§16.3 二元函数的连续性

一、 二元函数的连续性

二 、有界闭区域上二元

连续函数的性质

上页 下页 返回

一、 二元函数的连续性

1.二元函数连续的概念

定义2 设 $z = f(X) = f(x, y)$, 在区域D上有定义.

$X = (x, y) \in D$, $X_0 = (x_0, y_0) \in D$,

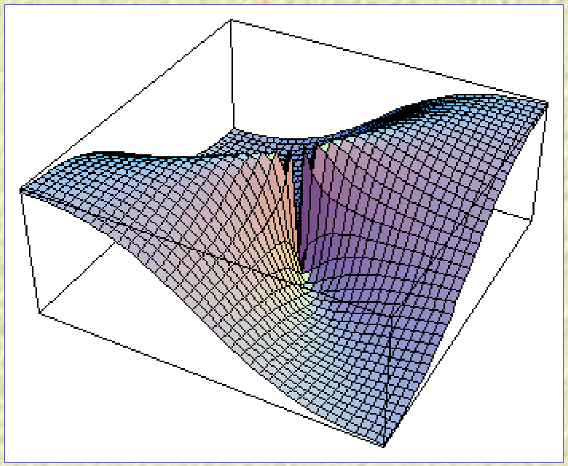
若 $\lim\limits_{X \to X_0} f(X) = f(X_0)$

则称 $f(X)$ 在 X_0 连续, X_0 称为 $f(X)$ 的连续点.

否则称 $f(X)$ 在 X_0 间断, X_0 称为 $f(X)$ 的间断点.

例1 讨论函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$



在(0,0)的连续性.

解　取 $y=kx$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

其值随k的不同而变化， 极限不存在.

故函数在(0,0)处不连续.

上页 下页 返回

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

函数在(0,0)处不连续.

$$\forall y, \lim_{x\to 0} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}$$

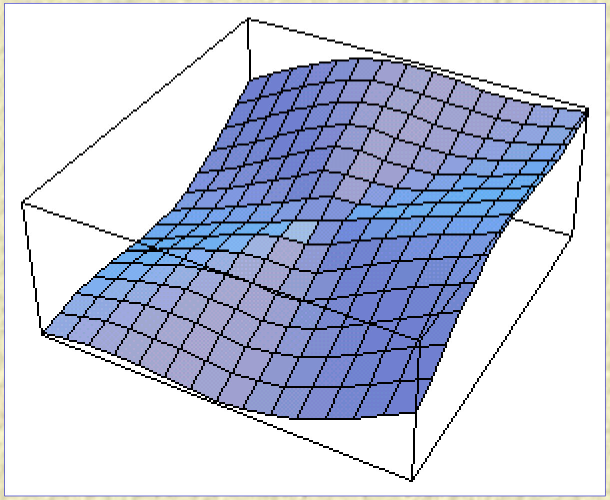
$$=\frac{0\cdot y}{0+y^2}=0=f(0,y)$$

所以，对于任意的 y，函数 $f(x,y)$ 在$x=0$处都是连续的.

同理，对于任意的x，函数关于y 都是连续的.

例2 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

在(0,0)处的连续性.



解 取 $x=\rho\cos\theta,$

$y=\rho\sin\theta$

$$\left|f(x,y)-f(0,0)\right|$$

$$=\left|\rho(\sin^3\theta+\cos^3\theta)\right|<2\rho$$

$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta=\dfrac{\varepsilon}{2},$ 当 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$时

$$\left|f(x,y)-f(0,0)\right|<2\rho<\varepsilon$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=f(0,0),$$

故函数在(0,0)处连续.

上页 下页 返回

若 $f(X)$ 在 D 上每一点都连续, 则称 $f(X)$ 在 D 上连续, 记为 $f(X) \in C(D)$.

易知, 例1中 $f(x, y)$在$(0, 0)$间断(极限不存在),

又如例, $f(x, y)=xy\sin\dfrac{1}{x+y}$ 在直线$x+y=0$上每一点都间断.

上页 下页 返回

注

二元函数 $f(X)$在 X_0 连续必须满足三个条件. 在 X_0 有定义, 在 X_0 的极限存在, 两者相等。

定义可推广到三元以上函数中去.

多元函数的连续性

定义3 设n元函数$f(X)$的定义域为点集D, X_0是其聚点且$X_0 \in D$，如果$\lim\limits_{X \to X_0} f(X) = f(X_0)$则称$n$元函数$f(X)$在点$X_0$处连续.

设X_0是函数$f(X)$的定义域的聚点，如果$f(X)$在点X_0处不连续，则称X_0是函数$f(X)$的间断点.

上页 下页 返回

2. 连续函数性质：

（1）若 f 在点 X_0 连续，并且 $f(X_0)>0$，则存在 X_0 的领域 $O_\delta(X_0)$，当 $x\in O_\delta(X_0)$ 时有 $f(X)>0$；

（2）两个连续函数的和、差、积、商（若分母不为 0 ）都是连续函数；

（3）（复合函数的连续性）：设D 是R^2中的开集，$(x_0,y_0)\in D$。函数$f:D\to R$，$(x,y)\to Z$ 在点$(x_0,y_0)\in D$连续。又设$x=x(t),\ y=y(t)$，x 和y 的值域在D内，并且当$t=t_0$时$x(t_0)=x_0,\ \ y(t_0)=y_0$，而$x,y$ 却在t_0 连续。则复合函数在t_0连续。

3. 多元初等函数在它有定义的区域内都是连续的.

