微 分

差 分 → 微 分

difference *differential*

上页 下页 返回

1.问题的提出

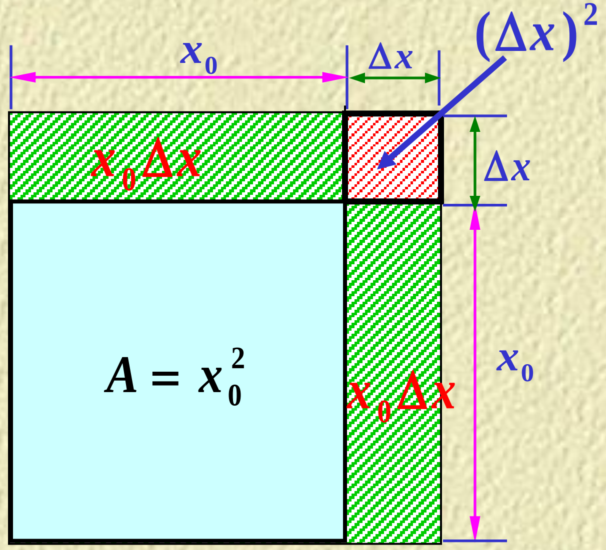
实例: 正方形广场延展扩大后面积的改变量.

设边长由x_0变到$x_0+\Delta x$,

$\because$ 正方形面积 $A=x_0^2$,

$$\therefore \Delta A=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2$$

$$=\underbrace{2x_0\cdot\Delta x}_{(1)}+\underbrace{(\Delta x)^2}_{(2)}.$$



(1).Δx的线性函数,且为ΔA的主要部分;

(2).Δx的高次幂部分,当$|\Delta x|$很小时可忽略.

上页 下页 返回

2. 微分的定义

定义：设函数 $y = f(x)$在某区间内有定义，

x_0及 $x_0 + \Delta x$在这区间内，如果

$$\Delta y = f\left(x_0 + \Delta x\right) - f(x_0) = A \cdot \Delta x + o\left(\Delta x\right)$$

成立(其中A是与Δx无关的常数)，则称函数

$y = f(x)$在点x_0可微，并且称$A \cdot \Delta x$为函数

$y = f(x)$在点x_0相应于自变量增量Δx的微分，

记作$dy\Big|_{x=x_0}$或$df(x_0)$，即$dy\Big|_{x=x_0} = A \cdot \Delta x.$

微分dy叫做函数增量Δy的线性主部.

(微分的实质)

上页 下页 返回

由定义可知:

(1).dy是自变量的改变量Δx的比例函数.

(2).$\Delta x \to 0$时,$\Delta y - dy = o(\Delta x)$是$\Delta x$的高阶无穷小.一般而言,$\Delta y \neq dy$.

(3).当$A \neq 0$时,dy与Δy是等价无穷小,

$$\because \frac{\Delta y}{dy} = 1 + \frac{o(\Delta x)}{A\Delta x} \to 1 \ (\Delta x \to 0).$$

(4).A是与Δx无关的常数,但与$f(x)$和x_0有关.

3.可微的条件

定理：函数 $f(x)$在点 x_0可微的充要条件是函数 $f(x)$在点 x_0处可导，且$A=f'(x_0)$.

证明 (1).必要性 $\because f(x)$在点x_0可微,

$$\therefore \Delta y = A\Delta x + o(\Delta x), \therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x},$$

则 $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A,$$

即函数 $f(x)$在点x_0可导，且$A=f'(x_0)$.

(2).充分性 $\because$函数$f(x)$在点x_0可导,

$$\therefore \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0),\text{即} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha,$$

$$\therefore \Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \cdot (\Delta x), \alpha \to 0 \ (\Delta x \to 0),$$

$$\therefore \Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x),$$

$\because$函数 $f(x)$在点x_0可微,且$f'(x_0) = A.$

$\therefore$ 可导$\Leftrightarrow$可微,$A = f'(x_0).$

函数$y = f(x)$在任意点x的微分,称为函数的微分,记作dy或$df(x)$,即$dy = f'(x)\Delta x$.

设x为自变量,

考察函数$y = x$的增量Δy,

$\Delta y = (x + \Delta x) - x = \Delta x$,由于$y'_x = 1$,

$\therefore dy = y'_x \Delta x = \Delta x, y = x \Rightarrow dy = dx$,

$\therefore$自变量x的微分就是 $dx = \Delta x$.

$$dy = f'(x)\Delta x = f'(x)dx \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x).$$

自变量 x的增量Δx等于自变量的微分dx，即$dx=\Delta x$.

$$\therefore dy = f'(x)\Delta x = f'(x)dx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

即函数的微分dy与自变量的微分dx之商等于该函数的导数.

