# Chap.01. 实数集与函数

§1.1 实数
§1.2 确界原理
§1.3 函数

# §1.1　实数

## 0.记号与术语

自然数$(natural\ \ number)$集 $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\cdots\}$,

整数集 $\mathbb{Z}=\{\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots\}$,[德文]$Zahlen$

正整数集 $\mathbb{N}^*=\mathbb{Z}^+=\{1,2,3,\cdots\}$,

有理数$(rational\ \ number)$集 $\mathbb{Q}$,$quotient$

实数$(real\ \ number)$集 $\mathbb{R}$,

$\mathbb{R}^+$:正实数集　　　　$\mathbb{R}^-$:负实数集

复数$(Complex\ \ number)$集 $\mathbb{C}$

∃: 存在, *exist* 存在量词

∀ : *for every, for each*…对每一个√

全称量词

*for any*, *for all*…对任意的

上页 下页 返回

## 一.实数概念

1.回顾中学数学对有理数和无理数的定义：

$$
\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{有限小数和无限循环小数,或}\\ \text{分数}\,\dfrac{q}{p}\left(p,q\text{为既约整数},\ p\in\mathbb{Z}^{+}\right)\end{cases}\\ \text{无理数：无限不循环小数}.\end{cases}
$$

约定：有限位十进制小数表示为无限循环小数

$a_0.a_1a_2$ [redacted]

对正整数 $x=a_0,\ x=\left(a_0-1\right).999\cdots$

上页 下页 返回

之所以需要讨论实数问题,将实数表示为无穷小数,

是基于如如下的问题:

1. 边长为$a,b$的矩形的面积$A$,

(1). $a,b\in\mathbb{Z}^{+}, A=a\cdot b;$

(2). $a,b\in\mathbb{Q}^{+}, a=\dfrac{q}{p},(p,q)=1\cdots A=a\cdot b;$

(3). $a\in(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})^{+}, b\in\mathbb{R}^{+}, A=\cdots=a\cdot b.$

2. $a>0, y=a^{x}=?$

(1). $x\in\mathbb{Z}^{+}, y=a^{x}=a\cdots a$ ,$x$个$a$相乘;

(2). $x=\dfrac{q}{p}\in\mathbb{Q}, p\in\mathbb{Z}^{+}, y=a^{x}=a^{\frac{q}{p}}=\left(a^{\frac{1}{p}}\right)^{q};$

(3). $x\in(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}), y=a^{x}=?$

## 2.两个实数的大小关系：

定义1.1 (*A*).给定两个非负实数

$x = a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots, y = b_0.b_1b_2\cdots b_n\cdots,$

$\forall n \in \mathbb{N}, a_n, b_n \in \mathbb{N}.$

(1).$\forall k \in \mathbb{N}$,有$a_k = b_k$,则$x = y$;

(2).若$a_0 > b_0$,或者$\exists$某个$l \in \mathbb{N}, \forall k = 0,1,\cdots,l$,

有$a_k = b_k$,但$a_{l+1} > b_{l+1}$,则$x > y$或$y < x$.

(*B*).对于两个负实数$x, y$,若$-x = -y$,则$x = y$;

若$-x > -y$,则$x < y$或$y > x$.

通过有限小数比较实数大小的等价条件：

定义1.2 (1).设$x=a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$为非负实数，称有理数$x_n=a_0.a_1a_2\ldots a_n$为实数$x$的$n$位不足近似，而$\overline{x}_n=x_n+\dfrac{1}{10^n}$为实数$x$的$n$位过剩近似，$n=0,1,2,\cdots$

(2).对于负实数设$x=-a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$，其$n$位不足近似与$n$位过剩近似规定为

$$x_n=-a_0.a_1a_2\ldots a_n-\frac{1}{10^n}\text{和}\overline{x}_n=-a_0.a_1a_2\ldots a_n.$$

$\forall$任意实数的不足近似与过剩近似,

$$x_0 \le x_1 \le x_2 \le \cdots, \ \bar{x}_0 \ge \bar{x}_1 \ge \bar{x}_2 \ge \cdots$$

**命题1.1** 设 $x = a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$,

$y = b_0.b_1b_2\cdots$为两个实数.

