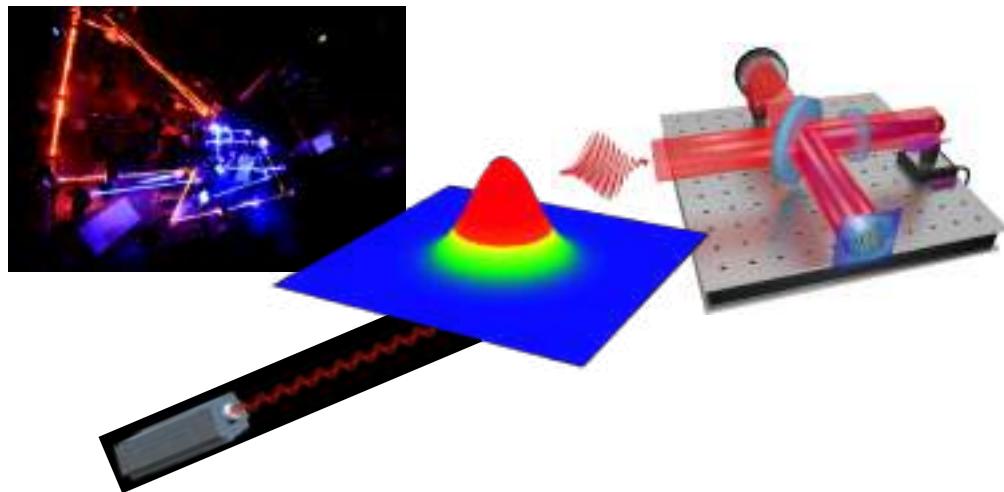


Cours de PHYSIQUE des LASERS

Séverine Boyé-Péronne

severine.boye-peronne@universite-paris-saclay.fr

Institut des Sciences Moléculaires d'Orsay (ISMO), Bât.520



PHYSIQUE des LASERS

Plan du cours

Chapitre 1 : Introduction à la physique des lasers

Chapitre 2 : Etude des cavités lasers

→ TD1, TD2, TD3 et DM1

Chapitre 3 : Faisceaux gaussiens

→ TD2, TD3 et DM1

Chapitre 4 : Principes de base des amplificateurs lasers

→ TD3, TD4, TD5 et DM2

Chapitre 5 : Théorie du laser - régime continu et impulsional

→ TD6, TD7 et DM2

Chapitre 6 : Introduction à l'optique non-linéaire

Chapitre 1-

Introduction à la Physique des Lasers

1. HISTORIQUE

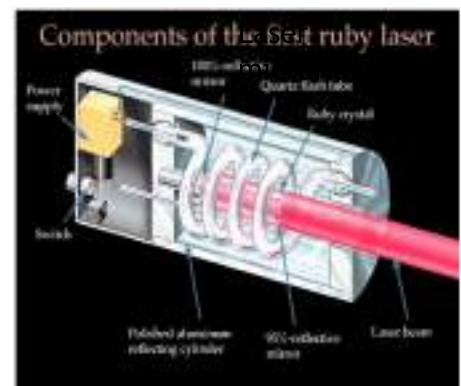
L Light

A Amplification by

S Stimulated

E Emission of

R Radiation



(8 Juillet 1960, New York Times)

1958 : Charles Townes et Arthur Schalow (Bell Labs) publient un article qui démontre la théorie du laser à rubis

1960 : Théodore Maiman (Hugh Laboratory) produit expérimental^t la première émission laser dans un cristal de rubis

1. HISTORIQUE

Initialement, une découverte qualifiée de « solution sans problème » !

60 ans après, une découverte qui a révolutionné la vie quotidienne et qui a permis à 2 nouveaux domaines de la physique d'émerger :

- Interaction matière-rayonnement
- Optique non-linéaire

Plusieurs prix Nobel en lien avec les lasers, dont les plus récents :

- 1997 : Cohen-Tannoudji pour le refroidissement et piégeage des atomes par laser
- 1999 : Zewail pour la femtochimie (étude des états de transition dans les réactions chimiques)
- 2005 : Hall et Hänsche pour le développement de la spectroscopie par peignes de fréquence femtoseconde
- 2018 : Mourou, Strickland et Ashkin pour la méthode de production d'impulsions lasers ultra-brèves de forte intensité et pour l'invention des pinces optiques pour la manipulation de systèmes biologiques

2. ORIGINALITÉ DE LA LUMIÈRE LASER

COHERENCE

Cohérence spatiale

Faisceau très collimaté selon une direction de l'espace (faisceau quasi-parallèle)
➡ divergence très faible (10^{-3} rad)

Faisceau focalisé en un point de l'espace (source quasi-ponctuelle)
➡ très forte intensité lumineuse (10^6 W.cm^{-2})
➡ phénomènes non-linéaires

Cohérence temporelle

Spectre des fréquences $J(\nu)$ très étroit
➡ fréquence spectrale très bien définie (à quelques 10^3 Hz) donc onde quasi-monochromatique

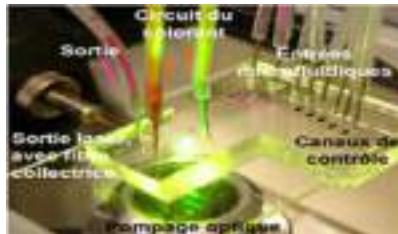
Rayonnement très concentré dans le temps ($J(\nu)$ large)
➡ impulsion ultra-courte ($10^{-15} \text{ s}, 10^{-18} \text{ s}$)
➡ très forte puissance lumineuse (10^{15} W)

3. PRINCIPE GÉNÉRAL D'UN LASER

Un laser, ça ressemble à quoi ?



diode laser



Laser
microfluidique



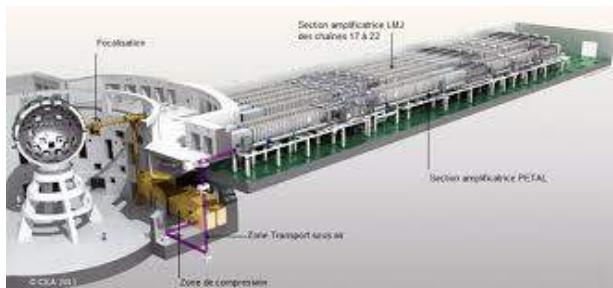
Laser Helium-Neon



Laser industriel
(usinage)



Laser à colorant



Laser MegaJoule (LMJ) à Bordeaux

3. PRINCIPE GÉNÉRAL D'UN LASER

Un laser, ça ressemble aussi à cela !



Lecteur code-barres



Niveau laser



Télémètre laser



Pointeur Laser



Imprimante laser

3. PRINCIPE GÉNÉRAL D'UN LASER

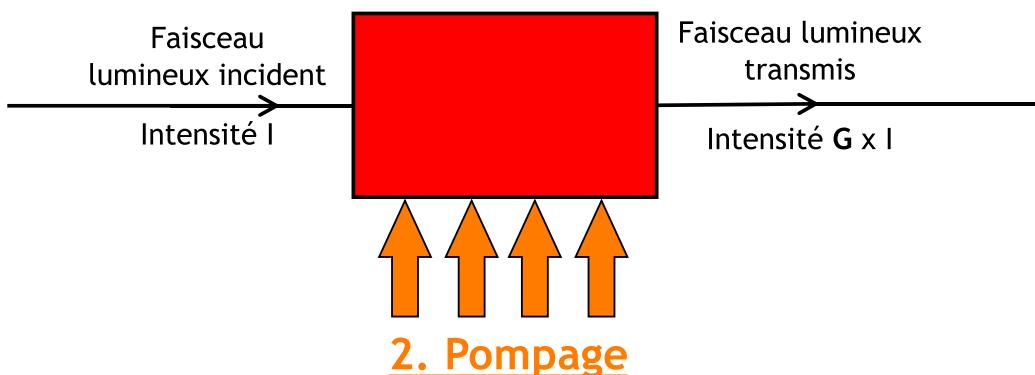
1. Milieu amplificateur (MA)



Rôle du **milieu amplificateur (1)** :
créer la lumière laser et l'amplifier (Gain $G > 1$)

3. PRINCIPE GÉNÉRAL D'UN LASER

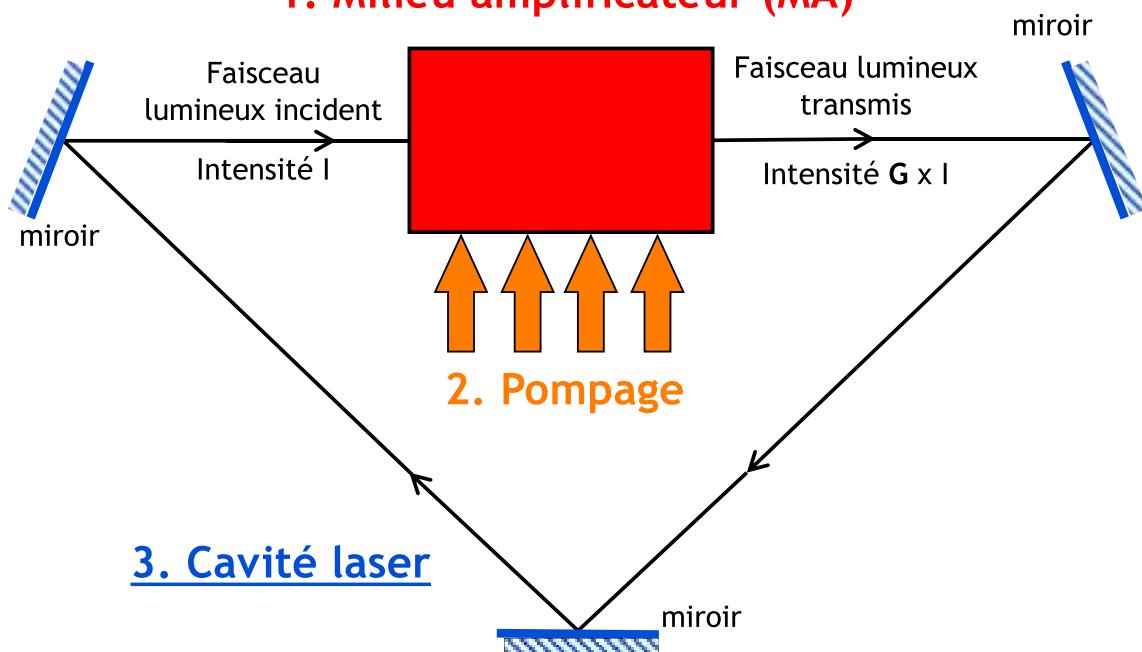
1. Milieu amplificateur (MA)



Rôle du **pompage (2)** :
apporter l'énergie suffisante au MA et le préparer dans un état quantique qui lui permette de fonctionner

3. PRINCIPE GÉNÉRAL D'UN LASER

1. Milieu amplificateur (MA)

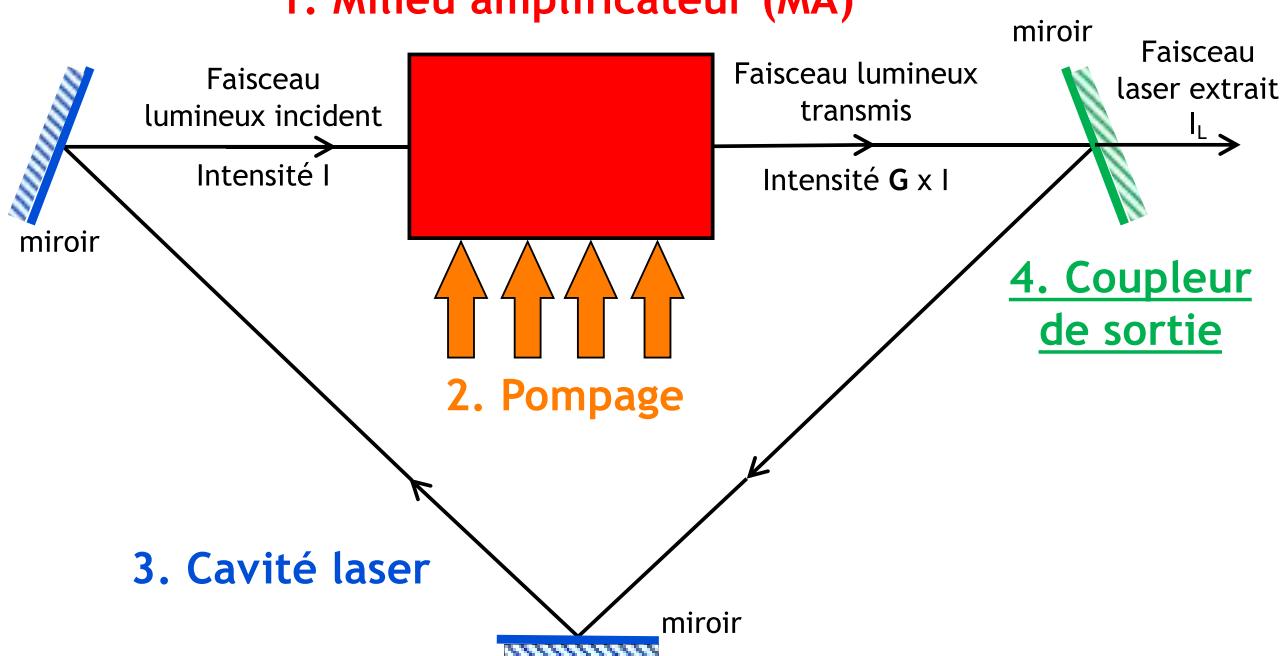


Rôle de la **cavité laser (3)** :

coupler la sortie du MA à son entrée pour permettre un grand nombre de passages dans le MA donc d'amplifications

3. PRINCIPE GÉNÉRAL D'UN LASER

1. Milieu amplificateur (MA)



Rôle du **coupleur de sortie (4)** :

Extraire une partie du faisceau laser (et donc de l'énergie) hors de la cavité pour pouvoir l'utiliser pour des applications

4. QUELQUES APPLICATIONS

- Traitement des matériaux



- Télécommunications optiques,
stockage d'information



- Applications médicales

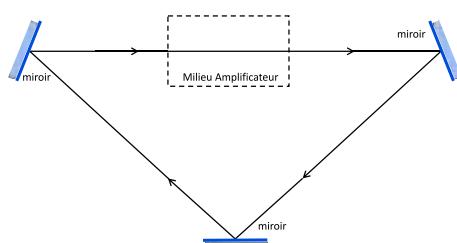


- Restauration d'œuvres d'art



Nettoyage de la surface de
l'Acropole d'Athènes

Chapitre 2- Etude des cavités lasers



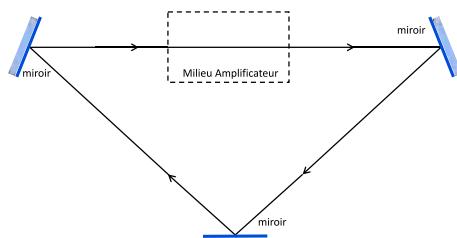
Définition

Cavité laser = **ensemble d'éléments optiques** qui vont guider le faisceau laser issu du MA pour le réinjecter en entrée du MA

Dans ce chapitre : - **systèmes optiques centrés** uniquement (= qui possèdent un axe de révolution)
- **MA inactif**

Chapitre 2-

Etude des cavités lasers



Définition

Cavité laser = **ensemble d'éléments optiques** qui vont guider le faisceau laser issu du MA pour le réinjecter en entrée du MA

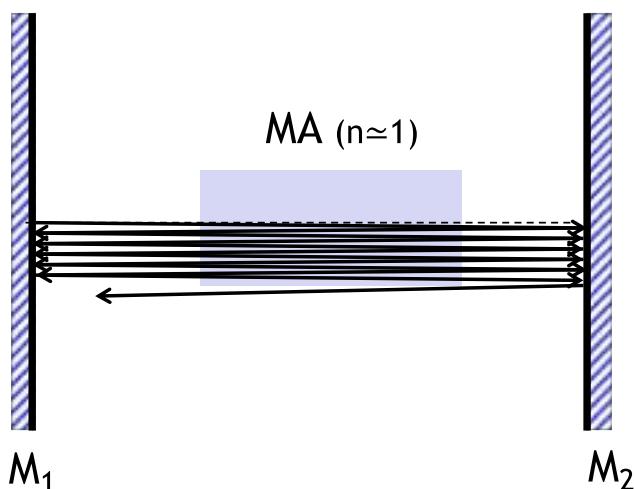
Dans ce chapitre : - **systèmes optiques centrés** uniquement (= qui possèdent un axe de révolution)
- **MA inactif**

Objectifs du chapitre

- Modéliser l'action de la cavité sur le trajet de la lumière
- Définir quelle(s) géométrie(s) donnent un couplage optimum entre l'entrée et la sortie du MA

1. DIFFÉRENTS TYPES DE CAVITÉS LASERS

Cavité laser à 2 miroirs plans ?



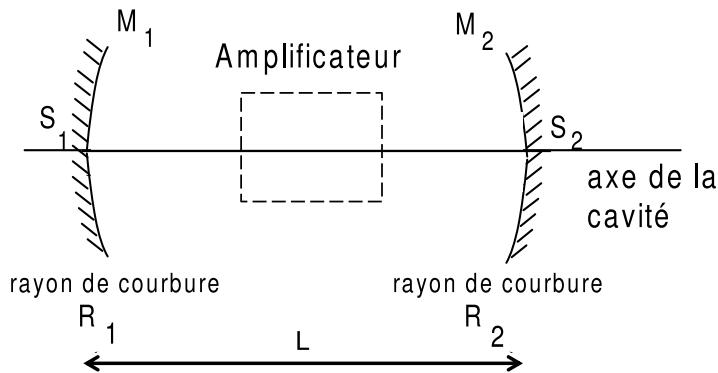
Problème pour les rayons qui ne sont pas exactement perpendiculaires aux miroirs M_1 et M_2 !

1. DIFFÉRENTS TYPES DE CAVITÉS LASERS

Notion de stabilité pour une cavité laser :

Une cavité laser stable permet de confiner la trajectoire des rayons lumineux au voisinage de l'axe optique.

Exemple : Cavité laser à 2 miroirs sphériques concaves



S_i : sommet du miroir M_i ($i=1,2$)

R_i : rayon de courbure algébrique du miroir M_i

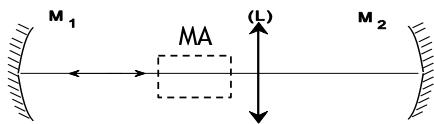
L : distance entre les 2 miroirs

→ Stabilité de la cavité laser possible pour plusieurs triplets de valeurs (R_1, R_2, L)

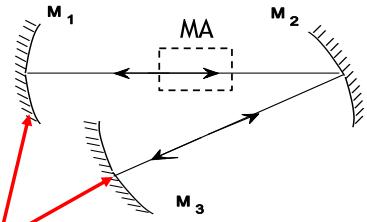
1. DIFFÉRENTS TYPES DE CAVITÉS LASERS

Cavités linéaires

Cavité linéaire à 2 miroirs

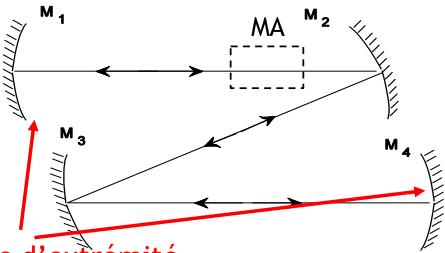


Cavité linéaire à 3 miroirs



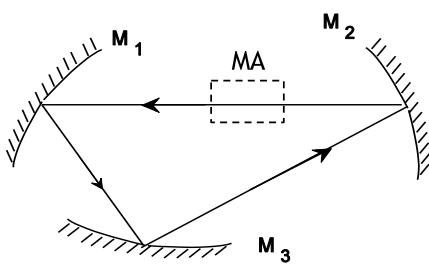
Miroirs d'extrême

Cavité linéaire à 4 miroirs

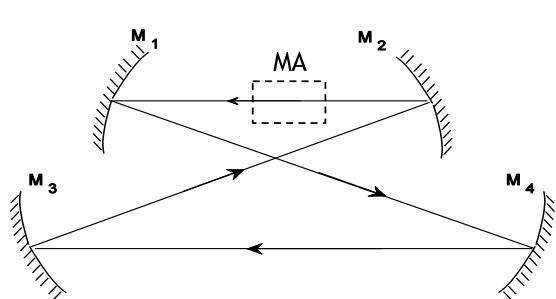


Cavités en anneau

Cavité en anneau à 3 miroirs

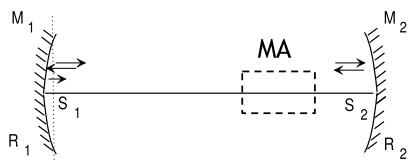


Cavité en anneau à 4 miroirs



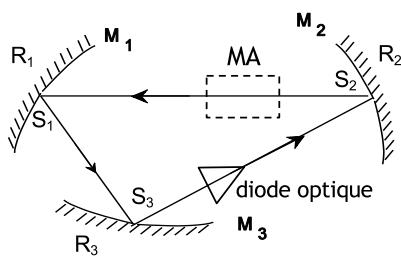
1. DIFFÉRENTS TYPES DE CAVITÉS LASERS

Cavités linéaires



- 1 parcours complet de cavité
= **1 aller + 1 retour**
- Longueur optique **d**
= chemin optique pour **1 aller**
(ou pour 1 retour)
 $d = [S_1 S_2]$
- Cavité dite à ondes stationnaires

Cavités en anneau



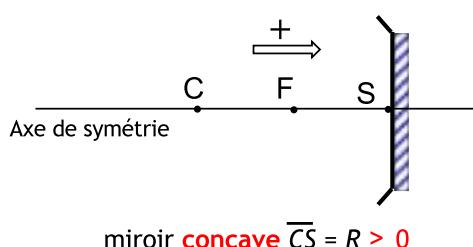
- 1 parcours complet de cavité
= **1 tour**
- Longueur optique **d**
= chemin optique pour **1 tour complet**
 $d = [S_1 S_2] + [S_2 S_3] + [S_3 S_1]$
- En général cavité à **ondes progressives**
(quand il y a un élément qui impose le sens de parcours)

2. ÉQUIVALENCE MIROIR SPHÉRIQUE-LENTILLE MINCE DANS L'APPROXIMATION DE GAUSS

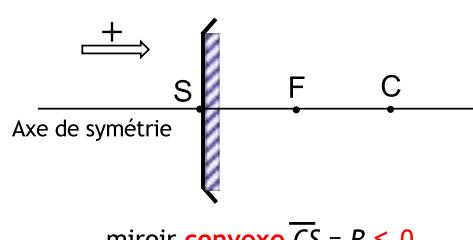
Rappels :

Miroir sphérique caractérisé par :

- ➔ son **centre de courbure** **C**
- ➔ son **sommet** **S**
- ➔ son **rayon de courbure algébrique** $R = \overline{CS}$ (convention du sens lumière incidente)

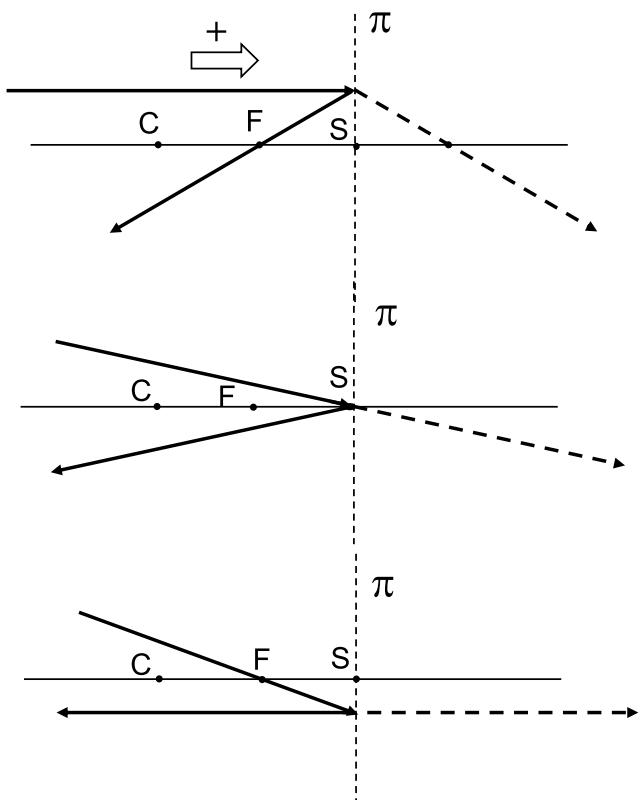
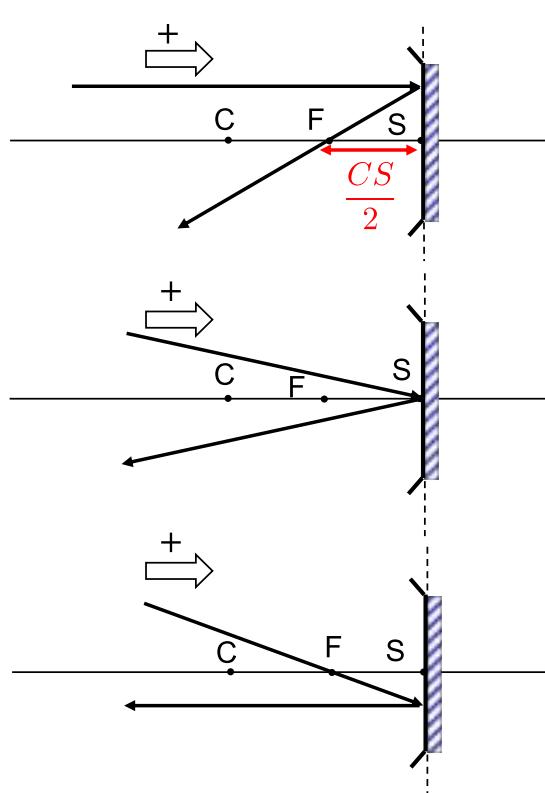


➔ sa distance focale image $f = \frac{\overline{CS}}{2}$



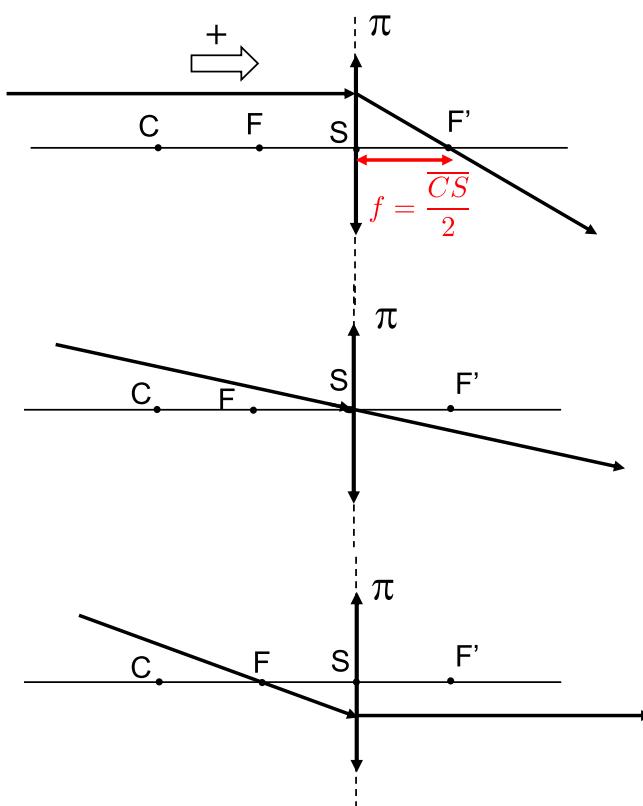
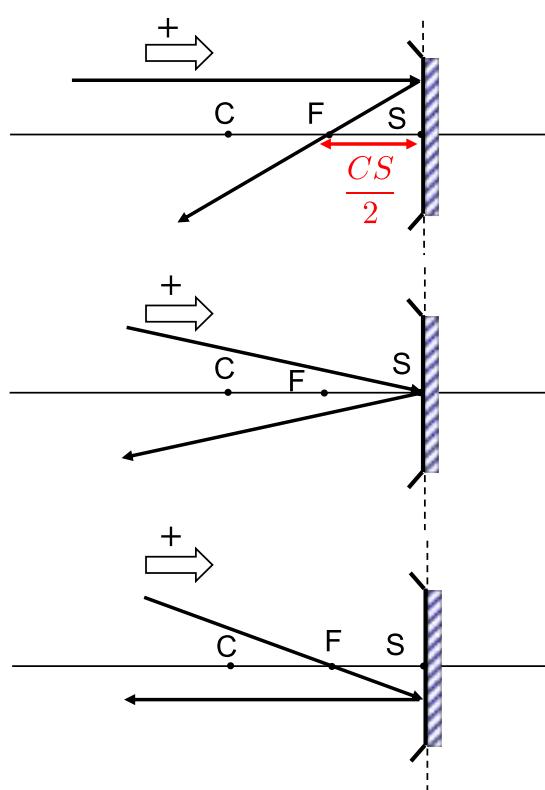
2. ÉQUIVALENCE MIROIR SPHÉRIQUE-LENTILLE MINCE DANS L'APPROXIMATION DE GAUSS

Pour le **rayon réfléchi**, introduction de la **symétrie** par rapport au plan π tangent en S au miroir



2. ÉQUIVALENCE MIROIR SPHÉRIQUE-LENTILLE MINCE DANS L'APPROXIMATION DE GAUSS

👉 Analogie avec les rayons particuliers qui traversent une lentille mince dans l'approximation de Gauss ! (ex : miroir concave/lentille convergente)



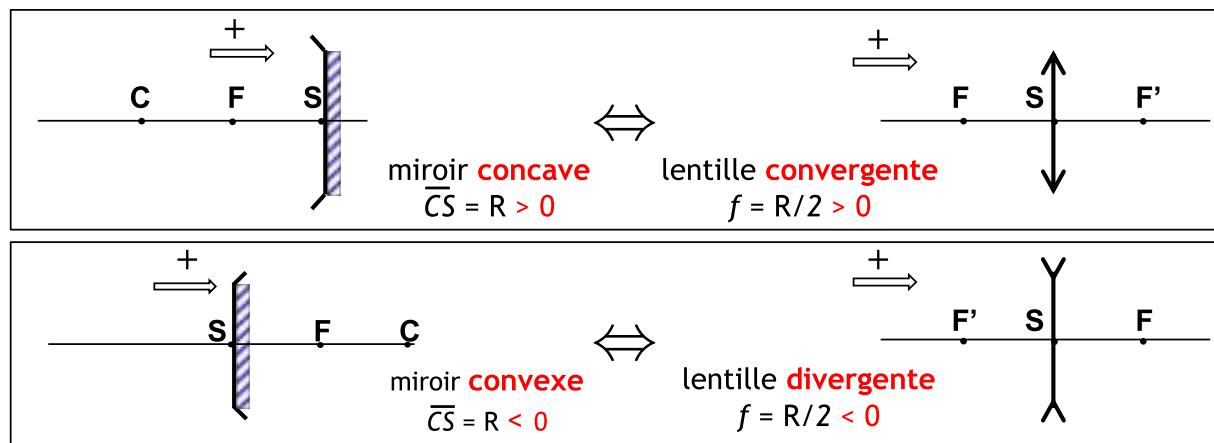
2. ÉQUIVALENCE MIROIR SPHÉRIQUE-LENTILLE MINCE DANS L'APPROXIMATION DE GAUSS

Dans les conditions de Gauss,

RÉFLEXION sur un miroir sphérique concave/convexe de sommet **S** et de rayon de courbure algébrique **R**

TRANSMISSION par une lentille mince convergente/divergente de centre optique **S** et de distance focale image

$$f = \frac{R}{2}$$



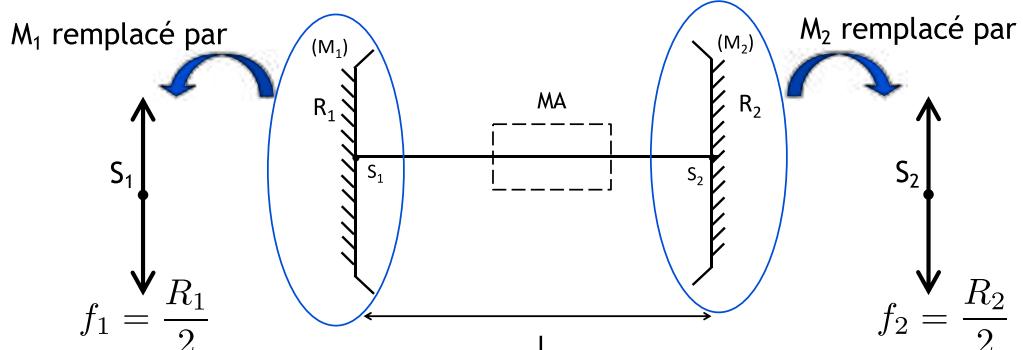
3. SÉQUENCE PÉRIODIQUE DE LENTILLES ÉQUIVALENTES

Pour étudier la stabilité de n'importe quelle cavité laser, grâce à l'équivalence miroir/lentille :

- on va **déplier la trajectoire** des rayons dans la cavité laser réelle par symétrie par rapport aux plans tangents aux miroirs pour n'avoir à considérer qu'un seul et même axe de propagation (z)
- on va **remplacer chaque miroir** par sa **lentille équivalente**

On appelle cette représentation dépliée la **séquence périodique de lentilles équivalentes**

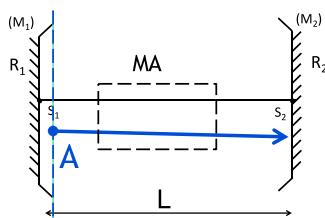
Exemple : cavité à 2 miroirs sphériques concaves (indice du MA = 1)



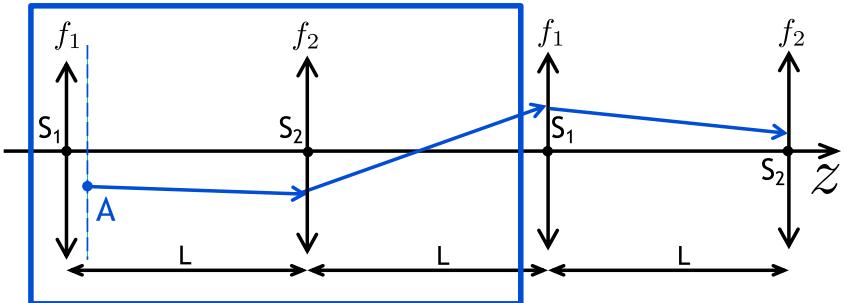
3. SÉQUENCE PÉRIODIQUE DE LENTILLES ÉQUIVALENTES

Exemple : cavité à 2 miroirs sphériques concaves (indice du MA = 1)

Cavité réelle



Cavité dépliée : Séquence périodique de lentilles équivalentes



Période de base
= 1 parcours complet de cavité

L'étude de la trajectoire des rayons lumineux dans la cavité dépliée se fait dans le cadre du **formalisme de l'optique matricielle** :

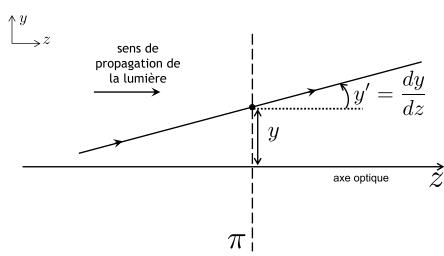
- valable dans les **conditions de Gauss** où les relations de Descartes se linéarisent

Pour $i_1 \ll 1$ et $i_2 \ll 1$, $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ se simplifie en $n_1 i_1 \simeq n_2 i_2$

- basé sur l'utilisation de la **matrice de transfert** entre deux plans

4. MATRICE DE TRANSFERT

Principe :

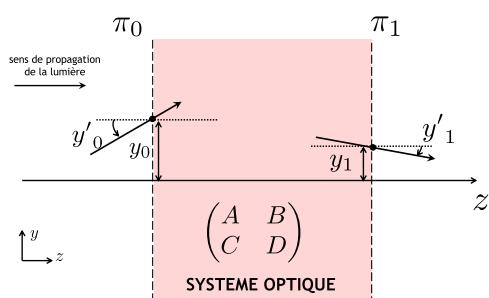


Tout rayon lumineux peut être représenté au niveau d'un plan π par le vecteur

Pente de la droite qui porte le rayon

Hauteur à laquelle le rayon coupe π par rapport à l'axe optique du système

En optique géométrique, la trajectoire des rayons lumineux dans un système optique obéit aux lois de Snell-Descartes (réflexion, réfraction). Comme ces lois sont linéaires dans les conditions de Gauss, pour un système optique quelconque entre deux plans π_0 et π_1 on pourra écrire :



$$\begin{cases} y_1 = A y_0 + B y_0' \\ y_1' = C y_0 + D y_0' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0' \end{pmatrix}$$

Matrice de transfert
 $T_{\pi_0 \rightarrow \pi_1}$

4. MATRICE DE TRANSFERT

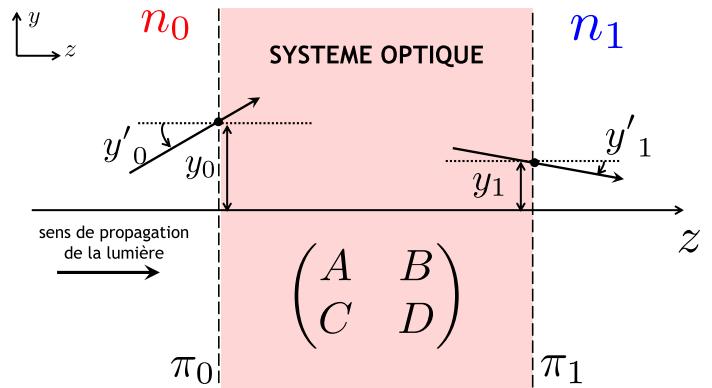
Propriétés de la matrice de transfert :

► Dimension des coefficients de $T_{\pi_0 \rightarrow \pi_1}$

- A et D sans dimension
- B homogène à une longueur
- C homogène à l'inverse d'une longueur

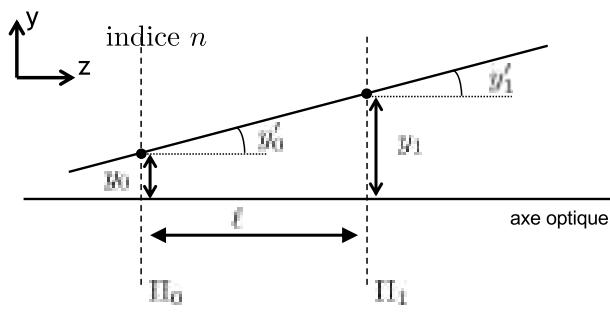
► Déterminant

$$\det(T_{\pi_0 \rightarrow \pi_1}) = AD - BC = \frac{n_0}{n_1}$$



5. MATRICES DE TRANSFERT ÉLÉMENTAIRES

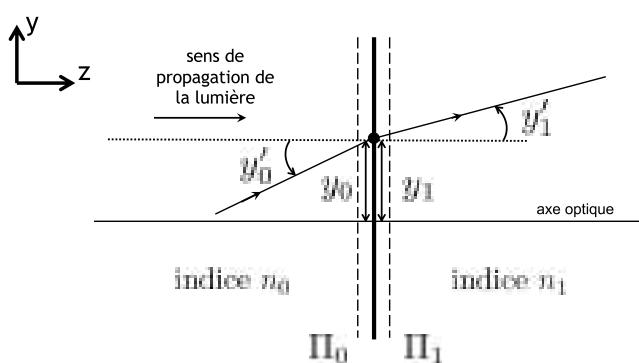
► Propagation rectiligne sur une distance ℓ dans un milieu homogène (même indice)



$$\begin{cases} y_1 = y_0 + \ell y_0' \\ y_1' = y_0' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0' \end{pmatrix}$$

D'où
$$T_{\pi_0 \rightarrow \pi_1} = \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

► Traversée d'une interface plane n_0 vers n_1

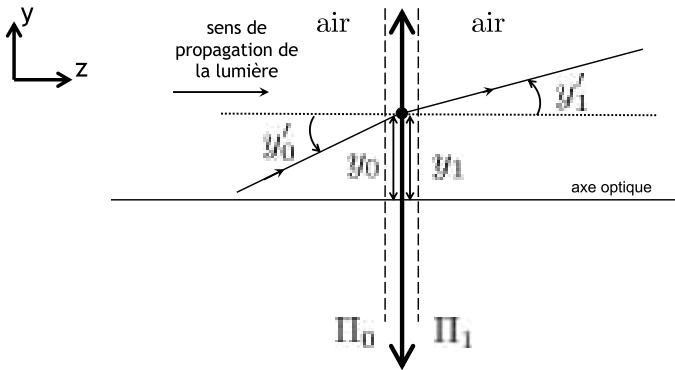


$$\begin{cases} y_1 = y_0 \\ y_1' = \frac{n_0}{n_1} y_0' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_0}{n_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0' \end{pmatrix}$$

D'où
$$T_{\pi_0 \rightarrow \pi_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_0}{n_1} \end{pmatrix}$$

5. MATRICES DE TRANSFERT ÉLÉMENTAIRES

- Traversée d'une lentille mince de focale f et centre optique O placée dans l'air



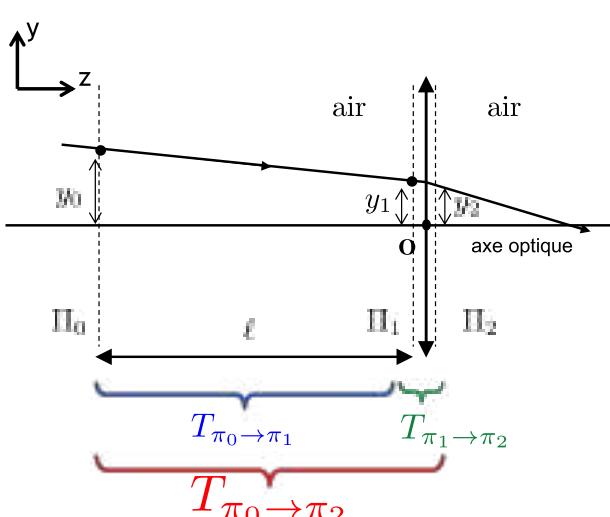
$$T_{\pi_0 \rightarrow \pi_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice-maison n°1 :

À partir de la trajectoire de 2 rayons particuliers (par exemple rayon incident parallèle et rayon passant par le centre optique), retrouver les coefficients de la matrice de transfert associée à la traversée d'une lentille mince.

