Revisão de Matrizes	**UNIVERSIDADE PAULISTA – UNIP** Disciplina: Álgebra Linear Curso: Ciência da Computação Profª. Juliana Brassolatti Gonçalves

Matrizes

Introdução

O crescente uso dos computadores tem feito com que a teoria das matrizes seja cada vez mais aplicada em áreas como Economia, Engenharia, Matemática, Física, dentre outras. Vejamos um exemplo.

A tabela a seguir representa as notas de três alunos em uma etapa:

	Química	Inglês	Literatura	Espanhol
A	8	7	9	8
B	6	6	7	6
C	4	8	5	9

Se quisermos saber a nota do aluno **B** em Literatura, basta procurar o número que fica na segunda linha e na terceira coluna da tabela.

Vamos agora considerar uma tabela de números dispostos em linhas e colunas, como no exemplo acima, mas colocados entre parênteses ou colchetes:

$$\begin{array}{c} \text{linha} \longrightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} \boxed{8 \;\; 7 \;\; 9 \;\; 8} \\ 6 \;\; 6 \;\; 7 \;\; 6 \\ 4 \;\; 8 \;\; 5 \;\; 9 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 8 \\ 6 & 6 & 7 & 6 \\ 4 & 8 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\uparrow$$
$$\text{coluna}$$

Em tabelas assim dispostas, os números são os elementos. As linhas são enumeradas *de cima para baixo* e as colunas, *da esquerda para direita:*

$$\begin{array}{l c}
\begin{array}{l} \text{1ª linha} \rightarrow \\ \text{2ª linha} \rightarrow \\ \text{3ª linha} \rightarrow \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & \sqrt{3} & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \\
 & \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{1ª coluna} & \text{2ª coluna} & \text{3ª coluna} \end{array}
\end{array}$$

Tabelas com **m** linhas e **n** colunas (**m** e **n** números naturais diferentes de 0) são denominadas matrizes m x n. Na tabela anterior temos, portanto, uma matriz 3 x 3.

Veja mais alguns exemplos:

$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 30 & -3 & 17 \end{bmatrix}$ é uma matriz do tipo 2 x 3

$\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ é uma matriz do tipo 2 x 2

Notação geral

Costuma-se representar as matrizes por *letras maiúsculas* e seus elementos por *letras minúsculas*, acompanhadas por *dois índices* que indicam, respectivamente, a linha e a coluna que o elemento ocupa.

Assim, uma matriz **A** do tipo m x n é representada por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{n3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ou, abreviadamente, $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, em que **i** e **j** representam, respectivamente, a linha e a coluna que o elemento ocupa. Por exemplo, na matriz anterior, $\mathbf{a_{23}}$ é o elemento da 2ª linha e da 3ª coluna.

Na matriz B = [-1 0 2 5], temos: $a_{11} = -1$, $a_{12} = 0$, $a_{13} = 2$ e $a_{14} = 5$.

Denominações especiais

Algumas matrizes, por suas características, recebem denominações especiais.

Matriz linha: matriz do tipo 1 x n, ou seja, com uma única linha.

Por exemplo, a matriz A = [4 7 -3 1], do tipo 1 x 4.

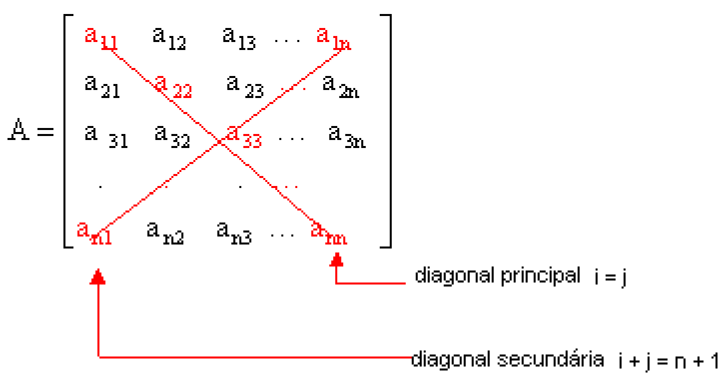
Matriz coluna: matriz do tipo m x 1, ou seja, com uma única coluna. Por exemplo,

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ do tipo 3 x 1.

