

PHÉNOMÉNOLOGIE DES OSCILLATIONS DES NEUTRINOS

Stage d'initiation à la recherche

11 juin 2018 - 20 juillet 2018

Camille MERIDJA

Licence 3 et Magistère 1 de Physique fondamentale

Responsable du stage :

Stéphane LAVIGNAC
Institut de Physique Théorique
Orme des Merisiers, CEA
91191 Gif-sur-Yvette

Remerciements

Je tiens à exprimer mes plus sincères remerciements à Stéphane LAVIGNAC qui m'a offert l'occasion de découvrir, par ce stage, l'univers passionnant de la physique théorique. Merci également à Xavier GARRIDO pour m'avoir mis en relation avec monsieur LAVIGNAC, à François DAVID pour m'avoir accueilli au sein de l'IPhT, à Stéphane DOUIN pour son encadrement, et à Laure SAUBOY pour son dynamisme dans la gestion des aspects administratifs du stage.

Résumé

Ce document constitue le rapport de fin du stage que j'ai effectué à l'Institut de Physique Théorique du CEA de Saclay, dans le cadre de mon cursus au Magistère de Physique fondamentale d'Orsay. Il détaille la base du formalisme théorique nécessaire à la description du phénomène des oscillations du neutrino en présentant succinctement le modèle standard, qui introduit le neutrino en tant que particule élémentaire sans masse, puis en formalisant ses oscillations dans le vide qui imposent son caractère massif, avant de décrire les effets d'interaction avec la matière donnant lieu à la résonance des oscillations, et aux transitions de saveur du neutrino.

Abstract

This paper is the final report ending the internship I did at the Institut de Physique Théorique, CEA Saclay, as part as my graduate studies at the Magistère de Physique fondamentale d'Orsay. It details the basis of the theoretical formalism necessary to describe the phenomenon of neutrino oscillations by briefly presenting the standard model, which introduces the neutrino as an elementary massless particle, then formalizing its oscillations in the vacuum which impose its massive character. We shall finally be describing the interaction effects between neutrinos and matter, giving rise to the oscillation resonance, and the neutrino flavour transitions.

Sommaire

Introduction	1
1 Le neutrino, le modèle standard	3
I Panorama du modèle standard	3
II Statut du neutrino	4
2 Oscillations dans le vide	7
I Formules des oscillations	7
II Description à « 2 saveurs »	9
III Description à 3 saveurs	10
3 Oscillations dans la matière	13
I Modélisation sommaire des effets de l'interaction faible	13
II Effets de matière	14
III Milieu à densité élec. const.	15
IV Milieu à densité élec. var.	16
V Oscillations à 3 saveurs	18
Conclusion	19
A Formules d'oscillations à 3 saveurs	23
B Three neutrino oscillations in matter de A. Ioannisian et S. Pokorski	25

Introduction

Faisant partie intégrante du cursus du Magistère de Physique fondamentale d'Orsay, le stage d'initiation à la recherche de première année a pour but de confronter l'étudiant à l'univers d'un laboratoire et de mettre en œuvre une première approche d'un travail de recherche. Désireux de me familiariser avec la physique théorique, et plus particulièrement avec le domaine de la physique des particules, c'est assez naturellement que j'ai pu me tourner vers l'Institut de Physique Théorique (IPhT) du centre CEA de Saclay, où Stéphane LAVIGNAC m'a conduit à spécialiser mon étude sur le neutrino, et plus particulièrement sur le phénomènes des oscillations.

Le neutrino, particule élémentaire neutre, de spin $\frac{1}{2}$ et de masse nulle déclinée en trois saveurs (électronique, muonique et tauique) dans le cadre du modèle standard de la physique des particules, est au cœur des évolutions de la physique moderne. Introduit par Wolfgang PAULI en 1933 dans le but d'expliquer le spectre continu de la radioactivité β^- , ses oscillations, révélant son caractère massif, sont aujourd'hui l'une des premières pierres d'une physique au-delà du modèle standard.

Le concept des oscillations des neutrinos a historiquement été initié par Bruno PONTECORVO en 1957 après la mesure d'un déficit de neutrinos électroniques solaires, détectés sur Terre, les réactions nucléaires solaires étant émettrices de neutrinos électroniques ; l'analyse du flux total de neutrinos (électroniques, muoniques et tauiques) ne révélait par contre aucun déficit. PONTECORVO proposa qu'une partie du flux de neutrinos ait muté en antineutrinos ; théorie qui fut par la suite affinée par Z. MAKI, M. NAKAGAWA et S. SAKATA avec le concours actif de PONTECORVO en 1967 qui proposèrent cette fois qu'une partie du flux de neutrinos ait muté en une saveur différente au cours de la propagation, ce qui supposait que les neutrinos soient massifs. [1] Ce fut le début des recherches théoriques et expérimentales autour des oscillations des neutrinos, qui permirent notamment d'expliquer le déficit des neutrinos solaires par l'effet conjoint des oscillations et des effets de transition de saveur au sein même du Soleil.

Dans ce rapport nous présenterons l'état actuel des connaissances de base ayant trait aux oscillations du neutrino, résultat de notre étude bibliographique, en particulier la formule générale des oscillations dans le vide dont nous donnerons la démonstration. Nous commencerons donc par présenter le cadre dans lequel est introduit le neutrino en tant que particule élémentaire sans masse, le modèle standard ; nous déroulerons ensuite le formalisme nécessaire à la description des oscillations des neutrinos dans le vide, avant d'analyser les effets d'interaction entre les neutrinos et la matière sur lesdites oscillations, en détaillant le cas des neutrinos solaires.

Chapitre 1

Le neutrino au sein du modèle standard de la physique des particules

Avant de nous intéresser plus particulièrement aux oscillations, il convient de définir le cadre dans lequel le neutrino est initialement introduit et les attentes théoriques qui en découlent.

I Panorama du modèle standard

Dans le cadre de la physique des particules, les particules élémentaires et leurs interactions sont rassemblées au sein du modèle standard de la physique des particules.

Les interactions y sont représentées par des bosons vecteurs, de spin 1 : le photon est le vecteur de l'interaction électromagnétique, les bosons W (chargé) et Z (neutre) sont les médiateurs de l'interaction faible, et les gluons (neutres) sont ceux de l'interaction forte, responsable de la cohésion du noyau atomique. Seule la gravitation est absente de la théorie du modèle standard, traitée au sein de la théorie, incompatible à ce jour, de la relativité générale. La portée de ces interactions est directement reliée (par une relation de type HEISENBERG) à la masse des bosons vecteurs : le photon étant de masse nulle, l'interaction électromagnétique est de portée infinie ; les gluons sont également de masse nulle, mais l'interaction forte étant responsable de la cohésion des noyaux atomiques sa portée est tout de même considérée finie, de l'ordre de 10^{-15} m, la taille du noyau. Enfin, les bosons W et Z étant massifs, l'interaction faible est de portée finie, de l'ordre de 10^{-18} m.

Il est cependant à noter que le modèle standard n'admet en principe pas la possibilité d'avoir des bosons massifs comme médiateurs des interactions. Le problème posé par les bosons W et Z est alors contourné par l'introduction théorique en 1964 d'un dernier boson élémentaire, de spin 0, n'étant médiateur d'aucune interaction, le boson de HIGGS. C'est l'inertie effective provoquée par l'interaction entre le boson de HIGGS et les bosons W et Z qui confère dans la théorie une masse à ces derniers. En fait, le boson de HIGGS est responsable des masses de toutes les particules élémentaires. Son existence a été confirmée expérimentalement en 2012, ce qui provoqua un large émoi médiatique et scientifique.

La matière, quant à elle, est représentée dans le modèle standard par des fermions de spin $\frac{1}{2}$ déclinés en trois générations. La première génération de fermions élémentaires, dite *électronique*, est constituée par l'électron, auquel on associe un neutrino électronique neutre et de masse nulle, et les quarks *up*,

	Masse (GeV)	Charge	Interaction transmise
Photon (γ)	0	0	électromagnétique
Boson W^{\pm}	80,4	$\pm e$	faible
Boson Z	90,2	0	faible
Gluon (g)	0	0	forte
Boson de HIGGS (h)	≈ 125	0	aucune, confère leur masse aux particules

TABLE 1.1 – Bosons élémentaires du modèle standard (d'après [2])

	Masse (GeV)	Charge	Type
Électron (e^-)	$511 \cdot 10^{-6}$	$-e$	lepton
Muon (μ^-)	0,105	$-e$	lepton
Tau (τ^-)	1,777	$-e$	lepton
Neutrinos (ν_e, ν_μ, ν_τ)	0	0	leptons
Down (d)	$\approx 0,005$	$-\frac{1}{3}e$	quark
Up (u)	$\approx 0,002$	$+\frac{2}{3}e$	quark
Strange (s)	$\approx 0,1$	$-\frac{1}{3}e$	quark
Charm (c)	$\approx 1,5$	$+\frac{2}{3}e$	quark
Bottom (b)	$\approx 4,7$	$-\frac{1}{3}e$	quark
Top (t)	$\approx 173,5$	$+\frac{2}{3}e$	quark

TABLE 1.2 – Fermions élémentaires du modèle standard (d’après [2])

de charge $+\frac{2}{3}e$, et *down*, de charge $-\frac{1}{3}e$. Ce sont, hormis le neutrino électronique, les constituants de la matière ordinaire. Les autres générations sont constituées de particules ne différant de celles de la famille *électronique* que par leurs masses bien plus élevées et leur instabilité. N’étant pas présents dans la matière ordinaire, ces fermions sont obtenus par collisions des fermions de première génération, naturelles ou provoquées. La famille *muonique* est ainsi constituée du muon de charge $-e$ et 200 fois plus lourd que l’électron, d’un neutrino muonique, et des quarks *charm* et *strange*. Enfin, la troisième famille de fermions est constituée par le tau, 17 fois plus lourd que le muon, un neutrino tauique, et deux quarks *top* et *bottom* (ou *beauty*).

Parmi ces fermions, les quarks se distinguent comme étant sensibles à l’interaction forte, ce qui n’est pas le cas des autres fermions élémentaires, nommés *leptons*. Cela a pour conséquence qu’il est impossible, a priori, d’observer un quark isolé et qu’ils n’apparaissent donc que sous la forme de *hadrons*, particules composites. Le proton (composé de deux quarks *up* et d’un quark *down*) et le neutron (composé de deux quarks *down* et d’un quark *up*) en sont des exemples. Ces particules composées de trois quarks sont appelées *baryons*.

Selon le modèle standard, et la théorie de DIRAC, il est enfin possible d’associer une antiparticule à toute particule. Cette antiparticule est obtenue en effectuant une transformation de Charge et de Parité sur la particule initiale, c’est-à-dire en effectuant dans les équations régissant la particule la transformation ($q \rightarrow -q$) où q est la charge de la particule, et en prenant son image dans un miroir. Les grandeurs vectorielles sont notamment transformées en leurs opposées. Un positon, antiélectron, sera alors un lepton élémentaire de charge $+e$ et de même masse que l’électron. L’antiparticule d’un hadron est constituée par le hadron composé des antiparticules du hadron initial, ainsi l’antiproton est composé de deux antiquarks *up* (de charge $-\frac{2}{3}e$) et d’un antiquark *down* (de charge $+\frac{1}{3}e$) et possède la même masse que le proton. Il est enfin à noter qu’il existe, en plus des baryons composés de trois quarks, des hadrons instables composés d’un quark et d’un antiquark appelés *mésons*. [2]

II Statut du neutrino

Nous avons précédemment indiqué qu’à chaque lepton chargé (électron, muon et tau) était associé un neutrino. Cette association se fait dans le cadre de l’interaction faible et a été initialement introduite, dans le cas électronique, par Wolfgang PAULI en 1933 afin d’expliquer le spectre énergétique continu de l’électron émis lors de la désintégration β^- . Il a alors interprété la « perte » d’énergie observée comme étant cédée à une particule neutre de masse nulle ou très faible interagissant peu avec la matière, le neutrino électronique, ou plutôt son antiparticule :

$$n \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}_e$$

Cette hypothèse fut confirmée par l’expérience en 1956. [2]

De même, un neutrino électronique est associé au positon dans la désintégration β^+ :

$$p^+ \rightarrow n + e^+ + \nu_e$$

La même association est enfin possible entre le muon et le neutrino muonique, et le tau et le neutrino tauique.

