

# Chap21. 二重积分

Sec.21.1 二重积分的概念

Sec.21.2 二重积分的计算

Sec.21.3 二重积分的应用★

上页

下页

返回



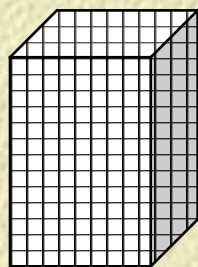
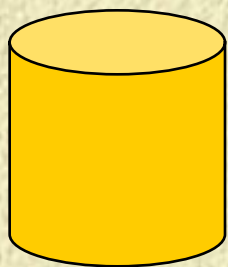
## Sec.21.1 二重积分的概念

- 一. 二重积分的定义
- 二. 二重积分的性质



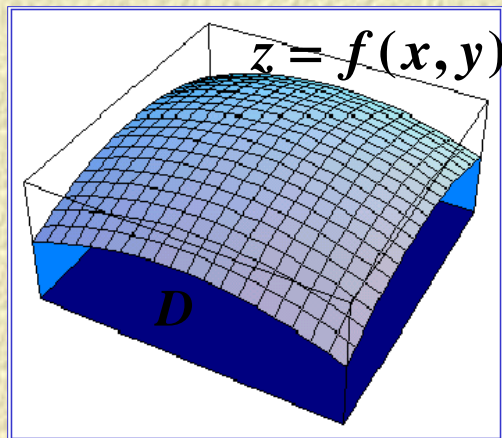
# 一.二重积分的定义

## 1.曲顶柱体的体积



柱体体积 = 底面积  $\times$  高,

特点: 平顶.

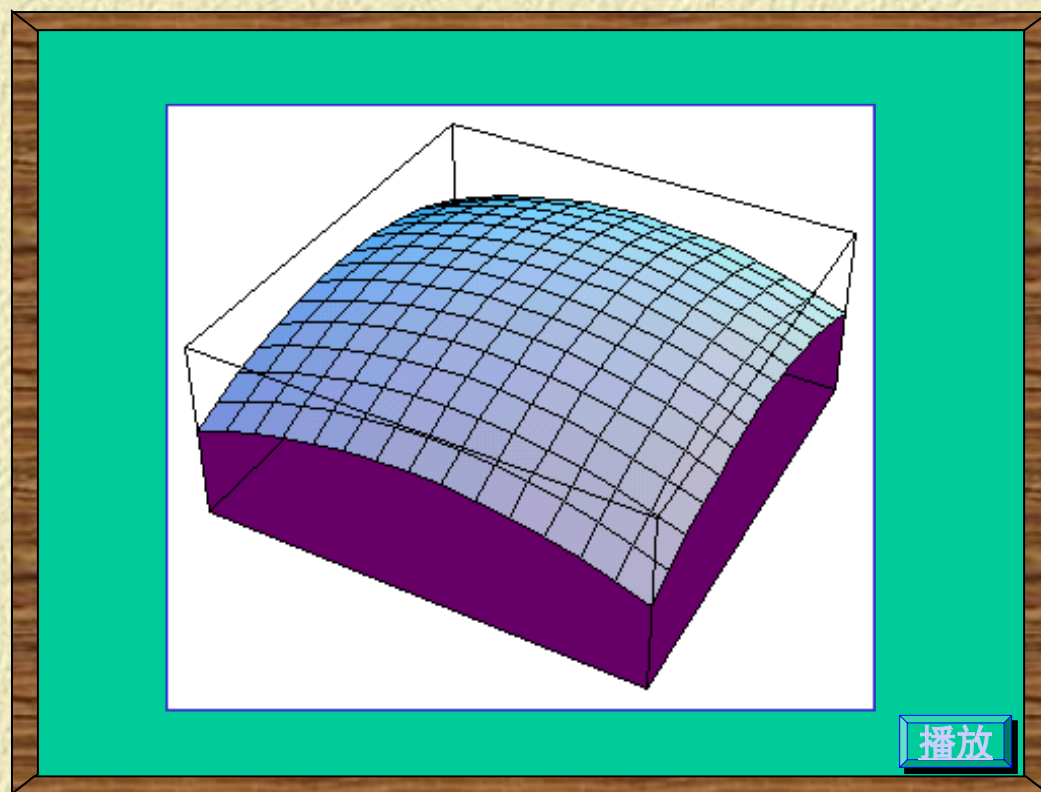


曲顶柱体体积 = ?