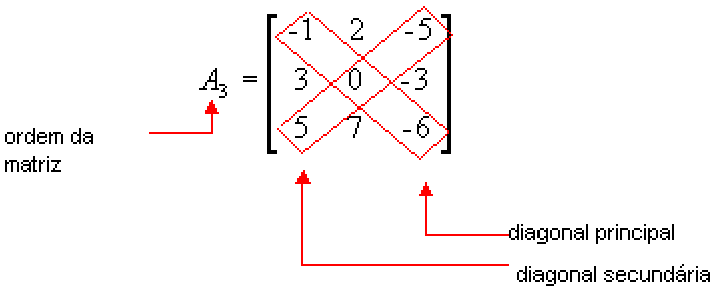
Matriz quadrada: matriz do tipo n x n, ou seja, com o mesmo número de linhas e colunas; dizemos que a matriz é de ordem **n**. Por exemplo, a matriz $C = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ é do tipo 2 x 2, isto é, quadrada de ordem 2.

Numa matriz quadrada definimos a diagonal principal e a diagonal secundária. A principal é formada pelos elementos $\mathbf{a_{ij}}$ tais que i = j. Na secundária, temos i + j = n + 1.

Veja:



Observe a matriz a seguir:



a_{11} = -1 é elemento da diagonal principal, pois i = j = 1

a_{31}= 5 é elemento da diagonal secundária, pois i + j = n + 1 (3 + 1 = 3 + 1)

Matriz nula: matriz em que todos os elementos são nulos; é representada por $0_{m \times n}$.

Por exemplo, $0_{2x3} = \begin{bmatrix} 000 \\ 000 \end{bmatrix}$.

Matriz diagonal: matriz quadrada em que todos os elementos que não estão na diagonal principal são nulos. Por exemplo:

a) $A_{2x2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $B_{3x3} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

Matriz identidade: matriz quadrada em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os demais são nulos; é representada por $\mathbf{I_n}$, sendo **n** a ordem da matriz. Por exemplo:

a) $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Assim, para uma matriz identidade $I_n = [a_{ij}], a_{ij} = \begin{cases} 1, sei = j \\ 0, sei \neq j \end{cases}$.

Matriz transposta: matriz A^t obtida a partir da matriz A trocando-se ordenadamente as linhas por colunas ou as colunas por linhas. Por exemplo:

$$\mathit{Se}\ A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \mathit{então}\ A^t = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Desse modo, se a matriz **A** é do tipo m x n, $\mathbf{A^t}$ é do tipo n x m. Note que a 1ª linha de **A** corresponde à 1ª coluna de $\mathbf{A^t}$ e a 2ª linha de A corresponde à 2ª coluna de $\mathbf{A^t}$.

Matriz simétrica: matriz quadrada de ordem n tal que $\mathbf{A = A^t}$ **.** Por exemplo,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

é simétrica, pois $a_{12} = a_{21} = 5$, $a_{13} = a_{31} = 6$, $a_{23} = a_{32} = 4$.

Matriz oposta: matriz **-A** obtida a partir de **A** trocando-se o sinal de todos os elementos de **A**. Por exemplo, se $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$, então $-A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$.

Igualdade de matrizes

Duas matrizes, A e B, do mesmo tipo m x n, são iguais se, e somente se, todos os elementos que ocupam a mesma posição são iguais:

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \, para \ \text{todo } 1 \leq i \leq m \text{ e todo } 1 \leq j \leq n$$

$$Se\ A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & b \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 & c \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } A = B, \text{ então } c = 0 \text{ e } b = 3$$

Operações envolvendo matrizes

Adição

Dadas as matrizes $A = \lfloor a_{ij} \rfloor_{mxn}$ e $B = \lfloor b_{ij} \rfloor_{mxn}$, chamamos de soma dessas matrizes a matriz $C = \lfloor c_{ij} \rfloor_{mxn}$, tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para todo $1 \leq i \leq m$ e todo $1 \leq j \leq n$:

$$\boxed{A + B = C}$$

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 4+(-1) \\ 0+0 & 7+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+3 & 3+1 & 0+1 \\ 0+1 & 1+(-1) & -1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observação: A + B existe se, e somente se, **A** e **B** forem do mesmo tipo.

