PJJ Tahap 3 IMO 2016 Tidak Resmi
Paket 1 Timothy Jacob Wahyudi
Soal 1

Solusi:
Misalkan derajat polinom $P(x)$ adalah n dan derajat polinom $Q(x)$ adalah m Dimana m dan n bilangan asli. Maka derajat polinom $P(P(x))$ adalah n^2 dan polinom $Q(Q(x))$ adalah m^2. Karena $P(P(x)) = Q(Q(x))$ maka $m^2 = n^2$ dan berakibat $m = n$.
Jika $n = 0$ maka jelas $P(x) = P(P(x)) = Q(Q(x)) = Q(x)$
Misalkan polinom $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0$ dan $Q(x) = x^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1x + b_0$
Perhatikan koefisien x^{n^2-1} dari polinom $P(P(x)) = Q(Q(x))$. Dari penjabaran $P(P(x))$, didapat koefisien x^{n^2-1} nya hanya berasal dari penjabaran x^n dan tidak berasal dari penjabaran $a_{n-1}x^{n-1}$ dan yang pangkat x yang lebih kecil (karena maksimal penjabaran sampai $(x^n)^{n-1} = x^{n^2-n}$). Maka koefisien x^{n^2-1} dari $P(P(x))$ adalah na_{n-1} yang sama dengan nb_{n-1} dari $Q(Q(x))$. Karena $n \neq 0$ maka didapat $a_{n-1} = b_{n-1}$.
Dengan cara serupa dari koefisien x^{n^2-2} didapat $na_{n-2} + \binom{n}{2}a_{n-1}^2 = nb_{n-2} + \binom{n}{2}b_{n-1}^2$ maka $a_{n-2} = b_{n-2}$
Dari koefisien x^{n^2-3} didapat
$na_{n-3} + n(n-1)a_{n-2}a_{n-1} + \binom{n}{3}a_{n-1}^3 = nb_{n-3} + n(n-1)b_{n-2}b_{n-1} + \binom{n}{3}b_{n-1}^3$. Maka $a_{n-3} = b_{n-3}$.
Dengan cara yang sama dari koefisien ke x^{n^2-k} didapat
$na_{n-k} + A(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k+1}) = nb_{n-k} + A(b_{n-1}, b_{n-2}, \ldots, b_{n-k+1})$ dimana $A(c_1, c_2, \ldots c_{k-1})$ merupakan sebuah persamaan dalam c_1, c_2, $\ldots$, dan c_{k-1}. Maka $a_{n-k} = b_{n-k}$
Maka polinom $P(x) = Q(x)$
(sepertinya suku terakhir ada yang berbeda tapi saya lagi males :p)
(cara seperti ini boleh atau ngga? kyk mesti dijabarin lagi atu sudah cukup)

Soal 2

Soal 3