3-03 函数极限存在条件

上页 下页 返回

一.Heine定理(归结原则)——函数极限与数列极限的关系

定理1. $f(x)$在$U^0\left(x_0,\delta\right)$内有定义, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$

$\Leftrightarrow \forall$数列$\left\{x_n\right\}\subseteq U^0\left(x_0,\delta\right)$,若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$且$x_n \neq x_0$,

则有$\lim\limits_{n\to\infty} f\left(x_n\right)=A.$

注: 1. 本定理建立了函数极限与数列极限的关系,将函数极限的存在性转化为数列极限的存在性。

2. 本定理通常用来说明某一函数极限不存在。

其实这个结论就是**从一般到特殊的必然**.同时,所有的特殊情况下均成立同一个结论,则一般的情况下结论必成立!

数列极限情形与函数极限情形 结论对照

定理: 数列$\{x_n\}$收敛$\Leftrightarrow$数列$\{x_n\}$的任何非平凡子数列$\{x_{n_k}\}$都收敛.

定理1. $f(x)$在$U^0(x_0,\delta)$内有定义, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$

$\Leftrightarrow \forall$数列$\{x_n\}\subseteq U^0(x_0,\delta)$,若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$且$x_n \neq x_0$,

则有$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$.

上页 下页 返回

证明 必要性 $\because \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A,$

$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon.$

又 $\because \lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ 且 $x_n \neq x_0,$

$\therefore$ 对上述 $\delta > 0, \exists N > 0,$ 使当 $n > N$ 时,

恒有 $0 < |x_n - x_0| < \delta.$

从而 $|f(x_n) - A| < \varepsilon,$ 故 $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A.$

充分性　设$\forall\{x_n\}\subseteq U^0(x_0,\delta),\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$,

有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$,欲证明$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

用反证法:　假设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$不成立,

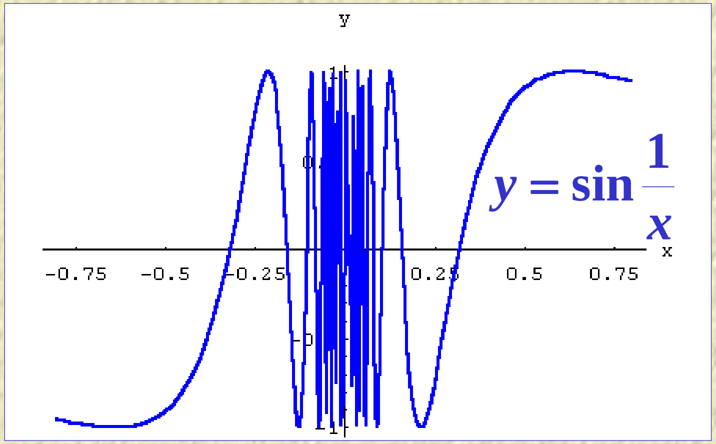
则$\exists\varepsilon_0>0$,对每个$\delta_n=\dfrac{1}{n},\exists\ x_n:0<|x_n-x_0|<\delta_n$,

使得$|f(x_n)-A|\geq\varepsilon_0\ (n=1,2,\cdots)$.

但$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0,x_n\neq x_0,\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\neq A$,矛盾!

故 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

例1.证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.



证明 取 $\{x_n\}=\left\{\dfrac{1}{n\pi}\right\}$,

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$, 且 $x_n\neq 0$;

取 $\{x_n'\}=\left\{\dfrac{1}{\dfrac{4n+1}{2}\pi}\right\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n'=0$, 且 $x_n'\neq 0$;

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{1}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sin n\pi=0$,

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{1}{x_n'}=\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{4n+1}{2}\pi=1$,

故 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.

我们也可以用说明$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{1}{1/n}$不存在来说明

$\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$不存在,但是反之不成立.

假设:如果$\lim\limits_{n\to\infty}\sin n = a$ 存在,则

$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sin(n+2)-\sin n\right]=0$,即$\lim\limits_{n\to\infty}2\cos(n+1)\sin 1=0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\cos(n+1)=0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\cos n=0$,$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\sin 2n=0$,

由数列与其子列的极限关系知$\lim\limits_{n\to\infty}\sin n = a = 0$,

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin^2 n+\cos^2 n\right)=0$,矛盾,故$\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$不存在.

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$不存在.

例2.对于Dirichlet函数$D(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$,

证明 $\forall x_0\in\mathbb{R},\lim\limits_{x\to x_0}D(x)$均不存在.

