6-01 微分中值定理

在我们学习了导数与微分以后,虽然我们知道导数反映函数值的变化情况,可是我们还没有看到导数与微分在解决实际问题时能有什么作为,其实原因就是我们还没有什么有力的工具.

在学习了导数以后,我们知道了常数函数的导数恒为零,单调增加的可导函数的导数大于等于零,那么反过来呢?

——导数恒为零的函数只能是常数吗?

——函数的导数大于等于零的函数必定单调增加吗?

许多猜想的验证，解决问题的工具的准备都要通过研究**微分中值定理**以后才能落实.

导数的应用要解决的一个主要问题是函数的极(大,小) 值与最大、小值的计算问题——闭区间上的连续函数一定有最大值和最小值,可是在哪里呢,等于多少? 人们在经济活动中,往往会希望以一定的投入获得最大的产出,或者以一定的需求而期望给予最少的投入.这就是经济学中的最优化问题——经济学家P.Samuelson定义:经济学研究的是要将稀缺的资源作合理的分配，以使得满足人们最大的需求。这也就是要使得效用函数取得最大值。

罗尔(*Rolle*)定理

Th.1. 罗尔$\left(Rolle\right)$定理：

设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，

在(a,b)内可导，

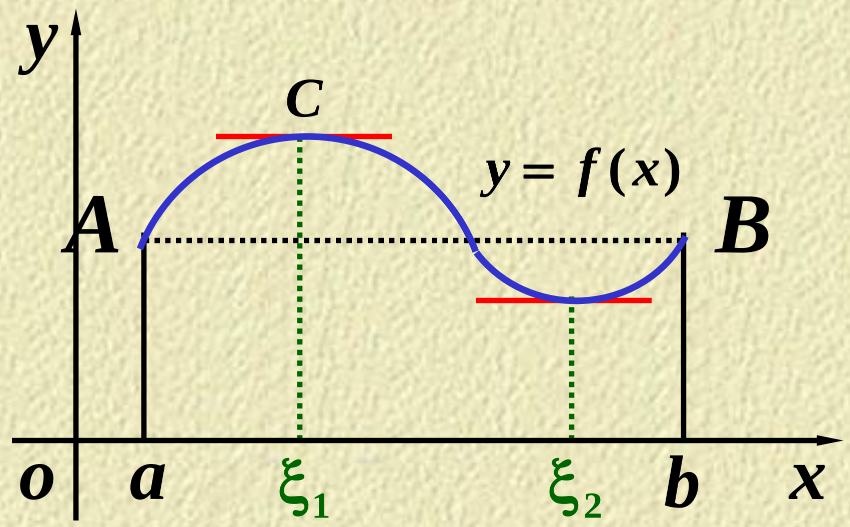
且$f(a)=f(b)$.

则存在$\xi\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi)=0.$$

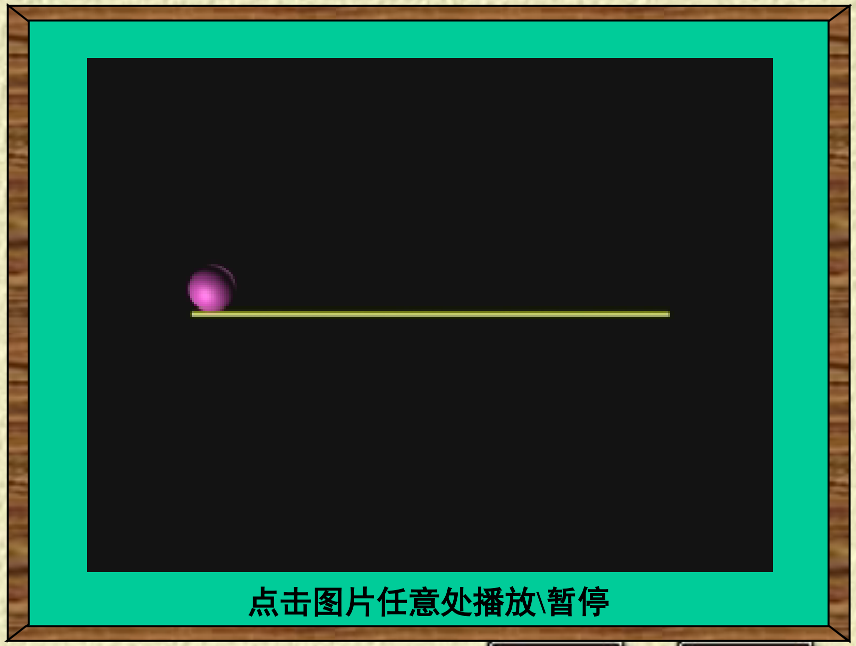
几何解释:

在曲线弧AB上至少有一点C,在该点处的切线是水平的.



物理解释:

变速直线运动在折返点处,瞬时速度等于零.



证明 $\because f(x)$在$[a,b]$连续,

$\therefore f(x)$在$[a,b]$上必有最大值M和最小值m.

(1).若 $M=m$.则$f(x)=M$.

由此得 $f'(x)=0.\forall\xi\in(a,b)$,都有$f'(\xi)=0$.

(2).若 $M>m,\because f(a)=f(b)$,

$\therefore$最大值与最小值不可能同时在端点取得.

不妨设 $M\neq f(a)$,

则在(a,b)内至少存在一点ξ使$f(\xi)=M$,

由$Fermat$ 引理,有$f'(\xi)=0$.

上页 下页 返回

注意：

若*Rolle*定理的三个条件中有一个不满足，其结论就不成立.

例如，$f(x)=|x|, x\in[-2,2]$.在$[-2,2]$上除$f'(0)$不存在外满足*Rolle*定理其余的条件，但在$(-2,2)$内找不到一点能使$f'(x)=0$.

又如，$f(x)=\begin{cases}1-x, & x\in(0,1]\\ 0, & x=0\end{cases}$;

又如，$f(x)=x, x\in[0,1]$.

例1.证明方程 $x^5-5x+1=0$ 有且仅有一个小于1的正实根.

