考虑到实际中的应用，可由5种基本联结词产生更多的联结词，下面给出在逻辑设计中常用的三种联结词。

定义 设p,q为两个命题，复合命题“p,q之中恰有一个成立”称为P与q的排斥或或异或,记作 $P\bar{\vee}q$，$\bar{\vee}$ 称作排斥或或异或联结词。$P\bar{\vee}q$ 真值为真当且仅当p,q中恰有一个为真。

由定义可知：$P\bar{\vee}q \Leftrightarrow (p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$

定义 设p,q为两个命题，复合命题“p与q的否定”称为P与q的与非式,记作p↑q,↑称作与非联结词。p↑q真值为真当且仅当p,q不同时为真。

由定义可知：$P\uparrow q \Leftrightarrow \neg(p\wedge q).$

定义 设p,q为两个命题，复合命题“p或q的否定”称为P与q的或非式,记作p↓q，↓称作或非联结词。 p↓q 真值为真当且仅当p,q同时为假。

由定义可知：$P \downarrow q \Leftrightarrow \neg(p \vee q)$.

关于联结词“$\bar{\nabla}$ ”有下列性质：

设 **P**、**Q**、**R**为命题公式，则有

$$(1) P \bar{\nabla} Q \Leftrightarrow Q \bar{\nabla} P$$

$$(2) (P \bar{\nabla} Q) \bar{\nabla} R \Leftrightarrow P \bar{\nabla} (Q \bar{\nabla} R)$$

$$(3) P \wedge (Q \bar{\nabla} R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \bar{\nabla} (P \wedge R)$$

$$(4) P \bar{\nabla} Q \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \bar{\nabla} \neg Q$$

$$(5) P \bar{\nabla} Q \Leftrightarrow \neg(P \leftrightarrow Q)$$

定理1 设P,Q,R是命题公式,若$P \bar{\vee} Q \Leftrightarrow R$,则$P \bar{\vee} R \Leftrightarrow Q$,
$Q \bar{\vee} R \Leftrightarrow P$,且$P \bar{\vee} Q \bar{\vee} R$是永假式。

证明 $P \bar{\vee} R \Leftrightarrow P \bar{\vee} (P \bar{\vee} Q) \Leftrightarrow (P \bar{\vee} P) \bar{\vee} Q \Leftrightarrow F \bar{\vee} Q \Leftrightarrow Q$

同理可得 $Q \bar{\vee} R \Leftrightarrow P$

$P \bar{\vee} Q \bar{\vee} R \Leftrightarrow P \bar{\vee} P \Leftrightarrow F$

关于联结词“↑”有下列性质:

$(1) P \uparrow P \Leftrightarrow \neg(P \wedge P) \Leftrightarrow \neg P$

$(2) (P \uparrow Q) \uparrow (P \uparrow Q) \Leftrightarrow \neg(P \uparrow Q) \Leftrightarrow P \wedge Q$

$(3) (P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q) \Leftrightarrow \neg P \uparrow \neg Q \Leftrightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q)$

$\Leftrightarrow P \vee Q$

关于联结词“↓”有下列性质：

$$(1) P \downarrow P \Leftrightarrow \neg(P \vee P) \Leftrightarrow \neg P$$

$$(2) (P \downarrow Q) \downarrow (P \downarrow Q) \Leftrightarrow \neg(P \downarrow Q) \Leftrightarrow P \vee Q$$

$$(3) (P \downarrow P) \downarrow (Q \downarrow Q) \Leftrightarrow \neg P \downarrow \neg Q \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)$$
$$\Leftrightarrow P \wedge Q$$

由上述性质可以看出：

$$\neg(P \uparrow Q) \Leftrightarrow \neg P \downarrow \neg Q$$

$$\neg(P \downarrow Q) \Leftrightarrow \neg P \uparrow \neg Q$$

$$P \uparrow P \Leftrightarrow P \downarrow P$$

在一个形式系统中，多少个联结词最合适呢？一般说来，在自然推理系统中，联结词集中的联结词可以多些，而公里系统中联结词集中的联结词越少越好。但联结词集中的联结词无论是多些还是少些，它必须具备一定的功能，这就是任一**真值函数**都可以用仅含此联结词集中的联结词的命题公式表示。具有这样性质的联结词集叫**全功能集**。于是应先明确何为真值函数。

