# Sec.10.2 数项级数的敛散性

一. 正项级数及其审敛法

二. 交错级数及其审敛法

三. 绝对收敛与条件收敛

## 一.正项级数及其审敛法

### 1.正项级数.

若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$中$u_n \geq 0$,则称该级数为正项级数.

很显然,正项级数的部分和列$\{S_n\}$是单调递增数列, $S_1 \leq S_2 \leq \cdots \leq S_n \leq \cdots$

**定理12.3.正项级数收敛**

$\Leftrightarrow$ 部分和列$\{S_n\}$有上界.

上页 下页 返回

例1.证明$p-$级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=\begin{cases} p\le 1\text{时发散} \\ p>1\text{时收敛} \end{cases}$.

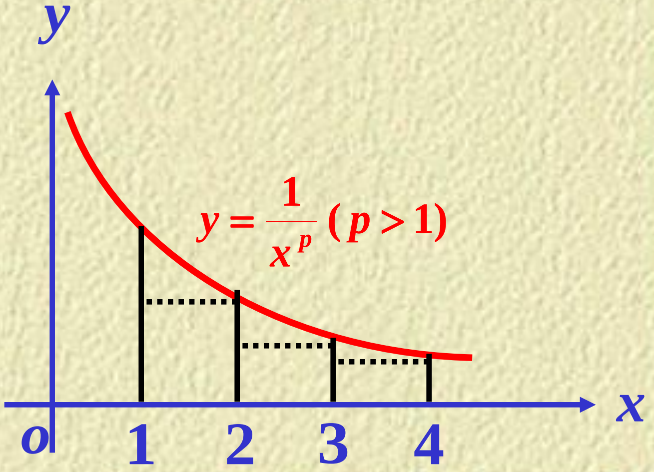
证明 设$p>1$,由图知$\int_{n-1}^{n}\frac{1}{x^p}dx\ge\int_{n-1}^{n}\frac{1}{n^p}dx=\frac{1}{n^p}$,

$$S_n=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}\qquad(n=1,2,3\cdots)$$

$$\le 1+\int_1^2\frac{dx}{x^p}+\cdots+\int_{n-1}^{n}\frac{dx}{x^p}$$

$$=1+\int_1^n\frac{dx}{x^p}=1+\frac{1}{p-1}\left(1-\frac{1}{n^{p-1}}\right)$$

$$<1+\frac{1}{p-1},$$




上页 下页 返回

$$p>1, \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x^p} dx \ge \int_{n-1}^{n} \frac{1}{n^p} dx = \frac{1}{n^p},$$

级数Cauchy积分判别法应用之例

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} \quad \left(n \in \mathbb{Z}^+\right)$$

$$\le 1 + \int_1^2 \frac{dx}{x^p} + \cdots + \int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x^p} = 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^p}$$

$$= 1 + \frac{1}{p-1}\left(1 - \frac{1}{n^{p-1}}\right) < 1 + \frac{1}{p-1},$$

$$\therefore S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}, p>1\text{时}, \{S_n\}\text{有上界},$$

$$\Rightarrow p>1\text{时}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}\text{收敛}.$$

2.比较审敛法(比较审敛法的不等式形式)

定理12.4.设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$均为正项级数,

且$u_n \le v_n \ (n \in \mathbb{N})$,则

(1).$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛.

(2).等价地,$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散.

注意:由性质3知条件$u_n \le v_n \ (n \in \mathbb{N})$换作

$u_n \le v_n \ (n \ge n_0)$,则结论亦成立.

证明 (1)设$\sigma=\sum_{n=1}^{\infty}v_n$, $\because u_n\le v_n$, 且

$$S_n=u_1+\cdots+u_n\le v_1+\cdots+v_n\le\sigma,$$

即级数部分和列有上界,故$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

(2)设$S_n\to\infty\,(n\to\infty)$且$u_n\le v_n$,

则$\sigma_n=\sum_{n=1}^{n}v_k\ge\sum_{n=1}^{n}u_k=S_n\to\infty$,

$\therefore\{\sigma_n\}$无界,$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散.

上页 下页 返回

许多时候,要求出正项级数的部分和 $S_n$ 的表达式,说明 $\{S_n\}$ 的有界性,或许存在着技术上的困难.使用比较审敛法,可以借助于参照级数,确定正项级数的敛散性.

使用比较审敛法的困难在于需要给出参照级数.通常,人们常用的参照级数有:几何级数, $p-$ 级数,调和级数.

上页 下页 返回

比较审敛法常用的参照级数：

A.几何级数$(a \neq 0)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \begin{cases} 当|q| < 1时,收敛 \\ 当|q| \geq 1时,发散 \end{cases}.$$

B. $p-$级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} 当p \leq 1时,级数发散 \\ 当p > 1时级数收敛 \end{cases},$$

特别地，调和级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$发散.

上页 下页 返回

例2.试说明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+n}{3^n+3n-8}$收敛.

解 $\because 2^n > n$,而$n \geq 3$时有$3n-8>0$,

$\therefore n \geq 3$时有 $\frac{2^n+n}{3^n+3n-8} < \frac{2\cdot 2^n}{3^n}$,

由$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$收敛知原级数收敛.

例2.(2).试说明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$发散.

解 $\because \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{1}{n+1}$,

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1} = \sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m}$,而级数$\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m}$发散,

$\therefore$ 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$发散.

$Q$.如何判断下列级数的敛散性？ 如何使用比较审敛法？

(1). $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$； (2). $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n - n}$；

(3). $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n$.

## 3.比较审敛法的极限形式.

定理12.4′.设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$均为正项级数,

$v_n > 0$.若$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$.则:

(1).$0 < l < +\infty$时,两级数有相同的敛散性.

(2).$l = 0$时,$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛.

(3).$l = +\infty$,$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散.

$$(3).\ l=+\infty,\ \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{发散} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{发散}.$$

$$\because \lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=+\infty \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{v_n}{u_n}=0.$$

由(2)知, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛, 那么

等价地, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散.

