

Vorlesungsskript SS 2018

# Stochastische Geometrie

Prof. Dr. Daniel Hug, Prof. Dr. Günter Last

24. Juni 2020

geteXt von

Pascal Bähke, Julia Hörrmann, Marius Leonhardt, Sebastian Ziesche

überarbeitet und um einige Beispiele ergänzt von Steffen Winter

(Grau gekennzeichnete Textabschnitte wurden in der Vorlesung im SS 2018 nicht behandelt oder nur angeschnitten. )

Institut für Stochastik

Karlsruher Institut für Technologie



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>3</b>
1.1	Zufällige geometrische Strukturen . . . . .	3
1.2	Fragestellungen . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Keim-Korn-Modelle und das Boolesche Modell</b>	<b>4</b>
2.1	Grundlegende Definitionen . . . . .	4
2.2	Stationäre Keim-Korn-Modelle . . . . .	8
2.3	Das Boolesche Modell . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Zufällige abgeschlossene Mengen und Punktprozesse</b>	<b>14</b>
3.1	Zufällige abgeschlossene Mengen . . . . .	14
3.2	Zufällige Maße und Punktprozesse . . . . .	18
3.3	Poissonprozesse . . . . .	23
3.4	Stationarität . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Das Boolesche Modell</b>	<b>32</b>
4.1	Das Kapazitätsfunktional . . . . .	33
4.2	Partikelprozesse . . . . .	38
4.3	Die Steinersche Formel . . . . .	43
4.4	Das Boolesche Modell mit konvexen Körnern . . . . .	48
<b>5</b>	<b>Dichten innerer Volumina</b>	<b>51</b>
5.1	Geometrische Dichten von Partikelprozessen . . . . .	51
5.2	Geometrische Dichten von Keim-Korn-Modellen . . . . .	52
5.3	Integralgeometrie (Überblick) . . . . .	56
5.4	Geometrische Dichten des Booleschen Modells . . . . .	68
5.5	Ebenenprozesse (nicht behandelt) . . . . .	71
<b>6</b>	<b>Zufällige Mosaike</b>	<b>72</b>
6.1	Definitionen . . . . .	72
6.2	Palmsche Wahrscheinlichkeitsmaße . . . . .	74
6.3	Allgemeine Mittelwertformeln . . . . .	78
6.4	Poisson-Voronoi-Mosaike (nicht mehr behandelt) . . . . .	86

# 1 Einführung

## 1.1 Zufällige geometrische Strukturen

1. Zufällige abgeschlossene Mengen
2. Systeme konvexer Partikel und deren Vereinigung (Keim-Korn-Modell). Die Keime bilden einen Punktprozess.
3. Systeme von Hyperebenen
4. Mosaik: Unterteilung des Raumes in paarweise “disjunkte” konvexe Gebiete. Beispiele sind Voronoi- und Hyperebenenmosaik.
5. Exkursionsmengen reellwertiger zufälliger Felder  $(X_t)_{t \in I}$ ,  $I \subset \mathbb{R}^d$ :

$$Z := \{t \in I : X_t \geq c\}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

## 1.2 Fragestellungen

Sei  $Z$  eine Vereinigung von Partikeln oder von Teilen (z.B. Kanten) von Partikeln o.Ä. Gegeben seien (geometrische) reelle Funktionale  $f_1, \dots, f_m$  (z.B. Volumen, Oberfläche, Euler-Charakteristik, etc.).

1. Gilt  $\lim_{W \uparrow \mathbb{R}^d} V_d(W)^{-1} f_i(Z \cap W) = \bar{f}_i$   $\mathbb{P}$ -f.s.?
2. Gilt  $\lim_{W \uparrow \mathbb{R}^d} V_d(W)^{-1} \text{Cov}(f_i(Z \cap W), f_j(Z \cap W)) = \sigma_{ij}$ ? Wie sehen die  $\sigma_{ij}$  in Abhängigkeit von den Eingangsparametern aus? Gilt der multivariate Zentrale Grenzwertsatz?
3. Perkoliert  $Z$ , d.h., gibt es eine unbeschränkte Zusammenhangskomponente von  $Z$ ? Diese Frage ist Gegenstand der Perkolationstheorie.
4. Wie sehen die Wahrscheinlichkeiten  $\mathbb{P}(x_1 \in Z, \dots, x_k \in Z)$  für  $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^d$  aus? Das sind die sogenannten  $k$ -Punkt-Korrelationsfunktionen.
5. Es sei  $X$  ein zufälliger Punkt in  $\mathbb{R}^d \setminus Z$ . Was ist die Verteilung von  $d(X, Z)$ ? Diese Frage führt auf den Begriff der Kontaktverteilungen.

## 2 Keim-Korn-Modelle und das Boolesche Modell

In diesem Abschnitt geben wir eine informelle Einführung in Begriffe und Argumente im Kontext von markierten Punktprozessen und daraus abgeleiteten Keim-Korn-Modellen.

### 2.1 Grundlegende Definitionen

Es sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum. Wir verwenden folgende Notationen:

$\mathcal{F}^d$	System der abgeschlossenen Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ ,
$\mathcal{C}^d$	System der kompakten Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ ,
$\mathcal{K}^d$	System der konvexen und kompakten Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ ,
$\mathcal{O}^d$	System der offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ .

Hierbei heißt eine Teilmenge  $A \subset \mathbb{R}^d$  konvex, wenn für alle  $x, y \in A$  und alle  $t \in [0, 1]$  stets auch  $(1 - t)x + ty \in A$  gilt. Offenbar ist dann  $\mathcal{K}^d \subset \mathcal{C}^d \subset \mathcal{F}^d$ .

Auf diesen Mengensystemen, auf dem Raum der lokalendlichen Maße sowie auf dem Raum der Zählmaße werden in Kapitel 3 jeweils  $\sigma$ -Algebren eingeführt. Beispielsweise ist zu der dort angegebenen Definition die folgende äquivalent.

#### 2.1.1 Definition (Zufällige abgeschlossene Menge).

Auf  $\mathcal{F}^d$  betrachte man die kleinste  $\sigma$ -Algebra, die alle Mengen der Form  $\mathcal{F}_C := \{F \in \mathcal{F}^d : F \cap C \neq \emptyset\}$ ,  $C \in \mathcal{C}^d$ , enthält. Eine *zufällige abgeschlossene Menge* ist ein zufälliges Element  $Z$  von  $\mathcal{F}^d$ , d.h., eine messbare Abbildung  $Z : \Omega \rightarrow \mathcal{F}^d$ ,  $\omega \mapsto Z(\omega)$ .

In diesem Abschnitt werden Messbarkeitsfragen weitgehend ausgespart. Wir halten lediglich fest, dass ein zufälliger Punkt im  $\mathbb{R}^d$  eine messbare Abbildung  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  ist. Eine zufällige kompakte Menge im  $\mathbb{R}^d$  (d.h. ein zufälliges Element von  $\mathcal{C}^d$ ) ist eine messbare Abbildung  $Z : \Omega \rightarrow \mathcal{C}^d$ . Hierbei bezieht sich Messbarkeit auf die  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}$  auf  $\Omega$  beziehungsweise auf die Spur- $\sigma$ -Algebra auf  $\mathcal{C}^d$  der auf  $\mathcal{F}^d$  eingeführten  $\sigma$ -Algebra (vgl. Abschnitt 3.1).

**2.1 Beispiel.** Seien  $A, B \in \mathcal{C}^d$  kompakte Mengen. Weiter sei  $\Omega = \{0, 1\}$  und  $\mathbb{P}$  definiert durch  $\mathbb{P}(0) = p$  für ein  $p \in [0, 1]$ . Die zufällige abgeschlossene Menge  $Z : \Omega \rightarrow \mathcal{C}^d$  sei definiert durch  $Z(0) := A$  und  $Z(1) := B$ .  $Z$  beschreibt ein Zufallsexperiment, bei dem mit Wahrscheinlichkeit  $p$  die Menge  $A$  gewählt wird und mit Wahrscheinlichkeit  $1 - p$  die Menge  $B$ .

**2.2 Beispiel.** Sei  $R$  eine nichtnegative reelle Zufallsvariable. Dann ist durch  $Z(R) := B(0, R)$  eine zufällige kompakte Menge definiert. Das Experiment beschreibt einen Kreis mit dem zufälligen Radius  $R$ .

**2.3 Beispiel.** Es sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  seien unabhängige identisch verteilte zufällige Punkte  $\xi_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ , die jeweils gleichverteilt im Einheitskreis  $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^d$  seien. Dann ist durch  $Z := \text{conv}\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  eine zufällige kompakte, konvexe Menge definiert, d.h. insbesondere  $Z : \Omega \rightarrow \mathcal{K}^d$ . Das Experiment beschreibt ein zufälliges konvexes Polytop in  $B(0, 1)$  mit einer zufälligen Anzahl Ecken ( $\leq n$ ).

Wir bezeichnen mit  $A + B := \{x + y : x \in A, y \in B\}$  die Minkowski-Summe der Mengen  $A, B \subset \mathbb{R}^d$ . Für  $A \subset \mathbb{R}^d$  und  $x \in \mathbb{R}^d$  sei  $A + x := A + \{x\}$ . Ferner wird die Spiegelung  $A^* := -A = \{-x : x \in A\}$  von  $A \subset \mathbb{R}^d$  am Ursprung erklärt.

### 2.1.2 Definition (Markierter Punktprozess und Keim-Korn-Modell).

Sei  $\xi_n$  für  $n \in \mathbb{N}$  ein zufälliger Punkt im  $\mathbb{R}^d$ ,  $Z_n$  für  $n \in \mathbb{N}$  ein zufälliges Element in  $\mathcal{C}^d$  und  $\tau$  eine  $(\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\})$ -wertige Zufallsgröße. Es gelte  $\text{card}\{n \in \mathbb{N} : \xi_n \in C, n \leq \tau\} < \infty$   $\mathbb{P}$ -f.s. für alle  $C \in \mathcal{C}^d$ . Ferner gelte  $\mathbb{P}$ -f.s., dass  $\xi_m \neq \xi_n$  für  $m < n \leq \tau$ . Dann nennt man

$$\Psi = \{(\xi_n, Z_n) : 1 \leq n \leq \tau\}$$

in  $\mathbb{R}^d \times \mathcal{C}^d$  einen *markierten Punktprozess* auf  $\mathbb{R}^d$  mit Markenraum  $\mathcal{C}^d$ . Das zugehörige *Keim-Korn-Modell* ist

$$Z := \bigcup_{n=1}^{\tau} (Z_n + \xi_n). \quad (2.1.1)$$

Hierbei heißt  $\xi_n$  *Keim*,  $Z_n$  *Primärkorn* und  $Z_n + \xi_n := \{x + \xi_n : x \in Z_n\}$  *Sekundärkorn*. Außerdem nennt man  $\Phi := \{\xi_n : 1 \leq n \leq \tau\}$  einen *Punktprozess* auf  $\mathbb{R}^d$ . Die Zufallszahl  $\tau$  ist die Anzahl der (markierten) Punkte von  $\Psi$  und auch die Anzahl der Punkte von  $\Phi$ .

Die vorangehende Definition ist vorläufig und wird später in modifizierter und präziser Form angegeben. Zum einen fehlt die genaue Angabe von  $\sigma$ -Algebren, auf die sich Messbarkeitsaussagen beziehen. Ferner ist die Beschreibung eines (markierten) Punktprozesses als Menge nicht immer günstig. Die später angestrebte Beschreibung eines Punktprozesses als ein (zufälliges) Zählmaß kann auch Vielfachheiten zulassen.

**2.4 Beispiel.** Seien  $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  die Punkte des Gitters  $\mathbb{Z}^2$  (in einer fest gewählten Nummerierung) und

- (a)  $Z_n := B(0, R_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  seien Bälle mit Mittelpunkt 0 und zufälligen Radien  $R_n$  gleichverteilt in  $[0, 1]$ . Dabei sei die Folge  $(R_n)$  unabhängig.
- (b)  $Z_n := B(0, S_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  seien Bälle mit Mittelpunkt 0 und zufälligen Radien  $S_n$ . Dabei sei  $S_n := \min\{R_n, \min\{d(\xi_n, \xi_j) - R_j : j = 1, \dots, n-1\}\}$  (mit  $R_n$  wie in (a)). Hier sind die Zufallsvariablen der Folge  $(S_n)$  abhängig (und damit auch die zufälligen Primärkörner der Folge  $(Z_n)$ ).

Dann ist  $\Psi = \{(\xi_n, Z_n) : n \in \mathbb{N}\}$  ein markierter Punktprozess (mit  $\tau = \infty$ ) und  $Z = \bigcup_{n=1}^{\infty} (Z_n + \xi_n)$  ein Keim-Korn-Modell.

**2.5 Beispiel.** Sei  $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von unabhängigen, zufälligen Punkten gleichverteilt gewählt in dem Fenster  $W := [0, 10]^2 \subset \mathbb{R}^2$ . Sei  $\tau$  poissonverteilt mit Parameter  $\lambda > 0$ .

- (a) Dann ist  $\Psi = \{(\xi_n, B(0, 1)) : 1 \leq n \leq \tau\}$  ein markierter Punktprozess (mit deterministischen Marken  $Z_n = B(0, 1)$  aus  $\mathcal{K}^2$ ). Die zufällige Menge  $Z = \bigcup_{n=1}^{\tau} (Z_n + \xi_n)$  ist ein Keim-Korn-Modell.
- (b) Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $g_n$  eine zufällige Gerade durch den Ursprung (bestimmt durch den Winkel mit einer festen Achse gleichverteilt aus  $[0, \pi)$ ). Sei  $Z_n$  das Segment von  $(g_n + \xi_n) \cap W$ , das  $\xi_n$  enthält und dessen Endpunkte die ersten Schnittpunkte mit  $\bigcup_{j=1}^{n-1} Z_j$  seien (von  $\xi_n$  aus gesehen). Dann ist  $\Psi = \{(\xi_n, Z_n) : 1 \leq n \leq \tau\}$  ein markierter Punktprozess mit einer zufälligen Zahl an Punkten. Das Keim-Korn-Modell  $Z = \bigcup_{n=1}^{\tau} (Z_n + \xi_n)$  ist das Kantengerüst eines zufälligen Mosaiks von  $W$ .

**2.1.3 Definition und Satz (Intensitätsmaß und Campbellsche Formel).**

Ist  $\Psi = \{(\xi_n, Z_n) : 1 \leq n \leq \tau\}$  ein markierter Punktprozess mit Markenraum  $\mathcal{C}^d$  (andere Räume sind ebenfalls möglich), so heißt das durch

$$\Theta(A) := \mathbb{E}[\text{card}\{n \in \mathbb{N} : (\xi_n, Z_n) \in A, n \leq \tau\}], \quad A \subset \mathbb{R}^d \times \mathcal{C}^d \text{ messbar},$$

definierte Maß auf  $\mathbb{R}^d \times \mathcal{C}^d$  das Intensitätsmaß von  $\Psi$ . Ist  $f : \mathbb{R}^d \times \mathcal{C}^d \rightarrow [0, \infty]$  messbar, so gilt

$$\mathbb{E} \left[ \sum_{n=1}^{\tau} f(\xi_n, Z_n) \right] = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{C}^d} f(x, C) \Theta(d(x, C)). \quad (2.1.2)$$

*Beweis.* Dass  $\Theta$  in der Tat ein Maß ist, ist leicht zu sehen (auch aus nachfolgender Darstellung) und verwendet den Satz von der monotonen Konvergenz (oder den Umordnungssatz für Doppelreihen mit nichtnegativen Summanden).

Der Beweis der behaupteten Gleichheit für beliebige messbare Funktionen  $f$  wird mit algebraischer Induktion geführt.

- (i) Sei  $f = \mathbb{1}_A$  für eine messbare Menge  $A \subset \mathbb{R}^d \times \mathcal{C}^d$ . Dann gilt  $\int_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{C}^d} f d\Theta = \Theta(A)$ . Nach Definition von  $\Theta$  ist das gleich dem Erwartungswert auf der linken Seite von Gleichung (2.1.2).
- (ii) Nun sei  $f = \sum_{i=1}^k c_i \mathbb{1}_{A_i}$  für  $c_i \geq 0$  und messbare Mengen  $A_i \subset \mathbb{R}^d \times \mathcal{C}^d$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Dann ergibt sich mit (i) einerseits

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{C}^d} f d\Theta = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{C}^d} \sum_{i=1}^k c_i \mathbb{1}_{A_i} d\Theta = \sum_{i=1}^k c_i \int_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{C}^d} \mathbb{1}_{A_i} d\Theta = \sum_{i=1}^k c_i \Theta(A_i).$$

Andererseits erhält man für die linke Seite von (2.1.2)

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \sum_{n=1}^{\tau} f(\xi_n, Z_n) \right] &= \mathbb{E} \left[ \sum_{n=1}^{\tau} \sum_{i=1}^k c_i \mathbb{1}_{A_i}(\xi_n, Z_n) \right] = \sum_{i=1}^k c_i \mathbb{E} \left[ \sum_{n=1}^{\tau} \mathbb{1}_{A_i}(\xi_n, Z_n) \right] \\ &= \sum_{i=1}^k c_i \Theta(A_i). \end{aligned}$$

Zusammen ergibt dies die Behauptung im betrachteten Fall.

- (iii) Für eine beliebige Funktion  $f$  findet man eine Folge von Funktionen  $f_n$ , die die in (ii) vorausgesetzte Form besitzen und für die außerdem  $f_n \uparrow f$  für  $n \rightarrow \infty$  gilt. Mit dem Satz von der monotonen Konvergenz und dem in (ii) Gezeigten folgt die Behauptung.  $\square$

Wir betrachten nun markierte Punktprozesse, bei denen die Marken unabhängig und gleichverteilt sind sowie unabhängig von den Keimen.

Ganz analog zur Definition des Intensitätsmaßes eines markierten Punktprozesses erklären wir das *Intensitätsmaß eines Punktprozesses*  $\Phi = \{\xi_n : 1 \leq n \leq \tau\}$  (Notation wie zuvor) durch

$$\Lambda(B) := \mathbb{E}[\text{card}\{n \geq 1 : \xi_n \in B, n \leq \tau\}] = \mathbb{E} \left[ \sum_{n=1}^{\tau} \mathbb{1}\{\xi_n \in B\} \right],$$

wobei  $B \subset \mathbb{R}^d$  messbar sei. Alternativ lässt sich auch  $\Lambda(B) = \mathbb{E}[\text{card}(\Phi \cap B)]$  schreiben, da  $\Phi$  einfach ist und bislang als Menge erklärt wurde.

**2.1.4 Definition (Unabhängige  $\mathbb{Q}$ -Markierung).**

Es sei  $\mathbb{Q}$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $\mathcal{C}^d$ . Ein markierter Punktprozess  $\Psi$  wie in Definition 2.1.2 heißt *unabhängige  $\mathbb{Q}$ -Markierung* von  $\Phi := \{\xi_n : 1 \leq n \leq \tau\}$ , falls für alle  $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  unter dem bedingten Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P}(\cdot \mid \tau = m)$  die beiden folgenden Aussagen gelten:

- Die (endliche oder unendliche) Folge zufälliger Mengen  $(Z_n)_{n=1}^m$  ist von  $\Phi$  unabhängig.
- Die zufälligen Mengen  $Z_n$ ,  $1 \leq n \leq m$  sind unabhängig und haben die Verteilung  $\mathbb{Q}$ .

Im Fall  $\mathbb{P}(\tau = \infty) = 1$  sind  $\Phi$  und  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  unabhängig und es gilt  $Z_n \stackrel{\text{u.i.v.}}{\sim} \mathbb{Q}$  für  $n \in \mathbb{N}$ .

Man kann zeigen, dass die Verteilung einer unabhängigen  $\mathbb{Q}$ -Markierung  $\Psi$  unabhängig von der gewählten Nummerierung der Punkte von  $\Phi$  ist.

Die markierten Punktprozesse  $\Psi$  aus den Beispielen 2.4 (a) und 2.5 (a) sind unabhängige  $\mathbb{Q}$ -Markierungen, die in 2.4 (b) und 2.5 (b) nicht.

Zur Motivation des nachfolgenden Satzes 2.1.5 wurde außerdem nachgerechnet, dass das Intensitätsmaß im Beispiel 2.4 (a) die Form  $\Phi = \mathcal{H}_{\mathbb{Z}^2}^0 \otimes \tilde{\lambda}^1$  hat, wobei  $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}^2}^0$  das Zählmaß auf  $\mathbb{Z}^2$  bezeichnet und  $\tilde{\lambda}^1$  das Bildmaß des Lebesguemaßes auf der Menge  $\{B(0, r) : r \in [0, 1]\}$  unter der Abbildung  $r \mapsto B(0, r)$  ist. Im Beispiel 2.5 (a) hat das Intensitätsmaß die Form  $\Phi = \lambda \cdot \frac{\lambda^2(\cdot)}{\lambda^2(W)} \otimes \delta_{B(0,1)}$ . Hier war  $\lambda > 0$  der Parameter der poissonverteilten Zufallsvariable  $\tau$ .

**2.1.5 Satz (Zerlegung des Intensitätsmaßes).**

Ist  $\Psi$  eine unabhängige  $\mathbb{Q}$ -Markierung von  $\Phi := \{\xi_n : 1 \leq n \leq \tau\}$  und hat  $\Phi$  ein  $\sigma$ -endliches Intensitätsmaß  $\Lambda$ , so hat  $\Psi$  das Intensitätsmaß  $\Lambda \otimes \mathbb{Q}$ .

