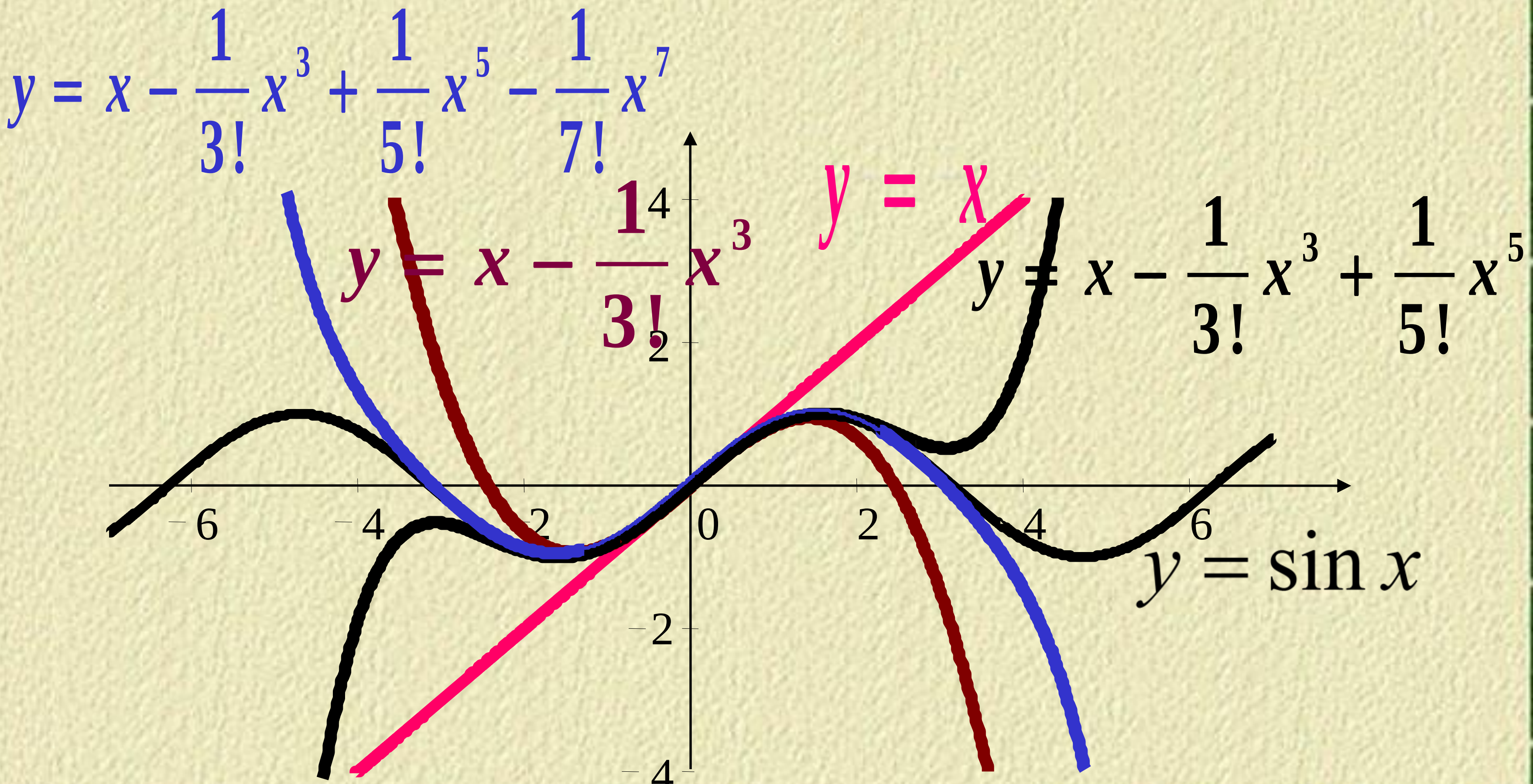
泰勒中值定理

B.Taylor	1685-1731	(*G.B.*)
Maclaurin	1698-1746	(*G.B.*)
Lagrange	1736~1813	(*Fr.*)
Cauchy	1789~1857	(*Fr.*)

观察 $\sin x$ 与一个多项式函数 $f(x)$ 的图象：

$$f(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$



上页 下页 返回

1.问题的提出

(1).若$f(x)$在x_0处连续,则有

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

$$\therefore\ f(x) = f(x_0) + \alpha, \lim_{x \to x_0} \alpha = 0,$$

$\therefore$ 当x很接近x_0,即$|x - x_0|$很小时

有 $f(x) \approx f(x_0)$.