5. MATRICES DE TRANSFERT ÉLÉMENTAIRES

- Combinaison propagation dans l'air sur ℓ puis traversée d'une lentille mince de focale f placée dans l'air



$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0' \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \begin{pmatrix} y_2 \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \end{pmatrix}$$

Or par définition :

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0' \end{pmatrix} = T_{\pi_0 \rightarrow \pi_2} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0' \end{pmatrix}$$

D'où

$$T_{\pi_0 \rightarrow \pi_2} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}}_{T_{\pi_1 \rightarrow \pi_2}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T_{\pi_0 \rightarrow \pi_1}}$$

$$= \boxed{\begin{pmatrix} 1 & \ell \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{\ell}{f} \end{pmatrix}}$$

Exercice-maison n°1 :

À partir de la trajectoire de 2 rayons particuliers (par exemple rayon incident parallèle et rayon passant par le centre optique), retrouver les coefficients de la matrice de transfert associée à la traversée d'une lentille mince.

Pour le **rayon (1)** (voir dessin ci-contre), on a :

$$\begin{cases} y'_0 = 0 \quad \forall y_0 \\ y_1 = y_0 \\ y'_1 = -\frac{y_0}{f} \end{cases}$$

car la pente est négative (angle orienté tournant dans le sens inverse sur le dessin)

Donc comme $\begin{cases} y_1 = A y_0 + B y'_0 \\ y'_1 = C y_0 + D y'_0 \end{cases}$

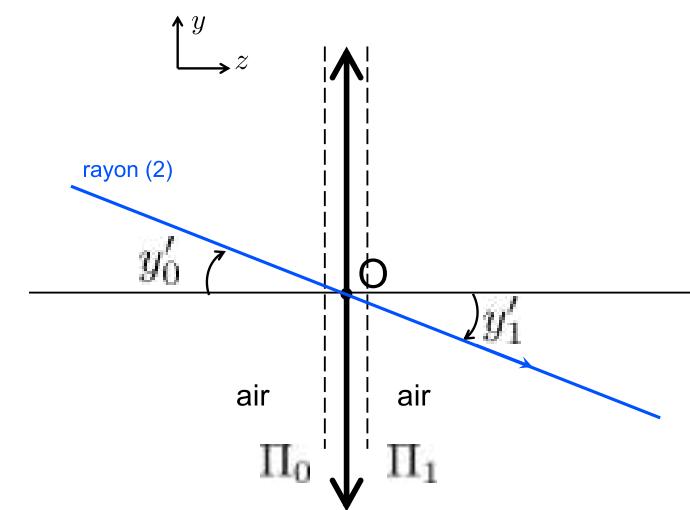
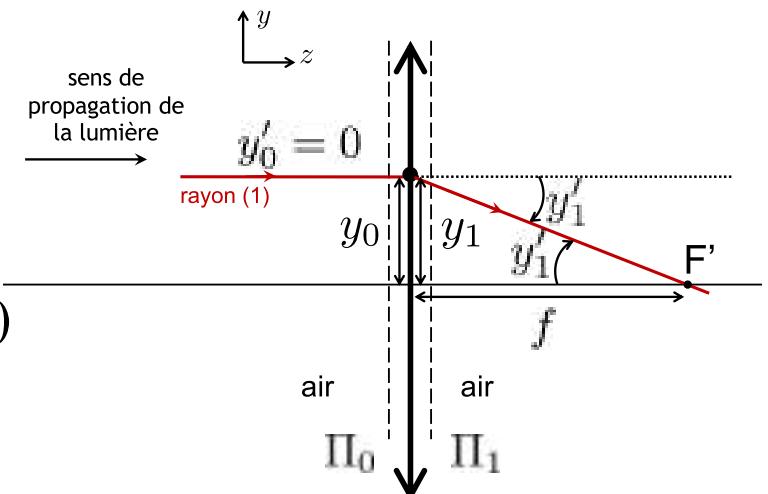
On en déduit : $A = 0$ et $C = -\frac{1}{f}$

Pour le **rayon (2)** (voir dessin ci-contre), on a :

$$\begin{cases} y_0 = y_1 = 0 \quad \forall y'_0 \\ y'_1 = y'_0 \end{cases}$$

On en déduit : $B = 0$ et $D = 1$

D'où $T_{\pi_0 \rightarrow \pi_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$



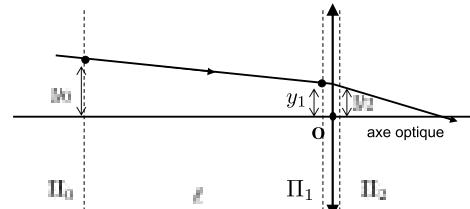
5. MATRICES DE TRANSFERT ÉLÉMENTAIRES



Attention à l'ordre des matrices dans la combinaison de plusieurs matrices élémentaires !! Le produit matriciel n'est en général pas commutatif.

Exemple :

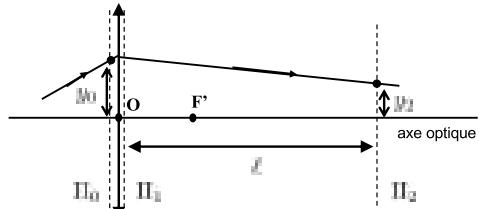
Combinaison propagation dans l'air sur ℓ puis traversée d'une lentille mince de focale f



$$T_{\pi_0 \rightarrow \pi_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

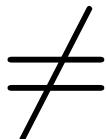
$$= \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{\ell}{f} \end{pmatrix}$$

Combinaison traversée d'une lentille mince de focale f puis propagation dans l'air sur ℓ



$$T_{\pi_0 \rightarrow \pi_2} = \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{\ell}{f} & \ell \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$$



6. MATRICE DE TRANSFERT D'UNE CAVITÉ POUR UN PARCOURS COMPLET

Pour savoir si un rayon lumineux reste confiné près de l'axe de la cavité laser lors de sa propagation (critère de stabilité), on va évaluer comment il est modifié après un parcours complet de cavité, à l'aide du formalisme matriciel selon la méthode suivante :

Cavité remplacée par sa **séquence périodique de lentilles équivalentes**

Choix **arbitraire** d'un **plan π_0 de départ** perpendiculaire à l'axe de la cavité

Identification de différentes matrices élémentaires à partir du plan π_0 pour réaliser un parcours complet de cavité

Calcul de la matrice de transfert **pour un parcours complet** $T_{\pi_0 \rightarrow \pi_0}$

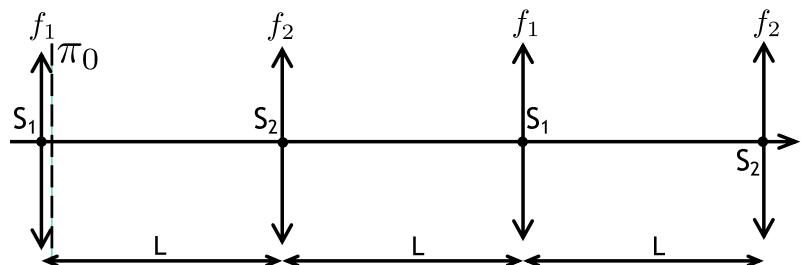
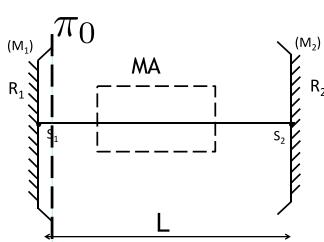
Remarques :

- On a évidemment $\det(T_{\pi_0 \rightarrow \pi_0}) = 1$ (départ et arrivée dans le même milieu)
- ⚠ Les valeurs des coefficients ABCD de la matrice de transfert pour un parcours complet dépendent du choix du plan π_0 .

6. MATRICE DE TRANSFERT D'UNE CAVITÉ POUR UN PARCOURS COMPLET

Exemple : cavité à 2 miroirs sphériques concaves (indice du MA = 1) placée dans l'air

- ⇒ Cavité remplacée par sa séquence périodique de lentilles équivalentes
- ⇒ Choix arbitraire d'un plan π_0 de départ perpendiculaire à l'axe de la cavité

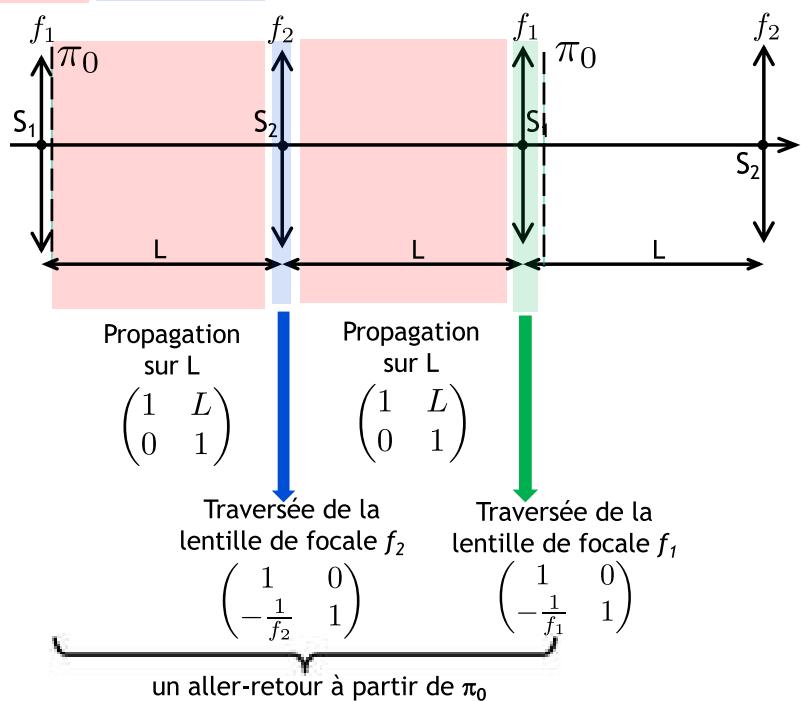
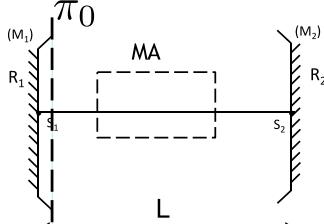


6. MATRICE DE TRANSFERT D'UNE CAVITÉ POUR UN PARCOURS COMPLET

Exemple : cavité à 2 miroirs sphériques concaves (indice du MA = 1) placée dans l'air

- ⇒ Identification de différentes matrices élémentaires pour réaliser un aller-retour à partir de π_0
- ⇒ Calcul de la matrice de transfert pour un aller-retour

$$T_{\pi_0 \rightarrow \pi_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

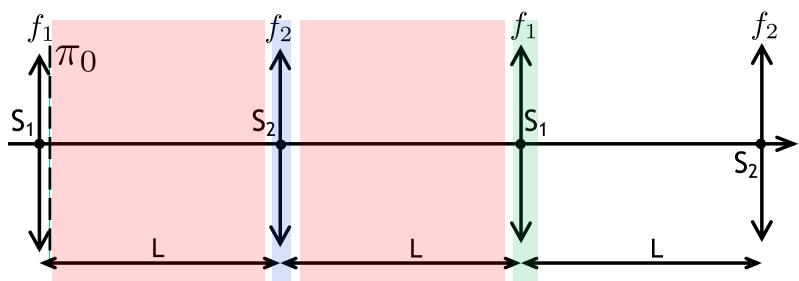
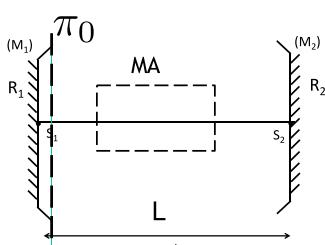


6. MATRICE DE TRANSFERT D'UNE CAVITÉ POUR UN PARCOURS COMPLET

Exemple : cavité à 2 miroirs sphériques concaves (indice du MA = 1) placée dans l'air

⇒ Calcul de la matrice de transfert pour un aller-retour (suite)

$$\begin{aligned}
 T_{\pi_0 \rightarrow \pi_0} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Attention à l'ordre des matrices} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & L \\ -\frac{1}{f_1} & 1 - \frac{L}{f_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ -\frac{1}{f_2} & 1 - \frac{L}{f_2} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{L}{f_2} & 2L - \frac{L^2}{f_2} \\ -\frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} + \frac{L}{f_1 f_2} & -\frac{L}{f_1} + (1 - \frac{L}{f_1})(1 - \frac{L}{f_2}) \end{pmatrix} \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} f_1 = \frac{R_1}{2} \\ f_2 = \frac{R_2}{2} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$



7. CRITÈRE DE STABILITÉ D'UNE CAVITÉ LASER

Soit $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ la matrice de transfert d'une cavité laser pour un parcours complet à partir de n'importe quel plan π_0 . On peut montrer que (voir polycopié) :

CAVITÉ STABLE

= rayons confinés près de l'axe optique de la cavité dépliée

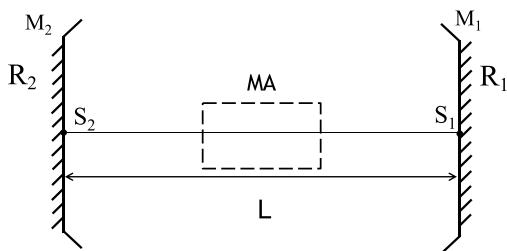


$$-1 < \frac{A + D}{2} < +1$$

Critère de stabilité valable pour toute cavité (linéaire ou en anneau) et quelque soit le choix du plan π_0

7. CRITÈRE DE STABILITÉ D'UNE CAVITÉ LASER

 **Cas particulier :** critère de stabilité d'une cavité à 2 miroirs placée dans l'air



(Voir la matrice de transfert calculée précédemment)

$$-1 < \frac{A+D}{2} < +1$$

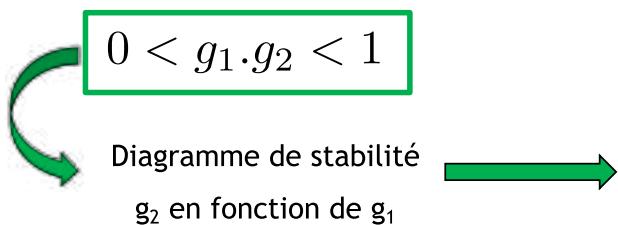
$$\Leftrightarrow -1 < 1 - \frac{2L}{R_1} - \frac{2L}{R_2} + \frac{2L^2}{R_1 R_2} < 1$$

$$\Leftrightarrow 0 < 2 - \frac{2L}{R_1} - \frac{2L}{R_2} + \frac{2L^2}{R_1 R_2} < 2$$

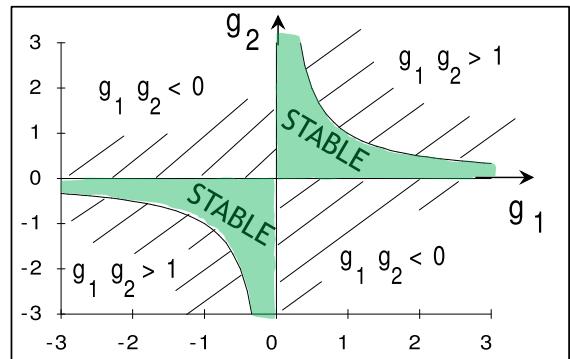
$$\Leftrightarrow 0 < \underbrace{\left(1 - \frac{L}{R_1}\right)}_{g_1} \underbrace{\left(1 - \frac{L}{R_2}\right)}_{g_2} < 1$$

On définit les **facteurs géométriques** : $\begin{cases} g_1 = 1 - \frac{L}{R_1} \\ g_2 = 1 - \frac{L}{R_2} \end{cases}$

Le critère de stabilité général se simplifie alors en :

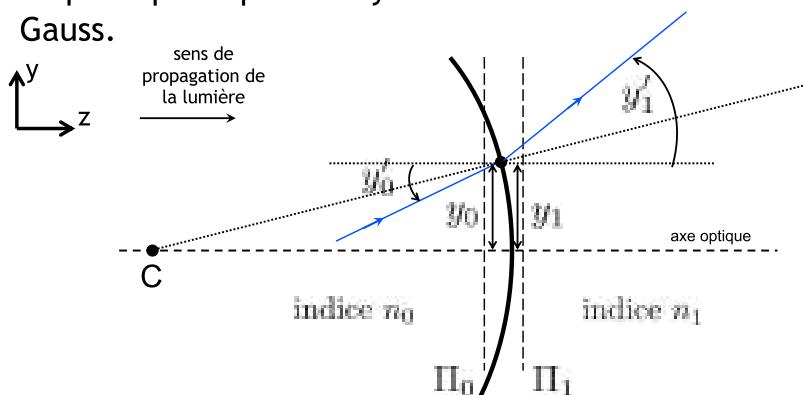


Attention valable uniquement pour une cavité à 2 miroirs !



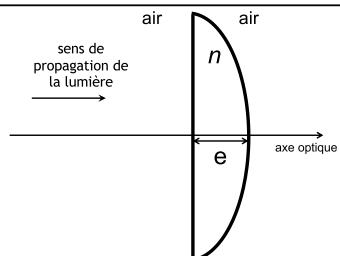
EXERCICES-MAISON n° 2

On donne ci-dessous la matrice élémentaire correspondant à la traversée d'un dioptre sphérique de rayon R entre 2 milieux d'indice n_0 et n_1 , dans les conditions de Gauss.



$$T_{\pi_0 \rightarrow \pi_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1 - n_0}{n_1 R} & \frac{n_0}{n_1} \end{pmatrix}$$

 Etablir la matrice de transfert d'une lentille épaisse plan-convexe d'épaisseur e taillée dans un matériau d'indice optique n (dessin ci-contre), puis retrouver la matrice élémentaire pour la traversée d'une lentille convergente dans l'approximation des lentilles minces.



 Etablir l'expression de la matrice élémentaire pour un dioptre sphérique (matrice $T_{\pi_0 \rightarrow \pi_1}$ donnée ci-dessus)

Exercices-maison n°2 :

Etablir la matrice de transfert d'une lentille épaisse plan-convexe d'épaisseur e taillée dans un matériau d'indice optique n (dessin ci-contre), puis retrouver la matrice élémentaire pour la traversée d'une **lentille convergente** dans l'approximation des lentilles minces.

On définit 4 plans (voir figure) afin de prendre en compte les 3 étapes de la traversée de la lentille mince qui seront associées chacune à une matrice élémentaire :

- Traversée du dioptre plan air/ n :

$$T_{\pi_0 \rightarrow \pi_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

- Propagation dans la lentille entre les plans π_1 et π_2 :

$$T_{\pi_1 \rightarrow \pi_2} = \begin{pmatrix} 1 & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Traversée du dioptre sphérique n /air :

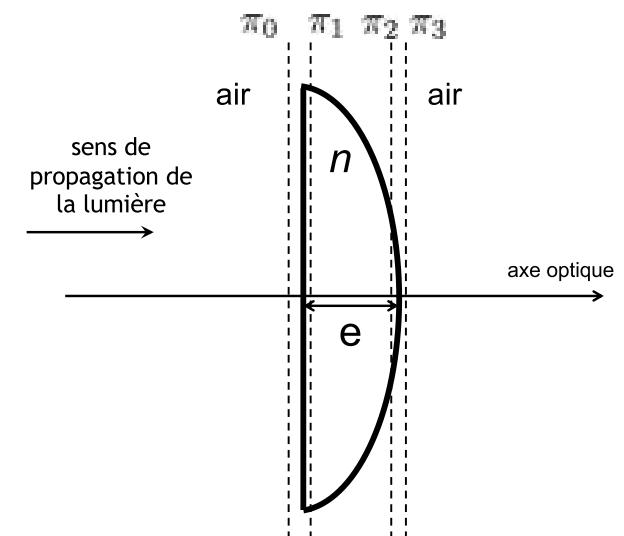
$$T_{\pi_2 \rightarrow \pi_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-n}{R} & n \end{pmatrix}$$

Ainsi : $T_{\pi_0 \rightarrow \pi_3} = T_{\pi_2 \rightarrow \pi_3} \times T_{\pi_1 \rightarrow \pi_2} \times T_{\pi_0 \rightarrow \pi_1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{e}{n} \\ \frac{1-n}{R} & 1 + \frac{e}{nR}(1-n) \end{pmatrix}$

Dans l'approximation des lentilles minces, on a : $e \ll R$ et $e \rightarrow 0$

La matrice se simplifie donc en :

$$T_{\pi_0 \rightarrow \pi_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-n}{R} & 1 \end{pmatrix}$$



On reconnaît au niveau de l'élément C (au signe près) la formule donnant la distance focale image d'une lentille mince taillée dans un matériau d'indice n délimitée par un dioptre d'entrée de rayon de courbure algébrique \bar{R}_1 et un dioptre de sortie de rayon de courbure algébrique \bar{R}_2 .

En effet de façon générale, $\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{\bar{R}_1} - \frac{1}{\bar{R}_2} \right)$

Avec pour une lentille plan-convexe comme celle considérée ici : $\begin{cases} \bar{R}_1 \rightarrow \infty \\ \bar{R}_2 = -R \end{cases}$

Donc : $\frac{1}{f} = -\frac{(1 - n)}{R}$

Et on identifie bien : $T_{\pi_0 \rightarrow \pi_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$

❶ Etablir l'expression de la matrice de transfert élémentaire pour un dioptre sphérique

On considère un rayon incident en I sur le dioptre sphérique, avec un angle d'incidence i_0 (on rappelle que l'angle d'incidence est défini entre la normale en I au dioptre et le rayon incident).

D'après la loi de Snell-Descartes pour la réfraction écrite dans les conditions de Gauss, on a : $n_0 i_0 = n_1 i_1$

De plus, $y_0 = y_1$

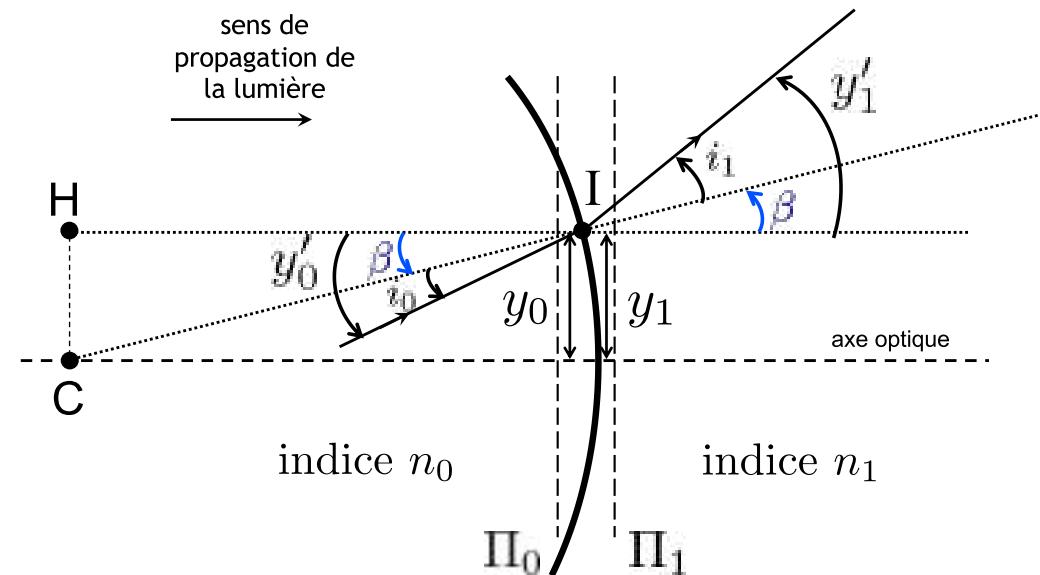
Or on a (voir schéma): $i_0 = y'_0 - \beta$ et pour de petits angles $\sin \beta = \frac{CH}{CI} = \frac{y_0}{R} \approx \beta$
 $i_1 = y'_1 - \beta$

D'où $n_0 i_0 = n_0 y'_0 - n_0 \beta = n_0 y'_0 - n_0 \frac{y_0}{R}$

$$n_1 i_1 = n_1 y'_1 - n_1 \beta = n_1 y'_1 - n_1 \frac{y_0}{R}$$

Donc $y'_1 = \frac{n_0}{n_1} y'_0 + \frac{(n_1 - n_0)}{n_1} \beta$

$$\Rightarrow y'_1 = \frac{(n_1 - n_0)}{n_1 R} y_0 + \frac{n_0}{n_1} y'_0$$



Finalement

$$\begin{cases} y_1 = y_0 \\ y'_1 = \frac{(n_1 - n_0)}{n_1 R} y_0 + \frac{n_0}{n_1} y'_0 \end{cases}$$

Et on trouve bien :

$$T_{\pi_0 \rightarrow \pi_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1 - n_0}{n_1 R} & \frac{n_0}{n_1} \end{pmatrix}$$



Quelques références bibliographiques sur les lasers :

- « **Lasers et Optique non linéaire** » - Ch. Delsart - Editions Ellipses
(Cours et exercices corrigés niveau M1 et M2)
- « **Les lasers - Cours et exercices corrigés** » - D. Hennequin, V. Zehnlé et D. Dangoisse,- Editions Dunot
(niveau L3 et M1)
- « **Lasers. Interaction lumière-atomes** » - J.P. Faroux et B. Cagnac - Editions EDP Sciences (CNRS éditions)
(niveau M1, M2 et doctorat)

Chapitre 3-

Faisceaux gaussiens

Objectifs :

- Définir ce qu'est une onde gaussienne et ses propriétés
- Faire le lien entre la géométrie choisie pour la cavité laser stable et la structure de l'onde la plus courante qui peut s'y établir

1. PRÉSENTATION GÉNÉRALE DES FAISCEAUX GAUSSIENS

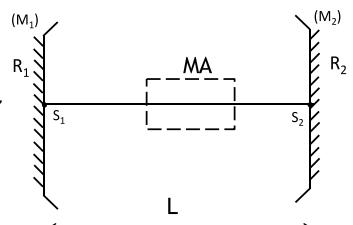


Onde pouvant s'établir dans une cavité laser stable :

- doit être solution de l'équation de propagation de d'Alembert dans l'approximation scalaire

$$\Delta E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

- doit vérifier les conditions aux limites imposées par les éléments optiques de la cavité (le plus souvent des miroirs)



Dans l'approximation paraxiale (\Leftrightarrow conditions de Gauss), une des solutions possibles est **l'onde sphérique gaussienne se propageant selon z**, dont l'amplitude complexe est la suivante :

$$\mathcal{A}(x, y, z) = \mathcal{A}_0 \frac{z_R}{z_R - iz} \exp(-ikz) \exp\left[-\left(\frac{k}{z_R - iz}\right) \frac{x^2 + y^2}{2}\right]$$

$$\begin{cases} z_R : \text{longueur caractéristique appelée paramètre de Rayleigh} \\ z_R > 0 ; k = \frac{2\pi}{\lambda} \end{cases}$$

1. PRÉSENTATION GÉNÉRALE DES FAISCEAUX GAUSSIENS

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}(x, y, z) &= \mathcal{A}_0 \frac{z_R}{z_R - iz} \exp(-ikz) \exp\left[-\frac{k}{z_R - iz} \frac{x^2 + y^2}{2}\right] \\
 &= \mathcal{A}_0 \frac{z_R}{z_R - iz} \exp(-ikz) \exp\left[-k \frac{z_R + iz}{z_R^2 + z^2} \frac{x^2 + y^2}{2}\right] \\
 &= \mathcal{A}_0 \frac{z_R}{z_R - iz} \exp(-ikz) \exp\left[-k \left(\frac{z_R}{z_R^2 + z^2}\right) \frac{x^2 + y^2}{2}\right] \exp\left[-ik \left(\frac{z}{z_R^2 + z^2}\right) \frac{x^2 + y^2}{2}\right] \\
 &= \mathcal{A}_0 \frac{z_R}{z_R - iz} \exp\left[-k \left(\frac{z_R}{z_R^2 + z^2}\right) \frac{x^2 + y^2}{2}\right] \exp(-ikz) \exp\left[-ik \left(\frac{z}{z_R^2 + z^2}\right) \frac{x^2 + y^2}{2}\right] \\
 &\quad \underbrace{\downarrow}_{\frac{\exp\left[i \arctan\left(\frac{z}{z_R}\right)\right]}{\sqrt{1 + (z/z_R)^2}}}
 \end{aligned}$$

1. PRÉSENTATION GÉNÉRALE DES FAISCEAUX GAUSSIENS

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}(x, y, z) &= \mathcal{A}_0 \frac{z_R}{z_R - iz} \exp(-ikz) \exp\left[-\frac{k}{z_R - iz} \frac{x^2 + y^2}{2}\right] \\
 &= \mathcal{A}_0 \frac{z_R}{z_R - iz} \exp(-ikz) \exp\left[-k \frac{z_R + iz}{z_R^2 + z^2} \frac{x^2 + y^2}{2}\right] \\
 &= \mathcal{A}_0 \frac{z_R}{z_R - iz} \exp(-ikz) \exp\left[-k \left(\frac{z_R}{z_R^2 + z^2}\right) \frac{x^2 + y^2}{2}\right] \exp\left[-ik \left(\frac{z}{z_R^2 + z^2}\right) \frac{x^2 + y^2}{2}\right] \\
 &= \mathcal{A}_0 \frac{z_R}{z_R - iz} \exp\left[-k \left(\frac{z_R}{z_R^2 + z^2}\right) \frac{x^2 + y^2}{2}\right] \exp(-ikz) \exp\left[-ik \left(\frac{z}{z_R^2 + z^2}\right) \frac{x^2 + y^2}{2}\right] \\
 &= \mathcal{A}_0 \frac{1}{\sqrt{1 + (z/z_R)^2}} \left[\exp\left(-k \frac{z_R}{z_R^2 + z^2}\right) \frac{x^2 + y^2}{2} \right] \times (\exp i \arctan(\frac{z}{z_R})) (\exp -ikz) \left[\exp -ik \left(\frac{z}{z_R^2 + z^2}\right) \frac{x^2 + y^2}{2} \right]
 \end{aligned}$$

amplitude

phase

Pour comparaison :

Onde plane se propageant selon z : $\mathcal{A}(x, y, z) = \mathcal{A}_0 \exp -ikz$

Onde sphérique de centre $C(x_C, y_C, z_C)$ dans l'approximation parabolique :

$$\mathcal{A}(x, y, z) = \frac{\mathcal{B}}{z} \exp(-ikz) \exp\left[-ik \frac{(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2}{2(z - z_C)}\right]$$

1. PRÉSENTATION GÉNÉRALE DES FAISCEAUX GAUSSIENS

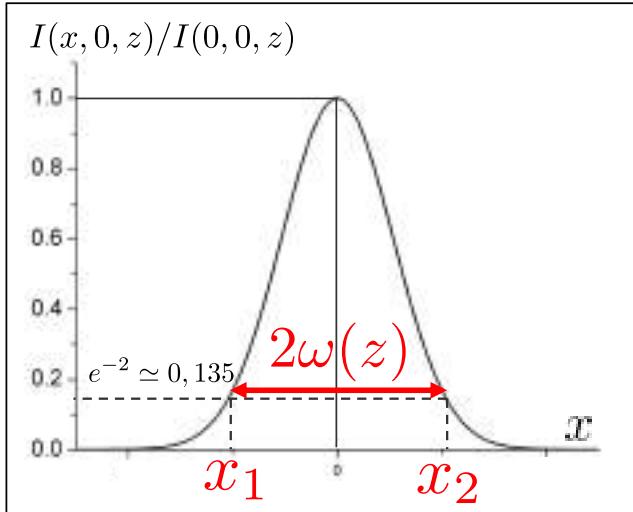
Intensité correspondante pour le faisceau gaussien:

$$I(x, y, z) = \frac{\mathcal{A}(x, y, z)\mathcal{A}^*(x, y, z)}{2\mu_0 c} = \frac{|\mathcal{A}(x, y, z)|^2}{2\mu_0 c}$$

2. EXTENSION LATÉRALE D'UN FAISCEAU GAUSSIEN

$$I(x, y, z) = I(0, 0, z) \exp \left[-k \frac{z_R}{z_R^2 + z^2} (x^2 + y^2) \right]$$

Coupe de $I(x, y, z)$ dans le plan $y = 0$ à z fixé :



On définit une **largeur pour le faisceau gaussien** dans le plan z comme suit :

- Par convention, on considère les valeurs x_1 et x_2 telles que

$$I(x_1 \text{ ou } x_2, 0, z) = \frac{I(0, 0, z)}{e^2} = I(0, 0, z) \exp(-2) \simeq 0,135 I(0, 0, z)$$

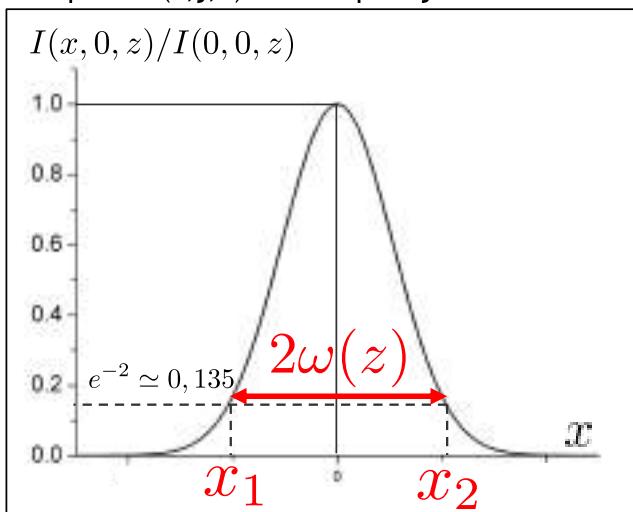
- La demi-largeur du faisceau à $1/e^2$ à la position z se note $\omega(z)$ et vaut alors :

$$\omega(z) = \frac{x_2 - x_1}{2}$$

2. EXTENSION LATÉRALE D'UN FAISCEAU GAUSSIEN

$$I(x, y, z) = I(0, 0, z) \exp \left[-k \frac{z_R}{z_R^2 + z^2} (x^2 + y^2) \right]$$

Coupe de $I(x, y, z)$ dans le plan $y = 0$ à z fixé :



$$\begin{aligned} I(x_2, 0, z) &= I(0, 0, z) \exp \left[-k \frac{z_R}{z_R^2 + z^2} x_2^2 \right] \\ &= I(0, 0, z) \exp \left[-\frac{2\pi}{\lambda} \frac{z_R}{z_R^2 + z^2} x_2^2 \right] \\ &= I(0, 0, z) \exp(-2) \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } \begin{cases} x_2 = \sqrt{\frac{\lambda z_R}{\pi}} \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2} \\ x_1 = -\sqrt{\frac{\lambda z_R}{\pi}} \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2} \end{cases}$$

$$\text{et } \omega(z) = \frac{x_2 - x_1}{2}$$

2. EXTENSION LATÉRALE D'UN FAISCEAU GAUSSIEN

► On trouve :

$$\omega(z) = \sqrt{\frac{\lambda z_R}{\pi}} \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2}$$

En posant $\omega_0 = \sqrt{\frac{\lambda z_R}{\pi}}$,

$$\Rightarrow \omega(z) = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2}$$

► $\omega(z)$ est parfois appelé le « rayon » du faisceau gaussien. Il permet de comparer l'extension latérale de deux faisceaux gaussiens différents dans un même plan.

► $\omega(z)$ est une fonction de z qui caractérise l'évolution de la largeur à $1/e^2$ de la distribution d'intensité quand on se propage selon z .



profil longitudinal du faisceau gaussien

3. PROFIL LONGITUDINAL D'UN FAISCEAU GAUSSIEN

$$\omega(z) = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2}$$

avec

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\lambda z_R}{\pi}}$$

► Propriétés de $\omega(z)$:

- $\omega(z)$ passe par une valeur minimale (pour $z = 0$ dans le cas donné ici) : il s'agit du (**rayon du waist**) ω_0 .

- Le plan dans lequel $\omega(z) = \omega_0$ est appelé le **plan du waist**.

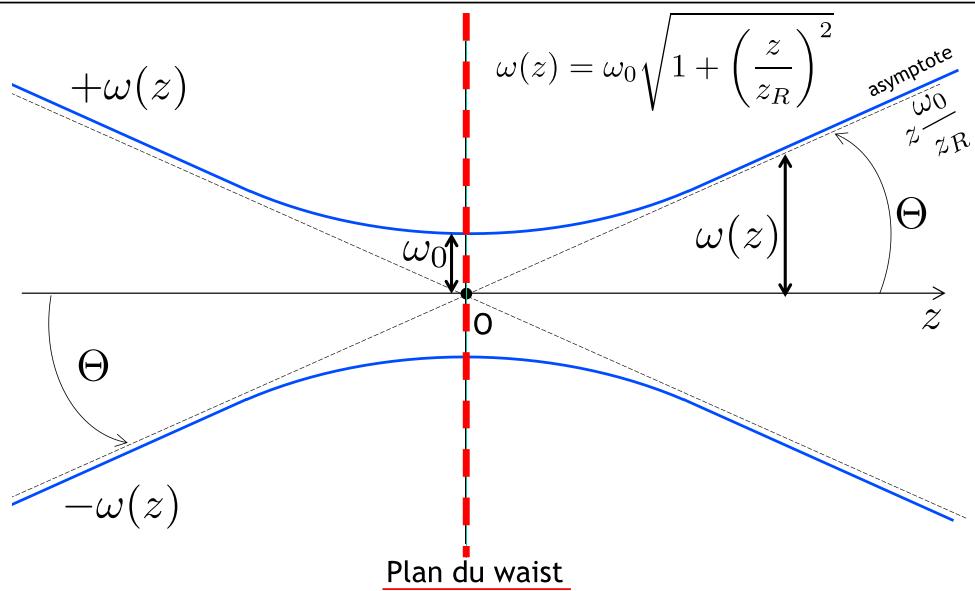
- Pour $z = \pm z_R$, $\omega(z_R) = \sqrt{2}\omega_0$

Le paramètre de Rayleigh z_R caractérise la **divergence** du faisceau.

