Теми за Държавен Изпит

1 август 2024 г.

Линейна алгебра

Симетрични оператори в крайномерни евклидови пространства. Основни свойства. Теорема за диагонализация.

Нека E е евклидово пространство и $\varphi : E \to E$

Дефиниция φ е **симетричен оператор**, ако е линеен оператор и $\forall x, y \in E$ е изпълнено $(\varphi(x), y) = (x, \varphi(y))$

Дефиниция A е **симетрична матрица**, ако $A = A^t \iff a_{ij} = a_{ji}$ за $i, j \in \{1..n\}$

Свойства

- Симетричните матрици образуват подпространство на линейното пространство $M_n(\mathbb{R})$
- Ако A е обратима симетрична матрица, то A^{-1} също е симетрична матрица.
- Ако A и B са симетрични матрици и $AB = BA$, то AB също е симетрична матрица.

Теорема
Нека E е ЕП и $e_1...e_n$ е ортонормиран базис на E. Нека $\varphi : E \to E$ е линеен оператор с матрица A спрямо този базис. $(e_i, e_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$
Тогава φ е симетричен оператор $\iff$ A е симетрична матрица

Доказателство. Нека $A = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{pmatrix}$. Имаме, че $\varphi(e_i) = a_{1i}e_1 + ... + a_{ni}e_n$
Базисът $e_1...e_n$ е ортонормиран $\implies x = x_1e_1 + ... + x_ne_n, y = y_1e_1 + ... + y_ne_n$ и $(x, y) = x_1y_1 + ... + x_ny_n$

$a_{ji} = (\varphi(e_i), e_j) = (a_{1i}e_1 + ... + a_{ji}e_j + ... + a_{ni}e_n, e_j) = a_{1i}(e_1, e_j) + ... + a_{ji}(e_j, e_j) + ... + a_{ni}(e_n, e_j) \implies a_{ji} = (\varphi(e_i), e_j) \overset{\varphi \text{ сим.}}{=} (e_i, \varphi(e_j)) = a_{ij} \implies a_{ji} = aij \implies A$ е симетрична матрица

Нека φ е линеен оператор и A е матрица на φ. $A = A^t$ спрямо ортонормирания базис. От $a_{ji} = (\varphi(e_i), e_j)$ и $a_{ij} = (\varphi(e_j), e_i) \implies (\varphi(e_i), e_j) = (\varphi(e_j), e_i)$
Нека $x = x_1e_1 + ... + x_ne_n \in E$ и $y = y_1e_1 + ... + y_ne_n \in E$

$$(\varphi(x), y) = (\varphi(\sum_i x_ie_i), \sum_j y_je_j) = (\sum_i x_i\varphi(e_i), \sum_j y_je_j) = \sum_i x_i(\varphi(e_i), \sum_j y_je_j)$$

$$= \sum_i \sum_j x_iy_j(\varphi(e_i), e_j) = \sum_i \sum_j x_iy_j(e_i, \varphi(e_j)) = (\sum_i x_ie_i, \sum_j y_j\varphi(e_j)) = (x, \varphi(\sum_j y_je_j)) = (x, \varphi(y))$$

□

Теорема
Всички характеристични корени на симетрична матрица са реални числа.

Доказателство. Нека $A = (a_{ij})_{nxn}$ е симетрична матрица и λ е (комплексен) характеристичен корен на A. Ще докажем, че $\lambda \in \mathbb{R}$.
Имаме $f_A(\lambda) = det(A - \lambda E) = 0 \implies$ хомогенната система с матрица $A - \lambda E$ има ненулево решение $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{C}^n$, т.е. е в сила:

$$\left| \begin{array}{l} (a_{11} - \lambda)x_1 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + ... + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = \lambda x_1 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + ... + a_{nn}x_n = \lambda x_n \end{array} \right.$$

Като умножим първото равенство с $\overline{x_1}$, а второто с $\overline{x_2}$ и т.н., n-тото с $\overline{x_n}$ и ги съберем получаваме

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_j\overline{x_i} = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{x_i} = \lambda \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$$

Да означим $u = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_j\overline{x_i}, v = \sum_{i=1}^n |x_i|^2$. Числото $v \in \mathbb{R} > 0$. Използваме, че A е симетрична матрица $(a_{ij} = a_{ji})$ и получаваме $\overline{u} = \sum_{i,j=1}^n \overline{a_{ij}x_j\overline{x_i}} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\overline{x_j}x_i = \sum_{i,j=1}^n a_{ji}\overline{x_j}x_i = u$. Тогава $\overline{u} = u \implies u \in \mathbb{R}$ и $\lambda = \frac{u}{v} \in \mathbb{R}$ □

Следствие Всички характеристични корени на симетричен оператор $\in \mathbb{R}$

Твърдение Всеки два собствени вектора, съответстващи на различни собствени стойности на симетричен оператор, са ортогонални помежду си.

Доказателство. Нека φ е симетричен оператор, λ_1 и λ_2 са различни собствени стойности на φ и v_1 и v_2 са съответстващи им собствени вектори на φ. Имаме $(\varphi(v_1), v_2) = (v_1, \varphi(v_2))$, откъдето $(\lambda v_1, v_2) = (v_1, \lambda_2 v_2) \implies \lambda(v_1, v_2) = \lambda_2(v_1, v_2) \implies (\lambda_1 - \lambda_2)(v_1, v_2) = 0$. От $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $(v_1, v_2) = 0$

□

<u>Теорема</u> (диагонализация)
Нека $\varphi : E \to E$ е симетричен оператор в крайномерно ЕП - E. Тогава съществува ортонормиран базис на E, в които матрицата на φ е диагонална (по главния й диагонал стоят собствените стойности на φ, а базисните вектори са собствени вектори на φ)

Доказателство. Трябва да докажем, че пространството E притежава ортонормиран базис $v_1, ..., v_n$, състоящ се от собствени вектори на φ, т.е. $\varphi(v_1) = \lambda_1 v_1, ..., \varphi(v_n) = \lambda_n v_n (\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R})$. Тогава матрицата D на φ в този базис е

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

където T е матрица на прехода и λ_i - собствени ст-ти на e_i

Прилагаме индукция по $n = dimE$
Нека $n = 1 \implies$ твърдението е очевидно.
Нека $n > 1$ и доп., че теоремата е доказана за по-малки стойности за n.

