# §10.2 定积分的应用02

## —— 定积分在物理学上的应用

上页 下页 返回

## 定积分在物理学上的应用

利用定积分的计算的基本方法—微元法（元素法）人们可以计算:

*A*.变速直线运动中物体在一段时间内所经过的路程；

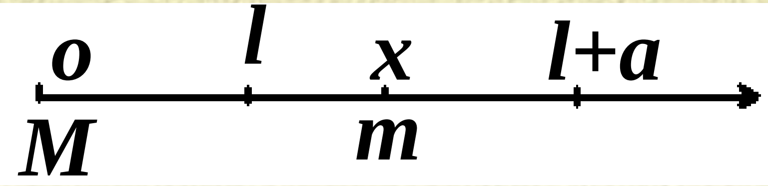
*B*.变力使物体沿直线运动所作的功；

*C*.水压力，引力；

*D*.质地不均匀的直线段状物体的质量、质心、力矩、转动惯量等的计算 … …

微积分的发展史就是数学物理不分家。

**例1** 两个质点质量分别为$M$、$m$，距离为$l$，现在将质点$m$沿两个质点的连线向外移距离$a$，求克服引力所作的功。



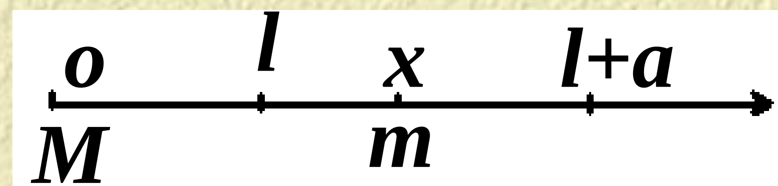

**解** 当质点$m$与$M$的距离为$x$时,两者之间的引力为

$$F(x)=G\frac{Mm}{x^2}$$

$$F(x) = G\frac{Mm}{x^2}$$

$$\therefore W = \int_l^{l+a} F(x)dx = \int_l^{l+a} G\frac{Mm}{x^2}dx$$

$$= -G\frac{Mm}{x}\Big|_l^{l+a}$$

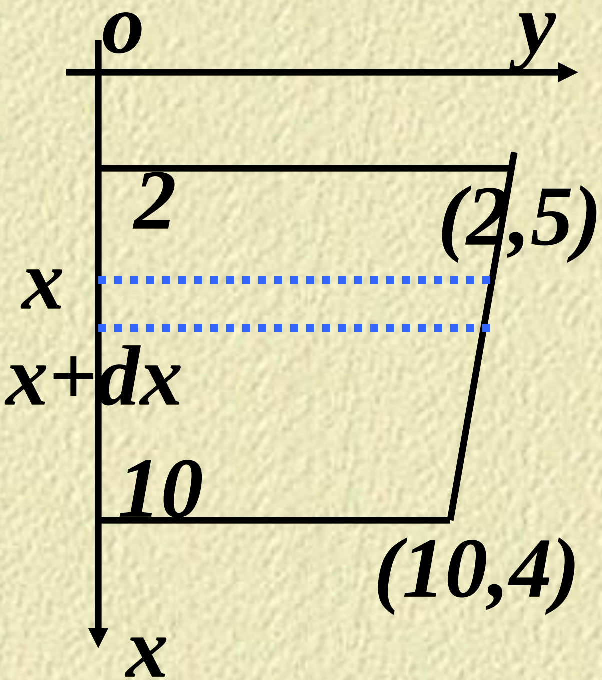



$$= GMm\left(\frac{1}{l} - \frac{1}{l+a}\right) = \frac{GMma}{l(l+a)}$$

上页 下页 返回

**例2** 有一个圆台形的蓄水池贮满了水，下口直径8米，上口直径10米，深8米，上口沿距离地面2米，现在我们要将蓄水池中的水全部抽出来，问需要作多少的功？

**解** 建立如图所示之坐标系




想象将$x$到$x+dx$的那一薄层水结成冰，视为一质点，质量为$dm$，将其提升$x$米，作的功为——功的微元

