УПРАЖНЕНИЕ 1 БАЗОВИ МАТЕМАТИЧЕСКИ ПОЗНАНИЯ ЗА ПРОВЕЖДАНЕ НА КУРСА ПО ГРАФИЧНИ СИСТЕМИ

Базовите математически знания, които са необходими за курс по компютърна графика, обикновено включват следните теми:

1. Алгебра

- **Системи от линейни уравнения** – за разбиране на трансформации и изчисления в 3D пространството**.**
- **Скалари и вектори** – за работа с посоки, разстояния и движения.
- **Матрици и детерминанти:**
    - Събиране, умножение и трансформация на матрици.
    - Обратна матрица – за прилагане на обратни трансформации.

2. Геометрия

- **Планиметрия**:
    - Работа с точки, линии, ъгли, полигони и окръжности.
- **Стереометрия**:
    - Работа с 3D обекти като сфери, кубове, конуси и пирамиди.
- **Векторна геометрия**:
    - Скаларно произведение (dot product) – за изчисляване на ъгли между вектори.
    - Векторно произведение (cross product) – за изчисляване на нормални вектори на повърхности.

3. Тригонометрия

- **Синус, косинус, тангенс** – за ротации, проекции и изчисляване на ъгли.
- **Питагорова теорема** – за разстояния между точки.
- **Периодични функции** – за анимации и работа с вълни.

4. Линейна алгебра

- **Пространства и базиси**:
    - Координатни системи (декартова, нормализирана и хомогенна).

- **Трансформации**:
  - Преобразования като мащабиране, въртене, транслация и срязване.
- **Хомогенни координати** – за представяне на перспективни трансформации.

5. Аналитична геометрия

- **Уравнения на прави и равнини** – за описване на обекти в пространството.
- **Разстояние между точки, линии и равнини**.
- **Параметрични уравнения** – за анимации и описване на криви.

6. Диференциално и интегрално смятане

- **Диференциране** – за определяне на наклони, скорост и оптимизации.
- **Интегриране** – за изчисляване на площи и обеми.

7. Математическа логика

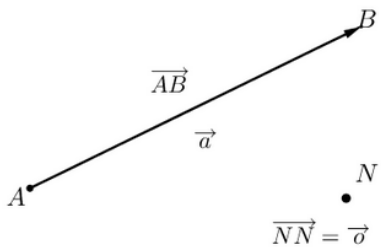
- Базово разбиране на булева логика и побитови операции – често използвани в графичните алгоритми.

Всички тези знания сте придобили в курсовете по Математика – 1 и 2 част в ТУ-Варна. В настоящото упражнение ще припомним някои базови познания, които ще са нужни през целия курс на обучение.

ВЕКТОРИ

Насочена отсечка в пространството, която се определя от 2 точки:

- Начална (опорна, приложна) точка – това е точката, от която започва векторът;
- Крайна точка – точката, в която свършва векторът.



Изобразява се като стрелка, при която:

- Дължината на стрелката представя модула (дължината) на вектора;
- Посоката на стрелката показва ориентацията на вектора.

Основни характеристики на вектора:

- Модул (дължина) на вектора – дължината на насочената отсечка. Ако векторът е $\vec{v}$, се изчислява като (съответно в 2D и 3D):

$$|\vec{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Геометрично модулът е разстоянието между началната и крайната точка.

- Посока на вектора - това е ориентацията на вектора спрямо координатната система. Може да се изрази чрез ъгъл спрямо положителната посока на x-оста (в 2D) или чрез посока в пространството (в 3D).

Равни (еднакви) вектори – когато имат еднаква дължина и посока, независимо от началната им точка.

Противоположни вектори – векторът $-\vec{v}$ е противоположен на $\vec{v}$, ако $\vec{v} \neq \vec{0}$, двата вектора имат еднакви дължини и противоположни посоки.

Единичен вектор - $|\vec{v}| = 1$

Нулев вектор - $\vec{0}$ – има дължина 0 и няма определена посока

Вектор в координатна система

Векторите играят ключова роля в графичните системи, като позволяват да се описват величини с големина и посока. В координатната система векторите се представят чрез числа, които дефинират тяхната позиция и ориентация в пространството.

Векторът $\vec{v}$ в декартовата координатна система се дефинира като:

- Насочена отсечка с определена начална точка и крайна точка.
- Точка в пространството (в крайния си вид).

