南京农业大学本科生课程

离 散 数 学

第8章 函数

数学系

本章说明

- 本章的主要内容
  - 函数的定义
  - 函数的性质
  - 函数的逆
  - 函数的合成
- 本章与后续各章的关系
  - 是代数系统的基础

本章内容

8.1 函数的定义与性质

定义8.1 设F为二元关系，若$\forall x \in \mathrm{dom}\ F$，都存在唯一的$y \in \mathrm{ran}\ F$使$xFy$成立，则称F为**函数**(*function*)(或称作**映射**(*mapping*))。

对于函数F，如果有 xFy，则记作$y=F(x)$，并称y为F在x的**值**。

举例 判断下列关系是否为函数

$F_1=\{\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_2, y_2\rangle, \langle x_3, y_2\rangle\}$ 是函数

$F_2=\{\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_1, y_2\rangle\}$ 不是函数

说明

- 函数是特殊的二元关系。
- 函数的定义域为dom F，而不是它的真子集。
- 一个x只能对应唯一的y。

函数相等

定义8.2 设 F,G 为函数，则 $F = G \Leftrightarrow F \subseteq G \wedge G \subseteq F$

由定义可知，两个函数F和G相等，一定满足下面两个条件：

（1）dom F＝dom G

（2）$\forall x \in$ dom F＝dom G，都有 $F(x) = G(x)$

例如　函数$F(x) = (x^2-1)/(x+1)$，$G(x) = x-1$不相等，因为

dom $F = \{x \mid x \in R \wedge x \neq -1\}$

dom G＝R

显然，dom F≠dom G，所以两个函数不相等。

从A到B的函数

定义8.3 设A, B为集合，如果 f 为函数，$\mathrm{dom}\ f=A$，$\mathrm{ran}\ f\subseteq B$，则称 f 为**从A到B的函数**，记作 f：$A\rightarrow B$。

例如： f：$N\rightarrow N$，$f(x)=2x$是从N到N的函数，

g：$N\rightarrow N$，$g(x)=2$也是从N到N的函数。

定义8.4 所有从A到B的函数的集合记作B^A，读作"B上A"，符号化表示为 $B^A=\{f\mid f：A\rightarrow B\}$ 。

例8.2

例8.2 设A＝{1, 2, 3}，B＝{a, b}，求B^A。

解答 $B^A=\{f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7\}$。其中

$f_0=\{<1,a>,<2,a>,<3,a>\}$ $f_4=\{<1,b>,<2,a>,<3,a>\}$

$f_1=\{<1,a>,<2,a>,<3,b>\}$ $f_5=\{<1,b>,<2,a>,<3,b>\}$

$f_2=\{<1,a>,<2,b>,<3,a>\}$ $f_6=\{<1,b>,<2,b>,<3,a>\}$

$f_3=\{<1,a>,<2,b>,<3,b>\}$ $f_7=\{<1,b>,<2,b>,<3,b>\}$

说明

- 若$|A|=m$，$|B|=n$，且$m,n>0$，则$|B^A|=n^m$。
- 当A或B至少有一个集合是空集时：
  - A＝∅且B＝∅，则$B^A=\varnothing^\varnothing=\{\varnothing\}$。
  - A＝∅且B≠∅，则$B^A=B^\varnothing=\{\varnothing\}$。
  - A≠∅且B＝∅，则$B^A=\varnothing^A=\varnothing$。

函数的像和完全原像

定义8.5 设函数f：A→B，$A_1 \subseteq A$，$B_1 \subseteq B$。

（1）令$f(A_1)=\{f(x) \mid x \in A_1\}$，称 $f(A_1)$为A_1在f下的像（*image*）。

特别地，当$A_1=A$时，称 $f(A)$为函数的像。

（2）令$f^{-1}(B_1)=\{x \mid x \in A \wedge f(x) \in B_1\}$，称$f^{-1}(B_1)$为$B_1$在 f下的完全原像（*preimage*）。

说明

- 注意区别函数的值和像两个不同的概念。
  函数值$f(x) \in B$，而函数的像$f(A_1) \subseteq B$。

讨论

- 设 $B_1 \subseteq B$，显然B_1在 f 下的原像 $f^{-1}(B_1)$是A的子集。
- 设 $A_1 \subseteq A$，那么 $f(A_1) \subseteq B$。

