Chap.08 不定积分

§1. 不定积分的概念

O.问题的引入

已知$a'(x)=\dfrac{1}{x}$，试问$a(x)=?$

已知$b'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，试问$b(x)=?$

已知$c'(x)=\cos x+\sin x$，试问$c(x)=?$

已知$d'(x)=\cos 2x$，试问$d(x)=?$

$$\because (\ln x)' = \frac{1}{x} \ (x > 0),$$

$$(\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x} \ (x < 0),$$

$\therefore$已知$a'(x) = \dfrac{1}{x}$，则$a(x) = \ln|x| + C$

(C为任意常数)

上页 下页 返回

同样, $\because (\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$,

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2},$$

$\therefore$ 若 $b'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, 则 $b(x) = \arctan x + C$

或者 $b(x) = -\operatorname{arccot} x + C_1$

$(C, C_1$ 为任意常数$)$

$-\infty < x < +\infty, \arctan x + \operatorname{arccot} x \equiv \dfrac{\pi}{2}$

上页 下页 返回

$$\because \left(\sin x\right)' = \cos x,$$

$$\left(\cos x\right)' = -\sin x,$$

若$c'(x) = \cos x + \sin x,$

则$c(x) = \sin x + C_1 - \cos x + C_2$

$\left(C_1, C_2\text{为任意常数}\right)$

$$\rightarrow c(x) = \sin x - \cos x + C.$$

已知$d'(x)=\cos 2x$，试问$d(x)=?$

$\because (\sin x)' = \cos x,$

但是$(\sin 2x)' = \cos 2x \cdot 2 = 2\cos 2x,$

$\therefore d'(x)=\cos 2x,$

$d(x) \neq \sin 2x + C$ (C为任意常数)

$d(x)=?$ $d(x)=\frac{1}{2}\sin 2x + C$

已知$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$，试问$f(x)=?$

已知$g'(x)=\dfrac{1}{1+2x}$，试问$g(x)=?$

已知$h'(x)=\dfrac{1}{1+e^{x}}$，试问$h(x)=?$

已知$u'(x)=\dfrac{1}{1+\cos 2x}$，试问$u(x)=?$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x},$$知

$$df(x)=\frac{d(1+x)}{1+x}=d\left(\ln\left|1+x\right|+C\right),$$

$$g'(x)=\frac{1}{1+2x},\therefore dg(x)=\frac{1}{1+2x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{d(1+2x)}{1+2x}=d\left(\frac{1}{2}\ln\left|1+2x\right|+C\right),$$

$$h'(x)=\frac{1}{1+e^{x}},h(x)=\ln\left(1+e^{x}\right)\ ?$$

$$?\left(\ln\left(1+e^{x}\right)\right)'=\frac{\left(1+e^{x}\right)'}{1+e^{x}}=\frac{e^{x}}{1+e^{x}},$$

$$u'(x)=\frac{1}{1+\cos 2x},u(x)=?$$

1. 原函数与不定积分

定义1.如果在区间I内可导函数$F(x)$的导函数$f(x)$,即$\forall x \in I$,都有$F'(x)=f(x)$或$dF(x)=f(x)dx$,则称函数$F(x)$为$f(x)$在区间I内的**原函数**($antiderivative$).

例如,$(\sin x)'=\cos x$,$\sin x$是$\cos x$的原函数;

$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}, x>0$,则$\ln x$是$\dfrac{1}{x}$在区间$(0,+\infty)$内的原函数.

原函数存在定理：

如果函数$f(x)$在区间I内连续，那么在区间I内存在可导函数$F(x)$，使得$\forall x \in I$，都有$F'(x)=f(x)$.

简言之，连续函数一定有原函数.

问题：(1).原函数是否唯一？

(2).若不唯一，则它们的关系如何？

例如，$(\sin x)'=\cos x$，

$(\sin x + C)'=\cos x$，其中C为常数.

上页 下页 返回

备注

我们知道,由*Lagrange*微分中值定理

我们可推知:

命题:区间I 内可导函数的导函数要么连续,要么有第二类间断点.

也就是说,可导函数的导函数不可能有第一类间断点.

$\longrightarrow$导函数不一般!

原函数存在定理:

区间I内连续函数必定有原函数.

上页 下页 返回

例 1. 关于原函数.