证明 (1). $\because \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=l$, $\therefore$ 对于$\varepsilon_0=\dfrac{l}{2}>0$,

$\exists N$,当$n>N$时,有$\left|\dfrac{u_n}{v_n}-l\right|<\varepsilon_0=\dfrac{l}{2}$,

$\therefore n>N$时,有$l-\dfrac{l}{2}<\dfrac{u_n}{v_n}<l+\dfrac{l}{2}$,

即 $\dfrac{l}{2}v_n<u_n<\dfrac{3l}{2}v_n\ (n>N)$.

由比较审敛法的不等式形式,得证.

(2). 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=0$, 对于 $\varepsilon_0>0$, $\exists N$,

$\forall n>N$, 有 $\left|\dfrac{u_n}{v_n}-0\right|<\varepsilon_0$,

$\therefore \forall n>N$, 有 $0\le\dfrac{u_n}{v_n}<\varepsilon_0$,

$\therefore 0\le u_n<\varepsilon_0 v_n \quad (n>N)$.

由比较审敛法的不等式形式, 得证.

使用比较审敛法的极限形式,人们常用几何级数, $p-$级数作为参照级数.

例如, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}$

$n\to\infty, \frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}\sim\frac{1}{4n^2},$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}$收敛.

例3.判断下列级数的敛散性.

$$(1).\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n};\qquad (2).\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n-n}.$$

解(1). $\because\ 0<x<\frac{\pi}{2}$时, $\frac{2}{\pi}x<\sin x<x$,

$\therefore \sin\frac{1}{n}>\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n}$,或曰: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1$,

而调和级数$\sum\frac{1}{n}$发散,$\therefore$ 原级数发散.

上页 下页 返回

例.求出正弦曲线$y=\sin x$在点$O(0,0)$处的切线方程.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\sin 0}{x-0}=1,$

$\therefore$ 曲线$y=\sin x$在点$O(0,0)$处的切线的斜率$=1,$

$\therefore$ 切线方程为 $y-0=1\cdot(x-0)$即 $y=x.$

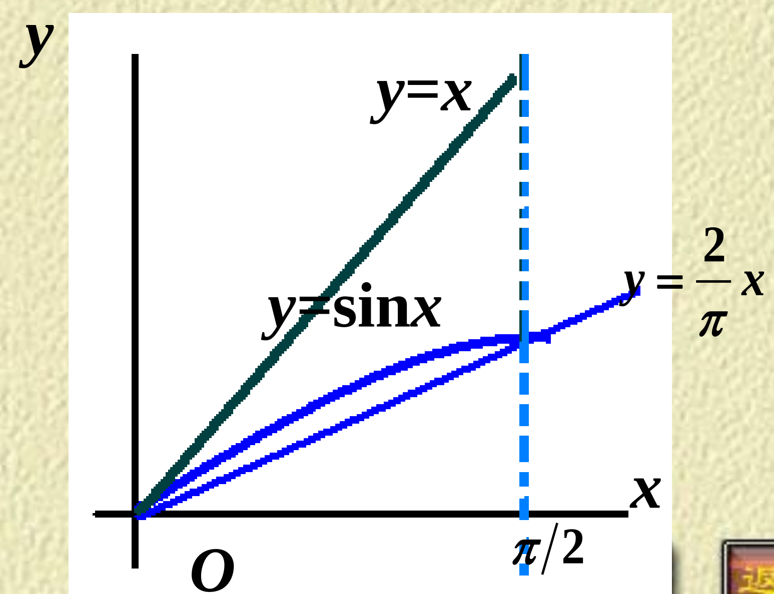
由此,并借助于数形结合,我们可以获得一个

以后很有用的

**Jordan不等式**:

$0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$ 时有

$$\frac{2}{\pi}x\le\sin x\le x.$$



$$(2).\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n-n},$$

$$\forall n\in\mathbb{Z}^+, 2n<3^n, \therefore \frac{1}{3^n-n}<\frac{1}{3^n-\frac{1}{2}\cdot 3^n}=\frac{2}{3^n},$$

或者：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{3^n-n}}{\dfrac{1}{3^n}}=1,$

几何级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}$收敛$\Rightarrow$原级数收敛.

上页 下页 返回

例4.判断下列级数的敛散性.

$$(1).\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+5n+1}{\sqrt{n^6-3n^2+1}};\quad (2).\sum\left(1-\cos\frac{x}{n}\right).$$

解 (1). $n\to\infty$时,有等价无穷大量

$$2n^2+5n+1\sim 2n^2,$$

$$\sqrt{n^6-3n^2+1}\sim n^3,$$

$$\therefore n\to\infty\text{时},\frac{2n^2+5n+1}{\sqrt{n^6-3n^2+1}}\sim\frac{2}{n},$$

由$\sum\frac{2}{n}$发散,知原级数发散.

上页 下页 返回

(2). $\sum\left(1-\cos\frac{x}{n}\right)$.

$x=0$时, $\sum\left(1-\cos\frac{x}{n}\right)=\sum 0=0$收敛;

$x\neq 0$时, $\because t\to 0$时, $1-\cos t\sim\frac{1}{2}t^2$,

$\therefore n\to\infty$时, $1-\cos\frac{x}{n}\sim\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{n^2}$,

由$\sum\frac{1}{n^2}$收敛 $\Rightarrow\sum\left(1-\cos\frac{x}{n}\right)$收敛.

例5.判断级数$\sum \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$的敛散性.

解　虽然$1+\frac{1}{n}>1$,但$1+\frac{1}{n}$不是一个$>1$的常数,

其实$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1$,

$\therefore \sum \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$发散.

上页　下页　返回

说明:

1.切记:比较判别法只适用于正项级数的敛散性的判断.