Expérimentalement, nous pouvons distinguer notamment trois types de neutrinos [1] [3] [4] :

Les neutrinos solaires : ce sont des neutrinos émis au cœur du Soleil dans une saveur électronique ; nous verrons qu'il est possible de distinguer deux régimes énergétiques parmi les neutrinos solaires selon l'importance de leur interaction avec la matière de l'étoile. Le déficit observé de neutrinos électroniques solaires a été à l'origine de la théorie des oscillations.

Les neutrinos atmosphériques : ils sont produits par bombardement de l'atmosphère terrestre par des rayons cosmiques (protons de très haute énergie) dans les saveurs électroniques et muoniques. Les observations expérimentales, par exemple Super-Kamiokande, ont notablement révélé un déficit de neutrinos muoniques pour le flux ayant traversé la Terre. La théorie des oscillations permettra de le justifier par le fait que les neutrinos atmosphériques, de haute énergie, ont oscillé en neutrinos tauiques pendant la traversée de la Terre.

Les neutrinos produits en réacteurs : ce sont souvent des antineutrinos électroniques, produits par des réactions de type radioactivité β^- , de relativement haute énergie, dont les oscillations seront observées sur une courte distance (devant les longueurs d'oscillations atmosphériques ou solaires).

Chapitre 2

Oscillations des neutrinos dans le vide

Si les neutrinos étaient émis dans le vide dans un état stationnaire au sens de la mécanique quantique, ils seraient détectés plus loin dans ce même état, et ce indépendamment de la distance de propagation. Ceci nous amène à la conclusion que les états de saveur bien définie du neutrino ne sont pas des états stationnaires, d'énergie bien définie, dans le vide. L'énergie d'un neutrino libre, d'impulsion p considérée fixée dans cette modélisation, étant directement liée à sa masse m par $E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$, cela signifie qu'un neutrino de saveur bien définie n'a pas de masse bien définie ! Il existe donc une matrice unitaire non diagonale permettant de relier la base des états de saveur et celle des états de masse, stationnaires. Les états de saveur n'étant donc pas stationnaires, la probabilité d'observer un neutrino dans une saveur différente de sa saveur d'émission après une propagation sur une distance L devient non nulle et oscille périodiquement avec L : c'est le phénomène d'oscillation que nous allons à présent justifier théoriquement. [1] [3]

I Formules des oscillations

On distingue donc deux bases orthonormées d'états du neutrino, $(|\nu_\alpha\rangle)$ base d'états propres de saveur et $(|\nu_i\rangle)$ base d'états stationnaires (coïncidant dans le vide avec les états propres de masse).

Ces deux bases sont reliées au moyen de la matrice unitaire PMNS (pour PONTECORVO-MAKI-NAKAGAWA-SAKATA) notée U telle que $(|\nu_\alpha\rangle) = U^*(|\nu_i\rangle)$, et réciproquement $(|\nu_i\rangle) = U^T(|\nu_\alpha\rangle)$, où $*$ désigne la conjugaison complexe des coefficients de la matrice, et T la transposition.

Le vecteur d'état instantané du neutrino obéit à l'équation de SCHRÖDINGER, pilotée par le hamiltonien cinétique $\hat{\mathcal{H}}$ diagonalisé par la base $(|\nu_i\rangle)$:

$$i\hbar \frac{d|\nu(t)\rangle}{dt} = \hat{\mathcal{H}} |\nu(t)\rangle$$

Les neutrinos sont émis dans un état de saveur $|\nu_\alpha\rangle$. Le hamiltonien ne dépendant pas du temps, il est possible d'écrire :

$$|\nu(t)\rangle = e^{-i\frac{\hat{\mathcal{H}}t}{\hbar}} |\nu_\alpha\rangle$$

L'amplitude de probabilité d'observation du neutrino dans l'état $|\nu_\beta\rangle$ après un temps t de propagation dans le vide s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \text{Amp}(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) &= \langle \nu_\beta | e^{-i\frac{\hat{\mathcal{H}}t}{\hbar}} | \nu_\alpha \rangle \\ &= \sum_i \langle \nu_\beta | e^{-i\frac{\hat{\mathcal{H}}t}{\hbar}} | \nu_i \rangle \langle \nu_i | \nu_\alpha \rangle \\ &= \sum_i U_{\alpha i}^* U_{\beta i} e^{-i\frac{E_i t}{\hbar}} \end{aligned}$$

en sommant sur les différents états stationnaires.

La probabilité d'observation est alors elle-même donnée par :

$$\begin{aligned}
P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) &= |\text{Amp}(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta)|^2 \\
&= \left| \sum_i U_{\alpha i}^* U_{\beta i} e^{-i \frac{E_i t}{\hbar}} \right|^2 \\
&= \left(\sum_i U_{\alpha i}^* U_{\beta i} e^{-i \frac{E_i t}{\hbar}} \right) \left(\sum_j U_{\alpha j} U_{\beta j}^* e^{i \frac{E_j t}{\hbar}} \right) \\
&= \sum_{i,j} U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* e^{-i \frac{\Delta E_{ij} t}{\hbar}} \\
&= \sum_i |U_{\alpha i} U_{\beta i}|^2 + \sum_{i>j} U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* e^{-i \frac{\Delta E_{ij} t}{\hbar}} + \sum_{i<j} U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* e^{-i \frac{\Delta E_{ij} t}{\hbar}} \\
&= \sum_i |U_{\alpha i} U_{\beta i}|^2 + \sum_{i>j} \left(U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* e^{-i \frac{\Delta E_{ij} t}{\hbar}} + U_{\alpha j}^* U_{\beta j} U_{\alpha i} U_{\beta i}^* e^{i \frac{\Delta E_{ij} t}{\hbar}} \right) \\
&= \sum_i |U_{\alpha i} U_{\beta i}|^2 + 2 \sum_{i>j} \text{Re} \left(U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* e^{-i \frac{\Delta E_{ij} t}{\hbar}} \right) \\
&= \sum_i |U_{\alpha i} U_{\beta i}|^2 + 2 \sum_{i>j} \text{Re}(U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \cos \left(\frac{\Delta E_{ij} t}{\hbar} \right) + 2 \sum_{i>j} \text{Im}(U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \sin \left(\frac{\Delta E_{ij} t}{\hbar} \right) \\
&= \sum_{i,j} U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* - 4 \sum_{i>j} \text{Re}(U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \sin^2 \left(\frac{\Delta E_{ij} t}{2\hbar} \right) \\
&\quad + 2 \sum_{i>j} \text{Im}(U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \sin \left(\frac{\Delta E_{ij} t}{\hbar} \right)
\end{aligned}$$

Ainsi, en remarquant que $\sum_{i,j} U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* = \sum_{i,j} \langle \nu_\alpha | \nu_i \rangle \langle \nu_i | \nu_\beta \rangle \langle \nu_\beta | \nu_j \rangle \langle \nu_j | \nu_\alpha \rangle = \delta_{\alpha\beta}$,

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{i>j} \text{Re}(U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \sin^2 \left(\frac{\Delta E_{ij} t}{2\hbar} \right) + 2 \sum_{i>j} \text{Im}(U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \sin \left(\frac{\Delta E_{ij} t}{\hbar} \right)$$

Cette formule révèle que la probabilité de mutation du neutrino en une saveur différente de sa saveur de naissance est une fonction périodique du temps de propagation, c'est pourquoi le phénomène que nous venons de modéliser est nommé *oscillations du neutrino*. La fréquence de ces oscillations est directement proportionnelle aux différences d'énergies propres, ΔE_{ij} . D'autre part, les amplitudes d'oscillations sont gouvernées par les éléments de la matrice PMNS.

Nous avons vu précédemment que l'énergie de l'état stationnaire *dans le vide* associé à une masse m_i du neutrino était donnée par $E_i = \sqrt{p^2 c^2 + m_i^2 c^4}$. Les recherches expérimentales ayant permis de justifier que, si les neutrinos possédaient effectivement une masse, alors son énergie de masse était très négligeable devant pc , nous pouvons réécrire les énergies propres sous la forme :

$$E_i \approx pc + \frac{m_i^2 c^4}{2pc}$$

En nous basant sur notre argument précédent, nous pouvons voir que toutes les énergies propres du neutrino sont en fait toutes extrêmement proche de pc , nous pourrions parler de « l'énergie » du neutrino comme étant $E = pc$, qu'il se trouve dans un état d'énergie bien définie ou non. Les trois masses propres associées au neutrino étant très faibles, il sera également possible de considérer que le neutrino se propage dans le vide à la vitesse c , nous pourrions alors poser $L = ct$, longueur de propagation approchée.

Par contre, les oscillations sont elles gouvernées par les différences d'énergies propres, c'est alors le terme de premier ordre qui est prépondérant :

$$\Delta E_{ij} = E_i - E_j = \frac{\Delta m_{ij}^2 c^4}{2pc}$$

où $\Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2$.

Les constantes c et \hbar étant très présentes dans nos expressions, il est d'usage de choisir un système d'unité spécifique dans lequel $\hbar = c = 1$, ces constantes devront être rétablies a posteriori dans le but d'effectuer d'éventuelles applications numériques. Dans ce système, les longueurs sont homogènes aux temps, les masses et les impulsions sont homogènes aux énergies : $E = p$ et $L = t$, dans la suite nous ne raisonnerons qu'en énergie et en longueur.

Ainsi :

$$\Delta E_{ij} = \frac{\Delta m_{ij}^2}{2E}$$

et la formule générale des oscillations peut s'écrire :

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{i>j} \text{Re}(U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{ij}^2 L}{4E} \right) + 2 \sum_{i>j} \text{Im}(U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \sin \left(\frac{\Delta m_{ij}^2 L}{2E} \right)$$

Nous avons exposé au chapitre précédent que le modèle standard associait non seulement une masse à chaque saveur, mais que ces masses étaient identiquement nulles. Ainsi, si nous suivions les prescriptions du modèle standard, tous les Δm_{ij}^2 seraient également nuls : le modèle standard ne prévoit aucun phénomène d'oscillation ! Or, comme nous l'avons déjà vu, l'expérience fait apparaître des effets typiques d'oscillations : *nous mettons ici au jour un phénomène au-delà du modèle standard*.

Nous pouvons également remarquer que le phénomène des oscillations ne permet pas d'accéder aux masses absolues des neutrinos, mais seulement à des différences des carrés de leurs masses.