  $f(A_1)$的完全原像就是 $f^{-1}(f(A_1))$。

  一般来说， $f^{-1}(f(A_1)) \neq A_1$，但是$A_1 \subseteq f^{-1}(f(A_1))$。
- 例如函数 $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 1\}$，满足

  $f(1) = f(2) = 0$，$f(3) = 1$

  令$A_1 = \{1\}$，那么

  $f^{-1}(f(A_1)) = f^{-1}(f(\{1\})) = f^{-1}(\{0\}) = \{1, 2\}$

  这时，A_1是$f^{-1}(f(A_1))$的真子集。

例8.3

例8.3 设f:N→N，且

$$f(x)=\begin{cases} x/2 & \text{若}x\text{为偶数} \\ x+1 & \text{若}x\text{为奇数} \end{cases}$$

令A＝{0, 1}，B＝{2}，求f(A)和 f^{-1}(B)。

解答

$f(A)=f(\{0, 1\})=\{f(0), f(1)\}=\{0, 2\}$

$f^{-1}(B)=f^{-1}(\{2\})=\{1, 4\}$　　　　(因为 $f(1)=2, f(4)=2$)

满射、单射、双射

定义8.6 设$f:A\to B$，

（1）若$\mathrm{ran}\,f=B$，则称$f:A\to B$是**满射**（*surjection*）的。

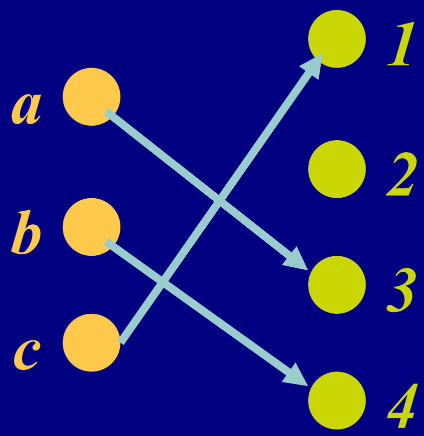
（2）若$\forall y\in \mathrm{ran}\,f$都存在**唯一的**$x\in A$使得$f(x)=y$，则称$f:A\to B$是**单射**（*injection*）的。

（3）若f既是满射又是单射的，则称$f:A\to B$是**双射**（*bijection*）的（**一一映像**（*one-to-one mapping*））。

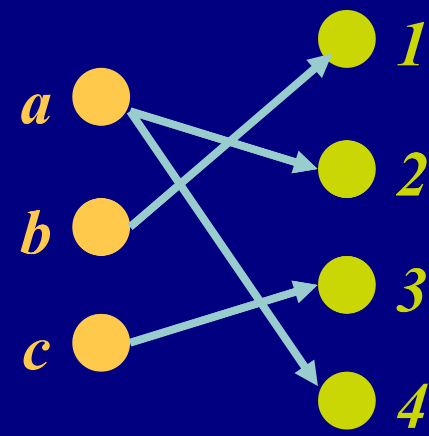
说明

- 如果$f:A\to B$是满射的，则对于任意的$y\in B$，都存在$x\in A$，使得$f(x)=y$。
- 如果$f:A\to B$是单射的，则对于x_1、$x_2\in A$且$x_1\neq x_2$，一定有$f(x_1)\neq f(x_2)$。
  换句话说，如果对于x_1、$x_2\in A$有$f(x_1)=f(x_2)$，则一定有$x_1=x_2$。