- Pour $z \gg z_R$, la fonction $\omega(z)$ tend vers une asymptote

$$\omega(z) \rightarrow \omega_0 \frac{z}{z_R}$$

3. PROFIL LONGITUDINAL D'UN FAISCEAU GAUSSIEN

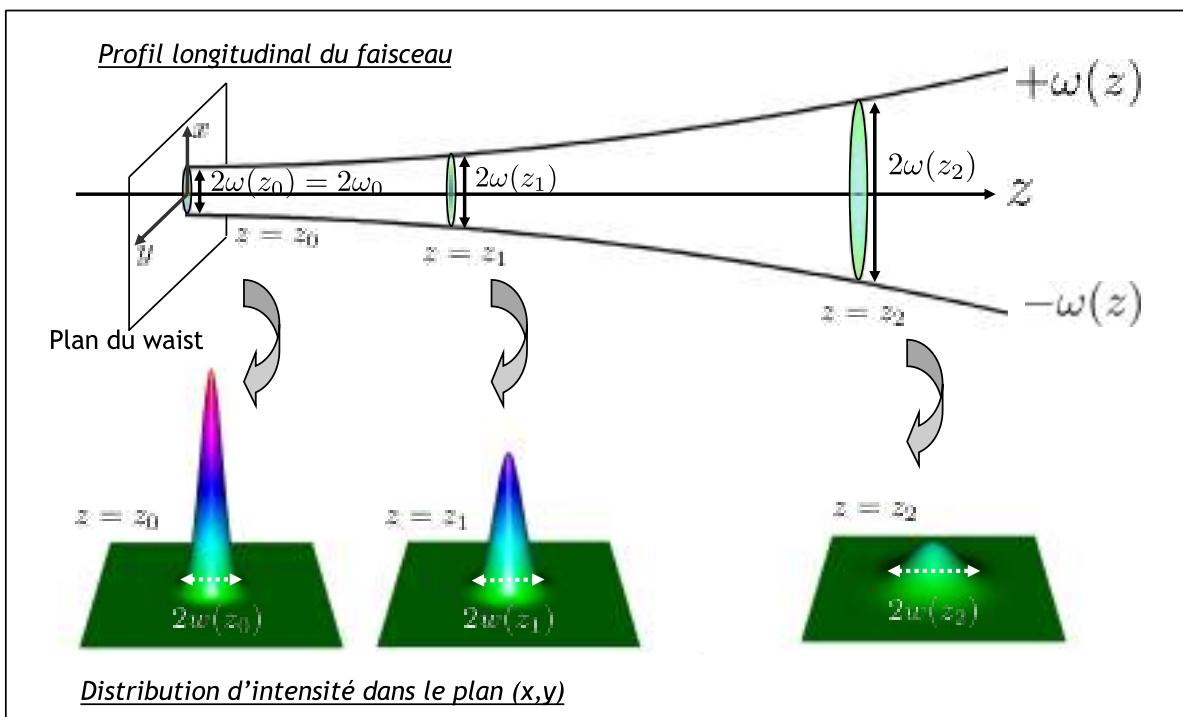
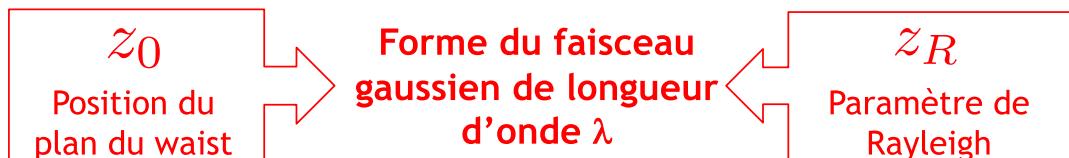


► Divergence du faisceau gaussien :

$$\tan \theta = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\omega(z)}{z} = \frac{\omega_0}{z_R} = \frac{\omega_0}{\pi \omega_0^2 / \lambda} = \frac{\lambda}{\pi \omega_0}$$

$$\Leftrightarrow \tan \theta = \frac{\omega_0}{z_R} = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi z_R}}$$

4. RÉSUMÉ DE LA STRUCTURE D'UN FAISCEAU GAUSSIEN



5. PROPRIÉTÉS DU FAISCEAU GAUSSIEN

$$\mathcal{A}(x, y, z) = \mathcal{A}_0 \underbrace{\frac{z_R}{z_R - iz}}_{\mathcal{A}(0, 0, z)} \exp -ikz \exp -\frac{k}{z_R - iz} \frac{x^2 + y^2}{2}$$

$$= \mathcal{A}(0, 0, z) \times \exp -\frac{ik}{q(z)} \frac{x^2 + y^2}{2} \quad \text{où } q(z) \in \mathbb{C}$$



On définit le **rayon de courbure complexe**
 $q(z)$ du faisceau gaussien dans le plan z :

$$q(z) = z + iz_R \Leftrightarrow q(H) = \overline{OH} + iz_R$$

Position du plan z par rapport au plan du waist Paramètre de Rayleigh

Dans le **plan du waist**,
 $q(O) = iz_R$ est un **imaginaire pur**

5. PROPRIÉTÉS DU FAISCEAU GAUSSIEN

On évalue $1/q(z)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{q(z)} &= \frac{1}{z + iz_R} = \frac{z}{z_R^2 + z^2} - i \frac{z_R}{z_R^2 + z^2} \\ &= \underbrace{\frac{1}{z \left[1 + \left(\frac{z_R}{z} \right)^2 \right]}}_{\frac{1}{R(z)}} - \underbrace{\frac{i}{z_R \left[1 + \left(\frac{z}{z_R} \right)^2 \right]}}_{\frac{i\lambda}{\pi \omega(z)^2}} \\ &= \frac{i\lambda}{\pi} \frac{1}{\frac{\lambda z_R}{\pi} \left[1 + \left(\frac{z}{z_R} \right)^2 \right]} \\ &= \frac{i\lambda}{\pi \omega(z)^2} \end{aligned}$$

Soit

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - \frac{i\lambda}{\pi \omega(z)^2}$$

$R(z)$: Rayon de courbure de la phase de l'onde gaussienne

$\omega(z)$: Rayon du faisceau gaussien

5. PROPRIÉTÉS DU FAISCEAU GAUSSIEN

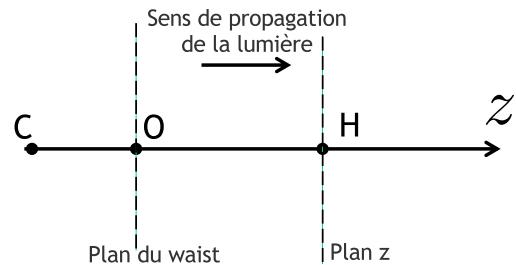
$$\mathcal{A}(x, y, z) = \mathcal{A}(0, 0, z) \exp -i \frac{k}{q(z)} \frac{x^2 + y^2}{2} = \mathcal{A}(0, 0, z) \exp -i \frac{k}{R(z)} \frac{x^2 + y^2}{2} \exp -\frac{k\lambda}{\pi\omega(z)^2} \frac{x^2 + y^2}{2}$$



Interprétation physique du **rayon de courbure de la phase $R(z)$** :

Dans le plan z , la **structure de phase de l'onde gaussienne est analogue à celle d'une onde sphérique de sommet C où :**

$$\begin{aligned} \overline{CH} &= R(z) = z + \frac{z_R^2}{z} \\ \Leftrightarrow \overline{OC} &= \overline{OH} + \overline{HC} = z - z - \frac{z_R^2}{z} \\ &= -\frac{z_R^2}{z} \end{aligned}$$



5. PROPRIÉTÉS DU FAISCEAU GAUSSIEN

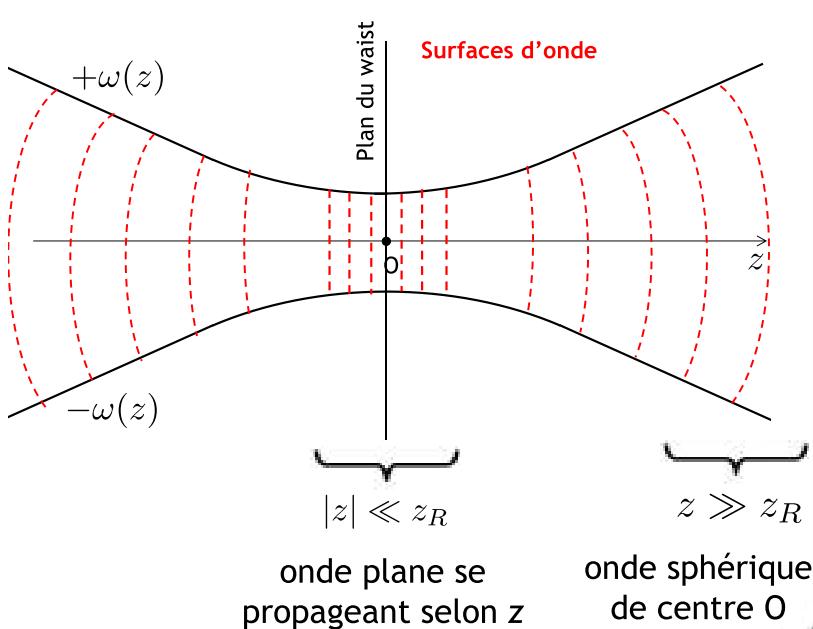
$$\mathcal{A}(x, y, z) = \mathcal{A}(0, 0, z) \exp -i \frac{k}{q(z)} \frac{x^2 + y^2}{2} = \mathcal{A}(0, 0, z) \exp -i \frac{k}{R(z)} \frac{x^2 + y^2}{2} \exp -\frac{k\lambda}{\pi\omega(z)^2} \frac{x^2 + y^2}{2}$$



Interprétation physique du **rayon de courbure de la phase $R(z)$** :

Dans le plan z , la **structure de phase de l'onde gaussienne est analogue à celle d'une onde sphérique de sommet C où :**

$$\begin{aligned} \overline{CH} &= R(z) = z + \frac{z_R^2}{z} \\ \Leftrightarrow \overline{OC} &= -\frac{z_R^2}{z} \end{aligned}$$

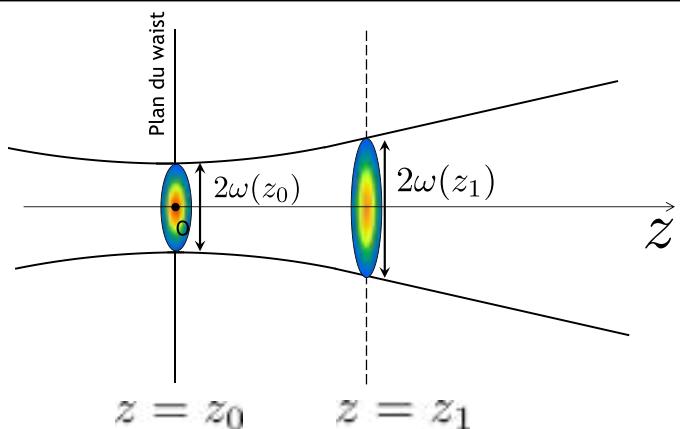


5. GÉNÉRALISATION DES PROPRIÉTÉS DU FAISCEAU GAUSSIEN



Relations utiles :

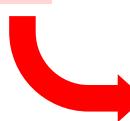
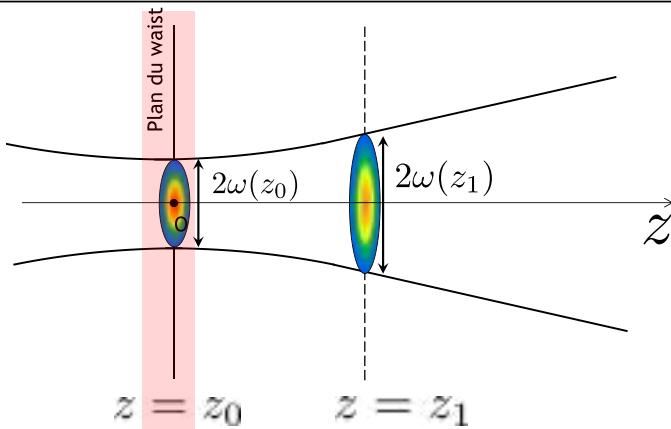
généralisation au cas où le waist est situé en $z_0 \neq 0$



Lorsqu'il n'existe aucun système optique susceptible de déformer le faisceau gaussien entre le plan z_0 et le plan z_1 , on peut écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rayon de courbure complexe} \quad q(z_1) = (z_1 - z_0) + iz_R \\ \text{rayon du faisceau} \quad \omega(z_1) = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z_1 - z_0}{z_R} \right)^2} \\ \text{rayon de courbure de la phase} \quad R(z_1) = (z_1 - z_0) \left[1 + \left(\frac{z_R}{z_1 - z_0} \right)^2 \right] \end{array} \right.$$

5. GÉNÉRALISATION DES PROPRIÉTÉS DU FAISCEAU GAUSSIEN

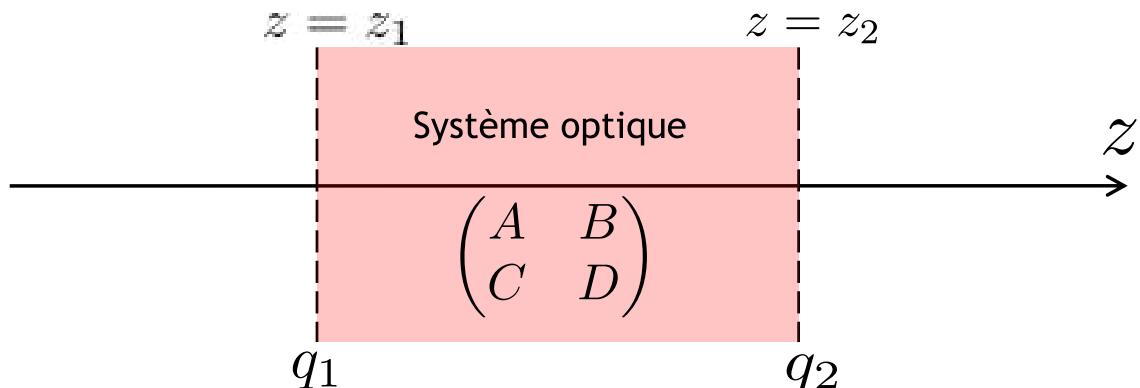


Propriétés importantes dans le plan du waist z_0

$$\left\{ \begin{array}{l} q(z_0) = iz_R \quad \text{rayon de courbure complexe imaginaire pur} \\ \omega(z_0) = \omega_0 = \sqrt{\frac{\lambda z_R}{\pi}} \quad \text{rayon du faisceau le plus étroit} \\ R(z_0) \rightarrow \infty \quad \text{rayon de courbure de la phase infini} (\Leftrightarrow \text{onde plane}) \end{array} \right.$$

6. PROPAGATION DU RAYON DE COURBURE COMPLEXE : LOI ABCD

 **Lorsqu'il existe un système optique** entre le plan π_1 ($z = z_1$) et le plan π_2 ($z = z_2$) caractérisé par la matrice de transfert :



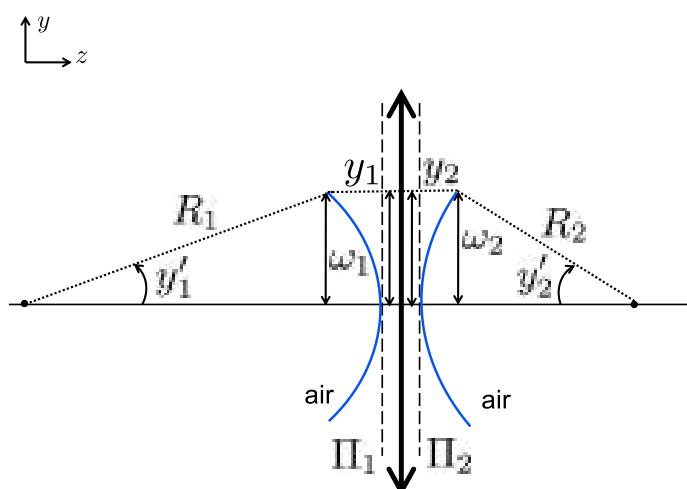
Dans l'approximation scalaire, la relation entre les rayons de courbure complexes dans les deux plans s'écrit simplement :

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D}$$

Loi ABCD

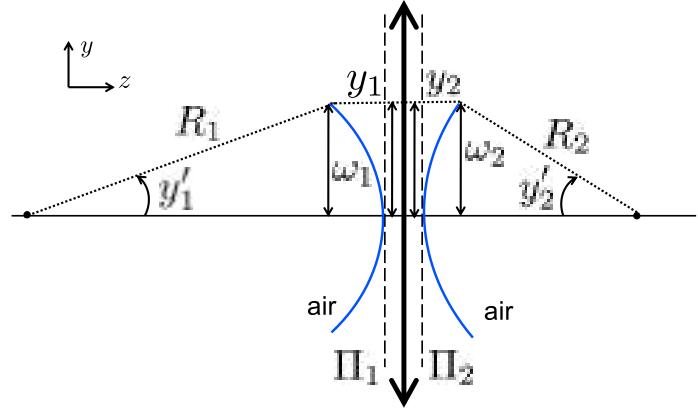
 Exercice-maison n°3 :

Retrouver/établir la loi ABCD dans le cas de la traversée d'une lentille mince de focale f par un faisceau gaussien en considérant le « rayon » correspondant à la demi-largeur typique ω (définie à $1/e^2$) du faisceau.



Exercice-maison n°3 :

Retrouver/établir la loi ABCD dans le cas de la traversée d'une lentille mince de focale f par un faisceau gaussien en considérant le « rayon » correspondant à la demi-largeur typique ω (définie à $1/e^2$) du faisceau.



On définit la matrice élémentaire associée à la traversée de la lentille mince :

$$T_{\pi_1 \rightarrow \pi_2} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$$

D'après le schéma ci-dessus, en considérant le rayon correspondant à la hauteur ω_1 (= y_1) incident sur la lentille, on a :

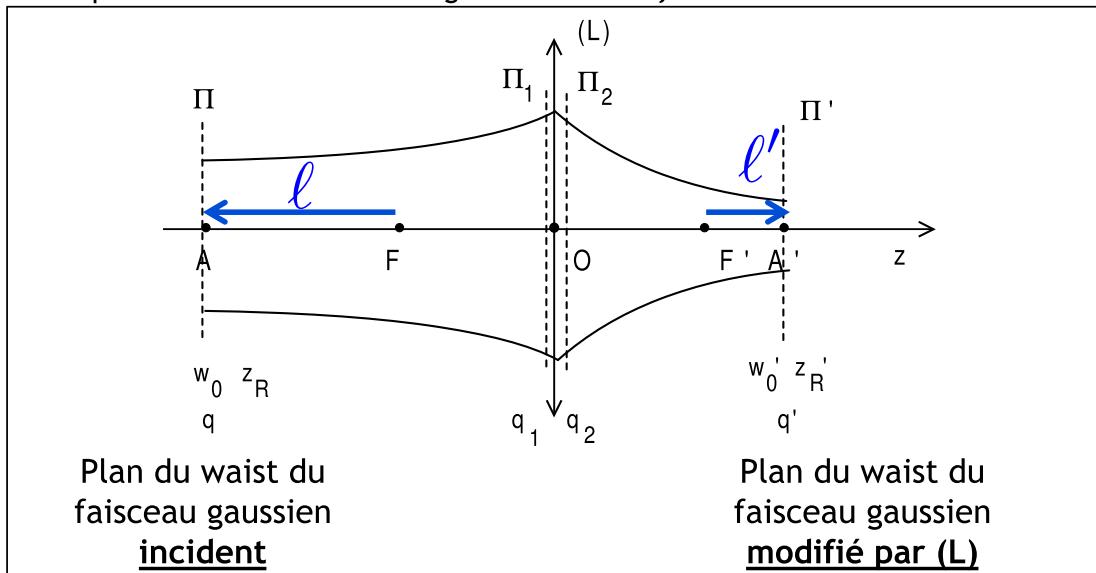
Or :

On définit q_1 et q_2 les rayons de courbure complexes dans les plans Π_1 et Π_2 , respectivement.

7. FORMULE DE CONJUGAISON DES WAISTS

👉 Application de la loi ABCD à la transformation d'un faisceau gaussien lors de la traversée d'une lentille mince (L) :

Exemple : lentille mince convergente de focale f



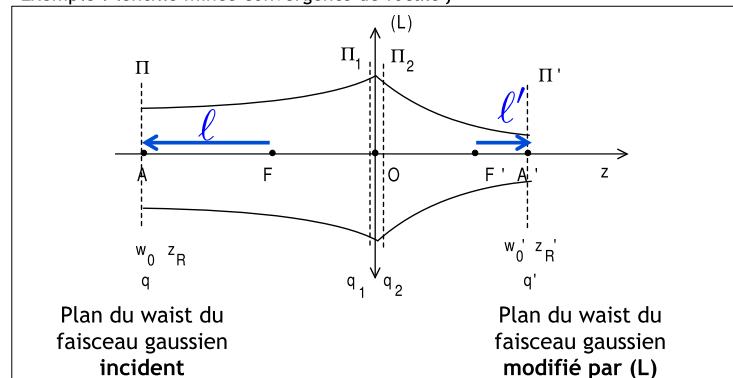
On repère les plans des waists par rapport aux foyers de (L) et on pose :

$$\begin{cases} \ell = \overline{FA} \\ \ell' = \overline{F'A'} \end{cases}$$

7. FORMULE DE CONJUGAISON DES WAISTS

$$\begin{cases} \ell = \overline{FA} \\ \ell' = \overline{F'A'} \end{cases}$$

Exemple : lentille mince convergente de focale f



👉 Formules de conjugaison des waists :

$$\ell' = -\ell \frac{f^2}{\ell^2 + z_R^2}$$

$$z'_R = z_R \frac{f^2}{\ell^2 + z_R^2}$$

$$\omega'_0 = \omega_0^2 \frac{f^2}{\ell^2 + z_R^2}$$

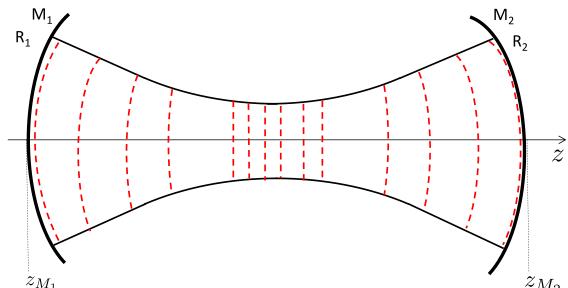
8. DÉTERMINATION DU MODE FONDAMENTAL GAUSSIEN D'UNE CAVITÉ STABLE

Principe :

Une onde gaussienne peut s'établir de manière durable dans une cavité laser stable (linéaire ou en anneau) si et seulement si elle se retrouve **identique à elle-même après un parcours complet de cavité**, donc avec le même rayon de courbure complexe.

☞ Conséquence dans le cas particulier des cavités linéaires :

Le principe de stabilité implique que la **forme** de l'onde gaussienne « épouse » la **forme** des miroirs d'extrémité afin de revenir identique à elle-même après réflexion.



→ Règle d'accord des rayons de courbure

$$|R(z_{miroir})| = |R_{miroir}|$$

Rayon de courbure de
la phase de l'onde

Rayon de courbure
du miroir



Seulement

- pour une **cavité linéaire**
- pour ses **miroirs d'extrémité**

8. DÉTERMINATION DU MODE FONDAMENTAL GAUSSIEN D'UNE CAVITÉ STABLE

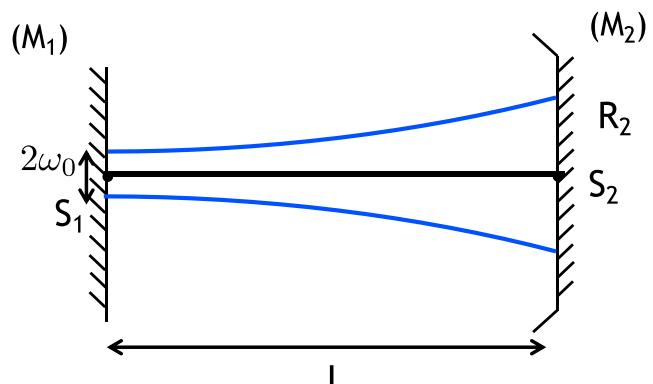
Exemple d'utilisation de la règle d'accord des rayons de courbure : cavité linéaire plan-concave

Au niveau de M_1 :

$$|R(S_1)| = |R_1| \rightarrow \infty$$

caractéristique du
plan du waist !

$S_1 = \text{waist}$



Au niveau de M_2 :

$$|R(S_2)| = |R_2| = R_2$$

$$\text{Or } R(S_2) = L \left[1 + \left(\frac{z_R}{L} \right)^2 \right]$$

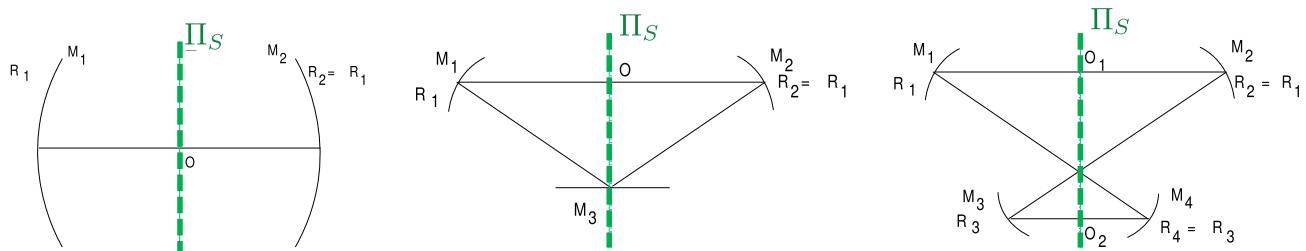
Détermination de z_R en
fonction de L et R_2

8. DÉTERMINATION DU MODE FONDAMENTAL GAUSSIEN D'UNE CAVITÉ STABLE

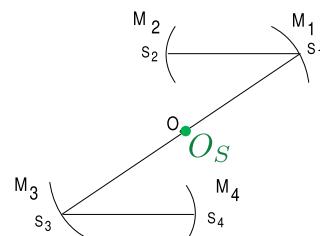
Cas des cavités présentant un élément de symétrie

La structure de l'onde gaussienne doit refléter la symétrie de la cavité dans laquelle elle se propage.

- pour une cavité présentant **un plan de symétrie Π_S** , il y aura nécessairement un **waist O à chaque endroit où Π_S est perpendiculaire à l'axe de la cavité**.

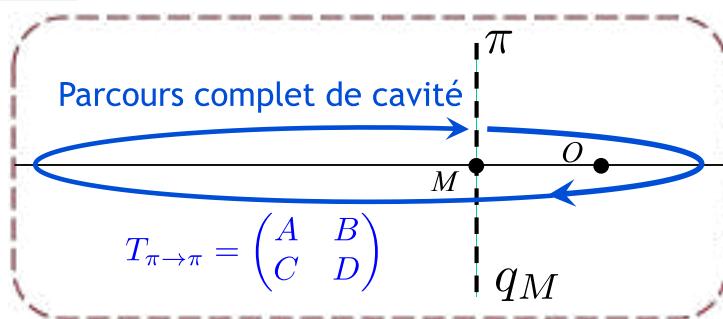


- pour une cavité présentant un **centre de symétrie O_S** , il y aura nécessairement un **waist O au niveau de O_S** .



8. DÉTERMINATION DU MODE FONDAMENTAL GAUSSIEN D'UNE CAVITÉ STABLE

Cas général



M : point quelconque de l'axe de la cavité laser

π : plan passant par M et perpendiculaire à l'axe de la cavité

q_M : rayon de courbure complexe du faisceau gaussien dans le plan π

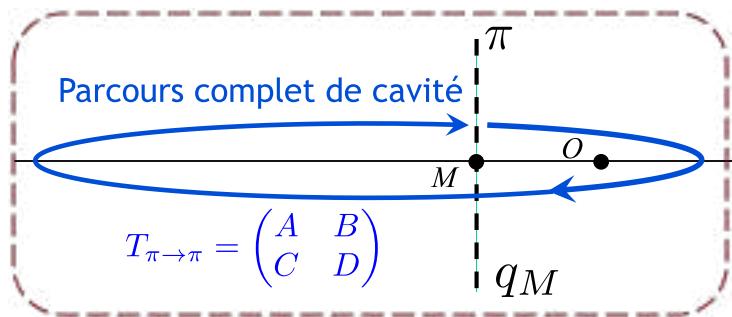
$T_{\pi \rightarrow \pi} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$: matrice de transfert pour un parcours complet à partir de π

- Expression de q_M en fonction des éléments géométriques de la cavité ?

- **Loi ABCD** pour évaluer le nouveau rayon de courbure complexe Q_M dans le plan π après un parcours complet de cavité
- **Principe** d'établissement du mode fondamental gaussien dans une cavité stable

8. DÉTERMINATION DU MODE FONDAMENTAL GAUSSIEN D'UNE CAVITÉ STABLE

Cas général



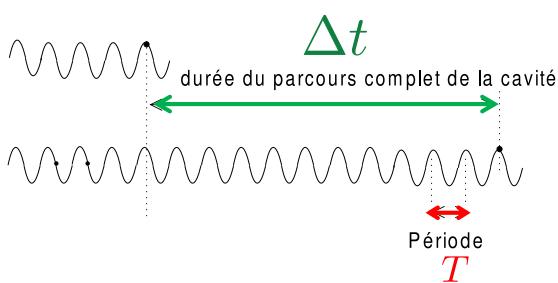
$$q_M = \frac{A - D}{2C} + \frac{i}{2|C|} \sqrt{4 - (D + A)^2}$$

→ S'il n'existe aucun système optique déformant le faisceau gaussien entre le plan π et le plan du waist en O , on peut alors écrire :

$$\begin{cases} \Re(q_M) = \frac{A - D}{2C} = \overline{OM} \\ \Im(q_M) = \frac{\sqrt{4 - (D + A)^2}}{2|C|} = z_R \end{cases}$$

9. MODES SPECTRAUX (LONGITUDINAUX) D'UNE CAVITÉ STABLE

- On a vu que la cavité laser impose la structure de l'onde gaussienne qui s'y établit (phase et amplitude).
Elle impose également une condition sur la fréquence ν de l'onde.



Principe :

Une onde gaussienne peut s'établir de manière durable dans une cavité laser stable (linéaire ou en anneau) si et seulement si elle se retrouve **en phase avec elle-même après un parcours complet de cavité**.

→ Il faut donc que : $\Delta t = (p + 1)T$ pour $p \in \mathbb{N}$

Durée d'un parcours complet de cavité

Période de l'onde

9. MODES SPECTRAUX (LONGITUDINAUX) D'UNE CAVITÉ STABLE

$$\Delta t = (p + 1)T \quad \text{pour } p \in \mathbb{N}$$

or $\left\{ \begin{array}{l} \Delta t = \sum_i \frac{\ell_i}{c_0/n_i} = \frac{\sum_i n_i \ell_i}{c_0} = \frac{\Delta \mathcal{L}}{c_0} \\ T = \frac{1}{\nu} \end{array} \right.$

$\Delta \mathcal{L} = \begin{cases} d & \text{cavité en anneau} \\ 2d & \text{cavité linéaire} \end{cases}$

D'où

$$\nu = \nu_p = (p + 1) \frac{c_0}{\Delta \mathcal{L}} \quad p \in \mathbb{N}$$

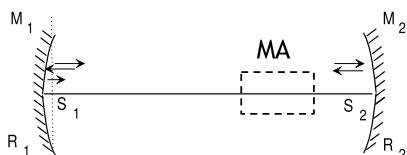
ν_p : Mode longitudinal (appelé aussi mode spectral) de la cavité

💡 Une onde laser peut s'établir dans une cavité si et seulement si **sa fréquence correspond à celle d'un des modes longitudinaux ν_p imposés par la cavité.**

9. MODES SPECTRAUX (LONGITUDINAUX) D'UNE CAVITÉ STABLE

➤ Modes longitudinaux (mode spectral) des deux types de cavité :

Cavités linéaires

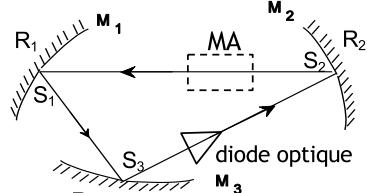


$$d = [S_1 S_2]$$

$$\Delta \mathcal{L} = 2d$$

$$\Rightarrow \nu_p = (p + 1) \frac{c_0}{2d}, \quad p \in \mathbb{N}$$

Cavités en anneau



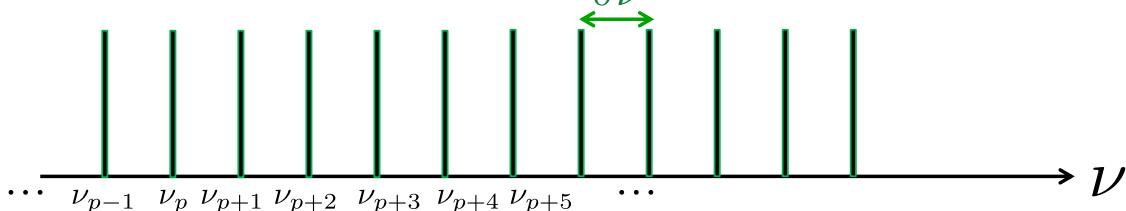
$$d = [S_1 S_2] + [S_2 S_3] + [S_3 S_1]$$

$$, \quad p \in \mathbb{N}$$

➤ Intervalle spectral entre deux modes longitudinaux successifs :

$$\delta \nu = \nu_{p+1} - \nu_p = \frac{c_0}{2d}$$

$$\delta \nu = \nu_{p+1} - \nu_p = \frac{c_0}{d}$$



9. MODES SPECTRAUX (LONGITUDINAUX) D'UNE CAVITÉ STABLE

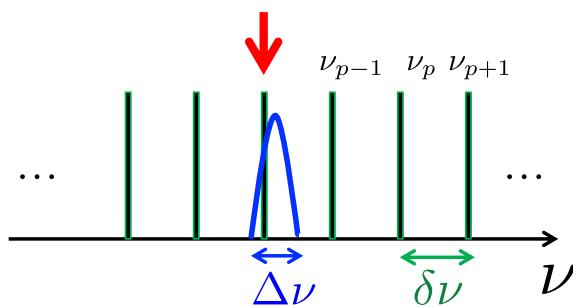
Cavité : fixe les modes longitudinaux séparés de $\delta\nu$

MA : fixe le domaine spectral $\Delta\nu$ sur lequel l'amplification est possible

FONCTIONNEMENT SPECTRAL DU LASER

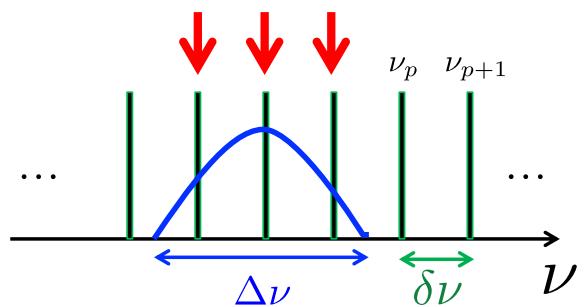
MONOMODE

$$\Delta\nu < \delta\nu$$



MULTIMODE

$$\Delta\nu > \delta\nu$$

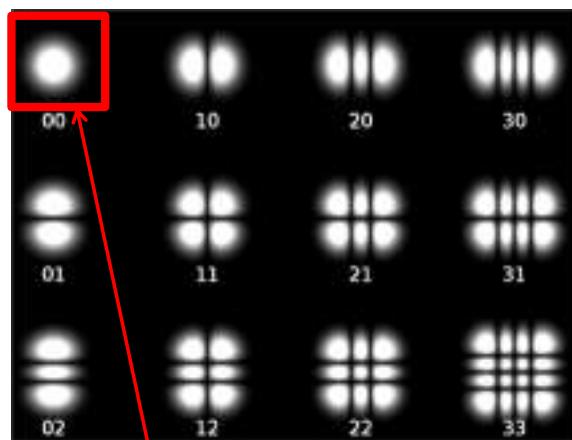


10. MODES SPATIAUX (TRANSVERSES) D'UNE CAVITÉ STABLE

☞ Le mode fondamental gaussien est une des solutions stables de l'équation de propagation avec conditions aux limites qui donne une distribution transverse d'amplitude gaussienne.

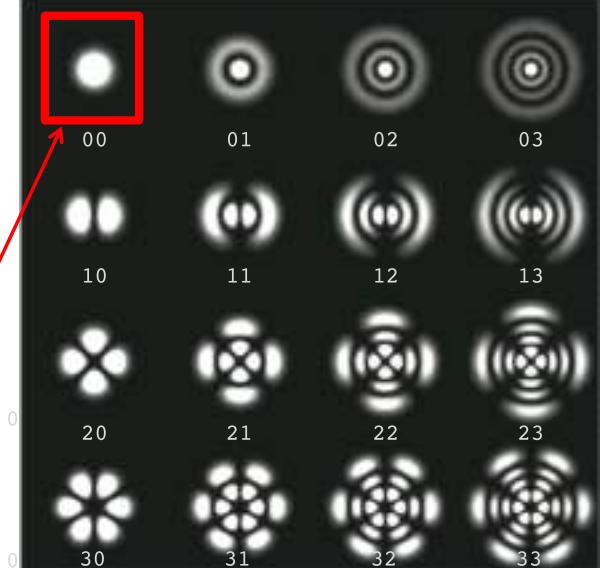
D'autres solutions existent : les modes transverses d'ordre supérieur

Modes Hermite-Gaussiens $HG_{m,n}$
(modes rectangulaires x,y)



mode fondamental gaussien (TEM_{00}) :
la plus petite extension radiale !

