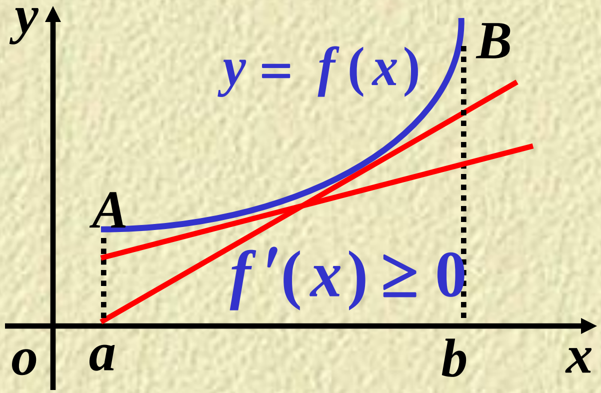
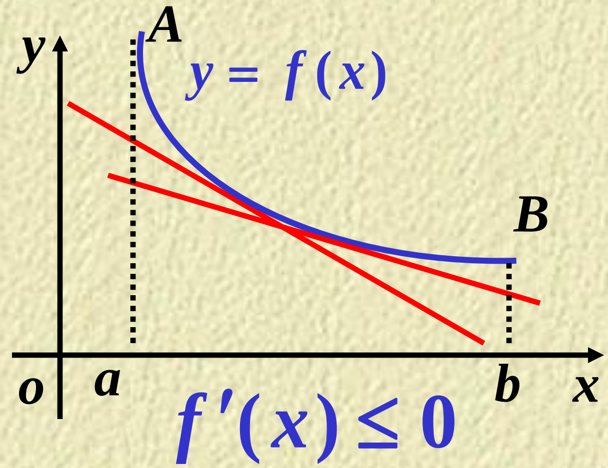
导 数 的 应 用

——利用导数研究函数的性状

1. 单调性的判别法;
2. 函数极值的判定法;
3. 最值的计算.

1. 单调性的判别法





定理1.设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ $\big($或为$(-\infty,+\infty)\big)$ 上连续,在 (a,b) 内可导.如果在 (a,b) 内 $f'(x)\geq 0$ $\big($或 $f'(x)\leq 0\big)$,并且在 (a,b) 内使得 $f'(x)=0$ 的点至多可列多个,那末函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调增加$\big($或严格单调减少$\big)$.

上页 下页 返回

证明 $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$,且$x_1 < x_2$,

应用*Lagrange*定理得

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)\left(x_1 < \xi < x_2\right),$$

$\because x_2 - x_1 > 0$,若在(a,b)内,$f'(x) > 0$,

则$f'(\xi) > 0$,$\therefore f(x_2) > f(x_1)$,

$\therefore y = f(x)$在$[a,b]$上严格单调增加.

若在(a,b)内存在点c,使得$f'(c) = 0$,而在c点的去心邻域$U^0(c)$内$f'(x) > 0$,则在$U(c)$内依然有$f(x)$严格单调增加,只不过点$\left(c, f(x)\right)$处曲线$y = f(x)$有水平切线而已.

例1.讨论函数$f(x)=e^x-x-1$的单调性.

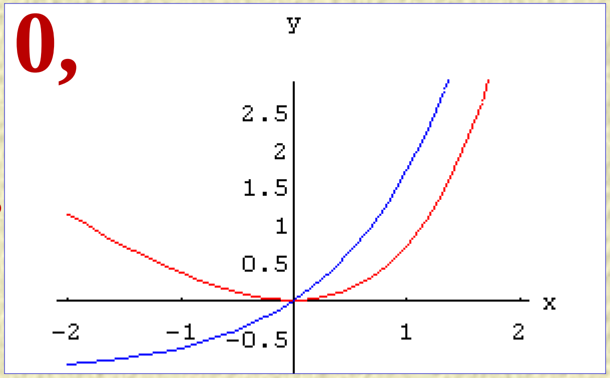
解 $\because f'(x)=e^x-1$, 又 $\because D_f=(-\infty,+\infty)$,

在$(-\infty,0)$内, $f'(x)<0$, $\therefore$ 函数单调减少;

在$(0,+\infty)$内, $f'(x)>0$, $\therefore$ 函数单调增加.

由此可得 $\min f(x)=f(0)=0$,

$\therefore \forall x\in(-\infty,+\infty)$, 有$e^x\geq x+1$.



注意:函数的单调性是一个区间上的性质,要用导数在这一区间上的符号来判定,而不能用一点处的导数符号来判别一个区间上的单调性.