则$x > y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}$,使得 $x_n > \bar{y}_n$.

上页 下页 返回

## 二.实数的性质:

1. 实数集ℝ对加,减,乘,除(除数不为0)四则运算是封闭的.即任意两个实数和,差,积,商(除数不为0)仍然是实数.

›››实数集是一个域,故实数集也称为实数域.

2. 实数集是有序的.即任意两个实数$a, b$必满足下述三个关系之一(三歧性) : $a < b$, $a = b$, $a > b$.

3. 实数集的大小关系具有传递性.即若$a>b$, $b>c$,则有$a>c$.

例1. 设 $a,b\in\mathbb{R},\forall\varepsilon>0$,恒有$a<b+\varepsilon$,求证:$a\le b$.

证明 用反证法

假设结论不成立,根据实数的有序性,

则有$a>b$.令$\varepsilon=a-b$,

则$\varepsilon>0$,且$a=b+\varepsilon$,这与条件

"$\forall\varepsilon>0$,恒有$a<b+\varepsilon$" 相矛盾.

假设不成立. $\therefore$ 结论成立.

思考题:

1. 设 $a,b\in\mathbb{R},\varepsilon$ 是任意给定的正数,恒有关系式

$|a-b|<\varepsilon$成立,请问$a,b$间关系如何?

**4.实数具有Archimedes性,**即$\forall a,b\in\mathbb{R}$,若

$b>a>0$,则$\exists n\in\mathbb{N}^*$,使得$na>b$.

理由如下:

设$a=a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots, a_0=k\in\mathbb{N}$,

则$a\le k+1<10^{k+1}$.

设$b=b_0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$,

$b_p$为第一个不为零的正整数,

令$n=10^{p+k+1}$,则$nb\ge 10^{k+1}>a$.

例2. 若 $b>0$,则 $\exists n\in\mathbb{Z}^{+}$, 使得 $\dfrac{1}{n}<b.$

证明　若 $b\geq 1$,只要$n\geq 2$,就使得 $\dfrac{1}{n}<b.$

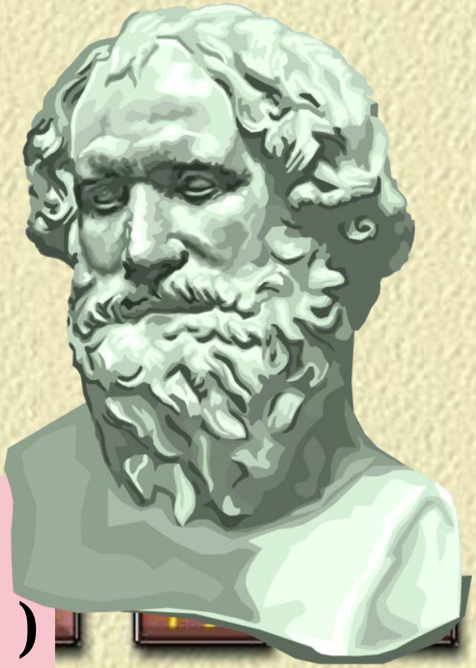
只需考虑$0<b<1$的情形,由阿基米德性,

$\exists n\in\mathbb{Z}^{+}$,使 $nb>1$, 即$\dfrac{1}{n}<b.$

**实数具有*Archimedes*性,**

即$\forall a,b\in\mathbb{R}$,若$b>a>0$,

则$\exists n\in\mathbb{N}^{*}$,使得$na>b.$



阿基米德 ( Archimedes,

287B.C.－212B.C. , 希腊 )

5.实数集$\mathbb{R}$具有**稠密性**.即任何两个不相等的实数之间必有另一个实数,且既有有理数,也有无理数.

(1). 任意两个不相等的实数 $a$ 与 $b$ 之间,必有另一个实数 $c$. 例如 $c=\dfrac{a+b}{2}$;

(2). 任意两个不相等的实数 $a$ 与 $b$ 之间,既有有理数又有无理数.

