2-03 数列极限的存在准则

数列极限的两大问题

数列极限的存在性;

(此问题为最关键的问题)

数列的极限值是什么?

(存在性成立后,才想办法计算极限)

几种证明极限存在的方法:

- 按照数列极限的定义证明;
- 按照子列的收敛性证明;
- 利用夹逼准则证明.

最简单的思想是利用数列本身的特性
证明数列极限的存在性!

一. 准则I:单调有界准则

如果数列x_n满足条件

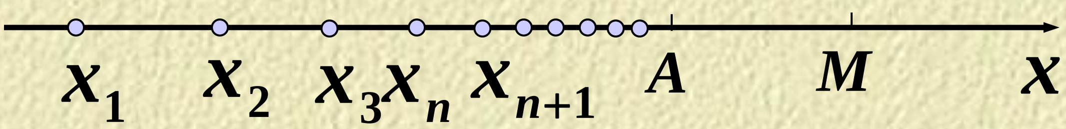
$x_1 \le x_2 \cdots \le x_n \le x_{n+1} \le \cdots,$ 单调增加

$x_1 \ge x_2 \cdots \ge x_n \ge x_{n+1} \ge \cdots,$ 单调减少

单调数列

定理4.单调有界数列必收敛.

几何解释:



定理4.(单调有界收敛定理)单调有界数列必收敛.

证明 不妨设$\{x_n\}$为有上界的递增数列.

将数列$\{x_n\}$中所有不等的项为元素构成的集合记为A,

由确界原理,数集A有上确界,记$\sup A = a = \sup\{x_n\}$.

下证a就是$\{x_n\}$的极限.

事实上,按上确界定义,

$\forall \varepsilon > 0, \exists\ x_N \in \{x_n\}$,使得$a - \varepsilon < x_N$.

而a是$\{x_n\}$的一个上界,故$\forall x_n$,都有 $x_n \le a < a + \varepsilon$.

所以当$n \ge N$时有 $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$.

即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

上页 下页 返回

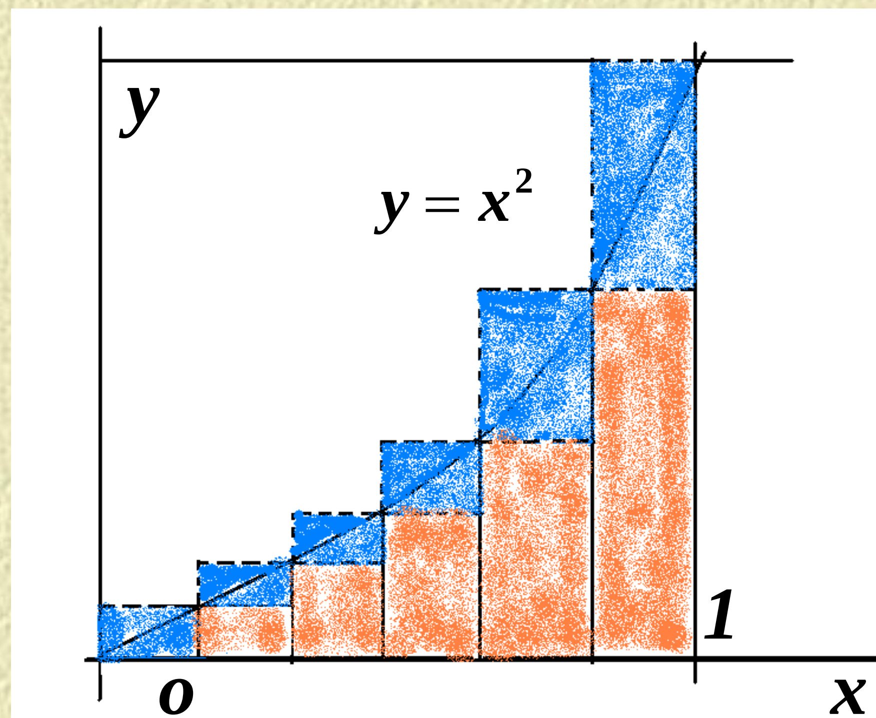
曲边三角形面积A的计算

我们通常的做法是：将区间[0,1] n 等份，用小矩形的面积来近似地表示小曲边梯形的面积。

不足近似 $A_n^- =$

过剩近似 $A_n^+ =$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$



上页 下页 返回

可以看到，不足近似数列$\{A_n^-\}$单调增加有上界，过剩近似列$\{A_n^+\}$单调减少有下界，随着n的不断增大，两者都越来越接近于它们的确界——所要求的曲边三角形面积 A 的真值。

