Tratamento Algébrico	**UNIVERSIDADE PAULISTA "UNIP"** ***Disciplina: Geometria Analítica*** ***Ciência da Computação*** ***Profª. Juliana Brassolatti Gonçalves***

VETORES NO PLANO CARTESIANO

Os vetores são desenhados no plano cartesiano utilizando sua extremidade como orientação.

Exemplo

O vetor $\vec{v} = (3,\ 2)$ corresponde ao vetor que tem origem no ponto $O(0,\ 0)$ do plano cartesiano e extremidade no ponto $(3,\ 2)$. Os valores 3 e 2 são, portanto, as coordenadas do ponto extremo do vetor $\vec{v}$. Observe, na Figura 1, vários exemplos de vetores no plano.

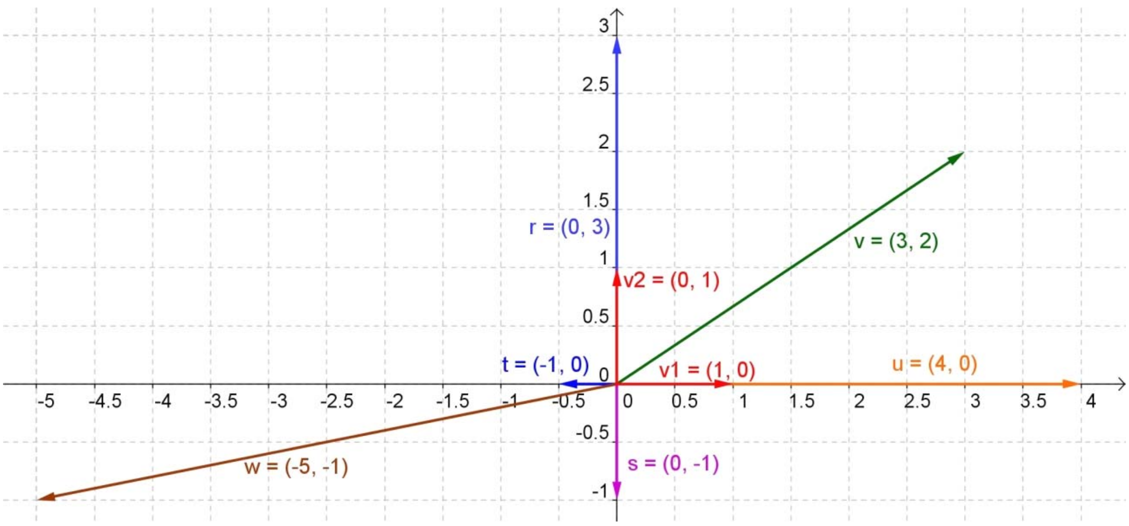


Figura 1 - ***Vetores representados no plano cartesiano*.**

Mas, por que utilizamos as coordenadas do ponto extremo do vetor para representá-lo?

Fazemos isso porque todo vetor pode ser escrito como soma de outros dois vetores. Por exemplo, o vetor $\vec{v} = (3,\ 2)$ da Figura 1 pode ser escrito como soma dos múltiplos de $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$: $\vec{v} = 3\overrightarrow{v_1} + 2\overrightarrow{v_2}$.

Dizemos, nesse caso, que $\vec{v}$ é **combinação linear** de $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$.

O conjunto $B = \left\{ \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \right\}$ é chamado de **base** no plano.

Quando os vetores da base são ortogonais e unitários, dizemos que eles formam uma **base ortonormal**. No exemplo anterior, os vetores $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ são ortogonais e unitários; logo, formam uma base ortonormal.

E mais! Esses vetores também determinam o sistema cartesiano, e por isso são conhecidos por **base canônica**. Essa é a base que utilizaremos nesta disciplina

Veja como ficam as operações definidas até agora, utilizando-se pares ordenados:

- **Adição**: se $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$, então $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

<u>**Exemplo**</u>: considere os vetores $\vec{u} = (1, 5)$ e $\vec{v} = (3, 2)$. A soma $\vec{u} + \vec{v}$ é: $\vec{u} + \vec{v} = (1, 5) + (3, 2) = (1 + 3, 5 + 2) = (4, 7)$.

- **Subtração**: se $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$, então $\vec{u} - \vec{v} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$.

