PJJ T3 Paket 3

Louis Cahyadi

1. Perhatikan bahwa untuk $k = 1, 2, ..., n$

$$\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor = 0$$

Jika k tidak membagi n dan

$$\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor = 1$$

Jika k membagi n. Definisikan $d(n)$ sebagai banyaknya pembagi positive dari n. Maka

$$\left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + ... + \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n-1}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + ... + \left\lfloor \frac{n-1}{n} \right\rfloor + d(n)$$

$$na_n = (n-1)a_{n-1} + d(n)$$

Jika n prima maka $na_n = (n-1)a_{n-1} + 2 \Rightarrow a_{n-1} = \frac{na_n - 2}{n-1} > a_n$ Karena $a_n > 2$ untuk $n > 1$. Maka terbukti ada tak hingga n sehingga $a_n > a_{n+1}$

Selanjutnya dari $na_n = (n-1)a_{n-1} + d(n)$ diperoleh $na_n = d(1) + d(2) + ... + d(n)$ Sehingga

$$a_n = \frac{d(1) + ... + d(n)}{n}$$

Karena $d(p^k) = k+1$ untuk suatu bilangan prima p maka $d(n)$ tidak memiliki batas. Yang berakibat ada tak hingga n sehingga $d(n+1) > max\{d(1), d(2), ..., d(n)\} \Rightarrow d(n+1) > a_n$. Akibatnya

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{d(1) + ... + d(n+1)}{n+1} \\ &> \frac{1}{n+1}a_n + \frac{n}{n+1}a_n \\ &= a_n \end{aligned}$$

Jadi terbukti ada tak hingga n sehingga $a_{n+1} > a_n$

2. Substitusi $a = b = c = d = 0$ diperoleh $2f(0) = 3f(0) \Rightarrow f(0) = 0$. Untuk sebarang bilangan real a pasti memenuhi $aa + a(-a) + (-a)0 = 0$ sehingga $f(a) = f(-a)$ untuk sebarang $a \in \mathbb{R}$

   Selanjutnya untuk sebarang $a, d \in \mathbb{R}$ terpenuhi $a(-a-d) + (-a-d)(-a-d) + (-a-d)d = 0$ Sehingga

$$f(2a+d) + f(-a-2d) = f(a) + f(-2a-2d) + f(d)$$

   dan karena f genap maka

$$f(2a+d) + f(a+2d) = f(a) + f(2a+2d) + f(d)\text{.........}(*)$$

   Dengan menstubstitusikan $d = a$ pada (*) diperoleh $2f(3a) = 2f(a) + f(4a)$. Selanjutnya untuk sebarang bilangan real a dan d dengan $a + d \neq 0$ memenuhi $a(a) + (a)(-\frac{a^2}{a+d}) + (-\frac{a^2}{a+d})d = 0$ sehingga

$$f(-\frac{a^2}{a+d} - d) = f(a) + f(a - \frac{a^2}{a+d}) + f(d)$$

$$f(\frac{a^2+ad+d^2}{a+d}) = f(a) + f(\frac{ad}{a+d}) + f(d)\text{............}(**)$$

   Dengan menstubstitusikan $d = a$ pada (**) diperoleh $f(\frac{3}{2}a) = 2f(a) + f(\frac{a}{2})$ yang mengakibatkan $f(3x) = 2f(2x) + f(x)$ untuk setiap bilangan real x. Padahal $2f(3a) = 2f(a) + f(4a)$ yang berakibat $4f(2a) + 2f(a) = 2f(a) + f(4a)$ untuk setiap bilangan real a. Dengan kata lain untuk setiap bilangan real x $f(2x) = 4f(x)$. Sehingga $f(3x) = 2f(2x) + f(x) = 9f(x)$ untuk setiap bilangan real x.

   Akan dibuktikan dengan induksi pada n bahwa $f(nx) = n^2 f(x)$ untuk sebarang bilangan real x dan bilangan bulat positif n. Untuk $n = 1, 2, 3$ benar. Dari fakta bahwa $f(2x) = 4f(x)$ maka cukup dibuktikan untuk n ganjil (tapi pada asumsi induksi boleh diikutkan n genapnya). Maka asumsikan untuk $n \leq 2k+1$ berlaku $f(nx) = n^2 f(x)$ Berdasarkan (*)

$$f(2a+d) + f(a+2d) = f(a) + f(2a+2d) + f(d)$$

   Dengan menstubstitusi $d = (k+1)a$ diperoleh

$$f(2a + (k+1)a) + f(a + 2(k+1)a) = f(a) + 4f(a + (k+1)a) + f((k+1)a)$$

   Karena $k+1 < k+2 < k+3 < 2k+1$ untuk $k > 3$ maka

$$\begin{aligned}(k+3)^2 f(a) + f((2k+3)a) &= f(a) + 4(k+2)^2 f(a) + (k+1)^2 f(a)\\ f((2k+3)a) &= (4k^2 + 12k + 9)f(a)\\ f((2k+3)a) &= (2k+3)^2 f(a)\end{aligned}$$

Maka terbukti bahwa $f(nx) = n^2 f(x)$ untuk sebarang bilangan real x dan bilangan bulat positive n. Akibatnya $f(n) = n^2 f(1)$ untuk setiap bilangan bulat positif n. Dan untuk sebarang bilangan rasional positive q ada bilangan bulat positive m dan n sehingga $q = \frac{m}{n}$ dan $f(m) = f(n \times \frac{m}{n}) = n^2 f(\frac{m}{n}) \Rightarrow f(\frac{m}{n}) = (\frac{m}{n})^2 f(1)$ Jadi untuk sebarang bilangan rasional positive q berlaku $f(q) = q^2 f(1)$. Ditambah dengan fakta bahwa f genap maka $f(q) = q^2 f(1)$ untuk sebarang bilangan rasional q

Untuk yang real belum bisa

3. Yang ini juga belum bisa