证明: $\forall x_0\in\mathbb{R},\exists\{r_n\}\in\mathbb{Q},r_n\neq x_0,\lim\limits_{n\to\infty}r_n=x_0,$

则有$D(r_n)=1.$

又对于$x_0\in\mathbb{R},\exists\{t_n\}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},t_n\neq x_0,\lim\limits_{n\to\infty}t_n=x_0,$

则有$D(t_n)=0.$

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}D(r_n)=1,\lim\limits_{n\to\infty}D(t_n)=0.$

据归结原则知$\lim\limits_{x\to x_0}D(x)$不存在.

相应于$x \to x_0^+, x \to x_0^-, x \to +\infty, x \to -\infty$

这四种情形函数的单侧极限, 定理有更强

的形式,如以 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$ 为例:

定理1′. $f(x)$在$U_-^o\left(x_0, \delta\right)$内有定义, $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$

$\Leftrightarrow \forall$数列$\left\{x_n\right\} \subseteq U_-^o\left(x_0, \delta\right)$,严格递增,$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$,

则有 $\lim\limits_{n \to \infty} f\left(x_n\right) = A$.

上页 下页 返回

归结原则常用情况有三：

(1). $\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(n) = A$；

(2).说明$\lim_{x \to \infty} f(x)$或$\lim_{x \to x_0} f(x)$不存在；

(3).证明$\lim_{x \to \infty} f(x)$或$\lim_{x \to x_0} f(x)$存在.

例3.设$f(x)$是$\mathbb{R}$上以$T(>0)$为周期的函数,

若$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$,证明: $f(x)\equiv 0, x\in\mathbb{R}$.

证明:假设$\exists\ x_0\in\mathbb{R}$,使$f(x_0)\neq 0$,

则对于$x_n=x_0+nT$,得$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$,

于是根据归结原则有

$$\lim_{n\to\infty} f\left(x_n\right)=\lim_{n\to\infty} f\left(x_0+nT\right)=f\left(x_0\right)\neq 0,$$

矛盾! 结论得证.

上页 下页 返回

二. 函数极限的单调有界准则:

相应于数列极限的单调有界定理， 函数的下述四类单侧极限也有相应的单调有界定理。

$$\lim_{x\to+\infty} f(x),\ \lim_{x\to-\infty} f(x);\ \lim_{x\to x_0^+} f(x),\ \lim_{x\to x_0^-} f(x);$$

以两种情形为例:

定理2 设$f(x)$为定义在$U_+^o(x_0,\delta)$上的单调有界函数,则右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$存在.具体而言,

$f(x)$在$U_+^o(x_0,\delta)$上单调增加,有下界,则 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$存在,且 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \inf\limits_{x\in U_+^o(x_0)} f(x)$.

证明 设$f(x)$在$\left(M_0,+\infty\right)$上定义,单调增加

有上界,由确界原理,记$A=\sup\limits_{\left(M_0,+\infty\right)}\left\{f(x)\right\}$,

则$\forall\varepsilon>0,\exists x_1:M_0<x_1<+\infty$,

$A-\varepsilon<f(x_1)\le A<A+\varepsilon$,

于是可取$M\ge x_1,\forall x:M<x<+\infty$,

有$A-\varepsilon<f(x_1)\le f(x)<A+\varepsilon$,

即$\forall\varepsilon>0,\exists M,\forall x:M<x<+\infty$,

有$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$,

$\therefore\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\sup\limits_{\left(M_0,+\infty\right)}\left\{f(x)\right\}$.

定理2' 设$f(x)$在$U^0(x_0)$上定义,单调增加,

则$\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$均存在,且

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = \sup_{U_-^0(x_0)} f(x), \lim_{x\to x_0+} f(x) = \inf_{U_+^0(x_0)} f(x).$$

上页 下页 返回

例3.今后我们可以很容易地证明,函数

$$f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$$

在区间$(0,+\infty)$上严格单调增加且有上界,

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$,就是集合

$A=\left\{y: y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}, x\in(0,+\infty)\right\}$的上确界.

上页 下页 返回

三. Cauchy 收敛准则

定理3.($Cauchy$ 收敛准则)

(1). $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$

$\forall x', x'' \in U^o(x_0, \delta)$,有$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

(2). $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$存在$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists X > 0,$

$\forall x', x'' : |x'| > X, |x''| > X,$

有 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$

上页 下页 返回

证明:(1). 必要性:略.

充分性:设$\{x_n\}(x_n \neq x_0, n \in N)$是以$x_0$为极限的收敛数列,易知$\{f(x_n)\}$是$Cauchy$列.

实际上,由条件知,$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$

$\forall x', x'' \in U^o(x_0, \delta)$,有$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$

$\therefore$ 对$\{x_n\}$而言,$\exists N, \forall n, m > N$,有$0 < |x_n - x_0| < \delta,$

$0 < |x_m - x_0| < \delta$,因而有$\forall n, m > N$可得

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon.$$

这就说明$\{f(x_n)\}$是$Cauchy$列,记$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A.$

下证$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.首先考虑到对于满足$0<|x-x_0|<\delta$的$x$以及$n>N$的$x_n$，有$\left|f\left(x_n\right)-f(x)\right|<\varepsilon$.

