6-02 柯西中值定理与洛必达法则

1.柯西(*Cauchy*)中值定理

柯西(*Cauchy*)中值定理：

若函数$f(x), g(x)$在$[a,b]$上连续，

在(a,b)内可导，且$\forall x \in (a,b), g'(x) \neq 0$,

则$\exists \xi \in (a,b)$,使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$ 成立.

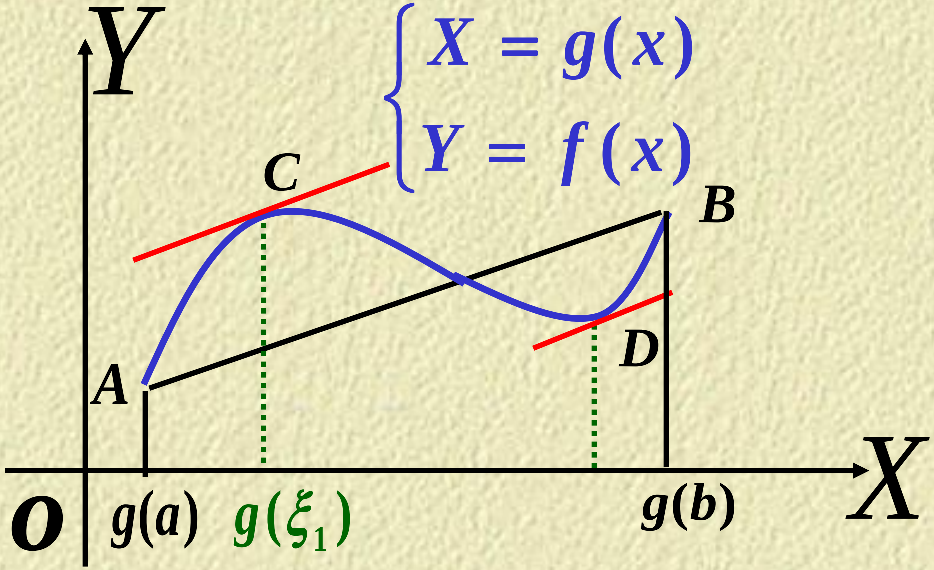
*Cauchy*中值定理是*Lagrange*微分中值定理的参数形式。

$$AB:\begin{cases} X = g(x) \\ Y = f(x) \end{cases},$$

$$x \in [a,b],$$

$$A\big(g(a), f(a)\big)$$

$$B\big(g(b), f(b)\big)$$



几何解释 在曲线弧AB上至少有一点$C\big(g(\xi), f(\xi)\big)$，在该点处的切线平行于弦$AB$.

上页 下页 返回

*Cauchy*中值定理的条件中开区间(a,b)内$g'(x)\neq 0$,保证了 $g(b)-g(a)\neq 0$.

$\because\ g(b)-g(a)=(b-a)g'(\xi)\neq 0, \xi\in(a,b)$.