D'autre part, cette formule ne permet de décrire que les oscillations du neutrino, et non celles des antineutrinos. Nous pouvons en effet nous demander si les oscillations obéissent à la symétrie CP, charge et parité, c'est-à-dire si les antineutrinos oscillent comme les neutrinos. Il est en réalité généralement admis, jusqu'à preuve du contraire, que les processus physiques élémentaires obéissent à la symétrie CPT, c'est-à-dire une symétrie CP avec renversement du temps : prendre l'image de la particule dans un miroir et faire la transformation ($q \rightarrow -q, t \rightarrow -t$) ; ainsi, si les oscillations du neutrino obéissent à la symétrie CPT, $P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = P(\bar{\nu}_\beta \rightarrow \bar{\nu}_\alpha)$, et alors :

$$P(\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta) = \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{i>j} \text{Re}(U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{ij}^2 L}{4E} \right) - 2 \sum_{i>j} \text{Im}(U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \sin \left(\frac{\Delta m_{ij}^2 L}{2E} \right)$$

Les oscillations du neutrino violent la symétrie CP, si $\text{Im}(U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \neq 0$.

Les formules d'oscillations que nous avons ainsi obtenues sont valables pour un nombre théorique a priori quelconque de saveurs, et d'états propres de masses. La connaissance actuelle du modèle standard a permis de distinguer 3 saveurs comme nous l'avons déjà vu, il n'est cependant pas exclu que des recherches futures mettent ce modèle en défaut.

Nous allons à présent appliquer la formule des oscillations à un cas modèle à « 2 saveurs » ; nous verrons en effet qu'il peut servir de modèle limite pour la situation attendue, à 3 saveurs.

II Description à « 2 saveurs »

Nous considérerons ici que le neutrino ne peut prendre que deux valeurs de saveurs, e et μ , et donc possède deux états propres de saveur. Ainsi, on peut faire correspondre à ces états deux états stationnaires dans le vide (états propres de masse) au moyen de la matrice de passage unitaire 2×2 que l'on a nommé précédemment U , la matrice PMNS.

Afin de décrire le phénomène des oscillations, dans un espace de HILBERT à deux dimensions, il est toujours possible [3] de se ramener à une description de mélange commandée par un unique paramètre réel $\theta \in [0; \frac{\pi}{2}]$:

$$\begin{cases} |\nu_e\rangle = \cos \theta |\nu_1\rangle + \sin \theta |\nu_2\rangle \\ |\nu_\mu\rangle = -\sin \theta |\nu_1\rangle + \cos \theta |\nu_2\rangle \end{cases}$$

où $|\nu_1\rangle$ et $|\nu_2\rangle$ sont les états propres de masse.

La matrice PMNS sera donc dans ce cas de la forme :

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

On obtient alors directement les probabilités de mutation et de survie :

$$\begin{cases} P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) = \sin^2 2\theta \sin^2 \left(\frac{\Delta m^2 L}{4E} \right) \\ P(\nu_e \rightarrow \nu_e) = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \left(\frac{\Delta m^2 L}{4E} \right) \end{cases}$$

Nous voyons ainsi que les oscillations sont maximales lorsque le mélange est équitable, c'est-à-dire si $\theta = \frac{\pi}{4}$.

III Description à 3 saveurs

À l'heure actuelle, le modèle standard ne prévoit l'existence que de 3 saveurs du neutrino. Dans le cadre de ce modèle, on peut toujours se ramener [1] à une description de mélange basée sur 3 rotations d'angles de mélange θ_{12} , θ_{23} et θ_{13} ainsi que sur une phase $\delta \in [0; 2\pi[$, les autres degrés de liberté n'étant pas pertinents physiquement pour décrire les oscillations. On peut alors écrire la matrice PMNS, avec $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$ et $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$, sous la forme :

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13} e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire :

$$U = \begin{pmatrix} c_{13}c_{12} & c_{13}s_{12} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{13}s_{23} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{13}c_{23} \end{pmatrix}$$

À ces paramètres s'ajoutent les 2 différences de masses Δm_{21}^2 et Δm_{31}^2 (la 3^e différence de masses n'est pas une grandeur indépendante : $\Delta m_{32}^2 = \Delta m_{31}^2 - \Delta m_{21}^2$). Ceci nous permet d'obtenir, de la même manière que pour le cas à 2 saveurs, des formules exactes pour les oscillations du neutrino à 3 saveurs dans le vide, dépendant de paramètres ne pouvant être obtenus que par l'expérience.

Il s'avère en pratique que dans de nombreuses expériences, selon les valeurs de $\frac{L}{E}$ mises en jeu, il est possible de décrire avec une bonne approximation les oscillations des neutrinos par un formalisme à 2 saveurs. Ceci est possible lorsque l'un des termes oscillants domine les autres. Les premières expériences visant à mettre en évidence les oscillations des neutrinos atmosphériques et solaires entre 1998 et 2002 ont ainsi pu donner lieu à deux descriptions des oscillations à 2 saveurs distinctes, gouvernées par les couples de paramètres $(\Delta m_{\text{atm}}^2; \theta_{\text{atm}})$ et $(\Delta m_{\text{sol}}^2; \theta_{\text{sol}})$, avec $\Delta m_{\text{sol}}^2 \ll \Delta m_{\text{atm}}^2$ et θ_{atm} et θ_{sol} du même ordre. Traditionnellement, dans le cadre du formalisme à 3 saveurs, il a été convenu que $\Delta m_{21}^2 \equiv \Delta m_{\text{sol}}^2 > 0$. Compte tenu du signe imposé de Δm_{21}^2 , deux *hiérarchies de masse* peuvent être envisagées : soit $m_1 < m_2 < m_3$, *hiérarchie normale*, soit $m_3 < m_1 < m_2$, *hiérarchie inverse*. En cas de hiérarchie normale, Δm_{31}^2 est positif, en cas de hiérarchie inverse, il est négatif. Finalement nous pouvons [1] écrire que :

$$\Delta m_{\text{sol}}^2 = \Delta m_{21}^2 \ll |\Delta m_{31}^2| \approx |\Delta m_{32}^2| \approx \Delta m_{\text{atm}}^2$$

Paramètre	Hierarchie normale	Hierarchie inverse
θ_{12} (deg)	$33, 56^{+0,77}_{-0,75}$	$33, 56^{+0,77}_{-0,75}$
θ_{23} (deg)	$41, 6^{+1,5}_{-1,2}$	$50, 0^{+1,1}_{-1,4}$
θ_{13} (deg)	$8, 46^{+0,15}_{-0,15}$	$8, 49^{+0,15}_{-0,15}$
δ (deg)	261^{+51}_{-59}	277^{+40}_{-46}
Δm_{21}^2 (10^{-5} eV ²)	$7, 50^{+0,19}_{-0,17}$	$7, 50^{+0,19}_{-0,17}$
Δm_{3l}^2 (10^{-3} eV ²)	$2, 524^{+0,039}_{-0,040}$	$-2, 514^{+0,038}_{-0,041}$

TABLE 2.1 – Résultats expérimentaux récents pour l’application expérimentale du modèle (voir [1], page 52). Le paramètre Δm_{3l}^2 est égal à Δm_{31}^2 pour la hiérarchie normale, et à Δm_{32}^2 pour la hiérarchie inverse.

Dans les expériences telles que $\frac{\Delta m_{21}^2 L}{E} \ll 1$, c’est à dire mettant en jeu des neutrinos atmosphériques ou d’accélérateurs de haute énergie, ou des expériences en réacteur sur une courte distance, il est possible d’obtenir une bonne description en annulant Δm_{21}^2 et en assimilant les termes en Δm_{31}^2 et Δm_{32}^2 dans la formule des oscillations à 3 saveurs. Il est ainsi possible [1], en développant au plus bas degré en θ_{13} , qui est plus faible que les deux autres angles de mélange, d’obtenir par exemple la probabilité approchée de conservation du neutrino muonique (processus observé pour les neutrinos atmosphériques) comme :

$$P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu) \approx 1 - \sin^2 2\theta_{23} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right)$$

ce qui justifie d’associer θ_{23} à θ_{atm} . De même dans le cas des expériences sur les antineutrinos de réacteurs à courte distance,

$$P(\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_e) = 1 - \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right)$$

θ_{13} est alors l’angle de mélange qui contrôle ce type d’expériences, petit devant les deux autres angles.

Enfin, dans le cas où $\frac{\Delta m_{31}^2 L}{E} \gg 1$ et $\frac{\Delta m_{21}^2 L}{E} \gtrsim 1$, les oscillations gouvernées par Δm_{31}^2 sont moyennées et ainsi, en ne gardant que le terme d’ordre 0 en θ_{13} , nous obtenons :

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_e) \approx 1 - \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right)$$

formule qui s’applique aux neutrinos de basse énergie provenant du Soleil, pour lesquels les effets de matière dus au Soleil sont négligeables, comme nous le verrons ; θ_{12} est associé à θ_{sol} .

Nous voyons ainsi que la description à 2 saveurs a été essentielle dans les expériences historiques qui ont permis de mesurer avec précisions la plupart des paramètres intervenant dans le modèle des oscillations à 3 saveurs. Cependant, l’approximation des oscillations à 2 saveurs ne permettant pas, entre autres choses, d’accéder à la valeur de δ et de rendre compte des effets d’interaction avec la matière, les expériences les plus récentes ont pour objectif, partiellement atteint, d’être sensibles aux oscillations sous-dominantes.

Chapitre 3

Oscillations dans la matière, effets d'interaction

Nous n'avons jusqu'à présent considéré que des cas idéalisés de propagation des neutrinos dans le vide. Au delà de son intérêt théorique, le modèle d'intégration des effets de matière que nous allons développer dans ce chapitre permet en particulier d'expliquer le déficit des neutrinos solaires de hautes énergies, et d'appliquer des corrections de matière aux expériences réalisées sur Terre.

I Modélisation sommaire des effets de l'interaction faible

Nous avons pu voir plus haut que le caractère massif des neutrinos était une première pierre pour une physique au-delà du modèle standard, cependant le modèle standard décrit les interactions des neutrinos de manière assez satisfaisante au vu de l'expérience pour les conserver dans notre modélisation. Les neutrinos étant neutres, et de masse extrêmement faible, l'interaction faible est la seule interaction à devoir être prise en compte pour modéliser les effets de matière. De plus, selon le modèle standard, les interactions que subissent le neutrino conservent la saveur.

Les interactions entre les neutrinos et la matière sont de *deux types*. En effet, la matière ordinaire étant constituée de protons, de neutrons et d'électrons, et ne contenant pas de muons ou de taus, une asymétrie d'interaction entre les trois saveurs est de fait créée. Ainsi, le premier type d'interaction ne concerne que les neutrinos électroniques et est le fruit de l'échange d'un boson W entre le neutrino électronique et un électron. Cet échange se traduit par un potentiel d'interaction ressenti par le neutrino électronique :

$$V_W = \pm \sqrt{2} G_F n_e$$

où G_F est la constante de FERMI et n_e la densité volumique d'électrons, pouvant être variable dans l'espace, et donc dans le temps au cours de la propagation du neutrino. Le signe $-$ est appliqué dans le cas de la propagation d'un antineutrino électronique.

Le second type d'interaction fait intervenir toutes les saveurs de neutrinos avec les protons, les électrons et les neutrons par l'échange d'un boson Z . La matière étant électriquement neutre, les effets de l'interaction avec les protons et les électrons se compensent exactement, seule reste la contribution de l'interaction avec les neutrons sous la forme d'un potentiel :

$$V_Z = \mp \frac{\sqrt{2}}{2} G_F n_n$$

où n_n est la densité volumique de neutrons. Cette fois, le signe $+$ est appliqué dans le cas de la propagation d'antineutrinos. [1] [3]

II Formalisme des effets de matière

Nous avons jusqu'alors rencontré deux bases de l'espace des états quantiques du neutrino, $(|\nu_\alpha\rangle)$ base des états propres de saveur et $(|\nu_i\rangle)$ base des états propres de masse. Cette dernière coïncide dans le vide avec la base des états stationnaires, mais ce n'est plus le cas dans la matière. En effet, le hamiltonien régissant la dynamique du neutrino dans la matière pourra s'écrire :

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_{\text{vide}} + \hat{\mathcal{H}}_{\text{inter.}}$$

avec $\hat{\mathcal{H}}_{\text{vide}}$ hamiltonien libre, diagonalisé par la base $(|\nu_i\rangle)$, et $\hat{\mathcal{H}}_{\text{inter.}}$ hamiltonien d'interaction, diagonalisé par la base $(|\nu_\alpha\rangle)$ comme nous l'avons justifié plus haut.

