

Conversion de puissance - PSI

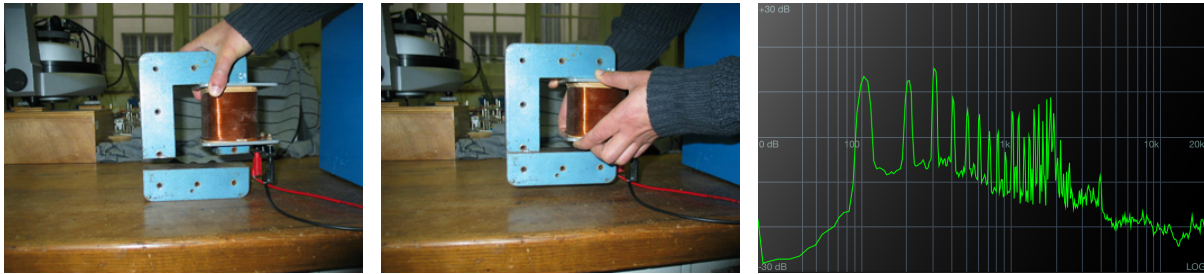
Ce texte ne constitue pas un cours « clé en main », il s'agit d'un document d'accompagnement présentant quelques aspects du projet de nouveau programme de la filière PSI consacré à la conversion électromécanique de puissance. En particulier, cette présentation aborde le calcul des actions magnétiques s'exerçant sur un élément de fer doux, puis l'étude des machines électriques sans recourir au modèle des actions de Laplace s'exerçant exclusivement sur le cuivre.

— 1 —

Conversion électro-magnéto-mécanique à mouvement linéaire

I. Manip introductive

On réalise un circuit magnétique en plaçant un noyau de fer doux en forme de U à l'intérieur d'une bobine de $N = 500$ spires. A l'aide d'un alternostat, on fait passer un courant sinusoïdal $i(t)$ de fréquence 50 Hz et de valeur efficace I_{eff} sous une tension de l'ordre de quelques dizaines de Volt. On ferme le circuit magnétique en réalisant simplement le contact avec un barreau de fer doux rectiligne de même section S que le noyau en U. La masse du barreau est d'environ $m = 2\text{kg}$. On entend alors nettement une vibration dont l'analyse spectrale réalisée avec un smartphone révèle une fréquence fondamentale de 100 Hz. On constate également que le barreau est soumis à une force qui le plaque contre le noyau. Pour I_{eff} supérieur à 60 mA environ, cette force est supérieure au poids du barreau.

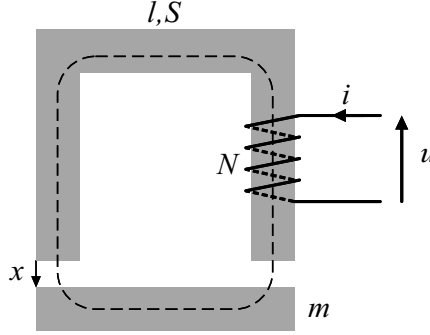


Réfléchissons à l'origine de cette force qui s'exerce sur le barreau de fer doux : le noyau, excité par la bobine, est traversé par un champ magnétique proportionnel au courant, ce qui produit également une aimantation proportionnelle au courant. Nous savons qu'un dipôle magnétique placé dans un champ magnétique subit une action mécanique dont l'expression n'est pas triviale, et il est délicat de chercher à calculer la force résultante en décomposant le fer en dipôles élémentaires et en intégrant une expression locale de la force. Pour parvenir au résultat, nous allons adopter une méthode énergétique en raisonnant sur un système contenant la totalité du fer (méthode non locale). Nous allons ainsi montrer qu'un barreau de fer excité par un courant sinusoïdal subit une force proportionnelle à $i^2(t)$ comme le suggère le doublement de fréquence observé.

II. Expression de la force

1. Energie magnétique

On adopte le paramétrage décrit par la figure ci-dessous, en notant x l'épaisseur de l'entrefer et ℓ la longueur moyenne de la partie en fer du circuit magnétique.



On modélise le noyau de fer doux par un milieu linéaire de perméabilité μ_r , et on suppose qu'il n'y a pas saturation. Le théorème d'Ampère appliqué à une ligne de champ moyenne permet d'écrire :

$$\ell H_{\text{fer}} + 2x H_{\text{air}} = Ni$$

La section S du circuit magnétique étant constante et \vec{B} étant à flux conservatif, on en déduit $B_{\text{air}} = B_{\text{fer}}$. Il vient :

$$\begin{aligned} \frac{B}{\mu_0} \left(\frac{\ell}{\mu_r} + 2x \right) &= Ni \\ B &= \frac{\mu_0 Ni}{\frac{\ell}{\mu_r} + 2x} \end{aligned}$$

On en déduit le flux propre et l'inductance propre :

$$\boxed{\phi = L(x)i \quad L(x) = \frac{\mu_0 N^2 S}{\frac{\ell}{\mu_r} + 2x}}$$

On souligne le fait que $L(x)$ dépend du paramètre géométrique variable x . L'énergie magnétique du système vaut $E_{\text{mag}} = \frac{1}{2} L(x) i^2$. A titre d'exercice, on pourra vérifier que cette énergie est égale à l'intégration sur le volume de la densité $B^2/2\mu_0\mu_r$ (en prenant en compte la contribution de l'entrefer).

2. Bilan énergétique

On considère le système constitué de l'ensemble {noyau + bobine}. On suppose qu'un opérateur extérieur déplace le barreau en exerçant la force $F_{\text{op}} \vec{e}_x$, la bobine étant traversée par un courant i et soumise à la tension u en convention récepteur. En notant R la résistance du circuit de cuivre, l'équation électrique donne la relation :

$$u = Ri + \frac{d\phi}{dt}$$

Pendant dt , le système reçoit l'énergie :

$$uidt + F_{\text{op}} dx = Ri^2 dt + id\phi + F_{\text{op}} dx$$

$Ri^2 dt$ correspond à l'énergie dissipée par effet Joule. Le reste est converti en énergie magnétique et en énergie cinétique dans le système¹ :

$$dE_{\text{mag}} + dE_c = id\phi + F_{\text{op}} dx$$

¹Le bilan présenté ici ne fait pas intervenir l'énergie potentielle de pesanteur, on considère que le poids du barreau est incorporé dans l'expression de F_{op} .

Le partie mobile est soumise à $F_{\text{op}}\vec{e}_x$ et à une force électromagnétique $F\vec{e}_x$ que l'on souhaite déterminer. Le théorème de l'énergie cinétique appliqué au barreau seul donne :

$$dE_c = Fdx + F_{\text{op}}dx$$

En combinant les deux équations énergétiques, il vient :

$$dE_{\text{mag}} = id\phi - Fdx$$

Afin d'obtenir une expression explicite de la force, on exprime l'énergie magnétique et le flux à l'aide de l'intensité i et de l'inductance L :

$$\frac{1}{2}d(Li^2) = i d(Li) - F dx$$

On développe les différentielles des produits sans oublier que L dépend du paramètre géométrique x :

$$\frac{1}{2}i^2 dL + Li di = i^2 dL + Li di - F dx$$

$$F = \frac{1}{2}i^2 \frac{dL}{dx}$$

Formule que l'on peut également écrire :

$$F = \left(\frac{\partial E_{\text{mag}}}{\partial x} \right)_i$$

3. Retour à l'expérience

Avec l'expression de $L(x)$ trouvée précédemment, on obtient :

$$F = -\frac{\mu_0 N^2 S i^2}{\left(\frac{\ell}{\mu_r} + 2x \right)^2}$$

Ainsi, la force est toujours attractive, quelque soit le signe de i , et elle est maximale en norme pour $x = 0$ (contact). On obtient alors :

