# Sec.21.2 二重积分的计算

一. 二重积分在直角坐标系中的计算

二. 极坐标系

三. 二重积分在极坐标系中的计算

四. 二重积分一般的换元法

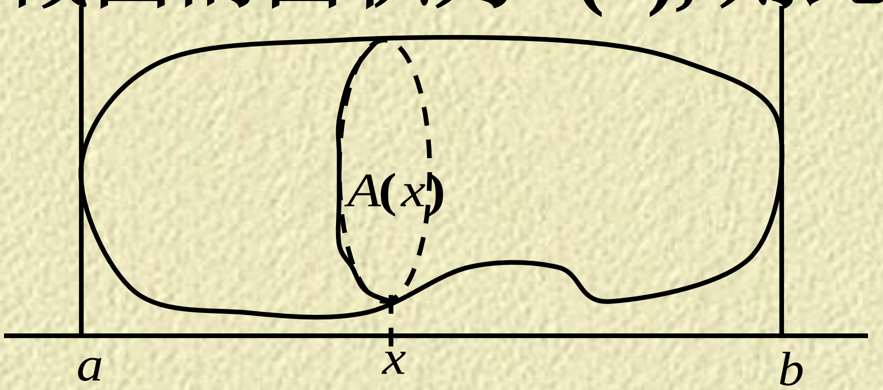
# 一. 二重积分在直角坐标系中的计算

## 化二重积分为二次积分

要求以曲面 $z=f(x, y)$为顶,以平面区域$D$为底面的曲顶柱体的体积:

先复习定积分应用中的一个结果:设空间立体位于平面 $x=a$与平面 $x=b$之间,用与 $x$轴垂直的平面截立体,截得截面的面积为$A(x)$, 则此立体的体积为

$$V=\int_a^b A(x)dx$$

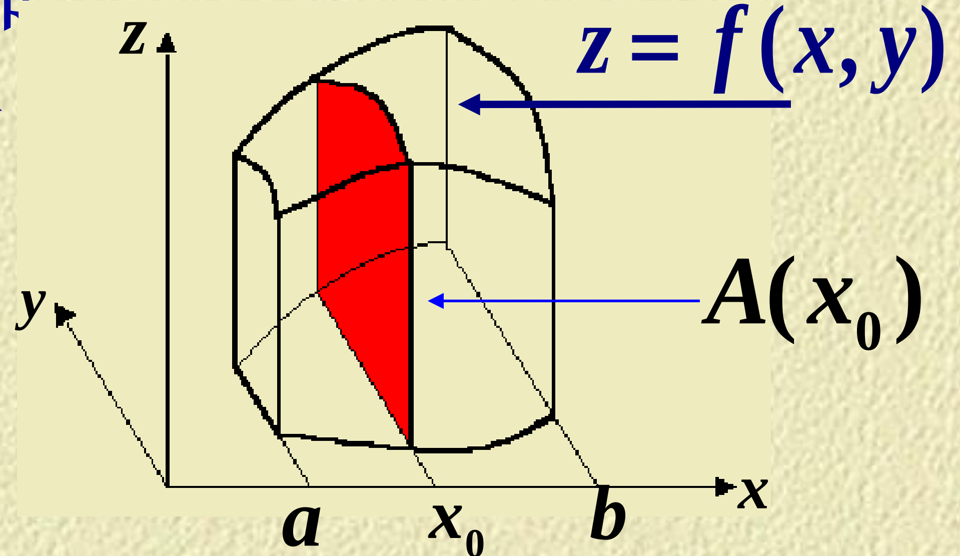



这就是“祖暅原理”(亦称之为“刘祖原理”)

直角坐标系中面积微元 $d\sigma = dxdy$.

$\because\ f(x,y) \geq 0, \therefore \iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ 的值等于以$D$为底,以曲面$z = f(x,y)$为顶的曲顶柱体的体积.

若$D$是如图立体的底部区域,那么我们可用一系列垂直于$x$轴的平面将立体切成一个个薄片,切口$x$处的面积




为$A(x)$,则有$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \int_a^b A(x)dx$.

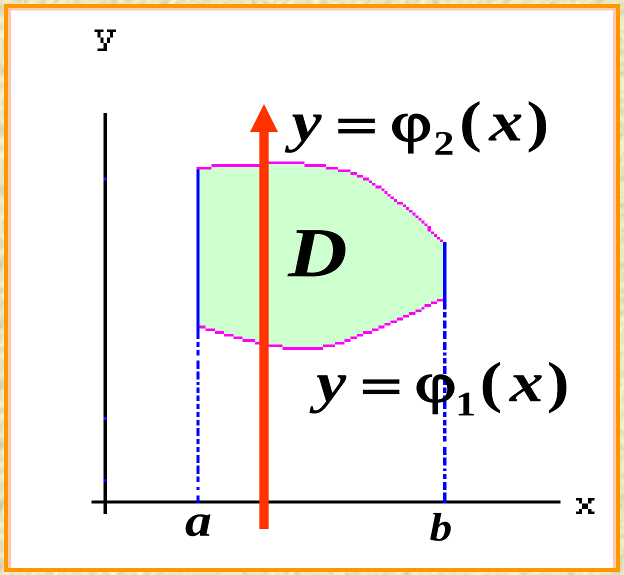
所以我们首先关注区域$D$的形状与表示.

一般区域上二重积分的计算.

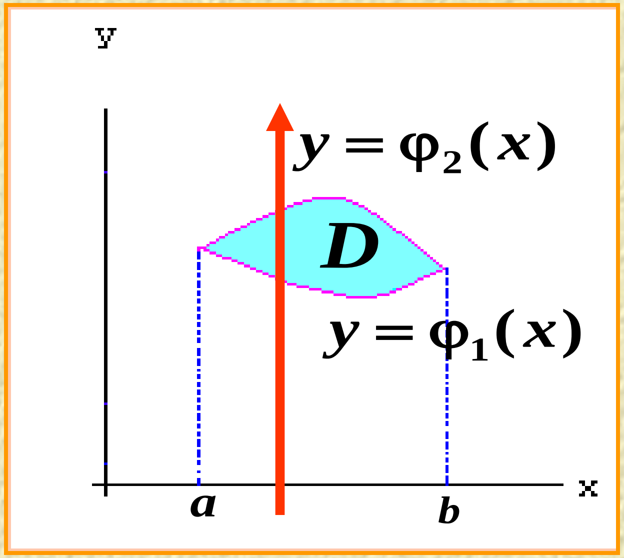
1.$x-$型区域与$y-$型区域.

若积分区域为$D: a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$,其中

函数$\varphi_1(x),\varphi_2(x)$在$[a,b]$上连续,则称$D$为$x-$型区域.

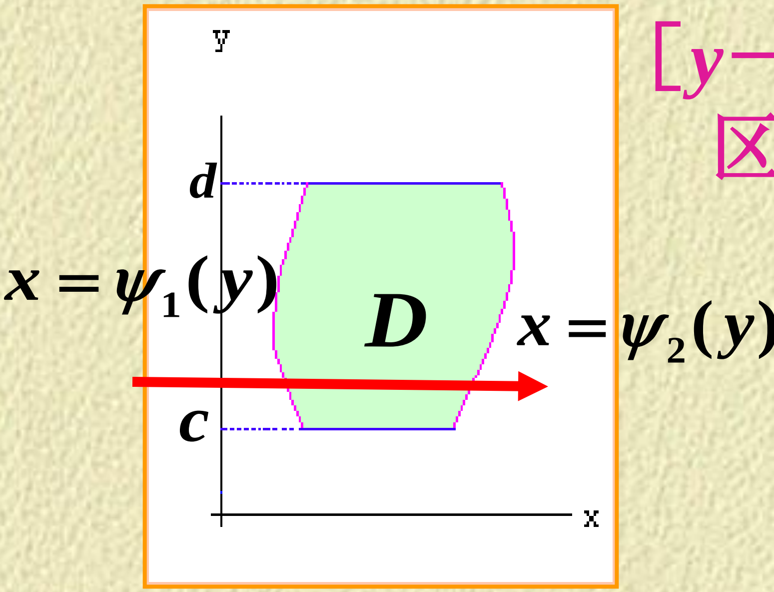



[x一型]
区域

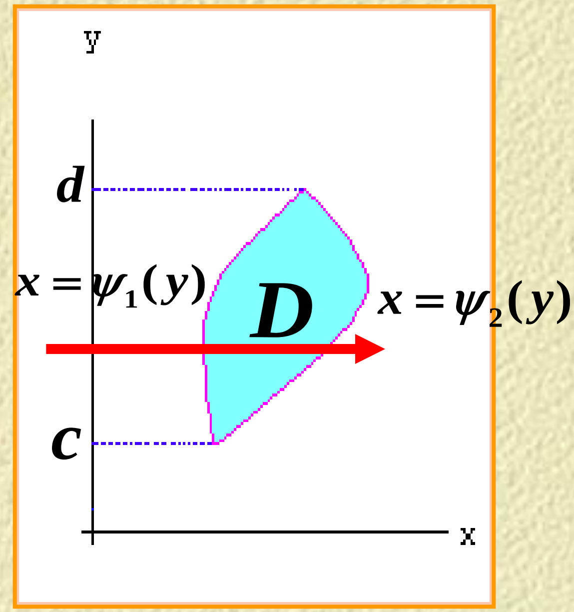



**$x$-型区域的特点:**穿过区域内部且平行于$y$轴的直线与区域边界相交不多于两个交点.

若区域为$D: c \le y \le d, \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)$,
其中函数$\psi_1(y), \psi_2(y)$在$[c,d]$上连续,则称
$D$为$y-$型区域.



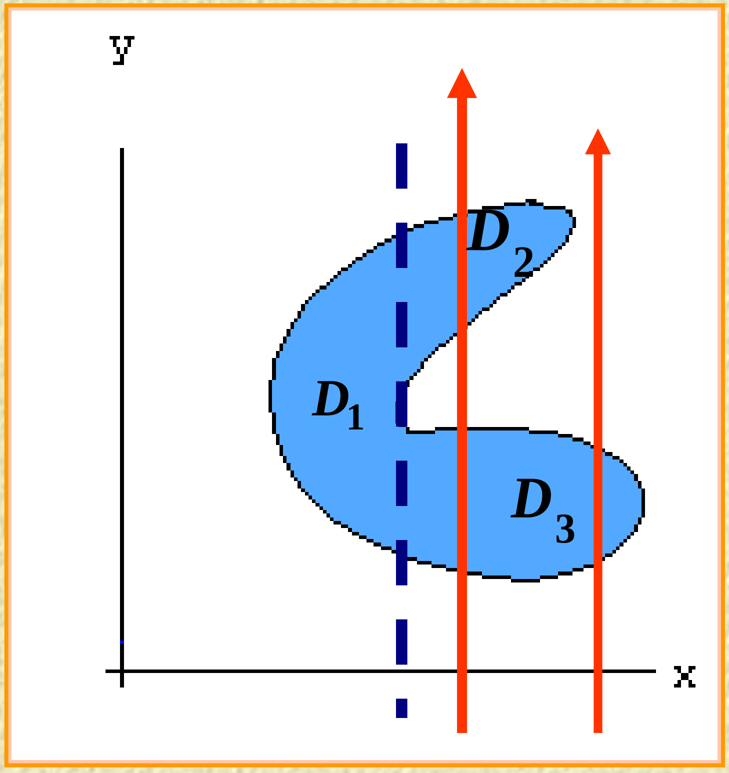

[$y$—型]
区域




**$y$-型区域的特点:**穿过区域内部且平行于$x$轴的直线与区域边界相交不多于两个交点.

若区域如图,则必须分割.在分割后的三个区域上分别使用积分公式

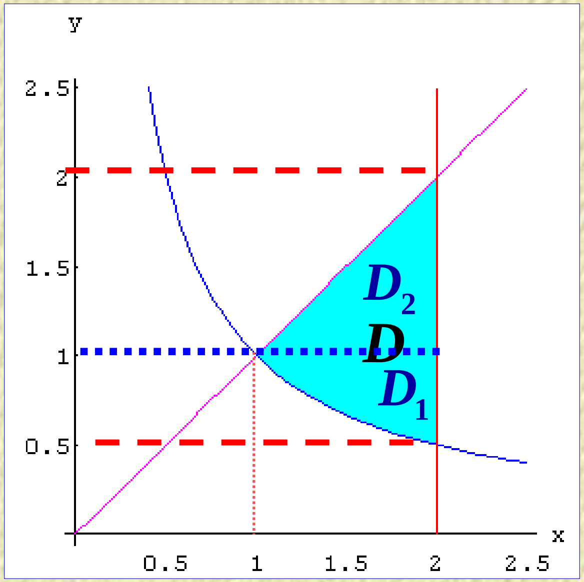
$$\iint_D = \iint_{D_1} + \iint_{D_2} + \iint_{D_3} .$$




上页 下页 返回

例1.设有一区域$D$是由 $y=x, y=\dfrac{1}{x}, x=2$围成，画出区域$D$的草图,注意其不同的表示方式.

解　区域$D$可视为$x-$型区域




$$D:\frac{1}{x}\le y\le x, 1\le x\le 2.$$

亦可视为$y-$型区域

$$D=D_1+D_2, D_1:\frac{1}{y}\le x\le 2, \frac{1}{2}\le y\le 1;$$

$$D_2: y\le x\le 2, 1\le y\le 2.$$

上页　下页　返回

## 2.一般区域上二重积分的计算.

### (1).积分区域为$x-$型区域:

若$f(x,y)$在$x-$型区域$D\begin{cases} a \le x \le b \\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x) \end{cases}$

上连续,其中$\varphi_1(x),\varphi_2(x)$在$[a,b]$连续,则

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx$$

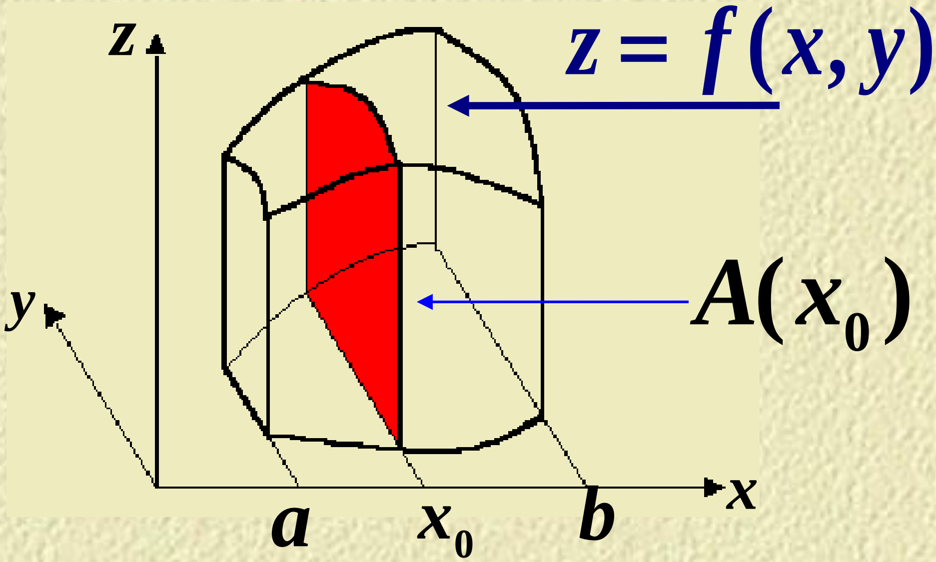
$$= \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.$$——先$y$后$x$的二次积分

直角坐标系中面积元素 $d\sigma = dxdy.$

$\because f(x,y) \geq 0, \therefore \iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ 的值等于以 $D$ 为底,

以曲面 $z = f(x,y)$ 为顶的曲顶柱体的体积.

应用计算"平行截面面积为已知的立体求体积"的方法,




得 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \int_a^b A(x)dx$

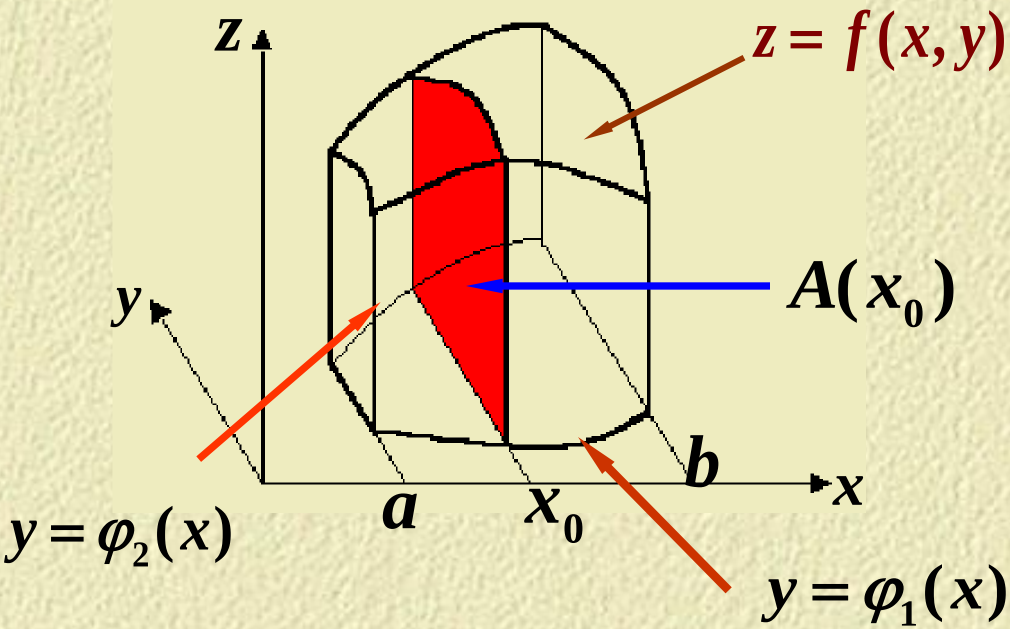
上页 下页 返回

直角坐标系中面积元素 $d\sigma = dxdy.$

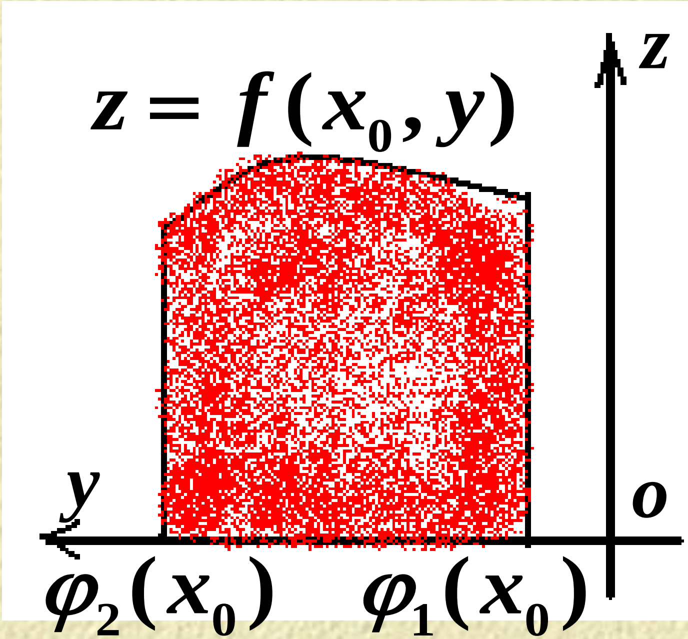
$\because f(x,y) \geq 0, \therefore \iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ 的值等于以 $D$ 为底,

以曲面 $z = f(x,y)$ 为顶的曲顶柱体的体积.

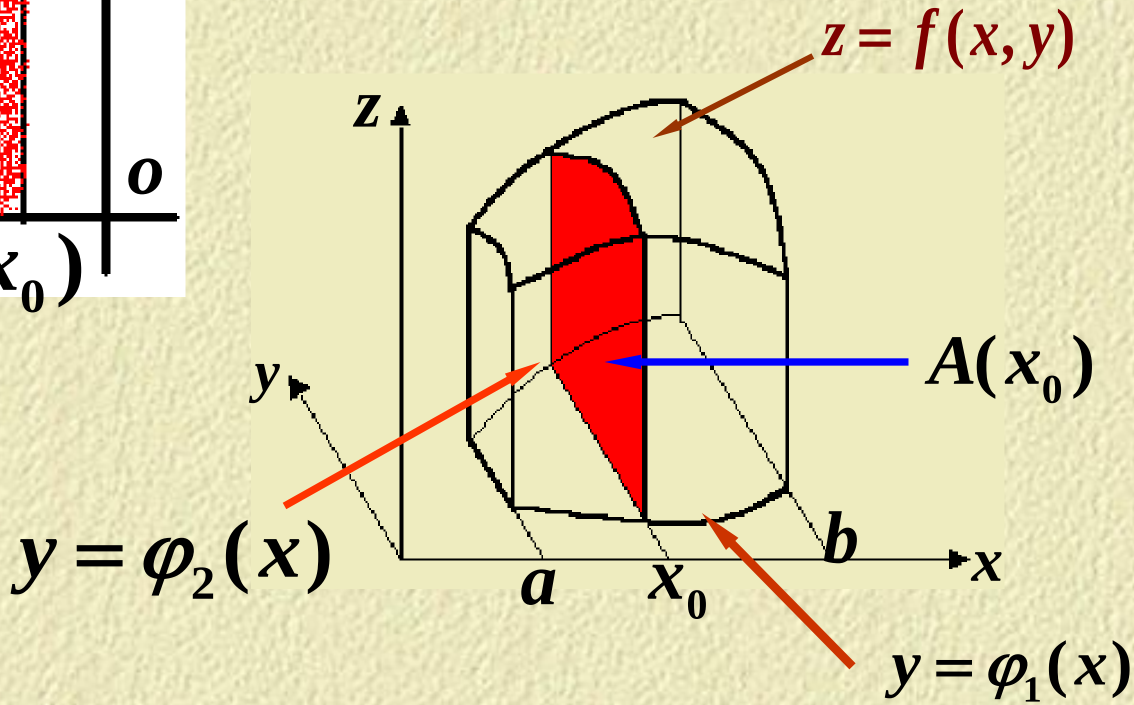
应用计算"平行截面面积为已知的立体求体积"的方法,




得 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \int_a^b \left[ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right] dx$



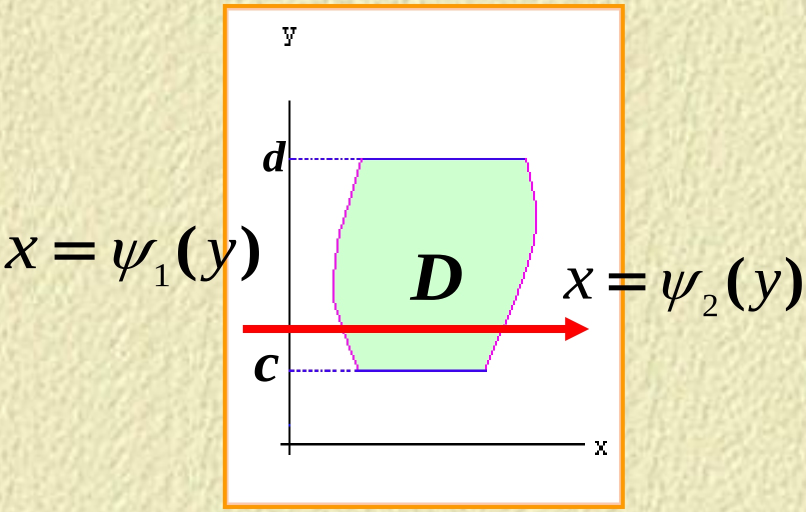

$$A(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy$$

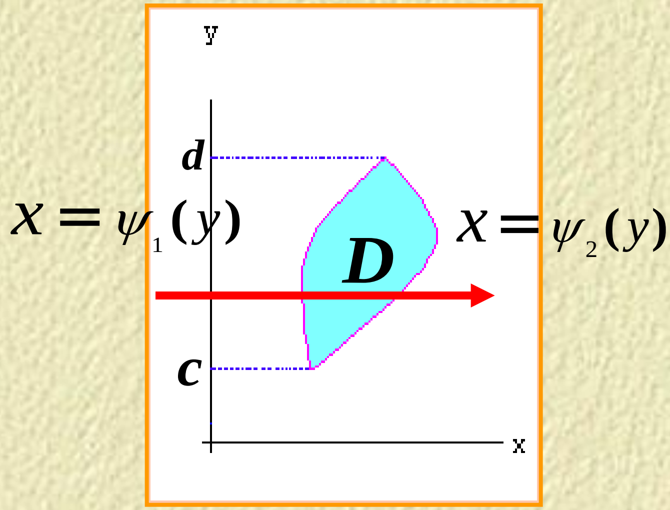



$$\text{得} \iint_D f(x, y)d\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy$$

## (2).积分区域为$y-$型区域

$$D: c \le y \le d, \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y).$$

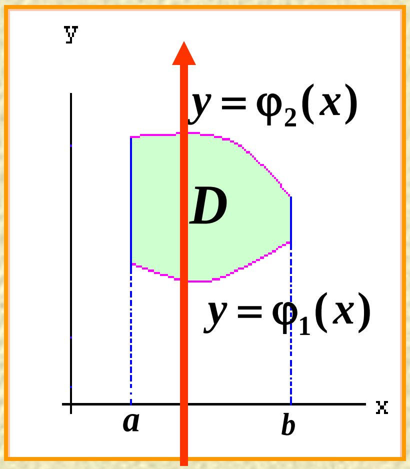



$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx.$$

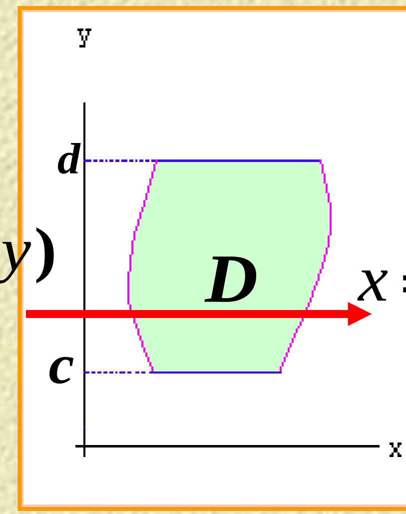
积分区域$D: a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$,

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.$$




[$x$—型]

[$y$—型]




积分区域$D: c \le y \le d, \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)$,

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx.$$

上页 下页 返回

积分区域$D: a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$,

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.$$

积分区域$D: c \le y \le d, \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)$,

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx.$$

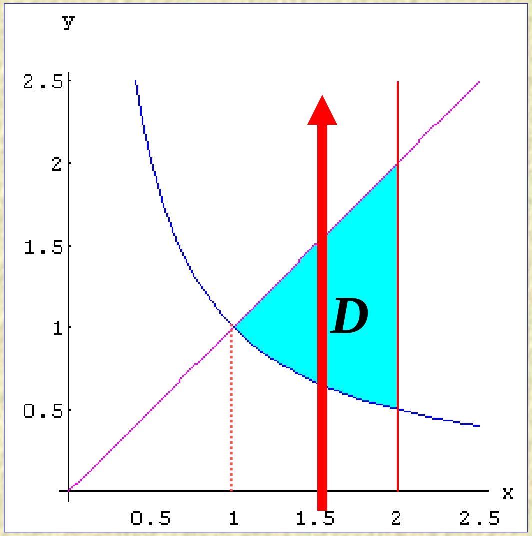
**特别提醒：**

<u>积分下限 ≤ 积分上限</u>

例2.求 $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}d\sigma$. 其中 $D$ 由 $y=x, y=\frac{1}{x}, x=2$ 围成.

