UNIP UNIVERSIDADE PAULISTA **Espaços Vetoriais**	UNIVERSIDADE PAULISTA – UNIP Disciplina: Álgebra Linear Curso: Ciência da Computação Profª. Juliana Brassolatti Gonçalves

A beleza e a força da Álgebra Linear serão apreciadas de forma mais clara quando virmos o R^n como apenas um dentre uma variedade de espaços vetoriais que surgem naturalmente em problemas aplicados. Veremos que um estudo dos espaços vetoriais não é muito diferente do estudo do R^2 e R^3, pois podemos usar os conceitos e propriedades desses espaços para entender conceitos mais gerais.

A Álgebra Linear é usada na solução de muitos problemas de Física, Geometria, Computação, etc. Podemos citar algumas aplicações como:

a) O uso da definição de autovalores e autovetores em muitos problemas de aplicação.

b) A resolução de sistemas de equações diferenciais, comum na área da física.

c) A classificação das quádricas e cônicas.

d) Programação linear.

e) Diagonalização de operadores.

f) Ajuste de curvas (método dos mínimos quadrados) etc.

Para responder e entender alguns dos problemas e aplicações citados anteriormente você deverá conhecer um pouco dessa maravilhosa teoria.

Vale ressaltar que este é apenas um material mediacional e, portanto, o estudo será breve e resumido. Para completar e se aprofundar mais sobre tais conceitos você deverá pesquisar em outras fontes.

Vamos começar com uma breve apresentação de vetores no plano e no espaço e em seguida apresentaremos os conceitos de espaço e subespaço vetorial, assim como as definições de combinação linear, base e dimensão.

Bom estudo!

1. ESPAÇOS VETORIAIS EUCLIDIANOS – GEOMETRIA ANALÍTICA

Revisão breve de vetores

A *Álgebra Linear* utiliza basicamente dois tipos de objetos: as matrizes e os vetores. O termo vetor aparece em uma grande variedade de situações e contextos. A palavra "vetor" tem muitos significados e, portanto merece maior atenção a partir de agora.

Os engenheiros e os físicos fazem uma distinção entre os **escalares**, que são quantidades que podem ser descritas por um número, e os **vetores**, que são quantidades que requerem não só um valor numérico, mas também uma direção e um sentido para sua descrição física completa.

Vamos inicialmente recordar da "Geometria Analítica" o significado desse vetor.

De modo bem geral, um vetor é uma reta *r* orientada, ou seja, quando fixa nela um sentido de percurso, considerado *positivo* e indicado por uma seta como você pode observar na Figura 1.

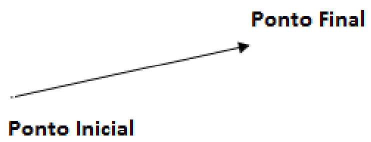


Figura 1 ***Vetor*.**

É importante que saiba que os engenheiros e os físicos representam vetores por flechas, tanto no plano (R^2 ou bidimensional) quanto no espaço (R^3 ou tridimensional). A direção e o sentido da flecha especificam a direção e o sentido do vetor, e o comprimento da flecha descreve seu comprimento, ou magnitude. A cauda da flecha é o ponto inicial e a ponta da flecha é seu ponto inicial. Observe a Figura 2:

Figura 2: ***Vetor*** $\overrightarrow{AB}$.

Vetor Nulo: O vetor cujo ponto inicial e final coincide tem comprimento zero, e, portanto é chamado de vetor nulo.

Vetores Opostos: O oposto do vetor $\overrightarrow{AB}$ é o vetor $\overrightarrow{BA}$. Eles têm o mesmo módulo, a mesma direção, mas sentidos opostos.(Figura 3).

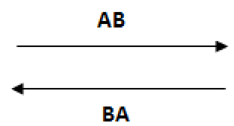


Figura 3 ***Vetor Oposto*.**

Comprimento ou módulo de um vetor: a cada vetor, ou seja, a cada segmento orientado associamos um número real, não negativo, que é a medida do segmento. A medida do segmento orientado é o seu *comprimento* ou seu *módulo*.

