

2-02 收敛数列的性质

上页

下页

返回

一.收敛数列的性质

1.极限的唯一性

命题3.若 $\{x_n\}$ 收敛,则极限值唯一.

证明 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$,假设 $a \neq b$,不妨设 $a > b$,取 $\varepsilon_0 = \frac{a-b}{2} > 0$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow$ 对于 $\varepsilon_0 > 0, \exists N_1, \forall n > N_1$,有 $|x_n - a| < \varepsilon_0$,

$$\therefore x_n > a - \varepsilon_0 = \frac{a+b}{2},$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b \Rightarrow$ 对于 $\varepsilon_0 > 0, \exists N_2, \forall n > N_2$,有 $|x_n - b| < \varepsilon_0$,

$$\therefore x_n < b + \varepsilon_0 = \frac{a+b}{2},$$

则当 $n > N = \max(N_1, N_2)$ 时,就有 $x_n > \frac{a+b}{2}, x_n < \frac{a+b}{2}$

同时成立,矛盾! $\therefore a = b$.

2.有界性

命题4.若 $\{x_n\}$ 收敛,则 $\{x_n\}$ 有界.

但须注意.有界是数列收敛的必要而不充分的条件,如 $\{(-1)^n\}$ 有界但不收敛.

推论1.无界数列必定发散.

3.不等式性质

命题5.(保号性)若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a > 0$, 则 $\forall r \in (0, a)$,

$\exists n_0 \in \mathbb{Z}^+, \forall n \geq n_0$, 有 $x_n > r$.

证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a > 0, \forall r \in (0, a)$, 对于 $\varepsilon_0 = a - r > 0$,

$\exists n_0 \in \mathbb{Z}^+, \forall n \geq n_0$, 有 $|x_n - a| < \varepsilon_0$,

$\therefore n \geq n_0$, 有 $x_n - a > -\varepsilon_0$ 即 $x_n > a - \varepsilon_0 = r$.

$a < 0$ 的情形有相应的结论, 在此略过不表.

命题5'.(保号性的常用形式)

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a > 0$, 则 $\exists n_0 \in \mathbb{Z}^+, \forall n \geq n_0$, 有 $x_n > 0$.

命题5'.(保号性的常用形式)

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a > 0$, 则 $\exists n_0 \in \mathbb{Z}^+, \forall n \geq n_0$, 有 $x_n > 0$.

推论2.(保号性推论) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 存在, 且对于某 $n_0 \in \mathbb{Z}^+, n \geq n_0$ 时有 $x_n \geq 0$. 则 $a \geq 0$.

(注意, 其中条件改为 $x_n > 0$, 结论也仍为)
 $a \geq 0$ 而不是 $a > 0$.

用反证法据命题5' 立马可以证得.

命题6.(保不等式性/保序性)

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ 均存在, 且有 $a > b$,

则 $\exists n_0 \in \mathbb{Z}^+, \forall n \geq n_0$, 有 $x_n > y_n$.

证明仿照命题5'法易得.

推论3.(保序性推论) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$

均存在, 且对于某 $n_0 \in \mathbb{Z}^+, n \geq n_0$ 时有 $x_n \geq y_n$.

则 $a \geq b$.

例1. 设 $x_n \geq 0$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 求证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$.

证明 由极限保号性命题5'的推论2知 $a \geq 0$.

(1). $a = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n > N,$

$s.t. |x_n - 0| < \varepsilon^2$, 故 $|\sqrt{x_n} - 0| < \varepsilon, \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n} = 0$.

(2). $a > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n > N,$

$s.t. |x_n - a| < \sqrt{a}\varepsilon$, 此时有*

$$|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}| = \frac{|x_n - a|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}} < \frac{|x_n - a|}{\sqrt{a}} < \frac{\sqrt{a}\varepsilon}{\sqrt{a}} = \varepsilon,$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}.$$

注*: (1). $\varepsilon^2, \sqrt{a}\varepsilon$ 仍是任意的、要多小就有多小的数.