2.$u_n \geq 0$,在$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$时,我们可以与$u_n$为同阶(等价)无穷小量$v_n$对应的正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$的敛散性获知$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的敛散性.

而作为参照级数的$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$一定是我们熟悉的.

说明：

3.比较判别法的极限形式使用起来多数情况下要比不等式形式更方便,只需要判断级数的通项趋近于零的速度如何——即作无穷小量的比较.

上页 下页 返回

说明:

4.对于正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \lim_{n\to\infty} u_n = 0,$

若有$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0,$则$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛.

此处参照级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$一定是我们熟悉的,

$u_n$是$v_n$的高阶无穷小量.

基本的无穷大量比较之结果：

$n \to \infty$时，

$$\ln^a n << n^b << c^n << n! << n^n << \cdots$$

此处$a > 0, b > 0, c > 1$,

其中“$u << v$”意味着$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u}{v} = 0.$

无穷大量没有最大只有更大！

上页 下页 返回

思考题：判断$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{2n^2}$的敛散性.

解 由于$\because n\to\infty$时，$\arctan\frac{1}{2n^2}\sim\frac{1}{2n^2}$，

而 $\sum\frac{1}{2n^2}$收敛，

由比较判别法极限形式知

$$\sum_{1}^{\infty}\arctan\frac{1}{2n^2}\text{ 收敛.}$$

思考题：判断$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\dfrac{1}{2n^2}$的敛散性.

解 直接使用定义,此做法不容易想到 .

记$\arctan(2n+1)=\alpha,\arctan(2n-1)=\beta$,

则$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=$

$$=\frac{(2n+1)-(2n-1)}{1+(2n+1)(2n-1)}=\frac{1}{2n^2},$$

$$\therefore \arctan\frac{1}{2n^2}=\arctan(2n+1)-\arctan(2n-1).$$

$$\sum_{k=1}^{n}\arctan\frac{1}{2k^2}=\sum_{k=1}^{n}\left[\arctan(2k+1)-\arctan(2k-1)\right]$$

$$=\arctan(2n+1)-\arctan 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{2n^2}=\frac{\pi}{4}.$$

上页 下页 返回

思考题：判断$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{2n^2}$的敛散性.

解 能用定义法解决问题是可遇而不可求的 .

$$\because \arctan\frac{1}{2n^2}=\arctan\frac{1}{2n-1}-\arctan\frac{1}{2n+1},$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n}\arctan\frac{1}{2k^2}=\arctan 1-\arctan\frac{1}{2n+1},$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{2n^2}=\arctan 1=\frac{\pi}{4}.$$

---

$$x\neq 0, \arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}-\arctan x.$$

上页 下页 返回

思考练习1.下列级数是否收敛：

$$(1).\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{n^7-2n+9}};$$

$$(2).\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{2n+1}\right);\qquad (3).\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n};$$

$$(4).\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin\dfrac{\pi}{3n}}{1+2^n+3^n}.$$

$$(1).\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{n^7-2n+9}};$$

$n\to\infty$时,$n^7-2n+9\sim n^7$,

$$\frac{n}{\sqrt[3]{n^7-2n+9}}\sim\frac{n}{\sqrt[3]{n^7}}=\frac{1}{n^{4/3}}$$

由$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4/3}}$收敛,知原级数收敛.

$$(2).\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)$$

$\because n\to\infty$时,

$$\ln\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)\sim\frac{1}{2n+1}\sim\frac{1}{2n},$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散 $\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$发散

$\Rightarrow$原级数发散.

$$(3).\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$$

$$\because \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n}{2^n}}{\dfrac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\left(\sqrt{2}\right)^n}=0,$$

而$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^n}$收敛,知原级数收敛.

上页 下页 返回

有位以前的学生某君告诉我：

考虑以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 为比较级数，

$$\because \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{2^n}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{2^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{2^x}\underset{\substack{\uparrow\\ \boxed{\text{洛必达法则}}}}{==}\cdots=0,$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，知原级数收敛.妙！

上页 下页 返回

$$(4).\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin\frac{\pi}{3n}}{1+2^n+3^n}$$

$n\to\infty$时, $n\sin\dfrac{\pi}{3n}\to\dfrac{\pi}{3}$,

$$1+2^n+3^n\sim 3^n,$$

$$\therefore \frac{n\sin\frac{\pi}{3n}}{1+2^n+3^n}\sim\frac{\frac{\pi}{3}}{3^n},$$

而$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$收敛,知原级数收敛.

上页 下页 返回

## 4. 比值审敛法(达朗贝尔D’ Alembert判别法) 根值审敛法 (柯西Cauchy判别法)：

在正项级数的敛散性判断中,利用比较判别法,以几何级数为参照级数,我们就有了比值判别法(达朗贝尔D’ Alembert判别法)和根值判别法 (柯西Cauchy判别法) .

## 定理12.5.(1) 比值审敛法 (D' Alembert判别法)

对于正项级数$\sum u_n$,如果存在某$n_0 \in \mathbb{Z}^+$,

(1). 存在常数$r<1$,使

对$\forall n > n_0, \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \le r$,

则级数$\sum u_n$收敛;

(2). $\forall n > n_0, \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \ge 1$,

则$\sum u_n$发散.

## 定理12.5.(2) 根值审敛法 (柯西Cauchy判别法)

对于正项级数$\sum u_n$,

如果存在某$n_0 \in \mathbb{Z}^+$,

(1). 存在常数$0 \le r < 1$,

使对$\forall n > n_0$,

有$\sqrt[n]{u_n} \le r < 1$,

则级数$\sum u_n$收敛;

(2). $\forall n > n_0, \sqrt[n]{u_n} \ge 1$,

则$\sum u_n$发散.

比值审敛法(达朗贝尔D′Alembert判别法)

根值审敛法(柯西Cauchy判别法)极限形式.

