2021 级 数学分析 I 期中练习解答 2021-11

一. 填空题或选择题（每题 3 分，计 30 分. 选择题正确选项唯一）

1. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 不存在，则必定有_____________.

$(A).\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)$不存在； $(B).\lim\limits_{n\to\infty}(x_ny_n)$不存在；

$(C).\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)$未必不存在； $(D).$ 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_ny_n)=0$.

2. 函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x(x-3)}$ 在区间_______________内无界.

$(A).(-1,0)$; $(B).(0,1)$; $(C).(1,2)$; $(D).(2,3)$.

3. 函数 $f(x)=\begin{cases} x\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处____________.

$(A).$不连续； $(B).$连续但不可导；

$(C).$可导但导函数不连续； $(D).$可导且导函数连续.

4. 下列命题中正确的命题是__________________.

$(A).$ 在 $x\in(a,b)$ 时曲线 $y=f(x)$ 处处有唯一的切线，则函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内点点可导.

$(B).$ 若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导且严格单调增加，那么在 (a,b) 内必定有 $f'(x)>0$.

$(C).$ $\forall\ x\in(-\infty,+\infty)$，有 $\arcsin(\sin x)=x$.

$(D).$ 如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左右导数都存在，则函数 $f(x)$ 在 x_0 点处连续 .

5. 设 $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$，则函数 $f\left[f(x)\right]$ 的第一类间断点为__________________ .

6. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\tan x\cdot(2x-\pi)\right]=$ __________ .

7. 半径为 r 的圆面积 $A=\pi r^2$, $\Delta r=dr\to 0$ 时， $\Delta A=$________， $dA=$______， $\dfrac{dA}{dr}=$_______.

8. 记 $A=\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n, n\in\mathbb{N}^*\right\}$, 则 $\sup A=$ _______, $\inf A=$ _______.

9. $x\to+\infty$ 情形的归结原则（Heine 定理）:____ .

10. 确界原理:____ .

1. A； 2. D； 3. B； 4. D； 5. $x=2$；

6. -2； 7. $2\pi r dr+\pi(dr)^2$, $2\pi r dr$, $2\pi r$； 8. e , 2；

9. $x\to+\infty$ 情形的归结原则（Heine 定理）： $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\{x_n\}, \lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$.

10. 确界原理: 非空有$\left(上,下\right)$界数集必有$\left(上,下\right)$确界．.

二. 解答题 I . (每题 7 分，计 28 分)

11. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-a}{x^2+a}\right)^x$.

解 $a=0$ 时,显见原式$=1.$

$$a\neq 0 \text{ 时,原式}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-2a}{x^2+a}\right)^{\frac{x^2+a}{-2a}}\right]^{\frac{-2ax}{x^2+a}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2ax}{x^2+a}}=e^0.\text{ 总之,原式}=1.$$

12. 若 $x\to 0$ 时, $\sqrt[3]{1+x^3}-\sqrt[3]{1-x^3}$ 与 ax^n 为等价无穷小量，问 $a=?$ $n=?$

解 $x\to 0$ 时, $\mu\neq 0,(1+x)^{\mu}-1\sim\mu x$.

$$\therefore x\to 0\text{ 时},\sqrt[3]{1+x^3}-\sqrt[3]{1-x^3}=\sqrt[3]{1-x^3}\left(\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}-1\right)\sim\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}-1\sim\frac{1}{3}\left(\frac{1+x^3}{1-x^3}-1\right)=\frac{2x^3}{3\left(1-x^3\right)}$$

$$\sim\frac{2}{3}x^3,\ \therefore a=\frac{2}{3},n=3.$$

或者, $\sqrt[3]{1+x^3}-\sqrt[3]{1-x^3}=\left(\sqrt[3]{1+x^3}-1\right)-\left(\sqrt[3]{1-x^3}-1\right)\sim\frac{1}{3}x^3-\left(-\frac{1}{3}x^3\right)\sim\frac{2}{3}x^3.$

13. 设 $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x,x>0.$ 求函数的导数 y'.

