

第3章 图像变换

- 傅立叶变换(FFT)
- 离散余弦变换(DCT)
- K-L变换
- 小波变换



数字图像处理的方法主要分为两大类：

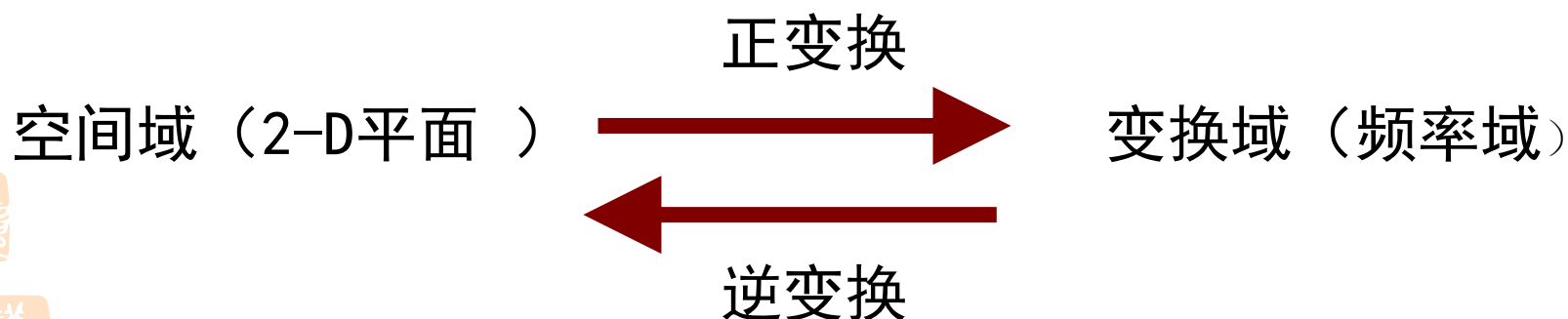
1. 空间域处理法（或称空域法）

2. 频域法（或称变换域法）

在频域法处理中最为关键的预处理便是变换处理。



- 为了有效地和快速地对图像进行处理和分析，常常需要将原定义在图像空间的图像以某种形式转换（正变换）到另外一些空间，并利用在这些空间的特有性质方便地进行一定的加工，最后再转换回图像空间（反变换或逆变换）以得到所需要的效果。



图像变换特点：

对图像信息进行变换，使能量保持但重新分配。**变换域中图像能量集中分布在低频率成分上**，边缘、线信息反映在高频率成分上。

图像**灰度变化缓慢**的区域，对应它变换后的**低频分量**部分；图像灰度**呈阶跃变化**的区域，对应变换后的**高频分量**部分。图像细节的边缘、轮廓处都是灰度变化突变的区域，它们都具有变换后的高频分量特征。



下图展示了图像进行低通和高通滤波后，其频谱图的变化：

原始图像

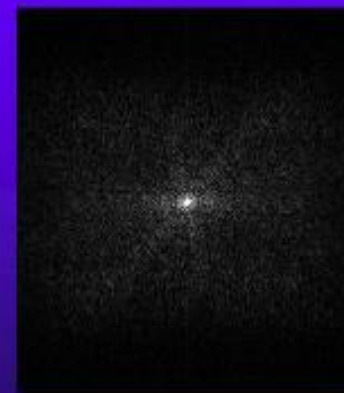
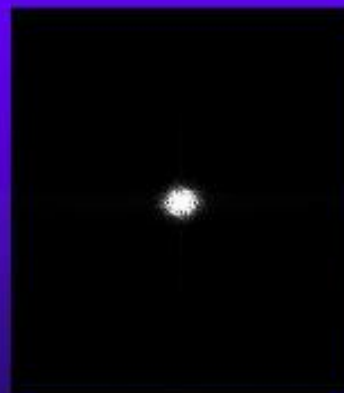
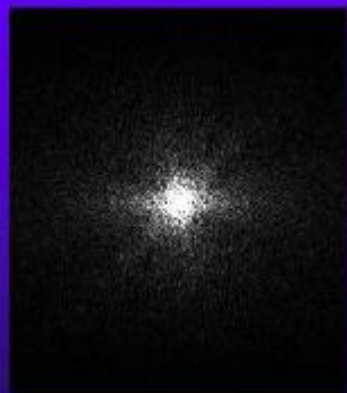
低通滤波

高通滤波

图像



对应的频谱图



用途：

图像变换广泛应用于图像增强、特征提取、图像恢复、图像压缩编码等方面。

1. **提取图像特征**：目标物边缘： $F(u, v)$ 高频分量。

2. **图像压缩**：正交变换能量集中，对集中(小)部分进行编码。

图像的频谱统计表明，图像的绝大部分信息集中在低频部分，高频部分的信息量极少(仅仅体现了图像的某些细节)。据此，图像压缩就可以做到有的放矢。

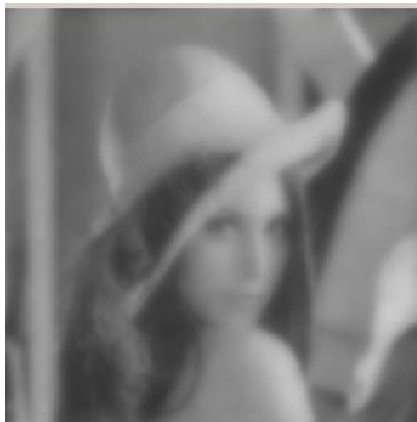
3. **图像增强**：低通滤波，平滑噪声；高通滤波，锐化边缘。



例: n 阶巴特沃斯低通滤波器 $n = 2$



原图(添加噪声)



$D_0=10$



$D_0=30$



$D_0=50$



$D_0=80$



$D_0=200$

D_0 为截止频率

常用的变换：

傅里叶变换、离散余弦变换、小波变换、离散K-L变换等。

傅里叶变换就是使用最广泛的一种变换，在图像处理中起着关键的作用，也是理解其它变换的基础。



离散傅立叶变换DFT

- 离散傅立叶变换 (Discrete Fourier Transform—简称DFT) 在数字信号处理和数字图像处理中应用十分广泛，它建立了离散时域和离散频域之间的联系。



二维离散傅里叶变换及反变换

图像是二维函数，因而图像处理中常用二维离散傅里叶变换。

◆ 图像的频率是表征图像中**灰度变化剧烈程度**的指标，是灰度在平面空间上的梯度。

（如：大面积的沙漠在图像中是一片灰度变化缓慢的区域，对应的频率值很低；而对于地表属性变换剧烈的边缘区域在图像中是一片灰度变化剧烈的区域，对应的频率值较高。）



-
- ◆ 从物理效果看，傅立叶变换是将图像从空间域转换到频率域，其逆变换是将图像从频率域转换到空间域。

换句话说，傅立叶变换的物理意义是**将图像的灰度分布函数变换为图像的频率分布函数**，傅立叶逆变换是将图像的频率分布函数变换为灰度分布函数。



设图像尺寸为 $M \times N$ 的函数 $f(x, y)$ ，其离散傅立叶变换为

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} f(x, y) \exp[-j2\pi(ux/M + vy/N)]$$
$$u = 0, 1, \dots, M-1, v = 0, 1, \dots, N-1$$

给出 $F(u, v)$ ，可通过反DFT得到 $f(x, y)$ ，

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \exp[j2\pi(ux/M + vy/N)]$$
$$x = 0, 1, \dots, M-1, y = 0, 1, \dots, N-1$$

注： u 和 v 是频率变量， x 和 y 是空间或图像变量



在数字图像处理中，图像一般取样为方形矩阵，即 $N \times N$ ，则其**傅立叶变换及其逆变换为**

$$\mathfrak{F}\{f(x, y)\} = F(u, v) = \frac{1}{N^2} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp\left(-j2\pi \frac{ux + vy}{N}\right)$$
$$\mathfrak{F}^{-1}\{F(u, v)\} = f(x, y) = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \exp\left[j2\pi \left(\frac{ux + vy}{N}\right)\right]$$



