

Université Paris Sud 11

PHYSIQUE NUCLEAIRE
au début du XXI^{eme} siècle

**synthèse des
NOTES DE COURS**

de

**MASTER 1 & MAGISTERE
DE PHYSIQUE FONDAMENTALE**

et

**MASTER 2
NOYAUX, PARTICULES, ASTROPARTICULES ET COSMOLOGIE**

Elias KHAN
Institut Universitaire de France
Institut de Physique Nucléaire - Orsay
IN2P3 - CNRS

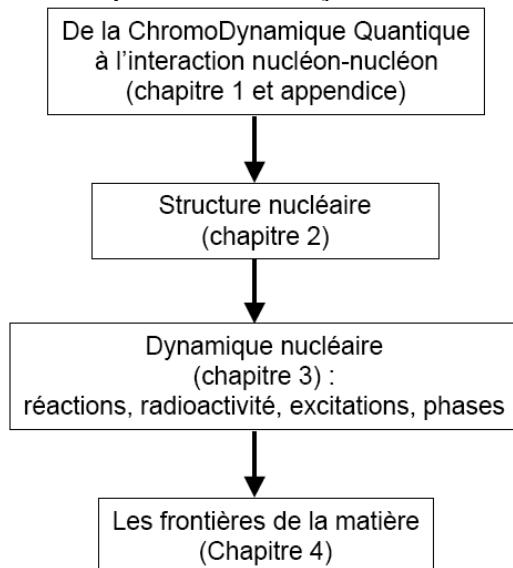
2010 / 2011

AVANT-PROPOS

Souvent évocatrice des années 50 et de l'ère des centrales, la physique nucléaire s'est pourtant depuis bel et bien modernisée. Le dessein de ce cours est de présenter les connaissances de base de cette matière sous forme moderne et synthétique. « Quels progrès majeurs depuis les années 50 ? », demandera l'incrédule. L'interaction entre nucléons se dérive désormais à partir de la QCD (chapitre 1), problème qui tourmenta Bethe et Feynman. La théorie quantique des champs relativiste permet de décrire microscopiquement le noyau (chapitre 2) et sa structure en couches. Nous comptons maintenant environ une dizaine de radioactivités différentes (chapitre 3), bien au-delà des trois premières lettres de l'alphabet grec. Les nombreuses transitions de phases nucléaires sont désormais perceptibles expérimentalement : normale/superfluide, « évaporation » du noyau, plasma de quarks et de gluons (chapitre 3). Ajoutons à cela la production noyaux exotiques et la synthèse de nouveaux éléments les plus lourds ($Z \sim 118$) aux confins de la table de Mendeleïev (chapitre 4). Enfin l'astrophysique nucléaire recèle toujours de nombreuses questions comme la nucléosynthèse, ou la structure des étoiles à neutrons, sortes de noyaux géants en rotation (les pulsars).

Ce cours vise à présenter la hiérarchie des concepts de la physique nucléaire sans rentrer dans le formalisme détaillé (qui nécessiterait un niveau M2 minimum, des connaissances en théorie quantique des champs et en formalisme de seconde quantification). Il s'adresse donc aux étudiants (ou enseignants ou curieux), ayant des bases de physique quantique, typiquement au niveau Licence 3. En effet, le formalisme un peu lourd ne doit pas occulter la richesse de la physique subatomique et il est possible d'en comprendre la physique en s'affranchissant des « détails » mathématiques. L'objectif est de placer la physique nucléaire contemporaine dans un cadre général : ainsi notre fil conducteur sera la nucléosynthèse, évoquée au début de chaque chapitre. Les relations avec les hadrons et la physique des particules seront aussi décrites. Les annexes et l'appendice forment de ce point de vue une articulation importante.

Le plan du cours se schématisé simplement de la façon suivante :



Finalement je tiens à remercier C. Augier dont je suis redevable de certaines figures, ainsi que les collègues m'ayant fait part de leurs conseils, remarques et corrections.

Orsay, le 3 janvier 2011

PHYSIQUE NUCLEAIRE

au début du XXI^{eme} siècle

Chapitre 1 : L'interaction nucléonique

- 1. Introduction**
- 2. Nucléosynthèse primordiale**
- 3. De QCD à l'interaction nucléon-nucléon**
 - a. Nouvelle échelle : nucléons et pions
 - b. Fluctuations du vide, polarisation du vide et corrections radiatives
 - c. Le potentiel d'interaction nucléon-nucléon
 - d. La persistance de la symétrie d'isospin
 - e. Au-delà du terme central
- 4. La superfluidité nucléaire**
- 5. Conclusion**
- 6. Annexe 1 : Symétries et lois de conservation : Noether et Casimir**
- 7. Annexe 2 : Caractéristiques des particules élémentaires de la matière**
- 8. Annexe 3 : Les bosons de jauge et interactions fondamentales**
- 9. Annexe 4 : Accélérateurs**

Chapitre 2 : La structure des noyaux

- 1. Introduction**
- 2. Nucléosynthèse stellaire**
 - a. Histoire d'une étoile
 - b. Cycles pp
 - c. La redoutable particule alpha
- 3. Le problème à N corps**
- 4. Du champ moyen aux nombres magiques**
 - a. La structure en couches
 - b. Spin et parité des états nucléaires
- 5. Une symétrie qui persiste : l'isospin**
- 6. Applications**
 - a. Une sonde expérimentale : les réactions de transfert
 - b. Les noyaux étranges
- 7. La superfluidité nucléaire**
 - a. Origine et preuves expérimentales
 - b. Interprétation microscopique : l'appariement de type BCS
 - c. Enjeux de la superfluidité nucléaire
- 8. Conclusion**
- 9. Annexe 1 : Le problème à N corps et le principe de moindre action**
 - a. Le principe de moindre action mène à l'équation de Schrödinger
 - b. Application au problème à N corps
 - c. L'exemple du champ moyen statique du noyau : justifications et implications
 - d. La théorie de la fonctionnelle en densité

Chapitre 3 : Processus nucléaires dynamiques

- 1. Introduction**
- 2. Réactions nucléaires**
 - a. Section efficace
 - b. Réactions spontanées : la radioactivité
 - i. Une dizaine de radioactivités
 - ii. Activité, dangerosité d'une source nucléaire
- 3. Excitations collectives**
 - a. Vibrations
 - b. Rotations
- 4. Approches nucléaires de type physique statistique**
 - a. La goutte liquide
 - i. Les paraboles de masses dans les désintégrations par interaction faible
 - ii. La désintégration alpha
 - iii. La fission et la fusion
 - b. Gaz de Fermi
 - c. Les phases de la matière nucléaire
- 5. Conclusions : nucléosynthèse stellaire explosive**
- 6. Annexe 1:** le modèle du gaz de Fermi
- 7. Annexe 2 :** théorie de la diffusion
 - a. L'équation intégrale de la diffusion
 - b. La méthode des déphasages

Chapitre 4 : Les frontières de la matière

- 1. Les noyaux exotiques**
- 2. Les noyaux superlourds**
- 3. L'antimatière et la matière étrange**
- 4. La nucléosynthèse**
- 5. Les pulsars sont des noyaux géants en rotation**
- 6. Annexe 1 :** chronologie des découvertes en physique subatomique

Appendice : La synthèse des hadrons

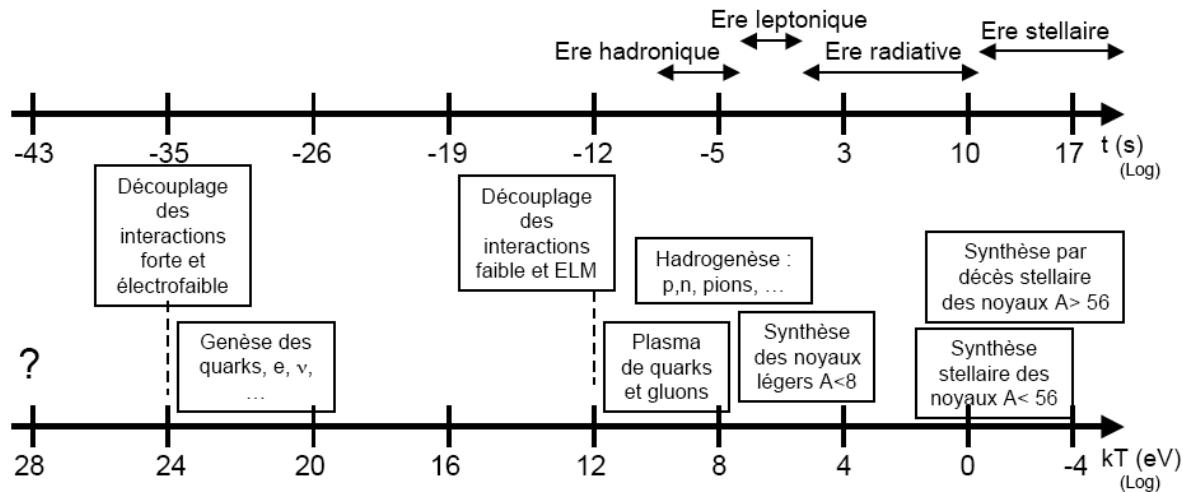
- 1. Introduction**
- 2. Le modèle des quarks**
 - a. Les mésons
 - b. Les baryons
- 3. Propriétés des hadrons**
 - a. La masse
 - b. La couleur
 - c. La mer
- 4. Conclusion**
- 6. Annexe 1 :** unités et ordres de grandeurs, rappels de relativité restreinte

Chapitre 1 : L'interaction nucléonique

En 1953 Hans Bethe relatait déjà que les physiciens avaient concentré plus d'efforts sur le problème de l'interaction nucléon-nucléon que sur tout autre question scientifique dans l'histoire de l'humanité. Pourquoi une telle difficulté ? C'est l'objet de ce chapitre. Nous montrerons aussi qu'une étape décisive a été franchie dans ce domaine ces dernières années (section 3).

1. Introduction

Notre fil conducteur est la synthèse de la matière, et plus particulièrement des noyaux. Nous commençons donc chaque chapitre de ce cours par une brève esquisse de la nucléosynthèse. La figure ci-dessous résume l'histoire de la matière du Big Bang aux étoiles.



A l'issue de l'hadrogenèse, 10^{-4} s ($kT \sim 100$ MeV) après le Big Bang, toute la production primordiale de mésons et de baryons donne finalement, par désintégrations successives, des neutrinos, des électrons et des protons (cf Appendice). Des neutrons sont également présents, par la recombinaison des protons avec les électrons, en raison la durée de vie importante du neutron (15 minutes). L'Univers entre alors dans l'ère leptonique : seuls les leptons, comme l'électron, peuvent être produits par le rayonnement, en raison de leur faible masse. Cette ère s'achève environ quelques secondes après le Big Bang ($kT \sim 1$ MeV) lorsque le bain thermique de photons ne permet plus de produire des leptons et antileptons. Débute alors l'ère radiative où les photons ne produisent plus de particules, mais interagissent avec la matière. C'est pendant les ères leptoniques et radiatives que les premiers noyaux se sont formés, lors du premier quart d'heure après le Big-Bang.

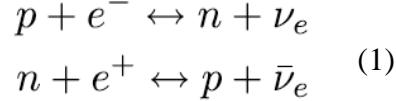
Notons que l'ère radiative dure environ 1 million d'années, jusqu'à ce que les protons se combinent avec les électrons pour former les atomes d'hydrogène. Le rayonnement n'interagit pratiquement plus avec la matière (découplage). L'Univers entre dans l'ère stellaire qui continue de nos jours, et que nous aborderons au prochain chapitre.

A $kT \sim 10$ MeV l'Univers est donc principalement composé de photons, neutrons, protons, électrons, positrons, neutrinos et antineutrinos. Notons que les photons sont très majoritaires : il y a environ un milliard de photons pour un nucléon. Les protons sont les hadrons les plus

stables. Les neutrons sont en équilibre avec les protons par réactions de capture d'électrons, de positrons et de neutrinos.

2. Nucléosynthèse primordiale

Lors du refroidissement, neutrons et protons sont en équilibre en proportions similaires car la température et la densité de leptons sont assez élevées pour entretenir en permanence les réactions :

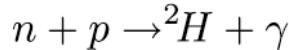


Lorsque la première seconde après le Big Bang vient de s'écouler, vers $kT \sim 1$ MeV, les électrons et positrons n'interagissent plus suffisamment avec les protons et neutrons car la densité de leptons devient trop faible pour enclencher les réactions ci-dessus. Le rapport du nombre de neutrons et de protons est alors fixé par la distribution de Boltzmann :

$$\frac{n}{p} = e^{-\frac{m_n c^2 - m_p c^2}{kT}}$$

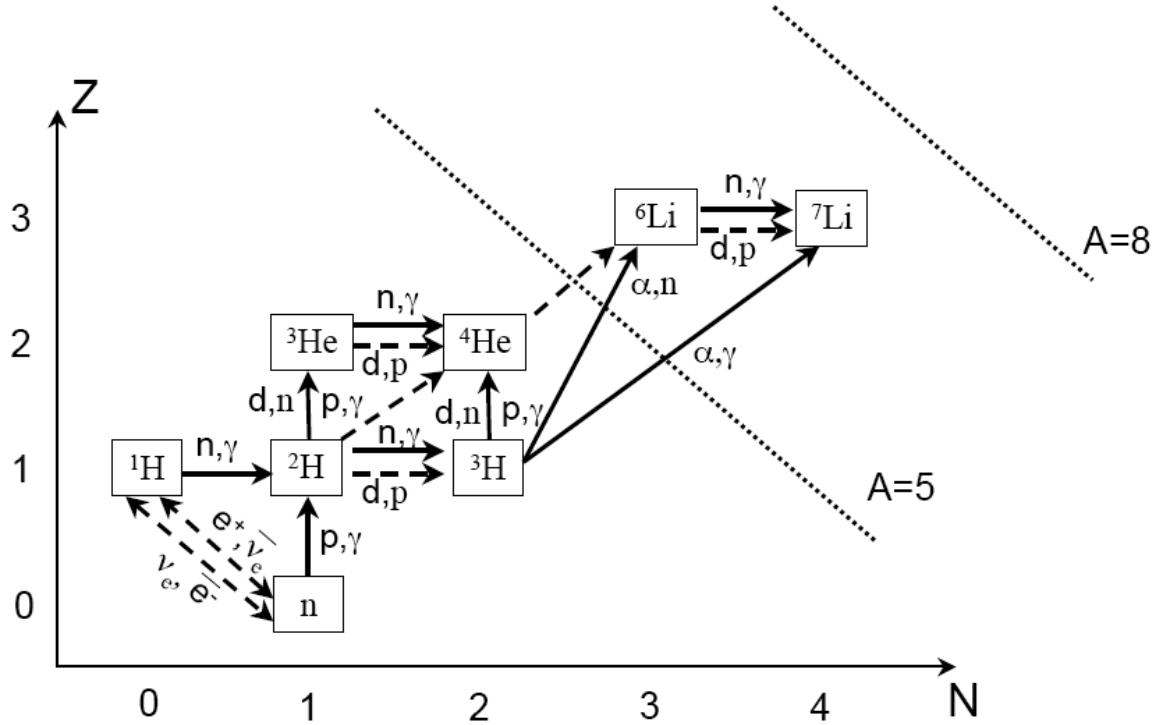
Ce rapport vaut environ 15% et est « gelé » (les masses du neutron et du proton sont données dans l'appendice). La décroissance du neutron ne modifie pas ce taux car sa vie moyenne de 15 min est encore très grande par rapport à l'âge de l'Univers. Notons que les 4 interactions fondamentales sont impliquées dans la détermination de ce taux : les interactions fortes et électromagnétiques déterminent la différence de masse entre le neutron et le proton. Les interactions faible et gravitationnelle déterminent la température T au-dessous de laquelle neutrons et protons ne sont plus en équilibre par les réactions (1).

S'enclenche alors, pendant un quart d'heure, les premières réactions de synthèse des noyaux. La température est suffisante pour permettre aux noyaux chargés électriquement de surmonter la répulsion coulombienne des protons et de fusionner. L'une des premières réactions est la fusion des protons et neutrons pour donner du deutérium (d ou 2H) :



Le deutérium est stable mais son énergie de liaison est très faible ($B=2,3$ MeV) : il se « casse » facilement comme nous le verrons. Son abondance est donc très sensible à l'environnement astrophysique (température, densité) ; la mesure de cette abondance constitue ainsi un test précis pour la cosmologie.

La figure ci-dessous est une carte des noyaux : chaque noyau étant caractérisé par un nombre Z de protons et N de neutrons, il sera symbolisé par une case dans cette carte. Elle montre les principales réactions qui synthétisent les éléments légers lors de la nucléosynthèse primordiale.



**Carte des noyaux montrant les réactions de nucléosynthèse primordiale. La notation (d,p) signifie :
 $X+d \rightarrow Y+p$**

Au bout d'un quart d'heure quand la température atteint $kT \sim 500$ keV, les réactions nucléaires cessent car la densité n'est plus suffisante pour les poursuivre. En raison de l'inexistence de noyaux liés pour $A=5$ et $A=8$, la nucléosynthèse primordiale ne produit presque pas de noyaux plus lourds : les taux de réactions sont négligeables. Pourquoi n'y a-t-il pas de tels noyaux liés pour $A=5$ et $A=8$? Cherchons la réponse dans l'interaction entre les nucléons qui les cimente pour en faire un noyau.

Pour décrire la nucléosynthèse, il est essentiel de comprendre les propriétés de l'interaction entre les nucléons. Nous verrons que le problème est non-trivial en raison de la charge de couleur des gluons qui rend QCD non-perturbative aux énergies nucléaires.

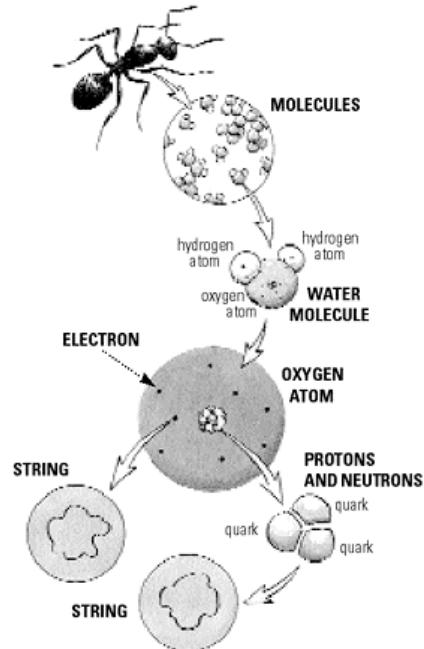
3. De QCD à l'interaction nucléon-nucléon

a. Nouvelle échelle : nucléons et pions

Comment modéliser un système de N objets en interaction? Cette question, extrêmement générale, concerne l'étude de la structure de la matière à toutes les échelles : quarks, nucléons, atomes, molécules, agrégats, nanophysique, physique du solide, ...

La première étape consiste à choisir la bonne échelle pour les objets afin de décrire et prédire le système global de N objets (ex : nucléons pour le noyau, ...). Ce choix **des degrés de liberté**, arbitraire en principe, est en fait guidé par deux tendances opposées. La première impose une échelle pour les objets aussi petite que possible afin de décrire « microscopiquement » le système. La compréhension et la prédition du système en seront plus fondées car on utilisera les composants élémentaires de la matière. De plus, si les échelles sont assez petites, il est également possible de tirer des informations sur les

interactions fondamentales. Par exemple, s'il était possible de décrire un noyau à partir de quarks et de gluons, la comparaison des prédictions nucléaires avec l'expérience nous renseignerait sur l'interaction fondamentale entre ces quarks et gluons : la ChromoDynamique Quantique (QCD)



Quel degré de liberté choisir pour décrire des systèmes complexes ? (d'après http://www.pbs.org/wgbh/nova/teachers/activities/3012_elegant.html)

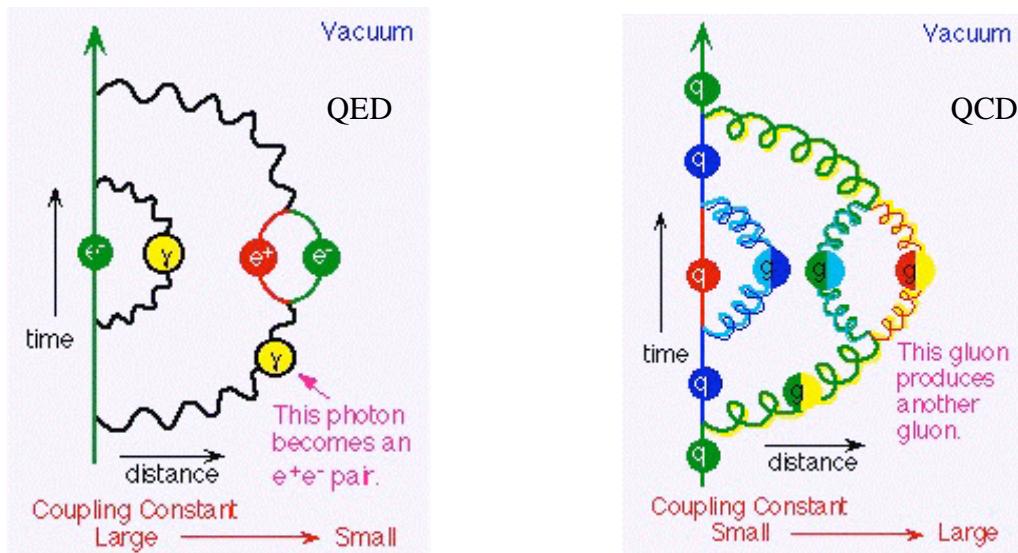
La deuxième tendance cherche au contraire à imposer une échelle aussi grande que possible afin de faciliter et simplifier le traitement des N objets en interaction. Ainsi il serait absurde et impossible d'étudier un système de N molécules en interaction à partir de l'ElectroDynamique Quantique (QED), qui décrit les interactions élémentaires entre photons, et électrons. La force inter-moléculaire de Van der Waals est bien mieux adaptée et permet de prédire le comportement de molécules en interaction. Pourtant la force de Van der Waals n'est pas une interaction élémentaire, mais bien une force effective qui, en principe, pourrait se dériver de QED.

Une fois les degrés de liberté choisis, on comprend que le système global de N objets va être influencé par les échelles inférieure et supérieure. L'influence des échelles inférieures provient de la structure interne composite des objets. L'influence des échelles supérieures provient de la proximité des N objets entre eux ($N > 2$) : par exemple, dans le cas de N fermions, le principe de Pauli génère une influence du milieu sur deux objets en interaction en leur interdisant certains états de diffusion. On parle ainsi d'**effectivité** : l'interaction entre deux objets aux petites distances (~ grandes énergies) va dépendre fortement de leur structure interne, et par ailleurs le milieu externe dans lequel sont plongés ces deux objets peut influer également sur leur interaction et sur le traitement du problème dit à N corps.

Le noyau est le prototype du système à N corps où ces deux tendances s'affrontent. Les degrés de liberté généralement choisis sont les nucléons. Depuis les années 90 (S. Weinberg) des progrès théoriques et expérimentaux importants ont été réalisés à la fois du côté de l'effectivité à l'échelle inférieure (lien avec QCD) mais aussi du côté de l'échelle supérieure (milieu nucléaire exotique).

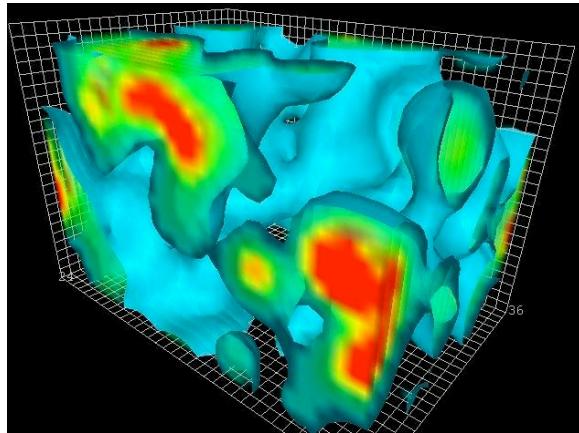
b. Fluctuations du vide, polarisation du vide & corrections radiatives

En mécanique quantique les opérateurs de champs - électromagnétique par exemple - ont un écart quadratique moyen non nul. Cela signifie qu'il est possible de trouver un résultat non-nul lors d'une mesure de ce champ, même en l'absence de tout photon. Ceci peut être interprété comme des **fluctuations du vide** qui génèrent des paires virtuelles e^+e^- , tout en respectant le principe d'incertitude d'Heisenberg énergie/temps. La prise en compte de ces fluctuations du vide pour le calcul d'observables en théorie quantique des champs (TQC) s'appelle les **corrections radiatives**. Ces fluctuations du vide générant des particules chargées, on assiste à un effet d'écrantage : un électron dans le vide va attirer les positrons et repousser les électrons des fluctuations du vide. La constante de couplage de l'interaction électromagnétique est modifiée : elle augmente lorsque l'on s'approche de l'électron initial. Cet effet d'interaction entre les particules « réelles » et les particules virtuelles des fluctuations du vide est appelé **polarisation du vide**. Il modifie les constantes de couplages entre particules. Il est aussi bien présent en QED qu'en QCD, où dans ce cas ce sont les quarks et les gluons qui polarisent le vide.



Fluctuations du vide conduisant à une polarisation (modification des constantes de couplages) pour un électron (QED-à gauche) et un quark (QCD-à droite)

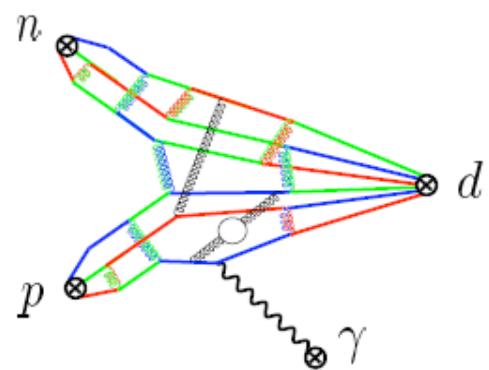
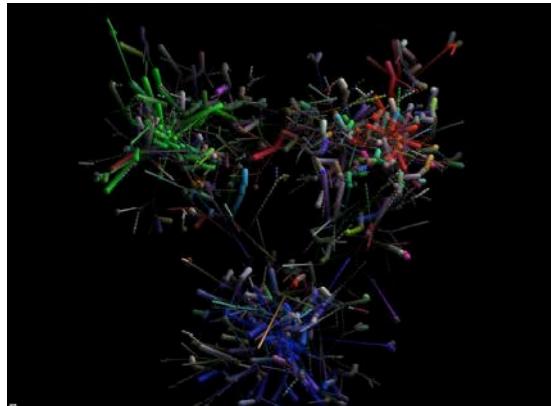
Les gluons, bosons médiateurs de l'interaction forte (appelée ChromoDynamique Quantique, QCD) ont une charge de couleur, ce qui a des conséquences importantes : les gluons interagissent entre eux. Ce paramètre g n'est pas petit, donc les gluons génèrent un fort champ de couleur. En raison de la charge des gluons, le vide est rempli de gluons virtuels, créés, interagissant puis disparaissant (polarisation du vide). Il est aussi composé de paires virtuelles de quarks-antiquarks chargés de couleurs, qui émettent et absorbent des gluons eux-mêmes chargés. Le vide de QCD est en fait extrêmement compliqué, comme le montre la figure ci-dessous. Ce calcul très lourd a été effectué grâce à une discrétisation sur un réseau en espace et temps.



Calculs sur réseau de la répartition spatiale de la charge de couleur dans le vide de QCD. Animations :
<http://www.physics.adelaide.edu.au/theory/staff/leinweber/VisualQCD/ImprovedOperators/>

La polarisation du vide en QCD conduit à représenter un quark chargé comme entouré d'un nuage de gluons virtuels eux aussi chargés. La charge de couleur du quark est en quelque sorte « diluée » dans l'espace. Ceci conduit à un effet inhabituel : lorsque deux quarks s'approchent, ils interagissent moins (liberté asymptotique) et lorsqu'ils s'éloignent, ils ressentent une interaction plus importante car la charge intégrée est plus grande (confinement). Pour des distances trop grandes ($>$ quelques fm, 10^{-15} m), la charge intégrée ne varie plus et l'interaction forte devient négligeable en raison de sa courte portée.

Si la description du vide en QCD est déjà analytiquement impossible et numériquement à peine esquissable (QCD sur réseau), il n'est pas possible de décrire précisément un système de 3 quarks (baryon comme le nucléon) ou une paire quark-antiquark (méson). Si l'on prend conscience qu'un nucléon n'est pas juste 3 quarks en interaction, mais une soupe influente de gluons et de quarks chargés, il n'y a plus de forte justification à décrire l'interaction entre 2 nucléons à partir de la QCD exacte. Ainsi, de nombreuses observables du nucléon, comme le spin, ont une contribution importante de la part de la mer de quarks et de gluons.



A gauche - vue d'artiste des interactions entre les 3 quarks de valence au sein d'un nucléon (www.lactamme.polytechnique.fr). A droite – schéma de la réaction $n+p \rightarrow d+\gamma$ (d'après nucl-th/0008064).

Il n'est donc pas possible de modéliser précisément un hadron à partir de QCD en raison du caractère non-perturbatif de celle ci, qui génère une « soupe » de quarks et de gluons chargés de couleur. Il est donc par essence inadéquat de décrire l'interaction entre 2 baryons (ici les nucléons) à partir de l'interaction fondamentale QCD. Cela serait équivalent à tenter de

décrire l'interaction entre deux molécules, chacune composées de plusieurs dizaines d'électrons et de protons, à partir de l'électrodynamique quantique (QED). Cela serait très (trop) lourd. On préfère ainsi changer d'échelle et considérer les molécules comme objets élémentaires, tout en tenant compte des effets de leur structure interne de manière effective. Ainsi la force de Van der Waals n'est rien d'autre qu'une interaction *effective* dont les paramètres sont ajustés sur l'expérience. Mais la forme de cette interaction est, quant à elle, dictée par des impératifs physiques. Qui aurait l'idée de vouloir décrire un gaz de molécules à partir de QED ? Il en va de même pour les nucléons, leur soupe de quarks et de gluons et QCD.

Un noyau sera ainsi décrit comme des nucléons interagissant par une interaction effective, dont les paramètres sont déterminés par l'expérience, mais dont la forme résulte du cadre théorique des théories des champs effectives, qui sort du cadre de ce cours. Notons que depuis les années 2000 des progrès importants ont été obtenus dans ce domaine. Il a fallu en effet attendre les années 90 pour qu'une personnalité comme S. Weinberg lance l'idée des théories effectives pour les nucléons.

c. Le potentiel d'interaction nucléon-nucléon

Il est donc adéquat de changer d'échelle : le constituant de base (i.e. le degré de liberté) est le nucléon. Comment modéliser l'interaction entre les nucléons ? Cette approche est dite effective car il ne s'agit pas d'une interaction fondamentale de la nature : c'est de la théorie quantique des champs appliquée à l'échelle du nucléon et du noyau. Néanmoins cette interaction se déduit des propriétés de QCD, plus précisément des effets de QCD à basse énergie. Le prix à payer est d'ajuster des constantes sur l'expérience (comme les réactions de diffusion nucléon-nucléon) mais la forme des termes est donnée par l'approche effective (analogie avec la force de Van der Waals).

Les interactions fondamentales étant décrites par l'échange de bosons (annexe 3), quel est, par analogie, le (les ?) boson médiateur de notre interaction effective nucléon-nucléon ? Un moyen élégant de l'introduire est de remarquer qu'expérimentalement les nucléons ont tous une parité (annexe 2) positive. Il y a donc une brisure de la symétrie chirale associée à la parité à l'échelle des nucléons, alors qu'à l'échelle des quarks, QCD respecte la symétrie chirale (il y a autant de quarks de chiralité droite que gauche). L'origine de la brisure de symétrie chirale est à rechercher dans la soupe complexe qu'est le nucléon.

Or le Lagrangien effectif doit respecter les mêmes symétries que QCD. Nous sommes donc confrontés à une situation où le Lagrangien effectif à l'échelle des nucléons respecte la symétrie chirale, mais pas ses solutions (solutions des équations d'Euler-Lagrange). La brisure spontanée de symétrie (annexe 1) permet de réconcilier ces deux aspects : la symétrie chirale est donc spontanément brisée : les solutions du système ne vérifient pas la symétrie du Lagrangien. La conséquence est l'apparition de bosons médiateurs de masse nulle (bosons de Goldstone) : on peut montrer que ce sont les pions. Mais comme la symétrie chirale n'est pas une symétrie de jauge locale (annexe 1), on ne peut pas invoquer le mécanisme de Higgs pour donner une masse aux pions. Cependant on peut introduire des termes explicites de masse dans le Lagrangien, qui donnent leurs masses aux pions et nucléons. Ces masses proviennent de celles des quarks qui les constituent, elles-mêmes générées par la brisure spontanée de symétrie électrofaible (annexe 1).

Il viendrait peut-être au lecteur imaginatif l'idée de générer les bosons médiateurs de l'interaction nucléon-nucléon en imposant une invariance de jauge locale d'isospin, à l'instar des interactions fondamentales. Il serait tentant en effet de passer de la symétrie SU(2) d'isospin des nucléons (symétrie de jauge globale) à une symétrie de jauge locale en rendant la phase locale. Cela fut tenté en 1954 par Yang et Mills. Le problème est que dans ce formalisme, les $4^2 - 1 = 3$ bosons doivent impérativement être de masse nulle et de spin 1, à l'instar des gluons ou du photon. En effet, le formalisme d'invariance de jauge locale s'écroule si on ajoute à la main un terme de masse qui brise explicitement par construction cette symétrie (non-renormalisabilité). Les pions sont de spin nul (appencice). Les mésons ρ (de spin 1) pourraient correspondre, mais leur masse est bien loin d'être nulle. Cette tentative fut donc abandonnée, mais inspira le mécanisme de génération des bosons de jauge des interactions fondamentales.

Considérant que l'interaction nucléon-nucléon est donc véhiculée par le pion, il est possible d'en faire une première approche analytique, en généralisant le potentiel d'interaction au cas d'un médiateur de masse quelconque. En effet, dans le cas d'un médiateur de masse nulle (le photon), le potentiel Coulombien est en $1/r$. Il est de portée infinie car véhiculé par une particule de masse nulle.

Dans le vide, le photon se propage comme un potentiel Φ qui suit les lois de l'électromagnétisme (équations de Maxwell), avec

$$\square \Phi(\vec{r}, t) = 0$$

On vérifiera que dans le cas limite d'un phénomène statique, la solution de cette équation donne bien un potentiel d'interaction en $1/r$; quantiquement, il s'agit du photon.

En physique quantique, cette équation se retrouve en écrivant la relation énergie/impulsion du photon ($E^2 = p^2 c^2$), et en affectant les correspondances suivantes aux opérateurs :

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad \vec{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla}$$

On retrouve alors l'équation de propagation du photon dans le vide, puisque :

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

Remarquons que le potentiel d'interaction est donné par la solution de l'équation du mouvement (ici l'équation de Maxwell) car c'est le médiateur de l'interaction.

Généralisons au cas d'une particule de masse m . La relation énergie/impulsion s'écrit :

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

En utilisant les correspondances ci-dessus pour les opérateurs, on aboutit à l'équation dite de Klein-Gordon, qui régit la propagation d'une particule libre et de spin nul dans le vide :

$$(\square - \mu^2) \Phi(\vec{r}, t) = 0$$

avec

$$\mu = \frac{mc}{\hbar}$$

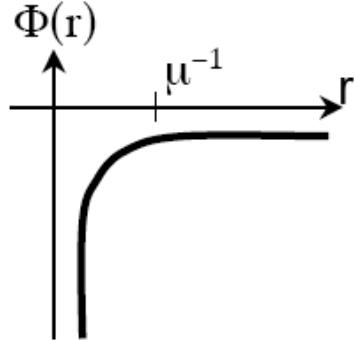
L'équation de Klein-Gordon, pour un système stationnaire et à symétrie sphérique, donne :

$$\frac{d^2(r\Phi)}{dr^2} = \mu^2 \cdot (r\Phi)$$

Et la solution s'écrit :

$$\Phi(r) = g \frac{e^{-\mu r}}{r}$$

C'est le potentiel de Yukawa. Le médiateur massique génère ainsi un potentiel de portée finie (ici pour le cas attractif $g < 0$) :



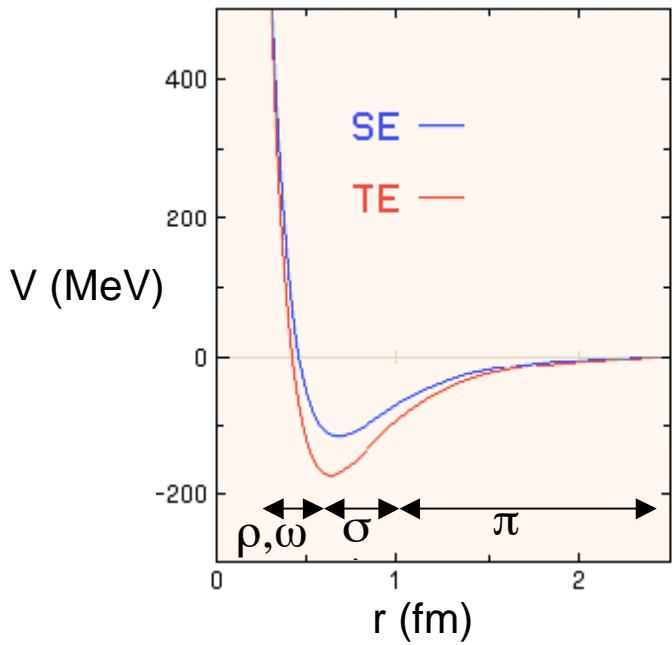
Cette expression générale redonne bien le potentiel Coulombien dans le cas où la masse tend vers 0.

La porté spatiale typique de ce potentiel est donné par (on retrouve la relation masse-portée) :

$$\mu^{-1} = \frac{\hbar}{mc}$$

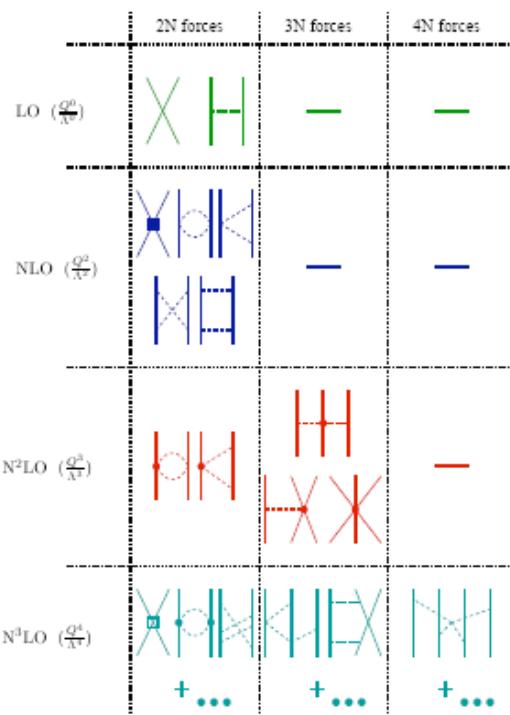
Comme les pions sont médiateurs, $mc^2 \sim 140$ MeV, donc $\mu^{-1} \sim 1,5$ fm. C'est la portée caractéristique de l'interaction forte entre deux nucléons. Notons que c'est par le raisonnement inverse que Yukawa put prédire la masse du pion en 1935, qui fut détecté en 1947.

On a ainsi bâti une interaction effective avec le pion comme médiateur. L'interaction entre les nucléons doit être attractive et de courte portée pour expliquer l'existence des noyaux. Mais d'autre part, elle est très répulsive à très courte portée (l'origine de cette répulsion, liée à QCD, est encore en discussion) : c'est le cœur dur qui génère la saturation de la densité nucléaire. Il faut donc utiliser plusieurs bosons médiateurs, un affecté à chaque domaine d'espace, suivant la relation masse-portée. L'interaction nucléon-nucléon se décompose ainsi schématiquement en trois régions de l'espace. À grande portée (~ 2 fm) elle est modélisée par l'échange d'un pion (pseudoscalaire-isovecteur : $J=0, T=1$ (J est le spin et T l'isospin, voir l'annexe 2), masse de 140 MeV). À moyenne portée (~ 1 fm) elle peut être décrite par l'échange de 2 pions. Cette partie du potentiel est en fait décrite à l'aide du méson σ , de masse de l'ordre de 550 MeV. Ce méson est de type pseudoscalaire-isoscalaire ($J=0, T=0$) et n'existe pas dans la nature. Sa nature virtuelle (toujours absorbée après avoir été émise) et effective peut expliquer cette absence (bien qu'elle soit sujette à discussion). À plus courte-portée (~ 0.2 fm) il faut inclure des mésons plus lourds (~ 800 MeV) : l'isoscalaire ω , et l'isovecteur ρ .



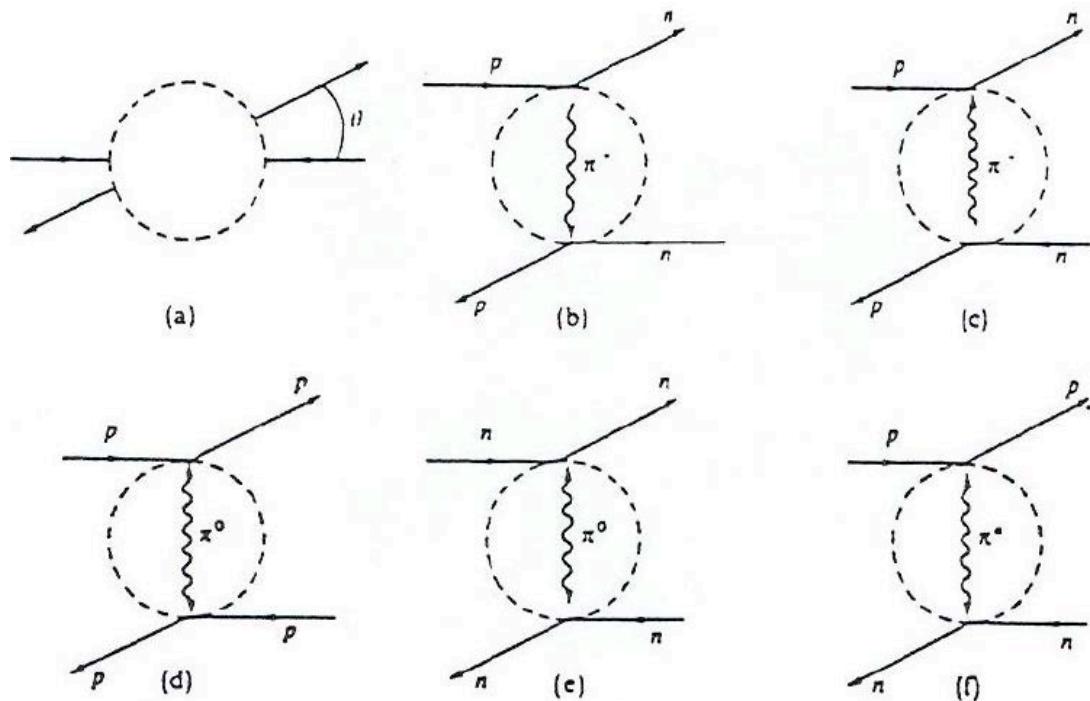
Potentiel nucléon-nucléon S=1, T=0 (en bleu) et S=0,T=1 (en rouge). Les régions d'applications des mésons sont indiquées.

Au début des années 90, S. Weinberg suggéra alors l'utilisation de théories des champs effectives non-perturbatives pour décrire l'interaction nucléon-nucléon. Elles donnent une justification plus profonde, en lien avec QCD à la forme de l'interaction nucléon-nucléon. La figure ci-dessous montre la hiérarchie des termes obtenus par cette approche : il s'agit de diagrammes de Feynman où les lignes continues représentent les nucléons, et les lignes en pointillés les pions. A l'ordre le plus bas (leading order ou LO), on reconnaît une interaction de contact entre nucléons, et un terme d'échange d'un pion. A l'ordre suivant (next leading order ou NLO), interviennent les termes avec échange de deux pions. A l'ordre suivant (N^2LO) apparaît naturellement l'interaction à 3 corps entre les nucléons. Ce développement systématique et ordonné nous renseigne ainsi précisément sur l'interaction nucléon-nucléon comme par exemple la genèse de l'interaction à trois corps. Son origine tient à la structure non élémentaire des nucléons (voir section e)). A l'ordre suivant des termes à 4 corps apparaissent. Il est important de noter que grâce à la structure du développement de Taylor du Lagrangien effectif, le terme à 3 corps est moins important que celui à deux corps, et celui à 4 corps moins important que celui à 3 corps, etc. Les coefficients des termes du développement sont ajustés sur les données expérimentales (réactions de diffusion nucléon-nucléon). De nombreux travaux sont en cours dans ce domaine.



Hiérarchie des forces nucléaires obtenues avec la théorie effective non-perturbative (tiré de ArXiv:nucl-th/0409028)

Les sections efficaces (probabilités) de réaction, que nous aborderons au chapitre 3, se calculent donc avec les diagrammes de Feynman de notre théorie effective. Par exemple, lors de la diffusion nucléon-nucléon, plusieurs cas peuvent se présenter, selon le pion médiateur échangé :



tiré de L. Valentin, physique subatomique

d. La persistance de la symétrie d'isospin

L'interaction forte respectant la symétrie d'isospin (annexe 2), celle-ci persiste dans le cas des hadrons : ceux appartenants à même multiplet T d'isospin ont les mêmes propriétés par interaction forte. Ils seront caractérisés par les différentes valeurs de T_3 au sein du multiplet. Nous allons ici préciser le cas du doublet de baryon $T=1/2$ du proton et du neutron. Par la suite nous utiliserons les minuscules pour repérer les nombres quantiques d'un nucléon, et les majuscules pour ceux du système de plusieurs nucléons.

La fonction d'onde d'un nucléon (de spin $s=1/2$ et d'isospin $t=1/2$) peut s'écrire comme le produit d'une fonction d'onde spatiale, d'une fonction d'onde de spin (dit spineur à 2 composantes) et d'une d'isospin (à 2 composante aussi) :

$$\Psi(\vec{r}, s_z, t_3) = \phi(\vec{r}) \cdot \chi(s_z) \cdot \theta(t_3)$$

La formule de Gell-Mann et Nishijima (annexe) d'isospin fort appliquée à ces baryons donne :

$$t_3 = Q/e - \frac{1}{2}$$

On obtient donc $t_3=1/2$ pour le proton et $t_3=-1/2$ pour le neutron. Cette formule implique aussi que dans le cas particulier des nucléons (baryons sans saveur s,c,b,t) la conservation de t_3 est équivalente à celle de la charge électrique.

Notons que le neutron (quarks udd) et le proton (quarks uud) ont une différence de masse de 0,1 %. Celle-ci ne peut s'expliquer uniquement par l'interaction électromagnétique, et serait plutôt reliée à une masse légèrement supérieure du quark d par rapport au quark u. Il y a donc en fait une légère brisure de la symétrie d'isospin à toutes les échelles, comme l'ont aussi montré les données de diffusion nucléon-nucléon : l'interaction neutron-neutron est légèrement plus attractive que l'interaction proton-proton. Cependant nous n'entrerons pas dans ces raffinements par la suite, et considérerons que l'interaction forte respecte exactement la symétrie d'isospin.

Considérons un système de 2 nucléons. Ce système est particulièrement intéressant : d'abord il constitue le noyau le plus simple, le deutérium. De plus il permet de caractériser l'interaction nucléon-nucléon, nécessaire pour décrire les noyaux, qui peuvent avoir jusqu'à quelques centaines de nucléons.

Il faut donc coupler deux isospins $t=1/2$. Le formalisme est analogue au couplage de moment cinétique. Ici le couplage de deux nucléons d'isospin $t=1/2$ donne un isospin total $T=0$ ou 1 . Le singlet correspond à un état pn alors que le triplet comporte un état nn, un état pn et un état pp. Par invariance de l'interaction forte sous les transformations SU(2) d'isospin, nous en déduisons que les 3 états du triplet $T=1$ sont identiques du point de vue de l'interaction forte. Le système nn est donc identique au système pp. Quant au système np, il a une composante $T=1$ qui est identique aux précédentes, mais aussi une composante $T=0$ qui en diffère :

$$\left\{ \begin{array}{l} |1\ 1\rangle = |\text{p p}\rangle \\ |1\ 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\text{p n}\rangle + |\text{n p}\rangle) \\ |1\ -1\rangle = |\text{n n}\rangle \end{array} \right. \quad \text{Etat triplet}$$

$$|0\ 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\text{p n}\rangle - |\text{n p}\rangle) \quad \text{Etat singulet}$$

Nous voyons que l'état triplet du système est symétrique par échange de particule, alors que l'état singlet et antisymétrique. Or la fonction d'onde totale d'un système de fermion doit être antisymétrique sous l'échange de deux fermions. En ignorant l'isospin, le principe de Pauli implique que $L+S$ doit être pair : la symétrie sous échange de la fonction d'onde spatiale est en $(-1)^L$, et celle du spin est symétrique si $S=1$ et antisymétrique si $S=0$. Pour que la fonction d'onde totale soit antisymétrique il faut donc $L+S$ pair. En tenant compte de l'isospin, qui comme le spin est antisymétrique pour $T=0$ et symétrique pour $T=1$, il faut donc que $L+S+T$ soit impair. C'est le principe de Pauli généralisé. Par exemple il n'est pas possible que 2 nucléons identiques soient dans le même état de spin ($S=1$, $T=1$) avec une fonction d'onde spatiale paire.

Par ailleurs, l'interaction nucléon-nucléon maintient lié un système de deux nucléons s'ils ont leur spin aligné et un moment angulaire nul : $L=0$ et $S=1$. En effet nous verrons à la section suivante que cette interaction dépend du spin des nucléons. On en déduit que seul le système np est lié : c'est le deuton. En effet le principe de Pauli généralisé implique $T=0$. Notons que l'interaction nucléon-nucléon ne lie cependant pas très intensément le neutron et le proton : dans le deuton, l'énergie de liaison par nucléon est de 1,1 MeV et nous verrons au chapitre 3 que c'est 7 fois moins que l'énergie de liaison moyenne dans les noyaux.

Le formalisme d'isospin est identique à celui du spin. Pour un système invariant par rotation dans l'isoespace (dont les axes sont notés 1,2,3), l'isospin du système est conservé par interaction forte :

$$[\hat{H}_F, \vec{\hat{T}}] = \vec{0}$$

Ce que l'on traduit en pratique par « 1 'étiquetage » des fonctions d'ondes des états stationnaires par les bons nombres quantiques, valeurs propres de T^2 (l'opérateur de Casimir) et T_3 . La fonction d'onde d'isospin $|T, T_3\rangle$ vérifie donc :

$$\begin{aligned} \hat{T}^2 |T, T_3\rangle &= T(T+1) |T, T_3\rangle \\ \hat{T}_3 |T, T_3\rangle &= T_3 |T, T_3\rangle \end{aligned}$$

Rappelons que dans le cas d'un nucléon ($t=1/2$) l'isospin peut être représenté par les matrices de Pauli (générateurs de SU(2)) :

$$\hat{t}_i = \frac{1}{2} \tau_i$$

avec

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\tau^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les matrices de Pauli vérifient les relations de commutation :

$$[\tau_i, \tau_j] = 2i\tau_k \quad [\tau^2, \tau_i] = 0$$

Les opérateurs de création et d'annihilation d'isospin

$$\hat{t}_\pm = \hat{t}_1 \pm i\hat{t}_2$$

sont représentés par :

$$\hat{t}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{t}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ils permettent d'augmenter ou de diminuer la valeur de t_3 :

$$\begin{aligned} \hat{t}_+ | p \rangle &= 0 = \hat{t}_- | n \rangle \\ \hat{t}_+ | n \rangle &= | p \rangle \\ \hat{t}_- | p \rangle &= | n \rangle \end{aligned}$$

e. Au-delà du terme central

En plus du potentiel central décrit à la section c), d'autres termes apparaissent. Les symétries permettent une fois encore de dessiner l'interaction : la formulation la plus générale du potentiel d'interaction nucléon-nucléon s'obtient en considérant les symétries qu'il doit respecter (théorème de Noether, annexe 1) :

- Invariance par rapport aux translations dans l'espace (conservation de l'impulsion)
- Invariance par rapport aux rotations (conservation du moment angulaire)
- Invariance par rapport à la réflexion d'espace (conservation de la parité)
- Invariance par rapport aux rotations dans l'isoespace (conservation de l'isospin)

Par construction tout potentiel central vérifie les 3 lois d'invariance d'espace-temps ci-dessus, quelle que soit son expression, ce qui valide le potentiel de Yukawa déterminé précédemment.

Nous avons vu qu'il est de plus nécessaire d'introduire une dépendance en fonction des spins des deux nucléons. Un terme scalaire vérifie les lois d'invariance ci-dessus. Le produit scalaire, qui permet de générer un tel terme à partir de spins qui sont des vecteurs :

$$\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$$

est donc adapté (attention ici les indices 1 et 2 repèrent les 2 nucléons. Les composantes spatiales des matrices sont dénotées par l'indice x,y,z, par exemple σ_{1x})

En effet, rappelons que le spin d'une particule est représenté par les matrices de Pauli :

$$\vec{s} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$$

Ces matrices ont exactement le même formalisme que celles d'isospin détaillées précédemment.

L'expression plus générale du potentiel d'interaction nucléon-nucléon est donc

$$V = V_0(r) + V_\sigma(r) \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$$

Vérifions que ce potentiel dépend de S , le spin total du système (et donc du spin de chacun des deux nucléons). Le spin total s'écrit :

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2} (\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2)$$

d'où l'on déduit

$$\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 = \frac{2}{\hbar^2} \hat{S}^2 - 3\mathcal{I}$$

Par conséquent si le système de deux nucléons est dans un état (S, M_S) , la valeur propre associée au terme du potentiel dépendant du spin est :

$$\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 | S, M_S \rangle = [2S(S+1) - 3] | S, M_S \rangle$$

qui vaut 1 si le système est dans l'état triplet ($S=1$) et -3 s'il est dans l'état singulet ($S=0$).

On en déduit donc que le terme en $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$ dépend bien du spin des deux nucléons. Les effets sont opposés selon l'état triplet ou singulet du spin total : si ce potentiel est par exemple attractif s'ils sont alignés, alors il sera répulsif s'ils sont antialignés.

D'autres termes dépendants du spin interviennent : le scalaire $\vec{L} \cdot \vec{S}$ (où \vec{L} est le moment angulaire relatif des deux nucléons) vérifie les lois de symétrie ci-dessus : c'est le terme de spin orbite, analogue à celui de l'électron dans l'atome d'hydrogène. La différence avec la physique atomique vient de sa magnitude importante, qui n'est pas une simple perturbation dans le cas de l'interaction nucléon-nucléon. Nous en verrons les conséquences importantes au prochain chapitre. Notons que le terme de spin-orbite apparaît naturellement dans l'équation de Dirac et représente un terme dépendant des vitesses. Intuitivement, une particule qui se déplace dans un champ électrostatique généré par une autre particule chargée, produit, en relativité restreinte, un champ magnétique proportionnel à son moment orbital. L'énergie d'interaction avec ce champ (μ, B) sera donc en $L \cdot S$, puisque le spin est proportionnel au moment magnétique intrinsèque de la particule.

On peut former un autre terme qui respecte les symétries ci-dessus : le terme tenseur. On pourra vérifier que les produits scalaires $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{r}$ ne sont pas invariants par réflexion d'espace (opération de parité). Cependant le terme

$$3(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{r})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{r}) - (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)r^2$$

l'est bien. Pour avoir un opérateur homogène à un produit scalaire de spins, on divise par r^2 , ce qui permet de définir le terme tenseur S_{12} :

$$\hat{S}_{12} = 3(\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{r})(\vec{\sigma}_2 \cdot \hat{r}) - (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)$$

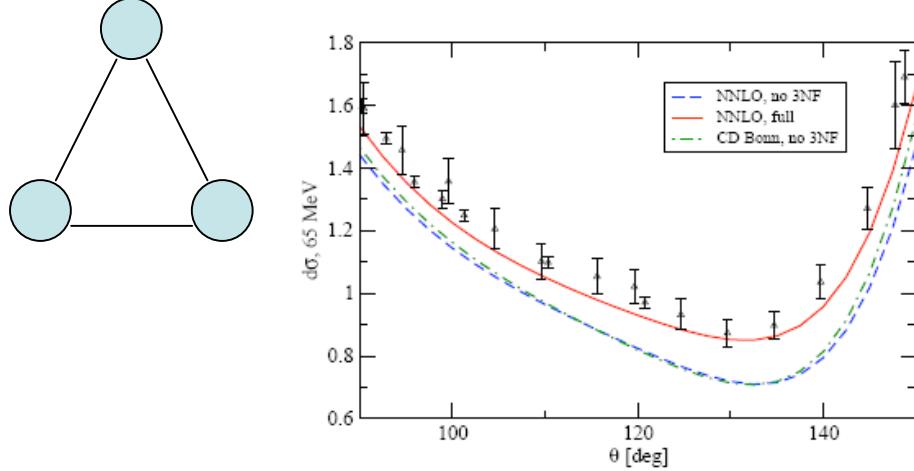
Ce terme est parfois négligé mais il peut jouer un rôle important, comme dans le cas du deuton, ou de la structure des noyaux riches en neutrons.

L'invariance par rotation dans l'isoespace introduit des scalaires d'isospin, par analogie avec le spin. On a donc de plus un terme de la forme

$$V_\tau(r) \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2$$

Notons qu'on ne peut bien sûr pas avoir de terme isospin-orbite ou tenseur d'isospin puisqu'on ne peut faire de produit scalaire ou vectoriel entre vecteurs de deux espaces différents (espace-temps et iso-pace).

Mentionnons finalement un dernier terme, déjà évoqué au c), qui provient de la structure composite des nucléons. Une interaction entre deux objets élémentaires est dite à deux corps. Lorsque ces objets sont composites, on observe dans de nombreux cas l'apparition d'une force à 3 corps, qui ne se manifeste qu'en présence explicite de trois corps. Cette force provient des polarisations réciproques du contenu interne des objets entre eux : la polarisation est modifiée lorsqu'un troisième corps interfère avec 2 autres. Pour comprendre cet effet, l'analogie avec les molécules est utile : lorsque 3 molécules se rapprochent, leurs polarisations mutuelles sont différentes de la polarisation de deux molécules isolées. Sur l'avant-dernière figure de la section c) (forces nucléaires), on voit que l'interaction à trois corps apparaît naturellement dans la hiérarchie des diagrammes de Feynman à l'ordre N²LO.



d'après ArXiv:[nucl-th/0409028](https://arxiv.org/abs/nucl-th/0409028)

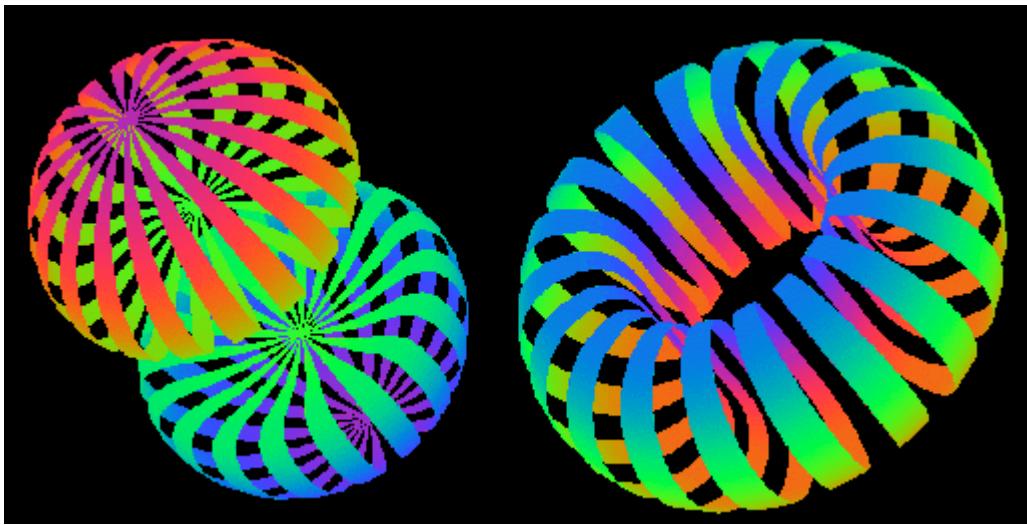
Dans le cas de l'interaction entre les nucléons, le terme à trois corps est essentiel pour décrire correctement les données : son rôle n'est pas négligeable. La figure ci-dessus montre la section efficace différentielle de diffusion de neutrons sur des deutons (système à un neutron et un proton) à une énergie de 65 MeV. Les données ne sont bien reproduites qu'avec l'ajout d'un terme à trois corps. Notons que ce n'est que depuis quelques années que les théories effectives ont réussi à décrire ce terme à partir de QCD.

