

Paket 1

Erlang Wiratama Surya

1. Jika n habis dibagi 20 jelas dua digit terakhir dari kelipatan n selalu keduanya genap, maka semua kelipatan dari n tidak tawas. Sekarang akan ditunjukkan kalau ada kelipatan n yang tawas jika n tidak habis dibagi 20.

Jika 4 tidak habis membagi n , maka ada empat kemungkinan, $n = 2 \cdot 5^t$ atau $n = 5^t \cdot m$ atau $n = 2^t \cdot m$ atau $n = m$ dengan $(m, 10) = 1$, dan t positive integer.

Akan dibuktikan untuk $m = 1$ ada kelipatan dari n yang tawas.

Kasus 1: $n = 5^t$

Akan diselesaikan dengan induksi di t , akan ditunjukkan kalau ada bilangan t digit yang tawas dan habis dibagi 5^t . Jelas untuk $t = 1$ ada (5).

Misalkan untuk $t = k+1$ ada . Berarti ada $a_0, a_1, \dots, a_k \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ sehingga $5^{k+1} \mid \sum_{i=0}^k a_i \cdot 10^i$

(ini mengobservasi $k+1$ digit, karena tawas berarti alternating paritasnya). Maka $\sum_{i=0}^k a_i \cdot 10^i \equiv$

$n \cdot 5^{k+1} (mod 5^{k+2})$, dengan $0 \leq n \leq 4$. Perhatikan kalau $\sum_{i=0}^k a_i \cdot 10^i + (5 - n) \cdot 10^{k+1}$

$\sum_{i=0}^k a_i \cdot 10^i + (10 - n) \cdot 10^{k+1}$ keduanya habis dibagi 5^{k+2} , dan representasi digitnya dalam basis 10 itu $k+1$ digit, lalu karena digit paling kiri bisa $5 - n$ atau $10 - n$ (yang paritasnya beda), bisa dipilih sehingga paritasnya alternating, hence tawas. Induksi selesai.


Kasus 2: $n = 2 \cdot 5^t$

Akan diselesaikan dengan induksi di t , akan ditunjukkan kalau ada bilangan t digit yang tawas dan habis dibagi $2 \cdot 5^t$ untuk $t \geq 2$. Jelas untuk $t = 2$ ada (50). Untuk $t = 1$ jelas 10 memenuhi. Perhatikan kalau hanya perlu di observe apakah bilangan itu habis dibagi 5^t dan genap (yang hanya concerned sama digit terakhir)

Misalkan untuk $t = k+1$ ada . Berarti ada $a_0, a_1, \dots, a_k \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ sehingga $5^{k+1} \mid \sum_{i=0}^k a_i \cdot 10^i$

(ini mengobservasi $k+1$ digit, karena tawas berarti alternating paritasnya, dan karena habis dibagi 2 berarti digit paling kanan genap). Maka $\sum_{i=0}^k a_i \cdot 10^i \equiv n \cdot 5^{k+1} (mod 5^{k+2})$, dengan


$0 \leq n \leq 4$. Perhatikan kalau $\sum_{i=0}^k a_i \cdot 10^i + (5 - n) \cdot 10^{k+1}$ dan $\sum_{i=0}^k a_i \cdot 10^i + (10 - n) \cdot 10^{k+1}$


keduanya habis dibagi 5^{k+2} , dan representasi digitnya dalam basis 10 itu $k+1$ digit, lalu karena digit paling kiri bisa $5-n$ atau $10-n$ (yang paritasnya beda), bisa dipilih sehingga paritasnya alternating, hence tawas. Induksi selesai 


Kasus 3: $n = 2^t$

Akan dibuktikan dengan induksi di t kalau ada kelipatan n yang tawas dan hanya t digit. Jelas ini benar untuk $t = 1, 2, 3, 4$ (2, 32, 632, 1632)

Misalkan ini benar untuk $t \leq 2k, k \geq 2$.

Perhatikan kalau untuk $t = 2k + 1$, kita ingin $a_0, a_1, \dots, a_{2k} \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ sehingga $2^{2k+1} \mid \sum_{i=0}^{2k} a_i \cdot 10^i$. Menurut induksi ada $a_0, a_1, \dots, a_{2k-1} \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ sehingga $2^{2k} \mid \sum_{i=0}^{2k-1} a_i \cdot 10^i$,



dengan paritas a_i alternating (bilangannya tawas). Perhatikan kalau haruslah a_0 genap 

maka agar bilangannya tawas kita ingin a_i paritasnya sama dengan paritas i . Maka mudah dilihat kalau $2^{2k-1} \mid a_{2k-1} \cdot 10^{2k-1} + a_{2k-2} \cdot 10^{2k-2}$  maka ada $a_0, a_1, \dots, a_{2k-3} \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$

sehingga $2^{2k-1} \mid \sum_{i=0}^{2k-3} a_i \cdot 10^i$, dengan paritas a_i alternating (bilangannya tawas). Ambil $2k-3$


bilangan ini untuk kasus yang sedang kita kerjakan, lalu jelas yang ingin dicari ekuivalen dengan $4 \mid a_{2k} \cdot 2 \cdot 5^{2k} + a_{2k-1} \cdot 5^{2k-1} + \frac{a_{2k-2}}{2} \cdot 5^{2k-2} + h$ untuk suatu $h \in \mathbb{N}$. Jelas $\frac{a_{2k-2}}{2}$ bisa kongruen berapapun modulo 4, maka ada solusi.