(2). 此时有是指仍然要在 $n > N$ 时结论才成立.

一般地有：设 $x_n \geq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 则

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \geq 0$, 且对于任意给定的

$$m \in \mathbb{Z}^+, \text{ 有 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[m]{x_n} = \sqrt[m]{a}.$$

以后, 该结论可以作为一个基本的公式来使用.

二. 数列形式的迫敛性

4. 数列形式的迫敛性定理

定理1. 迫敛性定理 (*Squeeze theorem*)

若数列 x_n, y_n 及 z_n 满足条件: (1). $y_n \leq x_n \leq z_n$ ($n \geq n_0$);
(2). $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$. 则数列 x_n 极限存在, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

迫敛性定理, 两边夹定理或夹逼定理, 有人形象地称之为 *Sandwich Theorem*.

迫敛性定理, 毋宁说是一种方法——间接的方法来给出一个数列的极限. 利用迫敛性定理求极限的关键是构造出 y_n 与 z_n , 并且 y_n 与 z_n 的极限是容易求得的.

证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 > 0, \forall n > N_1, \text{有 } |y_n - a| < \varepsilon,$

$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_2 > 0, \forall n > N_2, \text{有 } |z_n - a| < \varepsilon.$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, $n > N$ 时上述两式同成立.

即 $n > N$ 时 $a - \varepsilon < y_n, z_n < a + \varepsilon,$

\therefore 对于上述 $\varepsilon > 0$ 及 $N, \forall n > N, \text{有}$

$$a - \varepsilon < y_n \leq x_n \leq z_n < a + \varepsilon,$$

即 $|x_n - a| < \varepsilon$ 成立, $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$

上页

下页

返回

例2.求证 : (1). $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$; (2). $a \geq 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

证明 用迫敛性:

(1). 记 $\sqrt[n]{n} = 1 + h_n, h_n > 0 \ (n > 1)$

$$n = (1 + h_n)^n = 1 + nh_n + C_n^2 h_n^2 + \cdots + h_n^n > 1 + C_n^2 h_n^2,$$

$$\text{即 } C_n^2 h_n^2 < n - 1, \therefore 1 < \sqrt[n]{n} = 1 + h_n < 1 + \sqrt{\frac{2}{n}},$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{n}} = 0, \therefore \text{由迫敛性知 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

(2). $a \geq 1$, 当 $n \geq a$ 时有 $1 \leq \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{n}$,

\therefore 由迫敛性知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

上页

下页

返回

例3.求证： $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.(P29/例3)

前面我们做过一个题：设 $n \in \mathbb{Z}^+$,证明：

$$(1). \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3 ; \quad (2). n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n .$$

这里,我们就需要使用这个结论.

证明 $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, 由 $n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n$ 可得

$$0 < \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} < \frac{3}{n},$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} = 0$, 由迫敛性知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.

上页

下页

返回

思考练习 1.

1.试确定下列数列的极限：

$$(1). \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 1} - n \right);$$

$$(2). \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + 2^n + 3^n};$$

$$(3)^*. \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left(\pi \sqrt{n^2 + 1} \right);$$

$$(4)^*. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{3n-1} \right)^n.$$

1.(2).解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + 2^n + 3^n},$

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+, 3^n < 1 + 2^n + 3^n < 3 \cdot 3^n,$$

$$\therefore 3 < \sqrt[n]{1 + 2^n + 3^n} < 3 \cdot \sqrt[n]{3}, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3} = 1,$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + 2^n + 3^n} = 3.$$

$$1.(3)^* . \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2 + 1}\right);$$

$$\text{解 } \sin\left(\pi\sqrt{n^2 + 1} - n\pi\right) = (-1)^n \sin\left(\pi\sqrt{n^2 + 1}\right),$$

$$0 \leq \left| \sin\left(\pi\sqrt{n^2 + 1}\right) \right| = \left| \sin\left(\pi\sqrt{n^2 + 1} - n\pi\right) \right|$$

$$\leq \left| \pi\left(\sqrt{n^2 + 1} - n\right) \right| = \frac{\pi}{\sqrt{n^2 + 1} + n} < \frac{\pi}{n},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sin\left(\pi\sqrt{n^2 + 1}\right) \right| = 0 \Rightarrow \text{原} = 0.$$

$$1.(4)^* . \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{3n-1} \right)^n .$$

$$\text{分析 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{3n-1} = \frac{1}{3}, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} \right)^n = 0.$$

