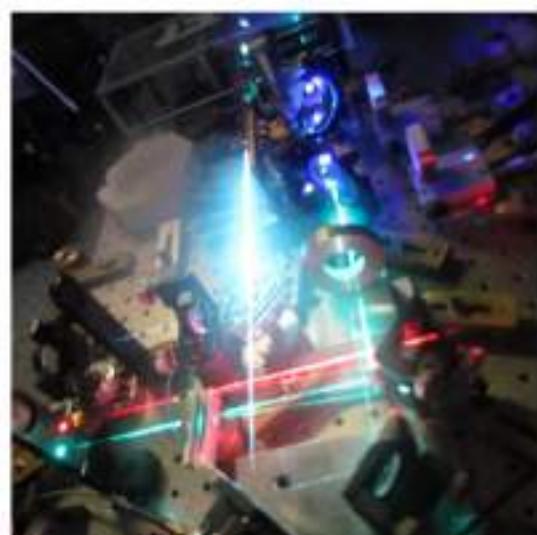


PHYSIQUE des LASERS **COURS - partie II-**



MASTER 1 de PHYSIQUE FONDAMENTALE
MAGISTÈRE de PHYSIQUE FONDAMENTALE

Table des matières

1 LA PHYSIQUE DES LASERS-INTRODUCTION	3
1.1 Historique	4
1.2 Originalité de la lumière laser	5
1.3 Principe général d'un laser	5
1.4 Quelques exemples d'applications	6
2 ETUDE DES CAVITES LASERS (RESONATEURS OPTIQUES)	7
2.1 Les différents types de cavités lasers	8
2.1.1 Cavité à deux miroirs	8
2.1.2 Cavités plus complexes	8
2.2 Formalisme matriciel pour l'étude des cavités	9
2.2.1 Equivalence miroir sphérique-lentille mince dans l'approximation de Gauss	9
2.2.2 Séquence périodique de lentilles équivalentes	10
2.2.3 Matrices de transfert	11
2.3 Stabilité d'une cavité	15
2.3.1 Critère de stabilité d'une cavité laser	15
2.3.2 Application à la stabilité d'une cavité simple à deux miroirs	15
2.3.3 Cavités instables	17
2.3.4 Annexe : démonstration du critère de stabilité d'une cavité	17
3 FAISCEAUX GAUSSIENS	19
3.1 Généralités sur les faisceaux gaussiens	20
3.1.1 Amplitude complexe et intensité d'une onde	20
3.1.2 Amplitude complexe et intensité d'un faisceau gaussien	21
3.1.3 Extension latérale du faisceau gaussien	21
3.1.4 Profil longitudinal et divergence du faisceau gaussien	22
3.2 Propriétés du faisceau gaussien	23
3.2.1 Rayon de courbure complexe	23
3.2.2 Rayon de courbure de la phase et extension latérale du faisceau	23
3.2.3 Relations utiles	24
3.2.4 Propagation du rayon de courbure complexe : loi 'ABCD'	24
3.2.5 Application : formule de conjugaison des 'waists' pour un faisceau gaussien	25
3.3 Mode fondamental gaussien d'une cavité stable	26
3.3.1 Principe	26
3.3.2 Cas particuliers simples	27
3.3.3 Détermination du mode fondamental gaussien dans le cas général	28
3.4 Modes spectraux d'une cavité laser (modes longitudinaux)	29
3.5 Modes spatiaux (modes transverses)	30
3.6 Annexes	31
3.6.1 Faisceau gaussien - Onde sphérique - Onde plane	31
3.6.2 Démonstration de la loi 'ABCD'	32
3.6.3 Démonstration de la règle d'accord des rayons de courbure dans le cas d'une cavité à 2 miroirs	33
4 PRINCIPES DE BASE DES AMPLIFICATEURS LASERS	35
4.1 Interaction matière-rayonnement	36
4.1.1 Caractérisation de la matière : le modèle du système à deux niveaux	36
4.1.2 Caractérisation du rayonnement	37
4.1.3 Émission spontanée	37
4.1.4 Absorption et émission induite	38
4.1.5 Équations d'évolution temporelle des populations	39
4.1.6 Profil spectral - Coefficients d'Einstein	41
4.1.7 Largeur naturelle et élargissement spectral	42

4.1.8	Section efficace	46
4.2	Amplification d'une onde par un milieu à élargissement spectral homogène	47
4.2.1	Bilan d'énergie	47
4.2.2	Coefficient d'amplification en régime stationnaire. Inversion de population	49
4.2.3	Saturation de l'amplification	50
4.2.4	Intensité de saturation	52
4.2.5	Gain total du milieu amplificateur	52
4.3	Annexe	54
5	INTRODUCTION À LA THÉORIE DU LASER	57
5.1	Transition laser et pompage	58
5.2	Pertes de la cavité	59
5.2.1	Analyse physique de l'origine des pertes	59
5.2.2	Caractérisation quantitative des pertes de la cavité	61
5.2.3	Durée de vie des photons dans la cavité	63
5.2.4	Sélectivité d'une cavité	64
5.3	Laser fonctionnant en régime stationnaire	65
5.3.1	Cas d'un amplificateur placé dans une cavité en anneau	65
5.3.2	Régime pertes faibles-gain faible	67
5.3.3	Optimisation du couplage de sortie	68
5.3.4	Seuil de fonctionnement en régime stationnaire	69
5.3.5	Cas d'un amplificateur placé dans une cavité linéaire	70
5.3.6	Conditions de fonctionnement laser	71
5.3.7	Fonctionnement continu monomode ou multimodes	71
5.4	Lasers produisant des impulsions	74
5.4.1	Laser en fonctionnement 'modes bloqués'	74
5.4.2	Système laser en régime transitoire : équations couplées	77
5.4.3	Laser en fonctionnement 'déclenché' ('Q switching')	79
5.5	Annexes	82
5.5.1	Principe d'un isolateur optique	82
5.5.2	Laser à colorant accordable.	83
6	PRINCIPALES APPLICATIONS DES DIFFÉRENTS TYPES DE LASERS	85
6.1	Les lasers à milieux amplificateurs gazeux	86
6.2	Les lasers à milieux amplificateurs liquides	86
6.3	Les lasers à milieux amplificateurs solides	87

Chapitre 4

PRINCIPES DE BASE DES AMPLIFICATEURS LASERS

L'effet laser est possible s'il existe un système capable d'amplifier l'intensité d'une onde lumineuse. Dans ce chapitre, on va étudier les mécanismes physiques d'interaction lumière-matière permettant de réaliser une telle amplification.

4.1 Interaction matière-rayonnement

4.1.1 Caractérisation de la matière : le modèle du système à deux niveaux

Le milieu amplificateur peut être constitué d'atomes, de molécules ou d'ions, sous forme gazeuse, liquide ou solide. On fera référence dans la suite à un milieu atomique, les résultats décrits se généralisant aux autres types de milieux amplificateurs.

La structure d'un atome est quantifiée. Cela signifie que l'énergie interne d'un état stable ne peut prendre que certaines valeurs E_i bien définies (**niveaux d'énergie 'discrets'** par opposition à 'continus'). L'atome est dans un état quantique d'énergie E_i . Les différents états quantiques de même énergie constituent le **niveau d'énergie E_i** . Le nombre d'états quantiques formant un niveau d'énergie s'appelle la **dégénérescence quantique** de ce niveau.

Le nombre de niveaux d'énergie d'un atome ou d'une molécule est très important mais, en général, la prise en compte de 2, 3 ou 4 de ces niveaux est suffisante pour décrire le fonctionnement d'un amplificateur. On considérera pour la suite de ce paragraphe un ensemble d'objets quantiques quasi identiques, appelé 'le milieu' et modélisé par un **système à deux niveaux d'énergie** avec les caractéristiques suivantes :



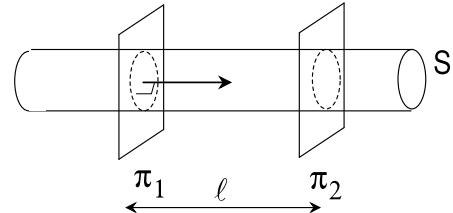
1. Les atomes sur le niveau 1 (2) possèdent l'énergie interne E_1 (E_2) avec par convention $E_2 > E_1$. On note $h\nu_0 = E_2 - E_1$ la différence d'énergie entre ces deux niveaux.
2. On définit la **population** du niveau i : c'est le nombre d'atomes **par unité de volume** dans le milieu et sur le niveau i . Elle est notée N_i ($i = 1, 2$) et s'exprime en atomes par m^3 ($[N_i] = \text{m}^{-3}$).
3. La dégénérescence quantique du niveau i est notée g_i ¹.
4. Un atome peut passer du niveau 2 au niveau 1 **en émettant un photon** d'énergie $h\nu_0 = E_2 - E_1$. La pulsation du photon est $\omega = 2\pi\nu_0$, sa longueur d'onde mesurée dans le vide est $\lambda_0 = \frac{c_0}{\nu_0}$ ($[\omega] = \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$, $[\nu_0] = \text{Hz}$, $[\lambda_0] = \text{m}$)²
5. Un atome peut passer du niveau 1 au niveau 2 **en absorbant un photon** d'énergie $h\nu_0 = E_2 - E_1$,

1. Attention à ne pas confondre la dégénérescence quantique d'un niveau d'énergie, et les facteurs géométriques g_1 et g_2 qu'on a définis pour une cavité linéaire à deux miroirs.

2. Attention, on confond ici dimension et unité, ce qui est pratique mais pas rigoureusement correct.

4.1.2 Caractérisation du rayonnement

Le rayonnement (l'onde) est un faisceau lumineux homogène et parallèle de section S (c'est à peu près le cas pour un faisceau gaussien au voisinage de son waist et près de l'axe optique). Cette onde est monochromatique de fréquence ν . Soient les plans π_1 et π_2 , distants de ℓ . La portion du faisceau comprise entre π_1 et π_2 a pour volume $S\ell$ et contient N photons.



On rappelle les définitions et relations utiles :

- l'énergie E contenue par le faisceau entre π_1 et π_2 :

$$E = N h\nu \quad (\text{J})$$

- l'énergie par unité de volume u dans le faisceau (ou densité volumique d'énergie) :

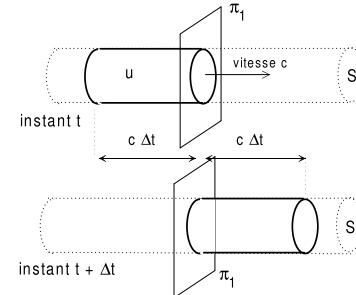
$$u = \frac{dE}{d\tau} = \frac{E}{S\ell} \quad (\text{J} \cdot \text{m}^{-3})$$

- la puissance lumineuse \mathcal{P} au niveau de π_1 est définie comme l'énergie lumineuse traversant π_1 par unité de temps.

Les photons traversant π_1 entre t et $t + \Delta t$ sont ceux contenus dans un cylindre de section S et de longueur $c \Delta t$, où $c = \frac{c_0}{n}$ est la vitesse de la lumière dans le milieu d'indice n . Ces photons correspondent à l'énergie $u S c \Delta t$.

L'énergie lumineuse traversant π_1 par unité de temps s'obtient en divisant le résultat précédent par Δt , d'où pour la puissance

$$\mathcal{P} = \frac{u S c \Delta t}{\Delta t} = u S c \quad (\text{J} \cdot \text{s}^{-1}) \text{ ou } (\text{W})$$

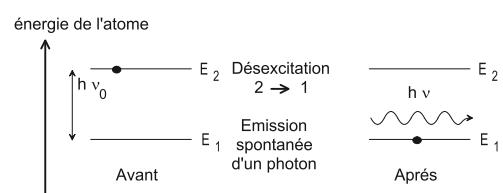


- l'intensité lumineuse est la puissance au niveau d'un plan π_1 perpendiculaire à la direction de propagation, par unité de surface, soit

$$I = \frac{d\mathcal{P}}{dS} = u c \quad (\text{J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}) \text{ ou } (\text{W} \cdot \text{m}^{-2})$$

4.1.3 Émission spontanée

Soit un milieu amplificateur modélisé par un système à deux niveaux d'énergie ('le milieu'). Un atome sur le niveau 2 peut se désexciter spontanément vers le niveau 1 avec l'émission d'un photon d'énergie $h\nu_0 = E_2 - E_1$. C'est le processus d'émission spontanée. Les photons produits par émission spontanée sont émis de manière isotrope dans toutes les directions de l'espace.



Soit dn_{es} le nombre de photons produits par émission spontanée pendant un intervalle de temps dt et par unité de volume. Ce nombre, exprimé en m^{-3} , est proportionnel à dt et à la population du niveau 2 :

$$dn_{es} = A_{21} N_2 dt$$

Le coefficient A_{21} correspond donc à la probabilité d'émission spontanée par seconde et par atome, on l'appelle coefficient d'Einstein pour l'émission spontanée. On parlera aussi de 'probabilité par unité de temps' pour l'émission spontanée.

Lorsque l'émission spontanée est la seule cause de variation du nombre d'atomes sur le niveau 2, la variation de la population pendant dt vaut :

$$dN_2 = -dn_{es} = -A_{21} N_2 dt$$

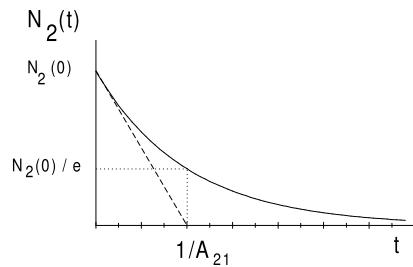
ou bien

$$\frac{dN_2}{dt} = -A_{21} N_2$$

La quantité $\frac{dN_2}{dt}$ est le **taux de désexcitation**, ou le taux de relaxation du niveau 2. L'intégration de cette équation différentielle donne

$$N_2(t) = N_2(0) \exp -A_{21}t$$

La population N_2 décroît exponentiellement au cours du temps avec $N_2(t) = N_2(0)/e = 0,37 N_2(0)$ pour $t = 1/A_{21}$.



La quantité $\tau_{es} = \frac{1}{A_{21}}$ est par définition **la durée de vie radiative** du niveau 2.

Remarques :

* L'émission spontanée est le mécanisme de base de la 'luminescence' de la matière. Selon le contexte, on la désigne par différents termes :

- 'fluorescence', pour des gaz monoatomiques ou moléculaires. Les durées de vie radiative peuvent aller de la picoseconde (10^{-12} s) à la milliseconde (10^{-3} s). Dans le domaine biologique, citons la luminescence d'un vers luisant³.

- 'phosphorescence' lorsque dans certains solides la durée de vie radiative peut dépasser la seconde.

* Expérimentalement, la quantité mesurée est l'énergie lumineuse ΔP_{es} émise par unité de temps par l'émission spontanée des atomes contenus dans un volume ΔV . Cette puissance s'analyse physiquement comme :

$$\begin{aligned} \Delta P_{es} &= (\text{énergie d'un photon}) \times (\text{proba. d'émission spontanée par atome et par seconde}) \\ &\quad \times (\text{nombre d'atomes sur le niveau 2 par unité de volume}) \times (\text{volume}) \\ \text{soit } \Delta P_{es} &= h\nu_0 A_{21} N_2 \Delta V \end{aligned}$$

* La population du niveau 2 à $t = 0$ est notée $N_2(0)$. On veut évaluer le nombre d'atomes du volume V se désexcitant entre t et $t + dt$ sachant que certains se sont désexcités entre 0 et t . La population du niveau 2 à l'instant t vaut $N_2(t) = N_2(0) \exp -A_{21}t$. Pour chaque atome excité, la probabilité de se désexciter pendant dt vaut $A_{21} dt$. Avec $N_2(t) \times V$ atomes sur 2 à l'instant t , le nombre de désexcitations entre t et $t + dt$ vaut alors $A_{21} dt N_2(t) V = A_{21} dt N_2(0) V \exp(-A_{21}t)$.

4.1.4 Absorption et émission induite

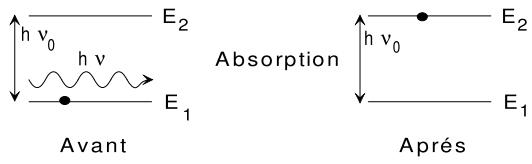
On considère un milieu modélisé par un système à deux niveaux ($h\nu_0 = E_2 - E_1$) en présence d'un rayonnement de fréquence ν .

Lorsque ν est très différent de ν_0 , il n'y a aucune interaction possible entre le milieu amplificateur et le rayonnement.

Lorsque ν est très proche de ν_0 (voir discussion plus loin qui précisera cette condition), l'interaction entre le rayonnement et un atome sur le niveau 1 peut **induire** la transition de cet atome du niveau 1 vers le niveau 2⁴. C'est le **processus d'absorption**.

3. L'oxydation d'une molécule complexe, la luciférine, par une enzyme appelée luciférase, forme un produit excité émettant par bioluminescence une lumière jaune-verte.

4. L'accord entre l'énergie du photon et la différence de niveaux d'énergie n'est pas la seule condition nécessaire à l'émission/absorption. Il existe en effet en mécanique quantique des règles de sélection pour le passage d'un niveau à un autre, ce qui fait que toutes les transitions ne sont pas forcément autorisées.



En langage quantique, un photon du rayonnement disparaît au cours du processus d'absorption et son énergie est transférée à l'atome sous forme d'énergie interne (transition 1→2). Un atome passe du niveau 1 au niveau 2.

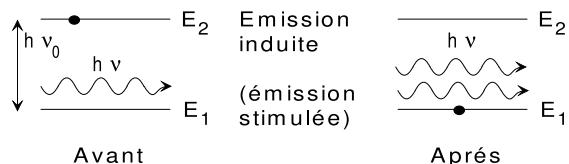
Le nombre de photons **absorbés** pendant un intervalle de temps dt et par unité de volume est proportionnel à la population **du niveau 1** et à dt :

$$dn_a = W_{12} N_1 dt$$

où W_{12} est la **probabilité d'absorption** par seconde et par atome, en s^{-1} .

De manière totalement symétrique, l'interaction entre le rayonnement et un atome **sur le niveau 2** peut induire la transition de l'atome **du niveau 2 vers le niveau 1**. C'est le processus d'**émission induite** appelé aussi **émission stimulée**.

En langage quantique, l'énergie interne de l'atome diminue en passant de E_2 à E_1 et un photon supplémentaire apparaît dans le rayonnement.



Le nombre de photons produits par émission induite pendant un intervalle de temps dt et par unité de volume est proportionnel à la population **du niveau 2** et à dt :

$$dn_{ei} = W_{21} N_2 dt$$

où W_{21} est la **probabilité d'émission induite** par seconde et par atome.

Propriété importante : le photon 'créé' par émission induite **a les mêmes caractéristiques que le rayonnement inducteur** (fréquence, phase, polarisation, direction et sens de propagation). Ce processus est le mécanisme de base du laser et lui a donné son nom (LASER = Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation).

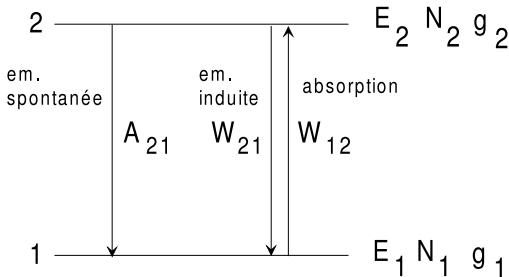
Pour un laser idéal, un photon initial crée lors de passages successifs dans le milieu amplificateur un grand nombre de photons identiques dont une partie est extraite hors de la cavité pour constituer le faisceau laser monochromatique et monodirectionnel. Ce processus est à l'origine de la **cohérence** du rayonnement laser.

4.1.5 Équations d'évolution temporelle des populations

* a) Exemple 1 : **système fermé à 2 niveaux**

On considère un système à deux niveaux pour lequel les atomes sont soit sur le niveau 1, soit sur le niveau 2 à l'exclusion de tout autre niveau (système fermé).⁵

5. L'exemple présenté ici est uniquement intéressant d'un point de vue pédagogique. En effet, on verra dans le TD n°4 qu'on ne peut jamais réaliser de laser avec un système fermé à 2 niveaux !



La probabilité d'émission spontanée par seconde et par atome vaut A_{21} , ce système est en présence d'un rayonnement de fréquence ν pour lequel les probabilités par seconde et par atome pour l'absorption et l'émission induite sont W_{12} et W_{21} . On a donc :

$$dn_{es} = A_{21} N_2 dt$$

$$dn_a = W_{12} N_1 dt$$

$$dn_{ei} = W_{21} N_2 dt$$

Les **équations d'évolution temporelle** des populations N_1 et N_2 s'écrivent

$$\begin{aligned} \frac{dN_2}{dt} &= -\frac{dn_{es}}{dt} - \frac{dn_{ei}}{dt} + \frac{dn_a}{dt} = -(A_{21} + W_{21}) N_2 + W_{12} N_1 \\ \frac{dN_1}{dt} &= \frac{dn_{es}}{dt} + \frac{dn_{ei}}{dt} - \frac{dn_a}{dt} = +(A_{21} + W_{21}) N_2 - W_{12} N_1 \end{aligned}$$

Dans le cas d'un **système fermé**, par définition la somme $N_1 + N_2$ reste **constante** donc doit vérifier $\frac{dN_1}{dt} + \frac{dN_2}{dt} = 0$

* b) Exemple 2 : système ouvert

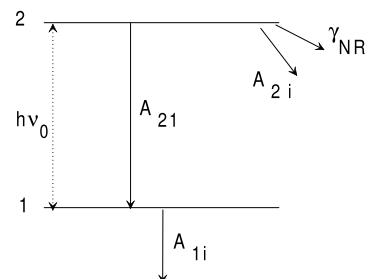
Un atome sur le niveau d'énergie E_1 peut se désexciter par émission spontanée vers d'autres niveaux (non représentés sur la figure ci-dessous) avec la probabilité par seconde A_{1i} .

Un atome sur le niveau 2 peut se désexciter par émission spontanée vers 1 avec une probabilité par seconde notée A_{21} , mais aussi par émission spontanée vers d'autres niveaux non précisés (probabilités par seconde A_{2i}) et par désexcitation non radiative (probabilités par seconde γ_{NR}). Ce système à deux niveaux est de type 'ouvert'.

Une désexcitation non radiative signifie une perte d'énergie par l'atome autrement que par émission d'un photon (collision avec un autre atome, conversion entre excitation électronique et excitation vibrationnelle pour une molécule ou un solide).

S'il n'existe dans ce milieu **aucun photon susceptible d'être absorbé ou d'induire de l'émission**, les équations d'évolution des populations s'écrivent

$$\begin{aligned} \frac{dN_2}{dt} &= -(A_{21} + A_{2i} + \gamma_{NR}) N_2 \\ \frac{dN_1}{dt} &= +A_{21} N_2 - A_{1i} N_1 \end{aligned}$$



On constate que $\frac{dN_1}{dt} + \frac{dN_2}{dt}$ est non nul donc la somme $N_1 + N_2$ varie au cours du temps : des atomes peuvent passer sur des niveaux d'énergie autres que 1 ou 2, c'est ce qu'on appelle un système ouvert.

Pour un ensemble d'atomes $N_2(0)$ portés sur le niveau 2 à $t = 0$, l'intégration conduit à

$$N_2(t) = N_2(0) \exp[-(A_{21} + A_{2i} + \gamma_{NR}) t]$$

$N_2(t)$ décroît exponentiellement avec le temps caractéristique τ_2 tel que

$$\frac{1}{\tau_2} = A_{21} + A_{2i} + \gamma_{NR}$$

Ce temps τ_2 est appelé **la durée de vie du niveau 2**. On a $\frac{dN_2}{dt} = -\frac{t}{\tau_2}$ d'où $N_2(t) = N_2(0) \exp(-t/\tau_2)$ et $N_2(\tau_2) = N_2(0)/e \simeq 0,37N_2(0)$.

$\frac{1}{\tau_2}$ est la somme des probabilités par seconde de quitter le niveau 2 par des processus spontanés (à l'exclusion donc de l'émission induite ou de l'absorption vers des niveaux d'énergie supérieure).

Remarque : pour ce système, la durée de vie radiative τ_{es} vérifie $\frac{1}{\tau_{es}} = A_{21} + A_{2i}$ et on a :

$$\frac{1}{\tau_2} = \frac{1}{\tau_{es}} + \gamma_{NR}$$

* c) Généralisation

De façon générale, pour écrire les équations d'évolution temporelle des populations dans un milieu amplificateur à plusieurs niveaux d'énergie i :

- On commencera par dessiner le schéma des niveaux impliqués. On y représentera tous les processus qui peuvent peupler ou dépeupler ces niveaux en les indiquant par des flèches et en reportant les probabilités de transition par seconde associées (probabilité d'absorption, de désexcitation non radiative, d'émission spontanée, d'émission induite).
- On écrira l'équation relative à une population N_i en faisant le bilan des processus impliquant le niveau i : on comptera positivement les contributions qui peuplent i (flèches qui arrivent sur le niveau i) et négativement celles qui le dépeuplent (flèches qui partent du niveau i).
- Si le système est fermé, on vérifiera que $\sum_i \frac{dN_i}{dt} = 0$.

