제2장 Shapley Value

5. Shapley Value의 의의

Shapley Value의 의의 및 계산방법

- Core는 효율성이라는 바람직한 특성을 가지고 있지만, 바람직하지 못한 특성도 보유하고 있음.
- 즉, core가 존재하지 않을 수도 있고, 아주 커다란 core를 가지고 있을 수도 있음.
- 따라서 '유일한' 해를 제공하지 못하는 단점이 있음.
- 이러한 단점이 없는 다른 해들이 많이 개발되었으며, 그 중 가장 잘 알려진 것이 Shapley Value(SV; 샤플리 밸류) 임.
- Shapley Value는 UCLA의 Lloyd Shapley의 이름을 딴 이름 임.

Lloyd Shapley, 1980
(1923~, 87세)

Shapley Value의 의의 및 계산방법

- SV 역시 공조적 개념을 바탕으로 함.
- 즉, SV는 해가 만족하여야 하는 공리(axiom)들의 집합에 기반을 두고 있음.
- 이러한 공리들은 주관적 판단에 기인하며, 다른 여러 유사한 해들도 이러한 주관적 공리에 기초하고 있음.
- 따라서 이러한 주관적 판단은 참여하는 선수들의 동의 하에서 의미가 있다고 할 수 있음.
- SV의 공리는 다음과 같음.

Shapley Value의 의의 및 계산방법

- SV의 공리 : *보상의 분배는 문제해결을 위한 각 선수들의 각 연합에의 추가적 기여(marginal contribution)의 총합에 비례하여야 한다.* → 효용주의 관점의 공정성. Nucleolus는 동등주의.

- 각 선수의 추가적 기여도는 어떻게 계산할까? 예를 들어, A가 B와 연합하여 A와 B의 총 보상이 5라고 하자 (즉, v(A, B)=5). 만일 B혼자서 행동할 때 B의 보상이 2라고 한다면(v(B)=2), A의 이 연합 {A, B}에 대한 추가적기여는 다음과 같이 계산됨.

  A의 {A, B}에 대한 기여 = v(A,B) – v(B) = 5 – 2 = 3.

- 수식으로 표현하면, i 의 추가적 기여는

$$v(K) - v(K/i)$$

Shapley Value의 의의 및 계산방법–한계기여

- 예를 들어, 2인 게임에서 다음과 같이 특성함수가 주어졌다고 가정함.

  v(A) = 2, v(B) = 3, v(AB)= 6

- 공조가 이루어 지지 않은 경우

  Marginal contribution of A to {A} = v(A) – v() = 2 – 0 = 2.

  Marginal contribution of B to {B} = v(B) – v() = 3 – 0 = 3.

- 공조가 이루어진 경우

  Marginal contribution of A to {AB} = v(AB) – v(B) = 6 – 3 = 3.

  Marginal contribution of B to {AB} = v(AB) – v(A) = 6 – 2 = 4.

- M. contr. of A + M. contr. of B = 7. v(AB)=6.
- → 7–6=1=transaction cost(거래비용) or coordination cost(조정비용)

Shapley Value의 의의 및 계산방법-가중치 (2인 공조)

- 각 공조가능 집합의 가중치

{A}: 1인 공조는 2개({A}, {B})가 일어날 수 있음. {A}는 2개 중 1개. 따라서 공조 {A}가 일어날 확률은 1/2. 이 공조에는 1인만 기여하므로 A의 {A}에 대한 중요도는 1/1. 따라서 공조 {A}에 대한 A의 가중치는 1/2*1/1=1/2.

{B}: {A}와 마찬가지 이유로 1/2.

{A,B}: 2인 공조는 1개 ({A,B}). 따라서 공조 {A,B}는 1/1의 일어날 확률. 각 선수의 공조 {A,B}에 대한 기여는 1/2. 따라서 공조 {A,B}에 대한 각 선수의 가중치는 1/1*1/2=1/2.