*Beweis.* Wir setzen  $\tilde{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . Sei  $f : \mathbb{R}^d \times \mathcal{C}^d \rightarrow [0, \infty]$  eine messbare Funktion. Dann gilt aufgrund von Satz 2.1.3, nach Aufspaltung entsprechend der möglichen Werte von  $\tau$  und aufgrund der (nur teilweise genutzten) Voraussetzung der unabhängigen Markierung, dass

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{C}^d} f d\Theta &= \mathbb{E} \left[ \sum_{n=1}^{\tau} f(\xi_n, Z_n) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \sum_{N \in \tilde{\mathbb{N}}} \sum_{n=1}^N f(\xi_n, Z_n) \mathbb{1}\{\tau = N\} \right] \\ &= \sum_{N \in \tilde{\mathbb{N}}} \sum_{n=1}^N \mathbb{E} [f(\xi_n, Z_n) \mathbb{1}\{\tau = N\}] \\ &= \sum_{N \in \tilde{\mathbb{N}}} \sum_{n=1}^N \mathbb{E} [g(\xi_n) \mathbb{1}\{\tau = N\}], \end{aligned}$$

wobei

$$g(x) = \int_{\mathcal{C}^d} f(x, K) \mathbb{Q}(dK).$$



Damit folgt dann weiter

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{C}^d} f d\Theta &= \mathbb{E} \left[ \sum_{n=1}^{\tau} g(\xi_n) \right] \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} g(x) \Lambda(dx) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathcal{C}^d} f(x, K) \mathbb{Q}(dK) \Lambda(dx) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{C}^d} f d(\Lambda \otimes \mathbb{Q}),
\end{aligned}$$

wobei erneut Satz 2.1.3 sowie der Satz von Fubini verwendet wurde. Für  $f = \mathbb{1}_A$  erhält man  $\Theta(A) = (\Lambda \otimes \mathbb{Q})(A)$ .  $\square$

Man überlegt sich leicht, dass die Vereinigung abzählbar vieler kompakter Mengen nicht abgeschlossen zu sein braucht. Dies kann auch bei Bildung der Vereinigungsmenge einer unabhängigen  $\mathbb{Q}$ -Markierung geschehen, wie wir in den Übungen sehen werden. Der folgende Satz enthält daher die Zusatzbedingung (2.1.3).

**2.1.6 Satz.** *Sei  $\Psi$  eine unabhängige  $\mathbb{Q}$ -Markierung von  $\Phi$  und  $Z$  das zugehörige Keim-Korn-Modell (2.1.1). Sei  $\Lambda$  das Intensitätsmaß von  $\Phi$ . Gilt*

$$\int_{\mathcal{C}^d} \Lambda(K^* + C) \mathbb{Q}(dK) < \infty, \quad C \in \mathcal{C}^d, \quad (2.1.3)$$

so ist  $Z$  eine zufällige abgeschlossene Menge.

*Beweis.* (später, siehe S.32)  $\square$

**2.1.7 Bemerkung.** (später)

Es sei  $\Lambda$  ein  $\sigma$ -endliches Maß auf  $\mathbb{R}^d$ . Man kann zeigen, dass die Abbildung  $K \mapsto \Lambda(C + K)$  für jedes  $C \in \mathcal{C}^d$  eine messbare Abbildung ist (vgl. Kap. 3). Genauer gilt, dass  $K \mapsto C + K$  stetig und  $K \mapsto \Lambda(K)$  oberhalbstetig bzgl. der Hausdorffmetrik ist. Letzteres bedeutet, dass aus  $K_n \rightarrow K$  stets  $\limsup \Lambda(K_n) \leq \Lambda(K)$  folgt.

## 2.2 Stationäre Keim-Korn-Modelle

Häufig begegnet man der Annahme, dass die Verteilung eines markierten Punktprozesses oder einer zufälligen abgeschlossenen Menge invariant unter Translation um einen festen Verschiebungsvektor ist. Man nennt diese Eigenschaft dann Stationarität. Wir geben wieder eine vorläufige Definition.

**2.2.1 Definition.** (i) Ein markierter Punktprozess  $\Psi = \{(\xi_n, Z_n) : 1 \leq n \leq \tau\}$  heißt *stationär*, falls

$$\{(\xi_n + x, Z_n) : 1 \leq n \leq \tau\} \stackrel{d}{=} \Psi, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

gilt. Insbesondere heißt  $\Phi = \{\xi_n : 1 \leq n \leq \tau\}$  stationär, falls

$$\Phi + x := \{\xi_n + x : 1 \leq n \leq \tau\} \stackrel{d}{=} \Phi, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

(ii) Eine zufällige abgeschlossene Menge  $Z$  heißt *stationär*, wenn

$$Z + x \stackrel{d}{=} Z, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

**2.2.2 Satz.** Ist  $\Phi = \{\xi_n : 1 \leq n \leq \tau\}$  ein stationärer Punktprozess, so gilt

$$\mathbb{P}(\tau \in \{0, \infty\}) = 1.$$

*Beweis.* Übungsaufgabe ... □

**2.2.3 Vereinbarung.** Ist  $\Phi = \{\xi_n : 1 \leq n \leq \tau\}$  ein stationärer Punktprozess, so setzen wir  $\mathbb{P}(\tau = 0) = 0$  voraus. Damit ist  $\mathbb{P}(\tau = \infty) = 1$ . Wir schreiben  $\Phi = \{\xi_n : n \geq 1\}$ .

**2.2.4 Satz.** Sei  $\Psi$  eine unabhängige  $\mathbb{Q}$ -Markierung eines Punktprozesses  $\Phi = \{\xi_n : n \geq 1\}$ . Genau dann ist  $\Phi$  stationär, wenn  $\Psi$  stationär ist.

*Beweis.* (später) ... □

**2.2.5 Satz.** Ist  $\Psi$  ein stationärer markierter Punktprozess mit Intensitätsmaß  $\Theta$  und

$$\gamma := \mathbb{E}[\text{card}\{n \geq 1 : \xi_n \in [0, 1]^d\}] < \infty, \quad (2.2.1)$$

dann gibt es ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{Q}$  auf  $\mathcal{C}^d$  mit  $\Theta = \gamma \lambda^d \otimes \mathbb{Q}$ , wobei  $\lambda^d$  das  $d$ -dimensionale Lebesgue-Maß bezeichnet.

*Beweis.* Für jedes messbare  $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}^d$  betrachte man

$$\Lambda_{\mathcal{H}}(B) := \mathbb{E}[\text{card}\{n \geq 1 : \xi_n \in B, Z_n \in \mathcal{H}\}], \quad B \in \mathcal{B}^d. \quad (2.2.2)$$

Dann ist  $\Lambda_{\mathcal{H}}([0, 1]^d) \leq \gamma < \infty$ . Das Maß  $\Lambda_{\mathcal{H}}$  ist verschiebungsinvariant, das heißt

$$\begin{aligned} \Lambda_{\mathcal{H}}(B + x) &= \mathbb{E}[\text{card}\{n \geq 1 : \xi_n - x \in B, Z_n \in \mathcal{H}\}] \\ &\stackrel{\Psi \text{ stationär}}{=} \mathbb{E}[\text{card}\{n \geq 1 : \xi_n \in B, Z_n \in \mathcal{H}\}] = \Lambda_{\mathcal{H}}(B). \end{aligned}$$

Mit einem Resultat der Maßtheorie folgt also

$$\Lambda_{\mathcal{H}}(B) = \mathbb{Q}'(\mathcal{H}) \lambda^d(B), \quad B \in \mathcal{B}^d, \quad (2.2.3)$$

für ein  $\mathbb{Q}'(\mathcal{H}) \in [0, \infty)$ . Mit  $B = [0, 1]^d$  erhalten wir

$$\mathbb{Q}'(\mathcal{H}) = \mathbb{E}[\text{card}\{n \geq 1 : \xi_n \in [0, 1]^d, Z_n \in \mathcal{H}\}].$$

Damit ist  $\mathbb{Q}'$  ein Maß auf  $\mathcal{C}^d$ . Nach Voraussetzung ist  $\mathbb{Q}'(\mathcal{C}^d) = \gamma < \infty$ . Wegen (2.2.2) und (2.2.3) ist  $\Theta(B \times \mathcal{H}) = \mathbb{Q}'(\mathcal{H}) \lambda^d(B)$ , d.h.  $\Theta = \lambda^d \otimes \mathbb{Q}'$ . Wegen Vereinbarung 2.2.3 gilt  $\gamma > 0$  (Ansonsten wäre  $\mathbb{Q}' \equiv 0$ , d.h.  $\Theta \equiv 0$ ). Mit  $\mathbb{Q} := \gamma^{-1} \mathbb{Q}'$  folgt die Behauptung. □

**2.2.6 Definition.** Die Zahl  $\gamma$  heißt *Intensität* von  $\Psi$  bzw.  $\Phi$  und  $\mathbb{Q}$  heißt (Palmsche) *Markenverteilung*.

**2.2.7 Bemerkung.** Für einen stationären Punktprozess  $\Phi = \{\xi_n : n \geq 1\}$  gilt

$$\mathbb{E}[\text{card}\{n \geq 1 : \xi_n \in B\}] = \gamma \lambda^d(B).$$

**2.2.8 Satz.** Es sei  $\Psi = \{(\xi_n, Z_n) : n \geq 1\}$  ein stationärer markierter Punktprozess mit endlicher Intensität  $\gamma$  und einer Markenverteilung  $\mathbb{Q}$ , welche

$$\int_{\mathcal{C}^d} \lambda^d(K + C) \mathbb{Q}(dK) < \infty, \quad C \in \mathcal{C}^d, \quad (2.2.4)$$

erfüllt. Dann ist das zugehörige Keim-Korn-Modell  $Z = \bigcup_{n=1}^{\infty} (Z_n + \xi_n)$  eine stationäre zufällige abgeschlossene Menge.

*Beweis.* Dass  $Z$  eine zufällige abgeschlossene Menge ist, beweist man ähnlich wie den Satz 2.1.6 (später). Man beachte dabei  $\Lambda = \gamma \lambda^d$  und  $\lambda^d(K^* + C) = \lambda^d(K + C^*)$ . Die Stationarität folgt aus

$$Z + x = \bigcup_{n=1}^{\infty} (Z_n + (\xi_n + x)) \stackrel{d}{=} \bigcup_{n=1}^{\infty} (Z_n + \xi_n) = Z. \quad \square$$

**2.2.9 Bemerkung.** Gilt (2.2.4) für  $C = B$ , wobei  $B$  eine Kugel mit positivem Radius ist, so gilt (2.2.4) für alle  $C \in \mathcal{C}^d$ . Um dies einzusehen, wähle man zu  $B$  und gegebenem  $C$  Vektoren  $x_i \in \mathbb{R}^d$ ,  $i = 1, \dots, m$ , sodass  $C \subset \bigcup_{i=1}^m (B + x_i)$ . Dann ist  $K + C \subset \bigcup_{i=1}^m (K + B + x_i)$  und die Behauptung folgt mit der Subadditivität des Lebesguemaßes.

Man kann zeigen, dass die Abbildung  $\mathcal{F}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(F, x) \mapsto \mathbb{1}_F(x)$  messbar ist. Ist  $Z$  eine zufällige abgeschlossene Menge, so ist also  $(\omega, x) \mapsto \mathbb{1}_{Z(\omega)}(x)$  ebenfalls messbar. Damit ist  $\omega \mapsto \lambda^d(B \cap Z(\omega)) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_B(x) \mathbb{1}_{Z(\omega)}(x) dx$  messbar, d.h.  $\lambda^d(Z \cap B)$  ist eine Zufallsvariable.

**2.2.10 Definition.** Ist  $Z$  eine stationäre zufällige abgeschlossene Menge, so heißt

$$p_Z := p := \mathbb{E}[\lambda^d(Z \cap [0, 1]^d)]$$

Volumenanteil von  $Z$ .

**2.2.11 Satz.** Es sei  $Z$  eine stationäre zufällige abgeschlossene Menge mit Volumenanteil  $p$ . Dann gelten

$$\mathbb{E}[\lambda^d(Z \cap B)] = p \lambda^d(B), \quad B \in \mathcal{B}^d, \quad (2.2.5)$$

und

$$p = \mathbb{P}(x \in Z), \quad x \in \mathbb{R}^d. \quad (2.2.6)$$

*Beweis.* Wegen der Stationarität gilt

$$p(x) := \mathbb{P}(x \in Z) = \mathbb{P}(0 \in Z) = p(0).$$

Aus dem Satz von Fubini folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\lambda^d(Z \cap B)] &= \mathbb{E} \left[ \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_Z(x) \mathbb{1}_B(x) dx \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}[\mathbb{1}_Z(x) \mathbb{1}_B(x)] dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_B(x) \mathbb{E}[\mathbb{1}_Z(x)] dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_B(x) \mathbb{P}(x \in Z) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_B(x) p(0) dx \\
&= p(0) \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_B(x) dx = p(0) \lambda^d(B).
\end{aligned}$$

Mit  $B = [0, 1]^d$  folgt  $p = p(0) = p(x)$  und damit die Behauptungen.  $\square$

## 2.3 Das Boolesche Modell

### 2.3.1 Definition. (Poissonprozess)

Ein Punktprozess  $\Phi = \{\xi_n : n \geq 1\}$  auf  $\mathbb{R}^d$  heißt *homogener (stationärer) Poissonprozess* mit Intensität  $\gamma > 0$ , falls gilt:

(i) Für  $m \geq 2$  und paarweise disjunkte Borelmengen  $B_1, \dots, B_m \in \mathcal{B}^d$  sind die Zufallsvariablen  $\Phi(B_1), \dots, \Phi(B_m)$  stochastisch unabhängig.

(ii)

$$\mathbb{P}(\Phi(B) = k) = \frac{\gamma^k (\lambda^d(B))^k}{k!} e^{-\gamma \lambda^d(B)}, \quad B \in \mathcal{B}^d, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Dabei ist  $\infty \cdot e^{-\infty} := 0$  und es bezeichne  $\Phi(B) := \text{card}\{n \geq 1 : \xi_n \in B\}$ .

Der leere Punktprozess  $\Phi = \emptyset$  hat die beiden Eigenschaften (i) und (ii) aus Definition 2.3.1 mit  $\gamma = 0$ . Auch er heißt homogener Poissonprozess mit Intensität  $\gamma = 0$ .

**2.3.2 Bemerkung.** Es sei  $\Phi$  ein homogener Poissonprozess mit Intensität  $\gamma \geq 0$ .

(i) Es gilt  $\mathbb{E}[\Phi(B)] = \gamma \lambda^d(B)$ ,  $B \in \mathcal{B}^d$ .

(ii) Im Fall  $\gamma \lambda^d(B) = \infty$  gilt  $\mathbb{P}(\Phi(B) < \infty) = 0$ , d.h.  $\mathbb{P}(\Phi(B) = \infty) = 1$ .

Man schreibt  $\Phi(B) \sim \text{Poiss}(\gamma \lambda^d(B))$  bzw.  $\Phi \sim \text{Poiss}(\gamma \lambda^d)$ .

### 2.3.3 Definition. (Boolesches Modell)

Es sei  $\mathbb{Q}$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $\mathcal{C}^d$  mit

$$\int_{\mathcal{C}^d} \lambda^d(K + C) \mathbb{Q}(dK) < \infty, \quad C \in \mathcal{C}^d. \quad (2.3.1)$$

Ferner sei  $\Psi = \{(\xi_n, Z_n) : n \in \mathbb{N}\}$  eine unabhängige  $\mathbb{Q}$ -Markierung eines homogenen Poissonprozesses  $\Phi = \{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$  mit Intensität  $\gamma > 0$ . Dann heißt das zugehörige Keim-Korn-Modell

$$Z = \bigcup_{n=1}^{\infty} (Z_n + \xi_n)$$

homogenes *Boolesches Modell* (mit Parametern  $\mathbb{Q}$  und  $\gamma$ ). Man bezeichnet  $\gamma$  auch als *Keimintensität* des homogenen Booleschen Modells.

Den Zusatz “homogen” lassen wir gelegentlich weg, wenn die Voraussetzung der Homogenität des zugrunde liegenden Poissonprozesses aus dem Zusammenhang klar ist. Allgemeinere (inhomogene) Boolesche Modelle werden wir später einführen.

**2.3.4 Bemerkung.** Im obigen Rahmen ist es bequem, eine zufällige abgeschlossene (sogar kompakte) Menge  $Z_0 \sim \mathbb{Q}$  einzuführen. Man nennt  $Z_0$  *typisches Korn*. Bedingung (2.3.1) lässt sich dann schreiben als

$$\mathbb{E}[\lambda^d(Z_0 + C)] < \infty, \quad C \in \mathcal{C}^d. \quad (2.3.2)$$

Allgemeiner kann das typische Korn auch im Rahmen von Satz 2.2.5 eingeführt werden.

**2.3.5 Satz.** *Ein homogenes Boolesches Modell ist stationär.*

*Beweis.* Man zeigt leicht, dass  $\Phi \sim \text{Pois}(\gamma\lambda^d)$  stationär ist. Hierzu überlegt man sich, dass auch  $\Phi + x$  (für ein beliebiges  $x \in \mathbb{R}^d$ ) ein homogener Poissonprozess mit Intensität  $\gamma$  ist. Wegen Satz 2.2.4 ist  $\Psi$  ebenfalls stationär und die Behauptung folgt aus Satz 2.2.8.  $\square$

**2.3.6 Satz.** *Der Volumenanteil  $p$  eines Booleschen Modells mit Keimintensität  $\gamma$  und typischem Korn  $Z_0$  beträgt*

$$p = 1 - e^{-\gamma\mathbb{E}[\lambda^d(Z_0)]}. \quad (2.3.3)$$

*Beweis.* Nach Satz 2.2.11 gilt  $p = \mathbb{P}(0 \in Z)$ . Es sei  $\Phi' := \{\xi_n : 0 \in Z_n + \xi_n\}$ . ( $\Phi'$  ist eine sogenannte *Verdünnung* von  $\Phi$ .) Für  $x \in \Phi$  sei  $q(x)$  die Wahrscheinlichkeit, dass  $x \in \Phi'$  gilt. Offenbar ist  $q(x) = \mathbb{P}(0 \in Z_0 + x) = \mathbb{P}(-x \in Z_0)$ . Sei  $N' := \text{card}(\Phi')$  die Anzahl der Punkte von  $\Phi'$ . Ein Ergebnis aus Abschnitt 3.3 wird zeigen, dass

$$N' \sim \text{Pois}(\gamma \int_{\mathbb{R}^d} q(x) dx).$$

(In Spezialfällen, z.B. für ein deterministisches Korn, lässt sich das leicht nachrechnen.) Insbesondere folgt

$$1 - p = \mathbb{P}(0 \notin Z) = \mathbb{P}(\Phi' = \emptyset) = \mathbb{P}(N' = 0) = \exp \left\{ -\gamma \int_{\mathbb{R}^d} q(x) dx \right\}.$$

Die Behauptung folgt nun aus

$$\int_{\mathbb{R}^d} q(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{P}(-x \in Z_0) dx = \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{Z_0}(-x) dx = \mathbb{E}\lambda^d(-Z_0) = \mathbb{E}\lambda^d(Z_0). \quad \square$$

Notation:  $B(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^d : \|y - x\| \leq r\}$ ,  $B^d := B(0, 1)$ ,  $\kappa_d := \lambda^d(B^d)$ .

**2.3.7 Satz.** *Es seien  $\Phi = \{\xi_n : n \in \mathbb{N}\} \sim \text{Pois}(\gamma\lambda^d)$  und  $R, R_1, R_2, \dots$  eine von  $\Phi$  unabhängige Folge unabhängiger, nicht-negativer Zufallsvariablen mit derselben Verteilung. Sei*

$$Z = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(\xi_n, R_n).$$

*Dann gilt  $\mathbb{P}(Z = \mathbb{R}^d) = 1$  genau dann, wenn  $\mathbb{E}[R^d] = \infty$ .*

**2.3.8 Bemerkung.** Mit den Überlegungen in Abschnitt 3 folgt, dass  $Z_0 = B(0, R)$   $\mathbb{P}$ -f.s. eine kompakte zufällige abgeschlossene Menge ist. Bedingung (2.3.2) ist zu  $\mathbb{E}[R^d] < \infty$  äquivalent.

*Beweis von Satz 2.3.7.* Wir können a priori nicht davon ausgehen, dass  $Z$  eine zufällige abgeschlossene Menge ist. Gleichwohl zeigt der Beweis von Satz 2.2.11, dass

$$\mathbb{E}[\lambda^d(Z \cap B)] = \underbrace{\mathbb{P}(0 \in Z)}_{=:p} \lambda^d(B), \quad B \in \mathcal{B}^d. \quad (2.3.4)$$

Dafür genügt die Messbarkeit der Abbildung  $(x, \omega) \mapsto \mathbb{1}\{x \in Z(\omega)\}$ , die aus

$$\mathbb{1}\left\{x \in \bigcup_{n \geq 1} (Z_n + \xi_n)\right\} = \max_{n \geq 1} \mathbb{1}\{x \in Z_n + \xi_n\}$$

folgt, wobei  $Z_n + \xi_n$  für  $n \in \mathbb{N}$  eine zufällige abgeschlossene Menge ist.

Aus dem Beweis von Satz 2.3.6 folgt

$$p = 1 - e^{-\gamma \mathbb{E}[\lambda^d(Z_0)]} = 1 - e^{-\gamma \kappa_d \mathbb{E}[R^d]}. \quad (2.3.5)$$

Gilt  $\mathbb{P}(Z = \mathbb{R}^d) = 1$ , so folgt  $p = \mathbb{P}(0 \in Z) = 1$ , also  $\mathbb{E}[R^d] = \infty$ .