Le potentiel d'interaction nucléon-nucléon s'écrit donc finalement :

$$V = V_0(r) + V_\sigma(r)\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 + V_T(r)\hat{S}_{12} + V_\tau(r)\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 + V_{\sigma\tau}(r)(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)(\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2) + V_{LS}(r)\vec{L} \cdot \vec{S} + V(1, 2, 3)$$

Dans le cas de protons, il faut ajouter l'interaction Coulombienne à l'interaction nucléaire, qui va donc légèrement (et explicitement) briser la symétrie d'isospin.

Une fois donnée l'interaction entre les nucléons, le problème nucléaire est en principe posé. Il ne reste plus qu'à résoudre l'équation de Schrödinger correspondante. Le deuton est le système qui peut se calculer le plus facilement une fois donnée l'interaction nucléon-nucléon. Des solutions typiques de fonctions d'ondes pour le deuton sont montrées sur la figure ci-dessous, en utilisant l'équation de Schrödinger et le potentiel décrit dans cette section.

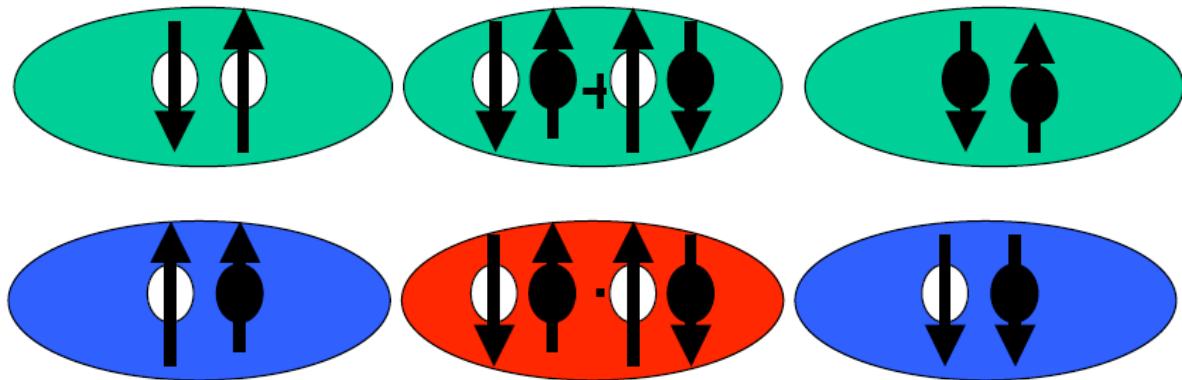


Densité du deuton dans le référentiel du laboratoire pour les projections $M_J=1$ (à gauche) et $M_J=0$ (à droite) de l'état fondamental de moment angulaire total $J=1$. Les « tranches » dans les densités sont artificielles, pour guider la vue (d'après <http://www.phy.anl.gov/theory/movie-run.html>)

4. La superfluidité nucléaire

L’interaction entre deux nucléons leur permet de plus de s’apparier. La superfluidité naît lorsqu’une interaction suffisamment attractive, et de courte portée agit entre des fermions (mécanisme de Cooper). On observe alors la formation de paires relativement indépendantes de fermions (paires de Cooper). Ces paires se comportent comme des bosons puisqu’elles ont un spin entier. Cet effet est analogue à la supraconductivité dans les métaux. Les noyaux sont ainsi superfluides en raison de l’appariement des nucléons.

L’interaction d’appariement, attractive et de courte portée est intense pour un état de moment orbital total $L=0$. Elle peut donc jouer dans deux canaux en fonction de l’isospin et du spin totaux des 2 nucléons : ($T=1, S=0$) et ($T=0, S=1$), en raison du principe de Pauli. Le premier canal représente l’appariement entre deux nucléons de même isospin (2 protons ou 2 neutrons). Dans ce cas, le principe de Pauli impose une projection sur l’axe Oz du spin opposé pour les deux nucléons. En présence d’un moment angulaire orbital, deux nucléons du même type auront donc une projection m de moment angulaire total j opposée.



Paire de nucléons pour le canal $T=1, S=0$ (haut) et $T=0, S=1$ (bas). Les configurations correspondent aux valeurs de S_z (haut) et T_z (bas) possibles. Les flèches représentent les spins et les boules blanche et noire les proton et neutrons, respectivement (d’après H. Flocard Ecole Joliot-Curie 2002).

La superfluidité est une propriété très importante des noyaux. D'origine microscopique, celle-ci s'exprime à l'échelle macroscopique sur le système global et en modifie donc radicalement les propriétés, à l'instar de la célèbre superfluidité de l' ^3He , ou bien la supraconductivité de certains métaux. Dans le cas des noyaux la superfluidité réduit d'un facteur 3 environ leur moment d'inertie. Nous y reviendrons aux chapitres 2 et 3.

5. Conclusion

Il n'y a donc pas de noyau lié A=5 et A=8, principalement à cause de la particule α (noyau ^4He ayant 2 neutrons et 2 protons). Cette particule est très liée car elle contient deux neutrons et deux protons qui peuvent se coupler fortement : nous verrons au chapitre suivant que c'est le noyau doublement magique le plus léger. Les noyaux A=5 ont donc un nucléon célibataire de plus, ce qui favorise la désintégration en particule α plus un nucléon. De même le noyau A=8 se désintègre facilement en 2 particules α . La particule alpha joue ainsi un rôle « d'attracteur » vers lequel les noyaux légers se désintègrent. Il suffit pour s'en convaincre de comparer, sur la première figure de ce chapitre, le nombre de flèches qui pointent vers cette particule, avec le petit nombre qui en part. La particule α est indirectement responsable du fiasco de la nucléosynthèse primordiale, incapable de synthétiser les noyaux au-delà de A=8.

Il faut attendre plusieurs millions d'années, avec l'apparition des étoiles pour remédier à ce petit contretemps : la température et la densité au cœur de celles-ci vont rendre à nouveau possible les réactions nucléaires, que le rayonnement thermique du Big Bang ne permet plus d'atteindre depuis longtemps.

BIBLIOGRAPHIE

- **Symétrie chirale et QCD :**
<http://www.cenbg.in2p3.fr/heberge/EcoleJoliotCurie/coursJC/JOLIOT-CURIE%202002.pdf> par J. Dobaczewski
- **Théorie effective :** <http://arxiv.org/abs/nucl-th/9706029> par P. Lepage
- **Superfluidité : Superconductivity of Metals and Alloys** de P.G de Gennes

6. Annexe 1 : Symétries et lois de conservation : Noether et Casimir

Il semble intuitif que l'invariance de lois s'appliquant à un système sous une symétrie implique la conservation d'une quantité. Ainsi un système invariant par translation dans l'espace implique que sa quantité de mouvement ne varie pas au cours du temps. L'invariance par translation signifie que si l'on translate l'ensemble du système, les lois physiques qui s'appliquent au système restent inchangées. L'étudier à Paris ou à Strasbourg revient au même : le Lagrangien, l'Hamiltonien, l'équation du mouvement, le PFD, etc. sont invariants sous cette transformation. Si sa quantité de mouvement variait en fonction du temps, le système serait soumis à une force externe en un point donné de l'espace. Celle-ci briserait l'invariance par translation du système. Notons que le système lui-même peut bien sûr être inhomogène et avoir des forces internes.

Emmy Noether formalisa en 1918 le lien entre l'invariance sous une transformation (symétrie) et la quantité conservée, dans le cadre d'un formalisme Lagrangien. Reprenons notre exemple de l'invariance par translation, dans un espace à une dimension pour simplifier. Cela implique que $L(x,v)=L(v)$, sinon le Lagrangien ne serait pas invariant par translation. Or l'équation d'Euler-Lagrange (équation du mouvement) s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

Par ailleurs dans le formalisme lagrangien, on a aussi :

$$p = \frac{\partial L}{\partial v}$$

On en déduit donc, dans le cas d'un lagrangien invariant par translation :

$$\frac{dp}{dt} = 0$$

La quantité de mouvement est conservée. Le théorème de Noether généralise cette démarche et permet d'identifier la grandeur conservée associée à une symétrie quelconque.

Notons également que l'invariance sous une transformation implique qu'une grandeur n'est pas observable. Par exemple l'invariance par translation implique qu'il n'y a pas de position spatiale absolue. On retrouve ici l'enchaînement des idées de la relativité : dans les référentiels Galiléen (pas de force externe) il n'y a pas d'espace absolu, donc pas de référentiel privilégié. Les lois de la physique (les équations du mouvement) sont les mêmes quel que soit le référentiel considéré. La relativité générale vient de l'extension de cette idée à tous les types de référentiels.

Une autre application importante du théorème de Noether est l'invariance par rotation : les lois physiques qui s'appliquent au système restent inchangées si on le tourne (le système peut-être déformé). On montre que la quantité conservée est le moment cinétique total du système. La grandeur inobservable est l'orientation dans l'espace. En effet, si le moment angulaire n'était pas conservé, le système subirait un moment de force non nul (théorème du moment cinétique), qui dépend par définition de l'orientation du vecteur position. L'invariance par rotation des lois physiques qui décrivent le système par rotation serait donc brisée.

Le tableau ci-dessous donne quelques exemples de symétries, loi de conservation et grandeur non-observable associées.

Invariance des lois physiques sous	Quantité conservée dans un système isolé	Grandeur inobservable
Translation d'espace	Impulsion	Position absolue
Translation temporelle	Energie	Temps absolu
Rotation d'espace	Moment cinétique	Orientation absolue
Rotation d'isoespace	Isospin	Orientation absolue dans l'isoespace

En physique quantique, on exprime l'invariance sous une transformation par le fait que son opérateur R commute avec l'Hamiltonien H . En effet : Soit \hat{R} l'opérateur de transformation (rotation, translation, ...). Si les lois physiques décrivant le système ψ sont invariantes sous cette transformation, alors $\hat{R}\psi$ doit être solution de la même équation de Schrödinger que ψ (mêmes énergies propres, mêmes probabilités, etc.). On a donc les deux équations (on considère ici l'équation stationnaire, pour simplifier) :

$$\hat{H}\psi = E\psi$$

$$\hat{H}\hat{R}\psi = E\hat{R}\psi$$

De la deuxième équation, nous déduisons :

$$\hat{R}^{-1}\hat{H}\hat{R}\psi = E\psi$$

En comparant avec la première équation, on obtient :

$$\hat{R}^{-1}\hat{H}\hat{R} = \hat{H}$$

$$[\hat{H}, \hat{R}] = 0$$

L'opérateur de la transformation commute avec l'Hamiltonien. H est invariant sous cette transformation : il est équivalent de faire évoluer la fonction d'onde transformée, ou de transformer la fonction d'onde évoluée.

Considérons la translation d'espace-temps, qui consiste à effectuer les transformations :

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r} + \vec{a}$$

$$t \rightarrow t + t_0$$

où \vec{a} et t_0 sont des constantes qui représentent la translation. L'opérateur de la translation d'espace s'écrit :

$$\hat{R} = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{\vec{p}} \cdot \vec{a}}$$

En effet, si l'on considère une translation infinitésimale d'espace, on obtient d'une part :

$$\hat{R} \simeq 1 - \frac{i}{\hbar}\hat{\vec{p}} \cdot \vec{a}$$

et d'autre part (à une dimension pour simplifier) :

$$\psi(x - a) \simeq \psi(x) - a \frac{\partial \psi}{\partial x} = \left(1 - \frac{i}{\hbar}\hat{p} \cdot a\right)\psi(x) = \hat{R}\psi(x)$$

\hat{R} est donc bien l'opérateur de translation dans l'espace. \vec{p} est appelé générateur du groupe des translations car toute translation peut être construite à partir de l'opérateur \vec{p} .

Nous savons qu'une invariance par cette transformation R implique

$$[\hat{H}, \hat{R}] = 0 \quad , \text{ ou, ce qui est équivalent, } [\hat{H}, \hat{p}] = 0$$

La conservation de l'impulsion découle ainsi de l'invariance des lois physiques par translation. On retrouve le résultat du théorème de Noether.

De même, on peut montrer que l'opérateur rotation (agissant sur un système de moment cinétique total \vec{J}) d'un angle θ autour de l'axe quelconque \vec{u} s'écrit :

$$\hat{R}_{\vec{u}}(\theta) = e^{-\frac{i}{\hbar} \theta \hat{\vec{J}} \cdot \vec{u}}$$

Les 3 composantes du moment cinétique total J sont les générateurs des rotations : toute rotation peut s'écrire à partir de ces opérateurs. Une rotation infinitésimale s'écrit :

$$\hat{R}_{\vec{u}}(d\theta) = 1 - \frac{i}{\hbar} d\theta \hat{\vec{J}} \cdot \vec{u}$$

Par conséquent $[\hat{H}, \hat{R}] = 0$ équivaut à $[\hat{H}, \hat{\vec{J}}] = 0$: $\hat{\vec{J}}$ est bien une constante du mouvement.

Comme les composantes de \vec{J} ne commutent pas entre elles, il est commode de former un ECOC en utilisant une composante de \vec{J} (J_z par exemple) et J^2 : $[\hat{H}, J^2] = 0$ et $[\hat{H}, J_z] = 0$. L'opérateur scalaire J^2 qui commute avec les générateurs est conservé, et est appelé invariant de Casimir. Ses valeurs propres en $j(j+1)$ permettent d'étiqueter les états propres de H .

Le raisonnement ci-dessus se formalise de manière générale par la théorie des groupes : chaque rotation est membre du groupe des rotations : elle peut-être calculée à partir des générateurs (J_x, J_y, J_z) par applications successives de rotations infinitésimales (groupe de Lie).

Dans le cas où $J=1/2$ il y a deux états de spin possible. Une rotation de ce système est donc représentée par une matrice 2×2 . Celle-ci peut s'écrire en fonction des générateurs que sont les 3 matrices de Pauli, correspondant à (J_x, J_y, J_z) . Le groupe de ces rotations qui conservent la norme des fonctions d'onde (opérateurs Unitaires) et dont les représentations matricielles ont un déterminant Spécialement égal à 1 (comme les matrices de Pauli) est appelé SU(2). Comme ces rotations sont représentées par des matrices 2×2 (car il y a 2 états de spin possible), il faut bien $2 \times 2 - 1 = 3$ générateurs (-1 vient de la condition imposée du déterminant).

Par la suite nous allons considérer les deux types principaux de symétries afin de déduire les grandeurs conservées associées qui permettront de caractériser les particules élémentaires (spin, charge, isospin, couleur, hypercharge, ...) :

- *Les symétries d'espace-temps* : le système est invariant par une transformation qui agit dans l'espace (x, y, z, t). Par exemple une symétrie de rotation permet de définir le spin d'une particule puisqu'il va commuter avec H
- *Les symétries internes* : le système est invariant par une transformation qui agit dans un espace abstrait, différent de l'espace-temps. Par exemple les rotations dans l'isospace permettent de définir l'isospin. On peut considérer des invariances par rotation plus générales que SU(2), comme SU(n). La dimension n du groupe définit la grandeur conservée : vecteur à 3 composantes pour SU(2), à 8

composantes pour SU(3), etc. puisque les générateurs commutent avec H. Il y a de plus les invariants de Casimir comme J^2 (scalaire) qui sont conservés.

Les symétries d'espace-temps se répartissent elles-mêmes en deux catégories : continues (qui pourront donc être décrites par les groupes de Lie) et discrètes comme l'invariance par renversement du temps ou de l'espace.

Des exemples de symétries continues : l'invariance par translation dans l'espace implique la conservation de la quantité de mouvement. De même l'invariance par translation dans le temps conduit à la conservation de l'énergie : en physique quantique de tels états, dits stationnaires, correspondent aux états propres de l'Hamiltonien. L'énergie associée reste justement constante. Nous venons de voir à la section précédente que l'invariance par rotation entraîne la conservation du moment cinétique total.

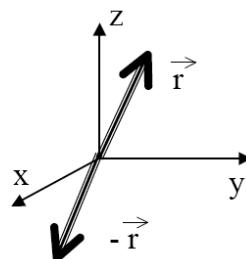
Rappelons que dans le cas d'un système isolé, l'invariance des lois physiques par translation et rotation d'espace-temps est toujours vérifiée car aucune force externe ne vient briser ces symétries. Voilà pourquoi les lois de conservations du quadrivecteur énergie-impulsion, et du moment cinétique total sont toujours vérifiées pour un système isolé. Rappelons aussi que le système lui-même ne respecte pas forcément ces symétries (il peut être déformé, avoir des forces internes) : ces sont les équations du mouvement qui sont invariantes sous ces symétries.

Pour un système non-isolé, ces lois de conservations ne sont plus respectées, sauf dans le cas particulier où le système est soumis à un champ central (électrons soumis au potentiel du proton dans l'atome d'hydrogène). L'Hamiltonien reste invariant par rotation et le moment cinétique total du système, qui commute encore avec H, est conservé.

Dans le cas des symétries discrètes, on en distingue 3 : la symétrie par inversion d'espace P ($\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$), la symétrie par conjugaison de charge C (particule \rightarrow antiparticule), et la symétrie par renversement du temps ($t \rightarrow -t$). Il semble tentant à priori de postuler, comme pour les symétries continues, que les lois physiques (les interactions fondamentales) sont invariantes par ces transformations. Il existe cependant une exception notable : l'interaction faible.

L'inversion d'espace \hat{P} , ou opération de parité consiste à transformer \vec{r} en $-\vec{r}$:

$$\hat{P}\psi(\vec{r}) = \psi(-\vec{r})$$



L'équation aux valeurs propres

$$\hat{P}\psi(\vec{r}) = \pi\psi(\vec{r})$$

impose donc $\pi = +1$ (fonction dite paire) ou -1 (fonction dite impaire).

Nous avons vu que si des lois physiques décrivant un système sont invariantes sous une transformation (ici \hat{P}), alors

$$[\hat{H}, \hat{P}] = 0$$

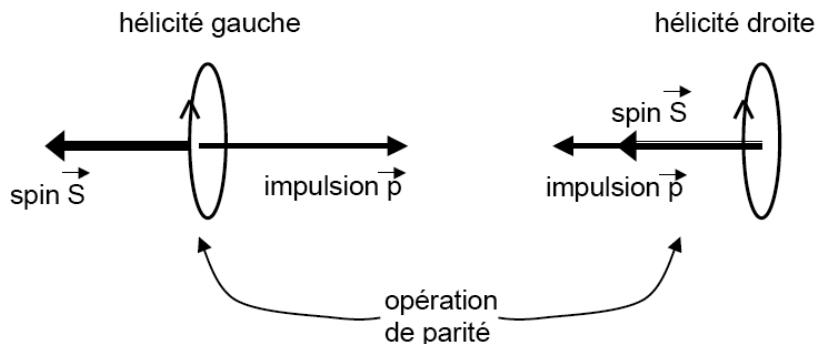
Les vecteurs propres de \hat{H} et de \hat{P} sont donc communs, et les valeurs propres π de \hat{P} permettent d'étiqueter chaque état stationnaire. La parité π est conservée s'il y a invariance sous \hat{P} . Intuitivement cette invariance représente l'impossibilité de privilégier la direction gauche ou droite. Notons que pour les systèmes composites, la parité est un nombre quantique multiplicatif et non additif.

Un vecteur est dit polaire s'il change de signe par l'opération de parité, comme \vec{r} . Il est appelé axial ou pseudo-vecteur s'il reste inchangé. Par exemple la quantité de mouvement est polaire alors que le spin est axial (moment cinétique).

L'hélicité h est définie comme la projection du spin sur la direction de la quantité de mouvement :

$$\hat{h} = \frac{\hat{S} \cdot \hat{p}}{|\hat{p}|}$$

où les valeurs propres de \hat{h} sont par exemple +1 ou -1 pour le photon, en unités \hbar . La masse nulle impose en effet au spin d'être soit parallèle soit anti-parallèle à l'impulsion. Les 2 états d'hélicité possibles sont :



On appelle hélicité gauche l'état de valeur propre négative, car cela correspond à tourner dans ce sens par rapport à la direction de la quantité de mouvement. Chaque particule se présente à priori avec une composante d'hélicité droite et une de gauche. On passe de l'un à l'autre état par l'opération de parité, comme on peut le vérifier sur la figure ci-dessus : la quantité de mouvement inverse sa direction alors que le spin reste inchangé. Notons que l'hélicité n'est pas invariante sous la transformation de Lorentz. C'est la notion un peu plus générale de chiralité qui est en fait employée en théorie relativiste. La chiralité coïncide avec l'hélicité uniquement dans le cas d'une particule de masse nulle. Rappelons que la symétrie chirale est brisée dans le cas des nucléons.

L'interaction faible n'est pas invariante sous la transformation de la parité. La conséquence est que les neutrinos, qui ne sont sensibles qu'à celle-ci, ne se présentent qu'avec la seule hélicité gauche (valeur propre de $h = -1/2$ en unité \hbar). De même l'antineutrino ne se présente qu'avec une hélicité droite. Un neutrino ne peut donc être un état propre de \hat{P} puisqu'il n'existe pas d'état d'hélicité droite : il n'a pas de parité bien déterminée ; l'action de \hat{P} sur un neutrino donne un état qui n'existe pas dans la nature.

Les symétries internes sont des transformations qui ont lieu dans un espace abstrait. L'invariance d'une interaction sous ces transformations permet d'associer un nombre quantique conservé aux particules.

Considérons ainsi un système invariant par rotation dans un espace abstrait (que nous appellerons isoéspace), différent de l'espace x,y,z. Supposons l'interaction forte invariante par rotation dans l'isoéspace. Ceci a pour conséquence de conserver un moment angulaire « abstrait » l'isospin \vec{T} , qui commute avec H. Le formalisme est en tous points similaire à celui de \vec{J} . T^2 est donc l'invariant de Casimir et avec T_3 (l'analogue de J_z) ils permettent de repérer les états stationnaires (états propres de H). Dans le cas de système d'isospin $T=1/2$ c'est donc le formalisme du groupe SU(2) qui s'applique. Les états propres sont de dégénérence 2 (isospin up et down) analogues à spin up et spin down. Ces deux états correspondent à un doublet de quarks (u et d). C'est comme si un quark pouvait se mettre dans deux états différents mais dégénérés en énergie : les quarks u (isospin up) et d (isospin down). De même avec un nucléon et les deux états proton ou neutron.

D'autres nombres quantiques sont conservés par l'interaction forte : les saveurs d'une part et les nombres baryoniques et leptoniques d'autre part. La conservation des saveurs par interaction forte se formalise en imposant invariance de cette interaction sous les transformations U(1), donc dans un espace abstrait de dimension $1^2=1$ définissant le scalaire étrangeté (ou charme, etc.). U(1) est juste la multiplication par une phase :

$$|\psi'\rangle = e^{i\alpha} |\psi\rangle$$

Le théorème de Noether permet d'y associer un nombre quantique conservé (étrangeté ou charme, etc.). La phase α caractérise la transformation. Il y a donc une charge conservée et à toute invariance sous U(1) est associée la conservation d'une charge, qui peut-être électrique ou une charge de saveur comme l'étrangeté.

Ainsi on ne peut pas grouper les quarks s et c (2^{ème} génération) comme un doublet de SU(2), mais plutôt comme deux singlets de U(1) d'étrangeté et U(1) de charme. Ceci est dû aux masses voisines des quarks u et d, alors que celles de s et c sont très différentes. Il en va de même pour la 3^{ème} génération. Pour prendre une image, les quarks u et d sont frères entre eux alors que c et s seraient plutôt cousins entre eux (de même pour b et t). Donc l'interaction forte est invariante sous une transformation de SU(2) (conservation de l'isospin \vec{T}), et de 4 transformations de U(1) (conservation de l'étrangeté S, du charme c, de la beauté b, et de la « topitude » t). Notons ici le rôle de l'expérience car le nombre de saveurs (lié aux 3 générations de quarks), ainsi que leur conservation via SU(2) ou U(1), nous sont donnés empiriquement. Peut-être y en a-t-il d'autres, et de nombreuses investigations théoriques vont dans ce sens. Il y a peut-être une origine plus profonde au nombre de saveurs.

Quant aux nombres baryoniques B et leptoniques l, ils expriment la conservation du nombre de quarks d'une part et de leptons d'autre part lors des réactions par interaction forte, électromagnétique, ou faible.

Notons finalement que les quarks u et d ayant une charge électrique différente, la valeur de T_3 est reliée à celle de q. C'est la formule de Gell-Mann Nishijima :

$$q/e = T_3 + Y/2$$

où Y, l'hypercharge, est la somme du nombre baryonique et de l'étrangeté, du charme, de la beauté et de la topitude : $Y=B+s+c+b+t$

Les symétries de jauge (i.e. de phase) expriment l'invariance des lois physiques par changement d'une phase de la fonction d'onde (en fait de champs en théorie quantique des champs). Elles ont à la fois une origine interne car elles ont attrait à des nombres quantiques internes comme la couleur ou la charge, mais dépendent aussi de l'espace-temps (symétrie de jauge locale). Elles sont particulièrement importantes car les lois de conservations associées concernent les charges des 3 interactions fondamentales (charge électrique, de couleur, isospin faible et hypercharge faible). Elles permettent donc de générer les médiateurs de ces interactions qui véhiculent ces charges.

Un autre avantage est qu'elles permettent de comprendre l'origine de la masse des particules et des médiateurs, via le mécanisme de brisure spontanée de symétrie. On peut en effet se poser les questions suivantes : d'où provient la masse non-nulle des particules (élémentaires) ? Peut-on expliquer leurs différences de masse, entre les quarks par exemple ? Si la première question trouve une réponse, la deuxième reste ouverte.

Nous avons déjà considéré des symétries de jauge sans le savoir. En effet, une symétrie de jauge est une transformation qui multiplie une fonction d'onde (ou un champ en TQC) par une phase, de la forme e^{ia} . Toutes les transformations que nous avons vues précédemment peuvent se mettre sous cette forme, comme nous l'avons vu dans le cas de la translation et de la rotation. Ces invariances de phase (inutilement appelée de jauge pour des raisons historiques) sont donc à l'origine de toutes les transformations. Ces transformations que nous avons vues sont appelées transformation de jauge globale car elles agissent de la même manière en tout point du système. Considérons ainsi un ruban en caoutchouc. La translation de l'ensemble du ruban est une transformation de jauge **globale**, qui ne modifiera pas le système, comme nous l'avons vu. Notons aussi que les symétries internes comme SU(2) d'isospin sont des transformation de jauge globale :

$$\hat{R}_{\vec{u}}(\theta) = e^{-\frac{i}{\hbar} \theta \hat{\vec{J}} \cdot \vec{u}}$$

L'idée, pour parvenir aux charges des interactions fondamentales, est de généraliser ces transformations en considérant des transformations de jauge **locale**. Dans ce cas, la phase de l'exponentielle peut dépendre des coordonnées de l'espace-temps (x, y, z, t). Ces transformations, incongrues à priori, permettent en fait de générer les médiateurs des interactions. Reprenons l'exemple du ruban : en effectuant une transformation de jauge locale, par exemple une translation qui dépend du point d'application, le ruban va se déformer. Si on lui impose d'être invariant sous cette transformation, nous devons naturellement générer des forces pour compenser cette déformation, afin que le ruban ne se déforme pas au final. On comprend donc qu'imposer l'invariance de jauge locale génère nécessairement une interaction. En théorie quantique des champs ce sont les médiateurs de l'interaction (les bosons de jauge) qui sont générés de cette manière.

On peut ainsi montrer que l'équation de Schrödinger pour une particule de spin nul et de charge q , à laquelle on aurait enlevé le terme d'interaction :

$$\frac{1}{2m}(-i\hbar\vec{\nabla})^2\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

n'est pas invariante sous la transformation de jauge locale U(1):

$$\psi' = e^{i\phi(x,y,z,t)}\psi$$

Il est justement nécessaire d'introduire le terme d'interaction comprenant les potentiels (\vec{A}, A_0) vecteurs et scalaires des équations de Maxwell. On peut montrer, après un calcul un peu lourd, que l'équation de Schrödinger :

$$\left[\frac{1}{2m}(-i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A})^2 + qA_0 \right] \psi = i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial t}$$

est alors invariante sous la transformation de jauge locale.

En théorie quantique des champs, (\vec{A}, A_0) représente le photon. Il est donc généré par l'invariance des lois physiques sous la transformation de jauge. La conservation de la charge est obtenue par le théorème de Noether appliqué à la symétrie U(1) comme nous l'avons vu.

Les symétries de jauge sous lesquelles les interactions sont invariantes seront des symétries internes, comme SU(2), mais en tant que transformations de jauge locale, ses phases dépendront des coordonnées d'espace-temps. Elles tiennent donc à la fois des symétries internes et d'espace-temps.

7. Annexe 2 : caractéristiques des particules élémentaires de la matière

A l'aide du théorème de Noether nous pouvons déduire les lois de conservations pour une réaction du type $1+2 \rightarrow 3+4$. Nous savons que l'énergie totale, le moment cinétique total (noté \vec{I} ci-dessous) et l'impulsion totale doivent être conservés lors de la réaction. Par ailleurs la charge électrique et les nombres baryoniques (et leptoniques aux oscillations de neutrinos près) le sont aussi, quelle que soit l'interaction responsable de la réaction. Cela s'écrit :

$$\begin{aligned} E_1 + E_2 &= E_3 + E_4 \\ \vec{p}_1 + \vec{p}_2 &= \vec{p}_3 + \vec{p}_4 \\ \vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \vec{L}_i &= \vec{I}_3 + \vec{I}_4 + \vec{L}_f \\ B_1 + B_2 &= B_3 + B_4 \\ (Q/e)_1 + (Q/e)_2 &= (Q/e)_3 + (Q/e)_4 \end{aligned}$$

où L_i et L_f sont les moment angulaires relatifs des particules respectivement en voie d'entrée et de sortie. L'interaction forte conserve de plus les saveurs et aussi la parité. Cela se traduit par :

$$\begin{aligned} s_1 + s_2 &= s_3 + s_4 \\ c_1 + c_2 &= c_3 + c_4 \\ b_1 + b_2 &= b_3 + b_4 \\ t_1 + t_2 &= t_3 + t_4 \\ T_{31} + T_{32} &= T_{33} + T_{34} \\ \vec{T}_1 + \vec{T}_2 &= \vec{T}_3 + \vec{T}_4 \\ \pi_1 \pi_2 (-1)^{L_i} &= \pi_3 \pi_4 (-1)^{L_f} \end{aligned}$$

Pour l'interaction électromagnétique, il en va de même à l'exception de la conservation de \vec{T} .

Munis des lois de conservations qui définissent les nombres quantiques, il est ainsi possible d'établir les caractéristiques des particules élémentaires, les premières briques de matière produites après le Big Bang. Elles se divisent en deux catégories, les quarks (sensibles à toutes les interactions) :

Famille	Quark	Masse	spin	Q/e	B	T	T_3	s	c	b	t	π
”légers”	u (up) d (down)	1.5 à 3 3 à 7 (en MeV)	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	$+\frac{2}{3}$ $-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$	0 0	0 0	0 0	0 0	+1 +1
”mi-lourds”	c (charm) s (strange)	1.25 ± 0.09 GeV 95 ± 25 MeV	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	$+\frac{2}{3}$ $-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$	0 0	0 0	0 -1	1 0	0 0	0 0	+1 +1
”lourds”	t (top) b (bottom)	174.2 ± 3.3 4.2 ± 0.07 (en GeV)	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	$+\frac{2}{3}$ $-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$	0 0	0 0	0 0	0 0	-1 -1	1 0	+1 +1

et les leptons (insensibles à l'interaction forte) :

lepton	masse (MeV)	charge	vie moyenne	spin	L_e	L_μ	L_τ
e^-	0,511	$-e$	stable	1/2	1	0	0
ν_e	$<3.10^{-6}$	0	oscillations	1/2	1	0	0
μ^-	105,66	$-e$	$2,2 \times 10^{-6}$ s	1/2	0	1	0
ν_μ	<0.170	0	oscillations	1/2	0	1	0
τ^-	1776,99	$-e$	$2,8 \times 10^{-13}$ s	1/2	0	0	1
ν_τ	<18.2	0	oscillations	1/2	0	0	1

Les dernières particules découvertes expérimentalement furent le quark top en 1995 et le neutrino τ en 2000. Il faut de plus considérer pour chaque particule ci-dessus, son anti-particule associée. Il y a donc 24 particules élémentaires de la matière dans le modèle standard. Notons que ce sont tous des fermions, de spin $\frac{1}{2}$.

Nous distinguons ainsi plusieurs types de particules élémentaires de la matière :

- **Les quarks**: ils sont chargés électriquement et sensibles à toutes les interactions : faible, forte et électromagnétique. Ils portent un nombre baryonique $B=1/3$. En effet il faut 3 quarks pour faire un baryon. Les antiquarks ont donc $B=-1/3$. Les quarks sont à la base de la matière composite : baryons (3 quarks) et mésons (un quark et un antiquark) comme décrit dans l'appendice. Les baryons et mésons sont appelés de manière générique les hadrons. Ils n'existent pas à l'état libre.
- **Les leptons chargés.** Il y a 3 familles : l'électron, le muon et le tau. Ces fermions élémentaires sont de spin $\frac{1}{2}$ de charge $Q/e=+1$. L'électron est stable et le muon et le tau sont instables (par interaction faible). Les leptons chargés ne sont pas sensibles à l'interaction forte, ils ne subissent que les interactions électromagnétique et faible. Qu'est ce qui différencie un muon d'un état excité de l'électron ? On pourrait en effet imaginer une réaction de désexcitation du type

$$\mu \rightarrow e + \gamma$$

mais elle n'a jamais été observée.

Il fut donc nécessaire de raffiner la loi de conservation du nombre leptonique en introduisant 3 « sous-nombres » (électronique, muonique, tauïque) qui sont *à priori* conservés séparément (et ce par toutes les interactions).

- **Les leptons neutres.** Ce sont les neutrinos ($Q/e=0$), répartis aussi en trois familles : ν_e , ν_μ , ν_τ . Leur masse est à priori proche de zéro. Mais on a récemment eu des preuves expérimentales de leur masse non nulle : oscillations des neutrinos entre les différentes familles, par violation des sous-nombres leptoniques. Ils n'interagissent que par interaction faible, ce qui rend leur détection difficile comme nous le verrons au dernier chapitre (environ 5.10^{14} neutrinos en provenance du Soleil traversent notre corps chaque seconde). Réciproquement, toute réaction impliquant des émissions ou absorptions de neutrinos ne peut se faire que par interaction faible. Notons qu'ils n'existent qu'avec une chiralité gauche.

8. Annexe 3 : les bosons de jauge et interactions fondamentales

Nous allons voir comment caractériser l'interaction forte (appelée QCD, chromodynamique quantique en théorie des champs) à l'aide d'une symétrie de jauge locale. Il s'agit de la symétrie $SU(3)$ qui agit donc dans l'espace des couleurs, qui sera la charge de l'interaction forte.

Il y a ainsi 3 champs de quarks différents, associés aux 3 charges de couleurs (Red, Green, Blue), qui n'ont rien à voir avec les couleurs usuelles. La symétrie $SU(3)$ possède $9^2-1=8$ générateurs. La transformation de jauge locale sous laquelle l'interaction est invariante est la transformation qui change le champ de quark $\psi(x)$:

$$\psi'(x, y, z, t) = e^{i\vec{\alpha}(x, y, z, t) \cdot \vec{F}} \psi(x, y, z, t)$$

En imposant cette invariance, et par un calcul analogue à ce qui a été fait précédemment dans le cas de l'interaction électromagnétique (ELM), on aboutit à l'existence de 8 médiateurs (les gluons) de masse nulle, associés aux 8 générateurs F_j de $SU(3)$ (attention les gluons ne sont

pas exactement les générateurs eux-mêmes mais une combinaison de ceux-ci). Spécificité de QCD, les gluons portent eux-mêmes des charges de couleur :

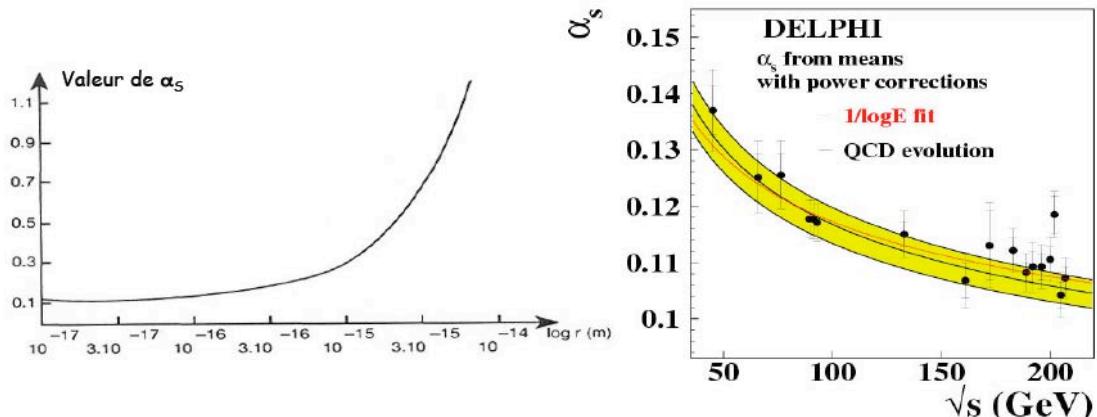
$$R\bar{B}, R\bar{G}, B\bar{R}, B\bar{G}, G\bar{R}, G\bar{B}, (\bar{R}R - \bar{B}B)/\sqrt{2}, (\bar{R}R + \bar{B}B) - 2\bar{G}G)/\sqrt{6}$$

Le tableau ci-dessous résume les caractéristiques des interactions fondamentales. Dans le cas de l'interaction faible, nous verrons que c'est aussi l'invariance de jauge locale qui prévaut, mais doublée d'un mécanisme subtil.

Interaction	Forte	Electromagnétique	Faible
Particules de jauge	gluons	photon (γ)	W^\pm, Z^0
I^π	1^-	1^-	1
Masse (GeV)	0	0	$M_W c^2 = 80,4$ $M_Z c^2 = 91,2$
Source	Charge de couleur	Charge électrique	Charge faible
Portée (m)	$\leq 10^{-15}$	∞	10^{-18}
Couplage	$\alpha_S = g_S^2/4\pi\hbar c \leq 1$ ~ 1 (r grand) < 1 (r petit)	$\alpha = e^2/4\pi\varepsilon_0\hbar c$ $= 1/137$	$\alpha_W = g_W^2/4\pi\hbar c$ $\sim 10^{-6}$ à basse énergie
Section efficace σ caractéristique	10^{-3} à 100 b	$\sim 10^{-6}$ b	$\sim 10^{-14}$ b
Vie moyenne τ caractéristique	10^{-23} à 10^{-20} s	10^{-20} à 10^{-15} s	$> 10^{-13}$ s

Dans le cas de l'interaction forte, l'idée de 3 charges de couleurs vient de la constatation qu'il n'y a pas de quark isolé dans la nature. Ils se présentent uniquement sous forme de baryon ou de mésons. On fait la synthèse de cette situation en imposant que la couleur des hadrons dans la nature, doit être blanche : R+B+G ou couleur+anticouleur.

La particularité que les gluons soient chargés de couleur, amène comme nous l'avons vu dans le premier chapitre, à la liberté asymptotique : les quarks ne sont libres qu'aux très petites distances. La figure de gauche ci-dessous montre l'évolution de la constante de couplage de l'interaction forte en fonction de la distance entre les 2 particules. La figure de droite est la correspondante expérimentale en fonction de l'énergie de l'interaction.



De manière générale, on caractérise l'intensité d'une interaction par un nombre sans dimension. Si V est le potentiel d'interaction, ce nombre est :

$$\alpha = \frac{V \cdot r}{\hbar c}$$

avec $\hbar c = 197 \text{ MeV.fm}$.

On peut ainsi comparer les valeurs de α pour les 4 interactions. Dans le cas de la gravitation et de l'interaction ELM, cela est bien commode car α ne dépend pas de r , puisque leur potentiel est en $1/r$. Mais il dépend des valeurs des masses et des charges. On obtient :

$$\alpha_{Grav} = \frac{G m_p^2}{\hbar c} = 6 \cdot 10^{-39}$$

pour deux protons. Elle est donc négligeable (on pourra calculer la valeur pour deux quarks tops en exercice). Pour l'interaction électromagnétique entre 2 particules de charge élémentaire, on obtient :

$$\alpha_{ELM} \hat{=} \alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = 7,297 \cdot 10^{-3} = \frac{1}{137}$$

On l'appelle aussi constante de structure fine. Notons que α_{ELM} dépend de l'énergie (polarisation du vide). Ainsi pour $E \sim 100 \text{ GeV}$, on a $\alpha_{ELM} \sim 1/128$.

Pour l'interaction forte, on obtient :

$$\alpha_S = \frac{g_S^2}{4\pi\hbar c}$$

où g_S est la constante de couplage de couleur entre les quarks et les gluons. Comme nous l'avons vu, α_S dépend aussi de l'énergie et varie entre 0,1 (hautes énergies) et 1 (basses énergies). Enfin, pour l'interaction faible, la constante à basse énergie G_F est homogène à des Joules.mètre³. On obtient donc

$$\alpha_W = \frac{G_F(m c^2)^2}{(\hbar c)^3}$$

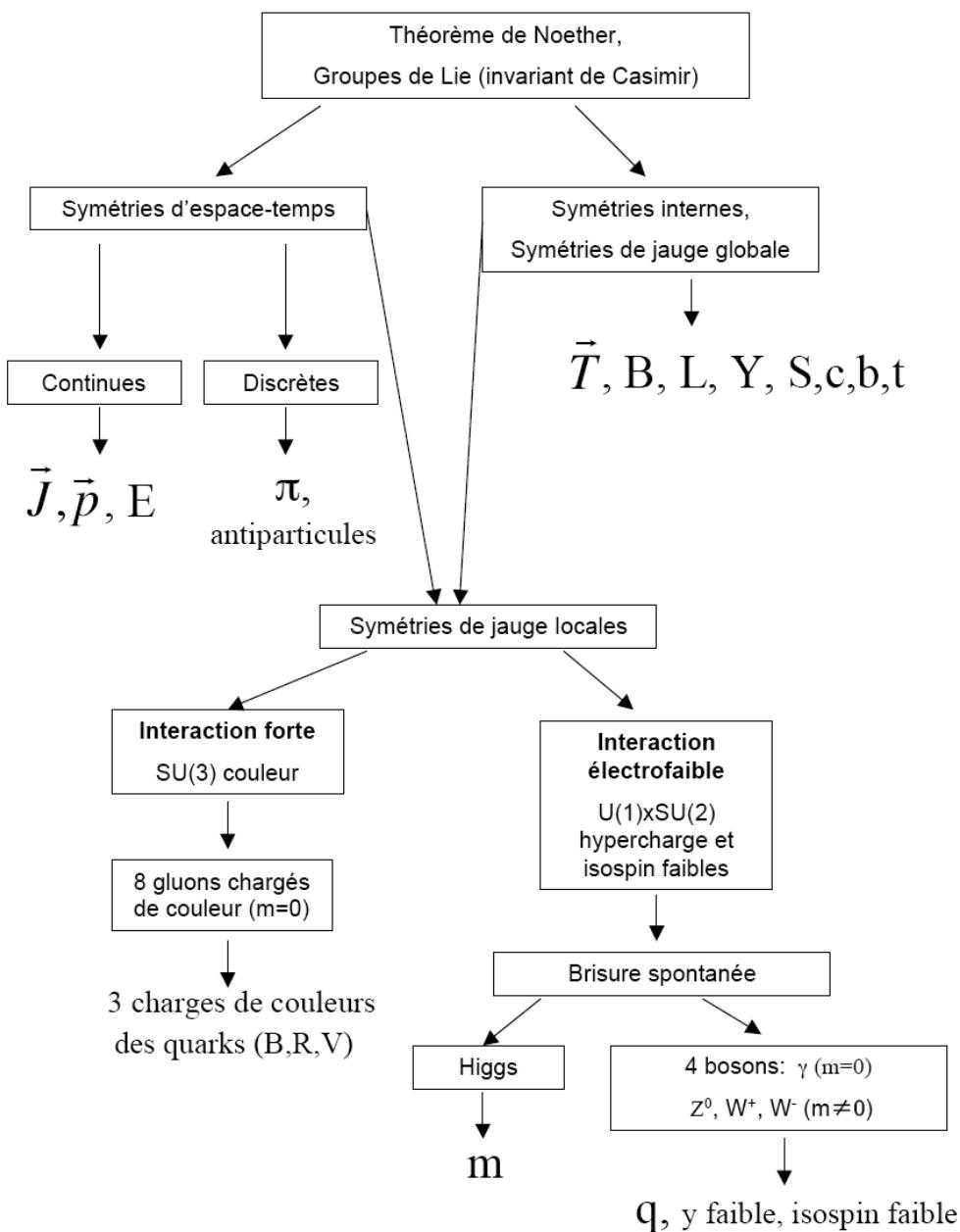
qui vaut $3 \cdot 10^{-12}$ pour l'électron et 10^{-5} pour le proton. On en conclut donc que l'interaction forte prédomine, suivie de l'interaction électromagnétique. L'interaction faible a un effet négligeable en comparaison, mais elle peut ouvrir de nouveaux canaux de réactions car elle n'est pas invariante sous autant de symétries que les autres interactions ; il y a donc des nombres quantiques qu'elle ne conserve pas, comme par exemple la parité. Quant à l'interaction gravitationnelle, elle est négligeable. En résumé, l'interaction gravitationnelle est environ 30 ordres de grandeur moins intense que l'interaction faible, elle-même environ 10 ordres de grandeur moins intense que l'interaction forte.

Il reste cependant un problème : toute particule massique brise la symétrie de jauge locale. Intuitivement on comprend que donner une masse, par exemple au boson médiateur, introduit des termes supplémentaires susceptibles de briser cette symétrie dans le lagrangien. Or cette symétrie est cruciale car sans elle, les calculs de section efficace divergent (ils sont dits non-renormalisables). D'où viennent donc les masses des bosons électrofaibles et des particules élémentaires ? Dans le cas de l'interaction électrofaible, nous sommes donc confrontés à un problème : les bosons de jauge de cette interaction sont massifs (Z et W), on le sait empiriquement. Comment leur donner une masse, tout en respectant la symétrie de jauge

locale ? La solution est de briser spontanément cette symétrie, c'est-à-dire que la solution du système fasse apparaître des champs massifs, bien que le système (lagrangien) possède toujours cette symétrie (on parle de symétrie cachée, par exemple le flambage d'une poutre). Apparaît, lors de cette brisure, un boson supplémentaire, en plus des bosons de jauge : le boson de Higgs. Il est lui-même massif, et en se couplant aux autres bosons et particules sensibles à l'interaction électrofaible, il va leur donner une masse. Toutes les particules interagissant par interaction faible, le Higgs peut donner potentiellement une masse à toutes les particules de la matière. On a fait ainsi d'une pierre deux coups : on explique l'origine des masses tout en gardant une théorie renormalisable.

Finalement, le graphe (original) ci-dessous présente un synoptique du modèle standard :

Origine des caractéristiques des constituants élémentaires dans le modèle standard



9. Annexe 4 : Accélérateurs

Les accélérateurs permettent donc de produire des réactions à différentes énergies, afin de recréer par exemple les conditions d'énergie élevée qu'il y avait lors des premiers instants de l'Univers. L'accélérateur le plus puissant, le LHC, mis en service à l'automne 2009 permettra d'atteindre une énergie d'environ $T = 10 \text{ TeV}$ soit $t = 10^{-14} \text{ s}$ après le Big-Bang.

On distingue les accélérateurs linéaires et les accélérateurs circulaires. Le principe des accélérateurs linéaires est le suivant : un champ électrique accélère les particules chargées. Depuis le tube à vide de Crookes en 1875, les accélérateurs électrostatiques permettent d'obtenir des différences de potentiel entre les électrodes de plusieurs millions de Volts. Dans les années 90, l'utilisation de courants alternatifs de haute fréquence ($> 100 \text{ MHz}$) permettent d'accélérer les particules jusqu'à plusieurs dizaines de GeV par une technique différente, qui va au-delà de ce cours : l'accélération radiofréquence supraconductrice. Ainsi l'International Linear Collider (ILC) prévu pour après 2015 pourra accélérer des électrons au-delà du TeV par cette technique.

Le principe des accélérateurs circulaires est de « recycler » la particule en la faisant tourner avec un champ magnétique, afin de l'accélérer à plusieurs reprises. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

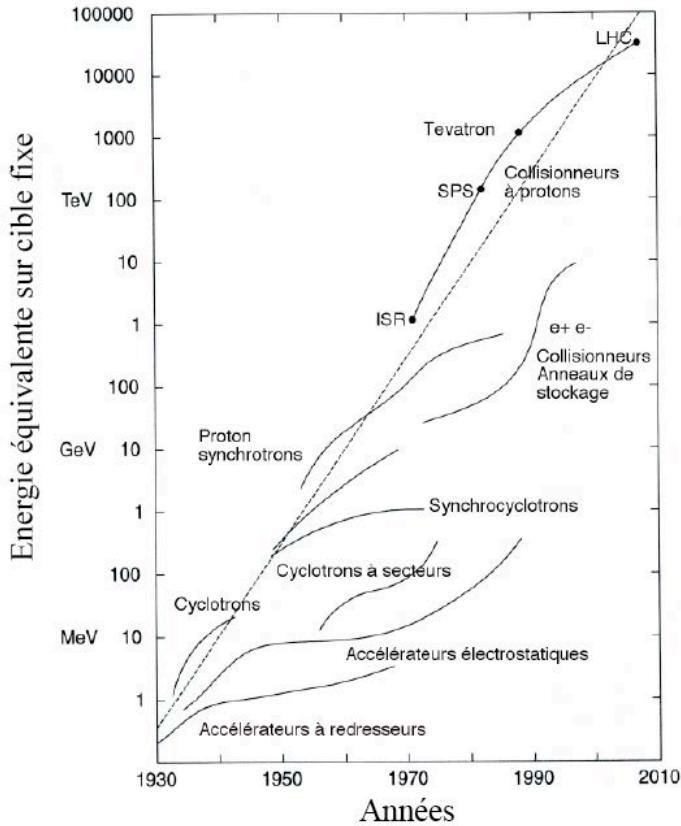
$$\frac{dp}{dt} = \gamma m \frac{v^2}{R} = qvB$$

d'où

$$BR = \frac{p}{q} = \gamma \frac{mv}{q}$$

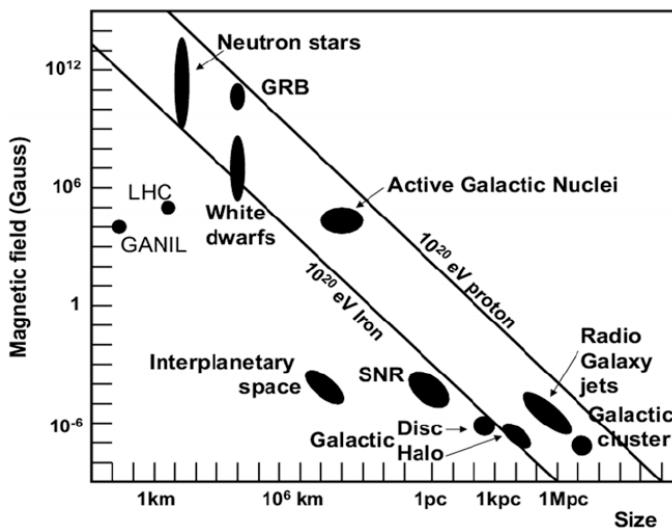
Le produit du champ magnétique par le rayon de courbure est constant pour une particule d'énergie fixée.

La fréquence d'oscillation $f = qB/2\pi\gamma m$ n'est constante lors du processus d'accélération que dans le cas non-relativiste : $T = 50 \text{ MeV}$ au maximum pour des protons. Pour des particules relativistes, il faut ajuster la fréquence d'oscillation du champ électrique, c'est le synchrocyclotron. Mais pour des particules encore plus énergétiques ($T > 1 \text{ GeV}$), la taille de l'aimant impose une limitation. Le synchrotron permet de garder R constant lors de l'accélération, tout en augmentant B : plus besoin d'un aimant avec une grande surface. Mais pour des énergies très élevées (au-delà de 100 GeV pour des électrons), le Bremstrahlung (rayonnement de freinage) fait perdre trop d'énergie à la particule, introduisant une nouvelle limitation. La figure ci-dessous (diagramme de Livingston) résume les progrès exponentiels obtenus dans la course aux énergies avec les années.



Notons que les réactions symétriques (linéaire frontal, anneaux de collision) sont indispensables aux hautes énergies ($T>100\text{GeV}$) car le référentiel du laboratoire coïncide alors avec le référentiel du centre de masse : toute l'énergie est disponible pour la réaction. Ainsi le LHC accélérera deux faisceaux de protons à $T=7 \text{ TeV}$ chacun. On peut voir sur la figure ci-dessus, l'énergie équivalente à laquelle il faudrait accélérer un proton sur cible fixe : de l'ordre de 10^5 TeV (on peut la calculer en exercice).

Cependant, les énergies des prochains accélérateurs sont faibles devant l'énergie de GUT. La situation est donc différente de celle du LEP dont l'énergie permettait d'atteindre l'unification électrofaible. Il faut donc exploiter des accélérateurs naturels, bien plus puissant que ceux sur Terre. On voit sur la figure ci-dessous, en vertu de la loi $BR = \text{constante}$, une droite en échelle log-log pour accélérer des protons de 10^{20} eV qui sont détectés sur Terre, et dont l'origine est encore mystérieuse. C'est le domaine des astroparticules.



Chapitre 2 : La structure des noyaux

1. Introduction

L'interaction nucléon-nucléon étant caractérisée, nous allons l'utiliser pour décrire la structure des noyaux, systèmes de plusieurs nucléons en interaction. Le chapitre suivant décrira ensuite les transformations que peuvent subir les noyaux.

En raison de la grande énergie de liaison (grande stabilité) de la particule alpha, la nucléosynthèse primordiale ne dépasse guère les noyaux de masse $A=7$. Comme la température et la densité de l'Univers décroissent, les réactions nucléaires cessent au bout d'un quart d'heure environ. Environ un million d'année plus tard ($kT \sim 1 \text{ eV}$) la synthèse des atomes s'enclenche par combinaisons des électrons avec les noyaux légers.

Il faut attendre plusieurs millions d'années pour que l'Univers achève la nucléosynthèse. Le cœur des étoiles avec sa haute température et densité ($kT \sim 1 \text{ keV}$) permet en quelque sorte un retour en arrière qui va permettre de synthétiser les noyaux lourds. Nous verrons qu'une fois encore, la particule alpha n'a pas dit son dernier mot, et a failli empêcher la synthèse de tous les éléments plus lourds que le Lithium ($A \sim 7$).

2. Nucléosynthèse stellaire

• Histoire d'une étoile

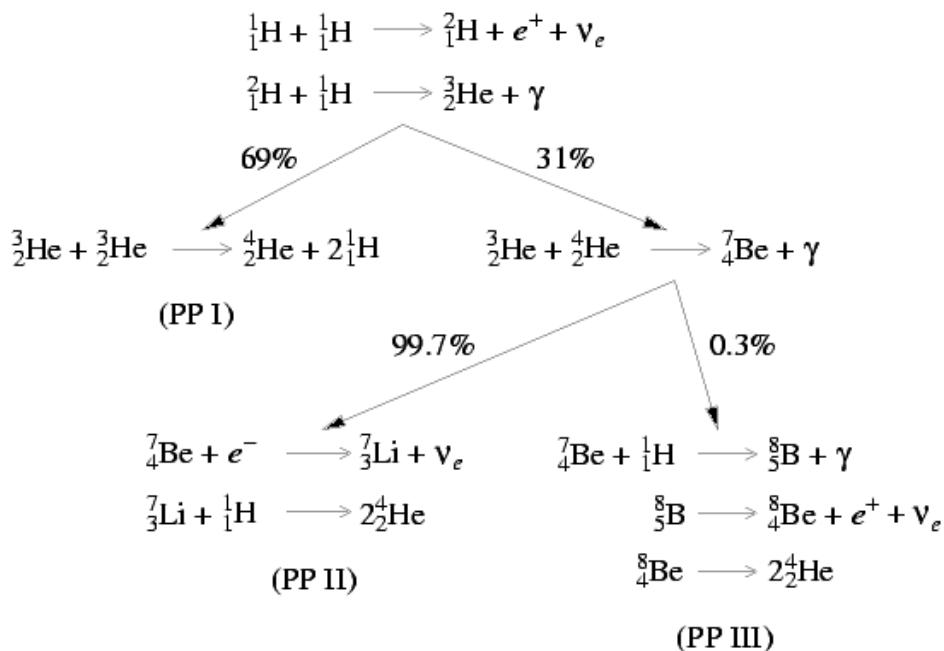
Nous devons rapidement résumer les différents scénarios de vie et de fin de vie des étoiles pour comprendre la nucléosynthèse. Une étoile est majoritairement composée d'hydrogène et de quelques éléments légers, hérités de la nucléosynthèse primordiale.

Le principe général de fonctionnement d'une étoile est l'équilibre entre la pression gravitationnelle qui tend à la contracter, et la pression thermonucléaire qui provient de l'énergie dégagée lors de la fusion des éléments légers en son cœur. Lorsque l'étoile a consumé tout son hydrogène par fusion, son coeur se contracte, augmentant sa densité et sa température centrales, ce qui lui permet de faire fusionner des éléments plus lourds comme de l'hélium (géante rouge). Lorsqu'elle a consumé tout son Hélium, son coeur se contracte à nouveau (supergéante), pour faire fusionner des éléments plus lourds, etc.

Au cœur des étoiles comme le Soleil, la température atteint $kT \sim 1 \text{ keV}$. Pour fusionner les noyaux d'hydrogène doivent donc franchir la barrière Coulombienne (que nous étudierons dans ce chapitre) par effet tunnel. C'est donc aussi grâce à la densité centrale ($\sim 10^5 \text{ kg/m}^3$) de l'étoile que ces réactions se déroulent avec un taux non négligeable.

• Cycles pp

La figure ci-dessous montre les réactions non-triviales de fusion des éléments légers, qui mènent à la production d'Hélium, tout en dégageant de l'énergie. Par exemple $Q=26,7 \text{ MeV}$ pour la chaîne pp-I. Cela est encore dû à la grande énergie de liaison de la particule α , qui permet de produire une énergie importante à l'échelle de l'étoile.



D'après Carroll & Ostlie, « An introduction to modern astrophysics »

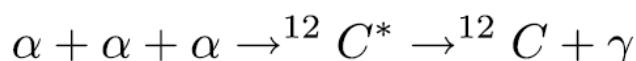
Notons que la première réaction ci-dessus a lieu par interaction faible (présence de neutrino en voie de sortie). En effet, la synthèse de deuton est ici moins directe que lors de la nucléosynthèse primordiale, car il n'y a plus de neutrons dans le cœur de l'étoile, en raison de leur temps de vie de quelques minutes.

Exercice : Si la réaction initiale se déroulait par interaction forte, quel aurait été le temps de vie du Soleil ?

- **La redoutable particule alpha**

Mais comme dans le cas de la nucléosynthèse primordiale, la nucléosynthèse stellaire ne dépasse pas à priori $A=8$ en raison de la grande énergie de liaison de la particule alpha. Comment expliquer la présence dans l'Univers de tous les éléments plus lourds que $A=8$?

La solution est d'envisager la réaction de fusion à 3 particules en voie d'entrée, afin de sauter l'étape fatidique $A=8$:



Il existe donc un état excité du ${}^{12}\text{C}$ (état de Hoyle) permettant cette réaction dans le cœur des géantes rouges. Notons que c'est la haute densité de l'étoile qui permet cette réaction peu probable, contrairement au cas de la nucléosynthèse primordiale.

Avec la production du carbone, la voie est ouverte pour la synthèse d'éléments plus lourds (oxygène, azote, etc, ...) par fusions successives avec notamment des particules alpha. Nous allons donc étudier donc la structure des noyaux, édifices de protons et de neutrons.

