思考题

$$1.(1).\int \frac{1}{2+\cos 2x}dx = ?$$

$$(2).\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = ? \qquad \int \frac{1}{x^4+1}dx = ?$$

$$2.(1).\int_0^{\pi} \frac{1}{2+\cos 2x}dx = ?$$

$$(2).\int_{-1}^{1} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = ? \qquad \int_{-1}^{1} \frac{1}{x^4+1}dx = ?$$

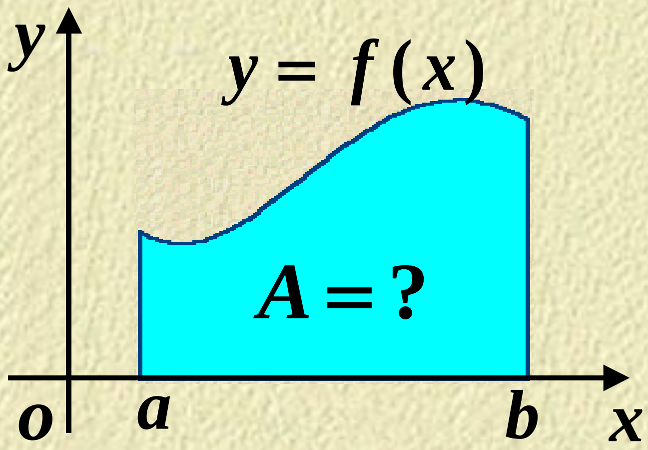
§1. 定积分的概念

上页 下页 返回

1. 问题的提出

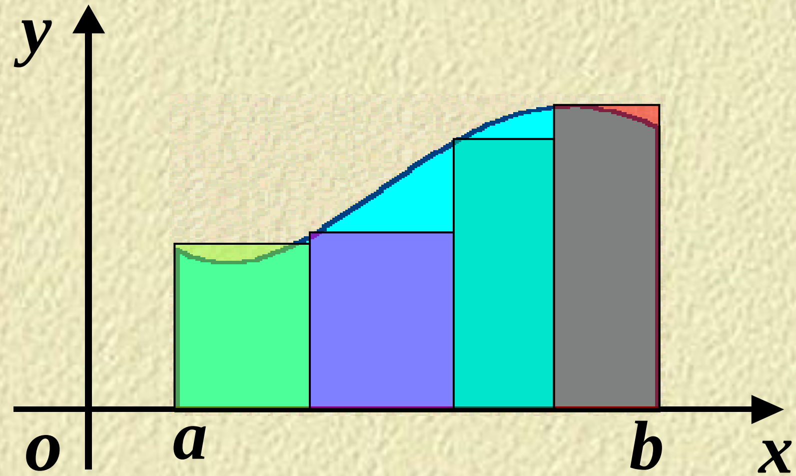
实例1.求曲边梯形的面积

曲边梯形由连续曲线 $y = f(x)\ \left(f(x) \geq 0\right)$, x轴与直线$x = a, x = b$ 所围成.

