

□ 本章的主要内容

- 等值式与基本的等值式
- 等值演算与置换规则
- 析取范式与合取范式、主析取范式与主合取范式
- 联结词完备集(不讲)

□ 本章与后续各章的关系

- 是第一章的抽象与延伸
- 是后续各章的现行准备

(1) 两公式什么时候代表了同一个命题呢?

(2) 抽象地看, 它们的真假取值完全相同时即代表了相同的命题。

(2) 设公式A,B共同含有n个命题变项, 可能对A或B有哑元, 若A与B有相同的真值表, 则说明在 2^n 个赋值的每个赋值下, A与B的真值都相同。于是等价式 $A \leftrightarrow B$ 应为重言式。

A或B中可能有哑元出现。

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \vee (\neg r \wedge r)$$

r为左边公式中的哑元。

用真值表可以验证两个公式是否等值。

两个不同的命题公式，对于其命题变元的各种真值指派，可有相同的真值。如由前面真值表可知 $p \rightarrow q$ 与 $\neg q \rightarrow \neg p$ 在各种真值指派下，它们有相同的真值。

例1 列出 $p \leftrightarrow q, (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q), (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ 的真值表

p	q	$p \leftrightarrow q$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
0	0	1	1	1
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	1	1

定义 设**A**、**B**是两个命题公式， p_1, p_2, \dots, p_n 出现在**A**和**B**中所有的命题变元。如果对于 P_1, P_2, \dots, P_n 的 2^n 个真值组合的每一个，**A**的真值和**B**的真值都相同，则称公式**A**等价(或等值)与公式**B**，记作 **A** \Leftrightarrow **B**

要判断两个命题公式是否等价，根据定义，只要将两个命题公式的真值表列出，判断两个真值表是否相同即可。

例2 证明 $\neg(p \rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$

证明：列出真值表如下

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg(p \rightarrow q)$	$p \wedge \neg q$
0	0	1	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	1	1	0	0

例 判断下列各组公式是否等值：

(1) $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ 与 $(p \wedge q) \rightarrow r$

p	q	r	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow r$
0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1

结论： $p \rightarrow (q \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \rightarrow r$

(2) $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ 与 $(p \rightarrow q) \rightarrow r$

p	q	r	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \rightarrow r$
0	0	0	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1

结论: $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ 与 $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ 不等值

由上面真值表可知原等价式成立。

定义 设 \mathbf{A} 是一个命题公式, A' 是 \mathbf{A} 的一部分, 且 A' 也是一个命题公式, 则称 A' 是 \mathbf{A} 的子公式。

定理1 设 A' 是 \mathbf{A} 的子公式, B' 是一命题公式且 $A' \Leftrightarrow B'$. 将 A 中的 A' 用 B' 来取代, 则得到一个新的公式, 记为 \mathbf{B} , 且 $A \Leftrightarrow B$. (这一命题等价演算的规则我们称之为**置换规则**)
证明 (略)

常用逻辑等值式(关于 \vee 与 \wedge)

✱幂等律(idempotent laws)

$$A \Leftrightarrow A \vee A$$

$$A \Leftrightarrow A \wedge A$$

★ 交换律(commutative laws)

$$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A \quad A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$$

★ 结合律(associative laws)

$$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$$

$$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$$

★ 分配律(distributive laws)

$$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

$$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

★吸收律(absorption laws)

$$A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A \quad A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$$

常用逻辑等值式(关于 \neg)

双重否定律(double negation law)

$$\neg\neg A \Leftrightarrow A$$

德●摩根律(DeMorgan's laws)

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

★零律(dominance laws)

$$A \vee 1 \Leftrightarrow 1 \quad A \wedge 0 \Leftrightarrow 0$$

★同一律(identity laws)

$$A \vee 0 \Leftrightarrow A \quad A \wedge 1 \Leftrightarrow A$$

★排中律(excluded middle)

$$A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$$

★矛盾律(contradiction)

$$A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0$$

常用逻辑等值式(关于 \rightarrow)

★ 蕴涵等值式(conditional as disjunction)

$$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$$

★ 假言易位(contrapositive law)

$$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$$

★ 归谬论

$$(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) \Leftrightarrow \neg A$$

★等价等值式(biconditional as implication)

$$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

★等价否定等值式

$$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B$$

有了上面的基本等值（等价）式，再由定理1 我们就可利用这写等价式进行等价演算。

例3 证明 $p \rightarrow (q \rightarrow r) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee r$

证明: $p \rightarrow (q \rightarrow r) \Leftrightarrow p \rightarrow (\neg q \vee r)$

$$\Leftrightarrow \neg p \vee (\neg q \vee r)$$

$$\Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee r$$

【例4】验证下列等值式

$$(1). ((p \rightarrow q) \rightarrow r) \Leftrightarrow ((\neg q \wedge p) \vee r)$$

$$(2). (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r)$$

$$(3). ((p \vee q) \rightarrow r) \Leftrightarrow ((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r))$$

$$(4). ((p \wedge q) \rightarrow r) \Leftrightarrow ((p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r))$$

$$(5). (p \rightarrow (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r))$$

$$(6). (p \rightarrow (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r))$$