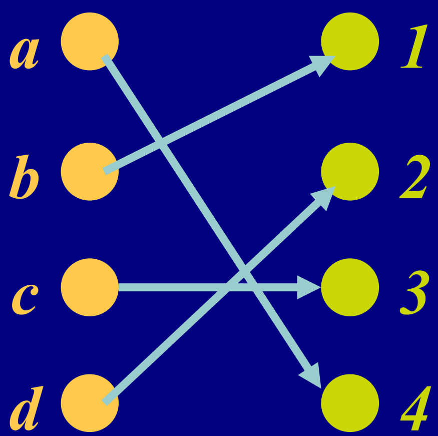
不同类型的对应关系的示例



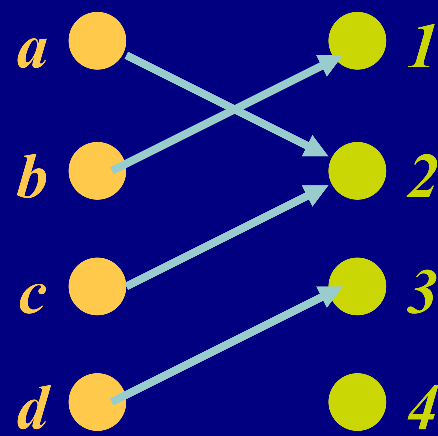
单射



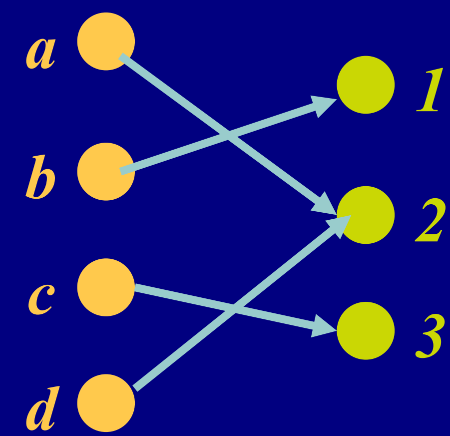
不是函数



双射



函数



满射

例8.4

例8.4 判断下面函数是否为单射、满射、双射的，为什么?

(1) f：$R \to R$，$f(x)= -x^2+2x-1$

(2) f：$Z^+ \to R$，$f(x)=\ln x$，Z^+为正整数集

(3) f：$R \to Z$，$f(x)=\lfloor x \rfloor$

(4) f：$R \to R$，$f(x)=2x+1$

(5) f：$R^+ \to R^+$，$f(x)=(x^2+1)/x$，其中R^+为正实数集。

分析 实数集合上函数性质的判断方法

（1）f 在x=1取得极大值0。既不是单射也不是满射的。

（2）f 是单调上升的，是单射的，但不满射。ran $f=\{\ln 1, \ln 2, \ldots\}$。

（3）f 是满射的， 但不是单射的，例如$f(1.5)=f(1.2)=1$。鍶

（4）f 是满射、单射、双射的，因为它是单调函数并且ran $f=R$。

（5）f 有极小值$f(1)=2$。 该函数既不是单射的，也不是满射的。

例8.5

例8.5 对于以下各题给定的A, B和 f，判断是否构成函数 $f:A\to B$。如果是，说明 $f:A\to B$是否为单射、满射和双射的，并根据要求进行计算。

(1) $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{6,7,8,9,10\}$，
$f=\{\langle 1,8\rangle,\langle 3,9\rangle,\langle 4,10\rangle,\langle 2,6\rangle,\langle 5,9\rangle\}$

能构成$f:A\to B$，

f不是单射的，因为$f(3)=f(5)=9$，

f不是满射的，因为$7\notin \mathrm{ran}\ f$。

(1) $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{6,7,8,9,10\}$，
$f=\{\langle 1,7\rangle,\langle 2,6\rangle,\langle 4,5\rangle,\langle 1,9\rangle,\langle 5,10\rangle\}$

不能构成$f:A\to B$，因为$\langle 1,7\rangle\in f$且$\langle 1,9\rangle\in f$。

例8.5

(3) $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$， $B=\{6, 7, 8, 9, 10\}$，
$f=\{\langle 1, 8\rangle, \langle 3, 10\rangle, \langle 2, 6\rangle, \langle 4, 9\rangle\}$

不能构成$f:A\to B$，因为dom $f=\{1, 2, 3, 4\}\neq A$。

(4) $A=B=\mathrm{R}$，$f(x)=x$

能构成$f:A\to B$， 且f是双射的 。

(5) $A=B=\mathrm{R}^+$，$f(x)=x/(x^2+1)$ （$\forall x\in \mathrm{R}^+$ ）

能构成$f:A\to B$， 但f既不是单射的也不是满射的。

因为该函数在$x=1$取得极大值 $f(1)=1/2$，函数不是单调的，且ran $f\neq \mathrm{R}^+$。

例8.5

(6) $A=B=\mathrm{R}\times\mathrm{R}$，$f(\langle x, y\rangle)=\langle x+y, x-y\rangle$

