Paket 1

Erlang Wiratama Surya

1. Jika n habis dibagi 20 jelas dua digit terakhir dari kelipatan n selalu keduanya genap, maka semua kelipatan dari n tidak tawas. Sekarang akan ditunjukkan kalau ada kelipatan n yang tawas jika n tidak habis dibagi 20.
Jika 4 tidak habis membagi n, maka ada empat kemungkinan, $n = 2.5^t.m$ atau $n = 5^t.m$ atau $n = 2^t.m$ atau $n = m$ dengan $(m, 10) = 1$, dan t positive integer.
Akan dibuktikan untuk $m = 1$ ada kelipatan dari n yang tawas.

Kasus 1: $n = 5^t$
Akan diselesaikan dengan induksi di t, akan ditunjukkan kalau ada bilangan t digit yang tawas dan habis dibagi 5^t. Jelas untuk $t = 1$ ada (5).
Misalkan untuk $t = k+1$ ada . Berarti ada $a_0, a_1, ..., a_k \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$ sehingga $5^{k+1} | \sum_{i=0}^{k} a_i.10^i$ (ini mengobservasi $k+1$ digit, karena tawas berarti alternating paritasnya). Maka $\sum_{i=0}^{k} a_i.10^i \equiv n.5^{k+1} (mod 5^{k+2})$, dengan $0 \leq n \leq 4$. Perhatikan kalau $\sum_{i=0}^{k} a_i.10^i + (5 - n).10^{k+1}$ dan $\sum_{i=0}^{k} a_i.10^i + (10 - n).10^{k+1}$ keduanya habis dibagi 5^{k+2}, dan representasi digitnya dalam basis 10 itu $k + 1$ digit, lalu karena digit paling kiri bisa $5 - n$ atau $10 - n$ (yang paritasnya beda), bisa dipilih sehingga paritasnya alternating, hence tawas. Induksi selesai.

Kasus 2: $n = 2.5^t$
Akan diselesaikan dengan induksi di t, akan ditunjukkan kalau ada bilangan t digit yang tawas dan habis dibagi 2.5^t untuk $t \geq 2$. Jelas untuk $t = 2$ ada (50). Untuk $t = 1$ jelas 10 memenuhi. Perhatikan kalau hanya perlu di observe apakah bilangan itu habis dibagi 5^t dan genap (yangn hanya concerned sama digit terakhir)
Misalkan untuk $t = k+1$ ada . Berarti ada $a_0, a_1, ..., a_k \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$ sehingga $5^{k+1} | \sum_{i=0}^{k} a_i.10^i$ (ini mengobservasi $k+1$ digit, karena tawas berarti alternating paritasnya, dan karena habis dibagi 2 berarti digit paling kanan genap). Maka $\sum_{i=0}^{k} a_i.10^i \equiv n.5^{k+1} (mod 5^{k+2})$, dengan $0 \leq n \leq 4$. Perhatikan kalau $\sum_{i=0}^{k} a_i.10^i + (5 - n).10^{k+1}$ dan $\sum_{i=0}^{k} a_i.10^i + (10 - n).10^{k+1}$

keduanya habis dibagi 5^{k+2}, dan representasi digitnya dalam basis 10 itu $k+1$ digit, lalu karena digit paling kiri bisa $5-n$ atau $10-n$ (yang paritasnya beda), bisa dipilih sehingga paritasnya alternating, hence tawas. Induksi selesai.