(1). 函数$F_1(x)=\begin{cases} x\ , & x\le 0 \\ \ln(1+x), & x>0 \end{cases}$ 可导,

$$f_1(x)=F_1'(x)=\begin{cases} 1\ , & x\le 0 \\ \dfrac{1}{1+x}, & x>0 \end{cases},$$

所以$F_1(x)$是$f_1(x)$的原函数 ,函数$f_1(x)$连续 .

(2). 函数$F_2(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x}, & x\ne 0 \\ 0\ , & x=0 \end{cases}$可导,

$$f_2(x)=F_2'(x)=\begin{cases} 2x\cos\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x}, & x\ne 0 \\ 0\ , & x=0 \end{cases},$$

所以$F_2(x)$是$f_2(x)$的原函数 ,$x=0$是函数$f_2(x)$的第二类间断点 .

例 1. 关于原函数.

(3). 函数$D(x)=\begin{cases} 1\ , & x\in\mathbb{Q} \\ 0\ , & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$,每一点都是函数$D(x)$ 的第二类间断点 .根据*Darboux th.*(导函数介值定理)知 ,不存在函数$F_3(x)$使得$F_3'(x)=D(x)$.
所以$D(x)$不存在原函数 .

(4). 函数$H(x)=\begin{cases} 0\ , & x<0 \\ 1\ , & x\geq 0\end{cases}$,$x=0$是函数$H(x)$的第一类间断点 ,所以函数$H(x)$不存在原函数 .

关于原函数的说明：

(1).若$F'(x)=f(x)$,则对于任意常数C,$F(x)+C$都是$f(x)$的原函数.

(2).若$F(x)$,$G(x)$都是$f(x)$的原函数,则$F(x)-G(x)=C$.

证明 $\because \left[F(x)-G(x)\right]'=F'(x)-G'(x)$

$$=f(x)-f(x)=0,$$

$\therefore F(x)-G(x)=C.$

不定积分(indefinite integral)

在区间I内,函数$f(x)$的带有任意常数项的原函数称为$f(x)$在区间I内的不定积分,记为$\int f(x)dx$.

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

积分号 被积函数 被积表达式 积分变量 积分常数

例2.计算(1).$\int x^5 dx$; (2).$\int \frac{1}{1+x^2}dx$.

解 (1). $\because \left(\frac{x^6}{6}\right)' = x^5$, $\therefore \int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C$;

(2). $\because (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$,

$\therefore \int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C$.

例3.设曲线通过点(1,2),且其上任一点处的切线斜率等于这点横坐标的两倍,求此曲线方程.

解 设曲线方程为$y=f(x)$,

据题意知 $\dfrac{dy}{dx}=2x$,

即$f(x)$是$2x$的一个原函数,

$\because \int 2x\,dx = x^2 + C, \therefore f(x) = x^2 + C,$

$\because$曲线过点$(1,2) \Rightarrow C=1,$

$\therefore$曲线方程为$y = x^2 + 1.$

函数$f(x)$的原函数的图形称为$f(x)$的**积分曲线**.显然,求不定积分得到一积分曲线族.

由不定积分的定义,可知

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right]=f(x), d\left[\int f(x)dx\right]=f(x)dx,$$

$$\int F'(x)dx=F(x)+C, \int dF(x)=F(x)+C.$$

结论:微分运算与求不定积分的运算是**互逆**的.

2. 基本积分表

实例 $$\left(\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}\right)' = x^{\mu} \Rightarrow \int x^{\mu}dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C.$$

$$(\mu \neq -1)$$

启示:能否根据求导公式得出积分公式?

结论:既然积分运算和微分运算是互逆的,因此可根据求导公式得出积分公式.

基本积分表(I)☆

$$(1).\int k\,dx = kx + C\ (k\text{为常数});$$

$$(2).\int x^{\mu}dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C\left(\mu \neq -1\right);$$

$$(3).\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C\left(a > 0, a \neq 1\right),$$

特别地$\int e^{x}dx = e^{x} + C;$

我们再一次地感受到e^{x}的可爱!

$$(4).\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$$

说明: $x > 0 \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \ln x + C,$

$$x < 0, [\ln(-x)]' = \frac{1}{-x}(-x)' = \frac{1}{x},$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C,$$

$$\therefore \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

$$(5).\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C$$

$$= -\operatorname{arccot} x + C_1;$$

$$(6).\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$$

$$= -\arccos x + C_1;$$

$$(7).\int \cos x dx = \sin x + C,$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C;$$

上页 下页 返回

$$(8).\int \sec^2 x dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C,$$

$$\int \csc^2 x dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C;$$

$$(9).\int \sec x \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \sec x + C,$$

$$\int \csc x \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = -\csc x + C;$$

例4.求积分$\int\sqrt[4]{\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}\,dx$.

