§2 牛顿—莱布尼茨公式

1. 问题的提出
2. 牛顿—莱布尼茨公式
3#. 函数的一致连续性

1. 问题的提出

通过前面的例子可以看到,直接由定义计算定积分——求 *Riemann* 和的极限,一般是很困难的.

下面我们通过对:变速直线运动的路程的计算问题引入

牛顿—莱布尼茨公式

上页 下页 返回

在已知速率求路程问题中,设质点以速率$v=v(t)$作直线运动,$v=v(t)$是$[T_1,T_2]$上的一个连续函数,$v(t)\geq 0$.该质点在时间段$[T_1,T_2]$内所走过的路程为s.

一方面,由积分定义知路程 $s=\int_{T_1}^{T_2} v(t)dt$.

另一方面,由$s'(t)=v(t)$得$s=s(T_2)-s(T_1)$,

$\therefore \int_{T_1}^{T_2} v(t)dt = s(T_2)-s(T_1)$.

问题是剔除该结论的物理意义,该结论是否仍然成立?

2.牛顿—莱布尼茨公式

定理9.1 $\left(Newton - Leibniz\text{公式}\right)$

若$F(x)$是连续函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上的一个原函数,即$F'(x) = f(x), x \in [a,b]$.则 $f(x)$在区间$[a,b]$上$Riemann$ 可积,且

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) := F(x)\Big|_a^b .$$

分析 由定积分的定义,$\forall \varepsilon > 0$, 要证明 $\exists \delta > 0, \forall \|T\| < \delta$,

$$s.t.\left|\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i - \left[F(b) - F(a)\right]\right| < \varepsilon .$$

上页 下页 返回

证明 对于区间$[a,b]$的任意一个分割

$T=\{\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_n\}$,在小区间$\Delta_i=[x_{i-1},x_i]$

上对函数$F(x)$使用$Lagrange$微分中值定理,

存在$\eta_i\in(x_{i-1},x_i),i=1,2,\cdots,n,$

$$使得\ F(b)-F(a)=\sum_{i=1}^{n}\left[F(x_i)-F(x_{i-1})\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}F'(\eta_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}f(\eta_i)\Delta x_i\ .$$

就上述对区间$[a,b]$的分割T,作$Riemann$和

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\ .$$

上页 下页 返回

考察 $\sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)\Delta x_i$ 与 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 之差别,

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)\Delta x_i\right|$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n} \left[f(\xi_i) - f(\eta_i) \right]\Delta x_i\right| \le \sum_{i=1}^{n} \left| f(\xi_i) - f(\eta_i) \right| \Delta x_i \ .$$

在此,可以注意到,由于函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,

据Cantor定理可知,函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续,

因此 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x'$、$x'' \in [a,b], |x' - x''| < \delta,$

$$s.t. \ \left| f(x') - f(x'') \right| < \frac{\varepsilon}{b-a},$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x'、x'' \in [a,b], |x' - x''| < \delta,$$

$$\text{s.t. } |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a},$$

$$\therefore \forall \|T\| = \max_i \{\Delta x_i\} < \delta, \forall \xi_i \in \Delta_i = [x_{i-1}, x_i], |\xi_i - \eta_i| < \delta,$$

$$|f(\xi_i) - f(\eta_i)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \Rightarrow \left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i - [F(b) - F(a)] \right|$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) - f(\eta_i)] \Delta x_i \right| \le \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i) - f(\eta_i)| \Delta x_i$$

$$< \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a} \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \varepsilon$$. 定理证毕 .

Newton – *Leibniz*公式：

若$F(x)$是连续函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上的一个原函数,则 $f(x)$在区间$[a,b]$上*Riemann* 可积,且$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$.

定理表明:区间$[a,b]$上的连续函数可积，并且将定积分的计算问题转化为了求原函数的问题 .打通了微分学与积分学的关节.

例1.计算积分：(1).$\int_1^2 \frac{1}{x}dx$；

解 (1).$\ln x$是$\frac{1}{x}$在$(0,+\infty)$上的一个原函数，

$$\therefore \int_1^2 \frac{1}{x}dx = [\ln x]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 .$$

对比起来,以前用定义来计算积分的做法就麻烦得多了.

