PJJ T3 Paket 4

Louis Cahyadi

1. Misal degree dari P adalam m dan degree dari Q adalah n. Sehingga degree dari $P(P(x))$ adalah m^2 dan degree dari $Q(Q(x))$ adalah n^2. Jika $m \neq n$ (WLOG $m > n$ maka $P(P(x)) - Q(Q(x))$ tidak mungkin bernilai 0 untuk setiap x kompleks. Jadi degree P dan Q sama misal n sehingga misalkan $Q(x) = x^n + ... + a_1x + a_0$

   Misal $R(x) = P(x) - Q(x) \neq 0$ dan R memiliki degree k dengan $0 < k \leq n - 1$ Maka
   $$P(P(x)) - Q(Q(x)) = Q(P(x)) - Q(Q(x)) + R(P(x))$$
   padahal
   $$Q(P(x)) - Q(Q(x)) = (P(x)^n - Q(x)^n) + ... + a_1(P(x) - Q(x))$$
   $a_{n-1}(P(x)^{n-1} - Q(x)^{n-1}) + ... + a_1(P(x) - Q(x))$ memiliki degree maksimal $n^2 - n$ sedangkan $P(x)^n - Q(x)^n = R(x)(P(x)^{n-1} + P(x)^{n-2}Q(x) + ... + Q(x)^{n-1})$ memiliki degree $n^2 - n + k$ Jadi degree dari $Q(P(x)) - Q(Q(x))$ adalah $n^2 - n + k$ dan degree dari $R(P(x))$ adalah kn. Karena $k \leq n - 1$ maka $kn < n^2 - n + k$. Hal ini tidak mungkin karena $P(P(x)) - Q(Q(x))$ memiliki degree $n^2 - n + k$ (Seharusnya 0)

   Jika R konstan ($R = c$) maka $Q(Q(x) + c) + c = Q(Q(x))$. Karena range dari $Q(x)$ ada tak hingga maka $Q(x + c) = Q(x) - c$ berlaku untuk tak hingga banyaknya x yang berakibat $Q(x + c) = Q(x) - c$ untuk setiap x kompleks. Yang artinya
   $$(x + c)^n + ... + a_1(x + c) + a_0 = x^n + ... + a_1x + a_0 - c$$
   $$((x + c)^n - x^n) + a_{n-1}((x + c)^{n-1} - x^{n-1}) + ... + a_1((x + c) - x) + c = 0$$
   Untuk setiap $i = 1, 2, ..., n$
   $$(x + c)^i - x^i = c((x + c)^{i-1} + ... + x^{i-1})$$
   sehingga semua koefisien dari $((x + c)^n - x^n) + a_{n-1}((x + c)^{n-1} - x^{n-1}) + ... + a_1((x + c) - x) + c$ berbentuk c dikali suatu bilangan.(c nya bisa dikeluarin dan tersisa polinomial dengan degree $n - 1$). Namun polinomal tersebut bernilai 0 untuk setiap x kompleks yang tidak mungkin terjadi kecuali n nya 1 (Q nya linear) atau $c = 0$. Jika $c = 0$ maka selesai. Jika Q nya linear maka misal $Q(x) = x + q$ untuk suatu kompleks q. akibatnya$P(x) = x + q + c$ yang berakibat $x + 2q + 2c = P(P(x)) = Q(Q(x)) = x + 2q \Rightarrow c = 0$ Done!

2.

3. Claim : Jika $p|f(k) - f(l)$ untuk suatu p prima maka $p|k - l$

   Bukti : Jika $p^2|f(k) - f(l)$ maka pilih suatu bilangan bulat positif $x > max\{f(k), f(l)\}$ dan x tidak habis dibagi p. Misal $n = px - f(k)$ sehingga $n + f(k) = px$ dan $n + f(l) = px - (f(k) - f(l))$ dari kondisi soal $(n + f(k))(f(n) + k)$ merupakan bilangan kuadrat, tapi $n + f(k)$ habis dibagi p namun tidak habis dibagi p^2, akibatnya $f(n) + k$ habis dibagi p. Dengan alasan yang sama $f(n) + l$ juga habis dibagi p sehingga $p|(f(n) + k) - (f(n) + l) \Rightarrow p|k - l$.

   Jika p^2 tidak habis membagi $f(k) - f(l)$. Maka misalkan $n = p^3x - f(k)$ sehingga $n + f(k) = p^3x$ dan $n + f(l) = p^3x - (f(k) - f(l)$ dengan alasan yang sama seperti diatas diperoleh $p|k - l$. Jadi klaim terbukti.

   Jika ada m dan n sehingga $f(m) = f(n)$ maka $m - n$ habis dibagi oleh semua bilangan prima. Jadi f injektif. Selain itu untuk setiap n bilagan asli $f(n+1) - f(n)$ tidak habis oleh bilangan prima manapun sehingga $|f(n + 1) - f(n)| = 1$. Misal $f(2) - f(1) = a$ dengan $|a| = 1$. Akan dibuktikan dengan induksi kuat bahwa $f(n) = f(1) + a(n - 1$. Untuk $n = 1, 2$ benar. Asumsikan untuk $n \leq k$ benar maka $f(k + 1) = f(k) \pm a = f(1) + a(k - 1) \pm a$ tapi $f(k - 1) = f(1) + (k - 2)a$ karena f injektif maka haruslah $f(k + 1) = f(1) + ka$. Jadi $f(n) = f(1) + a(n - 1)$ untuk setiap n asli. Tapi jika $a = -1$ maka untuk n yang cukup besar $f(n)$ nya negatif. Jadi $a = 1 \Rightarrow f(n) = n + (f(1) - 1)$ untuk setiap n asli dan $f(1) \geq 1$. Jadi $f(n) = n + c$ untuk suatu $c > 0$ c asli. Dicek : $(x + f(y))(f(x) + f(y)) = (x + y + c)^2$ Terbukti.