证 设 $f(x)=x^5-5x+1$,则$f(x)$在$[0,1]$连续,

且 $f(0)=1$, $f(1)=-3$.由介值定理知

$\exists\, x_0\in(0,1)$,使 $f(x_0)=0$, x_0即方程的<1 的正根.

设另有 $x_1\in(0,1)$, $x_1\neq x_0$,使 $f(x_1)=0$.

$\because$ $f(x)$ 在 x_0,x_1 之间满足罗尔定理的条件,

$\therefore$ 存在ξ(在 x_0,x_1 之间),使得 $f'(\xi)=0$.

但$f'(x)=5(x^4-1)<0$ $(x\in(0,1))$,矛盾!

历史人物

Fermat **1601~1665**

Rolle **1652~1719**

Lagange **1736~1813**

Cauchy **1789~1857**

四位 法兰西数学家

拉格朗日(*Lagrange*)中值定理

Th.2. 拉格朗日(*Lagrange*)微分中值定理:

设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,

则存在$\xi\in(a,b)$,使得

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$

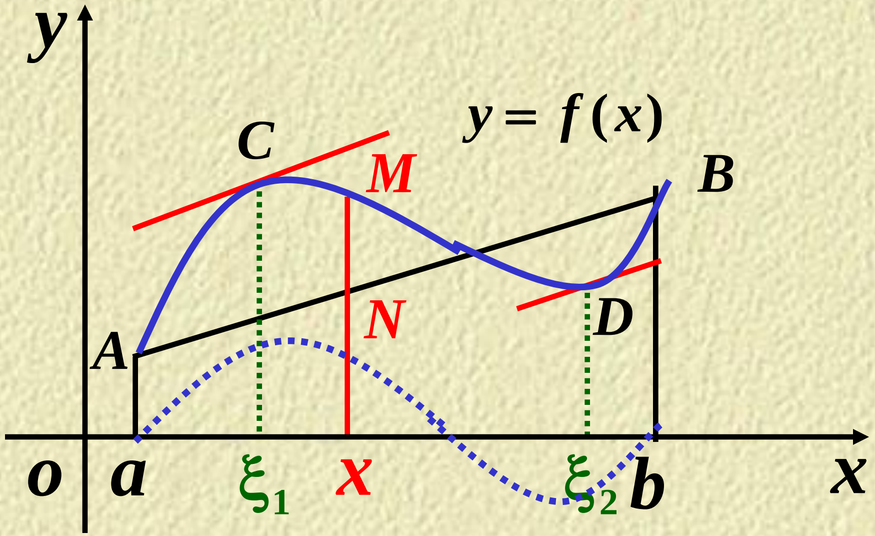
成立.

注意:与罗尔定理相比,拉格朗日中值定理条件中去掉了$f(a)=f(b)$.定理结论亦可写成

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi),\xi\in(a,b).$$

几何解释:

在曲线弧 AB 上至少有一点 C,在该点处的切线平行于弦 AB.



分析:条件中与Rolle定理相差 $f(a)=f(b)$.

弦AB方程为 $y=f(a)+\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$

曲线 $y=f(x)$与弦 AB比较,所得曲线a,b两端点的函数值相等.

上页 下页 返回

证明 设辅助函数

$$\varphi(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right]$$

$\varphi(x)$ 满足*Rolle Th.*的条件,

则在(a,b)内至少存在一点ξ,使得 $\varphi'(\xi) = 0.$

即 $f'(\xi) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$

或 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$

拉格朗日中值公式

注意:拉氏公式精确地表达了函数在一个区间上的增量与函数在这区间上导数之间的关系.

拉格朗日微分中值定理的物理解释也是十分显然的:

一个物体作直线运动,如有一辆汽车在2小时里驶过180千米路程,那么在这2小时里,至少有那么一个时刻,此时汽车的速度表的指针恰好指着90 *km/h* 这一读数.

命题1.设函数$f(x)$在区间I内可导.如果函数在区间I内的导数是一个常数,那么函数只能是一个一次函数.特别地,函数的导数恒为零,那么函数恒为常数.

证明：在区间I内任意取定一点x_0,再任取 $x \in I, x \neq x_0$. 由题设条件可知,

$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)\left(x - x_0\right)$,$\xi$介于$x_0$与$x$间,

$\because f'(x) = c, x \in I$,

$\therefore f(x) - f(x_0) = c\left(x - x_0\right) \quad \cdots$

$\Rightarrow f(x) = cx + f(x_0) - cx_0$.

上页 下页 返回

例2.求证：$-1 \le x \le 1$时$\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$.

证明　设 $f(x) = \arcsin x + \arccos x$,

$$\because\ x \in (-1,1),\ f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) \equiv 0,$$

又$\because\ f(x)$在$[-1,1]$上连续,

$\therefore\ f(x) \equiv C,\ x \in [-1,1]$.

$$\because\ f(0) = \arcsin 0 + \arccos 0 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}, \text{即} C = \frac{\pi}{2},$$

$$\therefore \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}\quad (-1 \le x \le 1).$$

上页 下页 返回

求证：$-1 \le x \le 1$时 $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$.

当初的证法 记$\alpha = \arcsin x \in \left[-\pi/2, \pi/2\right]$,

$\beta = \arccos x \in \left[0, \pi\right]$,

$\cos\alpha = +\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-x^2}$,

$\sin\beta = +\sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{1-x^2}$,

$\therefore \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$$= x^2 + 1 - x^2 \equiv 1,$$

$\because \alpha+\beta \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$, $\therefore \alpha+\beta \equiv \dfrac{\pi}{2}$.

导函数极限定理

Th.3(导函数的极限定理)：设函数$f(x)$在点x_0的某邻域$U(x_0)$内连续，在$U^o(x_0)$内可导，且$\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$存在，那么函数$f(x)$在点$x_0$可导，且$\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)=f'(x_0)$.

