5-01 导数的概念

一. 问题的提出
二. 导数的定义
三. 导数的几何意义与物理意义
四. 可导与连续的关系
五. 函数的极值与Fermat引理
小结

一.问题的提出

1.变速直线运动物体的瞬时速度：

变速直线运动物体的位移为$s = s(t)$.

从时刻t_0到时刻t,物体位移的增量

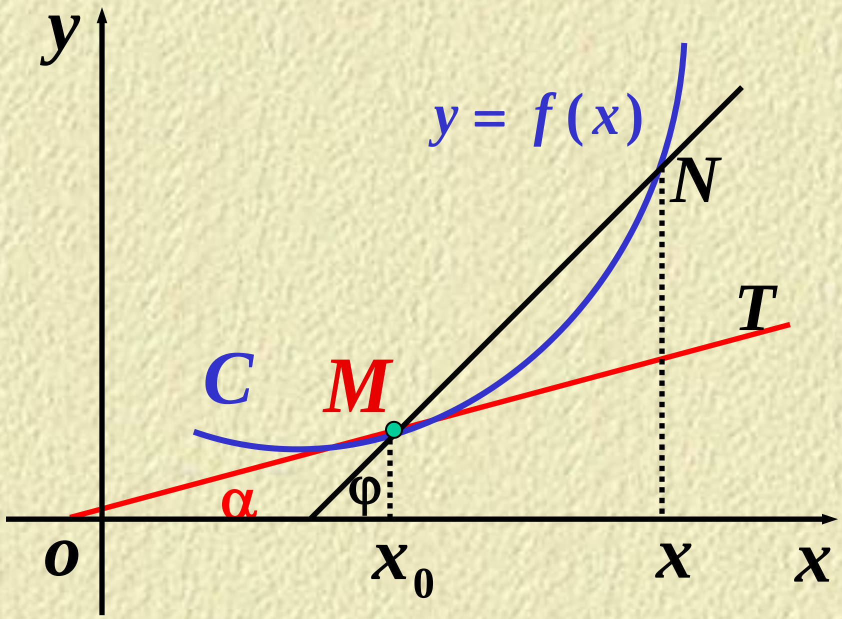
$\Delta s = s(t) - s(t_0)$.

物体的瞬时速度$v = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$.

上页 下页 返回

2.切线问题

割线的极限位置——切线位置



如图，如果割线MN绕点M旋转而趋向极限位置MT,直线MT就称为曲线C在点M处的切线.

$$|MN| \to 0, \angle NMT \to 0.$$

设$M(x_0, y_0), N(x, y)$,

割线MN的斜率为

$$\tan\varphi = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

$N \to M, x \to x_0$,切线MT的斜率为

$$k = \tan\alpha = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

二.导数的定义

定义1.设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义,当自变量 x 在 x_0 处取得增量 Δx $\left(点 x_0+\Delta x 仍在该邻域内\right)$时,相应地函数取得增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在,则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导,并称极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数,记为 $y'\Big|_{x=x_0}=f'(x_0)$.

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}=f'(x_0)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

****单侧导数:**

1.左导数:

$$f'_{-}(x_0)=\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x};$$

2.右导数:

$$f'_{+}(x_0)=\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

3.命题 函数$f(x)$在点x_0处可导$\Leftrightarrow$函数$f(x)$在点x_0处的左导数$f'_{-}(x_0)$与右导数$f'_{+}(x_0)$都存在且相等.

若对于任一 $x \in I$,都对应着 $f(x)$ 的一个确定的导数值,这个函数叫做原来函数 $f(x)$ 的导函数.记作 y', $f'(x)$, $\dfrac{dy}{dx}$ 或 $\dot{y}$.

Newton称之为"流数"

即 $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

或 $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

注意: $f'(x_0) = f'(x)\Big|_{x=x_0}$

例1.如果$f'(x_0)$存在,那么$A=?$

$$(1).\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}=A;$$

$$(2).\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0-h)}{h}=A.$$

解(1).$A=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x_0+(-\Delta x)\right)-f(x_0)}{-\Delta x}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(x_0+t\right)-f(x_0)}{t}=f'(x_0).$$

上页 下页 返回

例1.(2). $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+2h)-f(x_0-h)}{h}=A=?$

解 $\because f'(x_0)$存在，$\therefore f(x_0)$存在，

$$A=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}+\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[2\frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{2h}+\frac{f\big(x_0+(-h)\big)-f(x_0)}{-h}\right]$$

$$=3f'(x_0).$$

上页 下页 返回

需要注意,下面的做法是错误的.

$$A=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0-h)}{h}$$

$$=3\lim_{h\to 0}\frac{f\big((x_0-h)+3h\big)-f(x_0-h)}{3h}$$

$$=3\lim_{h\to 0}f'(x_0-h)=3f'(x_0)\ .$$

$\because\ x_0-h$不是一个定点,红色这一步违反了函数极限的运算法则.