3. Le problème à N corps

Les théoriciens en physique nucléaire utilisent désormais la théorie quantique des champs pour modéliser le noyau, qui connaît un essor important depuis les années 90. En pratique on écrit le lagrangien effectif à partir des degrés de liberté choisis : nucléons interagissant par le biais de mésons. Le lagrangien le plus simple s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & \bar{\psi} [i\gamma_\mu (\partial^\mu + ig_\omega \omega^\mu) - (m - g_\sigma \sigma)] \psi \\ & + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2) - \frac{1}{4} \omega_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu\end{aligned}$$

Dans ce lagrangien on remarque les spineurs Ψ qui représentent les nucléons. Ceux-ci interagissent avec les champs de mésons σ et ω avec les constantes de couplage respectives g_σ et g_ω . On applique ensuite le principe de moindre action, aboutissant aux équations de Dirac pour les nucléons, et aux équations de Klein-Gordon pour les mésons.

Reste alors à traiter le problème à N-corps dans ce cadre. De nombreux développements sont actuellement en cours pour reformuler de manière complète et unifiée la description du noyau dans le cadre de la TQC : traitement des déformations, des états excités, ... Un avantage de cette approche est que le terme de spin-orbite, si important en physique nucléaire pour décrire les nombres magiques, comme nous les verrons à la prochaine section, est naturellement généré par le lagrangien.

Dans le cadre de ce cours, nous nous limiterons à une approche non-relativiste, qui reste pertinente. Pour décrire les noyaux ($2 < A < 500$) l'Hamiltonien composé de A nucléons s'écrit :

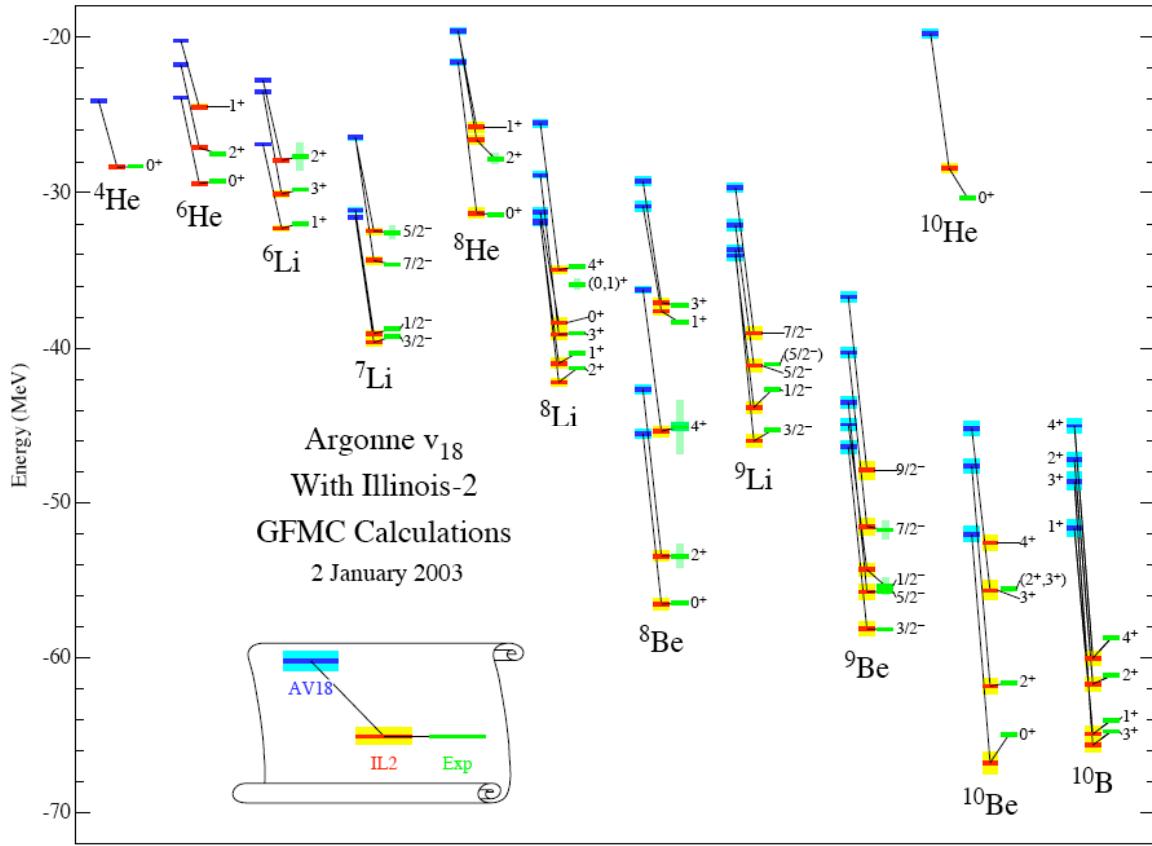
$$H = \sum_{i=1}^A \frac{\hat{p}_i^2}{2m} + \sum_{i < j=1}^A V_2(\vec{r}_i, \vec{r}_j) + \sum_{i < j < k=1}^A V_3(\vec{r}_i, \vec{r}_j, \vec{r}_k)$$

où V_2 est l'interaction à 2 corps (notée V dans le chapitre précédent) et V_3 celle à trois corps, que nous avons vu au chapitre précédent. Il ne reste plus en principe qu'à résoudre l'équation de Schrödinger stationnaire :

$$H\Psi = E\Psi$$

pour obtenir les énergies et fonctions d'ondes de l'état fondamental et des états excités du noyau. On est alors confronté au **problème à N-corps**.

Le problème à N corps est insoluble analytiquement pour N plus grand que 3 ou 4. Il est donc nécessaire de recourir à des approximations pour contourner ce problème à N corps. Une alternative est de résoudre numériquement l'équation de Schrödinger ce qui devient très vite limitatif en termes de temps de calcul. On pourrait ainsi tenter, comme dans le cas des hadrons, de faire des calculs numériques. Ils atteignent pour l'instant des noyaux de masse $A=16$ et ne semblent pas pouvoir aller beaucoup plus loin (calculs dits ab initio, cf la figure ci-dessous), ou bien ils sont limités à des régions spécifiques de la carte des noyaux (calculs dits modèle en couches), ce qui est peu compatible avec une vision en profondeur et universelle du phénomène nucléaire. Il faut noter que sans une force à trois corps les noyaux obtenus par les méthodes ab initio sont prédits trop peu liés. Avec une force à trois corps, l'accord avec l'expérience devient bien meilleur, comme le montre la figure ci-dessous. Il serait intéressant d'utiliser une interaction effective dérivée de QCD avec les termes à 2 et 3 corps correspondant. Dans un futur plus lointain, l'ajout du terme à 4 corps pourrait être envisagé.



Calculs ab initio GFMC des énergies de liaison, avec la force Argonne v₁₈ et un terme à trois corps (Illinois-2)

Il est donc nécessaire d'utiliser une autre approche. Considérons un système de A nucléons en interaction. L'Hamiltonien total s'écrit :

$$H = \sum_{i=1}^A \frac{\hat{p}_i^2}{2m} + \sum_{i < j=1}^A V_2(\vec{r}_i, \vec{r}_j)$$

où l'on néglige ici l'interaction à trois corps $V_3(\vec{r}_i, \vec{r}_j)$.

En pratique il est donc extrêmement difficile de résoudre cette équation pour $N \geq 4$: c'est toute l'essence du problème à N corps, qu'il s'agisse d'atomes ou de noyaux. Dans le cas des noyaux, N est typiquement de l'ordre que plusieurs dizaines, ce qui rend également délicat un traitement à la limite thermodynamique ($N \rightarrow \infty$) ; nous verrons cependant de telles approches au prochain chapitre. L'approche microscopique par une approximation de l'équation de Schrödinger se révèle donc quasi-incontournable.

L'idée est de transformer un problème à A corps en A problèmes à 1 corps, chacun étant soluble. On fait donc l'approximation que les nucléons sont indépendants les uns des autres. Ils sont chacun soumis à un potentiel moyen généré par l'ensemble des nucléons. Le champ moyen s'écrit donc, en première approximation :

$$V(\vec{r}_i) = \int d\vec{r}_j V_2(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \rho(\vec{r}_j)$$

où ρ est la densité de probabilité de présence des nucléons dans le noyau. Attention : V désigne ici le champ moyen et V_2 l'interaction nucléon-nucléon (Yukawa, ...). Cette dernière était notée V dans le chapitre précédent. Notons qu'en toute rigueur, il faut ajouter à V le champ moyen d'échange dû au principe de Pauli (diffusion de deux fermions identiques).

Le terme champ moyen est justifié car il s'agit de résoudre une équation de Schrödinger d'un système de particules indépendantes : l'Hamiltonien total H_0 , approximation de l'Hamiltonien exact H , s'écrit :

$$H_0 = \sum_{i=1}^A h(\vec{r}_i) = \sum_{i=1}^A \frac{\hat{p}_i^2}{2m} + \sum_{i=1}^A V(\vec{r}_i)$$

où $V(\mathbf{r})$ est le champ moyen : il ne dépend que de l'état de la particule i . La simplification apportée par rapport à l'Hamiltonien H exact provient de sa décomposition en une somme d'Hamiltonien h à 1 corps : on a transformé l'équation très difficilement soluble de A corps en interaction, en A équations à 1 corps *à priori* indépendantes et solubles :

$$\hat{h}\phi_i = \epsilon_i \phi_i$$

L'équation de Schrodinger s'est décomposée en A équations indépendantes, que l'on appelle équations du champ moyen (ou équation Hartree-Fock). Notons que l'expression de h est complètement déterminée par l'interaction nucléon-nucléon $V_2(\vec{r}_i, \vec{r}_j)$, présente dans l'Hamiltonien H exact.

La solution de ces A équations donne les énergies individuelles ϵ_i et les fonctions d'ondes individuelles ϕ_i des nucléons, à partir desquelles on construit l'état et l'énergie du système total de A nucléons. Pour des particules indépendantes, la fonction d'onde totale Ψ du noyau est le produit des A fonctions d'ondes ϕ_i individuelles des nucléons. Comme il s'agit de fermions, elle doit de plus être antisymétrique sous l'échange des coordonnées de deux nucléons : on l'écrit comme une superposition des différentes permutations de nucléons, qui s'exprime commodément comme un déterminant de Slater :

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{A!}} \begin{vmatrix} \Phi_1(1) & \Phi_2(1) & \dots & \Phi_A(1) \\ \Phi_1(2) & \Phi_2(2) & \dots & \Phi_A(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Phi_1(A) & \Phi_2(A) & \dots & \Phi_A(A) \end{vmatrix}$$

Le facteur en $A!$ correspond au nombre de possibilités d'affecter les coordonnées de A nucléons dans A états différents, de manière à obtenir une fonction d'onde totale normée. Par exemple pour un système de 3 fermions, on obtient :

$$\begin{aligned} \Psi(1, 2, 3) = \frac{1}{\sqrt{6}} & [\Phi_1(1)\Phi_2(2)\Phi_3(3) - \Phi_1(1)\Phi_2(3)\Phi_3(2) + \Phi_1(3)\Phi_2(1)\Phi_3(2) \\ & - \Phi_1(3)\Phi_2(2)\Phi_3(1) + \Phi_1(2)\Phi_2(3)\Phi_3(1) - \Phi_1(2)\Phi_2(1)\Phi_3(3)] \end{aligned}$$

La densité de matière du noyau permet de calculer la probabilité de trouver des nucléons à la position r : c'est la densité de probabilité de présence. Dans le cadre du modèle à particules indépendantes, c'est la somme des densités de chaque nucléon.

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^A |\phi_i(\vec{r})|^2$$

Le champ moyen nucléaire est dit auto-consistent car le potentiel moyen $V(r)$ est généré par l'ensemble des nucléons : pour le calculer, il faut connaître la densité qui est elle-même

calculée à partir des fonctions d'ondes de tous les nucléons. Donc pour calculer ϕ_i il est nécessaire de connaître tous les ϕ_i . Pour résoudre un tel système on procède de manière itérative, ce qui permet de converger vers la « bonne » solution à partir d'un point de départ à priori quelconque (un potentiel empirique par exemple).

Le concept du champ moyen appelle deux remarques :

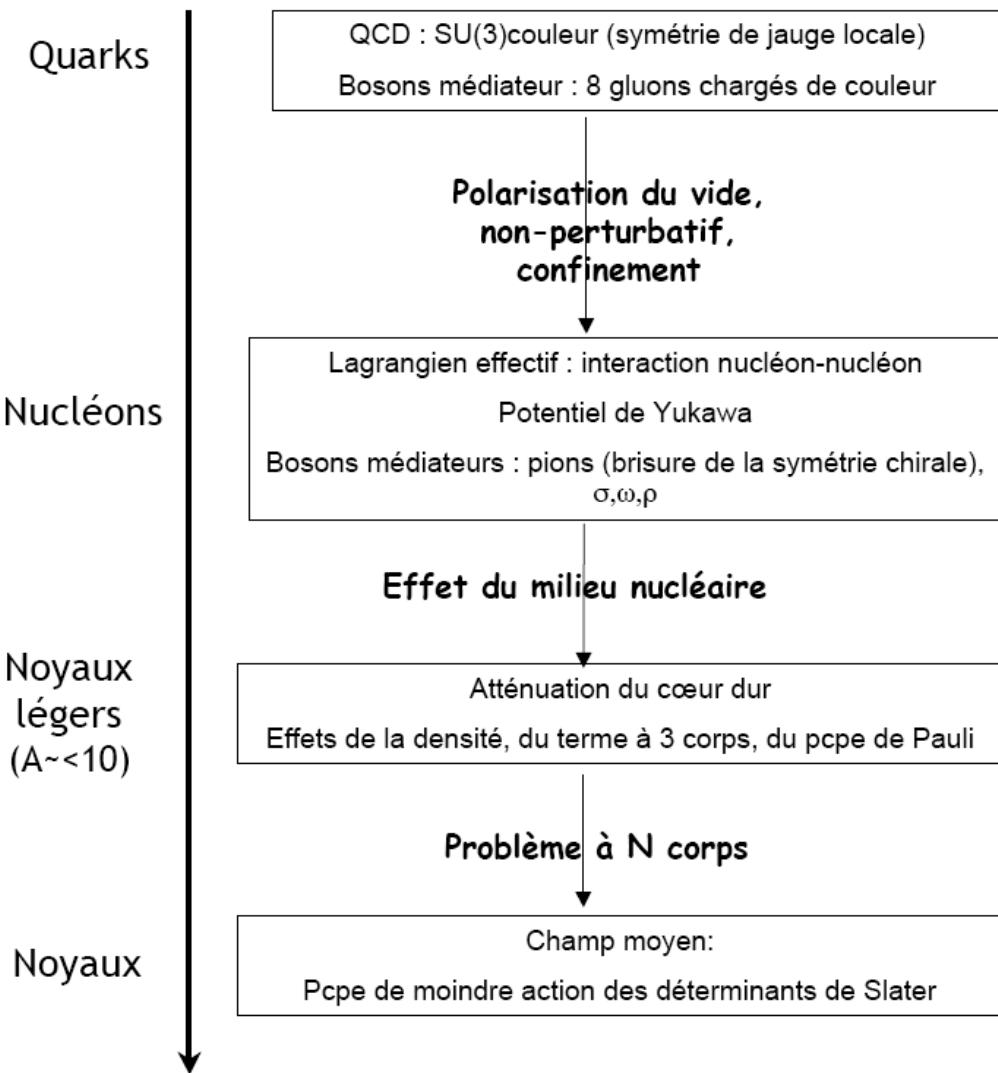
* Cette approximation est-elle justifiée pour un noyau ? Cela semble paradoxal : comment peut-on considérer un nucléon soumis un à potentiel moyen à l'instar d'un électron dans un atome ? Cela semble contradictoire avec les mouvements collectifs au sein du noyau, comme par exemple la fission. En fait il s'avère que l'approximation du champ moyen est bel et bien confirmée par des faits expérimentaux. Ainsi, expérimentalement, le libre parcours moyen d'un nucléon au sein du noyau est de l'ordre de grandeur du noyau lui-même (~ 10 fm). On a d'abord invoqué le principe de Pauli qui rallongerait le libre parcours moyen car des nucléons occupent déjà les états en voie de sortie des interactions entre les nucléons. Mais il semblerait que cette indépendance des nucléons soit en fait due aux caractéristiques de l'interaction forte (portée, intensité) rapportées à la masse d'un nucléon. On peut le voir en utilisant l'action. Lorsque l'action caractéristique d'un nucléon à l'équilibre est très proche de \hbar , les effets quantiques sont importants et se manifestent par une forte délocalisation du nucléon. Cet effet de délocalisation quantique est analogue à la délocalisation des électrons dans les atomes, qui se situent en moyenne à quelques angströms du noyau (10^5 fois la taille du noyau). Les nucléons acquièrent par ce même mécanisme un libre parcours moyen important.

Exercice : Calculer l'action typique pour un nucléon à l'équilibre en fonction de sa masse m , de la portée a et de l'intensité V_0 de l'interaction nucléon-nucléon. Les effets quantiques de délocalisation sont-ils attendus comme importants ?

* Cette approximation du champ moyen (potentiel subi par chaque particule indépendante), à des racines profondes. On peut en effet montrer que lorsque l'on considère un système à particules indépendantes, le principe de moindre action (principe en amont des équations du mouvement, cf chapitre du cours de Feynman sur le principe de moindre action) aboutit à l'équation du champ moyen. Il est donc formellement le meilleur pour décrire le noyau car il découle d'un principe variationnel (annexe 1). Ce principe est une reformulation de l'équation de Schrödinger en utilisant le principe de moindre action : sa minimisation conduit aux solutions du système, via les équations du mouvement. Ainsi, quant on ne peut résoudre exactement l'équation de Schrödinger, il est commode d'utiliser le principe variationnel en se restreignant à une classe particulière d'états de l'espace de Hilbert lors de la variation. Cette limitation des états possibles mène à des équations du mouvement correspondant à une approximation de l'équation de Schrödinger exacte. Il est de plus possible d'optimiser ce choix de classe d'états en fonction de l'observable d'intérêt. Par exemple, un état à particules indépendantes (déterminant de Slater) est le meilleur choix pour prédire les valeurs moyennes associées aux fonctions d'ondes individuelles des particules. On obtiendra donc le « meilleur » champ moyen par construction. Il est habituellement appelé champ de Hartree (terme direct) Fock (terme d'échange).

La figure ci-dessous résume les différentes étapes de la description de la matière liée par l'interaction forte : les problèmes rencontrés sont en gras, et les solutions utilisées pour y remédier figurent dans les encadrés.

L'interaction forte des quarks aux noyaux



4. Du champ moyen aux nombres magiques

a. La structure en couches

Le champ moyen du noyau est donc confinant puisque de nombreux noyaux sont liés. Il varie assez peu d'un noyau à l'autre car le mécanisme dit de « saturation » fait qu'à part à la surface du noyau, la majorité des nucléons subissent les mêmes effets qu'ils soient dans un noyau d'oxygène ou de plomb : la courte portée (alliée au cœur dur) de l'interaction nucléaire (voir le chapitre 1) implique que les nucléons interagissent avec leurs plus proches voisins lors de leur parcours dans le noyau. Leur comportement à l'intérieur d'un noyau est donc similaire, quel que soit le noyau.

Dans ce cours, nous allons étudier un champ moyen qui ne découle pas du principe de moindre action, mais qui présente l'avantage d'avoir des solutions analytiques. Ceci nous permettra de comprendre la structure du potentiel moyen nucléaire. Nous allons fréquemment adopter dans la suite de ce cours ce type d'approche, car les prédictions utilisant un champ

moyen microscopique nécessitent des calculs numériques qui se prêtent moins bien à des interprétations pédagogiques.

Considérerons donc l'oscillateur harmonique (OH) à 3 dimensions à symétrie sphérique. L'expression du potentiel est :

$$V(r) = -V_0 \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] = -V_0 + \frac{1}{2} \mu \omega_0^2 r^2$$

Comme $V(r)$ est un potentiel central, les opérateurs reliés au moment angulaire orbital \hat{l}^2 et à \hat{l}_z commutent avec \hat{h} . ℓ et m sont donc de bon nombres quantiques et les fonctions d'ondes se présentent sous la forme :

$$\phi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = \frac{f_{nl}(r)}{r} Y_l^m(\theta, \phi)$$

avec

$$\begin{aligned}\hat{l}^2 Y_l^m &= l(l+1)\hbar^2 Y_l^m \\ \hat{l}_z Y_l^m &= m\hbar Y_l^m\end{aligned}$$

La partie radiale de la fonction d'onde individuelle d'un nucléon obéit à l'équation :

$$\frac{d^2 f_{nl}}{dr^2} + \left[\frac{2\mu}{\hbar^2} \left(\epsilon_{nl} - \frac{\mu \omega_0^2}{2} r^2 \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] f_{nl} = 0$$

et les solutions s'écrivent :

$$\phi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = C x^l L_n^{(l+\frac{1}{2})}(x^2) e^{-\frac{x^2}{2}} Y_l^m(\theta, \phi)$$

où L sont les polynômes de Laguerre et

$$x = r \sqrt{\frac{\mu \omega_0}{\hbar}}$$

Ci-dessous se trouvent des exemples de polynômes de Laguerre

$$\begin{aligned}L_0^{(\alpha)}(x) &= 1 \\ L_1^{(\alpha)}(x) &= -x + \alpha + 1 \\ L_2^{(\alpha)}(x) &= \frac{x^2}{2} - (\alpha + 2)x + \frac{(\alpha+2)(\alpha+1)}{2}\end{aligned}$$

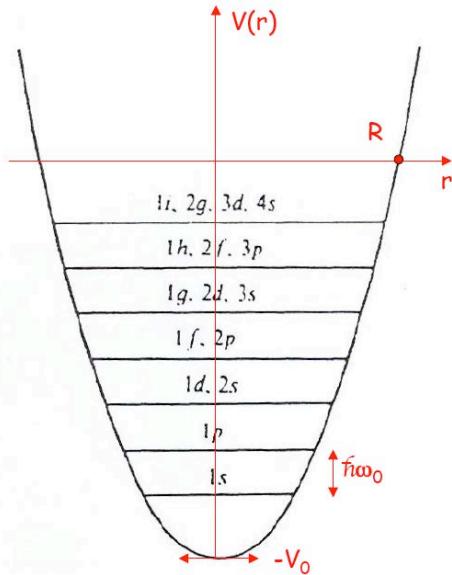
n est le nombre quantique radial, qui donne le nombre de nœuds de la fonction d'onde (elle a $n-1$ zéros), et ℓ est le nombre quantique azimuthal.

Une conséquence d'un potentiel confinant est la discréétisation des niveaux (propriété des états liés en physique quantique) ici équidistants, puisqu'il s'agit de l'oscillateur harmonique. Les niveaux d'énergie sont donnés par :

$$\epsilon_N = \left(N + \frac{3}{2} \right) \hbar \omega_0$$

où $N=2(n-1)+\ell$ est le nombre quantique dit principal. On voit ainsi apparaître une structure en couche sur la figure ci-dessous. Les noyaux ayant un nombre de nucléons tel que leurs

couches sont exactement remplies auront ainsi des propriétés spécifiques : grande énergie de liaison, forme sphérique, ...



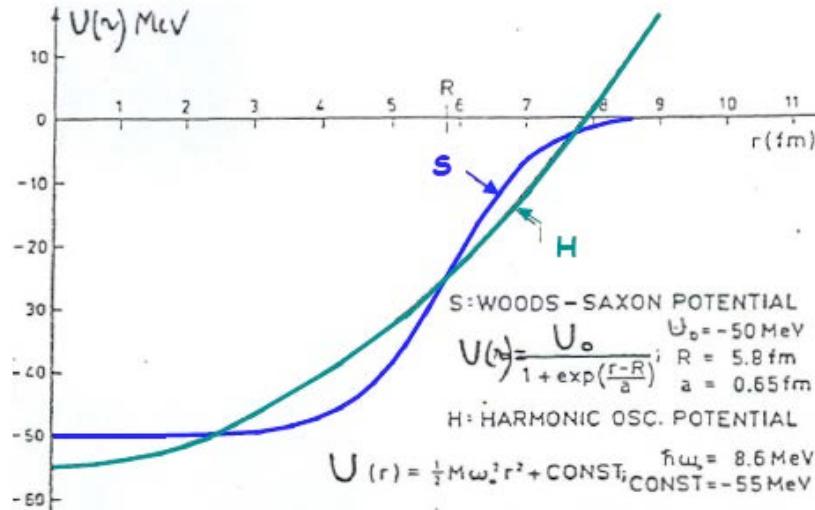
La dégénérescence d_N de chaque couche se calcule à partir du nombre de combinaisons $n_x+n_y+n_z=N$ de l'oscillateur harmonique à 3 dimensions. On trouve $d_N=(N+1)(N+2)$ en tenant compte des 2 états de spin possible d'un nucléon. Des états de moments angulaires ℓ différents peuvent être dégénérés en énergie comme on le voit sur la relation $N=2(n-1)+\ell$. Les valeurs de ℓ sont repérées par des notations héritées de la spectroscopie : $\ell=0,1,2,3,4,5,6, \dots$ se notent respectivement s,p,d,f,g,h,i,j, ... Le tableau ci-dessous résume les caractéristiques des premières couches, qui représentent les états des différents nucléons du noyau.

N	E_N	d_N	$\Sigma_N d_N$	$n\ell$	parité
0	$(3/2) \hbar\omega$	2	2	1s	+
1	$(5/2) \hbar\omega$	6	8	1p	-
2	$(7/2) \hbar\omega$	12	20	1d, 2s	+
3	$(9/2) \hbar\omega$	20	40	1f, 2p	-
4	$(11/2) \hbar\omega$	30	70	1g, 2d, 3s	+
5	$(13/2) \hbar\omega$	42	112	1h, 2f, 3p	-
6	$(15/2) \hbar\omega$	56	168	1i, 2g, 3d, 4s	+

On voit apparaître les nombres de nucléons correspondants aux fermetures des couches de l'oscillateur harmonique (2, 8, 20, 40, ...). Continuons donc notre exploration du champ moyen nucléaire pour parvenir aux nombres magiques, c'est à dire les fermetures de couche expérimentalement constatées. Comme le potentiel nucléaire n'est pas exactement comme celui de l'OH (bords plus diffus, terme de spin-orbite important), les dégénérescences des couches sont altérées. Il y a apparition de nombres magiques, pour lesquels les noyaux sont

particulièrement liés. C'est un effet général de nombreux systèmes fermioniques liés (électrons dans les atomes, agrégats atomiques, ...).

Ainsi le potentiel moyen nucléaire est plus diffus sur les bords que celui de l'oscillateur harmonique. La figure ci-dessous montre la comparaison entre le potentiel OH (noté H) et un potentiel moyen typique d'un noyau (noté S).



Cette plus grande diffusivité est bien reproduite en ajoutant un terme comportant l'opérateur ℓ^2 dans le potentiel. En effet, les fonctions d'ondes de nucléons à la surface du noyau seront les plus affectées par ce terme, car c'est là que se situent les plus grandes valeurs de ℓ . Le potentiel s'écrit donc :

$$V(r) = V_{\text{OH}}(r) - D \ell^2$$

où V_{OH} est le potentiel de l'oscillateur harmonique décrit ci-dessus, et D une constante.

L'effet qualitatif de ce terme en ℓ^2 est de lever la dégénérescence en ℓ : les niveaux sont abaissés d'une énergie $-D\hbar^2 \ell(\ell+1)$. C'est donc l'état de plus grand ℓ au sein d'une couche d'oscillateur harmonique qui sera le plus abaissé. Prenons l'exemple de la couche N=3 : la dégénérescence est levée entre les sous-couches 1f et 2p, de dégénérescence respectives $2(2\ell+1)=14$ et 6, le facteur 2 venant des deux états de spin possibles pour chaque nucléon.

Notons que ce potentiel nucléaire est bien par ailleurs reproduit par la paramétrisation phénoménologique de Woods-Saxon :

$$V(r) = \frac{-V_0}{1 + e^{\frac{r-R}{0.228a}}}$$

où $-V_0$ est la profondeur du potentiel, a sa diffusivité, et R le rayon du noyau. Il est représenté sur la figure ci-dessus (noté S). Cette paramétrisation est un moyen simple de retrouver le potentiel nucléaire, mais de nos jours, seule l'approche microscopique est crédible pour décrire la structure du noyau. Nous avons vu que le champ moyen de Hartree-Fock est par construction le « meilleur » pour décrire les états individuels. Cependant historiquement en physique nucléaire, le premier champ moyen à avoir rencontré un grand succès est l'approximation empirique de Woods-Saxon (WS) ci-dessus.

Enfin il faut également adjoindre le champ moyen de spin-orbite : il provient de la partie spin-orbite de l'interaction nucléon-nucléon elle-même. Nous avons vu qu'il avait un effet important car ce sont les nucléons eux-mêmes qui le génèrent, contrairement au potentiel de spin-orbite de l'atome qui n'est pas généré par les électrons eux-même. Ce terme du champ moyen n'est donc pas une perturbation, car le terme spin-orbite de l'interaction nucléon-nucléon n'est pas une perturbation par rapport aux autres termes. Notons s le spin du nucléon : $s=1/2$. L'Hamiltonien s'écrit donc :

$$V(r) = V_{OH}(r) - D\hat{l}^2 - a\hat{l} \cdot \hat{s}$$

où a est un paramètre qui peut dépendre de la position r .

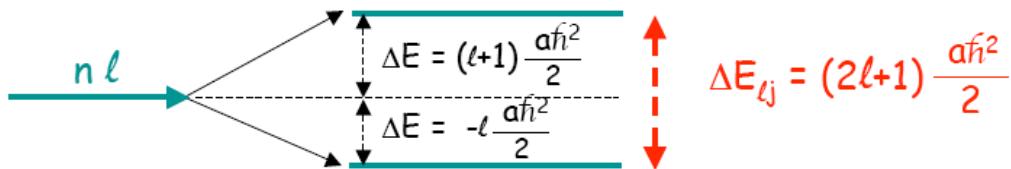
L'Hamiltonien ne commute plus avec \hat{l}_z et \hat{s}_z mais avec \hat{j}^2 et \hat{j}_z , \hat{l}^2 et \hat{s}^2 , puisque le moment cinétique total défini par

$$\hat{j} = \hat{l} + \hat{s}$$

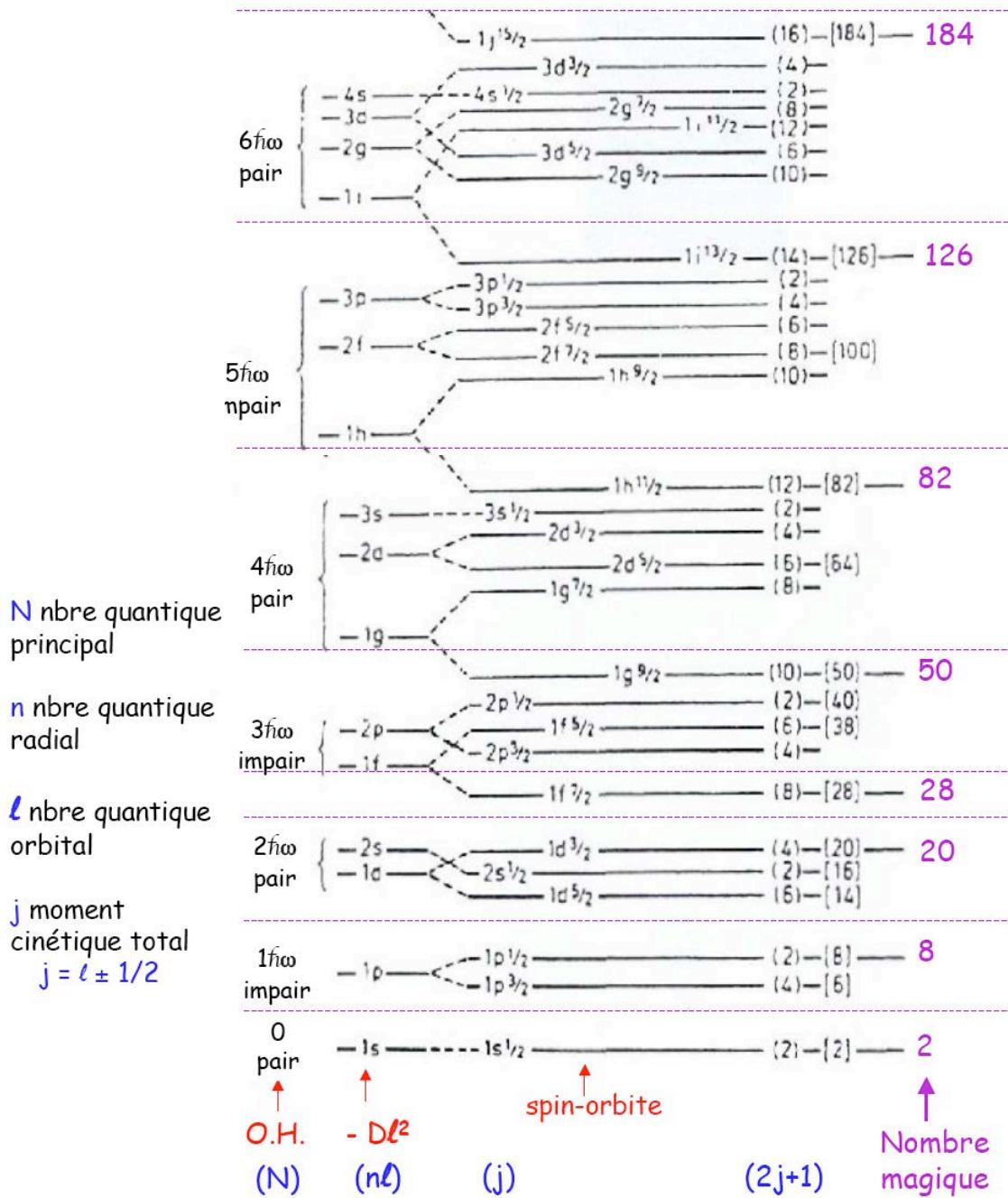
permet d'aboutir à :

$$\hat{l} \cdot \hat{s} = \frac{1}{2}(\hat{j}^2 - \hat{l}^2 - \hat{s}^2)$$

Comme $j=\ell+1/2$ ou $j=\ell-1/2$, la valeur moyenne du potentiel de spin-orbite vaut respectivement $-a\hbar^2\ell/2$ ou $(\ell+1)a\hbar^2/2$. Il y a donc une levée de dégénérescence dans laquelle chaque état se scinde en deux.



On en déduit ainsi la structure en couche des noyaux, et les nombres magiques situés aux fermetures de couches (figure ci-dessous). Les nombres magiques sont donc N ou $Z=2, 8, 20, 28, 50, 82$ et 126 . Ce schéma est valable pour une majorité de noyaux mais en raison des approximations qu'impose le problème à N corps, des inversions d'états peuvent apparaître. De même, pour les noyaux très riches en neutrons, le champ moyen sera un potentiel plus diffus, car il est généré par les nucléons dont de nombreux neutrons forment une « peau » diffuse de neutrons. On s'attend donc à ce que les valeurs propres de ce potentiel soient différentes du potentiel standard ci-dessus. Ainsi les nombres magiques peuvent être modifiés, et depuis quelques années de nombreux signaux de disparition ($Z=8$) ou d'apparition de nombres magiques ($N=40$) ont été obtenus dans certains noyaux dits exotiques (riches en neutrons par exemple). On parle d'évolution de la magicité, qui montre la nécessité d'une approche microscopique universelle capable de calculer le champ moyen spécifique à chaque noyau.

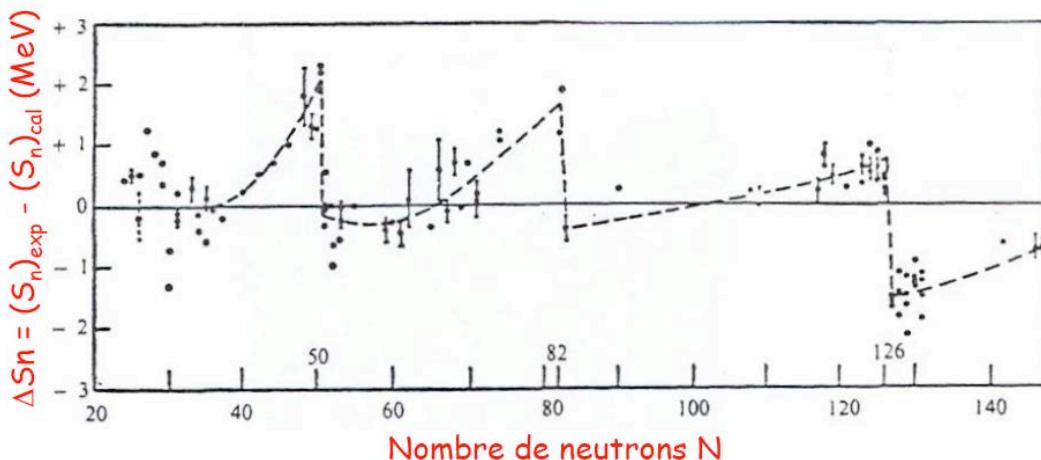


Cette figure montre que les nombres magiques sont identiques à ceux de l'oscillateur harmonique jusqu'à 20. Au-delà, le terme de spin-orbite devient si important (puisque la levée de dégénérescence s'accroît avec ℓ), que c'est lui qui détermine les nombres magiques à partir de 28 comme on peut le constater sur la figure.

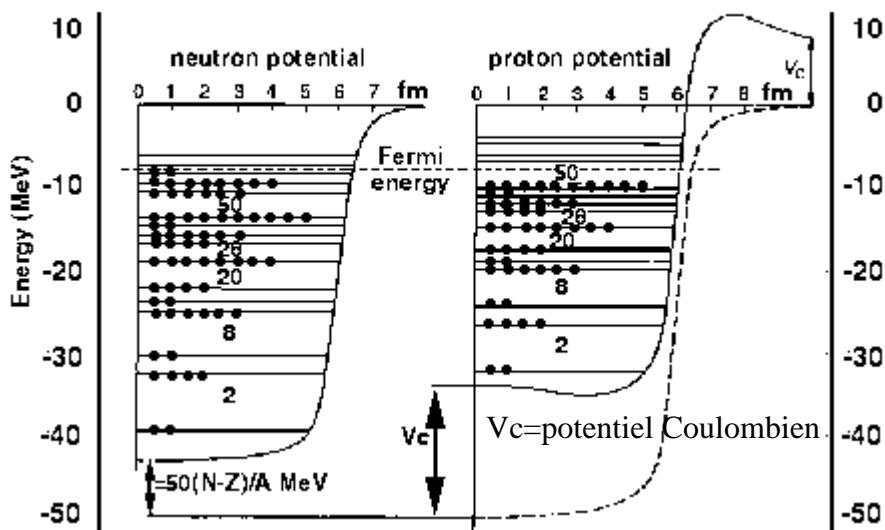
Les noyaux ayant un nombre de protons ou de neutrons égal à un nombre magique sont donc plus stables que leur voisins. Ils sont sphériques et leur section efficace de capture d'un nucléon est faible, comparée aux autres noyaux, à l'instar des gaz rares en physique atomique. On comprend aussi le rôle particulier joué par la particule alpha : c'est le seul noyau doublement magique léger, il est donc très lié et les noyaux de son voisinage se désintègrent en particule alpha.

Exercice : pourquoi les gaines qui contiennent l'uranium fissile dans les centrales nucléaires sont en zirconium : ^{90}Zr ($Z=40$ et $N=50$) ?

La figure ci-dessous montre l'énergie qu'il faut fournir pour arracher un neutron au noyau (énergie de séparation). Elle est particulièrement élevée pour les noyaux ayant un nombre de neutrons correspondant à un nombre magique.

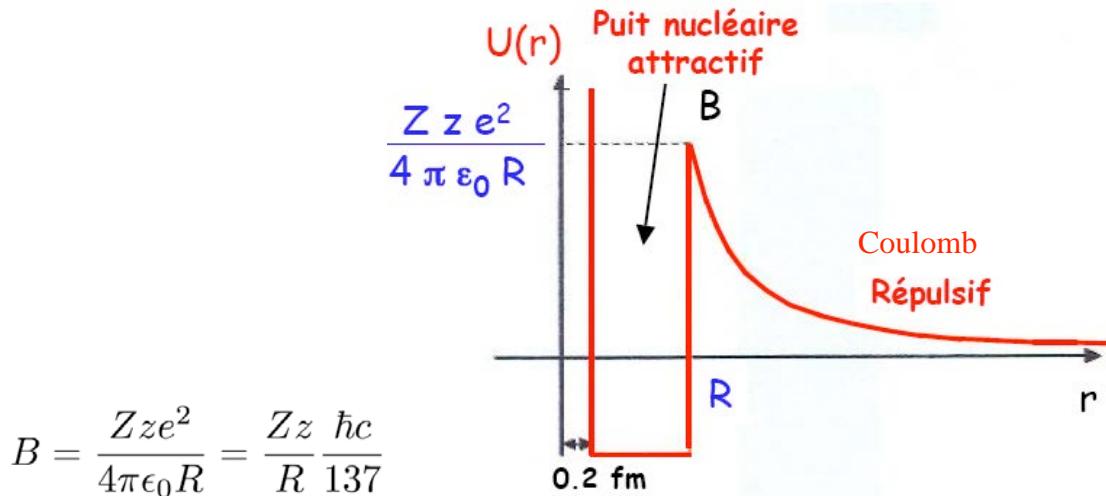


La figure ci-dessous montre les champs moyens pour les neutrons et les protons dans le noyau de ^{116}Sn ($Z=50$, $N=66$). On représente un potentiel moyen pour les neutrons et un pour les protons (qui inclut le potentiel Coulombien), que l'on remplit en fonction des dégénérescences de chaque sous-couche. Les états individuels sont indiqués à l'intérieur du potentiel moyen par des traits horizontaux. Les nucléons s'empilent sur ces niveaux, de manière à minimiser leur énergie cinétique, tout en respectant le principe de Pauli. Le dernier niveau occupé, dit niveau de Fermi, peut être proche pour les protons et pour les neutrons, ce qui assure la stabilité du noyau vis-à-vis de la désintégration β . Ainsi dans un noyau, les neutrons peuvent devenir stables (alors qu'ils ont une vie moyenne de 15 minutes environ dans le vide) car les états de protons en voie de sortie sont déjà occupés, et le principe de Pauli interdit la désintégration : le temps de vie des neutrons augmente.



Champ moyen et états à une particule du noyau de ^{116}Sn . Dans le cas des protons le champ moyen Coulombien s'ajoute au champ moyen nucléaire, pour créer la barrière Coulombienne à la surface du noyau.

Dans le cas des protons, le potentiel moyen Coulombien s'ajoute au potentiel moyen nucléaire, formant ainsi la barrière Coulombienne. L'effet de barrière s'interprète comme ceci : aux grands rayons, un proton externe ne ressent que l'interaction Coulombienne répulsive de longue portée. Aux petits rayons, l'interaction forte (attractive) l'emporte et le proton reste confiné dans le noyau. La valeur de la barrière coulombienne à la surface du noyau est :



où Z est le nombre de protons du noyau, z le nombre de protons de la particule soumise à cette barrière ($z=1$ pour un proton) et R le rayon du noyau (quelques fermis). La barrière Coulombienne est donc de quelques MeV pour les noyaux légers, et de quelques dizaines de MeV pour les noyaux lourds.

b. Spin et parité des états nucléaires

Connaissant les états individuels ϕ_i de chaque nucléon, il est possible de calculer l'état du noyau (ce qui nous importe finalement) : nous avons vu que la fonction d'onde Ψ de l'état fondamental du noyau est le déterminant de Slater des fonctions d'ondes individuelles ; le moment angulaire total du noyau est la composition des moments angulaires totaux j des nucléons, et la masse du noyau se déduit des énergies des états de chaque nucléon. On obtient donc E et Ψ , ce qui correspond à la résolution de l'équation de Schrödinger pour l'état fondamental du noyau, ici obtenu avec l'approximation du champ moyen.

Etudions en particulier comment déduire le moment cinétique total et la parité des noyaux. Dans le cadre du modèle à particules indépendantes, le moment angulaire total du noyau (que nous noterons indifféremment J ou I par la suite) s'écrit :

$$\vec{J} = \sum_{i=1}^A \vec{j}_i$$

Et la parité totale est le produit des parités $(-1)^j$ de chaque nucléon.

Cependant l'appariement joue ici un rôle simplificateur crucial, si bien qu'il est possible de déduire le moment angulaire total et la parité du noyau par des règles simples : en raison de l'effet d'appariement, les nucléons se groupent par paires avec des projections m et $-m$ de j sur l'axe Oz respectivement. Il en résulte que le moment cinétique total et la parité de la paire est 0^+ (l'appariement $T=1$ joue surtout dans le canal 1S_0 ($S=0, L=0, J=0$) qui correspond à $J=0$ pour la paire). Une paire de nucléons est donc une sorte « d'opérateur identité » pour le moment angulaire total et la parité. On en déduit les configurations suivantes :

- *Noyau pair-pair* : la conséquence de l'appariement est que le I^π de l'état fondamental est 0^+ puisque tous les nucléons se regroupent par paires. En fait l'appariement ne joue qu'au voisinage du niveau de Fermi (voir la section 7), mais les couches plus profondes sont entièrement remplies, ce qui en fait un cœur inerte 0^+ car il y a autant de nucléons dans des états m positifs que négatifs. La conséquence est que si des états nucléaires sont dégénérés en énergie, l'appariement favorisera l'état 0^+ en abaissant l'énergie de ce niveau.

Les états excités se déterminent en respectant les règles de couplages des particules identiques. De manière générale, on développe la base couplée sur la base de deux particules de moment angulaire j_1 et j_2 :

$$| JM \rangle = \sum_{m_1, m_2} \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | JM \rangle | j_1 j_2 m_1 m_2 \rangle$$

Dans le cas particulier d'un système à deux fermions, la fonction d'onde totale doit être antisymétrique sous l'échange :

$$| JM \rangle = \sum_{m_1, m_2} \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | JM \rangle \frac{1}{\sqrt{2}} [| j_1 j_2 m_1 m_2 \rangle - | j_2 j_1 m_2 m_1 \rangle]$$

Or une relation des coefficients de Clebsch-Gordan donne :

$$\langle j_2 j_1 m_2 m_1 | JM \rangle = (-1)^{J-j_1-j_2} \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | JM \rangle$$

Deux nucléons sur la même sous-couche ont la même valeur de j . On en déduit :

$$| JM \rangle = \sum_{m_1, m_2} \langle j j m_1 m_2 | JM \rangle \frac{(1 - (-1)^{J-2j})}{\sqrt{2}} | j j m_1 m_2 \rangle$$

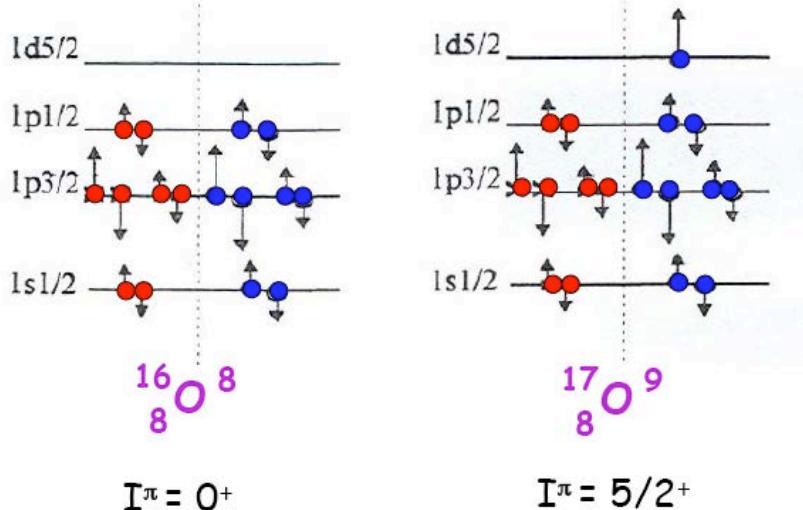
Ainsi les J impairs sont exclus car ils donnent une fonction d'onde nulle. Considérons donc un noyau pair-pair : deux neutrons ou protons au-dessus d'un cœur inerte 0^+ . Le spectre donne donc 0^+ pour l'état fondamental du noyau, puis le premier état excité est 2^+ , le deuxième 4^+ , car il y a levée de dégénérescence par l'appariement qui descend l'état 0^+ , et aussi par l'interaction résiduelle (effets au delà du champs moyen) qui respecte en général l'ordre pour les excitations (du au modèle dit vibrationnel).

- *Noyau pair-impair* : Le I^π du noyau est le moment angulaire total j du nucléon puisqu'on peut le considérer comme un noyau pair-pair ($I^\pi=0^+$) avec un nucléon supplémentaire, dans le cadre du modèle à particules indépendantes : $J=j$ et la parité est aussi celle du nucléon célibataire. Les états excités du noyau se déterminent en déplaçant cette particule, ou un trou, dans les sous-couches accessibles au nucléon.

- *Noyau impair-impair* : Il faut coupler les états des 2 nucléons (de nature différente) supplémentaires par rapport au cœur inerte. On obtient donc toutes les valeurs de J telles que :

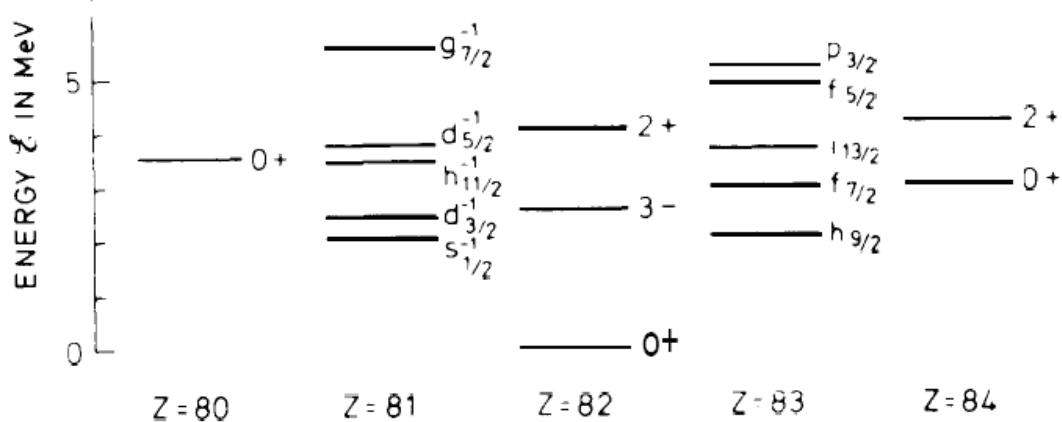
$$|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2 \text{ et } \pi = \pi_1 \pi_2 = (-1)^{\ell_1 + \ell_2}$$

Notons qu'ici les J impairs sont possibles, et que la dégénérescence est levée par l'interaction résiduelle au-delà du champ moyen. Il n'est pas possible de déduire directement l'ordre des états, notamment entre l'état fondamental et les états excités. La figure ci-dessous illustre les états fondamentaux d'un noyau pair-pair et pair-impair.



Exercice : Considérons le ^{210}Po qui a deux protons de plus (dans la sous-couche $h_{9/2}$) que le noyau magique ^{208}Pb . Quelles sont les valeurs possibles du moment angulaire total J du noyau ? Sont-elles dégénérées en présence de l'appariement ?

Le spectre en énergie d'excitation est très différent entre les noyaux pairs-impairs et pairs-pairs en raison de l'appariement. Le spectre de ces derniers est caractérisé par des excitations collectives de type vibrationnel ou rotationnel. Elles correspondent à des mouvements corrélés de nombreux nucléons au sein du noyau. A l'inverse, les noyaux pairs-impairs mélangeant ces excitations collectives avec des excitations à un nucléon qui monte sur les sous-couches. Ceci s'explique par le fait que dans les noyaux pairs-pairs, il faut une énergie d'excitation minimale de quelques MeV pour briser la paire avant de donner naissance à des états excités individuels. Ces états individuels sont par contre possibles à basse énergie pour les noyaux pairs-impairs. Ils correspondent à la montée d'un nucléon vers une sous-couche au-dessus du niveau de Fermi. Les états d'énergies les plus basses seront donc collectifs pour les noyaux pairs-pairs, et individuels pour les noyaux impairs-impairs. Les spectres en énergie d'excitation autour du ^{208}Pb sont montrés sur la figure ci-dessous. On constate la différence qualitative entre les deux types de noyaux. Les excitations collectives seront étudiées au prochain chapitre.



Etats excités de basse énergies pour les noyaux proches du ^{208}Pb (avec ± 2 protons) (d'après l'allocution Nobel de B. Mottelson, Rev. Mod. Phys. 48, 375 (1976))

Finalement soulignons l'effet de l'interaction résiduelle : nous avons vu que l'appariement lève la dégénérescence entre différents états du noyau. De manière générale, l'interaction résiduelle correspond aux termes de l'interaction négligés par l'approximation du champ moyen. En effet, l'Hamiltonien exact peut s'écrire comme la somme de celui à particules indépendantes et de l'interaction résiduelle :

$$H = \left(\sum_{i=1}^A \frac{\hat{p}_i^2}{2m} + V(\vec{r}_i) \right) + \left(\sum_{i < j=1}^A V_2(\vec{r}_i, \vec{r}_j) - \sum_{i=1}^A V(\vec{r}_i) \right) = H_0 + V_{\text{Res}}$$

C'est ce deuxième terme, V_{Res} , négligé dans le modèle à particules indépendantes qui peut modifier l'ordre des états par rapport à celui de la structure en couches standard. Il existe des techniques pour l'inclure de manière approximée (car l'inclure exactement reviendrait à résoudre le problème à N corps).

L'interaction résiduelle a principalement un effet pour les états excités car l'approximation du champ moyen est adaptée pour l'état fondamental du noyau (il découle du principe variationnel d'énergie minimum). Il faut cependant aussi la prendre en compte pour modéliser correctement l'état fondamental de certains noyaux. Ainsi la structure en couche n'est pas toujours la même pour chaque noyau, y compris dans l'état fondamental, et un calcul microscopique pour chaque noyau est donc nécessaire. Notons que l'interaction nucléon-nucléon V_2 est en principe la même pour tous les noyaux, ce qui permet d'envisager une description microscopique universelle des noyaux.

5. Une symétrie qui persiste : l'isospin

Nous avons vu que la symétrie $SU(2)$ d'isospin persiste au niveau des neutrons et protons avec des valeur de t_3 de $-1/2$ et $1/2$, respectivement. Il en résulte, que pour un système de A nucléons, l'isospin total vérifie :

$$\vec{T} = \sum_{i=1}^A \vec{t}_i \quad T_3 = \sum_{i=1}^A t_{3i} \quad \text{avec} \quad -T \leq T_3 \leq T$$

La valeur de T_3 est donc fixée pour un noyau donné :

$$T_3 = \frac{Z - N}{2}$$

Par contre T peut prendre plusieurs valeurs, qui correspondent aux différents états (fondamental ou excités) d'un noyau. Donc pour un noyau, la valeur de T_3 est fixée, mais pas celle de T (ce qui est contre-intuitif).

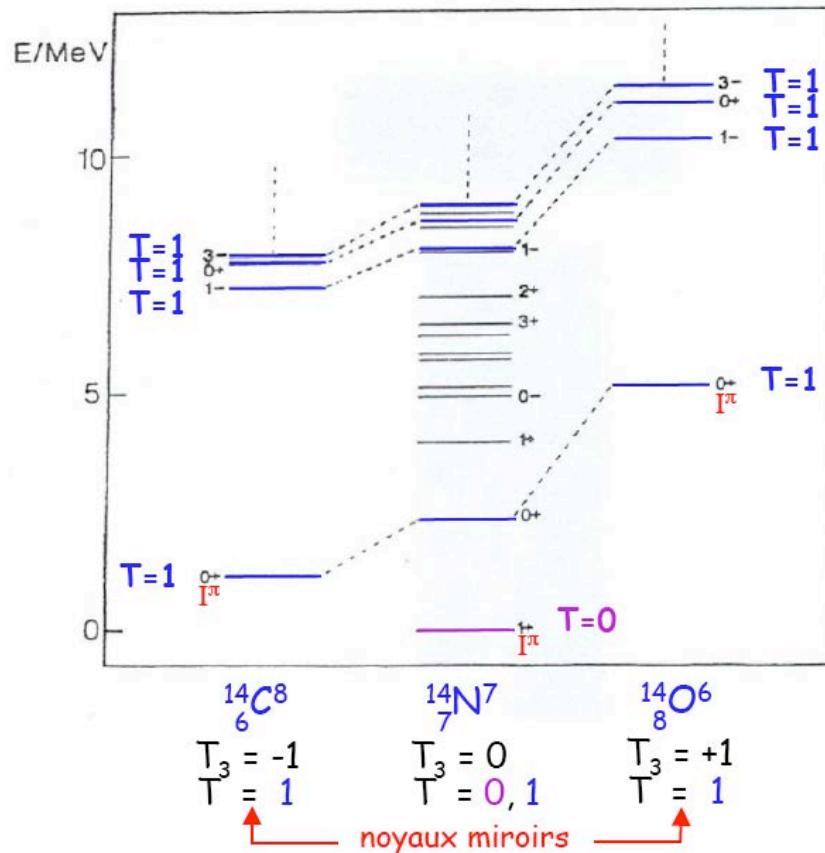
Une loi empirique constatée pour la quasi-totalité des noyaux est qu'à l'état fondamental correspond la valeur minimum de T :

$$T_{fond} = |T_3| = \left| \frac{Z - N}{2} \right|$$

En résumé, les valeurs possibles de T pour un noyau donné sont :

$$T_{fond} = \left| \frac{Z - N}{2} \right| \leq T \leq \frac{Z + N}{2} = \frac{A}{2}$$

Ceci nous conduit à la notion d'**états analogues**. Un système de A fermions est invariant par rotation dans l'isoespace : pour une valeur de T fixée, il ne dépend pas de T_3 . Ainsi il existe des états de différents noyaux correspondant aux membres de l'isomultiplet. Ils ont les mêmes propriétés du point de vue de l'interaction forte : même spin et parité, et même écart relatif entre 2 niveaux, aux effets coulombiens près. La figure ci-dessous montre trois états analogues isobariques du multiplet $T=1$ pour les isotopes $A=14$: les niveaux $T=1$ dans ces trois noyaux de Z consécutif qui ont les mêmes propriétés.



Les noyaux miroirs sont un cas particulier de la symétrie d'isospin appliquée aux noyaux : leur N et Z s'échangent respectivement, et tous leurs niveaux sont des états analogues, en vertu de la symétrie d'isospin SU(2) entre neutrons et protons.

La figure montre cependant que l'espacement entre les niveaux des noyaux miroir n'est pas exactement le même. En effet, la symétrie d'isospin est légèrement brisée par l'interaction Coulombienne. Il est possible d'en évaluer les effets, pour en déduire la masse (ou l'énergie d'un niveau) d'un noyau d'un multiplet, connaissant celle des autres membres du multiplet. La démarche est analogue à celle de Gell-Man et Okubo pour la brisure perturbative de la symétrie SU(3) de saveur (cf appendice). Ici c'est a priori l'interaction électromagnétique qui brise perturbativement la symétrie SU(2) d'isospin. On décompose donc l'Hamiltonien nucléaire en 2 parties :

$$H=H_F + H_{ELM}$$

H_F commute avec T et T_3 , alors que H_{ELM} ne commute qu'avec T_3 (conservation de la charge). H_{ELM} brise la symétrie et lève légèrement la dégénérence du multiplet. En adoptant un développement en T_3 on aboutit à l'Isobaric Multiplet Mass Equation (IMME) :

$$M_{at}c^2 = a(A, T) + b(A, T)T_3 + c(A, T)T_3^2$$

où M_{at} est la masse atomique qui ne diffère de la masse nucléaire que par la masse et l'énergie de liaison des électrons.