4.1.6 Profil spectral - Coefficients d'Einstein

Dans l'étude des lasers, on a presque toujours affaire à l'interaction d'un milieu avec un rayonnement quasi-monochromatique. On précise les expressions de W_{12} et W_{21} dans ce cas.

Un rayonnement monochromatique de fréquence ν interagit avec un système à deux niveaux ($E_2 - E_1 = h\nu_0$) par absorption ou émission induite avec les probabilités par seconde et par atome W_{12} et W_{21} respectivement. Pour ces processus induits, les probabilités sont proportionnelles au nombre de photons présents dans l'onde, donc à la densité volumique d'énergie u du rayonnement monochromatique (puisque $u = \frac{N h \nu}{S \ell}$).

Lorsque $\nu = \nu_0$, on dit que l'interaction est **résonante** et les probabilités W_{12} et W_{21} sont alors maximales. L'expérience montre que lorsque ν s'écarte légèrement de ν_0 , l'interaction devient moins efficace pour devenir totalement inefficace quand ν est un peu plus différent de ν_0 .

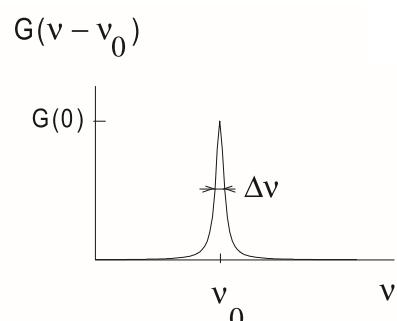
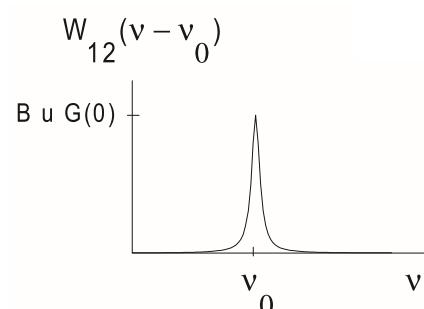
Par définition, on écrit

$$\begin{aligned} W_{12}(\nu - \nu_0) &= B_{12} u g(\nu - \nu_0) \\ W_{21}(\nu - \nu_0) &= B_{21} u g(\nu - \nu_0) \end{aligned}$$

où $g(\nu - \nu_0)$ est une fonction de ν appelée **profil spectral de la transition**, maximale pour $\nu = \nu_0$, tendant vers zéro quand ν s'éloigne de ν_0 et vérifiant par construction $\int g(\nu - \nu_0) d\nu = 1$ (profil normé).

La **largeur totale à mi-hauteur** du profil $g(\nu - \nu_0)$ est notée $\Delta\nu$, c'est par définition la **largeur spectrale** de la transition.

Pour $|\nu - \nu_0| \ll \Delta\nu$, l'interaction est quasi-résonante, son efficacité est maximum. Pour $|\nu - \nu_0| \gg \Delta\nu$, le rayonnement n'induit ni absorption ni émission induite pour ces atomes.



B_{12} et B_{21} sont les **coefficients d'Einstein** pour l'absorption et l'émission induite (ou stimulée). On a les dimensions suivantes :

$$\begin{aligned}[A_{21}] &= [W_{21}] = [W_{12}] = \text{s}^{-1} \\ [u] &= \text{J} \cdot \text{m}^{-3} \\ [g(\nu - \nu_0)] &= \text{Hz}^{-1} \equiv \text{s} \quad \text{puisque } \int g(\nu - \nu_0) d\nu = 1 \\ [B_{21}] &= [B_{12}] = \text{J}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}\end{aligned}$$

Des calculs semi-classiques ou quantiques déterminent entre les coefficients d'Einstein et les dégénérescences quantiques les relations suivantes :

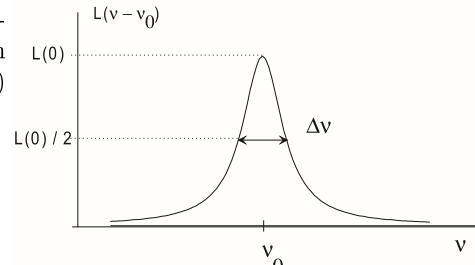
$$\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8\pi h\nu_0^3}{c^3} \quad \text{avec } \nu_0 = \frac{E_2 - E_1}{h} \text{ et } c = c_0/n. \quad (4.1)$$

$$g_1 B_{12} = g_2 B_{21} \Leftrightarrow g_1 W_{12} = g_2 W_{21} \quad (4.2)$$

Dans la pratique, le coefficient A_{21} est accessible expérimentalement par la mesure de la durée de vie radiative des atomes sur le niveau 2. Les coefficients B_{21} et B_{12} en sont déduits par les relations (4.1) et (4.2).

Le profil spectral $g(\nu - \nu_0)$ est en général centré sur la fréquence de résonance notée ν_0 . Son expression analytique dépend des propriétés de l'atome et de son interaction avec son environnement. Un type de profil très courant est le **profil lorentzien**, noté $L(\nu - \nu_0)$ dont l'expression est la suivante :

$$L(\nu - \nu_0) = \frac{2}{\pi\Delta\nu} \frac{1}{1 + (\frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu/2})^2}$$

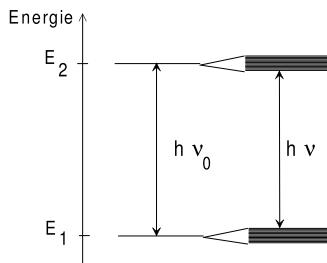


Pour $\nu = \nu_0 \pm \frac{\Delta\nu}{2}$, on a bien $L(\nu - \nu_0) = L(0)/2$ donc $\Delta\nu$ correspond bien à la largeur totale à mi-hauteur de $L(\nu - \nu_0)$.

La hauteur $L(0) = \frac{2}{\pi\Delta\nu}$ pour $\nu = \nu_0$ permet de vérifier $\int L(\nu - \nu_0) d\nu = 1$.

Il existe aussi des profils spectraux de type gaussien, ou de type Voigt (convolution gaussien/lorentzien).

Au niveau quantique, l'absorption d'un photon de fréquence ν légèrement différente de ν_0 reste possible tout en respectant la conservation de l'énergie parce que les niveaux 1 et 2 ont en réalité **une largeur en énergie non nulle**. L'**énergie de résonance** $h\nu_0$ représente l'écart entre les centres des niveaux 1 et 2. L'absorption d'un photon d'énergie légèrement inférieure à ν_0 peut correspondre par exemple à une transition entre le haut du niveau 1 et le bas du niveau 2. La mécanique quantique prévoit que cette situation est d'autant moins probable que ν s'éloigne de ν_0 .



4.1.7 Largeur naturelle et élargissement spectral

Le profil spectral $g(\nu - \nu_0)$ caractérise l'efficacité de l'interaction entre une onde et un milieu. Le but de ce paragraphe est de préciser sa forme pour un milieu amplificateur donné et d'étudier comment elle peut

dépendre des propriétés physiques de ce milieu (température, concentration des molécules actives, ...)

a) Largeur naturelle

* Profil spectral d'une transition atomique

La mécanique quantique fait apparaître un parallèle entre l'émission induite et l'émission spontanée : pour un atome à deux niveaux $E_2 - E_1 = h\nu_0$ avec la probabilité d'émission spontanée par seconde A_{21} , on peut montrer que la probabilité par seconde d'émettre un photon **dont la fréquence est comprise entre ν et $\nu + d\nu$** s'écrit

$$A_{21} g(\nu - \nu_0) d\nu$$

où $g(\nu - \nu_0)$ est le profil spectral de la transition. Cette fonction est celle qui a été introduite dans la relation $W_{21} = B g(\nu - \nu_0)$.

Le terme $g(\nu - \nu_0) d\nu$ correspond à la probabilité pour qu'un photon émis par un atome le soit avec une fréquence dans l'intervalle $[\nu, \nu + d\nu]$.

* Spectre des fréquences du rayonnement émis par un ensemble d'atomes

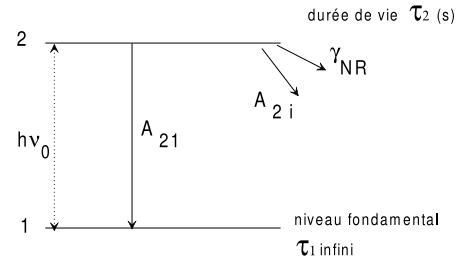
Considérons maintenant un grand nombre de ces atomes, et l'intensité I produite par l'émission spontanée de ce milieu. Si $J(\nu)$ est le spectre des fréquences de ce rayonnement, alors $J(\nu)d\nu$ est la probabilité pour qu'un photon du rayonnement possède une fréquence dans l'intervalle $[\nu, \nu + d\nu]$. Dans le cas où les atomes possèdent tous exactement le même profil spectral, on peut identifier le profil spectral d'un atome et le spectre des fréquences du rayonnement pour écrire

$$g(\nu - \nu_0) = J(\nu)$$

* Exemple d'une transition vers le niveau fondamental

On considère le système décrit ci-contre avec des atomes excités sur le niveau 2 à $t = 0$. L'intensité produite par émission spontanée $2 \rightarrow 1$ est proportionnelle à $N_2(t)$ et s'écrit $I(t) = I(0) \exp(-\frac{t}{\tau_2})$ où τ_2 est la durée de vie du niveau 2.

$$\frac{1}{\tau_2} = A_{21} + A_{2i} + \gamma_{NR}$$



Les lois générales de l'optique font que le spectre $J(\nu)$ des fréquences de ce rayonnement se calcule à partir de la transformée de Fourier de $I(t)$ et vaut ici :⁶

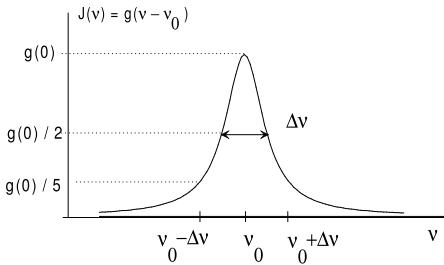
$$J(\nu) = \frac{2}{\pi \Delta\nu} \frac{1}{1 + (\frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu/2})^2} \quad \text{avec} \quad \Delta\nu = \frac{1}{2\pi \tau_2}$$

Cette fonction vérifie $\int J(\nu)d\nu = 1$. De l'identification $g(\nu - \nu_0) = J(\nu)$, on déduit la propriété suivante : pour une transition entre un niveau excité de durée de vie τ_2 et le niveau fondamental et pour un système où tous les atomes possèdent exactement les mêmes propriétés physiques, le profil spectral de la transition s'écrit :

$$g(\nu - \nu_0) = L(\nu - \nu_0) = \frac{2}{\pi \Delta\nu} \frac{1}{1 + (\frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu/2})^2} \quad \text{avec} \quad \Delta\nu = \frac{1}{2\pi \tau_2}$$

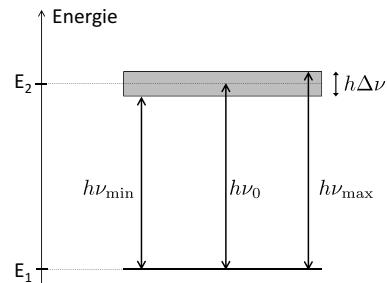
6. Le principe du calcul du spectre des fréquences serait le même pour des ondes acoustiques ou un signal analogique quelconque en électronique.

La fonction $L(\nu - \nu_0)$ est une courbe lorentzienne centrée sur ν_0 et de hauteur $L(0) = \frac{2}{\pi \Delta\nu}$ pour $\nu = \nu_0$. La grandeur $\Delta\nu$ a la dimension d'une fréquence (Hz) et vérifie $L((\nu_0 \pm \frac{\Delta\nu}{2}) - \nu_0) = 1/2$, c'est la largeur totale à mi-hauteur notée également **largeur spectrale de la transition**.



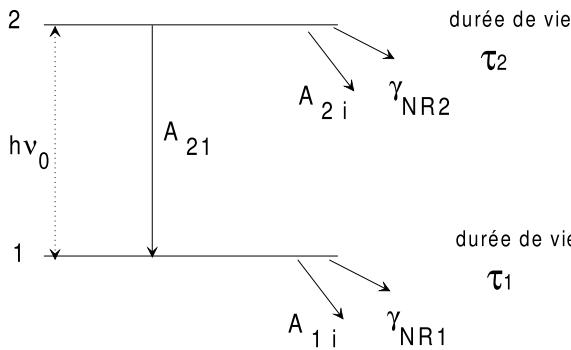
Interprétation physique :

Les photons émis lors de la transition $2 \rightarrow 1$ ont des énergies réparties qualitativement sur l'intervalle $[h\nu_0 - \frac{h\Delta\nu}{2}, h\nu_0 + \frac{h\Delta\nu}{2}]$ de largeur $h\Delta\nu$. Ce résultat s'interprète comme si le niveau 2 avait une largeur en énergie $h\Delta\nu$. La mécanique quantique (incertitude de Heisenberg) prévoit qu'un niveau de durée de vie τ_2 possède une largeur en énergie de $\frac{h}{2\pi\tau_2}$.



* Exemple d'un système à deux niveaux quelconque

On généralise le résultat précédent pour une transition se produisant entre deux niveaux 2 et 1 quelconques, l'un et l'autre pouvant se désexciter vers d'autres niveaux avec les probabilités par seconde indiquées sur le schéma



Les différentes causes de désexcitation définissent les durées de vie τ_2 et τ_1 des niveaux 2 et 1 par

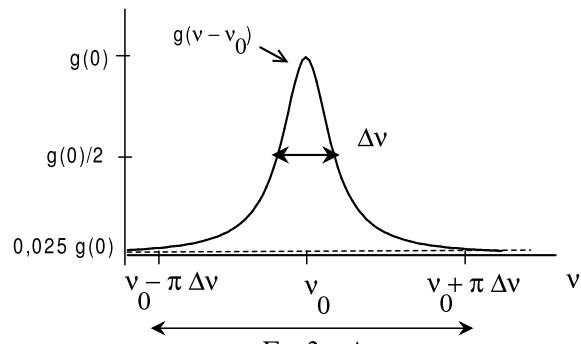
$$\begin{aligned}\frac{1}{\tau_2} &= A_{21} + A_{2i} + \gamma_{NR2} \\ \frac{1}{\tau_1} &= A_{1i} + \gamma_{NR1}\end{aligned}$$

Pour ce système, on peut montrer que le profil spectral de la transition a la même forme analytique

$$L(\nu - \nu_0) = \frac{2}{\pi \Delta\nu} \frac{1}{1 + (\frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu/2})^2}$$

avec maintenant la largeur spectrale

$$\Delta\nu = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right)$$



La largeur spectrale $\Delta\nu$ ainsi obtenue est liée uniquement aux propriétés intrinsèques de l'atome (valeurs des probabilités de transition), on l'appelle **largeur spectrale naturelle** de la transition, on la notera $\Delta\nu_{naturelle}$.

La grandeur $\Gamma_{naturelle} = \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} = 2\pi \Delta\nu$ est par définition **la largeur naturelle de la transition**.

Exemple numérique :

Sodium, transition $3p(\tau_2 = 16\text{ ns}) \rightarrow 3s$ (fondamental) à $\lambda = 589 \text{ nm}$ ⁷.

$$\Gamma = 1/\tau_2 = 6.25 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1}, \Delta\nu = \frac{\Gamma}{2\pi} \simeq 10 \text{ MHz}$$

b) Notion d'élargissement spectral

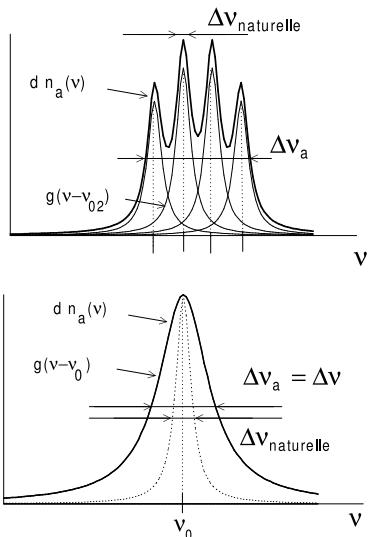
On observe expérimentalement que la largeur du spectre $J(\nu)$ de la lumière émise par un milieu est généralement supérieure ou très supérieure à la largeur spectrale naturelle. Cet effet, appelé **élargissement spectral**, est dû aux interactions existant entre l'atome émetteur et son environnement (autres atomes, champs extérieurs, etc.), ou bien au comportement de l'atome (vitesse, par exemple). On décrit deux situations physiques opposées :

- tous les atomes émettent avec la même largeur spectrale $\Delta\nu_{\text{naturelle}}$ **autour d'une fréquence d'émission ν_i variant légèrement d'un atome à l'autre** autour de la valeur ν_0 . Ce type de milieu est à **élargissement spectral inhomogène** pur.
- **tous les atomes émettent le même spectre de lumière centré sur $\nu_0 = \frac{E_2 - E_1}{h}$** mais avec une même largeur $\Delta\nu$ supérieure ou égale à $\Delta\nu_{\text{naturelle}}$. Ce type de milieu est à **élargissement spectral homogène** pur.

En guise d'exemple, on décrit une expérience où l'on envoie sur un milieu ($E_2 - E_1 = h\nu_0$) un faisceau monochromatique de fréquence ν pour mesurer en fonction de ν le nombre de photons absorbés par les atomes du milieu pendant dt et par unité de volume :

$$dn_a(\nu) = \sum_{\text{milieu}} W_{12}(\nu) N_1 dt = \sum_{\text{milieu}} B_{12} u L(\nu) N_1 dt$$

L'absorption par le milieu est la résultante de l'absorption par chacun des atomes. On retrouve les deux cas limites suivants :



* Élargissement spectral inhomogène pur

Pour chaque atome, le nombre de photons absorbés chaque seconde est proportionnel au profil spectral $L(\nu - \nu_i)$ de largeur spectrale $\Delta\nu_{\text{naturelle}}$ et centré sur la fréquence de résonance ν_i . La courbe $dn_a(\nu)$ mesurée pour l'ensemble des atomes possède une largeur $\Delta\nu_a$ supérieure à $\Delta\nu_{\text{naturelle}}$. La mesure de l'absorption pour l'ensemble des atomes ne permet pas de déduire comment serait absorbée la lumière par un seul atome.

* Élargissement spectral homogène pur

Tous les atomes du milieu ont un profil spectral centré sur la même énergie de résonance ν_0 et possèdent la même largeur spectrale $\Delta\nu > \Delta\nu_{\text{naturelle}}$. La largeur de la courbe $dn_a(\nu)$ mesurée sur l'ensemble des atomes vaut $\Delta\nu_a = \Delta\nu$. Elle est alors égale à celle du profil spectral d'un seul atome et $dn_a(\nu)$ donne directement la forme du profil spectral $g(\nu - \nu_0)$ pour chaque atome.

Dans la réalité, les milieux amplificateurs présentent à la fois un élargissement spectral homogène et inhomogène, avec pour chaque atome un profil spectral de largeur supérieure à $\Delta\nu_{\text{naturelle}}$ et centré sur une énergie de résonance ν_i variable ; mais on observe souvent que l'un des effets domine largement l'autre, ce qui doit être étudié au cas par cas.

c) Exemples de milieux à élargissement spectral inhomogène

* Atomes actifs dans un verre ou un cristal désordonné.

La fréquence d'émission d'un atome dépend légèrement de son environnement. Pour des atomes actifs noyés dans un verre, l'entourage de chacun est différent donc les fréquences d'émission sont variables d'un point à un autre.

7. Vous caractériserez spectralement cette émission lors du TP Laser à colorant où vous mettrez en œuvre une expérience de résonance optique avec une lampe à vapeur de sodium.

* Atomes actifs en phase gazeuse à haute température.

Dans ce milieu, la distribution des vitesses des atomes d'un gaz modifie par effet Doppler la distribution des fréquences du rayonnement émis par les atomes et analysé dans le référentiel du laboratoire. Cette distribution a une forme gaussienne.

d) Exemples de milieux à élargissement spectral homogène

* Atomes actifs en phase gazeuse basse température - haute pression.

Il existe dans un gaz un élargissement spectral dû à la pression ou aux collisions. Les collisions contribuent à l'élargissement en dépeuplant un niveau de la transition, ou en interrompant la phase de l'interaction avec la radiation (collisions déphasantes). On observe que l'effet global des collisions est décrit en considérant que le profil spectral de la transition est une lorentzienne de largeur spectrale

$$\Delta\nu = \frac{1}{2\pi}(\Gamma_{naturelle} + \Gamma_{Collisions}) \quad (\text{formule de Stern-Vollmer})$$

avec $\Gamma_{Collisions} = \beta P$

β est le coefficient d'élargissement par pression, P est la pression.

* Atomes actifs dans un cristal ordonné.

L'élargissement spectral du rayonnement émis par les ions dopant une matrice cristalline (laser à rubis : $Cr^{3+} : Al_2O_3$) a une largeur dépendant de la température T , par couplage des ions actifs avec les vibrations du cristal (phonons).

* Molécules d'un colorant.

Le milieu amplificateur d'un laser à colorant est constitué de molécules actives diluées dans un solvant liquide. L'interaction entre une molécule et le solvant est à l'origine d'un élargissement spectral identique pour toutes les molécules donc homogène.

* Atomes actifs en présence d'un champ extérieur.

L'élargissement par effet Stark, en présence d'un champ électrique, ou par effet Zeeman, en présence d'un champ magnétique, est également un élargissement homogène.

Le profil spectral résultant d'un élargissement homogène est le plus souvent lorentzien mais pas toujours.

4.1.8 Section efficace

On introduit des grandeurs et des relations qui seront **valables pour des atomes en interaction avec une onde progressive :**

* Le **flux de photons** est le nombre de photons traversant une surface perpendiculaire à la direction de propagation, par seconde et par unité de surface. Le flux de photons est directement relié à l'intensité (définie comme le flux d'énergie par unité de surface) par

$$\phi = \frac{I}{h\nu} \quad [\phi] = m^{-2} \cdot s^{-1}$$

* La **section efficace d'absorption** d'un rayonnement de fréquence ν par un système atomique $E_2 - E_1 = h\nu_0$ est définie par

$$\sigma_{12}(\nu - \nu_0) = \frac{W_{12}(\nu - \nu_0)}{\phi} \quad [\sigma_{12}] = m^2$$

* La **section efficace d'émission induite ou stimulée** d'un rayonnement de fréquence ν par un système atomique $E_2 - E_1 = h\nu_0$ est définie par

$$\sigma_{21}(\nu - \nu_0) = \frac{W_{21}(\nu - \nu_0)}{\phi} \quad [\sigma_{21}] = m^2$$

W_{ij} et ϕ sont l'un et l'autre proportionnels au nombre de photons donc la section efficace est indépendante de ce nombre. Elle caractérise complètement l'interaction entre le système atomique et l'onde monochromatique de fréquence ν . En combinant les définitions de ϕ , W_{ij} et σ_{ij} avec $i, j = 1$ ou 2 et $i \neq j$, on déduit :

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}(\nu - \nu_0) &= \frac{W_{ij}}{\phi} = \frac{B_{ij} u g(\nu - \nu_0)}{I/h\nu} \quad \text{avec } I = c u \\ \sigma_{ij}(\nu - \nu_0) &= \frac{h\nu}{c} B_{ij} g(\nu - \nu_0)\end{aligned}$$

On utilise généralement ces relations pour exprimer W_{ij} sous l'une des deux formes équivalentes suivantes :

en fonction du profil spectral	$W_{ij}(\nu - \nu_0) = B_{ij} u g(\nu - \nu_0)$
en fonction de la section efficace	$W_{ij}(\nu - \nu_0) = \sigma_{ij}(\nu - \nu_0) \frac{I}{h\nu}$

Ordre de grandeur : les sections efficaces sont généralement comprises entre quelques μm^2 (la dimension de λ^2) et quelques \AA^2 (la 'surface' caractéristique d'un atome). On peut faire l'analogie avec les sections efficaces de collisions introduites en physique nucléaire, leurs valeurs se situant quelques ordres de grandeur en dessous.