Нека:

- Началната точка на вектора е $A(x_1, y_1, z_1)$
- Крайната точка е $B(x_2, y_2, z_2)$

Тогава координатите на вектора са разликата между координатите на крайната и началната точка:

$$\vec{v} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

Пример: ако началната точка е A(1, 2, 3), а крайната точка е B(4, 6, 8), векторът е:

$$\vec{v} = (4 - 1, 6 - 2, 8 - 3) = (3, 4, 5)$$

Нормализиране на вектор

Нормализиране на вектор означава преобразуването му до вектор с дължина 1 (единичен вектор), като се запази посоката му. Това е важно за приложения като определяне на посоки и осветление в графичните системи.

Формулата е:

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Пример:

Ако $\vec{v} = (3,4)$, то:

- Дължината на вектора е 5;
- Нормализираният вектор е:

$$\vec{u} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = (0.6, 0.8)$$

Операции с вектори

Събиране на вектори

Събирането на вектори е основна операция в линейната алгебра и има важно приложение в графичните системи, физиката и компютърната геометрия. То може да бъде представено както алгебрично, така и геометрично. Алгебрично събиране на вектори:

Ако имаме два вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$:

- В двумерно пространство:
  $\vec{u} = (u_x, u_y), \qquad \vec{v} = (v_x, v_y)$
- В тримерно пространство:
  $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z), \qquad \vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$

Събирането на векторите става чрез събиране на съответните им компоненти:

- В двумерно пространство:
  $\vec{u} + \vec{v} = (u_x + v_x, u_y + v_y)$
- В тримерно пространство:
  $\vec{u} + \vec{v} = (u_x + v_x, u_y + v_y, u_z + v_z)$

  Пример:
- В двумерно пространство:
  $\vec{u} = (2, 3), \qquad \vec{v} = (4, 1)$
  $\vec{u} + \vec{v} = (2 + 4, 3 + 1) = (6,4)$

- В тримерно пространство:
  $\vec{u} = (1, 2, 3), \qquad \vec{v} = (4, 5, 6)$
  $$\vec{u} + \vec{v} = (1 + 4, 2 + 5, 3 + 6) = (5, 7, 9)$$

Изваждане на вектори

- Алгебрично изваждане на вектори

Ако имаме два вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$:

- В двумерно пространство:
  $\vec{u} = (u_x, u_y), \qquad \vec{v} = (v_x, v_y)$
- В тримерно пространство:
  $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z), \qquad \vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$

Изваждането на векторите става чрез изваждане на съответните им компоненти:

- В двумерно пространство:
  $\vec{u} - \vec{v} = (u_x - v_x, u_y - v_y)$
- В тримерно пространство:
  $\vec{u} - \vec{v} = (u_x - v_x, u_y - v_y, u_z - v_z)$

Пример:

- В двумерно пространство:
  $\vec{u} = (4, 6), \qquad \vec{v} = (1, 3)$
  $\vec{u} - \vec{v} = (4 - 1, 6 - 3) = (3, 3)$

- В тримерно пространство:
  $\vec{u} = (5, 8, 2), \qquad \vec{v} = (3, 4, 1)$
  $\vec{u} - \vec{v} = (5 - 3, 8 - 4, 2 - 1) = (2, 4, 1)$

Умножение на вектори

- Произведение на вектор с число

Произведението на вектор с число (скалар) е операция, при която векторът се мащабира чрез умножение на всяка от неговите компоненти с това число. Това е базова операция в линейната алгебра, която запазва посоката на вектора, но променя неговата дължина.

Ако имаме вектор $\vec{v}$:

- В двумерно пространство:
  $\vec{v} = (v_x, v_y)$

- В тримерно пространство:
  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$

и скалар λ (число), тогава произведението на $\vec{v}$ с λ е нов вектор

- В двумерно пространство:
  $\lambda.\vec{v} = (\lambda.v_x, \lambda.v_y)$
- В тримерно пространство:
  $\overrightarrow{\lambda.v} = (\lambda.v_x, \lambda.v_y, \lambda.v_z)$

Умножение на вектор със скалар мащабира неговата дължина. Ако скаларът е отрицателен, посоката на вектора се обръща. Ако скаларът е 0, резултатът е нулев вектор.

- Произведение на вектори

Векторите могат да участват в два основни вида произведения:

- **Скаларно произведение** (резултатът е число).
- **Векторно произведение** (резултатът е нов вектор).

И двата вида произведения имат различно геометрично и физично значение и се използват в различни контексти.