Dans la base des états propres de masse, le hamiltonien libre s'écrit à une très bonne approximation :

$$\hat{\mathcal{H}}_{\text{vide}} = \begin{pmatrix} E + \frac{m_1^2}{2E} & 0 & 0 \\ 0 & E + \frac{m_2^2}{2E} & 0 \\ 0 & 0 & E + \frac{m_3^2}{2E} \end{pmatrix}_{(|\nu_i\rangle)}$$

Or, comme l'ajout ou la suppression d'une matrice proportionnelle à l'identité ne se traduit dans le problème que par l'ajout d'une phase globale non pertinente physiquement, il est tout à fait possible de réécrire $\hat{\mathcal{H}}_{\text{vide}}$ comme :

$$\hat{\mathcal{H}}_{\text{vide}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta m_{21}^2}{2E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta m_{31}^2}{2E} \end{pmatrix}_{(|\nu_i\rangle)}$$

Dans la suite, il sera plus commode de raisonner dans la base des états propres de saveurs, la base des états propres de masses n'étant plus pertinente pour diagonaliser le hamiltonien général. Cherchons à écrire donc le hamiltonien libre dans la base des états propres de saveur :

$$\langle \nu_\alpha | \hat{\mathcal{H}}_{\text{vide}} | \nu_\beta \rangle = \sum_{i,j} U_{\alpha i} E_i \delta_{ij} U_{\beta j}^*$$

où les E_i sont donnés par l'écriture matricielle précédente, ainsi le changement de base est obtenu directement par le produit :

$$\hat{\mathcal{H}}_{\text{vide}} = U \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta m_{21}^2}{2E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta m_{31}^2}{2E} \end{pmatrix} U^\dagger$$

Dans la suite de notre développement de ce chapitre nous allons analyser les effets de matière dans le cas d'une description à « 2 saveurs » ; le cas à 3 saveurs sera analysé en section V. Le calcul, rapporté donc à « 2 saveurs », donne à une matrice proportionnelle à l'identité près :

$$\hat{\mathcal{H}}_{\text{vide}} = \frac{\Delta m^2}{4E} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}_{(|\nu_\alpha\rangle)}$$

Ainsi, nous pouvons finalement écrire le hamiltonien total sous la forme :

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{\Delta m^2}{4E} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}_{(|\nu_\alpha\rangle)} + V_W \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{(|\nu_\alpha\rangle)} + V_Z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{(|\nu_\alpha\rangle)}$$

La contribution V_Z étant proportionnelle à l'identité, elle n'est pas pertinente physiquement, ainsi seuls les effets de matière dus à l'interaction avec les électrons interviendront dans le problème. Enfin, en soustrayant une dernière fois une matrice proportionnelle à l'identité, il est possible d'écrire notre hamiltonien dans la matière sous la forme :

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{\Delta m^2}{4E} \begin{pmatrix} -(\cos 2\theta \mp A) & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & (\cos 2\theta \mp A) \end{pmatrix}_{(|\nu_\alpha\rangle)}$$

avec

$$A = \frac{2\sqrt{2}G_F n_e E}{\Delta m^2}$$

paramètre proportionnel à n_e quantifiant l'importance des effets de matière, avec un signe $-$ dans le cas de la propagation de neutrinos, et un signe $+$ dans le cas de la propagation d'antineutrinos.

Finalement, avec les nouvelles définitions :

$$\begin{cases} \Delta m_m^2 \equiv \Delta m^2 \sqrt{\sin^2 2\theta + (\cos 2\theta \mp A)^2} \\ \sin 2\theta^m \equiv \frac{\sin 2\theta}{\sqrt{\sin^2 2\theta + (\cos 2\theta \mp A)^2}} \end{cases}$$

nous pouvons [3] enfin écrire :

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{\Delta m_m^2}{4E} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta^m & \sin 2\theta^m \\ \sin 2\theta^m & \cos 2\theta^m \end{pmatrix}_{(|\nu_\alpha\rangle)}$$

Le hamiltonien dans la matière, à 2 saveurs, est donc exactement de la même forme que le hamiltonien libre, en remplaçant l'angle de mélange et la différence de masses par nos nouvelles définitions. On en déduit ainsi que la nouvelle base de diagonalisation du hamiltonien dans la matière est reliée à la base des états propres de saveurs grâce aux matrices U_m et U_m^\dagger obtenues en remplaçant θ par θ^m dans l'expression de U et U^\dagger . $\hat{\mathcal{H}}$ se diagonalise alors avec les valeurs propres 0 et $\Delta m_m^2/2E$; la nouvelle base de diagonalisation sera alors notée $(|\nu_i^m\rangle)$, base des états propre du hamiltonien dans la matière.

III Milieu à densité électronique constante

Nous supposons ici que la propagation du neutrino se fait dans un milieu matériel de densité électronique n_e constante, le hamiltonien ne dépend donc pas explicitement du temps. Il sera alors possible de reprendre la même procédure que celle débutant page 7, ce qui conduira à des probabilités à « 2 saveurs » de la même forme que dans le vide :

$$\begin{cases} P^m(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) = \sin^2 2\theta^m \sin^2 \left(\frac{\Delta m_m^2 L}{4E} \right) \\ P^m(\nu_e \rightarrow \nu_e) = 1 - \sin^2 2\theta^m \sin^2 \left(\frac{\Delta m_m^2 L}{4E} \right) \end{cases}$$

Il est alors possible de définir deux grands régimes de densité électronique, séparés par une densité résonnante. En effet, lorsque $\sin 2\theta \neq 1$, $\sin 2\theta^m$ atteint cette valeur maximale, pour une certaine valeur n_{res} de la densité électronique :

$$n_{\text{res}} \equiv \left| \frac{\Delta m^2 \cos 2\theta}{2\sqrt{2}G_F E} \right|$$

Quand la résonance se produit (si $\Delta m^2 > 0$ pour les neutrinos, ou si $\Delta m^2 < 0$ pour les antineutrinos), nous pouvons distinguer trois cas [1] :

- un régime de basse densité (ou de basse énergie) où $n_e \ll n_{\text{res}}$, les effets de matière sont sous-dominants et ce sont les oscillations dans le vide qui dominent : $\sin^2 2\theta^m \approx \sin^2 2\theta \left(1 + 2 \frac{n_e}{n_{\text{res}}} \cos^2 2\theta \right)$
- un régime résonnant pour $n_e \approx n_{\text{res}}$, les oscillations deviennent maximales, telles que $\sin^2 2\theta^m \approx 1$ quelle que soit la valeur de θ , non nulle (et différente de $\pi/2$)
- un régime de haute densité (ou de haute énergie) lorsque $n_e \gg n_{\text{res}}$ ou lorsque les conditions de résonance précédentes ne sont pas remplies, les effets de matière dissipent les oscillations et leur amplitude devient de la forme $\sin^2 2\theta^m \approx \tan^2 2\theta / \left(\frac{n_e}{n_{\text{res}}} \right)^2$.

Comme Δm_m^2 dépend explicitement de n_e , si cette densité électronique n'est pas constante le hamiltonien dépendra explicitement du temps. Il ne sera alors pas possible de résoudre l'équation de SCHRÖDINGER sous la forme exponentielle de la page 7. Nous allons, dans la section suivante, donner une approche succincte du cas à densité variable, en l'illustrant par le cas des neutrinos électroniques solaires de haute énergie.

IV Milieu à densité électronique variable, cas du Soleil

L'équation de SCHRÖDINGER est conservée dans le cas d'un hamiltonien dépendant du temps :

$$i \frac{d|\nu(t)\rangle}{dt} = \hat{\mathcal{H}}(t) |\nu(t)\rangle$$

Lorsque le hamiltonien ne dépend pas explicitement du temps, la base d'états qui le diagonalise est constituée d'états stationnaires : lorsque le système étudié est placé dans l'un de ces états, il y perdure jusqu'à une éventuelle mesure effectuée sur le système ayant pour effet de modifier son état. Lorsque le hamiltonien dépend du temps, les états qui le diagonalisent ne sont plus des états stationnaires : le système placé dans un de ces états est susceptible d'osciller d'un état propre du hamiltonien à l'autre.

Il n'est en effet plus possible d'écrire l'opérateur d'évolution temporelle comme une simple exponentielle du hamiltonien, ainsi la démarche initiée en page 7 doit prendre une nouvelle forme. On définira l'amplitude de probabilité instantanée de trouver le neutrino, représenté par $|\nu(t)\rangle$, dans un état de saveur $|\nu_\beta\rangle$ avec la notation plus commode :

$$\begin{aligned} \nu_\beta(t) &= \langle \nu_\beta | \nu(t) \rangle \\ &= \sum_i U_{\beta i}^m(t) \langle \nu_i^m(t) | \nu(t) \rangle \\ &\equiv \sum_i U_{\beta i}^m(t) \nu_i^m(t) \end{aligned}$$

Tout le problème réside donc dans la détermination des $\nu_i^m(t) = \langle \nu_i^m(t) | \nu(t) \rangle$. Nous allons ici dériver l'équation différentielle vérifiée par les $\nu_i(t)$, puis l'appliquer au modèle à « 2 saveurs » afin de mettre en évidence, de manière qualitative, le couplage entre états propres du hamiltonien causé par sa dépendance en temps. Partant de l'équation de SCHRÖDINGER,

$$\begin{aligned} i \frac{d|\nu(t)\rangle}{dt} &= i \sum_i \frac{d\nu_i^m}{dt} |\nu_i^m(t)\rangle + i \sum_j \nu_j^m(t) \frac{d|\nu_j^m(t)\rangle}{dt} \\ &= \hat{\mathcal{H}}(t) |\nu(t)\rangle = \sum_i \nu_i^m(t) E_i^m(t) |\nu_i^m(t)\rangle \end{aligned}$$

Ainsi, en fermant l'expression avec $\langle \nu_i^m(t) |$, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} i \frac{d\nu_i^m}{dt} &= E_i^m(t) \nu_i^m(t) - i \sum_j \nu_j^m(t) \langle \nu_i^m(t) | \frac{d|\nu_j^m(t)\rangle}{dt} \\ &= E_i^m(t) \nu_i^m(t) - i \sum_j \nu_j^m(t) \langle \nu_i^m(t) | \left(\sum_\alpha \frac{dU_{\alpha j}^m}{dt} |\nu_\alpha\rangle \right) \\ &= E_i^m(t) \nu_i^m(t) - i \sum_j \nu_j^m(t) \langle \nu_i^m(t) | \left(\sum_\alpha \dot{U}_{\alpha j}^m \sum_p U_{\alpha p}^{*m}(t) |\nu_p^m(t)\rangle \right) \end{aligned}$$

Et enfin [1]

$$i \frac{d\nu_i^m}{dt} = E_i^m(t) \nu_i^m(t) - i \sum_{j,\alpha} \dot{U}_{\alpha j}^m U_{\alpha i}^{*m}(t) \nu_j^m(t)$$

Nous voyons immédiatement que, $\dot{U}_{\alpha j}^m$ n'étant en général pas nul, la dépendance en temps des états propres du hamiltonien crée très directement un terme de couplage entre les $\nu_i^m(t)$.