On fait une synthèse des relations les plus utilisées :

$$\begin{aligned}W_{ij}(\nu - \nu_0) &= B_{ij} u g(\nu - \nu_0) \\ &= \sigma_{ij}(\nu - \nu_0) \phi = \sigma_{ij}(\nu - \nu_0) \frac{I}{h\nu} \\ \sigma_{ij}(\nu - \nu_0) &= \frac{W_{ij}}{\phi} = \frac{B_{ij} u g(\nu - \nu_0)}{I/h\nu} \quad \text{avec } I = c u \text{ pour une onde progressive.} \\ &= \frac{h\nu}{c} B_{ij} g(\nu - \nu_0)\end{aligned}$$

Remarque : ces relations ont été établies pour l'interaction d'un milieu avec une onde progressive d'intensité I . Celles exprimées en fonction de u restent valables dans un cadre plus général (onde stationnaire, superposition de plusieurs ondes de fréquences ν_i et densités volumiques d'énergie u_i).

4.2 Amplification d'une onde par un milieu à élargissement spectral homogène

Un milieu matériel est modélisé par un système à deux niveaux $E_2 - E_1 = h\nu_0$. Une onde se propage dans ce milieu, gagnant des photons par émission induite et en perdant d'autres par absorption. On va préciser quantitativement l'évolution de son intensité.

Si des conditions permettent d'obtenir plus d'émissions induites que d'absorptions, le nombre de photons augmente et l'onde gagne de l'énergie. Le milieu joue alors le rôle d'amplificateur de lumière.

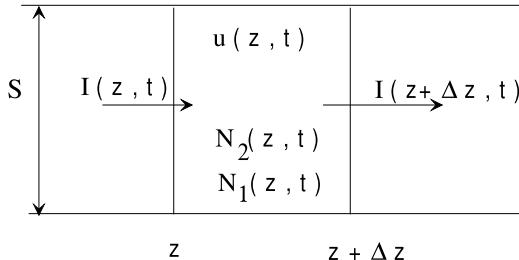
4.2.1 Bilan d'énergie

Soit une onde plane monochromatique de fréquence ν et d'intensité $I(z, t)$ se propageant dans le milieu selon la direction z , vers les z croissants⁸. La densité volumique d'énergie du rayonnement vaut $u(z, t) = I(z, t) / c$, avec $c = \frac{c_0}{n}$. Les populations des niveaux **1** et **2** au point z et à l'instant t sont notées respectivement $N_1(z, t)$ et $N_2(z, t)$, on a $E_2 - E_1 = h\nu_0$.

Le milieu est à élargissement spectral homogène, de largeur spectrale $\Delta\nu_h$.⁹

8. L'ensemble de la démonstration présentée ici est valable pour des ondes progressives mais le principe peut être adapté au cas des ondes stationnaires.

9. Cela signifie que l'interaction de ce milieu avec une onde monochromatique ν est caractérisée par une section efficace $\sigma_{ij}(\nu - \nu_0) = \frac{h\nu}{c} B_{ij} g(\nu - \nu_0)$ possédant la même valeur pour tous les atomes.



Il reste à définir le système physique sur lequel portera le bilan d'énergie. Il s'agit de l'**onde** se propageant vers les z croissants et délimitée par les positions z et $z + \Delta z$ à l'intérieur d'un cylindre d'axe z et de section S (volume $V = S \Delta z$). L'énergie de ce système à l'instant t vaut $u(z, t) S \Delta z$, elle varie par les photons entrant dans V en z , par ceux sortant en $z + \Delta z$, par ceux absorbés et par ceux produits par émission induite à l'intérieur de V . L'émission spontanée est isotrope dans l'espace et la fréquence du photon produit est distribuée sur un intervalle correspondant qualitativement à $[\nu_0 - \Delta\nu_h, \nu_0 + \Delta\nu_h]$. Pour ces deux raisons, un photon produit par émission spontanée a une probabilité négligeable d'avoir exactement la fréquence et la direction de l'onde, son énergie n'est pas à additionner à l'énergie du système tel qu'il a été défini.

On écrit le bilan d'énergie du système, entre les instants t et $t + \Delta t$.

- énergie du système à l'instant t : $u(z, t) S \Delta z$
- énergie du système à l'instant $t + \Delta t$: $u(z, t + \Delta t) S \Delta z$
- énergie s'ajoutant au système entre t et $t + \Delta t$:
 - énergie des photons traversant la section z entre t et $t + \Delta t$: la variation pour le système est :

$$S I(z, t) \Delta t \quad \text{par définition de l'intensité } I(z, t)$$

- énergie des photons traversant la section $z + \Delta z$ entre t et $t + \Delta t$: la variation pour le système est :

$$- S I(z + \Delta z, t) \Delta t$$

- énergie absorbée entre t et $t + \Delta t$ par les atomes situés sur le niveau **1** à l'intérieur du cylindre :
 - (énergie d'un photon) \times (proba. d'absorption par atome et seconde) \times (intervalle de temps)
 - \times (nombre d'atomes sur le niveau **1** par unité de volume) \times (volume)

Cette énergie est perdue par le système, sa contribution au bilan d'énergie s'écrit :

$$- h\nu W_{12} \Delta t N_1(z, t) S \Delta z$$

- énergie fournie à l'onde par l'émission induite des atomes situés sur le niveau **2** à l'intérieur du cylindre :

$$+ h\nu W_{21} \Delta t N_2(z, t) S \Delta z$$

L'énergie du système à l'instant $t + \Delta t$ est égale à celle à l'instant t plus les variations entre t et $t + \Delta t$ décomposées ci-dessus, soit :

$$\begin{aligned} u(z, t + \Delta t) S \Delta z &= u(z, t) S \Delta z - S [I(z + \Delta z, t) - I(z, t)] \Delta t \\ &\quad + h\nu \Delta t [W_{21} N_2(z, t) - W_{12} N_1(z, t)] S \Delta z \end{aligned}$$

En utilisant les relations :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u(z, t + \Delta t) &=& u(z, t) + \frac{\partial u}{\partial t}(z, t) \Delta t \\ I(z + \Delta z, t) &=& I(z, t) + \frac{\partial I}{\partial z}(z, t) \Delta z \\ W_{12} &=& \frac{g_2}{g_1} W_{21} \quad (W_{21} \text{ désigne la proba. par sec. et par at. pour l'ém. induite}) \\ W_{21} &=& \sigma_{21} \frac{I}{h\nu} \quad (\sigma_{21} \text{ désigne la section efficace d'ém. induite}) \end{array} \right.$$

le bilan d'énergie devient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\partial I}{\partial z} + h\nu \left[N_2(z, t) - \frac{g_2}{g_1} N_1(z, t) \right] \sigma_{21} \frac{I}{h\nu} \\ \frac{1}{I} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial z} \right) &= \sigma_{21} \left[N_2(z, t) - \frac{g_2}{g_1} N_1(z, t) \right]\end{aligned}$$

A partir de cette expression, on définit :

— la **différence de population** $\Delta N(z, t)$:

$$\Delta N(z, t) = N_2(z, t) - \frac{g_2}{g_1} N_1(z, t)$$

— le **coefficient d'amplification** α de l'onde.

$$\alpha = \frac{1}{I} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial z} \right) \quad [\alpha] = \text{m}^{-1}$$

ou, en l'écrivant sous la forme d'une équation en $I(z, t)$:

$$\alpha = \frac{1}{I} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial z} \right)$$

Synthèse :

Pour un milieu à élargissement spectral homogène, l'interaction onde-matière possède une section efficace $\sigma_{21}(\nu - \nu_0)$ identique pour tous les atomes.

L'onde progressive traversant ce milieu voit son intensité varier suivant **l'équation d'évolution de l'intensité** $\alpha = \frac{1}{I} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial z} \right)$.

Le coefficient d'amplification $\alpha(z, t)$ d'une onde de fréquence ν est proportionnel à la différence de population avec :

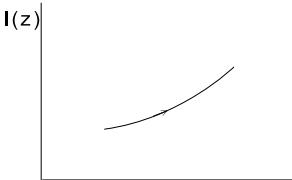
$$\alpha(z, t) = \sigma_{21}(\nu - \nu_0) \Delta N(z, t).$$

Remarque : pour un système à deux niveaux non dégénérés, $g_1 = g_2$, $\sigma_{21} = \sigma$ et la différence de population s'écrit plus simplement $\Delta N(z, t) = N_2(z, t) - N_1(z, t)$.

4.2.2 Coefficient d'amplification en régime stationnaire. Inversion de population

Lorsque l'intensité et les populations ne dépendent pas du temps, le système (onde + amplificateur) est en régime stationnaire ($\frac{\partial u(z,t)}{\partial t} = 0$). Ses propriétés ne dépendent plus que de z et l'équation d'évolution de l'intensité se simplifie en :

$$\alpha(z) = \frac{1}{I(z)} \frac{dI}{dz}$$



Le coefficient d'amplification s'interprète alors comme une variation relative d'intensité par unité de longueur, appelée aussi gain par unité de longueur.

On a la propriété :

$$\alpha(z) = \sigma_{21}(\nu - \nu_0) \Delta N(z)$$

Lorsque α est positif, $\frac{dI}{dz} = \alpha I$ est positif et l'intensité de l'onde augmente au cours de sa propagation : l'onde s'amplifie.

Le milieu est donc amplificateur si et seulement si la différence de population $\Delta N(z) = N_2(z) - \frac{g_2}{g_1} N_1(z)$ est positive. Cette situation est appelée **inversion de population**.

* Interprétation physique.

On revient au bilan d'énergie établi pour le cylindre $S \Delta z$. L'énergie transférée de l'onde vers le milieu par absorption pendant Δt vaut :

$$\begin{aligned}& h\nu W_{12} N_1 S \Delta z \Delta t \\ &= h\nu W_{21} \frac{g_2}{g_1} N_1 S \Delta z \Delta t\end{aligned}$$

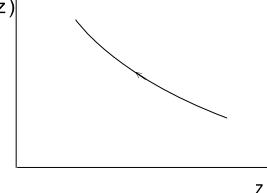
L'énergie transférée du milieu vers l'onde par émission induite pendant Δt vaut :

$$h\nu W_{21} N_2 \Delta t S \Delta z$$

En situation d'inversion de population $\Delta N > 0$ donc $N_2 > \frac{g_2}{g_1} N_1$, le transfert d'énergie est plus important dans le sens (milieu \rightarrow onde) que dans le sens inverse : il y a amplification de l'onde entre les points z et $z + \Delta z$. Il faut noter que cet état d'inversion de population dans le milieu est possible si on lui a communiqué de l'énergie par ailleurs pour porter un nombre suffisant d'atomes sur le niveau **2**, c'est le rôle de ce qu'on appelle le **pompage** du milieu.

* Remarque : la relation $\alpha = \sigma_{21} \Delta N = \frac{1}{I} \frac{dI}{dz}$ a été démontrée ici pour une onde se propageant vers les z croissants. Dans le cas inverse, la démonstration conduit à :

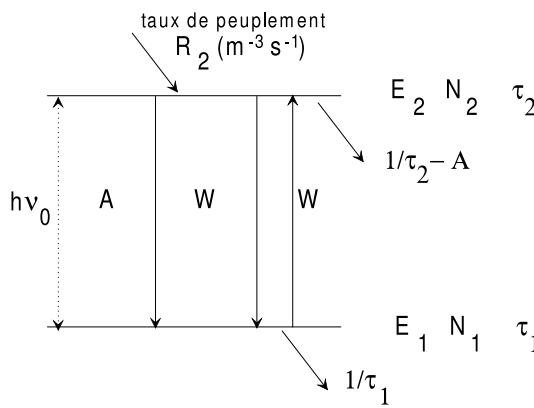
$$\alpha = \frac{1}{I} \left(-\frac{dI}{dz} \right) \text{ avec la propriété } \alpha = \sigma_{21} \Delta N$$



On retrouve que $\Delta N > 0$ entraîne une augmentation de l'intensité, lors de sa propagation vers les z négatifs.

4.2.3 Saturation de l'amplification

Soit un milieu amplificateur schématisé par un système à deux niveaux, avec les populations N_1 et $N_2 > N_1$ produites par un pompage constant. Ce milieu est traversé par une onde de fréquence ν proche de la résonance ν_0 . Il y a inversion de population donc plus d'émissions induites **2** \rightarrow **1** que d'absorptions **1** \rightarrow **2**. Par conséquent, l'interaction avec l'onde a tendance à réduire N_2 et à augmenter N_1 . On montrera que cela réduit la différence de population ΔN et le coefficient d'amplification $\alpha = \sigma \Delta N$. L'amplification devient moins efficace, ce phénomène est appelé **saturation de l'amplification**. Elle va être étudiée à partir d'un exemple en régime stationnaire.



Notations et propriétés :

Milieu à élargissement spectral homogène, $\alpha = \sigma \Delta N$ avec la même valeur pour tous les atomes.

Déférence de population $\Delta N(z) = N_2(z) - \frac{g_2}{g_1} N_1(z)$. Probabilité par seconde et par atome pour l'émission induite : $W = \sigma(\nu - \nu_0) \frac{1}{h\nu}$. Celle pour l'absorption s'en déduit et vaut $W_{12} = \frac{g_2}{g_1} W$.

R_2 : taux de peuplement de **2** (appelé aussi taux de pompage). $[R_2] = \text{m}^{-3} \cdot \text{s}^{-1}$.

τ_2 : durée de vie de **2**, avec $\frac{1}{\tau_2}$ égal à la somme des probabilités par seconde pour les processus spontanés partant de **2**.

A : probabilité par seconde et par atome pour l'émission spontanée **2** \rightarrow **1**

$(1/\tau_2 - A)$: probabilité par seconde et par atome pour les autres désexcitations spontanées depuis **2**.

Le terme traduisant le bilan entre émission induite et absorption s'écrit $WN_2 - W_{12}N_1 = W(N_2 - \frac{g_2}{g_1}N_1) = W\Delta N$. On pourra le faire apparaître directement sous cette forme dans les équations d'évolution des populations.

$$\begin{aligned} \frac{dN_2}{dt} &= R_2 - \frac{N_2}{\tau_2} - WN_2 + W_{12}N_1 \\ &= R_2 - \frac{N_2}{\tau_2} - W\Delta N \\ \frac{dN_1}{dt} &= AN_2 - \frac{N_1}{\tau_1} + W\Delta N \end{aligned}$$

En régime stationnaire, $\frac{dN_2}{dt} = \frac{dN_1}{dt} = 0$. La discussion se poursuit dans le cas $g_1 = g_2$ pour lequel $\Delta N =$

$N_2 - N_1$. On reporte $N_1 = N_2 - \Delta N$ dans la seconde équation pour éliminer N_1 et obtenir un système de deux équations aux deux inconnues N_2 et ΔN .

$$\begin{cases} \frac{1}{\tau_2} N_2 + W \Delta N = R_2 & (1') \\ (A - \frac{1}{\tau_1}) N_2 + (W + \frac{1}{\tau_1}) \Delta N = 0 & (2') \end{cases}$$

Le déterminant de ce système vaut

$$D = \begin{vmatrix} \frac{1}{\tau_2} & W \\ (A - \frac{1}{\tau_1}) & (W + \frac{1}{\tau_1}) \end{vmatrix} = W(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} - A) + \frac{1}{\tau_1 \tau_2} = \frac{1}{\tau_1 \tau_2} (1 + W(\underbrace{\tau_2 + \tau_1 - A \tau_1 \tau_2}_{\text{noté } \tau})).$$

Pour ce milieu, la différence de population en régime stationnaire s'écrit¹⁰ :

$$\Delta N = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{\tau_2} & R_2 \\ (A - \frac{1}{\tau_1}) & 0 \end{vmatrix}}{D} = \frac{R_2 \tau_1 \tau_2 (\frac{1}{\tau_1} - A)}{1 + W \tau}$$

On a introduit la notation $\tau = \tau_1 \tau_2 (\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} - A)$ avec $\frac{1}{\tau_2} \geq A$ donc $\tau > 0$, qu'on appellera temps de récupération du système.

La valeur de ΔN obtenue pour $I = 0$ ($\Leftrightarrow W = \sigma(\nu - \nu_0) \frac{I}{h\nu} = 0$) est notée ΔN^0 . Il vient :

$$\begin{aligned} \Delta N^0 &= R_2 \tau_1 \tau_2 \left(\frac{1}{\tau_1} - A \right) \\ \text{d'où l'écriture} \quad \Delta N &= \frac{\Delta N^0}{1 + W \tau} \end{aligned}$$

La valeur de l'intensité I de l'onde donc celle de la probabilité d'interaction W interviennent dans celle de ΔN , qu'on appellera 'différence de population saturée par l'onde'. La quantité ΔN^0 est indépendante de I , W , donc appelée 'différence de population non saturée'. ΔN^0 désigne physiquement la valeur de la différence de population lorsque l'onde est trop peu intense pour modifier de manière significative la répartition des atomes entre les niveaux **1** et **2**.

* Interprétation physique de la condition $\Delta N > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\tau_1} > A$ pour ce système.

ΔN est du signe de ΔN^0 . Il y a inversion de population $\Delta N > 0$ pour ce système si $\Delta N^0 > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\tau_1} > A$.

Pour $W\tau \approx 0$, on compare le nombre $\frac{N_1}{\tau_1}$ d'atomes quittant **1** à celui $A N_2$ des atomes y arrivant. Ils sont égaux en régime stationnaire et la condition $\frac{1}{\tau_1} > A$ entraîne bien $N_1 < N_2$ donc $\Delta N > 0$.

On précise les conséquences de la saturation de ΔN sur le coefficient d'amplification $\alpha(z) = \frac{1}{I(z)} \frac{dI}{dz}$. Dans un milieu à élargissement spectral homogène¹¹, $\alpha = \sigma \Delta N$ donc

$$\alpha = \sigma \frac{\Delta N^0}{1 + W\tau} = \frac{\alpha^0}{1 + W\tau} \quad \text{en notant } \alpha^0 = \sigma \Delta N^0.$$

α^0 est la valeur du coefficient d'amplification du milieu lorsque l'onde I est absente ou très faible ($W\tau \ll 1$), on le note **coefficent d'amplification non saturée**.

Pour une onde plus intense, W augmente donc α diminue : c'est le phénomène de saturation de l'amplification. α est appelé "**coefficent d'amplification saturée**". Il tend vers zéro lorsque $W\tau \gg 1$.

Interprétation physique : le système étudié est en régime stationnaire. Un taux de pompage R_2 donné porte chaque seconde un certain nombre d'atomes sur **2** ce qui revient à y stocker une certaine quantité d'énergie potentiellement transférable à l'onde par émission induite. Cette quantité d'énergie est apte à produire une augmentation d'intensité, mais qui en valeur relative se rapproche de 0 lorsque I devient très forte.

L'amplification pourra être efficace si I est faible, beaucoup moins pour une intensité trop forte.

10. La méthode utilisée ici pour déterminer ΔN s'appelle 'méthode du déterminant' ou 'méthode de Kramer'. On peut aussi obtenir le résultat par combinaison linéaire des équations pour éliminer N_2 .

11. où la section efficace σ possède la même valeur pour tous les atomes

4.2.4 Intensité de saturation

On a calculé pour l'exemple précédent $\frac{\Delta N}{\Delta N^0} = \frac{1}{1+W\tau}$. L'efficacité de l'interaction onde matière est liée à l'intensité de l'onde par les relations $W = B\frac{I}{c}g(\nu - \nu_0)$ ou $W = \sigma(\nu - \nu_0) \frac{I}{h\nu}$ (Cf §4.1.8). Pour ce milieu à élargissement spectral homogène, l'**intensité de saturation** I_s est définie en régime stationnaire par l'écriture :

$$\frac{\Delta N}{\Delta N^0} = \frac{1}{1 + \frac{I}{I_s}}$$

En utilisant la relation $W = \sigma(\nu - \nu_0) \frac{I}{h\nu}$, on identifie $\frac{I}{I_s} = W\tau = \sigma(\nu - \nu_0) \frac{I}{h\nu} \tau$ d'où :

$$I_s = \frac{h\nu_0}{\sigma(\nu - \nu_0) \tau}$$

On peut aussi utiliser $W = B u g(\nu - \nu_0) = B \frac{I}{c} g(\nu - \nu_0)$ pour obtenir :

$$I_s = \frac{c}{B g(\nu - \nu_0) \tau}$$

Le coefficient d'amplification $\alpha = \sigma \Delta N$ prend alors la forme :

$$\alpha = \frac{\alpha^0}{1 + \frac{I}{I_s}} \text{ qu'on appellera } \textbf{relation de saturation}$$

où les paramètres α^0 et I_s contiennent toute l'information sur la capacité du milieu à amplifier l'onde. Une onde d'intensité $I \ll I_s$ voit le coefficient d'amplification α^0 . Par contre, une onde de forte intensité annule le coefficient d'amplification et traverse le milieu sans variation d'intensité.

Interprétation microscopique : une onde d'intensité forte induit beaucoup d'émissions stimulées. L'émission induite domine largement l'émission spontanée qui devient négligeable. Le régime stationnaire se traduit alors par presque autant d'émissions induites que d'absorptions.

$$W_{12}N_1 = W_{21}N_2 \Leftrightarrow W_{21}\frac{g_2}{g_1}N_1 = W_{21}N_2 \Leftrightarrow W_{21} \Delta N = 0$$

et par conséquent $\Delta N \approx 0$ associé au fait qu'avec autant d'absorption que d'émission induite l'onde traverse le milieu à intensité presque constante.

Important : la relation $\tau = \tau_1 + \tau_2 - A\tau_1\tau_2$ a été obtenue pour le système à deux niveaux décrit ci-dessus. Pour un système quelconque, il faudra écrire les équations d'évolution, les résoudre pour déterminer la différence de population ΔN en régime stationnaire. Il reste à en déduire I_s par l'identification avec la relation de définition¹², en régime stationnaire

$$\frac{\Delta N}{\Delta N^0} = \frac{1}{1 + \frac{I}{I_s}}$$

Plusieurs exemples sont traités en Travaux Dirigés. Un cas conduisant à des calculs particulièrement longs (hors programme) est présenté en annexe §4.3.

4.2.5 Gain total du milieu amplificateur

On choisit pour milieu amplificateur un barreau cristallin ou une cellule à gaz, la longueur totale étant ℓ (entrée en $z = 0$, sortie en $z = \ell$). Le **gain total de l'amplificateur** est défini par

$$G = \frac{I(\ell)}{I(0)}$$

12. Remarque : pour un système à p niveaux, les p équations d'évolution en régime stationnaire plus l'équation $\Delta N = N_2 - \frac{g_2}{g_1}N_1$ constituent un système linéaire de $p+1$ équations à $p+1$ inconnues (les p populations et ΔN) où W n'apparaît qu'en facteur de ΔN . Le déterminant D est donc une fonction linéaire de W . La valeur de ΔN est le rapport d'un déterminant indépendant de W et de D , d'où la généralisation de la forme $\Delta N = \frac{\Delta N^0}{1+W\tau}$ avec ΔN^0 indépendant de W .

Le gain total est évalué en régime stationnaire pour un milieu amplificateur où le pompage produit un coefficient d'amplification non saturé uniforme α^0 . Ce coefficient est fonction du pompage, supposé assez fort pour avoir $\alpha^0\ell \gg 1$. Les propriétés de l'interaction de l'onde avec le milieu sont contenues dans le paramètre I_s . La variation d'intensité dans le cristal est régie par l'équation

$$\alpha = \frac{1}{I} \frac{dI}{dz}$$

avec $\alpha = \frac{\alpha^0}{1 + \frac{I}{I_s}}$ lorsque σ_{21} est identique pour tous les atomes. On intègre l'équation

$$\frac{1}{I} \frac{dI}{dz} = \frac{\alpha^0}{1 + \frac{I}{I_s}}$$

par la méthode de séparation des variables, entre l'entrée de l'amplificateur ($z = 0, I = I(0)$) et sa sortie ($z = \ell, I = I(\ell)$).

$I(0) \quad I(z) \quad I(\ell)$

$z = 0 \quad z \quad z = \ell$

amplificateur

$$\int_{I(0)}^{I(\ell)} \left(\frac{1}{I} + \frac{1}{I_s} \right) dI = \int_0^\ell \alpha^0 dz$$

$$\left[\ln(I) + \frac{I}{I_s} \right]_{I(0)}^{I(\ell)} = [\alpha^0 z]_0^\ell$$

d'où la relation

$$\ln \left(\frac{I(\ell)}{I(0)} \right) + \frac{I(\ell) - I(0)}{I_s} = \alpha^0 \ell$$

Le gain total de l'amplificateur $G = \frac{I(\ell)}{I(0)}$ est donné par l'équation implicite¹³ :

$$\ln G + \frac{I(0)}{I_s} (G - 1) = \alpha^0 \ell$$

L'expression de G devient explicite dans les cas limites d'une faible ou d'une forte intensité. Pour $I(0) \ll I_s$, $G = \exp \alpha^0 \ell \gg 1$ alors que pour $I(0) \gg I_s$, $\ln G \ll \frac{I(0)}{I_s} (G - 1)$ d'où $G = 1 + \alpha^0 \ell \frac{I_s}{I(0)} \simeq 1$ qui, pour $I(0)$ assez grand, tend vers 1. Dans ce dernier cas, le milieu a perdu toute propriété d'amplification à cause de la saturation du gain : l'onde impose $\Delta N = 0$ donc $\alpha \simeq 0$; le milieu devient comme transparent pour l'onde.