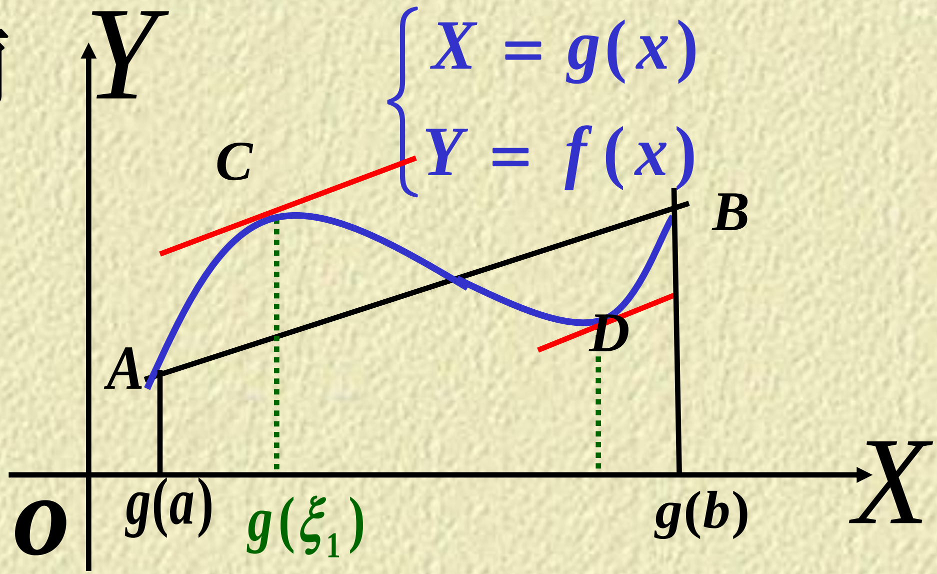
又:该定理能否这样证明:对分子、分母分别用*Lagrange*微分中值定理,

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)(a<\xi<b)$$

$$g(b)-g(a)=g'(\xi)(b-a)(a<\xi<b)$$

$$\therefore\ \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, a<\xi<b?$$

证明 同*Lagrange*微分中值定理作辅助函数一样,由于曲线$\overset{\frown}{AB}$与直线AB在 A、B两点相交,



$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)]$$

$\varphi(x)$ 满足罗尔定理的条件,

则在(a,b)内至少存在一点ξ,使得 $\varphi'(\xi) = 0$.

在(a,b)内至少存在一点ξ,使得 $\varphi'(\xi)=0$,

即 $f'(\xi)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(\xi)=0$,

$\therefore \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$. 证明完毕!

当 $g(x)=x, g(b)-g(a)=b-a, g'(x)=1$,

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\Rightarrow\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi).$$

Cauchy Th. → *Lagrange Th.*

例1.设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，证明：至少存在一点$\xi \in (0,1)$，使 $f'(\xi) = 2\xi[f(1) - f(0)]$.

分析：结论中等式两边的 ξ是同一个点，所以只能使用一次中值定理，现在将结论变形为

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{f'(\xi)}{2\xi} = \left.\frac{f'(x)}{(x^2)'}\right|_{x=\xi}$$

$\therefore$ 可取 $g(x) = x^2$.

上页 下页 返回

证明　设 $g(x)=x^2$,

则 $f(x),g(x)$ 在[0,1]上满足

柯西中值定理的条件,

$\therefore$ 在(0,1)内至少存在一点ξ,有

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{f'(\xi)}{2\xi}$$

即 $f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)]$.

原问题：设函数$f(x)$在[0,1]上连续，在(0,1)内可导，证明：至少存在一点$\xi \in (0,1)$，使 $f'(\xi) = 2\xi[f(1) - f(0)]$.

如果我们现在将结论改为：至少存在点$\xi \in (0,1)$，$\eta \in (0,1)$，使得 $f'(\xi) = 2\xi f'(\eta)$.你会有何感觉？

利用微分中值定理尤其是*Cauchy*定理证明命题,往往需要我们善于根据已知条件,对所需证明的结果进行变化.做一些这类练习,对逻辑推理能力和想象能力的训练是有益的.

罗尔定理、拉格朗日中值定理及柯西中值定理之间的关系；

注意定理成立的条件——均为充分条件

上页 下页 返回

练 习 题

1. 若函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,且$\{0\}\notin(a,b)$,证明$\exists\,\xi\in(a,b)$,使得

$$af(b)-bf(a)=[f(\xi)-\xi f'(\xi)](a-b).$$

2. 设函数 $f(x)$ 在0点的某邻域内有n阶导数,且$f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$.

试用Cauchy 中值定理证明:

$$\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!},\theta\in(0,1).$$

2.洛必达法则

在函数极限问题中, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$(或为$\infty$),

我们通常称形如 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\dfrac{f(x)}{g(x)}$的问题为未定型,记作$\dfrac{0}{0}\left(或\dfrac{\infty}{\infty}\right)$型;

若 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$,称问题 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\left[f(x)-g(x)\right]$为$\infty-\infty$型未定型;

或者在形如 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} f(x)^{g(x)}$的问题中,

亦有所谓的"$0^0,1^\infty,\infty^0$ 型"未定型.

