2022~2023 学年第 1 学期 2022 级数学分析 I-*A* 卷解答与评分标准 2023-02

一. 填空题或选择题:（每空 3 分，计 30 分）

1. $\arcsin\left(\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)=$ ______________.

2. 若 $x\to 0$ 时, $\ln\left(e^x+x^2\right)$ 与 x^n 为等价无穷小量，则 $n=$ __________ .

3. 设偶函数 $f(x)=\sin\left(x^2\right)$，那么 $f^{(2023)}(0)=$ __________.

4. $d\left(\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\right)=\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}dx$.

5. 在区间__________________内函数 $y=3x^2-x^3$ 为凸函数 .(区间开闭不论)

6. 函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x\left(x^2-4\right)}$ 在区间__________内有界.

$(A).(-2,-1)$; $(B).(0,1)$; $(C).(1,2)$; $(D).(2,3)$.

7. "*Google*" 一词源于 "*Googol*","*Googol*" 指的是数 10^{100}.今记 $10^{100}=Googol$, $10^{100}+1=Googoli$.那么,数 $Googol^{Googoli}$ 与 $Googoli^{Googol}$ 的大小关系为__________ .

(A). $Googol^{Googoli}<Googoli^{Googol}$; (B). $Googol^{Googoli}=Googoli^{Googol}$;

(C). $Googol^{Googoli}>Googoli^{Googol}$; (D). 因两数数值巨大而无法判定 .

8. 下列论断中正确的是________________.

(A). 若曲线 $y=f(x)$ 在点 $\left(a,f(a)\right)$ 处有唯一的切线，则函数 $f(x)$ 在 a 点处可导 .

(B). $(-\infty,+\infty)$ 上连续的周期函数的原函数仍是周期函数 .

(C). 在区间 $[a,b]$ 上 *Riemann* 可积的函数必定有原函数 .

(D). 函数 $\varphi(x)=\begin{cases}-1\ ,x\le 0\\ 1\ ,x>0\end{cases}$ 在区间 $[-1,1]$ 上 *Riemann* 可积 .

9. 确界原理:____ .

10. $x\to+\infty$ 情形的归结原则: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 的充要条件为______________________________.

1. $-\dfrac{\pi}{3}$; 2. 1 ; 3. 0 ; 4. $\arctan e^x+C$; 5. $(-\infty,1)$; 6. B ; 7. C ;

8. D ; 9. 确界原理: 非空有上(下)界的实数集必有上(下)确界.

10. $x\to+\infty$ 情形的归结原则: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 的充要条件为 $\forall\{x_n\},\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$,有 $\lim\limits_{n\to\infty}f\left(x_n\right)=A.$

二．解答题．(每题 10 分，计 70 分)

11. 设$f(x)=\ln\sqrt{1+x^2}$，试讨论函数的单调性与极值情况，给出曲线$y=f(x)$的拐点．

解 $f(x)=\ln\sqrt{1+x^2}=\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right),\ f'(x)=\frac{x}{1+x^2},\ f''(x)=\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$，

$\therefore x\in(-\infty,0)$时$f(x)$单调递减，$x\in(0,+\infty)$时$f(x)$单调递增，极值$\min\limits_{(-\infty,+\infty)} f(x)=f(0)=0.$

$x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$时$f''(x)<0$，$f(x)$为凹函数，$x\in(-1,1)$时$f''(x)>0$，$f(x)$为凸函数，

故点$\left(-1,\ln\sqrt{2}\right),\left(1,\ln\sqrt{2}\right)$为曲线的拐点．　……………………………………10分

12. 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有定义，$\forall x,y\in(-\infty,+\infty)$有$f(x+y)=f(x)+3x^2y+3xy^2+f(y)$，已知$f(x)$在$x=0$处可导且$f'(0)=1$．试证明函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可导，求出$f'(x)$，并由此确定$f(x)$．

解 $\because \forall x,y\in(-\infty,+\infty)$有$f(x+y)=f(x)+3x^2y+3xy^2+f(y)$，$\therefore f(0)=0.$

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+3x^2h+3xh^2+f(h)-f(x)}{h}=3x^2+\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$$

$=3x^2+f'(0)=3x^2+1$，即$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内点点可导，且$f'(x)=3x^2+1.$

于是，$f(x)=x^3+x+C$，由$f(0)=0$．得$f(x)=x^3+x$．……………………………………10分

13. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$．

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$：$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)}{\frac{1}{x}}$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\arctan x}\cdot\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\arctan x}\cdot\frac{x^2}{1+x^2}\right)=-\frac{2}{\pi}$$，$\therefore$ 原式$=e^{-\frac{2}{\pi}}$．…………………10分

或者，$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{2}{\pi}\arctan x-1\right)^{\frac{1}{\frac{2}{\pi}\arctan x-1}}\right]^{x\left(\frac{2}{\pi}\arctan x-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{\pi}x\left(\arctan x-\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{\pi}x\left(-\arctan\frac{1}{x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{\pi}x\left(-\frac{1}{x}\right)}=e^{-\frac{2}{\pi}}.$$　$\left(Add.\ x\neq 0\text{时有}\arctan x+\arctan\frac{1}{x}\equiv\frac{\pi}{2}\right)$

14. 计算不定积分 (1). $\displaystyle\int\frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$；　　(2). $\displaystyle\int x\frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$．

解 (1). $$\int\frac{\sin x}{\cos^3 x}dx=\int\tan x\sec^2 x dx=\int\sec x\cdot\tan x\sec x dx=\int\sec x d(\sec x)=\frac{1}{2}\sec^2 x+C.$$

(2). $$\int x\frac{\sin x}{\cos^3 x}dx=\int x\left(\frac{1}{2}\sec^2 x\right)'dx=\frac{1}{2}x\sec^2 x-\frac{1}{2}\int\sec^2 x dx=\frac{1}{2}x\sec^2 x-\frac{1}{2}\tan x+C$$ ………10分

15. 计算积分$\int_0^1\left(\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}+\sqrt{4-x^2}\right)dx$.

