1-03 函数

微积分研究的是客观世界的数量反映

——函数的性质、取值规律和函数值的变化情况。

从根本上说，微积分这一学说的诞生的基础是——笛卡儿的解析几何。

解析几何的学说使得对函数的讨论可以“数”、“形”结合。

上页 下页 返回

1. 函数定义：

函数___五要素：自变量,因变量,定义域 *domain*,值域 *range*,对应关系 *function*.

两个函数相同 $\Leftrightarrow$ 对应关系相同 & 定义域相同.

例如, $y=\log_2 2^x$ 与 $y=x$ 相同,

$s=\sqrt{t^2}$ 与 $y=|x|$ 相同,

$y=2^{\log_2 x}$ 与 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 不同.

上页 下页 返回

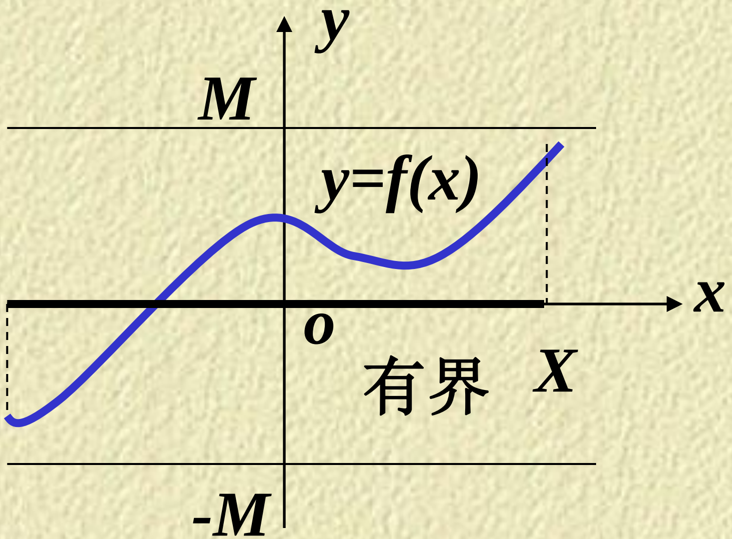
2. 函数的几何特性:

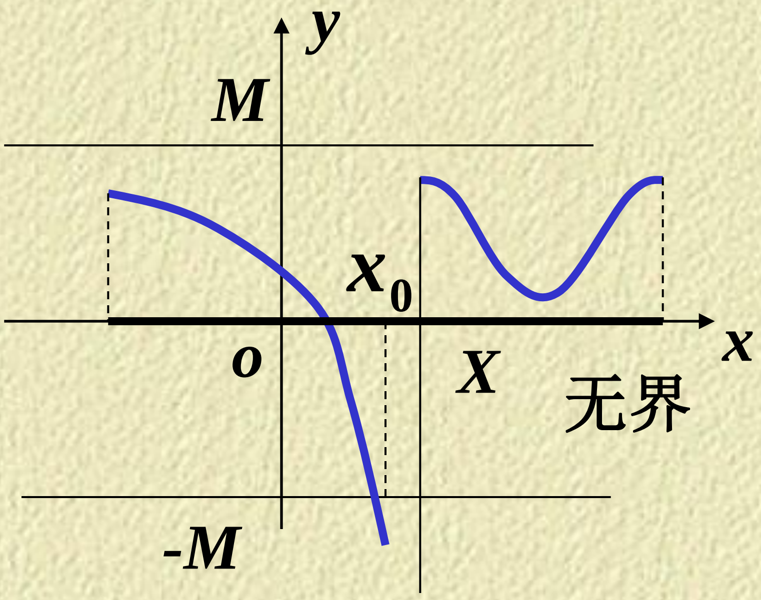
函数的这四个几何特性都是**整体特性.**

(1).函数的有界性:

若$X \subset D, \exists M > 0, \forall x \in X$,有$|f(x)| \le M$成立,

则称函数$f(x)$在X上有界.否则称无界.





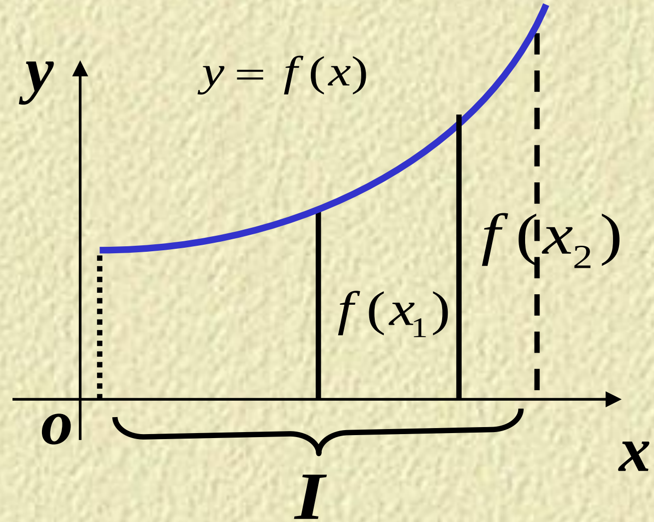
(2).函数的单调性:

设函数$f(x)$的定义域为D,区间 $I \in D$,

如果对于区间I上任意两点x_1及x_2,

当$x_1 < x_2$时,恒有(1) $f(x_1) \le f(x_2)$,则

称函数$f(x)$在区间I上是单调增加的;



上页 下页 返回

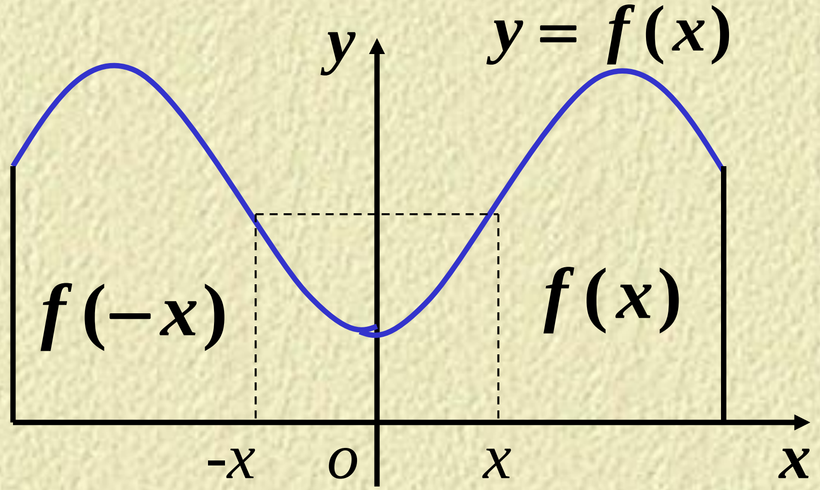
设函数 $f(x)$的定义域为D, 区间 $I \in D$,
如果对于区间 I 上任意两点 x_1及 x_2, 当 $x_1 < x_2$
时,恒有 (1) $f(x_1) < f(x_2)$ $[f(x_1) > f(x_2)]$,则称
函数 $f(x)$在区间 I 上是严格单调增加[严格单调减少]的。