Нека λ_1 е собствена стойност на φ и v_1' е собствен вектор на φ, съответстващ на λ_1 (хар. корени на φ са реални числа $\implies \varphi$ притежава собствена стойност). Заменяйки v_1' вектора $v_1 = \frac{1}{|v_1'|} v_1'$ получаваме собствен вектор на φ, съответстващ на λ_1, който е с дължина 1.
Да означим $U = l(v_1)$ и нека $U^\perp$ е ортогоналното допълнение на U, т.е. $U^\perp = \{v \in E | (v, v_1) = 0\}$. Ще докажем, че подпространството $U^\perp$ е φ-инвариантно, т.е. ако един вектор $v \in U^\perp$, то и $\varphi(v) \in U^\perp$.

Нека $v \in U^\perp$, т.е. $(v, v_1) = 0$. Използваме, че φ е симетричен оператор, т.е. $(\varphi(v), v_1) = (v, \varphi(v_1)) = (v, \lambda_1 v_1) = \lambda_1 (v, v_1) = 0 \implies \varphi(v) \in U^\perp$
Така φ съпоставя на всеки вектор от $U^\perp$ вектор, който също лежи в $U^\perp$, т.е. φ е симетричен оператор, действащ в пространството $U^\perp$. Знаем, че $E = U \otimes U^\perp$ и $dimU = 1 \implies dimU^\perp = n - 1$ и според ИП, $U^\perp$ притежава ортонормиран базис $v_2, ..., v_n$, състоящ се от собствени вектори на φ, т.е. $\varphi(v_2) = \lambda_2 v_2, ..., \varphi(v_n) = \lambda_n v_n (\lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R})$. Освен това, векторите $v_2, ..., v_n$ са от $U^\perp$ и значи са ортогонални на вектора v_1.
Тогава $v_1, ..., v_n$ е базис на E, който е ортонормиран и $\varphi(v_i) = \lambda_i v_i$ за $i = 1, 2, ...n \implies$ матрицата D на φ в този базис е диагонална и по главния ѝ диагонал стоят числата $\lambda_1, ..., \lambda_n$

$$\begin{pmatrix} \alpha & & & 0 \\ & \lambda_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_{n-1} \end{pmatrix} = T^{-1}AT = T^t AT$$

$\square$

Висша алгебра

Симетрична и алтернативна група. Теорема на Кейли. Теорема за хомоморфизмите на групи.

Дефиниция Нека $M \neq \varnothing$ и $S(M) = \{\varphi | \varphi : M \to M, \varphi$ е биекция$\}$. Множеството от биекциите разглеждаме с операцията композиция на изображения: $\varphi \circ \psi(x) = \varphi(\psi(x)), \forall x \in M$. Тогава ако $\forall M \neq \varnothing, S(M)$ разглеждано с операцията композиция е група, то тя се нарича **симетрична група** на M.

Дефиниция Нека $i_1, i_2, ..., i_k$ са различни числа от Ω_n, а σ е пермутация, действаща по правилото: $\sigma(i_1) = i_2, \sigma(i_2) = i_3, ..., \sigma(i_k) = i_1$ и всички останали числа остават на място под действието на σ. Такава пермутация наричаме **цикъл**, а числото k - дължина на цикъла.

Дефиниция Казваме, че циклите $(i_1, ..., i_k)$ и $(j_1, ..., j_s)$ са **независими**, ако $\{i_1, ..., i_k\} \cap \{j_1, ..., j_s\} = \varnothing$

Твърдение
Всяка пермутация $\sigma \in S_n$ се представя като произведение на независими цикли. Това представяне е единствено с точност до реда на множителите.

Доказателство. Нека i_1 е произволно число от Ω_n. Разглеждаме числата $i_1, i_2 = \sigma(i_1), ..., i_k = \sigma(i_{k-1})$, където k е най-голямото естествено число, за което тези числа са различни. Тогава $\sigma(i_k)$ е някое от тях. Твърдим, че $\sigma(i_k) = i_1$. Това е изпълнено при $k = 1$, а ако $k > 1$ и например $\sigma(i_k) = i_2$, то $i_k \neq i_1$, но $\sigma(i_k) = \sigma(i_1)$, което е противоречие.

Нека $\sigma = (i_1 ... i_k)$ и j_1 е число от Ω_n, което не участва в записа на σ_1. По аналогичен начин получаваме цикъл $\sigma_2 = (j_1 ... j_s)$. Циклите σ_1 и σ_2 са независими. Продължаваме по този начин, докато изчерпим всички числа от Ω_n. Очевидно σ е произведение на получените независими цикли.

Нека $\sigma = \sigma_1 ... \sigma_t = \sigma'_1 ... \sigma'_m$ са две разлагания на σ в произведение на независими цикли. Всяко число от Ω_n участва в записа на някой цикъл и в двете разлагания. Нека дадено число участва в записа на σ_1 и в записа на σ'_1. Тогава $\sigma = \sigma'_1$. Като умножим σ отляво със σ_1^{-1}, получаваме равенството $\sigma_2 ... \sigma_t = \sigma'_2 ... \sigma'_m$. Прилагайки към получената пермутация неколкократно аналогични разсъждения, получаваме $t = m$ и $\sigma_2 = \sigma'_2 ... \sigma_t = \sigma'_t$. $\square$

Пример $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (15)(264)(3) = (15)(264)$

Дефиниция Нека $(G, .)$ е група и $a, b, g \in G$. Казваме, че b е **спрегнат** с a, ако $b = gag^{-1}$

Дефиниция Цикъл с дължина 2 наричаме **транспозиция**.

Твърдение
Всяка пермутация $\sigma \in S_n$ може да се представи като произведение на транспозиции, т.е. S_n се поражда от всички транспозиции.

Доказателство. Следва от горното твърдение и от равенството $(i_1 i_2 ... i_{t-1} i_t) = (i_{t-1} i_t)(i_{t-2} i_t)...(i_2 i_t)(i_1 i_t)$, което се проверява непосредствено. $\square$

Дефиниция Множеството $A_n = \{\varphi \in S_n | \varphi \text{ е четна}\}$ наричаме **алтернативна група**.

Твърдение
Групата $A_n (n \geqslant 3)$ се поражда от всички тройни цикли.