我们猜测该极限为0,用 *Squeeze th.* 处理.

$$\text{解 } n \in \mathbb{Z}^+, 3n-1 < 3(n+2),$$

$$n \geq 5, 2(n+2) \leq 3n-1,$$

$$\therefore n \geq 5 \text{ 时}, \frac{1}{3} < \frac{n+2}{3n-1} \leq \frac{1}{2},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n = 0 \Rightarrow \text{原} = 0.$$

上页

下页

返回

三. 数列极限的四则运算法则

由数列极限的定义,我们得到了诸如

$$(1). \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0, \alpha > 0; \quad (2). |q| < 1, \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0;$$

$$(3). a > 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1;$$

$$(4). \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0; \quad (5). \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0, (a > 1);$$

$$(6). x_n \geq 0, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \text{ 则 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[m]{x_n} = \sqrt[m]{a} \quad (m \in \mathbb{Z}^+)$$

这样的一些基本的结果,我们就可以处理表达式较为复杂的数列的极限问题.

回顾：

命题1.(1). $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - a) = 0$.

(2).无穷小列与有界数列的乘积仍为无穷小列.

(3).有限多个无穷小列的和仍为无穷小列.

命题2.在 $n \rightarrow \infty$ 时,无穷大列的倒数为无穷小列;不等于0的无穷小列的倒数为无穷大列.

——→以后,我们可以将所有的极限问题都转化为无穷小的问题.

上页

下页

返回

5.数列极限的四则运算法则：

定理2.(数列极限的四则运算法则)

设 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 均收敛, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b,$

则 $\{x_n \pm y_n\}, \{x_n \cdot y_n\}, \left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\} (b \neq 0)$ 均收敛,

且有(1). $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$;

(2). $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b$;

(3). $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$, 其中 $b \neq 0$.

结论(1),(2)可以推广至有限多个的情形.

定理2.(数列极限的四则运算法则)

设 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 均收敛, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b,$

则 $\{x_n \pm y_n\}, \{x_n \cdot y_n\}, \left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\} (b \neq 0)$ 均收敛,

且有(1). $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$;

(2). $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b$; (3). $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$, 其中 $b \neq 0$.

对于(3). $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} (b \neq 0)$ 的证明予以关注,

证明用到了极限的保号性.

例4.求极限

$$(1). \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2-3n^2)^2 (n^4+5)}{(3n^2-1)(2n^3+3)^2};$$

$$(2). \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1} \right);$$

$$(3). \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{a^n+1}, (a \neq -1).$$

解 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ 知

$$(1). \text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{n^2} - 3\right)^2 \left(1 + \frac{5}{n^4}\right)}{\left(3 - \frac{1}{n^2}\right) \left(2 + \frac{3}{n^3}\right)^2} = \frac{(-3)^2 \cdot 1}{3 \cdot 2^2} = \frac{3}{4};$$

例4.求极限

$$(2).\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1} \right);$$

$$(3).\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{a^n + 1}, (a \neq -1).$$

$$\begin{aligned} \text{解 (2).原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 - 1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} = \frac{2}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = 1 ; \end{aligned}$$

例4.求极限

$$(3).\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{a^n + 1}, (a \neq -1).$$

解 (3).参数问题必定要讨论!

$$|a| < 1 \text{ 时原式} = \frac{0}{0+1} = 0 ;$$

$$|a| > 1 \text{ 时原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{a}\right)^n} = \frac{1}{1+0} = 1 ;$$

$$a = 1 \text{ 时原式} = \frac{1}{2} .$$

例5.若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 存在, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 不存在. 试问 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n)$

是否存在? $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n)$ 是否存在?

