8-03. 不定积分的计算

—— 一般问题

1.特殊被积函数的分类

2.不定积分的解题对策

上页 下页 返回

1.特殊被积函数的分类

***A.*有理函数**

***B.*三角函数的有理式**

***C.*简单无理式函数**

我们需要根据被积函数的不同类型，
分别采取相应的积分方法.

2.不定积分的解题对策

A.有理函数的积分

两个多项式函数的商称为有理函数.

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}$$

其中$m,n\in\mathbb{N}$, $a_0,a_1,\cdots,a_n$与$b_0,b_1,\cdots,b_m$都是实数,$a_0\neq 0,b_0\neq 0$.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}$$

假设有理函数的分子分母间没有公因式.

(1).$n<m$,该有理函数是真分式.

(2).$n\ge m$,这时有理函数是假分式.

利用多项式除法,假分式可以化成一个多项式与一个真分式之和.

例如,$\dfrac{x^3+x+1}{x^2+1}=x+\dfrac{1}{x^2+1}$.

难点:将有理函数化为部分分式之和.

我们可以用待定系数法将真分式化为部分分式之和.例如,

$$\frac{x+3}{x^2-5x+6}=\frac{x+3}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3},$$

$$\because\ x+3=A(x-3)+B(x-2),$$

$$x+3=(A+B)x-(3A+2B),$$

$$\therefore \begin{cases} A+B=1 \\ -(3A+2B)=3 \end{cases},\Rightarrow \begin{cases} A=-5 \\ B=6 \end{cases},$$

$$\therefore \frac{x+3}{x^2-5x+6}=\frac{6}{x-3}-\frac{5}{x-2}.$$

例如，$\dfrac{1}{x(x-1)^2}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{(x-1)^2}$,

$\therefore 1=A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx\cdots\cdots(1)$

我们可以代入x的特殊值来确定系数

A,B,C：

取$x=0\Rightarrow A=1$，取$x=1\Rightarrow C=1$，

取$x=2$，并将A,C值代入$(1)\Rightarrow B=-1$.

$$\therefore \frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}.$$

例如，$\dfrac{1}{(1+2x)(1+x^2)} = \dfrac{A}{1+2x} + \dfrac{Bx+C}{1+x^2}$，

$1 = A(1+x^2) + (Bx+C)(1+2x)$，

整理得$1 = (A+2B)x^2 + (B+2C)x + C + A$，

$$\begin{cases} A+2B=0 \\ B+2C=0 \\ A+C=1 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{4}{5}, B = -\frac{2}{5}, C = \frac{1}{5},$$

$$\therefore \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)} = \frac{\frac{4}{5}}{1+2x} + \frac{-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}{1+x^2}.$$

上页 下页 返回

据有理函数分解定理可得：

$$n \le 6\,,\quad \frac{P_n(x)}{(1+2x)^3(1+x^2)^2}$$

$$=\frac{A_1}{1+2x}+\frac{A_2}{(1+2x)^2}+\frac{A_3}{(1+2x)^3}$$

$$+\frac{B_1x+C_1}{1+x^2}+\frac{B_2x+C_2}{(1+x^2)^2}$$

据有理函数分解定理可得：

$$\frac{u^4}{u^4-2u^2+1}=\frac{u^4-2u^2+1+2u^2-1}{u^4-2u^2+1}$$

$$=1+\frac{2u^2-1}{(u-1)^2(u+1)^2}$$

$$=1+\frac{A}{u-1}+\frac{B}{(u-1)^2}+\frac{C}{u+1}+\frac{D}{(u+1)^2}$$

例1.求积分$\int \frac{1}{x(x-1)^2}dx.$

解$\int \frac{1}{x(x-1)^2}dx = \int \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right]dx$

$= \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}dx$

$= \ln\left|\frac{x}{x-1}\right| - \frac{1}{x-1} + C$

例2.求积分 $\int \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}dx$.

解 $\int \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}dx$

$$= \int \frac{\frac{4}{5}}{1+2x}dx + \int \frac{-\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{2}{5}\ln(1+2x) - \frac{1}{5}\int \frac{2x}{1+x^2}dx + \frac{1}{5}\int \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{2}{5}\ln(1+2x) - \frac{1}{5}\ln(1+x^2) + \frac{1}{5}\arctan x + C$$

结论:有理函数的原函数都是初等函数.