<u>**Exemplo**</u>: considere os vetores $\vec{u} = (1, 5)$ e $\vec{v} = (3, 2)$. A subtração $\vec{u} - \vec{v}$ é: $\vec{u} - \vec{v} = (1, 5) - (3, 2) = (1 - 3, 5 - 2) = (-2, 3)$.

- **Multiplicação por escalar**: se $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então $a \cdot \vec{u} = a \cdot (x_1, y_1) = (a \cdot x_1, a \cdot y_1)$.

<u>**Exemplo**</u>: se multiplicarmos $\vec{u}$ por 3, encontramos o vetor: $3\vec{u} = 3(1, 5) = (3, 15)$.

<u>VETORES DEFINIDOS POR DOIS PONTOS</u>

Um vetor pode ser definido por dois pontos no plano. Considere o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ **(Figura 2)**, de origem no ponto $A(x_1, y_1)$ e extremidade em $B(x_2, y_2)$.

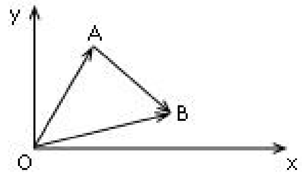


Figura 2 - *Vetor* $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ *no plano*.

Observando a Figura 2, podemos concluir que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$. Logo,

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$
$$\overrightarrow{AB} = (x_2,\ y_2) - (x_1,\ y_1)$$
$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)$$

Essa conclusão nos permite afirmar que $\overrightarrow{AB} = B - A$.

O que isso significa?

Significa que, se tivermos um vetor com origem num ponto *A* e extremidade num ponto *B*, o vetor $\overline{AB}$ terá coordenadas $B - A$.

<u>Exemplo</u>

O vetor de origem no ponto $A(2, -1)$ e extremidade no ponto $B(5, 4)$ terá as seguintes coordenadas: $\overrightarrow{AB} = B - A = (5, 4) - (2, -1) = (3, 5)$.

<u>MÓDULO DE UM VETOR</u>

O módulo ou comprimento de um vetor $\vec{v} = (x,\ y)$ é obtido utilizando-se o teorema de Pitágoras: $\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Por exemplo: o vetor $\vec{v} = (-4, 3)$ **(Figura 3)** tem módulo $\|v\| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$. Portanto, o vetor tem 5 unidades de comprimento.

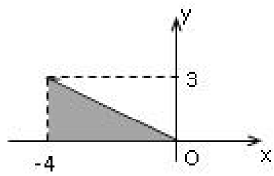


Figura 3 - ***Vetor*** $\vec{v} = (-4,\ 3)$ **.**

VETOR UNITÁRIO - VERSOR

Um vetor $\vec{v}$ pode ser transformado em um vetor de comprimento unitário. Isso é feito dividindo-se as coordenadas de $\vec{v}$ por seu módulo: $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$. Esse vetor é chamado **versor** de $\vec{v}$.

Discutimos até aqui a representação dos vetores no plano. Agora veremos como representar os vetores no espaço. Para isso, utilizaremos três coordenadas.

VETORES NO ESPAÇO

Após a representação de pontos no plano utilizando o conjunto R^2, você verá como podemos representar pontos no espaço, utilizando o conjunto R^3.

Os pontos do plano são representados por pares ordenados de números reais (R^2), isto é, pares de números que têm uma ordem: primeiro o valor do eixo *x*, depois o valor do eixo *y*. Para representar pontos no espaço (R^3), precisamos acrescentar um novo eixo: o eixo *z*. Assim, pontos do espaço devem ter três coordenadas: (*x*, *y*, *z*). O ponto $A(3,\ 2,\ 4)$ da Figura 4 é um exemplo de ponto no espaço, observe.

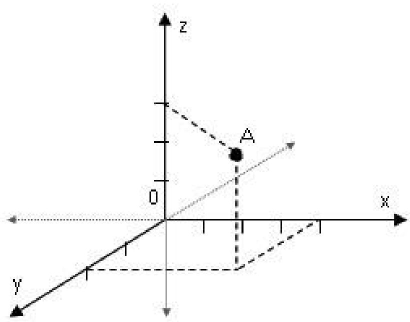


Figura 4 - ***Ponto A representado no sistema cartesiano tridimensional*****.**

Os três eixos cartesianos dividem o espaço em oito octantes:

1) O1: *x*, *y* e *z* são positivos.

