Paket 2 no.2

Erlang Wiratama Surya

2. Misalkan G adalah centroid dari segitiga ABC, O, O' adalah circumcenter dari ABC dan $A'B'C'$ secara berturut-turut (jelas O' itu H sebenarnya).
Perhatikan kalau homothety dengan pusat G dan rasio $\frac{-1}{2}$ membawa segitiga ABC ke segitiga $A'B'C'$, misalkan homothety tersebut membawa P ke $P”$. Perhatikan kalau $2 = \frac{AP'}{A'P”} = \frac{A'P'}{A'P”}$, Similarly $2 = \frac{A'P'}{A'P”} = \frac{B'P'}{B'P”} = \frac{C'P'}{C'P”}$. Well known kalau lokus dari titik X sehingga $\frac{XP'}{XP”} = 2$ adalah lingkaran yang diameternya TT' dimana $\frac{P'T}{TP”} = 2$ dan $\frac{P'T'}{T'P”} = -2$. Perhatikan kalau midpoint TT' adalah O', maka $P'P”$ melalui pusat lingkaran luar segitiga $A'B'C'$. Selain itu, karena $\frac{P'T}{TP”} = 2$ dan $\frac{P'T'}{T'P”} = -2$, jelas $O'P”$ panjangnya adalah setengah radius lingkaran luar segitiga $A'B'C'$. Perhatikan kalau ini berarti OP panjangnya adalah setengah radius lingkaran luar segitiga ABC. Selain itu, jelas juga $\frac{O'P'}{O'P”} = 4$ karena $\frac{P'T}{TP”} = 2$ dan $\frac{P'T'}{T'P”} = -2$.
Perhatikan kalau homothety dengan pusat G dan rasio $\frac{-1}{2}$ membawa OP ke $O'P”$. Ini berarti OP parallel HP'. Misalkan radius lingkaran luar segitiga ABC adalah R, sudah dibuktikan $OP = \frac{R}{2}$. Lalu jelas radius lingkaran luar $A'B'C' = \frac{R}{2}$, maka $O'P” = \frac{R}{4}$, maka $O'P' = R$. Misalkan $PP' \cap OH = K$. Karena $OP \parallel HP'$, jelas segitiga PKO sebangun dengan segitiga $P'KO'$, maka $\frac{O'K}{OK} = \frac{O'P'}{OP} = 2$. Maka PP' selalu melalui titik K dimana $\frac{O'K}{OK} = 2$.
Terbukti semua garis PP' yang mungkin melewati sebuah titik tetap, yakni K.