数学分析 Mathematical Analysis

任课教师： 朱震球

办公室：　Office hour ?

QQ群: 833010105

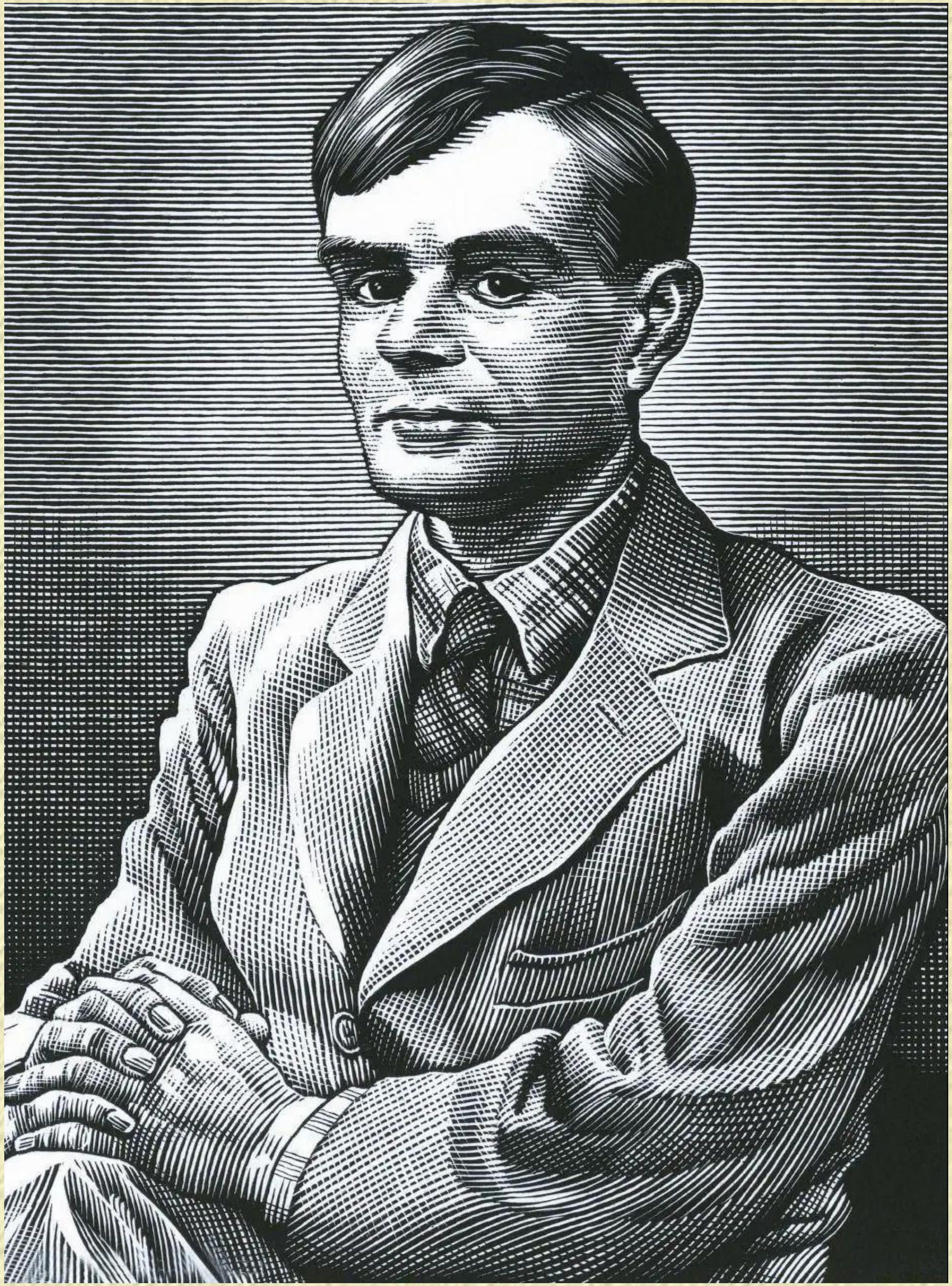
考试 ,成绩?　考勤 ?

每学期有阶段练习。

期末考试 按教学大纲的要求, 只以最基本的内容进行考试, 大体上考课堂教学和所布置作业的内容, 包括教材中的典型例题.

学期总评成绩 =平时作业成绩× 40 % + 期末考试成绩×60%

上页　下页　返回



Alan M. Turing

1912/6/23 ~ 1954/6/7

1948年,*Claude Shannon*说,要有熵(*entropy*),于是,信息时代由此开启…

熵: $$H = -\sum_i p_i \log_2 p_i$$

C. E. Shannon, A mathematical theory of communication, The Bell System Technology Journal, 27(3): 379–423, *July* 1948.

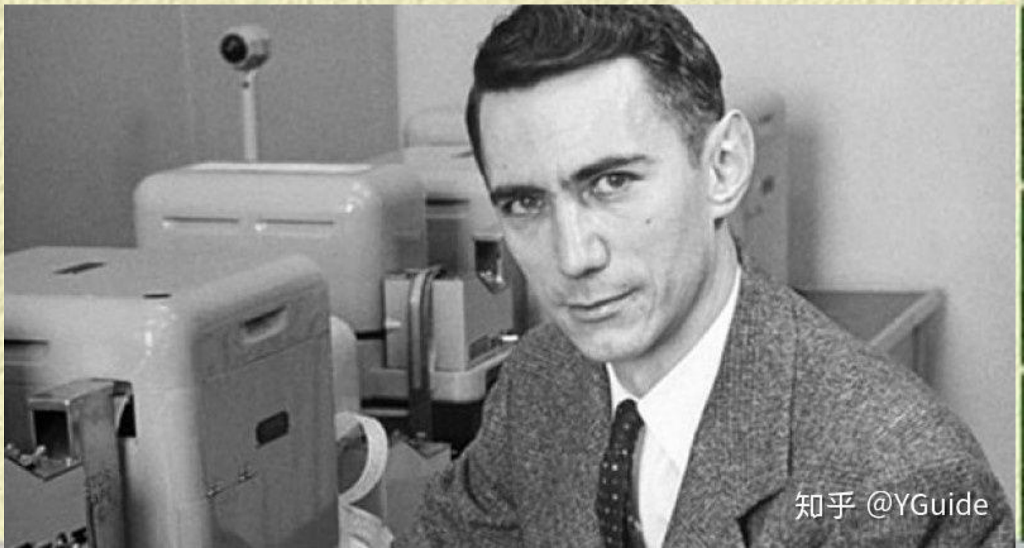


图 4 图灵奖得主的出生顺序

学术背景

图5显示了获奖者获得的最高学位和他们的专业，**在74位图灵奖得主中有63位获得博士学位，5位获得硕士学位，6位获得学士学位。**至于专业，大约三分之一的图灵奖得主在高等教育期间**主修数学**。

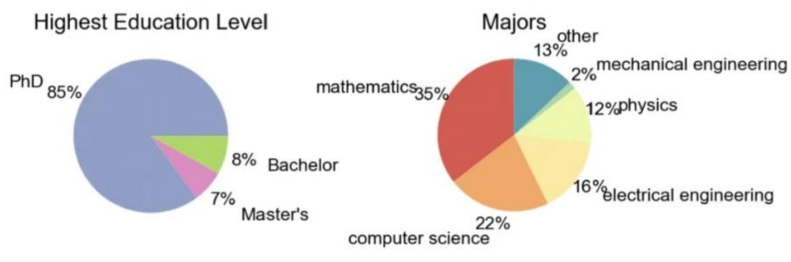


Fig. 5. Educational background.

图 5 教育背景

图 5 教育背景

获奖者的本科专业和研究生专业如图6所示。**令人惊讶的是，只有三个获奖者在本科时主修计算机科学，且他们都是双专业。**这可以用计算机科学是一个相对较新的专业来解释：世界上第一个计算机科学文凭，始于1953年剑桥大学计算机实验室。而美国第一个计算机科学系于1962年才在普渡大学成立。超过一半的科学家在本科学习期间研究数学，当读研阶段，计算机科学才成为最受欢迎的专业，但继续学习数学的仍然占据相当大比重。

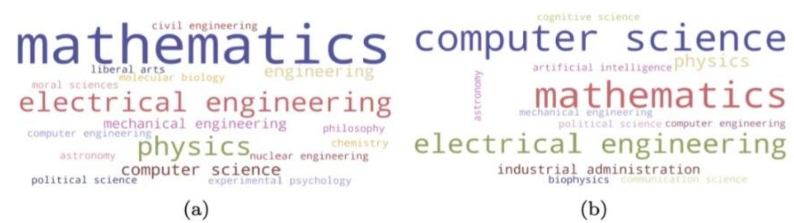


图6 词云显示的图灵得主的主要分布: (a)本科专业，(b)研究生专业。词云中的词越大，表示占比越高。

链接：http://www.cis.upenn.edu/~jean/math-basics.pdf

Algebra, Topology, Differential Calculus, and Optimization Theory For Computer Science and Engineering

Jean Gallier and Jocelyn Quaintance
Department of Computer and Information Science
University of Pennsylvania
Philadelphia, PA 19104, USA
e-mail: jean@cis.upenn.edu

July 28, 2019

$F.Engels:$

数学是研究数量关系和空间形式的科学.

$School\ of\ Bourbaki:$

数学是研究抽象结构的理论.

$(Nicolas\ Bourbaki)$

我们学习大学数学要争取做到:

1. 了解概念产生的客观背景,即引入概念的动机,理解概念;

2. 掌握运算技能与思想方法;

3. 运用知识与方法分析问题、解决问题.

高等数学*Advanced Mathematics*是相对于初等数学*Elementary Mathematics* 而言的.

微积分**Calculus**,线性代数**Linear Algebra**,概率论与数理统计**Probability and Mathematical Statistics** 是高等数学中的最基本而有用的部分.

而我们所学的数学分析就是微积分+极限理论,不仅要知道 **what, how**,还要知道**why.**

微积分包括两个基本内容: 微分 differential,积分 integral,是以极限 limite为基本工具来引入概念的.