导数也叫"微商".

函数的微分dy与自变量的微分dx之商等于该函数的导数. 导数也叫"微商".

$$\therefore dy = f'(x)dx \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

可以注意到,

(1).$dx = \Delta x \to 0 \therefore dy = f'(x)dx$是无穷小;

(2).复合函数求导数的链式公式用导数就是微商来理解就十分自然了,如果

$y = f(u), u = \varphi(x)$都可导,那么

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = y'_u u'_x = f'(u)\varphi'(x);$$

(3).如果直接函数$y = f(x)$可导,严格单调且导数不为零,那么

$$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dy} = 1 \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^{-1};$$

(4).在参数方程$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$中,设函数

$x = \varphi(t), y = \psi(t)$都可导,且$\varphi'(t) \neq 0$,

且$x = \varphi(t)$严格单调,有反函数$t = \varphi^{-1}(x)$,

则$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y_t' dt}{x_t' dt} = \dfrac{y_t'}{x_t'}$.

上页 下页 返回

4.微分的求法

$$dy = f'(x)dx$$

给出函数的导数乘上自变量的微分.

如$d\left(a^x\right) = a^x \ln a dx$,

$$d\left(\arctan x\right) = \frac{1}{1+x^2}dx,$$

$$d\left(uv\right) = vdu + udv, d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2} \cdots$$

上页 下页 返回

5. (一阶)微分形式的不变性

设函数 $y = f(x)$ 有导数 $f'(x)$,

(1).若x是自变量时,$\underline{dy = f'(x)dx}$;

(2).若x是中间变量,是另一变量t的可微函数 $x = \varphi(t)$, 则

$$dy = y'_t dt = f'(x)\varphi'(t)dt,$$

$\because \varphi'(t)dt = dx,\quad \therefore \underline{dy = f'(x)dx}.$

结论:无论 x是自变量还是中间变量,函数$y = f(x)$的微分形式总是

$$\underline{dy = f'(x)dx.}$$

上页 下页 返回

例1.设函数$y=f(x)$在点x处有

$f(x+h)-f(x)=3x^2h+ah^2+bh^3.\left(a,b为常数\right).$

试问函数$f(x)$在点x处是否可微?若函数可微,

求dy.

解 $\because \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{ah^2+bh^3}{h}=0,$

$\therefore h\to 0$时 $ah^2+bh^3=o\left(h\right),$

由微分的定义知:函数$f(x)$在x处可微,

$$dy=3x^2\Delta x=3x^2dx.$$

$$f(x+h)-f(x)=3x^2h+ah^2+bh^3,$$

$$\because \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+ah^2+bh^3}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(3x^2+\frac{ah^2+bh^3}{h}\right)=3x^2=f'(x),$$

可知:函数$f(x)$在x处可导,由定理知:

函数可导$\Leftrightarrow$函数可微,且$dy=\frac{dy}{dx}\cdot dx.$

$$\therefore \quad dy=3x^2\Delta x=3x^2dx.$$

例2.(1). $y=\ln(1-2x)$, 求dy；

(2). $y=\ln(1+e^{x})$, 求dy.

解 (1). $y=\ln(1-2x)$, $dy=y'_x dx$

$$=\frac{1}{1-2x}d(1-2x)=\frac{-2}{1-2x}dx;$$

(2). $y=\ln(1+e^{x})$, $dy=y'_x dx$

$$=\frac{1}{1+e^{x}}d(1+e^{x})=\frac{e^{x}}{1+e^{x}}dx$$

返回

例3.(1).$d\left(\qquad\right)=\dfrac{1}{1+x}dx;$

(2).$d\left(\qquad\right)=\dfrac{1}{1-2x}dx;$

(3). $d\left(\qquad\right)=\dfrac{1}{1+e^{x}}dx.$

解 (1). $\because dy=y'_x dx,$

$$\therefore \frac{1}{1+x}dx=\frac{1}{1+x}d\left(1+x\right)=\frac{1}{w}dw$$

$$=d\left(\ln|w|+C\right)=d\left(\ln|1+x|+C\right);$$

返回

例3.(2).$d\left(\qquad \right) = \dfrac{1}{1-2x}dx$;

解(2).$\dfrac{1}{1-2x}dx = -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1-2x}d\left(1-2x\right)$

$= -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{v}dv = -\dfrac{1}{2}d\left(\ln|v|\right)$

$= d\left(-\dfrac{1}{2}\ln|v|\right) = d\left(-\dfrac{1}{2}\ln|1-2x| + C\right)$

上页 下页 返回

例3.(3). $d(\qquad) = \dfrac{1}{1+e^{x}}dx.$

解　倘若由 $\dfrac{1}{x}dx = d\left(\ln|x| + C\right)$ 而想象

$$d\left[\ln\left(1+e^{x}\right)+C\right] = \frac{1}{1+e^{x}}dx,$$

稍加验算就知错啦!

