Aula 3 – Subespaços Vetoriais, Combinações Lineares, Base e Dimensão	**UNIVERSIDADE PAULISTA – UNIP** Disciplina: Álgebra Linear Curso: Ciência da Computação Profª. Juliana Brassolatti Gonçalves

SUBESPAÇO VETORIAL

Muitas vezes é importante conhecer dentro de um espaço vetorial, espaços vetoriais menores, ou seja, subconjuntos dos espaços vetoriais que também são espaços vetoriais por si só. Esses conjuntos serão chamados de Subespaços Vetoriais.

De maneira geral os subespaços vetoriais são definidos, como:

Definição: Seja V um espaço vetorial sobre $\Re$. Dizemos que $W \subset V$ é um subespaço vetorial de V se forem satisfeitas as seguintes condições:

a) $0 \in W$;
b) Se $u, v \in W$ então $u + v \in W$ - **Fechamento de** W **em relação à operação de adição**;
c) Se $u \in W$ e $\alpha \in R$ então $\alpha \cdot u \in W$ - **Fechamento de** W **em relação à operação de multiplicação por escalar.**

Exemplo 1: Seja $W = \{(x, y, z) \in R^3 / y = z = 0\} = \{(x,0,0)\}$. W é um subespaço vetorial de R^3.
De fato, podemos verificar que os itens a,b e c da definição acima são satisfeitos:

a) O "zero" do espaço vetorial R^3 é (0,0,0). E ele pertence a W, pois a segunda e a terceira coordenada são zero.

b) Sejam $u = (x_1,0,0) \in W$ e $v = (x_2,0,0) \in W$. Então
$u + v = (x_1,0,0) + (x_2,0,0) = (x_1 + x_2,0,0) \in W$.

c) Sejam $u = (x_1,0,0) \in W$ e $\alpha \in R$. Então $\alpha \cdot u = \alpha \cdot (x_1,0,0) = (\alpha \cdot x_1,0,0) \in W$.

Portanto W é um subespaço vetorial.

Exemplo 2: Seja $W = \{(x, y, z) \in R^3 / x - 2z = 0\} = \{(2z, y, z)\}$. W é um subespaço vetorial de R^3.
De fato, podemos verificar que os itens a, b e c da definição acima são satisfeitos:

a) O "zero" do espaço vetorial R^3 é (0,0,0). E ele pertence a W, pois $x = 2z \Rightarrow 0 = 2 \cdot z \Rightarrow 0 = 0$.

b) Sejam $u = (2z_1, y_1, z_1) \in W$ e $v = (2z_2, y_2, z_2) \in W$. Então
$u + v = (2z_1, y_1, z_1) + (2z_2, y_2, z_2) = (2z_1 + 2z_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in W$.

c) Sejam $u = (2z_1, y_1, z_1) \in W$ e $\alpha \in R$. Então
$\alpha \cdot u = \alpha \cdot (2z_1, y_1, z_1) = (2 \cdot \alpha \cdot z_1, \alpha \cdot y_1, \alpha \cdot z_1) \in W$.

Portanto W é um subespaço vetorial.

ATENÇÃO!

Todo espaço vetorial *V* admite pelo menos dois subespaços: o próprio espaço *V* e o subespaço nulo. Estes dois subespaços são denominados **subespaços triviais** de *V* e os demais **subespaços próprios** de *V*.

Agora que já conhecemos os conceitos de Espaço e Subespaço Vetorial, vamos refletir sobre uma das principais características de um espaço vetorial, que é a combinação linear de vetores. Esse assunto será fundamental para o andamento dos próximos assuntos.

