Chap.01. 实数集与函数

§1.1　实数

0.记号与术语

自然数$\left(natural\ number\right)$集 $\mathbb{N}=\left\{0,1,2,3,\cdots\right\}$,

整数集 $\mathbb{Z}=\left\{\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots\right\}$,$\left[\right.$德文$\left.\right]$ $Zahl$

正整数集 $\mathbb{N}^{*}=\mathbb{Z}^{+}=\left\{1,2,3,\cdots\right\}$,

有理数$\left(rational\ number\right)$集 $\mathbb{Q}$, $\left(quotient\right)$

实数$\left(real\ number\right)$集 $\mathbb{R}$,

$\mathbb{R}^{+}$:正实数集 $\mathbb{R}^{-}$:负实数集

复数$\left(Complex\ number\right)$集 $\mathbb{C}$

上页 下页 返回

$\exists$: 存在, *exist*　存在量词

$\forall$: *for every, for each*…对每一个√

全称量词

for any, for all…对任意的

上页 下页 返回

一.实数概念

1.回顾中学数学对有理数和无理数的定义：

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{有限小数和无限循环小数,或}\\[2ex] \text{分数}\dfrac{q}{p}\left(p,q\text{为既约整数}, p\in\mathbb{Z}^{+}\right)\end{cases}\\[4ex] \text{无理数：无限不循环小数 .}\end{cases}$$

约定：有限位十进制小数表示为无限循环小数

$$a_0.a_1a_2\cdots a_n = a_0.a_1a_2\cdots\left(a_n-1\right)999\cdots$$

对正整数 $x=a_0, x=\left(a_0-1\right).999\cdots$

上页 下页 返回

讨论实数问题,将实数表示为无穷小数,

是基于如下问题：

1. 边长为a,b的矩形的面积A,

(1). $a,b\in\mathbb{Z}^{+}, A=a\cdot b$;

(2). $a,b\in\mathbb{Q}^{+}, a=\dfrac{q}{p}, (p,q)=1, A=a\cdot b$;

(3). $a\in(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})^{+}, b\in\mathbb{Q}^{+}, A=\cdots=a\cdot b$;

… … $a,b\in\mathbb{R}^{+}, A=\cdots=a\cdot b$.

讨论实数问题,将实数表示为无穷小数,是基于如下问题:

2. $a>0, a^x=?$

(1). $x\in\mathbb{Z}^+, a^x=a\cdots\cdots a$,x个a 相乘;

(2). $x=\dfrac{q}{p}\in\mathbb{Q}^+, p\in\mathbb{Z}^+, (p,q)=1, a^x=a^{\frac{q}{p}}=\left(a^{\frac{1}{p}}\right)^q$;

(3). $a^0\triangleq 1.$ $a\cdot a^{-1}=a^{1-1}=a^0=1$,即$a^{-1}=\dfrac{1}{a}$;

$x\in\mathbb{Q}^-, a^x=a^{-(-x)}=\dfrac{1}{a^{-x}}$;

(4). $x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, $a^x=?$

2.两个实数的大小关系:

定义1.1 (A).给定两个非负实数

$x=a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots, y=b_0.b_1b_2\cdots b_n\cdots,$

$\forall n\in\mathbb{N}, a_n, b_n\in\mathbb{N}.$

(1).$\forall k\in\mathbb{N}$,有$a_k=b_k$,则$x=y$;

(2).若$a_0>b_0$,或者$\exists$某个$l\in\mathbb{N}, \forall k=0,1,\cdots,l,$

有$a_k=b_k$,但$a_{l+1}>b_{l+1}$,则$x>y$或$y<x$.

(B).对于两个负实数x, y,若$-x=-y$,则$x=y$;

若$-x>-y$,则$x<y$或$y>x$.

