

# PJJ

DJ Ilhan rmx

April 16, 2016

**Solusi No 1** Perhatikan bahwa :  $\deg(P(P(x))) = \deg(Q(Q(x))) \implies \deg(P)^2 = \deg(Q)^2 \implies \deg(P) = \deg(Q)$ . Sekarang misalkan  $\deg(P) = \deg(Q) = n$ . Jika  $n = 0$ , maka  $P$  dan  $Q$  konstan :  $P(P(x)) = Q(Q(x)) \implies P(x) = Q(x)$ . Jika  $n = 1$ , misal  $P(x) = x + b$  dan  $Q(x) = x + d$ . Maka:  $P(P(x)) = Q(Q(x)) \implies x + 2b = x + 2d \implies b = d \implies P(x) = Q(x)$ . Sekarang asumsikan  $n > 1$ . Definisikan polinom  $R(x)$  sebagai  $P(x) - Q(x)$ . Jika  $R \equiv 0$ , maka kita selesai. Asumsikan  $R$  bukan polinom nol. Misal  $\deg(R) = m$ . Karena  $P$  dan  $Q$  monik, maka koefisien  $x^n$  hilang pada  $R$ , sehingga  $m \leq n - 1$ . Sekarang perhatikan bahwa :  $P(P(x)) - Q(Q(x)) = Q(P(x)) + R(P(x)) - Q(Q(x))$ . Ruas kiri adalah polinom nol berdasarkan soal, maka ruas kanan juga harus polinom nol. Tulis  $Q(x)$  sebagai  $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ . Maka :  $[Q(P(x)) - Q(Q(x))] + R(P(x)) = [P(x)^n - Q(x)^n] + a_{n-1}[P(x)^{n-1} - Q(x)^{n-1}] + \dots + a_1[P(x) - Q(x)] + R(P(x))$ . Diperoleh  $\deg(R(P(x))) = mn$  dan  $\deg(Q(P(x)) - Q(Q(x))) = \deg[P((x)^n - Q(x)^n)] = \deg(R(x)) \cdot (P(x)^{n-1} + \dots + Q(x)^{n-1}) = m + n(n-1)$ , dengan koefisien utamanya (leading coefficient) adalah hasil perkalian  $n$  dan koefisien utama dari  $R(x)$ . Karena  $m < n$ , maka  $(m + n(n-1)) - mn = (n-m)(n-1) > 0$ . Sehingga, derajat dari ruas kanan adalah  $(m + (n-1)n)$ , kontradiksi.




## **Solusi No 2**

**Solusi No 3 Klaim 1 :**  $|f(n+1) - f(n)| = 1$  untuk setiap  $n \in \mathbb{N}$

Bukti: Asumsikan sebaliknya. Maka terdapat  $p$  prima sehingga  $p$  membagi  $f(n+1) - f(n)$ . Maka  $f(n+1) = f(n) + pd$  untuk suatu  $d \in \mathbb{Z}$ . Sekarang, berdasarkan soal didapat :  $(f(n)+k)(f(k)+n)$  dan  $(f(n+1)+k)(f(k)+n+1) = (f(n)+pd+k)(f(k)+n+1)$  keduanya adalah bilangan kuadrat sempurna untuk setiap  $k \in \mathbb{N}$ . Bagi kedalam dua kasus :

1.  $p$  ganjil. Pilih  $k = pq - pd - f(n)$  untuk  $q \in \mathbb{N}$  yang cukup besar sehingga  $q$  dan  $q-d$  tidak habis dibagi  $p$ . Maka  $(f(n)+k)(f(k)+n) = p(q-d)(f(k)+n)$  dan  $(f(n)+pd+k)(f(k)+n+1) = pq(f(k)+n+1)$ . Karena kedua bilangan ini adalah kuadrat sempurna dan habis dibagi  $p$ , maka kedua bilangan ini habis dibagi  $p^2$ . Akibatnya karena  $q$  dan  $q-d$  tidak habis dibagi  $p$ , maka  $p$  membagi  $f(k)+n$  dan  $f(k)+n+1$ . Maka  $p$  membagi 1. Kontradiksi.
2.  $p = 2$ . Apabila  $d$  genap, kita dapat mengkonstruksi bilangan  $k$  seperti pada kasus sebelumnya, yaitu dengan memilih  $q$  ganjil. Apabila  $d$  ganjil, konstruksi diatas tidak bisa dilakukan karena diantara  $q$  dan  $q-d$  akan ada satu yang bernilai genap, sehingga habis dibagi oleh  $p = 2$ . Pada kasus ini pilih  $k = 8y - f(n)$  dimana  $y$  bilangan asli cukup besar yang ganjil. Maka  $(f(n)+k)(f(k)+n) = 8y(f(k)+n)$  dan  $(f(n)+pd+k)(f(k)+n+1) = (8y+2d)(f(k)+n+1)$ . Keduanya kuadrat sempurna dan habis dibagi dua, maka keduanya habis dibagi 4. Karena  $v_2(8y)$  dan  $v_2(8y+2d)$  ganjil, maka 2 harus membagi  $f(k)+n$  dan  $f(k)+n+1$ . Kontra.

**Klaim 2 :**  $f(n) \neq f(n+2)$  untuk setiap  $n \in \mathbb{N}$

Asumsikan sebaliknya. Maka  $(f(n)+n+2)(f(n+2)+n)$  adalah bilangan kuadrat sempurna. Misal  $f(n)+n = f(n+2)+n = k$ . Maka  $k(k+2)$  adalah bilangan kuadrat sempurna.  $k(k+2) = a^2 \implies (k+1+a)(k+1-a) = 1$ . Hal ini mengakibatkan  $a = 0$  (Kontradiksi) 

Berdasarkan klaim diperoleh  $f(n+1) = f(n) + \epsilon(n)$ , dimana  $\epsilon(n) = \pm 1$ . Apabila terdapat  $n$  sehingga  $\epsilon(n) = -\epsilon(n+1)$ , maka akan diperoleh  $f(n) = f(n+2)$ . Hal ini bertentangan dengan klaim 2, maka tidak terdapat  $n$  sehingga  $\epsilon(n) = -\epsilon(n+1)$ . Akibatnya nilai  $\epsilon(n)$  konstan (Selalu +1 atau selalu -1). Tetapi jika  $\epsilon(n) = -1$ , untuk  $t$  yang cukup besar akan diperoleh nilai  $f(t)$  negatif. Maka  $\epsilon(n) = 1$  dan dari sini diperoleh :  $f(n) = n - 1 + f(1) = n + c$ , dimana  $c$  adalah suatu konstan bilangan bulat non-negatif. Cek ke persamaan awal :

$$(f(m)+n)(f(n)+m) = (m+c+n)(n+c+m) = (m+c+n)^2 \text{ (kuadrat sempurna)}$$

Maka solusinya adalah :  $f(n) = n + c$  dimana  $c$  adalah suatu konstanta bulat non-negatif 