PJJ

DJ Ilhan rmx

March 26, 2016

Solusi No 1 Jika $20|n$: Misal kn adalah kelipatan n. Maka kn habis dibagi 10, sehingga digit satuan kn adalah 0 dan $\frac{kn}{10} \in \mathbb{N} \to 2|\frac{kn}{10}$. Maka digit puluhan dari kn adalah genap. Sehingga dua digit terakhir dari kn genap $\to kn$ bukan bilangan *tawas*. Karena kn adalah sebarang kelipatan n, maka setiap kelipatan n bukan bilangan *tawas*.
Jika seluruh kelipatan n bukan bilangan tawas :

1. Jika $gcd(n, 20) = 1$. Tinjau barisan bilangan 12, 1212, 121212, 12121212, ... yang memiliki tak berhingga suku. Berdasarkan PHP, terdapat dua suku yang bersisa sama ketika dibagi n. Maka selisih kedua suku tersebut habis dibagi n. Perhatikan bahwa selisih kedua suku tersebut berbentuk $121212\ldots12120000\ldots00$. Karena $gcd(n, 20) = 1$, maka $gcd(n, 10) = 1$, sehingga diperoleh : $n|121212\ldots1212$. Kontradiksi, karena 1212...12 *tawas*.

2. Jika $gcd(n, 20) = 2$. Tinjau barisan bilangan 6, 606, 60606, ... Dengan argumen PHP yang sama seperti kasus sebelumnya, diperoleh : terdapat kelipatan n berbentuk 606060606...06060000...00 = 606060606...0606 $\cdot 10^k$ untuk suatu bilangan asli k. Maka $\frac{n}{2}$ membagi 606060606...0606 $\cdot 2^{k-1} \cdot 5^k$. Karena $gcd(n, 20) = 2$, maka $gcd(\frac{n}{2}, 10) = 1$, sehingga $\frac{n}{2}$ membagi 606060606...0606. Maka n membagi 606060606...0606 $\times 2 =$ 121212...1212, yang merupakan bilangan *tawas*.

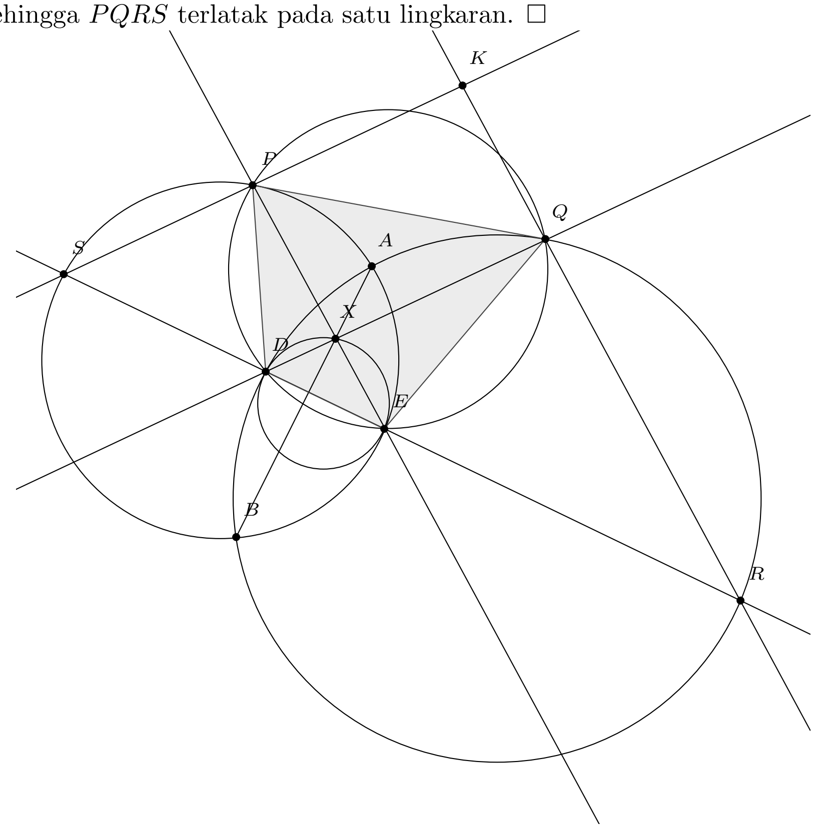
3. Selanjutnya belum sempet dilanjutin...(Untuk kasus2 ketika $gcd(n, 20) = 4, 5, 10)$. Inginnya membuktikan bahwa yang mungkin hanya ketika $gcd(n, 20) = 20$, sehingga n adalah kelipatan 20

Solusi No 2 Misal PS bertemu QR di K. Karena C_0 menyinggung C_1 di D, maka terdapat homothety dengan pusat D yang membawa C_0 ke C_1. Homothety ini jelas memetakan X ke Q dan memetakan E ke R, sehingga diperoleh EX sejajar RQ. Maka garis EXP sejajar garis RQK. Analog diperoleh garis DXQ sejajar garis SPK. Dari sini diperoleh segiempat $PKQX$ adalah jajargenjang. Perhatikan pula bahwa karena $X \in AB$ dan AB merupakan radical axis C_1 dan C_2, maka kuasa X terhadap kedua lingkaran sama $\rightarrow XP \cdot XE = XQ \cdot XD \rightarrow PQED$ terletak pada satu lingkaran. Sehingga :

$$\pi - \angle SPQ = \angle KPQ = \angle XQP = \angle DQP = \angle DEP = \angle SRQ$$

$$\angle SPQ + \angle SRQ = \pi$$

Sehingga $PQRS$ terlatak pada satu lingkaran. $\square$



Solusi No 3 Belum mendapat *motivasi*