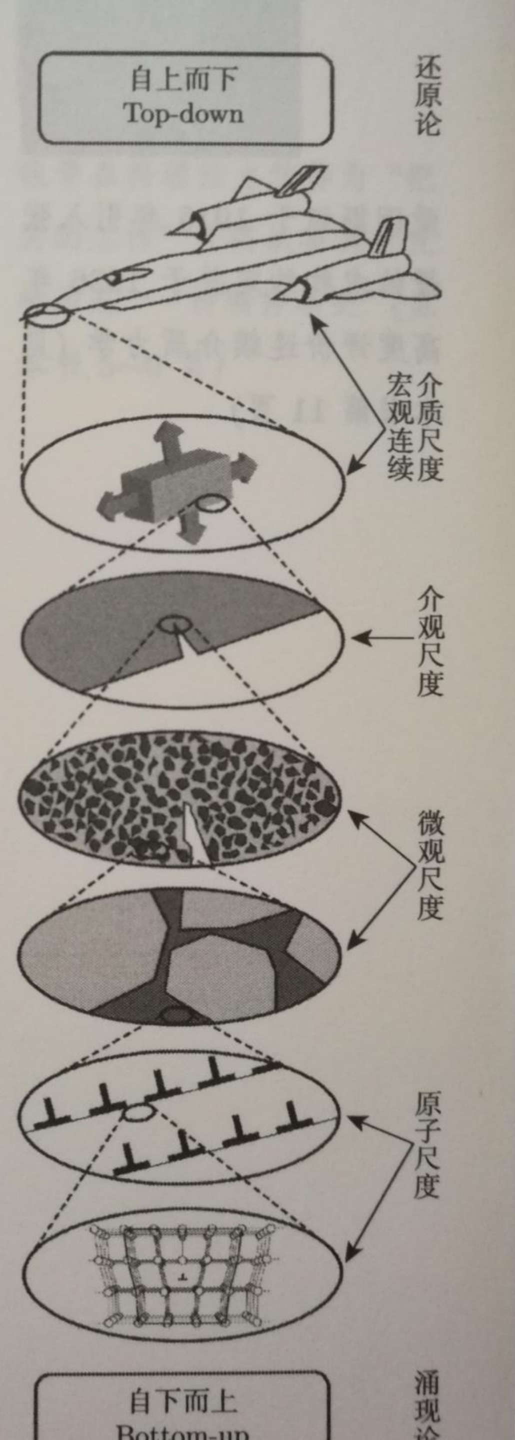
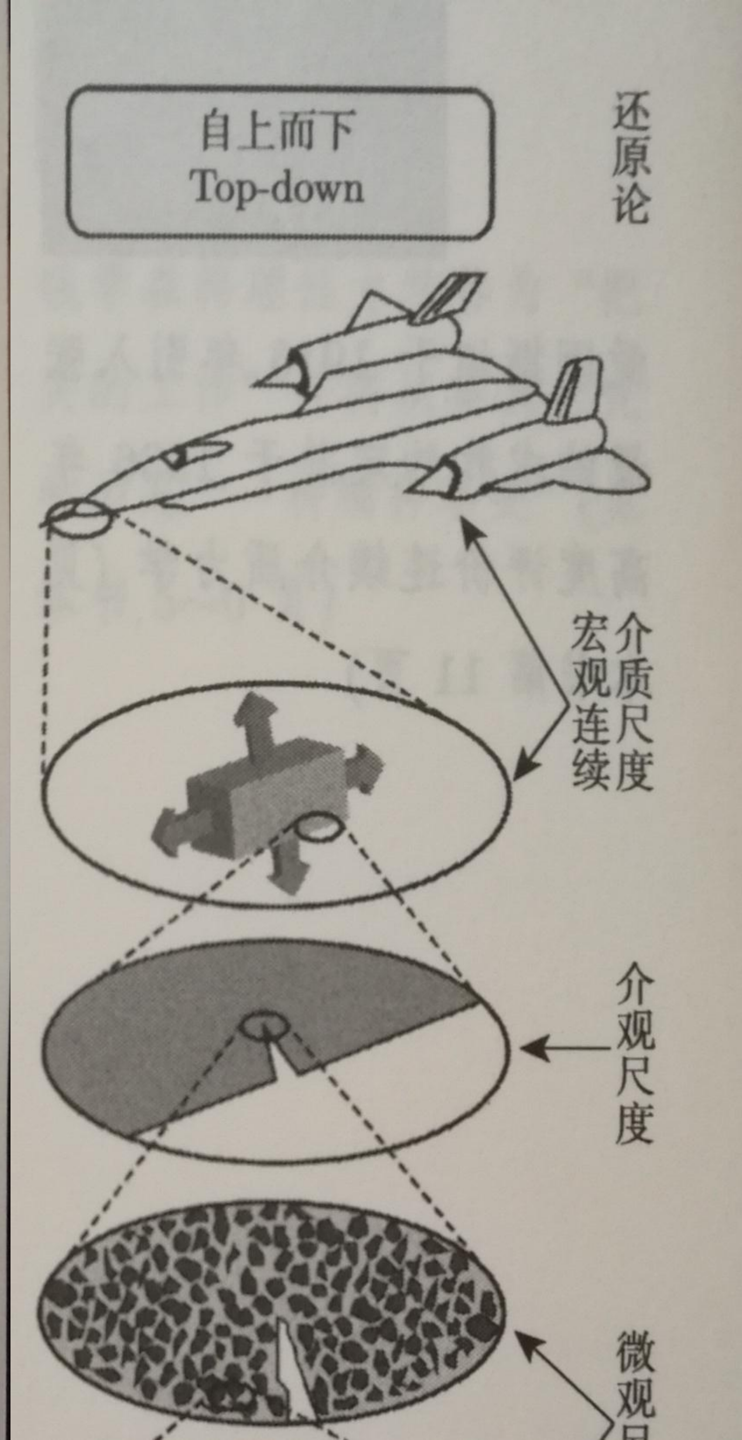
