



TEORIA DOS GRAFOS

Professora Daniele Aparecida Cicillini Pimenta



Capítulo 1 – Definição e Aplicações

■ Grafo

- *Grafo é uma representação visual de um determinado conjunto de dados e da ligação existente entre alguns elementos.*

Capítulo 1 – Definição e Aplicações

- Aplicações de grafos
 - *Mapas rodoviários;*
 - *Redes de Computadores;*
 - *Redes de transporte e de comunicações, etc.*

Capítulo 1 – Definição e Aplicações

- Um grafo $G(V,A)$ é definido pelo par de conjuntos V e A , onde:
 - V - conjunto não vazio: os ***vértices*** ou ***nós*** do grafo;
 - A - conjunto de pares ordenados $a = (v; w)$ são as ***arestas*** ou ***arcos*** do grafo.

Capítulo 1 – Definição e Aplicações

■ Exemplo 1:

Considere os conjuntos V e A definidos por:

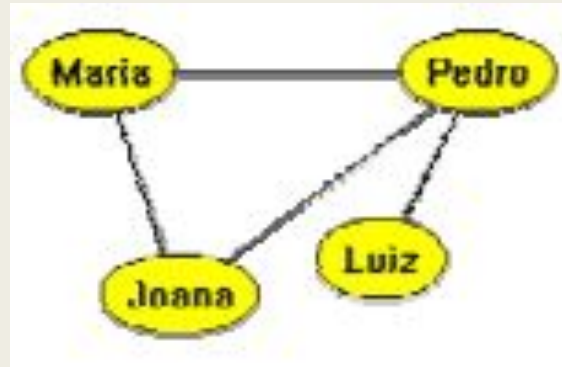
$$V = \{p/p \text{ é uma pessoa}\} = \{\text{Maria, Pedro, Joana, Luiz}\}$$

$$A = \{(v; w)/ v \text{ é amigo de } w\} = \{(\text{Maria, Pedro}), (\text{Joana, Maria}), (\text{Pedro, Luiz}), (\text{Joana, Pedro})\}$$

Faça a representação gráfica dos elementos do conjunto A . Esta representação é chamada de GRAFO.

Capitulo 1 – Definição e Aplicações

■ Resposta:



Capítulo 1 – Definição e Aplicações

- No grafo do exemplo 1 é uma **relação simétrica**, ou seja, se $\langle v \text{ é amigo de } w \rangle$ então $\langle w \text{ é amigo de } v \rangle$.
- A ligação entre os vértices é chamada de **aresta** caso não há orientação entre as arestas.

Capítulo 1 – Definição e Aplicações

■ Exemplo 2

Considere os conjuntos V e A definidos por:

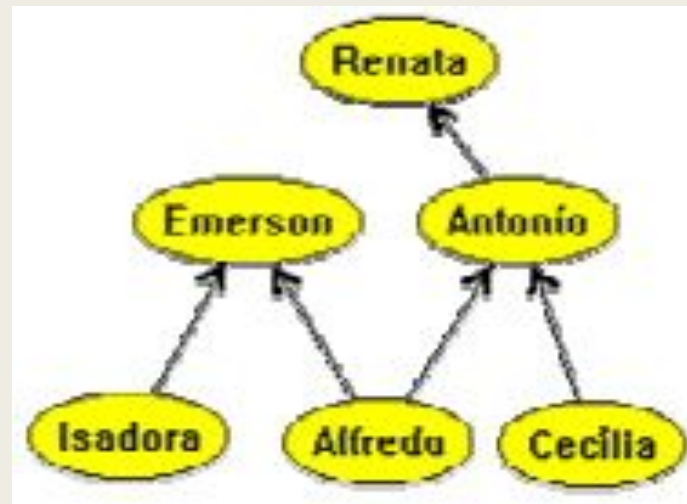
$V = \{p/p \text{ é uma pessoa da família Silva}\} = \{\text{Emerson, Isadora, Renata, Antonio, Cecília, Alfredo}\}$

$A = \{(v, w)/v \text{ é pai ou mãe de } w\} = \{(\text{Isadora, Emerson}), (\text{Antonio, Renata}), (\text{Alfredo, Emerson}), (\text{Cecília, Antonio}), (\text{Alfredo, Antonio})\}.$

Faça a representação gráfica dos elementos do conjunto A .