$$\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)\xrightarrow{n\to\infty} A=\frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\xrightarrow{n\to\infty} A=\frac{1}{3},$$

$$\sup\{A_n^-\}=A,\qquad \inf\{A_n^+\}=A.$$

关于e极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e(e\approx 2.71828)$

瑞士数学家$L.Euler$(1707～1783)在1727年研究了数列$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$的单调性和有界性,并且用自己的姓氏的第一个字母来记该极限值($e\approx 2.71828$). 后人逐渐了解到e的性质:e是无理数,超越数,自然对数的底数,与另一无理数、超越数π同等重要,自然界与人类社会的许多事物的数量规律多与e和π这两个实数有关.

下面证明:数列$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$单调增加,有上界.

证明:

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+n\cdot\frac{1}{n}+\cdots+C_n^k\left(\frac{1}{n}\right)^k+\cdots+\left(\frac{1}{n}\right)^n,$$

$$x_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=1+(n+1)\cdot\frac{1}{n+1}+\cdots$$

$$+C_{n+1}^k\left(\frac{1}{n+1}\right)^k+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$

上页 下页 返回

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \cdots + C_n^k\left(\frac{1}{n}\right)^k + \cdots + \left(\frac{1}{n}\right)^n,$$

$$C_n^k\left(\frac{1}{n}\right)^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{1}{n}\right)^k$$

$$= \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

$$x_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots$$

$$+ \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

x_n 的展开式共有$n+1$项,每一项都是正数.

$$x_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \cdots$$

$$+ \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right)$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right)$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$$

x_{n+1} 的展开式共有 $n+2$ 个项,每一项都是正数.

不难看到,

$$\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

$$<\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right),$$

x_n 的第k项比x_{n+1} 的第k项小,而且x_{n+1} 的展式比x_n 的还多一个正项.

$\therefore x_n < x_{n+1}, n = 1,2,\cdots \{x_n\}$严格单调递增.

下面证明$\{x_n\}$有上界.

上页 下页 返回

$$x_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots$$

$$+ \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

$$< 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

$$< 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} = 3 - \frac{1}{n} < 3$$

下证:数列$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$单调增加,有上界.

证明二 $\because$ 对$\forall a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbb{R}^+$,

有 $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\le\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$,

$$\therefore x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot 1<\left[\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}\right]^{n+1}$$

$=x_{n+1}$, $\therefore\{x_n\}\nearrow$;

上页 下页 返回

又 $x_n = 4\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$

$$< 4\left[\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{n+2}\right]^{n+2} = 4,$$

$\therefore \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$有上界,单调增加.

上页 下页 返回

下证:数列$x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$单调增加,有上界;

而 $y_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ 单调下降,有下界.

证明三 $\because$ 对$\forall a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbb{R}^+$,

有 $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\le\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$,

$$\therefore x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot 1<\left[\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}\right]^{n+1}$$

$=x_{n+1}$, $\quad\therefore\{x_n\}\nearrow$;

上页 下页 返回

$$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

$$而\frac{1}{y_n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\cdot 1\le\left[\frac{(n+1)\frac{n}{n+1}+1}{n+2}\right]^{n+2}=\frac{1}{y_{n+1}};$$

$\therefore\{x_n\}\nearrow,\{y_n\}\searrow$,且显然有$x_n<y_n$.

$\therefore 2=x_1<x_2<\cdots<x_n<y_n<\cdots<y_2<y_1=4,$

$\therefore\{x_n\},\{y_n\}$均收敛且收敛于同一数值——$e$.

注意： 第一种证法尽管过程略繁,但易于着手,处理问题平直、朴素,不失为证法之上选.

第二、三种证法都使用了平均不等式, 处理过程简捷、清晰, 显得技巧性稍强.

