2-02 收敛数列的性质

一.收敛数列的性质

1.极限的唯一性

命题3.若$\{x_n\}$收敛,则极限值唯一.

证明 设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$,假设$a \neq b$,不妨设$a > b$,取$\varepsilon_0 = \dfrac{a-b}{2} > 0$,

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow$ 对于$\varepsilon_0 > 0$,$\exists N_1$,$\forall n > N_1$,有$|x_n - a| < \varepsilon_0$,

$$\therefore\ x_n > a - \varepsilon_0 = \frac{a+b}{2},$$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b \Rightarrow$ 对于$\varepsilon_0 > 0$,$\exists N_2$,$\forall n > N_2$,有$|x_n - b| < \varepsilon_0$,

$$\therefore\ x_n < b + \varepsilon_0 = \frac{a+b}{2},$$

则当$n > N = \max(N_1, N_2)$时,就有$x_n > \dfrac{a+b}{2}$,$x_n < \dfrac{a+b}{2}$

同时成立,矛盾! $\therefore a = b$.

2.有界性

命题4.若$\{x_n\}$收敛,则$\{x_n\}$有界.

但须注意.有界是数列收敛的必要而不充分的条件,如$\left\{(-1)^n\right\}$有界但不收敛.

推论1.无界数列必定发散.

3.不等式性质

命题5.(保号性)若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a > 0$,则$\forall r \in (0,a)$,

$\exists n_0 \in \mathbb{Z}^+, \forall n \geq n_0$,有$x_n > r$.

证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a > 0, \forall r \in (0,a)$,对于$\varepsilon_0 = a - r > 0$,

$\exists n_0 \in \mathbb{Z}^+, \forall n \geq n_0$,有$|x_n - a| < \varepsilon_0$,

$\therefore n \geq n_0$,有$x_n - a > -\varepsilon_0$ 即 $x_n > a - \varepsilon_0 = r$.

$a < 0$的情形有相应的结论,在此略过不表.

命题5′.(保号性的常用形式)

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a > 0$,则$\exists n_0 \in \mathbb{Z}^+, \forall n \geq n_0$,有$x_n > 0$.

命题5′.(保号性的常用形式)

若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a > 0$,则$\exists n_0 \in \mathbb{Z}^+, \forall n \geq n_0$,有$x_n > 0$.

推论2.(保号性推论)若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$存在,且对

于某$n_0 \in \mathbb{Z}^+, n \geq n_0$时有$x_n \geq 0$.则$a \geq 0$.

(注意, 其中条件改为$x_n > 0$,结论也仍为

$a \geq 0$而不是$a > 0$.)

用反证法据命题5′立马可以证得.

上页 下页 返回

命题6.(保不等式性/保序性)

若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$均存在,且有$a > b$,

则$\exists n_0 \in \mathbb{Z}^+, \forall n \geq n_0$,有$x_n > y_n$.

证明仿照命题5′法易得.

推论3.(保序性推论)若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$

均存在,且对于某$n_0 \in \mathbb{Z}^+, n \geq n_0$时有$x_n \geq y_n$.

则$a \geq b$.

例1.设$x_n \ge 0$,且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n} = \sqrt{a}$.

证明 由极限保号性命题5′的推论2知$a \ge 0$.

(1).$a = 0, \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n > N,$

$s.t. |x_n - 0| < \varepsilon^2$,故$\left|\sqrt{x_n} - 0\right| < \varepsilon$,$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n} = 0$.

(2).$a > 0, \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n > N,$

$s.t. |x_n - a| < \sqrt{a}\varepsilon$,此时有*

$$\left|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}\right| = \frac{|x_n - a|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}} < \frac{|x_n - a|}{\sqrt{a}} < \frac{\sqrt{a}\varepsilon}{\sqrt{a}} = \varepsilon,$$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n} = \sqrt{a}$.

注*:(1).$\varepsilon^2, \sqrt{a}\varepsilon$仍是任意的、要多小就有多小的数.

(2).此时有是指仍然要在$n > N$时结论才成立.