Shapley Value의 의의 및 계산방법-가중치 (3인 공조)

- 각 공조가능 집합의 가중치

{A}, {B}, {C}: 1/3(3개 공조 중 1개)*1/1(선수 1명 중 1인)=1/3

{A,B}, {B,C}, {A,C}: 1/3(3개 공조 중 1개)*1/2
(선수 2명 중 1인)=1/6

{A,B,C}: 1/1*1/3=1/3

Shapley Value의 의의 및 계산방법

사업주체/범위	사업 조합(가능한 공조 체제)		
	$\lvert K \rvert=1$ 가중치=1/2*1/1=1/2	$\lvert K \rvert=2$ 가중치=1/1*1/2=1/2	각 추가적 기여의 가중평균의 합 = Shapley Value
A	v{A}-v{ } =2-0=2 (공조 A에 대한 A의 추가적 기여)	v{A,B}-v{B}=6-3=3 (공조 A-B에 대한 A의 추가적 기여)	=1/2*2+1/2*3=**5/2=2.5**
B	v{B}-v{ } =3-0=3 (공조 B에 대한 B의 추가적 기여)	v{A,B}-v{A}=6-2=4 (공조 A-B에 대한 B의 추가적 기여)	=1/2*3+1/2*4=**7/2=3.5**

- A와 B가 각각 행동했을 때는 2, 3씩 보상받으므로 총합은 5. 따라서 단순히 비례로 보면 2/5=0.4, 3/5=0.6 씩 보상받아야 하는 것으로 생각됨(A는 40%, B는 60%).

- 하지만 공조체제에 대한 총기여를 고려하여 공조시 분배를 보면, A와 B는 2.5/6=0.42, 3.5/6=0.58을 가져가야 함 (A는 42%, B는 58%).

Shapley Value의 의의 및 계산방법

- 왜 A가 상대적으로 더 많은 보상(40% vs. 42%)을 가져가야 할까?

- 절대값으로 보면, 공조하지 않으면, A는 2, B는 3을 가져가지만 (3/2=1.5), 공조하면 A는 2.5, B는 3.5를 가져가게 됨(3.5/2.5=1.4).

- 즉, 공조를 통하여 추가적으로 발생하는 보상은 1(=6−5)이며, 이를 공평하게(동등하게) 나누어 갖는 것이 맞는다고 할 수 있음. 왜냐하면, A가 협조하지 않았으면, B는 3밖에 못 가져가게 되므로, 공조하는 것이 유리.

- 이렇게 공조게임에서는 자신이 가진 부존자원 또는 BATNA가 작은 선수가 상대적으로 더 많은 이익을 보는 경우가 일반적임. 예) 국회 투표 게임. 새누리당 45%, 민주당 40%, 진보당 12%, 나머지 3% → 진보당이 casting vote를 가지고 있음. → 진보당의 정치력은 12% 이상임.

Shapley Value의 의의 및 계산방법

- SV를 구하는 식을 나타내면 다음과 같음.

$$sh_i(N,v) = \sum \underbrace{\boxed{\frac{(K-1)!(N-K)!}{N!}}}_{\text{Average weight of } i} \underbrace{\boxed{[v(K) - v(K/i)]}}_{\text{Marginal worth/contribution of } i \text{ To coalition } K}$$

Average weight of i

Marginal worth/contribution of i
To coalition K

Shapley Value의 의의 및 계산방법

- N: 전체 공조체계(Grand Coalition)
- K: 부분 공조체계
- |*|: * 공조체계가 이루어 질 때 참여 이익집단의 수 or 집합의 원소수
- v(*): * 공조체계의 특성함수(Characteristic Function; 효용함수와 유사)
- /{i}: 이익집단 i 가 제외되는 경우

Shapley Value의 의의 및 계산방법

- 이익집단 i 의 Shapley Value(공조체계에의 기여도)는 크게 2개 부분으로 이루어져 있음. 즉, 가능한 각 공조체계에 대한 i 의 가중치와 한계기여도로 이루어져 있음.

