2021 级数学分析 II 阶段练习参考解答　　2021-06

1. 曲面 $z=x^2+y^2$ 在点 $(1,1,2)$ 处的与 z 轴正向夹角为锐角的单位化的法向量 $\overrightarrow{n^o}=$______________.

解 $z=f(x,y)$ 上点 (x,y,z) 处法向量 $\vec{n}=\pm(f_x,f_x,-1)$,

对于 $z=x^2+y^2$ 在点 $(1,1,2)$ 处有 $\vec{n}=\pm(2,2,-1)$, $\therefore$ 所求为 $\overrightarrow{n^o}=\frac{1}{3}(-2,-2,1)$.

2. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, x^2+y^2\neq 0\\ 0\quad, x^2+y^2=0\end{cases}$,试问在 $O(0,0)$ 处函数 $f(x,y)$ 是否连续?是否可微?

解 由 $x^2y^2\le\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2$ 得 $0\le\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}\le\frac{1}{4}(x^2+y^2)$, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}=0$,

$\therefore f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续.

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{0}{x}=0,\ f_y(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to0}\frac{0}{y}=0,$$

由 $0\le\dfrac{x^2y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\le\frac{1}{4}\sqrt{x^2+y^2}$,得

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2}\to0}\frac{f(x,y)-f(0,0)-\left[f_x(0,0)x+f_y(0,0)y\right]}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\sqrt{x^2+y^2}\to0}\frac{x^2y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}=0,$$

$\therefore f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

3. 求曲面 $\dfrac{x^2}{2}+y^2+\dfrac{z^2}{4}=1$ 上点与平面 $2x+2y+z+5=0$ 上点之间的最短距离.

解 根据几何意义知,距离最小时椭球面在点 (x_0,y_0,z_0) 处的切平面平行于给定平面,

椭球面法向量 $\vec{n_0}=\left(x_0,2y_0,\frac{1}{2}z_0\right)$,平面法向量 $\vec{n_1}=(2,2,1)$,

于是可设 $x_0=2t, 2y_0=2t, \frac{1}{2}z_0=t$,代入 $\dfrac{x^2}{2}+y^2+\dfrac{z^2}{4}=1$ 得 $t=\pm\frac{1}{2}$,

于是, $(x_0,y_0,z_0)=\pm\left(1,\frac{1}{2},1\right)$, $\left(1,\frac{1}{2},1\right)$ 到平面 $2x+2y+z+5=0$ 的距离为 $d_1=\dfrac{\left|2\times1+2\times\frac{1}{2}+1+5\right|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=3$,

$\left(-1,-\frac{1}{2},-1\right)$ 到平面 $2x+2y+z+5=0$ 的距离为 $d_2=\dfrac{\left|2\times(-1)+2\times\left(-\frac{1}{2}\right)-1+5\right|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\frac{1}{3}$,

$\therefore$ 所求平面与椭球面的最小距离为 $\frac{1}{3}$.

解二 椭球面上点(x,y,z)到给定平面的距离为$d=\dfrac{|2x+2y+z+5|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}$,

考虑条件极值问题$\begin{cases}\min G=(2x+2y+z+5)^2\\ s.t.\quad \dfrac{x^2}{2}+y^2+\dfrac{z^2}{4}=1\end{cases}$,

取*Lagrange* 乘子函数 $L=(2x+2y+z+5)^2-\lambda\left(\dfrac{x^2}{2}+y^2+\dfrac{z^2}{4}-1\right)$

$$\begin{cases}L_x=0\\ L_y=0\\ L_z=0\\ L_\lambda=0\end{cases},\Rightarrow\begin{cases}4(2x+2y+z+5)-\lambda x=0\\ 4(2x+2y+z+5)-2\lambda y=0\\ 2(2x+2y+z+5)-\dfrac{1}{2}\lambda z=0\\ \dfrac{x^2}{2}+y^2+\dfrac{z^2}{4}=1\end{cases}$$,求得驻点$\pm\left(1,\dfrac{1}{2},1\right)$,

根据问题的实际意义知所求距离有最小值与最大值,

点$\left(1,\dfrac{1}{2},1\right)$到平面的距离为$d_1=3$, 点$\left(-1,-\dfrac{1}{2},-1\right)$到平面的距离为$d_2=\dfrac{1}{3}$,

$\therefore$ 所求平面与椭球面的最小距离为$\dfrac{1}{3}$.