上页 下页 返回

但若$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+2h)-f(x_0-h)}{h}=A$

存在, $f'(x_0)$也未必存在,比如:

$f(x)=\begin{cases}1, x\neq x_0\\ 0, x=x_0\end{cases}$在点处不连续,

当然不可导,但是,$h\neq 0$时,

$f(x_0+2h)-f(x_0-h)=1-1\equiv 0.$

例2.设函数 $f(x)=\sin x$,求$(\sin x)'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}$.

解 $$(\sin x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right]=\cos x.$$即

$(\sin x)'=\cos x.\ \therefore(\sin x)'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$

类似地,$(\cos x)'=-\sin x.$

例3.(1).求函数$a^x\left(a>0,a\neq 1\right)$的导数.

解 $$\left(a^x\right)'=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}$$

$$=a^x\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$$

$$=a^x\lim_{h\to 0}\frac{e^{h\ln a}-1}{h}=a^x\ln a,$$

使用等价无穷小量：当$x\to 0$时，$e^x-1\sim x$

即$\left(a^x\right)'=a^x\ln a$, $\left(e^x\right)'=e^x$.

(2).求函数$\log_a x(a>0,a\neq 1)$的导数.

解 $(\ln x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}$

$$=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$$

$$=\frac{1}{x}\ln e=\frac{1}{x},(\log_a x)'=\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)'=\frac{1}{x\ln a}.$$

(3).求幂函数$x^{\mu}\left(\mu \in \mathbb{R}\right)$的导数,

$$\mu \in \mathbb{R}, x > 0, \left(x^{\mu}\right)' = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{\mu} - x^{\mu}}{h}$$

$$= x^{\mu}\lim_{h\to 0}\frac{\left(1+h/x\right)^{\mu} - 1}{h}$$

$$= x^{\mu}\lim_{h\to 0}\frac{\mu\dfrac{h}{x}}{h} = \mu x^{\mu-1},$$

使用等价无穷小量:当$x \to 0$时,
$(1+x)^{\mu} - 1 \sim \mu x$

即$\left(x^{\mu}\right)' = \mu x^{\mu-1}\left(\mu \in \mathbb{R}\right)$.

特别提醒：

(1).$a>0, a\neq 1$,

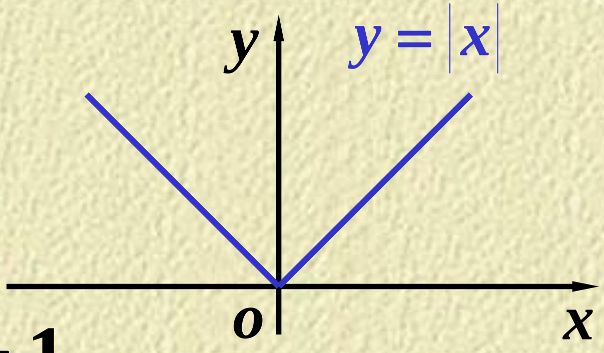
$$\left(a^{x}\right)'=a^{x}\ln a\ ;$$

(2).$\mu\in\mathbb{R}, x>0$,

$$\left(x^{\mu}\right)'=\mu x^{\mu-1}.$$

例4.讨论函数 $f(x)=|x|$ 在$x=0$处的可导性.

解 $\because \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\dfrac{|h|}{h}$,



$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=1,$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1.$$

即 $f'_+(0)\neq f'_-(0)$,

$\therefore$函数$y=f(x)$在$x=0$点不可导.

Q：$f(x)=x|x|$ 在$x=0$处的可导性?

