南京农业大学本科生课程

离 散 数 学

8.3 集合的基数

数学系

本章说明

- 本章的主要内容
  - 集合的等势及其性质
  - 重要的等势或不等势的结果
  - 集合的优势及其性质
  - 自然数与自然数集合
  - 集合的基数
  - 可数集

本章内容

∷ 8.3.1 集合的等势与优势

- ❑通俗的说，集合的势是量度集合所含元素多少的量。
- ❑集合的势越大，所含的元素越多。

定义8.8 设A，B是集合，如果存在着从A到B的双射函数，就称A和B是等势（same cardinality）的，记作$A \approx B$。

如果A不与B等势，则记作$A \not\approx B$。

等势集合的实例(1)

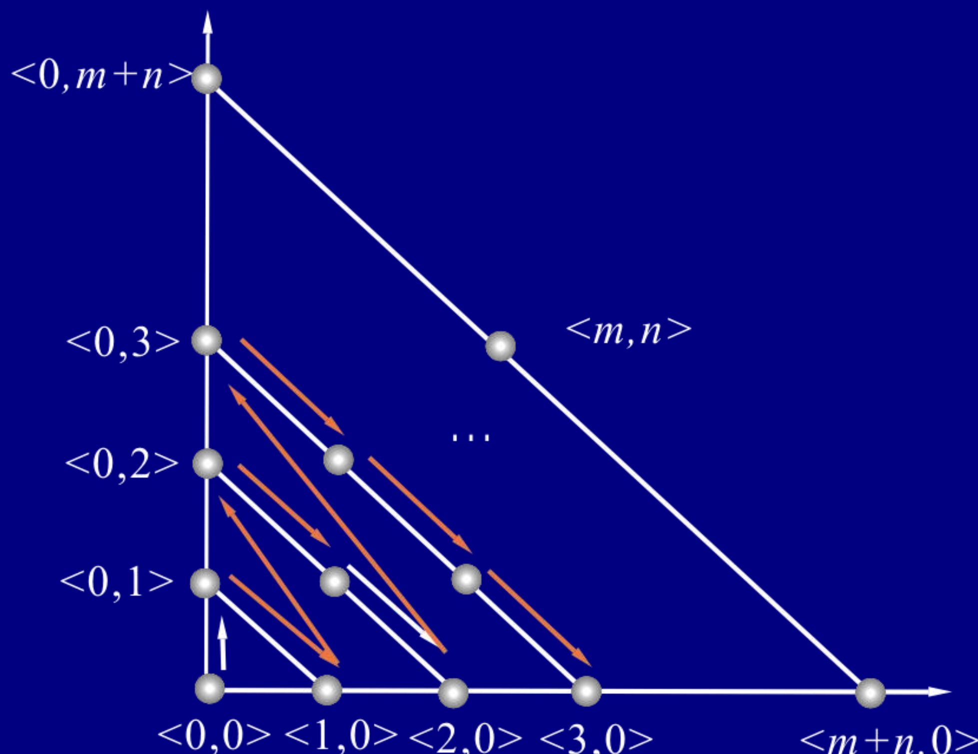
（1）$Z \approx N$。

$$f: Z \to N, \quad f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ -2x-1 & x < 0 \end{cases}$$

则f是Z到N的双射函数。 从而证明了$Z \approx N$。

等势集合的实例(2)

