

1-03 函数

上页

下页

返回

微积分研究的是客观世界的数量反映——**函数**的性质、取值规律和函数值的变化情况。

从根本上说，微积分这一学说的诞生的基础是——**笛卡儿的解析几何**。

解析几何的学说使得对**函数**的讨论可以“数”、“形”结合。

1. 函数定义：

函数__五要素：自变量,因变量,定义域
domain,值域*range*,对应关系*function*.

两个函数相同 \Leftrightarrow 对应关系相同 &
定义域相同.

例如, $y = \log_2 2^x$ 与 $y = x$ 相同,

$s = \sqrt{t^2}$ 与 $y = |x|$ 相同,

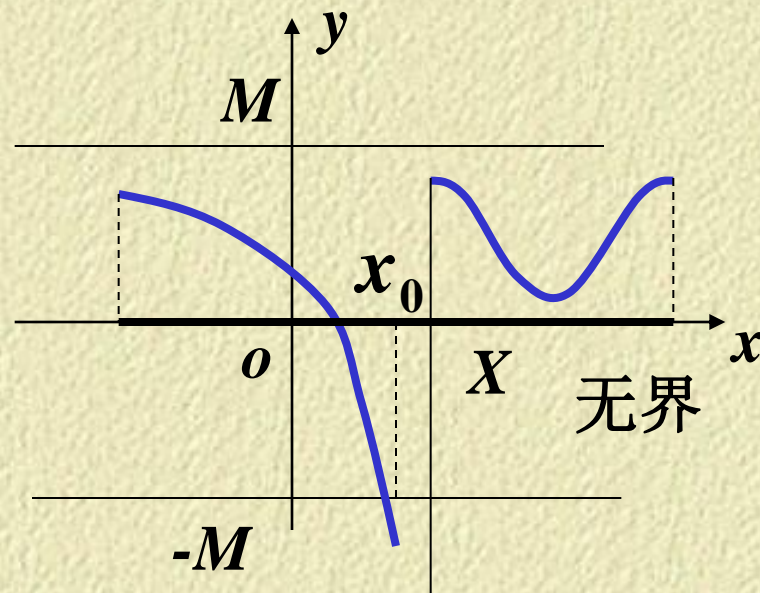
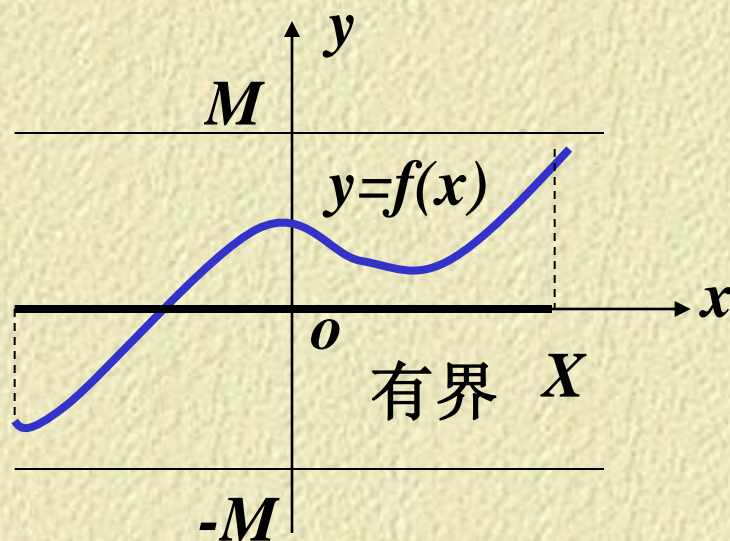
$y = 2^{\log_2 x}$ 与 $y = \frac{x^2}{x}$ 不同.

2. 函数的几何特性:

函数的这四个几何特性都是**整体特性**.

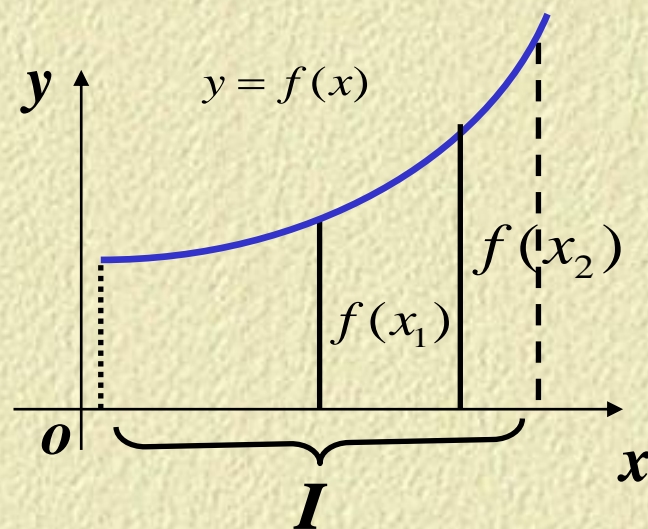
(1). 函数的有界性:

若 $X \subset D, \exists M > 0, \forall x \in X, \text{有 } |f(x)| \leq M$ 成立, 则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界. 否则称无界.



(2).函数的单调性:

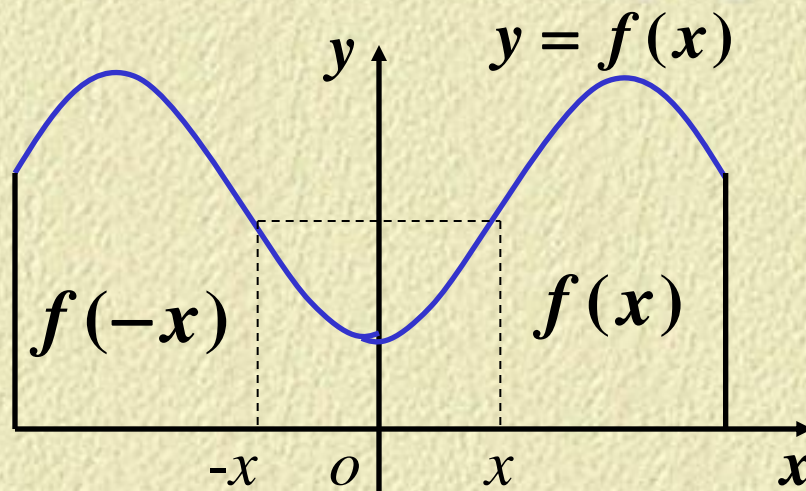
设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \in D$,
如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2 ,
当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有(1) $f(x_1) \leq f(x_2)$, 则
称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的;



设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \in D$,
如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2 , 当 $x_1 < x_2$
时, 恒有 (1) $f(x_1) < f(x_2)$ [$f(x_1) > f(x_2)$], 则称
函数 $f(x)$ 在区间 I 上是严格单调增加 [严格单
调减少] 的。

