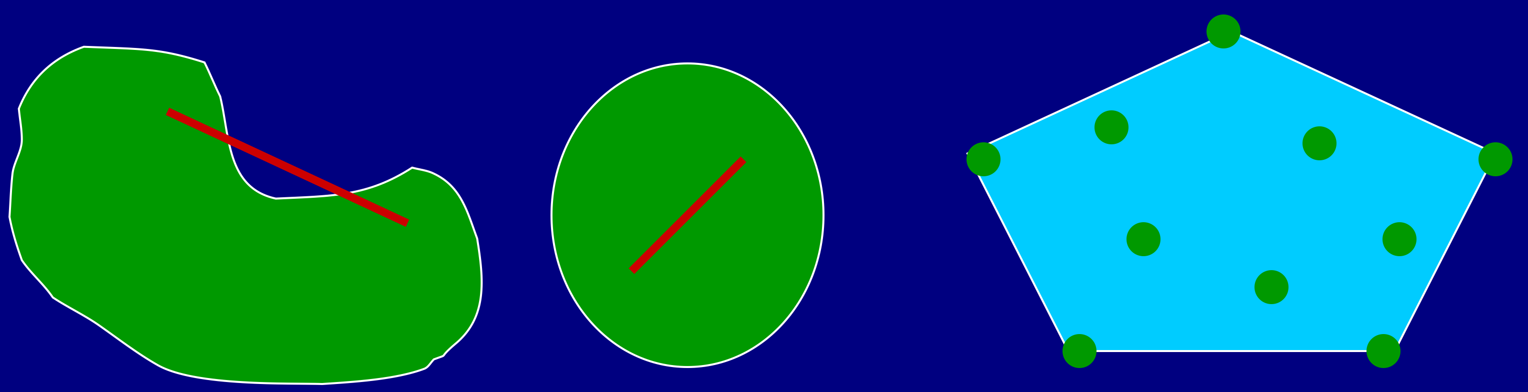
7.5 关系的闭包

- 闭包（closure）的定义
- 闭包的构造方法
- 闭包的性质
- 闭包的相互关系

什么是闭包

- 闭包(closure)： 包含一些给定对象，具有指定性质的最小集合
- “最小”： 任何包含同样对象，具有同样性质的集合，都包含这个闭包集合
- 例：(平面上点的凸包)