Kasus 3: $n = 2^t$
Akan dibuktikan dengan induksi di t kalau ada kelipatan n yang tawas dan hanya t digit.
Jelas ini benar untuk $t = 1, 2, 3, 4$ (2, 32, 632, 1632)
Misalkan ini benar untuk $t \leq 2k$, $k \geq 2$.
Perhatikan kalau untuk $t = 2k+1$, kita ingin $a_0, a_1, ..., a_{2k} \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$ sehingga $2^{2k+1} | \sum\limits_{i=0}^{2k} a_i.10^i$. Menurut induksi ada $a_0, a_1, ..., a_{2k-1} \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$ sehingga $2^{2k-1} | \sum\limits_{i=0}^{2k-1} a_i.10^i$, dengan paritas a_i alternating (bilangannya tawas). Perhatikan kalau haruslah a_0 genap, maka agar bilangannya tawas kita ingin a_i paritasnya sama dengan paritas i. Maka mudah dilihat kalau $2^{2k-1} | a_{2k-1}.10^{2k-1} + a_{2k-2}.10^{2k-2}$, maka ada $a_0, a_1, ..., a_{2k-3} \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$ sehingga $2^{2k-1} | \sum\limits_{i=0}^{2k-3} a_i.10^i$, dengan paritas a_i alternating (bilangannya tawas). Ambil $2k-3$ bilangan ini untuk kasus yang sedang kita kerjakan, lalu jelas yang ingin dicari ekuivalen dengan $4 | a_{2k}.2.5^{2k} + a_{2k-1}.5^{2k-1} + \frac{a_{2k-2}}{2}.5^{2k-2} + h$ untuk suatu $h \in \mathbb{N}$. Jelas $\frac{a_{2k-2}}{2}$ bisa kongruen berapapun modulo 4, maka ada solusi.
Untuk $t = 2k+2$, perhatikan kalau yang ingin dicari adalah $2^{2k+2} | \sum\limits_{i=0}^{2k+1} a_i.10^i$. Karena a_2k+1 odd, kita ingin $2^{2k+2} \nmid \sum\limits_{i=0}^{2k} a_i.10^i$. Namun $a_{2k}.10^{2k}$ bisa diatur menjadi habis dibagi 2^{2k+2} atau tidak (pilihnya $a_{2k} = 2$ kalau gamau habis dibagi, otherwise $a_{2k} = 4$). Jadi bisa dipilih sehingga $2^{2k+2} | \sum\limits_{i=0}^{2k+1} a_i.10^i$ dengan a_{2k+1} odd.
Kasus 4: $n = 1$
Jelas lah ya
Perhatikan kalau untuk kasus 1, kasus 2, kasus 3 konstruksi yang digitnya ada ganjil buah bisa ditambahin digit selanjutnya (yang penting genap) dan tetap kelipatan n. Untuk kasus 4 jelas lah ya
Jadi untuk setiap n diatas bisa dikonstruksi bilangan genap digit yang kelipatan n dan tawas. Misalkan kelipatannya adalah K dan banyaknya digit adalah H. Perhatikan kalau $\sum\limits_{i=0}^{j} K.10^{i.H}$ juga tawas dan kelipatan n. Lalu $\sum\limits_{i=0}^{j} K.10^{i.H} = K\frac{10^{(j+1)H}-1}{10^H-1}$,
Perhatikan kalau ada dipilih j sehingga order m dari 10 habis membagi $j+1$, maka $m | 10^{(j+1)H} - 1$, lalu karena untuk setiap p prima yang membagi m menurut lifting the exponent $V_p(10^{(j+1)H.l} - 1 = V_p(10^{(j+1)H} - 1) + V_p(l)$, maka bisa dipilih j sehingga $V_p(10^{(j+1)H} - 1)$ arbitrarily large. Dengan cara yang sama bisa dibuat sehingga $V_p(10^{(j+1)H} - 1)$ arbitrarily large untuk semua p prima yang membagi m secara simultaneous. Maka jelas untuk setiap m relatif prima dengan 10 ada j sehingga $m | \frac{10^{(j+1)H}-1}{10^H-1}$.

Jelas semua bilangan berbentuk $\frac{10^{(j+1)H}-1}{10^H-1}$ tawas dan untuk setiap m relatif prima 10 bisa dipilih j sehingga $m|\frac{10^{(j+1)H}-1}{10^H-1}$, maka jika t ada kelipatannya yang tawas, tm ada kelipatannya yang tawas untuk m relatif prima dengan 10.
Jadi untuk setiap n yang tidak habis dibagi 20, ada kelipatan n yang tawas. Maka semua kelipatan n tidak tawas jika dan hanya jika n habis dibagi 20.

2. Pertama, perhatikan kalau homothety berpusat E yang membawa lingkaran C_0 ke lingkatan C_2 membawa titik X ke titik P dan titik D ke titik S, maka $XD \parallel PS$. Dengan cara yang sama $XE \parallel RQ$. Perhatikan kalau X berada di AB yang merupakan radical axis dari linkaran C_1 dan C_2, maka power titik X terhadap lingkaran C_1 sama dengan power titik X terhadap lingkaran C_2, berarti $XD.XQ = XE.XP \Rightarrow DEQP$ siklis. Perhatikan kalau $XE \parallel RQ$ berarti $\lhd RQD = \lhd EXD$, lalu, karena $DEPQ$ siklis jelas $\lhd DEP = \lhd DQP$. Berarti $\lhd RQP = \lhd RQD + \lhd DQP = \lhd EXD + \lhd DEX = -\lhd XDE = \lhd EDX = \lhd RSP$ (karena $XD \parallel PS$). $\lhd RQP = \lhd RAP$, maka $PQRS$ siklis.

3. Misalkan $G = \{a_i | 0 \leq i \leq n\}$ dan $H = \{a_i + a_j | 0 \leq i \leq j \leq n\}$, ingin dicari nilai minimum dari $|H|$.
Akan dibuktikan bahwa nilai minimum dari $|H|$ adalah $3n$.