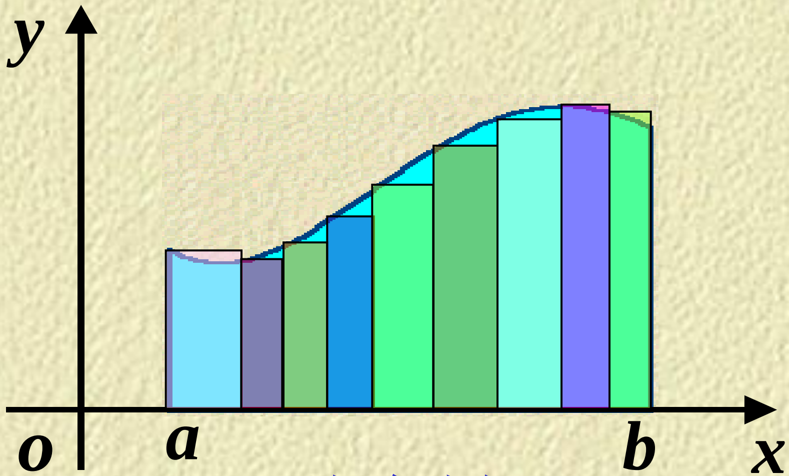


上页 下页 返回

用矩形面积近似取代曲边梯形面积



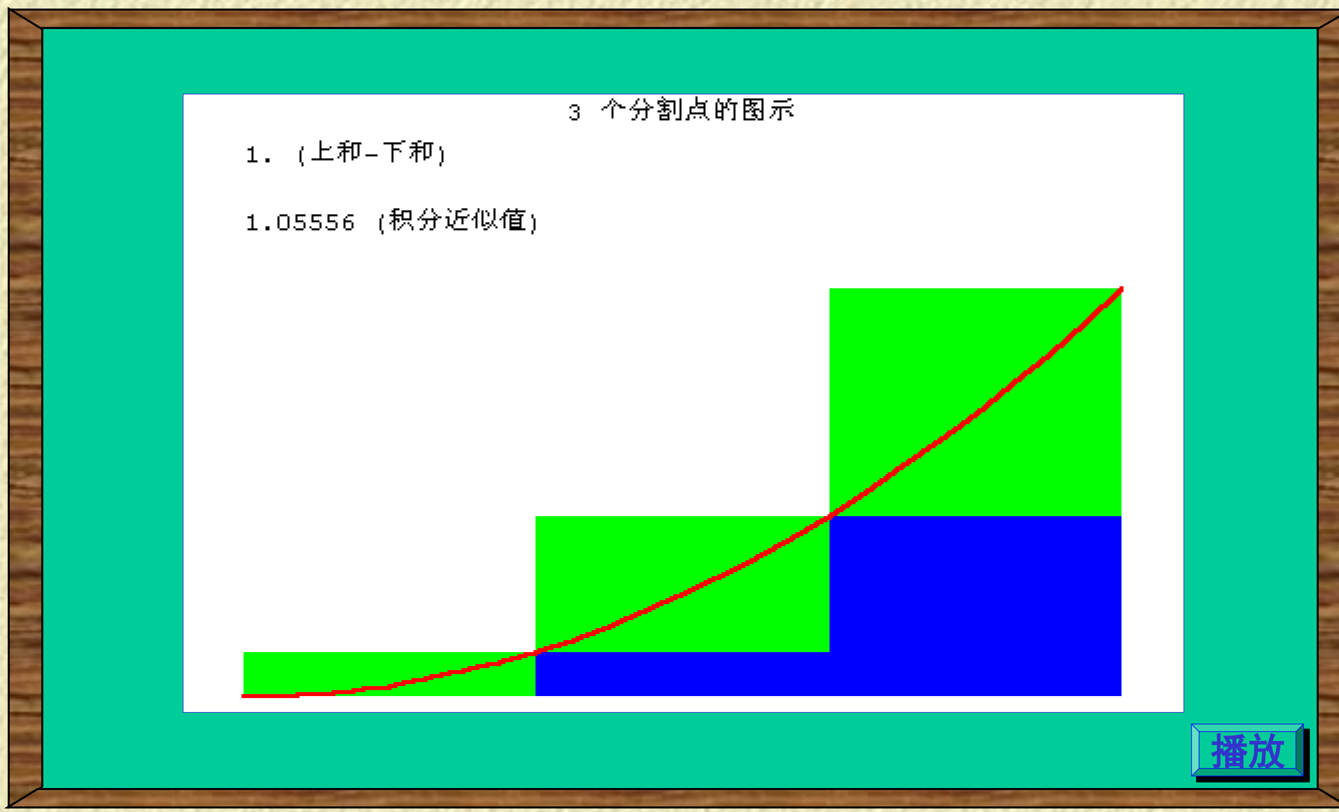
（四个小矩形）



（九个小矩形）

显然，小矩形越多，矩形总面积越接近曲边梯形面积.

观察下列演示过程，注意当分割加细时，矩形面积和与曲边梯形面积的关系.



