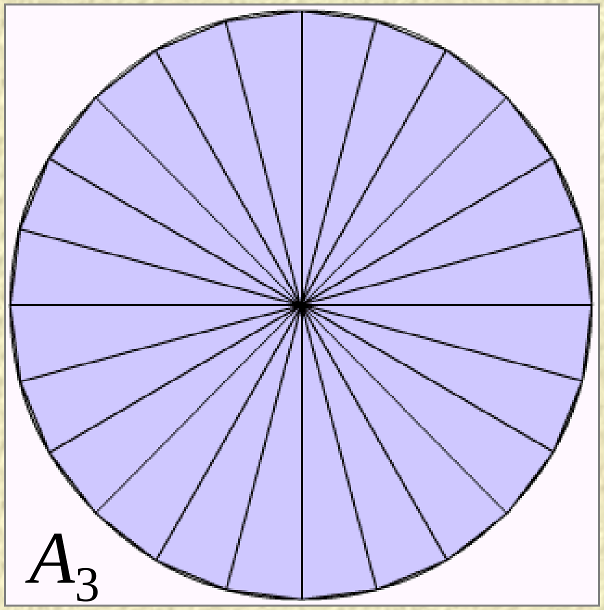
2-01 数列的极限的概念

上页 下页 返回

一.概念的引入

1. 如何用渐近的方法求圆的面积A?

用圆内接正多边形的面积近似圆的面积A.



A_1表示圆内接正6边形面积,

A_2表示圆内接正12边形面积,

A_3表示圆内接正24边形面积,

$\cdots\cdots$,

A_n表示圆内接正$6\times 2^{n-1}$边形面积,

显然n越大, A_n越接近于A.

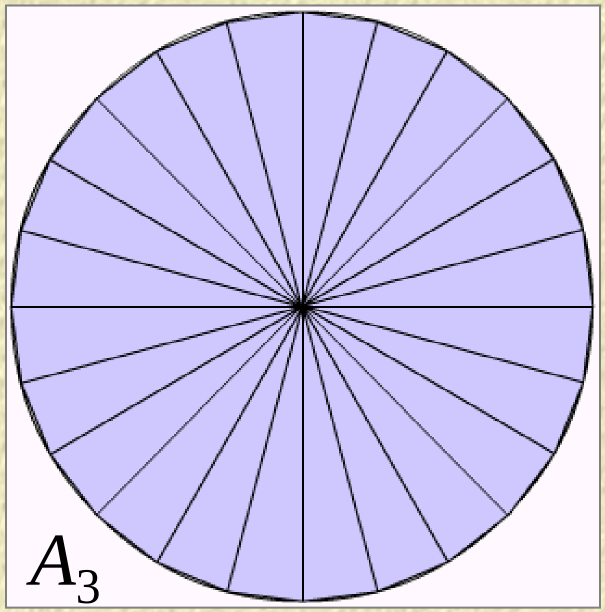
$$A_n = R^2 \cdot 3 \cdot 2^{n-1} \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}$$

因此, 需要考虑当$n \to \infty$时, A_n的变化趋势.

上页 下页 返回

1. 如何用渐近的方法求圆的面积A?

用圆内接正多边



刘徽割圆术:

"…割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣"