-
- ✓ 幅度或频率谱为

$$|F(u, v)| = [R(u, v)^2 + I(u, v)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$R(u, v)$ 和 $I(u, v)$ 分别是 $F(u, v)$ 的实部和虚部

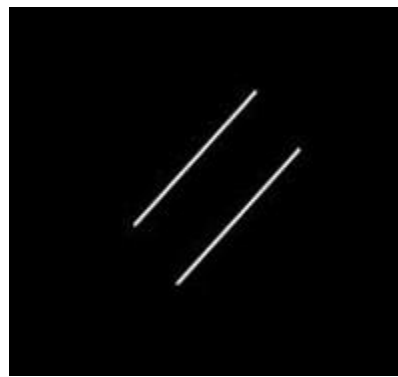
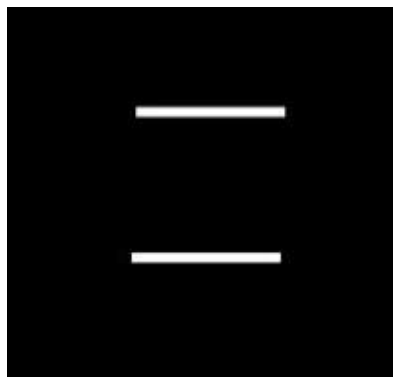
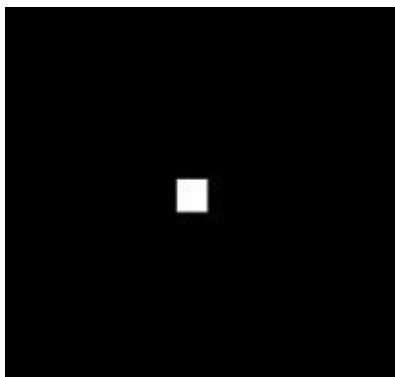
- ✓ 相角或相位谱为

$$\phi(u, v) = \arctan \left[\frac{I(u, v)}{R(u, v)} \right]$$

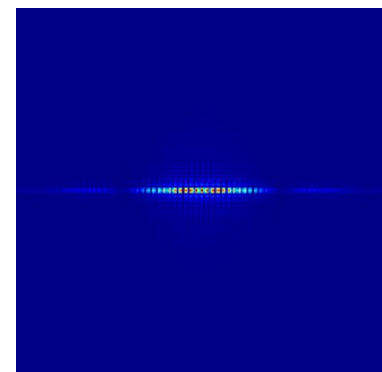
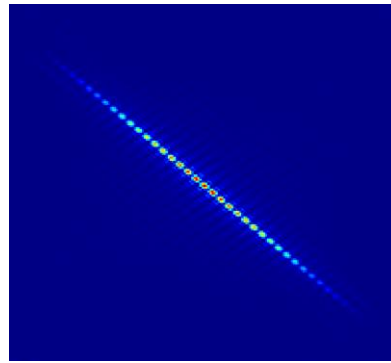
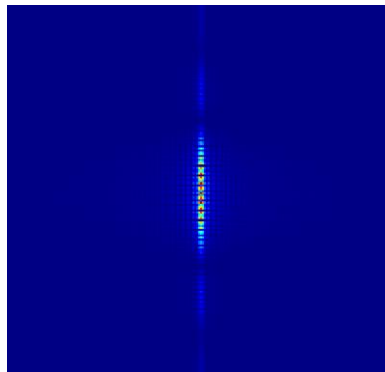
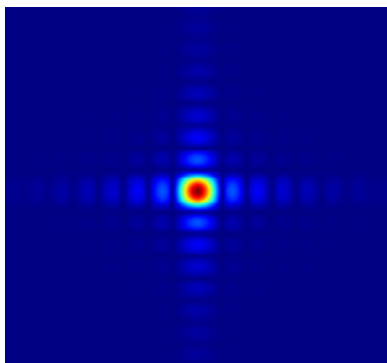


例：2-D图像函数及其傅里叶变换

图像

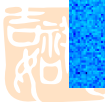
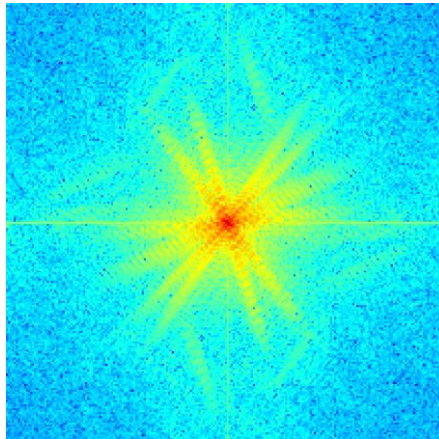
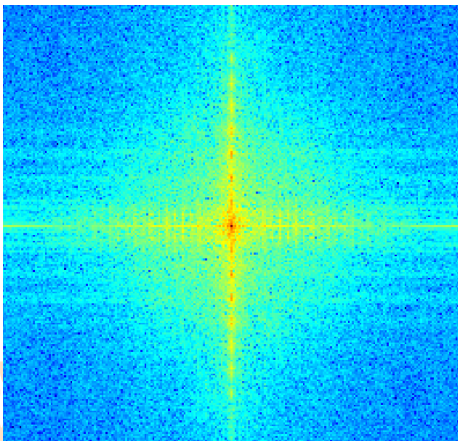