定义 {0, 1}上的n元函数f: $\{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$就称为一个n元真值函数。

联结词$\neg$实际上一个一元真值函数：

$f_\neg(0) = 1$, $f_\neg(1) = 0$

而联结词$\wedge$、$\vee$、$\to$和$\leftrightarrow$则都是二元真值函数：

$$f_\wedge(0, 0)=0, f_\wedge(0, 1)=0, f_\wedge(1, 0) = 0, f_\wedge(1, 1) = 1$$
$$f_\vee(0, 0) = 0, f_\vee(0, 1) = 1, f_\vee(1, 0) = 1, f_\vee(1, 1) = 1$$

$f_{\rightarrow}(0, 0) = 1,\ f_{\rightarrow}(0, 1) = 1,\ f_{\rightarrow}(1, 0) = 0,\ f_{\rightarrow}(1, 1) = 1$

$f_{\leftrightarrow}(0, 0) = 1,\ f_{\leftrightarrow}(0, 1) = 0,\ f_{\leftrightarrow}(1, 0) = 0,\ f_{\leftrightarrow}(1, 1) = 1$

反过来，一个真值函数就可看成一个真值联结词。设$f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$是一个$n$元真值函数，则可如下定义一个$n$元真值联结词$N_f$：

对于n个命题变元$p_1, p_2, \ldots, p_n$，命题公式$N_f(p_1, p_2, \ldots, p_n)$在真值赋值函数$<t_1, t_2, \ldots, t_n>$下的真值为$f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$。

显然互不相同的n元真值函数的个数为${}_{2}2^{n}$，因此可定义${}_{2}2^{n}$个n元真值联结词.例如1元真值函数有四个：

f_1: $0\rightarrow0,\ 1\rightarrow0$　　　f_2: $0\rightarrow0,\ 1\rightarrow1$

f_3: $0\rightarrow1,\ 1\rightarrow0$　　　f_4: $0\rightarrow1,\ 1\rightarrow1$

而2元真值函数有16个,见后面表)，可定义16个真值联结词，而我们常用的只不过是其中的5个。现在的问题是,是否所有的真值函数都可使用常用的这5个真值联结词来表示呢？

2元真值函数

p	q	$F_0^{(2)}$	$F_1^{(2)}$	$F_2^{(2)}$	$F_3^{(2)}$	$F_4^{(2)}$	$F_5^{(2)}$	$F_6^{(2)}$	$F_7^{(2)}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

p	q	$F_8^{(2)}$	$F_9^{(2)}$	$F_{10}^{(2)}$	$F_{11}^{(2)}$	$F_{12}^{(2)}$	$F_{13}^{(2)}$	$F_{14}^{(2)}$	$F_{15}^{(2)}$
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

定义 在一个联结词的集合中，如果一个联结词可由集合中的其它联结词定义，则称此联结词为**冗余的联结词**，否则称为**独立的联结词**。

定义 设Ω是联结词的一个集合，称Ω为联结词的一个**全功能集**，如果任意真值函数f都可用仅含Ω中联结词的命题公式**A**来表示。若一个联结词的全功能集中不含冗余的联结词，则称它是**极小全功能集**。

定理2 {¬, ∧, ∨, →}是联结词的一个全功能集。

【证明】根据定义只要证明对任意n元真值函数都可由只含¬、∧、∨和→的n元命题公式来表示即可。对真值函数的元数n进行归纳证明。

归纳基：当$n = 1$时，一元真值函数只有**4**个，可分别用$p \wedge (\neg p)$、p、$\neg p$和$p \vee (\neg p)$来表示，因此定理成立。

归纳步:假设当$n=k$时定理成立,要证$n=k+1$定理也成立。设$f(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1})$是一个$k$+1元真值函数,定义如下两个k元真值函数：$f_1(x_1,x_2, \ldots,x_k)=f(x_1,x_2, \ldots, x_k,0)$

$$f_2(x_1, x_2, \ldots, x_k)=f(x_1, x_2, \ldots, x_k, 1)$$

由归纳假设知f_1和f_2都可由只含¬、∧、∨和→的k元命题公式来表示,设它们分别可由A_1和A_2表示,且假定A_1和A_2中的k个命题变元为$p_1, p_2, \ldots, p_k$。现在我们证f可由