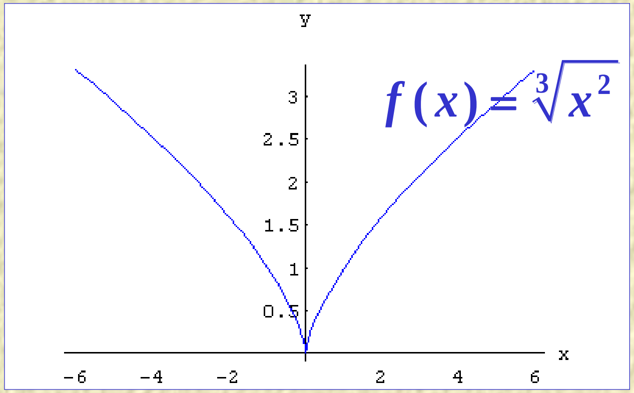
上页 下页 返回

例2.确定函数$f(x)=\sqrt[3]{x^2}$的单调区间.

解 $\because D_f=(-\infty,+\infty)$,

当$x=0$时,导数不存在.

$$f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}},x\neq 0,$$



当$-\infty<x<0$时$f'(x)<0$,

$\therefore$ 在$(-\infty,0]$上$f(x)$单调减少;

当$0<x<+\infty$时$f'(x)>0$,

$\therefore$ 在$[0,+\infty)$上$f(x)$单调增加.

上页 下页 返回

注意：在定理1中条件可适当降低.

若函数$y = f(x)$在$[a,b]\left(\text{或}(-\infty,+\infty)\right)$上连续，在$(a,b)$内至多有限多个点处不可导.如果在$(a,b)$内可导之处有$f'(x) \geq 0$并且在$(a,b)$内使得$f'(x) = 0$的点至多可列多个，那末函数$y = f(x)$在$[a,b]$上严格单调增加.

函数$f(x)=x+\sin x$在其定义域$(-\infty,+\infty)$上恒有$f'(x)=1+\cos x\geq 0$,而且只在可列多个点$x=(2k+1)\pi$处$f'(x)=0$,所以函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上严格单调增加.

函数$f(x)=\sqrt[3]{x}$在实数域$(-\infty,+\infty)$上连续,在$x_0=0$处函数不可导,在$x\neq 0$时

$$f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}},$$

但恒有$f'(x)>0$,所以在$(-\infty,+\infty)$上函数$f(x)=\sqrt[3]{x}$严格单调增加.

问题:如前面二例,函数在定义区间上不是单调的,但在各个部分区间上单调.

定义:若函数在其定义域的某个区间内是单调的,则该区间称为函数的单调区间.

函数导数等于零的点或不可导点,可能是单调区间的分界点.

方法:用方程 $f'(x)=0$ 的根及 $f'(x)$ 不存在的点来划分函数 $f(x)$ 的定义区间,然后判断区间内导数的符号.

上页 下页 返回

例3.确定函数$f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$的单调区间.

解 $f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$,

解方程$f'(x)=0$得 $x_1=1, x_2=2$.

$D_f=(-\infty,+\infty)$,

$\therefore$ 当$-\infty<x<1$时$f'(x)>0$,

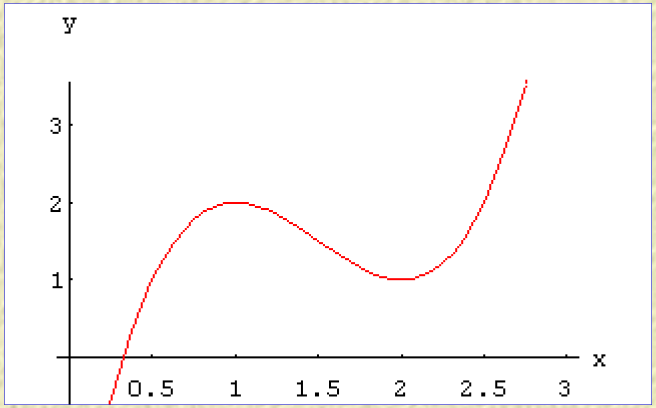
在$(-\infty,1]$上$f(x)$单调增加;

当$1<x<2$时$f'(x)<0$,

在$[1,2]$上$f(x)$单调减少;