——刘徽

积,

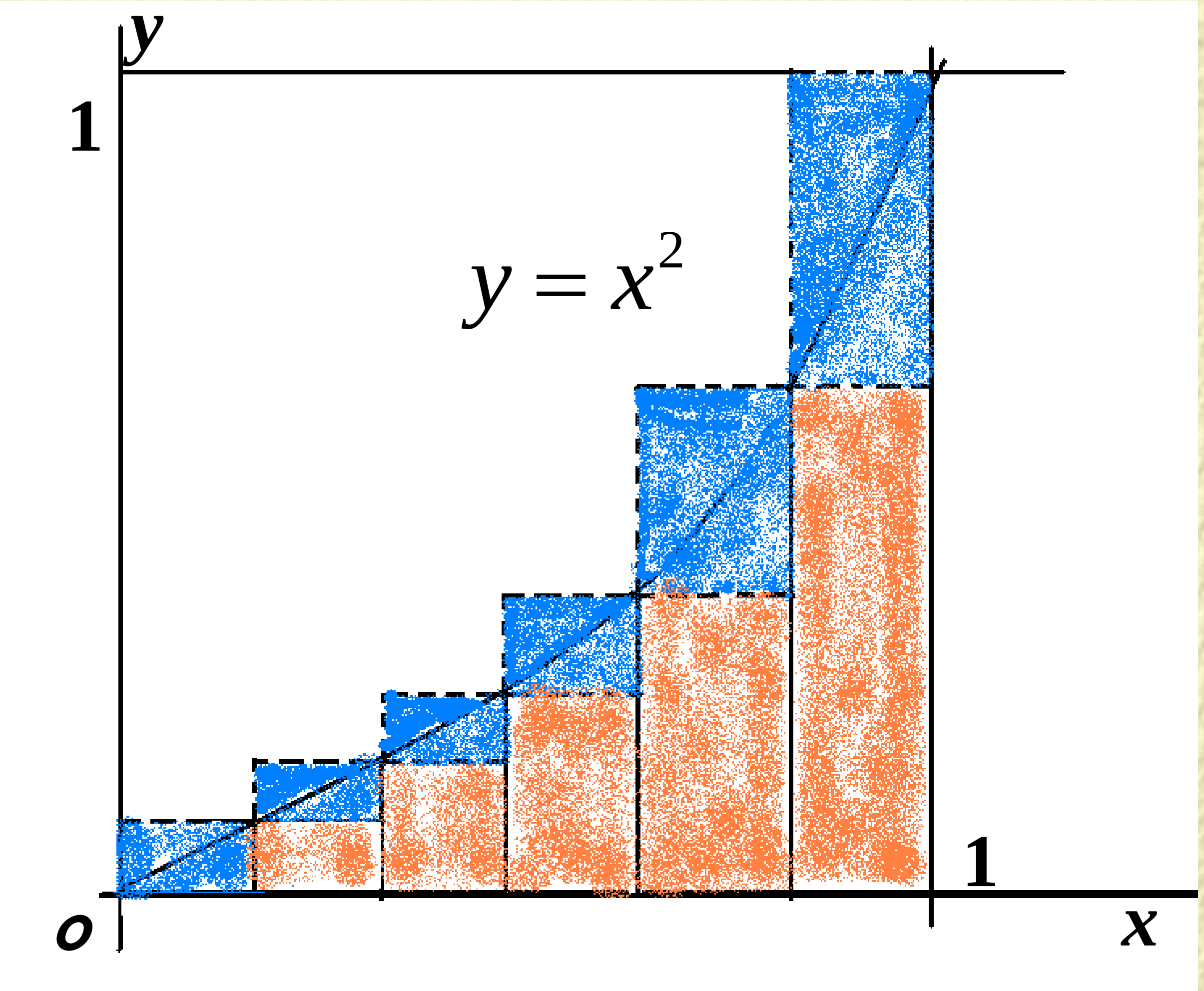
显然n越大, A_n越接近于A. $A_n = R^2\cdot 3\cdot 2^{n-1}\sin\dfrac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}$

因此, 需要考虑当$n\to\infty$时, A_n的变化趋势.

上页 下页 返回

2.曲边三角形的面积问题：

与割圆问题同样的是——**曲边三角形的面积*A***如何计算?



上页 下页 返回

我们通常的做法是:将[0,1]区间n 等份,计算一系列小矩形的面积,不足近似与过剩近似.

不足近似(橘色部分)

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{i-1}{n}\right)^2=\frac{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2}{n^3}$$

$$=\frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)$$

过剩近似(橘色加蓝色部分)

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2=\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

可以看到,随着 n 的不断增大,不足近似不断增加,过剩近似不断减少,两者都越来越接近于同一个数值,则该数值即为所求之曲边三角形的面积 A.

$$\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)\xrightarrow{n\to\infty} A=\frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\xrightarrow{n\to\infty} A=\frac{1}{3}.$$

3. 截杖问题:

“一尺之棰，日截其半，万世不竭”

第一天截下的杖长为$X_1=\frac{1}{2}$;

第二天截下的杖长总和为 $X_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}$;

…… ……

第n天截下的杖长总和为$X_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}$;

$$X_n=1-\frac{1}{2^n} \longrightarrow 1$$

数列定义：

按正整数1,2,3,⋯编号依次排列的一列数

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\cdots (1)$$

称为无穷数列,简称数列,其中的每个数称为数列的项,称x_n为数列的通项(一般项).

数列(1)记为$\{x_n\}$.

例如,$2, 4, 8, \cdots, 2^n, \cdots;\ \{2^n\}$

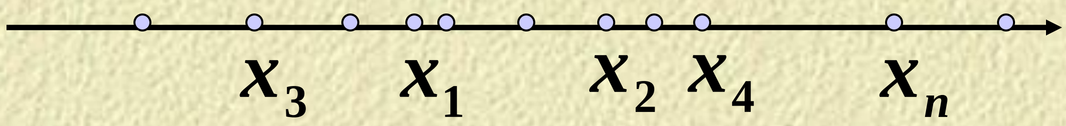
$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots;\ \left\{\frac{1}{2^n}\right\}$$

$$1,-1,1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots;\left\{(-1)^{n-1}\right\}$$

$$2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\cdots,\frac{n+(-1)^{n-1}}{n},\cdots;\left\{\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}\right\}$$

$$\sqrt{2},\sqrt{2+\sqrt{2}},\cdots,\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{2}}}},\cdots$$

注意:数列对应着数轴上的一个点列,可看作一动点在数轴上依次取$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$



Q:当n无限增大时,x_n是否无限接近于某一确定的数值a?如果是,数值a如何确定?

上页 下页 返回

二. 数列极限的定义

Q:当n无限增大时,x_n是否无限接近于某一确定的数值a?如果是,数值a如何确定?

