§2 牛顿—莱布尼茨公式

一、问题的提出

二、牛顿—莱布尼茨公式

三# 、函数的一致连续性

上页 下页 返回

一、问题的提出

通过前面的例子可以看到，直接由定义计算定积分——求 ***Riemann*** 和的极限，一般是很困难的。

下面我们通过对：变速直线运动的路程的计算问题引入

牛顿—莱布尼茨公式

上页 下页 返回

变速直线运动中位置函数与速度(速率)函数的联系

设某物体作直线运动，已知速度$v=v(t)$是时间间隔$[T_1,T_2]$上t的一个连续函数，且$v(t)\geq 0$，求物体在这段时间内所经过的路程.

变速直线运动中路程为 $\int_{T_1}^{T_2} v(t)dt$

另一方面这段路程可表示为 $s(T_2)-s(T_1)$

$\therefore \int_{T_1}^{T_2} v(t)dt = s(T_2)-s(T_1)$. 其中 $s'(t)=v(t)$.

并且我们看到，如果将时间段$[T_1,T_2]$任意做一个分割，$T=\{\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_n\},\Delta_i=[t_{i-1},t_i]$

$$\therefore s(T_2)-s(T_1)=\sum_{i=1}^{n}[s(t_i)-s(t_{i-1})]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}s'(\eta_i)\Delta t_i=\sum_{i=1}^{n}v(\eta_i)\Delta t_i,\ \eta_i\in\Delta_i=[t_{i-1},t_i]$$

如果我们再考虑$\int_{T_1}^{T_2}v(t)dt$的 ***Riemann*** 和$\sum_{i=1}^{n}v(\xi_i)\Delta t_i$，（其中$\xi_i\in\Delta_i=[t_{i-1},t_i]$任意取得，）可以注意到$\sum_{i=1}^{n}v(\xi_i)\Delta t_i$和$\sum_{i=1}^{n}v(\eta_i)\Delta t_i$之间能十分接近。

可以看到，速度$v=v(t)$是$[T_1,T_2]$上 的连续函数，且$v(t)\geq 0$，$s'(t)=v(t)$，$s(t)$是$v(t)$的原函数，则物体在这段时间内所经过的路程为

$$\int_{T_1}^{T_2} v(t)dt = s(T_2)-s(T_1)$$

那么，现在的问题是：如果剔除问题的物理意义，上述结论是否仍然成立？也就是说，一般而言，如果函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，$F'(x)=f(x)$，即$F(x)$是$f(x)$在区间$[a,b]$上的一个原函数，是否必定有下述结论成立？$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$

二、牛顿—莱布尼茨公式

定理9.1 如果函数$F(x)$是连续函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的一个原函数，即 $F'(x)=f(x), x\in[a,b]$，则函数$f(x)$在区间$[a,b]$上可积，并且

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)，\text{记为} \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b .$$

证明 由定积分的定义，$\forall\varepsilon>0$，要证明$\exists\delta>0$，

$$\forall\|T\|<\delta,\ s.t.\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i-[F(b)-F(a)]\right|<\varepsilon .$$

上页 下页 返回

对于区间**[*a*,*b*]**的任意一个分割$T=\{\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_n\}$，在小区间$\Delta_i=[x_{i-1},x_i]$上对函数$F(x)$使用 ***Lagrange*** 微分中值定理，则存在$\eta_i\in(x_{i-1},x_i),i=1,2,\cdots,n,$ 使得

$$F(b)-F(a)=\sum_{i=1}^{n}\left[F(x_i)-F(x_{i-1})\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}F'(\eta_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}f(\eta_i)\Delta x_i$$

而对于上述对区间**[*a*,*b*]**的分割$T=\{\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_n\}$，任取$\xi_i\in\Delta_i=[x_{i-1},x_i]$，作函数 ***f (x)***在区间**[*a*,*b*]** 上的 ***Riemann*** 和 $\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ ，

上页 下页 返回

考察$\sum_{i=1}^{n}F'(\eta_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}f(\eta_i)\Delta x_i$与$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$之间的差别，

$$\left|\sum_{i=1}^{n}f(\eta_i)\Delta x_i-\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\right|=\left|\sum_{i=1}^{n}[f(\eta_i)-f(\xi_i)]\Delta x_i\right|$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}\left|f(\eta_i)-f(\xi_i)\right|\Delta x_i$$

