3-02 函数极限的性质

1.唯一性;

2.局部有界性;

3.局部保号性　若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$,且$A > 0$(或$A < 0$),

则$\exists\delta > 0$,当$x \in U^0(x_0,\delta)$时, $f(x) > 0$(或$f(x) < 0$).

对于$x \to \infty$时的情形,有同样的结论.

推论1.若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$,且$\exists\delta > 0$,当$x \in U^0(x_0,\delta)$时,

$f(x) \geq 0$(或$f(x) \leq 0$),则$A \geq 0$(或$A \leq 0$).

上页 下页 返回

4.局部保不等式性(局部保序性)

设 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=A$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x)=B$.若$A>B$,

则$\exists\delta>0\big($或$M>0\big)$,$\forall x\in \overset{0}{U}(x_0,\delta)\big($或$|x|>M\big)$,

有$f(x)>g(x)$.

推论2. 设 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=A$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x)=B$.若在

$x_0\big($或$\infty\big)$的某个邻域内,有$f(x)\le g(x)$,则$A\le B$.

上页 下页 返回

5.迫敛性定理(*Squeeze theorem*)

若当$x \in \overset{o}{U}_{\delta}(x_0)$(或$|x| > M$)时有:

(1). $g(x) \le f(x) \le h(x)$,

(2). $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} g(x) = A$, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} h(x) = A$,

则$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x)$存在,且$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = A$.

该定理被称为迫敛性或夹挤定理.

注:利用迫敛性定理求极限的关键是构造出$g(x)$与$h(x)$,且$g(x)$与$h(x)$的极限易得且相等.

上页 下页 返回

6. 极限运算法则

由极限的定义,我们可以得到诸如

(1). $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0, \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x-1}=0$;

(2). $\lim\limits_{x\to 2}(3x-1)=5, \lim\limits_{x\to 2}x^2=4$;

(3). $\lim\limits_{x\to 0}a^x=1, (a>0)$;

(4). $m\in\mathbb{N}_+, f(x)\geq 0, \lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ (x\to x_0)}} f(x)=A,$

则 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ (x\to x_0)}}\sqrt[m]{f(x)}=\sqrt[m]{A}$.

这样的一些基本的极限结果,我们就可以处理表达式较复杂的函数的极限.

$Th.$若$\lim f(x)=A,\lim g(x)=B$都存在，

则 $\lim[f(x)\pm g(x)],\lim[f(x)g(x)],$

$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}\left(\lim g(x)\neq 0\right)$也都存在，且有：

(1). $\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B;$

(2). $\lim[f(x)g(x)]=AB;$

(3). $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$，其中$B\neq 0.$

上页 下页 返回

$Th.$若$\lim f(x)=A,\lim g(x)=B$都存在，

则 $\lim\left[f(x)\pm g(x)\right],\lim\left[f(x)g(x)\right]$,

$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}\left(\lim g(x)\neq 0\right)$也都存在…

注：极限号下自变量情况未加注明，只要一个问题中的自变量变化情况保持一致，自变量变化情形可为$x\to x_0, x\to x_0+$, $x\to x_0-$或$x\to\infty, x\to+\infty, x\to-\infty$之一.

上页 下页 返回

特别提醒

今后,我们看到$n\to\infty$,那就意味着正整数n(离散地)取值无限增大.

而$x\to\infty$则意味着实数x(在实数域内连续地)取值,$|x|$无限增大.