证法一可谓 “以拙胜巧”！

大音希声,大道低回,

大象无形,大巧若拙. —老子

上页 下页 返回

例1.计算下列极限

$$(1).\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{3n},\quad (2).\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^{n},$$

$$(3).\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2-1}{4n^2-4}\right)^{n},\quad (4).\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2+1}{4n^2+4}\right)^{n}.$$

$$(1).\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{3n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{3n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{2n-1}\right)^{-3n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^{-3n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^{3n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^{\frac{3}{2}(2n-1)+\frac{3}{2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^{2n-1}\cdot\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)\right]^{\frac{3}{2}}$$

$$=(e\cdot 1)^{\frac{3}{2}}=e^{\frac{3}{2}},$$

数列的子
列的极限

$$\therefore \text{原式}=e^{-\frac{3}{2}}.$$

$$(2).\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{-n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{-\frac{1}{2}(2n+1)+\frac{1}{2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left[\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1}\right]^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$$=e^{-\frac{1}{2}}\cdot 1^{\frac{1}{2}}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

$$(3).\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2-1}{4n^2-4}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n-1)(2n+1)}{4(n-1)(n+1)}\right)^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\cdots=e^0=1\ ,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{-n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-(n-1)-1}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\right]^{-1}$$

$$=(e\cdot 1)^{-1}=e^{-1},$$

上页 下页 返回

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}}=\sqrt{e},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{2n-1}\right)^{-n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^{-\frac{1}{2}(2n-1)-\frac{1}{2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^{2n-1}\cdot\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$=(e\cdot 1)^{-\frac{1}{2}}=e^{-\frac{1}{2}},$$

上页 下页 返回

$$(3).\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2-1}{4n^2-4}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n-1)(2n+1)}{4(n-1)(n+1)}\right)^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$=e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-(1-1)}=e^0=1.$$

$$(4).\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2+1}{4n^2+4}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{4n^2}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sqrt[4]{\left(1+\frac{1}{4n^2}\right)^{4n^2}}}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}\right]^{\frac{1}{n}}=1\,.$$

上页 下页 返回

例2. 证明 $x_n=\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{\cdots+\sqrt{3}}}}$ (n重根式)极限存在.

证 $\because\ x_{n+1}=\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{\cdots+\sqrt{3+\sqrt{3}}}}}$ ($n+1$重根式)

$$>\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{\cdots+\sqrt{3+\sqrt{0}}}}}$$

$$=\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{\cdots+\sqrt{3}}}}=x_n \quad (n\text{重根式})$$

$\therefore \forall n, x_{n+1}>x_n, \{x_n\}$是单调递增的;

又 $\because\ x_1=\sqrt{3}<3$, 假定$x_k<3$,

$\Rightarrow x_{k+1}=\sqrt{3+x_k}<\sqrt{3+3}<3$,

$\therefore \{x_n\}$有界. $\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在.

$\because \{x_n\}$单调递增且有界,

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在.记$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$,

由$x_{n+1} = \sqrt{3 + x_n}$

得$\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{3 + x_n}$,

$$\Rightarrow A = \sqrt{3 + A},$$

得$A = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$, $\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

$\longrightarrow$单调性证法二：

$$x_n = \sqrt{3+\sqrt{\cdots+\sqrt{3}}},\ x_{n+1} = \sqrt{3+x_n},$$

$$x_{n+2} - x_{n+1} = \sqrt{3+x_{n+1}} - \sqrt{3+x_n}$$

$$= \frac{x_{n+1} - x_n}{\sqrt{3+x_{n+1}} + \sqrt{3+x_n}},$$

$\therefore x_{n+2} - x_{n+1}$与 $x_{n+1} - x_n, \cdots, x_3 - x_2, x_2 - x_1$ 同号

而 $x_2 - x_1 = \sqrt{3+\sqrt{3}} - \sqrt{3} > 0,$

$\therefore \forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_{n+1} - x_n > 0, \Rightarrow \{x_n\}$是单调递增的.

$\longrightarrow$有界性证法二：

$x_n=\sqrt{3+\sqrt{\cdots+\sqrt{3}}}$，欲证$\{x_n\}$有界：

$\because\{x_n\}$是单调递增的，$x_n\geq\sqrt{3}$，

$x_{n+1}=\sqrt{3+x_n}$，$x_{n+1}^2=3+x_n$，

$$\therefore x_{n+1}=\frac{3}{x_{n+1}}+\frac{x_n}{x_{n+1}}\leq\frac{3}{\sqrt{3}}+1=\sqrt{3}+1.$$

$\longrightarrow$有界性证法三：

$x_n=\sqrt{3+\sqrt{\cdots+\sqrt{3}}}$，欲证$\{x_n\}$有界：

$\because \{x_n\}$是单调递增的，$x_n \geq \sqrt{3}$，

$x_{n+1}=\sqrt{3+x_n}$，$\Rightarrow 3+x_n=x_{n+1}^2 \geq x_n^2$，

$x_n^2-x_n-3\leq 0 \Leftrightarrow$

$$\left(x_n-\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)\left(x_n-\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\leq 0,$$

$$\therefore\ \sqrt{3}\leq x_n\leq\frac{1+\sqrt{13}}{2}.$$

例3.设$a>0,\ x_1>0,\ x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{a}{x_n}\right)$,

试确定数列$\{x_n\}$的极限.