Synthèse :

Le passage pour $I(0)$ d'une valeur faible à forte par rapport à I_s fait décroître G de $\exp \alpha^0 \ell$ à 1, c'est le phénomène de saturation de l'amplification, qui se traduit de deux manières : au niveau local, le coefficient d'amplification α tend vers 0 ; au niveau macroscopique, le gain total G de l'amplificateur tend vers 1.

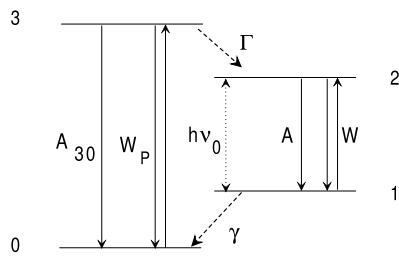
13. Equation implicite signifie qu'on ne peut pas la transformer pour exprimer explicitement G en fonction de ℓ . Une manière simple d'évaluer G en fonction de ℓ est de tracer ℓ en fonction de G puis de mesurer graphiquement G en fonction de ℓ (ou d'échanger les colonnes d'un tableau de valeurs).

4.3 Annexe

Etude d'un système amplificateur à 4 niveaux pompé optiquement

On considère un milieu matériel représenté par un système à 4 niveaux d'énergie possédant les caractéristiques suivantes :

- les quatre niveaux sont non dégénérés, la population totale est notée N .
- le milieu est amplificateur pour la transition $2 \leftrightarrow 1$. L'émission spontanée et l'émission induite ont les probabilités par seconde et par atome A et W . L'élargissement spectral est purement homogène. Le profil spectral de la transition est $g(\nu - \nu_0)$.
- Le pompage est assuré sur la transition radiative $3 \leftrightarrow 0$ par une onde lumineuse intense d'énergie proche de $h\nu_0$ ('pompage optique'). L'émission spontanée et l'émission induite ont les probabilités par unité de temps et par atome A_{30} et W_P . Le pompage est assez puissant pour avoir $W_P \gg A_{30}$.
- la transition $3 \leftrightarrow 2$ est non radiative (désexcitation par collisions dans un gaz, couplage avec les vibrations pour un cristal). Sa probabilité par seconde Γ est très grande de sorte qu'un atome arrivant sur le niveau 3 repart immédiatement vers le niveau 2 seulement ($(A_{30} + W_P) \ll \Gamma, N_3 \ll N_0$).
- la transition $1 \leftrightarrow 0$ est non radiative. Sa probabilité par seconde est notée γ .



En l'absence de pompage ($W_P=0$), tous les atomes sont sur le niveau 0. Le système est fermé, $N_0 + N_1 + N_2 + N_3 = N$. La différence de population est notée $\Delta N = N_2 - N_1$. L'objectif est de calculer la différence de population **en régime stationnaire**, en fonction du pompage et des paramètres physiques du système.

* Équations d'évolution des populations

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{dN_3}{dt} & = & +W_P N_0 - W_P N_3 - A_{30} N_3 - \Gamma N_3 \\ \frac{dN_2}{dt} & = & +\Gamma N_3 - W \Delta N - A N_2 \\ \frac{dN_1}{dt} & = & +W \Delta N + A N_2 - \gamma N_1 \\ \frac{dN_0}{dt} & = & -W_P N_0 + W_P N_3 + A_{30} N_3 + \gamma N_1 \end{array} \right.$$

Remarque : pour un système fermé, $N_0 + N_1 + N_2 + N_3 = N$ donc $\frac{dN_0}{dt} + \frac{dN_1}{dt} + \frac{dN_2}{dt} + \frac{dN_3}{dt} = 0$. La présentation 'en tableau' permet de vérifier que tout terme décrivant le départ d'un atome depuis un niveau se retrouve avec le signe opposé sur un autre niveau.

* Simplifications

On simplifie les équations d'évolution en tenant compte des propriétés physiques du système

- $(A_{30} + W_P) \ll \Gamma \Rightarrow (W_P + A_{30})N_3 \ll \Gamma N_3$ donc $\frac{dN_3}{dt} = +W_P N_0 - \Gamma N_3$
- $A_{30} \ll W_P \Rightarrow A_{30}N_3 \ll W_P N_3$ donc $\frac{dN_0}{dt} = -W_P N_0 - W_P N_3 + \gamma N_1$
- De plus, $N_3 \ll N_0$ donc $\frac{dN_0}{dt} = -W_P N_0 + \gamma N_1$
- $N_3 \ll N_0$ donc $N_0 + N_1 + N_2 = N$

* Synthèse des équations en régime stationnaire, compte tenu des simplifications

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 0 & = & +W_P N_0 - \Gamma N_3 \\ 0 & = & +\Gamma N_3 - W \Delta N - A N_2 \\ 0 & = & +W \Delta N + A N_2 - \gamma N_1 \\ N & = & N_0 + N_1 + N_2 \\ \Delta N & = & N_2 - N_1 \end{array} \right.$$

* Calcul de la différence de population

On veut calculer $\Delta N = N_2 - N_1$ en fonction du nombre total d'atomes N du système. Pour cela, on transforme les deux équations issues de $\frac{dN_2}{dt}$ et $\frac{dN_1}{dt}$ pour qu'elles constituent un système de deux équations fonctions des deux inconnues N_2 et ΔN . Il faut exprimer N_3 , N_1 et N_0 en fonction de N , N_2 et ΔN .

- on remplace N_1 par $(N_2 - \Delta N)$
- on remplace N_0 par $(N - N_2 - N_1) = (N - N_2 - N_2 + \Delta N) = (N + \Delta N - 2N_2)$
- on remplace ΓN_3 par $W_P N_0 = W_P (N + \Delta N - 2N_2)$

Les équations (2) et (3) du système deviennent

$$\begin{cases} A N_2 + W \Delta N = W_P N_0 = W_P (N + \Delta N - 2N_2) \\ A N_2 + W \Delta N = \gamma N_1 = \gamma (N_2 - \Delta N) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (A + 2W_P) N_2 + (W - W_P) \Delta N = W_P N \\ (A - \gamma) N_2 + (W + \gamma) \Delta N = 0 \end{cases}$$

$$\text{Le déterminant vaut } D = \begin{vmatrix} (A + 2W_P) & (W - W_P) \\ (A - \gamma) & (W + \gamma) \end{vmatrix} = (A \gamma + W_P \gamma + W_P A) + (\gamma + 2W_P) W$$

$$\Delta N = \frac{\begin{vmatrix} (A + 2W_P) & W_P N \\ (A - \gamma) & 0 \end{vmatrix}}{D} = \frac{(\gamma - A) W_P N}{(\gamma + 2W_P) W + (A \gamma + W_P \gamma + W_P A)}$$

$$\Delta N = \frac{(\gamma - A) W_P N}{(A \gamma + W_P \gamma + W_P A)} \frac{1}{\left(1 + \frac{\gamma + 2W_P}{A \gamma + W_P \gamma + W_P A} W\right)}$$

* Interprétation

Le milieu est amplificateur si pour les photons de fréquence $\nu \approx \nu_{21}$ il se produit plus d'émissions induites que d'absorptions c'est-à-dire s'il y a inversion de population $\Delta N = N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1 > 0$. Le rôle du pompage est d'accumuler de l'énergie dans le milieu amplificateur sous forme d'inversion de population pour que celui-ci puisse ensuite transférer une fraction de cette énergie à l'onde laser.

Pour ce système, il y a inversion de population si $\gamma > A$, ce qui signifie que le niveau **1** se vide plus rapidement qu'il ne se remplit par émission spontanée depuis **2**.

Le système à 4 niveaux permet d'obtenir l'inversion de population sans condition sur le pompage W_P , contrairement à la plupart des autres systèmes.

* Différence de population non saturée et intensité de saturation

On exprime les caractéristiques du système en fonction de la puissance du pompage. Par définition, la différence de population non saturée ΔN^0 est la valeur de ΔN pour une intensité I laser nulle ($I = 0 \Leftrightarrow W = 0$).

$$\Delta N^0 = \frac{(\gamma - A) W_P}{(A \gamma + W_P \gamma + W_P A)} N$$

Pour un système à élargissement spectral homogène et en régime stationnaire, l'intensité de saturation I_s est définie par $\frac{\Delta N}{\Delta N^0} = \frac{1}{1 + \frac{I}{I_s}}$, avec $W(\nu - \nu_0) = \sigma(\nu - \nu_0) \frac{I}{h\nu}$ ou $W(\nu - \nu_0) = B u g(\nu - \nu_0)$. Dans le cas traité ici,

$$\frac{\Delta N}{\Delta N^0} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma + 2W_P}{A \gamma + W_P \gamma + W_P A} W}$$

il vient

$$I_s(\nu - \nu_0) = \frac{h\nu}{\sigma(\nu - \nu_0)} \frac{A \gamma + W_P \gamma + W_P A}{\gamma + 2W_P} \quad \text{ou} \quad I_s(\nu - \nu_0) = \frac{c}{B g(\nu - \nu_0)} \frac{A \gamma + W_P \gamma + W_P A}{\gamma + 2W_P}$$

* Coefficient d'amplification du système

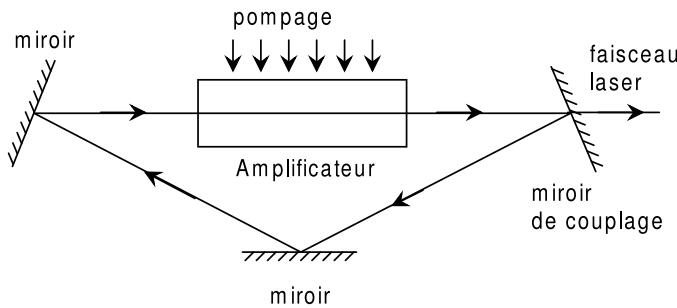
Le coefficient d'amplification non saturée est donné par $\alpha^0(\nu - \nu_0) = \sigma(\nu - \nu_0) \Delta N^0$. Le coefficient d'amplification saturée par l'onde d'intensité I vaut $\alpha(\nu - \nu_0) = \sigma(\nu - \nu_0) \Delta N$ qui, pour un système à élargissement homogène en régime stationnaire, se met sous la forme

$$\alpha(\nu - \nu_0) = \frac{\alpha^0(\nu - \nu_0)}{1 + \frac{I}{I_s(\nu - \nu_0)}}$$

Chapitre 5

INTRODUCTION À LA THÉORIE DU LASER

Les chapitres précédents ont précisé le fonctionnement d'un amplificateur de lumière, et le principe d'un résonateur optique stable qui permet d'une part de renvoyer la lumière de la sortie vers l'entrée de l'amplificateur afin d'établir une onde cohérente dans la cavité, d'autre part d'extraire le faisceau laser hors de la cavité.

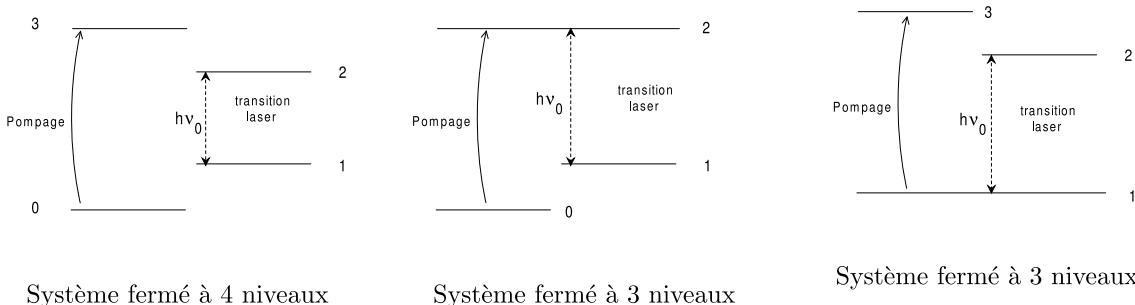


L'amplificateur peut jouer son rôle s'il y a inversion de population donc plus d'émissions induites que d'absorptions. Cette situation est réalisée grâce au 'pompage', qui sera illustré par plusieurs exemples. De plus, l'effet laser est possible si le gain de la lumière dans l'amplificateur est supérieur aux pertes de lumière dans la cavité, qui seront définies. Connaissant ces différents facteurs, on pourra évaluer l'intensité établie dans la cavité ou émise dans le faisceau laser, pour des systèmes fonctionnant en régime stationnaire ou produisant des impulsions.

5.1 Transition laser et pompage

* Systèmes de milieux amplificateurs :

De très nombreux niveaux atomiques interviennent dans le processus d'inversion de population mais une modélisation par un système à 3 ou 4 niveaux est généralement suffisante.

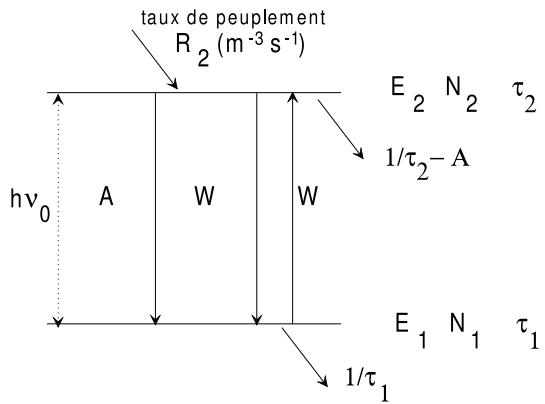


Par convention, l'amplification optique se fait sur la transition $2 \leftrightarrow 1$ donc le laser extrait possède la fréquence ν_{21} . On peut montrer facilement que le pompage optique d'un système fermé à deux niveaux ne permet pas d'obtenir l'inversion de population (voir TD n°4).

On peut par contre utiliser un système à deux niveaux avec des atomes provenant de niveaux plus excités non représentés, avec un taux de peuplement R_2 ($\text{m}^{-3} \cdot \text{s}^{-1}$). Ce système est de type ouvert. Le calcul réalisé pour ce système au paragraphe 4.2.3 du chapitre 'Principes de base des amplificateurs lasers' conduit à

$$\Delta N^0 = R_2 \tau_1 \tau_2 \left(\frac{1}{\tau_1} - A \right)$$

Dans ce cas également, la différence de population non saturée est proportionnelle à la puissance de pompage. Dans d'autres cas, la puissance de pompage doit dépasser un seuil pour que ΔN^0 devienne positif (inversion de population).



* Types de pompage :

De nombreuses méthodes de pompage sont utilisées, on en cite quelques unes.

- pompage optique : lampe flash, lampe à arc, diode laser ou autre laser.
- pompage électronique (collisions électrons-atomes) : décharge électrique continue ou radiofréquence, faisceau d'électrons accélérés
- pompage chimique : combustion chimique exothermique (flammes), formation par collision réactive de molécules directement dans un état excité (lasers à Excimère : $Ar + F \rightarrow ArF^*$ formé directement sur le niveau 2)
- pompage par injection de porteurs : courant traversant une jonction p-n dans un semiconducteur (diodes lasers)

D'une manière générale, ΔN^0 et α^0 sont des fonctions croissantes de la puissance de pompage.

Remarque : chaque niveau d'énergie se caractérise par des nombres quantiques. Une transition radiative est possible entre deux niveaux seulement à certaines conditions sur ces nombres quantiques (règles de sélection dipolaire électrique, cf cours Atomes et Molécules). C'est la raison pour laquelle certains systèmes peuvent être pompés optiquement et d'autres pas. Il existe des contraintes pour les transitions par collision mais elles sont en général moins restrictives.

5.2 Pertes de la cavité

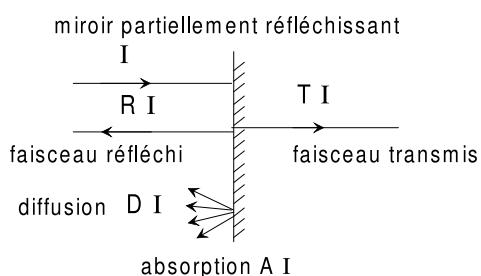
5.2.1 Analyse physique de l'origine des pertes

a) Pertes dues aux miroirs de la cavité

Les miroirs de la cavité engendrent des pertes par transmission, par absorption ou encore par diffusion.

Pour une intensité incidente I sur un miroir, les intensités réfléchies, transmises, absorbées, diffusées valent respectivement $\mathcal{R}I$, TI , AI et DI , par définition des coefficients de réflexion, transmission, absorption et diffusion de l'intensité. La conservation de l'énergie entraîne $\mathcal{R} + T + A + D = 1$.

Des coefficients \mathcal{R} et T tels que $\mathcal{R} + T \geq 0,999$ sont obtenus avec des miroirs à couches diélectriques¹. Les pertes par absorption sont généralement négligeables mais peuvent poser problème dans le cas des très fortes



1. Du type des couches anti-reflets sur les objectifs des appareils photographiques ou les lunettes.

puissances (chauffage et destruction du miroir). La diffusion est engendrée par les défauts de planéité du miroir. Ces défauts ont des dimensions de l'ordre de $\lambda/10$ ou $\lambda/20$.

Les pertes par transmission des miroirs sont bien contrôlées. Ce sont des pertes 'utiles' puisque la transmission non nulle d'un miroir est le plus souvent choisie pour extraire le faisceau laser de la cavité (coupleur de sortie).

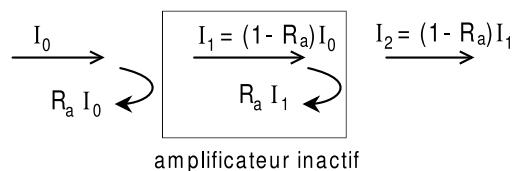
b) Pertes dues aux éléments optiques insérés dans la cavité

Les éléments optiques présents à l'intérieur d'une cavité peuvent produire d'autres pertes pour l'onde la parcourant.

On peut choisir de décrire explicitement leur action sur le faisceau, comme par exemple dans le cas de la réflexion sur les fenêtres d'entrée du milieu amplificateur.

On note R_a le coefficient de réflexion de la face d'entrée. Les équations de Maxwell montrent que celui de la face de sortie possède la même valeur. La fraction de l'intensité qui reste dans le faisceau malgré la réflexion vaut $(1 - R_a)$ pour chaque interface. Pour l'exemple schématisé ci-contre, l'intensité transmise par l'amplificateur inactif vaut $I_2 = (1 - R_a)^2 I_0$.

Les faces peuvent être traitées anti-reflet pour minimiser R_g .



On suppose à ce stade que le milieu lui-même est sans action sur les photons ('amplificateur inactif'). Exemple : un système pour lequel la transition laser se fait entre deux états excités est transparent en l'absence de pompage.

Dans certains cas, on ajoute dans la cavité un filtre en fréquence (filtre spectral) qui transmet une fraction $T_f(\nu)$ de l'intensité. $T_f(\nu)$ est le facteur de transmission du filtre pour l'intensité, fonction qui peut être étroite autour de certaines fréquences².

c) Autres pertes (absorption par l'air, diffusion par des poussières, ...)

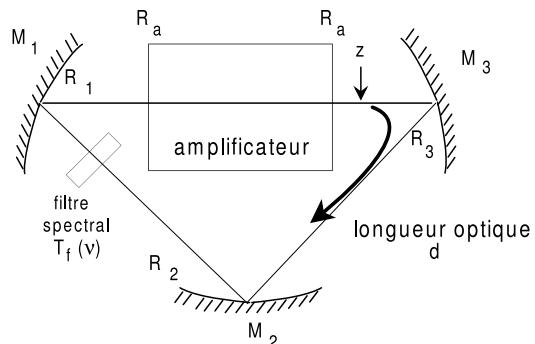
Il est possible de prendre en compte des pertes même si on ne précise pas exactement à quel endroit elles se produisent dans la cavité.

On donne pour cela un coefficient global noté η traduisant les pertes relatives d'intensité 'autres que pour les causes explicitement décrites', avec la propriété suivante : pour un parcours complet de la cavité à partir d'un point où l'intensité est notée $I(0)$, l'intensité perdue à cause de ces pertes vaut $\eta I(0)$, l'intensité restant dans le faisceau malgré ces pertes vaut après un parcours complet de la cavité $(1 - \eta)I(0)$.

Remarque : en général, les coefficients η , \mathcal{R}_i et T_i sont donnés en pourcentage.

Exemple : on considère la cavité schématisée ci-contre. L'amplificateur est inactif. Un paquet de photons d'intensité $I(z, t)$ part de z pour s'y retrouver un tour plus tard avec l'intensité $I(z, t + \frac{d}{c_0})$. Les causes de pertes sont les suivantes :

- * Miroirs : les coefficients de réflexion R_1 , R_2 et R_3 .
 - * Faces d'entrée et de sortie de l'amplificateur : coefficient de réflexion R_a .
 - * Filtre spectral de facteur de transmission $T_f(\nu)$ pour l'intensité.
 - * Pertes relatives d'intensité autres : η .



2. Exemple : filtres interférentiels utilisés dans le TP 'effet Zeeman' pour isoler l'une des transitions émises par la lampe spectrale à vapeur de cadmium ; L'interféromètre de Fabry-Perot transmet un peigne de fréquences appelées 'modes spectraux' de l'instrument.

$$\begin{aligned}
 I(z, t + \frac{d}{c_0}) &= I(z, t) \\
 &\quad \times \underbrace{R_3}_{\substack{\text{fraction de l'intensité} \\ \text{restant dans le faisceau compte tenu} \\ \text{de la réflexion sur } M_3}} \quad \times R_2 \\
 &\quad \times \underbrace{T_f(\nu)}_{\substack{\text{fraction de l'intensité} \\ \text{restant dans le faisceau compte tenu} \\ \text{du filtre spectral}}} \quad \times R_1 \\
 &\quad \times \underbrace{(1 - R_a)}_{\substack{\text{fraction de l'intensité} \\ \text{restant dans le faisceau compte tenu} \\ \text{des pertes par réflexion sur une face} \\ \text{de l'amplificateur}}} \quad \times (1 - R_a) \\
 &\quad \times \underbrace{(1 - \eta)}_{\substack{\text{fraction de l'intensité} \\ \text{restant dans le faisceau} \\ \text{malgré les pertes 'autres'}}}
 \end{aligned}$$

5.2.2 Caractérisation quantitative des pertes de la cavité

a) Longueur optique d'une cavité

Soit une cavité en anneau contenant à la position z des éléments optiques d'indice $n(z)$ différent de 1. Le temps d'un parcours complet de cette cavité s'écrit

$$\Delta t = \int_{\text{cavité}} \frac{dz}{c} = \int_{\text{cavité}} \frac{n(z) dz}{c_0} = \frac{\int_{\text{cavité}} n(z) dz}{c_0}$$

On utilisera par convention la notation suivante :

Pour la cavité **en anneau**, $d = \int_{\text{cavité}} n(z) dz$ est la **la longueur optique totale** de la cavité. On a alors $\Delta t = \frac{d}{c_0}$.

Pour une cavité **linéaire**, on note d la longueur optique **d'une extrémité à l'autre de la cavité**. Avec cette convention, la durée d'un parcours complet de la cavité (aller-retour) s'écrit $\Delta t = \frac{2d}{c_0}$.

b) Coefficient de pertes par unité de longueur du milieu amplificateur

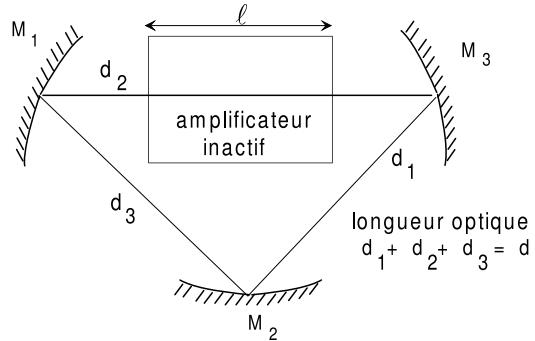
On va montrer que le laser fonctionne si l'amplification sur un parcours complet de cavité est supérieure aux pertes sur le même parcours. Dans la mesure où le coefficient d'amplification α a un sens sur la longueur ℓ de l'amplificateur, on caractérise les pertes **en les rapportant elles aussi à la longueur du milieu amplificateur**. Le **coefficient de pertes par unité de longueur du milieu amplificateur**, noté α_P , est défini de la manière suivante :

- cavité en anneau de longueur optique d .

Le milieu amplificateur est inactif. Sa longueur est notée ℓ . Un paquet de photons effectue un parcours complet de la cavité. On écrit :

$$I(z, t + \frac{d}{c_0}) = I(z, t) \exp -(\alpha_P \ell)$$

par définition de α_P , le coefficient de pertes par unité de longueur du milieu amplificateur.