证明　若 $a<b$,则由例 1,存在 $n\in\mathbb{Z}^{+}$, 使

$$\frac{1}{n}<\frac{1}{2}(b-a).$$

上页 下页 返回

设 $k$ 是满足 $\dfrac{k}{n} \le a$ 的最大整数,即 $\dfrac{k+1}{n} > a$,

于是,$a < \dfrac{k+1}{n} < \dfrac{k+2}{n} = \dfrac{k}{n} + \dfrac{2}{n} < a + b - a = b$,

则 $\dfrac{k+1}{n}, \dfrac{k+2}{n}$ 是 $a$ 与 $b$ 之间的有理数,

$$a < \frac{k+1}{n} + \frac{\sqrt{2}}{2n} < \frac{k+1}{n} + \frac{1}{n} < b,$$

因而 $\dfrac{k+1}{n} + \dfrac{\sqrt{2}}{2n}$ 是 $a$ 与 $b$ 之间的无理数.

6. 实数集 $\mathbb{R}$ 与数轴上的点具有一一对应关系. 即任一实数都对应数轴上唯一的一点,反之,数轴上的每一点也都唯一的代表一个实数.

(1).这种对应关系,粗略地可这样描述:

设$P$是数轴上的一点(不妨设在0的右边),

若$P$ 在整数 $n$与$n+1$之间,则$a_0 = n$.

把$(n, n+1]$十等分,若点 $P$ 在第 $i+1$个区间,

则令 $a_1 = i$.类似可得到 $a_n, n = 2, 3, \cdots$.

这时, 令点 $P$ 对应于$a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$.

上页 下页 返回

反之, 任何一实数也对应数轴上一点.

(2) 实数集与数轴上点的一一对应关系反映了实数的完备性. 我们将在后面有关章节中作进一步讨论.

**实数的完备性**

——有理数列1.4,1.41,1.414,1.4142,…在有理数集Q中没有极限,在实数集R中的极限 $\sqrt{2}$ 不是一个有理数.所以说,有理数集不完备.

**实数的连续性**

——实数的全体充满实数轴,实数轴上没有空隙.如果一刀砍向实数轴,那么必定砍到一个点,该点坐标是一个实数.

## 三. 绝对值与不等式

几个重要不等式:

$a, b \in \mathbb{R}$,

(1). $\big||a|-|b|\big| \le |a \pm b| \le |a|+|b|$;

(2). $a^2+b^2 \ge 2|ab|$;

(3). $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \le 1,$

$|x| \le \dfrac{\pi}{2}, |\sin x| \le |x|$;

$|x| < \dfrac{\pi}{2}, |x| \le |\tan x|$;

(4).均值不等式　对$\forall a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbb{R}^+$,记

$$M(a_i)=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i,\cdots\cdots\text{算术平均}$$

$$G(a_i)=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)^{\frac{1}{n}},\cdots\cdots\cdots\cdots\text{几何平均}$$

$$H(a_i)=\frac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}=\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i}}.\cdots\cdots\text{调和平均}$$

均值不等式　$H(a_i)\le G(a_i)\le M(a_i)$,

当且仅当$a_1=a_2=\cdots=a_n$时等号成立.

(5). 利用*Newton*二项展开式得到的不等式:

Newton二项展开式 : $n\in\mathbb{Z}^+$,

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k$$

$$=a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+C_n^3a^{n-3}b^3+\cdots+b^n,$$

其中规定 : $a^0\triangleq 1, C_n^0\triangleq 1.$

对$h\in\mathbb{R}$,由Newton二项展开式

$$(1+h)^n=1+nh+C_n^2h^2+C_n^3h^3+\cdots+h^n.$$

上页 下页 返回

对$\forall h>0$,由Newton二项展开式

$$(1+h)^n=1+nh+C_n^2h^2+C_n^3h^3+\cdots+h^n,$$

有：$(1+h)^n>$上式右端的任何有限项,

即 $$(1+h)^n>1+nh,$$

$$(1+h)^n>1+C_n^2h^2,\cdots$$

上页 下页 返回

(6). *Bernoulli*不等式：

$\forall x > -1$,有$(1+x)^n \geq 1+nx, n \in \mathbb{N}$.

当 $x > -1$且$x \neq 0, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$时,有严格

的不等式： $(1+x)^n > 1+nx$.

