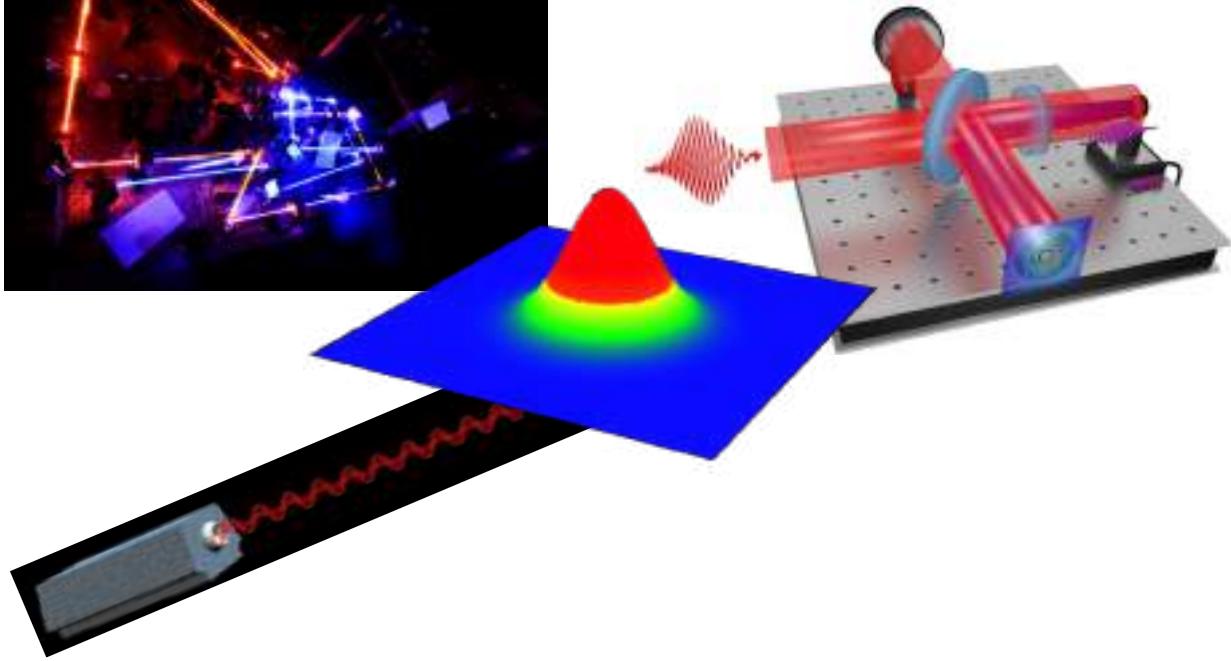


# **PHYSIQUE des LASERS**

## **COURS - partie I-**

S. Boyé-Péronne  
[severine.boye-peronne@universite-paris-saclay.fr](mailto:severine.boye-peronne@universite-paris-saclay.fr)



**MASTER 1 de PHYSIQUE FONDAMENTALE**  
**MAGISTÈRE de PHYSIQUE FONDAMENTALE**

## Table des matières

<b>1 LA PHYSIQUE DES LASERS-INTRODUCTION</b>	<b>3</b>
1.1 Historique . . . . .	4
1.2 Originalité de la lumière laser . . . . .	5
1.3 Principe général d'un laser . . . . .	5
1.4 Quelques exemples d'applications . . . . .	6
<b>2 ETUDE DES CAVITES LASERS (RESONATEURS OPTIQUES)</b>	<b>7</b>
2.1 Les différents types de cavités lasers . . . . .	8
2.1.1 Cavité à deux miroirs . . . . .	8
2.1.2 Cavités plus complexes . . . . .	8
2.2 Formalisme matriciel pour l'étude des cavités . . . . .	9
2.2.1 Equivalence miroir sphérique-lentille mince dans l'approximation de Gauss . . . . .	9
2.2.2 Séquence périodique de lentilles équivalentes . . . . .	10
2.2.3 Matrices de transfert . . . . .	11
2.3 Stabilité d'une cavité . . . . .	15
2.3.1 Critère de stabilité d'une cavité laser . . . . .	15
2.3.2 Application à la stabilité d'une cavité simple à deux miroirs . . . . .	15
2.3.3 Cavités instables . . . . .	17
2.3.4 Annexe : démonstration du critère de stabilité d'une cavité . . . . .	17
<b>3 FAISCEAUX GAUSSIENS</b>	<b>19</b>
3.1 Généralités sur les faisceaux gaussiens . . . . .	20
3.1.1 Amplitude complexe et intensité d'une onde . . . . .	20
3.1.2 Amplitude complexe et intensité d'un faisceau gaussien . . . . .	21
3.1.3 Extension latérale du faisceau gaussien . . . . .	21
3.1.4 Profil longitudinal et divergence du faisceau gaussien . . . . .	22
3.2 Propriétés du faisceau gaussien . . . . .	23
3.2.1 Rayon de courbure complexe . . . . .	23
3.2.2 Rayon de courbure de la phase et extension latérale du faisceau . . . . .	23
3.2.3 Relations utiles . . . . .	24
3.2.4 Propagation du rayon de courbure complexe : loi 'ABCD' . . . . .	24
3.2.5 Application : formule de conjugaison des 'waists' pour un faisceau gaussien . . . . .	25
3.3 Mode fondamental gaussien d'une cavité stable . . . . .	26
3.3.1 Principe . . . . .	26
3.3.2 Cas particuliers simples . . . . .	27
3.3.3 Détermination du mode fondamental gaussien dans le cas général . . . . .	28
3.4 Modes spectraux d'une cavité laser (modes longitudinaux) . . . . .	29
3.5 Modes spatiaux (modes transverses) . . . . .	30
3.6 Annexes . . . . .	31
3.6.1 Faisceau gaussien - Onde sphérique - Onde plane . . . . .	31
3.6.2 Démonstration de la loi 'ABCD' . . . . .	32
3.6.3 Démonstration de la règle d'accord des rayons de courbure dans le cas d'une cavité à 2 miroirs . . . . .	33

## **Chapitre 1**

# **LA PHYSIQUE DES LASERS-INTRODUCTION**

## 1.1 Historique

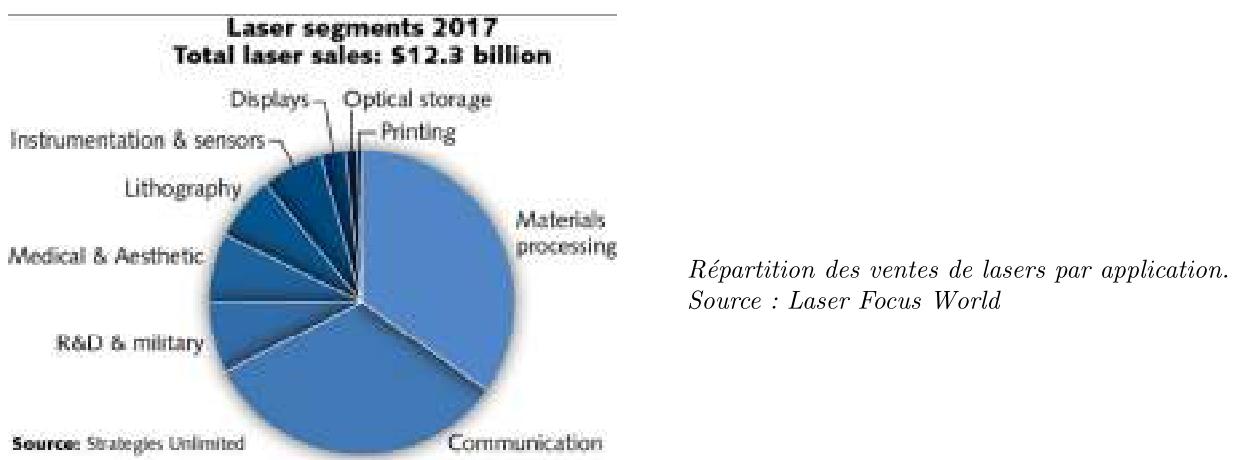
La lumière joue un rôle considérable dans un très grand nombre de phénomènes physiques, chimiques ou biologiques. En **1958**, deux physiciens théoriciens du Bell Labs aux USA, Charles Townes et Arthur Schawlow, publient un article<sup>1</sup> qui expose la théorie relative à la production d'une nouvelle forme de lumière : le rayonnement **LASER**. En **1960**, un autre chercheur américain, Théodore Maiman<sup>2</sup>, met en évidence pour la première fois expérimentalement l'observation d'un faisceau laser dans un cristal de Rubis à 694,3 nm. Un an plus tard, Ali Javan met au point un laser au gaz (hélium et néon) puis en 1966, Peter Sorokin construit le premier laser à liquide.

Le terme **LASER** est un acronyme qui signifie **L**ight **A**mplification by **S**timulated **E**mission of **R**adiation. Dans les premiers temps, les lasers sont restés des objets d'étude scientifiques passionnantes mais sans applications concrètes. On parlait de 'solution sans problématique' ou de 'd'invention banale'. Mais, depuis la fin des années 70, les sources laser se sont énormément diversifiées pour trouver de plus en plus d'applications dans le monde scientifique, technique ou industriel, qu'elles ont ainsi révolutionné.

Cet outil remarquable a ouvert la voie à de **nouveaux domaines de la physique** que sont l'**optique non-linéaire** et l'**interaction laser-matière** (spectroscopie). La recherche dans ces domaines a été couronnée de plusieurs Prix Nobel. Pour en citer quelques-uns :

- en 1964, Prix Nobel de Physique, Charles Townes pour sa contribution à l'invention des lasers,
- en 1971, Prix Nobel de Physique, Dennis Gabor pour l'invention de l'holographie,
- en 1981, Prix Nobel de Physique, Arthur Schawlow pour le développement de la spectroscopie laser,
- en 1997, Prix Nobel de Physique, Claude Cohen-Tannoudji, pour le développement des méthodes pour refroidir et piéger des atomes par laser,
- en 1999, Prix Nobel de Chimie, Ahmed Zewail, pour l'étude des états de transition dans les réactions chimiques par spectroscopie laser (femtochimie),
- en 2005, Prix Nobel de Physique, John Hall et Theodor Hänsch, pour le développement de la spectroscopie laser de précision par peignes de fréquence femtosecondes,
- en 2018, Prix Nobel de Physique, Gérard Mourou, Donna Strickland et Arthur Ashkin pour leur méthode de production d'impulsions lasers ultra-brèves de forte intensité (technique 'Chirped-pulsed amplification') et pour l'invention des pinces optiques utilisées pour manipuler des systèmes biologiques.

L'exemple le plus spectaculaire d'impact du laser sur notre vie quotidienne est la contribution incontestable des diodes lasers à la révolution des techniques optiques de transfert et de stockage de l'information. En 2017, elles représentaient ainsi 45 % des ventes de lasers commerciaux<sup>3</sup>.



1. A.L. Schawlow and C.H. Townes, *Phys. Rev. Lett.* **112**, p 1940-1949 (1958)

2. T.H. Maiman, *Nature* **187**, p 493-494 (1960)

3. voir le site <http://www.laserfocusworld.com/articles/print/volume-53/issue-01/features/annual-laser-market-review-forecast-where-have-all-the-lasers-gone.html>

## 1.2 Originalité de la lumière laser

Le caractère spécifique de la lumière laser réside dans sa cohérence.

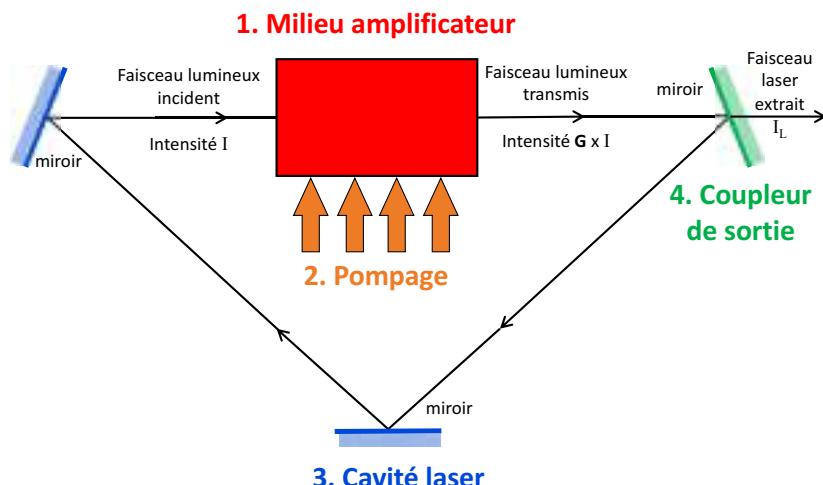
- La **cohérence spatiale** permet de produire des faisceaux avec un parallélisme très poussé, ou inversement des faisceaux focalisés à la limite de ce que permet la mécanique quantique. La lumière laser est alors particulièrement 'concentrée' sur une direction de propagation (faisceau parallèle), ou sur un point de l'espace. Ceci permet d'atteindre sur une très petite surface une intensité lumineuse énorme (typiquement  $MW/cm^2$ ). Pour comparaison, la puissance lumineuse reçue du Soleil par la Terre est d'environ  $1000 \text{ W/m}^2$  soit  $0,1 \text{ W/cm}^2$ .
- La **cohérence temporelle** signifie que l'onde laser peut être particulièrement stable au cours du temps, ce qui est équivalent à dire que la fréquence (et donc la longueur d'onde) du rayonnement peut être extrêmement bien définie. La lumière laser est alors très 'concentrée' sur une fréquence bien précise. A l'inverse, c'est aussi la cohérence temporelle qui permet de fabriquer des impulsions laser ultracourtes (quelques  $10^{-15}$  secondes). Dans ce cas, la lumière laser est extrêmement 'concentrée' dans le temps. On peut atteindre des puissances lumineuses crêtes de l'ordre du térawatt c'est à dire  $10^{12}\text{W}$  (exemples : laser femtoseconde Téramobile qui permet de faire des expériences de contrôle/canalisation de décharges hautes tensions pour pouvoir à terme canaliser la foudre, technique LIDAR pour la télédétection de polluants dans l'atmosphère). Récemment, le laser PETAL du CEA du Barp près de Bordeaux a même franchi la barre du Pétawatt, *i.e.*  $10^{15} \text{ W}$ .

## 1.3 Principe général d'un laser

Les lasers sont des dispositifs qui produisent ou amplifient la lumière pour des longueurs d'onde situées dans le domaine infrarouge, visible ou ultraviolet.

Ils emploient une grande variété de matériaux et de systèmes d'amplification, pour des dimensions allant de quelques micromètres (diode laser) à quelques dizaines de mètres (lasers très haute énergie, par exemple le laser MégaJoule LMJ de Bordeaux<sup>4</sup>).

Malgré cette diversité, on peut définir les quatre éléments fondamentaux qui constituent tout laser et qui sont schématisés sur le dessin ci-dessous :



### 1. Le milieu amplificateur

Il est constitué d'atomes, molécules, ions ou électrons qui peuvent être dans des états physiques différents (gaz, plasma, liquide, solide). Son rôle est d'accroître l'intensité de l'onde laser au cours de sa propagation. Il est caractérisé par son gain  $G$ , qui doit être supérieur à 1.

4. <http://www-lmj.cea.fr>

### 2. Le système de pompage (ou excitation)

Il prépare le milieu amplificateur dans un état quantique tel que le gain soit assez grand. Il apporte au milieu amplificateur l'énergie que celui-ci pourra ensuite communiquer au faisceau lumineux. Cette énergie peut être fournie par une décharge électrique, par un courant électrique, par une réaction chimique, par une source de lumière (lampes flash) ou par un autre laser.

