南京农业大学本科生课程

离 散 数 学

第3章 命题逻辑的推理理论

数学系

本章说明

- 本章的主要内容
  - 推理的形式结构
  - 自然推理系统*P*
- 本章与后续各章的关系
  - 本章是第五章的特殊情况和先行准备

3.1 推理的形式结构

- 数理逻辑的主要任务是**用数学的方法来研究数学中的推理**。
- **推理**是指从前提出发推出结论的思维过程。
- **前提**是已知命题公式集合。
- **结论**是从前提出发应用推理规则推出的命题公式。
- **证明**是描述推理正确或错误的过程。
- 要研究推理，首先应该明确什么样的推理是有效的或正确的。

有效推理的定义

定义3.1 设$A_1, A_2, \ldots, A_k$和B都是命题公式，若对于$A_1, A_2, \ldots, A_k$和B中出现的命题变项的任意一组赋值，

（1）或者$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$为假；

（2）或者当$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$为真时，B也为真；

则称由前提$A_1, A_2, \ldots, A_k$推出B的**推理是有效的或正确的**，并称B是**有效结论**。

关于有效推理的说明

- 由前提A_1，A_2，…，A_k推结论B的推理是否正确与诸前提的排列次序无关。

- $\Gamma=\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$
  由 Γ推B的推理记为 $\vdash$B
  若推理是正确的，记为 $\Gamma \models B$
  若推理是不正确的，记为 $\Gamma \not\models B$

关于有效推理的说明

- 设A_1，A_2，…，A_k，B中共出现n个命题变项，对于任何一组赋值$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$（$\alpha_i$=0或者1，i=1,2,…,n)，前提和结论的取值情况有以下四种：

  (1) $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$为0，B为0。

  (2) $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$为0，B为1。

  (3) $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$为1，B为0。

  (4) $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$为1，B为1。

- 只要不出现(3)中的情况，推理就是正确的，因而判断推理是否正确，就是判断是否会出现(3)中的情况。

- 推理正确，并不能保证结论B一定为真。

例题

例3.1 判断下列推理是否正确。（真值表法）

(1) $\{p, p\rightarrow q\} \vdash q$ 正确

(2) $\{p, q\rightarrow p\} \vdash q$ 不正确

p	q	$p\wedge(p\rightarrow q)$	q	$p\wedge(q\rightarrow p)$	q
0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1

有效推理的等价定理

定理3.1 命题公式$A_1, A_2, \ldots, A_k$推B的推理正确当且仅当

$(A_1 \land A_2 \land \ldots \land A_k) \rightarrow B$ 为重言式。

说明

□该定理是判断推理是否正确的另一种方法。

定理3.1的证明

(1) 证明必要性。若$A_1, A_2, \ldots, A_k$推B的推理正确，

则对于$A_1, A_2, \ldots, A_k$, B中所含命题变项的任意一组赋值，不会出现$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$为真，而B为假的情况，

因而在任何赋值下，蕴涵式$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \rightarrow B$均为真，故它为重言式。

(2) 证明充分性。若蕴涵式$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \rightarrow B$为重言式，

则对于任何赋值此蕴涵式均为真，因而不会出现前件为真后件为假的情况，

即在任何赋值下，或者$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$为假，

或者$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$和B同时为真，这正符合推理正确的定义。

推理的形式结构

(1) 设$\Gamma=\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$，记为$\Gamma \vdash B$。

(2) $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$

(3) 前提： $A_1, A_2, \ldots, A_k$
结论： B

说明

当推理正确时，
□形式（1）记为$\Gamma \models B$。
□形式（2）记为$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \Rightarrow B$。
$\Rightarrow$表示蕴涵式为重言式。

判断推理是否正确的方法

- 真值表法
- 等值演算法
- 主析取范式法

说明

❑当命题变项较少时,这三种方法比较方便。

思考

❑是否有其他的证明方法？

例题

例3.2 判断下列推理是否正确。（等值演算法）

（1） 下午马芳或去看电影或去游泳。她没去看电影，所以，她去游泳了。

解：设p:马芳下午去看电影，q:马芳下午去游泳。

前提： $p \lor q$，$\neg p$

结论： q

推理的形式结构： $((p \lor q) \land \neg p) \to q$

$$((p \lor q) \land \neg p) \to q$$

$$\Leftrightarrow \neg((p \lor q) \land \neg p) \lor q$$

$$\Leftrightarrow ((\neg p \land \neg q) \lor p) \lor q$$

$$\Leftrightarrow ((\neg p \lor p) \land (\neg q \lor p)) \lor q$$

$$\Leftrightarrow (\neg q \lor p) \lor q \Leftrightarrow 1$$

由定理 3.1可知，推理正确。

例题

例3.2 判断下列推理是否正确。（主析取范式法 ）

（2）若今天是1号，则明天是5号。明天是5号，所以今天是1号。

解：设p：今天是1号，q：明天是5号。

前提：$p \to q$，q

结论：p

推理的形式结构：$(p \to q) \wedge q \to p$

$$(p \to q) \wedge q \to p$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge q \to p$$

$$\Leftrightarrow \neg\, ((\neg p \vee q) \wedge q) \vee p$$

$$\Leftrightarrow \neg q \vee p$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$$

$$\Leftrightarrow m_0 \vee m_2 \vee m_3$$

主析取范式不含m_1，故不是重言式（01是成假赋值），所以推理不正确。

推理定律--重言蕴含式

(1) $A \Rightarrow (A \lor B)$　　附加律

(2) $(A \land B) \Rightarrow A$　　化简律

(3) $(A \to B) \land A \Rightarrow B$　　假言推理

(4) $(A \to B) \land \neg B \Rightarrow \neg A$　　拒取式

(5) $(A \lor B) \land \neg B \Rightarrow A$　　析取三段论

(6) $(A \to B) \land (B \to C) \Rightarrow (A \to C)$　　假言三段论

(7) $(A \leftrightarrow B) \land (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$　　等价三段论

(8) $(A \to B) \land (C \to D) \land (A \lor C) \Rightarrow (B \lor D)$　　构造性二难

$(A \to B) \land (\neg A \to B) \land (A \lor \neg A) \Rightarrow B$　　构造性二难

(特殊形式)

(9) $(A \to B) \land (C \to D) \land (\neg B \lor \neg D) \Rightarrow (\neg A \lor \neg C)$　　破坏性二难

关于推理定律的几点说明

- A,B,C为元语言符号，代表任意的命题公式。
- 若一个推理的形式结构与某条推理定律对应的蕴涵式一致，则不用证明就可断定这个推理是正确的。
- 2.1节给出的24个等值式中的每一个都派生出两条推理定律。例如双重否定律$A \Leftrightarrow \neg\neg A$产生两条推理定律$A \Rightarrow \neg\neg A$和$\neg\neg A \Rightarrow A$。
- 由九条推理定律可以产生九条推理规则，它们构成了推理系统中的推理规则。

小节结束