函数的求导

一.函数四则运算的求导法则

二.反函数的导数

三.复合函数的求导法则

四.初等函数的求导问题

一.函数四则运算的求导法则

定理 如果函数$u(x)$，$v(x)$在点x处可导,则它们的和、差、积、商(分母不为零)在点x处也可导，并且

$$(1).\left[u(x)\pm v(x)\right]'=u'(x)\pm v'(x);$$

$$(2).\left[u(x)\cdot v(x)\right]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x);$$

$$(3).\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

$$\left(v(x)\neq 0\right).$$

上页 下页 返回

例1.求 $y=\tan x$ 的导数.

解 $(\tan x)'=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'$

$$=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x,$$

同理可得

$(\cot x)'=-\csc^2 x,$

$(\sec x)'=\sec x\tan x,\quad (\csc x)'=-\csc x\cot x.$

二.反函数的导数

定理(反函数的可导性) 如果函数 $x=\varphi(y)$ 在某区间 I_y 内单调、可导且 $\varphi'(y)\neq 0$，那末它的反函数 $y=f(x)$ 在对应区间 I_x 内也可导,且有

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}\text{也即}\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

即:反函数的导数等于直接函数导数的倒数.

上页 下页 返回

直接函数$x=\varphi(y)$在$y\in I_y$时

单调且$\varphi'(y)\neq 0, x\in I_x$.

$x_0=\varphi(y_0)\Leftrightarrow y_0=f(x_0)$.

那么曲线$x=\varphi(y)$在点(y_0,x_0)

处的切线斜率为$\varphi'(y_0)$,切线的

倾角β,$\varphi'(y_0)=\tan\beta$.

曲线$y=f(x)$在点(x_0,y_0)处的切

线斜率为$f'(x_0)$,切线的倾角α,

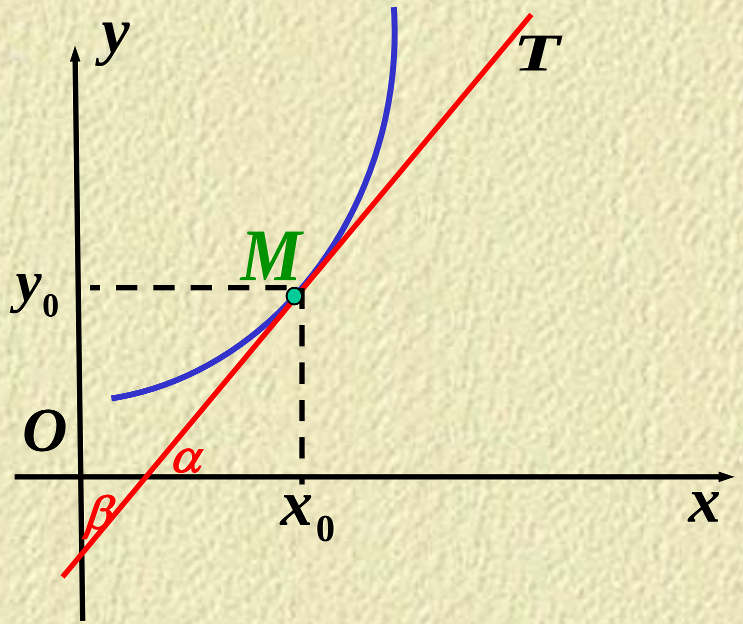
$f'(x_0)=\tan\alpha$.

由$\alpha+\beta=\pi/2$知$\tan\alpha\tan\beta=1$,

这也就是 $f'(x_0)=\dfrac{1}{\varphi'(y_0)}$.

直接函数$x=\varphi(y)$

的反函数$y=f(x)$



上页 下页 返回

证明 任取$x \in I_x$，给x以增量$\Delta x(\Delta x \neq 0,$
$x+\Delta x \in I_x)$，由$y=f(x)$的单调性可知

$\Delta y \neq 0$，于是有$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}$，$\because f(x)$连续，

$\therefore \Delta y \to 0(\Delta x \to 0)$，又知$\varphi'(y) \neq 0$

$$\therefore f'(x)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta y \to 0}\frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{\varphi'(y)}$$

即 $f'(x)=\dfrac{1}{\varphi'(y)}$.