### 3. La cavité laser (ou résonateur optique)

Un système optique relie la sortie de l'amplificateur à son entrée. Les rayons lumineux suivent dans la cavité un parcours qui les ramène sur eux-mêmes. La lumière peut alors parcourir la cavité et traverser l'amplificateur un grand nombre de fois : si le gain de l'amplificateur est assez fort, il apparaît la lumière laser. La cavité laser peut être constituée de miroirs ou d'autres éléments optiques plus compliqués (sélectifs en longueur d'onde par exemple).

### 4. Le coupleur de sortie

Un miroir à transmission non nulle, une lame de prélèvement ou un réseau utilisé dans un ordre de diffraction choisi permettent de faire sortir une partie de la lumière laser établie dans la cavité à chaque tour. Le faisceau extrait constitue le faisceau laser.

## 1.4 Quelques exemples d'applications

Depuis son invention, le laser a connu un développement exponentiel des systèmes et de leurs utilisations. On peut citer les applications principales suivantes :

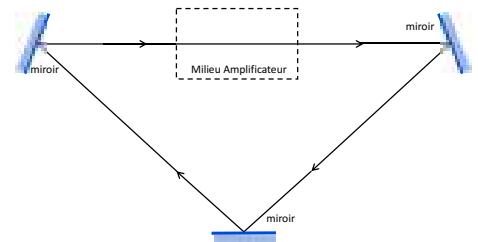
- Traitement des matériaux (autres que diodes lasers principalement) pour découpe, soudage, trempe, traitement de surface, micro-usinage, fabrication de semi-conducteurs et de micro-électroniques
- Télécommunications optiques (diodes lasers principalement)
- Stockage optique de l'information (CD, DVD, ROM optique). Les diodes lasers produites à très grande échelle pour ces applications reviennent approximativement à 1 dollar pièce.
- Domaine médical (imagerie, ophtalmologie, dermatologie, chirurgie esthétique, chirurgie, dentisterie)
- Pompage de lasers solides (diodes lasers principalement)
- Recherche fondamentale
- Instrumentation, mesure, contrôle ou divers (télémétrie laser, mesure depuis les satellites, alignement, lecture de codes-barres)
- Enregistrement d'images (imprimantes, scanners laser, télécopieurs)
- Divertissement et visualisation (hologrammes, pointeurs laser, vidéoprojecteur laser)
- Autres applications, surtout dans le domaine de l'aérospatial et du militaire (aviation : gyroscope laser, armes laser, détection, etc...)

## **Chapitre 2**

# **ETUDE DES CAVITES LASERS (RESONATEURS OPTIQUES)**

Dans un laser, le rôle de la cavité optique est de **réinjecter** la lumière sortant de l'amplificateur vers l'entrée de celui-ci, par exemple par une série de miroirs. Ce chapitre se propose d'étudier les contraintes géométriques que doivent respecter les éléments de la cavité pour que le couplage sortie-entrée soit efficace ; c'est la notion de **stabilité d'une cavité**.

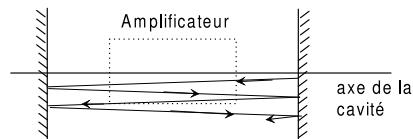
On montrera également que ce couplage est efficace uniquement pour certaines fréquences et certaines formes de l'onde se propageant dans la cavité, appelées **modes de la cavité**.



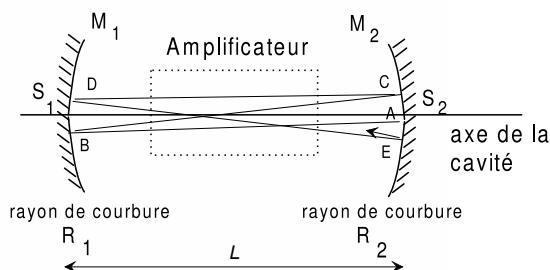
## 2.1 Les différents types de cavités lasers

### 2.1.1 Cavité à deux miroirs

La cavité la plus simple serait constituée de deux miroirs plans de part et d'autre de l'amplificateur. Cette cavité est utilisée dans certains cas, mais elle présente un inconvénient : un rayon non parfaitement parallèle à l'axe s'en éloigne de plus en plus à chaque réflexion et sort de la cavité sans avoir traversé l'amplificateur un très grand nombre de fois.



Pour éviter cette difficulté, il faut utiliser une cavité dont l'un des miroirs au moins est concave avec une géométrie telle qu'un rayon au voisinage de l'axe ne s'en éloigne pas définitivement après plusieurs réflexions.

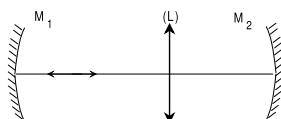


La cavité est caractérisée par les rayons de courbure  $R_1$  et  $R_2$  des deux miroirs et la distance  $L$  qui les sépare. On va montrer qu'un choix judicieux de ces paramètres permet de **confiner les rayons lumineux au voisinage de l'axe**. Un rayon lumineux peut alors faire un grand nombre d'aller-retours dans la cavité et être amplifié à chaque passage dans l'amplificateur. Dans ce cas, la cavité est dite '**stable**'.

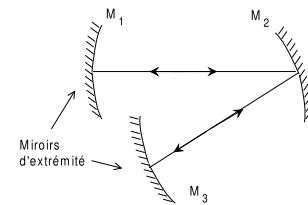
### 2.1.2 Cavités plus complexes

\* Cavités linéaires (cavité à ondes stationnaires)

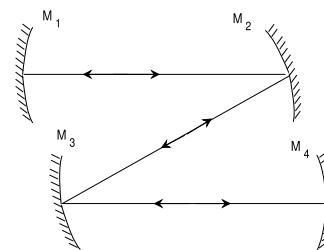
Une cavité est dite **linéaire** lorsque les rayons reviennent sur eux-mêmes au niveau des miroirs d'**extrémité**.



Cavité à deux miroirs avec lentille intra-cavité

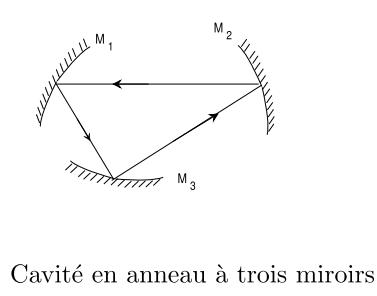


Cavité linéaire à trois miroirs avec miroir de repliement M3

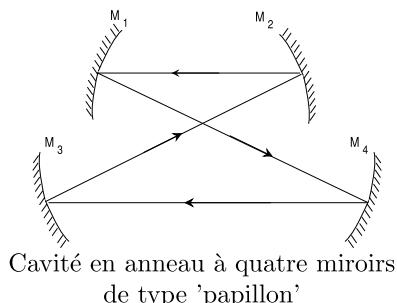


Cavité linéaire à quatre miroirs en 'Z'

\* Cavités en anneau (cavité à ondes progressives)



Cavité en anneau à trois miroirs



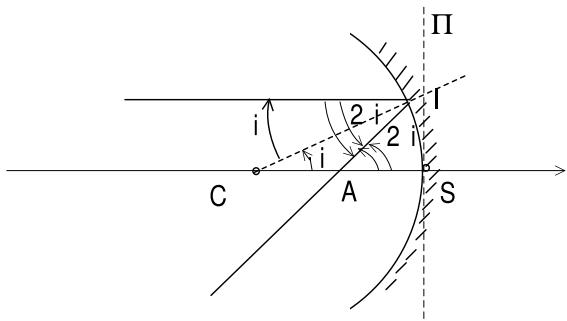
Cavité en anneau à quatre miroirs de type 'papillon'

## 2.2 Formalisme matriciel pour l'étude des cavités

### 2.2.1 Équivalence miroir sphérique-lentille mince dans l'approximation de Gauss

Soit un miroir sphérique concave de sommet S et de centre de courbure C. On construit géométriquement la réflexion d'un rayon incident parallèle à l'axe optique (CS) et arrivant sur le miroir au point I. On note  $\pi$  le plan passant par S et perpendiculaire à l'axe optique.

Soit A l'intersection du rayon réfléchi avec (CS). Le rayon incident forme avec la normale (CI) l'angle  $i$ , il en est de même pour le rayon réfléchi qui forme donc avec le rayon incident l'angle  $2i$ .



Pour des rayons incidents proches de l'axe (conditions de Gauss), la surface du miroir sphérique est quasi-confondue avec son plan tangent en S, le plan  $\pi$ . Le point I est donc très proche de  $\pi$ . On a dans ce cas

$$SI = \overline{CS} \tan i = \overline{AS} \tan(2i)$$

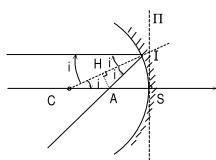
Pour les petits angles d'incidence,  $\tan i \simeq i$  et  $\tan 2i \simeq 2i$  d'où le résultat :

$$\overline{AS} = \frac{\overline{CS}}{2}$$

Ce résultat est indépendant de  $i$ .

Autre méthode :

Le rayon réfléchi forme l'angle  $i$  avec la normale. Le triangle CAI est isocèle. La projection H de A sur sa base vérifie  $CH = \frac{CI}{2} = \frac{R}{2}$ . On a alors  $CA = \frac{R}{2 \cos i}$ , indépendant de  $i$  pour les petits angles.

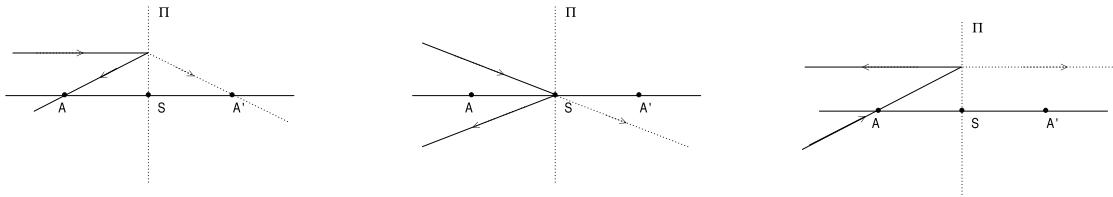


On définit pour le miroir un rayon de courbure algébrique  $R = \overline{CS}$  en considérant comme convention le sens de la lumière incidente sur le miroir.  $R$  est donc positif pour un miroir concave et négatif pour un miroir convexe.

Il apparaît sur le graphe précédent que :

- un rayon incident parallèle à l'axe ressort du système optique en passant par le point  $A \equiv F'$  (où  $F'$  est le foyer image du miroir), avec  $\overline{AS} = \overline{F'S} = \frac{\overline{CS}}{2} = \frac{R}{2}$ .
- un rayon incident passant par A ressort parallèlement à l'axe optique.
- un rayon arrivant sur S ressort symétriquement par rapport à l'axe optique ; le symétrique de ce rayon par rapport au plan  $\pi$  est situé dans le prolongement du rayon incident.

En introduisant pour le rayon réfléchi une symétrie par rapport au plan  $\pi$ , on retrouve des propriétés directement analogues à celles des rayons passant par les foyers ou le centre optique d'une lentille.

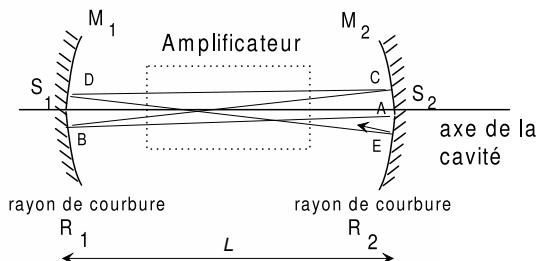


Dans les conditions de Gauss, l'analogie est complète entre la **réflexion sur un miroir sphérique de sommet S et de centre de courbure C**, et la **transmission par une lentille mince de centre optique S et de distance focale f** telle que  $f = \frac{CS}{2} = \frac{R}{2}$ .

Un miroir **concave** a ainsi des propriétés analogues à celles d'une lentille mince **convergente** ( $R > 0 \Rightarrow f > 0$ ), un miroir **convexe** correspond à une lentille mince **divergente** ( $R < 0 \Rightarrow f < 0$ ).

Les propriétés de formation d'une image ou de conjugaison objet-image sont identiques pour un miroir sphérique ou une lentille, si l'on introduit pour le rayon réfléchi la symétrie par rapport au plan passant par S et perpendiculaire à (CS).

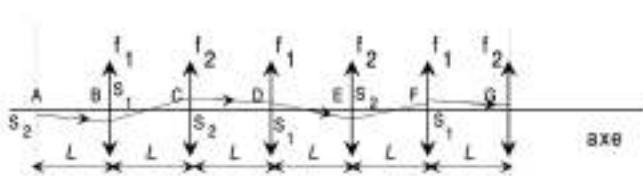
### 2.2.2 Séquence périodique de lentilles équivalentes



L'objectif est d'évaluer la trajectoire d'un rayon lumineux après plusieurs réflexions sur les miroirs. On utilise pour cela l'équivalence (à une symétrie près) entre la **réflexion d'un rayon sur un miroir de rayon de courbure R** et la **transmission d'un rayon par une lentille mince de distance focale  $f = R/2$** . On étudie le cas particulier d'une cavité linéaire à 2 miroirs sphériques.

Grâce à cette équivalence, on '**déplie**' la **trajectoire** du rayon dans la cavité par rapport aux plans tangents aux miroirs en  $S_1$  et  $S_2$  et on représente le rayon traversant une séquence de lentilles. Cette séquence est **périodique**. Sa période spatiale correspond à un **parcours complet de la cavité**, c'est à dire une réflexion sur tous les miroirs (aller-retour pour une cavité linéaire, tour complète pour une cavité en anneau). On appelle cette représentation dépliée de la cavité la **séquence périodique de lentilles équivalentes**.

\* Exemple de la cavité linéaire simple à 2 miroirs :

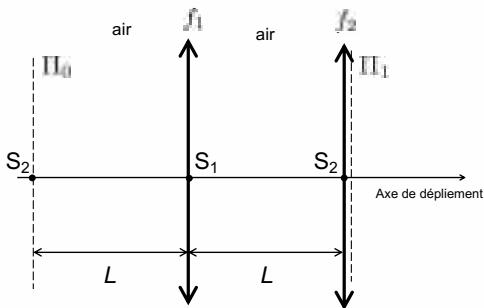


Séquence périodique de lentilles équivalentes pour une cavité à deux miroirs.

$$f_1 = R_1/2$$

$$f_2 = R_2/2$$

Pour la cavité à deux miroirs, le **motif de base** contient deux lentilles de distances focales  $f_1 = R_1/2$  et  $f_2 = R_2/2$  séparées par la distance  $L$ , on le représente ci-dessous :



On note  $\pi_0$  et  $\pi_1$  les plans perpendiculaires à l'axe marquant le début et la fin du motif de base de la séquence périodique de lentilles équivalentes. Le choix de  $\pi_0$  est arbitraire. Sur cet exemple, on l'a choisi en  $S_2$  après la réflexion sur  $M_2$ .