证明 (1).$\forall x\in U_+^o(x_0)$，函数$f(x)$在$[x_0,x]$上满足$L-th$.的条件，则存在$\xi\in(x_0,x)$，使得$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(\xi)$，

$\because x_0<\xi<x$，当$x\to x_0^+$时，$\xi\to x_0^+$，

$\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$存在$\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)$存在，

$$\therefore f_+'(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+} f'(x)=f'(x_0+).$$

上页 下页 返回

证明 (1).$\forall x \in U_{+}^{o}(x_0)$,函数$f(x)$在$[x_0, x]$上满足$L-th.$的条件,则存在$\xi \in (x_0, x)$,使得$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(\xi)$,

$\because x_0 < \xi < x$,当$x \to x_0^{+}$时,$\xi \to x_0^{+}$,

$\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$存在$\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0^{+}} f'(x)$存在,

$$\therefore f'_{+}(x_0) = \lim_{x \to x_0^{+}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0^{+}} f'(x) = f'(x_0+).$$

(2).同理可得$f'_{-}(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0-} f'(x) = f'(x_0-)$.

(3).$\because \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$存在$\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0^{+}} f'(x) = \lim\limits_{x \to x_0-} f'(x)$存在,

$\therefore f'_{+}(x_0) = f'_{-}(x_0) \Rightarrow f'(x_0)$存在,$\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = f'(x_0)$.

上页 下页 返回

特别提示：

注意 $f'_+(x_0)$与 $f'(x_0+)$的区别!

$$f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$\to$函数$f(x)$在点x_0的右导数,

$$f'(x_0+) = \lim_{x\to x_0^+} f'(x)$$

$\to$导函数$f'(x)$在点x_0的右极限.

上页 下页 返回

命题2. 一个在区间内点点可导的函数的导函数不可能有第一类间断点．

证明　设函数$\varphi(x)$在$x_0\in(a,b)$可导,

那么$\varphi'(x_0)=\varphi'_+(x_0)=\varphi'_-(x_0)$.

(1). 若$\lim\limits_{x\to x_0^+}\varphi'(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0-}\varphi'(x)$都存在，

由于$\varphi'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\varphi'(x)$, $\varphi'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\varphi'(x)$,

由$\varphi'_+(x_0)=\varphi'_-(x_0)\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0^+}\varphi'(x)=\lim\limits_{x\to x_0-}\varphi'(x)$,

于是$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi'(x)=\varphi'(x_0)$,即$\varphi'(x)$在$x_0$处连续.

(2). 若$\lim\limits_{x\to x_0^+}\varphi'(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0-}\varphi'(x)$不都存在，

那么, x_0就是$\varphi'(x)$在(a,b)内的第二类间断点．

$Th.3.$设函数$f(x)$在点x_0的某邻域$U(x_0)$内连续,在$U^o(x_0)$内可导,且$\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$存在,那么函数$f(x)$在点$x_0$可导,且$\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = f'(x_0)$.

命题2.一个在区间I内点点可导的函数的导函数不可能有第一类间断点．即一个函数的导函数要么连续要么只有第二类间断点．

上页 下页 返回

导函数介值定理

$Th.4.$达布(Darboux)定理　函数f在$[a,b]$上可导, $f'_+(a)\neq f'_-(b)$, k为介于$f'_+(a)$, $f'_-(b)$之间的任一实数,则至少存在一点$\xi\in(a,b)$,使$f'(\xi)=k$.

达布(Darboux)定理有以下的等价形式:

$Th.4'.$达布(Darboux)定理　函数f在$[a,b]$上可导, $f'_+(a)f'_-(b)<0$,则$\exists\xi\in(a,b)$,使$f'(\xi)=0$.

达布(Darboux)定理也叫做导函数介值定理.

上页　下页　返回

$Th.4.$达布$\left(Darboux\right)$定理 函数f在$[a,b]$上可导，$f'_+(a) \neq f'_-(b)$，k为介于$f'_+(a)$, $f'_-(b)$之间的任一实数，则至少存在一点$\xi \in (a,b)$，使$f'(\xi) = k$.

$Th.4'.$达布$(Darboux)$定理 函数f在$[a,b]$上可导，$f'_+(a) f'_-(b) < 0$，则$\exists \xi \in (a,b)$，使$f'(\xi) = 0$.

Darboux 定理也叫做导函数介值定理.

在$Th.4.$中令$\varphi(x) = f(x) - kx$，则条件$f'_+(a) \neq f'_-(b)$就相当于$\varphi'_+(a)\varphi'_-(b) < 0$，所以$Th.4$与$Th.4'$等价.

Th.4′.达布(Darboux)定理 函数f在$[a,b]$上可导,

$f_+'(a)f_-'(b)<0$,则$\exists\xi\in(a,b)$,使$f'(\xi)=0$.

证明 函数f在$[a,b]$上可导,故$f(x)$连续.

不妨设 $f_+'(a)>0,\ f_-'(b)<0$,

则$\exists\ x_1\in U_+^o(a)$,使得$\dfrac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a}>0$,

$\exists\ x_2\in U_-^o(b)$,使得$\dfrac{f(x_2)-f(b)}{x_2-b}<0$,

即$\exists\ x_1,x_2\in(a,b),x_1<x_2$,使得$f(x_1)>f(a),f(x_2)>f(b)$.

$\therefore$ 连续函数$f(x)$在$[a,b]$上的最大值必在$\xi\in(a,b)$取得,

$\therefore\exists\xi\in(a,b)$,使$f'(\xi)=0$.

特别提示:

1.注意导函数极限定理的条件:(1). $f(x)$在$U(x_0)$内连续;(2). $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$存在.如 $f(x)=\begin{cases}\cos x, x\neq 0\\ 0, \quad x=0\end{cases}$,

虽然$\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$存在,但是$f(x)$在$x=0$处不连续,结论$\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=f'(0)$不成立.

2.导函数的极限定理的条件是充分条件,并非必要

条件:如 $g(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, \quad x=0\end{cases}$, $g'(0)=0$存在,

但$\lim\limits_{x\to 0} g'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}\right)$不存在.

例4.设$f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0 \\ \ln(1+x), & x>0 \end{cases}$,求$f'(x)$.

解 $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\ln(1+x)=0,$

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=0=f(0),$

$\therefore$ 函数 $f(x)$在$x=0$处连续.