COMBINAÇÃO LINEAR, BASE DE UM ESPAÇO VETORIAL E DIMENSÃO DE UM ESPAÇO VETORIAL

Antes de apresentar a definição formal de combinação linear, vamos analisar os exemplos a seguir:

Exemplo 1: O vetor (6,8) é uma combinação linear dos vetores (1,0) e (0,1), pois

$$(6,8) = 6 \cdot (1,0) + 8 \cdot (0,1)$$

Exemplo 2: O vetor (2,3,5) é uma combinação linear dos vetores (1,0,0), (0,1,0) e (0,0,1), pois

$$(2,3,5) = 2 \cdot (1,0,0) + 3 \cdot (0,1,0) + 5 \cdot (0,0,1)$$

Exemplo 3: O vetor (1,2,4) **não** é uma combinação linear dos vetores (1,0,0) e (0,0,1), pois

$$(1,2,4) = a \cdot (1,0,0) + b \cdot (0,0,1) \Rightarrow (1,2,4) = (a,0,0) + (0,0,b) \Rightarrow (1,2,4) = (a,0,b) \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 2 = 0 \\ b = 4 \end{cases}$$

O sistema é impossível, logo não existem valores para a e b que satisfazem a igualdade

$$(1,2,4) = a \cdot (1,0,0) + b \cdot (0,0,1).$$

Podemos então definir de modo geral o que é uma combinação linear de vetores.

Segundo BOLDRINI, P.112:

Definição: Seja V um espaço vetorial real, $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ e $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reais. Então dizemos que v é uma combinação linear dos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ se existirem números reais $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tal que $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n$.

Assim, fixados vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ em V, o conjunto W de todos os vetores de V que são combinação linear destes fixos, é um subespaço vetorial chamado "subespaço gerado" por $v_1, v_2, \ldots, v_n$ e usamos a notação $[v_1, v_2, \ldots, v_n]$.

Por exemplo:

1. Os vetores $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ geram o espaço vetorial R^3, pois qualquer vetor (x, y, z) se escreve como combinação linear de e_1, e_2, e_3, ou seja, $(x, y, z) = x \cdot (1,0,0) + y \cdot (0,1,0) + z \cdot (0,0,1)$.

2. Os vetores $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$ geram o espaço vetorial R^2, pois qualquer vetor (x, y) se escreve como combinação linear de e_1, e_2, ou seja, $(x, y) = x \cdot (1,0) + y \cdot (0,1)$

3. Os vetores $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ geram o espaço vetorial $M_2(R)$, pois qualquer vetor $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ se escreve como combinação linear de e_1, e_2, e_3, e_4, ou seja, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

A pergunta agora é como obter os geradores de um subespaço vetorial? Vamos observar os exemplos a seguir:

Exemplo 1: Considere o subespaço do R^2, $W = \{(x, y) \in R^2 / y = 2x\} = \{(x, 2x)\}$

Então $(x, 2x) = x \cdot (1,2)$. Portanto o vetor (1,2) gera o conjunto de todos os vetores da forma $(x, 2x)$.

Exemplo 2: Considere o subespaço do R^3, $W = \{(x, y, z) \in R^3 / x - y + z = 0\}$. Encontre um conjunto de geradores para W.

Se $(x, y, z) \in W$, então $x = y - z$ e, portanto $(x, y, z) = (y - z, y, z) = y \cdot (1,1,0) + z \cdot (-1,0,1)$. Logo W é gerado pelos vetores (1,1,0) e (-1,0,1), ou seja, W=[(1,1,0),(-1,0,1)].

Observe, que se ao invés de isolar $x = y - z$, isolássemos $z = -x + y$ teríamos outro conjunto de geradores, ou seja, $(x, y, z) = (x, y, -x + y) = x \cdot (1,0,-1) + y \cdot (0,1,1)$. Neste caso W=[(1,0,-1),(0,1,1)].

Para dar continuidade as principais características de um espaço vetorial, precisamos entender o conceito de base. Mas para isso primeiramente vamos refletir sobre o que são vetores linearmente dependentes e vetores linearmente independentes.

Segundo CALLIOLI (p. 67):

Definição 1: Um conjunto de vetores $u_1, u_2, \ldots, u_n \subset V$ é **linearmente independente** (LI) se, e somente se, uma igualdade do tipo $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n = 0$ com $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in R$ só for possível para $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Se existir pelo menos um $\alpha_i \neq 0$ com i=1,...,n tal que $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n = 0$ então o conjunto é **linearmente dependente** (LD).

Exemplo 1: Os vetores (1,1,0) e (-1,0,1) são LI ou LD?

Vamos tomar a combinação linear $\alpha_1 \cdot (1,1,0) + \alpha_2 \cdot (-1,0,1) = 0$. Então $(\alpha_1, \alpha_1, 0) + (-\alpha_2, 0, \alpha_2) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Portanto os vetores são LI.