闭包的定义

定义7.14 设R是非空集合A上的关系，R的自反（对称或传递）闭包是A上的关系R′，使得 R′满足以下条件：

（1）R′是自反的（对称的或传递的）

（2）$R \subseteq R'$

（3）对A上任何包含R的自反（对称或传递）关系R″有 $R' \subseteq R''$。

一般将R的自反闭包记作r(R)，对称闭包记作s(R)，传递闭包记作t(R)。

闭包的构造方法

定理7.10 设R为A上的关系，则有

（1） $r(R) = R \cup R^0$

（2） $s(R) = R \cup R^{-1}$

（3） $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$

证明思路

(1)和(2)：证明右边的集合满足闭包定义的三个条件。

(3) 采用集合相等的证明方法。

证明左边包含右边，即$t(R)$包含每个R^n。

证明右边包含左边，即$R \cup R^2 \cup \ldots$具有传递的性质。

定理7.10 (1)的证明

（1） $r(R)=R\cup R^0$

证明

①由 $I_A=R^0\subseteq R\cup R^0$，可知 $R\cup R^0$ 是自反的，

② $R\subseteq R\cup R^0$。

③设 R'' 是A上包含R的自反关系，

则有 $R\subseteq R''$ 和 $I_A\subseteq R''$。

任取 $\langle x,y\rangle$，必有

$$\langle x,y\rangle\in R\cup R^0$$

$$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in R\cup I_A$$

$$\Rightarrow \langle x,y\rangle\in R''\cup R''=R''$$

所以 $R\cup R^0\subseteq R''$。

综上所述，$r(R)=R\cup R^0$。

定理7.10 (2)的证明

（2） $s(R)=R\cup R^{-1}$

证明

① $R\subseteq R\cup R^{-1}$。

②证明 $R\cup R^{-1}$ 是对称的，

任取 $\langle x, y\rangle$，有

$\langle x, y\rangle\in R\cup R^{-1}$

$\Leftrightarrow \langle x, y\rangle\in R\vee\langle x, y\rangle\in R^{-1}$

$\Leftrightarrow \langle y, x\rangle\in R^{-1}\vee\langle y, x\rangle\in R$

$\Leftrightarrow \langle y, x\rangle\in R\cup R^{-1}$

所以 $R\cup R^{-1}$ 是对称的。

③设 R'' 是包含R的对称关系，

任取 $\langle x, y\rangle$，有

$\langle x, y\rangle\in R\cup R^{-1}$

$\Leftrightarrow \langle x, y\rangle\in R\vee\langle x, y\rangle\in R^{-1}$

$\Leftrightarrow \langle x, y\rangle\in R\vee\langle y, x\rangle\in R$

$\Rightarrow \langle x, y\rangle\in R''\vee\langle y, x\rangle\in R''$

$\Leftrightarrow \langle x, y\rangle\in R''\vee\langle x, y\rangle\in R''$

$\Leftrightarrow \langle x, y\rangle\in R''$

所以 $R\cup R^{-1}\subseteq R''$。

综上所述，$s(R)=R\cup R^{-1}$。

定理7.10 (3)的证明

（3）$t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$

证明

先证$R \cup R2 \cup \ldots \subseteq t(R)$成立，为此只需证明对任意的正整数n有 $R^n \subseteq t(R)$即可。用归纳法。

n＝1时，有 $R^1 = R \subseteq t(R)$。

假设$R^n \subseteq t(R)$成立，那么对任意的$\langle x, y\rangle$有

$$\langle x, y\rangle \in R^{n+1} = R^n \circ R$$

$$\Leftrightarrow \exists t(\langle x, t\rangle \in R^n \wedge \langle t, y\rangle \in R)$$

$$\Rightarrow \exists t(\langle x, t\rangle \in t(R) \wedge \langle t, y\rangle \in t(R))$$

$$\Rightarrow \langle x, y\rangle \in t(R)$$ （因为$t(R)$是传递的）

这就证明了$R^{n+1} \subseteq t(R)$。

由归纳法命题得证。

定理7.10 (3)的证明

（3）$t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$

证明

再证$t(R) \subseteq R \cup R^2 \cup \ldots$成立，为此只须证明$R \cup R^2 \cup \ldots$是传递的。

任取$\langle x, y\rangle, \langle y, z\rangle$，则

$$\langle x, y\rangle \in R \cup R^2 \cup \ldots \quad \wedge \quad \langle y, z\rangle \in R \cup R^2 \cup \ldots$$

$$\Rightarrow \exists t(\langle x, y\rangle \in R^t) \quad \wedge \quad \exists s(\langle y, z\rangle \in R^s)$$

$$\Rightarrow \exists t \exists s(\langle x, y\rangle \in R^t \quad \wedge \quad \langle y, z\rangle \in R^s)$$

$$\Rightarrow \exists t \exists s(\langle x, z\rangle \in R^t \circ R^s)$$

$$\Rightarrow \exists t \exists s(\langle x, z\rangle \in R^{t+s})$$

$$\Rightarrow \langle x, z\rangle \in R \cup R^2 \cup \ldots$$

从而证明了$R \cup R^2 \cup \ldots$是传递的。

推论

推论 设R为有穷集A上的关系，则存在正整数r使得

$$t(R)=R\cup R^2\cup\ldots\cup R^r$$

证明 由定理7.6和7.10(3)得证。

例题 求整数集合Z上的关系R＝{<a, b> | a<b}的自反闭包和对称闭包。

解答 $r(R)=R\cup R^0=\{\langle a,b\rangle|a<b\}\cup\{\langle a,b\rangle|a=b\}$

$$=\{\langle a,b\rangle|a\leqslant b\}$$

$s(R)=R\cup R^{-1}=\{\langle a,b\rangle|a<b\}\cup\{\langle b,a\rangle|b<a\}$

$$=\{\langle a,b\rangle|a\neq b\}$$

通过关系矩阵求闭包的方法

设关系R，r(R)，s(R)，t(R)的关系矩阵分别为M，M_r，M_s和M_t，则

M_r ＝ M＋E　　　　对角线上的值都改为1

M_s ＝ M＋M′　　　　若a_{ij}＝1，则令a_{ji}＝1

M_t ＝ M＋M^2＋M^3＋...　　　　沃舍尔算法

其中E是和M同阶的单位矩阵，M′是M的转置矩阵。

注意在上述等式中矩阵的元素相加时使用逻辑加。

通过关系图求闭包的方法

设关系R，r(R)，s(R)，t(R)的关系图分别记为G，G_r，G_s，G_t，则G_r，G_s，G_t的顶点集与G的顶点集相等。

除了G的边以外，以下述方法添加新的边。

1) 考察G的每个顶点，如果没有环就加上一个环。最终得到的是G_r。

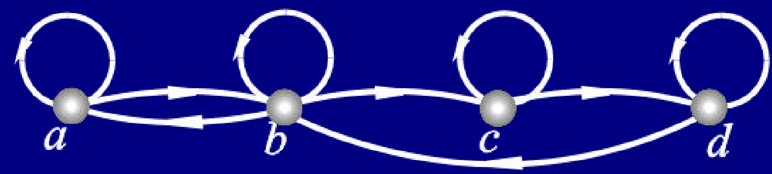
2) 考察G的每一条边，如果有一条x_i到x_j的单向边，i≠j，则在G中加一条边x_j到x_i的反方向边。最终得到G_s。