En appliquant cette formule générale à notre cas récurrent à « 2 saveurs », nous obtenons les deux équations, résumées sous forme matricielle [1] :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \nu_1^m \\ \nu_2^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -iE_1^m(t) & -\dot{\theta}^m \\ \dot{\theta}^m & -iE_2^m(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1^m \\ \nu_2^m \end{pmatrix}$$

Ainsi, la non nullité de $\dot{\theta}^m$ provoque l'apparition de termes non diagonaux dans la matrice pseudo-hamiltonienne régissant l'évolution des $\nu_i^m(t)$ à 2 saveurs. Il est donc possible pour le neutrino de passer d'un état propre du hamiltonien à un autre.

En pratique, dans la plupart des cas, la variation de la densité électronique au cours de la propagation est faible, au sens où $|\dot{\theta}^m| \ll |E_1^m(t) - E_2^m(t)|$, la probabilité de passer d'un état propre du hamiltonien à un autre restant tout de même maximale en cas de résonance. Une telle propagation telle que la variation de la densité électronique soit faible est dite *adiabatique*. Dans un tel cas, le pseudo-hamiltonien précédent devient quasi diagonal, nous pourrions alors considérer que, bien que les états propres du hamiltonien soient eux-mêmes fluctuants (car U^m varie dans le temps), ils restent des états stationnaires, dans le sens où si le neutrino est placé dans un de ces états, alors la probabilité qu'il soit observé dans un autre état propre du hamiltonien sera très faible ; l'état du neutrino « suivra » en quelque sorte les fluctuations de l'état propre du hamiltonien.

Cas du Soleil [1]

Le Soleil est un milieu matériel gazeux, dont la densité électronique volumique décroît lentement radialement, de son centre vers l'extérieur. Les réactions de fusions nucléaires réalisées au sein du Soleil sont émettrices de neutrinos électroniques, libérés au sein du Soleil, et se propageant en direction du vide ; l'hypothèse d'adiabaticité de la propagation du neutrino est ici vérifiée pour toute énergie (impulsion) du neutrino.

Au centre du soleil, les neutrinos sont donc émis dans un état propre de saveur électronique. La densité électronique y est extrêmement élevée, et très grande devant la densité résonnante. Ainsi, en appliquant cette donnée à la définition de l'angle de mélange dans la matière, il apparaît qu'au centre du soleil l'état de saveur électronique et le premier état propre du hamiltonien dans la matière coïncident ! Le neutrino est donc émis à la fois dans un état de saveur, et dans un état « stationnaire » (au sens précédent). Selon le critère d'adiabaticité, cet état stationnaire sera donc suivi par le neutrino tout au long de son parcours dans le soleil, jusqu'à sa frontière où la densité électronique atteint une valeur nulle par continuité avec le vide. L'état du neutrino émergeant du soleil est donc tout simplement un état stationnaire dans le vide, un état propre de masse ! Il continuera alors sa course dans le vide, sans aucune oscillation, et sa détection sur terre en tant que neutrino électronique se fera avec une simple probabilité de $P(\nu_e \rightarrow \nu_e) = \sin^2 \theta_{12}$ (dans le cadre de notre modélisation à « 2 saveurs », les neutrinos solaires sont contrôlés par l'angle θ_{12}). Le déficit des neutrinos solaires de haute énergie n'est donc pas liée à des oscillations entre l'émission et la réception du neutrino, mais à une transition de saveur au sein du soleil.

L'analyse précédente n'est justifiée que pour les neutrinos de hautes énergies. En effet pour des neutrinos de plus basse énergie (la limite grossière est située autour de 2 MeV), n_{res} devient très grande devant les densités électroniques au sein du soleil et les effets de matière deviennent négligeables. Comme nous l'avons vu, ce sont alors les oscillations dans le vide qui dominent de telle sorte que la probabilité d'observer un neutrino solaire de basse énergie dans une saveur électronique prend la forme $P(\nu_e \rightarrow \nu_e) \approx 1 - \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right)$, qui en moyennant sur les oscillations s'écrit $P(\nu_e \rightarrow \nu_e) \approx 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\theta_{12}$.

Nous allons à présent terminer notre étude des oscillations des neutrinos dans la matière avec une approche du cas général à 3 saveurs.

V Oscillations à 3 saveurs de neutrinos dans la matière à densité électronique constante

L'annexe B disponible en fin de ce rapport ([5]) expose une méthode permettant de déterminer de manière approchée la matrice U^m dans une description à 3 saveurs. Par analogie avec la description à « 2 saveurs », cette méthode définit notamment les angles θ_{13}^m et θ_{12}^m par

$$\begin{cases} \sin 2\theta_{13}^m = \frac{\sin 2\theta_{13}}{\sqrt{(\cos 2\theta_{13} - \epsilon_a)^2 + \sin^2 2\theta_{13}}} \\ \sin 2\theta_{12}^m = \frac{\cos(\theta_{13}^m - \theta_{13}) \sin 2\theta_{12}}{\sqrt{(\cos 2\theta_{12} - \epsilon_\odot)^2 + \cos^2(\theta_{13}^m - \theta_{13}) \sin^2 2\theta_{12}}} \end{cases}$$

avec ϵ_a et ϵ_\odot deux paramètres de matière définis dans l'annexe et jouant des rôles similaires à A précédemment défini. L'angle θ_{23} et δ ne sont pas modifiés. Par souci de concision, nous ne recopierons pas les définitions des Δm_{mn}^2 , disponibles en annexe.

Nous allons ici nous contenter de présenter les effets de matière à 3 saveurs pour le canal $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ par un développement en petit paramètre de matière ϵ_a . Dans notre modélisation, nous faisons l'approximation que ϵ_a , θ_{13} et $\left| \frac{\Delta m_{21}^2}{\Delta m_{31}^2} \right|$ sont des infiniment petits du même ordre ; les effets de matière n'apparaissent alors dans notre développement qu'au troisième ordre.

La formule générale des oscillations dans le vide, démontrée dans le chapitre 2, permet d'obtenir la probabilité de transition pour le canal $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ au troisième ordre en θ_{13} et en $\left| \frac{\Delta m_{21}^2}{\Delta m_{31}^2} \right|$ disponible en annexe, en appliquant les effets de matière nous obtenons un développement à l'ordre le plus bas les faisant apparaître :

$$\begin{aligned} P_3^m(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) &= \sin^2 \theta_{23} \sin^2 2\theta_{13} (1 + \epsilon_a) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \\ &+ (\cos^2 \theta_{23} \sin^2 2\theta_{12} - 4 \sin \theta_{13} \sin 2\theta_{23} \sin^3 \theta_{12} \cos \theta_{12} \cos \delta) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \\ &+ \sin 2\theta_{13} \sin 2\theta_{23} \sin 2\theta_{12} \cos \delta \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \\ &- \left(\sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \theta_{23} \sin^2 \theta_{12} \right. \\ &\quad \left. - \sin 2\theta_{12} \sin \theta_{13} \sin 2\theta_{23} \left(1 + \frac{\epsilon_a}{2} \right) \cos \delta \right) \sin \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \sin \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{2E} \right) \\ &- \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{13} \sin 2\theta_{23} \sin \delta \sin \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \\ &+ \sin \theta_{13} \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{23} \sin \delta \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \sin \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{2E} \right) \end{aligned}$$

L'annexe A présente ce résultat dans le cadre de l'expérience T2K, mis en parallèle avec les développements au 2^e et au 3^e ordre de la formule des oscillations $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ dans le vide.

Conclusion

Nous avons ainsi pu, dans ce rapport, présenter l'essentiel des connaissances de base concernant les oscillations du neutrino. Comme nous l'avons vu, elles sont cependant bien évidemment incomplètes et imparfaites. En effet, le phénomène des oscillations impliquant l'existence de masses pour le neutrino, il est le premier exemple d'une physique n'étant pas décrite correctement par le modèle standard, au même titre que la matière noire, ou l'énergie noire. C'est pourquoi le neutrino, particule encore extrêmement méconnue, est aujourd'hui l'objet de nombreuses recherches, tant théoriques qu'expérimentales. Ainsi en est-il des recherches visant à déterminer si le neutrino est un fermion de DIRAC, nécessairement différent de son antiparticule, ou un fermion de MAJORANA, champ propre de la transformation CP, identique à son antiparticule [1] [6]; toujours dans le cadre de la physique au-delà du modèle standard, il est également envisagé la possibilité d'oscillations supplémentaires du neutrino en saveurs de neutrinos stériles [1], n'étant pas sensibles à l'interaction faible, ce qui expliquerait plusieurs anomalies expérimentales interprétées dans le modèle PMNS.

De manière plus personnelle, ce stage a été l'occasion pour moi de me familiariser avec la physique des particules, domaine qui m'intéressait sans que j'aie eu, jusqu'à présent, l'occasion de me confronter à la théorie. Ce fut, plus généralement, une découverte de la recherche bibliographique et une confirmation de mon attrait pour les aspect théoriques de la physique.

Bibliographie

- [1] C. GIGANTI, S. LAVIGNAC et M. ZITO : Neutrino oscillations : the rise of the PMNS paradigm (arXiv : 1710.00715v2). nov 2017.
- [2] Benoît CLÉMENT : *Physique des particules*. Dunod, 2013.
- [3] G. BARENBOIM : Neutrino physics (arXiv : 1504.07037v1). avr 2015.
- [4] Stéphane LAVIGNAC et Marco ZITO : Les neutrinos n'ont pas livré tous leurs secrets. *Reflets de la physique n° 50*, sep 2016.
- [5] Ara IOANNISIAN et Stefan POKORSKI : Three neutrino oscillations in matter (arXiv : 1801.10488v3 et arXiv : 1801.10488v4). 2018.
- [6] Christine MARQUET et Laurent SIMARD : Le neutrino est-il identique à son antiparticule ? *Reflets de la physique n° 24*, mai 2011.

Annexe A

Formules des oscillations à 3 saveurs approchées pour le canal $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$

Ces formules ont été obtenues par développements limités de la formule générale des oscillations à 3 saveurs, dans le vide et dans la matière. Les effets de matière modifiant Δm_{21}^2 n'ont cependant pas été inclus, car n'intervenant que dans des termes peu importants d'un point de vue numérique dans le cadre de l'expérience T2K, servant de support pour ce développement.