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad F = -\frac{\mu_0 \mu_r^2 N^2 S i^2}{\ell^2}$$

La proportionnalité en i^2 explique le doublement de fréquence des vibrations que l'on peut entendre. La valeur moyenne de la force est donnée par :

$$|\langle F \rangle| = \frac{\mu_0 \mu_r^2 N^2 S I_{\text{eff}}^2}{\ell^2}$$

L'ensemble des observations expérimentales qualitatives est bien expliqué (interaction attractive quelque soit le signe de i , interaction moyenne non nulle en régime sinusoïdal, doublement de fréquence). Pour aller plus loin, cherchons à vérifier quantitativement notre relation. Pour cela, calculons la perméabilité μ_r en exploitant la valeur du courant pour laquelle la force électromagnétique moyenne est égale au poids du barreau :

$S = 20 \text{ cm}^2$, $\ell = 50 \text{ cm}$, $I_{\text{eff}} = 60 \text{ mA}$, $N = 500$, $m = 2 \text{ kg}$.

$$\mu_r = \left(\frac{mg\ell^2}{\mu_0 N^2 S I_{\text{eff}}^2} \right)^{1/2} \approx 1500$$

L'ordre de grandeur obtenu est donc tout à fait convenable. Il est illusoire de chercher à comparer précisément cette valeur de μ_r avec des caractéristiques tabulées car notre modèle a négligé de nombreux défauts (fuites de champ, milieu non linéaire, pertes fer).

III. Applications

- Electroaimant de levage.
- Relai (contacteur commandé par un courant).
- Moteur rotatif à réluctance variable (bon exo de TD) : on peut généraliser la situation de la translation au cas de la rotation. Dans le cas où l'énergie magnétique est fonction de la position angulaire θ d'une partie pouvant tourner autour d'une liaison pivot, le moment du couple électromagnétique s'écrit :

$$\Gamma = \left(\frac{\partial E_{\text{mag}}}{\partial \theta} \right)_i$$

On peut alors s'intéresser au fonctionnement d'un système magnétique présentant une inductance propre $L(\theta)$. En synchronisant les variations de $i(t)$ avec la rotation de la partie tournante, on peut générer un couple moyen non nul et obtenir un moteur. Pour plus d'informations, on pourra consulter les 8 premières questions de l'épreuve de modélisation de l'ENS Cachan-PSI-2010.

- Confinement du champ magnétique : l'exemple introductif a permis de montrer que le système évolue spontanément afin de minimiser l'entrefer. Ainsi, le système tend à adopter la configuration qui confine le champ magnétique à l'intérieur du fer.

- On peut immédiatement transposer la méthode à des systèmes capacitifs stockant de l'énergie électrique :

$$F = \left(\frac{\partial E_{\text{elec}}}{\partial x} \right)_U$$

Pour un condensateur plan, $C(x) = \varepsilon S/(e+x)$, on montre que la force inter-armature est attractive, égale à $CU^2/2e$ pour $x = 0$ (calcul direct non trivial car il utilise $F = qE_{\text{reste}}$ avec $E_{\text{reste}} = \frac{1}{2}E_{\text{inter-armature}}$).

IV. Remarques pédagogiques

Ce chapitre est à traiter à la suite du cours sur le ferromagnétisme. Il permet d'exploiter la notion délicate d'énergie magnétique dans un contexte intéressant, et de réviser le cours de première année sur la notion d'inductance propre.

Il faut toutefois être vigilant sur la difficulté suivante : en mécanique, pour un système en translation subissant une force $F\vec{e}_x$ dérivant d'une énergie potentielle $E_p(x)$, on écrit :

$$F = -\frac{dE_p}{dx}$$

alors qu'on utilise dans ce chapitre la relation :

$$F = \left(\frac{\partial E_{\text{mag}}}{\partial x} \right)_i$$

On notera la différence essentielle de signe et la rigueur de la notation qui précise que l'on dérive à intensité constante. Afin de mieux cerner l'origine de ces différences, rappelons que le raisonnement énergétique établit dans un premier temps la relation :

$$dE_{\text{mag}} = id\phi - Fdx \quad \Rightarrow \quad F = -\left(\frac{\partial E_{\text{mag}}}{\partial x} \right)_\phi$$

Cette relation ne suppose aucune hypothèse sur la nature du milieu magnétique étudié. Pour changer la dérivation à ϕ constant en dérivation à i constant, on introduit la coénergie correspondant à la transformée de Legendre suivante :

$$E'_{\text{mag}} = i\phi - E_{\text{mag}} \quad \Rightarrow \quad dE'_{\text{mag}} = \phi di + Fdx \quad \Rightarrow \quad F = \left(\frac{\partial E'_{\text{mag}}}{\partial x} \right)_i$$

En rajoutant l'hypothèse d'un noyau non saturé, le flux est proportionnel à l'intensité et on obtient la relation recherchée :

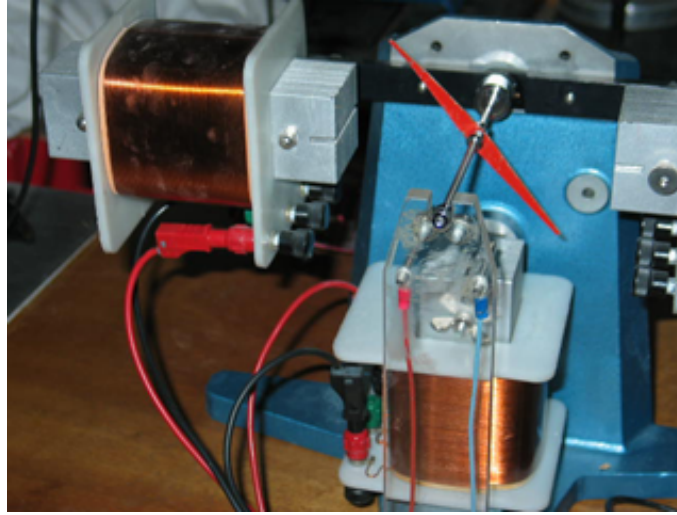
$$E'_{\text{mag}} = i\phi - E_{\text{mag}} = L(x)i^2 - \frac{1}{2}L(x)i^2 = \frac{1}{2}L(x)i^2 = E_{\text{mag}} \quad \Rightarrow \quad F = \left(\frac{\partial E_{\text{mag}}}{\partial x} \right)_i$$

Enfin, on notera que la force F est une force intérieure au système {noyau+bobine}. Il n'est pas nécessaire d'évoquer ces subtilités auprès des élèves, mais le professeur devra en être conscient.

— 2 — Machine synchrone

I. Manip introductive (révision de première année PCSI)

On place deux bobines identiques dont les axes sont orthogonaux, à égale distance d'un point O. Les bobines sont alimentées en quadrature avec des courants sinusoïdaux de 50 Hz de même amplitude. Le champ magnétique \vec{B}_s (indice *s* pour stator) résultant en O est un champ tournant à 50 tr/s dont on contrôle le sens de rotation en modifiant le signe du déphasage.



On place en O une aiguille aimantée sur une liaison pivot, de moment magnétique \vec{M}_r (indice *r* pour rotor). Cette aiguille subit un couple de moment² $\vec{M}_r \wedge \vec{B}_s$ qui a tendance à l'aligner avec le champ. Cependant, on n'observe pas de mouvement de rotation de l'aiguille et on perçoit nettement une vibration mécanique en touchant l'aiguille (la vibration peut s'entendre en réalisant un léger contact avec un objet dur).

