§3. 函数的可积性问题 (I)

牛顿—莱布尼茨公式的证明过程显示了:闭区间上的连续函数是*Riemann*可积的.那么,一般而言,闭区间上的函数需满足怎样的条件,使其是*Riemann*可积的呢?

函数的可积性问题是一个复杂的问题.

$Th.9.2$ 设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上可积,则$f(x)$在区间$[a,b]$上有界.

证明 用反证法 .假设$f(x)$在区间$[a,b]$上无界,则对于$[a,b]$上任意一个分割T,必定存在属于T的某个小区间Δ_k ,$f(x)$在Δ_k上无界.在$i\neq k$的各个小区间Δ_i 上任取ξ_i ,记$G=\left|\sum\limits_{i\neq k} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i\right|$,

对任意取定的正数M,由于$f(x)$在Δ_k上无界,故存在$\xi_k\in\Delta_k$,使得

$$\left|f\left(\xi_k\right)\right|>\frac{G+M}{\Delta x_k},\text{其中}G=\left|\sum_{i\neq k} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i\right|.$$

$$\left|f\left(\xi_k\right)\right| > \frac{G+M}{\Delta x_k},\text{其中}G = \left|\sum_{i\neq k} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i\right|.$$

于是有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i\right| \geq \left|f\left(\xi_k\right)\Delta x_k\right| - \left|\sum_{i\neq k} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i\right|$$

$$> \frac{G+M}{\Delta x_k}\Delta x_k - G = M.$$

由此可见,对于无论多么小的$\|T\|$,按上述方法选取点集$\{\xi_i\}$时,总能使得积分和的绝对值大于任意给定的$M>0$.故积分和的极限不存在,而这与$f(x)$在$[a,b]$上可积矛盾.

$\therefore\ f \in R[a,b] \Rightarrow f(x)$在区间$[a,b]$上有界.

上页 下页 返回

$Th.9.2$ 设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上可积,则$f(x)$在区间$[a,b]$上有界.

证明二 从正面来证明.

$\because f\in R[a,b]$,记$\int_a^b f(x)dx = I$,

则对于$\varepsilon = 1$,必定存在$[a,b]$的一个分割T,

使得 $\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| < \varepsilon = 1$,

$$\therefore \left|f(\xi_1)\right| < \frac{1}{\Delta x_k}\left\{|I| + 1 + \left|\sum_{i=2}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right|\right\}$$

证明二 $\because f \in R[a,b]$,记$\int_a^b f(x)dx = I$,

则对于$\varepsilon = 1$,必定存在$[a,b]$的一个分割T,使得

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| < \varepsilon = 1 ,$$

$$\therefore \left|f(\xi_1)\right| < \frac{1}{\Delta x_k}\left\{|I| + 1 + \left|\sum_{i=2}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right|\right\}.$$

此时,把$\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$中的$\xi_i$固定下来,$i = 2,3,\cdots,n$,

所以上式右边是一个确定的正数,而ξ_1是在$[x_0, x_1]$

上任意变动的.

这样,我们就证明了$f(x)$在Δ_1上有界. 同样,可以证明

$f(x)$在$\Delta_2, \Delta_3, \cdots, \Delta_n$上有界,所以$f(x)$在$[a,b]$上有界.

由$Th.9.2$知,在区间$[a,b]$上函数有界是可积的必要条件.

若在$[a,b]$上函数$f(x)$无界,则$f(x)$在$[a,b]$上必定不可积.

当然,在$[a,b]$上$f(x)$有界,则在$[a,b]$上$f(x)$未必可积.

比如,因为函数$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$在$(0,1]$上无界,所以符号$\int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$表示的不是一个定积分.

在$[a,b]$上有界的函数未必可积 .比如*Dirichlet*

函数 $D(x)=\begin{cases}1\ \ ,\ x\in\mathbb{Q}\\0, x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$, $|D(x)|\le 1,\forall x\in\mathbb{R}.$

对于$[0,1]$的任一分割T,由有理数与无理数在实数中的稠密性,在分割T的每一个Δ_i上,当ξ_i都取有理数时,$\sum_{i=1}^{n}D(\xi_i)\Delta x_i=1$,而当$\xi_i$都取无理数时,

$\sum_{i=1}^{n}D(\xi_i)\Delta x_i=0.$ 所以无论$\|T\|$多么小,积分和的极限不存在,说明$D(x)$在$[0,1]$上不可积.

2.可积的充要条件

设$T=\{\Delta_i, i=1,2,\cdots,n\}$为对$[a,b]$的任意一个分割,由

f 在$[a,b]$上有界,则f 在每个Δ_i上有上、下确界:

$$M_i=\sup_{\Delta_i} f(x), m_i=\inf_{\Delta_i} f(x)$$

于是,我们分别称$S(T)=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$,$s(T)=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i$

为 f 关于分割T的Darboux上和与Darboux下和,

任取$\xi_i\in\Delta_i$,显然有$s(T)\le\sum_T f(\xi_i)\Delta x_i\le S(T)$.

与积分和相比,达布和只与分割T有关,而与$\{\xi_i\}$无关.