Le canal $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ a en effet été testé et observé dans le cadre de l'expérience T2K, cherchant à le mettre en évidence expérimentale. La faible valeur de θ_{13} empêchait jusqu'alors d'observer l'oscillation $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$, contrairement à l'oscillation $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ comme nous l'avons déjà mentionné. T2K a donc également permis de déterminer des valeurs non nulles de θ_{13} en 2011. [1]

Formule des oscillations $\mu \rightarrow e$ dans le vide au deuxième ordre en θ_{13} et en $\left| \frac{\Delta m_{21}^2}{\Delta m_{31}^2} \right|$:

$$\begin{aligned} P_2(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) = & \sin^2 \theta_{23} \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) + \cos^2 \theta_{23} \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \\ & + \sin 2\theta_{12} \sin \theta_{13} \sin 2\theta_{23} \cos \delta \sin \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \sin \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{2E} \right) \\ & - \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{13} \sin 2\theta_{23} \sin \delta \sin \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \end{aligned}$$

Formule des oscillations $\mu \rightarrow e$ dans le vide au troisième ordre en θ_{13} et en $\left| \frac{\Delta m_{21}^2}{\Delta m_{31}^2} \right|$:

$$\begin{aligned} P_3(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) = & \sin^2 \theta_{23} \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \\ & + (\cos^2 \theta_{23} \sin^2 2\theta_{12} - 4 \sin \theta_{13} \sin 2\theta_{23} \sin^3 \theta_{12} \cos \theta_{12} \cos \delta) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \\ & + \sin 2\theta_{13} \sin 2\theta_{23} \sin 2\theta_{12} \cos \delta \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \\ & - (\sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \theta_{23} \sin^2 \theta_{12} - \sin 2\theta_{12} \sin \theta_{13} \sin 2\theta_{23} \cos \delta) \sin \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \sin \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{2E} \right) \\ & - \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{13} \sin 2\theta_{23} \sin \delta \sin \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \\ & + \sin \theta_{13} \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{23} \sin \delta \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \sin \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{2E} \right) \end{aligned}$$

Formule des oscillations $\mu \rightarrow e$ dans la matière au troisième ordre en θ_{13} , en $|\varepsilon_a|$ et en $\left| \frac{\Delta m_{21}^2}{\Delta m_{31}^2} \right|$:

$$\begin{aligned}
 P_3^m(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) = & \sin^2 \theta_{23} \sin^2 2\theta_{13} (1 + \varepsilon_a) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \\
 & + (\cos^2 \theta_{23} \sin^2 2\theta_{12} - 4 \sin \theta_{13} \sin 2\theta_{23} \sin^3 \theta_{12} \cos \theta_{12} \cos \delta) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \\
 & + \sin 2\theta_{13} \sin 2\theta_{23} \sin 2\theta_{12} \cos \delta \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \\
 & - \left(\sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \theta_{23} \sin^2 \theta_{12} \right. \\
 & \quad \left. - \sin 2\theta_{12} \sin \theta_{13} \sin 2\theta_{23} \left(1 + \frac{\varepsilon_a}{2} \right) \cos \delta \right) \sin \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \sin \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{2E} \right) \\
 & - \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{13} \sin 2\theta_{23} \sin \delta \sin \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \\
 & + \sin \theta_{13} \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{23} \sin \delta \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \sin \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{2E} \right)
 \end{aligned}$$

$$\text{avec } \varepsilon_a = \frac{2\sqrt{2}G_F n_e E}{\Delta m_{31}^2 - \sin^2 \theta_{12} \Delta m_{21}^2}$$

Ara Ioannisian^{1,2} and Stefan Pokorski³¹ *Yerevan Physics Institute, Alikhanian Br. 2, 375036 Yerevan, Armenia*² *Institute for Theoretical Physics and Modeling, 375036 Yerevan, Armenia*³ *Institute of Theoretical Physics, Faculty of Physics,
University of Warsaw, ul. Pasteura 5, PL-02-093 Warsaw, Poland*

Following similar approaches in the past, the Schrodinger equation for three neutrino propagation in matter of constant density is solved analytically by two successive diagonalizations of 2x2 matrices. The final result for the oscillation probabilities is obtained directly in the conventional parametric form as in the vacuum but with explicit simple modification of two mixing angles (θ_{12} and θ_{13}) and mass eigenvalues. In this form, the analytical results provide excellent approximation to numerical calculations and allow for simple qualitative understanding of the matter effects.

PACS numbers:

The MSW effect [1] for the neutrino propagation in matter attracts a lot of experimental and theoretical attention. Most recently, the discussion is focused on the DUNE experiment [2].

On the theoretical side, a large number of numerical simulations of the MSW effect in matter with a constant or varying density has been performed. Although, in principle, sufficient for comparing the theory predictions with experimental data, they do not provide a transparent physical interpretation of the experimental results. Therefore, several authors have also published analytical or semi-analytical solutions to the Schroedinger equation for three neutrino propagation in matter of constant density, in various perturbative expansions [3–5]. The complexity of the calculation, the transparency of the final result and the range of its applicability depend on the chosen expansion parameter.

In this short note we solve the Schroedinger equation in matter with constant density, using the approximate see-saw structure of the full Hamiltonian in the electroweak basis. This way one can diagonalize the 3x3 matrix by two successive diagonalizations of 2x2 matrices (similar approaches have been used in the past, in particular in ref. [4] and [5]). We specifically have in mind the parameters of the DUNE experiment but our method is applicable for their much wider range. The final result for the oscillation probabilities is obtained directly in the conventional parametric form as in the vacuum but with modified two mixing angles and mass eigenvalues[11], similarly to the well known results for the two-neutrino propagation in matter. The three neutrino oscillation probabilities in matter have been presented in the same form as here in the recent ref. [6], where the earlier results obtained in ref. [5] are rewritten in this form. The form of our final results can also be obtained after some simplifications from ref.[4]. Our approach can be easily generalized to non-constant matter density by dividing the path of the neutrino trajectory in the matter to layers and assuming constant density in each layer.

The starting point is the Schroedinger equation

$$i \frac{d}{dx} \nu = \mathcal{H} \nu \quad (1)$$

where \mathcal{H} is the Hamiltonian in matter. In the electroweak basis it reads

$$\mathcal{H} = U \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta m_{\odot}^2}{2E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta m_a^2}{2E} \end{pmatrix} U^\dagger + \begin{pmatrix} V(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

The matrix U is the neutrino mixing matrix in the vacuum. The mass squared differences are defined as $\Delta m_{\odot}^2 \equiv m_2^2 - m_1^2$ ($\approx 7.5 \cdot 10^{-5} eV^2$) and $\Delta m_a^2 \equiv m_3^2 - m_1^2$ ($\approx \pm 2.5 \cdot 10^{-3} eV^2$, positive sign is for normal mass ordering and negative sign for inverted one). Here $V(x)$ is the neutrino weak interaction potential energy $V = \sqrt{2} G_F N_e$ (N_e is electron number density) and we take it in this section to be x-independent. The neutrino oscillation probabilities are determined by the S -matrix elements

$$S_{\alpha\beta} = T e^{-i \int_{x_0}^{x_f} \mathcal{H}(x) dx} \quad (3)$$

For a constant V and in order to obtain our results in the same form as for the oscillation probabilities in the vacuum, it is convenient to rewrite the S -matrix elements as follows:

$$S_{\alpha\beta} = e^{-i U_m \mathcal{H}_m U_m^\dagger (x_f - x_0)} = U_m e^{-i \mathcal{H}_m L} U_m^\dagger \quad (4)$$

The matrix \mathcal{H}_m is the Hamiltonian in matter in the mass eigenstate basis:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{H}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{H}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{H}_3 \end{pmatrix} \quad (5)$$

and the U_m is the neutrino mixing matrix in matter. Defining $\phi_{21} = (\mathcal{H}_2 - \mathcal{H}_1)L$ and $\phi_{31} = (\mathcal{H}_3 - \mathcal{H}_1)L$, we can write

$$S_{\alpha\beta} = \left[U_m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\phi_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\phi_{31}} \end{pmatrix} U_m^\dagger \right] \quad (6)$$

Here we neglect irrelevant overall phase, $e^{-i\mathcal{H}_1 L}$. The neutrino transition probabilities do not depend on the overall phase of the S matrix.

The remaining task is to find the eigenvalues of \mathcal{H} and the mixing matrix U_m :

$$\mathcal{H} = U_m \mathcal{H}_m U_m^\dagger \quad (7)$$

It is convenient to do it in two steps, first calculating the hamiltonian in a certain auxiliary basis. This way, to an excellent approximation, we can diagonalize the 3x3 matrix by two successive diagonalizations of the 2x2 matrices.

The auxiliary basis [7, 8] is defined by the following equation

$$\mathcal{H}' = U^{aux\dagger} \mathcal{H} U^{aux} \quad \text{and} \quad S = U^{aux} e^{(-i\mathcal{H}'L)} U^{aux\dagger} \quad (8)$$

where

$$U^{aux} = \mathcal{O}_{23} U^\delta \mathcal{O}_{13} \quad (9)$$

and the rotations \mathcal{O}_{ij} are defined by the decomposition of the mixing matrix U in the vacuum (see eq. 2) as follows:

$$\begin{aligned} U &= \mathcal{O}_{23} U^\delta \mathcal{O}_{13} U^{\delta*} \mathcal{O}_{12} \\ &= \begin{pmatrix} c_{13}c_{12} & c_{13}s_{12} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{13}s_{23} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{13}c_{23} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

where

$$U^\delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\delta} \end{pmatrix} \quad (11)$$

($c_{12} \equiv \cos \theta_{12}$, $s_{12} \equiv \sin \theta_{12}$ etc).

The matrices \mathcal{O}_{ij} are orthogonal matrices. It is more convenient to rewrite the matrix U in another form

$$\begin{aligned} U &\rightarrow \tilde{U} = U \cdot U^\delta = \mathcal{O}_{23} U^\delta \mathcal{O}_{13} \mathcal{O}_{12} \\ &= \begin{pmatrix} c_{13}c_{12} & c_{13}s_{12} & s_{13} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{13}s_{23}e^{i\delta} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{13}c_{23}e^{i\delta} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

Using eqs. (2,8) we obtain

$$\begin{aligned} \mathcal{H}' &= \mathcal{O}_{13}^T U^{\delta*} \mathcal{O}_{23}^T \mathcal{H} \mathcal{O}_{23} U^\delta \mathcal{O}_{13} \\ &= \begin{pmatrix} V c_{13}^2 & s_{12}c_{12} \frac{\Delta m_{\odot}^2}{2E} & s_{13}c_{13} V \\ s_{12}c_{12} \frac{\Delta m_{\odot}^2}{2E} & (c_{12}^2 - s_{12}^2) \frac{\Delta m_{\odot}^2}{2E} & 0 \\ s_{13}c_{13} V & 0 & \frac{\Delta m_{ee}^2}{2E} + V s_{13}^2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\Delta m_{ee}^2 = c_{12}^2 \Delta m_a^2 + s_{12}^2 (\Delta m_a^2 - \Delta m_{\odot}^2) \quad (14)$$

The term $s_{12}^2 \frac{\Delta m_{\odot}^2}{2E}$ has been subtracted from the diagonal elements; it gives an overall phase to the S-matrix and according to the comments after eq. (6) is irrelevant.

