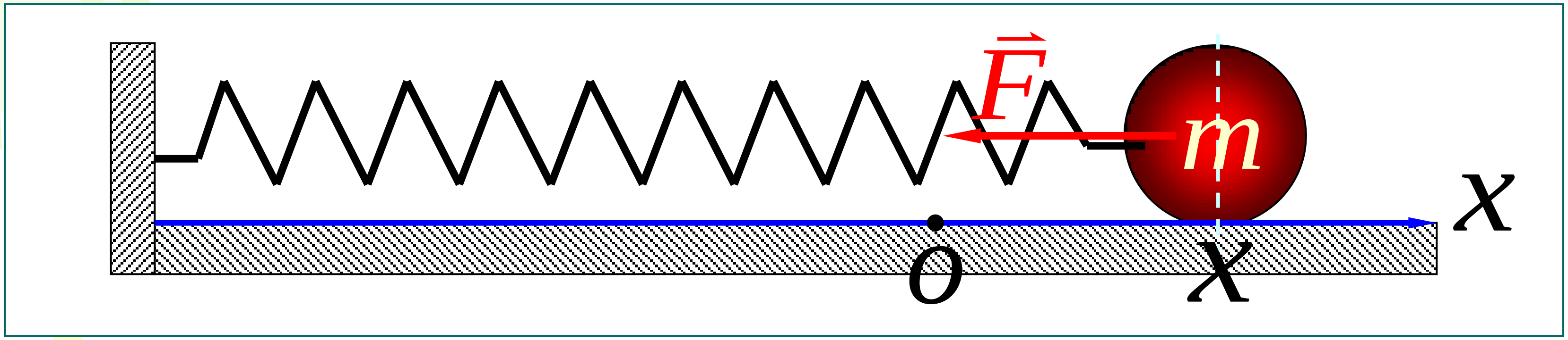
## 运动学

描述质点的**位置**、**速度**、**加速度**及其对时间的变化关系。

## 动力学

主要研究作用于物体的力与物体运动关系。动力学的研究以牛顿运动定律为基础。




$$\left.\begin{aligned} F &= -kx \\ &\text{（回复力）} \\ F &= ma \end{aligned}\right\} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

令 $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

$$x = \boxed{A}\cos(\omega t + \boxed{\varphi})$$

积分常数，根据初始条件确定

## 讨论

1. $$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

固有周期

固有角频率

惯性

弹性

固有属性

结论1：周期和频率仅与振动系统本身的物理性质有关

讨论

## 2. 常数 $A$ 和 $\varphi$ 的确定

$$\begin{cases} x = A\cos(\omega t+\varphi) \\ v = -A\omega\sin(\omega t+\varphi) \end{cases}$$

初始条件 $t=0 \quad x=x_0 \quad v=v_0$

$$\begin{cases} x_0 = A\cos\varphi \\ v_0 = -\omega A\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\sqrt{x_0^2+\dfrac{v_0^2}{\omega^2}} \\ \tan\varphi = \dfrac{-v_0}{\omega x_0} \end{cases}$$

结论2：振幅和初相由初始条件决定.

