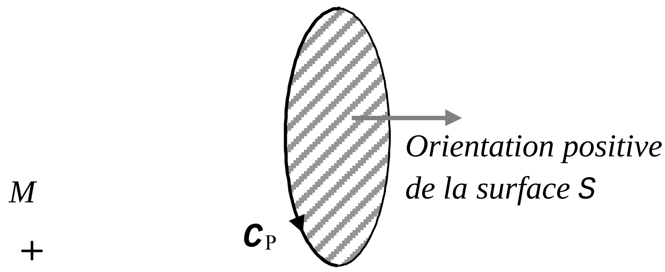
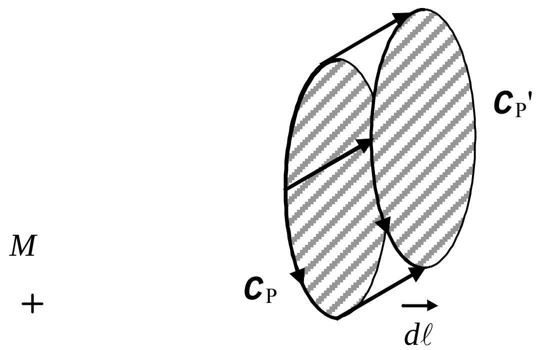
Démonstration du théorème d'Ampère à partir de la formule de Biot & Savart

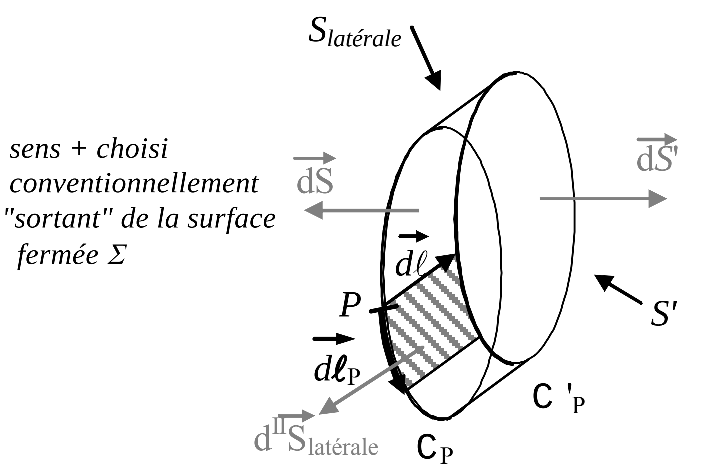
Soit une surface ouverte S s'appuyant sur un contour orienté C_P, d'orientation compatible (règle de la main droite ou du tire-bouchon), vue depuis le point M sous un angle solide Ω.

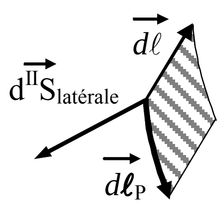


On déplace "en bloc" le contour C_P, d'un vecteur $d\vec{\ell}$, on forme le nouveau contour C_P', sur lequel s'appuie une surface ouverte orientée S', vue depuis le point M sous un angle solide Ω'.
On veut exprimer $d\Omega = \Omega' - \Omega$



Le contour C_P au cours de son déplacement $d\vec{\ell}$, engendre une surface dS, que l'on nommera "surface latérale", notée $dS_{latérale}$. L'ensemble $S \cup S' \cup dS_{latérale}$ forme une surface fermée Σ, sur l'on orientera en "normale sortante", ce qui a pour conséquence de changer le sens positif de la surface S, et pour autre conséquence d'orienter la surface latérale $dS_{latérale}$ vers l'extérieur, pour un élément de cette surface latérale pris dans un voisinage du point P, on peut écrire $d^{II}\vec{S}_{latérale} = d\vec{\ell}_P \wedge d\vec{\ell}$, cet élément de surface est vu depuis M sous un angle solide élémentaire algébrique : $d^{II}\Omega_{latérale} = \dfrac{d\vec{\ell}_P \wedge d\vec{\ell}\,.\overrightarrow{MP}}{MP^3}$





Or, l'angle solide algébrique sous lequel on voit une surface fermée depuis un point extérieur à celle-ci est nul, On en tire donc $0 = \Omega' - \Omega + d\Omega_{\text{latérale}}$, le signe "–" de $-\Omega$ provient de l'orientation opposée entre la surface fermée Σ et *S*, et $d\Omega_{\text{latérale}} = \oint_{C_P} \frac{d\vec{\ell}_P \wedge d\vec{\ell}.\overrightarrow{MP}}{MP^3} = -\Omega' + \Omega = -d\Omega$ variation de l'angle solide sous lequel on voit la surface *S* depuis M, pendant son déplacement de $d\vec{\ell}$.

