§ 2.2 命题公式的标准型——范式

给定一个命题公式，判断它是重言式、矛盾式、还是可满足式，这类问题称为判定问题。在前面已经讲过解决判定问题的两种方法，即真值表法和等价演算法。但当命题变项的数目较多时，上述两种方法都显得不方便，所以必须给出其它的方法，这就是把命题公式化成标准型(主析取范式和主合取范式)的方法。根据这种方法，同一真值函数所对应的所有命题公式具有相同的标准型，这无疑对判断两个命题公式是否等价以及判断公式的类型是一种好方法。

2.2 析取范式和合取范式

定义2.2

命题变项及其否定统称作文字（*letters*）。

仅由有限个文字构成的析取式称作简单析取式。

仅由有限个文字构成的合取式称作简单合取式。

简单析取式举例：

$p, \neg q \quad p \vee \neg p, \quad \neg p \vee q \qquad \neg p \vee \neg q \vee r, p \vee \neg q \vee r$

简单合取式举例：

$\neg p, q \quad \neg p \wedge p, \quad p \wedge \neg q \qquad p \wedge q \wedge \neg r, \neg p \wedge p \wedge q$

说明

❑ 一个文字既是简单析取式，又是简单合取式。

为讨论方便，有时用$A_1,A_2,\ldots,A_s$表示s个简单析取式或s个简单合取式。

设A_i是含n个文字的简单析取式，若A_i中既含某个命题变项p_j，又含它的否定式$\neg p_j$， 即$p_j \vee \neg p_j$，则A_i为重言式。

反之，若A_i为重言式，则它必同时含某个命题变项和它的否定式，否则，若将A_i中的不带否定符号的命题变项都取0值，带否定号的命题变项都取1值，此赋值为A_i的成假赋值，这与A_i是重言式相矛盾。

类似的讨论可知，若A_i是含n个命题变项的简单合取式，且A_i为矛盾式，则A_i中必同时含某个命题变项及它的否定式，反之亦然。

定理1 一个简单析取式是永真式当且仅当它同时含一个命题符号及其否定;一个简单合取式是矛盾式当且仅当它同时含一个命题符号及其否定。

定义2 由有限个简单合取式(基本积)构成的析取式称为析取范式(*disjunctive normal form*)，由有限个简单析取式(基本和)构成的合取式称为合取范式(*conjunctive normal form*)。析取范式和合取范式统称为范式(*normal form*)。

- 形如$\neg p\wedge q\wedge r$的公式既是一个简单合取式构成的析取范式，又是由三个简单析取式构成的合取范式。
- 形如$p\vee\neg q\vee r$的公式既是含三个简单合取式的析取范式，又是含一个简单析取式的合取范式。

例 1　析取范式和合取范式：

$(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q)$,$(p\wedge r)\vee(q\wedge\neg r\wedge p)\vee(\neg r\wedge\neg p)$等是析取范式

$(p\vee q)\wedge(\neg p\vee\neg q)$,$(p\vee r)\wedge(q\vee\neg r\vee p)\wedge(\neg r\vee\neg p)$等是合取范式

根据定义知，一个析取范式的对偶式是合取范式，一个合取范式的对偶式是析取范式。

定理2　一个析取范式是矛盾式当且仅当它的每个基本积都是矛盾式。一个合取范式是永真式当且仅当它的每个基本和都是永真式。

定理3（范式存在定理）任意命题公式都存在与之等值的析取范式与合取范式。

说明

- 研究范式的目的在于，将给定公式化成与之等值的析取范式或合取范式，进而将公式化成与之等值的主析取范式或主合取范式。

求一个公式的范式的步骤如下：

[1]. 利用蕴涵等值式$(A\rightarrow B)\Leftrightarrow(\neg A\vee B)$和等价等值式$(A\leftrightarrow B)\Leftrightarrow(\neg A\vee B)\wedge(A\vee\neg B)$消除公式中的联结词$\rightarrow$和$\leftrightarrow$，使得公式中只含有联结词$\neg$、$\wedge$和$\vee$。