Umgekehrt folgt aus  $\mathbb{E}[R^d] = \infty$  für beschränktes  $B \in \mathcal{B}^d$ , dass

$$\lambda^d(Z \cap B) = \lambda^d(B) \text{ } \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Zunächst besitzen die Zufallsvariablen auf beiden Seiten dieser Gleichung wegen (2.3.5) und (2.3.4) den gleichen Erwartungswert. Mit  $\lambda^d(Z \cap B) \leq \lambda^d(B)$  folgt die Gleichheit auch  $\mathbb{P}$ -f.s., d.h.  $\lambda^d(B \setminus Z) = 0$   $\mathbb{P}$ -f.s. Da es eine Folge  $(B_n)$  in  $\mathcal{B}^d$  gibt mit  $B_n \uparrow \mathbb{R}^d$ , folgt  $\lambda^d(\mathbb{R}^d \setminus Z) = 0$ . Das bleibt richtig, falls  $Z$  durch

$$Z_\varepsilon := \bigcup_{n=1}^{\infty} B(\xi_n, (R_n - \varepsilon)_+)$$

ersetzt wird. Hierbei ist  $\varepsilon > 0$  fest gewählt. Beachte hierzu, dass  $\mathbb{E}[(R - \varepsilon)_+^d] = \infty$ . Also gilt für

$$Z'_\varepsilon := \bigcup_{n: R_n > \varepsilon} B(\xi_n, R_n - \varepsilon)$$

immer noch  $\lambda^d(\mathbb{R}^d \setminus Z'_\varepsilon) = 0$   $\mathbb{P}$ -f.s. Außerdem ist

$$Z'_\varepsilon + \varepsilon B^d \subset Z \text{ } \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Angenommen, es gäbe ein  $x \in \mathbb{R}^d \setminus (Z'_\varepsilon + \varepsilon B^d)$ , d.h.  $x \notin Z'_\varepsilon + \varepsilon B^d$ , so ist der Abstand  $d(x, Z'_\varepsilon) \geq \varepsilon$ , womit die offene Kugel  $B^0(x, \varepsilon)$  in  $\mathbb{R}^d \setminus Z'_\varepsilon$  liegt. Dann ist aber  $\lambda^d(\mathbb{R}^d \setminus Z'_\varepsilon) \neq 0$ . Somit kann  $Z'_\varepsilon + \varepsilon B^d \neq \mathbb{R}^d$  nur auf einer  $\mathbb{P}$ -Nullmenge gelten, das heißt, es folgt

$$Z'_\varepsilon + \varepsilon B^d = \mathbb{R}^d \text{ } \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

und damit auch die Behauptung. □

### 3 Zufällige abgeschlossene Mengen und Punktprozesse

In diesem Kapitel geben wir eine knappe Einführung in die Theorie der zufälligen abgeschlossenen Mengen und Punktprozesse, so wie sie in dieser Vorlesung benötigt wird. Weitere Details finden sich zum Beispiel im Skript der Vorlesung “Räumliche Stochastik”.

#### 3.1 Zufällige abgeschlossene Mengen

Wir betrachten Teilmengen des  $\mathbb{R}^d$ . Für  $A \subset \mathbb{R}^d$  erklären wir

$$\mathcal{F}^A := \{F \in \mathcal{F}^d : F \cap A = \emptyset\} \quad \text{und} \quad \mathcal{F}_A := \{F \in \mathcal{F}^d : F \cap A \neq \emptyset\}.$$

**3.1.1 Definition.** Die *Fell-Topologie*  $\tau^d$  auf  $\mathcal{F}^d$  ist die kleinste Topologie, welche die Systeme  $\{\mathcal{F}^C : C \in \mathcal{C}^d\}$  und  $\{\mathcal{F}_G : G \in \mathcal{O}^d\}$  enthält. Die zugehörige Borelsche  $\sigma$ -Algebra wird mit  $\mathcal{B}(\mathcal{F}^d)$  bezeichnet.

**3.1.2 Satz.** Der topologische Raum  $(\mathcal{F}^d, \tau^d)$  ist ein kompakter Hausdorffraum mit abzählbarer Basis und damit insbesondere metrisierbar.

**3.1.3 Bemerkung.** (i) Das System

$$\{\mathcal{F}^C \cap \mathcal{F}_{G_1} \cap \dots \cap \mathcal{F}_{G_k} : C \in \mathcal{C}^d, G_1, \dots, G_k \in \mathcal{O}^d, k \in \mathbb{N}_0\}$$

ist durchschnittsstabil ( $\mathcal{F}^C \cap \mathcal{F}^{C'} = \mathcal{F}^{C \cup C'}$ ) und bildet eine *Basis* der Fell-Topologie, d.h. jede offene Menge ist Vereinigung von Elementen der Basis.

(ii) Das System  $\{\mathcal{F}^C : C \in \mathcal{C}^d\}$  ist eine Umgebungsbasis von  $\emptyset$ , d.h. für alle  $\mathcal{H} \in \tau^d$  mit  $\emptyset \in \mathcal{H}$  existiert ein  $C \in \mathcal{C}^d$  mit  $\mathcal{F}^C \subset \mathcal{H}$ .

(iii) Für  $C \in \mathcal{C}^d$  ist  $\mathcal{F}_C (= \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}^C)$  als abgeschlossene Teilmenge des kompakten Raumes  $\mathcal{F}^d$  wiederum kompakt.

(iv) Ist  $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}^d \setminus \{\emptyset\}$  kompakt, so ist  $\mathcal{F}^d \setminus \mathcal{L}$  offen,  $\emptyset \in \mathcal{F}^d \setminus \mathcal{L}$ , und es gibt nach (ii) ein  $C \in \mathcal{C}^d$  mit  $\mathcal{F}^C \subset \mathcal{F}^d \setminus \mathcal{L}$ , d.h.  $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}_C$ .

**3.1.4 Satz.** Für  $F, F_1, F_2, \dots \in \mathcal{F}^d$  sind äquivalent:

- (i)  $F_n \rightarrow F$  bezüglich  $\tau^d$ , d.h. in jeder Umgebung von  $F$  sind fast alle  $F_n$  enthalten.
- (ii) a) Für jedes  $x \in F$  existiert eine Folge  $(x_n)$  mit  $x_n \rightarrow x$  und  $x_n \in F_n$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$ .  
b) Ist  $I \subset \mathbb{N}$  eine unendliche Teilmenge (d.h.  $\text{card } I = \infty$ ) und gilt  $x_n \in F_n$  für  $n \in I$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty, n \in I} x_n = x$  für ein  $x \in \mathbb{R}^d$ , so gilt  $x \in F$ .

*Beweis.* Es gelte (i). Wie zeigen zunächst (ii) a). Sei dazu  $x \in F$ . Setze

$$G_n = B^o\left(x, \frac{1}{n}\right) := \left\{y \in \mathbb{R}^d : \|y - x\| < \frac{1}{n}\right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wegen  $G_n \cap F \neq \emptyset$  gilt  $F \in \mathcal{F}_{G_n} \in \tau^d$ , d.h.  $\mathcal{F}_{G_n}$  ist Umgebung von  $F$ . Also gibt es ein  $k_n \in \mathbb{N}$  mit  $F_k \cap G_n \neq \emptyset$  für alle  $k \geq k_n$ . O.B.d.A. gelte  $k_1 < k_2 < \dots$ . Wähle

$$x_p \in F_p \cap G_n, \quad p = k_n, \dots, k_{n+1} - 1, n \in \mathbb{N}.$$

Dann konvergiert  $(x_p)_{p \geq k_1}$  gegen  $x \in F$ .

Nun wollen wir (ii) b) zeigen. Dazu seien  $I \subset \mathbb{N}$  und  $x_n \in F_n$  für  $n \in I$  mit  $x_n \rightarrow x$  für  $n \rightarrow \infty, n \in I$ . Angenommen,

$$x_n \rightarrow x \notin F. \quad (3.1.1)$$

Wähle  $C \in \mathcal{C}^d$  mit  $x \in \text{int } C$  und  $C \cap F = \emptyset$ , d.h.  $F \in \mathcal{F}^C \in \tau^d$ . Damit ist  $F_n \cap C = \emptyset$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$ . Wegen (3.1.1) ist  $x_n \in C \cap F_n$ , wenn  $n$  hinreichend groß ist, ein Widerspruch.

Nun gelte (ii). Es genügt, Umgebungen  $\mathcal{U}$  von  $F$  zu betrachten der Form  $\mathcal{U} = \mathcal{F}_G$ ,  $G$  offen, bzw.  $\mathcal{U} = \mathcal{F}^C$ ,  $C$  kompakt.

- Es gelte  $F \in \mathcal{F}_G$  für  $G \in \mathcal{O}^d$ . Wir zeigen, dass  $F_n \in \mathcal{F}_G$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt. Wähle dazu  $x \in F \cap G$ . Wegen (ii) a) gibt es  $x_n \in F_n, n \in \mathbb{N}$ , mit  $x_n \rightarrow x$ . Aus  $x \in G$  folgt dann  $x_n \in G$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$ , d.h.  $F_n \cap G \neq \emptyset$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$ . Daraus folgt  $F_n \in \mathcal{F}_G$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$ .
- Es gelte  $F \in \mathcal{F}^C$  für ein  $C \in \mathcal{C}^d$ . Wir zeigen  $F_n \in \mathcal{F}^C$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$ . Angenommen,  $F_n \notin \mathcal{F}^C$  für jedes  $n \in I$  einer Teilfolge  $I \subset \mathbb{N}$ . Wähle dann  $x_n \in F_n \cap C \neq \emptyset$  für jedes  $n \in I$ . Da  $C$  kompakt ist, existiert eine unendliche Teilmenge  $J \subset I$  mit  $x_n \rightarrow x$  für  $n \rightarrow \infty$  und  $n \in J$ . Dann ist aber  $x \in C$ , da  $C$  abgeschlossen ist, und es ist  $x \in F$  wegen (ii) b), im Widerspruch zu  $F \cap C = \emptyset$ .

Die Kombination dieser beiden Teilpunkte ergibt (i).  $\square$

**3.1.5 Bemerkung.** Sowohl  $\{\mathcal{F}^C : C \in \mathcal{C}^d\}$  als auch  $\{\mathcal{F}_G : G \in \mathcal{O}^d\}$  erzeugen  $\mathcal{B}(\mathcal{F}^d)$ . Zu  $G \in \mathcal{O}^d$  gibt es eine Folge  $\mathcal{C}^d \ni C_n \uparrow G \in \mathcal{O}^d$ , und daher folgt

$$\mathcal{F}_G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{C_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathcal{F}^d \setminus \mathcal{F}^{C_n}).$$

Zu  $C \in \mathcal{C}^d$  gibt es eine Folge relativ kompakter Mengen  $\mathcal{O}^d \ni G_n \downarrow C \in \mathcal{C}^d$ , und daher folgt

$$\mathcal{F}^C = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathcal{F}^d \setminus \mathcal{F}_{G_n}).$$

**3.1.6 Bemerkung.** Es gilt  $\mathcal{C}^d \in \mathcal{B}(\mathcal{F}^d)$ . Für  $C_n := B(0, n)$  gilt nämlich

$$\mathcal{C}^d = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}^{\mathbb{R}^d \setminus C_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathcal{F}^d \setminus \mathcal{F}_{\mathbb{R}^d \setminus C_n}) \in \mathcal{B}(\mathcal{F}^d).$$

**3.1.7 Beispiel.** (siehe Übung)

- (i) Wenn  $x_n \rightarrow x$  in  $\mathbb{R}^d$  und  $r_n \rightarrow r$  in  $\mathbb{R}_+$ , dann folgt  $B(x_n, r_n) \rightarrow B(x, r)$ .
- (ii) Aus  $\|x_n\| \rightarrow \infty$  folgt  $\{x_n\} \rightarrow \emptyset$ .

**3.1.8 Satz.** Die Abbildung  $\mathcal{F}^d \times \mathcal{F}^d \rightarrow \mathcal{F}^d, (F, F') \mapsto F \cup F'$  ist stetig.

*Beweis.* Es gelte  $F_n \rightarrow F$  und  $F'_n \rightarrow F'$ . Wir zeigen mit Satz 3.1.4, dass  $F_n \cup F'_n \rightarrow F \cup F'$  gilt:

- a) Es sei  $x \in F \cup F'$ . O.B.d.A. sei  $x \in F$ . Dann gibt es für fast alle  $n \in \mathbb{N}$  ein  $x_n \in F_n \subset F_n \cup F'_n$ , so dass  $x_n \rightarrow x$ .



- b) Ist  $I \subset \mathbb{N}$  eine unendliche Teilmenge mit  $x_n \in F_n \cup F'_n, x_n \rightarrow x \in \mathbb{R}^d$  für  $n \in I$ , so gibt es eine unendliche Teilmenge  $J \subset I$  mit (o.B.d.A.)  $x_n \in F_n, n \in J$ , d.h.  $x \in F \subset F \cup F'$ .  $\square$

**3.1.9 Satz.** (i) Die Abbildung  $\mathcal{F}^d \rightarrow \mathcal{F}^d, F \mapsto -F = F^*$  ist stetig.

(ii) Die Abbildung  $\mathbb{R} \times \mathcal{F}^d \rightarrow \mathcal{F}^d, (\alpha, F) \mapsto \alpha F$  ist stetig auf  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathcal{F}^d$ .

*Beweis.* siehe Übung. Dort wird auch gezeigt, dass die zweite Aussage auf  $\mathbb{R} \times \mathcal{F}^d$  nicht richtig ist.  $\square$

**3.1.10 Beispiel.** Die Abbildung  $\mathcal{F}^d \times \mathcal{F}^d \rightarrow \mathcal{F}^d, (F, F') \mapsto F \cap F'$  ist nicht stetig. Dies sieht man folgendermaßen: Seien  $x_n \in \mathbb{R}^d, n \in \mathbb{N}$ , mit  $x_n \rightarrow x, x_n \neq x$ . Dann gilt  $\{x_n\} \rightarrow \{x\}$ , aber mit  $F_n := \{x_n\}$  und  $F := \{x\}$  konvergiert  $\emptyset = F_n \cap F$  nicht gegen  $F \cap F = \{x\}$ .

**3.1.11 Satz.** (i) Die Abbildung  $\mathcal{F}^d \times \mathcal{F}^d \rightarrow \mathcal{F}^d, (F, F') \mapsto F \cap F'$  ist messbar.

(ii) Die Abbildungen  $\mathcal{F}^d \rightarrow \mathcal{F}^d, F \mapsto \text{cl}(\mathbb{R}^d \setminus F)$  und  $\mathcal{F}^d \rightarrow \mathcal{F}^d, F \mapsto \partial F$  sind messbar.

(iii) Die Abbildung  $\mathcal{F}^d \times \mathcal{F}^d \rightarrow \mathcal{F}^d, (F, F') \mapsto \text{cl}(F + F')$  ist messbar.

(iv) Die Abbildung  $\mathbb{R}^d \times \mathcal{F}^d \rightarrow \mathbb{R}, (x, F) \mapsto \mathbb{1}_F(x)$  ist messbar.

*Beweis.* Wir zeigen (i) und (iv) und verweisen für die restlichen Aussagen auf [4]. Zu (i): Sei  $\varphi$  die Schnittbildung, d.h.,  $\varphi(F_1, F_2) := F_1 \cap F_2$ . Wir zeigen, dass für  $C \in \mathcal{C}^d$  stets  $\varphi^{-1}(\mathcal{F}^C)$  offen ist. Sei dazu  $(F_1, F_2) \in \mathcal{F}^d \times \mathcal{F}^d$  mit  $(F_1, F_2) \in \varphi^{-1}(\mathcal{F}^C)$ , also  $F_1 \cap F_2 \cap C = \emptyset$ . Angenommen, es gäbe keine offene Umgebung von  $(F_1, F_2)$ , die in  $\varphi^{-1}(\mathcal{F}^C)$  enthalten ist. Dann existieren Folgen  $F_1^i, F_2^i, i \in \mathbb{N}$ , mit  $F_1^i \rightarrow F_1, F_2^i \rightarrow F_2$  und  $F_1^i \cap F_2^i \cap C \neq \emptyset$  für  $i \in \mathbb{N}$ . Wähle Punkte  $x_i \in F_1^i \cap F_2^i \cap C$  für  $i \in \mathbb{N}$ . Da  $C$  kompakt ist, existiert eine Teilfolge  $I \subset \mathbb{N}$  mit  $x_i \rightarrow x \in C$  für  $i \rightarrow \infty, i \in I$ . Dann ist aber  $x \in F_1$  und  $x \in F_2$  wegen  $F_1^i \rightarrow F_1$  und  $F_2^i \rightarrow F_2$ . Dies zeigt  $x \in F_1 \cap F_2 \cap C \neq \emptyset$ , ein Widerspruch.

Zum Nachweis von (iv) zeigen wir, dass für  $\varphi(x, F) := \mathbb{1}\{x \in F\}$  die Urbildmenge  $\varphi^{-1}(\{1\})$  abgeschlossen ist. Seien dazu  $(x_i, F_i) \in \varphi^{-1}(\{1\})$  für  $i \in \mathbb{N}$  und  $(x_i, F_i) \rightarrow (x, F)$  für  $i \rightarrow \infty$ . Dann ist  $x_i \in F_i$  und  $x \in F$  wegen Satz 3.1.4 (ii) b). Also folgt  $(x, F) \in \varphi^{-1}(\{1\})$ .  $\square$

**3.1.12 Definition.** Für  $B \subset \mathbb{R}^d$  und  $\varepsilon > 0$  sei

$$B_{\oplus \varepsilon} := B + \varepsilon B^d$$

die *Parallelmenge* von  $B$  mit Abstand  $\varepsilon > 0$ .

**3.1.13 Bemerkung.** Ist  $B \in \mathcal{F}^d$ , so gilt  $B_{\oplus \varepsilon} = \{x \in \mathbb{R}^d : d(x, B) \leq \varepsilon\}$ , wobei  $d(\cdot, \cdot)$  die euklidische Metrik bezeichnet und  $d(x, B) := \inf\{d(x, y) : y \in B\}$ .

**3.1.14 Definition.** Die Hausdorff-Metrik  $\delta$  auf  $\mathcal{C}^d \setminus \{\emptyset\}$  ist definiert durch

$$\delta(C, C') := \min\{\varepsilon \geq 0 : C \subset C'_{\oplus \varepsilon}, C' \subset C_{\oplus \varepsilon}\}.$$

Ferner definiert man  $\delta(\emptyset, C) = \delta(C, \emptyset) := \infty, C \in \mathcal{C}^d \setminus \{\emptyset\}$ , und  $\delta(\emptyset, \emptyset) := 0$ .

**3.1.15 Satz.** Die Hausdorff-Metrik ist sowohl auf  $\mathcal{C}^d \setminus \{\emptyset\}$  als auch auf  $\mathcal{C}^d$  eine Metrik.

**3.1.16 Satz.** Es seien  $C, C_1, C_2, \dots \in \mathcal{C}^d \setminus \{\emptyset\}$ . Gilt  $\delta(C_n, C) \rightarrow 0$ , so folgt  $C_n \rightarrow C$  bezüglich  $\tau^d$ . Die Umkehrung ist richtig, falls  $C_n \subset K$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , für ein  $K \in \mathcal{C}^d$ .

*Beweis.* " $\Rightarrow$ ": Sei  $\delta(C_n, C) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . Sei  $x \in C$ . Zu  $i \in \mathbb{N}$  gibt es  $n_i \in \mathbb{N}$  mit  $x \in C_{n_i} + \frac{1}{i}B^d$  für  $n \geq n_i$ , wobei  $n_{i+1} > n_i$  gewählt werden kann. Wir können für  $n \in \{n_i, \dots, n_{i+1} - 1\}$  also  $x_n \in C_n$  so wählen, dass  $x \in x_n + \frac{1}{i}B^d$ . Insbesondere ist  $x_n \in C_n$  für  $n \geq n_1$  und  $\|x - x_n\| \leq 1/i$  für  $n \geq n_i$ , d.h.  $x_n \rightarrow x$  für  $n \rightarrow \infty$ . Daher ist (ii) a) in Satz 3.1.4 erfüllt. Wir zeigen nun, dass auch (ii) b) gilt. Sei hierzu  $I \subset \mathbb{N}$  eine unendliche Teilmenge mit  $x_n \in C_n$  für  $n \in I$  und  $x_n \rightarrow x \in \mathbb{R}^d$ . Nach Voraussetzung gilt  $C_n \subset C + \varepsilon B^d$  für  $n \geq n(\varepsilon)$ , also ist  $x \in C + \varepsilon B^d$ , und zwar für alle  $\varepsilon > 0$ . Dies zeigt  $x \in C$ .

" $\Leftarrow$ ": Sei  $C_n \rightarrow C$  für  $n \rightarrow \infty$  bezüglich  $\tau^d$  und  $C_n \subset K$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Satz 3.1.4 (ii) a) zeigt, dass dann auch  $C \subset K$  gilt. Sei  $\varepsilon \in (0, 1)$ .

Betrachte  $\tilde{C} := \text{cl}(K \setminus C_{\oplus \varepsilon})$ . Wegen  $C \cap \tilde{C} = \emptyset$  ist  $C_n \cap \tilde{C} = \emptyset$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$ . Daher folgt  $C_n \subset C_{\oplus \varepsilon}$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Wir zeigen nun noch  $C \subset (C_n)_{\oplus \varepsilon}$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$ . Angenommen, diese Inklusion wäre mit einer unendlichen Teilmenge  $I \subset \mathbb{N}$  für  $n \in I$  nicht erfüllt. Für  $n \in I$  gibt es dann  $x_n \in C$  mit  $d(x_n, C_n) \geq \varepsilon$ . Da  $C$  kompakt ist, gibt es eine unendliche Teilmenge  $J \subset I$  sowie  $x \in C$  mit  $x_n \rightarrow x$  für  $n \rightarrow \infty$  und  $n \in J$ . Zu  $x \in C$  gibt es nach Satz 3.1.2 (ii) a)  $y_n \in C_n$  mit  $y_n \rightarrow x$  für  $n \rightarrow \infty$ . Zusammen erhält man für  $n \in J$ , dass

$$\varepsilon \leq d(x_n, C_n) \leq d(x_n, x) + d(x, C_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y_n) \rightarrow 0$$

für  $n \rightarrow \infty$  (mit  $n \in J$ ), ein Widerspruch.  $\square$

**3.1.17 Beispiel.** Es seien  $x, x_n \in \mathbb{R}^d$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , mit  $\|x_n\| \rightarrow \infty$ . Dann gilt  $\{x_n, x\} \rightarrow \{x\}$  in  $\mathcal{F}^d$ , aber  $\delta(\{x_n, x\}, \{x\}) \rightarrow \infty$ .