上页 下页 返回

通过有限小数比较实数大小的等价条件：

定义1.2 (1).设$x=a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$为非负实数，称有理数$x_n=a_0.a_1a_2\ldots a_n$为实数$x$的$n$位不足近似，而$\overline{x}_n=x_n+\dfrac{1}{10^n}$为实数$x$的$n$位过剩近似，$n=0,1,2,\cdots$

(2).对于负实数设$x=-a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$，其$n$位不足近似与$n$位过剩近似规定为

$$x_n=-a_0.a_1a_2\ldots a_n-\frac{1}{10^n}\text{和}\overline{x}_n=-a_0.a_1a_2\ldots a_n.$$

上页 下页 返回

$\forall$任意实数的不足近似与过剩近似,

$x_0 \le x_1 \le x_2 \le \cdots$, $\bar{x}_0 \ge \bar{x}_1 \ge \bar{x}_2 \ge \cdots$

命题1.1 设 $x = a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$,

$y = b_0.b_1b_2\cdots$为两个实数.

则$x > y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}$,使得 $x_n > \bar{y}_n$.

上页 下页 返回

命题1.1 设 $x=a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots, y=b_0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$为两个实数.

则 $x>y\Leftrightarrow\exists n\in\mathbb{N}$,使得 $x_n>\bar{y}_n$.

证明 为简便起见,只证$x>y>0$ 的情形.

设 $x=a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots, y=b_0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$,

其中 $a_n,b_n\in\{0,1,2,\cdots,9\}, n\in\mathbb{Z}^+$.

$x>y\Leftrightarrow$ 有$a_0>b_0$,

或者$\exists$某个$m\in\mathbb{N},\forall k=0,1,\cdots,m$,有$a_k=b_k$,但$a_{m+1}>b_{m+1}$.

$a_{m+1}>b_{m+1}$,那么a_{m+1}至少比b_{m+1}大1,而$a_{m+2},\cdots$不可能全都是0.

记a_{m+1}后面第一个不为零的数为a_{m+k},那么有$x_{m+k}>\bar{y}_{m+k}$.

$\because\forall x\in\mathbb{R}$,总有:不足近似 $x_0\le x_1\le x_2\le\cdots$,

过剩近似 $\bar{x}_0\ge\bar{x}_1\ge\bar{x}_2\ge\cdots$.

于是当 $x>y>0$时,$\forall n\ge m+k$, $x_n>\bar{y}_n$恒成立.

$0>x>y$ 情形证明同理可得. 结论成立!

上页 下页 返回

命题1.1 设 $x=a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$, $y=b_0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$为两个实数. 则 $x>y \Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{N}$,使得 $x_n>\bar{y}_n$.

举例说明:

$$x>y>0$$

$$x = 6.\quad 3\quad 0\quad 0\quad 1\quad \cdots$$

$$y = 6.\quad 2\quad 9\quad 9\quad 9\quad \cdots$$

x_n	6	6.3	6.30	6.300	6.3001
$\bar{y}_n$	7	6.3	6.30	6.300	6.3000
n	0	1	2	3	4

上页 下页 返回

二.实数的性质:

1. 实数集ℝ对加,减,乘,除(除数不为0)四则运算是封闭的.即任意两个实数和,差,积,商(除数不为0)仍然是实数.

› › ›实数集是一个域,故实数集也称为实数域.

2. 实数集是有序的.即任意两个实数a, b必满足下述三个关系之一(三歧性) : $a < b$, $a = b$, $a > b$.

3. 实数集的大小关系具有传递性.即若$a>b$, $b>c$,则有$a>c$.

上页 下页 返回

例1. 设 $a,b\in\mathbb{R},\forall\varepsilon>0,$恒有$a<b+\varepsilon,$

求证：$a\le b.$

证明　用反证法

假设结论不成立,根据实数的有序性,

则有$a>b.$令$\varepsilon=a-b,$

则$\varepsilon>0,$且$a=b+\varepsilon,$这与条件

“$\forall\varepsilon>0,$恒有$a<b+\varepsilon$” 相矛盾.