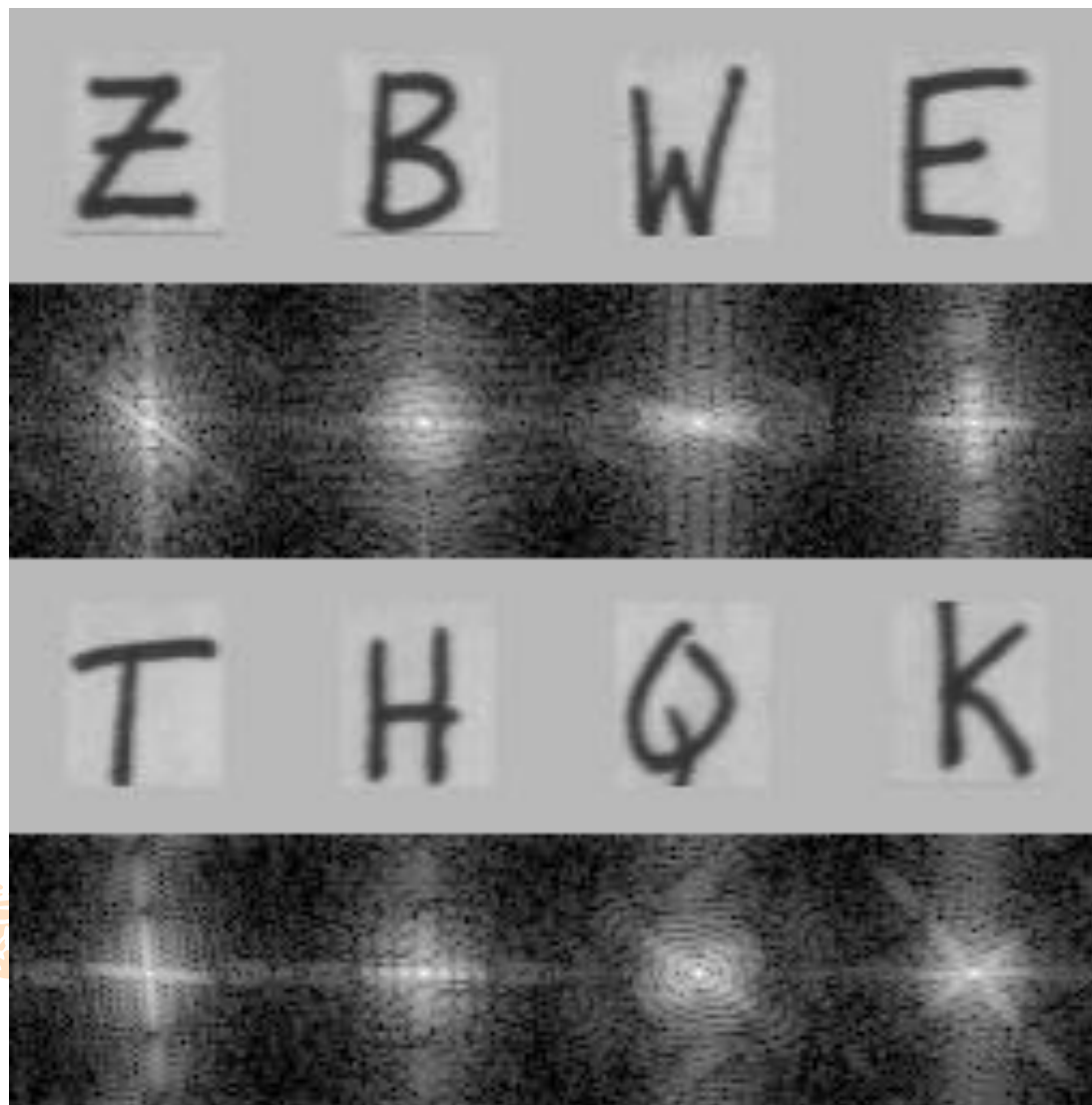
对应的
频谱





- 从幅度谱中我们可以看出明亮线反映出原始图像的灰度级变化，这正是图像的轮廓边。





从幅度谱中我们可以看出
明亮线和原始图像中对应的
轮廓线是垂直的。

如果原始图像中有圆形区
域那么幅度谱中也呈圆形
分布。

快速傅立叶变换(FFT)

- 离散傅立叶变换已成为数字信号处理的重要工具，然而，**它的计算量大**（涉及大量的复数乘法和加法），**运算时间长**，在某种程度上却限制了它的使用范围。
- 快速傅立叶变换**不是一种新的变换**，它是离散傅立叶变换的一种算法，它是在分析离散傅立叶变换中的**多余运算的基础上**，进而消除这些重复工作的思想指导下得到的。
- 快速算法**大大提高了运算速度**，在某些应用场合已**能作实时处理**，并且应用在控制系统中。



在Matlab中计算并可视化二维DFT

在实际应用中，DFT及其逆变换可以通过快速傅里叶变换（FFT）算法来实现。

MATLAB提供的快速傅立叶变换函数

1. `fft2`

`fft2`函数用于计算二维快速傅立叶变换，其语法格式为：

`B=fft2(I)`

`B=fft2(I,m,n)`

其中`B=fft2(I)`返回图像I的二维fft变换矩阵，输入图像I和输出图像B大小相同。

`B=fft2(I, m, n)`通过对图像 I 剪切或补零，按用户指定的点数计算fft，返回矩阵的大小为`m*n`。

很多MATLAB图像显示函数无法显示复数图像，为了观察图像傅里叶变换后的结果，应用图像的方式显示变换结果的对数幅度值 $\log|F(u,v)|$ 。

```
f=fft2(A);
```

```
fc=fftshift(f);
```

%将变换后的图像频谱中心从矩阵的原点移到矩阵的中心

```
imshow(log(abs(fc)),[ ]);
```

%imshow(I,[low,high]):用于将非图像数据以灰度图的形式显示出来，[low,high]是灰度级范围。由于傅里叶变换后图像灰度范围与傅立叶变换之前不同，所以用[]作为参数。

```
>> a=[1 2;3 4]
```

```
a =
```

```
1 2
3 4
```

```
>> fftshift(a)
```

```
ans =
```

```
4 3
2 1
```