Exemplo 2: Os vetores (3,4) e (1,-3) são LI ou LD?

Vamos tomar a combinação linear $\alpha_1 \cdot (3,4) + \alpha_2 \cdot (1,-3) = 0$. Então $(3\alpha_1, 4\alpha_1) + (\alpha_2, -3\alpha_2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ 4\alpha_1 - 3\alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = 3\alpha_1 \\ 4\alpha_1 - 3 \cdot 3\alpha_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \end{cases}$. Portanto os vetores são LI.

Observe que se tomarmos a matriz associada ao sistema acima $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$, o determinante da matriz A é -13. Portanto $\det A \neq 0$. E, portanto a única solução do sistema homogêneo é a solução trivial.

OBS: Podemos usar esse processo prático para determinar se um conjunto de vetores é LD ou LI, ou seja, se $\det A \neq 0$ então o conjunto de vetores é LI, mas se $\det A = 0$ então o conjunto de vetores é LD.

Exemplo 3: Os vetores (1,-2,1), (2,1,-1) e (7,-4,1) são LI ou LD?

A matriz formada pelos vetores é $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 7 & -4 & 1\end{pmatrix}$. O determinante da matriz A é $\det A=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 7 & -4 & 1\end{vmatrix}=1+14-8-7-4+4=0$, portanto os vetores são LD.

Com isso podemos finalmente definir o que é uma base de um espaço vetorial.

Segundo Boldrini, p.116:

Definição: Um conjunto $v_1, v_2, \ldots, v_n$ de vetores de V será uma base de V se:

a) $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é LI. **(O conjunto de vetores deve ser linearmente independente)**
b) $[v_1, v_2, \ldots, v_n]=V$.**(O conjunto de vetores deve gerar o espaço V)**

O número de elementos (cardinalidade) de uma base *B* do espaço vetorial *V* é denominado **dimensão.**

Observe a tabela abaixo:

Espaço Vetorial	*Base Canônica*	*Dimensão*
$\mathbf{R}$	$\{1\}$	1
$\mathbf{R}^2$	$\{(1,0),(0,1)\}$	2
$\mathbf{R}^4$	$\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$	4
$Mat_{2\times2}(\mathbf{R})$	$\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$	4
Polinômios com coeficientes reais de grau menor ou igual a 2	$\{1, x, x^2\}$	3

Vamos a seguir apresentar alguns resultados importantes sobre base e dimensão de um espaço vetorial:

1. Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vetores não nulos que geram um espaço vetorial V. Então, dentre estes vetores podemos extrair uma base de V.

2. Seja um espaço vetorial V gerado por um conjunto finito de vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Então, qualquer conjunto com mais de n vetores é necessariamente LD (e, portanto qualquer conjunto LI tem no máximo n vetores).

3. Qualquer base de um espaço vetorial tem sempre o mesmo número de elementos. Este número é chamado ***dimensão*** de V, e denotado por ***dim V.***

4. As linhas não-nulas de uma matriz na forma escalonada são linearmente independentes.

Exemplos:

1. Considere $V = [(2,1,1,0),(1,0,1,2),(0,-1,1,4)] \subset \Re^4$. Pelo resultado 1 acima, dentre estes vetores podemos extrair uma base de $\Re^4$.

De fato, se escalonarmos a matriz formada pelos vetores, vamos obter:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Portanto $V = [(1,0,1,2),(0,1,-1,-4)]$ e os vetores $\{(1,0,1,2),(0,1,-1,-4)\}$ são LI, logo formam uma base de V e a dimensão de V é dim V = 2.

ATENÇÃO!

A auto-avaliação e a reflexão constantes sobre os conteúdos estudados são estratégias importantes para garantir que você assuma o papel de protagonista de sua aprendizagem. Pense nisso...

a) O que é um espaço vetorial?
b) O que é um subespaço vetorial?
c) Como determinar um conjunto de geradores para um subespaço?
d) O que são vetores LI e LD? O que é uma base? E dimensão?
e) Tenho dúvidas a eliminar? Quais?
f) Que temas ainda preciso pesquisar?
g) Utilizei estratégias que facilitaram o estudo e a compreensão dos conteúdos? Quais?