解　由均值不等式知

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)\geq\sqrt{x_n\cdot\frac{a}{x_n}}=\sqrt{a}$$

$\therefore\ \forall n,$有$x_n\geq\sqrt{a}$,$\{x_n\}$有下界.

$\forall n$, 有 $x_n \geq \sqrt{a}$,

$$\therefore \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a}{x_n^2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a}{\left(\sqrt{a}\right)^2}\right) = 1 \Rightarrow \{x_n\} \searrow,$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ 存在}, \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

即 $x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$, 于是 $x^2 = a$,

$\therefore \lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$. [由保号性 $\lim_{n\to\infty} x_n = -\sqrt{a}$ 应舍去]

上页 下页 返回

例4.设$a_n=1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}, n=1,2,\cdots$

求证:数列$\{a_n\}$在$\alpha\ge 2$时收敛,$\alpha\le 1$时发散.

证明 数列$\{a_n\}$递增显然,下面讨论有界性.

(1).$\alpha\ge 2$ 时,$a_n\le 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$

$$\le 1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}=2-\frac{1}{n}<2,$$

$\Rightarrow \alpha\ge 2$ 时$\{a_n\}$单调增加且有上界,故收敛.

其实,在$\alpha>1$ 时$\{a_n\}$收敛,只是证明稍麻烦些.

(2). $a_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}, n = 1, 2, \cdots$

在 $\alpha \le 1$ 时 $\{a_n\}$ 发散.

$\because$ 如果 $\{a_n\}$ 在 $\alpha \le 1$ 时收敛, 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,

那么应有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = a$, $\therefore \lim\limits_{n\to\infty}(a_{2n} - a_n) = 0$,

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(n+1)^\alpha} + \frac{1}{(n+2)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^\alpha}\right) = 0$,

$\because$ 如果 $\{a_n\}$ 在 $\alpha \le 1$ 时收敛, 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,

那么应有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = a$, $\therefore \lim\limits_{n\to\infty}(a_{2n} - a_n) = 0$,

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(n+1)^\alpha} + \frac{1}{(n+2)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^\alpha}\right) = 0$,

但是 $\alpha \le 1$ 时,

$$\frac{1}{(n+1)^\alpha} + \frac{1}{(n+2)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^\alpha} \ge \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}$$

$$\ge \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

极限的保序性

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(n+1)^\alpha} + \frac{1}{(n+2)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^\alpha}\right) \ge \frac{1}{2}$, 矛盾!

$\Rightarrow \{a_n\}$ 发散.

准则II Cauchy收敛准则

对于数列$\{x_n\}$,如果$\forall\varepsilon>0,\exists N,\forall n,m>N,$ $s.t.\left|x_n-x_m\right|<\varepsilon$,则称数列$\{x_n\}$为$Cauchy$基本列,简称为$Cauchy$列或基本列.

定理 2 数列$\{x_n\}$收敛

$\Leftrightarrow$ 数列$\{x_n\}$为$Cauchy$基本列.

即：数列$\left\{x_n\right\}$收敛

$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists N,\forall n,m>N,s.t.\left|x_n-x_m\right|<\varepsilon$;

$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists N,\forall n>N,\forall p\in\mathbb{Z}^+,s.t.\left|x_n-x_{n+p}\right|<\varepsilon.$

Cauchy收敛准则： 数列$\{x_n\}$收敛

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n, m > N, s.t. |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

必要性的证明：

如果数列$\{x_n\}$收敛，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,

则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+, \forall m > N, n > N$,

有 $|x_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}, |x_m - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$,

$$\therefore |x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m|$$

$$\le |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$ 必要性得证.

充分性的证明在此从略.

上页 下页 返回

Cauchy 收敛准则 表明,收敛数列中项数充分大的任意两项的距离能够任意小,即越到后面,各项之间几乎“挤”在了一起。

Cauchy 收敛准则 的优点在于它不需要借助数列以外的任何数,只须根据数列自身各项之间的相互关系就能判别该数列的敛散性。

Cauchy 收敛准则 的缺点就是具体使用起来有时比较困难,比如收敛时与ε相应的N的确定有些不易.