A cause de l'inertie de l'aiguille, il faut plutôt considérer le couple moyen $\langle \vec{M}_r \wedge \vec{B}_s \rangle$. Si la rotation de l'aiguille n'est pas synchrone avec celle de \vec{B}_s , le dispositif produit un couple moyen nul ne permettant pas d'entretenir un mouvement de rotation.

Avec une baguette, on tape ensuite sèchement sur l'aiguille afin de lui communiquer une vitesse angulaire initiale supérieure à 50 tr/s. Comme il n'y a pas initialement synchronisme entre la rotation de l'aiguille et le champ tournant, l'aiguille ralentit à cause des frottements, et elle finit par atteindre la vitesse de synchronisme de 50 tr/s. Le couple moyen devient alors non nul et on observe un mouvement entretenu de rotation : c'est le principe du moteur synchrone.

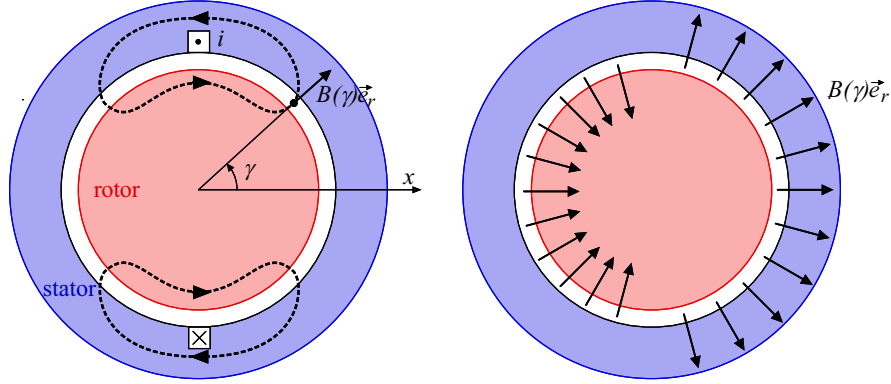
Toutefois, la réalisation d'une machine électrique performante et de forte puissance nécessite un rotor plus imposant, avec un faible entrefer, et pour lequel l'approximation dipolaire n'est pas convenable. L'action sur le fer participant au couple, nous allons adopter une méthode énergétique comme au chapitre 1.

²Conformément à un usage répandu dans le contexte des machines tournantes, nous confondrons souvent par la suite les expressions « moment du couple » et « couple ».

II. Energie magnétique et couple

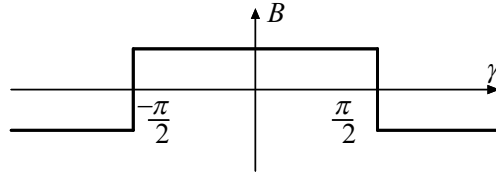
1. Champ créé par un enroulement statorique bipolaire

On considère un rotor cylindrique en fer doux de longueur ℓ placé dans une cavité cylindrique fixe en fer doux également (stator). On suppose que l'entrefer e est constant sur toute la circonférence (machine à pôles lisses). On place dans deux encoches du stator diamétralement opposées un conducteur de cuivre traversé par un courant $i(t)$.

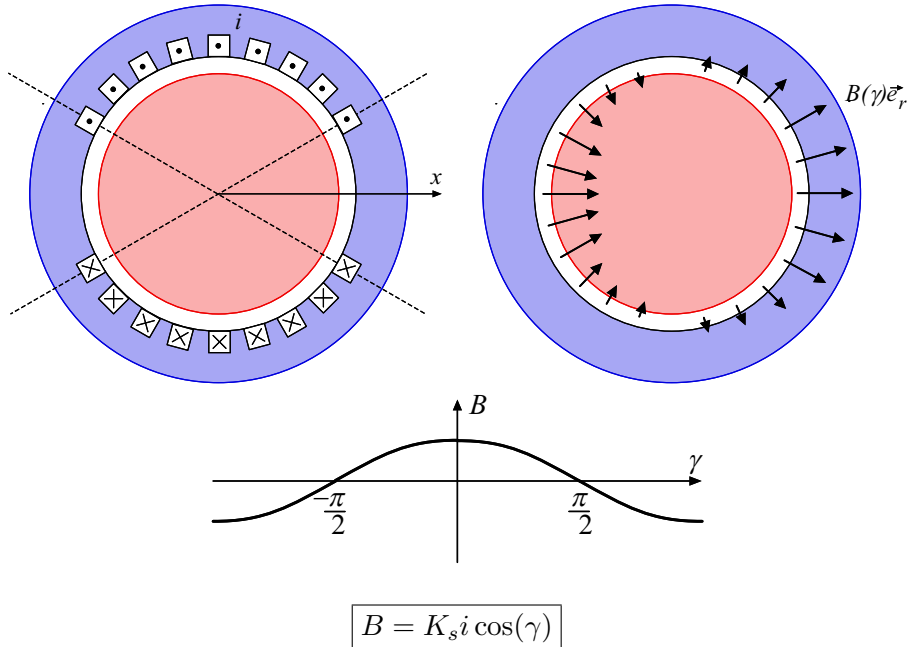


On traite le fer doux comme un milieu linéaire non saturé idéal de perméabilité μ_r infinie. Dans ces conditions, le champ magnétique est radial dans l'entrefer, et l'excitation $H = B/\mu_0\mu_r$ est nulle dans le fer. Dessinons qualitativement l'allure de la carte de champ magnétique et appliquons le théorème d'Ampère sur une ligne de champ enlaçant un conducteur. En notant $B(\gamma)\vec{e}_r$ le champ magnétique **dans l'entrefer** pour une position angulaire γ , il vient par symétrie :

$$\gamma \in]-\pi/2, \pi/2[\quad 2eH_{\text{air}}(\gamma) = 2e\frac{B(\gamma)}{\mu_0} = i \quad \Rightarrow \quad B(\gamma) = \frac{\mu_0 i}{2e}$$



En plaçant d'autres conducteurs traversés par la même intensité i dans des encoches décalées, on conçoit aisément qu'on peut accentuer le terme fondamental de la fonction 2π -périodique $B(\gamma)$ et produire un champ dont la forme d'onde est sinusoïdale :

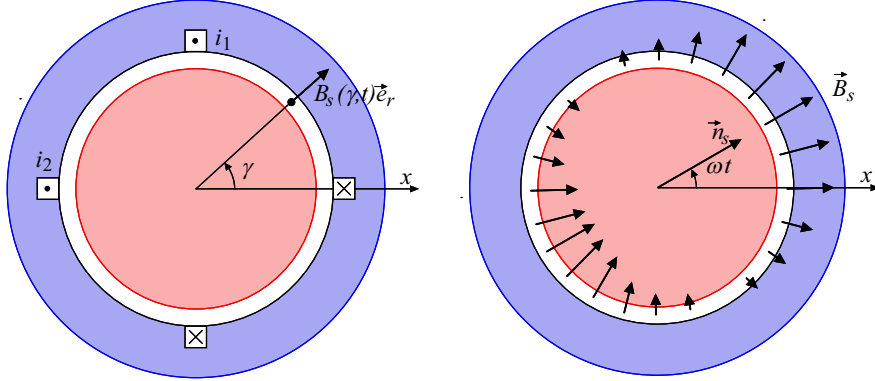


La constante K_s est un facteur de forme qui dépend du nombre de conducteurs et de leur répartition spatiale. Par la suite, nous continuerons de symboliser un enroulement bipolaire générant un champ radial sinusoïdal 2π -périodique par deux conducteurs placés dans des encoches opposées afin de simplifier les schémas.

