

## 6. 微分复习课2022-12

上页

下页

返回



## B. 微分与导数应用

$$B1. f(x) = x(2x-1)(3x-2)\cdots(2023x-2022),$$

$$\text{则 } f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dots$$

重视导数/微分的几何意义,可导/可微的条件.

B1.(2).下列函数中在 $x=0$ 处可导的是

$$(A).|x|; \quad (B).|\sin x|; \quad (C).f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases};$$

$$(D).f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}.$$



B.1.(3). 设函数  $f(x)$  可导且

$f'(x)$  有界,  $g(x) = f(x)\sin^2 x$ , 则  $g''(0) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

解  $g'(x) = f'(x)\sin^2 x + f(x)\sin 2x$ ,

题中没有  $f''(x)$  存在的条件, 故只能如下处理

$$\begin{aligned} g''(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x) - g'(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)\sin^2 x + f(x)\sin 2x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ f'(x) \frac{\sin^2 x}{x} + f(x) \frac{\sin 2x}{x} \right] = 2f(0). \end{aligned}$$



B1.(4). 设  $f(x)$  的二阶导函数在  $(-\infty, +\infty)$  上连续,

$$f(0) = 0, g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}, \text{试确定 } a \text{ 的值,}$$

使得  $g(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续.

证明在此条件下,  $g'(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续.

$$\begin{aligned} \text{解 } a &= \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 g'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{x} - f'(0)}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - xf'(0)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{2x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{2} = \frac{f''(0)}{2}.
 \end{aligned}$$

$$\therefore g'(x) = \begin{cases} \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}f''(0), & x = 0 \end{cases}$$



$$g'(x) = \begin{cases} \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}f''(0), & x = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf''(x) + f'(x) - f'(x)}{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(0)}{2} = g'(0)$$

$\therefore g'(x)$  在  $x = 0$  处连续, 即在  $(-\infty, +\infty)$  上连续.



B1.(5). 设连续函数  $f(x)$  满足  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2 - 1} = 1$ ,

试给出曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线, 法线方程.

解  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2 - 1} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0,$

由  $f(x)$  连续得  $f(1) = 0$ .

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{f(x)}{x^2 - 1} (x + 1) \right] = 2,$$

切线方程  $y - f(1) = 2(x - 1),$

法线方程  $y - f(1) = -\frac{1}{2}(x - 1).$



B1.(6).如果 $f'(a)$ 存在,那么 $A = ?$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a-h)}{h} = A$$

解  $\because f'(a)$ 存在,  $\therefore f(a)$ 存在,

$$\begin{aligned} A &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ 2 \frac{f(a+2h) - f(a)}{2h} \right. \\ &\quad \left. + \frac{f(a+(-h)) - f(a)}{-h} \right] \\ &= 3f'(a) \end{aligned}$$



函数 $f(x)$ 在 $U(a)$ 内有定义,  
则( **D** )是 $f'(a)$ 存在的充分条件.

(A).  $\lim_{h \rightarrow +\infty} h \left[ f \left( a + \frac{1}{h} \right) - f(a) \right]$  存在;

(B).  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h^3) - f(a)}{h}$  存在;

(C).  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a - h)}{2h}$  存在;

(D).  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a) - f(a - h)}{h}$  存在.



$$(A). \lim_{h \rightarrow +\infty} h \left[ f \left( a + \frac{1}{h} \right) - f(a) \right]$$

$$= \lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{f(a + 1/h) - f(a)}{1/h} = f'_+(a)$$

$$(B). \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h^3) - f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(a + h^3) - f(a)}{h^3} \cdot h^2 \right] \text{存在；}$$

$$(C). \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a - h)}{2h} \text{存在；}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq a \\ 0, & x = a \end{cases}$$

在  $x = a$  处不连续当然不可导,

但是  $h \neq 0, f(a + h) - f(a - h) = 1 - 1 \equiv 0$ .



B2. 求由  $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$  表示的函数的导数  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ .

解  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{3a \sin^2 t \cos t}{3a \cos^2 t (-\sin t)} = -\tan t,$

$$y''_x = \frac{d(y'_x)}{dx} = \frac{d(y'_x)}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}.$$

$$\therefore \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{(-\tan t)'}{(a \cos^3 t)'} = \frac{\sec^4 t}{3a \sin t}.$$



B2.(2).  $y = f(x) : \begin{cases} x = t^3 + 3t + 1 \\ y = t^3 - 3t + 1 \end{cases}$ , 求出凹弧与

凸弧所对应  $x$  的取值范围以及曲线的拐点.

