

# LP25: Oscillations ; portraits de phase et non linéarités

- Niveau : PCO

et amorti

- Prérequis : Notions de mécanique : oscillation harmonique, pendule simple (pasent)  
Électronique : circuits linéaires dans l'ARQS, amplificateur opérationnel, filtre de filtrage linéaire, circuit RLC série

Transformée série de Fourier

## I] ~~Théorie des oscillations~~ Analyse des oscillations : portraits de phase

## II] Impartances des non-linéarités : oscillateur quasi-sinusoidal

Intro. La notion d'oscillation, vibrations, est au cœur de la physique et plus généralement se retrouve assez universellement que ce soit dans la science du vivant (oscillations périodiques des plantes en periodes, les marées/vagues, battements de cœur). Les phénomènes périodiques ou quasi-périodiques sont réguliers mais la notion d'oscillation ne s'y limite pas : en effet toute variation non périodique d'un système/signal pourra être décomposée sous la forme d'une décomposition de Fourier. L'oscillation décomposée sera alors un système pur signe incontrôlable de la physique.

La leçon se structue en deux parties : nous allons commencer par quelques considérations très générales sur l'oscillation d'un système en des modèles simples et élémentaires que sont l'oscillation harmonique et le pendule, en introduisant les méthodes outils d'analyse des portraits de phase. Nous développerons ensuite nous intéresser principalement aux oscillations extérieures et en particulier aux oscillations quasi-sinusoidales, et nous verrons que les effets de non-linéarité sont essentiels à l'établissement d'oscillations permanentes.

## I) Analyse des oscillations : portraits de phase

Definir une oscillation : système présentant une évolution temporelle alternativement croissante et décroissante de l'état de ses grandeurs caractéristiques. Ces oscillations sont en général dues à deux effets antagonistes en compétition au sein du système.

→ on va commencer par l'étude du modèle d'oscillation, modèle le plus simple qu'est l'oscillation harmonique.

## 1) Oscillation harmonique

Importance de ce modèle : décrit un oscillation ~~linéaire obéissant~~ à une équation différentielle linéaire du second ordre ne présentant en compte aucun amortissement. Il constitue un modèle limité idéalisé d'oscillations monochromatiques. ~~Il apparaît~~  
permettant

Il peut être décrit par un système potentiel monogène d'interaction quadratique : c'est ainsi un ~~potentiel~~ modèle réel de l'ordre autour d'un minimum local d'un potentiel réel (par exemple celui du pendule)

Il s'agit finalement d'un modèle idéalisé d'un ressort linéaire.

Équation différentielle :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = 0 \quad \text{OTL Libre}$$

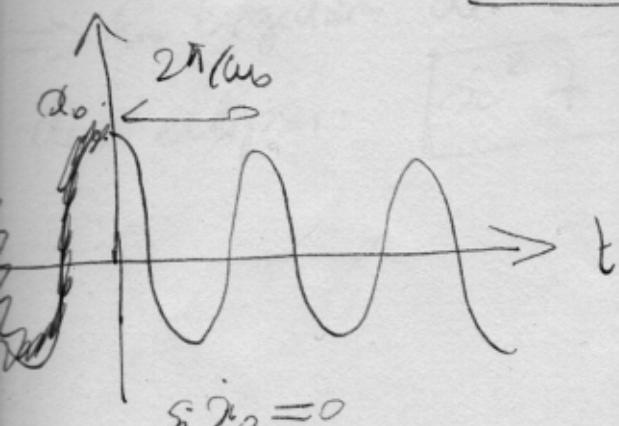
→ linéaire

→ Réversible

→ Facilement résoluble

$x(t)$

$$\hookrightarrow x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{x_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$



$\iff$  Réponse parfaitement monochromatique du système (résonance parfait)

Cette équation différentielle est linéaire d'ordre 2, on peut décrire le système par la donnée de  $(\dot{x}_0, x_0)$  au cours du temps (à un instant donné). Plus généralement, comme la solution de l'O.D.L en témoigne, si le système étant purément déterministe on sait précisément connaître son évolution temporelle uniquement par la donnée des C.I. ( $\dot{x}_0, x_0$ ).