上页 下页 返回

曲边梯形如图所示,在区间$[a,b]$内插入若干个分点,$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$,

把区间$[a,b]$分成

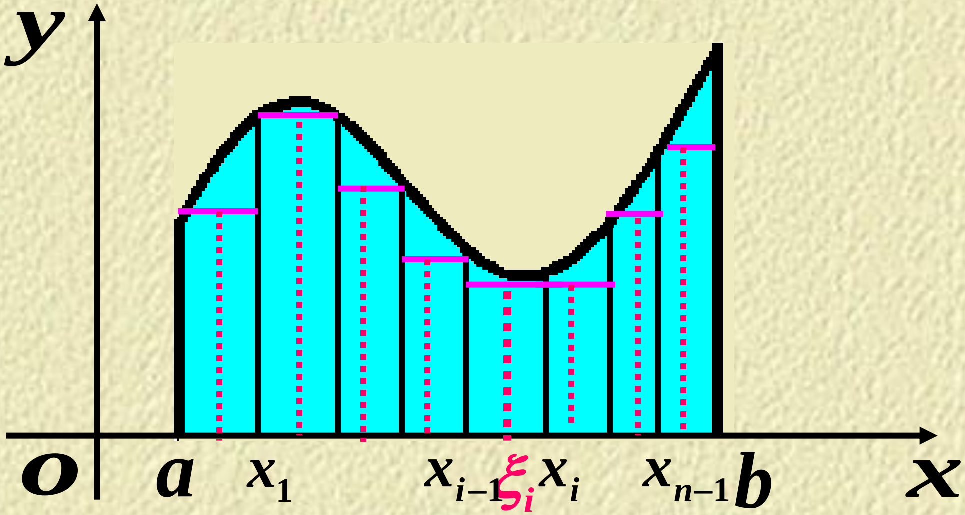
$[x_0, x_1]$,$[x_1, x_2]$,$\cdots$,

$[x_{n-1}, x_n]$.小区间

$[x_{i-1}, x_i]$的长度

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$,

$i = 1,2,\cdots,n$.取



$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$,以$[x_{i-1}, x_i]$为底,$f(\xi_i)$为高的小矩形面积为$A_i = f(\xi_i)\Delta x_i$.

曲边梯形面积A的近似值为

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

当分割无限加细,即小区间的最大

长度 $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots \Delta x_n\}$

趋近于零时,即$\lambda \to 0$

曲边梯形的面积为

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

实例2 (求变速直线运动的路程)

设一质点做直线运动,已知速率$v = v(t)$是时间段$[T_1, T_2]$上t的一个连续函数,$v(t) \ge 0$. 求质点在该时间段内所走过的路程.

步骤

(1).分割 $T_1 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = T_2$;

(2).求近似值 $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}, \Delta s_i \approx v(\tau_i)\Delta t_i$

$$s \approx \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i;$$

(3).求极限 $\lambda = \max\{\Delta t_1, \Delta t_2, \cdots, \Delta t_n\}$,

路程的精确值 $s = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i$.

2.定积分的定义

定义 设函数$f(x)$在$[a,b]$上有界.在$[a,b]$中插入

分点$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$

将区间$[a,b]$分成$[x_0, x_1],[x_1, x_2],\cdots,[x_{n-1}, x_n]$.

小区间$[x_{i-1}, x_i]$的长度$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = 1,2,\cdots,n.$

取$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$,作$Riemann$和$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

记$\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$.

如果对$[a,b]$作任意的划分,在$[x_{i-1}, x_i]$上任取ξ_i,

只要$\lambda \to 0$时,S_n总是趋于确定的值I,

则称I为函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分,记为

$$\int_a^b f(x)dx = I = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

积分上限

$$\int_a^b f(x)dx = I = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

积分下限

被积函数

被积表达式

积分变量

积分和

$[a,b]$积分区间

注意

1.在区间$[a,b]$中任意插入若干个分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

将区间$[a,b]$分成个小区间$\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n$,

通常,我们把这组分点或这组闭子区间

称为区间$[a,b]$的一个分割或划分,记为

$$T = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\} \text{ or } T = \{\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n\}$$

$$\Delta_i = [x_{i-1}, x_i], \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = 1, 2, \cdots, n.$$

$\|T\| = \max\limits_i \{\Delta x_i\}$称为分割$T$的模或者细度.