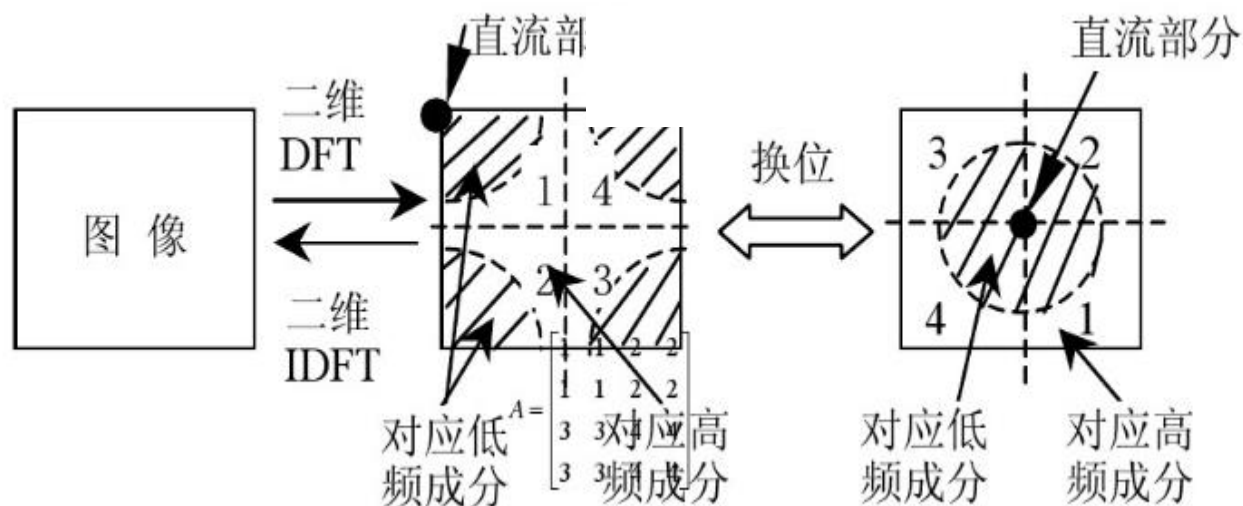
```
A =
```

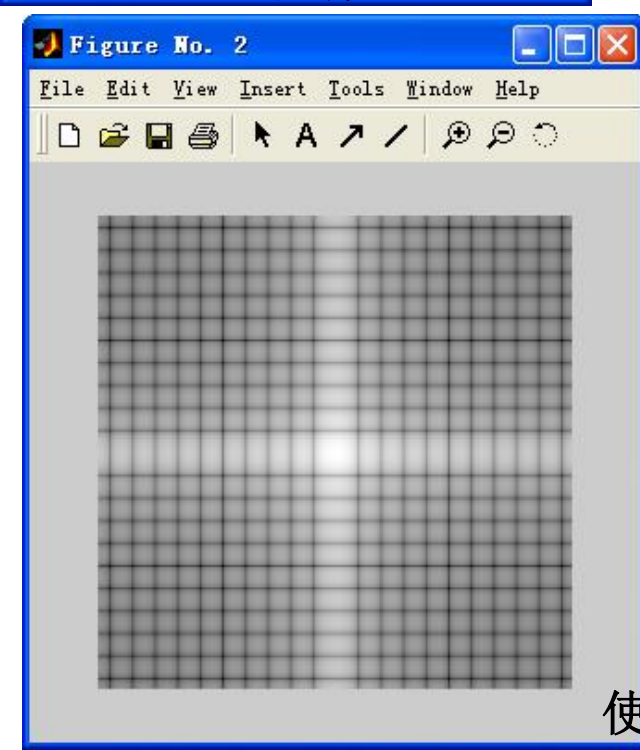
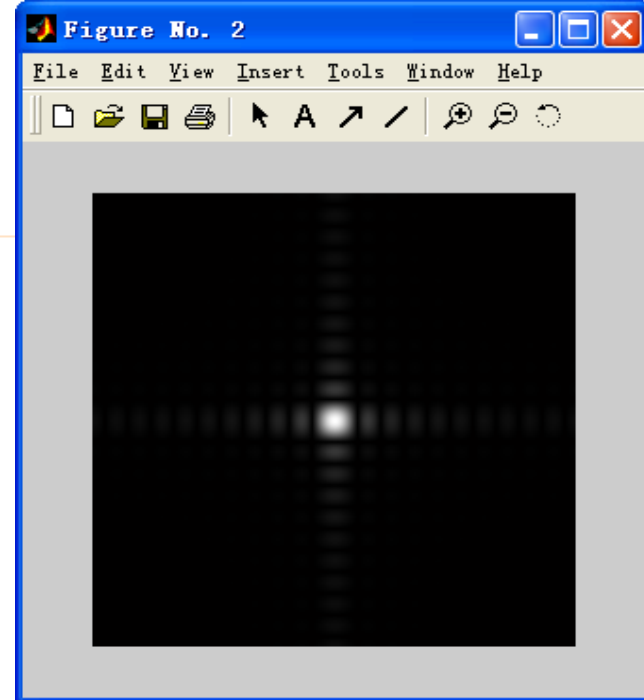
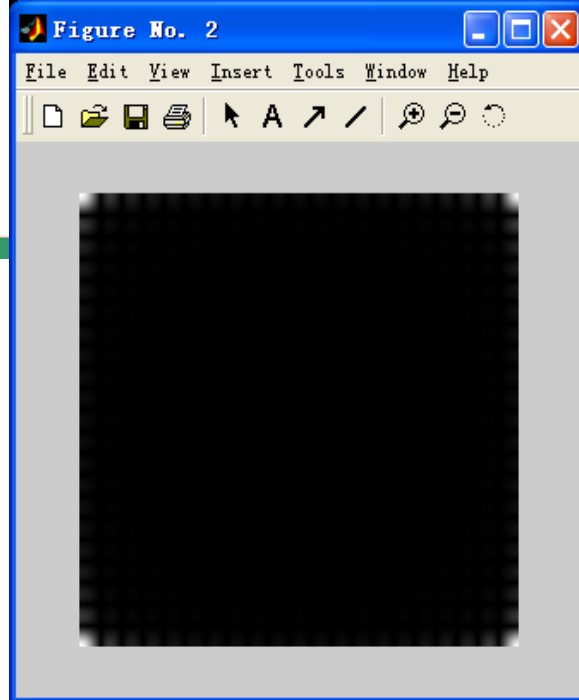
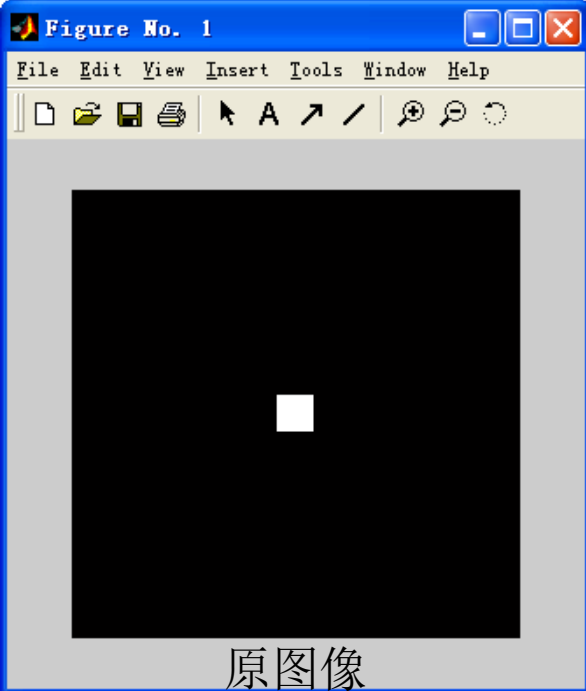
```
1 2 3 4
5 6 7 8
9 10 11 12
13 14 15 18
```

```
>> B=fftshift(A)
```

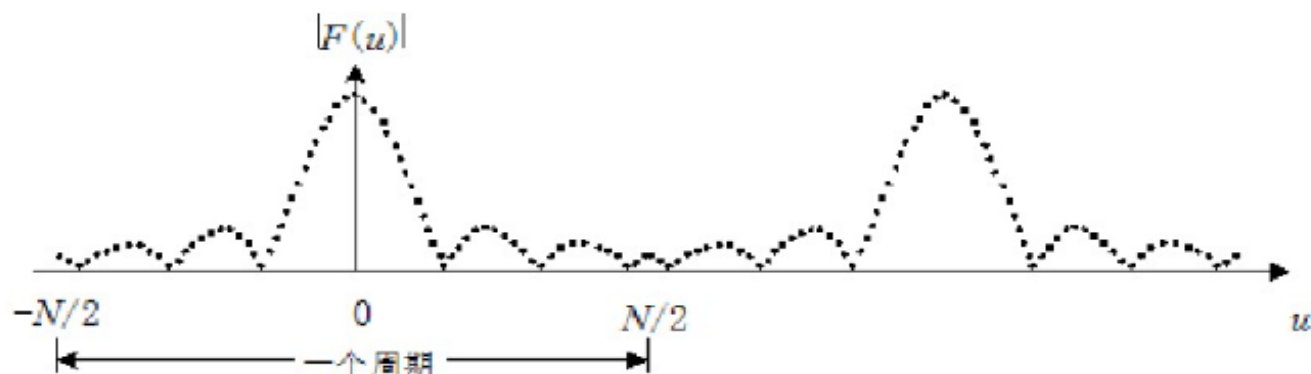
```
B =
```

```
11 12 9 10
15 18 13 14
3 4 1 2
7 8 5 6
```