例如,当 n 无限增大时, $x_n = 1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 无限接近于 1.

问题:"无限接近" 意味着什么?如何用数学的语言刻画它.

在数轴上,动点x_n与定点a的距离是$|x_n - a|$,所以,x_n与数a无限接近就相当于$|x_n - a|$无限接近于0.

对于$x_n = 1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, $\left|x_n - 1\right| = \left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$,

给定10^{-2},只要$n > 10^2$时,就有$\left|x_n - 1\right| < 10^{-2}$,

给定10^{-3},只要$n > 10^3$时,就有$\left|x_n - 1\right| < 10^{-3}$,

给定10^{-4},只要$n > 10^4$时,就有$\left|x_n - 1\right| < 10^{-4}$,

$\cdots \quad \cdots$

给定$\varepsilon > 0$,存在$N \geq \frac{1}{\varepsilon}$,只要$n > N$,

就有$\left|x_n - 1\right| < \varepsilon$成立.

上页 下页 返回

定义1.对于数列$\{x_n\}$而言,若存在一个确定的数a,当n不断增大以致无穷时,x_n与定值a无限接近,则称数列$\{x_n\}$收敛于a,数a是数列的极限,记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad 或 \quad x_n \to a \ (n \to \infty).$$

若数列$\{x_n\}$没有极限,则称数列$\{x_n\}$发散.

以上用自然语言来描述的极限定义,缺点有二:

(1).语言的模糊性,何为“不断增大以致无穷”,“无限接近”?

(2).不利于作逻辑推理.

定义1′.对于数列$\{x_n\}$而言,若存在一个确定的数a,对于任意给定的正数ε(无论它多么小)*,总存在正数N,使得对于$n > N$时的一切x_n,$|x_n - a| < \varepsilon$都成立.则称数列$\{x_n\}$收敛于a,数a是数列的极限,记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad 或 \quad x_n \to a \ (n\to\infty).$$

若数列$\{x_n\}$没有极限,则称数列$\{x_n\}$是发散的.

(无论它多么小)* $\longleftarrow$ 实数的稠密性.

上页 下页 返回

数列收敛的表述——用逻辑符号:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n > N, s.t. \left| x_n - a \right| < \varepsilon.$$

$\forall \leftarrow$ *for every, for each*; *for all, for any*

$\exists \leftarrow$ *exist*

$s.t. \leftarrow$ *such that*

数理逻辑中称∀为全称量词,∃为存在量词.

$\varepsilon \leftarrow$ ['epsilɪ∂n] ε – error

上页 下页 返回

例1.(1).用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1.$

分析 $\left|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|=\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}-n}{n}=\dfrac{a^2}{n\left(\sqrt{n^2+a^2}+n\right)}\le\dfrac{a^2}{n},$

$\therefore$ 当 $\dfrac{a^2}{n}<\varepsilon$ 时当然有 $\left|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon.$

$\therefore\ \forall\varepsilon>0,$只要 $\dfrac{a^2}{n}<\varepsilon$即$n>\dfrac{a^2}{\varepsilon}$,就有 $\left|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon.$

$\therefore$ 任给$\varepsilon>0$,我们可取$N\ge\dfrac{a^2}{\varepsilon}.$

用定义证数列极限存在时,关键是对任意给定的$\varepsilon>0$确认N的存在性.

证明 当$a=0$时结论显然成立.

下设$a\neq 0.\forall\varepsilon>0$,取$N\geq\dfrac{a^2}{\varepsilon}$,则

当$n>N$时,$\left|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|=\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}-n}{n}$

$$=\frac{a^2}{n\left(\sqrt{n^2+a^2}+n\right)}\leq\frac{a^2}{n}<\frac{a^2}{N}\leq\frac{a^2}{a^2/\varepsilon}=\varepsilon,$$

即$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1.$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{a^2}{n\left(\sqrt{n^2+a^2}+n\right)}\leq\dfrac{a^2}{2n^2}\\ \dfrac{a^2}{n\left(\sqrt{n^2+a^2}+n\right)}\leq\dfrac{a^2}{2n}\end{array}\right\}\text{均可}$$

求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1.$

分析 法二 $\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|\le\frac{n+|a|}{n}-1$

$=\frac{|a|}{n}<\varepsilon$,只要$n>\frac{|a|}{\varepsilon}$.

$\therefore N$的取值显然只要合适、够用即可.

上页 下页 返回

例1.(2).用定义证明$\alpha\in\mathbb{R}^+$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=0.$

证明 (i).$\alpha\ge 1$ 时，$\frac{1}{n^\alpha}\le\frac{1}{n}$，$\therefore\ \forall\varepsilon>0,\exists N\ge\frac{1}{\varepsilon},\forall n>N,$

有$\left|\frac{1}{n^\alpha}-0\right|=\frac{1}{n^\alpha}\le\frac{1}{n}<\frac{1}{N}\le\frac{1}{1/\varepsilon}=\varepsilon.$

(i i).$0<\alpha<1$ 时，由实数的*Archimedes*性，

$\exists m\in\mathbb{N}$，使$m\alpha>1.$

由$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{m\alpha}}=0\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N>0,\forall n>N,0<\frac{1}{n^{m\alpha}}<\varepsilon^m,$

$\therefore\ 0<\frac{1}{n^\alpha}<\varepsilon,\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=0.$

注意

1.不等式$|x_n - a| < \varepsilon$,ε取值的任意性刻划了x_n与a的无限接近.