[2]. 利用双重否定律$\neg\neg A\Leftrightarrow A$和德摩尔根律将否定放到命题符号前。

[3]. 利用分配律，求析取范式利用$\wedge$对$\vee$的分配律，求合取范式则利用$\vee$对$\wedge$的分配律。

例2 求命题公式的析取范式和合取范式

(1). 求$(\neg p\rightarrow q)\wedge(p\rightarrow r)$的析取范式和合取范式

(2). 求$(p\rightarrow q)\vee(p\wedge r)$的析取范式和合取范式

解 (1)求$(\neg p\rightarrow q)\wedge(p\rightarrow r)$的析取范式和合取范式：

$$(\neg p\rightarrow q)\wedge(p\rightarrow r)\Leftrightarrow(\neg\neg p\vee q)\wedge(\neg p\vee r)$$

$\Leftrightarrow(p\vee q)\wedge(\neg p\vee r)$ //合取范式

$\Leftrightarrow(p\wedge\neg p)\vee(p\wedge r)\vee(q\wedge\neg p)\vee(q\wedge r)$ // 析取范式

$\Leftrightarrow(p\wedge r)\vee(q\wedge\neg p)\vee(q\wedge r)$ //析取范式

(2)求$(p\rightarrow q)\vee(p\wedge r)$的合取范式和析取范式：

$(p\rightarrow q)\vee(p\wedge r)\Leftrightarrow(\neg p\vee q)\vee(p\wedge r)$

$\Leftrightarrow(\neg p) \vee q\vee(p\wedge r)$ //析取范式

$\Leftrightarrow (\neg p\vee q\vee p)\wedge (\neg p\vee q\vee r)$ //合取范式

注意:一个命题公式的合取范式和析取范式不具有唯一性。因而析取范式与合取范式不能作为同一真值函数所对应的命题公式的标准形式。为了使任意一个命题公式，化成与其等价的唯一的公式形式，我们引入主析取范式和主合取范式的概念。

一、主析取范式

定义3 在含有n个命题变元的简单合取式中，若每个命题符号和其否定不同时存在，而二者之一必须出现且只出现一次，且第i个命题变元或者否定出现在从左边算起的第i个位置上（若命题变元无下标，则按字典顺序排列），这样的简单合取式称为极小项。

极小项是特殊的简单合取式。含n个命题变元的极小项中,由于每个命题变元以原形或否定出现且仅出现一次,因此n个命题变元共可产生2^n个不同的极小项。若在极小项中，将命题变元的原形对应1，否定对应0，则每个极小项唯一地对应一个二进制数，该二进制数的每一位正是使该极小项的真值为1的真值赋值。

例3 两个命题变元p, q生成的4个极小项为：

$\neg p\wedge\neg q$对应00，记为m_0 $\neg p\wedge q$对应01，记为m_1

$p\wedge\neg q$对应10，记为m_2 $p\wedge q$对应11，记为m_3

由三个命题变元p, q, r生成的8个极小项为：

$\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r$对应000,记为$m_0$ $\neg p\wedge\neg q\wedge r$对应001, 记为$m_1$

$\neg p\wedge q\wedge\neg r$对应010，记为$m_2$ $\neg p\wedge q\wedge r$对应011，记为m_3

$p\wedge\neg q\wedge\neg r$对应100，记为$m_4$ $p\wedge\neg q\wedge r$对应101，记为m_5

$p\wedge q\wedge\neg r$对应110， 记为m_6 $p\wedge q\wedge r$对应111， 记为m_7

注（1）任意两个不同的极小项都不等价；

（2）任意两个不同的极小项的合取必为假；

（3）所有的极小项的析取必为真。

主析取范式

定义4 若析取范式中的简单合取式都是极小项，则称该析取范式为主析取范式。

定理4 任何命题公式存在唯一的主析取范式。

求一个公式的主析取范式是：

[1] 先求该公式的一个析取范式。

[2] 如果该析取范式的某个简单合取式A中既不含某个命题变元p，也不含它的否定¬p，则该简单合取式变为如下形式：$(A \wedge p) \vee (A \wedge \neg p)$。