Доказателство. Следва от факта, че всяка четна пермутация е произведение на четен брой транспозиции и равенствата $(ij)(kl) = (jkl)(ilj)$ и $(ij)(il) = (ilj)$ $\square$

Теорема (Кейли)
Всяка крайна група G от ред n е изоморфна на подгрупа на симетричната група S_n

Доказателство. Нека $a \in G$ и $\varphi_a : G \to G : \varphi_a(x) = ax$

1.φ_a е биекция $\implies \varphi_a \in S(G) = S_n$
$\varphi_a(x) = \varphi_a(y) \iff ax = ay \iff a^{-1}(ax) = a^{-1}(ay) \iff x = y$
$x \in G : x = \varphi_a(a^{-1}x) = a(a^{-1}x) = x$

2.$\varphi_a \in S(G)$ и нека $G' = \{\varphi_a | a \in G\} \subset S(G)$

- $(\varphi_a \circ \varphi_b)(x) = \varphi_a(\varphi_b(x)) = a(bx) = (ab)x = \varphi_{ab}(x) \implies \varphi_a \circ \varphi_b = \varphi_{ab} \in S(G)$
- $\varphi_e(x) = x \implies \varphi_e = id \in G'$
- $\varphi_a \circ \varphi_{a^{-1}} = \varphi_{aa^{-1}} = id \implies \varphi_{a^{-1}} \in G'$ и $\varphi_{a^{-1}} = (\varphi a)^{-1}$

$\implies G' < S(G)$

3.$\varphi : G \to G' : \varphi(a) = \varphi_a$

- $\varphi(ab) = \varphi_{ab} = \varphi_a \circ \varphi_b = \varphi(a) \circ \varphi(b)$
- $\varphi(a) = \varphi(b) \iff \varphi_a x = \varphi_b x, \forall x \iff ax = bx \iff a = b$

$\implies \varphi$ е изоморфизъм $\implies G \cong G' < S(G) = S_n$ $\square$

Нека $(G, *), (L, \circ)$ са групи и $\varphi : G \to L$ е изображение от G в L

Дефиниция Казваме, че изображението φ е **хомоморфизъм**, ако $\varphi(a * b) = \varphi(a) \circ \varphi(b)$

Дефиниция Казваме, че изображението φ е **изоморфизъм**, ако φ е хомоморфизъм и биекция.

Дефиниция **Ядро** на φ наричаме $Ker\varphi = \{a \in G | \varphi(a) = e_L\} \subset G$

Дефиниция **Образ** на φ наричаме $Im\varphi = \varphi(G) = \{\varphi(x) | x \in G\} \subset L$

Дефиниция Подгрупата $H < G$ е **нормална подгрупа** $(H \lhd G)$, ако $gH = Hg, \forall g \in G$

Дефиниция Нека $H \lhd G \implies G \bigcup\limits_{g \in G} gH$. Множеството $G/H = \{gH | g \in G\}$ наричаме **факторгрупа**.

Теорема (хомоморфизми при групи)
Нека G и L са групи и $\varphi : G \to L$ е хомоморфизъм. Тогава $Ker\varphi \lhd G$ и $Im\varphi \cong G/Ker\varphi$

Доказателство. Нека $H = Ker\varphi$.

1.$\varphi(t) = \varphi(g) \iff t \in gH \iff t \in Hg$.
Разглеждаме $\psi : G/H \to Im\varphi < L$ $\psi(gH) = \varphi(g)$.
От 1. $\implies$ ако $tH = gH \implies \varphi(t) = \varphi(g) \implies \psi$ е коректно дефинирано

2.$\psi(gH.uH) = \psi((gu)H) = \varphi(gu) = \varphi(g).\varphi(u) = \psi(gH).\psi(uH) \implies \psi$ е хомоморфизъм

3.$Im\psi = Im\varphi \implies \psi$ е сюрекция

4. От 1. $\implies \psi(tH) = \psi(gH) \iff \varphi(t) = \varphi(g) \iff t \in gH \iff tH = gH \implies \psi$ е инекция

$$\implies \varphi \text{ е изоморфизъм, } G/Ker\varphi \cong Im\varphi$$

□

Диференциално и интегрално смятане

Теорема на Ферма. Теореми за средните стойности (Рол, Лагранж и Коши). Формула на Тейлър.

Дефиниция Нека $f : D \to \mathbb{R}$. Казваме, че f има **локален минимум** в точката x_0, ако $\exists \delta > 0 : (x_0-\delta, x_0+\delta) \subset D$ и $f(x_0) \leqslant f(x), \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$. Аналогично, ако при горните условия $f(x_0) \geqslant f(x), \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$, то f има **локален максимум** в x_0.

Теорема (Ферма)
Нека $f : D \to \mathbb{R}$ и x_0 е точка на локален екстремум за f, като f е диференцируема в x_0. Тогава $f'(x_0) = 0$.

Доказателство. БОО считаме, че x_0 е точка на локален максимум, т.е. $\exists \delta > 0 : (x_0-\delta, x_0+\delta) \subset D$ и $f(x_0) \geqslant f(x), \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$. Разглеждаме $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Имаме два случая - x да клони към x_0 отляво и отдясно.

- Ако $x \in (x_0, x_0+\delta)$, то $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0 \implies f'(x_0) \leqslant 0$.
- Ако $x \in (x_0-\delta, x_0)$, то $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0 \implies f'(x_0) \geqslant 0$.

Получихме, че в x_0 стойността на производната трябва да бъде 0. □

Нека f е непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$ и притежава производна поне в отворения интервал (a, b)

Теорема (Рол)
Ако $f(a) = f(b)$, то $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$

Доказателство. Имаме, че f е непрекъсната върху $[a, b] \implies$ можем да приложим $T_{\text{Вайерщрас}}$ (всяка непрекъсната функция върху краен затворен интервал достига своите минимум и максимум). Получаваме, че f е ограничена върху $[a, b]$ и достига НГС в някое x_{max} и НМС в някое x_{min}: $\exists x_{max} \in [a, b] : f(x_{max}) \geqslant f(x), \forall x \in [a, b]$ и $\exists x_{min} \in [a, b] : f(x_{min}) \leqslant f(x), \forall x \in [a, b]$
Поне един от случаите е в сила:

- $x_{min} \in (a, b) \implies x_{min}$ е локален минимум за $f \overset{T_{\text{Ферма}}}{\implies} f'(x_{min}) = 0$
- $x_{max} \in (a, b) \implies x_{max}$ е локален максимум за $f \overset{T_{\text{Ферма}}}{\implies} f'(x_{max}) = 0$
- $x_{min}, x_{max} \in \{a, b\}$. Тъй като $f(a) = f(b)$, то $f(x_{max}) = f(x_{min})$, откъдето получаваме, че f е константа $\implies \forall \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$

□

Теорема (Лагранж)
Съществува c такова, че $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$

Доказателство. Да разгледаме функцията $g(x) = f(x) - kx$, където искаме да изберем числото k така, че g да удовлетворява условията на $T_{\text{Рол}}$. Дотук g е диференцируема в (a,b) и непрекъсната в точките a и b, защото f и линейното събираемо са такива. За да е налице $g(a) = g(b)$, трябва $f(a) - ka = f(b) - kb$, откъдето избираме $k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. От $T_{\text{Рол}} \implies \exists \xi \in (a,b) : g'(\xi) = 0$. Тъй като $g'(x) = f'(x) - k$ от правилата за диференциране получаваме: $0 = g'(\xi) = f'(\xi) - k \implies f'(\xi) = k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. □