当$x>0$ 时, $f'(x)=\left(\ln(1+x)\right)'=\dfrac{1}{1+x},$

当$x<0$ 时, $f'(x)=(x)'=1,$

由导函数的极限定理$(Th.3)$得

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-} f'(x)=1,\ f'_+(0)=\lim_{x\to0^+} f'(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{1+x}=1,$$

$$\therefore\ f'(0)=\lim_{x\to0} f'(x)=1\ ,\Rightarrow\ f'(x)=\begin{cases} 1, & x\le 0 \\ \dfrac{1}{1+x}, & x>0 \end{cases}.$$

例4.设$f(x)=\begin{cases} x, & x \le 0 \\ \ln(1+x), & x>0 \end{cases}$,求$f'(x)$.

定义法处理分段函数的求导数是最基本,稳妥而又正确的做法.

当$x>0$时,$\left(\ln(1+x)\right)'=\dfrac{1}{1+x}$,当$x<0$时,$\left(x\right)'=1$,

$$f'_-(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h-0}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h-0}{h}=1,$$

$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h-0}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\ln\left(1+h\right)-0}{h}=1,$$

$\therefore$ 当$x=0$时,$f'(0)=1$,$\therefore$ $f'(x)=\begin{cases} 1, & x \le 0 \\ \dfrac{1}{1+x}, & x>0 \end{cases}$.

上页 下页 返回

例5.(1).点x_0是函数$H(x)=\begin{cases}0\ , x<x_0\\1\ , x\geq x_0\end{cases}$

的第一类间断点,所以不存在这样的函数$G(x)$,使得$G'(x)=H(x)$.

5.(2). $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0\\ 0,\quad x=0\end{cases}$,

$f'(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, x\neq 0\\ 0,\quad x=0\end{cases}$,

$x=0$是$f'(x)$的第二类间断点.

例5.(3).*Dirichlet* 函数$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$,

在任意一点$x_0\in\mathbb{R}$处的左右极限均不存在,

任意一点$x_0\in\mathbb{R}$都是$D(x)$的第二类间断点,

但是不存在函数$C(x)$,使得$C'(x)=D(x)$.

因为,否则,若存在$C(x)$,使得$C'(x)=D(x)$,

$C'(1)=1, C'\left(\sqrt{2}\right)=0$,据*Darboux* 定理$(Th.4)$

知$\exists\,\xi\in\left(1,\sqrt{2}\right)$,使得$C'(\xi)=\frac{1}{2}=D(\xi)$,

而这是不可能的 .

上页 下页 返回

函数单调性的判别

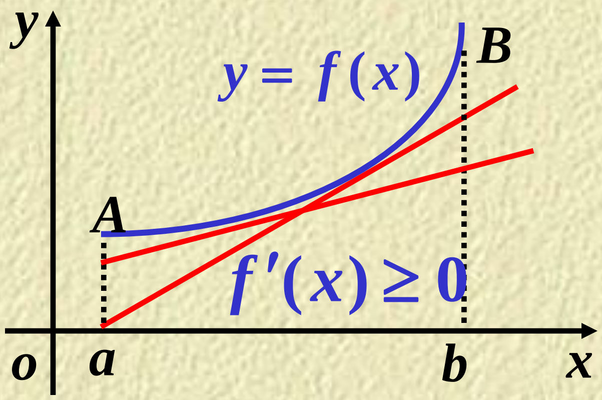
*Th.*5. 如果函数在区间I内的导数$f'(x)\geq 0$ $\left(f'(x)\leq 0\right)$,那么函数$f(x)$在区间I内单调增加(单调减少).特别地,如果导数$f'(x)>0$ $\left(f'(x)<0\right)$,那么函数$f(x)$在区间I内严格单调增加(严格单调减少).

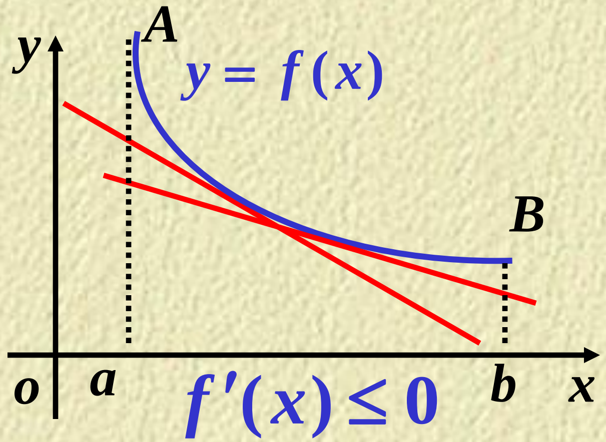
证明:在区间 I 内任取$x_1<x_2$,则在$[x_1,x_2]$上函数$f(x)$满足*Lagrange*定理的条件,

$\therefore \exists\xi\in(x_1,x_2), f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$

$\therefore$ 如果$f'(x)\geq 0$,那么由$x_1<x_2$知$f(x_1)\leq f(x_2)$

… …





***Th*.5′.** 设函数$f(x)$在区间I上连续,在$\operatorname{int} I$内$f(x)$在至多可列多个点处不可导,在其余地方$f'(x)\ge 0\left(f'(x)\le 0\right)$,且在至多可列多个点处$f'(x)=0$.那么函数$f(x)$在区间$I$上严格单调增加(严格单调减少).

$\operatorname{int}\left([a,b]\right)=(a,b),\ \operatorname{int}\left([a,b)\right)=(a,b)\cdots$

$\operatorname{int} \longleftarrow$ *interior*

上页 下页 返回

函数$f(x)=x+\sin x$ 在其定义域$(-\infty,+\infty)$上有$f'(x)=1+\cos x\geq 0$,且只在可列多个点$x=(2k+1)\pi$ 处$f'(x)=0$,所以函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上严格单调增加.

函数$f(x)=\sqrt[3]{x}$ 在$(-\infty,+\infty)$上连续,在$x_0=0$处函数不可导,在$x\neq 0$时$f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}>0$,所以在$(-\infty,+\infty)$上$f(x)=\sqrt[3]{x}$ 严格单调增加.

