§6.3 有穷集的计数问题

- 使用文氏图可以很方便地解决有穷集的计数问题。
- 首先根据已知条件把对应的文氏图画出来。
  - 一般地说，每一条性质决定一个集合。
  - 有多少条性质，就有多少个集合。
  - 如果没有特殊说明，任何两个集合都画成相交的
- 然后将已知集合的元素数填入表示该集合的区域内。
  - 通常从n个集合的交集填起，
  - 根据计算的结果将数字逐步填入所有的空白区域。
  - 如果交集的数字是未知的，可以设为x。
- 根据题目中的条件，列出一次方程或方程组，就可以求得所需要的结果。

包含排斥原理principle of inclusion/exclusion

定理6.2 设E为有穷集，$P_1,P_2,\ldots,P_m$是m个性质。E中的任何元素x或者具有性质P_i，或者不具有性质$P_i(i=1,2,\ldots m)$,两种情况必居其一。令A_i表示E中具有性质P_k的元素构成的子集，则E中不具有性质$P_1,P_2,\ldots,P_m$的元素为

$$
\begin{aligned}
&|\sim A_1\cap\sim A_2\cap\cdots\cap\sim A_m|\\
&=|E|-\sum_{i=1}^{m}|A_i|+\sum_{1\le i<j\le m}|A_i\cap A_j|\\
&-\sum_{1\le i<j<k\le m}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\cdots+(-1)^m|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m|
\end{aligned}
$$

容斥原理推论

- E中至少具有一条性质的元素数为

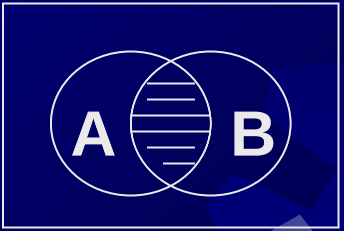
$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j|$$

$$+ \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

容斥原理推论(证明)

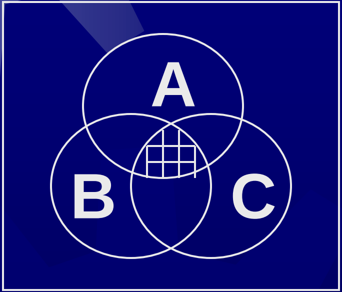
- n=2时的情况:

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$$



- 归纳证明: 以n=3为例:

$$
\begin{aligned}
|A\cup B\cup C| &= |(A\cup B)\cup C| = |A\cup B|+|C|-|(A\cup B)\cap C| \\
&= |A|+|B|-|A\cap B|+|C|-|(A\cap C)\cup(B\cap C)| \\
&= |A|+|B|-|A\cap B|+|C| \\
&\quad -(|A\cap C|+|B\cap C|-|(A\cap C)\cap(B\cap C)|) \\
&= |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C| \\
&\quad +|A\cap B\cap C|
\end{aligned}
$$



容斥原理(举例)

- 例1: 在1到10000之间既不是某个整数的平方，也不是某个整数的立方的数有多少?
- 解: 设 $E=\{x\in N|1\le x\le 10000\}$, $|E|=10000$