2.N与任意给定的正数ε有关,而$n > N$刻划了n的无限增大.

3.由依定义讨论数列极限的过程可见,$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N$,使当$n > N$时有 $|x_n - a| < \varepsilon$.其中的N若存在则显然不唯一,即比前面的取定的N来得大的数都是适用的.所以用定义证明数列极限存在时只要给出一个适用的N即可.

上页 下页 返回

$$4. \lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n > N, s.t. \left| x_n - a \right| < \varepsilon.$$

其中 $\left| x_n - a \right| < \varepsilon$ 写成

$\left| x_n - a \right| \le \varepsilon$, $\left| x_n - a \right| < 2\varepsilon$, $\left| x_n - a \right| < \varepsilon^2$

$n > N$ 写成 $n \ge N$

也是一样的意思.

上页 下页 返回

5.对x_n而言,$\forall \varepsilon > 0$,有无限多个点x_n落在

$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$内,也不能说有$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

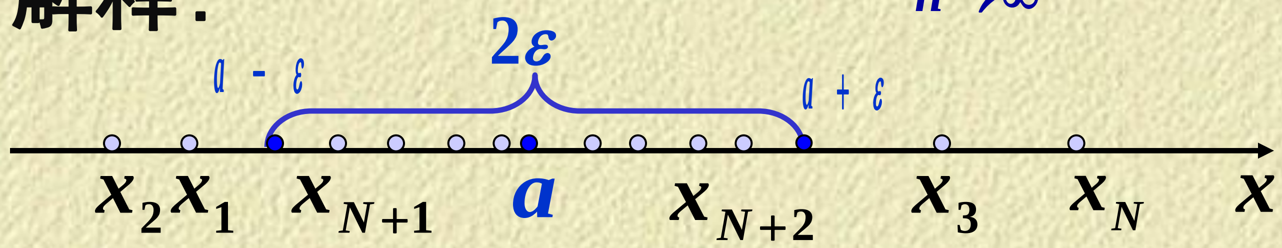
$\forall \varepsilon > 0$,当$n > N$时,$\{x_n\}$对应的所有点都

落在$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$内,至多只有有限个点

$x_1, x_2, \cdots, x_N$落在$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$外

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

几何解释:



定义1″.对于数列$\{x_n\}$,若存在数a,$\forall \varepsilon > 0$,若数列$\{x_n\}$中至多只有有限多个**项**落在$U(a,\varepsilon)$外,则称数列$\{x_n\}$收敛于a.

由此知:改变(如增加或去掉)数列的前有限多项,不改变数列的敛散性.对于收敛数列,其极限值不变.(P25/例9)

上页 下页 返回

三*. 数列发散的表述——用逻辑符号:

数列$\{x_n\}$发散

(1). $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq a \Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0, \forall N \in \mathbb{Z}^+,$

$\exists n_0 > N,$ 有 $|x_{n_0} - a| \geq \varepsilon_0;$

(2). 数列$\{x_n\}$发散 $\Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon_0 > 0,$

$\forall N \in \mathbb{Z}^+, \exists n_0 > N,$ 有 $|x_{n_0} - a| \geq \varepsilon_0.$

例2.证明:数列$x_n=(-1)^{n+1}$是发散的.

证明(1). 若取$a=1$,

则对于$\varepsilon_0=1, \forall N, \exists n_0=2N>N$,

有 $\left|x_{n_0}-a\right|=\left|(-1)^{n_0+1}-1\right|=2>1=\varepsilon_0$,

$\therefore$ 数列$x_n=(-1)^{n+1}$不以1为极限.

(过程显示ε_0可取值范围为$0<\varepsilon_0<2$)

同理,数列$x_n=(-1)^{n+1}$不以-1为极限.

数列$x_n=(-1)^{n+1}$不以任何实数a为极限.

证明(2). 若$-1<a<1$,

则对于$0<\varepsilon_0<\min\left(a+1,1-a\right)$,

$\forall N, \forall n_0 \geq N$,

有 $\left|x_{n_0}-a\right|=\left|(-1)^{n_0+1}-a\right|>\varepsilon_0$,

$\therefore$ 数列$x_n=(-1)^{n+1}$不以$a\left(-1<a<1\right)$为极限.

同样,数列$x_n=(-1)^{n+1}$不以$a\left(|a|>1\right)$为极限.

上页 下页 返回

四.无穷小列与无穷大数列:

定义2.极限为0的数列称为无穷小列.

命题1.

(1).$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n - a\right) = 0$.

(2).无穷小列与有界数列的乘积仍为无穷小列.

(3).有限多个无穷小列的和仍为无穷小列.