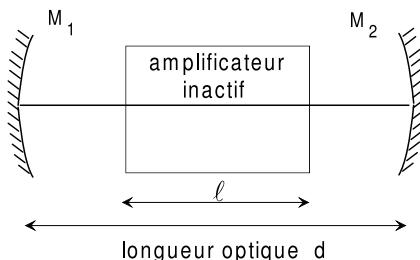


- cavité linéaire de longueur optique totale $2d$.^a

Le temps d'un parcours complet de cavité vaut $\frac{2d}{c_0}$. Les photons traversent l'amplificateur à l'aller puis au retour donc sur une longueur 2ℓ . On pose par définition :

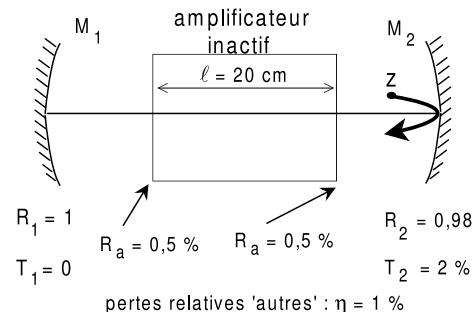
$$I(z, t + \frac{2d}{c_0}) = I(z, t) \exp -(\alpha_P 2\ell)$$

a. On rappelle qu'on a choisi de désigner par d la longueur optique d'un miroir d'extrémité à l'autre.



Exemple pour une cavité linéaire :

Miroir $M_1 : R_1 = 1, T_1 = 0$; miroir $M_2 : R_2 = 0,98, T_2 = 0,02$; coefficient de réflexion de chaque face de l'amplificateur : $R_a = 0,005$; pertes relatives 'autres que les miroirs et les faces de l'amplificateur' : $\eta = 0,01$; longueur du milieu amplificateur : $\ell = 20 \text{ cm}$. Ces coefficients sont souvent donnés en pourcentage ($R_2 = 98 \%$, $T_2 = 2 \%$, ..., $\eta = 1 \%$).



Soit $I(z, t)$ l'intensité juste après la sortie de l'amplificateur supposé inactif. L'intensité au même point après un parcours complet de la cavité s'écrit :

$$\begin{aligned} I(z, t + \frac{2d}{c_0}) &= I(z, t) (1 - \eta) R_2 (1 - R_a)^2 R_1 (1 - R_a)^2 \\ &= I(z, t) R_1 R_2 (1 - R_a)^4 (1 - \eta) \\ \text{avec par définition } I(z, t + \frac{2d}{c_0}) &= I(z, t) \exp -2 \alpha_P \ell \end{aligned}$$

On en déduit le coefficient de pertes par unité de longueur du milieu amplificateur :

$$\alpha_P = -\frac{1}{2\ell} \ln (R_1 R_2 (1 - \eta) (1 - R_a)^4)$$

Si $T_1 = 1 - R_1, T_2 = 1 - R_2, \eta$ et R_a sont petits devant 1, on peut transformer cette expression puis utiliser la relation $\ln(1 + \epsilon) \approx \epsilon$ pour $\epsilon \ll 1$ (développement limité à l'ordre 1 en ϵ) :

$$\begin{aligned} \ln (R_1 R_2 (1 - \eta) (1 - R_a)^4) &= \ln(1 - T_1) + \ln(1 - T_2) + \ln(1 - \eta) + 4 \ln(1 - R_a) \\ &\approx -(T_1 + T_2 + \eta + 4R_a) \end{aligned}$$

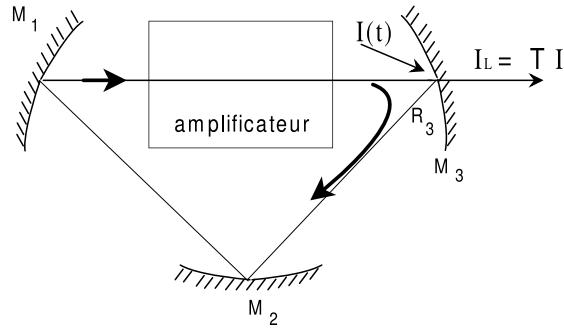
$$\text{d'où } \alpha_P \approx \frac{T_1 + T_2 + \eta + 4R_a}{2\ell}$$

Application numérique : $\alpha_P = 0,125 \text{ m}^{-1}$ avec le développement limité, $\alpha_P = 0,126 \text{ m}^{-1}$ sans simplification.

On remarque que $\alpha_P \ell = 0,025$ d'où $\exp -\alpha_P \ell = 0,98$. L'intensité est quasi uniforme sur un parcours complet de la cavité. Cette situation $\alpha_P \ell \ll 1$ est appelée 'régime à pertes faibles'.

5.2.3 Durée de vie des photons dans la cavité

On s'intéresse à une cavité en anneau. L'intensité juste avant le miroir de sortie M_3 est notée $I(t)$. L'intensité laser extraite de la cavité vaut $I_L(t) = T I(t)$, où T désigne le facteur de transmission du miroir M_3 . Lorsqu'on coupe l'amplification, les photons accumulés dans la cavité en sortent progressivement, $I_L(t)$ décroît avec un temps caractéristique qu'on va relier à α_P pour des pertes faibles ($\alpha_P \ell \ll 1$).



Pour un parcours complet de cavité partant de M_3 , l'intensité vérifie :

$$\begin{aligned} I(t + \frac{d}{c_0}) &= I(t) \exp -(\alpha_P \ell) \\ &\simeq I(t) (1 - \alpha_P \ell) \\ I(t + \frac{d}{c_0}) - I(t) &= -\alpha_P \ell I(t) \end{aligned}$$

$\alpha_P \ell \ll 1$ fait qu'il s'agit d'une petite variation d'intensité d'où $I(t + \frac{d}{c_0}) - I(t) = \frac{dI}{dt} \times \frac{d}{c_0}$ et :

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} \times \frac{d}{c_0} &= -\alpha_P \ell I(t) \\ \frac{dI}{dt} &= -\frac{c_0 \alpha_P \ell}{d} I(t) \end{aligned}$$

Remarque : pour $\alpha_P \ell \ll 1$, on a vu au paragraphe précédent que l'intensité varie très peu sur un tour de cavité. On aura donc la relation précédente avec $I(t)$ désignant l'intensité en un point quelconque du faisceau dans la cavité ou à sa sortie.

On note $\frac{dI}{dt} = -\frac{I(t)}{\tau_c}$ par définition de τ_c , appelé 'durée de vie des photons dans la cavité'.

Il vient alors la relation $\tau_c = \frac{d}{c_0 \alpha_P \ell}$

Les pertes de la cavité peuvent aussi être caractérisées par la quantité $Q_c = \omega \tau_c$ appelée facteur de qualité. ω désigne la pulsation de l'onde lumineuse.³

3. D'une manière générale, le facteur de qualité d'un oscillateur électronique, mécanique ou optique est défini par :

$$Q_c = \omega \frac{\text{Énergie emmagasinée}}{|\text{Puissance dissipée}|}$$

Pour un oscillateur optique, ω représente la pulsation de l'onde lumineuse puisque l'énergie électromagnétique instantanée de la cavité oscille comme $\frac{\epsilon_0 E_0^2 \cos^2 \omega t}{2} + \frac{\mu_0 B_0^2 \cos^2 \omega t}{2}$. L'énergie d'une cavité laser étant stockée sous forme lumineuse, elle est proportionnelle à l'intensité et la puissance dissipée est proportionnelle à $|\frac{dI}{dt}| = \frac{I}{\tau_c}$. On a donc

$$Q_c = \omega \tau_c$$

On retiendra que τ_c et Q_c élevés correspondent à une très lente diminution du nombre de photons dans la cavité donc à $\alpha_P \ell$ très petit.

Remarque 1 : pour une cavité linéaire, l'équation $I(z, t + \frac{2d}{c_0}) = I(z, t) \exp -(\alpha_P 2 \ell)$ conduit également à la relation $\tau_c = \frac{d}{c_0 \alpha_P \ell}$.

Remarque 2 : on peut montrer que τ_c ainsi défini correspond au temps moyen qu'un photon passe dans la cavité.

On en déduit le nombre de tours qu'un photon fait en moyenne dans la cavité avant de disparaître ou d'en sortir :

$$\frac{\text{temps moyen que le photon passe dans la cavité}}{\text{durée d'un tour de cavité}} = \frac{\tau_c}{d/c_0} = \frac{1}{\alpha_P \ell}$$

Avec par exemple $\exp -(\alpha_P \ell) = 0,98$, il vient $\frac{\tau_c}{d/c_0} = \frac{1}{\alpha_P \ell} = 50$ donc un photon effectue en moyenne une cinquantaine de tours de cavité avant d'en sortir.

Remarque 3 : La notation prête à confusion, mais la durée de vie des photons dans la cavité est une notion indépendante de celle de temps de cohérence de la radiation. On s'en convaincra par l'exemple d'un laser à colorant. L'amplification y est forte donc il peut fonctionner en continu malgré des pertes importantes (durée de vie des photons dans la cavité très courte). Par contre, ces systèmes sont utilisables pour obtenir des faisceaux très monochromatiques⁴ (spectre très étroit et temps de cohérence très long).

5.2.4 Sélectivité d'une cavité

Modes spectraux

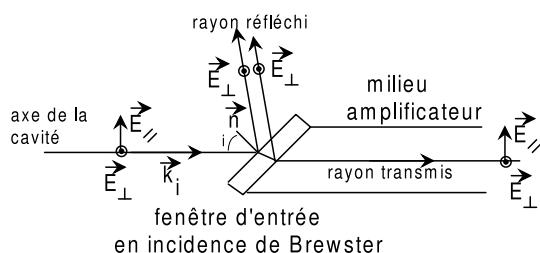
On a vu au chapitre 'Cavités Lasers' que les seules ondes pouvant s'établir dans une cavité sont celles dont la fréquence correspond à un mode ν_q de la cavité (mode spectral). Ceci s'interprète physiquement comme si la cavité imposait des pertes très élevées pour les fréquences ne correspondant pas à un mode spectral.

Dans une cavité en anneau de longueur optique d , $\nu_q = (q + 1)\frac{c_0}{d}$ et $(\nu_{q+1} - \nu_q) = \frac{c_0}{d}$ alors que pour une cavité linéaire on a $\nu_q = (q + 1)\frac{c_0}{2d}$ et $(\nu_{q+1} - \nu_q) = \frac{c_0}{2d}$. L'effet laser est possible si une fréquence amplifiée correspond à un mode spectral de la cavité. Le laser est **monomode** si l'effet laser se produit sur un seul mode de la cavité et multimode dans le cas contraire.

Polarisation

La polarisation (direction du vecteur champ électrique de l'onde) est une autre caractéristique du faisceau laser qui peut être imposée par la cavité.

Soit le milieu amplificateur gazeux contenu dans un tube dont la fenêtre d'entrée, d'indice n , est schématisée ci-dessous.



Les coefficients de réflexion et de transmission de l'intensité dépendent de l'angle d'incidence i du rayon lumineux sur la fenêtre d'entrée, mais aussi de la direction du champ électrique (polarisation) par rapport au plan d'incidence^a.

Pour un angle d'incidence particulier appelé **angle de Brewster**, une onde de champ électrique parallèle au plan d'incidence est totalement transmise par l'interface (aucune réflexion).

^{a.} le plan formé par le rayon incident et la normale à l'interface

En construisant la cellule pour que l'angle i corresponde à l'angle de Brewster ($\tan i = n$), on a $T = 0,711$ pour l'intensité lumineuse associée à la polarisation E_\perp et $T = 1$ pour l'intensité lumineuse associée à la

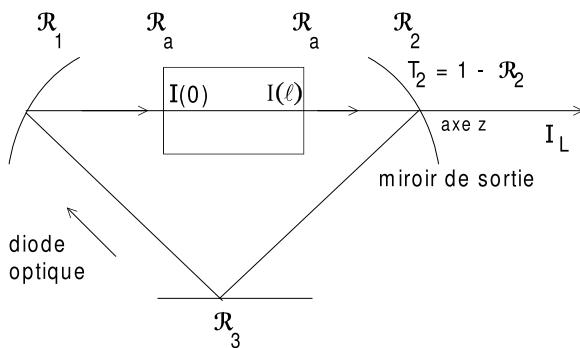
4. L'élargissement spectral est homogène, une cavité en anneau permettra un fonctionnement monomode, Cf 5.3.7

polarisation \vec{E}_{\parallel} (valeur numérique pour $n = 1,52$). L'effet laser est possible pour l'onde voyant les pertes minimales, la cavité impose pour le faisceau laser une polarisation rectiligne suivant \vec{E}_{\parallel}

5.3 Laser fonctionnant en régime stationnaire

5.3.1 Cas d'un amplificateur placé dans une cavité en anneau

* Caractéristiques du laser



On considère l'exemple d'un laser constitué d'une cavité en anneau représentée ci-contre et d'un milieu amplificateur pour lequel tous les atomes possèdent la même section efficace d'interaction avec l'onde. Le miroir d'extraction du faisceau laser est M_2 avec un coefficient de transmission T_2 . Le pompage du milieu amplificateur y produit un coefficient d'amplification non saturé α^0 uniforme.

L'objectif est de déterminer l'intensité lumineuse établie en tout point de la cavité et l'intensité laser extraite, tout cela pour un fonctionnement **en régime stationnaire**.

Les coefficients de réflexion pour l'intensité sont R_1 , R_2 et R_3 pour les miroirs et R_a pour les fenêtres d'entrée de l'amplificateur. Il n'y a pas d'autre perte significative dans la cavité. Un dispositif optique appelé diode optique, qu'on ne détaillera pas, impose un sens unique de parcours de la lumière dans la cavité.

* Gain total de l'amplificateur

En régime stationnaire, l'évolution de l'intensité lumineuse $I(z)$ à l'intérieur de l'amplificateur est régie par l'équation

$$\frac{1}{I(z)} \frac{dI(z)}{dz} = \alpha(z)$$

avec $\alpha(z) = \frac{\alpha^0}{1 + \frac{I(z)}{I_s}}$ fonction de $I(z)$ donc de z (effet de saturation de l'amplification). La valeur de α^0 est déterminée par le pompage de l'amplificateur. On a calculé dans le chapitre 'Amplificateurs Lasers' que le gain total $G = \frac{I(\ell)}{I(0)}$ du milieu amplificateur est la solution de l'équation

$$\ln G + (G - 1) \frac{I(0)}{I_s} = \alpha^0 \ell$$

où $I(0)$ représente l'intensité juste après l'entrée de l'amplificateur et $I(\ell)$ celle juste avant sa sortie. Si on connaît G , on déduit $I(0)$ par

$$I(0) = I_s \frac{\alpha^0 \ell - \ln G}{G - 1}$$

* Évolution de l'intensité sur un parcours complet de la cavité.

Une onde s'établit en régime stationnaire dans la cavité : son intensité ne dépend pas du temps mais seulement de la position z suivant l'axe de la cavité.

On prend comme point de départ l'intensité $I(0, t) \equiv I(0)$ juste après l'entrée dans l'amplificateur. Soit $I(d)$ l'intensité obtenue au même endroit après un parcours complet de la cavité, en supposant dans un premier temps que l'amplificateur est inactif (pas d'amplification)

$$\begin{aligned} I(d) &= I(0) (1 - R_a) R_2 R_3 R_1 (1 - R_a) \\ \Leftrightarrow I(d) &= I(0) \exp -\alpha_P \ell \end{aligned}$$

Avec amplification, l'intensité $I(0)$ est multipliée par G à la traversée de l'amplificateur et les pertes relatives sont inchangées donc :

$$I(d) = I(0) G \exp -\alpha_P \ell$$

* Amorçage d'une onde laser (régime transitoire précédent l'établissement du régime stationnaire)

L'amplificateur pompé produit par émission spontanée (fluorescence) des photons dont certains sont sur l'axe de la cavité. L'amplification de cette lumière est suffisante pour compenser les pertes lorsque $I(d) > I(0) \Leftrightarrow G \exp -\alpha_P \ell > 1 \Leftrightarrow G > \exp \alpha_P \ell$.

Dans cette phase d'amorçage, l'intensité reste faible donc l'amplification n'est pas saturée par l'onde et $\alpha = \alpha^0$. En général, elle varie suffisamment peu avec t pour avoir $\alpha = \frac{1}{T}(\frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial z}) \simeq \frac{1}{T} \frac{dI}{dz}$. On a donc $\frac{1}{T} \frac{dI}{dz} = \alpha^0 \Leftrightarrow I(\ell) = I(0) \exp \alpha^0 \ell$ et $G = \exp \alpha^0 \ell$ noté G^0 ('gain total non saturé'). Une onde laser peut s'amorcer dans la cavité si $G^0 = \exp \alpha^0 \ell > \exp \alpha_P \ell \Leftrightarrow \alpha^0 > \alpha_P$. Son intensité augmentera ensuite jusqu'à atteindre un régime stationnaire.

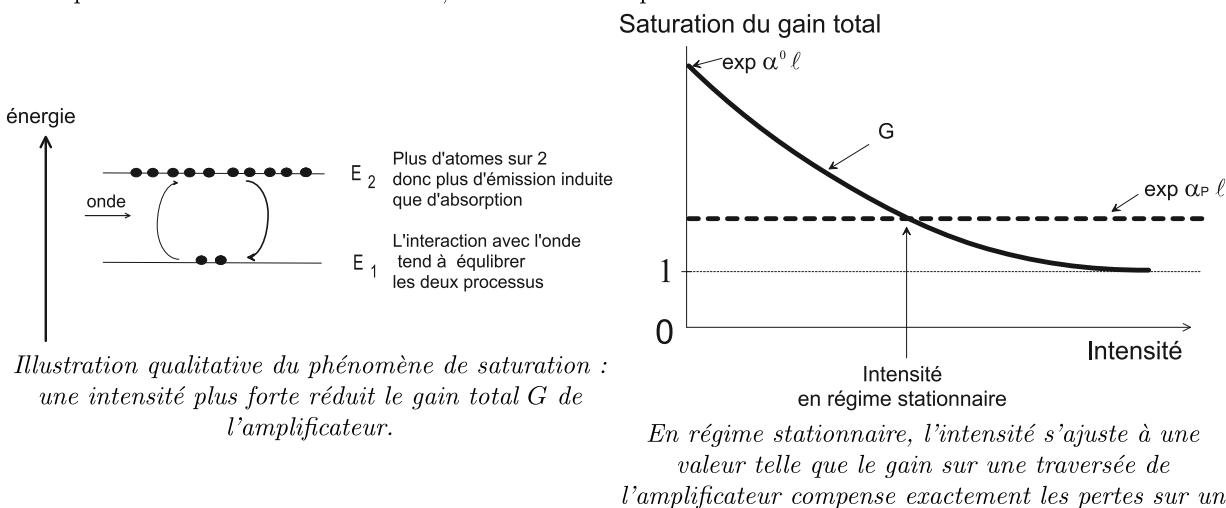
Lorsque $\alpha^0 < \alpha_P$, l'intensité laser reste nulle, seule une lumière de fluorescence (faible et non cohérente) sort de la cavité.

* Fonctionnement laser en régime stationnaire.

Avec $\alpha^0 > \alpha_P$, une onde s'amorce dans la cavité et son intensité augmente à chaque traversée de l'amplificateur. Le phénomène de saturation fait que le coefficient d'amplification α devient inférieur à α^0 . Sur la longueur de l'amplificateur, le gain total G devient inférieur à sa valeur G^0 évaluée pour une intensité très faible. Le gain total dans l'amplificateur s'ajuste pour compenser exactement les pertes $\exp(\alpha_P \ell)$ fixée par les caractéristiques physiques de la cavité (R_i, ℓ, \dots). Le système atteint un régime stationnaire pour lequel sur un tour de cavité :

$$I(d) = I(0) \Leftrightarrow G \exp -\alpha_P \ell = 1 \Leftrightarrow G = \exp \alpha_P \ell$$

La valeur de G dépend de G^0 , fixé lui même par le pompage et les caractéristiques physiques du milieu amplificateur, mais aussi de l'intensité comme illustré sur les schémas suivants. L'ajustement de G à la valeur $\exp(\alpha_P \ell)$ détermine la valeur de l'intensité I établie en régime stationnaire dans la cavité et par conséquent l'intensité extraite du laser, comme discuté quantitativement ci-dessous.



* Intensité laser extraite en régime stationnaire

Pour l'exemple traité, l'intensité I_L extraite de la cavité est reliée à $I(0)$ par :

$$I_L = G I(0) (1 - R_a) T_2$$

Pour un milieu amplificateur à élargissement spectral homogène, la relation de saturation s'écrit $\alpha(z) = \frac{\alpha^0}{1 + \frac{I(z)}{I_s}}$ et l'intégration de l'équation d'évolution de l'intensité $\frac{1}{I} \frac{dI}{dz} = \alpha(z)$ montre que le gain total $G = \frac{I(\ell)}{I(0)}$ vérifie :

$$\begin{aligned} \ln G + (G - 1) \frac{I(0)}{I_s} &= \alpha^0 \ell \\ \Leftrightarrow I(0) &= I_s \frac{\alpha^0 \ell - \ln G}{G - 1} \end{aligned}$$

On a montré qu'en régime stationnaire $G = \exp \alpha_P \ell$ donc :

$$\begin{cases} I(0) &= I_s \frac{\alpha^0 \ell - \alpha_P \ell}{\exp \alpha_P \ell - 1} \\ I_L &= (1 - R_a) T_2 I_s \exp(\alpha_P \ell) \frac{\alpha^0 \ell - \alpha_P \ell}{\exp \alpha_P \ell - 1} \end{cases}$$

L'intensité continue extraite de ce laser s'exprime en fonction des caractéristiques de l'amplificateur pompé (I_s, α^0) et de la cavité ($\alpha_P, T_2, R_a, \dots$). Le raisonnement sera à adapter pour chaque laser.

Remarque : si l'élargissement spectral n'est pas homogène dominant, l'intégration de l'équation $\frac{1}{I} \frac{dI}{dz} = \alpha(z)$ n'a pas une forme analytique aussi simple. On ne développe pas cette situation dans le cas général.

* Puissance du faisceau laser

Le fonctionnement en régime stationnaire produit une intensité constante au cours du temps, ce laser est dit 'continu'.

On suppose que le faisceau extrait a une intensité uniforme sur sa section S . La puissance lumineuse extraite du laser vaut alors $P_L = S I_L$.

5.3.2 Régime pertes faibles-gain faible

On poursuit l'étude précédente en supposant les pertes faibles ($\alpha_P \ell \ll 1$ d'où $\exp -\alpha_P \ell \approx 1^-$).

Le régime stationnaire nécessite $G \exp -\alpha_P \ell = 1$ donc le gain total vérifie $G \simeq 1^+$. L'intensité $I(z)$ est quasi-uniforme de valeur I sur toute la cavité. Le coefficient d'amplification saturée α est donc indépendant de z et l'équation $\frac{1}{I} \frac{dI}{dz} = \alpha$ s'intègre en $I(\ell) = I(0) \exp \alpha \ell \Leftrightarrow G = \exp \alpha \ell$. L'égalité $G \exp -\alpha_P \ell = 1$ se simplifie en $\alpha = \alpha_P$.

On a alors $\alpha \ell \ll 1$ donc pour ce régime le coefficient d'amplification saturée est faible lui aussi.

* Intensité dans la cavité pour un amplificateur à élargissement spectral homogène dominant

$$\left. \begin{array}{l} \text{condition de fonctionnement en régime stationnaire} \\ \text{(pertes faibles)} \\ \alpha = \alpha_P \\ \text{relation de saturation} \\ \alpha = \frac{\alpha^0}{1 + \frac{I}{I_s}} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\alpha^0}{1 + \frac{I}{I_s}} = \alpha_P \Rightarrow I = I_s \left(\frac{\alpha^0}{\alpha_P} - 1 \right)$$

* Intensité dans la cavité pour un amplificateur à élargissement spectral inhomogène dominant

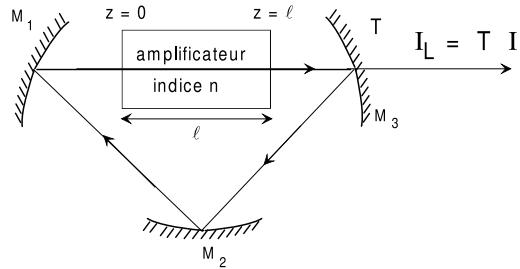
$$\left. \begin{array}{l} \text{condition de fonctionnement en régime stationnaire} \\ \text{(pertes faibles)} \\ \alpha = \alpha_P \\ \text{relation de saturation} \\ \alpha = \frac{\alpha^0}{\sqrt{1 + \frac{I}{I_s}}} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\alpha^0}{\sqrt{1 + \frac{I}{I_s}}} = \alpha_P \Rightarrow I = I_s \left(\left(\frac{\alpha^0}{\alpha_P} \right)^2 - 1 \right)$$

On peut montrer que ces résultats restent valables pour une cavité linéaire où l'intensité n'est pas trop forte (Cf remarque du §5.3.7)

5.3.3 Optimisation du couplage de sortie

L'intensité établie dans la cavité est d'autant plus importante que les pertes sont faibles. Cependant, l'intensité laser extraite est d'autant plus forte que le facteur de transmission du miroir de couplage est élevé, sachant que s'il est fort il augmente les pertes de la cavité. Il est donc possible de trouver une valeur optimale pour ce paramètre, ce qui va être illustré ici sur un exemple.