B.三角函数有理式的积分

由$\sin x, \cos x$以及常数经过有限多次四则运算构成的函数称为三角函数有理式.一般记为

$R(\sin x, \cos x)$.

$$\because \quad \sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}},$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}},$$

万能代换

令 $u=\tan\frac{x}{2}, x=2\arctan u, dx=\frac{2}{1+u^2}du,$

$$\sin x=\frac{2u}{1+u^2}, \cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2},$$

$$\int R(\sin x,\cos x)dx$$

$$=\int R\left(\frac{2u}{1+u^2},\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{2}{1+u^2}du$$

例3. $\int \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x} dx.$

解　由万能代换公式, $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$,

$\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, dx = \frac{2}{1+u^2} du,$

$$\int \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x} dx = \int \frac{2u}{(1+u)\left(1+u^2\right)} du$$

$$= \int \frac{2u+1+u^2-1-u^2}{(1+u)\left(1+u^2\right)} du$$

$$= \int \frac{(1+u)^2 - (1+u^2)}{(1+u)(1+u^2)} du$$

$$= \int \frac{1+u}{1+u^2} du - \int \frac{1}{1+u} du$$

$$= \arctan u + \frac{1}{2}\ln(1+u^2) - \ln|1+u| + C$$

$$\downarrow \because \quad u = \tan\frac{x}{2}$$

$$= \frac{x}{2} + \ln\left|\sec\frac{x}{2}\right| - \ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right| + C$$

例4.$\int \frac{1}{\sin^4 x} dx.$

解一 $u = \tan\frac{x}{2}, \sin x = \frac{2u}{1+u^2}, dx = \frac{2}{1+u^2} du,$

$$\int \frac{1}{\sin^4 x} dx = \int \frac{1+3u^2+3u^4+u^6}{8u^4} du$$

$$= \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{3u^3} - \frac{3}{u} + 3u + \frac{u^3}{3}\right) + C$$

$$= -\frac{1}{24\left(\tan\frac{x}{2}\right)^3} - \frac{3}{8\tan\frac{x}{2}} + \frac{3}{8}\tan\frac{x}{2} + \frac{1}{24}\left(\tan\frac{x}{2}\right)^3 + C$$

解二 改变策略：

$$\int \frac{1}{\sin^4 x}dx = \int \frac{1}{\left(\sin^2 x\right)^2}dx = \int \frac{4}{\left(1-\cos 2x\right)^2}dx$$

$$= \int \frac{2}{\left(1-\cos 2x\right)^2}d(2x)$$ 取 $u = \tan x$，$dx = \frac{1}{1+u^2}du$,

$$\int \frac{1}{\sin^4 x}dx = \int \frac{1}{\left(\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right)^4} \cdot \frac{1}{1+u^2}du = \int \frac{1+u^2}{u^4}du$$

$$= -\frac{1}{3u^3} - \frac{1}{u} + C = -\frac{1}{3}\cot^3 x - \cot x + C$$

上页 下页 返回

解三 可以不用万能代换公式.

$$\int \frac{1}{\sin^4 x}dx = \int \frac{\sec^4 x}{\tan^4 x}dx = \int \frac{\sec^2 x}{\tan^4 x}\cdot \sec^2 x dx$$

$$= \int \frac{1+\tan^2 x}{\tan^4 x} d(\tan x)$$

$$= \int \left(\frac{1}{\tan^4 x} + \frac{1}{\tan^2 x} \right) d(\tan x)$$

$$= -\frac{1}{3}\frac{1}{\tan^3 x} - \frac{1}{\tan x} + C$$

$$= -\frac{1}{3}\cot^3 x - \cot x + C$$

解四 再作变化.

$$\int \frac{1}{\sin^4 x} dx = \int \csc^2 x \cdot \csc^2 x dx$$

$$= \int (1 + \cot^2 x) \csc^2 x dx$$

$$\boxed{\csc^2 x dx = -d(\cot x)}$$

$$= -\int (1 + \cot^2 x) d(\cot x) = -\cot x - \frac{1}{3}\cot^3 x + C$$

结论 1.比较以上几种解法, 便知万能代换不是最佳方法, 故三角函数有理式的积分计算中一般先考虑其它手段, 不得已才用万能代换.

2.在三角函数有理式中如果 *sinx*、*cosx* 的幂次较高,那通常就不用万能代换了,否则就太繁了.

例5.求积分$\int \frac{1+\sin x}{\sin 3x+\sin x}dx$.