***L'Hopital*,1661--1704,法国**

上页 下页 返回

(1). $\dfrac{0}{0}$型及$\dfrac{*}{\infty}$型未定式极限求法.

Theorem 2. 设(1). $x \to a$时, $f(x), g(x)$ 都趋于零；

(2).在a点的某去心邻域内, $f'(x)$及$g'(x)$都存在且$g'(x) \neq 0$；

(3).$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$存在(或为无穷大).

那末$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

证明 $L'Hopital$ 法则是基于$Cauchy$中值定理而得到的.定义辅助函数

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x \neq a \\ 0, & x=a \end{cases},G(x)=\begin{cases} g(x), & x \neq a \\ 0, & x=a \end{cases},$$

在$U^o(a,\delta)$内任取一点x,在以a与x为端点的区间上,$F(x)$,$G(x)$满足*Cauchy Th.* 的条件,则有

$$\frac{F(x)}{G(x)}=\frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}(\xi\text{在}x\text{与}a\text{之间})$$

在$x \in U^o(a,\delta)$时,$\dfrac{F'(\xi)}{G'(\xi)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

$$\frac{F(x)}{G(x)}=\frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}\quad(\xi\text{在}x\text{与}a\text{之间})$$

在$x\in U^{o}(a,\delta)$时，$\dfrac{F'(\xi)}{G'(\xi)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

当$x\to a$时，$\xi\to a$，$\because \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$，

$$\lim_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=A\Rightarrow\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=A.$$

如果$\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$仍属$\dfrac{0}{0}$型,且$f'(x),g'(x)$

满足定理的条件,可以继续使用

洛必达法则,即

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\cdots.$$

(1). $\frac{0}{0}$型及$\frac{*}{\infty}$型未定式极限求法.

Th. $2'$. 设(1). $x \to \infty$时, $f(x), g(x)$ 都趋于零；

(2).在∞的某邻域内, $f'(x)$及$g'(x)$都存在且$g'(x) \neq 0$；

(3). $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$存在(或为无穷大).

那末 $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

若$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$,$\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\frac{-1}{t^2}}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\frac{-1}{t^2}}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

故当$x\to\infty$时,$L'Hopital$ 法则成立.

定理2″：

设(1). $\begin{matrix} x \to a \\ (x \to \infty) \end{matrix}$ 时, $g(x)$趋于∞；

(2).在a(或∞)的某邻域内, $f'(x)$及$g'(x)$都存在且$g'(x) \neq 0$；

(3). $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ (x \to \infty)}} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$存在(或为$\infty$).

那末 $$\lim_{\substack{x \to a \\ (x \to \infty)}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \to a \\ (x \to \infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

例2.求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}\ \left(\dfrac{0}{0}\right)$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)'}{\left(\sqrt[4]{x}-1\right)'}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}{\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}}=\dfrac{4}{3}.$

L'Hopital 法则每次使用时都必须验证定理的三个条件是否满足,而通常尤其需要注意第一、第三个条件:是否为 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{*}{\infty}$ 型的未定式?分子、分母分别求导数后,其商的极限有限或无穷?

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)\left(\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[4]{x^2}+\sqrt[4]{x}+1\right)}{\left(\sqrt[4]{x}-1\right)\left(\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[4]{x^2}+\sqrt[4]{x}+1\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[4]{x^2}+\sqrt[4]{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[4]{x^2}+\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}=\frac{4}{3}.$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}\overset{\sqrt[12]{x}=t}{\underset{\substack{x\to1\\ \Rightarrow t\to1}}{=\!=\!=}}\lim_{t\to1}\frac{t^4-1}{t^3-1}$$

$$=\lim_{t\to1}\frac{(t-1)(t^3+t^2+t+1)}{(t-1)(t^2+t+1)}=\lim_{t\to1}\frac{t^3+t^2+t+1}{t^2+t+1}=\frac{4}{3},$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}\overset{x-1=t}{\underset{\substack{x\to1\\ \Rightarrow t\to0}}{=\!=\!=}}\lim_{t\to0}\frac{(1+t)^{1/3}-1}{(1+t)^{1/4}-1}=\lim_{t\to0}\frac{\frac{1}{3}t}{\frac{1}{4}t}=\frac{4}{3}.$$

