2022 级 数学分析 I 期中练习解答　　2022-11-10

一. 填空题或选择题（每题 5 分，计 30 分. 选择题正确选项唯一）

1. $\arctan\left(\tan\dfrac{7\pi}{4}\right)=$ __________ .

2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)=$ __________.

3. 函数 $f(x)=\begin{cases}-1\ ,x\in\mathbb{Q}\\ 1\ ,x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$ 在$(-\infty,+\infty)$上所有的连续点构成的集合为______________.

4. $x\to-\infty$时函数形式的迫敛性定理:____.

5. $x\to a^+$ 情形的归结原则（Heine 定理）:____________________________________ .

6. 设函数 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内连续且$|f(x)|\ge 1$，若在$(-\infty,+\infty)$内函数 $f(x)g(x)$ 有唯一的间断点 $x=0$,则在$(-\infty,+\infty)$内对函数 $g(x)$ 而言必定有______________.

(A). $g(x)$有唯一的间断点$x=0$;　　(B). $g(x)$可以有$x=0$ 以外的其它间断点 ;
(C). $g(x)$连续 .

1. $-\dfrac{\pi}{4}$;　2. -1 ;　3. 空集 or $\varnothing$;

4. $x\to-\infty$时函数形式的迫敛性定理: 若函数$f(x),g(x)$及$h(x)$满足条件:(1). $g(x)\le f(x)\le h(x)$, $x\in U(-\infty)$; (2). $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=A$. 则函数$f(x)$极限存在,且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

5. $x\to a^+$ 情形的归结原则（Heine 定理）:

$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=A$ 的必要且充分条件为 $\forall\{x_n\}\subset U_+(a)$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

6. A .

二. 解答题 (解答题必须给出必要的推理与论证的过程。每题 10 分，计 70 分) ($L'Hopital$ 法则目前禁用中)

7. 求极限 $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{4}{x^2-1}\right)$.

解
$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{4}{x^2-1}\right)\overset{\sqrt{x}=t}{=\!=\!=}\lim_{t\to1}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{4}{t^4-1}\right)\overset{t-1=u}{=\!=\!=}\lim_{u\to0}\left(\frac{1}{u}-\frac{4}{(1+u)^4-1}\right)=\lim_{u\to0}\frac{(1+u)^4-1-4u}{u\left((1+u)^4-1\right)}$$
$$=\lim_{u\to0}\frac{1+4u+6u^2+o(u^2)-1-4u}{u\cdot4u}=\lim_{u\to0}\frac{6u^2+o(u^2)}{4u^2}=\frac{3}{2}\ .$$

8. 曾见有初学者错误的解题：$\because x\to 0$ 时 $\sin^2 x\sim x^2,\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1,$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x+\sin^2 x\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x^2}}=e.$ 请你给出正确的解题过程与结果．

解 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x+\sin^2 x\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1+\sin^2 x+\cos x-1\right)^{\frac{1}{\sin^2 x+\cos x-1}}\right]^{\frac{\sin^2 x+\cos x-1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x+\cos x-1}{x^2}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}+\frac{\cos x-1}{x^2}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}-\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}-\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}\right)}=e^{1-\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}.$

或者,由 $x\to 0$ 时有 $\sin x\sim x,1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2,$

$$\lim_{x\to 0}\left(\cos x+\sin^2 x\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\sin^2 x+\cos x-1\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\left(1+x^2-\frac{1}{2}x^2\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{1}{2}x^2\right)^{\frac{2}{x^2}}\right]^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}.$$

9. 用“$\varepsilon-N$”定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+\sin n}{n^3-3n}=0.$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+\sin n}{n^3-3n}=0.$ 分析 $\forall\varepsilon>0$,欲找到 N,使在 $n>N$ 时有 $\left|\dfrac{n^2+\sin n}{n^3-3n}-0\right|<\varepsilon.$

而 $\left|\dfrac{n^2+\sin n}{n^3-3n}-0\right|\le\dfrac{2n^2}{\left|n^3-3n\right|}=\dfrac{2n}{\left|n^2-3\right|}$,$n\ge 3$ 时 $\dfrac{1}{2}n^2>3$,此时有 $\dfrac{2n}{\left|n^2-3\right|}=\dfrac{2n}{n^2-3}<\dfrac{2n}{n^2-\frac{1}{2}n^2}=\dfrac{4}{n},$