上页 下页 返回

例1.计算积分：(2). $\int_{-2}^{-1}\frac{1}{x}dx$ ；

解 (2).当 $x<0$ 时，$\ln(-x)$ 是 $\frac{1}{x}$ 的一个原函数，

$$\therefore \int_{-2}^{-1}\frac{1}{x}dx=\left[\ln(-x)\right]_{-2}^{-1}$$

$$=\ln 1-\ln 2=-\ln 2.$$

上页 下页 返回

例1.计算积分：(3).$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx\ \left(a>0\right)$;

解(3).令$x=a\sin t$, $dx=a\cos tdt, t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\int\left|a\cos t\right|\cdot a\cos tdt$$

$$=a^2\int\cos^2 tdt=\frac{1}{2}a^2\int\left(1+\cos 2t\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}a^2\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C=\frac{1}{2}a^2t+\frac{1}{2}a^2\sin t\cos t+C$$

$$=\frac{1}{2}a^2\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

计算积分：(3). $\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx\ (a>0)$;

由 $\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{1}{2}a^2\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C$

可得

$$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx=\left(\frac{1}{2}a^2\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a}$$

$$=\frac{1}{2}a^2\left[\arcsin 1-\arcsin(-1)\right]=\frac{1}{2}\pi a^2.$$

我们这就是用积分来推导半圆的面积,此正是圆心在原点、半径为a的上半圆的面积 .

例1.计算积分：(4). $\int_0^{1/2}\arcsin x dx$.

解(4).令 $u'=1, v=\arcsin x$,

$$\therefore \int \arcsin x dx = x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= x\arcsin x - \int \frac{-\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)'}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C,$$

$$\therefore \int_0^{1/2}\arcsin x dx = \left(x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}\right)\Big|_0^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1.$$

例2.计算积分：(1). $\int_{-\sqrt{3}}^{-1} \frac{1}{1+x^2} dx$;

解(1).在$(-\infty, +\infty)$上,

$\arctan x$是$\frac{1}{1+x^2}$的一个原函数,

$$\therefore \int_{-\sqrt{3}}^{-1} \frac{1}{1+x^2} dx = \left[\arctan x\right]_{-\sqrt{3}}^{-1}$$

$$= \arctan(-1) - \arctan\left(-\sqrt{3}\right)$$

$$= -\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{12}.$$

上页 下页 返回

$$\because \left(-\arctan\frac{1}{x}\right)' = -\frac{-1/x^2}{1+(1/x)^2} = \frac{1}{1+x^2}, x \neq 0,$$

$\therefore -\arctan\frac{1}{x}$是$\frac{1}{1+x^2}$在$(-\infty, 0)$上的一个原函数.

$$\therefore \int_{-\sqrt{3}}^{-1} \frac{1}{1+x^2}dx = \left[-\arctan\frac{1}{x}\right]_{-\sqrt{3}}^{-1}$$

$$= -\left[\arctan(-1) - \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}.$$

例2.计算积分：(2).$\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx.$

解　显然$\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x\Big|_{-1}^{1}=\frac{\pi}{2}.$

又$\left(-\arctan\frac{1}{x}\right)'=-\frac{-1/x^2}{1+(1/x)^2}=\frac{1}{1+x^2}, x\neq 0.$

如果就此函数使用N—L公式，

$\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx=-\arctan\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1}=-\frac{\pi}{2}$,咋回事？

我们确信$\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x\Big|_{-1}^{1}=\frac{\pi}{2}$是正确的.

因而$\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx=-\arctan\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1}=-\frac{\pi}{2}$当然就错了.

究其原因,我们会发现函数$-\arctan\frac{1}{x}$在区间

$[-1,1]$上不连续,而在区间$[-1,1]$上连续的函数

$\frac{1}{1+x^2}$的原函数必定可导,那当然是连续的.

所以说函数$-\arctan\frac{1}{x}$不是函数$\frac{1}{1+x^2}$在区间$[-1,1]$上的原函数.这是我们使用*Newton – Leibniz*公式时要特别注意的问题.

$$\int_{-\sqrt{3}}^{-1}\frac{1}{1+x^2}dx=\left(-\arctan\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{-\sqrt{3}}^{-1}=\frac{\pi}{12},$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx\neq\left(-\arctan\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{-1}^{1}.$$

例2.(3).计算积分$\int_0^{\pi}\frac{1}{2+\cos 2x}dx$

解 倘若由$\int\frac{1}{2+\cos 2x}dx$

$$=\int\frac{1}{1+2\cos^2 x}dx=\int\frac{\sec^2 x}{2+\sec^2 x}dx$$

$$=\int\frac{(\tan x)'}{3+\tan^2 x}dx=\int\frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^2+\tan^2 x}d(\tan x)$$