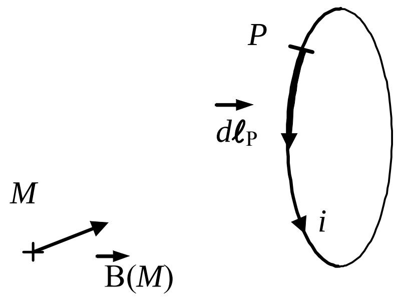
Application au calcul de la circulation du champ magnétique créé par un contour filiforme.

Soit un circuit filiforme C_P parcouru par un courant d'intensité *i*. L'élément de longueur $d\vec{\ell}_P$ pris dans un voisinage du point P, parcouru par le courant *i* créé en M un champ magnétique élémentaire $d\vec{B}$ donné par la formule de Biot & Savart :

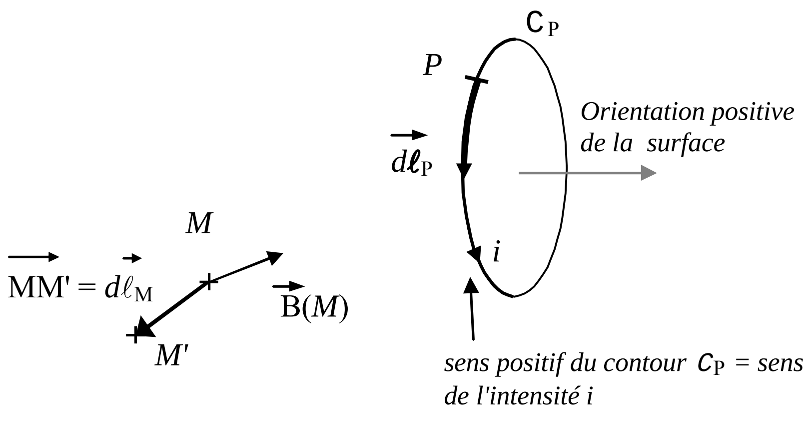
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 . i}{4\pi} . \frac{d\vec{\ell}_P \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

soit un champ magnétique total créé par le circuit C_P en M :

$$\vec{B}(M) = \oint_{C_P} \frac{\mu_0 . i}{4\pi} . \frac{d\vec{\ell}_P \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}$$



Le but est de trouver la circulation du champ total sur un contour orienté C_M, la circulation élémentaire dC du champ $\vec{B}(M)$ sur l'élément de longueur (orienté) $d\vec{\ell}_M$ pris dans un voisinage de M soit :
$dC = \vec{B}(M) . d\vec{\ell}_M$.
On peut remarquer que si M' est un point infiniment proche de M pris sur le contour orienté C_M, alors $d\vec{\ell}_M = \overrightarrow{MM'}$.



On pose Ω l'angle solide algébrique sous lequel on voit une surface (ouverte) s'appuyant sur C_P depuis M, la surface étant orientée selon le sens positif défini par l'orientation du contour C_P.
On pose également Ω' l'angle solide sous lequel on voit cette même surface depuis M'.

On veut calculer $\Omega' - \Omega = d\Omega$ variation de l'angle solide lorsque M passe de M à M'. Tout se passe comme si au lieu de déplacer M de $d\vec{\ell}_M$, on déplaçait de circuit C_P de $-d\vec{\ell}_M$, et que l'on s'intéresse à la variation d'angle solide à M fixé.

Avec le calcul préliminaire, on trouve avec $d\vec{\ell} = -d\vec{\ell}_M = -\overrightarrow{MM'}$:

$$d\Omega = -d\Omega_{\text{latérale}} = -\oint_{C_P} \frac{d\vec{\ell}_P \wedge d\vec{\ell}.\overrightarrow{MP}}{MP^3} = \oint_{C_P} \frac{d\vec{\ell}_P \wedge d\vec{\ell}_M.\overrightarrow{MP}}{MP^3} = \oint_{C_P} \frac{\overrightarrow{MP} \wedge d\vec{\ell}_P.}{MP^3}.d\vec{\ell}_M = \oint_{C_P} \frac{d\vec{\ell}_P \wedge \overrightarrow{PM}.}{MP^3}.d\vec{\ell}_M$$

donc pour la circulation élémentaire :