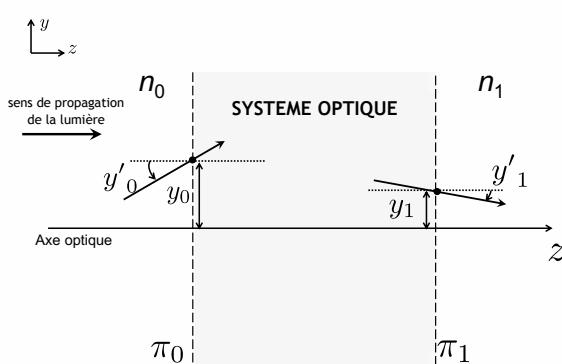
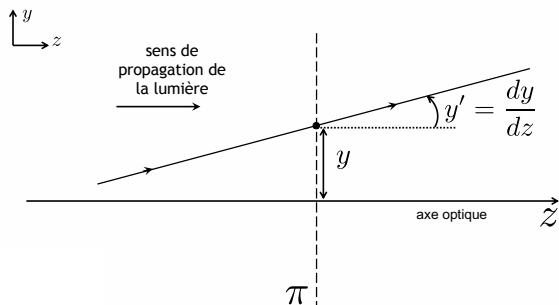
Le principe présenté ici sur l'exemple de la cavité linéaire à deux miroirs est **généralisable à tous les types de cavités**.

Une fois qu'on a déplié ainsi la cavité avec la séquence périodique de lentilles équivalentes, on peut utiliser le formalisme de l'optique matricielle pour étudier la trajectoire des rayons lumineux. Ce formalisme, valable tant qu'on travaille dans les conditions de Gauss, est basé sur l'utilisation de la matrice de transfert, qui va être définie dans le paragraphe suivant.

### 2.2.3 Matrices de transfert

Par la suite on ne considère que des systèmes optiques à symétrie de révolution autour de l'axe optique (Oz). Soient un rayon dans le plan ( $yOz$ ) et un plan  $\pi$  perpendiculaire à ( $Oz$ ).

Au niveau de ce plan, le rayon est complètement défini par la **position**  $y$  de son point d'intersection avec  $\pi$  et par la **pente**  $y'$  de la droite qui porte ce rayon.



Deux plans  $\pi_0$  et  $\pi_1$  sont situés de part et d'autre d'un système optique, ils sont perpendiculaires à l'axe optique.

Soit un rayon incident sur le système optique dans les conditions de Gauss (près du centre optique et formant un petit angle avec l'axe) et caractérisé au niveau de  $\pi_0$  par le couple  $(y_0, y'_0)$ . Après la traversée du système optique, ce rayon est caractérisé au niveau de  $\pi_1$  par le couple  $(y_1, y'_1)$ . On peut montrer qu'il existe les relations :

Ces équations peuvent s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{cases} y_1 = A y_0 + B y'_0 \\ y'_1 = C y_0 + D y'_0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y'_1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{pmatrix}$$

La matrice carrée  $T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  caractérise complètement l'action du système optique sur n'importe quel

rayon lumineux, c'est la **matrice de transfert** ou la **matrice de passage** du plan  $\pi_0$  au plan  $\pi_1$ .

Les coefficients  $A$  et  $D$  sont sans dimension,  $B$  est une longueur,  $C$  est l'inverse d'une longueur.

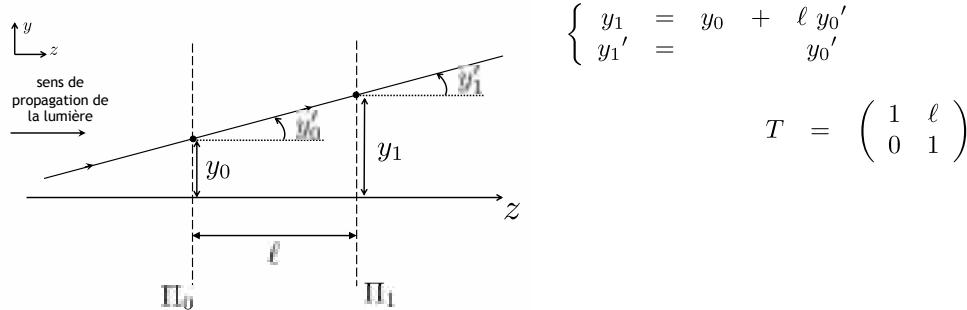
On peut montrer que si  $\pi_0$  et  $\pi_1$  sont dans un milieu d'indice  $n_0$  et  $n_1$  respectivement, le déterminant de la matrice de transfert vaut :  $\det(T) = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = AD - BC = \frac{n_0}{n_1}$

Le plus souvent,  $\pi_0$  et  $\pi_1$  sont dans l'air donc ce déterminant vaut 1. On dit alors que  $T$  est unitaire.

On donne dans la suite de ce paragraphe quelques exemples importants de matrices de transfert élémentaires.

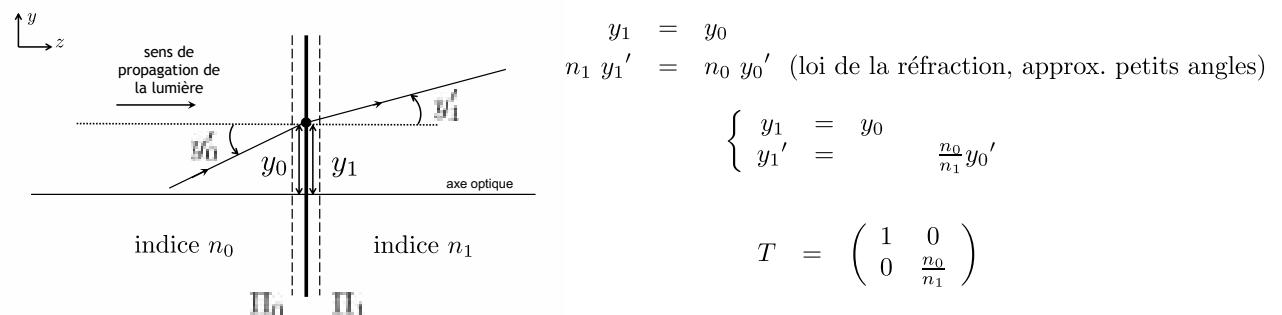
**a) Propagation rectiligne sur une distance  $\ell$  dans un milieu homogène d'indice  $n$  (pas de système optique entre  $\pi_0$  et  $\pi_1$ )**

Les plans  $\pi_0$  et  $\pi_1$  sont situés dans un même milieu homogène d'indice  $n$ .



**b) Traversée d'une interface plane  $n_0$  vers  $n_1$**

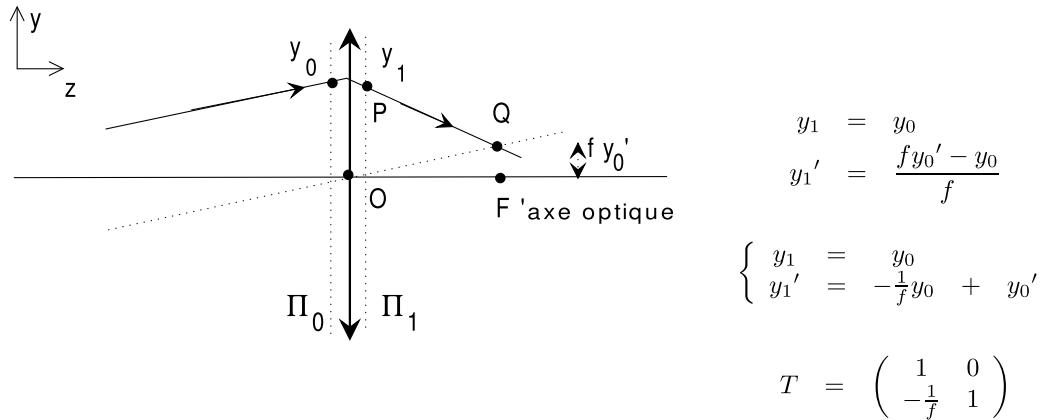
L'interface est le plan perpendiculaire en O à l'axe optique.  $\pi_0$  est choisi en  $O^-$ ,  $\pi_1$  en  $O^+$ .



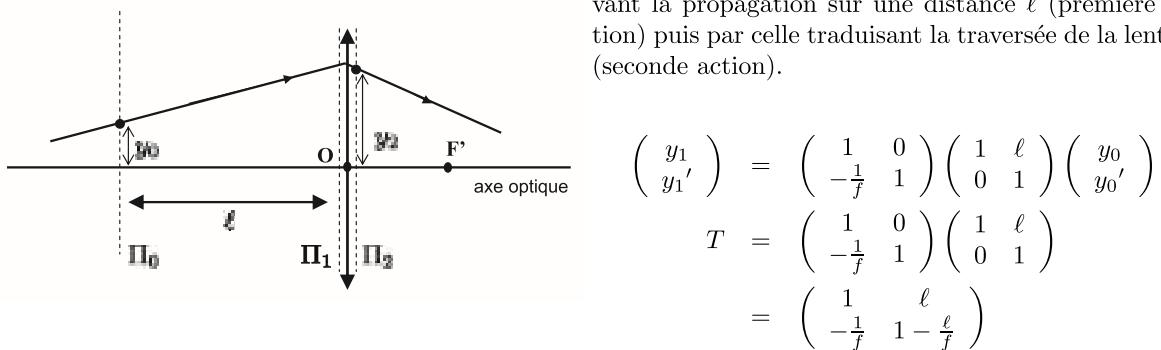
Dans ce cas, le déterminant de  $T$  vaut  $\frac{n_0}{n_1}$ , différent de 1.

c) Traversée d'une lentille mince de distance focale  $f$  et de centre optique O plongée dans l'air

On considère une lentille plongée dans l'air.  $\pi_0$  est choisi en  $O^-$ , juste avant la lentille mince.  $\pi_1$  est situé en  $O^+$ . La lentille est supposée très mince donc le rayon entrant en  $y_0$  ressort en  $y_1 = y_0$  (point P, coordonnées  $(y_0, 0)$ ) dans le référentiel (Oyz). Les deux rayons parallèles schématisés viennent d'un même point source à l'infini et donc se coupent au point image de cette source, dans le plan focal image à la distance  $fy_0'$  de F' (point Q, coordonnées  $(fy_0', f)$ ) dans le référentiel (Oyz). La pente du rayon transmis correspond à celle de la droite (PQ) qui vaut  $y_1' = \frac{y_Q - y_P}{z_Q - z_P} = \frac{fy_0' - y_0}{f}$ .

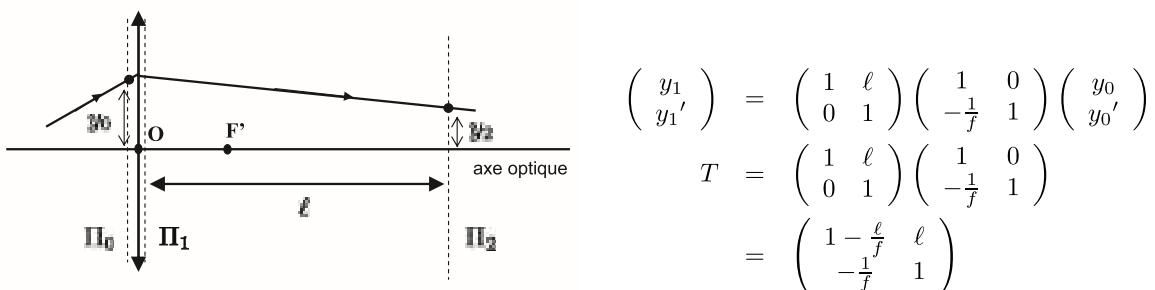
d) Combinaison des deux cas précédents : propagation dans l'air sur la distance  $\ell$  puis traversée d'une lentille mince de distance focale  $f$ 

On multiplie  $\begin{pmatrix} y_0 \\ y_0' \end{pmatrix}$  d'abord par la matrice décrivant la propagation sur une distance  $\ell$  (première action) puis par celle traduisant la traversée de la lentille (seconde action).



Attention à l'ordre des matrices, le produit matriciel n'est en général pas commutatif, comme illustré par l'exemple suivant.

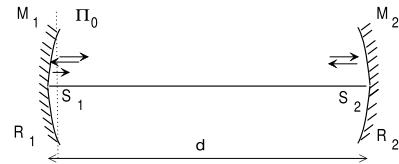
\* Traversée d'une lentille mince de distance focale  $f$  puis propagation dans l'air sur la distance  $\ell$ .



### e) Matrice de transfert d'une cavité à 2 miroirs pour un aller-retour

Pour illustrer ce paragraphe, on considère une cavité à 2 miroirs sphériques concaves plongés dans l'air, et qui comporte un milieu amplificateur dilué pour lequel on pourra donc considérer que l'indice optique est très proche de celui de l'air ( $n_{MA} = 1$ ).<sup>1</sup>

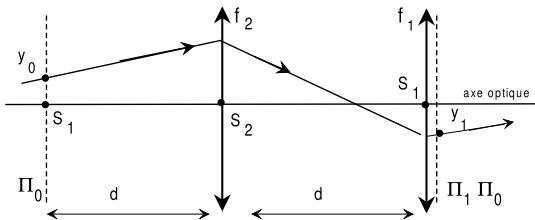
On veut écrire la matrice de transfert **après un parcours complet de la cavité**, c'est à dire un aller retour, du plan  $\pi_0$  au plan  $\pi_1$  confondu avec  $\pi_0$ . Les plans de départ et d'arrivée étant dans le même milieu, le déterminant de cette matrice vaudra 1.



Attention, les valeurs des coefficients de la matrice de transfert dépendront du choix du plan  $\pi_0$  et du sens du rayon en  $\pi_0$ . Les valeurs données ici correspondent à  $\pi_0$  en  $S_1$  juste après la réflexion sur  $M_1$ .

Le parcours complet de la cavité se décompose alors en : partant de  $\pi_0$  au niveau de  $S_1$ , propagation sur la longueur  $d$ ; réflexion sur  $M_2$ ; propagation sur la longueur  $d$ ; réflexion sur  $M_1$  pour arriver sur  $\pi_1$  confondu avec  $\pi_0$  après un parcours complet de la cavité.

On simplifie le calcul en utilisant l'analogie entre la réflexion sur un miroir de rayon de courbure  $R$  et la transmission par une lentille de distance focale  $f = R/2$ . On commence donc par développer la cavité pour faire apparaître sa **séquence périodique de lentilles équivalentes**.



Les plans  $\pi_0$  et  $\pi_1$  définissent le début et la fin du **motif de base** de la séquence périodique de lentilles équivalentes. L'aller-retour dans la cavité fait alors intervenir deux séquences déjà vues dans le paragraphe précédent :

- \* propagation sur une distance  $d$  puis transmission par une lentille de focale  $f_2$
- \* propagation sur une distance  $d$  puis transmission par une lentille de focale  $f_1$ .

$$\begin{aligned} T &= \begin{pmatrix} 1 & d \\ -\frac{1}{f_1} & 1 - \frac{d}{f_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ -\frac{1}{f_2} & 1 - \frac{d}{f_2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} A &= 1 - \frac{d}{f_2} & B &= 2d - \frac{d^2}{f_2} \\ C &= -\frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} + \frac{d}{f_1 f_2} & D &= -\frac{d}{f_1} + (1 - \frac{d}{f_1})(1 - \frac{d}{f_2}) \end{aligned}$$

En remplaçant  $f_1$  par  $R_1/2$  et  $f_2$  par  $R_2/2$ , il vient

$$\begin{aligned} A &= 1 - \frac{2d}{R_2} & B &= 2d(1 - \frac{d}{R_2}) \\ C &= -\frac{2}{R_1} - \frac{2}{R_2} + \frac{4d}{R_1 R_2} & D &= -\frac{2d}{R_1} + (1 - \frac{2d}{R_1})(1 - \frac{2d}{R_2}) \end{aligned}$$

Remarque : le raisonnement a été tenu pour un rayon dans le plan (yOz). On peut tenir le même pour un rayon formant avec (Oz) le même angle dans le plan (xOz). Le système optique est à symétrie de révolution

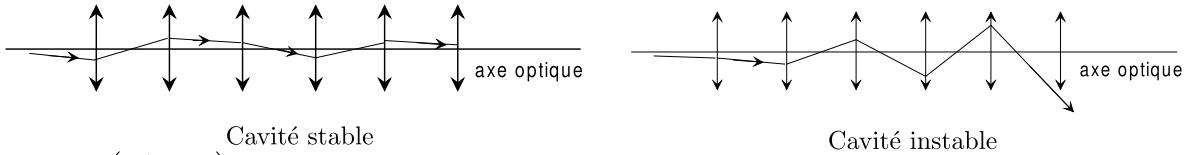
1. Dans ce cas, la longueur optique  $d$  pour un aller s'identifie donc à la distance géométrique  $L$  entre les 2 miroirs.

autour de ( $Oz$ ) donc les trajets dans leur plan seront les mêmes pour ces deux rayons, d'où des matrices de transfert analogues. Cette symétrie pour les rayons des plans ( $yOz$ ) et ( $xOz$ ) permet d'utiliser la matrice de transfert pour des rayons incidents de directions quelconques. Pour des systèmes optiques ne possédant pas la symétrie de révolution, il faudra définir une matrice de transfert pour la projection du rayon incident dans le plan ( $yOz$ ) et une autre pour la projection du rayon dans le plan ( $xOz$ ).

## 2.3 Stabilité d'une cavité

### 2.3.1 Critère de stabilité d'une cavité laser

La trajectoire des rayons lumineux est décrite de manière équivalente dans la cavité réelle ou sur la séquence périodique de lentilles équivalentes. Lorsque cette dernière tend à maintenir les rayons autour de l'axe de la cavité, la cavité est dite stable. Si les rayons s'éloignent de plus en plus de l'axe, la cavité est dite instable.



Soit  $T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  la **matrice de transfert pour un parcours complet** d'une cavité laser à partir du plan  $\pi_0$ . On peut montrer que<sup>2</sup>

la cavité est stable si et seulement si  $-1 < \frac{A+D}{2} < 1$

Remarques importantes :

- Ce résultat est **indépendant** du choix du plan  $\pi_0$  de départ pour évaluer la matrice de transfert pour un parcours complet.
- Les bornes de l'intervalle de stabilité sont parfois considérées pour certaines cavités. Dans ce cas, la cavité fonctionne en limite de stabilité.

### 2.3.2 Application à la stabilité d'une cavité simple à deux miroirs

#### a) Condition de stabilité

Pour la cavité à deux miroirs, on a calculé au paragraphe 2.2.3 :  $A = 1 - \frac{2d}{R_2}$  et  $D = -\frac{2d}{R_1} + (1 - \frac{2d}{R_1})(1 - \frac{2d}{R_2})$ . La condition de stabilité peut se transformer et se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} -1 &< \frac{A+D}{2} < 1 \\ \Leftrightarrow -1 &< 1 - \frac{2d}{R_1} - \frac{2d}{R_2} + \frac{2d^2}{R_1 R_2} < 1 \\ \Leftrightarrow 0 &< 2 - \frac{2d}{R_1} - \frac{2d}{R_2} + \frac{2d^2}{R_1 R_2} < 2 \\ \Leftrightarrow 0 &< 2 \left(1 - \frac{d}{R_1}\right)\left(1 - \frac{d}{R_2}\right) < 2 \\ \Leftrightarrow 0 &< \left(1 - \frac{d}{R_1}\right)\left(1 - \frac{d}{R_2}\right) < 1 \end{aligned}$$

En introduisant les facteurs géométriques définis par

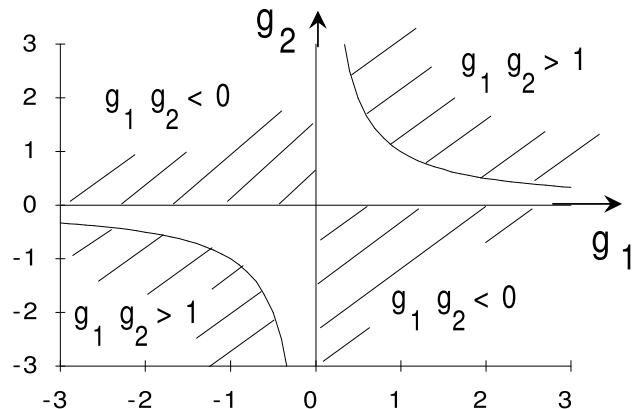
$$g_1 = 1 - \frac{d}{R_1} \quad g_2 = 1 - \frac{d}{R_2}$$

2. voir démonstration en annexe

la condition de stabilité générale devient la suivante pour une cavité à deux miroirs<sup>3</sup> :

$$0 < g_1 g_2 < 1$$

Ce critère est illustré sur le **diagramme de stabilité de la cavité à deux miroirs**, qui porte  $g_1$  en abscisse et  $g_2$  en ordonnées. La courbe en traits pleins est l'hyperbole  $g_2 = \frac{1}{g_1}$ . Un point de composantes  $(g_1, g_2)$  figurant dans la zone non hachurée du graphe correspond à une cavité stable.



### b) Exemples d'utilisation

Une cavité est formée par deux miroirs de rayons de courbure  $R_1$  et  $R_2$  distants de  $d$ . On cherche pour quelles valeurs de  $d$  cette cavité est stable.

On doit avoir  $g_1 g_2 > 0$  et  $g_1 g_2 < 1$ , avec  $g_1 g_2 = (1 - \frac{d}{R_1})(1 - \frac{d}{R_2})$ . Pour représenter graphiquement  $g_1 g_2$  en fonction de  $d$ , on cherche les valeurs de  $d$  pour lesquelles  $g_1 g_2 = 0$  ou  $1$  ainsi que les limites pour  $d$  infini.

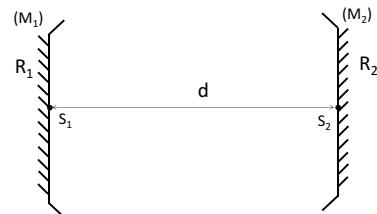
\*  $g_1 g_2 = 0$  pour  $d = R_1$  ou  $d = R_2$ .

\*  $g_1 g_2 - 1 = d [-(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}) + \frac{1}{R_1 R_2} d]$  donc  $g_1 g_2 = 1$  pour  $d = 0$  et  $d = (R_1 R_2)(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}) = R_1 + R_2$

\* asymptotes : on a  $g_1 g_2 = 1 - (\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})d + \frac{1}{R_1 R_2}d^2$ . Cette courbe est une parabole qui pour  $d$  tendant vers  $-\infty$  ou  $+\infty$  tend vers  $-\infty$  si  $(R_1 R_2) < 0$  et tend vers  $+\infty$  si  $(R_1 R_2) > 0$ .

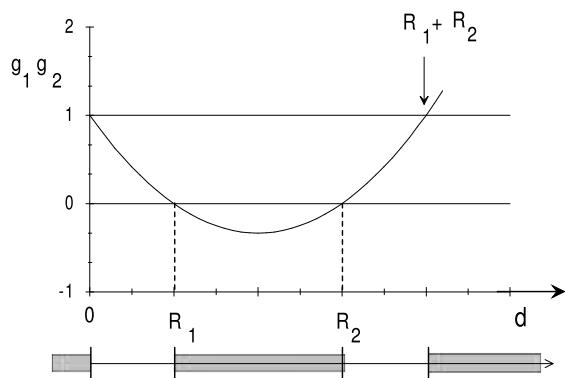
#### Cas 1 : M<sub>1</sub> et M<sub>2</sub> sont des miroirs concaves

$R_1 > 0$ ,  $R_2 > 0$  avec  $R_2 > R_1$ .



Pour  $d$  tendant vers l'infini,  $g_1 g_2$  tend vers  $+\infty$ . Les valeurs particulières calculées ci-dessus sont par ordre croissant  $0, R_1, R_2, R_1 + R_2$ .

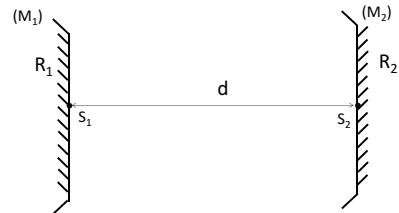
La parabole est représentée ci-contre. La cavité est stable ( $0 < g_1 g_2 < 1$ ) si et seulement si  $d \in ]0, R_1[$  ou  $d \in ]R_2, R_1 + R_2[$



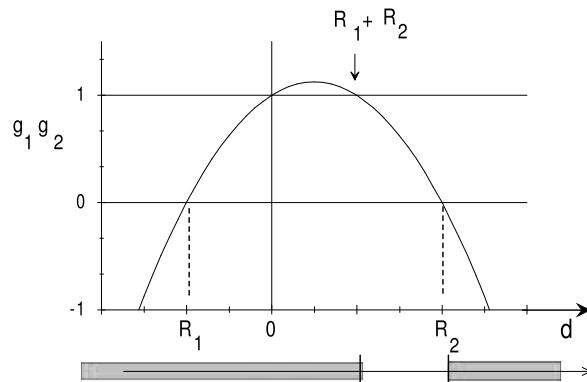
3. Attention, cette relation n'est valable que dans le cas d'une cavité à 2 miroirs.

**Cas 2 :  $M_1$  est un miroir convexe et  $M_2$  un miroir concave**

$R_1 < 0, R_2 > 0$  avec  $R_1 + R_2 > 0$ .



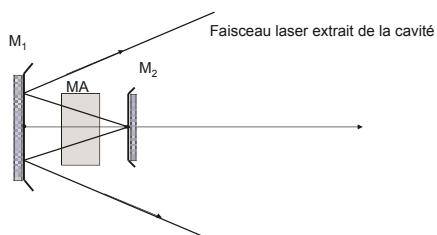
Pour  $d$  tendant vers l'infini,  $g_1 g_2$  tend vers  $-\infty$ .  
Les valeurs particulières calculées ci-dessus sont par ordre croissant  $R_1, 0, R_1 + R_2, R_2$ .  
Le graphe montre que la cavité est stable ( $0 < g_1 g_2 < 1$ ) si et seulement si  $d \in ]R_1 + R_2, R_2[$ .  
Seules les valeurs positives de  $d$  ont un sens physique.



### 2.3.3 Cavités instables

Ces cavités sont utilisables si le faisceau laser est constitué par les rayons optiques perdus géométriquement par la cavité.

Exemple de cavité instable



- \* Avantages des cavités instables : le volume du milieu amplificateur peut être très grand contrairement au cas des cavités stables où seul le volume au voisinage de l'axe est utilisé.
- \* Inconvénients : la structure transverse du faisceau présente un trou au centre (faisceau annulaire).

Un autre exemple de cavité instable est celui d'une cavité plan-plan dont l'un des miroirs est partiellement réfléchissant. Le faisceau laser est alors celui sortant sur l'axe. Comme ces cavités présentent généralement beaucoup de pertes, elles sont utilisées avec des milieux amplificateurs qui ont un fort gain  $G$  (ex : laser à CO<sub>2</sub>).

### 2.3.4 Annexe : démonstration du critère de stabilité d'une cavité

Soit  $T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  la matrice de transfert pour un parcours complet de la cavité à partir du plan  $\pi_0$ .

On caractérise un rayon incident sur  $\pi_0$  par le vecteur  $\vec{t}_0$  de composantes  $\begin{pmatrix} y_0 \\ y_0' \end{pmatrix}$ . Pour un rayon incident proche de l'axe et formant un petit angle avec celui-ci (cas des conditions de Gauss), le module  $\|\vec{t}_0\|$  doit être 'petit'.

Après  $n$  parcours complets de la cavité, le rayon au niveau de  $\pi_0$  est caractérisé par le vecteur  $\vec{t}_n \begin{pmatrix} y_n \\ y_{n'} \end{pmatrix}$ , avec

$$\begin{pmatrix} y_n \\ y_{n'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} y_0 \\ y_{0'} \end{pmatrix}$$

L'objectif de ce calcul est de prévoir si le rayon lumineux reste confiné au voisinage de l'axe optique de la cavité (cavité stable) ou s'il s'en éloigne de plus en plus (cavité instable). Pour un rayon restant près de l'axe,  $y_n$  et  $y_{n'}$  restent 'petits' donc le module du vecteur  $\vec{t}_n$  correspondant est 'petit'. Pour un rayon s'éloignant de l'axe, ce module devient 'grand'. On va donc calculer  $\|\vec{t}_n\|$  pour vérifier dans quelles conditions il 'reste petit' ou il 'devient grand'.

On effectue un changement de base pour se placer dans la base des vecteurs propres de  $T$ , base dans laquelle cette matrice s'écrit  $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ . On note  $\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_{0'} \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} \alpha_n \\ \alpha_{n'} \end{pmatrix}$  les composantes des vecteurs  $\vec{t}_0$  et  $\vec{t}_n$  dans cette base. Le module d'un vecteur se conserve dans le changement de base donc  $|\alpha_0|^2 + |\alpha_{0'}|^2 = |y_0|^2 + |y_{0'}|^2$ . Les composantes de  $\vec{t}_n$  sont calculées par la relation

$$\begin{pmatrix} \alpha_n \\ \alpha_{n'} \end{pmatrix} = T^n \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_{0'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_{0'} \end{pmatrix}$$

qui donne  $\alpha_n = (\lambda_1)^n \alpha_0$  et  $\alpha_{n'} = (\lambda_2)^n \alpha_{0'}$  donc  $\|\vec{t}_n\| = \sqrt{|\alpha_n|^2 + |\alpha_{n'}|^2} = \sqrt{|\lambda_1|^{2n} |\alpha_0|^2 + |\lambda_2|^{2n} |\alpha_{0'}|^2}$ .

Les coefficients  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont les valeurs propres de la matrice  $T$  c'est à dire les deux solutions de l'équation aux valeurs propres :

$$\begin{vmatrix} A - \lambda & B \\ C & D - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda(A + D) + AD - BC = 0$$

qui devient, en utilisant la propriété  $\det(T) = 1 \Leftrightarrow AD - BC = 1$

$$\lambda^2 - (A + D)\lambda + 1 = 0$$

On utilise les propriétés générales des racines  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  d'un polynôme du second degré :

$$\lambda^2 - (A + D)\lambda + 1 = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 \lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = A + D \end{cases}$$

Le discriminant de ce polynôme vaut  $\Delta = (A + D)^2 - 4$ , on discute le résultatat selon que  $\Delta$  soit positif ou négatif.

\*  $\Delta$  est positif pour  $|\frac{A+D}{2}| > 1$ . Les deux racines  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont réelles, on choisit pour  $\lambda_1$  celle de valeur absolue supérieure à 1, d'où  $|\lambda_2| = 1/|\lambda_1| < 1$ . Dans ce cas,  $\alpha_n = (\lambda_2)^n \alpha_{0'}$  tend vers 0 pour  $n$  grand et le vecteur  $\vec{t}_n$  tend vers celui de composantes  $\begin{pmatrix} (\lambda_1)^n \alpha_0 \\ 0 \end{pmatrix}$  dont le module augmente exponentiellement avec  $n$  puisque  $|\lambda_1| > 1$ . Le rayon lumineux caractérisé par  $\vec{t}_n \begin{pmatrix} y_n \\ y_{n'} \end{pmatrix}$  s'éloigne donc de l'axe optique, *la cavité est instable*.

\*  $\Delta$  est négatif pour  $|\frac{A+D}{2}| < 1 \Leftrightarrow -1 < \frac{A+D}{2} < 1$ . Les deux racines  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont complexes mais conjuguées puisque leur somme  $\lambda_1 + \lambda_2 = A + D$  est réelle. La condition  $\lambda_1 \lambda_2 = 1$  avec  $\lambda_2 = \lambda_1^*$  impose de plus que leurs modules valent 1 ( $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$ ). Dans ce cas, on peut montrer que  $\|\vec{t}_n\| = \|\vec{t}_0\|$  quel que soit  $n$ . Cela signifie que le rayon lumineux caractérisé par  $\vec{t}_n$  reste au voisinage de l'axe optique même après  $n$  parcours de cavité, *la cavité est stable*<sup>4</sup>.

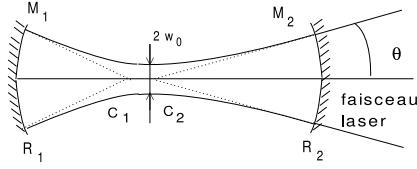
La cavité est stable si et seulement si  $-1 < \frac{A+D}{2} < 1$

4. Avec cette démonstration, on peut en principe inclure les bornes dans l'inégalité (cas où  $|\frac{A+D}{2}| = 1$ ). En pratique, les cavités correspondant à cette situation se trouvent en limite de stabilité et sont souvent beaucoup plus difficiles à régler. Elles ne permettent pas l'établissement d'un mode fondamental gaussien (voir justification au chapitre suivant).

## **Chapitre 3**

# **FAISCEAUX GAUSSIENS**

Pour décrire plus précisément le comportement de la lumière dans une cavité, la notion de rayons lumineux ne suffit plus et il faut introduire celle d'onde lumineuse. Une des ondes particulièrement importante dans les lasers est celle du '**faisceau gaussien**', appelée ainsi car sa répartition d'énergie perpendiculairement à l'axe de propagation adopte la forme d'une gaussienne. Cette structure de faisceau est très courante car elle correspond au mode possible le plus simple pour les cavités laser. Dans ce chapitre, on va voir **quels sont les paramètres qui caractérisent un faisceau gaussien** et comment ils sont reliés à la géométrie de la cavité laser choisie.



### 3.1 Généralités sur les faisceaux gaussiens

#### 3.1.1 Amplitude complexe et intensité d'une onde

Une onde électromagnétique est l'association d'un champ électrique et d'un champ magnétique oscillant au cours du temps. En un point  $O(0, 0, 0)$ , choisi comme origine du référentiel spatial, le champ électrique d'une onde monochromatique de pulsation  $\omega$  s'écrit :

$$E(0, 0, 0, t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

$E_0$  est l'**amplitude** de l'onde,  $\varphi$  est appelée la **phase à l'origine**.

Cette onde se propage dans l'espace et atteint le point  $M(x, y, z)$  après une durée de propagation  $\Delta t_{OM}$ . Le champ électrique en  $M$  à l'instant  $t$  reproduit celui en  $O$  à l'instant  $t - \Delta t_{OM}$  avec éventuellement une atténuation d'un facteur  $\alpha$ . Il s'écrit :

$$E(x, y, z, t) = \alpha E_0 \cos[\omega(t - \Delta t_{OM}) + \varphi]$$

Le terme  $[\omega(t - \Delta t_{OM})]$  représente la phase de l'onde à l'instant  $t$ . L'ensemble des points  $M$  pour lesquels la phase est identique à un instant  $t$  donné constitue **une surface d'onde**.

De façon équivalente, on peut écrire :

$$E(x, y, z, t) = \frac{\alpha E_0 \exp i[\omega(t - \Delta t_{OM}) + \varphi] + \alpha E_0 \exp -i[\omega(t - \Delta t_{OM}) + \varphi]}{2}$$

Par définition et par convention dans tout ce cours, la quantité  $\mathcal{A}(x, y, z) = \alpha E_0 \exp -i(\omega \Delta t_{OM} - \varphi)$  est l'**amplitude complexe** de l'onde au point  $M$  et  $\mathcal{A}(x, y, z) \exp i\omega t$  en constitue la **représentation complexe**.

Ceci correspond à l'écriture :

$$\begin{aligned} E(x, y, z, t) &= \frac{\mathcal{A}(x, y, z) \exp i\omega t + \mathcal{A}^*(x, y, z) \exp -i\omega t}{2} \\ &= \Re e [\mathcal{A}(x, y, z) \exp i\omega t] \end{aligned}$$

Dans ce chapitre, on travaillera avec **l'amplitude complexe des ondes**. On définira alors **l'intensité lumineuse** de l'onde par la relation :

$$I(x, y, z) = \frac{\mathcal{A}(x, y, z) \mathcal{A}^*(x, y, z)}{2\mu_0 c}$$

où  $\mu_0$  est la perméabilité magnétique du vide et  $c$  est la vitesse de la lumière dans le milieu considéré.

### 3.1.2 Amplitude complexe et intensité d'un faisceau gaussien

Les ondes pouvant s'établir dans une cavité laser sont celles dont le champ électrique est solution de l'équations de propagation de Helmholtz et vérifie les conditions aux limites imposées par la présence des éléments optiques de cavité. Une solution particulièrement intéressante pour les lasers est l'**onde (sphérique) gaussienne**, dont la forme, on le vérifiera, est parfaitement adaptée pour respecter les conditions aux limites imposées par une cavité laser.

Pour une onde gaussienne **se propageant suivant (Oz)** avec des rayons paraxiaux, l'amplitude complexe s'écrit<sup>1, 2</sup> :

$$\mathcal{A}(x, y, z) = A_0 \frac{z_R}{z_R - iz} \exp -ikz \exp -\frac{k}{z_R - iz} \frac{x^2 + y^2}{2} \quad (3.1)$$

$$= A_0 \frac{z_R}{z_R - iz} \exp -ikz \exp -k \frac{z_R + iz}{z_R^2 + z^2} \frac{x^2 + y^2}{2}$$

$$= A_0 \frac{z_R}{z_R - iz} \exp -ikz \exp -k \frac{z_R}{z_R^2 + z^2} \frac{x^2 + y^2}{2} \exp -ik \frac{z}{z_R^2 + z^2} \frac{x^2 + y^2}{2} \quad (3.2)$$

$k$  est relié à la longueur d'onde par  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , avec  $\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{2\pi c}{\omega}$ .  $k$  s'exprime en  $\text{m}^{-1}$ .

Le paramètre  $z_R$ , appelé '**paramètre de Rayleigh**', est une **quantité toujours positive**, associée à une longueur dont on donnera l'interprétation physique plus tard.

L'intensité de l'onde au point M est calculée par la relation  $I(x, y, z) = \mathcal{A}(x, y, z)\mathcal{A}^*(x, y, z)/2\mu_0c$ . A partir de la forme (3.2), on obtient ainsi :

$$I(x, y, z) = \underbrace{\frac{|A_0|^2}{2\mu_0c} \frac{z_R^2}{z_R^2 + z^2}}_{I(0, 0, z)} \exp -k \frac{z_R}{z_R^2 + z^2} (x^2 + y^2) \quad \text{avec } k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (3.3)$$

### 3.1.3 Extension latérale du faisceau gaussien

L'intensité d'un faisceau gaussien se propageant suivant (Oz) est à **symétrie de révolution** autour de l'axe (Oz). Afin de décrire le profil latéral de l'intensité du faisceau, on représente l'intensité  $I(x, 0, z)$  suivant l'axe  $x$ , à  $z$  fixé. C'est une gaussienne dont on caractérise la largeur en cherchant les valeurs  $x_1$  et  $x_2$  de  $x$  pour lesquelles<sup>a</sup>

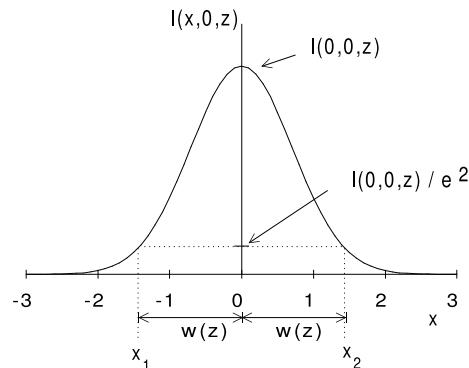
$$I(x, 0, z) = \frac{I(0, 0, z)}{e^2} = I(0, 0, z) \exp(-2) \simeq 0,135 I(0, 0, z)$$

a. Cette définition de la largeur d'un faisceau, dont l'intensité est caractérisée par une fonction mathématique d'extension infinie, est arbitraire. On pourrait tout aussi bien considérer par exemple les valeurs de  $x$  pour lesquelles l'intensité maximale a été divisée par un facteur 2. Ce choix permet juste d'avoir une forme plus 'simple' pour l'expression de la largeur  $\omega(z)$  du faisceau.

En reprenant l'équation (3.3) pour  $x = x_1$  ou  $x_2$  et  $y = 0$ , il vient

$$\exp -\frac{2\pi}{\lambda} \frac{z_R}{(z_R^2 + z^2)} x^2 = \exp -2$$

$$x_1 = -\sqrt{\frac{\lambda z_R}{\pi}} \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2} \quad x_2 = \sqrt{\frac{\lambda z_R}{\pi}} \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2}$$



1. Yariv, Optical Electronics in Modern Communications 5th p 48-53

2. On verra que cette solution correspond au cas où le plan du waist (qui sera défini plus tard dans le paragraphe 3.1.4. de ce chapitre) est situé en  $z = 0$ .

La largeur totale sur laquelle  $I(x, 0, z) > I(0, 0, z)e^{-2}$  vaut  $x_2 - x_1 = 2\sqrt{\frac{\lambda z_R}{\pi}} \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2}$ . On définit la **demi-largeur à  $1/e^2$  à la position  $z$  du faisceau** par  $\omega(z) = \frac{x_2 - x_1}{2}$ , soit

$$\omega(z) = \sqrt{\frac{\lambda z_R}{\pi}} \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2}$$

$\omega(z)$  représente aussi le rayon du faisceau défini comme celui pour lequel l'intensité est égale à  $e^{-2}$  fois l'intensité au centre. Par abus de langage, on parlera souvent plus simplement de 'la largeur  $\omega(z)$  du faisceau'. La fonction  $\omega(z)$  dépend de la position  $z$  sur l'axe, elle est minimale pour  $z = 0$  dans le cas donné ici. Le rayon minimum du faisceau vaut alors  $\omega_0 = \sqrt{\frac{\lambda z_R}{\pi}}$ . Cette grandeur est appelée le '**rayon de ceinture**' ou '**le rayon de taille**' du faisceau (**le rayon du 'waist' en anglais**). Par abus de langage, on parlera du waist d'un faisceau.

Le rayon du faisceau gaussien à la position  $z$  par rapport au plan du 'waist' ( $z = 0$ ) s'écrit donc

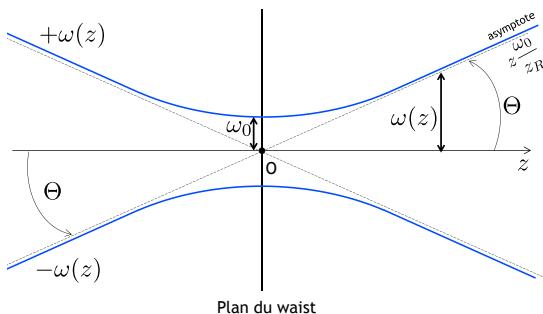
$$\omega(z) = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2}$$

Remarque : pour  $x^2 + y^2 = \omega^2(z)$ , on a par construction  $I(x, y, z) = I(0, 0, z) \exp -2$ . On peut donc écrire

$$I(x, y, z) = I(0, 0, z) \exp -2 \frac{x^2 + y^2}{\omega^2(z)}$$

### 3.1.4 Profil longitudinal et divergence du faisceau gaussien

Un diaphragme de rayon  $r = \omega(z)$  positionné sur le trajet d'un faisceau gaussien transmet 86 % de la puissance du faisceau (voir Exercice 4 du TD2). Les courbes  $\omega(z)$  et  $-\omega(z)$  donnent donc une bonne représentation du profil longitudinal selon l'axe (Oz) du faisceau gaussien.



- a) Pour  $z = 0$ ,  $\omega(0) = \omega_0$  (largeur minimale au 'waist').
- b) Pour  $z = \pm z_R$ ,  $\omega(z_R) = \sqrt{2} \times \omega_0$ . Le '**paramètre de Rayleigh**',  $z_R$ , est donc une longueur **caractéristique de la divergence** du faisceau.

- c) Pour  $z \gg z_R$ , la fonction  $\omega(z)$  tend vers une asymptote formant avec l'axe (Oz) l'angle  $\theta$  tel que :

$$\tan \theta = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\omega(z)}{z} = \frac{\omega_0}{z_R} = \frac{\omega_0}{\pi \omega_0^2 / \lambda} = \frac{\lambda}{\pi \omega_0}$$

Loin du 'waist', le faisceau gaussien est donc un cône de lumière de demi-angle au sommet  $\theta$  avec  $\tan \theta = \frac{\lambda}{\pi \omega_0} \approx \theta$  si  $\theta \ll 1$

L'angle  $\theta$  correspond à la **divergence du faisceau**. Dans la pratique, ces angles sont toujours très faibles<sup>3</sup> et  $\tan \theta \simeq \theta$ . L'angle calculé par cette formule est en radians.

Il apparaît qu'un rayon étroit pour le 'waist' est associé à  $z_R$  petit puisque  $\omega_0 = \sqrt{\frac{\lambda z_R}{\pi}}$ , et donc à une grande divergence du faisceau. Un faisceau gaussien ne peut donc pas être à la fois extrêmement étroit et très peu divergent.

Pour conclure, la forme du faisceau gaussien est donc complètement déterminée par la **position du 'waist'** et le **paramètre de Rayleigh**  $z_R$  (ou, c'est équivalent, le rayon du 'waist'  $\omega_0$ ). On retiendra

3. excepté pour les diodes lasers

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\lambda z_R}{\pi}} \Leftrightarrow z_R = \frac{\pi \omega_0^2}{\lambda} \quad \tan \theta = \frac{\omega_0}{z_R} = \frac{\lambda}{\pi \omega_0} = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi z_R}}$$

## 3.2 Propriétés du faisceau gaussien

### 3.2.1 Rayon de courbure complexe

On reprend l'expression (3.1) pour écrire le terme  $\exp -\frac{k}{(z_R - iz)} \frac{x^2 + y^2}{2}$  sous la forme  $\exp -i \frac{k}{q(z)} \frac{x^2 + y^2}{2}$ . On a :

$$\frac{i}{q(z)} = \frac{1}{z_R - iz} \Leftrightarrow q(z) = z + i z_R$$

La quantité  $q(z)$  est appelée **rayon de courbure complexe**  $q(z)$  de l'onde gaussienne.

Par la suite, on verra comment calculer  $q$  en un point H quelconque de l'axe d'une cavité repéré par  $\overline{OH} = z$ . L'écriture  $q(H) = \overline{OH} + i z_R$  montre que la partie imaginaire de  $q(H)$  est égale au paramètre de Rayleigh  $z_R$  du faisceau gaussien.

Sa partie réelle donne la position du point H par rapport à celle du 'waist' O du faisceau, elle est nulle si H est au niveau du waist. Par conséquent, le rayon de courbure complexe est un **nombre imaginaire pur dans le plan du waist** :  $q(O) = i z_R$ .

### 3.2.2 Rayon de courbure de la phase et extension latérale du faisceau

On modifie l'équation de définition de  $q(z)$  :

$$\begin{aligned} \frac{i}{q(z)} &= \frac{1}{z_R - iz} \\ &= \frac{z_R}{z_R^2 + z^2} + i \frac{z}{z_R^2 + z^2} \\ \text{avec } \frac{z_R}{z_R^2 + z^2} &= \frac{z_R}{z_R^2 [1 + (\frac{z}{z_R})^2]} = \frac{1}{z_R [1 + (\frac{z}{z_R})^2]} \\ \text{et } \frac{z}{z_R^2 + z^2} &= \frac{z}{z^2 [(\frac{z_R}{z})^2 + 1]} = \frac{1}{z [(\frac{z_R}{z})^2 + 1]} \end{aligned}$$

Le premier terme est relié au rayon  $\omega(z)$  du faisceau gaussien à la position  $z$  qui a été défini au paragraphe 3.1.3 par  $\omega(z) = \sqrt{\frac{\lambda z_R}{\pi}} \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2}$ . On écrit

$$\frac{\pi}{\lambda} \omega^2(z) = z_R \left[ 1 + \left( \frac{z}{z_R} \right)^2 \right]$$

Dans le second terme, on note :

$$R(z) = z \left[ \left( \frac{z_R}{z} \right)^2 + 1 \right] = \frac{z_R^2}{z} + z$$

Cette quantité est appelée **rayon de courbure de la phase**, dénomination qui sera commentée plus loin. On déduit l'écriture

$$\frac{i}{q(z)} = \frac{1}{z_R - iz} = \frac{\lambda}{\pi \omega^2(z)} + \frac{i}{R(z)} \Leftrightarrow \frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda}{\pi \omega^2(z)}$$

\* Application : si un calcul évalue le rayon de courbure complexe  $q$  en un point  $H$  de l'axe d'une cavité laser, la partie réelle de  $\frac{1}{q(H)}$  donne le **rayon de courbure  $R(z)$  de la phase** pour le faisceau gaussien au niveau de  $H$ . La partie imaginaire de  $\frac{1}{q}$  est reliée elle à la **largeur  $\omega(z)$  du faisceau gaussien** dans le plan de  $H$ .

\* Interprétation physique : au voisinage du point  $H(0,0,z)$ , on peut montrer (cf annexe) que la phase de l'onde gaussienne et les rayons lumineux associés correspondent à ceux d'une onde sphérique de centre  $C$  avec

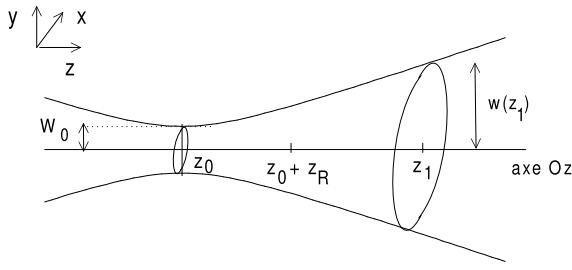
$$\overline{CH} = R(z) = z + \frac{z_R^2}{z} \Leftrightarrow \overline{OC} = \overline{OH} + \overline{HC} = z - z - \frac{z_R^2}{z} = -\frac{z_R^2}{z}$$

Pour  $z \gg z_R$ ,  $C$  tend vers  $O$ . Le faisceau gaussien correspond à un cône de lumière de centre  $O$ .

Pour  $z \ll z_R$ ,  $\overline{OC}$  tend vers  $-\infty$ . Le faisceau gaussien possède dans cette zone la forme d'un faisceau parallèle à ( $Oz$ ). Ces deux cas limites apparaissent sur le tracé du profil longitudinal du faisceau gaussien au §3.1.4

\* Remarque importante : bien que la dénomination soit proche, il ne faut pas confondre le rayon du faisceau  $\omega(z)$ , le rayon de courbure complexe  $q(z)$  et le rayon de courbure de la phase  $R(z)$ .

### 3.2.3 Relations utiles



On généralise les relations vues précédemment en considérant un faisceau gaussien d'axe ( $Oz$ ) dont le 'waist' n'est plus situé en  $z = 0$  mais dans un plan  $z = z_0$  avec le rayon de waist  $\omega_0$  et le paramètre de Rayleigh  $z_R$ . On détermine les caractéristiques de ce faisceau dans le plan  $z = z_1$  lorsque le faisceau gaussien n'est pas déformé entre  $z_0$  et  $z_1$  c'est à dire **lorsqu'il n'existe aucun système optique** entre ces deux points. :

Pour cela, on reprend les relations établies au point  $z$  pour un faisceau gaussien dont le 'waist' est situé en  $z = 0$  pour y remplacer  $z$  par  $(z_1 - z_0)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rayon de courbure complexe} \quad q(z_1) = (z_1 - z_0) + i z_R \\ \text{rayon du faisceau} \quad \omega(z_1) = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z_1 - z_0}{z_R}\right)^2} \\ \text{rayon de courbure de la phase} \quad R(z_1) = (z_1 - z_0) \left[ \left(\frac{z_R}{z_1 - z_0}\right)^2 + 1 \right] = \frac{z_R^2 + (z_1 - z_0)^2}{z_1 - z_0} \end{array} \right.$$

avec au niveau du 'waist'

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rayon de courbure complexe} \quad q(z_0) = i z_R \\ \text{rayon du faisceau} \quad \omega(z_0) = \omega_0 \\ \text{rayon de courbure de la phase} \quad R(z_0) \rightarrow \infty \end{array} \right.$$

### 3.2.4 Propagation du rayon de courbure complexe : loi 'ABCD'

On considère deux plans  $\pi_1$  et  $\pi_2$  d'équations  $z = z_1$  et  $z = z_2$ . Les rayons de courbure complexes correspondants sont notés  $q_1$  et  $q_2$ .

S'il est placé entre  $\pi_1$  et  $\pi_2$  un système optique de matrice de transfert  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ , on peut montrer<sup>4</sup> que

4. voir démonstration en annexe

la relation entre  $q_1$  et  $q_2$  s'écrit :

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D}$$

Cette loi très générale est appelée 'loi ABCD'.

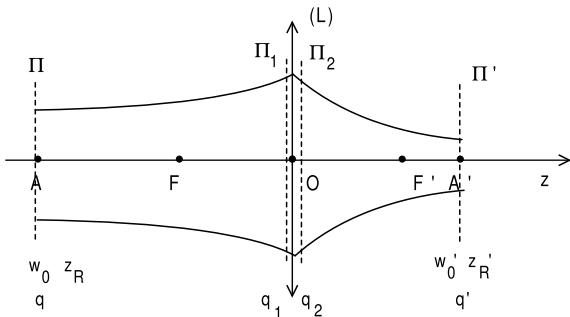
S'il n'y a aucun système optique entre ces deux plans, la propagation rectiligne d'un rayon correspond à la matrice de transfert  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & z_2 - z_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et la 'loi ABCD' entraîne  $q_2 = q_1 + z_2 - z_1$ .

### 3.2.5 Application : formule de conjugaison des 'waists' pour un faisceau gaussien

On considère un faisceau gaussien d'axe (Oz), caractérisé par  $z_R$  et de 'waist' situé en A. Ce faisceau est modifié par la traversée d'une lentille de distance focale  $f$ , centre optique O, axe (Oz). L'expérience montre que le faisceau transmis est gaussien de 'waist' situé en A' et de paramètre de Rayleigh  $z'_R$ , on va déterminer ses caractéristiques en fonction de celles du faisceau incident et de  $f$ .

Les points A et A' sont repérés par rapport respectivement au foyer objet F et au foyer image F' de la lentille, en posant  $\ell = \overline{FA}$  et  $\ell' = \overline{F'A'}$ , soit

$$\begin{cases} \frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{OF} + \overline{FA}}{\overline{OF'} + \overline{F'A'}} = -f + \ell \\ \frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{OF} + \overline{FA}}{\overline{OF'} + \overline{F'A'}} = f + \ell' \end{cases}$$



On note  $\pi$ ,  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  et  $\pi'$ , les plans situés en A, juste avant la lentille, juste après la lentille et en A'. Les rayons de courbure complexes correspondants sont  $q$ ,  $q_1$ ,  $q_2$  et  $q'$ . Dans les plans des 'waists', ils valent  $q = iz_R$  et  $q' = iz'_R$ . Le schéma est fait ici pour une lentille convergente ( $f > 0$ ).

On utilise la propagation des rayons de courbure complexes entre  $\pi$  et  $\pi_1$  ( $\pi'$  et  $\pi_2$  respectivement) pour écrire

$$\begin{cases} q_1 = q + \overline{AO} = q + (f - \ell) = (f - \ell) + iz_R \\ q_2 = q' + \overline{A'O} = q' - (f + \ell') = -f - \ell' + iz'_R \end{cases}$$

A la traversée de la lentille, la loi 'ABCD' entre  $\pi_1$  et  $\pi_2$  donne la relation

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D} \quad \text{avec} \quad \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$$

Il vient

$$\begin{aligned} q_2 &= \frac{q_1}{-\frac{q_1}{f} + 1} \\ q_2 &= f \frac{q_1}{-q_1 + f} \\ q_2 &= f \frac{(f - \ell) + iz_R}{-f + \ell - iz_R + f} \end{aligned}$$

On multiplie numérateur et dénominateur par  $(\ell - iz_R)^* = \ell + iz_R$ .

$$\begin{aligned} q_2 &= f \frac{[(f - \ell) + iz_R][\ell + iz_R]}{\ell^2 + z_R^2} \\ q_2 &= \frac{f(f\ell - \ell^2 - z_R^2)}{\ell^2 + z_R^2} + i \frac{z_R f^2}{\ell^2 + z_R^2} \\ q_2 &= \left[ \frac{f^2 \ell}{\ell^2 + z_R^2} - f \right] + i \left[ \frac{z_R f^2}{\ell^2 + z_R^2} \right] \end{aligned}$$

On identifie cette expression de  $q_2$  à celle obtenue par propagation de l'onde entre  $\pi'$  et  $\pi_2$ ,  
 $q_2 = -f - \ell' + iz'_R$ , pour obtenir

$$\begin{cases} \ell' &= -\ell \frac{f^2}{\ell^2 + z_R^2} \\ z'_R &= z_R \frac{f^2}{\ell^2 + z_R^2} \\ \omega'^2_0 &= \omega_0^2 \frac{f^2}{\ell^2 + z_R^2} \end{cases}$$

Ce sont les formules de conjugaison des 'waists'. On peut ainsi utiliser une lentille pour modifier et adapter la dimension d'un faisceau, par exemple pour faire en sorte que son rayon corresponde à celui d'un diaphragme, d'un mesureur de puissance, ou d'un système optique particulier (cristal amplificateur, cristal non linéaire, etc.)

Remarques :

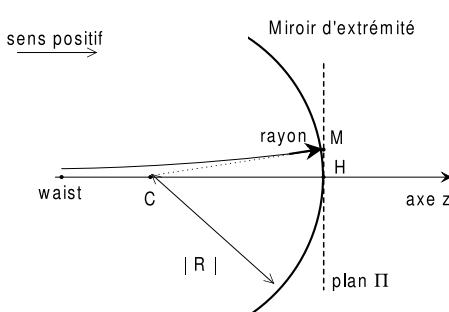
- \* Les formules établies ici l'ont été pour une lentille convergente ( $f > 0$ ). Elles gardent la même forme pour une lentille divergente ( $f < 0$ ).
- \* On a décrit une situation où le waist du faisceau incident est situé en A, avant la lentille. Il s'agit d'un waist objet réel. Les formules obtenues resteraient valables si ce waist était situé après la lentille (waist objet virtuel). Le waist image est lui aussi réel ou virtuel selon sa situation après ou avant la lentille.
- \* Attention : On ne peut pas appliquer la formule de conjugaison de Gauss aux faisceaux gaussiens car ils font intervenir la nature ondulatoire de la lumière, qui n'est pas prise en compte dans les lois de l'Optique Géométrique.

### 3.3 Mode fondamental gaussien d'une cavité stable

#### 3.3.1 Principe

On s'intéresse au faisceau gaussien s'établissant dans une cavité avec l'amplitude donnée par l'équation (3.1) : ce faisceau est appelé le **mode fondamental gaussien de la cavité**. Il est caractérisé par la position de son 'waist' et son paramètre de Rayleigh, qui permettent d'assurer que le principe suivant soit vérifié.

Une onde peut s'établir de manière stable dans une cavité si et seulement si elle se retrouve identique à elle-même après un parcours complet de la cavité, donc avec le même rayon de courbure complexe. Cette condition est valable aussi bien pour une cavité linéaire que pour une cavité en anneau.



\* Conséquence pour le cas de la **cavité linéaire** : Rappel : si en M le rayon de courbure de la phase du faisceau gaussien vaut  $R$ , alors les rayons lumineux en M sont analogues à ceux d'une onde sphérique de centre C. Ils sont portés par la direction (CM) où le point C de l'axe vérifie  $\overline{CH} = R$ .

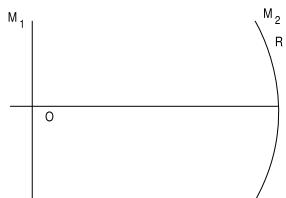
Dans une cavité **linéaire**, l'onde se réfléchissant sur un miroir d'extrémité revient identique à elle-même si les rayons lumineux associés arrivent en incidence normale sur ce miroir. Ceci est possible seulement si le rayon de courbure de la phase de l'onde gaussienne au niveau du miroir est égal en valeur absolue au rayon de courbure géométrique du miroir :  $|R(S)| = |R_{miroir}|$ . Cette règle constitue la **condition d'accord des rayons de courbure** et assure que le faisceau gaussien soit parfaitement adapté à la géométrie de la cavité.

Cette condition, appliquée aux deux miroirs situés seulement aux **extrémités** de n'importe quelle cavité **linéaire**, définit de manière unique l'onde pouvant s'établir dans cette cavité linéaire. Elle sera justifiée en annexe dans le cas d'une cavité à 2 miroirs.

### 3.3.2 Cas particuliers simples

On présente des exemples simples de cavité pour lesquels la position du 'waist' ou le calcul du paramètre de Rayleigh du faisceau gaussien qui peut s'y établir de manière durable sont immédiats.

\* Cavité linéaire dont une extrémité est un miroir plan (cf exercice 2 du TD2).



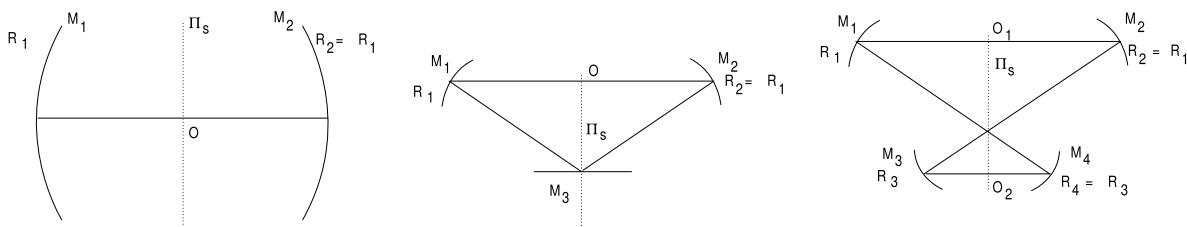
Un **miroir plan** a un **rayon de courbure infini**, tout comme le rayon de courbure de la phase d'un faisceau gaussien au niveau du plan du 'waist'. La condition d'accord des rayons de courbure appliquée à l'extrémité de la cavité au niveau de  $M_1$  fait qu'un 'waist' existe nécessairement au niveau du miroir plan.

S'il s'agit d'une cavité à deux miroirs et de longueur  $L$ , le rayon de courbure de la phase de l'onde correspond en valeur absolue au rayon de courbure  $R$  du miroir sphérique si et seulement si (résultats du paragraphe 3.2.3)

$$R = \frac{z_R^2 + L^2}{L} = L \left[ \left( \frac{z_R}{L} \right)^2 + 1 \right]$$

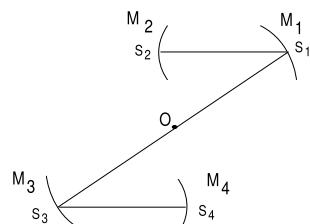
d'où l'on déduit  $z_R$  et  $\omega_0$  en fonction de  $R$  et  $L$ .

\* Cavités symétriques.



Pour une cavité possédant un plan de symétrie  $\pi_s$ , la structure du faisceau gaussien doit elle aussi être symétrique par rapport à  $\pi_s$ . Un faisceau **d'axe perpendiculaire à ce plan** est son propre symétrique par rapport à  $\pi_s$  uniquement si le 'waist' du faisceau est situé sur le plan de symétrie de la cavité (il peut y avoir plusieurs 'waists').

Le raisonnement précédent s'applique également au cas où la cavité est symétrique par rapport à un point (voir exemple ci-contre). Il existe alors nécessairement un waist confondu avec le centre de symétrie  $O$ .

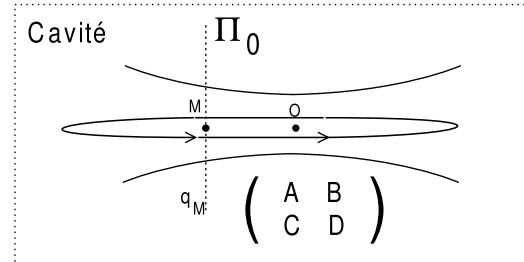


### 3.3.3 Détermination du mode fondamental gaussien dans le cas général

On décrit maintenant une méthode permettant de déterminer les caractéristiques du mode fondamental gaussien pouvant s'établir sur un tronçon d'une cavité quelconque.

Soit  $M$  un point de l'axe de cette cavité et soit  $\pi$  le plan passant par  $M$  et perpendiculaire à cet axe.

La cavité est complètement caractérisée par la matrice de transfert  $T_{\pi \rightarrow \pi} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  décrivant son parcours complet à partir de  $\pi$ .



On cherche le rayon de courbure complexe  $q_M$  au niveau de  $\pi$ . Après un parcours complet de cavité supplémentaire,  $q_M$  devient  $Q = \frac{Aq_M + B}{Cq_M + D}$  d'après la loi 'ABCD'. Or une onde établie de manière stable dans la cavité doit vérifier  $Q = q_M$ , d'où la relation

$$\begin{aligned} q_M &= \frac{Aq_M + B}{Cq_M + D} \\ \Leftrightarrow Cq_M^2 + (D - A)q_M - B &= 0 \end{aligned}$$

Cette équation fait apparaître un polynôme du second degré dont le discriminant vaut  $\Delta = (D - A)^2 + 4BC$ . En utilisant la propriété générale des matrices de transfert pour le déterminant  $AD - BC = 1$ , il devient

$$\begin{aligned} \Delta &= (D - A)^2 + 4(AD - 1) \\ &= D^2 + A^2 - 2AD + 4AD - 4 \\ &= (D + A)^2 - 4 \end{aligned}$$

Or on a défini le rayon de courbure complexe sous la forme  $q = \Re(q) + iz_R$  avec  $z_R > 0$

$\Rightarrow q_M$  est donc la racine **complexe** du polynôme. Sa partie imaginaire est non nulle si  $\Delta < 0$ , c'est-à-dire si  $(\frac{A+D}{2})^2 < 1$  soit

$$-1 < \frac{A + D}{2} < 1$$

Cette inégalité est analogue à la condition de stabilité géométrique d'une cavité énoncée au chapitre précédent.

$\Rightarrow$  la partie imaginaire de  $q_M$  doit être strictement positive puisque  $\Im(q_M) = z_R > 0$ , ce qui conduit à ne garder qu'une des deux racines complexes solution du polynôme.

On trouve finalement en  $M$  le rayon de courbure complexe :

$$q_M = -\frac{D-A}{2C} + i \left| \frac{1}{2C} \sqrt{-\Delta} \right| = \frac{A-D}{2C} + i \frac{1}{2|C|} \sqrt{4 - (D+A)^2}$$

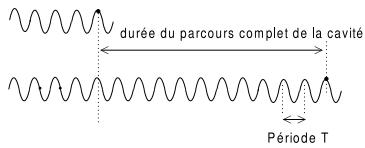
La partie imaginaire de  $q_M$  est le paramètre de Rayleigh du faisceau gaussien établi au niveau de  $\pi$ . On identifie donc  $\Im(q_M) = z_R = \left| \frac{1}{2C} \sqrt{-\Delta} \right| = \frac{1}{2|C|} \sqrt{4 - (D+A)^2}$

De plus, **s'il n'existe aucun système optique déformant le faisceau gaussien entre M et la position O du waist**, c'est à dire aucun miroir ou lentille, la partie réelle de  $q_M$  peut s'identifier à  $\Re(q_M) = \overline{OM}$  ce qui permet de déduire la position du waist par rapport à  $\pi$  avec  $\overline{OM} = -\frac{D-A}{2C}$

Connaissant  $q_M$  au niveau du point  $M$ , on peut déduire la valeur du rayon de courbure complexe en tout point de la cavité en appliquant la loi 'ABCD', ainsi que les valeurs de la largeur  $\omega$  ou du rayon de courbure de la phase  $R$  associées.

### 3.4 Modes spectraux d'une cavité laser (modes longitudinaux)

Soit  $\nu$  la fréquence de l'onde,  $\omega = 2\pi\nu$  sa pulsation et  $T = \frac{1}{\nu}$  sa période. On note  $c_0$  la vitesse de la lumière dans le vide.



On peut montrer qu'une onde peut s'établir de manière stable dans la cavité si et seulement si elle se retrouve **en phase avec elle-même** après un **parcours complet** de la cavité. Cette condition est réalisée **si le temps  $\Delta t$  d'un parcours complet de la cavité est égal à un nombre entier de fois la période  $T$  de l'onde**. Elle assure qu'il existe des interférences constructives dans la cavité entre l'onde se propageant dans un sens et celle se propageant au retour dans l'autre sens (système d'ondes stationnaires pour une cavité linéaire).

$$\Delta t = (p + 1) T \quad \text{avec } p \text{ entier positif ou nul}$$

On suppose que la cavité se décompose en une série de parcours rectilignes de longueur  $\ell_i$  dans des milieux d'indice  $n_i$  (donc avec la vitesse  $c_0/n_i$ ). On a

$$\Delta t = \sum_i \frac{\ell_i}{c_0/n_i} = \frac{\sum_i n_i \ell_i}{c_0} = \frac{\Delta L}{c_0}$$

en définissant par  $\Delta L = \sum_i n_i \ell_i$  la **longueur optique de la cavité**.

La relation  $\Delta t = (p + 1) T$  devient

$$\frac{\Delta L}{c_0} = (p + 1)T = \frac{(p + 1)}{\nu} \Leftrightarrow \nu = (p + 1) \frac{c_0}{\Delta L}$$

Une valeur donnée de  $p$  définit un **mode spectral**  $\nu_p$  de la cavité.

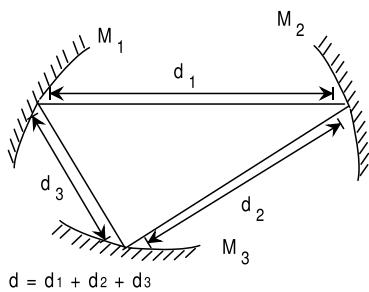
Les seules ondes pouvant s'établir dans la cavité sont celles dont la fréquence correspond à un mode spectral  $\nu_p$  de la cavité.

Pour  $\Delta L = 40$  cm et  $\lambda \simeq 0,4 \mu\text{m}$ ,  $p \simeq \frac{\nu_p \Delta L}{c_0} = \frac{\Delta L}{\lambda}$  est de l'ordre de  $10^6$ .

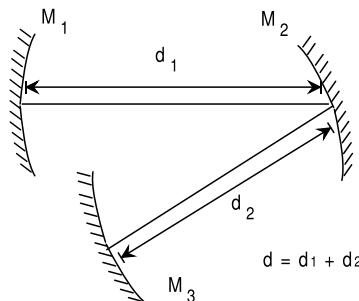
Suivant le type de laser, on peut avoir plusieurs modes spectraux dans le rayonnement, qui n'est alors pas tout à fait monochromatique. Les caractéristiques du milieu amplificateur choisi peuvent permettre de privilégier un petit nombre de modes qui seront effectivement amplifiés dans la cavité. Un rayonnement où n'existe qu'un seul mode est dit **monomode** spectral, il est considéré comme monochromatique. Un rayonnement où existent plusieurs modes est qualifié de **multimode** spectral.

Dans la pratique, le fonctionnement spectral du laser est donc défini par le couple (cavité+milieu amplificateur) choisi.

L'usage veut qu'on note  $d$  la **longueur optique totale** d'une cavité en anneau ( $d = \Delta L$ ), et  $d$  la longueur optique pour un aller d'un miroir d'extrémité à l'autre pour une cavité linéaire ( $\Delta L = 2d$ ).



cavité en anneau :  $d = d_1 + d_2 + d_3$ ,  $\Delta L = d$



cavité linéaire :  $d = d_1 + d_2$ ,  $\Delta L = 2d$

Avec cette notation , l'écart de fréquence entre deux modes spectraux consécutifs de la cavité s'écrit

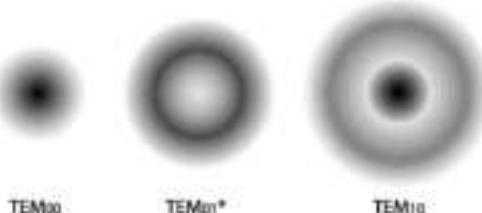
$$\delta\nu = \nu_{p+1} - \nu_p = \frac{c_0}{d} \text{ (cavité en anneau)}$$

$$\delta\nu = \nu_{p+1} - \nu_p = \frac{c_0}{2d} \text{ (cavité linéaire)}$$

### 3.5 Modes spatiaux (modes transverses)

Le mode fondamental gaussien possède une répartition de l'intensité à symétrie de révolution autour de (Oz) et décroissance gaussienne dans le plan (Oxy). Il existe d'autres ondes solutions des équations de Maxwell, possédant la même structure de phase que le mode fondamental gaussien, mais avec d'autres formes pour la répartition de l'intensité dans les plans perpendiculaires à l'axe. On les appelle 'modes transverses' ou modes spatiaux.

Deux séries de ces modes sont schématisées ci-dessous. Dans la pratique, un faisceau laser réel est une combinaison linéaire de ces modes transverses.



Modes de Laguerre-Gauss



Modes de Hermite-Gauss

Le mode le plus important est le mode  $\text{TEM}_{00}$  pour lequel l'intensité lumineuse est en une seule tache, à symétrie de révolution autour de (Oz), et décroissant de manière gaussienne en fonction de  $\sqrt{x^2 + y^2}$ . C'est le mode fondamental gaussien, qui a été décrit dans ce chapitre.

Les autres modes sont appelés *modes d'ordres supérieurs*. Ils ont une **extension latérale plus grande que celle du mode fondamental gaussien** mais la **même structure de phase**. En ajustant la dimension latérale de la cavité ou en plaçant des diaphragmes, il est possible de conserver la quasi-totalité du mode fondamental gaussien tout en atténuant suffisamment les autres pour imposer que l'effet laser se fasse sur le mode fondamental gaussien et rendre le laser monomode transverse si nécessaire.

## 3.6 Annexes

### 3.6.1 Faisceau gaussien - Onde sphérique - Onde plane

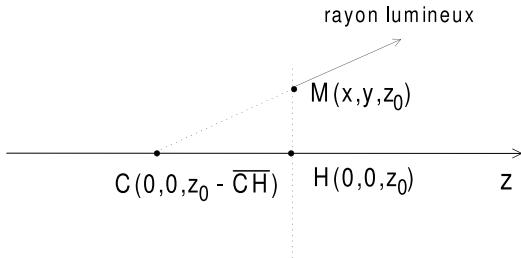
Pour un faisceau gaussien, le rayon de courbure complexe vérifie  $q(z) = z + i z_R$  et

$$\frac{i}{q(z)} = \frac{1}{z_R - iz} = \frac{\lambda}{\pi\omega^2(z)} + \frac{i}{R(z)} \Leftrightarrow \frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i\frac{\lambda}{\pi\omega^2(z)}$$

On part de l'amplitude complexe de l'onde gaussienne (3.1) pour obtenir

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x, y, z) &= A_0 \frac{z_R}{z_R - iz} \exp -ikz \exp -\frac{k}{z_R - iz} \frac{x^2 + y^2}{2} \\ \mathcal{A}(x, y, z) &= A_0 \frac{iz_R}{q} \exp -ikz \exp -\frac{2\pi i}{\lambda q} \frac{x^2 + y^2}{2} \\ \mathcal{A}(x, y, z) &= A_0 \frac{iz_R}{q} \exp -ikz \exp -\frac{2\pi \lambda}{\lambda \pi} \frac{x^2 + y^2}{2\omega^2(z)} \exp -i\frac{2\pi}{\lambda} \frac{x^2 + y^2}{2 R(z)} \\ \mathcal{A}(x, y, z) &= A_0 \frac{iz_R}{q} \exp -ikz \exp -\frac{x^2 + y^2}{\omega^2(z)} \exp -i\frac{2\pi}{\lambda} \frac{x^2 + y^2}{2 R(z)} \end{aligned}$$

Avant d'aller plus loin, on revient sur la notion d'onde sphérique pour déterminer l'amplitude complexe associée.



Soit un cône de lumière de centre  $C(0, 0, z_0 - \overline{CH})$  dans un milieu d'indice optique  $n = 1$ . Le rayon lumineux passant par  $M(x, y, z_0)$  pointe la direction de  $C$ . On suppose que le rayon se dirige de  $C$  vers  $M$  avec ici  $\overline{CH} > 0$

Le temps de propagation de cette onde de  $C$  à  $M$  vaut  $\Delta t_{CM} = \frac{CM}{c_0} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + \overline{CH}^2}}{c_0}$ . Lorsque  $M(x, y, z_0)$  est proche de  $H(0, 0, z_0)$ , on a  $|x|, |y| \ll |\overline{CH}|$  et

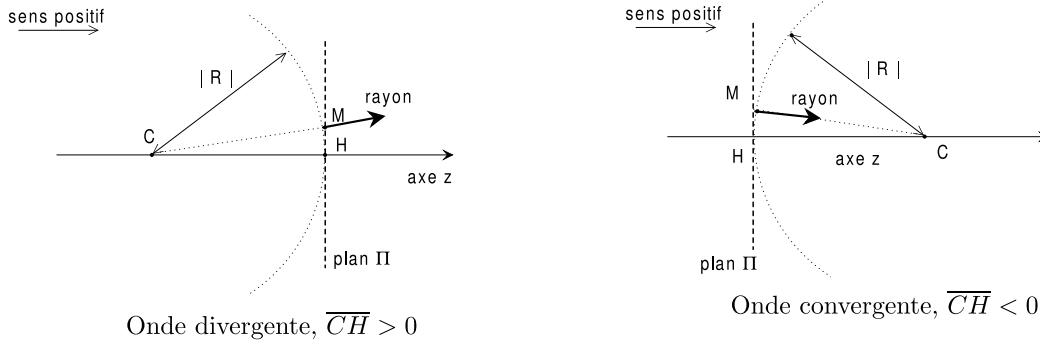
$$\begin{aligned} CM &= \overline{CH} \left( 1 + \frac{x^2 + y^2}{\overline{CH}^2} \right)^{1/2} \text{ avec ici } \overline{CH} > 0 \\ &\simeq \overline{CH} \left( 1 + \frac{x^2 + y^2}{2 \overline{CH}^2} \right) \\ &= \overline{CH} + \frac{x^2 + y^2}{2 \overline{CH}} \end{aligned}$$

L'amplitude complexe de cette onde au point  $M$  a été écrite au §3.1.1 sous la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(M) &= \alpha \mathcal{A}(C) \exp(-i \omega \Delta t_{CM}) \\ &= \alpha \mathcal{A}(C) \exp -i \omega \frac{\overline{CH}}{c_0} \exp -i \frac{\omega}{c_0} \frac{x^2 + y^2}{2 \overline{CH}} \\ &= \alpha \mathcal{A}(C) \exp -i \frac{2\pi}{\lambda} \overline{CH} \exp -i \frac{2\pi}{\lambda} \frac{x^2 + y^2}{2 \overline{CH}} \\ &= \mathcal{A}(H) \exp -i \frac{2\pi}{\lambda} \frac{x^2 + y^2}{2 \overline{CH}} \end{aligned}$$

L'onde décrite ici est un cône de lumière de sommet  $C$ . On inverse le raisonnement pour identifier une onde où la variation en  $x, y$  dans le terme de phase est de la forme  $\exp -i \frac{2\pi}{\lambda} \frac{x^2 + y^2}{2 \overline{CH}}$  dans le plan perpendiculaire en

$H$  à  $(Oz)$  à un cône de lumière de centre  $C$ . Pour  $M$  au voisinage de  $H$ , les rayons lumineux sont orthogonaux à une sphère de rayon  $\overline{CH}$ . La quantité  $\overline{CH}$  est appelée 'rayon de courbure de la phase'. Cette propriété peut être montrée pour  $\overline{CH} > 0$  (cône de lumière divergent) mais aussi pour  $\overline{CH} < 0$  (cône de lumière convergent).



Pour un faisceau gaussien, on a écrit

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(x, y, z) &= A_0 \frac{iz_R}{q} \exp -ikz \exp -\frac{x^2 + y^2}{\omega^2(z)} \exp -i\frac{2\pi}{\lambda} \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} \\ &= \underbrace{\mathcal{A}(0, 0, z) \exp -\frac{x^2 + y^2}{\omega^2(z)}}_{\text{terme d'amplitude, réel}} \underbrace{\exp -i\frac{2\pi}{\lambda} \frac{x^2 + y^2}{2R(z)}}_{\text{terme de phase}}\end{aligned}$$

avec  $R(z) = z [(\frac{z_R}{z})^2 + 1]$ . En notant  $H$  le point de coordonnées  $(0, 0, z)$ , on déduit de l'étude précédente sur la forme **de la phase** que l'onde gaussienne correspond au voisinage de  $H$  à un cône de lumière de centre  $C$  avec

$$\overline{CH} = R(z) = z + \frac{z_R^2}{z} \Leftrightarrow \overline{OC} = \overline{OH} + \overline{HC} = z - z - \frac{z_R^2}{z} = -\frac{z_R^2}{z}$$

Pour  $z \gg z_R$ ,  $C$  tend vers  $O$ . Le faisceau gaussien correspond à un cône de lumière de centre  $O$ . Pour  $z \ll z_R$ ,  $\overline{OC}$  tend vers  $-\infty$ . Le faisceau gaussien correspond alors à un faisceau parallèle.

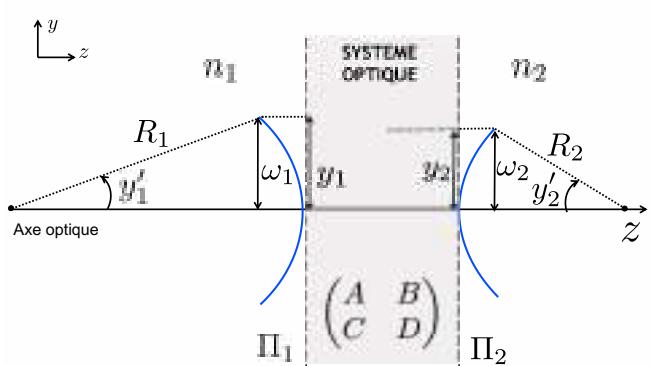
### 3.6.2 Démonstration de la loi 'ABCD'

On considère un système optique délimité par les plans  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$  et pour lequel on connaît la matrice de transfert  $T_{\Pi_1 \rightarrow \Pi_2} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ .

La démonstration de la loi 'ABCD' se fait **dans le cadre de l'approximation scalaire** de la lumière, pour laquelle on considère que  $\lambda \ll \omega(z)$ . On s'appuie sur le schéma ci-contre qui fait apparaître les limites du faisceau incident sur le système optique correspondant à la demi-largeur  $\omega_1$  (définie pour l'intensité valant  $I(0, 0, z)/e^2$ ).

On fait la correspondance entre les quantités  $y$  et  $y'$  introduites dans le chapitre II pour l'étude des cavités, et les grandeurs  $\omega$  et  $R$  (rayon de courbure de la phase) définies pour le faisceau gaussien, au niveau des plans  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$ .

$$\text{On a } \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = y_1 \\ R_1 = \frac{y_1}{y'_1} \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} \omega_2 = y_2 \\ R_2 = \frac{y_2}{y'_2} \end{array} \right.$$



D'après la définition de la matrice de transfert, on a :  $\begin{cases} y_2 &= Ay_1 + By'_1 \\ y'_2 &= Cy_1 + Dy'_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y'_1 &= \frac{y_2 - Ay_1}{B} \\ y'_2 &= Cy_1 + Dy'_1 \end{cases}$  (1)

Par ailleurs  $\det(T_{\Pi_1 \rightarrow \Pi_2}) = AD - BC = \frac{n_1}{n_2}$  (3)

On définit également les longueurs d'onde dans le milieu d'indice  $n_1$ ,  $\lambda_1 = \frac{\lambda_0}{n_1}$  et dans le milieu d'indice  $n_2$ ,  $\lambda_2 = \frac{\lambda_0}{n_2}$ , où  $\lambda_0$  est la longueur d'onde de la lumière dans le vide.

Pour établir la loi 'ABCD', il est plus simple de raisonner avec l'inverse du rayon de courbure complexe  $\frac{1}{q_2}$

$$\text{et de montrer que } \frac{1}{q_2} = \frac{Cq_1 + D}{Aq_1 + B} = \frac{C + \frac{D}{q_1}}{A + \frac{B}{q_1}}$$
 (4)

Pour cela, on part de la définition de  $\frac{1}{q_2}$  :

$$\frac{1}{q_2} = \frac{1}{R_2} - i \frac{\lambda_2}{\pi \omega_2^2} = \frac{y'_2}{y_2} - i \frac{\lambda_2}{\pi y_2^2} = \frac{Cy_1 + Dy'_1}{Ay_1 + By'_1} - i \frac{\lambda_2}{\pi y_2^2}$$

$$\text{En utilisant la relation (1) pour remplacer } y'_1 : \frac{1}{q_2} = \frac{Cy_1 + \frac{D}{B}y_2 - \frac{AD}{B}y_1}{Ay_1 + y_2 - Ay_1} - i \frac{\lambda_2}{\pi y_2^2} = \frac{(BC - AD)y_1 + Dy_2}{By_2} - i \frac{\lambda_2}{\pi y_2^2}$$

$$\text{Compte-tenu de la relation (3), on doit donc avoir : } \frac{1}{q_2} = \frac{-\frac{n_1}{n_2}y_1 + Dy_2}{By_2} - i \frac{\lambda_2}{\pi y_2^2}$$
 (5)

On va montrer qu'on retrouve l'expression (5) à partir de l'expression (4) :

$$\frac{1}{q_2} = \frac{C + \frac{D}{q_1}}{A + \frac{B}{q_1}} = \frac{C + D(\frac{1}{R_1} - i \frac{\lambda_1}{\pi \omega_1^2})}{A + B(\frac{1}{R_1} - i \frac{\lambda_1}{\pi \omega_1^2})} = \frac{C + D(\frac{y'_1}{y_1} - i \frac{\lambda_1}{\pi y_1^2})}{A + B(\frac{y'_1}{y_1} - i \frac{\lambda_1}{\pi y_1^2})} = \frac{C + D \frac{y'_1}{y_1} - i \frac{\lambda_1 D}{\pi y_1^2}}{A + B \frac{y'_1}{y_1} - i \frac{\lambda_1 B}{\pi y_1^2}}$$

$$\text{En utilisant la relation (1) : } \frac{1}{q_2} = \frac{C + \frac{D}{B} \frac{y_2}{y_1} - \frac{AD}{B} - i \frac{\lambda_1 D}{\pi y_1^2}}{A + \frac{y_2}{y_1} - A - i \frac{\lambda_1 B}{\pi y_1^2}} = \frac{1}{B} \frac{BC - AD + D \frac{y_2}{y_1} - i \frac{\lambda_1 BD}{\pi y_1^2}}{\frac{y_2}{y_1} - i \frac{\lambda_1 B}{\pi y_1^2}} = \frac{-\frac{n_1}{n_2} + D \frac{y_2}{y_1} - i \frac{\lambda_1 BD}{\pi y_1^2}}{B \frac{y_2}{y_1} - i \frac{\lambda_1 B^2}{\pi y_1^2}}$$

En multipliant au numérateur et au dénominateur par  $B \frac{y_2}{y_1} + i \frac{\lambda_1 B^2}{\pi y_1^2}$  puis par  $y_1^2$  on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{q_2} &= \frac{-\frac{n_1}{n_2} B \frac{y_2}{y_1} + BD(\frac{y_2}{y_1})^2 + \frac{\lambda_1^2 B^3 D}{\pi^2 y_1^4}}{B^2(\frac{y_2}{y_1})^2 + \frac{\lambda_1^2 B^4}{\pi^2 y_1^4}} - i \frac{\frac{n_1}{n_2} \frac{\lambda_1 B^2}{\pi y_1^2} + \frac{B^2 D \lambda_1 y_2}{\pi y_1^3} - \frac{\lambda_1 B^2 D y_2}{\pi y_1^3}}{B^2(\frac{y_2}{y_1})^2 + \frac{\lambda_1^2 B^4}{\pi^2 y_1^4}} \\ &= \frac{-\frac{n_1}{n_2} B y_2 y_1 + BD \left( y_2^2 + \frac{\lambda_1^2 B^2}{\pi^2 y_1^2} \right)}{B^2 y_2^2 + \frac{\lambda_1^2 B^4}{\pi^2 y_1^2}} - i \frac{\frac{n_1}{n_2} \frac{\lambda_1 B^2}{\pi}}{B^2 y_2^2 + \frac{\lambda_1^2 B^4}{\pi^2 y_1^2}} \\ &= \frac{-\frac{n_1}{n_2} B y_2 y_1 + BD \left( y_2^2 + \frac{\lambda_1^2 B^2}{\pi^2 y_1^2} \right)}{B^2 \left( y_2^2 + \frac{\lambda_1^2 B^2}{\pi^2 y_1^2} \right)} - i \frac{\frac{n_1}{n_2} \frac{\lambda_1 B^2}{\pi}}{B^2 \left( y_2^2 + \frac{\lambda_1^2 B^2}{\pi^2 y_1^2} \right)} \end{aligned}$$

On remarque que  $\frac{n_1}{n_2} \lambda_1 = \lambda_2$ . Par ailleurs,  $B$  représente typiquement la longueur effective du système optique traversé et prend des valeurs entre quelques mm et quelques mètres. Dans l'approximation scalaire, on a  $\lambda_i \ll y_i$  avec des valeurs typiques de moins de  $1\mu\text{m}$  pour  $\lambda_i$  et de plus de  $100\mu\text{m}$  pour  $y_i$ . Par conséquent le terme  $\frac{\lambda_1^2 B^2}{\pi^2 y_1^2}$  est toujours très inférieur au terme  $y_2^2$  et on le négligera dans l'expression trouvée ci-dessus.

Cette simplification conduit alors à :

$$\frac{1}{q_2} = \frac{-\frac{n_1}{n_2} B y_2 y_1 + BD y_2^2}{B^2 y_2^2} - i \frac{\lambda_2}{\pi y_2^2} = \frac{-\frac{n_1}{n_2} y_1 + Dy_2}{By_2} - i \frac{\lambda_2}{\pi y_2^2} \text{ qui est l'expression (5) attendue.}$$

### 3.6.3 Démonstration de la règle d'accord des rayons de courbure dans le cas d'une cavité à 2 miroirs

Pour vérifier directement que le rayon de courbure de l'onde au niveau d'un miroir d'extrémité de cavité correspond bien au rayon de courbure du miroir, on reprend le raisonnement du §3.3.3 en écrivant le polynôme en fonction de  $\frac{1}{q}$ .

$$C + (D - A)\left(\frac{1}{q}\right) - B\left(\frac{1}{q}\right)^2 = 0$$

$\frac{1}{q}$  possède une partie imaginaire négative, c'est la racine du polynôme dont la partie imaginaire est négative :

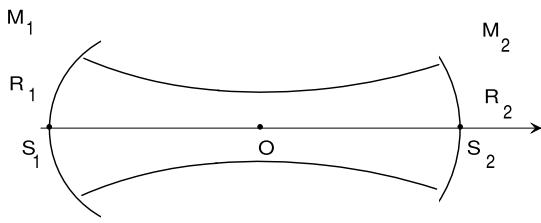
$$\frac{1}{q} = \frac{D - A}{2B} - \left| \frac{1}{2B} \sqrt{-\Delta} \right|$$

qui, par identification des parties réelles et imaginaires avec l'expression  $\frac{1}{q} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda}{\pi \omega^2(z)}$ , détermine les quantités  $R(z)$  et  $\omega(z)$  du faisceau dans le plan  $\pi$ .

Dans le cas d'une cavité à 2 miroirs, les coefficients  $A, B, C$  et  $D$  sont donnés au §2.2.2.3.e) pour une onde se propageant à partir du plan  $\pi$  accolé à  $M_1$ . On peut vérifier que

$$\frac{1}{R} = \frac{D - A}{2B} = -\frac{1}{R_1}$$

Le rayon de courbure de la phase en  $\pi$  correspond bien en valeur absolue au rayon de courbure du miroir  $M_1$ . Ce résultat justifié ici pour une cavité à deux miroirs se démontre d'une manière analogue pour une cavité linéaire quelconque.



Remarque importante : Pour une cavité linéaire dont les deux miroirs d'extrémité sont concaves, on a  $R_1 > 0$  et  $R_2 < 0$ . Pour le faisceau gaussien, le rayon de courbure de la phase est positif après le waist mais négatif avant. La figure montre que les rayons lumineux associés à l'onde arrivent en incidence normale sur  $M_1$  et  $M_2$  si on a  $R(S_2) = R_2$  et  $|R(S_1)| = R_1$  avec  $|R(S_1)| = -R(S_1)$ .