上页 下页 返回

例2.(2).求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3-3x^2+3x-1}$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3-3x^2+3x-1}$

$$\overset{\frac{0}{0}}{===}\lim_{x\to1}\frac{3x^2-2x-1}{3x^2-6x+3}\overset{\frac{0}{0}}{===}\lim_{x\to1}\frac{6x-2}{6x-6}=\infty.$$

其实,原式 $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x^2-1)(x-1)}{(x-1)^3}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{x-1}=\infty.$$

上页 下页 返回

例3.求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cos\dfrac{1}{x}}{\ln(1+x)}$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cos\dfrac{1}{x}}{\ln(1+x)} \neq \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\cos\dfrac{1}{x}+x^2\left(-\sin\dfrac{1}{x}\right)\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)}{\dfrac{1}{1+x}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+x)\left(2x\cos\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x}\right)\right]$既不存在,也非$\infty$,

说明对本问题而言,*L'Hopital* 法则失效.

上页 下页 返回

例3.求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cos\frac{1}{x}}{\ln(1+x)}$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

解　对本问题而言,***L'Hopital*法则失效**,

但并非是说本问题的极限不存在,至于

本题的极限情况到底怎样,须另寻别法.

其实,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}x\cos\frac{1}{x}=0.$$

注意:洛必达法则是求未定式的一种有效方法,但与其它求极限方法结合使用,效果更好.

例4.求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x^2 \tan x}$.

解 单纯地用$L'Hopital$法则比较繁琐:

$$\text{原} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^2\tan x} \overset{\frac{0}{0}}{=\!=} \lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x - 1}{2x\tan x + x^2\sec^2 x}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2\sec^2 x\tan x}{2\tan x + 2x\sec^2 x\cdot 2 + x^2\cdot 2\sec^2 x\tan x} = \cdots$$

上页 下页 返回

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^2\tan x} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{3x^2} = \frac{1}{3}$$

$x \to 0, \quad \tan x \sim x.$

(2). $0\cdot\infty,\infty-\infty,0^0,1^\infty,\infty^0$型未定式极限求法.

关键:将其它类型未定式化为洛必达法则的标准问题 $\left(\frac{0}{0}\right),\left(\frac{*}{\infty}\right)$.

仅仅是记号!

A. $0\cdot\infty$ 型

对策:$0\cdot\infty \Rightarrow \frac{1}{\infty}\cdot\infty$,或$0\cdot\infty \Rightarrow 0\cdot\frac{1}{0}$.

例5.求 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-2}e^x$.$(0\cdot\infty)$

解 原$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty$

上页 下页 返回

$B.\ \infty-\infty$ 型

仅仅是记号！

对策：$\infty-\infty \Rightarrow \frac{1}{0}-\frac{1}{0} \Rightarrow \frac{0-0}{0\cdot 0}$.

例6.求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$.$(\infty-\infty)$

解 原 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\cdot \sin x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x}=0.$

上页 下页 返回

C. $0^0, 1^\infty, \infty^0$ 型

仅仅是记号！

步骤: $\left.\begin{array}{l} 0^0 \\ 1^\infty \\ \infty^0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{取对数}} \left\{\begin{array}{l} 0\cdot\ln 0 \\ \infty\cdot\ln 1 \\ 0\cdot\ln\infty \end{array}\right. \Rightarrow 0\cdot\infty.$

例7.求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$.$\left(0^0\right)$

解 设$y = x^x = e^{x\ln x}$,

则 $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{1/x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=\!=} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1/x}{-1/x^2} = 0,$

原式$= \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^0 = 1.$

上页 下页 返回

例8. 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$. (∞^0)

解 取对数得 $(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\frac{1}{\ln x}\cdot\ln(\cot x)}$,

$$\because \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\cot x)}{\ln x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{\cot x}\cdot\frac{1}{\sin^2 x}}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{-x}{\cos x\cdot\sin x} = -1, \therefore \text{原式} = e^{-1}.$$