2. Champ statorique tournant bipolaire diphasé

Afin de générer un champ tournant, le stator est à présent constitué de deux enroulements bipolaires orthogonaux, appelés phases, et alimentés en quadrature à la pulsation ω :

$$\begin{aligned} i_1(t) &= I_{sm} \cos(\omega t) & B_1 &= K_s i_1(t) \cos(\gamma) \\ i_2(t) &= I_{sm} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) & B_2 &= K_s i_2(t) \cos(\gamma - \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$



On obtient dans l'entrefer le champ radial :

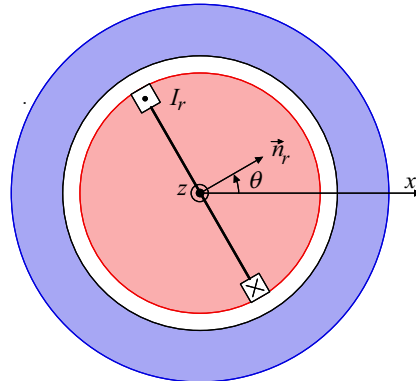
$$B_s = B_1 + B_2 = K_s I_{sm} (\cos(\omega t) \cos(\gamma) + \sin(\omega t) \sin(\gamma))$$

$$B_s = B_{sm} \cos(\gamma - \omega t) \quad \text{avec} \quad B_{sm} = K_s I_{sm}$$

Le champ magnétique résultant est spatialement sinusoïdal, il est maximal dans la direction $\gamma = \omega t$ repérée par le vecteur unitaire \vec{n}_s . Il tourne donc dans le sens direct à la vitesse angulaire ω , et son amplitude est proportionnelle à I_{sm} . De manière plus précise, l'expression du champ magnétique statorique est celle d'une onde sinusoïdale se propageant dans l'entrefer : on parle de champ glissant³.

3. Champ rotorique

Le rotor est également muni d'encoches dans lesquelles des conducteurs traversés par une intensité constante I_r génèrent un champ magnétique radial solide du rotor.



³On peut signaler l'analogie avec l'expression d'une onde progressive $f(x - ct)$ évoquée en première année.

En repérant la position du rotor avec l'angle θ défini sur le schéma, on obtient un champ rotorique dans l'entrefer de la forme :

$$B_r = B_{rm} \cos(\gamma - \theta) \quad \text{avec} \quad B_{rm} = K_r I_r$$

Le champ rotorique est maximal dans la direction $\gamma = \theta$ repérée par le vecteur unitaire \vec{n}_r . Il constitue un champ glissant, tournant à la même vitesse angulaire $\Omega = \dot{\theta}$ que le rotor.

4. Énergie magnétique

L'énergie magnétique de la machine s'obtient en calculant l'intégrale :

$$E_{\text{mag}} = \iiint \frac{B^2}{2\mu_0\mu_r} d\tau$$

La perméabilité étant infinie, l'énergie magnétique est entièrement localisée dans l'entrefer. En notant le rayon du rotor $a \gg e$, il vient :

$$E_{\text{mag}} = \int_0^{2\pi} \frac{(B_s + B_r)^2}{2\mu_0} a e \ell d\gamma = E_{\text{mag}1} + E_{\text{mag}2} + E_{\text{mag}3}$$

$$E_{\text{mag}1} = \frac{a e \ell}{2\mu_0} \int_0^{2\pi} B_s^2 d\gamma = \frac{\pi a e \ell}{2\mu_0} B_{sm}^2$$

$$E_{\text{mag}2} = \frac{a e \ell}{2\mu_0} \int_0^{2\pi} B_r^2 d\gamma = \frac{\pi a e \ell}{2\mu_0} B_{rm}^2$$

$$E_{\text{mag}3} = \frac{a e \ell}{\mu_0} \int_0^{2\pi} B_s B_r d\gamma = \frac{a e \ell}{\mu_0} B_{sm} B_{rm} \int_0^{2\pi} \cos(\gamma - \omega t) \cos(\gamma - \theta) d\gamma = \frac{\pi a e \ell}{\mu_0} B_{sm} B_{rm} \cos(\theta - \omega t)$$

Seule la contribution $E_{\text{mag}3}$ dépend de θ .

5. Couple

Avec une méthode similaire à celle qui a été employée au premier chapitre, on montre que le moment des actions électromagnétiques s'exerçant sur le rotor s'obtient en dérivant l'énergie E_{mag} (résultat admis)⁴ :

$$\Gamma = \vec{\Gamma} \cdot \vec{e}_z = \frac{\partial E_{\text{mag}}}{\partial \theta} = \frac{\partial E_{\text{mag}3}}{\partial \theta} = \frac{\pi a e \ell}{\mu_0} B_{sm} B_{rm} \sin(\omega t - \theta)$$

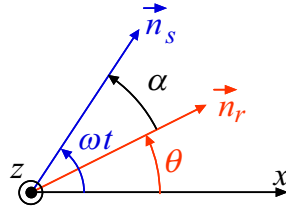
Si la rotation de la machine n'est pas synchrone avec le champ statorique, alors $\omega t - \theta(t) \neq \text{cste}$, le couple moyen est nul. Afin d'avoir un couple moyen non nul, il faut respecter la condition de synchronisme $\Omega = \dot{\theta} = \omega$. En posant $\theta = \omega t - \alpha$ et $V = 2\pi a e \ell$ le volume de l'entrefer, il vient⁵ :

$$\theta = \omega t - \alpha \quad \Rightarrow \quad \langle \Gamma \rangle = \Gamma = \frac{V}{2\mu_0} B_{sm} B_{rm} \sin(\alpha)$$

La vérification de l'homogénéité est immédiate et l'analogie avec la formule de la manip introductive $\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}}_r \wedge \vec{B}_s$ est évidente en représentant les directions moyennes des champs glissants :

⁴Cette dérivation doit se faire à courants constants. Pour plus de rigueur, il faudrait écrire explicitement l'énergie en fonction de θ et des intensités i_1, i_2, I_r . Avec notre expression, cela revient à dériver par rapport à θ en bloquant $B_{sm} = K_s I_{sm}$, $B_{rm} = K_r I_r$ et t .

⁵Cette expression pourrait faire croire qu'il faut augmenter le volume de l'entrefer afin d'augmenter le couple. Il n'en est rien, nous avons montré que les champs B_{sm} et B_{rm} sont inversement proportionnels à e pour une machine non saturée.

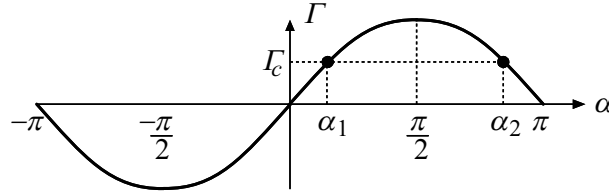


Le couple est moteur pour $\alpha \in [0, \pi]$, c'est à dire quand le champ rotorique est en retard par rapport au champ statorique.

6. Point de fonctionnement et stabilité en régime moteur

Si la machine entraîne une charge mécanique exerçant le moment $-\Gamma_c$, on obtient en régime permanent $\Gamma = \Gamma_c$.

Le couple moteur est maximal pour le déphasage $\alpha = \pi/2$.



- Pour $\Gamma_c > \Gamma_{\max}$, le problème n'accepte pas de solution, le rotor ne peut pas satisfaire la condition de synchronisme et il finit par s'immobiliser. On parle de décrochage.
- Pour $\Gamma_c < \Gamma_{\max}$, le système accepte a priori deux points de fonctionnement α_1 et α_2 . Analysons la stabilité du synchronisme lorsque $\alpha(t)$ effectue une fluctuation lentement variable auour d'une valeur d'équilibre.

$$\alpha(t) = \omega t - \theta \Rightarrow \dot{\alpha} = \omega - \dot{\theta}$$

Si le rotor ralentit, alors $\dot{\theta} < \omega$, $\dot{\alpha} > 0$, $\alpha(t)$ augmente. Autour de α_1 , le couple moteur Γ augmente, ce qui modère le ralentissement du rotor. La valeur α_1 correspond à un état stable, et on montre de la même manière que la valeur α_2 correspond à un état instable.