[3] 消除重复出现的命题变元或命题变元的否定，矛盾式及重复出现的极小项，并将每个极小项的命题变元或其否定按下标顺序或字典顺序排列。

(只证主析取范式的存在和唯一性)

(1)证明存在性。

设A是任一含n个命题变项的公式。

由定理3可知，存在与A等值的析取范式A′，即A⇔A′，若A′的某个简单合取式A_i中既不含命题变项p_j，也不含它的否定式$\neg p_j$，则将A_i展成如下形式：

$$A_i \Leftrightarrow A_i \wedge 1 \Leftrightarrow A_i \wedge (p_j \vee \neg p_j) \Leftrightarrow (A_i \wedge p_j) \vee (A_j \wedge \neg p_j)$$

继续这个过程，直到所有的简单合取式都含任意命题变项或它的否定式。

若在演算过程中出现重复的命题变项以及极小项和矛盾式时，都应“消去”：如用p代替$p \wedge p$，m_i代替$m_i \vee m_i$，0代替矛盾式等。最后就将A化成与之等值的主析取范式A''。

(2)证明唯一性。

假设某一命题公式A存在两个与之等值的主析取范式B和C，

即$A \Leftrightarrow B$且$A \Leftrightarrow C$，则$B \Leftrightarrow C$。

由于B和C是不同的主析取范式，不妨设极小项m_i只出现在B中而不出现在C中。

于是，角标i的二进制表示为B的成真赋值，而为C的成假赋值。这与$B \Leftrightarrow C$矛盾，因而B与C必相同。

例4 求命题公式的主析取范式

(1). 求$(\neg p\rightarrow q)\wedge(p\rightarrow r)$的主析取范式

(2). 求$(p\rightarrow q)\vee(p\wedge r)$的主析取范式

解 (1)根据例2知$(\neg p\rightarrow q)\wedge(p\rightarrow r)$的一个析取范式是$(p\wedge r)\vee(q\wedge\neg p)\vee(q\wedge r)$，我们将其中的每个简单合取式展开为含有所有命题变元的极小项的析取：

$(p\wedge r)$展开为:$(p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)$;

$(q\wedge\neg p)$展开为：$(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)$;

$(q\wedge r)$展开为：$(p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)$

因此$(\neg p\rightarrow q)\wedge(p\rightarrow r)$的主析取范式为

$(p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)$

按极小项所对应的二进制数的大小重新排列为

$(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

$\Leftrightarrow m_2\vee m_3\vee m_5\vee m_7\Leftrightarrow\sum(2,3,5,7)$。

(2)由例2知$(p\rightarrow q)\vee(p\wedge r)$的一个析取范式为$(\neg p)\vee q\vee(p\wedge r)$，将其中每个简单合取式展开为含有所有命题变元的极小项的析取：

$\neg p$展开为 $(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)$

q展开为 $(p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)$

$(p\wedge r)$展开为$(p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)$

因此$(p\rightarrow q)\vee(p\wedge r)$的主析取范式为：

$(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)$
$\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)\Leftrightarrow\sum(0,1,2,3,5,6,7)$。

主析取范式也可从命题公式的真值表更容易地得到，对应地，根据命题公式的主析取范式也可容易地构造其真值表、判定其类型（矛盾式、可满足式还是永真式）等。

例5 求命题公式$((p\vee q)\rightarrow r)\rightarrow p$的主析取范式

解1: $((p \vee q)\rightarrow r)\rightarrow p \Leftrightarrow \neg(\neg(p \vee q)\vee r)\vee p$

$\Leftrightarrow ((p\vee q)\wedge\neg r)\vee p \Leftrightarrow ((p\wedge\neg r)\vee(q\wedge\neg r))\vee p$

$\Leftrightarrow(\underline{(p\wedge\neg r)\vee p})\vee(q\wedge\neg r)\Leftrightarrow \underline{(q\wedge\neg r)}\vee p$ （析取范式）

$\Leftrightarrow (p\wedge(q\vee\neg q)\wedge(r\vee\neg r))\vee\underline{((q\wedge\neg r)\wedge(p\vee\neg p))}$