解 $x>0,y=e^{\ln y},\ln y=\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right),$

$$y'_x=e^{\ln y}\cdot\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]'=y\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+x\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{x}\right)\right]=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right].$$

14. 设曲线方程为$\begin{cases}x=a\cos^4 t\\ y=a\sin^4 t\end{cases},t\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right),a>0.$ 计算 $\dfrac{dy}{dx}$, 消去参数后曲线方程为 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$,证明曲线上任一点的切线与两坐标轴的截距之和为常数.

解 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}=\dfrac{4a\sin^3 t\cos t}{4a\cos^3 t\cdot(-\sin t)}=-\tan^2 t.$设曲线上任意一点$P_0\left(x_0,y_0\right)$处切线斜率为$-\tan^2 t_0=-\dfrac{\sqrt{y_0}}{\sqrt{x_0}},$

切线 $l_{P_0}:y-y_0=-\dfrac{\sqrt{y_0}}{\sqrt{x_0}}\left(x-x_0\right)$在$x$轴,$y$轴上的截距分别为 $x_0+\sqrt{x_0y_0},y_0+\sqrt{x_0y_0}$.

$\therefore$ 切线 在x轴,y轴上的截距之和等于 $x_0+2\sqrt{x_0y_0}+y_0=\left(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}\right)^2=\left(\sqrt{a}\right)^2=a.$ 证毕

(后半部分求切线截距等,若仍用参数形式,则计算过于繁琐)

三. 解答题 II (15~18 题每题 8 分，19 题 10 分，计 42 分)

15. 用“$\varepsilon-N$”定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-\sin n}{n^3-3}=0$.

解 分析 $\forall\varepsilon>0$,欲找到N,使在$n>N$时有$\left|\dfrac{n-\sin n}{n^3-3}-0\right|<\varepsilon$.

由于考虑$n\to\infty$,所以不妨先设$n\ge 4$,(这个4是姑且取之,取2,3…亦同理),此时$\dfrac{1}{2}n^3>3$.

$\left|\dfrac{n-\sin n}{n^3-3}\right|\le\dfrac{n+1}{n^3-3}<\dfrac{2n}{n^3-\frac{1}{2}n^3}=\dfrac{4n}{n^3}\le\dfrac{1}{n}$,所以在$n\ge 4$条件下,若$\dfrac{1}{n}<\varepsilon$则有$\left|\dfrac{n-\sin n}{n^3-3}-0\right|<\varepsilon$.

而$\dfrac{1}{n}<\varepsilon\Leftrightarrow n>\dfrac{1}{\varepsilon}$.

证明 $\forall\varepsilon>0,\exists N\ge\max\left(4,\dfrac{1}{\varepsilon}\right),\forall n>N,s.t.\left|\dfrac{n-\sin n}{n^3-3}-0\right|\le\dfrac{n+1}{n^3-3}<\dfrac{1}{n}<\dfrac{1}{N}\le\dfrac{1}{1/\varepsilon}=\varepsilon$.证毕

16. (1).证明可导的偶函数的导函数是奇函数.

(2).设 $f(x)$ 为可导的偶函数且 $f(0)=0$，计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+f\left(\dfrac{1}{2n}\right)\right]^n$.

解 (1).$f(x)$为$(-\infty,+\infty)$上的偶函数,$f(-x)=f(x)$.由$f(x)$可导知,$\left[f(-x)\right]'=f'(x)$,

即$f'(-x)\cdot(-1)=f'(x)$,∴即$f'(-x)=-f'(x)$,即$f'(x)$为$(-\infty,+\infty)$上的奇函数.

或者,由$f(-x)=f(x)$, $f'(-x)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(-x+h)-f(-x)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x-h)-f(x)}{h}$

$$=-\lim_{h\to0}\frac{f\left(x+(-h)\right)-f(x)}{-h}=-f'(x).$$

(2).∵ $f(x)$是可导的偶函数,$f(0)=0$,∴ $f'(x)$是奇函数,故$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=f'(0)=0$.