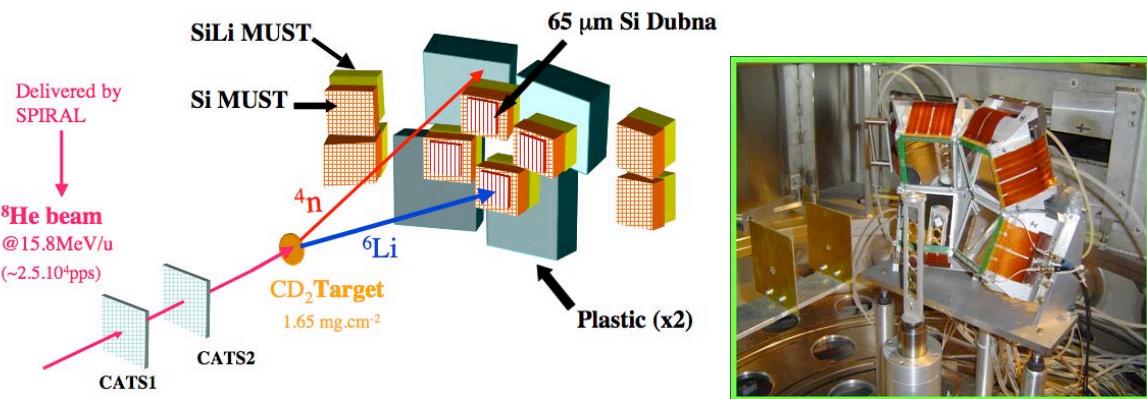
Ce développement en T_3 provient du terme coulombien traité perturbativement. Comme la formule de Gell-Mann et Nishijima (annexe 1 du chapitre 1) donne $Q/e=1/2 + t_3$ pour un nucléon, le potentiel coulombien entre deux nucléons fait apparaître un terme dépendant de la projection de l'isospin total T_3 et un terme en T_3^2 . L'IMME permet donc de prédire la masse d'un noyau connaissant celles des autres membres du multiplet d'isospin.

6. Applications

a. Une sonde expérimentale : les réactions de transfert

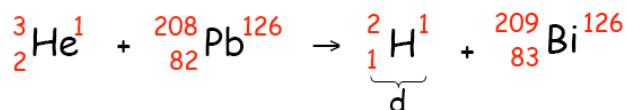
Il existe un éventail de réactions nucléaires permettant d'obtenir une information sur la structure d'un noyau. Ce sont les réactions dites directes, à des énergies de l'ordre de 10 MeV par nucléon : diffusion élastique, inélastique, réaction de transfert, ... Nous reviendrons sur les réactions nucléaires au prochain chapitre.

Les réactions de transfert sont particulièrement adaptées pour sonder la structure en couche des noyaux : elles permettent de déposer ou de prendre un (ou plusieurs) nucléons au noyau d'intérêt en utilisant une sonde. Cette sonde est habituellement un noyau très léger, qui possède une structure simple aux énergies nucléaires, comme le proton. On peut ainsi mesurer la position en énergie d'un état individuel de nucléon, ou obtenir des informations expérimentales sur sa fonction d'onde ϕ_i par la mesure du j^π du nucléon concerné à l'aide des sections efficaces nucléaires. La figure ci-dessous montre une expérience récente de transfert où une particule α est échangée entre un faisceau de ${}^8\text{He}$ et une cible de deutons. L'objectif était d'étudier les états du système neutre à 4 neutrons (le tétraneutron).

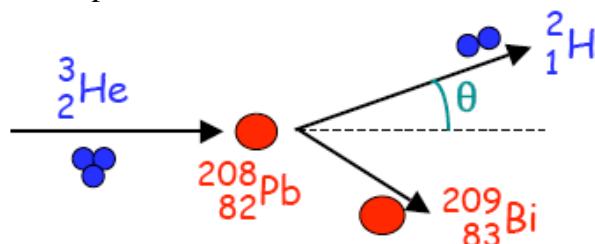


Dans ce type d'expérience, on mesure l'énergie de l'éjectile (en général la particule légère de recul) dans un spectromètre, ou un détecteur à semi-conducteur. Par les lois de conservation d'impulsion et d'énergie totale, on obtient l'énergie de la sous-couche du nucléon transféré (lorsqu'il s'agit d'un transfert à un nucléon) car il s'agit d'une réaction à 2 corps en voie de sortie.

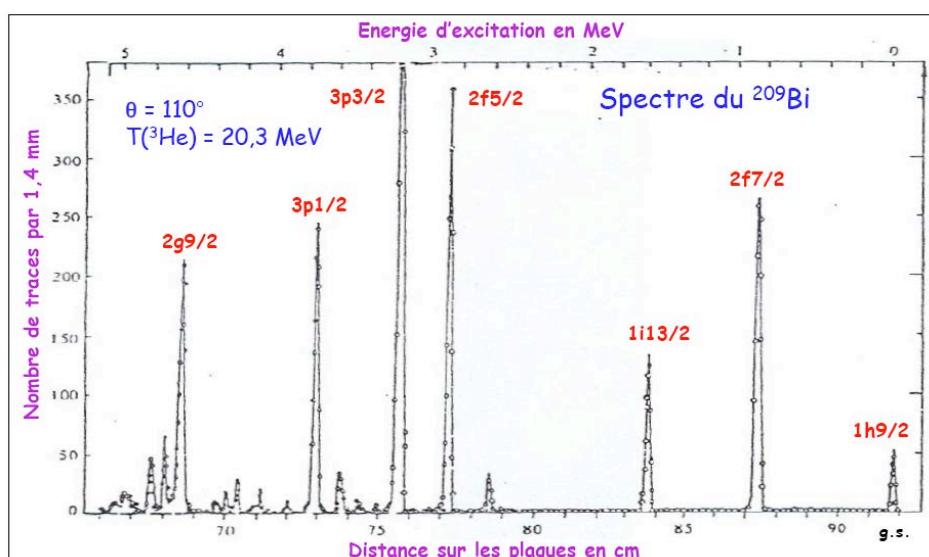
Prenons l'exemple d'une réaction de transfert à 1 proton, où une sonde légère donne un de ses protons au noyau doublement magique de plomb :



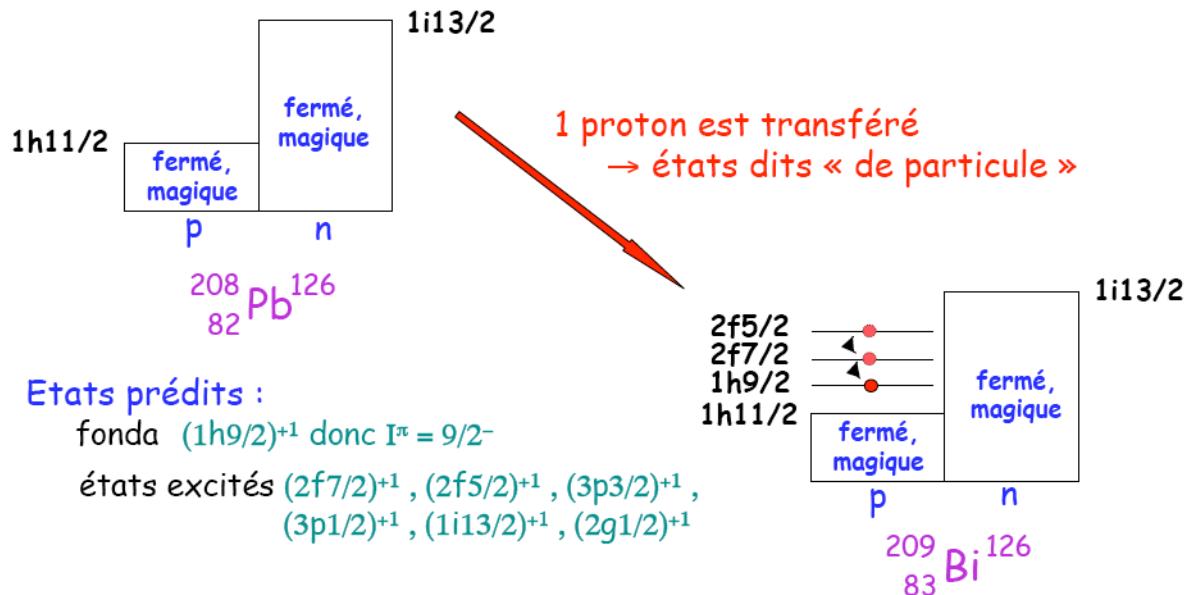
Cette expérience se schématisé par :



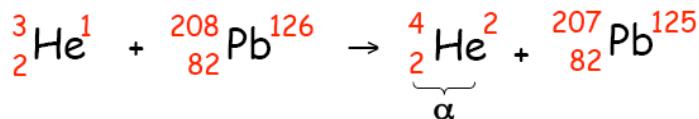
On en déduit les positions en énergie des différentes sous-couches où le proton peut se loger. C'est le spectre du ²⁰⁹Bi :



Ce spectre est construit par les mesures des angles de diffusion et de l'énergie du deuton en voie de sortie. On observe différents pics, dont on peut extraire les sections efficaces (distributions angulaires) pour en déduire le moment angulaire et parité de la sous-couche sur laquelle se trouve le proton en voie de sortie. On obtient ainsi le spectre du ^{209}Bi , qui dans le cadre du modèle à particules indépendantes, correspond à cœur de ^{208}Pb inerte plus un proton. Le bon accord avec l'expérience, que l'on peut vérifier avec la figure, valide ce modèle.



Notons qu'avec le même système en voie d'entrée, d'autres réactions peuvent avoir lieu, comme la réaction de transfert où la sonde prend un nucléon à la cible. Par exemple :



Ceci permet de sonder le spectre du ^{207}Pb et d'obtenir des informations sur les états de trous de neutrons par rapport au ^{208}Pb .

Les réactions de transfert sont actuellement une sonde privilégiée pour sonder l'évolution des nombres magiques dans les noyaux éloignés de la stabilité par désintégration β . Nous y reviendrons au prochain chapitre.

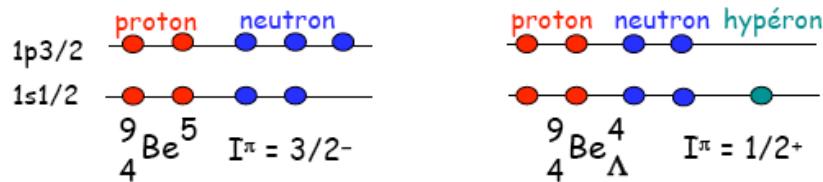
b. Les noyaux étranges

Une question ouverte concerne la matière nucléaire composée de quarks s. Cette matière étrange est probablement présente au cœur des étoiles à neutrons, où la densité et la température sont assez élevées pour produire thermiquement des hadrons à base de quarks s, comme les hypérons Λ . Les autres quarks c b t sont trop lourds pour être produits de cette manière, et il n'existe pas à priori de site astrophysique assez dense les hébergeant.

Il existe une conjecture qui prédit que la matière étrange serait plus liée que la matière non-étrange. En effet on comprend, sur la figure ci-dessous, que la mise en jeu d'un troisième type de fermion comme l'hypéron, peut en principe abaisser les niveaux de Fermi de neutrons et de protons. La matière étrange pourrait donc se situer à une énergie plus basse que la matière nucléaire. Les noyaux seraient donc des états métastables, et devraient se désintégrer en systèmes étranges, appelées strangelets. Cette désintégration n'a jamais été vérifiée

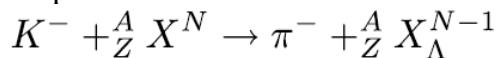
expérimentalement, et la vie moyenne prédictive des noyaux par ce canal de désintégration peut être supérieure à l'âge de l'Univers. Les strangelets sont cependant toujours recherchés dans les rayons cosmiques ou les poussières lunaires.

Une preuve expérimentale de la matière étrange est l'existence d'hypernoyaux. Un hypernoyau est un noyau dans lequel un hypéron remplace un neutron. En effet, ces deux particules ont des masses voisines et des caractéristiques de spin identiques (voir l'appendice). Les principales différences sont l'étrangeté non-nulle de l'hypéron et sa durée de vie de 10^{-10} s. Un exemple d'hypernoyau :



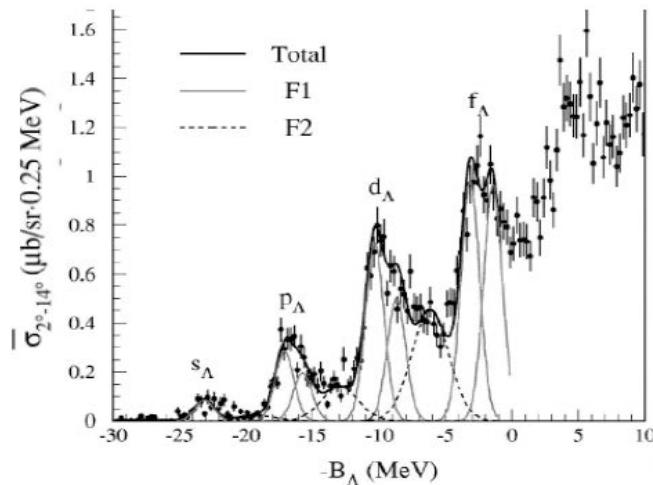
Il faut ainsi modéliser le champ moyen auquel est soumis l'hypéron à partir de l'interaction hypéron-nucléon. Cette interaction est beaucoup moins bien connue expérimentalement que l'interaction nucléon-nucléon.

Les hypernoyaux sont produits par la réaction :



Notons qu'elles ont permis de déterminer la parité du méson K.

La figure ci-dessous montre le spectre du ${}^{89}\text{Y}_{\Lambda}$ obtenu en 2001 au KEK (Japon). Cependant les hypernoyaux restent mal connus et l'accélérateur J Parc (Japon) a été récemment conçu pour sonder la matière étrange.



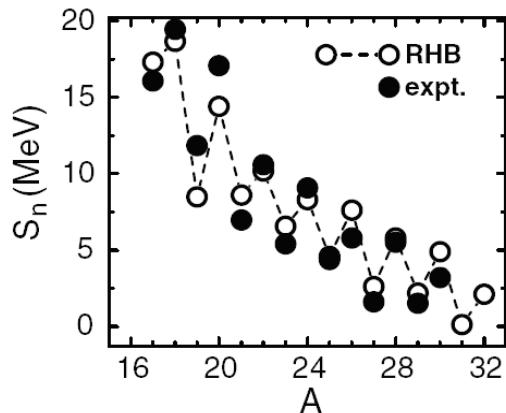
d'après les proceedings INPC 2001, T. Nagae et al.

7. La superfluidité nucléaire

La superfluidité du noyau est, on l'a vu au chapitre 1, une conséquence de l'appariement entre les nucléons. Nous allons voir comment le principe variationnel permet d'interpréter et de prédire les nombreux phénomènes reliés à la superfluidité. Mais commençons par les faits expérimentaux.

a. Origine et preuves expérimentales

La preuve la plus directe est la différence de comportement entre les noyaux dits pairs-pairs (nombre pair de neutron et de protons), et leurs homologues impairs-impairs. Ainsi l'oscillation systématique des **énergies de séparation** d'un neutron (notée S_n) entre les noyaux pairs-pairs et pairs-impairs s'explique par l'appariement des nucléons, qui confère aux noyaux pairs-pairs une énergie de liaison plus grande, typiquement notée 2Δ . Une étude empirique sur l'ensemble des noyaux montre que Δ suit la loi $\Delta=12.A^{-1/2}$ MeV. Ainsi pour un noyau de ^{120}Sn il faut typiquement une énergie de ~2 MeV pour briser une paire de nucléons.

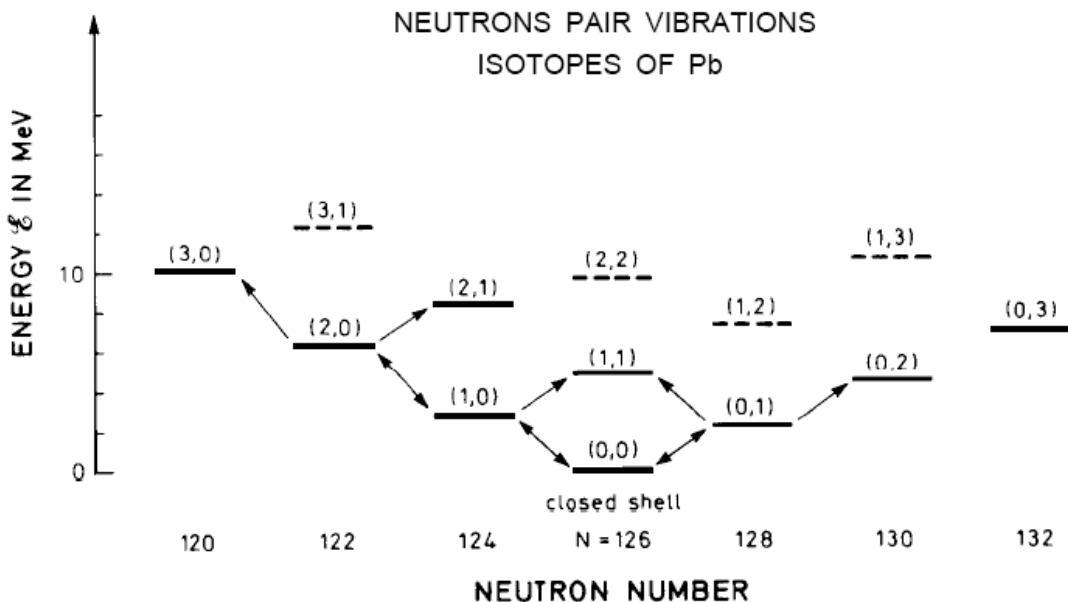


Energie de séparation de 1 neutron pour les isotopes de Néon, comparés à des calculs de type champ moyen (noté RHB) qui inclut l'appariement (d'après D. Vretenar et al. Phys. Rep. 409 (2005) 101)

La figure ci-dessus montre l'oscillation des S_n entre les nombres de neutrons pairs et impairs pour les isotopes de Néons. Les noyaux pairs-impairs sont moins liés car ils ont une masse systématiquement supérieure à la moyenne de celles de leurs voisins pair-pairs.

Exercice : Les noyaux comportant un nombre pair de neutrons ou de protons sont donc plus liés que leurs homologues impairs. Dans cette hypothèse, un noyau impair-impair peut-il être stable par rapport à la radioactivité β ? Vérifiez votre réponse sur une carte des noyaux (voir la bibliographie pour en obtenir une). Qu'en est-il des noyaux pairs-impairs?

Un autre effet de l'appariement est illustré par les énergies de masse des noyaux pairs-pairs au voisinage des noyaux magiques : en passant du noyau A au noyau A+2, ou A-2, les énergies de masses sont équidistantes, comme le montre la figure ci-dessous. Elles présentent donc une structure harmonique qui s'explique le comportement quasi-indépendant des paires de nucléons : l'ajout (ou le retrait) d'une paire de nucléons consiste à ajouter (ou retrancher) un même quanta d'énergie. Cet effet, qui relie les états fondamentaux de spin et parité $J^\pi=0^+$ des noyaux de nombre de masse A, A+2, A+4, ... est appelé vibration de paires, en raison du spectre de masse harmonique. Chaque état de vibration est caractérisé par la masse d'un noyau dans son état fondamental. Les vibrations de paires ont été mises en évidence par exemple au voisinage du ^{208}Pb . Expérimentalement cet effet se met assez directement en évidence par des mesures de masses (spectromètre, temps de vol, RF, piégeage de noyaux qui a obtenu un essor important ces dernières années).

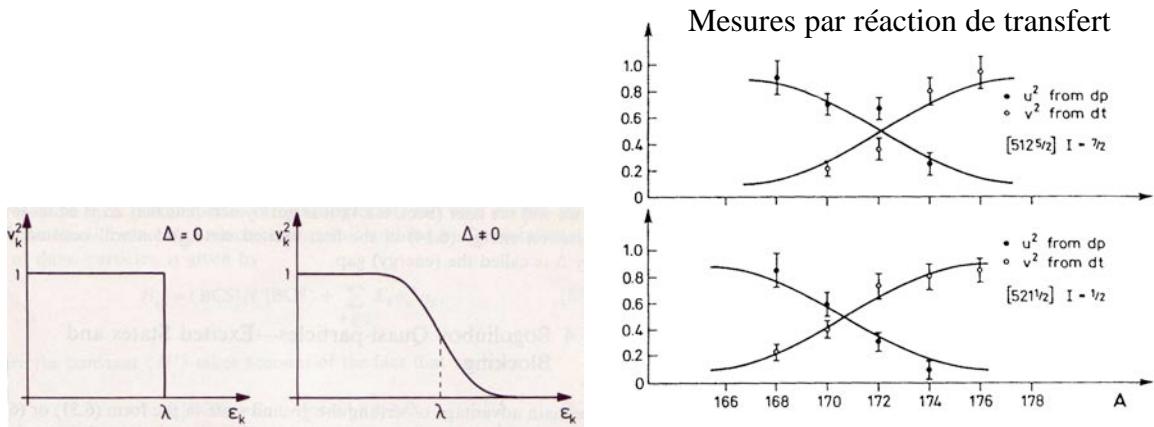


d'après l'allocution Nobel de B. Mottelson, Rev. Mod. Phys. 48, 375 (1976)

b. Interprétation microscopique : l'appariement de type BCS

Le principe variationnel va nous permettre d'interpréter microscopiquement le pairing, et d'en déduire les effets macroscopiques comme la superfluidité. Nous allons utiliser pour cela le principe variationnel statique (annexe 1). La classe de fonctions d'ondes choisie pour la variation est plus générale qu'un déterminant de Slater à particules indépendantes : les nucléons peuvent utiliser l'énergie de liaison d'appariement pour diffuser sur une sous-couche d'énergie supérieure. Chaque sous-couches labellisée par les nombres quantiques $k=\{nlj\}$ est donc susceptible d'accueillir une particule ou un trou, avec une probabilité notée v_k^2 , et $u_k^2=1-v_k^2$, respectivement.

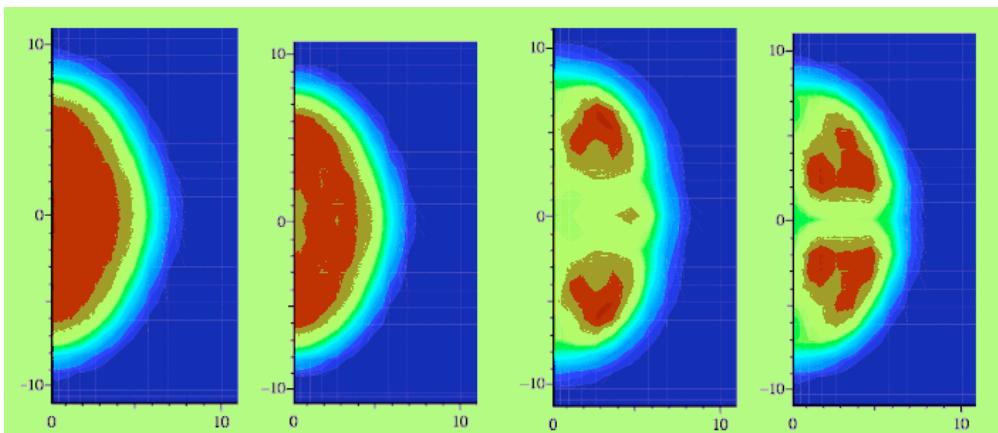
La figure ci-dessous montre la probabilité d'occupation v_k^2 des états individuels en fonction de leur énergie. Sans appariement ($\Delta=0$) tous les états sont occupés en-dessous du niveau de Fermi (noté λ sur la figure), et vide au-dessus. Avec appariement ($\Delta \neq 0$) les nucléons au voisinage du niveau de Fermi ont une probabilité non-nulle d'occuper des états situés au-dessus du niveau de Fermi. Dans les couches les plus profondes, les nucléons sont empêchés de diffuser par les nucléons dans les couches supérieures en raison du principe de Pauli. Ainsi seuls les nucléons autour du niveau de Fermi sont affectés par le pairing. La probabilité d'occupation pour les états à plus haute énergie tend vers 0 car l'énergie de pairing ($\sim \Delta$) disponible est typiquement de quelques MeV au maximum. La figure de droite montre le pendant expérimental. Les probabilités d'occupation sont mesurées par la réaction de pickup (d,t), où un neutron est transféré du noyau vers le projectile. De même, les probabilités de trou $u_k^2 = 1 - v_k^2$ sont mesurées par la réaction de stripping (d,p), où un neutron passe du deuton vers le noyau.



A gauche : probabilité d'occupation d'un état individuel k en fonction de son énergie ϵ_k , sans et avec appariement. A droite : mesures correspondantes.

La classe de fonction d'onde choisie pour le principe variationnel regroupe donc les fonctions d'ondes à *quasiparticules* indépendantes, où les quasiparticules sont une superposition d'un état de particule, et d'un état de trou. La fonctionnelle en énergie (annexe 1) $\int E[\rho] dr \equiv \langle \Psi(t)|H|\Psi(t)\rangle$ se calcule à partir de H , qui s'exprime avec les états de particules, et à partir de Ψ qui s'exprime en fonction des états de trous **et** de particules. L'ajout d'états de trou a des conséquences sur la fonctionnelle en énergie : elle s'exprime non seulement en fonction de la densité de nucléons du noyau mais aussi en fonction de la répartition des paires de nucléons au sein de celui-ci. Cette dernière est caractérisée par la densité de pairing κ qui est piquée autour de la surface de Fermi du noyau. La minimisation de la fonctionnelle $E[\rho, \kappa]$ par rapport aux deux quantités ρ et κ conduisent aux équations dites HF-Bogoliubov (HFB) qui sont une généralisation des équations Hartree-Fock en tenant compte de l'appariement de type BCS.

La figure ci-dessous montre les densités normale ρ , et de pairing κ à (deux dimensions pour un noyau déformé) obtenues par un calcul HFB pour le ^{158}Sm . On observe la saturation de la densité normale ρ au cœur du noyau. La densité de paire κ se situe plus vers l'extérieur du noyau.



De gauche à droite : densité de neutrons, de protons, et densités de pairing correspondantes pour le noyau déformé ^{158}Sm calculé avec HFB. Les coordonnées sont cylindriques : r est en abscisse et z en ordonnée (calculs HFB Gogny de Gignac et al.).

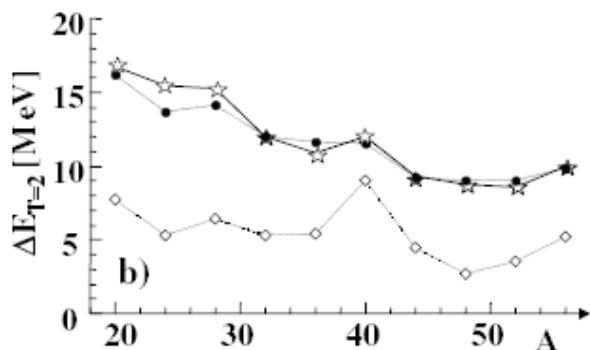
c. Enjeux de la superfluidité nucléaire

Nous en mentionnons deux :

L'appariement neutron-proton : nous avons vu que l'interaction d'appariement entre 2 nucléons peut se manifester dans le canal $T=1$ ou $T=0$. Le cas $T=1$ concerne l'appariement nn, np et pp pour les valeurs propres respectives -1,0 et 1 de T_z , la 3^{eme} composante de l'isospin T. Le canal $T=0$ ne peut concerner que les paires np. Si l'on suppose la symétrie d'isospin de l'interaction forte, l'interaction dans le canal $T=1$ est semblable pour les configurations nn, np et pn*. On en a donc une connaissance assez précise grâce aux nombreuses études citées précédemment, qui concernent l'appariement nn ou pp. Par contre l'appariement dans le canal $T=0$ n'existe que pour les paires np, et demeure encore très mal connu à ce jour. Son effet est pourtant bel et bien concret, comme l'atteste la simple existence du deuton ; la composante principale de la fonction d'onde du deuton a pour moment angulaire $L=0$, et le spin total est $S=1$ (on a donc $J^\pi=1^+$).

Dans les noyaux, l'appariement entre un neutron et un proton, qu'il soit de type $T=0$ ou $T=1$ est principalement attendu pour des noyaux $N=Z$ ou à leur voisinage : les fonctions d'ondes des neutrons et protons de valence sont alors en recouvrement maximum pour permettre un appariement np.

Une première indication expérimentale de l'appariement np dans les noyaux provient de la sur-liaison des noyaux $N=Z$ par rapport aux prédictions phénoménologiques (formule de masse) et microscopiques (champ moyen). Cet effet de discontinuité dans l'énergie de liaison est appelé effet de Wigner. Il s'explique par l'interaction de pairing attractive entre les neutrons et protons dans le canal $T=0$. La figure ci-dessous montre l'énergie de liaison supplémentaire mesurée dans les noyaux $N=Z$ (étoiles). Seuls des calculs qui tiennent compte de l'appariement np $T=0$, pour générer les termes de Wigner dans l'énergie de liaison, peuvent reproduire les données.

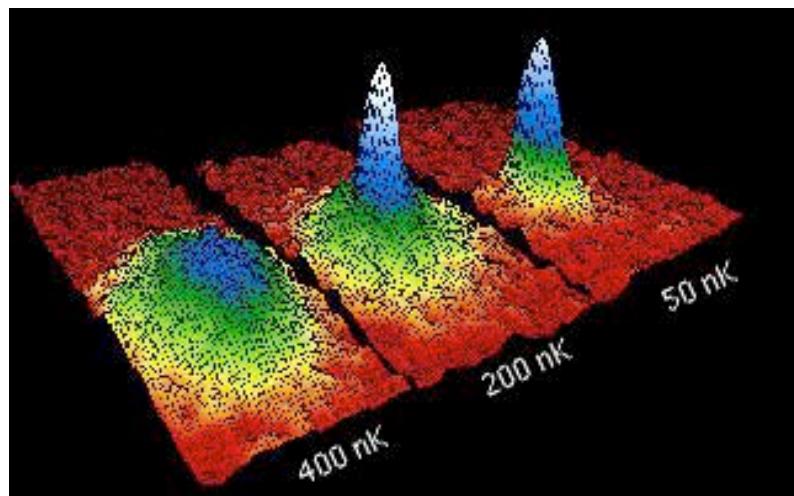


Energie de Wigner pour les noyaux $N=Z$. Les mesures sont les étoiles, les calculs qui incluent le pairing $T=0$ et $T=1$ sont points noirs, et ceux qui n'incluent que le pairing $T=1$ sont les losanges blancs (tiré de H. Flocard, cours Joliot Curie 2002).

* Rappelons qu'en toute rigueur, la symétrie d'isospin n'est en fait pas exactement respectée par l'interaction forte, probablement en raison de la légère différence de masse entre le quark up et le quark down.

L'étude de l'appariement $N=Z$ est un bon exemple des avancées en structure nucléaire rendues possibles grâce aux progrès récents dans la production de noyaux exotiques. En effet, le noyau $N=Z$ stable le plus lourd est le ^{40}Ca ($Z=20$). En raison de la répulsion Coulombienne, la vallée de stabilité s'éloigne de la ligne $N=Z$ quand les noyaux deviennent plus lourds. Depuis 1990, 12 noyaux instables $N=Z$ ont été produits, du ^{76}Sr au ^{100}Sn . Le regain d'intérêt pour l'étude de ces noyaux, et de l'appariement dans le canal $T=0$ en a été accéléré.

Condensation de Bose-Einstein et pièges d'atomes : voici un exemple interdisciplinaire qui concerne l'appariement. Les atomes peuvent soit être des bosons (neutrons+protons+électrons pair) ou des fermions (neutrons+protons+électrons impair). En refroidissant suffisamment les atomes bosoniques, il serait possible d'obtenir la fameuse condensation de Bose-Einstein (BEC). La première observation directe d'un BEC de l'Histoire fut obtenue en 1995 par une équipe du JILA (USA) qui réussit à refroidir suffisamment un gaz bosonique de ^{87}Rb . La figure ci-dessous montre le résultat (Prix Nobel 2001).



Apparition d'un condensat de Bose-Einstein obtenu en 1995 par refroidissement dans un piège d'atomes bosoniques de ^{87}Rb (credits : JILA, University of Colorado, Boulder - Mike Matthews)

Dans le cas d'atomes fermioniques, deux situations se présentent. Si l'interaction entre les fermions est répulsive, avec une longueur de diffusion $a > 0$ (modèle des sphères dures), des molécules de di-fermions peuvent se former par arrangement à trois corps. Elles sont de taille typique a . Ces molécules étant des bosons : si l'on refroidit suffisamment le système, on devrait voir un BEC. Ce fut chose faite en 2003.

Dans le cas où l'interaction entre les fermions est attractive ($a < 0$), les fermions vont s'apparier, avec une forte délocalisation. On est ici dans un cas analogue au système nucléaire avec appariement. Si on refroidit suffisamment le système d'atomes, on devrait voir apparaître une phase superfluide, comme dans le cas des noyaux en-dessous de la température critique. Une équipe du MIT y est parvenu en 2004. Dans ce système superfluide d'atomes fermioniques, on étudie maintenant la structure et l'évolution des vortex dans les pièges d'atomes en rotation. Le parallèle est très important entre le noyau et les pièges d'atomes fermioniques ; cette analogie est nourricière pour les deux domaines. Par exemple, l'étude des vortex est un sujet d'actualité dans les deux domaines et nul doute qu'une avancée dans l'un sera profitable à l'autre. Ceci est caractéristique de la physique nucléaire, prototype de système de fermions fortement corrélés.

8. Conclusion

La synthèse stellaire de tous les éléments est-elle expliquée ? Non car la fusion au cœur des étoiles s'arrête au Fer. Pour des noyaux plus lourds, les réactions de fusion ne sont plus exoénergétiques, comme nous le verrons au chapitre suivant. L'étoile se contracte donc très rapidement sous l'effet de la gravitation et peut, par rebond, exploser (supernovae) répandant ainsi dans l'Univers le fer et les éléments plus légers synthétisés en son cœur. Comment donc expliquer la synthèse des éléments plus lourds que le fer (plomb, uranium, mercure, ...) ?

BIBLIOGRAPHIE

- **Structure en couches :**
<http://www.cenbg.in2p3.fr/heberge/EcoleJoliotCurie/coursJC/JOLIOT-CURIE%202002.pdf> par F. Nowacki

9. Annexe 1 : Le problème à N corps et le principe de moindre action

a. Le principe de moindre action mène à l'équation de Schrödinger

Considérons un système de N fermions non-relativistes en interaction (des nucléons par exemple). L'Hamiltonien total s'écrit :

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{\hat{p}_i^2}{2m} + \sum_{i < j=1}^N V_2(\vec{r}_i, \vec{r}_j)$$

où l'on ne considère ici que l'interaction à deux corps $V_2(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$. L'évolution de la fonction d'onde antisymétrisée $\Psi(t)$ du système de N fermions est donnée par l'équation de Schrödinger dépendante du temps :

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi(t)\rangle}{\partial t} = H |\Psi(t)\rangle$$

Le principe de moindre action permet de retrouver l'équation du mouvement ci-dessus. On définit ainsi l'action S pour une évolution du système entre les temps t_1 et t_2 :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \langle \Psi(t) | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H | \Psi(t) \rangle$$

S dépend de l'état $|\Psi(t)\rangle$ du système et de son hermitique conjugué $\langle\Psi(t)|$. Le principe de moindre action requiert que S soit stationnaire par rapport à toute variation de $|\Psi(t)\rangle$ et de $\langle\Psi(t)|$ entre les temps t_1 et t_2 . Nous allons montrer que cette condition permet d'en déduire l'équation de Schrödinger dépendante du temps.

Considérons une variation infinitésimale *quelconque* de $\langle\Psi(t)|$:

$$\langle\Psi(t)| \rightarrow \langle\Psi(t)| + \langle\delta\Psi(t)|$$

S est stationnaire par rapport à toutes les variations possibles de $\langle\Psi(t)|$ si :

$$\delta S = S(\langle\Psi| + \langle\delta\Psi|) - S(\langle\Psi|) = 0$$

où on n'a pas écrit la dépendance explicite en temps de Ψ pour alléger les notations. On en déduit :

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \langle \delta\Psi | i\partial_t - H | \Psi \rangle$$

Comme la relation ci-dessus est valable pour une variation infinitésimale $\langle\delta\Psi(t)|$ quelconque, la condition de stationnarité $\delta S = 0$ aboutit à l'équation de Schrödinger.

Exercice : Montrez explicitement l'équivalence entre le principe de moindre action (pour l'action définie ci-dessus) et l'équation de Schrödinger.

On a ainsi reformulé l'équation fondamentale du mouvement par un principe de moindre action. Cette démarche est analogue au principe de moindre action en mécanique, électromagnétisme, etc.

b. Application au problème à N corps

Le problème se pose en général sous cette forme : connaissant la valeur moyenne d'une observable (énergie, position, ...) à un temps t_1 , quelle est sa valeur à un temps ultérieur t_2 ? Le mieux serait bien sûr d'utiliser l'équation d'évolution (l'équation de Schrödinger). Nous avons vu qu'en pratique cela est difficilement calculable, si l'hamiltonien H n'est pas extrêmement simple (atome d'hydrogène, ...). On est en général confronté au problème à N corps, pour lequel l'équation de Schrödinger n'a pas de solution analytique. Quant aux solutions numériques, elles sont en général incalculables en un temps compatible avec la vie humaine, pour des systèmes composés de quelques dizaines de particules (nucléons, électrons, ...).

L'approximation consiste donc à restreindre les variations des états $|\Psi(t)\rangle$ à une classe donnée (déterminant de Slater, Gaussiennes, ...). La stationnarité de l'action sera requise au sein de cette classe d'état uniquement, et non plus sur tous les états possibles. Nous allons voir que cela revient à approximer l'équation du mouvement. Mais le choix de la classe restreinte d'états dépend-il de l'observable que l'on veut prédire ? Il est effectivement possible d'optimiser ce choix en fonction de l'observable d'intérêt (voir l'encadré ci-dessous). Par exemple, un état $|\Psi(t)\rangle$ à particules indépendantes (déterminant de Slater) est le meilleur choix pour prédire les valeurs moyennes associées aux fonctions d'ondes individuelles des particules. On obtiendra donc le « meilleur » champ moyen (potentiel subit par chaque particule indépendante), par construction. Dans le cas des noyaux, le potentiel moyen phénoménologique de Woods-Saxon sera forcément moins adapté. Il est intéressant de noter que c'est l'approche microscopique, et non phénoménologique, qui s'avère ici la plus apte à décrire le système.

Nous allons trouver l'équation du mouvement si nous restreignons les états $|\Psi(t)\rangle$ à chaque instant à une fonction d'onde de N fermions indépendants. Cet exemple est important car nous avons vu que les nucléons peuvent paradoxalement être considérés comme des particules indépendantes au sein du noyau. La fonction d'onde totale est le produit antisymétrisé (déterminant de Slater) des N fonctions d'ondes individuelles orthonormées $|\varphi_i(t)\rangle$. Attention dans la suite, à toujours faire la différence entre la fonction les états du système total du noyau (Ψ), et les états individuels des nucléons qui le composent (φ_i). Ces derniers sont appelés états à une particule.

En représentation de coordonnées d'espace, l'action s'écrit :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d\vec{r} (i\hbar\Psi^*(\vec{r}, t)\partial_t\Psi(\vec{r}, t) - E[\rho])$$

où $\int E[\rho] dr \equiv \langle \Psi(t) | H | \Psi(t) \rangle$ est la valeur moyenne de l'Hamiltonien exact présenté au début de ce chapitre, dans l'état à particules indépendantes $|\Psi(t)\rangle$. On peut montrer que cette valeur moyenne $E[\rho]$ ne dépend que de la densité ρ du système (théorème de Hohenberg-Kohn), donnée par :

$$\rho(\vec{r}, t) = \sum_{i=1}^N \varphi_i^*(\vec{r}, t)\varphi_i(\vec{r}, t)$$

où i représente les nombres quantiques qui caractérisent la fonction d'onde : $i=\{nljm\}$. Notons enfin que comme Ψ représente l'état global des N fermions, le vecteur position dans l'expression ci-dessus de S est en fait à $3N$ dimensions.

La matrice densité et l'équation de Liouville

Soit $|\Psi\rangle$ un état du système méconnu car notre information sur cet état est incomplète au sens classique. Il a ainsi une certaine probabilité p_k de se trouver dans un état déterminé $|\phi_k\rangle$. Il est alors possible de formuler complètement le problème à partir de la matrice densité D associée à $|\Psi\rangle$ (cf Cohen-Tannoudji complément E_{III}). D est définie comme :

$$D = \sum_k p_k |\phi_k\rangle\langle\phi_k|$$

D , répond à certaines propriétés : elle est hermitique, positive définie et $\text{Tr}D=1$.

La valeur moyenne de l'observable A lorsque le système est dans l'état $|\Psi\rangle$, décrit par la matrice D est la moyenne des $\langle A \rangle_{\phi_k}$ pondérée par les probabilités p_k :

$$\langle A \rangle = \sum_k p_k \langle \phi_k | A | \phi_k \rangle = \text{Tr}DA$$

En terme de matrice densité, l'équation du mouvement, dite équation de Liouville, s'écrit :

$$i\hbar \frac{dD}{dt} = [H, D]$$

On montre que l'action qui permet d'aboutir à l'ensemble des équations ci-dessus est :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \text{Tr} \left\{ A \hbar \frac{dD}{dt} + iA[H, D] \right\} + \text{Tr}D(t_2)A$$

où A et D sont deux degrés de libertés variationnels indépendants à priori. On peut montrer que l'équation du mouvement (Liouville) ci-dessus se déduit par une minimisation de l'action S pour une variation *quelconque* δA de A .

Le point important est que si l'on restreint les variations possibles δA de A (et δD de D) à une certaine classe, pour contourner le problème à N corps, alors il apparaît clairement que l'état représenté par D et l'observable A vont se coupler, puisque ces deux grandeurs interviennent dans l'expression de l'action S ci-dessus. *Ainsi le choix de la classe d'états* (représentés par D) *est relié à l'observable d'intérêt* A . L'objectif est de trouver la classe d'état optimum pour prédire l'évolution d'une observable donnée, comme l'énergie du système par exemple.

On peut exprimer l'action S comme une fonctionnelle des états individuels $\varphi_i^*(t)$ et $\varphi_i(t)$:

$$S = \sum_{i=1}^N \int_{t_1}^{t_2} dt \int d\vec{r} (i\hbar \varphi_i^*(\vec{r}, t) \partial_t \varphi_i(\vec{r}, t) - E[\rho])$$

La restriction des états $\Psi^*(t)$ aux déterminants de Slater impose que $\Psi^*(t) + \delta\Psi^*(t)$ soit aussi un déterminant de Slater. Ceci revient à appliquer la stationnarité de l'action S par rapport aux variations des N fonctions d'ondes individuelles $\delta\varphi_i^*(t)$. Par un raisonnement analogue au 1) (que l'on peut faire en **exercice**), on obtient ainsi N équations du mouvement de la forme :

$$i\hbar \partial_t \varphi_i = \frac{\delta E[\rho]}{\delta \varphi_i^*}$$

Noter que φ_i , h et ρ dépendent de la position de la particule i . En utilisant la définition de la densité ρ , l'équation du mouvement devient :

$$i\hbar \partial_t \varphi_i = \frac{\delta E[\rho]}{\delta \rho} \varphi_i \hat{=} h \varphi_i$$

où h est un opérateur à un corps qui est égal à la dérivée fonctionnelle de $E[\rho]$ par rapport à ρ . Pour des raisons historiques, cette équation est appelée Hartree-Fock dépendante du temps

(TDHF). C'est donc l'équation la plus générale pour décrire un système de N particules indépendantes car elle découle du principe de moindre action. L'intérêt de l'approximation est important : **on a transformé l'équation très difficilement soluble de N corps en interaction, en N équations à 1 corps à priori indépendantes et solubles.** Ces N équations sont en outre très analogues à une équation de Schrödinger pour un état individuel, où h joue le rôle de l'hamiltonien à 1 corps. Notons que l'expression de h est complètement déterminée par l'interaction nucléon-nucléon $V_2(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$ écrite dans l'Hamiltonien H exact :

$$h \hat{=} \frac{\delta E[\rho]}{\delta \rho} \rightarrow \frac{\delta (\langle \Psi | H | \Psi \rangle)}{\delta \rho} \quad \text{avec} \quad H = \sum_{i=1}^N \frac{\hat{p}_i^2}{2m} + \sum_{i < j=1}^N V_2(\vec{r}_i, \vec{r}_j)$$

c. L'exemple du champ moyen statique du noyau : justifications et implications

Dans le cas d'un état stationnaire, le problème devient statique. On montre facilement que les solutions de l'équation TDHF s'écrivent (on a changé l'indice i en n pour éviter les confusions avec le nombre complexe i) :

$$\varphi_n(\vec{r}, t) = e^{-\frac{i}{\hbar} \epsilon_n t} \phi_n(\vec{r})$$

où les ϕ_n sont les parties radiales des fonctions d'ondes individuelles. Elles vérifient :

$$h\phi_n = \epsilon_n \phi_n$$

que l'on appelle équations du champ moyen, ou équation Hartree-Fock. La solution de ces N équations donnent les énergies individuelles ϵ_n et les fonctions d'ondes individuelles ϕ_n à partir desquelles on construit l'état et l'énergie du système total de N nucléons.

Exercice : Démontrez les deux équations ci-dessus à partir de celle de TDHF, et en supposant que la fonction d'onde individuelle φ_n peut se décomposer sous la forme :

$$\varphi_n(\vec{r}, t) = f(t) \phi_n(\vec{r})$$

d. La théorie de la fonctionnelle en densité : application du principe variationnel à l'énergie

Pour décrire l'état fondamental d'un système à N corps, on utilise le principe variationnel statique (dit principe statique de Rayleigh-Ritz). Il s'agit du cas particulier de la minimisation de l'action S du a) pour des états stationnaires. La condition de minimisation par rapport à la variation infinitésimale $\langle \Psi | \rightarrow \langle \Psi | + \langle \delta \Psi |$ mène à l'équation de Schrödinger indépendante du temps $H\Psi = E\Psi$.

Exercice : le montrer en utilisant l'action S du I.1) pour des états Ψ stationnaires, en introduisant $\langle \Psi | \Psi \rangle$ au dénominateur pour tenir compte de l'effet de la variation sur la norme de l'état Ψ .

De plus, quel que soit un état Ψ de l'espace de Hilbert, on peut montrer que l'action stationnaire de Rayleigh, qui s'exprime (à une constante homogène à un temps prêt) comme :

$$E [\Psi] = \frac{\langle \Psi | H | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle}$$

est minimum pour $\Psi=\Psi_0$, où Ψ_0 est l'état fondamental exact du système, associé à l'énergie E_0 . Ainsi, lorsque l'on approxime l'état fondamental par un certain type de fonction d'onde Ψ (déterminant de Slater, ...), la minimisation de $E[\Psi]$ donnera la fonction d'onde Ψ optimisée au sein de cette classe pour écrire l'état fondamental, puisque la valeur moyenne de l'énergie sera la plus proche de l'énergie exacte E_0 de l'état fondamental.

Exercice : Montrer que quel que soit Ψ , $E[\Psi] \geq E[\Psi_0] \equiv E_0$. Développer pour cela $|\Psi\rangle$ sur la base des états propres $|\Psi_n\rangle$ de H .

La minimisation sur l'énergie E au sein d'une classe d'état Ψ , reliquat du principe de moindre action pour les états stationnaires, est donc optimisée pour décrire l'état fondamental du système. Tel est le cas pour l'approximation HF et les fonctions d'ondes à particules indépendantes (déterminant de Slater).

La théorie de la fonctionnelle en densité - **Density Functional Theory (DFT)** – stipule que le système de N particules est complètement caractérisé par sa densité ρ . Plus précisément, il existe une fonctionnelle E complètement déterminée par ρ qui caractérise l'état fondamental du système : c'est le théorème de Hohenberg-Kohn. Il est ainsi plus commode d'exprimer l'énergie en fonction de cette densité. La minimisation de $E[\rho]$ par rapport à la densité ρ est équivalente à celle de $E[\Psi]$ par rapport à Ψ , avec un gain est très important en pratique : au lieu de trouver un minimum par rapport à une fonction d'onde de dimension $3N$, on cherche un minimum par rapport à la densité ρ de dimension 3.

Le renversement de point de vue s'opère en prenant comme point de départ l'expression de la fonctionnelle $E[\rho]$ (on rappelle que $\int E[\rho] dr = \langle \Psi(t) | H | \Psi(t) \rangle$). En effet, cette quantité dépend de H (donc de l'interaction nucléon-nucléon $V_2(i,j)$), mais aussi du **choix** du type de fonction d'onde Ψ . La DFT reporte ces choix sur le choix de l'expression de $E[\rho]$. On s'affranchit ainsi de toute expression de $V_2(i,j)$ et de Ψ . Le choix d'une fonctionnelle en énergie $E[\rho]$ devient un postulat de départ, comme l'était le choix du type de fonction d'onde Ψ . Plus la fonctionnelle sera complète et plus les solutions seront proches de l'état fondamental exact. Insistons sur le fait que le choix de $E[\rho]$ correspond implicitement à la fois à un choix de $V_2(i,j)$ et de type de fonction d'onde Ψ , sans avoir à s'en préoccuper. Si la fonctionnelle $E[\rho]$ est le point de départ, quels termes supplémentaires peut-on rajouter par rapport à la fonctionnelle de champ moyen Hartree-Fock, pour décrire de manière plus complète le système ? Ces termes sont habituellement appelés énergie de corrélation, et leur expression exacte permettrait d'en déduire l'état fondamental exact. En physique atomique ils sont très bien approximés en pratique par les énergies de corrélations obtenues pour un gaz d'électrons uniforme (matière infinie) : pour chaque valeur de r du système, on effectue le calcul dans le gaz infini pour une densité $\rho_0=\rho(r)$. On obtient ainsi les énergies de corrélations en fonction de la densité du système. C'est le principe de la Local Density approximation (LDA) : $E[\rho(r)] = E_\infty[\rho_0]$. En physique nucléaire, ce type de calcul dans la matière nucléaire infinie est en plein essor pour contraindre la fonctionnelle de la densité.

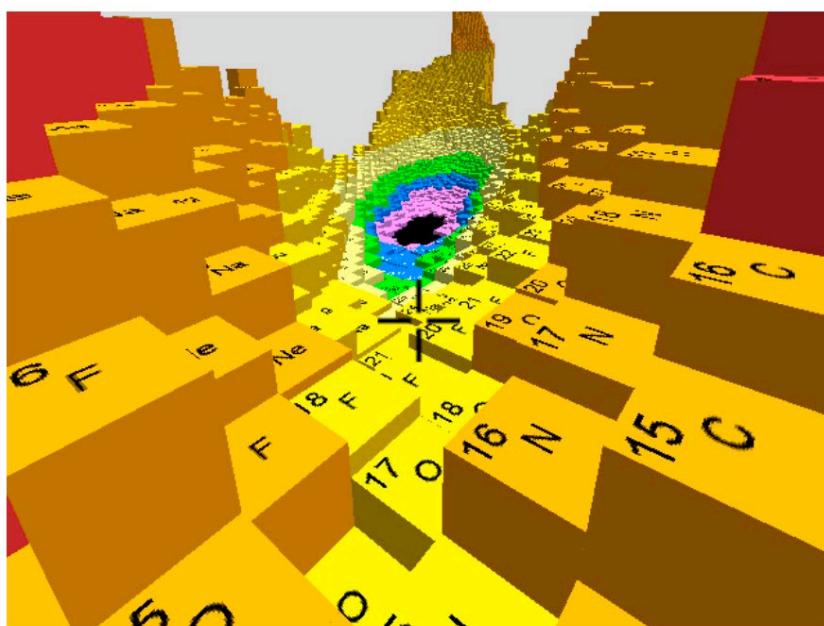
Chapitre 3 : Processus nucléaires dynamiques

Pourquoi la nucléosynthèse stellaire s'arrête au Fer ? Comment sont synthétisés les noyaux plus lourds ? Pour cela, il est nécessaire de comprendre les nombreux mécanismes de transformation du noyau : réactions, désintégrations, fission, fusion, et transitions de phase. Ils permettent de produire d'autres noyaux à partir d'un noyau initial, processus nécessaire à la nucléosynthèse des éléments lourds. Ces études font appel à un formalisme complexe mais il sera possible des les étudier en identifiant les concepts importants et/ou en utilisant des modèles simplifiés (macroscopiques) dans un but pédagogique.

1. Introduction

Ces nombreux mécanismes d'évolution nucléaire peuvent être décrits en principe par l'équation de Schrödinger dépendante du temps. Cette approche est souvent complexe et nécessite une résolution numérique. Cependant, la forme de l'interaction nucléon-nucléon, répulsive à courte portée, et attractive à plus grande portée, autorise l'emploi d'approches de type physique statistique (voire macroscopique). Ainsi l'analogie entre le noyau et une goutte de liquide nous permettra d'investiguer analytiquement les mécanismes d'évolution nucléaire. Nous avons déjà utilisé des modèles qui ont l'avantage d'avoir une solution analytique, à des fins pédagogiques au chapitre précédent. Ils permettent de saisir les points importants d'interprétation de ces phénomènes.

Cette analyse de l'évolution expliquera ainsi comment atteindre certains états de la matière inaccessibles aux noyaux stables. La figure ci-dessous montre l'énergie de liaison par nucléon (B/A) dans la carte des noyaux. Le minimum se situe dans la région du fer et du nickel (vallée de stabilité).



Logiciel NUCLEUS d'exploration de la carte des noyaux, téléchargeable sur :
http://amdc.in2p3.fr/web/nubdisp_fr.html

2. Réactions nucléaires

Les réactions nucléaires consistent en la transformation d'un noyau initial en un noyau final. Elles peuvent être provoquées, comme par exemple en irradiant une cible avec un faisceau accéléré dans un cyclotron, ou spontanées, comme les désintégrations radioactives. Dans le premier cas, la probabilité de passage de l'état initial à l'état final s'exprime en fonction de la notion de section efficace, et dans le deuxième cas en fonction de la vie moyenne radioactive. Il est important de remarquer que ces deux quantités se calculent à partir de l'amplitude de transition de l'interaction V_{int} (forte, faible, ou ELM) responsable de l'évolution nucléaire (appelée matrice S en théorie quantique des champs) :

$$\langle \Psi_f | \hat{V}_{int} | \Psi_i \rangle$$

a. Section efficace

Soit un faisceau irradiant une cible avec un nombre ϕ de particules par seconde. La cible est d'épaisseur e et comporte N noyaux par unité de volume. Le nombre de particules diffusées n_{dif} par unité de temps est proportionnel au produit de ces quantités :

$$n_{dif} = \Phi(Ne)\sigma$$

La constante de proportionnalité σ représente la probabilité d'interaction d'un noyau incident avec un noyau de la cible. Elle est homogène à une surface porte le nom de section efficace. Comme mentionné ci-dessus, elle se calcule à partir de l'interaction impliquée dans la réaction (diagramme de Feynman).

Dans un modèle géométrique simple du noyau, on peut approximer la section efficace par

$$\sigma = \pi(R_1 + R_2)^2$$

où R_1 et R_2 sont les rayons des noyaux incident et cible. Afin d'apprécier les ordres de grandeur, utilisons l'approximation géométrique : σ est de l'ordre de 10^{-28} m^2 car un noyau fait quelques fermis de rayon (un proton a une dimension de l'ordre de 1 fm). On définit ainsi le barn : 1 barn = $10^{-28} \text{ m}^2 = 10^{-24} \text{ cm}^2$.

$$N = \frac{\rho}{A} \mathcal{N}_A$$

est le nombre de noyaux par unité de volume (attention l'unité de masse dans la formule ci-dessus doit être des grammes, et \mathcal{N}_A est le nombre d'Avogadro). Il vaut typiquement 10^{21} noyaux par cm^3 pour un noyau de quelques dizaines de nucléons. Dans une cible d'épaisseur typique de $30 \mu\text{m}$, le rapport du nombre de particules diffusées sur le flux incident est donc

$$n_{dif}/\Phi \approx 10^{-24} \cdot 10^{21} \cdot 30 \cdot 10^{-4} \approx 10^{-6}$$

Ainsi il y a très peu de réactions, environ un noyau sur un million interagit avec un noyau de la cible. Le reste traverse la cible sans interagir. Il faut donc des flux incidents élevés, et des détecteurs efficaces pour obtenir une statistique suffisante pour sonder le noyau. Ce taux était prévisible car il est proche du rapport de la surface d'un noyau (10^{-28} m^2) à celle d'un atome (10^{-20} m^2) : dans une cible, on peut considérer que ce sont les atomes qui se « touchent ». Envoyer un noyau sur celle-ci a donc très peu de chance d'aboutir à une réaction avec un noyau de la cible.

Exercice : pourquoi les électrons sont situés 10^4 fois plus loin du noyau (par rapport à la taille du noyau), alors qu'ils sont attirés par les protons ? Utiliser les effets de délocalisation quantique en calculant l'action d'un atome (voir chapitre précédent). La matière terrestre est donc constituée 99,999999999 % de vide en volume (ratio de 10^{-12}).

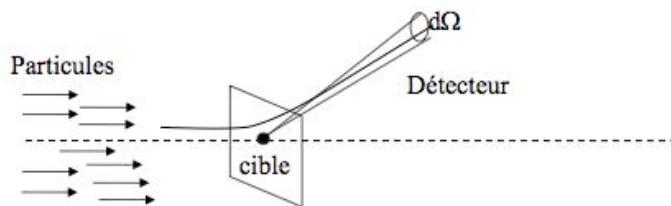
En pratique un détecteur couvre un angle solide $d\Omega$, et ne mesure qu'une partie des événements produits dans l'angle solide total 4π . C'est en fait un avantage (hormis pour la statistique qui s'en trouve diminuée) car cela permet de mesurer la section efficace en fonction de l'angle de diffusion (distribution angulaire), information plus précise que la section efficace totale. On a donc dans ce cas :

$$dn_{det} = \Phi(Ne) \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

où la constante de proportionnalité, notée ici $\frac{d\sigma}{d\Omega}$, est appelée section efficace différentielle. Elle dépend des angles sous lesquels le détecteur voit la cible. On en déduit la relation entre la section efficace totale et la section efficace différentielle :

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \varphi) d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) \sin\theta d\theta$$

car en général le système est symétrique autour de l'axe du faisceau Oz, donc il n'y a pas de dépendance en φ .



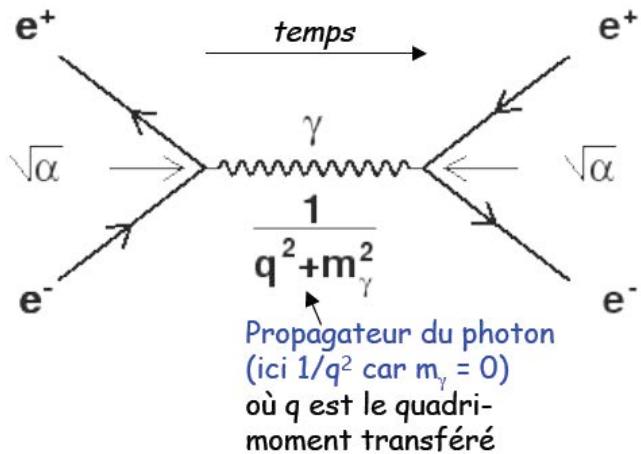
L'angle solide de détection vaut, dans le cas où la taille du détecteur est petite devant sa distance d à la cible :

$$d\Omega = 4 \pi \frac{S}{4\pi d^2} = \frac{S}{d^2}$$

où S est la surface du détecteur.

Notons que dans une réaction, l'énergie et l'angle de diffusion sont déterminés par la cinématique relativiste (conservation de l'impulsion et de l'énergie totale). Le seul intérêt de l'expérience est donc de mesurer le nombre de coups diffusés pour en déduire la section efficace et obtenir ainsi des informations sur l'interaction V_{int} (faible, ELM, forte) responsable de la diffusion.

La figure ci-dessous montre un diagramme de Feynman qui permet de représenter une réaction précise et de calculer sa probabilité, appelée section efficace. D'après les règles de Feynman, qui proviennent de la Théorie Quantique des Champs la section efficace s'écrit à partir du produit des points d'interaction (appelés vertex) avec le propagateur.