解 $\sin A+\sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

$$\int \frac{1+\sin x}{\sin 3x+\sin x}dx = \int \frac{1+\sin x}{2\sin 2x\cos x}dx$$

$$= \int \frac{1+\sin x}{4\sin x\cos^2 x}dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{\sin x\cos^2 x}dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{\cos^2 x}dx$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{1}{\sin x\cos^2 x}dx+\frac{1}{4}\int\frac{1}{\cos^2 x}dx$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos^2 x}dx+\frac{1}{4}\int\sec^2 x dx$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx+\frac{1}{4}\int\frac{1}{\sin x}dx+\frac{1}{4}\tan x$$

$$=-\frac{1}{4}\int\frac{1}{\cos^2 x}d(\cos x)+\frac{1}{4}\int\frac{1}{\sin x}dx+\frac{1}{4}\tan x$$

$$=\frac{1}{4\cos x}+\frac{1}{4}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{4}\tan x+C$$

其中$\int \frac{1}{\sin x \cos^2 x} dx = \int \frac{\sec^3 x}{\tan x} dx$

$$= \int \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x} \sec x \tan x dx = \int \frac{\sec^2 x}{\sec^2 x - 1} d \sec x$$

$$\overset{\sec x = t}{=\!=\!=\!=} \int \frac{t^2}{t^2 - 1} dt = \int \left(1 + \frac{1}{t^2 - 1}\right) dt$$

$$= \int 1 dt + \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \cdots$$

C.简单无理式函数的积分

设$R(x,y)$是二元有理函数.我们只研究

$$R\left(x,\sqrt[n]{ax+b}\right),R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$$的积分问题.

解决对策 作适当变换去根号.

例6.计算积分$J=\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx.$

解 令$\sqrt{\frac{1+x}{x}}=t\Rightarrow\frac{1+x}{x}=t^2,$

$$x=\frac{1}{t^2-1}, dx=-\frac{2tdt}{\left(t^2-1\right)^2},$$

$$J=\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx$$

$$=-\int\left(t^2-1\right)\cdot t\cdot\frac{2t}{\left(t^2-1\right)^2}dt=-2\int\frac{t^2dt}{t^2-1}$$

$$J=\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx$$

$$=-\int\left(t^2-1\right)t\frac{2t}{\left(t^2-1\right)^2}dt=-2\int\frac{t^2dt}{t^2-1}$$

$$=-2\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=-2t-\ln\frac{t-1}{t+1}+C$$

$$=-2\sqrt{\frac{1+x}{x}}-\ln\left[x\left(\sqrt{\frac{1+x}{x}}-1\right)^2\right]+C$$

另解：在$\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}$中，$x \le -1$或$x > 0$.

(1).当$x \le -1$时，令$x = -\sec^2 t, t \in \left[0, \pi/2\right)$,

则 $1 + x = -\tan^2 t$,

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx = \int \frac{1}{-\sec^2 t}\left|\frac{\tan t}{\sec t}\right|\left(-2\sec^2 t \tan t\right)dt$$

$$= 2\int \frac{\sin^2 t}{\cos t}dt = \cdots$$

(2).当$x > 0$时，令$x = \tan^2 t, t \in \left(0, \pi/2\right)$,

则 $1 + x = \sec^2 t$,

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx = \int \frac{1}{\tan^2 t}\left|\frac{\sec t}{\tan t}\right|\left(2\tan t \sec^2 t\right)dt$$

$$= 2\int \frac{1}{\sin^2 t \cos t}dt = \cdots$$

再解：在$\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}$中，$x \le -1$或$x > 0$.

(1).当$x \le -1$时，

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx = -\int \frac{1}{x}\cdot\frac{1+x}{\sqrt{x+x^2}}dx$$

(2).当$x > 0$时，

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx = \int \frac{\sqrt{x+x^2}}{x^2}dx$$

而$\sqrt{x+x^2} = \sqrt{\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}$

例7.计算积分$\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}dx$

解　令$\sqrt[6]{x+1}=t \Rightarrow dx=6t^5dt,$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}dx=\int \frac{1}{t^3+t^2}\cdot 6t^5dt$$

$$=6\int \frac{t^3}{t+1}dt=2t^3-3t^2+6t+6\ln|t+1|+C$$

$$=2\sqrt{x+1}-3\sqrt[3]{x+1}+3\sqrt[6]{x+1}$$

$$+6\ln\left(\sqrt[6]{x+1}+1\right)+C$$

说明 无理函数去根号时，取根指数的**最小公倍数**.