上页 下页 返回

2.设函数$f(x)$在$[a,b]$上有定义,对于区间$[a,b]$的一个分割$T=\{\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_n\}$,任取一点$\xi_i\in\Delta_i, i=1,2,\cdots,n$.作和式

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i,$$

此和式称为函数$f(x)$在$[a,b]$上的一个黎曼$(Riemann)$和.显然,$Riemann$和既与分割T有关又与点ξ_i有关.

3. 设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上有定义,若存在数 I,

$\forall \varepsilon>0, \forall T=\{\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_n\}, \forall \xi_i \in \Delta_i, \exists \delta>0,$

只要$\|T\|<\delta$,就有$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right|<\varepsilon$,则称函数

$f(x)$在区间$[a,b]$上Riemann可积,记作$f\in R[a,b]$,

数I 称为函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上Riemann 积分.

顾名思义,积分就是(无穷多个)分(即无穷小量)的累积 .但是,积分作为Riemann和的极限,该极限既非函数极限亦非数列极限 ,所以,函数的可积性是一个复杂的问题 .

$$\int_a^b f(x)dx = I = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

积分号 “$\int$ ” 是总和*Sum*或累积*Summation*的首字母“*S*”的变形.顾名思义,定积分就是无穷多个无穷小量(--分)的累积(的极限).

Calculus 在数学上谓之:微积分,

而在医学上*Calculus*的意思是:结石.

