7.4 关系的性质

- 自反性
- 反自反性
- 对称性
- 反对称性
- 传递性

自反性和反自反性

定义7.11 设R为A上的关系，

(1) 若$\forall x(x \in A \to \langle x, x\rangle \in R)$，则称R在A上是自反(reflexivity)的。

R是非自反的 $\Leftrightarrow \exists x(\ x \in A\ \wedge\ \neg xRx)$

(2) 若$\forall x(x \in A \to \langle x, x\rangle \notin R)$，则称R在A上是反自反(irreflexivity)的。

R是非反自反的 $\Leftrightarrow \exists x(\ x \in A\ \wedge\ xRx)$

例如 全域关系E_A，恒等关系I_A，小于等于关系L_A，整除关系D_A都是为A上的自反关系。

包含关系R是给定集合族A上的自反关系。

小于关系和真包含关系都是给定集合或集合族上的反自反关系

自反性(reflexivity)

- 命题6: R是自反的

$\Leftrightarrow I_A \subseteq R$

$\Leftrightarrow R^{-1}$是自反的(关系R的 R^{-1} 的逆关系)

$\Leftrightarrow M(R)$主对角线上的元素全为1

$\Leftrightarrow G(R)$的每个顶点处均有环. #

反自反性(irreflexivity)

- 命题7: R是反自反的

  $\Leftrightarrow I_A \cap R = \varnothing$

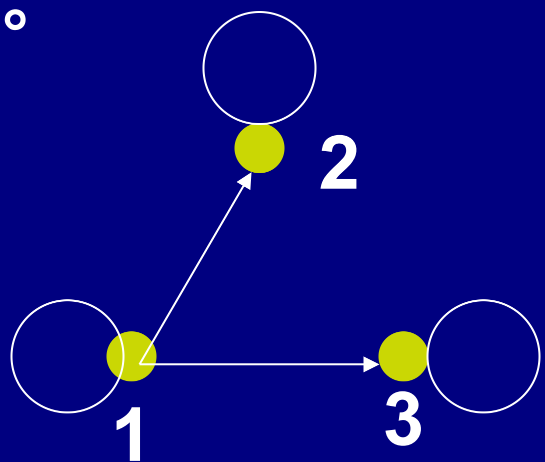
  $\Leftrightarrow R^{-1}$是反自反的

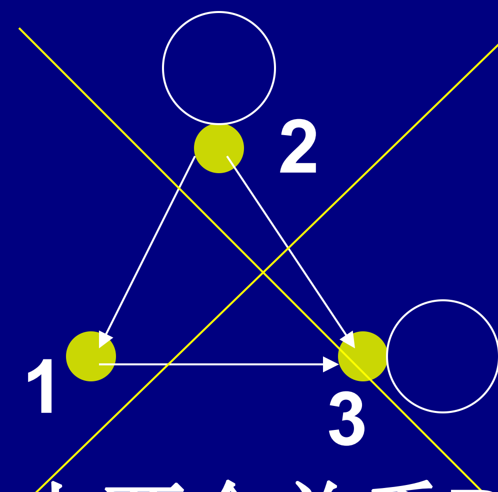
  $\Leftrightarrow$ M(R)主对角线上的元素全为0

  $\Leftrightarrow$ G(R)的每个顶点处均无环. #

自反性(举例)

例 下列为集合A={1,2,3}上两个关系R和S的关系图。



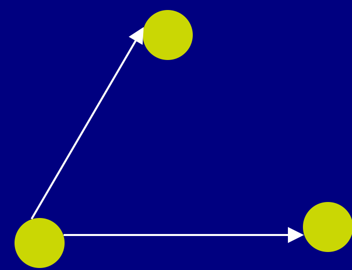


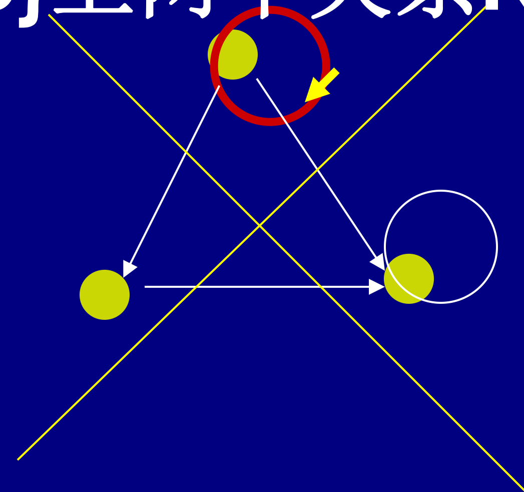
例 下列为集合A={1,2,3}上两个关系R_1和R_2的关系矩阵。

$$M_{R_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad M_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