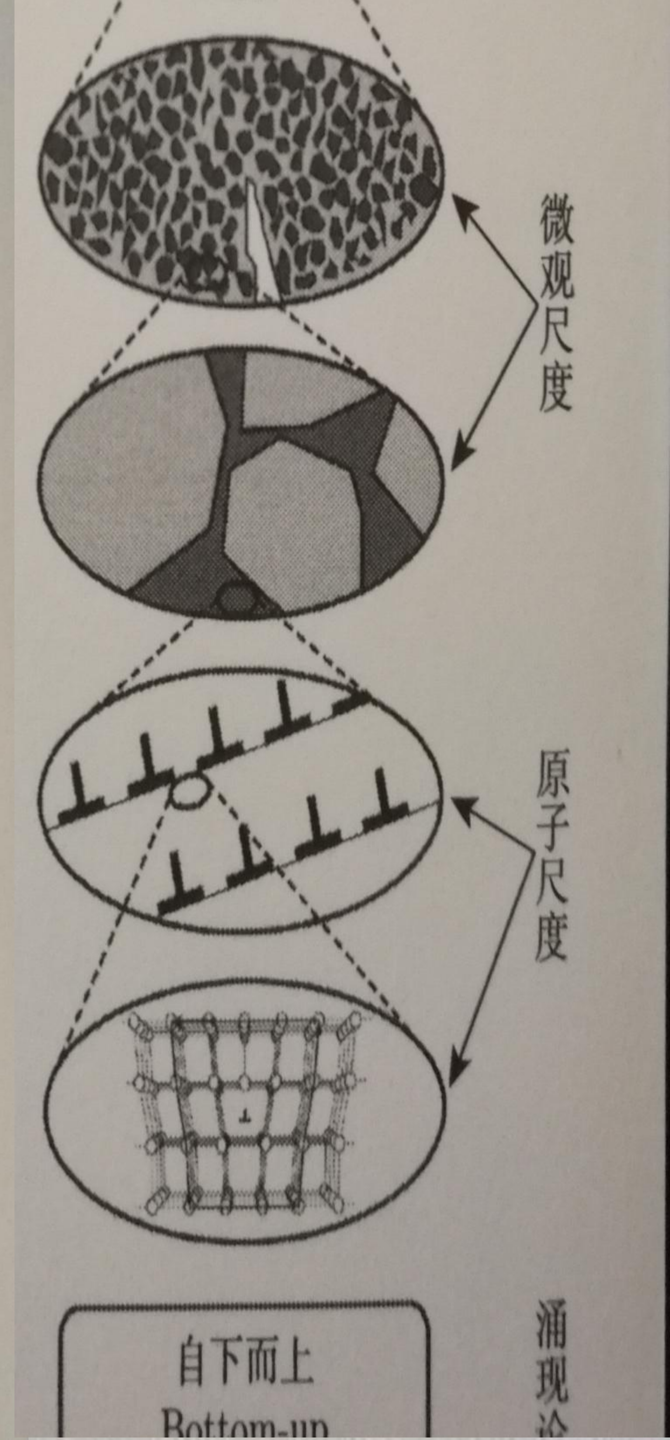
$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