以平直代曲

上页 下页 返回

(2).若$f(x)$在x_0处可导,则有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0),$$

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0),$$

$\therefore$ 当x很接近x_0,即$|x-x_0|$很小时

有$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

以切直代曲

例如,当$|x|$很小时,

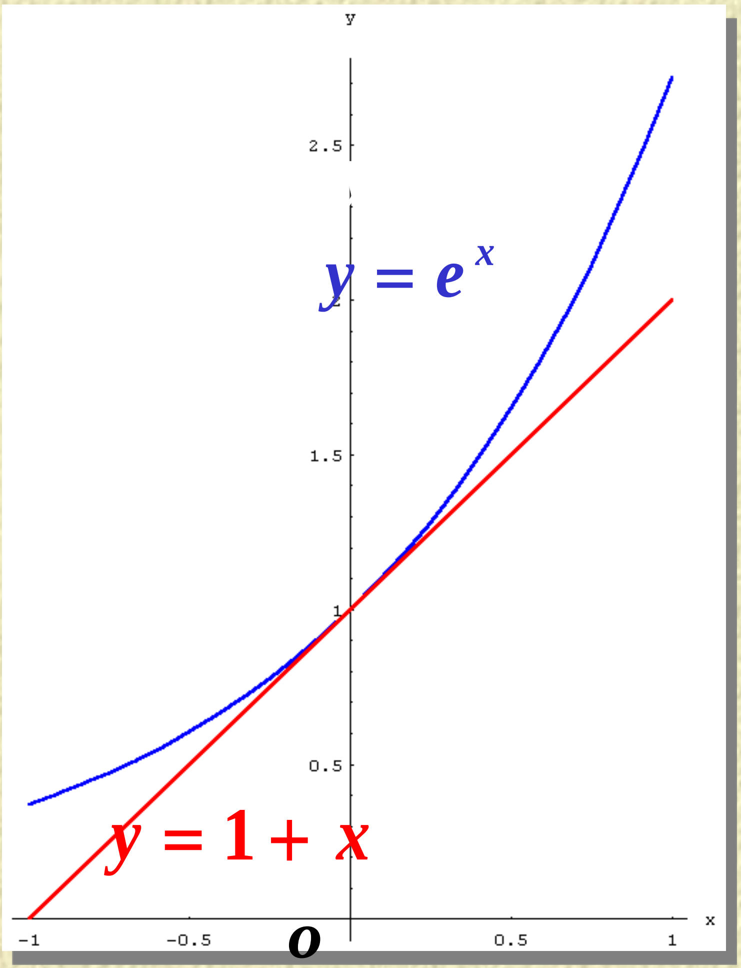
$e^x\approx 1+x \quad \ln(1+x)\approx x$