On considère la cavité en anneau décrite ci-contre. L'amplificateur est un milieu à élargissement spectral homogène. Le pompage produit le gain non saturé α^0 . Le faisceau laser est extrait de la cavité par le miroir M_3 de facteur de transmission T et de facteur de réflexion $R = 1 - T$. Les pertes relatives d'intensité pour un tour de cavité, autres que la transmission de M_3 , valent $\frac{\Delta I}{I} = \eta$. Le gain et les pertes sont faibles.



Le coefficient de pertes par unité de longueur du milieu amplificateur est déterminé par

$$\exp -\alpha_P \ell = (1 - \eta)(1 - T)$$

soit

$$\alpha_P = \frac{\eta + T}{\ell} \quad (\eta \text{ et } T \text{ sont faibles})$$

Si $\alpha^0 > \alpha_P$, on a en régime stationnaire $I = I_s(\frac{\alpha^0 \ell}{\eta + T} - 1)$ et l'intensité sortant de la cavité par M_3 vaut

$$I_L = T I_s(\frac{\alpha^0 \ell}{\eta + T} - 1)$$

Pour $T = 0$, cette intensité est nulle ; pour T trop grand, les pertes sont supérieures au gain et le laser ne fonctionne pas donc $I_L = 0$. L'intensité extraite de la cavité passe par un maximum en fonction de T , on va le calculer.

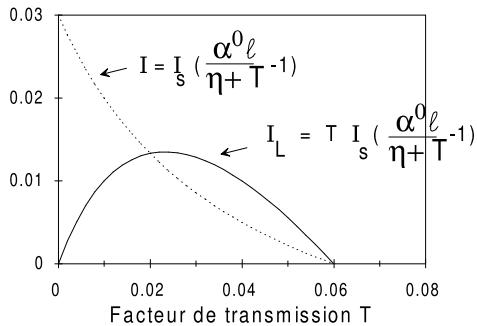
On pose $y = I_L/I_s$ et $x = \eta + T$, soit $y = (x - \eta)(\frac{\alpha^0 \ell}{x} - 1)$. L'intensité I_L est maximum pour la valeur de T donnant $\frac{dy}{dx} = 0$. On a

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = 0 &\Leftrightarrow \left(\frac{\alpha^0 \ell}{x} - 1 \right) + (x - \eta) \left(-\frac{\alpha^0 \ell}{x^2} \right) = 0 \\ &\Rightarrow \alpha^0 \ell x - x^2 - (x - \eta) \alpha^0 \ell = 0 \\ &\Rightarrow x^2 = \eta \alpha^0 \ell \\ &\Rightarrow T = \sqrt{\eta \alpha^0 \ell} - \eta \quad (\text{racine positive}) \end{aligned}$$

La valeur de I_L est maximale pour $T = \sqrt{\eta \alpha^0 \ell} - \eta$ et vaut

$$\begin{aligned} I_L &= I_s(\sqrt{\eta \alpha^0 \ell} - \eta) \left(\frac{\alpha^0 \ell}{\sqrt{\eta \alpha^0 \ell}} - 1 \right) \\ &= I_s \eta \left(\sqrt{\frac{\alpha^0 \ell}{\eta}} - 1 \right) \left(\sqrt{\frac{\alpha^0 \ell}{\eta}} - 1 \right) \\ &= I_s \eta \left(\sqrt{\frac{\alpha^0 \ell}{\eta}} - 1 \right)^2 \end{aligned}$$

Les variations des intensités dans la cavité et dans le faisceau laser sont représentées en fonction de T sur le graphe suivant :



Les courbes sont tracées pour $\alpha^0 \ell = 0,1$

et $\eta = 0,04$

La courbe $I(T)$ n'est pas représentée à l'échelle. Experimenteralement, il faut donc choisir le coefficient de transmission du miroir de sortie en fonction des autres pertes de la cavité et du coefficient d'amplification.

Remarque importante : en plus de la condition $I_L > 0$, il faudrait en principe vérifier également sur quel domaine de valeurs de T est valide l'approximation des pertes faibles qui a permis de linéariser l'expression du coefficient de pertes en fonction du facteur de transmission du miroir d'extraction.

5.3.4 Seuil de fonctionnement en régime stationnaire

On reprend l'exemple d'un laser en anneau à pertes faibles et élargissement spectral homogène.

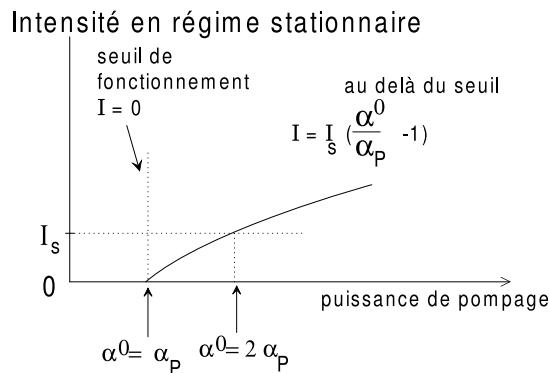
Le coefficient d'amplification non saturée α^0 augmente avec la puissance du pompage de l'amplificateur.

Pour un pompage trop faible, $\alpha^0 < \alpha_P$ donc la condition d'amorçage n'est pas réalisée et l'intensité laser reste nulle.

Avec un pompage plus important, α^0 devient supérieur à α_P et le système atteint un régime stationnaire de fonctionnement. La condition $\alpha = \alpha_P$ est réalisée pour une valeur de I vérifiant :

$$\frac{\alpha^0}{1 + \frac{I}{I_s}} = \alpha_P \quad \Leftrightarrow \quad I = I_s \left(\frac{\alpha^0}{\alpha_P} - 1 \right)$$

Lorsque α^0 est à peine supérieur à α_P , l'intensité I obtenue en régime stationnaire est très proche de 0, c'est le **seuil de fonctionnement**. L'évolution de I en fonction du pompage et de α^0 croissants est illustrée ci-dessous.



Remarque : I_s est la valeur de I qui commence à réduire significativement ΔN en régime stationnaire (relation $\Delta N = \frac{\Delta N^0}{1 + \frac{I}{I_s}}$), mais rien n'empêche d'avoir dans la cavité une intensité supérieure à I_s ⁵.

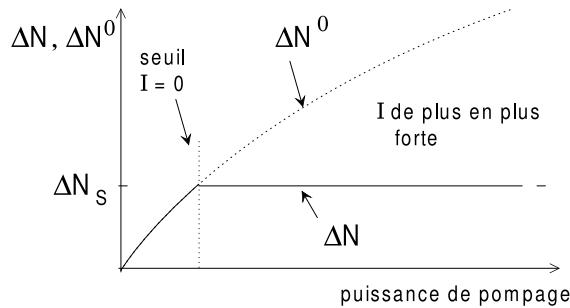
Pour ce milieu à élargissement spectral homogène, on a $\alpha = \sigma \Delta N$ qui pour $I \ll I_s$ prend la valeur $\alpha^0 = \sigma \Delta N^0$. On va utiliser ces relations pour déduire l'évolution de la différence de population saturée ΔN et de la différence de population non saturée ΔN^0 avec la puissance de pompage.

Au delà du seuil d'amorçage $\alpha^0 \geq \alpha_P$, le système atteint le régime stationnaire avec $\alpha = \alpha_P$ donc la différence de population saturée vérifie :

$$\Delta N = \frac{\alpha}{\sigma} = \frac{\alpha_P}{\sigma}$$

5. Ne pas confondre avec la saturation d'un courant en électronique.

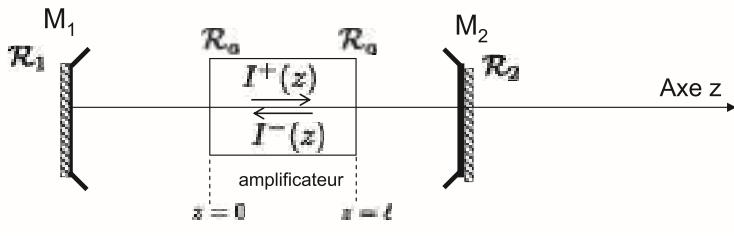
Pour un pompage au-delà de l'amorçage de l'effet laser, la différence de population saturée conserve en régime stationnaire la valeur constante $\Delta N_S = \frac{\alpha_P}{\sigma}$ appelée 'différence de population au seuil'.



Interprétation physique : en dessous du seuil, le pompage dépose de l'énergie dans le système en portant des atomes sur le niveau 2 pour augmenter la différence de population ΔN . Au dessus du seuil, une énergie déposée plus importante est convertie en photons.

5.3.5 Cas d'un amplificateur placé dans une cavité linéaire

On reprend les idées développées dans le paragraphe 5.3.1 en les appliquant au cas d'une cavité linéaire comme par exemple celle de la figure ci-dessous.



Le miroir d'extraction du faisceau laser est M_2 avec un coefficient de transmission T_2 . Les coefficients de réflexion pour l'intensité sont \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 pour les miroirs et \mathcal{R}_a pour les fenêtres d'entrée et sortie de l'amplificateur. Il n'y a pas d'autre perte significative dans la cavité. Le pompage du milieu amplificateur y produit un coefficient d'amplification non saturé α^0 uniforme.

A cause de la géométrie linéaire de la cavité, en un point donné de coordonnée z , il existe deux ondes contra-propagatives, l'une se dirigeant vers M_1 et l'autre se dirigeant vers M_2 . Si on suppose qu'il n'y a pas d'interférences entre ces deux ondes progressives⁶, l'intensité totale $I(z)$ mesurée en ce point est la somme des intensités $I^+(z)$ et $I^-(z)$ des deux ondes : $I(z) = I^+(z) + I^-(z)$.

L'aller et le retour dans la cavité étant semblables, on a naturellement $I^+(z) = I^-(z)$, d'où :
 $I^+(z) = I^-(z) = \frac{I(z)}{2}$.

* Gain de l'amplificateur pour un passage

On peut définir un gain pour la traversée du milieu amplificateur à l'aller, noté G^+ et un gain pour le retour, G^- , qui auront la même valeur :

$$G^+ = \frac{I^+(\ell)}{I^+(0)} ; G^- = \frac{I^-(0)}{I^-(\ell)} ; \text{ avec } G^+ = G^- = G$$

Comme pour une cavité en anneau, on pourra ainsi utiliser un gain G correspondant à un passage dans le milieu amplificateur. On aura alors :

$$\frac{1}{I(z)} \frac{dI(z)}{dz} = \alpha(z) \text{ avec } \alpha(z) = \frac{\alpha^0}{1 + \frac{I^+(z) + I^-(z)}{I_s}} = \frac{\alpha^0}{1 + \frac{2I^+(z)}{I_s}}$$

Le gain obéit à l'équation :

$$\ln G^+ + (G^+ - 1) \frac{2I^+(0)}{I_s} = \alpha^0 \ell \text{ et } \ln G^- + (G^- - 1) \frac{2I^-(0)}{I_s} = \alpha^0 \ell ; \text{ soit } \ln G + (G - 1) \frac{I(0)}{I_s} = \alpha^0 \ell$$

6. Ceci revient à négliger le phénomène de 'Hole-burning spatial' ou 'creusement spatial' en français. Le calcul correct doit tenir compte des interférences au sein du milieu amplificateur qui vont créer un réseau spatial de saturation.

On retrouve donc la même équation que pour une cavité en anneau. Si on connaît G , on en déduit $I(0)$ par

$$I(0) = I_s \frac{\alpha^0 \ell - \ln G}{G - 1}$$

* Bilan d'énergie sur un aller-retour

En régime stationnaire on aura : $I(0) = I(0) G^+ G^- \times \exp(-\alpha_P 2\ell) = I(0) G^2 \exp(-\alpha_P 2\ell)$

avec pour cette cavité : $\exp(-\alpha_P 2\ell) = (1 - \mathcal{R}_a) \mathcal{R}_2 (1 - \mathcal{R}_a)^2 \mathcal{R}_1 (1 - \mathcal{R}_a)$. D'où

$$G^2 \exp(-2\alpha_P \ell) = 1 \Leftrightarrow G = \exp \alpha_P \ell$$

Le laser fonctionne en régime stationnaire seulement si l'amplification sur un passage compense exactement les pertes avec la relation $G \exp -\alpha_P \ell = 1 \Leftrightarrow G = \exp \alpha_P \ell$. On aura donc **la même relation en régime gain faible-pertes faibles pour une cavité linéaire ou en anneau**.

* **Intensité laser extraite** L'intensité qui est extraite par le miroir M_2 correspond seulement à la partie du faisceau qui se propage de M_1 vers M_2 donc :

$$I_L = I^+(\ell) (1 - \mathcal{R}_a) T_2 = \frac{I(\ell)}{2} (1 - \mathcal{R}_a) T_2.$$

En rassemblant les résultats précédents, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} I(\ell) = G I(0) \\ G = \exp \alpha_P \ell \\ I(0) = I_s \frac{\alpha^0 \ell - \ln G}{G - 1} \\ I_L = (1 - \mathcal{R}_a) T_2 \frac{I(\ell)}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} I(0) = I_s \frac{\alpha^0 \ell - \alpha_P \ell}{\exp \alpha_P \ell - 1} \\ I_L = (1 - \mathcal{R}_a) T_2 \frac{I_s}{2} \exp \alpha_P \ell \frac{\alpha^0 \ell - \alpha_P \ell}{\exp \alpha_P \ell - 1} \end{array} \right.$$

Cette expression a un sens si $I(0) > 0 \Leftrightarrow \alpha^0 > \alpha_P$

5.3.6 Conditions de fonctionnement laser

On rassemble dans le tableau suivant l'ensemble des conditions nécessaires au fonctionnement d'un laser à la fréquence ν . On utilise les notations $G(\nu)$, $\alpha^0(\nu)$ et $\alpha_P(\nu)$ pour rappeler que ces coefficients peuvent varier avec la fréquence du rayonnement.

La production de lumière est possible seulement si $\alpha^0(\nu) > \alpha_P(\nu)$, pour un laser fonctionnant en impulsions, en régime transitoire ou en régime stationnaire (laser continu).

En régime stationnaire, l'amplification doit exactement compenser les pertes avec $G(\nu) = \exp \alpha_P(\nu) \ell$ qui pour des pertes faibles se simplifie en $\alpha(\nu) = \alpha_P(\nu)$.

Amorçage d'une impulsion	Régime stationnaire (laser continu)
$\nu = \nu_q$	$\nu = \nu_q$
$\alpha^0(\nu) > \alpha_P(\nu)$	$G(\nu) \exp(-\alpha_P(\nu) \ell) = 1$ avec pour des pertes faibles le gain $G(\nu) = \exp \alpha(\nu) \ell$ proche de 1, la condition de fonctionnement se simplifie en $\alpha(\nu) = \alpha_P(\nu)$

Remarque : l'expression $G(\nu) = \exp \alpha_P(\nu) \ell$ a été justifiée pour une cavité en anneau et on a vu qu'elle reste valable pour une cavité linéaire si G représente le gain total pour une traversée de l'amplificateur et si les effets d'interférences entre l'onde aller et l'onde retour sont négligeables.

5.3.7 Fonctionnement continu monomode ou multimodes

Milieu amplificateur à élargissement spectral homogène

Soit un laser continu en anneau possédant les caractéristiques suivantes :

- la cavité impose l'écart $\delta\nu$ entre deux modes spectraux consécutifs.

- les pertes sont faibles ($\alpha_P \ell \ll 1$).
- tous les atomes ont la fréquence de résonance ν_0 , avec le profil spectral $g(\nu - \nu_0)$ de largeur $\Delta\nu_h$
- le pompage fait que le milieu possède pour l'onde ν le coefficient d'amplification non saturée $\alpha^0(\nu)$ qui pour ce système est proportionnel à $g(\nu - \nu_0)$. L'amplification est donc efficace sur un domaine de fréquences de largeur $\Delta\nu_h$ autour de ν_0 .
- on suppose $\delta\nu < \Delta\nu_h \ll \nu_0$.
- on note ν_n le mode spectral le plus proche de ν_0 .

On suppose qu'une onde s'établit à la fréquence ν_n . L'élargissement spectral est homogène donc elle voit le coefficient d'amplification saturée :

$$\begin{aligned}\alpha(\nu_n) &= \sigma(\nu_n - \nu_0) \Delta N \\ \text{avec } \sigma(\nu_n - \nu_0) &= \frac{h\nu_n}{c} B g(\nu_n - \nu_0) \\ &\approx \frac{h\nu_0}{c} B g(\nu_n - \nu_0) \text{ car } \delta\nu \ll \nu_0\end{aligned}$$

En régime stationnaire (pertes faibles), la condition de fonctionnement $\alpha(\nu_n) = \alpha_P$ impose :

$$\Delta N = \frac{\alpha_P}{\sigma(\nu_n - \nu_0)} = \frac{\alpha_P}{\frac{h\nu_0}{c} B g(\nu_n - \nu_0)}$$

Une onde de fréquence correspondant à un mode spectral $\nu_m \neq \nu_n$ verrait le coefficient d'amplification saturée :

$$\begin{aligned}\alpha(\nu_m) &= \sigma(\nu_m - \nu_0) \Delta N \\ &\approx \frac{h\nu_0}{c} B g(\nu_m - \nu_0) \frac{\alpha_P}{\frac{h\nu_0}{c} B g(\nu_n - \nu_0)} \\ &= \frac{g(\nu_m - \nu_0)}{g(\nu_n - \nu_0)} \alpha_P\end{aligned}$$

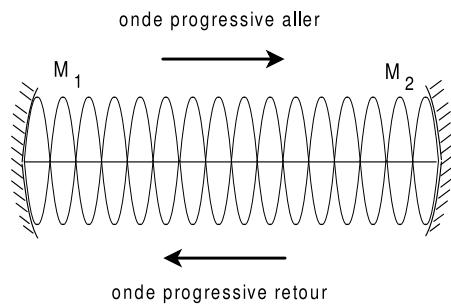
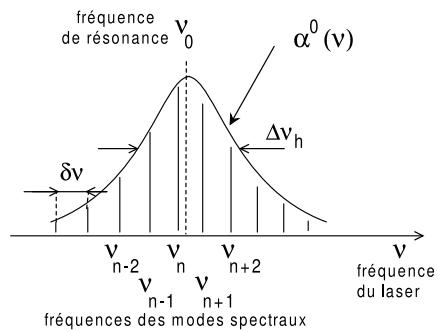
ν_n désigne le mode le plus proche de ν_0 donc pour $m \neq n$ on aura $\frac{g(\nu_m - \nu_0)}{g(\nu_n - \nu_0)} < 1$. Une onde de fréquence ν_m voit alors $\alpha(\nu_m)$ inférieur à α_P et elle ne peut pas s'établir en régime stationnaire dans la cavité.

Un laser continu en anneau et à élargissement spectral homogène est donc monomode sur le mode spectral le plus proche de la fréquence de résonance ν_0 des atomes. Son intensité $I(\nu_n)$ est telle que :

$$\left. \begin{aligned}\alpha(\nu_n) &= \alpha_P \\ \alpha(\nu_n) &= \frac{\alpha^0(\nu_n)}{1 + \frac{I(\nu_n)}{I_s}}\end{aligned} \right\} \Rightarrow I(\nu_n) = I_s \left(\frac{\alpha^0(\nu_n)}{\alpha_P} - 1 \right)$$

Remarque : dans une cavité linéaire, les deux ondes progressives se propageant en sens inverse créent une onde stationnaire avec des noeuds et des ventres d'intensité. Au niveau des noeuds d'intensité pour l'onde ν_n , il ne se produit pas de saturation de l'amplification donc on n'a pas comme précédemment $\alpha(\nu_m) < \alpha_P$ et une onde ν_m peut s'amorcer si $\alpha^0(\nu_m) > \alpha_P$. Plusieurs modes spectraux voisins de ν_0 peuvent coexister dans la cavité. Le rayonnement n'est pas strictement monomode. Ces modes sont non cohérents temporellement entre eux, ce qui signifie que les valeurs de leurs phases relatives fluctuent au cours du temps de sorte que s'additionnent leurs intensités et non leurs amplitudes.

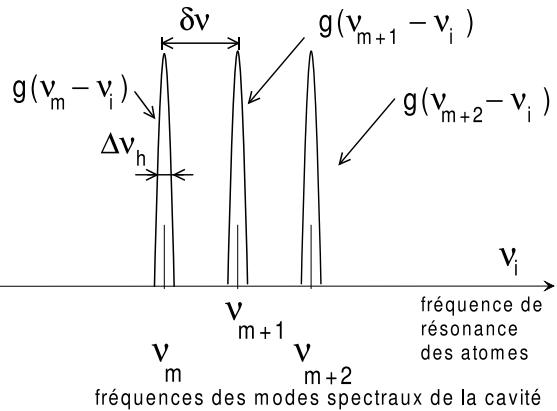
Remarque : pour les lasers fonctionnant en impulsions, un mode n'a pas le temps de supplanter les autres. Le rayonnement obtenu est généralement multimode même si l'élargissement spectral est homogène.



Milieu amplificateur à élargissement spectral inhomogène

Description du système :

- les modes spectraux ν_m de la cavité sont séparés de $\delta\nu$.
- les fréquences de résonance ν_i des atomes sont au voisinage d'une valeur caractéristique ν_0 , avec une répartition décrite par la distribution $P(\nu_i - \nu_0)$ de largeur notée $\Delta\nu_i$ (largeur inhomogène).
- l'absorption d'une onde ν par un atome de résonance ν_i est caractérisée par le profil spectral $g(\nu - \nu_i)$ de largeur $\Delta\nu_h$.
- on suppose $\Delta\nu_h \ll \delta\nu \ll \Delta\nu_i \ll \nu_0$.
- les pertes sont faibles.



a) Une onde peut s'établir si sa fréquence correspond à un mode spectral ν_m de la cavité.

b) Des atomes de fréquence de résonance ν_i amplifient l'onde de fréquence ν_m avec une efficacité proportionnelle à $g(\nu - \nu_i)$, significative si qualitativement $|\nu_m - \nu_i| < \Delta\nu_h$. Le graphe montre que si des atomes interagissent avec l'onde de fréquence ν_m , alors ils n'interagissent pas avec celle établie sur un autre mode spectral (hypothèse $\Delta\nu_h \ll \delta\nu$).

On en déduit que deux ondes de fréquences correspondant à deux modes spectraux distincts sont amplifiées par interaction avec des atomes différents. Elles peuvent donc s'établir dans la cavité totalement indépendamment l'une de l'autre.⁷

D'une manière générale, l'onde établie sur le mode spectral ν_m de la cavité voit le coefficient d'amplification non saturée :

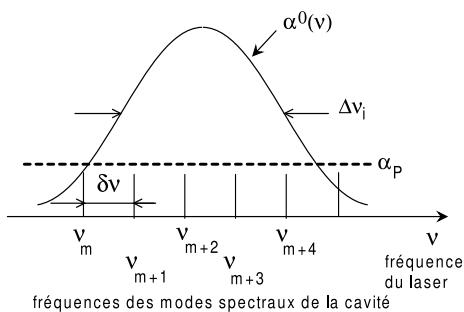
$$\alpha^0(\nu_m) = \frac{h\nu_m}{c} B \Delta N^0 \int \underbrace{g(\nu_m - \nu_i)}_{\text{largeur } \Delta\nu_h} \underbrace{P(\nu_i - \nu_0)}_{\text{largeur } \Delta\nu_i} d\nu_i$$

qui pour ce système à élargissement spectral inhomogène dominant ($\Delta\nu_h \ll \Delta\nu_i$) se simplifie en :

$$\alpha^0(\nu_m) = \frac{h\nu_m}{c} B P(\nu_m - \nu_0) \Delta N^0$$

L'amplification est efficace sur un intervalle de fréquences de largeur $\Delta\nu_i$ autour de ν_0 .

7. Des études plus poussées prenant en compte les effets de polarisation de la lumière montrent que le couplage entre les populations d'atomes amplifiant deux modes spectraux consécutifs est minimal si les polarisations des deux ondes sont rectilignes et perpendiculaires entre elles. Cet effet est mis en évidence dans le TP Fabry Perot, dans l'analyse des modes spectraux d'un laser Hélium-Néon légèrement multimode.