Теорема (Коши)
Ако функцията g е непрекъсната в затворения интервал $[a,b]$ и притежава производна поне в отворения интервал (a,b) като $g'(x) \neq 0, x \in (a,b)$, то $\exists c \in (a,b) : \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

Доказателство. Нека дефинираме функцията $h(x) = f(x) - kg(x)$, като искаме да изберем числото k така, че $h(a) = h(b)$. Тоест искаме $f(a) - kg(a) = f(b) - kg(b) \iff k(g(b) - g(a)) = f(b) - f(a)$. Ако допуснем, че $g(a) = g(b)$, то ще бъдат изпълнени всички условия на $T_{\text{Рол}}$ за $g \implies \exists x \in (a,b) : g'(x) = 0$. Противоречие с третото условие. Получихме, че $g(a) \neq g(b)$, следователно можем да изберем $k = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$
□

Формула (Тейлър)
Формула на Тейлър за f около a с остатъчен член във форма на Лагранж:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Определен интеграл. Дефиниция и свойства. Интегруемост на непрекъснатите функции. Теорема на Нютон - Лайбниц.

Дефиниция Разбиване τ на интервала $[a,b]$ наричаме система от точки $\{x_i\}_{i=0}^n$ такива, че: $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$. Това означава да разделим интервала $[a,b]$ на n подинтервала: $[a,x_1], [x_1,x_2], ..., [x_{n-1},b]$ където дължината на интервала i е $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

Дефиниция Нека $f(x)$ е ограничена в интервала $[a,b]$ и $\widetilde{x}$ е разбиване на $[a,b]$ на система от точки $\{x_i\}_{i=0}^n$. Тогава сумата

$$\underline{s}(f,[a,b],\widetilde{x}) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

където m_i е точната долна граница на стойностите на $f(x)$ в интервала $[x_{i-1}, x_i](m_i = inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x))$ се нарича **малка сума на Дарбу**

<u>**Дефиниция**</u> Нека $f(x)$ е ограничена в интервала $[a, b]$ и $\widetilde{x}$ е разбиване на $[a, b]$ на система от точки $\{x_i\}_{i=0}^{n}$. Тогава сумата

$$\overline{S}(f, [a, b], \widetilde{x}) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

където M_i е точната горна граница на стойностите на $f(x)$ в интервала $[x_{i-1}, x_i](M_i = sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x))$ се нарича **голяма сума на Дарбу**

<u>**Теорема**</u>
Функция е интегруема по Риман $\iff \forall\varepsilon > 0 \quad \exists s, S : S - s < \varepsilon$

Доказателство.
$\Leftarrow$) Нека $\varepsilon > 0$ и τ е разбиване на интервала $[a, b]$, за което $\overline{S}(f, \tau)-\underline{s}(f, \tau) < \varepsilon$. От свойство 1 $\implies \forall\tau$

$$\underline{s}(f, \tau) \leqslant \int_{\overline{a}}^{b} f(x)dx \leqslant \int_{a}^{b} f(x)dx \leqslant \overline{S}(f, \tau)$$

Тогава $0 \leqslant \int_{a}^{b} f(x)dx - \int_{\overline{a}}^{b} f(x)dx \leqslant \underline{S}(f, \tau) - \overline{s}(f, \tau) < \varepsilon \implies \int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{\overline{a}}^{b} f(x)dx$, понеже можем да изберем ε произволно малко.

$\Rightarrow$) Да допуснем, че $f(x)$ е интегруема по Риман в интервала $[a, b]$ и нека $\varepsilon > 0$. От определенията за долен и горен интеграл на Дарбу, числото $\int_{a}^{b} f(x)-\frac{\varepsilon}{2}$ не е горна граница за долните суми на Дарбу и числото $\int_{a}^{b} f(x)+\frac{\varepsilon}{2}$ не е долна граница за горните суми на Дарбу, можем да намерим такива разбивания τ_1, τ_2, че:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{s}(f, \tau_1) \leqslant \int_{a}^{b} f(x)dx$$

$$\int_{a}^{b} f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2} > \overline{S}(f, \tau_2) \geqslant \int_{a}^{b} f(x)dx$$

Нека $\tau_3 = \tau_1 \cup \tau_2$. От свойствата на сумите на Дарбу и последните две съотношения:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx-\frac{\varepsilon}{2} < \underline{s}(f, \tau_1) \leqslant \underline{s}(f, \tau_3) \leqslant \int_{a}^{b} f(x)dx \leqslant \overline{S}(f, \tau_3) \leqslant \overline{S}(f, \tau_2) < \int_{a}^{b} f(x)dx+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\implies \overline{S}(f, \tau) - \underline{s}(f, \tau) < \varepsilon$$

□

Теорема (Кантор)
Всяка непрекъсната функция в краен и затворен интервал е равномерно непрекъсната.

Теорема
Всяка непрекъсната функция в краен и затворен интервал е интегруема по Риман.

Доказателство. Нека функцията $f(x)$е непрекъсната в интервала $[a,b]$. Тогава съгласно $T_{\text{Кантор}}$ тя е ограничена и равномерно непрекъсната. Нека $\varepsilon > 0$. Тогава от равномерната непрекъснатост $\exists\delta > 0 : |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$, когато $|x_1 - x_2| < \delta$ за $x_1, x_2 \in [a,b]$. Нека разбиването τ е избрано с единствено изискване $d(\tau) < \delta$.
Да разгледаме разликата $\overline{S}(f,\tau) - \underline{s}(f,\tau) = \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k$. Понеже $f(x)$ е непрекъсната, тя достига най-малката и най-голямата си стойност във всеки интервал $[x_{k-1}, x_k], k = 0,1,...,n \implies M_k = sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$ и $m_k = inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$. Тогава $M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \implies$ при този избор на разбиването τ имаме $\overline{S}(f,\tau) - \underline{s}(f,\tau) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\Delta x_k = \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) < \varepsilon$ □

Основни свойства на Римановия интеграл:

1. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$

2. $\int_a^a f(x)dx = 0$

3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

4. Ако $f(x)$ и $g(x)$ са интегруеми в $[a,b]$ и $\lambda - const$, то $f(x) + g(x)$ и $\lambda f(x)$ също са интегруеми в $[a,b]$ и

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

5. Ако $f(x)$ е интегруема в $[a,b]$, то и $|f(x)|$ също е интегруема в $[a,b]$ и $|\int_a^b f(x)dx| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$