一般地有：设$x_n \geq 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在，则

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \geq 0$，且对于任意给定的

$$m \in \mathbb{Z}^+，有\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[m]{x_n} = \sqrt[m]{a}.$$

以后，该结论可以作为一个基本的公式来使用.

二. 数列形式的迫敛性

4.数列形式的迫敛性定理

定理1.迫敛性定理(*Squeeze theorem*)

若数列x_n, y_n及z_n满足条件:(1).$y_n \le x_n \le z_n \ (n \ge n_0)$;

(2). $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.则数列$x_n$极限存在,且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

迫敛性定理,两边夹定理或夹逼定理,有人形象地称之为 *Sandwich Theorem*.

迫敛性定理,毋宁说是一种方法——间接的方法来给出一个数列的极限.利用迫敛性定理求极限的关键是构造出y_n与z_n,并且y_n与z_n的极限是容易求得的.

上页 下页 返回

证明 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 > 0, \forall n > N_1$,有$\left| y_n - a \right| < \varepsilon$,

$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_2 > 0, \forall n > N_2$,有$\left| z_n - a \right| < \varepsilon$.

取$N = \max\left\{ N_1, N_2 \right\}, n > N$时上述两式同成立.

即$n > N$时 $a - \varepsilon < y_n$, $z_n < a + \varepsilon$,

$\therefore$ 对于上述$\varepsilon > 0$及$N, \forall n > N$,有

$$a - \varepsilon < y_n \le x_n \le z_n < a + \varepsilon,$$

即$\left| x_n - a \right| < \varepsilon$ 成立, $\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

上页 下页 返回

例2.求证:(1).$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$;(2).$a\geq 1,\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1.$

证明　用迫敛性:

(1).记 $\sqrt[n]{n}=1+h_n,h_n>0\ (n>1)$

$$n=(1+h_n)^n=1+nh_n+C_n^2h_n^2+\cdots+h_n^n>1+C_n^2h_n^2,$$

即$C_n^2h_n^2<n-1,\quad \therefore 1<\sqrt[n]{n}=1+h_n<1+\sqrt{\dfrac{2}{n}},$

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{2}{n}}=0,\therefore$ 由迫敛性知$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

(2).$a\geq 1$,当$n\geq a$时有$1\leq\sqrt[n]{a}\leq\sqrt[n]{n}$,

$\therefore$由迫敛性知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1.$

例3.求证：$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$.($P29$/例3)

前面我们做过一个题：设$n\in\mathbb{Z}^{+}$,证明：

(1).$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<3$； (2).$n!>\left(\frac{n}{3}\right)^{n}$.

这里,我们就需要使用这个结论.

证明 $\forall n\in\mathbb{Z}^{+}$,由$n!>\left(\frac{n}{3}\right)^{n}$可得

$$0<\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}<\frac{3}{n},$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}=0$,由追敛性知$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$.

上页 下页 返回

思考练习 1.

1.试确定下列数列的极限：

(1). $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$;

(2). $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^n+3^n}$;

(3)*. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$;

(4)*. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{3n-1}\right)^n$.

1.(2).解 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^n+3^n}$，

$\forall n\in\mathbb{Z}^+, 3^n < 1+2^n+3^n < 3\cdot 3^n,$

$\therefore 3 < \sqrt[n]{1+2^n+3^n} < 3\cdot\sqrt[n]{3}, \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}=1,$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^n+3^n} = 3.$

$$1.(3)^*.\ \lim_{n\to\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right);$$

解 $\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi\right)=(-1)^n\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right),$

$$0\le\left|\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)\right|=\left|\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi\right)\right|$$

$$\le\left|\pi\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\right|=\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}<\frac{\pi}{n},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)\right|=0\Rightarrow \text{原}=0.$$

上页 下页 返回

1.(4)*. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{3n-1}\right)^n$.

分析 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{3n-1}=\dfrac{1}{3},\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=0.$

我们猜测该极限为0,用*Squeeze th.*处理.