那到底如何求解呢?

上页　下页　返回

例3.(3). $d(\qquad) = \dfrac{1}{1+e^x}dx.$

解 $\dfrac{1}{1+e^x}dx = \dfrac{1+e^x-e^x}{1+e^x}dx$

$$= dx - \frac{1}{1+e^x}\left(1+e^x\right)' dx$$

$$= dx - d\ln\left(1+e^x\right) = d\left[x - \ln\left(1+e^x\right)\right]$$

$$= d\left[x - \ln\left(1+e^x\right) + C\right].$$

6.微分的应用—函数值的近似计算

1.若$y = f(x)$在点x_0处的导数$f'(x_0) \neq 0$,

且 $|\Delta x|$很小时,

$$\Delta y\Big|_{x=x_0} \approx dy\Big|_{x=x_0} = f'(x_0)\cdot \Delta x$$

2.求$f(x)$在点$x = x_0$附近的近似值;

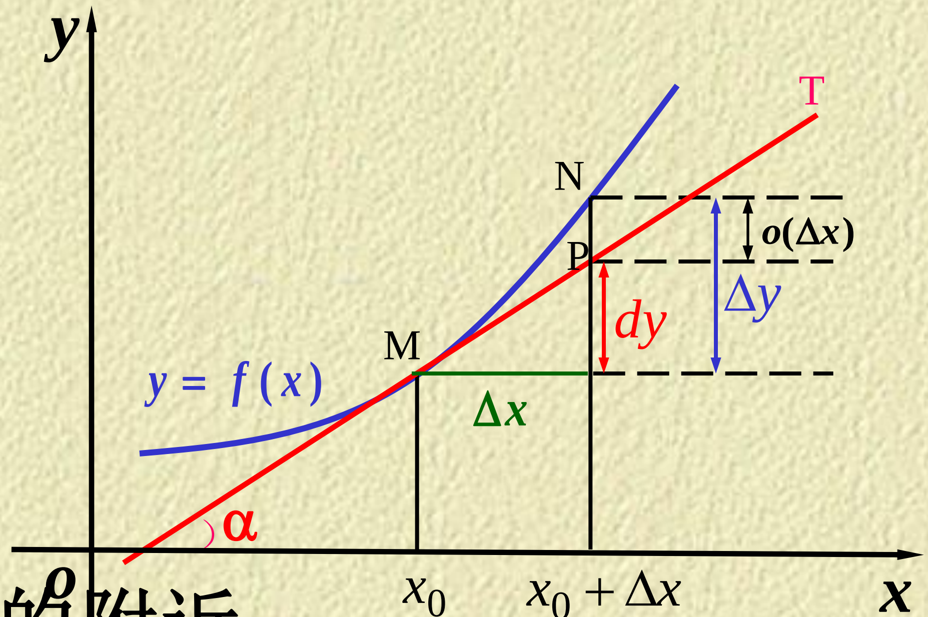
$\left(|\Delta x|\text{很小时}\right)$

$$\Delta y = f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right) \approx f'\left(x_0\right)\cdot \Delta x$$

$$f\left(x_0 + \Delta x\right) \approx f\left(x_0\right) + f'\left(x_0\right)\cdot \Delta x$$

微分在函数值的近似计算中的应用本质上就是在点(x_0, y_0)的邻近**用切线段替代曲线弧**——以直代曲。

当Δy是曲线的纵坐标增量时，dy就是切线纵坐标对应的增量.



当$|\Delta x|$很小时，在点M的附近，

切线段MP可近似代替曲线段MN.

曲线方程 $y = f(x)$

切线方程 $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

微分在函数值的近似计算中的应用本质上就是在点(x_0, y_0)的邻近用切线段替代曲线弧——以直代曲。

曲线方程 $y = f(x)$

切线方程 $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

函数值的近似计算中使用微分——以直代曲——其精确度是不能满足一般需求的,以后我们有更好的方法——以曲代曲(见Chap03,导数的应用,泰勒定理).