假设不成立.　　$\therefore$ 结论成立.

上页　下页　返回

4.实数具有Archimedes性, 即$\forall a,b\in\mathbb{R}$,

若 $b>a>0$,则$\exists n\in\mathbb{N}^*$,使得$na>b$.

理由如下:

设$b=b_0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$,$b_0=k\in\mathbb{N}$,

则 $b<k+1<10^{k+1}$.

设 $a=a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$,

a_p为第一个不为零的正整数,

令 $n=10^{p+k+1}$,则 $na\geq 10^{k+1}>b$.

例2. 若 $b>0$,则 $\exists n\in\mathbb{Z}^+$, 使得 $\frac{1}{n}<b$.

证明　若 $b\ge 1$,只要 $n\ge 2$,就使得 $\frac{1}{n}<b$.

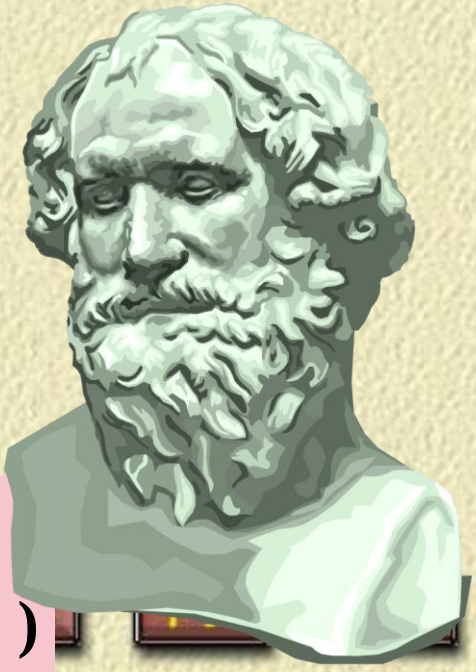
只需考虑 $0<b<1$ 的情形,由阿基米德性,

$\exists n\in\mathbb{Z}^+$,使 $nb>1$, 即 $\frac{1}{n}<b$.

实数具有*Archimedes*性,

即 $\forall a,b\in\mathbb{R}$,若 $b>a>0$,

则 $\exists n\in\mathbb{N}^*$,使得 $na>b$.



阿基米德 (Archimedes,

287B.C.－212B.C. , 希腊)

5.实数集$\mathbb{R}$具有**稠密性**.即任何两个不相等的实数之间必有另一个实数,且既有有理数,也有无理数.

(1). 任意两个不相等的实数 a 与 b 之间,必有另一个实数 c. 例如 $c=\dfrac{a+b}{2}$;

(2). 任意两个不相等的实数 a 与 b 之间,既有有理数又有无理数.

证明 若 $a<b$,则由例 1,存在 $n\in\mathbb{Z}^{+}$, 使

$$\frac{1}{n}<\frac{1}{2}(b-a).$$

上页 下页 返回

设 k 是满足 $\frac{k}{n} \le a$ 的最大整数,即 $\frac{k+1}{n} > a$,

于是,$a < \frac{k+1}{n} < \frac{k+2}{n} = \frac{k}{n} + \frac{2}{n} < a + b - a = b$,

则 $\frac{k+1}{n}, \frac{k+2}{n}$ 是 a 与 b 之间的有理数,

$$a < \frac{k+1}{n} + \frac{\sqrt{2}}{2n} < \frac{k+1}{n} + \frac{1}{n} < b,$$

因而 $\frac{k+1}{n} + \frac{\sqrt{2}}{2n}$ 是 a 与 b 之间的无理数.

6.实数集与数轴上的点具有一一对应关系:即任一实数都对应数轴上唯一的一点,反之,数轴上的每一点也都唯一地代表一个实数.

(1).这种对应关系,粗略地说可这样描述:

设P是数轴上的一点,且点P在O的右边.

