Mécanique quantique

TD 6: Oscillateur harmonique quantique

1 Définitions

1. Donner des exemples physiques faisant intervenir le modèle d'oscillateur harmonique.

2. Rappeler l'énergie classique d'un oscillateur harmonique de masse m en fonction de sa pulsation propre ω. En déduire l'expression du hamiltonien quantique à une dimension.

3. On définit les opérateurs $\tilde{X} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}X$ et $\tilde{P} = \frac{1}{\sqrt{m\omega\hbar}}P$. Montrer que le hamiltonien s'écrit :

$$H = \frac{\hbar\omega}{2}(\tilde{X}^2 + \tilde{P}^2). \tag{1}$$

4. Sachant que $[X,P] = i\hbar$, calculer le commutateur $[\tilde{X},\tilde{P}]$.

2 Opérateurs annihilation et création

On définit les opérateurs

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{X} + i\tilde{P}) \qquad \text{et} \qquad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{X} - i\tilde{P}) \tag{2}$$

appelés respectivement *opérateur annihilation* et *opérateur création*.

5. Calculer le commutateur $[a,a^\dagger]$.

6. Écrire le hamiltonien H en fonction de ces opérateurs a et $a^\dagger$.

7. On définit un dernier opérateur $N = a^\dagger a$ appelé *opérateur nombre*. Calculer les commutateurs $[N,a]$ et $[N,a^\dagger]$.

Trouver le spectre du hamiltonien revient à trouver celui de l'opérateur N. On se concentre dans la suite sur ce problème.

3 Spectre de N

Soit λ une valeur propre de N, de vecteur propre associé $|\phi\rangle$.

8. Écrire la valeur propre λ sous la forme de la norme d'un vecteur, et en déduire son signe.

9. En utilisant les commutateurs précédents, montrer que $a|\phi\rangle$ et $a^\dagger|\phi\rangle$ sont aussi des vecteurs propres de N si $\lambda \neq 0$. Donner leur valeur propre respective. Préciser le cas $\lambda = 0$.

10. En déduire que les valeurs propres de N sont des entiers positifs. Justifier les noms des trois opérateurs a, $a^\dagger$ et N.

4 Vecteurs propres de l'hamiltonien

Vus les résultats précédents, on note $n \in \mathbb{N}$ les valeurs propres de N dont on peut montrer par récurrence qu'elles sont non-dégénérées. Dans cette partie, on cherche les états propres $|\phi_n\rangle$ associés.

11. Calculer la fonction propre $\phi_0(x)$ associée à $\lambda = 0$. On pourra utiliser les résultats de la partie précédente.

12. Montrer par récurrence que les états peuvent s'écrire

$$|\phi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(a^\dagger\right)^n|\phi_0\rangle \tag{3}$$

 arnaud.raoux@sorbonne-universite.fr

5 États cohérents

Les états propres $|\phi_n\rangle$ sont des états purement quantiques, dans lesquels se trouvent un nombre déterminé d'excitations élémentaires (de *quanta d'énergie*). À l'inverse, on peut justifier que les états les plus fidèle à la mécanique classique sont les états propres de l'opérateur a. Ces états sont appelés *états cohérents*.

13. Chercher un état cohérent $|\alpha\rangle$ de valeur propre α sous la forme d'une superposition d'états propres de H.

14. Calculer les valeurs moyennes $\langle X\rangle_\alpha$, $\langle P\rangle_\alpha$, ainsi que $\langle H\rangle_\alpha$ l'énergie moyenne d'un tel état en fonction de $\hbar\omega$ et α.

15. On montre que $\left\langle H^2\right\rangle_\alpha = \hbar^2\omega^2(|\alpha|^4 + 2|\alpha|^2 + 1/4)$. En déduire l'étalement en énergie ΔH_α de l'état cohérent. L'état a-t-il une énergie bien déterminée ?

16. Donner l'évolution temporelle de l'état $|\psi(t=0)\rangle = |\alpha_0\rangle$. Montrer que celui-ci est toujours vecteur propre de a. Que remarque-t-on ?

6 Cas d'un oscillateur dans un champ électrique homogène

17. Identifier une situation physique où une particule subit à la fois un potentiel harmonique, et un champ électrique.

18. Écrire l'énergie classique associée à la particule en fonction du champ $\mathscr{E}$ constant selon l'axe Ox de l'oscillateur. En déduire le hamiltonien quantique H du problème.

19. Expliciter l'équation aux valeurs propres que vérifie une fonction propre ψ.

20. Montrer que le problème se ramène à celui d'un oscillateur harmonique, et donner l'expression des énergies propres du problème.