

1. 求极限 (1). $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$; (2). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - (1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}$; (3). $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{e} \right)^n$.

2. (1). 讨论函数 $f(x) = (x-2)\sqrt[3]{x^2}$ 的极值情况.

(2). 讨论函数 $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ 的单调性, 极值情况, 凹凸区间, 给出曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

(3). 给出曲线 $y = \sqrt[3]{x}$ 的拐点.

3. 设在 $[0, c]$ 上 $f(x)$ 二阶可导且为凸函数, $f(0) = 0$, 证明: 当 $0 \leq a \leq b \leq a+b \leq c$ 时有 $f(a+b) \geq f(a) + f(b)$.

4. 给出函数 $f(x) = xe^{-x^2}$ 的带 Peano 型余项的 Maclaurin 展开式, 给出 $f^{(9)}(0), f^{(10)}(0)$.

5. 设 $x > 0$, 证明: $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$.

6. 证明: 在 $x > 0$ 时函数 $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ 严格单调递增.

7. (1). 求证: $x > 0, x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$;

(2). 比较两数的大小: (i). $\ln(\sqrt{2}+1)$ 与 $\sqrt{2}-1$; (ii). $\pi\sqrt{3}$ 与 $24\ln\frac{4}{3}$.

8. 设 a 为常数, 求证: $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\arctan \frac{a}{n} - \arctan \frac{a}{n+1} \right) = a$.

9. 证明可导的奇函数的导函数是偶函数. 又问: 连续的偶函数的原函数是奇函数吗?

10. 若 $x \ln x$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数, 问 $\int xf'(2x)dx = ?$

11. 计算不定积分

(1). $\int \frac{dx}{x + \sqrt{1-x^2}}$; (2). $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$; (3). $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{2x}}$; (4). $\int (x \ln x)^2 dx$; (5). $\int e^{-\sqrt[3]{x}} dx$;
 (6). $\int \frac{\arctan x}{\sqrt{(1+x^2)^3}} dx$; (7). $\int \sqrt{e^x - 1} dx$.

12. 不等式证明一箩筐：

(1). $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$;

(2). $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$;

(3). $x > 0, \ln x \leq x - 1$;

(4). $0 < x < \frac{\pi}{2}, \frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{x}$;

(5). $x < 1$ 时有 $e^x \leq \frac{1}{1-x}$;

(6). $x \in [0, 1], p \geq 1, \frac{1}{2^{p-1}} \leq x^p + (1-x)^p \leq 1$;

(7). $a \neq b$, 有 $e^{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{e^b - e^a}{b-a} \leq \frac{e^a + e^b}{2}$.

(7). 分析: (A) $a \neq b, \frac{e^b - e^a}{b-a} \leq \frac{e^a + e^b}{2} \Leftrightarrow \frac{e^{b-a} - 1}{b-a} \leq \frac{1 + e^{b-a}}{2}, b-a \triangleq t,$

$\Leftrightarrow t \neq 0, \frac{e^t - 1}{t} \leq \frac{1 + e^t}{2}$... 这种做法形象地称为“降维‘打击’”。