解 $n\in\mathbb{Z}^+,3n-1<3(n+2),$

$n\geq 5,2(n+2)\leq 3n-1,$

$\therefore n\geq 5$ 时,$\dfrac{1}{3}<\dfrac{n+2}{3n-1}\leq\dfrac{1}{2},$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=0,\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=0\Rightarrow$ 原 $=0.$

上页 下页 返回

三. 数列极限的四则运算法则

由数列极限的定义,我们得到了诸如

$$(1).\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}=0,\alpha>0;\qquad (2).|q|<1,\lim_{n\to\infty}q^{n}=0;$$

$$(3).a>1,\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1,\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1\ ;$$

$$(4).\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^{n}}=0\ ;\qquad (5).\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n}}{n!}=0,\left(a>1\right);$$

$$(6).x_{n}\geq 0,\lim_{n\to\infty}x_{n}=a,\text{则}\lim_{n\to\infty}\sqrt[m]{x_{n}}=\sqrt[m]{a}\ \left(m\in\mathbb{Z}^{+}\right)$$

这样的一些基本的结果,我们就可以处理表达式较为复杂的数列的极限问题.

回顾:

命题1.(1).$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(x_n - a) = 0$.

(2).无穷小列与有界数列的乘积仍为无穷小列.

(3).有限多个无穷小列的和仍为无穷小列.

命题2.在$n\to\infty$时,无穷大列的倒数为无穷小列;不等于0的无穷小列的倒数为无穷大列.

$\longrightarrow$以后,我们可以将所有的极限问题都转化为无穷小的问题.

5.数列极限的四则运算法则：

定理2.(数列极限的四则运算法则)

设$\{x_n\},\{y_n\}$均收敛,$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b,$

则$\{x_n \pm y_n\},\{x_n \cdot y_n\},\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}(b \neq 0)$均收敛,

且有(1).$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b$；

(2).$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$；

(3).$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$,其中$b \neq 0$.

结论(1),(2)可以推广至有限多个的情形.

定理2.(数列极限的四则运算法则)

设$\{x_n\},\{y_n\}$均收敛,$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$,

则$\{x_n \pm y_n\},\{x_n \cdot y_n\},\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}(b \neq 0)$均收敛,

且有(1).$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b$;

(2).$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$; (3).$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$,其中$b \neq 0$.

对于(3).$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}(b \neq 0)$的证明予以关注,

证明用到了极限的保号性.

例4.求极限

$$(1).\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2-3n^2\right)^2\left(n^4+5\right)}{\left(3n^2-1\right)\left(2n^3+3\right)^2};$$

$$(2).\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right);$$

$$(3).\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{a^n+1},(a\neq-1).$$

解 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ 知

$$(1).\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{n^2}-3\right)^2\left(1+\frac{5}{n^4}\right)}{\left(3-\frac{1}{n^2}\right)\left(2+\frac{3}{n^3}\right)^2}=\frac{(-3)^2\cdot1}{3\cdot2^2}=\frac{3}{4};$$

例4.求极限

$$(2).\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right);$$

$$(3).\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{a^n+1},\left(a\neq -1\right).$$

解 (2).原式$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{2n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}=\frac{2}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=1\ ;$$

例4.求极限

$$(3).\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{a^n+1},(a\neq -1).$$

解 (3).参数问题必定要讨论!

$|a|<1$ 时原式 $=\dfrac{0}{0+1}=0$;

$|a|>1$ 时原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1}{a}\right)^n}=\dfrac{1}{1+0}=1$;

$a=1$ 时原式 $=\dfrac{1}{2}$.

例5.若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$存在,$\lim\limits_{n\to\infty} y_n$不存在.试问$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n)$是否存在?$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n)$是否存在?

又若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \neq 0$,$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n)$是否存在?

解 (1).$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n)$一定不存在,

而$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n)$存在性不能确定.

$$\left[\begin{array}{l} (1).x_n = \dfrac{1}{n}, y_n = (-1)^n, \lim\limits_{n\to\infty}\left[(-1)^n \cdot \dfrac{1}{n}\right] = 0; \\ (2).x_n = 1, y_n = (-1)^n, \lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n)\text{不存在.} \end{array}\right]$$

例5.若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \neq 0$ 存在,$\lim\limits_{n\to\infty} y_n$不存在.

试问$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n)$是否存在?

解 (2).若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \neq 0$,$\lim\limits_{n\to\infty} y_n$不存在.

则$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n)$一定不存在.