反自反性(举例)

例 下列为集合**A={1,2,3}**上两个关系**R**和**S**的关系图。

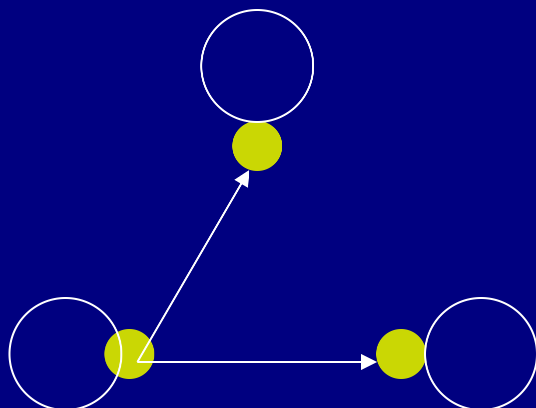




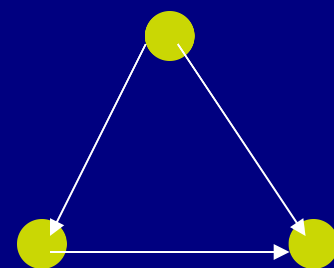
例 下列为集合**A={1,2,3}**上两个关系$\mathbf{R_1}$和$\mathbf{R_2}$的关系矩阵。

$$M_{R_1}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix},\qquad M_{R_2}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

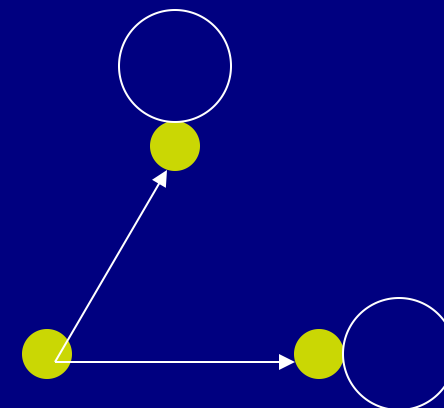
自反,自反性(分类)



自反



反自反



非自反,
非反自反

自反,
反自反？

∅上的空关系

例7.10

例7.10 设$A=\{1,2,3\}$，R_1，R_2，R_3是A上的关系，其中

$$R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}$$

$$R_2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 1,2\rangle\}$$

$$R_3=\{\langle 1,3\rangle\}$$

说明R_1，R_2和R_3是否为A上的自反关系和反自反关系。

解答

R_1既不是自反的也不是反自反的，

R_2是自反的，

R_3是反自反的。

对称性和反对称性

定义7.12 设R为A上的关系，

（1）若$\forall x \forall y(x, y \in A \land \langle x, y\rangle \in R \rightarrow \langle y, x\rangle \in R)$，则称R为A上对称(symmetry)的关系。

R非对称 $\Leftrightarrow \exists x \exists y(x \in A \land y \in A \land xRy \land \neg yRx)$

（2）若$\forall x \forall y(x, y \in A \land \langle x, y\rangle \in R \land \langle y, x\rangle \in R \rightarrow x=y)$，则称R为A上的反对称(antisymmetry)关系。

R非反对称$\Leftrightarrow \exists x \exists y(x \in A \land y \in A \land xRy \land yRx \land x \neq y)$

例如

A上的全域关系E_A，恒等关系I_A和空关系都是A上的对称关系。

恒等关系I_A和空关系也是A上的反对称关系。

但全域关系E_A一般不是A上的反对称关系，除非A为单元集或空集。

对称性(symmetry)

- 命题8: R是对称的

  $\Leftrightarrow$ $R^{-1}=R$

  $\Leftrightarrow$ R^{-1}是对称的

  $\Leftrightarrow$ M(R)是对称的

  $\Leftrightarrow$ G(R)的任何两个顶点之间若有边，则必有两条方向相反的有向边. #

反对称性(antisymmetry)

- 命题9 R是反对称的

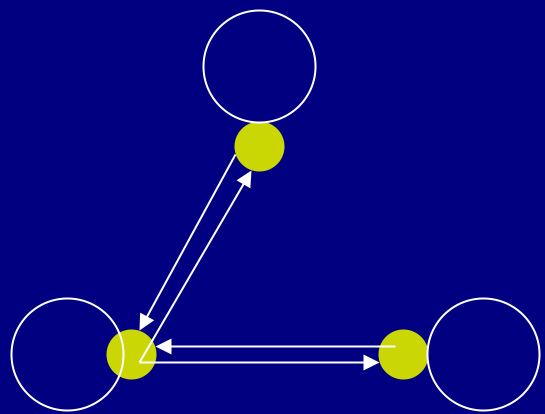
  $\Leftrightarrow R^{-1} \cap R \subseteq I_A$