上页 下页 返回

积土成山，风雨兴焉；

积水成渊，蛟龙生焉；

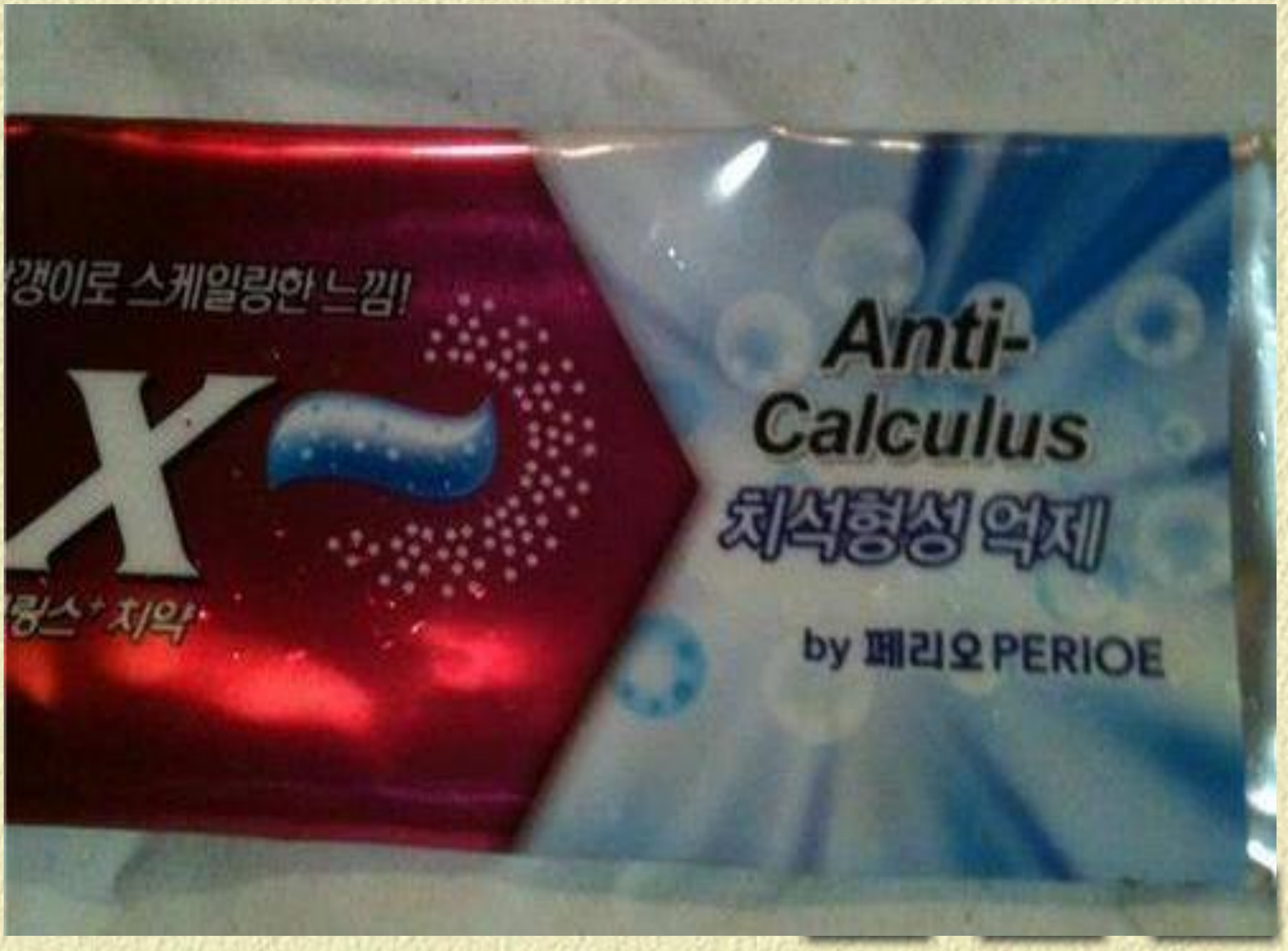
……

故不积跬步，无以至千里，

不积小流，无以成江海。

……　　　　——《荀子》

其实, 这里“Calculus (dental)”是“牙结石”的意思.所以这种韩国产的牙膏实际上是具有抗牙结石功能的牙膏.



4.积分值仅与被积函数和积分区间有关，
而与积分变量用什么符号表示无关.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$$

5.当函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分存在时，称$f(x)$在区间$[a,b]$上*Riemann*可积，记作 $f \in R[a,b]$.

6. 闭区间上函数$f(x)$的可积性

(1).定理1.若函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续,则$f(x)$在区间$[a,b]$上可积.

(2).定理2.若函数$f(x)$在区间$[a,b]$上有界,且只有有限多个间断点,则$f(x)$在区间$[a,b]$上可积.

例如,$\dfrac{\sin x}{x}$在区间$[-1,1]$上有界,0是其间断点,我们可取$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$, $f(x)$在$[-1,1]$上连续,

一般地,我们有$\int_{-1}^{1} f(x)dx := \int_{-1}^{1}\dfrac{\sin x}{x}dx.$

返回

(2).定理2.若函数$f(x)$在区间$[a,b]$上有界,且只有有限多个间断点,则$f(x)$在区间$[a,b]$上可积.

例如,$\sin^2\frac{1}{x}$在区间$[-1,1]$上有界,0是其间断点,

我们取$g(x)=\begin{cases}\sin^2\frac{1}{x}, x\neq 0\\ a,\ \ x=0\end{cases}$,其中数$a$可以任取,

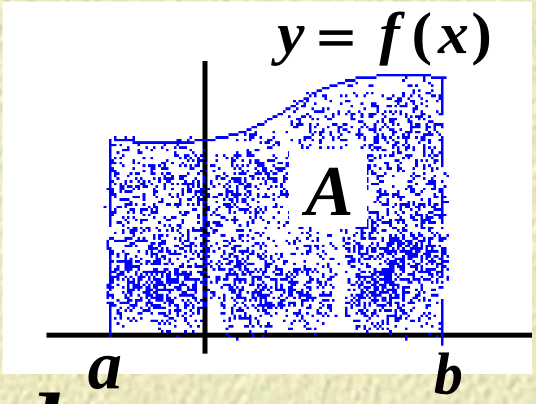
于是$g(x)$在$[-1,1]$上可积.