微积分研究的对象—函数

研究的角度—函数的变化

研究的方法—极限

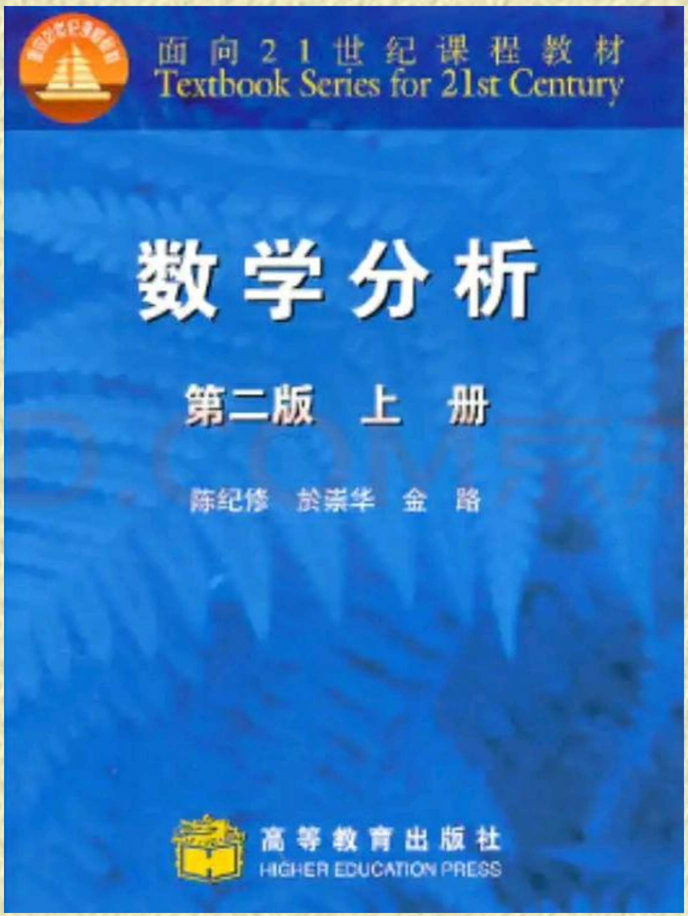
微积分—无穷小分析(Cauchy,Fr.)

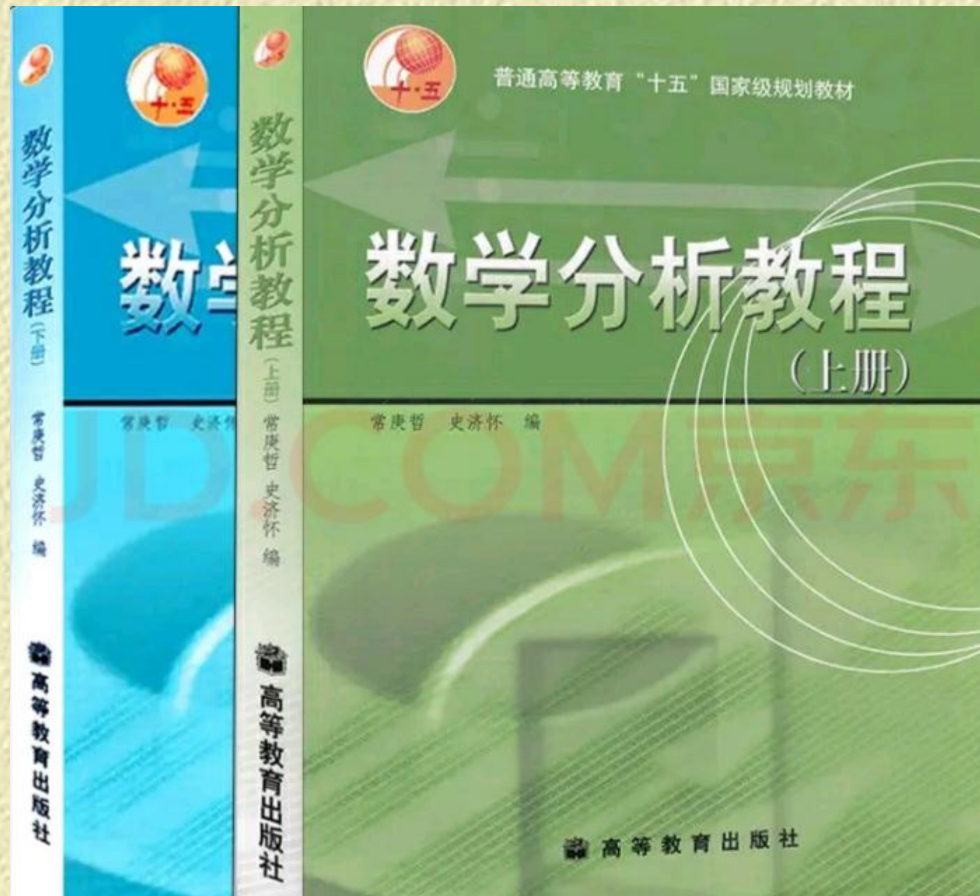
返回

数学课外阅读与辅导

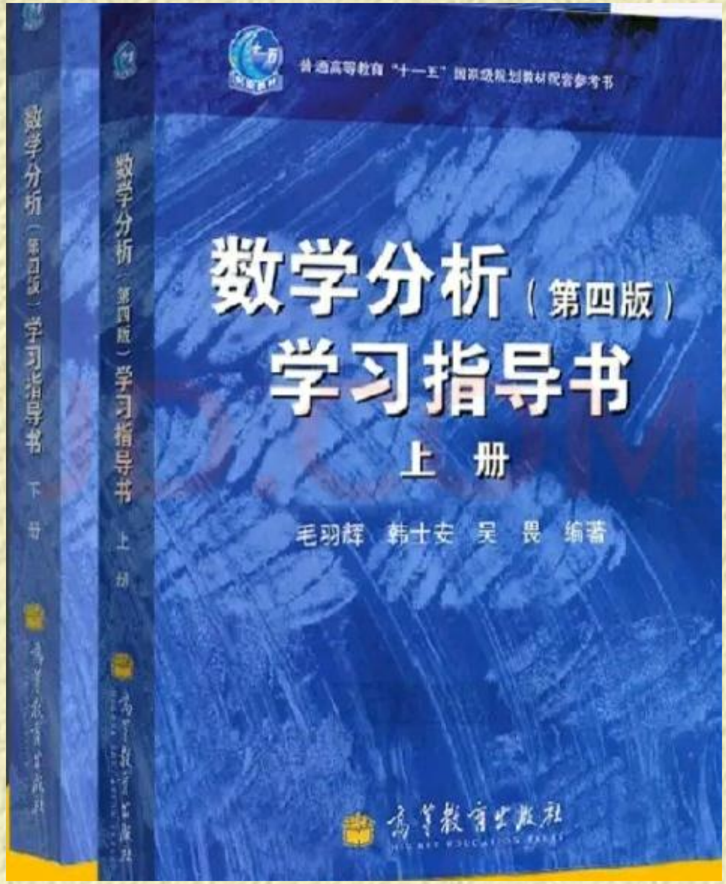
1.B站,复旦大学陈纪修《数学分析》讲课

2.B站,中科大史济怀《数学分析》讲课





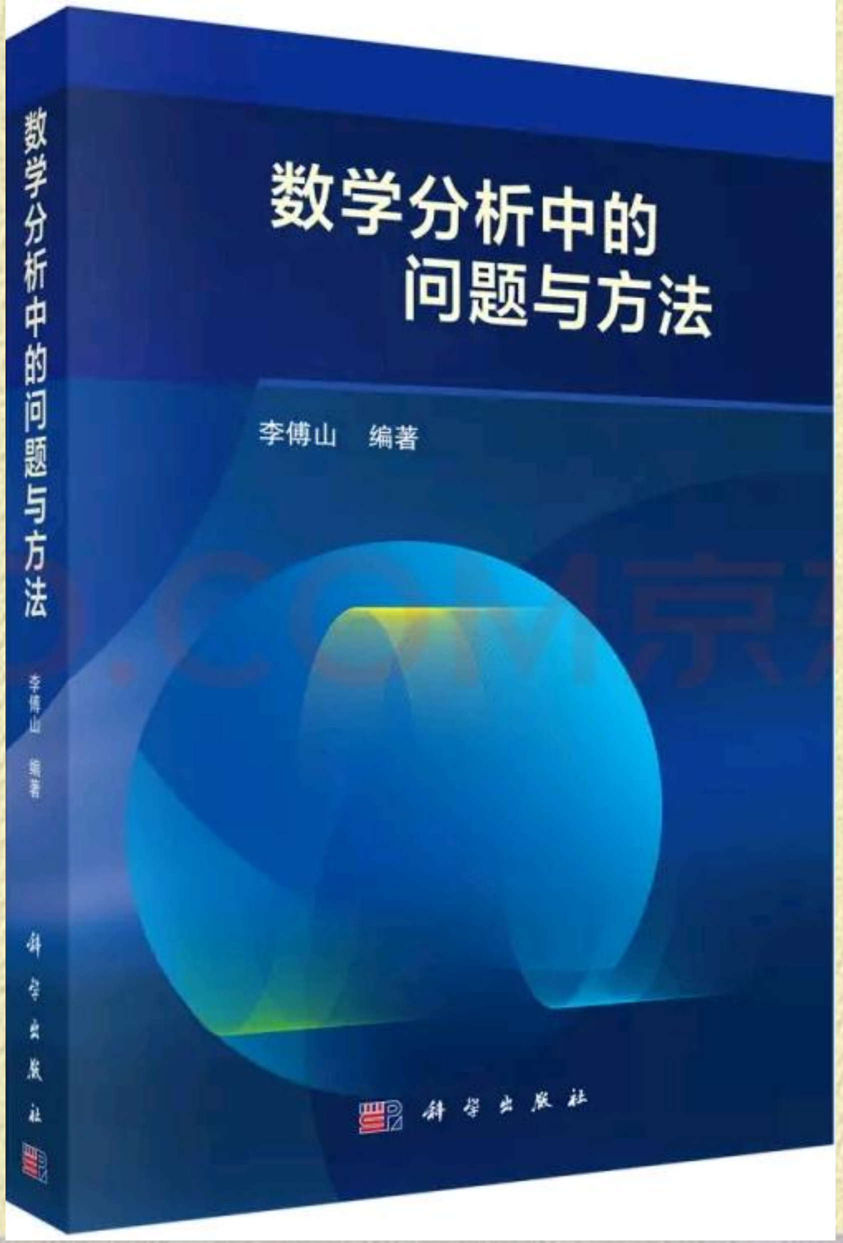
3. 毛羽辉 等,数学分析学习指导书,高等教育出版社, 2011.