$=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{3}}+C$，进而得到

$$I=\int_0^{\pi}\frac{1}{2+\cos 2x}dx=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{3}}\Big|_0^{\pi}=0.$$

由$[0,\pi]$上有$\dfrac{1}{2+\cos 2x}\ge\dfrac{1}{3}>0$知 $I\ge\dfrac{\pi}{3}$,

由此我们知道这个结果错了.原因是

$\dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\dfrac{\tan x}{\sqrt{3}}$并不是$\dfrac{1}{2+\cos 2x}$在

$[0,\pi]$上的原函数. 我们该怎么做呢?

$$\left(\text{正确答案}\ \int_0^{\pi}\frac{1}{2+\cos 2x}dx=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$$

上页 下页 返回

重温$Newton-Leibniz$公式：

若$F(x)$是连续函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上的一个原函数,即$F'(x)=f(x), x\in[a,b]$.

则 $f(x)$在区间$[a,b]$上$Riemann$ 可积,且

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) := F(x)\Big|_a^b .$$

上页 下页 返回

例3. 利用积分求极限

$$L=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right).$$

解 $L=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}$,

由于函数$\frac{1}{1+x}$在区间$[0,1]$上可积,故可对区间$[0,1]$作任意的分割,任取介点$\xi_k\in\Delta_k$. 由此我们对区间$[0,1]$作n等分,取介点$\xi_k=\frac{k}{n}\in\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]=\Delta_k$.于是,

$$\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}\ ,\therefore L=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln 2\ .$$

例3.(2). 求极限

$$(A).L_A=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right);$$

$$(B).L_B=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{2}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right).$$

解 $(A).\because \dfrac{i}{n^2+n}\le\dfrac{i}{n^2+i}\le\dfrac{i}{n^2+1},$

$$\therefore \frac{1}{2}=\frac{n(n+1)}{2(n^2+n)}\le\frac{\sum_{i=1}^{n}i}{n^2+n}\le\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+i}\le\frac{\sum_{i=1}^{n}i}{n^2+1}=\frac{n(n+1)}{2(n^2+1)},$$

由*Squeeze th.*知 $L_A=\dfrac{1}{2}$.

上页 下页 返回

例3.(2).$(A).L_A=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)$;

$(B).L_B=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{2}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$.

解 $(B).L_B=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{2}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+i^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{i}{n}}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln 2\ .$$

L_B 比L_A 小一些,这与我们的感觉一致 .

Add. Th.9.1′(拓广的Newton – Leibniz公式)

若$f(x)$在$[a,b]$上可积,$F(x)$在$[a,b]$上连续,

且除有限多个点外有$F'(x)=f(x)$,则有

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

(P192/Ex.3)

证明　取$[a,b]$的一个划分$T=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$,$a=x_0$,$x_n=b$,

使得使$F'(x)=f(x)$不成立的点成为划分T的部分分点,

在$\Delta_k=[x_{k-1},x_k]$上由Lagrange微分中值定理得

$$F(x_k)-F(x_{k-1})=F'(\xi_k)\Delta x_k=f(\xi_k)\Delta x_k,$$

则$F(b)-F(a)=\sum\limits_{k=1}^{n}[F(x_k)-F(x_{k-1})]=\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$,

$\because$ $f(x)$在$[a,b]$上可积,$\therefore$ $\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k=\int_a^b f(x)dx$.证毕

上页　下页　返回

例2.(2). 计算积分$\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx.$

解 在$(-\infty,+\infty)$上,$\arctan x$是$\frac{1}{1+x^2}$的一个原函数,

$$\therefore \int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx=[\arctan x]_{-1}^{1}=\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

$x\neq 0$时,$\left(-\arctan\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{1+x^2}$,但是$-\arctan\frac{1}{x}$在$x=0$时没有定义,