例5.利用*Cauchy*收敛准则证明数列$\{x_n\}$收敛,

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin k}{2^k}.$$

证明 $\forall n,p\in\mathbb{Z}^+$ 有

$$|x_{n+p}-x_n|=\left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}}+\frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}}\right|$$

$$\le\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+p}}=\frac{1}{2^{n+1}}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{p-1}}\right)$$

$$=\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^p}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^n}\left(1-\frac{1}{2^p}\right)<\frac{1}{2^n},$$

上页 下页 返回

$$\forall n, p \in \mathbb{Z}^+, \left| x_{n+p} - x_n \right| < \frac{1}{2^n},$$

$$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists N \geq \log_2 \frac{1}{\varepsilon}, \forall n > N,$$

$$\forall p \in \mathbb{Z}^+, s.t. \left| x_{n+p} - x_n \right| < \varepsilon.$$

$$\therefore \{x_n\} = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{2^k} \right\}\text{收敛}.$$

上页 下页 返回

Cauchy 收敛准则 的肯定形式

即：数列$\{x_n\}$收敛

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n, m > N, s.t. \left| x_n - x_m \right| < \varepsilon ;$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N, \forall p > \mathbb{Z}^+, s.t. \left| x_n - x_{n+p} \right| < \varepsilon .$$

Cauchy 收敛准则 的否定形式

即：数列$\{x_n\}$发散

$$\Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0, \forall N \in \mathbb{Z}^+, \exists n, m > N, s.t. \left| x_n - x_m \right| \geq \varepsilon_0 .$$

下面我们用**Cauchy 收敛准则**再来证明一下**例4** 的结论.

设$a_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}, n = 1,2,\cdots$

证明在$\alpha \geq 2$ 时$\{a_n\}$收敛,在$\alpha \leq 1$ 时$\{a_n\}$发散.

证明 在$\alpha \geq 2$ 时,$\forall \varepsilon > 0$,要确定N,

使得$\forall n > N, \forall p > \mathbb{Z}^+, s.t. \left|a_n - a_{n+p}\right| < \varepsilon$.

$$\left|a_n - a_{n+p}\right| = \left|\frac{1}{(n+1)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^\alpha}\right|$$

上页 下页 返回

在$\alpha \geq 2$时,$\forall \varepsilon > 0$,要确定N,使得$\forall n > N$,

$\forall p > \mathbb{Z}^{+}$, s.t. $\left|a_n - a_{n+p}\right| < \varepsilon$.

$$\left|a_n - a_{n+p}\right| = \left|\frac{1}{(n+1)^{\alpha}} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^{\alpha}}\right|$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)^{2}} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^{2}} \leq \frac{1}{n(n+1)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)}$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}, \therefore \text{取} N \geq \frac{1}{\varepsilon} \text{即可},$$

$\therefore$ 在$\alpha \geq 2$时,$\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq \dfrac{1}{\varepsilon}, \forall n > N$,

$\forall p > \mathbb{Z}^{+}$, s.t. $\left|a_n - a_{n+p}\right| < \varepsilon$, $\{a_n\}$在$\alpha \geq 2$时收敛;

用 Cauchy 收敛准则 的否定形式

即:数列$\{x_n\}$发散

$\Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0, \forall N \in \mathbb{Z}^+, \exists n, m > N, s.t. \left|x_n - x_m\right| \geq \varepsilon_0$.

在$\alpha \leq 1$时,若取$\varepsilon_0 = \frac{1}{2}, \forall N, \forall n > N$,取$p = n$,

那么 $\left|a_{2n} - a_n\right| = \frac{1}{(n+1)^\alpha} + \frac{1}{(n+2)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^\alpha}$

$$\geq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} = \varepsilon_0,$$

由Cauchy准则$\Rightarrow \{a_n\}$发散.

至此，我们已经学习了以下三个数学分析中十分重要的 **定理：**

定理(确界原理)　非空有 (上、下) 界的数集必有(上、下)确界。

定理(单调有界定理)单调有界数列必有极限。

Cauchy收敛准则　　数列$\{x_n\}$收敛

$$\Leftrightarrow \text{数列}\{x_n\}\text{为}Cauchy\text{基本列}.$$

上页　下页　返回