$$\therefore \int_{-1}^{1} g(x)dx := \int_{-1}^{1}\sin^2\frac{1}{x}dx\ .$$

上页 下页 返回

3. 定积分的几何意义与物理意义

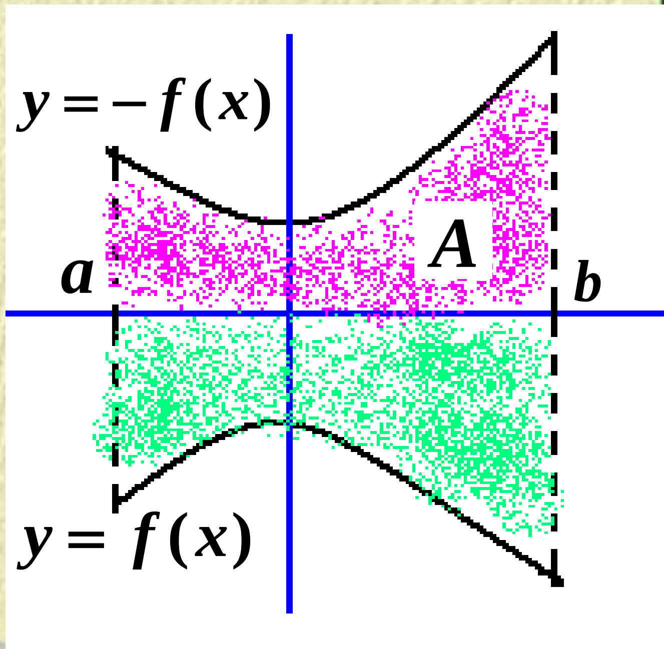
(1).定积分的几何意义



$[a,b]$上$f(x)\geq 0$,

曲边梯形的面积$A=\int_a^b f(x)dx$

$[a,b]$上$f(x)\leq 0$,



$$A=\int_a^b[-f(x)]dx$$

$$\therefore \int_a^b f(x)dx=-A$$

(2).定积分的物理意义：

微积分的发展史就是数学物理不分家。

利用定积分计算的基本思想方法

——分、匀、合、精，人们可以计算：

(*A*) 变速直线运动中物体在一段时间内所经过的路程：

$$x \in [a,b], f(x) \geq 0, \text{则} \int_a^b f(x)dx$$

表示从时刻a到时刻b物体以变化的速率$f(x)$沿直线运动所走过的路程。

(B). 考察变力作功:

(i).质点在力$\vec{F}$作用下沿直线运动产生的位移$\vec{s}$,则质点在力$\vec{F}$作用下沿直线运动所做的功为$W=\vec{F}\cdot\vec{s}=Fs\cos\theta$.

(ii).质点在大小为F的力作用下沿直线从点a运动到点b所做的功$W_{ab}=F(b-a)$.

(iii).质点在大小为F的力作用下沿直线从点b运动到点a所做的功$W_{ba}=F(a-b)$.

显然有 $W_{ba}=-W_{ab}$.

上页 下页 返回

(iv).质点在大小为$F(x)$的力作用下沿直线从点a运动到点b所做的功W_{ab}：

将区间$[a,b]\left(or[b,a]\right)$作任意的分割,则

$$W_{ab}=\lim_{\lambda\to 0}\sum F(\xi_k)\Delta x_k=\int_a^b F(x)dx,$$

那么,当质点从点b到点a时力所做的功为

$$W_{ba}=\int_b^a F(x)dx,$$

$$\because W_{ab}=-W_{ba},$$

$$\therefore \int_a^b F(x)dx=-\int_b^a F(x)dx\ .$$

上页 下页 返回

所以人们对定积分作一补充规定：

(1).当$a>b$时，$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$；

(2).当$a=b$时，$\int_a^b f(x)dx=0$.

此约定将给我们对积分的讨论带来便利，同时又是合情合理的.