例4.计算$\cos 60^o 30'$的近似值.

解　取$f(x)=\cos x,\ f'(x)=-\sin x$,

设x是弧度制的,取 $x_0=\dfrac{\pi}{3}, \Delta x=\dfrac{\pi}{360}$,

$$\therefore\ f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2},\ f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore \cos 60^o 30'=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{360}\right)$$

$$\approx \cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\pi}{360}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{360}\approx 0.4924$$

例4.(2).计算下列各数的近似值.

(1). $\sqrt[3]{998.5}$; (2). $e^{-0.03}$.

解(1).取$f(x)=\sqrt[3]{x}, x_0=1, \Delta x=-0.0015.$

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x.$$

$$\sqrt[3]{998.5}=\sqrt[3]{1000-1.5}$$

$$=\sqrt[3]{1000\left(1-\frac{1.5}{1000}\right)}=10\cdot\sqrt[3]{1-0.0015}$$

$$\approx 10\left(1-\frac{1}{3}\times 0.0015\right)=9.995.$$

常用近似计算公式：

若$|x| \ll 1$,即$|x|$足够小,则

(1). $\sqrt[n]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{n}x$;

(2). x为弧度,

$\sin x \approx x, \tan x \approx x$;

(3). $e^x \approx 1 + x$;

(4). $\ln(1+x) \approx x$.

上页 下页 返回

小结

★微分学所要解决的两类问题:

$$\begin{cases} \text{函数的变化率问题} \longrightarrow \text{导数的概念} \\ \text{函数的增量问题} \longrightarrow \text{微分的概念} \end{cases}$$

求导数与微分的方法,叫做微分法.

研究微分法与导数理论及其应用的科学,叫做微分学.

★导数与微分的联系: 可导 $\Leftrightarrow$ 可微.

可导 $\Leftrightarrow$ 可微

导数 $\neq$ 微分

导数=微分之商

上页 下页 返回

在$[a,b]$上$f(x)\geq 0$,则由$y=0$(即x轴),$x=a$,

$y=f(x)$及$x=x\,(a\leq x\leq b)$所围成的图形

——曲边梯形的面积为$A(x)$.

设 $x, x+\Delta x\in[a,b]$, $\Delta x=dx\to 0$,则

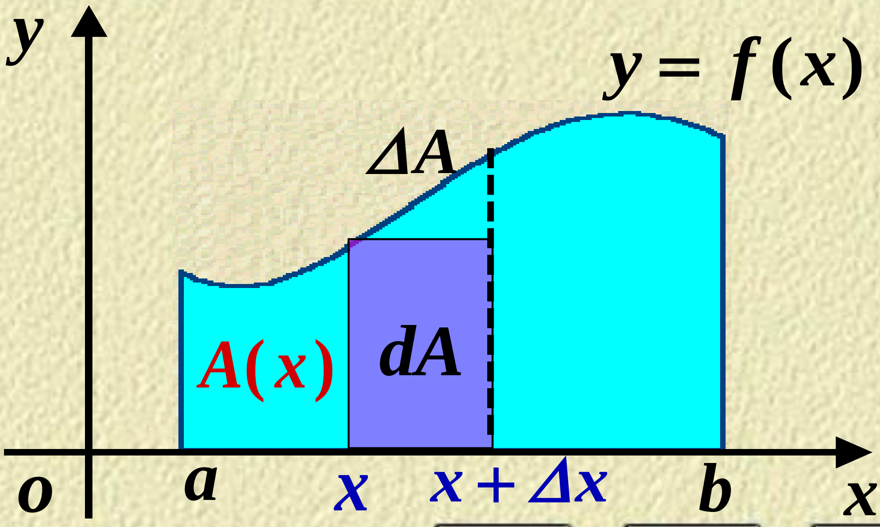
$$\Delta A=A(x+\Delta x)-A(x),$$

而 $dA=f(x)\Delta x$

$\quad\;\; =f(x)dx,$

若$\Delta A-dA=o(dx)$,

则$A(b)=\sum dA$.



上页 下页 返回

思考：

圆的周长公式 $l(r)=2\pi r$,

圆的面积公式 $A(r)=\pi r^2$,

球表面积的公式 $S(r)=4\pi r^2$,

球的体积公式 $V(r)=\dfrac{4}{3}\pi r^3$,

通过对圆的面积,球的体积的导数与微分的计算,联想到圆周长与球表面积的公式,你有什么感觉吗?

