5.3 一阶逻辑的推理理论

- 在一阶逻辑中，从前提$A_1, A_2, ...A_k$出发推结论B的推理形式结构，依然采用如下的蕴涵式形式

  $$A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_k \rightarrow B \qquad (5.6)$$

  若式（5.6）为永真式，则称**推理正确**，否则称推理不正确。
- 于是，在一阶逻辑中判断推理是否正确也归结为判断（5.6）式是否为永真式了。
- 在一阶逻辑中称永真式的蕴涵式为**推理定律**，若一个推理的形式结构正是某条推理定律，则这个推理显然是正确的。
- 在一阶逻辑的推理中，某些前提与结论可能是受量词限制，为了使用命题逻辑中的等值式和推理定律，**必须在推理过程中有消去和添加量词的规则**，以便使谓词演算公式的推理过程可类似于命题演算中推理理论那样进行。

推理定律的来源

- 命题逻辑推理定律的代换实例
- 由基本等值式生成的推理定律
- 量词分配等值式
- 推理规则—量词消去和引入规则

命题逻辑推理定律的代换实例

- $\forall xF(x) \wedge \forall yG(y) \Rightarrow \forall xF(x)$ （化简律的代换实例）
- $\forall xF(x) \Rightarrow \forall xF(x) \vee \exists yG(y)$ （附加律的代换实例）
- …… ……

由基本等值式生成的推理定律

- $\forall xF(x) \Rightarrow \neg\neg\forall xF(x)$
- $\neg\neg\forall xF(x) \Rightarrow \forall xF(x)$
- $\neg\forall xF(x) \Rightarrow \exists x\neg F(x)$
- $\exists x\neg F(x) \Rightarrow \neg\forall xF(x)$
- …… ……

其他推理定律

- $\forall xA(x) \lor \forall xB(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \lor B(x))$
- $\exists x(A(x) \land B(x)) \Rightarrow \exists xA(x) \land \exists xB(x)$
- $\forall x(A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall xA(x) \to \forall xB(x)$
- $\forall x(A(x) \to B(x)) \Rightarrow \exists xA(x) \to \exists xB(x)$
- …… ……

- 对$\exists x(A(x) \land B(x)) \Rightarrow \exists xA(x) \land \exists xB(x)$的讨论

  若$\exists x(A(x) \land B(x))$为真，则有一个客体c，使得$A(c) \land B(c)$为真，即$A(c)$和$B(c)$都为真，所以$\exists xA(x) \land \exists xB(x)$也为真。

推理规则

- 为了构造推理系统，还要给出4条重要的推理规则，即消去量词和引入量词的规则：

1. 全称量词消去规则(简记为∀-规则或∀-)
2. 全称量词引入规则(简记为∀+规则或∀+)
3. 存在量词引入规则(简称∃+规则或∃+)
4. 存在量词消去规则(简记为∃-规则或∃-)

设前提 $\Gamma=\{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$，

全称量词消去规则(简记为∀-)

$$\frac{\forall x A(x)}{\therefore A(y)} \quad 或 \quad \frac{\forall x A(x)}{\therefore A(c)}$$

含义：如果个体域的所有元素都具有性质A，则个体域中的任一元素具有性质A。

两式成立的条件：

- (1) 在第一式中，取代x的y应为任意的不在A(x) $\forall y$和$\exists y$的辖域内自由出现.