令$L=\{\langle x, y\rangle \mid x, y\in\mathrm{R}\wedge y=x+1\}$，计算 $f(L)$。

能构成 $f:A\to B$，且 f 是双射的。

$f(L)=\{\langle x+(x+1), x-(x+1)\rangle \mid x\in\mathrm{R}\}$

$=\{\langle 2x+1, -1\rangle \mid x\in\mathrm{R}\}=\mathrm{R}\times\{-1\}$

(7) $A=\mathrm{N}\times\mathrm{N}$，$B=\mathrm{N}$，$f(\langle x, y\rangle)=|x^2-y^2|$

计算$f(\mathrm{N}\times\{0\})$, $f^{-1}=(\{0\})$。

能构成$f:A\to B$，但 f 既不是单射也不是满射的。

因为$f(\langle 1, 1\rangle)=f(\langle 2, 2\rangle)=0$，且$2\notin \mathrm{ran}\ f$。

$f(\mathrm{N}\times\{0\})=\{n^2-0^2 \mid n\in\mathrm{N}\}=\{n^2 \mid n\in\mathrm{N}\}$

$f^{-1}(\{0\})=\{\langle n, n\rangle \mid n\in\mathrm{N}\}$

例: 设$A_1=\{a,b\}$, $B_1=\{1,2,3\}$,

$A_2=\{a,b,c\}$, $B_2=\{1,2\}$,

$A_3=\{a,b,c\}$, $B_3=\{1,2,3\}$,

求$A_1\to B_1$,$A_2\to B_2$,$A_3\to B_3$中的单射,满射,双射.

例(解(1))

- 例：（1） $A_1=\{a, b\}$， $B_1=\{1, 2, 3\}$，
- 解：（1） $A_1 \rightarrow B_1$中无满射，无双射，单射6个：

  $f_1=\{\langle a, 1\rangle, \langle b, 2\rangle\}$， $f_2=\{\langle a, 1\rangle, \langle b, 3\rangle\}$，

  $f_3=\{\langle a, 2\rangle, \langle b, 1\rangle\}$， $f_4=\{\langle a, 2\rangle, \langle b, 3\rangle\}$，

  $f_5=\{\langle a, 3\rangle, \langle b, 1\rangle\}$， $f_6=\{\langle a, 3\rangle, \langle b, 2\rangle\}$.

例(解(2))

- 例：(2) $A_2=\{a, b, c\}$，　$B_2=\{1, 2\}$，
- 解：(2) $A_2 \to B_2$中无单射，无双射，满射6个：
  $f_1=\{\langle a,1\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,2\rangle\}$，

  $f_2=\{\langle a,1\rangle,\langle b,2\rangle,\langle c,1\rangle\}$，

  $f_3=\{\langle a,2\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,1\rangle\}$，

  $f_4=\{\langle a,1\rangle,\langle b,2\rangle,\langle c,2\rangle\}$，

  $f_5=\{\langle a,2\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,2\rangle\}$，

  $f_6=\{\langle a,2\rangle,\langle b,2\rangle,\langle c,1\rangle\}$.

例(解(3))

- 例：(3) $A_3=\{a, b, c\}$，　　$B_3=\{1, 2, 3\}$，
- 解：(3) $A_2 \to B_2$中双射6个：

$f_1=\{\langle a, 1\rangle, \langle b, 2\rangle, \langle c, 3\rangle\}$，

$f_2=\{\langle a, 1\rangle, \langle b, 3\rangle, \langle c, 2\rangle\}$，

$f_3=\{\langle a, 2\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle c, 3\rangle\}$，

$f_4=\{\langle a, 2\rangle, \langle b, 3\rangle, \langle c, 1\rangle\}$，

$f_5=\{\langle a, 3\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle c, 2\rangle\}$，