6. Ако $f(x)$ е интегруема в $[a,b]$ и $c \in (a,b)$, то $\int_a^b f(x)dx = \int_c^a f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$

7. Ако $f(x) \geqslant 0$ и $f(x)$ е непрекъсната в $[a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$

8. Ако $f(x) \leqslant g(x)$ и $a \leqslant b$, то $\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$

9. Ако $f(x)$ е интегруема в $[a,b]$ и m и M са такива, че $\forall x \in [a,b] : m \leqslant f(x) \leqslant M$, то

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a)$$

Теорема (за средните стойности)
Ако f е непрекъсната в $[a,b]$, то $\exists c \in [a,b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

Доказателство. От $T_{\text{Вайерщрас}}$, $f(x)$ достига най-голямата M и най-малката m си стойност в $[a,b]$. Нека $m = f(x_1)$ и $M = f(x_2), x_1, x_2 \in [a,b]$.
От св. 9 $\implies m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a) \implies m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leqslant M$.
От $T_{\text{Болцано}} \implies \exists$ поне една т. $c \in [x_1, x_2]$, а значи и от $[a,b]$ такава, че

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

□

Теорема (Нютон-Лайбниц)
Ако f е непрекъсната в $[a,b]$, то $\forall x \in [a,b]$:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

Доказателство. Тъй като $f(t)$ е непрекъсната в интервала $[a,b]$, то $f(t)$ е непрекъсната в интервала $[a,x] \subseteq [a,b], x \in [a,b] \implies f(t)$ е интегруема в интервала $[a,x]$. Да означим $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ и да дефинираме h такова, че $x+h \in [a,b]$. Разглеждаме диференчното частно:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}(\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt) = \frac{1}{h}(\int_a^{x+h} f(t)dt + \int_x^a f(t)dt) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$$

От $T_{\text{ср. стойности}} \implies \int_x^{x+h} f(t)dt = ((x+h)-x)f(\xi) = hf(\xi)$, където ξ е от интервала с краища x и $x+h$. Получихме, че $\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{f(\xi)h}{h} = f(\xi)$. Нека $h \to 0$. Тъй като $x \leqslant \xi \leqslant x+h$, то $\xi \to x$ и тогава: $\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(\xi) = f(x)$. От дефиницията за производна $\implies F'(x) = f(x)$ □

Формула (Нютон-Лайбниц)
Нека $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a,b]$ и $F(x)$ е нейна примитивна, т.е. $F'(x) = f(x), \forall x \in [a,b]$. Тогава:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$$

Аналитична геометрия

Уравнения на права и равнина. Формули за разстояния.

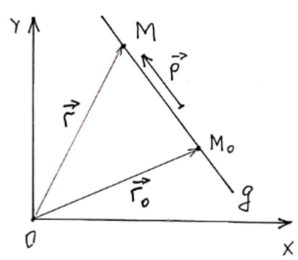
Нека $K = O_{xy}$ - афинна координатна система в равнината

Параметрични уравнения

$\vec{OM_0} = \vec{r_0}$ и $\vec{OM} = \vec{r}$ са радиус-вектори $\qquad \vec{p} \neq \vec{0}$ - даден вектор

$\exists!$ права $g : \begin{cases} zM_0 \\ ||\vec{p} \end{cases}$

За произволна т.M от g е в сила $\vec{M_0M}||\vec{p} \implies \exists! s \in \mathbb{R} : \vec{M_0M} = s.\vec{p}$ - установява взаимно-еднозначно съответствие между $s \in \mathbb{R}$ и т.$M \in g$



1. $\vec{M_0M} = \vec{OM} - \vec{OM_0} = \vec{r} = \vec{r_0} \implies \vec{r} - \vec{r_0} = s.\vec{p}$
$g : \vec{r} = \vec{r_0} + s.\vec{p}, s \in \mathbb{R}$ - векторно параметрично уравнение
2. Нека $M_0(x_0, y_0), M(x, y), \vec{p}(p_1, p_2) \implies g : \begin{cases} x = x_0 + s.p_1 \\ y = y_0 + s.p_2 \end{cases} \quad , s \in \mathbb{R}$
- координатни (скаларни) параметрични уравнения

Общо уравнение на права

Теорема
Всяка права в равнината има спрямо K уравнение от вида $Ax + By + C = 0, (A, B) \neq (0, 0)$. Обратно, всяко уравнение от вида $Ax+By+C = 0, (A, B) \neq (0, 0)$ определя права в равнината.

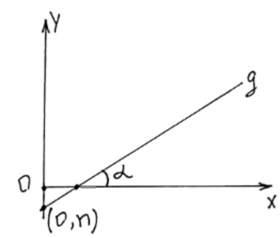
$g : Ax + By + C = 0, (A, B) \neq (0, 0) \qquad g \parallel \vec{p}(-B, A)$

Условие за колинеарност на g и вектор $\vec{q}(q_1, q_2)$:

$$\vec{q}(q_1, q_2) \parallel g \parallel \vec{p}(-B, A) \iff \begin{vmatrix} q_1 & -B \\ q_2 & A \end{vmatrix} \iff Aq_1 + Bq_2 = 0$$

Декартово уравнение на права

Разглеждаме $g: Ax + By + C = 0, B \neq 0$, т.е. $g \nparallel 0_y \implies g: y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$
Полагаме: $-\frac{A}{B} = k, \frac{C}{B} = n$
$g: y = kx + n, k = \operatorname{tg}\alpha, \alpha = \sphericalangle(0_x^+, g)$, $(0, n)$ - пресечна точка на g и 0_y



Взаимно положение на две прави

$g_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0 \qquad g_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$

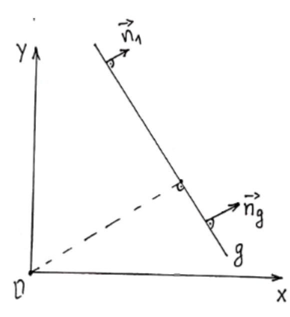
1сл $r\begin{pmatrix} A_1B_1 \\ A_2B_2 \end{pmatrix} = 2 \implies g_1 \cap g_2 =$ т.P - единствена обща точка

2сл $r\begin{pmatrix} A_1B_1 \\ A_2B_2 \end{pmatrix} = 1$ и $\begin{pmatrix} A_1B_1C_1 \\ A_2B_2C_2 \end{pmatrix} = 2 \iff \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \implies g_1 \parallel g_2$, нямат обща точка

3сл $r\begin{pmatrix} A_1B_1C_1 \\ A_2B_2C_2 \end{pmatrix} = 1 \implies g_1 \equiv g_2$, $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ - точките съвпадат