其次,由$\lim\limits_{n\to\infty} f\left(x_n\right)=A$可知

$$\lim_{n\to\infty}\left|f\left(x_n\right)-f(x)\right|=|A-f(x)|,$$

从而立即得到$\forall\ 0<|x-x_0|<\delta$,

$s.t.|f(x)-A|\le\varepsilon$,证明完毕.

定理3.(*Cauchy* 收敛准则)

(1). $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$

$\forall x', x'' \in U^o\left(x_0, \delta\right)$,有$\left|f\left(x'\right) - f\left(x''\right)\right| < \varepsilon$.

定理3.(*Cauchy* 收敛准则)的推论

(1). $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在 $\Leftrightarrow \forall$以x_0为极限的收敛数列$\left\{x_n\right\}\left(x_n \neq x_0, n \in N\right)$,$\left\{f\left(x_n\right)\right\}$是*Cauchy*列.

上页 下页 返回

定理3.$\left(Cauchy\text{ 收敛准则}\right)$

(2). $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$存在 $\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists X > 0,$

$\forall x', x'': |x'| > X, |x''| > X,$

有 $\left|f\left(x'\right) - f\left(x''\right)\right| < \varepsilon.$

定理3.$\left(Cauchy\text{ 收敛准则}\right)$的推论

(2). $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$存在 $\Leftrightarrow \forall$发散至∞的数列

$\{x_n\}$(无穷大列),$\{f(x_n)\}$是$Cauchy$列.

上页 下页 返回

定理3.(*Cauchy* 收敛准则)

A. *Cauchy* 收敛准则的肯定形式

(1). $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$

$\forall x', x'' \in U^o(x_0, \delta)$,有$\left| f(x') - f(x'') \right| < \varepsilon$.

B. *Cauchy* 收敛准则的否定形式

(1). $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$不存在 $\Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0, \forall \delta > 0,$

$\exists x', x'' \in U^o(x_0, \delta)$,有$\left| f(x') - f(x'') \right| \geq \varepsilon_0$.

再论例1.证明$\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$不存在.

证明　我们可取$\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}, \forall\delta>0,$

可取$x'=\dfrac{1}{n\pi}, x''=\dfrac{1}{n\pi+\dfrac{\pi}{2}}, n\in\mathbb{Z}^+,$

$$x'-x''=\frac{1}{n\pi}-\frac{1}{n\pi+\dfrac{\pi}{2}}=\frac{\dfrac{\pi}{2}}{\left(n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)n\pi}=\frac{1}{(2n+1)n},$$

只要$\dfrac{1}{(2n+1)n}<\delta$,则有

$$\left|f(x')-f(x'')\right|=\left|\sin\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)-\sin n\pi\right|=1>\frac{1}{2}=\varepsilon_0.$$

由收敛准则的否定形式知,$\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$不存在.

练习

1. 设$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\in\mathbb{Q} \\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$,试用*Heine*

定理证明: $x_0\neq 0$时, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在.

2. 设$x_0>0$,证明: $\lim\limits_{x\to x_0}\ln x=\ln x_0$.

上页 下页 返回

2. 设$x_0>0$,证明:$\lim\limits_{x\to x_0}\ln x=\ln x_0$.

证明:已知$x>0$ 时,$\ln x$ 严格单调增加.

(1).设$x_0=1$,此时有$\lim\limits_{x\to 1}\ln x=0$,如若不然,

则对于$\varepsilon_0>0$,存在满足$x_n\to 1(n\to\infty)$的正数列,

使得$|\ln x_n|\ge\varepsilon_0$,由此可知,$\forall n\in N$,

由$\ln x_n\ge\varepsilon_0$可得$x_n\ge e^{\varepsilon_0}>1$

或 由$\ln x_n\le-\varepsilon_0$可得$x_n\le e^{-\varepsilon_0}<1$,

而这与$x_n\to 1(n\to\infty)$相矛盾,$\therefore\lim\limits_{x\to 1}\ln x=0$;

(2).$x_0\ne 1$ 时,$|\ln x_n-\ln x_0|=\left|\ln\dfrac{x_n}{x_0}\right|$,$x\to x_0$时$\dfrac{x_n}{x_0}\to 1$,

由(1)得$x\to x_0$时$\left|\ln\dfrac{x_n}{x_0}\right|\to 0$. $\therefore\forall x_0>0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\ln x=\ln x_0$.

返回