在此，可以注意到，由于函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，

根据Cantor定理可知，函数$f(x)$在$[a,b]$上一致连续，

因此 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\ \forall x'$、$x''\in[a,b],|x'-x''|<\delta,$

$$\exists\left|f(x')-f(x'')\right|<\frac{\varepsilon}{b-a},$$

上页 下页 返回

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,\ \forall x'、x'' \in [a,b], |x' - x''| < \delta,\ \exists |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a},$$

$$\therefore \forall \|T\| = \max_i \{\Delta x_i\} < \delta,\ \forall \xi_i \in \Delta_i = [x_{i-1}, x_i], |\xi_i - \eta_i| < \delta,$$

$$|f(\eta_i) - f(\xi_i)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \Rightarrow \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - [F(b) - F(a)]\right|$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n} [f(\eta_i) - f(\xi_i)]\Delta x_i\right| \le \sum_{i=1}^{n} |f(\eta_i) - f(\xi_i)| \Delta x_i$$

$$< \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a} \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \varepsilon\ .$$

这就证明了定理的结论。

牛顿—莱布尼茨公式

定理 9.1 说明了闭区间上的连续函数是*Riemann*可积的。

牛顿—莱布尼茨公式

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = \left[F(x)\right]_a^b$$

牛顿—莱布尼茨公式表明：

一个连续函数在区间$[a,b]$上的定积分等于它的任意一个原函数在区间$[a,b]$上的增量.

求定积分问题转化为求原函数的问题.

注 意 当$a > b$时，$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$仍成立.

上页 下页 返回

例1. 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos x+\sin x-1)dx.$

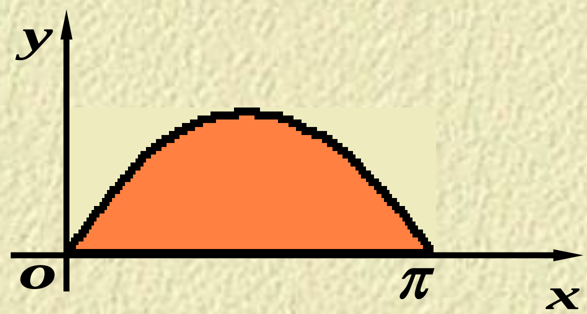
解 原式 $=\left[2\sin x-\cos x-x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=3-\dfrac{\pi}{2}.$

例 1(2). 计算曲线 $y=\sin x$ 在 $[0,\pi]$ 上与 x 轴所围成的平面图形的面积.

解 面积 $A=\int_0^{\pi}\sin x dx$

$=\left[-\cos x\right]_0^{\pi}$

$=2.$



例1.计算积分：(3). $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} dx$;

解 (3).当 $x < 0$ 时, $\ln|x|$ 是 $\frac{1}{x}$

的一个原函数,

$$\therefore \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} dx = \left[\ln|x|\right]_{-2}^{-1}$$

$$= \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2.$$

上页 下页 返回

例1.计算积分：(4). $\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx \ (a>0)$;

解(4).令 $x=a\sin t$, $dx=a\cos t\,dt,\ t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int\left|a\cos t\right|\cdot a\cos t\,dt$$

$$=a^2\int\cos^2 t\,dt=\frac{1}{2}a^2\int(1+\cos 2t)\,dt$$

$$=\frac{1}{2}a^2\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C=\frac{1}{2}a^2 t+\frac{1}{2}a^2\sin t\cos t+C$$

$$=\frac{1}{2}a^2\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

上页 下页 返回

计算积分:(4).$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx\ (a>0)$;

由$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{1}{2}a^2\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C$

可得

$$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx=\left(\frac{1}{2}a^2\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a}$$

$$=\frac{1}{2}a^2\left[\arcsin 1-\arcsin(-1)\right]=\frac{1}{2}\pi a^2.$$

我们这就是用积分来推导半圆的面积,此正是圆心在原点、半径为a的上半圆的面积.

例1.计算积分：(5). $\int_0^{1/2} \arcsin x dx$.

