## Sannanir

Margar staðhæfingar í stærðfræði (setningar) eru leiðingar, og er hægt að hugsa um sem

$$p \longrightarrow q$$

niðurstaða

forsenda/forsendur

## Bein sönnun

**Dæmi** Ef $\overbrace{n \text{ er oddatala}}^{p}$ $\overrightarrow{\text{þá er}}$ $\overbrace{n^2 \text{ oddatala}}^{q}$

**Sönnun:** Ef $n$ er oddatala þá getum við skrifað

$(n = 13 = 2 \cdot 6 + 1)$

$$n = 2k + 1 \qquad k \text{ heil tala}$$

Þá fæst

$$n^2 = (2k+1)^2 = \overbrace{4k^2} + 4k + 1$$
$$= 2(2k^2 + 2k) + 1$$

sem þýðir að $n^2$ er oddatala. $\square$

## Óbein sönnun

Hér er hugmyndin að leiðingin $p \to q$ er jafngild $\neg q \to \neg p$, svo ef við sönnum $\neg q \to \neg p$ þá erum í leiðinni að sanna $p \to q$.

## Dæmi

Ef $\underbrace{3n+2 \text{ er oddatala}}_{p}$ $\underbrace{\text{þá}}_{\to}$ er $\underbrace{n \text{ oddatala}}_{q}$

**Sönnun:** Sönnum frekar $\neg q \to \neg p$:

Ef $\underbrace{n \text{ er slétt}}_{\neg q}$ $\underbrace{\text{þá}}_{\to}$ er $\underbrace{3n+2 \text{ slétt}}_{\neg p}$

Þar sem $n$ er slétt má rita

$n = 22 = 2 \cdot 11$

$$n = 2k \qquad k \text{ heil tala}$$

Þá fæst $3n+2 = 3\cdot(2k)+2 = 6k+2 = 2(3k+1)$
sem þýðir að $3n+2$ er slétt. $\square$

# Sönnun með mótsögn

Yrðingin $p \to q$ er jafngild $\neg p \vee q$

| $p$ | $q$ | $p \to q$ | $\neg p$ | $\neg p \vee q$ |
|---|---|---|---|---|
| T | T | T | F | T |
| T | F | F | F | F |
| F | T | T | T | T |
| F | F | T | T | T |

Ef við gefum okkur að $\neg p \vee q$ sé ósatt, m.ö.o. að $\neg(\neg p \vee q) = \neg(\neg p) \wedge \neg q = p \wedge \neg q$ sé satt, og sýnum að það geti ekki verið þá höfum við sýnt að $\neg p \vee q$ sé satt.

## Dæmi

a er ekki ræð $\quad$ 0 $\quad \sqrt{2} \quad \pi$ $\qquad b = \frac{n}{m} \quad m \neq 0 \quad n, m$ heilar

Ef $\boxed{a \text{ er óræð og } b \text{ er ræð}}_{p}$ þá er $\boxed{a+b \text{ óræð}}_{q}$

Til að nota sönnun með mótsögn þá hugsum við um $p \wedge \neg q$: $a$ óræð $\quad b$ ræð
$a+b$ ræð

Þá má skrifa $b = \frac{n}{m}$ $\quad n, m \in \mathbb{Z},\ m \neq 0$

$$a+b = \frac{r}{s} \qquad r, s \in \mathbb{Z},\ s \neq 0$$

En þá er $a = a+b-b = \frac{r}{s} - \frac{n}{m} = \frac{r \cdot m - n \cdot s}{s \cdot m}$

en þetta er í mótsögn við að $a$ sé óræð. $\square$

## Afsönnun með mótdæmi

Fullyrðing: Ef $a$ og $b$ eru óræðar tölur þá er $a+b$ óræð.

Þessi fullyrðing er ósönn, því hér er mótdæmi:

$$a = \sqrt{2} \qquad b = -\sqrt{2}$$

$$a+b = \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0 = \frac{0}{1}$$