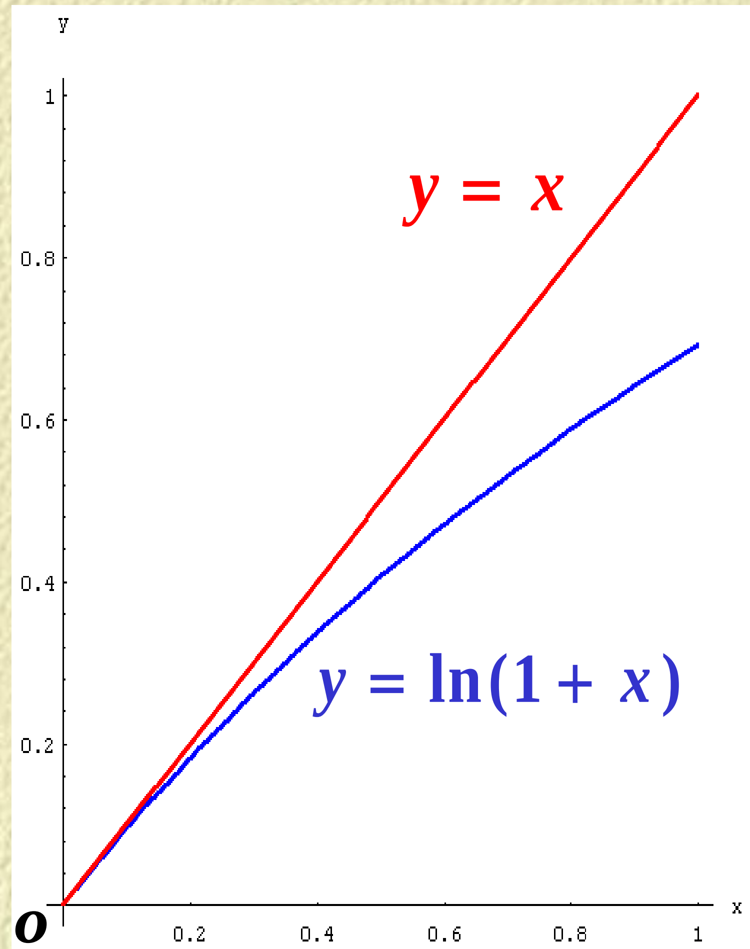
如下图

上页 下页 返回

例如,当$|x|$很小时,

$$e^x \approx 1 + x \qquad \ln(1+x) \approx x$$





不足 (1).精确度不高,(2).误差无法估计.

问题 寻找多项式函数$P_n(x)$,使得

$(A).\ f(x) \approx P_n(x)$,

(B).误差$R(x) = f(x) - P_n(x)$可估计.

由于$P_n(x)$任意多阶可导,故要求$f(x)$在包含x_0的区间(a,b)内有高阶导数是合理的,

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n,$$

误差 $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$

$P_n(x)$和$R_n(x)$的确定：

近似程度越来越好

分析 $y = f(x)$与$y = P_n(x)$的图象

(1).都过x_0点,则$P_n(x_0) = f(x_0)$;

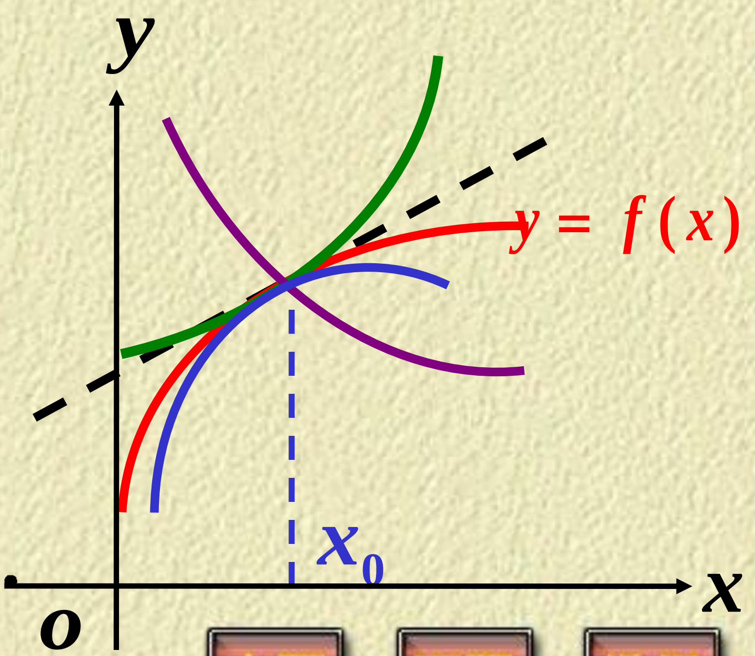
(2).在点x_0处相切,

则$P_n'(x_0) = f'(x_0)$;