$$dW = dm \cdot gx$$

上页 下页 返回

想象将$x$到$x+dx$的那一薄层水结成了冰，视为一质点，质量为$dm$，将其提升$x$米，作的功为——功的微元

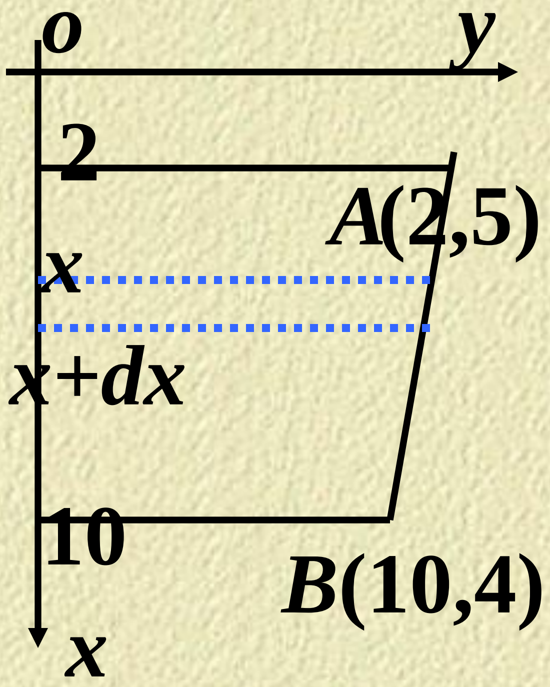
$$dW = dm \cdot gx$$

直线$AB$的方程：$\dfrac{y-5}{x-2} = \dfrac{4-5}{10-2}$

$$y = \frac{21}{4} - \frac{1}{8}x$$

$$dm = \rho dV = \rho \pi y^2 dx$$

$dm$为质量微元




上页 下页 返回

功的单位为
牛顿米=焦耳

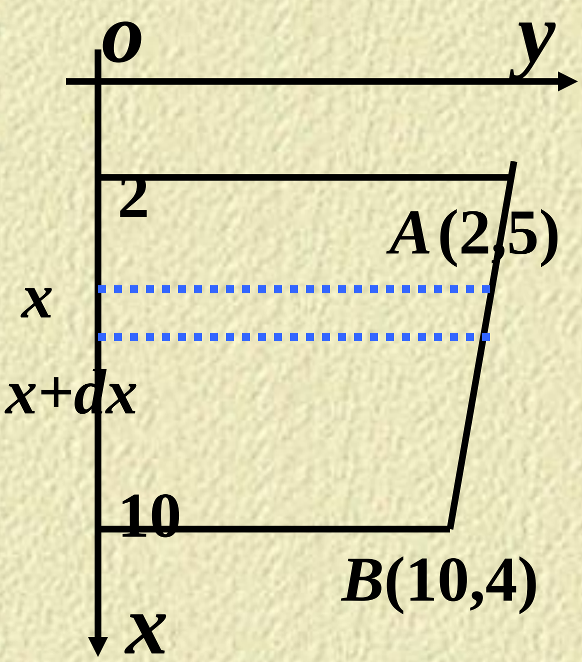
$$dW = dm \cdot gx$$

质量微元$dm = \rho dV = \rho \pi y^2 dx$

$$\therefore W = \int_2^{10} dm \cdot gx$$

$$= \int_2^{10} \rho g \pi x y^2 dx$$

$$= \int_2^{10} \rho g \pi x \left( \frac{21}{4} - \frac{1}{8} x \right)^2 dx$$




提醒：在应用题中要特别注意计量单位。如：$\rho = 10^3 \left( kg / m^3 \right)$

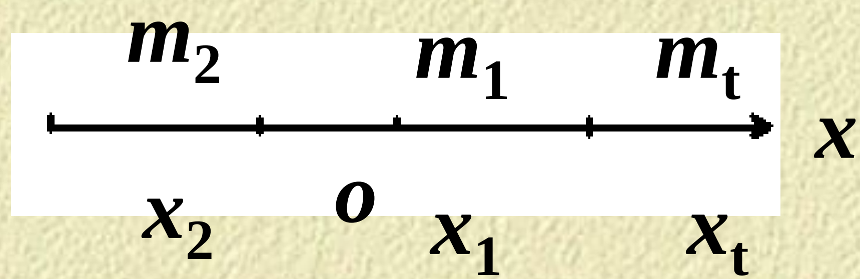
至于说诸如：水压力、引力，质量、质(重)心、转动惯量 等的计算都是微元法的简单应用。