解 $\int\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}d\left(4-x^2\right)=-\sqrt{4-x^2}+C_1$,$\int_0^1\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}=\left(-\sqrt{4-x^2}\right)\Big|_0^1=2-\sqrt{3}.$

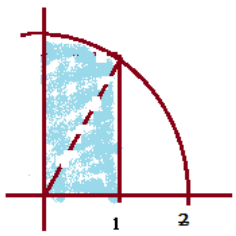
令$x=a\sin t,dx=a\cos tdt,t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\int|a\cos t|\cdot a\cos tdt=a^2\int\cos^2 tdt$

$=\frac{1}{2}a^2\int(1+\cos 2t)dt=\frac{1}{2}a^2\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C=\frac{1}{2}a^2t+\frac{1}{2}a^2\sin t\cos t+C_2$

$=\frac{1}{2}a^2\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C_2$,$\Rightarrow\int_0^1\sqrt{4-x^2}dx=\left(2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}\right)\Big|_0^1=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}.$

$\therefore\int_0^1\left(\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}+\sqrt{4-x^2}\right)dx=2-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}=2-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}$.……………………………10分

注意:利用积分的几何意义知$\int_0^1\sqrt{4-x^2}dx$ 表示如图阴影部分的面积,其结果是显然的.



16. 设$\alpha\ge 2$,$a_n=\frac{1}{1^\alpha}+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}$,$b_n=\frac{\sin 1}{1^\alpha}+\frac{\sin 2}{2^\alpha}+\frac{\sin 3}{3^\alpha}+\cdots+\frac{\sin n}{n^\alpha}$,

(1).试证明数列$\{a_n\}$收敛 ;(2).试运用 Cauchy 收敛准则证明数列$\{b_n\}$收敛 .

解 (1).$\alpha\ge 2$ 时,$a_n=\frac{1}{1^\alpha}+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}\le\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\le 1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}$

$\le 1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=2-\frac{1}{n}<2$,又显然$\{a_n\}$单调递增,由单调有界收敛定理知$\{a_n\}$收敛 .

(2).*Cauchy criterion*:$\{a_n\}$收敛$\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N>0,\forall n>N,\forall p\in\mathbb{N}^*,s.t.\left|a_n-a_{n+p}\right|<\varepsilon$,

即$\left|a_n-a_{n+p}\right|=\frac{1}{(n+1)^\alpha}+\frac{1}{(n+2)^\alpha}+\frac{1}{(n+3)^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^\alpha}<\varepsilon$.

于是 ,对于上述$\varepsilon,N,n>N,p\in\mathbb{N}^*$,有$\left|b_n-b_{n+p}\right|=\left|\frac{\sin(n+1)}{(n+1)^\alpha}+\frac{\sin(n+2)}{(n+2)^\alpha}+\frac{\sin(n+3)}{(n+3)^\alpha}+\cdots+\frac{\sin(n+p)}{(n+p)^\alpha}\right|$

$\le\frac{1}{(n+1)^\alpha}+\frac{1}{(n+2)^\alpha}+\frac{1}{(n+3)^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^\alpha}<\varepsilon$,$\therefore$由*Cauchy criterion* 知$\{b_n\}$收敛.………………10分

17. (1). 求证：$x \ge 0$ 时有 $x \ge \ln(1+x)$，当且仅当 $x=0$ 时“$=$”成立．

(2). 设 $\{x_n\}: x_1>0,\ x_{n+1}=\ln(1+x_n), n\in\mathbb{N}^*$. (i). 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求出 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$；

(ii). 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{x_{n+1}}-\dfrac{1}{x_n}\right)$.

(1). 证明 设 $\varphi(x)=x-\ln(1+x)$，$\varphi(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，

$\varphi'(x)=1-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{x}{1+x}$，$x>0$ 时 $\varphi'(x)>0$，因此在 $[0,+\infty)$ 上 $\varphi(x)$ 严格单调增加，

$\therefore x\ge 0$ 时有 $\varphi(x)\ge\varphi(0)=0$，即 $x\ge\ln(1+x)$，当且仅当 $x=0$ 时“$=$”成立．

(2).(i). 设 $\{x_n\}: x_1>0,\ x_{n+1}=\ln(1+x_n), n\in\mathbb{N}^*$. $\therefore \forall n\in\mathbb{N}^*, 0<x_{n+1}=\ln(1+x_n)<x_n$，

$\therefore \{x_n\}$ 单调递减且有下界，因此 $\{x_n\}$ 收敛，记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，由 $x_{n+1}=\ln(1+x_n)$ 知 $A=\ln(1+A)$，

由(1)所证之结论知 $A=0$．

(ii). $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{x_{n+1}}-\dfrac{1}{x_n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{\ln(1+x_n)}-\dfrac{1}{x_n}\right]=\lim\limits_{u\to 0}\left[\dfrac{1}{\ln(1+u)}-\dfrac{1}{u}\right]=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u-\ln(1+u)}{u\ln(1+u)}$

$\overset{\frac{0}{0}}{=\!=\!=}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u-\ln(1+u)}{u^2}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{1-\frac{1}{1+u}}{2u}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u}{2u(1+u)}=\dfrac{1}{2}$.……………………………………10分