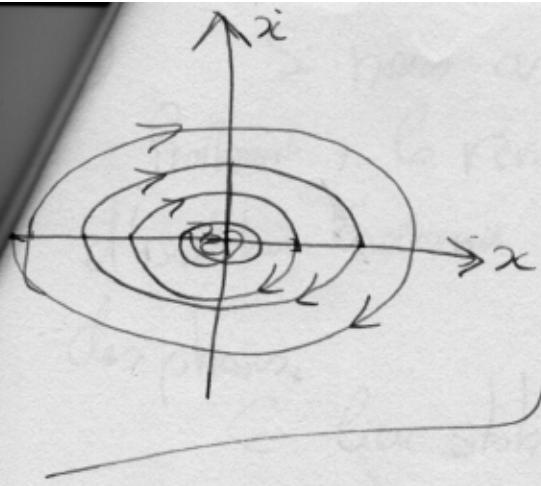
Finalement, il est ~~possible~~ donc possible d'étudier l'évolution du système dans un référentiel cartésien  $(\dot{x}, x)$  qui contiendra la même information que la solution intégrée de l'équation.

Quel est l'intérêt ? Nous allons étudier deux cas d'ensemble linéaires où la détermination d'une solution analytique est exclue, mais cette représentation nous permettra d'obtenir des infos sur le système (obtenus expérimentalement).

Pour l'O.D.L, c'est trivial :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \omega_0^2 x^2 \right) = 0$$

$\Rightarrow$  les trajectoires de l'O.D.L dans le plan  $(\dot{x}, x)$  sont des ellipses :  $\boxed{\dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2 = C}$  conditions initiales



Cette représentation est appelée portrait de phases de l'oscillateur. Il est tracé dans l'espace des phases qui est l'espace des coordonnées  $(x_1, x_2)$  et est composé de l'ensemble des "trajectoires de phase" décrivant les évolutions héliocentriques de l'oscillateur.

## Explications du portrait de phases

- Courbes orientées : l'évolution se fait à  $x_2$  quand  $x_1 > 0$  et inversement
- L'OM ne présente que des cycles, trajectoires fermées, cela est caractéristique de la périodicité. En effet on aura évidemment  $\boxed{\text{périodique} \Rightarrow \text{cycle}}$ . Dans le cas d'une équation différentielle d'ordre 2, on aura  $\boxed{\text{périodique} \Leftrightarrow \text{cycle}}$ . Cela nous sera très utile pour l'étude des oscillations non linéaires.
- Réversibilité : Si le portrait de phase  
Si la trajectoire de phase est symétrique par rapport à l'axe des abscisses  $\rightarrow$  réversibilité.  
Ici, la réversibilité du système tient au fait que nous n'avons tenu compte d'aucun phénomène dissipatif

Si nous avions pris en compte des effets de frottement, la réversibilité serait perdue et chaque régime d'oscillation évoluerait vers un état stable pour de l'époque des phasos.

Cet état stable sera dans le cas de l'OTL un point, nous verrons plus tard qu'il peut aussi s'agir d'un cycle limite.

Ce type de point est appelé point fixe du système et

on vérifie  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt}\Big|_{x_0} = 0 \\ \frac{d^2x}{dt^2}\Big|_{x_0} = 0 \end{array} \right.$  Ici il s'agit bien évidemment de l'origine (0), position

d'équilibre de l'OTL.

### Affichage du portrait associé

Comme il a déjà été dit, l'OTL c'est un modèle limite autour d'un point d'équilibre linéaire. On va regarder un premier effet non linéaire sur un portrait de phase d'un oscillateur anharmonique : le pendule.

## 2) Équation du pendule

Le patrou de phase ~~phase~~ de l'oscillation harmonique a exhibé une propriété fondamentale : il est constitué exclusivement d'ellipses concentriques. Cela se comprend bien, en effet si un système linéaire admet ~~un~~ <sup>un</sup> cycle  $C$  (periodique) pour solution, alors  $\lambda C$  est également solution, et on peut ainsi dresser tout l'arc de phases de cette façon.

