南京农业大学本科生课程

离 散 数 学

第7章 二元关系

数学系

本章说明

- 本章的主要内容
  - 有序对与笛卡儿集
  - 二元关系的定义和表示法
  - 关系的运算
  - 关系的性质
  - 关系的闭包
  - 等价关系与划分
  - 偏序关系
- 本章与后续各章的关系
  - 本章是函数的基础
  - 本章是图论的基础

本章内容

7.1 有序对与笛卡儿积

定义7.1 由两个元素x和y（允许x=y）按一定顺序排列成的二元组叫做一个**有序对**(ordered pair)或**序偶**，记作<x, y>，其中x是它的第一元素，y是它的第二元素。

有序对<x, y>具有以下性质：

（1）当x≠y时，<x, y>≠<y, x>。

（2）<x, y>＝<u, v>的充分必要条件是x＝u且y＝v。

说明

- ❑ 有序对中的元素是有序的
- ❑ 集合中的元素是无序的

例7.1

例7.1 已知$\langle x+2, 4\rangle = \langle 5, 2x+y\rangle$，求x和y。

解答

由有序对相等的充要条件有

$$x+2=5$$
$$2x+y=4$$

解得 $x=3, y=-2$。

笛卡儿积的定义

定义7.2 设A，B为集合，用A中元素为第一元素，B中元素为第二元素构成有序对。所有这样的有序对组成的集合叫做A和B的**笛卡儿积**(Cartesian product)，记作A×B。

笛卡儿积的符号化表示为

$$A\times B=\{\langle x,y\rangle \mid x\in A\wedge y\in B\}$$

举例

- A表示某大学所有学生的集合，B表示大学开设的所有课程的集合，

  则A×B可以用来表示该校学生选课的所有可能情况。

- 令A是直角坐标系中x轴上的点集，B是直角坐标系中y轴上的点集，

  于是A×B就和平面点集一一对应。

笛卡尔积举例

举例　设$A=\{a, b\}$，$B=\{0, 1, 2\}$，则

$A\times B=\{\langle a, 0\rangle, \langle a, 1\rangle, \langle a, 2\rangle, \langle b, 0\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle b, 2\rangle\}$

$B\times A=\{\langle 0, a\rangle, \langle 0, b\rangle, \langle 1, a\rangle, \langle 1, b\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 2, b\rangle\}$

例:　$A=\{\varnothing,a\}$,　$B=\{1,2,3\}$.

$A\times B=\{<\varnothing,1>,<\varnothing,2>,<\varnothing,3>,<a,1>,<a,2>,<a,3>\}$.

$B\times A=\{<1,\varnothing>,<1,a>,<2,\varnothing>,<2,a>,<3,\varnothing>,<3,a>\}$.

$A\times A=\{ <\varnothing,\varnothing>, <\varnothing,a>, <a,\varnothing>, <a,a>\}$.

$B\times B=\{ <1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,1>,<2,2>,<2,3>,$
$<3,1>,<3,2>,<3,3> \}$.

说明

❑ 如果$|A|=m,|B|=n$,则$|A\times B|=mn$。

笛卡儿积的运算性质

(1) 对任意集合A，根据定义有

$$A\times\varnothing=\varnothing,\ \varnothing\times A=\varnothing$$

(2) 一般的说，笛卡儿积运算不满足交换律，即

$A\times B\neq B\times A$ （当 $A\neq\varnothing \wedge B\neq\varnothing \wedge A\neq B$ 时）

(3) 笛卡儿积运算不满足结合律，即

$(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C)$ （当 $A\neq\varnothing \wedge B\neq\varnothing \wedge C\neq\varnothing$ 时）

(4) 笛卡儿积运算对并和交运算满足分配律，即

$$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$$
$$(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$$
$$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$$
$$(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$$

(5) 若$A\neq\varnothing$，则$A\times B\subseteq A\times C \Leftrightarrow B\subseteq C$.

$$A\subseteq C \wedge B\subseteq D \Rightarrow A\times B\subseteq C\times D$$

例题1: 设A,B是任意集合,则

$$A \times B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset$$

证明 "$\Leftarrow$" 若$A=\emptyset$ 或 $B=\emptyset$，由笛卡尔集的定义可知 $A \times B = \emptyset$

"$\Rightarrow$" 若 $A \times B = \emptyset$，我们用反证法来证明$A=\emptyset$ 或 $B=\emptyset$，假若$A \neq \emptyset$ 且 $B \neq \emptyset$，则必存在x,$x \in A$,也存在y,$y \in B$,因而必存在$\langle x,y \rangle$,且$\langle x,y \rangle \in A \times B$,从而$A \times B \neq \emptyset$与已知条件$A \times B = \emptyset$ 矛盾，故$A=\emptyset$ 或 $B=\emptyset$

卡氏积非交换性

- 非交换: $A\times B \neq B\times A$

  (除非 $A=B \vee A=\varnothing \vee B=\varnothing$)

- 反例: $A=\{1\}$, $B=\{2\}$.