Нормално уравнение на права

$g: Ax + By + C = 0, g \parallel \vec{p}(-B, A), g \perp \vec{n_g}(A, B)$ - нормален вектор
$|\vec{n_g}| = \sqrt{A^2 + B^2} \implies \vec{n_1}(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}})$ - единичен нормален в-р на g



Всички общи уравнения на g имат вида: $(\lambda.A).x + (\lambda.B).y + \lambda.C = 0$

Търсим λ така, че $\vec{n_1}(\lambda.A, \lambda.B)$ да е единичен
$\vec{n_1}^2 = (\lambda.A)^2 + (\lambda.B)^2 = 1 \implies \lambda^2 = \frac{1}{A^2+B^2} \implies \lambda = \frac{\pm 1}{\sqrt{A^2+B^2}}$

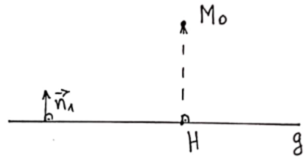
$g : \pm\frac{A.x+B.y+C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0$ - всяка права има точно две нормалния уравнения
Ако означим: $A_1 = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, B_1 = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}, C_1 = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$, то $A_1 = \cos\sphericalangle(\vec{e_1}, \vec{n_1}), B_1 = \cos\sphericalangle(\vec{e_2}, \vec{n_1}), C_1 = \delta(\text{т.O}; g)$

Разстояние от точка до права

$g : A_1x + B_1y + C_1 = 0$ е нормално уравнение, $A_1^2 + B_1^2 = 1$

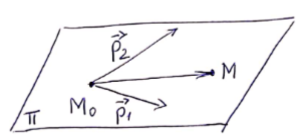
Нека т.$M_0(x_0, y_0)$ е точка в равнината и т.H е орт. проекция на M_0 в g
$\vec{HM_0} \parallel \vec{n_1} \implies \exists!\delta : \vec{HM_0} = \delta.\vec{n_1}$ т.$H(x_H, y_H)$ лежи на

$$g \begin{cases} x_0 - x_H = \delta.A_1 \\ y_0 - y_H = \delta.B_1, \end{cases} \implies \begin{cases} x_H = x_0 - \delta.A_1 \\ y_H = y_0 = \delta.B_1 \end{cases}$$



Заместваме в уравнението на $g : A_1.x + B_1.y + C_1 = 0 \implies A_1(x_0 - \delta.A_1) + B_1(y_0 - \delta.B_1) + C_1 = 0 \implies A_1.x_0 + B_1.y_0 + C_1 - \delta(A_1^2 + B_1^2) = 0 \implies \delta = A_1.x_0 + B_1.y_0 + C_1 = \frac{A.x_0+B.y_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$ - разстояние от т.M_0 до права g

Общо уравнение на равнина



Теорема
Всяка равнина π има спрямо K уравнение от вида $Ax + By + Cz + D = 0, (A, B, C) \neq (0, 0, 0)$. Обратно, всяко уравнение от вида $Ax+By+Cz+D = 0, (A, B, C) \neq (0, 0, 0)$ е уравнение на точно една равнина

Взаимно положение на две равнини

$\pi_1 : A_1.x + B_1.y + C_1.z + D_1 = 0 \qquad \pi_2 : A_2.x + B_2.y + C_2.z + D_2 = 0$

1сл $r\begin{pmatrix} A_1B_1C_1 \\ A_2B_2C_2 \end{pmatrix} = 2 \implies \pi_1 \cap \pi_2 = g$ - пресечница

2сл $r\begin{pmatrix} A_1B_1C_1 \\ A_2B_2C_2 \end{pmatrix} = 1$ и $\begin{pmatrix} A_1B_1C_1D_1 \\ A_2B_2C_2D_2 \end{pmatrix} = 2 \iff \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2} \implies \pi_1 \parallel \pi_2$

3сл $r\begin{pmatrix} A_1B_1C_1D_1 \\ A_2B_2C_2D_2 \end{pmatrix} = 1 \implies \pi_1 \equiv \pi_2$

Нормално уравнение на равнина

ОКС, $k = O_{xyz}$
$\pi : A.x + B.y + C.z + D_1 = 0$ $\quad\quad$ $\vec{n_\pi}(A, B, C)$ - нормален вектор на π

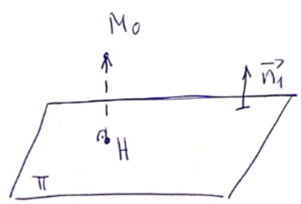
$\vec{p}(a, b, c) \parallel \pi \iff (\vec{n_\pi}.\vec{p}) = 0$
$\vec{n_1} = \frac{\vec{n_\pi}}{|\vec{n_\pi}|} \implies \vec{n_1}(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}})$ е единичен нормален вектор на π

$\pi : \frac{A.x+B.y+C.z}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0$ е нормално уравнение на π

Разстояние от точка до равнина

Нека $\pi : A_1.x + B_1.y + C_1.z + D_1 = 0$, където $A_1 = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, B_1 = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, C_1 = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, D_1 = \frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

Разглеждаме т.$M_0(x_0, y_0, z_0)$. Нека т.H е орт. пр. на M_0 в равнината π



$$H\vec{M}_0 \parallel \vec{n_1} \implies \exists!\delta : H\vec{M}_0 = \delta.\vec{n_1} \iff \begin{cases} x_0 - x_H = \delta.A_1 \\ y_0 - y_H = \delta.B_1, \\ z_0 - z_H = \delta.C_1 \end{cases} \implies \begin{cases} x_H = x_0 - \delta.A_1 \\ y_H = y_0 - \delta.B_1, \\ z_H = z_0 - \delta.C_1 \end{cases}$$

Заместваме в уравнението на π и търсим δ
$A_1(x_0 - \delta.A_1) + B_1(y_0 - \delta.B_1) + C_1(z_0 - \delta.C_1) + D_1 = 0$
$A_1.x_0 + B_1.y_0 + C_1.z_0 + \delta.1 = 0$
Извод: $\delta(M_0; \pi) = \frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ - разстояние от точка до равнина

Числен анализ

Итерационни методи за решаване на нелинейни уравнения.