$\because \left|\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right|\le 1$,则 $|\Delta y|\le 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|\le|\Delta x|$.

$\therefore$ 当$\Delta x\to 0$时,$|\Delta x|\to 0\Rightarrow \Delta y\to 0$.

即函数$y=\sin x$对任意$x\in(-\infty,+\infty)$都是连续的.

上页　下页　返回


自上而下
Top-down
还原论
宏观连续介质尺度
介观尺度
微观尺度
原子尺度
自下而上
涌现论

自上而下
Top-down
还原论
宏观连续介质尺度
介观尺度

微观尺度
原子尺度
自下而上

但,数学里的连续性是客观世界中的连续现象的抽象,如宏观层面上的连续介质力学中的连续介质到了微观层面如量子力学中看到的就是由有间隙的粒子构成的.

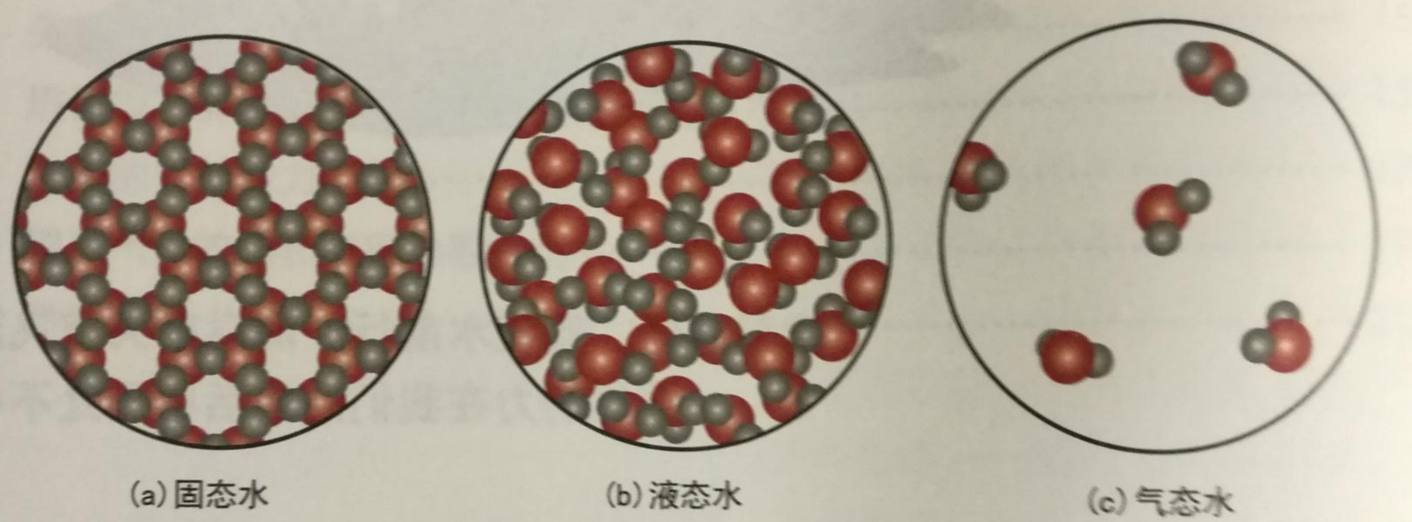


图 1-1　水在三种状态下的分子排列

返回

3. 函数的间断点

函数 $f(x)$在点 x_0处连续必须满足的三个条件：

(1). $f(x)$在点x_0处有定义;

(2). $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在;

(3). $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

如果上述三个条件中只要有一个不满足，则称函数 $f(x)$在点 x_0处不连续(或间断)，并称点 x_0为$f(x)$的不连续点——间断点.