  $A\times B=\{\langle 1,2\rangle\}$,

  $B\times A=\{\langle 2,1\rangle\}$.

卡氏积非结合性

- 非结合： $(A\times B)\times C \neq A\times(B\times C)$

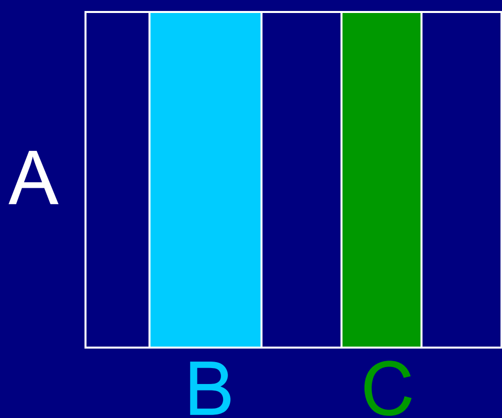
  (除非 $A=\varnothing \vee B=\varnothing \vee C=\varnothing$)

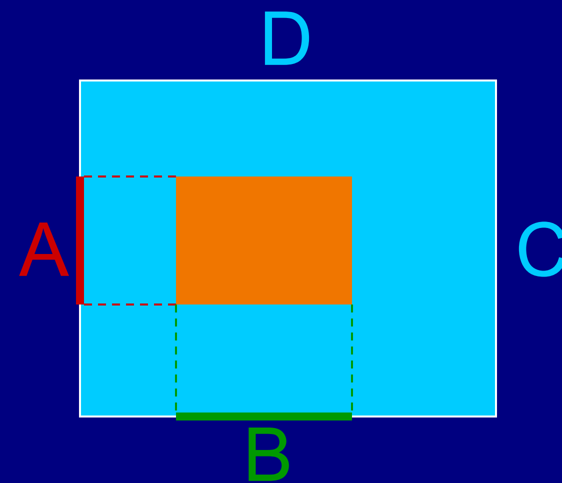
- 反例： $A=B=C=\{1\}$.

  $(A\times B)\times C=\{\langle\langle 1,1\rangle,1\rangle\}$,

  $A\times(B\times C)=\{\langle 1,\langle 1,1\rangle\rangle\}$.

卡氏积图示





$A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$

$A\subseteq C \wedge B\subseteq D \Rightarrow A\times B\subseteq C\times D$

$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$的证明

任取 $<x,y>$

$<x,y>\in A\times(B\cup C)$

$\Leftrightarrow x\in A \wedge y\in B\cup C$

$\Leftrightarrow x\in A \wedge (y\in B\vee y\in C)$

$\Leftrightarrow (x\in A\wedge y\in B) \vee (x\in A\wedge y\in C)$

$\Leftrightarrow <x,y>\in A\times B \vee <x,y>\in A\times C$

$\Leftrightarrow <x,y>\in(A\times B)\cup(A\times C)$

所以 $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$的证明

任取 $\langle x, y\rangle$

$\langle x, y\rangle \in A\times(B\cap C)$

$\Leftrightarrow x\in A \wedge y\in B\cap C$

$\Leftrightarrow x\in A \wedge (y\in B \wedge y\in C)$

$\Leftrightarrow (x\in A \wedge y\in B)\wedge(x\in A \wedge y\in C)$

$\Leftrightarrow \langle x, y\rangle\in A\times B \wedge \langle x, y\rangle\in A\times C$

$\Leftrightarrow \langle x, y\rangle\in (A\times B)\cap(A\times C)$

所以 $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

若$A\neq\varnothing$, 则$A\times B\subseteq A\times C \Leftrightarrow B\subseteq C$.

证明: $(\Rightarrow)$ 若 $B=\varnothing$, 则 $B\subseteq C$.

设 $B\neq\varnothing$, 由$A\neq\varnothing$, 设$x\in A$.

$\forall y$, $y\in B\Rightarrow\langle x,y\rangle\in A\times B$

$\Rightarrow\langle x,y\rangle\in A\times C$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in C \Rightarrow y\in C$.