解 $\int\sqrt[4]{\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}\,dx=\int x^{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}}dx=\int x^{\frac{1}{8}}dx$

$$\left(\int x^{\mu}dx=\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C,\mu\neq-1\right)$$

$$=\frac{x^{\frac{1}{8}+1}}{\frac{1}{8}+1}+C=\frac{8}{9}x^{\frac{9}{8}}+C.$$

上页 下页 返回

3. 不定积分的性质——线性性质

(1). $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$

证明 $\because \left[\int f(x)dx \pm \int g(x)dx\right]'$

$= \left[\int f(x)dx\right]' \pm \left[\int g(x)dx\right]' = f(x) \pm g(x),$

$\therefore$ 结论成立.

此性质可推广到有限多个函数之和的情况.

(2). $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$. ($k$为常数, $k \neq 0$)

例5.求积分 $\int\left(\frac{3}{1+x^2}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx.$

解 $\int\left(\frac{3}{1+x^2}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$

$$=3\int\frac{1}{1+x^2}dx-2\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=3\arctan x-2\arcsin x+C$$

例6.求积分 $\int \frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)}dx.$

解 $\int \frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)}dx = \int \frac{x+(1+x^2)}{x(1+x^2)}dx$

$= \int \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{x} \right) dx = \int \frac{1}{1+x^2}dx + \int \frac{1}{x}dx$

$= \arctan x + \ln|x| + C$

例6.(2).求积分$\int\frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx$.

解$\int\frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx=\int\frac{(1+x^2)+x^2}{x^2(1+x^2)}dx$

$=\int\frac{1}{x^2}dx+\int\frac{1}{1+x^2}dx$

$=-\frac{1}{x}+\arctan x+C.$

上页 下页 返回

例7.求积分 $\int \frac{1}{1+\cos 2x}dx.$

解 $\int \frac{1}{1+\cos 2x}dx = \int \frac{1}{2\cos^2 x}dx$

$= \frac{1}{2}\int \sec^2 x dx = \frac{1}{2}\tan x + C$

说明: 以上几例中的被积函数都需要进行恒等变形,才能使用基本积分表.