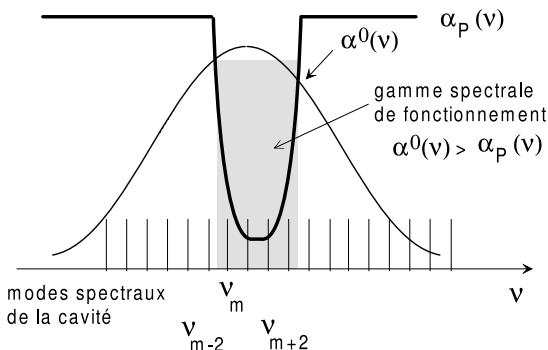
On revient aux conditions de fonctionnement laser. Lorsque $\alpha^0(\nu_m) \geq \alpha_P(\nu_m)$, il s'établit en régime stationnaire une intensité $I(\nu_m)$ telle que :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Fonctionnement R.S. :} \\ \alpha(\nu_m) = \alpha_P \\ \text{Relation de saturation :} \\ \alpha(\nu_m) = \frac{\alpha^0(\nu_m)}{\sqrt{1 + \frac{I(\nu_m)}{I_s}}} \end{array} \right\} \Rightarrow I(\nu_m) = I_s \left(\left(\frac{\alpha^0(\nu_m)}{\alpha_P} \right)^2 - 1 \right)$$

Cette expression donnant $I(\nu_m)$ est valable pour tous les modes spectraux tels que $\alpha^0(\nu_m) > \alpha_P$. Un laser à élargissement spectral inhomogène est donc *a priori* multimode avec d'autant plus de modes que $\Delta\nu_i$ est grand devant $\delta\nu$.

Remarque : I_s désigne dans ces expressions l'intensité de saturation à résonance, la même pour toutes les fréquences.

En fonctionnement multimode, l'intensité résultante fluctue au cours du temps à cause de battements entre les différentes ondes incohérentes⁸. On cherche souvent à réduire le nombre de ces modes spectraux en faisant en sorte que les pertes de la cavité ne soient inférieures à $\alpha^0(\nu)$ que sur un intervalle de fréquences englobant quelques modes seulement.



Dépendance en fréquence pour les pertes permettant de sélectionner un petit nombre de modes spectraux.

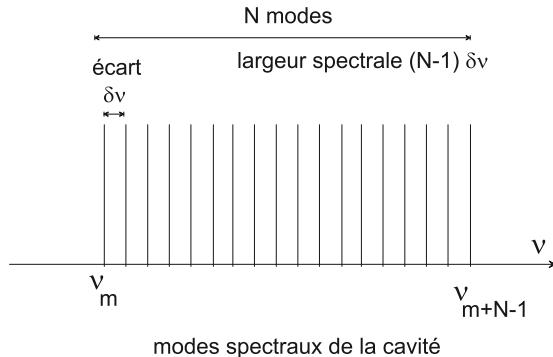
De telles variations de α_P avec ν peuvent être obtenues en insérant dans la cavité un filtre spectral interférentiel, un interféromètre de Fabry-Perot, ou un réseau (Cf Annexe §Laser à colorant accordable). Cependant, il est difficile d'obtenir une fonction pertes suffisamment étroite pour sélectionner un seul mode. Différentes techniques permettent d'ajuster la position du creux de cette fonction sur la fréquence d'un mode spectral (laser accordable) ou de déplacer la position des modes pour que l'un d'entre eux coïncide avec le maximum de la courbe de gain (modification de la longueur optique de la cavité en fixant un miroir sur des cales piézo-électriques, modification des indices optiques du milieu par effet électro-optique).

5.4 Lasers produisant des impulsions

5.4.1 Laser en fonctionnement 'modes bloqués'

On va étudier ici une situation paradoxale où la présence d'un très grand nombre de modes fonctionnant en continu dans la cavité permet à certaines conditions la production d'impulsions lasers extrêmement courtes.

8. Chaque onde possède une phase constante à l'échelle de la période $\frac{1}{\nu_m}$ mais variant aléatoirement à une échelle de temps grande devant $\frac{1}{\nu_m}$ appelée 'temps de cohérence'. Cela entraîne que sur des temps 'longs' la phase relative entre deux modes varie aléatoirement, ce qu'on traduit en disant qu'ils sont incohérents. On ne pourrait visualiser des interférences entre deux modes qu'en mesurant l'intensité de leur superposition sur une durée inférieure au temps de cohérence (durée pendant laquelle ils conserveront une phase relative constante).



Soit une cavité laser linéaire de longueur optique d , où l'amplificateur pompé en continu permet l'oscillation laser simultanée en régime stationnaire d'un nombre N grand de modes spectraux séparés de $\delta\nu = \frac{c_0}{2d}$. On les note $\nu_{m+p} = \nu_m + p \delta\nu$ pour p allant de 0 à $N - 1$.

On s'intéresse au champ électrique de l'onde résultante, au niveau du miroir de sortie de la cavité. C'est la somme des champs des différentes ondes monochromatiques continues présentes :

$$\mathcal{E}(t) = \sum_{p=0}^{N-1} \frac{E_p \exp i(2\pi\nu_{m+p} t + \varphi_p) + C.C.}{2}$$

En général, les phases φ_p des différents modes varient indépendamment et aléatoirement au cours du temps. Les ondes correspondantes sont incohérentes et l'intensité résultante est la somme des intensités des ondes continues.

Certaines techniques non décrites ici imposent à ces phases d'être fixes les unes par rapport aux autres (situation de 'modes bloqués'). On étudie la forme de l'onde résultante dans un cas simplifié $E_p = E_0$ réel et $\varphi_p = 0$ pour tout p .

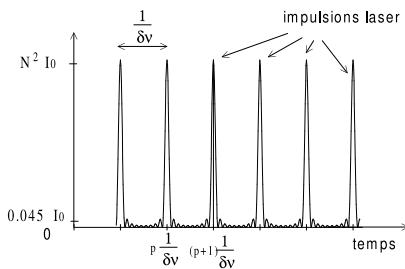
$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) &= \frac{E_0 \exp(2i\pi\nu_m t) \sum_{p=0}^{N-1} \exp(2i\pi p \delta\nu t) + C.C.}{2} \\ \text{avec } \sum_{p=0}^{N-1} \exp(2i\pi p \delta\nu t) &= \frac{1 - \exp(2i\pi N \delta\nu t)}{1 - \exp(2i\pi \delta\nu t)} \quad (\text{somme d'une suite géométrique}) \\ &= \frac{\exp(2i\pi \frac{N \delta\nu t}{2}) \sin(\pi N \delta\nu t)}{\exp(2i\pi \frac{\delta\nu t}{2}) \sin(\pi \delta\nu t)} \end{aligned}$$

d'où :

$$\mathcal{E}(t) = \frac{E_0 \exp 2i\pi(\nu_m + \frac{N-1}{2} \delta\nu) t \frac{\sin(\pi N \delta\nu t)}{\sin(\pi \delta\nu t)} + C.C.}{2}$$

On note $\nu_0 = (\nu_m + \frac{N-1}{2} \delta\nu)$ la fréquence moyenne du rayonnement d'où le champ électrique résultant $\mathcal{E}(t) = E_0 \frac{\sin(\pi N \delta\nu t)}{\sin(\pi \delta\nu t)} \cos 2\pi\nu_0 t$ et l'intensité instantanée :

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{1}{\mu_0 c} \langle \mathcal{E}^2(t) \rangle_{\text{période}} \\ I(t) &= I_0 \left(\frac{\sin(\pi N \delta\nu t)}{\sin(\pi \delta\nu t)} \right)^2 \quad \text{avec } I_0 = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \end{aligned}$$



Cette fonction est maximale (pic principal) lorsque le numérateur et le dénominateur tendent simultanément vers 0 :

$$\pi \delta\nu t = p\pi \Leftrightarrow t = p \frac{1}{\delta\nu}$$

Un maximum d'intensité ^a correspond à une impulsion temporelle d'intensité crête $I(t) = I_0 N^2$. On peut vérifier numériquement que l'intensité du plus haut des pics secondaires vaut 0,045 I_0 . L'écart temporel entre deux impulsions successives vaut $\frac{1}{\delta\nu}$.

a. Dans $I(t)$, le numérateur et le dénominateur sont inchangés en remplaçant t par $t + \frac{p}{\delta\nu}$ avec p entier donc tous les pics ont la même hauteur que celui centré sur $t = 0$. On note $\epsilon = \delta\nu t$. Lorsque ϵ tend vers 0,

$$\left(\frac{\sin(\pi N \delta\nu t)}{\sin(\pi \delta\nu t)} \right)^2 \simeq \left(\frac{(\pi N \delta\nu t)}{(\pi \delta\nu t)} \right)^2 = N^2$$

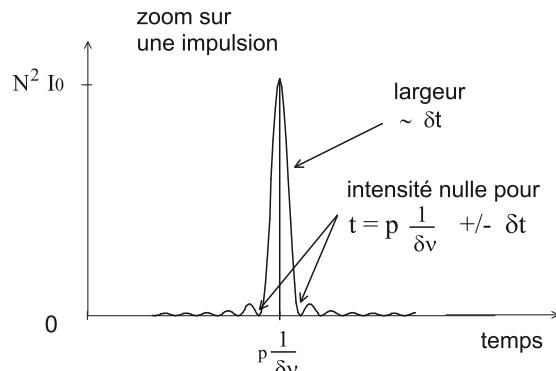
d'où $I(t) = I_0 N^2$.

La largeur temporelle δt d'une impulsion correspond qualitativement à l'écart entre son sommet et le premier minimum voisin. L'intensité est nulle en $t = p \frac{1}{\delta\nu} \pm \delta t$ lorsque :

$$\begin{aligned} \sin \pi N \delta\nu \left(p \frac{1}{\delta\nu} \pm \delta t \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow (Np \pm N \delta\nu \delta t)\pi &= p'\pi \text{ avec } p' \text{ entier} \end{aligned}$$

La plus petite valeur positive de δt vérifiant cette égalité est obtenue lorsque $p' = Np \pm 1$ donc $N\delta\nu \delta t\pi = \pi$. La largeur temporelle d'une impulsion vaut donc

$$\delta t = 1/(N \delta\nu)$$



Pour l'onde extraite de la cavité, l'écart $1/\delta\nu$ entre deux impulsions successives correspond à $\frac{1}{c_0/2d} = \frac{2d}{c_0}$ donc au temps d'un parcours complet de la lumière dans cette cavité linéaire. Cette situation physique correspond à une impulsion unique de durée δt parcourant la cavité à la vitesse de la lumière, qui arrive sur le miroir de sortie et laisse sortir une partie de ses photons avec la périodicité $\frac{2d}{c_0}$. Cette impulsion est d'autant plus courte ($\delta t \propto 1/(N \delta\nu)$) et intense (hauteur $\propto N^2$) que le nombre N d'ondes continues superposées est élevé.

Exemple : soit une cavité linéaire de longueur $d = 75$ cm et un amplificateur Saphire-Titanium, l'oscillation laser se produit simultanément pour des longueurs d'onde de 800 nm à 1100 nm donc des fréquences de $2,7 \cdot 10^{14}$ à $3,7 \cdot 10^{14}$ Hz (intervalle particulièrement large). L'écart entre deux modes spectraux de la cavité vaut $\delta\nu = \frac{c_0}{2d} = 2 \cdot 10^8$ Hz d'où $N = 5 \cdot 10^5$. On obtient en sortie de ce laser des impulsions de largeur $\delta t = \frac{1}{N \delta\nu} = 10^{-14}$ s = 10 femtosecondes, séparées d'un intervalle $\Delta t = \frac{1}{\delta\nu} = 5 \cdot 10^{-9}$ s = 5 ns.

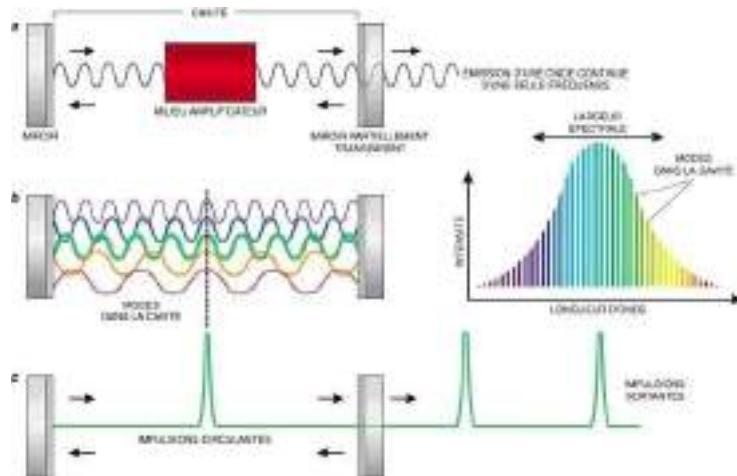


image <http://www.pour-la-science.com/numeros/pls-277/lasers/4.jpg>

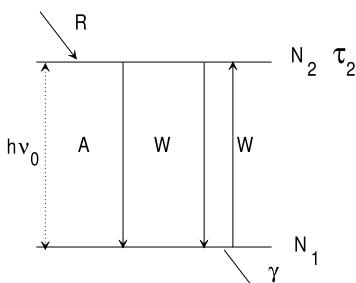
Remarque : la largeur spectrale du rayonnement sortant de la cavité vaut $N \delta\nu$, avec pour les fréquences uniquement les valeurs discrètes $\nu_m = m \frac{c_0}{2d}$ (Cf figure au début de cette section). Cette largeur multipliée par la durée δt de l'impulsion vérifie $(N \delta\nu) \times \delta t = 1$, conformément à ce qu'on attend d'après le théorème de Wiener-Khintchine ou l'incertitude de Heisenberg temps-énergie appliquée à un photon.

En général, les impulsions de durée inférieure à 100 picosecondes sont produites à partir d'un laser en fonctionnement 'modes bloqués', celles de durée entre 1 et 100 ns sont produites en fonctionnement 'déclenché', technique qui va être étudiée plus loin.

5.4.2 Système laser en régime transitoire : équations couplées

Il est possible d'utiliser des régimes transitoires pour produire des impulsions lumineuses intenses. On va modéliser dans ce cas les évolutions temporelles de la différence de population $\Delta N(t)$ et de l'intensité lumineuse $I(t)$, afin d'évaluer ces quantités en régime transitoire puis l'intensité lumineuse crête obtenue.

* Évolution de la différence de population en régime transitoire



Le milieu amplificateur possède les caractéristiques suivantes.
 R : taux de peuplement du niveau **2**;
 A , W , γ : probabilité par seconde d'émission spontanée **2** \rightarrow **1**, d'émission induite, de désexcitation du niveau **1**. Ce milieu est supposé à élargissement spectral homogène.

L'équation d'évolution de la population N_2 s'écrit :

$$\frac{dN_2}{dt} = R - \frac{N_2}{\tau_2} - W \Delta N$$

On suppose γ très grand avec les autres paramètres du système tels que $N_1 \ll N_2$ à tout instant, d'où $\Delta N(t) \approx N_2(t)$. Il vient :

$$\frac{d\Delta N}{dt} = R - \frac{\Delta N}{\tau_2} - W \Delta N$$

En régime stationnaire, $\Delta N = \frac{R\tau_2}{1+W\tau_2}$ qu'on identifie à $\Delta N = \frac{\Delta N^0}{1+\frac{1}{\tau_s}}$ pour noter $\Delta N^0 = R \tau_2$ (différence de population non saturée) et $W = \frac{I}{\tau_2 I_s}$. Ceci permet d'écrire en régime transitoire :

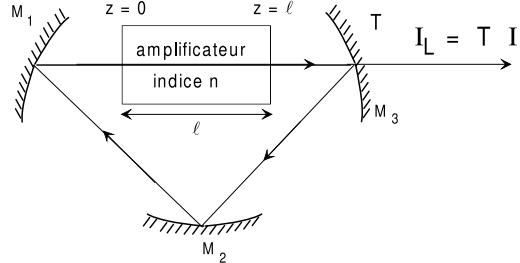
$$\frac{d\Delta N}{dt} = \frac{\Delta N^0}{\tau_2} - \frac{\Delta N}{\tau_2} - \frac{I}{\tau_2 I_s} \Delta N$$

$$= \frac{1}{\tau_2} (\Delta N^0 - \Delta N - \frac{I}{I_s} \Delta N)$$

Dans cette dernière expression, on remplacera τ_2 par τ pour avoir une forme générale dont on pourrait montrer qu'elle est valable au-delà de l'hypothèse $N_1 \ll N_2$.

* Évolution de l'intensité lumineuse en régime transitoire.

La cavité étudiée est schématisée ci-contre. Soit n l'indice optique de l'amplificateur. Le coefficient de pertes par unité de longueur du milieu amplificateur est noté α_P , en supposant $\alpha_P \ell \ll 1$ (hyp. pertes et gain faibles).



amplificateur

Les photons entrant dans l'amplificateur en $z = 0$ à l'instant t avec l'intensité $I(0, t)$ en ressortent à l'instant $t + \frac{n\ell}{c_0}$ avec l'intensité $I(\ell, t + \frac{n\ell}{c_0})$. Pour ce régime non stationnaire, on définit le gain total de l'amplificateur par $G(t) = \frac{I(\ell, t + \frac{n\ell}{c_0})}{I(0, t)}$.

Pour un élargissement spectral homogène, le bilan d'énergie pour l'interaction onde-amplificateur (cf Chapitre 4) a permis d'établir la relation :

$$\begin{aligned} \frac{1}{I(z, t)} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t}(z, t) + \frac{\partial I}{\partial z}(z, t) \right) &= \sigma \Delta N \\ \Leftrightarrow \frac{\partial I}{\partial t}(z, t) &= \frac{c_0}{n} \sigma \Delta N I(z, t) - \frac{c_0}{n} \frac{\partial I}{\partial z}(z, t) \end{aligned}$$

On suppose le gain assez faible pour avoir $\frac{\partial I}{\partial t}$ et $\frac{\partial I}{\partial z}$ petits et écrire au premier ordre :

$$\begin{aligned} I(\ell, t + \frac{n\ell}{c_0}) &= I(0, t) + \frac{\partial I}{\partial t} \times \left(\frac{n\ell}{c_0} \right) + \frac{\partial I}{\partial z} \times \ell \\ &= I(0, t) + \left(\frac{c_0}{n} \sigma \Delta N I(0, t) - \frac{c_0}{n} \frac{\partial I}{\partial z}(0, t) \right) \frac{n\ell}{c_0} + \frac{\partial I}{\partial z} \times \ell \\ &= I(0, t) + \sigma \Delta N I(0, t) \ell \\ \text{donc } G(t) &= 1 + \sigma \Delta N \ell \end{aligned}$$

C'est l'idée physique d'un paquet de photons d'intensité I arrivant en $z = 0$ à l'instant t puis traversant l'amplificateur en induisant la production d'une intensité supplémentaire $\sigma \Delta N \ell I$.

On discute maintenant le système (amplificateur + cavité), avec en $z = 0$, l'intensité $I(t)$ à l'instant t devenant $I(t + \frac{d}{c_0})$ au même point après un tour de cavité. Pour ce régime transitoire, on a :

$$\begin{aligned} I(t + \frac{d}{c_0}) &= I(t) \times G(t) \times \exp -\alpha_P \ell \quad \text{variation de } I \text{ sur un tour de cavité} \\ &= I(t) \times (1 + \sigma \Delta N \ell) \times (1 - \alpha_P \ell) \quad \text{au premier ordre, pertes faibles, gain faible} \\ &= I(t) \times (1 + \sigma \Delta N \ell - \alpha_P \ell) \end{aligned}$$

$$\text{d'où } I(t + \frac{d}{c_0}) - I(t) = I(t) (\sigma \Delta N \ell - \alpha_P \ell)$$

Au premier ordre, $I(t + \frac{d}{c_0}) - I(t) = \frac{dI}{dt} \times \frac{d}{c_0}$ d'où l'évolution temporelle :

$$\frac{dI}{dt} = \frac{c_0}{d} I(t) \times (\sigma \Delta N \ell - \alpha_P \ell)$$

$$= I(t) \times \frac{c_0 \alpha_P \ell}{d} \times \left(\frac{\sigma \Delta N}{\alpha_P} - 1 \right)$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{I(t)}{\tau_c} \left(\frac{\Delta N}{\Delta N_S} - 1 \right)$$

en notant $\frac{1}{\tau_c} = \frac{c_0 \alpha_P \ell}{d}$ (durée de vie des photons dans la cavité) et $\Delta N_S = \frac{\alpha_P}{\sigma}$ (différence de population au seuil).

* Équations couplées.

Dans un fonctionnement en régime transitoire, $\Delta N(t)$ et $I(t)$ varient au cours du temps en respectant les équations non linéaires couplées :

$$\frac{d\Delta N}{dt} = \frac{1}{\tau} (\Delta N^0 - \Delta N - \frac{I}{I_s} \Delta N) \quad (5.1)$$

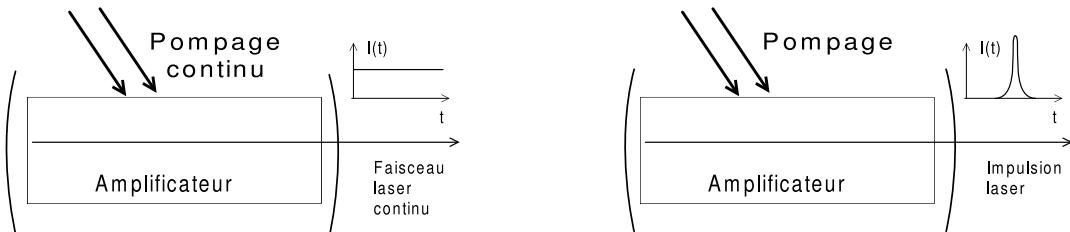
$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{\tau_c} \left(\frac{\Delta N}{\Delta N_S} - 1 \right) I \quad (5.2)$$

dont la forme générale se retrouve pour tous les types de fonctionnement laser (élargissement spectral homogène). Ces relations sont appelées 'Équations de Statz et DeMars'. Elles modélisent la dynamique de la transformation en lumière de l'énergie stockée initialement dans l'amplificateur sous forme de différence de population.

5.4.3 Laser en fonctionnement 'déclenché' ('Q switching')

On va résoudre ce système d'équations pour le mode de fonctionnement appelé 'déclenché' ou 'Q switching'. Le terme 'Q switching' fait référence à une modification très rapide du facteur de qualité Q_c de la cavité (Cf §5.2.3) à la base de cette technique de production d'une impulsion unique et intense.

Principe



Dans un laser continu, le pompage apporte au milieu amplificateur une énergie qui est transférée au fur et à mesure à l'onde. On a vu comment déterminer l'intensité laser extraite en régime stationnaire. Si un dispositif permet d'accumuler de l'énergie dans l'amplificateur puis de la transférer ensuite très rapidement à l'onde, on obtient une impulsion lumineuse très concentrée dans le temps et beaucoup plus intense. C'est le principe du fonctionnement laser en régime impulsional 'déclenché', ou 'Q-switching'.

Au départ, des pertes supplémentaires sont introduites dans la cavité pour interdire tout effet laser ($\alpha_P > \alpha^0$, τ_c et Q_c faibles). Le pompage peut alors stocker de l'énergie dans le milieu amplificateur sans que celle-ci ne se transfère à une onde laser. Dans une seconde phase, on réduit brutalement les pertes⁹, c'est le déclenchement ou le 'Q switching'. On va montrer que l'énergie emmagasinée dans le milieu amplificateur se transfère quasi instantanément à l'onde pour former une impulsion lumineuse brève et intense. Les étapes de ce processus sont détaillées maintenant.

Phase 1 : le pompage

Hypothèses :

- les pertes sont fortes (τ_c très faible, facteur de qualité Q_c faible)
- l'intensité laser dans la cavité reste nulle.
- à $t = 0$, $\Delta N = 0$.

9. ce qui signifie qu'on augmente brutalement le facteur de qualité.

Lorsque $I = 0$, l'équation (1) devient :

$$\frac{d\Delta N}{dt} = \frac{1}{\tau}(\Delta N^0 - \Delta N)$$

qui partant de $\Delta N = 0$ à $t = 0$ s'intègre en :

$$\Delta N(t) = \Delta N^0 \left(1 - \exp -\frac{t}{\tau}\right)$$

Le fait de porter des atomes sur le niveau 2 accumule de l'énergie dans le milieu amplificateur et fait tendre ΔN asymptotiquement vers ΔN^0 . On considère que suffisamment d'énergie y est stockée à un instant t_i tel que $\Delta N(t_i) = 0,95 \Delta N^0$ et on passe à la phase suivante en réduisant instantanément les pertes de la cavité. Application numérique : $t_i = -\tau \ln(1-0,95) = 1,5$ ms pour $\tau = 0,5$ ms.

