# PJJ T3 Paket 4

Louis Cahyadi

1. Misal degree dari $P$ adalam $m$ dan degree dari $Q$ adalah $n$. Sehingga degree dari $P(P(x))$ adalah $m^2$ dan degree dari $Q(Q(x))$ adalah $n^2$. Jika $m \neq n$ (WLOG $m > n$ maka $P(P(x)) - Q(Q(x))$ tidak mungkin bernilai 0 untuk setiap $x$ kompleks. Jadi degree $P$ dan $Q$ sama misal $n$ sehingga misalkan $Q(x) = x^n + ... + a_1x + a_0$

   Misal $R(x) = P(x) - Q(x) \neq 0$ dan $R$ memiliki degree $k$ dengan $0 < k \leq n - 1$ Maka
   $$P(P(x)) - Q(Q(x)) = Q(P(x)) - Q(Q(x)) + R(P(x))$$
   padahal
   $$Q(P(x)) - Q(Q(x)) = (P(x)^n - Q(x)^n) + ... + a_1(P(x) - Q(x))$$
   $a_{n-1}(P(x)^{n-1} - Q(x)^{n-1}) + ... + a_1(P(x) - Q(x))$ memiliki degree maksimal $n^2 - n$ sedangkan $P(x)^n - Q(x)^n = R(x)(P(x)^{n-1} + P(x)^{n-2}Q(x) + ... + Q(x)^{n-1})$ memiliki degree $n^2 - n + k$ Jadi degree dari $Q(P(x)) - Q(Q(x))$ adalah $n^2 - n + k$ dan degree dari $R(P(x))$ adalah $kn$. Karena $k \leq n - 1$ maka $kn < n^2 - n + k$. Hal ini tidak mungkin karena $P(P(x)) - Q(Q(x))$ memiliki degree $n^2 - n + k$ (Seharusnya 0)

   Jika $R$ konstan ($R = c$) maka $Q(Q(x) + c) + c = Q(Q(x))$. Karena range dari $Q(x)$ ada tak hingga maka $Q(x + c) = Q(x) - c$ berlaku untuk tak hingga banyaknya $x$ yang berakibat $Q(x + c) = Q(x) - c$ untuk setiap $x$ kompleks. Yang artinya
   $$(x + c)^n + ... + a_1(x + c) + a_0 = x^n + ... + a_1x + a_0 - c$$
   $$((x + c)^n - x^n) + a_{n-1}((x + c)^{n-1} - x^{n-1}) + ... + a_1((x + c) - x) + c = 0$$
   Untuk setiap $i = 1, 2, ..., n$
   $$(x + c)^i - x^i = c((x + c)^{i-1} + ... + x^{i-1})$$
   sehingga semua koefisien dari $((x + c)^n - x^n) + a_{n-1}((x + c)^{n-1} - x^{n-1}) + ... + a_1((x + c) - x) + c$ berbentuk $c$ dikali suatu bilangan.( c nya bisa dikeluarin dan tersisa polinomial dengan degree $n - 1$ ). Namun polinomal tersebut bernilai 0 untuk setiap $x$ kompleks yang tidak mungkin terjadi kecuali $n$ nya 1 ($Q$ nya linear) atau $c = 0$. Jika $c = 0$ maka selesai. Jika $Q$ nya linear maka misal $Q(x) = x + q$ untuk suatu kompleks $q$. akibatnya$P(x) = x + q + c$ yang berakibat $x + 2q + 2c = P(P(x)) = Q(Q(x)) = x + 2q \Rightarrow c = 0$ Done!

2.

3. Claim : Jika $p|f(k)-f(l)$ untuk suatu $p$ prima maka $p|k-l$

   Bukti : Jika $p^2|f(k)-f(l)$ maka pilih suatu bilangan bulat positif $x > max\{f(k), f(l)\}$ dan $x$ tidak habis dibagi $p$. Misal $n = px - f(k)$ sehingga $n + f(k) = px$ dan $n + f(l) = px - (f(k) - f(l))$ dari kondisi soal $(n + f(k))(f(n) + k)$ merupakan bilangan kuadrat, tapi $n+f(k)$ habis dibagi $p$ namun tidak habis dibagi $p^2$, akibatnya $f(n)+k$ habis dibagi $p$. Dengan alasan yang sama $f(n)+l$ juga habis dibagi $p$ sehingga $p|(f(n)+k)-(f(n)+l) \Rightarrow p|k-l$.

   Jika $p^2$ tidak habis membagi $f(k)-f(l)$. Maka misalkan $n = p^3x - f(k)$ sehingga $n + f(k) = p^3x$ dan $n + f(l) = p^3x - (f(k) - f(l)$ dengan alasan yang sama seperti diatas diperoleh $p|k-l$. Jadi klaim terbukti.

   Jika ada $m$ dan $n$ sehingga $f(m) = f(n)$ maka $m-n$ habis dibagi oleh semua bilangan prima. Jadi f injektif. Selain itu untuk setiap $n$ bilagan asli $f(n+1)-f(n)$ tidak habis oleh bilangan prima manapun sehingga $|f(n+1) - f(n)| = 1$. Misal $f(2) - f(1) = a$ dengan $|a| = 1$. Akan dibuktikan dengan induksi kuat bahwa $f(n) = f(1) + a(n-1$. Untuk $n = 1, 2$ benar. Asumsikan untuk $n \leq k$ benar maka $f(k+1) = f(k) \pm a = f(1) + a(k-1) \pm a$ tapi $f(k-1) = f(1) + (k-2)a$ karena $f$ injektif maka haruslah $f(k+1) = f(1) + ka$. Jadi $f(n) = f(1) + a(n-1)$ untuk setiap $n$ asli. Tapi jika $a = -1$ maka untuk $n$ yang cukup besar $f(n)$ nya negatif. Jadi $a = 1 \Rightarrow f(n) = n + (f(1) - 1)$ untuk setiap n asli dan $f(1) \geq 1$. Jadi $f(n) = n + c$ untuk suatu $c > 0$ c asli. Dicek : $(x + f(y))(f(x) + f(y) = (x + y + c)^2$ Terbukti.