Capítulo 1 – Definição e Aplicações

■ Resposta:



Capítulo 1 – Definição e Aplicações

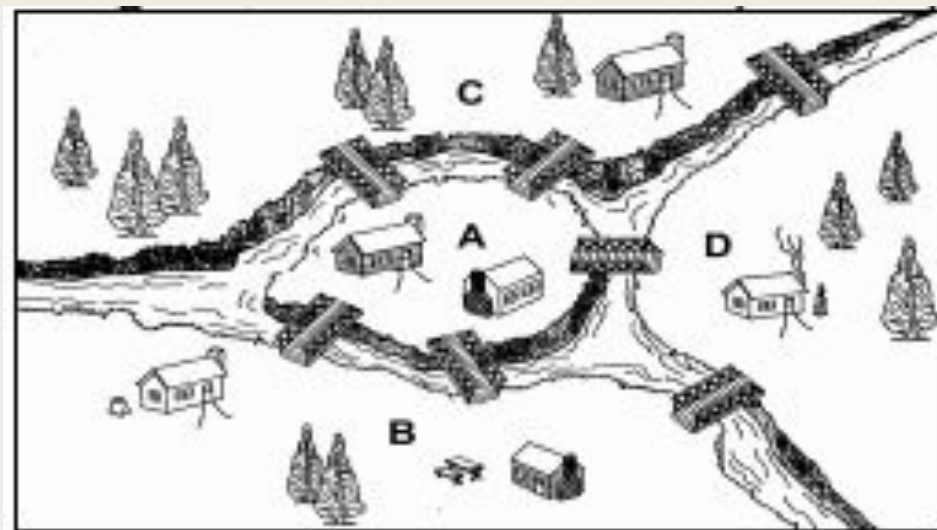
- No grafo exemplo a **relação não é simétrica** pois se $\langle v \text{ é pai ou/ mãe de } w \rangle$, não é o caso de $\langle w \text{ é pai ou/ mãe de } v \rangle$.
- Há, portanto, uma orientação na relação, com um correspondente efeito na representação gráfica. Este tipo de grafo é chamado de **grafo orientado** ou **dígrafo**, sendo que as conexões entre os vértices são chamadas de **arcos**.

Capítulo 1 – Definição e Aplicações

■ Exemplo 3

O problema das "Pontes de Königsberg".

Königsberg era uma cidade da antiga Prússia, hoje chamada Kaliningrado, na atual Rússia. Na parte central de Königsberg, é cortado pelo rio Pregel. O rio Pregel tem duas ilhas. Estas estão unidas por uma ponte. Uma ilha tem uma ponte que a une ambas as margens, a outra tem duas pontes para cada margem.

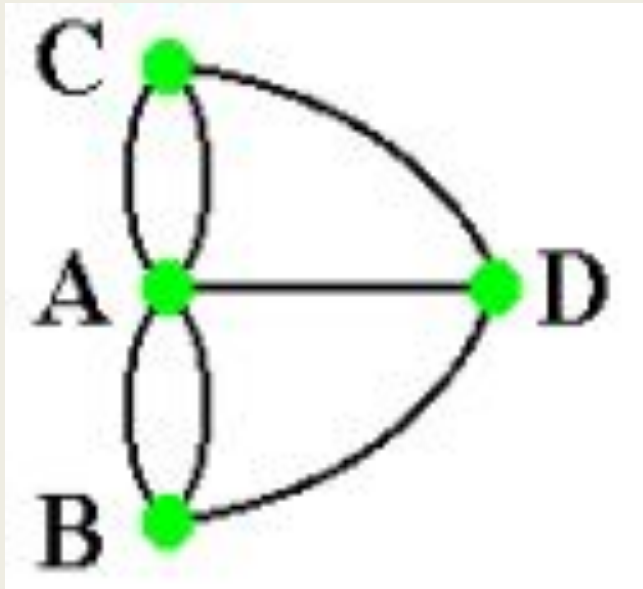


Capítulo 1 – Definição e Aplicações

- Faça uma representação em forma de grafo representando os caminhos possíveis de um habitante desta cidade fazer entre as regiões A, B, C e D. Podem os habitantes desta cidade atravessar todas as sete pontes num só passeio contínuo?

Capítulo 1 – Definição e Aplicações

- Resposta
- Colocando as regiões A, B, C e D como vértices temos:



Não possível um habitante desta cidade atravessar todas as sete pontes num só passeio contínuo.

- Este fato foi provado por Euler no século XVIII e é considerado o problema que deu origem a “Teoria dos Grafos”.
- Como há duas arestas entre os vértices A e C e entre os vértices A e B, o grafo do exemplo 3 é chamado de **multigrafo**.