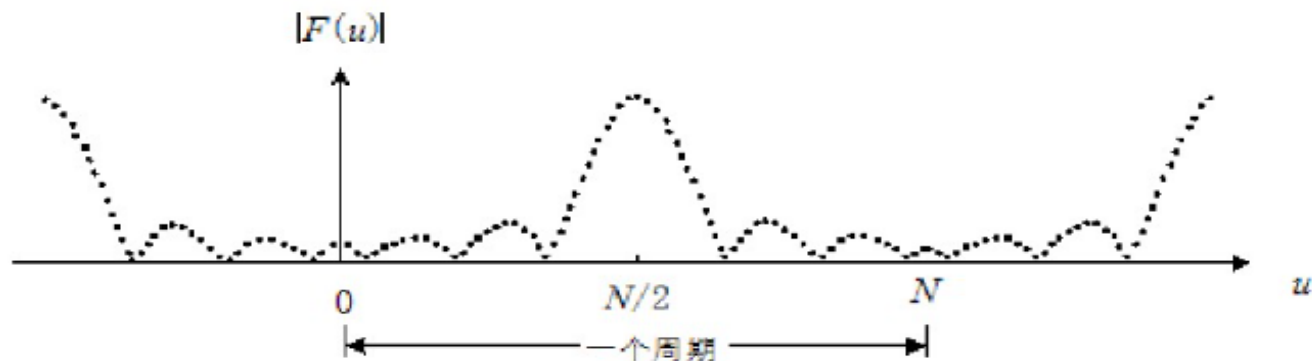




1. 方法1: $\lg|F(u,v)|$



(a) 在 $[0, N-1]$ 周期中有两个背靠背半周期

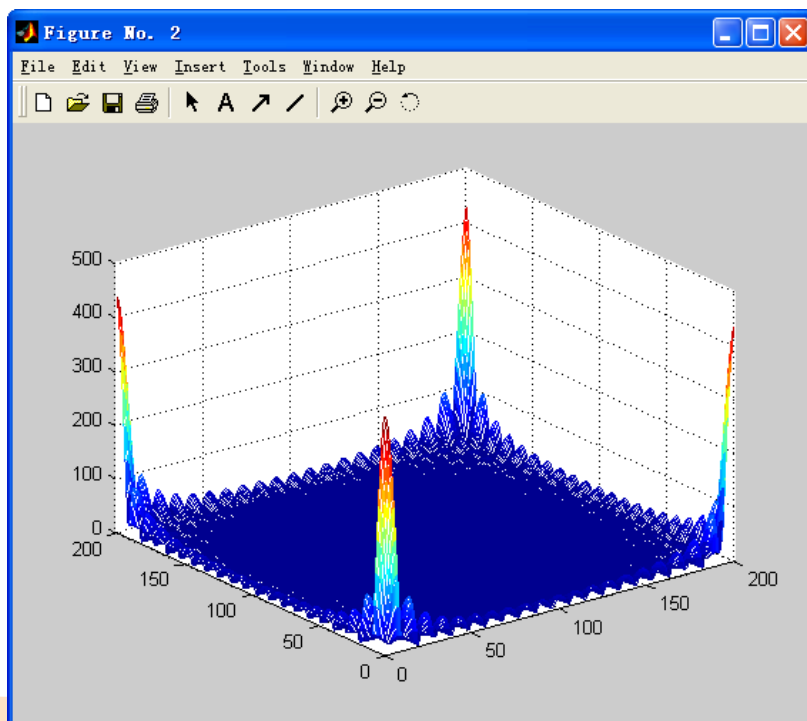


(b) 同一区间内有一个完整的周期

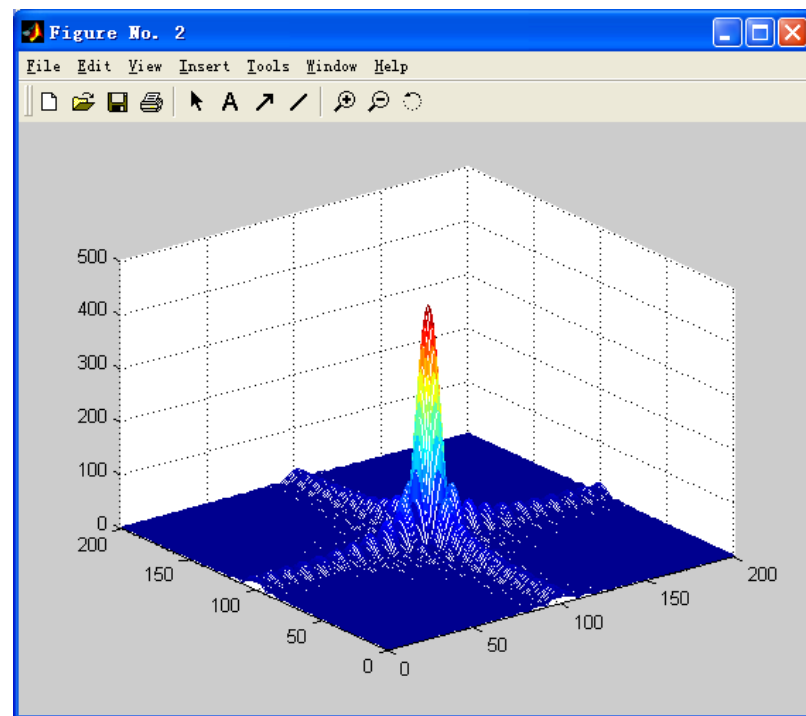
这就意味着，坐标原点移到了频谱图像的中间位置，这一点十分重要，尤其是对以后的图像显示和滤波处理。

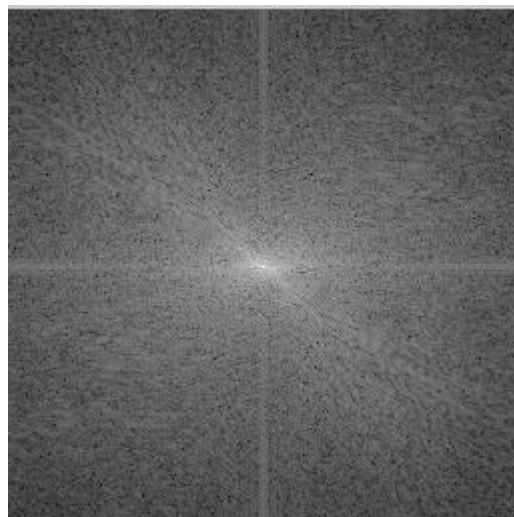
2. 三维显示

频谱的原点在 $(0, 0)$



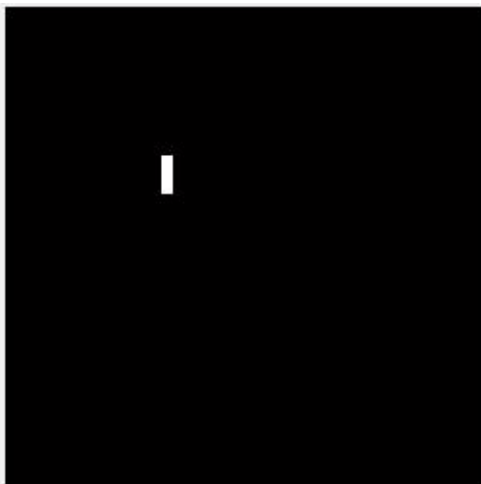
频谱的原点在 $(N/2, N/2)$





原始图像及其傅里叶谱



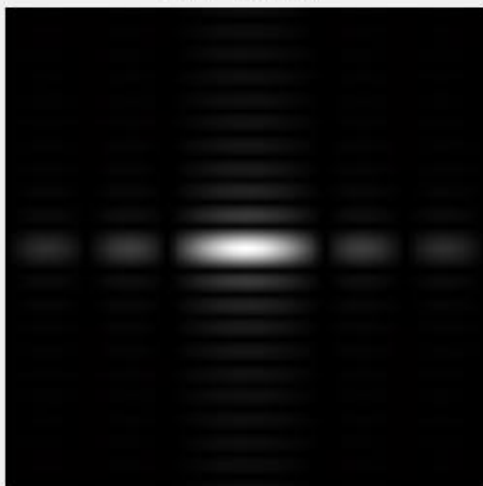


(a) 原图像



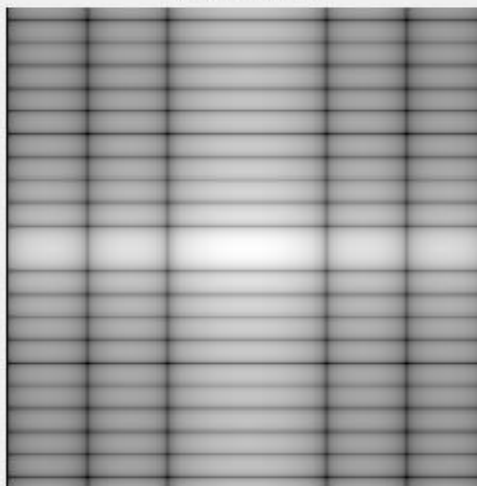
(b) 傅里叶频谱（无平移）

```
F=fft2(A);  
Imshow(abs(F),[ ])
```



(c) 居中的频谱

```
B=fft2(A);  
F=fftshift(B);  
Imshow(abs(F),[ ])
```

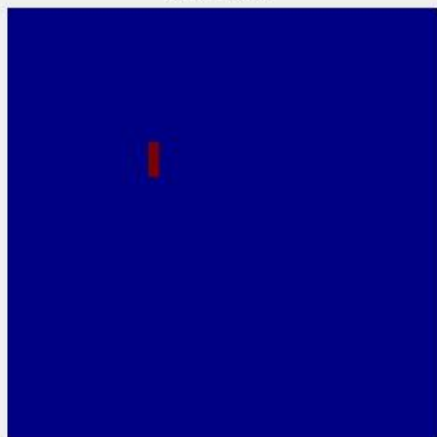


(d) 使用对数变换进行视觉增强后的频谱

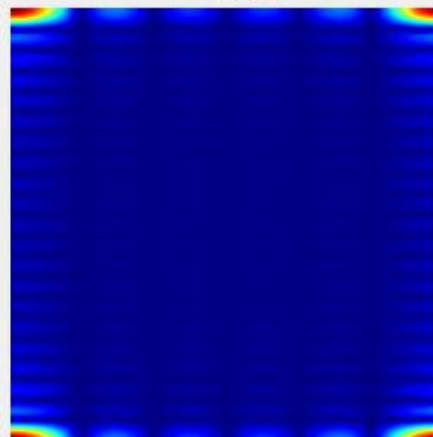
```
B=fft2(A);  
F=fftshift(B);  
S=log(abs(F));  
Imshow(log(abs(F)),[ ])
```