Direção e Sentido: Dois segmentos orientados não nulos **AB** e **CD** têm a mesma direção se as retas, suportes desses segmentos são paralelas ou coincidentes (Figura 4)

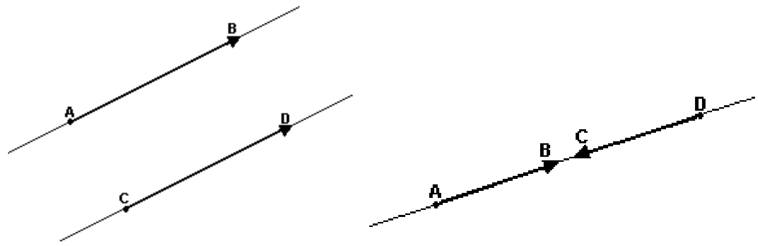


Figura 4 ***Direção e Sentido*.**

Vetores iguais: Dois vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são iguais se, e somente se, tem a mesma direção, módulo e sentido.

Vetor Unitário: Um vetor é unitário se o seu módulo for igual a 1.

Versor: *Versor* de um vetor não nulo $\vec{v}$ é o vetor unitário de mesma direção e mesmo sentido de $\vec{v}$.

Por exemplo, tomemos um vetor $\vec{v}$ de módulo 3. (Figura 5).

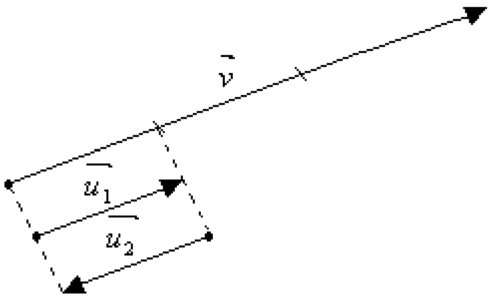


Figura 5 ***Versor*.**

Os vetores $\overrightarrow{u_1}$ e $\overrightarrow{u_2}$ da Figura 5 são vetores unitários, pois ambos têm módulo 1. No entanto, apenas $\overrightarrow{u_1}$ tem a mesma direção e o mesmo sentido de $\vec{v}$. Portanto, este é o versor de $\vec{v}$.

Depois de recordar vetor na “Geometria Analítica” e alguns de seus principais conceitos, vamos agora, recordar os vetores no plano R^2, no espaço R^3 e no R^n através de suas coordenadas.

No tópico que segue não serão desenvolvidos exemplos numéricos, pois isso já foi feito na disciplina *Vetores e Geometria Analítica*. A intenção aqui é apenas recordar algumas definições que serão úteis para o tópico principal que é Espaço Vetorial Arbitrário.

2. VETORES NO R^2

Considere uma matriz de ordem 2x1, ou seja, uma matriz coluna $A = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, onde a e b são números reais. Essa matriz recebe o nome especial de **vetor coluna**, ou simplesmente, vetor.

Veja alguns exemplos de vetor coluna:

$$u=\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix},\ v=\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\4\end{pmatrix},\ w=\begin{pmatrix}0,5\\3\end{pmatrix}$$

O conjunto de todos os vetores com duas componentes é indicado por R^2. Então fique atento quanto às notações:

$R \rightarrow$ Representa o conjunto dos números reais. Tem apenas uma componente.

$R^2 \rightarrow$ Representa os "vetores coluna" com duas componentes.

Na maioria das vezes por conveniência indicaremos um vetor coluna $A=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ na forma de par ordenado $A=(a,b)$. Assim, de modo geral vamos considerar R^2 como o conjunto de todos os pares ordenados (a,b), com *a*, *b* números reais.

Vetores em R^2 - Sistemas de Coordenadas

1) Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos se eles tiverem a mesma direção, ou seja, $\vec{u}=\alpha.\vec{v}$ com $\alpha \in \Re$.

2) **(Condição de Paralelismo)** Dois vetores no plano $\vec{u}=(x_1,y_1)$ e $\vec{v}=(x_2,y_2)$ são paralelos se $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}$.

3) Dois vetores no plano $\vec{u}=(x_1,y_1)$ e $\vec{v}=(x_2,y_2)$ são iguais se $x_1=x_2$, $y_1=y_2$.

4) Vetor nulo no plano é $\vec{0}=(0,0)$.

5) Vetor oposto no plano: Se $\vec{u}=(x_1,y_1)$ o vetor oposto de $\vec{u}$ é $-\vec{u}=(-x_1,-y_1)$.