解 积分区域为$x-$型区域

$$D: \frac{1}{x} \le y \le x, 1 \le x \le 2.$$




$$\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}d\sigma = \int_1^2 dx \int_{1/x}^{x} \frac{x^2}{y^2}dy$$

$$= \int_1^2 \left( -\frac{x^2}{y} \right)\Bigg|_{1/x}^{x} dx = \int_1^2 \left( x^3 - x \right)dx = \frac{9}{4}.$$

你如果选择先对$x$积分,那又怎样?

上页 下页 返回

求 $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2} d\sigma$. 其中 $D$ 由 $y = x, y = \frac{1}{x}, x = 2$围成.

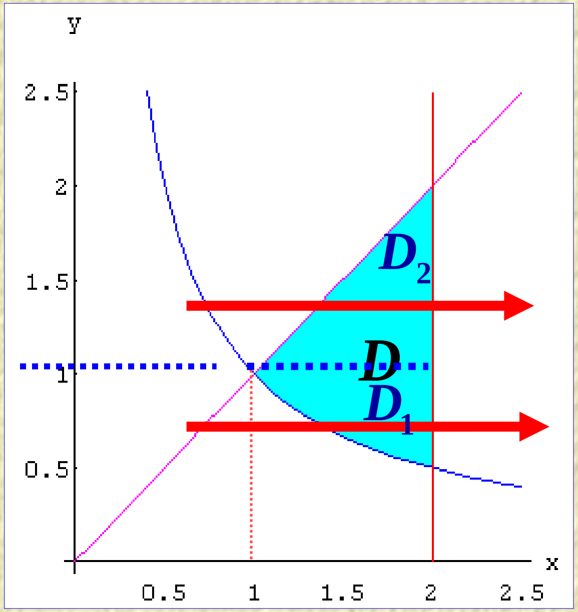
解二 选择先对$x$积分:

$$D = D_1 + D_2, D_1 : \frac{1}{y} \le x \le 2, \frac{1}{2} \le y \le 1;$$

$$D_2 : y \le x \le 2, 1 \le y \le 2.$$

$$\therefore \iint\limits_D \frac{x^2}{y^2} d\sigma = \int_{1/2}^{1} dy \int_{1/y}^{2} \frac{x^2}{y^2} dx$$

$$+ \int_{1}^{2} dy \int_{y}^{2} \frac{x^2}{y^2} dx$$




上页 下页 返回

例3.计算$\iint_D x^2e^{-y^2}dxdy$，其中区域$D$是以$(0,0),(1,1),(0,1)$为顶点的三角形区域.

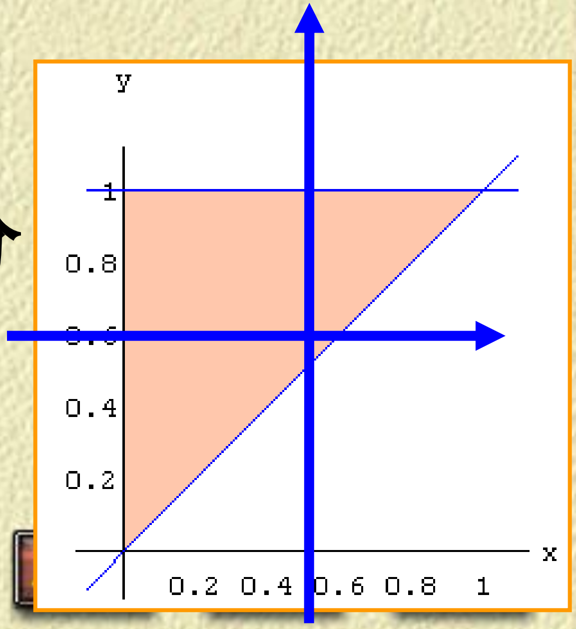
解 $\iint_D x^2e^{-y^2}dxdy=\int_0^1 dx\int_x^1 x^2e^{-y^2}dy=\int_0^1 x^2dx\int_x^1 e^{-y^2}dy$

$\because \int e^{-y^2}dy$无法用初等函数表示,

$\therefore$先对$y$积分不可行.

故我们选择另一个次序的二次积分

$$\iint_D x^2e^{-y^2}dxdy=\int_0^1 dy\int_0^y x^2e^{-y^2}dx$$



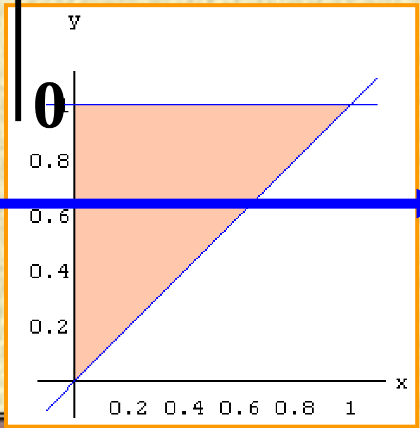
$$\iint_D x^2 e^{-y^2}\,dxdy = \int_0^1 dy \int_0^y x^2 e^{-y^2}\,dx$$

$$= \int_0^1 e^{-y^2} \cdot \frac{y^3}{3}\,dy = \int_0^1 e^{-y^2} \cdot \frac{y^2}{6}\,dy^2$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^1 te^{-t}\,dt = \frac{-1}{6}(1+t)e^{-t}\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{6}\left(1 - \frac{2}{e}\right)$$

积分换元
分部积分




上页 下页 返回

$$\int_0^1 e^{-y^2}\cdot\frac{y^3}{3}dy=\int_0^1 e^{-y^2}\cdot\frac{y^2}{6}dy^2 \longleftarrow \text{凑微分}$$

$$\overset{\text{变量代换}}{=\!=\!=\!=}\frac{1}{6}\int_0^1 te^{-t}dt \overset{\text{分部积分}}{=\!=\!=\!=\!=}-\frac{1}{6}(1+t)e^{-t}\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{6}\left(1-\frac{2}{e}\right).$$

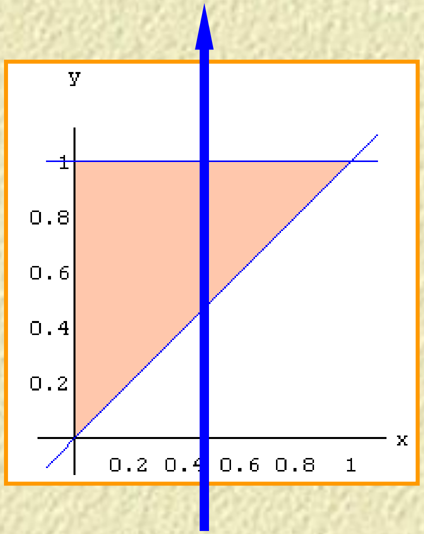
$$\int te^{-t}dt=\int t\left(-e^{-t}\right)'dt=-te^{-t}-\int\left(-e^{-t}\right)(t)'dt$$

$$=-te^{-t}+\int e^{-t}dt=-(1+t)e^{-t}+C$$

上页 下页 返回

$$I=\iint_D x^2e^{-y^2}dxdy=\int_0^1 dx\int_x^1 x^2e^{-y^2}dy,$$

$\int_x^1 e^{-y^2}dy$无法计算,现在我们用




分部积分法:

$$记\int_x^1 e^{-y^2}dy=\Phi(x)=-\int_1^x e^{-y^2}dy,$$

$$\Phi'(x)=-e^{-x^2},$$

$$I=\int_0^1 x^2\Phi(x)dx=\frac{1}{3}x^3\Phi(x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{1}{3}x^3\Phi'(x)dx$$

$$=0-\frac{1}{3}\int_0^1 x^3\left(-e^{-x^2}\right)dx=\frac{1}{3}\int_0^1 x^3e^{-x^2}dx=\frac{1}{3}\int_0^1 y^3e^{-y^2}dy$$

例4.改变积分的次序:

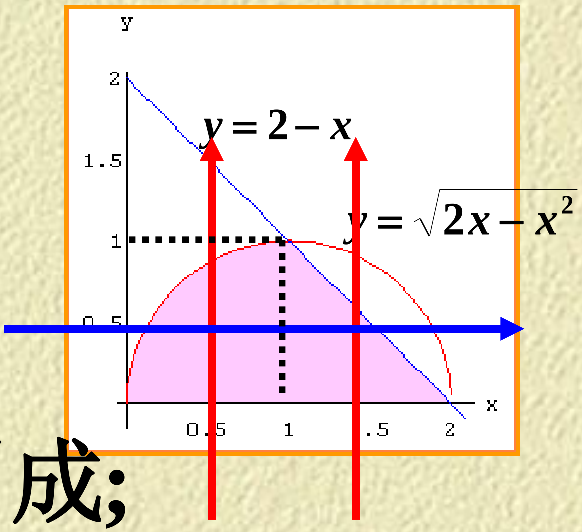
$$\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x} f(x,y)dy.$$

解　二重积分积分区域的边界由二次积分的上下限给出.

$D=D_1+D_2$,其中$D_1$由$y=0$,

$y=\sqrt{2x-x^2}$及$x=0, x=1$围成;

$D_2$由$y=0, y=2-x$及$x=1, x=2$围成.




$$\therefore 原式=\int_0^1 dy\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{2-y} f(x,y)dx.$$

上页　下页　返回

*Ex*.1.改变积分的次序:

$$I=\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx=?$$

*A*.积分区域*D*由$x=-\sqrt{1-y^2}$,

$x=\sqrt{1-y^2}$及$y=0, y=1$围成.

$$I=\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$$

$$=\int_{-1}^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy.$$

例5.计算由曲面$z=x^2+y^2$与$z=6-2x^2-2y^2$所围成的立体的体积.

解 $z=x^2+y^2, z=6-2x^2-2y^2$是旋转抛物面,

其交线为$\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ z=6-2x^2-2y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=2 \\ z=2 \end{cases}$,

在空间直角坐标系中$x^2+y^2=2$表示一个圆柱面,它就是空间曲面的交线对坐标面$xOy$作投影的投影柱面.

$\therefore$曲面所围成的空间立体投影到坐标面$xOy$上的区域为 $D: x^2+y^2 \le 2$.

所求体积恰是以区域$D$为底,上述投影柱面为侧面的两个曲顶柱体体积之差.

计算由曲面$z=x^2+y^2$与$z=6-2x^2-2y^2$所围成的立体的体积.

所求立体的体积

$$V=\iint_D\left(6-2x^2-2y^2\right)dxdy-\iint_D\left(x^2+y^2\right)dxdy$$

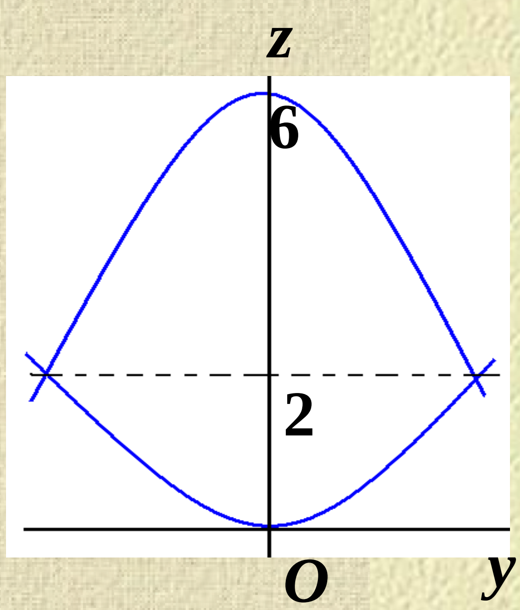
$$=\iint_D\left(6-3x^2-3y^2\right)dxdy$$

$$=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}dx\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}}\left(6-3x^2-3y^2\right)dy$$

$\cdots$ 计算不简单！ $V=6\pi.$

上页 下页 返回

旋转抛物面$z=x^2+y^2$与$z=6-2x^2-2y^2$可看作是坐标面$yoz$上的抛物线$z=y^2$与$z=6-2y^2$绕$z$轴一周所成,故可由旋转体体积计算法得:




$$V=\pi\int_0^2 y^2dz+\pi\int_2^6 y^2dz$$

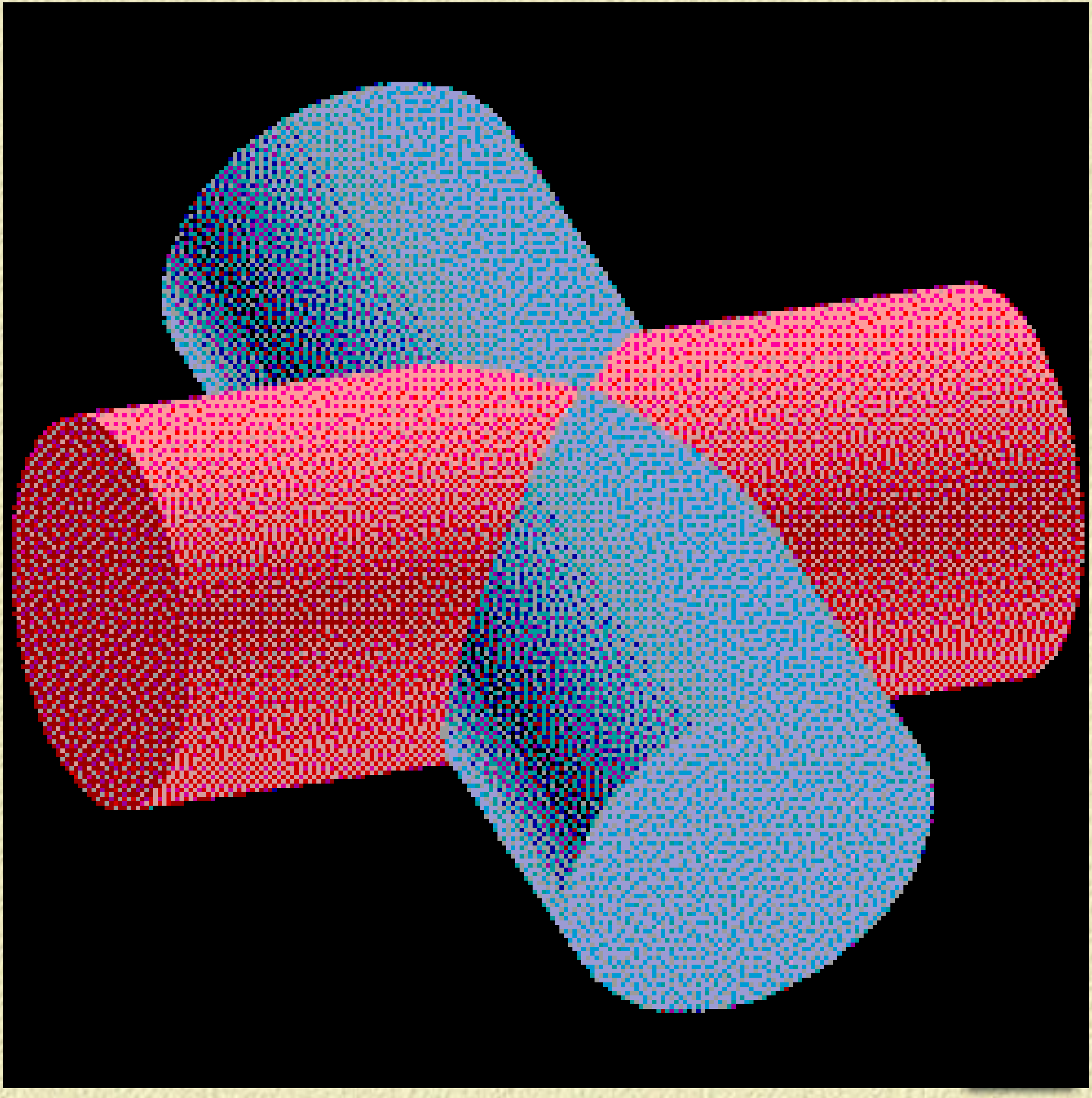
$$=\pi\int_0^2 zdz+\pi\int_2^6\left(3-\frac{z}{2}\right)dz$$

$$=6\pi$$

例6. 历史上的例子——"牟合方盖"——两个半径相同的圆柱其中心轴垂直相交所成的那一部分的立体——体积的计算.东汉末的刘徽就是通过计算出牟合方盖的体积从而推算出:

牟合方盖的体积:其内切球的体积=4:圆周率,这一成果为后人祖冲之推算出圆周率之祖率奠定了基础.

在一元函数的定积分中我们用平行截面面积已知的立体体积的计算方法已经做过一次了.



刘徽——牟合方盖

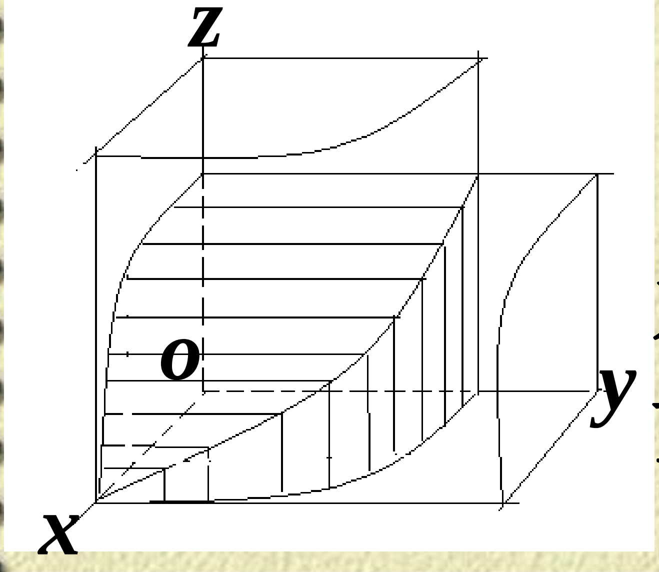
刘徽—牟合方盖的体积

两个半径相同的圆柱其中心轴垂直相交所成的那一部分的立体,利用其对称性,考虑其1/8的那一部分之体积计算.

设两个圆柱面$x^2+y^2=a^2, x^2+z^2=a^2$,

考虑在第一卦限内的部分:就是以

$$D=\left\{(x,y): \begin{array}{c} x^2+y^2\le a^2 \\ x\ge 0, y\ge 0 \end{array}\right\}$$




为底,以曲面$z=\sqrt{a^2-x^2}$为顶部的曲顶柱体的立体.

上页 下页 返回

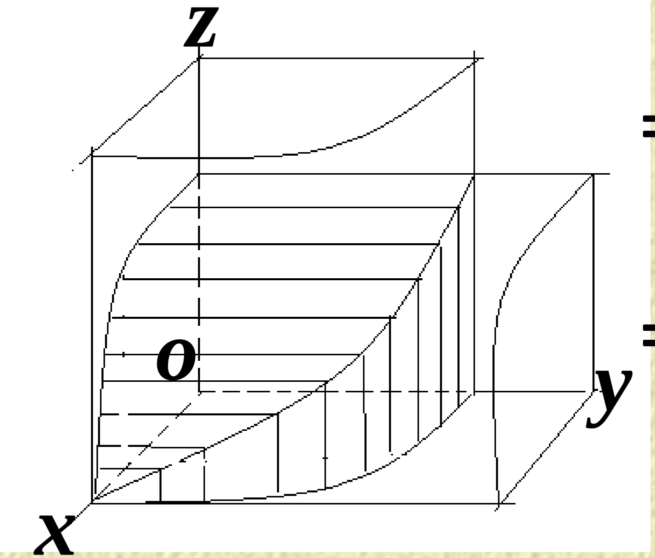
设两个圆柱面$x^2+y^2=a^2, x^2+z^2=a^2$,

考虑在第一卦限内的部分：就是以

$D=\left\{(x,y): x^2+y^2\le a^2, x\ge 0, y\ge 0\right\}$为底,

以曲面$z=\sqrt{a^2-x^2}$为顶部的曲顶柱体的立体.

$$V=8\iint_D \sqrt{a^2-x^2}\,dxdy$$




$$=8\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2}\,dy$$

$$=8\int_0^a \left(a^2-x^2\right)dx=\frac{16}{3}a^3$$

上页 下页 返回

设$D: x^2+y^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0.$

求 $\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2}\,dxdy.(a>0)$

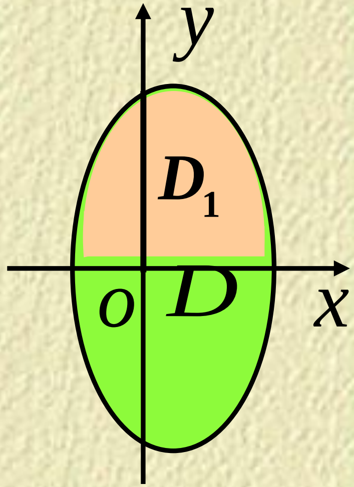
解$\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2}\,dxdy = \int_0^a dy \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} \sqrt{a^2-x^2}\,dx$

$$= \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2}\,dy = \int_0^a \left(a^2-x^2\right)dx$$

上页 下页 返回

## 3.关于区域对称性/函数奇偶性.

设函数$f(x,y)$在闭区域$D$上连续,区域$D$关于$y=0$对称,其位于$y=0$上方的部分为$D_1$,




(1). $f(x,-y)=f(x,y)$,

即$f(x,y)$关于$y$是偶函数,

则 $\iint_D f(x,y)d\sigma = 2\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma$;

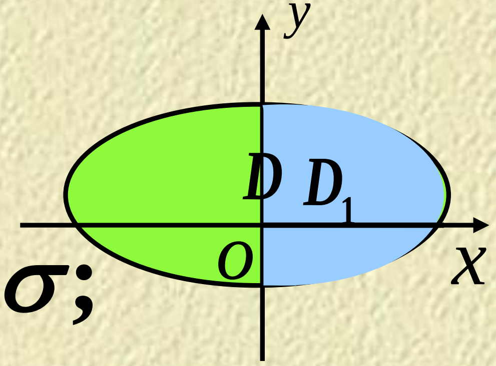
(2). $f(x,-y)=-f(x,y)$,即$f(x,y)$关于$y$是奇函数,则 $\iint_D f(x,y)d\sigma = 0$.

设$f(x,y)$在闭区域$D$上连续,区域$D$关于$x=0$ 对称,其位于$x=0$右边部分为$D_1$,

(1). $f(-x,y)=f(x,y)$,

即$f(x,y)$是$x$的偶函数,则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=2\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma;$$




(2). $f(-x,y)=-f(x,y)$,即$f(x,y)$关于$x$是奇函数,则 $\iint_D f(x,y)d\sigma=0.$

上页 下页 返回

注意：积分关于区域对称性的结论

必须有相应被积函数的奇偶性：

(2).函数$f(x,y)$在闭区域$D$上连续，区域$D$关于$x=0$对称，$f(x,y)$是$x$的奇函数，即 $f(-x,y)=-f(x,y)$，

则 $$\iint_D f(x,y)d\sigma = 0.$$

---

对照：

函数$y=f(x)$在闭区间$[-a,a]$上连续，

区间$[-a,a]$关于$x=0$对称，$f(x)$是奇函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$

上页 下页 返回

(2).证明 $\because$ 区域$D$关于$x=0$对称,

$\therefore$ 必定有

$D: -\varphi(y) \le x \le \varphi(y), c \le y \le d.$

又$(x, y) \in D$时有

$$f(-x, y) = -f(x, y),$$

那么,$\iint_D f(x, y)d\sigma$

$$= \int_c^d dy \int_{-\varphi(y)}^{\varphi(y)} f(x, y)dx = \int_c^d 0dy = 0.$$

例7.计算$\iint\limits_D (x+y)^2 d\sigma$,其中$D: x^2+y^2 \le 4$.