上页 下页 返回

(3).函数的奇偶性:

设D关于原点对称，对于$\forall x \in D$，有

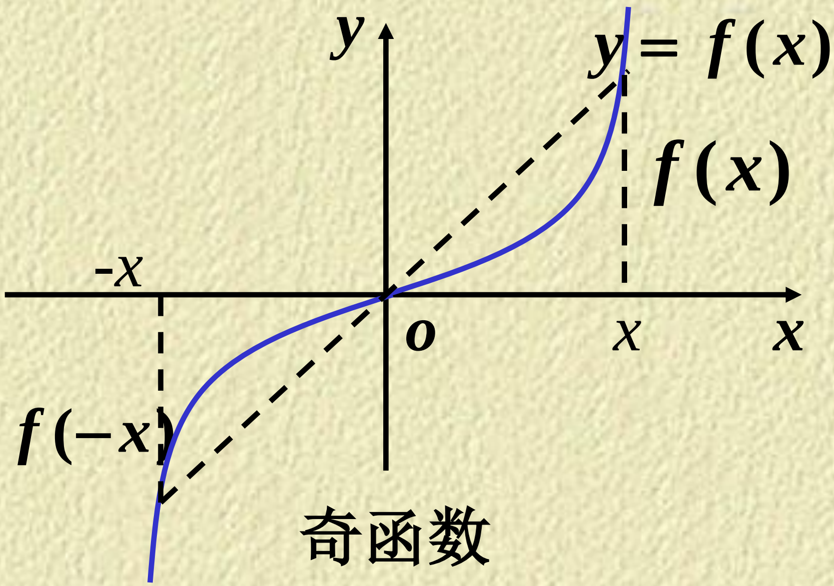
$f(-x) = f(x)$ 称 $f(x)$为偶函数;



偶函数

设D关于原点对称，对于$\forall x \in D$，有

$f(-x) = -f(x)$　称 $f(x)$为奇函数;



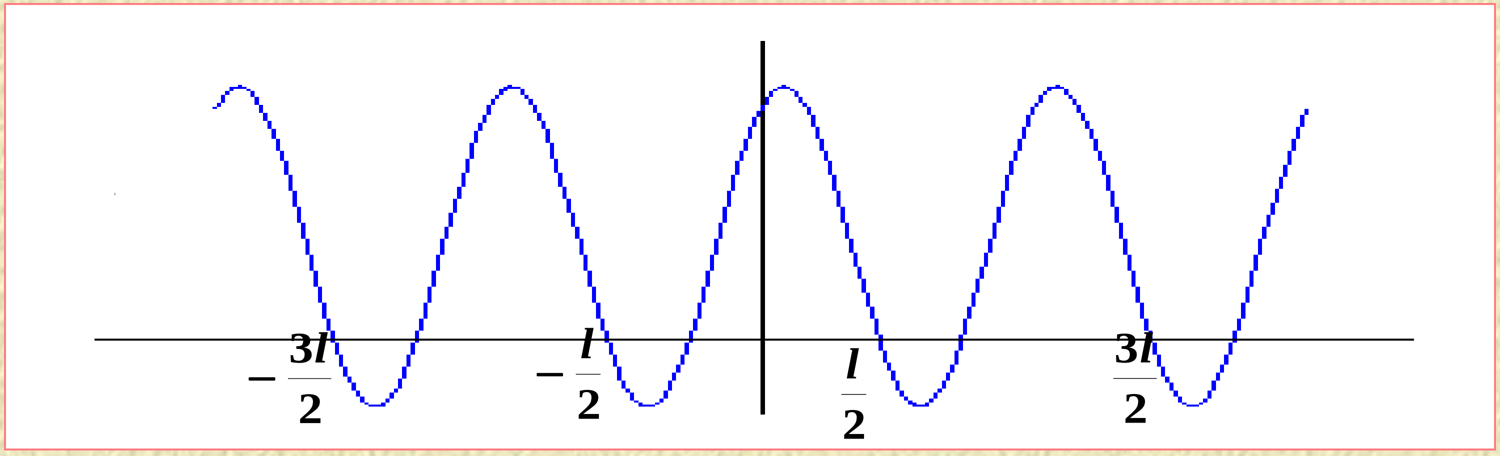
奇函数

上页 下页 返回

(4).函数的周期性:

设函数$f(x)$的定义域为D, 如果存在一个不为零的数l,使得对于任一$x \in D$,$(x \pm l) \in D$.且 $f(x+l) = f(x)$ 恒成立. 则称$f(x)$为周 期函数,l称为$f(x)$的周期.

（通常说周期函数的周期是指其最小正周期）.

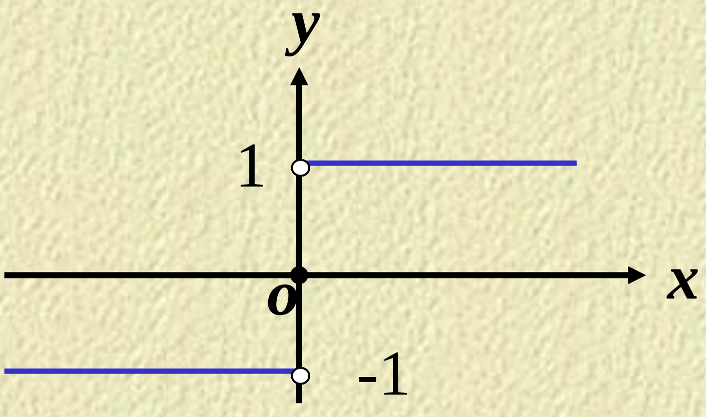


上页 下页 返回

3.特殊的函数举例

(1).符号函数

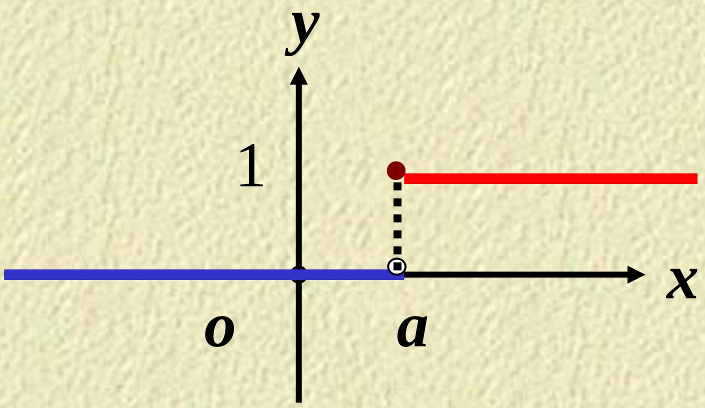
$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & 当 x > 0 \\ 0 & 当 x = 0 \\ -1 & 当 x < 0 \end{cases}$$



$$x = \operatorname{sgn} x \cdot |x|$$

(2). *Heaviside* 函数

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ 1, & x \geq a \end{cases}$$



Heaviside 是一位英国的电子工程师,他用 *Heaviside* 函数来描述事物由量变到质变的一个过程与状态.