7. Réalisation pratique du synchronisme

Le moteur synchrone ne peut pas démarrer si on alimente directement les bobines du stator à la pulsation ω en partant d'une vitesse angulaire initiale $\Omega = \dot{\theta}$ nulle. Soit il faut disposer d'un dispositif annexe permettant de lancer le rotor à la vitesse $\Omega = \omega$, soit il faut faire croître progressivement la pulsation ω avec un convertisseur électronique de puissance afin d'avoir à tout instant $\Omega \approx \omega$: on parle dans ce cas d'une machine synchrone autopilotée.

Pour un couple de charge Γ_c donné, on a également intérêt à diminuer l'intensité I_{sm} afin de diminuer les pertes cuivre dans les bobines du stator. Cela revient à se rapprocher de la condition $\Gamma_c = \Gamma_{\max}$, $\alpha = \pi/2$.

Dans le chapitre 3, on verra que la machine à courant continu réalise automatiquement la condition de synchronisme entre les champs statorique et rotorique et la configuration optimale orthogonale $\alpha = \pi/2$.

8. Conversion électromécanique de l'énergie

Pour l'instant, nous avons uniquement étudié la machine en mode moteur sous son aspect mécanique et nous avons montré qu'elle peut produire la puissance mécanique $P_{\text{méca}} = \Gamma\Omega = \Gamma\omega$. Nous voulons à présent montrer que cette puissance est prélevée au réseau sous forme électrique.

On note ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_r les flux à travers les enroulements du stator et du rotor, et R_s , R_r les résistances associées. En convention récepteur, les tensions vérifient :

$$u_1 = R_s i_1 + \frac{d\phi_1}{dt}$$

$$u_2 = R_s i_2 + \frac{d\phi_2}{dt}$$

$$u_r = R_r I_r + \frac{d\phi_r}{dt}$$

Nous nous plaçons dans les conditions du synchronisme $\theta = \omega t - \alpha$. Comme le rotor tourne à la même vitesse que le champ glissant généré par le stator, le flux ϕ_r est constant, le rotor n'est pas le siège d'un phénomène d'induction :

$$u_r = R_r I_r$$

Le flux ϕ_1 à travers la bobine (1) du stator s'écrit sous la forme :

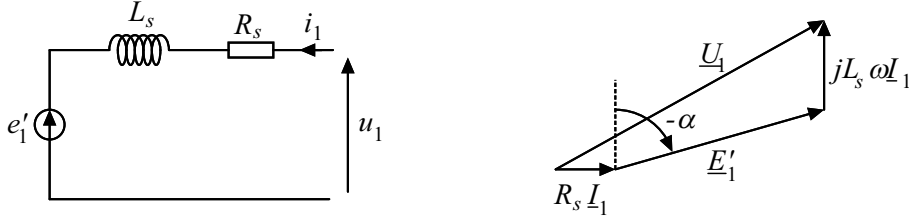
$$\phi_1 = L_s i_1 + M' i_2 + M(\theta) I_r$$

L_s est l'inductance propre d'une phase. M' est l'inductance mutuelle entre les deux phases du stator. Les enroulements étant spatialement orthogonaux, on accepte facilement la propriété $M' = 0$. $M(\theta)$ est l'inductance mutuelle entre la phase (1) et le rotor, ce coefficient dépend de la position angulaire θ . Il est clair que ce coefficient est maximal lorsque les axes des enroulements sont alignés ($\theta = 0$), et qu'il est nul lorsqu'il y a orthogonalité ($\theta = \pi/2$). Cela suggère un coefficient de la forme $M(\theta) = M_0 \cos(\theta)$ dont nous admettrons l'expression. On arrive aux résultats :

$$\phi_1 = L_s i_1 + M_0 I_r \cos(\omega t - \alpha)$$

$$u_1 = R_s i_1 + L_s \frac{di_1}{dt} + e'_1 \quad \text{avec} \quad e'_1 = -M_0 I_r \omega \sin(\omega t - \alpha)$$

e'_1 est la fcm générée par la rotation du rotor. On peut traduire cette équation par le schéma électrique :



Les signaux i_1 , ϕ_1 , u_1 étant sinusoïdaux, on peut également utiliser la notation complexe :

$$\underline{U}_1 = R_s \underline{I}_1 + j L_s \omega \underline{I}_1 + \underline{E}'_1 \quad \text{avec} \quad \underline{E}'_1 = M_0 I_r \omega e^{j(\frac{\pi}{2} - \alpha)}$$

La phase (2) vérifie les mêmes équations avec une quadrature retard :

$$\phi_2 = L_s i_2 + M_0 I_r \cos(\omega t - \alpha - \pi/2) = L_s i_2 + M_0 I_r \sin(\omega t - \alpha)$$

$$u_2 = R_s i_2 + L_s \frac{di_2}{dt} + e'_2 \quad \text{avec} \quad e'_2 = M_0 I_r \omega \cos(\omega t - \alpha)$$

Il y a donc un phénomène d'induction au stator, mais pas au rotor ; pour cette raison, on appelle le circuit du rotor l'**inducteur** et les phases du stator constituent l'**induit**.

La puissance électrique totale absorbée par la machine vaut :

$$u_r I_r + u_1 i_1 + u_2 i_2 = R_r I_r^2 + R_s (i_1^2 + i_2^2) + \frac{1}{2} L_s \frac{d(i_1^2 + i_2^2)}{dt} + e'_1 i_1 + e'_2 i_2$$

Le terme $R_r I_r^2 + R_s (i_1^2 + i_2^2) = R_r I_r^2 + R_s I_{sm}^2$ correspond à des pertes cuivre.

Le terme $\frac{1}{2} L_s \frac{d(i_1^2 + i_2^2)}{dt}$ est nul puisque $i_1^2 + i_2^2 = I_{sm}^2 = cste$.

L'énergie magnétique et l'énergie cinétique de la machine étant constantes dans les conditions de synchronisme, la puissance absorbée par les fcem doit être égale à la puissance mécanique fournie :

$$\Gamma\omega = e'_1 i_1 + e'_2 i_2 = M_0 \omega I_r I_{sm} (-\sin(\omega t - \alpha) \cos(\omega t) + \cos(\omega t - \alpha) \sin(\omega t)) = M_0 \omega I_r I_{sm} \sin \alpha$$

Cette dernière expression est cohérente avec le calcul du couple qui nous fournissait l'expression :

$$\Gamma = \frac{V}{2\mu_0} K_s K_r I_{sm} I_r \sin(\alpha) \Rightarrow M_0 = \frac{V}{2\mu_0} K_s K_r$$

Finalement, nous pouvons résumer notre bilan de puissance sous la forme :

$$P_{\text{élec}}^{\text{absorbée}} = P_{\text{cuivre}}^{\text{pertes}} + P_{\text{méca}}^{\text{fournie}} \quad \text{avec} \quad P_{\text{méca}}^{\text{fournie}} = e'_1 i_1 + e'_2 i_2$$

Nous pouvons vérifier la cohérence de ces relations sur le diagramme de Fresnel précédent. A I_r , I_{sm} , ω fixés, lorsque le couple est maximal $\alpha = \pi/2$, la puissance mécanique est maximale. Le diagramme vectoriel montre que les fcem sont en phase avec les courants, ce qui correspond à une puissance électrique absorbée également maximale.