解(5).令 $u' = 1, v = \arcsin x$,

$$\therefore \int \arcsin x dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= x \arcsin x - \int \frac{-\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)'}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C,$$

$$\therefore \int_0^{1/2} \arcsin x dx = \left(x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} \right)\Big|_0^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1.$$

例2.计算积分：(1). $\int_{-\sqrt{3}}^{-1} \frac{1}{1+x^2}dx$;

解(1).在 $(-\infty,+\infty)$ 上,

$\arctan x$ 是 $\frac{1}{1+x^2}$ 的一个原函数,

$$\therefore \int_{-\sqrt{3}}^{-1} \frac{1}{1+x^2}dx = [\arctan x]_{-\sqrt{3}}^{-1}$$

$$= \arctan(-1) - \arctan\left(-\sqrt{3}\right)$$

$$= -\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{12}.$$

$$\because \left(-\arctan\frac{1}{x}\right)' = -\frac{-1/x^2}{1+(1/x)^2} = \frac{1}{1+x^2}, x \neq 0,$$

$\therefore -\arctan\dfrac{1}{x}$是$\dfrac{1}{1+x^2}$在$(-\infty,0)$上的一个原函数.

$$\therefore \int_{-\sqrt{3}}^{-1} \frac{1}{1+x^2}dx = \left[-\arctan\frac{1}{x}\right]_{-\sqrt{3}}^{-1}$$

$$= -\left[\arctan(-1) - \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}.$$

例2.计算积分：(2). $\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx.$

解　显然 $\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x\Big|_{-1}^{1}=\frac{\pi}{2}.$

又 $\left(-\arctan\frac{1}{x}\right)'=-\frac{-1/x^2}{1+\left(1/x\right)^2}=\frac{1}{1+x^2},x\neq 0.$

如果就此使用 $N—L$ 公式，那就有

$\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx=-\arctan\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1}=-\frac{\pi}{2}$，咋回事？

我们确信$\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x\Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}$是正确的.

因而$\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx = -\arctan\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1} = -\frac{\pi}{2}$当然就错了.

究其原因,我们会发现函数$-\arctan\frac{1}{x}$在区间$[-1,1]$上不连续,而在区间$[-1,1]$上连续的函数$\frac{1}{1+x^2}$的原函数必定可导,那当然是连续的.

所以说函数$-\arctan\dfrac{1}{x}$不是函数$\dfrac{1}{1+x^2}$在区间$[-1,1]$上的原函数.这是我们使用*Newton – Leibniz*公式时要特别注意的问题.

$$\int_{-\sqrt{3}}^{-1}\frac{1}{1+x^2}dx=\left(-\arctan\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{-\sqrt{3}}^{-1}=\frac{\pi}{12},$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx\neq\left(-\arctan\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{-1}^{1}.$$

例2.(2).计算积分$\int_0^{\pi}\frac{1}{2+\cos 2x}dx$

解 倘若由$\int\frac{1}{2+\cos 2x}dx$

$$=\int\frac{1}{1+2\cos^2 x}dx=\int\frac{\sec^2 x}{2+\sec^2 x}dx$$

$$=\int\frac{(\tan x)'}{3+\tan^2 x}dx=\int\frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^2+\tan^2 x}d(\tan x)$$

$=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{3}}+C$，进而得到

上页 下页 返回

$$I=\int_0^{\pi}\frac{1}{2+\cos 2x}dx=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{3}}\bigg|_0^{\pi}=0.$$

由$[0,\pi]$上有$\dfrac{1}{2+\cos 2x}\geq\dfrac{1}{3}>0$知$I\geq\dfrac{\pi}{3}$,

由此我们知道这个结果错了.原因是

$\dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\dfrac{\tan x}{\sqrt{3}}$并不是$\dfrac{1}{2+\cos 2x}$在

$[0,\pi]$上的原函数. 我们该怎么做呢?

$$\left(\text{正确答案}\ \int_0^{\pi}\frac{1}{2+\cos 2x}dx=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$$

上页 下页 返回

重申定理1.的条件

*Newton – Leibniz*公式：

若$F(x)$是连续函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的一个原函数,则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

上页 下页 返回

例 3. 用定积分定义求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}\right)$$

根据命题：当函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续时，

称 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积.

我们将上述极限看作是某一函数在一个区间上的积分和。

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+i/n}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln 2.$$

例4.求极限(1). $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)$;

(2). $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{2}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$.