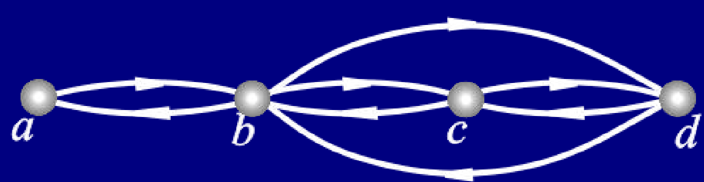
3) 考察G的每个顶点x_i，找出从x_i出发的所有2步，3步，...，n步长的路径（n为G中的顶点数）。

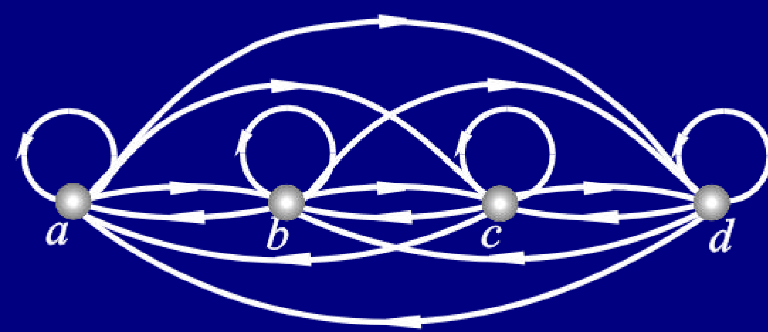
设路径的终点为 $x_{j_1}, x_{j_2}, \cdots, x_{j_k}$ 。
如果没有从x_i到 x_{j_l}（l=1, 2, ..., k)的边，就加上这条边。当检查完所有的顶点后就得到图G_t。

例7.15

例7.15 设A={a, b, c, d}， R={<a, b>, <b, a>, <b, c>, <c, d>, <d, b>}，则R和r(R)，s(R)，t(R)的关系图如下图所示。其中r(R)，s(R)，t(R)的关系图就是使用上述方法直接从R的关系图得到的。







Warshall 算法

输入：M（R的关系矩阵）

输出：M_T（t(R)的关系矩阵）

1. $M_T \leftarrow M$
2. for k ← 1 to n do
3.   for i ← 1 to n do
4.   for j ← 1 to n do
5. $M_T[i,j] \leftarrow M_T[i,j] + M_T[i,k] * M_T[k,j]$