2) O2: *x* e *z* positivos, *y* negativo.

3) O3: *x* e *y* negativos, *z* positivo.

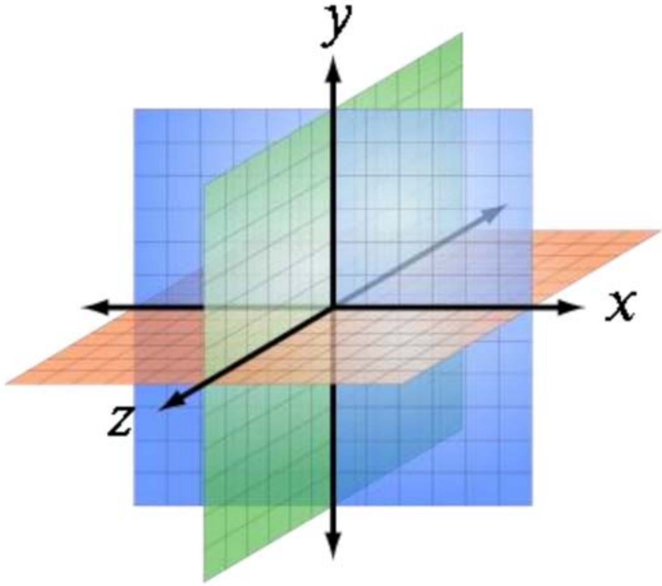
4) O4: *y* e *z* positivos, *x* negativo.

5) O5: *x* e *y* positivos, *z* negativo.

6) O6: *x* positivo, *y* e *z* negativos.

7) O7: *x*, *y* e *z* negativos.

8) O8: *y* positivo, *x* e *z* negativos.



Assim como os vetores no plano, representaremos os vetores no espaço por meio de seu ponto extremo, isto é, do ponto que está na extremidade do vetor. Um vetor $\vec{v}$ de coordenadas (2, 4, 3), por exemplo, é representado no espaço com origem no ponto $O(0,\,0,\,0)$ e extremidade em (2, 4, 3). Observe a Figura 5.

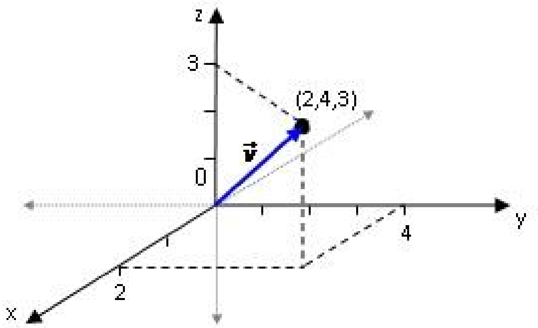


Figura 5 - ***Vetor*** $\vec{v} = (2,\,4,\,3)$ ***no sistema cartesiano de três eixos*.**

O espaço R^3 possui, também, uma **base canônica**, isto é, um conjunto formado por três vetores ortogonais e unitários $B=\{(1,\ 0,\ 0),(0,\ 1,\ 0),(0,\ 0,\ 1)\}$, capazes de produzir qualquer outro vetor do plano.

Exemplo 1

O vetor $\vec{v}=(2,\ 4,\ 3)$ pode ser decomposto como uma soma dos vetores da base canônica:

$$\vec{v}=(2,\ 4,\ 3)$$
$$\vec{v}=(2,\ 0,\ 0)+(0,\ 4,\ 0)+(0,\ 0,\ 3)$$
$$\vec{v}=2\cdot(1,\ 0,\ 0)+4\cdot(0,\ 1,\ 0)+3\cdot(0,\ 0,\ 1)$$

Veja como essa soma é interpretada geometricamente na Figura 6.

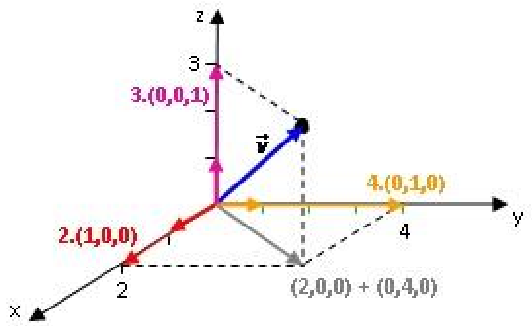


Figura 6 - ***Vetor $\vec{v}$ obtido pela soma dos vetores canônicos.***

O exemplo nos permite concluir que a soma de vetores no espaço é semelhante à soma de vetores no plano.