特点: 曲顶.



求曲顶柱体的体积采用“分割、近似、求和、取极限”的方法,如下动画演示.





## 曲顶柱体体积的计算

$Q$ : 设有界闭区域  $D \subset \mathbb{R}^2, \forall (x, y) \in D,$

$z = f(x, y) \geq 0$ . 以  $D$  为底面, 曲面

$z = f(x, y)$  为顶的曲顶柱体体积  $V = ?$

$A$ : (1). 分割: 对区域  $D$  做网格式的分割,

将  $D$  分割成  $n$  个小区域  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_i, \dots, \Delta_n$ .

(2). 近似: 在小区域  $\Delta_i$  内任取一点  $(\xi_i, \eta_i)$ ,

则以  $\Delta_i$  为底的小曲顶柱体体积为

$\Delta V_i \approx f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta \sigma_i, \Delta \sigma_i$  为  $\Delta_i$  的面积.



$Q$ : 以  $D \subset \mathbb{R}^2$  为底面, 曲面  $z = f(x, y)$  为顶的曲顶柱体体积 = ?

$A$ : (3). 求和: 所有小曲顶柱体体积之和即为曲顶柱体体积的近似值,

$$V = \sum_{i=1}^n \Delta V_i \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i.$$

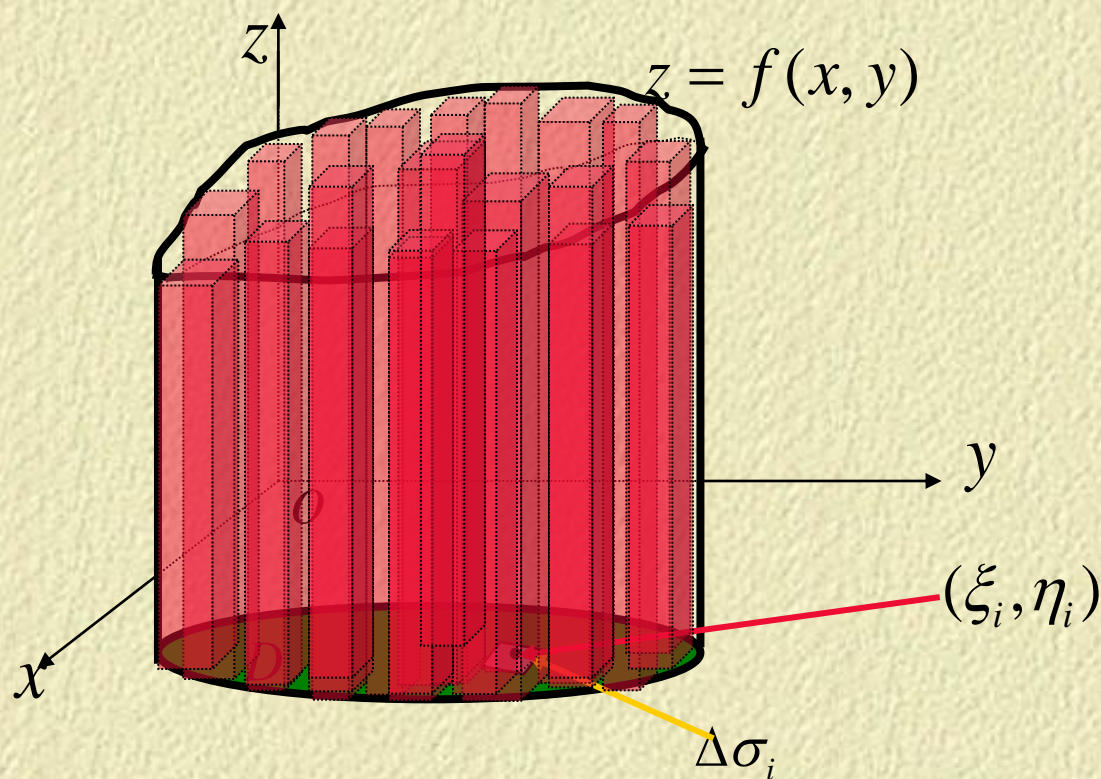
(4). 求极限: 曲顶柱体体积  $V$  为

$$V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i,$$

其中  $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{ \Delta_i \text{ 的直径} \}$ .



思想方法:以不变替代变化.



曲顶柱体体积  $V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i.$

上页

下页

返回



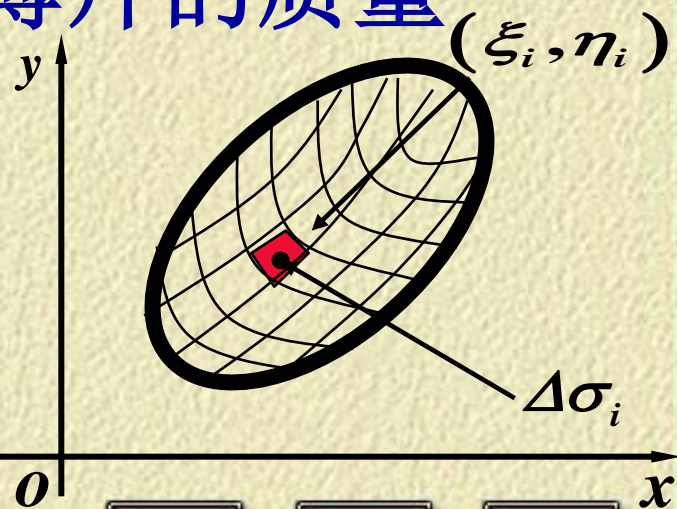
## 2.平面薄片的质量

$Q$ : 设有界闭区域  $D \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\forall (x, y) \in D$ ,  $\rho(x, y) \geq 0$ . 则面密度为  $\rho(x, y)$  的平面薄片  $D$  的质量  $M = ?$

$A$ : 同样, 我们由分割, 近似, 求和, 求极限  
这四个步骤可以得到平面薄片的质量

$$M = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i,$$

其中  $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{ \Delta_i \text{ 的直径} \}$ .



上页

下页

返回



### 3.二重积分定义

*Def.1.*设有界闭区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ ,在 $D$ 上 $f(x,y)$ 有界.