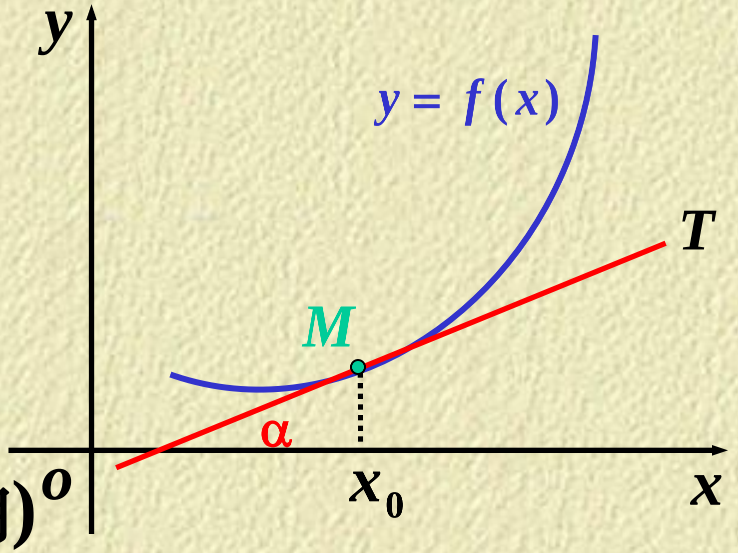
上页 下页 返回

三.导数的几何意义、物理意义与经济意义

1.几何意义

$f'(x_0)$表示曲线$y=f(x)$在点$M(x_0, f(x_0))$处的切线的斜率,即

$f'(x_0)=\tan\alpha$, (α为倾角)



切线方程为 $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$.

法线方程为 $y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$.

上页 下页 返回

★由导数的几何意义, 如果函数 $y=f(x)$ 是单调增加的，那么函数的图象—曲线 $y=f(x)$ 就是单调上升的，又如果函数 $y=f(x)$ 是可导的，那么曲线 $y=f(x)$每点的切线都是上倾的,斜率都是大于等于零的。

当然，如果已知曲线 $y=f(x)$在某区间内每点的切线斜率都是大于等于零的,试问：可导函数 $y=f(x)$ 一定是单调增加的吗?

... !这一猜想将在后面予以证实.

命题.设函数 $f(x)$在(a,b)内处处可导,且函数单调增加. 证明:在(a,b)内有$f'(x)\geq 0$.

证明: $\because f(x)$在(a,b)内单调增加,

$$\therefore \forall x, x+h \in (a,b), \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0,$$

又$\because$函数 $f(x)$在(a,b)内处处可导,

$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)\text{存在},$$

由极限保号性推论知$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$,

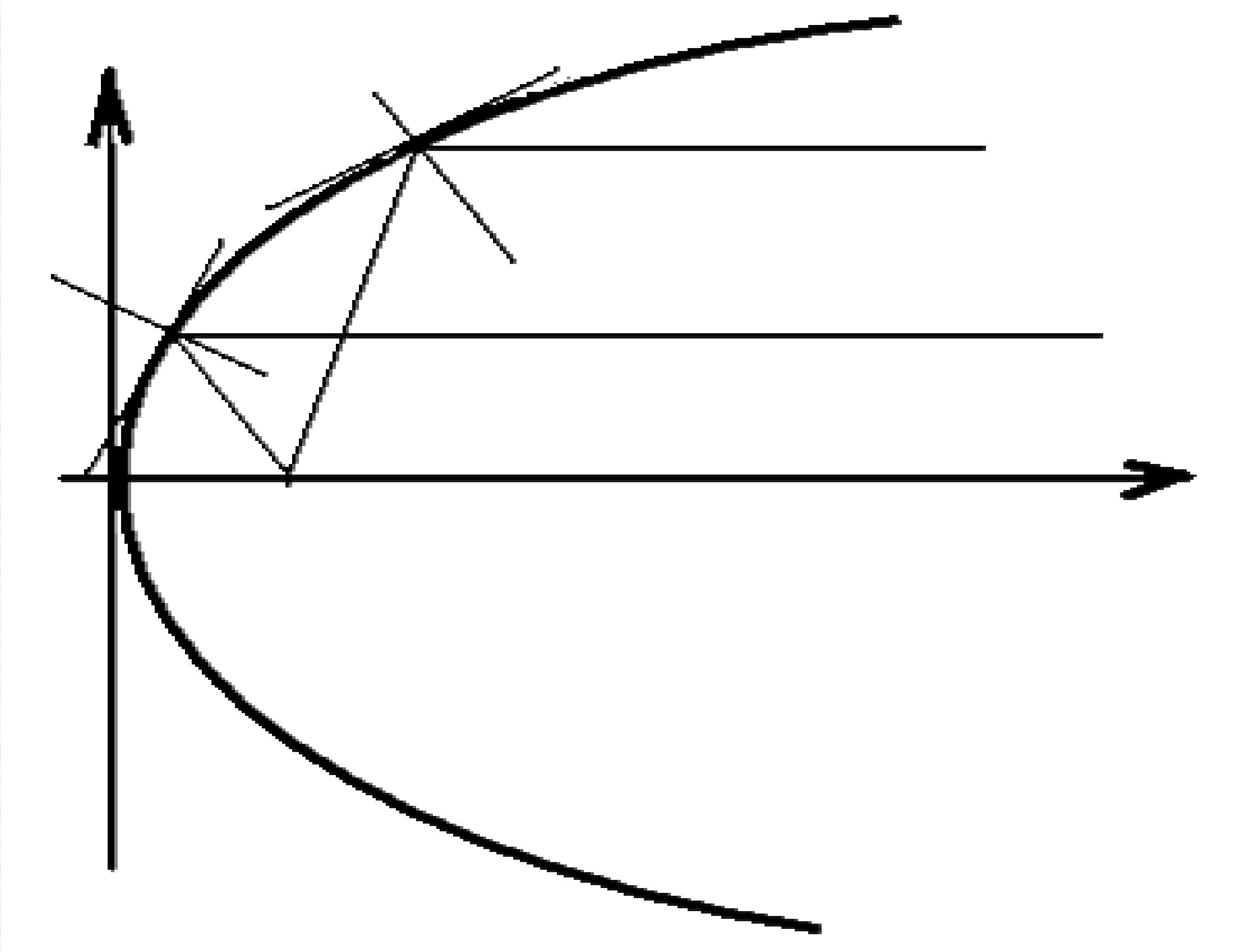
$\therefore$ 在(a,b)内有$f'(x)\geq 0$.

