# 5-03 参变量函数
# &
# 5-04 高阶导数

若参数方程$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$确定$y$与$x$间的函数关系,称此为由参数方程所确定的函数.

例如,$\begin{cases} x = 2t \\ y = t^2 \end{cases}$, $t \in (-\infty, +\infty)$, $t = \dfrac{x}{2}$,消去参数$t$,得 $y = t^2 = \dfrac{x^2}{4}$,于是 $y' = \dfrac{1}{2}x$.

Q:消参数麻烦或无法消参数时如何求导?

A:用复合函数求导的链式公式和反函数求导公式解之.

## 1.光滑曲线

**定义:光滑曲线**

设曲线$C$方程为$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}, t\in(\alpha,\beta), \varphi'(t),$

$\psi'(t)$在$(\alpha,\beta)$内连续,且$(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2\neq 0$,

则称曲线$C$为光滑曲线.此时曲线$C$上每一点都有唯一的切线,且切线的倾角$\alpha(t)$是$t\in(\alpha,\beta)$时的连续函数 .

上页 下页 返回

设$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}, t\in(\alpha,\beta)$,若$x=\varphi(t)$在$(\alpha,\beta)$

内有严格单调连续的反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$,

$\therefore\ y=\psi\left[\varphi^{-1}(x)\right]$,再设函数$x=\varphi(t)$,

$y=\psi(t)$都可导,且$\varphi'(t)\neq 0, t\in(\alpha,\beta)$.

由复合函数和反函数的求导法则得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},\text{即}\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}.$$

上页 下页 返回

## 2.高阶导数的定义

问题:变速直线运动的加速度.

设$s = f(t)$,则瞬时速度为$v(t) = f'(t)$,

$\because$ 加速度$a$是速度$v$对时间$t$的变化率,

$\therefore a(t) = v'(t) = [f'(t)]'$.

定义如果函数$f(x)$的导数$f'(x)$在点$x$处可导,即

$$(f'(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

存在,则称$(f'(x))'$为函数$f(x)$在点$x$处的二阶导数.

记作 $f''(x), y'', \dfrac{d^2y}{dx^2}$ 或 $\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}$.

二阶导数的导数称为三阶导数, $f'''(x), y''', \dfrac{d^3y}{dx^3}$.

三阶导数的导数称为四阶导数, $f^{(4)}(x), y^{(4)}, \dfrac{d^4y}{dx^4}$

一般地, 函数$f(x)$的$n-1$阶导数的导数称为函数$f(x)$的$n$阶导数,记作

$$f^{(n)}(x), y^{(n)}, \frac{d^ny}{dx^n} \text{或} \frac{d^nf(x)}{dx^n}$$

二阶和二阶以上的导数统称为**高阶导数**.

相应地, **$f(x)$称为零阶导数**; $f'(x)$称为一阶导数.

设 $s=s(t)$,则瞬时速度为 $v(t)=s'(t)$,

$\because$ 加速度$a$是速度$v$对时间$t$的变化率,

$\therefore a(t)=v'(t)=\left[s'(t)\right]'$.

这样,由牛顿力学中的冲量定律

$$F\Delta t=m\Delta v,$$

就可以得到牛顿第二定律

$$F=\lim_{\Delta t\to 0}m\frac{\Delta v}{\Delta t}=m\frac{dv}{dt}=m\frac{d^2s}{dt^2},$$

即 $F=m\dfrac{d^2s}{dt^2}=ma.$

上页 下页 返回

## 高阶导数的运算法则:

设函数$u$和$v$具有$n$阶导数, 则

(1). $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$;

(2). $(Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}$;

(3). $(u \cdot v)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \dfrac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v''$

$$+ \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \cdots + uv^{(n)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} \quad (Leibniz\text{公式}).$$

例1.设 $y=\frac{1}{x^2-1}$，求$y^{(5)}$.

解 $\because\ y=\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)$

$\therefore\ y^{(5)}=\frac{1}{2}\left[\frac{-5!}{(x-1)^6}-\frac{-5!}{(x+1)^6}\right]$

$=60\left[\frac{1}{(x+1)^6}-\frac{1}{(x-1)^6}\right].$

上页 下页 返回

例2.设$f(x)=\arctan x$, 求$f''(0), f'''(0)$.