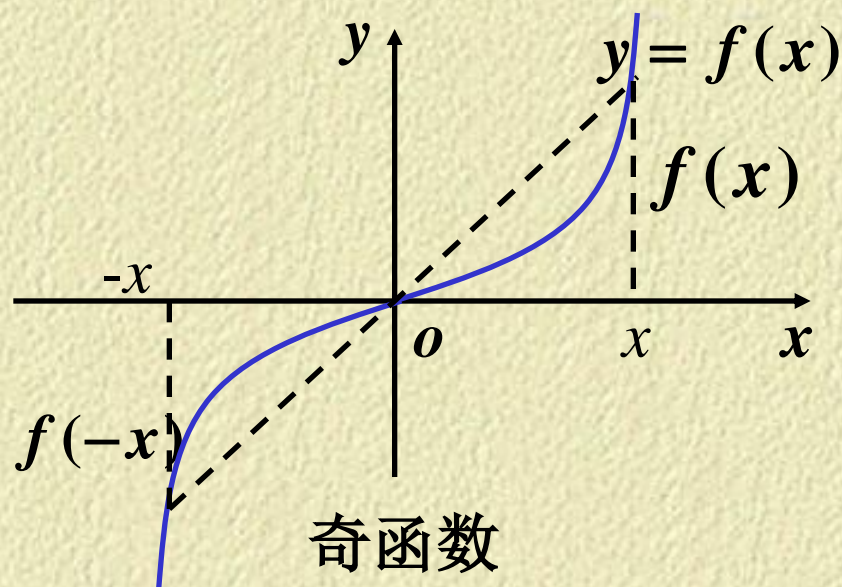
(3).函数的奇偶性:

设 D 关于原点对称, 对于 $\forall x \in D$, 有
 $f(-x) = f(x)$ 称 $f(x)$ 为偶函数;



偶函数

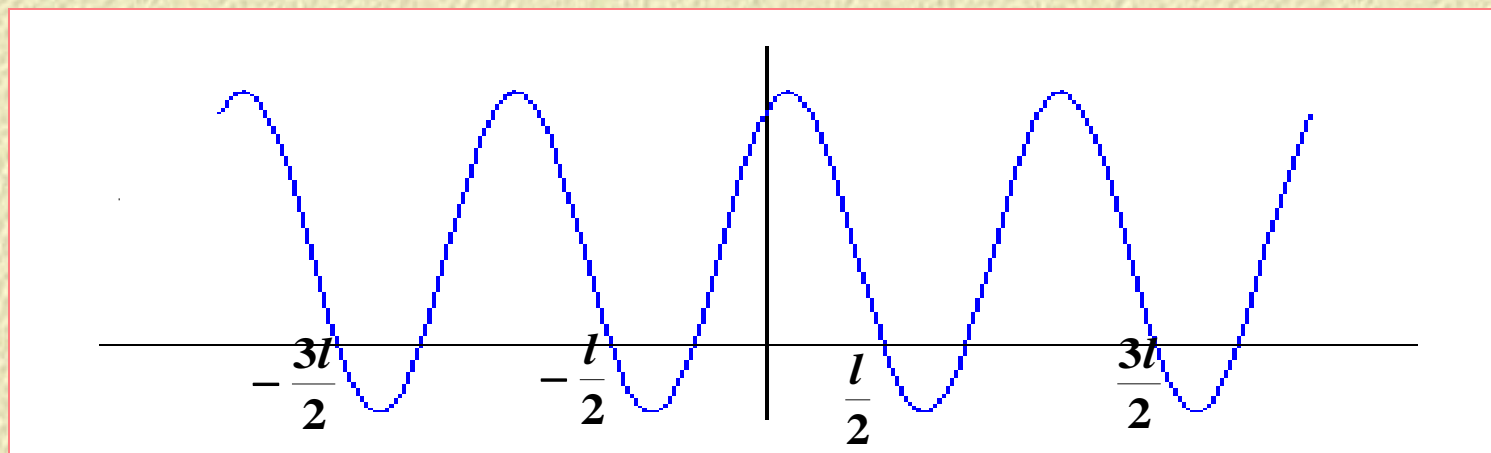
设 D 关于原点对称, 对于 $\forall x \in D$, 有
 $f(-x) = -f(x)$ 称 $f(x)$ 为奇函数;



(4).函数的周期性:

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在一个不为零的数 l , 使得对于任一 $x \in D, (x \pm l) \in D$ 且 $f(x+l) = f(x)$ 恒成立. 则称 $f(x)$ 为周期函数, l 称为 $f(x)$ 的周期.

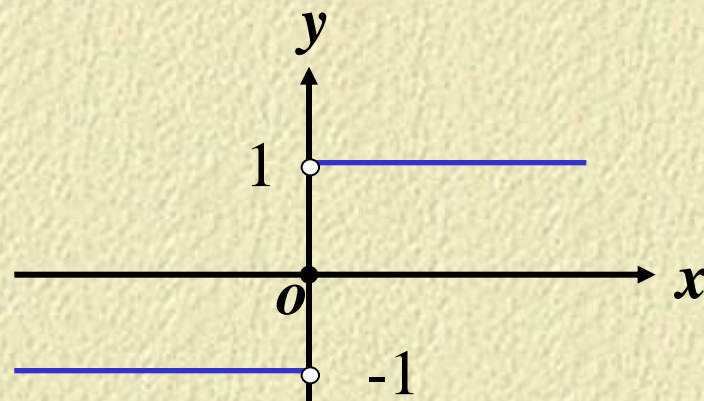
(通常说周期函数的周期是指其最小正周期).



3.特殊的函数举例

(1).符号函数

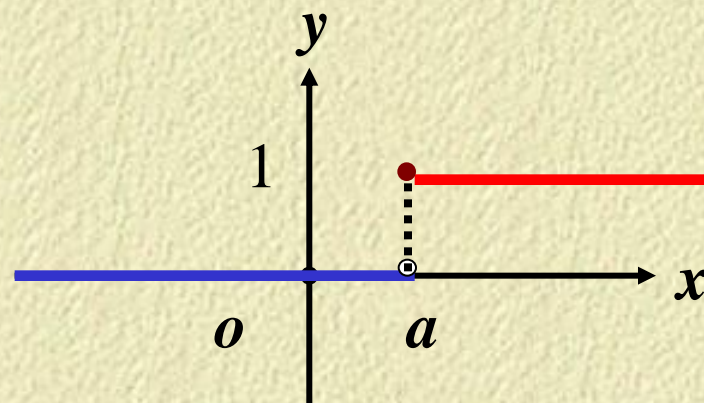
$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{当 } x > 0 \\ 0 & \text{当 } x = 0 \\ -1 & \text{当 } x < 0 \end{cases}$$



$$x = \operatorname{sgn} x \cdot |x|$$

(2). *Heaviside* 函数

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ 1, & x \geq a \end{cases}$$



Heaviside 是一位英国的电子工程师,他用 *Heaviside* 函数来描述事物由量变到质变的一个过程与状态.

(3). 黎曼(Riemann)函数

$$x \in [0, 1],$$

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{当 } x = \frac{p}{q} \left(p, q \in \mathbb{Z}^+, p, q \text{ 互质} \right) \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } x = 0, 1 \text{ 或 } (0, 1) \text{ 内的无理数时} \end{cases}$$

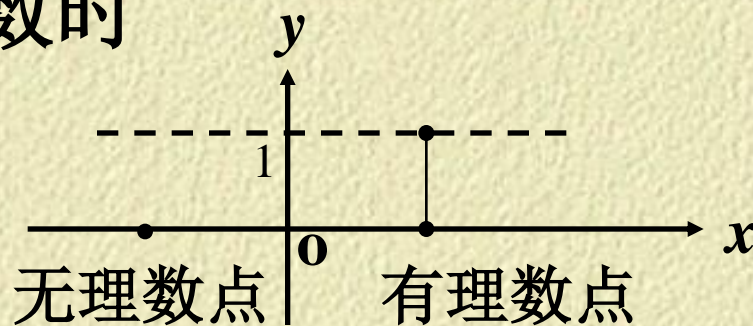
爆米花
函数

(4). 狄利克雷(Dirichlet)函数

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{当 } x \text{ 是有理数时} \\ 0 & \text{当 } x \text{ 是无理数时} \end{cases}$$

其定义域为 $D_f = (-\infty, +\infty)$,

其值域为 $R_f = \{0, 1\}$.