（2）$N \times N \approx N$。



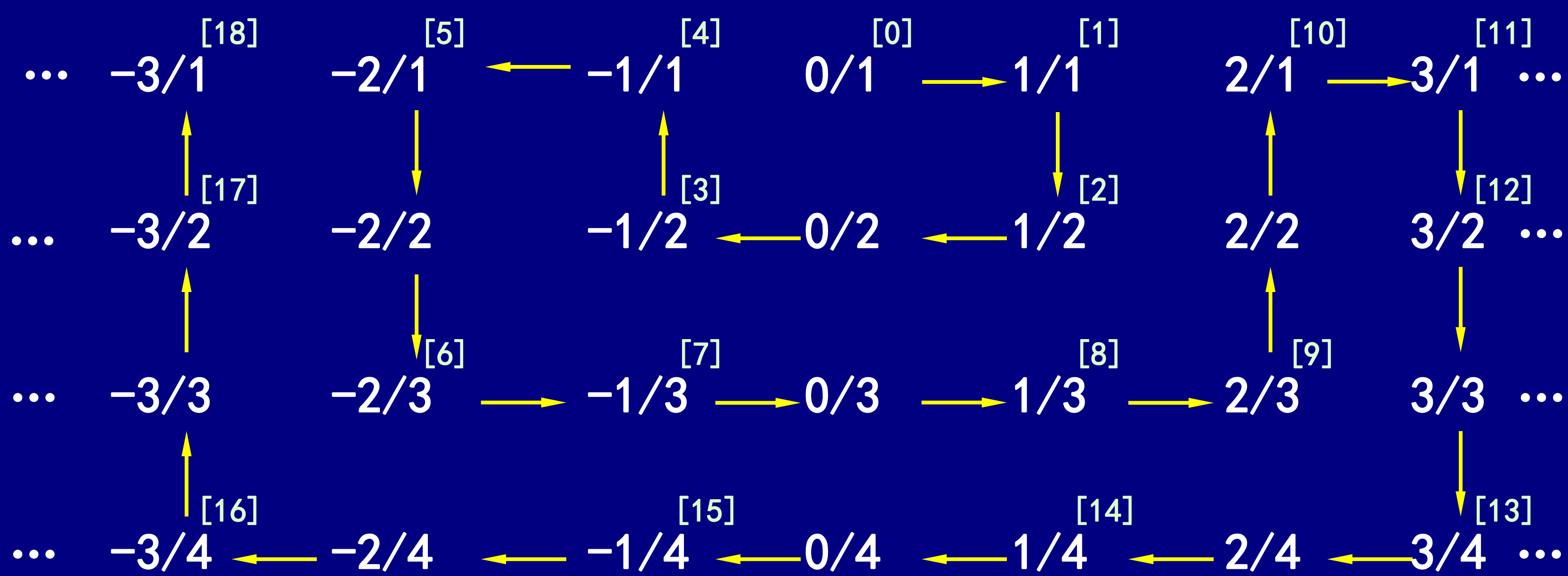
双射函数　$f: N \times N \to N$,　$f(<m,n>) = \dfrac{(m+n+1)(m+n)}{2} + m$

等势集合的实例(3)

（3）**N≈Q。**

把所有形式为p/q（p, q为整数且q>0）的数排成一张表。

以0/1作为第一个数，按照箭头规定的顺序可以“数遍”表中所有的数。计数过程中必须跳过第二次以及以后各次所遇到的同一个有理数。



等势集合的实例(4)

（4）$(0,1) \approx R$。 其中实数区间 $(0,1)=\{x \mid x \in R \wedge 0<x<1\}$。

令双射函数 $f:(0,1) \to R, \quad f(x) = \tan \pi \dfrac{2x-1}{2}$

则 f 是$(0,1)$到R的双射函数。从而证明了$(0,1) \approx R$ 。

∵ 等势集合的实例(5)

（5）[0,1]≈(0,1)。 其中(0,1)和[0,1]分别为实数开区间和闭区间。

$$\begin{array}{cccccccc}
0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3} & \cdots & \frac{1}{2^n} & \cdots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \cdots \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3} & \frac{1}{2^4} & \frac{1}{2^5} & \cdots & \frac{1}{2^{n+2}} & \cdots
\end{array}$$

双射函数 $f: [0,1] \to (0,1)$，$f(x) = \begin{cases} 1/2 & x=0 \\ 1/2^2 & x=1 \\ 1/2^{n+2} & x=1/2^n, n=1,2,\ldots \\ x & 其它x \end{cases}$

等势集合的实例(6)