A titre indicatif, nous pouvons rigoureusement établir les coefficients d'inductance à partir de l'énergie magnétique. On a effectivement :

$$\begin{aligned} E_{\text{mag}} &= \frac{V}{4\mu_0} B_{sm}^2 + \frac{V}{4\mu_0} B_{rm}^2 + \frac{V}{2\mu_0} B_{sm} B_{rm} \cos(\theta - \omega t) \\ E_{\text{mag}} &= \frac{V}{4\mu_0} K_s^2 (i_1^2 + i_2^2) + \frac{V}{4\mu_0} K_r^2 I_r^2 + \frac{V}{2\mu_0} K_s K_r I_{sm} I_r (\cos \theta \cos(\omega t) + \sin \theta \sin(\omega t)) \\ E_{\text{mag}} &= \frac{V}{4\mu_0} K_s^2 (i_1^2 + i_2^2) + \frac{V}{4\mu_0} K_r^2 I_r^2 + \frac{V}{2\mu_0} K_s K_r I_r (\cos \theta i_1 + \sin \theta i_2) \end{aligned}$$

Par ailleurs, on dispose de l'expression à l'aide des flux :

$$E_{\text{mag}} = \frac{1}{2} (i_1 \phi_1 + i_2 \phi_2 + I_r \phi_r) = \frac{1}{2} (L_s i_1^2 + L_s i_2^2 + L_r I_r^2) + M_0 \cos \theta I_r i_1 + M_0 \sin \theta I_r i_2$$

L'identification est effectivement possible en prenant :

$$L_s = \frac{V}{2\mu_0} K_s^2 \quad L_r = \frac{V}{2\mu_0} K_r^2 \quad M_0 = \frac{V}{2\mu_0} K_s K_r = \sqrt{L_s L_r}$$

Il y a donc couplage parfait entre une phase de l'induit et l'inducteur lorsqu'ils sont alignés.

9. Réversibilité

Les calculs énergétiques précédents ont été menés de façon algébrique et peuvent être utilisés pour d'autres signes des puissances mises en jeu. Ainsi, la machine synchrone peut être utilisée en alternateur afin de produire de l'énergie électrique à partir d'énergie mécanique.

Pour cela, il faut changer l'environnement électromécanique du dispositif. Les bobines de l'induit sont connectées à des dipôles d'utilisation identiques (récepteurs). Les fem induites par le couplage variable $M(\theta)$ vont alors fournir de l'énergie électrique aux résistances des enroulements (pertes cuivre) et aux dipôles d'utilisation (énergie utile). Cette énergie sera apportée par un couple moteur extérieur Γ_{op} . En régime permanent, l'alternateur développe un couple électromagnétique $\Gamma = -\Gamma_{\text{op}} < 0$ qui s'oppose au couple moteur, le champ rotorique est alors en avance sur le champ statorique ($\sin \alpha < 0$). On obtient le bilan énergétique de l'alternateur :

$$P_{\text{méca}}^{\text{absorbée}} = \Gamma_{\text{op}} \omega = P_{\text{cuivre}}^{\text{pertes}} + P_{\text{élec}}^{\text{fournie}}$$

Machine à courant continu

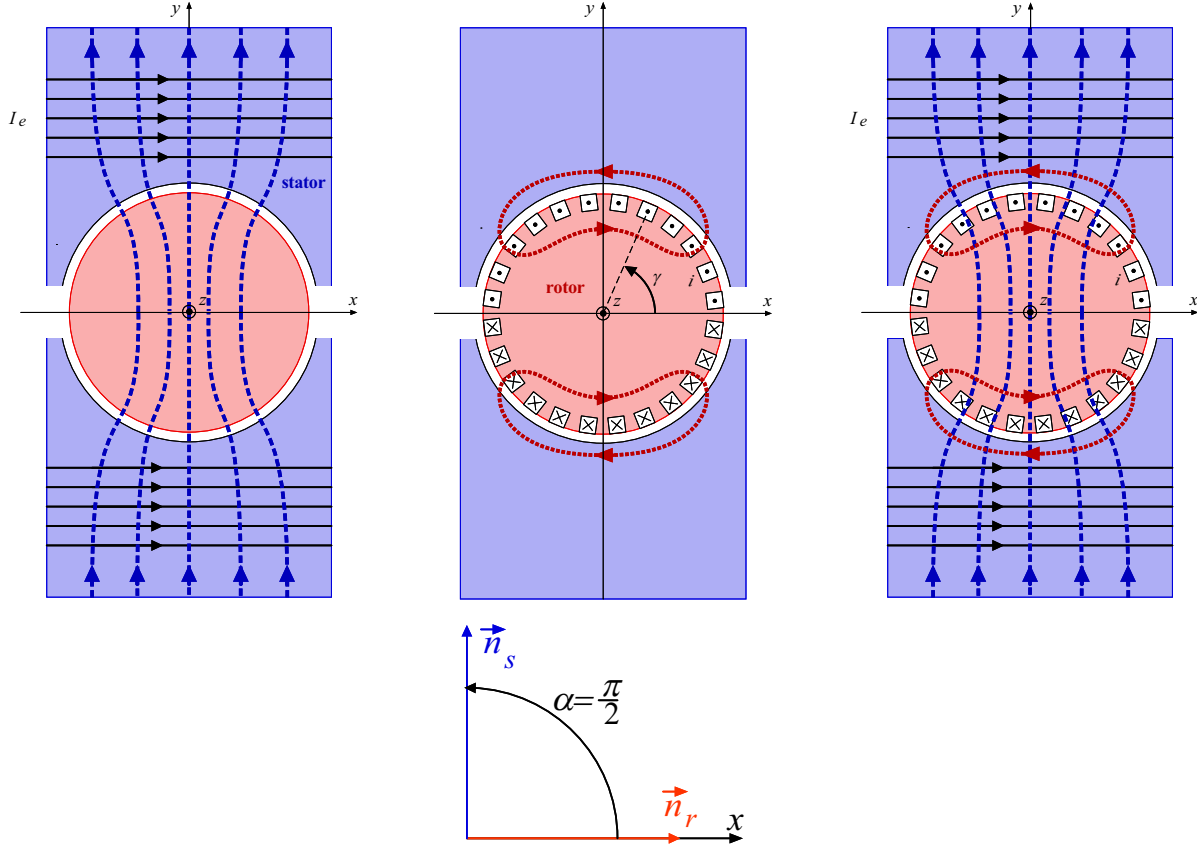
I. Description de la machine

1. Description des champs

- Le stator, également appelé **inducteur**, génère dans l'entrefer un champ magnétique bipolaire \vec{B}_s de direction moyenne $\vec{n}_s = \vec{e}_y$, et présentant un plan d'antisymétrie (xOz) appelé plan neutre. Pour les machines de faible puissance, ce champ est produit par un aimant permanent. Pour une machine à excitation séparée, ce champ est produit par des enroulements de cuivre traversés par une intensité constante I_e et un noyau de fer doux.

- Dans le chapitre 2, nous avons vu que l'on peut produire un couple en superposant au champ statorique \vec{B}_s un champ rotorique \vec{B}_r synchrone. \vec{B}_s étant stationnaire, il faut donc que le rotor génère un champ \vec{B}_r également stationnaire, quelle que soit la position angulaire θ du rotor !