$f_6=\{\langle a, 3\rangle, \langle b, 2\rangle, \langle c, 1\rangle\}$.　#

计数(counting)问题

- 设|A|=n, |B|=m, 问A→B中有多少单射, 满射, 双射?
- n<m时, A→B中无满射, 双射, 单射个数为

$$m(m-1)\dots(m-n+1)$$

- n=m时, A→B中双射个数为 $n!$
- n>m时, A→B中无单射, 双射, 满射个数为

$$m!\left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\}.$$

例8.6

例8.6 对于给定的集合A和B构造双射函数 $f:A\to B$。

（1）$A=P(\{1, 2, 3\})$， $B=\{0, 1\}^{\{1, 2, 3\}}$

（2）$A=[0, 1]$， $B=[1/4, 1/2]$

（3）$A=Z$， $B=N$

（4）$A=[\pi/2, 3\pi/2]$， $B=[-1, 1]$

例8.6的解答

（1）$A=P(\{1,2,3\}),\ B=\{0,1\}^{\{1,2,3\}}$

$A=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$。

$B=\{f_0,f_1,\ldots,f_7\}$, 其中

$f_0=\{<1,0>,<2,0>,<3,0>\}$, $f_1=\{<1,0>,<2,0>,<3,1>\}$,

$f_2=\{<1,0>,<2,1>,<3,0>\}$, $f_3=\{<1,0>,<2,1>,<3,1>\}$,

$f_4=\{<1,1>,<2,0>,<3,0>\}$, $f_5=\{<1,1>,<2,0>,<3,1>\}$,

$f_6=\{<1,1>,<2,1>,<3,0>\}$, $f_7=\{<1,1>,<2,1>,<3,1>\}$。

令$f: A\to B$,

$f(\varnothing)=f_0$, $f(\{1\})=f_1$, $f(\{2\})=f_2$,

$f(\{3\})=f_3$, $f(\{1,2\})=f_4$, $f(\{1,3\})=f_5$,

$f(\{2,3\})=f_6$, $f(\{1,2,3\})=f_7$

例8.6的解答

（2） $A=[0, 1], B=[1/4, 1/2]$

令$f: A\rightarrow B$, $f(x)=(x+1)/4$。

（3） $A=Z, B=N$

将Z中元素以下列顺序排列并与N中元素对应：

$$\begin{array}{lccccccc} Z: & 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3 \ldots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ N: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \ldots \end{array}$$

则这种对应所表示的函数是：

$$f: \mathrm{Z} \rightarrow N, f(x)=\begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ -2x-1 & x<0 \end{cases}$$

（4） $A=[\pi/2, 3\pi/2], B=[-1, 1]$

令$f: A\rightarrow B$ ， $f(x)=\sin x$。

常用函数—常函数和恒等函数

- 设f：$A\rightarrow B$，如果存在$c\in B$，使得对所有的$x\in A$都有$f(x)=c$，则称f：$A\rightarrow B$是**常函数**。
- 设f：$A\rightarrow$A，对所有的$x\in A$都有$I_A(x)=x$，称I_A为A上的**恒等函数**。

常用函数—单调递增函数

- 设$<A,\leq>$，$<B,\leq>$为偏序集，f：$A\rightarrow B$，如果对任意的x_1, $x_2\in A$，$x_1 < x_2$，就有$f(x_1)\leq f(x_2)$，则称f为**单调递增**的；

  如果对任意的$x_1, x_2\in A, x_1 < x_2$, 就有$f(x_1) < f(x_2)$, 则称f为**严格单调递增**的。

- 类似的也可以定义单调递减和严格单调递减的函数。

- **举例**：f: R→R, $f(x)=x+1$是严格单调递增的。

  偏序集$<P(\{a,b\}), R_\subseteq>$，$<\{0,1\}, \leqslant>$，$R_\subseteq$为包含关系，$\leqslant$为一般的小于等于关系。

  令f：$P(\{a,b\})\rightarrow\{0,1\}$，$f(\varnothing)=f(\{a\})=f(\{b\})=0$，$f(\{a,b\})=1$，

  f是单调递增的, 但不是严格单调递增的。

常用函数—特征函数

- 设A为集合，对于任意的$A'\subseteq A$，A'的**特征函数**

  $\chi_{A'}: A\to\{0,1\}$定义为

$$\chi_{A'}(a)=\begin{cases}1, & a\in A'\\ 0, & a\in A-A'\end{cases}$$

- **举例：** A的每一个子集A′都对应于一个特征函数，不同的子集对应于不同的特征函数。

  例如$A=\{a,b,c\}$, 则有

$\chi_{\varnothing}=\{\langle a,0\rangle, \langle b,0\rangle, \langle c,0\rangle\}$，　$\chi_{\{a\}}=\{\langle a,1\rangle, \langle b,0\rangle, \langle c,0\rangle\}$

$\chi_{\{b\}}=\{<a,0>,<b,1>,<c,0>\}$，　$\chi_{\{c\}}=\{\langle a,0\rangle, \langle b,0\rangle, \langle c,1\rangle\}$