Propriedades

Sendo **A**, **B** e **C** matrizes do mesmo tipo (m x n), temos as seguintes propriedades para a adição:

a) comutativa: A + B = B + A

b) associativa: (A + B) + C = A + (B + C)

c) elemento neutro: A + 0 = 0 + A = A, sendo 0 a matriz nula m x n

d) elemento oposto: A + (- A) = (-A) + A = 0

Subtração

Dadas as matrizes $A = \lfloor a_{ij} \rfloor_{mxn}$ e $B = \lfloor b_{ij} \rfloor_{mxn}$, chamamos de diferença entre essas matrizes a soma de **A** com a matriz oposta de **B**:

$$\boxed{A - B = A + (-B)}$$

Observe:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{B} = \begin{bmatrix} 3+(-1) & 0+(-2) \\ 4+0 & -7+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$$

Multiplicação de um número real por uma matriz

Dados um número real **x** e uma matriz **A** do tipo m x n, o produto de **x** por **A** é uma matriz **B** do tipo m x n obtida pela multiplicação de cada elemento de **A** por **x**, ou seja, $b_{ij} = xa_{ij}$:

$$\boxed{B = x.A}$$

Observe o seguinte exemplo:

$$3.\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.2 & 3.7 \\ 3.(-1) & 3.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 21 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Propriedades

Sendo **A** e **B** matrizes do mesmo tipo (m x n) e **x** e **y** números reais quaisquer, valem as seguintes propriedades:

a) associativa: x. (yA) = (xy). A

b) distributiva de um número real em relação à adição de matrizes:

x. (A + B) = xA + xB

c) distributiva de uma matriz em relação à adição de dois números reais:

(x + y) . A = xA = yA

d) elemento neutro: xA = A, para x = 1, ou seja, A=A

Multiplicação de matrizes

O produto de uma matriz por outra não é determinado por meio do produto dos seus respectivos elementos.

Assim, o produto das matrizes $A = \lfloor a_{ij} \rfloor_{mxp}$ e $B = \lfloor b_{ij} \rfloor_{pxn}$, é a matriz C = $(c_{ij})_{m \times n}$ em que cada elemento $\mathbf{c_{ij}}$ é obtido por meio da soma dos produtos dos elementos correspondentes da i-ésima linha de A pelos elementos da j-ésima coluna **B**.

Vamos multiplicar a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ para entender como se obtém cada $\mathbf{C_{ij}}$:

1ª linha e 1ª coluna

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{c_{11}}{\boxed{1 . (-1) + 2.4}} & \end{bmatrix}$$

1ª linha e 2ª coluna

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 . (-1) + 2.4 & \overset{c_{12}}{\boxed{1.3 + 2.2}} \end{bmatrix}$$

2ª linha e 1ª coluna

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 . (-1) + 2.4 & 1.3 + 2.2 \\ \underset{c_{21}}{\boxed{3.(-1) + 4.4}} & \end{bmatrix}$$

2ª linha e 2ª coluna

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \boxed{3 \quad 4} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 & \boxed{3} \\ 4 & \boxed{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\,.\,(-1) + 2.4 & 1.3 + 2.2 \\ 3.(-1) + 4.4 & \underbrace{\boxed{3.3 + 4.2}}_{c_{22}} \end{bmatrix}$$

Assim, $A.B = \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 13 & 17 \end{bmatrix}$.

Observe que:

$$A.B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1).1 + 3.3 & (-1).2 + 3.4 \\ 4.1 + 2.3 & 4.2 + 2.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 10 & 16 \end{bmatrix}$$

Portanto, $AB \neq BA$, ou seja, para a multiplicação de matrizes não vale a propriedade comutativa.