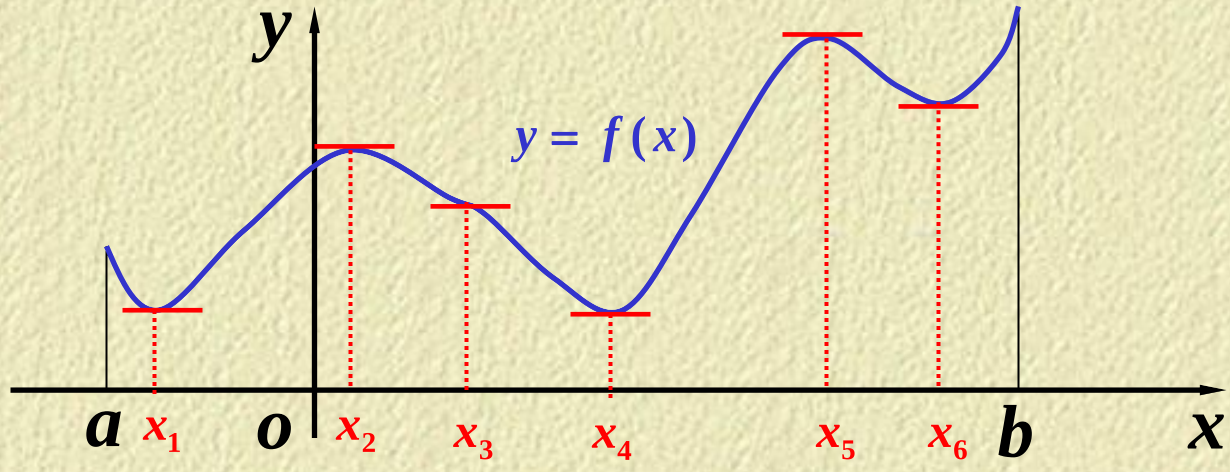
当$2<x<+\infty$时$f'(x)>0$,

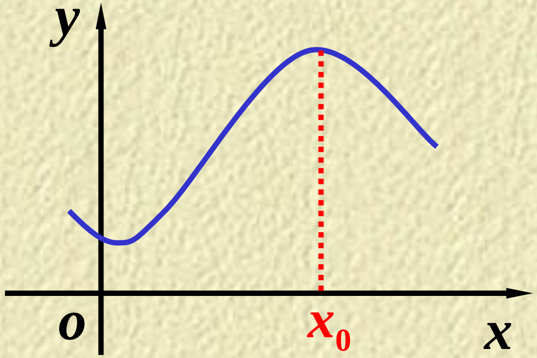
在$[2,+\infty)$上$f(x)$单调增加.

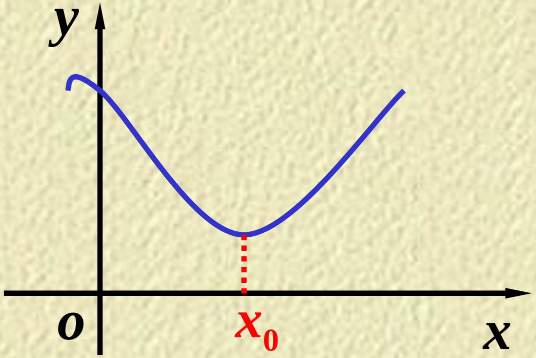


上页 下页 返回

2. 函数极值的判定法







上页 下页 返回

定义：方程 $f'(x)=0$ 的实根叫做函数 $f(x)$的驻点.

可以注意到,随着自变量的增加,函数值由小到大增加,再由大到小减少,则在此过程中连续函数$f(x)$取得极大值;

随着自变量的增加,函数值大到小减少,再由小到大增加,则在此过程中连续函数$f(x)$取得极小值.

所以如果清楚了函数的单调情况,我们就可以判断清楚函数的极值情况.

但是：驻点 $\neq$ 极值点

上页 下页 返回

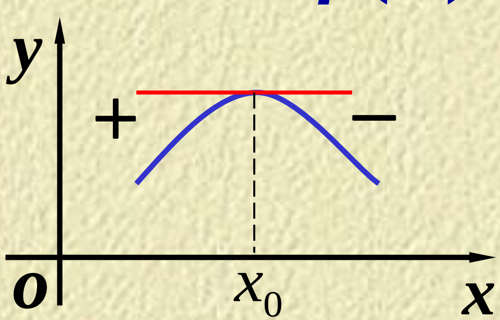
定理2.(极值判断第一充分条件)

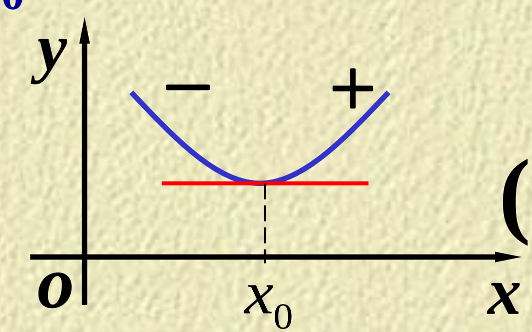
若x_0是连续函数$f(x)$的驻点或不可导的点,$\delta > 0$.