6) **(Módulo de um vetor)** Se $\vec{u}=(x_1,y_1)$, então seu módulo é $|\vec{u}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$

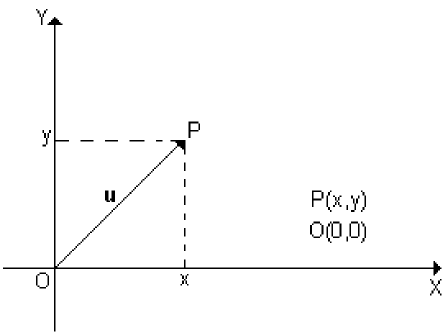
7) Um vetor $\vec{u}=(x_1,y_1)$ é unitário se $|\vec{u}|=1$, ou seja, $\sqrt{x_1^2+y_1^2}=1$.

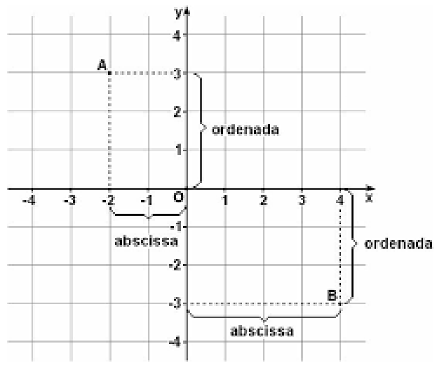
8) **(Condição de Ortogonalidade)** Dois vetores no plano $\vec{u}=(x_1,y_1)$ e $\vec{v}=(x_2,y_2)$ são ortogonais se $\vec{u}.\vec{v}=0$, ou seja, se $x_1x_2+y_1y_2=0$.

9) **(Distância)** Se $A=(x_1,y_1)$ e $B=(x_2,y_2)$, então a distância entre *A* e *B* é $|\overrightarrow{AB}|=|B-A|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

Representação Geométrica do R^2

Considere um sistema de coordenadas cartesianas no plano. Cada ponto do plano fica determinado por um par ordenado (x, y), onde podemos identificar o ponto (x, y) com o vetor $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (Figuras 6).





Fonte: Coladaweb (2014).
Figura 6 *Representação de ponto e vetor no sistema de coordenadas*.

3. VETORES NO R^3

Considere uma matriz de ordem 2x1, ou seja, uma matriz coluna $A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, onde a, b e c são números reais. Essa matriz recebe o nome especial de vetor coluna, ou simplesmente, vetor.

Veja alguns exemplos de vetor coluna:

$$u = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix},\ w = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

O conjunto de todos os vetores com três componentes é indicado por R^3.

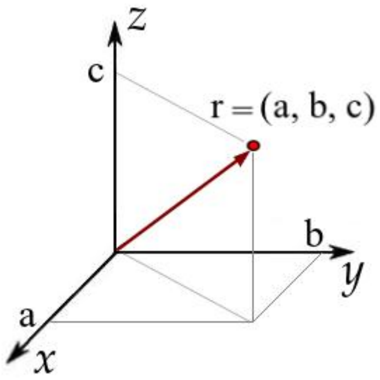
Na maioria das vezes por conveniência indicaremos um vetor coluna $A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ na forma de terna ordenada $A = (a,b,c)$. Assim, de modo geral vamos considerar R^3 como o conjunto de todas as ternas ordenadas (a,b,c), com a, b e c números reais.

Vetores em R^3 - Sistemas de Coordenadas

1) Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos se eles tiverem a mesma direção, ou seja, $\vec{u} = \alpha.\vec{v}$ com $\alpha \in \Re$.
2) **(Condição de Paralelismo)** Dois vetores no espaço $\vec{u} = (x_1, y_{1,} z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_{2,} z_2)$ são paralelos se $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$.
3) Dois vetores no espaço $\vec{u} = (x_1, y_{1,} z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_{2,} z_2)$ são iguais se $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ e $z_1 = z_2$.
4) Vetor nulo no plano é $\vec{0} = (0,0,0)$.
5) Vetor oposto no plano: Se $\vec{u} = (x_1, y_{1,} z_1)$ o vetor oposto de $\vec{u}$ é $-\vec{u} = (-x_1, -y_{1,} -z_1)$.
6) **(Módulo de um vetor)** Se $\vec{u} = (x_1, y_{1,} z_1)$ então seu módulo é $|\vec{u}| = \sqrt{x_1^{\,2} + y_1^{\,2} + z_1^{\,2}}$.
7) Um vetor $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ é unitário se $|\vec{u}| = 1$, ou seja, $\sqrt{x_1^{\,2} + y_1^{\,2} + z_1^{\,2}} = 1$.
8) **(Condição de Ortogonalidade)** Dois vetores no espaço $\vec{u} = (x_1, y_{1,} z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_{2,} z_2)$ são ortogonais se $\vec{u}.\vec{v} = 0$, ou seja, se $x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$.
9) **(Distância)** Se $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$ então a distância entre *A* e *B* é $|\overrightarrow{AB}| = |B - A| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Representação Geométrica do R^3