  $A=\{x\in E|x=k^2\wedge k\in Z\}$, $|A|=100$

  $B=\{x\in E|x=k^3\wedge k\in Z\}$, $|B|=21$

  则 $|\sim(A\cup B)|=|E|-|A\cup B|$

  $=|E|-(|A|+|B|-|A\cap B|)$

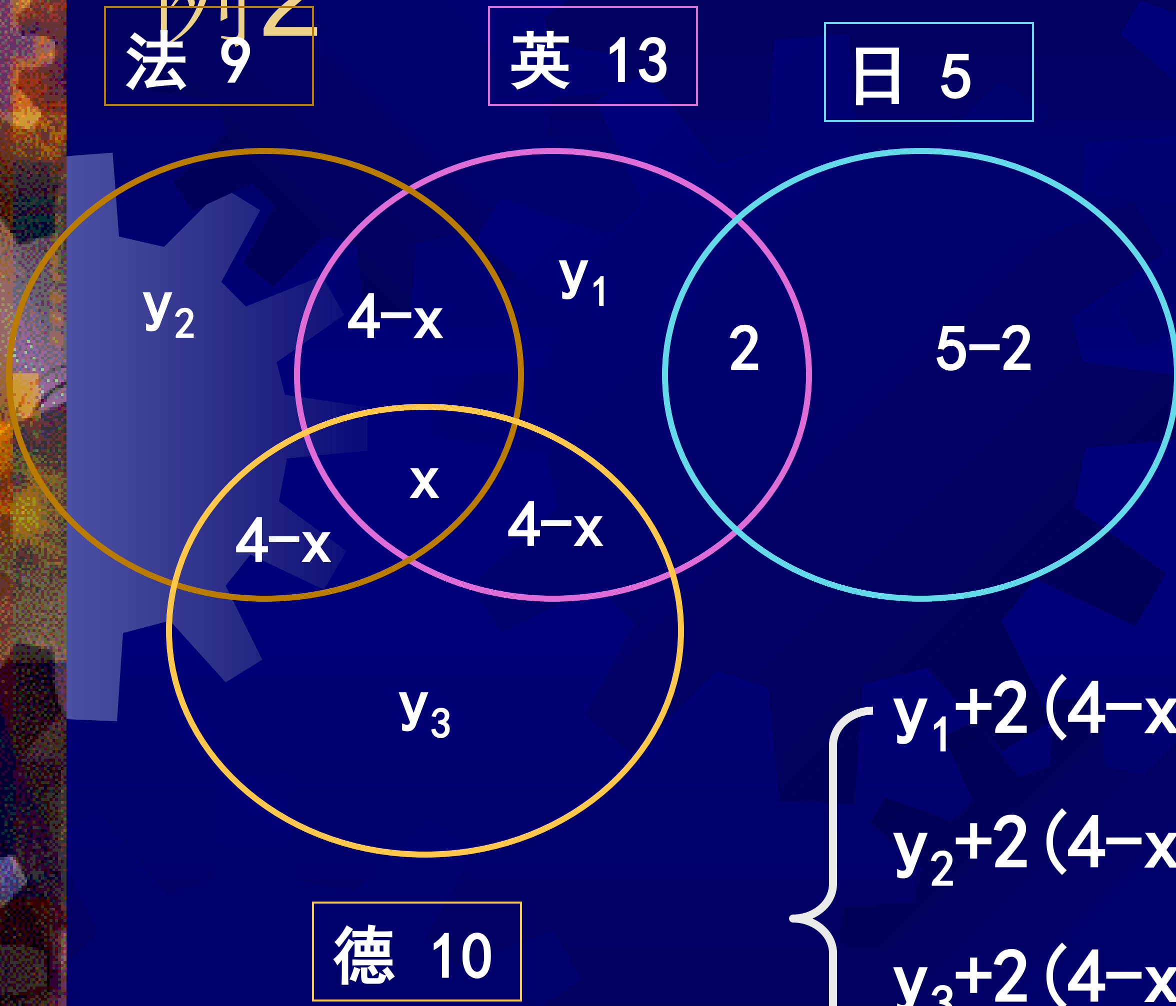
  $=10000-100-21+4=9883$

  注意 $A\cap B=\{x\in E|x=k^6\wedge k\in Z\}$, $|A\cap B|=4$. #

例2 对24名会外语的科技人员进行掌握外语情况的调查。其统计结果如下：会英、日、德和法语的人分别为13，5，10和9人，其中同时会英语和日语的有2人，会英、德和法语中任两种语言的都是4人。已知会日语的人既不懂法语也不懂德语，分别求只会一种语言(英、德、法、日)的人数和会三种语言的人数。

解：令A，B，C，D分别表示会英、法、德、日语的人的集合。根据题意画出文氏图。设同时会三种语言的有x人，只会英、法或德语一种语言的分别为y_1，y_2和y_3人。将x和y_1，y_2，y_3填入图中相应的区域，然后依次填入其它区域的人数。

例2



$$\begin{cases} y_1+2(4-x)+x+2=13 \\ y_2+2(4-x)+x=9 \\ y_3+2(4-x)+x=10 \\ y_1+y_2+y_3+3(4-x)+x=24-5 \end{cases}$$

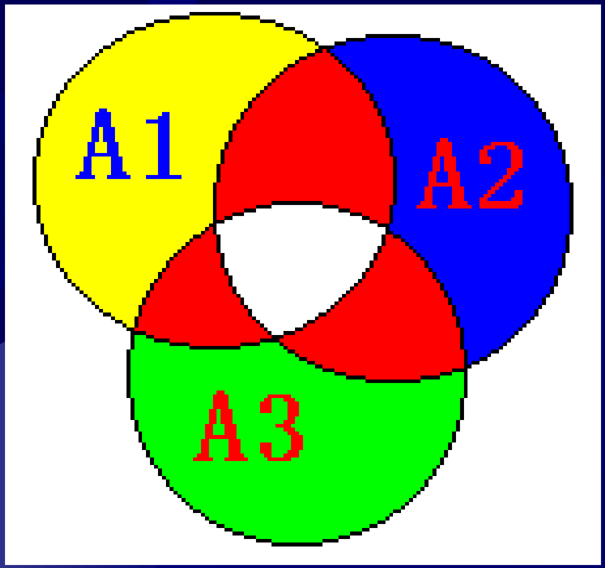
解得 $\begin{cases} x=1 \\ y_1=4 \\ y_2=2 \\ y_3=3 \end{cases}$

例 3 **There are 38 football vests, 15 basketball vests and 20 baseball vests. The total number of members of 3 teams is 58, and only 3 students take part in the 3 teams in the same time. How many members take part in 2 teams in the same time?**

解：设A_1表示足球队，A_2表示篮球队，A_3表示棒球队，x表同时参加两个球队的人数。

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x} &= |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| \\
&= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| \\
&\quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\
&= 38+15+20-58+3 \\
&= 18
\end{aligned}
$$