(1).若$x \in (x_0 - \delta, x_0)$时$f'(x) < 0$, $x \in (x_0, x_0 + \delta)$时$f'(x) > 0$,则函数$f(x)$在$x_0$处取得极小值.

(2).若$x \in (x_0 - \delta, x_0)$时$f'(x) > 0$, $x \in (x_0, x_0 + \delta)$时$f'(x) < 0$,则函数$f(x)$在$x_0$处取得极大值.

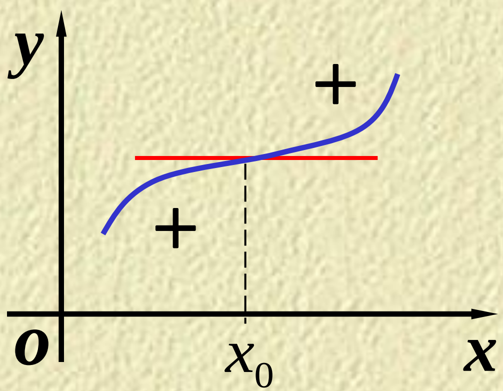
(3).若$x \in (x_0 - \delta, x_0)$或$x \in (x_0, x_0 + \delta)$时$f'(x)$不变号,则函数$f(x)$在$x_0$处不取得极值.

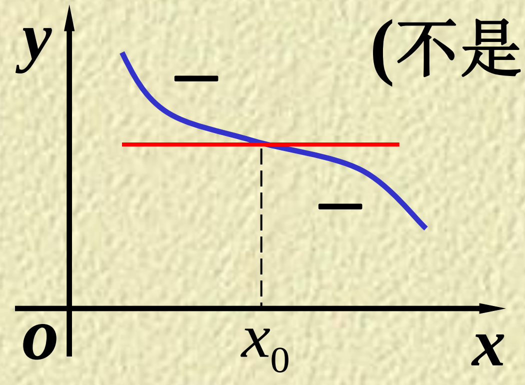




(是极值点情形)

上页 下页 返回





(不是极值点情形)

求极值的步骤:

(1).求导数 $f'(x)$;

(2).求驻点…方程$f'(x)=0$的实根

或$f'(x)$不存在的点x_0;

(3).检查$f'(x)$在点x_0左右的正负号,判断极值点;

(4).求极值.

上页 下页 返回

例4.求函数 $f(x)=x^3-3x^2-9x+5$ 的极值.

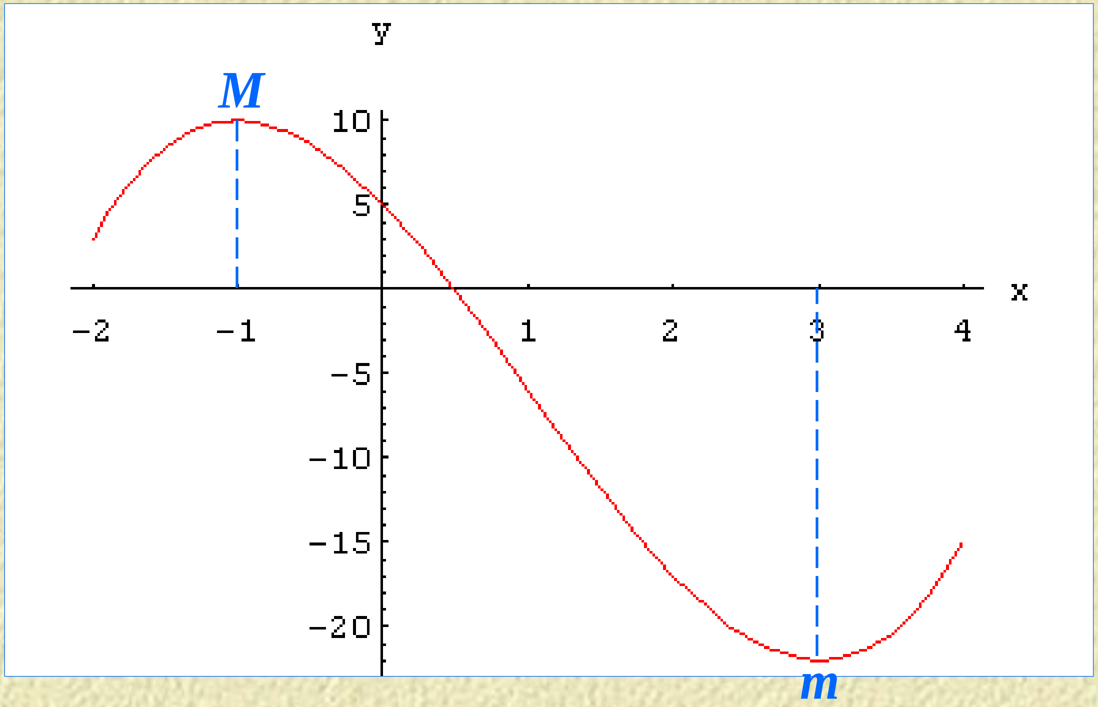
解 $f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