若P在整数n与$n+1$之间,则$a_0 = n$.将区间$(n,n+1]$10等分,

若点P在第$i+1$个区间,$i = 0,1,2,\cdots,9$,则取$a_1 = i$.

类似地可取到$a_n, n = 2,3,\cdots$

这样我们就说点P对应于实数$a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$.

若数轴上点P在O的左边,点P关于O点对称的点为Q,

若点Q对应于实数$b_0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$,则我们就说

点P对应于实数$-b_0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$.

反之, 任何一实数也对应数轴上一点.

(2) 实数集与数轴上点的一一对应关系反映了实数的完备性. 我们将在后面有关章节中作进一步讨论.

实数的完备性

——有理数列1.4,1.41,1.414,1.4142,…在有理数集Q中没有极限,在实数集R中的极限 $\sqrt{2}$ 不是一个有理数.所以说,有理数集不完备.

实数的连续性

——实数的全体充满实数轴,实数轴上没有空隙.如果一刀砍向实数轴,那么必定砍到一个点,该点坐标是一个实数.

三. 绝对值与不等式

几个重要不等式:

$a,b \in \mathbb{R}$,

(1). $\big||a|-|b|\big| \le |a \pm b| \le |a|+|b|$;

(2). $a^2+b^2 \ge 2|ab|$;

(3). $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \le 1$,

$|x| \le \dfrac{\pi}{2}, |\sin x| \le |x|$;

$|x| < \dfrac{\pi}{2}, |x| \le |\tan x|$;

(4).均值不等式　对$\forall a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}^+$,记

$$M(a_1, \cdots, a_n) = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i, \cdots\cdots \text{算术平均}$$

$$G(a_1, \cdots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}}, \cdots\cdots\cdots\cdots \text{几何平均}$$

$$H(a_1, \cdots, a_n) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}. \cdots\cdots \text{调和平均}$$

均值不等式$H(a_1, \cdots, a_n) \le G(a_1, \cdots, a_n) \le M(a_1, \cdots, a_n)$,

当且仅当$a_1 = a_2 = \cdots = a_n$时等号成立.

上页　下页　返回

(5). 利用*Newton*二项展开式得到的不等式:

Newton二项展开式 : $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

$$= a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + C_n^3 a^{n-3} b^3 + \cdots + b^n,$$

其中规定 : $a^0 \triangleq 1, C_n^0 \triangleq 1.$

对$h \in \mathbb{R}$,由Newton二项展开式

$$(1+h)^n = 1 + nh + C_n^2 h^2 + C_n^3 h^3 + \cdots + h^n.$$

对$\forall h>0$,由Newton二项展开式

$$(1+h)^n=1+nh+C_n^2h^2+C_n^3h^3+\cdots+h^n,$$

有: $(1+h)^n>$上式右端的任何有限项,

即 $$(1+h)^n>1+nh,$$

$$(1+h)^n>1+C_n^2h^2,\cdots$$

这个结果在后面的极限定义中大有用处.

(6).*Bernoulli* 不等式

$\forall x > -1$,有$(1+x)^n \geq 1+nx, n \in \mathbb{N}$.

当$x > -1$且$x \neq 0, n \in \mathbb{N}$,$n \geq 2$ 时有严格的不等式 $(1+x)^n > 1+nx$.

证明 由$1+x>0$且$1+x \neq 1 \Rightarrow$

$$(1+x)^n + n - 1$$

$$= (1+x)^n + 1 + \cdots + 1 > n \cdot \sqrt[n]{(1+x)^n \cdot 1 \cdot \cdots \cdot 1}$$

$$= n(1+x) ,$$

$$\Rightarrow (1+x)^n > 1+nx .$$

思考题:

1. 设 $a,b \in \mathbb{R}, \varepsilon$ 是任意给定的正数,恒有关系式 $|a-b| < \varepsilon$ 成立,请问 a,b 间关系如何?

2.设 $a,b,c \in \mathbb{R}^+$ ($\mathbb{R}^+$ 表示全体正实数的集合),则有关系式:

$$\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right| \le |b-c|$$

成立 .它的几何意义是什么?

