南京农业大学本科生课程

离 散 数 学

第4章 一阶逻辑基本概念

数学系

本章说明

- 本章的主要内容
  - 一阶逻辑基本概念、命题符号化
  - 一阶逻辑公式、解释及分类
- 本章与后续各章的关系
  - 克服命题逻辑的局限性
  - 是第五章的先行准备

引言

- 命题逻辑的局限性
  在命题逻辑中，研究的基本单位是简单命题，对简单命题不再进行分解，并且不考虑命题之间的内在联系和数量关系。
- 例如：
  所有的人都是要死的，苏格拉底是人，所以苏格拉底是要死的。
- 这个简单而有名的苏格拉底三段论，却无法用命题逻辑予以证明。
- 一阶逻辑所研究的内容
  为了克服命题逻辑的局限性，将简单命题再细分，分析出个体词、谓词和量词，以期达到表达出个体与总体的内在联系和数量关系。

本章内容

4.1一阶逻辑命题符号化

- 一阶逻辑命题符号化的三个基本要素
  - 个体词
  - 谓词
  - 量词
-

个体词及相关概念

- **个体词**：指所研究对象中可以独立存在的具体或抽象的客体。
- 举例
  - 命题：电子计算机是科学技术的工具。
    个体词：电子计算机。
  - 命题：他是三好学生。
    个体词：他。

说明

- 个体词一般是充当主语的名词或代词。

个体词及相关概念

- **个体常项**：表示具体或特定的客体的个体词，用小写字母*a*, *b*, *c*，...表示。
- **个体变项**：表示抽象或泛指的客体的个体词，用*x*, *y*, *z*, ...表示。
- **个体域（或称论域）**：指个体变项的取值范围。
  - 可以是有穷集合，如{*a*， *b*， *c*}， {1， 2}。
  - 可以是无穷集合，如*N*, *Z*, *R*, ...。
- **全总个体域（universe）**——宇宙间一切事物组成 。

说明

本教材在论述或推理中，如果没有指明所采用的个体域，都是使用的全总个体域。

谓词及相关概念

- **谓词（predicate）**是用来刻画个体词性质及个体词之间相互关系的词。

（1）π是无理数。

π是个体常项，“...是无理数”是谓词，记为F，命题符号化为F(π）。

（2）x是有理数。

x是个体变项，“...是有理数”是谓词，记为G，命题符号化为G(x)。

（3）小王与小李同岁。

小王、小李都是个体常项，“...与...同岁”是谓词，记为H，命题符号化为H(a,b），其中a：小王，b：小李。

（4）x与y具有关系L。

x，y都是个体变项，谓词为L，命题符号化为L(x,y)。

谓词及相关概念

- 谓词常项：表示具体性质或关系的谓词。用大写字母表示。如(1)、（2）、(3）中谓词F、G、H。
- 谓词变项：表示抽象的、泛指的性质或关系的谓词。用大写字母表示。如(4）中谓词L。
- *n*(*n*≥1)元谓词：$P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$表示含n个命题变项的n元谓词。
  - n=1时，一元谓词——表示x_1具有性质P。
  - n≥2时，多元谓词——表示$x_1, x_2, \ldots, x_n$具有关系P。
- *0*元谓词：不含个体变项的谓词。如F(a)、G(a,b)、$P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$。

思考

- n元谓词是命题吗？

不是，只有用谓词常项取代P，用个体常项取代$x_1,x_2,\ldots,x_n$时，才能使n元谓词变为命题。

例题

例4.1 将下列命题在一阶逻辑中用0元谓词符号化，并讨论真值。

(1)只有2是素数，4才是素数。

(2)如果5大于4，则4大于6.

解：

(1)设一元谓词F(x):x是素数，a:2，b:4。

命题符号化为0元谓词的蕴涵式

$$F(b) \rightarrow F(a)$$

由于此蕴涵前件为假，所以命题为真。

(2)设二元谓词G(x,y):x大于y，a:4，b:5，c:6。

命题符号化为0元谓词的蕴涵式

$$G(b,a) \rightarrow G(a,c)$$

由于G(b,a)为真，而G(a,c)为假，所以命题为假。

例题

将命题“这只大红书柜摆满了那些古书。”符号化.