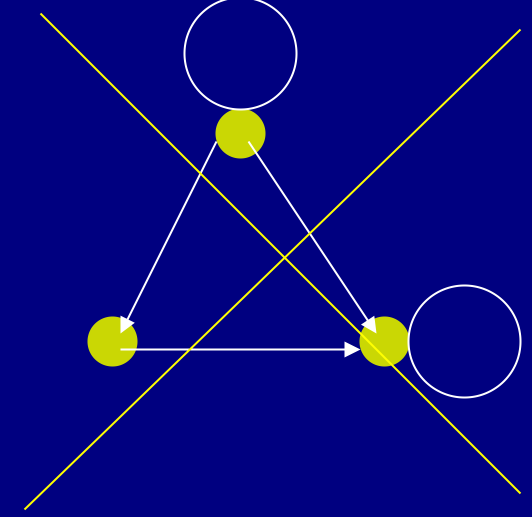
  $\Leftrightarrow R^{-1}$是反对称的

  $\Leftrightarrow$ 在M(R)中，$\forall i \forall j (i \neq j \wedge r_{ij}=1 \rightarrow r_{ji}=0)$

  $\Leftrightarrow$ 在G(R)中，$\forall x_i \forall x_j (i \neq j)$，若有有向边$\langle x_i, x_j \rangle$，则必没有$\langle x_j, x_i \rangle$. #

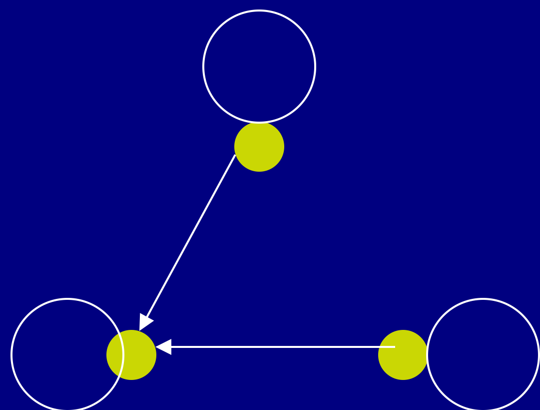
对称性(举例)

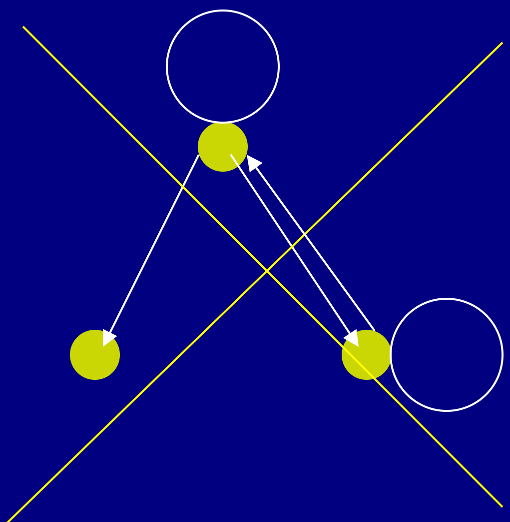




$$M_{R_1}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\1&0&0\end{bmatrix},\qquad M_{R_2}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&1&0\end{bmatrix}$$

反对称性(举例)

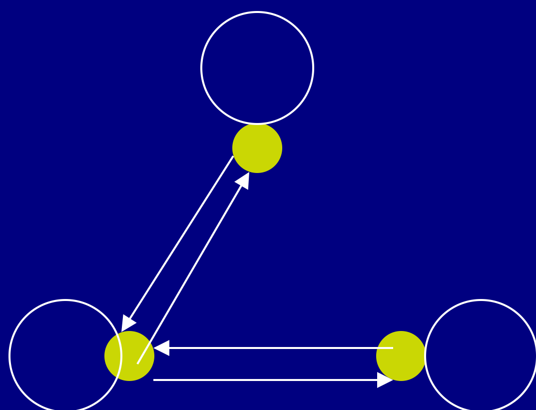




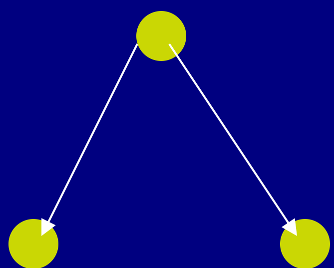
$$M_{R_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

