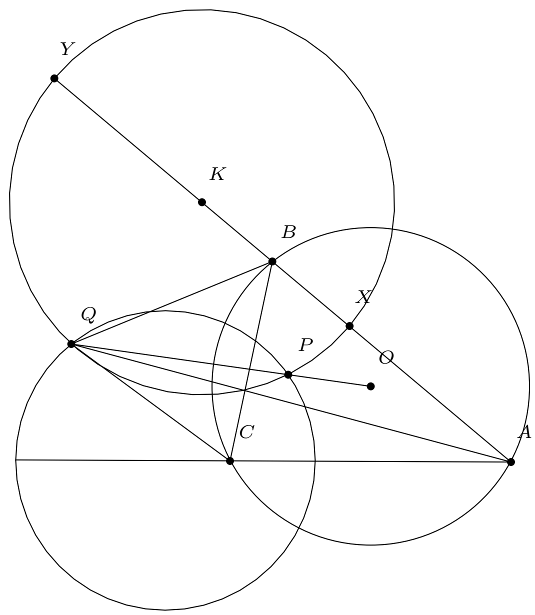
PJJ

DJ Ilhan rmx

April 2, 2016

Solusi No 1 -

Solusi No 2 Misalkan G adalah *centroid* $\triangle ABC$. Mudah dilihat bahwa terdapat dilatasi f dengan pusat G dan faktor -2 yang membawa $A'B'C'$ ke ABC. Sekarang, misalkan $f(P') = Q$. Maka $PA : PB : PC = P'A' : P'B' : P'C' = QA : QB : QC$.



Lemma 1 : Notasikan O sebagai titik pusat lingkaran luar ABC. Maka P, Q, O segaris
Bukti : Karena $PA : PB = QA : QB$, maka P dan Q keduanya terletak pada lingkaran P-apollonius $\triangle APB$. Analog, P dan Q keduanya terletak pada lingkaran P-apollonius $\triangle APC$. Maka P dan Q merupakan titik perpotongan dari lingkaran P-apollonius $\triangle APB$ dan lingkaran P-apollonius $\triangle APC$. Sekarang cukup dibuktikan bahwa kuasa dari O terhadap kedua lingkaran ini sama, sehingga O terletak pada *radical axis* kedua lingkaran ini, yakni PQ. Misal X dan Y pada AB sehingga XY merupakan diameter dari lingkaran P-apollonius $\triangle APB$. Notasikan K sebagai titik pusat lingkaran ini. Maka karena $\frac{AX}{XB} = \frac{AY}{YB}$ diperoleh A,B,X,Y harmonik sehingga :

$$KA \times KB = KX^2$$

Maka lingkaran ini *orthogonal* dengan lingkaran luar $\triangle ABC$, sehingga kuasa O ke lingkaran P-apollonius segitiga APB ini adalah $OK^2 - KX^2 = R^2$. Analog, kuasa O ke lingkaran P-apollonius segitiga APC juga R^2. Sehingga lemma terbukti. (R adalah $OA = OB = OC$)
Lebih jauh kita peroleh : $PA = P'A' = \frac{QA}{2}$...(1). Sekarang akan dibuktikan

rasio $\frac{OP}{OQ}$ konstan. Sebelumnya sudah diperoleh $OA^2 = OP \times OQ$. Karena O, P, Q kolinear, maka diperoleh : $\triangle OPA \sim \triangle OAQ$. Sehingga : $\frac{OP}{OA} = \frac{OA}{OQ} = \frac{PA}{AQ}$. Ekspresi terakhir bernilai $\frac{1}{2}$ menurut ...(1), sehingga :

$$\frac{OP}{OA} = \frac{OA}{OQ} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{OP}{OQ} = \frac{1}{4}$$

Sekarang, misal PP' memotong OG di L. Dengan menggunakan $Menelaus$ pada $\triangle OGQ$ dan transversal PLP' didapat : $\frac{OL}{LG} = 1$. Maka PP' melewati titik tetap, yaitu titik tengah segmen OG. $\square$

Solusi No 3 -