(1)设 $F(x,y)$：x摆满了y，$R(x)$：x是大红书柜

$Q(y)$：y是古书，　　a：这只，

b：那些

符号化为：$R(a)\wedge Q(b)\wedge F(a,b)$

(2)设 $A(x)$：x是书柜，　　$B(x)$：x是大的

$C(x)$：x是红的，　　$D(y)$：y是古老的

$E(y)$：y是图书，　　$F(x,y)$：x摆满了y

a：这只　　　　　b：那些

符号化为：$A(a)\wedge B(a)\wedge C(a)\wedge D(b)\wedge E(b)\wedge F(a,b)$

量词及相关概念

量词（quantifiers）是表示个体常项或个体变项之间数量关系的词。

1. **全称量词**：符号化为“∀”

- 日常生活和数学中所用的“一切的”、“所有的”、“每一个”、“任意的”、“凡”、“都”等词可统称为全称量词。
- x表示个体域里的所有个体，$\forall xF(x)$表示个体域里所有个体都有性质F。

2. **存在量词**：符号化为“∃”

- 日常生活和数学中所用的“存在”、“有一个”、“有的”、“至少有一个”等词统称为存在量词。
- y表示个体域里有的个体，$\exists yG(y)$表示个体域里存在个体具有性质G等。

一阶逻辑命题符号化

例4.2 在个体域分别限制为(a)和(b)条件时，将下面两个命题符号化：

(1) 凡人都呼吸。

(2) 有的人用左手写字。

其中：(a)个体域D_1为人类集合；

(b)个体域D_2为全总个体域。

解：(a)个体域为人类集合。

令$F(x)$:x呼吸。　　　　$G(x)$:x用左手写字。

(1) 在个体域中除了人外，再无别的东西，因而“凡人都呼吸”应符号化为

$$\forall x F(x)$$

(2) 在个体域中除了人外，再无别的东西，因而“有的人用左手写字”符号化为

$$\exists x G(x)$$

(b)个体域为全总个体域。

即除人外，还有万物，所以必须考虑将人先分离出来。

令$F(x)$:x呼吸。 $G(x)$:x用左手写字。 $M(x)$:x是人。

(1) “凡人都呼吸”应符号化为

$$\forall x(M(x)\rightarrow F(x))$$

(2) “有的人用左手写字”符号化为

$$\exists x(M(x)\wedge G(x))$$

结论

- 在使用全总个体域时，要将人从其他事物中区别出来，为此引进了谓词$M(x)$，称为**特性谓词**。
- 同一命题在不同的个体域中符号化的形式可能不同。
- **思考：**在全总个体域中，能否将(1)符号化为$\forall x(M(x)\wedge F(x))$？能否将(2)符号化为$\exists x(M(x)\rightarrow G(x))$？

例题

例4.3 在个体域限制为(a)和(b)条件时，将下列命题符号化：

(1) 对于任意的x，均有$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$。

(2) 存在x，使得$x+5=3$。

其中：(a)个体域$D_1=N$(N为自然数集合)

(b)个体域$D_2=R$(R为实数集合)

(a)令$F(x)$：$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$，$G(x)$：$x+5=3$。

命题(1)的符号化形式为 $\forall xF(x)$ （真命题）

命题(2)的符号化形式为 $\exists xG(x)$) （假命题）

(b)在D_2内，(1)和(2)的符号化形式同(a)，皆为真命题。

说明

❑在不同个体域内，同一个命题的符号化形式可能不同，也可能相同。

❑同一个命题，在不同个体域中的真值也可能不同。

例题

例4.4 将下列命题符号化，并讨论真值。

（1）所有的人长着黑头发。

（2）有的人登上过月球。

（3）没有人登上过木星。

（4）在美国留学的学生未必都是亚洲人。

分析：谓词逻辑中命题的符号化，主要考虑：

(1) 非空个体域的选取。若是为了确定命题的真值，一般约定在某个个体域上进行，否则，在由一切事物构成的全总个体域上考虑问题时，需要增加一个指出个体变量变化范围的特性谓词。