4.华东师大数学分析第四版/第五版配套习题解…

5. 林源渠，方企勤，**数学分析解题指南**，北京大学出版社，2003

6. 李傅山，
数学分析中的问题与方法，
科学出版社，
2016



《数学分析》课程参考书进阶篇

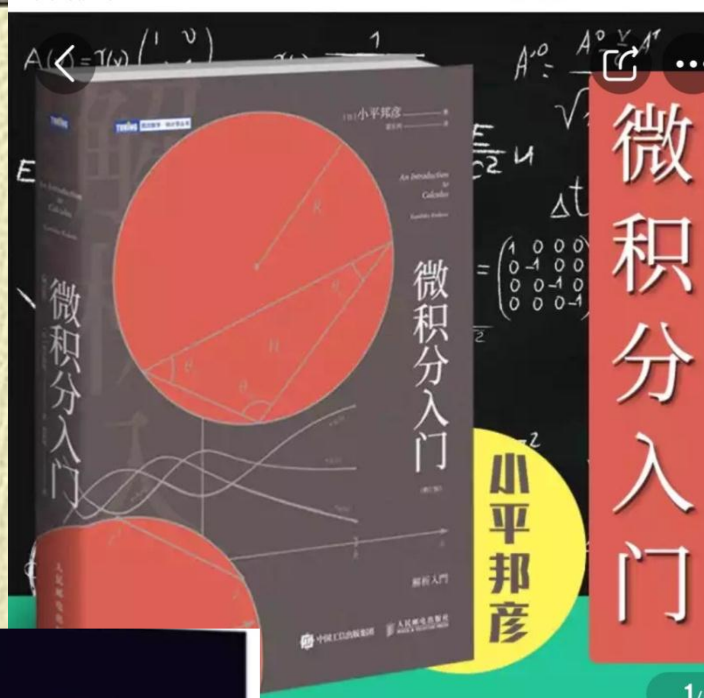
1.陈纪修等，数学分析（第三版）高等教育出版社;

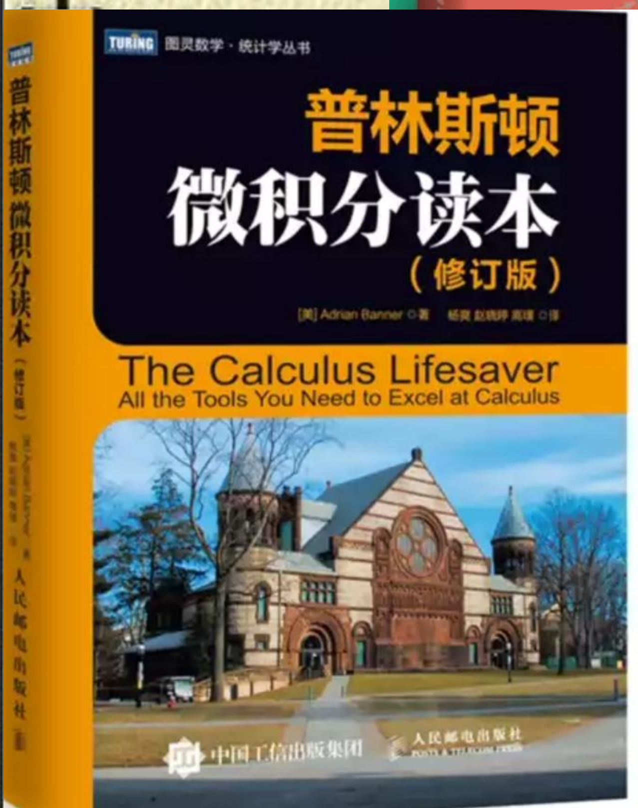
2.常庚哲、史济怀，数学分析教程（第三版），高等教育出版社;

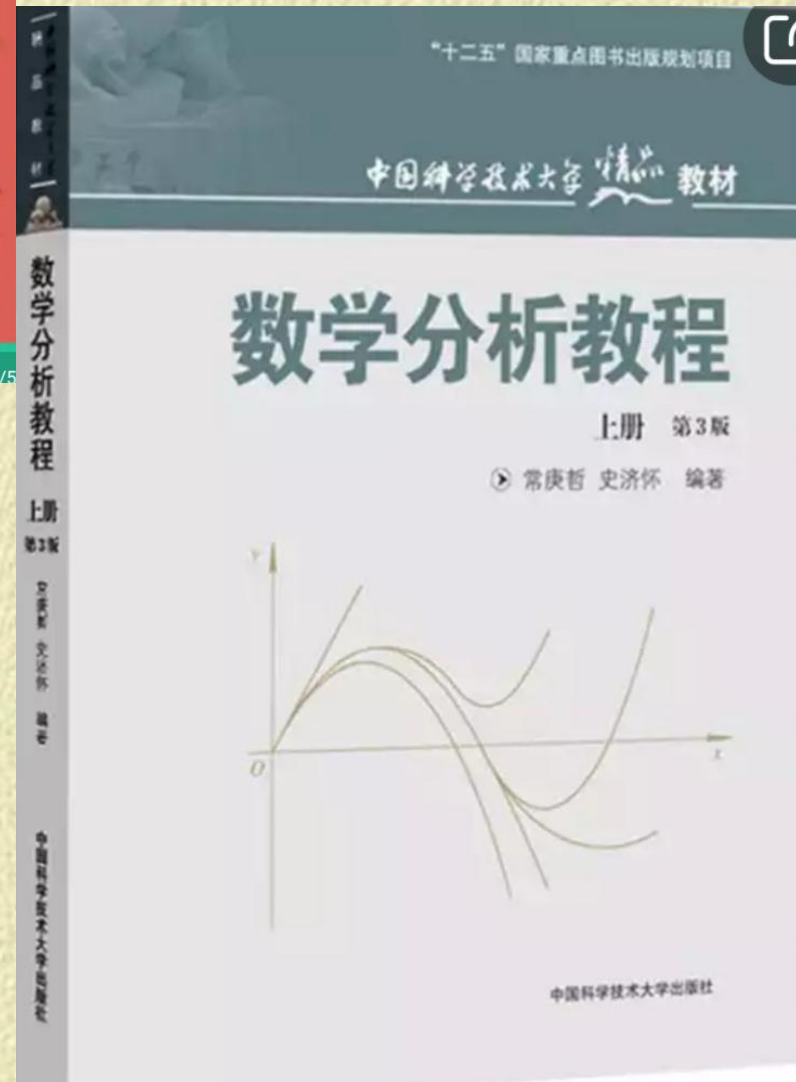
3.张筑生，数学分析新讲（1、2、3），北京大学出版社;

4.[美]柯朗，微积分与数学分析引论，科学出版社;

5.赵凯华，电磁学，高等教育出版社.


小平邦彦
微积分入门
小平邦彦
微积分入门


TURING 图灵数学·统计学丛书
普林斯顿
微积分读本
（修订版）
[美] Adrian Banner ◎著 杨爽 赵晓婷 高璞 ◎译
The Calculus Lifesaver
All the Tools You Need to Excel at Calculus
中国工信出版集团
人民邮电出版社


"十二五"国家重点图书出版规划项目
中国科学技术大学精品教材
数学分析教程
上册 第3版
常庚哲 史济怀 编著
中国科学技术大学出版社

《数学分析》课程参考书高阶篇

1. [俄]菲赫金哥尔茨， 微积分学教程. 三卷. 2003,高等教育出版社;
2. [俄]卓里奇， 数学分析（第七版） ，高等教育出版社，2019；
3.裴礼文， 数学分析中的典型问题与方法（第三版），高等教育出版社;
4.谢惠民等， 数学分析习题课讲义，（第二版），高等教育出版社.

上页 下页 返回

《数学分析》参考书红黑榜

红榜

1.周民强， 数学分析习题演练(三册),科学出版社;

2.徐森林等, 数学分析精选习题全解,(三册),清华大学出版社.

——质量好,难度大,过于重技巧

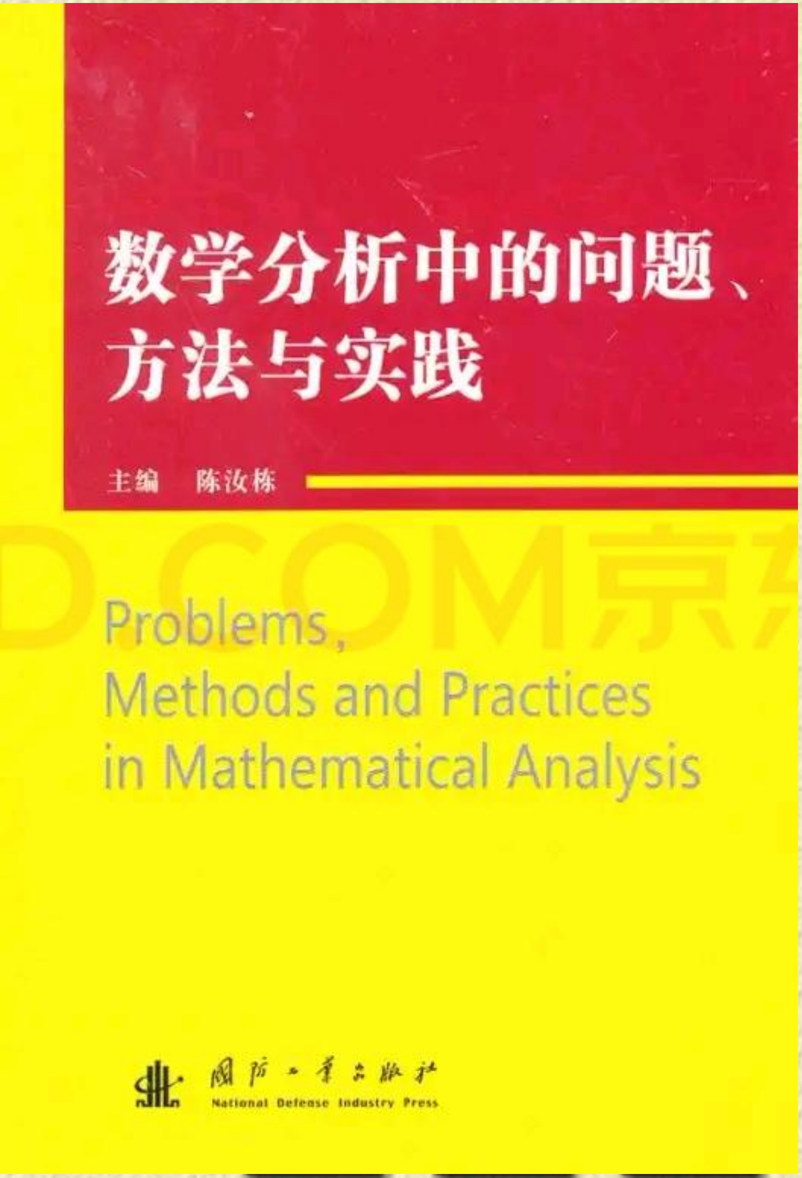
上页 下页 返回

《数学分析》参考书红黑榜

黑榜

1.陈汝栋,数学分析中的问题、方法与实践,国防工业出版社,2012.

