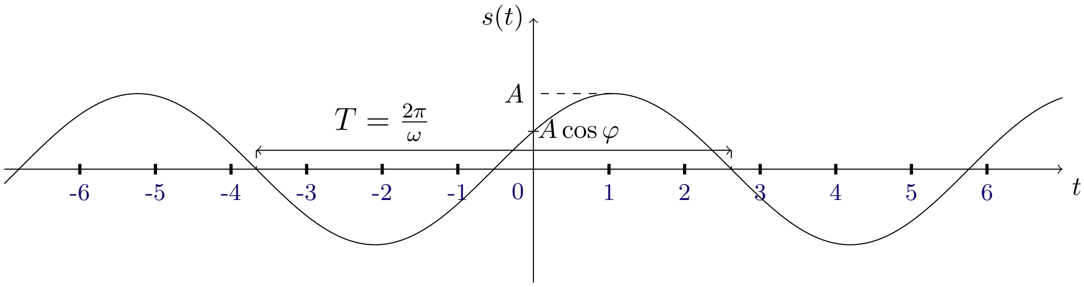
Rappels sur les Signaux physiques[1]

En physique expérimentale, on est souvent amené à effectuer la mesure de grandeurs évoluant au cours du temps : l'élongation d'un ressort, la température d'une pièce, l'amplitude d'oscillations en un point de la surface d'une cuve de liquide etc. Ces grandeurs physiques mesurables dépendantes du temps peuvent être rassemblées sous le nom de *signaux physiques*.

I Un signal particulier (non physique) : le signal sinusoïdal

$$\boxed{s(t) = A\cos(\omega t + \varphi)}$$



Un signal sinusoïdal (aussi appelé harmonique) est caractérisé par son amplitude A et sa pulsation ω, constantes positives. La pulsation est directement reliée à la période T du signal, et donc à sa fréquence f :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

La phase à l'origine φ est un paramètre qui dépend de l'origine des temps choisie : elle permet d'exprimer la valeur du signal au temps $t = 0$, $s(0) = A\cos\varphi$, et correspond à une translation du signal suivant l'axe des temps. La périodicité du signal permet de choisir φ dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$.

Propriété importante : Tout signal de la forme $s(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ peut s'écrire : $s(t) = \alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t$

avec $\left\{\begin{array}{rcl} \alpha & = & A\cos\varphi \\ \beta & = & -A\sin\varphi \end{array}\right.$ et alors $A = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ et $\varphi = \left\{\begin{array}{ll} \arccos\left(\dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right) & \text{si } \sin\varphi > 0 \\ -\arccos\left(\dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right) & \text{si } \sin\varphi < 0 \end{array}\right.$

Moralité, *la somme de deux signaux sinusoïdaux de même pulsation est encore un signal sinusoïdal à cette pulsation.*

Déphasage On dira qu'un signal $s_1(t) = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$ est déphasé de $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi$ par rapport à $s(t)$ tel que défini plus haut. Si $\Delta\varphi > 0$, s_1 est dit *en avance* sur s : cela signifie que, si $A_1 = A$, s_1 prendra les mêmes valeurs que s mais plus tôt, l'écart en temps étant donné par $\tau = \frac{\Delta\varphi}{\omega}$. Inversement, si $\Delta\varphi < 0$, $s1$ est dit *en retard* sur s. Si $\Delta\varphi = 0$, les signaux sont *en phase* ; si $\Delta\varphi = \pm\pi$, les signaux sont *en opposition de phase* et si $\Delta\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$, les signaux sont *en quadrature de phase*. La méthode des vecteurs de Fresnel permet de représenter graphiquement le déphasage entre deux signaux comme un angle entre deux vecteurs.

Décomposition de Fourier Il faut garder à l'esprit que le signal sinusoïdal n'est pas un signal physique. En effet, par définition de la fonction cos, ce signal s'étend identiquement de $-\infty$ à $+\infty$ ce qui ne sera jamais le cas pour un signal physique mesuré, qui aura un début et une fin bien déterminés. Pourquoi étudier le signal sinusoïdal alors ? D'après la théorie de Fourier, *tout signal physique $s(t)$ pourra s'écrire comme une somme de signaux sinusoïdaux* :

$$s(t) = \sum_i A_i\cos(2\pi f_i t + \varphi_i)$$

On pourra caractériser un signal physique en donnant l'ensemble des fréquences $\{f_i\}$ des signaux sinusoïdaux le constituant, ainsi que les amplitudes $\{A_i\}$ et les phases à l'origines associées $\{\varphi_i\}$.

