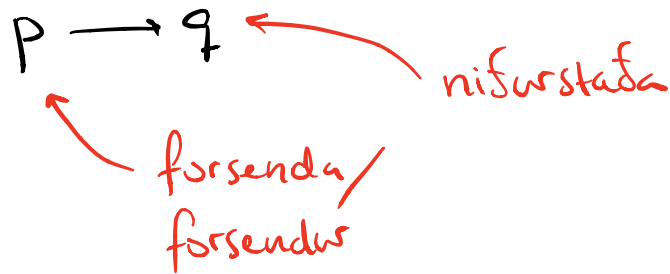


Sannanir

Margar staðhafingar í stærðfræði (setningar) eru leifingar, og er hægt að hugsa um sem



Bein sönnun

Dæmi

Ef n er oddatala þá er n^2 oddatala

Sönnun: Ef n er oddatala þá getum við skrifað $n = 2k + 1$ $(n = 13 = 2 \cdot 6 + 1)$ k heil tala

þá fæst

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

sem þýðir að n^2 er oddatala. \square

Óbein sönnun

Hér er hugmyndin að leiðingin $p \rightarrow q$ er jafngild $\neg q \rightarrow \neg p$, svo ef við sönnum $\neg q \rightarrow \neg p$ þá erum í leiðinni að sanna $p \rightarrow q$.

Dæmi

Ef $3n+2$ er oddatala, þá er n oddatala

$\underbrace{3n+2}_{p} \rightarrow \underbrace{n}_{q}$

Sönnun: Sönnun frekar $\neg q \rightarrow \neg p$:

Ef n er slétt, þá er $3n+2$ slétt

$\underbrace{n}_{\neg q} \rightarrow \underbrace{3n+2}_{\neg p}$

Þar sem n er slétt má rita

$$n = 22 = 2 \cdot 11$$

$$n = 2k$$

k heil tala

Þá fæst $3n+2 = 3 \cdot (2k) + 2 = 6k+2 = 2(3k+1)$
sem þýðir að $3n+2$ er slétt. \square

Sönnun með mótsögn

Yrðingin $p \rightarrow q$ er jafngild $\neg p \vee q$

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$
T	T	T	F	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

Ef við gefum okkur að $\neg p \vee q$ sé ósatt,
m.ö.a. að $\neg(\neg p \vee q) = \neg(\neg p) \wedge \neg q = p \wedge \neg q$
sé satt, og sjáum að það geti ekki verið
þá höfum við sént að $\neg p \vee q$ sé satt.

Dæmi

$\begin{array}{c} \nearrow a \text{ er ekki ræð} \\ \hline 0 \quad \sqrt{2} \quad \pi \\ \nwarrow \end{array}$ $b = \frac{n}{m} \quad m \neq 0 \quad \begin{array}{l} n, m \\ \text{heilar} \end{array}$

Ef a er óræð og b er ræð \rightarrow þá er $a+b$ óræð?

Til að nota sönnun með mótsögn þá
hugsum við um $p \wedge \neg q$: a óræð b ræð
 $a+b$ ræð

Þá má skrifa $b = \frac{n}{m}$ $n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$

$$a+b = \frac{r}{s} \quad r, s \in \mathbb{Z}, s \neq 0$$

$$\text{En þá er } a = a+b-b = \frac{r}{s} - \frac{n}{m} = \frac{r \cdot m - n \cdot s}{s \cdot m}$$

en þetta er í mótsögn við að a sé óræð. \square

Afsönnun með mótdæmi

Fullgöfing: Ef a og b eru óræðar tölur
þá er $a+b$ óræð.

Þessi fullgöfing er sönn, því hér er mótdæmi:

$$a = \sqrt{2} \quad b = -\sqrt{2}$$

$$a+b = \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0 = \frac{0}{1}$$