——非排版、笔误性错误多,粘贴痕迹明显…



《数学分析》这门学科以“极限理论”为基础，以“无穷小分析”的思想和“连续变量之间连续依赖”的思想贯穿整个课程。主要研究极限理论、 微分学与积分学、实数理论。

课程目的:

培养学生掌握一定的分析数学的知识，加强对学生思维能力的训练——抽象思维与形象思维、集中性思维与发散性思维等，主要是逻辑思维能力。使学生掌握一定的利用所学知识分析问题和解决问题的能力，使其具有一定的数学素养，为将来从事某一领域的学习、研究与工作打下基础。

数学分析课程特点:

逻辑性强, 抽象、细致、深刻.只要在课堂上专心听讲, 一般能听得懂; 但即便能听懂, 做习题还会有困难. 这是因为数学分析技巧性较强, 在了解了基本的理论和方法后, 还要掌握一定的技巧。

论证训练是数学分析课基本的,也是重要的并较难的内容之一. 一般懂得了证明后, 能用数学的语言和符号把证明准确、严密、简练地表达出来，似乎是更难的一件事. 因此, 理解证明的解题思路, 学习基本的证明方法, 掌握叙述和书写证明的数学语言, 是数学分析教学的一项基本任务。

学习方法

1. 适当预习。

2. 课堂上认真听讲，适度记笔记（要学会记笔记），但以听为主，力争在课堂上能听懂5 ~7成…

3. 课后消化内容，整理笔记，尤其注意课堂讲授中跳过或简略的推导，阅读教科书和参考资料。

4. 一定量的练习。

5. 在学习中，要养成多问问题的习惯。

数学分析I,II 内容安排

本课程内容编排将遵循人的认知规律,从简单到复杂,由具体到抽象.

数学将只介绍数学分析最基本的内容，注重理论联系实际。带星号*的内容略去不讲.

数学分析I　Chap 1～6,8,9,10, 11,7*

极限理论初步和一元函数微积分

数学分析II　Chap12～15,19,16,17,18,20,21,22,

极限理论的延伸和多元函数微积分

→→多元函数微积分部分还需要补充空间解析几何与线性代数矩阵运算等知识.

教学目标的实施：

1.讲课**:** 内容多,课时紧,每次课介绍的内容较多, 因此, 课堂复习巩固、消化练习的时间少；

2.作业**:**作业以练习题中划线以上的部分习题为主要内容. 大体上每周收一次作业. 每次每班我会亲自批改**3~5**本作业. 作业完成情况是学期平时成绩的一部分.

3.辅导**:** 基本上每周一节习题课·不定期安排大习题课，相对务虚，着重于方法论.安排适当时间答疑·

上页 下页 返回

高等数学 —— 研究之特点：

→抽象—①数学上的某些关系式或某种数学运算是抽象的，但都可以也需要予以具象化。

——②许多不同的问题其研究的数学方法相同—数学模型化。

→动态—事物的量化结果—函数—随着自变量的变化其变化规律如何？

→无限 — 极限的思想、方法。

→抽象: 牛顿冷却定律

Newton's law of cooling

温度高于周围环境的物体向周围媒质传递热量逐渐冷却时所遵循的规律。当物体表面与周围存在温度差时，单位时间从单位面积散失的热量与温度差成正比，比例系数称为热传递系数。牛顿冷却定律是牛顿在1700年用实验确定的，在强迫对流时与实际符合较好，在自然对流时只在温度差不太大时才成立。

→抽象: Malthus模型：18世纪末，英国学者Malthus在研究了百余年的人口统计资料后认为，在人口自然增长的过程中，净相对增长率（出生率减去死亡率为净增长率）是常数.

→抽象:通过实验研究者注意到，放射性物质的衰变规律是，在远小于半衰期的时间段内，质量的相对变化率是常数。

→抽象：　定期存款年利率不变的情况下的连续复利的增长。

可以看到，这些不同方面的问题其提法也各不相同，然而以后我们可以知道，其实它们的变化规律是完全一样的。

这就是我们可以将不同的实际问题用相同的数学模型来描述。

→动态

在一篇房产报道中有一段话："由于国家宏观经济政策的导向，本市房价在经过一段时间的加速上涨后，近期房价的涨幅呈现下降的趋势……"

我们如何来理解这一变化过程？

上页 下页 返回

→无限—极限的思想、方法

1．如何计算平面上曲线围成的图形的面积？如圆的面积公式从何而来？甚至，平面图形的面积如何定义？

2. 我们大家都学过牛顿力学，知道冲量定律

$$F\Delta t = m\Delta v$$

那么，你知道牛顿第二定律 ***F=ma*** 与此的关系吗？你能解释 一下什么 是物体运动的

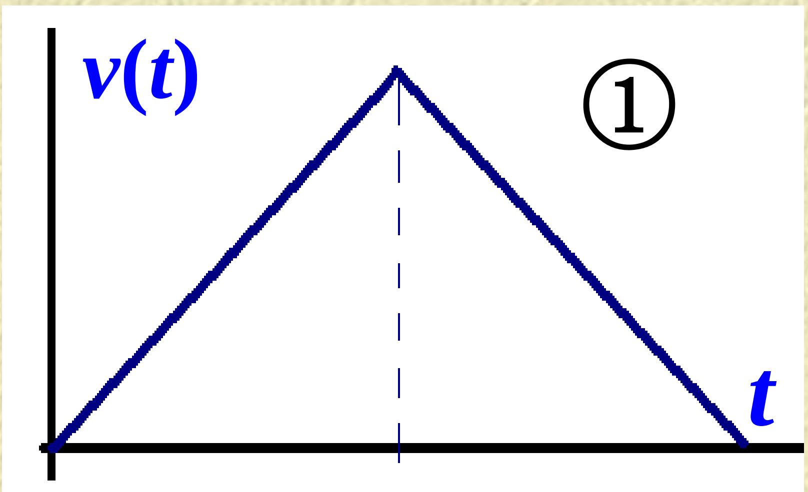
瞬时速度? 加速度?

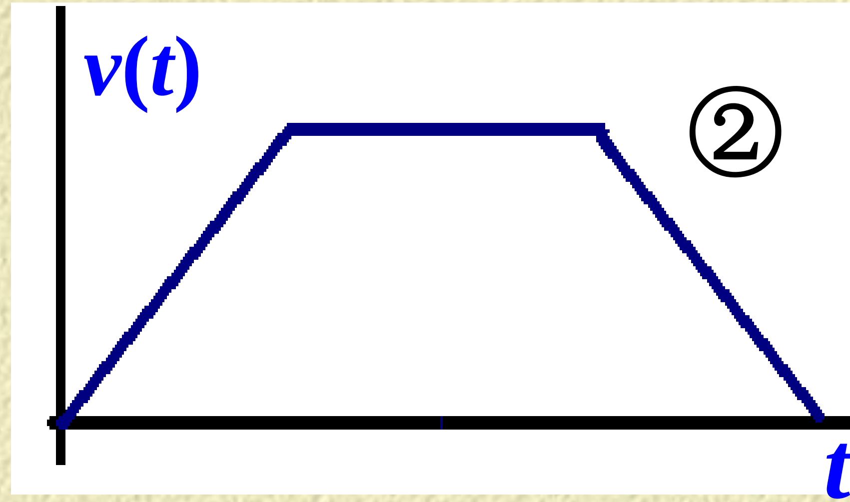
现实是，牛顿发明了微积分，并由此发现了牛顿运动定律，导致了科学的大发展。

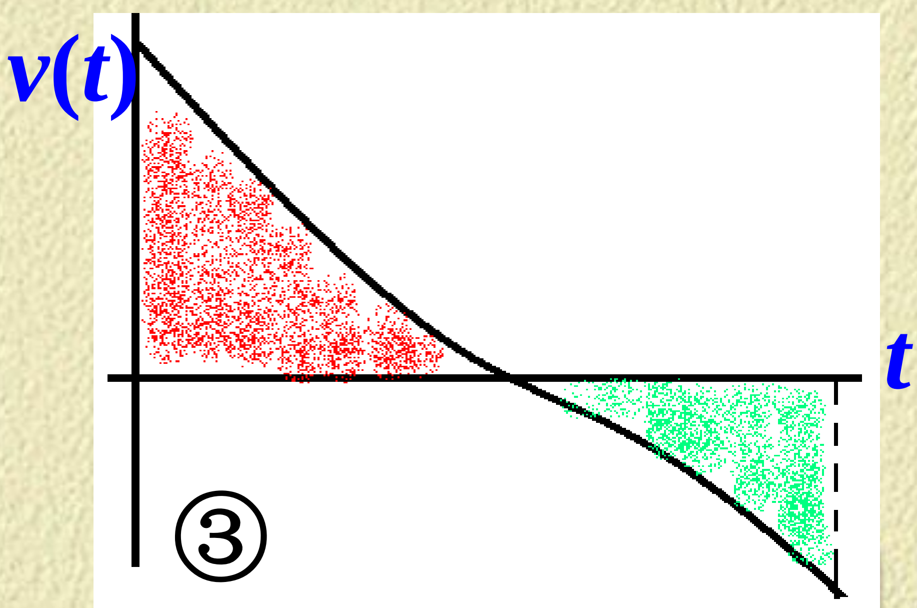
问题集锦

Q1.设某人乘降落伞从空中降落,记降落伞速度为$v=v(t)$.降落过程中伞所受空气阻力与$v^{\alpha}\left(\alpha\text{为常数},\alpha\geq 1\right)$成正比,设降落伞初始速度为零.试给出降落伞下降速度与时间的函数关系式.