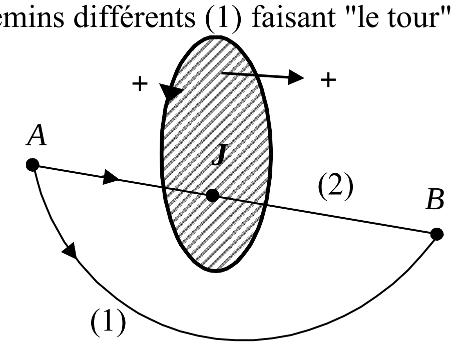
$$d\mathsf{C} = \vec{B}(M).d\vec{\ell}_M = \oint_{C_P} \frac{\mu_0.i}{4\pi}.\frac{d\vec{\ell}_P \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}.d\vec{\ell}_M = \frac{\mu_0.i}{4\pi}.d\Omega$$

Où $d\Omega$ est la variation d'angle solide sous lequel on voit C_P depuis M, lorsqu'on se déplace de M à M', avec $d\vec{\ell}_M = \overrightarrow{MM'}$

La circulation sur un segment AB orienté donnera donc $\mathsf{C}_{A\to B} = \frac{\mu_0.i}{4\pi}.[\Omega_B - \Omega_A]$, où Ω_B est l'angle solide sous lequel on voit le circuit C_P (parcouru par un courant d'intensité *i*) depuis B, et Ω_A l'angle solide depuis A.

Calcul de la variation d'angle solide.

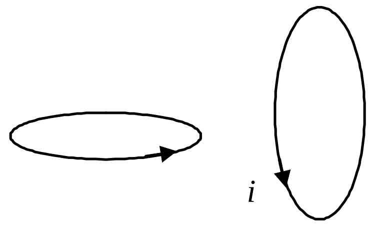
On considère la surface S_P s'appuyant sur le contour C_P et orientée selon le sens positif du contour.
On passe de A à B selon deux chemins différents (1) faisant "le tour" de S_P et (2) "traversant" S_P.



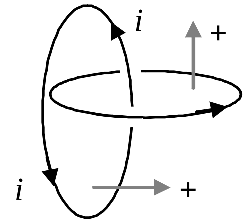
Par le chemin 1, la variation de l'angle solide se fait de façon continue, et on obtient $\Delta\Omega = \Omega_B - \Omega_A$.
Par le chemin 2, l'angle solide subit une discontinuité à la traversée de la surface, au point J. On nomme J^- le point juste avant la traversée, J^+ juste après.
$\Delta\Omega$ s'obtient donc comme $\Omega_B - \Omega_{J+} + \Omega_{J-} - \Omega_A$.
Ω_{J+}est l'angle solide sous lequel on voit la surface S_P depuis J+ (extrêmement proche de S_p), S_P apparaît donc comme un plan infini, l'angle solide, compte-tenu des orientations, vaut donc -2π.
Ω_{J-} est l'angle solide sous lequel on voit la surface S_P depuis J^-… ici $+ 2\pi$
On en tire donc : $\Delta\Omega = \Omega_B - \Omega_{J+} + \Omega_{J-} - \Omega_A = \Omega_B - \Omega_A + 4\pi$

Pour la variation d'angle complet sur un contour fermé :

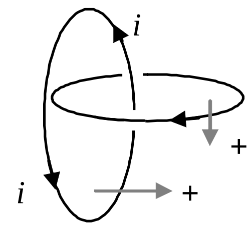
Si le contour ne traverse pas S_P : $\Delta\Omega = \Omega_{final} - \Omega_{initial} = 0$ (pas de discontinuité)



Si le contour traverse la surface dans le sens de son orientation :
$\Delta\Omega = \Omega_{final} - \Omega_{initial} + 4\pi = 4\pi$



Si le coutour traverse la surface dans le sens contraire: $\Delta\Omega = \Omega_{final} - \Omega_{initial} - 4\pi = -4\pi$



On en tire donc le théorème d'Ampère : $C = \oint_{C_M} \vec{B}(M).d\vec{\ell}_M = \mu_0.\Sigma\, i_{enlacés}$

Le signe de $i_{enlacé}$ étant fixé par le sens de traversée du contour, selon les schémas ci-dessus.