解  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{3(t^2 - 1)}{3(t^2 + 1)} = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1},$

$$y''_x = \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)'_t}{\left(\frac{dx}{dt}\right)'_t} = \frac{\left(\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}\right)'}{3(t^2 + 1)'} = \frac{4t}{3(t^2 + 1)^3}.$$

$\therefore t < 0$  时  $y''_x < 0$ , 此时曲线是凸弧,

$t > 0$  时  $y''_x > 0$ , 此时曲线是凹弧.



$$\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1 \\ y = t^3 - 3t + 1 \end{cases}, y''_x = \frac{4t}{3(t^2 + 1)^3}.$$

$\therefore t < 0$  时  $y''_x < 0$ , 此时曲线是凸弧,

$t > 0$  时  $y''_x > 0$ , 此时曲线是凹弧,

$t = 0$  时对应曲线上点即曲线拐点为  $(1, 1)$ ,

$\because x'_t = 3(t^2 + 1) > 0$ , 即  $x$  是  $t$  的严格单调递增的函数,

$\therefore t < 0$  即  $x < 1$  时曲线是凸弧,

$t > 0$  即  $x > 1$  时曲线是凹弧.



$$B3. f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1}, f^{(n)}(0) = ?$$

$$\text{解 } f(x) = \frac{2(x^2 - 1) + 2}{x^2 - 1} = 2 + \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1}$$

$$\left(\frac{1}{x - 1}\right)' = \left((x - 1)^{-1}\right)' = -(x - 1)^{-2}, \left(\frac{1}{x - 1}\right)'' = -(-2)(x - 1)^{-3},$$

$$\left(\frac{1}{x - 1}\right)''' = -(-2)(-3)(x - 1)^{-4}, \dots \therefore \left(\frac{1}{x - 1}\right)^{(n)} = (-1)^n n! (x - 1)^{-(n+1)},$$

$$\therefore (f(x))^{(n)} = (-1)^n n! \left[ \frac{1}{(x - 1)^{n+1}} - \frac{1}{(x + 1)^{n+1}} \right],$$

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & n = 2k + 1 \\ -2n!, & n = 2k \end{cases}.$$



**B3.**  $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1}, f^{(n)}(0) = ?$

又解 由于  $f(x)$  是  $(-1, 1)$  内可导的偶函数,  
所以  $f^{(2n+1)}(x)$  是  $(-1, 1)$  内的奇函数,  
故  $f^{(2n+1)}(0) = 0$ .



$$B3. f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1}, f^{(n)}(0) = ?$$

解二 由 $|t| < 1$  时有 $1 + t + t^2 + \cdots + t^n + \cdots = \frac{1}{1-t}$ ,

由Taylor定理可知函数的Taylor多项式唯一,

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \cdots + t^n + r_n(t),$$

$$\therefore f(x) = -2x^2 \cdot \frac{1}{1-x^2} = -2x^2 (1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n-2} + r_{n-1}(x^2))$$

$$= -2x^2 - 2x^4 - 2x^6 - \cdots - 2x^{2n} + R_{2n}(x),$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots + \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}x^{2n} + R_{2n}(x),$$

再由Taylor定理的Taylor多项式唯一得:  $f^{(2k+1)}(0) = 0, k \in \mathbb{N}$ .

$$\frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} = -2, \Rightarrow f^{(2k)}(0) = -2(2k)! .$$



B4.(1).已知连续函数 $f(x)$ 有 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x-a)^4} = 2$ ,

那么, $f(x)$ 在点 $x = a$ 处取得极\_\_\_\_值 = \_\_\_\_.

(2).二阶可导函数 $f(x)$ 有 $f'(a) = 0, f''(a) < 0$ ,

那么, $f(x)$ 在点 $x = a$ 处取得极\_\_\_\_值.

(3).三阶可导函数 $f(x)$ 有 $f'(a) = f''(a) = 0$ ,

$f'''(a) > 0$ ,那么, $f(x)$ 在点 $x = a$ 处是否取得极值?

$(a, f(a))$ 是否是曲线 $y = f(x)$ 的拐点?在点 $a$ 的

一个小的左邻域内曲线的凹凸情况如何?



B4.(1).已知连续函数 $f(x)$ 有 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x-a)^4} = 2$ ,

那么, $f(x)$ 在点 $x=a$ 处取得极\_\_\_\_值 = \_\_\_\_.

