

PJJ Tahap 3 IMO 2016 Tidak Resmi
Paket 1 Timothy Jacob Wahyudi
Soal 1

Definisikan sebuah barisan $\{a_n\}$ dimana

$$a_n = \frac{1}{n}(\lfloor \frac{n}{1} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \cdots + \lfloor \frac{n}{n} \rfloor)$$

Buktikan terdapat tak berhingga banyaknya n sehingga $a_{n+1} > a_n$, dan juga terdapat tak berhingga banyaknya n sehingga $a_{n+1} < a_n$.

Solusi:

Perhatikan bahwa untuk $p, q \in \mathbb{Z}$ dengan $0 < q \leq p$ maka,

Jika $q \mid p$, $\lfloor \frac{p}{q} \rfloor - \lfloor \frac{p-1}{q} \rfloor = 1$, dan

Jika $q \nmid p$, $\lfloor \frac{p}{q} \rfloor - \lfloor \frac{p-1}{q} \rfloor = 0$

Definisikan fungsi $d(n)$ yang menyatakan banyaknya faktor positif dari n , maka

$$a_{n+1} = \frac{na_n + d(n)}{n+1}$$

Misalkan $a_n > d(n+1)$, maka $(n+1)a_n > na_n + d(n)$ maka $a_n > \frac{na_n + d(n)}{n+1} = a_{n+1}$.

Untuk $n > 6$ maka $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \geq 3$ maka

$$\frac{1}{n}(\lfloor \frac{n}{1} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \cdots + \lfloor \frac{n}{n} \rfloor) \geq \frac{1}{n}(n + 3 + 1 + 1 + \cdots + 1) = 2$$

karena untuk $n+1 > 6$ prima, $d(n+1) = 2$ maka $a_n > d(n+1)$ sehingga ada tak berhingga banyaknya n dimana $a_{n+1} < a_n$.

Misalkan hanya ada berhingga banyaknya n sehingga $a_{n+1} > a_n$ maka akan ada batas atas untuk barisan a_i .

Perhatikan barisan berbentuk a_{2^n} .

$a_{2^n} \geq \frac{1}{2^n}(2^n + 2^{n-1} + 2 \times 2^{n-2} + 4 \times 2^{n-3} + \cdots + 2^{n-1} \times 2^0) = \frac{n+2}{2}$ maka untuk setiap bilangan real m akan ada bilangan n berbentuk 2^a sehingga $a_n > m$ kontradiksi.

Maka, terdapat tak berhingga banyaknya n sehingga $a_{n+1} > a_n$, dan juga terdapat tak berhingga banyaknya n sehingga $a_{n+1} < a_n$.



Soal 2

Cari semua fungsi f yang memetakan semua bilangan real ke bilangan real nonnegatif, sehingga untuk setiap $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ yang memenuhi $ab + bc + cd = 0$, dipunyai

$$f(a - b) + f(c - d) = f(a) + f(b + c) + f(d).$$

Solusi:

Pertama, perhatikan bahwa untuk $a = b = c = d = 0$ maka memenuhi $ab + bc + cd = 0$, dan $f(0 - 0) + f(0 - 0) = f(0) + f(0 + 0) + f(0)$ maka $f(0) = 0$.

Perhatikan juga ketika $a = b = c = 0$ maka untuk sebarang d berlaku $ab + bc + cd = 0$, dan $f(0 - 0) + f(0 - d) = f(0) + f(0 + 0) + f(d)$ maka $f(x) = f(-x)$ untuk semua x bilangan real.

Untuk sembarang bilangan tak negatif x dan y , misalkan $a = \frac{2xy}{y-x}$, $b = x$, $c = y$, dan $d = \frac{-x^2-xy}{y-x}$

Maka $ab + bc + cd = \frac{2x^2y}{y-x} + \frac{xy^2-x^2y}{y-x} + \frac{-x^2y-xy^2}{y-x} = 0$.

dan $f(\frac{xy+x^2}{y-x}) + f(\frac{x^2+y^2}{y-x}) = f(\frac{2xy}{y-x}) + f(x + y) + f(\frac{-x^2-xy}{y-x})$

Maka $f(\frac{x^2+y^2}{y-x}) = f(\frac{2xy}{y-x}) + f(x + y)$

Misalkan $M = y - x$ dan $N = \frac{2xy}{y-x}$, maka $f(M + N) = f(N) + f(\sqrt{M^2 + 2MN})$

Misalkan dibuat fungsi baru yaitu $g(x)$ dengan $g : \mathbb{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ dan $g(x^2) = f(x)$

Maka $g(M^2 + 2MN + N^2) = g(N^2) + g(M^2 + 2MN)$.

Akan dibuktikan bahwa untuk setiap bilangan positif P dan Q terdapat M dan N sehingga $P = N^2$ dan $Q = M^2 + 2MN$

Karena P dan Q tak negatif maka terdapat $N = \sqrt{P}$ dan $M = \frac{-2\sqrt{P} + \sqrt{4P + 4Q}}{2}$.

Dimana M dan N tak negatif.

Akan dibuktikan juga untuk sembarang bilangan M dan N terdapat x dan y sehingga $M = y - x$ dan $N = \frac{2xy}{y-x}$

$N = \frac{2x^2+2xM}{M}$

Karena M dan N tak negatif, maka terdapat $x = \frac{-2M + \sqrt{4M^2 + 8MN}}{4}$ dan

$y = M + \frac{-2M + \sqrt{4M^2 + 8MN}}{4}$

maka sebagai akibat, fungsi $g(x)$ merupakan fungsi cauchy dari real tak negatif ke real.

Maka $g(x) = kx$ untuk suatu bilangan real k . (ini perlu dibuktikan ga?)

maka $g(x^2) = f(x) = kx^2$ untuk suatu bilangan real k



Soal 3

Misalkan $A_1 A_2 \dots A_8$ adalah sebuah segi-8 konveks sama sisi sehingga $A_i A_{i+1}$ sejajar $A_{i+4} A_{i+5}$ untuk setiap i . Definikan B_i sebagai perpotongan $A_i A_{i+4}$ dan $A_{i-1} A_{i+1}$.
Tunjukkan terdapat i sehingga

$$\frac{A_i A_{i+4}}{B_i B_{i+4}} \leq \frac{3}{2}.$$

($8|i - j$ mengimplikasikan $A_i = A_j$.)

Solusi:

Perhatikan bahwa untuk garis-garis $A_i A_{i+1}$ dan $A_{i+4} A_{i+5}$ sama panjang dan sejajar.

Maka $A_i A_{i+1} A_{i+4} A_{i+5}$ adalah sebuah jajar genjang.

Maka titik tengah $A_i A_{i+4}$ sama untuk semua i