解 可以注意到:积分区域$D$关于$y$轴$(x=0)$,于关$x$轴$(y=0)$都是对称的,利用被积函数的关于变量$x$,关于变量$y$的奇偶性:

$$\iint\limits_D (x+y)^2 d\sigma = \iint\limits_D \left(x^2+y^2+2xy\right) dxdy$$

$$= \iint\limits_D \left(x^2+y^2\right) dxdy + \iint\limits_D 2xydxdy \ ,$$

由"积分关于区域对称性的结论"可得:

$$\iint\limits_D 2xydxdy = 0.$$

上页 下页 返回

例7.(2).

$$I=\int_{-1}^{0}dx\int_{-x}^{1}\left[3+\sin\left(xy^{2}\right)\right]dy$$

$$+\int_{0}^{1}dx\int_{x}^{1}\left[3+\sin\left(xy^{2}\right)\right]dy=\underline{\ ?\ }$$

该问题考查了二重积分的

关于积分区域对称性的知识.

上页 下页 返回

$$I=\int_{-1}^{0}dx\int_{-x}^{1}\left[3+\sin\left(xy^2\right)\right]dy+\int_{0}^{1}dx\int_{x}^{1}\left[3+\sin\left(xy^2\right)\right]dy$$

$$I=\iint_D\left[3+\sin\left(xy^2\right)\right]dxdy, D=D_1+D_2$$

$D_1$由$x=-1, x=0, y=-x, y=1$围成,

$D_2$由$x=0, x=1, y=x, y=1$ 围成.

$\because$ $D$关于直线$x=0$对称,而函数$\sin\left(xy^2\right)$是变量$x$的奇函数,$\therefore \iint_D \sin\left(xy^2\right)dxdy=0,$

$$\therefore I=\iint_D 3dxdy=3\sigma(D)=3.$$

例7.(3)$^*$.计算

$$I=\iint_D\left(xy+\cos x\sin y\right)d\sigma=?$$

其中$D$是以$(1,1),(-1,1),(-1,-1)$为顶点的三角形区域.

说明:使用二重积分的关于区域对称性,函数奇偶性的结论可以简化计算过程.

$$Q.\ I=\iint_D\left(xy+\cos x\sin y\right)d\sigma=?$$

$D$以$(1,1),(-1,1),(-1,-1)$为顶点的三角形.

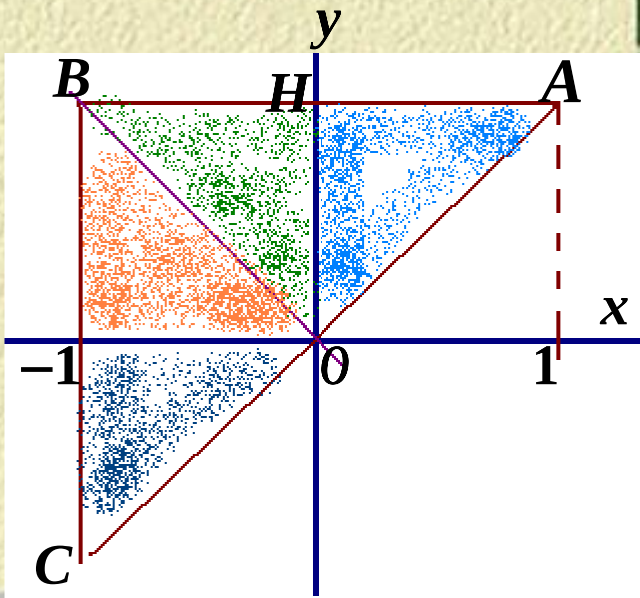
$$A.\ I=\iint_D\left(xy+\cos x\sin y\right)dxdy=\iint_{\Delta OAB}+\iint_{\Delta OBC}$$

$$\iint_{\Delta OAB}\left(xy\right)dxdy=\iint_{\Delta OBC}\left(xy\right)dxdy=0,$$

$$\iint_{\Delta OBC}\left(\cos x\sin y\right)dxdy=0,$$

$$\iint_{\Delta OAB}\left(\cos x\sin y\right)dxdy$$

$$=2\iint_{\Delta OAH}\left(\cos x\sin y\right)dxdy$$



$$I=\iint_D (xy+\cos x\sin y)d\sigma=?$$

$D$以$(1,1),(-1,1),(-1,-1)$为顶点的三角形.

$$A.I=\iint_D (xy+\cos x\sin y)dxdy=\iint_{\Delta OAB}+\iint_{\Delta OBC}$$

$$\iint_{\Delta OAB}(xy)dxdy=\iint_{\Delta OBC}(xy)dxdy=0,$$

$$\iint_{\Delta OBC}(\cos x\sin y)dxdy=0,$$

$$\iint_{\Delta OAB}(\cos x\sin y)dxdy=2\iint_{\Delta OAH}(\cos x\sin y)dxdy$$

$$=2\int_0^1 dy\int_0^y(\cos x\sin y)dx=2\int_0^1\sin^2 y dy=1-\frac{1}{2}\sin 2.$$

上页 下页 返回

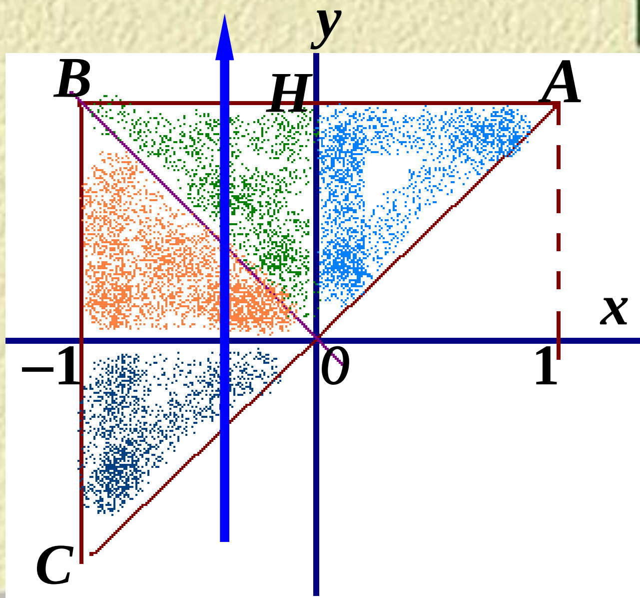
$$Q.I=\iint_D\left(xy+\cos x\sin y\right)d\sigma=?$$

$D$以$(1,1),(-1,1),(-1,-1)$为顶点的三角形.

法二 直接计算

$$I=\int_{-1}^{1}dx\int_{x}^{1}\left(xy+\cos x\sin y\right)dy=\cdots$$

计算过程不免稍繁琐些



自我练习:

$Ex.1.$设$D: x^2+y^2 \le a^2, x \ge 0, y \ge 0.$

求 $\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2}\,dxdy.(a>0)$

$Ex.2.$设$D$由曲线$y^2=-x, y^2=x$及

$y=-1, y=1$所围成.

求 $\iint\limits_D \left(2+xy^2-|y|\right)dxdy.$

上页 下页 返回

$Ex.3.$计算$\int_0^1 dx\int_x^1 \frac{\sin y}{y}dy$ .

$Ex.4.$设函数$z=f(x,y)$有连续的二阶偏导数,在区域$D=\{(x,y)|-1\le x\le 1,0\le y\le 1\}$上有$f(-x,y)=f(x,y)$,则$\iint\limits_D\left(2+\frac{\partial z}{\partial x}\right)dxdy=?$

上页 下页 返回

$Ex.1.$设$D: x^2+y^2 \le a^2, x \ge 0, y \ge 0.$

求 $\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2}\,dxdy.(a>0)$

解$\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2}\,dxdy = \int_0^a dy \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} \sqrt{a^2-x^2}\,dx$

$= \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2}\,dy = \int_0^a \left(a^2-x^2\right)dx$

$Ex.2.$设$D$由曲线$y^2=-x, y^2=x$及$y=-1,$ $y=1$所围成.求$I=\iint\limits_D\left(2+xy^2-|y|\right)dxdy.$

解　作区域$D$的草图,可见$D$关于$y=0$对称,也关于$x=0$对称.

$$I=\iint\limits_D 2dxdy+\iint\limits_D xy^2dxdy-\iint\limits_D |y|dxdy$$

$$=2\sigma(D)+\int_{-1}^{1}dy\int_{-y^2}^{y^2}xy^2dx-4\int_0^1dx\int_{\sqrt{x}}^{1}|y|dy$$

上页　下页　返回

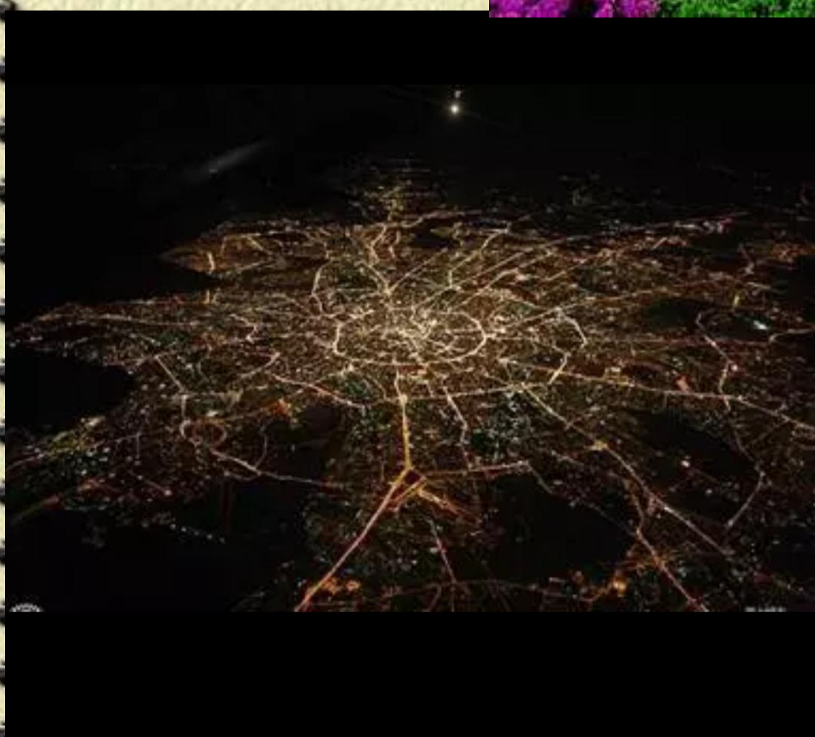
$Ex.3.$计算$\int_0^1 dx\int_x^1 \frac{\sin y}{y}dy = 1-\cos 1$ .

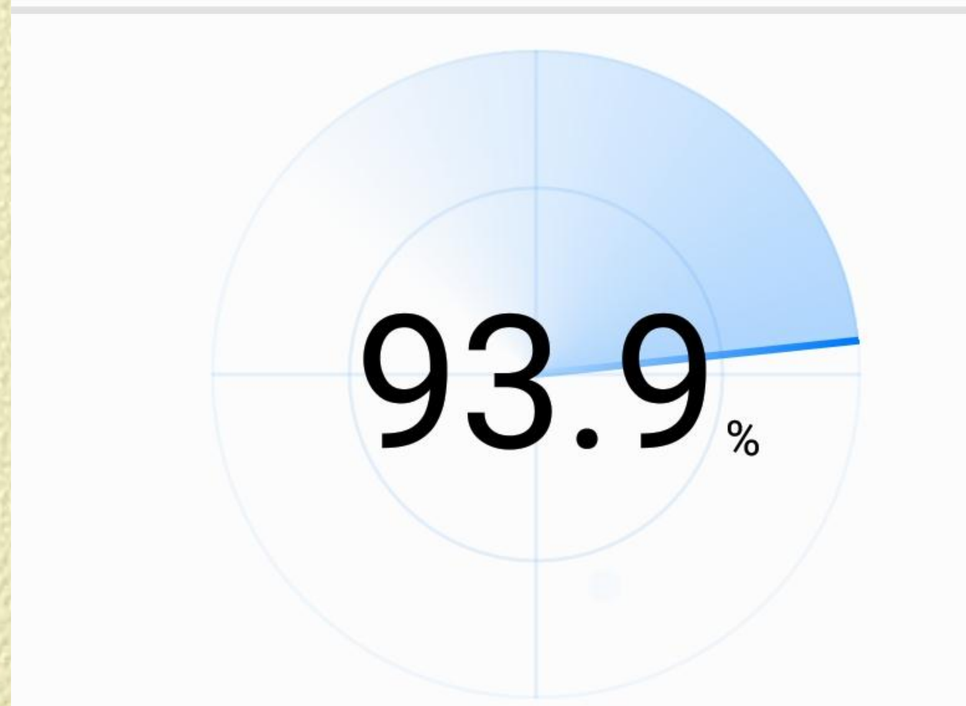
$Ex.4.$设函数$z = f(x,y)$有连续的二阶偏导数,在区域$D = \{(x,y) \mid -1 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$上有$f(-x,y) = f(x,y)$,则$\iint\limits_D \left(2+\frac{\partial z}{\partial x}\right)dxdy = 4$ .

# Sec.21.2 二重积分的计算(2)

二. 极坐标系

三. 二重积分在极坐标系中的计算




93.9 %

## 二. 极坐标系

在普通的直角坐标系$xOy$中,有一点$P(x,y)$,

向径$\overrightarrow{OP}$的长$r=\sqrt{x^2+y^2}$, $x\neq 0$时$\tan\theta=\dfrac{y}{x}$,

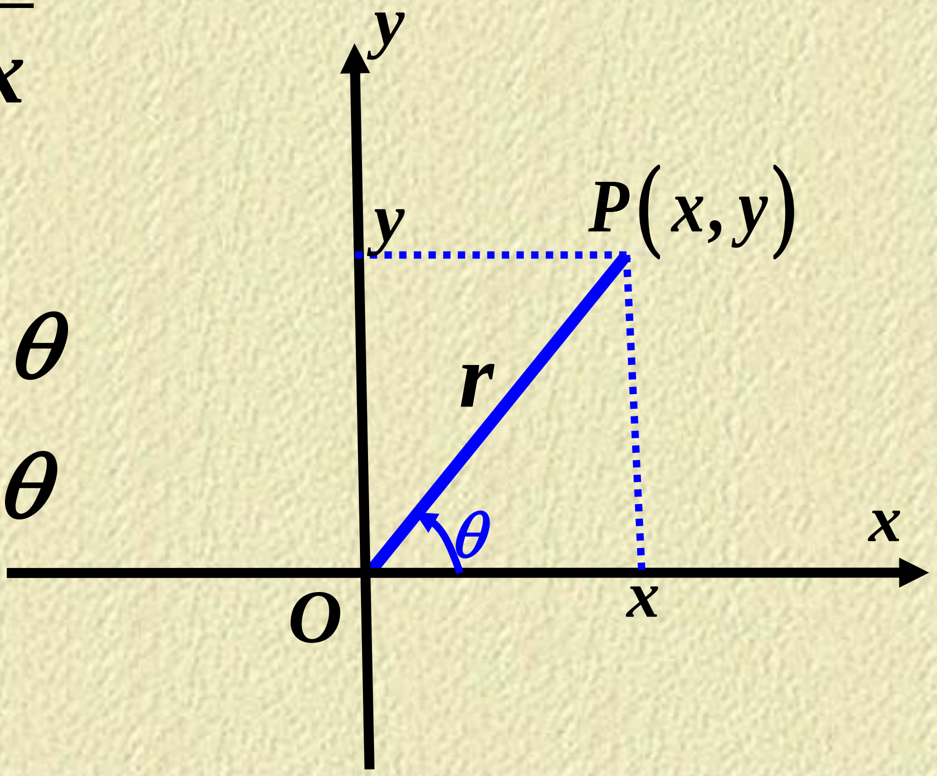
$\theta$为向径$\overrightarrow{OP}$与$x$轴的正向的夹角,$\theta\in[0,2\pi]$.

or $:\theta\in[-\pi,\pi]$

那么$\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\theta=\dfrac{y}{x} \end{cases}$, $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$,

$r=0$时$\theta$无法确定.当$r>0$时一点$P(x,y)$就有唯一的一个有序数组$(r,\theta)$与之相对应,此时$P(x,y)\leftrightarrow P(r,\theta)$是一一对应的.

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$




$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

点$P(x,y)$,向径$\overrightarrow{OP}$长$r=\sqrt{x^2+y^2}$,$r\geq 0$,

向径$\overrightarrow{OP}$与$x$轴的正向的夹角$\theta\in[0,2\pi]$.

$or:\theta\in[-\pi,\pi]$

$$\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\theta=\dfrac{y}{x} \end{cases},\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases},$$

当$r>0$时$P(x,y)\leftrightarrow P(r,\theta)$一一对应.

在普通的直角坐标系$xOy$中,$r=c$(常数)表示以$O(0,0)$为圆心,$c$为半径的圆周曲线.$\theta=\alpha$(常数)表示从$O(0,0)$出发,与$x$轴正向的夹角为$\alpha$的射线.

我们知道,圆周的过某点的切线与过该点的半径垂直.

上页 下页 返回

当$r>0$时$P(x,y)\leftrightarrow P(r,\theta)$一一对应.

这样我们就建立了一个极坐标系$rO\theta$:

极坐标系$rO\theta$的坐标原点与$O(0,0)$重合,

横轴—极轴$\left(\theta=0\right)$与$x$轴的正半轴重合,

$\because r=c$与$\theta=\alpha$正交$\left(\text{垂直}\right)$,

$\therefore$ 极坐标系$rO\theta$也是一种直角坐标系.

$\left(r,\theta\right)$称为是点$P$在极坐标系中的坐标.

我们将建立的极坐标系$rO\theta$的坐标原点—**极点**$O$与$xOy$坐标系的坐标原点$O(0,0)$重合，**极轴**$\theta=0$与$x$轴的正半轴重合.

例8.给出下列$xOy$ 直角坐标系中的直线或曲线在极坐标系中的表达式:(1).$y=\sqrt{3}x$.

解 (1).$y=\sqrt{3}x \leftrightarrow \tan\theta=\sqrt{3}$,

$\therefore \theta=\dfrac{\pi}{3}$或$\theta=\dfrac{4\pi}{3}$,

$\left(r \geq 0,\text{两条射线}\right)$.

上页 下页 返回

$(2). x + y = 1.$

解 $(2). x + y = 1,$

$$r\cos\theta + r\sin\theta = 1,$$

$$\therefore r = \frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}.$$

$$(3).\ y = x^2; \qquad (4).\ x = \sqrt{4 - y^2}.$$

解 $(3).\ y = x^2,\ r\sin\theta = r^2\cos^2\theta,$

$$\therefore\ r = \sec\theta\tan\theta,\ \left(0 \le \theta \le \pi,\ \theta \ne \frac{\pi}{2}\right);$$

$$(4).\ x = \sqrt{4 - y^2},\ x^2 + y^2 = 4,\ x \ge 0,$$

$\downarrow \cos\theta \ge 0$

$$\therefore\ r = 2,\ \left(-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right).$$

例9.给出下列$xOy$直角坐标系中的区域在极坐标系中的表达式:

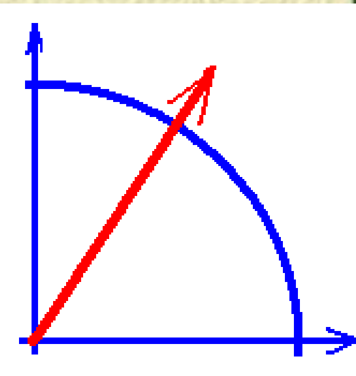
$$(1).D=\left\{(x,y)\middle|\,x^2+y^2\le 4,x\ge 0,y\ge 0\right\}.$$

解 充分注意到 $r=\sqrt{x^2+y^2},r\ge 0,$

$$\begin{array}{l}\theta\in[0,2\pi]\\ or:\theta\in[-\pi,\pi]\end{array},\begin{cases}r=\sqrt{x^2+y^2}\\ \tan\theta=\dfrac{y}{x}\end{cases},\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases},$$

$$(1).D=\left\{(x,y)\middle|\,x^2+y^2\le 4,x\ge 0,y\ge 0\right\}$$

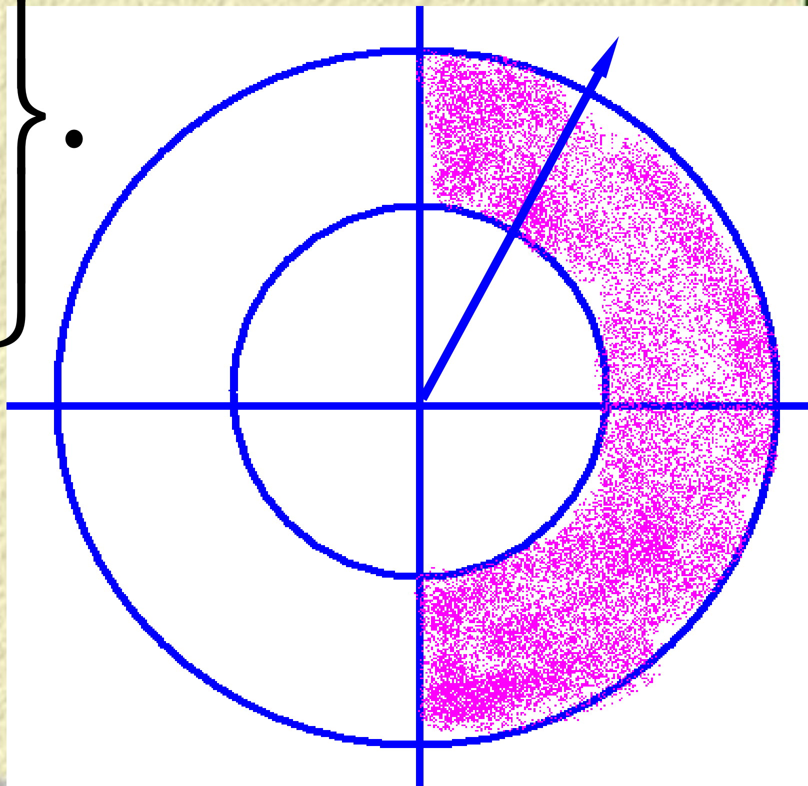
$$=\left\{(r,\theta)\middle|\,0\le r\le 2,0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}.$$



(2). $D=\left\{(x,y)\middle|1\le x^2+y^2\le 4, x\ge 0\right\}$.

解(2) $D=\left\{(x,y)\middle|1\le x^2+y^2\le 4, x\ge 0\right\}$

$$=\left\{(r,\theta)\middle|\begin{array}{c}-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\\ 1\le r\le 2\end{array}\right\}.$$

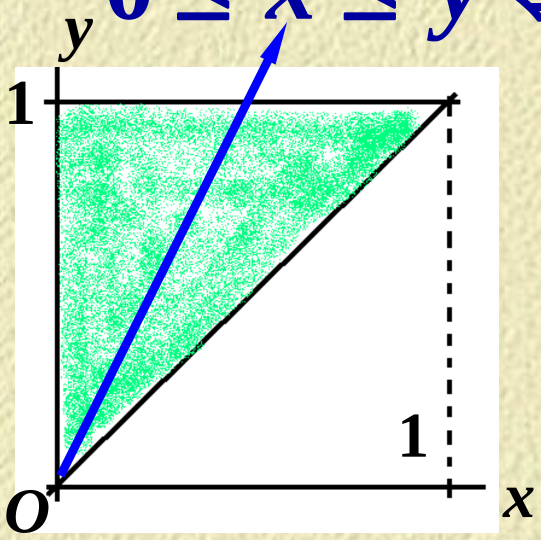


$$(3).D=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le y,0\le y\le 1\right\}.$$

$$\text{解}(3).D=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le y,0\le y\le 1\right\}$$

$$=\left\{(r,\theta)\middle|0\le r\le \csc\theta,\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}.$$

$$0\le x\le y\Leftrightarrow r\cos\theta\le r\sin\theta,\tan\theta\ge 1,$$




$$y\le 1\Leftrightarrow r\sin\theta\le 1$$

$$\to r\le\csc\theta,$$

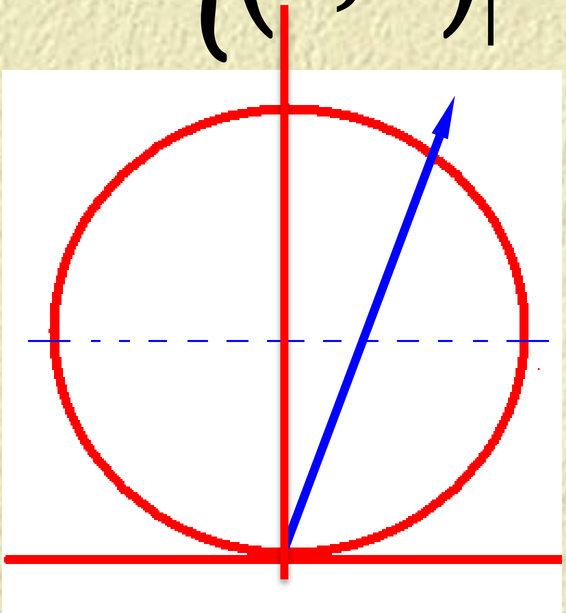
上页 下页 返回

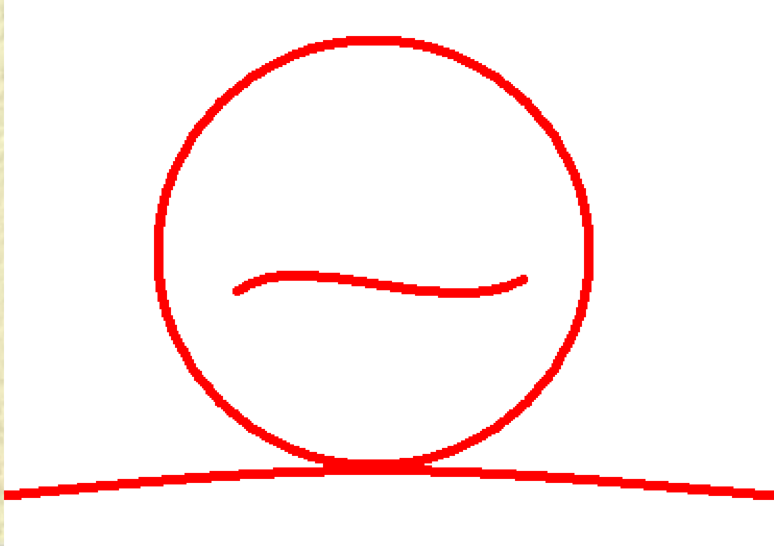
(4). $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\le 2y\right\}$.