(2) 在第二式中，c为任意个体变项。

(3) 用y或c去取代A(x)中自由出现的x时，一定要在x自由出现的一切地方进行取代。

全称量词消去规则(简记为∀-)

举例

当$A(x)$为原子公式时，比如$A(x)=F(x)$，则当$\forall xA(x)$为真时，对于个体域中任意的个体变项y，不会出现$F(y)$为假的情况。

当$A(x)$不是原子公式时，如y已在$A(x)$中约束出现了，就不能用y取代x，否则会出现$\forall xA(x)$为真而$A(y)$为假的情况。

考虑个体域为实数集合，公式$A(x)=\exists yF(x,y)$为$x>y$。

当对公式$\forall xA(x)=\forall x\exists yF(x,y)$使用∀- 规则时，用y取代x，就会得到$A(y)=\exists yF(y,y)$，即$\exists y(y>y)$，这显然是假命题。原因是违背了条件(1)。

若用z取代x，得$A(z)=\exists yF(z,y)=\exists y(z>y)$就不会产生这种错误。

全称量词引入规则(简记为∀+)

$$\frac{A(y)}{\therefore\ \forall x A(x)}$$

该式成立的条件是：

(1) 无论A(y)中自由出现的个体变项y取何值，A(y)应该均为真。

(2) 取代自由出现的y的x是个体变项符号，且不在前提的任何公式中自由出现。

举例

取个体域为实数集，F(x, y)为x>y，A(y)=∃xF(x, y)。

显然A(y)满足条件(1)。

对A(y)应用∀+规则时，若取已约束出现的x取代y，会得到∀xA(x)=∀x∃x(x>x)，这是假命题。

产生这种错误的原因是违背了条件(2)。

若取z取代y，得∀zA(z)=∀z∃x(x>z)为真命题。

存在量词引入规则(简称∃+规则或∃+)

$$\frac{A(y)}{\therefore\ \exists x A(x)} \text{或} \frac{B \to A(y)}{\therefore\ B \to \exists x A(x)}$$

$$\frac{A(c)}{\therefore\ \exists x A(x)} \text{或} \frac{B \to A(c)}{\therefore\ B \to \exists x A(x)}$$

该式成立的条件是：

其中x,y为个体变元符号，c是个体常项符号。

- (1)取代c的x不能在$A(c)$中出现过。
- (2)A中y和c分别不在$\forall x$和$\exists x$的辖域内自由出现。

存在量词引入规则(简称∃+规则或∃+)

举例

取个体域为实数集，$F(x, y)$为$x>y$，取$A(5)=\exists xF(x, 5)$。

显然$A(5)$是真命题。

在应用∃+规则时，若用$A(5)$中已出现的x取代5，得$\exists x\exists xF(x, x)=\exists x(x>x)$，这是假命题。

产生这种错误的原因是违背了条件(2)。

若用$A(5)$中未出现过的个体变项y取代5，得$\exists yA(y)=\exists y\exists xF(x>y)$，这为真命题。

存在量词消去规则(简记为∃-规则或∃-)