$\therefore B\subseteq C$

在必要性 $(\Rightarrow)$中，若没有条件$A\neq\varnothing$，结论不成立。

例如 $A=\varnothing$，$B=\{a，b\}$，$C=\{a,c\}$，则 $A\times B=\varnothing$，$A\times C=\varnothing$，从而 $A\times B\subseteq A\times C$，显然 $B\not\subseteq C$

∵ 若$A\neq\varnothing$, 则$A\times B\subseteq A\times C \Leftrightarrow B\subseteq C$.

证明(续): ($\Leftarrow$)若$B=\varnothing$,则$A\times B=\varnothing\subseteq A\times C$.

设 $B\neq\varnothing$.

$\forall\langle x,y\rangle$, $\langle x,y\rangle\in A\times B \Leftrightarrow x\in A\wedge y\in B$

$\Rightarrow x\in A\wedge y\in C \Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in A\times C$

$\therefore A\times B\subseteq A\times C$. #

讨论: 在($\Leftarrow$)中不需要条件 $A\neq\varnothing$.

$A \subseteq C \wedge B \subseteq D \Rightarrow A \times B \subseteq C \times D$

证明:$\forall \langle x,y\rangle, \langle x,y\rangle \in A \times B$

$\Rightarrow x \in A \wedge y \in B$

$\Rightarrow x \in C \wedge y \in D$ (由$A \subseteq C \wedge B \subseteq D$)

$\Rightarrow \langle x,y\rangle \in C \times D$

所以 $A \times B \subseteq C \times D$ #

∴关于$A\subseteq C \wedge B\subseteq D \Rightarrow A\times B\subseteq C\times D$的逆命题讨论

该性质的逆命题不成立，可分以下情况讨论。

（1）当$A=B=\varnothing$时，显然有$A\subseteq C$ 和 $B\subseteq D$ 成立。

（2）当$A\neq\varnothing$且$B\neq\varnothing$时，也有$A\subseteq C$和$B\subseteq D$成立，证明如下：

任取$x\in A$，$y\in B$，因此有

$$x\in A\wedge y\in B$$

$$\Rightarrow \langle x,y\rangle\in A\times B$$

$$\Rightarrow \langle x,y\rangle\in C\times D\ （由A\times B\subseteq C\times D）$$

$$\Rightarrow x\in C\wedge y\in D$$

$$\Rightarrow x\in C,\ y\in D$$

从而证明了 $A\subseteq C$， $B\subseteq D$。

关于$A\subseteq C \wedge B\subseteq D \Rightarrow A\times B\subseteq C\times D$的讨论

该性质的逆命题不成立，可分以下情况讨论。

（3）当$A=\varnothing$而$B\neq\varnothing$时，有$A\subseteq C$成立，但不一定有$B\subseteq D$成立。

反例：令$A=\varnothing, B=\{1\}, C=\{3\}, D=\{4\}$。

（4）当$A\neq\varnothing$而$B=\varnothing$时，有$B\subseteq D$成立，但不一定有$A\subseteq C$成立。

反例略。

例7.2

例7.2 设A={1, 2}，求P(A)×A。

解答

$$
\begin{aligned}
P(A)\times A &= \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}\times\{1,2\} \\
&= \{\langle\varnothing,1\rangle, \langle\varnothing,2\rangle, \\
&\quad \langle\{1\},1\rangle, \langle\{1\},2\rangle, \\
&\quad \langle\{2\},1\rangle, \langle\{2\},2\rangle, \\
&\quad \langle\{1,2\},1\rangle, \langle\{1,2\},2\rangle\}
\end{aligned}
$$

例7.3

例7.3 设A，B，C，D为任意集合，判断以下命题是否为真，并说明理由。

(1) $A\times B = A\times C \Rightarrow B = C$

(2) $A-(B\times C) = (A-B)\times(A-C)$

(3) $A = B \wedge C = D \Rightarrow A\times C = B\times D$

(4) 存在集合A，使得$A \subseteq A\times A$

解答

(1) 不一定为真。当$A=\varnothing$，$B=\{1\}$，$C=\{2\}$时，有 $A\times B=\varnothing=A\times C$，但$B\neq C$。

(2) 不一定为真。当$A=B=\{1\}$，$C=\{2\}$时，有

$$A-(B\times C) = \{1\}-\{<1,2>\} = \{1\}$$

$$(A-B)\times(A-C) = \varnothing\times\{1\} = \varnothing$$

(3) 为真。由等量代入的原理可证。

(4) 为真。当$A=\varnothing$时，有 $A\subseteq A\times A$ 成立。