上页

下页

返回

(5). 指数函数

$$a > 0, a \neq 1, x \in \mathbb{R},$$

$$x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, q \in \mathbb{Z}^+, p \in \mathbb{Z}, a^x = a^{\frac{p}{q}} = \left(\sqrt[q]{a} \right)^p,$$

$$\sqrt[q]{a} = b, b > 0, b^q = a.$$

$$a^x = \begin{cases} a^x, x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, q \in \mathbb{Z}^+, p \in \mathbb{Z} \\ \sup \{ a^r : r \in \mathbb{Q}, r < x, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \}, a > 1 \\ \inf \{ a^r : r \in \mathbb{Q}, r < x, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \}, a < 1 \end{cases}$$

由确界原理得到

上页

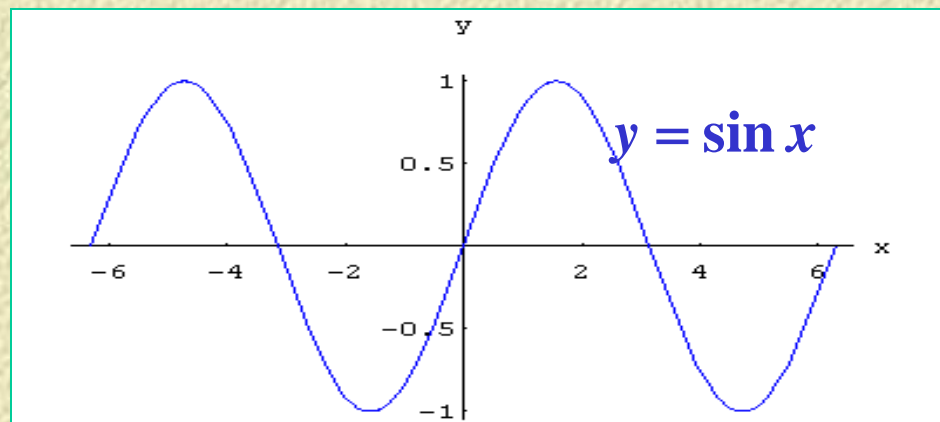
下页

返回

(6).三角函数

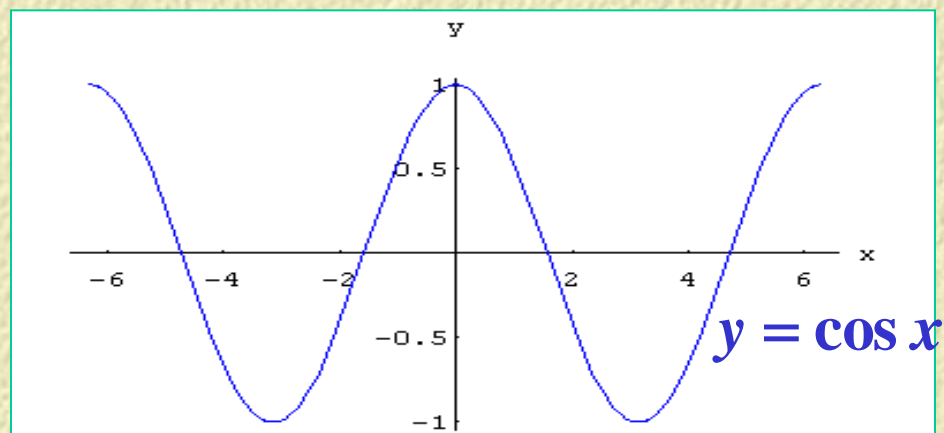
正弦函数

$$y = \sin x$$



余弦函数

$$y = \cos x$$



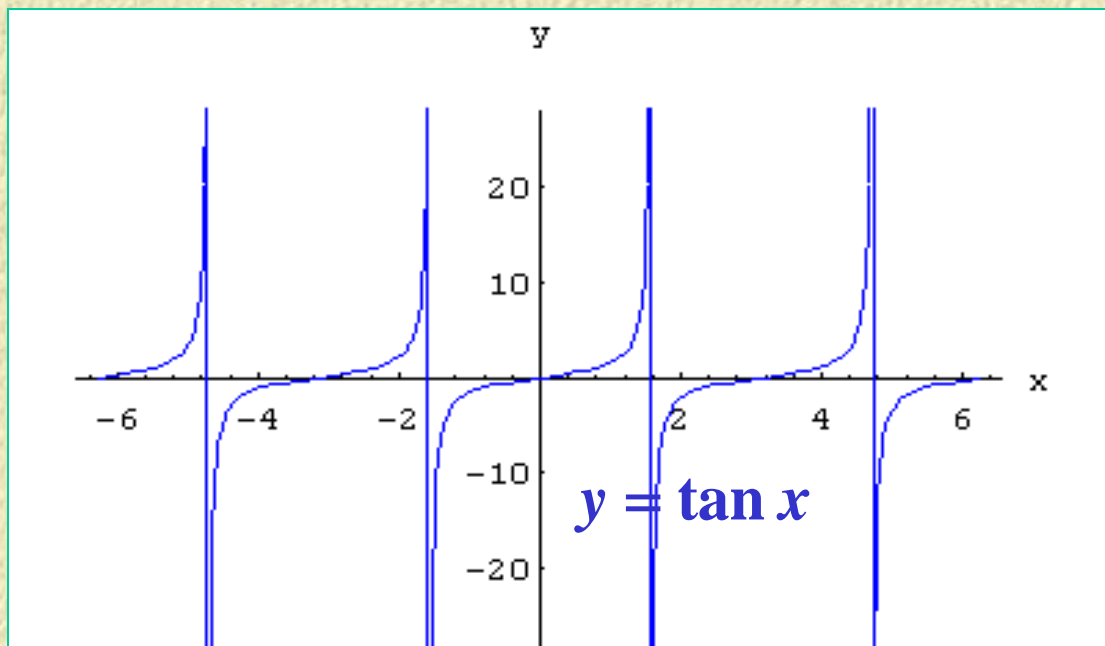
上页

下页

返回

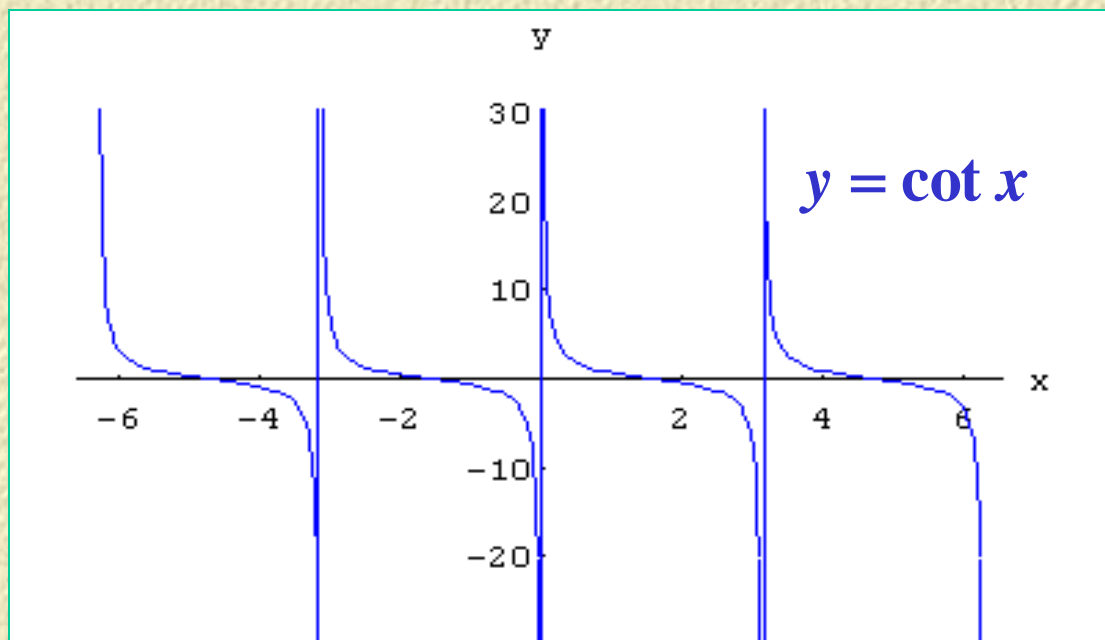
正切函数

$$y = \tan x$$



余切函数

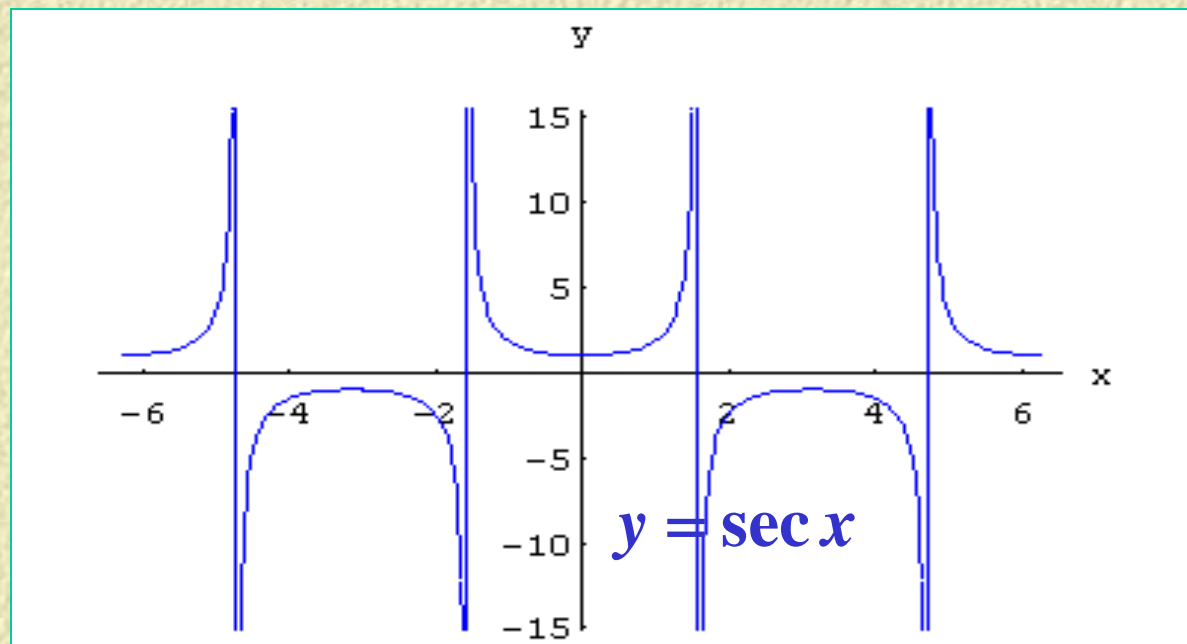
$$y = \cot x$$



正割函数

$$y = \sec x$$

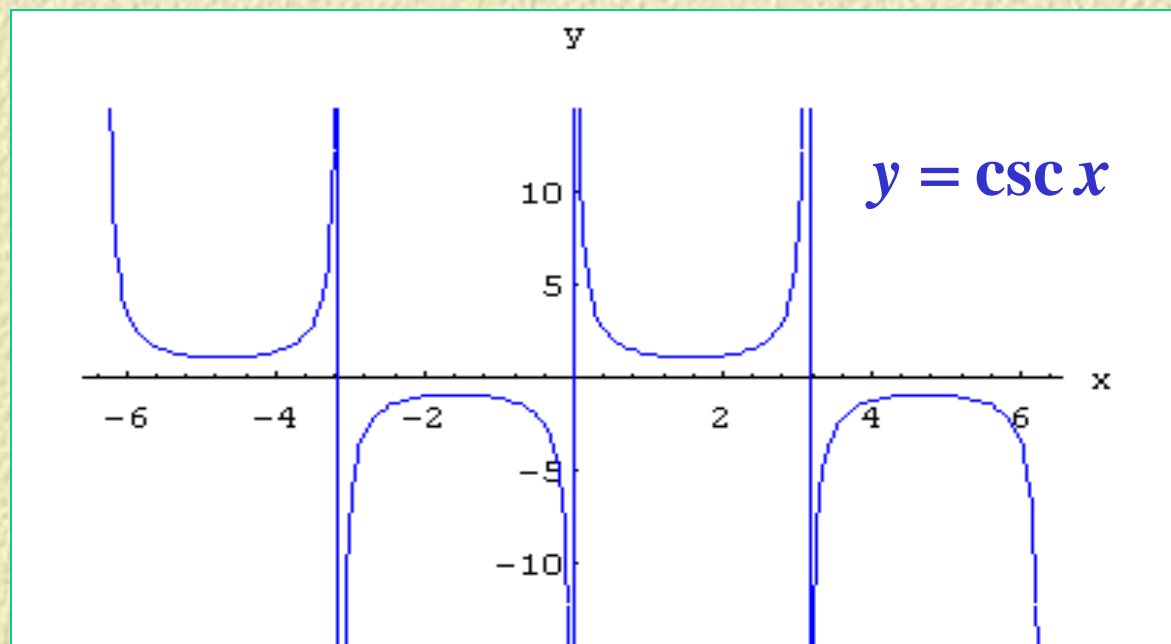
$$= \frac{1}{\cos x}$$

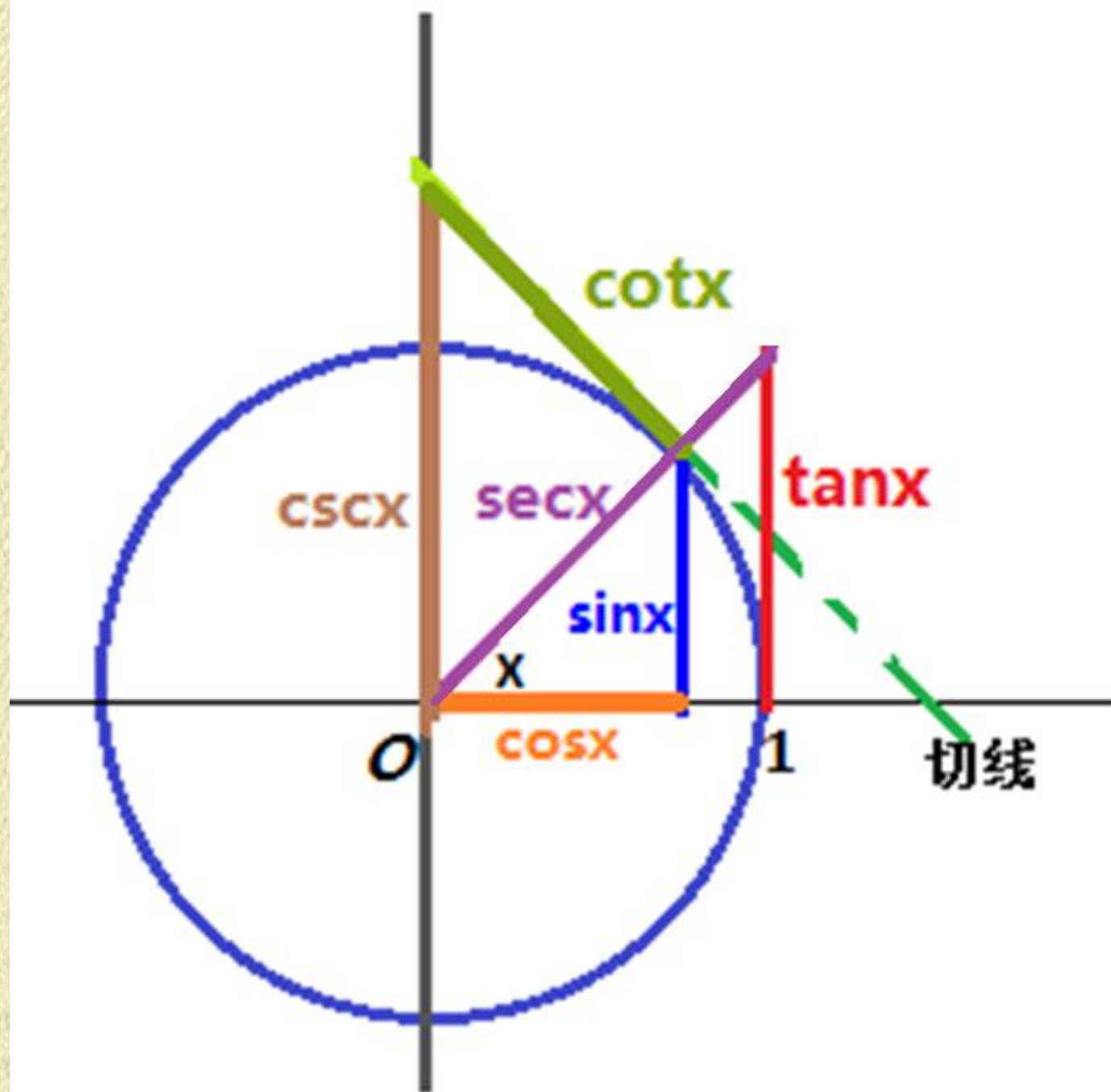


余割函数

$$y = \csc x$$

$$= \frac{1}{\sin x}$$



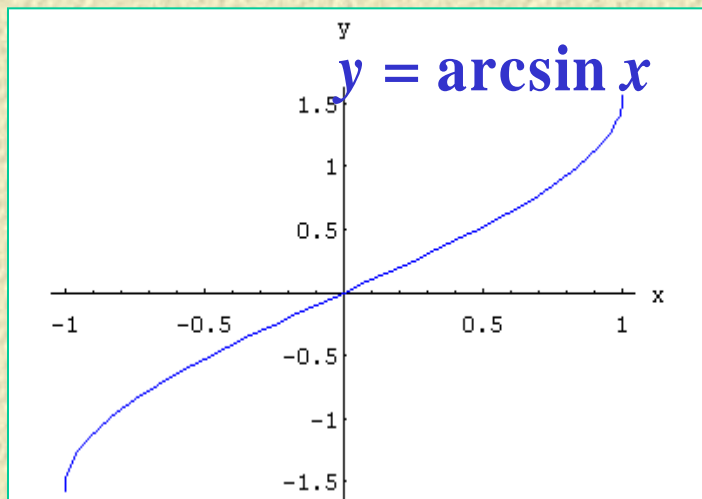