Q2. 一质点作直线运动,已知其速度函数,求质点在某时间段内所作的位移与走过的路程.







下页 返回

A2.在中学的物理课中我们就知道了：

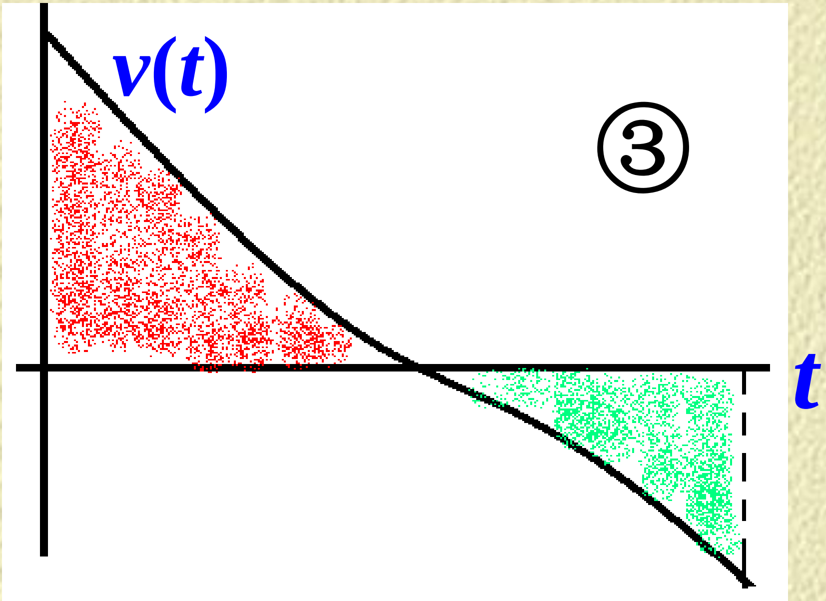
若已知$v=v(t), t\in[0,l]$,那么

在$[0,l]$内质点所作的位移$s=\int_0^l v(t)dt$,

而在$[0,l]$内质点所走过的路程$d=\int_0^l |v(t)|dt$,

因此,归根结底,就是要计算定积分.

在(1),(2)中,$s=d=\int_0^l v(t)dt$.



而在(3)中,质点所走过的路程$d=\int_0^l |v(t)| dt$

等于红绿两块部分面积的和,

所作的位移$s=\int_0^l v(t) dt$等于红绿两块部分

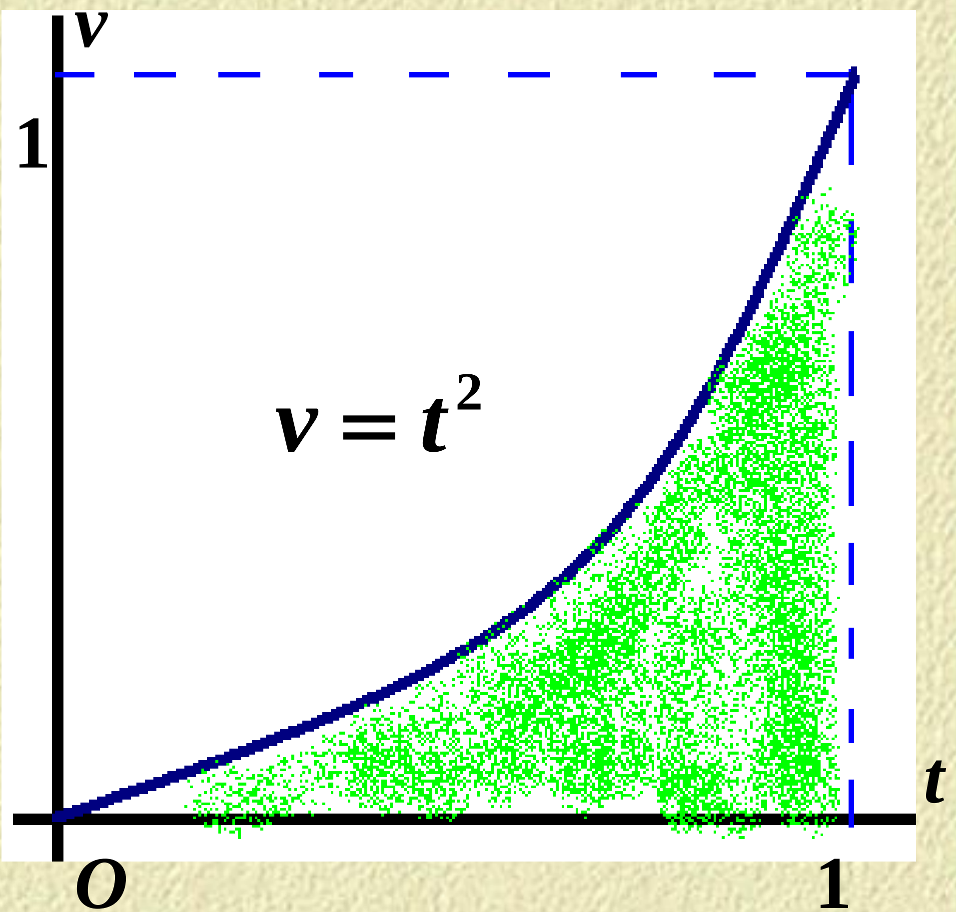
面积的代数和 .

比如,一质点作直线运动,知其速度

$$v(t)=t^2\left({}^{m}\!\big/\!{}_{s}\right),$$

则质点从运动开始到 1 sec.末所作的位移为

$$s=\int_0^1 t^2dt$$

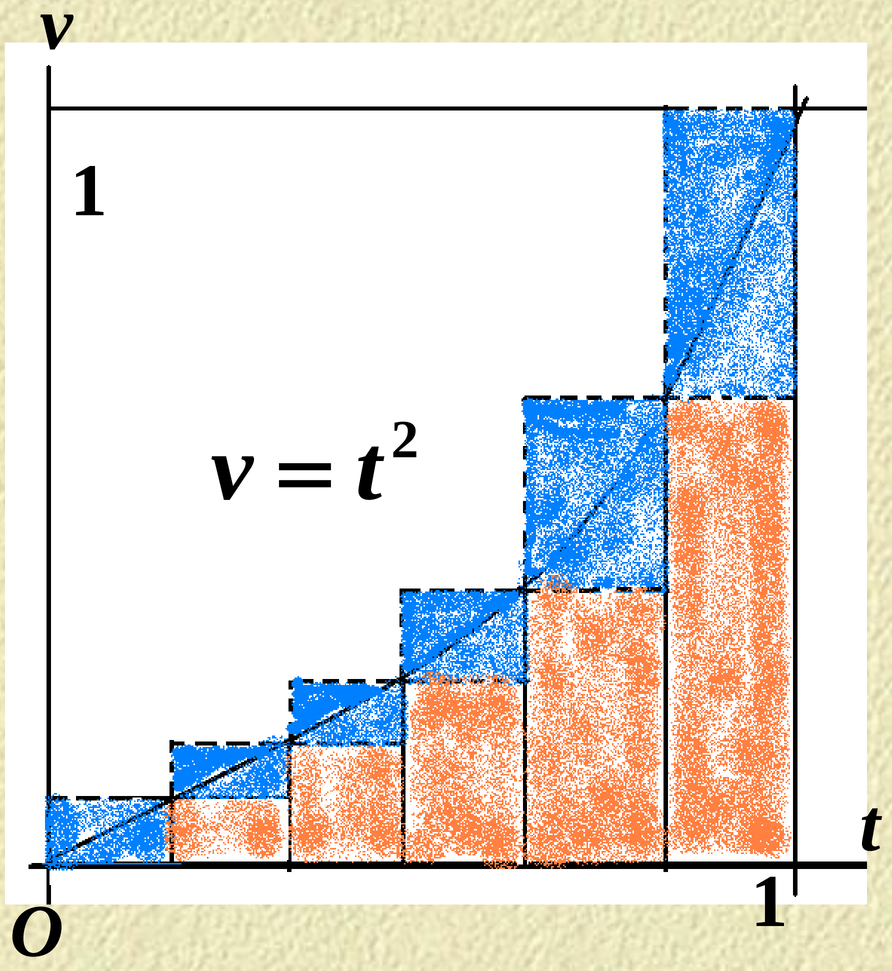


上页 下页 返回

一质点作直线运动,知其速度 $v(t)=t^2\left(m/s\right)$, 则质点从运动开始到 1 sec. 末所作位移为

$$s=\int_0^1 t^2 dt,$$

如何计算?



上页 下页 返回

我们通常的做法是:将区间[0,1] n 等份,用小矩形的面积来近似地表示小曲边梯形的面积.