直观分析,发现结论.考虑特殊情形

$f(x) = 2(x-a)^4$ ,极小值 $f(a) = 0$ .

理性推导

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x-a)^4} = 2 > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \overset{\text{函数}}{=} \overset{\text{连续}}{=} f(a),$$

$\exists$ 点 $a$ 的某去心邻域,在该邻域内, $\frac{f(x)}{(x-a)^4} > 0$ ,

$\therefore x \neq a, f(x) > f(a) = 0$ .

上页

下页

返回



B4.(2).二阶可导函数 $f(x)$ 有 $f'(a) = 0$ ,  
 $f''(a) < 0$ ,

那么, $f(x)$ 在点 $x = a$ 处取得极大值.

可以 $f(x) = \cos x, a = 0$ ,为例给出结果.

有关一些的基本结论是需要了解的.



B4.(3). 三阶可导函数 $f(x)$ 有 $f'(a) = f''(a) = 0$ ,  
 $f'''(a) > 0$ ,那么, $f(x)$ 在点 $x = a$ 处是否取得极值?  
 $(a, f(a))$ 是否是曲线 $y = f(x)$ 的拐点?在点 $a$ 的  
一个小的左邻域内曲线的凹凸情况如何?

直观分析,发现结论:考察特殊函数 $f(x) = x^3, a = 0$ .

理性推导

$$f'''(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x) - f''(a)}{x - a} > 0 \Rightarrow$$

$\exists$ 点 $a$ 的某去心邻域,在该邻域内, $\frac{f''(x)}{x - a} > 0$ ,

$\therefore x < a, f''(x) < 0, x > a, f''(x) > 0$ ,

$\therefore$ 在点 $a$ 的小的邻域内曲线是左凸右凹.



**B5.** 求证 在 $(-\infty, +\infty)$ 上点点可导的  
偶(奇)函数的导函数是奇(偶)函数.

证明 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上点点可导, 偶函数,  
则 $\forall x \in (-\infty, +\infty), f(-x) = f(x),$

$$f'(-x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{h} \stackrel{-h=t}{=} \quad$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{-t}$$



$$f'(-x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{h} \stackrel{-h=t}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{-t}$$

$$= -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} = -f'(x)$$

$$\forall x \in (-\infty, +\infty), f'(-x) = -f'(x)$$

$\therefore$  在  $(-\infty, +\infty)$  上, 可导的偶函数  $f(x)$

$\Rightarrow f'(x)$  是奇函数.



**B5.** 求证 在 $(-\infty, +\infty)$ 上点点可导的  
偶(奇)函数的导函数是奇(偶)函数.

证二 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上点点可导, 偶函数,  
则 $\forall x \in (-\infty, +\infty), f(-x) = f(x),$

$$(f(-x))' = f'(x) \text{ 即 } f'(-x) \cdot (-1) = f'(x),$$

$$\therefore f'(-x) = -f'(x),$$

$\therefore$  在 $(-\infty, +\infty)$ 上,  $f(x)$ 可导的偶函数  
 $\Rightarrow f'(x)$ 是奇函数.



(A1). 在 $(-a, a)$ 上可导的偶函数的导函数是奇函数.

(A2). 在 $(-a, a)$ 上可导的奇函数的导函数是偶函数.

(B1). 在 $(-a, a)$ 上连续的奇函数的任一原函数都是偶函数.

(B2). *Q.*在 $(-a, a)$ 上连续的偶函数的原函数一定是奇函数么?

*A.* 非也 .

设 $f(x)$ 是连续的偶函数, $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $(-a, a)$ 上的一个原函数,若 $F(0) = 0$ ,则 $F(x)$ 是奇函数 .



B5.(2). 设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有定义,  $\forall x, y \in (0, +\infty)$  有 $f(xy) = f(x) + f(y)$ . 若 $f(x)$ 在 $x_0 = 1$ 处可导, 证明函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上可导. 又若 $f'(1) = 2$ , 求 $f(x)$ .