定理12.5′.对正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$,若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=r\text{或}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=r,(r\text{有限或}+\infty),$$

(1).若$0\le r<1$,则级数$\sum u_n$收敛;

(2).若$r>1$,则级数$\sum u_n$发散;

(3).若$r=1$,则级数敛散性无法确定.

上页 下页 返回

证明 (1).当$r$为有限数时,

$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N$时,有$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - r \right| < \varepsilon$,

即 $r - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < r + \varepsilon.$

当$r < 1$时,取$\varepsilon < 1 - r$,使 $l = \varepsilon + r < 1$,

$u_{N+1} < l u_N, u_{N+2} < l u_{N+1} < l^2 u_N, \cdots,$

$u_{N+m} < l^m u_N,$

上页 下页 返回

当$r<1$时，取$\varepsilon<1-r$，使$l=\varepsilon+r<1$，

$$u_{N+1}<lu_N, u_{N+2}<lu_{N+1}<l^2u_N, \cdots,$$

$u_{N+m}<l^m u_N$，而几何级数

$$\sum_{m=0}^{\infty} l^m u_N = u_N\left(1+l+\cdots+l^m+\cdots\right)$$收敛，

$$\therefore \sum_{m=0}^{\infty} u_{N+m}=\sum_{n=N}^{\infty} u_n$$收敛，$\therefore$ 级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛.

返回

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=r>1,\text{则对于}\varepsilon_0=\frac{r-1}{2}>0,$$

$$\exists N,\forall n\geq N,\text{有}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}-r\right|<\varepsilon_0,$$

$$\text{即}\frac{u_{n+1}}{u_n}-r>-\varepsilon_0\Rightarrow\frac{u_{n+1}}{u_n}>r-\varepsilon_0=\frac{r+1}{2}=l>1,$$

$$\therefore u_{N+1}>lu_N,u_{N+2}>lu_{N+1}>l^2u_N,\cdots,$$

$$u_{N+m}>l^m u_N,\cdots\Rightarrow\forall n\geq N,u_n>u_N>0,$$

$$\text{而级数}(u_N+u_N+\cdots)\text{发散}\Rightarrow\sum_{n=N}^{\infty}u_n\text{发散},$$

$$\therefore\text{级数}\sum_{n=1}^{\infty}u_n\text{发散}.$$

上页 下页 返回

(2).如果$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=r<1$,则对于$\varepsilon_0=\dfrac{1-r}{2}>0$,

$\exists N, \forall n \ge N$,有$\left|\sqrt[n]{u_n}-r\right|<\varepsilon_0$,

$$\sqrt[n]{u_n}-r<\varepsilon_0 \Rightarrow \sqrt[n]{u_n}<\frac{1+r}{2}=l<1,$$

$\therefore$ 对$n \ge N, u_n < l^n, 0<l<1$,几何级数$\sum\limits_{N}^{\infty} l^n$收敛,

$\sum\limits_{N}^{\infty} u_n$收敛$\Rightarrow$级数$\sum u_n$收敛 .

上页 下页 返回

说明：

1.由定理12.5′的证明过程可以看出，比值/根值审敛法就是以几何级数为参照级数而使用了比较审敛法，但在具体使用时就是不必再去寻找参照级数了，而只须依赖级数自身.

2.定理12.5′说，若$r=1$，则级数敛散性无法确定.所以比值/根值审敛法有时会失效.

例6.判断下列级数的敛散性.

$$(1).\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!};(2).\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^{n};(3).\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n};(4).\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^{n}}.$$

解(1). $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{(n+1)!}}{\dfrac{1}{n!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=0,$

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$ 收敛.

上页 下页 返回

$$(1).\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!},$$

比值法 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0,$

根值法试之, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=?$ 此极限不易求得.

尽管 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1,\cdots,\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n-1}=1,\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1,$

但是 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{1}\cdot\sqrt[n]{2}\cdots\cdot\sqrt[n]{n-1}\cdot\sqrt[n]{n}\right)$

$$\neq\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}\cdots\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n-1}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!},\text{根值法试之},\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=?$$

搜索枯肠,思之再三,$\forall n\in\mathbb{Z}^{+},\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<3,$

$$\Rightarrow\frac{2}{1}<3,\left(\frac{3}{2}\right)^{2}<3,\cdots,\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}<3,$$

$n$个式子相乘,$\dfrac{(n+1)^{n}}{n!}<3^{n},\therefore\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}<\dfrac{3}{n}.$

上页 下页 返回

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$,根值法试之,$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=?$

$\forall n\in\mathbb{Z}^{+},\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<3,$

$\Rightarrow\frac{(n+1)^{n}}{n!}<3^{n},\therefore 0<\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}<\frac{3}{n}.$

$\therefore\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0\quad\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 收敛.

← 此做法难度大,要求高,一般不用.

或者，见上册$P39$，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = a$，

又若$a_n > 0$，则$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a$，

$$\therefore \text{由} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0,$$

再者，$\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e \Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{1}\right)^1 \cdot \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 \cdots \left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} = e,$$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$，故由根值法知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!}$收敛.

关于$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}=?$还可用积分处理：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim_{n\to\infty}e^{\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}},$$

$$\lim_{n\to\infty}\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\ln\frac{i}{n}=\int_0^1\ln x\,dx$$

$$=\int_{0+}^1\ln x\,dx=-1,$$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}=e^{-1}$，这说明了$n\to\infty$时，$\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}\sim\dfrac{e}{n}$.

上页 下页 返回

$$(2).\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^{n};$$

根据通项的特点,考虑用根值法:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n+2}=\frac{1}{3}<1,$$

$\therefore$ 级数收敛.

若用比值法,计算较麻烦.

用比值法: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{n+2}{3n+5}\right)^{n+1}}{\left(\dfrac{n+1}{3n+2}\right)^{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{n}(n+2)}{\left(\dfrac{3n+5}{3n+2}\right)^{n}(3n+5)}=\frac{1}{3}<1,$$

$\therefore$ 级数收敛,其中

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{\frac{n}{n+1}}=e^{1}=e,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+5}{3n+2}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{3n+2}\right)^{\frac{3n+2}{3}}\right]^{\frac{3n}{3n+2}}=e^{1}=e.$$

判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^{n}$的敛散性.