不足近似(橘色部分)

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{i-1}{n}\right)^2=\frac{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2}{n^3}$$

$$=\frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)$$

过剩近似(橘色加蓝色部分)

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2=\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right),$$

可以看到,随着 n 的不断增大,不足近似不断增加,过剩近似不断减少,越来越接近于所要求的曲边三角形面积 A的真值.

$$\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)\xrightarrow{n\to\infty} A=\frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\xrightarrow{n\to\infty} A=\frac{1}{3}.$$

$$\therefore s=\int_0^1 t^2 dt=\frac{1}{3}.$$

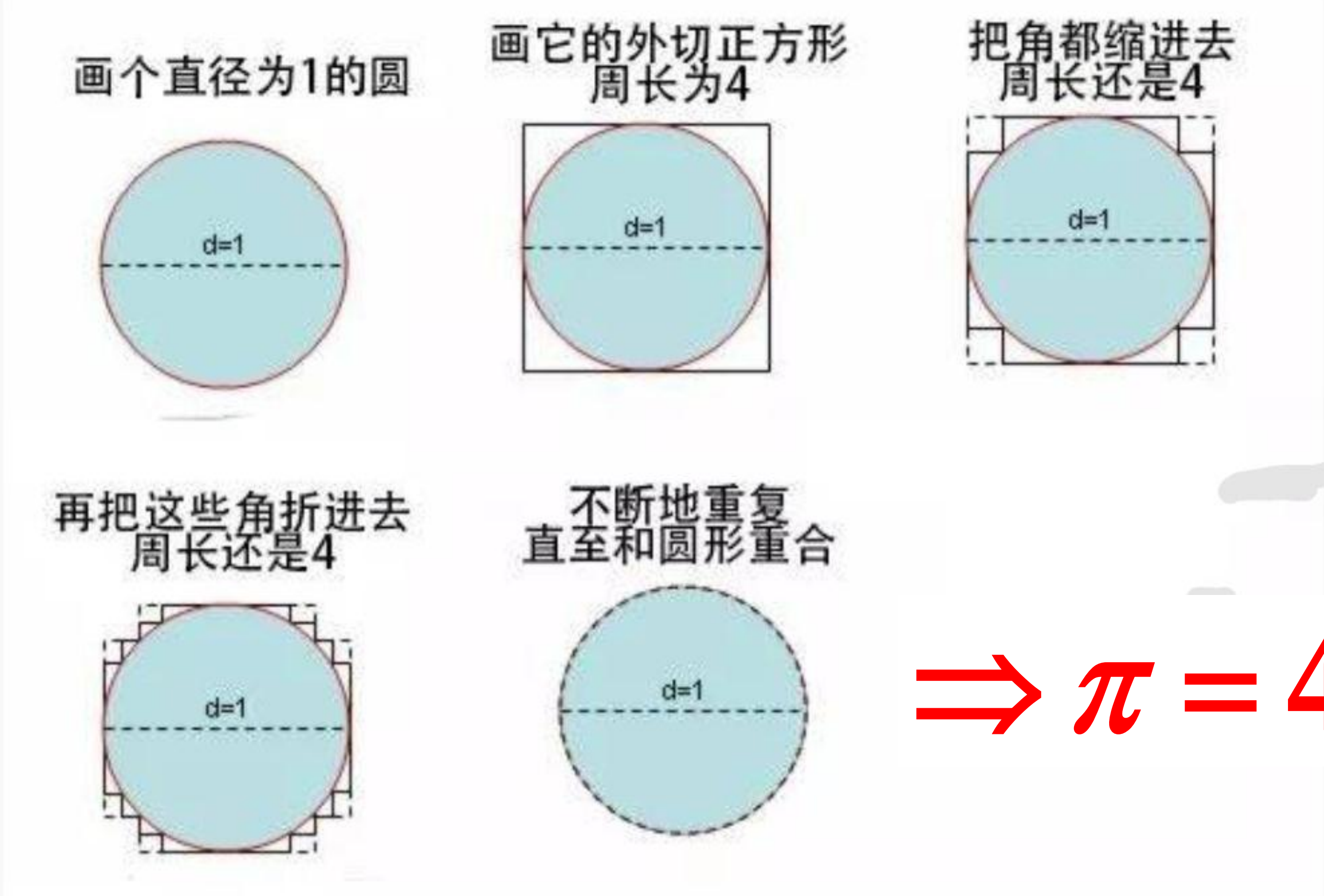
上页 下页 返回

如果一作直线运动的质点其速度为$v(t)=\sqrt{1+t^3}\left({}^{m}\!/\!{}_{s}\right)$,则质点从运动开始到 3 sec.末所作的位移为

$$s=\int_0^3\sqrt{1+t^3}\,dt,$$

以后我们就知道了,这一计算的精确值是无法得到的,那么近似计算就显得十分迫切了.

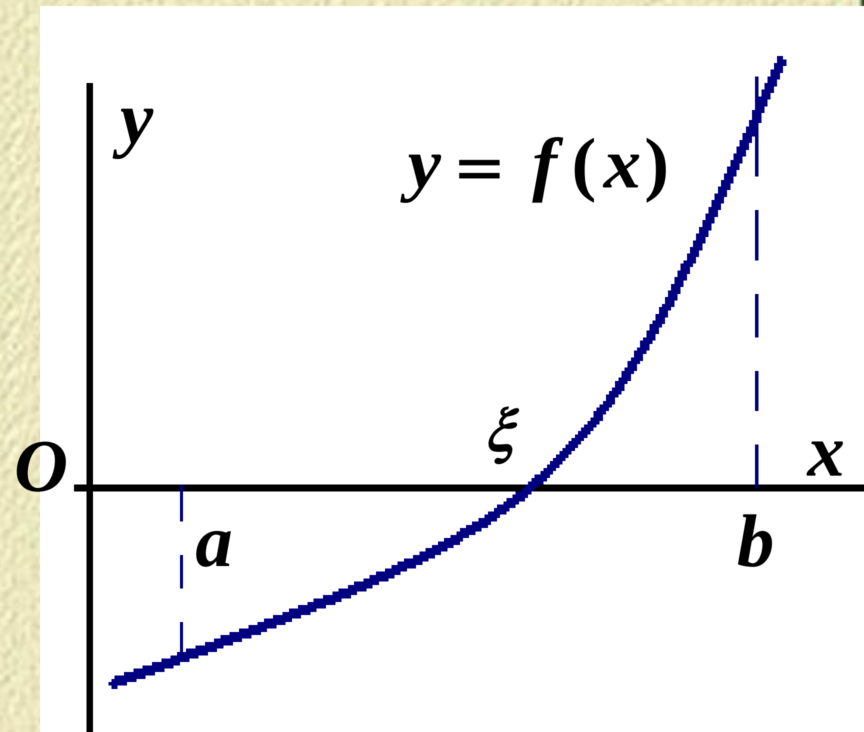
Q3.网上常能见到"$\pi=4$"的神奇证明，常常让人不明觉厉.你说这怎么解释？



$$\Rightarrow \pi = 4$$

Q4.设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续, $f(a)<0$, $f(b)>0$.那么$\exists\xi\in(a,b)$, $f(\xi)=0$.

方程求根是代数学中的一个难题.



数学的核心是逻辑抽象推演迭代,

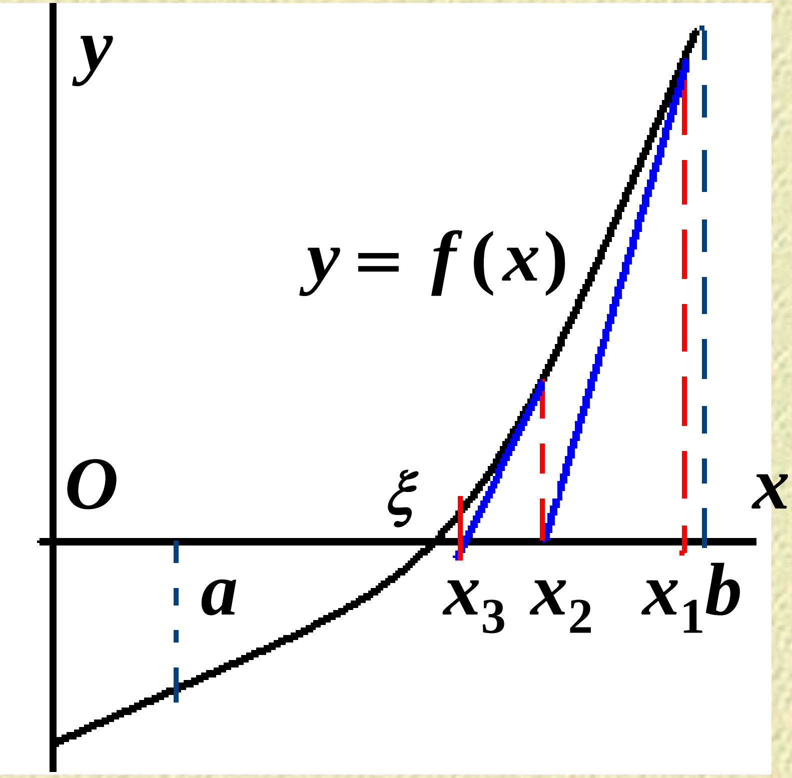
上页 下页 返回

如图,又若在$[a,b]$上$y=f(x)$是凸的,那么我们可用Newton—Raphson方法求得ξ的近似值:

取一ξ右侧的值x_1,过点$(x_1,f(x_1))$作曲线的切线,

切线与x轴交于点$(x_2,0)$,

则$x_2=x_1-\dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$且$x_2<x_1$.



上页 下页 返回

重复上述步骤：过点$\left(x_2, f(x_2)\right)$作曲线的切线，

切线与x轴交于点$\left(x_3, 0\right)$，则$x_3 = x_2 - \dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)}$且$x_3 < x_2$.