上页 下页 返回

(2).无穷小列与有界数列的乘积仍为无穷小列.

证明 设x_n有界,即存在$M > 0, \forall n \in \mathbb{Z}^+, |x_n| \le M$,

而当$n \to \infty$时y_n是无穷小数列,

$$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n > N, \exists |y_n| < \frac{\varepsilon}{M},$$

$$\therefore |x_n y_n| = |x_n| \cdot |y_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,$$

$$\therefore x_n y_n \to 0 \ (n \to \infty).$$

上页 下页 返回

(3).有限多个无穷小列的和仍为无穷小列.

证明 设x_n及y_n是当$n\to\infty$时的两个无穷小数列, $\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists N_1 > 0, N_2 > 0,$使得

$$\forall n > N_1, \exists \left|x_n\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n > N_2, \exists \left|y_n\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

取 $N = \max\left\{N_1, N_2\right\}$,当$n > N$时,恒有

$$\left|x_n \pm y_n\right| \le \left|x_n\right| + \left|y_n\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

$$\therefore x_n \pm y_n \to 0\left(n \to \infty\right).$$

注意:无限多个无穷小的和未必是无穷小.

定义3.绝对值无限增大的数列称为无穷大列.

具体而言,$\forall M>0,\exists N>0,\forall n>N,s.t.\left|x_n\right|\geq M$,

称数列$\{x_n\}$为无穷大数列,记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$.

正无穷大 $\forall M>0,\exists N>0,$

$\forall n>N,s.t.x_n\geq M,\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$;

负无穷大 $\forall M>0,\exists N>0,$

$\forall n>N,s.t.x_n\leq -M,\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty.$

命题2.在$n\to\infty$时,无穷大列的倒数为无穷小列;不等于0的无穷小列的倒数为无穷大列.

$\longrightarrow$以后,我们可以将所有的极限问题都转化为无穷小的问题.

上页 下页 返回

例题选粹

上页 下页 返回

例3.$\forall a \in \mathbb{R}, \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0.$

证明　当$|a| \le 1$时，$\left|\dfrac{a^n}{n!} - 0\right| \le \dfrac{1}{n}, \forall \varepsilon > 0,$

可取$N \ge \dfrac{1}{\varepsilon}, \forall n > N,$有$\left|\dfrac{a^n}{n!} - 0\right| \le \dfrac{1}{n} < \varepsilon.$

当$|a| > 1$时，记$\big[|a|\big] = m$，则$m \le |a| < m+1$，

$$\left|\frac{a^n}{n!} - 0\right| = \frac{\overbrace{|a|\cdots\cdots|a|}^{m个}\ \overbrace{|a|\cdots\cdots|a|}^{n-m个}}{1\cdot 2\cdots\cdots m\cdot(m+1)\cdots\cdots n} \le \frac{|a|^m}{m!}\cdot\frac{|a|}{n}, \left(\begin{matrix}此时\\ n > m\end{matrix}\right)$$

所以只要使得$\dfrac{|a|^{m+1}}{m!}\cdot\dfrac{1}{n} < \varepsilon$成立，$n > \dfrac{|a|^{m+1}}{\varepsilon\cdot m!}$即可.

当$|a|>1$时，$\forall \varepsilon>0, \exists N \geq \max\left(\dfrac{|a|^{m+1}}{\varepsilon \cdot m!}, m\right), \forall n>N$,

有$\left|\dfrac{a^n}{n!}-0\right| = \dfrac{\overbrace{|a|\cdot\cdots\cdot|a|}^{m个}\ \overbrace{|a|\cdot\cdots\cdot|a|}^{n-m个}}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot m\cdot(m+1)\cdot\cdots\cdot n} \leq \dfrac{|a|^m}{m!}\cdot\dfrac{|a|}{n}$,

$= \dfrac{|a|^{m+1}}{m!}\cdot\dfrac{1}{n} < \dfrac{|a|^{m+1}}{m!}\cdot\dfrac{1}{N} \leq \dfrac{|a|^{m+1}}{m!}\cdot\dfrac{1}{|a|^{m+1}/(\varepsilon\cdot m!)} = \varepsilon$成立，

$\therefore \forall a \in \mathbb{R}, \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$.

上页 下页 返回

例4.求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2}{n^2-3}=3.$

条件放大

证明 $\left|\dfrac{3n^2}{n^2-3}-3\right|=\dfrac{9}{n^2-3}<\dfrac{9}{n}$ $\left(n\geq 3\text{时},n^2-3>n\right)$

任给 $\varepsilon>0$,要 $|x_n-3|<\varepsilon$,只要 $\dfrac{9}{n}<\varepsilon$,或 $n>\dfrac{9}{\varepsilon}$,

所以,取 $N\geq\max\left\{3,\dfrac{9}{\varepsilon}\right\}$,则当 $n>N$ 时,

$|x_n-3|<\varepsilon$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2}{n^2-3}=3.$

前面证明中的条件放大并不必须.