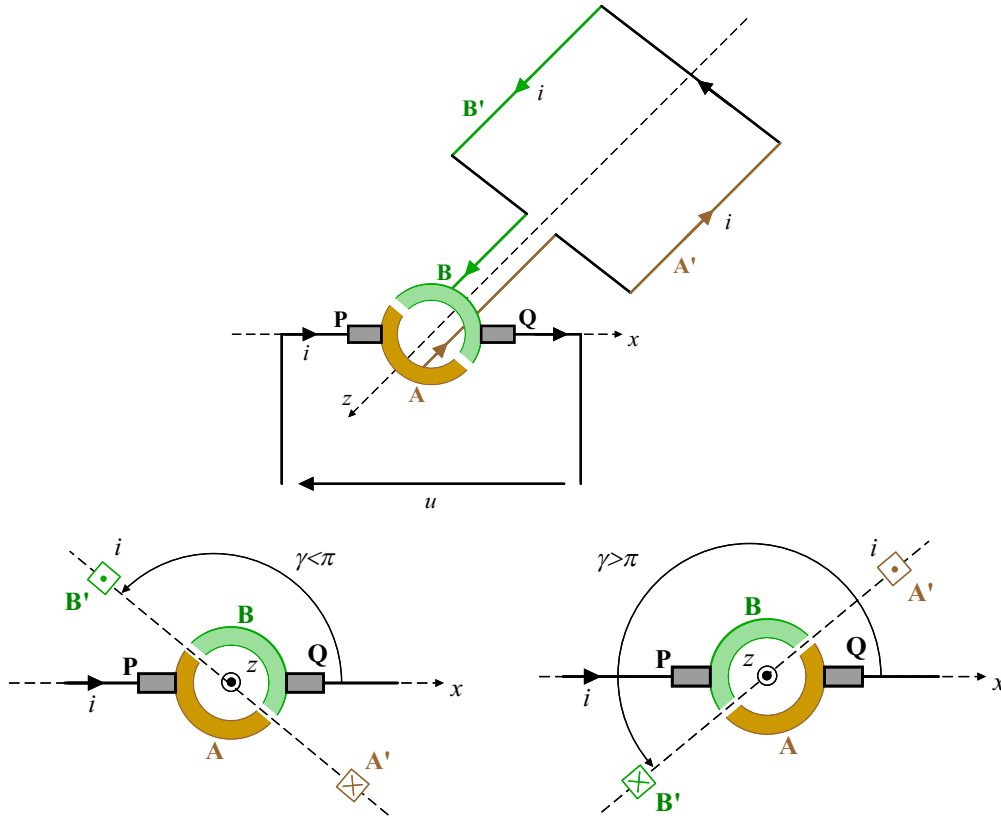
La solution est la suivante : le rotor est muni d'encoches dans lesquelles des conducteurs de cuivre sont alimentés par un circuit extérieur délivrant l'intensité constante i . Le collecteur, que nous décrirons plus tard, est un dispositif qui inverse le sens du courant à travers un conducteur lorsqu'il traverse le plan neutre (xOz). Ainsi, les conducteurs situés dans l'intervalle angulaire $\gamma \in [0, \pi]$ sont traversés par une intensité i orientée selon \vec{e}_z , et les autres conducteurs $\gamma \in [\pi, 2\pi]$ sont traversés par cette même intensité dans l'autre sens. Cette distribution génère dans l'entrefer un champ rotorique de direction moyenne $\vec{n}_r = \vec{e}_x$ **quelle que soit la position angulaire θ du rotor**.



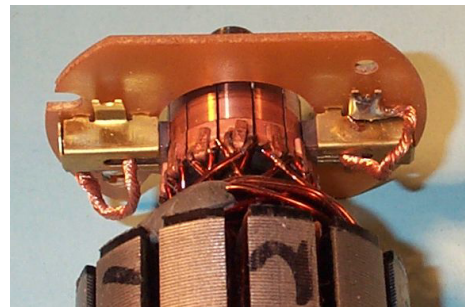
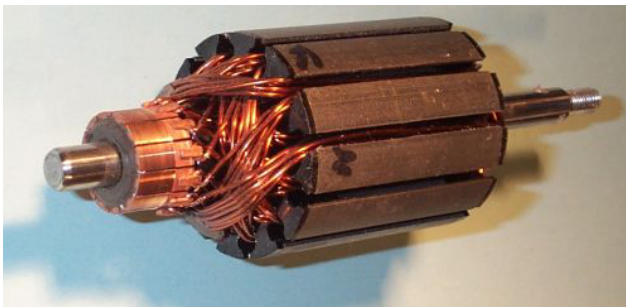
Directions moyennes des champs dans l'entrefer

2. Collecteur

Pour simplifier, nous allons décrire le principe de fonctionnement du collecteur dans le cas d'un rotor muni d'un unique enroulement placé dans deux encoches diamétralement opposées. Le collecteur est un commutateur rotatif constitué de deux lames A et B connectées à l'enroulement, et de deux balais P et Q connectés au circuit électrique extérieur. En repérant le conducteur B' avec l'angle γ , les schémas ci-dessous illustrent clairement l'inversion du sens du courant lorsque la spire franchit le plan neutre. Ainsi, le collecteur se comporte comme un onduleur générant dans la spire une intensité variable rectangulaire à partir d'une alimentation extérieure continue.



Pour une machine réelle, les conducteurs sont répartis tout autour du rotor et la commutation ne doit concerner que les conducteurs franchissant le plan neutre. Il est possible de satisfaire cette propriété en reliant les conducteurs à un collecteur possédant plusieurs paires de lames. A tout instant, une paire de lames est en contact avec les balais P et Q et assure la bonne distribution du courant à travers tous les conducteurs. Nous ne rentrerons pas dans les détails du schéma de connexion, cet aspect est trop technique et sans réel intérêt physique. Le dipôle PQ constitue l'**induit**.



Il est à noter que le collecteur est le point faible de la MCC par rapport aux autres machines électriques. En effet, le contact glissant entre les balais et les lames provoque une usure régulière des balais réalisés généralement en graphite, cela nécessite un entretien régulier. Par ailleurs, la commutation entre deux paires de lames successives génère des signaux transitoires engendrant un bruit électrique haute fréquence qui peut être néfaste pour les appareils situés à proximité.

II. Expression du couple et de la fem

1. Couple

Dans le chapitre 2, nous avons trouvé l'expression générale du couple engendré par la présence de deux champs synchrones sinusoïdaux dans l'entrefer d'une machine à pôles lisses :

$$\Gamma = \frac{V}{2\mu_0} B_{sm} B_{rm} \sin(\alpha)$$

Pour une MCC réelle, la dépendance angulaire sinusoïdale des champs n'est pas recherchée, mais nous ferons cette approximation dans un premier temps. L'angle α entre les directions moyennes des champs est égal à $\pi/2$, ce qui assure le couple maximal. Le champ rotorique étant proportionnel à l'intensité i de l'induit, on peut écrire la loi de couple sous la forme :

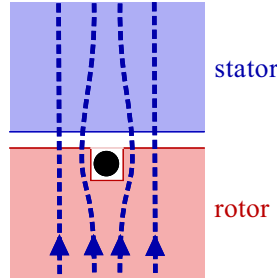
$$\Gamma = \phi_0 i$$

où la constante de couplage ϕ_0 est homogène à un flux magnétique et est proportionnelle au champ produit par l'inducteur. Nous ne chercherons pas à donner une expression de ϕ_0 en fonction de la géométrie d'une machine réelle, cette constante prenant en compte le caractère non sinusoïdal des champs réels.

Dans le cas d'une MCC à excitation séparée, ϕ_0 est fonction de l'intensité de l'inducteur I_e et présente le comportement suivant :

- Pour I_e faible, le noyau de fer doux est à peu près linéaire, $\phi_0 \propto I_e$.
- Pour I_e élevé, le noyau sature, $\phi_0 \approx \text{cste}$.

La détermination du couple a été déduite d'une analogie avec la machine synchrone sans recourir aux forces de Laplace. En effet, cette approche avec les forces de Laplace, même si elle est pédagogiquement intéressante à présenter, repose sur des principes physiques erronés. Le champ magnétique statorique réel est canalisé par les dents du rotor, il est très faible dans les encoches. Cette configuration protège le cuivre de trop fortes contraintes mécaniques pouvant détériorer le bobinage. Les actions électromagnétiques s'exercent principalement sur le fer, pas sur le cuivre.