4. 设 f'' 存在, 且 $x^2+y^2+z^2=xyf(z^2)$, 求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 对 $x^2+y^2+z^2=xyf(z^2)$两边对x求导,$2x+2z\dfrac{\partial z}{\partial x}=y\left[f(z^2)+xf'(z^2)\cdot 2z\dfrac{\partial z}{\partial x}\right]$解得

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2x-yf(z^2)}{2xyzf'(z^2)-2z}$,由变量$x,y$的对称性可得$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2y-xf(z^2)}{2xyzf'(z^2)-2z}$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(\frac{2x-yf(z^2)}{2xyzf'(z^2)-2z}\right)'_y=\frac{-\left[f(z^2)+yf'(z^2)\cdot 2z\dfrac{\partial z}{\partial y}\right]\left[2xyzf'(z^2)-2z\right]-\left[2x-yf(z^2)\right]\left[2xyzf'(z^2)-2z\right]'_y}{\left[2xyzf'(z^2)-2z\right]^2},\cdots\cdots(1)$$

$$\left[2xyzf'(z^2)-2z\right]'_y=2x\left[zf'(z^2)+yf'(z^2)\frac{\partial z}{\partial y}+yzf''(z^2)\cdot 2z\frac{\partial z}{\partial y}\right]-2=\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

将$\dfrac{\partial z}{\partial y}$代入上述(2)式,再代入上述(1)式,即得结果,结果从略.

解二 设 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-xyf(z^2)$,$\dfrac{\partial F}{\partial x}=F_x=2x-yf(z^2)$,$F_y=2y-xf(z^2)$,

$F_z=2z-xyf'(z^2)\cdot 2z$,$\therefore\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}$,$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y}{F_z}\cdots$

法三 在等式 $x^2+y^2+z^2=xyf(z^2)$两边作微分,$d(x^2+y^2+z^2)=d(xyf(z^2))$,

即 $2xdx+2ydy+2zdz=yf(z^2)dx+xf(z^2)dy+xyf'(z^2)\cdot 2zdz$,整理得$dz=Adx+Bdy$,

即$A=\dfrac{\partial z}{\partial x}$,$B=\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdots$

5. 设 $n\in\mathbb{N}$ ，$x,y\in\mathbb{R}^{+}$，证明：$\dfrac{x^n+y^n}{2}\ge\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n$.（尝试用多种方法，行否?）

解 $n\in\mathbb{N}$ ，$s=t^n$ 在 $\mathbb{R}^{+}$上是一个凸函数，由凸函数定义知，$\forall x,y\in\mathbb{R}^{+}$，有 $\dfrac{x^n+y^n}{2}\ge\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n$.

法二 设$\varphi(x)=\dfrac{x^n+y^n}{2}-\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n$，视$y$为定值，则在$x\in\mathbb{R}^{+}$时在$x=y$ 时$\varphi(x)$取得最小值$\varphi(y)=0$.

法三 用$Lagrange$ 乘子法，考虑在条件$x+y=2a$下求得函数$\dfrac{x^n+y^n}{2}$的最小值$=a^n=\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n\cdots$

6. 证明：曲面$\varPhi\left(x-az,y-bz\right)=0$上任一点处的切平面均与一定直线平行 .

解 设$F\left(x,y,z\right)=\varPhi\left(x-az,y-bz\right)=\varPhi\left(u,v\right)$，$F_x=\dfrac{\partial\varPhi}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial\varPhi}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}=\varPhi_1\cdot1+\varPhi_2\cdot0$，

$F_y=\dfrac{\partial\varPhi}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial\varPhi}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}=\varPhi_1\cdot0+\varPhi_2\cdot1$，$F_z=\dfrac{\partial\varPhi}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial\varPhi}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial z}=\varPhi_1\cdot(-a)+\varPhi_2\cdot(-b)$，

曲面$\varPhi\left(x-az,y-bz\right)=0$ 的法向量$\vec{n}=\left(F_x,F_y,F_z\right)=\left(\varPhi_1,\varPhi_2,-a\varPhi_1-b\varPhi_2\right)$与确定的向量$(a,b,1)$正交，

$\therefore$曲面$\varPhi\left(x-az,y-bz\right)=0$ 上任意一点处的切平面与一条方向向量为$(a,b,1)$的直线平行.

7. 在椭球面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$上求一点 $P\left(x_0,y_0,z_0\right)$，使该点处曲面的切平面与三个坐标平面围成的四面体体积最小，并求该最小体积 .

解 由几何对称性，不妨只考虑$P\left(x_0,y_0,z_0\right)$在第一卦限的情形.

设$P\left(x_0,y_0,z_0\right)$是椭球面上的点，令$F\left(x,y,z\right)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1$，

则曲面在P点处法向量$\vec{n}=\left(F_x,F_y,F_z\right)=\left(\dfrac{2x_0}{a^2},\dfrac{2y_0}{b^2},\dfrac{2z_0}{c^2}\right)$，

过P点的切平面方程为 $\dfrac{x_0}{a^2}\left(x-x_0\right)+\dfrac{y_0}{b^2}\left(y-y_0\right)+\dfrac{z_0}{c^2}\left(z-z_0\right)=0$，整理得$\dfrac{x\cdot x_0}{a^2}+\dfrac{y\cdot y_0}{b^2}+\dfrac{z\cdot z_0}{c^2}=1$.

