PJJ Tahap 3 IMO 2016 Tidak Resmi
Paket 1 Timothy Jacob Wahyudi
Soal 1

Definisikan sebuah barisan $\{a_n\}$ dimana

$$a_n = \frac{1}{n}(\lfloor \frac{n}{1} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \cdots + \lfloor \frac{n}{n} \rfloor).$$

Buktikan terdapat tak berhingga banyaknya n sehingga $a_{n+1} > a_n$, dan juga terdapat tak berhingga banyaknya n sehingga $a_{n+1} < a_n$.
Solusi:
Perhatikan bahwa untuk $p, q \in \mathbb{Z}$ dengan $0 < q \leq p$ maka,
Jika $q \mid p$, $\lfloor \frac{p}{q} \rfloor - \lfloor \frac{p-1}{q} \rfloor = 1$, dan
Jika $q \nmid p$, $\lfloor \frac{p}{q} \rfloor - \lfloor \frac{p-1}{q} \rfloor = 0$
Definisikan fungsi $d(n)$ yang menyatakan banyaknya faktor positif dari n, maka
$a_{n+1} = \frac{na_n + d(n)}{n+1}$.
Misalkan $a_n > d(n+1)$, maka $(n+1)a_n > na_n + d(n)$, maka $a_n > \frac{na_n+d(n)}{n+1} = a_{n+1}$.
Untuk $n > 6$ maka $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \geq 3$ maka
$\frac{1}{n}(\lfloor \frac{n}{1} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \cdots + \lfloor \frac{n}{n} \rfloor) \geq \frac{1}{n}(n + 3 + 1 + 1 + \cdots + 1) = 2$
karena untuk $n + 1 > 6$ prima, $d(n + 1) = 2$ maka $a_n > d(n + 1)$ sehingga ada tak berhingga banyaknya n dimana $a_{n+1} < a_n$.
Misalkan hanya ada berhingga banyaknya n sehingga $a_{n+1} > a_n$ maka akan ada batas atas untuk barisa a_i.
Perhatikan barisan berbentuk a_{2^n}.
$a_{2^n} \geq \frac{1}{2^n}(2^n + 2^{n-1} + 2 \times 2^{n-2} + 4 \times 2^{n-3} + \cdots + 2^{n-1} \times 2^0) = \frac{n+2}{2}$ maka untuk setiap bilangan real m akan ada bilangan n berbentuk 2^a sehingga $a_n > m$ kontradiksi.
Maka, terdapat tak berhingga banyaknya n sehingga $a_{n+1} > a_n$, dan juga terdapat tak berhingga banyaknya n sehingga $a_{n+1} < a_n$.

Soal 2

Cari semua fungsi f yang memetakan semua bilangan real ke bilangan real nonnegatif, sehingga untuk setiap $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ yang memenuhi $ab + bc + cd = 0$, dipunyai

$$f(a-b) + f(c-d) = f(a) + f(b+c) + f(d).$$

Solusi:
Pertama, perhatikan bahwa untuk $a = b = c = d = 0$ maka memenuhi
$ab + bc + cd = 0$, dan $f(0-0) + f(0-0) = f(0) + f(0+0) + f(0)$ maka $f(0) = 0$.
Perhatikan juga ketika $a = b = c = 0$ maka untuk sebarang d berlaku
$ab + bc + cd = 0$, dan $f(0-0) + f(0-d) = f(0) + f(0+0) + f(d)$ maka
$f(x) = f(-x)$ untuk semua x bilangan real.
Untuk sembarang bilangan tak negatif x dan y, misalkan $a = \frac{2xy}{y-x}$, $b = x$, $c = y$, dan
$d = \frac{-x^2-xy}{y-x}$
Maka $ab + bc + cd = \frac{2x^2y}{y-x} + \frac{xy^2-x^2y}{y-x} + \frac{-x^2y-xy^2}{y-x} = 0$.
dan $f(\frac{xy+x^2}{y-x}) + f(\frac{x^2+y^2}{y-x}) = f(\frac{2xy}{y-x}) + f(x+y) + f(\frac{-x^2-xy}{y-x})$
Maka $f(\frac{x^2+y^2}{y-x}) = f(\frac{2xy}{y-x}) + f(x+y)$
Misalkan $M = y - x$ dan $N = \frac{2xy}{y-x}$, maka $f(M+N) = f(N) + f(\sqrt{M^2+2MN})$
Misalkan dibuat fungsi baru yaitu $g(x)$ dengan $g : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}$ dan $g(x^2) = f(x)$
Maka $g(M^2 + 2MN + N^2) = g(N^2) + g(M^2 + 2MN)$.
Akan dibuktikan bahwa untuk setiap bilangan positif P dan Q terdapat M dan N sehingga $P = N^2$ dan $Q = M^2 + 2MN$
Karena P dan Q tak negatif maka terdapat $N = \sqrt{P}$ dan $M = \frac{-2\sqrt{P}+\sqrt{4P+4Q}}{2}$.
Dimana M dan N tak negatif.
Akan dibuktikan juga untuk sembarang bilangan M dan N terdapat x dan y sehingga $M = y - x$ dan $N = \frac{2xy}{y-x}$
$N = \frac{2x^2+2xM}{M}$
Karena M dan N tak negatif, maka tedapat $x = \frac{-2M+\sqrt{4M^2+8MN}}{4}$ dan
$y = M + \frac{-2M+\sqrt{4M^2+8MN}}{4}$
maka sebagai akibat, fungsi $g(x)$ merupakan fungsi cauchy dari real tak negatif ke real.
Maka $g(x) = kx$ untuk suatu bilangan real k.(ini perlu dibuktiin ga?)
maka $g(x^2) = f(x) = kx^2$ untuk suatu bilangan real k

Soal 3

Misalkan $A_1A_2\dots A_8$ adalah sebuah segi-8 konveks sama sisi sehingga A_iA_{i+1} sejajar $A_{i+4}A_{i+5}$ untuk setiap i. Definikan B_i sebagai perpotongan A_iA_{i+4} dan $A_{i-1}A_{i+1}$. Tunjukkan terdapat i sehingga

$$\tfrac{A_iA_{i+4}}{B_iB_{i+4}} \leq \tfrac{3}{2}.$$

($8|i-j$ mengimplikasikan $A_i = A_j$.)
Solusi:
Perhatikan bahwa untuk garis-garis A_iA_{i+1} dan $A_{i+4}A_{i+5}$ sama panjang dan sejajar.
Maka $A_iA_{i+1}A_{i+4}A_{i+5}$ adalah sebuah jajar genjang.
Maka titik tengah A_iA_{i+4} sama untuk semua i