上页 下页 返回

根据*Darboux* 定理$\left(Th.4'.\right)$,我们可知

推论　若$f(x)$在$\left(\alpha,\beta\right)$内有$f'(x)\neq 0$,

则函数$f(x)$在$\left(\alpha,\beta\right)$内严格单调 .

上页 下页 返回

例6.求证：$x>0, e^{x}>1+x$.

分析 $x>0, e^{x}>1+x \Leftrightarrow$

$e^{x}-x-1>e^{0}-0-1=0.$

故可使用函数的单调性来证明.

一般同学都会这么做：

设$\varphi(x)=e^{x}-x-1, \varphi(0)=0.$

在 $x>0$ 时$\varphi'(x)=e^{x}-1>0,$

$\therefore$ 在$x>0$时函数$\varphi(x)$严格单调增加,

$\therefore x>0, \varphi(x)>\varphi(0),$即得结论.

那我们来看一个思考题：

设函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上有定义，在$(0,+\infty)$内可导且$f'(x)>0$, $f(0)=0$.

试问：当$x>0$时是否有$f(x)>0$?

证明 $\because$ 在$(0,+\infty)$内$f'(x)>0$,

$\therefore$ 在$(0,+\infty)$内$f(x)$严格单调递增，

又$f(0)=0$,

$\therefore$ $x>0$ 时有$f(x)>f(0)=0$.

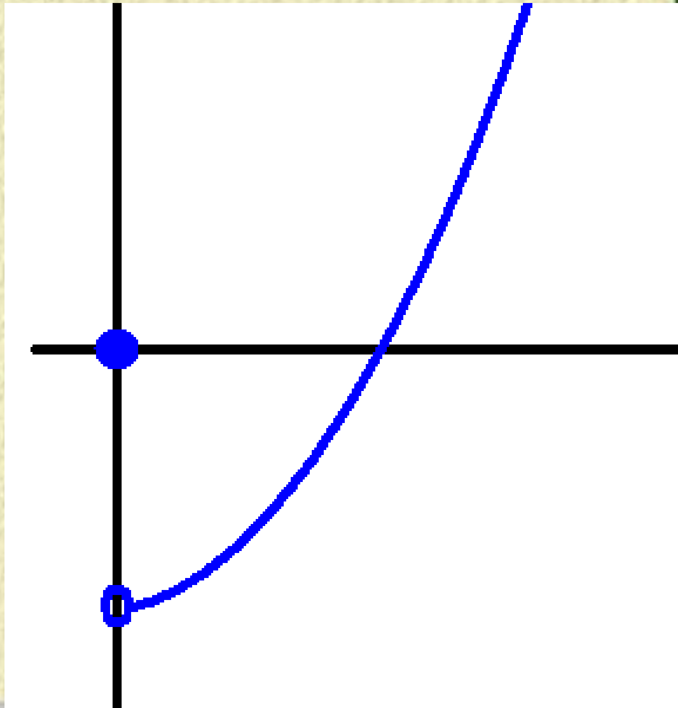
你觉得上面的证明怎么样?

上页 下页 返回

其实,上述解答是有问题的.原因就在于函数在$x=0$处未必连续,若函数在$x=0$处不连续,则结论不成立.例如:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1, x>0 \\ 0 \quad , x=0 \end{cases},$$

$x>0$时$f'(x)>0$,但是$x>0$,$f(x)>f(0)$不成立.可见"函数$f(x)$在$x=0$处连续"是不能缺失的关键条件,且极易被人疏忽.



思考题.

设函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上有定义,在$(0,+\infty)$内可导且$f'(x)>0$, $f(0)=0$.
试问:当$x>0$时是否有$f(x)>0$?

思考题可改正为:

设函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续,在$(0,+\infty)$内可导且$f'(x)>0$, $f(0)=0$.
试问:当$x>0$时是否有$f(x)>0$?

例6.求证：$x>0, e^x>1+x$.

证一 设$\varphi(x)=e^x-x-1, \varphi(0)=0.$

在 $x>0$ 时$\varphi'(x)=e^x-1>0,$

$\because \varphi(x)=e^x-x-1$在$x\geq 0$时连续,

在$x\geq 0$时函数$\varphi(x)$严格单调增加,

$\therefore x>0, \varphi(x)>\varphi(0).$

重温定理：

拉格朗日$(Lagrange)$微分中值定理：

设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，则存在$\xi\in(a,b)$，使得

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$ 成立.

所以，有时人们会在更强的条件“设函数$f(x)$在$[a,b]$上可微”下讨论…

本章处理的是

用导数研究

连续函数

的性质!!!

上页 下页 返回

求证：$x>0, e^x>1+x$.

分析 直接使用*Lagrange*微分中值定理,难在合适的函数与恰当的区间的确定!

$$x>0, e^x>1+x \Leftrightarrow$$

$$e^x-e^0>x-0.$$

求证$: x>0, e^x>1+x$.

证二 设$\varphi(t)=e^t$,则$\varphi(t)$在$[0,x]$上满足$Lagrange$微分中值定理的条件,

$$\varphi(x)-\varphi(0)=(x-0)\varphi'(\xi), 0<\xi<x.$$

即 $e^x-1=xe^\xi$,

在$x>0$时, $x>\xi>0, \therefore e^\xi>1.$

$\therefore x>0, e^x-1=xe^\xi>x.$

上页 下页 返回

关于拉格朗日微分中值定理的笑话一则:

每个大学的教室都会有打扫卫生的大妈. 某学校的期末考试复习阶段. 一天, 小明复习微积分, 正在抓耳挠腮之际, 扫地的大妈从其身旁走过, 瞥了一眼题目， 嘀咕道:用拉格朗日中值定理试试.

不等式 $x > 0, e^x > 1 + x$

的经济学的意义就是:

在利率 $r > 0$ 时，连续复利

一定比 单利 多.