Скаларно произведение

Дадени са два вектора: $\overrightarrow{u}(u_1,\ u_2,\ u_3)$ и $\overrightarrow{v}(v_1,\ v_2,\ v_3)$

- Геометрична формула:

Скаларното произведение на два вектора $\overrightarrow{u}$ и $\vec{v}$ е число, което се изчислява чрез произведението на модулите на двата вектора и косинуса на ъгъла между тях:

$$\overrightarrow{u}.\vec{v} = |\overrightarrow{u}|.\,|\overrightarrow{v}|.\cos(\theta)$$

Където:

$|\overrightarrow{u}|$ и $|\overrightarrow{v}|$ са дължините на векторите;

θ е ъгълът между тях ($0^o \leq \theta \ \leq \ 180^o$)

Скаларното произведение измерва проекцията на единия вектор върху другия, умножена по дължината на другия.

- Аналитична формула:

$$\overrightarrow{u}.\vec{v} = \ u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

Пример: Дадени са векторите $\vec{u} = (5, 8, 2)$, $\vec{v} = (3, 4, 1)$

$$|\overrightarrow{u}| = \ \sqrt{5^2 + 8^2 + 2^2} = \sqrt{93}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{26}$$
$$\vec{u}.\vec{v} = 5 * 3 + 8 * 4 + 2 * 1 = 49$$
$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|} = \frac{49}{\sqrt{93} * \sqrt{26}} = 0.99648$$

$$\theta = arccos(0.99648) = 4.81^o$$

Векторно произведение

Дефинира се само в тримерно пространство. Дадени са два вектора: $\vec{u}(u_1,\ u_2,\ u_3)$ и $\vec{v}(v_1,\ v_2,\ v_3)$

- Геометричен израз:

Векторното произведение на два вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$ е вектор, който е перпендикулярен на равнината, образувана от $\vec{u}$ и $\vec{v}$. Модулът му се определя по формулата:

$$\vec{u} \times \vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\sin(\theta)$$

Където:

$|\vec{u}|$ и $|\vec{v}|$ са дължините на векторите;

θ е ъгълът между тях ($0^o \leq \theta \leq 180^o$)

- Аналитичен израз – детерминантен запис:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Където $\vec{i}, \vec{j}$ и $\vec{k}$ са единичните базисни вектори по осите на произволна декартова координатна система.

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\vec{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\vec{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{k}$$

Пример: Дадени са векторите $\vec{u} = (5, 8, 2)$, $\vec{v} = (3, 4, 1)$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 8 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (8 * 1 - 2 * 4)\vec{i} + (2 * 3 - 5 * 1)\vec{j} + (5 * 4 - 8 * 3)\vec{k} = 0\vec{i} + 1\vec{j} - 4\vec{k} \quad => (0, 1, -4)$$

МАТРИЦИ

Матриците са основен инструмент в математиката и се използват широко в компютърната графика. Те представляват подредени таблици от числа, организирани в редове и колони, и позволяват лесно управление на множество уравнения и трансформации.

Основни характеристики

1. Редове и колони
    - Матрицата A има m реда и n колони
    - Размерът ѝ се записва като m x n
2. Елементи на матрицата
    - Всеки елемент a_{ij} се намира в *i*-тия ред и *j*-тата колона

    Пример - матрица с размер 2 x 3:

    $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

Видове матрици

Квадратна матрица – матрица с равен брой редове и колони (m x n)

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Диагонална матрица – квадратна матрица, в която само елементите на главния диагонал са различни от 0

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Единична матрица – квадратна матрица, в която всички елементи на главния диагонал са 1, а всички останали са 0

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Нулева матрица – матрица, в която всички елементи са 0

$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Редова матрица (вектор ред) – матрица, която има само един ред

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Колонна матрица (вектор колона) – матрица, която има само една колона

$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Операции с матрици

1. Събиране и изваждане – две матрици могат да се събират/изваждат, ако имат еднакви размери (m x n)

   $A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$

   Пример:

   $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

   $A + B = \begin{bmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$

2. Умножение на матрица със скалар – всеки елемент на матрицата се умножава с числото

   $\lambda.A = \begin{bmatrix} \lambda.a_{11} & \lambda.a_{12} \\ \lambda.a_{21} & \lambda.a_{22} \end{bmatrix}$

3. Умножение на матрици – две матрици *A (m x n)* и *B (n x p)* могат да се умножат, ако броят на колоните на първата матрица е равен на броя на редовете на втората
   Формула за изчисление на елемент:

   $$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} * B_{kj}$$

   Пример:

   $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

   $A.B = \begin{bmatrix} (1.5 + 2.7) & (1.6 + 2.8) \\ (3.5 + 4.7) & (3.6 + 4.8) \end{bmatrix}$

   За разлика от обикновените числа, **при матрично умножение редът има значение**.