解(4). $x^2+y^2\le 2y \leftrightarrow r^2\le 2r\sin\theta$,

$y\ge 0\leftrightarrow r\sin\theta\ge 0\rightarrow \sin\theta\ge 0$,

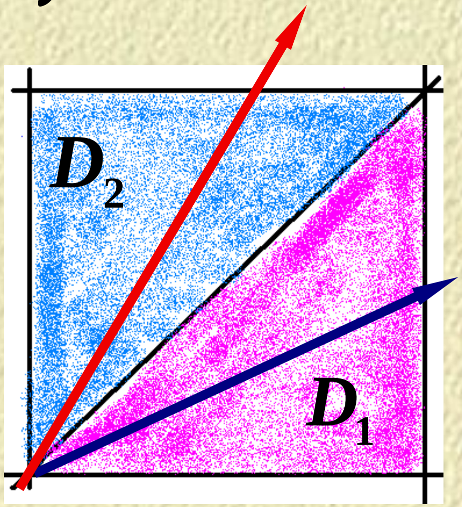
$\therefore D=\left\{(r,\theta)\middle| 0\le r\le 2\sin\theta, 0\le\theta\le\pi\right\}$.





$$(5).D=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 1\}.$$

解$(5).D=D_1+D_2$,




$$D_1=\{(x,y)|0\le y\le x,0\le x\le 1\}$$

$$D_2=\{(x,y)|x\le y\le 1,0\le x\le 1\}$$

$$D_1=\left\{(r,\theta)\middle|0\le r\le \sec\theta,0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\right\},$$

$$D_2=\left\{(r,\theta)\middle|0\le r\le \csc\theta,\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}.$$

上页 下页 返回

$$(1).D=\left\{(x,y)\middle|\, x^2+y^2\le 4, x\ge 0, y\ge 0\right\}$$

$$=\left\{(r,\theta)\middle|\, 0\le r\le 2, 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$(5).D=\left\{(x,y)\middle|\, 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\right\}.$$

$$D=D_1+D_2,$$

$$D_1=\left\{(x,y)\middle|\, 0\le y\le x, 0\le x\le 1\right\}$$

$$=\left\{(r,\theta)\middle|\, 0\le r\le\sec\theta, 0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\right\},$$

$$D_2=\left\{(x,y)\middle|\, x\le y\le 1, 0\le x\le 1\right\}$$

$$=\left\{(r,\theta)\middle|\, 0\le r\le\csc\theta, \frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}.$$

我们可以注意到,圆形区域(或部分)在极坐标系中的表达式较为简单,而矩形区域在$xOy$直角坐标系中的表达式较为简单.这就是我们介绍极坐标系中的二重积分计算的目的:

想要化圆为方,简化二次积分的计算.

不过,我们并不直接画出极坐标系中区域的图形,而是画出$xOy$直角坐标系中区域的图形,同时确定区域在极坐标系中的表达式,用以确定在极坐标系中将二重积分化为二次积分的上、下限.

约定：

在极坐标系中，由于$r=\sqrt{x^2+y^2}\geq 0$，

$\theta\in[0,2\pi]$或$[-\pi,\pi]\cdots$

若某个$\theta_0$，使得$r=r(\theta)$中的$r_0=r(\theta_0)<0$，

则人们约定：点$(r_0,\theta_0)$实际上表示极坐标系中点$(-r_0,\theta_0+\pi)$[或者是$(-r_0,\theta_0-\pi)$].

$(-r_0,\theta_0)$与$(-r_0,\theta_0+\pi)$[或$(-r_0,\theta_0-\pi)$]关于极点对称.

上页 下页 返回

如对于$r=2\cos\theta$,当$\theta\in\left[-\pi/2,\pi/2\right]$时$r\geq 0$,

而当$\theta=\dfrac{2\pi}{3}$时$r=2\cos\dfrac{2\pi}{3}=-1$,

$\therefore\left(-1,\dfrac{2\pi}{3}\right)$实际上表示点$\left(1,\dfrac{2\pi}{3}-\pi\right)$,

$$\left(1,\frac{2\pi}{3}-\pi\right)=\left(1,-\frac{\pi}{3}\right).$$

上页 下页 返回

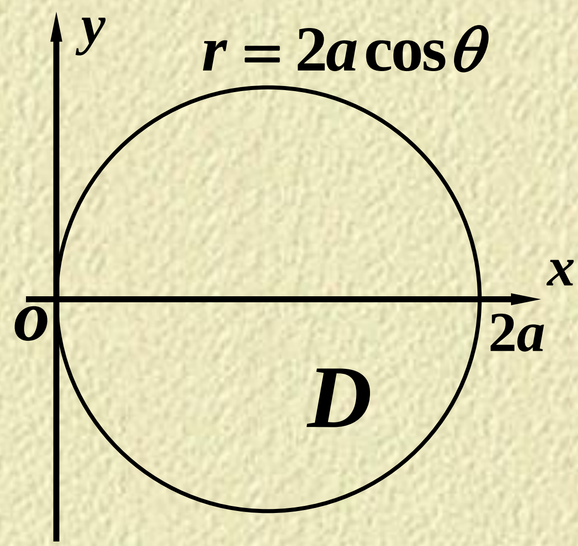
思考题.

$r = 2a\cos\theta, a > 0$是什么曲线?

解 $-\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$时$r = 2a\cos\theta \ge 0$,

$\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{3\pi}{2}$时$r = 2a\cos\theta \le 0$,

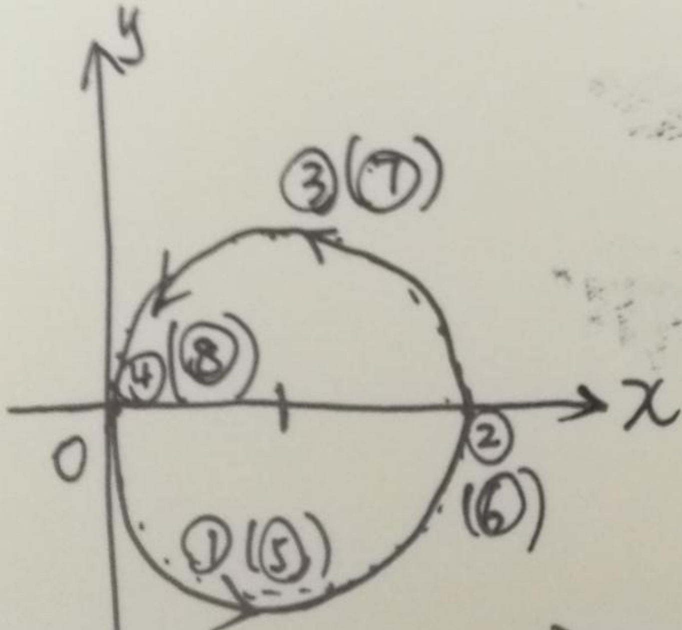
此时$(r,\theta)$应表示点$(-r,\theta-\pi)$.




$r = 2a\cos\theta \leftrightarrow r^2 = 2ar\cos\theta$

$\leftrightarrow x^2 + y^2 = 2ax.$

上页 下页 返回




$r=2a\cos\theta, a>0$.

$-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$时 $r=2a\cos\theta\ge0$

$\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{3}{2}\pi$时 $r\le0$.

此时$(r,\theta)$实际表示点$(-r,\theta-\pi)$.

$\theta: -\frac{\pi}{2}\to0\to\frac{\pi}{2}$,

$r: 0\to2a\to0$.

在$\theta: -\frac{\pi}{2}\to0\to\frac{\pi}{2}\to\pi\to\frac{3}{2}\pi$时,
我们画曲线的笔迹沿着
①→②→③→④→⑤→⑥→⑦→⑧
的顺序行进,曲线被描了两遍.

$r=2a\cos\theta, a>0$是什么曲线?

$$r=2a\cos\theta \leftrightarrow r^2=2ar\cos\theta \leftrightarrow x^2+y^2=2ax.$$

又如著名的四叶玫瑰线$(a>0)$

$$r=a\sin 2\theta\text{，}\quad \theta\in[0,2\pi].$$

三叶玫瑰线$(a>0)$

$$r=a\sin 3\theta\text{，}$$

$$\theta\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right]\cup\left[\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right].$$

$r = a\sin 2\theta,\ a>0$.

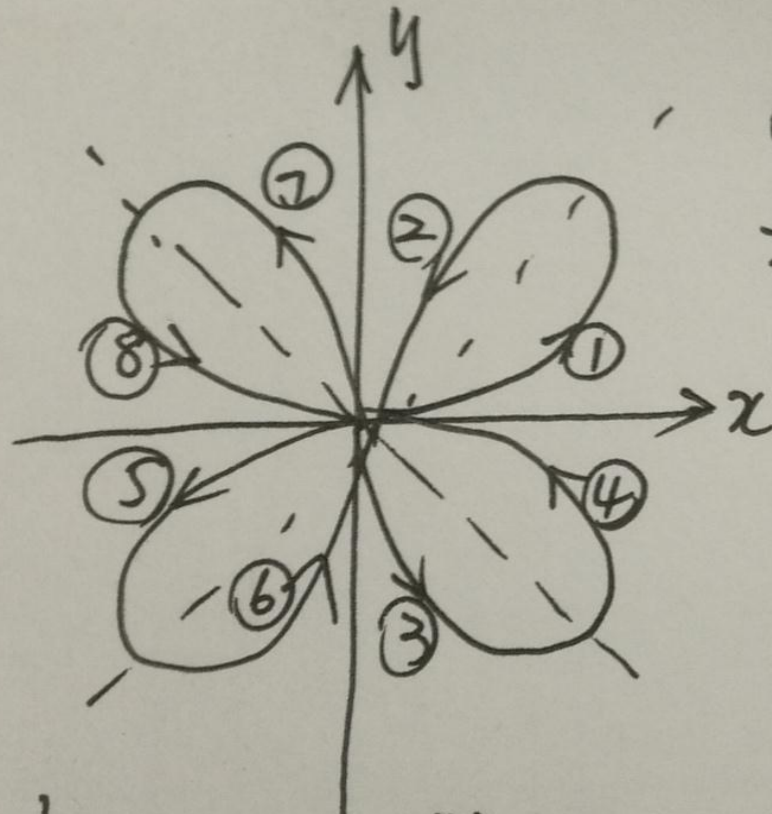
$\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]\cup[\pi,\frac{3}{2}\pi]$，$r\geq 0$.

当$\theta\in[\frac{\pi}{2},\pi]$时$r\leq 0$，

此时$(r,\theta)$实际表示点$(-r,\theta+\pi)$；

当$\theta\in[\frac{3}{2}\pi,2\pi]$时$r\leq 0$，

$(r,\theta)$实际表示点$(-r,\theta-\pi)$.

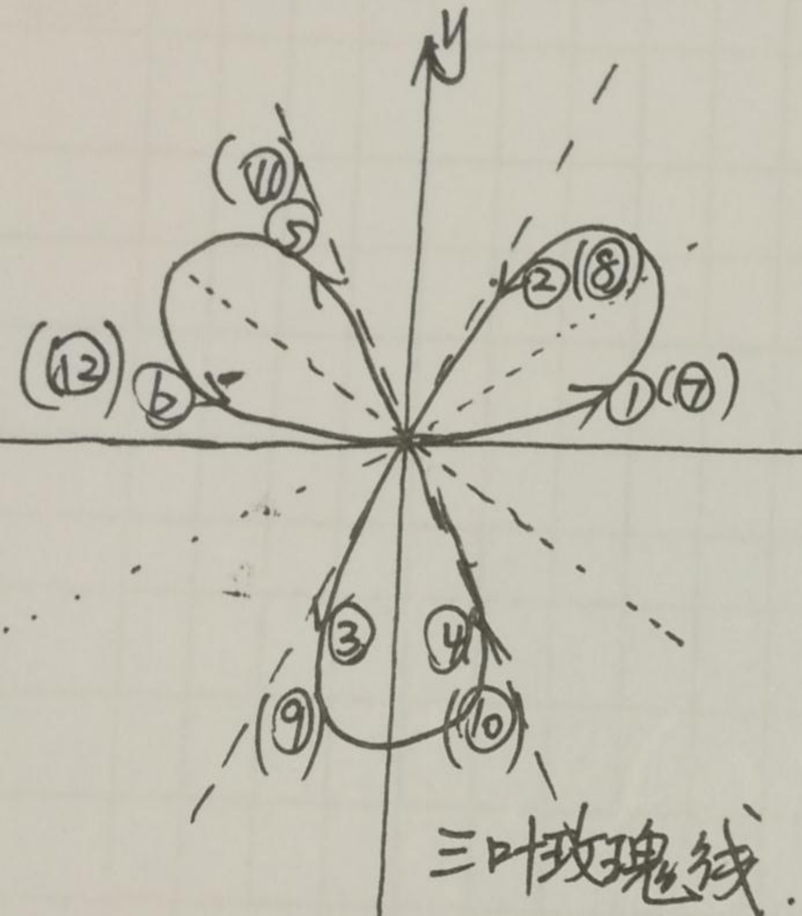



$\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$时

$\theta:\ 0\to\frac{\pi}{4}\to\frac{\pi}{2}$.

$r=a\sin 2\theta:\ 0\nearrow a\searrow 0$.

在$\theta$从$0\to 2\pi$逆时针方向变化时，我们画曲线的笔迹沿着①→②→③→④→⑤→⑥→⑦→⑧的方向行进.




$r=a\sin3\theta$，$a>0$.

$\theta\in[0,\frac{\pi}{3}]\cup[\frac{2\pi}{3},\pi]\cup[\frac{4}{3}\pi,\frac{5}{3}\pi]$，$r\geq0$.

当 $\theta\in[\frac{\pi}{3},\frac{2}{3}\pi]$ 时 $r\leq0$，此时 $(r,\theta)$ 实际为点 $(-r,\theta+\pi)$；

当 $\theta\in[\pi,\frac{4}{3}\pi]$ 时 $r\leq0$，$(r,\theta)$ 实际表示点 $(-r,\theta-\pi)$；

当 $\theta\in[\frac{5}{3}\pi,2\pi]$ 时 $r\leq0$，$(r,\theta)$ 表示点 $(-r,\theta-\pi)$.

当 $\theta$ 从 $0\to2\pi$（逆时针方向）增加时，我们画曲线的笔沿着 ①→②→③→④→⑤→⑥→⑦→⑧→⑨→⑩→⑪→⑫ 的过程行进，可见曲线被描了两遍，是为三叶玫瑰线.

思考练习.

请你画出下列方程对应的曲线草图.

设$a>0$.(此处,数$a$称为是尺度参数)

(1).$r=-2a\cos\theta$;

(2).$r=a(1+\cos\theta)$; (3).$r=a(1-\sin\theta)$;

(4).$r=a(2+\cos\theta)$;

(5).$(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$.

## 三. 二重积分在极坐标系中的计算

又见例5.计算由曲面$z=x^2+y^2$与$z=6-2x^2-2y^2$所围成的立体的体积.

解 $z=x^2+y^2$,$z=6-2x^2-2y^2$是旋转抛物面,其交线为

$$\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ z=6-2x^2-2y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=2 \\ z=2 \end{cases},$$

在空间直角坐标系中$x^2+y^2=2$表示一个圆柱面,它就是空间曲面的交线对坐标面$xOy$作投影的投影柱面.

曲面$z=x^2+y^2, z=6-2x^2-2y^2$

的交线为$\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ z=6-2x^2-2y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=2 \\ z=2 \end{cases},$

在空间直角坐标系中$x^2+y^2=2$表示一个圆柱面,它就是空间曲面的交线对坐标面$xOy$作投影的投影柱面.

$\therefore$曲面所围成的空间立体投影到坐标面$xOy$上的区域为 $D: x^2+y^2 \le 2.$

所求体积恰是以区域$D$为底,上述投影柱面为侧面的两个曲顶柱体体积之差.

由曲面$z=x^2+y^2$与$z=6-2x^2-2y^2$

所围成的立体的体积：

$$V=\iint_D\left(6-2x^2-2y^2\right)dxdy-\iint_D\left(x^2+y^2\right)dxdy$$

$$=\iint_D\left(6-3x^2-3y^2\right)dxdy$$

$$=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}dx\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}}\left(6-3x^2-3y^2\right)dy$$

直接计算比较麻烦!下面我们就要引进

在极坐标系中二重积分的计算方法,这

也相当于进行了二重积分的变量代换.

上页 下页 返回

$$I = \iint_D f(x, y) d\sigma,$$

其中$d\sigma$为积分微元,亦称面积微元.

在普通的直角坐标系$xOy$中

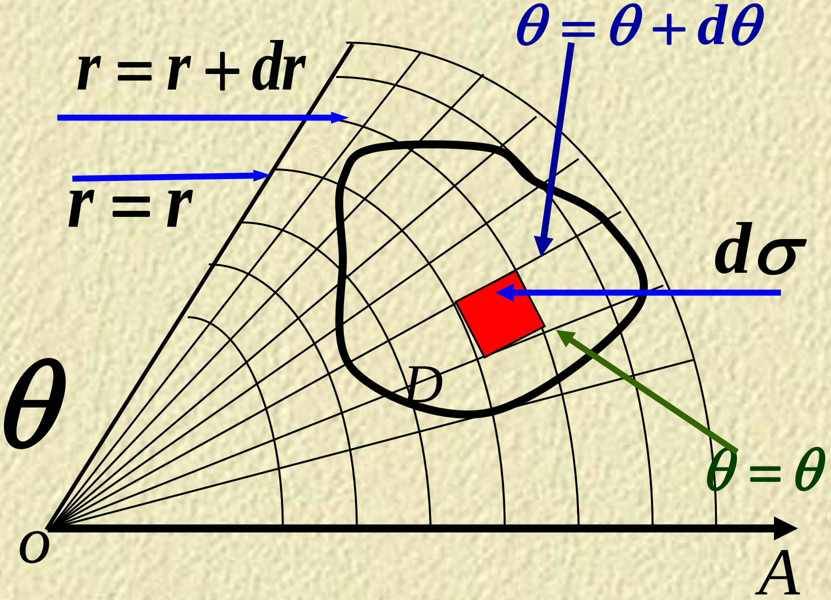
$$d\sigma = dxdy,$$

在极坐标系中 $d\sigma = ?$

$$\Delta\sigma = \frac{1}{2}(r+dr)^2 d\theta - \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

$$= \frac{1}{2}(2r+dr)\,dr\,d\theta$$

$$= r\,dr\,d\theta + \frac{1}{2}(dr)^2 d\theta$$




$$\therefore d\sigma = dxdy = r\,d\theta \cdot dr$$

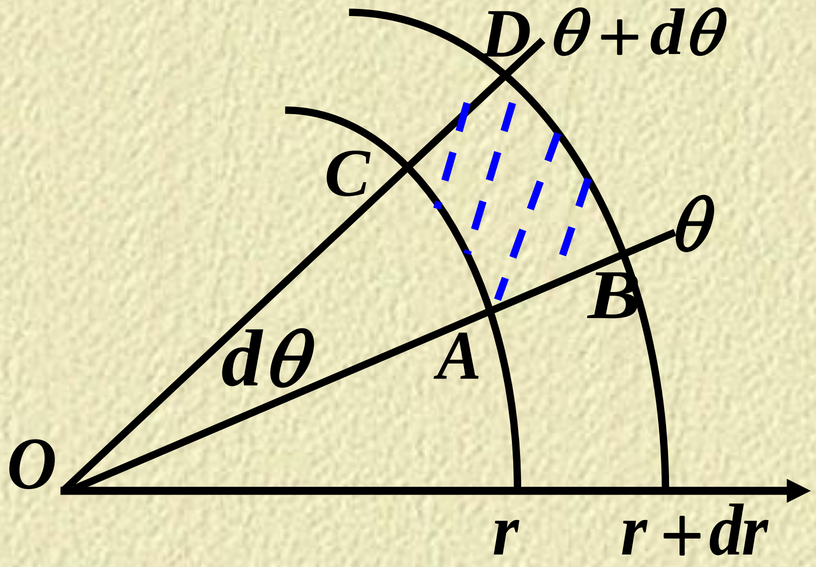
返回

圆周的过一点的切线与过该点的半径垂直.

∴曲边四边形*ABDC*可以看作是一“(曲边)

矩形”,其面积为 $d\sigma = \overline{AB} \cdot AC \ = dr \cdot rd\theta$

$$\therefore \quad d\sigma = dxdy = rd\theta \cdot dr$$




上页 下页 返回

$$I = \iint_D f(x,y)d\sigma,$$ $d\sigma$为面积微元,

在直角坐标系$xOy$中 $d\sigma = dxdy$,

在极坐标系中 ,$d\sigma = dxdy = rd\theta \cdot dr$.