上页 下页 返回

4. 例题与小结

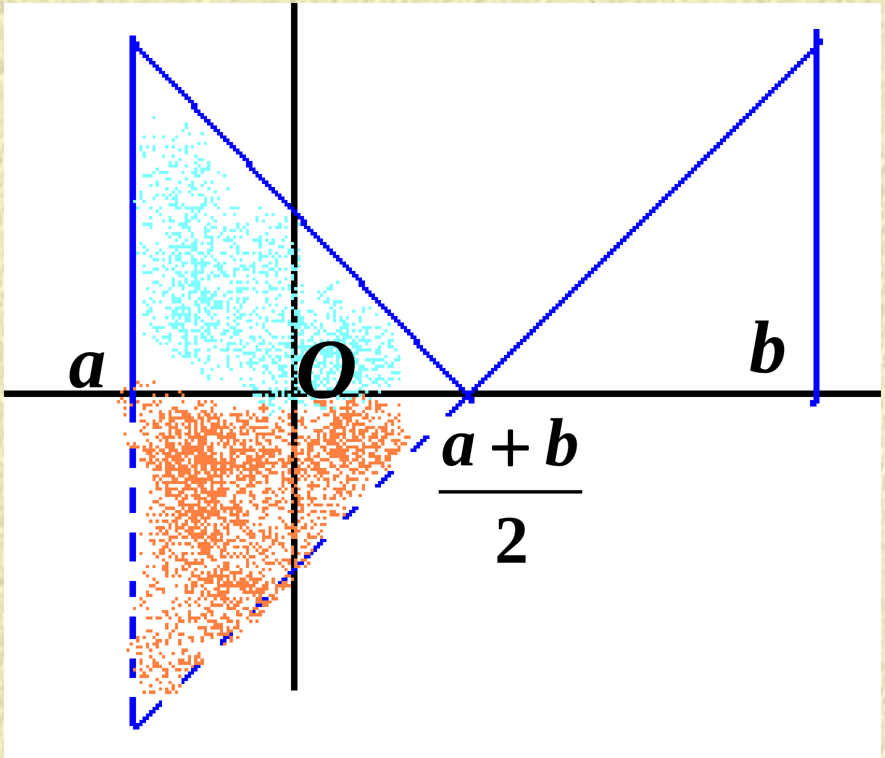
例1.利用定积分的几何意义,给出下列积分的结果,设$a<b$.

(1).$\int_a^b \left| x-\frac{a+b}{2} \right| dx = ?$

(2).$\int_a^b \sqrt{(b-x)(x-a)}dx = ?$

$$(1).\int_a^b \left| x - \frac{a+b}{2} \right| dx = ?$$

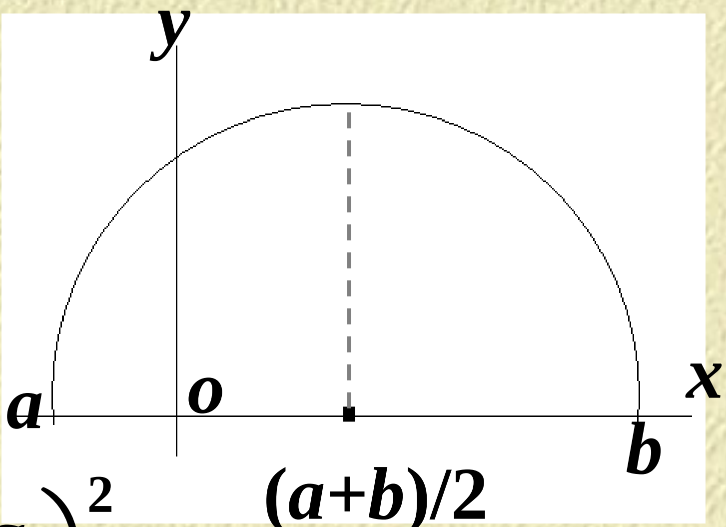
由定积分的几何意义,被积函数非负,因此积分等于如图的两个三角形的面积之和.



$$(2).\int_a^b \left| x - \frac{a+b}{2} \right| dx = \frac{1}{4}(b-a)^2$$

上页 下页 返回

$$(2).\int_a^b \sqrt{(b-x)(x-a)}\,dx = ?$$



$$y=\sqrt{(b-x)(x-a)}$$

$$\Rightarrow y^2=(b-x)(x-a)$$

$$\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

$\ldots\ldots$ & $y=\sqrt{(b-x)(x-a)}\geq 0.$

由定积分的几何意义,被积函数非负,因此积分表示如图的上半圆的面积.