注意：算法中矩阵加法和乘法中的元素相加都使用逻辑加。

Warshall 算法 举例

例 设A={a, b, c, d}，R={<a, b>, <b, a>, <b, c>, <c, d>, <d, b>}，求t(R)。

$$M_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

分析 $k=1$ 时，$M_T[i, j] \leftarrow M_T[i, j]+M_T[i, 1]*M_T[1, j]$

$M_T[1, j] \leftarrow M_T[1, j]+M_T[1, 1]*M_T[1, j]$

$M_T[2, j] \leftarrow M_T[2, j]+M_T[2, 1]*M_T[1, j]$ 将第1行加到第2行上

$M_T[3, j] \leftarrow M_T[3, j]+M_T[3, 1]*M_T[1, j]$

$M_T[4, j] \leftarrow M_T[4, j]+M_T[4, 1]*M_T[1, j]$

得到M_1。

Warshall 算法 举例

$$M_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

k＝1时，第1列中只有M[2,1]＝1，将第1行加到第2行上。

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

k＝2时，第2列中M[1,2]＝M[2,2]＝M[4,2]＝1，将第2行分别加到第1,2,4行上。

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Warshall 算法 举例

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

k＝3时，第3列中M[1,3]＝M[2,3]＝M[4,3]＝1，将第3行分别加到第1,2,4行上。

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

k＝4时，第4列中M[1,4]＝M[2,4]＝M[3,4]＝M[4,4]＝1，将第4行分别加到第1,2,3,4行上。

$$M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

闭包的主要性质

定理7.11 设R是非空集合A上的关系，则

（1）R是自反的当且仅当r(R)＝R。

（2）R是对称的当且仅当s(R)＝R。

（3）R是传递的当且仅当t(R)＝R。

证明 （1）充分性。

因为R＝r(R)，所以R是自反的。

必要性。

显然有R $\subseteq$ r(R)。

由于R是包含R的自反关系，根据自反闭包定义有r(R)$\subseteq$R。

从而得到r(R)=R。

闭包的主要性质

定理7.12 设R_1和R_2是非空集合A上的关系，且$R_1 \subseteq R_2$，则

（1）$r(R_1) \subseteq r(R_2)$

（2）$s(R_1) \subseteq s(R_2)$

（3）$t(R_1) \subseteq t(R_2)$

证明：(1)任取$\langle x,y\rangle$，有

$$\langle x,y\rangle \in r(R_1)$$

$$\Rightarrow \langle x,y\rangle \in R_1 \cup I_A$$

$$\Rightarrow \langle x,y\rangle \in R_1 \vee \langle x,y\rangle \in I_A$$

$$\Rightarrow \langle x,y\rangle \in R_2 \vee \langle x,y\rangle \in I_A$$

$$\Rightarrow \langle x,y\rangle \in R_2 \cup I_A$$

$$\Rightarrow \langle x,y\rangle \in r(R_2)$$

命题

命题 若R是对称的，则R^n也是对称的，其中n是任何正整数。

证明 用归纳法。

n=1，$R^1＝R$显然是对称的。

假设R^n是对称的，则对任意的$\langle x, y\rangle$，有

$$
\begin{aligned}
& \langle x, y\rangle \in R^{n+1} \\
\Leftrightarrow\ & \langle x, y\rangle \in R^n \circ R \\
\Leftrightarrow\ & \exists t\,(\langle x, t\rangle \in R^n \wedge \langle t, y\rangle \in R) \\
\Rightarrow\ & \exists t\,(\langle t, x\rangle \in R^n \wedge \langle y, t\rangle \in R) \\
\Leftrightarrow\ & \langle y, x\rangle \in R \circ R^n \\
\Leftrightarrow\ & \langle y, x\rangle \in R^{1+n} = R^{n+1}
\end{aligned}
$$

所以R^{n+1}是对称的。由归纳法命题得证。

关系性质与闭包运算之间的联系

定理7.13 设R是非空集合A上的关系，

（1）若R是自反的，则s(R)与t(R)也是自反的。

（2）若R是对称的，则r(R)与t(R)也是对称的。

（3）若R是传递的，则r(R)是传递的。

证明：只证（2）。

定理7.13 (2)的证明

（2）若R是对称的，则r(R)与t(R)也是对称的。

证明r(R)是对称的。

由于R是A上的对称关系，所以$R=R^{-1}$，同时$I_A=I_A^{-1}$。

$$
\begin{aligned}
r(R)^{-1} &= (R\cup R^0)^{-1} \\
&= (R\cup I_A)^{-1} \\
&= R^{-1}\cup I_A^{-1} \\
&= R\cup I_A \\
&= r(R)
\end{aligned}
$$

所以，r(R)是对称的。

定理7.13 (2)的证明

（2）若R是对称的，则r(R)与t(R)也是对称的。

下面证明t(R)的对称性。

任取$\langle x, y\rangle$

$\langle x, y\rangle \in t(R)$

$\Rightarrow \exists n(\langle x, y\rangle \in R^n)$

$\Rightarrow \exists n(\langle y, x\rangle \in R^n)$ （因为R^n是对称的）

$\Rightarrow \langle y, x\rangle \in t(R)$

所以，t(R)是对称的。

定理7.13的讨论

	自反性	对称性	传递性
r(R)	√	√	√
s(R)	√	√	×(反例)
t(R)	√	√	√

反例 $A=\{1，2，3\}$，
$R=\{\langle 1,3\rangle\}$ 是传递的

$s(R)=\{\langle 1,3\rangle,\langle 3,1\rangle\}$

显然s(R)不是传递的。

- 从这里可以看出，如果计算关系R的自反、对称、传递的闭包，为了不失去传递性，传递闭包运算应该放在对称闭包运算的后边，若令tsr(R)表示R的自反、对称、传递闭包，则

鎴鎴鎴鎴tsr(R)=t(s(r(R)))

命题

- **命题**：设 $R_1, R_2 \subseteq A\times A$ 且 $A\neq\varnothing$，则

  (1) $r(R_1\cup R_2) = r(R_1)\cup r(R_2)$;

  (2) $s(R_1\cup R_2) = s(R_1)\cup s(R_2)$;

  (3) $t(R_1\cup R_2) \supseteq t(R_1)\cup t(R_2)$.