上页 下页 返回

洛必达法则

$0^0, 1^\infty, \infty^0$ 型

令 $y = f^g$

取对数

$0 \cdot \infty$ 型

$$f \cdot g = \frac{f}{1/g}$$

$\frac{0}{0}$ 型

$\frac{\infty}{\infty}$ 型

$\infty - \infty$ 型

$$f - g = \frac{1/g - 1/f}{1/g \cdot 1/f}$$

例9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2^{\frac{1}{n}}+3^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^{n}$；

由命题“$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(n)=A$”

故考察 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2^{\frac{1}{x}}+3^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^{x}=\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{2^{t}+3^{t}}{2}\right)^{\frac{1}{t}}$

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{2^t+3^t}{2}\right)^{\frac{1}{t}} = \lim_{t\to 0} e^{\ln\left(\frac{2^t+3^t}{2}\right)^{\frac{1}{t}}}$$

$$= \lim_{t\to 0} e^{\frac{\ln(2^t+3^t)-\ln 2}{t}},$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln(2^t+3^t)-\ln 2}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{2^t\ln 2+3^t\ln 3}{2^t+3^t}}{1}$$

$$= \frac{\ln 2+\ln 3}{2} = \ln\sqrt{6}, \therefore \text{原式} = e^{\ln\sqrt{6}} = \sqrt{6}.$$

上页 下页 返回

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{\frac{1}{n}}+3^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^{n},\ (1^{\infty})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2^{\frac{1}{n}}+3^{\frac{1}{n}}-2}{2}\right)^{\frac{2}{2^{\frac{1}{n}}+3^{\frac{1}{n}}-2}}\right]^{\frac{2^{\frac{1}{n}}+3^{\frac{1}{n}}-2}{\frac{2}{n}}}$$

上页 下页 返回

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{n}}+3^{\frac{1}{n}}-2}{\frac{2}{n}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{n}}-1+3^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}},\text{其中}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}\ln 2}-1}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\ln 2}{\frac{1}{n}}=\ln 2,$$

同理, $\lim_{n\to\infty}\frac{3^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\ln 3, \therefore$ 原式 $=e^{\ln\sqrt{6}}=\sqrt{6}.$

上页 下页 返回

例10. $\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)^{\frac{1}{n^2+1}}$.

见有人这样做的

$$\lim_{n\to\infty}(2n+1)^{\frac{1}{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\left[(1+2n)^{\frac{1}{2n}}\right]^{\frac{2n}{n^2+1}}$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n^2+1}}=e^0=1.$$

显然的错误.

$\lim\limits_{n\to\infty}(1+2n)^{\frac{1}{2n}}\neq e$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}=e$,

$\lim\limits_{n\to\infty}(1+2n)^{\frac{1}{2n}}=1$.

例10. $\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)^{\frac{1}{n^2+1}}$.

解 由命题“若 $\lim u(x)=A>0$, $\lim v(x)=B$ 均存在,那么

$$\lim u(x)^{v(x)}=A^B.\text{”}$$ 知有

$$\lim_{n\to\infty}(2n+1)^{\frac{1}{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}(2n+1)^{\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{2n+1}{n^2+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[(2n+1)^{\frac{1}{2n+1}}\right]^{\frac{2n+1}{n^2+1}}=1^0=1.$$

例10. $\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)^{\frac{1}{n^2+1}}$.

法二 $1<(2n+1)^{\frac{1}{n^2+1}}\le(3n)^{\frac{1}{n^2+1}}$

$$\le(3n^2)^{\frac{1}{n^2}}=(3)^{\frac{1}{n^2}}\cdot(n^2)^{\frac{1}{n^2}},$$

$\lim\limits_{n\to\infty}(3)^{\frac{1}{n^2}}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2)^{\frac{1}{n^2}}=1$,

由*Squeeze th.*得 $\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)^{\frac{1}{n^2+1}}=1$.

上页 下页 返回

例10. $\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)^{\frac{1}{n^2+1}}$.