要$\left|\dfrac{3n^2}{n^2-3}-3\right| \overset{n>\sqrt{3}}{=\!=\!=} \dfrac{9}{n^2-3}<\varepsilon$,只要$n^2-3>\dfrac{9}{\varepsilon}$,

即$n>\sqrt{3+\dfrac{9}{\varepsilon}}$,所以,取$N\geq\sqrt{3+\dfrac{9}{\varepsilon}}$,则当$n>N$时,

$|x_n-3|<\varepsilon$,即$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2}{n^2-3}=3$.

适当放大

或者,由于$\dfrac{9}{n^2-3}<\dfrac{9}{n^2-4}<\dfrac{9}{n-2}$,所以,要

$\left|\dfrac{3n^2}{n^2-3}-3\right| \overset{n>\sqrt{3}}{=\!=\!=} \dfrac{9}{n^2-3}<\varepsilon$,只要$\dfrac{9}{n-2}<\varepsilon$,即$n>2+\dfrac{9}{\varepsilon}$,

所以,取$N\geq 2+\dfrac{9}{\varepsilon}$,$\cdots$

上页 下页 返回

例5.求证 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$,其中$|q| < 1$.

分析 若$0 < |q| < 1$,任给$\varepsilon > 0$,要找N,使当

$n > N$时,有$|x_n - 0| = |q^n| < \varepsilon, n\ln|q| < \ln\varepsilon$,

$\therefore n > \dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$,所以可取$N \ge \dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$.

证明 若$q = 0$,则$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$;

若$0 < |q| < 1, \forall\varepsilon > 0, \exists N \ge \dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}, \forall n > N$,

有$|q^n - 0| = |q|^n < |q|^N \le |q|^{\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}} = |q|^{\log_{|q|}\varepsilon} = \varepsilon$,

$\therefore |q| < 1$时,$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

上页 下页 返回

例5.证明 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$,其中$|q| < 1$.

法二[分析] 若$0 < |q| < 1$,则$h = \dfrac{1}{|q|} - 1 > 0$,

$$|q^n - 0| = |q|^n = \frac{1}{(1+h)^n} = \frac{1}{1 + nh + \cdots + h^n} < \frac{1}{nh},$$

$\therefore$ 若$\dfrac{1}{nh} < \varepsilon$则$|q^n - 0| < \varepsilon$.故可取$n > \dfrac{1}{\varepsilon h}$.

证明 $\forall \varepsilon > 0$,可取得$N \geq \dfrac{1}{\varepsilon h}$,$\forall n > N$,有

$$|q^n - 0| = \frac{1}{(1+h)^n} < \frac{1}{nh} < \frac{1}{Nh} \leq \varepsilon.$$ 证毕!

上页 下页 返回

例6.求证：(1). $a>1, \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$；(2). $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

分析(1). $a>1$,则 $h=\sqrt[n]{a}-1>0$.

由 $a=(1+h)^{n}\geq 1+nh=1+n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)$,

得 $0<\sqrt[n]{a}-1\leq \dfrac{a-1}{n}$.

证明(1). $\forall\varepsilon>0, \exists N\geq \dfrac{a-1}{\varepsilon}$,则当 $n>N$ 时,

有 $\left|\sqrt[n]{a}-1\right|<\varepsilon$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

法二[分析] $a>1, 1<\sqrt[n]{a}=(1\cdot\cdots\cdot 1\cdot a)^{\frac{1}{n}}$

(将$n-1$个1连乘)

$$<\frac{n-1+a}{n}=1+\frac{a-1}{n}, \therefore 0<\sqrt[n]{a}-1<\frac{a-1}{n}\cdots$$

证明 $\forall \varepsilon>0, \exists N \geq \frac{a-1}{\varepsilon}, \forall n>N,$

$$0 \leq \sqrt[n]{a}-1=(1\cdot\cdots\cdot 1\cdot a)^{\frac{1}{n}}-1<\frac{n-1+a}{n}-1$$

$$=\frac{a-1}{n}<\frac{a-1}{N} \leq \frac{a-1}{(a-1)/\varepsilon}=\varepsilon.$$

求证(1). $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1,(a>1)$.

证法三 $\forall\varepsilon>0$,要找N,使当$n>N$时,$\left|\sqrt[n]{a}-1\right|<\varepsilon$.

$\because a>1,\quad\therefore\sqrt[n]{a}>1,\therefore 0<\sqrt[n]{a}-1<\varepsilon,$

即 $a<(\varepsilon+1)^n, n>\log_{(\varepsilon+1)}a$.

$\therefore\forall\varepsilon>0,\exists N\geq\log_{(\varepsilon+1)}a,\forall n>N, s.t.\left|\sqrt[n]{a}-1\right|<\varepsilon$.

前面那样的放大技巧亦不是必须的.

发现数列$\left\{\sqrt[n]{n}\right\}$的极限.