令 $f'(x)=0$, 得驻点 $x_1=-1, x_2=3$. 列表讨论

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\uparrow$	极大值	$\downarrow$	极小值	$\uparrow$

$\max f(x)=f(-1)=10, \min f(x)=f(3)=-22.$

$f(x)=x^3-3x^2-9x+5$图形如下



上页 下页 返回

例5.求出函数$f(x)=(x-2)\sqrt[3]{x^2}$ 的极值.

解 $f'(x)=\sqrt[3]{x^2}+(x-2)\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}=\dfrac{5x-4}{3\sqrt[3]{x}}$,

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-2)\sqrt[3]{x^2}}{x}=\infty,$$

$\therefore\ x=0$时$f'(x)$不存在, $x=\dfrac{4}{5}$时$f'(x)=0.$

在$f(x)$的连续区间$(-\infty,+\infty)$上

$x<0,\ f'(x)>0,\ 0<x<4/5,\ f'(x)<0,$

$x>4/5,\ f'(x)>0,$

$\therefore \max f(x)=f(0), \min f(x)=f(4/5).$

定理3.(极值判断第二充分条件)

设$f(x)$在x_0处二阶可导,且$f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$.

(1).若$f''(x_0)>0$,则函数$f(x)$在x_0处取得极小值;

(2).若$f''(x_0)<0$,则函数$f(x)$在x_0处取得极大值.

证明(1). $\because\ f''(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x}>0$,

$\therefore$ 在$U(x_0)$内 $\dfrac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x}>0$,

即在$U(x_0)$内$f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)$与Δx同号,

当$\Delta x<0$时有$f'(x_0+\Delta x)<f'(x_0)=0$,

当$\Delta x>0$时有$f'(x_0+\Delta x)>f'(x_0)=0$.

$\therefore$ 函数$f(x)$在x_0处取得极小值.同理可证(2).

定理3.(极值判断第二充分条件)

设$f(x)$在x_0处二阶可导,且$f'(x_0)=0,\ f''(x_0)\neq 0.$

(1).若$f''(x_0)>0$,则函数$f(x)$在x_0处取得极小值;

(2).若$f''(x_0)<0$,则函数$f(x)$在x_0处取得极大值.

若$f'(x_0)=0,\ f''(x_0)=0$,则函数$f(x)$在x_0处是否取得极值无法确定.

例如,(1). $f(x)=x^3,\ x_0=0,$

(2). $g(x)=x^4,\ x_0=0.$

上页 下页 返回

小结

极值是函数的局部性概念: 极大值可能小于极小值,极小值可能大于极大值.