法三 $\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)^{\frac{1}{n^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1)^{\frac{1}{x^2+1}}$

$$\overset{\infty^0}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln(2x+1)}{x^2+1}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(2x+1)}{x^2+1}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=\!=}e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{2x+1}}{2x}}$$

$$=e^0=1.$$

以下为又一典型错误

$$\text{原式}\overset{\infty^0}{=\!=}\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\ln(2n+1)}{n^2+1}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(2n+1)}{n^2+1}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=\!=}e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{2n+1}}{2n}}$$

$$=e^0=1.$$

例11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$.

分析 $\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$是一个偶函数,

由于 $0<|x|<\pi/2$ 时,有 $0<|\sin x|<|x|$,

结合$\cos x$的单调性,

$$\therefore \frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}>0,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}\ge 0.$$

例11. $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$. $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

解 $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\cos(\sin x)-\cos x\right)'}{\left(x^3\right)'}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)\cos x}{4x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos(\sin x)\cos^2 x+\sin(\sin x)\sin x}{12x^2}=\cdots$$

一味机械地用*L'Hopital* 法则 ,你会发现计算何其繁琐 .

例11. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{(\sin x)^4}$

$$\xlongequal[\cos x=\sqrt{1-t^2}]{\sin x=t}\lim_{t\to0}\frac{\cos t-\sqrt{1-t^2}}{t^4}\xlongequal{\frac{0}{0}}\lim_{t\to0}\frac{-\sin t+\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}}{4t^3}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{t-\sin t\sqrt{1-t^2}}{4t^3\sqrt{1-t^2}}=\lim_{t\to0}\frac{t-\sin t\sqrt{1-t^2}}{4t^3}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{1-\cos t\sqrt{1-t^2}+\sin t\cdot\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}}{12t^2}$$

上页 下页 返回

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t\sqrt{1-t^2}+\sin t\cdot\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}}{12t^2}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{1-t^2}-(1-t^2)\cos t+t\sin t}{12t^2\sqrt{1-t^2}}$$

$$=\lim_{t\to 0}\left[\frac{\sqrt{1-t^2}-(1-t^2)\cos t}{12t^2}+\frac{t\sin t}{12t^2}\right]$$

$$=\frac{1}{12}+\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{-t}{\sqrt{1-t^2}}+2t\cos t+(1-t^2)\sin t}{24t}=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{6}.$$

例 11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{(\sin x)^4}\overset{\sin x=t}{\underset{\cos x=\sqrt{1-t^2}}{=\!=\!=\!=\!=\!=}}\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-\sqrt{1-t^2}}{t^4}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin t+\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}}{4t^3}=\lim_{t\to 0}\frac{t-\sin t\sqrt{1-t^2}}{4t^3\sqrt{1-t^2}}=\lim_{t\to 0}\frac{t-\sin t\sqrt{1-t^2}}{4t^3}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t\sqrt{1-t^2}+\sin t\cdot\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}}{12t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{1-t^2}-(1-t^2)\cos t+t\sin t}{12t^2\sqrt{1-t^2}}$$

$$=\lim_{t\to 0}\left[\frac{\sqrt{1-t^2}-(1-t^2)\cos t}{12t^2}+\frac{t\sin t}{12t^2}\right]=\frac{1}{12}+\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{-t}{\sqrt{1-t^2}}+2t\cos t+(1-t^2)\sin t}{24t}$$

$$=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{6}.$$

上页 下页 返回

例11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$.

解二 $x \neq 0$ 时 $\sin x \neq x$,由 *Lagrange* 中值定理

得 $\cos(\sin x)-\cos x=-\sin\xi\cdot(\sin x - x)$,

ξ 介于 $\sin x, x$ 间,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin\xi\cdot(\sin x - x)}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\xi}{\xi}\cdot\frac{\xi}{x}\cdot\frac{x-\sin x}{x^3}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}\ .$$

上页 下页 返回

例11. $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$.

法三 $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sin\left(\dfrac{\sin x-x}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\sin x+x}{2}\right)}{x^4}$

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-\sin x)(\sin x+x)}{x^4}$

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x+x}{x}\cdot\dfrac{x-\sin x}{x^3}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\dfrac{1}{6}$.

例11. $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$.