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=A=\lim_{x\to-\infty} f(x).$$

上页 下页 返回

证明 $\because \lim f(x)=A, \lim g(x)=B.$

$\therefore f(x)=A+\alpha, g(x)=B+\beta.$

其中$\alpha \to 0, \beta \to 0.$

由无穷小量运算法则得

$$[f(x)\pm g(x)]-(A\pm B)=\alpha \pm \beta \to 0,$$

$\therefore$ (1)成立.

$$[f(x)g(x)]-(AB)$$

$$=(A+\alpha)(B+\beta)-AB$$

$$=(A\beta+B\alpha)+\alpha\beta \to 0, \therefore \text{(2)成立.}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{A}{B}=\frac{A+\alpha}{B+\beta}-\frac{A}{B}=\frac{B\alpha-A\beta}{B(B+\beta)}$$

$\because B\alpha-A\beta\to 0$, 又 $\because \beta\to 0, B\neq 0$,

由极限定义可知,对于$\varepsilon_0=\frac{1}{2}|B|$,

$\exists\,\delta>0$,当$0<|x-x_0|<\delta$时,$|\beta|<\frac{|B|}{2}$,

$\therefore |B+\beta|\geq|B|-|\beta|>|B|-\frac{1}{2}|B|=\frac{1}{2}|B|$,

$\therefore |B(B+\beta)|>\frac{1}{2}B^2$,故$\left|\frac{1}{B(B+\beta)}\right|<\frac{2}{B^2}$有界,

$\therefore \frac{B\alpha-A\beta}{B(B+\beta)}\to 0$,(3)成立.

上页 下页 返回

推论1.若$\lim f(x)$存在,C为常数,

则 $\lim[Cf(x)]=C\lim f(x)$.

推论2.若$\lim f(x)$存在,而n是正整数,则 $\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n$.

极限计算举例

例1.求极限 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-1}{x^2-3x+5}$.

解 $\because \lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-3x+5\right)=\lim\limits_{x\to 2}x^2-\lim\limits_{x\to 2}3x+\lim\limits_{x\to 2}5$

$$=\left(\lim_{x\to 2}x\right)^2-3\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}5=2^2-3\cdot 2+5=3\neq 0,$$

$$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{x^3-1}{x^2-3x+5}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}x^3-\lim\limits_{x\to 2}1}{\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-3x+5\right)}=\frac{2^3-1}{3}=\frac{7}{3}$$

上页 下页 返回

例2.求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x-1}{x^2+2x-3}$.

解 $\because \lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+2x-3\right)=0,$

$\therefore$ 商的极限运算法则不能用,

又 $\because \lim\limits_{x\to 1}\left(4x-1\right)=3\neq 0,$

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{4x-1}=\frac{0}{3}=0.$$

由无穷小量与无穷大量的倒置关系

得 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x-1}{x^2+2x-3}=\infty.$

上页 下页 返回

求极限 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4x-1}{x^2+2x-3}$.

可不要写成如下的样子：

$$\lim_{x\to1}\frac{4x-1}{x^2+2x-3}=\frac{\lim\limits_{x\to1}(4x-1)}{\lim\limits_{x\to1}(x^2+2x-3)}$$

$$=\frac{3}{0}=\infty.$$

$\because$ 这不符合两个函数商的极限运算法则的条件,数0在分母上没有意义.

上页 下页 返回

求极限 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4x-1}{x^2+2x-3}$.

我们观察知 $\lim\limits_{x\to1}\left(x^2+2x-3\right)=0$,

又 $\lim\limits_{x\to1}(4x-1)=3\neq0$,

$\therefore$ 我们可以直接表示成

$$\lim_{x\to1}\frac{4x-1}{x^2+2x-3}=\infty.$$

例3.求极限 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x^2+2x-3}$.

解 $\because x\to1$时,分子,分母的极限都是零.$\left(\dfrac{0}{0}\text{型}\right)$

先约去不为零的无穷小因子$x-1$后再求极限.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x+3)(x-1)}$$

$$\overset{\because x\to1}{\underset{\Rightarrow x\neq1}{=\!=\!=\!=}}\lim_{x\to1}\frac{x+1}{x+3}=\frac{1}{2}.$$

上页 下页 返回

例4.(1).求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x^2+5}{7x^3+4x^2-1}$.