又若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \neq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n)$ 是否存在?

解 (1). $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n)$ 一定不存在,

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n)$ 存在性不能确定.

$$\left[\begin{array}{l} (1). x_n = \frac{1}{n}, y_n = (-1)^n, \lim_{n \rightarrow \infty} \left[(-1)^n \cdot \frac{1}{n} \right] = 0; \\ (2). x_n = 1, y_n = (-1)^n, \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \text{ 不存在.} \end{array} \right]$$

例5.若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \neq 0$ 存在, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 不存在.

试问 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n)$ 是否存在?

解 (2).若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \neq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 不存在.

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n)$ 一定不存在.

如若 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n)$ 存在, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \neq 0$,
则 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x_n y_n)}{x_n}$ 存在. 矛盾

例6.(1).求极限 $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{n^2 + 2} + \cdots + \frac{1}{n^2 + n} \right)$.

分析 倘若我们由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2 + k} = 0, k = 1, 2, \cdots, n$,

由极限的加法运算法则得

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2 + 1} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2 + 2} + \cdots + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2 + n} = 0.$$

尽管结果是对的,但解题过程却是错的.

——→极限的加法运算法则只在有限多个数列相加时才适用.

例6.(1).求极限 $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{n^2 + 2} + \cdots + \frac{1}{n^2 + n} \right)$.

解 考虑用迫敛性: 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n^2}{1/(n^2 + k)} = 1$,

在 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{n^2 + 1}, \dots, \frac{1}{n^2 + n}$ 每一个都与 $\frac{1}{n^2}$ 相当,

所以我们作放缩就有方向了.

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, n^2 < n^2 + k \leq n^2 + n,$$

$$\therefore \frac{n}{n^2 + n} < \frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{n^2 + 2} + \cdots + \frac{1}{n^2 + n} < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, \therefore L = 0.$$

上页

下页

返回

例6.(2).由前面的讨论,我们知道 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1} = 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = 1 , \dots\dots, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n-1} = 1 , \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 .$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{1}{\sqrt[n]{1}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{2}} \cdot \dots\dots \frac{1}{\sqrt[n]{n-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}}, \text{不过}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{1}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{2}} \cdot \dots\dots \frac{1}{\sqrt[n]{n-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \right)$$

$$\neq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{1}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2}} \cdot \dots\dots \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n-1}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$$

——→提醒:极限的乘法运算法则只在有限多个数列相乘时才适用.

四.数列子列的收敛性

定义4. 在数列 $\{x_n\}$ 中任意抽取无限多项并保持这些项在原数列 $\{x_n\}$ 中的先后次序,这样得到的一个数列称为原数列 $\{x_n\}$ 的子数列(或子列).

例如 $x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots x_n, \cdots$

\Downarrow

$x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}, \cdots$

注意: 在子数列 $\{x_{n_k}\}$ 中一般项 x_{n_k} 是第 k 项, 而 x_{n_k} 在原数列 $\{x_n\}$ 中却是第 n_k 项, 显然, $n_k \geq k$.

定理3. 数列 $\{x_n\}$ 收敛 \Leftrightarrow 数列 $\{x_n\}$ 的任一子列 $\{x_{n_k}\}$ 都收敛.

证明 \Rightarrow 设数列 $\{x_{n_k}\}$ 是数列 $\{x_n\}$ 的任一子数列,

$$\because \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a,$$

$$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n > N, \text{有 } |x_n - a| < \varepsilon.$$

取 $K = N$, 则当 $k > K$ 时, $n_k > n_K = n_N \geq N$,

$$\therefore |x_{n_k} - a| < \varepsilon, \quad \therefore \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a.$$

\Leftarrow 数列 $\{x_n\}$ 是 $\{x_n\}$ 其本身的一个特殊子列, 结论是显然的.