（6）对任何$a, b \in R$，$a<b$， $[0,1] \approx [a,b]$。

双射函数f：$[0,1] \to [a,b]$，$f(x)=(b-a)x+a$。

例8.10

例8. 10 设A为任意集合，则$P(A)\approx\{0,1\}^A$。

证明

构造f：$P(A)\rightarrow\{0,1\}^A$，

$$f(A')=\chi_{A'}，\forall A'\in P(A)。$$

复习

其中$\chi_{A'}$是集合A'的特征函数。

(1) 易证 f 是单射的。

(2) 对于任意的 $g\in\{0,1\}^A$，

那么有 g：$A\rightarrow\{0,1\}$。令

$$B=\{x| x\in A\wedge g(x)=1\}$$

则$B\subseteq A$，且$\chi_B=g$，即$\exists B\in P(A)$，使得$f(B)=g$。

所以 f 是满射的。

由等势定义得$P(A)\approx\{0,1\}^A$。

等势的性质

定理8.6 设A，B，C是任意集合，

（1）$A \approx A$。

（2）若$A \approx B$，则$B \approx A$。

（3）若$A \approx B$，$B \approx C$，则$A \approx C$。

证明

（1） I_A是从A到A的双射，因此$A \approx A$。

（2） 假设$A \approx B$，存在 $f: A \to B$是双射，

那么$f^{-1}: B \to A$是从B到A的双射，所以$B \approx A$。

（3） 假设$A \approx B$，$B \approx C$，存在 $f: A \to B$，$g: B \to C$是双射，

则$f \circ g: A \to C$是从 A 到 C 的双射。

所以$A \approx C$。

若干等势集合

- $N \approx Z \approx Q \approx N \times N$
- $R \approx [0,1] \approx (0,1)$
- 任何的实数区间（开区间、闭区间以及半开半闭的区间）都与实数集合R等势。
- 问题：N和R是否等势？

康托定理

定理8.7 康托定理

（1）$N \not\approx R$。

（2）对任意集合A都有$A \not\approx P(A)$。

分析

（1）如果能证明N $\not\approx$ [0,1]，就可以断定N $\not\approx$ R。

只需证明任何函数f：$N \to [0,1]$都不是满射的。

构造一个[0,1]区间的小数b，使得b在N中不存在原像。

（2）任取函数f：$A \to P(A)$，构造$B \in P(A)$，使得B在A中不存在原像。

或者使用反证法。

康托定理

（1）首先规定$[0,1]$中数的表示。

对任意的$x\in[0,1]$，令$x = 0.x_1x_2\ldots$，　　（$0\le x_i\le 9$）

注意：为了保证表示式的唯一性，如果遇到0.24999…，则将x表示为0.25000…。

设 $f:N\to[0,1]$是从N到$[0,1]$的任何一个函数。f的所有函数值为：

$$
\begin{aligned}
&f(0)=0.a_1^{(1)}a_2^{(1)}\ldots\\
&f(1)=0.a_1^{(2)}a_2^{(2)}\ldots\\
&\qquad\ldots\\
&f(n-1)=0.a_1^{(n)}a_2^{(n)}\ldots\\
&\qquad\ldots
\end{aligned}
$$

令y的表示式为$0.b_1b_2\ldots$，并且满足$b_i\ne a_i^{(i)}$，$i=1,2,\ldots$，

则$y\in[0,1]$，但y与上面列出的任何一个函数值都不相等。

即f不是满射的。所以，$N\not\approx R$。

康托定理

- 假设A≈P(A)，则必有函数 f: A→P(A)是双射函数。

  如下构造集合B：

  $$B=\{x \mid x\in A \land x\notin f(x)\}$$

  可知 $B\in P(A)$。

  于是存在唯一一个元素$b\in$A，使得 $f(b)=$B。

  若$b\in$B，则由B的定义知，b $\notin f(b)$，即 $b\notin$B，矛盾。

  若b$\notin$B，则b $\notin f(b)$，于是由B的定义知， $b\in$B，矛盾。

康托定理

（2）设g：$A \to P(A)$是从A到$P(A)$的任意函数， 如下构造集合B：

$$B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin g(x)\}$$

则$B \in P(A)$。

但是对任意$x \in A$，都有

$$x \in B \Leftrightarrow x \notin g(x)$$

所以，对任意的$x \in A$都有$B \neq g(x)$，即$B \notin \mathrm{ran}\ g$

即$P(A)$ 中存在元素B，在A中找不到原像。

所以，g不是满射的。

所以，$A \not\approx P(A)$。

说明

- 根据这个定理可以知道$N \not\approx P(N)$。
- 综合前面的结果，可知$N \not\approx \{0,1\}^N$。
- 实际上，P(N)，$\{0,1\}^N$和R都是比N“更大”的集合。