讨论

3. 简谐运动的定义——从动力学角度

运动学 $$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$a = -\omega^2 x$$

动力学 $$F = m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$ （回复力）

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$ （动力学方程）

## 小结

动力学计算的思路

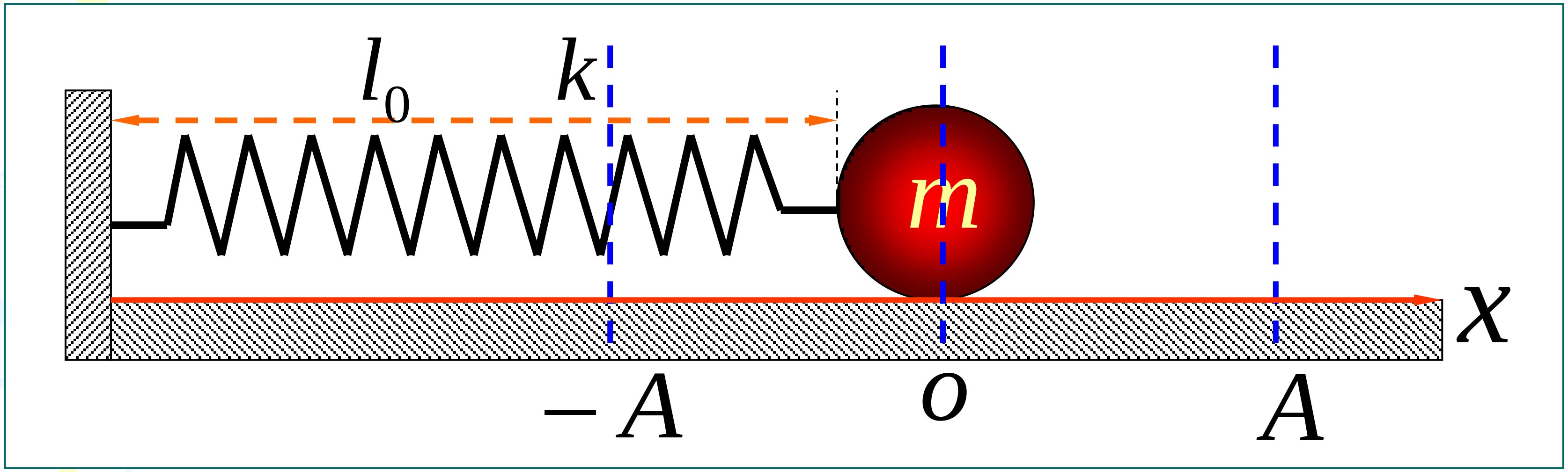
$$F = ma$$

动力学方程： $\dfrac{d^2x}{dt^2} + Cx = 0$

运动学方程： $\boxed{x = A\cos(\sqrt{C}\cdot t + \varphi)}$

- 周期公式：单摆 $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ 弹簧振子 $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

## 能量分析：以弹簧振子为例




振子：动能

弹簧：弹性势能

**证 明：**

$$E = E_{\mathrm{k}} + E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}kA^2$$

## 以弹簧振子为例

$$\omega^2 = k/m \qquad \boxed{\frac{1}{2}kA^2}$$

$$\begin{cases} E_{\mathrm{k}} = \dfrac{1}{2}mv^2 = \boxed{\dfrac{1}{2}m\omega^2A^2}\sin^2(\omega t+\varphi) \\[2ex] E_{\mathrm{p}} = \dfrac{1}{2}kx^2 = \dfrac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi) \end{cases}$$

$$E = E_{\mathrm{k}} + E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}kA^2$$

讨论

1. $$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2$$

(1). 弹簧振子的总能量不随时间改变；

系统动能和势能不断地相互转换，总的机械能守恒；

(2) 振幅大小体现系统能量，表征振动的强度

$$E = \frac{1}{2}kA^2 \propto A^2$$

例　质量为 $0.10\mathrm{kg}$ 的物体，以振幅 $1.0\times10^{-2}\,\mathrm{m}$ 作简谐运动，其最大加速度为 $4.0\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$，求：

（1）振动的周期；

（2）通过平衡位置的动能；

（3）总能量；

（4）物体在何处其动能和势能相等？

解 （1） $a_{\max} = A\omega^2$  $\omega = 20\mathrm{s}^{-1}$  $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 0.314\mathrm{s}$

（2） $E_{\mathrm{k,max}} = \dfrac{1}{2} m v_{\max}^2 = \dfrac{1}{2} m\omega^2 A^2 = 2.0\times10^{-3}\,\mathrm{J}$

（3） $E = E_{\mathrm{k,max}} = 2.0\times10^{-3}\,\mathrm{J}$

（4） $E_{\mathrm{k}} = E_{\mathrm{p}}$ 时， $E_{\mathrm{p}} = 1.0\times10^{-3}\,\mathrm{J}$

由 $E_{\mathrm{p}} = \dfrac{1}{2} k x^2 = \dfrac{1}{2} m\omega^2 x^2$

$x^2 = \dfrac{2E_{\mathrm{p}}}{m\omega^2} = 0.5\times10^{-4}\,\mathrm{m}^2$  $x = \pm 0.707\mathrm{cm}$

# 一、阻尼振动

简谐运动

无阻尼的自由振动

特点：等幅振动，机械能守恒

阻尼振动

在回复力和阻力作用下的振动

特点：

振幅逐渐减小；机械能不断减少

## 求出阻尼振动运动方程

阻力系数

阻尼力 $F_{r} = -Cv$

$$-kx - Cv = ma$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{C}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