若$f(x)\equiv0$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+f\left(\dfrac{1}{2n}\right)\right]^n=1$;若$f\left(\dfrac{1}{2n}\right)\ne0$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+f\left(\dfrac{1}{2n}\right)\right]^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+f\left(\dfrac{1}{2n}\right)\right)^{\frac{1}{f\left(\frac{1}{2n}\right)}}\right]^{nf\left(\frac{1}{2n}\right)}$

$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}nf\left(\frac{1}{2n}\right)}=e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{f(t)}{2t}}=e^{\frac{1}{2}f'(0)}=e^0=1.$ 总之,$\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+f\left(\dfrac{1}{2n}\right)\right]^n=1$.

17. 设函数 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上有定义，$\forall x,y\in(-\infty,+\infty)$有$f(x+y)=f(x)+f(y)$，已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，试证明：函数 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上可导,并由此求出函数 $f(x)$ 的表达式 .

解 $\forall x,y\in(-\infty,+\infty)$有$f(x+y)=f(x)+f(y)$,∴ $f(0)=0$.

∴ $\forall x\in(-\infty,+\infty)$, $f'(x)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x)+f(h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=f'(0)$.

即$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可导,且$f'(x)=f'(0)=a$,于是, $f(x)=ax+b$,由$f(0)=0$知$f(x)=ax=xf(1)$.

(有了“$f(x)$可导”这一比“$f(x)$连续”更强的条件后,给出$f(x)$表达式就容易得多了.)

18. 本题中两小题任选一小题，只做一小题. 若两小题都做，按第一小题记分.

(1). 设 $a_n=\dfrac{\sin 1}{2}+\dfrac{\sin 2}{2^2}+\dfrac{\sin 3}{2^3}+\cdots+\dfrac{\sin n}{2^n}$，试运用 Cauchy 收敛准则证明数列 $\{a_n\}$ 收敛 .

解 $\forall\varepsilon>0$,要找到N,使得$n>N$时,$\forall p\in\mathbb{N}^*$,有$\left|a_n-a_{n+p}\right|=\left|\dfrac{\sin(n+1)}{2^{n+1}}+\dfrac{\sin(n+2)}{2^{n+2}}+\cdots+\dfrac{\sin(n+p)}{2^{n+p}}\right|<\varepsilon.$

而$\left|\dfrac{\sin(n+1)}{2^{n+1}}+\dfrac{\sin(n+2)}{2^{n+2}}+\cdots+\dfrac{\sin(n+p)}{2^{n+p}}\right|\le\dfrac{1}{2^{n+1}}+\dfrac{1}{2^{n+2}}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n+p}}=\dfrac{\dfrac{1}{2^{n+1}}-\dfrac{1}{2^{n+p+1}}}{1-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{1}{2^n}-\dfrac{1}{2^{n+p}}<\dfrac{1}{2^n}<\dfrac{1}{n}$,

$\therefore$当$\dfrac{1}{n}<\varepsilon$时有$\left|a_n-a_{n+p}\right|<\varepsilon.$

$\therefore\forall\varepsilon>0,\exists N\ge\dfrac{1}{\varepsilon},\forall n>N,\forall p\in\mathbb{N}^*$,有$\left|a_n-a_{n+p}\right|=\left|\dfrac{\sin(n+1)}{2^{n+1}}+\dfrac{\sin(n+2)}{2^{n+2}}+\cdots+\dfrac{\sin(n+p)}{2^{n+p}}\right|$

$\le\dfrac{1}{2^{n+1}}+\dfrac{1}{2^{n+2}}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n+p}}=\dfrac{1}{2^n}-\dfrac{1}{2^{n+p}}<\dfrac{1}{2^n}<\dfrac{1}{n}<\dfrac{1}{N}\le\dfrac{1}{1/\varepsilon}=\varepsilon$,据*Cauchy*收敛准则知数列收敛.