$$\frac{A(x) \rightarrow B}{\therefore\ \exists x A(x) \rightarrow B}$$

该式成立的条件是：

x是个体变项符号，且不在不在前提的任何公式和B中自由出现。

定义5.3 自然推理系统定义

1. 字母表。同一阶语言的字母表。

2. 合式公式。同合式公式的定义。

3. 推理规则：

(1) 前提引入规则。

(2) 结论引入规则。

(3) 置换规则。

(4) 假言推理规则。

(5) 附加规则。

(6) 化简规则。

(7) 拒取式规则。

(8) 假言三段论规则。

(9) 析取三段论规则。

(10) 构造性二难推理规则。

(11) 合取引入规则。

(12) ∀−规则。

(13) ∀+规则。

(14) ∃+规则。

(15) ∃−规则。

例题

例题 在自然推理系统N_L中，构造下面推理的证明

所有的人都是要死的，苏格拉底是人，所以苏格拉底是要死的。

解：先将原子命题符号化。

设 F(x):x是一个人，G(x):x是要死的，s：苏格拉底。

前提：$\forall x(F(x)\to G(x))$，$F(s)$

结论：$G(s)$

证明：① $\forall x(F(x)\to G(x))$ 前提引入

② $F(s)\to G(s)$ ①$\forall$-

③ $F(s)$ 前提引入

④ $G(s)$ ②③假言推理

例5.9

例5.9 在自然推理系统N_L中，构造下面推理的证明

任何自然数都是整数；存在着自然数。所以存在着整数。

个体域为实数集合R。

解：先将原子命题符号化。

设 F(x):x为自然数，G(x):x为整数。

前提：$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$，$\exists xF(x)$

结论： $\exists xG(x)$

证明：

① $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$ 前提引入

② $F(y)\rightarrow G(y)$ ①∀-规则

③ $F(y)\rightarrow \exists xG(x)$ ②∃+规则

④ $\exists xF(x)\rightarrow \exists xG(x)$ ③∃-规则

⑤ $\exists xF(x)$ 前提引入

⑥ $\exists xG(x)$ ④ ⑤假言推理

例5.10

例5.10 在自然推理系统N_L中，构造下面推理的证明。

前提： $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$， $\exists x(F(x)\wedge H(x))$

结论： $\exists x(G(x)\wedge H(x))$

证明：

① $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$	前提引入
② $F(x)\rightarrow G(x)$	①∀-
③ $F(x)\wedge H(x)\rightarrow F(x)$	化简规则
④ $F(x)\wedge H(x)\rightarrow G(x)$	②③假言三段论
⑤ $F(x)\wedge H(x)\rightarrow H(x)$	化简规则

例5.10证明

⑥ $\neg(F(x)\wedge H(x))\vee G(x)$ ④置换

⑦ $\neg(F(x)\wedge H(x))\vee H(x)$ ⑤置换

⑧ $(\neg(F(x)\wedge H(x))\vee G(x))\wedge(\neg(F(x)\wedge H(x))\vee H(x))$
⑥⑦合取

⑨ $\neg(F(x)\wedge H(x))\vee(G(x)\wedge H(x))$ ⑧置换

⑩ $F(x)\wedge H(x)\rightarrow G(x)\wedge H(x)$ ⑨置换

(11) $F(x)\wedge H(x)\rightarrow\exists x(G(x)\wedge H(x))$ ⑩ $\exists+$

(12) $\exists x(F(x)\wedge H(x))\rightarrow\exists x(G(x)\wedge H(x))$ (11) $\exists-$

(13) $\exists x(F(x)\wedge H(x))$ 前提引入

(14) $\exists x(G(x)\wedge H(x))$ (12)(13)假言推理

例5.11

例5.11 在自然推理系统N_L中，构造下面推理的证明：

不存在能表示成分数的无理数，有理数都能表示成分数。因此，有理数都不是无理数。

个体域为实数集合。

解答

设 F(x):x为无理数，
G(x):x为有理数，
H(x):x能表示成分数。

前提： $\neg\exists x(F(x)\wedge H(x))$， $\forall x(G(x)\rightarrow H(x))$

结论： $\forall x(G(x)\rightarrow\neg F(x))$

例5.11证明

① $\neg\exists x(F(x)\wedge H(x))$ 前提引入

② $\forall x(\neg F(x)\vee\neg H(x))$ ①置换

③ $\forall x(H(x)\rightarrow\neg F(x))$ ②置换

④ $H(y)\rightarrow\neg F(y)$ ③$\forall-$

⑤ $\forall x(G(x)\rightarrow H(x))$ 前提引入

⑥ $G(y)\rightarrow H(y)$ ⑤$\forall-$

⑦ $G(y)\rightarrow\neg F(y)$ ⑥④假言三段论

⑧ $\forall x(G(x)\rightarrow\neg F(x))$ ⑦$\forall+$

说明

- 注意$\neg\exists x(F(x)\wedge H(x))$不是前束范式，因而不能对它使用$\exists-$规则。
- 因为结论中的量词是全称量词$\forall$，因而在使用$\forall-$规则时用第一式，而不能用第二式。

例5.12

例5.12 在自然推理系统N_L中，构造下面推理的证明：

每个学术会成员都是工人并且是专家，有些成员是青年人，所以有的成员是青年专家。

个体域为全总个体域。

解答

设 F(x):x为学术成员。 G(x):x是专家。
H(x):x是工人。 R(x):x是青年人。

前提：$\forall x(F(x)\rightarrow G(x)\wedge H(x)),\exists x(F(x)\wedge R(x))$.