错



$$x = |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - 3*|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

$$= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| - 3*|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

$$= 38+15+20-58+3-3*3$$

$$= 9$$

例4 求1到1000之间(包含1和1000在内)既不能被5和6，也不能被8整除的数有多少个。

解答 设

$E=\{x|x\in Z\wedge 1\le x\le 1000\}$

$A=\{x|x\in S\wedge x$可被5整除$\}$

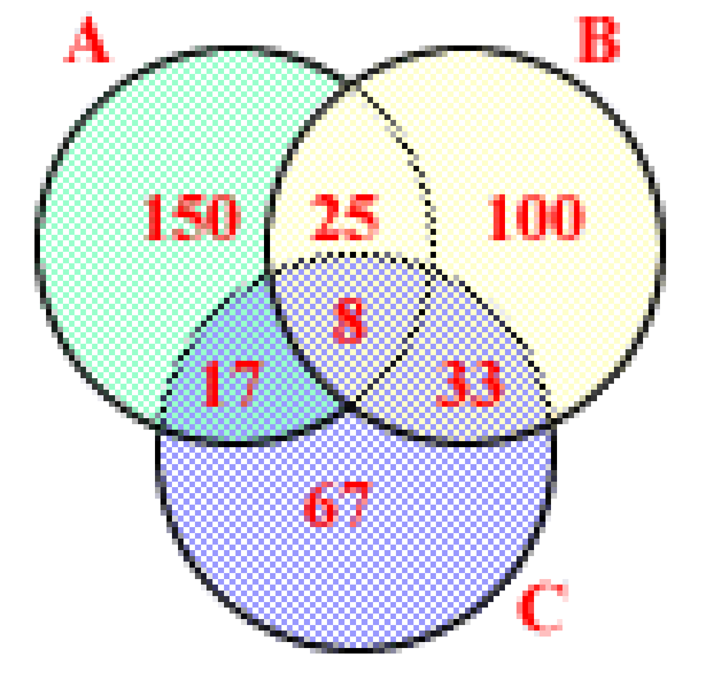
$B=\{x|x\in S\wedge x$可被6整除$\}$

$C=\{x|x\in S\wedge x$可被8整除$\}$

$|T|$表示有穷集T中的元素数

$\lfloor x\rfloor$表示小于等于x的最大整数

$lcm(x_1,x_2,\ldots,x_n)$表示$x_1,x_2,\ldots,x_n$的最小公倍数



$|A| = \lfloor 1000/5 \rfloor = 200$

$|B| = \lfloor 1000/6 \rfloor = 166$

$|C| = \lfloor 1000/8 \rfloor = 125$

$|A \cap B| = \lfloor 1000/\mathrm{lcm}(5,6) \rfloor = 33$

$|A \cap C| = \lfloor 1000/\mathrm{lcm}(5,8) \rfloor = 25$

$|B \cap C| = \lfloor 1000/\mathrm{lcm}(6,8) \rfloor = 41$

$|A \cap B \cap C| = \lfloor 1000/\mathrm{lcm}(5,6,8) \rfloor = 8$

将这些数字依次填入文氏图，得到

- 根据包含排斥原理，所求不能被5，6和8整除的数应为

$$|\sim A \cap \sim B \cap \sim C| = |S| - (|A| + |B| + |C|)$$

$$+(|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|)$$

$$-|A \cap B \cap C|$$

$$= 1000 - (200 + 166 + 125) + (33 + 25 + 41) - 8$$

$$= 600$$

- 由文氏图也可得知，不能被5，6和8整除的数有 1000－(200+100＋33＋67)＝600个。

例5

求1到250之间能被2，3，5，7任一数整除的整数个数。

解：设1到250间分别能被2，3，5，7整除的整数集合为A_1，A_2，A_3，A_4。设$\lfloor x \rfloor$表示不大于x最大整数，

$|A_1|=\lfloor 250/2 \rfloor=125$，$|A_2|=\lfloor 250/3 \rfloor=83$，$|A_3|=\lfloor 250/5 \rfloor=50$，

$|A_4|=\lfloor 250/7 \rfloor=35$

$|A_1 \cap A_2|=\lfloor 250/(2*3) \rfloor=41$，$|A_1 \cap A_3|=\lfloor 250/(2*5) \rfloor=25$，

$|A_1 \cap A_4|=\lfloor 250/(2*7) \rfloor=17$，

$|A_2 \cap A_3|=\lfloor 250/(3*5) \rfloor=16$，$|A_2 \cap A_4|=\lfloor 250/(3*7) \rfloor=11$，

$|A_3 \cap A_4|=\lfloor 250/(5*7) \rfloor=7$，

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \lfloor 250/(2*3*5) \rfloor = 8,$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_4| = \lfloor 250/(2*3*7) \rfloor = 5,$$

$$|A_1 \cap A_3 \cap A_4| = \lfloor 250/(2*5*7) \rfloor = 3,$$

$$|A_2 \cap A_3 \cap A_4| = \lfloor 250/(3*5*7) \rfloor = 2,$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = \lfloor 250/(2*3*5*7) \rfloor = 1$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = 125+83+50+35|-41-25-17-16-11-7+8+5+3+2-1=193$$