例8.计算积分$J=\int\frac{x}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{2x+1}}dx$

解 对分母作无理式有理化

$$J=\int\frac{x\left(\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+1}\right)}{\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{2x+1}\right)\left(\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+1}\right)}dx$$

$$=\int\left(\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+1}\right)dx$$

$$=\frac{1}{3}\int\sqrt{3x+1}d\left(3x+1\right)-\frac{1}{2}\int\sqrt{2x+1}d\left(2x+1\right)$$

$$=\frac{2}{9}\left(3x+1\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}\left(2x+1\right)^{\frac{3}{2}}+C.$$

3. 不定积分的解题对策概说

总的说来,不定积分没有什么一成不变、普遍适用的方法,我们一定要在熟悉了第一批不定积分的基本公式以后,掌握并能灵活运用换元积分法:凑微分法、变量代换法和分部积分法.

不定积分的计算中最重要的是要有变化的意识,只有不断变化以适应面对的新问题,因地制宜、因时制宜,才可能解决问题.

说明 初等函数在其定义区间内原函数一定存在,但原函数不一定都是初等函数.因此,有许多不定积分问题我们习惯上称之为“**积不出来的**”.

例如, $\int e^{-x^2}dx, \int \sin\left(x^2\right)dx,$

$\int \sqrt{1+x^3}dx, \int \sqrt{1+x^4}dx,$

$\int \frac{e^x}{x}dx, \int \frac{1}{\ln x}dx, \int \frac{\sin x}{x}dx,$

关于积分表的说明

常用积分公式汇集成的表称为**积分表**.求积分时,可根据被积函数的类型直接或经过简单变形后,查得所需结果.

可是,积分表对我们而言是没有什么实际使用价值的.当然,现在已经有了*Mathematica*,*Maple*等这样一些软件,可以进行符号运算,用之计算不定积分,只需输入被积函数,立马就输出结果.

练习题

1.计算下列不定积分.

(1). $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-9}}$; (2). $\int \sqrt{2x^2+9}\,dx$;

(3). $\int x\arcsin\frac{x}{2}dx$; (4). $\int e^{-2x}\sin 3x\,dx$;

(5). $\int \frac{1}{x^2(1-x)}dx$; (6). $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$;

(7). $\int x^2\sqrt{x^2-2}\,dx$; (8). $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$.

2.计算下列不定积分.

(1). $\int \frac{x}{(1-x)^3}dx$ ；

(2). $\int \frac{1+\cos x}{x+\sin x}dx$ ；

(3). $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$ ；

(4). $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}dx$ ；

(5). $\int \frac{x^3}{(1+x^8)^2}dx$ ；

(6). $\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx$ ；

(7). $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}dx$ ；

(8). $\int \sqrt{1-x^2}\arcsin x dx$ ；

(9). $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx$ ；

(10). $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}},(a<x<b)$.

练习题1答案

(1). $\frac{1}{2}\ln\left|2x+\sqrt{4x^2-9}\right|+C.$

(2). $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+9}+\frac{9\sqrt{2}}{4}\ln\left(\sqrt{2}x+\sqrt{2x^2+9}\right)+C.$

(3). $\left(\frac{x^2}{2}-1\right)\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{4}\sqrt{4-x^2}+C.$

(4). $-\frac{e^{-2x}}{13}\left(2\sin 3x+3\cos 3x\right)+C.$ (5). $-\frac{1}{x}-\ln\left|\frac{1-x}{x}\right|+C.$

(6). $\arccos\frac{1}{|x|}+C.$ (7). $\frac{x(x^2-1)\sqrt{x^2-2}}{4}-\frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-2}\right)+C.$

(8). $\sqrt{(1-x)(1+x)}+2\arcsin\sqrt{\frac{x+1}{2}}+C.$

$$(1).\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-9}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x)}{\sqrt{(2x)^2-3^2}} \underline{\underline{2x=3\sec t\ldots}}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|2x+\sqrt{4x^2-9}\right|+C;$$

$$(2).\int \sqrt{2x^2+9}\,dx \underline{\underline{\sqrt{2}x=3\tan t\ldots}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2x^2+9}+\frac{9\sqrt{2}}{4}\ln\left(\sqrt{2}x+\sqrt{2x^2+9}\right)+C$$

$$(3).\int x\arcsin\frac{x}{2}dx \xlongequal{x=2t} 4\int t\arcsin t\,dt$$

$$=2t^2\arcsin t-\int 2t^2\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt=2t^2\arcsin t-2\int\frac{1-(1-t^2)}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$=2t^2\arcsin t-2\int\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt+2\int\sqrt{1-t^2}\,dt$$

$$=2t^2\arcsin t-2\arcsin t+t\sqrt{1-t^2}+\arcsin t+C$$

$$=\left(\frac{1}{2}x^2-1\right)\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{4}\sqrt{4-x^2}+C$$