上页 下页 返回

$Th.9.3$ 函数 f在$[a,b]$上可积的充要条件是

$\forall \varepsilon > 0$,存在$[a,b]$的分割$T = \{\Delta_i, i = 1,\cdots,n\}$,

使得 $S(T) - s(T) < \varepsilon$.

记$\omega_i = M_i - m_i$,称为是函数 f在Δ_i上的振幅,

$$\therefore S(T) - s(T) = \sum_T \omega_i \Delta x_i$$

$Th.9.3'$ 函数 f在$[a,b]$上可积的充要条件是

$\forall \varepsilon > 0$,存在$[a,b]$的分割$T = \{\Delta_i, i = 1,\cdots,n\}$,

使得 $\sum_T \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$.

上页 下页 返回

3.可积的充分条件

前面*Th*.9.1 证明中我们已经看到,函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续,则$f(x)$在$[a,b]$上可积.

这里我们再强调一下:

Th.9.4 若函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续,则$f(x)$在区间$[a,b]$上可积.

Th.9.5 若函数$f(x)$在区间$[a,b]$上有界,且只有有限多个间断点,则$f(x)$在区间$[a,b]$上可积 .

$Th.9.6$ 若函数$f(x)$是区间$[a,b]$上的单调函数,则$f(x)$在区间$[a,b]$上可积.

证明 不失一般性,设$f(x)$为增函数,且$f(b)>f(a)$.

否则,如果$f(b)=f(a)$,则$f(x)$在$[a,b]$上为常数,当然是可积的 .

对$[a,b]$的任一分割T, $f(x)$在T所属的每个小区间$\Delta_i=[x_{i-1},x_i]$上的振幅为$\omega_i=f(x_i)-f(x_{i-1})$.于是有

$$\sum_T \omega_i \Delta x_i \le \sum_1^n \left[f(x_i)-f(x_{i-1}) \right] \|T\| = \left[f(b)-f(a) \right] \|T\|,$$

由此可见,$\forall \varepsilon>0$,只要$\|T\|<\dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$,就有$\sum_T \omega_i \Delta x_i<\varepsilon$,

所以$f(x)$在$[a,b]$上可积.

注记 1. 单调函数如果有间断点,则其间断点必定为第一类间断点.

注记 2. 单调函数可以有至多可列多个间断点,但其仍然是*Riemann*可积的 .

注3. 函数$f(x)$在$[a,b]$上Riemann可积与在$[a,b]$上函数$f(x)$有原函数是两回事.

例 1.(1).函数$H(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ 1, & x\geq 0 \end{cases}$, $x=0$是函数$H(x)$的第一类间断点,所以函数$H(x)$不存在原函数.

(2). 函数$H(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ 1, & x\geq 0 \end{cases}$, $x=0$是函数$H(x)$的第一类间断点,所以函数$H(x)$在区间$[-1,1]$上可积.

例 2.(1).函数$F(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x^2}, x\neq 0 \\ 0 \quad , \quad x=0 \end{cases}$,

则$F'(x)= f(x)=\begin{cases} 2x\cos\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x}\sin\dfrac{1}{x^2}, x\neq 0 \\ 0 \quad , \quad x=0 \end{cases}$,

$x=0$是函数$f(x)$的第二类间断点 ,函数$f(x)$有原函数$F(x)$.

(2). 函数$f(x)=\begin{cases} 2x\cos\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x}\sin\dfrac{1}{x^2}, x\neq 0 \\ 0 \quad , \quad x=0 \end{cases}$,

在$U^o(0)$内$f(x)$无界,所以函数 $f(x)$在区间$[-1,1]$上不可积 .

例 3.(1).*Dirichlet* 函数 $D(x)=\begin{cases} 1\ , & x\in\mathbb{Q} \\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$,

不存在原函数$C(x)$, 使得$C'(x)=D(x)$.

(2).*Dirichlet* 函数 $D(x)=\begin{cases} 1\ , & x\in\mathbb{Q} \\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$,

在任一有限区间$[a,b]$上不可积.

例 3.(1). *Dirichlet* 函数$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$,

在任意一点$x_0\in\mathbb{R}$ 处的左右极限均不存在,

任意一点$x_0\in\mathbb{R}$ 都是$D(x)$的第二类间断点,

但是不存在函数$C(x)$,使得$C'(x)=D(x)$.

因为,否则,若存在$C(x)$,使得$C'(x)=D(x)$,

$C'(1)=1, C'\left(\sqrt{2}\right)=0$,据*Darboux* 定理$(Th.4)$

知$\exists\,\xi\in\left(1,\sqrt{2}\right)$,使得$C'(\xi)=\frac{1}{2}=D(\xi)$,

而这是不可能的 .

例 4.设$f(x)=\begin{cases} 2x\ ,\ 0\le x\le 1 \\ 5\ \ ,\ 1<x\le 2 \end{cases}$,求$\int_0^2 f(x)dx$.

解 由$Th.9.5$ 知该积分存在,且可以利用积分的区间可加性得到:

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx\ ,$$

在$[1,2]$上补充定义

$x=1$ 时, $f(x)=5$,于是,

原式$=\int_0^1 2xdx+\int_1^2 5dx=6$.