结论：$\exists x(F(x)\wedge R(x)\wedge G(x))$

例5.12证明

① $\forall x(F(x)\rightarrow G(x)\wedge H(x))$	前提引入
② $F(x)\rightarrow G(x)\wedge H(x)$	①$\forall$-
③ $F(x)\wedge R(x)\rightarrow F(x)$	化简规则
④ $G(x)\wedge H(x)\rightarrow G(x)$	化简规则
⑤ $F(x)\wedge R(x)\rightarrow G(x)\wedge H(x)$	②③假言三段论
⑥ $F(x)\wedge R(x)\rightarrow G(x)$	④⑤假言三段论
⑦ $\neg(F(x)\wedge R(x))\vee G(x)$	⑥置换
⑧ $\neg(F(x)\wedge R(x))\vee(F(x)\wedge R(x)\wedge G(x))$	⑦置换
⑨ $F(x)\wedge R(x)\rightarrow F(x)\wedge R(x)\wedge G(x)$	⑧置换
⑩ $F(x)\wedge R(x)\rightarrow\exists x(F(x)\wedge R(x)\wedge G(x))$	⑨$\exists$+
(11) $\exists x(F(x)\wedge R(x))\rightarrow\exists x(F(x)\wedge R(x)\wedge G(x))$	⑩$\exists$-
(12) $\exists x(F(x)\wedge R(x))$	前提引入
(13) $\exists x(F(x)\wedge R(x)\wedge G(x))$	(11)(12)假言推理

例5.13 在自然推理系统N_L中，构造下面推理的证明：

所有的有理数都是实数；所有的无理数也是实数；虚数不是实数。因此，虚数既不是有理数，也不是无理数.

$Q(x)$: x是有理数;$R(x)$: x是实数;$N(x)$: x是无理数;

$C(x)$: x是虚数

前提可符号化为： $\forall x(Q(x)\to R(x)),\forall x(N(x)\to R(x)),$

$\forall x(C(x)\to \neg R(x))$

结论可符号化为：$\forall x(C(x)\to (\neg Q(x) \wedge \neg N(x)))$

例5.13证明

(1) $\forall x(Q(x)\to R(x))$	前提引入
(2) $Q(x)\to R(x)$	(1)$\forall$-
(3) $\forall x(N(x)\to R(x))$	前提引入
(4) $N(x)\to R(x)$	(3) $\forall$-
(5) $\forall x(C(x)\to \neg R(x))$	前提引入
(6) $C(x)\to \neg R(x)$	(5) $\forall$-
(7) $\neg R(x)\to\neg Q(x)$	(2)置换
(8) $\neg R(x)\to\neg N(x)$	(4)置换
(9) $C(x)\to\neg Q(x)$	(6)(7) 假言三段论