理解微元法

乃至为重要！

如果现在我们将一轻质刚性的杆子放在一数轴上，在该杆子上坐标分别为$x_1, x_2, \ldots, x_t$的地方放置质量分别为$m_1, m_2, \ldots, m_t$的物体，那么这些物体的重力相对于坐标轴的原点产生的力矩就是

$$M_t = g\sum_{k=1}^{t} x_k m_k$$




如果设该质点系统的质心坐标为 $\bar{x}$ ，那么有

$$g\left(\sum_{k=1}^{t} x_k m_k\right) = \left(\sum_{k=1}^{t} m_k\right) g \cdot \bar{x}$$

那么，如果现在有一质地不均匀的直线段状物体的质量连续地分布在一带数轴的轻质刚性的杆子上，该物体的线密度为

$$\rho = \rho(x) \geq 0, x \in [a, b],$$

利用微元法的方法，将前面离散的结果连续化，于是就知上述线物体的质心坐标为

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x\rho(x)dx}{\int_a^b \rho(x)dx}.$$

**例3 前面我们做过一练习**

设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续且严格递增,

证明 $(a+b)\int_a^b f(x)dx \le 2\int_a^b xf(x)dx$

前面我们纯粹是用逻辑推理的方法来处理问题，下面利用积分的物理意义理解该问题的结论。

上页 下页 返回

法二　在$[a,b]$上$f(x)$连续, $f(x)\geq 0$,

(1).若$\int_a^b f(x)dx=0$,则在$[a,b]$上$f(x)\equiv 0$,“$=$” 成立.

(2).若$\int_a^b f(x)dx>0$,我们设想有一线物体,其线密度

为$\rho=f(x)$,则该物体的质心坐标为$\bar{x}=\dfrac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}$,

由于在$[a,b]$上$f(x)$单调增加,所以物体的质心应位

于物体中点的右边,$\therefore \int_a^b xf(x)dx\geq \dfrac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$.

上页　下页　返回

**例4.** 在一个深水井中吊水,吊桶自重4*kg*,缆绳每米重2*kg*,现在从深达30*m*的水井中吊水.开始时桶内装水40*kg*,并以2 *m/s*的速度匀速上升,且桶内的水以0.2 *kg* /*s*的速度由小孔泄出.现在我们将吊桶提升至井口,问需要作多少的功?


解 整个所作的功可分成三部分:

提绳、升桶、吊水 $W = W_1 + W_2 + W_3$

(1).提绳 $W_1 : dW_1 = 2dx \cdot xg,$

$$W_1 = \int_0^{30} 2xgdx$$

上页 下页 返回

$$W = W_1 + W_2 + W_3 \ ,$$

(1).提绳$W_1 : dW_1 = 2dx \cdot xg,$

$$W_1 = \int_0^{30} 2xgdx \quad ;$$

(2).升桶$W_2 : W_2 = 4g \cdot 30 \ ;$

(3).吊水$W_3$ :耗时$T = 30/2 = 15(s)$,当$t \in [0,15]$时,桶内水重$P = (40 - 0.2t)g(N)$,从$t \to t + \Delta t$,水被提升的高度$\Delta x = v\Delta t = 2\Delta t$,此时

$$dW_3 = Pdx = (40 - 0.2t)g \cdot 2dt,$$

$$\therefore W_3 = \int_0^{15} Pdx = \int_0^{15} (40 - 0.2t)g \cdot 2dt \ .$$

# P241/例5.连续函数在区间上的平均值．

**例 5** 在纯电阻电路(图 10-25)中,已知交流电压为

$$V = V_m \sin \omega t.$$

求在一个周期$[0,T]$$\left(T=\dfrac{2\pi}{\omega}\right)$上消耗在电阻 $R$ 上的能量 $W$,并求与之相当的直流电压.