$\Leftrightarrow(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

$\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)$

$\Leftrightarrow m_4 \vee m_6 \vee m_5 \vee m_7 \vee m_2 \vee m_6$

$\Leftrightarrow m_2 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 \Leftrightarrow \sum(2,4,5,6,7)$

解2: $((p\vee q\to r)\to p \Leftrightarrow \neg(\neg(p\vee q)\vee r)\vee p$

$\Leftrightarrow ((p\vee q)\wedge\neg r)\vee p \Leftrightarrow ((p\wedge\neg r)\vee(q\wedge\neg r))\vee p$

$\Leftrightarrow (\underline{(p\wedge\neg r)\vee p})\vee(q\wedge\neg r)\Leftrightarrow(q\wedge\neg r)\vee p$ （析取范式）

$\Leftrightarrow m_{x10}\vee m_{1xx}$

$\Leftrightarrow m_{010}\vee m_{110}\vee m_{100}\vee m_{101}\vee m_{110}\vee m_{111}$

$\Leftrightarrow m_2\vee m_4\vee m_5\vee m_6\vee m_7$

$\Leftrightarrow\Sigma(2,4,5,6,7)$

求公式A的主析取范式的方法与步骤

方法一、等值演算法

(1)化归为析取范式。

(2)除去析取范式中所有永假的析取项。

(3)将析取式中重复出现的合取项和相同的变元合并。

(4)对合取项补入没有出现的命题变元，即添加如$(p\vee\neg p)$式，然后应用分配律展开公式。

方法二、真值表法

(1)写出A的真值表。

(2)找出A的成真赋值。

(3)求出每个成真赋值对应的极小项（用名称表示），按角标从小到大顺序析取。

二、主合取范式

定义5 在含有n个命题变元的简单析取式中，若每个命题符号和其否定不同时存在，而二者之一必须出现且只出现一次，且第i个命题变元或者否定出现在从左边算起的第i个位置上（若命题变元无下标，则按字典顺序排列），这样的简单析取式称为极大项。

极大项是特殊的简单析取式。含n个命题变元的极大项中,由于每个命题变元以原形或否定出现且仅出现一次,因此n个命题变元共可产生2^n个不同的极大项。若在极大项中，将命题变元的原形对应0，否定对应1，则每个极大项唯一地对应一个二进制数，该二进制数的每一位正是使该极大项的真值为0的真值赋值。

例 两个命题变元p, q生成的4个极大项为：

$\neg p\vee\neg q$对应11，记为M_3 $\neg p\vee q$对应10，记为M_2

$p\vee\neg q$对应01，记为M_1 $p\vee q$对应00，记为M_0

由三个命题变元p, q, r生成的8个极大项为：

$\neg p\vee\neg q\vee\neg r$对应111,记为$M_7$ $\neg p\vee\neg q\vee r$对应110, 记为M_6

$\neg p\vee q\vee\neg r$对应101，记为M_5 $\neg p\vee q\vee r$对应100，记为M_4

$p\vee\neg q\vee\neg r$对应011，记为M_3 $p\vee\neg q\vee r$对应010，记为M_2

$p\vee q\vee\neg r$对应001， 记为M_1 $p\vee q\vee r$对应000， 记为M_0

注（1）任意两个不同的极大项都不等价；

（2）所有的极大项的合取必为假；

（3）任意两个不同的极大项的析取必为真。

定义6 若合取范式中的简单析取式都是极大项，则称该合取范式为主合取范式。

定理5 任何命题公式存在唯一的主合取范式。

求一个公式的主合取范式是：

[1] 先求该公式的一个合取范式。

[2] 如果该合取范式的某个简单析取式A中既不含某个命题变元p，也不含它的否定¬p，则该简单析取式变为如下形式：$(A\lor p)\land(A\lor\neg p)$。

[3] 消除重复出现的命题变元或命题变元的否定，重言式及重复出现的极大项，并将每个极大项的命题变元或其否定按下标顺序或字典顺序排列。

例6 求命题公式$((p\vee q)\rightarrow r)\rightarrow p$的主合取范式

解1: $((p\vee q)\rightarrow r)\rightarrow p$

$\Leftrightarrow (q\wedge\neg r)\vee p$

$\Leftrightarrow (p\vee q)\wedge(p\vee\neg r)$ 合取范式

$\Leftrightarrow ((p\vee q)\vee(r\wedge\neg r))\wedge((p\vee\neg r)\vee(q\wedge\neg q))$