上页 下页 返回

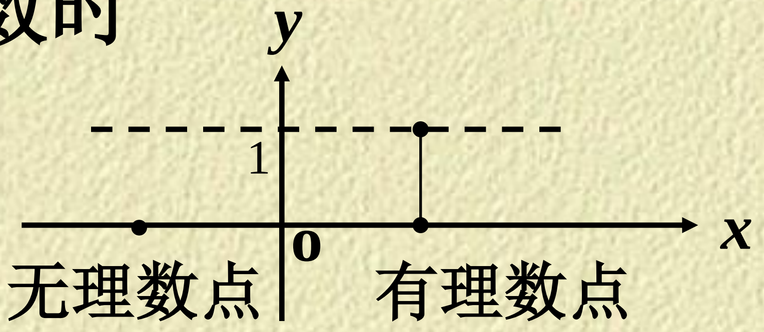
(3).黎曼(Riemann)函数 $x \in [0,1]$,

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q},\text{当}x=\dfrac{p}{q}\left(p,q\in\mathbb{Z}^{+},p,q\text{互质}\right)\text{时}\\ 0,\text{当}x=0,1\text{或}(0,1)\text{内的无理数时}\end{cases}$$

爆米花函数

(4). 狄利克雷(Dirichlet)函数

$$D(x)=\begin{cases}1 & \text{当}x\text{是有理数时}\\ 0 & \text{当}x\text{是无理数时}\end{cases}$$



其定义域为D_f=(-∞, +∞) ,

其值域为 R_f={0, 1}.

上页 下页 返回

(5). 指数函数

$a>0, a\neq 1, x\in\mathbb{R},$

$$x=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}, q\in\mathbb{Z}^{+}, p\in\mathbb{Z}, a^{x}=a^{\frac{p}{q}}=\left(\sqrt[q]{a}\right)^{p},$$

$$\sqrt[q]{a}=b, b>0, b^{q}=a.$$

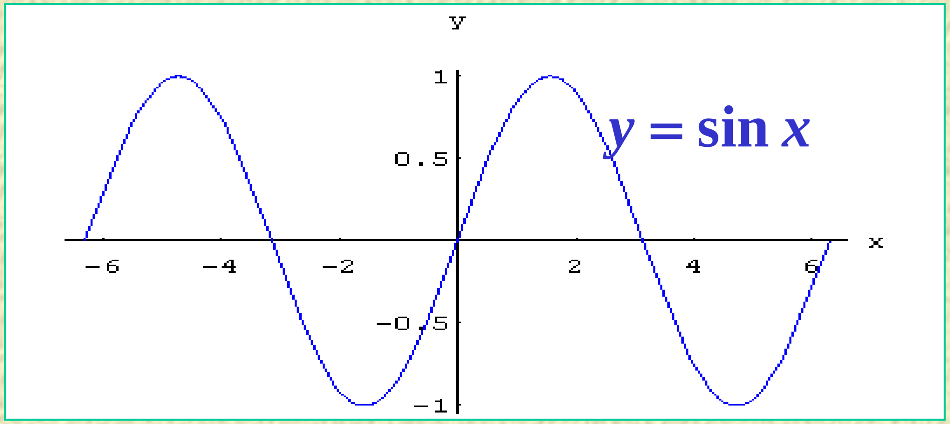
$$a^{x}=\begin{cases} a^{x}, x=\dfrac{p}{q}\in\mathbb{Q}, q\in\mathbb{Z}^{+}, p\in\mathbb{Z} \\ \sup\left\{a^{r}: r\in\mathbb{Q}, r<x, x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\right\}, a>1 \\ \inf\left\{a^{r}: r\in\mathbb{Q}, r<x, x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\right\}, a<1 \end{cases}$$