上页 下页 返回

例7.求证：$x>0$时，$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

分析　直接使用*Lagrange*微分中值定理，难在合适的函数与恰当的区间的确定！

分析　$x>0$时，$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$

$$\Leftrightarrow x>0,\frac{1}{1+x}<\frac{\ln(1+x)}{x}<1$$

$$\Leftrightarrow x>0,\frac{1}{1+x}<\frac{\ln(1+x)-\ln 1}{x-0}<1$$

可见，要直接使用*Lagrange*微分中值定理，可以设辅助函数$\varphi(x)=\ln(1+t)$，t所在的区间取作$[0,x]$，则诸事齐备矣！

上页　下页　返回

证明 设 $f(t)=\ln(1+t)$,

$f(t)$在$[0,x]$上满足$L-Th.$的条件,

$\therefore f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0),(0<\xi<x)$

$$\because f(0)=0, f'(t)=\frac{1}{1+t} \Rightarrow \ln(1+x)=\frac{x}{1+\xi},$$

又$\because 0<\xi<x, 1<1+\xi<1+x \Rightarrow$

$$\frac{1}{1+x}<\frac{1}{1+\xi}<1, x>0, \frac{x}{1+x}<\frac{x}{1+\xi}<x,$$

$$\therefore x>0\text{时有}\quad \frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x.$$

证明当$x>0$时，$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

证二 考虑使用函数的单调性来证明：

(1).先证明 当$x>0$时，$\ln(1+x)<x$.

设$\varphi(x)=x-\ln(1+x), x>0, \varphi(0)=0$.

在$x>0$时显然$\varphi'(x)=1-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{x}{1+x}>0$,

$\because \varphi(x)=x-\ln(1+x)$在$x\geq 0$时连续,

$\therefore$ 在$x\geq 0$时函数$\varphi(x)$是严格单调增加的.

$\therefore x>0, \varphi(x)>\varphi(0)$.

证明当$x>0$时，$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

(2).再证明：当$x>0$时，$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)$

设$\psi(x)=\ln(1+x)-\dfrac{x}{1+x}$，$\psi(0)=0$.

在$x>0$时显然

$$\psi'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}=\frac{x}{(1+x)^2}>0,$$

$\because \psi(x)=\ln(1+x)-\dfrac{x}{1+x}$在$x\geq 0$时连续，

$\therefore$ 在$x\geq 0$时函数$\psi(x)$是严格单调增加的.

$\therefore\ x>0,\psi(x)>\psi(0)$.

上页 下页 返回

大家可以感觉到,**用 *Lagrange* 微分中值定理来处理函数两点值的差的问题**时,你会觉得十分方便.

Lagrange **微分中值定理**是一个解决许多实际问题的有力的工具.用导数研究函数的性质,导数的应用的理论支持都是基于 ***Lagrange*** 微分中值定理.

Lagrange 定理的应用十分广泛.

Rolle Th ← ***Lagrange Th***

上页 下页 返回

课堂自我检测练习:

1.若$f(0)=-3,\ f'(x)\le 5.$

问$f(2)$最多是多少?

2.如果$f(1)=1, \forall x\in \mathbb{R}\setminus\{0\}$,

$xf'(x)+f(x)=0$,问$f(2)=?$

3.证明不等式:

(1). $|\sin x-\sin y|\le |x-y|$;

(2). $x>-1, \ln(1+x)\le x$.

上页 下页 返回

课堂自我检测练习：

4.若$x+e^{x}=y+e^{y}$.

证明 $\sin x=\sin y$.

上页 下页 返回

例8.设$f(0)=0$, 在$[0,+\infty)$上$f(x)$可导且$f'(x)$单调递减,求证:$\forall a>0, b>0$,有 $f(a+b)<f(a)+f(b)$.

证明 设$\varphi(x)=f(a+x)-f(a)-f(x)$,

则$\varphi(0)=0$,

$x>0$时$\varphi'(x)=f'(a+x)-f'(x)<0, \varphi(x)\searrow$,

$\because$ 在$[0,+\infty)$上$\varphi(x)$可导$\Rightarrow \varphi(x)$连续,

$\therefore x>0$时,$\varphi(x)<\varphi(0)=0$

$\therefore \forall b>0, \varphi(b)=f(a+b)-f(a)-f(b)<0$.

设$f(0)=0$, 在$[0,+\infty)$上$f(x)$可导且$f'(x)$单调递减,求证: $\forall a>0$, $b>0$,有$f(a+b)<f(a)+f(b)$.

分析 $\because f(0)=0$,不妨设$\forall a\ge b>0$,

$$f(a+b)<f(a)+f(b)$$

$$\Leftrightarrow f(a+b)-f(a)<f(b)-f(0)$$

$$\Leftrightarrow bf'(\xi)<bf'(\eta),$$

$$0<\eta<b\le a<\xi<a+b.$$

$\because f'(x)$单调递减,$\therefore$结论成立.

上页 下页 返回

例9. $\forall x, y \in \mathbb{R}, f\left(x+y\right)=f(x)f(y), f'(0)=1$,

证明：$f'(x)=f(x)$，并给出$f(x)$的表达式.

证明 $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$f(x+h)=f(x)f(h),\ f(x)=f(x)f(0),$$

$$\therefore f'(x)=f(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=f(x)f'(0),$$

$$\therefore f'(x)=f(x)$$

$f(x)=?$ 猜想 $f(x)=e^x$

上页 下页 返回

我们已经得到$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = f(x),$$

我们猜!猜!猜! 猜想$f(x) = e^x, \cdots$

$f(x) - e^x = \varphi(x), \cdots$不成哪!

那么就有$\dfrac{f(x)}{e^x} \equiv 1,$

所以可设$\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{e^x} \cdots$

上页 下页 返回

设$\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}, x\in\mathbb{R}$,

$$\varphi'(x)=\left(\frac{f(x)}{e^x}\right)'=\frac{f'(x)e^x-f(x)e^x}{e^{2x}}\equiv 0,$$

$\therefore\ x\in\mathbb{R}$时,$\dfrac{f(x)}{e^x}=c, f(x)=ce^x, f'(x)=ce^x$,

$\because\ f'(0)=1, \therefore c=1\Rightarrow f(x)=e^x$.

$\forall x, y \in \mathbb{R}, f\left(x+y\right) = f(x)f(y), f'(0)=1,$

证明: $f'(x) = f(x)$,并给出$f(x)$的表达式.