Phase 2 : amorçage de l'impulsion

Hypothèses :

- l'émission spontanée de l'amplificateur produit sur l'axe de la cavité une intensité résiduelle $I_i = 10^{-10} I_s$.
- le pompage a créé dans le milieu amplificateur une différence de population ΔN_i de l'ordre de 10 ΔN_S et qu'on suppose quasi-constante pendant la phase d'amorçage de l'impulsion.
- les pertes sont brutalement ramenées à une valeur faible caractérisée par $\tau_c = 10$ ns, le facteur de qualité Q_c de la cavité devient grand, c'est l'instant du 'Q switching'.
- on fixe arbitrairement la fin de cette phase d'amorçage à l'instant t_D où $I = I_s$.

Avec ces hypothèses, l'équation (2) devient :

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{\tau_c} \left(\frac{\Delta N_i}{\Delta N_S} - 1 \right) I$$

avec à $t = t_i$ la condition initiale $I = I_i$. Le paramètre $\frac{1}{\tau_c} \left(\frac{\Delta N_i}{\Delta N_S} - 1 \right)$ est constant.

Dans la cavité, l'intensité augmente exponentiellement à partir de l'intensité résiduelle I_i , suivant la relation :

$$I(t - t_i) = I_i \exp \left[\frac{t - t_i}{\tau_c} \left(\frac{\Delta N_i}{\Delta N_S} - 1 \right) \right]$$

avec un temps caractéristique $\frac{\tau_c}{\frac{\Delta N_i}{\Delta N_S} - 1}$ de l'ordre de 1 ns. On fixe arbitrairement l'instant t_D de fin de la phase d'amorçage de l'impulsion lorsque l'intensité devient significative avec $I(t_D - t_i) = I_s$. Cela correspond à :

$$t_D - t_i = \frac{\tau_c}{\frac{\Delta N_i}{\Delta N_S} - 1} \ln \frac{I_s}{I_i} = 25 \text{ ns}$$

L'amorçage de l'impulsion est quasi-instantané par rapport à la durée initiale du pompage.

Phase 3 : Développement de l'impulsion laser

Hypothèses :

- cette phase démarre à $t = t_D$, instant auquel on a les conditions initiales $I = I_s$ et $\Delta N = \Delta N_i$.
- ΔN est assez proche de ΔN^0 ou I est suffisamment fort pour avoir $\frac{I}{I_s} \Delta N \gg (\Delta N^0 - \Delta N)$.

L'équation (1) se simplifie alors en

$$\frac{d\Delta N}{dt} = -\frac{1}{\tau} \frac{I}{I_s} \Delta N \quad (1')$$

avec toujours $\frac{dI}{dt} = \frac{1}{\tau_c} \left(\frac{\Delta N}{\Delta N_S} - 1 \right) I$ avec ici ΔN fonction de t . (2)

Qualitativement, ΔN décroît au cours du temps. D'après l'équation (2), $\frac{dI}{dt}$ est positif tant que $\Delta N > \Delta N_S$: l'intensité croît puis atteint son maximum lorsque $\Delta N = \Delta N_S$. Pendant la montée de l'impulsion, le temps

caractéristique d'évolution est de l'ordre de $\tau_c \frac{\Delta N_S}{\Delta N} < \tau_c$. Physiquement, le transfert d'énergie de l'amplificateur vers l'onde par émission induite a une probabilité par seconde W d'autant plus grande que I est intense¹⁰. C'est pour cette raison que le temps de développement de l'impulsion est extrêmement rapide.

On élimine le temps entre les équations (1') et (2) :

$$\begin{aligned}\frac{\frac{d\Delta N}{dt}}{\frac{dI}{dt}} &= \frac{d\Delta N}{dI} = -\frac{1}{\tau} \frac{I}{I_s} \Delta N \tau_c \frac{1}{(\frac{\Delta N}{\Delta N_S} - 1)} \frac{1}{I} \\ &= \frac{\tau_c}{\tau} \frac{1}{I_s} \frac{1}{(\frac{1}{\Delta N_S} - \frac{1}{\Delta N})}\end{aligned}$$

soit en séparant les variables ΔN et I :

$$\frac{\tau}{\tau_c} \left(\frac{1}{\Delta N} - \frac{1}{\Delta N_S} \right) d\Delta N = \frac{dI}{I_s}$$

qu'on intègre entre t_D ($\Delta N = \Delta N_i$, $I = I_s$) et l'instant t correspondant à la différence de population $\Delta N(t)$ et à l'intensité $I(t)$.

$$\begin{aligned}\frac{\tau}{\tau_c} \int_{\Delta N_i}^{\Delta N(t)} \left(\frac{1}{\Delta N} - \frac{1}{\Delta N_S} \right) d\Delta N &= \int_{I_s}^{I(t)} \frac{dI}{I_s} \\ \frac{\tau}{\tau_c} \left(\ln \frac{\Delta N(t)}{\Delta N_i} - \frac{\Delta N(t) - \Delta N_i}{\Delta N_S} \right) &= \frac{I(t) - I_s}{I_s}\end{aligned}$$

L'impulsion étant maximale quand $\Delta N(t) = \Delta N_S$, on reporte cette valeur dans l'expression précédente pour obtenir l'intensité :

$$I_{max} = I_s \left[1 + \frac{\tau}{\tau_c} \left(\ln \left(\frac{\Delta N_S}{\Delta N_i} \right) - \frac{\Delta N_S - \Delta N_i}{\Delta N_S} \right) \right]$$

Avec $\tau_c = 10$ ns, $\tau = 0,5$ ms, $\Delta N_i = 10 \Delta N_S$, on obtient :

$$I_{max} = 3,3 \cdot 10^5 I_s$$

Cette valeur doit être comparée à celle obtenue en régime stationnaire, $I = I_s \left(\frac{\alpha^0}{\alpha_P} - 1 \right) = I_s \left(\frac{\Delta N^0}{\Delta N_S} - 1 \right)$ qui est en général de l'ordre de 2 à 5 fois I_s .

Remarque : ΔN_S correspond à la valeur de ΔN telle que l'amplification compense juste les pertes en régime stationnaire. Lorsqu'après le maximum de l'impulsion $\Delta N < \Delta N_S$, l'amplificateur ne possède plus assez d'énergie pour pouvoir compenser les pertes de lumière donc la valeur de l'intensité dans la cavité commence à décroître, elle se vide de ses photons.

Phase 4 : fin de l'impulsion

Pour la suite de l'impulsion, $\Delta N(t)$ est inférieure puis très inférieure à ΔN_S donc l'équation (2) devient

$$\frac{dI}{dt} \approx -\frac{1}{\tau_c} I$$

L'amplificateur a transféré toute l'énergie disponible, il n'y a plus aucune amplification. Les photons encore présents dans la cavité en sortent progressivement avec le temps caractéristique τ_c .

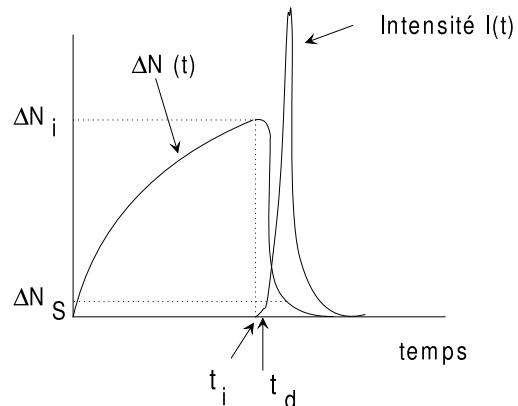
On peut montrer qu'à la fin de l'impulsion laser, la totalité de l'énergie initialement stockée dans le milieu amplificateur sous forme de différence de population (énergie $h\nu \Delta N_i S \ell$) a été communiquée à l'onde¹¹.

Le fonctionnement en mode déclenché permet ainsi d'utiliser des régimes transitoires pour obtenir des impulsions avec :

10. Autre formulation : plus l'intensité est forte, plus elle 'aspire' efficacement l'énergie disponible dans l'amplificateur.

11. On en déduit que la diminution de ΔN pour que l'intensité passe pendant la phase d'amorçage de I_i à I_s est négligeable devant ΔN_i . L'hypothèse de ΔN restant égale à ΔN_i pendant la phase d'amorçage est donc justifiée.

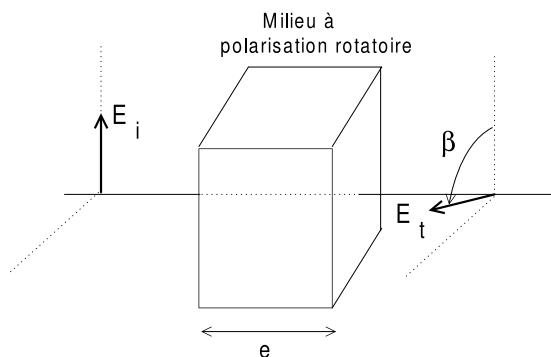
- une intensité crête de l'ordre de 10^5 fois plus forte qu'en régime continu.
- un temps de montée de l'ordre de quelques nanosecondes et le temps de descente de l'ordre de τ_c . La durée de cette impulsion est typiquement de 10 à 25 ns à mi-hauteur pour un laser YAG standard, mais peut aussi être allongée jusqu'à quelques microsecondes¹².



Les évolutions temporelles de la différence de population et de l'intensité sont représentées ci-contre pour un laser en fonctionnement déclenché.

5.5 Annexes

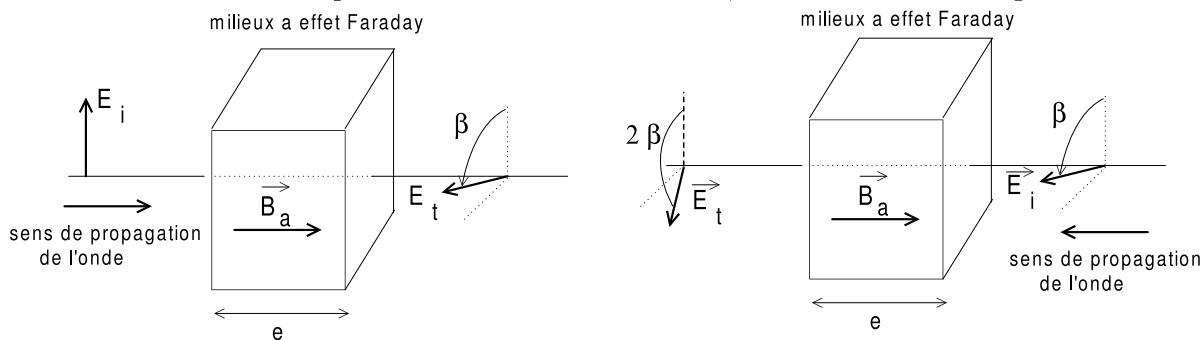
5.5.1 Principe d'un isolateur optique



Un isolateur optique utilise des propriétés de *polarisation rotatoire* de la matière qui sont une forme particulière de biréfringence. Un faisceau de lumière polarisée rectilignement à l'entrée de la substance ressort avec une polarisation toujours rectiligne mais dont la direction de polarisation a tourné d'un angle proportionnel à l'épaisseur traversée et à la concentration de l'espèce active.

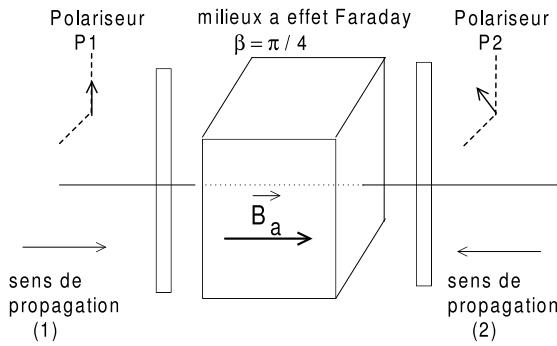
Exemple d'utilisation : la mesure de la concentration de glucose dans une solution.

Certaines substances acquièrent cette propriété sous l'action d'un champ magnétique appliqué \vec{B}_a . Cet effet a été découvert par Faraday en 1845 et porte son nom. L'angle de la rotation est proportionnel à B_a et à l'épaisseur e . Une caractéristique fondamentale de l'effet Faraday est que **l'angle de la rotation autour de la direction de \vec{B}_a est indépendant du sens de ce vecteur**, comme illustré sur les figures suivantes :



En ajustant l'épaisseur du matériau et la valeur du champ magnétique créé par un aimant pour que l'angle de rotation β soit égal à $\pi/4$, on construit le dispositif suivant :

12. En réduisant les pertes pour augmenter τ_c



Les directions passantes des polariseurs forment entre elles un angle $\pi/4$.

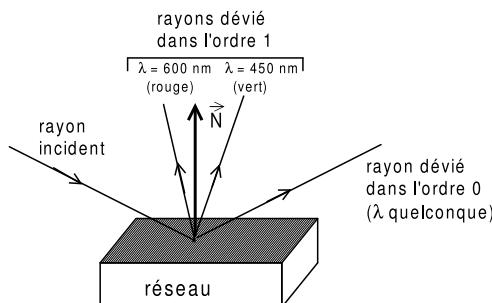
Une onde polarisée rectilignement suivant la direction passante de P_1 et se propageant dans le sens (1) voit sa direction de polarisation tourner de $\pi/4$ si bien qu'elle est intégralement transmise par P_2 . Une onde de polarisation quelconque se propageant dans le sens (2) est partiellement transmise par P_2 . Sa polarisation rectiligne tourne de $\pi/4$ et se retrouve orthogonale à la direction de P_1 . Cette onde est donc arrêtée par le dispositif qui joue le rôle d'une diode optique de sens passant (1).

5.5.2 Laser à colorant accordable.

Un montage classique pour réaliser un laser accordable utilise un amplificateur 'à colorant' et une cavité construite autour d'un réseau de diffraction. On va montrer comment il sélectionne une longueur d'onde puis justifier qu'il doit être éclairé en incidence rasante. Cette configuration est appelée "LIR", pour laser en incidence rasante, c'est celle utilisée dans le TP 'Laser à colorant'.

Les angles étant repérés par rapport à la normale à la surface du réseau, un rayon de longueur d'onde λ incident avec l'angle θ_i est dévié dans différentes directions formant les angles $\theta_r(\lambda, p)$ avec la normale, tels que

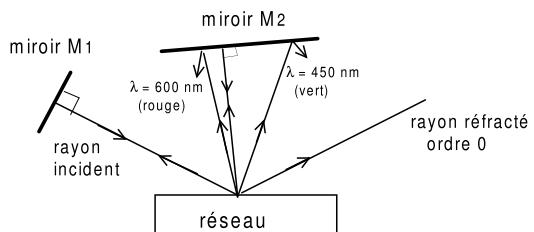
$$\sin \theta_r(\lambda, p) + \sin \theta_i = p \frac{\lambda}{a} \quad \text{avec } p \text{ entier}$$



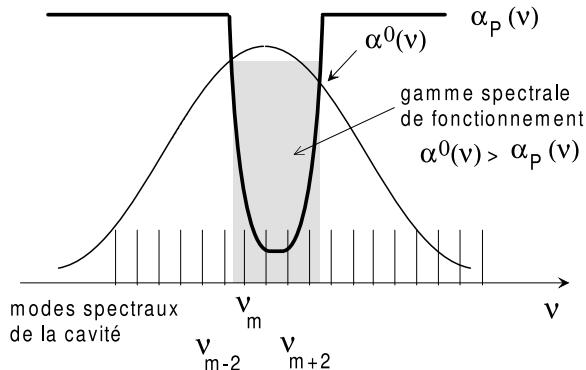
Les rayons sont tous dans le plan défini par le rayon incident et la normale \vec{N} au réseau au point d'incidence. Il s'agit physiquement d'un phénomène de diffraction de l'onde incidente sur le réseau. La distance entre deux traits du réseau est notée a . La direction des rayons renvoyés par le réseau est fonction de a , de l'entier p appelé 'ordre de diffraction' et de la longueur d'onde pour $p \neq 0$.

Un miroir plan M_2 est disposé perpendiculairement au rayon de longueur d'onde λ_0 diffracté dans l'ordre 1 du réseau. Ce rayon est renvoyé sur lui-même donc arrive sur le réseau avec l'angle d'incidence $\theta_r(\lambda_0, 1)$. La formule du réseau montre que sa diffraction dans l'ordre 1 forme l'angle θ_i avec \vec{N} pour être diffracté dans l'ordre 1. S'il arrive en incidence normale sur le miroir M_1 , il se retrouve superposé au rayon initial et la cavité est fermée.

La cavité n'est fermée que pour les fréquences que le réseau envoie en incidence normale sur M_2 , donc pour des fréquences très proches de $\nu_0 = \frac{c_0}{\lambda_0}$. On peut par contre modifier ν_0 en changeant l'orientation de M_2 , ce

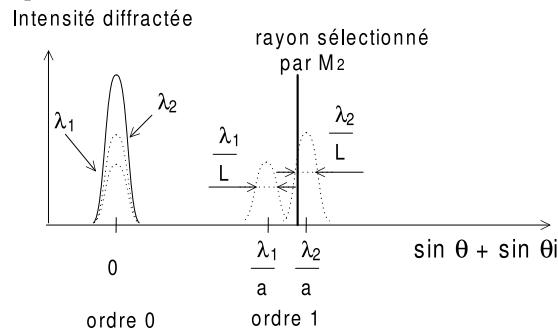


laser est accordable.

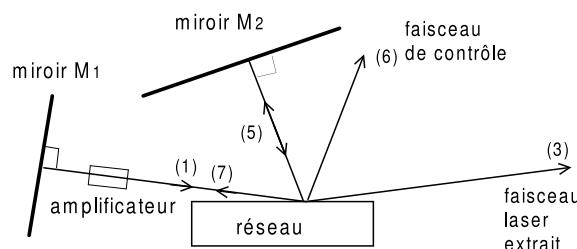


La fonction 'pertes' est étroite. On va étudier comment construire la cavité de manière à la rendre la plus étroite possible et à limiter le nombre de modes spectraux présents dans le rayonnement.

On précise la direction des rayons diffractés par le réseau, pour un rayonnement contenant deux longueurs d'onde λ_1 et λ_2 proches. Si on représente l'intensité diffractée dans l'ordre $p = 1$ en fonction de $\sin \theta_r(\lambda, 1) + \sin \theta_i$, les propriétés du réseau font qu'il apparaît deux taches pour $\sin \theta_r(\lambda, 1) + \sin \theta_i$ dans l'intervalle $[\frac{\lambda_1}{a} - \frac{\lambda_1}{L}, \frac{\lambda_1}{a} + \frac{\lambda_1}{L}]$ et $[\frac{\lambda_2}{a} - \frac{\lambda_2}{L}, \frac{\lambda_2}{a} + \frac{\lambda_2}{L}]$ où L est la longueur éclairée du réseau. Le miroir M_2 renvoie sur elle-même dans la cavité λ_2 mais pas λ_1 si les deux intervalles sont sans intersection. C'est possible pour deux longueurs d'onde très proches si chaque intervalle est étroit donc si la longueur éclairée L du réseau est la plus grande possible. Lorsque λ_2 est renvoyée efficacement dans la cavité et λ_1 très proche de λ_2 ne l'est pas, on obtient une fonction pertes $\beta(\nu)$ ou $\beta(\lambda)$ étroite et une cavité laser pouvant fonctionner seulement sur une longueur d'onde très précisément définie.



La longueur éclairée du réseau est maximale si l'angle d'incidence θ_i est proche de $\pi/2$: le réseau doit être utilisé en incidence rasante pour obtenir une résolution spectrale optimale. Les lasers recherchant une bonne résolution utilisent des réseaux de 2400 traits par millimètre larges de plus d'une dizaine de centimètres. Le laser est construit en ajoutant dans la partie de la cavité conservant un axe fixe un milieu amplificateur et son système de pompage. Les pertes de cette cavité étant très élevées, on utilise ici un amplificateur à colorant qui sur une longueur de l'ordre du centimètre produit un gain non saturé $\alpha^0 \ell \gg 1$.



Chapitre 6

PRINCIPALES APPLICATIONS DES DIFFÉRENTS TYPES DE LASERS

8 CHAPITRE 6. PRINCIPALES APPLICATIONS DES DIFFÉRENTS TYPES DE LASERS

6.1 Les lasers à milieux amplificateurs gazeux

Milieu Amplificateur	Longueur d'onde	Applications
CO ₂ faible puissance	infrarouge moyen ; 9,6 et 10,6 μm	Télémétrie; guidage; LIDAR (détection pollution); imagerie; anémométrie; détection; chimie laser;
CO ₂ puissance moyenne et forte (qq kW)		Coupe; perçage et soudure des métaux; traitement de surface et alliages; usinage de céramiques et de matériaux résistants
CO ₂ de très grande puissance (> 20 kW)		Usinage du plastique; micro-usinage; photochimie; marquage industriel (bois; métal); chirurgie; fusion thermonucléaire; armes lasers;
Hélium-Néon (He-Ne)	visible ; 543 nm, 594 nm, 612 nm et 632,8 nm	Nivellement des routes; perçage de galeries; alignement dans le bâtiment; positionnement des machines outils; imprimerie et reprographie sans contact; lecture de compact et vidéo-disques; scanners de supermarchés; spectrométrie et métrologie industrielle; recherche scientifique; holographie; médecine; biologie.
Gaz ionisés (Ar ⁺ ; Kr ⁺)	UV et violet ; 351 nm, 407 nm et 413 nm	Usinage de circuits imprimés; enregistrement de vidéo-disques; sous titrage de films; imprimerie; recherche scientifique; vélométrie Doppler (mesure de flux de particules); photochimie; pompage de lasers à colorants et saphir-titane; holographie; ophtalmologie.
Lasers à excimères (F ₂ , ArF, KrF, XeCl)	UV ; 157 nm, 193 nm, 248 nm et 308 nm	Photochimie; séparation isotopique; pompage de lasers à colorants; fusion thermonucléaire; nettoyage d'œuvres d'art; nettoyage de monuments
Laser à azote (N ₂)	UV ; 337 nm	Pompage de lasers à colorant; photochimie; recherche scientifique en général; chirurgie.
Lasers à vapeur métalliques (Cu)	visible ; 510 et 578 nm	Remplacement du laser Ar ⁺ dans les utilisations faibles puissances; séparation isotopique; photochimie;
Laser à iode (I)	infrarouge proche ; 1,31 μm	Fusion thermonucléaire; armes lasers

6.2 Les lasers à milieux amplificateurs liquides

Colorants (Rhodamines ; Coumarines ; Pyridines)	proche IR à proche UV ; 360-900 nm	Photochimie; spectroscopie; séparation isotopique; génération d'impulsions ultra-courtes; recherche scientifique en général; analyses bio-médicales; thérapeutique (traitements de la peau); destruction photosélective de cellules cancéreuses
--	------------------------------------	---

6.3 Les lasers à milieux amplificateurs solides

Rubis (Cr ³⁺ :Al ₂ O ₃)	rouge ; 694 nm	Photochimie ; recherche scientifique en général ; holographie ; micro-usinage ; nettoyage d'œuvres d'art ; détection de polluants ; médecine
Néodyme-YAG (Nd ³⁺ :Y ₃ Al ₅ O ₁₂)	infrarouge moyen ; 1,064 μm	Thérapeutique (chirurgie laser ; destruction de tumeurs en des points accessibles par fibre optique) ; LIDAR (analyse de l'atmosphère) ; découpe et perçage des métaux ; usinage de circuits intégrés ; traitement de céramiques et de semiconducteurs ; radars lasers ; pompage de lasers à colorants ; imprimerie ; fusion thermo-nucléaire ; armes laser ; télémétrie et détection militaire ;
Alexandrite (Cr ³⁺ :BeAl ₂ O ₃)	rouge-IR proche ; 700-820 nm	Traitement des semi-conducteurs ; spectroscopie ; applications militaires ;
Semiconducteurs (diodes lasers)	proche UV et infrarouge ; 405 nm, 460-520 nm, 635-870 nm, 1,55 μm	Télécommunication par fibre ; lecture de CD, DVD et blu-ray ; scanners de supermarchés ; reprographie (imprimantes) ; photocopieuses ; spectroscopie ;
Lasers à fibres (Erbium)	infrarouge proche ; 1,54 μm	Télécommunication ; amplification optique
OPO (Oscillateurs Paramétriques Optiques)	proche UV à infra-rouge proche	Utilisation en laboratoires de recherche principalement
Titane-Saphir (Ti ³⁺ :Al ₂ O ₃)	infrarouge proche ; 800-1100 nm	Utilisation en laboratoires de recherche principalement (impulsions femtoseconde ; spectroscopie à très haute résolution)