Modes Laguerre-Gaussiens $LG_{p,m}$
(modes cylindriques ρ, θ)



Remarque sur le déphasage de Gouy d'un faisceau gaussien :

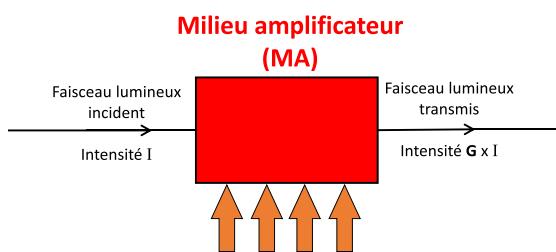
$$\mathcal{A}(x, y, z) = \mathcal{A}_0 \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1 + (z/z_R)^2}} \left[\exp - \left(k \frac{z_R}{z_R^2 + z^2} \right) \frac{x^2 + y^2}{2} \right]}_{\text{amplitude}} \times \underbrace{\left(\exp i \arctan \left(\frac{z}{z_R} \right) \right) \left(\exp - ikz \right) \left[\exp - ik \left(\frac{z}{z_R^2 + z^2} \right) \frac{x^2 + y^2}{2} \right]}_{\text{phase}}$$

déphasage de Gouy

Responsable du déphasage localisé de π qui apparaît lors de la traversée du plan du waist (cf Exo IV du TD 3)

Chapitre 4 -

Principes de base des amplificateurs lasers



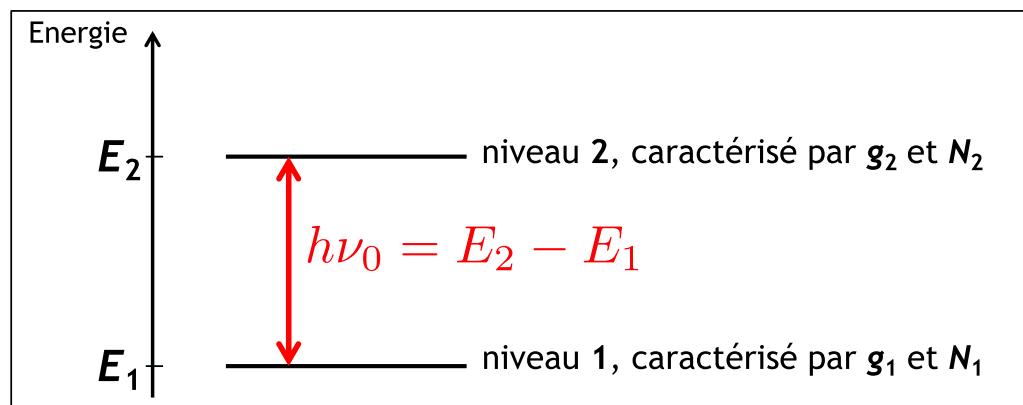
Objectifs :

- Décrire et comprendre les processus responsables de l'émission laser
- Etablir comment se fait l'amplification dans le milieu amplificateur
➡ interaction matière-rayonnement

1. MODÉLISATION DU MILIEU AMPLIFICATEUR

👉 MA : ensemble d'atomes, molécules, électrons,... dans des états divers (solide, liquide, gaz, plasma)

Dans ce chapitre, pour établir les concepts,
modélisation du MA par un système atomique à 2 niveaux



E_i : énergie du niveau i

g_i : dégénérescence quantique du niveau i (= nb d'états quantiques possédant l'énergie E_i)

N_i : population du niveau i (=nb d'atomes sur le niveau i par unité de volume du MA)



N_i s'exprime en (atome). m⁻³

2. CARACTÉRISATION DU RAYONNEMENT

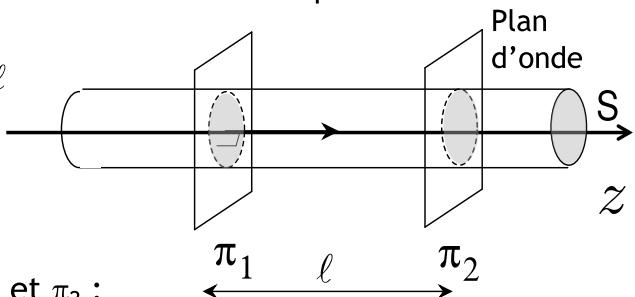
 Dans ce chapitre, modélisation du **rayonnement** par un **faisceau parallèle homogène monochromatique** se propageant selon z de section S et de fréquence ν .

- Volume du faisceau compris entre π_1 et π_2 : $S\ell$

- Nombre de photons dans ce volume : \mathcal{N}_Φ

➤ **Energie** contenue par le faisceau entre π_1 et π_2 :

$$E = \mathcal{N}_\Phi \times h\nu \quad [E] = J$$



➤ **Densité volumique d'énergie** du faisceau :

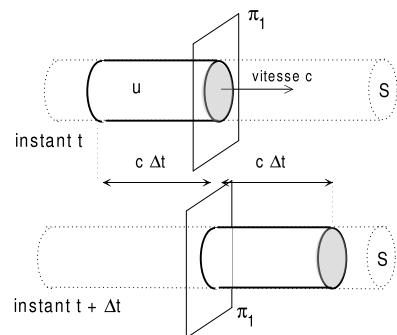
$$u = \frac{E}{S\ell} = \frac{\mathcal{N}_\Phi \times h\nu}{S\ell} \quad [u] = J.m^{-3}$$

➤ **Puissance lumineuse** d'une onde progressive :

$$\mathcal{P} = u \cdot S \cdot c \quad [P] = J.s^{-1} = W$$

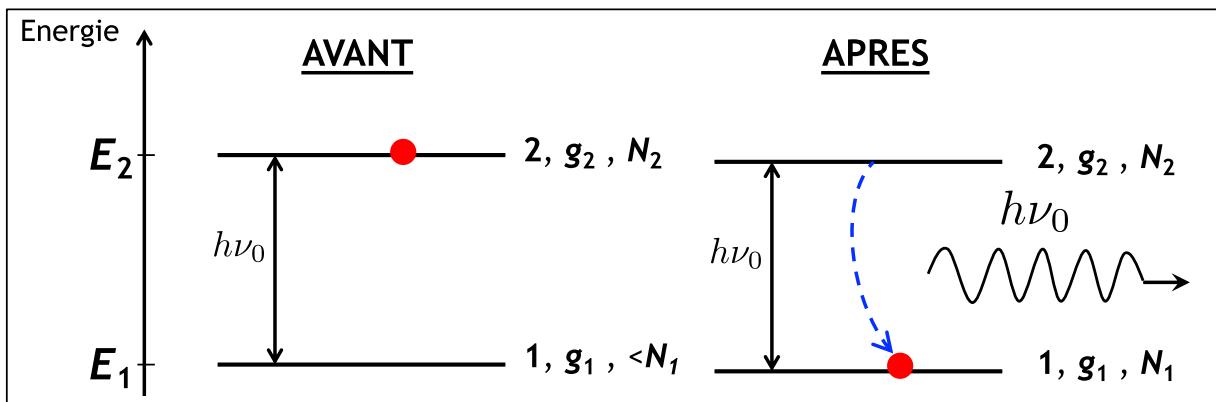
➤ **Intensité lumineuse** du faisceau :

$$I = \frac{d\mathcal{P}}{dS} = c \cdot u \quad [I] = W.m^{-2}$$



3. INTERACTION MATIÈRE-RAYONNEMENT

 **Emission spontanée** : un atome sur 2 se désexcite **spontanément** vers 1 en émettant un photon d'énergie $h\nu_0 = E_2 - E_1$.



photons d'émission spontanée

Émission **ISOTROPE** et **INCOHERENTE**
(pas de relation de phase, de polarisation, ...)

On a :

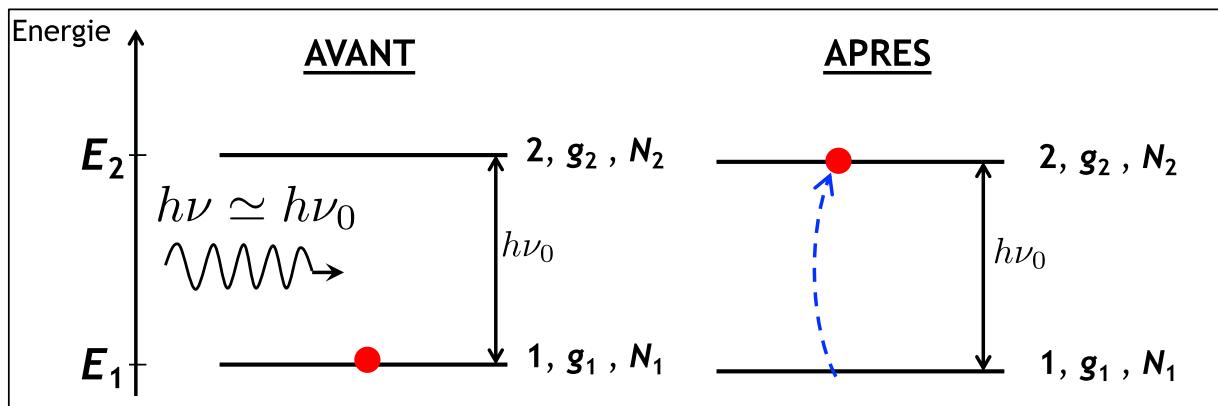
$$\boxed{dn_{es} = \underbrace{A_{21}}_{\text{Probabilité par seconde et par atome d'émettre un photon d'émission spontanée}} \times \underbrace{N_2}_{\text{Nb de photons produits par émission spontanée pendant } dt} \times dt} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} [A_{21}] = s^{-1} \\ [dn_{es}] = m^{-3} \end{cases}$$

Nb de photons produits par émission spontanée pendant dt par unité de volume du MA

Probabilité par seconde et par atome d'émettre un photon d'émission spontanée = **coefficient d'Einstein pour l'émission spontanée**

3. INTERACTION MATIÈRE-RAYONNEMENT

 **Absorption** : un atome sur 1 en présence d'un rayonnement inducteur de fréquence $\nu \simeq \nu_0$ absorbe un photon $h\nu$ et est porté sur le niveau 2.



On a :

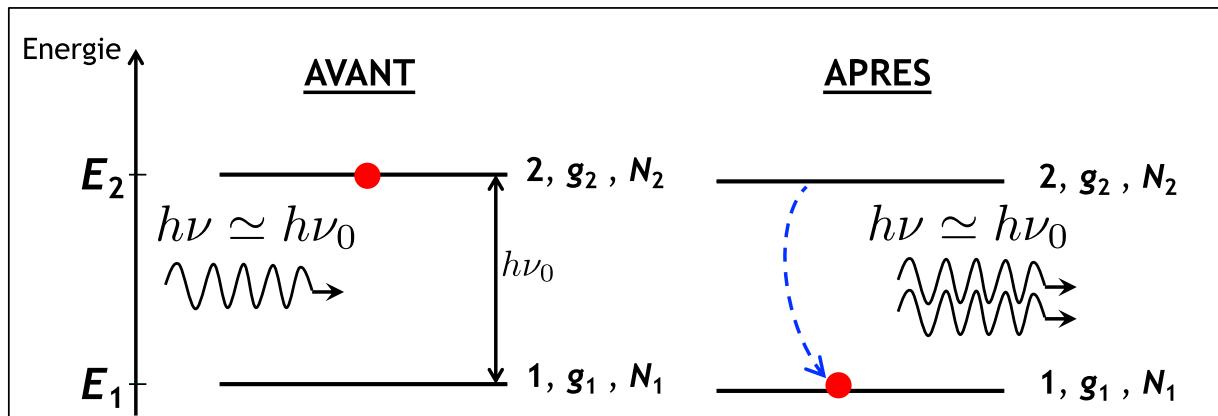
$$dn_a = \underbrace{W_{12} \times N_1 \times dt}_{\text{Nb de photons absorbés pendant } dt \text{ par unité de volume du MA}} \quad \text{avec} \begin{cases} [W_{12}] = s^{-1} \\ [dn_a] = m^{-3} \end{cases}$$

Nb de photons absorbés pendant dt par unité de volume du MA

Probabilité par seconde et par atome d'absorber un photon = probabilité d'absorption /s

3. INTERACTION MATIÈRE-RAYONNEMENT

 **Emission stimulée (ou induite)** : de manière totalement symétrique à l'absorption, un atome sur 2 en présence d'un rayonnement inducteur de fréquence $\nu \simeq \nu_0$ va redescendre sur le niveau 1 en émettant un photon d'énergie $h\nu$.



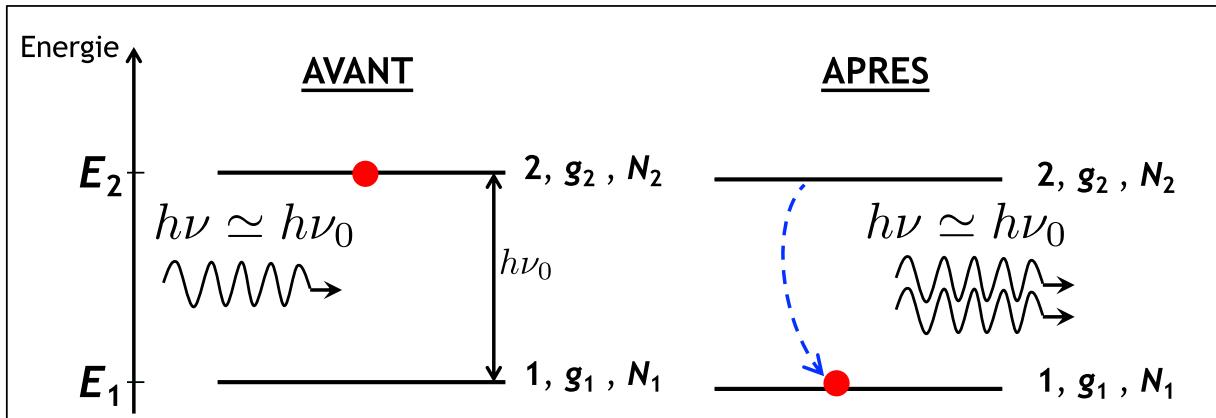
 Le **photon créé par émission stimulée** possède les **mêmes caractéristiques que le photon inducteur** : direction et sens de propagation, fréquence, phase, polarisation



- EMISSION STIMULEE**
- à la base de **l'émission laser**
 - responsable de la **cohérence laser** !

3. INTERACTION MATIÈRE-RAYONNEMENT

 **Emission stimulée (ou induite)** : de manière totalement symétrique à l'absorption, un atome sur 2 en présence d'un rayonnement inducteur de fréquence $\nu \simeq \nu_0$ va redescendre sur le niveau 1 en émettant un photon d'énergie $h\nu$.



On a :

$$dn_{ei} = W_{21} \times N_2 \times dt$$

Nb de photons produits par émission stimulée pendant dt par unité de volume du MA

Probabilité par seconde et par atome d'émission stimulée

avec $\begin{cases} [W_{21}] = s^{-1} \\ [dn_{ei}] = m^{-3} \end{cases}$

3. INTERACTION MATIÈRE-RAYONNEMENT

➤ Remarques sur les probabilités des processus INDUITS :

- L'absorption et l'émission stimulée n'existent que s'il y a un rayonnement inducteur ET que ce rayonnement a une « bonne » fréquence $\nu \simeq \nu_0$.
- Ces processus vont être d'autant plus importants qu'il y a un grand nombre de photons présents.

 W_{12} et W_{21} proportionnelles à u (densité volumique d'énergie du rayonnement)

W_{12} et W_{21} fonctions de ν (fréquence du rayonnement)

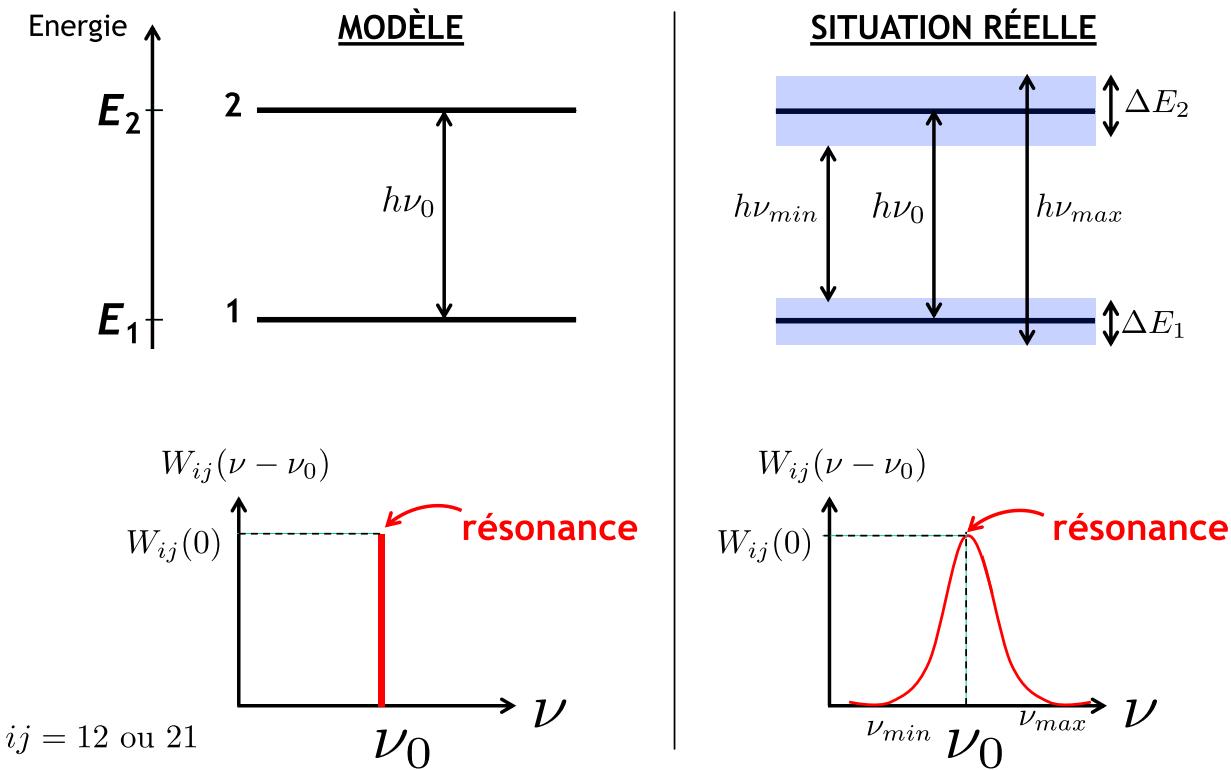


Notion de profil spectral de la transition $1 \leftrightarrow 2$

3. INTERACTION MATIÈRE-RAYONNEMENT

➤ Profil spectral de la transition $1 \leftrightarrow 2$

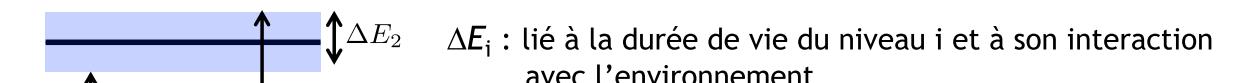
L'efficacité de l'interaction rayonnement-MA va dépendre de la fréquence du rayonnement qui traverse le MA :



3. INTERACTION MATIÈRE-RAYONNEMENT

➤ Profil spectral de la transition $1 \leftrightarrow 2$

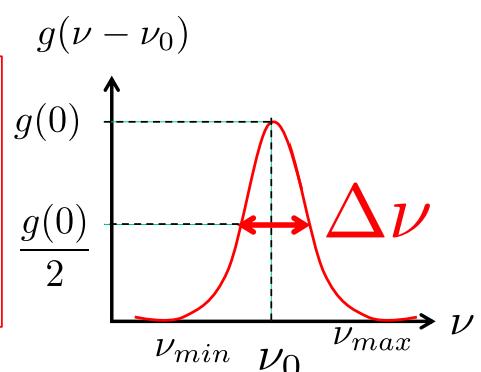
L'efficacité de l'interaction rayonnement-MA va dépendre de la fréquence du rayonnement qui traverse le MA :



\Rightarrow On définit : $g(\nu - \nu_0)$ profil spectral de la transition $1 \leftrightarrow 2$

tel que :

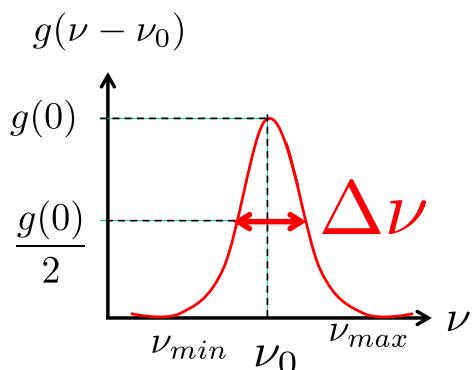
$$\left\{ \begin{array}{l} g(\nu - \nu_0) \text{ maximal pour } \nu = \nu_0 (g(\nu - \nu_0) = g(0)) \\ g(\nu - \nu_0) \rightarrow 0 \text{ pour } \nu \gg \nu_0 \text{ ou } \nu \ll \nu_0 \\ \int g(\nu - \nu_0) d\nu = 1 \quad \text{profil normé} \\ [g(\nu - \nu_0)] = \text{Hz}^{-1} \equiv \text{s} \quad \text{puisque} \int g(\nu - \nu_0) d\nu = 1 \end{array} \right.$$



➤ La largeur spectrale de la transition $\Delta\nu$ est la largeur totale à mi-hauteur de $g(\nu - \nu_0)$

3. INTERACTION MATIÈRE-RAYONNEMENT

Lien avec les probabilités des processus induits $1 \leftrightarrow 2$:



➤ Pour l'interaction du MA avec une onde progressive de spectre de fréquences $J(\nu)$ très étroit devant la largeur $\Delta\nu$ de $g(\nu-\nu_0)$, on pourra considérer que:

$$\left\{ \begin{array}{l} W_{12}(\nu - \nu_0) = B_{12} u g(\nu - \nu_0) \\ W_{21}(\nu - \nu_0) = B_{21} u g(\nu - \nu_0) \end{array} \right.$$

B_{12} : Coefficient d'Einstein pour **l'absorption**

B_{21} : Coefficient d'Einstein pour **l'émission stimulée ou induite**

➤ Unités des coefficients d'Einstein :

$$[B_{12}] = [B_{21}] = J^{-1} \cdot m^3 \cdot s^{-2}$$

Rappel : coefficient d'Einstein pour l'émission spontanée

$$[A_{21}] = s^{-1}$$

3. INTERACTION MATIÈRE-RAYONNEMENT

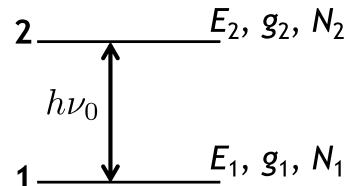
Relations entre les coefficients d'Einstein :

Des calculs quantiques ou semi-classiques (cf TD3) permettent d'établir les relations importantes suivantes :

$$\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8\pi h\nu_0^3}{c^3} \quad \text{avec } \nu_0 = \frac{E_2 - E_1}{h} \text{ et } c = \frac{c_0}{n}$$

$$g_1 B_{12} = g_2 B_{21}$$

$$g_1 W_{12} = g_2 W_{21}$$



Remarque : dans le cas de niveaux non dégénérés ($\Leftrightarrow g_1 = g_2 = 1$), les coefficients d'Einstein pour les processus induits sont égaux.

 On a donc aussi dans ce cas $W_{12} = W_{21}$ qu'on notera alors W .

3. INTERACTION MATIÈRE-RAYONNEMENT

Définition des sections efficaces pour les processus induits :

On considère l'interaction d'un MA avec une onde monochromatique progressive de fréquence ν . On définit :

- le **flux de photons** = nb de photons traversant la section S du faisceau par seconde et par unité de surface

$$\phi = \frac{I}{h\nu} \quad [\phi] = m^{-2} \cdot s^{-1}$$

- les **sections efficaces d'interaction** entre le rayonnement ν et le système atomique à 2 niveaux

$$\begin{aligned} \sigma_{12}(\nu - \nu_0) &= \frac{W_{12}(\nu - \nu_0)}{\phi} \\ \sigma_{21}(\nu - \nu_0) &= \frac{W_{21}(\nu - \nu_0)}{\phi} \end{aligned} \quad [\sigma_{12}] = [\sigma_{21}] = m^2$$

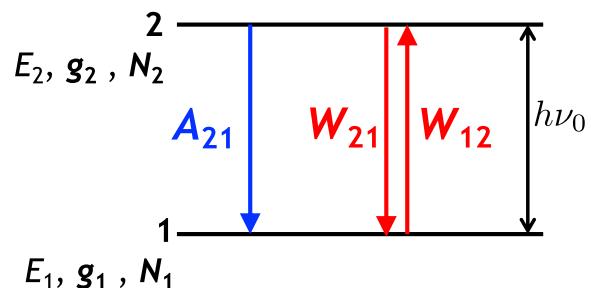
Intérêt : permet de s'affranchir de la dépendance des probabilités W_{12} et W_{21} avec le nombre de photons du rayonnement inducteur.

3. INTERACTION MATIÈRE-RAYONNEMENT

Equations d'évolution temporelle des populations

Dans le MA, plusieurs processus sont souvent à prendre en compte (absorptions, émissions stimulée et spontanée, désexcitations non radiatives) et contribuent à peupler ou dépeupler chacun des niveaux. On décrit ces « mouvements » de populations de la manière suivante :

Exemple : système à 2 niveaux en interaction avec une onde de fréquence $\nu \approx \nu_0$



- **Système fermé** : les transferts de populations ne se font qu'entre les niveaux d'énergie explicitement décrits.

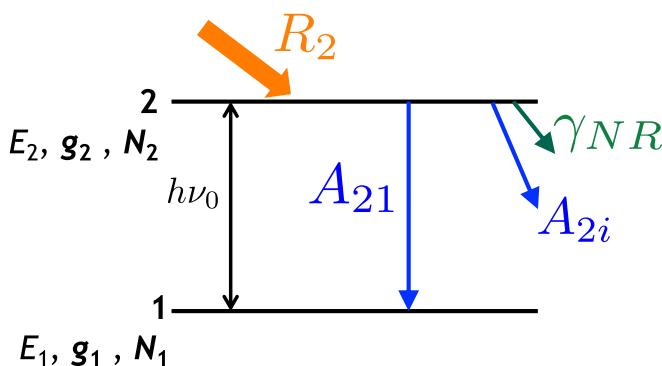
➡ Conséquence : $\sum_i N_i = \text{cste} \quad \forall t \iff \sum_i \frac{dN_i}{dt} = 0$

3. INTERACTION MATIÈRE-RAYONNEMENT

Equations d'évolution temporelle des populations

- **Système ouvert** : les transferts de populations peuvent se faire vers d'autres niveaux que ceux explicitement décrits donc $\sum_i N_i \neq \text{cste } \forall t$

Exemple : système ouvert à 2 niveaux soumis à un taux de pompage du niveau 2, aucune absorption ou émission stimulée $1 \leftrightarrow 2$



R_2 : taux de pompage en $\text{m}^{-3}.\text{s}^{-1}$ qui porte à l'instant $t = 0$ la population $N_2(0)$ sur le niveau 2.

$$R_2(t)=0 \text{ pour } t > 0$$

A_{2i} : probabilité d'émission spontanée vers d'autres niveaux non représentés

γ_{NR} : probabilité de désexcitation non radiative vers d'autres niveaux non représentés

3. INTERACTION MATIÈRE-RAYONNEMENT

Généralisation pour l'écriture des équations d'évolution temporelle des populations dans un MA à plusieurs niveaux d'énergie i :

- Représenter le **schéma des niveaux d'énergie impliqués**. Y indiquer par des flèches tous les processus responsables de transfert de population en indiquant les **probabilités par seconde** associées.

 Pour les processus induits, ne pas confondre coefficient d'Einstein et probabilité par seconde !!

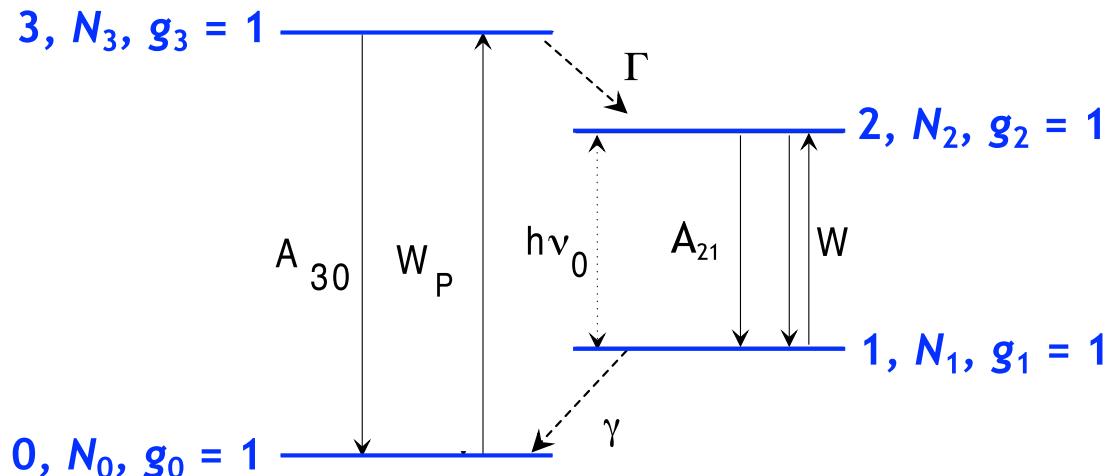
- Ecrire l'équation relative à la population N_i du niveau i en faisant le bilan des processus qui le peuplent (contribution >0) ou le dépeuplent (contribution <0).
- Si le système est fermé, vérifier que $\sum_i \frac{dN_i}{dt} = 0$

3. INTERACTION MATIÈRE-RAYONNEMENT

Exercice-maison n°4 :

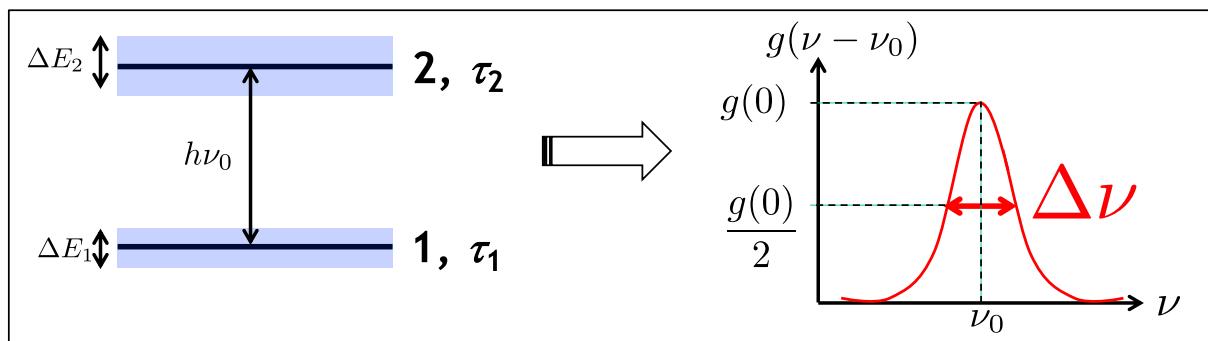
Soit le système à 4 niveaux pompé optiquement et représenté sur le schéma ci-dessous.

1. Identifier entre quels niveaux se produit la transition laser.
2. Ecrire les équations d'évolution temporelle de toutes les populations.



4. FORME ANALYTIQUE DU PROFIL SPECTRAL

- On a vu que le profil spectral $g(\nu - \nu_0)$ traduit les propriétés des niveaux d'énergie 1 et 2 responsables de l'émission laser et leur interaction avec l'environnement.



- De quoi dépend la largeur spectrale $\Delta\nu$ de $g(\nu - \nu_0)$?

Si on prend un atome isolé, alors :

$$\Delta\nu = \Delta\nu_{naturelle} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right)$$

Largeur naturelle ou intrinsèque

Modèle de l'émission par un dipôle oscillant exponentiellement amorti (cf cours Optique au premier semestre)

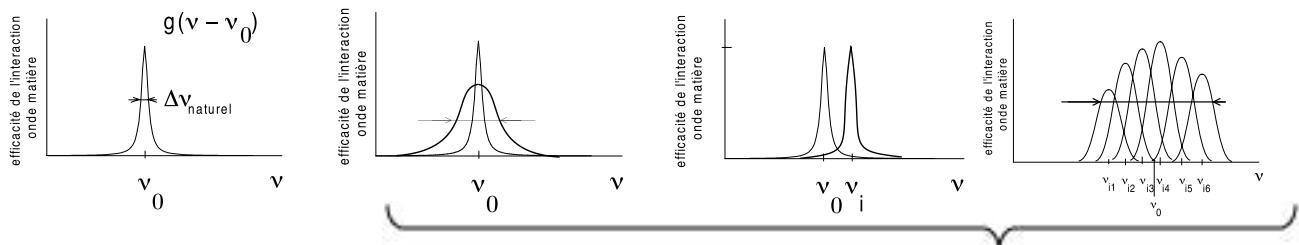
→ spectre des fréquences $J(\nu)$ lorentzien de largeur $\Delta\nu_{naturelle}$

4. FORME ANALYTIQUE DU PROFIL SPECTRAL

➤ De quoi dépend la largeur spectrale $\Delta\nu$ de $g(\nu - \nu_0)$?

Si cet atome est en interaction avec d'autres atomes, avec son environnement, avec un champ extérieur, alors :

- la durée de vie des niveaux peut être réduite (autres possibilités de désexcitation)
- les niveaux peuvent être déplacés



$$\Delta\nu = \Delta\nu_{naturelle} + \Delta\nu_{ext} > \Delta\nu_{naturelle}$$

→ **Élargissement spectral !**

On distingue 2 types de MA selon le type d'élargissement spectral :

MA à élargissement spectral homogène

MA à élargissement spectral inhomogène

4. FORME ANALYTIQUE DU PROFIL SPECTRAL

➤ Milieu amplificateur à élargissement spectral homogène

Pour tous les atomes du MA : propriétés identiques, émission et absorption à la même fréquence de résonance ν_0 , avec le même profil spectral et la même largeur spectrale $\Delta\nu$ de transition $1\leftrightarrow 2$.

En général, on a alors :

$$g(\nu - \nu_0) = g(0) \times \frac{1}{1 + \left(\frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu/2}\right)^2} \quad \text{Profil lorentzien}$$

avec

$$g(0) = \frac{2}{\pi\Delta\nu}$$

Exemples :

- Atomes actifs du MA dans un cristal parfait (basse T)

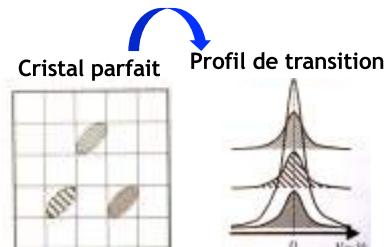
$$\Delta\nu_{ext} = f(T)$$

- Atomes actifs du MA en solution (laser à colorant)

$$\Delta\nu_{ext} = f(\text{interaction avec le solvant})$$

- Atomes actifs du MA en phase gazeuse à basse T et haute P

$$\Delta\nu_{ext} = \beta \times P$$



4. FORME ANALYTIQUE DU PROFIL SPECTRAL

Conséquence importante : l'interaction d'un MA à élargissement spectral **homogène** avec une onde monochromatique de fréquence ν est caractérisée par une **section efficace identique** $\sigma_{ij}(\nu - \nu_0)$ **pour tous les atomes**.

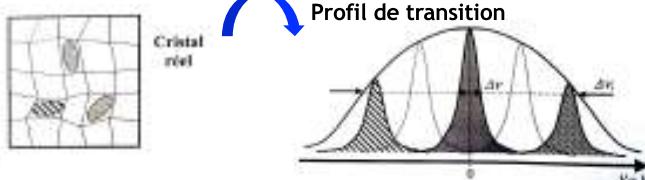
Donc
$$\sigma_{ij}(\nu - \nu_0) = \frac{W_{ij}(\nu - \nu_0)}{\phi} = \frac{h\nu}{c} B_{ij} \times g(\nu - \nu_0)$$
 identique pour tous les atomes

👉 Milieu amplificateur à élargissement spectral inhomogène

Chaque atome du MA a une **fréquence de résonance propre** ν_i^0 pour la transition $1 \leftrightarrow 2$ selon son environnement ou son comportement (site, vitesse,...)
 ➔ **élargissement inhomogène dû à la dispersion des fréquences de résonance**

Exemple :

Ions dopant une matrice cristalline réelle

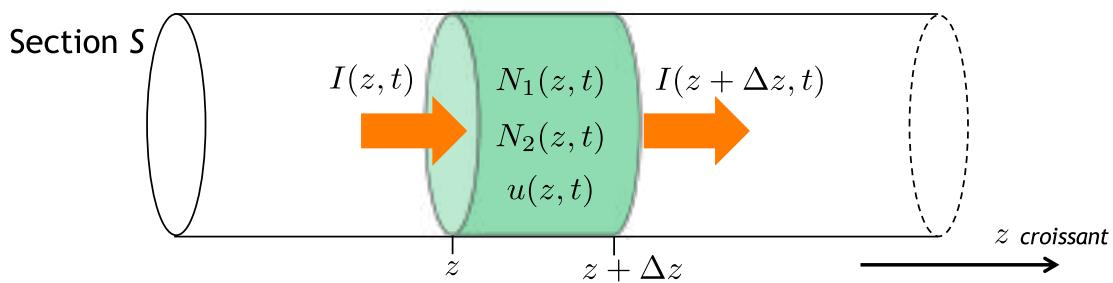


En général, ce type d'élargissement a une origine statistique qui va se traduire par une **distribution gaussienne**.

5. AMPLIFICATION D'UNE ONDE PAR UN MILIEU À ÉLARGISSEMENT SPECTRAL HOMOGENE

👉 Bilan d'énergie

INTERACTION	Matière : MA à élargissement spectral homogène avec $E_2 - E_1 = h\nu_0$
↔	
RAYONNEMENT	: onde plane progressive monochromatique de fréquence ν et d'intensité $I(z, t)$.



- Bilan d'énergie pour l'onde dans le volume $S \cdot \Delta z$ entre les instants t et $t + \Delta t$:

- Énergie de l'onde à l'instant t :

- Énergie de l'onde à l'instant $t + \Delta t$:

5. AMPLIFICATION D'UNE ONDE PAR UN MILIEU À ÉLARGISSEMENT SPECTRAL HOMOGÈNE

- Énergie s'ajoutant ou se retranchant à l'onde entre t et $t + \Delta t$:

- Énergie des photons entrant dans la section S en z entre t et $t + \Delta t$:

- Énergie des photons sortant de la section S en $z + \Delta z$ entre t et $t + \Delta t$:

- Énergie absorbée par les atomes sur 1 dans le cylindre $S \cdot \Delta z$ entre t et $t + \Delta t$:

- Énergie émise par ém. induite par les atomes sur 2 dans le cylindre $S \cdot \Delta z$ entre t et $t + \Delta t$:

- Énergie émise par ém. spont. par les atomes sur 2 dans le cylindre $S \cdot \Delta z$ entre t et $t + \Delta t$:

5. AMPLIFICATION D'UNE ONDE PAR UN MILIEU À ÉLARGISSEMENT SPECTRAL HOMOGÈNE

Bilan d'énergie

On obtient l'équation d'évolution de l'intensité dans un MA à élargissement spectral homogène :

$$\frac{1}{I} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial z} \right) = \sigma_{21} \left[N_2(z, t) - \frac{g_2}{g_1} N_1(z, t) \right]$$

$\underbrace{\phantom{\frac{1}{I} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial z} \right)}}_{\alpha(z, t)}$ $\underbrace{\phantom{\left[N_2(z, t) - \frac{g_2}{g_1} N_1(z, t) \right]}}_{\Delta N(z, t)}$

On définit :

- le **coefficient d'amplification** de l'onde $\alpha(z, t) = \frac{1}{I} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial z} \right)$

- la **différence de population** du MA

$$\Delta N(z, t) = N_2(z, t) - \frac{g_2}{g_1} N_1(z, t)$$

Pour un **MA à élargissement spectral homogène**, on a la relation très simple :

$$\alpha(z, t) = \sigma_{21}(\nu - \nu_0) \times \Delta N(z, t)$$

5. AMPLIFICATION D'UNE ONDE PAR UN MILIEU À ÉLARGISSEMENT SPECTRAL HOMOGÈNE

➤ Remarques sur le coefficient d'amplification $\alpha(z,t)$:

$$\alpha(z,t) = \frac{1}{I} \frac{\partial I}{\partial z} + \frac{1}{c I} \frac{\partial I}{\partial t}$$

- $\alpha(z,t)$ est défini **par unité de longueur** du MA donc $[\alpha(z,t)] = m^{-1}$

- On distingue dans ce cours 2 fonctionnements temporels :

Fonctionnement stationnaire
(ou quasi-stationnaire)

$I(z,t)$ varie très lentement avec le temps

$$|\frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t}| \ll |\frac{\partial I}{\partial z}| \Rightarrow \alpha(z) = \frac{1}{I} \frac{dI}{dz}$$

Fonctionnement impulsional

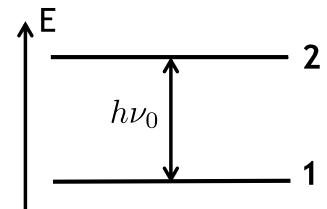
$I(z,t)$ varie plus rapidement avec le temps que spatialement

$$|\frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t}| \gg |\frac{\partial I}{\partial z}| \Rightarrow \alpha(t) = \frac{1}{c I} \frac{dI}{dt}$$

5. AMPLIFICATION D'UNE ONDE PAR UN MILIEU À ÉLARGISSEMENT SPECTRAL HOMOGÈNE

➤ Remarques sur la différence de population $\Delta N(z,t)$:

$$\Delta N(z,t) = N_2(z,t) - \frac{g_2}{g_1} N_1(z,t)$$



- Dans le cas de **niveaux non dégénérés** ($g_1 = g_2 = 1$), on a plus simplement

$$\Delta N(z,t) = N_2(z,t) - N_1(z,t)$$

- À **l'équilibre thermodynamique**, en **l'absence d'onde**, la loi de Boltzmann s'applique :

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2}{g_1} \exp\left(-\frac{h\nu_0}{k_B T}\right) \Rightarrow \Delta N = \frac{g_2}{g_1} N_1 \left[\exp\left(-\frac{h\nu_0}{k_B T}\right) - 1 \right] < 0$$

moins d'atomes sur le niveau 2 que sur le niveau 1

Ordres de grandeur :

Énergie thermique :

À 300 K : $k_B T \sim 200 \text{ cm}^{-1}$

Énergie d'une transition moléculaire

Entre 2 niveaux rotationnels : $h\nu_0 \sim 5 \text{ cm}^{-1}$
(dans les micro-ondes à 2 cm)

Entre 2 niveaux vibrationnels : $h\nu_0 \sim 2 \text{ 000 cm}^{-1}$
(dans l'IR à 5 μm)

Entre 2 niveaux électroniques : $h\nu_0 \sim 100 \text{ 000 cm}^{-1}$
(dans l'UV du vide à 100 nm)

6. COEFFICIENT D'AMPLIFICATION EN RÉGIME STATIONNAIRE

En régime stationnaire ($\frac{\partial \dots}{\partial t} = 0$) et pour un MA à élargissement spectral homogène :

$$\alpha(z) = \frac{1}{I(z)} \frac{dI}{dz} = \sigma_{21}(\nu - \nu_0) \Delta N(z)$$

3 situations

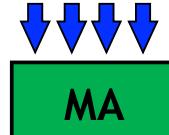
- $\alpha < 0$: le milieu est absorbant
- $\alpha = 0$: le milieu est ‘transparent’
- $\alpha > 0$: le milieu est **amplificateur !**



Condition d'inversion de population (IP)

$$\Delta N(z) = N_2(z) - \frac{g_2}{g_1} N_1(z) > 0$$

RÔLE DU POMPAGE = Amener plus d'atomes sur le niveau 2 que sur le niveau 1 !