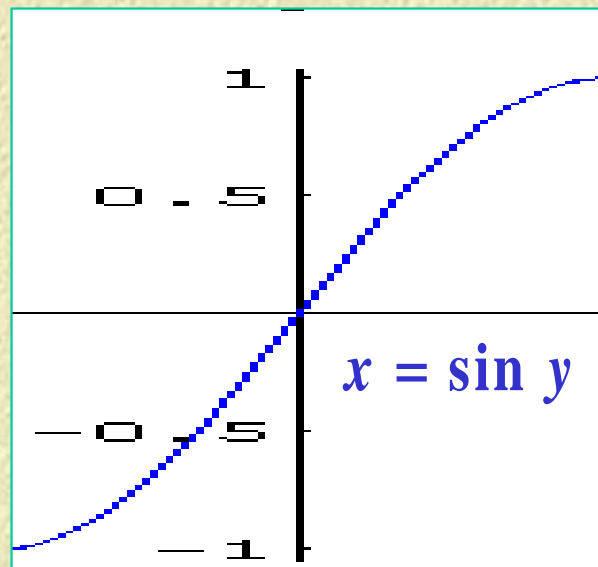


(7).反三角函数

周期函数 $x = \sin y$ 在 $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

的时候严格单调,所以有反函数

$$y = \arcsin x, x \in [-1, 1], y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$



若 $x = \sin y, y \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$

则 $x = \sin(\pi - y), \pi - y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$

$\therefore \pi - y = \arcsin x,$

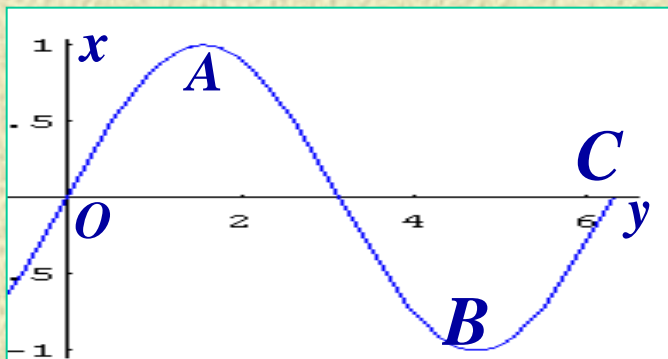
$\Rightarrow y = \pi - \arcsin x, x \in [-1, 1].$

由定义知： $y \in [-1, 1]$,

则 $\sin(\arcsin y) = y$.

