函数的极限与连续性
--习题课

例1.求$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n},(x\neq 0)$

解 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^n}\cdot 2\sin\frac{x}{2^n}}{2\sin\frac{x}{2^n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cdot 2\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{2^2\sin\frac{x}{2^n}}$$

$$=\cdots=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}$$

上页 下页 返回

例2.设$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^{x}=4$,求$c$.

解 $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2c}{x-c}\right)^{x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\left[\left(1+\frac{2c}{x-c}\right)^{\frac{x-c}{2c}}\right]^{2c}\cdot\left(1+\frac{2c}{x-c}\right)^{c}\right\}=e^{2c}$$

或 $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{c}{x}\right)^{x}}{\left(1-\frac{c}{x}\right)^{x}}=\frac{e^{c}}{e^{-c}}=e^{2c}$$

$e^{2c}=4\Rightarrow 2c=2\ln 2$,得$c=\ln 2$.

例3 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+1}+\frac{n+2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n+n}{n^2+n}\right)$

[分析] 要用夹逼定理，须进行放缩

$$\frac{n(n+1)}{n^2+n}\le\Delta\le\frac{n(n+n)}{n^2+1},$$

但 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{n^2+n}=1,\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+n)}{n^2+1}=2,$

不能这样用夹逼定理，进行放缩须恰倒好处

上页 下页 返回

解 注意到分子成等差数列

$$\frac{n+k}{n^2+n} \le \frac{n+k}{n^2+k} \le \frac{n+k}{n^2+1},$$

即 $$\frac{n(3n+1)}{2(n^2+n)} \le \Delta \le \frac{n(3n+1)}{2(n^2+1)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(3n+1)}{2(n^2+n)} = \frac{3}{2}, \lim_{n\to\infty}\frac{n(3n+1)}{2(n^2+1)} = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+1}+\frac{n+2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n+n}{n^2+n}\right) = \frac{3}{2}.$$

例4.设$p(x)$是多项式,且$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{p(x)-x^3}{x^2}=2$,

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{p(x)}{x}=1$,求$p(x)$.

解 $\because \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{p(x)-x^3}{x^2}=2$,

$\therefore$ 设$p(x)=x^3+2x^2+ax+b$ (a,b待定),

又$\because \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{p(x)}{x}=1$,

$\therefore p(x)=x^3+2x^2+ax+b\sim x\ (x\to 0)$

$\therefore b=0, a=1$.故$p(x)=x^3+2x^2+x$.

例5.若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{ax^2+bx+c}-\alpha x-\beta\right]=0$,

求 $\alpha,\beta\ (a>0)$

解 $\dfrac{1}{x}=t, x\to+\infty, t\to 0+$,

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{ax^2+bx+c}-\alpha x-\beta\right]=0,$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to+0}\frac{\sqrt{a+bt+ct^2}-\alpha-\beta t}{t}=0,$$

$\therefore \alpha=\sqrt{a}$.

上页 下页 返回

$$\therefore \beta = \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{ax^2 + bx + c} - \alpha x \right]$$

$$= \lim_{t \to +0} \frac{\sqrt{a + bt + ct^2} - \sqrt{a}}{t}$$

$$= \lim_{t \to +0} \frac{b + ct}{\sqrt{a + bt + ct^2} + \sqrt{a}} = \frac{b}{2\sqrt{a}}.$$

例6.确定a,b的值,使$f(x)=\dfrac{x-b}{(x-a)(x-1)}$

有无穷间断点$x=0$,有可去间断点$x=1$.

解 $\because\ x=0$是$f(x)$的无穷间断点,

$$\therefore \lim_{x\to 0} f(x)=\infty \Rightarrow$$

$$0=\lim_{x\to 0}\frac{1}{f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-a)(x-1)}{x-b}$$

$$=\frac{a}{-b}\Rightarrow a=0,b\neq 0,$$

上页 下页 返回

又$x=1$是$f(x)=\dfrac{x-b}{(x-a)(x-1)}$的可去间断点,

故$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$存在.