【证明】证明的思路有两种，第一种思路是通过列真值表，可看到上述等值式 \Leftrightarrow 的两边在任何真值赋值下都有相同的真值，从而完成上述等值式的验证。读者不妨自己按照这种思路进行证明。第二种思路是利用定理1和基本等值式来证明。可以看到上述等值式主要是关于蕴涵的等值式，证明关于蕴涵的等值式的方法是利用蕴涵的等值式将蕴涵化成只出现与、或、非的公式，再来验证它们的相等。

(1) $((p \rightarrow q) \rightarrow r) \Leftrightarrow ((\neg p \vee q) \rightarrow r)$ // 蕴涵等值式

$\Leftrightarrow (\neg(\neg p \vee q)) \vee r$ // 蕴涵等值式

$\Leftrightarrow (p \wedge (\neg q)) \vee r$ // 德摩尔根律

$\Leftrightarrow (\neg q \wedge p) \vee r$ // \wedge 的交换律

(2) $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \Leftrightarrow (\neg p \vee (q \rightarrow r))$ // 蕴涵等值式

$\Leftrightarrow (\neg p \vee (\neg q \vee r))$ // 蕴涵等值式

$\Leftrightarrow ((\neg p \vee \neg q) \vee r)$ // \vee 的结合律

$\Leftrightarrow (\neg(p \wedge q) \vee r)$ // 德摩尔根律, 反向运用

$\Leftrightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r)$ // 蕴涵等值式, 反向运用

(3). $((p \vee q) \rightarrow r) \Leftrightarrow (\neg(p \vee q) \vee r)$ // 蕴涵等值式

$\Leftrightarrow ((\neg p \wedge \neg q) \vee r)$ // 德摩尔根律

$\Leftrightarrow ((\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r))$ // 分配律与交换律

$\Leftrightarrow ((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r))$ // 蕴涵等值式

(4). $((p \wedge q) \rightarrow r) \Leftrightarrow (\neg(p \wedge q) \vee r)$ // 蕴涵等值式

$\Leftrightarrow ((\neg p \vee \neg q) \vee r)$ // 德摩尔根律

$\Leftrightarrow ((\neg p \vee r) \vee (\neg q \vee r))$ // 幂等律与结合律

$\Leftrightarrow ((p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r))$ // 蕴涵等值式

(5). $(p \rightarrow (q \vee r)) \Leftrightarrow (\neg p) \vee (q \vee r)$ // 蕴涵等值式

$\Leftrightarrow (\neg p) \vee (\neg p) \vee (q \vee r)$ // \vee 的幂等律

$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \vee (\neg p \vee r)$ // \vee 的交换律和结合律

$\Leftrightarrow (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$ // 蕴涵等值式

(6). $(p \rightarrow (q \wedge r)) \Leftrightarrow (\neg p) \vee (q \wedge r)$ // 蕴涵等值式

$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)$ // \vee 对 \wedge 的分配律

$\Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$ // 蕴涵等值式

例5 证明 $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \Leftrightarrow p$

证明 $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$

$$\Leftrightarrow p \wedge (q \vee \neg q)$$

$$\Leftrightarrow p \wedge 1$$

$$\Leftrightarrow p$$

$$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

$$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

$$Q \vee \neg Q \Leftrightarrow 1$$

$$P \wedge 1 \Leftrightarrow P$$

定理1 设 A 是永真式(永假式), P 是 A 中的任一命题变元,
 B 是一个命题公式, 若用 B 取代 A 中出现的每一个 P , 则所得到的命题公式仍是一个永真式(永假式)。

证明 由于无论怎样指派 A 中命题变元的真值, A 对应的真值都是 $1(0)$, 所以, 用 B 取代 A 中出现的每一个 P 后所得的公式, 无论 B 的真值如何, 其真值永为 $1(0)$ 。

定理2 设 A 、 B 是命题公式, $A \leftrightarrow B$ 当且仅当 $A \leftrightarrow B$ 为永真式。

证明 若 $A \leftrightarrow B$, 即对 A 和 B 中命题变元, 无论怎样指派其真值, A 和 B 相应的真值都相同, 所以 $A \leftrightarrow B$ 为永真式。

反之, 若 $A \leftrightarrow B$ 为永真式, 即无论如何指派 $A \leftrightarrow B$ 中命题变元的真值, $A \leftrightarrow B$ 的真值都是 T , 也就是说 A 和 B 的真值始终相同, 所以 $A \leftrightarrow B$ 。