$\beta = C/2m$ $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

阻尼系数　　固有角频率

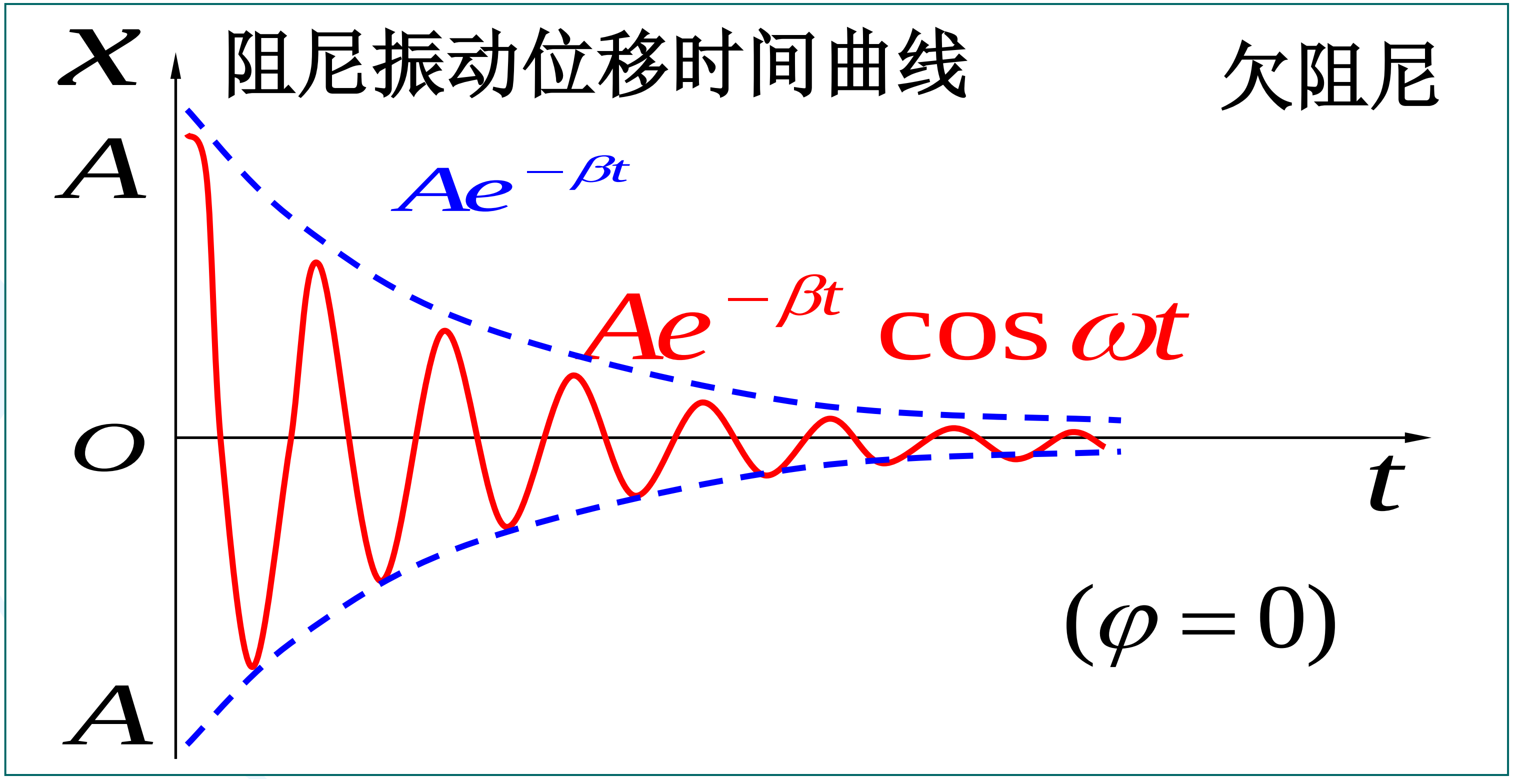
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^{\ 2}x = 0$$

