§6.2集合之间的运算

- 并集、交集
- 相对补集、对称差、绝对补
- 广义并集、广义交集

并集(union)

- 并集: $A \cup B = \{ x \mid (x \in A) \vee (x \in B) \}$

  $x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B)$

- 初级并:

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \{x \mid \exists i (1 \le i \le n \wedge x \in A_i)\}$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots$$

并集(举例)

- 例1: 设A_n={x∈R|n-1≤x≤n},n=1,2,…,10,则

$$\bigcup_{i=1}^{10} A_i = \{x \in R \mid 0 \le x \le 10\} = [0,10]$$

- 例2: 设A_n={x∈R|0≤x≤1/n},n=1,2,…,则

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{x \in R \mid 0 \le x \le 1\} = [0,1]$$

并集的性质

定理 设集合$A\subseteq C, B\subseteq D$,则$(A\cup B)\subseteq(C\cup D)$

证明 对任意的x，若$x\in A\cup B\Leftrightarrow x\in A\vee x\in B$

$\Rightarrow x\in C\vee x\in D$ (由于$A\subseteq C, B\subseteq D$)

$\Leftrightarrow x\in C\cup D$

由集合的包含关系的定义可得$(A\cup B)\subseteq(C\cup D)$

交集(intersection)

- 交集:　$A \cap B = \{ x \mid (x \in A) \wedge (x \in B) \}$

  $x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B)$

- 初级交:

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \{x \mid \forall i (1 \le i \le n \to x \in A_i)\}$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots$$

交集(举例)

- 例1: 设$A_n=\{x\in R|n-1\leq x\leq n\}$,n=1,2,…,10,则

$$\bigcap_{i=1}^{10} A_i = \varnothing$$

- 例2: 设$A_n=\{x\in R|0\leq x\leq 1/n\}$,n=1,2,…,则

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{0\}$$

交集的性质

定理 设集合$A \subseteq B$,则$(A \cap C) \subseteq (B \cap C)$

证明 对任意的x，若

$x \in A \cap C$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in C$

$\Rightarrow x \in B \wedge x \in C$ (由于$A \subseteq B$)

$\Leftrightarrow x \in B \cap C$

由集合的包含的定义可知 $(A \cap C) \subseteq (B \cap C)$

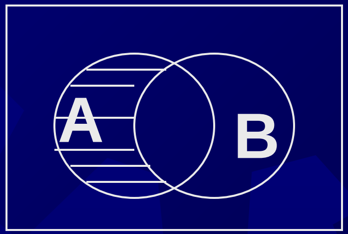
不相交(disjoint)

- 不相交： $A\cap B=\varnothing$
- 互不相交：设$A_1,A_2,\ldots$是可数多个集合，若对于任意的$i\neq j$, 都有$A_i\cap A_j=\varnothing$, 则说它们互不相交
- 例: 设 $A_n=\{x\in R|n-1<x<n\}$, $n=1,2,\ldots,10$, 则 $A_1,A_2,\ldots$是不相交的

相对补集(set difference)

- 相对补集: 属于A而不属于B的全体元素, 称为B对A的相对补集, 记作A-B

$$A\text{-}B = \{ x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B) \}$$



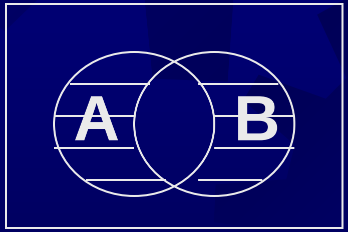
A-B

对称差(symmetric difference)

- 对称差: 属于A而不属于B, 或属于B而不属于A的全体元素, 称为A与B的对称差, 记作$A \oplus B$

$$A \oplus B=\{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\}$$

- $A \oplus B=(A-B) \cup (B-A)=(A \cup B)-(A \cap B)$



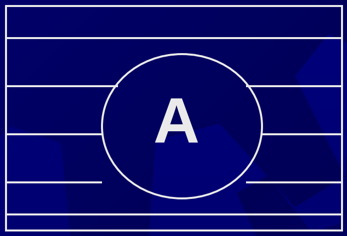
A⊕B

绝对补(complement)

- 绝对补：$\sim A = E - A$, E是全集, $A \subseteq E$

$$\sim A = \{x \mid (x \in E \wedge x \notin A)\}$$

$$\sim A = \{x \in E \mid x \notin A)\}$$



~A

相对补、对称差、补(举例)