(3).在点x_0的某邻域

内弯曲方向相同,

则 $P_n''(x_0) = f''(x_0)$.$\cdots$



$$P_n(x)=a_0+a_1\left(x-x_0\right)+\cdots+a_n\left(x-x_0\right)^n,$$

$$P_n'(x)=a_1+2a_2\left(x-x_0\right)+\cdots+na_n\left(x-x_0\right)^{n-1},$$

$$P_n''(x)=2a_2+3\cdot 2a_3\left(x-x_0\right)+\cdots+n(n-1)a_n\left(x-x_0\right)^{n-2},$$

$$P_n'''(x)=3!a_3+4\cdot 3\cdot 2a_4\left(x-x_0\right)+\cdots$$

$$\cdots+n\left(n-1\right)\left(n-2\right)a_n\left(x-x_0\right)^{n-3},$$

$$\cdots \quad \cdots$$

$$P_n(x_0)=a_0,P_n'(x)=a_1,P_n''(x_0)=2a_2=2!a_2,$$

$$P_n'''(x_0)=3!a_3,\cdots,P_n^{(n)}(x_0)=n!a_n$$

设想 $P_n^{(k)}(x_0)=f^{(k)}(x_0), k=1,2,\cdots,n,$

$a_0=f(x_0), 1\cdot a_1=f'(x_0), 2!\cdot a_2=f''(x_0)$

$\cdots, n!\cdot a_n=f^{(n)}(x_0),$

则$a_k=\dfrac{1}{k!}f^{(k)}(x_0), (k=0,1,2,\cdots,n)$

代入$P_n(x)$ 中得到

$$P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+$$

$$\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

2.泰勒(*Taylor*)中值定理

Th.1.(*Taylor Theorem*)

如果函数$f(x)$在包含x_0的区间(a,b)内有

$n+1$阶导数,则 $f(x)=P_n(x)+R_n(x)$,

$$P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

其中ξ介于x_0与x之间.

证明　由条件知$R_n(x)$在$\left(a,b\right)$内有 $n+1$ 阶导数,

$$R_n(x_0)=R_n'(x_0)=R_n''(x_0)=\cdots=R_n^{(n)}(x_0)=0$$

函数$R_n(x)$与$\left(x-x_0\right)^{n+1}$在以$x_0,x\left(x\neq x_0\right)$为端点的区间上满足$Cauchy$中值定理的条件,

$$\frac{R_n(x)}{\left(x-x_0\right)^{n+1}}=\frac{R_n(x)-R_n(x_0)}{\left(x-x_0\right)^{n+1}-0}$$

$$=\frac{R_n'(\xi_1)}{(n+1)\left(\xi_1-x_0\right)^n}\left(\xi_1\text{在}x_0\text{与}x\text{之间}\right)$$

函数$R_n'(x)$与$(n+1)(x-x_0)^n$在以x_0与ξ_1为端点的区间上满足*Cauchy*中值定理的条件,

$$\frac{R_n'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n}=\frac{R_n'(\xi_1)-R_n'(x_0)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n-0}$$

$$=\frac{R_n''(\xi_2)}{n(n+1)(\xi_2-x_0)^{n-1}}(\xi_2\text{在}x_0\text{与}\xi_1\text{之间})$$

如此下去,经$(n+1)$次使用*Cauchy*中值定理

可得 $$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=\frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

$\left(\xi\text{在}x_0\text{与}\xi_n\text{之间也即在}x_0\text{与}x\text{之间}\right)$

$\because P_n^{(n+1)}(x) = 0, \therefore R_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$

则由上式得

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \quad (\xi\text{在}x_0\text{与}x\text{之间}),$$

$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$称为是函数$f(x)$

在x_0点处的n次*Taylor*多项式.

$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x)$称为是函数$f(x)$

在x_0点处的(n次)*Taylor*展开.

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x),$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},(\xi\text{在}x_0\text{与}x\text{间})$$

$R_n(x)$为*Lagrange*型余项.