例5.13证明续

(10) $C(x)\rightarrow\neg N(x)$ (6)(8)假言三段论

(11) $\neg C(x)\vee\neg Q(x)$ (9)置换

(12) $\neg C(x)\vee\neg N(x)$ (10)置换

(13) $(\neg C(x)\vee\neg Q(x))\wedge(\neg C(x)\vee\neg N(x))$ (11)(12)合取

(14) $\neg C(x)\vee(\neg Q(x)\wedge\neg N(x))$ (13)置换

(15) $C(x)\rightarrow(\neg Q(x)\wedge\neg N(x))$ (14)置换

(16) $\forall x(C(x)\rightarrow(\neg Q(x)\wedge\neg N(x)))$ (15) $\forall+$

例5.14

□ 例5.14 在自然推理系统N_L中，构造下面推理的证明：

前提：$\forall x(P(x)\vee Q(x))$　　　结论：$\forall xP(x)\vee\exists xQ(x)$

证法 I　归谬法

(1)$\neg(\forall xP(x)\vee\exists xQ(x))$　　否定结论引入

(2) $\neg(\forall xP(x))\wedge(\forall x\neg Q(x))$　　(1)置换

(3)$\neg(\forall xP(x))$　　(2)化简

(4)$\forall x\neg Q(x)$　　(2)化简

(5)$\neg Q(y)$　　(4)$\forall-$

(6)$\forall x(P(x)\vee Q(x))$　　前提引入

(7)$P(y)\vee Q(y)$　　(6)$\forall-$

例5.14 证明续

(8) $p(y)$ (5)(7)析取三段论

(9) $\forall x p(x)$ (8)$\forall+$

(10) $\forall x p(x) \wedge \neg(\forall x p(x))$ (3)(9)合取

证法II 因$\forall x P(x) \vee \exists x Q(x) \Leftrightarrow \neg(\forall x P(x)) \rightarrow \exists x Q(x)$,所以原题化为要证$\forall x(P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow \neg(\forall x P(x)) \rightarrow \exists x Q(x)$

(1)$\neg(\forall x P(x))$ 附加前提引入

(2)$\forall x(P(x) \vee Q(x))$ 前提引入

(3)$P(y) \vee Q(y)$ (2)$\forall-$

(4)$\neg P(y) \rightarrow Q(y)$ (3)置换

(5)$\exists x \neg P(x)$ (1)置换

(6)$\neg P(y) \rightarrow \exists x Q(x)$ (4)$\exists+$

例5.14 证明续

(7) $\exists x \neg p(x) \to \exists x Q(x)$ (6)∃-

(8) $\exists x Q(x)$ (5)(7)假言推理

例5.15　在自然推理系统N_L中，构造下面推理的证明：

- 前提：$\forall x(F(x)\to G(x)), \forall x(G(x)\to H(x))$
- 结论：$\forall xF(x)\to\forall xH(x)$

证明: 用附加前提法

①	$\forall xF(x)$	附加前提引入
②	$F(x)$	①$\forall-$
③	$\forall x(F(x)\to G(x))$	前提引入
④	$F(x)\to G(x)$	③$\forall-$
⑤	$\forall x(G(x)\to H(x))$	前提引入
⑥	$G(x)\to H(x)$	⑤$\forall-$
⑦	$F(x)\to H(x)$	④⑥假言三段论
⑧	$H(x)$	②⑦假言推理
⑨	$\forall xH(x)$	⑧$\forall+$

- 例5.16. 在自然推理系统N_L中，构造推理的证明.
- 人都喜欢吃蔬菜. 但不是所有的人都喜欢吃鱼. 所以, 存在喜欢吃蔬菜而不喜欢吃鱼的人.

解 令$F(x)$: x为人，$G(x)$: x喜欢吃蔬菜，$H(x)$: x喜欢吃鱼.

前提：$\forall x(F(x)\to G(x))$, $\neg\forall x(F(x)\to H(x))$

结论：$\exists x(F(x)\wedge G(x)\wedge\neg H(x))$

证明：用归谬法

(1) $\neg\exists x(F(x)\wedge G(x)\wedge\neg H(x))$ 结论否定引入

(2) $\forall x\neg(F(x)\wedge G(x)\wedge\neg H(x))$ (1)置换

(3) $\neg(F(y)\wedge G(y)\wedge\neg H(y))$ (2)$\forall-$

(4) $G(y)\to\neg F(y)\vee H(y)$ (3)置换

(5) $\forall x(F(x)\to G(x))$ 前提引入

- (6) $F(y)\to G(y)$ (5)$\forall -$
- (7) $F(y) \to \neg F(y)\vee H(y)$ (4)(6)假言三段论
- (8) $F(y) \to H(y)$ (7)置换
- (9) $\forall y(F(y) \to H(y))$ (8)$\forall +$
- (10) $\forall x(F(x) \to H(x))$ (9)置换
- (11) $\neg\forall x(F(x) \to H(x))$ 前提引入
- (12) $\forall x(F(x)\to H(x))\wedge\neg\forall x(F(x)\to H(x))$ (10)(11)合取