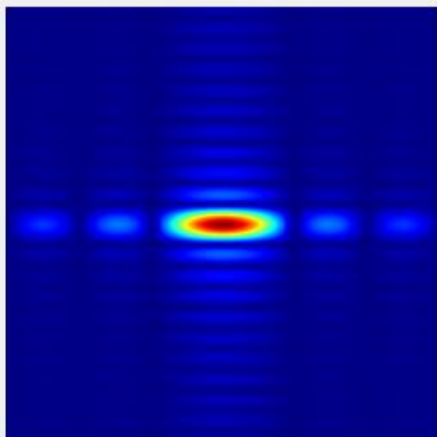
原始图像



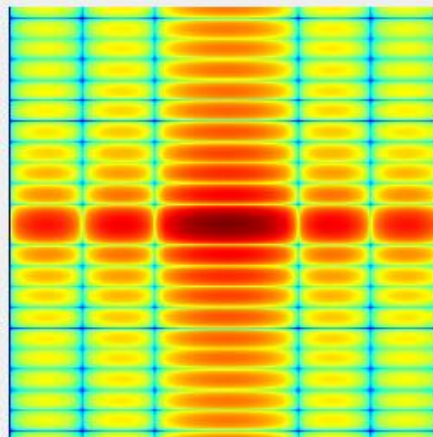
原始频谱



居中的频谱



增强的频谱



二维离散傅立叶变换的性质

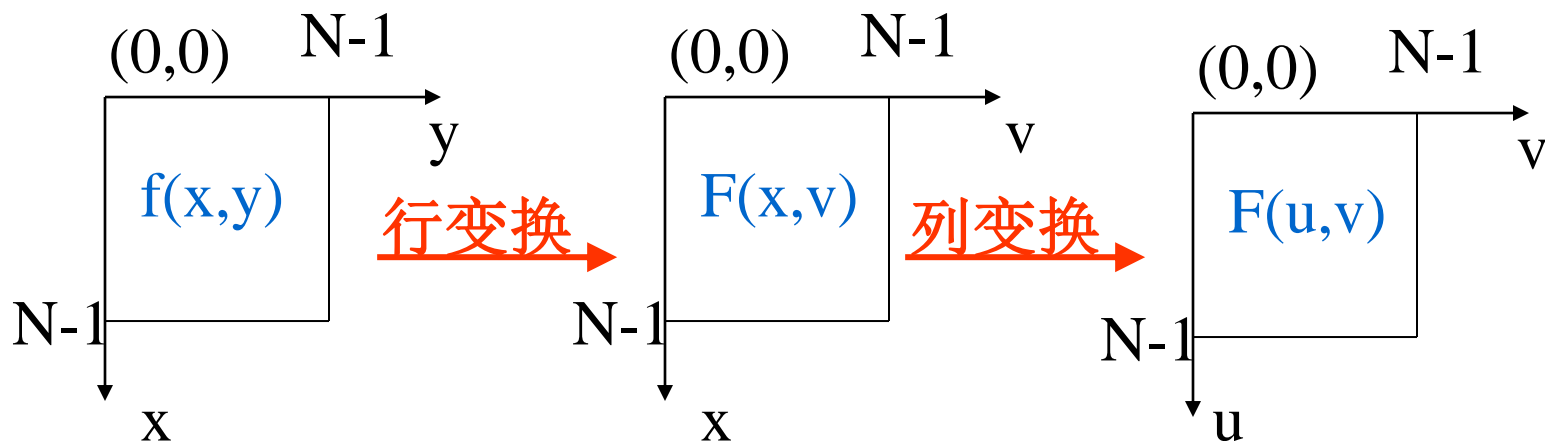
二维傅里叶变换有很多重要性质，例如可分离性、平移性、周期性、共轭对称性、旋转性、满足分配律、可进行尺度变换(缩放)、卷积等等，这些性质使得在频域中对图像进行操作变得很简单，从而简化了整个处理过程，因此在图像处理中都有重要应用。



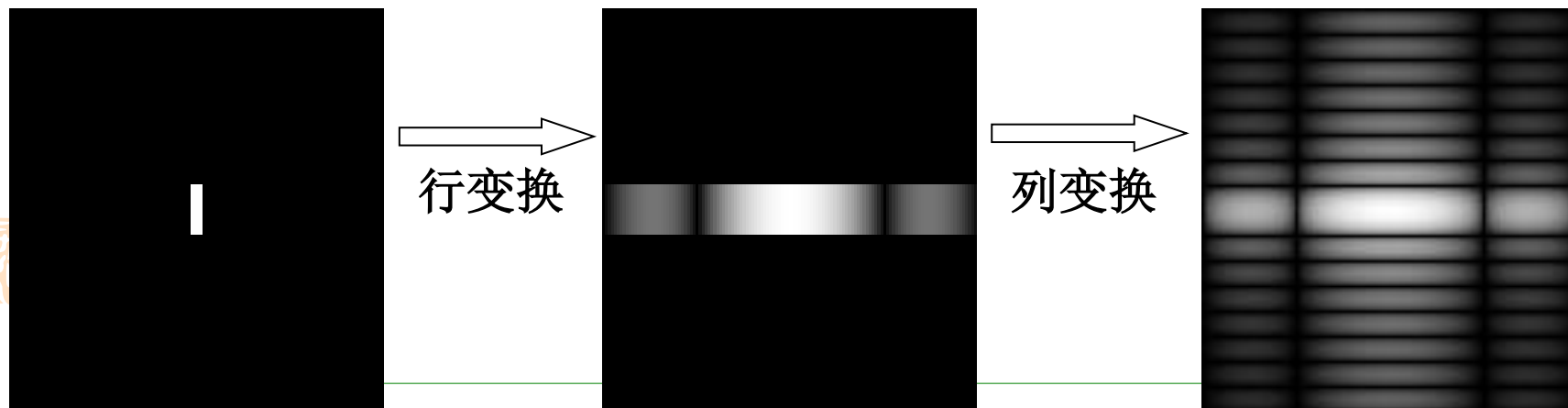
(1) 可分离性

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \frac{1}{N^2} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp\left(-j2\pi \frac{ux + vy}{N}\right) \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{x=0}^{N-1} \exp\left(-j2\pi \frac{ux}{N}\right) \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp\left(-j2\pi \frac{vy}{N}\right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} F(x, v) \exp\left(-j2\pi \frac{ux}{N}\right) \end{aligned}$$

从上式可以看出，一个二维傅立叶变换可分解成两个方向的一维变换顺序执行。即一个二维傅立叶变换或反变换都可以分解为两步进行，其中每一步都是一个一维傅立叶变换或反变换。



- ✓ 先沿输入图像的每一行计算一维变换
- ✓ 再沿中间结果的每一列计算一维变换



(2) 平移性

在空域中，图像原点平移到 (x_0, y_0) 时，其对应的频谱 $F(u, v)$ 要乘上一个负的指数项 $e^{-j2\pi(ux_0+vy_0)/N}$

$$f(x-x_0, y-y_0) \Leftrightarrow F(u, v) \exp\left(-j2\pi \frac{ux_0 + vy_0}{N}\right)$$

在频域中，原点平移到 (u_0, v_0) 时，其对应的 $f(x, y)$ 要乘上一个正的指数项 $e^{j2\pi(u_0x+v_0y)/N}$

$$f(x, y) \exp\left(j2\pi \frac{u_0x + v_0y}{N}\right) \Leftrightarrow F(u-u_0, v-v_0)$$