**3.1.18 Definition.** Eine zufällige abgeschlossene Menge ist eine messbare Abbildung  $Z: \Omega \rightarrow \mathcal{F}^d$ . Ihr *Kapazitätsfunktional*  $T_Z: \mathcal{C}^d \rightarrow [0, 1]$  ist definiert durch

$$T_Z(K) := \mathbb{P}(Z \cap K \neq \emptyset), \quad K \in \mathcal{C}^d.$$

**3.1.19 Satz.** Für zufällige abgeschlossene Mengen  $Z, Z'$  gilt  $Z \stackrel{d}{=} Z'$  genau dann, wenn  $T_Z = T_{Z'}$  gilt.

*Beweis.* " $\Rightarrow$ ":  $Z \stackrel{d}{=} Z'$  bedeutet  $\mathbb{P}(Z \in \mathcal{H}) = \mathbb{P}(Z' \in \mathcal{H})$  für alle  $\mathcal{H} \in \mathcal{B}(\mathcal{F}^d)$ , also gilt insbesondere für alle  $K \in \mathcal{C}^d$

$$T_Z(K) = \mathbb{P}(Z \cap K \neq \emptyset) = \mathbb{P}(Z \in \mathcal{F}_K) = \mathbb{P}(Z' \in \mathcal{F}_K) = \mathbb{P}(Z' \cap K \neq \emptyset) = T_{Z'}(K).$$

" $\Leftarrow$ ": Die Familie  $\{\mathcal{F}^K : K \in \mathcal{C}^d\}$  ist ein durchschnittsstabiles Erzeugendensystem von  $\mathcal{B}(\mathcal{F}^d)$  (siehe Bem. 3.1.5), und für solche Mengen  $\mathcal{F}^K$  gilt offenbar

$$\mathbb{P}_Z(\mathcal{F}^K) = \mathbb{P}(Z \in \mathcal{F}^K) = 1 - \mathbb{P}(Z \in \mathcal{F}_K) = 1 - T_Z(K) = 1 - T_{Z'}(K) = \mathbb{P}_{Z'}(\mathcal{F}^K).$$

Somit folgt  $\mathbb{P}_Z = \mathbb{P}_{Z'}$  nach dem Eindeutigkeitssatz für Maße.  $\square$

### 3.2 Zufällige Maße und Punktprozesse

Es sei  $(\mathbb{X}, \rho)$  ein separabler metrischer Raum mit Borelscher  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}(\mathbb{X}) =: \mathcal{X}$ .

**3.2.1 Definition.** (i)  $B \subset \mathbb{X}$  heißt *beschränkt*, falls

$$\rho(B) := \sup\{\rho(x, y) : x, y \in B\} < \infty.$$

$\rho(B)$  heißt *Durchmesser* von  $B$ . Weiter sei  $\mathcal{X}_b := \{B \in \mathcal{X} : B \text{ beschränkt}\}$ .

(ii)  $A \subset \mathbb{X}$  heißt *lokal-endlich*, falls  $\text{card}(A \cap B) < \infty$ ,  $B \in \mathcal{X}_b$ .

Jede kompakte (und auch jede relativ kompakte) Teilmenge von  $\mathbb{X}$  ist beschränkt.

**3.2.2 Definition.**

(i)  $M(\mathbb{X}) := \{\mu : \mu \text{ ist ein Borel-Maß auf } \mathbb{X} \text{ mit } \mu(B) < \infty \text{ für } B \in \mathcal{X}_b\}$   
heißt Menge der *lokal-endlichen Maße* auf  $\mathbb{X}$ .

(ii)  $N(\mathbb{X}) := \{\varphi \in M(\mathbb{X}) : \varphi(B) \in \mathbb{N}_0 \text{ für } B \in \mathcal{X}_b\}$   
heißt Menge der *lokal-endlichen Zählmaße* auf  $\mathbb{X}$ .

(iii)  $N_s(\mathbb{X}) := \{\varphi \in N(\mathbb{X}) : \varphi(\{x\}) \in \{0, 1\} \text{ für } x \in \mathbb{X}\}$   
heißt Menge der *einfachen Zählmaße* auf  $\mathbb{X}$ .

(iv)  $\mathcal{M}(\mathbb{X})$  sei die kleinste  $\sigma$ -Algebra auf  $M(\mathbb{X})$ , für die die Abbildungen  $\mu \mapsto \mu(B)$  für jedes  $B \in \mathcal{X}$  („Auswertungsfunktionale“) messbar sind, d.h.  $\mathcal{M}(\mathbb{X})$  ist die kleinste  $\sigma$ -Algebra, welche alle Mengen der Form  $\{\mu : \mu(B) \in C\}$ ,  $B \in \mathcal{X}$ ,  $C \in \mathcal{B}([0, \infty])$ , enthält. Ferner seien

$$\mathcal{N}(\mathbb{X}) := \mathcal{M}(\mathbb{X}) \cap N(\mathbb{X}) \text{ und } \mathcal{N}_s(\mathbb{X}) := \mathcal{M}(\mathbb{X}) \cap N_s(\mathbb{X}).$$

Ist  $\mu \in M(\mathbb{X})$ , so ist  $\mu$  endlich auf kompakten Mengen.

**3.2.3 Definition.** Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $\{B_{n,i} : i \in \mathbb{N}\}$  eine Zerlegung von  $\mathbb{X}$  in Mengen aus  $\mathcal{X}_b$ . Wir nennen eine Folge  $(\{B_{n,i} : i \in \mathbb{N}\})_{n \in \mathbb{N}}$  solcher Zerlegungen eine (ausgezeichnete) gerichtete Folge von Zerlegungen, wenn jedes  $B \in \{B_{n,i} : i \in \mathbb{N}\}$  eine Vereinigung von Mengen aus  $\{B_{n+1,i} : i \in \mathbb{N}\}$  ist und wenn  $\sup\{\rho(B_{n,i}) : i \in \mathbb{N}\} \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  gilt.

**3.2.4 Bemerkung.** In separablen metrischen Räumen  $(\mathbb{X}, \rho)$  existieren (ausgezeichnete) gerichtete Folgen von Zerlegungen. Zunächst existiert eine abzählbare Umgebungsbasis offener Mengen  $B_n \subset \mathbb{X}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Das Teilsystem derjenigen Mengen  $B_n$  mit Durchmesser höchstens  $1/k$  für ein festes  $k \in \mathbb{N}$ , ist dann immer noch eine Umgebungsbasis, überdeckt also insbesondere  $\mathbb{X}$ . Hieraus erhalten wir sukzessiv eine abzählbare, messbare Zerlegung von  $\mathbb{X}$  in disjunkte Mengen vom Durchmesser höchstens  $1/k$ . Durch Schneiden mit den Mengen der Stufe  $k - 1$  erhalten wir eine Verfeinerung dieser Zerlegung wie gefordert.

**3.2.5 Definition.** Ein Maß  $\mu$  auf  $\mathbb{X}$  heißt *diffus*, falls  $\mu\{x\} := \mu(\{x\}) = 0$  für alle  $x \in \mathbb{X}$ .

**3.2.6 Definition.** Ein Punkt  $x \in \mathbb{X}$  heißt *Atom* eines Maßes  $\mu$ , falls  $\mu\{x\} > 0$ .

**3.2.7 Beispiel.** Sei  $x \in \mathbb{R}^d$ . Das Dirac-Maß  $\delta_x$ ,

$$\delta_x(B) := \mathbb{1}_B(x),$$

hat ein Atom bei  $x$ .

**3.2.8 Beispiel.** Jedes Maß auf  $\mathbb{R}^d$  mit Lebesgue-Dichte ist diffus.

**3.2.9 Bemerkung.** Ist  $B \in \mathcal{X}_b$ , so hat  $\mu \in M(\mathbb{X})$  nur endlich viele Atome in  $B$  mit Masse mindestens  $r > 0$ . Insgesamt hat  $\mu$  also maximal abzählbar unendlich viele Atome in  $B$  und damit auch in  $\mathbb{X}$ .

**3.2.10 Satz.** Jedes  $\mu \in M(\mathbb{X})$  besitzt eine Darstellung

$$\mu = \mu_c + \sum_{i=1}^{\tau} a_i \delta_{x_i}$$

mit einem diffusen Maß  $\mu_c$ ,  $\tau \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ ,  $a_i > 0$  und  $x_i \in \mathbb{X}$ . Dabei können die Abbildungen  $\mu \mapsto (\mu_c, \tau)$  und  $\mu \mapsto (a_1, x_1, a_2, x_2, \dots)$  messbar gewählt werden, wobei wir  $(a_i, x_i) := (0, x_0)$  für  $i > \tau$  mit einem festen  $x_0 \in \mathbb{X}$  wählen.

*Beweis.* Definiere für  $r > 0$  ein Maß  $\mu_r^*$  durch

$$\mu_r^*(B) := \text{card}\{x \in B : \mu(\{x\}) \geq r\} \quad \text{für } B \in \mathcal{X}.$$

Dann ist  $\mu_r^* \in N_s(\mathbb{X})$ . Sei nun  $(\{B_{n,i} : i \in \mathbb{N}\})_{n \geq 1}$  eine gerichtete Folge von Zerlegungen von  $\mathbb{X}$  mittels Mengen aus  $\mathcal{X}_b$ . In den Übungen soll gezeigt werden, dass

$$\mu_r^*(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{1}\{\mu(B_{n,i} \cap B) \geq r\} \quad \text{für } B \in \mathcal{X}_b.$$

Folglich ist die Abbildung  $\mu \mapsto \mu_r^*$  messbar.

Sei  $v \notin \mathbb{X}$  fest gewählt. Der Beweis von Lemma 2.1.6 in [3], der auf der Einführung einer (mit Hilfe gerichteter Zerlegungen erklärten) lexikographischen Ordnung auf  $\mathbb{X}$  beruht, zeigt, dass es eine Folge messbarer Abbildungen  $\zeta_i : N_s(\mathbb{X}) \rightarrow \mathbb{X} \cup \{v\}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , gibt, so dass

$$\eta = \sum_{i \in \mathbb{N}} \delta_{\zeta_i(\eta)}, \quad \eta \in N_s(\mathbb{X}).$$

Wir erklären

$$\zeta_{n,i}(\mu) := \zeta_i\left(\mu_{\frac{1}{n}}^*\right), \quad i, n \in \mathbb{N}.$$

Dann ist  $\mu \mapsto \zeta_{n,i}(\mu)$  messbar, und jedes Atom von  $\mu$  ist in  $(\zeta_{n,i}(\mu) : n, i \in \mathbb{N})$  enthalten. Hieraus erhalten wir eine Abzählung  $(\zeta'_1(\mu), \zeta'_2(\mu), \dots)$  der Atome von  $\mu$  mittels messbarer Abbildungen  $\zeta'_i : M(\mathbb{X}) \rightarrow \mathbb{X} \cup \{v\}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , so dass mit  $\tau := \lim_{r \rightarrow 0} \mu_r^*(\mathbb{X}) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$  gilt  $\zeta'_i(\mu) \in \mathbb{X}$  für  $i < \tau + 1$  und  $\zeta'_i(\mu) = v$  für  $i > \tau$ . Setze  $x_i := \zeta'_i(\mu)$  und  $a_i := \mu(\{x_i\})$  für  $i \in \mathbb{N}$  mit  $\mu(\{v\}) := 0$  und  $\mu_c := \mu - \sum_{i=1}^{\tau} a_i \delta_{x_i}$ . Dann ist  $\mu \mapsto \mu_c$  messbar und  $\mu_c$  atomfrei.  $\square$

**3.2.11 Bemerkung.** Im Beweis von Satz 3.2.10 wird (für den Nachweis der Messbarkeit von  $a_i$ ) verwendet, dass die Abbildung

$$\mathbb{X} \times M(\mathbb{X}) \rightarrow [0, \infty], \quad (x, \mu) \mapsto \mu(\{x\}),$$

messbar ist. Allgemeiner gilt: Ist  $f : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \rightarrow [0, \infty]$  messbar, so ist die Abbildung

$$\mathbb{X} \times M(\mathbb{X}) \rightarrow [0, \infty], \quad (x, \mu) \mapsto \int f(x, y) \mu(dy),$$

messbar. Dies zeigt man für  $f = \mathbb{1}_A$  und messbare Mengen  $A$  mit einem Monotone-Klassen-Argument. werden.

**3.2.12 Folgerung.** Die Mengen  $N(\mathbb{X})$  und  $N_s(\mathbb{X})$  sind messbare Teilmengen von  $M(\mathbb{X})$ .

*Beweis.* Es gilt  $\mu \in N(\mathbb{X}) \Leftrightarrow \mu_c = 0$  und  $a_i \in \mathbb{N}_0$  für  $i \in \mathbb{N}$ . Ferner gilt  $\mu \in N_s(\mathbb{X}) \Leftrightarrow \mu \in N(\mathbb{X})$  und  $a_i \in \{0, 1\}$  für  $i \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**3.2.13 Definition.** (i) Ein *zufälliges Maß*  $\eta$  auf  $\mathbb{X}$  ist eine messbare Abbildung  $\eta: \Omega \rightarrow M(\mathbb{X})$ .

(ii) Ein *Punktprozess*  $\Phi$  auf  $\mathbb{X}$  ist eine messbare Abbildung  $\Phi: \Omega \rightarrow N(\mathbb{X})$ . Gilt  $\mathbb{P}(\Phi \in N_s(\mathbb{X})) = 1$ , so heißt  $\Phi$  *einfach*.

**3.2.14 Bemerkung.** (i) Manchmal wird ein Punktprozess auf  $\mathbb{X}$  auch als zufälliges Maß  $\Phi$  mit  $\mathbb{P}(\Phi \in N(\mathbb{X})) = 1$  definiert.

(ii) Für  $\varphi \in N(\mathbb{X})$  sei der Träger von  $\varphi$  definiert durch  $\text{supp } \varphi = \{x \in \mathbb{X}: \varphi(\{x\}) > 0\}$ . Jedes Maß  $\varphi \in N_s(\mathbb{X})$  kann mit  $\text{supp } \varphi$  identifiziert werden.

(iii) Ist  $\eta$  ein zufälliges Maß, so schreibt man  $\eta(\omega, B) := \eta(\omega)(B)$  für  $\omega \in \Omega$  und  $B \in \mathcal{X}$  sowie  $\eta(B)$  für die Zufallsvariable  $\omega \mapsto \eta(\omega, B)$ .

(iv) Eine Abbildung  $\eta: \Omega \rightarrow M(\mathbb{X})$  ist genau dann messbar, wenn die Abbildung  $\omega \mapsto \eta(\omega, B)$  für jedes  $B \in \mathcal{X}$  messbar ist. Das folgt aus dem Monotonen Klassensatz, siehe auch Übung 4.2.

**3.2.15 Bemerkung.** Es sei  $\Phi$  ein Punktprozess auf  $\mathbb{X}$ . Gemäß Satz 3.2.10 gibt es dann Zufallsvariablen  $A_i \in \mathbb{N}$ ,  $\xi_i \in \mathbb{X}$  und  $\tau$  (mit  $\xi_i \neq \xi_j$ ,  $i, j \leq \tau$ ,  $i \neq j$ ) mit  $\Phi = \sum_{i=1}^{\tau} A_i \delta_{\xi_i}$ . Analog gibt es Zufallsvariablen  $\tau'$  und  $\xi'_i$  mit  $\Phi = \sum_{i=1}^{\tau'} \delta_{\xi'_i}$ . Oft wird  $\Phi$  direkt so definiert.

Im folgenden Beispiel und auch später verwenden wir das  $j$ -dimensionale Hausdorffmaß  $\mathcal{H}^j$  auf  $\mathbb{R}^d$ . Für die Definition verweisen wir auf Abschnitt 14.5 in [4]. Ist  $B \subset \mathbb{R}^d$  eine konvexe Menge, deren affine Hülle die Dimension  $k \geq 1$  hat, so ist  $\mathcal{H}^k(B)$  das  $k$ -dimensionale Lebesguemaß von  $B$ ,  $\mathcal{H}^j(B) = 0$  für  $j < k$  und  $\mathcal{H}^j(B) = \infty$  für  $j > k$ . Ferner ist  $\mathcal{H}^0$  das Zählmaß auf  $\mathbb{R}^d$ . Ist  $B$  eine  $j$ -dimensionale glatte Fläche, so ist  $\mathcal{H}^j(B)$  der (differentialgeometrische) Flächeninhalt von  $B$ .

**3.2.16 Beispiel.** Sei  $Z$  eine zufällige abgeschlossene Menge in  $\mathbb{R}^d$ . Dann definiert

$$\eta(B) := \lambda^d(Z \cap B), \quad B \in \mathcal{B}^d,$$

ein zufälliges Maß  $\eta$  auf  $\mathbb{R}^d$ . Dies folgt mit Satz 3.1.11 (iv) und dem Satz von Fubini. Auch  $B \mapsto \mathcal{H}^{d-1}(\partial Z \cap B)$  ist ein zufälliges Maß auf  $\mathbb{R}^d$ , falls  $\mathcal{H}^{d-1}(\partial Z \cap \cdot)$  lokal endlich ist. Dabei sei  $\mathcal{H}^{d-1}$  das  $(d-1)$ -dimensionale Hausdorffmaß auf  $\mathbb{R}^d$ . Dies folgt aus Satz 3.1.11 (ii) zusammen mit Corollary 2.1.4 in [5].

**3.2.17 Beispiel.** Es sei  $\{X_t: t \in \mathbb{R}^d\}$  ein  $\mathbb{R}_+$ -wertiges zufälliges Feld, sodass  $(\omega, t) \mapsto X_t(\omega)$  messbar ist. Dann ist

$$\eta(B) := \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_B(t) X_t dt$$

unter Integrabilitätsbedingungen ein zufälliges Maß.

**3.2.18 Beispiel.** Es seien  $X_1, \dots, X_m$  unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen in  $\mathbb{X}$  mit der Verteilung  $\mathbb{V} = \mathbb{P}(X_i \in \cdot)$ . Dann heißt der Punktprozess  $\Phi = \sum_{i=1}^m \delta_{X_i}$  *Binomialprozess* mit Parametern  $m$  und  $\mathbb{V}$ . Wegen

$$\Phi(B) = \sum_{i=1}^m \mathbb{1}\{X_i \in B\}$$

ist  $\Phi(B)$  messbar, d.h.  $\Phi$  ist ein Punktprozess. Ferner gilt

$$\mathbb{P}(\Phi(B) = k) = \binom{m}{k} \mathbb{V}(B)^k (1 - \mathbb{V}(B))^{m-k}$$

für  $k \in \{0, 1, \dots, m\}$ , und  $\mathbb{P}(\Phi(B) = k) = 0$  für  $k > m$ .

**3.2.19 Beispiel.** Es seien  $X_1, X_2, \dots$  unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen in  $\mathbb{X}$  und  $\tau$  eine von  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  unabhängige,  $\mathbb{N}_0$ -wertige Zufallsvariable. Dann heißt

$$\Phi := \sum_{i=1}^{\tau} \delta_{X_i}$$

*gemischter Binomialprozess*.

Wir sind nun in der Lage, den bereits in Definition 2.3.1 eingeführten homogenen Poissonprozess im  $\mathbb{R}^d$  weiter zu präzisieren.

**3.2.20 Definition.** Ein Punktprozess  $\Phi : \Omega \rightarrow N(\mathbb{R}^d)$  auf  $\mathbb{R}^d$  heißt *homogener (stationärer) Poissonprozess* mit Intensität  $\gamma \geq 0$ , falls gilt:

(i) Für  $m \geq 2$  und paarweise disjunkte Borelmengen  $B_1, \dots, B_m \in \mathcal{B}^d$  sind die Zufallsvariablen  $\Phi(B_1), \dots, \Phi(B_m)$  stochastisch unabhängig.

(ii)

$$\mathbb{P}(\Phi(B) = k) = \frac{\gamma^k (\lambda^d(B))^k}{k!} e^{-\gamma \lambda^d(B)}, \quad B \in \mathcal{B}^d, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Dabei ist  $\infty \cdot e^{-\infty} := 0$ .

**3.2.21 Bemerkung.** Nach Satz 3.2.10 gibt es eine Folge von Zufallspunkten  $\xi_1, \xi_2, \dots$  in  $\mathbb{R}^d$  und eine Zufallsvariable  $\tau$  in  $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ , so dass  $\Phi = \sum_{i=1}^{\tau} \delta_{\xi_i}$  gilt. Insbesondere ist dann  $\Phi(B) := \text{card}\{n \in \mathbb{N} : n \leq \tau : \xi_n \in B\}$  für  $B \in \mathcal{X}$ .

Die Verteilung  $\mathbb{P}_\eta$  eines zufälligen Maßes  $\eta$  ist die Abbildung  $A \mapsto \mathbb{P}(\eta \in A)$  von  $\mathcal{M}(\mathbb{X})$  nach  $[0, 1]$ . Für einen Punktprozess  $\Phi$  gilt insbesondere  $\mathbb{P}_\Phi(N(\mathbb{X})) = 1$

**3.2.22 Beispiel.** Es bezeichne  $\Pi_\gamma$  die Verteilung eines homogenen Poissonprozesses  $\Phi_\gamma$  mit Intensität  $\gamma \geq 0$ . Ist  $Y \geq 0$  eine Zufallsvariable und ist  $\Phi$  ein Punktprozess auf  $\mathbb{R}^d$  mit

$$\mathbb{P}(\Phi \in A | Y) = \Pi_Y(A) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}, \quad A \in \mathcal{N}(\mathbb{X}),$$

dann heißt  $\Phi$  *gemischter Poissonprozess* mit *zufälliger Intensität*  $Y$ .