本章主要内容

- 等值式与基本的等值式

  ①在有限个体域中消去量词等值式

  ②量词否定等值式

  ③量词辖域收缩与扩张等值式

  ④量词分配等值式

- 基本规则：置换规则、换名规则、代替规则
- 前束范式
- 推理理论：推理的形式结构、推理正确、构造证明
- 新的推理规则：$\forall-$、$\forall+$、$\exists-$、$\exists+$

学习要求

- 深刻理解重要的等值式，并能熟练地使用它们。
- 熟练地使用置换规则、换名规则和代替规则。
- 准确地求出给定公式的前束范式（形式可以不唯一）。
- 正确地使用∀−、∀+、∃−、∃+规则，特别地要注意它们之间的关系。
  - 一定对前束范式才能使用∀−、∀+、∃−、∃+规则，对不是前束范式的公式要使用它们，一定先求出公式的前束范式。
  - 记住∀−、∀+、∃−、∃+规则的各自使用条件。
- 对于给定的推理，正确地构造出它的证明。

在自然推理系统F中构造推理的证明

前提：　$\exists x F(x) \rightarrow \forall x G(x)$

结论：　$\forall x (F(x) \rightarrow G(x))$

证明

① $\exists x F(x) \rightarrow \forall x G(x)$　　前提引入

② $\exists y F(y) \rightarrow \forall x G(x)$　　①置换（换名规则）

③ $\forall y \forall x (F(y) \rightarrow G(x))$　　②置换

④ $\forall x (F(z) \rightarrow G(x))$　　③∀-规则

⑤ $F(z) \rightarrow G(z)$　　④∀-规则

⑥ $\forall x (F(x) \rightarrow G(x))$　　⑤∀+规则

在自然推理系统F中构造推理的证明

前提： $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

结论： $\forall xF(x)\rightarrow\forall xG(x)$

证明

① $\forall xF(x)$	附加前提引入
② $F(y)$	①$\forall$-规则
③ $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$	前提引入
④ $F(y)\rightarrow G(y)$	③$\forall$-规则
⑤ $G(y)$	②④假言推理
⑥ $\forall xG(x)$	⑤$\forall$+规则

例题选讲

例题 在自然推理系统F中，构造下面推理的证明：

实数不是有理数就是无理数，无理数都不是分数，所以，若有分数，则必有有理数（个体域为实数集合）

解答

设 $F(x)$:x是有理数，
$G(x)$:x是无理数，
$H(x)$:x是分数。

前提： $\forall x(F(x) \vee G(x))$， $\forall x(G(x) \rightarrow \neg H(x))$

结论： $\exists xH(x) \rightarrow \exists xF(x)$

例题的证明

①	$\exists xH(x)$	附加前提引入
②	$\forall x(F(x)\vee G(x))$	前提引入
③	$F(y)\vee G(y)$	②$\forall-$
④	$\forall x(G(x)\rightarrow\neg H(x))$	前提引入
⑤	$G(y)\rightarrow\neg H(y)$	④$\forall-$
⑥	$H(y)\rightarrow\neg G(y)$	⑤置换
⑦	$\neg G(y)\rightarrow F(y)$	③置换
⑧	$H(y)\rightarrow F(y)$	⑥⑦假言三段论
⑨	$H(y)\rightarrow\exists xF(x)$	⑧ $\exists+$
⑩	$\exists xH(x)\rightarrow\exists xF(x)$	⑨ $\exists-$
⑾	$\exists(x)F(x)$	①⑩假言推理