(On suppose évidemment l'existence d'un cycle et la linéarité). Ainsi nous verrons que l'obtention d'un seul cycle d'oscillation privilégié (à amplitude (et fréquence) bien déterminées et uniques) ne pourra se faire que dans un système non linéaire.

Voyons, avec d'abord avec le pendule un premier effet des liaisons :

- infinité de points fixes
- partie de la symétrie elliptique.



$$\text{Équation du pendule : } \boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \sin \theta = 0}$$

- réversibilité (pas de frottements)
- non linéaire →  $\sin \theta$

Evidemment, on retrouve l'effet pour les petits angles, on s'attend alors à retrouver des ellipses dans le régime.

Nous avons une équation non linéaire  $\Rightarrow$  solution harmonique

Néanmoins : - Recherche de points fixes

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \sin \theta = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cancel{\frac{d\theta}{dt}} = \dot{\theta} \\ \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \sin \theta = 0 \end{cases}$$

((Pnt fixe pour  $\dot{\theta} = 0$ )  
 $\sin \theta = 0 \Rightarrow \theta \equiv 0 [2\pi]$

- Comportement autour des points fixes

.  $(0, 0 [2\pi])$  :  $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \theta = 0$   
 $\theta = \theta_0 + u$   $\Rightarrow \theta_0$  as expected



.  $(0, \pi [2\pi])$

$$\theta = \theta_0 \pi + u; \sin(\pi + u) = -\sin u \sim -u$$

$$\Rightarrow \frac{d^2u}{dt^2} - \omega_0^2 u = 0 / \text{autour de } (0, \pi)$$
$$\rightarrow u(t) = A e^{i\omega_0 t} + B e^{-i\omega_0 t}$$

~ Suivront les conditions initiales,

Sat le système se décale vers  $\pi$ , sat  
le système peut expander le point : instable,  
sat une combinaison linéaire des deux : attraction  
puis répulsion

→ tracé ; lien avec l'énergie potentielle.

Nous identifions 3 régimes d'évolution en accord avec notre expansion de pensée d'un pendule sans amortissement.

- Régime pseudo-harmonique: mouvement oscillant constant mais ellipses déformées  $\Rightarrow$  oscillations ne sont plus sinusoidales mais restent périodiques.  
En effet, du fait de la non linéarité, la période du pendule dépendra de son angle mécanique et confiné à l'instant initial :  $T = T_0 \mathcal{F}(E)$   
 $= \frac{2\pi}{\omega_0} \underbrace{\mathcal{F}(E)}_{\text{non linéaires}}$

En particulier, si on choisit pour l'instant initial un mouvement sans vitesse initiale :  $T = T_0 \mathcal{F}(\theta_0)$  et plus précisément :

$$T = T_0 \left\{ \mathcal{K}\left(\sin \frac{\theta_0}{2}\right) \text{ avec } \mathcal{K}(h) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - h^2 \sin^2 \varphi}} \right.$$

dev :  $\mathcal{K}(h) \stackrel{\text{DL2}}{=} \frac{2}{\pi} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( 1 + \frac{h^2}{2} \sin^2 \varphi \right) d\varphi \right)$   
 $= 1 + \frac{2}{\pi} \frac{h^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi d\varphi$

$$\begin{aligned} \text{Cs}(2\varphi) &= 2(1 - 2\sin^2 \varphi) \\ - \sin^2 \varphi &= \frac{1 - \cos(2\varphi)}{2} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} [\sin 2\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ \boxed{\mathcal{K}(h) \stackrel{\text{DL2}}{\approx} 1 + \frac{h^2}{4}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{T(\theta_0) \stackrel{\text{DL2}}{=} T_0 \left( 1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right)} \text{ formule de Borda}$$

DIAPO

— Régime révolutionnaire: Le pendule n'oscille plus autour d'une position d'équilibre mais tourne tout le spectre des  $\theta$ . (sans freinage)  
⇒ perturbation non linéaire

— Régime critique: trajectoires hétéroclines de période infinie  
( $\exists T(\phi_0 = \pi) = +\infty$ )

⇒ Transition de phase en fonction de  $E$  introduite par le rappel anharmonique.