1. Ces notes ont pour seul objectif de rappeler un nombre très restreint de notions afin de faciliter le démarrage des tutorats, elles sont donc lacunaires (exemple : les ondes stationnaires sont absentes) et ne sauraient remplacer un cours détaillé.

C. Meridja
camille.meridja@u-psud.fr

Cas d'un signal périodique Soit s un signal de période T_0, donc de fréquence $f_0 = \frac{1}{T_0}$, *a priori non sinusoïdal.* La théorie de Fourier permet d'écrire s comme une somme infinie de signaux sinusoïdaux à des fréquences multiples de f_0 :

$$s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(2\pi n f_0 t + \varphi_n)$$

— A_0 est la moyenne temporelle du signal sur une période
— $A_1 \cos(2\pi f_0 t + \varphi_1)$ est la composante sinusoïdale ayant la même fréquence que le signal. Cette composante est appelée *le fondamental* du signal
— les autres composantes sont appelées *harmonique de rang n*

II Propagation d'un signal, notion d'onde progressive

Nous avons jusqu'ici utilisé la notion de signal comme désignant l'évolution d'une grandeur au cours du temps. Cette description s'applique par exemple au déplacement transverse en un point donné d'une corde tendue : imaginons que l'on crée à un instant une perturbation sur cette corde, la mesure du déplacement transverse de la corde en un point donné a priori quelconque constitue un signal physique : typiquement cette déformation sera nulle pour $t \to -\infty$ jusqu'à un certain temps t_0, aura une évolution dépendant de la perturbation initiale de la corde jusqu'à un certain t_1, puis redeviendra typiquement nulle, si l'on suppose la corde infinie, pour tout instant ultérieur.

Cet exemple permet d'introduire la notion de propagation d'un signal : la perturbation initiale se propage le long de la corde, éventuellement atténuée et/ou déformée, avec un certain retard en chaque point de la corde. Cette propagation spatiale d'un signal temporel constitue la notion d'*onde progressive*. Les ondes progressives correspondent à des phénomènes aussi variés que la propagation dans l'espace d'une perturbation de la pression *dans un milieu matériel* (**les ondes sonores**), ou par exemple celle d'une perturbation du champ électromagnétique *dans un milieu matériel ou dans le vide*, (**les ondes électromagnétiques**, dont la lumière visible).

Célérité d'une onde progressive La vitesse de propagation d'un signal dans l'espace, *sans absorption ni déformation*, est appelée *célérité* de l'onde, et est souvent notée c. Elle ne correspond pas à une vitesse de déplacement de la matière puisque, comme nous l'avons vu, la propagation d'une onde ne nécessite pas toujours la présence de matière. Lorsque l'onde est mécanique (par exemple une onde sonore) la propagation du signal s'effectue sans déplacement macroscopique de matière : la célérité d'une onde est une vitesse de propagation de l'énergie contenue dans l'onde, pas de la matière.

En pratique, pour une onde se propageant le long d'un axe Ox, le temps τ qu'il faut à l'onde pour cheminer de x_0 à x_1 sera lié à c par :

$$\tau = \frac{x_1 - x_0}{c}$$

Ainsi, en considérant la propagation du signal, on aura :

$$s(x_1, t) = s\left(x_0, t - \frac{x_1 - x_0}{c}\right)$$

Généralisation D'une manière générale, une onde se propageant sans atténuation ni déformation à la célérité c *dans le sens positif* d'un axe (Ox) pourra être décrite par des fonctions f ou F telles que :

$$s(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) = F(x - ct)$$

Si cette onde se propage au contraire en direction des x négatifs, elle pourra être décrite par des fonctions g ou G telles que :

$$s(x,t) = g\left(t + \frac{x}{c}\right) = G(x + ct)$$

Onde progressive sinusoïdale Dans le cas important où le signal qui se propage à c dans un certain milieu est sinusoïdal de pulsation ω on peut écrire, dans le cas d'une propagation dans le sens positif d'un axe (Ox) :

$$s(x,t) = A_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi_0\right) = A_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x + \varphi_0\right)$$

avec $\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$ que l'on pourra prendre comme définition de la longueur d'onde λ dans le milieu de propagation. En reliant la pulsation à la fréquence f du signal, on établit la relation plus simple entre f, λ et c : $\boxed{c = \lambda f}$.

camille.meridja@u-psud.fr

En considérant l'allure de l'onde à un instant t_0 fixé (« en prenant une photo »), on voit que l'évolution spatiale du signal est également sinusoïdale, à la période λ. On introduit souvent la notation $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ par analogie avec la pulsation temporelle :

$$s(x, t_0) = A_0 \cos(kx + \Phi_0)$$

avec $\Phi_0 = -\omega t_0 - \varphi_0$ (on a utilisé par esthétisme la propriété $\cos -x = \cos x$). On exhibe ainsi la propriété de double périodicité de l'onde, spatiale et temporelle, les deux périodes étant donc reliées par $\lambda = cT$.