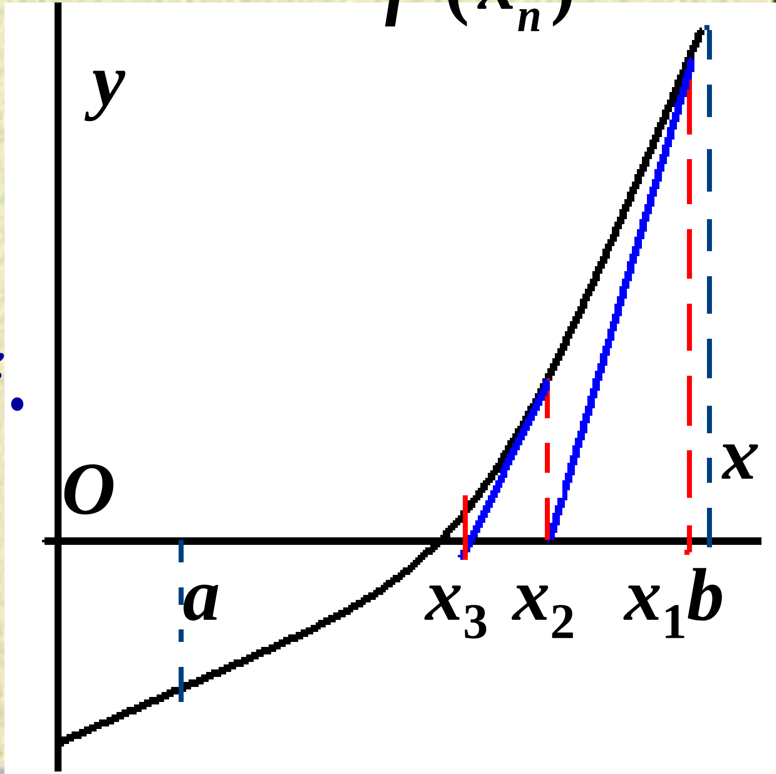
由此我们可以得到一点列$\{x_n\}$：$x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$，

$n \in \mathbb{Z}^+$，并且

$\xi < x_{n+1} < x_n < \cdots < x_2 < x_1$.

以后我们就知点列$\{x_n\}$收敛于ξ.

故我们可以x_n作为ξ的近似值.



设$a>0$,则方程$x^2=a$的正根为$\sqrt{a}$:

考虑函数$f(x)=x^2-a$, $f(0)<0$,取$x_1>\sqrt{a}$,

函数$f(x)=x^2-a$在$\left[0,x_1\right]$上是凸的.

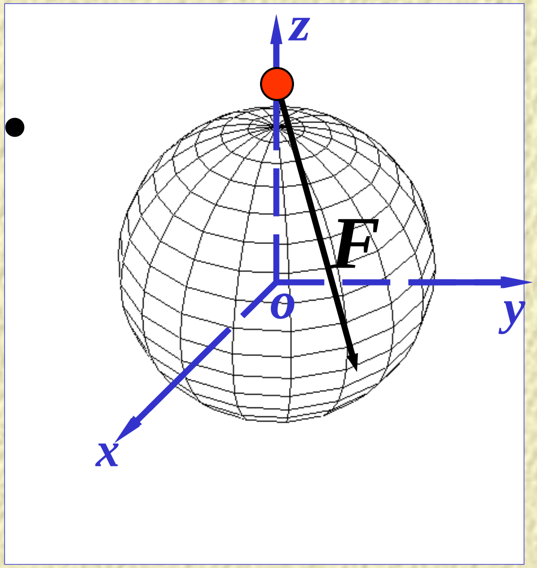
则方程根近似计算的迭代式为

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n-\frac{x_n^2-a}{2x_n}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right).$$

如$a=2$,取$x_1=1.5$, $x_2=1.4166666667$,

$x_3=1.4142156863$, $x_4=1.4142135624\cdots$上述迭代式作为$\sqrt{2}$的近似算法,效果无疑是极好的.

Q5. 在力学中,要计算地球与地球外的一物体间的万有引力时,是将“**地球当作质量聚集于地球中心的质点**” 来处理的.



为什么可以这样做呢?

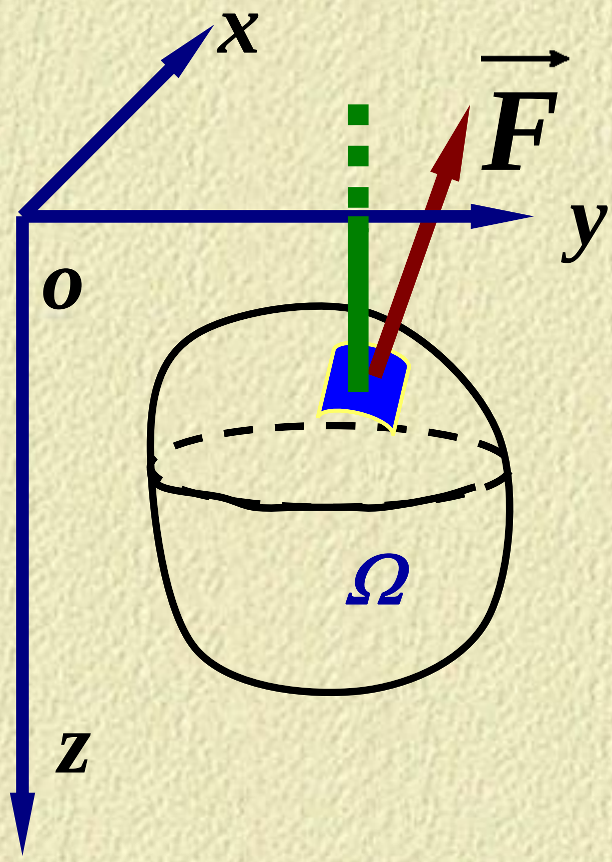
Q6. *Archimedes*原理: 物体全部浸入液体中时所受到的浮力等于与物体同体积的液体之重。

A6.在多元函数积分学部分,我们将能够轻易地证明

$$\vec{F}=\left(F_x,F_y,F_z\right)$$

$$=\left(0,0,-\rho gV_{\Omega}\right),$$

方向朝上.



Q7.南京鼓楼紫峰大厦720°全景…

这个720°,这个720°怎么理解?

720°VR

A7.这个720°其实就是立体角4π:

设$\Sigma \subset \mathbb{R}^3$是一光滑闭曲面,原点$O$在

围成的区域内,$\vec{r}=(x,y,z)$,$\vec{A}=\dfrac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}$,

那么Gauss定理告诉我们

$$\iint_{\Sigma} \vec{A}\cdot d\vec{S}=4\pi.$$

上页 下页 返回

*Q*8.在多元函数积分学部分,我们将要证明电磁学中极为重要的*Gauss*定理:

在静电场中,点电荷*Q*的电力线通过一闭曲面的电通量Φ

(1). 电荷Q被任意的闭曲面Σ所包围,则

$\Phi=\dfrac{Q}{\varepsilon_0}$,与$\Sigma$形状无关;

(2). 若电荷Q在Σ围成的区域外,则$\Phi=0$.

上页 下页 返回

*Q9.*电磁场的*Maxwell*方程组

构成电磁场理论的四个基本实验定律是：静电场的*Coulomb*定律和*Gauss*定理，电流产生磁场的*Ampere*定律，以及电磁感应的*Faraday*定律. 经过微积分的定量计算，这四个基本定律可表示为

电磁场的*Maxwell*方程组的(微分形式)：

上页 下页 返回

*Coulomb*定律和*Gauss*定理,

*Ampere*定律,以及*Faraday*定律可表示为

电磁场的*Maxwell*方程组的(微分形式):

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho,$$

$$\nabla \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j},$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0,$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \leftarrow$$ (假定磁场是无源的)

上页 下页 返回

学习数学分析,你准备好了吗?

A.心理准备;

B.数学以及物理的知识储备;

C.数学的思想,方法,技巧的储备:

1. (1).演绎推理与归纳推理;

   (2).抽象思维与形象思维;

   (3).集中性思维与发散性思维…

2. 关于数学的思想,方法:

(1). 常用的数学方法:

换元法,消元法,待定系数法;

(2). 常用的数学思想:

数形结合思想,方程与函数思想,建模思想,分类讨论思想,化归与转化思想;

(3). 数学思想方法主要来源于:

观察与实验——归纳,概括与抽象——演绎, 类比 等.

知识是重要的,
但逻辑推理能力,
想象力等 更为重要.

比如,你记得常用的三角函数公式:和角公式,和差化积公式,积化和差公式,倍角公式,半角公式吗?

初等数学回顾

1.几个有用的结果：

在$n\in\mathbb{Z}^{+}$时,

周知 (1).$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$;

(2).$\sum_{k=1}^{n}k^{2}=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$;

(3).$\sum_{k=1}^{n}k^{3}=\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^{2}\cdots$

(2). $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$;

$\because (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$,

由 $2^3 - 1^3 = 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1$,

$3^3 - 2^3 = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1$,

$4^3 - 3^3 = 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1, \cdots$

$\cdots (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$,

各式相加: $(n+1)^3 - 1^3$

$= 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) + 3(1 + 2 + 3 + \cdots + n) + n$,

整理即得结果.

同理,由

$$(n+1)^4 - n^4 = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1,$$

易证得(3). $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2.$

(4). $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5,$$

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

在$n \in \mathbb{Z}^+$时,有

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-}b^2 + \cdots + \frac{n(n-1)}{2}a^2b^{n-2} + nab^{n-1} + b^n$$

或记为 $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \leftarrow$ Newton二项展开式

C_n^k为组合数,$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}, k = 0,1,\cdots,n.$

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n, 0! = 1.$$

上页 下页 返回

$$a+b = a+b,$$

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2,$$

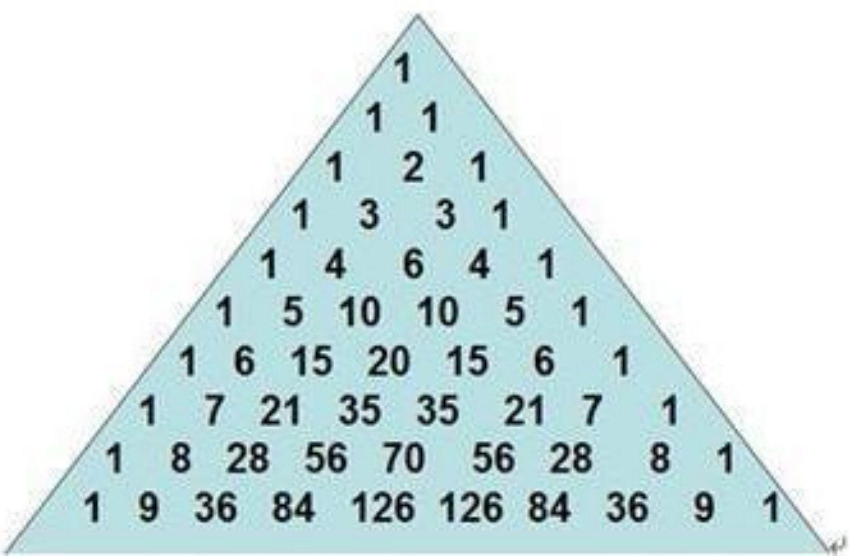
$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$

$$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4,$$

$$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5,$$

$$(a+b)^6 = a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$$

… … … … … …



杨辉三角形,又称贾宪三角形,帕斯卡三角形Pascal Triangle,是二项式系数排列成三角形形式的一种表示方式.