由$\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$不难得到在抛物线 $y = \sqrt{2px}$

$(p > 0)$上任意一点(x_0, y_0)处的切线斜率为

$$y' = \left(\sqrt{2px}\right)'\Big|_{x=x_0} = \sqrt{2p} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x_0}},$$

由此我们可以得到抛物线的一个重要的性质：根据光的反射定律,反射角(反射光线与反射面的法线的夹角)等于入射角(入射光线与反射面的法线的夹角).于是,任意一束从抛物线的焦点处出发的光线,经抛物线的反射后成为一束平行的光线.

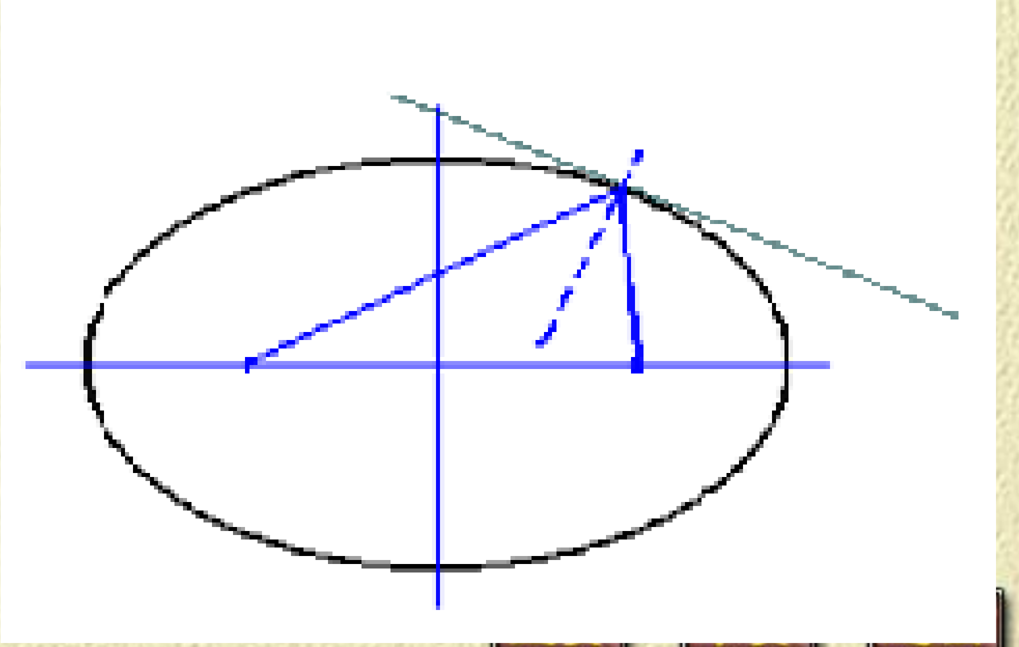


由于光路是可逆的,因此,反过来,若有一束与抛物线的对称轴平行的光线射入抛物线,则经过反射后光线将会聚于抛物线的焦点处.这就是探照灯、伞形太阳灶、抛物面天线等运用上述抛物线的性质的实际例子.