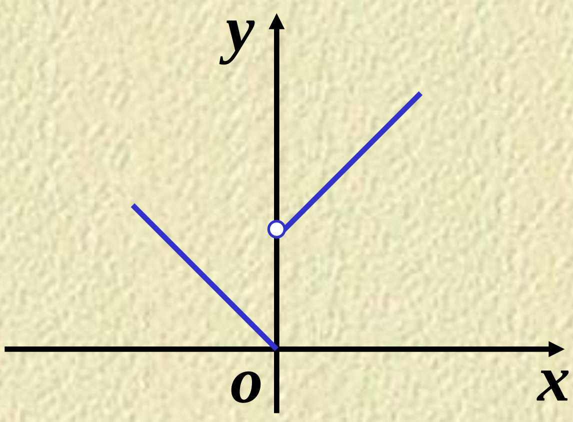
(1).跳跃间断点.如果 $f(x)$在点 x_0处左,右极限都存在,但$f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$, 则称点 x_0为函数$f(x)$的**跳跃间断点.**

例4.讨论函数$f(x)=\begin{cases}-x, x\leq 0\\ 1+x, x>0\end{cases}$,在$x=0$处的连续性.

解 $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)= f(0-0)=0,$

$f(0+0)=1,\because f(0-0)\neq f(0+0),$

$\therefore x=0$为函数的跳跃间断点.



上页 下页 返回

(2).可去间断点.如果 $f(x)$在点 x_0处的极限存在，但 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \neq f(x_0)$，或 $f(x)$在点 x_0处无定义则称点 x_0为函数 $f(x)$的<u>可去间断点</u>.

例5.例如，设$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}, x \neq 0,$

$$g(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$

函数$f(x), g(x)$在$x = 0$处的极限都存在,当然左、右极限也都存在.

上页 下页 返回

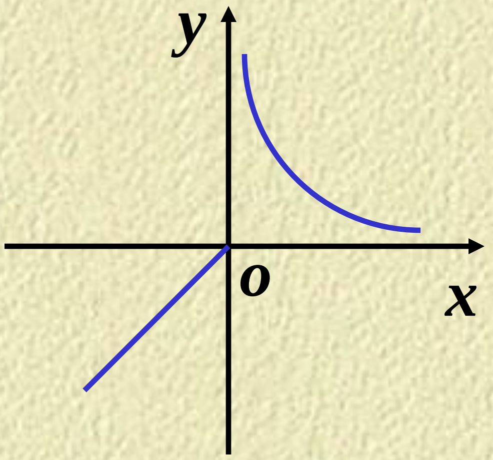
(3).第二类间断点.如果 $f(x)$在点 x_0处的左、右极限至少有一个不存在, 则称点 x_0为函数$f(x)$的第二类间断点.

例6.函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x>0\\ x, & x\le 0\end{cases}$ 在$x=0$处,

$\because\ f(0-0)=0,\ f(0+0)=+\infty,$

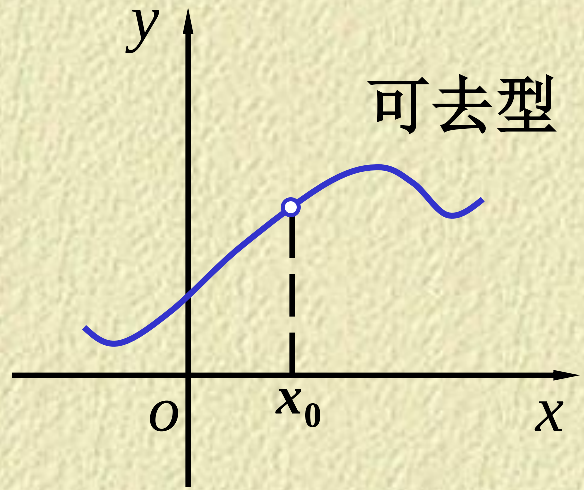
$\therefore\ x=0$ 为函数的第二类间断点.