Lemma 1:
Untuk setiap $0 \leq t \leq 2n-1$, setidaknya satu dari t atau $t+2n-1$ merupakan anggota dari H.
Bukti:
Misalkan t bukan anggota dari H, akan ditunjukkan kalau maksimal $\lfloor \frac{t+1}{2} \rfloor$ dari bilangan di interval $(0,t)$ yang merupakan anggota dari G.
Perhatikan kalau diantara k dan $t-k$ hanya maksimal 1 yang merupakan anggota G (untuk $0 \leq k \leq t$), karena jika keduanya anggota G maka t adalah anggota H. Perhatikan kalau ada $t+1$ bilangan yang ada di $(0,t)$.
Jika t genap, misalkan sama dengan $2m$, maka bisa dipasangin k dengan $2m-k$ untuk semua $0 \leq k < m$, lalu jelas m bukan anggota G, karena $m \in G \Rightarrow 2m = t \in H$, ada m pasangan dan dari setiap pasangan cuma maksimal satu yang merupakan anggota G, maka banyaknya bilangan di interval $(0,t)$ di G maksimal m, yakni $\lfloor \frac{t+1}{2} \rfloor$.
Jika t ganjil, misalkan sama dengan $2m+1$, maka bisa dipasangin k dengan $2m+1-k$ untuk semua $0 \leq k \leq m$, ada $m+1$ pasangan, dan diantara pasangan maksimal 1 yang anggota G, maka banyak bilangan di interval $(0,t)$ yang ada di G maksimal $m+1$, yakni $\lfloor \frac{t+1}{2} \rfloor$.
Terbukti maksimal $\lfloor \frac{t+1}{2} \rfloor$dari bilangan di interval $(0,t)$ yang merupakan anggota dari G.

Misalkan $t+2n-1$ bukan anggota H, akan dibuktikan banyaknya bilangan di interval $(t, 2n-1)$ yang ada di G maksimal $\lfloor \frac{2n-t}{2} \rfloor$.
Perhatikan kalau diantara k dan $2n-1+t-k$ hanya maksimal 1 yang merupakan anggota G (untuk $t \leq k \leq 2n-1$), karena jika keduanya anggota G maka $t+2n-1$ adalah anggota H. Perhatikan kalau ada $2n-t$ bilangan yang ada di $(t, 2n-1)$.
Jika t genap, misalkan sama dengan $2m$, perhatikan kalau bisa dipasangin $2m+k$ dengan $2n-1-k$, untuk setiap $0 \leq k \leq n-m-1$, dari setiap pasangan maksimal 1 yang anggota G, ada $n-m$ pasangan, maka banyak anggota interval $(t, 2n-1)$ di G adalah $n-m$ sama dengan $\lfloor \frac{2n-t}{2} \rfloor$.
jika t ganjil, misalkan sama dengan $2m+1$, maka bisa dipasangin $2m+1+k$ dengan $2n-1-k$ untuk setiap $0 \leq k < n-m-1$, dan jelas $m+n$ bukan anggota dari G, karena $m+n \in G \Rightarrow 2(m+n) = 2n-1+t \in H$. Ada $n-m-1$ pasangan, dan dari pasangan maksimal datu yang merupakan anggota dari G, maka banyak anggota G yang berada di interval $(t, 2n-1)$ maksimal $n-m-1$, sama dengan $\lfloor \frac{2n-t}{2} \rfloor$.
Terbukti maksimal $\lfloor \frac{2n-t}{2} \rfloor$ bilangan di interval $(t, 2n-1)$ merupakan anggota dari G.
Berarti, jika t dan $t+2n-1$ bukan anggota dari H, maksimal $\lfloor \frac{t+1}{2} \rfloor$dari bilangan di interval $(0,t)$ yang merupakan anggota dari G dan maksimal $\lfloor \frac{2n-t}{2} \rfloor$ bilangan di interval $(t, 2n-1)$ merupakan anggota dari G.

Maka, $2n+1 < |G| \leq \lfloor \frac{t+1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{2n-t}{2} \rfloor \leq \lfloor \frac{2n+1}{2} \rfloor < n+1$, kontradiksi.
Maka setidaknya satu dari t atau $t+2n-1$ merupakan anggota dari H, lemma terbukti.
Perhatikan kalau $0, 2n-1, 4n-2$ merupakan anggota H, 3 anggota H ya (kelompok 1)
Lalu, a_i dan $a_i + 2n - 1$ merupakan anggota H juga, ini $2n-2$ anggota H ya (kelompok 2)
Lalu, untuk setiap i di interval $(0, 2n-1)$ yang bukan merupakan anggota dari G, menurut lemma 1 setidaknya satu dari i atau $i+2n-1$ merupakan anggota H, ini minimal $n-1$ anggota H ya. (kelompok 3)
obvious kelompok 1,2,3 saling ga potong, dan di dalam kelompok beda semua angkanya
Berarti $|H|$ minimal $3 + 2n - 2 + n - 1 = 3n$. Terbukti $3n \leq |H|$.
Perhatikan kalau dipilih $a_i = i$ untuk setiap $i \neq n$ dan $i \neq 0$, maka elemen H adalah semua bilangan di $(0, 3n-2)$ dan $4n-2$, maka $|H| = 3n$
Maka kardinalitas minimum dari himpunan tersebut adalah $3n$.