Þrepun

Þrepun (e. induction) er "uppskrift" að sönnun:

Dæmi

Takmark: Viljum sýna að eitthvað sé satt fyrir allar jákvæðar heilar tölur n

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Grunnskref: Sýnum að þetta er satt fyrir $n=1$

$n=1$

$\boxed{VH = 1}$

$$HH: \frac{1\cdot(1+1)}{2} = \frac{1\cdot 2}{2} = 1$$

Þrepunarskref: Gefum okkur að þetta sé satt fyrir eitthvað ákveðið n, og notum það til að sýna að þetta gildi fyrir $n+1$.

Gefum okkur að fyrir eitthvað ákveðið n gildi

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Viljum sýna að jafnan gildi líka fyrir $n+1$:

$$1+2+3+\cdots+n+1 = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$1+2+3+\cdots+n+1 = 1+2+3+\cdots+\boxed{n}+n+1$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + n+1 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad \square$$

Dæmi

$$1+2+2^2+\dots+2^n = 2^{n+1}-1 \quad \text{fyrir } n \geq 0$$

Grunnskref : $n=0$ $\quad \boxed{VH \quad 2^0 = 1} = \boxed{HH \quad 2^{0+1}-1 = 2^1-1 = 2-1 = 1}$

Þrepunarskref Gefum okkur að þetta sé satt fyrir ákveðið n

$$1+2+2^2+\dots+2^n = 2^{n+1}-1$$

Viljum sýna að

$$1+2+2^2+\dots+2^{n+1} = 2^{n+1+1}-1$$

$$1+2+2^2+\dots+2^{n+1} = 2^{n+2}-1$$

2^n

$$1+2+2^2+\dots+2^{n+1} = \underbrace{1+2+2^2+\dots+2^n}+2^{n+1}$$

$$2^{n+1}-1+2^{n+1} = 2\cdot 2^{n+1}-1 = 2^1\cdot 2^{n+1}-1 = 2^{n+1+1}-1 = 2^{n+2}-1 \quad \square$$

Dæmi

$$n < 2^n \quad \text{fyrir } n \geq 1.$$

Grunnskref : $n=1$ $\quad \boxed{VH : n=1} < \boxed{HH : 2^n = 2^1 = 2}$

Þrepunarskref Gefum okkur að þetta sé satt fyrir ákveðið n

$$n < 2^n$$

Viljum sýna að $n+1 < 2^{n+1}$

$$
\begin{aligned}
n+1 &< 2^n + 1 \\
&< 2^n + 2^n \\
&= 2 \cdot 2^n = 2^1 \cdot 2^n = 2^{n+1} \qquad \square
\end{aligned}
$$

:-)