所以$-\arctan\frac{1}{x}$不是$\frac{1}{1+x^2}$在$[-1,1]$上的一个原函数.稍作改造,

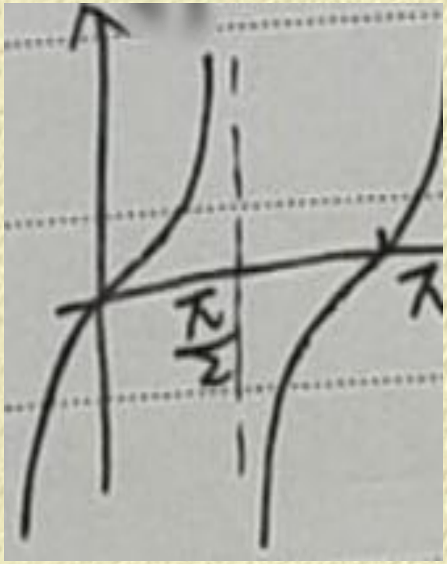
$$\Phi(x)=\begin{cases}-\arctan\frac{1}{x}, & x<0\\ \pi/2, & x=0\\ \pi-\arctan\frac{1}{x}, & x>0\end{cases}$$

,$\Phi(x)$在$[-1,1]$上连续,且$x\neq 0$时$\Phi'(x)=\frac{1}{1+x^2}$,

于是,$\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx=\Phi(1)-\Phi(-1)=\pi-\arctan 1-\left(-\arctan\frac{1}{(-1)}\right)=\frac{\pi}{2}.$

上页 下页 返回

例2.(3). $I=\int_0^{\pi}\frac{1}{2+\cos 2x}dx$.



解　由 $\int\frac{1}{2+\cos 2x}dx=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{3}}+C,$

据拓广的 Newton – Leibniz 公式,取

$$\Phi(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{3}}, 0\le x<\frac{\pi}{2}\\ \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\quad,\quad x=\frac{\pi}{2}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{\sqrt{3}},\frac{\pi}{2}<x\le\pi\end{cases},\ \Phi(x)\text{在}\left[0,\pi\right]\text{上连续},$$

$$\therefore I=\int_0^{\pi}\frac{1}{2+\cos 2x}dx=\Phi\left(\pi\right)-\Phi(0)=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\ .$$

上页 下页 返回

$3^{\#}$.函数的一致连续性

函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上*Riemann*可积是函数的一种整体性质, 在"区间$[a,b]$上连续函数*Riemann*可积"的证明过程中用到了"连续函数在闭区间 $[a,b]$上是一致连续的"的结论, 而函数的一致连续也是函数在区间上的一种整体性质. 前面我们介绍的函数的连续、可微是函数的一种局部性质,即所谓"点态性质".而函数在区间上的有界性、最值存在性以及凹凸性就等就是一种整体性质.

下面介绍函数的一致连续性.

我们知道,函数$f(x)$在区间I上连续,是指在I的每一点 x 处连续,即对于每一个$x \in I$,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(x,\varepsilon) > 0, \forall |\Delta x| < \delta,$$

$$s.t. \ |f(x+\Delta x) - f(x)| < \varepsilon,$$

其中$\delta = \delta(x,\varepsilon) > 0$与$x$ 有关.

Def. 设函数$f(x)$在区间I上有定义,若

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \forall x', x'' \in I, |x' - x''| < \delta,$$

$$s.t. \ |f(x') - f(x'')| < \varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$在区间 I上一致连续.

需要注意的是,函数$f(x)$在区间I上点态连续,对应$\delta=\delta\left(x,\varepsilon\right)$与$x$有关;

而函数$f(x)$在区间I上一致连续,

$\delta=\delta\left(\varepsilon\right)$与$x$无关.

这就是连续的局部性与整体性之区别,

这就象*every* 与*any* 之间的区别一样.

显然, 函数$f(x)$在区间I上一致连续

$$\Rightarrow \text{函数} f(x) \text{在区间} I \text{上点态连续.}$$

但是,反之末必然 .

例4.显然, $f(x)=ax+b$ 在$(-\infty,+\infty)$上(点态)连续,且$f(x)=ax+b$ 在$(-\infty,+\infty)$上一致连续.

解 (1).$a\neq 0$ 时,$\forall\varepsilon>0,\exists\ 0<\delta\leq\dfrac{\varepsilon}{|a|}$,

$\forall x',x''\in(-\infty,+\infty)$,只要$|x'-x''|<\delta$,

则有 $\left|f(x')-f(x'')\right|=\left|a(x'-x'')\right|<\varepsilon$,

(2).$a=0$ 时,结论易得.

$\therefore\ f(x)=ax+b$ 在$(-\infty,+\infty)$上一致连续.

例4.(2). $g(x)=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上(点态)连续,

但是, $g(x)=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不一致连续.