Considere um sistema de coordenadas cartesianas no espaço. Cada ponto do espaço fica determinado por um par ordenado (a,b,c), onde podemos identificar o ponto (a,b,c) com o vetor $r = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.



Fonte: Phylos.Net (2014).
Figura 7 ***Representação de ponto e vetor no sistema de coordenadas*****.**

4. VETORES NO R^n

Segundo (LAY, 2007, p. 27) Se *n* for um inteiro positivo, R^n denota a coleção de todas as ordenadas de números reais, geralmente escritas na forma de uma matriz coluna *n*x1, tal que:

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

Na maioria das vezes por conveniência indicaremos um vetor coluna $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ na forma de par ordenado $u = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$. Assim, de modo geral vamos considerar R^3 como o conjunto de todos os pares ordenados (a, b, c), com *a*, *b*, *c* números reais.

Vetores em R^n - Sistemas de Coordenadas

1) Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos se eles tiverem a mesma direção, ou seja, $\vec{u} = \alpha.\vec{v}$ com $\alpha \in \Re$.
2) **(Condição de Paralelismo)** Dois vetores no espaço $\vec{u} = (x_1, x_{2,} \cdots, x_n)$ e $\vec{v} = (y_1, y_2 \cdots, y_n)$ são paralelos se $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \cdots, \frac{x_n}{y_n}$.
3) Dois vetores no espaço $\vec{u} = (x_1, x_{2,} \cdots, x_n)$ e $\vec{v} = (y_1, y_2 \cdots, y_n)$ são iguais se $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \cdots, x_n = y_n$.

4) Vetor nulo no R^n é $\vec{0} = (0, 0, \cdots, 0)$.

5) Vetor oposto no plano: Se $\vec{u} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ o vetor oposto de $\vec{u}$ é $\vec{u} = (-x_1, -x_2, \cdots, -x_n)$.

6) **(Módulo de um vetor)** Se $\vec{u} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ então seu módulo é $|\vec{u}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$.

7) Um vetor $\vec{u} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ é unitário se $|\vec{u}| = 1$, ou seja, $|\vec{u}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} = 1$.

8) (Condição de Ortogonalidade) Dois vetores no espaço $\vec{u} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ e $\vec{v} = (y_1, y_2 \cdots, y_n)$ são ortogonais se $\vec{u}.\vec{v} = 0$, ou seja, se $x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots x_n y_n = 0$.

9) **(Distância)** Se $A = (x_1, x_{2,} \cdots, x_n)$ e $B = (y_1, y_2 \cdots, y_n)$ então a distância entre *A* e *B* é $|\overrightarrow{AB}| = |B - A| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2}$

Definição: (ANTON; RORRES, 2012, p. 126):

Se $\vec{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ e $\vec{w} = (w_1, w_2, \cdots, w_n)$ são vetores em R^n e se k é um escalar qualquer, definimos

a) $v + w = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \cdots, v_n + w_n)$

b) $k.v = (kv_1, kv_2, \cdots, kv_n)$

c) $-v = (-v_1, -v_2, \cdots, -v_n)$

d) $w - v = w + (-v) = (w_1 - v_1, w_2 - v_2, \cdots, w_n - v_n)$

Propriedades Algébricas do R^n: (LAY, 2007, p.27) Para todos os vetores $u, v, w \in R^n$ e para todos os escalares *c* e *d*:

(i) $u + v = v + u$

(ii) $(u + v) + w = u + (v + w)$

(iii) $u + 0 = 0 + u = u$

(iv) $u + (-u) = -u + u = 0$

(v) $c(u + v) = cv + cu$

(vi) $(c + d)u = cu + du$

(vii) $c(du) = (cd)u$

(viii) $1u = u$

5. ESPAÇOS VETORAIS ARBITRÁRIOS

Semelhanças estruturais entre o conjunto de vetores da geometria e o conjunto das matrizes reais *m* x *n*.