分析 由近似计算,$\sqrt[1]{1}=1, \sqrt[2]{2}=\sqrt[4]{4}\approx 1.41421356,$

$\sqrt[3]{3}\approx 1.44224957,$ $\sqrt[5]{5}\approx 1.37972966,$

$\sqrt[6]{6}\approx 1.34800616,$ $\sqrt[7]{7}\approx 1.32046925,$

$\sqrt[8]{8}\approx 1.29683956,$ $\sqrt[9]{9}\approx 1.27651801,$

$\sqrt[10]{10}\approx 1.25892541,$ $\sqrt[11]{11}\approx 1.24357523,$

$\sqrt[12]{12}\approx 1.23007551,$ $\sqrt[13]{13}\approx 1.21811404,$

$\sqrt[14]{14}\approx 1.20744203,$ $\sqrt[15]{15}\approx 1.19786006,$

$\sqrt[16]{16}\approx 1.18920712,$ $\sqrt[17]{17}\approx 1.18135208,$

$\sqrt[18]{18}\approx 1.17418725,$ $\sqrt[19]{19}\approx 1.16762348,\cdots$

发现数列$\left\{\sqrt[n]{n}\right\}$的极限.

分析　由近似计算,$\sqrt[3]{3}\approx 1.44224957$,

$\sqrt[10]{10}\approx 1.25892541$,　　$\sqrt[20]{20}\approx 1.16158635$,

$\sqrt[30]{30}\approx 1.12004991$,　　$\sqrt[40]{40}\approx 1.09660823$,

$\sqrt[50]{50}\approx 1.08138266$,　　$\sqrt[60]{60}\approx 1.07062124$,

$\sqrt[70]{70}\approx 1.06257243$,　　$\sqrt[80]{80}\approx 1.05630327$,

$\sqrt[90]{90}\approx 1.05126887$,　　$\sqrt[100]{100}\approx 1.04712855,\cdots$

$$\sqrt[100]{100} \approx 1.04712855, \quad \sqrt[200]{200} \approx 1.02684561,$$

$$\sqrt[300]{300} \approx 1.01919450, \quad \sqrt[400]{400} \approx 1.01509140,$$

$$\sqrt[500]{500} \approx 1.01250678, \quad \sqrt[600]{600} \approx 1.01071859,$$

$$\sqrt[700]{700} \approx 1.00940261, \quad \sqrt[800]{800} \approx 1.00839077,$$

$$\sqrt[900]{900} \approx 1.00758685, \quad \sqrt[1000]{1000} \approx 1.00693167,$$

$$\sqrt[2000]{2000} \approx 1.00380768, \quad \sqrt[3000]{3000} \approx 1.00267235,$$

$$\sqrt[4000]{4000} \approx 1.00207566, \quad \sqrt[5000]{5000} \approx 1.00170489,$$

$$\sqrt[10000]{10000} \approx 1.00092146, \quad \sqrt[50000]{50000} \approx 1.00021642,$$

$$\sqrt[100000]{100000} \approx 1.00011514, \quad \sqrt[500000]{500000} \approx 1.00002625,$$

$$\sqrt[1000000]{1000000} \approx 1.00001382, \quad \sqrt[10000000]{10000000} \approx 1.00000161, \cdots$$

我们猜测数列$\left\{\sqrt[n]{n}\right\}$的极限为 1 .

上页 下页 返回

例6.求证:(2). $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$

(2).分析 记 $\sqrt[n]{n}=1+h_n, h_n>0 \ (n>1)$

$$n=(1+h_n)^n=1+nh_n+C_n^2h_n^2+\cdots+h_n^n>1+C_n^2h_n^2,$$

即$C_n^2h_n^2<n-1, \quad \therefore 0<\sqrt[n]{n}-1=h_n<\sqrt{\dfrac{2}{n}},$

$\therefore$ 当$\sqrt{\dfrac{2}{n}}<\varepsilon$时,则有$0<\sqrt[n]{n}-1<\varepsilon.$

而要使得$\sqrt{\dfrac{2}{n}}<\varepsilon$即$\dfrac{2}{n}<\varepsilon^2,$

只要$n>\dfrac{2}{\varepsilon^2}$,故可取$N\geq\dfrac{2}{\varepsilon^2}.$

证明 记 $\sqrt[n]{n}=1+h_n, h_n>0\ (n>1)$

$$n=(1+h_n)^n=1+nh_n+C_n^2h_n^2+\cdots+h_n^n>1+C_n^2h_n^2,$$

$$\therefore 0<\sqrt[n]{n}-1=h_n<\sqrt{\frac{2}{n}}.$$

$$\therefore \forall\varepsilon>0, \exists N\ge\frac{2}{\varepsilon^2}, \forall n>N,$$

$$0<\sqrt[n]{n}-1<\sqrt{\frac{2}{n}}<\sqrt{\frac{2}{N}}\le\sqrt{\frac{2}{2/\varepsilon^2}}=\varepsilon,$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

上页 下页 返回

注意： 在证明例6.求证：(2). $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ 时，

$\forall\varepsilon>0$，为简便地给出N，我们用了放大缩小的技巧，

但要注意放缩分寸的把握.