该切平面在三坐标轴上的截距为$x=\dfrac{a^2}{x_0},y=\dfrac{b^2}{y_0},z=\dfrac{c^2}{z_0}$，则所求四面体体积为$V=\dfrac{1}{6}xyz=\dfrac{a^2b^2c^2}{6x_0y_0z_0}$.

在条件$\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}+\dfrac{z_0^2}{c^2}=1$ 下求$V=\dfrac{a^2b^2c^2}{6x_0y_0z_0}=\dfrac{abc}{6}\cdot\dfrac{1}{\dfrac{x_0}{a}\cdot\dfrac{y_0}{b}\cdot\dfrac{z_0}{c}}$的最小值.

记$\dfrac{x_0}{a}=u,\dfrac{y_0}{b}=v,\dfrac{z_0}{c}=w$，则考虑在$u^2+v^2+w^2=1$ 条件下求$G=uvw$ 的最大值.

用$Lagrange$ 乘子法：设$L=\ln u+\ln v+\ln w-\lambda\left(u^2+v^2+w^2-1\right)$，$\longleftarrow$（取对数只是为了求导简单些）

$\begin{cases}L_u=0,L_v=0\\L_w=0,L_\lambda=0\end{cases}$，解得驻点$(u,v,w)=\left(\dfrac{1}{\sqrt3},\dfrac{1}{\sqrt3},\dfrac{1}{\sqrt3}\right)$，由问题的实际意义知$G=uvw$ 必有最大值.

$\therefore G=uvw$ 在点$\left(\dfrac{1}{\sqrt3},\dfrac{1}{\sqrt3},\dfrac{1}{\sqrt3}\right)$处取得最大值$\dfrac{1}{3\sqrt3}$.

于是，在切点$\left(x_0,y_0,z_0\right)=\left(\dfrac{a}{\sqrt3},\dfrac{b}{\sqrt3},\dfrac{c}{\sqrt3}\right)$处，四面体体积的最小值为$V_{\min}=\dfrac{\sqrt3}{2}abc$.

8. 若函数 $u=u(x,y,z), v=v(x,y,z)$ 都可微，证明：$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial(u,v)}{\partial(z,x)}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=0$.

解 对于 $u=u(x,y,z), v=v(x,y,z)$, 显然有 $\frac{\partial(u,u,v)}{\partial(x,y,z)}=\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}=0,$

对该行列式按第一行展开,得 $u_x\cdot\begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix}-u_y\cdot\begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix}+u_z\cdot\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}=0,$

即为 $\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial(u,v)}{\partial(z,x)}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=0$.

9. 将 $\int_0^1 dx\int_x^1 f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dy$ 化为极坐标系中的二次积分，结果为 ________.

解 上述积分所对应的二重积分区域为 $D: x\le y\le 1, 0\le x\le 1. \therefore D_{r\theta}: 0\le r\le \csc\theta, \frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}.$

$\therefore \int_0^1 dx\int_x^1 f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dy=\int_{\pi/4}^{\pi/2}d\theta\int_0^{\csc\theta} f(r)rdr$.

10. 设有一个面密度 ρ 为常数、半径为 a 的圆盘状物体（不考虑厚度），有一质量为 m 的质点位于圆盘的过圆心的法线上距离圆盘 a 处，求该质点与圆盘间的万有引力，引力常数为 G .

解 在区域 $D: x^2+y^2\le a^2$ 中取一面积为 $d\sigma$ 的小区域 ΔD, $(x,y)\in\Delta D$, ΔD 的直径 $\to 0$.

小薄片 ΔD 与质点 m 间的万有引力的引力微元为 $dF=G\frac{m\rho d\sigma}{(x^2+y^2+a^2)}$,

其在 x 轴上的分量为 $dF_x=G\frac{m\rho d\sigma}{(x^2+y^2+a^2)}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+a^2}}$,

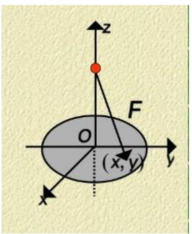
其在 y 轴上的分量为 $dF_y=G\frac{m\rho d\sigma}{(x^2+y^2+a^2)}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+a^2}}$,

其在 z 轴上的分量为 $dF_z=G\frac{m\rho d\sigma}{(x^2+y^2+a^2)}\cdot\frac{a}{\sqrt{x^2+y^2+a^2}}$,