*Newton*二项展开式

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k, n \in \mathbb{Z}^+.$$

组合数 $C_n^k = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!},$

$$k = 0,1,\cdots,n.$$

$$0! = 1, n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n.$$

上页 下页 返回

2.几个重要的不等式$(a,b\in\mathbb{R})$

(1). $\big||a|-|b|\big|\le|a\pm b|\le|a|+|b|$;

(该结论可推广至n维空间$\mathbb{R}^n$)

(2). $a^2+b^2\ge 2|ab|$;

(3). $\forall x\in\mathbb{R}, |\sin x|\le 1$; $|x|\le\frac{\pi}{2}$时, $|\sin x|\le|x|$;

$|x|<\frac{\pi}{2}$时, $|x|\le|\tan x|$.

(4).几何平均–算术平均不等式

对$\forall a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}^+$,则有

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n},$$

当且仅当$a_1 = a_2 = \cdots = a_n$时等号成立.

上页 下页 返回

几何平均—算术平均不等式:

对$\forall a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbb{R}^+$,则有 $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\le\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$,

当且仅当$a_1=a_2=\cdots=a_n$时等号成立.

证明 *Cauchy*于1897年给出了用向前-向后(*Forward and Backward*)数学归纳法的证明.

$n=2$ 时结论成立.$n=4$ 时 $\dfrac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a_1+a_2}{2}+\dfrac{a_3+a_4}{2}\right)$

$$\ge\sqrt{\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)\left(\frac{a_3+a_4}{2}\right)}\ge\sqrt{\sqrt{a_1a_2}\cdot\sqrt{a_3a_4}}=\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}\ .$$

设$n=2^k$ 时结论成立,则$n=2^{k+1}$ 时有

$$\frac{1}{2^{k+1}}\sum_{1}^{2^{k+1}}a_i=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^k}\sum_{1}^{2^k}a_i+\frac{1}{2^k}\sum_{2^k+1}^{2^{k+1}}a_i\right)\ge\sqrt{\left(\frac{1}{2^k}\sum_{1}^{2^k}a_i\right)\left(\frac{1}{2^k}\sum_{2^k+1}^{2^{k+1}}a_i\right)}$$

$$\ge\sqrt{\sqrt[2^k]{a_1a_2\cdots a_{2^k}}\cdot\sqrt[2^k]{a_{2^k+1}a_{2^k+2}\cdots a_{2^{k+1}}}}=\sqrt[2^{k+1}]{a_1a_2\cdots a_{2^k}a_{2^k+1}\cdots a_{2^{k+1}}}\ .$$

这就证明了$n=2^k,k\in\mathbb{N}^*$时不等式成立.(这是证明的“向前”部分.)

返回

下面要证明:当不等式对某个$n(>2)$成立时,它对$n-1$也一定成立.(这是证明的“向后”部分.)

$$\frac{1}{n-1}\sum_{1}^{n-1}a_i=\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n-1}\right)\sum_{1}^{n-1}a_i=\frac{1}{n}\left(\sum_{1}^{n-1}a_i+\frac{1}{n-1}\sum_{1}^{n-1}a_i\right)$$

$$\geq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_{n-1}\cdot\left(\frac{1}{n-1}\sum_{1}^{n-1}a_i\right)}\ ,\Rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{n-1}\sum_{1}^{n-1}a_i\right)^n\geq a_1a_2\cdots a_{n-1}\cdot\left(\frac{1}{n-1}\sum_{1}^{n-1}a_i\right)$$,整理化简,得

$$\frac{1}{n-1}\sum_{1}^{n-1}a_i\geq\sqrt[n-1]{a_1a_2\cdots a_{n-1}}\ .$$

将上述向前与向后部分结合起来,可见不等式对每个自然数皆成立.再就等号成立的情形稍作分析可知结论成立.

上页 下页 返回

法二 $n=1$ 是平凡的情形,$n=2$ 时结论成立.

设$n=k$ 时不等式成立,则$n=k+1$ 时:

对于任意的正数$a_1,a_2,\cdots,a_k,a_{k+1}$,不妨设$a_{k+1}=\max\left(a_1,a_2,\cdots,a_k,a_{k+1}\right)$,

倘若不然,我们可以对$a_1,a_2,\cdots,a_k,a_{k+1}$重新编号,使得$a_{k+1}$为最大数(之一),

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}}{k+1}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}+\frac{ka_{k+1}-\left(a_1+a_2+\cdots+a_k\right)}{k\left(k+1\right)}\triangleq A+B,$$

$A>0,B\geq 0$,由Newton二项展开式得$\left(A+B\right)^{k+1}\geq A^{k+1}+\left(k+1\right)A^kB$,

$$\therefore\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}}{k+1}\right)^{k+1}=\left(A+B\right)^{k+1}\geq A^{k+1}+\left(k+1\right)A^kB$$

$=A^k\left[A+\left(k+1\right)B\right]=\left(\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\right)^k\cdot a_{k+1}\geq a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}$,该式两边开

$k+1$ 方即得所欲证明之不等式. 由数学归纳法知原不等式成立.

不等式中等号成立的条件可由数学归纳法得到,此略.

上页 下页 返回

3.常用的三角函数公式:

(1).和角公式 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$,

先仅考虑特殊情形: $0<\alpha,\beta,\alpha+\beta<\pi/2$,

$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ABD}+S_{\Delta ADC}\Leftrightarrow$

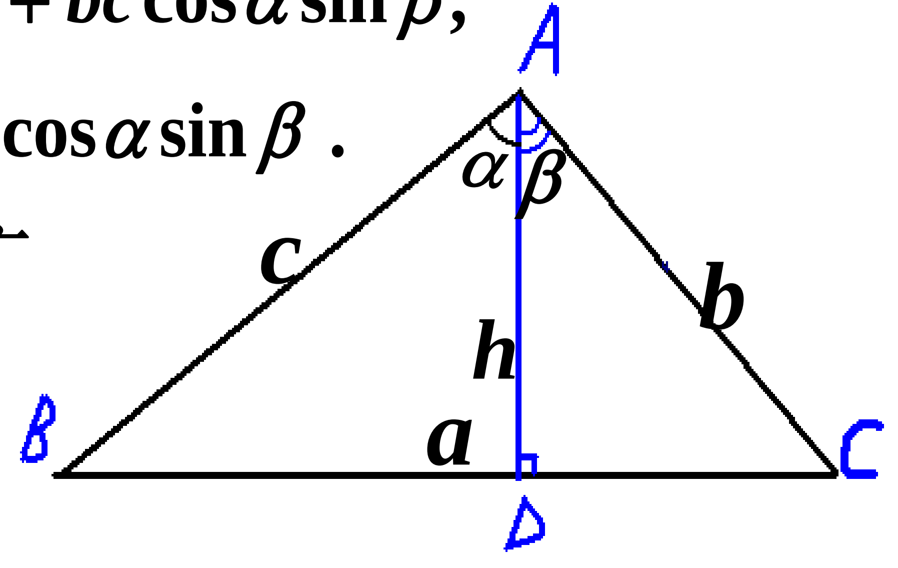
$bc\sin(\alpha+\beta)=ch\sin\alpha+bh\sin\beta\cdots(@)$

$\because h=b\cos\beta=c\cos\alpha\longrightarrow$式(@)变为

$bc\sin(\alpha+\beta)=cb\cos\beta\sin\alpha+bc\cos\alpha\sin\beta$,

$\Rightarrow\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$.

然后,据诱导公式结论可拓广至一般情形.



常用的三角函数公式:

(1).和角公式 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\cdots(a)$

不难推得: $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\cdots(b)$

由诱导公式得 $\Rightarrow\begin{cases}\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\cdots(c)\\ \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cdots(d)\end{cases}$

(2).和差化积公式:

由(1)中(a),(b)式相加 $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$

$$\xrightarrow[\alpha-\beta=B]{\alpha+\beta=A}\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2},\cdots\ \cdots$$

(3).积化和差公式:

由(1)中(a),(b)式相加 $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$

$$\longrightarrow\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right],\cdots\ \cdots$$

(4).倍角公式:$\cdots\ \cdots$

(5).半角公式:$\cdots\ \cdots$

自测练习：

1.a,b,c是任意实数，求证：

$$\left|\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{b^2+c^2}\right|\le|a-b|.$$

2.你知道平面上的椭圆曲线，抛物线的光学性质吗？你会证明吗？

3.你会求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$ 吗？

4.已知$\sin\alpha-\cos\beta=m\ (-2<m<2)$,

试确定$\cos\alpha+\sin\beta$的取值范围.

$\cdots\cdots\left(\bullet\in\left[-\sqrt{4-m^2},\sqrt{4-m^2}\right]\right)$

5.作图:$a>0$,(1).$r=a(1+\cos\theta)$;

(2).$r=a\left(\dfrac{1}{2}+\cos\theta\right)$;(3).$r=a\sin 3\theta$;

(4).$\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right)$.

上页 下页 返回

6.证明(1). $x>0, 4x^3+1\geq 3x$;

(2). $a,b\in\mathbb{R}, \dfrac{|a+b|}{\pi+|a+b|}\leq\dfrac{|a|}{\pi+|a|}+\dfrac{|b|}{\pi+|b|}$.

7.设$n\in\mathbb{Z}^+$,证明:

(1).$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<3$; (2).$n!>\left(\dfrac{n}{3}\right)^n$.

8.(1). $\left(P\right.$大自主招生题$\left.\right)$设$a,b,c\in\mathbb{R}$,

$a+b+c=1, a^2+b^2+c^2=2$,

$a^3+b^3+c^3=3$.求 abc 值.

(2). $\left(FD\right.$自主招生题$\left.\right)$设$x\in\mathbb{C}$,

$x+\dfrac{1}{x}=-1$,计算$x^{2021}+\dfrac{1}{x^{2021}}=?$

上页 下页 返回