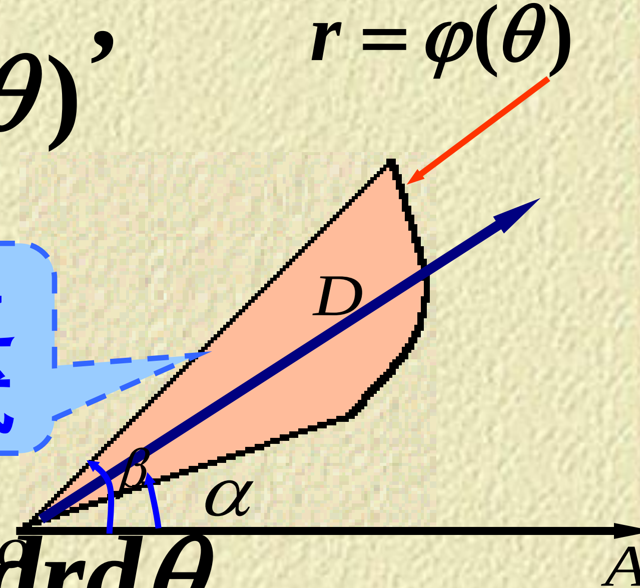
从量纲的角度来分析:$d\theta$是弧度制的无量纲量,$r$和$dr$表示长度,有长度单位,那么$rd\theta \cdot dr$的单位就是$(长度单位)^2$,是面积单位.

$$\therefore d\sigma = dxdy = rd\theta dr$$

上页 下页 返回

# 二重积分化为二次积分的公式

积分区域$D$：$\begin{cases} \alpha \le \theta \le \beta \\ 0 \le r \le \varphi(\theta) \end{cases}$，




积分区域之最基本形式

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$$

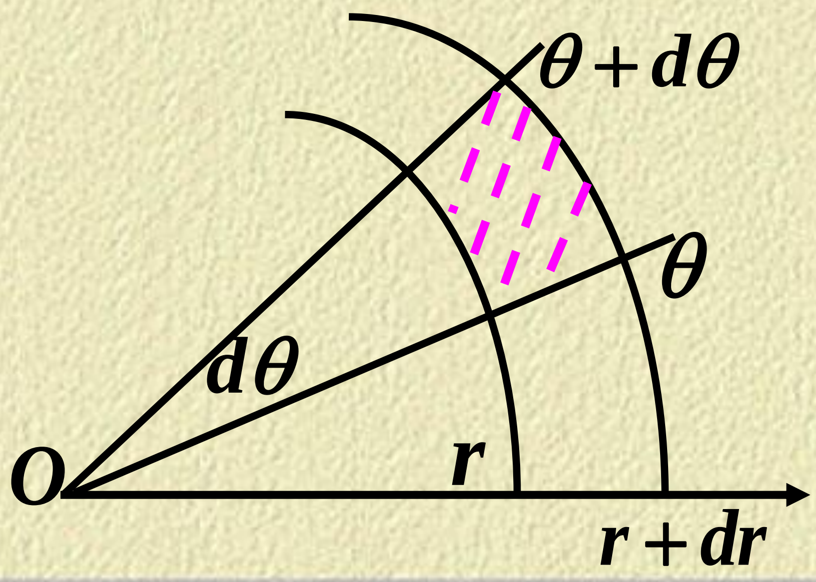
$$= \iint\limits_D f\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right) r dr d\theta$$

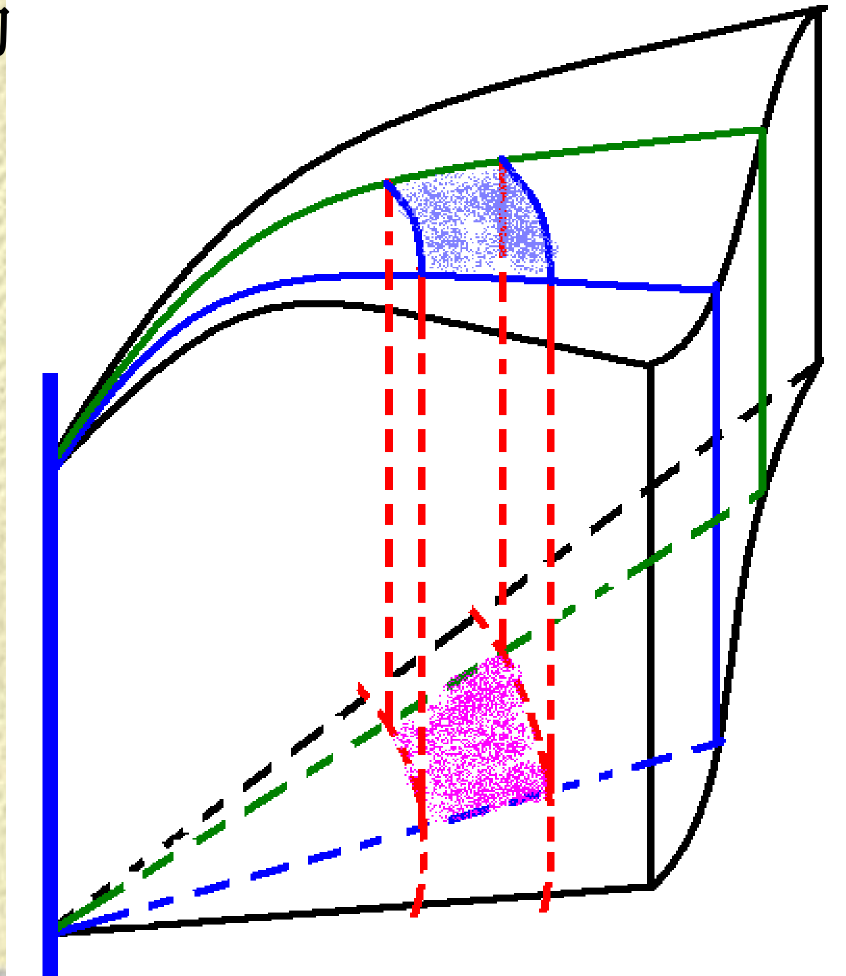
$$= \int_\alpha^\beta d\theta \int_0^{\varphi(\theta)} f\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right) r dr$$

我们这样做的几何解释就是：

把如图所示那样的曲顶柱体用过那条兰色直线的半平面$\theta=\theta,\theta=\theta+d\theta$将其切分成若干个楔子形的小块,再用以该兰色线为中心轴的同轴圆柱面$r=r,r=r+dr$将这样的小楔子切成若干个小的曲顶柱体.这样的小曲顶柱体的体积$\left(f(x,y)\geq 0\right)$

$dQ=f(x,y)d\sigma.$

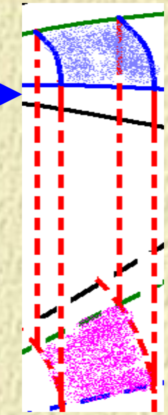


小曲顶柱体的体积：

$$dQ = f(x,y)d\sigma = f\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right)rdrd\theta.$$

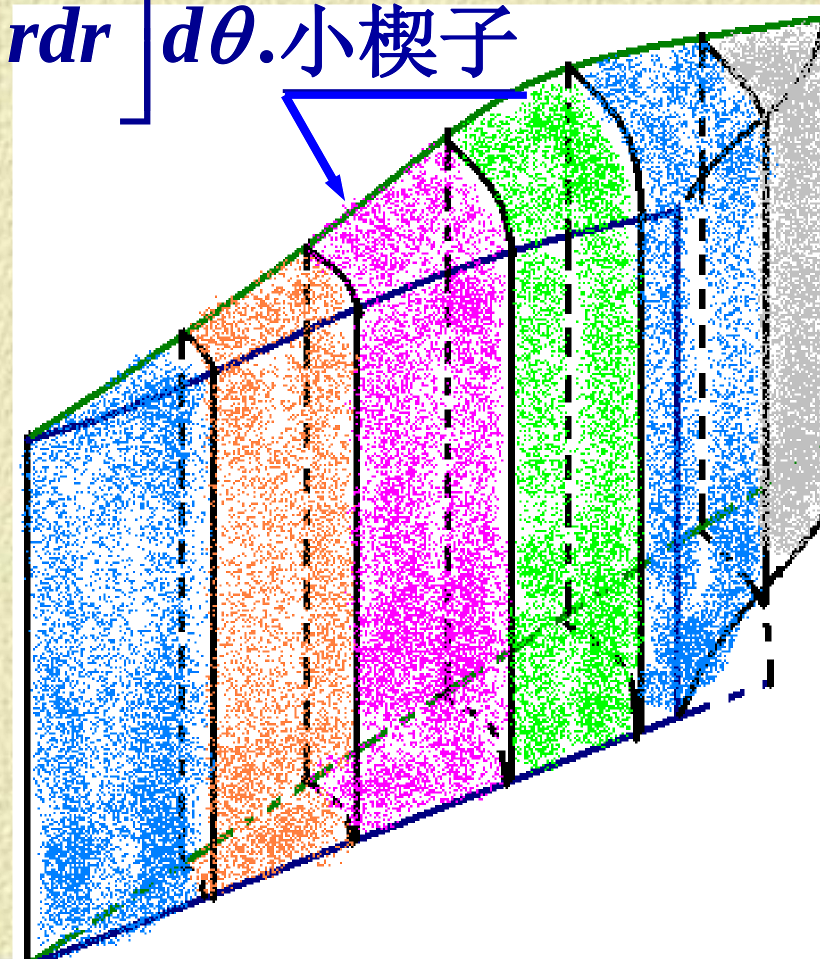
小曲顶柱体

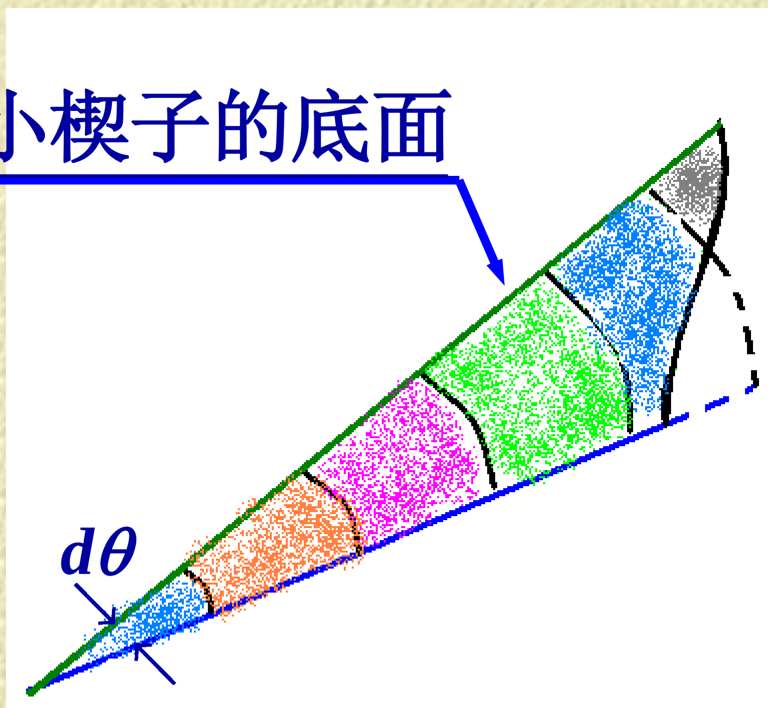


小楔子的体积：

$$dV = \left[\int_0^{\varphi(\theta)} f\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right)rdr\right]d\theta.$$

小楔子





小曲顶柱体的体积：

$$dQ = f(x,y)d\sigma = f\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right)rdrd\theta.$$

小楔子的体积：

$$dV = \left[\int_0^{\varphi(\theta)} f\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right)rdr\right]d\theta.$$

曲顶柱体的体积：$V = \int_\alpha^\beta dV$

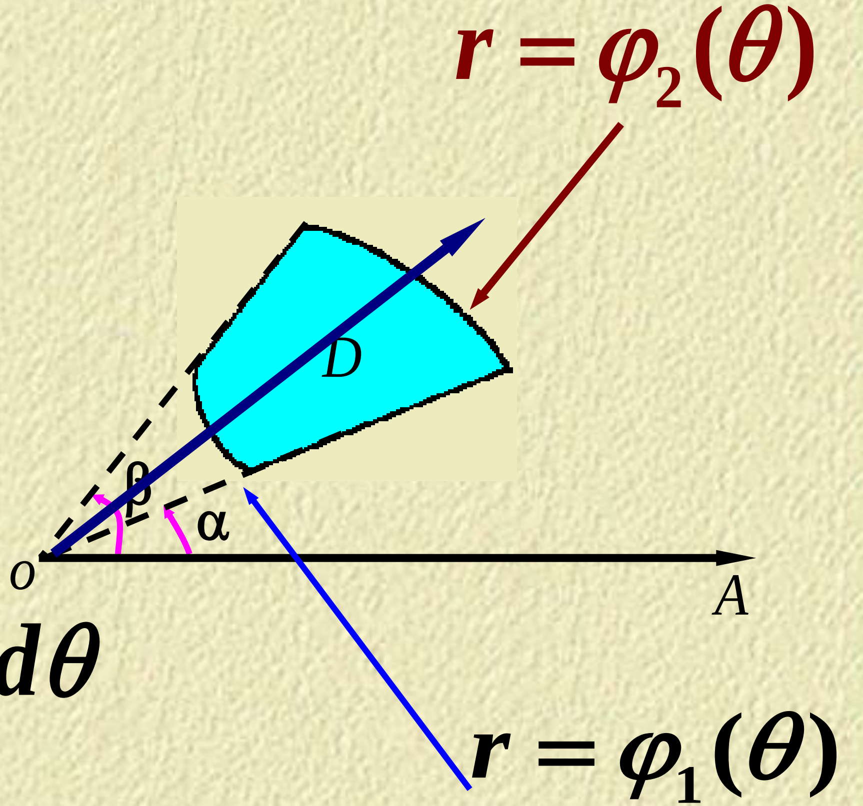
$$= \int_\alpha^\beta \left[\int_0^{\varphi(\theta)} f\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right)rdr\right]d\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta d\theta \int_0^{\varphi(\theta)} f\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right)rdr.$$

# 积分区域之变形→

积分区域$D$变形之一：

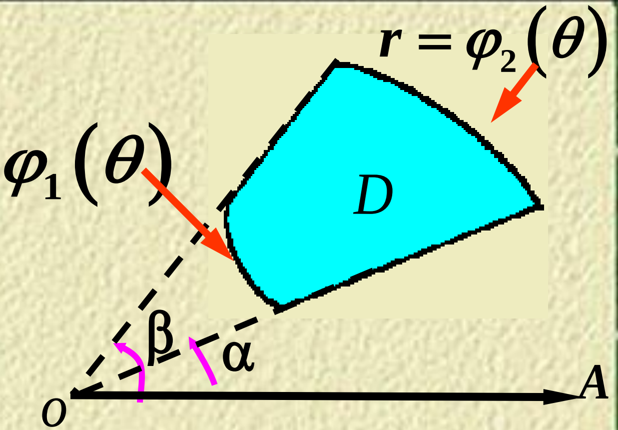
$$D:\begin{cases}\alpha\le\theta\le\beta\\ \varphi_1(\theta)\le r\le\varphi_2(\theta)\end{cases},$$




$$\iint_D f\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right) r dr d\theta$$

$$=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right) r dr.$$

积分区域$D=D_2-D_1$,




$D_2:\alpha\le\theta\le\beta, 0\le r\le\varphi_2(\theta)$

$D_1:\alpha\le\theta\le\beta, 0\le r\le\varphi_1(\theta)$

$$\iint_D f\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right) r dr d\theta$$

$$=\iint_{D_2} f\cdot r dr d\theta-\iint_{D_1} f\cdot r dr d\theta$$

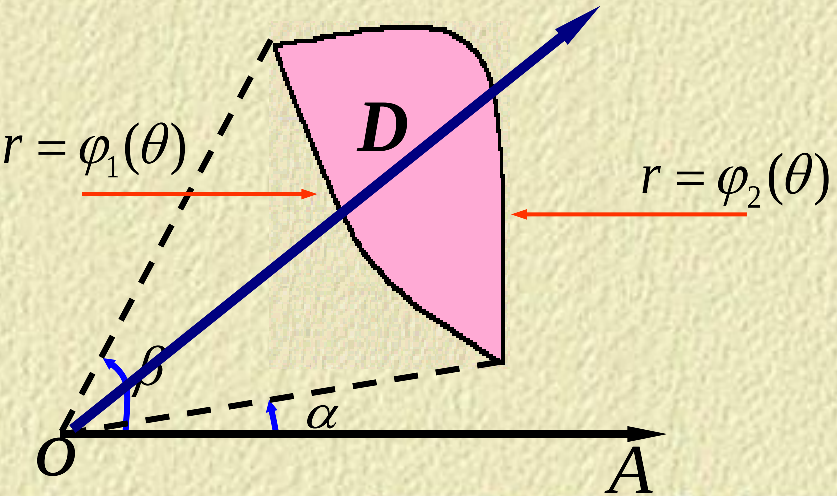
$$=\int_\alpha^\beta\left(\int_0^{\varphi_2} f\cdot r dr\right)d\theta-\int_\alpha^\beta\left(\int_0^{\varphi_1} f\cdot r dr\right)d\theta$$

$$=\int_\alpha^\beta\left(\int_0^{\varphi_2} f\cdot r dr-\int_0^{\varphi_1} f\cdot r dr\right)d\theta=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f\cdot r dr$$

$$D:\alpha\le\theta\le\beta,\varphi_1(\theta)\le r\le\varphi_2(\theta)$$

$$\iint_D f\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right) r dr d\theta$$

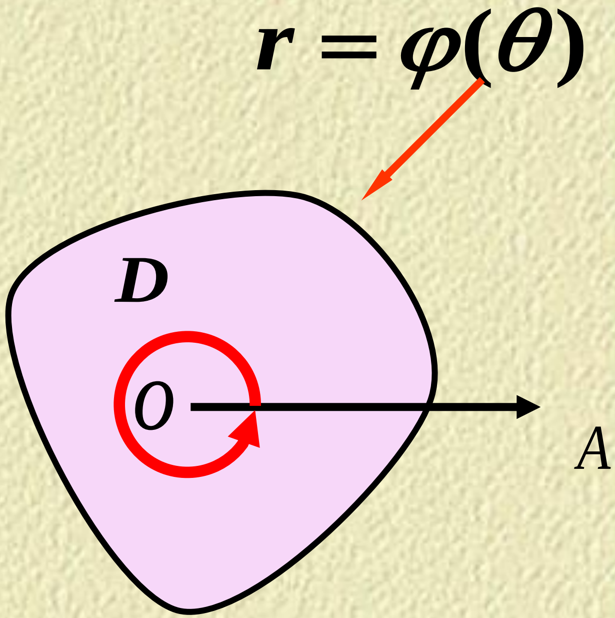
$$=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right) r dr$$




上页 下页 返回

积分区域$D$变形之二：

$$D:\begin{cases}0\le r\le\varphi(\theta)\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases},$$



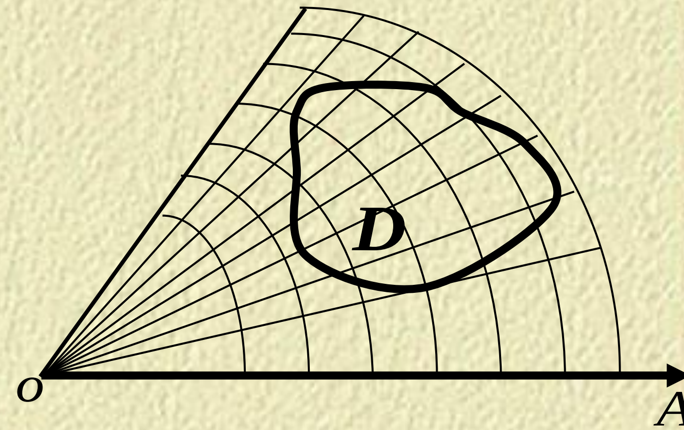

$$\iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,rdrd\theta$$

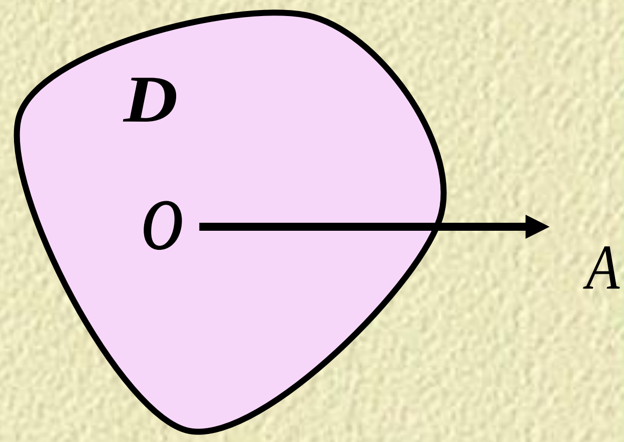
$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\varphi(\theta)}f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,rdr.$$

特别地,极坐标系中区域$D$面积

$$\sigma(D)=\iint_D 1dxdy$$

$$=\iint_D r dr d\theta.$$




上页 下页 返回

那么问题是,计算二重积分时,我们何时将积分化为极坐标系中的二次积分呢?

$xOy$坐标系　　　　极坐标系

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

根据前面的分析,我们可以想到:

如果(1).积分区域是(曲边)扇形或其变形(圆是特例!),或者

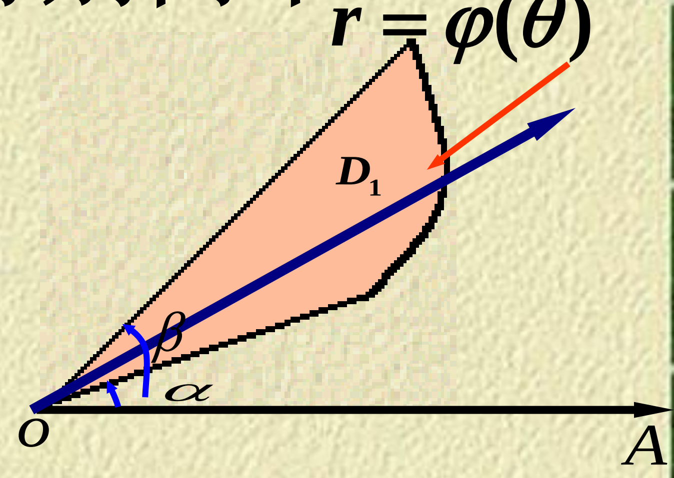
(2).被积函数形如$f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$或$f\left(\dfrac{y}{x}\right)$

等,那么,不妨考虑将二重积分化为极坐标系中的二次积分.

上页 下页

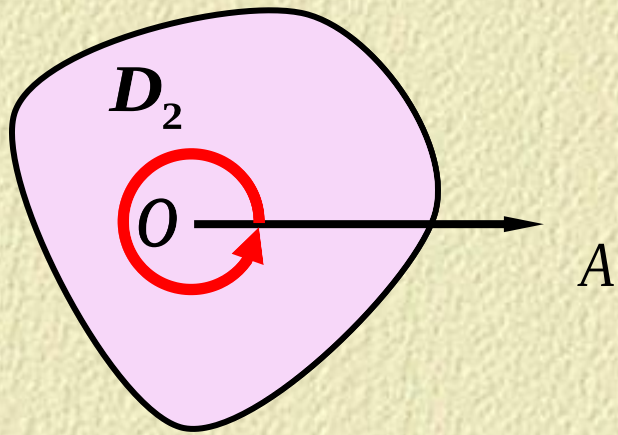
(1). ∵曲边扇形 状的积分区域在

极坐标系中的表达形式特别简单：




区域$D_1$：$\begin{cases} \alpha \le \theta \le \beta \\ 0 \le r \le \varphi(\theta) \end{cases}$，

变形$D_2$：$\begin{cases} 0 \le r \le \varphi(\theta) \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$.




上页 下页 返回

(2).被积函数形如$f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$或$f\left(\dfrac{y}{x}\right)$,作极坐标变换,函数简化为$f(r)$或$f(\tan\theta)$,则必将简化计算过程.

再谈例5.计算由曲面$z=x^2+y^2$与$z=6-2x^2-2y^2$所围成的立体的体积.

解：由两曲面所围成的立体的体积：

$$V=\iint_D\left(6-3x^2-3y^2\right)dxdy, D: x^2+y^2\le 2.$$

在极坐标系中计算十分简单：

$$V=3\iint_D\left(2-x^2-y^2\right)dxdy$$

$$=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\left(2-r^2\right)rdr=6\pi.$$

倘用$xOy$坐标来处理,计算将较繁琐:

$$V=3\iint_D\left(2-x^2-y^2\right)dxdy$$

$$=3\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}dx\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}}\left(2-x^2-y^2\right)dy$$

$$=3\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}dx\left[2\left(2-x^2\right)\sqrt{2-x^2}-\frac{2}{3}\left(\sqrt{2-x^2}\right)^3\right]$$

$$=4\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2-x^2}\right)^3dx\ \overset{x=\sqrt{2}\sin t,dx=\sqrt{2}\cos tdt}{\underset{t=\mp\frac{\pi}{2}\text{时}x=\mp\sqrt{2}}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}}$$

$$=4\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left|\sqrt{2}\cos t\right|^3\sqrt{2}\cos tdt$$

$$=32\int_0^{\pi/2}\cos^4tdt=\cdots=6\pi.$$

上页 下页 返回

$$V=3\iint_D\left(2-x^2-y^2\right)dxdy$$

$$=4\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2-x^2}\right)^3 dx \xlongequal[t=\mp\frac{\pi}{2}\text{时}x=\mp\sqrt{2}]{x=\sqrt{2}\sin t,dx=\sqrt{2}\cos tdt}$$

$$=4\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left|\sqrt{2}\cos t\right|^3\sqrt{2}\cos tdt$$

$$=32\int_0^{\pi/2}\cos^4 tdt=\cdots=6\pi.$$

$$\int\cos^4 tdt=\int\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2 dt$$

$$=\frac{1}{4}\int\left(1+2\cos 2t+\frac{1+\cos 4t}{2}\right)dt=\cdots$$

上页 下页 返回

例10.计算$I=\iint_D (x^2+y^2)dxdy$,其中$D$

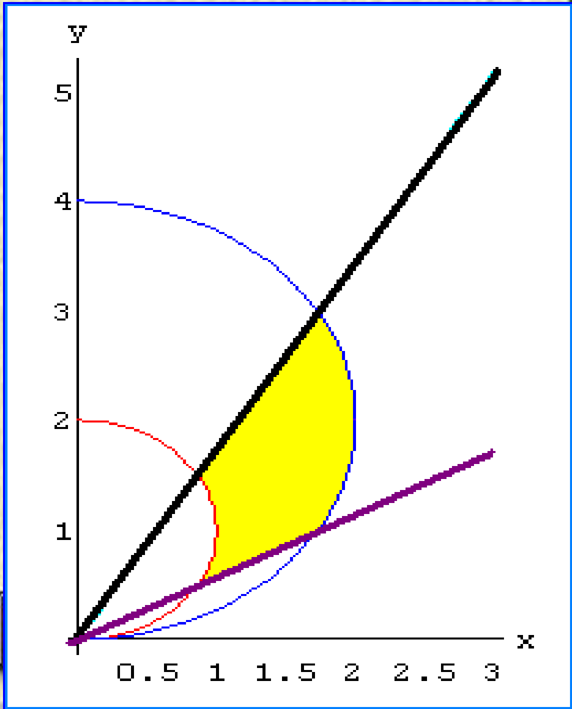
是由曲线$x=\sqrt{2y-y^2}$, $x=\sqrt{4y-y^2}$

与直线$x-\sqrt{3}y=0$, $y-\sqrt{3}x=0$所围

成的平面闭区域.

解 $x-\sqrt{3}y=0\to\theta_1=\dfrac{\pi}{6}$,

$y-\sqrt{3}x=0\to\theta_2=\dfrac{\pi}{3}$,



$$x-\sqrt{3}y=0 \to \theta_1=\frac{\pi}{6},\quad y-\sqrt{3}x=0 \to \theta_2=\frac{\pi}{3},$$

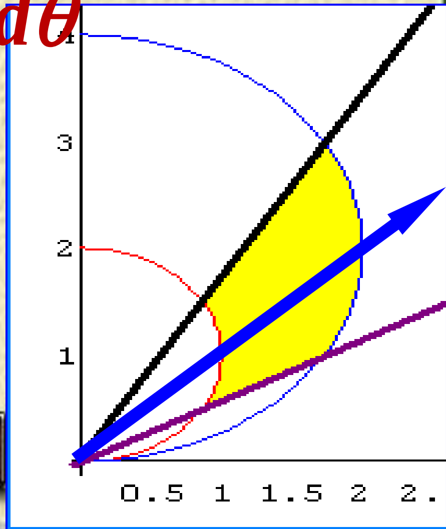
$$x=\sqrt{2y-y^2} \to x^2+y^2=2y \to r=2\sin\theta,$$

$$x=\sqrt{4y-y^2} \to x^2+y^2=4y \to r=4\sin\theta.$$

$$\iint_D\left(x^2+y^2\right)dxdy=\int_{\pi/6}^{\pi/3}d\theta\int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta}r^2\cdot rdr$$

$$=\int_{\pi/6}^{\pi/3}d\theta\cdot\frac{1}{4}r^4\Big|_{2\sin\theta}^{4\sin\theta}=\frac{1}{4}\left(4^4-2^4\right)\int_{\pi/6}^{\pi/3}\sin^4\theta d\theta$$

$$=15\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right).$$




上页

$$\int \sin^4 \theta d\theta = \int \left(\sin^2 \theta\right)^2 d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1 - \cos 2\theta\right)^2 d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta\right) d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 2\theta + \frac{1 + \cos 4\theta}{2}\right) d\theta$$

$$= \cdots$$

*Ex*.2.

$$I=\iint\limits_{x^2+y^2\le 2}(1-x)^3\,dxdy=?$$

该问题考查了:二重积分关于积分区域的对称性和函数的奇偶性的知识,计算的基本功,亦可理解为考查了二重积分中利用“形式对称性”和极坐标变换的方法.