法二 $\because n\in\mathbb{Z}^{+}, x>0$时$x^{n}$是增函数,

由$\frac{n+1}{3n+2}<\frac{1}{2}\Rightarrow\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^{n}<\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$,

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n}}$收敛$\Rightarrow$原级数收敛.

$Q$:怎么找到比较的参照级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n}}$的呢?

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n,$$

参照级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$的给出似乎是很神奇又是很突兀的.

由$\frac{n+1}{3n+2}<\frac{1}{2}\Rightarrow\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n<\left(\frac{1}{2}\right)^n,$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$收敛$\Rightarrow$原级数收敛.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n$$

解二之变形

怎样找到比较的参照级数呢?

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{3n+2}=\dfrac{1}{3}$,考虑参照级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}$,

$$\because \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{n+1}{3n+2}\right)^n}{\dfrac{1}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+3}{3n+2}\right)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n,$$

$$\because \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{n+1}{3n+2}\right)^n}{\dfrac{1}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+3}{3n+2}\right)^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{3n+2}\right)^{(3n+2)}\right]^{\frac{n}{3n+2}}=e^{\frac{1}{3}},$$

$\therefore$ 我们可以取$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$为参照级数,

级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ 收敛 $\Rightarrow$ 原级数 收敛.

$$(3).\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)\cdot 2n}{(2n+1)(2n+2)}=1,$$

比值法失效.同样,用根值法:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{(2n-1)\cdot 2n}}=1,\Leftarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1,$$

$\therefore$比值法失效,根值法也失效.

上页 下页 返回

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}$$：仍用比较判别法：

由 $0<\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}<\frac{1}{n^2}$ 或

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}}{\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{4},$$

$\because$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛,故原级数收敛.

上页 下页 返回

(4). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$,

比值法 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}\cdot\frac{10^n}{n!}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{10}=\infty$,

用根值法解之,若知 $n\to\infty$ 时, $\sqrt[n]{n!}\sim\frac{n}{e}$,

则可得 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{10}=\infty$,

$\Rightarrow$ 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$ 发散.

说明:

2.定理12.5.中,若$r=1$,比值/根值审敛法失效,级数敛散性无法确定,我们需要寻求其它方法.

例如, $p$一级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$,对任意确定的数$p$,都有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=1.$$

而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散,级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛.

说明:

3.对于正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$而言,

若$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = r$或$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = r$.则

(1).当$0 \le r < 1$时,$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 0$;

(2).当$r > 1$时,$\lim_{n\to\infty} u_n = \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散.

例6.(4). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$, 由比值法

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}\cdot\frac{10^n}{n!}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{10}=\infty,$$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}u_n=\infty \Rightarrow$ 故级数发散.

$$(4).\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n},$$

比值法 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{(n+1)!}{10^{n+1}}\cdot\dfrac{10^n}{n!}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{10}=\infty,$

用根值法解之,若知 $n\to\infty$ 时, $\sqrt[n]{n!}\sim\dfrac{n}{e},$

则可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{10}=\infty,$

$\Rightarrow$ 故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{10^n}$ 发散.

例7.求证： $\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}=0.$

分析：一种简便的做法是：

由无穷级数收敛的必要条件

$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛 $\Rightarrow \lim_{n\to\infty}u_n=0$ 推得.

证明 对于正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$,

返回

证明 对于正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$,

$$\because \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)^{n+1}}{((n+1)!)^2}}{\dfrac{n^n}{(n!)^2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}{n+1}=0,$$

上页 下页 返回

对于正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$,

$$\because \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n+1}=0,$$

$\therefore$ 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$收敛.

由级数收敛必要条件得$\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}=0.$

说明:

4. 对于正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$,如果$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=r$,

那么$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=r$,(但反之不真).所以对于正项级数而言,如果能用比值法得到其收敛性,则一定可以用根值法得到其收敛性,但反之不成立.

所以,根值法适用的面要比比值法的宽,如下面的例8.

见上册P39, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = a$,

又若 $a_n > 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a$,

所以, 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = r$,

则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{u_2}{u_1} \cdot \dfrac{u_3}{u_2} \cdots \dfrac{u_{n+1}}{u_n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{u_{n+1}}}{\sqrt[n]{u_1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_{n+1}} = r$,

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{u_n}{u_{n+1}} u_{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{u_n}{u_{n+1}}} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_{n+1}} = r$,

$a > 0$, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$,

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0, \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$,

# 一个数列极限中的一个常用结论

(1).如果$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=a$ ;

(2).若 $x_n > 0\ (n=1,2,\cdots)$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=a$ .

证明 (1).$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,不妨设$a=0$,否则令$x_n := x_n - a$,

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists N_1,\forall n>N_1, s.t.\left|x_n\right|<\varepsilon.$

$$\therefore \left|\frac{x_1+\cdots+x_{N_1}+x_{N_1+1}+\cdots+x_n}{n}\right|$$

$$\le \left|\frac{x_1+\cdots+x_{N_1}}{n}\right|+\left|\frac{x_{N_1+1}+\cdots+x_n}{n}\right|$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1, \forall n > N_1, s.t. |x_n| < \varepsilon.$$

$$\therefore \left|\frac{x_1 + \cdots + x_{N_1} + x_{N_1+1} + \cdots + x_n}{n}\right|$$

$$\leq \left|\frac{x_1 + \cdots + x_{N_1}}{n}\right| + \left|\frac{x_{N_1+1} + \cdots + x_n}{n}\right|$$

$$\left|\frac{x_{N_1+1} + \cdots + x_n}{n}\right| \leq \frac{|x_{N_1+1}| + \cdots + |x_n|}{n}$$

$$< \frac{(n - N_1)\varepsilon}{n} < \varepsilon,$$

而$N_1$是取定之值, 即$\left|x_1+\cdots+x_{N_1}\right|$为定值,

$$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists N_2, \forall n > N_2, s.t. \left|\frac{x_1+\cdots+x_{N_1}}{n}\right| < \varepsilon.$$

$$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists N = \max(N_1, N_2),$$

$$\forall n > N, s.t. \left|\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right| < 2\varepsilon,$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} = a \ ;$$

下证(2).若 $x_n > 0$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} = a$ .