(实际上,准确地讲,上述应该是旋转抛物面的光学性质).

椭圆曲线的光学性质：

光线从椭圆的一个焦点出发,
经曲线的反射,必定通过椭圆
的另一个焦点.



2.物理意义　非均匀变化量的瞬时变化率.

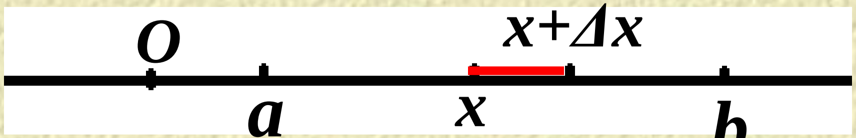
变速直线运动:路程对时间的导数为物体的瞬时速率:

$$v(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt}.$$

交流电路:电量对时间的导数为电流强度:

$$i(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta t}=\frac{dq}{dt}.$$

质地非均匀的线物体:线物体从a到x那一段的质量为$m(x)$, 那么质量$m(x)$对 x 的导数为线物体的线密度:



$$\rho(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{m(x+\Delta x)-m(x)}{\Delta x}=\frac{dm}{dx}.$$

… … … …

上页　下页　返回

3.导数的经济意义

经济学上把一个函数的导数称为该函数的边际值.

如某工厂生产一种产品的成本函数 $y = C(x)$,

$$y' = C'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x}$$ 称为边际成本,

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C(x + \Delta x) - C(x)}{\Delta x} \approx C'(x),$$

就是在产量为x的时候,每多生产一个单位的产品时,

平均所需成本近似于$C'(x)$.

所以经济学上常用边际值快速估计或预测相关经济量.

在17世纪后半叶,人们(其中包括Fermat)为了研究光的反射问题,于是就有了平面曲线的切线与法线的概念.Newton为了研究运动学的问题,创立了流数术,揭示了宏观世界的基本运动定律,极大地推动了人类社会生产力的发展.

导数反映了函数的变化率,因而现在在经济学中导数的应用十分普遍,在微观经济学中的边际分析就是使用导数研究经济函数的变化趋势.

四.可导与连续的关系

定理1.可导函数必定连续.

证明 设函数 $f(x)$在点 x_0可导,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0),\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha,$$

$$\alpha\to 0(\Delta x\to 0),\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x,$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left[f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x\right]=0$$

$\therefore$函数 $f(x)$在点 x_0连续.

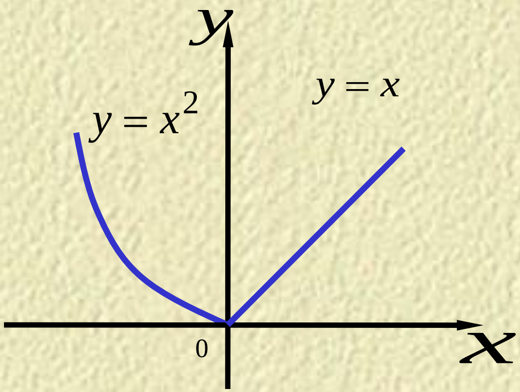
注意：该定理的逆定理不成立.

★连续函数不存在导数举例:

(1). 函数 $f(x)$ 连续，若 $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$,

则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的角点(or尖点).

函数在角点不可导.



如 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$,

在 $x = 0$ 处不可导, $x = 0$ 为 $f(x)$ 的角点.

(2).设函数 $f(x)$在点 x_0连续, 但

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\infty,$$

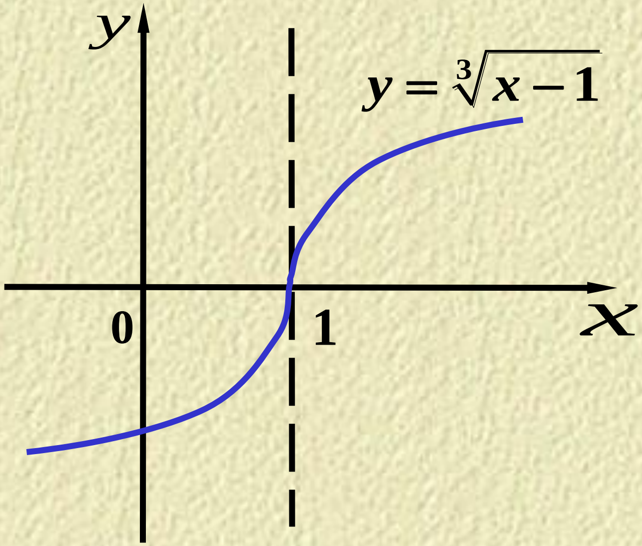
称函数 $f(x)$在点 x_0有无穷导数(不可导)

例如, $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$,

在 $x=1$处不可导,但是

曲线在点(1,0)处却有切线

—— 一条铅直的切线.