我们可以说明 $f(0)=1.$

$f(0) = f\left(0+0\right) = \left[f(0)\right]^2 \Rightarrow f(0)=0 \ or\ 1.$

若$f(0)=0$,则$f(x) = f\left(x+0\right) = f(x)f(0)=0,$

这与$f'(0)=1$ 矛盾.

$\therefore f(0)=1.$

上页 下页 返回

例10.设函数$f(x)$在$[0,3]$上连续,在$(0,3)$内可微,且$f(0)+f(1)+f(2)=3, f(3)=1,$

证明:存在$\xi\in(0,3)$,使得 $f'(\xi)=0.$

分析 欲证结论,要用*Rolle th.*,要求函数$f(x)$在$[0,3]$上满足*Rolle th.*条件,

注意到$\dfrac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=1, f(3)=1,$

由连续函数的性质—介值定理知

$\exists c\in[0,2], \dfrac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=f(c)=1,$

上页 下页 返回

证明 $\because$ 函数 $f(x)$ 在 $[0,2]\subset[0,3]$ 上连续,

$\therefore$ 在 $[0,2]$ 上 $f(x)$ 存在最大值 M, 最小值 m,

$$m \le f(0),\ f(1),\ f(2) \le M$$

$\Rightarrow m \le \dfrac{f(0)+f(1)+f(2)}{3} \le M$, 由介值定理知

$\exists\, c \in [0,2]$, 使 $f(c) = \dfrac{f(0)+f(1)+f(2)}{3} = 1$,

$\therefore f(x)$ 在 $[c,3]$ 上连续, 在 $(c,3)$ 内可导, $f(c) = f(3)$,

由 *Rolle th.* 知 $\exists\, \xi \in (c,3) \subset (0,3)$, 使得 $f'(\xi) = 0$.

自我练习

1.设$f(x)=\left(x^2-1\right)\left(x-2\right)\left(x-3\right)\left(x-4\right)$,则方程

$f'(x)=0$有____个实根,它们分别在区间____内.

2.证明恒等式:

(1).$-\infty<x<+\infty$时有

$$\arctan x+\operatorname{arccot} x=\frac{\pi}{2}.$$

(2).$\forall x\geq 1$,有

$$\arctan x-\frac{1}{2}\arccos\frac{2x}{1+x^2}\equiv\frac{\pi}{4}.$$

上页 下页 返回

2.证明不等式：

(1). $\left|\arctan a - \arctan b\right| \le \left|a-b\right|$.

(2). 当$x>1$时有$e^x > ex$.

(3). $0<a<b<\dfrac{\pi}{2},\dfrac{b}{a}<\dfrac{\tan b}{\tan a}$.

上页 下页 返回

自我练习2.(3). 证明不等式:

$$0 < a < b < \frac{\pi}{2}, \frac{b}{a} < \frac{\tan b}{\tan a}.$$

分析 $0 < a < b < \dfrac{\pi}{2}$,将原结论 $\dfrac{b}{a} < \dfrac{\tan b}{\tan a}$

作变形 $\dfrac{\tan a}{a} < \dfrac{\tan b}{b}$,就可以发现这是

函数 $\varphi(x) = \dfrac{\tan x}{x}$ 单调增加的体现,故

而目标十分明显.

证明 $\varphi(x)=\dfrac{\tan x}{x}$ 在 $(0,\pi/2)$ 上有

$$\varphi'(x)=\left(\frac{\tan x}{x}\right)'=\frac{x\sec^2 x-\tan x}{x^2}$$

$$=\frac{x-\sin x\cos x}{x^2\cos^2 x}=\frac{2x-\sin 2x}{2x^2\cos^2 x},$$

欲证在 $(0,\pi/2)$ 上 $\varphi'(x)>0.$

上页 下页 返回

设 $\varphi(x)=\dfrac{\tan x}{x}$ 在$(0,\pi/2)$上有

$$\varphi'(x)=\left(\frac{\tan x}{x}\right)'=\frac{2x-\sin 2x}{2x^2\cos^2 x},$$

由基本不等式$0<x<\pi/2$,有$0<\sin x<x$.

$$\because 0<x<\frac{\pi}{4},2x-\sin 2x>0,$$

$$\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2},\sin 2x<1<2x,$$

$$\therefore 0<x<\frac{\pi}{2},\varphi'(x)=\frac{2x-\sin 2x}{2x^2\cos^2 x}>0.$$

上页 下页 返回

$$0 < x < \frac{\pi}{2}, \varphi'(x) = \frac{2x - \sin 2x}{2x^2 \cos^2 x} > 0,$$

$0 < x < \frac{\pi}{2}, \varphi(x)$严格单调增加,

$$\therefore 0 < a < b < \frac{\pi}{2}, \varphi(a) < \varphi(b)$$

本练习题的主旨是培养我们对解决问题的一种基本的数学敏感,虽然解决问题没有一成不变的万能的方法,但分析问题要找寻破解问题的切入点,所需要的是善于灵活运用所学的知识,善于变化.

证明不等式：$0<a<b<\frac{\pi}{2},\frac{b}{a}<\frac{\tan b}{\tan a}$.

变化带来 ……

$$\frac{b}{a}<\frac{\tan b}{\tan a}\Leftrightarrow\frac{b-a}{a}<\frac{\tan b-\tan a}{\tan a}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\tan a-\tan 0}{a-0}<\frac{\tan b-\tan a}{b-a}$$

$$\Leftrightarrow\sec^2\xi<\sec^2\eta,0<\xi<a<\eta<b<\frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow\cos^2\xi>\cos^2\eta,0<\xi<a<\eta<b<\frac{\pi}{2}$$