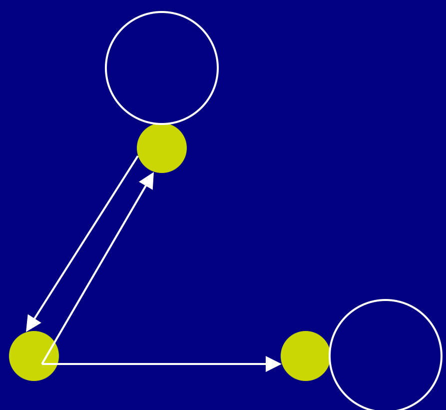
对称,反对称(分类)



对称

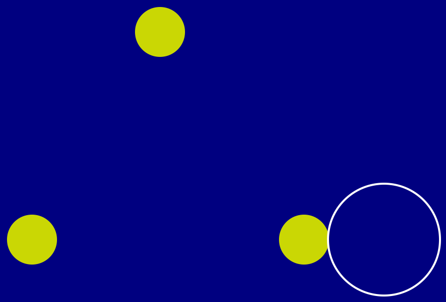


反对称



非对称,
非反对称

对称,
反对称？



例7.11

例7.11 设$A=\{1,2,3\}$，R_1，R_2，R_3和R_4都是A上的关系，其中

$$R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}$$

$$R_2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\}$$

$$R_3=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle\}$$

$$R_4=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 1,3\rangle\}$$

说明R_1，R_2，R_3和R_4是否为A上对称和反对称的关系。

解答 R_1既是对称也是反对称的。

R_2是对称的但不是反对称的。

R_3是反对称的但不是对称的。

R_4既不是对称的也不是反对称的。

传递性

定义7.13 设R为A上的关系，若

鍶$\forall x \forall y \forall z(x,y,z \in A \land \langle x,y\rangle \in R \land \langle y,z\rangle \in R \rightarrow \langle x,z\rangle \in R)$

则称R是A上的**传递**(transitivity)关系。

例如

A上的全域关系E_A，恒等关系I_A和空关系都是A上的传递关系。

小于等于关系，整除关系和包含关系也是相应集合上的传递关系。

小于关系和真包含关系仍旧是相应集合上的传递关系。

传递性(transitivity)

- R非传递⇔

  $\exists x \exists y \exists z (x \in A \wedge y \in A \wedge z \in A \wedge xRy \wedge yRz \wedge \neg xRz)$