### Taux de distorsion harmonique

Cette première partie nous a permis d'introduire les outils nécessaires pour analyser le comportement de systèmes oscillants, en particulier en présence de non linéarités au moyen d'un portrait de phase. Nous allons à présent nous intéresser à des modèles d'oscillations plus réalistes. On se rendra compte que nous n'allons plus négliger le phénomène d'effet dissipatif. Ainsi, nous allons voir comment utiliser les non-linéarités des systèmes oscillants de façon à conserver la stabilité d'un régime d'oscillation périodique malgré les effets dissipatifs.

Elle nous nécessite évidemment un appui d'origine, autant que perdre par dissipation. Dans le cadre du pendule mécanique c'est précisément ce qui est fait pour entraîner les oscillations du pendule de Foucault au Panthéon.

## II

### Importance des Non-Circuits, oscillations gross-sinusoides

Nous avons mis au jeu le problème de la perte d'énergie par dissipation. Le but du jeu sera donc de comprendre ces pertes d'énergie par appui extérieur.

→ oscillations extérieures

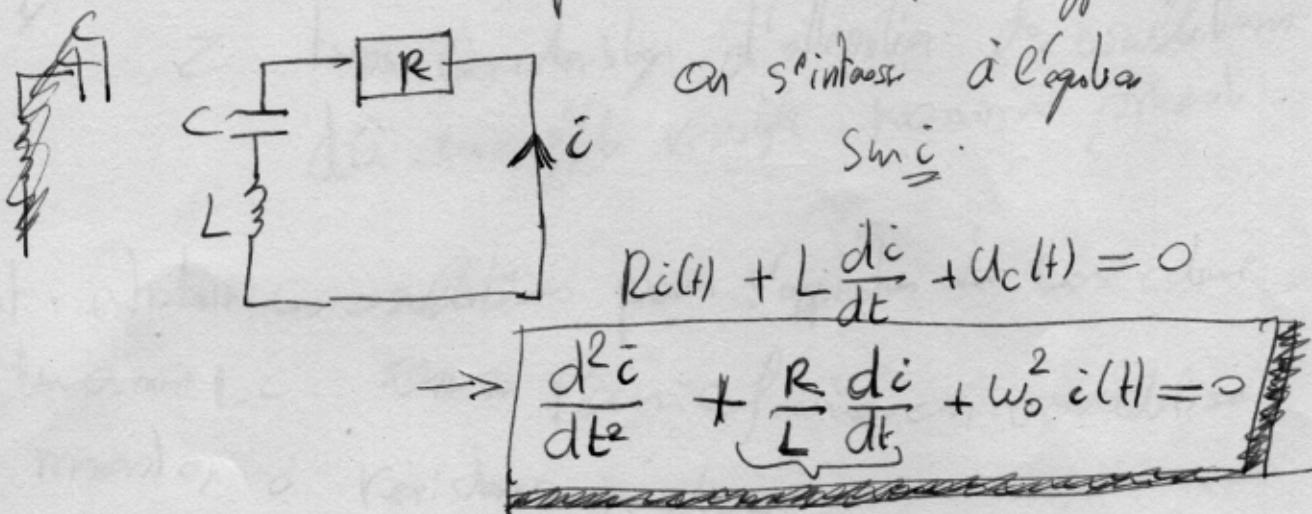
- 3 façons de le faire :
- 1. Forçage de l'oscillation : on excite l'oscilleur en imposant de l'extérieur son oscillation → phénomène du filtre, etc resonance etc
  - excitation paramétrique : tel on ne force pas directement l'oscillation mais on agit sur un paramètre de l'oscilleur : par exemple longueur du pendule.
  - oscillations auto-entretenues = ~~oscillations auto-sustenues~~ utilisation des bras, des masses perturbatrices de l'oscillation, compléter potentiellement associées à une fréquence bien déterminée par appui d'énergie extérieure.