Untuk $t = 2k + 2$, perhatikan kalau yang ingin dicari adalah $2^{2k+2} \mid \sum_{i=0}^{2k+1} a_i \cdot 10^i$. Karena

a_{2k+1} odd, kita ingin $2^{2k+2} \nmid \sum_{i=0}^{2k} a_i \cdot 10^i$. Namun $a_{2k} \cdot 10^{2k}$ bisa diatur menjadi habis dibagi 2^{2k+2} atau tidak (pilihnya $a_{2k} = 2$ kalau gamau habis dibagi, otherwise $a_{2k} = 1$ ). Jadi bisa dipilih sehingga $2^{2k+2} \mid \sum_{i=0}^{2k+1} a_i \cdot 10^i$ dengan a_{2k+1} odd.


Kasus 4: $n = 1$



Jelas lah ya 

Perhatikan kalau untuk kasus 1, kasus 2, kasus 3 konstruksi yang digitnya ada ganjil buah bisa ditambahin digit selanjutnya (yang penting genap) dan tetap kelipatan n  Untuk kasus 4 jelas lah ya

Jadi untuk setiap n diatas bisa dikonstruksi bilangan genap digit yang kelipatan n dan tawas. Misalkan kelipatannya adalah K dan banyaknya digit adalah H . Perhatikan kalau

$$\sum_{i=0}^j K \cdot 10^{i \cdot H} \text{ juga tawas dan kelipatan } n. \text{ Lalu } \sum_{i=0}^j K \cdot 10^{i \cdot H} = K \frac{10^{(j+1)H} - 1}{10^H - 1},$$

Perhatikan kalau ada dipilih j sehingga order m dari 10 habis membagi $j+1$, maka $m \mid 10^{(j+1)H} - 1$, lalu karena untuk setiap p prima yang membagi m menurut lifting the expo-


nent $V_p(10^{(j+1)H} - 1) = V_p(10^{(j+1)H} - 1) + V_p(l)$, maka bisa dipilih j sehingga $V_p(10^{(j+1)H} - 1)$ arbitrarily large. Dengan cara yang sama bisa dibuat sehingga $V_p(10^{(j+1)H} - 1)$ arbitrarily large untuk semua p prima yang membagi m secara simultan  Maka jelas untuk setiap m relatif prima dengan 10 ada j sehingga $m \mid \frac{10^{(j+1)H} - 1}{10^H - 1}$. 

Jelas semua bilangan berbentuk $\frac{10^{(j+1)H}-1}{10^H-1}$ tawas dan untuk setiap m relatif prima 10 bisa dipilih j sehingga $m \mid \frac{10^{(j+1)H}-1}{10^H-1}$, maka jika t ada kelipatannya yang tawas, tm ada kelipatannya yang tawas untuk m relatif prima dengan 10. Jadi untuk setiap n yang tidak habis dibagi 20, ada kelipatan n yang tawas. Maka semua kelipatan n tidak tawas jika dan hanya jika n habis dibagi 20.



2. Pertama, perhatikan kalau homothety berpusat E yang membawa lingkaran C_0 ke lingkaran C_2 membawa titik X ke titik P dan titik D ke titik S , maka $XD \parallel PS$. Dengan cara yang sama $XE \parallel RQ$. Perhatikan kalau X berada di AB yang merupakan radical axis dari lingkaran C_1 dan C_2 , maka power titik X terhadap lingkaran C_1 sama dengan power titik X terhadap lingkaran C_2 , berarti $XD.XQ = XE.XP \Rightarrow DEQP$ siklis. Perhatikan kalau $XE \parallel RQ$ berarti $\angle RQD = \angle EXD$, lalu, karena $DEPQ$ siklis jelas $\angle DEP = \angle DQP$. Berarti $\angle RQP = \angle RQD + \angle DQP = \angle EXD + \angle DEX = -\angle XDE = \angle EDX = \angle RSP$ (karena $XD \parallel PS$). $\angle RQP = \angle RAP$, maka $PQRS$ siklis.



3. Misalkan $G = \{a_i | 0 \leq i \leq n\}$ dan $H = \{a_i + a_j | 0 \leq i \leq j \leq n\}$, ingin dicari nilai minimum dari $|H|$.

Akan dibuktikan bahwa nilai minimum dari $|H|$ adalah $3n$.

Lemma 1:

Untuk setiap $0 \leq t \leq 2n - 1$, setidaknya satu dari t atau $t + 2n - 1$ merupakan anggota dari H .

Bukti:

Misalkan t bukan anggota dari H , akan ditunjukkan kalau maksimal $\lfloor \frac{t+1}{2} \rfloor$ dari bilangan di interval $(0, t)$ yang merupakan anggota dari G .