- 例: 设A=$\{x\in R|0\le x<2\}$, A=$\{x\in R|1\le x<3\}$, 则

$$A-B=\{x\in R|0\le x<1\}=[0,1)$$

$$B-A=\{x\in R|2\le x<3\}=[2,3)$$

$$A\oplus B=\{x\in R|(0\le x<1)\vee(2\le x<3)\}=[0,1)\cup[2,3)$$

广义并集(big union)

- 广义并: 设$\mathcal{A}$是集族, $\mathcal{A}$中所有集合的元素的全体, 称为$\mathcal{A}$的广义并, 记作$\cup\mathcal{A}$.

$$\cup\mathcal{A} = \{ x \mid \exists z(x\in z \wedge z\in\mathcal{A}) \}$$

- 当是以S为指标集的集族时

$$\cup\mathcal{A} = \cup\{A_\alpha|\alpha\in S\} = \bigcup_{\alpha\in S} A_\alpha$$

- 例: 设 $\mathcal{A}=\{\{a,b\},\{c,d\},\{d,e,f\}\}$, 则

$$\cup\mathcal{A}=\{a,b,c,d,e,f\}$$

广义交集(big intersection)

- 广义交: 设$\mathcal{A}$是集族, $\mathcal{A}$中所有集合的公共元素的全体, 称为$\mathcal{A}$的广义交, 记作$\cap\mathcal{A}$.

$$\cap\mathcal{A} = \{ x \mid \forall z(z\in\mathcal{A}\to x\in z) \}$$

- 当是以S为指标集的集族时

$$\cap\mathcal{A} = \cap\{A_\alpha \mid \alpha\in S\} = \bigcap_{\alpha\in S} A_\alpha$$

- 例: 设 $\mathcal{A}$={{1,2,3},{1,a,b},{1,6,7}}, 则

$$\cap\mathcal{A}=\{1\}$$

广义交、广义并(举例)

- 设 $\mathcal{A}_1=\{a,b,\{c,d\}\}$, $\mathcal{A}_2=\{\{a,b\}\}$, $\mathcal{A}_3=\{a\}$, $\mathcal{A}_4=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$, $\mathcal{A}_5=a(a\neq\varnothing)$, $\mathcal{A}_6=\varnothing$, 则

$\cup\mathcal{A}_1= a\cup b\cup\{c,d\}$, $\cap\mathcal{A}_1= a\cap b\cap\{c,d\}$,

$\cup\mathcal{A}_2=\{a,b\}$, $\cap\mathcal{A}_2=\{a,b\}$,

$\cup\mathcal{A}_3=a$, $\cap\mathcal{A}_3=a$

$\cup\mathcal{A}_4=\varnothing\cup\{\varnothing\}=\{\varnothing\}$, $\cap\mathcal{A}_4=\varnothing\cap\{\varnothing\}=\varnothing$,

$\cup\mathcal{A}_5= \cup a$, $\cap\mathcal{A}_5= \cap a$

$\cup\mathcal{A}_6=\varnothing$, $\cap\mathcal{A}_6=E$

例 设 $A=\{\{a,b,c\},\{a,c,d\},\{a,e,f\}\}$

$B=\{\{a\}\}$

$C=\{a,\{c,d\}\}$

则 $\cup A=\{a,b,c,d,e,f\}$

$\cup B=\{a\}$

$\cup C=a\cup\{c,d\}$

$\cup\varnothing=\varnothing$

$\cap A=\{a\}$

$\cap B=\{a\}$

$\cap C=a\cap\{c,d\}$

广义并与广义交的说明

- 若A＝{A_1,A_2,…,A_n}，则∪A＝$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$
- 若A＝{A_1,A_2,…,A_n}，则∩A＝$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$
- 在后面的叙述中，若只说并或交，则这都是指集合的初级并或初级交；如果在并或交前边冠以“广义”两个字，则指集合的广义并或广义交。
- 为了使得集合表达式更为简洁，我们对集合运算的优先顺序做如下规定：
  - 称广义并、广义交、幂集、绝对补运算为一类运算
  - 并、交、相对补、对称差运算为二类运算。
  - 一类运算优先于二类运算
  - 一类运算之间由右向左顺序进行
  - 二类运算之间由括号决定先后顺序。