现在我们所看到的*Taylor*定理是*Lagrange*在*B.Taylor*工作的基础上给出的更为精确而严格的命题.

麦克劳林(*Maclaurin*)公式

Maclaurin 公式是*Taylor*中值定理的特殊形式，但却是独立于*Taylor*中值定理并且迟于它被提出来的. *Maclaurin* 1698-1746 英国

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\quad(0<\theta<1)$$

即 $f(x)=P_n(x)+R_n(x), x_0=0.$

上页 下页 返回

*Taylor*定理的出现是现实的需要对数学的推动的结果.在大航海时代/探索时代(*Age of Discovery*),人们在海洋上航行是根据海图来确定航向,而这中间需要用到三角函数的近似值计算,为了能较为精确地导航,要求能得到较高精确度的函数值近似计算的方法与技术,在这样的环境下,英国数学家*B.Taylor*给出了后世著名的*Taylor*定理.利用*Taylor*定理,人们可以得到函数值的任意精确度的近似值.

3.应用举例

例1.给出$f(x)=e^x$的n阶*Maclaurin*展开式.

解 $\because f'(x)=f''(x)=\cdots=f^{(n)}(x)=e^x$,

$\therefore f(0)=f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=1$,

注意到 $f^{(n+1)}(\theta x)=e^{\theta x}$,代入公式得

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$(0<\theta<1).$$

由公式可知$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$,

设 $x > 0$,估计误差

$$\left|R_n(x)\right| = \left|\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}\right| < \frac{e^x \cdot x^{n+1}}{(n+1)!} \quad (0 < \theta < 1)$$

取$x = 1$,得$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$

其误差为$\left|R_n(x)\right| < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$.

取$x=1, e\approx 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$

$n=10$时$1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{10!}\approx 2.718\ 281\ 8\cdots$

相比之下,由于$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ 而用

$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$作$e$ 的近似计算,$n=100$,

$a_{100}\approx 2.70\cdots, n=10^4, a_{10^4}\approx 2.718\ 14\cdots$

其效果要差远了.

$f(x)=e^x$ 的Maclaurin展开式

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},(0<\theta<1).$$

由此我们可以证明数e是无理数:

如果$e=\dfrac{p}{q}\left(p,q\in\mathbb{Z}^+\text{且互质}\right)$,则当$n>q$时,

$$e\cdot n!-\left(n!+n!+\frac{n!}{2!}+\cdots+n+1\right)=\frac{e^\theta}{n+1}\quad(\oplus)$$

应该是一个整数,但是$0<\theta<1,\dfrac{e^\theta}{n+1}<\dfrac{3}{n+1}$,

所以当$n>2$时$(\oplus)$右边就不是整数了,因而矛盾.

$\therefore$ 实数 e 是一个无理数.

上页 下页 返回

例1.(2).求证 $\forall n\in\mathbb{Z}^{+}, x\geq 0$时有

$$e^{x}\geq 1+x+\cdots+\frac{x^{n}}{n!}$$

证明 $\because e^{x}=1+x+\cdots+\frac{x^{n}}{n!}+R_{n}(x)$

$$R_{n}(x)=\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\ \left(0<\theta<1\right),$$

$x\geq 0$时有$R_{n}(x)\geq 0, \therefore \forall n\in\mathbb{Z}^{+}$,

$x\geq 0$时$e^{x}\geq 1+x+\cdots+\frac{x^{n}}{n!}$恒成立.

上页 下页 返回

例2.给出函数$\sin x$的*Maclaurin*展开式.