(2) 量词的使用及作用范围。

(3) 正确地语义。

例题

解：没有提出个体域，所以认为是全总个体域。

（1）所有的人长着黑头发。

令$F(x)$:x长着黑头发， $M(x)$:x是人。命题符号化为

$$\forall x(M(x)\to F(x))。$$

命题真值为假。

（2）有的人登上过月球。

令$G(x)$:x登上过月球， $M(x)$:x是人。命题符号化为

$$\exists x(M(x)\land G(x))。$$

命题真值为真。

例题

（3）没有人登上过木星。

令H(x):x登上过木星， M(x):x是人。命题符号化为

$$\neg \exists x(M(x) \land H(x))。$$

命题真值为真。

（4）在美国留学的学生未必都是亚洲人。

令F(x):x是在美国留学的学生，G(x):x是亚洲人。符号化

$$\neg \forall x(F(x) \rightarrow G(x))$$

命题真值为真。

例题 n元谓词的符号化

例4.5 将下列命题符号化

（1）兔子比乌龟跑得快。
（2）有的兔子比所有的乌龟跑得快。
（3）并不是所有的兔子都比乌龟跑得快。
（4）不存在跑得同样快的两只兔子。

解：令 $F(x)$:x是兔子， $G(y)$:y是乌龟，
$H(x,y)$:x比y跑得快， $L(x,y)$:x与y跑得同样快。

（1）$\forall x \forall y(F(x) \land G(y) \to H(x,y))$

（2）$\exists x(F(x) \land \forall y(G(y) \to H(x,y)))$

（3）$\neg \forall x \forall y(F(x) \land G(y) \to H(x,y))$

（4）$\neg \exists x \exists y(F(x) \land F(y) \land L(x,y))$

例题

将下列命题符号化：

（1）每一个有理数都是实数

令$Q(x)$:x是有理数，$R(x)$:x是实数。则该命题符号化为

$$\forall x(Q(x) \rightarrow R(x))$$

（2）某些实数是有理数

令$Q(x)$:x是有理数，$R(x)$:x是实数。则该命题符号化为

$$\exists x(R(x) \wedge Q(x))$$

（3）不是每一个实数都是有理数

令$Q(x)$:x是有理数，$R(x)$:x是实数。则该命题符号化为

$$\neg(\forall x(R(x) \rightarrow Q(x)))$$

（4）存在偶素数

令$P(x)$:x是素数，$E(x)$:x是偶数。则该命题符号化为

$$\exists x(P(x) \wedge E(x))$$

例题

（5）会叫的狗未必会咬人

令D(x):x是狗，C(x):x会叫，R(x):x会咬人。

则该命题符号化为

$\exists x(D(x)\wedge C(x)\wedge\neg R(x))$

（6）每个人的外祖母都是他母亲的母亲

令 M(x): x是人，P(x,y): x是y的外祖母，Q(x,y): x是y的母亲。

符号化为

$\forall x(M(x)\rightarrow\exists y\exists z(M(y)\wedge M(z)\wedge P(y,x)\wedge Q(y,z)\wedge Q(z,x)))$

（7）任何自然数的后继数必大于零

令N(x):x是自然数,S(x,y): x是y的后继,B(x):x>0,

符号化为

$\forall x(N(x)\rightarrow\exists y(N(y)\wedge S(y,x)\wedge B(y)))$.

例题

（8）有些液体能溶解任何金属.

令$P(x)$:x是液体,$L(x,y)$: x能溶解y,$Q(x)$:x是金属。

符号化为 $\exists x(P(x)\wedge\forall y(Q(y)\rightarrow L(x,y)))$.