解 $\because x\to\infty$时, $\dfrac{1}{x}\to 0.$

用标准化的思路来处理:用分子\分母分别除以x^3,再依据四则运算法则.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x^2+5}{7x^3+4x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^3}}{7+\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^3}}=\frac{2}{7}.$$

例4.(2).求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2-3x^2)^2(x+5)^7}{(7x^5-1)(2x^3+3)^2}$.

解 $\because x\to\infty$时, $\dfrac{1}{x}\to 0.$

$$\therefore 原=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{x^2}-3\right)^2\left(1+\frac{5}{x}\right)^7}{\left(7-\frac{1}{x^5}\right)\left(2+\frac{3}{x^3}\right)^2}=\frac{3^2}{7\cdot 2^2}=\frac{9}{28}.$$

上页 下页 返回

例5.试问下面计算过程是否正确?

$$\because \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0,$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to\infty}\arctan x$$

$$=0\cdot\lim_{x\to\infty}\arctan x=0$$

错误.

$$\because \lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2},$$

$\lim\limits_{x\to\infty} \arctan x$不存在,

$\therefore$ 极限的四则运算法则不适用.

正确的做法：

$$\because \left|\arctan x\right| < \frac{\pi}{2}, \text{而} \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0,$$

有界量乘无穷小仍为无穷小,

$\therefore$ 原式 $= 0.$

正解二：

$$\because \lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to+\infty}\arctan x$$

$$=0\times\frac{\pi}{2}=0,$$

同样，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\arctan x}{x}=0\times\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0,$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{x}=0.$$

上页 下页 返回

定理(复合函数的极限运算法则)设函数$u=\varphi(x)$当$x\to x_0$时的极限存在且等于a,即$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$,但在$x_0$的某去心邻域内$\varphi(x)\neq a$,又$\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$,则复合函数$f[\varphi(x)]$当$x\to x_0$时的极限也存在,且

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim_{u\to a}f(u)=A.$$

意义:

$$a=\lim_{x\to x_0}\varphi(x)$$

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]\xlongequal[\text{令}\,u=\varphi(x)]{}\lim_{u\to a}f(u)$$

上页 下页 返回

证明 $\lim\limits_{u\to a} f(u)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$

$\forall 0<|u-a|<\delta, s.t. |f(u)-A|<\varepsilon.$

又 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$,所以对上述$\delta>0,\exists h>0,$

$\forall 0<|x-x_0|<h, s.t. |\varphi(x)-a|<\delta.$

又因为在x_0的某去心邻域内$\varphi(x)\neq a$,故

$0<|x-x_0|<h$时,$|\varphi(x)-a|>0.$

综上所述,$\forall\varepsilon>0,\exists h>0,\forall 0<|x-x_0|<h,$

$s.t. \ |f[\varphi(x)]-A|<\varepsilon. \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=A.$

$$a = \lim_{x \to x_0} \varphi(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] \xlongequal[\text{令 } u=\varphi(x)]{\quad} \lim_{u \to a} f(u)$$

复合函数的极限计算过程中可以进行 **变量代换**!

上页 下页 返回

定理(复合函数的极限运算法则)设函数$u=\varphi(x)$当$x\to\infty$时的极限存在且等于a,即$\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=a$,且存在某$X_0>0$,在$|x|>X_0$时$\varphi(x)\neq a$,又$\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$,则复合函数$f[\varphi(x)]$当$x\to\infty$时的极限也存在,且

$$\lim_{x\to\infty}f[\varphi(x)]=\lim_{u\to a}f(u)=A.$$

$$\lim_{x\to\infty}f[\varphi(x)]\overset{a=\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)}{\underset{\text{令}\,u=\varphi(x)}{=\!=\!=\!=\!=\!=}}\lim_{u\to a}f(u)$$

上页 下页 返回

例6.求 极限：

$$(1).\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right);$$

$$(2).\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}.$$

解(1). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}$,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1-\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=\infty,$$

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$不存在.