动问： $\forall x \in \mathbb{R}$,

$\arcsin(\sin x) = ?$



正弦曲线 $OABC$:

$$x = \sin y, y \in [0, 2\pi]$$

曲线 $OABC$ 的另一种表示法 :

$$OA : y = \arcsin x, y \in [0, \pi/2],$$

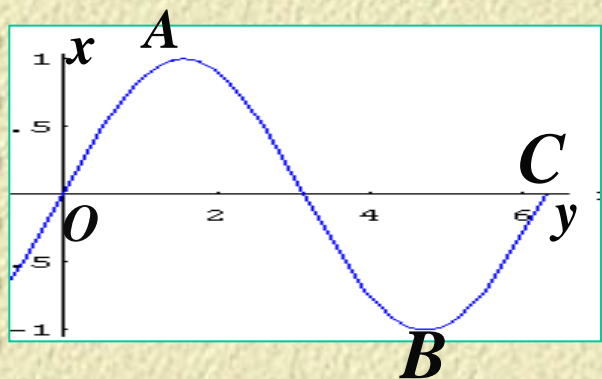
$$AB : y = \pi - \arcsin x, y \in [\pi/2, 3\pi/2],$$

$$BC : y = 2\pi + \arcsin x, y \in [3\pi/2, 2\pi],$$

$$\because y \in [3\pi/2, 2\pi] \text{ 时, } y - 2\pi \in [-\pi/2, 0]$$

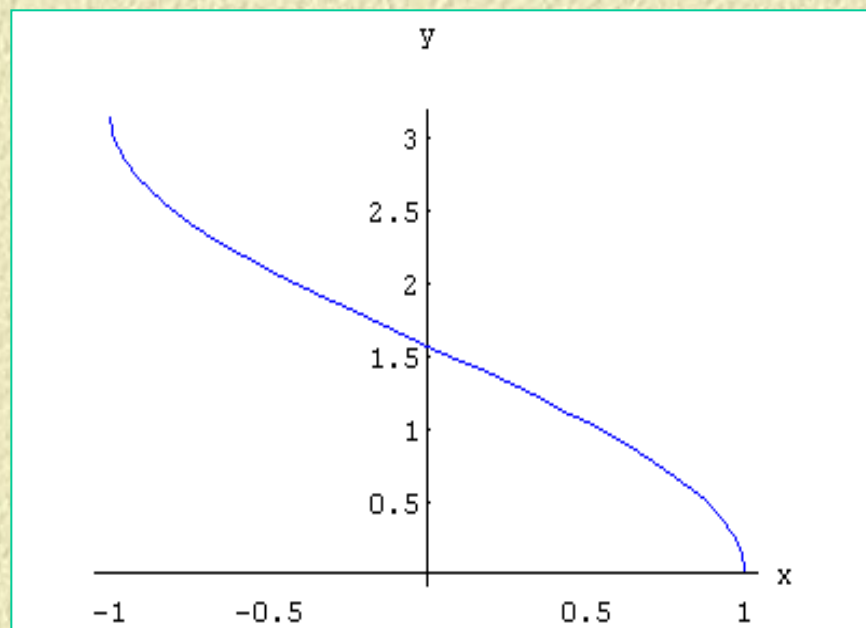
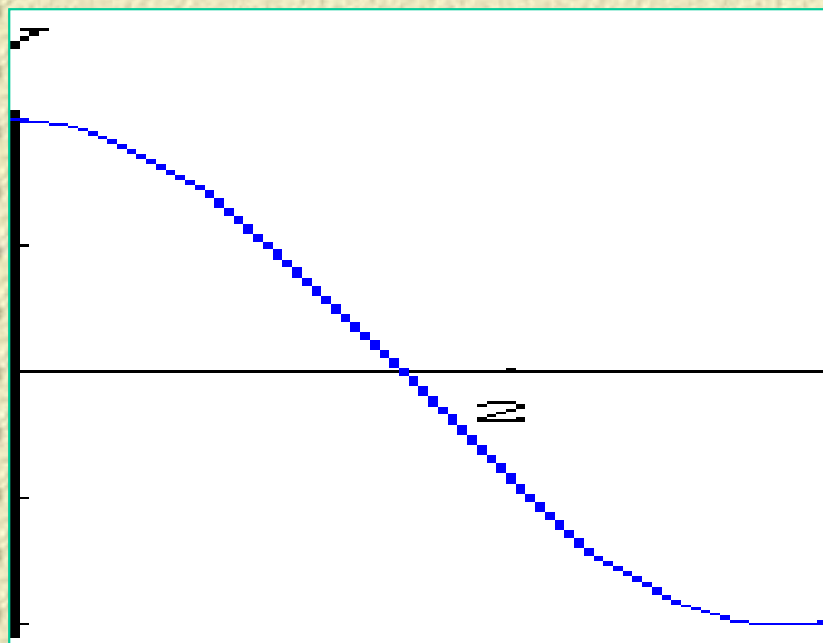
$$x = \sin y = \sin(y - 2\pi),$$

$$\therefore y - 2\pi = \arcsin x, \Rightarrow y = 2\pi + \arcsin x.$$



周期函数 $x = \cos y$ 在 $y \in [0, \pi]$ 时严格单调递减,
所以有反函数 $y = \arccos x, x \in [-1, 1], y \in [0, \pi]$.

$$x = \cos y$$



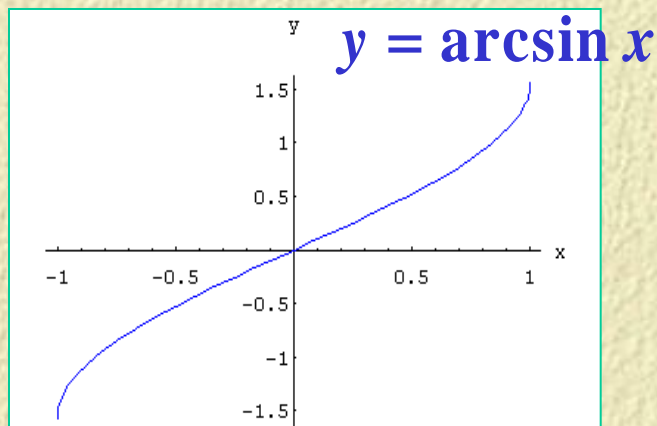
$$y = \arccos x$$

上页

下页

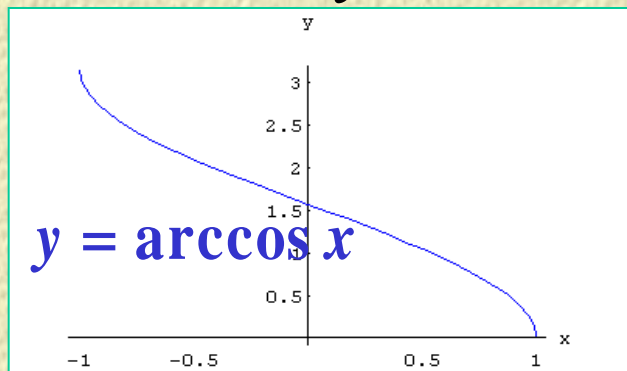
返回

反正弦函数 $y = \arcsin x$



$$x \in [-1, 1], y = \arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

反余弦函数 $y = \arccos x$



$$x \in [-1, 1], y = \arccos x \in [0, \pi]$$

证明 $x \in [-1, 1]$,

$$\arcsin x + \arccos x \equiv \frac{\pi}{2}$$

$$\text{记 } \alpha = \arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$\beta = \arccos x \in [0, \pi],$$

$$\cos \alpha = +\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - x^2},$$

$$\sin \beta = +\sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - x^2},$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ &= x^2 + 1 - x^2 \equiv 1, \end{aligned}$$

$$\therefore \alpha + \beta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], \therefore \alpha + \beta \equiv \frac{\pi}{2}.$$

上页

下页

返回

求证 $x \in [-1, 1], \arcsin x + \arccos x \equiv \frac{\pi}{2}$.