一个特别常用的有关子列的命题：

例7. 求证：对于数列 $\{x_n\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在 \Leftrightarrow

$\{x_{2n-1}\}$ 与 $\{x_{2n}\}$ 都收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n}$.

证 \Rightarrow 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$,

$\forall n > N$, 有 $|x_n - a| < \varepsilon$.

由于 $2n > 2n-1 > n$,

则 $|x_{2n-1} - a| < \varepsilon, |x_{2n} - a| < \varepsilon$.

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n-1} = a, \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = a$.

⇐ 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n-1} = a, \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = a$, 则

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1, \forall 2n-1 > N_1,$

有 $|x_{2n-1} - a| < \varepsilon$;

对于上述 $\varepsilon > 0, \exists N_2, \forall 2n > N_2,$

有 $|x_{2n} - a| < \varepsilon$.

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则 $\forall m > N,$

有 $|x_m - a| < \varepsilon \therefore \lim_{m \rightarrow \infty} x_m = a$.

常用的有关子列的结论：

(1). 定理3. 数列 $\{x_n\}$ 收敛 \Leftrightarrow 数列 $\{x_n\}$ 的任一子列 $\{x_{n_k}\}$ 都收敛.

(2). 对于数列 $\{x_n\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在 $\Leftrightarrow \{x_{2n-1}\}$ 与 $\{x_{2n}\}$ 都收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n}$.

(3). 对于数列 $\{x_n\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在 $\Leftrightarrow \{x_{3n-2}\}, \{x_{3n-1}\}$ 与 $\{x_{3n}\}$ 都收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n}$.

(4). 数列 $\{x_n\}$ 收敛 \Leftrightarrow 数列 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{2n-1}\}$, $\{x_{2n}\}, \{x_{3n}\}$ 都收敛.

上页

下页

返回

定理3. 数列 $\{x_n\}$ 收敛 \Leftrightarrow

数列 $\{x_n\}$ 的任一子列 $\{x_{n_k}\}$ 都收敛.

定理3给出了数列收敛性的重要判别方法,但更主要的是给出了判断数列发散的有力工具.

→ 若一个数列有一个子列发散,则该数列发散.

→ 若一个数列有两个不同子列都收敛,但它们的极限值不等,则该数列发散.

例8.判断数列的敛散性.

(1). $\{(-1)^n\}$; (2). $\left\{\sin \frac{n\pi}{4}\right\}$; (3)*. $\{\sin n\}$.

定理3. 数列 $\{x_n\}$ 收敛 \Leftrightarrow

数列 $\{x_n\}$ 的任一子列 $\{x_{n_k}\}$ 都收敛.

—— \rightarrow 对于数列 $\{x_n\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在 $\Leftrightarrow \{x_{2n-1}\}$

与 $\{x_{2n}\}$ 都收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n}$.

回顾 P24/例8, 便知说的就是这么一回事.

P24/例8. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$. 构造数列 $\{z_n\}$ 为

$$x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n, \dots$$

求证: 数列 $\{z_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow a = b$.

上页

下页

返回

思考练习 2.

1.试确定下列数列的极限：

$$(1). \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right);$$

$$(2). \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1^n + 2^n + \cdots + 2021^n\right)^{\frac{1}{n}};$$

$$(3). \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n + n} \right);$$

$$(4)^*. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)(1+a^3)\cdots(1+a^n)}, a > 0.$$

$$(4)^* . \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)(1+a^3)\cdots(1+a^n)}, a > 0.$$

——→ 参数问题必定要讨论! 还要使用迫敛性.

解 (i). $0 < a < 1$ 时, $0 < \frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)} < a^n,$

(ii). $a > 1$ 时, $0 < \frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)} < \frac{a^n}{a^{n-1} \cdot a^n} = \frac{1}{a^{n-1}},$

(iii). $a = 1$ 时, $\frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)} = \frac{1}{2^n}.$

由迫敛性知 $\forall a > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)(1+a^3)\cdots(1+a^n)} = 0.$



上页

下页

返回