[如若$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n)$存在,$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \neq 0$,

则$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(x_n y_n)}{x_n}$存在 . 矛盾]

例6.(1).求极限$L=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{1}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n}\right)$.

分析 倘若我们由$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2+k}=0, k=1,2,\cdots,n,$

由极限的加法运算法则得

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+2}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+n}=0.$$

尽管结果是对的,但解题过程却是错的.

$\longrightarrow$极限的加法运算法则只在有限多个数列相加时才适用.

上页 下页 返回

例6.(1).求极限$L=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n}\right)$.

解 考虑用迫敛性:由于$\lim_{n\to\infty}\frac{1/n^2}{1/\left(n^2+k\right)}=1$,

在$n\to\infty$时,$\frac{1}{n^2+1},\cdots,\frac{1}{n^2+n}$每一个都与$\frac{1}{n^2}$相当,

所以我们作放缩就有方向了.

$\forall k\in\{1,2,\cdots,n\}, n^2<n^2+k\le n^2+n$,

$\therefore \frac{n}{n^2+n}<\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n}<\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n}$,

$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+n}=0, \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0, \quad \therefore L=0.$

例6.(2).由前面的讨论,我们知道 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1}=1$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$,……, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n-1}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=\frac{1}{\sqrt[n]{1}}\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\cdots\cdots\frac{1}{\sqrt[n]{n-1}}\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{n}},$$ 不过

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{1}}\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\cdots\cdots\frac{1}{\sqrt[n]{n-1}}\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)$$

$$\neq\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{1}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\cdots\cdots\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n-1}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$$

$\longrightarrow$ 提醒:极限的乘法运算法则只在有限多个数列相乘时才适用.

上页 下页 返回

补遗:

$P23$/例5.求证:$a>0,\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1.$

证明 (1).$a\geq 1$ 时,已证$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1.$

(2).$0<a<1$ 时,$\dfrac{1}{a}>1$,故$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{a}}=1,$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\dfrac{1}{a}}}=1.$$

四.数列子列的收敛性

定义4. 在数列$\{x_n\}$中任意抽取无限多项并保持这些项在原数列$\{x_n\}$中的先后次序,这样得到的一个数列称为原数列$\{x_n\}$的子数列(或子列).

例如 $x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots x_n, \cdots$

$$\Downarrow$$

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}, \cdots$$

注意:在子数列$\{x_{n_k}\}$中一般项 x_{n_k} 是第 k 项,而 x_{n_k} 在原数列$\{x_n\}$中却是第 n_k 项,显然,$n_k \ge k$.

上页 下页 返回

定理3.数列$\{x_n\}$收敛$\Leftrightarrow$数列$\{x_n\}$的任一子列$\{x_{n_k}\}$都收敛.

证明$\Rightarrow$ 设数列$\{x_{n_k}\}$是数列$\{x_n\}$的任一子数列,

$\because \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,$

$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n > N$,有$|x_n - a| < \varepsilon.$

取 $K = N$,则当$k > K$ 时,$n_k > n_K = n_N \geq N$,

$\therefore |x_{n_k} - a| < \varepsilon, \quad \therefore \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a.$

$\Leftarrow$ 数列$\{x_n\}$是$\{x_n\}$其本身的一个特殊子列,

结论是显然的.

上页 下页 返回

一个特别常用的有关子列的命题：

例7. 求证：对于数列$\{x_n\}$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在$\Leftrightarrow$ $\{x_{2n-1}\}$与$\{x_{2n}\}$都收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1}=\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}$.

证 $\Rightarrow$ 设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，则 $\forall\varepsilon>0,\exists N$,

$\forall n>N$，有$|x_n-a|<\varepsilon$.

由于 $2n>2n-1>n$,

则$|x_{2n-1}-a|<\varepsilon$，$|x_{2n}-a|<\varepsilon$.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1}=a,\ \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}=a.$

上页 下页 返回

$\Leftarrow$ 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1} = a, \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = a$,则

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1, \forall 2n-1 > N_1$,

有 $|x_{2n-1} - a| < \varepsilon$;

对于上述 $\varepsilon > 0, \exists N_2, \forall 2n > N_2$,

有 $|x_{2n} - a| < \varepsilon$.