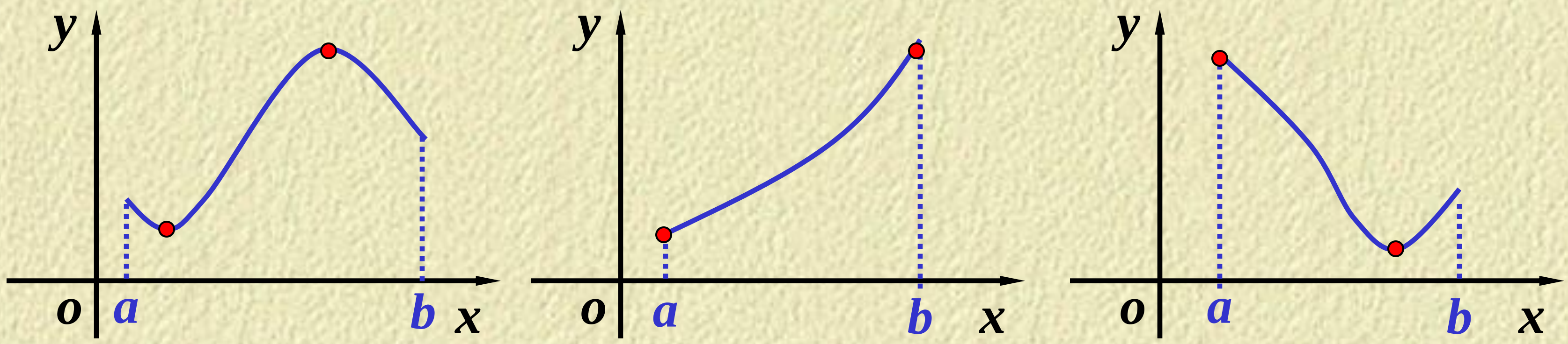
函数的极值必在**驻点或不可导点**取得。

判别法 $\begin{cases} \text{第一充分条件;} \\ \text{第二充分条件;} \end{cases}$ (注意使用条件)

3. 最值的求法

若函数$f(x)$在$[a,b]$上连续,则$f(x)$在$[a,b]$上的最大值与最小值存在.

在(a,b)内函数$f(x)$除个别点外处处可导,并且至多有有限个驻点.



上页 下页 返回

求[a,b]上函数最值的步骤:

1.求(a,b)内函数的驻点和不可导点;

2.求区间端点、驻点和不可导点的函数值,比较大小:最大的那个就是最大值, 最小的那个就是最小值.

注意:如果区间内函数只有一个极值点,则这个极值就是最值(最大值或最小值).

上页 下页 返回

例6.求函数$f(x)=(x-2)\sqrt[3]{x^2}$在$[-1,2]$上的最大、小值.

解 $f'(x)=\sqrt[3]{x^2}+(x-2)\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}=\dfrac{5x-4}{3\sqrt[3]{x}}$,

$x=0$时$f'(x)$不存在,$x=\dfrac{4}{5}$时$f'(x)=0$.

$f(-1)=-3$, $f(0)=f(2)=0$, $f\left(\dfrac{4}{5}\right)=-\dfrac{6\cdot\sqrt[3]{80}}{25}$.

$\therefore$ 在$[-1,2]$上$f(x)$的最小值为$f(-1)=-3$,

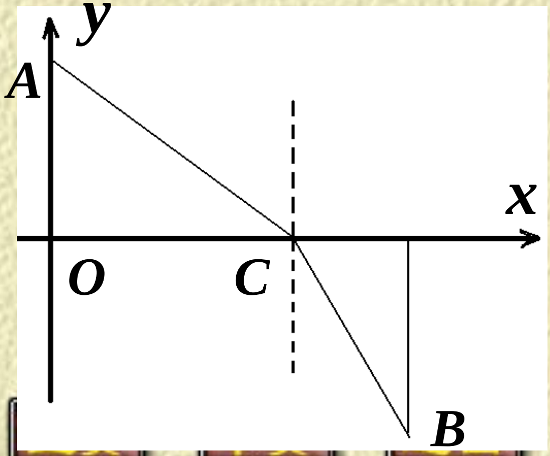
最大值为$f(0)=f(2)=0$.

上页 下页 返回

例7.光的折射定律的解释——*Fermat* 光行最速原理:光总是沿着耗时最少的路径前进——在一种媒介中总是沿着直线前进.

在某开阔的原野上有被一条直线分割成为甲、乙两部分的地方,人们进行一场汽车拉力赛,从甲地的A处出发跨过分界线到达乙地的B处,在甲、乙两种不同地质条件的地方汽车的速度分别为v_1、v_2.问:车手应选择怎样的行进路线呢?

解 如图建立直角坐标系.设点的坐标分别为$A(0,a)$, $B(b,c)$,那么为尽快到达目的地, 车手在甲乙两地应该均走直线,而在甲、乙两地的分界线上选择$C(x,0)$,使得总的耗时最少.



总的耗时为$T=\dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1}+\dfrac{\sqrt{c^2+(b-x)^2}}{v_2}, x\in[0,b],$

$$T'=\frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}}+\frac{2(b-x)(-1)}{v_2\sqrt{c^2+(b-x)^2}}=0$$求驻点,