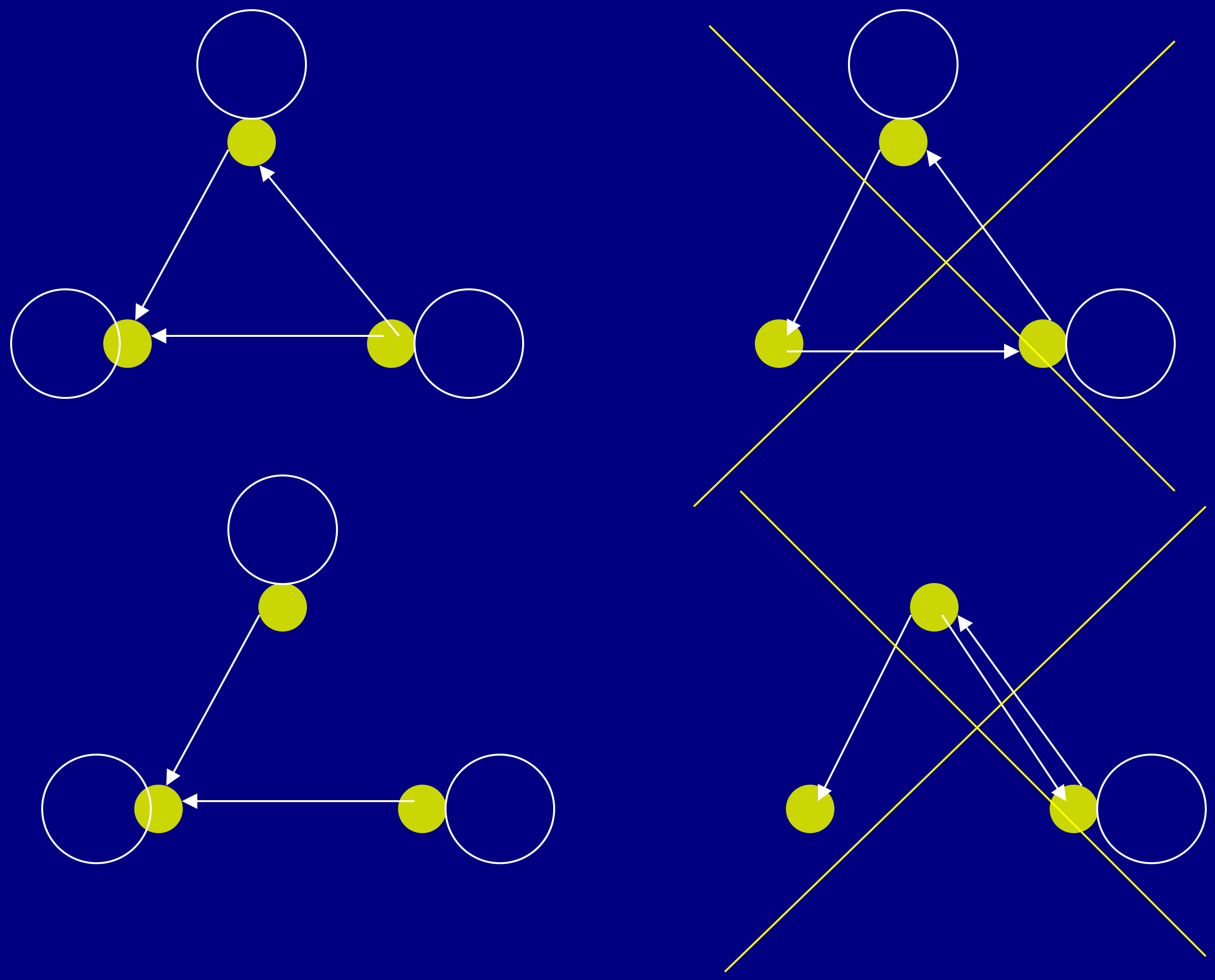
- 命题10: R是传递的

  ⇔ $R \circ R \subseteq R$ ⇔ R^{-1}是传递的

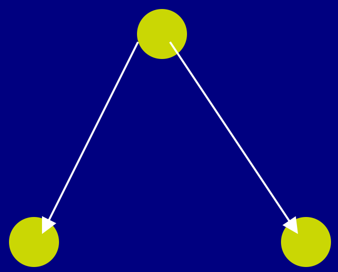
  ⇔ 在$M(R \circ R)$中, $\forall i \forall j$, 若$r_{ij}'=1$,则$M(R)$中相应的元素$r_{ij}=1$.

  ⇔ 在$G(R)$中, $\forall x_i \forall x_j \forall x_k$, 若有有向边$\langle x_i, x_j \rangle, \langle x_j, x_k \rangle$, 则必有有向边$\langle x_i, x_k \rangle$. #

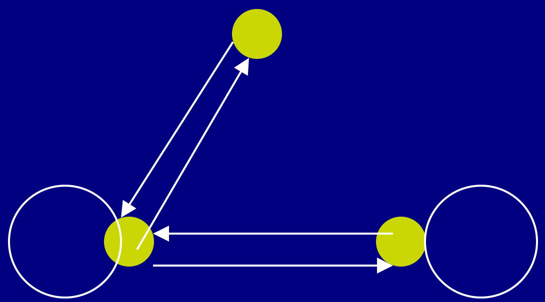
传递性(举例)



传递(分类)