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$,则 $\forall m > N$,

有 $|x_m - a| < \varepsilon$. $\therefore \lim\limits_{m\to\infty} x_m = a$.

常用的有关子列的结论 ：

(1). 定理3.数列$\{x_n\}$收敛$\Leftrightarrow$数列$\{x_n\}$的任一子列$\{x_{n_k}\}$都收敛.

(2). 对于数列$\{x_n\}$,$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在$\Leftrightarrow\{x_{2n-1}\}$与$\{x_{2n}\}$都收敛,且$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1}=\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}$.

(3). 对于数列$\{x_n\}$,$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在$\Leftrightarrow\{x_{3n-2}\},\{x_{3n-1}\}$与$\{x_{3n}\}$都收敛,且$\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n-2}=\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n-1}=\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n}$.

(4). 数列$\{x_n\}$收敛$\Leftrightarrow$数列$\{x_n\}$的子列$\{x_{2n-1}\}$,$\{x_{2n}\},\{x_{3n}\}$都收敛.

上页 下页 返回

定理3. 数列$\{x_n\}$收敛$\Leftrightarrow$

数列$\{x_n\}$的任一子列$\{x_{n_k}\}$都收敛.

定理3给出了数列收敛性的重要判别方法,但更主要的是给出了判断数列发散的有力工具.

$\rightarrow$ 若一个数列有一个子列发散,则该数列发散.

$\rightarrow$ 若一个数列有两个不同子列都收敛,但它们的极限值不等,则该数列发散.

例8.判断数列的敛散性.

(1).$\left\{(-1)^n\right\}$ ；　(2).$\left\{\sin\dfrac{n\pi}{4}\right\}$;　(3)*.$\{\sin n\}$.

定理3. 数列$\{x_n\}$收敛 $\Leftrightarrow$

数列$\{x_n\}$的任一子列$\{x_{n_k}\}$都收敛.

$\longrightarrow$对于数列$\{x_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在 $\Leftrightarrow \{x_{2n-1}\}$

与$\{x_{2n}\}$都收敛, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}$.

回顾P24/例8, 便知说的就是这么一回事.

P24/例8. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. 构作数列$\{z_n\}$为

$$x_1, y_1, x_2, y_2, \cdots, x_n, y_n, \cdots$$

求证: 数列$\{z_n\}$收敛 $\Leftrightarrow a = b$.

上页 下页 返回

例9. 如果$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a > 0$,证明$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1.$

证明　$\because \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a > 0, \therefore$ 对于$\varepsilon_0 = \dfrac{a}{2} > 0, \exists N,$

$\forall n > N$,有$|x_n - a| < \varepsilon_0 = \dfrac{a}{2}$,即 $0 < \dfrac{a}{2} < x_n < \dfrac{3a}{2}.$

于是有 $\sqrt[n]{\dfrac{a}{2}} < \sqrt[n]{x_n} < \sqrt[n]{\dfrac{3a}{2}},$

据极限的夹逼性,由$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{a}{2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{3a}{2}} = 1$ 知

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1.$$

上页　下页　返回

思考练习 2.

1.试确定下列数列的极限：

(1). $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$;

(2). $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1^n+2^n+\cdots+2022^n\right)^{\frac{1}{n}}$;

(3). $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)$;

(4)*. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{(1+a)\left(1+a^2\right)\left(1+a^3\right)\cdots\left(1+a^n\right)}, a>0.$

上页 下页 返回

(4)*. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{(1+a)(1+a^2)(1+a^3)\cdots(1+a^n)}, a>0.$

$\longrightarrow$参数问题必定要讨论!还要使用迫敛性.

解 (i).$0<a<1$ 时,$0<\dfrac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}<a^n$,

(ii).$a>1$ 时,$0<\dfrac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}<\dfrac{a^n}{a^{n-1}\cdot a^n}=\dfrac{1}{a^{n-1}}$,

(iii).$a=1$ 时,$\dfrac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}=\dfrac{1}{2^n}$.

由迫敛性知$\forall a>0, \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{(1+a)(1+a^2)(1+a^3)\cdots(1+a^n)}=0.$