例6 判断下列公式的类型。

(1) $q \vee \neg((\neg p \vee q) \wedge p);$

(2) $(p \vee \neg p) \rightarrow ((q \wedge \neg q) \wedge r);$

(3) $(p \rightarrow q) \wedge \neg p.$

解:(1) $q \vee \neg((\neg p \vee q) \wedge p)$

$$\Leftrightarrow q \vee \neg((\neg p \wedge p) \vee (q \wedge p)) \quad (\text{分配律})$$

$$\Leftrightarrow q \vee \neg(0 \vee (q \wedge p)) \quad (\text{矛盾律})$$

$$\Leftrightarrow q \vee \neg(q \wedge p) \quad (\text{同一律})$$

$$\Leftrightarrow q \vee (\neg q \vee \neg p) \quad (\text{德·摩根律})$$

$$\Leftrightarrow (q \vee \neg q) \vee \neg p \quad (\text{结合律})$$

$$\Leftrightarrow 1 \vee \neg p \quad (\text{排中律})$$

$$\Leftrightarrow 1 \quad (\text{零律})$$

由此知，**(1)** 为永真式。

$$(2) \quad (p \vee \neg p) \rightarrow ((q \wedge \neg q) \wedge r)$$

$$\Leftrightarrow 1 \rightarrow ((q \wedge \neg q) \wedge r) \quad (\text{排中律})$$

$$\Leftrightarrow 1 \rightarrow (0 \wedge r) \quad (\text{矛盾律})$$

$$\Leftrightarrow 1 \rightarrow 0 \quad (\text{零律})$$

$$\Leftrightarrow 0$$

由此可知，**(2)** 为永假式。

$$(3) \quad (p \rightarrow q) \wedge \neg p$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge \neg p \quad (\text{蕴涵等值式})$$

$$\Leftrightarrow \neg p \quad (\text{吸收律})$$

由此可知，**(3)** 为可满足式。

在某次研讨会的中间休息时间，3名与会者根据王教授的口音对他是哪个省市的人进行了判断：

甲说王教授不是苏州人，是上海人。

乙说王教授不是上海人，是苏州人。

丙说王教授既不是上海人，也不是杭州人。

听完以上3人的判断后，王教授笑着说，他们3人中有一人说的全对，有一人说对了一半，另一人说的全不对。试用逻辑演算法分析王教授到底是哪里人？

设命题 p : 王教授是苏州人。

q : 王教授是上海人。

r : 王教授是杭州人。

p, q, r 中必有一个真命题，两个假命题，要通过逻辑演算将真命题找出来。

设 甲的判断为 $A_1 = \neg p \wedge q$

乙的判断为 $A_2 = p \wedge \neg q$

丙的判断为 $A_3 = \neg q \wedge \neg r$

甲的判断全对	$B_1 = A_1 = \neg p \wedge q$
甲的判断对一半	$B_2 = (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$
甲的判断全错	$B_3 = p \wedge \neg q$
乙的判断全对	$C_1 = A_2 = p \wedge \neg q$
乙的判断对一半	$C_2 = (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
乙的判断全错	$C_3 = \neg p \wedge q$
丙的判断全对	$D_1 = A_3 = \neg q \wedge \neg r$
丙的判断对一半	$D_2 = (q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r)$
丙的判断全错	$D_3 = q \wedge r$

例2.6 解答

由王教授所说

$$E = (B_1 \wedge C_2 \wedge D_3) \vee (B_2 \wedge C_3 \wedge D_1) \vee (B_3 \wedge C_1 \wedge D_2)$$

$$\vee (B_3 \wedge C_2 \wedge D_1)$$

为真命题。

经过等值演算后,可得

$$E \Leftrightarrow (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$$

由题设, 王教授不能既是上海人, 又是杭州人, 因而 p, r 中必有一个假命题, 即 $p \wedge \neg q \wedge r \Leftrightarrow 0$, 于是

$$E \Leftrightarrow \neg p \wedge q \wedge \neg r$$

为真命题, 因而必有 p, r 为假命题, q 为真命题, 即王教授是上海人。甲说的全对, 丙说对了一半, 而乙全说错了。

$$B_2 \wedge C_1 \wedge D_3 \Leftrightarrow 0$$

$$B_2 \wedge C_3 \wedge D_1 \Leftrightarrow 0$$

$$B_3 \wedge C_1 \wedge D_2 \Leftrightarrow p \wedge \neg q \wedge r$$

$$B_3 \wedge C_2 \wedge D_1 \Leftrightarrow 0$$

王教授只可能是其中一个城市的人或者三个城市都不是。
所以，丙至少说对了一半。
因此，可得甲或乙必有一人全错了。
又因为，若甲全错了，则有 $p \wedge \neg q$ ，因此乙全对。
同理，乙全错则甲全对。
所以丙必是一对一错。
根据上述推理，可对公式E进行简化，方便等值演算。
(如何简化，请同学们课后思考)