Дефиниция Нека φ е изображение. Казваме, че ξ е **неподвижна точка** за изображение φ, ако $\xi = \varphi(\xi)$

Дефиниция Казваме, че функцията g удовлетворява **условието на Липшиц** с константа q в $[a, b]$, ако $|g(x) - g(y)| \leqslant q|x - y| \qquad x, y \in [a, b]$

Дефиниция Изображение, което изпълнява условието на Липшиц с константа < 1, се нарича **свиващо изображение**

Лема

Ако φ е непрекъснато изображение на интервала $[a, b]$ в себе си, то φ има неподвижна точка в $[a, b]$

Доказателство. Нека $g(x) = \varphi(x) - x$. Изпълнено е, че $g(a) = \varphi(a) - a \geqslant 0$ и $g(b) = \varphi(b) - b \leqslant 0$. Ако $g(a) = 0$ или $g(b) = 0$, тогава очевидно или a, или b е неподвижна точка. Иначе $g(x)$ е непрекъсната функция в $[a, b]$ и си сменя знака $\Longrightarrow$ се нулира по $T_{\text{Вайерщрас}}$ $\square$

Теорема

Нека φ е непрекъснато изображение на $[a, b]$ в себе си, което удовлетворява условието на Липшиц с константа $q < 1$. Тогава:

1. Уравнението $x = \varphi(x)$ има единствен корен ξ в $[a, b]$

2. Редицата $\{x_n\}$ клони към ξ при $n \to \infty$. Нещо повече, $|x_n - \xi| \leqslant (b-a)q^n, \forall n$

Доказателство. 1. От Лема $\Longrightarrow$ φ има поне една подвижна точка. Да допуснем, че са повече от една. Нека $\xi_1 = \varphi(\xi_1)$ и $\xi_2 = \varphi(\xi_2)$ за някои ξ_1, ξ_2 от $[a, b]$. Тогава при $\xi_1 \neq \xi_2$, $|\xi_1 - \xi_2| = |\varphi(\xi_1) - \varphi(\xi_2)| \leqslant q|\xi_1 - \xi_2|$ (усл. на Липщиц) $< |\xi_1 - \xi_2|$ (защото $q < 1$) . Това е абсурд $\Longrightarrow$ $\xi_1 = \xi_2$

2. $|x_n - \xi| = |\varphi(x_n - 1) - \varphi(\xi)| \leqslant q|x_{n-1} - \xi| = q|\varphi(x_n - 2) - \varphi(\xi)| \leqslant q^2|x_{n-2} - \xi| \ldots \leqslant q^n|x_0 - \xi|$. Тъй като $x_0 \in [a, b]$ и $\xi \in [a, b]$, то $|x_0 - \xi| < b - a$ $\square$

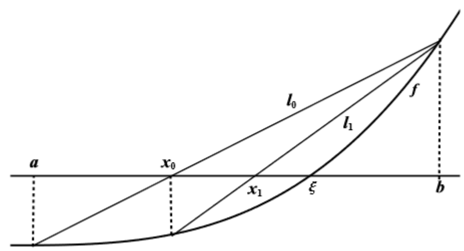
Следствие Нека ξ е корен на уравнението $x = \varphi(x)$. Да предположим, че φ има непрекъсната производна в околност $\mathcal{U}$ на ξ и $|\varphi'(\xi)| < 1$. Тогава при достатъчно добро начално приближение x_0 итерационният процес, породен от φ е сходящ. Нещо повече, съществуват константи $C > 0$ и $0 < q < 1$: $|x_n - \xi| \leqslant Cq^n, \forall n$

Доказателство. Тъй като $\varphi'(t)$ е непрекъсната функция в $\mathcal{U}$ и $|\varphi'(\xi)| < 1$, то $\exists q < 1, \exists \varepsilon > 0$ такива, че $|\varphi'(t)| \leqslant q, \forall t \in [\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon]$. Освен това, при $t \in [\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon]$ имаме $|\varphi(t)-\xi| \leqslant q|t-\xi| \leqslant q\varepsilon < \varepsilon$, т.е. $\varphi(t) \in [\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon] \implies \varphi$ е свиващо изображение на интервала $[\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon]$ в себе си. Тогава всички твърдения на следствието следват от Теоремата по-горе. □

Дефиниция Казваме, че итерационният процес $x_0, x_1, ...$ има **ред на сходимост** $p > 1$, ако $\exists$ положителни константи C и $q > 1 : |x_n - \xi| \leqslant Cq^{p^n}$

Метод на хордите

Геометрична илюстрация:



Формула за последователните приближения: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b)-f(x_n)}(b - x_n)$

Ред на сходимост:

Теорема

При метода на хордите сходимостта е със скоростта на геометричната прогресия (при условие, че коренът е отделен в достатъчно малък интервал).

Доказателство. Методът на хордите е итерационен процес, породен от функцията $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f(b)-f(x)}(b - x)$. При $x \in (a, b)$ уравнението $x = \varphi(x)$ е еквивалентно с $f(x) = 0$. За да приложим Следствието към φ, ще ни е нужно $\varphi'(\xi)$. Имаме

$$\varphi'(\xi) = 1 - f'(\xi)[\frac{b-\xi}{f(b)-f(\xi)}] - f(\xi)(\frac{b-x}{f(b)-f(x)})'|_{x=\xi}$$

Тъй като $f(\xi) = 0$, то $\varphi'(\xi) = 1 - f'(\xi)\frac{b-\xi}{f(b)} = \frac{f(b)-f'(\xi)(b-\xi)}{f(b)}$. Като заместим $f(b)$ по формула на Тейлър с

$$f(b) = f(\xi) + f'(\xi)(b-\xi) + \frac{f''(\eta_1)}{2}(b-\xi)^2 \qquad \text{в числител}$$

$$f(b) = f(\xi) + f'(\eta_2)(b-\xi) \qquad \text{в знаменател}$$

където η_1 и η_2 са точки от (a, b), получаваме

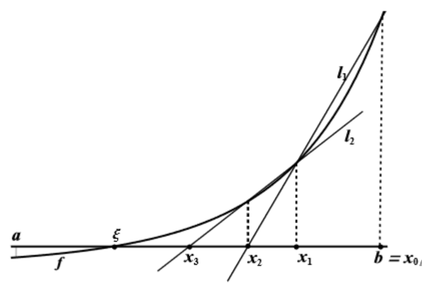
$$\varphi'(\xi) = \frac{f''(\eta_1)(b-\xi)}{2f'(\eta_2)}$$

