# 第4章 线性方程组

## **4.1** 线性方程组解的结构

##### 练习4.1

1. 求齐次线性方程组



两个不同的基础解系，并写出通解.

**解** 记系数矩阵为，则



同解方程为



分别取得，得基础解系为



分别取得，得基础解系为



通解为



或



2. 求一个齐次线性方程组，使它的基础解系为



**解** 设所求方程组为，由题设.记，则即，这说明的列都是方程组的解.

解方程组，即



得基础解系为

，

令，即



所求方程组为，即



3. 求下面非齐次方程组的一个解及对应的齐次方程组的基础解系



**解** 对增广矩阵初等行变换化最简阶梯形



等价方程组为



令得方程组的一个解



对应的齐次方程组的等价方程组为



令得基础解系



4. 设，求使得方程组有解的所有向量.

**解** 向量是的列向量的线性组合，即



5. 设是非齐次方程组的个解向量，令



证明:

（1）是非齐次方程组的解的充要条件是；

（2）是齐次方程组的解的充要条件是.

**证** （1） 是的解

 

 ()

 

（2） 是的解

 

 ()

 

6. 设, 是非齐次方程组的3个解向量, 并且



求方程组的通解.

**解** 由知，知的基础解系只含一个向量，取



则是的基础解系. 从而非齐次方程组的通解为

，（）

7. 设矩阵, 其中线性无关, , 向量. 求线性方程组的通解.

**解** 由假设易知，从而的基础解系只含一个向量. 由



得为的基础解系.由



得为的一个解. 于是的通解是



##### 第3-4章 综合练习题

1. 设都是维向量，可由线性表示，但不能由线性表示，证明：可由线性表示.

**证** 因为可由线性表示，设



又因为不能由线性表示，所以，因此



即可由线性表示.

2. 设



确定常数, 使向量组可由向量组线性表示, 但向量组不能由向量组线性表示.

**解** 记，，由于不能由线性表示，所以，从而



得或.

当时，，故可由线性表示，但不能由线性表示. 所以符合题意.

当时，由



知不能由线性表示，与题设矛盾.

综上，.

3. 设（）线性相关, 线性无关, 讨论:

（1）能否由线性表示;

（2）能否由线性表示.

**方法1** （1）因为线性无关，故线性无关. 又因为线性相关，由唯一表示定理，可由唯一表示.

（2）设能由线性表示



由（1），又能由线性表示，故也能由线性表示，从而线性相关，这与假设矛盾. 故不能由线性表示.

**方法2** 由假设

，

（1） 由



得



由唯一表示定理，能由唯一表示.

（2）由(1)，，而

故



不能由线性表示.

4. 设, （）, , , 证明向量组



线性无关.

**证** 设



上式两边左乘得，由于，得，因此



上式两边左乘，类似可推出. 进而再推出.

5. 设, （）, 如果

, , 

证明线性无关.

**证** 由题设



设



两边左乘得



再左乘得



由得，往上逐一代入. 故线性无关.

6. 设向量组线性无关, 能由线性表示, 而不能由线性表示, 证明:

（1）向量组线性无关.

（2）对, 向量组线性无关.

**证** （1）由于线性无关，而不能由线性表示，故线性无关. 否则，由唯一表示定理，能由唯一表示，与假设矛盾.

（2）由（1）



再由可由线性表示，得



从而



线性无关.

7. 设（）且, 证明：

(1) 不能由线性表示；

(2) 如果线性无关, 则也线性无关.

**证** (1) 反证. 设可由线性表示



两边左乘得，这与矛盾.

(2) 反证. 如果线性相关，则由唯一表示定理，由唯一表示. 与(1)矛盾.

8. 已知线性无关, 试问常数满足什么条件时, 向量组



线性无关？

**方法1**设



整理得



由于线性无关，故上式又等价于

  

线性无关的充要条件是上面方程组只有零解. 即



**方法2** 记. 写成矩阵形式



由**例4.14**，

线性无关

9. 已知向量组（）线性无关. 设



试讨论向量组的线性相关性.

**证** 把题设写成矩阵形式



其中



经计算



同**上一题**完全类似，有两种方法. 结论是

线性无关为奇数时

线性相关为偶数时

10. 设是满足的两个非零矩阵，证明的列向量组线性相关, 且的行向量组线性相关.

**方法1** 的列向量都是方程组的解，又为非零矩阵，说明存在非零解，所以，从而的列向量组线性相关.

考虑，又知的列向量组即的行向量组线性相关.

**方法2** 由**例题**，



又，所以，于是的列向量组线性相关，且的行向量组线性相关.

11. 证明：.

**方法1** 把用初等行变换化为阶梯矩阵，设



其中的行向量都是非零行向量. 则



显然上式右边也是阶梯形矩阵，从而



**方法2** 设，有子式，有子式，因此有子式，从而



又



所以



12. 设是阶方阵的伴随矩阵, 证明：



**证** 当时，，由行列式的展开定理：，立即知是可逆矩阵，即.

当时，的所有阶子式都等于零，这时是零矩阵，故.

当时，，由行列式的展开定理



由**例题**



再由知有一个阶子式不等于零，故至少有一个元素不为零，因此. 综上，.

13.设, 证明存在矩阵, 使.

**方法1**  由题设和**例题**，对任意的，线性方程组都有解. 特别地取为标准单位向量，方程组



的解记为，令



则



易知

**证法2** 由题设（此时），故只用列变换就可将化为标准形，即存在可矩阵使得



把分块，，则



易知

14. 证明**Sylvester不等式:**



**方法1** 设



由等价标准形定理知有可逆矩阵使



因此









移项得，即



15. 设，证明.