证明  $\because f(1) = 0$ ,

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)}{h} = a.$$

$\forall x > 0$ ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(x\left(1 + \frac{h}{x}\right)\right) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} = \frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} = \frac{1}{x} f'(1) = \frac{a}{x}, \end{aligned}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{a}{x}, x > 0, \therefore f(x) = a \ln x.$$

上页

下页

返回



B6.  $f''(x)$ 存在,求证:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = f''(x).$$

证明  $L \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) + f'(x-h)(-1)}{2h}$

$$= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x) + f'(x) - f'(x-h)}{h}$$
$$= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} + \frac{f'(x-h) - f'(x)}{-h} \right]$$
$$= \frac{1}{2} [f''(x) + f''(x)] = f''(x).$$



倘若象下面这样来做,那就错了!

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$$

$$\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x-h)}{2h}$$

$$\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(x+h) + f''(x-h)}{2} \dots\dots (@)$$

$$= \frac{1}{2} [f''(x) + f''(x)] = f''(x).$$

$\therefore$  (@)这一步需要 $f''(x)$ 的连续性!



不等式证明常用的做法:

1. 直接使用微分中值定理;
2. 利用单调性;
3. 极值法;
4. 最值法;
5. 利用函数的凹凸性.



## B7.证明不等式

(1).  $|\arctan a - \arctan b| \leq |a - b|$  ;

(2).  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \sin x + \tan x > 2x$  ;      (3).  $0 < a < b < \frac{\pi}{2}, \frac{b}{a} < \frac{\tan b}{\tan a}$  ;

(4).  $x \in [0, 1], p \geq 1, \frac{1}{2^{p-1}} \leq x^p + (1-x)^p \leq 1$  ;

(5).  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \frac{2}{\pi}x < \sin x < x$  ;

(6).  $x > 0, \ln x \leq x - 1$  ;

(7). 求证  $x < 1$  时, 有  $e^x \leq \frac{1}{1-x}$  ;

(8).  $x > 0, \frac{1}{1+x} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$  ;

(9). 证明:  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ , 有  $\left(\frac{e^x + e^y}{2}\right)^2 \geq e^{x+y}$ .



**B7.(7).** 求证  $x < 1$  时, 有  $e^x \leq \frac{1}{1-x}$ .

证明 法一  $\because x < 1$  时,  $1-x > 0$ ,

$$\therefore x < 1, e^x \leq \frac{1}{1-x} \Leftrightarrow e^x (1-x) \leq 1.$$

设  $\varphi(x) = e^x (1-x)$ ,  $x < 1$ ,  $\varphi'(x) = -xe^{-x}$ ,

$\therefore x < 0$  时,  $\varphi'(x) > 0$ ,  $\varphi(x) \nearrow$ ,

$0 < x < 1$  时,  $\varphi'(x) < 0$ ,  $\varphi(x) \searrow$ ,

$\therefore$  在  $x < 1$  时  $\varphi(x)$  的最大值为  $\varphi(0) = 1$ ,

$\therefore \forall x < 1$  时, 有  $\varphi(x) = e^x (1-x) \leq 1$ .



**B7.(7).**求证  $x < 1$  时, 有  $e^x \leq \frac{1}{1-x}$ .

法二  $\because x < 1$  时, 令  $t = -x > -1$ ,

$$x < 1 \text{ 时, 有 } e^x \leq \frac{1}{1-x}$$

$$\Leftrightarrow x < 1 \text{ 时, 有 } e^{-x} \geq 1 - x$$

$$\Leftrightarrow t > -1, e^t \geq 1 + t.$$

而这是不难证明的.



下面证明  $t > -1, e^t \geq 1 + t$ .

证明: 设  $\varphi(t) = e^t - 1 - t$ ,

则  $\varphi(t)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续.  $\varphi'(t) = e^t - 1$ ,

$t < 0, \varphi'(t) = e^t - 1 < 0, \varphi(t)$  增,

$\therefore t < 0, \varphi(t) > \varphi(0) = 0$ ;

$t > 0, \varphi'(t) = e^t - 1 > 0, \varphi(t)$  减,

$\therefore t > 0, \varphi(t) > \varphi(0) = 0$ .

$\therefore \forall t \in (-\infty, +\infty), \varphi(t) = e^t - 1 - t \geq 0$ .



**B8. 比较数的大小： $\ln(\sqrt{2} + 1), \sqrt{2} - 1$ .**

**解：可证  $x > 1, x \ln x$  增.**

$$(\sqrt{2} + 1) \ln(\sqrt{2} + 1) > (1 + 1) \ln(1 + 1)$$

$$= 2 \ln 2 = \ln 4 > 1 > \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2} - 1.$$

**或者由  $x > 0, \ln x$  增.**

$$\ln(\sqrt{2} + 1) > \ln \sqrt{e} = \frac{1}{2} > \sqrt{2} - 1.$$



B8.(2). 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上二阶可导,

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ , 且 $f''(x) > 0$ . 求证: (1).  $f'(0) = 1$  ;

(2). 在 $(-\infty, +\infty)$ 上恒有  $f(x) \geq x$ .