**3.2.23 Definition.** Das *Intensitätsmaß*  $\Theta$  eines zufälligen Maßes  $\eta$  ist definiert durch

$$\Theta(B) := \mathbb{E}[\eta(B)], \quad B \in \mathcal{X}.$$

**3.2.24 Beispiel.** (i) Für den Binomialprozess  $\Phi$  aus Beispiel 3.2.18 gilt

$$\Theta(B) = \mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^m \delta_{X_i}(B) \right] = \sum_{i=1}^m \mathbb{E}[\mathbb{1}\{X_i \in B\}] = \sum_{i=1}^m \mathbb{P}(X_i \in B) = m\mathbb{V}(B).$$

(ii) Für einen gemischten Binomialprozess wie in Beispiel 3.2.19 gilt

$$\Theta(B) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[ \mathbb{1}\{\tau = m\} \sum_{i=1}^m \mathbb{1}\{X_i \in B\} \right] = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}(\tau = m) m\mathbb{V}(B) = \mathbb{E}[\tau]\mathbb{V}(B).$$

(iii) Für einen homogenen Poissonprozess  $\Phi$  in  $\mathbb{R}^d$  mit Intensität  $\gamma \geq 0$  ist  $\Phi(B)$  poissonverteilt mit Parameter  $\gamma\lambda^d(B)$  und deshalb gilt  $\Theta(B) = \gamma\lambda^d(B)$ ,  $B \in \mathcal{B}$  (vgl. auch Bem. 2.3.2).

(iv) Für den gemischten Poissonprozess gilt

$$\Theta(B) = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\Phi(B)|Y]] = \mathbb{E} \left[ \int \varphi(B) \Pi_Y(d\varphi) \right] = \mathbb{E}[Y\lambda^d(B)] = \mathbb{E}[Y]\lambda^d(B).$$

Zur Erinnerung: Für eine messbare Funktion  $f: \mathbb{X} \rightarrow [-\infty, \infty]$ , seien  $f^+ := \max\{0, f\}$  und  $f^- := -\min\{0, f\}$  der Positiv- bzw. Negativteil von  $f$ . Sei  $\nu$  ein Maß auf  $\mathbb{X}$ . Für  $f \geq 0$  ist das Integral  $\int_{\mathbb{X}} f d\nu$  immer definiert, nimmt aber möglicherweise den Wert  $\infty$  an. Für beliebiges  $f$  definieren wir  $\int_{\mathbb{X}} f d\nu := \int_{\mathbb{X}} f^+ d\nu - \int_{\mathbb{X}} f^- d\nu$ , sofern dieser Term nicht von der Form  $\infty - \infty$  ist. Im Fall  $\int_{\mathbb{X}} f^+ d\nu = \int_{\mathbb{X}} f^- d\nu = \infty$  definieren wir  $\int_{\mathbb{X}} f d\nu := 0$ . Außerdem nennen wir  $f$   $\nu$ -integrierbar, wenn  $\int_{\mathbb{X}} f^+ d\nu < \infty$  und  $\int_{\mathbb{X}} f^- d\nu < \infty$  gilt. Äquivalent dazu ist die Forderung  $\int_{\mathbb{X}} |f| d\nu < \infty$ .

**3.2.25 Satz** (Campbellsche Formel). *Ist  $\eta$  ein zufälliges Maß auf  $\mathbb{X}$  mit Intensitätsmaß  $\Theta$  und  $f: \mathbb{X} \rightarrow [-\infty, \infty]$  messbar, so ist  $\int_{\mathbb{X}} f(x) \eta(dx)$  eine  $[-\infty, \infty]$ -wertige Zufallsvariable. Falls zusätzlich  $f \geq 0$  gilt oder  $f$   $\Theta$ -integrierbar ist, so gilt*

$$\mathbb{E} \left[ \int_{\mathbb{X}} f(x) \eta(dx) \right] = \int_{\mathbb{X}} f(x) \Theta(dx). \quad (3.2.1)$$

*Beweis.* Für  $f \geq 0$  kann der Beweis von Satz 2.1.3 angewendet werden. Für allgemeines,  $\Theta$ -integrierbares  $f$  gilt  $\int_{\mathbb{X}} |f| d\Theta = \int_{\mathbb{X}} f^+ d\Theta + \int_{\mathbb{X}} f^- d\Theta < \infty$ . Aus (3.2.1) folgt  $\mathbb{E} \left[ \int_{\mathbb{X}} f^{\pm}(x) \eta(dx) \right] < \infty$ . Nach Definition und (3.2.1) folgt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \int_{\mathbb{X}} f d\eta \right] &= \mathbb{E} \left[ \int_{\mathbb{X}} f^+ d\eta - \int_{\mathbb{X}} f^- d\eta \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \int_{\mathbb{X}} f^+ d\eta \right] - \mathbb{E} \left[ \int_{\mathbb{X}} f^- d\eta \right] \\ &= \int_{\mathbb{X}} f^+ d\Theta - \int_{\mathbb{X}} f^- d\Theta \\ &= \int_{\mathbb{X}} f d\Theta. \end{aligned} \quad \square$$

**3.2.26 Bemerkung.** Ist  $\Phi$  ein Punktprozess von der Form  $\Phi = \sum_{i=1}^{\tau} \delta_{\xi_i}$ , so bedeutet Gleichung (3.2.1):

$$\mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^{\tau} f(\xi_i) \right] = \int_{\mathbb{X}} f d\Theta.$$

Wir charakterisieren Verteilungsgleichheit von zufälligen Maßen.

**3.2.27 Satz.** Für zufällige Maße  $\eta$  und  $\eta'$  auf  $\mathbb{X}$  sind äquivalent:

- (i)  $\eta \stackrel{d}{=} \eta'$ .
- (ii)  $\int_{\mathbb{X}} f d\eta \stackrel{d}{=} \int_{\mathbb{X}} f d\eta'$  für alle messbaren  $f \geq 0$ .
- (iii)  $\mathbb{E} \left[ \exp \left( - \int_{\mathbb{X}} f d\eta \right) \right] = \mathbb{E} \left[ \exp \left( - \int_{\mathbb{X}} f d\eta' \right) \right]$  für alle messbaren  $f \geq 0$ .
- (iv)  $(\eta(B_1), \dots, \eta(B_m)) \stackrel{d}{=} (\eta'(B_1), \dots, \eta'(B_m))$  für alle  $m \in \mathbb{N}$ ,  $B_1, \dots, B_m \in \mathcal{X}_b$ .

*Beweis.* (i)  $\Rightarrow$  (ii) und (ii)  $\Rightarrow$  (iii): Klar.

(iii)  $\Rightarrow$  (iv): Wählt man in (iii)  $f = c_1 \mathbb{1}_{B_1} + \dots + c_m \mathbb{1}_{B_m}$  mit  $c_i \geq 0$ ,  $B_i \in \mathcal{X}_b$ , so folgt

$$\mathbb{E} \left[ \exp \left( - \sum_{i=1}^m c_i \eta(B_i) \right) \right] = \mathbb{E} \left[ \exp \left( - \sum_{i=1}^m c_i \eta'(B_i) \right) \right].$$

Hiermit und mit dem Satz von Cramér-Wold (siehe z.B. [1, Seite 205]) (oder alternativ mit einem Eindeutigkeitssatz für die Laplacetransformation von nichtnegativen Zufallsvektoren, siehe Bemerkung 2.2.6 in [3]) erhält man (iv).

(iv)  $\Rightarrow$  (i): Es sei  $\mathcal{G}$  das System der Mengen

$$A := \{ \mu \in M(\mathbb{X}) : (\mu(B_1), \dots, \mu(B_m)) \in C \} \in \mathcal{M}(\mathbb{X})$$

mit  $m \in \mathbb{N}$ ,  $B_i \in \mathcal{X}_b$ ,  $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ . Dann ist  $\mathcal{G}$   $\cap$ -stabil und es gilt  $\sigma(\mathcal{G}) = \mathcal{M}(\mathbb{X})$ . Voraussetzung (iv) impliziert

$$\mathbb{P}(\eta \in A) = \mathbb{P}(\eta' \in A)$$

für alle  $A \in \mathcal{G}$  und somit folgt aus dem Eindeutigkeitssatz für Maße die Verteilungsgleichheit  $\eta \stackrel{d}{=} \eta'$ .  $\square$

**3.2.28 Bemerkung.** Lemma 2.2.3 in [3] gibt im Fall von Punktprozessen eine zu (iv) äquivalente Bedingung an, nach der es genügt, in (iv) paarweise disjunkte messbare Mengen  $B_1, \dots, B_m \in \mathcal{X}_b$  zu betrachten.

**3.2.29 Bemerkung.** Für ein zufälliges Maß  $\mu$  auf  $\mathbb{X}$  wird das durch

$$L_\mu(f) := \mathbb{E} \left[ \exp \left( - \int_{\mathbb{X}} f d\mu \right) \right]$$

für messbare Funktionen  $f : \mathbb{X} \rightarrow [0, \infty]$  erklärte Funktional als Laplace-Funktional von  $\mu$  bezeichnet. Damit ist auch das Laplace-Funktional eines Punktprozesses erklärt. Satz 3.2.27 besagt, dass das Laplace-Funktional eines zufälligen Maßes  $\mu$  die Verteilung von  $\mu$  eindeutig festlegt.

### 3.3 Poissonprozesse

Sei  $(\mathbb{X}, \rho)$  ein separabler metrischer Raum.

**3.3.1 Definition.** Es sei  $\Theta$  ein lokal-endliches Maß auf  $\mathbb{X}$ . Ein Punktprozess  $\Phi$  auf  $\mathbb{X}$  heißt *Poissonprozess* mit Intensitätsmaß  $\Theta$ , falls gilt:



(i)  $\Phi(B_1), \dots, \Phi(B_m)$  sind stochastisch unabhängige Zufallsvariablen für paarweise disjunkte messbare Mengen  $B_1, \dots, B_m \in \mathcal{X}$ .

(ii)

$$\mathbb{P}(\Phi(B) = k) = \frac{\Theta(B)^k}{k!} e^{-\Theta(B)}, \quad B \in \mathcal{X}, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

wobei  $\infty^k e^{-\infty} := 0$ .

Man schreibt  $\Phi \sim \text{Poiss}(\Theta)$ .

**3.3.2 Bemerkung.** (i) Es gilt  $\mathbb{E}[\Phi(B)] = \Theta(B)$ ,  $B \in \mathcal{X}$ .

(ii) Im Fall  $\Theta(B) = \infty$  gilt  $\mathbb{P}(\Phi(B) = k) = 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ , d.h.,

$$\mathbb{P}(\Phi(B) = \infty) = 1.$$

Man schreibt  $\Phi(B) \sim \text{Poiss}(\infty)$ .

Sind  $\Phi$  und  $\Psi$  Poissonprozesse mit gleichem lokal-endlichem Intensitätsmaß  $\Theta$ , so haben  $\Phi$  und  $\Psi$  die gleiche Verteilung. Dies folgt aus der Definition von Poissonprozessen zusammen mit Bemerkung 3.2.28.

Ist  $\eta$  ein zufälliges Maß, so auch die Einschränkung  $\eta \llcorner B$  auf eine messbare Menge  $B \in \mathcal{X}$ . In diesem Zusammenhang halten wir fest:

**3.3.3 Bemerkung.** Ist  $\Phi$  ein Poissonprozess mit Intensitätsmaß  $\Theta$  und sind  $B_1, B_2, \dots$  paarweise disjunkte Elemente von  $\mathcal{X}$ , so sind die Einschränkungen  $\Phi \llcorner B_1, \Phi \llcorner B_2, \dots$  unabhängige Poissonprozesse mit Intensitätsmaßen  $\Theta \llcorner B_1, \Theta \llcorner B_2, \dots$ . Das folgt leicht aus den Definitionen sowie aus dem Beweis von Satz 3.2.27 (iv) (und Bemerkung 3.2.28).

**3.3.4 Theorem.** Es sei  $\Phi$  ein Punktprozess auf  $\mathbb{X}$  und  $\Theta$  ein lokal-endliches Maß auf  $\mathbb{X}$ . Dann sind äquivalent:

(a)  $\Phi \sim \text{Poiss}(\Theta)$ .

(b) Für alle messbaren Funktionen  $f : \mathbb{X} \rightarrow [0, \infty]$  gilt

$$\mathbb{E} \left[ \exp \left( - \int_{\mathbb{X}} f \, d\Phi \right) \right] = \exp \left( - \int_{\mathbb{X}} (1 - e^{-f(x)}) \Theta(dx) \right). \quad (3.3.1)$$

*Beweis.* Es gelte  $\Phi \sim \text{Poiss}(\Theta)$ . Für  $B \in \mathcal{X}$  mit  $\Theta(B) < \infty$  und  $c \geq 0$  gilt zunächst

$$\mathbb{E}[\exp(-c\Phi(B))] = e^{-\Theta(B)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Theta(B)^k}{k!} e^{-ck} = e^{-\Theta(B)} e^{(\Theta(B)e^{-c})} = e^{-\Theta(B)(1-e^{-c})}.$$

Für Treppenfunktionen  $f := c_1 \mathbb{1}_{B_1} + \dots + c_m \mathbb{1}_{B_m}$  mit  $c_i \geq 0$  und paarweise disjunkte Mengen  $B_i \in \mathcal{X}_b$  folgt daraus

$$\begin{aligned} L_{\Phi}(f) &= \mathbb{E} \left[ \exp \left( - \int_{\mathbb{X}} f \, d\Phi \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \exp \left( - \sum_{i=1}^m c_i \Phi(B_i) \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E} \left[ \prod_{i=1}^m \exp(-c_i \Phi(B_i)) \right] \\
&= \prod_{i=1}^m \mathbb{E}[\exp(-c_i \Phi(B_i))] \\
&= \prod_{i=1}^m \exp(-\Theta(B_i)(1 - e^{-c_i})) \\
&= \exp \left( - \sum_{i=1}^m \Theta(B_i)(1 - e^{-c_i}) \right) \\
&= \exp \left( - \sum_{i=1}^m \int_{B_i} (1 - e^{-c_i}) d\Theta \right) \\
&= \exp \left( - \int_{\mathbb{X}} (1 - e^{-f}) d\Theta \right),
\end{aligned}$$

wobei im dritten und im letzten Schritt die Disjunktheit der Mengen  $B_i$  verwendet wurde. Für eine messbare Funktion  $f: \mathbb{X} \rightarrow [0, \infty]$  gibt es Treppenfunktionen  $f_n$  mit  $f_n \uparrow f$ . Dann folgt (3.3.1) mittels monotoner Konvergenz.

Umgekehrt nehmen wir nun an, dass (3.3.1) erfüllt sei. Sei  $B \in \mathcal{X}$  mit  $\Theta(B) < \infty$  und  $c \geq 0$ . Setze  $f := c \mathbb{1}_B$ . Dann gilt nach Voraussetzung

$$\begin{aligned}
L_{\Phi(B)}(c) &= \mathbb{E}[\exp(-c\Phi(B))] \\
&= \exp \left( - \int_{\mathbb{X}} (1 - e^{-c\mathbb{1}_B(x)}) \Theta(dx) \right) \\
&= \exp \left( - \int_B (1 - e^{-c}) \Theta(dx) \right) \\
&= \exp \left( - (1 - e^{-c}) \Theta(B) \right) \\
&= L_{\xi}(c),
\end{aligned}$$

wenn  $\xi \sim \text{Pois}(\Theta(B))$ , wie im ersten Beweisteil nachgerechnet wurde. Also ist mit dem Eindeutigkeitssatz für die Laplace-Transformation  $\Phi(B) \sim \text{Pois}(\Theta(B))$ . Ist  $\Theta(B) = \infty$ , so zeigt obige Umformung, dass  $\mathbb{E}[\exp(-c\Phi(B))] = 0$  gilt (für jedes  $c > 0$ ), also ist  $\Phi(B) = \infty$   $\mathbb{P}$ -fast sicher.

Seien nun  $B_1, \dots, B_m \in \mathcal{X}_b$  paarweise disjunkt und  $c_1, \dots, c_m \geq 0$ . Setze  $f := \sum_{i=1}^m c_i \mathbb{1}_{B_i}$ . Dann folgt wieder aufgrund der Voraussetzung

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[ \exp \left( - \sum_{i=1}^m c_i \Phi(B_i) \right) \right] &= \mathbb{E} \left[ \exp \left( - \int_{\mathbb{X}} f d\Phi \right) \right] \\
&= \exp \left( - \int_{\mathcal{X}} \left( 1 - \exp \left( - \sum_{i=1}^m c_i \mathbb{1}_{B_i}(x) \right) \right) \Theta(dx) \right) \\
&= \exp \left( - \sum_{i=1}^m \int_{B_i} (1 - e^{-c_i}) \Theta(dx) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \exp \left( - \sum_{i=1}^m (1 - e^{-c_i}) \Theta(B_i) \right) \\
&= \prod_{i=1}^m \mathbb{E} [e^{-c_i \Phi(B_i)}].
\end{aligned}$$

Hieraus schließt man, dass  $\Phi(B_1), \dots, \Phi(B_m)$  stochastisch unabhängig sind (siehe dazu z.B. die Ausführungen zur Laplace-Transformierten von Zufallsvektoren nach Bem. 2.2.6 in [3] oder [2, Satz 15.6 und Übung 15.1.2]). Den allgemeinen Fall (einige  $B_i$  evtl. unbeschränkt) leitet man hieraus ab.  $\square$

**3.3.5 Satz.** *Es sei  $\Phi = \sum_{i=1}^{\tau} \delta_{X_i}$  ein gemischter Binomialprozess wie in Beispiel 3.2.19 mit  $\tau \sim \text{Pois}(c)$  für ein  $c \geq 0$  und  $X_i \sim \mathbb{V}$  für  $i \in \mathbb{N}$ , wobei  $\tau, X_1, X_2, \dots$  stochastisch unabhängig seien. Dann ist  $\Phi \sim \text{Pois}(c\mathbb{V})$ .*

*Beweis.* Für eine messbare Funktion  $f : \mathbb{X} \rightarrow [0, \infty]$  gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[ \exp \left( - \int_{\mathbb{X}} f d\Phi \right) \right] &= \mathbb{E} \left[ \exp \left( - \sum_{k=1}^{\tau} f(X_k) \right) \right] \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[ \mathbb{1}_{\{\tau = m\}} \exp \left( - \sum_{k=1}^m f(X_k) \right) \right] \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}(\tau = m) \mathbb{E} \left[ \prod_{k=1}^m \exp(-f(X_k)) \right] \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} e^{-c} \frac{c^m}{m!} \prod_{k=1}^m \mathbb{E}[\exp(-f(X_k))] \\
&= e^{-c} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c^m}{m!} \left( \int_{\mathbb{X}} e^{-f(x)} \mathbb{V}(dx) \right)^m \\
&= e^{-c} \exp \left( c \int_{\mathbb{X}} e^{-f} d\mathbb{V} \right) \\
&= \exp \left( -c \left( 1 - \int_{\mathbb{X}} e^{-f} d\mathbb{V} \right) \right) \\
&= \exp \left( - \int_{\mathbb{X}} (1 - e^{-f}) d(c\mathbb{V}) \right).
\end{aligned}$$

Nach Theorem 3.3.4 folgt  $\Phi \sim \text{Pois}(c\mathbb{V})$ .  $\square$

**3.3.6 Theorem.** *Ist  $\Theta$  ein lokal-endliches Maß auf  $\mathbb{X}$ , so gibt es einen Punktprozess  $\Phi$  auf  $\mathbb{X}$  mit*

$$\Phi \sim \text{Pois}(\Theta).$$

*Beweis.* Zerlege den Raum  $\mathbb{X} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{X}_i$  in messbarer Weise, sodass  $\Theta(\mathbb{X}_i) < \infty$ . Setze dann  $c_i := \Theta(\mathbb{X}_i) \geq 0$  und  $\mathbb{V}_i := (c_i)^{-1} \Theta|_{\mathbb{X}_i}$ , falls  $c_i > 0$ , bzw. wähle  $\mathbb{V}_i$  als beliebiges Wahrscheinlichkeitsmaß im Fall  $c_i = 0$ . Dann gilt  $\Theta = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \cdot \mathbb{V}_i$ . Seien  $\Phi_1, \Phi_2, \dots$

unabhängige gemischte Binomialprozesse mit den Parametern  $\text{Poiss}(c_i)$  und  $\mathbb{V}_i$ . Man bestätigt nun mit Theorem 3.3.4 leicht, dass  $\Phi := \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i \sim \text{Poiss}(\Theta)$  gilt. In der Tat ist für messbare  $f \geq 0$

$$\begin{aligned}
 L_{\Phi}(f) &= \mathbb{E} \left[ \exp \left( - \int f d\Phi \right) \right] = \mathbb{E} \left[ \exp \left( - \sum_{i=1}^{\infty} \int f d\Phi_i \right) \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[ \prod_{i=1}^{\infty} \exp \left( - \int f d\Phi_i \right) \right] \\
 &= \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{E} \left[ \exp \left( - \int f d\Phi_i \right) \right] \\
 &= \prod_{i=1}^{\infty} \exp \left( -c_i \int (1 - e^{-f}) d\mathbb{V}_i \right) \\
 &= \exp \left( - \sum_{i=1}^{\infty} \int (1 - e^{-f(x)}) (c_i \mathbb{V}_i)(dx) \right) \\
 &= \exp \left( \int (1 - e^{-f(x)}) \Theta(dx) \right),
 \end{aligned}$$

was zu zeigen war.  $\square$

Wir überspringen die Mecke-Charakterisierung von Poissonprozessen (Satz 3.3.7) und die Multivariate Mecke-Formel (Satz 3.3.9) und zeigen an dieser Stelle direkt, dass Poissonprozesse einfach sind (was auch mit der letzteren Formel gezeigt werden kann).

**3.3.10 Korollar.** *Sei  $\Phi$  ein Poissonprozess in  $\mathbb{X}$ . Dann ist  $\Phi$  einfach genau dann, wenn das Intensitätsmaß  $\Theta$  diffus ist.*

*Beweis.* Falls  $\Theta(\{x\}) > 0$ , so gilt nach Definition 3.3.1 (ii)  $\mathbb{P}(\Phi(\{x\}) = k) > 0$  für  $k \in \mathbb{N}$  und damit ist  $\Phi$  nicht einfach.