Depois de recordar o significado de vetor como uma reta orientada com direção e sentido usado na Geometria Analítica, passaremos a usar o termo “vetor” para designar uma lista ordenada de números. Essa ideia simples nos possibilita obter aplicações importantes e interessantes de forma mais rápida.

Vamos conhecer agora um dos conceitos fundamentais para o desenvolvimento dessa teoria, que é a definição de espaço vetorial.

Há muitos conjuntos que, quando munidos adequadamente das operações de soma e multiplicação por escalar, apresentam propriedades algébricas semelhantes. Podemos pensar, por exemplo, nos vetores da Geometria Analítica e nas matrizes. Esses dois conjuntos apresentam “comportamentos” muito comuns quanto as suas propriedades, ou seja:

a) adição de vetores e adição de matrizes;

b) vetor nulo e matriz nula;

c) vetor oposto e matriz oposta;

d) multiplicação de vetor por um escalar e multiplicação de matriz por um escalar etc.

Veja no Quadro 1 a semelhança estrutural entre os dois:

Quadro 1 Semelhança estrutural em os vetores e as matrizes.

Vetores – Geometria Analítica **Considere os vetores u, v, w**	Matrizes $M_{mxn}(R)$ **Considere as matrizes A, B, C**
$u+v=v+u$	$A+B=B+A$
$u+(v+w)=(u+v)+w$	$A+(B+C)=(A+B)+C$
$0+u=u$	$0+A=A$
$u+(-u)=0$	$A+(-A)=0$
$\alpha\cdot(\beta\cdot u)=(\alpha\cdot\beta)\cdot u$	$\alpha\cdot(\beta\cdot A)=(\alpha\cdot\beta)\cdot A$
$\alpha(u+v)=\alpha u+\alpha v$	$\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$
$(\alpha+\beta)\cdot u=\alpha\cdot u+\beta\cdot u$	$(\alpha+\beta)\cdot A=\alpha\cdot A+\beta\cdot A$
$1\cdot u=u$	$1\cdot A=A$

Dizemos que o conjunto de vetores da geometria analítica e o conjunto das matrizes reais de ordem mxn têm a mesma estrutura.

Vamos estudar a seguir todos os conjuntos que apresentam essa mesma estrutura das matrizes e dos vetores.

6. ESPAÇOS VETORIAIS

Já definimos R^n e lembramos algumas propriedades básicas. Agora vamos analisar sua estrutura básica. Também vimos anteriormente que o conjunto das matrizes e o conjunto dos vetores da geometria analítica possuem a mesma estrutura que o R^n. Muitos outros conjuntos apresentam as mesmas coincidências que esses conjuntos possuem com relação às suas propriedades, ou seja, conjuntos que apesar de possuírem naturezas diferentes, comportam-se semelhantemente. A esses conjuntos damos o nome especial de **Espaços Vetoriais.**

De maneira geral os espaços vetoriais são definidos, segundo Callioli (1990, p. 44), como:

> Um conjunto V, munido de uma adição e de uma multiplicação por escalar, é um espaço vetorial real (sobre R), se para qualquer u, v, w em V e para todo α e β em R as seguintes propriedades são válidas:
>
> a) $u+v=v+u$ (comutativa);
>
> b) $u+(v+w)=(u+v)+w$ (associativa);
>
> c) existe um $0 \in V$, chamado elemento neutro da adição tal que, $0+u=u$ para qualquer $u \in V$;
>
> d) existe um elemento oposto $-u \in V$ tal que, $u+(-u)=0$ para qualquer $u \in V$;e) $\alpha.(\beta.u)=(\alpha.\beta).u$;
>
> f) $\alpha.(u+v)=\alpha.u+\alpha.v$;
>
> g) $(\alpha+\beta).u=\alpha.u+\beta.u$;
>
> h) $1.u=u$ para qualquer $u \in V$.

Se no lugar do conjunto dos reais, usamos o conjunto dos complexos, teremos o espaço vetorial complexo. Mas nesta disciplina **vamos nos restringir ao espaço vetorial real**.

Uma observação importante a ser feita é que a palavra "vetorial" não se refere a vetor propriamente dito, e sim de uma forma mais ampla como sendo os elementos de V (espaço vetorial). Desse modo, "vetor" pode significar aqui:

a) uma matriz;

b) um vetor, como aqueles estudados em Geometria Analítica;

c) um polinômio etc.