传递



非传递

例7.12

例7.12 设A＝{1, 2, 3}，R_1，R_2，R_3是A上的关系，其中

$R_1 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$

$R_2 = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$

$R_3 = \{\langle 1, 3\rangle\}$

说明R_1，R_2和R_3是否为A上的传递关系。

解答

R_1和R_3是A上的传递关系，

R_2不是A上的传递关系。

关系性质的等价描述

定理7.9 设R为A上的关系，则

（1）R在A上自反当且仅当 $I_A \subseteq R$

（2）R在A上反自反当且仅当 $R \cap I_A = \varnothing$

（3）R在A上对称当且仅当 $R = R^{-1}$

（4）R在A上反对称当且仅当 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$

（5）R在A上传递当且仅当 $R \circ R \subseteq R$

分析　关系性质的证明方法

说明

- 利用该定理可以从关系的集合表达式来判断或证明关系的性质。

定理7.9 (1)的证明

（1） R在A上自反当且仅当 $I_A \subseteq R$

必要性。

任取$\langle x, y\rangle$，有

$\langle x, y\rangle \in I_A$

$\Rightarrow x, y \in A \land x = y$

$\Rightarrow \langle x, y\rangle \in R$

所以 $I_A \subseteq R$

充分性。

任取x，有

$x \in A$

$\Rightarrow \langle x, x\rangle \in I_A$

$\Rightarrow \langle x, x\rangle \in R$

所以 R在A上是自反的。

定理7.9 (2)的证明

（2）R在A上反自反当且仅当 $R\cap I_A=\varnothing$

必要性。用反证法。

假设$R\cap I_A\neq\varnothing$,

必存在$\langle x,y\rangle\in R\cap I_A$。

由于I_A是A上恒等关系，

可知 $x\in A$且$\langle x,x\rangle\in R$。

这与R在A上是反自反的相矛盾。

充分性。

任取x，有

$x\in A$

$\Rightarrow \langle x,x\rangle\in I_A$

$\Rightarrow \langle x,x\rangle\notin R$ （$R\cap I_A=\varnothing$）

所以 R在A上是反自反的。

定理7.9 (3)的证明

（3） R在A上对称当且仅当 $R=R^{-1}$

必要性。

任取$\langle x, y\rangle$，有

$\langle x, y\rangle \in R$

$\Leftrightarrow \langle y, x\rangle \in R$ （因为R在A上对称）

$\Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in R^{-1}$

所以 $R=R^{-1}$

充分性。

任取$\langle x, y\rangle$，

由 $R=R^{-1}$ 得

$\langle x, y\rangle \in R$

$\Rightarrow \langle y, x\rangle \in R^{-1}$

$\Rightarrow \langle y, x\rangle \in R$

所以 R在A上是对称的。

定理7.9 (4)的证明

（4） R在A上反对称当且仅当 $R\cap R^{-1} \subseteq I_A$

必要性。

任取$\langle x, y\rangle$，有

$\langle x, y\rangle \in R\cap R^{-1}$

$\Rightarrow \langle x, y\rangle \in R \land \langle x, y\rangle \in R^{-1}$

$\Rightarrow \langle x, y\rangle \in R \land \langle y, x\rangle \in R$

$\Rightarrow x = y$ （R是反对称的）

$\Rightarrow \langle x, y\rangle \in I_A$

所以 $R\cap R^{-1} \subseteq I_A$

充分性。

任取$\langle x, y\rangle$，则有

$\langle x, y\rangle \in R \land \langle y, x\rangle \in R$

$\Rightarrow \langle x, y\rangle \in R \land \langle x, y\rangle \in R^{-1}$

$\Rightarrow \langle x, y\rangle \in R\cap R^{-1}$

$\Rightarrow \langle x, y\rangle \in I_A$ （$R\cap R^{-1} \subseteq I_A$）

$\Rightarrow x = y$

所以 R在A上是反对称的。

定理7.9 (5)的证明

（5） R在A上传递当且仅当 $R\circ R\subseteq R$

必要性。任取$\langle x, y\rangle$，有

$\langle x, y\rangle\in R\circ R$

$\Rightarrow \exists t(\langle x, t\rangle\in R\wedge\langle t, y\rangle\in R)$

$\Rightarrow \langle x, y\rangle\in R$ （因为R在A上是传递的）

所以 $R\circ R\subseteq R$。

充分性。任取$\langle x, y\rangle, \langle y, z\rangle\in R$，则

$\langle x, y\rangle\in R\wedge\langle y, z\rangle\in R$

$\Rightarrow \langle x, z\rangle\in R\circ R$

$\Rightarrow \langle x, z\rangle\in R$ （因为$R\circ R\subseteq R$）

所以 R在A上是传递的。

例7.13

例7.13 设A是集合，R_1和R_2是A上的关系，证明：

(1) 若R_1，R_2是自反的和对称的，则$R_1 \cup R_2$也是自反的和对称的。

(2) 若R_1和R_2是传递的，则$R_1 \cap R_2$也是传递的。

(3) R_1, R_2自反 $\Rightarrow$ $R_1 \circ R_2$自反.

(4) R_1, R_2反自反 $\Rightarrow$ $R_1 \cap R_2$反自反.

(5) R_1, R_2对称 $\Rightarrow$ $R_1 - R_2$对称

(6) R_1对称 $\Rightarrow$ $\sim R_1$对称.

(7) R_1反对称 $\Rightarrow$ R_1^{-1}反对称.

例7.13 (1)的证明

(1) 若R_1，R_2是自反的和对称的，则$R_1 \cup R_2$也是自反的和对称的。

证明

由于R_1和R_2是A上的自反关系，故有

$$I_A \subseteq R_1 \text{ 和 } I_A \subseteq R_2$$

从而得到 $I_A \subseteq R_1 \cup R_2$。

根据定理7.9可知 $R_1 \cup R_2$在A上是自反的。

再由R_1和R_2的对称性有

$$R_1 = R_1^{-1} \text{ 和 } R_2 = R_2^{-1}$$

根据练习七第18题的结果有

$$(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1} = R_1 \cup R_2$$

从而证明了$R_1 \cup R_2$也是A上对称的关系。

例7.13 (2)的证明

(2) 若R_1和R_2是传递的，则$R_1 \cap R_2$也是传递的。

证明

由R_1和R_2的传递性有

$$R_1 \circ R_1 \subseteq R_1 \text{ 和 } R_2 \circ R_2 \subseteq R_2$$

再使用定理7.4得

$$(R_1 \cap R_2) \circ (R_1 \cap R_2)$$

$$\subseteq R_1 \circ R_1 \cap R_1 \circ R_2 \cap R_2 \circ R_1 \cap R_2 \circ R_2$$

