”Solusi” PJJ T3 IMO 2016 Tidak Resmi by DJ Ilhan rmx

MA

1. **Lemma** $\lfloor \frac{n}{1} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \cdots + \lfloor \frac{n}{n} \rfloor = d(1) + d(2) + ... + d(n) \forall n \in \mathbb{N}$, dimana $d(n)$ menyatakan banyak pembagi positif n.
   Bukti Lemma. Fix n bilangan bulat positif, dan tinjau banyak pasangan (a, b) asli sehingga $a|b$, dan $1 \leq a, b \leq n$. Sekarang, untuk sebarang a asli, jelas ada $\lfloor \frac{n}{a} \rfloor$ bilangan asli yang habis dibagi a dan $\leq n$. Maka, untuk $1 \leq a \leq n$, banyak pasangan (a, b) asli sehingga $a|b$ dan $1 \leq a, b \leq n$ adalah $\lfloor \frac{n}{1} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \cdots + \lfloor \frac{n}{n} \rfloor$.
   Di sisi lain, untuk sebarang b, banyak nilai a sehingga $a|b$ adalah sebanyak $d(b)$. Jelas pula jika $b \leq n$, maka $a \leq b \leq n$. Maka, untuk $1 \leq b \leq n$, banyak pasangan (a, b) asli sehingga $a|b$ dan $1 \leq a, b \leq n$ adalah sebanyak $d(1) + d(2) + ... + d(n)$.
   Karena $d(1) + d(2) + ... + d(n)$ dan $\lfloor \frac{n}{1} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \cdots + \lfloor \frac{n}{n} \rfloor$ keduanya merupakan banyak cara menghitung banyak pasangan (a, b) sehingga $a|b$ dan $1 \leq a, b \leq n$, maka nilai keduanya sama. Akibatnya, $\lfloor \frac{n}{1} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \cdots + \lfloor \frac{n}{n} \rfloor = d(1) + d(2) + ... + d(n)$ untuk semua n asli. Terbukti.

   Dari lemma di atas, $a_n = \frac{1}{n}(d(1) + d(2) + .. + d(n))$

   (a) **Lemma S2** $\forall n \in \mathbb{N} > 6, d(1) + d(2) + .. + d(n) > 2n$.
   Bukti: Untuk semua $k \geq 2$ asli, karena $1|k$ dan $k|k$, maka ada minimum 2 bilangan asli yang membagi k. Akibatnya, $d(k) \geq 2$. Di sisi lain, $d(1) + d(6) = 1 + 4 = 5$. Akibatnya, $d(1) + d(2) + ... + d(n) = 5 + d(2) + d(3) + d(4) + d(5) + ... + d(n) \geq 5 + 2(n-2) = 2n + 1 > 2n$. Lemma terbukti.
   Sekarang, ambil $n+1$ bilangan prima > 7, dan misalkan $d(1)+d(2)+...+d(n) = A$. Dari lemma di atas, karena $n > 6$, berlaku $A > 2n$. Jelas $d(n+1) = 2$ karena $n+1$ prima. Bisa dilihat bahwa $a_n = \frac{1}{n}(d(1) + d(2) + .. + d(n)) = \frac{A}{n} = \frac{A}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{A}{n+1}(1 + \frac{1}{n}) = \frac{A}{n+1} + \frac{A}{n(n+1)} > \frac{A}{n+1} + \frac{2n}{n(n+1)} = \frac{A+2}{n+1} = \frac{d(1)+d(2)+...+d(n)+d(n+1)}{n+1} = a_{n+1}$. Karena ada tak hingga banyaknya n sehingga $n + 1$ prima yang lebih besar dari 7, maka ada tak hingga n sehingga $a_n > a_{n+1}$

   (b) **Lemma S3** Ada tak hingga m asli sehingga $d(m) > d(k)$ untuk semua $1 \leq k < m$
   Bukti: Asumsi kontradiksi, hanya ada berhingga m asli yang memenuhi sifat di lemma, dan misalkan bilangan terbesar yang memenuhi sifat lemma S3 adalah C.
   Klaim: $d(C) \geq d(x)$ untuk semua x asli yang bukan C. Bukti klaim: Jika $x < C$, maka klaim benar berdasarkan definisi C. Sekarang misal $x > C$. Asumsikan klaim salah. Ambil y terkecil $> C$ sehingga $d(y) > d(C)$. Akibatnya, $d(y) > d(x)$ untuk semua $x \leq C$. Selain itu, karena y bilangan terkecil $> C$ yang memenuhi $d(y) > d(C)$, maka untuk semua z asli yang memenuhi $C < z < y$, berlaku $d(z) < d(C) < d(y)$. Akibatnya, untuk semua $x < y$, berlaku $d(x) < d(y)$. Akibatnya, bilangan y emiliki sifat lemma S3, kontradiksi. Maka, asumsi awal salah, dan klaim terbukti.
   Dari klaim, maka $d(C) \geq d(x)$ untuk semua x asli selain C. Namun, ambil $x = 2^{d(C}$, didapatkan bahwa $d(x) = d(C)+1 > d(C)$, kontradiksi. Maka, asumsi awal salah. Akibatnya, ada tak hingga banyaknya m asli sehingga $d(m) > d(k)$ untuk semua k asli, dengan $1 \leq k < m$. Lemma terbukti.
   Selanjutnya, tinjau semua m asli sehingga $m+1$ memenuhi persyaratan di lemma S3. Akibatnya $d(m+1) > d(k)$ untuk semua $1 \leq k \leq m$, menyebabkan $md(m+1) > d(1) + d(2) + ... + d(m)$. Sekarang misal $d(1)+d(2)+d(3)+...+d(m) = B$. Maka, $a_{m+1} = \frac{1}{m+1}(d(1)+d(2)+...+d(m)+d(m+1) = \frac{1}{m+1}(A + d(m+1) > \frac{1}{m+1}(A + \frac{A}{m}) = A\frac{1}{m+1}\frac{m+1}{m} = \frac{A}{m} = \frac{d(1)+d(2)+...+d(m)}{m} = a_m$. Karena ada tak hingga m sehingga $m + 1$ memenuhi persyaratan di lemma S3, maka ada tak hingga m sehingga $a_{m+1} > a_m$.

   Berdasarkan argumen di atas, dapat disimpulkan bahwa ada tak hingga n sehingga $a_n > a_{n+1}$, dan ada tak hingga m sehingga $a_m < a_{m+1}$. Terbukti.