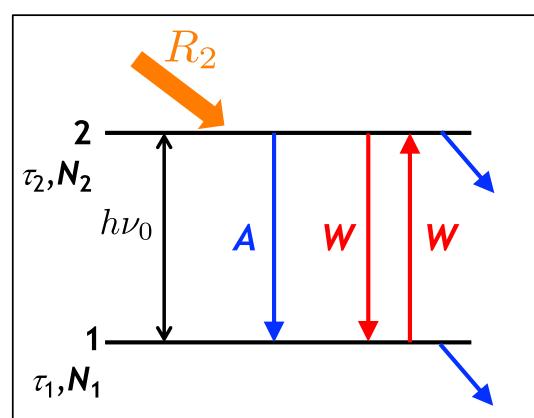


7. SATURATION DE L'AMPLIFICATION D'UNE ONDE PAR UN MILIEU EN RÉGIME STATIONNAIRE

- On se place dans le régime de fonctionnement d'un laser correspondant au régime stationnaire ou quasi-stationnaire. On a vu que les conditions d'amplification dépendent de la valeur de ΔN . Il faut donc évaluer cette différence de population.

Illustration sur l'exemple d'un système ouvert à 2 niveaux soumis à un pompage

- Hypothèses :
- MA à élargissement homogène
 - durées de vie des niveaux : τ_1 et τ_2
 - $g_1 = g_2 = 1$ donc $W_{12} = W_{21} = W$ et on note $A_{21} = A$
 - taux de pompage du niveau 2 : R_2
 - Interaction avec une onde monochromatique de fréquence ν

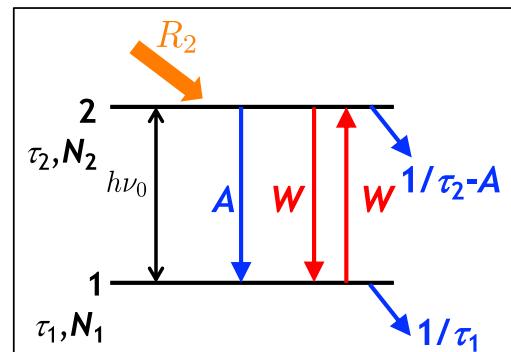


Exercice-maison n°5 :

Résoudre le système d'équations différentielles pour ce MA à 2 niveaux en régime stationnaire et établir l'expression de la différence de population ΔN en fonction des durées de vie et des probabilités indiquées sur le schéma.

7. SATURATION DE L'AMPLIFICATION D'UNE ONDE PAR UN MILIEU EN RÉGIME STATIONNAIRE

$$\Delta N = R_2 \tau_2 \frac{1 - A \tau_1}{1 + W(\tau_2 + \tau_1 - A \tau_2 \tau_1)} \quad \tau > 0$$



➤ Condition d'inversion de population (IP) :

$$\Delta N > 0 \Leftrightarrow 1 - A \tau_1 > 0 \Leftrightarrow A < \frac{1}{\tau_1}$$

➡ Le niveau 1 doit se vider **plus vite** vers des niveaux inférieurs qu'il ne se remplit à partir de l'émission spontanée issue de 2.

➤ Pour tout système, on définit en régime stationnaire la **différence de population non saturée ΔN^0** :

$$\Delta N^0 = \Delta N \text{ (pour } I = 0 \Leftrightarrow W_{21} = 0)$$

Ici $\Delta N^0 = R_2 \tau_2 (1 - A \tau_1)$

→ dépend directement du taux de pompage

7. SATURATION DE L'AMPLIFICATION D'UNE ONDE PAR UN MILIEU EN RÉGIME STATIONNAIRE

➤ Pour tout système, on pourra écrire ΔN (en régime stationnaire) sous la forme générique :

$$\frac{\Delta N}{\Delta N^0} = \frac{1}{1 + W_{21}\tau}$$

➤ D'où l'expression du coefficient d'amplification en régime stationnaire :

$$\alpha = \sigma_{21} \Delta N = \frac{\sigma_{21} \Delta N^0}{1 + W_{21}\tau}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\alpha^0}{1 + W_{21}\tau}$$

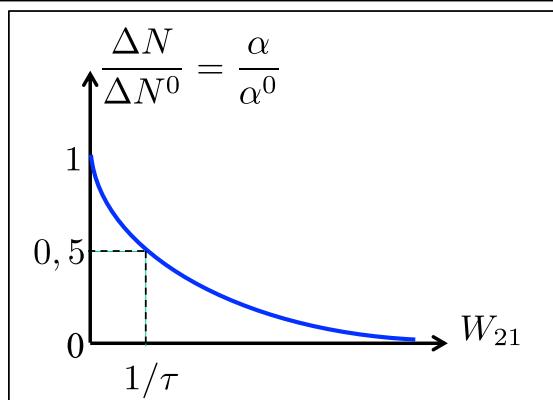
avec $\begin{cases} \alpha^0 = \sigma_{21}(\nu - \nu_0) \Delta N^0 \\ \alpha = \sigma_{21}(\nu - \nu_0) \Delta N \end{cases}$

⚠ Valable seulement pour un MA à élargissement homogène

D'où $\frac{\Delta N}{\Delta N^0} = \frac{\alpha}{\alpha^0} = \frac{1}{1 + W_{21}\tau}$

Rappel : W_{21} proportionnel au nb de photons du rayonnement

7. SATURATION DE L'AMPLIFICATION D'UNE ONDE PAR UN MILIEU EN RÉGIME STATIONNAIRE



$$\frac{\Delta N}{\Delta N^0} = \frac{\alpha}{\alpha^0} = \frac{1}{1 + W_{21}\tau}$$

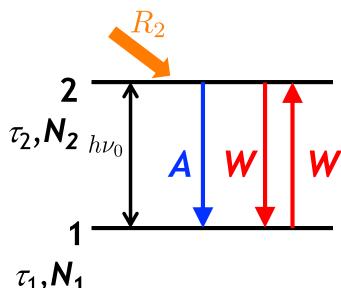
↑ différence de population saturée
 ↓ coef. d'amplification saturée
 ↓ coef. d'amplification non saturée
 ↓ différence de population non saturée

- ΔN^0 et α^0 sont les valeurs maximales que peuvent avoir ΔN et α
- Lorsque l'intensité de l'onde augmente, ΔN et α diminuent



C'est le phénomène de
SATURATION DE L'AMPLIFICATION

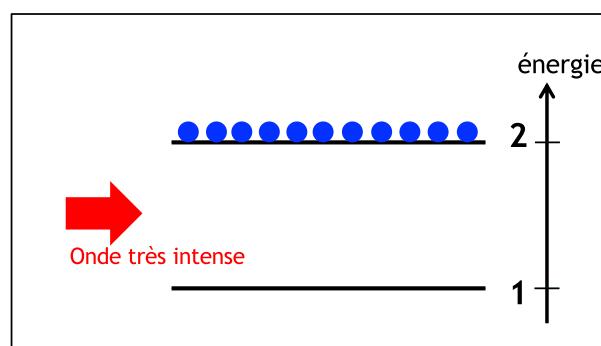
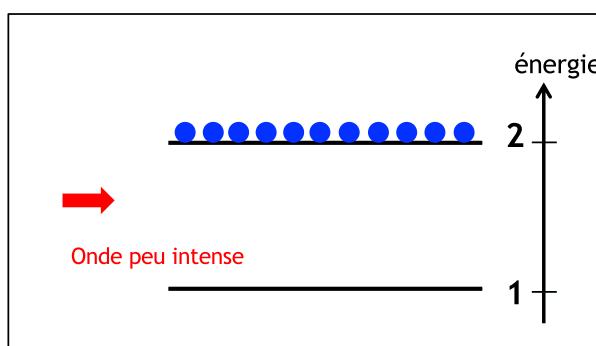
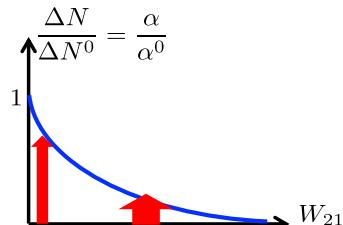
➤ Interprétation physique :



Le pompage permet d'avoir plus d'atomes sur 2 que sur 1 (inversion de population). Si l'intensité de l'onde est forte, on va avoir un gd nombre d'émissions stimulées qui vont donc réduire la population N_2 donc ΔN et donc α . Pour W_{21} trop forte, il y a autant d'émissions stimulées que d'absorptions donc $\alpha \rightarrow 0$.

7. SATURATION DE L'AMPLIFICATION D'UNE ONDE

➤ Illustration du phénomène de saturation



	Onde peu intense (W_{21} faible)	Onde très intense (W_{21} forte)
<u>Avant le passage de l'onde</u>	Plus d'atomes sur 2 que sur 1 grâce au pompage donc possibilité d'avoir plus d'émissions stimulées que d'absorptions $\Delta N > 0 \Leftrightarrow \alpha > 0$	
<u>Après le passage de l'onde</u>	Un peu moins d'atomes sur 2 et un peu plus sur 1 donc baisse de ΔN et baisse de α , mais toujours $\Delta N > 0 \Leftrightarrow \alpha > 0$	Beaucoup moins d'atomes sur 2 et beaucoup plus sur 1, l'interaction avec l'onde tend à équilibrer les 2 processus donc $\Delta N \rightarrow 0 \Leftrightarrow \alpha \rightarrow 0$

7. SATURATION DE L'AMPLIFICATION D'UNE ONDE PAR UN MILIEU EN RÉGIME STATIONNAIRE



Notion d'intensité de saturation

Comme $W_{21} = \frac{\sigma_{21} I}{h\nu}$, on peut réécrire

$$\frac{\Delta N}{\Delta N^0} = \frac{1}{1 + \frac{I}{I_s}} = \frac{\alpha}{\alpha^0}$$

Intensité de saturation



I_s ne représente pas l'intensité maximale qu'on peut avoir !

Par définition c'est l'intensité qui permet de réduire la différence de population d'un facteur 2 par rapport à sa valeur non saturée ΔN_0

Illustration sur l'exemple du système ouvert à 2 niveaux étudié précédemment

$$\frac{\Delta N}{\Delta N^0} = \frac{1}{1 + W\tau} = \frac{1}{1 + \frac{\sigma_{21} I}{h\nu \tau}} \quad \text{avec } \tau = \tau_2 + \tau_1 - A \tau_2 \tau_1$$

D'où par identification

$$I_s = \frac{h\nu}{\sigma_{21}(\nu - \nu_0)\tau}$$

- *I_s* ne dépend que de la fréquence de l'onde et des caractéristiques intrinsèques du système (durées de vie, efficacité de l'interaction matière-onde à travers σ , profil spectral, ...)

7. SATURATION DE L'AMPLIFICATION D'UNE ONDE PAR UN MILIEU EN RÉGIME STATIONNAIRE



Généralisation pour les MA caractérisés par un système à 3, 4, 5... niveaux d'énergie :

- Par convention, on s'arrangera toujours pour noter :

- 1 : niveau **inférieur** de la transition laser
- 2 : niveau **supérieur** de la transition laser

- Ecrire les équations d'évolution temporelle de toutes les populations puis les écrire en **régime stationnaire**.

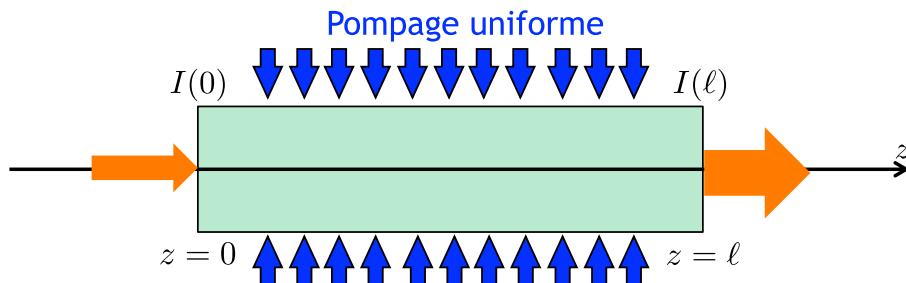
- Résoudre ces équations pour pouvoir écrire $\Delta N = N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1$ en fonction des paramètres pertinents.

- Calculer ΔN^0 et réécrire ΔN sous la forme $\frac{\Delta N}{\Delta N^0} = \frac{1}{1 + \frac{I}{I_s}}$

- Par identification, en déduire l'expression de **I_s** en fonction des caractéristiques du MA.

8. GAIN TOTAL DU MILIEU AMPLIFICATEUR EN RÉGIME STATIONNAIRE

➤ On va établir en régime stationnaire l'équation qui régit le gain total du milieu amplificateur pour le cas courant d'une cellule de gaz ou d'un barreau cristallin.



➤ Par définition, le gain G d'un MA est défini par la relation :

$$G = \frac{I(\ell)}{I(0)}$$

- Hypothèses : - MA à élargissement homogène de longueur ℓ
 - Interaction avec une onde monochromatique progressive d'intensité $I(z)$
 - Régime stationnaire
 - Pompage uniforme du MA avec un coef. d'amplification non saturée α^0 vérifiant $\alpha^0\ell \gg 1$

8. GAIN TOTAL DU MILIEU AMPLIFICATEUR EN RÉGIME STATIONNAIRE

➤ Equation implicite du gain total en régime stationnaire :

$$\ln G + \frac{I(0)}{I_s} (G - 1) = \alpha^0 \ell$$

On peut distinguer 2 cas limites :

Faible intensité en entrée

$$I(0) \ll I_s \Rightarrow G \simeq \exp(\alpha^0 \ell) \gg 1$$

Gain fort

Forte intensité en entrée

$$I(0) \gg I_s \Rightarrow \ln G \ll \frac{I(0)}{I_s} (G - 1)$$

$$\Rightarrow G \simeq 1 + (\alpha^0 \ell) \frac{I_s}{I(0)}$$

Pour $I(0)$ assez fort, G tend alors vers 1

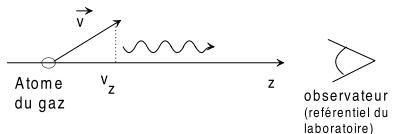
Le MA a perdu toute propriété d'amplification à cause de la **saturation de l'amplification** ($\alpha \rightarrow 0$)

Du point de vue de l'onde le MA est **transparent** !

9. CAS DES MILIEUX AMPLIFICATEURS À ÉLARGISSEMENT SPECTRAL INHOMOGÈNE

Exemple de l'élargissement par effet Doppler dans un gaz à la température T

Situation : ensemble d'atomes identiques modélisés par un système à 2 niveaux de profil spectral lorentzien $g(v-v_0)$ avec une fréquence de résonance v_0 dans le référentiel de l'atome et une largeur naturelle Δv_h .

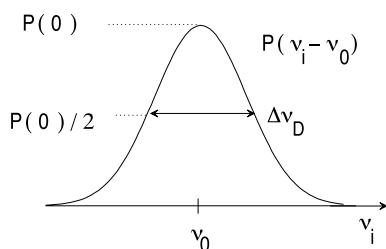


La fréquence d'émission résonante d'un atome en mouvement dans le référentiel d'un observateur est décalée par effet Doppler : $\nu_i = \nu_0 (1 + \frac{v_z}{c_0})$

Distribution de Maxwell pour les vitesses des atomes :

$$P_v(v_x, v_y, v_z) = (\frac{m}{2\pi kT})^{3/2} \exp - \left[\frac{m}{2kT} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \right]$$

Distribution gaussienne des fréquences de résonance des atomes :



$$P(\nu_i - \nu_0) = \sqrt{\frac{4 \ln 2}{\pi}} \frac{1}{\Delta\nu_D} \exp - \left[\left(\frac{\nu_i - \nu_0}{\Delta\nu_D/2} \right)^2 \ln 2 \right]$$

avec $\Delta\nu_D = \frac{\nu_0}{c_0} \sqrt{\frac{8kT \ln 2}{m}} = \frac{1}{\lambda_0} \sqrt{\frac{8RT \ln 2}{M}}$

masse de l'atome
en kg

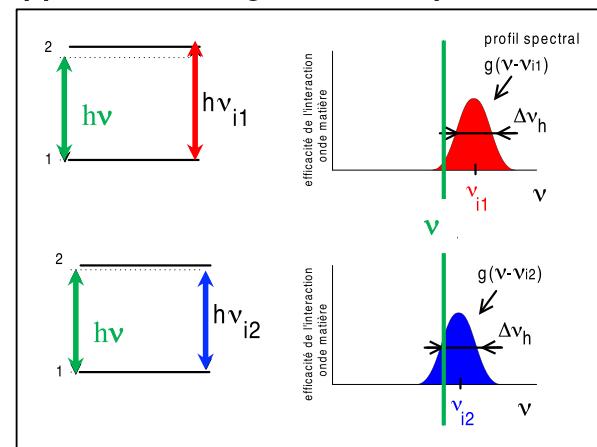


masse molaire en
kg.mol⁻¹

9. CAS DES MILIEUX AMPLIFICATEURS À ÉLARGISSEMENT SPECTRAL INHOMOGÈNE

Exemple de l'élargissement par effet Doppler dans un gaz à la température T

Situation : Les atomes ont le même profil spectral lorentzien $g(v-v_i)$ avec une **fréquence de résonance v_i** dans le référentiel du laboratoire et une largeur Δv_h . Ils interagissent avec un **rayonnement inducteur de fréquence v** .



➤ Différence de population pour la classe d'atomes possédant une fréquence de résonance dans l'intervalle $[v_i; v_i + \Delta v_h]$:

$$d\Delta N(\nu_i) = \Delta N P(\nu_i - \nu_0) d\nu_i$$

➤ Coefficient d'amplification pour cette classe d'atomes :

$$\begin{aligned} d\alpha_i(\nu) &= \text{section efficace} && \times \text{différence de population} \\ &= \underbrace{\sigma_{21}(\nu - \nu_i)}_{\frac{W_{21}(\nu - \nu_i)}{I/h\nu}} && \times [\Delta N P(\nu_i - \nu_0) d\nu_i] \\ &= \frac{h\nu}{c} B_{21} g(\nu - \nu_i) \end{aligned}$$

9. CAS DES MILIEUX AMPLIFICATEURS À ÉLARGISSEMENT SPECTRAL INHOMOGÈNE

➤ Exemple de l'élargissement par effet Doppler dans un gaz à la température T

➤ Coefficient d'amplification pour tous les atomes :

$$\alpha(\nu) = \int_{\nu_i} d\alpha_i(\nu) = \int \frac{h\nu}{c} B_{21} \frac{\Delta N^0}{1 + \frac{I}{I_s(\nu)}} g(\nu - \nu_i) P(\nu_i - \nu_0) d\nu_i$$

↓ ↓ ↓

Coefficient d'amplification
pour l'interaction avec une
onde de fréquence ν

dépend de $(\nu - \nu_i)$
via $\sigma_{21}(\nu - \nu_i)$

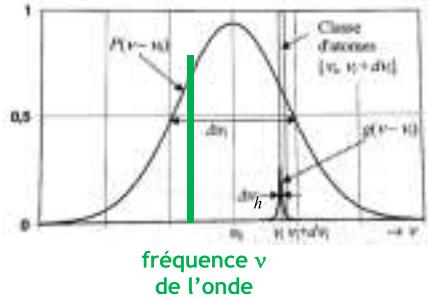
Profil spectral d'un
atome de fréquence
de résonance ν_i

Distribution des
fréquences de
résonance ν_i

↓ ↓

largeur $\Delta\nu_h$ largeur $\Delta\nu_i = \Delta\nu_D$

Si on a : $\Delta\nu_D \gg \Delta\nu_h$, on est en situation **d'élargissement inhomogène dominant**.



L'interaction se fait pour les atomes de fréquence ν_i telle que : $\nu_i \approx \nu \pm \Delta\nu_h$

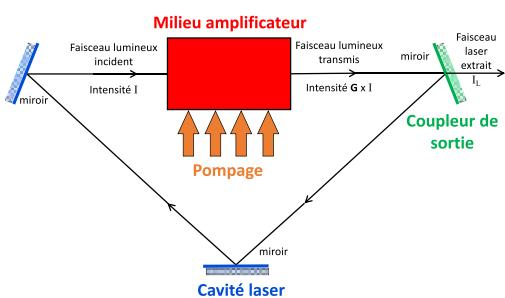
On peut montrer alors que :

$$\alpha(z, \nu) = \frac{\alpha^0(\nu)}{\sqrt{1 + \frac{I(z)}{I_s(\nu - \nu_0)}}}$$

Chapitre 5 -

Introduction à la théorie du laser

Objectifs :

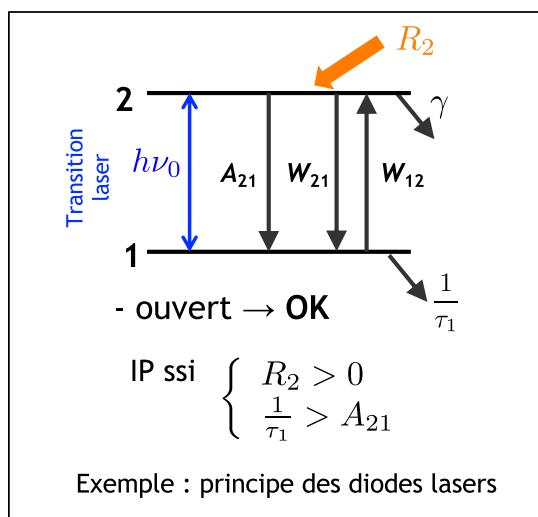
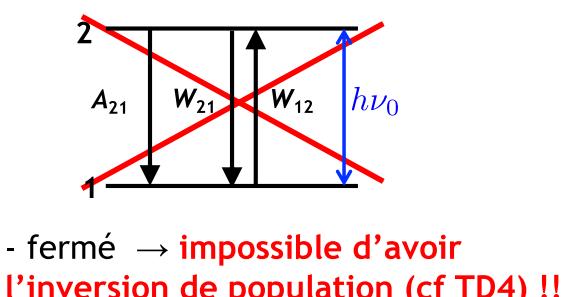


- Savoir comment s'effectue le pompage des lasers
- Comprendre les conditions de fonctionnement du couple {cavité/milieu amplificateur}
- Etablir l'expression de l'intensité du faisceau laser extrait en fonction de tous les paramètres du laser
 - en régime stationnaire
 - en régime impulsif

1. DIFFÉRENTS TYPES DE SYSTÈMES AMPLIFICATEURS

- On a vu (cf chapitre précédent) qu'un MA peut effectivement amplifier s'il est possible d'y réaliser **l'inversion de population (IP)** : $\Delta N = N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1 > 0$
- Cette situation dépend en général des caractéristiques intrinsèques des niveaux (probabilités des processus spontanés, durées de vie) et du **taux de pompage**.

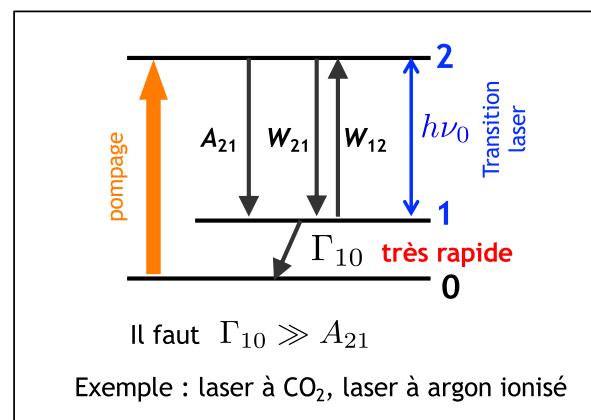
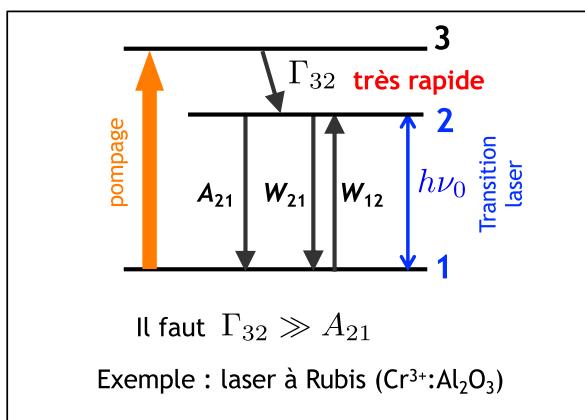
Systèmes à 2 niveaux :



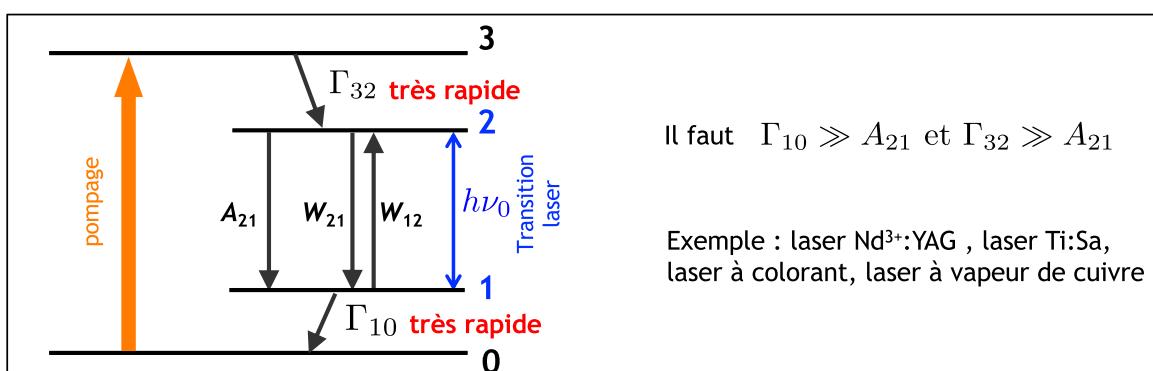
1. DIFFÉRENTS TYPES DE SYSTÈMES AMPLIFICATEURS



Systèmes fermés à 3 niveaux :



Systèmes fermés à 4 niveaux :



2. QUELQUES NOTIONS SUR LE POMPAGE DES MILIEUX AMPLIFICATEURS



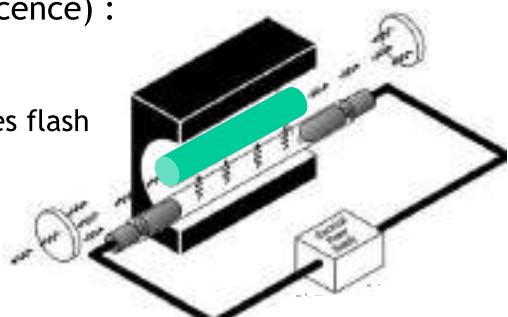
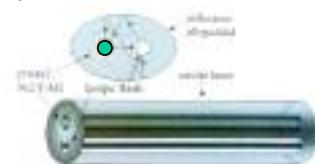
Le **pompage** permet de porter **directement ou indirectement** plus d'atomes sur le niveau 2 que sur 1 et donc de réaliser l'**inversion de population**.

Plusieurs systèmes de **pompage** existent :

➤ **Pompage optique** : excitation par absorption de photons

- **incohérent** (lampe flash, lampe à incandescence) : sur une grande gamme spectrale

ex : dans un laser YAG, le barreau cristallin et les lampes flash sont placés aux foyers d'un réflecteur ellipsoïdal.



- **cohérent** (diode laser, laser YAG, autre laser) : sélectivité du pompage en ciblant une transition d'absorption choisie

ex : laser à colorant pompé par un laser YAG (cf TP)



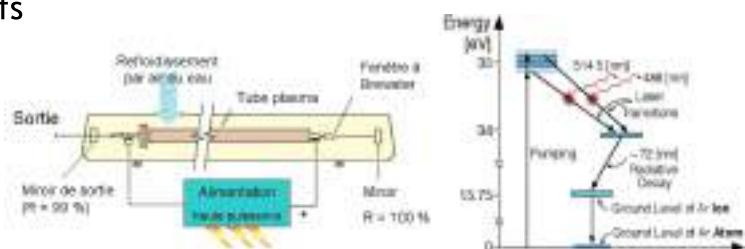
➡ Seule méthode de pompage pour les lasers à état solide

2. QUELQUES NOTIONS SUR LE POMPAGE DES MILIEUX AMPLIFICATEURS

➤ **Pompage par décharge électrique** : décharge continue ou radiofréquence

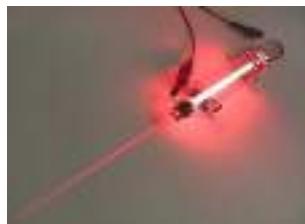
- **Excitation directe** : collisions inélastiques entre les électrons issus de la décharge et les atomes actifs

ex : laser à argon ionisé,
laser à azote, laser à CO₂, ...

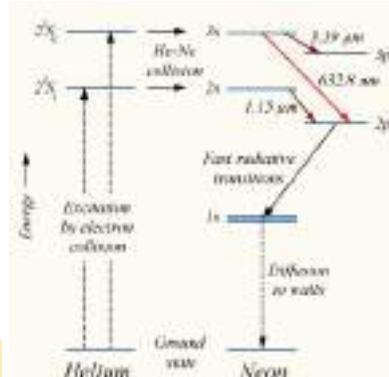


- **Excitation indirecte** : on mélange au milieu actif des atomes plus facilement « excitables » par décharge électrique. Ceux-ci transfèrent cette énergie acquise aux atomes actifs par collision.

ex : laser Hélium-Néon



Atome actif responsable de l'émission laser !

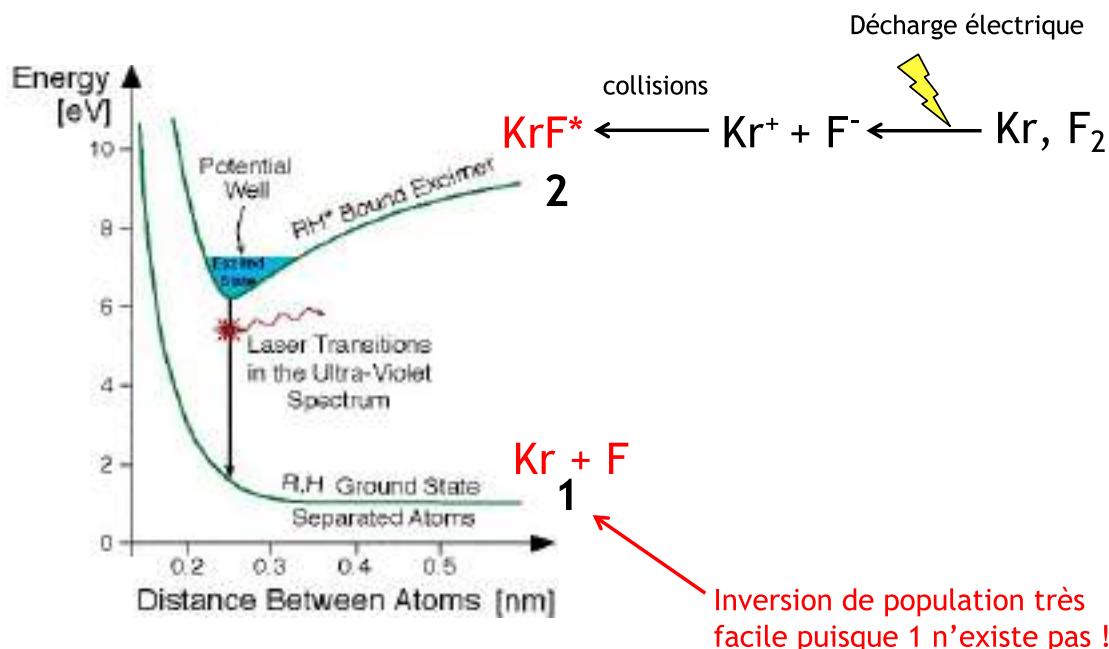


→ Méthode de pompage majoritaire pour les lasers à gaz

2. QUELQUES NOTIONS SUR LE POMPAGE DES MILIEUX AMPLIFICATEURS

➤ **Pompage « chimique »** : formation de molécules excitées par collisions réactives

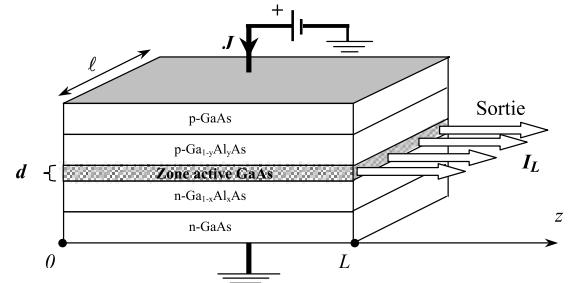
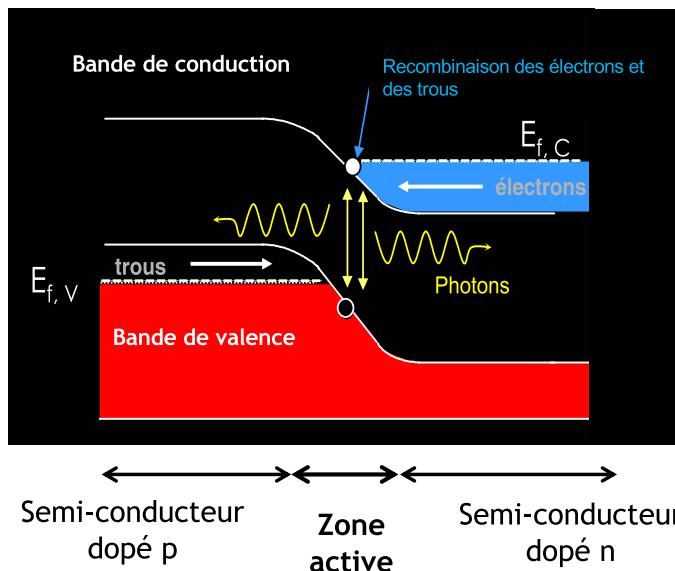
ex : lasers excimères du type ArF, KrF, XeCl, ...



→ Lasers à gain fort fonctionnant dans l'UV/proche VUV

2. QUELQUES NOTIONS SUR LE POMPAGE DES MILIEUX AMPLIFICATEURS

- **Pompage par injection de porteurs** : courant dans une jonction PN de semi-conducteurs
ex : diodes lasers

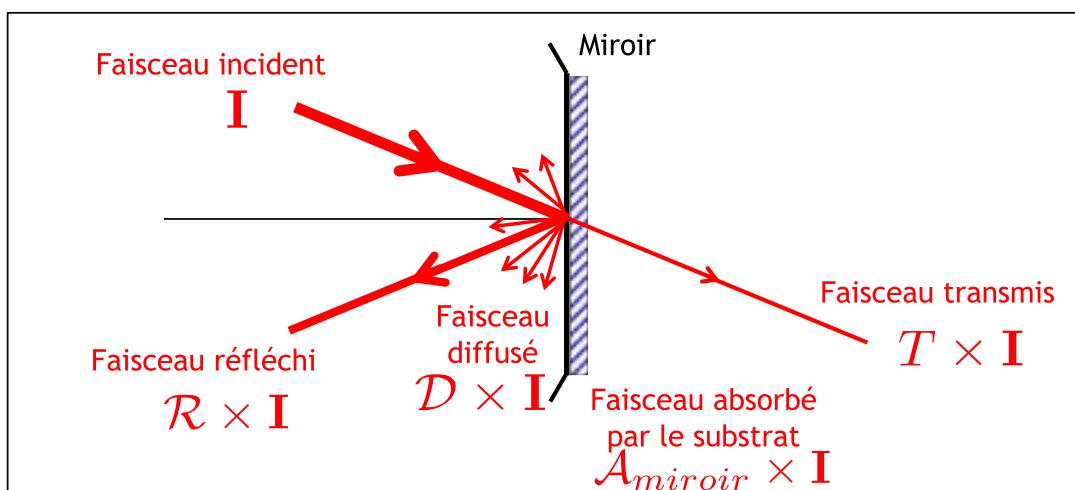


➤ Méthode de pompage avec un très bon rendement de conversion électrique/optique (30 à 50 %)

3. PERTES DE LUMIÈRE DANS UNE CAVITÉ OPTIQUE

- Quelle est l'origine physique des pertes de lumière dans une cavité ?