$$\subseteq (R_1 \cap R_2) \cap R_1 \circ R_2 \cap R_2 \circ R_1$$

(将前面的包含式代入)

$$\subseteq R_1 \cap R_2$$

从而证明了$R_1 \cap R_2$也是A上的传递关系。

例7.13 (3)的证明

- (3) R_1, R_2自反 $\Rightarrow$ $R_1 \circ R_2$自反.
- 证明: $\forall x$,

$$
\begin{aligned}
& x \in A \\
\Rightarrow\ & xR_1x \wedge xR_2x \\
\Rightarrow\ & xR_1 \circ R_2x
\end{aligned}
$$

$\therefore$ R_1, R_2自反 $\Rightarrow$ $R_1 \circ R_2$自反. #

例7.13 (4)的证明

- (4)　R_1, R_2反自反 $\Rightarrow$ $R_1 \cap R_2$反自反.
- 证明：（反证）若$R_1 \cap R_2$非反自反，则

$$\exists x \in A,\quad x\,(R_1 \cap R_2)\,x$$

$$\Leftrightarrow\ xR_1x \ \wedge\ xR_2x$$

与R_1, R_2反自反矛盾！

$\therefore$ R_1, R_2反自反 $\Rightarrow$ $R_1 \cap R_2$反自反.　　#

例7.13 (5)的证明

- (5)　R_1, R_2对称 $\Rightarrow$ R_1-R_2对称.
- 证明: $\forall x, y \in A$,

$$x(R_1-R_2)y$$

$$\Leftrightarrow xR_1y \wedge \neg xR_2y$$

$$\Leftrightarrow yR_1x \wedge \neg yR_2x \text{（} R_1, R_2\text{对称）}$$

$$\Leftrightarrow y(R_1-R_2)x$$

$\therefore$ R_1, R_2对称 $\Rightarrow$ R_1-R_2对称.　　　#

例7.13 (6)的证明

- (6) R_1对称 $\Rightarrow$ $\sim R_1$对称.
- 证明: $\forall x, y \in A$,

$$x(\sim R_1)y \Leftrightarrow x(E_A - R_1)y$$

$$\Leftrightarrow xE_Ay \wedge \neg xR_1y$$

$$\Leftrightarrow yE_Ax \wedge \neg yR_1x \quad (R_1\text{对称})$$

$$\Leftrightarrow y(E_A - R_1)x \Leftrightarrow y(\sim R_1)x$$

$\therefore$ R_1对称 $\Rightarrow$ $\sim R_1$对称. #

例7.13 (6)的证明

- (7) R_1反对称 $\Rightarrow$ R_1^{-1}反对称.
- 证明：（反证）若R_1^{-1}非反对称，则

$$\exists x, y \in A,$$

$$xR_1^{-1}y \wedge yR_1^{-1}x \wedge x \neq y$$

$$\Leftrightarrow yR_1x \wedge xR_1y \wedge x \neq y$$

与R_1反对称矛盾！

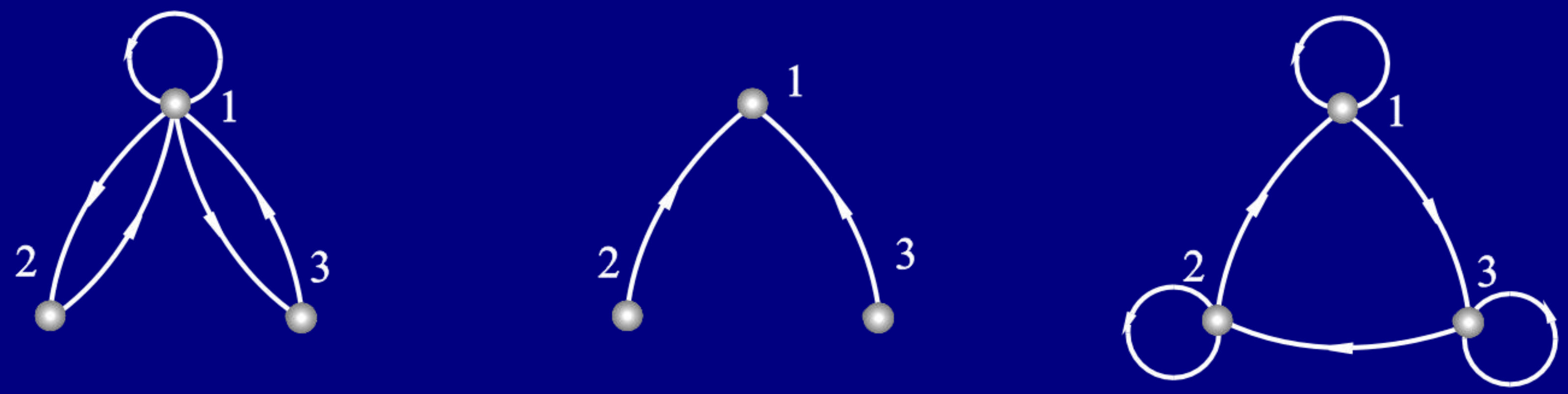
$\therefore$ R_1反对称 $\Rightarrow$ R_1^{-1}反对称. #