证明 $\exists\varepsilon=1,\forall\delta>0,$ 只要

$$x'=\pm\frac{1}{\delta},x''=\pm\left(\frac{1}{\delta}+\frac{\delta}{2}\right),$$ 虽然

$$|x'-x''|=\frac{\delta}{2}<\delta,\text{但}\left|(x')^2-(x'')^2\right|=1+\frac{\delta^2}{4}>1\ ,$$

所以 $g(x)=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不一致连续.

注记:一致连续的函数的乘积未必一致连续.

上页 下页 返回

例4.(3). $h(x)=\sqrt{x}$在$[1,+\infty)$上(点态)连续,

并且, $h(x)=\sqrt{x}$在$[1,+\infty)$上一致连续.

分析 $\forall \varepsilon>0$,要找到 $\delta>0$,使得

$\forall x', x'' \in [1,+\infty)$,当$|x'-x''|<\delta$时,就有

$$\left|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}\right|=\frac{|x'-x''|}{\sqrt{x'}+\sqrt{x''}}<|x'-x''|<\varepsilon\cdots$$

证明 $\forall \varepsilon>0, \exists\ 0<\delta\le\varepsilon$,

$\forall x', x'' \in [1,+\infty)$,只要$|x'-x''|<\delta$,就有

$$\left|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}\right|=\frac{|x'-x''|}{\sqrt{x'}+\sqrt{x''}}<|x'-x''|<\varepsilon,$$

$\therefore h(x)=\sqrt{x}$ 在$[1,+\infty)$上一致连续.

Cantor th.

若函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，那么函数$f(x)$在$[a,b]$上一致连续.

Cantor 定理指出了闭区间上连续函数所具有的一个重要性质,该定理也是判断一致连续性的一个常用的结论.

上页 下页 返回

Proposition 1. $\left(Lipschitz\right)$

若函数$f(x)$在区间 I上满足利普希兹$\left(Lipschitz\right)$条件，即存在常数 $L>0$，使得$\forall x'$、$x''\in I$，有

$$\left|f\left(x'\right)-f\left(x''\right)\right|\le L\left|x'-x''\right|,$$

则函数$f(x)$在区间 I上一致连续 .

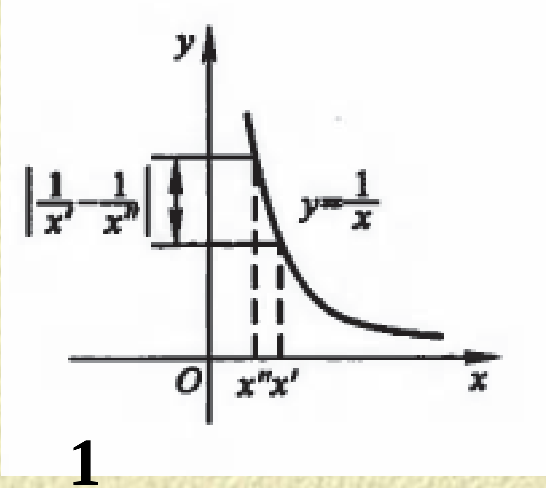
例如，由*Lagrange*微分中值定理知，$\forall x'$、$x''\in\left(-\infty,+\infty\right)$，有$\left|\sin x'-\sin x''\right|\le\left|x'-x''\right|$，

$$\left|\arctan x'-\arctan x''\right|\le\left|x'-x''\right| .$$

函数$\sin x,\arctan x$在$\left(-\infty,+\infty\right)$上满足*Lipschitz* 条件，因而一致连续 .

上页 下页 返回

函数$f(x)$在区间 I上一致连续,对应在函数的图象上反映的是,在所有的长度无穷小的自变量的区间上函数的图象是比较平缓的,不会太陡峭 .



例如,函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$在$(0,1)$上不一致连续,而在$[1,+\infty)$上一致连续 .因为在较接近0点的地方,函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$的图象十分陡峭 .而在$[1,+\infty)$上$f(x)=\dfrac{1}{x}$的图象就比较平缓,这是函数一致连续的几何表象 .$(Vol.1, P75)$

Prop. 2. 设函数$f(x)$在区间 $[a,+\infty)$上点点连续，且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在,则函数$f(x)$在区间$[a,+\infty)$上一致连续．

证明在此从略．

前一页的例子就是此定理的一个特例．

再此强调：

函数$f(x)$在区间I上(点点)连续 $\Leftrightarrow$ *every*

函数$f(x)$在区间I上一致连续 $\Leftrightarrow$ *any*.