优势

定义8.9

（1） 设A, B是集合，如果存在从A到B的**单射**函数，就称**B优势于A**，记作$A \leqslant\cdot B$。 如果B不是优势于A， 则记作$A \not\leqslant\cdot B$。

（2）设A, B是集合，若$A \leqslant\cdot B$且$A \not\approx B$，则称**B真优势于A**，记作$A < \cdot B$。如果B不是真优势于A，则记作$A \not< \cdot B$。

例如：

$N \leqslant\cdot N$ $\quad$ $N < \cdot R$ $\quad$ $R \not< \cdot N$

$N \leqslant\cdot R$ $\quad$ $A < \cdot P(A)$ $\quad$ $N \not< \cdot N$

$A \leqslant\cdot P(A)$ $\quad$ $R \not\leqslant\cdot N$

优势的性质

定理8.8 设A, B, C是任意的集合，则

（1）$A \preccurlyeq\cdot A$。

（2）若$A \preccurlyeq\cdot B$且$B \preccurlyeq\cdot A$，则$A \approx B$。

（3）若$A \preccurlyeq\cdot B$且$B \preccurlyeq\cdot C$, 则$A \preccurlyeq\cdot C$。

证明:

（1）I_A是A到A的单射，因此$A \preccurlyeq\cdot A$。

（2）证明略。

（3）假设$A \preccurlyeq\cdot B$且$B \preccurlyeq\cdot C$，那么存在单射 f:A→B，g:B→C，于是 $f\circ g$：$A \to C$也是单射的，因此$A \preccurlyeq\cdot C$。

说明

- 该定理为证明集合之间的等势提供了有力的工具。
- 构造两个单射f：A→B 和 g：B→A函数容易集合等势。

例题

例题： 证明[0, 1]与(0, 1)等势。

证明： 构造两个单射函数

f: $(0, 1) \to [0, 1]$，$f(x) = x$

g: $[0, 1] \to (0, 1)$，$g(x) = x/2+1/4$

∵ 证明 $\{0,1\}^N \approx [0,1)$

(1) 设$x\in[0,1)$，$0.x_1x_2\ldots$是x的二进制表示。

为了使表示唯一，规定表示式中不允许出现连续无数个1。

例如 $x=0.1010111\ldots$，应按规定记为$0.1011000\ldots$。

对于x，如下定义f：$[0,1)\to\{0,1\}^N$，使得

$f(x)=t_x$，且t_x：$N\to\{0,1\}$， $t_x(n)=x_{n+1}$，$n=0,1,2,\ldots$

例如 $x=0.10110100\ldots$，则对应于x的函数t_x是：

n	0 1 2 3 4 5 6 7…
$t_x(n)$	1 0 1 1 0 1 0 0…

易见$t_x\in\{0,1\}^N$，且对于$x,y\in[0,1)$，$x\neq y$，必有$t_x\neq t_y$，即$f(x)\neq f(y)$。

所以，f：$[0,1)\to\{0,1\}^N$是单射的。

证明 $\{0,1\}^N \approx [0,1)$

(2) 定义函数g：$\{0,1\}^N \to [0,1)$。

g的映射法则恰好与f相反， 即

$\forall t \in \{0,1\}^N$，t：$N \to \{0,1\}$，$g(t)=0.x_1x_2\ldots$, 其中$x_{n+1}=t(n)$。