$\Leftrightarrow (p\vee q\vee r)\wedge(p\vee q\vee\neg r)\wedge(p\vee q\vee\neg r)\wedge(p\vee\neg q\vee\neg r)$

$\Leftrightarrow M_0\wedge M_1\wedge M_3$

$\Leftrightarrow \prod(0,1,3)$(主合取范式)

$\Leftrightarrow \sum(2,4,5,6,7)$ （主析取范式）

解2: $((p\vee q)\to r)\to p \Leftrightarrow (p\vee q)\wedge(p\vee\neg r)$ （合取范式）

$\Leftrightarrow M_{00x} \wedge M_{0x1}$

$\Leftrightarrow M_{000} \wedge M_{001} \wedge M_{001} \wedge M_{011}$

$\Leftrightarrow M_0 \wedge M_1 \wedge M_3$

$\Leftrightarrow \prod(0,1,3)$ 主合取范式

$\Leftrightarrow m_2 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$

$\Leftrightarrow\sum(2,4,5,6,7)$ 主析取范式

主合取范式也可从命题公式的真值表更容易地得到，对应地，根据命题公式的主合取范式也可容易地构造其真值表、判定其类型（矛盾式、可满足式还是永真式）等

求公式A的主合取范式的方法与步骤

方法一、等值演算法

(1)化归为合取范式。

(2)除去合取范式中所有永真的合取项。

(3)将合取式中重复出现的析取项和相同的变元合并。

(4)对析取项补入没有出现的命题变元，即添加如$(p\wedge\neg p)$式，然后应用分配律展开公式。

方法二、真值表法

(1)写出A的真值表。

(2)找出A的成假赋值。

(3)求出每个成假赋值对应的极大项（用名称表示），按角标从小到大顺序析取。

由例6 可以看出，对于一个命题公式若求出了其主合取范式就可以直接写出其主析取范式，反之依然。为了研究它们之间的关系，我们首先来研究极大项与极小项之间的关系。我们已得极大项与极小项具有下列关系。

$$\neg M_i \Leftrightarrow m_i,\ \neg m_i \Leftrightarrow M_i$$

设命题公式A含有n个命题变元，且设A的主析取范式中含k个极小项 $m_{i_1}, m_{i_2}, \ldots, m_{i_k}$. 则¬A的主析取范式中必含有 $2^n - k$个极小项，设为 $m_{j_1}, m_{j_2}, \ldots, m_{j_{2^n-k}}$,即

$$\neg A \Leftrightarrow m_{j_1} \vee m_{j_2} \vee \ldots \vee m_{j_{2^n-k}}$$

$$A \Leftrightarrow \neg\neg A \Leftrightarrow \neg(m_{j_1} \vee m_{j_2} \vee \ldots \vee m_{j_{2^n-k}})$$

$$\Leftrightarrow M_{j_1} \wedge M_{j_2} \wedge \ldots \wedge M_{j_{2^n-k}}$$

由以上可知由**A**的主析取范式求其主合取范式的步骤为:

(1)求出A的主析取范式中没有包含的极小项

$$m_{j_1}, m_{j_2}, \ldots, m_{j_{2^n-k}}$$

(2)求出(1)中角码相同的极大项

$$M_{j_1}, M_{j_2}, \ldots, M_{j_{2^n-k}}$$

(3)由以上的极大项构成的合取式即为**A**的主合取范式。

$$\text{即}\quad A \Leftrightarrow M_{j_1} \wedge M_{j_2} \wedge \ldots \wedge M_{j_{2^n-k}}$$

例7 求下列命题公式的主析取范式和主合取范式

(1) $(p\rightarrow q)\wedge p\rightarrow q$;

(2) $p\wedge q\vee r$.