$A=((\neg p_{k+1})\to A_1)\wedge(p_{k+1}\to A_2)$表示,其中$p_{k+1}$是不同于$p_1, p_2, \ldots, p_k$的一个命题变元。即要证对命题变元$p_1, p_2, \ldots, p_k, p_{k+1}$的一个真值赋值$<t_1, t_2, \ldots, t_k, t_{k+1}>$时,A的真值是

$f(t_1, t_2, \ldots, t_k, t_{k+1})$。当$t_{k+1}=0$时,即$p_{k+1}$被赋值为0,这时$((\neg p_{k+1})\to A_1)$与$A_1$等值,而$(p_{k+1}\to A_2)$的真值为1,所以A与$A_1$等值,而按归纳假设有$A_1$的真值为$f_1(t_1, t_2, \ldots, t_k)$，即为$f(x_1, x_2, \ldots, x_k, 0)$。同理可证当$t_{k+1}=1$时A的真值是$f(x_1, x_2, \ldots, x_k, 1)$,从而A的真值是$f(t_1, t_2, \ldots, t_k, t_{k+1})$。

推论1 $\{\neg, \to\}$, $\{\neg, \wedge\}$和$\{\neg, \vee\}$都是联结词的全功能集。

【证明】1. 要证$\{\neg, \to\}$是联结词的一个全功能集，只要证任一命题公式可与一个只含$\neg$和$\to$的命题公式等值，事实上有：

$$A\vee B \Leftrightarrow \neg A \to B \qquad A\wedge B \Leftrightarrow \neg(\neg A\vee\neg B))$$

2. $\{\neg, \wedge\}$是联结词的一个全功能集，因为：

$$A\vee B \Leftrightarrow \neg(\neg A\wedge\neg B) \qquad A\to B \Leftrightarrow \neg A\vee B$$

3. $\{\neg, \vee\}$是联结词的一个全功能集，因为：

$$A\wedge B \Leftrightarrow \neg(\neg A\vee\neg B) \qquad A\to B \Leftrightarrow \neg A\vee B$$

事实上，上述每个集合都是极小的全功能集，即不能再从集合中去掉任意一个联结词还能保持是全功能集。

推论2 {↑}和{↓}都是联结词的极小全功能集。

【证明】{↑}是联结词的一个极小全功能集，因为：

$$\neg P \Leftrightarrow \neg(P \wedge P) \Leftrightarrow P \uparrow P$$

$$P \wedge Q \Leftrightarrow \neg(P \uparrow Q) \Leftrightarrow (P \uparrow Q) \uparrow (P \uparrow Q)$$

而{¬, ∧}是联结词的一个极小全功能集

所以{↑}是联结词的一个极小全功能集。

{↓}是联结词的一个极小全功能集，因

为：$\neg P \Leftrightarrow \neg(P \vee P) \Leftrightarrow P \downarrow P$

$$P \vee Q \Leftrightarrow \neg(P \downarrow Q) \Leftrightarrow (P \downarrow Q) \downarrow (P \downarrow Q)$$

而{¬, ∨}是联结词的一个极小全功能集

所以{↓}是联结词的一个极小全功能集。

在**2.1**节中列出了基本的等价公式，从公式可以看到，基本等价公式是成对出现的，而每对公式的结构，除了符号∨和∧外是一样的，这种类似的结构称为对偶。由基本等价式可以猜想，是否两个公式等价，其对偶也等价呢？回答是肯定的。

定义 如果命题公式**A**中只出现命题变量、命题常量、命题联结符号¬、∧和∨，将其中的命题联结符号∧换成∨，命题联结符号∨换成∧，命题常量T换成F，F换成T，得到的公式称为**A**的对偶公式(*dual formula*)，记为A^*。