圆的周长公式 $l(r)=2\pi r$,

圆的面积公式 $A(r)=\pi r^2$,

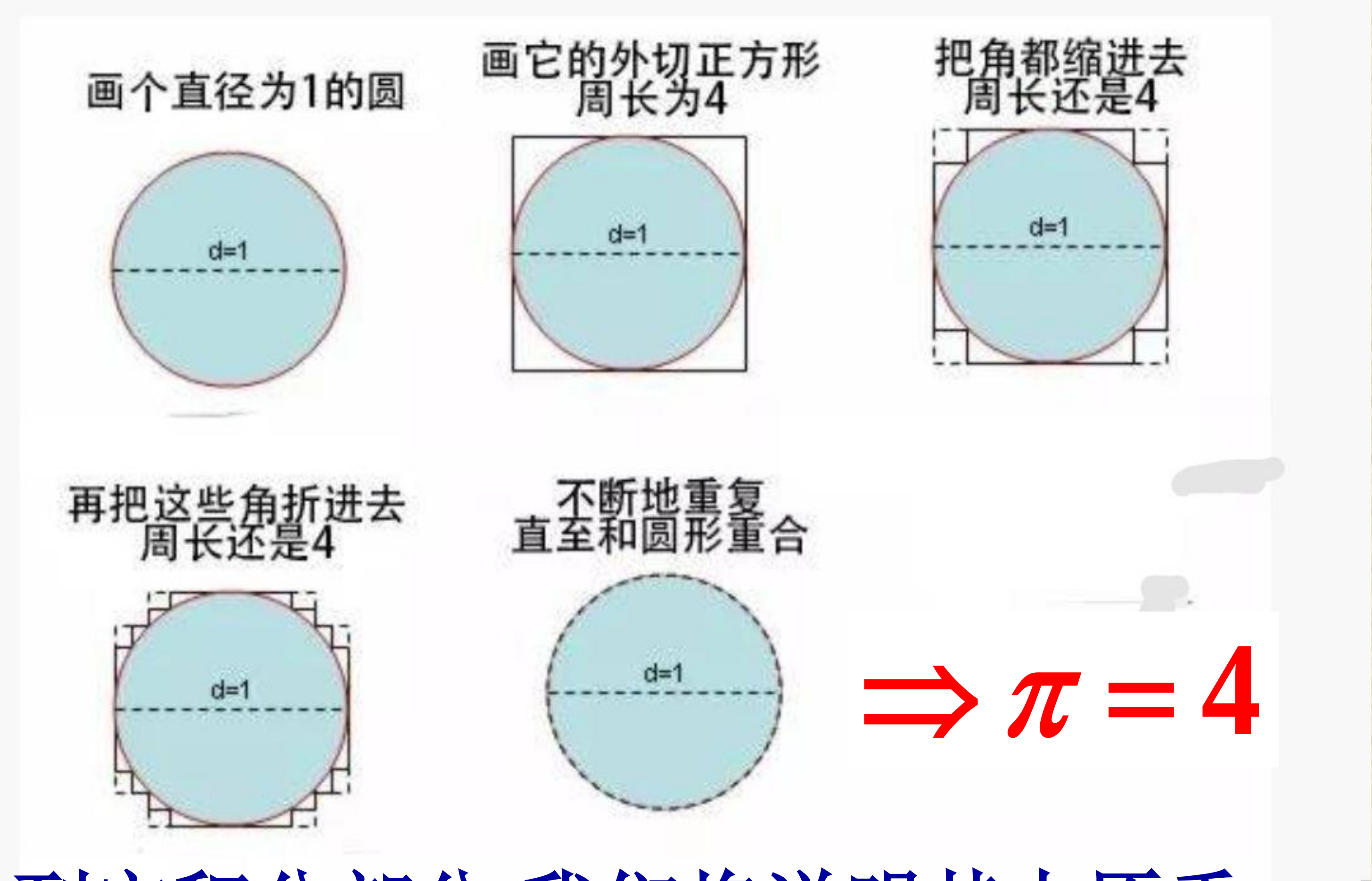
$\Delta A=A(r+dr)-A(r)=2\pi r dr+\pi(dr)^2$,

$dA=2\pi r dr$,

$\Delta A-dA=\pi(dr)^2=o(dr), dr\to 0.$

圆的面积$A=\sum dA=\sum 2\pi r dr$.

Q. 网上常能见到“$\pi = 4$”的神奇证明，常常让人不明觉厉.你说这怎么解释?



$\Rightarrow \pi = 4$

A. 到定积分部分,我们将说明其中原委.

上页 下页 返回