(1).解二　令 $\dfrac{1}{x}=t$,则 $x\to\infty \Leftrightarrow t\to 0.$

$$\begin{cases} x\to+\infty \Leftrightarrow t\to 0+, \\ x\to-\infty \Leftrightarrow t\to 0-, \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+t}}{|t|}-\frac{1}{t}\right)$$

$$\lim_{t\to 0+}\left(\frac{\sqrt{1+t}}{|t|}-\frac{1}{t}\right)=\lim_{t\to 0+}\frac{\sqrt{1+t}-1}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{1+t-1}{t\left(\sqrt{1+t}-1\right)}=\lim_{t\to 0+}\frac{1}{\sqrt{1+t}+1}=\frac{1}{2},$$

上页　下页　返回

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+t}}{|t|}-\frac{1}{t}\right)$$

$$\lim_{t\to 0+}\left(\frac{\sqrt{1+t}}{|t|}-\frac{1}{t}\right)=\lim_{t\to 0+}\frac{\sqrt{1+t}-1}{t}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{t\to 0-}\left(\frac{\sqrt{1+t}}{|t|}-\frac{1}{t}\right)=\lim_{t\to 0-}\frac{\sqrt{1+t}+1}{-t}=\cdots=\infty,$$

$\therefore \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$不存在.

上页 下页 返回

$$(2).\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1},$$

由$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$得

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}{(\sqrt[3]{x}-1)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)(\sqrt{x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\frac{3}{2}.$$

$$(2).\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1},$$

法二 令$\sqrt[6]{x}=t$,则$x\to 1$时有$t\to 1$,

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\lim_{t\to 1}\frac{t^3-1}{t^2-1}$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)(t^2+t+1)}{(t-1)(t+1)}=\lim_{t\to 1}\frac{t^2+t+1}{t+1}=\frac{3}{2},$$

使用极限的变量代换,使得计算过程表达较简洁.

(3). $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[101]{x}-1}{\sqrt[77]{x}-1}$.

倘若仍用前面(2)中做法一

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\cdots$$

则不免过程中的书写过于麻烦了,一个不错的做法是

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[101]{x}-1}{\sqrt[77]{x}-1}\overset{x\to1}{\underset{\sqrt[7777]{x}=t\to1}{=\!=\!=\!=}}\lim_{t\to1}\frac{t^{77}-1}{t^{101}-1}=\cdots$$

该做法依据的是复合函数极限计算的 变量代换!

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[101]{x}-1}{\sqrt[77]{x}-1}\xlongequal[\sqrt[7777]{x}=t\to 1]{x\to 1}\lim_{t\to 1}\frac{t^{77}-1}{t^{101}-1}$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)\left(t^{76}+t^{75}+\cdots+t+1\right)}{(t-1)\left(t^{100}+t^{99}+\cdots+t+1\right)}$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{t^{76}+t^{75}+\cdots+t+1}{t^{100}+t^{99}+\cdots+t+1}=\frac{77}{101}.$$

复合函数的极限运算法则

设函数$u=\varphi(x)$当$x\to x_0$时的极限存在且等于a,即$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$,但在$x_0$的某去心邻域内$\varphi(x)\neq a$,又$\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$,则复合函数$f[\varphi(x)]$当$x\to x_0$时的极限也存在,且

$$\lim_{x\to x_0}f\left[\varphi(x)\right]=\lim_{u\to a}f(u)=A.$$

定理中条件"在x_0的某去心邻域内$\varphi(x)\neq a$"是一个关键条件不可忽略,否则结论就不成立.