例**1** 设公式$A=\neg((p\vee q)\wedge(\neg r)),B=p\vee(T\wedge r\wedge\neg q)$则：

A的对偶式$A^*=\neg((p\wedge q)\vee(\neg r))$

B的对偶式$B^*=p\wedge(F\vee r\vee\neg q)$

定理1 设A*是公式A的对偶公式，$P_1,P_2,\ldots,P_n$是出现于A和A*中的所有命题变元，于是有：

[1]. $\neg A(P_1,P_2,\ldots,P_n) \Leftrightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2,\ldots, \neg P_n)$

[2]. $A(\neg P_1, \neg P_2,\ldots, \neg P_n) \Leftrightarrow \neg A^*(P_1,P_2,\ldots,P_n)$

证明 由德.摩根(D.Morgan)定律

$$\neg (P\wedge Q)\Leftrightarrow \neg P\vee\neg Q, \neg(P\vee Q))\Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$$

可知，对公式A求否定，直到“¬”号深入到命题变元为止。在此过程中，所有的∧变为∨，∨变为∧，1变为0，0变为1，因此可得$\neg A(P_1,P_2,\ldots,P_n) \Leftrightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2,\ldots, \neg P_n)$对于两个公式一定是互为对偶的。所以，将A视为A*的对偶公式即得等价公式

$$A(\neg P_1, \neg P_2,\ldots, \neg P_n) \Leftrightarrow \neg A^*(P_1,P_2,\ldots,P_n)$$

定理２ (对偶定理) 若公式A等价于B，则其对偶公式A^*和B^*也等价。

证明 设$P_1,P_2,\ldots,P_n$是出现在A和B中的所有命题变元。因为$A \Leftrightarrow B$, 所以，$A(P_1,P_2,\ldots,P_n) \leftrightarrow B(P_1,P_2,\ldots,P_n)$是重言式。用$\neg P_1, \neg P_2,\ldots, \neg P_n$分别代换上式中的$P_1,P_2,\ldots,P_n$，由第三节的定理１可知

$$A(\neg P_1, \neg P_2,\ldots, \neg P_n) \leftrightarrow B(\neg P_1, \neg P_2,\ldots, \neg P_n)$$

也是重言式。由本节定理１知

$$\neg A^*(P_1,P_2,\ldots,P_n) \Leftrightarrow \neg B^*(P_1,P_2,\ldots,P_n)$$

所以$A^*(P_1,P_2,\ldots,P_n) \Leftrightarrow B^*(P_1,P_2,\ldots,P_n)$

例 2 试证明

(a) $(P\leftrightarrow Q)\rightarrow(\neg P\vee Q)\Leftrightarrow 1$

(b) $(P\leftrightarrow Q)\wedge(\neg P\wedge Q)\Leftrightarrow 0$

证明 $(P\leftrightarrow Q)\rightarrow(\neg P\vee Q)$

$\Leftrightarrow\neg((\neg P\vee Q)\wedge(P\vee \neg Q))\vee(\neg P\vee Q)$

$\Leftrightarrow(\neg(\neg P\vee Q)\vee\neg(P\vee \neg Q))\vee(\neg P\vee Q)$

$\Leftrightarrow(\neg(\neg P\vee Q)\vee(\neg P\vee Q))\vee\neg(P\vee \neg Q)$

$\Leftrightarrow 1\vee\neg(P\vee \neg Q)$

$\Leftrightarrow 1$

$(P\leftrightarrow Q)\rightarrow(\neg P\vee Q)$

$\Leftrightarrow\neg((P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q))\vee(\neg P\vee Q)$

$\Leftrightarrow((\neg P\vee \neg Q)\wedge(P\vee Q))\vee(\neg P\vee Q)=A$

$(P\leftrightarrow Q)\rightarrow(\neg P \vee Q)\Leftrightarrow((\neg P\vee\neg Q)\wedge(P\vee Q))\vee(\neg P\vee Q) = A$

$B=(P\leftrightarrow Q) \wedge(\neg P \wedge Q)$

$\Leftrightarrow((\neg P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge Q))\wedge(\neg P \wedge Q) = A^*$

又由前面的证明得 $A \Leftrightarrow 1$,由对偶定理可得

$B \Leftrightarrow A^* \Leftrightarrow 1^* \Leftrightarrow 0$