Да означим $M := \max\limits_{t\in[a,b]}|f''(t)|$ и $m = \min\limits_{t\in[a,b]}|f'(t)|$. По условие $f'(t) > 0$ в $[a,b]$, то $m > 0$. Тогава $|\varphi'(\xi)| \leqslant \frac{M}{2m}|b-\xi|$ и $|\varphi'(\xi)|$ може да е $< q < 1$, ако $b-\xi$ да е достатъчно малко ($[a,b]$ да е достатъчно малък). Ако ξ е в достатъчно малък интервал $[a,b]$, то $|\varphi'(\xi)| < q < 1$. От Следствие $\Longrightarrow$ итерационният процес, породен от φ, е сходящ със скоростта на геометрична прогресия

$$|x_n - \xi| \leqslant const.q^n$$

□

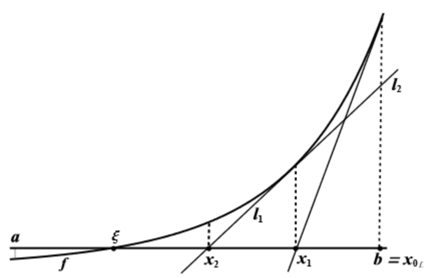
Метод на секущите

Геометрична илюстрация: 

Формула за последователните приближения: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_{n-1})-f(x_n)}(x_{n-1} - x_n)$

Ред на сходимост: $|x_n - \xi| \leqslant Cq^{r^n}, r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \forall n$

Метод на Нютон

Геометрична илюстрация: 

Формула за последователните приближения: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Ред на сходимост: $|x_n - \xi| \leqslant Cq^{2^n}, \forall n$

Вероятности и статистика

Дискретни разпределения. Равномерно, биномно, геометрично и Поасоново разпределение. Задачи, в които възникват. Моменти – математическо очакване и дисперсия.

Дефиниция Нека Ω е множество и $\mathcal{A}$ е съвкупност от множествата на Ω. Казваме, че $\mathcal{A}$ е **сигма алгебра**, ако:

- $\varnothing \in \mathcal{A}$ и $\Omega \in \mathcal{A}$
- Ако $A \in \mathcal{A}$, то $\overline{A} \in \mathcal{A}$
- Ако $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}$, то $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

Дефиниция Вероятността P е функция, дефинирана върху сигма алгебрата $\mathcal{A}$ от подмножества на Ω, която удовлетворява аксиомите:

- **Неотрицателност**: $P(A) \geqslant 0$, за всяко събитие $A \in \mathcal{A}$
- **Нормираност**: $P(\Omega) = 1$
- **Адитивност**: Ако $AB = \varnothing$, то $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- **Монотонност**: За всяко монотонно намаляваща редица $A_1 \supset A_2 \supset ...A_n \supset ...$ клоняща към $\varnothing$ е изпълнено $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$

Нека X е случайна величина.

Дефиниция **Математическо очакване** наричаме числото

$$EX = \sum_j x_j p_j \qquad p_j = P(X = x_j)$$

Дефиниция **Дисперсия** наричаме числото

$$DX = E(X - EX)^2 = EX^2 - (EX)^2$$

$\sqrt{DX}$ наричаме **стандартно отклонение**.

Свойства

- $Ec = c$
- $E(cX) = cEX$
- $E(X + Y) = EX + EY$
- $X \perp\!\!\!\perp Y \implies E(XY) = EXEY$
- $DX \geqslant 0$
- $Dc = 0$
- $D(cX) = c^2 DX$
- $X \perp\!\!\!\perp Y \implies D(X + Y) = DX + DY$

Дефиниция Нека $H_j, j = 1, 2, ...$ е някое разлагане на Ω, а x_j са произволни различни реални числа. **Дискретна случайна величина** наричаме:

$$X(\omega) = \sum_j x_j \mathbf{I}_{H_j}(\omega)$$

където $\mathbf{I}_{H_j}(\omega)$ е индикатора на множеството H_j

Дефиниция **Разпределение на ДСВ** наричаме таблицата:

X	x_1	x_2	...	x_n	...
P	p_1	p_2	...	p_n	...

където x_i са стойностите на сл.в. които могат да бъдат краен или изброим брой, а $p_j = P(X = x_j)$ са вероятностите с които сл.в. взема съответните стойности

Дефиниция Нека X е ДСВ, чийто стойности са цели положителни числа. **Пораждаща функция** на X наричаме:

$$g_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k)s^k$$

Твърдение
Нека X и Y са независими сл.в. и $\exists g_X(s), \exists g_Y(s)$. Тогава

$$g_{X+Y}(s) = g_X(s)g_Y(s)$$

Твърдение
Нека сл.в. X е неотрицателна, целочислена и $\exists EX$. Тогава

$$EX = g'_X(1)$$

Твърдение
Нека сл.в. X е неотрицателна, целочислена и $\exists DX$. Тогава

$$DX = g''_X(1) + g'_X(1) - (g'_X(1))^2$$

Дефиниция **(Равномерно разпределение)**

Казваме, че сл.в. X е равномерно разпределена с параметри a и b, т.е.

$$X \in U(a, b) \iff P(X = k) = \frac{1}{b - a + 1}$$

$$EX = \frac{a + b}{2}$$

$$DX = \frac{(b - a + 1)^2 - 1}{12}$$

Възниква в задачи, при които търсим брой при извършване на n независими опита, всеки от които с еднаква вероятност $\frac{1}{n}$

<u>Дефиниция</u> (Биномно разпределение)

Казваме, че сл.в. X е биномно разпределена с параметри n и p т.е.

$$X \in Bi(np) \iff P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$EX = E(X_1 + ... + X_n) = EX_1 + ... + EX_n = np$$

$$DX = D(X_1 + ... + X_n) = DX_1 + ... + DX_n = npq$$

Възниква в задачи, при които търсим брой успехи при извършване на n независими опита, всеки от които с вероятност p.

<u>Дефиниция</u> (Геометрично разпределение)

Казваме, че сл.в. X е геометрично разпределена с параметър p, т.е.

$$X \in Ge(p) \iff P(X = k) = (1-p)^k p = q^k p$$

$$EX = g'_X(1) = \frac{pq}{(1-qs)^2}|_{s=1} = \frac{q}{p}$$

$$DX = g''_X(1) + g'_X(1) - (g'_X(1))^2 = \frac{2q^2}{p^2} + \frac{q}{p} - \frac{q^2}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

Възниква в задачи, при които търсим брой неуспехи до първи успех, всеки от които с вероятност p.

<u>Дефиниция</u> (Поасоново разпределение)
Казваме, че сл.в. X е Поасоново разпределена с параметър λ, т.е.

$$X \in Po(\lambda) \iff P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \qquad k = 0, 1, 2..., \lambda > 0 \text{ е константа}$$

$$EX = g'_X(1) = \lambda e^{\lambda(s-1)}|_{s=1} = \lambda$$

$$DX = g''_X(1) + g'_X(1) - (g'_X(1))^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

Възниква в задачи, при които търсим среден брой наблюдавани независими събития за единица време - λ.