The definition of Δm_{ee}^2 coincides with one of the definitions of the effective mass squared differences measured at reactor experiments [9, 10]

This matrix has a see-saw structure, with the (13), (31) elements much smaller than the (33) element and can be put in an almost diagonal form by two rotations

$$\mathcal{O}_{12}^m{}^T \mathcal{O}_{13}'^T \mathcal{H}' \mathcal{O}_{13}^m = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{H}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{H}_3 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta m_{21}^2}{2E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta m_{31}^2}{2E} \end{pmatrix} + \mathcal{H}_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

After the first rotation we have

$$\mathcal{O}_{13}'^T \mathcal{H}' \mathcal{O}_{13}' = \begin{pmatrix} \sin^2 \theta_{13}' \frac{\Delta m_{ee}^2}{2E} + \cos^2(\theta_{13} + \theta_{13}')V & \cos \theta_{13}' s_{12} c_{12} \frac{\Delta m_{\odot}^2}{2E} & 0 \\ \cos \theta_{13}' s_{12} c_{12} \frac{\Delta m_{\odot}^2}{2E} & (c_{12}^2 - s_{12}^2) \frac{\Delta m_{\odot}^2}{2E} & \sin \theta_{13}' s_{12} c_{12} \frac{\Delta m_{\odot}^2}{2E} \\ 0 & \sin \theta_{13}' s_{12} c_{12} \frac{\Delta m_{\odot}^2}{2E} & \cos^2 \theta_{13}' \frac{\Delta m_{ee}^2}{2E} + \sin^2(\theta_{13} + \theta_{13}')V \end{pmatrix} \quad (17)$$

where

$$\sin 2\theta_{13}' = \frac{\epsilon_a \sin 2\theta_{13}}{\sqrt{(\cos 2\theta_{13} - \epsilon_a)^2 + \sin^2 2\theta_{13}}}, \quad (18)$$

and

$$\epsilon_a = \frac{2EV}{\Delta m_{ee}^2} \quad (19)$$

We can safely neglect the (23), (32) elements which are generated after the first rotation (see Appendix A) and diagonalize the remaining 2x2 sub-matrix with the second rotation

$$\sin 2\theta_{12}^m = \frac{\cos \theta_{13}' \sin 2\theta_{12}}{\sqrt{(\cos 2\theta_{12} - \epsilon_{\odot})^2 + \cos^2 \theta_{13}' \sin^2 2\theta_{12}}}, \quad \text{where} \quad \epsilon_{\odot} = \frac{2EV}{\Delta m_{\odot}^2} (\cos^2(\theta_{13} + \theta_{13}') + \frac{\sin^2 \theta_{13}'}{\epsilon_a}). \quad (20)$$

The eigenvalues of \mathcal{H} are

$$\mathcal{H}_2 - \mathcal{H}_1 \equiv \frac{\Delta m_{21}^2}{2E} = \frac{\Delta m_{\odot}^2}{2E} \sqrt{(\cos 2\theta_{12} - \epsilon_{\odot})^2 + \cos^2 \theta_{13}' \sin^2 2\theta_{12}}, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_3 - \mathcal{H}_1 &\equiv \frac{\Delta m_{31}^2}{2E} = \cos^2 \theta_{13}' \frac{\Delta m_{ee}^2}{2E} + \sin^2(\theta_{13} + \theta_{13}')V \\ &\quad - \frac{1}{2}[(c_{12}^2 - s_{12}^2) \frac{\Delta m_{\odot}^2}{2E} + \sin^2 \theta_{13}' \frac{\Delta m_{ee}^2}{2E} + \cos^2(\theta_{13} + \theta_{13}')V] \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\Delta m_{21}^2}{2E} \\ &= \frac{\Delta m_{ee}^2}{2E} \sqrt{(\cos 2\theta_{13} - \epsilon_a)^2 + \sin^2 2\theta_{13}} \\ &\quad - \frac{1}{4} \frac{\Delta m_{ee}^2}{2E} \sqrt{(\cos 2\theta_{13} - \epsilon_a)^2 + \sin^2 2\theta_{13}} + \frac{1}{4} [\frac{\Delta m_{ee}^2}{2E} + V] + \frac{1}{4E} (\Delta m_{21}^2 - \Delta m_{\odot}^2 \cos 2\theta_{12}) \end{aligned} \quad (22)$$

Finally, for the mixing matrix in matter we obtain

$$\tilde{U}_m = U^{aux} \mathcal{O}_{13}' \mathcal{O}_{12}^m = \mathcal{O}_{23} U^{\delta} \mathcal{O}_{13} \mathcal{O}_{13}' \mathcal{O}_{12}^m = \mathcal{O}_{23} U^{\delta} \mathcal{O}_{13}^m \mathcal{O}_{12}^m, \quad (24)$$

For the matrix U defined in eq.(10) we get

$$U_m = \mathcal{O}_{23} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_{13}^m & 0 & \sin \theta_{13}^m \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_{13}^m & 0 & \cos \theta_{13}^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_{12}^m & \sin \theta_{12}^m & 0 \\ -\sin \theta_{12}^m & \cos \theta_{12}^m & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (25)$$

with $\theta_{13}^m = \theta_{13} + \theta'_{13}$ and

$$\sin 2\theta_{13}^m = \frac{\sin 2\theta_{13}}{\sqrt{(\cos 2\theta_{13} - \epsilon_a)^2 + \sin^2 2\theta_{13}}}, \quad \cos 2\theta_{13}^m = \frac{\cos 2\theta_{13} - \epsilon_a}{\sqrt{(\cos 2\theta_{13} - \epsilon_a)^2 + \sin^2 2\theta_{13}}} \quad (26)$$

and

$$\sin 2\theta_{12}^m = \frac{\cos \theta'_{13} \sin 2\theta_{12}}{\sqrt{(\cos 2\theta_{12} - \epsilon_\odot)^2 + \cos^2 \theta'_{13} \sin^2 2\theta_{12}}}, \quad \cos 2\theta_{12}^m = \frac{\cos 2\theta_{12} - \epsilon_\odot}{\sqrt{(\cos 2\theta_{12} - \epsilon_\odot)^2 + \cos^2 \theta'_{13} \sin^2 2\theta_{12}}} \quad (27)$$

In summary the mixing matrix in matter, U_m , is given by the following change of the parameters from the vacuum solution:

$$\theta_{12} \rightarrow \theta_{12}^m \quad (\text{eq.27})$$

$$\theta_{13} \rightarrow \theta_{13}^m \quad (\text{eq.26})$$

$$\theta_{23}^m \equiv \theta_{23}$$

$$\delta^m \equiv \delta.$$

The mass eigenvalues are given by eqs.21,22,23.

The oscillation probabilities $P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}$ ($\alpha, \beta = e, \mu, \tau$) have the same forms as for the vacuum oscillations with mass eigenstates as above and with replacements $\theta_{12} \rightarrow \theta_{12}^m$ and $\theta_{13} \rightarrow \theta_{13}^m$. For the $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ transition we have

$$\begin{aligned} P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_e} = & \sin^2 2\theta_{13}^m s_{23}^2 \left[c_{12}^m \sin^2 \frac{\phi_{31}}{2} + s_{12}^m \sin^2 \frac{\phi_{32}}{2} \right] \\ & + \frac{1}{2} c_{13}^m \sin 2\theta_{13}^m \sin 2\theta_{12}^m \sin 2\theta_{23} \cos \delta \sin \frac{\phi_{21}}{2} \sin \frac{\phi_{31} + \phi_{32}}{2} \\ & - c_{13}^m \sin 2\theta_{13}^m \sin 2\theta_{12}^m \sin 2\theta_{23} \sin \delta \sin \frac{\phi_{21}}{2} \sin \frac{\phi_{31}}{2} \sin \frac{\phi_{32}}{2} \\ & + \left[c_{13}^m \sin^2 2\theta_{12}^m (c_{23}^2 - s_{23}^2 s_{13}^m) + \frac{1}{4} c_{13}^m \sin 2\theta_{13}^m \sin 4\theta_{12}^m \sin 2\theta_{23} \cos \delta \right] \sin^2 \frac{\phi_{21}}{2} \end{aligned} \quad (28)$$

where

$$\phi_{ij} = \frac{\Delta m_{ij}^2}{2E} L \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (L = 1285 \text{ km for DUNE}) . \quad (29)$$

This approximate solution is valid for all energies. Numerically our result is identical to the approximation of two angles rotation in [4] and the 0th order result of [5]. For anti-neutrino oscillations $P_{\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta}$, $V \rightarrow -V$ and $\delta \rightarrow -\delta$. For normal mass hierarchy Δm_a^2 is positive and for inverted mass hierarchy it is negative.

Our solutions are illustrated in Fig. 1 and 2 for $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ oscillation at DUNE distance for several values of δ_{CP} and compared with the oscillation probabilities in the vacuum, shown by the dotted curves. They are the reference point of our discussion.

The matter effects and their dependence on δ_{CP} observed in those plots have easy explanation in terms of our analytic formulas. For the sake of definiteness, we focus on the region of the first maximum ($E = (1 - 6)\text{GeV}$), accessible in the DUNE experiment.

First of all we notice that the modification in matter of the solar sector parameters, angle θ_{12} and Δm_{21}^2 , have very small effect when the phase $\phi_{21} \ll 1$ (as it is for DUNE distance and energies). In the first term of the rhs eq (28) the dependance on the ϕ_{21} is sub-leading. In the 2nd and 3rd terms we have combinations $\sin 2\theta_{12}^m \sin \frac{\phi_{21}}{2}$ and that for small phases can be rewritten as

$$\sin 2\theta_{12}^m \sin \frac{\Delta m_{21}^2}{4E} L \simeq \sin 2\theta_{12}^m \frac{\Delta m_{21}^2}{4E} L = \cos \theta'_{13} \sin 2\theta_{12} \frac{\Delta m_\odot^2}{4E} L .$$

which is almost independent on matter ($\cos \theta'_{13} \simeq 1$ at $E = 1 - 6\text{GeV}$). Therefore the dependence on matter due to change of $\theta_{12} - \Delta m_{21}^2$ is very suppressed at DUNE.

The most important effect is the dependence of the oscillation probability on the angle θ_{13} which has larger (smaller) values in matter than in the vacuum for normal (inverted) neutrino mass hierarchies (and opposite for antineutrinos). Thus the oscillation probabilities have larger(lower) oscillation amplitudes for normal (inverted) neutrino mass hierarchies (and opposite for antineutrinos). In other words the matter of the Earth is amplifying the

effect of the mass ordering on neutrino oscillations. The dependence on the angle θ_{13} enters multiplicatively in the first three terms of eq (28), whereas the fourth term is small in the region of the first maximum. Therefore the matter effects relative to the oscillations in the vacuum do not depend on the value of δ_{CP} , as it is seen in Fig. 1 and 2. Moving to the next resonances (lower energies) the difference between oscillations in matter and in the vacuum remain qualitatively similar, although some small differences can be seen due to the fact that the change in the angle θ_{13} is smaller.

Finally, in Fig. 3 we show the accuracy of the analytical solutions comparing them with numerical/exact results.

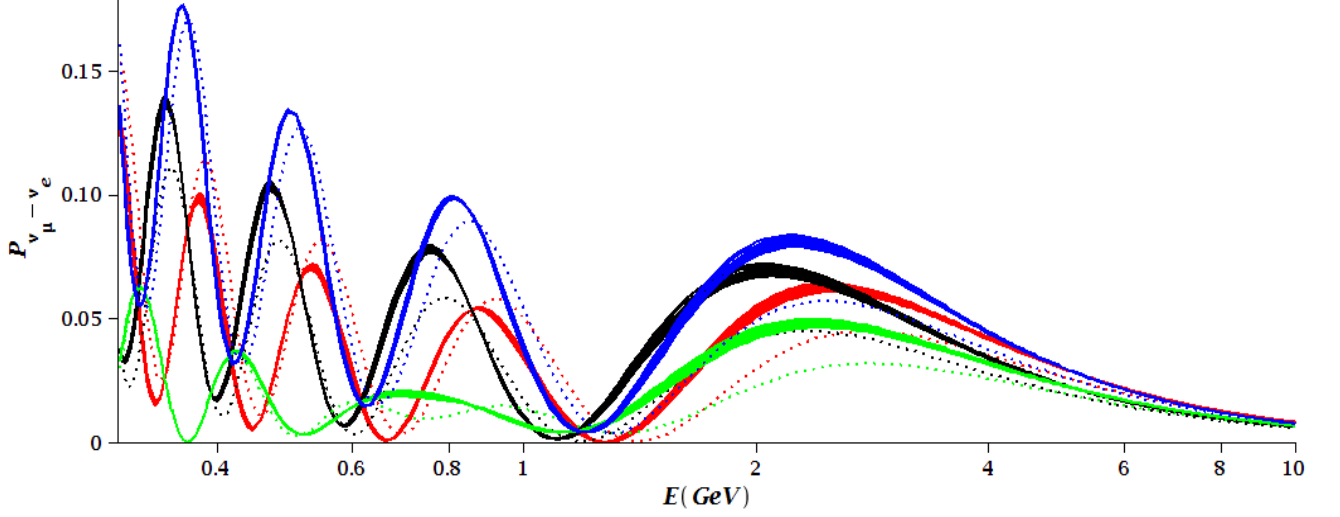


FIG. 1: $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ oscillation probability at DUNE for normal mass hierarchy, $\delta_{cp} = 0$ (red), $\delta_{cp} = \frac{\pi}{2}$ (green), $\delta_{cp} = \pi$ (black), $\delta_{cp} = -\frac{\pi}{2}$ (blue). Thickness of the plots are from varying constant/uniform matter density 2.5 - 3 g/cm³. Dotted plots are for vacuum oscillations