2. Terminologia da Teoria dos Grafos

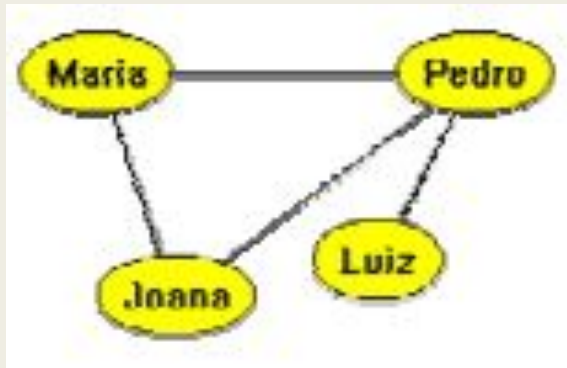
- a) Ordem: é o número de vértices do grafo.
 - *A ordem do grafo do exemplo 1 é 4.*
- b) Adjacência: são os vértices vizinhos.
 - *No grafo do exemplo 1, Maria e Pedro são adjacência.*

2. Terminologia da Teoria dos Grafos

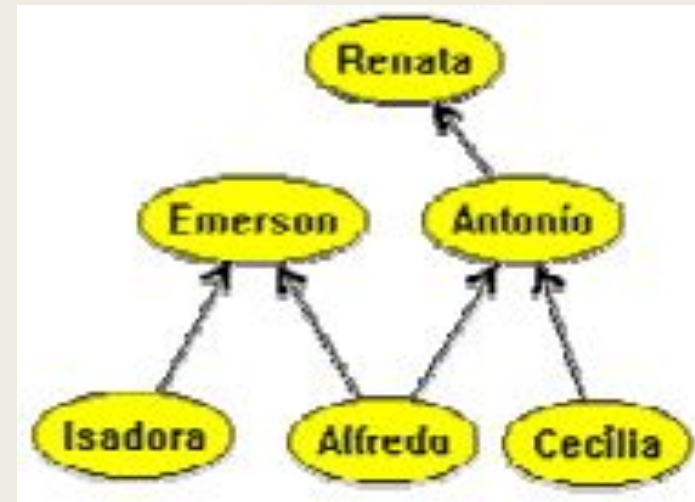
- c) Grau: é o número de arestas incidentes num vértice.
 - *No grafo do exemplo 1 o grau vértice (Pedro) = 3;*
 - *No caso **grafo orientado** devemos distinguir **grau de emissão** do **grau de recepção**.*
 - No grafo do exemplo 2 temos: grau de emissão de Antônio é igual a 1 e grau de recepção de Antônio é igual a 2.
 - *Nos **grafos orientados** podemos também definir:*
 - **fonte** que é um vértice com grau de recepção igual a zero;
 - e **sumidouro** que é um vértice com grau de emissão igual a zero.
 - *No grafo do exemplo 2, Isadora, Alfredo e Cecília são **fontes** enquanto que Renata e Emerson são **sumidouros**.*

2. Terminologia da Teoria dos Grafos

■ Exemplo 1

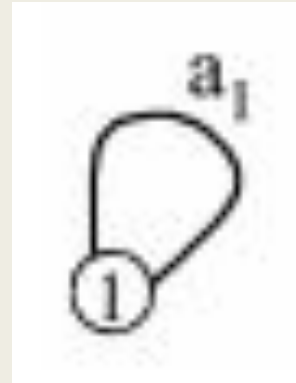


■ Exemplo 2



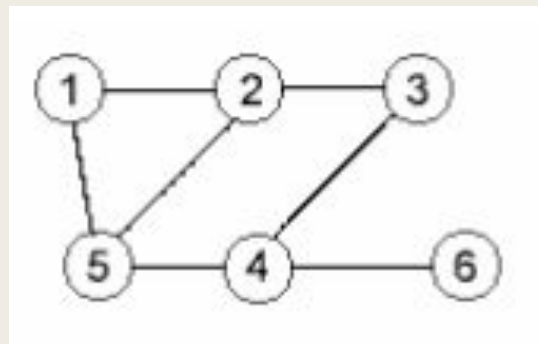
2. Terminologia da Teoria dos Grafos

- d) Laço (ou loop): é uma aresta (ou arco) cujas terminações estão no mesmo vértice.
 - *No grafo da figura ao lado a_1 é um laço.*