由确界原理得到

(6).三角函数

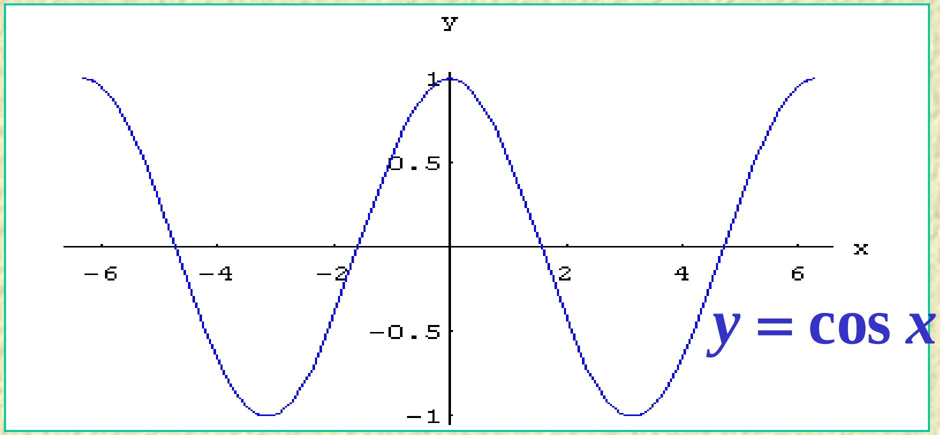
正弦函数

$$y = \sin x$$



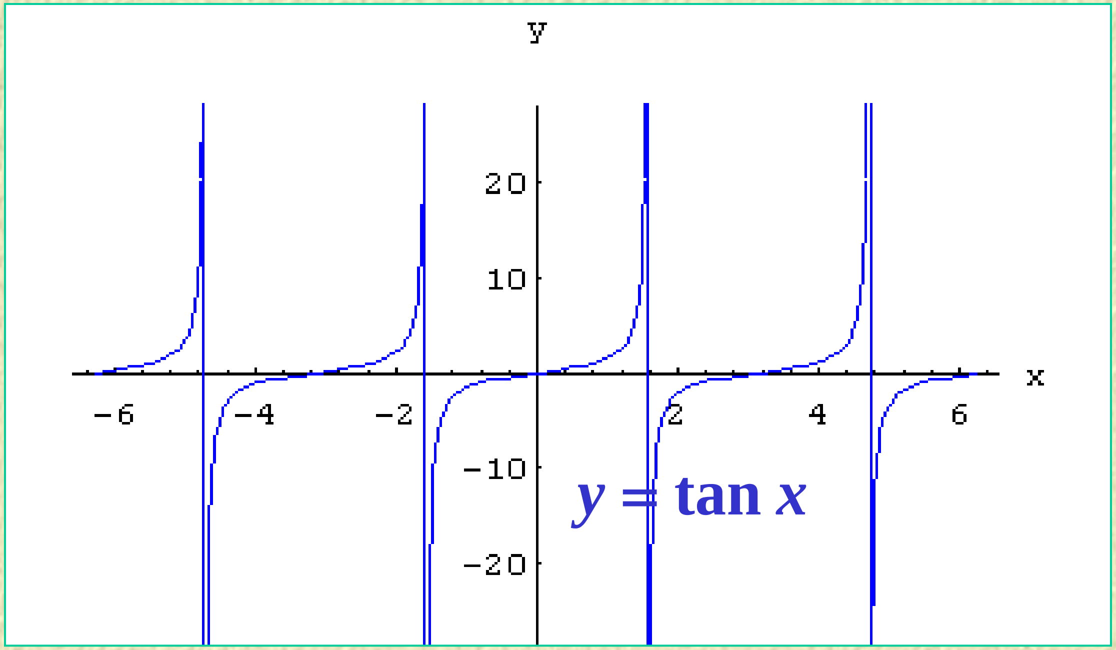
余弦函数

$$y = \cos x$$



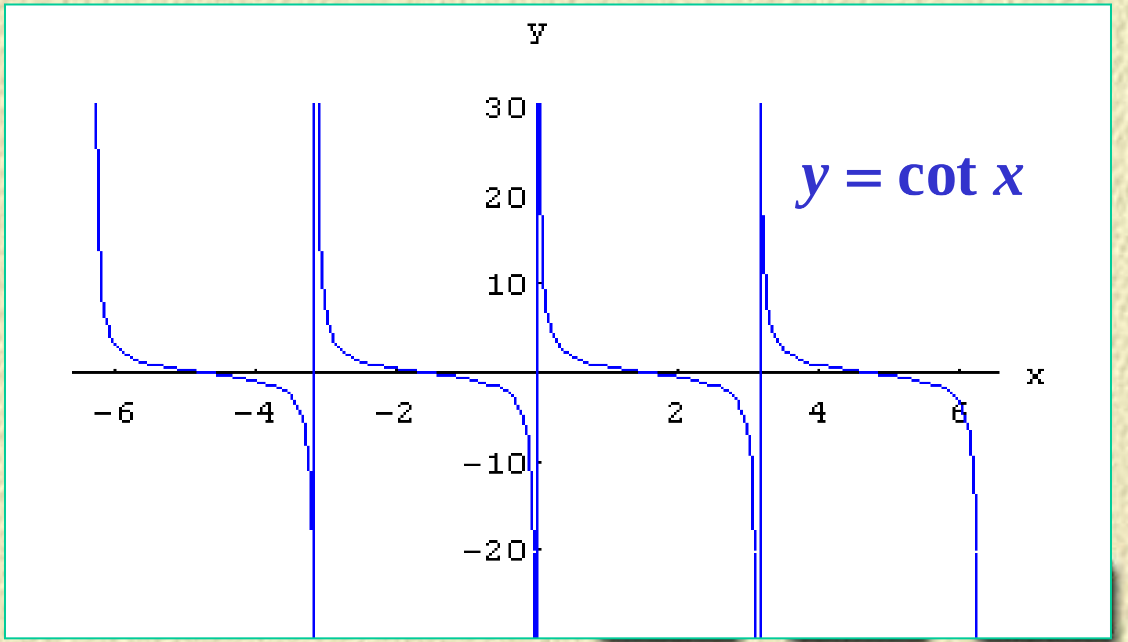
正切函数

$y = \tan x$



余切函数

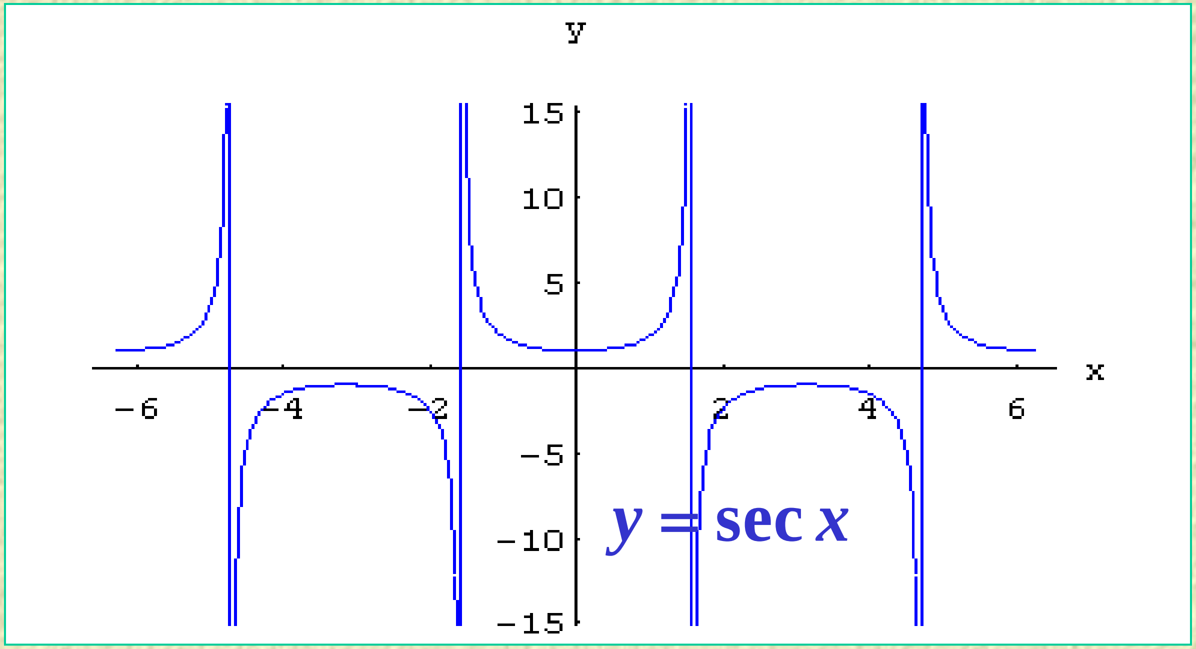
$y = \cot x$



正割函数

$$y = \sec x$$

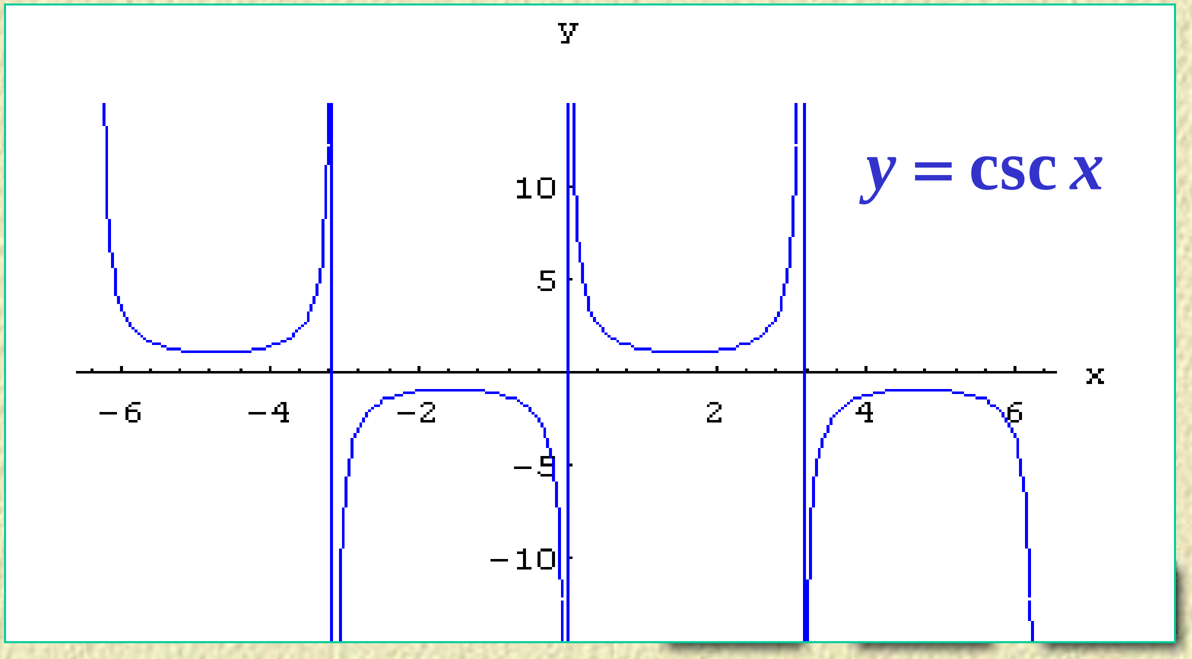
$$= \frac{1}{\cos x}$$

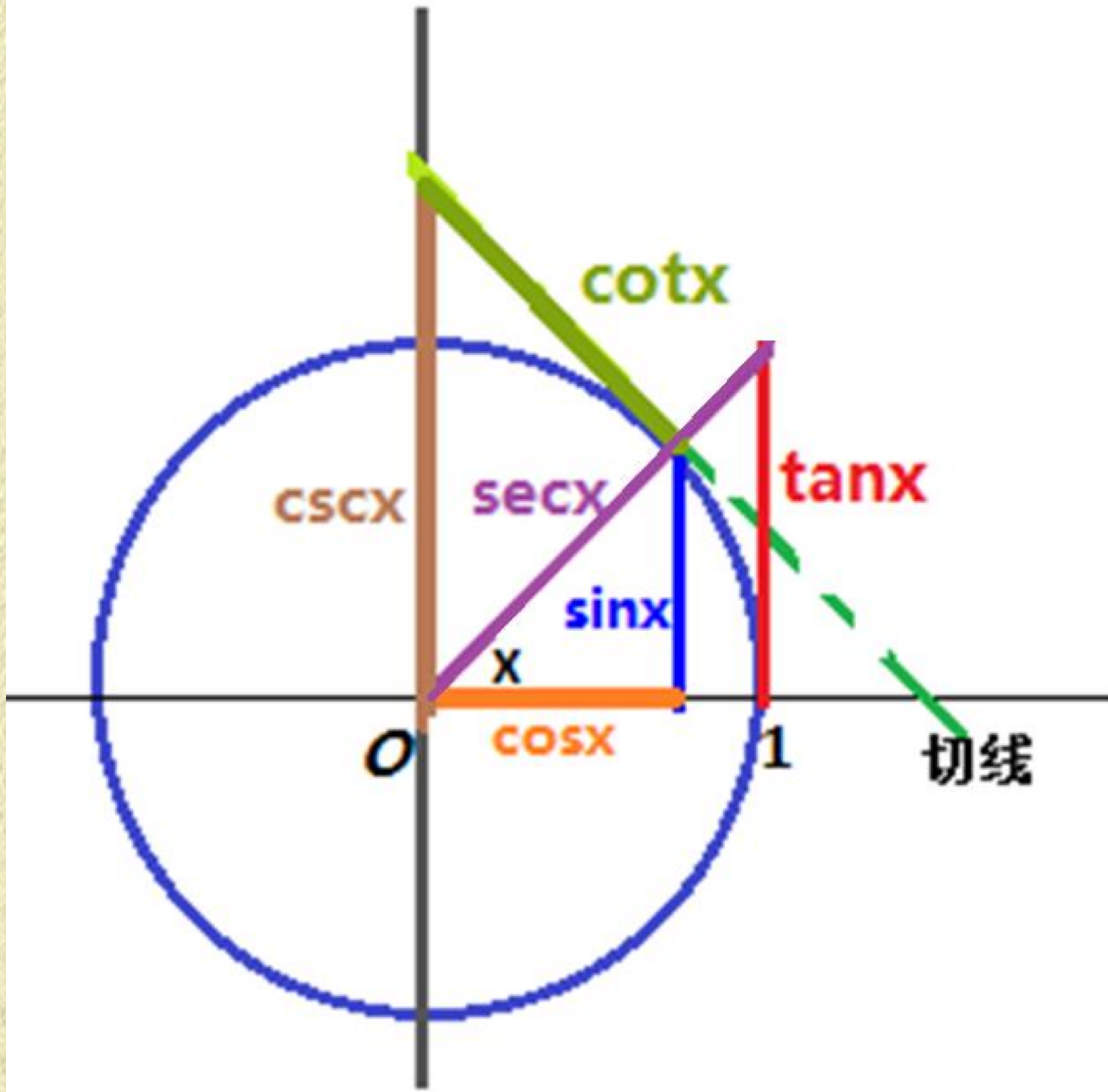