例2.求函数 $y=\arcsin x$ 的导数.

解 $\because\ x=\sin y$ 在 $I_y=\left(-\pi/2,\pi/2\right)$ 内可导,

且 $(\sin y)'=\cos y>0$, $\therefore$ 在 $I_x=(-1,1)$ 内

有 $$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

同样可得: $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

如 $x=\cot y$ 在 $I_y=(0,\pi)$ 内可导,

则 $y=\operatorname{arccot} x$ 在

$I_x=(-\infty,+\infty)$ 内可导,

且 $(\operatorname{arccot} x)'=\dfrac{1}{(\cot y)'}=\dfrac{1}{-\csc^2 y}$

$$=-\frac{1}{1+\cot^2 y}=-\frac{1}{1+x^2}.$$

例3.求 $y=\log_a x$ 的导数$(a>0, a\neq 1)$.

解 $\because$ $x=a^y$在$I_y=(-\infty,+\infty)$内单调可导,

且 $(a^y)'=a^y\ln a\neq 0$,

$\therefore$ 在$I_x=(0,+\infty)$内有

$$(\log_a x)'_x=\frac{1}{(a^y)'_y}=\frac{1}{a^y\ln a}=\frac{1}{x\ln a}.$$

特别地,$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.

上页 下页 返回

三.复合函数的求导法则

定理 若函数$u=\varphi(x)$在点 x可导,而$y=f(u)$在点$u=\varphi(x)$可导,则复合函数 $y=f\left[\varphi(x)\right]$在点$x$可导, 且其导数为

$$\frac{dy}{dx}=f'(u)\cdot\varphi'(x).$$

即因变量对自变量求导,等于因变量对中间变量求导,乘以中间变量对自变量求导.(链式法则)

证明 由$y=f(u)$在点u可导,

$$\therefore \lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u),$$

故 $\dfrac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u)+\alpha,\ \lim\limits_{\Delta u\to 0}\alpha=0.$

则 $\Delta y=f'(u)\Delta u+\alpha\Delta u,$

$$\therefore \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[f'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}\right]$$

$$=f'(u)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\alpha\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$=f'(u)\varphi'(x).$$

链式法则(Chain rule)一般化：

设 $y = f(u), u = \varphi(x)$均可导,

则 $y = f[\varphi(x)]$可导,且有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}, \text{或 } y'_x = y'_u \cdot u'_x,$$

$$y'_x = f'(u)\varphi'(x) = f'[\varphi(x)]\varphi'(x).$$

上页 下页 返回

链式法则(*Chain rule*)推广：

设$y = f(u), u = \varphi(v), v = \psi(x)$,

则 $y = f\{\varphi[\psi(x)]\}$的导数为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}.$$

例4.求函数 $y = \ln\sin x$ 的导数.

解 设 $y = \ln u, u = \sin x$,

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \cos x$$

$$= \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x.$$

例5.求 $y=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$ 的导数$(a>0)$.

解 $$y'=\left(\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}\right)'+\left(\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right)'$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{x}{2}\cdot\frac{(a^2-x^2)'}{2\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{a^2}{2}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\left(\frac{x}{a}\right)'$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{a^2}{2\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$=\sqrt{a^2-x^2}.$$

复合函数的求导,只需要分解清楚函数复合的层次,就绝对没有问题了.

例如,求函数 的导数:

$$y=\ln^2\left[\arctan\left(2^{-\sin\frac{1}{\sqrt{x}}}\right)\right]$$

四.初等函数的求导问题

1.常数和基本初等函数的导数公式

$$(C)' = 0 \qquad (x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \qquad (e^x)' = e^x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a} \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x \qquad (\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x \qquad (\csc x)' = -\csc x \cot x$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

2.函数的和、差、积、商的求导法则：

(1).$(u \pm v)' = u' \pm v'$, (2).$(Cu)' = Cu'$,(C为常数)

(3).$(uv)' = u'v + uv'$, (4).$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, v \neq 0.$

3.复合函数的求导法则

设$y=f(u)$,而$u=\varphi(x)$则复合函数$y=f[\varphi(x)]$的导数为$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$ 或 $y'(x)=f'(u)\cdot\varphi'(x)$.