上页 下页 返回

$$I=\iint_D (1-x)^3\,dxdy,\ D: x^2+y^2\le 2,$$

倘一味机械地做题,虽也能将之进行到底,但颇为繁琐:

$$I=\iint_D (1-x)^3\,dxdy$$

$$=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}dx\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}}(1-x)^3\,dy$$

$$=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left[(1-x)^3\cdot 2\sqrt{2-x^2}\right]dx=\cdots$$

$$I=\iint_D (1-x)^3 dxdy, D: x^2+y^2\le 2,$$

解 $$I=\iint_D \left(1+3x^2-3x-x^3\right)dxdy,$$

区域$D$关于$x=0$对称，$3x+x^3$是$x$的奇函数.

$$\because \iint_D \left(3x+x^3\right)dxdy=0,$$

$$\therefore I=\iint_D \left(1+3x^2\right)dxdy=\iint_D 1dxdy+3\iint_D x^2dxdy$$

$$=\sigma(D)+3\iint_D x^2dxdy.$$

$$\iint_D x^2 dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r^2 \cos^2\theta \cdot r dr$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r^3 dr$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1+\cos 2\theta) d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r^3 dr = \pi,$$

$$\therefore I = \iint_D (1+3x^2) dxdy$$

$$= \sigma(D) + 3\iint_D x^2 dxdy = 5\pi \ .$$

$$I=\iint_D (1-x)^3 dxdy, D: x^2+y^2\le 2,$$

$\because$ 积分区域$D$关于两变量$x, y$形式对称,即在区域$D$中,将坐标$x, y$的位置互换,其表达式不变.简言之,区域$D$关于直线$y=x$对称.

$$\therefore \iint_D x^2 dxdy=\iint_D y^2 dxdy=\frac{1}{2}\iint_D \left(x^2+y^2\right)dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r^2\cdot rdr=\pi,$$

用形式对称性!

上页 下页 返回

$$I=\iint_D (1-x)^3 dxdy, D: x^2+y^2\le 2,$$

由“形式对称性”得

$$\iint_D x^2dxdy=\iint_D y^2dxdy=\frac{1}{2}\iint_D\left(x^2+y^2\right)dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}r^2\cdot rdr=\pi,$$

$$I=\iint_D\left(1+3x^2\right)dxdy=\sigma(D)+3\iint_D x^2dxdy$$

$$=5\pi\ .$$

## *Add*.关于形式对称性.

设闭区域$D$关于$y=x$对称,函数$f(x,y)$在区域$D$上连续,则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_D f(y,x)d\sigma.$$

有此结论的依据是:积分值与积分变量用什么符号无关,即

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(y)dy\ .$$

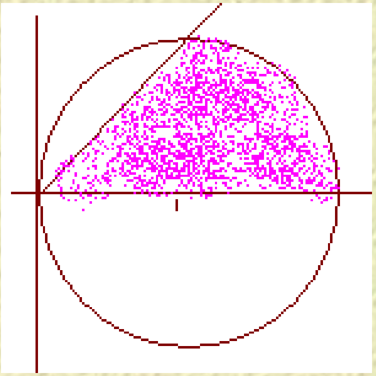
自我练习:

$Ex.3.$设$D: 0 \le y \le x, x^2 + y^2 \le 2x.$

计算 $\iint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy.$

解析 画出积分区域$D$草图是有益的,

选择极坐标系是自然的.



$$D: 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}, 0 \le r \le 2\cos\theta.$$

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy = \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r \cdot r dr$$

上页 下页 返回

例11**.求由曲线$\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2\left(x^2-y^2\right)$所围成的平面图形的面积$(a>0)$.

解　方程$\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2\left(x^2-y^2\right)$说明曲线围成的图形关于$x$轴对称,关于$y$轴也对称.

$$\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2\left(x^2-y^2\right)$$

$$\to r^4=2a^2r^2\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)$$

$$\to r=0\ \ or\ r=a\sqrt{2\cos 2\theta}.$$

上页　下页　返回

$$\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2\left(x^2-y^2\right)$$

$x^2-y^2\geq 0\leftrightarrow |y|\leq|x|$,即$\cos 2\theta\geq 0$,

$$\therefore -\frac{\pi}{4}\leq\theta\leq\frac{\pi}{4}\text{或}\frac{3\pi}{4}\leq\theta\leq\frac{5\pi}{4},$$

曲线的图象只落在$|y|\leq|x|$所示的区域内.

由对称性可知,我们只须考察第一象限中

曲线的性状.当$\theta:0\cdots\to\frac{\pi}{4}$时$r=a\sqrt{2\cos 2\theta}$

的值从最大$r=a\sqrt{2}$逐渐变小直至$r=0$.

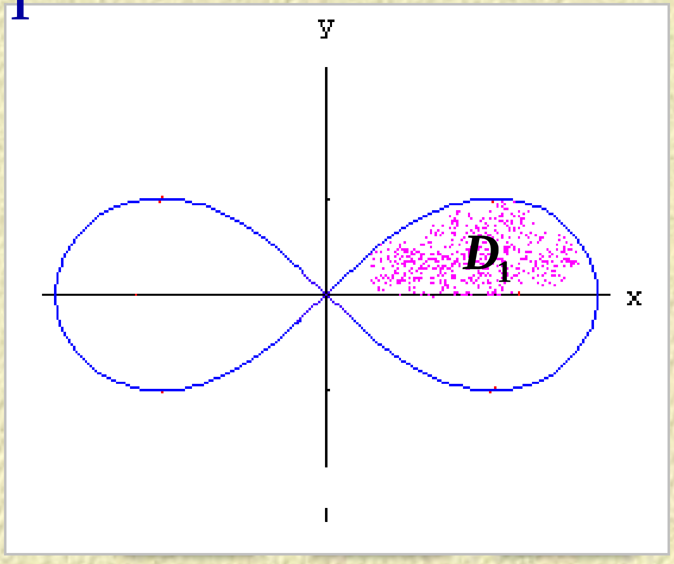
方程$\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2\left(x^2-y^2\right)$

说明曲线围成的图形关于$x$轴

对称,关于$y$轴也对称.

$$\therefore \sigma(D)=4\sigma(D_1)=4\iint_{D_1} dxdy$$

$$=4\int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} rdr$$



例11**.(2).求由曲线$\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2\left(x^2-y^2\right)$所围成的平面图形位于区域$x^2+y^2\geq a^2$的部分的面积$(a>0)$.

解 $x^2+y^2=a^2 \Leftrightarrow r=a.$

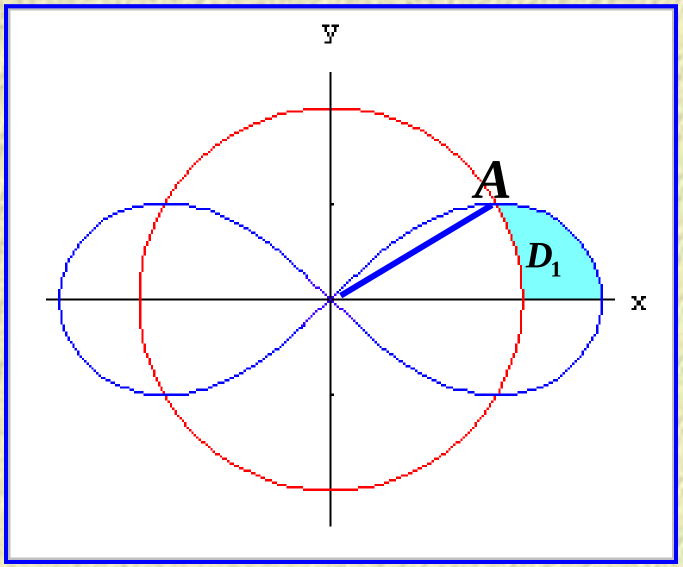
$$\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2\left(x^2-y^2\right)$$

$$\Leftrightarrow r=a\sqrt{2\cos 2\theta},$$

$$-\frac{\pi}{4}\leq\theta\leq\frac{\pi}{4}\text{或}\frac{3\pi}{4}\leq\theta\leq\frac{5\pi}{4}.$$

方程$\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2\left(x^2-y^2\right)$说明曲线围成的图形关于$x$轴对称,关于$y$轴也对称.

$$\therefore \sigma\left(D\right)=4\sigma\left(D_1\right)$$




由$\begin{cases} r=a\sqrt{2\cos 2\theta} \\ r=a \end{cases}$

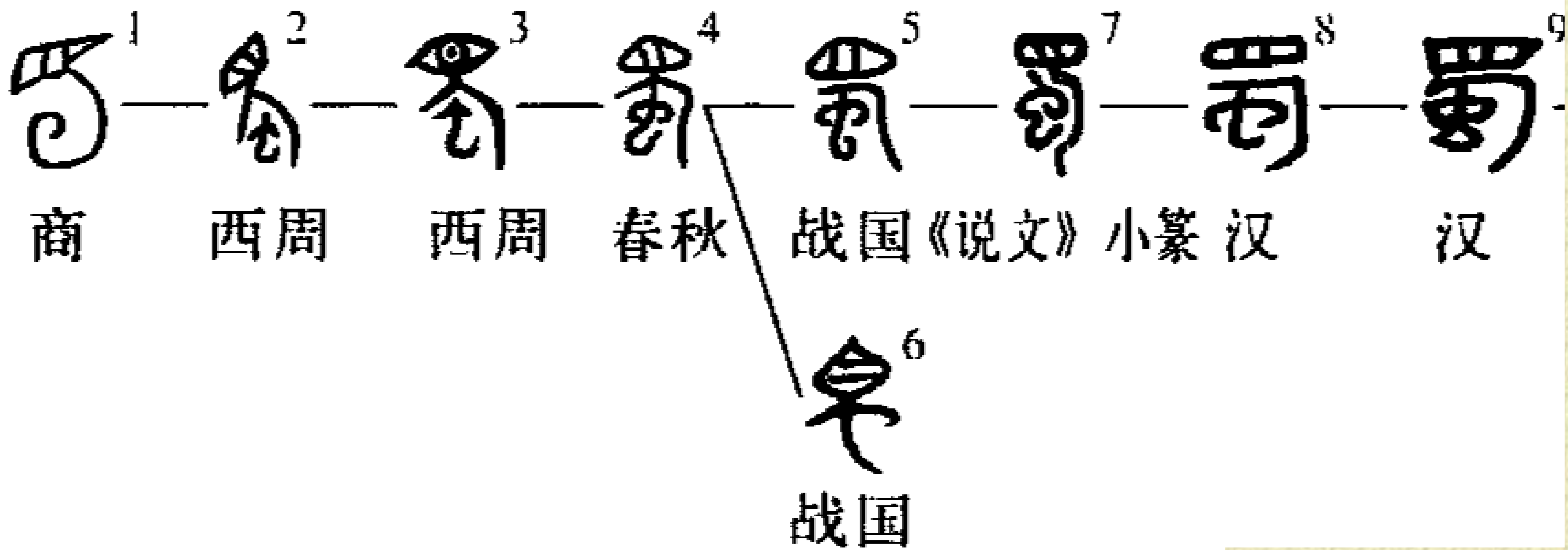
得交点$A=\left(a,\dfrac{\pi}{6}\right)$,

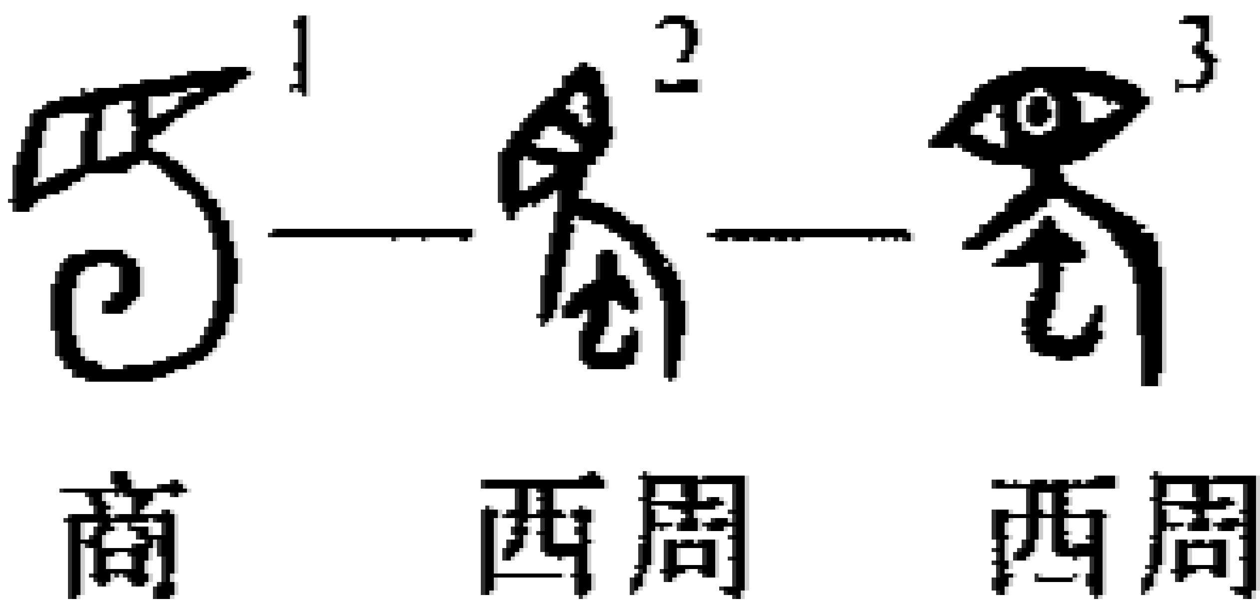
$$\therefore \sigma(D)=4\iint_{D_1} dxdy$$

$$=4\int_0^{\pi/6} d\theta \int_a^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} rdr=a^2\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right).$$

上页 下页 返回

四川广汉三星堆青铜面具




下页 返回

## 小 结

$I=\iint_D f(x,y)d\sigma$,$d\sigma$为面积微元.

在$xOy$坐标系中 $d\sigma = dxdy$,

在极坐标系中$d\sigma = rd\theta \cdot dr$.

上页 下页 返回

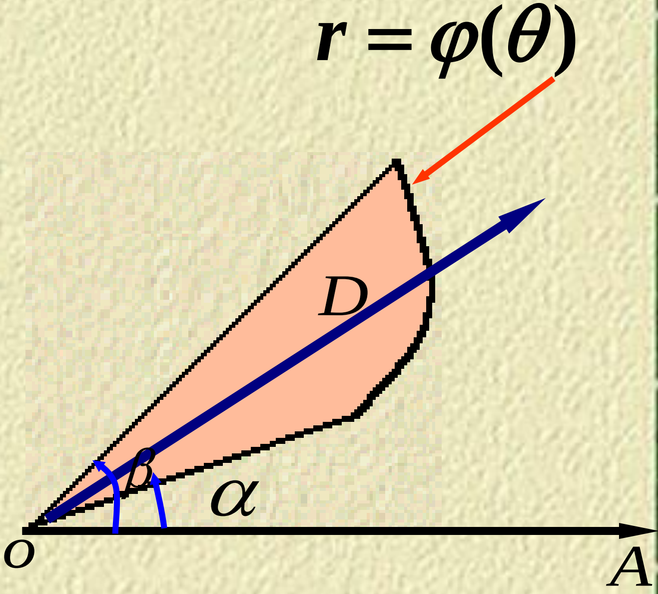
根据前面的分析,我们可以想到:

如果(1).积分区域是(曲边)扇形或其变形(圆是特例!),或者

(2).被积函数形如$f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$或$f\left(\dfrac{y}{x}\right)$

等,那么,不妨考虑将二重积分化为极坐标系中的二次积分.

二重积分在极坐标下的计算公式




积分区域$D$:

$\alpha \le \theta \le \beta$,

$0 \le r \le \varphi(\theta)$.

$$\iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta d\theta \int_0^{\varphi(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr.$$

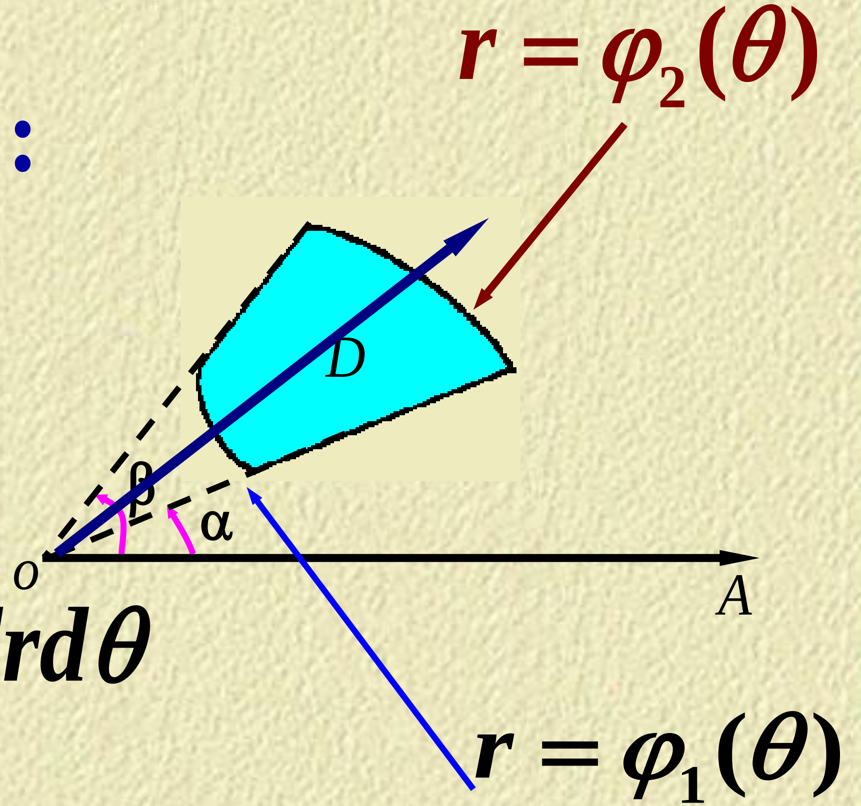
上页 下页 返回

## 积分区域之变形→

积分区域$D$变形之一：

$\alpha \le \theta \le \beta,$

$\varphi_1(\theta) \le r \le \varphi_2(\theta).$

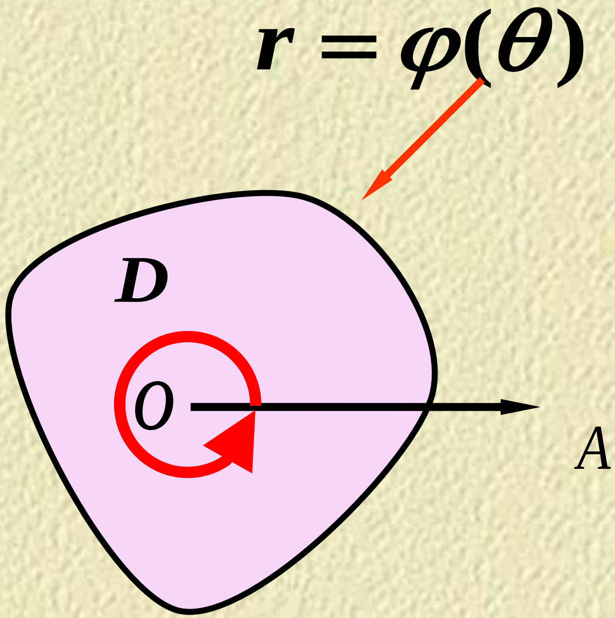



$$\iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr.$$

积分区域$D$变形之二：

$$D:\begin{cases}0\le r\le\varphi(\theta)\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases},$$




$$\iint_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdrd\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\varphi(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr.$$

特别地,极坐标系中区域$D$面积

计算式 $\sigma(D)=\iint_D rdrd\theta.$

上页 下页 返回

思考题

4 .选择合适的坐标系计算下列积分：

(1).$I=\iint_D\left(x^2+y^2\right)dxdy$,$D$是由直线 $y=x$, $y=x+a, y=a, y=3a\ (a>0)$所围成的闭区域.

(2).$I=\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$,其中$D$是圆环形闭区域

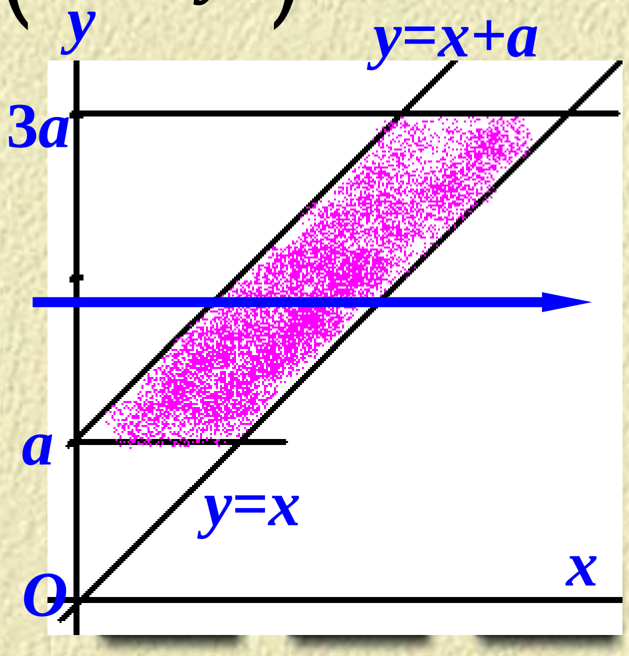
$D=\left\{(x,y)\middle|a^2\le x^2+y^2\le b^2\right\}(0\le a\le b)$.

思考题4.(1).解

尽管被积函数中有$\left(x^2+y^2\right)$的因子,但是积分区域$D$是一个如图这样的平行四边形区域,选择在普通的直角坐标系$xOy$中计算积分是合适的.

$$I=\iint_D\left(x^2+y^2\right)dxdy=\int_a^{3a}dy\int_{y-a}^{y}\left(x^2+y^2\right)dx,$$

如果先对变量$y$积分,那么积分区域就要分割成为三个部分,这样计算就麻烦不少.



思考题4.(2).

$I=\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$,其中$D$是圆环形闭区域

$$D=\left\{(x,y)\middle| a^2 \le x^2+y^2 \le b^2\right\}(0 \le a \le b).$$

解 这个问题的坐标系的选择是毫无疑义的.

$$I=\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy=\int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b r \cdot rdr$$

# 思考题

5.改变积分

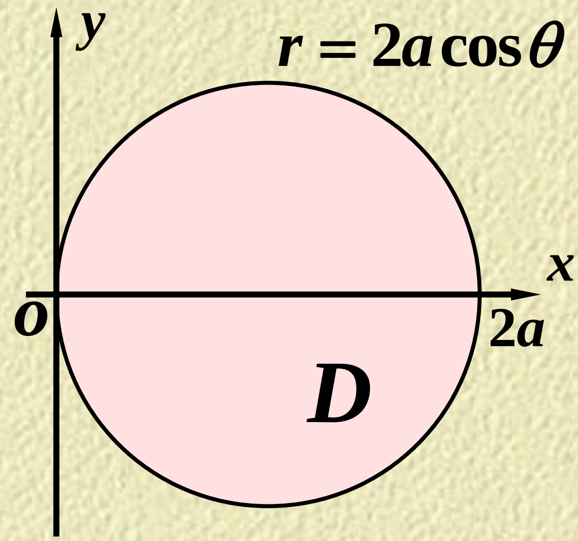
$$I=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\theta\int_{0}^{2a\cos\theta}f(r)rdr$$

$(a>0)$的坐标系 .

思考题5.解答：$D:\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}, \\ 0\le r\le 2a\cos\theta \end{cases}$

$D$的边界为$r=2a\cos\theta$,

$-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$给出.