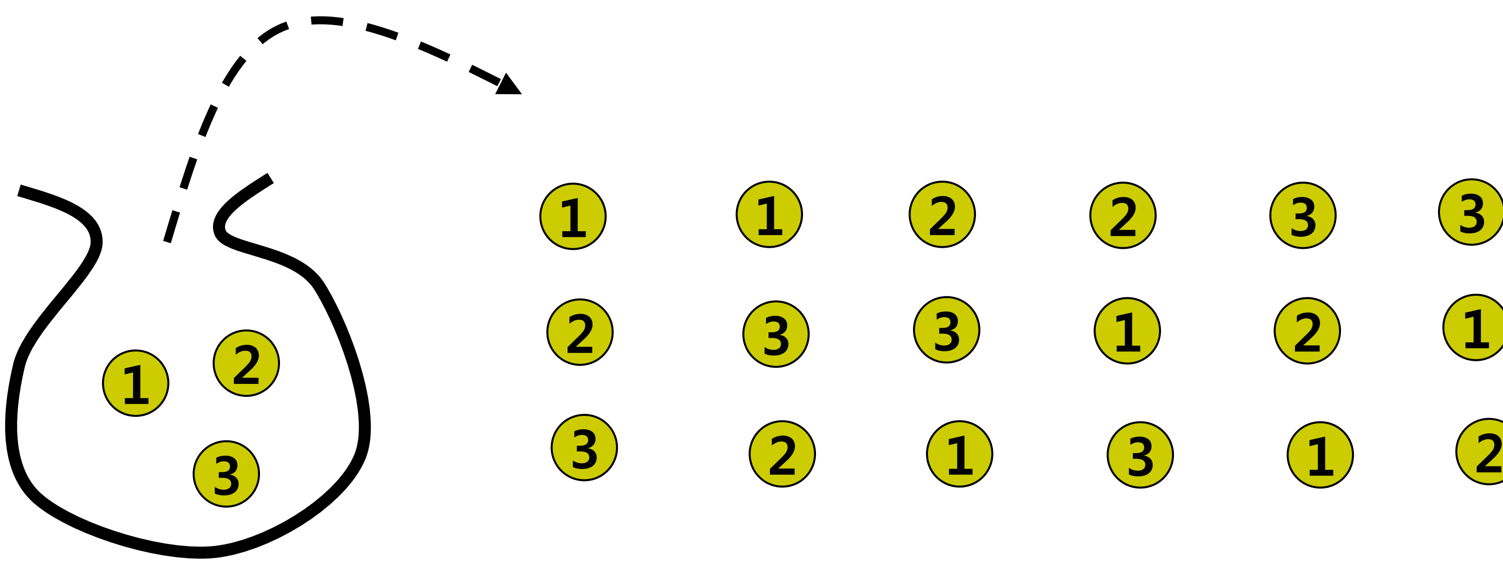
- 각 가능한 공조체계에 대한 i 의 가중치는 순열(permutation)과 조합(combination)을 계산하여 구하여 짐. 즉, n 개의 구별 가능한 사물을 r개 자리로, 순서대로 늘어놓을 때는 순열을 사용하여 계산하며, 식은 다음과 같이 나타남.

$$P_r^n = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

per- "thoroughly" + mutare "to change"

순열(順列; Permutation)

- n 명의 사람에서 r 명을 순서대로 세우는 방법 예) 3명에서 3명을 뽑아 순서대로 세우는 방법 nPr = n!/(n-r)! =3*(3-1)*(3-2)*(3-3+1)= 3!/(3-3)! = 6



Shapley Value의 의의 및 계산방법

- 예를 들어, {1, 2, 3} 중에서, 1명 씩 뽑아서, 1명으로 늘어 놓는(줄을 세우는) 경우의 수. {1}, {2}, {3} ➔ 3가지(=3!/(3−1)!)
- {1, 2, 3} 중에서, 2명 씩 뽑아서, 2명으로 늘어 놓는(줄을 세우는) 경우의 수. {1,2}, {1,3}, {2,1}, {2,3}, {3,1}, {3,2} ➔ 6가지 (=3!/(3−2)!)
- {1, 2, 3} 중에서, 3명 씩 뽑아서, 3명으로 늘어 놓는(줄을 세우는) 경우의 수. {1,2,3}, {1,3,2}, {2,1,3}, {2,3,1}, {3,1,2}, {3,2,1} ➔ 6가지 (=3!/(3−3)!)

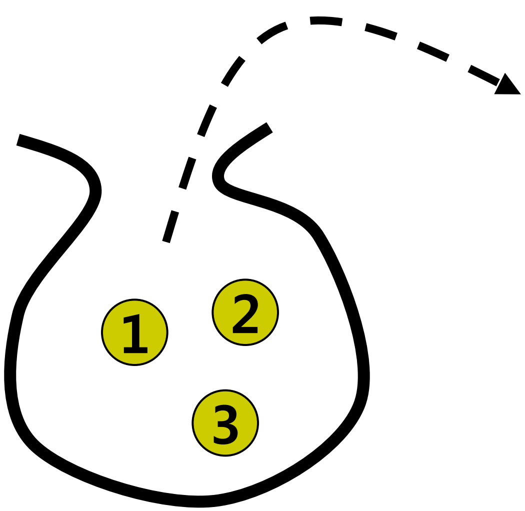
- 순서를 고려하지 않으면(순서만 바뀌는 것은 같은 것이라고 취급하면), 조합(combination)을 계산.