解 (1) $(p\rightarrow q)\wedge p\rightarrow q \Leftrightarrow \neg((\neg p\vee q)\wedge p)\vee q$

$\Leftrightarrow \neg(\neg p\vee q)\vee\neg p\vee q$

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q)\vee\neg p\vee q$

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q)\vee\neg p\wedge(\neg q\vee q)\vee(\neg p\vee p)\wedge q$

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)\vee(\neg p\wedge q)\vee(p\wedge q)$

$\Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q)\vee(p\wedge q)$

$\Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3$

$\Leftrightarrow\Sigma$（0,1,2,3）(主析取范式)

$\Leftrightarrow$1（T）(主合析取范式)

解法 I

$(2) p\wedge q\vee r \Leftrightarrow (p\wedge q)\wedge(\neg r\vee r)\vee(\neg p\vee p)\wedge(\neg q\vee q)\wedge r$

$\Leftrightarrow (p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)$

$\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

$\Leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee (p\wedge q\wedge\neg r)$

$\vee(p\wedge q\wedge r)$

$\Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_6\vee m_7$

$\Leftrightarrow\sum(1,3,5,6,7)$ (主析取范式)

$\Leftrightarrow\prod(0,2,4)$ (主合取范式)

解法 II

（2） $p\wedge q\vee r \Leftrightarrow (p\vee r)\wedge(q\vee r)$

$\Leftrightarrow (p\vee(\neg q\wedge q)\vee r)\wedge((\neg p\wedge p)\vee q\vee r)$

$\Leftrightarrow (p\vee q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)\wedge(p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee r)$

$\Leftrightarrow (p\vee q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee r)$

$\Leftrightarrow M_0\wedge M_2\wedge M_4$

$\Leftrightarrow\prod(0,2,4)$ (主合取范式)

$\Leftrightarrow\sum(1,3,5,6,7)$ (主析取范式)

解法III

（2） $p\wedge q\vee r \Leftrightarrow m_{11X}\vee m_{XX1}$

$\Leftrightarrow m_{111}\vee m_{110}\vee m_{001}\vee m_{011}\vee m_{101}\vee m_{111}$

$\Leftrightarrow m_{001}\vee m_{011}\vee m_{101}\vee m_{110}\vee m_{111}$

$\Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_6\vee m_7$

$\Leftrightarrow\sum(1,3,5,6,7)$ (主析取范式)

$\Leftrightarrow\prod(0,2,4)$ (主合取范式)

解法 IV

（2） $p\wedge q\vee r \Leftrightarrow (p\vee r)\wedge(q\vee r)\Leftrightarrow M_{0X0}\wedge M_{X00}$

$\Leftrightarrow M_{000}\wedge M_{010}\wedge M_{000}\wedge M_{100} \Leftrightarrow M_{000}\wedge M_{010}\wedge M_{100}$

$\Leftrightarrow M_0\wedge M_2\wedge M_4 \Leftrightarrow\prod(0,2,4)$ (主合取范式)

$\Leftrightarrow\sum(1,3,5,6,7)$ (主析取范式)

主析取范式的用途

求公式的成真赋值与成假赋值

判断公式的类型

判断两个命题公式是否等值

应用主析取范式分析和解决实际问题

求公式的成真赋值与成假赋值

若公式A中含n个命题变项，A的主析取范式含s($0 \le s \le 2^n$)个极小项，则A有s个成真赋值，它们是所含极小项角标的二进制表示，其余2^n-s个赋值都是成假赋值。

例 $(p \to q) \leftrightarrow r \Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_7$,各极小项均含三个文字，因而各极小项的角标均为长为3的二进制数，它们分别是001，011，100，111，这四个赋值为该公式的成真赋值,其余的为成假赋值。

例$p \to q \Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_3$，这三个极小项均含两个文字，它们的角标的二进制表示00，01，11为该公式的成真赋值，10是它的成假赋值。