但不同的是，将$0.x_1x_2\ldots$看作数x的十进制表示。

例如t_1，$t_2 \in \{0,1\}$N，且$g(t_1)=0.0111\ldots$，$g(t_2)=0.1000\ldots$，

若将$g(t_1)$和$g(t_2)$都看成二进制表示，则$g(t_1)=g(t_2)$；

但若看成十进制表示，则$g(t_1) \neq g(t_2)$。

所以， g：$\{0,1\}^N \to [0,1)$ 是单射的。

根据定理9.3，有$\{0,1\}^N \approx [0,1)$。

总结

- $N \approx Z \approx Q \approx N \times N$
- $R \approx [a,b] \approx (c,d) \approx \{0,1\}^N \approx P(N)$

  其中$[a,b]$，(c,d)代表任意的实数闭区间和开区间。
- $\{0,1\}^A \approx P(A)$
- $N \prec\!\cdot\, R$
- $A \prec\!\cdot\, P(A)$

8.3.2 集合的基数

- 上一节我们只是抽象地讨论了集合的等势与优势。
- 本节将进一步研究度量集合的势的方法。
- 最简单的集合是有穷集。尽管前面已经多次用到“有穷集”这一概念，当时只是直观地理解成含有有限多个元素的集合，但一直没有精确地给出有穷集的定义。为解决这个问题我们需要先定义自然数和自然数集合。

后继

定义8.10 设a为集合，称$a\cup\{a\}$为a的**后继**，记作a^+，即 $a^+=a\cup\{a\}$。

例 考虑空集的一系列后继。

$\varnothing^+$

$=\varnothing\cup\{\varnothing\}$

$=\{\varnothing\}$

$\varnothing^{++}$

$=\{\varnothing\}^+$

$=\{\varnothing\}\cup\{\{\varnothing\}\}$

$=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$

$=\{\varnothing,\varnothing^+\}$

$\varnothing^{+++}$

$=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}^+$

$=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\cup\{\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$

$=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$

$=\{\varnothing,\varnothing^+,\varnothing^{++}\}$

说明

- ❑ 前边的集合都是后边集合的元素。
- ❑ 前边的集合都是后边集合的子集。

自然数的定义

利用后继的性质，可以考虑以构造性的方法用集合来给出自然数的定义，即

$0=\varnothing$

$1=0^{+}=\varnothing^{+}=\{\varnothing\}=\{0\}$

$2=1^{+}=\{\varnothing\}^{+}=\{\varnothing\}\cup\{\{\varnothing\}\}=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}=\{0,1\}$

$3=2^{+}=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}^{+}=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}=\{0,1,2\}$

…

$n=\{0, 1, \ldots, n-1\}$

…

说明

这种定义没有概括出自然数的共同特征。

归纳集

定义8. 11 设A为集合，如果满足下面的两个条件：

（1）$\varnothing \in A$

（2）$\forall a(a \in A \rightarrow a^+ \in A)$

称A是**归纳集**。

例如：下面的集合

$\{\varnothing, \varnothing^+, \varnothing^{++}, \varnothing^{+++}, \ldots\}$

$\{\varnothing, \varnothing^+, \varnothing^{++}, \varnothing^{+++}, \ldots, a, a^+, a^{++}, a^{+++}, \ldots\}$

都是归纳集。

自然数n和自然数集合N的定义

定义8.12　自然数

（1）一个**自然数*n***是属于每一个归纳集的集合。

（2）**自然数集N**是所有归纳集的交集。

说明：根据定义8.12得到的自然数集 N 恰好由$\varnothing$, $\varnothing^{+}$, $\varnothing^{++}$, $\varnothing^{+++}$,…等集合构成。而这些集合正是构造性方法所定义的全体自然数。

例如：自然数都是集合，集合的运算对自然数都适用。

$2\cup 5=\{0,1\}\cup\{0,1,2,3,4\}=\{0,1,2,3,4\}=5$

$3\cap 4=\{0,1,2\}\cap\{0,1,2,3\}=\{0,1,2\}=3$

$4-2=\{0,1,2,3\}-\{0,1\}=\{2,3\}$

$2\times 3=\{0,1\}\times\{0,1,2\}=\{<0,0>,<0,1>,<0,2>,<1,0>,<1,1>,<1,2>\}$

举例

$P(1)=P(\{0\})=\{\varnothing,\{0\}\}=\{0,1\}$

$2^3=\{0,1\}^{\{0,1,2\}}=\{f \mid f: \{0,1,2\}\to\{0,1\}\}=\{f_0,f_1,\ldots,f_7\}$