上页 下页 返回

例如,设

$$y = f(u) = \begin{cases} 2 & ,u \neq 0 \\ 1 & ,u = 0 \end{cases},\text{则} \lim_{u \to 0} f(u) = 2.$$

$$\text{又设} u = \varphi(x) = \begin{cases} 0 & ,x \neq 9 \\ 3 & ,x = 9 \end{cases},\text{则}$$

$$y = f[\varphi(x)] = \begin{cases} 1 & ,x \neq 9 \\ 2 & ,x = 9 \end{cases}, \quad \therefore \lim_{x \to 9} f[\varphi(x)] = 1,$$

又$\lim\limits_{x \to 9} u = \lim\limits_{x \to 9} \varphi(x) = 0$,但是这儿却有

$$\lim_{x \to 9} f[\varphi(x)] \neq \lim_{u \to 0} f(u) \leftarrow \left(\lim_{x \to 9} u = 0 \right)$$

上页 下页 返回

出现上例的结果究其原因就是条件"在x_0的某去心邻域内$\varphi(x) \neq a$"不满足.

$\because$ 设$u = \varphi(x) = \begin{cases} 0 & , x \neq 9 \\ 3 & , x = 9 \end{cases}$,则在$x = 9$的某去心邻域内$u = \varphi(x) \equiv 0.$

仔细推敲函数极限定义就可发现:

$$\lim_{u \to a} f(u) = A \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall 0 < |u - a| < \delta, s.t. |f(u) - A| < \varepsilon$$

上页 下页 返回

例7*.(1).若$\lim f(x)$存在,而$\lim g(x)$不存在,

问$\lim[f(x)+g(x)]$是否存在?

答 $\lim[f(x)+g(x)]$不存在.

因为,如若不然,若$\lim[f(x)+g(x)]=C$存在,

由$\lim f(x)=A$,则

$$\lim g(x)=\lim[f(x)+g(x)-f(x)]$$

$$=\lim[f(x)+g(x)]-\lim f(x)=C-A\text{存在},$$

由此可知.

上页 下页 返回

思考一下:

若$\lim f(x)$, $\lim g(x)$都不存在,

问$\lim[f(x)+g(x)]$是否存在?

答: $\lim[f(x)+g(x)]$未必存在

也未必不存在.

例如,考虑$x \to \infty$时

(A). $f(x)=x-x^2, g(x)=x^2$;

(B). $f(x)=1-x^2, g(x)=x^2$.

上页 下页 返回

7.(2).若$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$存在,$\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$不存在,

试问$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)g(x)$是否存在?

答 不一定. 例如

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+x^2}=0,\lim_{x\to\infty}x^n=\infty\ \left(n\in\mathbb{Z}^+\right),$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1+x^2}=0,\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=1,$$

但$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{1+x^2}=\infty$ 不存在.

上页 下页 返回

若$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A\neq 0$ 存在，$\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$不存在，

那么$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)g(x)=?$ 一定不存在！

$\because$ 假如 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)g(x)=B$存在，

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A\neq 0,$$

那么 由函数极限的商的运算法则 可知

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)g(x)}{f(x)}=\frac{B}{A}=\lim_{x\to\infty} g(x)\text{存在，矛盾！}$$

上页 下页 返回

7.(3).若$\lim f(x) = A \neq 0$存在,$\lim g(x) = 0$,

则$\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$必不存在,且$\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

换言之,若$\lim g(x) = 0$,

而$\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$存在,则必定$\lim f(x) = 0$.

证明是容易的.

例8.(1).已知$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+ax+b}{x^2-4}=4$,求$a,b$.

解 由题设条件知:$\lim\limits_{x\to 2}\left(x^3+ax+b\right)=0$,

$\therefore 8+2a+b=0$ 即$b=-8-2a$

$$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{x^3+ax+b}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{x^3+ax+\left(-8-2a\right)}{x^2-4}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\left(x-2\right)\left(x^2+2x+4+a\right)}{\left(x-2\right)\left(x+2\right)}=\frac{12+a}{4}=4,$$

$\therefore a=4,b=-16.$

例8.(2).已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+4x}{x+1}+ax+3\right)=b$,求$a,b$.

