本试卷适应范围
人工智能 学院
2021 级 本科生

南京农业大学试题纸

2021~2022 学年 第一学期　课程类型：必修　试卷类型：期中测验

课程号 MATH2103　　课程名 数学分析 I　　5 学分

学号 ____________　　姓名 ____________　　班级 ____________

题号	一	二	三	总分
得分				

装订线

一. 填空题或选择题（每题 3 分，计 30 分. 选择题正确选项唯一）

1. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 不存在，则必定有______________.

$(A).\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n+y_n\right)$不存在；　　$(B).\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n y_n\right)$不存在；

$(C).\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n+y_n\right)$未必不存在；　　(D). 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n y_n\right)=0$.

2. 函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x(x-3)}$ 在区间________________内无界.

$(A).(-1,0)$;　$(B).(0,1)$;　$(C).(1,2)$;　$(D).(2,3)$.

3. 函数 $f(x)=\begin{cases} x\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处______________.

(A).不连续；　　(B).连续但不可导；

(C).可导但导函数不连续；　　(D).可导且导函数连续.

4. 下列命题中正确的命题是____________________.

(A). 在 $x\in(a,b)$ 时曲线 $y=f(x)$ 处处有唯一的切线，则函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内点点可导.

(B). 若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导且严格单调增加，那么在 (a,b) 内必定有 $f'(x)>0$.

(C). $\forall\ x\in(-\infty,+\infty)$，有 $\arcsin(\sin x)=x$.

(D). 如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左右导数都存在，则函数 $f(x)$ 在 x_0 点处连续 .

5. 设 $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$，则函数 $f\left[f(x)\right]$ 的第一类间断点为__________________ .

6. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\tan x\cdot(2x-\pi)\right]=$ ___________ .

7. 半径为 r 的圆面积 $A=\pi r^2$, $\Delta r=dr\to 0$ 时，$\Delta A=$ ________，$dA=$ _______，$\dfrac{dA}{dr}=$ ________.

8. 记$A=\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n, n\in\mathbb{N}^*\right\}$,则$\sup A=$ ________,$\inf A=$ ________.

9. $x\to+\infty$情形的归结原则（Heine 定理）:____

____.

10. 确界原理:____.

二. 解答题 I . (每题 7 分，计 28 分)

11. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-a}{x^2+a}\right)^x$.

12. 若 $x\to 0$ 时,$\sqrt[3]{1+x^3}-\sqrt[3]{1-x^3}$ 与 ax^n 为等价无穷小量，问 $a=?$ $n=?$

13. 设 $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x, x>0.$ 求函数的导数 y'.

14. 设曲线方程为$\begin{cases}x=a\cos^4 t\\ y=a\sin^4 t\end{cases}, t\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right), a>0.$ 计算$\dfrac{dy}{dx}$,消去参数后曲线方程为$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$,证明曲线上任一点的切线与两坐标轴的截距之和为常数.

系主任　杨涛　　　　　　　　　　　　　　　　出卷人　朱震球

三. 解答题 II (15~18 题每题 8 分，19 题 10 分，计 42 分)

15. 用“$\varepsilon - N$”定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-\sin n}{n^3-3}=0$.

16. (1).证明可导的偶函数的导函数是奇函数.

(2).设 $f(x)$ 为可导的偶函数且 $f(0)=0$，计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+f\left(\dfrac{1}{2n}\right)\right]^n$.

17. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，$\forall x,y\in(-\infty,+\infty)$ 有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，试证明：函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导,并由此求出函数 $f(x)$ 的表达式 .

18. 本题中两小题任选一小题，只做一小题. 若两小题都做，按第一小题记分.

(1). 设 $a_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \frac{\sin 3}{2^3} + \cdots + \frac{\sin n}{2^n}$，试运用 **Cauchy** 收敛准则证明数列 $\{a_n\}$ 收敛 .

(2). 设 $a_n > 0$，求证：若 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = l > 1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

19. (1). 证明方程 $x + x^2 + \cdots + x^n = 1 \ (n \geq 2)$ 有唯一的正的实根 ；

(2). 记(1)中方程的实根为 x_n，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求出 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.