证明(1).  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ ,

$\because f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可导当然连续,

$\therefore f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ ,

$\therefore f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ .



(2). 设  $\varphi(x) = f(x) - x$ ,  
则  $\varphi(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上二阶可导,  
 $x = 0$  时  $\varphi'(x) = f'(x) - 1 = 0$ .  
又  $\varphi''(x) = f''(x) > 0$ , 即  $\varphi''(0) > 0$ ,  
 $\therefore x = 0$  处  $\varphi(x)$  取得  $\varphi(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$   
上的最小值  $\varphi(0) = 0$ ,  
即  $\forall x \in (-\infty, +\infty), f(x) - x \geq 0$ .



(2).法二：设  $\varphi(x) = f(x) - x$  连续，  
 $\varphi'(0) = f'(x) - 1 = 0, \varphi''(x) = f''(x) > 0$ ,  
 $\therefore$  在  $(-\infty, +\infty)$  上  $\varphi'(x)$  严格递增.

$\therefore$  在  $(-\infty, 0)$  上,  $\varphi'(x) < \varphi'(0) = 0$

$\Rightarrow$  在  $(-\infty, 0)$  上,  $\varphi(x)$  递减,

在  $(-\infty, 0]$  上,  $\varphi(x) = f(x) - x \geq \varphi(0) = 0$ .

$\therefore$  在  $(0, +\infty)$  上,  $\varphi'(x) > \varphi'(0) = 0$

$\Rightarrow$  在  $(0, +\infty)$  上  $\varphi(x)$  递增,

在  $[0, +\infty)$  上,  $\varphi(x) = f(x) - x \geq \varphi(0) = 0$ .



**B9.** 证明方程  $x^5 - 5x + 1 = 0$  有唯一的  
小于1 的正根.

解  $\varphi(x) = x^5 - 5x + 1$  在  $[0,1]$  上连续,  
 $\varphi(0)\varphi(1) < 0$ ,

$\therefore \exists c \in (0,1)$ , 使得  $\varphi(c) = 0$ .

又  $(0,1)$  上  $\varphi'(x) = 5x^4 - 5 < 0$ ,  $\therefore c$  唯一.

或者由 *Rolle* 定理说明上述  $c$  的唯一性.



B9.(2). 设在区间 $[0,1]$ 上函数 $f(x)$ 可导,且  
 $0 < f(x) < 1, x \in (0,1)$ 时 $f'(x) \neq 1$ .

证明 存在唯一的 $x_0 \in (0,1)$ ,使得 $f(x_0) = x_0$ .

分析 显然,可设 $\varphi(x) = f(x) - x$ ,证明函数 $\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上有零点+唯一性...

唯一性证明: 对于已证 $\exists \xi \in (0,1), \varphi(\xi) = 0$ ,  
欲证 $\xi$ 唯一,反证法 假设 $\exists \eta \in (0,1), \varphi(\eta) = 0$ ,  
 $\eta \neq \xi$ .由Lagrange中值定理知  
 $\exists$ 介于 $\eta, \xi$ 间的 $c$ ,使得 $\varphi'(c) = 0$ ,即 $f'(c) = 1$ ,  
而这与题设条件矛盾.

所以 $\exists$ 唯一的 $\xi \in (0,1)$ ,使得 $\varphi(\xi) = 0$ .



### *Addendum :*

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 $(a,b)$ 内可微,且满足 $f(a) = f(b) = 0$ .则:  $\exists \xi \in (a,b)$ , 使得  $f'(\xi) + g(\xi)f(\xi) = 0$ .

分析: 要用 *Rolle th.*, 要找的辅助函数  
即为  $\varphi(x) = f(x)e^{G(x)}, G'(x) = g(x)$ .



*Add.1.* 设函数  $f(x)$  在  $[0, a]$  上连续, 在  $(0, a)$  内可微, 且  $f(a) = 0$ , 证明  $\xi \in (0, a)$ , 使得  $\xi f'(\xi) + f(\xi) = 0$ .