Vamos entender melhor a definição de espaço vetorial analisando com detalhe alguns exemplos a seguir:

Exemplo 1 (Adaptado de STEINBRUCH; WINTERLE, 2005, p. 21): Os conjuntos R^3, R^2, R^3, R^4, $\cdots R^n$ são todos espaços vetoriais, pois satisfazem os itens de a até *h* da definição.

Vamos mostrar p asso a passo apenas o R^2. Os outros espaços são semelhantes.

Considere os vetores $u=(x_1, y_1)$, $v=(x_2, y_2)$ e $w=(x_3, y_3)$ em R^2 e os escalares α e β em R. As seguintes propriedades são válidas:

a) **Comutativa**: $\begin{aligned} &u+v=(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)= \\ &(x_2+x_1,y_2+y_1)=(x_2,y_2)+(x_1,y_1)=v+u \end{aligned}$

b) **Associativa da Adição**:

$$\begin{aligned} &(u+v)+w=\left[(x_1,y_1)+(x_2,y_2)\right]+(x_3,y_3)= \\ &(x_1+x_2,y_1+y_2)+(x_3,y_3)= \\ &(x_1+x_2+x_3,y_1+y_2+y_3)= \\ &(x_1,y_1)+(x_2+x_3,y_2+y_3)=(x_1,y_1)+ \\ &\left[(x_2,y_2)+(x_3,y_3)\right]=u+(v+w) \end{aligned}$$

c) **Elemento Neutro da Adição:** existe um $0=(0,0)\in R^2$, chamado elemento neutro da adição tal que, $0+u=(0,0)+(x_1,y_1)=(0+x_1,0+y_1)=(x_1,y_1)=u$

d) **Elemento Oposto:** existe um elemento oposto $-u=-(x_1,y_1)=(-x_1,-y_1)$ tal que, $\begin{aligned} &u+(-u)=(x_1,y_1)+(-x_1,-y_1)= \\ &(x_1-x_1,y_1-y_1)=(0,0) \end{aligned}$

e) **Associativa da Multiplicação**:

$$\begin{aligned} &\alpha.(\beta.u)=\alpha.\left[\beta.\left(x_1,y_1\right)\right]= \\ &\alpha.\left(\beta x_1,\beta y_1\right)=\left(\alpha\beta x_1,\alpha\beta y_1\right)= \\ &(\alpha\beta).\left(x_1,y_1\right)=(\alpha\beta).u \end{aligned}$$

f) **Distributiva**:

$$\begin{aligned} &\alpha.(u+v)=\alpha.\left[\left(x_1,y_1\right)+\left(x_2,y_2\right)\right]= \\ &\alpha.\left[\left(x_1+x_2,y_1+y_2\right)\right]=\left(\alpha x_1+\alpha x_2,\alpha y_1+\alpha y_2\right) \\ &=\left[\alpha\left(x_1+x_2\right),\alpha(y_1+y_2)\right]=\alpha.u+\alpha.v \end{aligned}$$

g) **Distributiva**:

$$\left(\alpha+\beta\right).u=\left(\alpha+\beta\right).\left(x_1,y_1\right)=$$
$$\left[\left(\alpha+\beta\right)x_1,\left(\alpha+\beta\right)y_1\right]=$$
$$\left[\left(\alpha x_1+\beta x_1\right),\left(\alpha y_1+\beta y_1\right)\right]=$$
$$\left[\left(\alpha x_1,\alpha y_1\right),\left(\beta x_1+\beta y_1\right)\right]=$$
$$\left[\alpha\left(x_1,y_1\right),\beta\left(x_1+y_1\right)\right]=\alpha u+\beta u$$

h) **Elemento Neutro da Multiplicação**: $1.u=1.(x_1,y_1)=(1.x_1,1.y_1)=(x_1,y_1)=u$

Como R^2 satisfaz todos os axiomas da definição, então R^2 é um espaço vetorial.

Exemplo 2 (Adaptado de LAY, 2007, p. 195): Para $n\geq 0$, o conjunto P_n dos polinômios de grau menor ou igual a n consiste em todos os polinômios da forma $P_n=a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots+a_nt^n$, onde os coeficientes e a variável t são números reais. P_n é um espaço vetorial.