- Pertes au niveau des miroirs de cavité



- Conservation de l'énergie : $\mathcal{R} + T + \mathcal{A}_{\text{miroir}} + \mathcal{D} = 1$

- Miroirs de cavités = miroirs à multicouches diélectriques tels que : $\mathcal{R} + T \simeq 1$
Pertes par transmission ↙

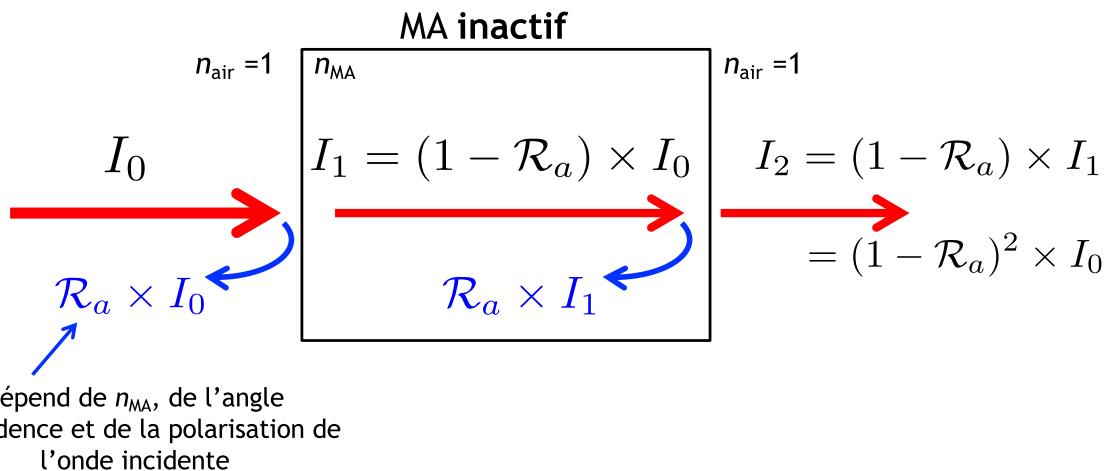
On considérera que les miroirs de cavité sont caractérisés uniquement par leurs coefficients de réflexion et transmission avec $\mathcal{R} = 1 - T$

3. PERTES DE LUMIÈRE DANS UNE CAVITÉ OPTIQUE

QUESTION Quelle est l'origine physique des pertes de lumière dans une cavité ?

➤ Pertes au niveau des autres éléments de cavité

ex : barreau cristallin du MA, cellule de gaz amplificatrice, ...



- Pertes pour une traversée (en supposant des faces d'entrée et de sortie identiques) : $\sim 2\mathcal{R}_a \times I_0$

Ordre de grandeur : interface air-verre en incidence normale $\rightarrow 4\%$ de pertes pour chaque face

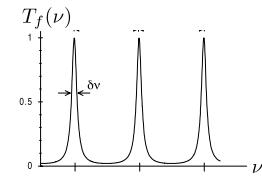
3. PERTES DE LUMIÈRE DANS UNE CAVITÉ OPTIQUE

👉 Quelle est l'origine physique des pertes de lumière dans une cavité ?

➤ Elément spectralement sélectif

Ex : réseau, filtre spectral (de type étalon Fabry-Perot)

➡ Facteur de transmission $T_f(\nu)$

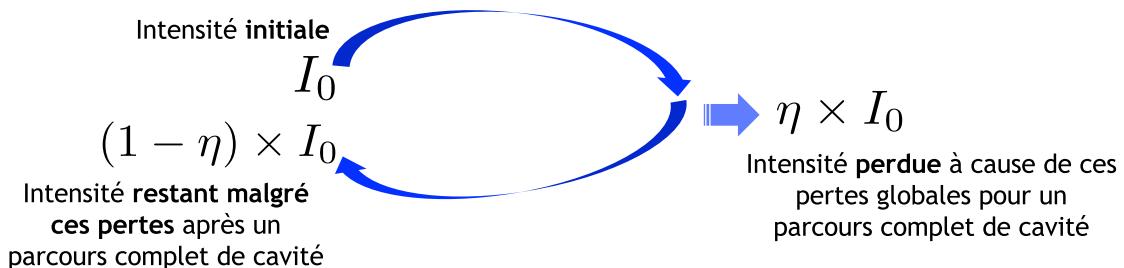


$$\text{Pertes} = 1 - T_f(\nu)$$

➤ Autres pertes de la cavité non localisées

Ex : diffusion sur des poussières, absorption dans l'air, ...

Pour comptabiliser ces pertes, on définit un **coefficent global de pertes relatives d'intensité pour un parcours complet de cavité**, η , tel que :



Remarque importante : Tous les coefficients considérés ($\mathcal{R}, T, \mathcal{R}_a T_f(\nu), \eta$) sont compris entre 0 et 1 et peuvent s'exprimer en %.

3. PERTES DE LUMIÈRE DANS UNE CAVITÉ OPTIQUE

👉 Caractérisation quantitative des pertes de lumière dans une cavité laser :

Pour toute cavité, on définit un **coefficent de pertes α_p** évalué, lorsque le MA est inactif, sur un parcours complet de cavité et rapporté par unité de longueur de milieu amplificateur.

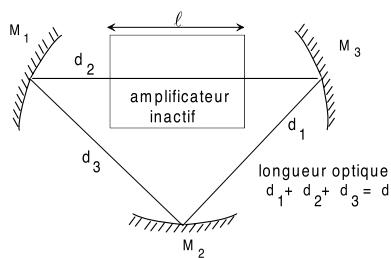


$$[\alpha_p] = m^{-1}$$



La définition de α_p dépend du type de cavité.

Cavités en anneau

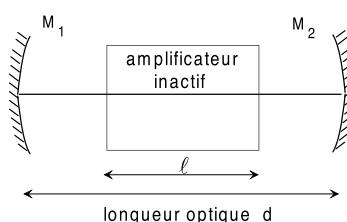


$$I(z, t + \frac{d}{c_0}) = I(z, t) \exp - (\alpha_p \ell)$$

Intensité restant en z après un tour de cavité

1 passage dans le MA

Cavités linéaires



$$I(z, t + \frac{2d}{c_0}) = I(z, t) \exp - (\alpha_p 2\ell)$$

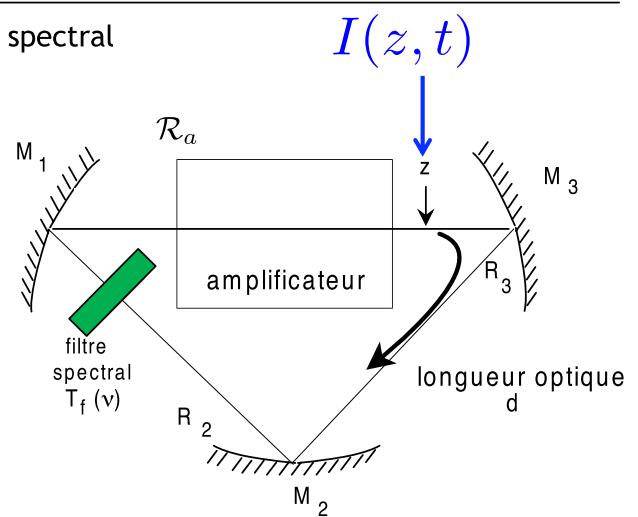
Intensité restant en z après un aller-retour de cavité

2 passages dans le MA

3. PERTES DE LUMIÈRE DANS UNE CAVITÉ OPTIQUE

Exemple : cavité en anneau à 3 miroirs avec filtre spectral

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{R}_a = 2 \cdot 10^{-3}; \eta = 2\% \\ \ell = 10 \text{ cm} \end{array} \right.$$



4. LASER FONCTIONNANT EN RÉGIME STATIONNAIRE (CAVITÉ EN ANNEAU)

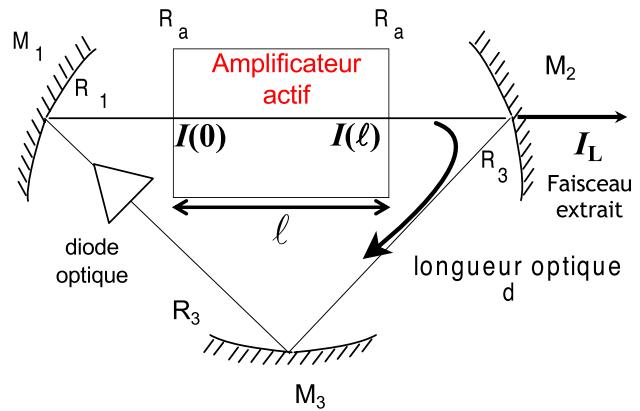
Fonctionnement en régime stationnaire = laser continu

1. Cas des amplificateurs placés dans une cavité en anneau

Ex : cavité en anneau à 3 miroirs

Caractéristiques du laser :

- **Pompage** uniforme associé à un coefficient d'amplification non saturée α^0
- **MA** de longueur ℓ possédant un gain G pour un tour de cavité
- **Cavité** de longueur optique d caractérisée par son coefficient de pertes α_p
- **Coupleur de sortie** : miroir M_2 avec un coefficient de transmission $= 1 - \mathcal{R}_2$



On précise l'intensité en 3 endroits :

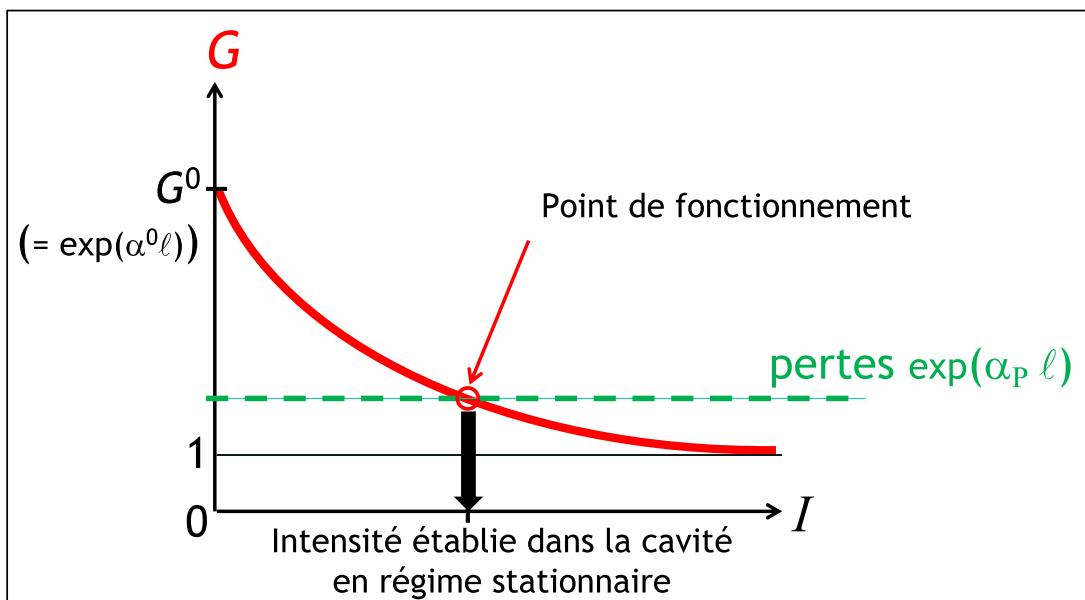
- $I(0)$ intensité juste après l'entrée du MA
- $I(\ell)$ intensité juste avant la sortie du MA
- I_L intensité extraite de la cavité

4. LASER FONCTIONNANT EN RÉGIME STATIONNAIRE (CAVITÉ EN ANNEAU)

- Fonctionnement en régime stationnaire :

$$I(d) = I(0) \times G \times \exp(-\alpha_P \ell) = I(0)$$

En régime stationnaire le gain total G du MA s'ajuste pour compenser les pertes de la cavité donc : $G = \exp(\alpha_P \ell)$



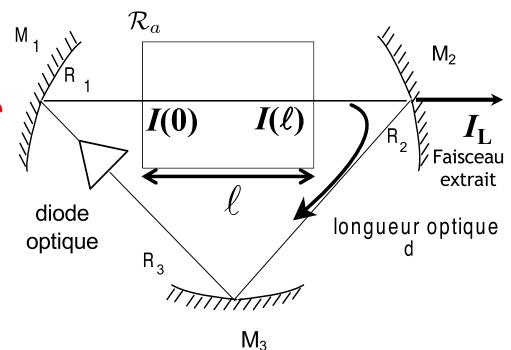
4. LASER FONCTIONNANT EN RÉGIME STATIONNAIRE (CAVITÉ EN ANNEAU)

Intensité laser extraite hors de la cavité :

Hypothèse : MA à **élargissement spectral homogène**

$I(0)$ obéit à l'équation :

$$\ln G + \frac{I(0)}{I_s} (G - 1) = \alpha^0 \ell$$



Or en régime stationnaire $G = \exp(\alpha_P \ell)$

D'où : $I(0) = I_s \times \frac{\alpha^0 \ell - \alpha_P \ell}{\exp(\alpha_P \ell) - 1}$ Pour que $I(0)$ soit défini, on retrouve la condition $\alpha^0 > \alpha_P$

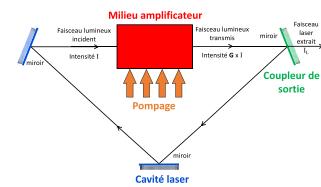
$$\text{Donc } I(\ell) = G \times I(0) = \exp(\alpha_P \ell) \times I_s \times \frac{\alpha^0 \ell - \alpha_P \ell}{\exp(\alpha_P \ell) - 1}$$

$$\begin{aligned} \text{et } I_L &= T_2(1 - \mathcal{R}_a)I(\ell) \quad (\text{intensité laser extraite par le miroir } M_2) \\ &= T_2(1 - \mathcal{R}_a) \times G \times I(0) \end{aligned}$$

4. LASER FONCTIONNANT EN RÉGIME STATIONNAIRE (CAVITÉ EN ANNEAU)

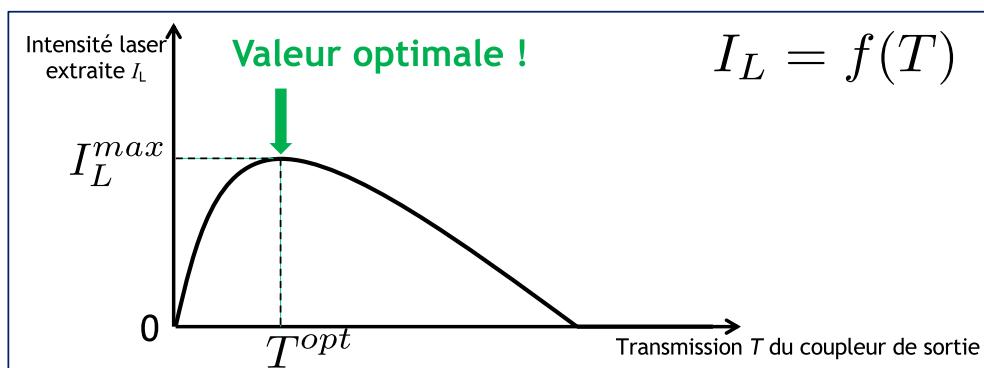
L'intensité laser extraite s'exprime en fonction des caractéristiques des 4 éléments constitutifs du laser :

$$I_L = T_2(1 - \mathcal{R}_a) \times \exp(\alpha_P \ell) \times I_s \times \frac{\alpha^0 \ell - \alpha_P \ell}{\exp(\alpha_P \ell) - 1}$$



Le coupleur de sortie intervient à la fois dans les pertes et dans l'efficacité d'extraction du faisceau hors de la cavité.

→ Optimisation du facteur de transmission du coupleur de sortie !



4. LASER FONCTIONNANT EN RÉGIME STATIONNAIRE (CAVITÉ EN ANNEAU)

👉 Cas particulier important du régime pertes faibles-gain faible :

Dans beaucoup de systèmes lasers on aura de **faibles pertes de cavité** ce qui se traduit par $\alpha_P \ell \ll 1$

➡ Conséquences pour le régime stationnaire :

- Le **gain** est lui-aussi **faible** puisqu'il est fixé par les pertes : $G = \exp(\alpha_P \ell) \simeq 1 + \alpha_P \ell \simeq 1^+$
- L'**intensité** $I(z)$ est **quasi-uniforme** dans tout le MA : $I(\ell) = G \times I(0) \simeq I(0)$
- Le **coefficient d'amplification** ne varie pas avec z : $\alpha(z) = \frac{1}{I(z)} \frac{dI}{dz} \sim \text{cste}$
 $\Rightarrow I(\ell) = I(0) \exp(\alpha \ell)$

G par définition
du gain

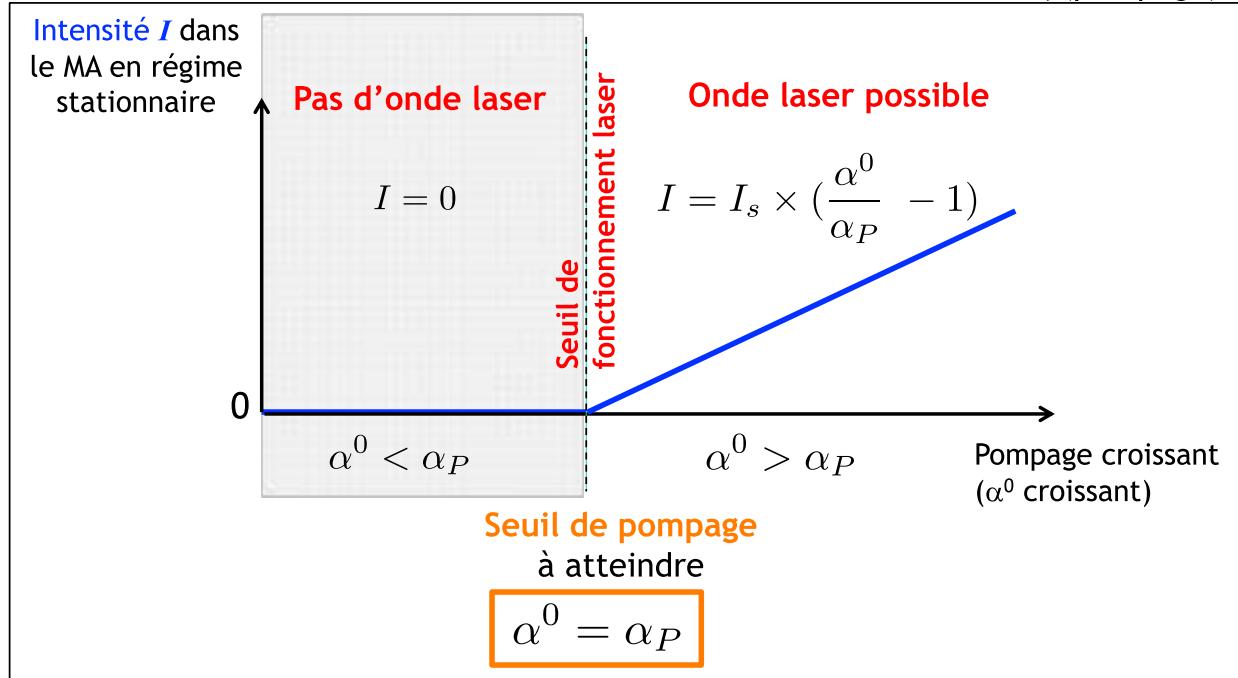
D'où $\alpha = \alpha_P$ ← fonctionnement pertes faibles-gain faible en régime stationnaire !

4. LASER FONCTIONNANT EN RÉGIME STATIONNAIRE (CAVITÉ EN ANNEAU)

Pompage et seuil de fonctionnement laser

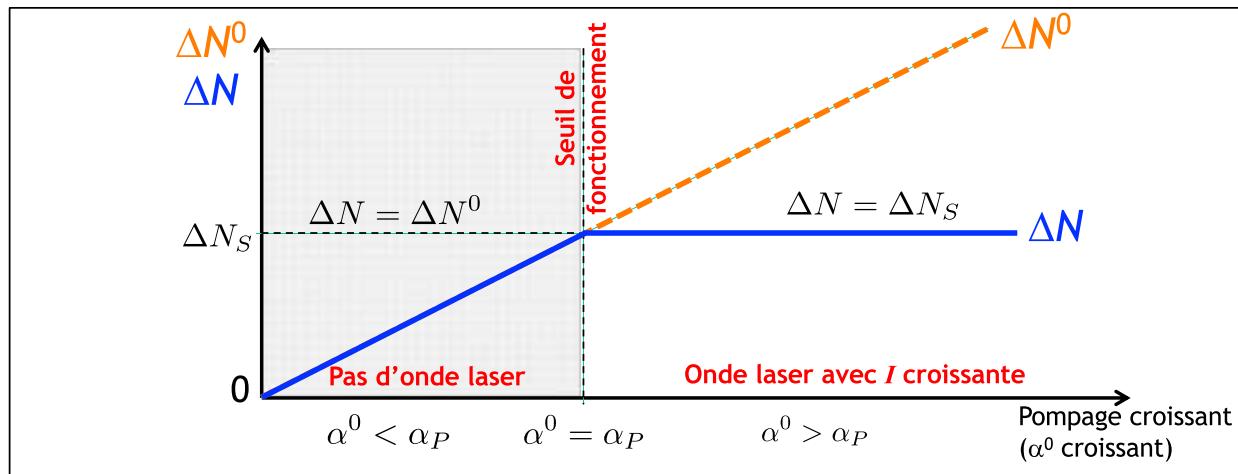
- Hypothèses : - faibles pertes de cavité $\alpha_P \ell \ll 1$
 - MA à élargissement spectral homogène dominant

Pour amorcer une onde laser, on doit avoir $\alpha^0 > \alpha_P$  rôle du pompage !
 $\alpha^0 = f(\text{pompage})$



4. LASER FONCTIONNANT EN RÉGIME STATIONNAIRE (CAVITÉ EN ANNEAU)

Evolution de la différence de population avec le pompage en régime stationnaire :



En-dessous du seuil de fonctionnement

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha^0 = \sigma \times \Delta N^0 \\ \Leftrightarrow \Delta N &= \Delta N^0 \end{aligned}$$

- La différence de population non saturée augmente jusqu'à ΔN_S .
- Le pompage sert à **augmenter la différence de population** dans le MA.



Au-dessus du seuil de fonctionnement

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_P = \sigma \Delta N_S \\ \Leftrightarrow \Delta N &= \Delta N_S = \frac{\alpha_P}{\sigma} \end{aligned}$$

Différence de population au seuil

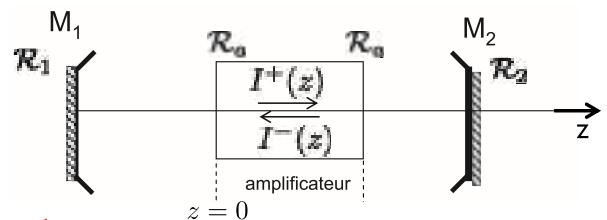
- La différence de population saturée reste constante et égale à ΔN_S .
- Le pompage sert à **augmenter l'intensité de l'onde laser**.



4. LASER FONCTIONNANT EN RÉGIME STATIONNAIRE (CAVITÉ LINÉAIRE)

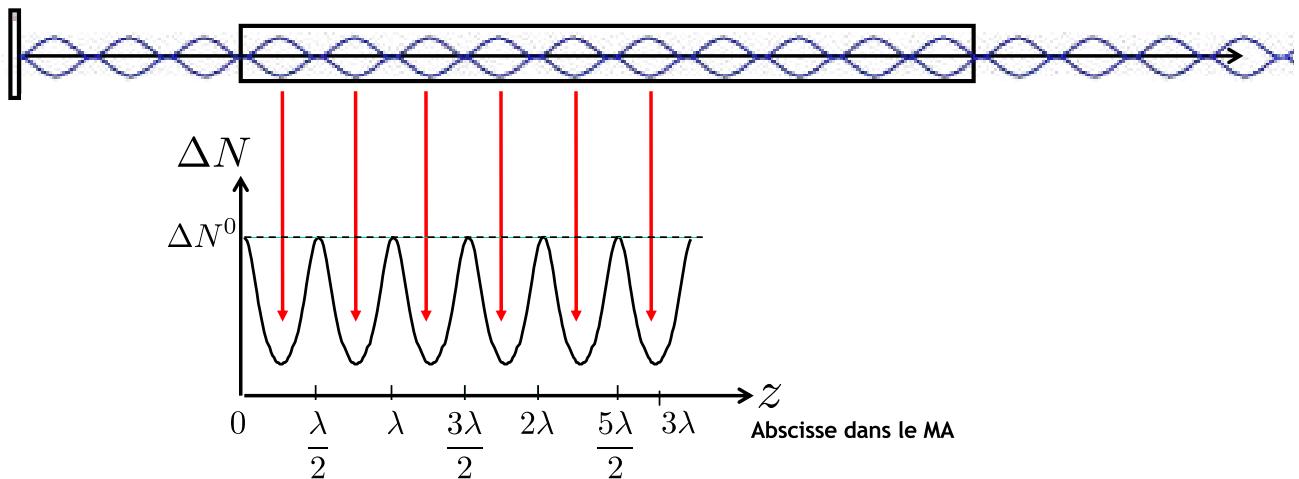
2. Cas des amplificateurs placés dans une cavité linéaire

Quelles différences a-t-on ?



- **2 ondes contra-propagatives cohérentes**

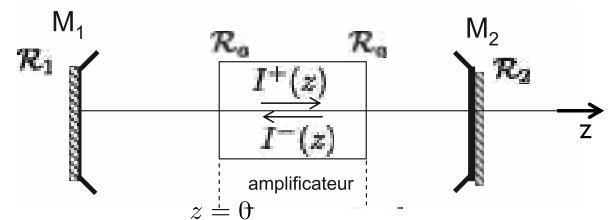
→ **Interférences** qui créent un réseau spatial de saturation dans le MA donc une modulation de l'inversion de population : « Hole burning spatial »



4. LASER FONCTIONNANT EN RÉGIME STATIONNAIRE (CAVITÉ LINÉAIRE)

2. Cas des amplificateurs placés dans une cavité linéaire

Quelles différences a-t-on ?



- 2 passages dans le MA pour 1 aller-retour

$$\rightarrow \text{gain aller et gain retour} \quad \left\{ \begin{array}{l} G^+ = \frac{I^+(\ell)}{I^+(0)} \\ G^- = \frac{I^-(0)}{I^-(\ell)} \end{array} \right. \quad \text{avec } G^+ = G^- = G$$

Gain pour UN passage dans le MA

→ bilan d'énergie pour un aller-retour en régime stationnaire

$$I(2d) = I(0) \times G^+ \times G^- \times \exp(-\alpha_P 2\ell) \\ = I(0) \times G^2 \times \exp(-\alpha_P 2\ell) = I(0) \text{ en régime stationnaire}$$

 $G^2 = \exp(\alpha_P 2\ell)$

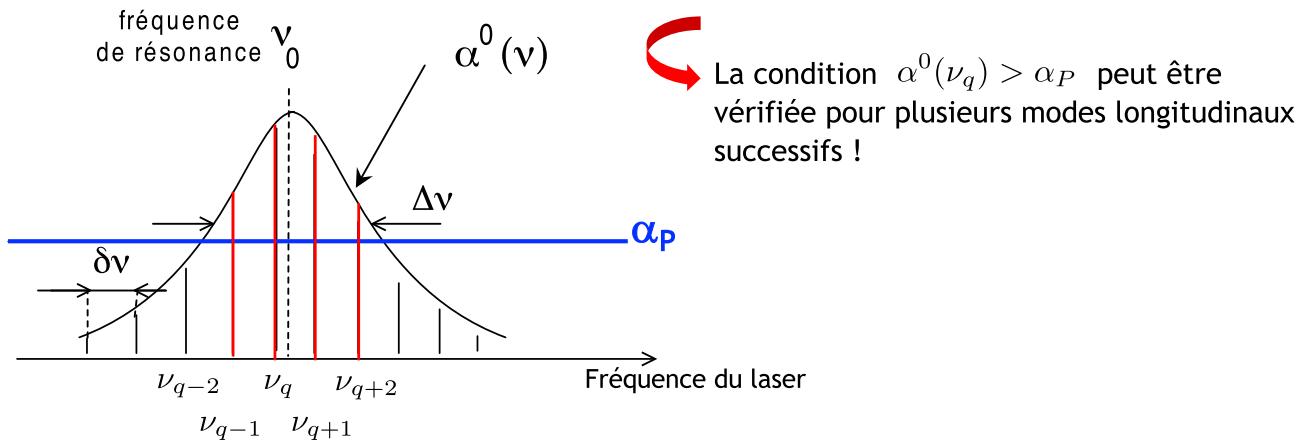
$\Leftrightarrow G = \exp(\alpha_P \ell)$

Le gain pour une traversée du MA compensate les pertes de la cavité pour 1 aller

5. FONCTIONNEMENT CONTINU MONOMODE OU MULTIMODE SPECTRAL

Rappels (chapitres 3 et 4):

- Les seules ondes lasers qui peuvent d'établir de manière stable correspondent aux **modes longitudinaux de la cavité** (fréquences ν_q).
- Selon la largeur $\Delta\nu$ du profil spectral (donc de la courbe $\alpha^0(\nu)$), on peut avoir un ou plusieurs modes longitudinaux (équidistants de $\delta\nu$) présents.

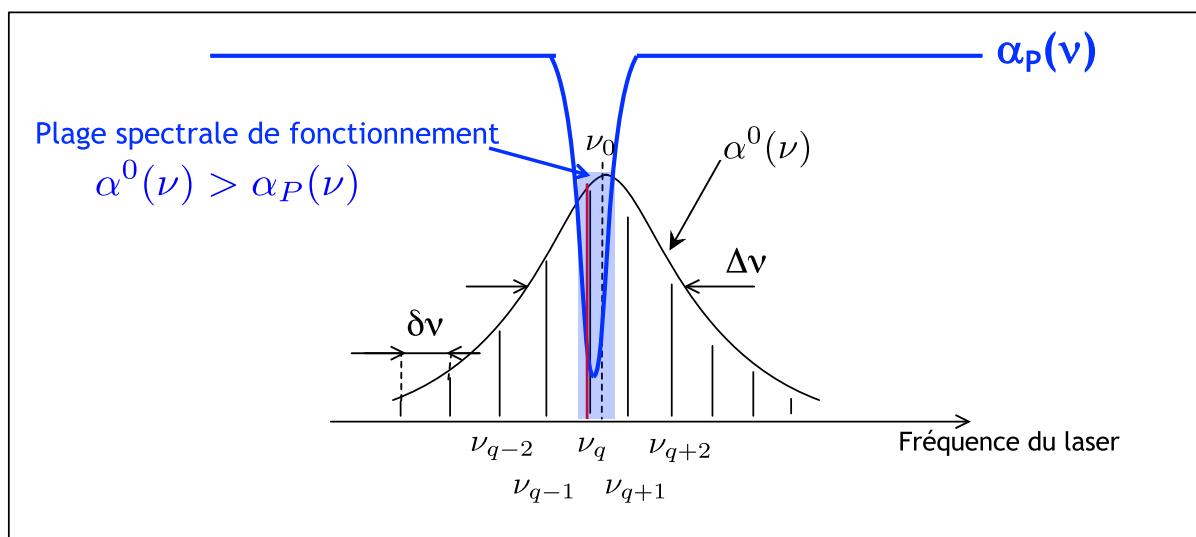


En régime stationnaire (pertes faibles), l'intensité de chaque onde s'ajuste pour avoir $\alpha(\nu_q) = \alpha_P$. Ces modes sont **non cohérents temporellement entre eux** : la valeur de leurs phases relatives fluctue au cours du temps.

5. FONCTIONNEMENT CONTINU MONOMODE OU MULTIMODE SPECTRAL

👉 Comment rendre un laser monomode spectral en régime stationnaire ?

➡ Pertes sélectives en fréquence : $\alpha_P(\nu)$



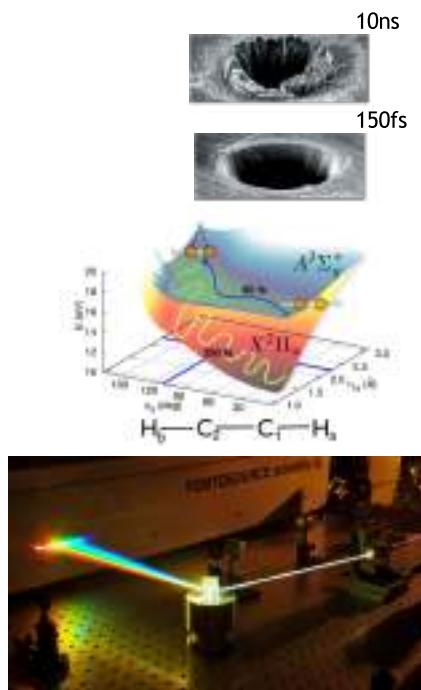
- Insertion dans la cavité d'un filtre sélectif en fréquence $T_f(\nu)$, d'un réseau, ...
- Ajustement de la position du creux de la courbe de pertes (cf TP laser à colorant)
- Ajustement de la position du mode ν_q le plus proche de la fréquence de résonance ν_0

6. LASER FONCTIONNANT EN RÉGIME IMPULSIONNEL

Jusqu'à présent on a étudié le fonctionnement des lasers continus (régime stationnaire), mais un grand nombre de lasers délivre **des impulsions**.

Intérêts

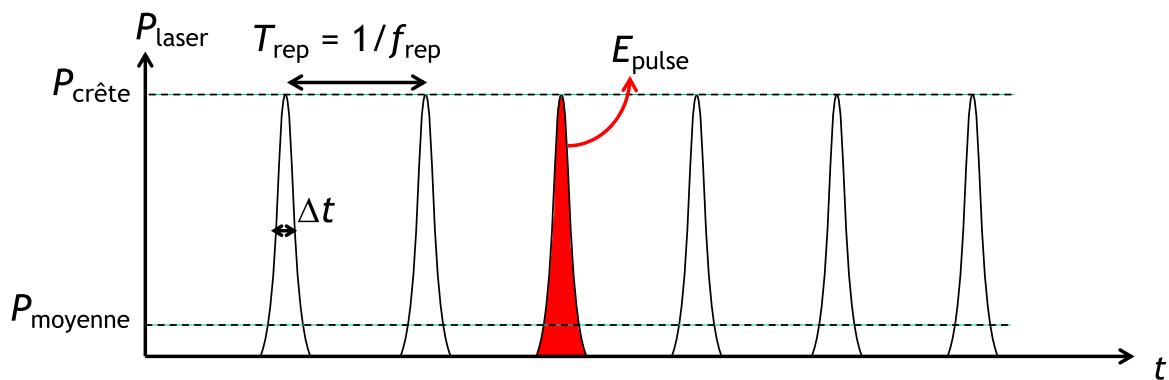
- Dépôt rapide d'énergie dans un système
- Synchronisation précise de différents processus
- Etude de phénomènes ultra-rapides (dynamique de dissociation de molécules, transfert de charge,...)
- Physique des hautes intensités
- Générations d'effets non-linéaires en optique



6. LASER FONCTIONNANT EN RÉGIME IMPULSIONNEL

Quelques caractéristiques des lasers impulsifs

- durée d'impulsion Δt : de 10^{-6} à 10^{-15} s (record actuel 43 attosecondes dans les RX mous)
- fréquence de répétition f_{rep} (cadence) : du Hz au GHz
- énergie par impulsion E_{pulse}



$$\text{- Puissance laser moyenne : } P_{moyenne} = E_{pulse} \times f_{rep} = \frac{E_{pulse}}{T_{rep}}$$

$$\text{- Puissance laser crête : } P_{crête} = \frac{E_{pulse}}{\Delta t} = P_{moyenne} \times \frac{T_{rep}}{\Delta t} \gg P_{moyenne}$$

Puissances crêtes importantes !

Exemple : TP Laser à colorant

$$f_{rep} = 15 \text{ Hz}; \Delta t = 4 \text{ ns}; E_{pulse} = 1 \text{ mJ} \rightarrow P_{moyenne} = ; P_{crête} =$$

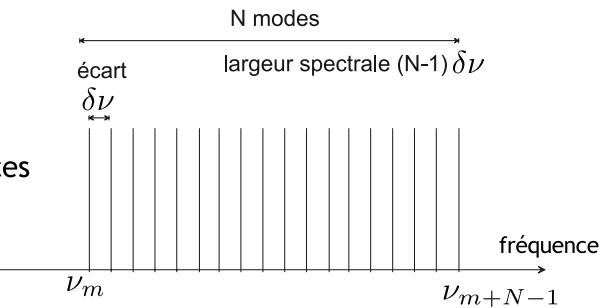
6. LASER FONCTIONNANT EN RÉGIME IMPULSIONNEL

Laser à verrouillage de modes (mode locking)

Mode de fonctionnement pour des impulsions avec $\Delta t < 100 \text{ ps}$

Situation de départ :

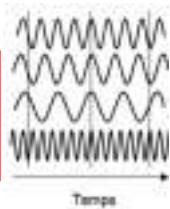
Laser fonctionnant en continu sur un très grand nombre N de modes séparés de $\delta\nu$ et de fréquences notées $\nu_{m+p} = \nu_m + p \cdot \delta\nu$



Champ électrique résultant au niveau du coupleur de sortie :

$$\mathcal{E}(t) = \sum_{p=0}^{N-1} \frac{E_p \exp i(2\pi\nu_{m+p} t + \varphi_p) + C.C.}{2}$$

Fonctionnement en modes bloqués :
On fixe $\varphi_p = 0$ pour tous les modes à un instant donné !



$$= E_0 \times \frac{\exp(2i\pi\nu_m t) \sum_{p=0}^{N-1} \exp(2i\pi p \delta\nu t) + C.C.}{2}$$

(Si on suppose la même amplitude $E_p = E_0$ réel)

6. LASER FONCTIONNANT EN RÉGIME IMPULSIONNEL

Laser à verrouillage de modes (mode locking)

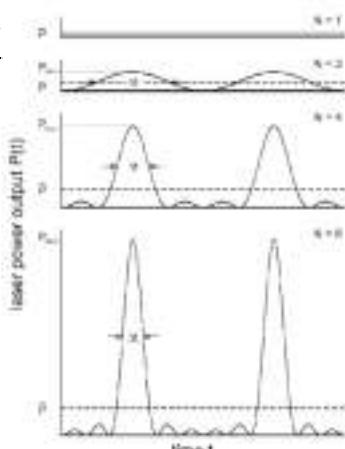
ν_0 (valeur moyenne de la fréquence du rayonnement)

$$\mathcal{E}(t) = \frac{E_0 \exp \left(2i\pi \left(\nu_m + \frac{N-1}{2} \delta\nu \right) t \right) \frac{\sin(\pi N \delta\nu t)}{\sin(\pi \delta\nu t)} + C.C.}{2}$$

$$= E_0 \frac{\sin(\pi N \delta\nu t)}{\sin(\pi \delta\nu t)} \cos 2\pi\nu_0 t$$

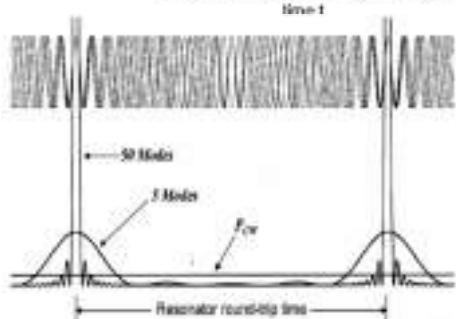
D'où l'intensité instantanée

$$I(t) = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \left(\frac{\sin(\pi N \delta\nu t)}{\sin(\pi \delta\nu t)} \right)^2 \quad \text{avec} \quad I_0 = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}$$



Caractéristiques du rayonnement pulsé obtenu :

- Intensité maximale : $N^2 I_0$
- Écart temporel entre deux impulsions : $\frac{1}{\delta\nu}$
- Largeur temporelle d'une impulsion : $\frac{1}{N\delta\nu}$



6. LASER FONCTIONNANT EN RÉGIME IMPULSIONNEL

Laser à verrouillage de modes (mode locking)

$$\mathcal{E}(t) = \frac{E_0 \exp \left(2i\pi \left(\nu_m + \frac{N-1}{2} \delta\nu \right) t \right) \frac{\sin(\pi N \delta\nu t)}{\sin(\pi \delta\nu t)} + C.C.}{2}$$

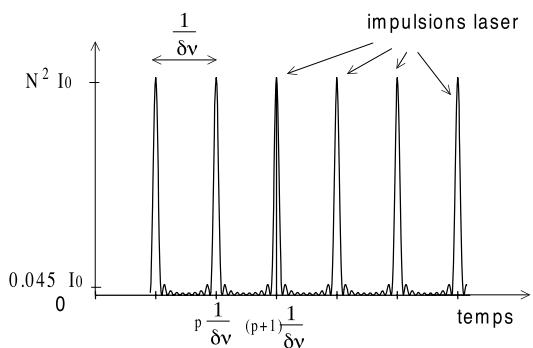
$$= E_0 \frac{\sin(\pi N \delta\nu t)}{\sin(\pi \delta\nu t)} \cos 2\pi\nu_0 t$$

D'où l'intensité instantanée

$$I(t) = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \left(\frac{\sin(\pi N \delta\nu t)}{\sin(\pi \delta\nu t)} \right)^2 \quad \text{avec } I_0 = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}$$

Caractéristiques du rayonnement pulsé obtenu :

- Intensité maximale : $N^2 I_0$
- Écart temporel entre deux impulsions : $\frac{1}{\delta\nu}$
- Largeur temporelle d'une impulsion : $\frac{1}{N\delta\nu}$



Pour résumer pour générer une impulsion courte en modes bloqués il faut un MA avec une très large bande d'amplification (Titane-Saphir, colorant, erbium, ...) !