**分析** 由问题的结论知, 应由 *Rolle th.* 来证明之, 而要使得  $\varphi'(\xi) = \xi f'(\xi) + f(\xi) = 0$ , 那么  $\varphi'(x) = xf'(x) + f(x)$ , 且  $\varphi(x)$  在某闭区间上满足 *Rolle th.* 的三个条件, 其实主要是注意第三个条件, 我们可以发现 可取  $\varphi(x) = xf(x)$ , 显然,  $\varphi(a) = 0$ , 又  $\varphi(0) = 0$ , 到此万事俱备.



证明 设  $\varphi(x) = xf(x)$ , 那么  $\varphi(x)$   
在  $[0, a]$  上连续, 在  $(0, a)$  内可微,  
且  $\varphi(0) = \varphi(a) = 0$ ,  
 $\therefore$  由 *Rolle Th.* 可得  $\exists \xi \in (0, a)$ ,  
使得  $\varphi'(\xi) = \xi f'(\xi) + f(\xi) = 0$ .



*Add.2.* 设函数  $f(x)$  在  $[0,1]$  上连续, 在  $(0,1)$  内可微, 且  $f(1) = 0$ .

证明: 存在  $\xi \in (0,1)$ , 使得  $f'(\xi) = -\frac{2f(\xi)}{\xi}$ .

分析 问题转化为证明  $\xi f'(\xi) + 2f(\xi) = 0$ .

要使用 *Rolle th.*, 寻找辅助函数  $\varphi(x)$ ,

使得  $\varphi'(x)$  含有因子  $xf'(x) + 2f(x)$ ,

... ..可取  $\varphi(x) = x^2 f(x)$



*Add.3.* 设  $f(x)$  在  $[0, \pi]$  上连续, 在  $(0, \pi)$  内可导, 证明  $\exists \xi \in (0, \pi)$ , 使得  $f'(\xi) = -f(\xi) \cot \xi$ .

*Hint* : 根据结论知即要证

$$f'(\xi) \sin \xi + f(\xi) \cos \xi = 0,$$

$$\text{即 } [f(x) \sin x]' \Big|_{x=\xi} = 0,$$

$\therefore$  对  $\varphi(x) = f(x) \sin x$  在  $[0, \pi]$  上应用 *Rolle th.*



*Add.4.* 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可微, 且满足  $f(a) = f(b) = 0$ ,

证明: (1). 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $\xi f'(\xi) + f(\xi) = 0$ ;

(2). 存在  $\eta \in (a, b)$ , 使得  $f'(\eta) + f(\eta) = 0$ ;

(3). 存在  $\zeta \in (a, b)$ , 使得  $f'(\zeta) + \zeta f(\zeta) = 0$ .

分析 要使用 *Rolle th.*, 寻找辅助函数  $\varphi(x)$ ,

(1). 使得  $\varphi'(x) = xf'(x) + f(x), \cdots \varphi(x) = xf(x)$ ;

(2). 使得  $\varphi'(x)$  含有  $f'(x) + f(x)$  因子,  $\cdots \varphi(x) = e^x \cdot f(x)$ ;

(3). 使得  $\varphi'(x)$  含有  $f'(x) + xf(x)$  因子,  $\cdots \varphi(x) = f(x)e^{\frac{1}{2}x^2}$ .



设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 $(a,b)$ 内可微,  
且满足 $f(a) = f(b) = 0$ ,

证明: $\exists \xi \in (a,b)$ ,使得(4). $f'(\xi) + \cos \xi f(\xi) = 0$ ;

$$(5).f'(\xi) - (1 + 2\xi)f(\xi) = 0;$$

$$(6).f'(\xi) + g(\xi)f(\xi) = 0.$$

分析:要用*Rolle th.*,要找的辅助函数即为

$$(4).\varphi(x) = f(x)e^{\sin x};$$

$$(5).\varphi(x) = f(x)e^{-(x+x^2)};$$

$$(6).\varphi(x) = f(x)e^{G(x)}, G'(x) = g(x).$$



B.9.(3). 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 $(a,b)$ 内可导,

$f(a)=0, f(b)=1$ . 求证: (1). 存在 $c \in (a,b)$ , 使得 $f(c) = \frac{1}{2}$ ;

(2). 存在 $\xi, \eta \in (a,b), \xi \neq \eta$ , 使得 $\frac{1}{f'(\xi)} + \frac{1}{f'(\eta)} = 2(b-a)$ .