其中$f_0=\{<0,0>,<1,0>,<2,0>\}$

$f_1=\{<0,0>,<1,0>,<2,1>\}$

$f_2=\{<0,0>,<1,1>,<2,0>\}$

$f_3=\{<0,0>,<1,1>,<2,1>\}$

$f_4=\{<0,1>,<1,0>,<2,0>\}$

$f_5=\{<0,1>,<1,0>,<2,1>\}$

$f_6=\{<0,1>,<1,1>,<2,0>\}$

$f_7=\{<0,1>,<1,1>,<2,1>\}$

自然数的性质

（1） 对任何自然数n，有$n \approx n$。

（2） 对任何自然数n, m，若$m \subset n$，则$m \not\approx n$。

（3） 对任何自然数n, m，若$m \in n$，则$m \subset n$。

（4） 对任何自然数n和m，以下三个式子：

$m \in n$， $m \approx n$， $n \in m$

必成立其一且仅成立其一。

（5） 自然数的相等与大小顺序

对任何自然数m和n，有

$$m = n \Leftrightarrow m \approx n$$

$$m < n \Leftrightarrow m \in n$$

有穷集和无穷集

定义8.13 有穷集、无穷集

（1）一个集合是**有穷的**当且仅当它与某个自然数等势；

（2）如果一个集合不是有穷的，就称作**无穷集**。

例如：

- $\{a,b,c\}$是有穷集，

  因为$3=\{0,1,2\}$，且$\{a,b,c\}\approx\{0,1,2\}=3$

- N和R都是无穷集，

  因为没有自然数与N和R等势。

说明

- 任何有穷集只与唯一的自然数等势。

∵ 基数(cardinality)

定义8.14

（1）对于有穷集合A，称与A等势的那个唯一的自然数为**A的基数**，记作**card A**，即

$\text{card } A = n \Leftrightarrow A \approx n$ （对于有穷集A， card A也可以记作$|A|$）

（2）**自然数集合N的基数记作$\aleph_0$**，即

$\text{card } N = \aleph_0$

（3）**实数集R的基数记作$\aleph$**（读作阿列夫），即

$\text{card } R = \aleph$

基数的相等和大小

定义8.15 设A, B为集合，则

（1）$\mathrm{card}\ A = \mathrm{card}\ B \Leftrightarrow A \approx B$

（2）$\mathrm{card}\ A \le \mathrm{card}\ B \Leftrightarrow A \preccurlyeq\cdot B$

（3）$\mathrm{card}\ A < \mathrm{card}\ B \Leftrightarrow \mathrm{card}\ A \le \mathrm{card}\ B \land \mathrm{card}\ A \ne \mathrm{card}\ B$

例如：

- $\mathrm{card}\ Z = \mathrm{card}\ Q = \mathrm{card}\ N \times N = \aleph_0$
- $\mathrm{card}\ P(N) = \mathrm{card}\ 2^N = \mathrm{card}\ [a,b] = \mathrm{card}\ (c,d) = \aleph$
- $\aleph_0 < \aleph$