重言式与矛盾式的主析取范式

设公式A中含n个命题变项，容易看出：

A为重言式当且仅当A的主析取范式含全部2^n个极小项。

A为矛盾式当且仅当A的主析取范式不含任何极小项。此时，记A的主析取范式为0。

A为可满足式当且仅当A的主析取范式至少含一个极小项。

重言式与矛盾式的主合取范式

设n为公式中命题变项个数

矛盾式无成真赋值，因而矛盾式的主合取范式含2^n个极大项。

重言式无成假赋值，因而主合取范式不含任何极大项。

将重言式的主合取范式记为1。

可满足式的主合取范式中极大项的个数一定小于2^n。

真值表与范式的关系

n个命题变项共可产生2^n个极小项（极大项）

可以产生的主析取范式（主合取范式）数目为：

$$C_{2^n}^0 + C_{2^n}^1 + \cdots + C_{2^n}^{2^n} = 2^{2^n}$$

A⇔B当且仅当**A**与**B**有相同的真值表，又当且仅当**A**与**B**有相同的主析取范式（主合取范式）。

真值表与主析取范式（主合取范式）是描述命题公式标准形式的两种不同的等价形式。

本章典型习题

用等值演算法证明重言式和矛盾式

用等值演算法证明等值式

求公式的主析取范式和主合取范式

用主范式判断两个公式是否等值

求解实际问题

求公式$(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge r)$的主析取范式和主合取范式。

解答

p	q	r	$(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge r)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

主析取范式为 $(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

主合取范式为 $(p\vee q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)$

例题

甲、乙、丙、丁四个人有且只有两个人参加围棋比赛。关于谁参加比赛，下列四个判断都是正确的：

(1)甲和乙只有一人参加比赛。
(2)丙参加，丁必参加。
(3)乙或丁至多参加一人。
(4)丁不参加，甲也不会参加。

请推断出哪两个人参加围棋比赛。

解答

设a：甲参加了比赛。 b：乙参加了比赛。
c：丙参加了比赛。 d：丁参加了比赛。

(1) $(a \land \neg b) \lor (\neg a \land b)$ (2) $c \rightarrow d$

(3) $\neg (b \land d)$ (4) $\neg d \rightarrow \neg a$

$((a\wedge\neg b)\vee(\neg a\wedge b))\wedge(c\rightarrow d)\wedge(\neg(b\wedge d))\wedge(\neg d\rightarrow\neg a)$

$\Leftrightarrow(a\wedge\neg b\wedge\neg c\wedge d)\vee(a\wedge\neg b\wedge d)\vee(\neg a\wedge b\wedge\neg c\wedge\neg d)$

根据题意条件，有且仅有两人参赛，

故$\neg a\wedge b\wedge\neg c\wedge\neg d$为0，所以

$(a\wedge\neg b\wedge\neg c\wedge d)\vee(a\wedge\neg b\wedge d)$为1，

即甲和丁参加了比赛。

说明

$(a\vee b)\wedge(c\vee d)\Leftrightarrow(a\wedge c)\vee(b\wedge c)\vee(a\wedge d)\vee(b\wedge d)$

例　某科研所要从3名科研骨干A,B,C中挑选1～2名出国进修。由于工作原因，选派时要满足以下条件：
(1)若A去，则C同去。
(2)若B去，则C不能去。
(3)若C不去，则A或B可以去。
问应如何选派他们去？

分析：
(1)　将简单命题符号化
(2)　写出各复合命题
(3)　写出由(2)中复合命题组成的合取式（前提）
(4)　将(3)中公式化成析取式（最好是主析取范式）
(5)　这样每个小项就是一种可能产生的结果。去掉不符合题意的小项，即得结论。

解答

设 p:派A去，q:派B去，r:派C去

由已知条件可得公式

$$(p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow\neg r)\wedge(\neg r\rightarrow(p\vee q))$$

经过演算可得

$$(p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow\neg r)\wedge(\neg r\rightarrow(p\vee q))\Leftrightarrow m_1\vee m_2\vee m_5$$

由于 $m_1=\neg p\wedge\neg q\wedge r$, $m_2=\neg p\wedge q\wedge\neg r$, $m_5=p\wedge\neg q\wedge r$

可知，选派方案有3种：

(a)C去，而A,B都不去。

(b)B去，而A,C都不去。

(c)A,C去，而B不去。