所谓多元初等函数是指以 $x, y, z, \ldots$为自变量的基本初等函数 $f(x), \varphi(y), g(z), \ldots$以及常函数, 经有限次四则运算和复合所构成的函数.

如 $f(x, y) = e^{xy} \sin(x^2+ y)$,

$$f(x,y)=\ln\sin(xy)+\frac{x-y}{x^2+y^2}$$

$$f(x,y,z)=\frac{xyz}{x+z}-3\tan(e^{\sin xy})$$

一切多元初等函数在其定义区域内是连续的.

定义区域是指包含在定义域内的区域或闭区域.

在定义区域内的连续点求极限可用“代入法”：

$$\lim_{X\to X_0} f(X)=f(X_0)\ \left(X_0\in\text{定义区域}\right)$$

如$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} e^{\sin xy}\cdot\sin(x^2+y)=e^{\sin 0}\cdot\sin 0=0$

上页 下页 返回

例3　求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$.

解　原式 $=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy+1-1}{xy(\sqrt{xy+1}+1)}$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1}{\sqrt{xy+1}+1}=\frac{1}{2}$$

上页　下页　返回

4. 二元连续函数的几何意义:

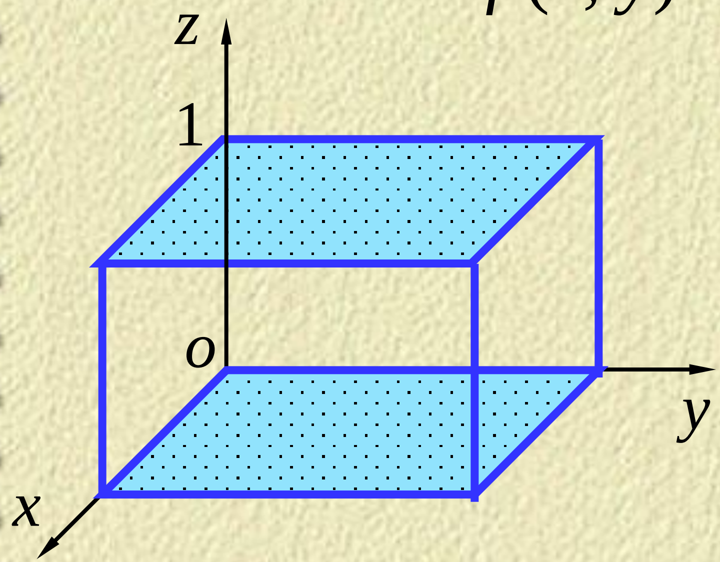
定义在区域 D 上的二元连续函数$z = f(X) = f(x, y)$表示了在D上的一片没有 "空洞", 没有 "裂缝" 的连续曲面.

这里条件 "D 是一区域" 是必要的. 若D不是区域, $z = f(X)$可能不是通常意义下的连续曲面.

例. 设 $D=\{(x,y)\mid x,y$ 均为有理数$\}\subseteq R^2$. $z=f(x,y)$ 是定义在 D 上的, 在 D 上恒等于1, 在别的点上无定义的函数, 即

如图

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & \text{当}(x,y)\in D\text{时},\\ \text{无定义}, & \text{当}(x,y)\notin D\text{时}.\end{cases}$$



可知, $\forall\,(x_0,y_0)\in D$,

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=1=f(x_0,y_0)$$

但曲面 $z=f(x,y)$ 不是通常意义下的连续曲面.

上页 下页 返回

二、有界闭区域上二元连续函数的性质

（1）最大值和最小值定理

在有界闭区域D上的二元连续函数，在D上至少取得它的最大值和最小值各一次.

（2）介值定理

在有界闭区域D上的二元连续函数，如果在D上取得两个不同的函数值，则它在D上取得介于这两值之间的任何值至少一次.

（3）一致连续性定理

在有界闭区域D上的二元连续函数必定在D上一致连续.

P105 习题 6

6. 若 $f(x,y)$ 在某一区域 G 内对变量 x 为连续，对变量 y 满足李普希兹条件，即对任何

$$(x,y')\in G,(x,y'')\in G$$

有 $|f(x,y')-f(x,y'')|\le L|y'-y''|$

其中 L 为常数，则此函数在 G 内连续。

证 明

因为 $f(x,y)$ 对变量 x 连续，所以 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta_1>0,$

使得当 $|x-x_0|<\delta_1$ 时，

$$|f(x,y)-f(x_0,y)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\dfrac{\varepsilon}{2L}\}$

当 $|x-x_0|<\delta,|y-y_0|<\delta$ 时，

$$
\begin{aligned}
&\left| f(x,y) - f(x_0,y_0) \right| = \\
&= \left| f(x,y) - f(x_0,y) + f(x_0,y) - f(x_0,y_0) \right| \\
&\le \left| f(x,y) - f(x_0,y) \right| + \left| f(x_0,y) - f(x_0,y_0) \right| \\
&\le \frac{\varepsilon}{2} + L\left| y - y_0 \right| < \frac{\varepsilon}{2} + L\delta < \frac{\varepsilon}{2} + L\frac{\varepsilon}{2L} = \varepsilon
\end{aligned}
$$