On obtient ainsi l'amplitude de diffusion entre particules de charge élémentaire, par interaction électromagnétique :

$$f(q^2) = \frac{\sqrt{\alpha}\sqrt{\alpha}}{q^2}$$

D'où la section efficace de réaction (probabilité de réaction) :

$$\frac{d\sigma}{dq^2} \propto |f(q^2)|^2 = \frac{\alpha^2}{q^4}$$

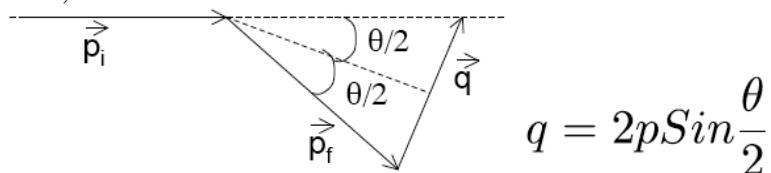
où α est la constante de structure fine :

$$\alpha_{ELM} \hat{=} \alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = 7,29710^{-3} = \frac{1}{137}$$

De manière générale, la section efficace de diffusion électromagnétique sur un objet est

$$\frac{d\sigma}{dq^2} \propto \frac{\alpha^2}{q^4} |F(q)|^2$$

où $F(q)$ diffère de 1 dans le cas d'un objet non ponctuel : c'est le facteur de forme. Dans le cas d'une diffusion élastique entre 2 particules chargées, comme des noyaux approximés à des particules ponctuelles, le moment transféré s'écrit :



avec $p_i = p_f = p$. On obtient ainsi, pour une diffusion élastique par interaction ELM entre 2 particules ponctuelles, chacune de charge Z et z (et de spin nul) :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 z^2 \alpha^2 (\hbar c)^2}{16 E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

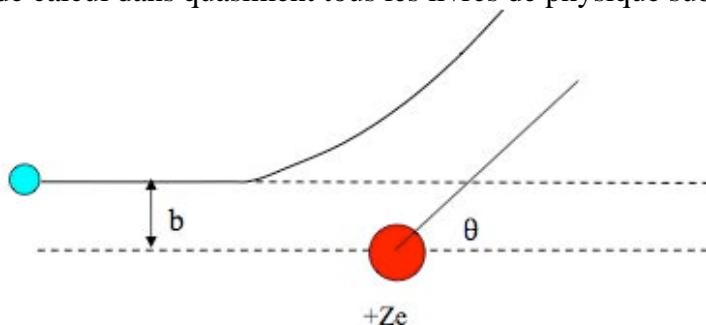
C'est la section efficace de Rutherford qui décrit la diffusion de deux particules chargées par interaction électromagnétique. Ainsi la probabilité pour une particule d'être diffusée par unité d'angle solide est d'autant plus petite que l'angle de diffusion est grand, car la couronne de diffusion est plus grande.

Dans le cas relativiste il y a des facteurs supplémentaires (c'est la section efficace de Mott) :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Ruth} \cdot \frac{4\cos^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \frac{2p}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

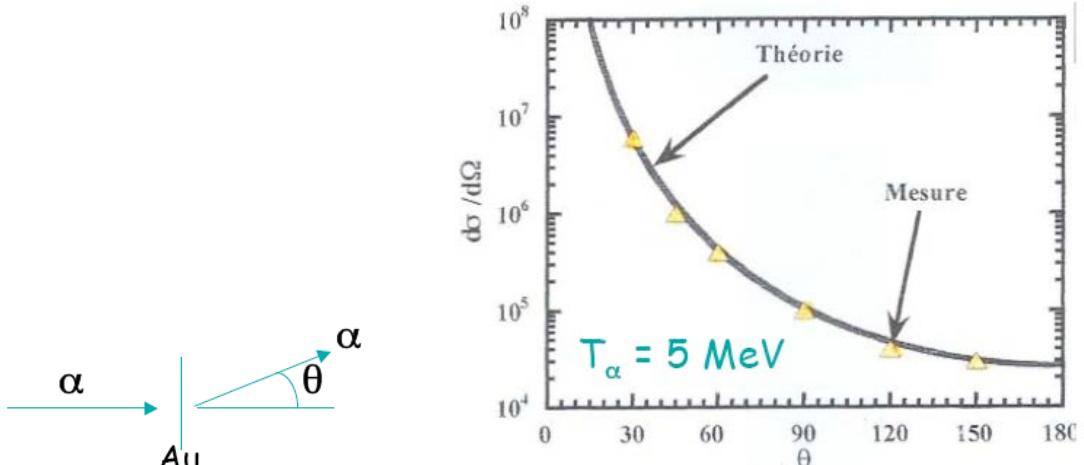
où M est la masse de la particule cible. Ces facteurs proviennent du moment magnétique de la sonde et de l'énergie de recul de la cible.

Notons qu'il est aussi possible d'arriver à la section efficace de Rutherford par un calcul classique, en définissant le paramètre d'impact b et la distance minimale d'approche. On trouve ce type de calcul dans quasiment tous les livres de physique subatomique.



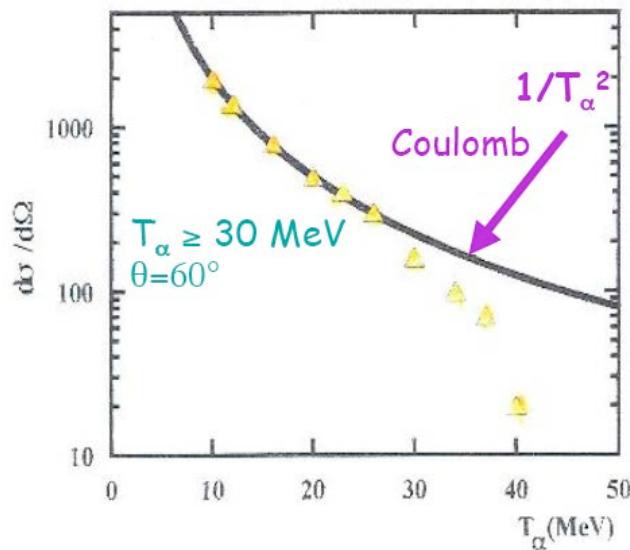
Dans le cas du noyau, la section efficace mesurée aux petits angles de diffusion θ , est celle de Rutherford. Aux grands angles, la diffusion implique des interactions à courte portée : l'interaction forte intervient alors, et la distribution angulaire s'écarte de celle de Rutherford. En outre les petits angles correspondent à des petits moments q transférés. C'est donc aux grands angles que le caractère non-ponctuel du noyau est mis en évidence en s'écartant de la distribution angulaire de Rutherford. Il y a donc 2 effets aux grands angles de diffusion : intervention éventuelle de l'interaction forte, et effets éventuels du caractère composite du noyau. Nous verrons que pour décorrérer les deux effets, l'utilisation d'électrons est adéquate, puisqu'ils ne sont pas sensibles à l'interaction forte.

La figure ci-dessous montre la comparaison entre la section efficace mesurée (en mb/sr) en diffusant des particules alphas de 5 MeV d'énergie cinétique sur une cible d'or, avec la formule de Rutherford. Il s'agit de la première réaction nucléaire, réalisée par Rutherford, Geiger et Mardsen à partir de 1905 en utilisant un noyau radioactif émetteur alpha comme source. Ils constatèrent tout d'abord que la majorité des particules alpha traversent la cible sans aucune déviation, ce qui montre la faiblesse du volume nucléaire par rapport au volume atomique. Par ailleurs certains alphas sont diffusés en arrière, à $\theta=180^\circ$. Dans d'autres cas, ils subissent une déviation. On constate le bon accord entre l'expérience et la formule de Rutherford : la distribution angulaire est compatible à tous les angles avec celle d'une particule ponctuelle car l'énergie incidente (~ 5 MeV) est inférieure à la barrière coulombienne (~ 30 MeV) qu'il est nécessaire de franchir pour que l'interaction forte s'enclenche. De plus cette énergie n'est pas suffisante pour mettre en évidence le caractère composite du noyau.



Exercice : Le rayon du noyau d'or étant $R= 7 \text{ fm}$, calculer la valeur de la barrière Coulombienne dans la réaction ci-dessus. Calculer par ailleurs la longueur d'onde associée aux particules alphas. En déduire que la section efficace de Rutherford est adaptée pour décrire la réaction ci-dessus.

Dans le cas d'une même réaction, mais à des énergies plus élevées ($> 30 \text{ MeV}$), les alphas interagissent avec des nucléons de la cible (par interaction forte) et mettent aussi en évidence le caractère composite du noyau (la longueur d'onde λ associée est de 2 fm à comparer avec $R=7 \text{ fm}$ du noyau d'or) : aux grandes énergies, la distribution angulaire expérimentale dévie de celle de Rutherford. Elle est plus petite car l'alpha a une probabilité d'être capturé par le noyau et donc de ne plus participer à la diffusion élastique.



La déviation par rapport à la section efficace de diffusion ponctuelle (Rutherford) peut-elle nous renseigner sur la structure du noyau, et nous confirmer qu'il est un assemblage de neutrons et de protons ? Considérons le cas d'une diffusion purement ELM afin d'isoler les déviations dues à la nature composite du noyau : la diffusion d'électrons sur des noyaux va sonder la structure en protons du noyau. L'énergie optimale des électrons est de l'ordre de 100 MeV .

Exercice : Quelle doit être l'énergie des électrons afin de sonder un noyau de taille typique $D=4 \text{ fm}$?

Dans le cas d'un collisionneur circulaire, comme le LEP, il n'y a pas une cible d'un côté et un faisceau de l'autre. Il est plus adapté de définir la luminosité, qui regroupe les caractéristiques du système expérimental. La luminosité L tient compte de la fréquence f de croisement des faisceaux et de la géométrie Σ de leur recouvrement, si bien que le nombre de particules diffusées est :

$$n_{dif} = f \frac{N_A N_B}{\Sigma} \sigma = L \sigma$$

où N_A et N_B sont les nombres de particules contenues dans chaque faisceau lors du croisement. L'unité de la luminosité L est en $\text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$.

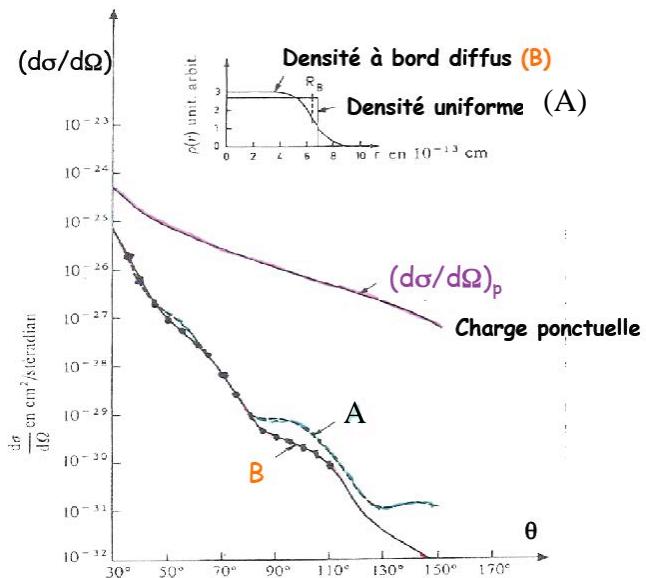
Les luminosités actuelles (RHIC, prévision LHC) sont de 10^{31} à $10^{34} \text{ cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$. Cela correspond à une interaction par seconde pour une réaction qui a une section efficace de 10^{-33} cm^{-2} (1 nb)

Dans le cas d'une diffusion électromagnétique, on peut montrer que le facteur de forme est la transformée de Fourier de la densité de charge (la densité de protons au facteur de forme du proton près). En effet comme on diffuse des ondes de matière sur un objet, l'analogie avec la diffraction optique d'une onde lumineuse sur un objet est appropriée. D'après le principe de Huygens, l'onde diffractée est la superposition d'onde planes réémises par chaque point de l'objet. Ici le poids de ces ondes planes est donné par la densité du noyau. Le facteur de forme s'écrit donc :

$$F(q) = \frac{1}{Ze} \int \rho(r) e^{i\vec{q}\vec{r}} dr$$

Ce qui correspond bien à une transformée de Fourier. Notons que cette formule peut se démontrer avec la théorie de la diffusion (annexe).

Ainsi la mesure de la distribution angulaire permet de mesurer la densité de charge du noyau. Par exemple, dans le cas d'un objet régulier à bords francs, nous savons que les intensités des ondes diffractées par cet objet suivent une courbe en sinus cardinal, car c'est la transformée de Fourier de la fonction de Heavyside. Dans le cas du noyau, les distributions angulaires présentent justement des oscillations typiques de diffraction. D'après le théorème de Babine, noyau et trou ont le même effet. On mesure donc bien la transformée de Fourier de la densité de protons du noyau par diffusion d'électrons. La figure ci-dessous montre les distributions angulaires mesurées par diffusion d'électrons de 153 MeV sur un noyau d'or. Sa transformée de Fourier donne la distribution à bords diffus, notée B, alors que la section efficace de Rutherford (approximation ponctuelle) ne peut décrire les points expérimentaux.

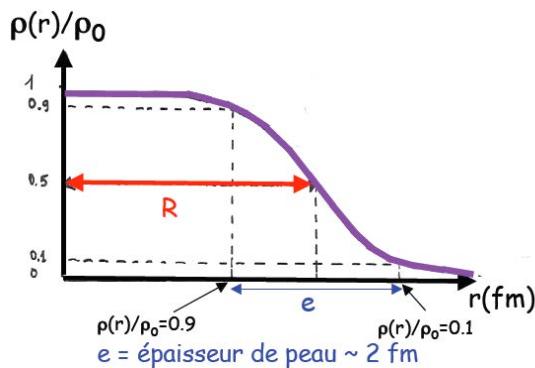


D'après L. Valentin, Le monde subatomique

Etudions donc cette densité nucléaire, qui est bien décrite par la fonction dite de Fermi :

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}}$$

où ρ_0 est la densité constante au centre du noyau, et R le rayon du noyau (figure ci-dessous). Cette densité est proche d'une fonction de Heavyside, mais avec des bords plus diffus. Cette expression est de plus proportionnelle à celle du potentiel de Wood-Saxon qui décrivait bien le champ moyen nucléaire. Est-ce une coïncidence ?

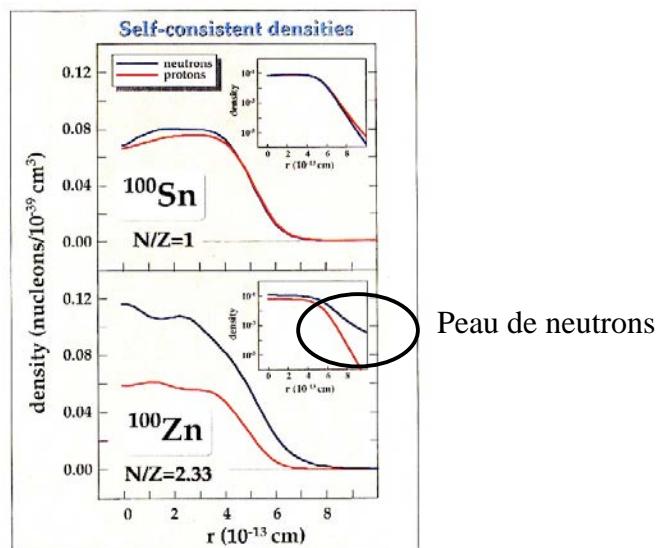


Exercice : Supposer que l'interaction nucléon-nucléon est simulée par une interaction de contact (portée nulle en $\delta(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$) ce qui est une approximation raisonnable à l'échelle du noyau. En déduire alors la correspondance entre la densité du noyau et le potentiel moyen. Qu'en déduire sur l'interaction nucléon-nucléon ?

Exercice : La saturation vous permet-elle de prédire le comportement de l'interaction nucléon-nucléon à très courte portée ($d < 0.5$ fm) ? L'existence même du noyau, composé notamment de protons, vous permet-elle de prédire le comportement de l'interaction nucléon-nucléon à courte portée ($1 \text{ fm} < d < 2 \text{ fm}$) ? Retrouver ainsi la forme du potentiel d'interaction nucléon-nucléon $V(r)$ étudiée au chapitre 1.

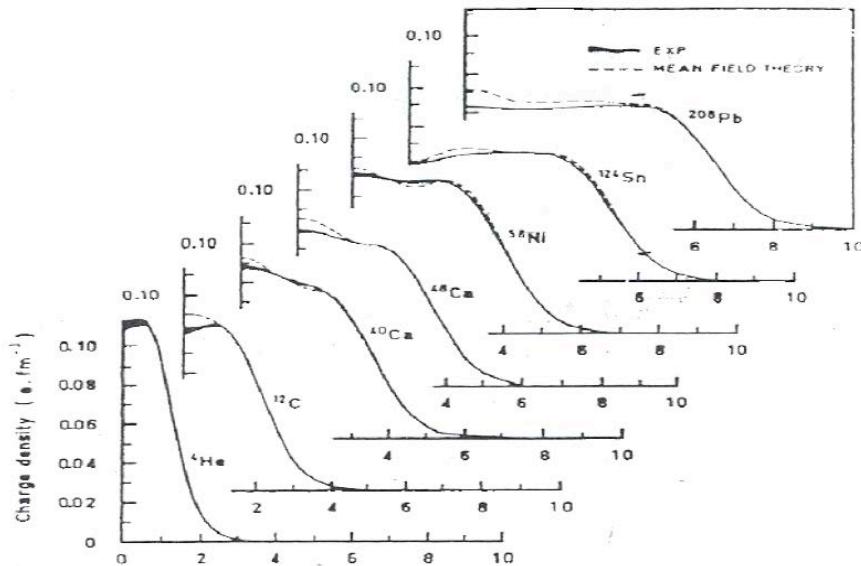
Cette densité mesurée par diffusion d'électrons est celle de charge, donc celle des protons, mais en vertu de la symétrie d'isospin, les neutrons présentent une distribution de densité similaire. Cela a été vérifié expérimentalement en utilisant des sondes par interaction forte, comme la diffusion de protons sur noyau, sensible aussi aux neutrons du noyau. On peut ainsi comparer la densité obtenue expérimentalement avec celle calculée par un modèle microscopique de champ moyen, vu au chapitre précédent.

La figure ci-dessous montre les densités de neutrons et protons pour deux noyaux différents. L'extension de la densité de neutrons à la surface du ^{100}Zn est appelée peau de neutrons. C'est une sorte de prémissie de halo où les neutrons sont en moyenne à plusieurs fermis du noyau.



Densités de protons et de neutrons calculées dans l'approximation du champ moyen, pour ^{100}Sn et ^{100}Zn (calculs HFB de J. Dobaczewski)

Cette forme de la densité est similaire dans la grande majorité des noyaux, des légers aux lourds : la densité des nucléons (neutrons + protons) à l'intérieur des noyaux non-légers ($A>10$) atteint une valeur constante quelle que soit le noyau considéré. C'est la densité de saturation : $\rho_0=0.16 \text{ nucléons.fm}^{-3} \sim 10^{17} \text{ kg.m}^{-3}$. C'est la conséquence du cœur dur et de la courte portée de l'interaction : au sein du noyau un nucléon n'interagit qu'avec un nombre limité d'autres nucléons. La figure ci-dessous compare les densités de charge mesurées par diffusion d'électrons avec des calculs microscopiques utilisant le champ moyen : on constate le bon accord avec l'expérience et la similitude entre les densités des différents noyaux.



D'après L. Valentin, Noyaux et Particules

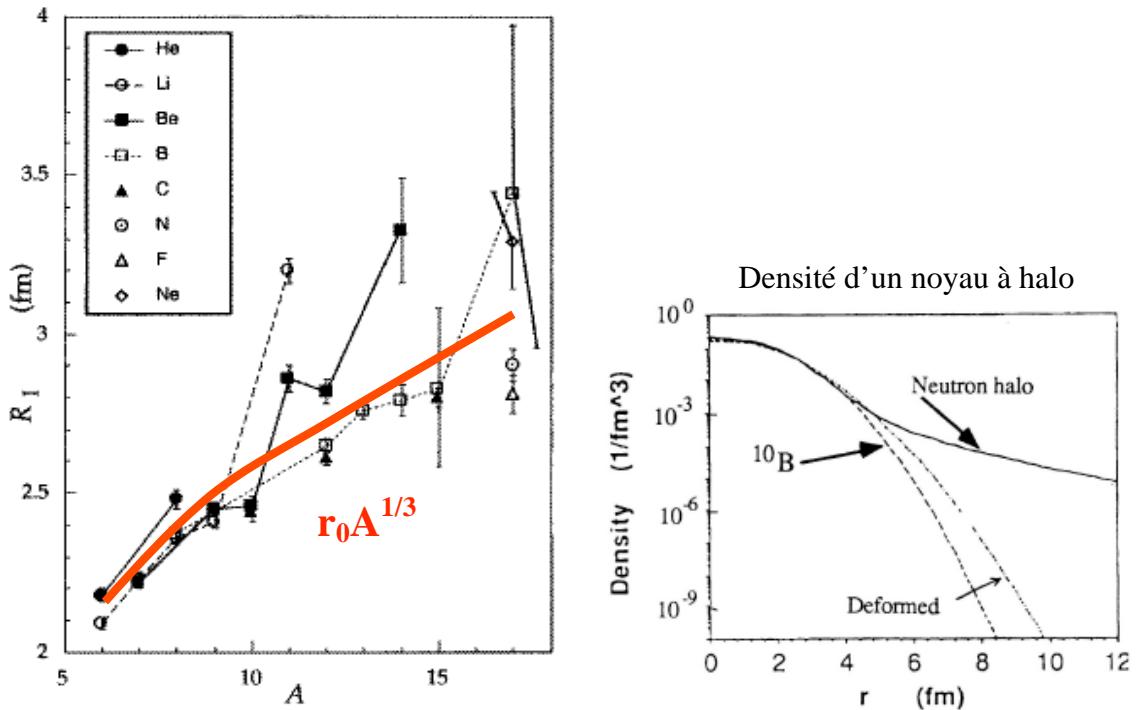
Une conséquence de la saturation des forces nucléaires est que le volume V du noyau est proportionnel au nombre de nucléons A qui le compose. En effet, pour une densité approximée à la forme Heavyside :

$$A = \int \rho(r) d\vec{r} = \rho_0 V$$

Exercice : L'effet du cœur dur de l'interaction nucléon-nucléon est fortement atténué dans le noyau : nous avons vu que le cœur dur a un volume $\sim (0.4)^3 \text{ fm}^3$ (chapitre 1). Montrer que le volume moyen occupé classiquement par un nucléon est ~ 30 fois plus grand. Cela provient des effets de délocalisation. Le milieu nucléaire gomme donc l'effet du cœur dur fortement répulsif.

Le rayon nucléaire peut donc s'exprimer sous la forme : $R = r_0 A^{1/3}$ avec $r_0 = 1.2 \text{ fm}$. Cette loi, que l'on croyait générale a été mise en défaut depuis les années 90 par les noyaux à halos, qui comportent un rayon anormalement grand : un ou deux nucléons sont fortement délocalisés du reste du noyau (figure ci-dessous). Historiquement, les noyaux à halo furent découverts à la fin des années 80 par la mesure de la section efficace (intégrée) d'absorption σ_R : on mesure le nombre de noyaux qui traversent une cible sans interagir, et ceux diffusés élastiquement. Les noyaux restant sont ceux ayant subit une absorption par la cible. σ_R est proportionnel à leur nombre. Le rayon anormalement élevé des noyaux à halos fut déduit par l'approximation classique de la section efficace d'absorption :

$$\sigma_R = \pi(R_{Proj} + R_{Cible})^2$$



A gauche : Mesure du rayon d'interaction des différents noyaux. La courbe épaisse représente la loi en $A^{1/3}$. **A droite :** densité d'un noyau à halo en échelle logarithmique

Comment, de manière générale, calculer la section efficace à partir de modèles microscopiques ? Soit E l'énergie de la particule en sortie du système (loin de tout potentiel diffuseur) :

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

Elle est représentée par une fonction d'onde de la forme ($r \rightarrow \infty$) :

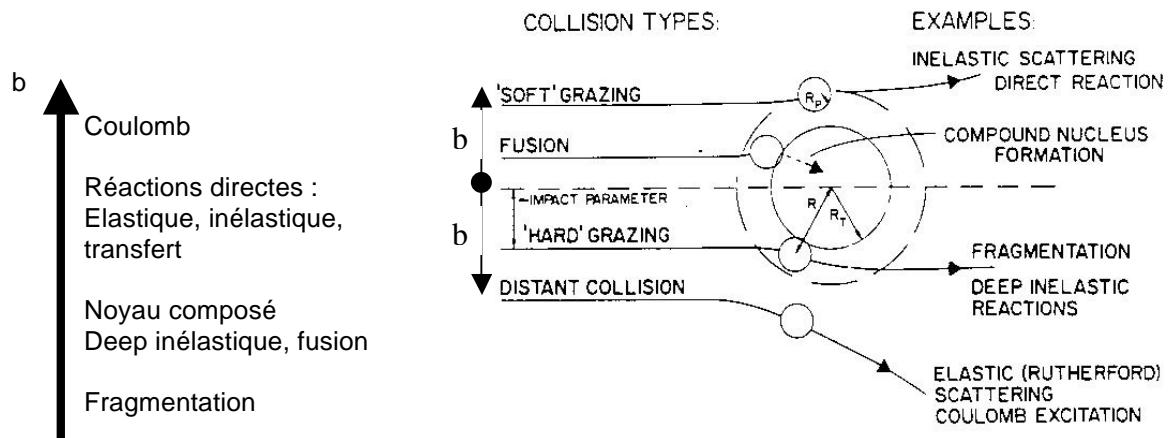
$$\Psi_k(\vec{r}) = e^{ikz} + f_k(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r}$$

Le premier terme représente la fonction d'onde plane incidente qui sort inchangée du système (pas d'interaction). Le deuxième terme est une onde sphérique : la cible se comporte comme une source secondaire de diffusion. f_k est l'amplitude de diffusion qui se détermine à partir du potentiel d'interaction. On montre que (courants de probabilités, cf. Cohen-Tannoudji chap 8. B) la section efficace différentielle s'exprime simplement à partir de f_k :

$$\sigma(\theta, \phi) = |f_k(\theta, \phi)|^2$$

Il existe deux méthodes pour calculer σ (donc f_k) à partir du potentiel d'interaction entre la cible et le projectile : l'équation intégrale de la diffusion, et la méthode des déphasages. Elles sont décrites en annexe.

Il existe une grande variété de réactions nucléaires, que l'on peut classer en fonction du paramètre d'impact b . Classiquement, une réaction se produira si $b < R_{\text{Cible}}$. Le schéma ci-dessous résume les différentes réactions en fonction du paramètre d'impact.

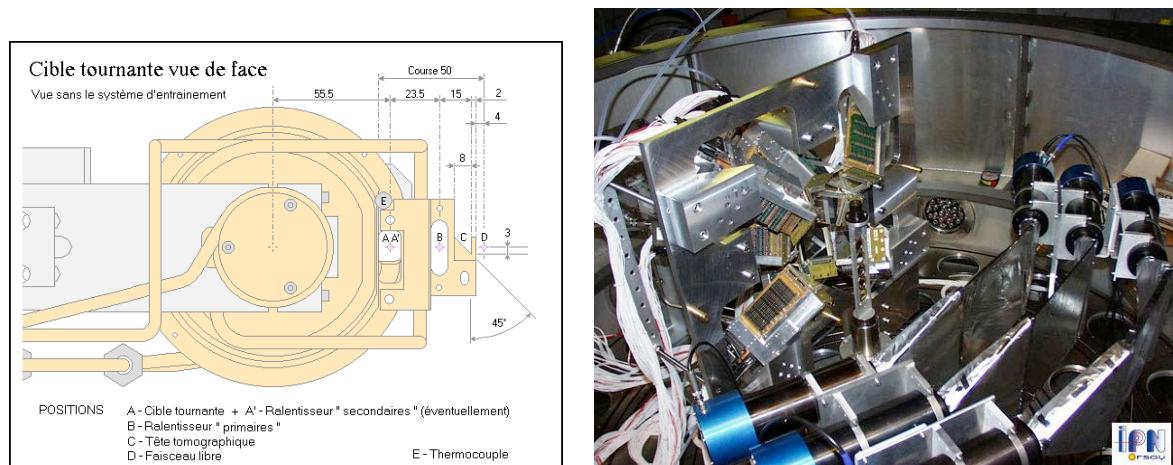


Vision schématique des différentes réactions nucléaires en fonction du paramètre d'impact.

Chaque type de réaction permet une approche complémentaire du noyau :

- les **réactions Coulombiennes** sondent la densité de protons du noyau
- les **réactions directes** étudient l'agencement des neutrons et des protons à la surface du noyau.
- la **fusion** produit des noyaux peu riches en neutrons et en rotation rapide, ce qui permet d'étudier leur déformation
- les **réactions du noyau composé** sont sensibles à la densité d'états excités accessibles dans le noyau
- au cours des réactions de **deep inélastique**, de nombreux nucléons sont échangés entre la cible et le projectile. Elles sont donc utiles pour enrichir un noyau en neutrons par exemple.
- la **fragmentation** est utilisée pour synthétiser des noyaux exotiques

Il n'est cependant pas possible expérimentalement de sélectionner une valeur de b . Toutes les réactions peuvent donc avoir lieu en principe. Néanmoins, il est possible de sélectionner certaines réactions par l'énergie incidente, par exemple. Ainsi, les réactions directes requièrent quelques dizaines de MeV/nucléon, alors que la fragmentation nécessite quelques centaines de MeV/nucléon. De même, les petits angles de déflexion favorisent les réactions Coulombiennes à grand paramètre d'impact.



A gauche : schéma d'une cible utilisée lors de réaction de fragmentation. A droite : cible et détecteurs utilisés lors de réactions directes.

b. Réactions spontanées : la radioactivité

i. Une dizaine de radioactivités

Les désintégrations radioactives correspondent à l'émission d'une particule par le noyau. Si la stabilité est définie comme l'absence de radioactivité, on peut aussi considérer comme stable un noyau dont le temps de vie est de l'ordre (ou supérieur à l'âge) de la Terre. Ainsi en 2003, des mesures de haute précision ont montré que le noyau de ^{209}Bi , jusqu'alors considéré comme stable, est en fait un noyau sujet à la radioactivité α , de vie moyenne 10^{19} ans : la frontière entre stabilité et instabilité devient poreuse pour les très longues durées de vie.

L'amplitude de transition correspondant à la désintégration radioactive peut s'évaluer en utilisant la règle d'or de Fermi, qui donne directement la probabilité de transition λ dans le cas où la partie h de l'hamiltonien qui contient l'opérateur de transition est une perturbation :

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} |< f | \hat{h} | i >|^2 \eta(E)$$

où $\eta(E)$ est la densité des états finaux accessibles. C'est le cas des transitions induites par les interactions faibles ou électromagnétiques, qui sont perturbatives devant l'interaction forte cimentant le noyau. Dans le cas d'une radioactivité par interaction forte, il faut par contre résoudre en principe l'équation de Schrödinger dépendante du temps : le problème est similaire à celui d'une réaction nucléaire. En pratique il existe plusieurs types d'approximation pour résoudre ce problème.

Le passage d'un état nucléaire à un autre est donc caractérisé par une probabilité λ , dont on déduit la vie moyenne de l'état initial. Il s'agit d'une réaction spontanée puisque la transition s'opère sans modifier le système initial par la diffusion d'une particule externe. La probabilité de réaction est donc ici représentée par la vie moyenne, au lieu de la section efficace, car il n'y a ni cible, ni faisceau. Mais dans les deux cas, rappelons que la quantité d'intérêt est similaire : c'est l'amplitude de transition entre l'état initial et final, qui dépend de l'interaction mise en jeu.

Historiquement les désintégrations radioactives furent l'un des premiers phénomènes quantiques directement observables, bien avant l'achèvement de la physique quantique. Le caractère aléatoire ces transitions fut empiriquement constaté en établissant des lois de décroissance. Nous connaissons désormais l'origine de cet aspect aléatoire des désintégrations radioactives, qui n'est rien d'autre que des probabilités de transition : la physique quantique permet de prédire les vies moyennes par des approches microscopiques (modélisation des états nucléaires initiaux et finaux par des théories de type champ moyen et au-delà, etc.)

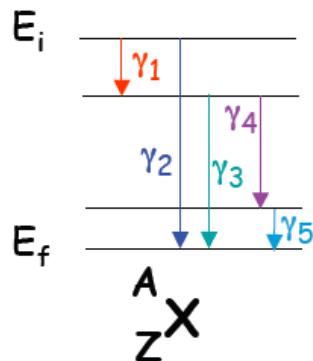
Les différentes désintégrations radioactives sont plus variées que les 3 premières lettres de l'alphabet grec, comme le montre le tableau ci-dessous. Chaque interaction engendre ses désintégrations : on distingue l'émission de photon (interaction électromagnétique, comme la désintégration gamma, qui correspond à une désexcitation du noyau), l'émission de leptons (interaction faible, comme la désintégration β) et l'émission de baryons - à base de nucléons - (interaction forte /et ELM, comme la désintégration alpha, l'émission de nucléons, de clusters, et à la limite, la fission). L'émission de mésons ne se fait pas spontanément car il faut de l'énergie pour les créer alors que les baryons (à base de nucléons) peuvent déjà exister dans le noyau.

Interaction	Nom de la radioactivité (date de découverte)	Particule(s) émise(s) par le noyau
Electromagnétique	γ (1900)	photon
	Electron de conversion (1938)	e^-
Faible	β^- (1898)	e^-, ν_e
	β^+ (1933)	$e^+, \bar{\nu}_e$
	Capture électronique (1937)	ν_e
	Double β (1980)	$2e^-, 2\nu_e$
Forte (+ELM)	α (1896)	${}_2^4\text{He}$
	n, p (1970), 2p (2000)	n ou p ou 2p
	Clusters (1984)	^{14}C ou ^{24}Ne ou ^{32}Si , ...
	Fission (1939)	n, noyau lourd (^{90}Zr , ^{132}Sn , ...)

Nous avons déjà une idée des ordres de grandeur des demi-vies par ceux des temps caractéristiques des interactions fondamentales (chapitre 1, annexe 3), mais ils peuvent être modifiés de plusieurs ordres de grandeur dans le noyau : la barrière coulombienne retarde l'émission alpha, les positions relatives des niveaux de Fermi de neutron et de protons changent le temps de vie de désintégration β , etc.

- Désexcitations électromagnétiques

Elles permettent la transition d'un état excité du noyau vers un état de plus basse énergie, ou l'état fondamental. On dénombre deux processus : l'émission gamma et la conversion interne.



Dans le cas de l'émission gamma, l'énergie du photon est :

$$E_\gamma = h\nu = E_i - E_f$$

Exercice : l'énergie du photon est-elle exactement celle-ci ? Evaluez l'énergie de recul du noyau, dans l'approximation non-relativiste. En déduire qu'un photon émis par un noyau peut s'extraire directement du matériau sans être absorbé par d'autres noyaux identiques.

La probabilité d'émission gamma, en vertu de la règle d'or de Fermi, nécessite l'expression de l'opérateur de transition électromagnétique. En décrivant le photon comme une onde plane électromagnétique, l'opérateur de transition (intervenant dans l'hamiltonien \hat{h}) est :

$$\vec{r}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

Il correspond classiquement à la puissance rayonnée, qui comprend le produit de la densité de courant (qui fait apparaître le vecteur position \vec{r} des protons qui génèrent ce courant) et d'une onde plane. En écrivant l'exponentielle sous forme d'une série, des termes en r^ℓ apparaissent, d'importance décroissante.

Le premier terme correspond à $e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} = 1$. L'opérateur de transition est donc en r . Il s'agit d'une transition dipolaire de type E1 (électrique, $\ell=1$). Le terme suivant de l'exponentielle donne kr , et par conséquent une transition de type E2, qui sera moins probable que la transition E1, etc.

Pour que l'amplitude de probabilité $\langle f | h | i \rangle$ soit non-nulle, il faut vérifier les règles de sélection du moment multipolaire :

$$\vec{J}_i = \vec{J}_f + \vec{l}$$

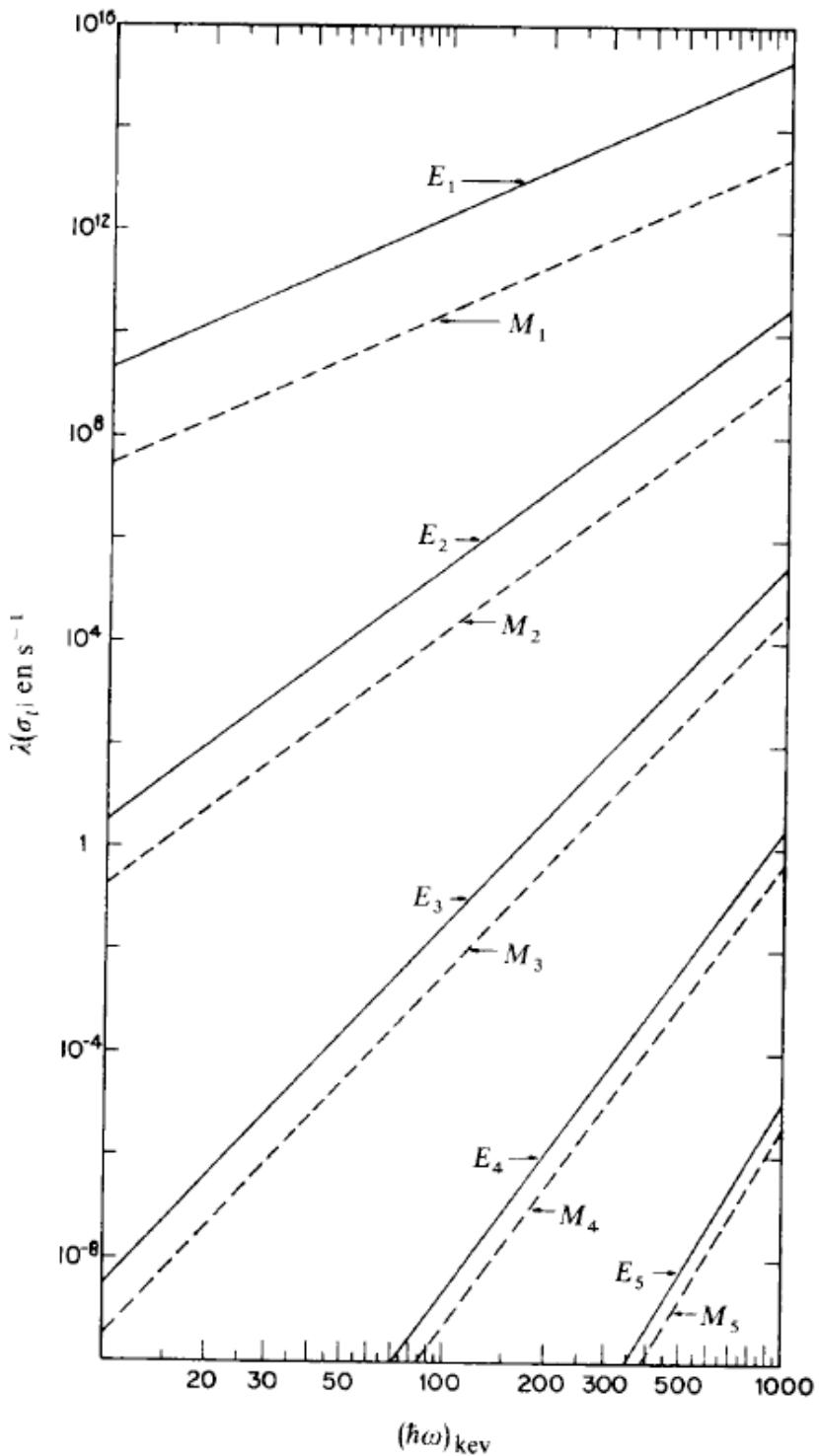
De plus pour la parité, il est nécessaire que la relation :

$$\pi_i \pi_f = (-1)^\ell$$

soit vérifiée afin que l'amplitude de probabilité soit non nulle. En effet, la parité de r^ℓ est $(-1)^\ell$ et il est nécessaire que l'intégrant soit pair, sinon l'amplitude de probabilité est nulle.

La figure ci-dessous montre les probabilités de transition électromagnétiques pour un noyau A=100, calculées dans un modèle de type structure en couche plus un proton. Les temps de vie typiques des états excités dans le noyau sont de l'ordre de la ps. On constate aussi que la transition E1 domine et que la probabilité d'émission augmente avec l'énergie du photon. Par ailleurs le noyau ayant aussi un moment magnétique, il existe des transitions de type M1, M2, etc. Ces transitions magnétiques obéissent à des règles analogues aux transitions électriques à l'exception de la règle sur la parité :

$$\pi_i \pi_f = (-1)^{\ell+1}$$



D'après L. Valentin, Noyaux et particules

Notons finalement que le noyau peut se désexciter par un autre processus électromagnétique : la conversion interne où il donne son énergie de désexcitation à un électron du cortège atomique. Il s'agit en général d'un électron sur un état atomique s (couche K), car ils ont le plus grand recouvrement avec la fonction d'onde du noyau. Cet électron est alors expulsé du cortège puisque l'énergie de désexcitation nucléaire, de quelques centaines de keV à quelques MeV, est supérieure à son énergie de liaison au cortège atomique. Il s'ensuit un réarrangement des électrons du cortège atomique, impliquant l'émission de rayons X (photons de ~ 10 keV).

- Désintégrations par interaction faible

Lors de l'hydrogénation consécutive au Big-Bang, les canaux de désintégration par interaction faible aboutissent au nucléon le plus léger : le proton. Cependant dans un noyau, si le niveau de Fermi des protons est plus élevé que celui des neutrons, le proton peut se désintégrer en neutron. Le proton peut aussi capturer un électron du cortège atomique (la capture électronique). Comme l'interaction faible est trop faible pour séparer des nucléons liés par interaction forte, ces désintégrations sont isobariques, c'est-à-dire que le nombre de nucléon A reste inchangé entre l'état initial et l'état final.

Il n'y a pas d'autres canaux de désintégration possibles car les autres baryons sont plus lourds que les nucléons. On compte donc trois désintégrations par interaction faible dans le noyau: β^+ , β^- , et la capture électronique.

La radioactivité β^- correspond à l'émission d'un électron et d'un anti-neutrino :



Pour que la désintégration soit spontanée ($Q > 0$) cela impose une condition sur les masses :

$$\begin{aligned} Q &= m(A, Z)c^2 - m(A, Z + 1)c^2 - m_e c^2 > 0 \\ Q &= M_{at}(A, Z)c^2 - M_{at}(A, Z + 1)c^2 > 0 \\ \Delta M_{at}(A, Z)c^2 &> \Delta M_{at}(A, Z + 1)c^2 \end{aligned}$$

La radioactivité β^+ est la réaction :

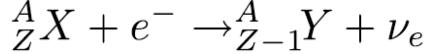


Notons que le noyau engendre par cette réaction de l'antimatière chargée (le positron). Cette réaction correspond à la désintégration d'un proton dans le noyau. Cela n'est pas possible pour un proton isolé (puisque $m_p < m_n$, voir appendice), mais dans certains noyaux, le proton peut se désintégrer en un neutron d'énergie plus basse, si le niveau de Fermi des protons est supérieur à celui des neutrons.

$Q > 0$ implique :

$$\begin{aligned} Q &= m(A, Z)c^2 - m(A, Z - 1)c^2 - m_e c^2 > 0 \\ Q &= M_{at}(A, Z)c^2 - M_{at}(A, Z - 1)c^2 - 2m_e c^2 > 0 \\ \Delta M_{at}(A, Z)c^2 &> \Delta M_{at}(A, Z - 1)c^2 + 2m_e c^2 \end{aligned}$$

La capture électronique correspond à la capture d'un électron par le noyau :



Cette réaction est donc en compétition énergétique avec la désintégration β^+ car elles impliquent les mêmes noyaux initiaux et finaux. Une capture électronique spontanée requiert :

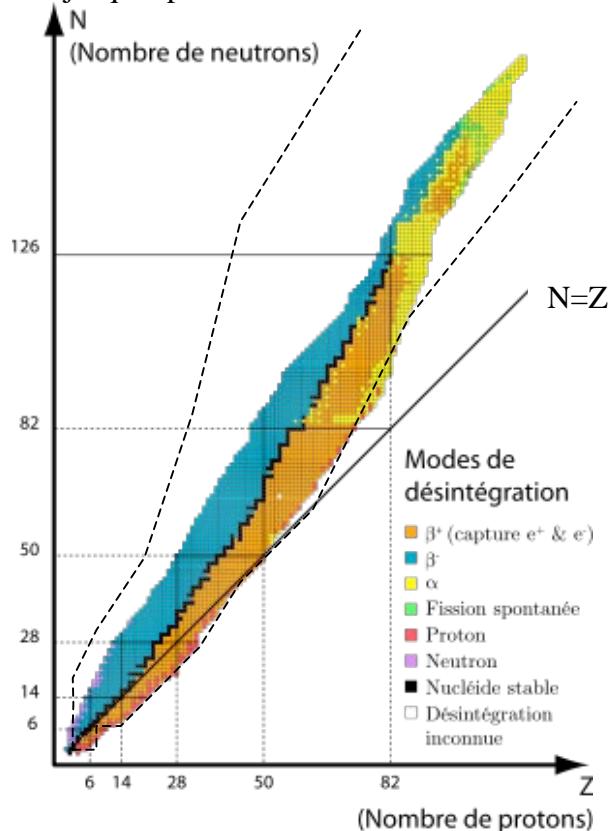
$$\begin{aligned} Q &= m(A, Z)c^2 + m_e c^2 - m(A, Z - 1)c^2 > 0 \\ Q &= M_{at}(A, Z)c^2 - M_{at}(A, Z - 1)c^2 > 0 \\ \Delta M_{at}(A, Z)c^2 &> \Delta M_{at}(A, Z - 1) \end{aligned}$$

La capture électronique est donc plus favorable énergétiquement que la désintégration β^+ .

Pour calculer les probabilités de transition correspondantes on utilise aussi la règle d'or de Fermi. Les fonctions d'ondes du neutrino et de l'électron sont approximées par des ondes

planes (pas d'interaction avec les autres particules en voie de sortie, ce qui est une bonne approximation pour le neutrino, mais qui nécessite une correction pour l'électron). L'opérateur d'interaction faible se calcule à partir du lagrangien électrofaible et dépend d'une constante de couplage, g_F . On peut le réduire à cette constante pour avoir un ordre de grandeur de la probabilité de transition, mais il est en fait bien plus complexe. Il reste le recouvrement entre les états initiaux et finaux nucléaires. Comme dans le cas de l'émission gamma, le développement des exponentielles complexes (ondes planes des leptons de voie de sortie) donne la hiérarchie des transitions : permise, 1^{ère} interdite, etc. Notons que pour la transition gamma c'est l'opérateur de transition (le photon) lui-même qui donnait cette hiérarchie. Par ailleurs, la paire (électron,neutrino) a deux états de spin S possibles : si S=0 la transition est dite de Fermi, et si S=1 elle est dite de Gamow-Teller. Ces deux types de transition ont le même ordre de grandeur et sont décrites en détail dans les livres de physique subatomique.

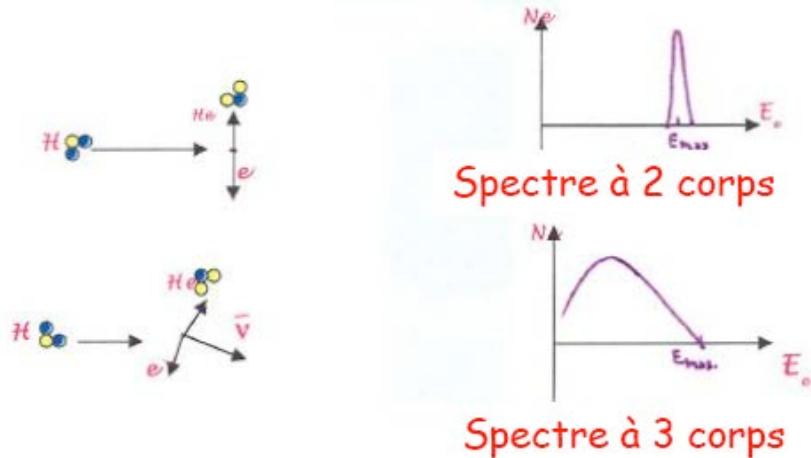
Les temps de vie des désintégrations β sont les plus longs parmi les désintégrations des noyaux : de la ns à quelques jours. Comme un noyau est lié par l'interaction forte, du point de vue de la structure, les noyaux instables par désintégration β doivent être décrits par la structure en couche et le champ moyen tout comme les noyaux stables. Mais expérimentalement ces noyaux instables n'existent plus sur Terre. Nous verrons que certains d'entre eux jouent un rôle important dans la nucléosynthèse des étoiles en fin de vie. Sur Terre ces noyaux sont produits et étudiés dans des accélérateurs. La figure ci-dessous montre la carte des noyaux produits jusqu'à présent.



Les drip-lines sont les lignes de la carte des noyaux reliant les derniers noyaux ayant tous leurs nucléons liés (lignes en pointillés sur la figure ci-dessus). Le nombre de noyaux à l'intérieur des drip-line est estimé à 6000. Seuls 3000 ont été produits et notre connaissance est encore très partielle sur la majorité de ces noyaux. Il y a environ 300 noyaux stables (sujet principal d'étude de la physique nucléaire au XXeme siècle, carrés noirs sur la figure ci-

dessus). Ainsi 95 % des noyaux sont instables par interaction faible et leur étude permet de comprendre la structure nucléaire dans toute sa généralité.

Notons finalement une particularité : le spectre des électrons émis dans la désintégration β^- est continu car il s'agit d'une émission à 3 corps dans laquelle le neutrino et l'électron peuvent se répartir l'énergie cinétique. C'est par cette réaction que le neutrino a été prédit en 1930 par W. Pauli puis découvert en 1956. La figure ci-dessous montre le nombre d'électrons (haut, émission à 2 corps) ou de neutrinos (bas, émission à 3 corps) émis en fonction de leur énergie.



- Désintégrations par interaction forte

Les désintégrations par interaction forte correspondent à l'émission de nucléons sous diverses formes : émission de neutron, de proton, de 2 protons, d'alphas, de clusters (agrégat de nucléons), jusqu'à la fission. Ces désintégrations peuvent aussi mettre en jeu l'interaction électromagnétique, sauf dans le cas de l'émission de neutrons.

Parmi toutes ces désintégrations la particule alpha va encore jouer un rôle prépondérant : en raison de sa grande énergie de liaison (~ 28 MeV), cette particule peut facilement se « préformer » au sein du noyau, et traverser la barrière coulombienne par effet tunnel. Historiquement c'est donc d'abord la radioactivité alpha qui a été mise en évidence, et il a fallu attendre presqu'un siècle pour détecter d'autres types de radioactivité par interaction forte comme l'émission de clusters. Analysons brièvement les différentes radioactivités par interaction forte, par masse croissante de la particule émise.

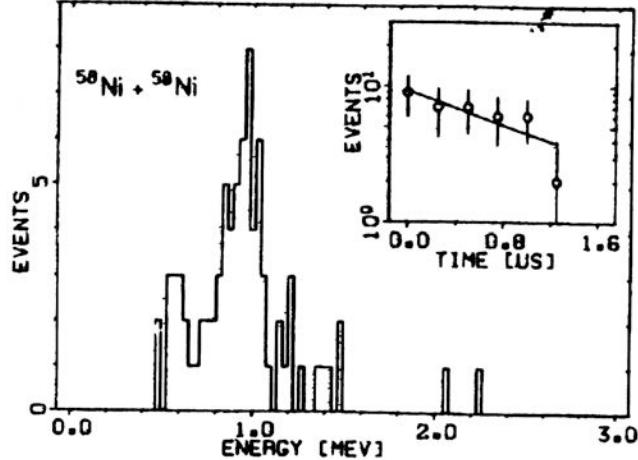
Etudions le cas général de l'émission d'un nucléon. Un noyau peut avoir son dernier nucléon (au niveau de Fermi) non-lié : l'énergie de séparation à un neutron S_n (ou celle à un proton S_p) est alors négative. Pour s'extraire du noyau, le nucléon doit surmonter la barrière centrifuge. Si celui-ci a un moment angulaire orbital ℓ , la barrière centrifuge vaut :

$$B = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}$$

où μ est la masse réduite. On retrouve l'expression du potentiel centrifuge de l'équation de Schrödinger.

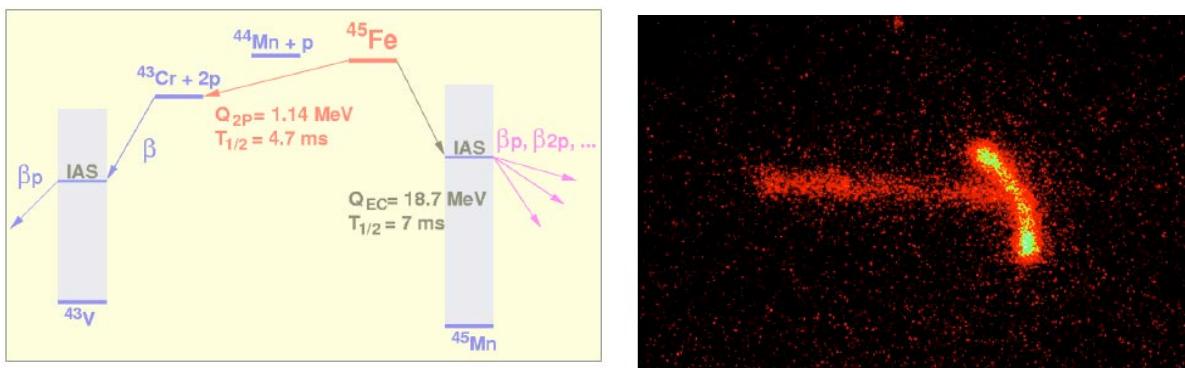
Dans le cas d'un proton non-lié, celui-ci doit de plus franchir la barrière Coulombienne. Dans certains cas, notamment pour les moments angulaires ℓ élevés (donc pour les noyaux lourds),

le proton est confiné dans le noyau suffisamment longtemps par les barrières Coulombienne et centrifuge pour obtenir un temps de demi-vie de l'ordre de la microseconde. C'est la radioactivité à un proton, découverte en 1970. La figure ci-dessous montre le spectre en énergie des protons émis par le noyau ^{113}Cs , ainsi que le spectre de décroissance, obtenu par la mesure du temps entre l'implantation du noyau initial dans le détecteur et la détection du proton.



D'après T. Faestermann et al., Phys. Lett. B. 137 (1984) 23

Dans le cas des noyaux à Z pair, l'appariement rend à priori impossible l'émission d'un proton, car le noyau à Z impair voisin est moins lié, comme le montre la figure ci-dessous. L'observation d'une désintégration signe donc une radioactivité avec émission simultanée de deux protons (découverte en 2000). L'énergie des protons est mesurée dans des détecteurs à semi-conducteur, après implantation du noyau de ^{45}Fe . Le signal disparaît si l'on attend plus de 15 ms après l'implantation du noyau, ce qui confirme un évènement de désintégration que quelques millisecondes de demi-vie.

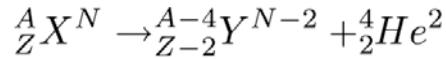


A gauche : schéma de désintégration du ^{45}Fe . Noter la radioactivité à 2p vers le ^{43}Cr (d'après J. Giovinazzo, Cours Joliot-Curie 2008). A droite : mesure correspondante dans une Time Projection Chamber (TPC), montrant le ^{45}Fe et les 2 protons de désintégration (d'après K. Miernik et al. Phys. Rev. Lett 99 (2007) 192501)

La radioactivité alpha (1898) est la plus probable. La particule α jouit d'un statut particulier : son énergie de liaison est importante car c'est un noyau doublement magique ($B=28.3$ MeV), ce qui en fait le plus léger des clusters. Sa pré-formation au sein d'un noyau permet donc de fournir de l'énergie pour traverser la barrière Coulombienne par effet tunnel. L'émission

α peut être considérée comme un signal visible de la formation de clusters, notamment d'alphas, au sein des noyaux.

L'émission d'une particule α correspond à la réaction :



et le Q de la réaction vaut, en fonction des énergies de liaison :

$$Q = -B(X) + B(Y) + B(\alpha)$$

L'énergie cinétique de la particule alpha est donc de quelques MeV, ce qui est assez élevé, en raison de la grande valeur de $B(\alpha) (>0)$.

Exercice : montrer que l'énergie cinétique de la particule alpha est fixe, et qu'on peut l'approximer par le Q de réaction.

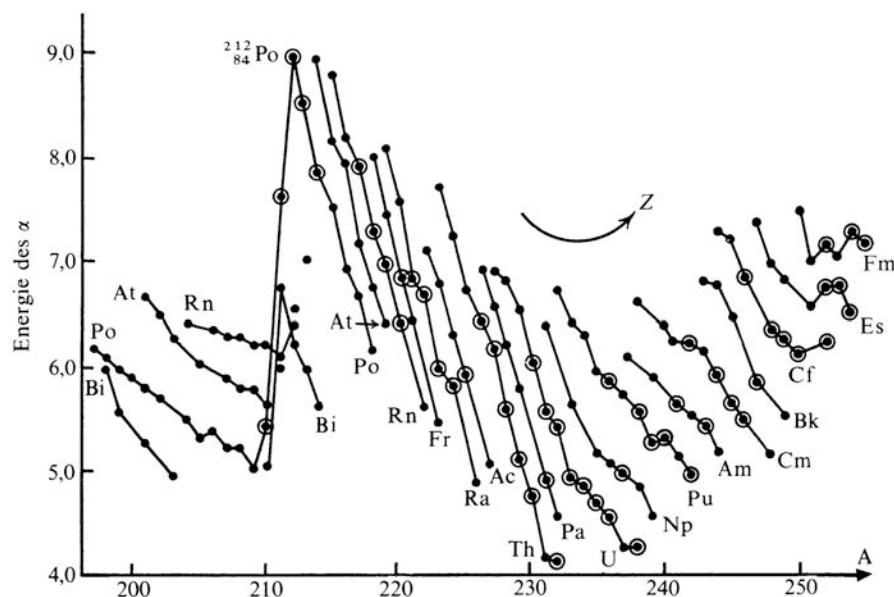
La réaction est spontanée si les masses vérifient :

$$Q = m(A, Z)c^2 - m(A - 4, Z - 2)c^2 - m_\alpha c^2 > 0$$

$$Q = M_{at}(A, Z)c^2 - M_{at}(A - 4, Z - 2)c^2 - M_{at}(\alpha)c^2 > 0$$

$$\Delta M_{at}(A, Z)c^2 > \Delta M_{at}(A - 4, Z - 2) + \Delta M_{at}(\alpha)$$

La figure ci-dessous montre les valeurs de Q (énergie cinétique des particules α émises) pour différents noyaux lourds.



D'après L. Valentin, Le monde subatomique

Exercice : Comment interpréter la grande énergie cinétique des particules α émises par le ${}^{212}_{84}Po$?

Notons finalement que la vie moyenne τ est très sensible au Q de réaction (effet tunnel de l'alpha à travers la barrière coulombienne). On montre en effet que :

$$\tau \propto e^{\frac{b}{\sqrt{Q}}}$$

où b ne dépend que du Z du noyau fils. τ varie ainsi sur près de 30 ordres de grandeurs, selon le noyau considéré.

La préformation d'un alpha au sein du noyau conduit à l'idée séduisante que certains états nucléaires se comportent comme des molécules nucléaires, composées d'alphas ou de clusters plus gros comme des noyaux de carbone, avec éventuellement des neutrons ou des alphas de valence qui les lient entre eux. Le diagramme ci-dessous montre les clusters qui peuvent constituer certains noyaux. Il faut dépenser une certaine énergie, donc exciter le noyau, pour le casser en clusters (par exemple 7.27 MeV pour casser le ^{12}C en 3 particules alpha). Cependant la barrière Coulombienne peut confiner les clusters ; le noyau a alors une probabilité non-nulle de retourner vers son état fondamental par émission γ , sans émettre de cluster. L'existence du ^{12}C (et de tous les noyaux plus lourds) est la meilleure preuve que les noyaux peuvent se comporter comme des agencements de clusters, comme nous l'avons vu au chapitre précédent.