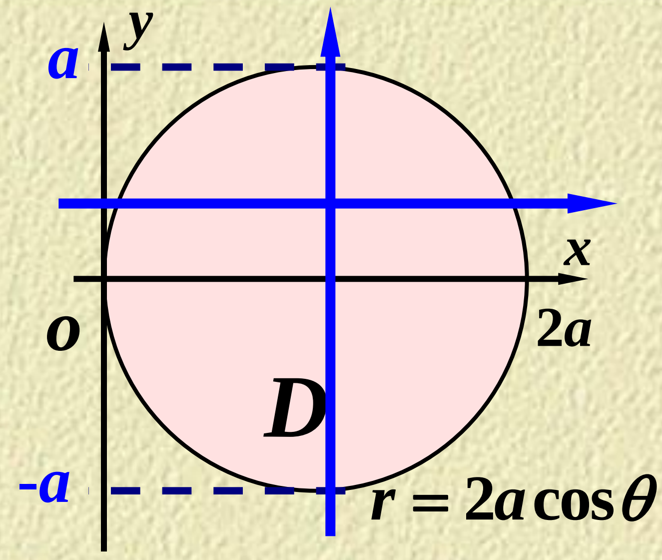

$$r=2a\cos\theta\to r^2=2ar\cos\theta$$

$$\leftrightarrow x^2+y^2=2ax.$$

上页 下页 返回

$$r = 2a\cos\theta \to r^2 = 2ar\cos\theta$$

$$\leftrightarrow x^2 + y^2 = 2ax.$$



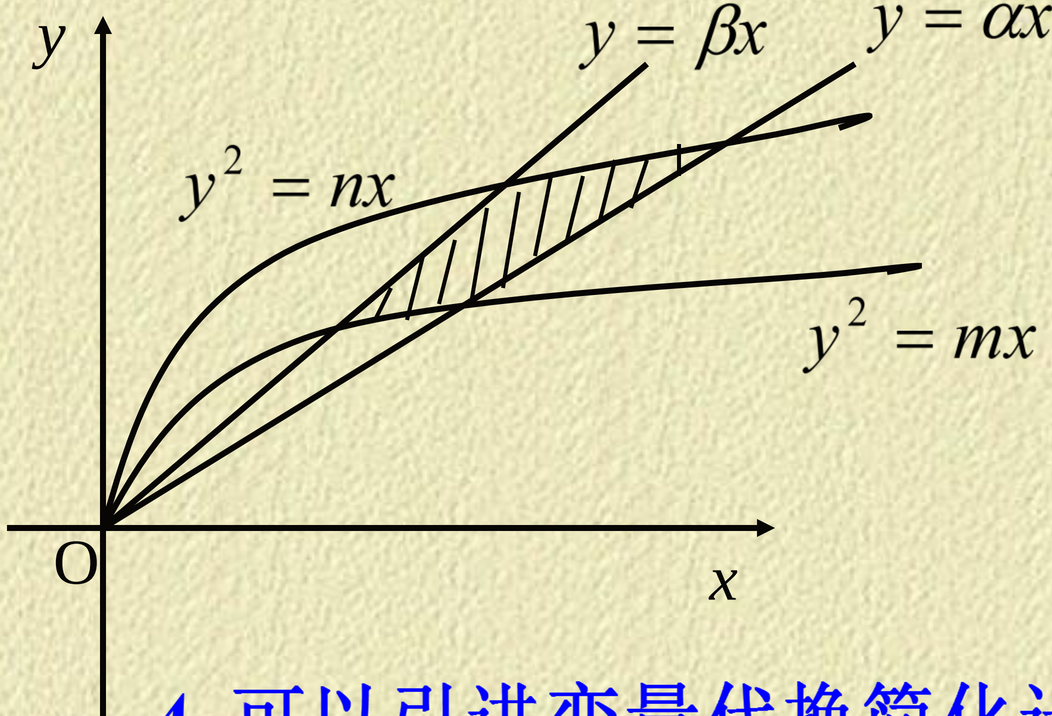

改变积分的坐标系:

$$I = \int_0^{2a} dx \int_{-\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax-x^2}} f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) dy$$

$$= \int_{-a}^{a} dy \int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{a+\sqrt{a^2-y^2}} \left(\sqrt{x^2+y^2}\right) dx.$$

# 四. 二重积分一般的换元法

$Q$.求抛物线$y^2=mx, y^2=nx$和直线$y=\alpha x, y=\beta x$所围区域$D$的面积$\sigma(D)$ $(0<m<n, 0<\alpha<\beta)$.




$A$. 若在坐标平面$xoy$上直接求区域$D$的面积$\mu(D)$，那会觉得十分麻烦！

$A$. 可以引进变量代换简化计算.

*Th*21.1.设 $f(x,y)$ 在 $xoy$ 平面上的闭区域 $D_{xy}$ 上连续,变换 $T: x = x(u,v), y = y(u,v)$ 将 $uov$ 平面上的闭区域 $D_{uv}$ 变为 $xoy$ 平面上的 $D_{xy}$,且满足

(1).$x(u,v), y(u,v)$ 在 $D_{uv}$ 上具有一阶连续偏导数;

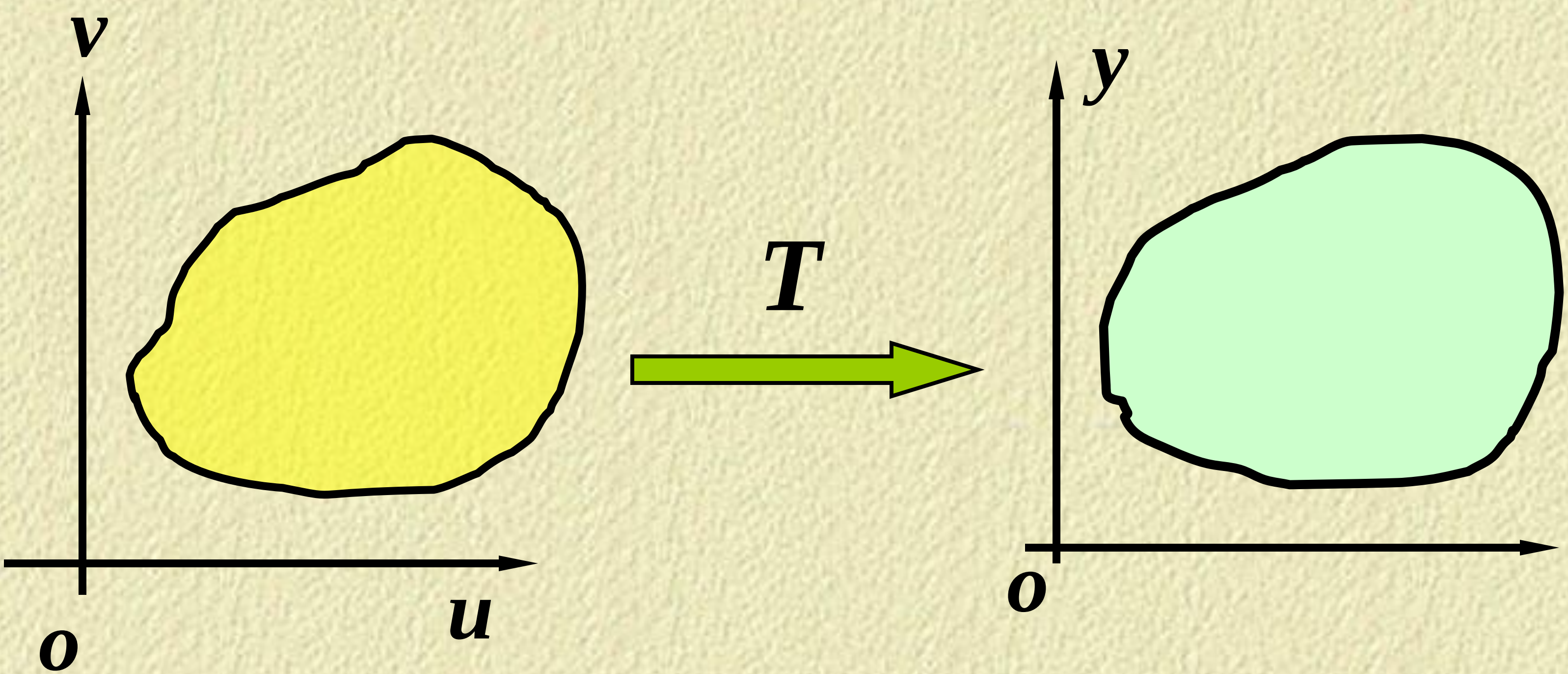
(2).在 $D_{uv}$ 上 *Jacobi* 行列式 $J(u,v) = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$ ;

(3).变换 $T: D_{uv} \to D_{xy}$ 是一对一的,则有

$$\iint_{D_{xy}} f(x,y)dxdy = \iint_{D_{uv}} f\left[x(u,v), y(u,v)\right]\left|J(u,v)\right|dudv.$$

$\longrightarrow \left|J(u,v)\right|$ 为变换关于面积的伸缩比.

上页 下页 返回




$$\text{变换}T:\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases},$$

$uov$平面上的闭区域$D_{uv} \overset{T}{\Rightarrow}$ $xoy$平面上的 $D_{xy}$,

利用一般变量代换计算二重积分步骤：

(1).根据积分区域及函数的特点选择适当的变换，

习惯上，设$x = x(u,v), y = y(u,v)$,

(2).求出$J(u,v) = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$.

$\longrightarrow$若是设$u = u(x,y), v = v(x,y)$,求$J$有两种做法：

(i).先求$x = x(u,v), y = y(u,v)$,再求$J(u,v) = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$.

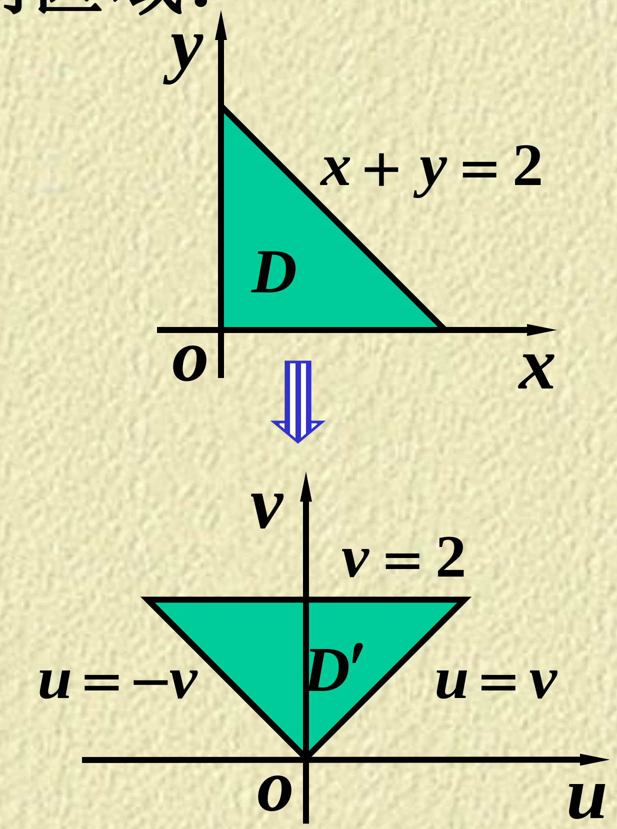
(ii).先求出$\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$,再求$J(u,v) = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \dfrac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$.

(3).在选定的变换下根据区域$D_{xy}$确定区域$D_{uv}$ 即$(u,v)$的变化范围 ,根据区域$D_{xy}$的边界曲线确定$D_{uv}$的边界曲线,画出区域$D_{uv}$草图.

(4).代入积分变量代换公式,化为关于变量$u,v$ 的二重积分.

(5).计算.

例12.计算 $\iint\limits_D e^{\frac{y-x}{y+x}}dxdy$, 其中 $D$ 由 $x$ 轴、$y$轴和直线 $x+y=2$ 所围成的闭区域.




解 令 $u=y-x, v=y+x$,

则 $x=\dfrac{v-u}{2}, y=\dfrac{v+u}{2}$.

$D\to D'$,即$x=0\to u=v$,

$y=0\to u=-v$.

$x+y=2\to v=2$.

上页 下页 返回

$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}-1/2 & 1/2\\ 1/2 & 1/2\end{vmatrix}=-\frac{1}{2},$$

故 $$\iint\limits_{D} e^{\frac{y-x}{y+x}}dxdy=\iint\limits_{D'} e^{\frac{u}{v}}\left|-\frac{1}{2}\right|dudv$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2 dv\int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}}du=\frac{1}{2}\int_0^2\left(e-e^{-1}\right)vdv$$

$$=e-e^{-1}.$$

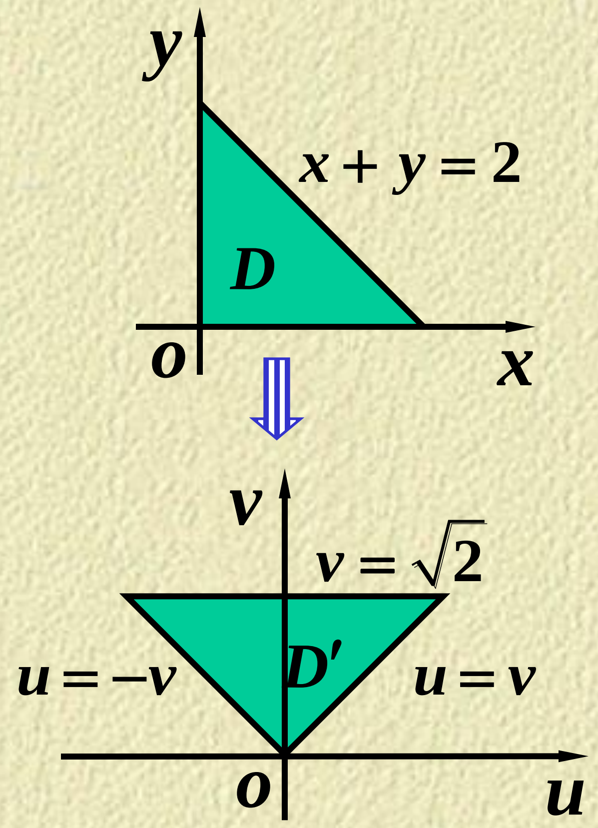
例12.计算 $\iint\limits_D e^{\frac{y-x}{y+x}}dxdy$, 其中 $D$ 由 $x$ 轴、$y$轴和直线$x+y=2$ 所围成的闭区域.

解二 令$u=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(y-x),v=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(y+x)$,

则 $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(v-u),y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(u+v)$.

即$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$,记作$X=TU$,

$J(u,v)=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\det T=-1$ ,




变量代换 $X=TU$是一个正交线性变换(旋转或反射),它是全等变换因而保持面积不变,故而$|J(u,v)|=|\det T|=1$ .

例12.(2).计算椭球体$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1$ 的体积.

解 由图形的对称性知

$$V=2c\iint_D\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy,\ D:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1.$$

作广义极坐标变换$\begin{cases}x=ar\cos\theta\\ y=br\sin\theta\end{cases}$,

在这变换下$D\to D_{r\theta}=\{(r,\theta)\,|\,0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi\}$,

$$J(r,\theta)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=abr.$$

$J$ 在$D_{r\theta}$内仅当$r=0$处为零,故换元公式仍成立.

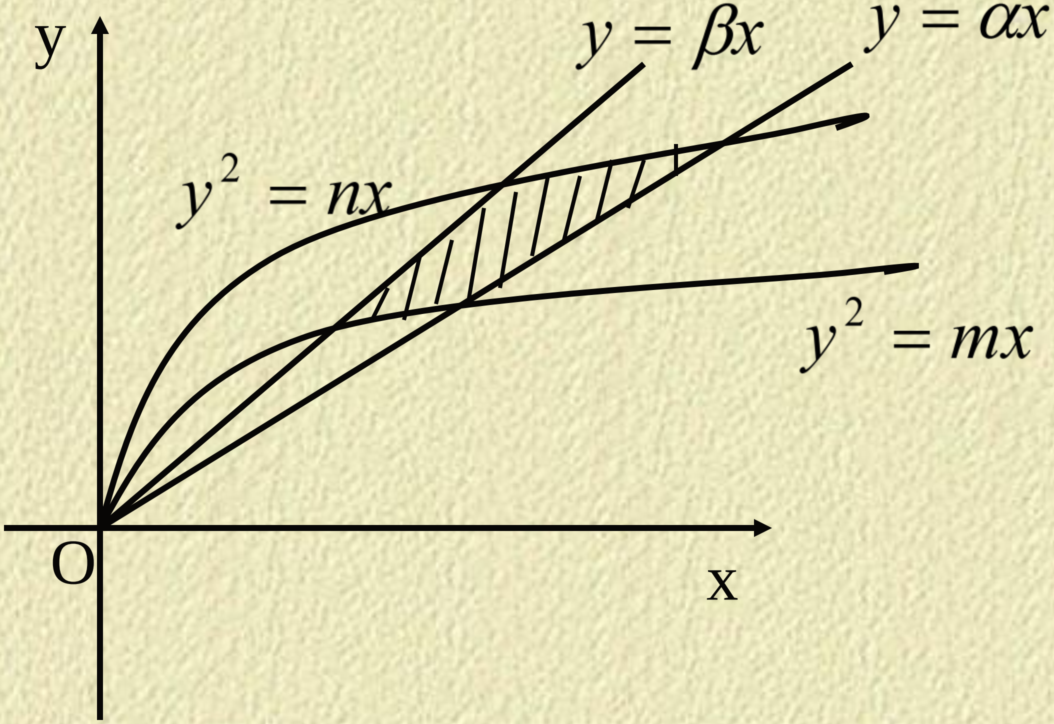
$$V=2c\iint_D\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy=2c\iint_{D_{r\theta}}\sqrt{1-r^2}abrdrd\theta=\frac{4}{3}\pi abc.$$

$a=b=c$ 时即得球体积公式.

上页 下页 返回

例12.(3).求抛物线$y^2 = mx, y^2 = nx$和直线$y = \alpha x, y = \beta x$所围区域$D$的面积$\sigma(D)$ $(0 < m < n, 0 < \alpha < \beta)$.

解 作变换$\dfrac{y^2}{x} = u, \dfrac{y}{x} = v$,则$(u,v) \in [m,n] \times [\alpha,\beta]$,




$$\therefore x = \frac{u}{v^2}, y = \frac{u}{v}.$$

$$D_{uv} = [m,n] \times [\alpha,\beta].$$

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \cdots = \frac{u}{v^4},$$

上页 下页 返回

例12.(3).求抛物线$y^2=mx, y^2=nx$和直线$y=\alpha x, y=\beta x$所围区域$D$的面积$\sigma(D)$ $(0<m<n, 0<\alpha<\beta)$.

解　作变换$\dfrac{y^2}{x}=u, \dfrac{y}{x}=v$,则$(u,v)\in[m,n]\times[\alpha,\beta]$,

$$\therefore x=\frac{u}{v^2}, y=\frac{u}{v}. D_{uv}=[m,n]\times[\alpha,\beta].$$

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\cdots=\frac{u}{v^4},$$

$$\therefore \sigma(D)=\iint\limits_{D}1dxdy=\iint\limits_{D_{uv}}\left|\frac{u}{v^4}\right|dudv=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{v^4}dv\int_{m}^{n}udu=\cdots$$

# Addendum

Add1.计算$I=\iint\limits_D (x+y)dxdy$,其中

$D: x^2+y^2 \le 2Rx, (R>0)$.

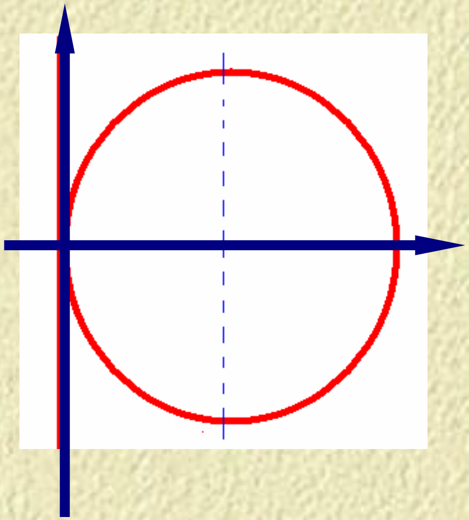
解 积分区域$D$关于直线$y=0(x$轴$)$对称,

$$\therefore \quad \iint_D ydxdy = 0.$$

$$I=\iint\limits_D xdxdy=\int_{-R}^{R}dy\int_{R-\sqrt{R^2-y^2}}^{R+\sqrt{R^2-y^2}} xdx$$

$$=\int_0^{2R} xdx\int_{-\sqrt{2Rx-x^2}}^{\sqrt{2Rx-x^2}}dy$$

$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\theta\int_0^{2R\cos\theta} r\cos\theta\cdot rdr=\cdots$$



上页 下页 返回

$$I=\iint_D (x+y)dxdy, D: x^2+y^2\le 2Rx.$$

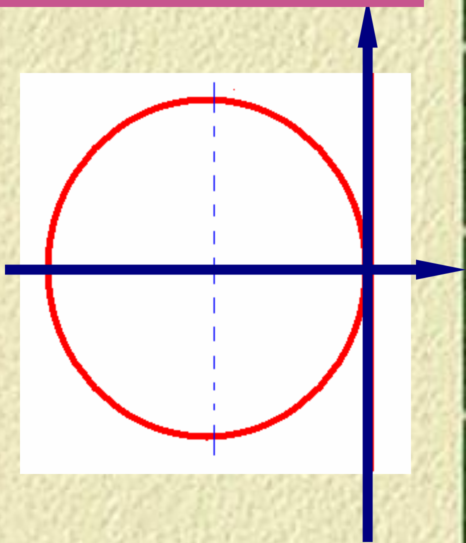
积分区域$D$关于直线$y=0$($x$轴)对称,

$$\therefore \iint_D ydxdy=0.$$

特别提醒

积分下限$\le$积分上限

若$R<0$,则



$$I=\iint_D xdxdy=\int_R^{-R}dy\int_{R-\sqrt{R^2-y^2}}^{R+\sqrt{R^2-y^2}}xdx$$

$$=\int_{2R}^{0}xdx\int_{-\sqrt{2Rx-x^2}}^{\sqrt{2Rx-x^2}}dy$$

$$=\int_{\pi/2}^{3\pi/2}d\theta\int_0^{2R\cos\theta}r\cos\theta\cdot rdr=\cdots$$

上页 下页 返回

$I=\iint_D (x+y)dxdy, D: x^2+y^2\le 2Rx,(R>0).$

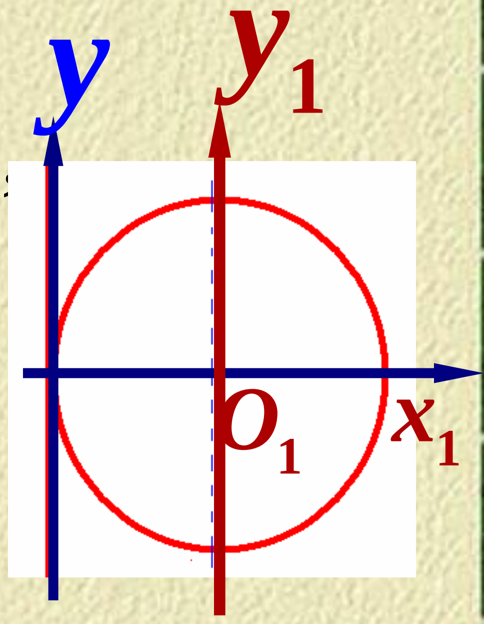
灵活的做法:

解 $D: x^2+y^2\le 2Rx$即$(x-R)^2+y^2\le R^2,$

$\therefore$ 可以将$y$轴向右平移$R$到$y_1$轴,则

$x_1=x-R, y_1=y,$于是$D_1: x_1^2+y_1^2\le R^2.$

易见$dx_1=dx, \therefore dxdy=dx_1dy_1,$




$$\therefore I=\iint_D (x+y)dxdy=\iint_{D_1}(R+x_1+y_1)dx_1dy_1$$

由$\iint_{D_1} x_1dx_1dy_1=0, \iint_{D_1} y_1dx_1dy_1=0,$

得 $I=\iint_{D_1} Rdx_1dy_1=R\sigma(D_1)=\pi R^3.$

上页 下页 返回

**Add2.**

设区域$D=\{(x,y)|0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$,

$z=\ln\sqrt{2+x^2+y^2}$ .

计算(1). $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$;　(2). $\iint\limits_D\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)dxdy$ .

形式对称性在多元函数微分与二重积分中是常会用到的一种技巧,但尤为重要的是要灵活运用而不是机械地使用.

解(1). $z=\frac{1}{2}\ln\left(2+x^2+y^2\right)$,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{2+x^2+y^2}=\frac{x}{2+x^2+y^2},$$

由形式对称性得 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{2+x^2+y^2}$.

(2).由形式对称性知 $\iint\limits_D\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)dxdy=\iint\limits_D\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)dxdy$,

而 $\iint\limits_D\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^1\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)dy=\int_0^1\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\Bigg|_0^1 dx$

上页 下页 返回

$$\iint_D \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) dxdy = \int_0^1 dx \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) dy = \int_0^1 \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\Bigg|_0^1 dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{y}{2+x^2+y^2}\right)\Bigg|_0^1 dx = \int_0^1 \frac{1}{3+x^2} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x}{\sqrt{3}}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

$$\therefore \iint_D \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) dxdy = 2\iint_D \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) dxdy = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

注记:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(\frac{x}{2+x^2+y^2}\right)'_x=\frac{\left(2+x^2+y^2\right)-x\cdot 2x}{\left(2+x^2+y^2\right)^2}$$

$$=\frac{2+y^2-x^2}{\left(2+x^2+y^2\right)^2},$$

由形式对称性知 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{4}{\left(2+x^2+y^2\right)^2}.$

$$\therefore \iint_D\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^1\frac{4}{\left(2+x^2+y^2\right)^2}dy\ ,$$

此种做法计算较为麻烦,下略.