解 $\because (\sin x)^{(k)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\cdot k\right), k = 1,2,\cdots$

$$(\sin x)^{(2n)}\Big|_{x=0} = 0, (\sin x)^{(2n+1)}\Big|_{x=0} = (-1)^n,$$

$$\therefore \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+2}(x)$$

$$R_{2n+2}(x) = \frac{\sin\left(\theta x + \frac{\pi}{2}\cdot(2n+3)\right)}{(2n+3)!} x^{2n+3}, (0 < \theta < 1)$$

在区间$[0,\pi]$上,用11次多项式

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\frac{x^{11}}{11!}$$

来逼近 $\sin x$,则我们有

$$|R_{12}|\le\frac{|x^{13}|}{13!}<\frac{\pi^{13}}{13!}\approx 0.000\ 466\ 303$$

极好的近似结果

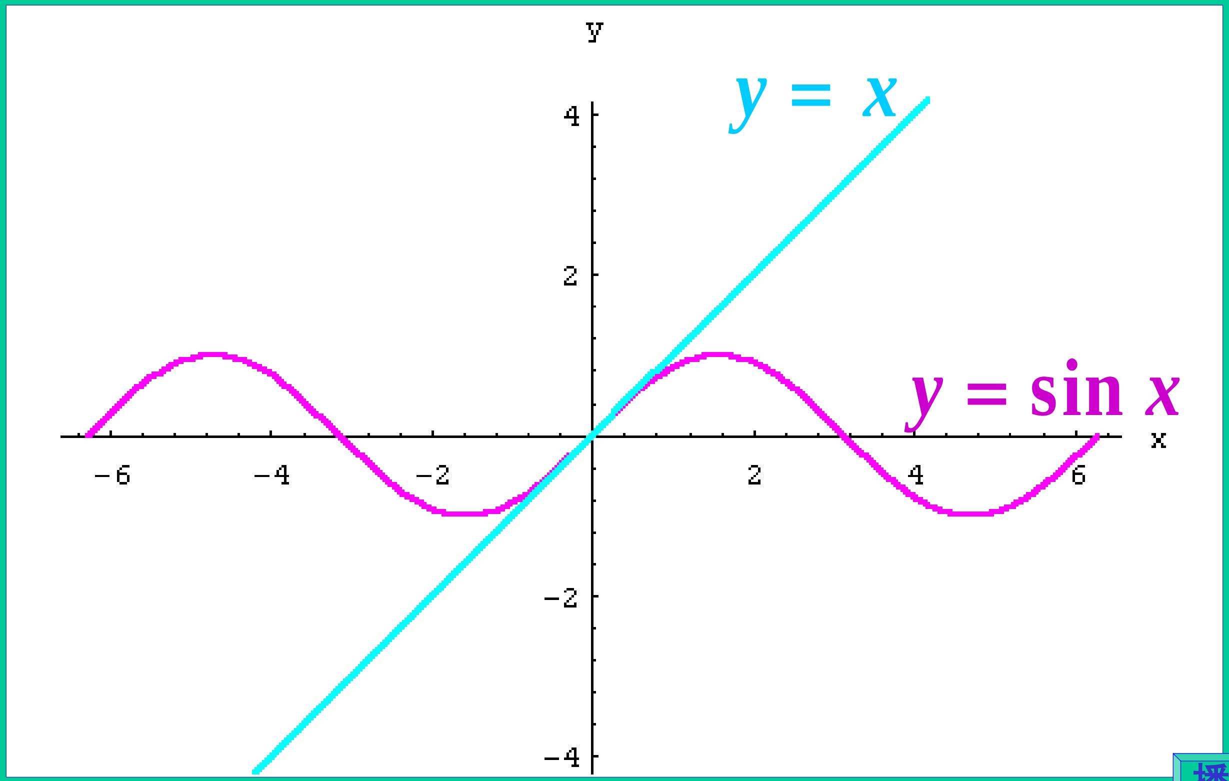
如果我们用更高次的*Maclaurin*多项式来逼近$\sin x$,那就可以使得变量的取值范围有所扩大.

上页 下页 返回

$$\sin x \approx x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

所以,我们可以得到用n次多项式来近似表示正弦函数的近似计算结果,而且可以看到,随着n的增大,近似效果就越来越好,x的取值范围就可以随之而扩大.

