PJJ

DJ Ilhan rmx

April 16, 2016

Solusi No 1 Perhatikan bahwa : $deg(P(P(x))) = deg(Q(Q(x))) \implies deg(P)^2 = deg(Q)^2 \implies deg(P) = deg(Q)$. Sekarang misalkan $deg(P) = deg(Q) = n$. Jika $n = 0$, maka P dan Q konstan : $P(P(x)) = Q(Q(x)) \implies P(x) = Q(x)$. Jika $n = 1$, misal $P(x) = x + b$ dan $Q(x) = x + d$. Maka: $P(P(x)) = Q(Q(x)) \implies x + 2b = x + 2c \implies b = c \implies P(x) = Q(x)$. Sekarang asumsikan $n > 1$. Definisikan polinom $R(x)$ sebagai $P(x) - Q(x)$. Jika $R \equiv 0$, maka kita selesai. Asumsikan R bukan polinom nol. Misal $deg(R) = m$. Karena P dan Q monik, maka koefisien x^n hilang pada R, sehingga $m \leq n - 1$. Sekarang perhatikan bahwa : $P(P(x)) - Q(Q(x)) = Q(P(x)) + R(P(x)) - Q(Q(x))$. Ruas kiri adalah polinom nol berdasarkan soal, maka ruas kanan juga harus polinom nol. Tulis $Q(x)$ sebagai $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_1x + a_0$. Maka : $[Q(P(x)) - Q(Q(x))] + R(P(x)) = [P(x)^n - Q(x)^n] + a_{n-1}[P(x)^{n-1} - Q(x)^{n-1}] + \ldots a_1[P(x) - Q(x)] + R(P(x))$. Diperoleh $deg(R(P(x)) = mn$ dan $deg(Q(P(x)) - Q(Q(x))) = deg[P((x)^n - Q(x)^n] = deg(R(x)) \cdot (P(x)^{n-1} + \ldots Q(x)^{n-1}) = m + n(n-1)$, dengan koefisien utamanya (leading coefficient) adalah hasil perkalian n dan koefisien utama dari $R(x)$. Karena $m < n$, maka $(m + n(n-1)) - mn = (n-m)(n-1) > 0$. Sehingga, derajat dari ruas kanan adalah $(m + (n-1)n)$, kontradiksi.

Solusi No 2

Solusi No 3 Klaim 1 : $|f(n+1) - f(n)| = 1$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$
Bukti: Asumsikan sebaliknya. Maka terdapat p prima sehingga p membagi $f(n+1) - f(n)$. Maka $f(n+1) = f(n) + pd$ unuk suatu $d \in \mathbb{Z}$. Sekarang, berdasarkan soal didapat : $(f(n)+k)(f(k)+n)$ dan $(f(n+1)+k)(f((k)+n+1) = (f(n)+pd+k)(f(k)+n+1)$ keduanya adalah bilangan kuadrat sempurna untuk setiap $k \in \mathbb{N}$. Bagi kedalam dua kasus :

1. p ganjil. Pilih $k = pq - pd - f(n)$ untuk $q \in \mathbb{N}$ yang cukup besar sehingga q dan $q-d$ tidak habis dibagi p. Maka $(f(n)+k)(f(k)+n) = p(q-d)(f(k)+n)$ dan $(f(n)+pd+k)(f(k)+n+1) = pq(f(k)+n+1)$. Karena kedua bilangan ini adalah kuadrat sempurna dan habis dibagi p, maka kedua bilangan ini habis dibagi p^2. Akibatnya karena q dan $q-d$ tidak habis dibagi p, maka p membagi $f(k)+n$ dan $f(k)+n+1$. Maka p membagi 1. Kontradiksi.

2. $p = 2$. Apabila d genap, kita dapat mengkonstruksi bilangan k seperti pada kasus sebelumnya, yaitu dengan memilih q ganjil. Apabila d ganjil, konstruksi diatas tidak bisa dilakukan karena diantara q dan $q-d$ akan ada satu yang bernilai genap, sehingga habis dibagi oleh $p = 2$. Pada kasus ini pilih $k = 8y - f(n)$ dimana y bilangan asli cukup besar yang ganjil. Maka $(f(n)+k)(f(k)+n) = 8y(f(k)+n)$ dan $(f(n)+pd+k)(f(k)+n+1) = (8y+2d)(f(k)+n+1)$. Keduanya kuadrat sempurna dan habis dibagi dua, maka keduanya habis dibagi 4. Karena $v_2(8y)$ dan $v_2(8y+2d))$ ganjil, maka 2 harus membagi $f(k)+n$ dan $f(k)+n+1$. Kontra.

Klaim 2 : $f(n) \neq f(n+2)$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$
Asumsikan sebaliknya. Maka $(f(n)+n+2)(f(n+2)+n)$ adalah bilangan kuadrat sempurna. Misal $f(n)+n = f(n+2)+n = k$. Maka $k(k+2)$ adalah bilangan kuadrat sempurna. $k(k+2) = a^2 \implies (k+1+a)(k+1-a) = 1$. Hal ini mengakibatkan $a = 0$ (Kontradiksi).

Berdasarkan klaim diperoleh $f(n+1) = f(n) + \epsilon(n)$, dimana $\epsilon(n) = \pm 1$. Apabila terdapat n sehingga $\epsilon(n) = -\epsilon(n+1)$, maka akan diperoleh $f(n) = f(n+2)$. Hal ini bertentangan dengan klaim 2, maka tidak terdapat n sehingga $\epsilon(n) = -\epsilon(n+1)$. Akibatnya nilai $\epsilon(n)$ konstan (Selalu $+1$ atau selalu -1). Tetapi jika $\epsilon(n) = -1$,untuk t yang cukup besar akan diperoleh nilai $f(t)$ negatif. Maka $\epsilon(n) = 1$ dan dari sini diperoleh : $f(n) = n - 1 + f(1) = n + c$, dimana c adalah suatu konstan bilangan bulat non-negatif. Cek ke persamaan awal :

$$(f(m)+n)(f(n)+m) = (m+c+n)(n+c+m) = (m+c+n)^2 \text{ (kuadrat sempurna)}$$

Maka solusinya adalah : $f(n) = n + c$ dimana c adalah suatu konstanta bulat non-negatif