上页 下页 返回

可导与连续的关系

例5.设$f(x)=\begin{cases} x^2, & x \le 1 \\ ax+b, & x > 1 \end{cases}$,试验确定$a,b$的值,使得函数$f(x)$在$x=1$处可导.

解　函数$f(x)$在$x=1$处可导,首先要连续,

$\because \lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) = 1,$

显然函数$f(x)$在$x=1$处左连续,

又$\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1+} (ax+b) = a+b,$

$\therefore$ 当$a+b=1$　时函数$f(x)$在$x=1$处连续.

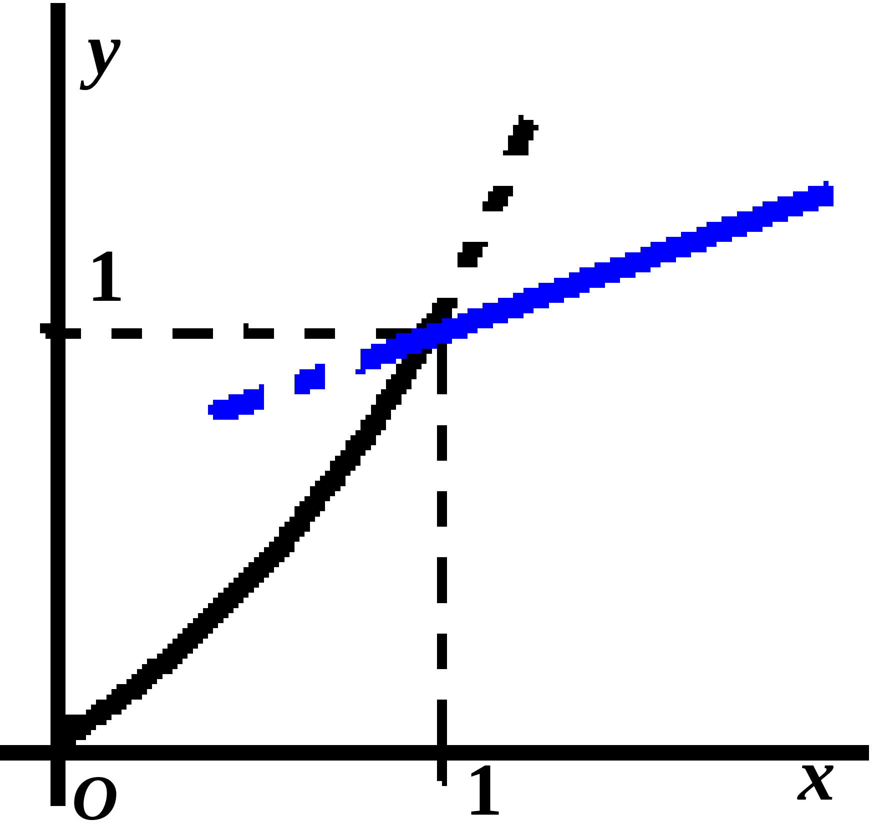
$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 1 \\ ax+b, & x>1 \end{cases},\quad a+b=1\text{时}f(x)\text{在}x=1\text{处连续.}$$

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$=\begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to 1-}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1-}(x+1)=2 \\ \displaystyle\lim_{x\to 1+}\frac{ax+b-1}{x-1}\overset{a+b=1}{=\!=\!=\!=}\lim_{x\to 1+}\frac{a(x-1)}{x-1}=a \end{cases}$$