由$x_n > 0 \Rightarrow a \geq 0$.

若$a > 0$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n} = \dfrac{1}{a} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1/x_1+\cdots+1/x_n}{n} = \dfrac{1}{a}$.

$x_n > 0$,由$\dfrac{n}{1/x_1+\cdots+1/x_n} \leq \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \leq \dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n}$,

由迫敛性, 得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} = a$ ;

若$a = 0$,当然$0 < \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \leq \dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n}\cdots$证毕.

例8.讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$的敛散性.

解 $\because 0 < u_n = \frac{2+(-1)^n}{2^n} \le \frac{3}{2^n} = v_n$,

$\therefore$ 级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$收敛.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n},$$

考察$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{2+(-1)^{n+1}}{2\left(2+(-1)^n\right)}=a_n,$

$$\lim_{n\to\infty}a_{2n}=\frac{1}{6},\lim_{n\to\infty}a_{2n+1}=\frac{3}{2}>1,$$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 不存在.

在此比值审敛法不能用.

上页 下页 返回

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n},\because 1\le 2+(-1)^n\le 3,$$

$$1\le\sqrt[n]{2+(-1)^n}\le\sqrt[n]{3}\ ,\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}=1,$$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{2+(-1)^n}}{2}=\frac{1}{2}<1,$$

$$\therefore \text{级数}\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}\text{收敛}.$$

其实,由级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$,$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$的收敛性,由收敛级数的线性性质知:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{2^n}+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \text{收敛.}$$

## 5. 柯西Cauchy 积分判别法

定理 12.6 设 $f$ 为 $[1,+\infty)$ 上非负减函数，那么正项级数 $\sum f(n)$ 与反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 同时收敛或同时发散.

证：由假设 $f$ 为 $[1,+\infty)$ 上非负减函数，对任何正数 $A$, $f$ 在 $[1,A]$ 上可积，从而有

$$f(n) \le \int_{n-1}^{n} f(x)dx \le f(n-1)\,, n = 2,3,\cdots$$

依次相加可得

$$\sum_{n=2}^{m} f(n) \le \int_1^m f(x)dx \le \sum_{n=2}^{m} f(n-1) = \sum_{n=1}^{m-1} f(n) \quad (1)$$

若反常积分收敛,则由上式左边,对任何正整数$m$有:

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} f(n) \le f(1) + \int_1^m f(x)dx \le f(1) + \int_1^{+\infty} f(x)dx$$

根据定理12.2,级数 $\sum f(n)$ 收敛.

反之,若$\sum f(n)$为收敛级数，则由（1）式右边,

对任一正整数$m(>1)$ 有

$$\int_1^m f(x)dx \le S_{m-1} \le \sum f(n) = S \cdots\cdots(2)$$

因为 $f$ 为非负减函数，故对任何正数 $A$，都有

$$0 \le \int_1^A f(x)dx \le S_n < S \ , n \le A \le n+1$$

结合（2）式得反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛.

同理可证它们同时发散.

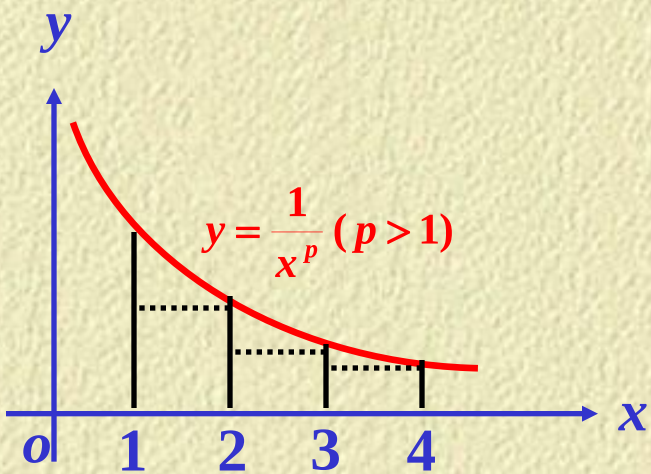
见前面的例1,证明$p-$级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=\begin{cases}p\le 1\text{时发散}\\ p>1\text{时收敛}\end{cases}$.

证明 设$p\le 1$, $\because \frac{1}{n^p}\ge\frac{1}{n}$,则$p-$级数发散;

设$p>1$,由图可知, $\frac{1}{n^p}<\int_{n-1}^{n}\frac{dx}{x^p}$,

$$S_n=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}$$

$$\le 1+\int_1^2\frac{dx}{x^p}+\cdots+\int_{n-1}^{n}\frac{dx}{x^p}$$




上页 下页 返回

$$=1+\int_1^n \frac{dx}{x^p}=1+\frac{1}{p-1}\left(1-\frac{1}{n^{p-1}}\right)<1+\frac{1}{p-1},$$

即$S_n$有界,则$p-$级数收敛.

$$p-\text{级数}\begin{cases}\text{当}p>1\text{时收敛}\\ \text{当}p\le 1\text{时发散}\end{cases}$$

例9.利用积分判别法我们可以说明

广义的$p-$级数的敛散性:

$$(1).\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{p}}\ ; \qquad (2).\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)(\ln\ln n)^{p}}$$

在$p \le 1$ 时发散, $p > 1$ 时收敛.

过程从略.

