2019~2020 学年第 1 学期 2019 级数学分析 I-*A* 卷解答与评分标准 2019-12

一. 填空题或选择题:（每空 3 分，计 30 分）

1. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 不存在，则必定有____________.

$(A).\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n+y_n\right)$不存在； $(B).\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n y_n\right)$不存在；

$(C).\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n+y_n\right)$未必不存在； $(D).$ 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n y_n\right)=0$.

2. 函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{(x-3)|\sin x|}$ 在区间____________内无界.

$(A).(-1,0)$; $(B).(0,1)$; $(C).(1,2)$; $(D).(2,3)$.

3. 函数 $f(x)=\begin{cases} x\cos\dfrac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0 \quad , \quad x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处____________.

$(A).$不连续； $(B).$连续但不可导；

$(C).$可导但导函数不连续； $(D).$可导且导函数连续.

4. 设 $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$，则函数 $f\left[f(x)\right]$ 的第一类间断点为____________ .

5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\tan x\cdot(2x-\pi)\right]=$ __________ .

6. 曲线 $y=e^{-\frac{x^2}{2}}\,(x\geq 0)$ 的拐点为____________ .

7. 设 $y=\ln\left(\sqrt[4]{4x}\right)$，则 $\dfrac{d^4y}{dx^4}=$ __________ .

8. 设 xe^x 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int f(2x)dx=$ ____________ .

9. 数列形式的迫敛性定理:________________________ .

10. 确界原理:____________________ .

1. $\underline{A}$ ； 2. $\underline{D}$ ； 3. $\underline{B}$ ； 4. $\underline{2}$ ； 5. $\underline{-2}$ ； 6. $\underline{\left(1,e^{-1/2}\right)}$ ； 7. $\underline{-\dfrac{3}{2x^4}}$ ； 8. $\underline{xe^{2x}+C}$ ；

9. 数列形式的迫敛性定理: 若数列 x_n, y_n 及 z_n 满足条件 : (1). $y_n\leq x_n\leq z_n\,(n\geq n_0)$,

(2). $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a$. 则数列 x_n 极限存在, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$.

10. 确界原理: 非空有上(下)界的集合必有上(下)确界.

二. 解答题 I . (每题 7 分，计 28 分)

11. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\tan x}\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\tan x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^2 x-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 x}{2x}=0.$…………7分

12. 计算不定积分 $\int\dfrac{1-x}{\sqrt{4-x^2}}dx$.

解 $\int\dfrac{1-x}{\sqrt{4-x^2}}dx=\int\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx+\int\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}dx=\int\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}}d\left(\dfrac{x}{2}\right)+\dfrac{1}{2}\int\dfrac{\left(4-x^2\right)'}{\sqrt{4-x^2}}dx$

$=\arcsin\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}\int\left(4-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}d\left(4-x^2\right)=\arcsin\dfrac{x}{2}+\sqrt{4-x^2}+C$ ……………………………………7分

法二 $\int\dfrac{1-x}{\sqrt{4-x^2}}dx\overset{x=2\sin t}{\underset{t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}{=\!=\!=\!=\!=}}\int\dfrac{1-2\sin t}{\left|2\cos t\right|}2\cos tdt=\int\left(1-2\sin t\right)dt=t+2\cos t+C$

$=\arcsin\dfrac{x}{2}+\sqrt{4-x^2}+C.$

13. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2^n+0^n+1^n+9^n}{4}\right)^{\frac{1}{n}}$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2^n+0^n+1^n+9^n}{4}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\dfrac{9^n}{4}\left[1+\left(\dfrac{1}{9}\right)^n+\left(\dfrac{2}{9}\right)^n\right]\right\}^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{9\left[1+\left(\dfrac{1}{9}\right)^n+\left(\dfrac{2}{9}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[n]{4}}\right\}=9\cdot 1^0\cdot\dfrac{1}{1}=9.$

法二 $\dfrac{1}{4}9^n<\dfrac{2^n+0^n+1^n+9^n}{4}<9^n$, $\dfrac{9}{\sqrt[n]{4}}<\left(\dfrac{2^n+0^n+1^n+9^n}{4}\right)^{\frac{1}{n}}<9,\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{4}=1$,由迫敛性知原式$=9$.

法三 设$y=\left(\dfrac{2^x+1^x+9^x}{4}\right)^{\frac{1}{x}}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(2^x+1^x+9^x\right)-\ln 4}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=\!=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{2^x\ln 2+0+9^x\ln 9}{2^x+1^x+9^x}}{1}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\dfrac{2}{9}\right)^x\ln 2+\ln 9}{1+\left(\dfrac{1}{9}\right)^x+\left(\dfrac{2}{9}\right)^x}=\ln 9,\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2^n+0^n+1^n+9^n}{4}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2^x+1^x+9^x}{4}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\ln 9}=9.$……………7分

14. 计算不定积分 $\int 2x\arctan xdx$.