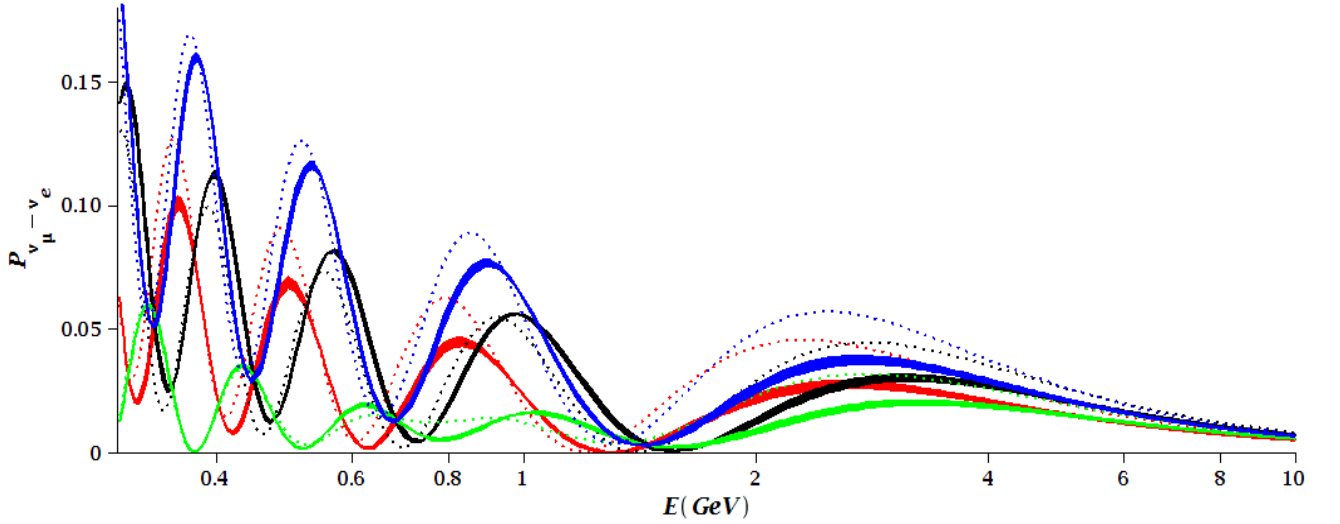


FIG. 2: $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ oscillation probability at DUNE for inverted mass hierarchy, $\delta_{cp} = 0$ (red), $\delta_{cp} = \frac{\pi}{2}$ (green), $\delta_{cp} = \pi$ (black), $\delta_{cp} = -\frac{\pi}{2}$ (blue). Thickness of the plots are from varying constant/uniform matter density 2.5 - 3 g/cm³. Dotted plots are for vacuum oscillations

Appendix

In ordinary perturbation expansion in the basis of our solutions we estimate the size of effect of the neglected elements (23), (32) in eq. (17).

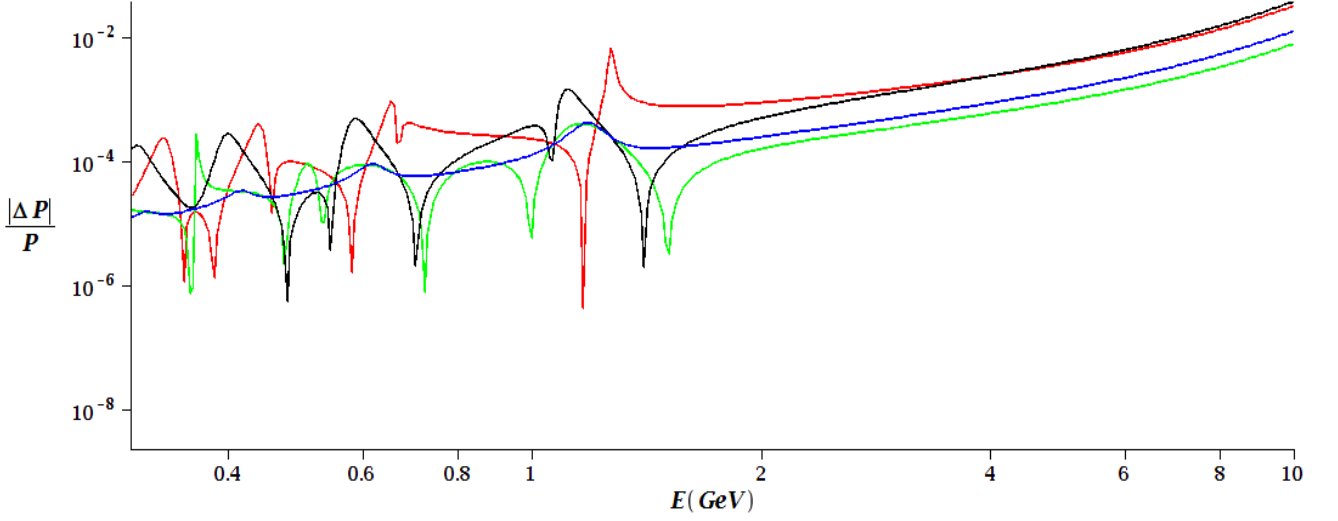


FIG. 3: $\frac{|\Delta P|}{P} \equiv \frac{|P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_e}^{num} - P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_e}^{anal}|}{P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_e}^{num}}$. The relative error of our analytic result to the exact (numeric) $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ oscillation probability for normal mass hierarchy, $\delta_{cp} = 0$ (red), $\delta_{cp} = \frac{\pi}{2}$ (green), $\delta_{cp} = \pi$ (black), $\delta_{cp} = -\frac{\pi}{2}$ (blue). Matter density 2.6 g/cm³.

We divide the hamiltonian into two parts

$$S = e^{-i\mathcal{H}L} = e^{-i\mathcal{H}_0L - i\Delta\mathcal{H}L} \quad (30)$$

Here $\mathcal{H}_0 \equiv U_m \text{diag}(0, \frac{\Delta m_{21}^2}{2E}L, \frac{\Delta m_{31}^2}{2E}L) U_m^\dagger$ with our solutions for U_m (eq 25) and mass square differences (eqs. 21 -23). $\Delta\mathcal{H}(23) = \Delta\mathcal{H}(32) = \sin\theta'_{13} \sin 2\theta_{12} \frac{\Delta m_{\odot}^2}{4E}$ and all other elements in $\Delta\mathcal{H}$ are zeros. We treat $\Delta\mathcal{H}$ as a perturbation.

By making use well known identity $e^{a+b} = e^a T e^{\int_0^1 dt e^{-a \cdot t} b e^{a \cdot t}}$ we get

$$S = S_0 + S_1 + \dots \quad (31)$$

$$S_0 = U_m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\phi_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\phi_{31}} \end{pmatrix} U_m^\dagger, \quad (32)$$

$$S_1 = U_m \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathcal{A} \\ 0 & 0 & \mathcal{B} \\ \mathcal{A} & \mathcal{B} & 0 \end{pmatrix} U_m^\dagger \quad (33)$$

where

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \sin\theta_{12}^m \sin\theta'_{13} \frac{\sin 2\theta_{12}}{2} \frac{\Delta m_{\odot}^2}{\Delta m_{31}^2} (1 - e^{-i\phi_{31}}) \\ \mathcal{B} &= \cos\theta_{12}^m \sin\theta'_{13} \frac{\sin 2\theta_{12}}{2} \frac{\Delta m_{\odot}^2}{\Delta m_{31}^2 - \Delta m_{21}^2} (e^{-i\phi_{31}} - e^{-i\phi_{21}}) \end{aligned}$$

S_0 is our solution for the neutrino transition matrix elements and the S_1 is its first order corrections. $|\mathcal{A}|, |\mathcal{B}|$ are at least smaller than 0.5% for all energies, therefore our 0th order solution, S_0 , is working excellently.

Acknowledgements. One of us (A.I.) is grateful to the CERN Theory group for its hospitality and to the DUNE members for useful discussions at Fermilab in summer 2017. A.I. is especially grateful to Pilar Coloma and Maury Goodman for underlining the importance of presenting the oscillation parameters in a simple form. S.P. is partially supported by the National Science Centre, Poland, under research grants DEC-2015/19/B/ST2/02848,

DEC-2015/18/M/ST2/00054 and DEC-2014/15/B/ST2/02157.

-
- [1] L. Wolfenstein, Phys. Rev. D **17** (1978) 2369. S. P. Mikheev and A. Y. Smirnov, Sov. J. Nucl. Phys. **42** (1985) 913 [Yad. Fiz. **42** (1985) 1441].
 - [2] R. Acciarri *et al.* [DUNE Collaboration], arXiv:1512.06148 [physics.ins-det].
 - [3] S. T. Petcov, Phys. Lett. B **214** (1988) 259. doi:10.1016/0370-2693(88)91479-7 E. K. Akhmedov, R. Johansson, M. Lindner, T. Ohlsson and T. Schwetz, JHEP **0404** (2004) 078 doi:10.1088/1126-6708/2004/04/078 [hep-ph/0402175]. A. Cervera, A. Donini, M. B. Gavela, J. J. Gomez Cadenas, P. Hernandez, O. Mena and S. Rigolin, Nucl. Phys. B **579** (2000) 17 Erratum: [Nucl. Phys. B **593** (2001) 731] doi:10.1016/S0550-3213(00)00606-4, 10.1016/S0550-3213(00)00221-2 [hep-ph/0002108]. H. Nunokawa, S. J. Parke and J. W. F. Valle, Prog. Part. Nucl. Phys. **60** (2008) 338 doi:10.1016/j.pnpnp.2007.10.001 [arXiv:0710.0554 [hep-ph]].
 - [4] M. Blennow and A. Y. Smirnov, Adv. High Energy Phys. **2013** (2013) 972485 doi:10.1155/2013/972485 [arXiv:1306.2903 [hep-ph]].
 - [5] P. B. Denton, H. Minakata and S. J. Parke, JHEP **1606** (2016) 051 doi:10.1007/JHEP06(2016)051 [arXiv:1604.08167 [hep-ph]].
 - [6] P. B. Denton, H. Minakata and S. J. Parke, arXiv:1801.06514 [hep-ph].
 - [7] P. I. Krastev and S. T. Petcov, Phys. Lett. B **205** (1988) 84. doi:10.1016/0370-2693(88)90404-2
 - [8] O. L. G. Peres and A. Y. Smirnov, Nucl. Phys. B **680** (2004) 479 doi:10.1016/j.nuclphysb.2003.12.017 [hep-ph/0309312].
 - [9] C. Patrignani *et al.* [Particle Data Group], Chin. Phys. C **40** (2016) no.10, 100001. doi:10.1088/1674-1137/40/10/100001
 - [10] H. Nunokawa, S. J. Parke and R. Zukanovich Funchal, Phys. Rev. D **72** (2005) 013009 doi:10.1103/PhysRevD.72.013009 [hep-ph/0503283].
 - [11] The results of this paper have been presented as private communication by one of us (A.I) to the members of the T2HKK collaboration in December 2017.