证明：(1) 利用定理7.1，$r(R_1\cup R_2)\supseteq r(R_1)\cup r(R_2)$.

$r(R_1)\cup r(R_2)$自反且包含$R_1\cup R_2$，所以

$r(R_1\cup R_2)\subseteq r(R_1)\cup r(R_2)$.

$\therefore\ r(R_1\cup R_2) = r(R_1)\cup r(R_2)$

命题(证明(2))

- (2) $s(R_1 \cup R_2) = s(R_1) \cup s(R_2)$;
- 证明(2)：利用命题2，$s(R_1 \cup R_2) \supseteq s(R_1) \cup s(R_2)$.

  $s(R_1) \cup s(R_2)$对称且包含$R_1 \cup R_2$, 所以

  $s(R_1 \cup R_2) \subseteq s(R_1) \cup s(R_2)$.

$$\therefore\ s(R_1 \cup R_2) = s(R_1) \cup s(R_2)$$

命题(证明(3))

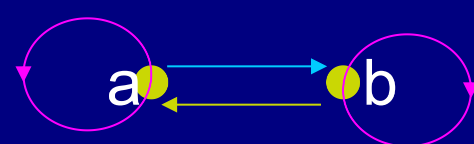
- (3) $t(R_1 \cup R_2) \supseteq t(R_1) \cup t(R_2)$.
- 证明(3)：利用命题2,

$$t(R_1 \cup R_2) \supseteq t(R_1) \cup t(R_2).$$

反例：$t(R_1 \cup R_2) \supset t(R_1) \cup t(R_2)$. #

$G(R_1) = G(t(R_1))$

$G(R_2) = G(t(R_2))$



$G(t(R_1 \cup R_2))$

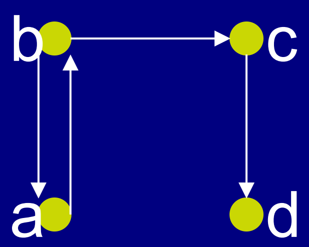
例子

- 例：设 A = { a, b, c, d },

  R = { <a, b>, <b, a>, <b, c>, <c, d> }.

  求 r(R), s(R), t(R).

- 解：

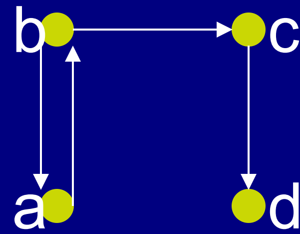


$$M(R)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

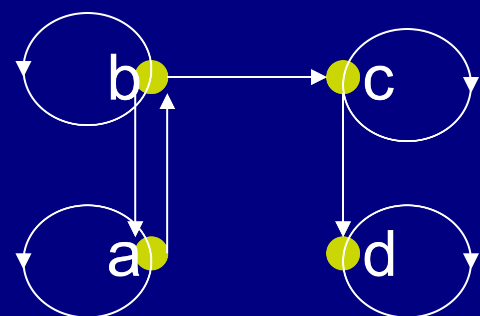
$$M(r(R))=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}.\quad M(s(R))=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}.$$

例子(续)

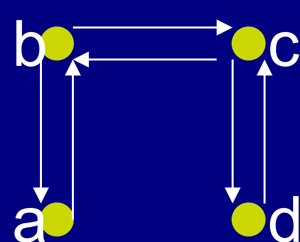
- 解 (续)：



$$M(R)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$



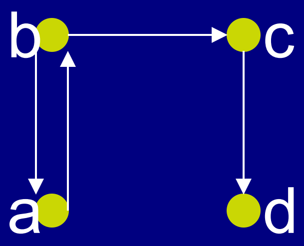
$$M(r(R))=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$



$$M(s(R))=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}.$$

例子(续2)

- 解 (续2)：



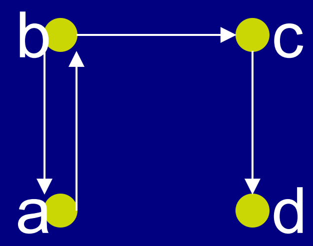
$$M(R)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

$$M(R^2)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

$$M(R^3)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

例子(续3)

- 解 (续3)：



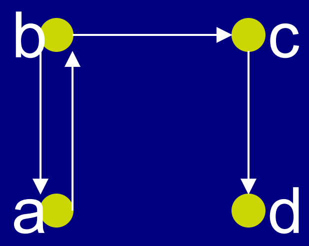
$$M(R)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

$$M(R^2)=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}.\qquad M(R^3)=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

$$M(R^4)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=M(R^2).$$

例子(续4)

- 解 (续4)：



$$M(t(R)) = M(R) \vee M(R^2) \vee M(R^3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \#$$