Vejamos outro exemplo com as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$:

$$A.B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.1 + 3(-2) & 2.2 + 3.0 & 2.3 + 3.4 \\ 0.1 + 1(-2) & 0.2 + 1.0 & 0.3 + 1.4 \\ -1.1 + 4(-2) & -1.2 + 4.0 & -1.3 + 4.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 18 \\ -2 & 0 & 4 \\ -9 & -2 & 13 \end{bmatrix}$$

$$B.A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 + 2.0 + 3(-1) & 1.3 + 2.1 + 3.4 \\ -2.2 + 0.0 + 4(-1) & -2.3 + 0.1 + 4.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 17 \\ -8 & 10 \end{bmatrix}$$

Da definição, temos que a matriz produto A. B só existe se o número de colunas de **A** for igual ao número de linhas de **B**:

$$A_{m \times p} \, . \, B_{p \times n} = (A.B)_{m \times n} \qquad p = p$$

A matriz produto terá o número de linhas de **A (m)** e o número de colunas de **B(n)**:

Se $A_{3 \times 2}$ e $B_{2 \times 5}$, então $(A . B)_{3 \times 5}$

Se $A_{4 \times 1}$ e $B_{2 \times 3}$, então não existe o produto

Se $A_{4 \times 2}$ e $B_{2 \times 1}$, então $(A . B)_{4 \times 1}$

Propriedades

Verificadas as condições de existência para a multiplicação de matrizes, valem as seguintes propriedades:

a) associativa: (A. B). C = A. (B. C)

b) distributiva em relação à adição: A.(B + C) = A.B + A.C ou (A + B).C = A. C + B. C

c) elemento neutro: A. $I_n = I_n$ .A = A, sendo $\mathbf{I_n}$ a matriz identidade de ordem **n**

Vimos que a propriedade comutativa, geralmente, não vale para a multiplicação de matrizes. Não vale também o anulamento do produto, ou seja: sendo $0_{m \times n}$ uma matriz nula, A.B = $0_{m \times n}$ não implica, necessariamente, que A = $0_{m \times n}$ ou B = $0_{m \times n}$.

Matriz inversa

Dada uma matriz **A**, quadrada, de ordem **n**, se existir uma matriz **A'**, de mesma ordem, tal que A. A' = A'. A = I_n, então **A'** é matriz inversa de **A**. Representamos a matriz inversa por $\mathbf{A^{-1}}$

Lista – Exercícios – Para Estudar!

1. Determine a, b, c e d para que se tenha $\begin{bmatrix} -1 & \frac{5}{6} \\ 2 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 5b \\ \frac{c}{3} & -d \end{bmatrix}$.

Resposta: $a = -1, b = \frac{1}{6}, c = 6 \text{ e } d = -10$

2. Determine x, y e z que satisfaçam $\begin{bmatrix} 1 & -2 & x \\ 3y & 5 & z-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & \frac{3}{4} \\ -6 & 5 & 0 \end{bmatrix}$.

Resposta: $x = \frac{3}{4}, y = -2 \text{ e } z = 1$

3. Determine p e q para que se tenha $\begin{bmatrix} p+q & -2 \\ 0 & 2p-q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Resposta: $p = 3$ e $q = 3$

4. Verifique se existe $m \in \Re$, para que se tenha $\begin{bmatrix} 2 & m^2-9 \\ m-3 & m+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Resposta: Não existe $m \in \Re$ que satisfaz.

5. Verifique se existe $m \in \Re$, tal que $\begin{bmatrix} 4-m^2 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ m & 3 \end{bmatrix}$.

Resposta: $m = -2$

6. Calcule:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -2 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Resposta: $\begin{bmatrix} 5 & -2 & -\frac{5}{2} \\ 3 & -4 & -1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Resposta: $\begin{bmatrix} 7 & -7 \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 7 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Resposta: $\begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 5 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 11 & 6 \\ -9 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$

Resposta: $\begin{bmatrix} 1 & 11 \\ -15 & 6 \end{bmatrix}$

7. Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{3x2}$, onde $a_{ij} = i + 2j$ e $B = (b_{ij})_{3x2}$, onde $b_{ij} = 1 + i + j$.

a) Determine a matriz $A + B$.

b) Determine a matriz $D = A - B$. Como você representaria, genericamente um elemento d_{ij} de D?