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}(x-b)=1-b=0.$$

$\therefore b=1.$

上页 下页 返回

例7.设$f(x)$和$\varphi(x)$在$(-\infty,+\infty)$有定义，$f(x)$为连续函数，且$f(x)\neq 0$，$\varphi(x)$有间断点，则：

A. $\varphi[f(x)]$必有间断点；　B. $f[\varphi(x)]$必有间断点；

√C. $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$必有间断点；　D. $\varphi^2(x)$必有间断点.

$$A.\ f(x)=e^x,\ \varphi(x)=\begin{cases}-1 & x\le 0\\ 1 & x>0\end{cases}$$

$$B.\ f(x)=|x|,\ \varphi(x)=\begin{cases}-1 & x\le 0\\ 1 & x>0\end{cases}$$

$$D.\ \varphi(x)=\begin{cases}-1 & x\le 0\\ 1 & x>0\end{cases}$$

例8.已知$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=2$,

求$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

解 使用等价无穷小量

当$x\to 0$时, $\sin x \sim x$,

$$\sqrt{1+x}-1\sim\frac{1}{2}x,$$

$$(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x(\alpha\neq 0).$$

从而由等价无穷小的代换性质得

$$2=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}f(x)\sin 2x}{3x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}f(x)\cdot\frac{\sin 2x}{2x}$$

由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}=1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}f(x)$存在,且$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=6.$

例9. 若$f(x)$在$\mathbb{R}^{+}=(0,+\infty)$上有定义,

且$\forall x,y\in\mathbb{R}^{+}$,有$f(xy)=f(x)+f(y)$,

若$f(x)$在$x_0=1$ 处连续.

(1).证明: $f(x)$在$(0,+\infty)$上连续.

(2).求$f(x)$.

解(1). $f(1)=f\left(1\times 1\right)=2f(1), \therefore f(1)=0.$

$$\forall x\in\left(0,+\infty\right), \lim_{h\to 0} f\left(x+h\right)=\lim_{h\to 0} f\left(\frac{x+h}{x}\cdot x\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[f\left(\frac{x+h}{x}\right)+f(x)\right]=f(x)+\lim_{h\to 0} f\left(\frac{x+h}{x}\right)$$

$$=f(x)+f(1)=f(x).$$

$\therefore f(x)$在$\left(0,+\infty\right)$上连续.

解(2).取$a\in(0,+\infty), a\neq 1, f(a)=f\left(a^{\frac{1}{n}\times n}\right)=nf\left(a^{\frac{1}{n}}\right), n\in\mathbb{Z}^{+}$,

$\therefore f\left(a^{\frac{1}{n}}\right)=\frac{1}{n}f(a)$,于是$\forall m\in\mathbb{Z}^{+}$,有$f\left(a^{\frac{m}{n}}\right)=\frac{m}{n}f(a)$,

记$a^{\frac{m}{n}}=u, f(a)=c$,则$f(u)=c\log_a u\ , u\in(0,+\infty)\cap\mathbb{Q}$.

$\forall x\in(0,+\infty)\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}), \exists\{r_n\}\subset(0,+\infty)\cap\mathbb{Q}$,使$\lim\limits_{n\to\infty}r_n=x$,

由f在$(0,+\infty)$上连续知,$\forall x\in(0,+\infty)\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$有

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f(r_n)=\lim_{n\to\infty}f(r_n)=c\lim_{n\to\infty}\log_a r_n\ =c\log_a x\ ,$$

$\therefore \forall x\in(0,+\infty), f(x)=c\log_a x$,其中$c=f(a)$.

Exercise :

1. 指出函数的间断点，并说明这些间断点的类型，如果是可去间断点，则补充或改变函数的定义使它连续：

(1). $f(x)=\dfrac{x}{\tan x}$, 在 $x\in\mathbb{R}$ 上 .

(2). $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}$.