上页 下页 返回

例2.利用积分定义计算$\int_0^1 x^2 dx$.

解 $\because x^2$在$[0,1]$上连续,故$\int_0^1 x^2 dx$存在,

$\therefore$ 我们可以对$[0,1]$进行任意的分割,故作n等分,

我们可以在小区间上$\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]$任取$\xi_i, i=1,2,\cdots,n$.

故我们取$\xi_i=\frac{i}{n}$, $\lambda=\max\{\Delta x_i\}=\frac{1}{n}$,

$$\therefore \int_0^1 x^2 dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}.$$

例2.(2).利用定义计算积分$\int_1^2 \frac{1}{x} dx$.

解 $\because x^{-1}$ 在$[1,2]$上连续,故$\int_1^2 x^{-1} dx$ 存在,

$\therefore$ 可对$[1,2]$进行任意的分割,故作如下划分:

在$[1,2]$中插入分点 $q, q^2, \cdots, q^{n-1}, 1 = q^0, q^n = 2.$

$\Delta_i = \left[q^{i-1}, q^i\right]$,取$\xi_i = q^{i-1}, i = 1, 2, \cdots, n.$

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right) \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\xi_i} \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q^{i-1}} q^{i-1}(q-1)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (q-1) = n(q-1), \quad q^n = 2,\text{即} q = \sqrt[n]{2},$$

上页 下页 返回

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q^{i-1}} q^{i-1}(q-1) = n(q-1)$$

$$= n\left(\sqrt[n]{2}-1\right), \qquad q^n = 2, \text{即} q = \sqrt[n]{2},$$

$$\because \lim_{x\to+\infty} x\left(2^{\frac{1}{x}}-1\right) \overset{\frac{1}{x}=t}{=\!=\!=} \lim_{t\to 0} \frac{2^t-1}{t} = \ln 2 \ ,$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{2}-1\right) = \ln 2,$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\xi_i}\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{2}-1\right) = \ln 2.$$

小 结

1．定积分的实质：特殊和式的极限.

2．定积分的思想和方法：

分割 ⟶ 化整为零

⇩　　　⇩ 求近似以直(不变)代曲(变)

求和 ⟶ 积零为整

⇩　　　⇩ 取极限

取极限 ⟶ 精确值——定积分

定积分的计算可概括为四个步骤：**分 匀 合 精**

练 习 题

一、填空题：

1、函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的定积分是积分和的极限，即 $\int_a^b f(x)dx =$ ________________.

2、定积分的值只与________及________有关，而与__________的记法无关．

3、定积分的几何意义是______________________．

4、区间 $[a, b]$ 长度的定积分表示是______________．

二、利用定积分的定义计算由抛物线 $y = x^2 + 1$，两直线 $x = a, x = b\ (b > a)$ 及横轴所围成的图形的面积．

三、利用定积分的定义计算积分 $\int_a^b xdx$，$(a < b)$．

上页 下页 返回

四、 利用定积分的几何意义，说明下列等式：

1、$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{4}$ ；

2、$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ ；

五、 水利工程中要计算拦水闸门所受的水压力，已知闸门上水的压强 P 是水深 h 的函数，且有 $p = 9.8h$(千米/米^2)，若闸门高 $H = 3$米，宽 $L = 2$米，求水面与闸门顶相齐时闸门所受的水压力P.

练习题答案

一、1、$\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$；

2、被积函数, 积分区间, 积分变量;

3、介于曲线$y = f(x)$, x 轴, 直线$x = a$, $x = b$之间各部分面积的代数和;

4、$\int_a^b dx$.

二、$\frac{1}{3}(b^3 - a^3) + b - a$.

三、$\frac{1}{2}(b^2 - a^2)$.

五、88.2(千牛).

上页 下页 返回