Vamos mostrar passo a passo apenas para o conjunto dos polinômios de grau um. Os outros polinômios são semelhantes. Observe que agora os “vetores” são polinômios.

Considere os vetores de grau um $p=a_0+a_1t$, $q=b_0+b_1t$ e $r=c_0+c_1t$ em P_1 e os escalares α e β em R. As seguintes propriedades são válidas:

a) **Comutativa**:
$$p+q=(a_0+a_1t)+(b_0+b_1t)=a_0+a_1t+b_0+b_1t$$
$$=a_0+b_0+a_1t+b_1t=b_0+a_0+b_1t+a_1t=$$
$$(b_0+b_1t)+(a_0+a_1t)=q+p$$

b) **Associativa da Adição:**
$$\left(p+q\right)+r=\left[(a_0+a_1t)+(b_0+b_1t)\right]+(c_0+c_1t)=$$
$$\left[(a_0+b_0+a_1t+b_1t)\right]+(c_0+c_1t)=$$
$$(a_0+b_0+c_0+a_1t+b_1t+c_1t)=$$
$$(a_0+a_1t)+(b_0+c_0+b_1t+c_1t)=$$
$$(a_0+a_1t)+\left[(b_0+b_1t)+(c_0+c_1t)\right]=p+(q+r)$$

c) **Elemento Neutro da Adição:** existe um $0=0+0t\in P_1$, chamado elemento neutro da adição tal que,
$$0+p=\left(0+0t\right)+(a_0+a_1t)=$$
$$\left(0+a_0\right)+(0t+a_1t)=a_0+a_1t=p$$

d) **Elemento Oposto:** existe um elemento oposto $-p=-(a_0+a_1t)=(-a_0-a_1t)$ tal que,
$$p+(-p)=(a_0+a_1t)+(-a_0-a_1t)=$$
$$(a_0-a_0+a_1t-a_1t)=(0+0t)=0$$

e) Associativa da Multiplicação:

$$\alpha.(\beta.p) = \alpha.\left[\beta.\left(a_0 + a_1 t\right)\right] =$$
$$\alpha.\left(\beta a_0 + \beta a_1 t\right) = \left(\alpha\beta a_0 + \alpha\beta a_1 t\right) =$$
$$(\alpha\beta).\left(a_0 + a_1 t\right) = (\alpha\beta).p$$

f) Distributiva:

$$\alpha.(p+q) = \alpha.\left[\left(a_0 + a_1 t\right) + \left(b_0 + b_1 t\right)\right]$$
$$= \alpha.\left(a_0 + b_0 + a_1 t + b_1 t\right) =$$
$$\left(\alpha a_0 + \alpha b_0 + \alpha a_1 t + \alpha b_1 t\right) =$$
$$\left[\left(\alpha a_0 + \alpha a_1 t\right) + (\alpha b_0 + \alpha b_1 t\right)\right] =$$
$$\left[\alpha\left(a_0 + a_1 t\right) + (b_0 + b_1 t\right)\right]\alpha.p + \alpha.q$$

g) Distributiva:

$$\left(\alpha + \beta\right).p = \left(\alpha + \beta\right).\left(a_0 + a_1 t\right) =$$
$$\left(\alpha + \beta\right)a_0 + \left(\alpha + \beta\right)a_1 t =$$
$$\left[\left(\alpha a_0 + \beta a_0\right) + \left(\alpha a_1 t + \beta a_1 t\right)\right] =$$
$$\left[\left(\alpha a_0 + \alpha a_1 t\right) + \left(\beta a_0 + \beta a_1 t\right)\right] =$$
$$\left[\alpha\left(a_0 + a_1 t\right) + \beta\left(a_0 a_1 t\right)\right] = \alpha\, p + \beta\, p$$

h) Elemento Neutro da Multiplicação:

$$1.p = 1.(a_0 + a_1 t) = (1.a_0 + 1.a_1 t) = (a_0 + a_1 t) = p$$

Como P_1 satisfaz todos os axiomas da definição, então P_1 é um espaço vetorial.

Exemplo 3: (Adaptado de ANTON; RORRES, 2012, p. 174): Considere o conjunto das matrizes de ordem 2 por 2 com coeficientes reais $M_{2\,x\,2}(\Re)$, munido das operações de adição e multiplicação por escalar usual. Vamos verificar que $M_{2\,x\,2}(\Re)$ é um espaço vetorial, ou seja, vamos verificar que os itens de a) até h) são válidos.