解 $\int 2x\arctan xdx=x^2\arctan x-\int\dfrac{x^2}{1+x^2}dx=x^2\arctan x-\left(\int 1dx-\int\dfrac{1}{1+x^2}dx\right)$

$=x^2\arctan x-x+\arctan x+C=\left(1+x^2\right)\arctan x-x+C$ ……………………………………7分

三. 解答题 II （每题 7 分，计 42 分)

15. $a>0$.设有坐标平面上的曲线段$C_I:\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{cases},t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，在$t\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$时 计算$\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

说明曲线段C_I的升降与凹凸的情况 .

解 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}=\dfrac{3a\sin^2 t\cos t}{3a\cos^2 t(-\sin t)}=-\tan t,\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}=\dfrac{(-\tan t)'}{(a\cos^3 t)'}=\dfrac{-\sec^2 t}{-3a\cos^2 t\sin t}=\dfrac{\sec^4 t}{3a\sin t}$.

$\therefore$ 在$t\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$时$\dfrac{dy}{dx}<0,\dfrac{d^2y}{dx^2}>0$,函数单调下降,曲线是凸的曲线…………………………………7分

16. 设函数 $f(x)$在$(-1,1)$内有连续的二阶导数, $f(0)=0, f'(0)=1, f''(0)=2$,$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x},x\neq 0\\ a\quad ,x=0\end{cases}$.

试确定a的值，使$\varphi(x)$在$x=0$处连续，又:在此条件下，求出$\varphi'(0)$.

解 $\varphi(x)$在$x=0$处连续$\Leftrightarrow a=\varphi(0)=\lim\limits_{x\to0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{1}=f'(0)=1$.在此条件下,

$\varphi'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{f(x)}{x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)-1}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f''(x)}{2}=\dfrac{1}{2}f''(0)=1$.……7分

求$\varphi'(0)$可以用导函数极限定理但要验证条件显得过于繁琐.

17. 证明：在$x>0$时函数 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 严格单调递减 .

解 $x>0, f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}=e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}, f'(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{\dfrac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}$,

$x>0$时,$\ln(1+x)=\ln(1+x)-\ln 1=\dfrac{x}{\xi},1<\xi<1+x,\therefore x>0$时,$\ln(1+x)>\dfrac{x}{1+x}$,

$\therefore x>0$时,$f'(x)<0$,故$x>0$时函数$f(x)$严格单调递减.…………………………………………7分

18. 设 $a_n=\sin 1+\frac{\sin 2}{2^2}+\frac{\sin 3}{3^2}+\cdots+\frac{\sin n}{n^2}$，试运用 Cauchy 收敛准则证明数列 $\{a_n\}$ 收敛 .

解 $\forall\varepsilon>0$,要找到N,使得$n>N$时,$\forall p\in\mathbb{N}^*$,有$\left|a_n-a_{n+p}\right|=\left|\frac{\sin(n+1)}{(n+1)^2}+\frac{\sin(n+2)}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{\sin(n+p)}{(n+p)^2}\right|<\varepsilon.$

而$\left|\frac{\sin(n+1)}{(n+1)^2}+\frac{\sin(n+2)}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{\sin(n+p)}{(n+p)^2}\right|\le\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}$

$\le\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}$

$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}$,$\therefore$ 当$\frac{1}{n}<\varepsilon$时有$\left|a_n-a_{n+p}\right|<\varepsilon.$

$\therefore\forall\varepsilon>0,\exists N\ge\frac{1}{\varepsilon},\forall n>N,\forall p\in\mathbb{N}^*$,有$\left|a_n-a_{n+p}\right|=\left|\frac{\sin(n+1)}{(n+1)^2}+\frac{\sin(n+2)}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{\sin(n+p)}{(n+p)^2}\right|$

$\le\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}<\frac{1}{n}<\frac{1}{N}\le\frac{1}{1/\varepsilon}=\varepsilon$,据*Cauchy*收敛准则知数列收敛.………………7分

19. 设 $x>0$, 证明: $e^x>1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}$.

解 函数e^x的*Maclaurin*展开式为$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{e^{\theta x}}{6!}x^6,\theta\in(0,1)$.