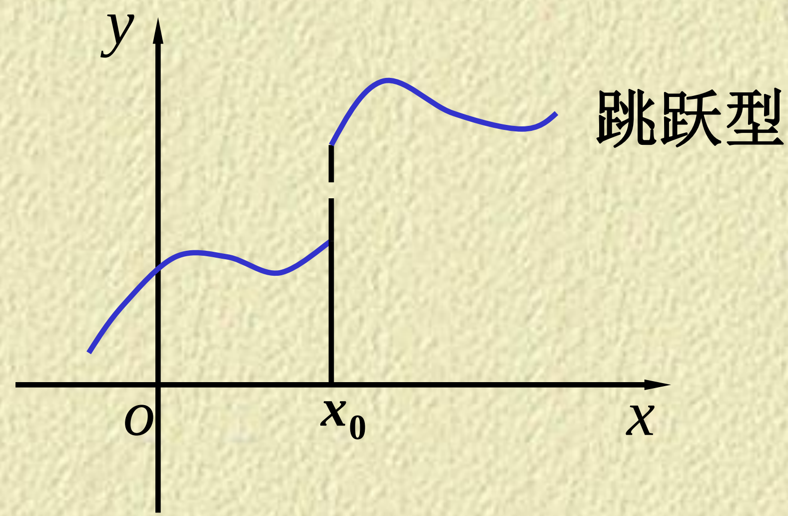
这种情况称为无穷间断点.



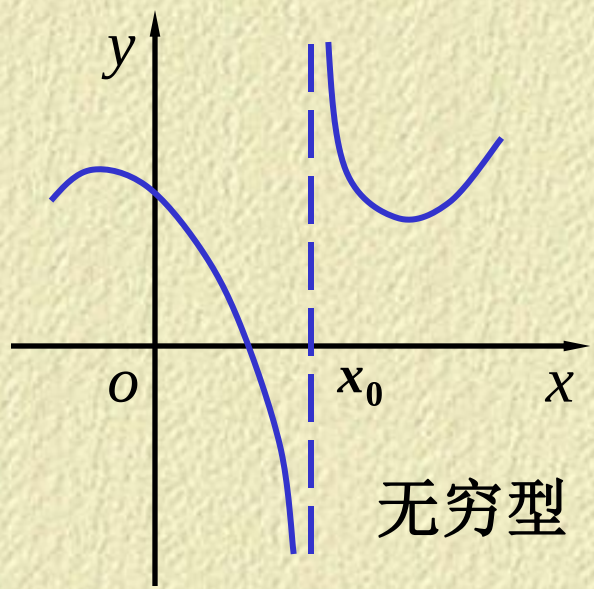
上页 下页 返回

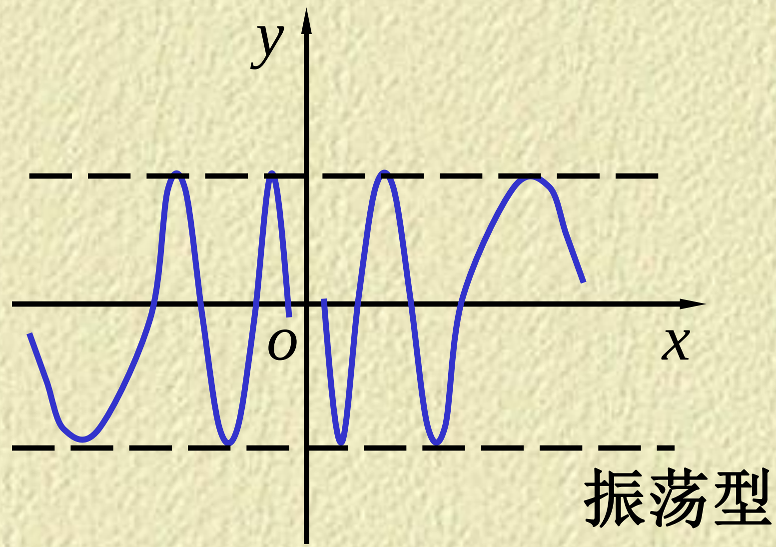
第一类间断点





第二类间断点





例7.证明$y = a^x \ (a > 0)$在$(-\infty, +\infty)$内连续.

证明 只需证明

对$\forall x_0 \in (-\infty, +\infty)$,有$\lim\limits_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$.