Taylor 公式在近似计算中的应用;



上页 下页 返回

4.带Peano型余项的Taylor定理

由微分定义知, $f(x)$在 x_0 处可微,则$x \to x_0$ 时

$$f(x)=f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+o\left(x-x_0\right)\cdots\cdots(*)$$

则若$f^{(n)}\left(x_0\right)$存在,则可将(*)式作拓广:

*Th.*2 若函数$f(x)$在点x_0 处存在 $f^{(n)}\left(x_0\right)$,则当

$x \in U^o\left(x_0\right), x \to x_0$ 时有

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\left(x-x_0\right)^k+o\left(\left(x-x_0\right)^n\right).$$

Peano 型余项$o\left(\left(x-x_0\right)^n\right)$是定性地描述了函数

与Taylor多项式之间的差距.

Th.2 若函数$f(x)$在点x_0处存在$f^{(n)}(x_0)$,则当$x \in U^o(x_0), x \to x_0$时有

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o\left((x-x_0)^n\right).$$

Peano 型余项$o\left((x-x_0)^n\right)$是定性地描述了函数与*Taylor*多项式之间的差距.

证明 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}{(x-x_0)^n}=\cdots=0.$

$Th.2$ 若函数$f(x)$在点x_0处存在 $f^{(n)}(x_0)$,则当 $x \in U^o(x_0), x \to x_0$ 时有

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o\left((x-x_0)^n\right).$$

证明 连续n次使用$L'Hopital$法则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}{(x-x_0)^n}=\cdots$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)-f^{(n)}(x_0)(x-x_0)}{n!(x-x_0)}$$

$$=\frac{1}{n!}\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}-f^{(n)}(x_0)\right]=0.$$

例3.求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{\ln(1+x^3)}$.

解 $x\to 0$时,$\ln(1+x^3)\sim x^3$,

$$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2),\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3),$$

$\therefore e^x\sin x-x(1+x)=$

$$\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)-x(1+x)$$

$=\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$,所以所求极限为$\dfrac{1}{3}$.

例3.(2).求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

解 $(\tan x)'=\sec^2 x,(\tan x)''=2\sec^2 x\tan x,$

$(\tan x)'''=4\sec^2 x\tan^2 x+2\sec^4 x,$

$(\tan x)'\Big|_{x=0}=1,(\tan x)''\Big|_{x=0}=0,(\tan x)'''\Big|_{x=0}=2,$

$\therefore x\to 0$时,$\tan x=x+\dfrac{2}{3!}x^3+o\left(x^3\right),$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right),$$

$\therefore x\to 0$时,$\tan x-\sin x=\dfrac{3}{3!}x^3+o\left(x^3\right),$

所以,所求极限为$\dfrac{1}{2}$.

上页 下页 返回

例4. 我们需要注意到，并不是只要提高 *Taylor* 多项式的次数，就能不断地改进对函数的逼近程度. 以一个著名的例子来说明：

$$函数 f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}, x\neq 0 \\ 0\ ,\ \ x=0 \end{cases}$$

经过一个冗长的计算过程,我们可以知道 $\forall n\in\mathbb{Z}^+, f^{(n)}(0)=0,$

于是函数 $f(x)$ 的 *Maclaurin* 多项式恒等于0,此时，余项永远是函数 $f(x)$ 自身， $\forall n\in\mathbb{Z}^+, R_n(x)\equiv f(x).$

上页 下页 返回

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, x\neq 0 \\ 0\ ,\ \ x=0 \end{cases},$$ 由无穷大量的结果

$x\to+\infty$时,$\ln x \ll x^k \ll a^x \ll x^x\,(k>0,a>1)$知:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}\overset{\frac{1}{x}=t}{=\!=}\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{t^2}}=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t^2}{e^{t^2}}\cdot\frac{1}{t}\right)=0,$$

$$\therefore\ f'(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}, x\neq 0 \\ 0\ ,\ \ x=0 \end{cases},$$

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}\overset{\frac{1}{x}=t}{=\!=}\lim_{t\to\infty}\frac{2t^4}{e^{t^2}}=\lim_{t\to\infty}\frac{(t^2)^2}{e^{t^2}}=0,\cdots$$

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, x\neq 0, \\ 0\ ,\ \ x=0 \end{cases}$$ 经过计算

可以知道,函数$f(x)$在$U(0)$内任意阶导数均存在,且$f^{(n)}(0)=0, \forall n\in\mathbb{Z}^+$,所以函数$f(x)$的任意阶*Maclaurin*多项式恒为零,而$x\in U^o(0)$时,余项$R_n(x)\equiv f(x)$,所以我们不可能用*Maclaurin*多项式近似表示函数本身.