$\therefore F_x=\iint_D\frac{Gm\rho x}{\sqrt{(x^2+y^2+a^2)^3}}d\sigma=0, F_y=\iint_D\frac{Gm\rho y}{\sqrt{(x^2+y^2+a^2)^3}}d\sigma=0,$

$F_z=\iint_D\frac{Gm\rho a}{\sqrt{(x^2+y^2+a^2)^3}}d\sigma=Gm\rho a\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\frac{rdr}{\sqrt{(r^2+a^2)^3}}=\pi Gm\rho\left(2-\sqrt{2}\right).$

$\therefore$ 所求引力为 $F=\left(0,0,\pi Gm\rho\left(2-\sqrt{2}\right)\right).$



11. 计算积分 $\iint\limits_{D}\sqrt{a^2-y^2}dxdy$，其中 D 为平面上圆心为 O 点,半径为 a 的圆位于第一象限的部分.

解 $\iint\limits_{D}\sqrt{a^2-y^2}dxdy=\int_0^a dy\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}}\sqrt{a^2-y^2}dx=\int_0^a\left(a^2-y^2\right)dy=\frac{2}{3}a^3$,这是最简单的计算过程.

$\iint\limits_{D}\sqrt{a^2-y^2}dxdy=\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{a^2-y^2}dy$ 这个计算看着就知麻烦许多…

$\iint\limits_{D}\sqrt{a^2-y^2}dxdy=\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^a\sqrt{a^2-r^2\sin^2\theta}\cdot rdr=\cdots$

特别地,该积分计算的就是牟合方盖体积的八分之一.

12. 设$f(x)$在$[0,1]$上连续,$\int_0^1 f(x)dx=A$.求证 $2\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy=A^2$.

解 由形式对称性得 $I=\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy=\int_0^1 dy\int_y^1 f(x)f(y)dx$,

$\therefore 2I=\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy+\int_0^1 dy\int_y^1 f(x)f(y)dx=\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy+\int_0^1 dx\int_0^x f(x)f(y)dy$

$=\int_0^1 dx\int_0^1 f(x)f(y)dy,\therefore 2I=\int_0^1 f(x)dx\int_0^1 f(y)dy=A^2$.

法二 设 $\int_0^u f(x)dx=F(u),F(1)=A,F(0)=0$.

$I=\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy=\int_0^1 f(x)\left[\int_x^1 f(y)dy\right]dx=\int_0^1 f(x)[F(1)-F(x)]dx$

$=F(1)\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 f(x)F(x)dx=F^2(1)-\int_0^1 F(x)dF(x)=F^2(1)-\frac{1}{2}F^2(x)\Big|_0^1=\frac{1}{2}F^2(1)=\frac{1}{2}A^2$.

13. 计算$I=\iint_D\left(x-y\right)dxdy$, 其中区域$D=\left\{\left(x,y\right)\middle|\left(x-1\right)^2+\left(y-1\right)^2\le 2,y\ge x\right\}$.

解 令$x-1=u,y-1=v$,坐标系平移是全等变换,于是 $dxdy=dudv$.

$D:\left(x-1\right)^2+\left(y-1\right)^2\le 2,y\ge x\Rightarrow D_{uv}:u^2+v^2\le 2,v\ge u$.

$\therefore I=\iint_D\left(x-y\right)dxdy=\iint_{D_{uv}}\left(u-v\right)dudv=\int_{\pi/4}^{5\pi/4}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}r\left(\cos\theta-\sin\theta\right)\cdot rdr=\cdots=-\frac{8}{3}$.

注:若不作坐标变换直接计算是比较麻烦的.

14. 求由曲面$z=x^2+2y^2$ 与 $z=6-2x^2-y^2$所围成立体的体积.

解 $\begin{cases}z=x^2+2y^2\\z=6-2x^2-y^2\end{cases}$ 消去z得$x^2+y^2=2$,这就是两曲面的交线对坐标面xOy作投影的投影柱面.

两曲面所围成的立体向着坐标面xOy作投影产生的投影区域为$D:x^2+y^2\le 2$.

于是,所求体积恰是以区域D为底,上述投影柱面为侧面的两个曲顶柱体体积之差.

$V=\iint_D\left(6-2x^2-y^2\right)dxdy-\iint_D\left(x^2+2y^2\right)dxdy=\iint_D\left(6-3x^2-3y^2\right)dxdy$

$=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\left(2-r^2\right)rdr=6\pi$.

15. 求曲线 $r^2=2\sin\theta$围成的图形的面积.

解 $r^2=2\sin\theta\ge 0,\Rightarrow 0\le\theta\le\pi.\therefore\sigma(D)=\iint\limits_D rdrd\theta=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2\sin\theta}}rdr=\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta=2.$