说明： 集合的基数就是集合的势，基数越大，势就越大。

关于基数的说明

- 由于对任何集合A都满足$A \le\cdot P(A)$，所以有

  card $A <$ card $P(A)$，这说明**不存在最大的基数**。

- 将已知的基数按从小到大的顺序排列就得到：

  $0, 1, 2, \ldots, n, \ldots, \aleph_0, \aleph, \ldots$

- $0, 1, 2\ldots, n, \ldots$ 是全体自然数，是**有穷基数**。

- $\aleph_0, \aleph, \ldots$ 是**无穷基数**。

- **$\aleph_0$是最小的无穷基数**，$\aleph$后面还有更大的基数，如

  card $\mathrm{P}(R)$等。

可数集

定义8.16 设A为集合，若card $A \le \aleph_0$，则称A为**可数集**(enumerable)或**可列集**。

例如：

- $\{a,b,c\}$、5、整数集Z、有理数集Q、$N \times N$等都是可数集。
- 实数集R不是可数集，与R等势的集合也不是可数集。

说明

对于任何的可数集，都可以找到一个“数遍”集合中全体元素的顺序。回顾前边的可数集，特别是无穷可数集，都是用这种方法来证明的。

可数集的性质

（1）可数集的任何子集都是可数集。

一个集合的无限子集若不可数，则该集合也不可数。

（2）两个可数集的并是可数集。

（3）两个可数集的笛卡儿积是可数集。

（4）可数个可数集的笛卡儿积仍是可数集。

（5）无穷集A的幂集$P(A)$不是可数集。

例8.11

例8.11　求下列集合的基数。

（1）$T=\{x \mid x$是单词“$BASEBALL$”中的字母$\}$

（2）$B=\{x \mid x\in R \wedge x^2=9 \wedge 2x=8\}$

（3）$C=P(A)$, $A=\{1, 3, 7, 11\}$

解答

（1）由$T=\{B, A, S, E, L\}$知，$\mathrm{card}\ T=5$。

（2）由$B=\varnothing$可知，$\mathrm{card}\ B=0$。

（3）由$|A|=4$可知，$\mathrm{card}\ C=\mathrm{card}\ P(A)=|P(A)|=2^4=16$。

例8.12

例8. 12 设A, B为集合，且card $A=\aleph_0$， card $B=n$，n是自然数，$n\neq 0$。求card $A\times B$。

解答

方法一

由card $A=\aleph_0$，card $B=n$，可知A, B都是可数集。

令$A=\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$，$B=\{b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}\}$。

对任意的$<a_i, b_j>$，$<a_k, b_l>\in A\times B$，有

$$<a_i, b_j> = <a_k, b_l> \Leftrightarrow i = k \wedge j = l$$

定义函数 f：$A\times B\rightarrow N$

$$f(<a_i, b_j>)=in+j,\ i=0,1,\ldots,\ j=0,1,\ldots,n-1$$

由于 f 是$A\times B$到N的双射函数，所以card $A\times B=$card $N=\aleph_0$。

例8.12

方法二

因为card $A=\aleph_0$，card $B=n$，所以A, B都是可数集。

根据性质（3）可知，$A\times B$也是可数集，所以，

$$\text{card } A\times B\le\aleph_0$$

当$B\neq\varnothing$时，card $A\le$card $A\times B$，这就推出

$$\aleph_0\le\text{card } A\times B$$

综合所述，card $A\times B=\aleph_0$

本章主要内容

- 集合等势的定义
- 等势的性质
- 集合优势的定义
- 优势的性质
- 重要的集合等势以及优势的结果
- 自然数及其自然数集合的定义
- 可数集与不可数集
- 集合的基数

本章学习要求

- 能够证明两个集合等势。
- 能够证明一个集合优势于另一个集合。
- 知道什么是可数集与不可数集。
- 会求一个简单集合的基数。

等势的证明方法

- 证明集合A与B等势的方法
  - 直接构造从A到B的双射函数 f

    需要证明 f 的满射性和f的单射性。
  - 构造两个单射函数f：$A \to B$ 和 g：$B \to A$。

    给出函数f和g，证明f和g的单射性。
  - 利用等势的传递性
  - 直接计算A与B的基数，得到card A＝ card B。
- 证明集合A与自然数集合N等势的方法
  - 找到一个“数遍”A中元素的顺序。