Es sei nun umgekehrt  $\Theta(\{x\}) = 0$  für alle  $x \in \mathbb{X}$ . Angenommen  $\Phi$  ist nicht einfach, d.h.  $\mathbb{P}_{\Phi}(N_s) < 1$ . Dann existiert eine kompakte Menge  $C \in \mathcal{C}^d$  mit

$$\alpha := \mathbb{P}(\Phi \llcorner C \text{ ist nicht einfach}) > 0.$$

Insbesondere ist dann auch  $\theta := \Theta(C) > 0$ . Da der Wertebereich eines endlichen, diffusen Maßes ein Intervall ist, kann man nun  $C$  für jedes  $k \in \mathbb{N}$  in  $k$  paarweise disjunkte Mengen  $C_1^{(k)}, \dots, C_k^{(k)}$  zerlegen, so dass gilt

$$\Theta(C_i^{(k)}) = \frac{\theta}{k}, \quad i = 1, \dots, k.$$

Dann muss aber für mindestens eine dieser Mengen  $C_i^{(k)}$  gelten  $\mathbb{P}(\Phi(C_i^{(k)}) > 1) \geq \alpha/k$ , woraus sich

$$\frac{\alpha}{k} \leq 1 - e^{-\Theta(C_i^{(k)})} (1 + \Theta(C_i^{(k)}))$$

ergibt. Das impliziert  $\alpha \leq k - e^{-\theta/k}(k + \theta)$ , und zwar für jedes  $k \in \mathbb{N}$ . Für  $k \rightarrow \infty$  konvergiert aber die rechte Seite dieser Ungleichung gegen 0, was im Widerspruch steht zu  $\alpha > 0$ .  $\square$

**3.3.11 Definition.** Sei  $(\mathbb{Y}, \mathcal{Y})$  ein separabler metrischer Raum und  $K$  ein stochastischer Kern von  $\mathbb{X}$  nach  $\mathbb{Y}$ , d.h.  $K: \mathbb{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow [0, 1]$  erfüllt die folgenden Eigenschaften:

- (i)  $K(x, \cdot)$  ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(\mathbb{Y}, \mathcal{Y})$ .
- (ii) Die Abbildung  $x \mapsto K(x, C)$  ist für alle  $C \in \mathcal{Y}$  messbar.

Für  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  und  $\varphi := \sum_{i=1}^k \delta_{x_i} \in N(\mathbb{X})$  sei  $K^*(\varphi, \cdot)$  die Verteilung des Punktprozesses  $\sum_{i=1}^k \delta_{(x_i, Y_i)}$ , wobei  $Y_1, Y_2, \dots$  unabhängig seien mit Verteilungen  $K(x_1, \cdot), K(x_2, \cdot), \dots$ , wobei ggf.  $x_i := x_0$  gesetzt sei für  $i > k$ .

Die obige Definition besagt mit anderen Worten, dass

$$K^*(\varphi, A) = \int \mathbb{1} \left\{ \sum_{j=1}^k \delta_{(x_j, y_j)} \in A \right\} (\otimes_{i \in \mathbb{N}} K(x_i, \cdot)) (d(y_i)_{i \in \mathbb{N}}).$$

für  $A \in \mathcal{N}(\mathbb{X} \times \mathbb{Y})$ . Man kann zeigen (Übung!), dass  $K^*$  ein stochastischer Kern von  $N(\mathbb{X})$  nach  $N(\mathbb{X} \times \mathbb{Y})$  ist.

**3.3.12 Definition.** Ein Punktprozess  $\Psi$  auf  $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$  heißt *K-Markierung* eines Punktprozesses  $\Phi$  auf  $\mathbb{X}$ , falls

$$\mathbb{P}(\Psi \in A | \Phi) = K^*(\Phi, A) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

für alle  $A \in \mathcal{N}(\mathbb{X} \times \mathbb{Y})$  gilt. Im Fall  $K(x, \cdot) = \mathbb{Q}$  für alle  $x \in \mathbb{X}$  bezeichnet man eine *K-Markierung* als *unabhängige Q-Markierung*.

Genau dann ist  $\Psi$  eine *K-Markierung* von  $\Phi$ , wenn die gemeinsame Verteilung von  $\Psi$  und  $\Phi$  gegeben ist durch

$$\mathbb{P}((\Psi, \Phi) \in \cdot) = \int \int \mathbb{1}\{(\psi, \varphi) \in \cdot\} K^*(\varphi, d\psi) \mathbb{P}_\Phi(d\varphi).$$

Insbesondere ist

$$\mathbb{P}(\Psi \in \cdot) = \int \int \mathbb{1}\{\psi \in \cdot\} K^*(\varphi, d\psi) \mathbb{P}_\Phi(d\varphi).$$

die Verteilung von  $\Psi$ . Ist  $\Psi$  eine unabhängige *K-Markierung* von  $\Phi$  so ist  $\mathbb{P}_\Psi = \mathbb{P}_\Phi \otimes K$ .

**3.3.13 Bemerkung.** Die Voraussetzungen an  $(\mathbb{Y}, \mathcal{Y})$  stellen lediglich sicher, dass auch  $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$  (mit der Produkt-Metrik) ein separabler metrischer Raum ist.

**3.3.14 Satz.** Ist  $\Psi$  eine *K-Markierung* eines Punktprozesses  $\Phi$  mit Intensitätsmaß  $\Theta$ , dann hat  $\Psi$  das Intensitätsmaß

$$(\Theta \otimes K)(C) := \int_{\mathbb{X}} \int_{\mathbb{Y}} \mathbb{1}_C(x, y) K(x, dy) \Theta(dx), \quad C \in \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}.$$

*Beweis.* Mit der Notation (und den Voraussetzungen) des Satzes gilt zunächst für  $\varphi = \sum_{i=1}^k \delta_{x_i}$  und  $C \in \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ , dass

$$\int \psi(C) K^*(\varphi, d\psi) = \int \sum_{j=1}^k \mathbb{1}_C(x_j, y_j) (\otimes_{i \in \mathbb{N}} K(x_i, \cdot)) (d(y_i)_{i \in \mathbb{N}})$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^k \int \mathbb{1}_C(x_j, y_j) (\otimes_{i \in \mathbb{N}} K(x_i, \cdot)) (d(y_i)_{i \in \mathbb{N}}) \\
&= \sum_{j=1}^k \int \mathbb{1}_C(x_j, y) K(x_j, dy) \\
&= \sum_{j=1}^k g_C(x_j) = \int g_C d\varphi,
\end{aligned}$$

wobei

$$g_C(x) := \int \mathbb{1}_C(x, y) K(x, dy).$$

Hiermit erhalten wir nun

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [\Psi(C)] &= \mathbb{E} [\mathbb{E} [\Psi(C) \mid \Phi]] \\
&= \mathbb{E} \left[ \int \psi(C) \mathbb{P}_\Psi(d\psi \mid \Phi) \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ \int \psi(C) K^*(\Phi, d\psi) \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ \int g_C d\Phi \right] \\
&= \int g_C(x) \Theta(dx) \\
&= \iint \mathbb{1}_C(x, y) K(x, dy) \Theta(dx),
\end{aligned}$$

was zu zeigen war.  $\square$

**3.3.15 Korollar.** Ist  $\Psi$  eine unabhängige  $\mathbb{Q}$ -Markierung eines Punktprozesses  $\Phi$  mit Intensitätsmaß  $\Theta$ , dann ist das Intensitätsmaß von  $\Psi$  das Produktmaß  $\Theta \otimes \mathbb{Q}$ .

**3.3.16 Theorem.** Es seien  $\Phi$  ein Poissonprozess auf  $\mathbb{X}$  und  $\Psi$  eine  $K$ -Markierung von  $\Phi$ . Dann ist  $\Psi$  ein Poissonprozess.

*Beweis.* Es sei  $f: \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \rightarrow [0, \infty]$ . Es gilt (siehe unten)

$$L_\Psi(f) := \mathbb{E} \left[ \exp \left( - \int_{\mathbb{X} \times \mathbb{Y}} f d\Psi \right) \right] = \mathbb{E} \left[ \exp \left( - \int_{\mathbb{X}} f^* d\Phi \right) \right] = L_\Phi(f^*),$$

wobei  $f^*(x) := -\ln \int_{\mathbb{Y}} e^{-f(x,y)} K(x, dy)$  und  $-\ln(0) := \infty$ . Aus Theorem 3.3.4 folgt, wenn  $\Theta$  das Intensitätsmaß von  $\Phi$  ist,

$$\begin{aligned}
L_\Psi(f) &= \exp \left( - \int_{\mathbb{X}} (1 - e^{-f^*}) d\Theta \right) \\
&= \exp \left( - \int_{\mathbb{X}} \left( 1 - \int_{\mathbb{Y}} e^{-f(x,y)} K(x, dy) \right) \Theta(dx) \right) \\
&= \exp \left( - \int_{\mathbb{X}} \int_{\mathbb{Y}} (1 - e^{-f(x,y)}) K(x, dy) \Theta(dx) \right)
\end{aligned}$$

$$= \exp \left( - \int_{\mathbb{X} \times \mathbb{Y}} (1 - e^{-f}) d(\Theta \otimes K) \right).$$

Eine erneute Anwendung von Theorem 3.3.4 impliziert nun  $\Psi \sim \text{Pois}(\Theta^*)$ .

Wir tragen nun noch den fehlenden Nachweis nach. Durch Bedingen nach  $\Phi$  erhält man

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \exp \left( - \int f d\Psi \right) \right] &= \mathbb{E} \left[ \int \exp \left( - \int f d\psi \right) \mathbb{P}_\Psi(d\psi \mid \Phi) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \int \exp \left( - \int f d\psi \right) K^*(\Phi, d\psi) \right]. \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

Nun ist mit derselben Notation wie früher

$$\begin{aligned} \int \exp \left( - \int f d\psi \right) K^*(\varphi, d\psi) &= \int \exp \left( - \sum_{j=1}^k f(x_j, y_j) \right) (\otimes_{i \in \mathbb{N}} K(x_i, \cdot)) (d(y_i)_{i \in \mathbb{N}}) \\ &= \int \prod_{j=1}^k e^{-f(x_j, y_j)} (\otimes_{i \in \mathbb{N}} K(x_i, \cdot)) (d(y_i)_{i \in \mathbb{N}}) \\ &= \prod_{j=1}^k \int e^{-f(x_j, y_j)} K(x_j, dy_j) \\ &= \prod_{j=1}^k \int e^{-f(x_j, y)} K(x_j, dy) \\ &= \exp \left[ \sum_{j=1}^k \ln \int e^{-f(x_j, y)} K(x_j, dy) \right] \\ &= \exp \left[ - \int_{\mathbb{X}} \left( - \ln \int_{\mathbb{Y}} e^{-f(x, y)} K(x, dy) \right) \varphi(dx) \right] \\ &= \exp \left[ - \int_{\mathbb{X}} f^*(x) \varphi(dx) \right]. \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Die Gleichungen (3.3.2) und (3.3.3) ergeben zusammen die Behauptung.  $\square$

**3.3.17 Definition.** Es sei  $p : \mathbb{X} \rightarrow [0, 1]$  messbar und  $K$  der durch

$$K(x, \cdot) := (1 - p(x))\delta_0 + p(x)\delta_1 \quad (3.3.4)$$

definierte Kern von  $\mathbb{X}$  nach  $\{0, 1\}$ . Ist  $\Psi$  die  $K$ -Markierung von  $\Phi$ , so heißt

$$\Phi_p := \Psi(\cdot \times \{1\})$$

$p$ -Verdünnung von  $\Phi$ .

**3.3.18 Korollar.** Sei  $K$  wie in (3.3.4), und sei  $\Psi$  eine  $K$ -Markierung eines Poissonprozesses  $\Phi$  mit Intensitätsmaß  $\Theta$ . Dann sind  $\Phi_p := \Psi(\cdot \times \{1\})$  und  $\Phi - \Phi_p := \Psi(\cdot \times \{0\})$  unabhängige Poissonprozesse mit Intensitätsmaßen

$$\Theta_1(B) = \int_B p(x) \Theta(dx) \quad \text{bzw.} \quad \Theta_0(B) = \int_B (1 - p(x)) \Theta(dx)$$

für  $B \in \mathcal{X}$ .

*Beweis.* Nach Theorem 3.3.16 ist  $\Psi$  ein Poissonprozess auf  $\mathbb{X} \times \{0, 1\}$ . Aus Bemerkung 3.3.3 folgt, dass die Einschränkungen von  $\Psi$  auf  $\mathbb{X} \times \{1\}$  bzw. auf  $\mathbb{X} \times \{0\}$  unabhängige Poissonprozesse sind. Dann sind aber auch  $\Phi_p$  und  $\Phi - \Phi_p$  als die Bildmaße dieser Einschränkungen unter Projektion auf  $\mathbb{X}$  unabhängige Poissonprozesse. Ferner gilt nach Satz 3.3.14

$$\mathbb{E}[\Phi_p(B)] = \mathbb{E}[\Psi(B \times \{1\})] = \int_{\mathbb{X}} \mathbb{1}_B(x) K(x, \{1\}) \Theta(dx) = \int_B p(x) \Theta(dx),$$

was alle Behauptungen beweist.  $\square$

### 3.4 Stationarität

Sei  $\mu \in M(\mathbb{R}^d)$ . Wir erklären

$$(\mu + x)(A) := \mu(A - x), \quad x \in \mathbb{R}^d, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

Allgemeiner lassen sich die Translationen (und Drehungen) eines Maßes wie folgt erklären. Seien für  $x \in \mathbb{R}^d$  (bzw.  $\rho \in \text{Hom}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ ) Abbildungen  $T_x : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  (bzw.  $T_\rho : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ ) erklärt durch  $T_x(z) := z + x$  (bzw.  $T_\rho(z) := \rho z$ ). Dann definiert man

$$\mu + x := T_x(\mu), \quad \rho\mu := T_\rho(\mu),$$

das heißt, als die entsprechenden Bildmaße von  $\mu$  unter der jeweiligen Transformation. Insbesondere ist dann  $(\rho\mu)(A) = \mu(\rho^{-1}A)$ , wobei  $\rho^{-1}A := \{x \in \mathbb{R}^d : \rho x \in A\}$  für  $A \subset \mathbb{R}^d$  erklärt ist. Für  $\varphi \in N(\mathbb{R}^d)$  mit  $\varphi = \sum_{i=1}^k \delta_{x_i}$  etwa erhält man

$$(T_x\varphi)(A) = \varphi(T_x^{-1}(A)) = \sum_{i=1}^k \delta_{x_i}(T_x^{-1}(A)) = \sum_{i=1}^k \delta_{T_x(x_i)}(A) = \left( \sum_{i=1}^k \delta_{T_x(x_i)} \right) (A),$$

also

$$T_x\varphi = \sum_{i=1}^k \delta_{T_x(x_i)}.$$

Eine analoge Beschreibung erhält man für  $T_\rho\varphi$ . Eine gute Merkregel ist  $T_x(\delta_0) = \delta_x$ . Außerdem erwähnen wir die für alle messbaren  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty]$  gültige Formel

$$\int f(y) (T_x\varphi)(dy) = \int f(y + x) \varphi(dy).$$

Die Abbildungen  $T_x, T_\rho : M(\mathbb{R}^d) \rightarrow M(\mathbb{R}^d)$  sind messbar und ebenso die entsprechenden Abbildungen auf  $N(\mathbb{R}^d)$

**3.4.1 Definition.** Ein zufälliges Maß (oder ein Punktprozess)  $\mu$  in  $\mathbb{R}^d$  heißt *stationär*, falls  $\mu + x \sim \mu$  für alle  $x \in \mathbb{R}^d$  gilt. Man nennt  $\mu$  *isotrop*, falls  $T_\rho\mu \sim \mu$  für alle  $\rho \in SO_d$  gilt.

Sei nun  $\mu$  ein stationäres (isotropes) zufälliges Maß in  $\mathbb{R}^d$  mit lokal-endlichem Intensitätsmaß  $\Theta = \mathbb{E}\mu$ . Dann ist  $\Theta$  translationsinvariant (rotationsinvariant) und daher gilt  $\Theta = \gamma\lambda^d$  mit  $\gamma \geq 0$ . Man nennt  $\gamma$  die Intensität von  $\mu$ . Ist speziell  $\Phi$  ein stationärer Poissonprozess in  $\mathbb{R}^d$  mit Intensität  $\gamma > 0$ , so ist  $\Theta$  atomfrei (und nicht der Nullprozess). Folglich ist  $\Phi$  einfach und hat daher eine Darstellung der Form  $\Phi = \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_{\xi_n}$  mit einer Folge paarweise verschiedener zufälliger Punkte  $\xi_1, \xi_2, \dots$  in  $\mathbb{R}^d$ .



## 4 Das Boolesche Modell

In diesem Kapitel setzen wir die im Abschnitt 2.3 begonnenen Untersuchungen fort. Sei  $\Phi$  ein homogener Poissonprozess in  $\mathbb{R}^d$  mit Intensität  $\gamma > 0$  und  $\mathbb{Q}$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $\mathcal{C}^d$ , sodass für alle  $C \in \mathcal{C}^d$  gilt

$$\int_{\mathcal{C}^d} \lambda^d(K + C) \mathbb{Q}(dK) < \infty. \quad (4.0.1)$$

Dann gibt es eine Folge paarweise verschiedener zufälliger Punkte  $\xi_1, \xi_2, \dots$  in  $\mathbb{R}^d$  mit  $\Phi = \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_{\xi_n}$ . Weiter sei  $Z_0$  eine zufällige abgeschlossene Menge mit Verteilung  $\mathbb{Q}$ . Man nennt  $Z_0$  typisches Korn. Bedingung (4.0.1) ist dann äquivalent zu

$$\mathbb{E}[\lambda^d(Z_0 + C)] < \infty, \quad C \in \mathcal{C}^d.$$

Sei ferner  $Z_1, Z_2, \dots$  eine Folge stochastisch unabhängiger zufälliger kompakter Mengen mit derselben Verteilung  $\mathbb{Q}$  (wie  $Z_0$ ), wobei diese Folge von der Folge  $\xi_1, \xi_2, \dots$  stochastisch unabhängig sei. Dann ist

$$\Psi := \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_{(\xi_n, Z_n)}$$

eine unabhängige  $\mathbb{Q}$ -Markierung von  $\Phi$  (gemäß Definition 3.3.12) und damit nach Theorem 3.3.16 ein Poissonprozess in  $\mathbb{R}^d \times \mathcal{C}^d$  mit Intensitätsmaß  $\gamma \lambda^d \otimes \mathbb{Q}$  (vgl. Korollar 3.3.15). Man bezeichnet diesen Poissonprozess auch als einen *stationären Poisson-schen Keim-Korn-Prozess*. Wir betrachten nun

$$Z = \bigcup_{n=1}^{\infty} (Z_n + \xi_n).$$

Die Überlegungen aus Kapitel 2 (siehe insbesondere Satz 2.2.8) zeigen, dass  $Z$  eine zufällige abgeschlossene Menge ist, wenn (4.0.1) vorausgesetzt wird. Eine solche zufällige abgeschlossene Menge wird als *Boolesches Modell mit den Parametern  $\gamma$  und  $\mathbb{Q}$*  bezeichnet, vgl. Definition 2.3.3.

Dass  $Z$  stationär ist, wurde im Beweis von Satz 2.2.8 direkt gezeigt. Für die Eigenschaft, eine zufällige abgeschlossene Menge zu sein, wurde auf Satz 2.1.6 verwiesen, dessen Beweis wir nun nachliefern.

*Beweis von Satz 2.1.6.* Ist  $\mathbb{Q}(\{\emptyset\}) = 1$ , so ist  $Z = \emptyset$   $\mathbb{P}$ -f.s. Wenn dagegen  $\mathbb{Q}(\{\emptyset\}) < 1$  gilt, dann folgt aus der Bedingung (2.1.3), dass  $\Lambda$  ein  $\sigma$ -endliches Maß ist (s. Übung 7.1).

Streng genommen beweisen wir, dass es ein  $A \in \mathcal{A}$  mit  $\mathbb{P}(A) = 1$  gibt, sodass

$$\omega \mapsto \tilde{Z}(\omega) := \begin{cases} Z(\omega), & \text{falls } \omega \in A, \\ \emptyset, & \text{sonst,} \end{cases}$$

eine zufällige abgeschlossene Menge ist. Dazu seien  $C_m \in \mathcal{C}^d$  mit  $C_m \uparrow \mathbb{R}^d$  und  $C_m \subset \text{int } C_{m+1}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . Sei  $A_m$  das Ereignis, dass die Zufallsvariable

$$N_m := \text{card}\{1 \leq n \leq \tau : (Z_n + \xi_n) \cap C_m \neq \emptyset\}$$

endlich ist und  $A := \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$ . Wir zeigen

$$\mathbb{E}[N_m] < \infty, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (4.0.2)$$

Dann folgt  $\mathbb{P}(A_m) = 1$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , und damit auch  $\mathbb{P}(A) = 1$ . Die linke Seite von (4.0.2) ist wegen der Sätze 2.1.3 und 2.1.5 gleich

$$\mathbb{E} \left[ \sum_{n=1}^{\tau} \mathbb{1}\{(Z_n + \xi_n) \cap C_m \neq \emptyset\} \right] = \int_{\mathcal{C}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{(K + x) \cap C_m \neq \emptyset\} \Lambda(dx) \mathbb{Q}(dK).$$

Wegen

$$(K + x) \cap C_m \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in C_m + K^*$$

folgt die Endlichkeit aus Voraussetzung (2.1.3). Wir zeigen jetzt, dass  $Z(\omega)$  für  $\omega \in A$  abgeschlossen ist: Für  $x_k \in Z(\omega)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , und  $x_k \rightarrow x \in \mathbb{R}^d$  müssen wir dazu  $x \in Z(\omega)$  zeigen. Es gibt ein  $m \in \mathbb{N}$ , sodass  $x_k \in C_m$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Wegen  $\omega \in A_m$  gibt es ein  $n_0 = n_0(\omega) \in \mathbb{N}$ , sodass

$$x_k \in C_m \cap Z(\omega) \subset \cap_{n=1}^{n_0 \wedge \tau(\omega)} (Z_n(\omega) + \xi_n(\omega)) \subset Z(\omega), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Weil die endliche Vereinigung

$$\bigcup_{n=1}^{n_0 \wedge \tau(\omega)} (Z_n(\omega) + \xi_n(\omega))$$

abgeschlossen ist, folgt  $x \in Z(\omega)$ . Für den Nachweis der Messbarkeit verweisen wir auf Übung 7.1.  $\square$

## 4.1 Das Kapazitätsfunktional

Wir bestimmen für ein Boolesches Modell  $Z$  verschiedene Kenngrößen und beginnen mit dem Kapazitätsfunktional  $T_Z$  (siehe Definition 3.1.18), das die Verteilung von  $Z$  schon festlegt (vgl. Satz 3.1.19).