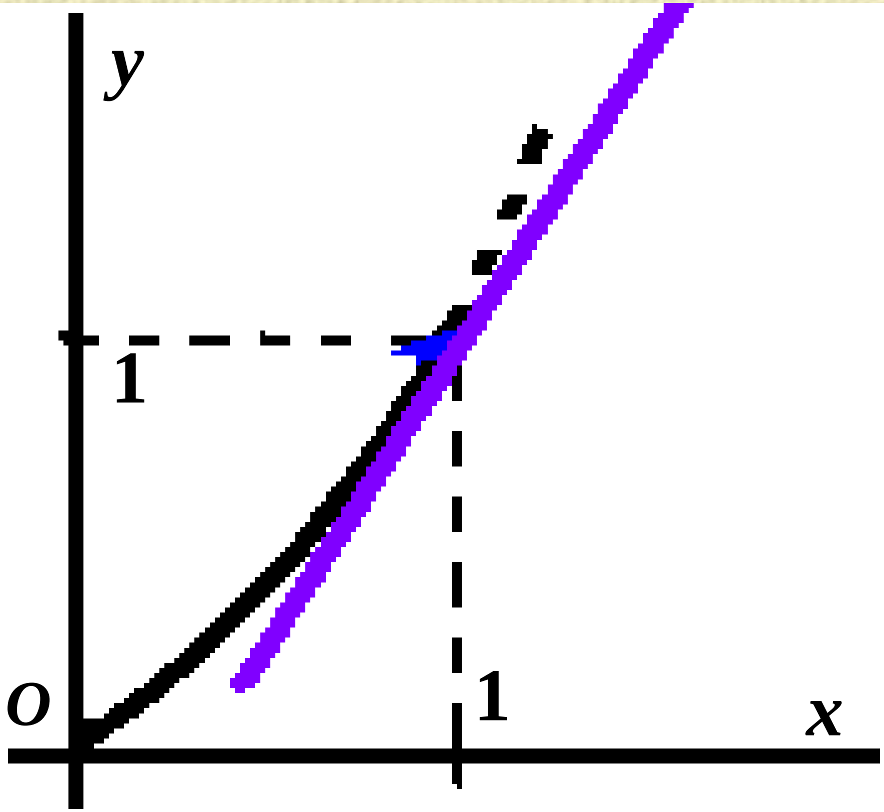
$$\therefore \begin{cases} a=2 \\ a+b=1 \end{cases}\text{时函数}f(x)\text{在}x=1\text{处可导.}$$

上页 下页 返回



$a+b\neq 1$ 时函数$f(x)$在$x=1$处不连续$\Leftrightarrow$函数$f(x)$的图象在$x=1$处左右错位.

$f(x)$在$x=1$处可导$\Leftrightarrow$在$(1,1)$点两边曲线$y=x^2$与$y=ax+b$有唯一的公切线



例5$^{(2)}$.设$f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0 \\ \ln(1+x), & x>0 \end{cases}$,求$f'(x)$.

例5$^{(3)}$.设$g(x)=\begin{cases} 2x, & x\le 0 \\ \ln(1+x), & x>0 \end{cases}$,求$g'(x)$.

上页 下页 返回

例5(2).设$f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0 \\ \ln(1+x), & x>0 \end{cases}$,求$f'(x)$.

Q:请问我们可以如下这样解题吗?

例5(2).解　当$x>0$时,$\left(\ln(1+x)\right)'=\dfrac{1}{1+x}$,

当$x\le 0$时,$\left(x\right)'=1$,

$$\therefore\ f'(x)=\begin{cases} 1, & x\le 0 \\ \dfrac{1}{1+x}, & x>0 \end{cases}.$$

上页　下页　返回

例5[(2)].设$f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0 \\ \ln(1+x), & x>0 \end{cases}$,求$f'(x)$.

例5[(3)].设$g(x)=\begin{cases} 2x, & x\le 0 \\ \ln(1+x), & x>0 \end{cases}$,求$g'(x)$.

Q:请问我们可以如下这样解题吗?

例5[(3)].解　当$x>0$时,$\left(\ln(1+x)\right)'=\dfrac{1}{1+x}$,

当$x\le 0$时,$\left(2x\right)'=2$,

$$\therefore\ g'(x)=\begin{cases} 2, & x\le 0 \\ \dfrac{1}{1+x}, & x>0 \end{cases}.$$

上页　下页　返回

例5[2].设$f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0 \\ \ln(1+x), & x>0 \end{cases}$,求$f'(x)$.

定义法处理分段函数的求导数是最基本,稳妥而又正确的做法.

当$x>0$时,$\left(\ln(1+x)\right)'=\dfrac{1}{1+x}$,当$x<0$时,$\left(x\right)'=1$,

$$f_-'(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h-0}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h-0}{h}=1,$$

$$f_+'(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h-0}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\ln\left(1+h\right)-0}{h}=1,$$

$\therefore$ 当$x=0$时,$f'(0)=1$,$\therefore$ $f'(x)=\begin{cases} 1, & x\le 0 \\ \dfrac{1}{1+x}, & x>0 \end{cases}$.