$\chi_{\{a,b\}}=\{<a,1>,<b,1>,<c,0>\}$，　$\chi_{\{a,c\}}=\{<a,1>,<b,0>,<c,1>\}$

$\chi_{\{b,c\}}=\{<a,0>,<b,1>,<c,1>\}$，　$\chi_{\{a,b,c\}}=\{<a,1>,<b,1>,<c,1>\}$

常用函数—自然映射

- 设R是A上的等价关系， 令

  g： $A \to A/R$

  $g(a)=[a]$， $\forall a \in A$

  称g是从A到商集A/R的**自然映射**。

- 给定集合A和A上的等价关系R，就可以确定一个自然映射g： $A \to A/R$。

  例如$A=\{1,2,3\}$， $R=\{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle\} \cup I_A$

  $g(1)=g(2)=\{1,2\}$, $g(3)=\{3\}$

  不同的等价关系确定不同的自然映射，其中恒等关系所确定的自然映射是双射， 而其他的自然映射一般来说只是满射。

自然映射(举例)

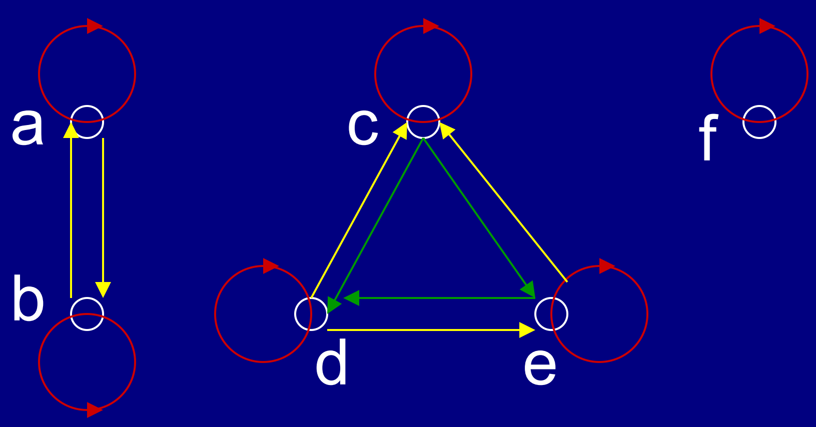
- 例：$A=\{a, b, c, d, e, f\}$， $A/R=\{\{a, b\}, \{c, d, e\}, \{f\}\}$，

$[a]=[b]=\{a, b\}$， $[c]=[d]=[e]=\{c, d, e\}$， $[f]=\{f\}$，

$$g: A \to A/R,\quad g(x)=[x].$$

$g(a)=\{a, b\}$， $g(b)=\{a, b\}$， $g(c)=\{c, d, e\}$，

$g(d)=\{c, d, e\}$， $g(e)=\{c, d, e\}$， $g(f)=\{f\}$.　#



定义在自然数集合上的计数函数

- 对于给定规模为n的输入，计算算法所做基本运算的次数，将这个次数表示为输入规模的函数。
  - 排序和检索问题的基本运算是比较。
  - 矩阵乘法的基本运算是元素的相乘。
- 估计算法在最坏情况下所做基本运算的次数记为$W(n)$。
- 估计算法在平均情况下所做基本运算的次数记为$A(n)$。
- 设f是定义在自然数集合上的函数，当n变得很大时，函数值$f(n)$的增长取决于函数的阶。阶越高的函数，算法的复杂度就越高，同时意味着算法的效率越低。
- 算法分析的主要工作就是估计复杂度函数的阶。阶可以是：

  n，n^2，n^3，$n\log n$，$\log n$，2^n ……

定义在自然数集合上的计数函数

- 若存在正数c和n_0，使得对一切$n \geqslant n_0$，有$0 \leqslant f(n) \leqslant cg(n)$，记作 $f(n) = O(g(n))$。
- 若存在正数c和n_0，使得对一切$n \geqslant n_0$，有$0 \leqslant cg(n) \leqslant f(n)$，记作 $f(n) = \Omega(g(n))$。
- 若$f(n) = O(g(n))$且 $f(n) = \Omega(g(n))$，则$f(n) = \Theta(g(n))$。
- 例如
  - $f(n) = 1/2\ n^2 - 3n$，则 $f(n) = \Theta(n^2)$
  - $g(n) = 6n^3$，则 $g(n) = \Theta(n^3)$