当 $\dfrac{4}{n}<\varepsilon$ 时就有 $\left|\dfrac{n^2+\sin n}{n^3-3n}-0\right|<\varepsilon.$ $\dfrac{4}{n}<\varepsilon\Leftrightarrow n>\dfrac{4}{\varepsilon}.$

证明 $\forall\varepsilon>0,\exists N\ge\max\left(3,\dfrac{4}{\varepsilon}\right),\forall n>N,s.t.\left|\dfrac{n^2+\sin n}{n^3-3n}-0\right|\le\dfrac{2n^2}{\left|n^3-3n\right|}=\dfrac{2n}{n^2-3}<\dfrac{2n}{n^2-\frac{1}{2}n^2}$

$=\dfrac{4}{n}<\dfrac{4}{N}\le\dfrac{4}{4/\varepsilon}=\varepsilon.$ 证毕

$\longrightarrow$由于证明过程中放缩处理的不同，各人找到的 N 往往不同,无法一一给出．

10. 设$a_n=\frac{\sin 1}{1}+\frac{\sin 2}{2^2}+\frac{\sin 3}{3^3}+\cdots+\frac{\sin n}{n^n}$，试运用 Cauchy 收敛准则证明数列$\{a_n\}$收敛 .

解 对于$a_n=\frac{\sin 1}{1}+\frac{\sin 2}{2^2}+\frac{\sin 3}{3^3}+\cdots+\frac{\sin n}{n^n}$,$\forall\varepsilon>0,\exists N\geq\frac{1}{\varepsilon},\forall n>N,\forall p\in\mathbb{N}^*$,

$$s.t.\left|a_n-a_{n+p}\right|=\left|\frac{\sin(n+1)}{(n+1)^{n+1}}+\frac{\sin(n+2)}{(n+2)^{n+2}}+\cdots+\frac{\sin(n+p)}{(n+p)^{n+p}}\right|\leq\frac{1}{(n+1)^{n+1}}+\frac{1}{(n+2)^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^{n+p}}$$

$$\leq\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}<\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}$$

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}<\frac{1}{N}\leq\frac{1}{1/\varepsilon}=\varepsilon.$$

$\longrightarrow$另作不同的放大,$\frac{1}{(n+1)^{n+1}}+\frac{1}{(n+2)^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^{n+p}}<\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+p}}$

$=\dfrac{\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{2^{n+p+1}}}{1-\frac{1}{2}}<\dfrac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^n}$,故亦可以取$N\geq\log_2\frac{1}{\varepsilon}$,或者径直由$\frac{1}{2^n}<\frac{1}{n}\cdots$

11. 设$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{x}{2^n}\right)$,试给出函数$f(x)$不带数列极限符号的表达式 ,进而讨论函数$f(x)$在$x=0$处的连续性 .

解 由 $2\sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2^n}=\sin\frac{x}{2^{n-1}}\cdots$得

$$x\neq 0\text{时},\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{x}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x},$$

$\therefore\ f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, x\neq 0\\ 1\ ,\ x=0\end{cases}$. 在$x\neq 0$ 时,初等函数$\frac{\sin x}{x}$有定义,故其在$x\neq 0$ 处点点连续.

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1=f(0)$, 即函数$f(x)$在$x=0$处连续.

$\therefore$函数$f(x)$在其定义域$\mathbb{R}$上连续.

12. 设$a_0=1$, $a_{n+1}=\sin a_n, n\in\mathbb{N}$,证明数列$\{a_n\}$收敛,求出$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$,并给出$\sup\{a_n\}$, $\inf\{a_n\}$.

解 $a_0=1$, $a_{n+1}=\sin a_n, n\in\mathbb{N}, \therefore a_n\in(0,1)$,由基本不等式
$x\in[0,\pi/2), 0\le\sin x\le x$,并且,当且仅当 $x=0$ 时 "=" 成立

得 $0<a_{n+1}=\sin a_n<a_n$,即数列$\{a_n\}$单调递减,又$a_n>0, \therefore$ 数列$\{a_n\}$收敛.