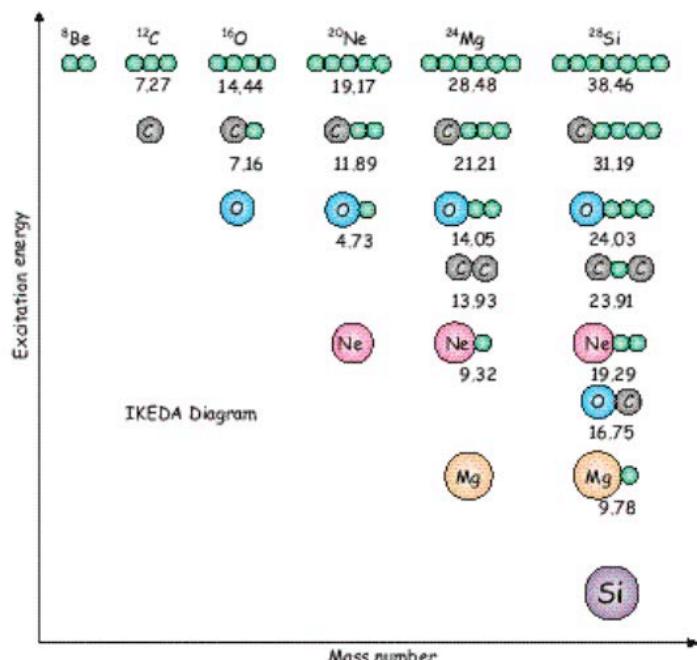
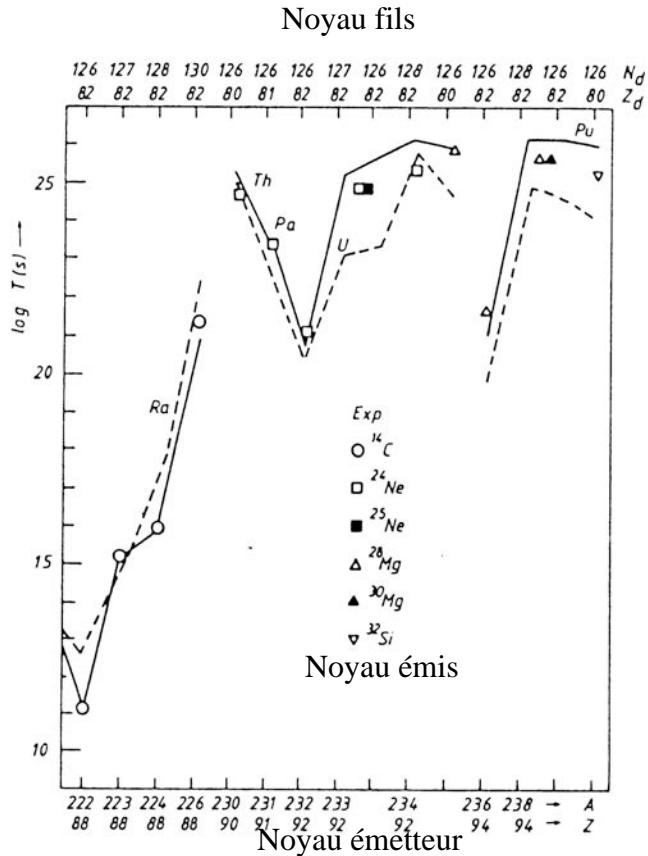


Diagramme d'Ikeda où les noyaux sont représentés à partir de particules alpha, de noyaux de ^{12}C et de ^{16}O . Les valeurs (en MeV) représentent l'énergie qu'il faut fournir au noyau pour qu'il émettent les clusters correspondants.

Cette hypothèse a été confirmée expérimentalement : certains états excités du ^{16}O présentent cette structure. De même l'état de Hoyle du ^{12}C ne peut pas être décrit par la structure en couche standard du noyau : il s'agit d'un état moléculaire de 3 alphas. Il pourrait même s'agir d'un condensat où les 3 alphas (des bosons) seraient dans le même état. On est ainsi à la recherche d'un condensat de 10 alpha dans le ^{40}Ca . Ces travaux sont en cours et n'anticipons pas leur résultat. Notons aussi que l'émission de 2 alphas par la désintégration spontanée du ^8Be en fait un des émetteur alpha des plus légers.

Les noyaux dans leur état fondamental peuvent aussi émettre des clusters plus lourds que les alphas (radioactivité cluster découverte en 1985), également par effet tunnel à travers la barrière Coulombienne. La figure ci-dessous résume les différents noyaux émetteurs répertoriés, et leurs clusters émis correspondants. L'axe supérieur représente le noyau résiduel. On constate qu'il s'agit presque toujours du ^{208}Pb , en raison de sa grande stabilité (noyau doublement magique). Les clusters émis par ces noyaux lourds vont du ^{14}C au ^{32}Si : ils

présentent une grande variété. La vie moyenne typique est de l'ordre de 10^7 ans, ce qui correspond à une probabilité d'émission très faible.



Noyaux émetteurs de clusters (axe du bas). Les clusters émis correspondants sont indiqués dans la figure.
L'axe du haut correspond au noyau résiduel

Finalement le noyau peut émettre un fragment si gros qu'il semble se couper en deux (en un fragment lourd et plus léger) : c'est la fission (découverte en 1939). Nous y reviendrons à la section 4.

Ainsi les désintégrations par interaction forte se présentent plutôt comme un continuum entre l'émission d'un nucléon et la fission : les nombres de masse des fragments émis observés jusqu'à présent sont typiquement $A=1,2,4,14,24,25,28,30,32,90,132$.

Pour finir, la figure ci-dessous montre à titre d'exemple, la chaîne de la radioactivité naturelle du ^{238}U , émetteur alpha.

238 U						
U	U-238 4.47 10^9 yr		U-234 2.455 10^6 yr			
Pa		Pa-234m 1.17 m			β^-	
Th	Th-234 24.10 d		Th-230 7.538 10^6 yr		α	
Ac						
Ra			Ra-226 1600 yr			
Fr						
Rn			Rn-222 3.8235 d			
At						
Po		Po-218 3.10 m		Po-214 164.3 μ s		Po-210 138.376 c
Bi			Bi-214 19.9 m		Bi-210 5.013 d	
Pb		Pb-214 26.8 m	0.02%	Pb-210 22.3 yr		Pb-206 stable
Tl			Tl-210 1.3 m		Tl-206 4.199 m	

ii. Activité, dangerosité d'une source nucléaire

Pour caractériser la probabilité λ de désintégration par seconde, on utilise la vie moyenne τ , définie par :

$$\tau = \frac{1}{\lambda}$$

Afin d'y accéder expérimentalement, on compte le nombre de désintégrations par unité de temps à partir d'un échantillon initial connu. Cela permet d'en déduire le nombre de noyaux restant dans l'échantillon en fonction du temps, pour obtenir la vie moyenne.

λ étant la probabilité de désintégration d'un noyau par seconde, le variation dN du nombre de noyaux de l'échantillon pendant une durée dt est :

$$dN = -\lambda N dt$$

on en déduit le nombre de noyaux restant dans l'échantillon en fonction du temps, que l'on peut comparer aux mesures :

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

La période ou demi-vie T est le temps au bout duquel le nombre de noyau est divisé par 2 :

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \tau \ln 2$$

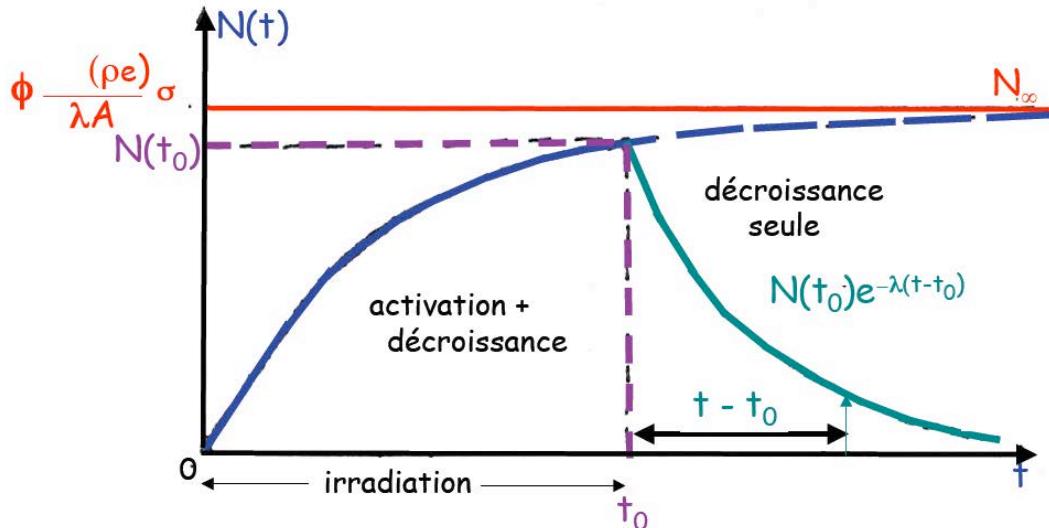
Etudions le cas particulier de l'activation : on produit par réaction nucléaire un noyau radioactif avec un taux n_i par seconde :

$$n_i = \phi \frac{\mathcal{N}_A(\rho e)}{A} \sigma$$

Il y a compétition entre la production du noyau et sa désintégration. Quelle est l'évolution du nombre de ces noyaux au cours du temps ? Par exemple des noyaux instables par désintégration β sont créés par réaction nucléaire pour des applications médicales comme la tomographie par émission de positrons. On a :

$$\begin{aligned} dN &= n_i dt - \lambda N dt \\ \frac{d(N - n_i/\lambda)}{dt} &= -\lambda(N - n_i/\lambda) \end{aligned}$$

$$N(t) = \frac{n_i}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) = \phi \frac{\mathcal{N}_A(\rho e)}{\lambda A} \sigma (1 - e^{-\lambda t})$$



Il existe de nombreuses applications médicales à la production de noyaux radioactifs: un noyau émetteur β^+ engendre deux photons émis à 180° l'un de l'autre. On peut ainsi localiser la tumeur où s'est déposée la solution radioactive, en entourant le patient de détecteurs γ qui se déclenchent en coïncidence de part et d'autre du patient.

Exercice : montrer que l'annihilation d'un positron avec un électron ambiant au repos conduit forcément à l'émission à 180° de deux photons d'énergie 511 keV

L'activité $A(t)$ est le nombre de désintégrations par unité de temps (produit du nombre de noyaux par la probabilité qu'un noyau se désintègre par unité de temps):

$$A(t) = \lambda N(t)$$

L'activité dépend elle-même du temps et caractérise par exemple la dangerosité d'une source en radioprotection. Son unité est le Becquerel (Bq) qui correspond à une désintégration par seconde. Le curie représente l'activité de 1g de Radium : 1 Ci = $3.7 \cdot 10^{10}$ Bq.

Quels sont les ordres de grandeur des activités ? Nous recevons par an typiquement l'équivalent de 5 mJ/kg de radioactivité naturelle. Cela équivaut à absorber 1000 milliards de photons d'énergie 2 MeV par an : c'est comme si nous restions en permanence juste à côté d'une telle source d'activité 30 000 Bq (soit $\sim 1 \mu\text{Ci}$). Le corps humain lui-même a une activité de quelques milliers de Bq, dû à la présence de potassium radioactif (^{40}K) dans les os.

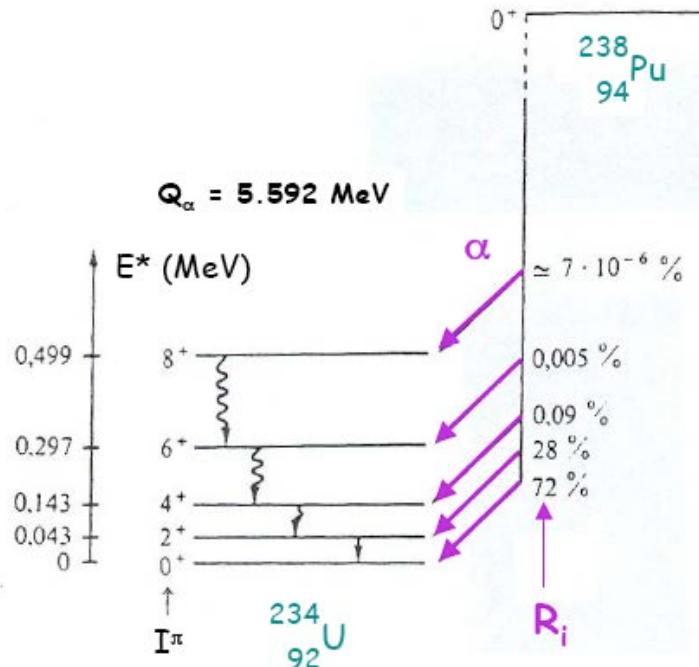
Cet élément a une période ($\sim 10^9$ ans) de l'ordre de l'âge de la Terre, il est donc présent depuis sa formation, et a été engendré dans une étoile. Les autres origines de la radioactivité naturelle sont les rayons cosmiques, le sol, la pierre, le béton, le bois, le radium naturel ...

Si plusieurs types de désintégrations peuvent avoir lieu pour un même noyau, on définit le rapport d'embranchement :

$$R_i = \frac{\lambda_i}{\sum_j \lambda_j}$$

avec

$$\sum_i R_i = 100\%$$



3. Excitations collectives

Les excitations collectives, comme les vibrations et les rotations, sont des modes dynamiques du noyau : par exemple lors d'une vibration, la densité du noyau oscille de manière harmonique. S'il reçoit de l'énergie, le noyau peut ainsi s'exciter. Les excitations de plus grande section efficace sont en général collectives, c'est-à-dire que de nombreux nucléons participent à un mouvement périodique du noyau (vibration ou rotation). Ces états dynamiques du noyau se décrivent par leur énergie et leur probabilité de transition en général par rapport à l'état fondamental. Comment concilier les excitations collectives avec la vision à particules indépendantes ? Le champ moyen est une bonne approximation pour décrire l'état fondamental du noyau. Pour les états excités, il est nécessaire de tenir compte de l'interaction résiduelle (que nous avons déjà abordée au chapitre précédent) : c'est la partie de l'interaction négligée dans l'approximation du champ moyen. Elle s'écrit :

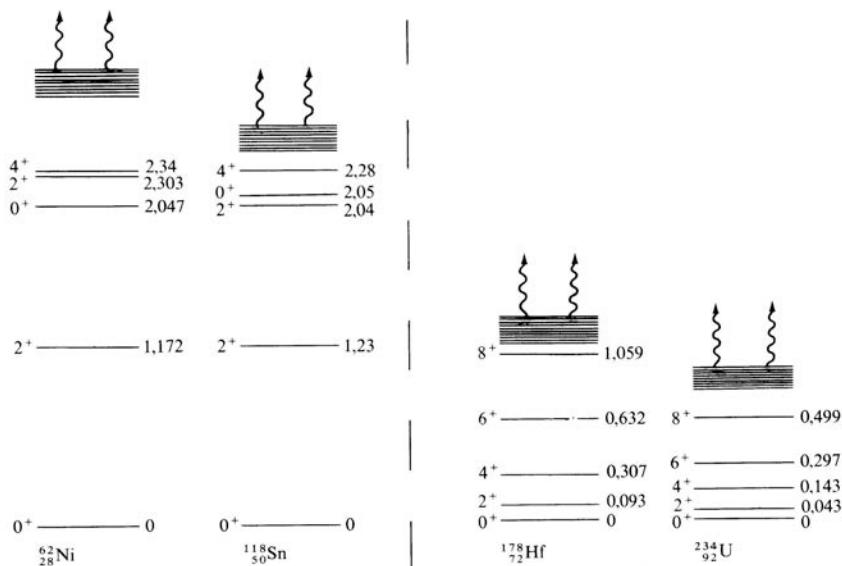
$$V_{Res} \hat{=} H - H_{CM} = \sum_{i < j}^N V_2(\vec{r}_i, \vec{r}_j) - \sum_{i=1}^N V(\vec{r}_i)$$

L'interaction résiduelle agit comme une perturbation sur le champ moyen : les excitations de type particule-trou se mélangent sous son effet, et une excitation collective se décrit comme

une superposition de nombreuses excitations particule-trou bâties sur le spectre à particules indépendantes décrit au chapitre précédent.

a. Vibrations

La partie gauche de la figure ci dessous montre les premiers états excités pour des noyaux magiques de Ni et de Sn (la partie de droite correspond à un spectre rotationnel et sera abordé lors de la prochaine section). Notons que les noyaux à couches fermées, ou à leur voisinage, sont sphériques, comme l'atteste la mesure des moments quadrupolaires. Le spectre en énergie d'excitation présente une structure de type oscillateur harmonique, où les états excités sont séparés par un même quantum d'énergie $\hbar\omega$. Des multiplets d'états sont regroupés autour de ces valeurs, avec une légère levée de dégénérescence qui correspond à de petites anharmonicités.



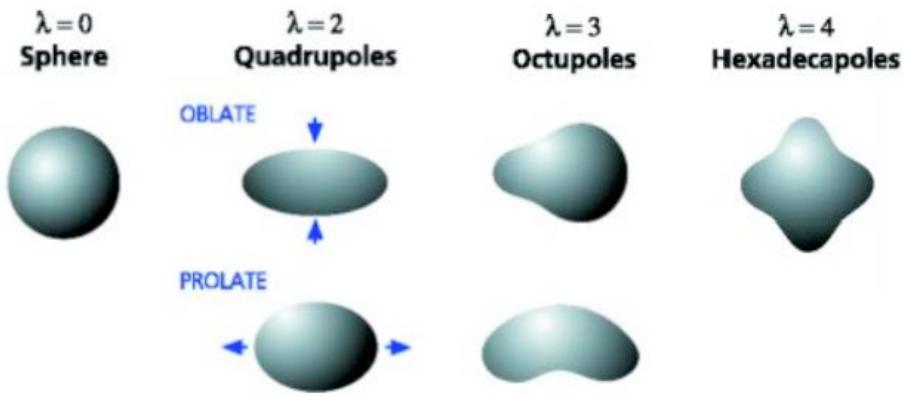
Spectre en énergie d'excitation (en MeV) pour des noyaux sphériques (à gauche) et des noyaux déformés (à droite) (d'après L. Valentin Noyaux et Particules)

Cette excitation de type oscillateur harmonique s'interprète donc comme une vibration de la surface du noyau, caractérisée par son moment angulaire L . La description microscopique des vibrations nucléaires fait appel à la théorie de la fonctionnelle en densité : l'interaction résiduelle permet de superposer un grand nombre d'excitations particules-trous bâtie sur le champ moyen, pour parvenir à une excitation collective.

A des fins pédagogiques, nous allons utiliser un modèle macroscopique. On peut paramétriser le rayon du noyau selon un développement en harmoniques sphériques :

$$R(\theta, \varphi, t) = R_0 \left(1 + \sum_{LM} \alpha_{LM}(t) Y_{LM}(\theta, \varphi) \right)$$

où R_0 est le rayon d'une sphère de même volume que le noyau, et les α_{LM} sont les paramètres de déformation. La figure ci-dessous montre les formes obtenues si l'on ne considère que le terme de multipolarité L (noté λ dans la figure) dans le développement. On peut les dessiner en exercice.

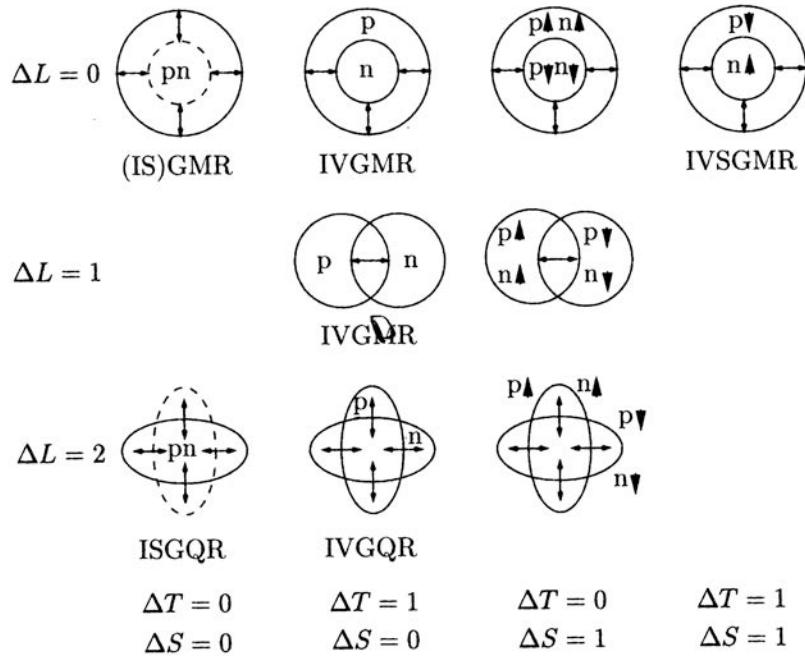


Error!

Formes obtenues en fonction de la multipolarité λ de la déformation

Notons que le terme en $L=0$ correspond à une compression isotrope du noyau, et celui en $L=1$ à une translation globale du noyau. Le mode dipolaire ($L=1$) est donc « spurieux » car il ne correspond pas à un mode d'excitation du noyau.

On peut ainsi interpréter les excitations vibrationnelles de la figure ci-dessous, en fonction du moment angulaire L . Ces excitations dépendent de leur spin S , mais aussi de leur isospin : elles sont dites isoscalaires si leur action est semblable sur les neutrons et les protons, et isovectorielles dans le cas contraire. Ainsi un mode dipolaire est physique dans le cas isovectoriel, car les neutrons et les protons sont en translation relative. De même le mode dipolaire $S=1$ correspond à une translation relative des nucléons spin up par rapport à ceux spin down.



Excitations vibrationnelles classées en fonction leur moment angulaire L , de leur spin S , et de leur dépendance en isospin T (d'après M. Harakeh et A. Van der Woude, Giant Resonances).

Notons qu'un quantum de vibration est appelé phonon, par analogie avec la propagation du son. C'est un boson de moment angulaire L et de parité $(-1)^L$. Les premiers états excités des noyaux sphériques correspondent donc à des vibrations de type $L=2$ ($S=0$), puisque leur

premier état est de spin et parité $J^\pi=2^+$. Il est décrit comme le couplage de l'état fondamental du noyau ($J^\pi=2^+$) avec un phonon $L=2$. Le triplet d'état $(0^+, 2^+, 4^+)$ correspond au couplage de 2 phonons $L=2$, ce qui donne $0 \leq J \leq 4$, d'après la composition de deux moments cinétiques en mécanique quantique.

Exercice : Montrer qu'un état à deux bosons de même moment angulaire $j_1=j_2$ impose un moment angulaire total pair. On utilisera la relation entre les coefficients de Clebsch-Gordan :

$$(j_1 j_2 m_1 m_2 | JM) = (-1)^{j_1 + j_2 - J} (j_2 j_1 m_2 m_1 | JM)$$

Ceci explique pourquoi les états $J=1$ et $J=3$ ne sont pas observés expérimentalement dans l'état à deux phonons du spectre de vibration quadrupolaire ($L=2$) des noyaux. De même, on peut prédire les J des excitations octupolaires à deux phonons $L=3$?

Les **résonances géantes** sont des modes de vibrations collectifs du noyau, situés à haute énergie d'excitation, typiquement entre 10 et 20 MeV, qui représentent la quasi-totalité de la probabilité de transition vers les états excités pour une multipolarité L donnée. Elles jouent donc un rôle important en structure nucléaire.

b. Rotations

Les rotations ne concernent que les noyaux déformés. Dans un modèle macroscopique, la déformation se modélise, par exemple dans le cas quadrupolaire par :

$$R(\theta, \varphi) = R_0 \left(1 + \sum_{M=-2}^{M=2} \alpha_{2M} Y_{2M}(\theta, \varphi) \right)$$

La déformation est ici *permanente* (il n'y a plus de dépendance en temps) et affecte le noyau dans son état fondamental, ce qui n'était à priori pas le cas pour les vibrations où le noyau était sphérique dans l'état fondamental, et oscillait en se déformant dans l'état excité.

Exercice : Sachant que l'opérateur de rotation autour d'un vecteur unitaire \mathbf{u} , pour un système de moment angulaire total \mathbf{J} est (cf. Cohen-Tanoudji annexe BVI) :

$$R_{\vec{u}}(\theta) = e^{-\frac{i}{\hbar} \theta \vec{J} \cdot \vec{u}}$$

montrer que si \mathbf{u} est selon un axe de symétrie du système, la projection de \mathbf{J} sur \mathbf{u} est nulle. En déduire qu'un système quantique sphérique ne peut tourner autour de son axe de symétrie. Que conclure pour les noyaux sphériques ?

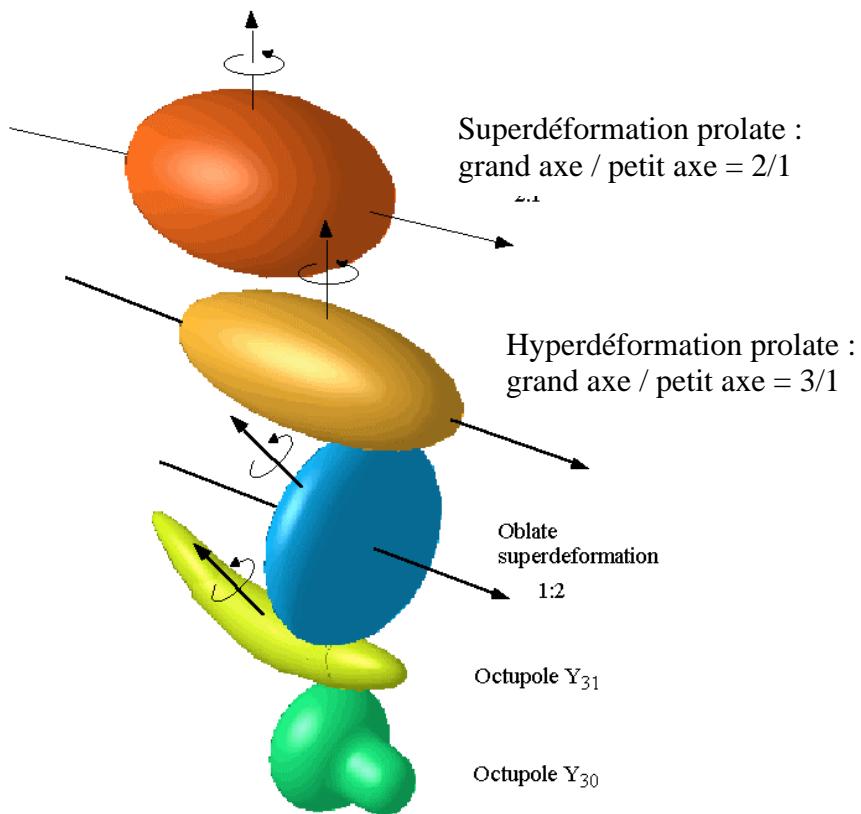
La figure ci-dessous montre des déformations extrêmes du noyau : par exemple, la superdéformation correspond à un rapport du grand axe au petit axe de l'ellipsoïde égal à 2. Nous verrons sa mise en évidence expérimentale dans la partie illustration.

Comment « mesurer » la déformation d'un noyau ? Il est commode d'utiliser pour cela le moment quadrupolaire électrique, défini par :

$$Q = \int (3z^2 - r^2) \rho_c(\vec{r}) d\vec{r}$$

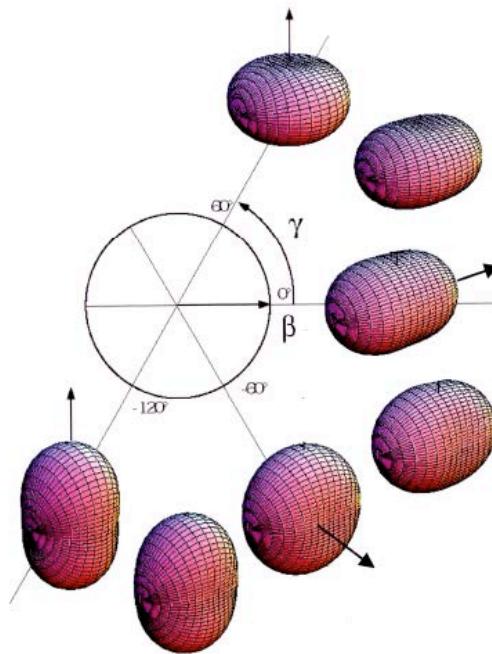
où ρ_c est la densité de charge (reliee à la densité de protons) du noyau. Ce moment est nul pour un objet sphérique. Des valeurs de Q s'écartant de 0 sont donc signe d'une déformation du noyau. Notons enfin que la déformation brise certaines symétries spatiales du noyau, ce qui implique une levée de dégénérescence des états des nucléons. Mais, dans le cas d'un

noyau pair-pair, l'invariance par renversement du temps implique que la dégénérescence minimum soit 2 (un nucléon « tourne » dans un sens et l'autre nucléon en sens opposé).



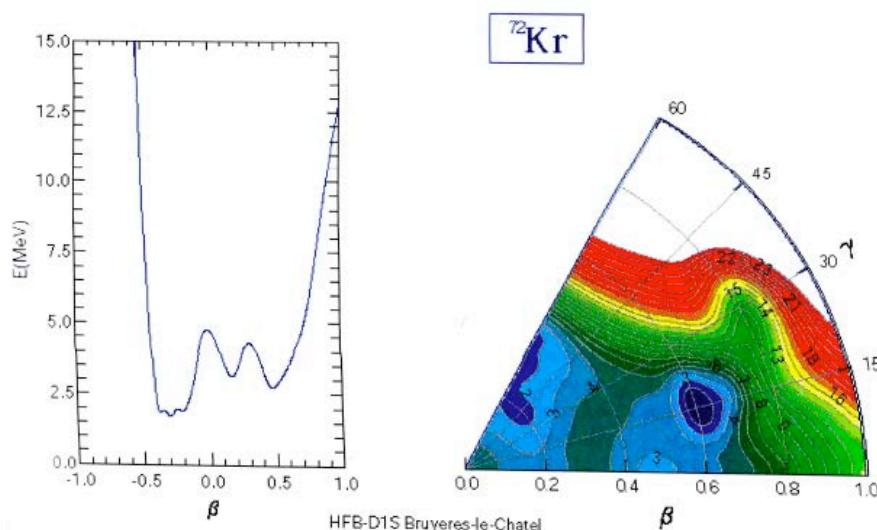
Déformations quadrupolaires (3 figures en haut) et octupolaires (2 figures en bas).

Un noyau est caractérisé par une certaine orientation dans l'espace (les 3 angles d'Euler), qui ne laisse que deux degrés de liberté sur les 5 paramètres α_{2M} caractérisant une déformation quadrupolaire ($L=2$). On les note habituellement β et γ . β mesure l'elongation du noyau le long de son éventuel axe de symétrie : si $\beta > 0$ le noyau est allongé comme un cigare (**prolate**, voir les deux premiers dessins de la figure ci-dessous) et si $\beta < 0$ le noyau est aplati comme une soucoupe (**oblate**, voir le troisième dessin de la figure ci-dessous). γ (en $^\circ$) mesure l'écart à la symétrie axiale : $\gamma=0^\circ$ correspond à une forme prolate, alors que $\gamma=60^\circ$ à une forme oblate. Entre ces deux valeurs, le noyau est dit tri-axial : il ne possède pas d'axe de symétrie. La figure ci-dessous illustre les différentes déformations quadrupolaires.



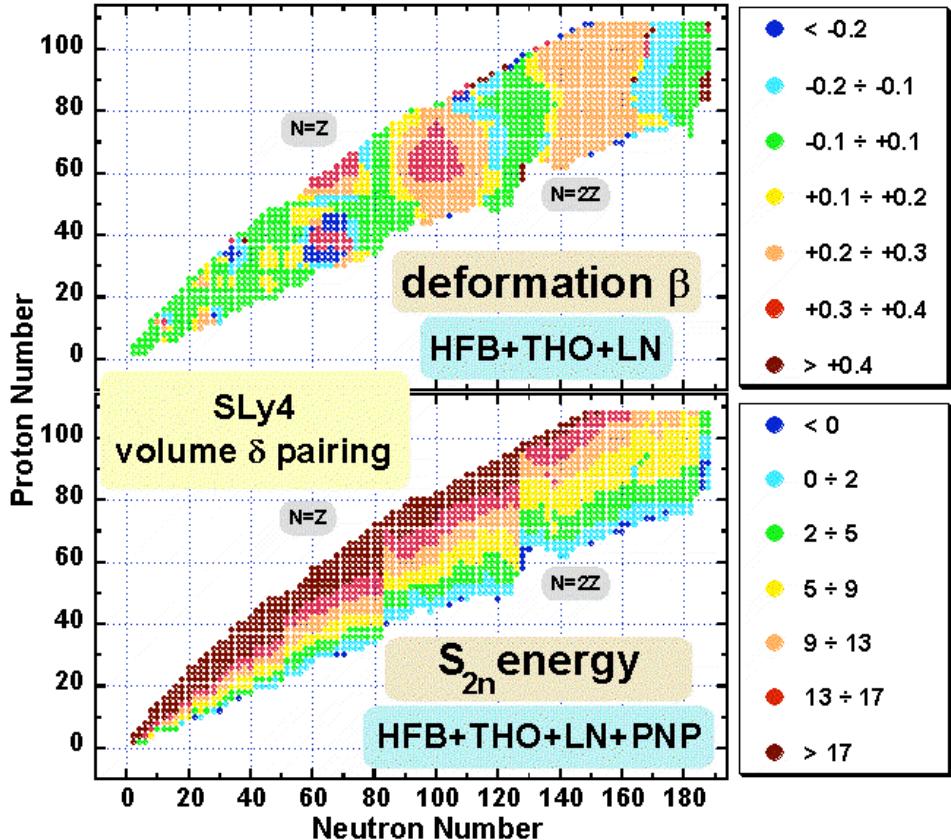
Déformations quadrupolaires en fonction des valeurs de β et γ (Crédits : C. Theisen, IRFU SPhN)

Comment modéliser microscopiquement la déformation, dans le cadre du principe variationnel ? La figure ci-dessous montre des calculs de champ moyen (de type Hartree-Fock) pour le noyau de ^{72}Kr . En pratique il faut faire un calcul pour chaque valeur de (β, γ) , imposée lors de la variation par un paramètre de Lagrange (notons que la brisure spontanée de la symétrie sphérique est ici rendue explicite pour les besoins du calcul). On trace ensuite les surfaces d'énergies potentielles dans le plan (β, γ) , et on identifie les minima qui correspondent à l'état fondamental du noyau (partie droite de la figure). Ainsi le noyau de ^{72}Kr présente soit une forme oblate ($\gamma=60^\circ$), soit une forme triaxiale ($\gamma=15^\circ$), selon le minimum dans lequel on se trouve. On parle de coexistence de forme, ou d'isomères de forme.



Calculs de champ moyen (HFB – Bruyères le Châtel, M. Girod et al.) pour le noyau déformé ^{72}Kr . Les énergies potentielles sont représentées en fonction de β , avec $\gamma=0^\circ$ et 60° (à gauche) et dans le plan (β, γ) (à droite).

La majorité des noyaux (stables et instables) sont déformés car les noyaux sphériques se trouvent en général uniquement au voisinage des nombres magiques. La figure ci-dessous montre des calculs de champ moyen prédisant la déformation pour l'ensemble des noyaux. La majorité possède $|\beta| > 0.1$



Paramètre de déformation β calculé avec une modèle de champ moyen, pour l'ensemble des noyaux (figure du haut) (d'après M. Stoitsov et al, Phys. Rev. C68 (2003) 054312).

Comment interpréter la rotation des noyaux déformés ? La partie droite de la première figure de la section a) montre le spectre en énergie d'excitation pour des noyaux déformés. On constate une augmentation de l'espacement entre les niveaux, à la différence du spectre vibrationnel. Les résultats de la figure ci-dessus sont obtenus par une approche microscopique. Il est cependant possible de comprendre les grands traits du phénomène rotationnel par une approche approximée classique. Classiquement le moment angulaire \mathbf{J} d'un objet tournant est proportionnel à sa vitesse angulaire ω :

$$\vec{J} = \mathcal{I}\vec{\omega}$$

où \mathcal{I} est le moment d'inertie. L'énergie de rotation est :

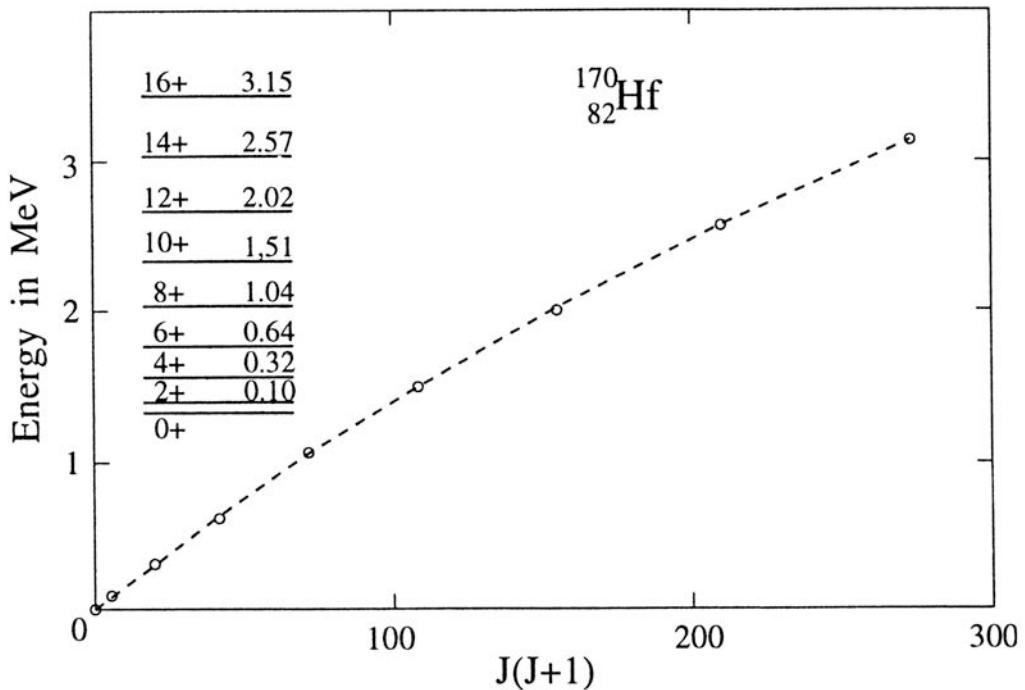
$$E_J = \frac{1}{2}\omega^2\mathcal{I} = \frac{1}{2}\vec{J}^2$$

La valeur propre de l'hamiltonien correspondant s'écrit, en mécanique quantique :

$$E_J = \frac{\hbar^2}{2\mathcal{I}}J(J+1)$$

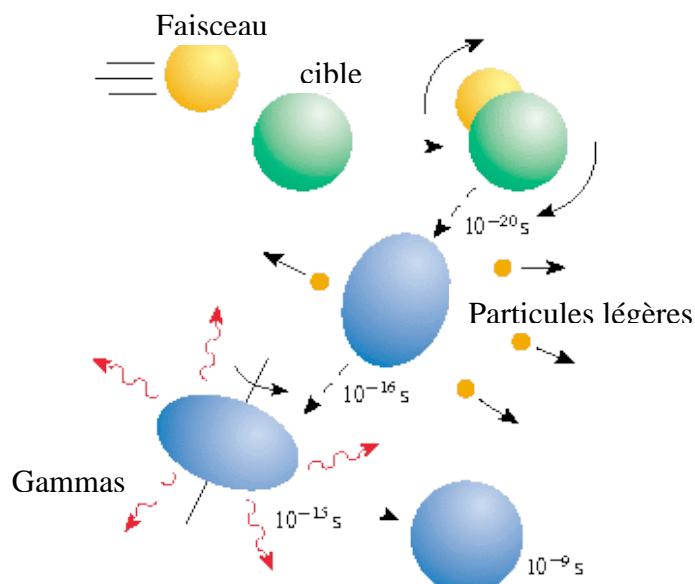
On retrouve ainsi les caractéristiques du spectre d'une bande rotationnelle, comme sur la figure ci-dessous, où l'énergie est proportionnelle à $J(J+1)$. La légère courbure de la droite correspond à une petite augmentation du moment d'inertie avec J , en raison de la force

centrifuge qui étire le système. Notons finalement que seuls les J pairs interviennent dans cette bande de rotation, pour des raisons de symétrie spatiale.



Energie d'excitation de la bande rotationnelle du ^{170}Hf , en fonction de $J(J+1)$ (Voir par exemple A. Neusser et al, Eur. J. Phys. A 15 (2002) 439)

Pour mesurer ces énergies de rotation, les noyaux lourds (Pd, Yb, ...) sont produits dans des états excités à de très hauts moments angulaires orbitaux, typiquement de quelques dizaines de \hbar . Ils sont produits soit par fusion (qui donne des riches en protons), soit par fission (qui donne des riches en neutrons).



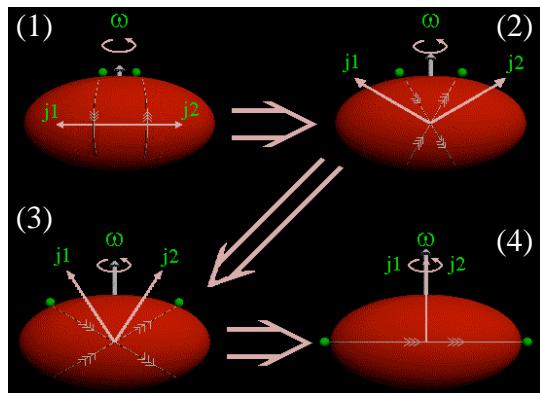
Comment fabriquer un noyau à haut-spin par fusion.

Exercice : Montrer que la fusion de noyaux stables donne des noyaux instables du côté riche en proton. A quelle énergie faut-il accélérer le projectile ? La fission, tend à conserver le

rapport N/Z entre le noyau père et les noyaux fils. Favorise-t-elle la création de noyaux riches en neutrons ?

Il s'avère que le moment d'inertie mesuré d'un noyau superfluide est environ trois fois plus faible que la valeur donnée par un calcul classique. Une partie du noyau ne participe donc pas à la rotation, à cause de l'effet quantique de la superfluidité nucléaire due à l'appariement : les paires de Cooper ne participent pas à la rotation.

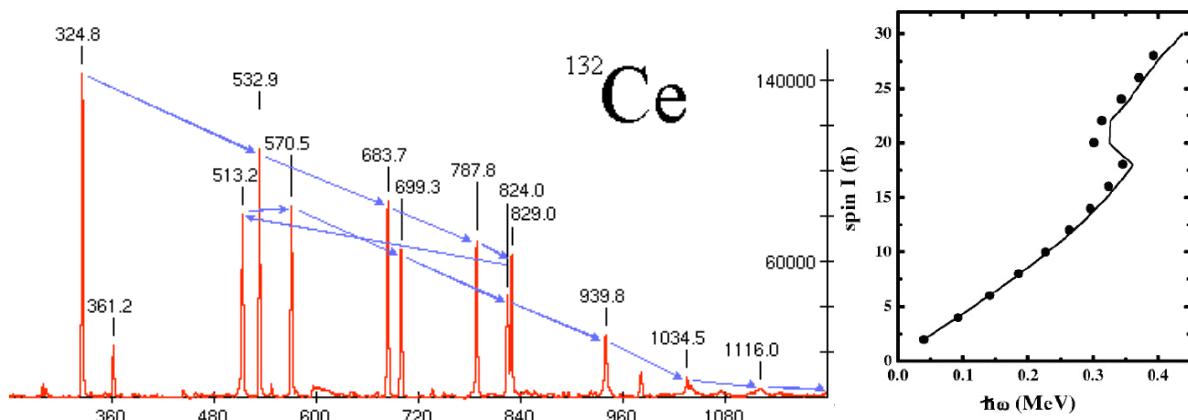
Lorsque le noyau tourne de plus en plus vite (états de haut J), le moment d'inertie va augmenter par pas, à chaque brisure de paire. En effet, dans un modèle schématique, les paires sont vues comme des nucléons orbitant en sens opposés dans le noyau (projection m de j sur l'axe Oz opposées). L'augmentation de la vitesse de rotation va engendrer la brisure de paire sous l'effet de la force de Coriolis qui tend à aligner les moments angulaires des nucléons sur l'axe de rotation. La figure ci-dessous montre les étapes d'une telle brisure de paire.



Interprétation classique de l'effet anti-pairing dû à la force de Coriolis

La figure ci-dessous illustre l'effet typique du backbending. La montée en spin comporte des cassures qui ramène le noyau à des vitesses angulaires plus petites à cause de l'augmentation du moment d'inertie lors de la brisure d'une paire.

Exercice : En considérant que lors de la brisure de paire, le noyau retrouve un moment d'inertie assimilable à une sphère uniforme ($2/5 MR^2$), et qu'avant la brisure de paire, ce moment d'inertie était 3 fois moins grand, donner le moment cinétique typique au-delà duquel la paire se brise, pour un noyau de masse $A=132$. Comparez avec la valeur correspondante sur la figure ci-dessous. Qu'en concluez-vous, compte tenu de la simplicité du modèle ?

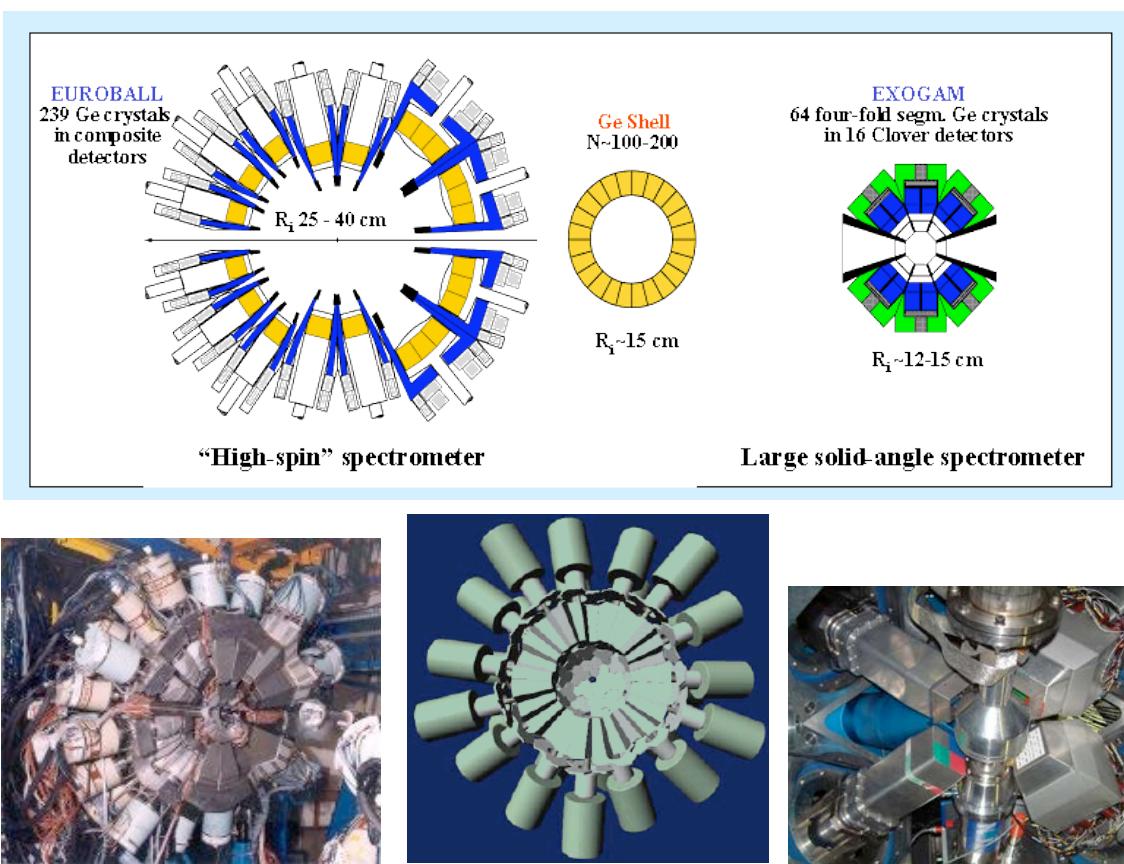


Spectre de gammes obtenus lors de la désexcitation du ^{132}Ce (d'après E.S. Paul et al, Nucl. Phys. A690 (2001) 341); à gauche : figure typique de backbending

Comment détecter la lumière du noyau ?

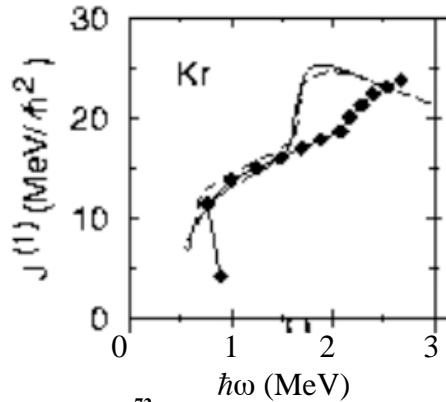
On voit que les gammas de désexcitation émis par les noyaux nous renseignent fidèlement sur leur structure, à travers les spectres en énergie d'excitation et la probabilité de transition. On en déduit ainsi les espacements des sous-couches de valence (évolution des nombres magiques), la déformation du noyau, l'effet de l'appariement, ... Les détecteurs dédiés à de telles mesures sont donc cruciaux et sont en perpétuelle amélioration. Ainsi le détecteur EUROBALL (à gauche) a fait de nombreuses mesures de gammas pour étudier les noyaux dans les hauts-spin. Ce détecteur assez lourd (239 cristaux de Ge) ne possède qu'un faible angle solide (50% de 4π) et une faible efficacité de détection (~10%). Ceci est en partie dû à la présence de boucliers anti-comptons destinés à identifier et éliminer les gammas ne perdant pas toute leur énergie par effet photoélectrique dans les Ge.

Le détecteur EXOGAM (à droite) vise à augmenter l'efficacité de détection d'un facteur 2 en utilisant des détecteurs Ge segmentés. Les signaux des segments adjacents peuvent être sommés pour reconstruire l'énergie totale de certains gammas. Le projet AGATA (au milieu), en cours d'élaboration, n'utilise que des détecteurs Ge, pour maximiser l'angle solide (80% de 4π). Les 190 Ge seront très fortement segmentés. Cette propriété sera utilisée pour reconstruire le point d'interaction exact de chaque gamma (tracking gamma) à l'aide de l'analyse des signaux électronique (pulse shape analysis des temps de montée, ...). AGATA aura ainsi une résolution angulaire de 1° , une résolution en énergie de 5 keV pour un gamma incident de 1 MeV, et une efficacité de détection de 50%. Ce détecteur sera particulièrement adapté à l'étude des noyaux exotiques produits avec de faibles intensités.



Détecteurs gammas : EUROBALL (gauche), futur projet AGATA (milieu) et EXOGAM (droite)

Le *retard d'alignement* est une sorte d'effet anti-backbending du à la présence de paires neutrons-protons. Dans un noyau N=Z en rotation, il n'est pas nécessaire de briser une paire pour aligner les spins des nucléons sur le vecteur rotation ω : comme les paires np T=0 sont dans un état de spin S=1, le neutron et le proton peuvent avoir des spins parallèles. On peut donc d'aligner les spins des deux nucléons de la paire sur l'axe de rotation sans la briser. Le moment d'inertie du noyau ne montrera pas les discontinuités caractéristiques du backbending correspondant aux brisures de paires aux spins anti-parallèles. C'est ce qui est observé dans la figure ci-dessous sur l'exemple du noyau N=Z ^{72}Kr . Les noyaux voisins N \neq Z subissent une soudaine augmentation du moment d'inertie vers $\hbar\omega=0.8$ MeV, alors qu'aucune discontinuité n'est observée dans le cas du ^{72}Kr .



Moment d'inertie mesurés pour le noyau N=Z ^{72}Kr (points) en fonction de la vitesse de rotation ω (de 0 à 3 MeV). Les moments d'inerties des noyaux voisins $^{74,76}\text{Kr}$ sont représentés par les lignes continues et pointillées (d'après S.M. Fisher et al. PRL 87 (2001) 132501).

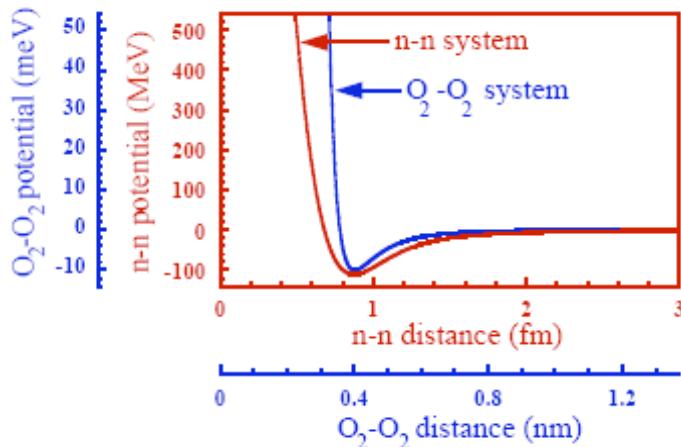
4. Approches nucléaires de type physique statistique

Nous avons contourné le problème à N corps par l'approximation du champ moyen. Une autre approche possible est la description statistique (voire macroscopique) du noyau, qui suppose à l'opposé un grand nombre de particules (les nucléons) dans le système. Reprenons l'analogie entre l'interaction nucléon-nucléon et l'interaction subie par deux molécules composées elles-mêmes d'atomes. A grande distance, elles s'attirent sous l'effet de la force de Van der Waals, qui est une interaction entre dipôles électriques. A courte distance, les effets de polarisation des molécules composites deviennent importants et il faut prendre en compte des moments multipolaires d'ordre élevé. Il en résulte une interaction répulsive. L'interaction totale entre deux molécules s'écrit finalement :

$$V(r) = 4E_0 \left[\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^6 \right]$$

où E_0 et σ sont des constantes ajustées sur l'expérience. C'est le potentiel de Lennard-Jones. Il est représenté ci-dessous à son échelle sur la même figure que l'interaction nucléon-nucléon. Les comportements des deux forces sont très analogues : attraction à grande portée et cœur dur répulsif à courte portée. Il en résulte des propriétés analogues entre les noyaux et les fluides. La différence principale tient cependant au nombre de constituants : quelques dizaines de nucléons pour le noyau, ce qui rend délicat le passage à la limite thermodynamique. Quelle est la thermodynamique des systèmes finis ? Y a-t-il des transitions de phases ? Une telle similitude entre ces deux interactions a conduit des physiciens

statisticiens habitués à décrire les gaz et liquides en termes de molécules interagissantes, à modéliser ainsi le noyau.



D'après J. Dobaczewski, Cours Joliot Curie 2002

Notons un autre point commun avec l'interaction nucléon-nucléon : le potentiel de Lennard-Jones, couramment utilisé en physique moléculaire est effectif puisque les constantes E_0 et σ sont ajustées sur l'expérience. Il ne viendrait à l'idée de personne de décrire la force entre 2 molécules à partir du lagrangien électrofaible et des interactions entre les électrons et des photons.

a. La goutte liquide

Ce modèle est l'approche la plus simple qui utilise l'analogie entre un fluide et un noyau, en raison des similitudes des interactions dans ces deux systèmes.

Nous savons que le cœur dur de l'interaction nucléon-nucléon engendre la saturation. L'expression du rayon du noyau $R=r_0A^{1/3}$, est similaire à celle caractérisant le rayon d'une goutte de liquide. Poursuivons l'analogie pour décrire à partir de cette approche des mécanismes dynamiques de physique nucléaire comme les désintégrations radioactives. Nous aurions pu utiliser l'approximation du champ moyen (approche microscopique et équation de Schrödinger) mais cela nécessite des calculs numériques peu pédagogiques.

L'énergie de liaison d'une goutte liquide est d'autant plus grande que le volume est grand : elle est proportionnelle au nombre de nucléon, donc au volume. Chaque nucléon contribue pour la même quantité à l'énergie de liaison. Mais les nucléons en surface contribuent moins à lier la goutte puisqu'ils ont moins de voisins. La goutte cherche donc à minimiser sa surface, d'où sa forme sphérique. Dans le cas du noyau, il faut y adjoindre l'énergie Coulombienne : la répulsion entre les protons entraîne une diminution de l'énergie de liaison. Il faut donc minimiser le nombre de protons. Par ailleurs l'énergie de symétrie tend avoir autant de neutrons que de protons. Cela vient du fait que l'énergie potentielle du noyau est plus grande si les niveaux de Fermi des neutrons et protons sont proches. Si le niveau de Fermi des neutrons par exemple est très grand devant celui des protons, cela défavorise la liaison des noyaux. Une démonstration de la forme de ce terme est donnée à l'annexe 1. Enfin nous savons que l'appariement joue un rôle important dans l'énergie de liaison : les noyaux ayant un nombre pair de protons et/ou de neutrons seront plus liés. En résumé, le noyau peut être considéré comme une goutte chargée superfluide où les protons et les neutrons doivent se

comporter de manière similaire. L'énergie de liaison B du noyau peut donc s'exprimer par la formule de Bethe-Weizsäcker (BW) (ou encore de la goutte liquide) :

$$B = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_A \frac{(N-Z)^2}{A} + \delta$$

On reconnaît dans le terme d'énergie Coulombienne la forme en Q^2/R . Cette formule de BW permet d'effectuer de nombreuses prédictions quantitatives comme nous le verrons, car les coefficients sont ajustés sur les masses mesurées des noyaux. On obtient typiquement:

$$a_V = 16 \text{ MeV}$$

$$a_S = 17 \text{ MeV}$$

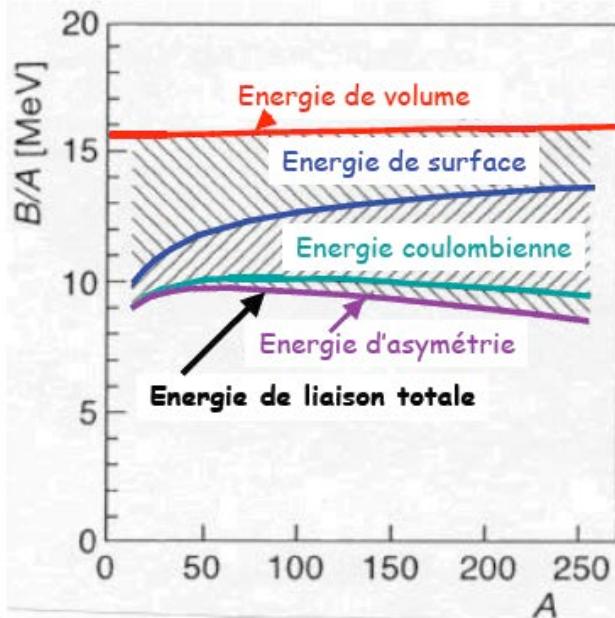
$$a_C = 0,7 \text{ MeV}$$

$$a_A = 23 \text{ MeV}$$

$\delta = 12A^{-1/2} \text{ MeV}$ ou 0 MeV ou $-12A^{-1/2} \text{ MeV}$ pour les noyaux pair-pair, pair-impair, impair-impair, respectivement. δ correspond ici au gap d'appariement Δ que nous avons évoqué au chapitre précédent.

Notons que pour les noyaux légers, les plus liés ont $N=Z$, alors que les noyaux plus lourds ont un excès de neutrons car le terme Coulombien devient important. Par ailleurs le défaut majeur de cette formule est qu'elle n'intègre pas les effets de couches (nombres magiques).

La figure ci-dessous montre l'effet des différents termes de la formule de BW en fonction du nombre de masse A. B/A , l'énergie de liaison par nucléon, est bien constante si on ne tient compte que du terme de volume.