证明 记 $\alpha = \arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,

$\beta = \arccos x \in [0, \pi]$,

$$\cos \alpha = +\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - x^2},$$

$$\sin \beta = +\sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - x^2},$$

$$\begin{aligned}\therefore \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ &= x^2 + 1 - x^2 \equiv 1,\end{aligned}$$

$$\therefore \alpha + \beta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], \therefore \alpha + \beta \equiv \frac{\pi}{2}.$$

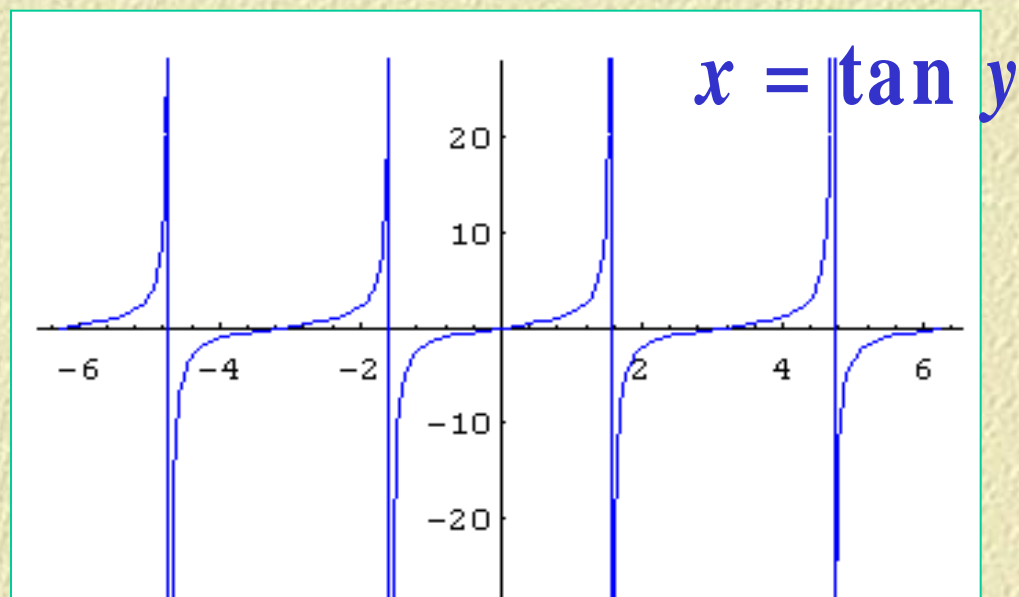
上页

下页

返回

正切函数

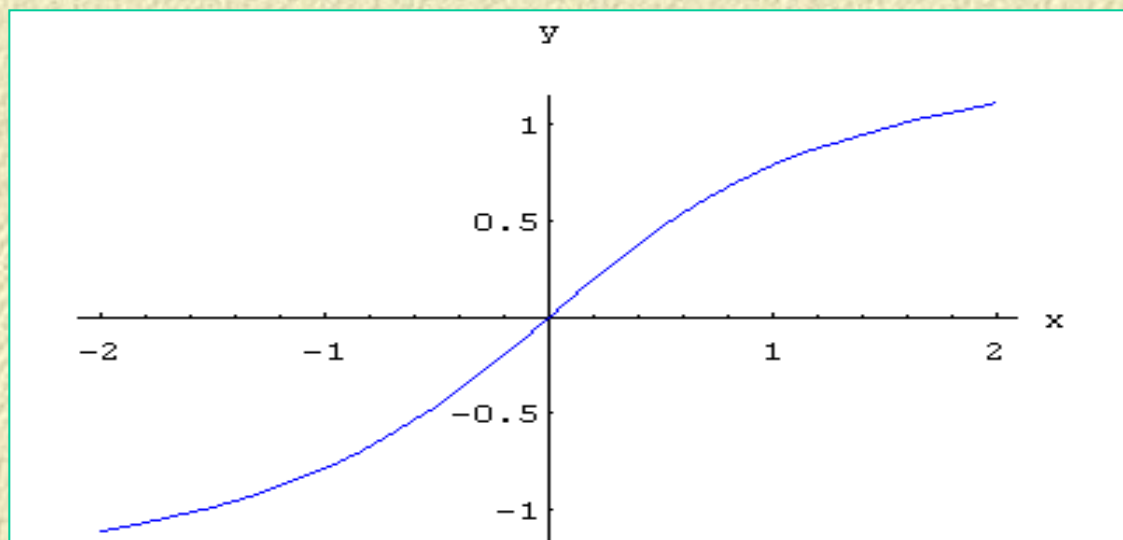
$$x = \tan y$$



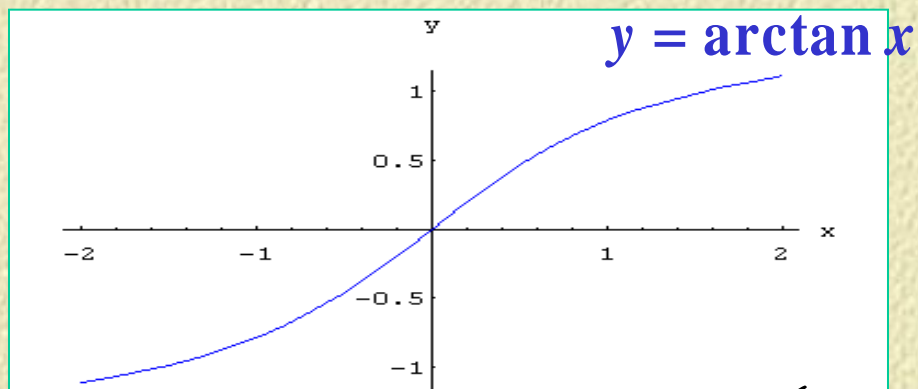
$$x \in (-\infty, +\infty), y = \arctan x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

反正切函数

$$y = \arctan x$$



反正切函数 $y = \arctan x$

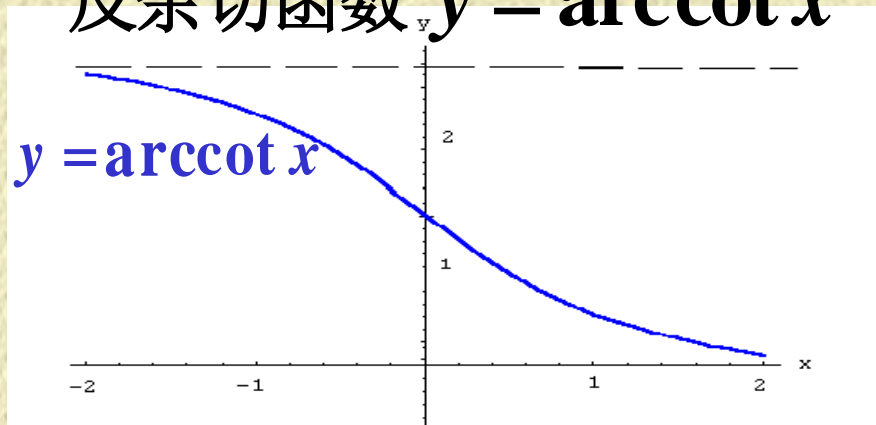


$$x \in (-\infty, +\infty),$$

$$\arctan x + \operatorname{arccot} x \equiv \frac{\pi}{2}.$$

$$x \in (-\infty, +\infty), y = \arctan x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$



幂函数,指数函数,对数函数,三角函数和反三角函数统称为基本初等函数.