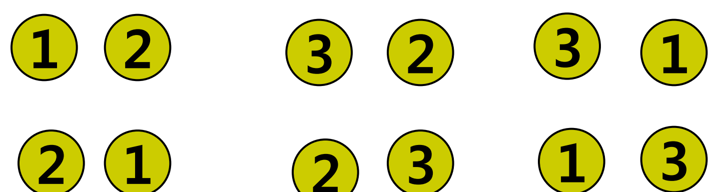
$$\binom{n}{r} = C_r^n = \frac{P_r^n}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

com- "together" (see com-) + bini "two by two," adv. from bi- "twice."

조합(調合; Combination)

- 3명에서 2명을 뽑아 순서대로 세우는 방법 $_3P_2 = n!/(n-r)! = 3!/(3-2)! = 6$
- n 명의 사람에서 r 명을 고르는 방법 예) 3명에서 2명을 뽑는 방법 $_nC_r = [n!/(n-r)!]/r! = [3!/(3-2)!]/2! = 3$





* {1,2}(1과 2의 공조)와 {2,1}(2와 1의 공조)는 같음.

Shapley Value의 의의 및 계산방법

- 예를 들어, {1, 2, 3} 중에서, 1명 씩 뽑는(한군데 모이게) 경우의 수. {1}, {2}, {3} ➔ 3가지(=3/1!)
- {1, 2, 3} 중에서, 2명 씩 뽑는(한군데 모이게) 경우의 수. {1,2}, {1,3}, {2,3} ➔ 3가지 (=6/2!)
- {1, 2, 3} 중에서, 3명 씩 뽑는(한군데 모이게) 경우의 수. {1,2,3} ➔ 1가지 (=6/3!)

- 공조를 하는 경우의 수를 계산할 때 순서는 중요하지 않게 됨. 따라서, 조합을 계산.

- 예를 들어, *i* 가 들어가는 공조체계의 경우를 계산하려면, *i* 는 항상들어가야 하므로 1명은 제외하고 (*n*-1)명 중에서 (*r*-1)을 뽑아서 가담시켜야 함.

Shapley Value의 의의 및 계산방법

- 즉, {1,2,3}에서 1이 포함되는 공조의 경우의 수는 {1}, {1,2}, {1,3}, {1,2,3} 임.
- 즉, 1인이 포함된(r=1), 1이 공조하는 경우의 수는, (n-1)C(r-1)=(n-1)!/[(n-1-r+1)!(r-1)!]=2!/[(3-1)!1!]=1 ➔ {1}
- 2인이 포함된(r=2), 1이 공조하는 경우의 수는, (n-1)C(r-1)=(n-1)!/[((n-1)-(r-1))!(r-1)!]=2!/[(2-1)!1!]=2 ➔ {1,2}, {1,3}
- 3인이 포함된(r=3), 1이 공조하는 경우의 수는, (n-1)C(r-1)=(n-1)!/[(n-1-r+1)!(r-1)!]=2!/[(3-3)!2!]=1 ➔ {1,2,3}.