**解** 在直流电压($V=V_0$)下,功率 $P=\dfrac{V_0^2}{R}$,那么在时间 $T$ 内所做的功为 $W=PT=\dfrac{V_0^2 T}{R}$. 现在 $V$ 为交流电压,瞬时功率为

$$P(t) = \frac{V_m^2}{R}\sin^2 \omega t.$$

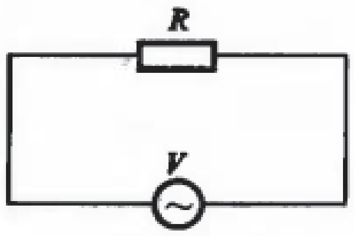



图 10-25

这相当于：在任意一小段时间区间$[t,t+\Delta t]\subset[0,T]$上，当$\Delta t$很小时，可把$V$近似看作恒为$V_m\sin\omega t$的情形. 于是取功的微元为

$$\mathrm{d}W=P(t)\,\mathrm{d}t.$$

并由此求得

$$W=\int_0^T P(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\frac{V_m^2}{R}\sin^2\omega t\,\mathrm{d}t=\frac{\pi V_m^2}{R\omega}.$$

而平均功率则为

$$\bar{P}=\frac{1}{T}\int_0^T P(t)\,\mathrm{d}t=\frac{\omega}{2\pi}\cdot\frac{\pi V_m^2}{R\omega}$$

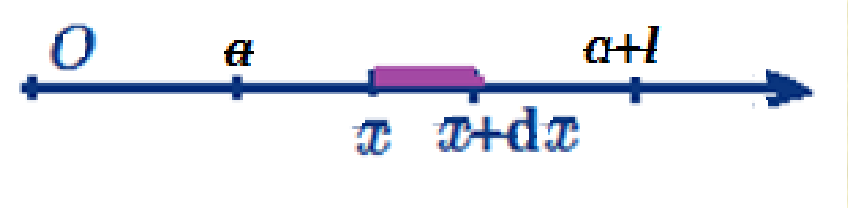
$$=\frac{V_m^2}{2R}=\frac{(V_m/\sqrt{2})^2}{R}.$$

上述结果的最末形式，表示交流电压$V=V_m\sin\omega t$在一个周期上的平均功率与直流电压$\bar{V}=\dfrac{V_m}{\sqrt{2}}$的功率是相等的. 故称$\bar{V}$为该交流电压的有效值. 通常所说的220伏交流电，其实是$V=220\sqrt{2}\sin\omega t$的有效值. □

$P242/Ex.4.$设在坐标轴原点处有一质量为$m$的质点,在区间$[a,a+l]\ (a>0)$上放置一质量为$M$的均匀细杆,求此两者间的引力.

解 如图,在区间$[a,a+l]$上取一小区间$[x,x+dx]$,

$dx \to 0$ .




小段细杆与质点$m$间的引力微元$dF = G\dfrac{m\cdot\dfrac{M}{l}dx}{x^2}$,

$$\therefore F=\int_a^{a+l}dF=\frac{GmM}{l}\int_a^{a+l}\frac{dx}{x^2}=\frac{GmM}{a(a+l)}.$$

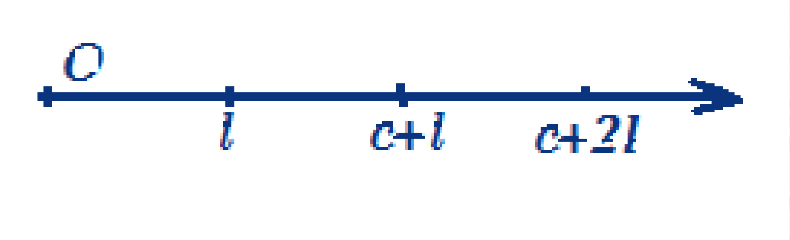
上页 下页 返回

*P*242/*Ex*.5.设有两根长都是$l$质量均为$M$的均匀细杆放置在一条直线上,其相邻的两端距离为$c$,求此两细杆间的引力.