将区域 $D$ 分割成 $n$ 个小区域 $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ ,  $\Delta\sigma_i$ 为 $\Delta_i$ 的面积.在小区域 $\Delta_i$ 内任取一点 $(\xi_i, \eta_i)$ ,作近

似 $f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$ ,得Riemann和 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$ .

若对区域 $D$ 作任意的分割,在小区域内任取点 $(\xi_i, \eta_i)$ ,只要 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta_i \text{的直径}\} \rightarrow 0$ 都有

$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i = I$ 存在,则称 $I$ 为函数

$f(x,y)$ 在区域 $D$ 上的二重积分.

上页

下页

返回



在有界闭区域 $D(\subset \mathbb{R}^2)$ 上 $f(x,y)$ 有界,

The diagram illustrates the components of the double integral formula  $\iint_D f(x,y) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$ . It features several color-coded boxes and arrows pointing to specific parts of the equation:

- A green box labeled  $D$  under the double integral symbol, with a green arrow pointing to the text "积分区域" (Integration Region).
- A red box around  $f(x,y)$ , with a red arrow pointing to the text "被积函数" (Integrand).
- A black box around  $d\sigma$ , with a black arrow pointing to the text "积分变量" (Integration Variable).
- A blue box around the entire right-hand side of the equation, with a blue arrow pointing to the text "被积表达式" (Integrand Expression).
- A magenta box around  $\Delta\sigma_i$ , with a magenta arrow pointing to the text "面积微元" (Area Element).
- A grey box around the summation symbol and its limits, with a grey arrow pointing to the text "积分和" (Integral Sum).

$$\iint_D f(x,y) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

积分区域

被积函数

积分变量

被积表达式

面积微元

积分和



## 对二重积分定义的说明

(1).在上述极限中,要求对任意的分割及任意的介点极限均存在且相等.