味道好极了！

例11*.设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,且

$f(0)=0, f(1)=1$,试证:对任意给定的正数a,b,在

$(0,1)$内存在不同的 ξ,η, 使 $\dfrac{a}{f'(\xi)}+\dfrac{b}{f'(\eta)}=a+b.$

证明 $\because a$ 与 b 均为正数,$\therefore 0<\dfrac{a}{a+b}<1,$

又$\because f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,由介值定理得

存在 $\tau\in(0,1)$,使得 $f(\tau)=\dfrac{a}{a+b},$

$f(x)$ 在 $[0,\tau],[\tau,1]$上分别用$L's-th.$, 有

上页 下页 返回

$$f(\tau)-f(0)=(\tau-0)f'(\xi),\xi\in(0,\tau)\cdots\cdots(1)$$

$$f(1)-f(\tau)=(1-\tau)f'(\eta),\eta\in(\tau,1)\cdots\cdots(2)$$

注意到 $f(0)=0, f(1)=1$,由(1),(2)得到

$$\tau=\frac{f(\tau)}{f'(\xi)}=\frac{\frac{a}{a+b}}{f'(\xi)}\cdots(3),1-\tau=\frac{1-f(\tau)}{f'(\eta)}=\frac{\frac{b}{a+b}}{f'(\eta)}\cdots(4),$$

由(3)+(4)得 $1=\dfrac{a}{f'(\xi)(a+b)}+\dfrac{b}{f'(\eta)(a+b)}$,

$$\therefore\frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=a+b.$$

要证明的结论 $\dfrac{a}{f'(\xi)}+\dfrac{b}{f'(\eta)}=a+b,$

变化为 $\dfrac{a/a+b}{f'(\xi)}+\dfrac{b/a+b}{f'(\eta)}=1$,记为

$\dfrac{\lambda}{f'(\xi)}+\dfrac{1-\lambda}{f'(\eta)}=1,\lambda\in(0,1)$,该结论可以理解为一个作直线运动的物体在一个单位的时间里产生了一个单位的位移,那么产生λ的位移所花的时间$\dfrac{\lambda}{f'(\xi)}$与走完剩下的位移$1-\lambda$所花的时间$\dfrac{1-\lambda}{f'(\eta)}$之和就是全部所花的时间——一个单位的时间. 而$f'(\xi)$就是走过位移$\lambda$的过程中某一时刻的瞬时速度.

上页 下页 返回

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,且 $f(0)=0,\ f(1)=1$,试证:对任意给定的正数 a,b 在 $(0,1)$ 内存在不同的 ξ,η 使 $\dfrac{a}{f'(\xi)}+\dfrac{b}{f'(\eta)}=a+b.$

要证明的结论变化为 $\dfrac{a/a+b}{f'(\xi)}+\dfrac{b/a+b}{f'(\eta)}=1$,记为

$\dfrac{\lambda}{f'(\xi)}+\dfrac{1-\lambda}{f'(\eta)}=1,\lambda\in(0,1)$ 该结论可以理解为一个作直线运动的物体在一个单位的时间里产生了一个单位的位移，那么产生λ的位移所花的时间 $\dfrac{\lambda}{f'(\xi)}$ 与走完剩下的位移$1-\lambda$所花的时间 $\dfrac{1-\lambda}{f'(\eta)}$ 之和就是全部所花的时间— 一个单位的时间.而$f'(\xi)$就是走过λ的位移的过程中某一时刻的瞬时速度.

上页 下页 返回

Addendum :

一般地，设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续,

在(a,b)内可微,且满足$f(a)=f(b)=0$,

则:$\exists\xi\in(a,b)$,使得$f'(\xi)+g(\xi)f(\xi)=0$.

分析:要用*Rolle th.*,要找的辅助函数

即为 $\varphi(x)=f(x)e^{G(x)}, G'(x)=g(x)$.

$Add.1.$ 设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，
在$(0,1)$内可微，且$f(1)=0$，

证明：存在$\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)=-\dfrac{2f(\xi)}{\xi}$.

分析 问题转化为证明 $\xi f'(\xi)+2f(\xi)=0$.

要使用*Rolle Th.*，寻找辅助函数$\varphi(x)$，

使得$\varphi'(x)$含有因子 $xf'(x)+2f(x)$，

… …可取 $\varphi(x)=x^2f(x)$

$Add.2.$设$f \in C[0,\pi]$,且$f(x)$在$(0,\pi)$内可导,

证明$\exists \xi \in (0,\pi)$,使得$f'(\xi) = -f(\xi)\cot\xi$.

$Hint:$根据结论知即要证

$$f'(\xi)\sin\xi + f(\xi)\cos\xi = 0,$$

即$\left[f(x)\sin x \right]'\Big|_{x=\xi} = 0,$

$\therefore$ 对$\varphi(x) = f(x)\sin x$在$[0,\pi]$上用$Rolle\ Th.$

上页 下页 返回

$Add.3.$ 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可微,且满足$f(a)=f(b)=0$,

证明:(1)存在$\xi\in(a,b)$,使得$\xi f'(\xi)+f(\xi)=0$;

(2)存在$\eta\in(a,b)$,使得$f'(\eta)+f(\eta)=0$;

(3)存在$\zeta\in(a,b)$,使得$f'(\zeta)+\zeta f(\zeta)=0$.

分析　要使用*Rolle Th.*,寻找辅助函数$\varphi(x)$,

(1)使得$\varphi'(x)=xf'(x)+f(x)$,$\cdots\varphi(x)=xf(x)$;

(2)使得$\varphi'(x)$含有$f'(x)+f(x)$因子,$\cdots\varphi(x)=e^x\cdot f(x)$;

(3)使得$\varphi'(x)$含有$f'(x)+xf(x)$因子,$\cdots\varphi(x)=f(x)e^{\frac{1}{2}x^2}$

类似问题：设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，

在(a,b)内可微，且满足$f(a)=f(b)=0$，

证明：$\exists\xi\in(a,b)$，使得(1) $f'(\xi)+\cos\xi f(\xi)=0$;

(2) $\xi f'(\xi)+f(\xi)=0$;

(3) $f'(\xi)-(1+2\xi)f(\xi)=0$;

(4) $f'(\xi)+g(\xi)f(\xi)=0.$

分析：要用*Rolle Th.*，要找的辅助函数即为

(1) $\varphi(x)=f(x)e^{\sin x}$;

(2) $\varphi(x)=f(x)e^{\ln x}=xf(x)$;

(3) $\varphi(x)=f(x)e^{-(x+x^2)}$;

(4) $\varphi(x)=f(x)e^{G(x)}, G'(x)=g(x).$