**4.1.1 Theorem.** Für  $C \in \mathcal{C}^d$  gilt

$$T_Z(C) = 1 - \exp(-\gamma \mathbb{E}[\lambda^d(Z_0 + C^*)]). \quad (4.1.1)$$

*Beweis.* Gemäß Theorem 3.3.16 ist  $\Psi$  ein Poissonprozess auf  $\mathbb{R}^d \times \mathcal{C}^d$  mit Intensitätsmaß  $\gamma \lambda^d \otimes \mathbb{Q}$ . Es sei  $C \in \mathcal{C}^d \setminus \{\emptyset\}$ . Setze

$$A_C := \{(x, K) \in \mathbb{R}^d \times \mathcal{C}^d : (K + x) \cap C \neq \emptyset\}.$$

Dann gilt  $\Psi(A_C) \sim \text{Pois}((\gamma \lambda^d \otimes \mathbb{Q})(A_C))$ . Es gilt

$$\begin{aligned} (\lambda^d \otimes \mathbb{Q})(A_C) &= \int_{\mathcal{C}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{\mathbb{1}\{(K + x) \cap C \neq \emptyset\}}_{\Leftrightarrow x \in C - K} dx \mathbb{Q}(dK) \\ &= \int_{\mathcal{C}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{C+K^*}(x) dx \mathbb{Q}(dK) \\ &= \int_{\mathcal{C}^d} \lambda^d(C + K^*) \mathbb{Q}(dK) \\ &= \int_{\mathcal{C}^d} \lambda^d(K + C^*) \mathbb{Q}(dK) = \mathbb{E} \lambda^d(Z_0 + C^*). \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun mit

$$\mathbb{P}(Z \cap C = \emptyset) = \mathbb{P}(\Psi(A_C) = 0) = \exp(-\gamma \mathbb{E}[\lambda^d(Z_0 + C^*)]). \quad \square$$

Setzt man  $C = \{0\}$  in (4.1.1), so erhält man für den Volumenanteil von  $Z$  die bereits aus Satz 2.3.6 bekannte Formel:

$$p = \mathbb{P}(0 \in Z) = T_Z(\{0\}) = 1 - \exp[-\gamma \mathbb{E} \lambda^d(Z_0)].$$

Nach Satz 2.2.8 ist ein Boolesches Modell  $Z$  stationär, das heißt

$$Z + x \stackrel{d}{=} Z, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

was die Translationsinvarianz des Kapazitätsfunktional von  $Z$  impliziert. Allgemein nennt man ein Funktional  $T : \mathcal{C}^d \rightarrow \mathbb{R}$  *translationsinvariant*, wenn für alle  $x \in \mathbb{R}^d$  und alle  $C \in \mathcal{C}^d$  die Gleichung  $T(C + x) = T(C)$  gilt. Für das Kapazitätsfunktional  $T_Z$  einer stationären zufälligen abgeschlossenen Menge  $Z$  gilt

$$T_Z(C + x) = \mathbb{P}(Z \cap (C + x) \neq \emptyset) = \mathbb{P}((Z - x) \cap C \neq \emptyset) = \mathbb{P}(Z \cap C \neq \emptyset) = T_Z(C)$$

für  $x \in \mathbb{R}^d$  und  $C \in \mathcal{C}^d$ , d.h.  $T_Z$  ist translationsinvariant. Umgekehrt folgt aus der Translationsinvarianz des Kapazitätsfunktionals, dass für alle  $x \in \mathbb{R}^d$  und  $C \in \mathcal{C}^d$  gilt

$$T_{Z+x}(C) = \mathbb{P}((Z + x) \cap C \neq \emptyset) = \mathbb{P}(Z \cap (C - x) \neq \emptyset) = T_Z(C - x) = T_Z(C),$$

was die Stationarität von  $Z$  impliziert. Im Falle eines Booleschen Modells  $Z$ , kann man die Translationsinvarianz von  $T_Z$  auch direkt an (4.1.1) erkennen.

Im Folgenden bezeichnen wir die (eigentliche) Drehgruppe auf  $\mathbb{R}^d$  mit  $SO_d$ . Wir nennen eine zufällige abgeschlossene Menge  $Z$  auf  $\mathbb{R}^d$  *isotrop*, wenn  $\vartheta Z \stackrel{d}{=} Z$  für alle  $\vartheta \in SO_d$  gilt. Mit einer ähnlichen Überlegung wie oben sieht man, dass  $Z$  genau dann isotrop ist, wenn  $T_Z$  *rotationsinvariant* ist, d.h.  $T_Z(\vartheta C) = T_Z(C)$  für alle  $\vartheta \in SO_d$  und  $C \in \mathcal{C}^d$ .

**4.1.2 Satz.** *Sei  $Z$  ein Boolesches Modell mit Intensität  $\gamma$  und Kornverteilung  $\mathbb{Q}$  und typischem Korn  $Z_0$ . Gilt  $Z_0 \stackrel{d}{=} \vartheta Z_0$  für jedes  $\vartheta \in SO_d$  (d.h. ist  $\mathbb{Q}$  rotationsinvariant), so ist  $\vartheta Z \stackrel{d}{=} Z$ ,  $\vartheta \in SO_d$ .*

*Beweis.* Man kann zeigen, dass die Abbildung  $\mathcal{F}^d \rightarrow \mathcal{F}^d$ ,  $A \mapsto \vartheta A$  für festes  $\vartheta \in SO_d$  stetig ist. Mit  $C \in \mathcal{C}^d \setminus \{\emptyset\}$  erhält man aufgrund von (4.1.1) die Gleichungskette

$$\begin{aligned} T_{\vartheta Z}(C) &= \mathbb{P}((\vartheta Z) \cap C \neq \emptyset) \\ &= \mathbb{P}(Z \cap (\vartheta^{-1}C) \neq \emptyset) \\ &= T_Z(\vartheta^{-1}C) \\ &= 1 - \exp(-\gamma \mathbb{E}[\lambda^d(Z_0 + (\vartheta^{-1}C)^*)]) \\ &= 1 - \exp(-\gamma \mathbb{E}[\lambda^d(Z_0 + \vartheta^{-1}C^*)]) \\ &= 1 - \exp(-\gamma \mathbb{E}[\lambda^d(\vartheta Z_0 + C^*)]) = T_Z(C), \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Isotropie von  $Z_0$  ausnutzen. □

Außer in Spezialfällen gilt keine Umkehrung dieser Aussage (siehe Übung 7.2 für ein Gegenbeispiel).

**4.1.3 Definition.** Sei  $Z$  eine stationäre zufällige abgeschlossene Menge. Die *Kovarianzfunktion* von  $Z$  wird definiert durch

$$C(x) := \mathbb{P}(0 \in Z, x \in Z), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

**4.1.4 Bemerkung.** (i) Wegen der Stationarität von  $Z$  gilt

$$C(x) = \mathbb{P}(y \in Z, x + y \in Z), \quad x, y \in \mathbb{R}^d.$$

(ii) Man betrachte das zufällige Feld  $Y(x) := \mathbb{1}_Z(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$ . Dann gilt

$$\text{Cov}(Y(0), Y(x)) = \mathbb{E}[Y(0)Y(x)] - \mathbb{E}[Y(0)]\mathbb{E}[Y(x)] = C(x) - p^2.$$

(iii) Ist  $Z$  nicht stationär, so definiert man die Kovarianzfunktion als Funktion von zwei Punkten durch

$$C(x, y) := \mathbb{P}(x \in Z, y \in Z), \quad x, y \in \mathbb{R}^d.$$

**4.1.5 Satz.** Für ein Boolesches Modell  $Z$  mit Intensität  $\gamma$  und typischem Korn  $Z_0$  gilt

$$C(x) = 2p - 1 + (1 - p)^2 \exp(\gamma C_0(x)),$$

wobei

$$C_0(x) := \mathbb{E}[\lambda^d(Z_0 \cap (Z_0 - x))]$$

das sogenannte erwartete Kovariogramm von  $Z_0$  in  $x$  ist.

*Beweis.* Es gilt

$$\begin{aligned} C(x) &= 1 - \mathbb{P}((\{0 \in Z\} \cap \{x \in Z\})^c) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\{0 \notin Z\} \cup \{x \notin Z\}) \\ &= 1 - \mathbb{P}(0 \notin Z) - \mathbb{P}(x \notin Z) + \mathbb{P}(0 \notin Z, x \notin Z) \\ &= 1 - (1 - p) - (1 - p) + \mathbb{P}(\{0, x\} \cap Z = \emptyset) \\ &= 2p - 1 + 1 - T_Z(\{0, x\}) \\ &= 2p - 1 + \exp(-\gamma \mathbb{E}[\lambda^d(Z_0 + \{0, -x\})]) \\ &= 2p - 1 + \exp(-\gamma \mathbb{E}[\lambda^d(Z_0 \cup (Z_0 - x))]) \\ &= 2p - 1 + \exp(-\gamma (\mathbb{E}[\lambda^d(Z_0)] + \mathbb{E}[\lambda^d(Z_0 - x)] - \mathbb{E}[\lambda^d(Z_0 \cap (Z_0 - x))])), \end{aligned}$$

woraus die Behauptung mit Hilfe von (4.1.1) folgt.  $\square$

**4.1.6 Folgerung.** Es gilt

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} C(x) = p^2$$

und – unter der zusätzlichen Voraussetzung  $\lambda^d(\partial Z_0) = 0$  fast sicher – auch

$$\lim_{x \rightarrow 0} C(x) = p.$$

Die Asymptotik  $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} C(x) = p^2$  kann dabei als asymptotische Unabhängigkeit von  $\{0 \in Z\}$  und  $\{x \in Z\}$  verstanden werden.

*Beweis.* Da  $\mathbb{E}[\lambda^d(Z_0)] < \infty$  gilt, kann der Satz von der majorisierten Konvergenz verwendet werden, um

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\lambda^d(Z_0 \cap (Z_0 + x))] = \mathbb{E}\left[\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \lambda^d(Z_0 \cap (Z_0 + x))\right] = 0$$

zu erhalten. Für den zweiten Grenzwert gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \mathbb{E}[\lambda^d(Z_0 \cap (Z_0 + x))] &= \mathbb{E}\left[\lim_{x \rightarrow 0} \lambda^d(Z_0 \cap (Z_0 + x))\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\lim_{x \rightarrow 0} \int \mathbb{1}_{Z_0}(y) \mathbb{1}_{Z_0+x}(y) \lambda^d(dy)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^d} \lim_{x \rightarrow 0} \mathbb{1}_{Z_0}(y) \mathbb{1}_{Z_0+x}(y) \lambda^d(dy)\right] \\ &= \mathbb{E}[\lambda^d(\text{int} Z_0)] = \mathbb{E}[\lambda^d(Z_0)], \end{aligned}$$

wobei zweimal der Satz von der majorisierten Konvergenz verwendet wurde. Außerdem gilt  $\lim_{x \rightarrow 0} \mathbb{1}_{Z_0+x}(y) = 1$  für jedes  $y \in \text{int} Z_0$  und  $\lim_{x \rightarrow 0} \mathbb{1}_{Z_0+x}(y) = 0$  für  $y \in Z_0^c$ , während der Grenzwert für  $y$  aus der Nullmenge  $\partial Z_0$  nicht existiert. Hiermit erhält man

$$\lim_{x \rightarrow 0} C(x) = 2p - 1 + (1 - p)^2 \exp(\gamma \mathbb{E}[\lambda^d(Z_0)]) = 2p - 1 + 1 - p = p. \quad \square$$

**4.1.7 Beispiel.** Es gelte  $Z_0 \stackrel{d}{=} B(0, R)$  für eine Zufallsvariable  $R \geq 0$ ,  $d = 3$ ,  $\mathbb{E}[R^3] < \infty$ . Bezeichnet  $F$  die Verteilung von  $R$ , so gilt:

$$\mathbb{E}[\lambda^3(Z_0)] = \mathbb{E}\left[\frac{4}{3}\pi R^3\right] = \frac{4}{3}\pi \int_0^\infty r^3 F(dr).$$

Ferner gilt (s. Übung 7.3)

$$C_0(x) = \frac{4}{3}\pi \int_{\frac{\|x\|}{2}}^\infty u^3 \left(1 - \frac{3\|x\|}{4u} + \frac{\|x\|^3}{16u^3}\right) F(du).$$

**4.1.8 Definition.** Es sei  $B \in \mathcal{K}^d$  mit  $0 \in B$ . Dann heißt die Abbildung

$$r \mapsto H_B(r) := \mathbb{P}(rB \cap Z \neq \emptyset | 0 \notin Z) = 1 - \mathbb{P}(rB \cap Z = \emptyset | 0 \notin Z)$$

*Kontaktverteilungsfunktion zum Eichkörper (oder strukturierenden Element)  $B$ .* Wir setzen hierbei voraus, dass  $\mathbb{P}(0 \notin Z) > 0$  gilt.

**4.1.9 Bemerkung.** Die Kontaktverteilungsfunktion wird für beliebige stationäre zufällige abgeschlossene Mengen eingeführt. Im Fall  $\dim(B) \leq d - 1$  (z.B. sei  $B$  das Segment  $[0, n]$ ,  $n \in \mathbb{S}^{d-1}$ ) kann der Fall

$$H_B(\infty) := \lim_{r \rightarrow \infty} H_B(r) < 1$$

eintreten.

**4.1.10 Definition.** Im Fall  $B = B^d$  heißt  $H_{B^d}$  *sphärische Kontaktverteilungsfunktion*. Im Fall  $B = [0, u]$  mit  $u \in \mathbb{S}^{d-1} := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| = 1\}$  heißt  $H_B$  *lineare Kontaktverteilungsfunktion*.

Aus  $0 \in B$  folgt

$$H_B(r) = 1 - \frac{\mathbb{P}(Z \cap rB = \emptyset, 0 \notin Z)}{\mathbb{P}(0 \notin Z)} = 1 - \frac{\mathbb{P}(Z \cap rB = \emptyset)}{\mathbb{P}(0 \notin Z)}. \quad (4.1.2)$$

Man beachte dabei, dass für ein Boolesches Modell  $Z$  gilt:

$$\mathbb{P}(0 \notin Z) = 1 - p = \exp(-\gamma \mathbb{E}[\lambda^d(Z_0)]) > 0.$$

**4.1.11 Bemerkung.** Man betrachte die Zufallsvariable

$$R := \inf\{r > 0 : Z \cap rB \neq \emptyset\}$$

mit  $\inf \emptyset := \infty$ . Dann gilt

$$\{R \leq r\} = \{Z \cap rB \neq \emptyset\},$$

wobei die Inklusion “ $\subseteq$ ” aus der Abgeschlossenheit folgt und “ $\supseteq$ ” offensichtlich gilt. Außerdem gilt  $\{R = 0\} = \{0 \in Z\}$ , d.h.

$$H_B(r) = \mathbb{P}(R \leq r | R > 0).$$

**4.1.12 Satz.** Für  $B \in \mathcal{K}^d$  mit  $0 \in B$  gilt

$$1 - H_B(r) = \exp(-\gamma \mathbb{E}[\lambda^d((Z_0 + rB^*) \setminus Z_0)]).$$

*Beweis.* Aus (4.1.2) und Theorem 4.1.1 folgt

$$\begin{aligned} 1 - H_B(r) &= \frac{\exp(-\gamma \mathbb{E}[\lambda^d(Z_0 + rB^*)])}{\exp(-\gamma \mathbb{E}[\lambda^d(Z_0)])} \\ &= \exp(-\gamma (\mathbb{E}[\lambda^d(Z_0 + rB^*)] - \mathbb{E}[\lambda^d(Z_0)])) \\ &= \exp(-\gamma \mathbb{E}[\lambda^d((Z_0 + rB^*) \setminus Z_0)]), \end{aligned}$$

da  $Z_0 \subseteq Z_0 + rB^*$  ist. □

**4.1.13 Beispiel.** Es gelte  $Z_0 \stackrel{d}{=} B(0, R_0)$ . Dann folgt aus Satz 4.1.12:

$$\begin{aligned} H_{B^d}(r) &= 1 - \exp(-\gamma \mathbb{E}[\lambda^d((R_0 + r)B^d \setminus R_0B^d)]) \\ &= 1 - \exp(-\gamma \kappa_d \mathbb{E}[(R_0 + r)^d - R_0^d]) \\ &= 1 - \exp\left(-\gamma \kappa_d \mathbb{E}\left[\sum_{j=0}^{d-1} \binom{d}{j} R_0^j r^{d-j}\right]\right) = 1 - \exp\left(-\gamma \kappa_d \sum_{j=0}^{d-1} \binom{d}{j} r^{d-j} \mathbb{E}[R_0^j]\right). \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite treten Momente der Radienverteilung von  $R_0$  auf. Mit Hilfe der angegebenen Relation kann man Schätzer für diese Momente bestimmen.

## 4.2 Partikelprozesse

Es bezeichne

$$\mathcal{F}' := \mathcal{F}^d \setminus \{\emptyset\} \text{ und } \mathcal{C}' := \mathcal{C}^d \setminus \{\emptyset\}.$$

Damit ist  $\mathcal{F}'$  ein lokalkompakter Hausdorffraum mit abzählbarer Basis, insbesondere also ein separabler, vollständig metrisierbarer topologischer Raum (Polnischer Raum).

**4.2.1 Definition.** Ein *Partikelprozess*  $\Phi$  (in  $\mathbb{R}^d$ ) ist ein Punktprozess auf  $\mathcal{F}'$  mit

$$\mathbb{P}(\Phi(\mathcal{F}' \setminus \mathcal{C}') = 0) = 1.$$

Dies bedeutet, dass mit Wahrscheinlichkeit 1 nur kompakte Mengen auftreten.

Ein Partikelprozess  $\Phi$  in  $\mathbb{R}^d$  lässt sich in der Form

$$\Phi = \sum_{i=1}^{\tau} \delta_{C_i}$$

mit zufälligen kompakten Mengen  $C_i$  und einer Zufallsvariablen  $\tau$  in  $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$  darstellen (vgl. Satz 3.2.10).

**4.2.2 Definition.** Eine *Zentrumsfunktion*  $c: \mathcal{C}' \rightarrow \mathbb{R}^d$  ist eine messbare Abbildung mit

$$c(K + x) = c(K) + x, \quad K \in \mathcal{C}', x \in \mathbb{R}^d.$$

Man nennt  $c$  kovariant unter Translation (translationskovariant).

**4.2.3 Beispiel.** Für  $K \in \mathcal{C}'$  sei  $c(K)$  der Mittelpunkt der (eindeutig bestimmten) Umkugel  $B(K)$  von  $K$ . Weil

$$B(K + x) = B(K) + x, \quad K \in \mathcal{C}', x \in \mathbb{R}^d,$$

gilt, ist  $c(\cdot)$  kovariant. Man kann zeigen, dass  $B(\cdot)$  und  $c(\cdot)$  stetig bezüglich der Hausdorff-Metrik sind (Übung!). Wegen

$$\mathcal{B}(\mathcal{F}^d) \cap \mathcal{C}^d = \mathcal{B}(\mathcal{C}^d)$$

(ohne Beweis, vergleiche [4]) ist damit  $c$  messbar.

Ausblick: Wir fixieren eine Zentrumsfunktion  $c$ . Unter gewissen Voraussetzungen an einen Partikelprozess  $\Phi$  mit

$$\Phi = \sum_{i=1}^{\tau} \delta_{K_i}$$

liefert dann

$$\begin{aligned} \Psi &:= \int_{\mathcal{C}'} \mathbb{1}\{(c(K), K - c(K)) \in \cdot\} \Phi(dK) \\ &= \sum_{i=1}^{\tau} \delta_{(c(K_i), K_i - c(K_i))} \end{aligned}$$

einen Punktprozess auf  $\mathbb{R}^d \times \mathcal{C}'$  (einen markierten Punktprozess auf  $\mathbb{R}^d$  mit Markenraum  $\mathcal{C}'$ ). Man erhält somit  $\Psi$  als Bildmaß von  $\Phi$  unter der Abbildung  $T: K \mapsto (c(K), K - c(K))$ . Genauer kommen als Marken nur Mengen vor aus der Familie

$$\mathcal{C}_0 := \{K \in \mathcal{C}' : c(K) = 0\}.$$

**4.2.4 Definition.** Für  $\varphi \in N(\mathcal{F}^d)$  und  $x \in \mathbb{R}^d$  sei  $T_x: N(\mathcal{F}^d) \rightarrow N(\mathcal{F}^d)$  definiert durch

$$(T_x\varphi)(A) = \int_{\mathcal{F}^d} \mathbb{1}\{K+x \in A\} \varphi(dK), \quad A \in \mathcal{B}(\mathcal{F}^d),$$

die *Translation* von  $\varphi$  um  $x$ , also  $(T_x\varphi)(A) = \varphi(T_x^{-1}(A))$ . Ist

$$\varphi = \sum_{i=1}^k \delta_{K_i},$$

so ist

$$T_x\varphi = \sum_{i=1}^k \delta_{K_i+x}.$$

Speziell ist  $T_x\delta_K = \delta_{K+x}$ .

**4.2.5 Bemerkung.** Die Abbildung  $N(\mathcal{F}^d) \times \mathbb{R}^d \rightarrow N(\mathcal{F}^d)$ ,  $(\varphi, x) \mapsto T_x\varphi$ , ist messbar.

**4.2.6 Definition.** Ein Punktprozess  $\Phi$  auf  $\mathcal{F}^d$  (insbesondere kann  $\Phi$  ein Partikelprozess sein) heißt *stationär*, falls

$$T_x\Phi \stackrel{d}{=} \Phi, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

gilt.