记$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$,由$\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sin a_n=\sin\left(\lim\limits_{n\to\infty}a_n\right)$,得 $A=\sin A$,

$\because a_n>0, \therefore \lim\limits_{n\to\infty}a_n=A\ge 0$, $\therefore$ 要有$A=\sin A$,唯一的有$A=0$.

于是,$\sup\{a_n\}=a_0=1$, $\inf\{a_n\}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

13. (1). 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

(2). 求极限 ((i) ,(ii) 两个小题任选 1 个，只做 1 个，多做不计分):

(i). $\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)^{\frac{1}{n^2+1}}$; (ii). $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2+1)^{\frac{1}{2n+1}}$.

(1).证明 记 $\sqrt[n]{n}=1+h_n, h_n>0\ (n>1)$, $n=(1+h_n)^n=1+nh_n+C_n^2h_n^2+\cdots+h_n^n>1+C_n^2h_n^2$,

$\therefore 0<\sqrt[n]{n}-1=h_n<\sqrt{\dfrac{2}{n}}$.

$\therefore \forall\varepsilon>0, \exists N\ge\dfrac{2}{\varepsilon^2}, \forall n>N, s.t.\ 0<\sqrt[n]{n}-1<\sqrt{\dfrac{2}{n}}<\sqrt{\dfrac{2}{N}}\le\sqrt{\dfrac{2}{2/\varepsilon^2}}=\varepsilon, \therefore \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

法二 由 $1\le\sqrt[n]{n}=\left(1\cdots\cdots1\cdot\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\right)^{\frac{1}{n}}\le\dfrac{n-2+2\sqrt{n}}{n}<1+\dfrac{2}{\sqrt{n}}$, (将$n-2$个1连乘)

$\therefore 0\le\sqrt[n]{n}-1<\dfrac{2}{\sqrt{n}}$.

$\therefore \forall\varepsilon>0, \exists N\ge\dfrac{4}{\varepsilon^2}, \forall n>N$,有$0\le\sqrt[n]{n}-1=\left(1\cdots\cdots1\cdot\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\right)^{\frac{1}{n}}-1\le\dfrac{n-2+2\sqrt{n}}{n}-1$

$<\dfrac{2}{\sqrt{n}}<\dfrac{2}{\sqrt{N}}\le\dfrac{2}{\sqrt{4/\varepsilon^2}}=\varepsilon. \therefore \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

(2).(i). $\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)^{\frac{1}{n^2+1}}$; (ii). $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2+1)^{\frac{1}{2n+1}}$.

解 (i). 由命题"若$\lim u(x)=A>0, \lim v(x)=B$均存在,那么 $\lim u(x)^{v(x)}=A^B$."

知有 $\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)^{\frac{1}{n^2+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)^{\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{2n+1}{n^2+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[(2n+1)^{\frac{1}{2n+1}}\right]^{\frac{2n+1}{n^2+1}}=1^0=1$.

法二 (i). $1<(2n+1)^{\frac{1}{n^2+1}}\le(3n)^{\frac{1}{n^2+1}}\le(3n^2)^{\frac{1}{n^2}}=(3)^{\frac{1}{n^2}}\cdot(n^2)^{\frac{1}{n^2}}$,

$\lim\limits_{n\to\infty}(3)^{\frac{1}{n^2}}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2)^{\frac{1}{n^2}}=1$, 由*Squeeze th.*得$\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)^{\frac{1}{n^2+1}}=1$.

(ii). $1<(n^2+1)^{\frac{1}{2n+1}}\le(2n^2)^{\frac{1}{2n+1}}\le(2n^2)^{\frac{1}{n}}<(2)^{\frac{1}{n}}\cdot(n^2)^{\frac{1}{n}}=(2)^{\frac{1}{n}}\cdot\left(n^{\frac{1}{n}}\right)^2$,

$\lim\limits_{n\to\infty}(2)^{\frac{1}{n}}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}(n)^{\frac{1}{n}}=1$, 由*Squeeze th.*得$\lim\limits_{n\to\infty}(n^2+1)^{\frac{1}{2n+1}}=1$.