Perhatikan kalau diantara k dan $t - k$ hanya maksimal 1 yang merupakan anggota G (untuk $0 \leq k \leq t$), karena jika keduanya anggota G maka t adalah anggota H . Perhatikan kalau ada $t + 1$ bilangan yang ada di $(0, t)$.

Jika t genap, misalkan sama dengan $2m$, maka bisa dipasangkan k dengan $2m - k$ untuk semua $0 \leq k < m$, lalu jelas m bukan anggota G , karena $m \in G \Rightarrow 2m = t \in H$, ada m pasangan dan dari setiap pasangan cuma maksimal satu yang merupakan anggota G , maka banyaknya bilangan di interval $(0, t)$ di G maksimal m , yakni $\lfloor \frac{t+1}{2} \rfloor$.

Jika t ganjil, misalkan sama dengan $2m + 1$, maka bisa dipasangkan k dengan $2m + 1 - k$ untuk semua $0 \leq k \leq m$, ada $m + 1$ pasangan, dan diantara pasangan maksimal 1 yang anggota G , maka banyak bilangan di interval $(0, t)$ yang ada di G maksimal $m + 1$, yakni $\lfloor \frac{t+1}{2} \rfloor$.

Terbukti maksimal $\lfloor \frac{t+1}{2} \rfloor$ dari bilangan di interval $(0, t)$ yang merupakan anggota dari G .

Misalkan $t + 2n - 1$ bukan anggota H , akan dibuktikan banyaknya bilangan di interval $(t, 2n - 1)$ yang ada di G maksimal $\lfloor \frac{2n-t}{2} \rfloor$.

Perhatikan kalau diantara k dan $2n - 1 + t - k$ hanya maksimal 1 yang merupakan anggota G (untuk $t \leq k \leq 2n - 1$), karena jika keduanya anggota G maka $t + 2n - 1$ adalah anggota H . Perhatikan kalau ada $2n - t$ bilangan yang ada di $(t, 2n - 1)$.

Jika t genap, misalkan sama dengan $2m$, perhatikan kalau bisa dipasangkan $2m + k$ dengan $2n - 1 - k$, untuk setiap $0 \leq k \leq n - m - 1$, dari setiap pasangan maksimal 1 yang anggota G , ada $n - m$ pasangan, maka banyak anggota interval $(t, 2n - 1)$ di G adalah $n - m$ sama dengan $\lfloor \frac{2n-t}{2} \rfloor$.

jika t ganjil, misalkan sama dengan $2m + 1$, maka bisa dipasangkan $2m + 1 + k$ dengan $2n - 1 - k$ untuk setiap $0 \leq k < n - m - 1$, dan jelas $m + n$ bukan anggota dari G , karena $m + n \in G \Rightarrow 2(m + n) = 2n - 1 + t \in H$. Ada $n - m - 1$ pasangan, dan dari pasangan maksimal satu yang merupakan anggota dari G , maka banyak anggota G yang berada di interval $(t, 2n - 1)$ maksimal $n - m - 1$, sama dengan $\lfloor \frac{2n-t}{2} \rfloor$.


Terbukti maksimal $\lfloor \frac{2n-t}{2} \rfloor$ bilangan di interval $(t, 2n - 1)$ merupakan anggota dari G .

Berarti, jika t dan $t + 2n - 1$ bukan anggota dari H , maksimal $\lfloor \frac{t+1}{2} \rfloor$ dari bilangan di interval $(0, t)$ yang merupakan anggota dari G dan maksimal $\lfloor \frac{2n-t}{2} \rfloor$ bilangan di interval $(t, 2n - 1)$ merupakan anggota dari G .

Maka, $2n + 1 < |G| \leq \lfloor \frac{t+1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{2n-t}{2} \rfloor \leq \lfloor \frac{2n+1}{2} \rfloor < n + 1$, kontradiksi.

Maka setidaknya satu dari t atau $t + 2n - 1$ merupakan anggota dari H , lemma terbukti.

Perhatikan kalau $0, 2n - 1, 4n - 2$ merupakan anggota H , 3 anggota H ya (kelompok 1)

Lalu, a_i dan $a_i + 2n - 1$ merupakan anggota H juga, ini $2n - 2$ anggota H ya (kelompok 2) 

Lalu, untuk setiap i di interval $(0, 2n - 1)$ yang bukan merupakan anggota dari G , menurut lemma 1 setidaknya satu dari i atau $i + 2n - 1$ merupakan anggota H , ini minimal $n - 1$ anggota H ya. (kelompok 3)

obvious kelompok 1,2,3 saling ga potong, dan di dalam kelompok beda semua angkanya

Berarti $|H|$ minimal $3 + 2n - 2 + n - 1 = 3n$. Terbukti $3n \leq |H|$.

Perhatikan kalau dipilih $a_i = i$ untuk setiap $i \neq n$ dan $i \neq 0$, maka elemen H adalah semua bilangan di $(0, 3n - 2)$ dan $4n - 2$, maka $|H| = 3n$

Maka kardinalitas minimum dari himpunan tersebut adalah $3n$.