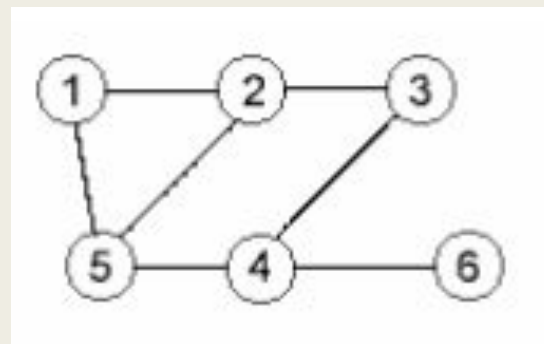
2. Terminologia da Teoria dos Grafos

- e) Caminho: é uma sequência de vértices tal que de cada um dos vértices existe uma aresta para o vértice seguinte.
 - Um caminho é chamado **simples** se nenhum dos vértices no caminho se repete.
 - O **comprimento do caminho** é o número de arestas que o caminho usa, contando-se arestas múltiplas vezes.
 - Dois caminhos são **independentes** se não tiverem nenhum vértice em comum, exceto o primeiro e o último. No grafo da figura ao lado temos: $(1, 2, 5, 1, 2, 3)$ é um caminho com comprimento 5, e $(1, 2, 3)$ é um caminho simples de comprimento 2.



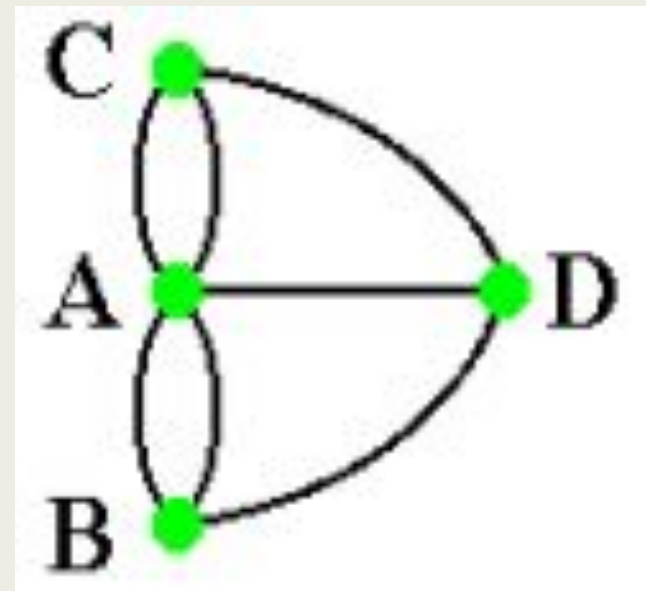
2. Terminologia da Teoria dos Grafos

- f) Ciclo (ou circuito): é um caminho que começa e acaba com o mesmo vértice.
 - *Ciclos de comprimento 1 são laços.*
- No grafo da figura ao lado temos: (1, 2, 3, 4, 5, 2, 1) é um ciclo de comprimento 6.
- Um **ciclo simples** é um ciclo que tem um comprimento de número 3, pelo menos e no qual o vértice inicial só aparece mais uma vez, como vértice final, e os outros vértices aparecem só uma vez.
 - *No grafo acima, (1, 5, 2, 1) é um ciclo simples.*
- Um grafo chama-se **acíclico** se não contém ciclos simples



2. Terminologia da Teoria dos Grafos

- Exemplo 4
- Para o grafo representado na figura responda os seguintes itens:
 - a) *Qual é a ordem do grafo?*
 - b) *Qual é grau de cada vértice?*

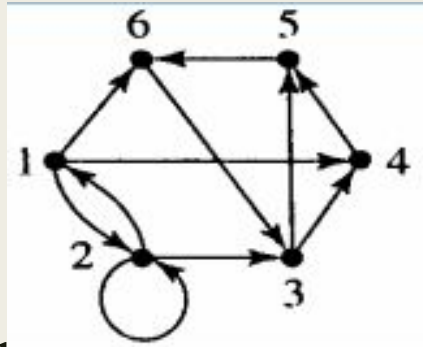


2. Terminologia da Teoria dos Grafos

- Solução:
- a) Ordem é o número de aresta logo a ordem deste grado é 6.
- b) Grau é a quantidade de arestas que tem cada vértice portanto:
 - $\text{Grau}(B) = \text{Grau}(C) = \text{Grau}(D) = 3.$
 - $\text{Grau}(A) = 5$

Exercícios

- Use o grafo direcionado na figura para responder às seguintes questões.



- 1) Quais nós são alcançáveis a partir do nó 3?
- 2) Qual o comprimento do caminho mais curto do nó 3 para o nó 6?
- 3) Qual o caminho de comprimento 8 do nó 1 para o nó 6?
- 4) O caminho do item c é um ciclo? Por que?