6. LASER FONCTIONNANT EN RÉGIME IMPULSIONNEL

Comment réaliser le verrouillage de modes en phase ?

Il existe plusieurs méthodes :

- **Blocage de modes actif** : modulation d'amplitude ou modulation de fréquence des pertes de la cavité.

- **Blocage de modes passif** :

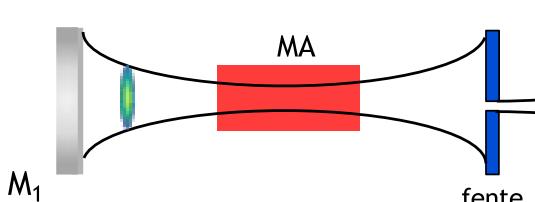
La mise en phase se fait à un moment donné (introduction d'une perturbation sur la cavité = choc). Puis on favorise le fonctionnement impulsionnel/fonctionnement continu en s'arrangeant pour que $\alpha_p(\text{continu}) > \alpha_p(\text{pulsé})$

Exemple : utilisation de l'effet Kerr optique (lentille Kerr)

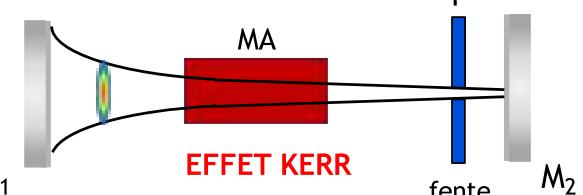
Indice du MA : $n(I) \sim n_0 + n_2 \times I$

Effet d'**autofocalisation** dans le MA si I est fort (ce qui est le cas quand on a tous les modes en phase et qu'on génère l'impulsion d'intensité instantanée $N^2 I_0$)

I faible → fortes pertes (géométriques)



I fort → autofocalisation dans le MA donc faibles pertes



6. LASER FONCTIONNANT EN RÉGIME IMPULSIONNEL

Laser en régime transitoire : équations couplées de Statz et DeMars

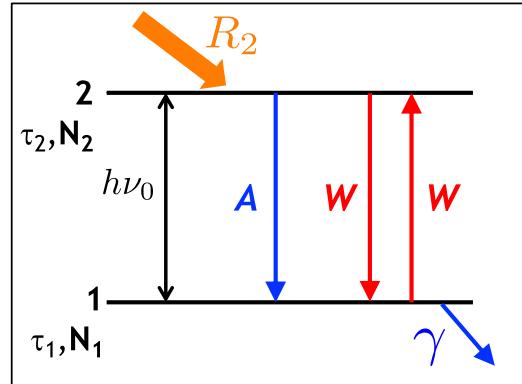
Ces équations non-linéaires décrivent l'évolution couplée en régime transitoire de la différence de population saturée $\Delta N(t)$ et de l'intensité lumineuse $I(t)$.

Hypothèses associées : - **faibles pertes** de cavité
- MA à **élargissement spectral homogène** dominant

► Evolution de la différence de population en régime transitoire

Etablissement de cette équation sur l'exemple d'un système ouvert à 2 niveaux non dégénérés :

$$\begin{aligned}\frac{dN_2}{dt} &= R_2 - (A + W) N_2 + W N_1 \\&= R_2 - A N_2 - W \Delta N \\&= R_2 - \frac{N_2}{\tau_2} - W \Delta N \\ \frac{dN_1}{dt} &= (A + W) N_2 - (\gamma + W) N_1 \\&= \frac{N_2}{\tau_2} + W \Delta N - \gamma N_1\end{aligned}$$



Si à tout instant $\gamma \gg W, A$ alors $N_1(t) \ll N_2(t) \Rightarrow \Delta N(t) \simeq N_2$

6. LASER FONCTIONNANT EN RÉGIME IMPULSIONNEL

Laser en régime transitoire : équations couplées de Statz et DeMars

$$\text{D'où } \frac{d\Delta N}{dt} = R_2 - \frac{\Delta N(t)}{\tau_2} - W \Delta N(t)$$

$$\text{Or en régime stationnaire } \Delta N = \frac{R_2 \tau_2}{1 + W \tau_2} = \frac{\Delta N^0}{1 + \frac{I}{I_s}}$$

$$\text{D'où par identification : } \left\{ \begin{array}{l} \Delta N^0 = R_2 \tau_2 \text{ différence de population non saturée (régime st.)} \\ W = \frac{I(t)}{\tau_2 I_s} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta N}{dt} &= \frac{\Delta N^0}{\tau_2} - \frac{\Delta N(t)}{\tau_2} - \frac{I(t)}{\tau_2 I_s} \Delta N(t) \\&= \frac{1}{\tau_2} \left(\Delta N^0 - \Delta N(t) - \frac{I(t)}{I_s} \Delta N(t) \right)\end{aligned}$$



Cette équation différentielle peut se généraliser aux systèmes à 3 et 4 niveaux en remplaçant τ_2 par τ le temps caractéristique apparaissant dans l'expression de I_s , et qu'on appelle **temps de récupération du système** :

$$\frac{d\Delta N}{dt} = \frac{1}{\tau} \left(\Delta N^0 - \Delta N(t) - \frac{I(t)}{I_s} \Delta N(t) \right)$$

1^{ère} équation de Statz et DeMars

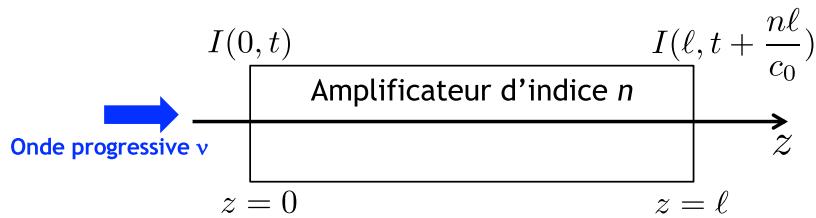
$$\text{avec } I_s = \frac{h\nu_0}{\sigma\tau}$$

6. LASER FONCTIONNANT EN RÉGIME IMPULSIONNEL

Laser en régime transitoire : équations couplées de Statz et DeMars

► Evolution de l'intensité lumineuse en régime transitoire

Etablissement de cette équation sur l'exemple d'un amplificateur d'indice optique n et d'une cavité en anneau avec un coefficient de pertes α_P tel que $\alpha_P \ell \ll 1$



- Gain (régime non-stationnaire) : $G(t) = \frac{I(\ell, t + \frac{n\ell}{c_0})}{I(0, t)}$

- Bilan d'énergie pour la traversée du MA (cf chapitre 4) :

$$\frac{1}{I(z, t)} \left(\frac{n}{c_0} \frac{\partial I(z, t)}{\partial t} + \frac{\partial I(z, t)}{\partial z} \right) = \alpha(z, t) = \sigma \Delta N(z, t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial I}{\partial t}(z, t) = \frac{c_0}{n} \sigma \Delta N(z, t) I(z, t) - \frac{c_0}{n} \frac{\partial I}{\partial z}(z, t)$$

6. LASER FONCTIONNANT EN RÉGIME IMPULSIONNEL

Laser en régime transitoire : équations couplées de Statz et DeMars

Pour des pertes faibles (et donc un gain faible), au premier ordre on a

$$\begin{aligned} I(\ell, t + \frac{n\ell}{c_0}) &= I(0, t) + \frac{\partial I}{\partial t} \times (\frac{n\ell}{c_0}) + \frac{\partial I}{\partial z} \times \ell \\ &= I(0, t) + \left(\frac{c_0}{n} \sigma \Delta N I(0, t) - \frac{c_0}{n} \frac{\partial I}{\partial z}(0, t) \right) \frac{n\ell}{c_0} + \frac{\partial I}{\partial z} \times \ell \\ &= I(0, t) + \sigma \Delta N I(0, t) \ell \\ &= I(0, t)(1 + \sigma \Delta N \ell) \end{aligned}$$

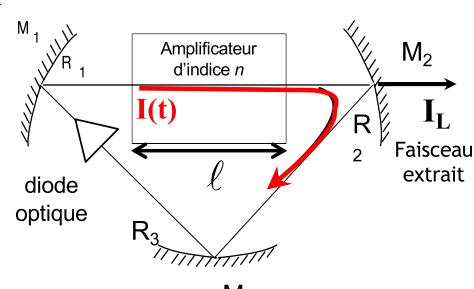
D'où $G(t) = 1 + \sigma \Delta N \ell$ avec $\sigma \Delta N \ell \ll 1$

- Bilan d'énergie pour un tour complet de cavité partant de $z = 0$:

$$\begin{aligned} I(t + \frac{d}{c_0}) &= I(t) \times G(t) \times \exp(-\alpha_P \ell) \\ &= I(t) \times (1 + \sigma \Delta N \ell) \times (1 - \alpha_P \ell) \\ &\simeq I(t) \times (1 + \sigma \Delta N \ell - \alpha_P \ell) \end{aligned}$$

D'où $I(t + \frac{d}{c_0}) - I(t) = I(t) (\sigma \Delta N \ell - \alpha_P \ell)$

$$\underbrace{\frac{dI}{dt}}_{\frac{dI}{dt} \times \frac{d}{c_0}}$$



6. LASER FONCTIONNANT EN RÉGIME IMPULSIONNEL

Laser en régime transitoire : équations couplées de Statz et DeMars

$$\text{D'où} \quad \frac{dI}{dt} = \frac{c_0}{d} I(t) \times (\sigma \Delta N \ell - \alpha_P \ell)$$

$$= I(t) \times \underbrace{\frac{c_0 \alpha_P \ell}{d}}_{\tau_c} \times \left(\underbrace{\frac{\Delta N}{\alpha_P / \sigma}}_{\Delta N_S} - 1 \right)$$

Durée de vie des photons dans la cavité Différence de population au seuil laser

$$\frac{dI}{dt} = \frac{I(t)}{\tau_c} \left(\frac{\Delta N(t)}{\Delta N_S} - 1 \right)$$

2^{ème} équation de Statz et DeMars

avec $\begin{cases} \tau_c = \frac{d}{c_0 \alpha_P \ell} \\ \Delta N_S = \frac{\alpha_P}{\sigma} \end{cases}$



Cette équation différentielle peut se généraliser aux cavités linéaires en remplaçant I par la densité volumique d'énergie u .

6. LASER FONCTIONNANT EN RÉGIME IMPULSIONNEL

Laser en régime transitoire : équations couplées de Statz et DeMars

Pour résumer

$$\begin{cases} \frac{d\Delta N}{dt} = \frac{1}{\tau} \left(\Delta N^0 - \Delta N(t) - \frac{I(t)}{I_s} \Delta N(t) \right) \\ \frac{dI}{dt} = \frac{1}{\tau_c} \left(\frac{\Delta N(t)}{\Delta N_S} I(t) - I(t) \right) \end{cases}$$

Ces équations non-linéaires modélisent la **dynamique de transformation de l'énergie** stockée initialement sous forme de différence de population dans l'amplificateur en énergie lumineuse libérée dans la cavité.

Remarque

Chaque équation fait intervenir un temps caractéristique :

- τ durée de récupération de l'amplificateur (typiquement entre 1 μs et 1 ms)
- τ_c durée de vie des photons dans la cavité (typiquement entre 1 et 100 ns)

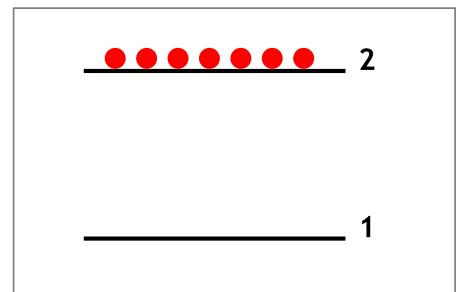
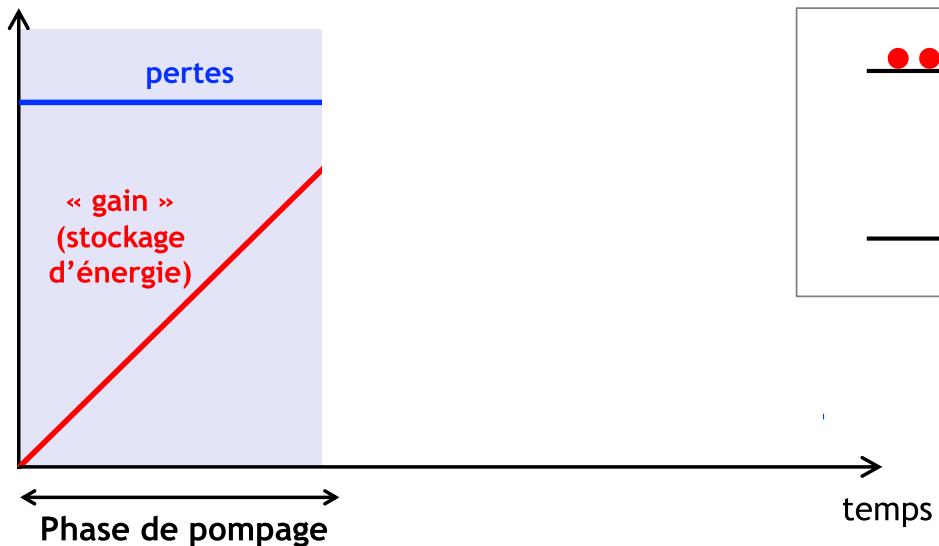
6. LASER FONCTIONNANT EN RÉGIME IMPULSIONNEL

👉 Laser en fonctionnement déclenché (Q-switching)

➡ Mode de fonctionnement pour des impulsions avec $\Delta t \sim 1 - 100 \text{ ns}$

Principe :

- 1) On maintient volontairement de **fortes pertes dans la cavité** pendant la phase de pompage afin **d'accumuler de l'énergie dans l'amplificateur** (différence de population élevée) sans atteindre le seuil d'oscillation laser.



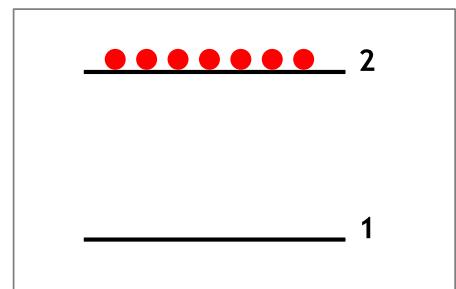
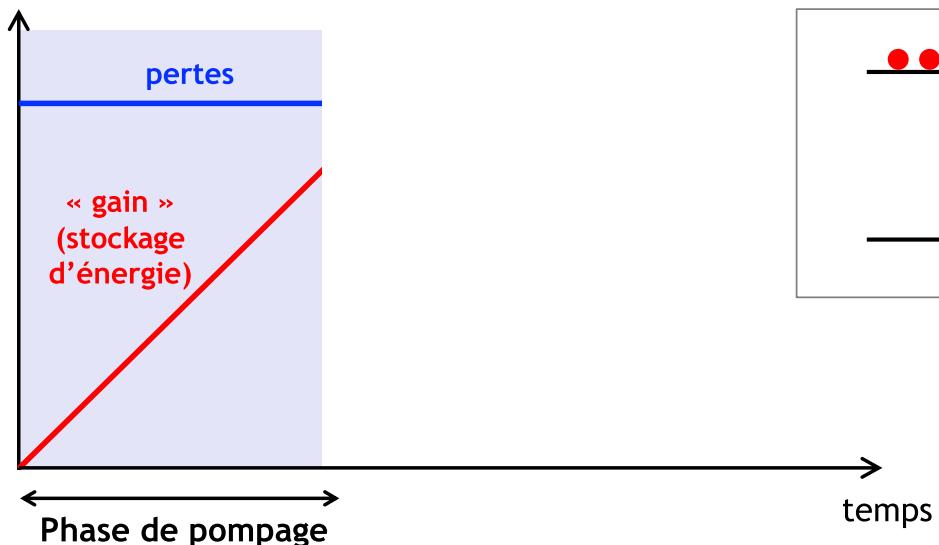
6. LASER FONCTIONNANT EN RÉGIME IMPULSIONNEL

👉 Laser en fonctionnement déclenché (Q-switching)

➡ Mode de fonctionnement pour des impulsions avec $\Delta t \sim 1 - 100 \text{ ns}$

Principe :

- 2) Puis on **réduit brusquement les pertes** pour avoir un transfert rapide et important d'énergie de l'amplificateur vers l'onde sous forme d'une impulsion lumineuse intense et concentrée dans le temps.



6. LASER FONCTIONNANT EN RÉGIME IMPULSIONNEL



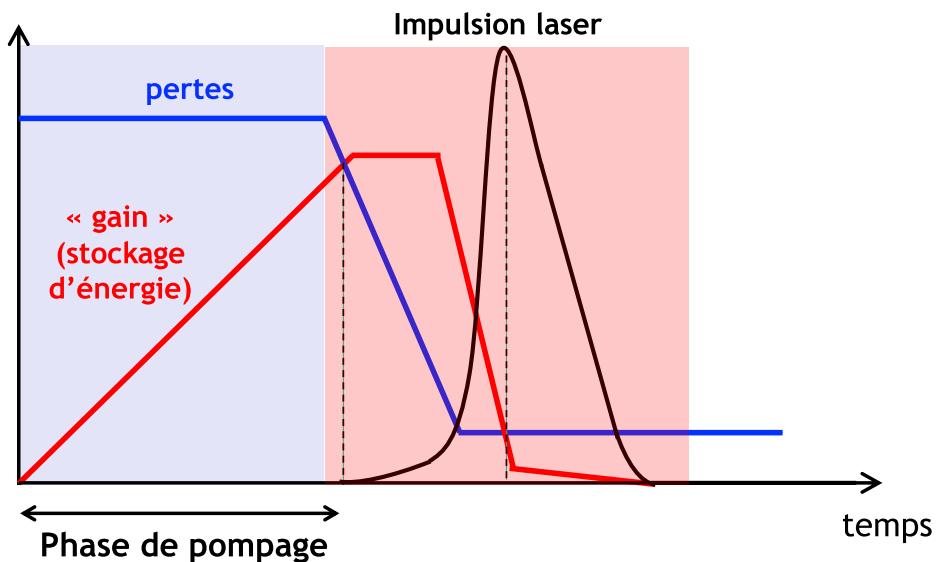
Laser en fonctionnement déclenché (Q-switching)



Mode de fonctionnement pour des impulsions avec $\Delta t \sim 1 - 100 \text{ ns}$

Principe :

- 3) Le processus est répété pour générer l'impulsion suivante (pompage pulsé).



6. LASER FONCTIONNANT EN RÉGIME IMPULSIONNEL



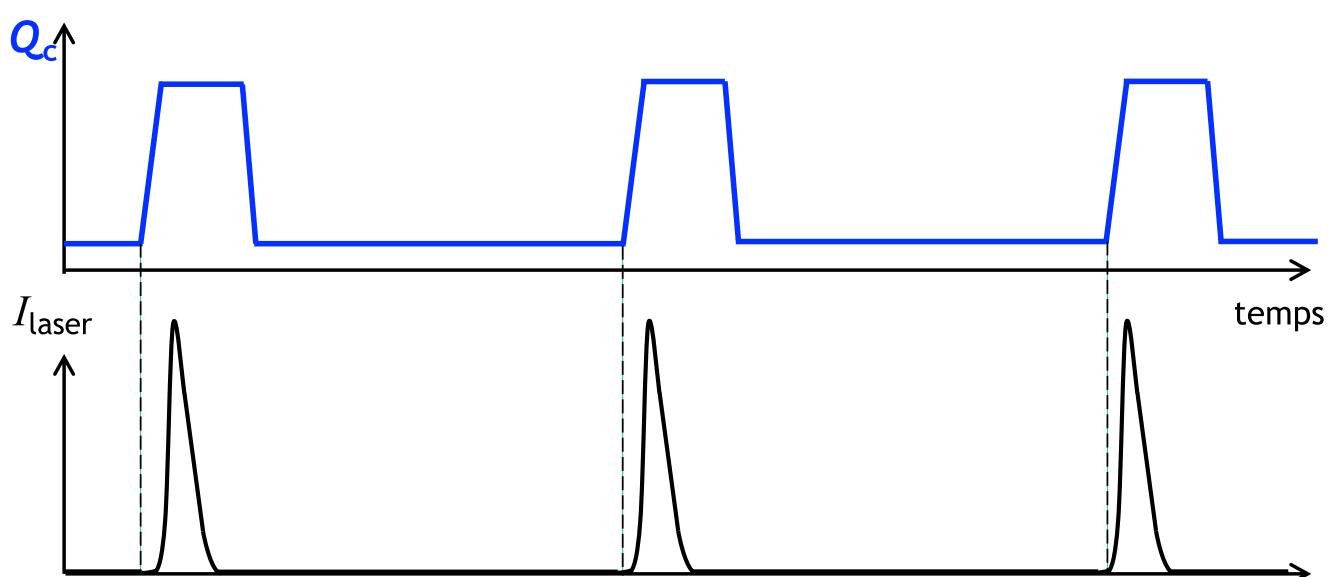
Laser en fonctionnement déclenché (Q-switching)

D'où vient le terme Q-switch ?

$Q_c = \text{facteur de qualité de la cavité}$
(analogie avec un oscillateur électronique, mécanique, optique...)

$$Q_c = \omega \times \tau_c = 2\pi\nu \times \tau_c$$

→ $\begin{cases} \text{Fortes pertes : } Q_c \text{ faible, } \tau_c \text{ faible} \\ \text{Faibles pertes : } Q_c \text{ élevé, } \tau_c \text{ élevé} \end{cases}$



6. LASER FONCTIONNANT EN RÉGIME IMPULSIONNEL

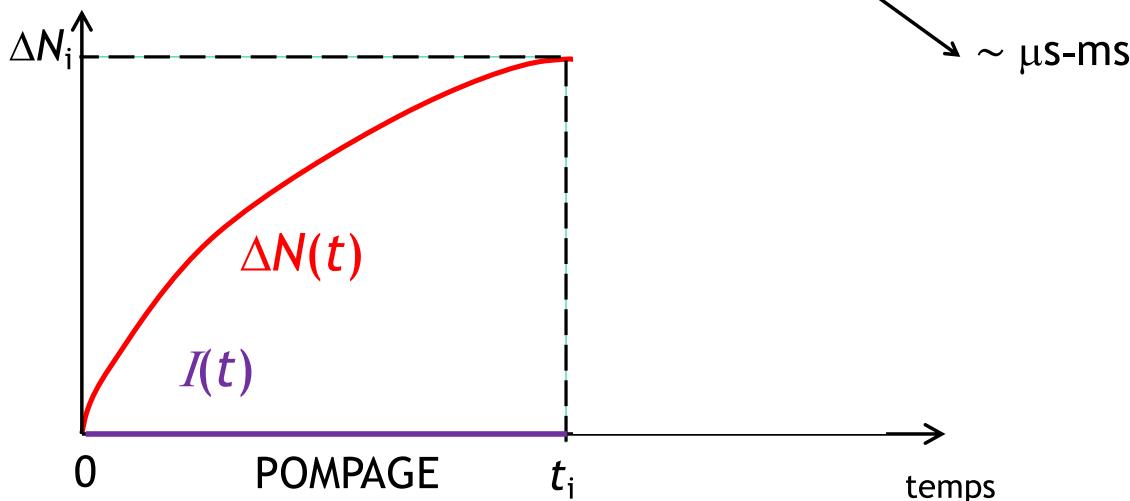
- Description des différentes phases du Q-switch avec les éq. de Statz et DeMars :

$$\frac{dI}{dt} = \frac{I(t)}{\tau_c} \left(\frac{\Delta N(t)}{\Delta N_S} - 1 \right) \quad \frac{d\Delta N}{dt} = \frac{1}{\tau} \left(\Delta N^0 - \Delta N(t) - \frac{I(t)}{I_s} \Delta N(t) \right)$$

Phase 1 : pompage ($t = 0$ à $t = t_i$)

$$\begin{cases} \text{pertes fortes} \\ I = 0 \\ \text{à } t = 0, \Delta N = 0 \\ \text{À } t = t_i, \Delta N = 0,95 \cdot \Delta N^0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta N}{dt} &= \frac{1}{\tau} (\Delta N^0 - \Delta N(t)) \\ \Rightarrow \Delta N(t) &= \Delta N^0 [1 - \exp(-t/\tau)] \\ t_i &= -\tau \times \ln(0,05) \end{aligned}$$



$\sim \mu\text{s-ms}$

6. LASER FONCTIONNANT EN RÉGIME IMPULSIONNEL

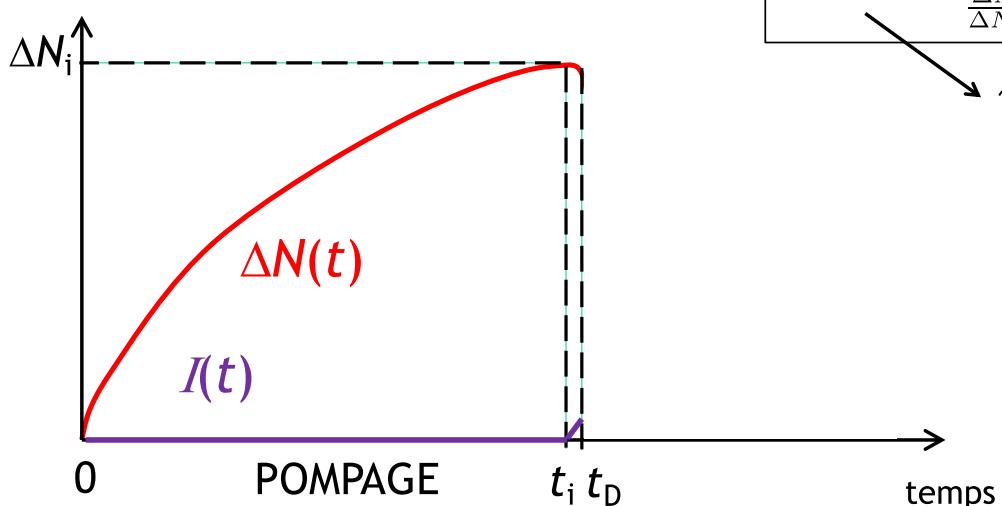
- Description des différentes phases du Q-switch avec les éq. de Statz et DeMars :

$$\frac{dI}{dt} = \frac{I(t)}{\tau_c} \left(\frac{\Delta N(t)}{\Delta N_S} - 1 \right) \quad \frac{d\Delta N}{dt} = \frac{1}{\tau} \left(\Delta N^0 - \Delta N(t) - \frac{I(t)}{I_s} \Delta N(t) \right)$$

Phase 2 : amorçage de l'impulsion ($t=t_i$ à $t=t_D$)

$$\begin{cases} \text{pertes faibles} \\ \text{à } t = t_i, I = I_i = 10^{-10} I_s \\ \text{à } t = t_D, I = I_s \\ \Delta N \simeq \Delta N_i \text{ (cst entre } t_i \text{ et } t_D) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \frac{I(t)}{\tau_c} \left(\frac{\Delta N_i}{\Delta N_S} - 1 \right) \\ \Rightarrow I(t - t_i) &= I_i \exp \left[\frac{t - t_i}{\tau_c} \left(\frac{\Delta N_i}{\Delta N_S} - 1 \right) \right] \\ t_D - t_i &= \frac{\tau_c}{\frac{\Delta N_i}{\Delta N_S} - 1} \ln \frac{I_s}{I_i} \end{aligned}$$



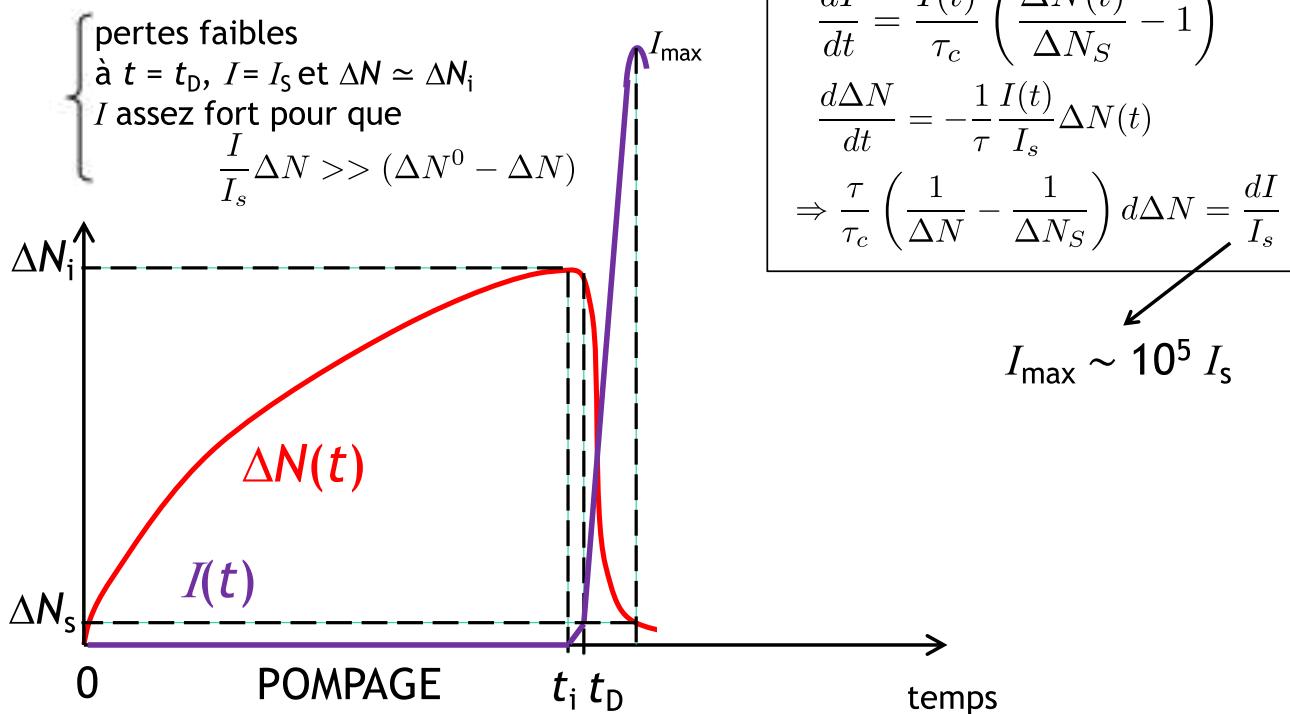
$\sim \text{ns} \ll t_i$

6. LASER FONCTIONNANT EN RÉGIME IMPULSIONNEL

- Description des différentes phases du Q-switch avec les éq. de Statz et DeMars :

$$\frac{dI}{dt} = \frac{I(t)}{\tau_c} \left(\frac{\Delta N(t)}{\Delta N_S} - 1 \right) \quad \frac{d\Delta N}{dt} = \frac{1}{\tau} \left(\Delta N^0 - \Delta N(t) - \frac{I(t)}{I_s} \Delta N(t) \right)$$

Phase 3 : développement de l'impulsion

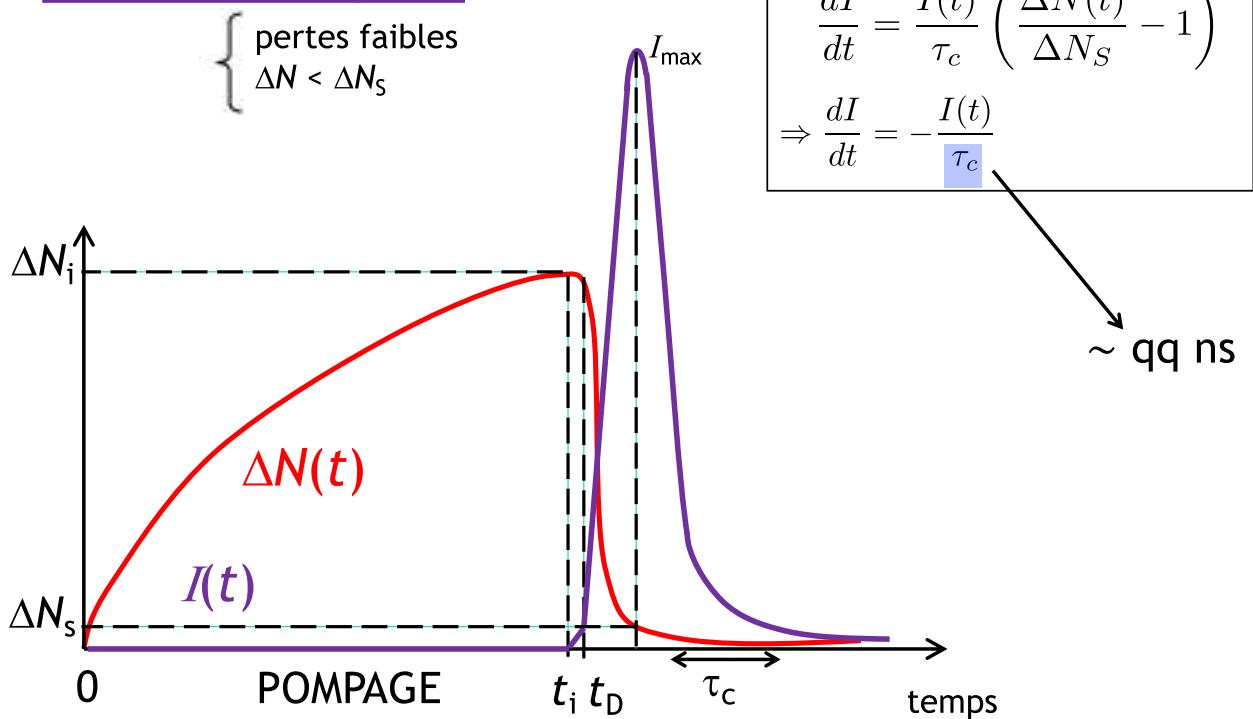


6. LASER FONCTIONNANT EN RÉGIME IMPULSIONNEL

- Description des différentes phases du Q-switch avec les éq. de Statz et DeMars :

$$\frac{dI}{dt} = \frac{I(t)}{\tau_c} \left(\frac{\Delta N(t)}{\Delta N_S} - 1 \right) \quad \frac{d\Delta N}{dt} = \frac{1}{\tau} \left(\Delta N^0 - \Delta N(t) - \frac{I(t)}{I_s} \Delta N(t) \right)$$

Phase 4 : fin de l'impulsion



6. LASER FONCTIONNANT EN RÉGIME IMPULSIONNEL

➤ Résumé des propriétés des impulsions obtenues par Q-switch :

- temps de la phase de pompage lié au temps de récupération τ du MA
- front de montée typiquement de quelques ns
- front de descente lié à la durée de vie des photons τ_c dans la cavité
- Intensité crête de l'impulsion = intensité en régime continu $\times 10^5$!

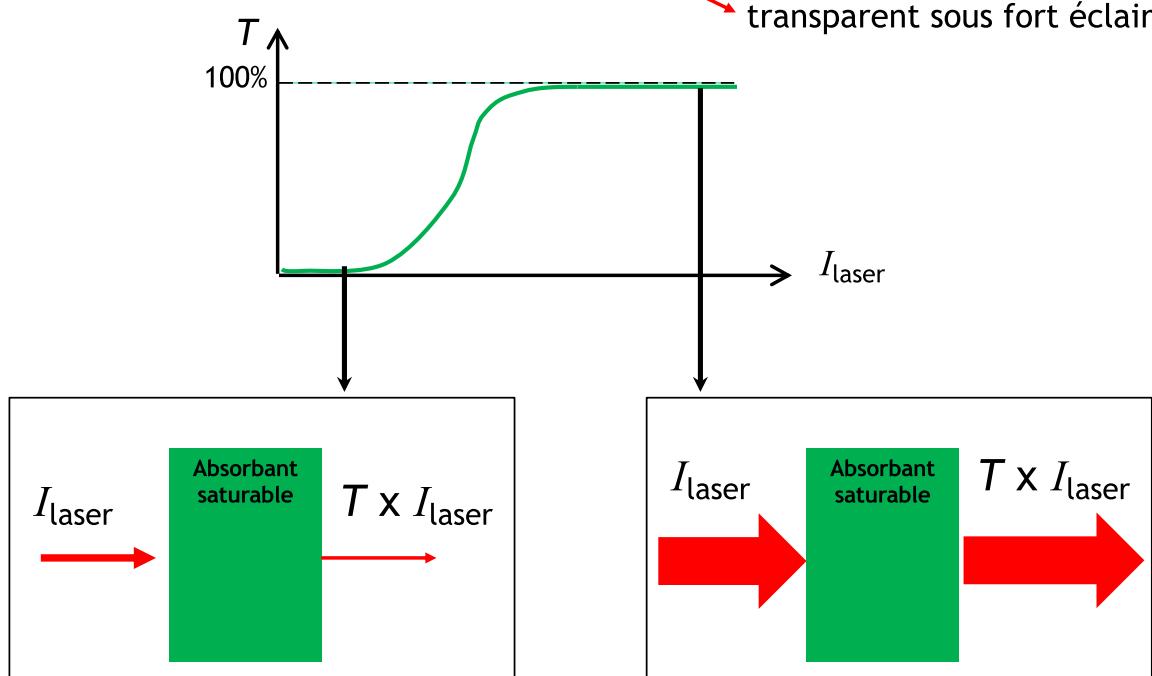
Exemple : laser YAG, durée d'impulsions entre 4 et 25 ns

6. LASER FONCTIONNANT EN RÉGIME IMPULSIONNEL

Comment réaliser le Q-switch ?

- **Q-switch passif** :

absorbant saturable = matériau non-linéaire
quasi-opaque sous faible éclairement
transparent sous fort éclairage

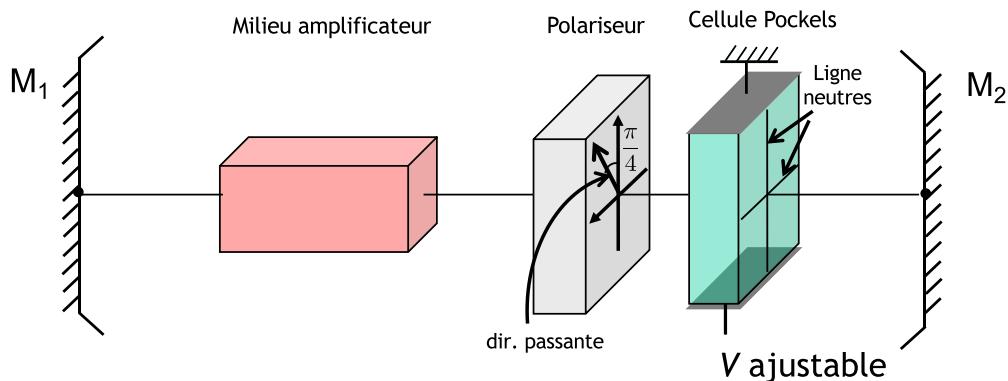


Il faut que $I_s(\text{absorbant}) \ll I_s(\text{MA})$ pour que les pertes de la cavité diminuent plus vite que le gain au cours de l'impulsion.