上页 下页 返回

小结

实数中的规定：有限十进小数表示成无限循环小数

$$a_0.a_1a_2\cdots a_n = a_0.a_1\cdots(a_n-1)99\cdots9\cdots$$

就是相当于首先承认以下结论：

$0.99\cdots9\cdots=1 \Leftrightarrow$

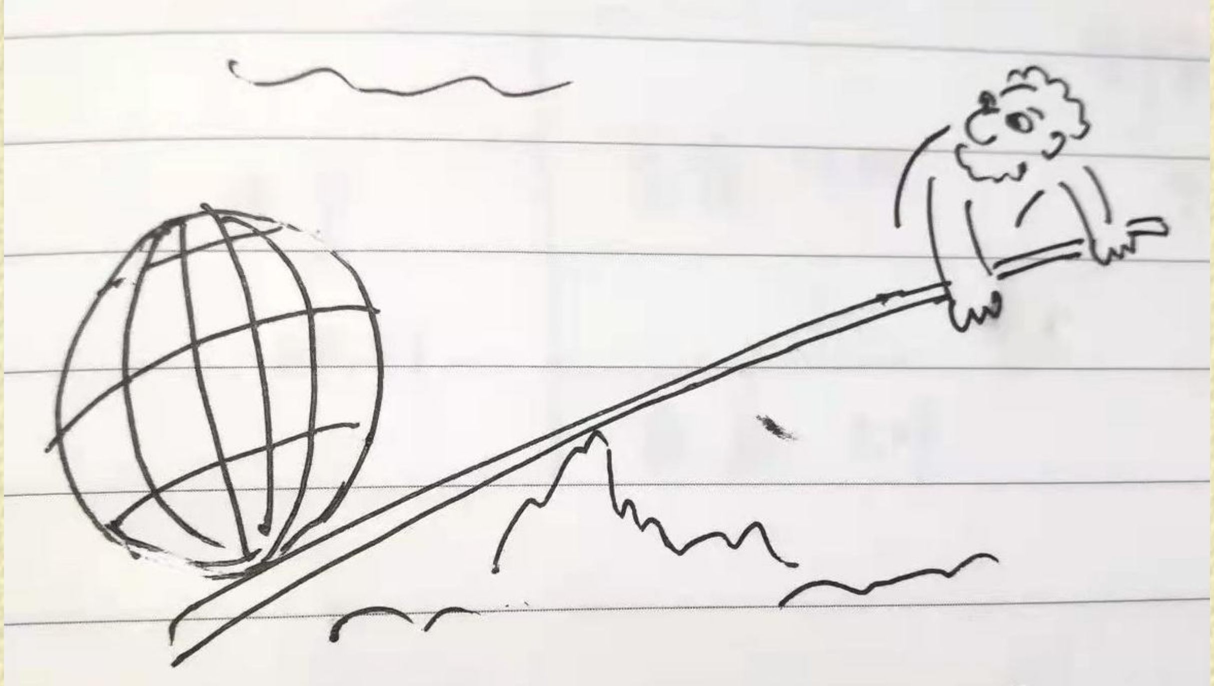
$$\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\cdots+\frac{9}{10^n}+\cdots=\frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}}=1$$

上页 下页 返回

在此基础上获得了 实数的完备性, 于是也就有了实数的 **Achimedes性**, 和实数的 **稠密性** .而这正是后面我们将要讨论的极限理论的基础, 比如后面讨论的**确界原理**, 就是根据实数的无限十进小数表示法和不足近似与过剩近似 等的有关结论得到的.而本课程的教材是以 **确界原理** 为极限理论的基础!

上页 下页 返回

实数中“有限十进小数表示成无限循环小数”的规定就是托起极限理论的支点



古希腊科学家阿基米德的豪言壮语：
给我一个支点，我就能撬动地球！

上页 下页 返回