2. Force électromotrice

Soit $\Omega = \dot{\theta}$ la vitesse angulaire du rotor. Rappelons que, contrairement à la machine synchrone, la vitesse angulaire du rotor Ω n'est pas égale à la vitesse angulaire $\omega = 0$ des champs magnétiques stationnaires de la MCC. Comme pour la machine synchrone, un bilan énergétique en régime permanent permet d'affirmer que la puissance mécanique $\Gamma\Omega$ est prélevée sous forme électrique par une force électromotrice apparaissant dans l'induit telle que :

$$P_{\text{fem}}^{\text{absorbée}} = -ei = P_{\text{méca}}^{\text{fournie}} = \Gamma\Omega = \phi_0\Omega i$$

$$e = -\phi_0\Omega$$

Pour éviter le signe négatif, on préfère souvent introduire la force contre électromotrice $e' = -e = \phi_0\Omega$.

3. Réversibilité

- On remarquera le croisement des grandeurs électriques (e', i) et mécaniques (Γ, Ω) dans le jeu de formules :

$$\boxed{\Gamma = \phi_0 i \quad e' = \phi_0 \Omega}$$

Si on étudie la MCC en mode moteur tournant dans le sens $\Omega > 0$, ce jeu de formules conduit à des signes positifs pour les autres grandeurs e', Γ, i .

- Si l'induit de la MCC est branché à un dipôle récepteur, alors la fem induite $e = -\phi_0 \Omega$ produit de l'énergie électrique. En contre-partie, un opérateur extérieur doit fournir de l'énergie mécanique au rotor, le couple électromagnétique Γ s'opposant à la rotation. Avec les formules précédentes, cela conduit aux signes $i < 0, e < 0$ pour $\Omega > 0$. On préfère généralement changer l'orientation électrique de l'induit afin de travailler avec le jeu de formules :

$$\boxed{\Gamma = -\phi_0 i \quad e = \phi_0 \Omega}$$

Ainsi, pour un fonctionnement réalisant $\Omega > 0$, la fem et le courant induit sont positifs et on écrira le bilan de puissance sous la forme :

$$P_{\text{fem}}^{\text{fournie}} = ei = P_{\text{méca}}^{\text{absorbée}} = -\Gamma\Omega = \phi_0 \Omega i$$

Si le fonctionnement de la machine est a priori inconnu, on peut utiliser n'importe quel jeu de formules qui manipulent de toute façon des grandeurs algébriques.

III. Etude de la MCC en fonctionnement moteur

1. Equations électrique et mécanique

Dans ce paragraphe, nous allons donner les équations différentielles de la machine sans supposer que le régime permanent est atteint, $i(t)$ et $\Omega(t)$ peuvent varier.

- **Equation mécanique**

Soit J le moment d'inertie du rotor par rapport à l'axe de rotation. Si la machine est utilisée comme un moteur entraînant une charge mécanique exerçant le couple $-\Gamma_c$, le théorème du moment cinétique s'écrit :

$$J \frac{d\Omega}{dt} = \phi_0 i - \Gamma_c$$

- **Equation électrique**

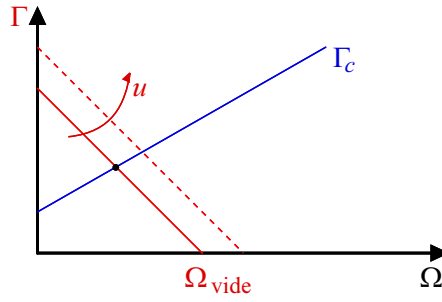
Soit R la résistance électrique de l'induit. Pour une intensité de l'induit $i(t)$ variable, il faut prendre en compte les variations de flux propre. En notant L l'inductance propre de l'induit et u la tension à ses bornes en convention récepteur, on obtient :

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} + \phi_0 \Omega$$

2. Caractéristique couple-vitesse à tension d'induit constante

On envisage ici la commande d'un moteur à courant continu à tension d'induit u constante. Le couple moteur s'écrit alors en régime permanent :

$$\Gamma = \phi_0 i = \frac{\phi_0}{R} u - \frac{\phi_0^2}{R} \Omega$$



Le couple de démarrage vaut $\Gamma(\Omega = 0) = \frac{\phi_0}{R}u$. Contrairement au moteur synchrone, il est non nul, le moteur à courant continu peut démarrer sans dispositif annexe. On peut remarquer que l'intensité est très supérieure à celle du régime nominal si on maintient le moteur bloqué à vitesse nulle, il faut éviter ce type de situation.

Lorsque le moteur tourne à vide, $\Gamma = \Gamma_c = 0$, $i = 0$, $\Omega = u/\phi_0$. La vitesse ne diverge pas, elle est simplement proportionnelle à la tension d'induit. Pour une machine à excitation séparée, il ne faut pas diminuer voire couper l'alimentation de l'inducteur, la diminution de la constante de couplage pouvant provoquer une sur-vitesse importante du moteur.

On peut déterminer le point de fonctionnement du moteur lorsqu'on se donne la loi de charge $\Gamma_c(\Omega)$ en déterminant l'intersection avec la droite $\Gamma(\Omega)$. Ainsi, on constate qu'on peut régler la vitesse de rotation du moteur en modifiant la tension d'induit : c'est un autre intérêt du moteur à courant continu par rapport au moteur synchrone.

3. Etude du transitoire provoqué par un échelon de tension

On peut s'intéresser au démarrage d'un moteur entraînant une charge exerçant le couple $-f\Omega$ lorsqu'on applique un échelon de tension $u(t) = UY(t)$. La fonction de transfert $\Omega(p)/U(p)$ est un passe-bas du deuxième ordre si on prend en compte J et L , du premier ordre si on néglige l'influence de L . Dans ce deuxième cas, on peut alors mettre en évidence un temps caractéristique de démarrage associé à l'inertie du rotor et une sur-intensité initiale.

$$L \neq 0 : \frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{\phi_0}{(\phi_0^2 + Rf) + (fL + RJ)p + LJp^2}$$

$$L = 0 : \frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{\phi_0}{(\phi_0^2 + Rf) + RJp}$$

Cette partie fait le lien avec le cours de SII, peut être traitée avec un support numérique, et prépare le cours sur la commande d'une MCC avec un hacheur en travaillant sur un modèle d'induit en régime variable.

4. Rendement

Pour une machine à excitation séparée en régime permanent, on établit avec les équations électrique et mécanique :

$$ui = Ri^2 + \Gamma\Omega \quad u_e I_e = R_e I_e^2$$

La puissance électrique absorbée par le moteur vaut $ui + U_e I_e$. La puissance utile correspond à la puissance mécanique fournie $\Gamma\Omega$. Le terme $Ri^2 + R_e I_e^2$ correspond aux pertes cuivre. En pratique, ce bilan est incomplet, il omet les pertes mécaniques et les pertes fer. Le couple mécanique utile Γ_u est inférieur au couple électromagnétique théorique et vérifie :

$$\Gamma\Omega = \Gamma_u \Omega + P_{\text{fer}}^{\text{perte}} + P_{\text{méca}}^{\text{perte}}$$

Finalement, on définit le rendement par le rapport :

$$\eta = \frac{\Gamma_u \Omega}{ui + U_e I_e} = 1 - \frac{P_{\text{cuivre}}^{\text{perte}} + P_{\text{fer}}^{\text{perte}} + P_{\text{méca}}^{\text{perte}}}{ui + U_e I_e}$$

On obtient couramment des valeurs supérieures à 80% en régime nominal, et le rendement peut dépasser 95% pour les très bons moteurs industriels de forte puissance.