$Add3.$ $f$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $x\in[a,b]$ 时 $f(x)>0$. 求证:

$$\int_a^b f(x)dx\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx \ge (b-a)^2.$$

其实这是著名的 Cauchy-Schwarz-Bunijiakovshi

不等式的一个应用

证明 $\int_a^b f(x)dx\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx \ge (b-a)^2$

$$\Leftrightarrow \int_a^b f(x)dx\int_a^b \frac{1}{f(y)}dy$$

$$+\int_a^b f(y)dy\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx \ge 2(b-a)^2$$

上页 下页 返回

记$D: a \le x \le b, a \le y \le b.$

$$\Leftrightarrow \int_a^b f(x)dx \int_a^b \frac{1}{f(y)}dy$$

$$+\int_a^b f(y)dy \int_a^b \frac{1}{f(x)}dx \ge 2(b-a)^2$$

$$\Leftrightarrow \iint_D \frac{f(x)}{f(y)}dxdy + \iint_D \frac{f(y)}{f(x)}dxdy \ge 2\iint_D 1dxdy$$

$$\Leftrightarrow \iint_D \left[\frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)} - 2\right]dxdy \ge 0,$$

而$\dfrac{f(x)}{f(y)} + \dfrac{f(y)}{f(x)} - 2 \ge 0$是显然的$\cdots$

设函数$f(x),g(y)$分别在$[a,b],[c,d]$上连续，那么$u(x,y)=f(x)g(y)$在$D=[a,b]\times[c,d]$上连续，$D=\{(x,y)|a\le x\le b,c\le y\le d\}$，

则$$\iint_D f(x)g(y)dxdy=\int_a^b f(x)dx\int_c^d g(y)dy.$$

这是一个十分简单的结论，但是在处理某些一元函数定积分的问题时，不失为一种不错的选择.

上页 下页 返回

函数$f(x), g(y)$分别在$[a,b],[c,d]$上连续,

$$D=[a,b]\times[c,d]=\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{matrix}a\le x\le b\\ c\le y\le d\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\iint\limits_D f(x)g(y)dxdy=\int_a^b f(x)dx\int_c^d g(y)dy.$$

由此易证:已知$f, g$在$[a,b]$上连续,则有

*Cauchy – Schwarz – Bunijiakovski*不等式:

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2\le\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx$$

用二重积分证明起来十分简便.

$Cauchy-Schwarz-Bunijiakovsky\ inequality$

柯西－许瓦兹－布尼雅可夫斯基 不等式

设函数$f(x),g(x)$在$[a,b]$上可积,则

$$\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx\geq\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2.$$

上页 下页 返回

## CSB 不等式的证明

$\because$ 函数$f(x), g(x)$在$[a,b]$上连续,

则$\forall t \in \mathbb{R}, [tf(x)-g(x)]^2 \geq 0$,

$\therefore \int_a^b [tf(x)-g(x)]^2 dx \geq 0, \therefore \forall t \in \mathbb{R}$,

$$t^2\int_a^b f^2(x)dx - 2t\int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx \geq 0$$

$\Rightarrow \int_a^b f^2(x)dx > 0$时有$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow$

$$\int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx \geq \left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2$$

$\int_a^b f^2(x)dx = 0$时$f(x) \equiv 0, x \in [a,b]$,此时"$=$"成立.

## $CSB$ 不等式的证法二(强烈推荐这一做法)

我们可用所谓“特殊问题一般化”的方法解之:

这就象证明: $\pi^e < e^\pi \Leftrightarrow e\ln\pi < \pi\ln e \Leftrightarrow$

$\dfrac{\ln\pi}{\pi} < \dfrac{\ln e}{e} \Leftarrow x \geq e, \dfrac{\ln x}{x}\uparrow$ 的处理一样.

设 $\varphi(u) = \int_a^u f^2(x)dx \int_a^u g^2(x)dx - \left[\int_a^u f(x)g(x)dx\right]^2$

目的很明确,由于 $\varphi(a) = 0$,欲证明 $\varphi(u)\uparrow, u \in [a,b] \cdots$

上页 下页 返回

$$\varphi(u)=\int_a^u f^2(x)dx\int_a^u g^2(x)dx-\left[\int_a^u f(x)g(x)dx\right]^2$$

$$\varphi'(u)=f^2(u)\int_a^u g^2(x)dx+g^2(u)\int_a^u f^2(x)dx$$

$$-2f(u)g(u)\int_a^u f(x)g(x)dx$$

相对于 $x$ 而言 $u$ 是常数

$$=\int_a^u f^2(u)g^2(x)dx+\int_a^u g^2(u)f^2(x)dx$$

$$-2\int_a^u f(x)g(x)f(u)g(u)dx$$

$$=\int_a^u\left[f^2(u)g^2(x)-2f(x)g(x)f(u)g(u)+f^2(x)g^2(u)\right]dx$$

$$=\int_a^u\left[f(u)g(x)-f(x)g(u)\right]^2dx\geq 0$$

$$\therefore \varphi(u)\uparrow, u\in[a,b]\cdots$$

已知函数$f,g$在$[a,b]$上连续,那么就有

*Cauchy – Schwarz – Bunijiakovski*不等式:

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \le \int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx$$

证法三 用二重积分证明起来十分简便:

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \le \int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx$$

$$\Leftrightarrow 2\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx - 2\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx + \int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx$$

$$-2\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]\cdot\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right] \ge 0,$$

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \le \int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx + \int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx$$

$$-2\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]\cdot\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right] \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(y)dy + \int_a^b f^2(y)dy\int_a^b g^2(x)dx$$

$$-2\int_a^b f(x)g(x)dx\int_a^b f(y)g(y)dy \ge 0,$$

记$D = [a,b]\times[a,b]$,

$$\Leftrightarrow \iint_D f^2(x)g^2(y)dxdy + \iint_D f^2(y)g^2(x)dxdy$$

$$-2\iint_D f(x)g(x)f(y)g(y)dxdy \ge 0$$

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \le \int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx - \left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(y)dy + \int_a^b f^2(y)dy\int_a^b g^2(x)dx$$

$-2\int_a^b f(x)g(x)dx\int_a^b f(y)g(y)dy \ge 0$, 记 $D = [a,b]\times[a,b]$,

$$\Leftrightarrow \iint_D f^2(x)g^2(y)dxdy + \iint_D f^2(y)g^2(x)dxdy$$

$$-2\iint_D f(x)g(x)f(y)g(y)dxdy \ge 0 \Leftrightarrow$$

$\iint_D [f(x)g(y) - f(y)g(x)]^2 dxdy \ge 0$ 这是显然成立的!

上页 下页 返回

模仿练习

(1).已知函数$f,g$在$[a,b]$上连续,且同为单调增加或单调减少,那么有

$$(b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx.$$

(199?年北京市普通高等院校高等数学竞赛真题)

(2).设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续,

证明$\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2 \leq (b-a)\int_a^b f^2(x)dx.$

$(3)$.设函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续且单调递增.

求证:当$u \geq 0$ 时,有$2\int_0^u xf(x)dx \geq u\int_0^u f(x)dx$ .

上页 下页 返回

(1). $f, g \in C[a,b]$,且有相同的单调性,则

$$(b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx \ge \int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx.$$

分析 显然, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy$,

为要能用上二重积分,需要构作适当的情景:

原式 $\Leftrightarrow$

$$\int_a^b 1dx\int_a^b f(x)g(x)dx \ge \int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b 1dy\int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b 1dx\int_a^b f(y)g(y)dy$$

$$-\int_a^b f(x)dx\int_a^b g(y)dy - \int_a^b f(y)dy\int_a^b g(x)dx \ge 0$$

上页 下页 返回

证明 记$D=[a,b]\times[a,b]$,

原式$\Leftrightarrow$

$$\int_a^b 1dy\int_a^b f(x)g(x)dx+\int_a^b 1dx\int_a^b f(y)g(y)dy$$

$$-\int_a^b f(x)dx\int_a^b g(y)dy-\int_a^b f(y)dy\int_a^b g(x)dx\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \iint_D f(x)g(x)dxdy+\iint_D f(y)g(y)dxdy$$

$$-\iint_D f(x)g(y)dxdy-\iint_D g(x)f(y)dxdy\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \iint_D [f(x)-f(y)][g(x)-g(y)]dxdy\geq 0$$

这是显然成立的!

(2).设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续,

证明$\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2 \le (b-a)\int_a^b f^2(x)dx$.

证 $2$左$=2\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2 = 2\int_a^b f(x)dx\int_a^b f(y)dy$

$= \iint_D 2f(x)f(y)dxdy$, $D:\begin{cases} a \le x \le b \\ a \le y \le b \end{cases}$.

$2$右$= \int_a^b dy\int_a^b f^2(x)dx + \int_a^b dx\int_a^b f^2(y)dy$

$= \iint_D \left[f^2(x) + f^2(y)\right]dxdy$

利用 $2ab \le a^2 + b^2$以及二重积分的保序性

立即得到结论.

(3).设函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续且单调递增.

求证：当$u \geq 0$ 时，有$2\int_0^u xf(x)dx \geq u\int_0^u f(x)dx$ .

证法二 $\because$函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续且单调递增，

$\therefore \forall x, y \in [0,u]$有$(x-y)(f(x)-f(y)) \geq 0$,

即$xf(x)+yf(y)-yf(x)-xf(y) \geq 0$,视$x$为常数而$y \in [0,u]$,

得$\int_0^u [xf(x)+yf(y)-xf(y)-yf(x)]dy \geq 0$,

$\therefore xf(x)u+\int_0^u yf(y)dy - x\int_0^u f(y)dy - \frac{1}{2}u^2 f(x) \geq 0$,再对$x$在$[0,u]$上积分，

得 $u\int_0^u xf(x)dx + u\int_0^u yf(y)dy - \frac{1}{2}u^2\int_0^u f(y)dy - \frac{1}{2}u^2\int_0^u f(x)dx \geq 0$,

由于积分值与积分变量无关，

$\therefore$上式即为 $2u\int_0^u xf(x)dx - u^2\int_0^u f(x)dx \geq 0$,

$\because u \geq 0$ ,$\therefore 2\int_0^u xf(x)dx - u\int_0^u f(x)dx \geq 0$.证毕!

## 思考练习题

6.计算积分$I_1=\iint_D(x+y)dxdy$,

$I_2=\iint_D(x+y)^2dxdy$,其中区域

$D$为$x^2+y^2\le 2ax, a>0$.

上页 下页 返回

解 区域$D: x^2+y^2 \le 2ax, a>0.$

$$x^2+y^2 \le 2ax \Leftrightarrow (x-a)^2+y^2 \le a^2$$

令$x-a=u, y=v, dxdy=dudv,$

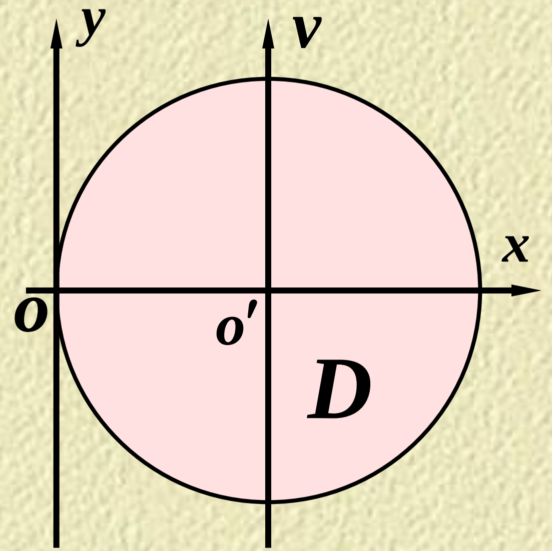
$$D_0: u^2+v^2 \le a^2, a>0.$$

$$I_1=\iint_D (x+y)dxdy$$

$$=\iint_{D_0}(a+u+v)dudv$$

$$=\iint_{D_0} adudv+\iint_{D_0}(u+v)dudv$$

$$=\pi a^3+0=\pi a^3$$




上页 下页 返回

区域$D: x^2+y^2 \le 2ax, a>0.$

$$x^2+y^2 \le 2ax \Leftrightarrow (x-a)^2+y^2 \le a^2$$

令$x-a=u, y=v,$ $dxdy=dudv,$

$D_0: u^2+v^2 \le a^2, a>0.$

$$I_2=\iint_D (x+y)^2 dxdy$$

$$=\iint_{D_0} (a+u+v)^2 dudv$$

$$=\iint_{D_0} \left(a^2+u^2+v^2+2au+2av+2uv\right) dudv$$

$$=\iint_{D_0} \left(a^2+u^2+v^2\right) dudv=\cdots$$

7.计算由曲面$z=x^2+2y^2$与$z=6-2x^2-y^2$所围成的立体的体积.

解 $z=x^2+2y^2, z=6-2x^2-y^2$是椭圆抛物面,

其交线为$\begin{cases} z=x^2+2y^2 \\ z=6-2x^2-y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=2 \\ z=x^2+2y^2 \end{cases}$,

在空间直角坐标系中$x^2+y^2=2$表示一个圆柱面,它就是空间曲面的交线关于坐标面$xOy$的投影柱面.

椭圆抛物面$z=x^2+2y^2, z=6-2x^2-y^2$

交线为$\begin{cases} z=x^2+2y^2 \\ z=6-2x^2-y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=2 \\ z=x^2+2y^2 \end{cases}$,

在空间直角坐标系中$x^2+y^2=2$表示一个圆柱面,它就是空间曲面的交线关于坐标面$xOy$的投影柱面.

$\therefore$曲面所围成的空间立体投影到坐标面$xOy$上的区域为 $D: x^2+y^2\le 2.$

所求体积恰是以区域$D$为底,上述投影柱面为侧面的两个曲顶柱体体积之差.

由曲面$z=x^2+2y^2$与$z=6-2x^2-y^2$

所围成的立体的体积：

$$V=\iint_D(6-2x^2-y^2)dxdy$$

$$-\iint_D(x^2+2y^2)dxdy$$

$$=3\iint_D\left(2-x^2-y^2\right)dxdy$$

$$=3\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}dx\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}}\left(2-x^2-y^2\right)dy$$

$\cdots$ 计算麻烦！

曲面$z = x^2 + 2y^2$与$z = 6 - 2x^2 - y^2$所围成的立体的体积：

$$D: x^2 + y^2 \le 2.$$

$$V = 3\iint_D \left(2 - x^2 - y^2\right) dxdy,$$

在极坐标系中计算十分简单：

$$V = 3\iint_D \left(2 - x^2 - y^2\right) dxdy$$

$$= 3\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \left(2 - r^2\right) rdr = 6\pi.$$

上页 下页 返回

8.求曲线$r^2=2\sin\theta$围成的图形的面积.

解 $r^2=2\sin\theta\ge 0,\Rightarrow 0\le\theta\le\pi.$

$$\theta:0\uparrow\ \frac{\pi}{4}\uparrow\ \frac{\pi}{2}\uparrow\ \frac{3\pi}{4}\uparrow\ \pi,$$

$r=\sqrt{2\sin\theta}:0\uparrow\ \sqrt[4]{2}\uparrow\ \sqrt{2}\downarrow\ \sqrt[4]{2}\downarrow\ 0.$

据此画出图形的草图.

$$\therefore\sigma(D)=\iint_D rdrd\theta=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2\sin\theta}}rdr.$$

上页 下页 返回

8.(2).求曲线$r=2+\cos\theta$围成的图形的面积.

解 $r=2+\cos\theta\geq 0$恒成立$\Rightarrow -\pi\leq\theta\leq\pi$.

因为$\cos(-\theta)=\cos\theta$,所以我们只需要画出$0\leq\theta\leq\pi$ 部分的图形,$-\pi\leq\theta\leq 0$ 部分的图形必定与$0\leq\theta\leq\pi$ 部分的图形关于横轴对称.

$\theta: 0\uparrow\dfrac{\pi}{2}\uparrow\pi, r=a(2+\cos\theta): 3a\downarrow 2a\downarrow a.$

所得曲线貌似“心脏肥大”…

上页 下页 返回

8.(3).$I=\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$, $D$是由$y=x$, $x=a$及$x$轴所围成的区域.$(a>0)$

解 $I=\int_0^{\pi/4}d\theta\int_0^{a\sec\theta}r\cdot r\,dr=\frac{1}{3}a^3\int_0^{\pi/4}\sec^3\theta\,d\theta$

$$\int\sec^3\theta\,d\theta=\int\sec\theta\cdot\sec^2\theta\,d\theta$$

$$=\int\sec\theta(\tan\theta)'d\theta=\sec\theta\tan\theta-\int\tan\theta(\sec\theta)'d\theta$$

$$=\sec\theta\tan\theta-\int\sec\theta\tan^2\theta\,d\theta$$

$$=\sec\theta\tan\theta-\int\sec^3\theta\,d\theta+\int\sec\theta\,d\theta=\cdots$$

你不定积分的基本功怎样?

上页 下页 返回

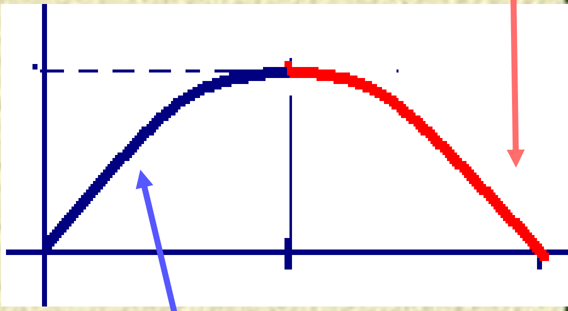
8.(4).计算积分：$I=\int_0^1 dy\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} x dx$.

解　就此直接计算稍嫌麻烦,

$x=\pi-\arcsin y$

$$I=\int_0^1 dy\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} x dx=\int_0^{\pi} dx\int_0^{\sin x} x dy,$$

如此计算就简便得多了!



$\because 0\le y\le 1$时$0\le \arcsin y\le \pi/2$,

$\therefore \pi/2\le \pi-\arcsin y\le \pi$,

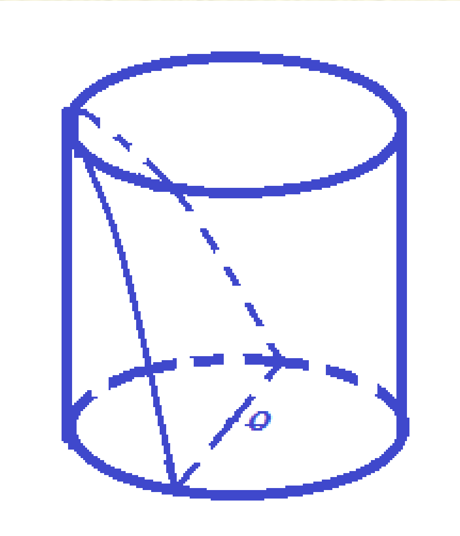
$x=\arcsin y$即$y=\sin x, 0\le x\le \pi/2$,

$x=\pi-\arcsin y$即$y=\sin(\pi-x)=\sin x$,

$x=\arcsin y$

此时　$\pi/2\le x\le \pi$.

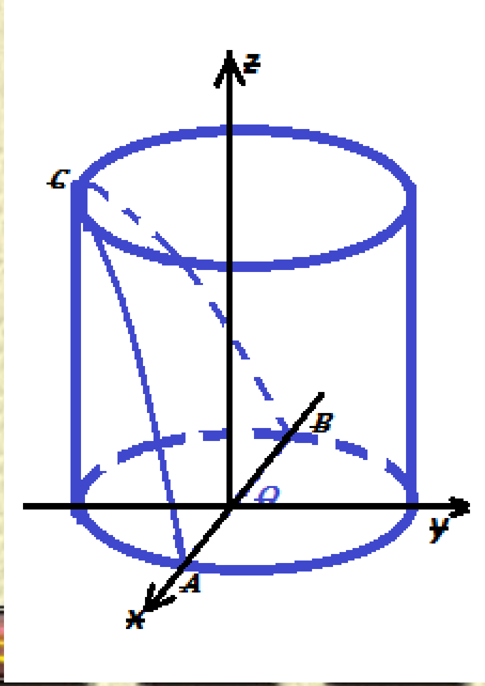
9.如图,过圆柱体底部直径的平面将柱体分成两部分,问其中小块的体积占原圆柱体体积比例是多少?



分析 我们可用一元函数积分学中平行截面面积已知的立体体积计算方法来处理,留给各位练习.

此处用二重积分似乎也很方便.

解 设圆柱体底半径为$a$高$h$,



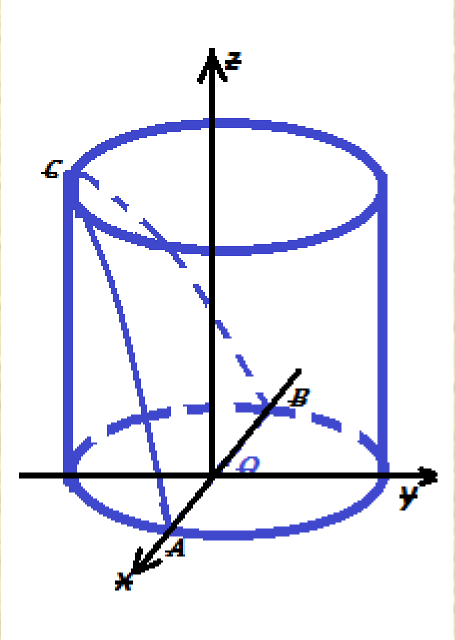

如图,建立直角坐标系.各点坐标

$A(a,0,0), B(-a,0,0), C(0,-a,h)$,经

计算得平面$ABC$方程为 $z=-\dfrac{h}{a}y$.

解　设圆柱体底半径为$a$高$h$,如图,建立直角坐标系.

各点坐标$A(a,0,0), B(-a,0,0), C(0,-a,h)$,



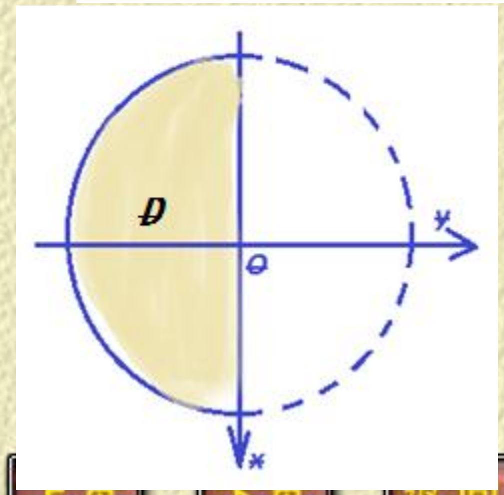

经计算得平面$ABC$方程为 $z=-\dfrac{h}{a}y.$

记区域 $D: x^2+y^2\le a^2, -a\le y\le 0.$

$$V_{小块}=\iint_D\left(-\frac{h}{a}y\right)dxdy$$

$$=-\frac{h}{a}\int_{-a}^{0}ydy\int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}}dx$$

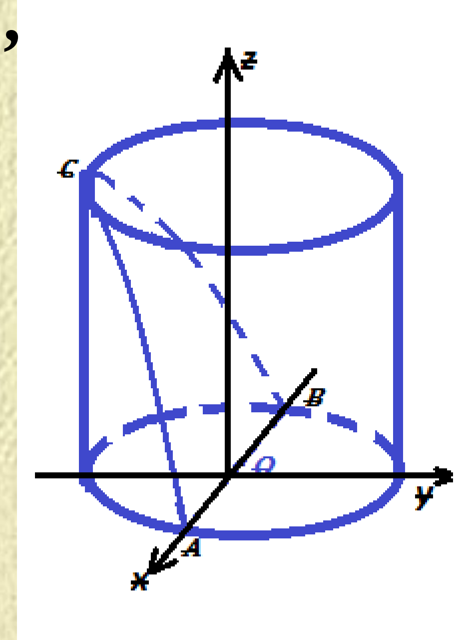
$$=-\frac{2h}{a}\int_{-a}^{0}y\sqrt{a^2-y^2}\,dy=\cdots=\frac{2}{3}a^2h,$$




$\therefore V_{小块}:V_{whole}=2:3\pi.$

解 设圆柱体底半径为$a$高$h$,如图,建立直角坐标系.

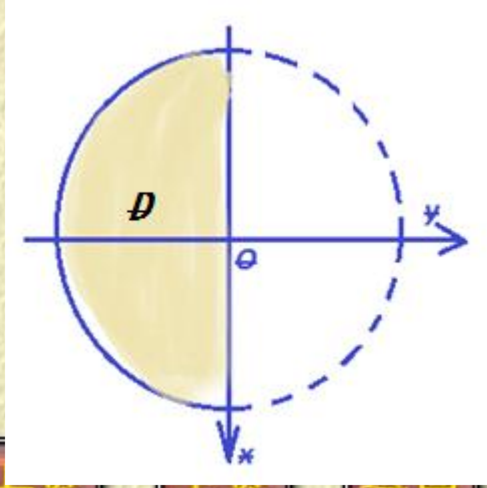
各点坐标$A(a,0,0)$,$B(-a,0,0)$,$C(0,-a,h)$,




经计算得平面$ABC$方程为 $z=-\dfrac{h}{a}y$.

记 $D=\left\{(x,y)\middle|\,x^2+y^2\le a^2,-a\le y\le 0\right\}$

$$=\left\{(r,\theta)\middle|\,r\le a,\pi\le\theta\le 2\pi\right\}.$$




$$V_{小块}=\iint_D\left(-\frac{h}{a}y\right)dxdy$$

$$=-\frac{h}{a}\int_{\pi}^{2\pi}d\theta\int_0^a r\sin\theta\cdot rdr$$

$$=-\frac{h}{a}\cdot(-2)\cdot\frac{1}{3}a^3=\frac{2}{3}a^2h.$$