上页 下页 返回

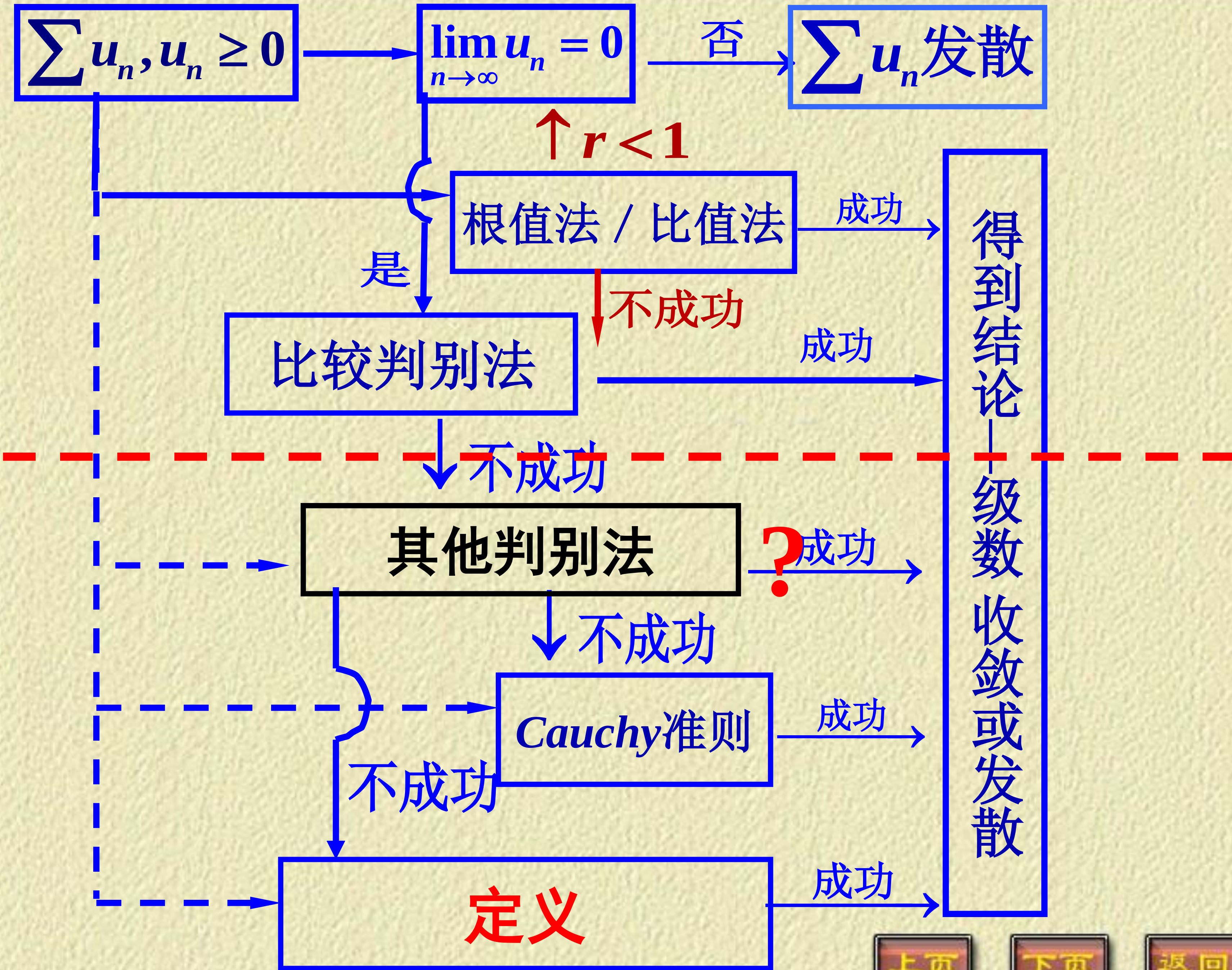
## 6. 道高一尺,魔高一丈
## ——更精细的正项级数的收敛判别法

作为特殊的级数__正项级数，在有了 比较判别法特别是其极限形式后,我们常用*p*-级数和几何级数作为级数敛散性判断的参照物.

以几何级数为参照物,我们获得了比值审敛法(达朗贝尔D' Alembert判别法)和根值审敛法 (柯西Cauchy判别法).

比较判别法的精髓是:当待判别的级数的通项→0的速度比参照级数通项→0的速度快,那么参照级数收敛⇒待判别的级数收敛. 问题是待判别的级数的通项→0的速度比较慢,这时就要寻找一个收敛的而且通项→0的速度更慢的参照级数.这一过程永无止境.

上页 下页 返回


$\sum u_n, u_n \geq 0$
$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$
否
$\sum u_n$发散
$r<1$
根值法 / 比值法
成功
是
不成功
比较判别法
成功
不成功
其他判别法
?
成功
不成功
Cauchy准则
成功
不成功
定义
成功
得到结论——级数收敛或发散

比较判别法的比值形式 (见习题)

设级数$\sum u_n, u_n > 0, \sum v_n, v_n > 0.$

$\exists n_0, \forall n > n_0$,有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \le \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

那么, $\sum v_n < \infty \Rightarrow \sum u_n < \infty$

$$\sum u_n = \infty \Rightarrow \sum v_n = \infty$$

依此思路,对比值$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$进行分析

以 $p$-级数及其推广结果为参照级数,有以下结果:

级数 $\sum u_n, u_n > 0$

由$\sum \frac{1}{n^p} = \begin{cases} < \infty, p > 1 \\ = \infty, p \le 1 \end{cases}$得

(1).*Raabe*判别法:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = r \Rightarrow \begin{cases} r > 1\text{时级数收敛} \\ r < 1\text{时级数发散} \end{cases}.$$

级数 $\sum u_n, u_n > 0$

由$\sum \frac{1}{n(\ln n)^p} = \begin{cases} < \infty, p > 1 \\ = \infty, p \leq 1 \end{cases}$得

(2).*Bertrand*判别法：

$$\lim_{n\to\infty} \ln n \left[ n\left( \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] = b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b > 1\text{时级数收敛} \\ b < 1\text{时级数发散} \end{cases}.$$

由$\sum \frac{1}{n\ln n(\ln n \ln n)^p}$

$$= \begin{cases} <\infty, p>1 \\ =\infty, p\le 1 \end{cases}$$ 得

依*Bertrand*判别法的思路，

可以获得更加精细的结论.