(2).设$a_n>0$,求证:若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=l>1$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0.$

解 $a_n>0$,由$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=l>1$,对于$\varepsilon_0=\dfrac{l-1}{2}>0,\exists N_0,\forall n\ge N_0,s.t.\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-l\right|<\varepsilon_0=\dfrac{l-1}{2}$,

$\therefore n\ge N_0$时有$\dfrac{a_n}{a_{n+1}}>\dfrac{l+1}{2}$,由于$a_n>0$,所以$0<a_{n+1}<\dfrac{2}{l+1}a_n$,记$\dfrac{2}{l+1}=r\in(0,1)$,则$0<a_{n+1}<ra_n$,

$\therefore\forall m\in\mathbb{N}^*,0<a_{N_0+m}<ra_{N_0+m-1}<r^m a_{N_0}$,$\Rightarrow$由迫敛性知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{m\to\infty}a_{N_0+m}=0.$

19. (1). 证明方程 $x+x^2+\cdots+x^n=1\ (n\ge 2)$ 有唯一的正的实根 ；

(2). 记(1)中方程的实根为 x_n，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求出 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解 (1).设 $\varphi(x)=x+x^2+\cdots+x^n-1$,显然 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,可导.

$\varphi(0)=-1<0$,在 $n\ge 2$ 时,$\varphi\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\cdots+\left(\frac{3}{4}\right)^n-1>\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2-1=\frac{5}{16}>0.$

$\therefore$ 由介值定理知 $\exists\xi\in\left(0,\frac{3}{4}\right)\subset(0,1)\subset(0,+\infty)$,使得 $\varphi(x)=0.$

又 $\forall x_2>x_1>0,\varphi(x_2)-\varphi(x_1)=(x_2-x_1)\left(1+x_2+x_1+\cdots+x_2^{n-1}+x_2^{n-2}x_1+\cdots+x_2x_1^{n-2}+x_1^{n-1}\right)>0,$

$\therefore x\in(0,+\infty)$ 时 $\varphi(x)$ 严格单调增加,故 $\exists$ 唯一 $\xi\in\left(0,\frac{3}{4}\right)\subset(0,+\infty)$,使得 $\varphi(x)=0.$

或者,$x\in(0,+\infty)$ 时,$\varphi'(x)=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}>0$,故 $(0,+\infty)$ 上 $\varphi(x)$ 严格单调增加$\cdots$

(2).$\because \xi+\xi^2+\cdots+\xi^n=1$,而 $\xi\in(0,1)$,$\therefore \xi+\xi^2+\cdots+\xi^n=\dfrac{\xi-\xi^{n+1}}{1-\xi}=1,$

即 $\xi-\xi^{n+1}=1-\xi,\Rightarrow \xi=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\xi^{n+1},\because \xi\in\left(0,\frac{3}{4}\right)\subset(0,1),\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\xi^{n+1}=0,\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\xi=\frac{1}{2}.$

或者,可证得 $\{x_n\}$ 单调递减,且 $x_n>0$,即 $\{x_n\}$ 有下界,知 $\{x_n\}$ 收敛.由“一尺之棰,日取其半,万世不竭”

知 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=1\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}.$

下证 $\{x_n\}$ 单调递减: $x_n+x_n^2+\cdots+x_n^n=1$,$x_{n+1}+x_{n+1}^2+\cdots+x_{n+1}^n+x_{n+1}^{n+1}=1,$

$\therefore x_n+x_n^2+\cdots+x_n^n=x_{n+1}+x_{n+1}^2+\cdots+x_{n+1}^n+x_{n+1}^{n+1},$

即 $(x_n-x_{n+1})\left[1+(x_n+x_{n+1})+\cdots+\left(x_n^{n-1}+x_n^{n-2}x_{n+1}+\cdots+x_nx_{n+1}^{n-2}+x_{n+1}^{n-1}\right)\right]=x_{n+1}^{n+1}$,

由 $x_n\in(0,3/4)\subset(0,1)\subset(0,+\infty)$,可知 $\forall n\ge 1$ 时,$x_n-x_{n+1}>0$.得证 $\{x_n\}$ 单调递减.

(注:若只说明 $\xi\in(0,1)$,由于 ξ 与 n 有关,倘若 $\xi\to 1^-$,那么 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi^{n+1}$ 就是未定型问题了.

这就是前面取 $\xi\in\left(0,\frac{3}{4}\right)\subset(0,1)$ 的原因,此处的 $\frac{3}{4}$ 是任意取定的 $>\frac{1}{2}$ 且 <1 的数.)