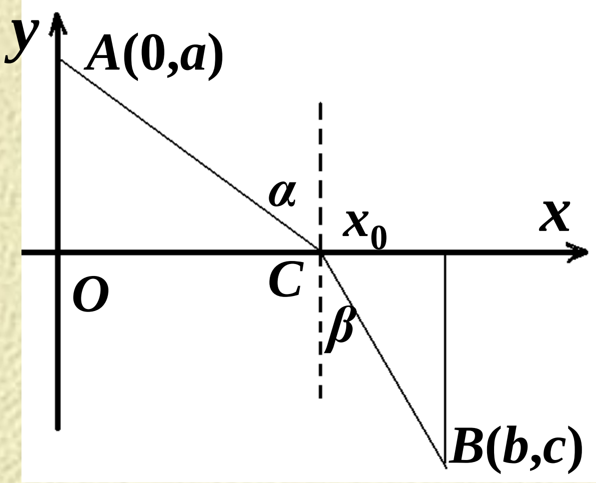
根据本问题的实际意义,知道在$[0,b]$上T必有最小值,

而驻点x_0使得$T'(x_0)=0$,即

$$\frac{x_0}{v_1\sqrt{a^2+x_0{}^2}}+(-1)\frac{(b-x_0)}{v_2\sqrt{c^2+(b-x_0)^2}}=0\ (*)$$

$(*)$即$\dfrac{x_0\Big/\sqrt{a^2+x_0{}^2}}{v_1}=\dfrac{(b-x_0)\Big/\sqrt{c^2+(b-x_0)^2}}{v_2}$

Fermat 光行最速原理:
光总是沿着耗时最少的路径前进——在一种媒介中总是沿着直线前进.



驻点x_0: $\dfrac{x_0\Big/\sqrt{a^2+x_0^2}}{v_1}=\dfrac{(b-x_0)\Big/\sqrt{c^2+(b-x_0)^2}}{v_2}$,

经过计算,驻点x_0处$T(x)$取得最小值$T(x_0)$.

如图,记两个角分别为α,β.则上述驻点x_0满足的方程就可表示为

$\dfrac{\sin\alpha}{v_1}=\dfrac{\sin\beta}{v_2}$,而这就是光的折射定律结果的表达!

James Stewart __Calculus,7ed.—P206

The Calculus of Rainbows

上页 下页 返回

彩虹是因为阳光射到空中接近球形的小水滴，造成色散及反射而成。阳光射入水滴时会同时以不同角度入射，在水滴内亦以不同的角度反射。当中以**40**至**42**度的反射最为强烈，造成我们所见到的彩虹。

造成这种反射时，阳光进入水滴，先折射一次，然后在水滴的背面反射，最后离开水滴时再折射一次，总共经过一次反射两次折射。因为水对光有色散的作用，不同波长的光的折射率有所不同，红光的折射率比蓝光小，而蓝光的偏向角度比红光大。

由于光在水滴内被反射，所以观察者看见的光谱是倒过来，红光在最上方，其他颜色在下。

当我们胸怀数学"内美"去感觉缤纷世界，就会感觉到"看不见的"前定和谐。当我们看到天上的彩虹，会发现写在空中的不是令人心旌摇荡的诗句，而是大自然的"最节省"法则（最小作用量原理）：自然不走中庸之道，它的和谐是在追求"极端"中实现的。它永远选择"最"，最简、最好，当然也最美。当数学的追求成为思维方式和生活态度，我们会更自然地追求卓越，追求纯净，追求美好。

——引自李泳 科学博客文章

杜甫(公元712~~770)

自京赴奉先县咏怀五百字

杜陵有布衣,老大意转拙:
许身一何愚,窃比稷与契（音xi è）! …
穷年忧黎元,叹息肠内热. …
葵藿倾太阳,物性固莫夺. …
朱门酒肉臭,路有冻死骨! …
忧端齐终南,澒洞不可掇!

注释: 1. 公元755年--天宝十四载十二月中“安史之乱”爆发.此诗作于该年十一月.

2. 葵:冬葵菜. 藿:豆叶.

我们看不见数学的存在,它却无所不在.

正如开普勒所言:

上帝是用数学创造的世界.

例8.求数列$\left\{\sqrt[n]{n}\right\}$的最大项.

分析 考虑求函数 $y = x^{\frac{1}{x}}, x > 0$的最大值.

解 设 $y = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln x}$,

$$y' = e^{\frac{1}{x}\ln x} \cdot \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = x^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$\therefore \begin{cases} 0 < x < e, y' > 0, y \nearrow \\ x > e, y' < 0, y \searrow \end{cases}, y_{最大} = y\big|_{x=e} = e^{\frac{1}{e}},$$

$$1 < \sqrt{2} < e^{\frac{1}{e}}, e^{\frac{1}{e}} > \sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4} > \cdots,$$

$$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{8} < \sqrt[6]{9} = 3^{\frac{2}{6}} = 3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3}$$

返回

思考练习.