$$x \in (-\infty, +\infty), y = \operatorname{arccot} x \in (0, \pi)$$

上页

下页

返回

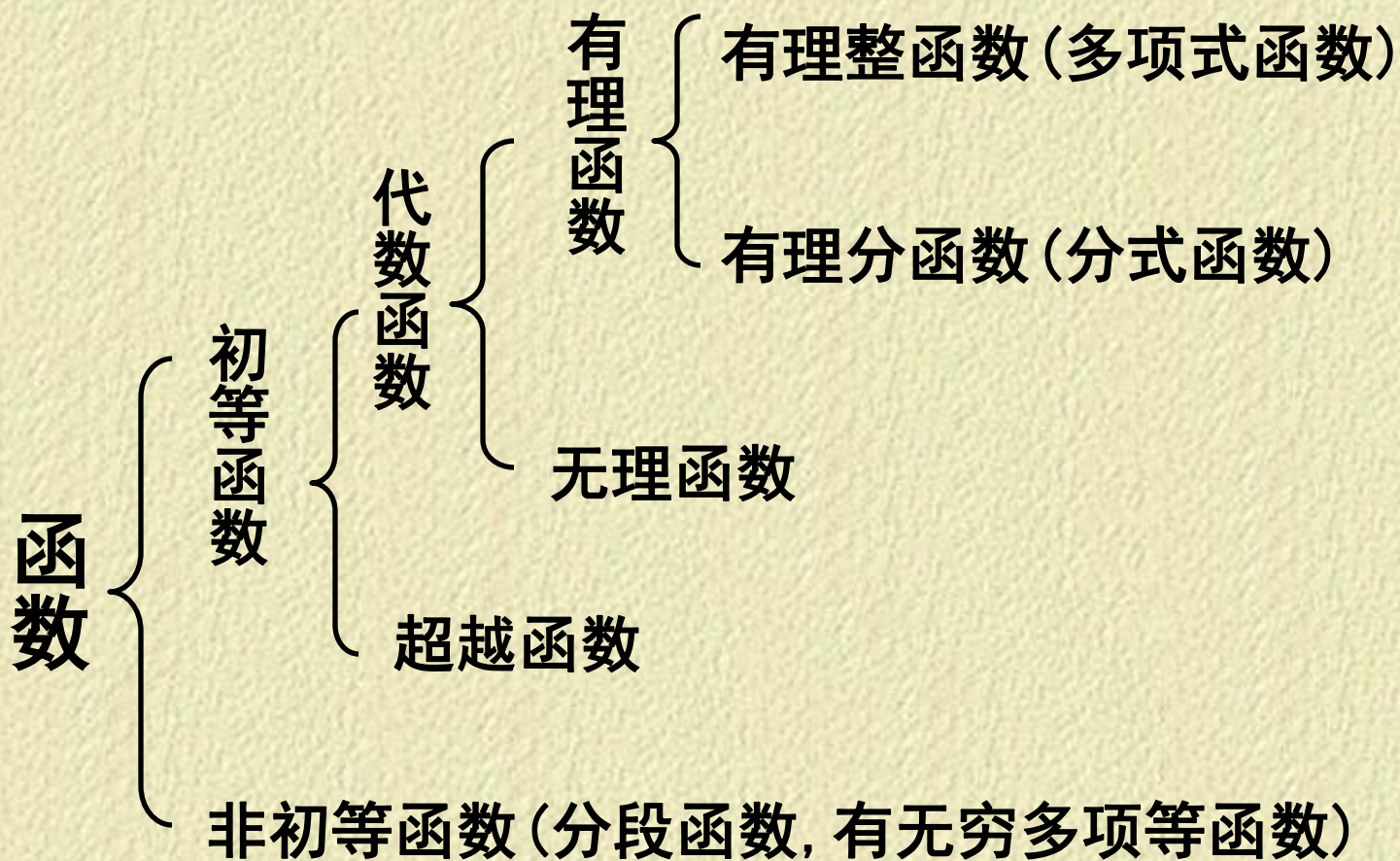
$$x \in [-1, 1], \arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$x \in [-1, 1], \arccos x \in [0, \pi].$$

$$x \in (-\infty, +\infty), \arctan x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$x \in (-\infty, +\infty), \operatorname{arccot} x \in (0, \pi).$$

函数的分类:



思考练习

1. $f(x) = \frac{1}{2+x}, f[f(x)] = ?$

2. 若函数 $f(x)$ 满足关系式

$$2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{k}{x},$$

k 为常数, 证明: $f(x)$ 是奇函数.

3. 证明: $x \in (-\infty, +\infty),$

$$\arctan x + \operatorname{arccot} x \equiv \frac{\pi}{2}.$$

4.证明: $\forall x \geq 1$,

$$\arctan x - \frac{1}{2} \arccos \frac{2x}{1+x^2} \equiv \frac{\pi}{4}.$$

5. $\forall x, y \in D_f = \mathbb{R}, f(x) \leq x$,

$$f(x+y) \leq f(x) + f(y),$$

证明: $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

6.试问：

$$\sin(\arcsin x) = ?$$

$$\arcsin(\sin x) = ?$$

$$1. f(x) = \frac{1}{2+x}, f[f(x)] = ?$$

$$\text{解 } f[f(x)] = \frac{1}{2+f(x)} = \frac{1}{2+\frac{1}{2+x}} = \frac{1}{\frac{5+2x}{2+x}},$$

$$\text{或表达为 } f[f(x)] = \frac{2+x}{5+2x} \quad (x \neq -2).$$

4.证明 $\forall x \geq 1, \arctan x - \frac{1}{2} \arccos \frac{2x}{1+x^2} \equiv \frac{\pi}{4}$;

证明 可证 $\forall x \geq 1, 2\arctan x - \arccos \frac{2x}{1+x^2} \equiv \frac{\pi}{2}$.

记 $\arctan x = \alpha, \arccos \frac{2x}{1+x^2} = \beta$.

$$\cos(2\alpha - \beta) = \cos 2\alpha \cos \beta + \sin 2\alpha \sin \beta$$

$$= \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \cos \beta + \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \sin \beta$$

$$= \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \cdot \frac{2x}{1 + x^2} + \frac{2x}{1 + x^2} \cdot \sin \beta$$

$$\sin \beta = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)^2} = ?$$

$$\because x \geq 1, \therefore 0 < \frac{2x}{1+x^2} \leq 1,$$

$$\therefore \arccos \frac{2x}{1+x^2} = \beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\therefore \sin \beta = +\sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}$$

$$= \frac{|x^2 - 1|}{1+x^2} = \frac{x^2 - 1}{1+x^2},$$

$$\because x \geq 1, \therefore \arctan x = \alpha \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right). \therefore 2\alpha - \beta \in (0, \pi).$$

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \frac{x^2 - 1}{1 + x^2},$$

$$2\alpha - \beta \in (0, \pi).$$

$$\cos(2\alpha - \beta) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \cdot \frac{2x}{1 + x^2} + \frac{2x}{1 + x^2} \cdot \sin \beta$$

$$= \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \cdot \frac{2x}{1 + x^2} + \frac{2x}{1 + x^2} \cdot \frac{x^2 - 1}{1 + x^2} \equiv 0,$$

$$\therefore 2\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}.$$

$$5. \quad \forall x, y \in D_f = \mathbb{R}, f(x) \leq x,$$

$$f(x + y) \leq f(x) + f(y),$$

$$\text{证明: } f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$5. \text{证明: (1). } f(0) = f(0 + 0) \leq f(0) + f(0),$$

$$f(0) \leq 0 \Rightarrow f(0) \geq 0, \therefore f(0) = 0.$$

$$(2). \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(0 - (-x))$$

$$\geq f(0) - f(-x) = -f(-x) \geq x,$$

$$\therefore f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}.$$