余割函数

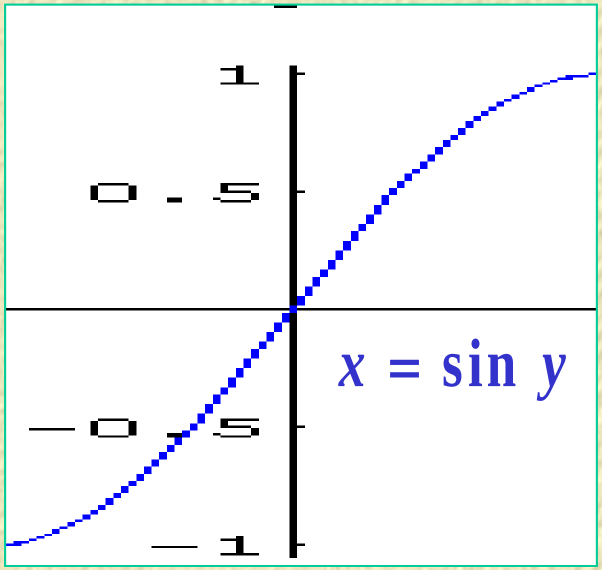
$$y = \csc x$$

$$= \frac{1}{\sin x}$$




cotx
cscx
secx
tanx
sinx
x
O
cosx
1
切线

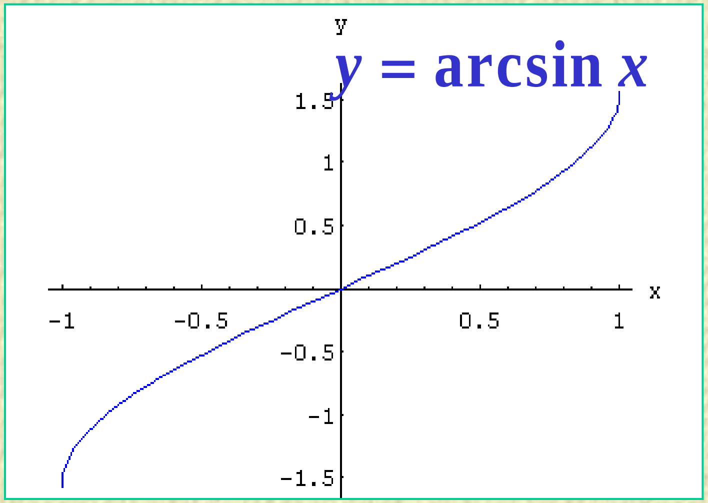
(7).反三角函数



周期函数$x = \sin y$在$y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

的时候严格单调,所以有反函数

$$y = \arcsin x, x \in [-1,1], y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$