Ако A и B са матрици, в общия случай: A·B≠B·A. Дори и размерностите да позволяват умножение в двата реда, резултатите могат да са различни.

4. Транспониране на матрица – преобразуване на редовете в колони и колоните в редове

   $A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$

5. Обратна матрица (A^{-1}) – такава матрица, при която:
   $A.\ A^{-1} = A^{-1}.\ A = I$
   Където I е единична матрица

Само квадратни матрици могат да имат обратна матрица. В компютърната графика намира приложение за връщане на обекти в оригиналната им позиция.

Ако имаме матрица A:

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Обратната матрица A^{-1} се изчислява като:

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} . \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Където $|A| = a.d - b.c$ (детерминанта на A)

Пример:

$A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

$|A| = 4.6 - 7.2 = 10$

$A^{-1} = \frac{1}{10} . \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.7 \\ -0.2 & 0.4 \end{bmatrix}$

Умножение на матрица с вектор колона

Умножението на **вектор колона** с **матрица** е фундаментална операция в линейната алгебра. Тази операция има огромно значение в компютърната графика. Резултатът от умножението е **нов вектор колона**, който представлява трансформация на първоначалния вектор.

За да можем да умножим матрица A с вектор колона $\vec{v}$ е необходимо:

- Матрицата да има размери m x n (m реда и n колони)
- Вектор колоната да има n реда (n x 1)

Размерът на резултата ще бъде m x 1, т.е. нова вектор колона с m елемента.

Нека:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

Умножението на A . $\vec{v}$ се изчислява като:

$$A \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} a_{11} \cdot v_1 + a_{12} \cdot v_2 + \cdots + a_{1n} \cdot v_n \\ a_{21} \cdot v_1 + a_{22} \cdot v_2 + \cdots + a_{2n} \cdot v_n \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot v_1 + a_{m2} \cdot v_2 + \cdots + a_{mn} \cdot v_n \end{bmatrix}$$

Пример:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad$ $\vec{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$

$A.\ \vec{v} = \begin{bmatrix} 2.5 + 3.2 \\ 1.5 + 4.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 13 \end{bmatrix}$

Геометрично, умножението на вектор колона с матрица представлява трансформация на вектора в ново пространство. Примери за такива трансформации:

- **Ротации**: Завъртане на вектор в 2D или 3D.
- **Скалиране**: Увеличаване или намаляване на дължината на вектора.

Детерминанта

Детерминантата е скаларна стойност, асоциирана с квадратна матрица (матрица с равен брой редове и колони). Тя е полезна за анализиране на свойствата на матрицата, като например дали тя е обратима, изчисляване на площи или обеми, и за решаване на системи от линейни уравнения. Отбелязва се като $|A|$ или det(A).

Формули за детерминанта:

- За матрица 2 x 2:

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$|A| = a.d-b.c$

- За матрица 3 x 3:

$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

$|A| = a.(e.i-f.h)-b.(d.i-f.g)+c.(d.h-e.g)$

ЗАДАЧИ

Задача 1. Намерете:

а) A.P

Където:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.3 \\ 0.1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

б) A.P

Където:

$$A = \begin{bmatrix} \cos(45^o) & -\sin(45^o) & 0 & 0 \\ \sin(45^o) & \cos(45^o) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.4 \\ 0.2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

в) $C = R_z * S$

Където:

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_z = \begin{bmatrix} \cos(90^\circ) & -\sin(90^\circ) & 0 & 0 \\ \sin(90^\circ) & \cos(90^\circ) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Нека

$$P = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Намерете $P' = C.P$

г) $C = S * R_z$

Където:

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_z = \begin{bmatrix} \cos(90^\circ) & -\sin(90^\circ) & 0 & 0 \\ \sin(90^\circ) & \cos(90^\circ) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Нека

$$P = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Намерете $P' = C.P$

Задача 2. Дадени са векторите:

1) $\overrightarrow{a}(2, -1, 2)$ и $\overrightarrow{b}(4, 4, -2)$
2) $\overrightarrow{a}(3, 4, -1)$ и $\overrightarrow{b}(5, -3, 2)$

Намерете:

а) дължините им

б) скаларното им произведение

в) ъгълът, сключен между тях

г) векторното им произведение