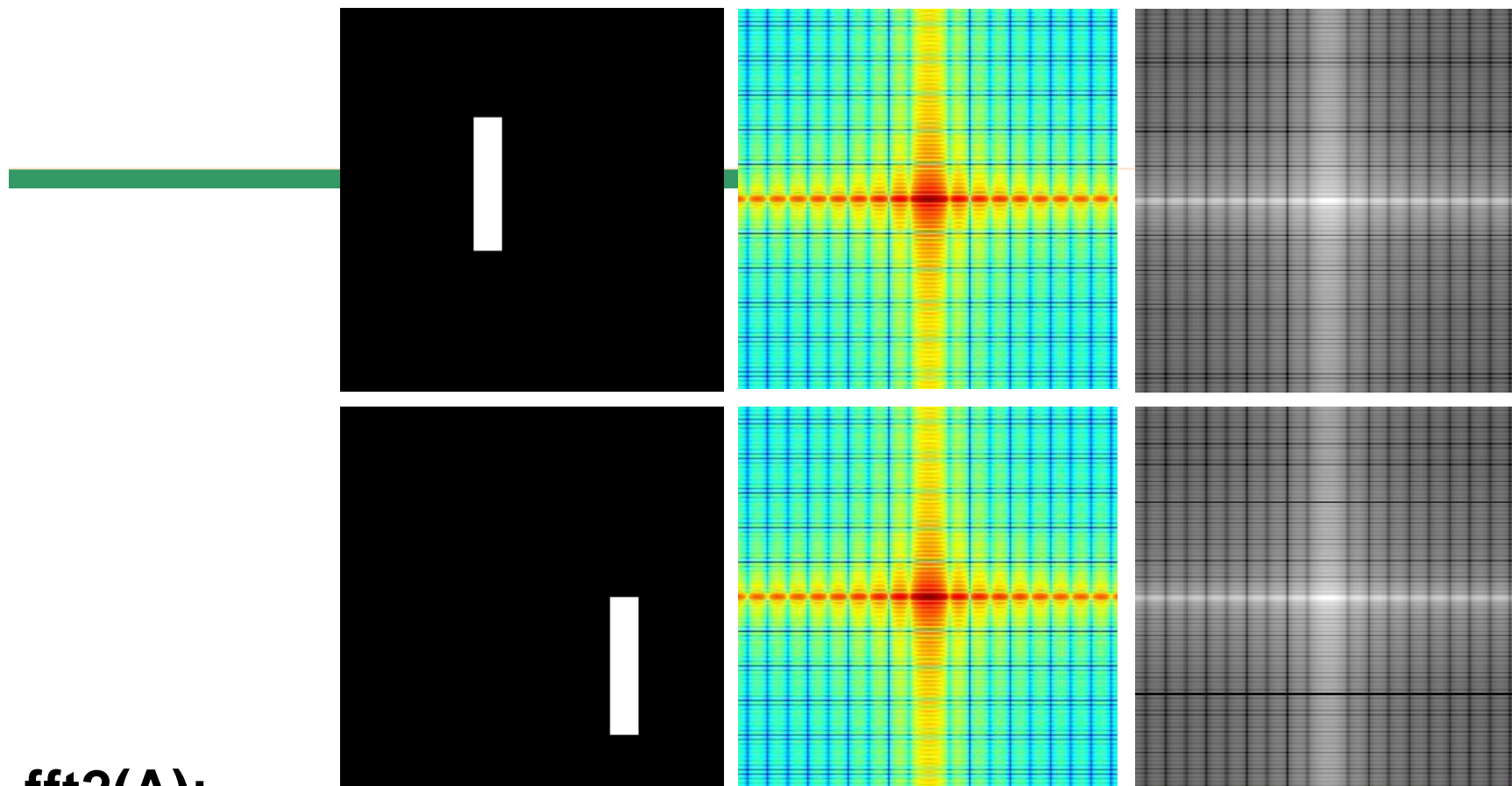


也就是说，当空域中 $f(x, y)$ 产生移动时，在频域中只发生相移，而傅立叶变换的幅值不变。

$$| F(u, v)e^{-j2\pi(ux_0+vy_0)} | = | F(u, v) |$$

反之，当频域中 $F(u, v)$ 产生移动时，相应的 $f(x, y)$ 在空域中也只发生相移，而幅值不变。





```
f=fft2(A);  
fc=fftshift(f);  
figure,imshow(log(abs(fc)),[ ]);  
colormap(jet);
```

傅里叶变换的平移不变性

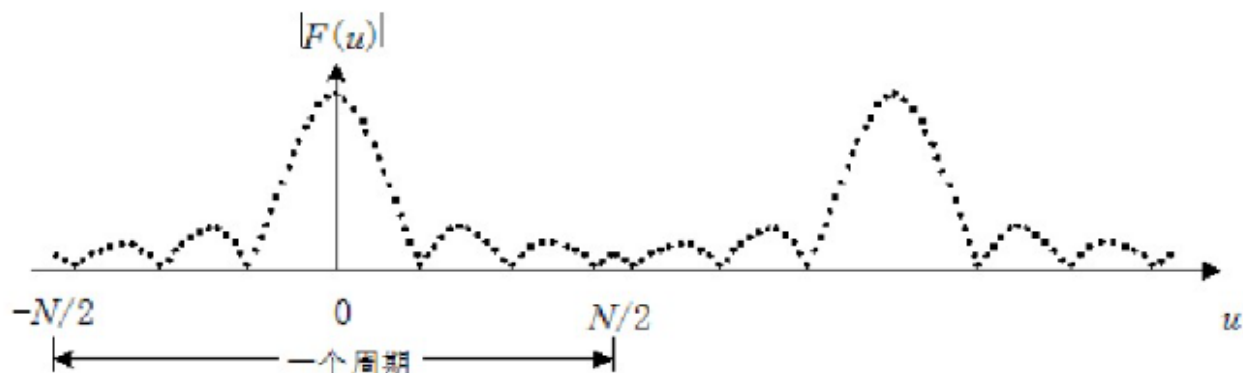


在数字图像处理中，我们常常将 $F(u, v)$ 的原点移到 $N \times N$ 频域方阵的中心，以使能清楚地分析傅立叶变换谱的情况，只需令： $u_0 = v_0 = N/2$ ，则

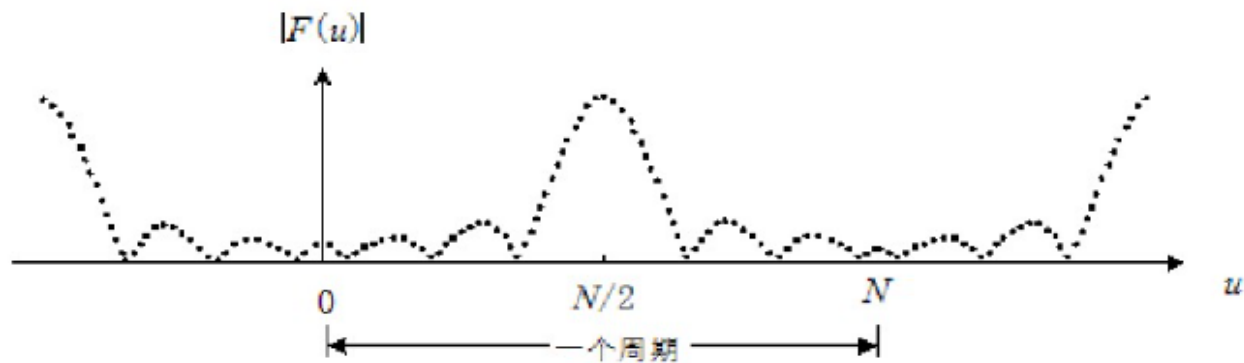
$$e^{j2\pi(u_0x+v_0y)/N} = e^{j\pi(x+y)} = (-1)^{(x+y)}$$
$$\Rightarrow f(x, y)(-1)^{(x+y)} \Leftrightarrow F\left(u - \frac{N}{2}, v - \frac{N}{2}\right)$$

即，如果将图像频谱的原点从起点 $(0, 0)$ 移到图像中心点 $(N/2, N/2)$ ，只要 $f(x, y)$ 乘上 $(-1)^{(x+y)}$ 因子进行傅立叶变换即可。