Etudions trois applications de cette formule, qui permet une première étude du phénomène dynamique complexe que sont les radioactivités

i. Les paraboles de masses dans les désintégrations par interaction faible

Ecrivons la masse atomique avec la formule de BW, et considérons les désintégrations par interaction faible. Elles sont isobariques, donc A est une constante. On en déduit (on néglige l'énergie de liaison des électrons à l'atome qui est de l'ordre de 0,3 keV par électron):

$$M_{at}c^2 = \alpha + \beta Z + \gamma Z^2$$

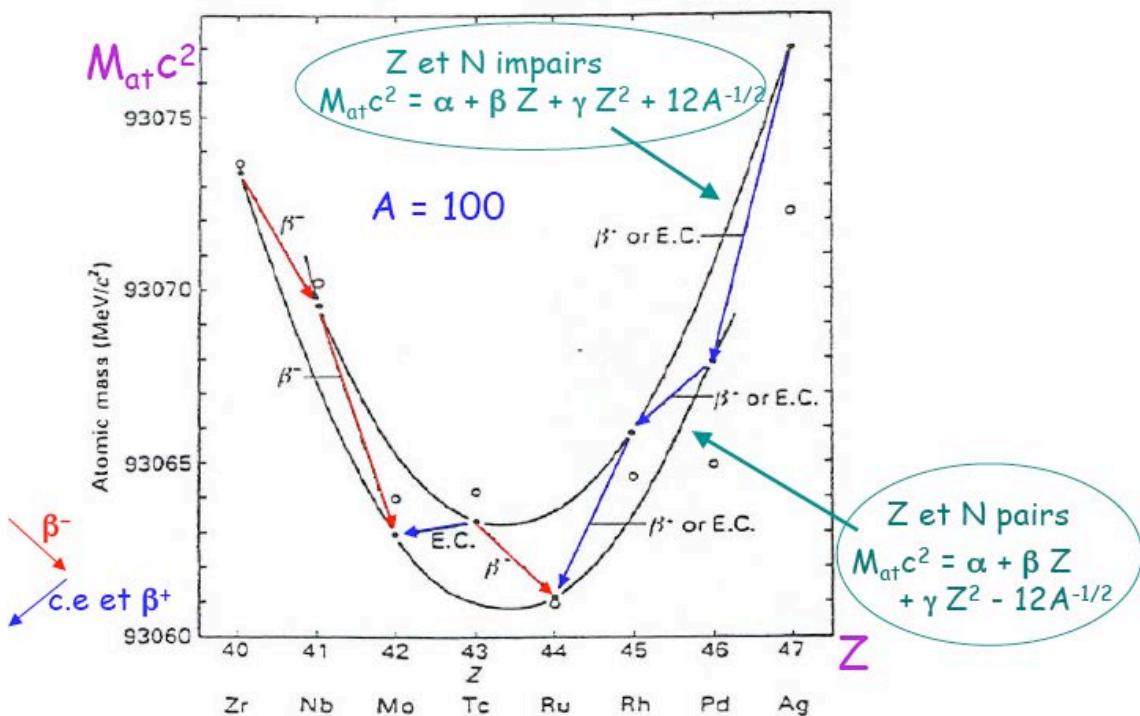
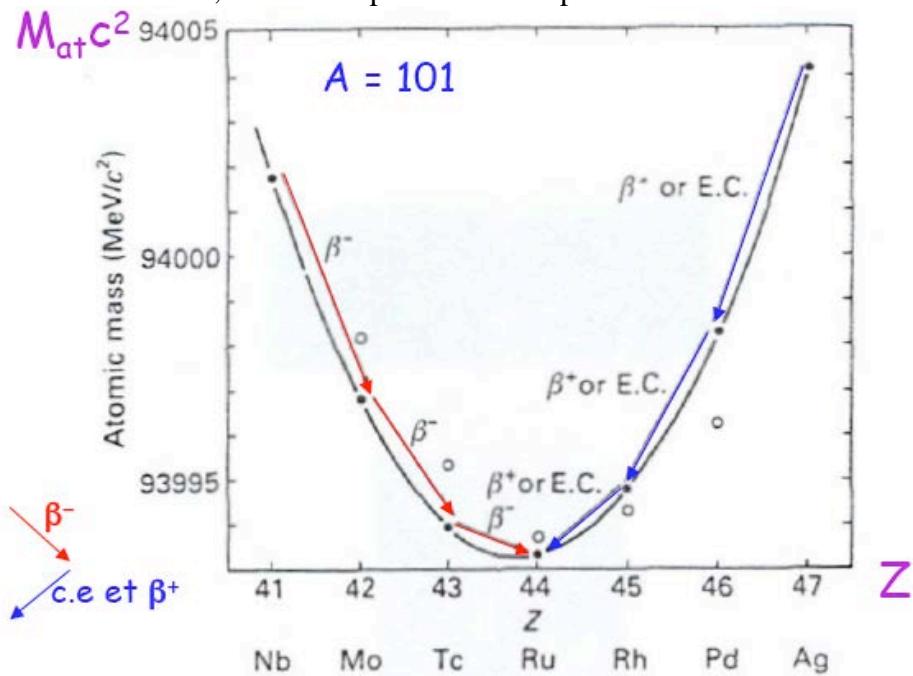
avec

$$\alpha = A(m_n c^2 - a_V + a_A) + a_S A^{2/3} - \delta$$

$$\beta = m_p c^2 + m_e c^2 - m_n c^2 - 4a_A$$

$$\gamma = \frac{a_c}{A^{1/3}} + \frac{4a_A}{A}$$

On obtient donc une parabole en fonction de Z, translatée selon la valeur de δ . Puisque A est fixe, si A est impair, il n'y a qu'une parabole. Si A est pair, il y a une parabole plus liée pour N et Z pair, et une translatée, moins liée pour N et Z impair :



Les désintégrations isobariques se placent le long des paraboles. On identifie ainsi les noyaux stables. Ceux-ci peuvent être déterminés à l'aide de la formule de BW :

$$\frac{\partial M_{at}}{\partial Z} = 0 = \beta + 2\gamma Z$$

En faisant l'approximation $m_p=m_n$ et en négligeant m_e , ceci conduit à une bonne estimation du noyau le plus stable en prenant le Z entier arrondit de la valeur trouvée. On obtient, de manière générale :

$$Z = \frac{A}{2 + (a_C/2a_A)A^{2/3}} = \frac{A}{2 + 0,015A^{2/3}}$$

On retrouve bien que pour les noyaux légers stables il y a autant de protons que de neutrons, alors que pour les noyaux plus lourds stables il y a un excès de neutrons.

ii. La désintégration alpha

La formule de BW peut aussi nous donner une estimation de la région de masse des noyaux susceptibles d'émettre une particule alpha. La réaction est spontanée si $Q>0$. En utilisant la formule de BW (sans terme d'appariement) :

$$\begin{aligned} Q &= B(\alpha) - (B(X) - B(Y)) \simeq B(\alpha) - \delta B \\ Q &= 28,3 - \frac{\partial B}{\partial Z}\delta Z - \frac{\partial B}{\partial A}\delta A = 28,3 - 2\frac{\partial B}{\partial Z} - 4\frac{\partial B}{\partial A} \\ Q &= 28,3 - 4a_V + \frac{8a_S}{3A^{1/3}} + \frac{4a_C Z(3A - Z)}{3A^{4/3}} - 4a_A \left(1 - \frac{2Z}{A}\right)^2 \end{aligned}$$

L'application numérique, donne pour $Z=A/2$, ou plus précisément pour la relation entre Z et A déterminée au i) pour les noyaux stables par désintégration β :

$$Q>0 \text{ pour } A>150$$

Il faut donc des noyaux lourds ($A>200$) pour que les termes de surface et de Coulomb favorisent énergétiquement l'émission d'une particule α .

iii. La fission et la fusion

La fission correspond au cas limite de l'émission d'un cluster si gros que le noyau se fragmente en deux noyaux. Pour fissioneer, le noyau doit se déformer. La tension de surface (favorisant la sphéricité) va donc à l'encontre de l'interaction Coulombienne qui pousse les deux fragments à se séparer en déformant le noyau jusqu'à ce qu'il se scinde. Dans le cadre de la goutte liquide, il faut donc, pour fissioneer que le terme coulombien l'emporte sur celui de surface :

$$a\frac{Z^2}{A^{1/3}} > bA^{2/3}$$

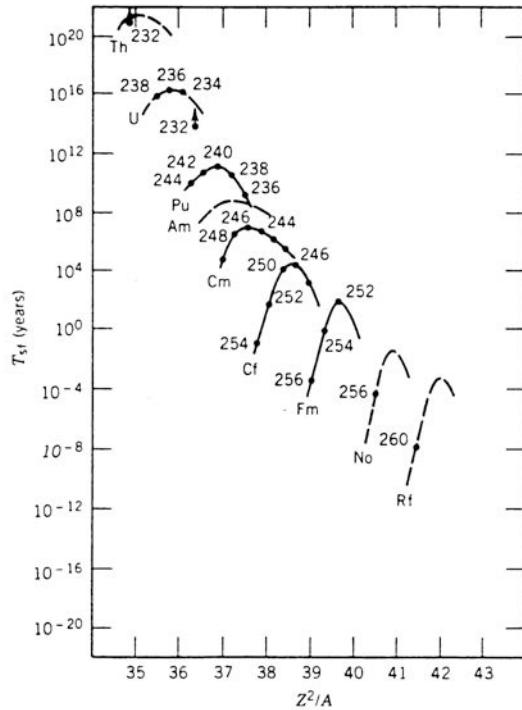
où a et b sont des constantes non-triviales qui dépendent des paramètres de la goutte liquide. La condition ci-dessus revient à :

$$\frac{Z^2}{A} > \gamma$$

où γ est une constante déterminée par les paramètres de la goutte liquide :

$$\gamma = \frac{2a_S}{a_C} \simeq 50$$

Z^2/A est appelé le paramètre de fissilité. La valeur de Z^2/A détermine donc la propension du noyau à fissionner. En utilisant $Z \sim A/2$ la condition ci-dessous permet de donner la région en masse des noyaux spontanément fissiles. On obtient A de l'ordre de 200. La figure ci-dessous montre la chute rapide de la période avec l'accroissement du paramètre de fissilité, montrant que la probabilité de fission augmente.

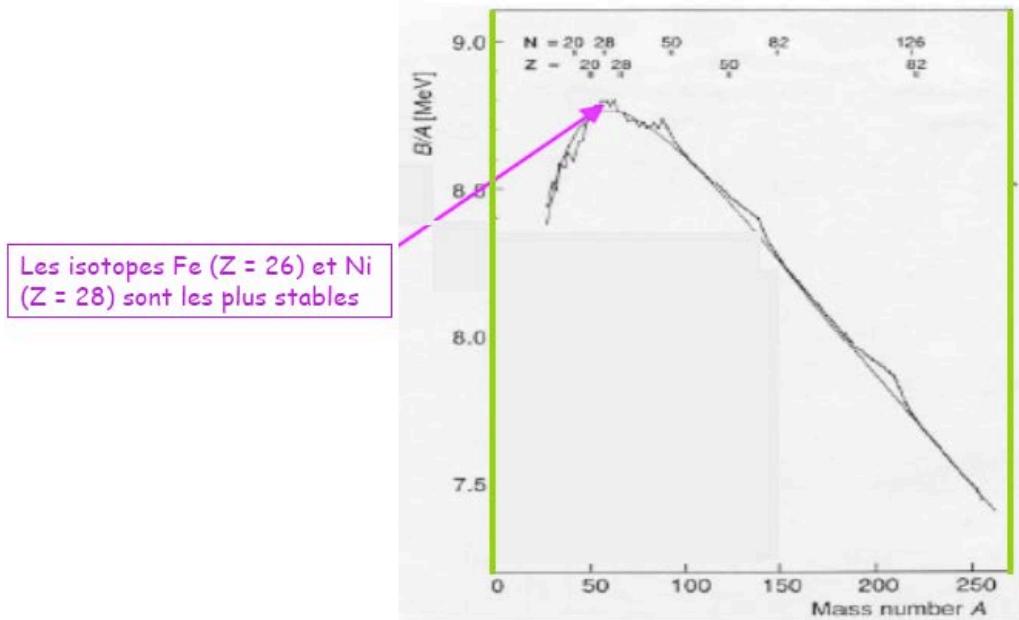


Demi-vie par fission, en fonction du paramètre de fissilité (d'après

Lors de la fission, les fragments sont asymétriques en A , en raison des effets de couches : schématiquement, les noyaux fils se repartissent autour des deux noyaux magiques ^{132}Sn ($Z=50$, $N=82$) et ^{90}Zr ($Z=40$, $N=50$).

La courbe ci-dessous montre plus en détail l'énergie de liaison par nucléon - expérimentale et calculée avec la formule de BW. Cette courbe permet de déterminer la nature endoénergétique ou exoénergétique d'une réaction de fission ou de fusion puisqu'elle se déroule à A constant : la réaction est exoénergétique si la moyenne des B/A pondérée par les masses est plus grande en voie de sortie qu'en voie d'entrée (s'il n'y a qu'un seul protagoniste alors c'est directement son B/A qu'il faut comparer). La fusion des éléments légers produit de l'énergie, tout comme la fission des éléments lourds.

Exercice : Montrer qu'une réaction de fusion ou de fission est exoénergétique si la moyenne des B/A pondérée par les masses est plus grande en voie de sortie qu'en voie d'entrée



Un point capital pour la nucléosynthèse et la production d'énergie nucléaire, est que cette courbe présente un maximum : le Fe et le Ni ($A=56-58$) sont les noyaux les plus liés par nucléon. Lors de la nucléosynthèse stellaire, les réactions de fusion s'arrêtent à ces noyaux. Rappelons que la fusion doit de plus surmonter la barrière coulombienne d'où la nécessité de fournir une énergie initiale, comme celle engendrée par la température élevée au cœur des étoiles par la pression gravitationnelle. Sur Terre la fusion n'a été réalisée que de manière non contrôlée par les bombes H, allumées par des bombes A (fission). La fusion contrôlée peut se faire soit par confinement inertiel, soit par confinement magnétique (projet ITER).

Ainsi il faut trouver un mécanisme alternatif à la fusion des noyaux dans les étoiles pour expliquer la présence d'éléments plus lourds que le Fer. Sur la figure ci-dessus on voit que la fission d'un noyau d'uranium ($A=235$) en des noyaux de masse $A=90-130$ libère de l'ordre de 0.5 MeV/A, ce qui correspond à environ 100 MeV par fission. Cela représente environ 10^{13} J (soit l'énergie qu'aurait au sol d'un bloc de 10 milliards de kilos tombant de 100 m de haut) par kg d'uranium.

Exercice (sujet atypique) : la boutade de Fermi sur les extraterrestres. Fermi pensait que nous ne pourrions pas être contactés par d'éventuels extraterrestres car entre le moment où leur civilisation aurait maîtrisé l'énergie nucléaire et celui où ils seront technologiquement capables d'envoyer des vaisseaux vers la Terre, ils se seront certainement auto-anéantis par une guerre nucléaire totale. En utilisant la loi binomiale, calculer la probabilité qu'au moins un événement qui a une chance sur n de se réaliser, se réalise si on le tente n fois. En déduire la limite pour n tendant vers l'infini. Si on évalue la probabilité que les extraterrestres s'annihilent à environ une chance sur 1 milliard par an, quelle est leur probabilité de survie au bout d'un milliard d'années ? Noter les nombreuses applications possibles de cette formule (jeux de hasard, ...).

b. Gaz de Fermi

Le modèle du gaz de Fermi permet de donner les ordres de grandeur associés au potentiel moyen et aussi de justifier l'expression du terme d'asymétrie dans la formule de Bethe Weizsäcker. Il est présenté en annexe.

c. Les phases de la matière nucléaire

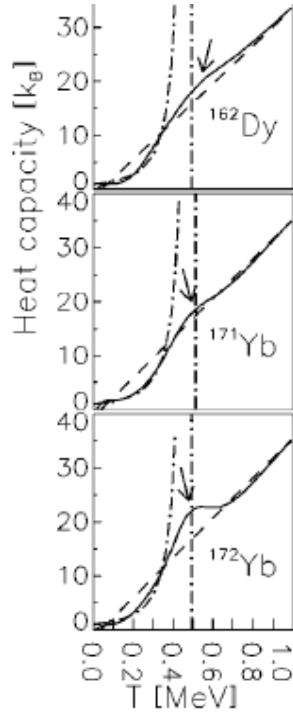
Le comportement de type goutte liquide du noyau provient la forme de l'interaction nucléon-nucléon (attraction et cœur dur). Il est donc légitime de se demander si une transition de phase de type liquide-gaz peut avoir lieu dans un noyau « chauffé », c'est à dire lors de collisions à haute énergie entre deux noyaux (de l'ordre de 100 MeV/A) dites de fragmentation. Bien qu'il soit délicat de définir une température dans un système composé de quelques centaines de particules, plusieurs transitions de phase peuvent avoir lieu dans le noyau :

- **Transition de phase liquide-gaz** (1^{er} ordre) vers $T = 5$ MeV. Une transition liquide-gaz est prédictive. Signer cette transition est un enjeu expérimental, car on ne détecte que les nucléons, résidus de la fragmentation des deux noyaux incidents, au cours de laquelle la température s'est élevée. La figure ci-dessous montre le détecteur INDRA dédié notamment à l'étude de cette transition. Il est composé de 336 détecteurs contenant des cristaux scintillants de CsI qui mesurent l'énergie déposée par les nucléons après la diffusion de 2 noyaux à des énergies typiques de 100 MeV/nucléon.



Crédits : collaboration INDRA

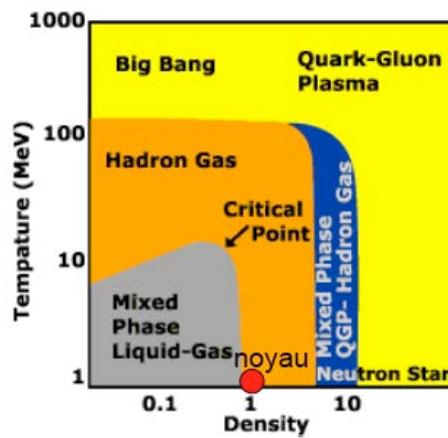
- **Transition de phase superfluide-normale** (2^{eme} ordre) : tout comme dans les systèmes ferromagnétiques ou supraconducteur, lorsque la température dépasse la température critique (ici de l'ordre de 1 MeV $\sim \delta/2$), l'agitation thermique brise les paires, et le système n'est plus superfluide. Des signaux expérimentaux ont été recueillis ces dernières années. La valeur température critique est prédictive par plusieurs modèles de type champ moyen avec appariement. Les expérimentateurs sont à la recherche d'une méthode capable de caractériser sans ambiguïté cette température critique. Un groupe d'expérimentateur d'Oslo a récemment mis au point une méthode pour mesurer la densité de niveaux excités à partir du spectre de désexcitation d'un noyau de ^{162}Dy obtenu par diffusion inélastique de ^3He . La densité de niveaux η donnant le nombre de configurations possible du système thermodynamique, on en déduit l'entropie ($S=k\ln\eta$), et la capacité calorifique. Cette dernière présente une courbe en S, caractéristique d'une transition de phase du deuxième ordre dans un système de taille finie. La température critique se situe précisément au niveau des fluctuations de la capacité calorifique.



Densité de niveaux et capacité calorifique mesurée par diffusion inélastique de ^3He à 15 MeV/nucléon. La température critique est indiquée par la ligne en tirets-points verticale (d'après A. Schiller et al. Phys. Rev. C63 (2001) 021306(R)).

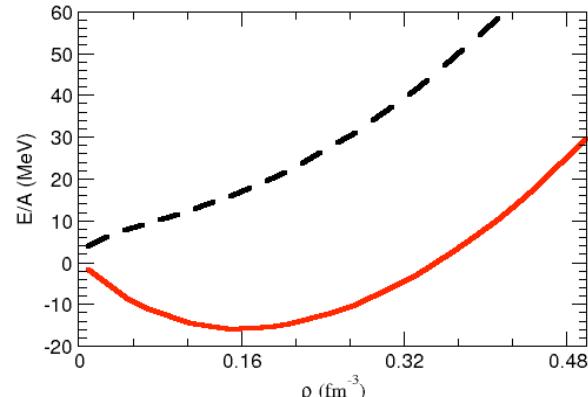
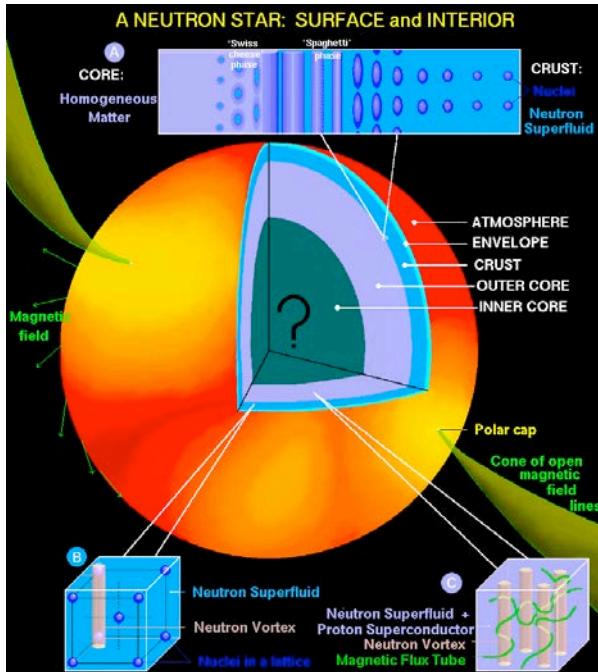
- **Transition de phase nucléons-plasma de quarks et de gluons** (ordre sujet à discussion) : cette transition se déroule dans des collisions nucléaires à très haute énergie (d'une dizaine de GeV à une dizaine de TeV, ce qui correspond à $T=170$ MeV) et permet de sonder le Quark-Gluon-Plasma. Des indications expérimentales ont été obtenues récemment, qu'il reste à éventuellement confirmer avec l'expérience Alice au LHC.

La saturation au cœur des noyaux permet d'envisager ce que serait la matière nucléaire : un morceau infini de cœur de noyau, sans surface : on enlève le terme de surface (et coulombien car la matière est supposée neutre) de BW. La figure ci-dessous montre les différentes phases de la matière nucléaire (la densité est donnée en unité ρ_0 , la densité de saturation)



La matière nucléaire n'est pas une simple vue de l'esprit. Elle est supposée exister dans les étoiles à neutrons, cadavres de supernovae (les trous noirs sont formés de la même manière, mais leur masse dépasse 1,7 fois la masse du Soleil – la masse de Chandrasekhar). Cette étoile

complexe de 10 km de rayon est composée de plusieurs zones. La partie interne comporte des nucléons sous forme de matière nucléaire. Sous l'effet de l'attraction gravitationnelle cette matière nucléaire peut avoir des densités qui dépassent la densité de saturation. A contrario, la surface de l'étoile est composée d'un gaz de neutrons de densité inférieure à celle de saturation. Il est donc nécessaire de modéliser la matière nucléaire en fonction de la densité, de la température, mais aussi de la quantité relative de neutrons et de protons, afin de décrire ces étoiles.



A gauche- description des différents phénomènes au sein d'une étoile à neutrons (Crédit : D. Page). A droite- Equation d'état pour la matière nucléaire symétrique (trait continu) et la matière de neutrons (trait pointillé) obtenus avec l'interaction SLy4.

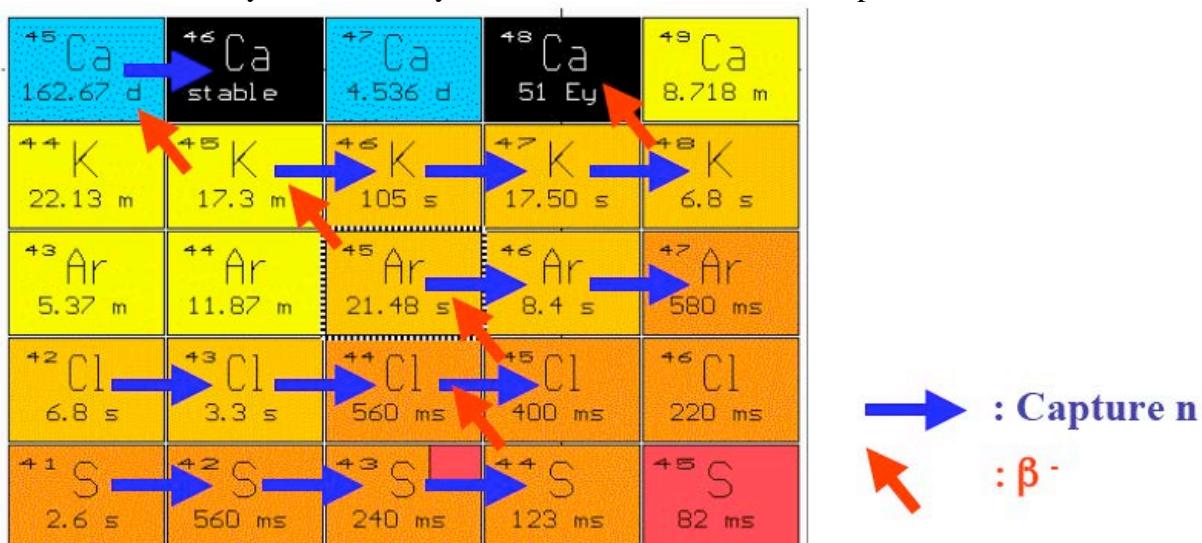
Pour ce faire on calcule l'équation d'état de la matière nucléaire à partir de l'interaction nucléon-nucléon. En raison de l'analogie avec le potentiel moléculaire de Lennard-Jones, cette équation d'état sera proche d'une équation d'état de type Van der Waals. Pour la matière nucléaire symétrique ($N=Z$), on obtient typiquement, à partir de l'interaction nucléon-nucléon (en calculant la valeur moyenne de H exact pour des états de la matière infinie) :

$$\frac{E}{A}(\rho) = A\rho^{2/3} + B\rho + C\rho^{5/3} + D\rho^{\alpha+1}$$

Notons que la formule de BW représente le cas particulier de la formule ci-dessus pour $\rho=\rho_0$ = densité de saturation nucléaire = densité des noyaux : le minimum de cette fonction correspond à la densité de saturation. De nombreuses investigations sont aujourd'hui menées pour prédire le comportement de la matière nucléaire dans les situations extrêmes des étoiles à neutrons. Expérimentalement, la production et l'étude des noyaux très riches en neutrons s'avèrent utiles.

5. Conclusions : nucléosynthèse stellaire explosive

Nous avons désormais tous les outils pour comprendre comment se sont formés les noyaux plus lourds que le fer. A la fin de la vie d'une étoile massive, survient une explosion dans laquelle les éléments comme le fer (et d'autres, plus légers) sont soumis à un haut flux de neutrons. Les noyaux s'enrichissent donc en neutrons jusqu'à atteindre un noyau dont la vie moyenne par désintégration β^- est suffisamment courte pour se désintégrer en un noyau qui a un proton de plus (figure ci-dessous). Et ainsi de suite. Ce mécanisme (appelé processus r) permet ainsi de comprendre la synthèse des éléments lourds, mais aussi celles des éléments légers qui n'ont pas été produits lors de la combustion « normale » de l'étoile. La figure ci-dessous montre la synthèse des noyaux stables ^{46}Ca et ^{48}Ca lors du processus r.



Nous sommes bien tous des « poussières d'étoiles » !

BIBLIOGRAPHIE

- Réactions nucléaires, radioactivités et molécules nucléaires :
<http://www.cenbg.in2p3.fr/heberge/EcoleJoliotCurie/coursJC/JOLIOT-CURIE%202002.pdf> par Y. Blumenfeld, MJ Garcia Borge, M. Marques
- Etoiles à neutrons : <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0506417>
- Processus-r :<http://theory.gsi.de/~petermann/papers/cowan-thieleman-ptoday.pdf>

6. Annexe 1 : le modèle du gaz de Fermi

Le modèle du gaz de Fermi permet de donner les ordres de grandeur associés au potentiel moyen et aussi de justifier l'expression du terme d'asymétrie dans la formule de Bethe Weizsäcker.

Dans ce modèle, les nucléons sont placés dans un volume V sphérique, confinés par un potentiel nul dans le noyau et infini à l'extérieur. Ils se déplacent donc librement dans le noyau ; l'énergie des nucléons se présente uniquement sous forme cinétique.

Le nombre dn de nucléons (neutrons ou protons) que l'on peut mettre dans un intervalle d'impulsion dp est

$$dn = \frac{2V4\pi p^2 dp}{2\pi\hbar^3}$$

où $2\pi\hbar^3$ est le volume d'une cellule, et le facteur 2 dénombre les deux états de spin possible du nucléon. L'énergie de Fermi est donnée par

$$E_F = \frac{p_F^2}{2m}$$

Et p_F s'obtient en comptant le nombre total de nucléons concernés :

$$N = \int_0^{p_F} dn$$

où N est le nombre de neutrons ou de protons.

$$p_F = \left(\frac{2N}{A}\right)^{1/3} \frac{\hbar(9\pi)^{1/3}}{2r_0}$$

$$E_F = \left(\frac{2N}{A}\right)^{2/3} \frac{(9\pi)^{2/3}}{8} \frac{\hbar^2}{mr_0^2} = \left(\frac{2N}{A}\right)^{2/3} E_F^0$$

En prenant l'approximation $N=A/2$, on obtient $E_F = 37$ MeV environ. Le niveau de Fermi augmente avec le nombre de neutrons. Notons que la profondeur du potentiel est typiquement de 43 MeV puisqu'il faut $B/A \sim 8$ MeV pour extraire le dernier nucléon lié.

L'énergie cinétique vaut :

$$T_N = \int_0^{p_F} \frac{p^2}{2m} dn = \frac{3}{10} E_F^0 A \left(\frac{2N}{A}\right)^{5/3}$$

Pour les protons, toutes les équations ci-dessus sont strictement similaires, il suffit de remplacer N par Z . L'énergie cinétique totale du noyau est donc :

$$T = T_{Neut} + T_{Prot} = \frac{3}{10} E_F^0 A \left[\left(1 + \frac{x}{A}\right)^{5/3} + \left(1 - \frac{x}{A}\right)^{5/3} \right]$$

avec $x=N-Z$. En effectuant un développement limité en x/A :

$$T = \frac{3}{5} A E_F^0 + \frac{1}{3} E_F^0 \frac{(N-Z)^2}{A} + \dots$$

Le premier terme est l'énergie cinétique dans le cas $N=Z$. Le deuxième terme est la correction qui tient compte de la différence entre N et Z . Elle est de signe opposé de celle de l'énergie de liaison du noyau. On trouve donc une justification du terme d'asymétrie de la formule de BW. Ainsi, pour minimiser son énergie cinétique (et donc maximiser son énergie de liaison), le

noyau cherche à avoir autant de neutrons que de protons. Sinon le niveau de Fermi neutron ou proton sera trop élevé, et cela est défavorable énergétiquement.

Notons qu'une autre origine du terme d'asymétrie est aussi que l'interaction neutron-proton est légèrement plus attractive que celle neutron-neutron ou proton-proton comme nous l'avons vu dans le cas du deuton.

7. Annexe 2 : théorie de la diffusion

Comment, de manière générale, calculer la section efficace à partir de modèles microscopiques ? Soit E l'énergie de la particule en sortie du système (loin de tout potentiel diffuseur) :

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

Elle est représentée par une fonction d'onde de la forme ($r \rightarrow \infty$) :

$$\Psi_k(\vec{r}) = e^{ikz} + f_k(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r}$$

Le premier terme représente la fonction d'onde plane incidente qui sort inchangée du système (pas d'interaction). Le deuxième terme est une onde sphérique : la cible se comporte comme une source secondaire de diffusion. f_k est l'amplitude de diffusion qui se détermine à partir du potentiel d'interaction. On montre que (courants de probabilités, cf. Cohen-Tannoudji chap 8. B) la section efficace différentielle s'exprime simplement à partir de f_k :

$$\sigma(\theta, \phi) = |f_k(\theta, \phi)|^2$$

Il existe deux méthodes pour calculer σ (donc f_k) à partir du potentiel d'interaction entre la cible et le projectile : l'équation intégrale de la diffusion, et la méthode des déphasages. Elles sont données en annexe.

a. L'équation intégrale de la diffusion

L'équation intégrale de la diffusion permet d'établir l'expression auto-consistante de f_k :

$$f_k(\theta, \phi) = -\frac{1}{4\pi} \int e^{-ik\hat{r}\vec{r}'} V(\vec{r}') \Psi_k(\vec{r}') d\vec{r}'$$

où $V(r')$ est le potentiel d'interaction à une constante près. Cette équation s'obtient simplement à partir de l'équation de Schrödinger qui décrit la diffusion d'une particule dans un potentiel V . Pour résoudre ces équations couplées, on fait *l'approximation de Born* : dans le cas où V est faible, on remplace dans l'équation précédente Ψ par son premier terme (onde plane) de développement. On obtient :

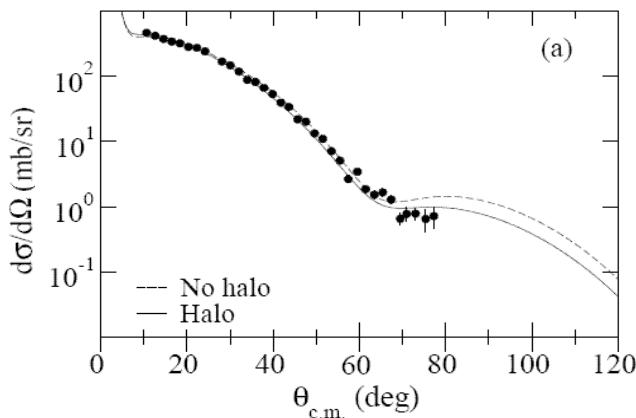
$$f_k(\theta, \phi) = -\frac{1}{4\pi} \int e^{-i\vec{K}\vec{r}'} V(\vec{r}') d\vec{r}'$$

où \mathbf{K} est le moment transféré.

Dans le cadre de l'approximation de Born, on voit que l'amplitude de diffusion est la transformée de Fourier du potentiel d'interaction. On reconnaît ici une analogie optique avec la diffraction de Fraunhofer où l'intensité mesurée sur un écran est la transformée de Fourier de la structure de l'objet diffractant. Ce résultat important permet de comprendre la structure

générale des distributions angulaires en physique nucléaire (i.e. sections efficaces différentielles).

Ainsi, le principe de Huygens en optique stipule que chaque point de l'objet diffractant se comporte comme une source d'onde secondaire. Ce sont les interférences entre ces ondes qui génèrent la figure de diffraction. Dans le cas de la réaction nucléaire, les sources secondaires d'ondes planes sont induites par le potentiel $V(r')$. Ce potentiel d'interaction entre la particule diffusée (typiquement un nucléon) et le noyau diffuseur s'écrit logiquement comme la somme des interactions nucléon-nucléon entre chaque nucléon du noyau et la particule diffusée : $V(r')$ se calcule à partir de la densité du noyau, et de l'interaction nucléon-nucléon. On a ainsi relié la section efficace différentielle à la densité du noyau.



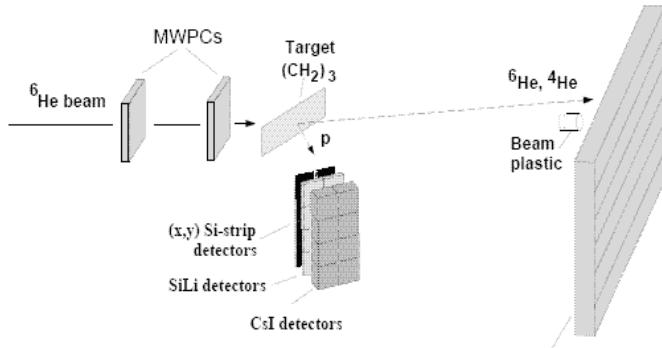
Distribution angulaire élastique des la diffusion de protons sur ${}^6\text{He}$ (d'après Phys. Lett B518 (2001) 27)

La figure ci-dessus montre la distribution angulaire élastique de diffusion de protons sur le noyau ${}^6\text{He}$, à une énergie de 40 MeV. On reconnaît un premier minimum de diffraction. La forme de la distribution est caractéristique du potentiel généré par le noyau. Ce potentiel étant lui-même relié à la densité des nucléons au sein du noyau, il est possible d'étudier la structure nucléaire à l'aide de telle distribution angulaire. Ainsi la figure montre 2 courbes. L'une correspond à un arrangement « standard » des protons et neutrons au sein du noyau de ${}^6\text{He}$, alors que l'autre correspond à une structure où 2 neutrons sont fortement délocalisés. Ce phénomène est appelé halo. L'encadré donne plus de détail sur la méthode expérimentale employée.

Exercice : Le premier minimum dans la diffraction de Fraunhofer se situe à un angle qui vérifie $\sin\theta=1.22 \lambda/D$ où λ est la longueur d'onde incidente, et D est la taille de l'objet diffractant. Pouvez-vous déduire de la figure 3 le rayon R du ${}^6\text{He}$? Est-il en accord avec la loi $R=1.2 A^{1/3} \text{ fm}$?

En pratique il est souhaitable d'aller plus loin que l'approximation de Born pour améliorer la description de la réaction : calcul du terme du 2^{ème} ordre du développement de Born, approximation de Born des ondes distordues (DWBA) ... Les modèles de réaction les plus récents prennent en compte le couplage des états de diffusion avec les états non-liés (dit du continuum). Ces états jouent un rôle important dans les réactions qui impliquent les noyaux proches des drip-line, où les nucléons de valence sont proches du continuum des états non-liés.

La distribution angulaire est sensible la structure en halo, mais les mesures de diffusion de protons sur le ${}^6\text{He}$ n'ont pas été faites à des angles assez grands dans le référentiel du centre de masse pour discriminer entre les 2 hypothèses (présence ou absence de halo). Ceci est du à la méthode de mesure, dite en cinématique inverse : le noyau de ${}^6\text{He}$ étant instable par désintégration β^- , il ne peut servir de cible. On utilise donc une cible de protons sur laquelle sont envoyés les noyaux instables de ${}^6\text{He}$ juste après leur production. Le dispositif expérimental est montré sur la figure :



Dispositif expérimental pour la mesure de la distribution angulaire élastique $p+{}^6\text{He}$

La cinématique de la réaction est déterminée par la mesure de l'énergie et de l'angle du proton de recul. Pour mesurer la réaction sur toute la plage en angle centre de masse, le détecteur correspondant devrait couvrir toute la plage angulaire entre 0 et 90° dans le laboratoire. Il n'existe pas encore de tels détecteurs, mais des modèles de plus en plus grands sont produits. L'état de l'art en la matière est le détecteur MUST2 : la surface active d'un télescope est de $10 \times 10 \text{ cm}^2$ et il est composé de 10 télescopes.

Exercice : Quelle est l'énergie incidente du ${}^6\text{He}$ pour obtenir la réaction équivalente à celle en cinématique directe (proton incident d'énergie 40 MeV) ? Peut-on utiliser l'approximation non-relativiste ?

Exercice : Quelle est la gamme en énergie que doit couvrir le détecteur, pour mesurer des protons entre 50° et 90° dans le laboratoire ? Utiliser la cinématique non-relativiste et l'approximation que la masse du ${}^6\text{He}$ est très grande devant celle du proton. L'énergie cinétique du ${}^6\text{He}$ incident est typiquement de 40 MeV/nucléon.

b. La méthode des déphasages

La méthode des déphasages s'applique dans le cas particulier où le potentiel V est central. Dans ce cas le moment cinétique orbital L est conservé car H , L^2 , et L_z commutent entre eux. Il existe donc une base de fonctions propres stationnaires $\phi_{k,l,m}$ appelées *ondes partielles* où k, l, m sont les nombres quantiques associés respectivement aux valeurs propres de H , L^2 , et L_z . On peut ainsi développer la fonction d'onde diffusée sur cette base ($m=0$ car le problème est à symétrie cylindrique autour de l'axe Oz du faisceau incident) :

$$\Psi_k(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l(k) \phi_{k,l,0}(\vec{r})$$

Pour $r \rightarrow \infty$ les $\phi_{k,l,m}$ s'écrivent comme une superposition de deux ondes planes (qui se propagent en sens opposés) car on est éloigné de tout potentiel. Les $\phi_{k,l,m}$ s'écrivent de manière équivalente :

$$\phi_{k,l,m}(\vec{r}) = C \frac{\sin(kr - l\frac{\pi}{2} + \delta_l)}{r} Y_l^m(\theta, \phi)$$

où C et δ_l sont les deux constantes à déterminer par les conditions de continuité. δ_l est appelé *déphasage* (ou phase shift) de l'onde partielle $\phi_{k,l,m}$. On peut montrer que le terme arbitraire $-l\pi/2$ permet de rendre δ_l nul lorsque $V=0$: la fonction de Bessel, qui est la solution radiale pour la particule libre, tend vers $\sin(kr-l\pi/2)/r$ quand $r \rightarrow \infty$. Le déphasage δ_l est ainsi mesuré par rapport à une particule libre. En remplaçant les deux équations ci-dessus dans l'expression de Ψ_k donnée au début de ce chapitre, on obtient (après des calculs que l'on peut faire en **exercice**) :

$$f_k(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{4\pi(2l+1)} e^{i\delta_l} \sin(\delta_l) Y_l^0(\theta)$$

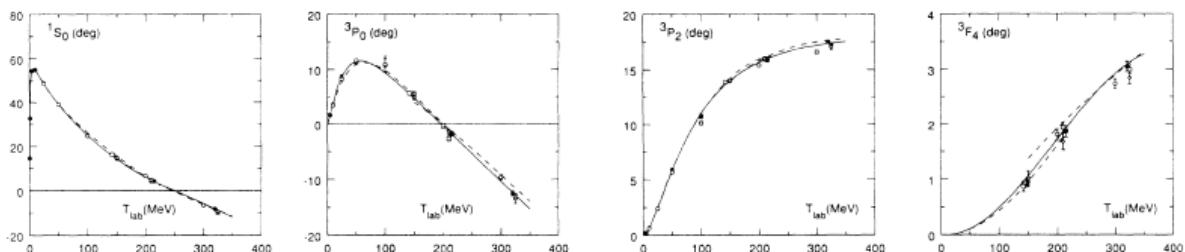
et on en déduit la section efficace totale de diffusion (après des calculs que l'on peut faire en **exercice**) :

$$\sigma = \int \sigma(\theta) d\Omega = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2(\delta_l)$$

La méthode des déphasages est donc très pratique car elle relie simplement le potentiel $V(r)$ à la section efficace : d'une part, δ_l se détermine théoriquement à partir de $V(r)$ en appliquant les conditions de continuité de l'équation de Schrödinger. D'autre part δ_l se détermine expérimentalement à partir de la mesure de section efficace intégrée grâce à l'équation ci-dessus. Le potentiel d'interaction $V(r)$ (nucléon-nucléon, nucléon-noyau, ...) est ainsi directement confronté aux données. Les déphasages permettent donc de contraindre un potentiel sur sa capacité à décrire les fonctions d'ondes du système.

Notons que les déphasages δ_l sont définis pour une valeur propre du moment cinétique orbital l fixée. On peut montrer que seuls les l les plus bas contribuent significativement. Ceci est du à la probabilité de présence qui s'éloigne de l'origine quand l augmente. La convention des notations des déphasages, dans le cas d'une particule avec un spin S est $^{2S+1}\mathbf{L}_J$ où le moment angulaire total est $\mathbf{J}=\mathbf{L}+\mathbf{S}$. Ainsi on note les déphasages $^1S_0, ^3P_1, \dots$

En 1990, le groupe de Nijmegen (Pays-Bas) a analysé l'ensemble de 1626 sections efficaces disponibles sur la diffusion p+p à des énergies allant jusqu'à 300 MeV. Ils en ont déduit les déphasages pour les différentes valeurs de l . La figure ci-dessous montre les résultats (traits pleins). Noter la diminution de la valeur des déphasages (phases shifts) avec l croissant. Cette analyse de phase shift du groupe de Nijmegen constitue une référence incontournable à reproduire pour toute nouvelle interaction nucléon-nucléon.



Déphasages (en degrés) de Nijmegen (ligne continue) pour la diffusion p+p en fonction de l'énergie de la réaction (en MeV). L'axe des abscisses représente l'énergie de la diffusion en MeV en voie d'entrée.

Généralisation : Matrices S et T

La théorie de la diffusion esquissée ci-dessus appartient en fait à un cadre plus général : la diffusion en théorie quantique des champs. Nous allons relier ces deux aspects. Pour une démonstration détaillée on se reportera son cours préféré de TQC.

En représentation d'interaction, l'opérateur évolution dans le temps U est défini par :

$$|\Psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle$$

L'opérateur matrice S est défini comme :

$$S = U(\infty, -\infty)$$

Au temps t, un élément de matrice S entre deux états de nombres quantiques α et β s'écrit donc :

$$S_{\beta\alpha} = \langle \Psi_\beta | S | \Psi_\alpha \rangle = \langle \Psi_\beta^{out} | \Psi_\alpha^{in} \rangle$$

La matrice S représente ainsi l'amplitude de probabilité de passer d'un état initial α ($t=-\infty$) à un état final β ($t=\infty$). La section efficace de diffusion va donc naturellement s'exprimer en fonction de cette matrice. Noter que la matrice S est **unitaire** ($S^\dagger = S^{-1}$) pour conserver la norme (probabilité totale).

On montre que la section efficace de diffusion de l'état α vers l'état β s'écrit :

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{\pi}{k_\alpha^2} \sum_{l_\alpha l_\beta} (2l_\alpha + 1) |\delta_{\alpha\beta} - S_{\alpha\beta}|^2$$

Le terme $\delta_{\alpha\beta}$ permet de supprimer la contribution de l'état initial à l'état final dans le cas où il n'y a pas eu d'interaction. Par commodité on définit la matrice T comme :

$$T_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - S_{\alpha\beta}$$

Et σ s'exprime donc simplement en fonction de $|T|^2$. On voit que l'amplitude de diffusion f_k définie précédemment n'est qu'un cas particulier de matrice T.

Exercice : Montrer que dans le cas particulier de la méthode des déphasages où l'état quantique de la particule est le même avant et après la diffusion (cas élastique : $\alpha=\beta$), on retrouve l'expression de la section efficace totale en fonction de δ_l si :

$$T_{ll} = e^{i\delta_l} S \sin(\delta_l) \text{ et } S_{ll} = e^{2i\delta_l}$$

La matrice T obéit à l'équation de **Lippmann-Schwinger** (LS) qui permet de reformuler l'équation de Schrödinger sous forme d'une série (commode à tronquer) :

$$T = V + VG^\dagger T$$

où V est le potentiel d'interaction, et G est la fonction de Green solution de l'équation de Schrödinger libre. Cette équation permet donc de relier la section efficace de diffusion au potentiel d'interaction V.

L'équation de LS peut aussi s'exprimer à partir des fonctions d'ondes. Si Ψ_k est la solution de l'équation de Schrödinger, et Φ_k la solution libre ($V=0$), alors on peut écrire :

$$\Psi_k^\dagger = \Phi_k + G^\dagger V \Psi_k^\dagger = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (G^\dagger V)^n \right) \Phi_k$$

Pour $r \rightarrow \infty$ l'expression ci-dessus est analogue à un développement en série de Born.

Les réactions étudiées ci-dessus concernent la diffusion élastique, où les protagonistes de la réaction ne subissent pas de modification interne entre l'état initial et l'état final. Toute autre type de réaction (diffusion inélastique, transfert de nucléons, fusion, ...) est donc considéré comme une absorption par rapport à la diffusion élastique : l'amplitude des ondes sortantes s'en trouvera diminuée.

On peut montrer que le rapport de l'amplitude des ondes sortantes sur celle des ondes entrantes s'écrit, pour l'onde partielle l :

$$R_l = (-1)^l e^{2i\delta_l}$$

Si $|R_l|=1$, il n'y a pas d'autre réaction que la diffusion élastique. Pour tenir compte des absorptions, on rend le déphasage δ_l complexe. La section efficace d'absorption due aux réactions s'écrit alors :

$$\sigma_{abs} = \frac{\pi}{k_\alpha^2} \sum_l (2l + 1)(1 - |R_l|^2)$$

La section efficace totale est définie comme la somme de la section efficace de diffusion élastique, et de celle d'absorption (due aux réactions).

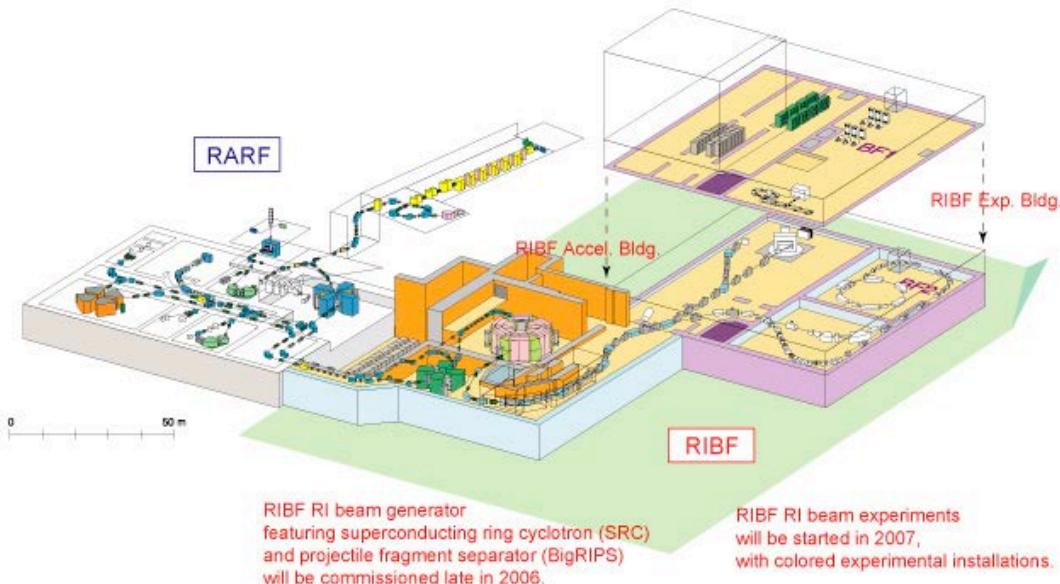
Chapitre 4 : Les frontières de la matière

L'axe de recherche en physique subatomique n'est pas seulement de remonter le temps pour comprendre comment la nature a formé la matière à hautes énergies. C'est aussi d'explorer des états de la matière que la nature n'a pas forcément produites, pour explorer ses frontières et étudier de nouvelles structures.

Ce chapitre est volontairement succinct car le nombre de sujets à évoquer est trop important : il s'agit juste de donner quelques exemples d'aperçu de recherche contemporaine en physique nucléaire.

1. Les noyaux exotiques

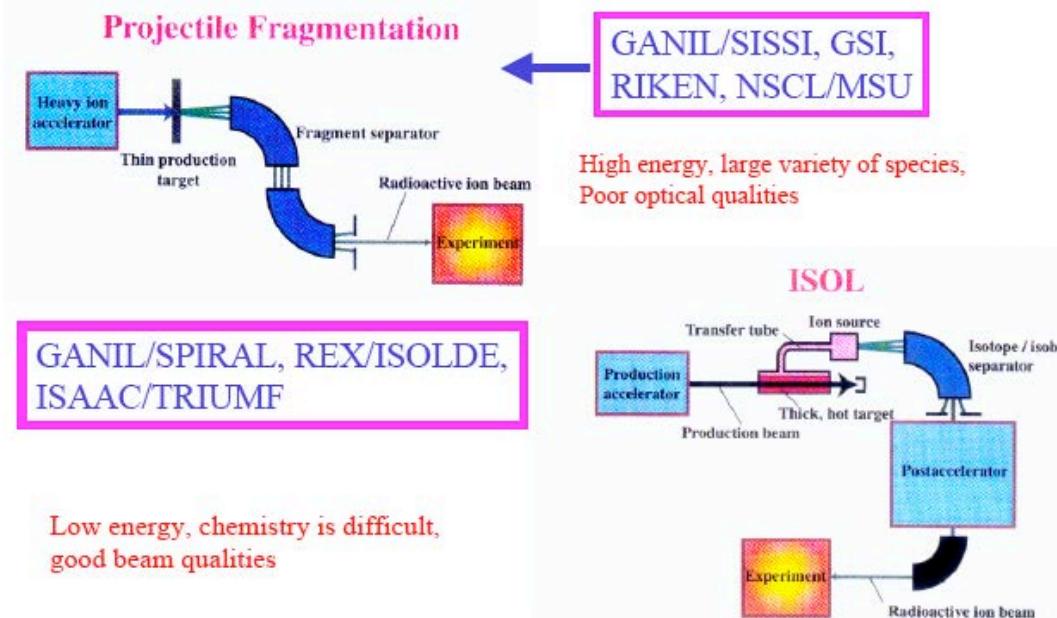
Des progrès significatifs ont été réalisés dans la production de noyaux dits exotiques, principalement depuis les années 90. On pense que l'interaction nucléon-nucléon permet de lier plus de 6000 noyaux. Mais parmi eux, seuls 300 sont stables (soit 5 %). Les 95% restants se désintègrent principalement par émission β . Comment produire et étudier de tels noyaux instables ? Leur demi-vie typique est de quelques centaines de ms, à quelques secondes. Leur production se fait principalement auprès des accélérateurs GANIL (France), NSCL (USA), à Riken (Japon, figure ci-dessous), Dubna (Russie), GSI (Allemagne) et ISOLDE au CERN. Il existe deux méthodes pour les produire : par fragmentation et la méthode dite ISOL (Isotope Separation On Line). La fragmentation consiste à accélérer un faisceau stable à des énergies supérieures à 50 MeV/nucléon. Il bombarde ensuite une cible mince où de nombreux fragments sont produits. Ceux-ci possèdent une énergie assez similaire, et il convient de les filtrer pour ne retenir que le noyau d'intérêt. La qualité optique du faisceau (résolution en énergie et émittance) ne sont pas optimales.



Usine RIBF de noyaux exotiques à Tokyo, mise en service en 2007

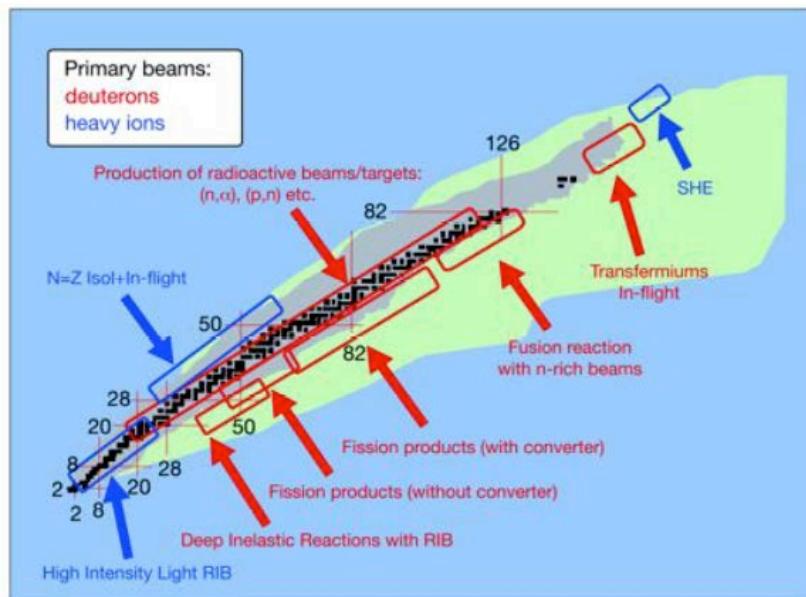
La méthode ISOL consiste à envoyer un faisceau primaire léger (p,d,n, ...) ou même lourd sur une cible épaisse. Le noyau secondaire produit doit ensuite diffuser vers la surface (propriétés chimiques) pour être extrait et accéléré. La qualité optique du faisceau secondaire est donc

très bonne, mais les noyaux de très courte durée de vie n'ont pas le temps de diffuser vers la surface. La figure ci-dessous résume les deux méthodes de production des noyaux instables.



Crédit : Y. Blumenfeld, Cours Joliot-Curie 2002

Le développement en cours de l'usine de noyaux exotiques SPIRAL2 (produits de fission de l'uranium obtenus par la méthode ISOL) permettra d'explorer des noyaux encore jamais produits à ce jour, afin de nous faire comprendre la structure nucléaire (et son lien avec l'interaction nucléon-nucléon) dans toute sa globalité. La figure ci-dessous montre les régions de la carte des noyaux (N en abscisse, Z en ordonnée) que SPIRAL 2 pourra atteindre.



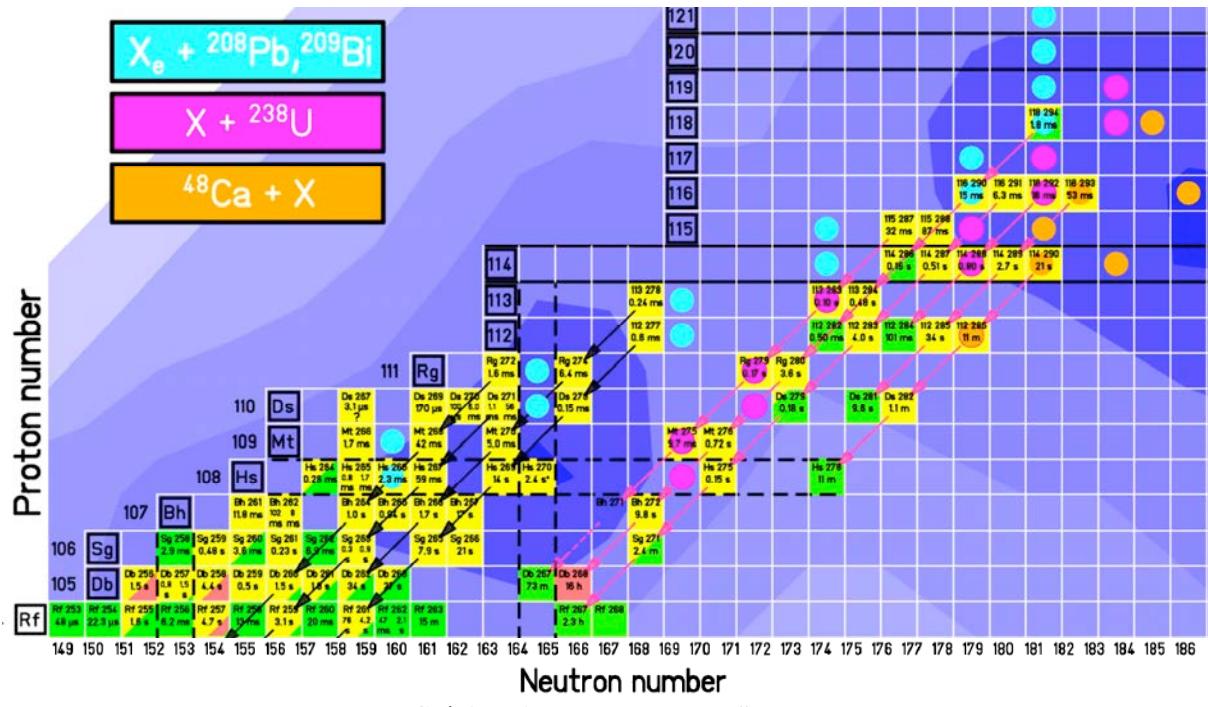
Parmi les nouveaux phénomènes et les questions actuelles étudiés avec noyaux exotiques, citons les noyaux à halos, les molécules nucléaires, le tétraneutron, l'étude du processus r de nucléosynthèse, l'évolution des nombres magiques, les noyaux bulles, la découverte de nouvelles radioactivités (2p), L'évolution des nombres magiques loin des noyaux stables

est particulièrement importante car elle provient de la modification de la structure en couches des états de nucléons dans les noyaux très riches en neutrons.

Certaines recherches sur noyaux stables continuent encore, pour étudier par exemple les condensats de Bose de α dans le ^{40}Ca ($Z=N=20$), des noyaux à symétrie tétraédriques (pyramidales).

2. Les noyaux superlourds

Quels sont les noyaux les plus lourds que l'interaction forte peut maintenir liés ? Quelles sont leurs propriétés chimiques ? La quête des noyaux superlourds, démarrée dans les années 50 connaît un essor important ces dernières années : plus d'une dizaine de nouveaux éléments ont été produits (avec $Z > 106$) par réactions de fusion (à GSI, Riken, Dubna, ...). La figure ci-dessous montre l'extrême supériorité de la carte des noyaux, avec les éléments superlourds produits. Ces noyaux sont stabilisés par les effets de couche, au point que des calculs de type champ moyen prédisent même un îlot de stabilité vers $Z \sim 120$, $N \sim 180$. La production de noyaux superlourds est signée grâce à l'émission α de ces noyaux (flèches sur la figure ci-dessous), en détectant les α d'une chaîne de décroissance vers un noyau connu. L'étude des noyaux superlourds permet donc d'étendre la table périodique des éléments.