Exemplo 2

Considere, por exemplo, os vetores $\vec{u}=(-2,3,1)$ e $\vec{v}=(1,-1,4)$. Então:

$$\vec{u}+\vec{v}=(-2,\ 3,\ 1)+(1,\ -1,\ 4)=(-1,\ 2,\ 5)$$
$$\vec{u}-\vec{v}=(-2,\ 3,\ 1)-(1,\ -1,\ 4)=(-3,\ 4,\ -3)$$
$$7\vec{u}=7\cdot(-2,\ 3,\ 1)=(-14,\ 21,\ 7)$$
$$-\frac{1}{2}\vec{v}=-\frac{1}{2}\cdot(1,\ -1,\ 4)=\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -2\right)$$

As propriedades de vetores no plano também são válidas para vetores no espaço. Observe uma aplicação dessas propriedades no exemplo a seguir.

Exemplo 3

No paralelogramo ABCD da Figura 7 sabe-se que $A(1, 5, -3)$, $B(3, 4, 2)$ e $C(0, -1, 4)$. Descubra as coordenadas do ponto D.

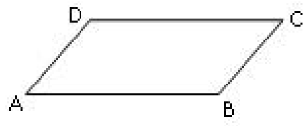


Figura 7 - ***Paralelogramo ABCD*.**

Os vetores $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{BC}$ têm mesmo módulo, direção e sentido. Logo,

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$
$$D - A = C - B$$
$$D - (1, 5, -3) = (0, -1, 4) - (3, 4, 2)$$
$$D - (1, 5, -3) = (-3, -5, 2)$$
$$D = (-3, -5, 2) + (1, 5, -3)$$
$$D = (-2, 0, -1)$$

Exercícios Propostos (Sala de Aula)

1. Dados os vetores $\vec{u} = (-8,7)$ e $\vec{v} = (-4,-1)$, calcular $\vec{u} + 2v$; $3\vec{u}$ e $2\vec{u} - 4v$.

2. Dados os vetores $\vec{u} = \left(-4,-\frac{1}{3},4\right)$ e $\vec{v} = (1,0,-3)$, calcular $\vec{u} + v$; $5\vec{u}$; $2\vec{u} - 3v$ e $\vec{u} - \frac{1}{2}v$.

3. Dados os vetores $\vec{u} = (1,1,0)$, $\vec{v} = (1,0,3)$ e $\vec{w} = (4,3,-2)$, determine os números a e b tais que o vetor $\vec{w}$ seja uma combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

4. Determine x e y sabendo-se que $\vec{u} = (x - 4y,6,-3)$ e $\vec{v} = (3,3y, y - 5)$ são iguais.

5. Calcule o vetor $\overrightarrow{AB}$ sendo $A=(-9,12)$ e $B=\left(\frac{1}{3},3\right)$.

6. Calcule o vetor $\overrightarrow{AB}$ sendo $A=(-1,-2,7)$ e $B=(-4,3,8)$.

7. Calcule o ponto médio de AB, sendo $A=(-2,7)$ e $B=(-4,-7)$.

8. Calcule o ponto médio de AB, sendo $A=(-1,-8,10)$ e $B=(4,-6,-3)$.

9. Calcule o módulo do vetor $\vec{u}=(-12,-6,1)$.

10. Calcule o versor do vetor $\vec{u}=(-4,7,13)$.

11. Considere o vetor $\vec{u}=(-1,8)$. Determine um vetor paralelo a $\vec{u}$, sentido oposto de $\vec{u}$ e módulo igual a 10.

12. Determine o valor de a para que o vetor $\vec{u}=\left(2a,-\frac{1}{5}\right)$ seja unitário.

13. Verifique se os vetores $\vec{u}=(10,1,-4)$ e $\vec{v}=(1,2,10)$ são paralelos.

14. Determine x tal que $\vec{u}=(2x+1,5)$ e $\vec{v}=(2,1)$ sejam paralelos.