例 设 A＝{{a},{a,b}}

计算 $\cup\cup A$，$\cap\cap A$，$\cap\cup A\cup(\cup\cup A-\cup\cap A)$

解答 $\cup A=\{a,b\}$

$\cap A=\{a\}$

$\cup\cup A=a\cup b$

$\cap\cap A=a$

$\cap\cup A\cup(\cup\cup A-\cup\cap A)$

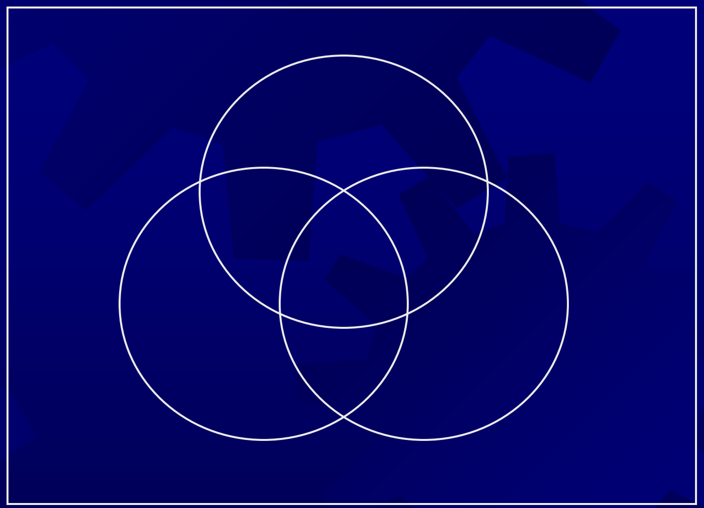
$=(a\cap b)\cup(a\cup b-a)$

$=(a\cap b)\cup(b-a)$

$=b$

文氏图(Venn diagram)

- 文氏图: 平面上的n个圆(或椭圆),使得任何可能的相交部分, 都是非空的和连通的
- John Venn, 1834~1923
- 例:

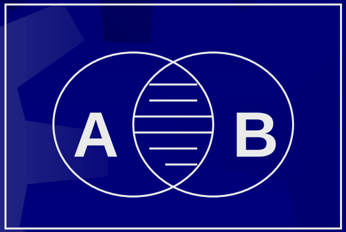


文氏图(Venn Diagram)

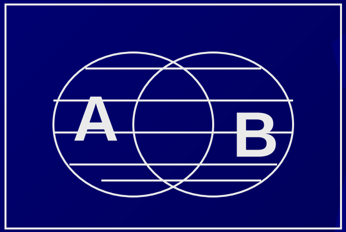
- 集合之间的关系和运算可以用文氏图给予形象的描述。
- 文氏图的构造方法如下：
  - 画一个大矩形表示全集E(有时为简单起见可将全集省略)。
  - 在矩形内画一些圆(或任何其它的适当的闭曲线)，用圆的内部表示集合。
  - 不同的圆代表不同的集合。如果没有关于集合不交的说明，任何两个圆彼此相交。
  - 图中阴影的区域表示新组成的集合。
  - 可以用实心点代表集合中的元素。

文氏图(应用)

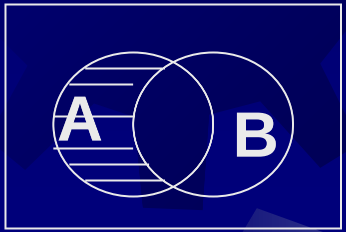
- 文氏图可表示集合运算(结果用阴影表示)



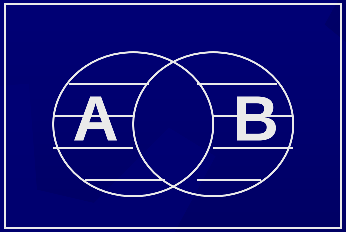
$A \cap B$



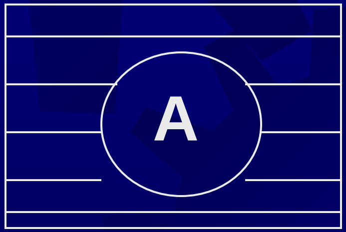
$A \cup B$



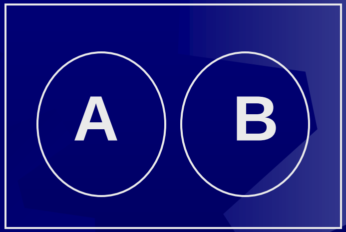
$A-B$



$A \oplus B$



$\sim A$



$A \cap B = \varnothing$