DDAPs

Dans la suite on s'intéresse aux oscillations auto-entretenues, et en particulier à une classe d'oscillateur qui permet d'obtenir une réponse quasi-sinusoidale. Pour appuyer notre étude nous allons utiliser des modèles perturbant électroniques car c'est une démarche plus simple, mais le même principe s'applique dans les cas de LASER.

### 1) Circuit RLC série dissipatif

Pour fixer les idées on va partir du circuit RLC série. Le circuit LC est alors l'oscillateur harmonique de base qui définit la pulsation propre (de résonance) du système  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ; et la résistance modélise les pertes d'énergie par l'effet Joule



La condition initiale est hypothétique

Une charge initiale du condensateur :  $U_C(0) = \frac{q_0}{C}$

et on a circuit ouvert :  $i(0) = 0$

on peut définir le facteur de qualité

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L} \quad \Rightarrow Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Un modèle avec  $Q$  très grand s'approche d'autant mieux de l'oscillateur harmonique.

Le terme en  $\frac{di}{dt}$  brise la réversibilité, c'est ottenu pour un modèle dissipatif.

- On suppose  $Q > \frac{1}{2}$  (pertes suffisamment faibles pour que le système reste oscillant)

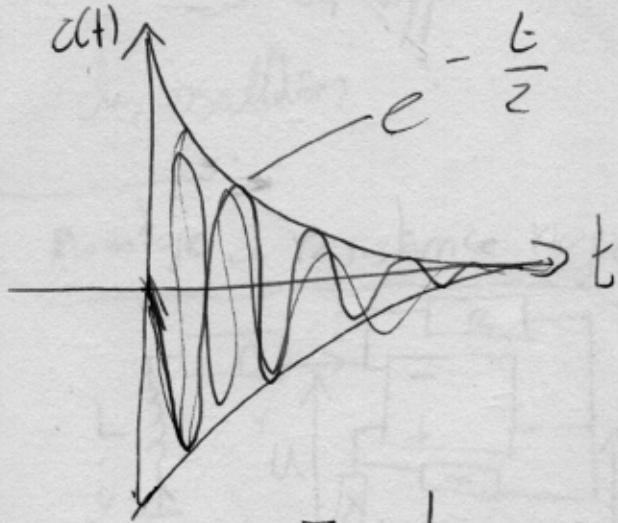
Alors l'intensité dans le circuit s'écrit

$$i(t) = e^{-\frac{t}{Z}}$$

$$i(t) = -\frac{q_0 \omega_0^2}{\omega} e^{-\frac{t}{Z}} \sin(\omega t)$$

$$\text{avec } Z = \frac{2Q}{\omega_0}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \\ \text{et } Q > \frac{1}{2} \end{array} \right.$$



$Z$ : temps caractéristique d'atténuation des oscillations  
dû aux effets résistifs nécessaires pour arrêter

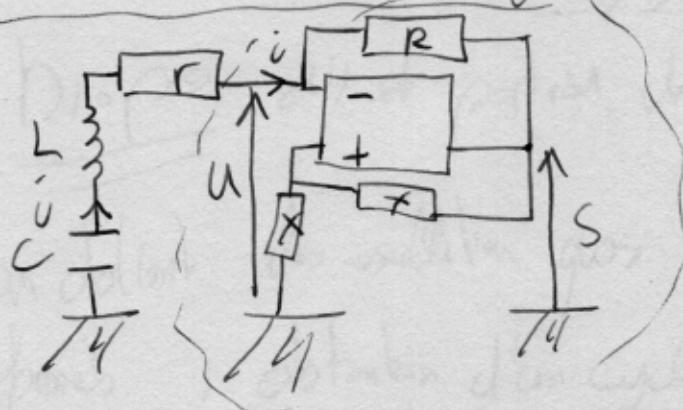
But: entraîner ces oscillations pour s'approcher du cas idéal du circuit LC. Pour ce faire on va utiliser un montage à résistance négative:

### ① Oscillation à résistance négative

but: atteindre la résistance effective ; en fait ça encore il est impossible de réaliser l'oscillation exacte de la résistance étant mais c'est pas grave : on prend une résistance négative supérieure en valeur absolue de façon à avoir une effet complémentaire

En contrepartie, comme on ne peut pas amplifier sa configuration  
 on atteint les régimes de saturation de l'AO de la résistance  
 négative  $\rightarrow$  on obtient des oscillations quasi-sinusoidales à  
 la saturation  
 $\Rightarrow$  les effets non linéaires sont ici necessaires à l'établissement  
 des oscillations

### Montage à résistance négative :



Résistance négative

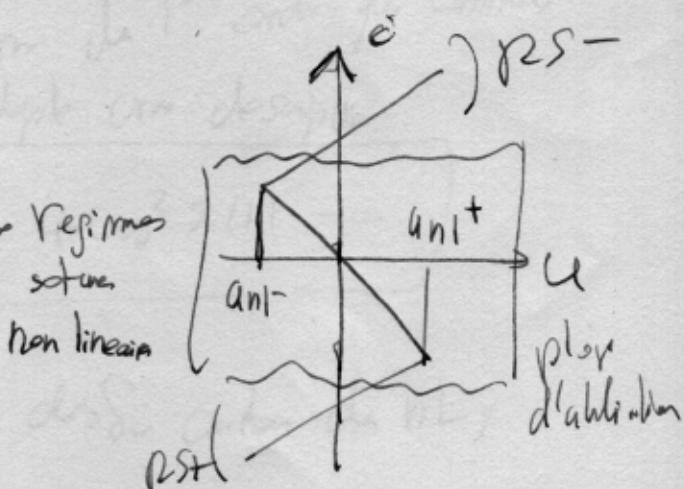
On admet que la résistance négative obéit aux équations caractéristiques

$$\left\{ \begin{array}{l} U = -R i \\ RL \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} U = V_{sat} + R i \\ RS+ \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} U = -V_{sat} + R i \\ RS- \end{array} \right.$$

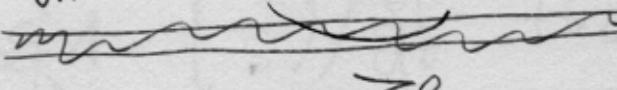
$V_{sat} \approx 12V$



Intégration dans le circuit RLC

$$\rightarrow \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{L} \frac{du}{dt} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i(t) = 0$$

En RL:  $\frac{d^2i}{dt^2} + -\frac{Rn - r}{L} \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i(t) = 0$



$\Rightarrow$  on amplifie  
à  $\omega_0$  bruit.

En RNL:  $\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{Rn + r}{L} \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i(t) = 0$



on obtient en RNL

bloco  $i(t)$  et patron de phase

on obtient des oscillations quasi-sinusoidales, mais de formes légament déformées ; obtention d'un cycle limite stable (effet pour un non linéaire) qui perd la périodicité du régime permanent, mais non elliptique : non sinusoidale.

→ Inst, c'est le changement de signe du 1<sup>er</sup> ordre qui contrôlent la stabilité des oscillations - On adopte une description plus générale:  $\left| \frac{d^2x}{dt^2} + A(\alpha) \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x(t) = 0 \right.$

Ita:  $A(\alpha)$  ne dépend que du signe des si au total de nL, on peut imaginer des non-linéaires plus explicatifs où  $A(\alpha)$  dépendra explicitement de  $\alpha \Rightarrow$  donc raison à des effets non physiques.

o) 3) Oscillation de Van der Pol

$$\sim A_{\text{var}}(t) = -\alpha \epsilon \left(1 - \left(\frac{x}{s}\right)^2\right)$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} - \alpha \epsilon \left(1 - \left(\frac{x}{s}\right)^2\right) \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x(t) = 0}$$

VDP

Portrait de phase en fonction de  $\epsilon$ , observation  
de l'opposition du régime d'oscillation de relaxation  
 $\rightarrow$  riches en harmoniques.