B.9.(3). 结论(2)变形:  $\frac{1}{f'(\xi)} + \frac{1}{f'(\eta)} = 2(b-a),$

$$a < \xi < c < \eta < b, \Leftrightarrow \frac{1/2-0}{f'(\xi)} + \frac{1-1/2}{f'(\eta)} = b-a.$$

结论之物理解释: 一质点从时刻 $a$ 至时刻 $b$ 作直线运动, 所产生的位移量为1. 质点运动至位移为 $1/2$ 的时刻为 $c$ .

在时间段 $[a, c]$ 内位移从0到 $\frac{1}{2}$ , 期间的平均速度为 $\frac{1/2-0}{c-a}$ ,

由Lagrange中值定理知 $\exists \xi \in (a, c)$ 使得 $\frac{1/2-0}{c-a} = f'(\xi)$ .

同样, 在时间段 $[c, b]$ 内位移从 $\frac{1}{2}$ 到1, 其平均速度为 $\frac{1-1/2}{b-c}$ ,

由Lagrange中值定理知 $\exists \eta \in (c, b)$ 使得 $\frac{1-1/2}{b-c} = f'(\eta)$ .

$$\therefore \frac{1/2-0}{f'(\xi)} + \frac{1-1/2}{f'(\eta)} = c-a + b-c = b-a.$$



B10. 设函数 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 内有 $f''(x) \geq 0$ ,

证明  $\forall x_1, x_2 \in (a,b), \forall t \in [0,1]$  有

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

这是函数凹凸性判断定理的最常用结论 .

证明  $\forall x_1, x_2 \in (a,b), t \in [0,1]$ ,

(1). 如果 $x_1 = x_2$  或者  $t = 0$  或  $1$ , 则 “=” 成立;

(2). 不妨设  $x_1 < x_2, 0 < t < 1$ ,

记  $tx_1 + (1-t)x_2 = x_0$ , 则  $x_1 < x_0 < x_2$ ,

由Taylor th. 得

$$f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x_1 - x_0)^2$$



(2). 记  $tx_1 + (1-t)x_2 = x_0$ , 则  $x_1 < x_0 < x_2$ ,

由 *Taylor th.* 得

$$f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x_1 - x_0)^2$$

$$f(x_2) = f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0) + \frac{f''(\eta)}{2!}(x_2 - x_0)^2$$

其中  $x_1 < \xi < x_0 < \eta < x_2$ ,  $tf(x_1) + (1-t)f(x_2) =$

$$= f(x_0) + f'(x_0)[t(x_1 - x_0) + (1-t)(x_2 - x_0)]$$

$$+ \frac{1}{2!} [f''(\xi)t(x_1 - x_0)^2 + f''(\eta)(1-t)(x_2 - x_0)^2]$$

$$t(x_1 - x_0) + (1-t)(x_2 - x_0) = tx_1 + (1-t)x_2 - x_0 = 0,$$

$$\because f''(x) \geq 0, \therefore tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \geq f(tx_1 + (1-t)x_2)$$

将 (1), (2) 综合起来, 知结论成立.



B10. 设函数  $f(x)$  在  $(a, b)$  内有  $f''(x) \geq 0$ , 证明  $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ ,

$\forall t \in [0, 1]$  有  $f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$

证明  $\forall x_1, x_2 \in (a, b), t \in [0, 1]$ ,

(1). 如果  $x_1 = x_2$  或者  $t = 0$  或  $1$ , 则 “=” 成立;

(2). 不妨设  $x_1 < x_2, 0 < t < 1$ , 记  $tx_1 + (1-t)x_2 = x_0$ , 则  $x_1 < x_0 < x_2$ ,

法二(分析法)  $f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$

即  $f(x_0) = tf(x_0) + (1-t)f(x_0) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$

$\Leftrightarrow t[f(x_0) - f(x_1)] \leq (1-t)[f(x_2) - f(x_0)]$

即  $tf'(\xi)(x_0 - x_1) \leq (1-t)f'(\eta)(x_2 - x_0) \cdots \cdots (*)$

$x_1 < \xi < x_0 < \eta < x_2$ , 又  $t(x_0 - x_1) = (1-t)(x_2 - x_0)$ ,

$(*) \Leftrightarrow f'(\xi) \leq f'(\eta), x_1 < \xi < x_0 < \eta < x_2$ ,

由  $(a, b)$  内  $f''(x) \geq 0$ , 知结论成立.





上页

下页

返回