4.反函数的导数等于直接函数导数的倒数.

如果函数$x=\varphi(y)$在区间I_y内可导且$\varphi'(y)\neq 0$,那末它的反函数$y=f(x)$在对应区间I_x内也可导,且有$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}$.

上页 下页 返回

注意:初等函数的导数仍为初等函数。

利用上述公式及法则初等函数求导问题可完全解决。

所以,求一个可导函数的导(函)数非常简单.但是已知一个可导函数的导函数的表达式,求出原来这个可导函数这个问题可就不简单喽!

derivative ----- antiderivative

例6. $f(x)=\ln\sqrt{1+e^{2x}}-x-e^{-x}\arctan e^{-x}$, $f'(x)=?$

解 $f'(x)=\left(\ln\sqrt{1+e^{2x}}-x-e^{-x}\arctan e^{-x}\right)'$

$$=\left[\frac{1}{2}\ln\left(1+e^{2x}\right)\right]'-1-\left(e^{-x}\arctan e^{-x}\right)'$$

$$=\frac{1}{2}\frac{(1+e^{2x})'}{1+e^{2x}}-1-\left[(e^{-x})'\arctan e^{-x}+e^{-x}(\arctan e^{-x})'\right]$$

$$=\frac{1}{2}\frac{e^{2x}\cdot 2}{1+e^{2x}}-1-\left[-e^{-x}\arctan e^{-x}+e^{-x}\frac{1}{1+e^{-2x}}\cdot(-e^{-x})\right]$$

$$=\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}-1-\left(-e^{-x}\arctan e^{-x}-\frac{e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right)$$

$$=e^{-x}\arctan e^{-x}.$$

例7.注意对数求导法的使用:

对一个有多因子乘\除,乘\开方,

幂指运算的函数求导时,可以使用

对数法降低运算的级别.

(1).求函数 $f(x)=\dfrac{(x^2-1)^2}{\sqrt[3]{x-2}}$ 的导数.

$$\because \left(\ln|x|\right)'=\begin{cases} (\ln x)'=\dfrac{1}{x}, x>0 \\ (\ln(-x))'=\dfrac{1}{-x}(-1)=\dfrac{1}{x}, x<0 \end{cases}$$

$$=\frac{1}{x}, x\neq 0,$$

(1).求函数 $f(x)=\dfrac{(x^2-1)^2}{\sqrt[3]{x-2}}$ 的导数.

$$\therefore\ f(x)=e^{w}, w=\ln\frac{(x^2-1)^2}{\sqrt[3]{x-2}}$$

$$=2\ln\left(x^2-1\right)-\frac{1}{3}\ln\left(x-2\right),$$

$$f'(x)=(e^{w})'_{w}\cdot w'_{x}=e^{w}\cdot\left(2\frac{2x}{x^2-1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-2}\right)$$

$$=\frac{(x^2-1)^2}{\sqrt[3]{x-2}}\left[\frac{4x}{x^2-1}-\frac{1}{3(x-2)}\right]$$

例7.(2). $f(x)=x^2(\sin x)^x, x\in(0,\pi), f'(x)=?$

$$f(x)=x^2(\sin x)^x=e^{\ln\left[x^2(\sin x)^x\right]}$$

$$f(x)=e^w, w=\ln\left[x^2(\sin x)^x\right]=2\ln x+x\ln(\sin x)$$

$$f'(x)=(e^w)'_w\cdot w'_x=e^w\cdot\left[2\ln x+x\ln(\sin x)\right]'_x$$

$$=e^w\left[\frac{2}{x}+\ln(\sin x)+x\frac{\cos x}{\sin x}\right]$$

$$=x^2(\sin x)^x\left[\frac{2}{x}+\ln(\sin x)+x\cot x\right]$$

上页 下页 返回