级数 $\sum u_n, u_n > 0$

(3).$Gauss$判别法：

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{\mu}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right), \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu > 1\text{时级数收敛} \\ \mu \le 1\text{时级数发散} \end{cases}.$$

上页 下页 返回

另外还有

(4).对数判别法：$\sum u_n, u_n > 0$,

$$(i).\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\dfrac{1}{u_n}\right)}{\ln n}=l\Rightarrow\begin{cases} l>1\text{时级数收敛} \\ l<1\text{时级数发散}\end{cases};$$

$$(ii).\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\dfrac{1}{nu_n}\right)}{\ln\ln n}=t\Rightarrow\begin{cases} t>1\text{时级数收敛} \\ t<1\text{时级数发散}\end{cases}.$$

上页 下页 返回

(5).*Kummer*判别法：

对于级数$\sum u_n, u_n > 0$,

$(i).\sum u_n < \infty \Leftrightarrow \exists\{v_n\}, v_n > 0, \exists n_0, \forall n > n_0,$

$$\exists\delta > 0, \quad v_n \cdot \frac{u_n}{u_{n+1}} - v_{n+1} \geq \delta > 0;$$

$$(ii).\sum u_n = \infty \Leftrightarrow \exists\sum\frac{1}{v_n} = \infty, v_n > 0,$$

$$\exists n_0, \forall n > n_0, v_n \cdot \frac{u_n}{u_{n+1}} - v_{n+1} \leq 0.$$

$Vol.2, P24$ 总练习题

$Ex4(3)$ $u_n > 0, \sum u_n < \infty$,是否存在$\varepsilon > 0$,

使得 $$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{\dfrac{1}{n^{1+\varepsilon}}} = c > 0 \quad ?$$

解 不存在,如$\sum \dfrac{1}{n(\ln n)^2} < \infty$

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to\infty} \frac{1/n(\ln n)^2}{1/n^{1+\varepsilon}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\varepsilon}}{(\ln n)^2} = \infty$$

上页 下页 返回

*Theorem (du Bois Reymond):*

设$u_n > 0, \sum u_n < \infty$,则存在$\sum v_n < \infty, v_n > 0$,

使得 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0.$

证明 $u_n > 0, \sum u_n < \infty \Leftrightarrow R_n = \sum\limits_{n+1}^{\infty} u_k \to 0, R_n \downarrow,$

记$R_0 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$,取 $v_n = \sqrt{R_{n-1}} - \sqrt{R_n} > 0, n \in \mathbb{Z}^+,$

$\because \sum\limits_{k=1}^{n} v_k = \sqrt{R_0} - \sqrt{R_n} < \sqrt{R_0}$,又$\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} v_k\right\}\uparrow,$

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n < \infty$,但是$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{R_{n-1} - R_n}{\sqrt{R_{n-1}} - \sqrt{R_n}}$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{R_{n-1}} + \sqrt{R_n}\right) = 0.$$

上页 下页 返回

$Theorem(Abel):$

设$u_n > 0, \sum u_n = \infty$,则

存在$\sum v_n = \infty, v_n > 0,$

使得 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \infty.$

对于正项级数而言,如使用比较判别法,并不存在万能的优级数.

思考练习2.下列级数是否收敛：

$$(1).\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n};\qquad (2).\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n};$$

$$(3).\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{3^n\cdot n!};\qquad (4).\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^2\dfrac{n\pi}{3}}{2^n}.$$

上页 下页 返回

$$(1).\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n};$$

法一:定义法,错位相减…

法二:比较判别法,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n/2^n}{1/\left(\sqrt{2}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\left(\sqrt{2}\right)^n}=0,\cdots$$

$$(1).\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$$ 法三:比值法

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n+1}{2^{n+1}}}{\dfrac{n}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}<1,$$

或根值法 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n}}{2}=\dfrac{1}{2}<1,$

由此,知原级数收敛.

$$(2).\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$$

$\because$ 通项中有$n!$的因子,故不考虑用根值法.

比值法 $$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}<1,$$

由此,知原级数收敛.

(3). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n \cdot n!}$.

通项中有$n!$的因子,用比值法:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(n+1)^{n+1}}{3^{n+1}\cdot(n+1)!}}{\dfrac{n^n}{3^n \cdot n!}}$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{3} < 1,$$

$\longrightarrow$该级数收敛.

上页 下页 返回

$$(4).\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}.$$

解 $$u_n=\frac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}\le\frac{n}{2^n},\text{令}v_n=\frac{n}{2^n},$$

$$\because\lim_{n\to\infty}\frac{v_{n+1}}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}<1,$$

$$\therefore\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}<\infty\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}<\infty.$$

级数 (1).$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$; (2).$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$;

(3).$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{3^n\cdot n!}$中,(2),(3)是否收敛的判断,要是不用比值/根值法,似乎都比较困难.

思考练习3.

若$n\geq 1$时有$a_n\leq b_n\leq c_n$,且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$都收敛.试问$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$是否收敛?

答案是:$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛.

解 $\forall n \geq 1, a_n \leq b_n \leq c_n, \Rightarrow 0 \leq b_n - a_n \leq c_n - a_n,$

$\because$ 级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} c_n$都收敛,

$\therefore$ 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(c_n - a_n)$收敛, ←—— 性质2

由正项级数的比较判别法知$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n)$收敛,

$$b_n - a_n = b_n - a_n + a_n,$$

再由级数的线性性质知$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛.