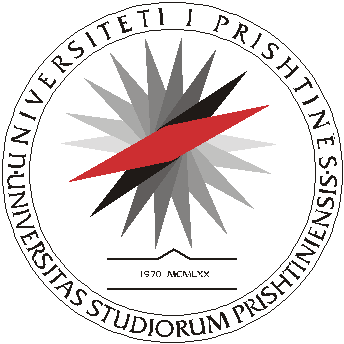
**UNIVERSITETI I PRISHTINËS**

**“Hasan Prishtina”**

**Fakulteti i Shkencave Matematike – Natyrore  
Shkencë Kompjuterike**



**Pika fikse për funksione me disa variabla**

# Studentet:

**Donika Cakolli**

**Doruntina Osmani**

# Pika fikse për funksione me disa variabla

Një sistem me ekuacione jolineare ka formën f1(x1, x2,…,xn) = 0 , f2(x1, x2,…,xn) = 0, … fn(x1, x2,…,xn) = 0, ku secili funksion mund të sherbejë si një vektor x = (x1, x2,…,xn)t i një hapësire n dimensionale Rn në bashkësinë R. Një paraqitje gjeometrike është edhe kur sistemi jolinear ka n = 2 si në figurë. Ky system i n ekuacioneve jolineare dhe n të panjohurve mund të definohet nga një funksion F nga bashkësia Rn si

F(x1, x2,…,xn) = (f1(x1, x2,…,xn), f2(x1, x2,…,xn),…, fn(x1, x2,…,xn))t.

Nëse forma e vektorit është përdorur për të paraqitur variablat x1, x2,…,xn atëherë sistemi ka formën

F(x) = 0.

Funksionet f1, f2,…,fn quhen koordinatat e funksionit F.

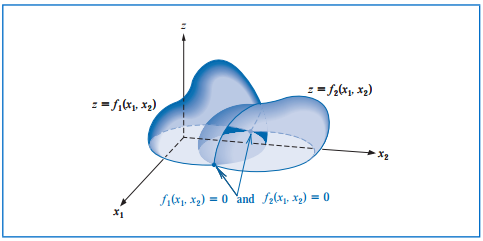


Figura 1.

Shembull.1. Shëndrro sistemin jolinear 3x3 ne forme te F(x) = 0.

3x1 − cos(x2 x3) – 1/2 = 0,

x1 2 − 81(x2 + 0.1) 2 + sin x3 + 1.06 = 0,

e-x1x2 + 20x3 + 10π – 3/3 = 0

Zgjidhje: Defino tri koordinatat e funksionit f1, f2, f3, nga bashkësia R3 në R.

f1(x1, x2, x3) = 3x1 − cos(x2 x3) – 1/2 ,

f2(x1, x2, x3) = x1 2 − 81(x2 + 0.1) 2 + sin x3 + 1.06,

f3(x1, x2, x3) = e-x1x2 + 20x3 + 10π – 3/3 ,

Pastaj defino funksionin F nga R3 ne R3,

F(x) = F(x1, x2, x3)

= (f1(x1, x2, x3), f2(x1, x2, x3), f3(x1, x2, x3))t

=( 3x1 − cos(x2 x3) – 1/2 x1 2 − 81(x2 + 0.1) 2 + sin x3 + 1.06, e-x1x2 + 20x3 + 10π – 3/3) t .

Për vazhdimin e zgjidhjes duhet ti paraqesim disa koncepte mbi limitin dhe vazhdueshmërinë e funksionit nga bashkësia Rn në R.

Definicion.1. Le të jetë f një funksion i definuar në bashkësinë D⊂ Rn në R. Për funksioni f themi se ka limit L në pikën x0 dhe shënohet

lim x→x0 f (x) = L,

nëse ipet një numër ε > 0, dhe një numër δ > 0 ekziston e tillë që

|f (x) − L| < ε,

ashtu që x ∈ D dhe

0 < ||x − x0|| < δ.

Nocioni mbi limitin na lejon që të definojmë vazhdueshmërinë për funksionet nga bashkësia Rn në R.

Definicion.2. Le të jetë f një funksion i definuar në bashkësinë D⊂ Rn në R. Funksioni F është i vazhdueshëm në pikën x0 ∈ D ashtu që lim x→x0 f (x) ekziston dhe

lim x→x0 f (x) = f (x0).

Pra, f është i vazhdueshëm në bashkësinë D nëse f është i vazhdueshëm në cdo pikë të kësaj bashkësie. Kjo shprehet me anë të f ∈ C(D).

Tani mund të definojmë limitin dhe vazhdueshmërinë si koncepte për funksionet nga bashkësia Rn në Rn duke marrë koordinatat e funksioneve nga Rn në R.

Definicion.3. Le të jetë F një funksion nga D ⊂ Rn ne Rn në formën

F(x) = (f1(x), f2(x), ... , fn(x))t

Ku fi gjendet nga Rn në R për cdo i. Kështu definohet

lim x→x0 F(x) = L = (L1, L2, ... , Ln) t,

atëherë dhe vetëm atëherë kur limx→x0 fi(x) = Li, për cdo i = 1,2,…,n.

Funksioni F është i vazhdueshëm në x0 ∈ D ashtu që lim x→x0 F(x) ekziston dhe lim x→x0 F(x) = F(x0). Funksioni F është i vazhdueshëm në bashkësinë D nëse F është i vazhdueshëm në cdo pikë të tij. Pjesë kjo e cila shënohet f ∈ C(D). Për funksionet nga R në R, vazhdueshmëria mund të dëshmohet duke diferencuar atë funksion.

Teoreme.1. Le të jetë F një funksion nga D ⊂ Rn dhe x0 ∈ D. Supozojmë se të gjitha derivatet parciale të funksionit f ekzistojnë dhe konstantet δ > 0 dhe K > 0 ekzistojnë ashtu që x − x0 < δ dhe x ∈ D, kemi

|∂f (x)/ ∂xj| ≤ K, per qdo i = 1,2,…,n.

Atëherë funksioni f është i vazhdueshëm në pikën x0.

Definicion.3. Një funksion **G** nga D⊂ R*n*  në R*n*  ka pikë fikëse në pikën **p** ∈ *D* në **G**(**p)**= **p.**

**Teorema.2.** Le të jetë D= {*(x*1, *x*2, *. . .* , *xn)t* | *ai* ≤ *xi* ≤ *bi*, për cdo *i* = 1, 2, *. . .* , *n* } për një numër të constant *a*1, *a*2, *. . .* , *an* dhe *b*1, *b*2, *. . .* , *bn* . Supozojmë se **G** është një funksion i vashdueshëm nga D⊂ R*n* në R*n*  ku **G**(**x**)∈ *D* për cdo **x** ∈ *D*. Atëherë funksioni **G ka pikë fikëse në** D.

Për më tepër supozojmë se të gjitha komponentët e funksioneve të **G** kanë derivate parciale të vazhdueshmedhe ekziston konstanta *K <* 1 .

Kur x ∈ *D,* për cdo *j* = 1, 2, *. . .* , *n* dhe për cdo komponentë të *gi*. Athëherë vargu *k*0

i definuar nga një zgjedhje arbitrare **x**(0)në Ddhe gjeneruar nga

**x**(k) = G(**x**k-1), për cdo k ≥ 1

konvergjon në pikë të vetme fikse **p** ∈ *D* dhe

Për shembullin e parë tani mund të gjejmë funksionet për secilën variabël me vlerat fillestare x(0) = (0.1, 0.1, -0.1)t:

x1 = 1/3 cos(x2 x3) + 1/6

x2 = 1/9 (x1 2 +sinx3 + 1.06)1/2  – 0.1

x3 = - 1/20\* e-x1x2 – (10𝝿 – 3)/60

Kështu duke nisur nga vlerat fillestare bëhet llogaritja e secilit funksion x2, x3 :

x1 (k)= 1/3 cos(x2(k-1)x3(k-1)) + 1/6

x2(k)= 1/9 (x1(k-1) 2 +sinx3(k-1) + 1.06)1/2  – 0.1

x3 = - 1/20\* e-x1(k-1) x2(k-1) – (10𝝿 – 3)/60

Për të arritur më shpejtë tek rezultati apo pika fikse e këtyre funksioneve atëherë gjatë llogaritjes së funksionit aktual merret rezultati i funksionit paraprak apo të iterimit aktual.

Për të gjetur pikën fikse të funksioneve me shumë variabla na duhet të gjejmë poashtu domenën , rangun dhe derivatin parcial .

Domena dhe Rangu

Domena e funksionet paraqet vlerat për të cilat funksioni ekziston dhe është valid. Ajo ndryshon në bazë të funksionit. Cdo funksion specifik ka edhe kufizimet specifike psh:

f(x, y) = ashtu që − 1 < x < 1, −1 < y < 1

Disa kufizime që duhet t’i dimë për domenën :

* Nuk mund të marrin numër negativ nën shenjën e rrënjes psh:

*Nëse kemi f(x, y) = √ 2x + 3y atëherë kjo vlen vetëm kur 2x + 3y ≥ 0.*

* Nuk mund të pjestojmë me zero psh :

*Nëse f(x, y, z)= , kjo vlen vetëm kur .*

* Nuk mund të merret log() i një numri negativ psh :

*Nëse atëherë domena kërkon që*

Rangu i Funksionit

Rangu i funksionit paraqet bashkësinë e të gjitha vlerave të mundëshme që mund të mirren si rezultat . Kështu psh : Nëse ekziston funksioni atëherë dimë që z = f(x, y, z) ≥ 0.

Shembull:

Gjeni domenën dhe rangun e funksionit

Domena është e gjithë bashkësia e (x,y) që ose .

Rangu është të gjitha vlerat e bashkësis Z përpos Z=0.

Derivati Parcial

Le të jetë f(x, y) një funksion me 2 variabla . Derivati parcial i f(x, y) respektivisht i x-it, është i definuar nga :

për ndonjë vlerë të x ose y për të cilin ekziston limiti.

Derivati parcial i f(x, y) respektivisht i y-it, është i definuar nga :

për ndonjë vlerë të x ose y për të cilin ekziston limiti.

Për të llogaritur derivatin parcial , ne i shfrytëzojmë rregullat e derivatit të zakonshëm duke e konsideruar njërën të panjohur x ose y si konstantë .

Shënim .

Nëse z = f(x, y), = zx = fx = f1(x, y) = Dx(f(x, y)) = (x, y) dhe

= zy = fy = f2(x, y) = Dy(f(x, y)) = (x, y).

Paraqitja e funksioneve me shumë variabla përmes grafeve

Zakonisht kur kemi të bëjmë me funksione provojmë që funksionet ti paraqesim përmes grafeve. Sido që të jetë kur mendojmë për paraqitjen e funksionit përmes grafeve neve na paraqitet një problem. Për t’a paraqitur funksionin me një variabël (y = f(x)) na duhet të vizatojmë grafin duke përdorur dy dimensione njërën për domenë dhe tjetrën për vlerë. Për të vizatuar grafin e funksionit me 2 variabla na duhen tri dimensione për të plotësuar grafin z = f(x, y). Grafit të funksionit f(x, y, z) i nevojiten 4 dimensione. Tri dimensione i nevojiten për hapsirë për paraqitjen e 3 pikave të domenës (x, y, z). Dimensioni i 4-te na nevojitet për vlerë. Pra, kjo do të thotë që këtë nuk mund ta shohim në realitet.

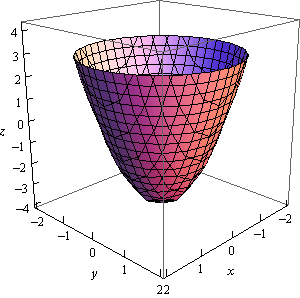
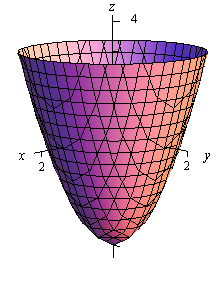


Figura 2. Grafi për ekuacionin*:http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/CalcIII/MultiVrbleFcns_files/empty.gif*

Pikat kritike të funksionit me shumë variabla

Pika kritike e funksionit me shumë variabla është pika ku derivati i parë parcial është 0.

Shembull: Gjeni pikën kritike të funksionit f të definuar nga : dhe paraqitni grafikisht.

Së pari gjejmë derivatin e x respektivisht y :

fx(x,y) = 2x

fy(x,y) = 2y

Zgjidhim ekuaconet e formës fx(x,y) = 0 dhe fy(x,y) = 0:

fx(x,y) = 2x = 0   
  
fy(x,y) = 2y = 0

Zgjidhja e sistemit të mësipërm është cifti (0,0)

Paraqitja grafike :

Në grafik vërehet që pika kritike(0,0) e funksionit paraqet minimumin.

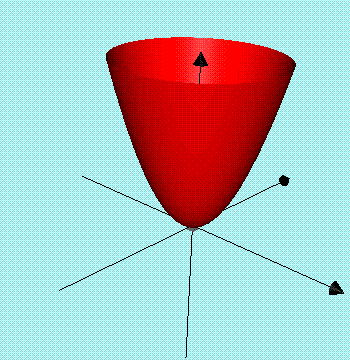


Figura 3.

Shembuj të përdorimit të funksioneve me disa variabla

Metoda e iterimit me pikë fikse dhe funksionet me disa variabla kanë përdorim në shumë raste. Si zbatim të metodës së iterimit me pikë fikse të funksioneve me disa variabla mund të marrim problemin e gjetes së kohës që i duhet një objekti me masë m për ta goditur tokën i cili lëshohet nga një lartësi e caktuar.  
Si funksion iterativ mund të marrim funskionin për gjetjen e lartësisë së një objekti pas një kohe të caktuar i cili është :

Dhe për të arritur deri te një funksion I cili me anë të iterimit mund të gjejë kohën që i duhet objektit për të goditur tokën atëherë duhet ta transformojmë funksionin në formën dhe këtë mund ta bëjmë duke e barazuar s dhe duke shumëzuar me . Me kryerjen e këtyre transformimeve arrijmë deri te funksioni i duhur për problemin tonë.

Ky funksion ka parametra lartësinë fillestare nga e cila hidhet objekti , masën e trupit , forcën tërheqëse të gravitetit të shprehur në , koeficientin e rezistencës së ajrit ose materialit që e përmbush hapësirën në të cilën hidhet objekti si dhe koha .

Një rast tjetër për të cilin edhe kemi ndërtuar kodin është:

Bankat mund të përdorin një funksion të tillë për të llogaritur pagesën mujore apo këstin mujor që bën konsumatori për kthimin e kredisë që ka marrë në bankë. Për t’a llogaritur pagesën mujore *M* që duhet të bëjë konsumatori duhet të dijmë:

* *P* - shuma që ka marrë konsumatori
* *T* - për sa vjet e ka marr
* *R* - përqindja e interesit për të cilën i është dhënë shuma

Shembull : Gjeni pagesën mujore që duhet të bëjë konsumatori nëse ai ka marrë kredi €3000 për blerjen e shtëpisë në periudhë pagese për 2 vjet dhe me interes 5%.

Shifra e fituar 131.61€ tregon pagesën mujore që do të bëjë kredi marrësi për periudhën kohore 2 vite(24 muaj) me interes 5%.

# Referencat

1.Numerical Analysis , 9th edition – Richard L.Burden, J. Douglas Faires – Fixed Point for functions with several variables

2. <http://www.analyzemath.com/calculus/multivariable/critical_points.html>

3. <http://www.math.usm.edu/lambers/mat461/spr10/lecture22.pdf>

4. <http://www.staff.ttu.ee/~lpallas/functions_of_n_variables.pdf>

5. <http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/CalcIII/MultiVrbleFcns.aspx>

6.http://mcs156.cankaya.edu.tr/uploads/files/Functions%20of%20Several%20Variables%20and%20Partial%20Differentiation.pdf