当已知二重积分存在,要求其值时,可以采用特殊的分割,以方便计算.



## (2).二重积分的几何意义与物理意义.

若在区域 $D$ 上 $f(x, y) \geq 0$ , 则 $\iint_D f(x, y) d\sigma$

是曲顶柱体的体积. 若在 $D$ 上 $f(x, y) \leq 0$ , 则

$\iint_D f(x, y) d\sigma$ 表示曲顶柱体体积的相反数.

(A). 以 $z = f(x, y)$ 为顶, 以 $D$ 为底的曲顶柱体的体积 $V = \iint_D |f(x, y)| d\sigma$ .

(B). 面密度为 $\rho(x, y)$ 的平面薄片 $D$ 的质量

$$M = \iint_D \rho(x, y) d\sigma.$$



(3).在二重积分定义中,对区域 $D$ 的划分是任意的,故如果在直角坐标系中用平行于坐标轴的直线网来划分 $D$ ,则除了包含边界的一些小闭区域外,其余的小闭区域都是矩形闭区域.设矩形小闭区域  $\Delta_i$  的边长为 $\Delta x_j$ 和 $\Delta y_k$ ,则

$$\Delta\sigma_i = \Delta x_j \times \Delta y_k$$

故在直角坐标系中,



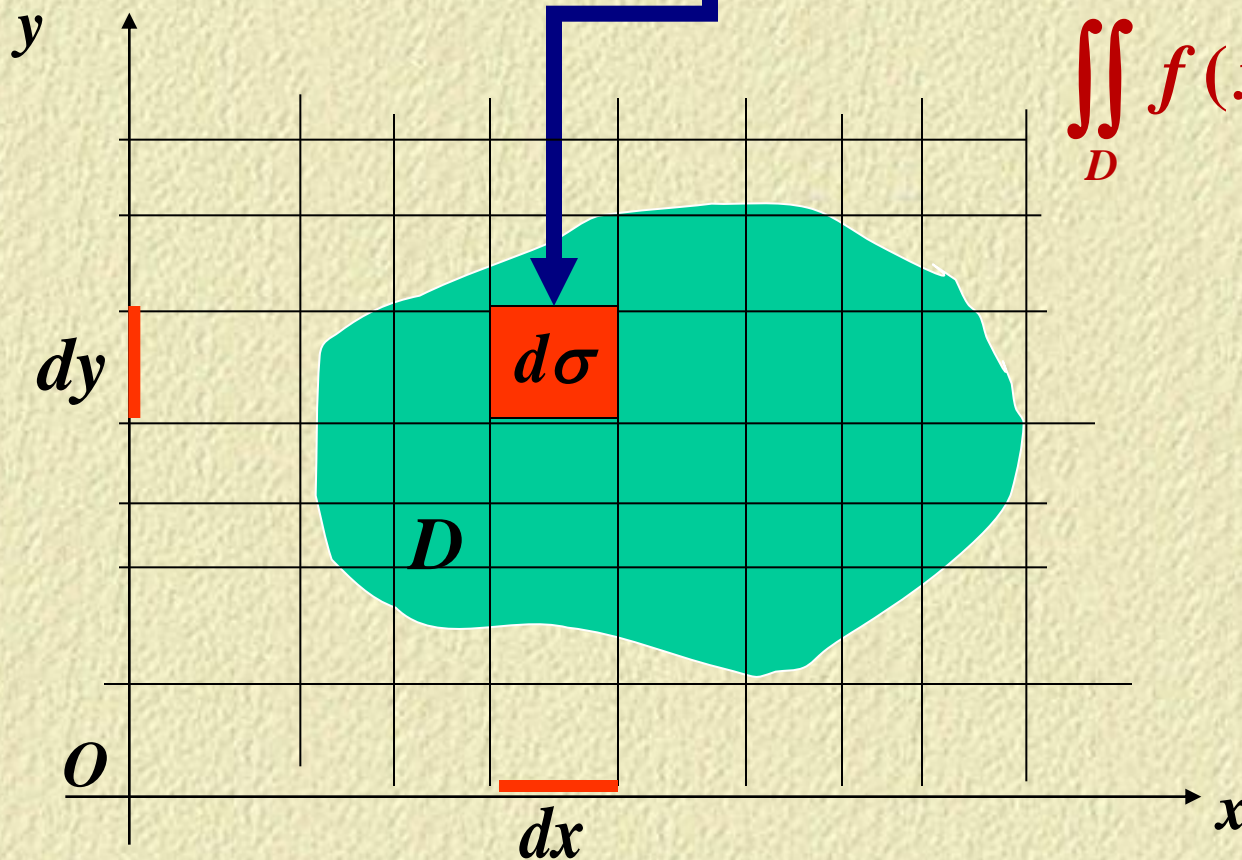
直角坐标系下面积微元 $d\sigma$ 图示：