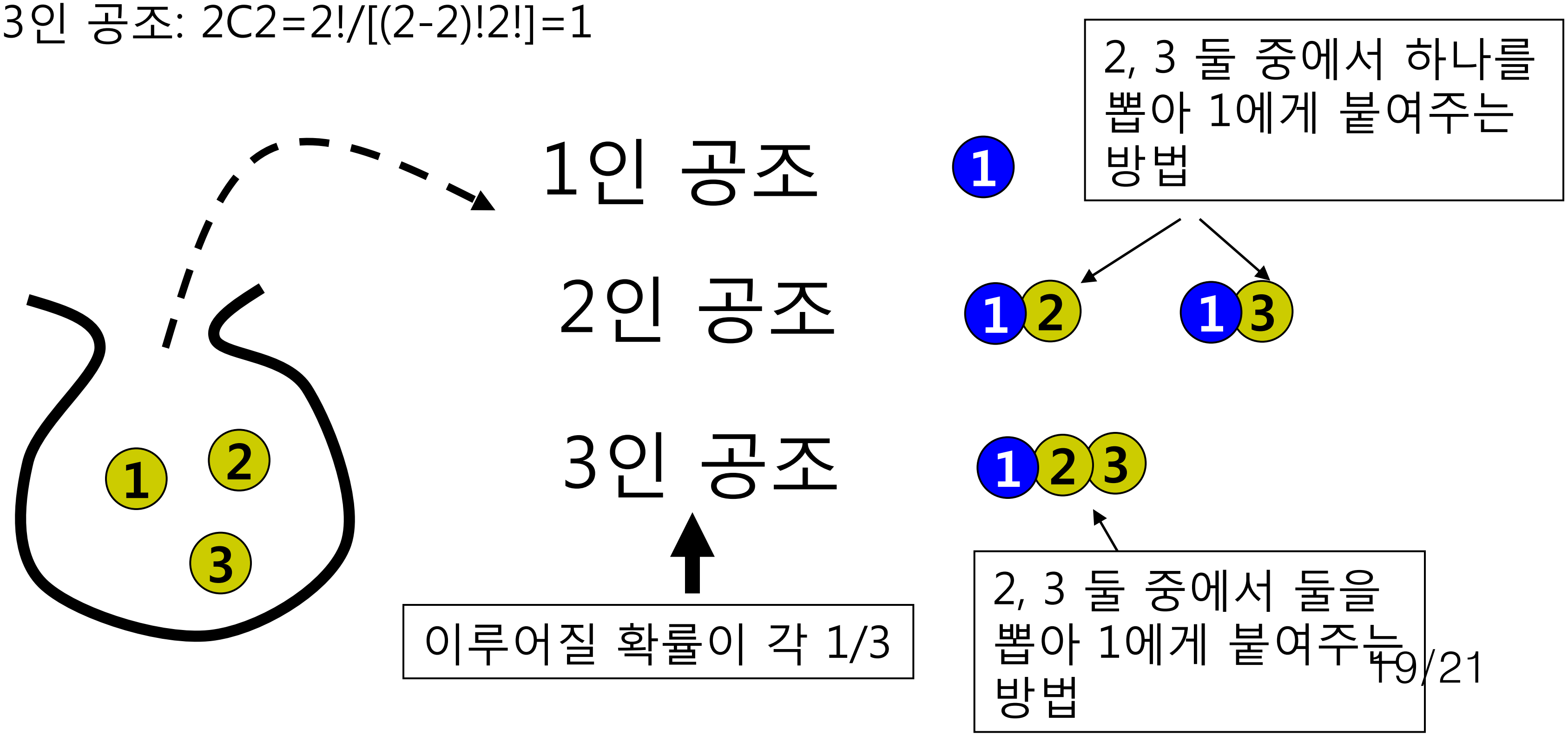
Shapley Value의 의의 및 계산방법

- 그런데, 1명이 들어가는 공조체제는 1/3의 확률로 일어남({1}, {2}, {3} 중 1개가 일어남). 따라서, 1이 들어가는 1명 공조체제는 1/3(=1/1*1/3)의 확률로 일어남.
- 2명이 들어가는 공조체제는 1/3의 확률로 일어남([{1,2},{1,3}],[{2,3},{2,1}],[{3,1},{3,2}] 중 1개). 1이 들어가는 2명 공조체제는 ½의 확률로 일어나므로, 1이 들어가는 2명 공조체제가 일어날 전체확률은 1/6(=1/2*1/3) 임.
- 3명이 들어가는 공조체제는 역시 1/3의 확률로 일어남({1,2,3},{2,1,3},{3,1,2} 중 1개). 1이 들어가는 3명 공조체제는 1/1의 확률로 일어나므로, 1이 들어가는 3명 공조체제가 일어날 전체확률은 1/3(=1/3*1/1) 임.