Dans la suite, on verra qu'il est pratique de modéliser l'onde sinusoïdale unidimensionnelle comme un signal physique qui *acquière* une phase supplémentaire $\varphi(x)$ au cours de sa propagation (un déphasage par rapport au signal à l'origine $x = 0$). Aucune notion nouvelle n'est introduite, il s'agit juste d'une reformulation des expressions précédentes :

$$s(x, t) = A_0 \cos(\omega t + \varphi(x))$$

où l'on aura $\varphi(x) = -kx + \varphi_0$. Les signaux en x_0 et en x_1 seront donc en phase si $\varphi(x_1) - \varphi(x_0) = p \cdot 2\pi$, avec $p \in \mathbb{Z}$, c'est à dire si $x_1 - x_0 = p\lambda$, ce qui est en accord avec la périodicité spatiale de l'onde.

III Superposition de deux signaux sinusoïdaux

Les modèles de propagation ondulatoire, que vous étudierez plus en détail en deuxième année, seront à notre niveau toujours (ou presque) gouvernés par des équations **linéaires** ; nous pourrons alors poser le principe intuitif de superposition : *l'expression du signal résultant de la superposition de deux signaux sera donné par la somme des expressions individuelles de ces signaux.*

III.1 Interférences entre deux ondes de même fréquence

On se place dans un premier temps en un point quelconque de l'espace où se superpose deux signaux sinusoïdaux (ou de manière équivalente deux ondes sinusoïdales, puisque l'on se place en un point particulier de l'espace) de même fréquence mais de phases à l'origine et d'amplitudes différentes : $\begin{cases} s_1(t) &= A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ s_2(t) &= A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$
Le signal résultant s'écrit :

$$\begin{aligned} s(t) &= s_1(t) + s_2(t) \\ &= A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \\ &= A_1 (\cos \omega t \cos \varphi_1 - \sin \omega t \sin \varphi_1) + A_2 (\cos \omega t \cos \varphi_2 - \sin \omega t \sin \varphi_2) \\ &= (A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2) \cos \omega t - (A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2) \sin \omega t \end{aligned}$$

et est donc toujours un signal sinusoïdal de pulsation ω. Comme on l'a vu en section I, l'amplitude de ce signal résultant sera $A = \sqrt{(A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2)^2 + (A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2)^2}$

$$\boxed{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}}$$

Ainsi, si les ondes sont en phase sont en phase au point considéré, $A = A_1 + A_2$; dans le cas où elles sont en opposition de phase $A = |A_1 - A_2|$. Ces deux cas de figure sont respectivement nommés interférences constructives et destructives.Cette expression peut également être obtenue avec la méthode des vecteurs de FRESNEL.

En reprenant en compte l'aspect ondulatoire complet des signaux et en écrivant les phases des signaux en fonction des longueurs de propagation, nous pouvons écrire :

$$\boxed{A(\mathrm{M}) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\delta(\mathrm{M}) + \varphi_{10} - \varphi_{20}\right)}}$$

avec δ différence de marche entre les deux ondes au point M de l'espace considéré. On constate expérimentalement que le terme interférentiel en $\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$ ne contribuera réellement à l'amplitude que pour des ondes provenant initialement d'une source unique, **des ondes cohérentes**. (L'origine de ce phénomène se trouve dans le terme $\varphi_{10} - \varphi_{20}$, qui entraînera un moyennage statistique du cosinus dans le cas d'ondes incohérentes.)

III.2 Battements

Lorsque l'on superpose deux signaux sinusoïdaux de même amplitude et de fréquences différentes mais très proches f_1 et f_2 (« très proches »signifie $|f_1 - f_2| \ll (f_1 + f_2)$), le signal résultant apparaît comme un signal de fréquence élevée $(f_1 + f_2)/2$ modulée en amplitude par un signal de fréquence $|f_1 - f_2|/2$, ce qui fait apparaître des battements de fréquence $f_{\text{batt}} = |f_1 - f_2|$