上页 下页 返回

若$x=\sin y, y\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$

则$x=\sin(\pi-y), \pi-y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

$\therefore \pi-y=\arcsin x,$

$\Rightarrow y=\pi-\arcsin x, x\in[-1,1].$

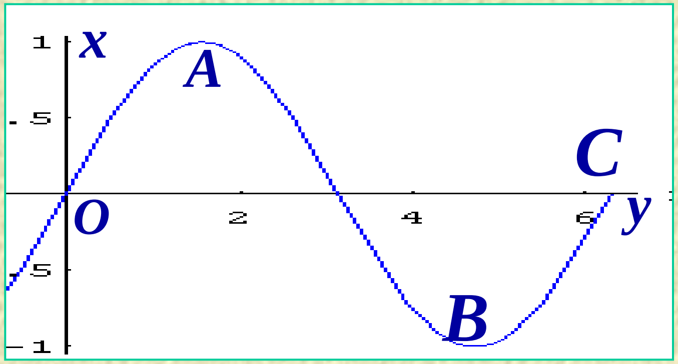
由定义知：$y \in [-1,1]$，

则 $\sin(\arcsin y) = y$.

动问：$\forall x \in \mathbb{R}$，

$\arcsin(\sin x) = ?$

上页 下页 返回



正弦曲线$OABC$：

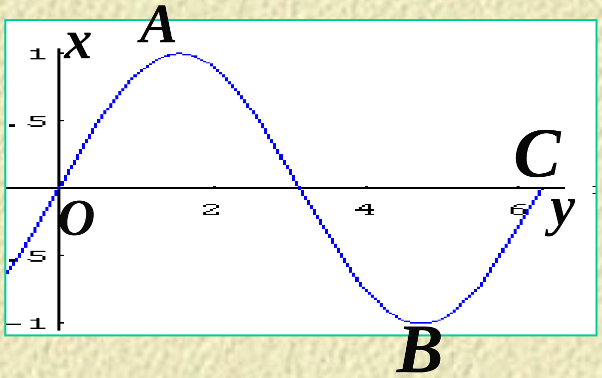
$$x=\sin y,\ y\in[0,2\pi]$$

曲线$OABC$的另一种表示法：

$$OA: y=\arcsin x,\ y\in[0,\pi/2],$$

$$AB: y=\pi-\arcsin x,\ y\in[\pi/2,3\pi/2],$$

$$BC: y=2\pi+\arcsin x,\ y\in[3\pi/2,2\pi],$$



$\because\ y\in[3\pi/2,2\pi]$时，$y-2\pi\in[-\pi/2,0]$

$$x=\sin y=\sin(y-2\pi),$$

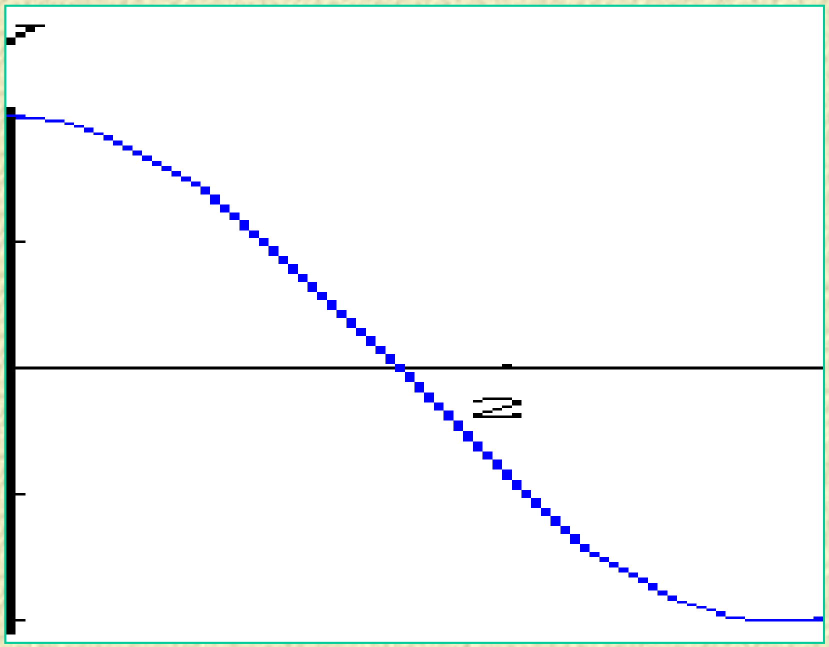
$$\therefore\ y-2\pi=\arcsin x,\Rightarrow\ y=2\pi+\arcsin x.$$

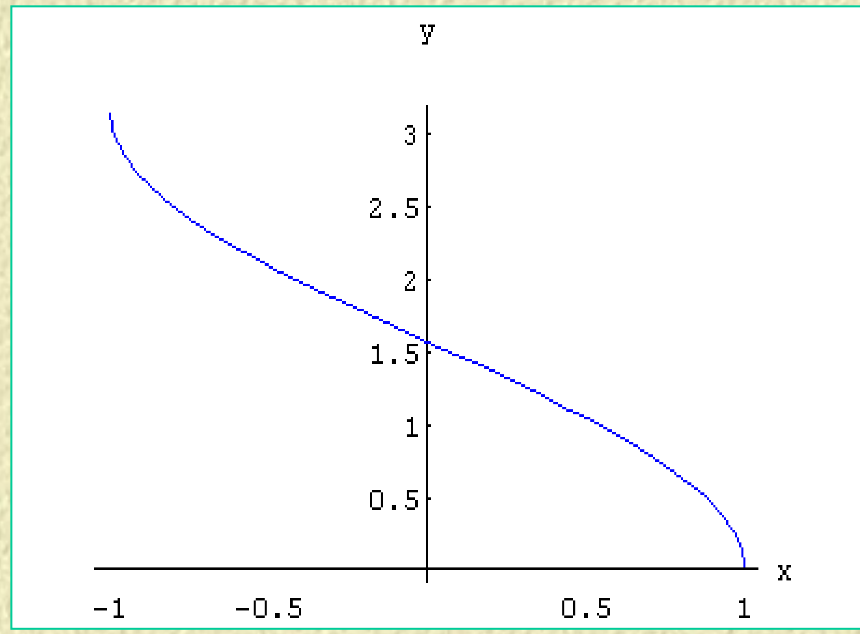
上页 下页 返回

周期函数$x=\cos y$在$y\in[0,\pi]$时严格单调递减，

所以有反函数 $y=\arccos x, x\in[-1,1], y\in[0,\pi]$.