记 $\sqrt[n]{n}=1+h_n, h_n>0\ (n>1)$，

$(1+h_n)^n=n=1+nh_n+C_n^2h_n^2+\cdots+h_n^n>1+C_n^2h_n^2$，

$\therefore 0<\sqrt[n]{n}-1=h_n<\sqrt{\dfrac{2}{n}}$，这个放缩就合适.

而$(1+h_n)^n=n=1+nh_n+C_n^2h_n^2+\cdots+h_n^n>1+nh_n$

就不合用了，你得到的是 $0<\sqrt[n]{n}-1=h_n<\dfrac{n-1}{n}$.

若你作$(1+h_n)^n=n=1+nh_n+C_n^2h_n^2+\cdots+h_n^n>1+C_n^3h_n^3$

(当然此时$n\geq3$)这样 $C_n^3h_n^3<n-1\cdots$也是可以的.

上页 下页 返回

还可以注意到,在证明例6.求证:(2). $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ 时,

我们用了放缩的技巧,可行的不同的放缩只是得到了不同的N而已.

如记 $\sqrt[n]{n}=1+h_n, h_n>0\ (n>1)$,

$$(1+h_n)^n=n=1+nh_n+C_n^2h_n^2+\cdots+h_n^n>C_n^2h_n^2,$$

$\therefore 0<\sqrt[n]{n}-1=h_n<\sqrt{\dfrac{2}{n-1}}$,这个放缩也是合适的.

要使得$\sqrt{\dfrac{2}{n-1}}<\varepsilon$ 那只要$n>\dfrac{2}{\varepsilon^2}+1$,

故可取$N\geq\dfrac{2}{\varepsilon^2}+1$.

例6.求证：(2). $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$

法二[分析] $1\le\sqrt[n]{n}=\left(1\cdot\cdots\cdot1\cdot\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\right)^{\frac{1}{n}}$

（将$n-2$个1连乘）

$\le\dfrac{n-2+2\sqrt{n}}{n}<1+\dfrac{2}{\sqrt{n}}$, $\therefore 0\le\sqrt[n]{n}-1<\dfrac{2}{\sqrt{n}}\cdots$

证明 $\forall\varepsilon>0,\exists N\ge\dfrac{4}{\varepsilon^2},\forall n>N$,有

$$0\le\sqrt[n]{n}-1=\left(1\cdot\cdots\cdot1\cdot\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\right)^{\frac{1}{n}}-1$$

$$\le\frac{n-2+2\sqrt{n}}{n}-1<\frac{2}{\sqrt{n}}<\frac{2}{\sqrt{N}}\le\frac{2}{\sqrt{4/\varepsilon^2}}=\varepsilon.$$

上页 下页 返回

要注意到,在用极限定义证明时,我们用放缩的技巧,有的放缩奏效有的放缩不奏效,这需要我们探索.如

$$(1).\ 1\le\sqrt[n]{n}=\left(1\cdots\cdots1\cdot\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\right)^{\frac{1}{n}}\quad(\text{将}n-2\text{个}1\text{连乘})$$

$$\le\frac{n-2+2\sqrt{n}}{n}<1+\frac{2}{\sqrt{n}},\therefore 0\le\sqrt[n]{n}-1<\frac{2}{\sqrt{n}},\text{合用.}$$

$$(2).\ 1\le\sqrt[n]{n}=\left(1\cdots\cdots1\cdot n\right)^{\frac{1}{n}}\quad(\text{将}n-1\text{个}1\text{连乘})$$

$$\le\frac{n-1+n}{n}<2-\frac{1}{n},\therefore 0\le\sqrt[n]{n}-1<1-\frac{1}{n},\text{不合用.}$$

$$(3).\ 1\le\sqrt[n]{n}=\left(1\cdots\cdots1\cdot\sqrt[3]{n}\cdot\sqrt[3]{n}\cdot\sqrt[3]{n}\right)^{\frac{1}{n}}\quad(\text{将}n-3\text{个}1\text{连乘})$$

$$\le\frac{n-3+3\cdot\sqrt[3]{n}}{n}<1+\frac{3}{\sqrt[3]{n^2}},\therefore 0\le\sqrt[n]{n}-1<\frac{3}{\sqrt[3]{n^2}},\text{亦合用.}$$

由前面的讨论我们可以获知一些简单的数列极限的结果,如(1). $\alpha > 0$时, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=1$,

(2). $|q|<1$时有 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0\cdots$

但是,人的直觉/感性认识能走多远?我们只有学会理性地思考问题,利用逻辑推理的方法才能确定更为复杂的极限问题,如

(1). $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=?$ (2). $a>1, b\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^b}{a^n}=?$

(3). $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^n=?$

思考练习

1.利用定义证明:

(1). $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n+1}=\dfrac{3}{2}$; (2). $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$;

(3). $a>1,\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{a^n}=0$.

2.证明: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$.

又问:反之是否成立?

3.给出结论,并说明理由.

(1). $|q|<1, \lim\limits_{n\to\infty} n^2 q^n = ?$

(2). $a>1, k\in\mathbb{Z}^+$为定值, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n} = ?$