$$d\sigma = dxdy$$

$$\iint_D f(x,y) d\sigma$$

||

$$\iint_D f(x,y) dxdy$$





## 4. 可积条件：

### (A). 可积的必要条件：

函数在实平面上的边界为分段光滑的  
**简单闭曲线**(即:不自相交) 围成的有界  
闭区域 $D$ 上有界.

### (B). 可积的充分条件：

有界闭区域 $D$ 上的连续函数必可积.



例1.利用二重积分的几何意义给出结果：

(1).  $I = \iint_D \sqrt{9 - x^2 - y^2} dx dy$ ,  $D$ 为坐标面 $xoy$

上由曲线 $x = \sqrt{9 - y^2}$ 与 $x = 0$ 围成的区域.

(2).  $I = \iint_D (6 - 3x - 2y) dx dy$ ,  $D$ 为坐标面

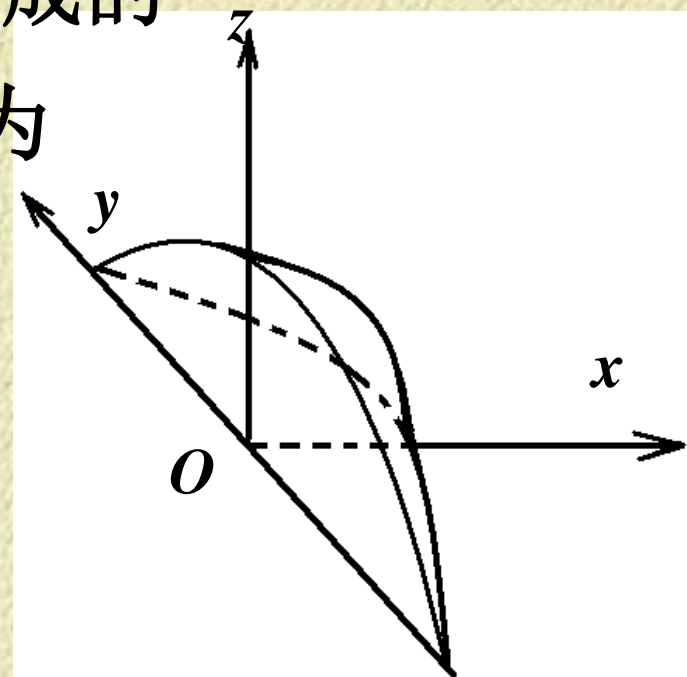
$xoy$ 上由直线 $3x + 2y = 6$ ,  $x = 0$ 及 $y = 0$ 围成的区域.



利用二重积分的几何意义给出结果：

(1).  $I = \iint_D \sqrt{9 - x^2 - y^2} dx dy$ ,  $D$  为坐标面  $xoy$  上由曲线  $x = \sqrt{9 - y^2}$  与  $x = 0$  围成的区域.