Resposta: a) $A+B=\begin{bmatrix}6 & 9\\ 8 & 11\\ 10 & 13\end{bmatrix}$ **b)** $A-B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ e $d_{ij}=j-1$

8. Sejam $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & 5\\ -2 & 1\end{bmatrix}$ e $C=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 4 & 2\end{bmatrix}$. Determine $A+B+C$.

Resposta: $A+B+C=\begin{bmatrix}1 & 11\\ 1 & 7\end{bmatrix}$

9. Resolva as seguintes equações matriciais:

a) $X+\begin{bmatrix}3\\ -1\\ 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11\\ 3\\ -2\end{bmatrix}$ **b)** $X-\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -1\\ 0 & 3\end{bmatrix}$

Resposta: a) $X=\begin{bmatrix}8\\ 4\\ -7\end{bmatrix}$ **b)** $X=\begin{bmatrix}6 & 2\\ 4 & 4\end{bmatrix}$

10. Determine a matriz X em $\begin{bmatrix}2 & 4\\ -3 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 5 & 0\end{bmatrix}=X-\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$.

Resposta: $X=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 5 & 9\end{bmatrix}$

11. Resolva o sistema matricial $\begin{cases}X+Y=\begin{bmatrix}3\\ 4\\ 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 3\end{bmatrix}\\ X-Y=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ -3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 1\\ -6\end{bmatrix}\end{cases}$.

Resposta: $X=\begin{bmatrix}3\\ 5/2\\ -1/2\end{bmatrix}$; $Y=\begin{bmatrix}2\\ 1/2\\ 17/2\end{bmatrix}$

12. Dada a matriz $\begin{bmatrix}1 & -11 & 3\\ 8 & 5 & -2\end{bmatrix}$, obtenha as matrizes: **a)** $3A$ **b)** $\frac{1}{2}A$

Resposta: **a)** $\begin{bmatrix} 3 & -33 & 9 \\ 24 & 15 & -6 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{11}{2} & \frac{3}{2} \\ 4 & \frac{5}{2} & -1 \end{bmatrix}$

13. Dada as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -5 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$, obtenha as matrizes:

a) $2A + B$ **b)** $A - 2B$

Resposta: **a)** $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -1 & -8 \\ 9 & -1 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 7 & -9 \\ 2 & -13 \end{bmatrix}$

14. Resolva a seguinte equação matricial: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 4 \end{bmatrix} + 2X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Resposta: $\begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

15. Sejam $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Determine a matriz X que satisfaz $2A + B = X + 2C$.

Resposta: $X = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

16. Determine, se existirem, os produtos:

a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ **c)** $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

Resposta: $\begin{bmatrix} -2 & 7 & 5 & -1 \\ -4 & 19 & 15 & -17 \end{bmatrix}$ **Resposta**: $A = \begin{bmatrix} 4 & -10 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$ **Resposta**: Não Existe

d) $\begin{bmatrix} 1 & 10 & -6 \\ 5 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}$ **e)** $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ **f)** $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

Resposta: $\begin{bmatrix} 63 \\ 15 \\ -2 \end{bmatrix}$ **Resposta**: Não Existe **Resposta**: $\begin{bmatrix} -5 & -23 \\ 5 & 1 \\ -3 & -5 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ **h)** $\begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ **i)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -3 \end{bmatrix}$

Resposta: $\begin{bmatrix} 3 & 7 \end{bmatrix}$ **Resposta**: $\begin{bmatrix} 8 & -2 & 6 \\ 40 & -10 & 30 \\ 20 & -5 & 15 \end{bmatrix}$ **Resposta**: Não Existe

17. Sejam $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$. Determine, se existir:

a) $A \cdot B$ **b)** $B \cdot A$ **c)** $A \cdot C$ **d)** $B \cdot C$

a) Resposta: $A \cdot B = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 2 & -6 \\ 4 & -11 \end{bmatrix}$ **b) Resposta**: Não Existe **c) Resposta**: $\begin{bmatrix} 13 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

d) Resposta: $\begin{bmatrix} -1 \\ 7 \end{bmatrix}$

18. Calcule x e y em $B = \begin{bmatrix} 2 & x \\ y & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$. **Resposta**: $x = \frac{7}{5}; y = \frac{-9}{2}$