$x=\cos y$

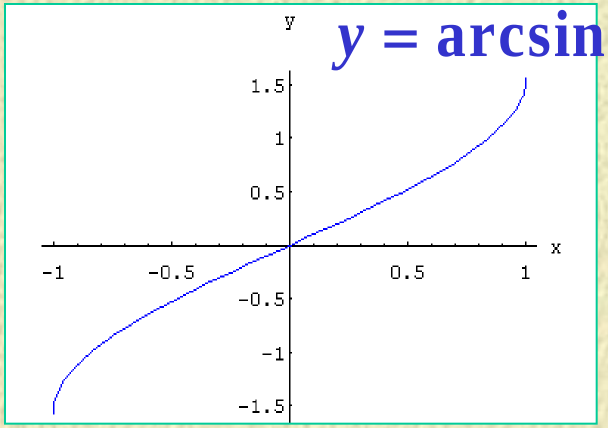




$y=\arccos x$

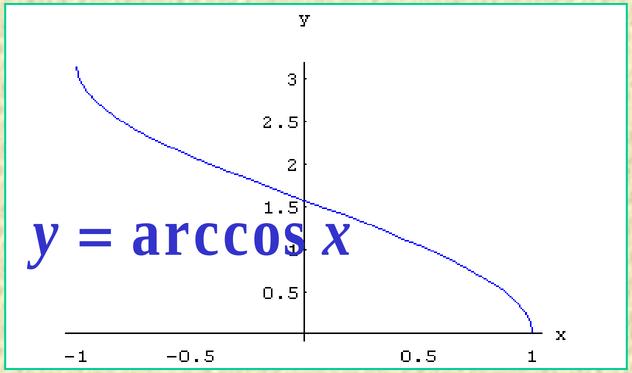
上页 下页 返回

反正弦函数 $y=\arcsin x$



$x\in[-1,1], y=\arcsin x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

反余弦函数 $y=\arccos x$



$x\in[-1,1], y=\arccos x\in[0,\pi]$

证明 $x\in[-1,1]$,

$$\arcsin x+\arccos x\equiv\frac{\pi}{2}$$

记$\alpha=\arcsin x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,

$\beta=\arccos x\in[0,\pi]$,

$\cos\alpha=+\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-x^2}$,

$\sin\beta=+\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-x^2}$,

$\therefore\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$=x^2+1-x^2\equiv1$,

$\because\alpha+\beta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right],\therefore\alpha+\beta\equiv\frac{\pi}{2}$.

上页 下页 返回

求证 $x\in[-1,1], \arcsin x+\arccos x\equiv\frac{\pi}{2}$.

证明 记$\alpha=\arcsin x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,

$\beta=\arccos x\in[0,\pi]$,

$\cos\alpha=+\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-x^2}$,

$\sin\beta=+\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-x^2}$,

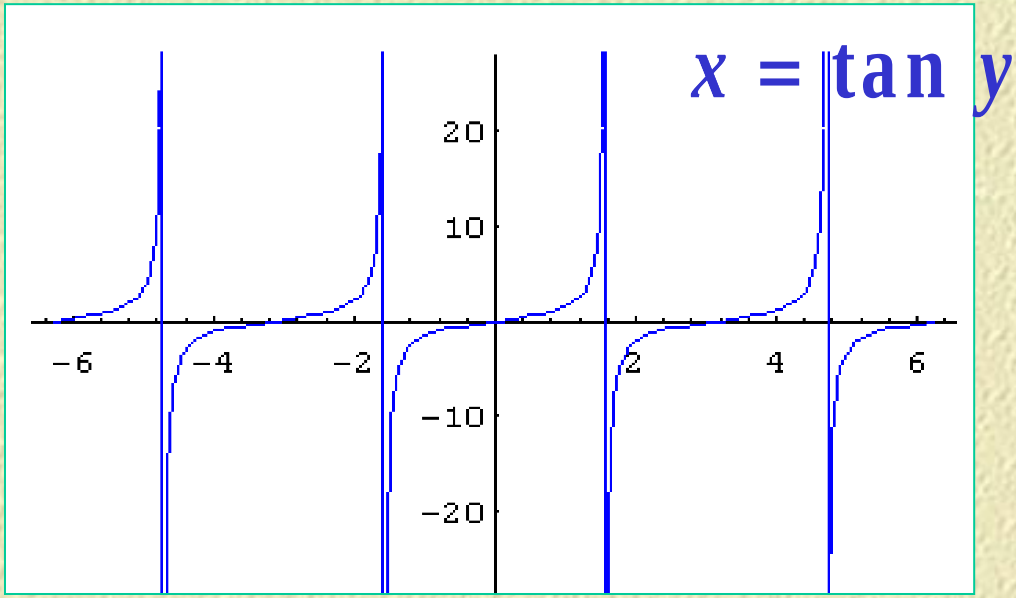
$$\therefore \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$=x^2+1-x^2\equiv 1,$$

$\because \alpha+\beta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right], \therefore \alpha+\beta\equiv\frac{\pi}{2}$.