也可一开始就作变量代换 : $\arcsin\frac{x}{2}=t$

$$\int x\arcsin\frac{x}{2}dx=\int 2\sin t\cdot t\cdot 2\cos t\,dt=\cdots$$

上页 下页 返回

(4). $\int e^{-2x}\sin 3x dx$,

两次使用分部积分,每次都选择函数 $e^{-2x}\left(or:\sin 3x\right)$作为$v'$,产生循环...

$$\int e^{-2x}\sin 3x dx =$$

$$-\frac{e^{-2x}}{13}\left(2\sin 3x+3\cos 3x\right)+C$$

上页 下页 返回

$$(5).\int \frac{1}{x^2(1-x)}dx$$

$$\frac{1}{x^2(1-x)} = \frac{1-x^2+x^2}{x^2(1-x)} = \cdots$$

或者用待定系数法

$$\frac{1}{x^2(1-x)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{1-x}$$

$$\int \frac{1}{x^2(1-x)}dx = -\frac{1}{x} - \ln\left|\frac{1-x}{x}\right| + C$$

$$(6).\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx;(7).\int x^2\sqrt{x^2-2}dx;(8).\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx.$$

标准的变量代换问题,

$$(6).\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx \overset{x=\sec t}{=\!=\!=\!=} \cdots = \arccos\frac{1}{|x|}+C$$

$$(8).\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx \overset{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=t}{=\!=\!=\!=\!=\!=} \cdots$$

$$=\sqrt{(1-x)(1+x)}+2\arcsin\sqrt{\frac{x+1}{2}}+C$$

或者$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx=\int\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

上页 下页 返回

$$(7).\int x^2\sqrt{x^2-2}dx=\int\frac{x^4-2x^2}{\sqrt{x^2-2}}dx$$

$$=\int x^3\frac{x}{\sqrt{x^2-2}}dx-\int\frac{2x^2}{\sqrt{x^2-2}}dx$$

$$=\int x^3\left(\sqrt{x^2-2}\right)'dx-\int\frac{2x^2}{\sqrt{x^2-2}}dx$$

$$=x^3\sqrt{x^2-2}-\int 3x^2\sqrt{x^2-2}dx-\int\frac{2x^2}{\sqrt{x^2-2}}dx$$

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}}dx=\int x\frac{x}{\sqrt{x^2-2}}dx=x\sqrt{x^2-2}-\int\sqrt{x^2-2}dx$$

… …

上页 下页 返回

$$(7).\int x^2\sqrt{x^2-2}\,dx \xlongequal{x=\sqrt{2}\sec t} 4\int \sec^3 t\tan^2 t\,dt$$

$$\int \sec^3 t\tan^2 t\,dt=\int \sec^2 t\tan t\left(\sec t\tan t\right)dt$$

$$=\int \sec^2 t\tan t\left(\sec t\right)'dt=\sec^3 t\tan t-\int \sec t\left(\sec^2 t\tan t\right)'dt$$

$$=\sec^3 t\tan t-\int \sec t\left(\sec^4 t+2\sec^2 t\tan^2 t\right)dt$$

$$=\sec^3 t\tan t-\int \sec^3 t\left(1+\tan^2 t\right)dt-2\int \sec^3 t\tan^2 t\,dt$$

$$=\sec^3 t\tan t-\int \sec^3 t\,dt-3\int \sec^3 t\tan^2 t\,dt$$

$$\int \sec^3 t\,dt=\int \sec t\sec^2 t\,dt=\sec t\tan t-\int \tan t\cdot\left(\sec t\right)'dt$$

$$=\sec t\tan t-\int \sec t\tan^2 t\,dt=\sec t\tan t-\int\left(\sec^3 t-\sec t\right)dt$$

$$(7).\ \frac{x(x^2-1)\sqrt{x^2-2}}{4}-\frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-2}\right)+C.$$