**1**）当 $\beta^2 < \omega_0^{\ 2}$（欠阻尼）

$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi)$$

振幅　　角频率

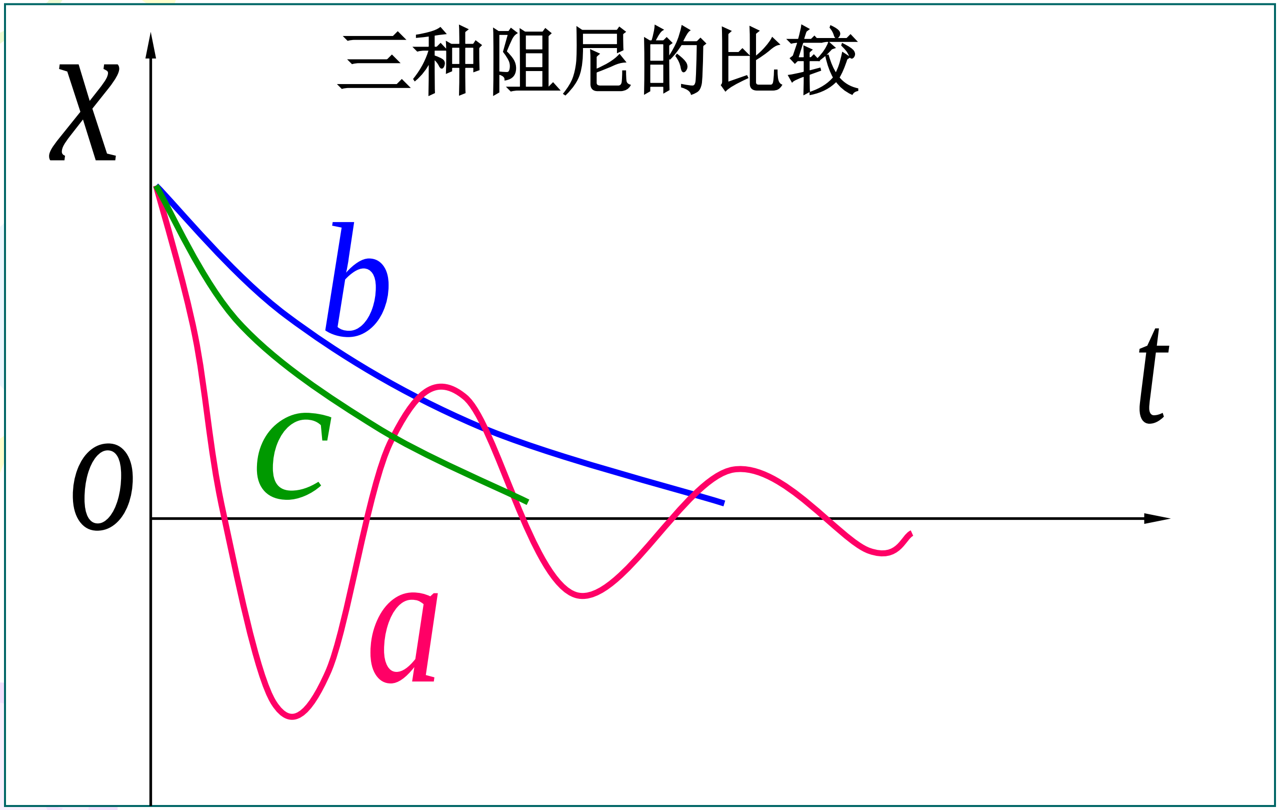
**振幅：** $A = A_0 e^{-\beta t}$ **角频率：** $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$




阻尼振动：

阻尼不大时，可近似为振幅逐渐减小的简谐运动.

2）当 $\beta^2 \geq \omega_0^2$ 振子运动情况如何？ (动画)




$\beta^2 < \omega_0{}^2$

a：欠阻尼

$\beta^2 > \omega_0^2$

b：过阻尼

$\beta^2 = \omega_0^2$

c:临界阻尼

## 二 受迫振动

系统在周期性外力作用下的振动

## 受迫振动的运动方程

受力分析 ⟶ 运动方程

系统受力： 回复力、阻尼力、周期性外力（驱动力）

驱动力的角频率

$$F_{合} = -kx - Cv + \underbrace{F\cos\omega_{\mathrm{p}}t}_{\text{驱动力}}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-kx-C\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+F\cos\omega_{\mathrm{p}}t$$

$$x=\cancel{A_0e^{-\beta t}\cos(\omega t+\varphi)}+A\cos(\omega_{\mathrm{p}}t+\psi)$$

受迫振动：

开始时振动情况复杂；稳定时，变为简谐运动.

稳定时受迫振动运动方程

$$x = A\cos(\omega_{\mathrm{p}} t + \psi)$$

振幅：

$$A = \frac{F/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_{\mathrm{p}}^2) + 4\beta^2\omega_{\mathrm{p}}^2}}$$

相位：

$$\mathrm{tg}\,\psi = \frac{-2\beta\omega_{\mathrm{p}}}{\omega_0^2 - \omega_{\mathrm{p}}^2}$$

角频率： $\omega_p$ 为驱动力的角频率，

与系统固有角频率无关。

振幅： $$A=\frac{F/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_p^2)+4\beta^2\omega_p^2}}$$

当 $\boxed{\omega_r=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}}$ 时，受迫振动的振幅达到极大，这种现象称为共振。

在弱阻尼（即 $\beta<<\omega_0$ 情况下） $\omega_r=\omega_0$

- 共振现象在实际中的应用

乐器、空胡鹿、收音机、共鸣 ……

## 共振产生的原因（能量角度分析）

振动速度和驱动力同相，因而，驱动力总是对系统做正功，系统能最大限度地从外界得到能量。

◆ 共振现象的危害

1940 年7月1日美国 Tocama 悬索桥因共振而坍塌

**小结：**

- 自由振动
  - 无阻尼振动
    - 简谐运动
    - 非简谐运动
  - 阻尼振动
- 受迫振动

• 求解动力学方程的方法：

• 阻尼振动：

$$x = \underbrace{\boxed{A_0 e^{-\beta t}}}_{\text{振幅}} \cos(\underbrace{\boxed{\omega}}_{\text{角频率}} t + \varphi)$$