(a) 在 $[0, N-1]$ 周期中有两个背靠背半周期



(b) 同一区间内有一个完整的周期

这就意味着，坐标原点移到了频谱图像的中间位置，这一点十分重要，尤其是对以后的图像显示和滤波处理。

```
f=fft2(img1);  
f=fftshift(f);  
imshow(log(abs(f)),[ ]);
```

```
[m,n]=size(img1);  
for i=1:m  
    for j=1:n  
        imgnew(i,j)=((-1)^(i+j))*img1(i,j);  
    end  
end  
f=fft2(imgnew);  
imshow(log(abs(f)),[ ]);
```

(3) 周期性和共轭对称性

离散傅里叶变换和逆变换具有周期性和共轭对称性，它们均是以N为周期的，傅里叶变换对的周期性可表示为

$$F(u, v) = F(u + N, v) = F(u, v + N) = F(u + mN, v + nN)$$

$$f(x, y) = f(x + mN, y + nN)$$

$$m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

当u和v取无限组整数值时， $F(u, v)$ 将出现周期重复性，故用 $F(u, v)$ 以反变换求 $f(x, y)$ ，只需 $F(u, v)$ 中一个完整周期即可。对 $f(x, y)$ 类似。



如果 $f(x, y)$ 是实函数，则它的傅里叶变换具有共轭对称性

$$F(u, v) = F^*(-u, -v)$$

$$|F(u, v)| = |F(-u, -v)|$$

其中， $F^*(u, v)$ 为 $F(u, v)$ 的复共轭。

复习：当两个复数实部相等, 虚部互为相反数时, 这两个复数叫做互为共轭复数.

共轭对称性说明变换后的幅值以原点为中心对称。由于具有这个特性，在求一个周期内的值时，只需要求出半个周期，另外半个周期也就确定了，这大大地减少了计算量。

(4) 旋转不变性

如果引入极坐标 $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ $\begin{cases} u = \omega \cos \varphi \\ v = \omega \sin \varphi \end{cases}$

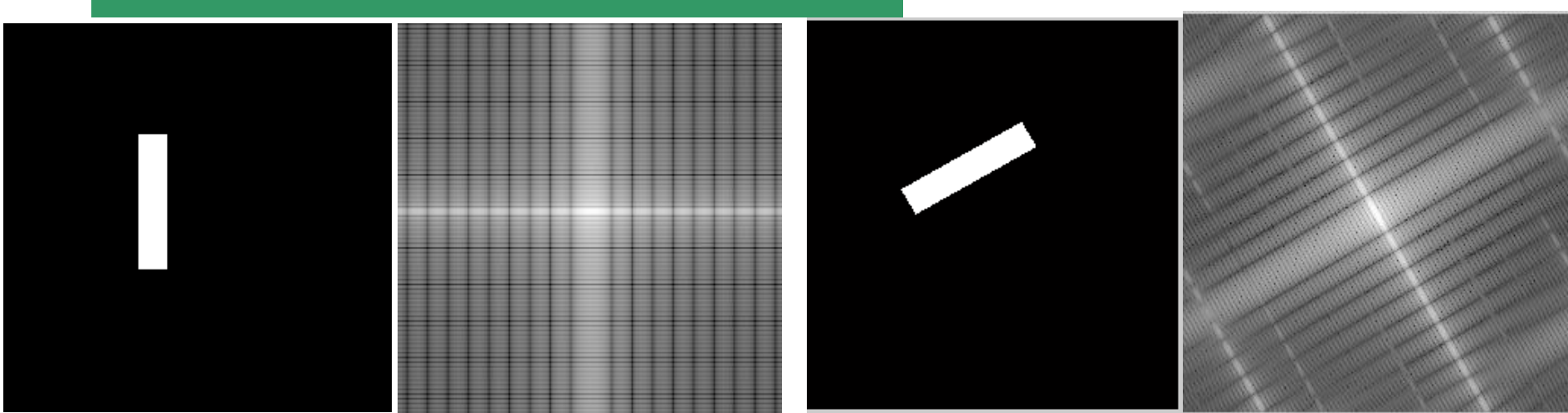
则 $f(x, y)$ 和 $F(u, v)$ 分别变为 $f(r, \theta)$ 和 $F(\omega, \varphi)$ 。

因此，在极坐标系中，存在以下变换对

$$f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(\omega, \varphi + \theta_0)$$

■ 该式表明，如果空间域函数 $f(x, y)$ 旋转 θ_0 角度后，相应的傅立叶变换 $F(u, v)$ 在频域中也旋转同一 θ_0 角。

■ 反之， $F(u, v)$ 在频域中旋转 θ_0 角，其反变换 $f(x, y)$ 在空间域中也旋转 θ_0 角。



傅里叶变换的旋转不变性

```
global img_src;  
B=imrotate(img_src,300,'bilinear','crop');  
figure,imshow(B);  
f=fft2(B);  
fc=fftshift(f);  
figure,imshow(log(abs(fc)),[ ]);
```


(5) 分配性和比例性

傅立叶变换的分配性表明，傅立叶变换和反变换对于加法可以分配，而对乘法则不行，即

$$\mathfrak{F}\{f_1(x, y) + f_2(x, y)\} = \mathfrak{F}\{f_1(x, y)\} + \mathfrak{F}\{f_2(x, y)\}$$

$$\mathfrak{F}\{f_1(x, y) \cdot f_2(x, y)\} \neq \mathfrak{F}\{f_1(x, y)\} \cdot \mathfrak{F}\{f_2(x, y)\}$$



傅立叶变换的比例性表明，对于二个标量a和b，有

$$af(x, y) \Leftrightarrow aF(u, v)$$

$$f(ax, by) \Leftrightarrow \frac{1}{|ab|} F\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right)$$

在空间比例尺度的展宽，相应于频域中比例尺度的压缩，其幅值也减少为原来的 $1/|ab|$ 。



(6) 平均值性质

定义二维离散函数的平均值为 $\overline{f(x, y)} = \frac{1}{N^2} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)$

将 $u=v=0$ 代入二维离散傅立叶公式，可得

$$F(0,0) = \frac{1}{N^2} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)$$

比较上面两式，可看出

$$\overline{f(x, y)} = F(0,0)$$

若求二维离散信号 $f(x,y)$ 的平均值，只需算出相应的傅立叶变换 $F(u,v)$ 在原点的值 $F(0,0)$ 。

(7) 卷积定理

卷积定理是研究两个函数的傅立叶变换之间的关系。

大小为 $M \times N$ 的两个函数 $f(x, y)$ 和 $h(x, y)$ 的离散卷积

$$f(x, y) * h(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) h(x-m, y-n)$$

卷积定理

$$f(x, y) * h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) H(u, v)$$

$$f(x, y) h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) * H(u, v)$$

设 $f(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)$ $h(x, y) \Leftrightarrow H(u, v)$

- 它表明两个二维函数在空间域中的卷积可用求其相应的两个傅立叶变换乘积的逆变换而得。
- 反之，在频域中的卷积可用空间域中乘积的傅立叶变换而得。
- 应用卷积定理明显的好处是避免了直接计算卷积的麻烦，它只需要先算出各自的频谱，然后相乘，再求其逆变换，即可得到卷积。

指出傅立叶变换一个主要好处：与其在一个域中作不直观的和难懂的卷积，不如在另外一个域中作乘法，可以达到相同的效果。



离散K-L变换

- 又称为霍特林 (Hotelling) 变换
- 以图像的统计性质为基础的
- 变换核矩阵由图像阵列的协方差矩阵的特征值和特征向量所决定—又称为特征向量变换



小波变换

- 广泛应用：信号处理、图像处理、模式识别、量子物理、非线性科学领域
- 原则上，凡传统使用Fourier分析的方法，都可以用小波分析代替
- 与Fourier变换、Gabor变换相比，小波变换是空间（时间）和频率的局部变换
- 伸缩和平移等运算功能可对函数或信号进行多尺度的细化分析，解决了Fourier变换不能解决的许多困难，对高频采取逐渐精细的时域或空域步长，从而可以聚焦到分析对象的任意细节—数学显微镜

