PJJ

DJ Ilhan rmx

April 4, 2016

Solusi No 1 Definisikan barisan b_n dimana $b_n = a_n \times n$. Perhatikan bahwa $b_{n+1} - b_n = (\sum_{k=1}^{n} \lfloor \frac{n+1}{k} \rfloor - \lfloor \frac{n}{k} \rfloor) + \lfloor \frac{n+1}{n+1} \rfloor$. Sekarang tinjau nilai dari $\lfloor \frac{n+1}{k} \rfloor - \lfloor \frac{n}{k} \rfloor$. Nilai ini akan bernilai 1 apabila $k|n+1$ dan bernilai 0 apabila k tidak membagi $n+1$. Maka, nilai dari $\lfloor \frac{n+1}{k} \rfloor - \lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ adalah $1 \times f(n+1)$, dimana $f(n+1)$ menyatakan banyak pembagi positif dari $n+1$ yang kurang dari $n+1$, Sehingga diperoleh :

$$b_{n+1} - b_n = (\sum_{k=1}^{n} \lfloor \frac{n+1}{k} \rfloor - \lfloor \frac{n}{k} \rfloor) + \lfloor \frac{n+1}{n+1} \rfloor = f(n+1) + 1 = \tau(n+1)$$

dimana $\tau(x)$ menyatakan banyak faktor positif dari x. Sehingga dengan induksi diperoleh : $b_n = \tau(1) + \tau(2) + \cdots + \tau(n) \implies a_n = \frac{1}{n}(\tau(1) + \tau(2) + \cdots + \tau(n))$. Sekarang agar $a_{n+1} > a_n$ harus dipunyai $\tau(n+1) > a_n$, yang berarti harus dipunyai $\tau(n+1) > maks(\tau(1), \tau(2), \ldots, \tau(n))$. Tetapi jelas ada sebanyak tak hingga n yang memenuhi karena barisan $\tau(n)$ tidak terbatas diatas (Contoh : Untuk $k \in \mathbb{N}$ cukup besar, terdapat n sehingga $\tau(n) = k$, contohnya yaitu $n = 2011^{k-1}$. Lalu agar $a_{n+1} < a_n$ maka harus dipunyai $\tau(n+1) < a_n$. Hal ini bisa terpenuhi apabila $n+1$ bilangan prima. Karena ada tak hingga bilangan prima, maka ada tak hingga n yang memenuhi.

Solusi No 2 Substitusi $a = b = c = d = 0$ untuk mendapatkan $f(0) = 0$. Lalu substitusi $b = c = 0$ untuk mendapatkan $f(d) = f(-d)$, sehingga d merupakan fungsi genap. Untuk memudahkan penulisan, kita tulis $a = -p$, $b = q$, $c = r$, $d = -s$ sehingga pernyataan pada soal menjadi : $pq + rs = qr \implies f(p + q) + f(r + s) = f(p) + f(q + r) + f(s)$. Sekarang substitusi $p = m$, $q = r = n$, $s = n - m$ ke persamaan terakhir sehingga diperoleh : $f(m + n) + f(2n - m) = f(m) + f(2n) + f(n - m)$ untuk setiap $m,n \in \mathbb{R}$. Beri label persamaan terakhir ini sebagai ...(1). Sub $n = -m$ ke ...(1) untuk memperoleh : $f(3m) = 2f(2m) + f(m)$. Sub $n = -2m$ ke ...(1) untuk memperoleh $f(4m) + f(m) = f(3m) + 2f(2m)$. Dari kedua persamaan terakhir diperoleh (Dengan mensubstitusi nilai $f(3m)$ dari persamaan pertama ke persamaan kedua) : $f(4m) = 4f(2m)$. Karena m adalah sebarang bilangan real, maka dengan mengganti $m \to \frac{m}{2}$ pada persamaan terakhir diperoleh :

$$f(2m) = 4f(m)$$

Dari sini juga diperoleh : $f(3m) = 2f(2m)+f(m) = 9f(m)$. Selanjutnya dengan induksi kuat mudah dibuktikan bahwa : $f(km) = k^2f(m)$ untuk setiap bilangan asli k dan bilangan real m. Maka, dengan substitusi nilai $m = 1$ diperoleh : $f(k) = k^2f(1)$. Lebih jauh, dengan mengganti nilai m dengan suatu bilangan rasional $\frac{l}{k}$ dimana $l,k \in \mathbb{Z}$ diperoleh : $l^2f(1) = f(l) = k^2f(\frac{l}{k}) \implies f(\frac{l}{k}) = \frac{l^2}{k^2}f(1)$. Maka, $f(q) = q^2f(1)$ untuk setiap $q \in \mathbb{Q}$. Sekarang karena *range* f adalah real nonnegatif dan f adalah fungsi genap, maka $f(x) \geq 0$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ dan kita cukup meninjau ketika domain f adalah bilangan non-negatif. Kembali ke bagian "$pq + rs = qr \implies f(p + q) + f(r + s) = f(p) + f(q + r) + f(s)$". Substitusi $s = -r$ untuk memperoleh :$f(p + q) = f(p) + f(q - s) + f(s)$ dan $s^2 - qs - pq = 0$. Ambil nilai p dan q nonnegatif. Karena persamaan $s^2 - qs - pq = 0$ memiliki diskriminan $q^2 + 4pq \geq 0$, maka untuk sebarang p dan q bilangan real nonnegatif terdapat $s \in \mathbb{R}$ sehingga $s^2 - qs - pq = 0$. Maka : $f(p + q) = f(p) + f(q - s) + f(s)$. Karena $f(x) \geq 0$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, maka :

$$f(p + q) = f(p) + f(q - s) + f(s) \geq f(p) \implies f \text{ increasing di } \mathbb{R}$$

Menggabungkan fakta ini dengan $f(q) = q^2f(1)$ diperoleh : $f(x) = x^2f(1)$ untuk setiap $x \geq 0$. Karena f adalah fungsi genap, maka $f(-x) = x^2f(1)$. Maka solusinya adalah : $f(x) = cx^2$ dimana $c \geq 0$ $\square$

Solusi No 3