关系性质的特点

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
集合表达式	$I_A \subseteq R$	$R \cap I_A = \varnothing$	$R = R^{-1}$	$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$	$R \circ R \subseteq R$
关系矩阵	主对角线元素全是1	主对角线元素全是0	矩阵是对称矩阵	若$r_{ij}=1$，且$i \neq j$，则$r_{ji}=0$	对M^2中1所在位置，M中相应的位置都是1
关系图	每个顶点都有环	每个顶点都没有环	如果两个顶点之间有边，一定是一对方向相反的边(无单边)	如果两点之间有边，一定是一条有向边(无双向边)	如果顶点x_i到x_j有边，x_j到x_k有边，则从x_i到x_k也有边

例7.14

例7. 14 判断下图中关系的性质，并说明理由。



（1）对称的，不是自反的，不是反自反的，不是反对称的，不是传递的。

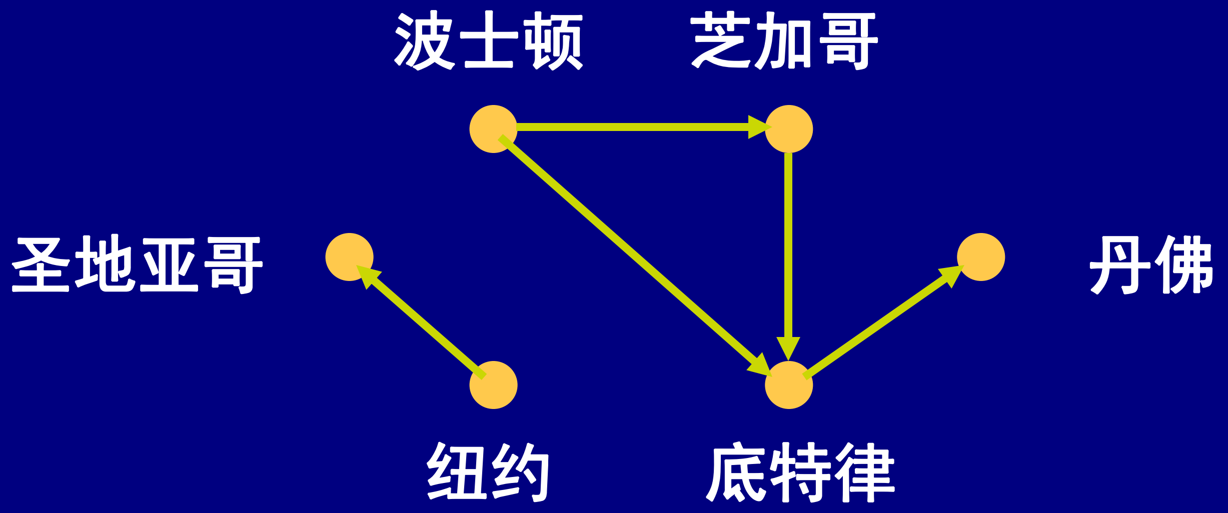
（2）是反自反的，不是自反的，是反对称的，不是对称的，是传递的。

（3）是自反的，不是反自反的，是反对称的，不是对称的，不是传递的。

关系的性质和运算之间的关系

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R_1^{-1}	√	√	√	√	√
$R_1 \cap R_2$	√	√	√	√	√
$R_1 \cup R_2$	√	√	√	×	×
$R_1 - R_2$	×	√	√	√	×
$R_1 \circ R_2$	√	×	×	×	×

问题



- 如果存在一条从数据中心a到b的电话线，<a, b>就属于关系R。
- 如何确定从一个中心是否有一条电话线(可能不直接)链接到另一个中心？
- 通过构造包含R的最小的传递关系来找出每一对有着联系的数据中心，这个关系叫做R的传递闭包。