解$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}, f''(x)=\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)'=\dfrac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}$,

$$f'''(x)=\left(\frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}\right)'=\frac{2\left(3x^2-1\right)}{\left(1+x^2\right)^3}.$$

$$\therefore\ f''(0)=\left.\frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}\right|_{x=0}=0,\ f'''(0)=-2.$$

如果要求$f^{(n)}(0)$如何?

$$f(x)=\arctan x,\ f'(x)=\frac{1}{1+x^2},$$

$$f''(x)=\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'=\frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2},$$

$$f'''(x)=\left(\frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}\right)'=\frac{2\left(3x^2-1\right)}{\left(1+x^2\right)^3},$$

$$f^{(4)}(x)=\left(\frac{2\left(3x^2-1\right)}{\left(1+x^2\right)^3}\right)'=\frac{6x\left(1+x^2\right)^3-2\left(3x^2-1\right)3\left(1+x^2\right)^2\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^6}$$

$$=\frac{6x\left(3-5x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^4}.$$

对于$f(x)=\arctan x$,要求$f^{(n)}(0)$,那就需要先计算$f^{(n)}(x)$,那么如何计算呢?

这是一个问题.若我们通过计算$f'(x)$,

$f''(x), f'''(x), f^{(4)}(x),\cdots, f^{(101)}(x),\cdots$

发扬愚公精神不断做下去,我们就会发现结果中看不出有什么规律来.

要想给出$f^{(n)}(x)$实在是做不到啊!

高阶导数的计算还是需要一些技巧的!

## 思考题1.

设$g'(x)$连续，且$f(x)=(x-a)^2g(x)$.

求$f''(a)$.

上页 下页 返回

## 思考题1.解答

$\because g(x)$可导,

$\therefore f'(x)=2(x-a)g(x)+(x-a)^2 g'(x)$,

如果继续下去,

$$f''(x)=2g(x)+2(x-a)g'(x)$$
$$+(x-a)^2 g''(x)+2(x-a)g'(x)$$
$$=2g(x)+4(x-a)g'(x)+(x-a)^2 g''(x)$$

$\therefore f''(a)=2g(a).$

你说这样做对吗?

## 思考题1.解答

$$f'(x)=2(x-a)g(x)+(x-a)^2g'(x),$$ 但

$$f''(x)=2g(x)+4(x-a)g'(x)+(x-a)^2g''(x)$$

的计算中$g''(x)$未必存在,故而此做法不对.

须用定义计算$f''(a)$, $\because f'(a)=0$,

$$f''(a)=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}[2g(x)+(x-a)g'(x)]=2g(a).$$

上页 下页 返回

## 3. 参变量函数的高阶导数的计算

若函数 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, t \in (\alpha, \beta),$

$\varphi, \psi$ 二阶可导, $y'_x = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \left(y'_x\right)'_x$$

$$= \left(y'_x\right)'_t \cdot t'_x = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}.$$

例3.求由$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$表示的函数的导数$\dfrac{d^2 y}{dx^2}$.

解 $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{3a\sin^2 t\cos t}{3a\cos^2 t(-\sin t)} = -\tan t,$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t} = \frac{(-\tan t)'}{(a\cos^3 t)'}$$

$$= \frac{-\sec^2 t}{-3a\cos^2 t\sin t} = \frac{\sec^4 t}{3a\sin t}.$$

思考题2：

试绘制方程
$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$$
确定的曲线的草图.

提示:注意下列方程的关联,其对应曲线图象的变化.

$$A.\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases},\quad B.\begin{cases} |x| = a\cos^2 t \\ |y| = a\sin^2 t \end{cases},$$

$$C.\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}.$$

上页 下页 返回

练习题

1. 求下列参数方程确定的函数的二阶导数.

(1). $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, a, b > 0;$

(2). $\begin{cases} x = \ln\left(1 + t^2\right) \\ y = t - \arctan t \end{cases}.$

2. 求函数的高阶导数：

(1). $y = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right).$