$\because x>0,\therefore\frac{e^{\theta x}}{6!}x^6>0$,于是有 $e^x>1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}$.……………………………………7分

一种小变化做法:$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{e^{\theta x}}{5!}x^5,\theta\in(0,1),\because x>0,\therefore e^{\theta x}>1.$

$\therefore e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}e^{\theta x}>1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}.$

注:用函数e^x的带*Peano*型余项的*Maclaurin*展开式来证明是不充分的,因为*Peano*型余项是一种定性而非定量的表达式.

法二 设$\varphi(x)=e^x-\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}\right),\varphi'(x)=e^x-\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}\right)$,

$\varphi''(x)=e^x-\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right),\varphi'''(x)=e^x-\left(1+x+\frac{x^2}{2!}\right)$,

$\varphi^{(4)}(x)=e^x-(1+x),\varphi^{(5)}(x)=e^x-1.\ x>0,\varphi^{(5)}(x)>0,\Rightarrow\varphi^{(4)}(x)$递增,

$\therefore x>0,\varphi^{(4)}(x)>\varphi^{(4)}(0)=0,\Rightarrow\varphi^{(3)}(x)$递增,$\therefore x>0,\varphi^{(3)}(x)>\varphi^{(3)}(0)=0,$

$\therefore x>0,\varphi''(x)>\varphi''(0)=0,\Rightarrow\varphi'(x)$递增,$\therefore x>0,\varphi'(x)>\varphi'(0)=0,\Rightarrow$

$\therefore x>0,\varphi(x)$递增,$\Rightarrow\therefore x>0,\varphi(x)>\varphi(0)=0.$ 证毕

20. 两题任选一题，只做一题. 若两题都做，按第一题记分.

(1). 设 a 为常数，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$.

解 $a=0$,结论成立. $|a|\le 1$时,$\left|\dfrac{a^n}{n!}\right|\le\dfrac{1}{n!}\le\dfrac{1}{n}$,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$,结论成立.

$|a|>1$时,取$\left[|a|\right]=m$,则$m\in\mathbb{N}^*$,$n>m$时,$\left|\dfrac{a^n}{n!}\right|=\dfrac{|a|\cdots|a|}{1\cdots m}\cdot\dfrac{|a|\cdots|a|}{(m+1)\cdots(n-1)}\cdot\dfrac{|a|}{n}<\dfrac{|a|^{m+1}}{m!}\cdot\dfrac{1}{n}$,

$\dfrac{|a|^{m+1}}{m!}$是一个定值,由$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a|^n}{n!}=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$. 总之,$\forall a\in\mathbb{R}$,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$.……………………7分

法二 记$b_n=\dfrac{|a|^n}{n!}$,$\left[|a|\right]=m$,则当$n>m$时$b_{n+1}=\dfrac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}=\dfrac{|a|}{(n+1)}\cdot\dfrac{|a|^n}{n!}=\dfrac{|a|}{(n+1)}\cdot b_n\le b_n$,

当$n>m$时$\{b_n\}$为单调递减数列,由于$b_n\ge 0$,所以$\{b_n\}$单调有界,$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$存在.

$\because b_{n+1}=\dfrac{|a|}{(n+1)}\cdot b_n\ \therefore\lim\limits_{n\to\infty}b_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{|a|}{(n+1)}\cdot b_n\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a|}{(n+1)}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}b_n$,$B=0\cdot B=0$.

(2). 设$a_n>0$,求证:若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=l>1$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

解 $a_n>0$,由$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=l>1$,对于$\varepsilon_0=\dfrac{l-1}{2}>0$,$\exists N_0$,$\forall n\ge N_0$,$s.t.\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-l\right|<\varepsilon_0=\dfrac{l-1}{2}$,

$\therefore n\ge N_0$时有$\dfrac{a_n}{a_{n+1}}>\dfrac{l+1}{2}$,由于$a_n>0$,所以$0<a_{n+1}<\dfrac{2}{l+1}a_n$,记$\dfrac{2}{l+1}=r\in(0,1)$,则 $0<a_{n+1}<r\,a_n$,

$\therefore\forall m\in\mathbb{N}^*$,$0<a_{N_0+m}<ra_{N_0+m-1}<r^m a_{N_0}$,$\Rightarrow$由迫敛性知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{m\to\infty}a_{N_0+m}=0$.……………………7分

法二 $a_n>0$,由$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=l>1$,则对于$r:l>r>1$,$\exists N_0$,$\forall n\ge N_0$,$s.t.\dfrac{a_n}{a_{n+1}}>r>1$,

$\therefore n\ge N_0$时$\{a_n\}$为单调递减数列,由于$a_n>0$,所以$\{a_n\}$单调有界,$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$存在.

倘若$A\ne 0$,由于$\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=A\ne 0$,$\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\dfrac{A}{A}=1$,与条件矛盾.$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.