可以用来检验结果正确与否？

4. 小结

原函数的概念 $f(x)=F'(x)$

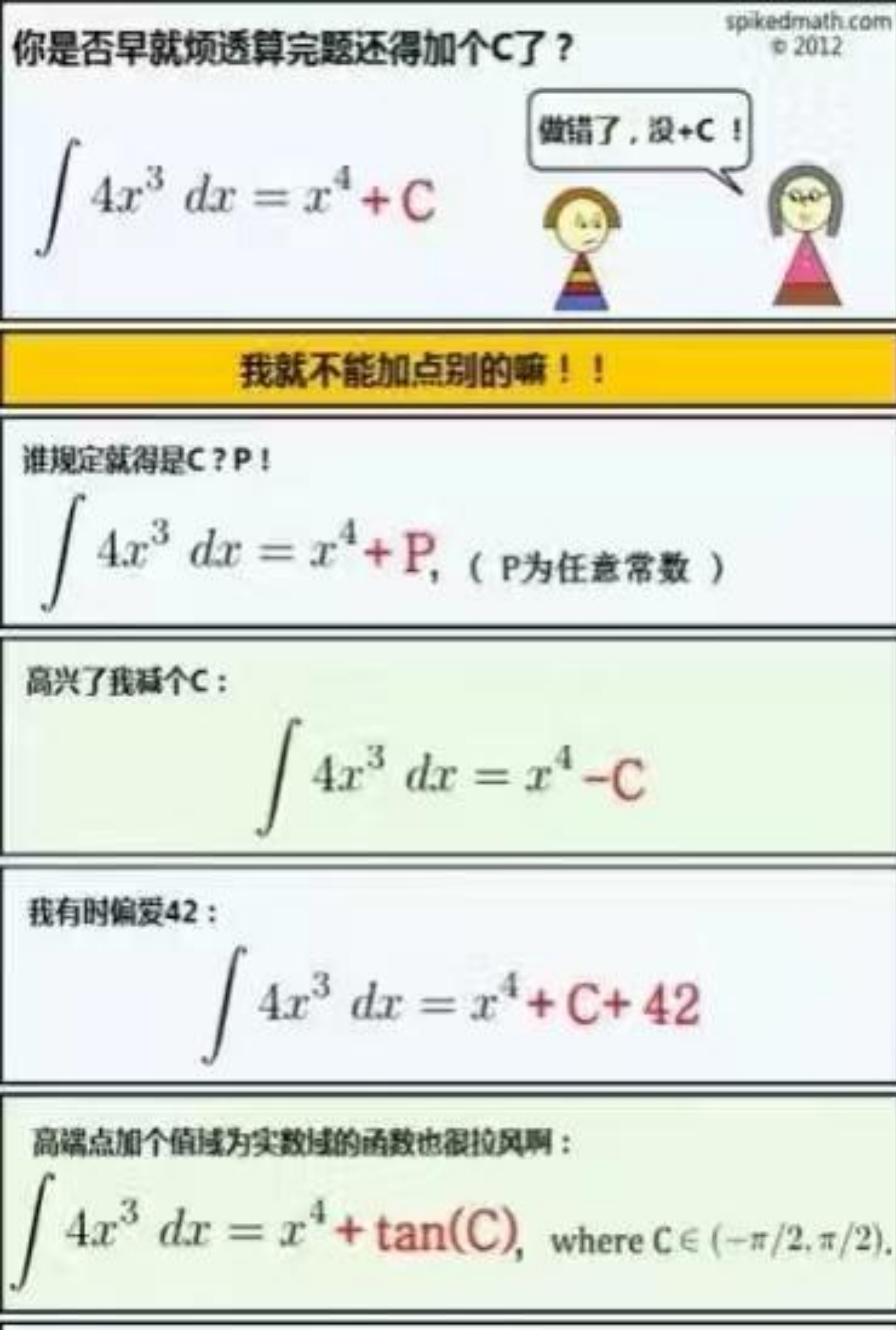
不定积分的概念 $\int f(x)dx=F(x)+C$

基本积分表(1)

求微分与求积分的互逆关系

不定积分的性质

$$\int 4x^3dx = x^4 \quad ?$$



例 8. 试问以下计算是否正确?

设 $f(x)=\begin{cases} 1\ , & x\le 0 \\ \dfrac{1}{1+x}, & x>0 \end{cases}$ 连续,

则 $\int f(x)dx=\begin{cases} \int 1dx\ , & x\le 0 \\ \int \dfrac{dx}{1+x}, & x>0 \end{cases}$

$$=\begin{cases} x+C\ , & x\le 0 \\ \ln(1+x)+C, & x>0 \end{cases}.$$

上页 下页 返回

例 8.(2). 试问以下计算是否正确?

设 $g(x)=\begin{cases} 1\ , & x\le 0 \\ e^x, & x>0 \end{cases}$ 连续,

则 $\int g(x)dx=\begin{cases} \int 1dx\ , & x\le 0 \\ \int e^x dx\ , & x>0 \end{cases}$

$$=\begin{cases} x+C\ , & x\le 0 \\ e^x+C, & x>0 \end{cases}.$$

上页 下页 返回

Exercises

1.计算下列不定积分

(1). $\int \frac{x^2}{1+x^2}dx;$ (2). $\int \frac{2\cdot 3^x - 5\cdot 2^x}{3^x}dx;$

(3). $\int \frac{1+x^4}{1+x^2}dx;$ (4). $\int \cos^2\frac{x}{2}dx;$

(5). $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x}dx;$ (6). $\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx;$

(7). $\int \frac{x^2+\sin^2 x}{x^2+1}\sec^2 x dx.$

2.求证：当$x \neq 0$时，$\arctan x$ 和

$\operatorname{arccot}\dfrac{1}{x}$都是$\dfrac{1}{1+x^2}$的原函数.

3.已知一曲线过点$(e^2,3)$,且任意一点处的切线斜率等于该点处横坐标的倒数,求该曲线的方程.