法四 $x\to 0$ 时 $\cos(\sin x)-\cos x=$

$$(1-\cos x)-(1-\cos(\sin x))\sim\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}(\sin x)^2,$$

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}(\sin x)^2}{x^4}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)(\sin x+x)}{x^4}$$

$$=\cdots=\frac{1}{6}.$$

法四中函数加减运算时用了等价无穷小量,这是需要特别当心的地方. 非乘除运算时等价无穷小量能否使用并无规律,要谨慎使用⋯

思考题

设$\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$是不定型极限，如果$\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$的极限不存在，是否$\dfrac{f(x)}{g(x)}$的极限也一定不存在？举例说明.

上页 下页 返回

思考题 解答

不一定

例如, $f(x)=x+\sin x, g(x)=x,$

显然有 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\cos x}{1}$

极限不存在, 但是

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=1+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin x=1$$

练 习 题

$$1.\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x};\qquad 2.\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}};$$

$$3.\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}{\ln(1+\tan^{2}x)};$$

$$4.\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin^{2}x}-\frac{1}{x^{2}}\right);$$

$$5.\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^{x};\quad 6.\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}}{e}\right)^{x}$$

$$7.\ \lim_{x\to 0}\frac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x};$$

$$8.\ \lim_{n\to\infty}\left[n-n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right];\quad 9.\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{\frac{1}{n}}+3^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n;$$

$$10.\ \lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2};\quad 11.\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n+3^n}{2}\right)^{\frac{1}{n}};$$

练习题解答

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$,这是不能使用$L'Hopital$法则的例子,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x-\sin x)'}{(x+\sin x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$不存在亦非∞,

但是$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{x}\sin x}{1+\dfrac{1}{x}\sin x}=1.$

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$这是不宜一味使用$L'Hopital$法则的.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

产生循环 .

$\because x \to +\infty$时$, e^x \to \infty, e^{-x} \to 0,$

$$\therefore \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2e^{2x}}{2e^{2x}} = 1,$$

$$or: \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1.$$

上页 下页 返回

$$3.\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}{\ln\left(1+\tan^2 x\right)}$$ 这是单纯使用

$L'Hopital$法则计算比较麻烦的例子,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}{\ln\left(1+\tan^2 x\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x\sin x-\cos x}{\tan^2 x\left(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}}\cdot\frac{1-\cos x+x\sin x}{x^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{x\sin x}{x^2}\right)=\frac{3}{4}$$

4. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$,这是用$L'Hopital$法则只硬算而效果不佳的例子,

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{2x-\sin 2x}{4x^3}$$

$$\overset{2x=t}{=\!=}2\lim_{t\to0}\frac{t-\sin t}{t^3}=2\lim_{t\to0}\frac{1-\cos t}{3t^2}=\frac{1}{3}$$

上页 下页 返回

$$5.\ \lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^{x} \overset{t=\frac{1}{x}}{\underset{1^{\infty}}{=\!=\!=}} \lim_{t\to 0}(\sin t+\cos t)^{\frac{1}{t}}$$

$$=\lim_{t\to 0}\left[(1+\sin t+\cos t-1)^{\frac{1}{\sin t+\cos t-1}}\right]^{\frac{\sin t+\cos t-1}{t}}$$

$$\because \lim_{t\to 0}\frac{\sin t+\cos t-1}{t}=1,$$

$$\therefore \text{原式}=e^{1}=e$$

$$6.\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}}{e}\right)^{x}=\lim_{t\to 0}\left(\frac{(1+t)^{\frac{1}{t}}}{e}\right)^{\frac{1}{t}}\quad(1^{\infty})$$

记$y=\left(\frac{(1+t)^{\frac{1}{t}}}{e}\right)^{\frac{1}{t}}$,

则$\lim\limits_{t\to 0}\ln y=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}-\ln e}{t}$

$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+t)-t}{t^{2}}==\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+t}-1}{2t}=-\dfrac{1}{2}$, $\therefore$ 原$=e^{-\frac{1}{2}}$.