1.证明不等式：

(1).$x > 0, 1 + x\ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) > \sqrt{1 + x^2}$.

(2).$x \geq 4, 2^x \geq x^2$.

(3).$x > 0, \sin x > x - \frac{1}{6}x^3$.

2.比较$\ln\left(1 + \sqrt{2}\right)$与$\sqrt{2} - 1$ 的大小.

3.试问常数p,q满足什么条件时,方程

$$x^3 - 3px + q = 0$$

有三个各不相同的实根?

思考练习.

4.试问方程$\ln x = ax\ (a > 0)$有几个实根?

5.设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内有$f''(x) \ge 0$.试证明:$\forall x_1, x_2 \in [a,b]$,有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \le \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

上页 下页 返回

$Ex.4.$方程$\ln x = ax\ (a > 0)$有几个实根?

解　$\ln x = ax\ (a > 0)$实根问题解题方法有几种.一是数形结合,借助于结论的几何意义,方程$\ln x = ax$的根就是平面曲线$y = \ln x$与$y = ax$有交点. 而其中临界的状况就是相切———方程有唯一的实根,从而确定a的数值.然后就可以知道a取什么范围里的值时方程就有两个根,什么时候没有根.

方程$\ln x = ax\ (a > 0)$有几个实根?

法二 另外一种解题方是把方程的根的讨论转化为函数的零点问题.

设函数$y = \ln x - ax(a > 0)$,讨论函数的取值情况,只要看这一连续函数的取值的正、负,大、小.

设$y=\ln x-ax\ (a>0)$, $y'=\dfrac{1}{x}-a$,

$\therefore\ x=a^{-1}$ 时$y'=0$,

$0<x<a^{-1}$时, $y'>0$,函数$y\nearrow$,

$a^{-1}<x$时, $y'<0$,函数$y\searrow$,

$\therefore\ x=a^{-1}$时,有$y_{\max}=y_{\text{最大值}}=-(\ln a+1)$

上页 下页 返回

设$y=\ln x-ax\ (a>0)$,

$0<x<a^{-1}$时, $y'>0$,函数$y\nearrow$,

$a^{-1}<x$时, $y'<0$,函数$y\searrow$,

$\therefore\ x=a^{-1}$时,有$y_{最大值}=-(\ln a+1)$

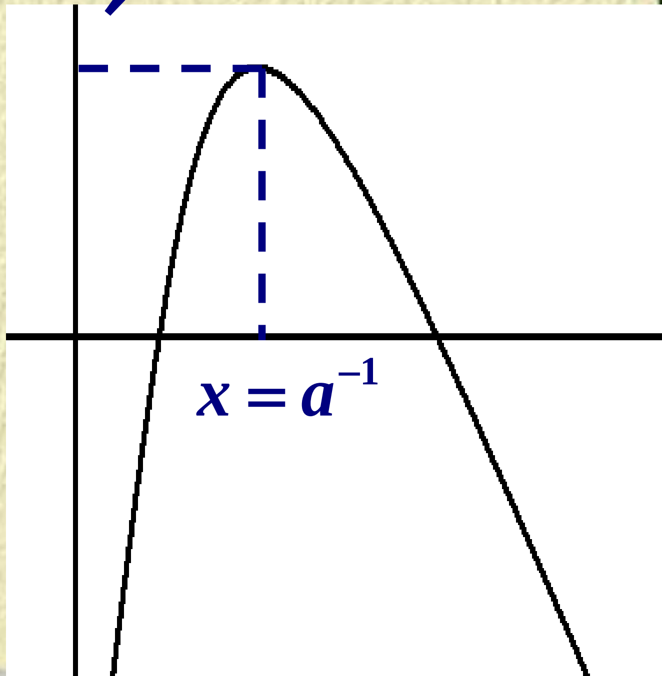
且$\lim\limits_{x\to 0+}y=\lim\limits_{x\to 0+}(\ln x-ax)=-\infty$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x-ax)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{\ln x}{x}-a\right)=-\infty$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$

$y_{最大值}=-(\ln a+1)$



设$y=\ln x-ax\ (a>0)$,

$\therefore\ x=a^{-1}$时,有$y_{最大值}=-(\ln a+1)$

$\therefore$ 当$y_{最大值}=-(\ln a+1)>0$时,原方程有两个不同的实根,

当$y_{最大值}=-(\ln a+1)=0$时,原方程有唯一的实根,

当$y_{最大值}=-(\ln a+1)<0$时,

原方程没有实根.

上页 下页 返回