Considere as matrizes: $u = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$

a) $$u + v = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}+a_{11} & b_{12}+a_{12} \\ b_{21}+a_{21} & b_{22}+a_{22} \end{pmatrix} = v + u\,.$$

Vale a propriedade comutativa com relação a adição.

b)
$$u + (v + w) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11}+c_{11} & b_{12}+c_{12} \\ b_{21}+c_{21} & b_{22}+c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11}+c_{11} & a_{12}+b_{12}+c_{12} \\ a_{21}+b_{21}+c_{21} & a_{22}+b_{22}+c_{22} \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = (u+v)+w$$

Vale a propriedade associativa com relação à adição.

c) Existe $0=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in M_{2\ x\ 2}(\Re)$, chamada matriz nula, tal que $0+u=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+a_{11} & 0+a_{12}\\ 0+a_{21} & 0+a_{22}\end{pmatrix}=u$ para qualquer $u\in M_{2\ x\ 2}(\Re)$.

Existe o **elemento neutro da adição**.

d) Existe $-u=\begin{pmatrix}-a_{11} & -a_{12}\\ -a_{21} & -a_{22}\end{pmatrix}\in M_{2\ x\ 2}(\Re)$, chamada matriz oposta de u, tal que

$u\ +\ (-u)=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-a_{11} & -a_{12}\\ -a_{21} & -a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}-a_{11} & a_{12}-a_{12}\\ a_{21}-a_{21} & a_{22}-a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=0$ para qualquer $u\in M_{2\ x\ 2}(\Re)$. Existe a **matriz oposta**.

e)

$$\alpha\cdot(\beta\cdot u)=\alpha\cdot\begin{pmatrix}\beta\cdot a_{11} & \beta\cdot a_{12}\\ \beta\cdot a_{21} & \beta\cdot a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\cdot\beta\cdot a_{11} & \alpha\cdot\beta\cdot a_{12}\\ \alpha\cdot\beta\cdot a_{21} & \alpha\cdot\beta\cdot a_{22}\end{pmatrix}=$$

$$\alpha\cdot\beta\cdot\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=(\alpha\cdot\beta)\cdot u$$

Vale a propriedade associativa com relação à multiplicação.

f)

$$\alpha(u+v)=\alpha\cdot\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\cdot a_{11}+\alpha\cdot b_{11} & \alpha\cdot a_{12}+\alpha\cdot b_{12}\\ \alpha\cdot a_{21}+\alpha\cdot b_{21} & \alpha\cdot a_{22}+\alpha\cdot b_{22}\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}\alpha\cdot a_{11} & \alpha\cdot a_{12}\\ \alpha\cdot a_{21} & \alpha\cdot a_{22}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha\cdot b_{11} & \alpha\cdot b_{12}\\ \alpha\cdot b_{21} & \alpha\cdot b_{22}\end{pmatrix}=\alpha\cdot u+\alpha\cdot v$$

Vale a propriedade distributiva.

g)

$$(\alpha+\beta)\cdot u=(\alpha+\beta)\cdot\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\alpha+\beta)\cdot a_{11} & (\alpha+\beta)\cdot a_{12}\\ (\alpha+\beta)\cdot a_{21} & (\alpha+\beta)\cdot a_{22}\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}\alpha\cdot a_{11}+\beta\cdot a_{11} & \alpha\cdot a_{12}+\beta\cdot a_{12}\\ \alpha\cdot a_{21}+\beta\cdot a_{21} & \alpha\cdot a_{22}+\beta\cdot a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\cdot a_{11} & \alpha\cdot a_{12}\\ \alpha\cdot a_{21} & \alpha\cdot a_{22}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta\cdot a_{11} & \beta\cdot a_{12}\\ \beta\cdot a_{21} & \beta\cdot a_{22}\end{pmatrix}=$$

$$\alpha\cdot u+\beta\cdot u$$

Vale a propriedade distributiva.

h) $1\cdot u=1\cdot\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot a_{11} & 1\cdot a_{12}\\ 1\cdot a_{21} & 1\cdot a_{22}\end{pmatrix}=u$, para qualquer $u\in V$.

Existe o elemento neutro da multiplicação.

Concluímos, portanto, que $M_{2\ x\ 2}(\Re)$ é um espaço vetorial.