解　如图,建立坐标轴,在区间$[0,l]$上取一小区间$[x, x+dx]$, $dx \to 0$.

小段细杆与右侧细杆间的引力微元为

$$dF = \frac{GM \cdot \frac{M}{l} dx}{(c+l-x)(c+2l-x)},$$




$$\therefore F = \int_0^l dF = \frac{GM^2}{l}\int_0^l \frac{dx}{(c+l-x)(c+2l-x)}$$

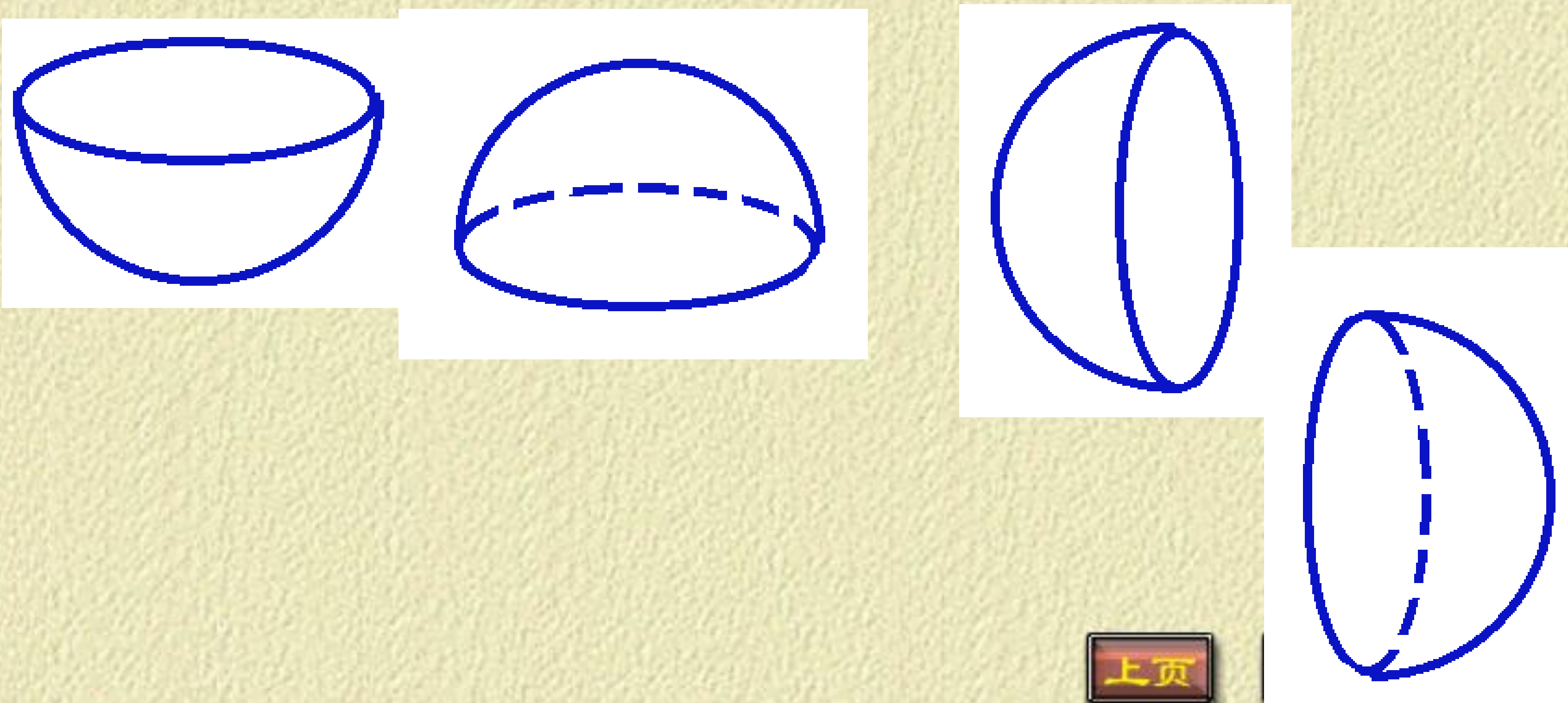
$$= \frac{GM^2}{l^2} \cdot \ln \frac{(c+l)^2}{c(c+2l)}.$$