解 曲线  $x = \sqrt{9 - y^2}$  与  $x = 0$  围成的区域  $D$  就是坐标面  $xoy$  上以  $O$  为圆心, 半径为 3 的右半圆, 所以该积分表示处于  $I, IV$  卦限的  $\frac{1}{4}$  球的体积.





区域 $D$ 由 $x = \sqrt{9 - y^2}$ 与 $x = 0$ 围成,即坐标面 $xoy$ 上以 $O$ 为圆心,半径为3的右半圆,

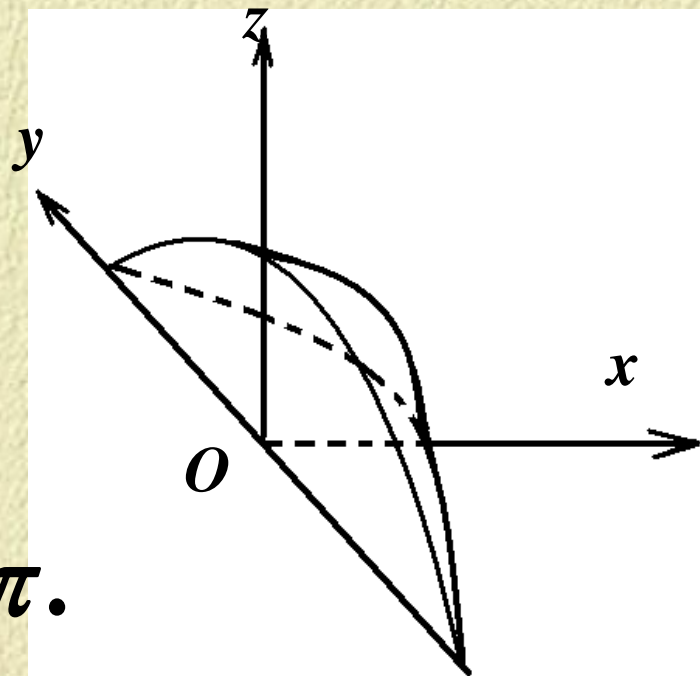
被积函数 $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ ,即上半球面,

$\therefore$  该积分表示处于

$I, IV$ 卦限的 $\frac{1}{4}$ 球的

体积: $I =$

$$\iint_D \sqrt{9 - x^2 - y^2} dx dy = 9\pi.$$





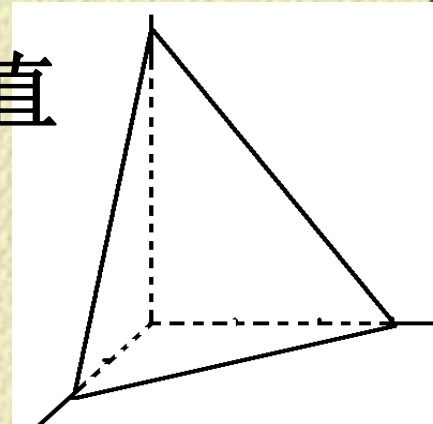
利用二重积分的几何意义给出结果：

(2).  $I = \iint_D (6 - 3x - 2y) dx dy$ ,  $D$  为坐标面  $xoy$  上由直线  $3x + 2y = 6$ ,  $x = 0$  及  $y = 0$  围成的区域.

$\therefore$  由直线  $3x + 2y = 6$ ,  $x = 0$  及  $y = 0$  围成的区域  $D$  可表示为  $D = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, 3x + 2y \leq 6\}$ ,

$\therefore$  在区域  $D$  内  $z = 6 - 3x - 2y \geq 0$ .

$\therefore$  我们就可以看出该积分表示空间直角坐标系中由平面  $3x + 2y + z = 6$  与坐标平面  $x = 0$ ,  $y = 0$  及  $z = 0$  围成的四面体的体积.