例题选讲

1. 已知$A=\{n^7|n\in N\}$，$B=\{n^{109}|n\in N\}$，求下列各题：

（1）card A （2）card B

（3）card $(A\cup B)$ （4）card $(A\cap B)$

解答

（1）构造双射函数 f：$N\to A$， $f(n)=n^7$，因此 card $A=\aleph_0$。

（2）构造双射函数 g：$N\to A$， $g(n)=n^{109}$，因此 card $B=\aleph_0$。

（3）可数集的并仍旧是可数集(或者由于$A\cup B\subseteq N$)，

因此card $(A\cup B)\le\aleph_0$，

但是 $\aleph_0$ =card $A\le$card $(A\cup B)$，

从而得到 card $(A\cup B)=\aleph_0$。

（4）因为7与109互素，card $(A\cap B)=\{n^{7\times 109} \mid n\in N\}$，

与（1）类似得到 card $(A\cap B)=\aleph_0$。

例题选讲

2. 已知card $A=\aleph_0$，且card B<card A，求card $(A-B)$ 。

解答

由$A-B\subseteq A$，得到 card $(A-B)\le$card A，即card$(A-B)\le\aleph_0$ 。

由card B<card A可知，B为有穷集，

即存在自然数n，使得card $B=n$。

假设card $(A-B)<\aleph_0$，那么存在自然数m，使
card $(A-B)=m$。

从而得到，card A＝card $((A-B)\cup B)\le n+m$

与card $A=\aleph_0$矛盾。

因此，card $(A-B)=\aleph_0$。

复习—特征函数

- 设A为集合，对于任意的$A'\subseteq A$，A'的**特征函数**

  $\chi_{A'}: A\to\{0,1\}$定义为

$$\chi_{A'}(a) = \begin{cases} 1, & a\in A' \\ 0, & a\in A-A' \end{cases}$$

- **举例：** A的每一个子集A′都对应于一个特征函数，不同的子集对应于不同的特征函数。

  例如$A=\{a,b,c\}$, 则有

  $\chi_{\varnothing}=\{\langle a,0\rangle, \langle b,0\rangle, \langle c,0\rangle\}$,　　$\chi_{\{a\}}=\{\langle a,1\rangle, \langle b,0\rangle, \langle c,0\rangle\}$

  $\chi_{\{a,b\}}=\{\langle a,1\rangle, \langle b,1\rangle, \langle c,0\rangle\}$

∵ 例题选讲(略)

1． 设A, B为二集合，证明：如果$A\approx B$，则$P(A)\approx P(B)$。

因为$A\approx B$，因此存在双射函数f：$A\rightarrow B$，存在反函数f^{-1}：$B\rightarrow A$，
构造函数g：$P(A)\rightarrow P(B)$,

$g(T)=f(T)$，$\forall T\subseteq A$ （这里的$f(T)$是T在函数f的像）

首先，证明g的满射性。

对于任何$S\subseteq B$，存在$f^{-1}(S)\subseteq A$，且$g(f^{-1}(S))=f\circ f^{-1}(S)=S$ 。

所以g是满射的。

其次，证明g的单射性。

$$
\begin{aligned}
g(T_1)=g(T_2) &\Rightarrow f(T_1)=f(T_2)\\
&\Rightarrow f^{-1}(f(T_1)=f^{-1}(f(T_2))\\
&\Rightarrow I_A(T_1)=I_A(T_2)\Rightarrow T_1=T_2
\end{aligned}
$$

综合上述，可知$P(A)\approx P(B)$。

两个可数集的并集为可数集

设A、B为可数集，不妨设$A \cap B = \varnothing$。

(1)若两个集合都是有穷集，比如$A=\{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$，$B=\{b_0, b_1, \ldots, b_{m-1}\}$，那么card $(A \cup B) = n+m \leqslant \aleph_0$。

(2)如果其中一个集合是有穷集，另一个是无穷可数集，比如$A=\{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$，card $B=\aleph_0$

如下构造双射$h: A \cup B \to N$,

当$x \in A$时，$x = a_i$，$h(x) = i$;

当$x \in B$时，$x = b_j$，$j = 0,1,\ldots$，那么$h(x) = j+n$。

(3)如果card A = card $B = \aleph_0$，那么存在双射$f: A \to N$和$g: B \to N$。如下构造函数$h: A \cup B \to N$

当$x \in A$且$f(x) = i$时，$h(x) = 2i$

当$x \in B$且$g(x) = j$时，$h(x) = 2j+1$

显然h为双射。

综上所述，card $(A \cup B) = \aleph_0$。