解　我们可以考虑用无穷大与无穷小的倒数关系处理问题,这是一种惯常的做法。

$$\text{原式左} \overset{\frac{1}{x}=t}{=\!=} \lim_{t\to 0}\left(\frac{\left(\frac{1}{t}\right)^2+4\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}+1}+a\frac{1}{t}+3\right)=b\ ,$$

上页　下页　返回

$$\text{即}\lim_{t\to 0}\left[\frac{1+4t}{t(t+1)}+\frac{a}{t}+3\right]=b,$$

$$\therefore \lim_{t\to 0}\frac{1+a+(a+7)t+3t^2}{t(t+1)}=b,$$

$$\therefore 1+a=0,\ (??)$$

$$\therefore \lim_{t\to 0}\frac{(a+7)t+3t^2}{t(t+1)}\overset{\downarrow\text{约去}t}{=\!=\!=}\lim_{t\to 0}\frac{6+3t}{t+1}=6=b$$

上页 下页 返回

例9. 求证 $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1 \quad (a>0)$

证明 据数列极限中已证明的结论 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1(a>0)$,

先考虑$x\to 0^+$时的情形,记$n=\left[\dfrac{1}{x}\right]$,则$x\to 0^+$时$n\to\infty$,

$$n \le \frac{1}{x} < n+1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} < x \le \frac{1}{n},$$

$a>1$ 时,$a^{\frac{1}{n+1}} < a^x \le a^{\frac{1}{n}}$, $0<a<1$ 时,$a^{\frac{1}{n+1}} > a^x \ge a^{\frac{1}{n}}$,

由函数极限的夹逼性,可得 $\lim\limits_{x\to 0^+} a^x = 1 \ (a>0)$,

而$x\to 0^-$时,$a^x = a^{-(-x)} = \dfrac{1}{a^{-x}}$,$-x>0$,

$\therefore \lim\limits_{x\to 0^-} a^x = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} a^x = 1 \ (a>0)$.

上页 下页 返回

法二 当$a>1$时，$\forall\varepsilon>0\ (不妨设\varepsilon<1)$，

要使$\left|a^x-1\right|<\varepsilon$，只须$1-\varepsilon<a^x<1+\varepsilon$，

又只须$\log_a(1-\varepsilon)<x<\log_a(1+\varepsilon)$，

令$0<\delta\le\min\{-\log_a(1-\varepsilon),\log_a(1+\varepsilon)\}$，

当$0<|x|<\delta$时，

$$\log_a(1-\varepsilon)\le-\delta<x<\delta\le\log_a(1+\varepsilon),$$

$1-\varepsilon<a^x<1+\varepsilon$，即$\left|a^x-1\right|<\varepsilon\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}a^x=1$，

当$0<a<1$时，$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{a}\right)^x=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}a^x=1.$

三.小结

1.极限的四则运算法则首先说明了由极限存在的函数经四则运算形成之函数其极限存在——极限存在判别法则;

2.极限求法:

a. 消去零因子法求极限;

b. 利用无穷小运算性质求极限;

c. 利用无穷小与无穷大的倒数关系法求极限;

d. 利用左右极限求分段函数极限 。

3.复合函数的极限运算法则

极限中一些有用的结论：

1.若$\lim f(x)$存在，$\lim g(x)$不存在，

则$\lim\left[f(x)+g(x)\right]$必不存在.

2.若$\lim f(x)$存在，$\lim g(x)$不存在，

则 $\lim\left[f(x)g(x)\right]$未必存在/不存在.

3.若$\lim f(x)=A\neq 0$存在，$\lim g(x)$不存在，

那么 $\lim\left[f(x)g(x)\right]$必不存在.

4.若$\lim f(x) = A \neq 0$存在,$\lim g(x) = 0$,

则$\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$必不存在,且$\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

换言之,若$\lim g(x) = 0$,

而$\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$存在,则必定$\lim f(x) = 0$.