上页 下页 返回

$$7.\lim_{x\to 0}\frac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{0-\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]'}{1}$$

$$=-\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)'$$

$$=-\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}$$

上页 下页 返回

$$原=-\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}$$

$$其中\lim_{x\to0}\frac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-1-\ln(1+x)}{2x+3x^2}=-\frac{1}{2},\therefore 原=\frac{1}{2}e.$$

上页 下页 返回

$$8.\lim_{n\to\infty}\left[n-n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right];$$

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=A$, $\therefore$ 考虑

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\lim_{t\to0}\left[\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\ln(1+t)\right]$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}=\lim_{t\to0}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t}=\frac{1}{2},$$

$\therefore$ 原式 $=\dfrac{1}{2}.$

上页 下页 返回

$$9.\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{\frac{1}{n}}+3^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^{n};\quad 考察\lim_{t\to0}\left(\frac{2^{t}+3^{t}}{2}\right)^{\frac{1}{t}}$$

$$=\lim_{t\to0}e^{\ln\left(\frac{2^t+3^t}{2}\right)^{\frac{1}{t}}}=\lim_{t\to0}e^{\frac{\ln\left(2^t+3^t\right)-\ln 2}{t}},$$

$$\lim_{t\to0}\frac{\ln\left(2^t+3^t\right)-\ln 2}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\frac{2^t\ln2+3^t\ln3}{2^t+3^t}}{1}$$

$$=\frac{\ln2+\ln3}{2}=\ln\sqrt{6},\therefore 原式=e^{\ln\sqrt{6}}=\sqrt{6}.$$

上页 下页 返回

$$9.\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{\frac{1}{n}}+3^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^{n},\ (1^{\infty})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2^{\frac{1}{n}}+3^{\frac{1}{n}}-2}{2}\right)^{\frac{2}{2^{\frac{1}{n}}+3^{\frac{1}{n}}-2}}\right]^{\frac{2^{\frac{1}{n}}+3^{\frac{1}{n}}-2}{\frac{2}{n}}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{n}}+3^{\frac{1}{n}}-2}{\frac{2}{n}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{n}}-1+3^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}},$$

其中$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}\ln 2}-1}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\ln 2}{\frac{1}{n}}=\ln 2,$

同理,$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\ln 3,\therefore$ 原式$=e^{\ln\sqrt{6}}=\sqrt{6}.$

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$;

考察$\lim\limits_{t\to 0}(\cos t)^{\frac{1}{t^2}}=\lim\limits_{t\to 0}e^{\ln(\cos t)^{\frac{1}{t^2}}}=\lim\limits_{t\to 0}e^{\frac{\ln(\cos t)}{t^2}}$,

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln(\cos t)}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{-\sin t}{\cos t}}{2t}=-\frac{1}{2},$$

$\therefore$ 原式$=e^{-\frac{1}{2}}$

上页 下页 返回

$$10.\ \lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2} \overset{\frac{1}{n}=u}{=\!=\!=} \lim_{u\to 0}(\cos u)^{\frac{1}{u^2}}$$

$$=\lim_{u\to 0}\left[(1+\cos u-1)^{\frac{1}{\cos u-1}}\right]^{\frac{\cos u-1}{u^2}},$$

其中$\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\cos u-1}{u^2}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{-\sin^2 u}{u^2(\cos u+1)}=-\dfrac{1}{2}$,

$\therefore$ 原式 $=e^{-\frac{1}{2}}$

上页 下页 返回

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2^n+3^n}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$;

考察 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2^x+3^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to+\infty} e^{\ln\left(\frac{2^x+3^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln(2^x+3^x)-\ln 2}{x}},$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln(2^x+3^x)-\ln 2}{x}},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(2^x+3^x)-\ln 2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2^x\ln 2+3^x\ln 3}{2^x+3^x}}{1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x\ln 2+\ln 3}{\left(\frac{2}{3}\right)^x+1}=\ln 3,\therefore \text{原式}=e^{\ln 3}=3.$$

上页 下页 返回

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n+3^n}{2}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left\{\left[3^n\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)\right]^{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}3\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{2}}=3\times1\times1=3,$$

或者亦可用迫敛性

$$3^n\cdot\frac{1}{2}<\frac{2^n+3^n}{2}<3^n,\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1\cdots$$