上页 下页 返回

***P*242/*Ex*.7.设有一直径20*m*的半球形容器内盛满了水,试问将水抽尽需做多少功?**

分析　问题是容器至少可以有三种放置的形态.

解　如图,建立坐标系…



上页

*P*242/*Ex*.8.铁索问题

叙述不清,题意不明.你觉得呢?

8. 长 10 m 的铁索下垂于矿井中,已知铁索每米的质量为 8 kg,问将此铁索提出地面需作多少功?

**P242/Ex.10.试问,将一浸没在水中半径为$r$的球体从水中捞出需做多少功?设球体密度与水相同.**

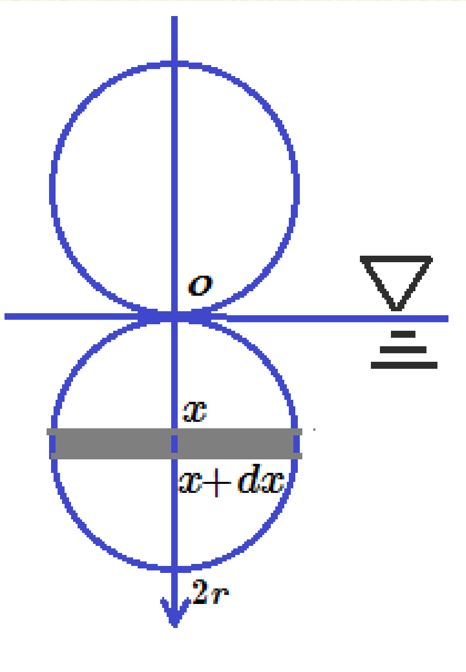
解　由于球体密度与水相同,故球体在水中时外力不做功.如图,建立坐标系.

设想将球体中位于$[x, x+dx]$的薄片在提出水面至高度 $2r-x$ 处,所需做的功为

$$dW = \pi\left(2rx - x^2\right)dx \cdot \rho g\left(2r - x\right),$$

$$\therefore W = \int_0^{2r} dW = \pi\rho g\int_0^{2r} x\left(2r-x\right)^2 dx$$

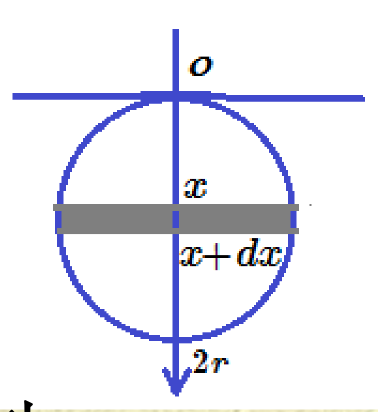
$$= \frac{4}{3}\pi\rho g r^4 = \rho g \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot r\,.$$



如图,建立坐标系.

圆周方程为$(x-r)^2+y^2=r^2$,即 $y^2=2rx-x^2$.

球体中位于$[x,x+dx]$的薄片的体积微元为




$$dV=\pi\left(2rx-x^2\right)dx\ ,$$

其质量微元为$dm=\rho\pi\left(2rx-x^2\right)dx$ ,

将此薄片提出水面至高度 $2r-x$ 处,所需做功

之功的微元为 $dW=\pi\left(2rx-x^2\right)dx\cdot\rho g(2r-x)$,

$$\therefore W=\int_0^{2r}dW=\pi\rho g\int_0^{2r}x(2r-x)^2dx$$

$$=\frac{4}{3}\pi\rho gr^4=mgr\ .$$ ⟵你可看出些端倪否?

上页 下页 返回