$\because \lim\limits_{t \to 0} a^t = 1 \quad (a > 0)$,

$\therefore \lim\limits_{x \to x_0} a^x = a^{x_0} \lim\limits_{x \to x_0} a^{x - x_0} = a^{x_0} \cdot 1 = a^{x_0}$,

故$y = a^x$在$\forall x_0 \in (-\infty, +\infty)$处连续.

例8.若$f(x)$在(a,b)上有定义,且单调.如果$x_0 \in (a,b)$是$f(x)$的间断点,则x_0必是$f(x)$的第一类间断点.

证明　不妨设$f(x)$单调增加,

$\because x < x_0, f(x) \le f(x_0),$

由"单调有界收敛定理"知: $\lim\limits_{x \to x_0 -} f(x)$存在;

同理, $\lim\limits_{x \to x_0 +} f(x)$亦存在,

$\therefore \forall x_0 \in (a,b), x_0$处的左右极限均存在.

$\therefore x_0$是$f(x)$的第一类间断点.

上页　下页　返回

例9. 若$f(x)$在$\left(-\infty,+\infty\right)$上有定义,

且$\forall x, y \in \mathbb{R}$,有$f(x+y) = f(x)f(y)$,

若$f(x)$在$x_0=0$处连续.

证明:(1). $f(x)$在$\left(-\infty,+\infty\right)$上连续;

(2). $f(x) = a^x\left(a>0\right)$或$f(x) \equiv 0$.

证明 (1). $\forall x \in \mathbb{R}, \lim\limits_{h \to 0} f(x+h) = \lim\limits_{h \to 0} f(x) f(h)$

$$= f(x) \lim_{h \to 0} f(h) = f(x) f(0) = f(x),$$

$\therefore f(x)$在$(-\infty, +\infty)$上连续.

(2).由$\forall x, y \in \mathbb{R}$,有$f(x+y) = f(x) f(y)$,

$f(0) = [f(0)]^2$, $f(0) = 0$ or $f(0) = 1$.

($2^{.1}$).若$f(0) = 0$,则

$\forall x \in \mathbb{R}$,有$f(x) = f(x) f(0) = 0$,

即$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \equiv 0$.

(2.2). 由$f(2x)=[f(x)]^2$知$f(x)\geq 0$,

若 $f(0)=1$,则此时$f(x)>0$.

$n\in\mathbb{Z}^+$时$f(nx)=[f(x)]^n,\Rightarrow f(1)=\left[f\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n,$

记$f(1)=a>0,\therefore f\left(\frac{1}{n}\right)=a^{\frac{1}{n}},$

$\therefore f\left(\frac{m}{n}\right)=a^{\frac{m}{n}},m,n\in\mathbb{Z}^+.$

$$f\left(\frac{m}{n}\right)=a^{\frac{m}{n}},m,n\in\mathbb{Z}^{+},f(1)=a>0.$$

则当$x\in\mathbb{Q}^{+}$时有$f(x)=a^{x}$,

$\because \forall x,y\in\mathbb{R}$,有$f(x+y)=f(x)f(y)$,

$$\therefore\ f(y)=f(y-x)f(x)\xrightarrow{f(x)>0}f(y-x)=\frac{f(y)}{f(x)},$$

$\because \forall x\in\mathbb{Q}^{+},f(x)=a^{x}>0,$

$$\Rightarrow\ f(y-x)=\frac{f(y)}{f(x)}=\frac{a^{y}}{a^{x}}=a^{y-x},$$

$\therefore \forall x\in\mathbb{Q}$,有$f(x)=a^{x}$.

上页 下页 返回

$\forall x \in \mathbb{Q}$,有$f(x)=a^x$, $f(1)=a>0$.

当$x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$时,则$\forall \left\{ r_n : \lim\limits_{n\to\infty} r_n = x, r_n \in \mathbb{Q} \right\}$,

由函数的连续性知

有$f(x)=\lim\limits_{u\to x} f(u) = \lim\limits_{n\to\infty} f\left(r_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} = a^x$,

$\therefore \forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)=a^x$, $f(1)=a>0$.

模仿练习.

若$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有定义,

且$\forall x, y \in \mathbb{R}$,有$f(x+y) = f(x) + f(y)$.

若$f(x)$在$x_0=0$处连续.

(1).证明: $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续 .

(2).给出函数$f(x)$的表达式 .