**证法1** 记，则



再由**习题13**，存在矩阵使得. 在两边左乘得



从而



综上，.

**证法2** 设是阶矩阵，，由**Sylvester不等式**



从而



16. 设阶矩阵满足，证明

**证** 由和**例题**



又



综上.

17. 证明**满秩分解定理**: 设, 则有如下分解：



其中.

**方法1**  由等价标准形定理，存在可逆矩阵和使得



令



则，且显然有.

**方法2**  不妨设的列向量组的极大无关组为，并记矩阵



则的所有列向量都可由线性表示，即存在矩阵使得



又



同理.

18. 证明：.

**证** 设，的满秩分解为



由Sylvester不等式





19. 设都是的子空间, 令

, 

证明与都是的子空间. 举例说明



不是的子空间.

**证** 易（略）

20. 证明基的扩张定理定理4.14：

设是的一个线性无关组, , 则存在个向量, 使得成为的一个基.

**证** 由于，故不是的基，从而至少有一个向量不能由线性表示. 则必线性无关（否则，由唯一表示定理得出矛盾）.

如果，则证毕. 否则，如果，同上知，存在向量使得线性无关. 依此类推，得证.

21. 若矩阵满足



则称是**严格对角占优矩阵**. 证明严格对角占优矩阵必是可逆矩阵.

**证** 反证. 假设是不可逆矩阵, 则有非零解, 记一个非零解为. 再记



考察的第个方程



即



两边取绝对值



这与假设矛盾. 因此是可逆矩阵.

22. 证明方程组一定有解.

**证**  只需证方程组系数矩阵的秩与增广矩阵的秩相等. 由**例题**



故



从而方程组一定有解.

23. 设与都是元的齐次方程组, 证明下面三个命题等价：

（1）与同解；

（2）；

（3）的行向量组与的行向量组等价.

**证** 记（I），（II），（III）

（1）（2） 由于（I）的解都是（II）的解，所以（I）的解也都是（III）的解. 又显然（III）的解都是（I）的解. 因此，（I）与（III）同解. 同样的道理，（II）与（III）也是同解的. 因此它们基础解系所含向量个数相等，即



于是



（2）（3） 命题（2）等价于



由定理4.3，的列向组与的列向量组等价. 即的行向量组与的行向量组等价.

（3）（1） 这是显然.

24．设均是阶的方阵，证明的充要条件是方程组与方程组同解.

**证** （）显然的解必是的解. 又，的基础解系也是的基础解系. 所以，方程组与方程组同解.

（）易

25. 若阶矩阵的前个列向量线性相关，后个列向量线性无关，，证明：

（1）方程组必有无穷多解；

（2）若是的任一解，则.

**证** （1）由, 知是的一个解. 又，故有无穷多解.

（2）线性相关，存在不全为零的数使



说明是基础解系. 的通解为



26. 设线性方程组

(I)

(II)

证明：方程组（I）有解方程组（II）无解.

**证** 记方程组（I）为，则方程组（II）可写成



**易知**



这样

(II)无解

（I）有解

27. 设线性方程组

(I) 

(II) 

(III) 

证明：方程组（I）有解方程组（II）的解都是方程组（III）的解.

**证** 记，

，，

则三个方程可写为

(I) ，(II) ，(III) 

因此

(I)有解(由例5.2)

（II）的解都是（III）的解

28. 设齐次方程组



解空间的维数是2, 求其一个基础解系.

**解** 由知，系数矩阵的秩.



由，得. 原方程组的等价方程组为



取



得一个基础解系为



29. 设四元齐次线性方程组

(I) 

还知道另一齐次线性方程组(II)的通解为



求方程组（I）与（II）的公共解.

**解法1** 将方程组(II)的通解



代入组方程组(I)得到关于的线性方程组



令，则，故方程组(I)与方程组(II)的公共解为

（）

**解法2** 易求方程组(I)的基础解系为

，

其通解为



令两个方程组的通解相等



得关于的方程组



解之得



因此两个方程组公共解为



30. 设, , 证明：时, 齐次方程组



的一个基础解系为

，（）

其中为的元的代数余子式（）.

**证** 由行列式展开定理

（）

所以（）是齐次方程组的解（共个）.

由齐次方程组系数矩阵的秩为，所以齐次方程组基础解系所含向量个数为. 再由的个行向量的转置线性无关.

综上可知，是齐次方程组的一个基础解系.

31. 设, 是非齐次方程组的一个特解, 是其对应的齐次方程组的一个基础解系. 证明



是解集的一个极大无关组, 从而.

**证**  记



显然中的向量都是的解，即.

下面证明线性无关. 设



把上式整理为



上式两边左乘得



由得



往上代入得



由线性无关性得



再往上代入又得. 这说明是线性无关的向量组.

下面再证明中的任一向量都可由线性表示.

由于中的任一向量都可写为



即



这说明中的任一向量都可由线性表示.

综上，向量组是解集的一个极大无关组，.

32. 已知



是方程组



的基础解系. 证明



是方程组



的基础解系.

**证** 记矩阵

，

则方程组（I）和（II）可分别写为

（I） 和 （II）（）

因为是方程组的基础解系，所以，从而线性无关. 而且，线性无关，. 因此，方程组的基础解系所含解向量的个数为.

由假设





知是方程组的个线性无关的解. 因此，就是方程组的一个基础解系.