解(1). 使用夹逼性

$$\because \quad \frac{i}{n^2+n}\le\frac{i}{n^2+i}\le\frac{i}{n^2+1}$$

$$\therefore \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} i}{n^2+n}\le\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\le\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} i}{n^2+1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)=\frac{1}{2}.$$

(2). 使用定积分的定义

$$(2).\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{2}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right).$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{2}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+i^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i/n}{1+\left(i/n\right)^2}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln 2.$$

问题 2 的极限值比问题 1 的极限小一些，与我们的感觉相吻合。

上页 下页 返回

三$^{\#}$.函数的一致连续性

函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上 *Riemann* 可积是函数的一种整体性质， 在“区间 $[a,b]$ 上连续函数 $f(x)$ *Riemann* 可积”的证明过程中用到了“连续函数在闭区间 $[a,b]$ 上是一致连续的”的结论，而函数的一致连续也是函数在一区间上的一种整体性质。

前面我们介绍的函数的连续、可微是函数的一种局部性质，即所谓“点态性质”。而函数在一闭区间上的有界性、最值存在性就是一种整体性质。

下面介绍函数的一致连续性。

我们知道，函数$f(x)$在区间 I 上连续，是指在区间 I 上每一点都连续，换言之也就是说，$\forall x\in I$，

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\delta(x,\varepsilon)>0,\forall|\Delta x|<\delta,$$

$$\exists\ \left|f(x+\Delta x)-f(x)\right|<\varepsilon$$

其中$\delta=\delta(x,\varepsilon)>0$是与$x$有关的。

定义 设函数 $f(x)$定义在区间I上，如果

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0,\forall x',x''\in I,|x'-x''|<\delta,$$

$\exists|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$，则称函数$f(x)$在区间$I$上一致连续。

需要注意到，函数$f(x)$在区间I上点态连续，对应$\delta=\delta(x,\varepsilon)$与$x$有关；而函数$f(x)$在区间$I$上一致连续，$\delta=\delta(\varepsilon)$与$x$无关。这就是连续的局部性与整体性之区别。这就象 *every* 与 *any* 之间的区别一样。

显然，函数$f(x)$在区间I上一致连续

$\Rightarrow$函数$f(x)$在区间I上点态连续。

但是，反之未必然。

例5 容易证明,函数$f(x)=ax+b$, $f(x)=x^2$ 在$(-\infty,+\infty)$上点态连续, $f(x)=ax+b$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续,但是 $f(x)=x^2$ 在$(-\infty,+\infty)$上不一致连续,那是因为$\exists\varepsilon=1,\forall\delta>0,$只要

$$x'=\pm\frac{1}{\delta},x''=\pm\left(\frac{1}{\delta}+\frac{\delta}{2}\right),$$虽然

$$|x'-x''|=\frac{\delta}{2}<\delta,\text{但}\left|(x')^2-(x'')^2\right|=1+\frac{\delta^2}{4}>1,$$

所以$f(x)=x^2$ 在$(-\infty,+\infty)$上不一致连续.

定理

[*Cantor*定理]　　如果函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，那么函数$f(x)$在$[a,b]$上一致连续。

*Cantor*定理给出了函数在区间上一致连续性判断的一个重要而使用又十分方便的方法。

命题1　设函数 $f(x)$ 在区间 I 上满足利普希兹 (*Lipschitz*) 条件，即存在常数 $L>0$, 使得对 I 上任意两点 x'、x'', $\left|f(x')-f(x'')\right| \le L\left|x'-x''\right|$，则函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续。

函数 $\sin x$, $\arctan x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上满足 *Lipschitz* 条件，因而一致连续。$\because \forall x'$、$x'' \in (-\infty,+\infty)$,

$$\left|\sin x' - \sin x''\right| \le \left|x' - x''\right|,$$

$$\left|\arctan x' - \arctan x''\right| \le \left|x' - x''\right| .$$

(由 *Lagrange* 微分中值定理得到。)

上页 下页 返回

例 6. 函数$f(x)$在区间I上一致连续，对应在函数的图象上反映的是，在所有的长度无穷小的自变量的区间上函数的图象是比较平缓的，不会太陡峭。

例如，函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$在$(0,1)$上不一致连续，而在$[1,+\infty)$上一致连续. 因为在较接近0点的地方，函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$的图象十分陡峭。而在$[1,+\infty)$上$f(x)=\dfrac{1}{x}$的图象就比较平缓，这是函数一致连续的几何表象.(上册P79)

上页 下页 返回

命题2　设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上点态连续，而且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，则函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上一致连续。

再次强调

函数 f 在区间 I 上(点点)连续 $\Leftrightarrow$ *every*

函数 f 在区间 I 上一致连续 $\Leftrightarrow$ *any*

上页　下页　返回