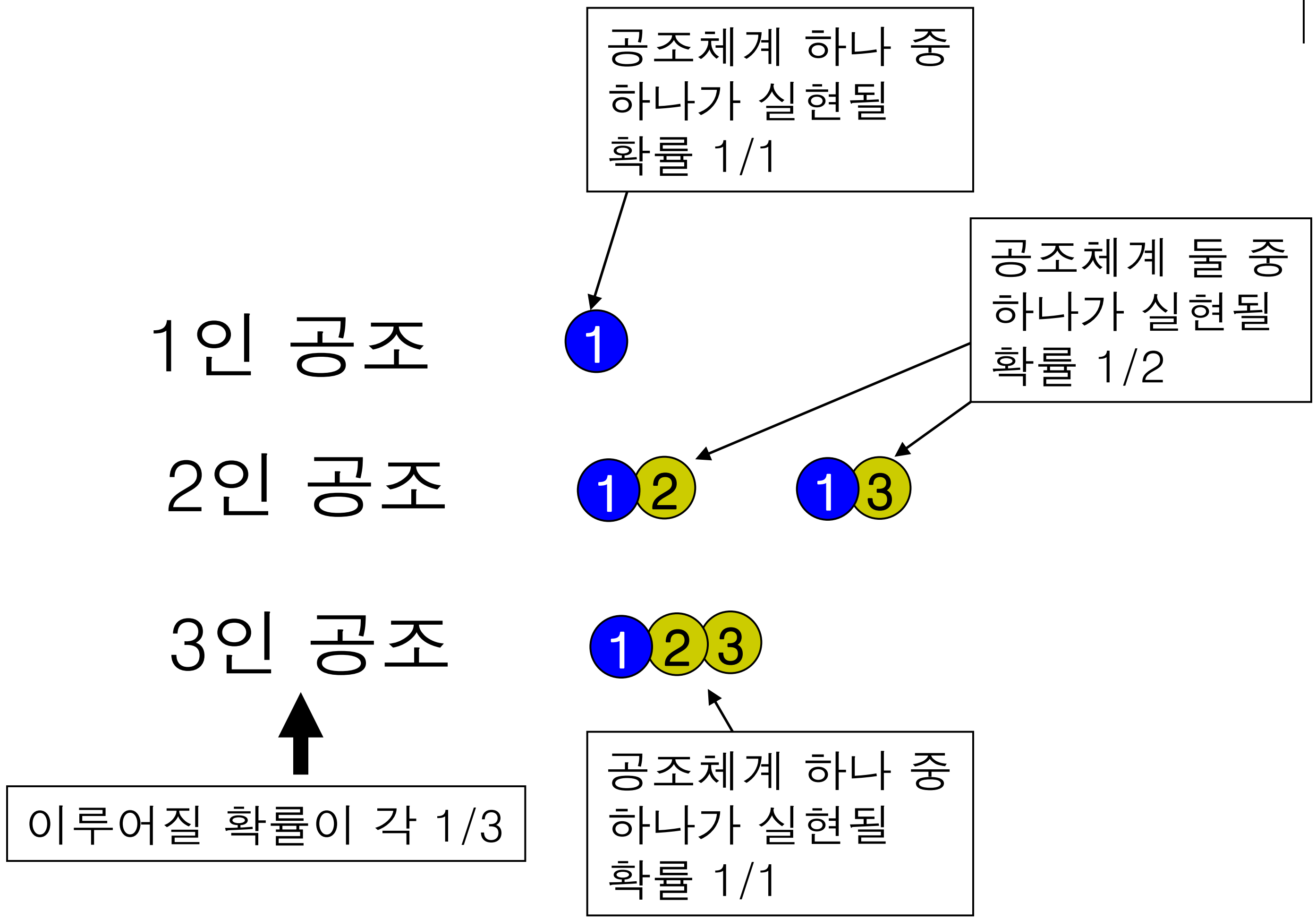
Combination의 공조체계의 경우의 수에의 적용

$$\binom{n}{r} = C_r^n = \frac{P_r^n}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

- 3 명의 사람이 있는데 1 자신이 들어가는 공조체계의 가능한 경우의 수는?
- 1인 공조: (n-1)C(r-1) = (3-1)C(1-1) = 2C0 =2!/[(2-0)!*0!]=1
- 2인 공조: 2C1=2!/[(2-1)!1!]=2
- 3인 공조: 2C2=2!/[(2-2)!2!]=1



Combination의 공조체계의 경우의 수에의 적용



Shapley Value의 다른 표현

- 따라서, 처음 SV를 설명할 때 나왔던 공식은 다음과 같이 유도됨. 단, C(K)는 자신이 포함된 공조의 경우의 수.
- 즉, 각 공조체제가 일어날 확률과 각 경우의 각 선수의 추가적기여를 곱하여 더하면, 그것이 바로 SV가 됨.

$$sh_i(N,v) = \sum \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{C(K)} [v(K) - v(K/i)]$$

$$= \sum \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{\binom{N-1}{K-1}} [v(K) - v(K/i)]$$

$$= \sum \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{\frac{(N-1)!}{(N-1-(K-1))!(K-1)!}} [v(K) - v(K/i)]$$

$$= \sum \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{\frac{(N-1)!}{(N-K)!(K-1)!}} [v(K) - v(K/i)]$$

$$= \sum \frac{1}{N} \cdot \frac{(N-K)!(K-1)!}{(N-1)!} [v(K) - v(K/i)]$$

$$= \sum \frac{(N-K)!(K-1)!}{N!} [v(K) - v(K/i)]$$