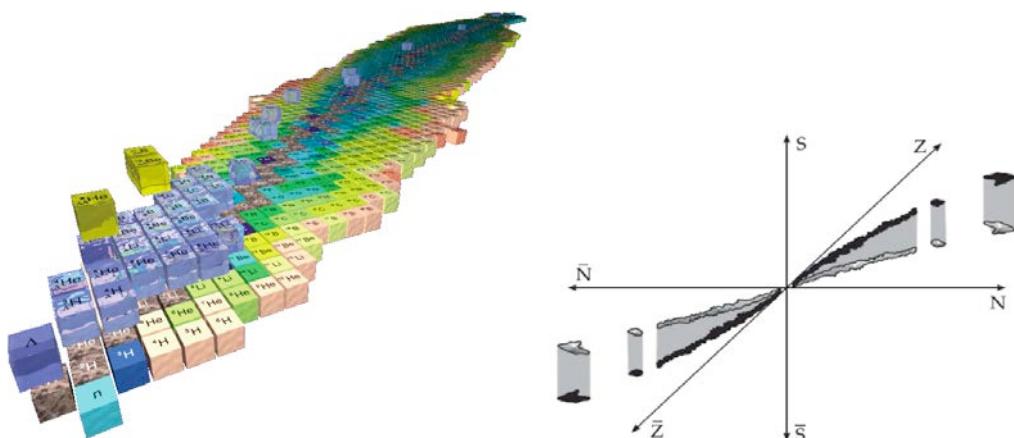
Crédits : A. Drouart, IRFU, SPhN

The periodic table is color-coded to highlight specific groups of elements:

- Green:** Elements 4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118.
- Pink:** Elements 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118.
- Blue:** Elements 1, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118.
- Orange:** Elements 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118.

3. L'antimatière et la matière étrange

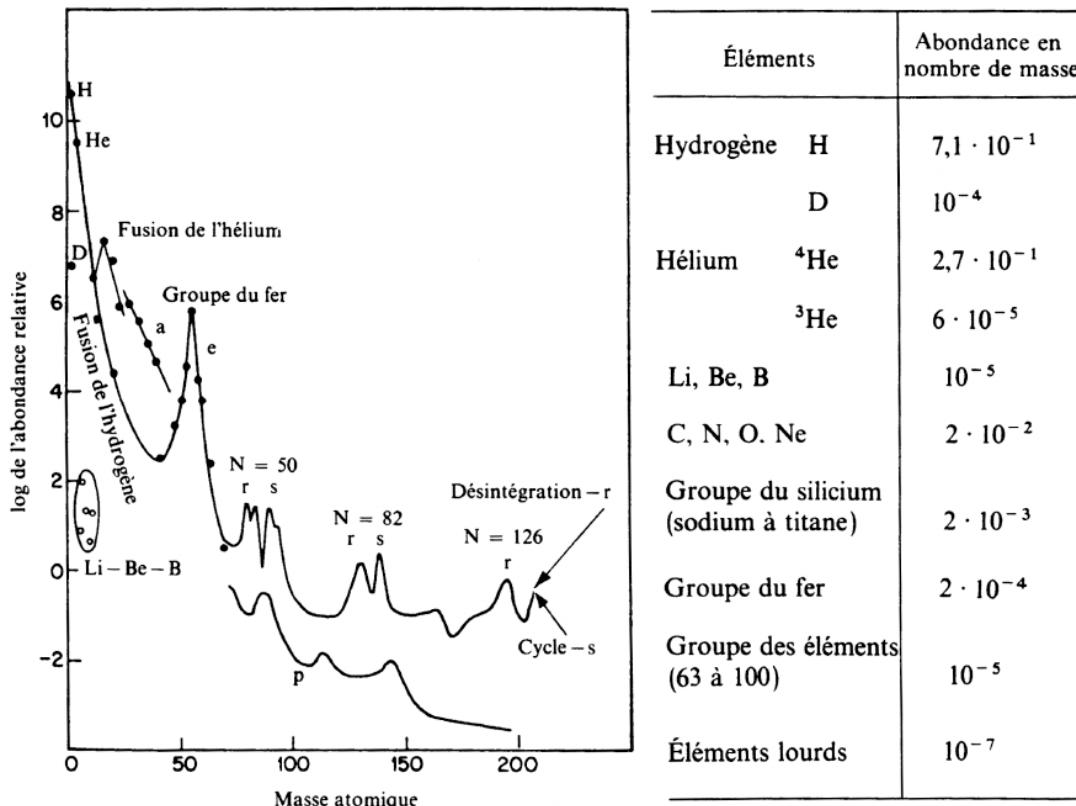
Une autre frontière est l'étude de l'antimatière et de la matière étrange : quelle est la carte des antinoyaux ? Quelle est la carte des hypernoyaux ? Quelle est la carte des antihypernoyaux ? Ces questions peuvent sembler spéculatives, mais laissent entrevoir ce que sera peut-être l'exploration des frontières de la matière au XXI^{eme} siècle. Cette exploration a de fait déjà commencé puisque le nouvel accélérateur J-Parc au Japon produit des hypernoyaux, alors que des antihélium 3 ont été produits il y a quelques années au CERN. La figure ci-dessous montre la carte actuelle des noyaux et des hypernoyaux (à gauche), et la généralisation à l'antimatière (à droite).



D'après W. Greiner, Advanced Course in Nuclear Physics, Sevilla 2000

4. La nucléosynthèse

La figure ci-dessous montre l'abondance des éléments observés. Si, comme nous l'avons vu, les grandes lignes des abondances sont comprises, de nombreuses questions ouvertes subsistent, dont une partie de la réponse se situe en physique nucléaire. Par exemple, quel est le site astrophysique du processus r ? L'explosion de supernovae n'est pas totalement satisfaisante et la fusion de deux étoiles à neutrons, ou les magnétars (pulsars de champ magnétique ultra intense) sont d'autres possibilités à l'étude. Il est nécessaire pour cela de modéliser les noyaux impliqués lors de ce processus de nucléosynthèse.



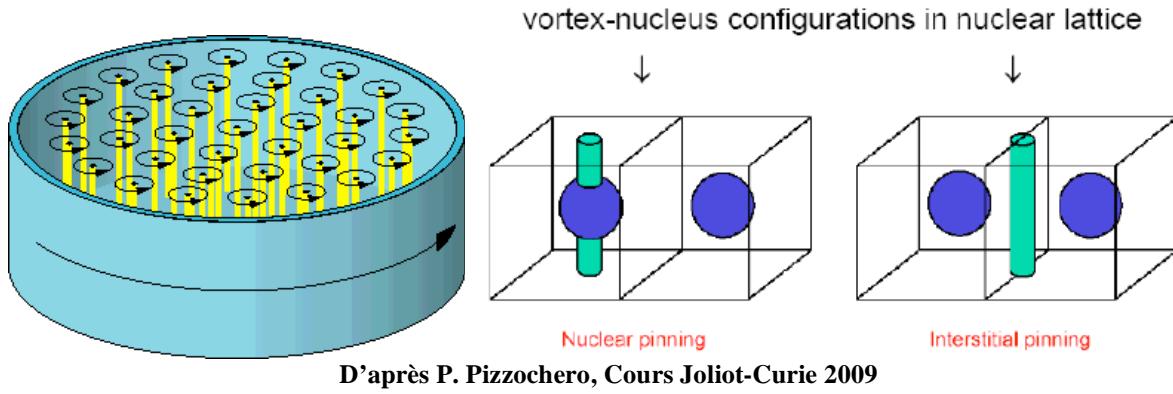
D'après L. Valentin, le monde subatomique

5. Les pulsars sont des noyaux géants en rotation

Les pulsars sont des étoiles à neutrons en rotation, émettant un signal périodique, comme un phare en bord de mer. Ce sont des résidus d'étoiles massives ayant explosé en supernovae, et ils sont composés de nucléons à des densités de l'ordre de la saturation nucléaire ($\sim 10^{14} \text{ g.cm}^{-3}$). Ces étoiles, d'environ 10 km de rayon sont donc une sorte de noyaux géants en rotation et leur modélisation passe par la compréhension des phénomènes nucléaires. Prenons l'exemple des « glitches » des pulsars - augmentation soudaine de la vitesse de rotation des étoiles à neutrons - qui intriguent tant les astronomes depuis de nombreuses années.

Lorsqu'un système superfluide est mis en rotation, on s'attend à l'apparition de vortex, si la vitesse de rotation est suffisante. Ces vortex sont des lignes autour desquelles des portions du système tournent avec une vitesse tangentielle en $1/r$, où r est la distance au centre du vortex.

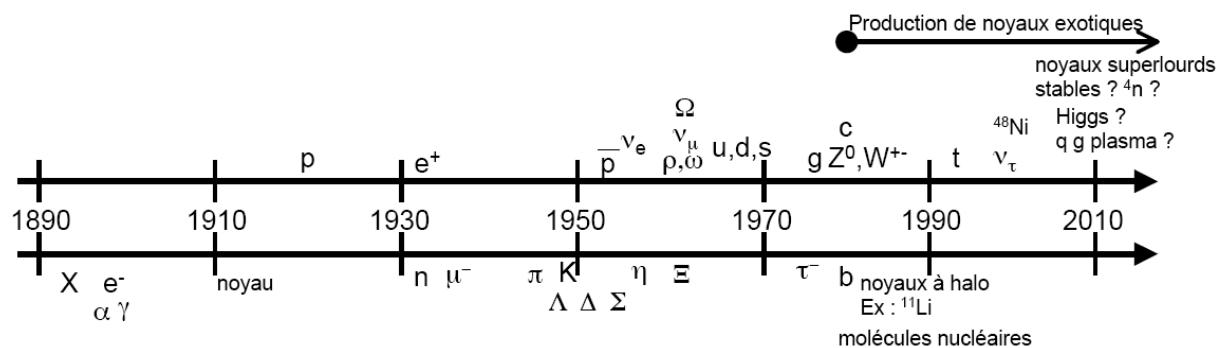
Les vortex quantiques se manifestent au-dessus d'une certaine vitesse critique du système. Leur genèse, leur interaction et leur effet sur la superfluidité restent encore des sujets ouverts de recherche. Dans le cas d'un noyau en rotation avec un haut moment angulaire orbital, on s'attend donc à l'apparition de vortex. Cependant, l'énergie de rotation nécessaire pour l'apparition de vortex est trop élevée : les nucléons s'évaporent du noyau bien avant. Les vortex sont-ils définitivement bannis de la matière nucléaire ?



Non : La matière nucléaire composée de noyaux baignant dans une mer de neutrons, au sein de l'écorce des étoiles à neutrons, renferme très probablement des vortex. Les « glitches » des pulsars en seraient une preuve. Au coeur de ces étoiles en rotation, les vortex sont créés, et migrent vers la surface de l'étoile. Ces vortex influencent la rotation du milieu, car à leur voisinage, les neutrons sont en rotation suffisamment rapide pour empêcher l'appariement. La matière est donc « visqueuse » à proximité des vortex. Arrivés dans la croûte de l'étoile à neutrons, ils sont piégés par les noyaux (cf la figure ci-dessus) : il est plus favorable énergétiquement de briser des paires dans le noyau que dans le milieu nucléaire. Ce piégeage entraîne une rotation différentielle de la croûte par rapport au cœur. Lorsque la vitesse de rotation différentielle est trop élevée, les noyaux libèrent les vortex, ce qui génère une augmentation soudaine de la vitesse de rotation de la croûte, ou glitch. Notons que les variations de périodes des pulsars servent également à détecter des exoplanètes qui orbitent autour du pulsar, perturbant ainsi leur période d'émission.

6. Annexe 1 : chronologie des découvertes en physique subatomique

De la découverte des photons à celle du quark top, il s'est écoulé environ un siècle. On a trop tendance à représenter ceci comme une course à l'élémentaire. La synthèse de la matière comporte en fait des questions ouvertes à toutes les échelles d'énergie : pendant que les physiciens des particules essaient de détecter le boson de Higgs, les physiciens nucléaires essaient de reproduire les conditions stellaires pour mieux comprendre la synthèse des noyaux lourds, ou bien de créer de nouveaux états de la matière, comme l'îlot de stabilité des noyaux superlourds. Tout cela avec des accélérateurs. Le graphe ci-dessous montre la chronologie des découvertes expérimentales des principales particules subatomiques.



Découvertes des particules subatomiques. Les particules découvertes suite à une prédition théorique sont en haut, et celles inattendues en bas.

APPENDICE : La synthèse des hadrons

1. Introduction

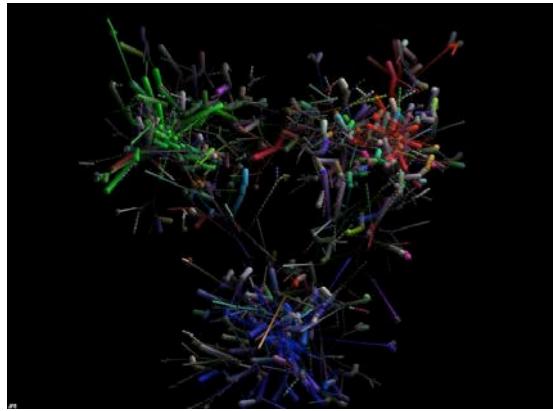
L'objectif de cet appendice est de présenter un modèle simple de description des hadrons (donc des nucléons) en termes de quarks.

Environ 10^{-12} s après le Big Bang ($kT \sim 1$ TeV), les quarks et les gluons sont dans un état où ils interagissent peu par interaction forte. Les quarks peuvent être déconfinés : c'est le plasma de quark et de gluons. Notons que cette température correspond par ailleurs au découplage des interactions électromagnétique et faible. Elle correspond de plus à l'ordre de grandeur de l'énergie maximum que peuvent atteindre les accélérateurs (LHC, ...). La matière est donc dans un état déconfiné : la constante de couplage α_s de l'interaction forte a une petite intensité, et les quarks interagissent si peu entre eux et avec les gluons qu'ils peuvent se présenter individuellement. On parle alors de plasma de quarks et de gluons ; son étude fait appel à la QCD et dépasse le cadre de ce cours. En dessous de cette température, la constante de couplage augmente à une valeur telle que ce plasma ne peut plus exister : la matière s'hadronise. Expérimentalement des collisions (à haute énergie et densité) avec des noyaux de Plomb sont réalisées dans les accélérateurs, afin d'atteindre le plasma de quark et de gluons. A partir de la détection de hadrons résultants de cette réaction, on essaye de savoir si le plasma s'est formé lors de la collision. Un signal du plasma serait la baisse de production des mésions : lors de la formation de ce plasma à haute densité où le déconfinement apparaît, les états liés quarks-antiquarks sont plus difficiles à obtenir.

Dans ce chapitre, nous allons étudier les divers états liés (confinés) de quarks et d'antiquarks que sont les hadrons (baryons et mésions). Rappelons qu'à l'issue de l'ère hadronique, il ne reste que des protons, neutrons, électrons et neutrinos car tous les autres hadrons se sont désintégrés (principalement par interaction faible) en particules plus stables comme le proton ou l'électron.

2. Le modèle des quarks

Nous avons vu que le fait que les gluons étaient chargés de couleur entraîne une augmentation de la constante de couplage de l'interaction forte vers les basses énergies (App A et chapitre 1). On peut intuitivement se représenter les quarks comme interagissant via des élastiques : la tension augmente avec la distance, et les quarks préfèrent rester confinés entre eux. Le vide est polarisé en ChromoDynamiqueQuantique (QCD), et un système de 3 quarks interagissant va l'être à fortiori. Chaque quark est habillé par un nuage de quark et de gluons. Il est donc extrêmement difficile de le décrire à partir de la QCD, car elle est non-perturbative : on ne peut se contenter des premiers termes d'un développement en α_s puisque cette constante de couplage est grande.



Dessine- moi un proton (www.lactamme.polytechnique.fr)

La méthode principale jusqu’alors pour décrire de tels états était une solution numérique du système, en discrétilisant les quarks et les gluons sur un réseau spatio-temporel (QCD sur réseau), et en utilisant la puissance informatique. Aujourd’hui, QCD sur réseau ne peut encore modéliser un nucléon, en raison de la complexité du système. Il est donc à priori difficile de prédire le comportement des systèmes composés de quarks (les hadrons) pour ces raisons. Décrire complètement le comportement des hadrons à partir des interactions fondamentales (QCD) semble pour l’instant hors de notre portée.

Néanmoins ce sont les quarks de valence qui définissent les hadrons. Il est donc possible du moins de répertorier leur existence et certaines (pas toutes) de leurs propriétés en considérant uniquement ces quarks (ce que nous ferons dans la suite de ce chapitre). L’interaction forte (qui lie les hadrons) est invariante sous $SU(2)$ d’isospin, ce qui ne concerne que les quarks u et d. Les hadrons composés uniquement de ces quarks, comme le neutron et le proton, vont donc également posséder cette symétrie à leur échelle. On comprend qu’historiquement ce soit par les nucléons que la symétrie d’isospin apparut d’abord aux physiciens.

Cette difficulté de modéliser les hadrons à partir des quarks conduira à supposer des symétries supplémentaires pour les hadrons. Ces symétries de saveur sont donc une approximation, comme nous le verrons. Il s’agit d’un moyen commode pour prédire le comportement des hadrons faute de mieux pour l’instant.

Les hadrons devant être de couleur blanche, les seules combinaisons possibles à priori sont une paire quark-antiquark (méson, $q_1\bar{q}_2$) et 3 quarks (baryon, $q_1q_2q_3$). Y a-t-il d’autres possibilités ? Il existe des prédictions de tétraquarks (composés de 2 quarks et 2 antiquarks) et même de mésons sans quarks, ne contenant que des gluons : les glueball. Tout ce ceci n’a pas été confirmé par l’expérience, et il convient d’être prudent comme le montre la récente déconvenue des pentaquarks (par exemple $uudd\bar{s}$, où $d\bar{s}$ est une sorte d’excitation particule-trou de la mer de quarks). Des signaux expérimentaux de leur existence dans les années 2000 n’ont finalement pas été confirmés, mais de nouvelles données sur des systèmes à 4 quarks sont en discussion.

Pour connaître les nombres quantiques des hadrons, nous utiliserons les lois de conservation et de composition des nombres quantiques vues au chapitre précédent, sur un système quark-antiquark (mésons) ou 3 quarks (baryons). Gardons cependant en mémoire qu’il n’y a pas d’approche exacte apte décrire les hadrons.

a. Les mésons

Commençons par considérer tous les mésons composés des quarks u et d et de leurs antiparticules (leur nombre baryonique est donc B=0). Cela fait 4 possibilités. Nous devons donc coupler deux doublets d'isospin de SU(2). Or nous savons par l'algèbre de moment cinétique (ou la théorie des groupes) que les valeurs d'isospin total \vec{T} du système $q\bar{q}$ sera :

$$\frac{\vec{1}}{2} + \frac{\vec{1}}{2} = \vec{0} \text{ ou } \vec{1}$$

Nous avons ainsi un singlet et un triplet. A l'intérieur de chacun de ces multiplets, l'interaction forte agira de la même manière (invariance par rotation dans l'isoespace) : pour une valeur de T fixé, le système ne dépend pas de T_3 (i.e. l'hamiltonien d'interaction forte ne dépend pas de T_3). Mais entre le singlet et le triplet, les systèmes ne sont pas équivalents en termes d'isospin T, ils pourront donc avoir des propriétés différentes par rapport à l'interaction forte.

Le triplet T=1 constitue les pions (π^-, π^0, π^+) qui correspondent aux valeurs de $T_3=-1, 0, 1$, respectivement. Du point de vue de l'interaction forte, ces 3 particules ont donc les mêmes propriétés. Seule les interactions électromagnétique et faible feront la différence. Mais comme l'interaction faible est négligeable pour décrire la structure des hadrons (seuls les canaux de désintégration se manifestent par interaction faible en général), il reste l'effet de l'interaction électromagnétique, que l'on peut presque traiter comme une perturbation, d'après les magnitudes des interactions (Chapitre 1). Ainsi les 3 pions ont une masse proche de 140 MeV, mais légèrement différente (de quelques MeV) en raison de l'interaction électromagnétique, et des effets de polarisation. Quant au singlet T=0, il s'agit du méson η . Il n'a pas les mêmes propriétés que les pions. Par exemple sa masse est de 550 MeV.

Le couplage de moment cinétique (ici d'isospin) détermine complètement les fonctions d'ondes des mésons en fonction de celles des quarks de valence, en utilisant les règles d'addition (coefficients de Clebsch-Gordan). Ainsi nous savons que le couplage de deux systèmes 1 et 2, de moments angulaires respectifs $|t_1 t_{31}\rangle$ et $|t_2 t_{32}\rangle$ (où t est le moment angulaire (1/2 ici) et t_3 sa projection sur l'axe N°3) donne, dans la base de moment cinétique total $|T T_3\rangle$, en fonction de la base $|t_1 t_2 t_{31} t_{32}\rangle$:

$$|11\rangle = |\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle \quad |10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle + |\frac{1}{2} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle \right) \quad |1-1\rangle = |\frac{1}{2} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle \\ |00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle - |\frac{1}{2} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle \right)$$

La première ligne correspond à l'état triplet T=1 et la seconde à l'état singulet T=0. En appliquant ces règles à l'isospin total calculé à partir de celui d'un quark et d'un antiquark (le doublet d'antiparticule qui se transforme comme (u d) est $(-\bar{d} \bar{u})$), on obtient :

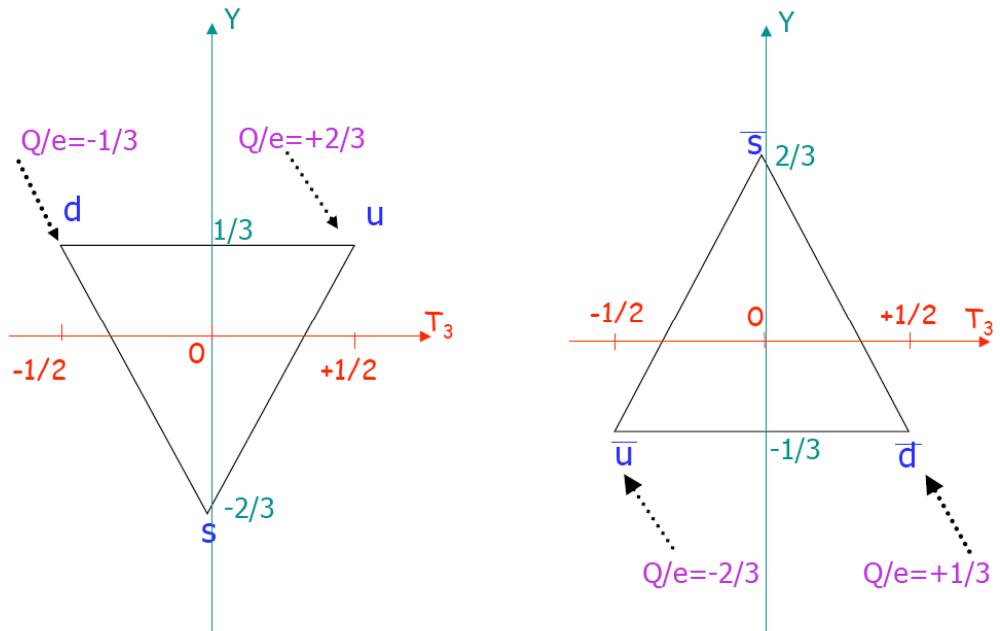
$$|\pi^+\rangle = -u\bar{d} \quad |\pi^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (u\bar{u} - d\bar{d}) \quad |\pi^-\rangle = d\bar{u} \\ |\eta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (u\bar{u} + d\bar{d})$$

Nous verrons par la suite que la fonction d'onde du méson η doit être complétée par une composante $s\bar{s}$.

Tout le modèle des quarks repose sur ce principe. Il est donc essentiel de l'avoir bien assimilé. La question suivante est : quels sont les mésons qui peuvent être générés à partir des 3 quarks u,d,s et de leur antiquarks ? Il y a 9 combinaisons. On généralise ainsi la démarche précédente en passant de la composition des 2 doublets de SU(2) à celle des deux triplets de SU(3) (ces sont les vecteurs de base des groupes SU(n) c'est-à-dire la représentation fondamentale à partir de laquelle tous les autres multiplets peuvent être construits, ou encore vecteurs propres des générateurs diagonaux). On passe donc de 4 à 9 mésons, et le groupe considéré ici est SU(3) de saveur (comprenant l'isospin T et l'étrangeté S). Rappelons que SU(2) d'isospin est la seule symétrie exacte par interaction forte. Il y a donc une approximation ici, qui consiste à passer de $SU(2)_T \times U(1)_S$ (exactement vérifiée par l'interaction forte) à $SU(3)_{T,S}$ (dite SU(3) de saveur) qui n'est pas une symétrie fondamentale de QCD, notamment en raison des différences de masses entre le quark s et les quarks u et d.

Nous nous plaçons donc dans un espace abstrait, où l'on considère la dimension d'étrangeté en plus de l'isoespace : c'est l'hyperisoëspace. Les systèmes invariants par les transformations de SU(3) dans cet hyperisoëspace, nous permettront de considérer des supermultiplets. Mais comme seul l'isospin est une symétrie exacte, seuls les mésons appartenants à un même multiplet d'isospin d'un supermultiplet donné, auront les mêmes propriétés du point de vue de l'interaction forte. A contrario tous les membres d'un même supermultiplet n'ont pas tous les mêmes propriétés.

Considérons les triplets de base de SU(3) dans l'hyperisoëspace représenté ici par les deux axes T_3 et Y. En pratique on prend T_3 et Y avec $Y=B+S$ l'hypercharge où B est le nombre baryonique), ce qui revient au même physiquement (c'est juste pour centrer les multiplets sur l'origine de l'hyperisoëspace). Notons que les multiplets d'isospin (intéressants pour repérer l'invariance de l'interaction forte) sont parallèles à l'axe des abscisses.



Les règles de couplage de moment angulaire dans SU(3) suivent des règles analogues à SU(2) mais nécessitent une technique plus générale : il faut décomposer en représentations irréductibles la représentation de dimension 9 de SU(3), ce qui va au-delà de ce cours (technique des tableaux de Young).

Ainsi sous SU(2) les doublets se couplaien pour donner un singlet et un triplet :

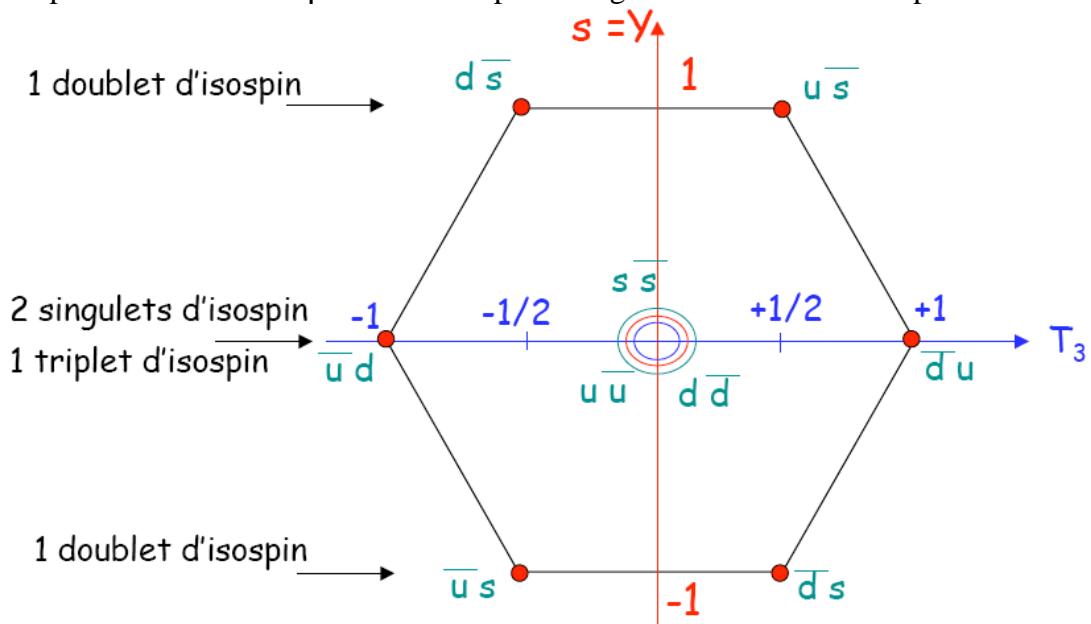
$$2 \otimes \bar{2} = 1 \oplus 3$$

Sous SU(3) le couplage devient :

$$3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8$$

On obtient ainsi deux supermultiplets : un singlet et un octet. En utilisant les règles de composition et de conservation de T , T_3 et Q/e , on trouve les mésons correspondants. Sur la figure ci-dessous on constate la symétrie de l'octet (rélié à l'invariance -approximée - par rotation dans l'hyperisoespace), et on identifie les multiplets d'isospins : deux doublets d'étrangeté respectives $S=1$ et -1 , en plus du triplet et du singulet précédemment discutés à $S=0$.

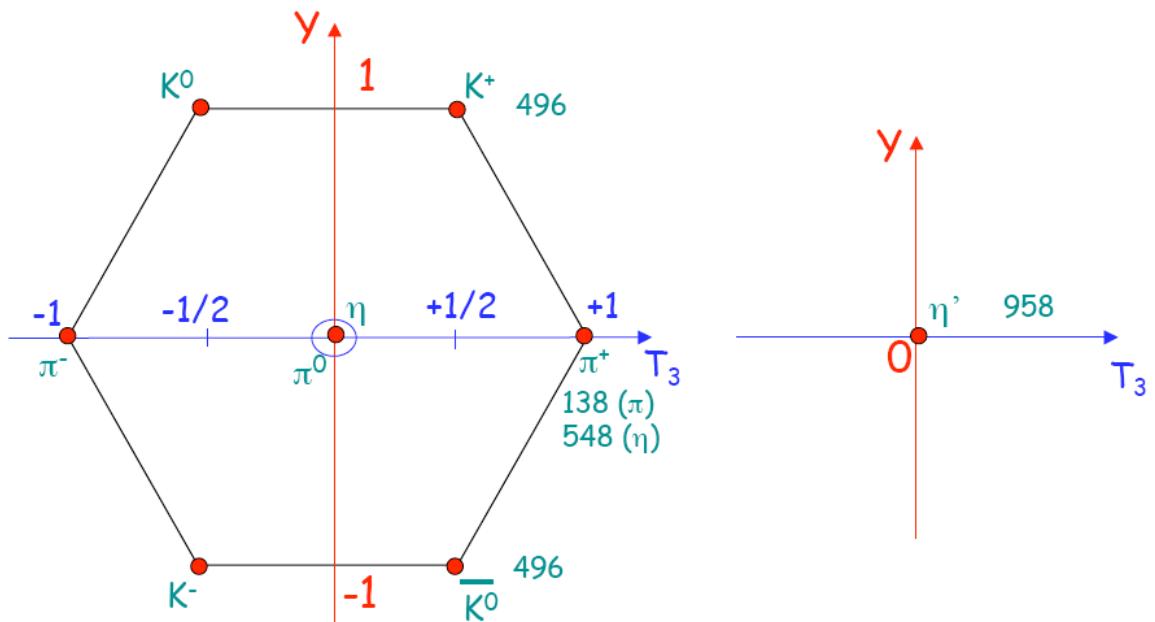
Notons (cf tableau ci-dessous) que les mésons $(T_3, Y) = (0, 0)$ sont des superpositions linéaires des états $u\bar{u}$, $d\bar{d}$ et $s\bar{s}$, qui peuvent comme précédemment se déterminer par les règles d'addition des moments angulaires. Intuitivement, le méson η' (singlet) doit contenir chaque saveur en même proportion. Le π^0 se détermine en tant que membre du triplet d'isospin comme précédemment. Le η se détermine par orthogonalité aux deux états précédents.



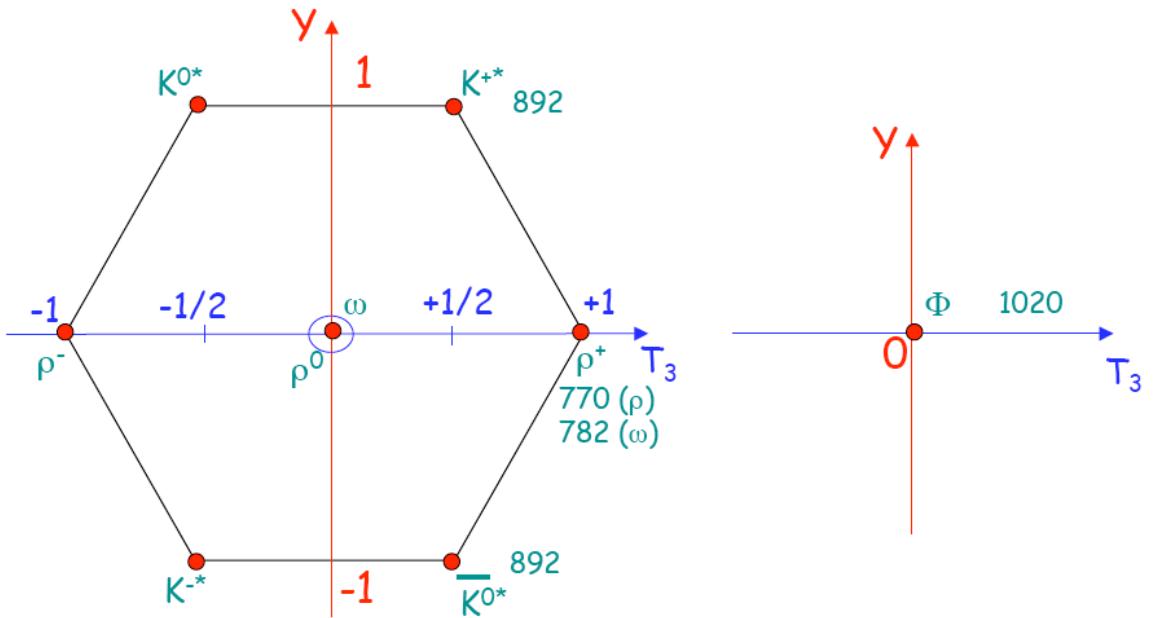
SU(3)	Y	SU(2)	T	T_3	méson	état du système	Q/e
octet	1	doublet	1/2	1/2	K^+	$u\bar{s}$	1
				-1/2	K^0	$d\bar{s}$	0
	0	triplet	1	1	π^+	$u\bar{d}$	1
				0	π^0	$\sqrt{1/2} (u\bar{u} - d\bar{d})$	0
				-1	π^-	$d\bar{u}$	-1
	-1	doublet	1/2	0	η	$\sqrt{1/6} (u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})$	0
				-1/2	K^-	$\bar{d}s$	0
singulet	0	singulet	0	0	η'	$\sqrt{1/3} (u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})$	0

Dans ce modèle des quarks, il reste à tenir compte des deux nombres quantiques restants : le spin I et la parité π . A chaque I^π correspond donc un octet et un singulet, sachant que pour les valeurs croissantes de I, cela correspond soit à des nouveaux mésons plus lourds, soit à des états excités de mésons de I plus faible. En effet, intuitivement, augmenter I revient à augmenter le moment orbital entre le quark et l'antiquark, donc à augmenter l'énergie de rotation. Au delà d'une certaine valeur de I, l'état excité n'est plus lié.

Dans le cas le plus simple, le moment orbital vaut $L=0$ entre le quark et l'antiquark. La parité est alors -1, car il s'agit d'un système fermion anti-fermion : le quark et l'antiquark ont une parité opposée, tous les quarks ayant la même parité. Il existe donc des mésons avec $I^\pi = 0^-$ (dits pseudo-scalaires) ou $I^\pi = 1^-$ (dits vectoriels). Les mésons présentés ci-dessous correspondent à $I^\pi = 0^-$ (les chiffres correspondent aux masses en MeV) :



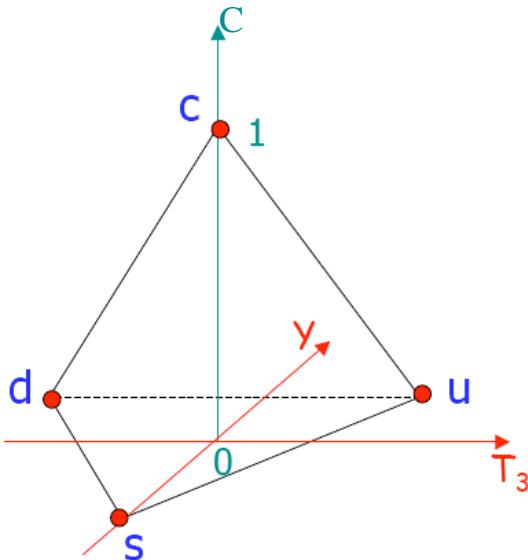
Dans le cas $I^\pi = 1^-$ on obtient :



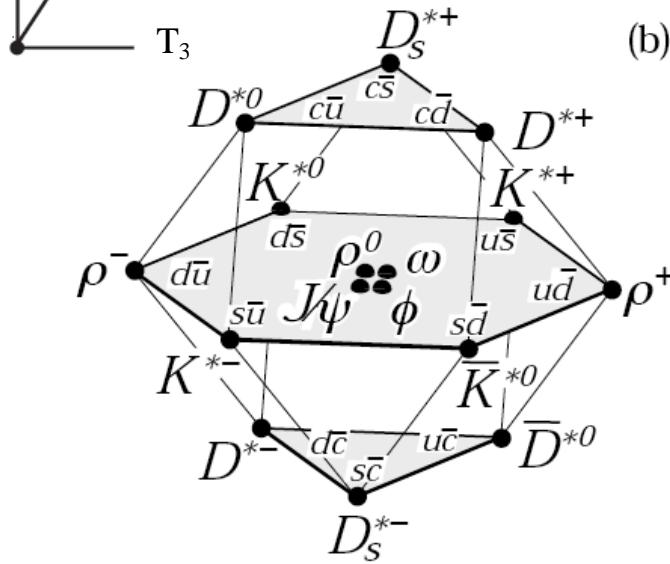
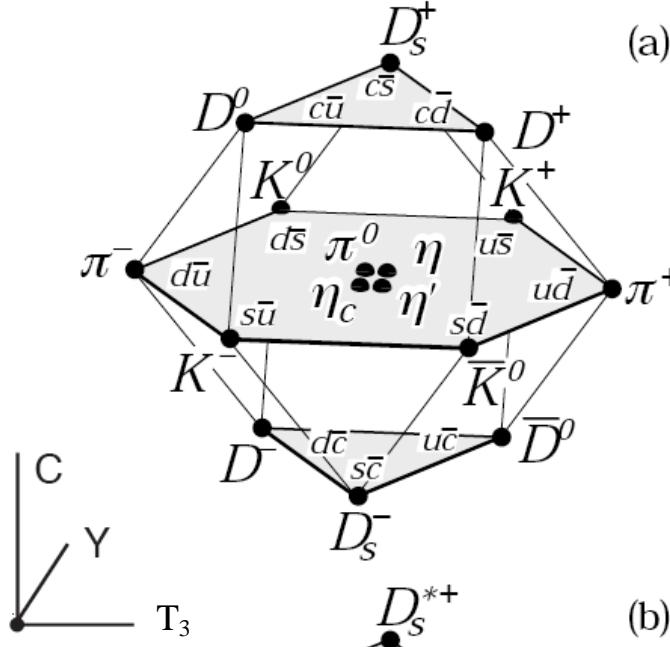
On constate sur cette dernière figure des états excités des K , ou des nouveaux mésons.

La démarche peut ainsi se poursuivre pour considérer tous les mésons construits à partir des quarks u,d,s,c et de leur antiquarks. Il s'agit alors du groupe SU(4) de saveur, où l'hyperisoepspace gagne une dimension supplémentaire, celle du charme. Rappelons que postuler l'invariance de l'interaction forte sous ce groupe est une approximation, d'autant plus que la masse du quark c est très différente des autres quarks (1000 fois celle du quark u ou d). La symétrie SU(4) est donc en fait fortement brisée.

La représentation du multiplet de base dans cet nouvel hyperisoepspace donne :



On en déduit ainsi les 16 mésons pseudo-scalaires et vecteurs, regroupés chacun dans un hexadecimet (ou 16-plet).



La masse élevée du quark c fait qu'il n'y a pas de mélange entre les états $c\bar{c}$ d'une part et les états $u\bar{u}$, $d\bar{d}$, $s\bar{s}$ d'autre part. Ainsi à l'origine de l'hyperiso-espace charmé, les mésons η_c et J/Ψ sont des états $c\bar{c}$ purs, et les autres (que nous avons déjà vu) ne contiennent pas de charme.

Les mésons se désintègrent souvent en pion car celui-ci est le méson de masse la plus faible : l'interaction faible qui ne respecte pas la conservation des saveurs permettent d'aboutir au pion, partant de mésons plus lourds. Les mésons peuvent aussi se désintégrer en leptons (principalement par interaction faible et parfois par interaction électromagnétique ou forte) car leur nombre baryonique $B=0$ permet de telles réactions. Par exemple le pion négatif se désintègre par

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$$

Cette réaction est favorisée par la proximité de la masse du muon avec celle du pion.

Lors de leur synthèse thermique dans l'Univers primordial, les mésons produits ne subsistent qu'environ une picoseconde : il n'en reste que des muons, qui eux-mêmes se désintègrent en électrons :

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$$

On voit ici le rôle crucial joué par l'interaction faible, qui ouvre les canaux de désintégration possible. Pas si faible que cela !

b. Les baryons

Les baryons sont composés de 3 quarks ($B=1$). Considérons d'abord tous les baryons pouvant être formés par les quarks u et d, c'est-à-dire en ne considérant que l'isospin (symétrie exacte de l'interaction forte). Il y a 8 possibilités. Nous devons donc coupler trois doublets de $SU(2)$, dont nous connaissons les règles de composition (analogue au couplage de 3 spins $\frac{1}{2}$) :

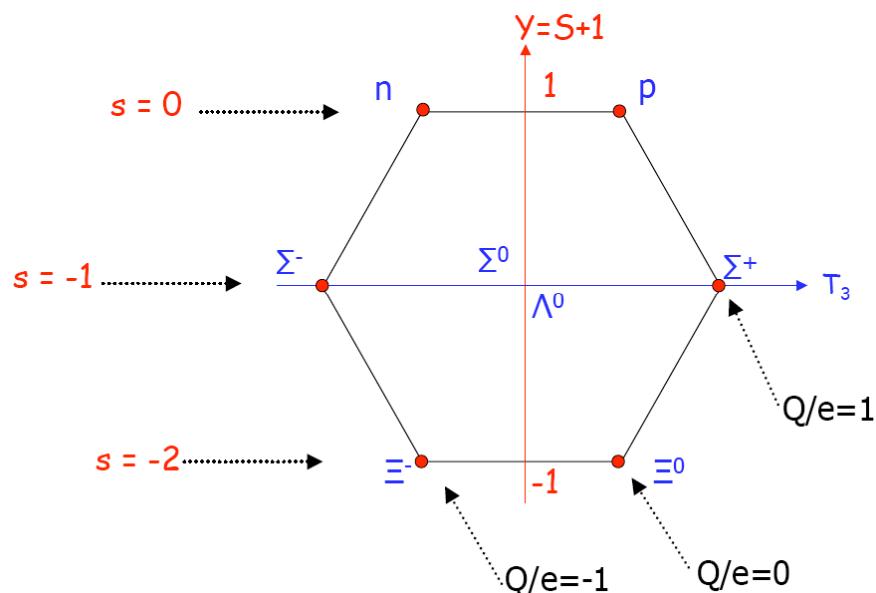
$$2 \otimes (2 \otimes 2) = 2 \otimes (1 \oplus 3) = 2 \oplus 2 \oplus 4$$

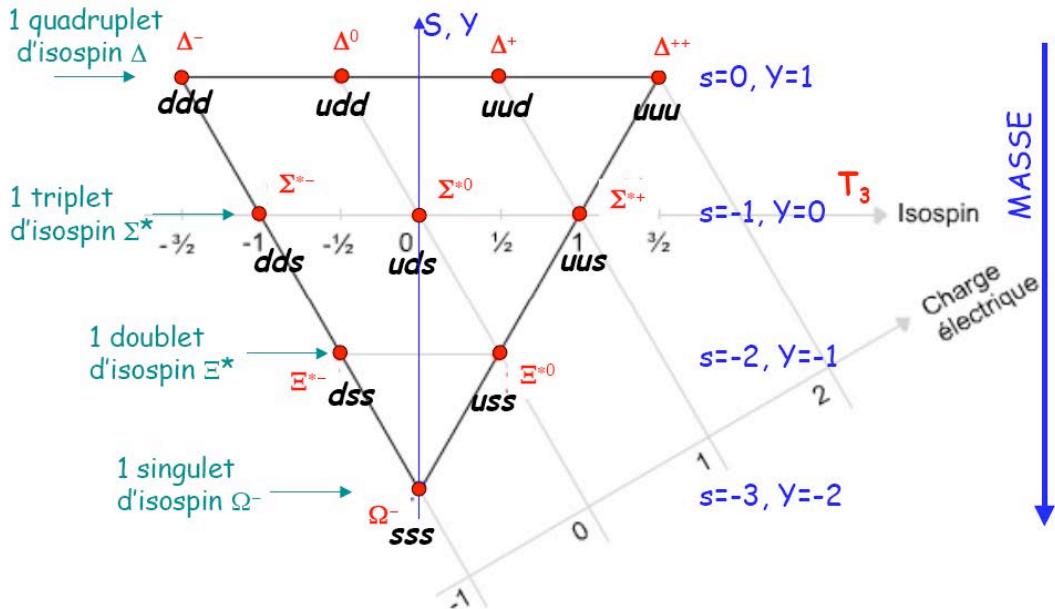
On obtient ainsi deux doublets et un quadruplet. Le premier doublet est (n p). A l'interaction électromagnétique près, le neutron et le proton sont donc identiques. On entrevoit les conséquences pour les noyaux, composés de neutrons et de protons. Le deuxième doublet $T=1/2$ est composé des baryons N^+ et N^0 . Enfin le quadruplet $T=3/2$ est formé par les baryons (Δ^- , Δ^0 , Δ^+ , Δ^{++}). Les différences entre membres d'un même multiplet d'isospin proviennent des différentes valeurs que T_3 peut prendre. Cela correspond à une différence de charge électrique Q/e , en vertu de la formule de Gell-Mann et Nishijima, puisque l'hypercharge est fixée.

En pratique il n'est pas possible de trouver une valeur de spin parité I^π où tous les baryons existent à la fois. Certains sont des résonances comme les Δ . Passons donc aux 27 baryons pouvant être formés à partir des quarks u,d,s, c'est à dire en supposant la symétrie approximée $SU(3)$ de saveur. Les règles de couplages dans $SU(3)$ (et pas $SU(2)$) – qui vont au-delà de ce cours - donnent :

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10$$

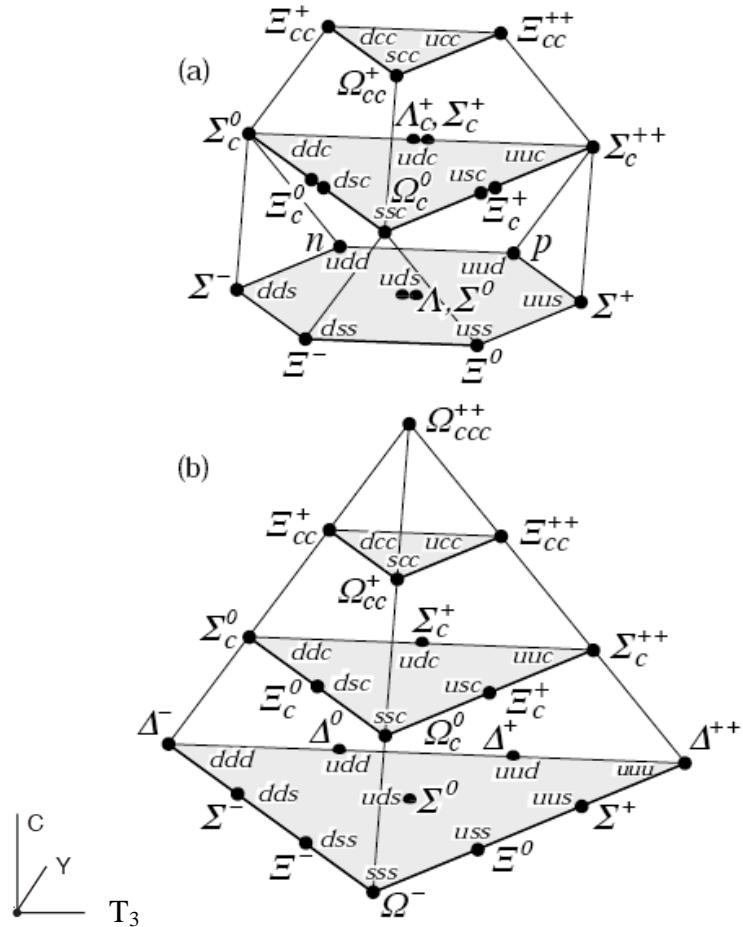
En ce qui concerne les spin et parité, le couplage de 3 quarks $I^\pi = 1/2^+$, dans le cas simple d'un moment angulaire orbital nul donne $I^\pi = 1/2^+$ ou $I^\pi = 3/2^+$. Bien sûr d'autres multipolarités et parités peuvent exister dans le cas d'un moment angulaire orbital différent de zéro. Les figures ci-dessous montrent l'octet pour $I^\pi = 1/2^+$ et le décuplet pour $I^\pi = 3/2^+$:





Les droites Q/e s'obtiennent grâce à la formule de Gell-Mann et Nishijima. Les masses croissantes sont dues aux nombres de quarks de valences de saveur étrange, qui sont environ 100 fois plus massifs que les quarks u et d.

Si l'on considère les baryons pouvant être formés par les quarks u,d,s,c (SU(4) de saveur) on obtient :



où l'on reconnaît l'octet et le décuplet précédents comme des sous-structures de ces 20-plets.

Le modèle des quarks permet ainsi de résumer les caractéristiques de quelques hadrons constitués des quarks u,d,s et de leurs antiquarks. Dans le tableau ci-dessous, les nombres quantiques des hadrons (système constitué par interaction forte) se déterminent en utilisant les règles d'addition des nombres quantiques des quarks de valence, qui sont celles vues au chapitre précédent :

- simplement additif pour q, T_3, S, c, b, t
- règle d'addition des moments cinétiques pour T
- règle d'addition des moments cinétiques pour le moment cinétique total I , en tenant compte du moment angulaire orbital L
- la parité totale est le produit des parités des quarks avec le facteur $(-1)^L$

Ces règles peuvent se vérifier sur le tableau ci-dessous.

	Q/e	masse (MeV)	I^π	T	T_3	B	s	τ (s)
p n	1	938.3	$1/2^+$	$1/2$	$+1/2$	1	0	stable 887
	0	939.6	$1/2^+$	$1/2$	$-1/2$	1	0	
Δ	2	1232	$3/2^+$	$3/2$	$+3/2$	1	0	5.5×10^{-24}
	1	1232	$3/2^+$	$3/2$	$+1/2$	1	0	
	0	1232	$3/2^+$	$3/2$	$-1/2$	1	0	
	-1	1232	$3/2^+$	$3/2$	$-3/2$	1	0	
Λ	0	1115.6	$1/2^+$	0	0	1	-1	2.6×10^{-10}
Σ	1	1189.4	$1/2^+$	1	1	1	-1	0.8×10^{-10}
	0	1192.5	$1/2^+$	1	0	1	-1	7.4×10^{-20}
	-1	1197.4	$1/2^+$	1	-1	1	-1	1.5×10^{-10}
Ξ	0	1314.9	$1/2^+$	$1/2$	$+1/2$	1	-2	2.9×10^{-10}
	-1	1321.3	$1/2^+$	$1/2$	$-1/2$	1	-2	1.6×10^{-10}
Ω	-1	1672.2	$3/2^+$	0	0	1	-3	8.2×10^{-11}
π	1	139.6	0^-	1	$+1$	0	0	2.6×10^{-8}
	0	135	0^-	1	0	0	0	8.4×10^{-17}
	-1	139.6	0^-	1	-1	0	0	2.6×10^{-8}
K^+	1	493.7	0^-	$1/2$	$+1/2$	0	1	1.2×10^{-8}
K^0	0	497.7	0^-	$1/2$	$-1/2$	0	1	0.9×10^{-10} ou 5.2×10^{-8}
K^-	-1	493.7	0^-	$1/2$	$-1/2$	0	-1	idem K^+
\bar{K}^0	0	497.7	0^-	$1/2$	$+1/2$	0	-1	idem K^0

10^{-7} s après le Big Bang ($kT \sim 10$ GeV), la température est assez basse pour que les quarks s'assemblent durablement sous forme de triplet (baryon) ou de paire quark-antiquark (méson). C'est le début de l'ère hadronique dans laquelle le rayonnement crée en permanence des hadrons et des antihadrons. Cette ère s'achève environ 10^4 s après le Big-Bang, car la température n'est plus suffisante pour maintenir cet équilibre, le hadron le plus léger (le pion) ayant une masse de 140 MeV. Il ne subsiste alors que l'excès de hadrons sur les antihadrons. Les baryons se désintègrent en baryon de masse plus faible, jusqu'au plus léger, le proton qui est le seul hadron stable. Le neutron a une vie moyenne de 15 minutes environ, ce qui est très long à l'échelle des interactions fondamentales. Mais en raison des effets de polarisation des « soupes » de quarks et de gluons dans les nucléons, c'est le proton qui a la masse la plus faible. Comme $B=1$ dans le cas d'un baryon et que le nombre baryonique doit être conservé (même par l'interaction faible) il n'y a pas de décroissance du proton possible dans le cadre du modèle standard.

3. Propriétés des hadrons

a. La masse

Nous avons vu que tous les membres d'un même multiplet d'isospin ont la même masse, à quelques MeV près, car l'interaction forte est invariante sous les transformations SU(2) d'isospin. Cette symétrie est brisée par l'interaction électromagnétique.

Qu'en est-il de la symétrie de saveur (u,d,s) de SU(3) ? Nous savons qu'elle est en fait explicitement brisée par l'interaction forte, car SU(3) de saveur n'est pas une symétrie exacte de l'interaction forte. Cependant cette brisure de symétrie n'est que légère et il est possible de la quantifier en décomposant l'Hamiltonien d'interaction forte H_F :

$$H_F = H_{0F} + h_F$$

où H_{0F} est la partie de H_F qui respecte SU(3) de saveur (invariant par rotation dans l'hyperespace) et h_F est la partie de H_F qui brise légèrement cette symétrie. h_F lève donc la dégénérence en masse entre les différents membres du supermultiplet. Sa valeur moyenne est différente selon les valeurs de T et Y de l'état considéré. Cette décomposition conduit à la formule de masse de Gell-Mann et Okubo, qui correspond à une sorte de développement perturbatif en hypercharge Y et isospin T . Ainsi, les masses des membres d'un supermultiplet est donné par :

$$M(T, Y) = M^0 + aY + b \left[T(T+1) - \frac{Y^2}{4} \right]$$

où M^0 , a et b sont des constantes à l'intérieur d'un même supermultiplet.

Par exemple cette relation donne, dans le cas du décuplet de baryon $I^\pi = 3/2^+$:

$$M_\Sigma - M_\Delta = M_\Xi - M_\Sigma = M_\Omega - M_\Xi$$

C'est ainsi que fut prédicta en 1961 la masse du Ω^- : 1679 MeV. Il fut découvert en 1964 à une masse d'environ 1680 MeV, avec les nombres quantiques attendus. L'expérience correspondante est décrite à la fin de ce chapitre.

Rappelons qu'une démarche similaire permet de prédire les variations de masse dues à l'interaction électromagnétique dans les membres d'un même multiplet d'isospin (par exemple entre le proton et le neutron, formule IMME du chapitre 2).

b. La fonction d'onde et la couleur

Considérons une fois encore le baryon Ω^- . Ayant une étrangeté S=-3 il est donc composé de 3 quarks s. De plus, son moment cinétique est 3/2, qui ne peut s'obtenir que si les trois quarks ont une projection de leur spin sur l'axe Oz $j_z=1/2$. Ces trois fermions sont donc dans le même état, ce qui est impossible en vertu du principe de Pauli. Cela montre qu'il existe bien un nombre quantique supplémentaire, la couleur, qui permet de pallier à ce problème : chaque quark s possède une couleur différente (R,G,B) ; le principe de Pauli est sauf. C'est ainsi que les physiciens, confrontés à ce paradoxe lors de la découverte de tels baryons (comme aussi le Δ^- et le Δ^{++}) ont historiquement introduit le nombre quantique de couleur dans les années soixante.

c. Rôle de la mer

Nous avons vu le rôle important que joue la mer des quarks et de gluons dans le nucléon. Il suffit pour s'en convaincre de comparer la masse d'un nucléon à la somme des masses de ses quarks de valence : 99% de la masse d'un nucléon provient de la mer. En effet, la masse d'un quark u (ou d) n'est de quelques MeV alors qu'un nucléon « pèse » presque 1000 MeV. Par ailleurs les contributions relatives des quarks et des gluons au spin total du nucléon est encore à l'étude : les quarks ne pourraient contribuer que de 20 à 60 % au spin, le reste venant des gluons et des moments angulaires orbitaux.

La compréhension en profondeur de la structure d'un nucléon reste un défi majeur de la physique subatomique et nous avons vu que de récents progrès ont été accomplis.

4. Conclusion

Ainsi, pour établir le modèle des quarks, deux approximations sont nécessaires : d'abord supposer que l'on peut réduire un hadron à ses quarks de valence, ce qui n'est pas exact puisque QCD n'est pas perturbative à basse énergie. L'autre approximation consiste à supposer que l'interaction forte possède les symétries SU(3), SU(4) de saveur. La conséquence est qu'il n'y a pas vraiment invariance des propriétés hadrons au sein d'un même supermultiplet. Par exemple il faut utiliser la formule de masse de Gell Mann et Okubo pour corriger cela. Seule la symétrie SU(2) d'isospin reste exacte. Le modèle des quarks est donc pertinent, pourvu que l'on soit conscient de son domaine d'application.

A la fin de l'hadrogénèse il ne reste donc que électrons, neutrinos, protons et neutrons car l'interaction faible permet aux hadrons plus lourds de se désintégrer en ces particules. Comment en faire des noyaux ? C'est l'objet de ce cours.

5. Annexe 1 : unités et ordres de grandeurs, rappels de relativité restreinte

Voici des unités souvent utilisées en physique subatomique :

- le fermi (fm) : $1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$.
- L'électron-volt (eV) ; c'est l'énergie qu'acquiert un électron dans un potentiel de 1 Volt : $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$. On utilise aussi le keV, MeV, GeV, TeV.
- Une constante utile dans ces unités est $\hbar c \approx 197 \text{ MeV.fm}$

La relativité restreinte permet d'imposer la conservation du quadrivecteur impulsion-énergie totale lors d'une réaction. Par ces lois de conservations les masses des protagonistes peuvent être converties en énergie, et vice versa. On a par ailleurs les relations suivantes :

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

$$E = \gamma mc^2 = mc^2 + (\gamma - 1)mc^2 = mc^2 + T$$

où T est l'énergie cinétique.

Un noyau est composé de Z protons et N neutrons. A=Z+N est le nombre de nucléons (le nombre de masse). Des isotopes sont des noyaux ayant le même nombre de protons Z, des isotones le même nombre de neutrons N, et les isobares le même nombre de masse A. Un noyau se note ${}_{\text{Z}}^{\text{A}}\text{X}^{\text{N}}$, ou plus simplement ${}^{\text{A}}\text{X}$ car à chaque élément X correspond un Z donné. Par exemple ${}^{14}\text{C}$ implique Z=6. Comme A=6, on en déduit N=8.

Ainsi la masse d'un noyau X est donnée par :

$$m_Xc^2 = Z m_p c^2 + N m_n c^2 - B$$

où B est l'énergie de liaison (équivalence énergie-masse). Si B>0 il faut fournir de l'énergie au noyau pour le séparer en ses constituants (système lié).

La chaleur de réaction Q est définie comme :

$$Q = \sum_i m_i c^2 - \sum_f m_f c^2$$

Si Q>0 la réaction est exothermique. Si Q<0 il faut fournir de l'énergie en voie d'entrée pour réaliser la réaction : c'est l'énergie seuil T_S .

On définit aussi la masse atomique :

$$M_{\text{at}}c^2 = m_Xc^2 + Z m_e c^2 - B_e$$

où B_e est l'énergie de liaison des électrons à l'atome : 3 keV/électron, ce qui est négligeable à l'échelle de la physique subatomique.

Il est commode de tabuler uniquement l'excès de masse atomique qui par définition est :

$$\Delta M_{\text{at}}c^2 = M_{\text{at}}c^2 - A \text{ uma } c^2$$

où 1 uma est 1/12 de la masse d'un atome de carbone : $1 \text{ uma } c^2 = 931,5 \text{ MeV}$.

Enfin, $\hbar c = 197,3 \text{ MeV.fm}$