证明 由 $1+x>0$且$1+x \neq 1 \Rightarrow$

$$(1+x)^n + n - 1$$

$$= (1+x)^n + 1 + 1 + \cdots + 1 > n \cdot \sqrt[n]{(1+x)^n}$$

$$= n(1+x) \Rightarrow \quad (1+x)^n > 1+nx.$$

思考题：

2.设 $a,b,c\in\mathbb{R}^+$（$\mathbb{R}^+$ 表示全体正实数的集合），则有关系式：

$$\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right|\le|b-c|$$

成立.它的几何意义是什么？

上页 下页 返回

## 小结

实数中的规定：有限十进小数表示成无限循环小数

$$a_0.a_1a_2\cdots a_n = a_0.a_1\cdots(a_n-1)99\cdots9\cdots$$

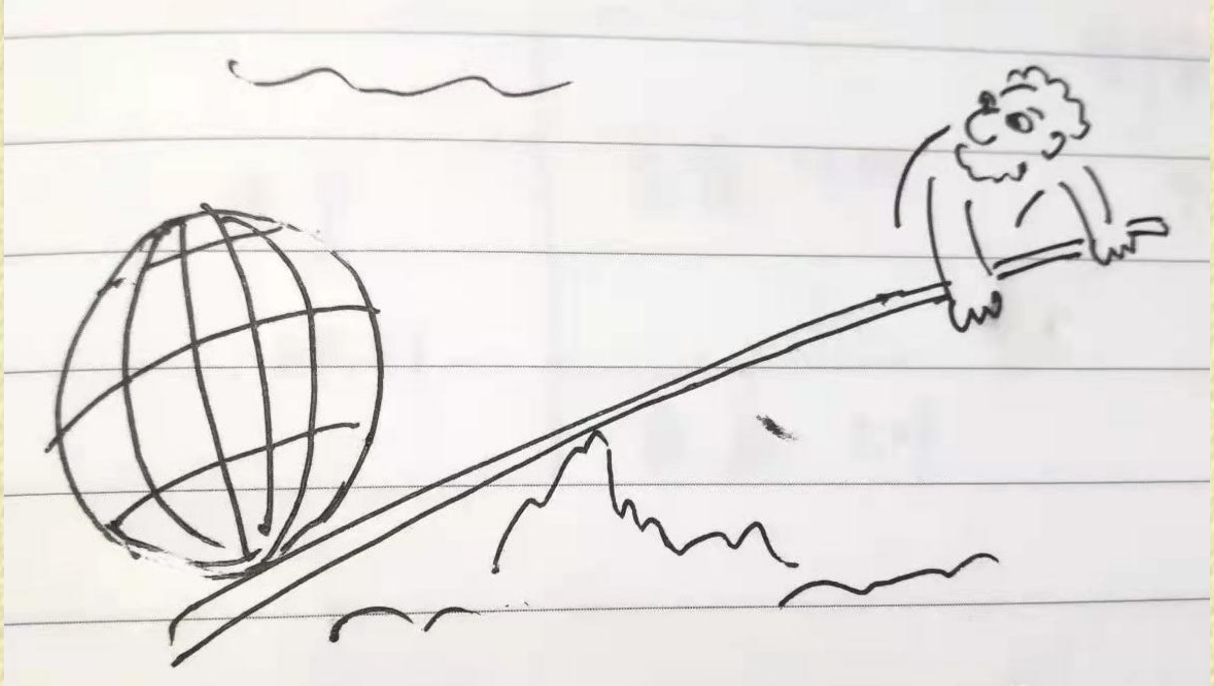
就是相当于首先承认以下结论：

$0.99\cdots9\cdots=1 \Leftrightarrow$

$$\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\cdots+\frac{9}{10^n}+\cdots=\frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}}=1$$

在此基础上获得了 实数的完备性, 于是也就有了实数的 **Achimedes**性, 和实数的 稠密性 .而这正是后面我们将要讨论的极限理论的基础, 比如后面讨论的**确界原理**, 就是根据实数的无限十进小数表示法和不足近似与过剩近似 等的有关结论得到的.而本课程的教材是以 **确界原理** 为极限理论的基础!

实数中“有限十进小数表示成无限循环小数”的规定就是托起极限理论的支点



古希腊科学家阿基米德的豪言壮语：
给我一个支点，我就能撬动地球！