6. LASER FONCTIONNANT EN RÉGIME IMPULSIONNEL

- Q-switch actif :

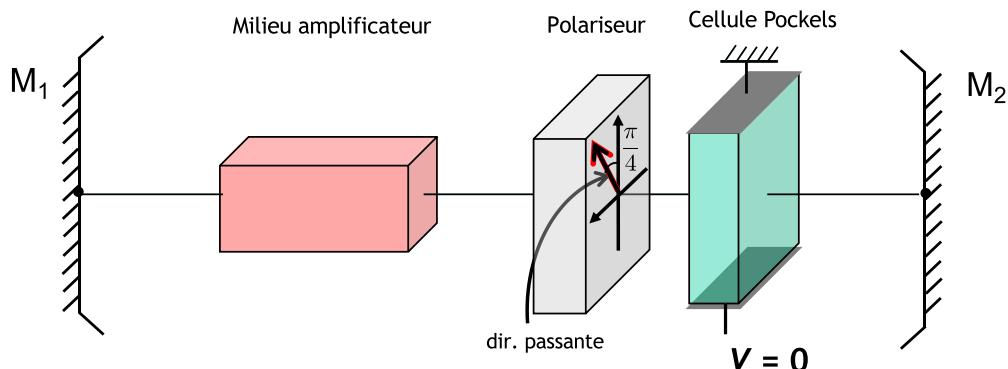
Cellule de Pockels = cristal électro-optique jouant le rôle d'une **porte de polarisation** non-passante ou passante selon la tension appliquée.



6. LASER FONCTIONNANT EN RÉGIME IMPULSIONNEL

- Q-switch actif :

Cellule de Pockels = cristal électro-optique jouant le rôle d'une **porte de polarisation** non-passante ou passante selon la tension appliquée.

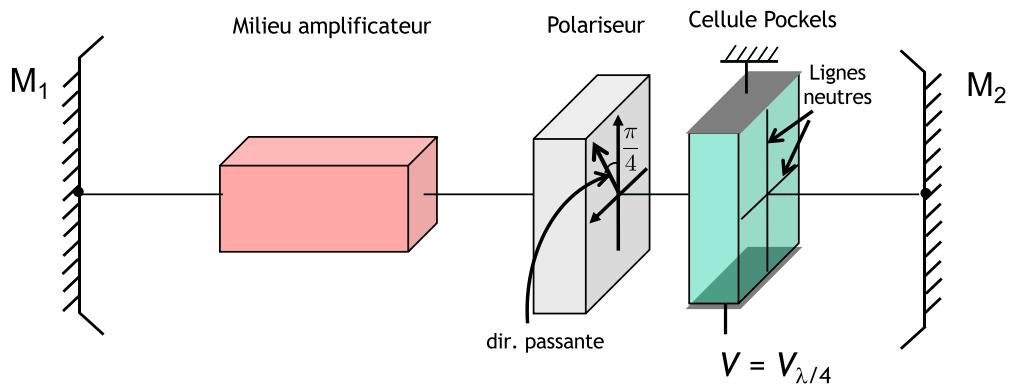


- $V = 0$: cellule de Pockels = **cristal isotrope**, pas de modification de polarisation lors de la traversée
➡ cellule passante

6. LASER FONCTIONNANT EN RÉGIME IMPULSIONNEL

- Q-switch actif :

Cellule de Pockels = cristal électro-optique jouant le rôle d'une **porte de polarisation** non-passante ou passante selon la tension appliquée.



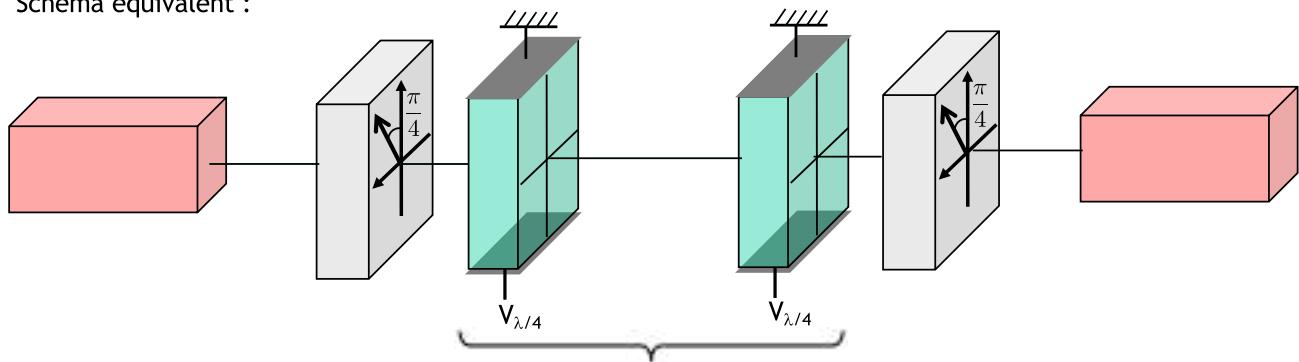
- $V = V_{\lambda/4}$: cellule de Pockels équivalente à une **lame quart-onde**, polarisation modifiée lors de la traversée après aller-retour dans la Pockels

6. LASER FONCTIONNANT EN RÉGIME IMPULSIONNEL

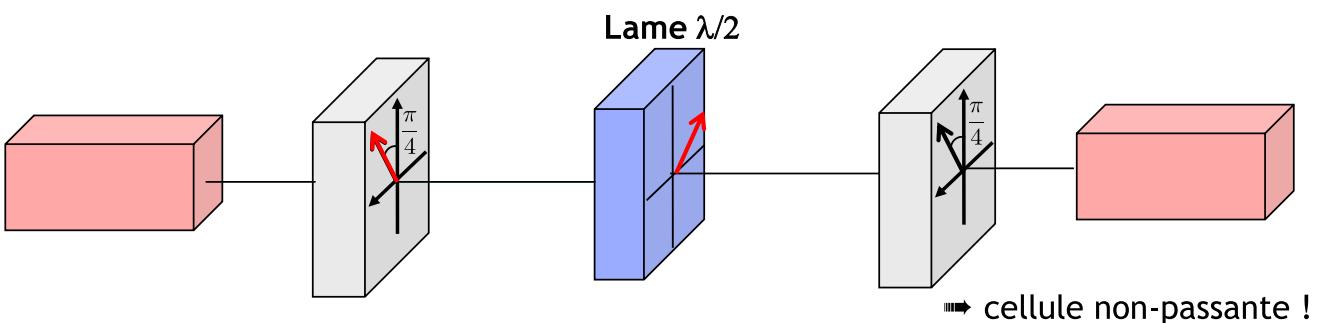
- Q-switch actif :

Cellule de Pockels = cristal électro-optique jouant le rôle d'une **porte de polarisation** non-passante ou passante selon la tension appliquée.

Schéma équivalent :



équivalent à une **lame demi-onde** !



⇒ cellule non-passante !

Chapitre 6 -

Un prolongement de la physique des lasers :

(très) bref aperçu de ce qu'est l'optique non-linéaire

1. INTRODUCTION

1ère démonstration expérimentale d'un effet non-linéaire (doublage de fréquence) avec un laser en 1961

VOLUME 7, NUMBER 4

PHYSICAL REVIEW LETTERS

AUGUST 15, 1961

GENERATION OF OPTICAL HARMONICS*

P. A. Franken, A. E. Hill, C. W. Peters, and G. Weinreich

The Harry D. Randall Laboratory of Physics, The University of Michigan, Ann Arbor, Michigan

(Received July 31, 1961)

The development of pulsed ruby optical masers^{1,2} has made possible the production of monochromatic (6943 Å) light beams which, when focussed, exhibit electric fields of the order of 10^8 volts/cm. The possibility of exploiting this extraordinary intensity for the production of optical harmonics from suitable nonlinear materials is most appealing. In this Letter we present a brief discussion of the requisite analysis and a description of experiments in which we have observed the second harmonic (at 3472 Å) produced upon projection of an intense beam of 6943 Å light through crystalline quartz.

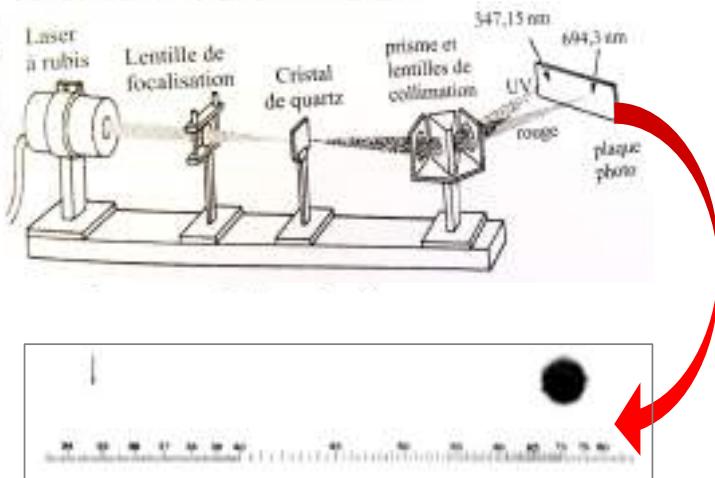


FIG. 1. A schematic representation of the block plate in which were used an estimation of second harmonic. The wavelength used is in order of 100 Å. The action at 3472 Å indicates the result of second harmonic obtained by the second harmonic. The image of the primary beam at 6943 Å is also indicated for reference.

Optique non-linéaire = étude des phénomènes qui interviennent lors de la modification des propriétés optiques d'un milieu matériel par la présence d'une onde intense

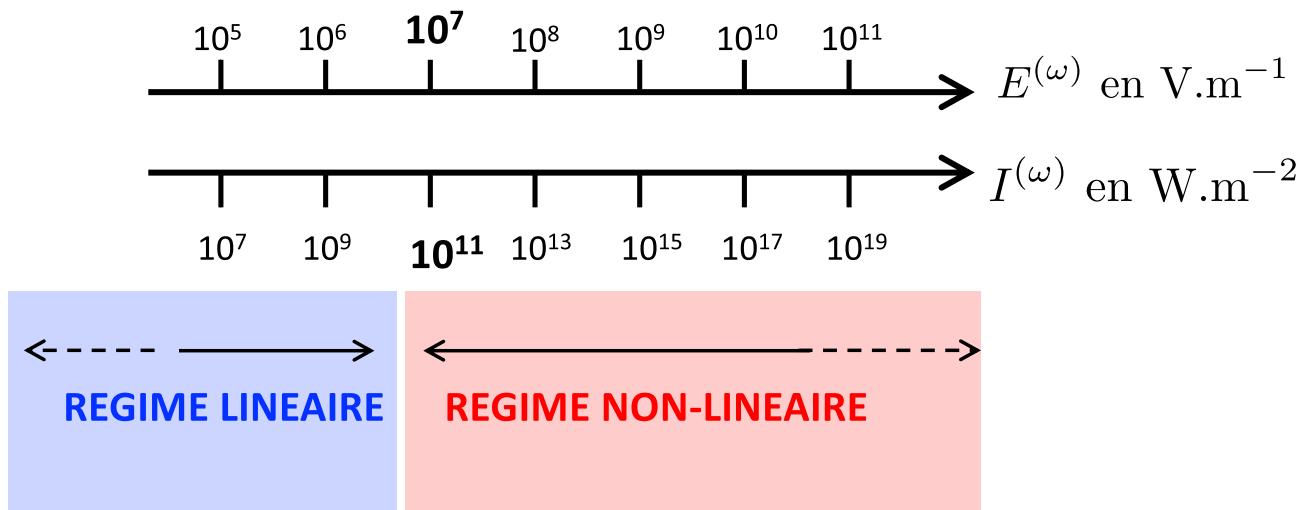
2. ORIGINE PHYSIQUE DES EFFETS NON LINEAIRES EN OPTIQUE

Système atomique ou moléculaire en présence d'une onde lumineuse

Si le système est éclairé par une onde plane rectiligne de pulsation ω , polarisée selon x , et de champ électrique

$$\vec{\mathcal{E}}(z, t) = \frac{1}{2} [E^{(\omega)} \exp(i(\omega t - kz) + cc^*)] e_x$$

on distingue 2 types de régime :

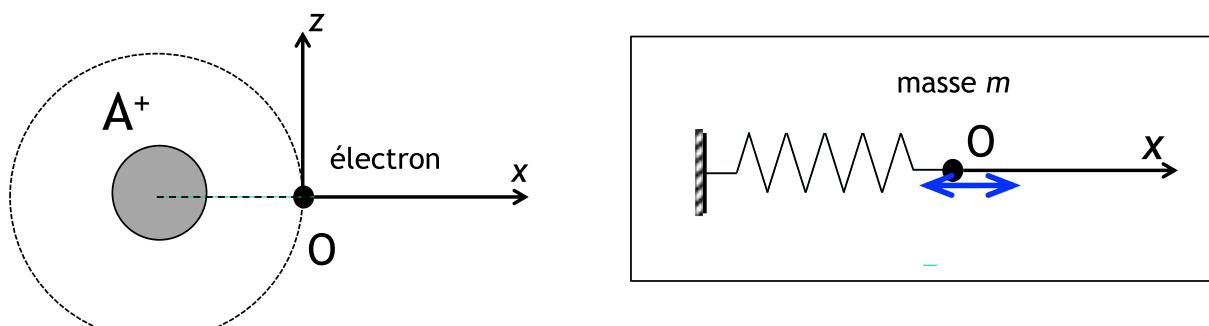


2. ORIGINE PHYSIQUE DES EFFETS NON LINEAIRES EN OPTIQUE

Mouvement d'un électron en présence d'une onde lumineuse

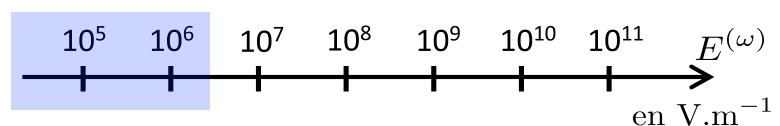
Hypothèses :

- Milieu isotrope constitué d'atomes A
- Electrons initialement à l'équilibre (au repos) en O(0,0,0), charge (-e), masse m
- Onde lumineuse : $\vec{\mathcal{E}}(z, t) = \frac{1}{2} [E^{(\omega)} \exp(i(\omega t - kz) + cc^*)] e_x$



2. ORIGINE PHYSIQUE DES EFFETS NON LINÉAIRES EN OPTIQUE

➤ Onde d'amplitude modérée :



⇒ Force exercée sur l'électron par l'onde : $\vec{F} = (-e) \times \vec{\mathcal{E}}(0, t)$

⇒ Électron déplacé de $x(t) \Rightarrow$ Force de rappel atome-é : $\vec{F}_R = -m\omega_0^2 \times x(t) \vec{e}_x$

⇒ Relation fondamentale de la dynamique :

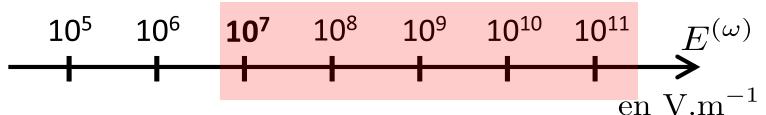
$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -m\omega_0^2 x(t) - eE^{(\omega)} \cos \omega t$$

Solution : mouvement sinusoïdal à la pulsation ω et d'amplitude proportionnelle à $E^{(\omega)}$

$$x(t) = -\frac{e E^{(\omega)}}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \times \cos(\omega t)$$

2. ORIGINE PHYSIQUE DES EFFETS NON LINÉAIRES EN OPTIQUE

➤ Onde d'amplitude forte :



⇒ Force de rappel atome-électron :

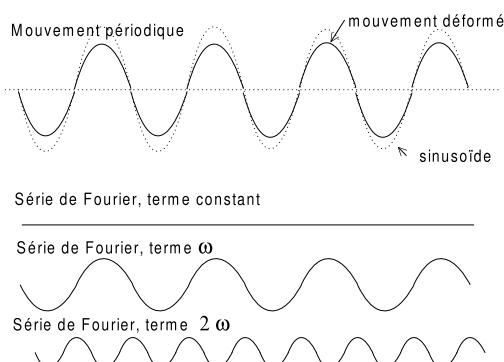
$$\vec{F}_R = (-m\omega_0^2 \times x(t) - mD \times x^2(t)) \vec{e}_x + \text{termes correctifs} \quad \text{avec} \quad D \ll \frac{\omega_0^2}{x}$$

⇒ Solution de la relation fondamentale de la dynamique :

Le mouvement de l'électron est toujours périodique mais il n'est plus sinusoïdal !

Décomposition en série de Fourier ($\omega, 2\omega, 3\omega, 4\omega, \dots$)

$$x(t) = x_0 + x_1 \cos(\omega t) + x_2 \cos(2\omega t) + x_3 \cos(3\omega t) + \dots$$



Rayonnement à de nouvelles pulsations !

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = -\frac{e E^{(\omega)}}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \\ x_2 = -\frac{De^2 [E^{(\omega)}]^2}{2m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2(\omega_0^2 - (2\omega)^2)} \\ \dots \end{array} \right.$$

non linéaire !

3. POLARISATION NON LINÉAIRE D'UN MATERIAU

 La polarisation induite dans le milieu $\vec{\mathcal{P}}$ rend compte du déplacement des électrons par rapport à A⁺ quand on applique un champ électrique sinusoïdal :

$$\vec{\mathcal{P}}(z, t) = -N e \ x(t) \vec{e}_x$$

Nb d'électrons/m³

Dans le cas d'une **onde intense** comme celle délivrée par un laser, on écrira :

$$\vec{\mathcal{P}}(z, t) = \underbrace{\vec{\mathcal{P}}_L^{(\omega)}(z, t)}_{\text{Polarisation linéaire}} + \underbrace{\vec{\mathcal{P}}_{NL}^{(2\omega)}(z, t) + \vec{\mathcal{P}}_{NL}^{(3\omega)}(z, t) + \dots}_{\text{Polarisation non-linéaire}}$$

avec

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{P}}_L^{(\omega)}(z, t) &= \frac{Ne^2 E^{(\omega)}}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t) \vec{e}_x \\ &= \frac{Ne^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \vec{\mathcal{E}}(z, t)\end{aligned}$$

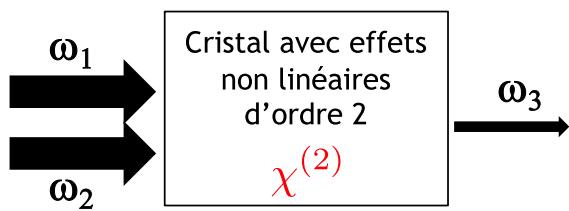
soit

$$\vec{\mathcal{P}}_L^{(\omega)}(z, t) = \epsilon_0 \chi^{(\omega)} \vec{\mathcal{E}}(z, t)$$

3. POLARISATION NON LINÉAIRE D'UN MATERIAU

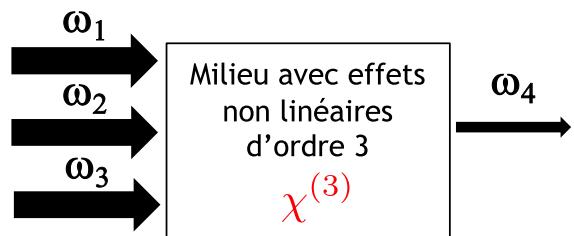
Processus non-linéaires du **2^{ème} ordre**

- liés à $\chi^{(2)}$
- existent uniquement dans les **cristaux**, à condition qu'ils ne possèdent **pas de centre d'inversion** (sinon $\chi^{(2)} = 0$)
- caractérisent un **mélange à 3 ondes** ($\omega_1, \omega_2, \omega_3$) avec $\omega_3 = f(\omega_1, \omega_2)$



Processus non-linéaires du **3^{ème} ordre**

- liés à $\chi^{(3)}$
- existent dans **tous les milieux**, que ce soient des **cristaux, liquides, gaz...**
- caractérisent un **mélange à 4 ondes** ($\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$) avec $\omega_4 = f(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$



3. POLARISATION NON LINÉAIRE D'UN MATERIAU

💡 On introduit la polarisation \vec{P} dans les équations de Maxwell valables pour les diélectriques non chargés et faiblement conducteurs de conductivité σ à travers le vecteur déplacement :

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon_0 \vec{\mathcal{E}} + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{\mathcal{E}} + \vec{P}_L + \vec{P}_{NL} \quad \text{avec } |\vec{P}_{NL}| \ll |\vec{P}_L| \\ &= \epsilon_0 \vec{\mathcal{E}} + \epsilon_0 \chi^{(1)} \vec{\mathcal{E}} + \vec{P}_{NL} \\ &= \epsilon_0 (1 + \chi^{(1)}) \vec{\mathcal{E}} + \vec{P}_{NL} \\ &= \epsilon \vec{\mathcal{E}} + \vec{P}_{NL} \end{aligned}$$

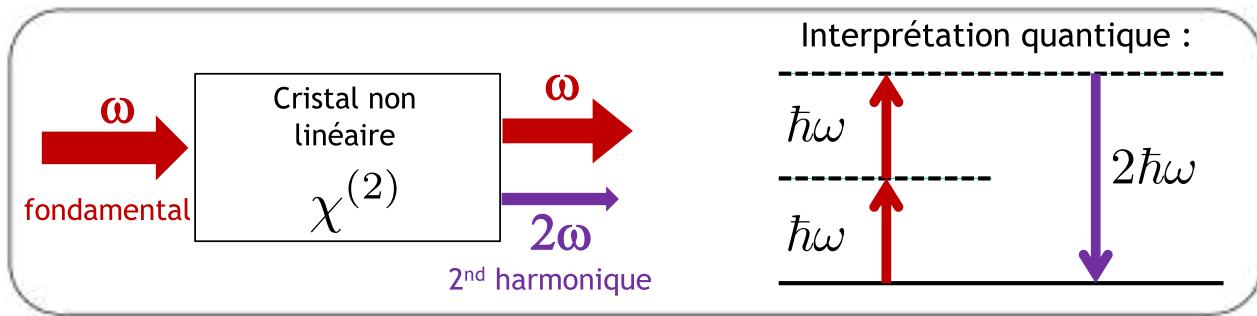
💡 Equation de propagation de l'onde lumineuse dans le milieu :

$$\Delta \vec{\mathcal{E}} - \epsilon \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial t^2} - \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}_{NL}}{\partial t^2} \quad \text{avec } \left(\frac{c_0}{n}\right)^2 = \frac{1}{\epsilon \mu_0}$$

vitesse de l'onde
dans le milieu

4. PRINCIPAUX PROCESSUS NON LINÉAIRES DU DEUXIÈME ORDRE

Génération de second harmonique (SHG) ou doublage de fréquence

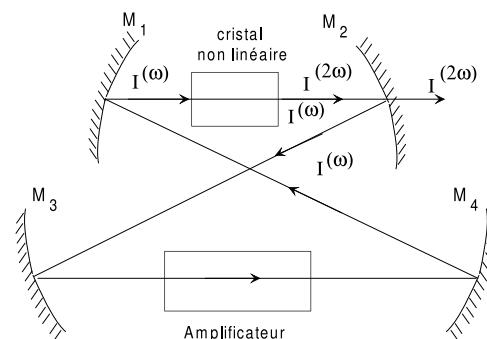


- Cf TP Doublage de fréquence : fondamental = onde IR à 860 nm; 2nd harmonique = onde bleue à 430 nm !
- Convention de notation pour la susceptibilité :

$$\chi^{(2)}(-2\omega, \omega, \omega)$$

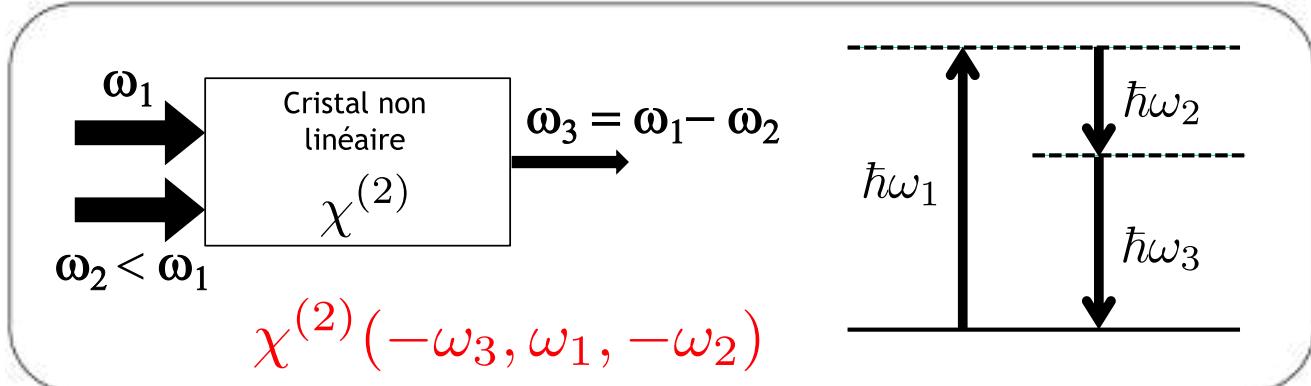
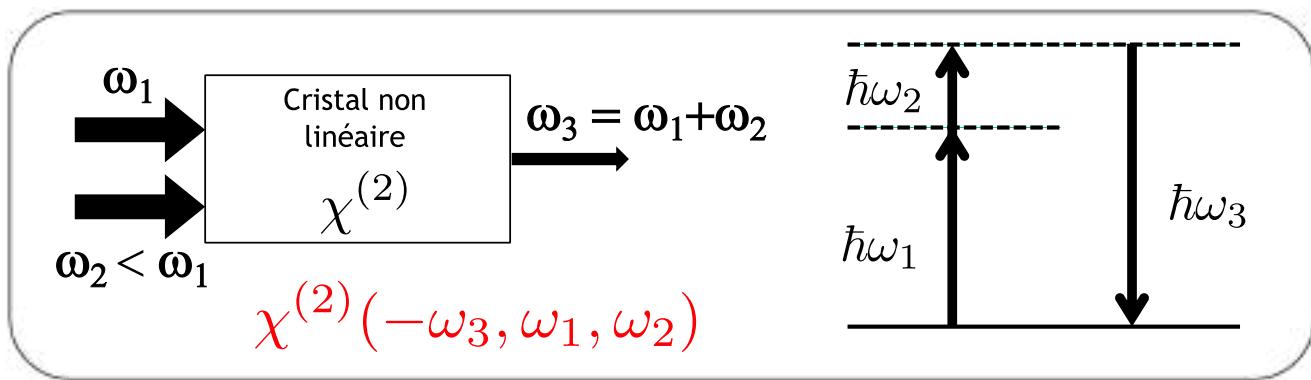
➤ Applications du doublage de fréquence :

- Doublage intra-cavité dans un laser pour **étendre la gamme spectrale accessible**
- Ex : laser YAG @1064 nm \Rightarrow doublé à 532 nm pour pomper des colorants pour générer un rayonnement visible



4. PRINCIPAUX PROCESSUS NON LINÉAIRES DU DEUXIÈME ORDRE

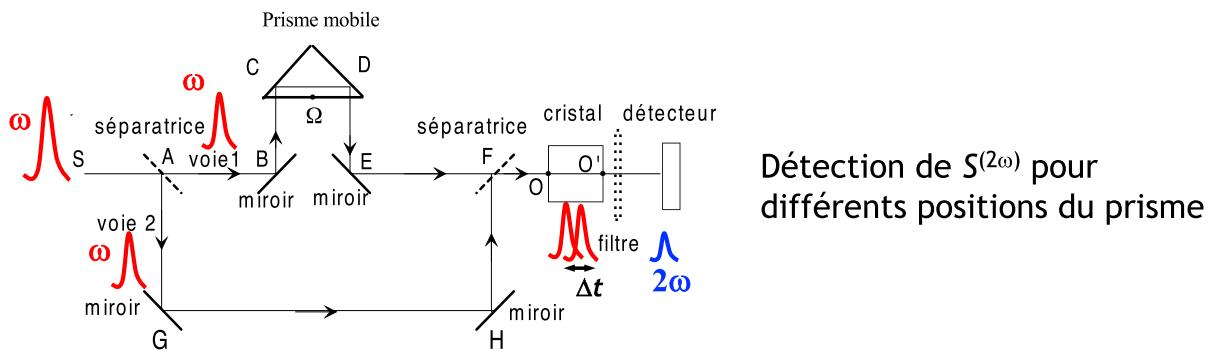
Génération de somme (SFG) ou différence de fréquence (DFG)



4. PRINCIPAUX PROCESSUS NON LINÉAIRES DU DEUXIÈME ORDRE

➤ Applications de la somme de fréquence :

- Mesure de la durée d'impulsions ultra-courtes (auto-correlateur de Mac-Zehnder)



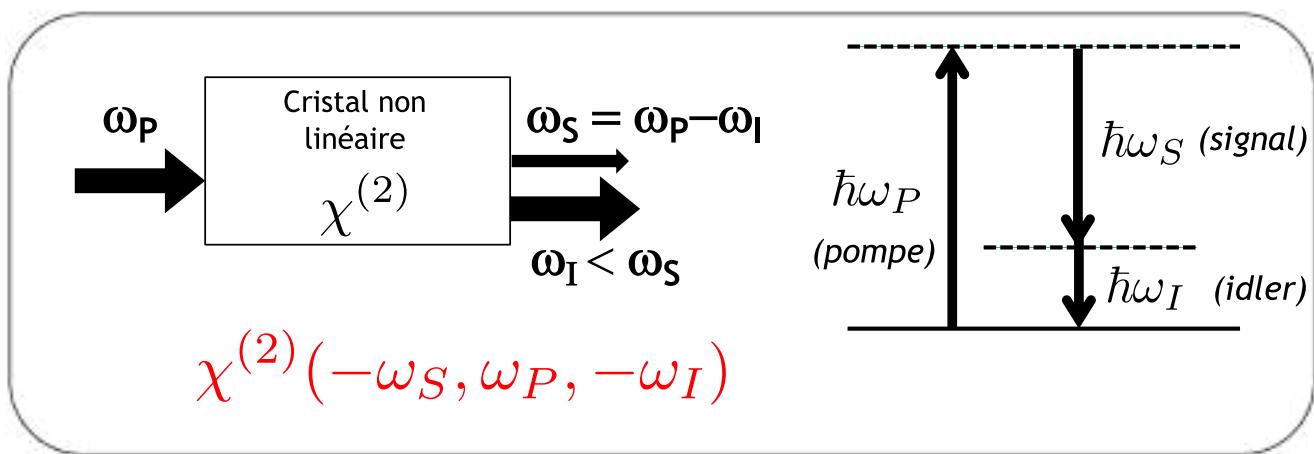
- Génération d'harmoniques élevées pour obtenir des rayonnements dans l'UV pour le pompage optique

Ex : laser de pompe @ 355 nm du TP « Laser à colorant »



4. PRINCIPAUX PROCESSUS NON LINÉAIRES DU DEUXIÈME ORDRE

➤ Génération et oscillation paramétrique optique



- Si on place le cristal pompé à ω_P dans une cavité résonante, les ondes ω_S et ω_I peuvent être amplifiées dans le cristal et leurs pulsations peuvent être variées en changeant l'orientation du cristal : principe des sources OPO (« Optical Parametric Oscillator »)



Application : source accordable sur une très large gamme spectrale de l'IR au proche UV (plusieurs centaines de nm)

4. PRINCIPAUX PROCESSUS NON LINEAIRES DU DEUXIEME ORDRE

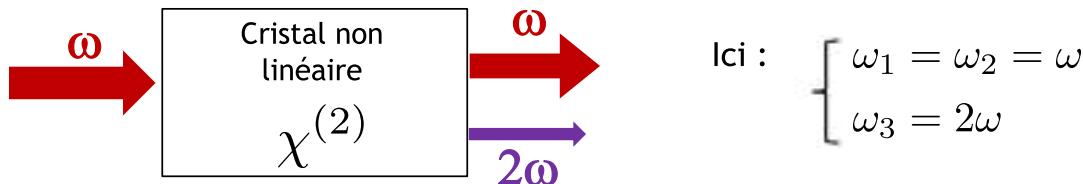
Remarque importante :

Tous les processus sont possibles mais ils ne peuvent pas se produire en même temps.

Relation d'**accord de phase** à remplir qui conduit à une **orientation du cristal** spécifique à chaque processus !

$$\Delta \vec{k} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{k}^{(\omega_3)} - \left(\vec{k}^{(\omega_1)} + \vec{k}^{(\omega_2)} \right) = \vec{0}$$

Illustration sur l'exemple du doublage de fréquence :



Soit : $\Delta \vec{k} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{k}^{(2\omega)} = 2\vec{k}^{(\omega)}$

$$\Leftrightarrow \frac{(2\omega)}{c_0/n^{(2\omega)}} = 2 \times \frac{(\omega)}{c_0/n^{(\omega)}} \Leftrightarrow n^{(2\omega)} = n^{(\omega)}$$

4. PRINCIPAUX PROCESSUS NON LINEAIRES DU DEUXIEME ORDRE

Condition d'accord de phase pour le doublage : $n^{(2\omega)} = n^{(\omega)}$

Mais on a vu que $\chi^{(\omega)} = \frac{Ne^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)\epsilon_0}$ avec $\omega_0 > \omega$

Donc $n^{(\omega)} = \sqrt{1 + \chi^{(\omega)}}$ augmente quand ω augmente

La condition d'accord de phase pour le SHG n'est jamais remplie dans un milieu isotrope : il faut que le cristal non-linéaire soit **ANISOTROPE** !

L'onde fondamentale ω et l'onde harmonique 2ω sont polarisées perpendiculairement, **selon les 2 lignes neutres du cristal uniaxe**

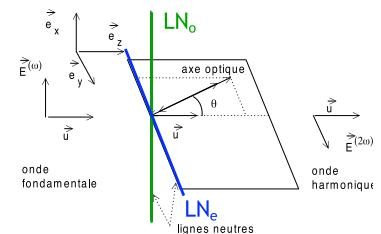
4. PRINCIPAUX PROCESSUS NON LINEAIRES DU DEUXIÈME ORDRE

Ex: accord de phase dans un cristal uniaxe négatif ($n_e < n_o$)

$$n_o^{(\omega)} = n''^{(2\omega)}(\theta)$$

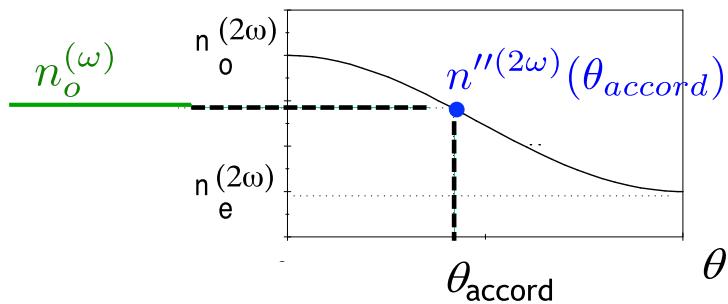
↑
Onde fondamentale selon LN_e

↓
Onde harmonique selon LN_e



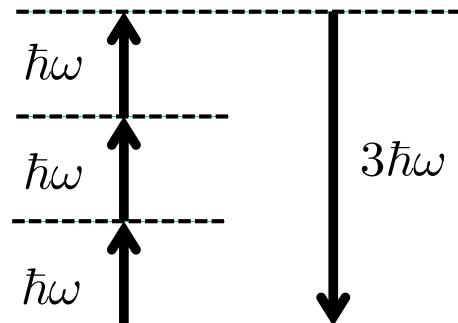
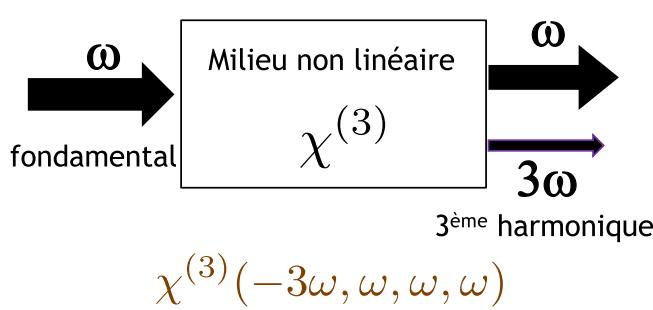
Or $n''^{(2\omega)}$ est tel que : $n''^{(2\omega)}(\theta) = \left(\left(\frac{\cos \theta}{n_o^{(2\omega)}} \right)^2 + \left(\frac{\sin \theta}{n_e^{(2\omega)}} \right)^2 \right)^{-1/2}$

On tourne le cristal pour faire varier θ et donc $n''^{(2\omega)}$:

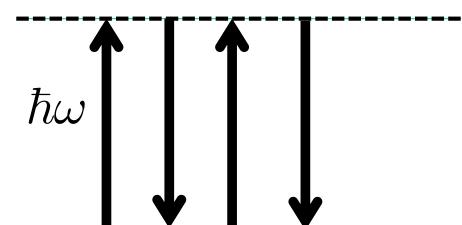
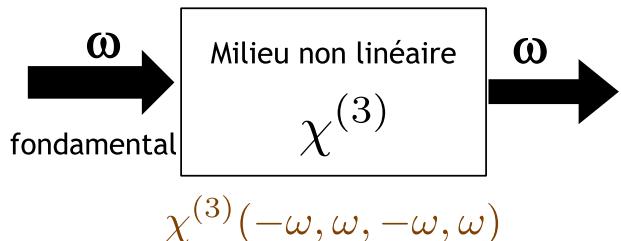


5. QUELQUES PROCESSUS NON LINEAIRES DU TROISIÈME ORDRE

☞ Génération de troisième harmonique (THG) ou triplage de fréquence



☞ Effet Kerr Optique

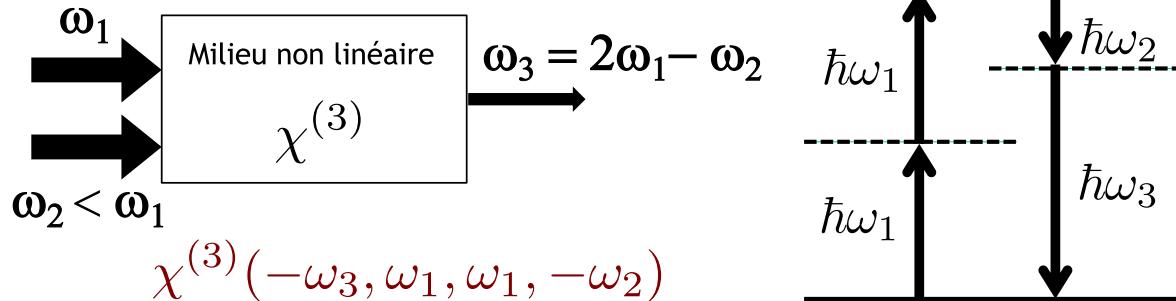


$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{\mathcal{E}} + \vec{\mathcal{P}} = \epsilon_0 (1 + \chi^{(1)} + \chi^{(3)} \mathcal{E}^2) \vec{\mathcal{E}} = \epsilon_0 [n^{(\omega)}]^2 \vec{\mathcal{E}}$$

$$n^{(\omega)} = \sqrt{1 + \chi^{(1)} + \chi^{(3)} I} = \sqrt{n_0^2 + \chi^{(3)} I} \sim n_0 + n_2 I$$

5. QUELQUES PROCESSUS NON LINÉAIRES DU TROISIÈME ORDRE

➤ Absorption résonante à 2 photons



Application : génération d'un rayonnement laser dans le domaine du VUV accordable si ω_2 balayable !

milieu : jet supersonique de Krypton ou Xénon

ω_1 : dans l'UV, résonant avec une transition électronique du gaz rare

➤ Et beaucoup d'autres effets pour lesquels il faut aussi réaliser l'accord de phase ...