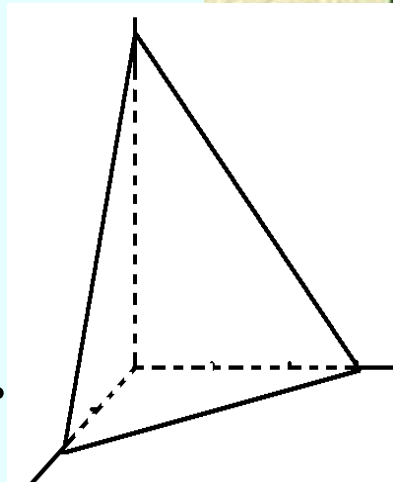
区域 $D$ 由 $3x + 2y = 6$ ,  $x = 0$ 及 $y = 0$ 围成, 即坐标面 $xoy$ 上的三角形区域,  
被积函数 $z = 6 - 3x - 2y$ , 是一平面, 注意平面方程 $3x + 2y + z = 6$ 化成截距式:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6} = 1$$

$\therefore$  经过分析, 可见该积分表示空间直角坐标系中由平面  $3x + 2y + z = 6$  与坐标平面  $x = 0$ ,  $y = 0$  及  $z = 0$  围成的四面体的体积.

四面体的体积为

$$I = \iint_D (6 - 3x - 2y) dx dy = \frac{1}{6} \times 2 \times 3 \times 6 = 6.$$





## 二. 二重积分的性质

二重积分与定积分有完全一样的性质.

以下假设有界闭区域 $D$ 上 $f(x, y)$ 可积.

性质1.(线性性质)

$$\iint_D kf(x, y)d\sigma = k \iint_D f(x, y)d\sigma, k \text{ 为常数,}$$

$$\iint_D [f(x, y) \pm g(x, y)]d\sigma$$

$$= \iint_D f(x, y)d\sigma \pm \iint_D g(x, y)d\sigma.$$



## 性质2.(区域可加性)

设区域 $D$ 被分成 $D_1, D_2$ 两部分,且 $D_1, D_2$ 只有公共的边界.则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma.$$

性质3.  $\iint_D 1 d\sigma = \sigma(D)$ ,  $\sigma(D)$ 为 $D$ 的面积.

性质4.(保号性)在区域 $D$ 上 $f(x, y) \geq 0$ ,则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \geq 0.$$

推论1.(保序性)在区域 $D$ 上 $f(x, y) \leq g(x, y)$ ,

则  $\iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D g(x, y) d\sigma.$



## 推论2.(绝对不等式)

$$\left| \iint_D f(x, y) d\sigma \right| \leq \iint_D |f(x, y)| d\sigma,$$

当且仅当在 $D$ 上 $f$ 不变号时等号成立.

## 性质5.(估值不等式)

若在 $D$ 上 $m \leq f(x, y) \leq M$ ,

则 $m\sigma(D) \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq M\sigma(D)$ .

性质6.若在 $D$ 上 $f(x, y)$ 连续,则 $\exists(\xi, \eta) \in D$ ,

有 $\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta)\sigma(D)$ . (积分中值定理)



例2.比较积分的大小:

$$\iint_D (x+y) d\sigma, \iint_D (x+y)^2 d\sigma \text{ 与 } \iint_D e^{x+y} d\sigma,$$

其中  $D: x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1$ .

解 由  $t \in \mathbb{R}, e^t \geq 1+t$  得  $e^{x+y} \geq x+y$ ,

在区域  $D$  内有  $0 \leq x+y \leq 1$ ,

$$\Rightarrow 0 \leq (x+y)^2 \leq x+y \leq 1,$$

$$\therefore \iint_D e^{x+y} d\sigma \geq \iint_D (x+y) d\sigma \geq \iint_D (x+y)^2 d\sigma.$$

上页

下页

返回



### 例3.不计算,估计积分

$$I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$$

的取值范围,  $D: x^2 + y^2 \leq 4$ .

解 区域 $D$ 的面积  $\sigma(D) = 4\pi$ ,

$\therefore$  在区域 $D$ 上  $9 \leq x^2 + 4y^2 + 9 \leq 25$ ,

$$\therefore 36\pi \leq \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma \leq 100\pi.$$