例5[3].设$g(x)=\begin{cases}2x, & x\le 0\\ \ln(1+x), & x>0\end{cases}$,求$g'(x)$.

定义法处理分段函数的求导数是最基本,稳妥而又正确的做法.

当$x>0$时,$(\ln(1+x))'=\dfrac{1}{1+x}$,当$x<0$时,$(2x)'=2$,

$$g'_-(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{g(h)-g(0)}{h-0}=\lim_{h\to 0^-}\frac{2h-0}{h}=2,$$

$$g'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{g(h)-g(0)}{h-0}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\ln(1+h)-0}{h}=1,$$

$\therefore g'(0)$不存在.

$\therefore g'(x)=\begin{cases}2, & x<0\\ \dfrac{1}{1+x}, & x>0\end{cases}$,$g(x)$在$x=0$处不可导.

上页 下页 返回

例6.求证 在$(-\infty,+\infty)$上点点可导的偶(奇)函数的导函数是奇(偶)函数.

证 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上点点可导,偶函数,

则$\forall x\in(-\infty,+\infty)$, $f(-x)=f(x)$,

$$f'(-x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-x+h)-f(-x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{h}\overset{-h=t}{=\!=\!=}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t)-f(x)}{-t}$$

上页 下页 返回

$$f'(-x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-x+h)-f(-x)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{h}\overset{-h=t}{=\!=\!=}\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t)-f(x)}{-t}$$

$$=-\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}=-f'(x)$$

$\forall x\in(-\infty,+\infty), f'(-x)=-f'(x)$

$\therefore$ 在$(-\infty,+\infty)$上,可导的偶函数$f(x)$

$\Rightarrow f'(x)$是奇函数.

上页 下页 返回

五.函数的极值与Fermat引理

函数的极值是一个局部性的概念，它只是在自变量的某一个邻域内函数可能取得的最大值或最小值。具体而言，那就是

上页 下页 返回

定义 设函数$f(x)$在区间(a,b)内有定义，x_0 是(a,b)内的一个点，

如果存在着点x_0的一个邻域，对于这邻域内的任何点x，除了点x_0外，$f(x) < f(x_0)$均成立，就称$f(x_0)$是函数$f(x)$的一个极大值；

如果存在着点x_0的一个邻域，对于这邻域内的任何点x，除了点x_0外，$f(x) > f(x_0)$均成立，就称$f(x_0)$是函数$f(x)$的一个极小值.

函数的极大值与极小值统称为极值，使函数取得极值的点称为极值点。

上页 下页 返回

费马 (*Fermat*) 引理

设 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极值，且在 x_0 处具有导数，那末必定 $f'(x_0)=0$。

定义 使导数为零的点(即方程 $f'(x)=0$ 的实根)叫做函数 $f(x)$ 的驻点(临界点 *critical point*)。

注意： 可导函数 $f(x)$ 的极值点必定是它的驻点，但函数的驻点却不一定是极值点。

例如， $y=x^3, y'\big|_{x=0}=0$，但 $x=0$ 不是极值点。

上页 下页 返回

证明 不妨假设函数在 x_0 处取得极大值，

$\therefore f(x_0+\Delta x) \le f(x_0) \Rightarrow f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \le 0,$

若 $\Delta x < 0$,则有 $\dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \ge 0$;

若 $\Delta x > 0$,则有 $\dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \le 0$;

$$\Delta x < 0\ ,\ \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \geq 0\ ;$$

$$\therefore\ f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \geq 0\ ;$$

$$\Delta x > 0\ ,\ \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \leq 0\ ;$$

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \leq 0\ ;$$

$\because\ f'(x_0)$存在 ,$\therefore\ f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

$\therefore$只有 $f'(x_0) = 0$

思考练习.

1.函数$f(x)$在$U(0)$内有定义, $f'(0)$存在.

试问以下各极限是否存在?若存在分别等于多少?

(1). $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(\dfrac{1}{n}\right)-f(0)\right]$;

(2). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}$.

上页 下页 返回

2.设$f(x)$为偶函数,且$f'(0)$存在.

证明$f'(0)=0$.

3.设函数$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$,

问:在$x=0$处函数$f(x)$是否

(1).连续;(2).可导;(3).导函数连续?

上页 下页 返回