（9）任何金属均可溶解于某种液体中。

令$P(x)$:x是液体,$L(x,y)$: x能溶解y,$Q(x)$:x是金属。

符号化为 $\forall x(Q(x)\rightarrow\exists y(P(y)\wedge L(y,x)))$.

（10） 没有不犯错误的人。

令$M(x)$:x是人,$E(x)$:x犯错误,符号化为

$\forall x(M(x)\rightarrow E(x))$

或$\neg(\exists x(M(x)\wedge\neg E(x)))$.

一阶逻辑命题符号化时需要注意的事项

- 分析命题中表示性质和关系的谓词，分别符号为一元和n（$n \geq 2$）元谓词。
- 根据命题的实际意义选用全称量词或存在量词。
- 一般说来，多个量词出现时，它们的顺序不能随意调换。
  - 例如，考虑个体域为实数集，H(x，y)表示x+y=10，
  - 则命题“对于任意的x，都存在y，使得x+y=10”的符号化形式为$\forall x \exists y H(x, y)$，为真命题。
  - 如果改变两个量词的顺序，得$\exists y \forall x H(x, y)$，为假命题。
- 有些命题的符号化形式可不止一种。（例4.5之(3)）
  - $\neg \forall x \forall y (F(x) \wedge G(y) \rightarrow H(x, y))$
  - $\exists x \exists y (F(x) \wedge G(y) \wedge \neg H(x, y))$

例 将下列公式翻译成自然语言,并确定其真值,这里假定个体域是正整数:

[1]. $(\forall x)(\exists y)G(x, y)$,其中$G(x, y)$表示:$x * y = y$。

[2]. $(\exists x)(\forall y)F(x, y)$,其中$F(x, y)$表示:$x + y = y$。

[3]. $(\exists x)(\forall y)H(x, y)$,其中$H(x, y)$表示:$x + y = x$。

[4]. $(\exists x)(\forall y)L(x, y)$,其中$L(x, y)$表示:$x * y = x$。

[5]. $(\forall x)(\exists y)M(x, y)$,其中$M(x, y)$表示:$x * y = 1$。

[6]. $(\forall x)(\exists y)N(x, y)$,其中$N(x, y)$表示:$y = 2 * x$。

解答

[1].对任意正整数x,必存在正整数y,使得$x*y=y$.

[2].存在正整数x,对任意何正整数y,使得$x+y=y$.

[3].存在正整数x,对任意何正整数y,使得$x+y=x$.

[4].存在正整数x,对任意何正整数y,使得$x*y=x$.

[5].对任意正整数x,必存在正整数y,使得$x*y=1$.

[6].对任意正整数x,必存在正整数y,使得$y=2*x$.

例 给定下述谓词,请把下列公式翻译成自然语言:

P(x): x是素数　　E(x): x是偶数

Q(x): x是奇数　　N(x, y): x可以整除y

[1]. $P(5)$

[2]. $E(2)\wedge P(2)$

[3]. $(\forall x)(N(2, x)\rightarrow E(x))$

[4]. $(\exists x)(E(x)\wedge N(x, 6))$

[5]. $(\forall x)(\neg E(x) \rightarrow \neg N(2, x))$

[6]. $(\forall x)(E(x)\rightarrow(\forall y)(N(x, y)\rightarrow E(y)))$

[7]. $(\forall x)(P(x)\rightarrow(\exists y)(Q(y)\wedge N(y, x)))$

[8]. $(\forall x)(Q(x)\rightarrow(\exists y)(E(y)\wedge\neg N(y, x)))$

解答

[1].5是素数。

[2].2是偶素数。

[3].可被2整除的数必为偶数。

[4].有可整除6的偶数。

[5].不是偶数则一定不能被2整除。

[6].对任意偶数 x，任意整数y，若x能整除y，则y必为偶数。

[7].对任意素数x，必存在奇数y，使得y可整除x。

[8].对任意奇数x，必存在偶数y，使得y不能整除x。