上页 下页 返回

正切函数

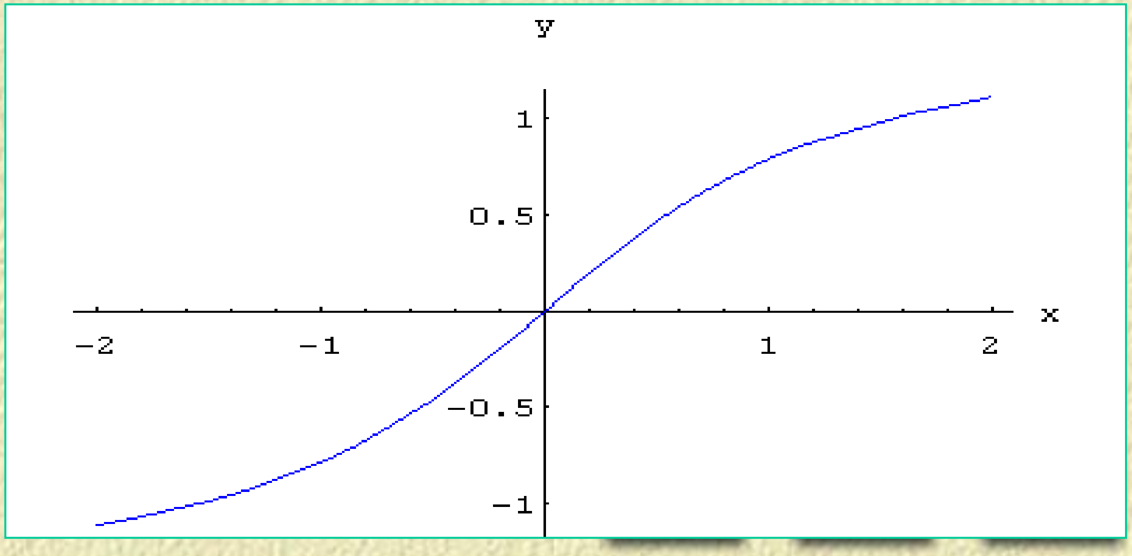
$x = \tan y$



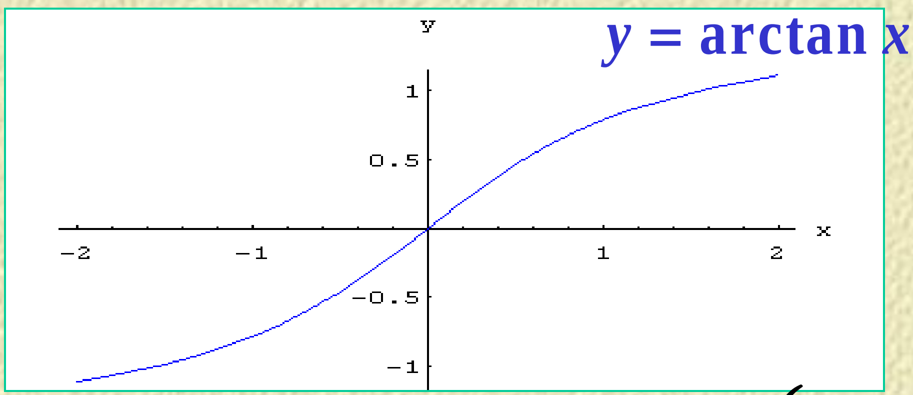
$$x \in (-\infty, +\infty),\ y = \arctan x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

反正切函数

$y = \arctan x$



反正切函数 $y = \arctan x$

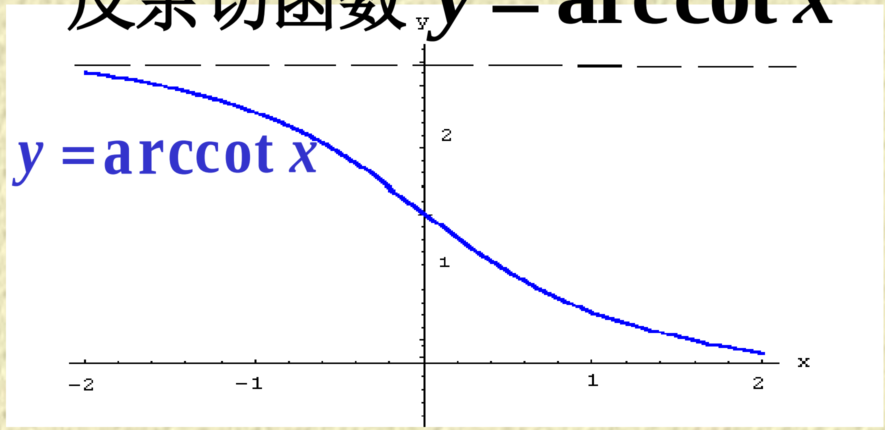


$$x \in (-\infty, +\infty),$$

$$\arctan x + \operatorname{arccot} x \equiv \frac{\pi}{2}.$$

$$x \in (-\infty, +\infty),\ y = \arctan x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$



幂函数,指数函数,对数函数,三角函数和反三角函数统称为基本初等函数.

$$x \in (-\infty, +\infty),\ y = \operatorname{arccot} x \in (0, \pi)$$

$$x \in [-1,1], \arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$x \in [-1,1], \arccos x \in [0,\pi].$$

$$x \in (-\infty,+\infty), \arctan x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$x \in (-\infty,+\infty), \operatorname{arccot} x \in (0,\pi).$$

函数的分类:

- 函数
  - 初等函数
    - 代数函数
      - 有理函数
        - 有理整函数(多项式函数)
        - 有理分函数(分式函数)
      - 无理函数
    - 超越函数
  - 非初等函数(分段函数, 有无穷多项等函数)

思考练习

1. $f(x)=\dfrac{1}{2+x}$, $f\left[f(x)\right]=?$

2. 若函数$f(x)$满足关系式

$$2f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{k}{x},$$

k为常数,证明: $f(x)$是奇函数.

3. 证明: $x\in\left(-\infty,+\infty\right)$,

$$\arctan x+\operatorname{arccot} x\equiv\frac{\pi}{2}.$$

4.证明: $\forall x \geq 1$,

$$\arctan x - \frac{1}{2}\arccos\frac{2x}{1+x^2} \equiv \frac{\pi}{4}.$$

5. $\forall x, y \in D_f = \mathbb{R}, f(x) \leq x,$

$$f(x+y) \leq f(x) + f(y),$$

证明: $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

上页 下页 返回

6.试问：

$$\sin(\arcsin x) = ?$$

$$\arcsin(\sin x) = ?$$

$$1.\ f(x)=\frac{1}{2+x},\ f[f(x)]=?$$

解$$f[f(x)]=\frac{1}{2+f(x)}=\frac{1}{2+\frac{1}{2+x}}=\frac{1}{\frac{5+2x}{2+x}},$$

或表达为 $$f[f(x)]=\frac{2+x}{5+2x}\ (x\neq-2).$$

4.证明$\forall x\ge 1, \arctan x-\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{2x}{1+x^2}\equiv\dfrac{\pi}{4}$;

证明　可证$\forall x\ge 1, 2\arctan x-\arccos\dfrac{2x}{1+x^2}\equiv\dfrac{\pi}{2}$.

记$\arctan x=\alpha, \arccos\dfrac{2x}{1+x^2}=\beta$.

$$\cos(2\alpha-\beta)=\cos 2\alpha\cos\beta+\sin 2\alpha\sin\beta$$

$$=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}\cos\beta+\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}\sin\beta$$

$$=\frac{1-x^2}{1+x^2}\cdot\frac{2x}{1+x^2}+\frac{2x}{1+x^2}\cdot\sin\beta$$

$$\sin\beta=\pm\sqrt{1-\cos^2\beta}=\pm\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}=?$$

上页 下页 返回

$$\because x \geq 1, \therefore 0 < \frac{2x}{1+x^2} \leq 1,$$

$$\therefore \arccos \frac{2x}{1+x^2} = \beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\therefore \sin\beta = +\sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}$$

$$= \frac{\left|x^2-1\right|}{1+x^2} = \frac{x^2-1}{1+x^2},$$

$$\because x \geq 1, \therefore \arctan x = \alpha \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right). \therefore 2\alpha - \beta \in (0, \pi).$$

上页 下页 返回

$$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\frac{x^2-1}{1+x^2},$$

$$2\alpha-\beta\in(0,\pi).$$

$$\cos(2\alpha-\beta)=\frac{1-x^2}{1+x^2}\cdot\frac{2x}{1+x^2}+\frac{2x}{1+x^2}\cdot\sin\beta$$

$$=\frac{1-x^2}{1+x^2}\cdot\frac{2x}{1+x^2}+\frac{2x}{1+x^2}\cdot\frac{x^2-1}{1+x^2}\equiv 0,$$

$$\therefore 2\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}.$$

5. $\forall x, y \in D_f = \mathbb{R}, f(x) \le x,$

$f(x+y) \le f(x) + f(y),$

证明: $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

5.证明: (1). $f(0) = f(0+0) \le f(0) + f(0),$

$f(0) \le 0 \Rightarrow f(0) \ge 0, \therefore f(0) = 0.$

(2). $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f\left(0 - (-x)\right)$

$\ge f(0) - f(-x) = -f(-x) \ge x,$

$\therefore f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.