例5.设函数$f(x)$在$[a,b]$上二阶可导,

证明:存在$\xi\in(a,b)$,使得

$$f(a)+f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{1}{4}(b-a)^2 f''(\xi).$$

分析 本题证明的方法挺多,这里首先介绍用$Taylor$中值定理来证明的方法.

只需给出 $f(a), f(b)$在点$\dfrac{a+b}{2}$处的

$Taylor$展开式 .

上页 下页 返回

证明 给出$f(a), f(b)$在点$\dfrac{a+b}{2}$处的Taylor展开式:

$$f(a)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a-b}{2}\right)+\frac{1}{2}f''(\zeta)\left(\frac{a-b}{2}\right)^2,$$

$$f(b)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right)+\frac{1}{2}f''(\eta)\left(\frac{a-b}{2}\right)^2,$$

将两式相加,则

$$f(a)+f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{1}{8}(b-a)^2\left[f''(\zeta)+f''(\eta)\right],$$

对f''引用Darboux定理,则有$\xi\in(a,b)$,使得,

$$f''(\xi)=\frac{1}{2}\left[f''(\zeta)+f''(\eta)\right].$$

证二 设辅助函数$\varphi(x)=f\left(x+\frac{b-a}{2}\right)-f(x)$,

再在$\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$上对函数$\varphi(x)$运用*Lagrange*微分

中值定理,考虑$\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right)-\varphi(a)=\cdots$

$Th.2$ 若函数$f(x)$在点x_0处存在 $f^{(n)}(x_0)$,则当 $x \in U^o(x_0), x \to x_0$ 时有

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o\left((x-x_0)^n\right).$$

推论1. 若函数$f(x)$在点x_0处存在 $f^{(n)}(x_0)$,

$f'(x_0)=f''(x_0)=f^{(n-1)}(x_0)=0, f^{(n)}(x_0)\neq 0,$

n 为偶数,则函数$f(x)$在点x_0处取得极值.

且当$f^{(n)}(x_0)>0$ (<0)时函数在点x_0处取得极小(大)值.

上页 下页 返回

推论1. 若函数$f(x)$在点x_0处存在 $f^{(n)}(x_0)$,

$f'(x_0)=f''(x_0)=f^{(n-1)}(x_0)=0$, $f^{(n)}(x_0)\neq 0$, n 为偶数,

则函数$f(x)$在点x_0处取得极值.且当$f^{(n)}(x_0)>0$ (<0)

时函数在点x_0处取得极小(大)值.

证明 由带*Peano*型余项的*Taylor*展开定理得

$$x\in U^o(x_0),\ f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o\left((x-x_0)^n\right).$$

$$\therefore f(x)=f(x_0)+(x-x_0)^n\left[\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+o(1)\right],$$

n 为偶数,$(x-x_0)^n>0$.

若$f^{(n)}(x_0)>0$,则在$U^o(x_0)$内,$\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+o(1)>0$,

于是,在$U(x_0)$内,$f(x)\geq f(x_0)$,即$f(x_0)=\min\limits_{U(x_0)}f(x)$.

小结

(1).带*Lagrange*型余项的*Taylor*公式在$n=0$ 时就是*Lagrange*中值公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0),(\xi\text{在}x_0\text{与}x\text{之间}).$$

(2).许多一元微分学中涉及高阶导数的问题大多都可以考虑用*Taylor*定理来解决.掌握了*Taylor*定理以后,回过头来看前面的那些理论,似乎一切都在你的掌握之中了,你或许会有一种“会当凌绝顶,一览众山小”的感觉.说“*Taylor*定理是一元微分学的顶峰”并非妄言.

上页 下页 返回