**4.2.7 Definition.** Sei  $\mathbb{M}$  ein separabler metrischer Raum mit  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{M}$ .

- (i) Ein *markierter Punktprozess* auf  $\mathbb{R}^d$  mit Markenraum  $\mathbb{M}$  ist ein Punktprozess  $\Psi$  auf  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{M}$  mit  $\Psi(B \times \mathbb{M}) < \infty$ ,  $B \in \mathcal{C}^d$ . Insbesondere ist dann  $\Psi(\cdot \times \mathbb{M})$  ein Punktprozess auf  $\mathbb{R}^d$ .
- (ii) Ein markierter Punktprozess  $\Psi$  auf  $\mathbb{R}^d$  mit Markenraum  $\mathbb{M}$  heißt *stationär*, falls  $T_x\Psi \stackrel{d}{=} \Psi$  für alle  $x \in \mathbb{R}^d$  gilt. Dabei ist für ein Maß  $\mu$  auf  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{M}$  das Maß  $T_x\mu$  auf  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{M}$  definiert durch

$$(T_x\mu)(A) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{M}} \mathbb{1}_A(y+x, m) \mu(dy, dm). \quad (4.2.1)$$

Erklärt man  $T_x(z, C) := (z+x, C)$ , so ist  $T_x\mu$  das Bildmaß von  $\mu$  unter  $T_x$ . Speziell gilt für  $B \in \mathcal{B}^d$ ,  $C \in \mathcal{M}$ , die sogenannte „shadowing property“:

$$T_x\mu(B \times C) = \mu((B-x) \times C).$$

Merkregel:

$$T_x\delta_{(0,m)} = \delta_{(x,m)} \quad \text{bzw.} \quad T_x\delta_{(y,m)} = \delta_{(y+x,m)}.$$

**4.2.8 Satz.** Es sei  $\Phi$  ein stationärer Partikelprozess mit lokal-endlichem Intensitätsmaß  $\Theta \neq 0$ . Ferner sei  $c: \mathcal{C}' \rightarrow \mathbb{R}^d$  eine Zentrumsfunktion. Dann ist

$$\Psi(\cdot) := \int_{\mathcal{C}'} \mathbb{1}\{(c(C), C - c(C)) \in \cdot\} \Phi(dC) \quad (4.2.2)$$

ein stationärer markierter Punktprozess mit Markenraum  $\mathcal{C}_0 = \{C \in \mathcal{C}': c(C) = 0\}$ . Ferner gibt es eine eindeutig bestimmte Zahl  $\gamma > 0$  und ein eindeutig bestimmtes Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{Q}$  auf  $\mathcal{C}'$  mit der Eigenschaft  $\mathbb{Q}(\mathcal{C}_0) = 1$  und

$$\Theta(\mathcal{H}) = \gamma \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathcal{C}'} \mathbb{1}_{\mathcal{H}}(K+x) \mathbb{Q}(dK) dx, \quad \mathcal{H} \in \mathcal{B}(\mathcal{C}'). \quad (4.2.3)$$



*Beweis.* Wir betrachten  $C^d := [0, 1]^d$ ,  $C_0^d := [0, 1]^d$  und den “rechten oberen Rand” von  $C^d$ , der erklärt ist als  $\partial^+ C^d := \{(x_1, \dots, x_d) \in C^d : \max_{i=1, \dots, d} x_i = 1\}$ . Ferner sei  $z_1, z_2, \dots$  eine Nummerierung von  $\mathbb{Z}^d$ . Da  $\Phi$  stationär ist, ist  $\Theta$  translationsinvariant. Aus der Campbellschen Formel (Satz 3.2.25) sowie  $\bigcup_i (C_0^d + z_i) = \mathbb{R}^d$  folgt nun

$$\begin{aligned}
\gamma &:= \mathbb{E} \left[ \int_{C'} \mathbb{1}\{c(C) \in C_0^d\} \Phi(dC) \right] \\
&= \int_{C'} \mathbb{1}\{c(C) \in C_0^d\} \Theta(dC) \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} \int_{C'} \mathbb{1}\{C \cap (C_0^d + z_i) \neq \emptyset, c(C) \in C_0^d\} \Theta(dC) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{C'} \mathbb{1}\{(C + z_i) \cap (C_0^d + z_i) \neq \emptyset, c(C + z_i) \in C_0^d\} \Theta(dC) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{C'} \mathbb{1}\{C \cap C_0^d \neq \emptyset, c(C) \in C_0^d - z_i\} \Theta(dC) \\
&= \int_{C'} \mathbb{1}\{C \cap C_0^d \neq \emptyset\} \Theta(dC) < \infty.
\end{aligned}$$

Zuletzt wurde die lokale Endlichkeit von  $\Theta$  sowie  $C_0^d \subset C^d$  benutzt, vergleiche Bemerkung 3.1.3 (iii), wonach  $\mathcal{F}_K$  kompakt ist für  $K \in \mathcal{C}^d$ .

Da  $\Phi$  stationär ist, gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \int_{C'} \mathbb{1}\{c(C) \in C_0^d + x\} \Phi(dC) &= \mathbb{E} \int_{C'} \mathbb{1}\{c(C - x) \in C_0^d\} \Phi(dC) \\
&= \mathbb{E} \int_{C'} \mathbb{1}\{c(C) \in C_0^d\} \Phi(dC).
\end{aligned}$$

Für eine beliebige Menge  $K \in \mathcal{C}$  gibt es  $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^d$ , so dass  $K \subset \bigcup_{i=1}^m (C_0^d + x_i)$ . Dann folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \int_{C'} \mathbb{1}\{c(C) \in K\} \Phi(dC) &\leq \mathbb{E} \int_{C'} \sum_{i=1}^m \mathbb{1}\{c(C) \in C_0^d + x_i\} \Phi(dC) \\
&= \sum_{i=1}^m \mathbb{E} \int_{C'} \mathbb{1}\{c(C) \in C_0^d + x_i\} \Phi(dC) \\
&= m \mathbb{E} \int_{C'} \mathbb{1}\{c(C) \in C_0^d\} \Phi(dC) < \infty.
\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass fast sicher  $\Psi(\cdot \times \mathbb{M})$  ein Punktprozess (insbesondere lokal endlich) ist.

Beachtet man, dass

$$\{\{c(C) : \Phi(\{C\}) > 0\} \text{ ist nicht lokal-endlich}\} \text{ und } \{\Phi(\mathcal{F}' \setminus \mathcal{C}^d) > 0\}$$

(messbare) Nullmengen sind, so folgt, dass  $\Psi$  ein markierter Punktprozess ist. (Die Messbarkeit folgt aus dem Satz von Campbell.)

Zu zeigen ist nun noch die Stationarität von  $\Psi$ . Für eine messbare Abbildung  $f: \mathbb{R}^d \times \mathcal{C}' \rightarrow [0, \infty)$  und  $x \in \mathbb{R}^d$  erhält man mit Hilfe von (4.2.2), dass

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{C}'} f d(T_x \Psi) &= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{C}'} f(y+x, C) \Psi(d(y, C)) \\
 &= \int_{\mathcal{C}'} f(c(K)+x, K-c(K)) \Phi(dK) \\
 &= \int_{\mathcal{C}'} f(c(K+x), K+x-c(K+x)) \Phi(dK) \\
 &= \int_{\mathcal{C}'} f(c(K), K-c(K)) (T_x \Phi)(dK) \\
 &\stackrel{d}{=} \int_{\mathcal{C}'} f(c(K), K-c(K)) \Phi(dK) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{C}'} f d\Psi,
 \end{aligned}$$

wobei im vorletzten Schritt die Stationarität von  $\Phi$  verwendet wurde, d.h.  $T_x \Phi \stackrel{d}{=} \Phi$ . Damit folgt  $\Psi \stackrel{d}{=} T_x \Psi$  (vergleiche Satz 3.2.27). Die anderen Behauptungen folgen, indem man wie im Beweis von Satz 2.2.5 argumentiert.  $\square$

**4.2.9 Bemerkung.** Unter den Voraussetzungen von Satz 4.2.8 gilt für eine Menge  $B \in \mathcal{B}^d$  mit  $0 < \lambda^d(B) < \infty$

$$\gamma = \frac{1}{\lambda^d(B)} \mathbb{E} \left[ \int_{\mathcal{C}'} \mathbb{1}_B(c(K)) \Phi(dK) \right].$$

Dazu setzt man  $\mathcal{H} := \{K \in \mathcal{C}' : c(K) \in B\}$  in (4.2.3) und erhält

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[ \int_{\mathcal{C}'} \mathbb{1}_{\{c(K) \in B\}} \Phi(dK) \right] &= \Theta(\mathcal{H}) \\
 &= \gamma \int_{\mathcal{C}_0} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{\{c(K+x) \in B\}} dx \mathbb{Q}(dK) \\
 &= \gamma \int_{\mathcal{C}_0} \lambda^d(B - c(K)) \mathbb{Q}(dK) \\
 &= \gamma \int_{\mathcal{C}_0} \lambda^d(B) \mathbb{Q}(dK) = \gamma \lambda^d(B).
 \end{aligned}$$

Allgemeiner und mit gleicher Argumentation erhält man

$$\mathbb{Q}(\mathcal{H}) = \frac{1}{\gamma \lambda^d(B)} \mathbb{E} \left[ \int_{\mathcal{C}'} \mathbb{1}_B(c(K)) \mathbb{1}_{\mathcal{H}}(K - c(K)) \Phi(dK) \right].$$

**4.2.10 Definition.** Ist  $\Phi$  ein stationärer Partikelprozess mit lokalendlichem Intensitätsmaß, so heißt  $\gamma$  die *Intensität* und  $\mathbb{Q}$  die *Formverteilung* von  $\Phi$  (jeweils bezüglich der gegebenen Zentrumsfunktion).

**4.2.11 Lemma.** *Es sei  $c'$  eine weitere Zentrumsfunktion. Unter den Voraussetzungen von Satz 4.2.8 gilt*

$$\gamma = \mathbb{E} \left[ \int_{C'} \mathbb{1}\{c'(K) \in B\} \Phi(dK) \right]$$

für  $B \in \mathcal{B}^d$  mit  $\lambda^d(B) = 1$ . Intensitäten hängen also nicht von der gewählten Zentrumsfunktion ab.

*Beweis.* Übung 9.3 □

**4.2.12 Bemerkung.** Unter den Voraussetzungen von Lemma 4.2.11 sei  $\mathbb{Q}'$  die Formverteilung bezüglich  $c'$ . Dann gehen  $\mathbb{Q}$  und  $\mathbb{Q}'$  durch “Verschiebung” auseinander hervor. Ist etwa  $\mathcal{H} \subset C'$  verschiebungsinvariant (d.h.  $\mathcal{H} = \mathcal{H} + x := \{K + x : K \in \mathcal{H}\}$  für jedes  $x \in \mathbb{R}^d$ ), so gilt

$$\mathbb{Q}(\mathcal{H}) = \mathbb{Q}'(\mathcal{H}).$$

Nachweis: Übung 9.3.

**4.2.13 Bemerkung.** Nicht jedes Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{Q}$  auf  $C$  kann unter den Voraussetzungen von Satz 4.2.8 als Formverteilung vorkommen. Für  $C \in C'$  gilt:

$$\infty > \Theta(\mathcal{F}_C) = \gamma \int_{C'} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{(K+x) \cap C \neq \emptyset\} dx \mathbb{Q}(dK) = \gamma \int_{C_0} \lambda^d(K + C^*) \mathbb{Q}(dK).$$

Also gilt

$$\int_{C_0} \lambda^d(K + C^*) \mathbb{Q}(dK) < \infty, \quad C \in C'. \quad (4.2.4)$$

**4.2.14 Satz.** *Unter den Voraussetzungen von Satz 4.2.8 sei  $\Phi$  ein Poissonprozess. Dann ist*

$$\Psi := \int_{C'} \mathbb{1}\{(c(K), K - c(K)) \in \cdot\} \Phi(dK)$$

*ein Poissonprozess auf  $\mathbb{R}^d \times C'$ .*

*Beweis.* Wir verwenden den „Abbildungssatz“ für Poissonprozesse, der in den Übungen besprochen wird. Sei  $\Phi$  ein Poissonprozess auf  $\mathbb{X}$  mit Intensitätsmaß  $\Theta$  und  $T: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  messbar. Definiere

$$T(\Phi)(B) := \int_{\mathbb{X}} \mathbb{1}\{T(x) \in B\} \Phi(dx).$$

Gilt nun zusätzlich

$$\mathbb{E}[T(\Phi)(B)] = \int_{\mathbb{X}} \mathbb{1}\{T(x) \in B\} \Theta(dx) < \infty, \quad B \subset \mathbb{Y} \text{ beschränkt},$$

so ist  $T(\Phi)$  ein Poissonprozess. In unserem Fall ist  $T(K) := (c(K), K - c(K))$ . □

**4.2.15 Satz.** *Es sei  $\Psi$  ein Poissonprozess auf  $\mathbb{R}^d \times C'$  mit Intensitätsmaß  $\gamma \lambda^d \otimes \mathbb{Q}$  für  $\gamma > 0$  und ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{Q}$  auf  $C'$ . Es gelte (4.2.4). Dann ist*

$$\Phi(\cdot) := \int_{\mathbb{R}^d \times C'} \mathbb{1}\{K + x \in \cdot\} \Psi(d(x, K))$$

*ein stationärer Poissonprozess.*

*Beweis.* Da  $\Psi$  als Poissonprozess durch sein Intensitätsmaß in Verteilung festgelegt ist, ist  $\Psi$  stationär. Dann ist auch  $\Phi$  stationär und ein Poissonprozess, wie aus dem Abbildungssatz für Poissonprozesse folgt.  $\square$

**4.2.16 Bemerkung.** Es sei  $\Phi$  ein stationärer Poissonscher Partikelprozess mit lokal-endlichem Intensitätsmaß  $\Theta$ . Es sei

$$Z := \bigcup_{K \in \Phi} K$$

das zugehörige Boolesche Modell. Dann folgt

$$T_Z(C) = 1 - \mathbb{P}(Z \cap C = \emptyset) = 1 - \exp(-\Theta(\mathcal{F}_C)),$$

in Übereinstimmung mit Theorem 4.1.1 und Satz 4.2.14.  $T_Z$  legt das Intensitätsmaß  $\Theta$  fest.

### 4.3 Die Steinersche Formel

Im Folgenden bezeichnen wir mit  $V_d(K)$  das  $d$ -dimensionale Volumen und mit  $O_{d-1}(K)$  den Oberflächeninhalt einer Borelmenge  $K \subset \mathbb{R}^d$ . Formal erklärt man  $O_{d-1}(K)$  als das  $(d-1)$ -dimensionale Hausdorffmaß des Randes  $\partial K$  von  $K$ . Unter geeigneten Regularitätsvoraussetzungen an  $\partial K$  (Rektifizierbarkeit; erfüllt insbes. für die Ränder konvexer Mengen) stimmt  $O_{d-1}(K)$  mit dem *äußeren Minkowski-Inhalt* überein, d.h., es gilt

$$O_{d-1}(K) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (V_d(K + \varepsilon B^d) - V_d(K)).$$

**4.3.1 Lemma.** Für  $K \in \mathcal{C}^d$  und  $\varepsilon \geq 0$  ist

$$K + \varepsilon B^d := \{x + y : x \in K, y \in \varepsilon B^d\} = \{x \in \mathbb{R}^d : d(x, K) \leq \varepsilon\}.$$

*Beweis.* Übungsaufgabe.  $\square$

Wir untersuchen jetzt das Parallelvolumen  $V_d(K + \varepsilon B^d)$  in Abhängigkeit von  $\varepsilon$ .

**Beobachtung.**

$$V_d(K + \varepsilon B^d) \approx V_d(K) + \varepsilon O_{d-1}(K) + O(\varepsilon^2),$$

d.h., der Restterm ist im Vergleich zu  $\varepsilon$  klein.

**Beispiel.** Sei  $d = 2$ ,  $K = rB^2$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} V_2(K + \varepsilon B^2) &= V_2((r + \varepsilon)B^2) = \pi(r + \varepsilon)^2 = \pi r^2 + 2\pi r\varepsilon + \pi\varepsilon^2 \\ &= V_2(K) + \varepsilon O_1(K) + \pi\varepsilon^2. \end{aligned}$$

**Beispiel.** Sei wieder  $d = 2$  und  $K$  ein konvexes Polygon.

$$V_2(K + \varepsilon B^2) = V_2(K) + \varepsilon O_1(K) + \pi\varepsilon^2$$

ist ein Polynom in  $\varepsilon$  vom Grad zwei.

**4.3.2 Definition.** Für  $d \in \mathbb{N}$  sei

$$\kappa_d := V_d(B^d) = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma((d/2) + 1)}$$

das Volumen der  $d$ -dimensionalen Einheitskugel. Ferner sei  $\kappa_0 := 1$ .

Es gilt:  $\kappa_1 = 2, \kappa_2 = \pi, \kappa_3 = \frac{4}{3}\pi, \dots$ . Außerdem gilt für den Oberflächeninhalt der Einheitskugel

$$O_{d-1}(B^d) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (V_d((1 + \varepsilon)B^d) - V_d(B^d)) = \kappa_d \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\varepsilon} ((1 + \varepsilon)^d - 1) = d\kappa_d =: \omega_d.$$

**4.3.3 Satz** (Steinersche Formel). Für  $K \in \mathcal{K}^d$  gibt es Zahlen  $V_0(K), \dots, V_d(K) \geq 0$ , sodass

$$V_d(K + \varepsilon B^d) = \sum_{j=0}^d \kappa_{d-j} \varepsilon^{d-j} V_j(K) \quad (4.3.1)$$

für alle  $\varepsilon \geq 0$  gilt.

*Beweis.* O.B.d.A. sei  $K \neq \emptyset$ . Für  $x \in \mathbb{R}^d$  sei

$$p(K, x) := y \in K, \text{ falls } \|x - y\| = d(x, K).$$

Für  $x \in K$  ist  $p(K, x) = x$  und für  $x \notin K$  ist  $p(K, x) \in \partial K$ . Weil  $K$  konvex ist, ist  $y$  eindeutig bestimmt. Der Vektor  $p(K, x)$  heißt *metrische Projektion* von  $x$  auf  $K$ . Jeder Randpunkt  $y$  von  $K$  ist Bild  $p(K, x) = y$  eines Punktes  $x \notin K$  unter der metrischen Projektion auf  $K$ . Der durch

$$u(K, x) := \frac{x - p(K, x)}{d(x, K)} \in S^{d-1}, \quad x \notin K,$$

definierte Vektor ist eine *äußere Normale* von  $K$  im Punkt  $y = p(K, x)$  in dem Sinn, dass

$$K \subset \{z \in \mathbb{R}^d : \langle z - y, u(K, x) \rangle \leq 0\}$$

gilt. Also liegt  $K$  in einem der beiden Halbräume, die von der Hyperebene

$$\{z \in \mathbb{R}^d : \langle z - y, u(K, x) \rangle = 0\}$$

berandet werden. (Eine Stützhyperebene von  $K$  ist eine Hyperebene  $H$  mit  $K \cap H \neq \emptyset$  und  $K \subset H^-$ , wobei  $H^-$  einer der beiden Halbräume ist, die von  $H$  berandet werden.)  $\{z \in \mathbb{R}^d : \langle z - y, u(K, x) \rangle = 0\}$  ist also eine Stützhyperebene von  $K$  durch  $y$  mit Normalenvektor  $u(K, x)$ .

Die Menge aller äußeren Normalenvektoren von  $K$  im Randpunkt  $y$  ist ein abgeschlossener, konvexer Kegel, der mit  $N(K, y)$  bezeichnet wird.

Wir setzen zunächst voraus, dass  $K$  ein *Polytop* ist, d.h. ein endlicher Durchschnitt von Halbräumen, der beschränkt ist (äquivalent dazu ist ein Polytop die konvexe Hülle einer endlichen Punktmenge). Für ein Polytop  $K$  definieren wir eine *Seite* von  $K$  als den Schnitt von  $K$  mit einer Stützhyperebene. Wir bezeichnen eine Seite  $F$  von  $K$  als eine *j-Seite*, falls  $\dim F := \dim(\text{aff } F) = j$  gilt. Für  $j = 0, \dots, d-1$  erklären wir außerdem  $\mathcal{F}_j(K)$  als das endliche System aller  $j$ -Seiten von  $K$ . Eine wichtige Beobachtung ist, dass der Rand jedes Polytops die disjunkte Vereinigung des relativen Inneren seiner Seiten ist.

Des Weiteren ist der *Normalenkegel*  $N(K, F)$  eines Polytops zu einer Seite  $F \in \bigcup_{j=0}^{d-1} \mathcal{F}_j(K)$  von  $K$  die Menge der äußeren Normalenvektoren in einem beliebigen Punkt  $x \in \text{relint } F$ . Diese Definition ist unabhängig von der konkreten Wahl von  $x$ . Ferner sei

$$\gamma(F, K) := \frac{\mathcal{H}^{d-j-1}(N(K, F) \cap S^{d-1})}{\mathcal{H}^{d-j-1}(L \cap S^{d-1})}, \quad F \in \mathcal{F}_j(K),$$

der *äußere Winkel* von  $K$  bei  $F$ , wobei  $L$  das orthogonale Komplement des Richtungsraums von  $F$  und  $\mathcal{H}^k$  das  $k$ -dimensionale Hausdorff-Maß auf dem  $\mathbb{R}^d$  ist. Wegen der Proportionalität des Oberflächeninhalts von  $N(K, F) \cap S^{d-1}$  zum zugehörigen  $(d-j)$ -dimensionalen Volumen von  $N(K, F) \cap B^d$  gilt

$$\gamma(F, K) = \frac{\mathcal{H}^{d-j}(N(K, F) \cap B^d)}{\mathcal{H}^{d-j}(L \cap B^d)} = \frac{\mathcal{H}^{d-j}(N(K, F) \cap B^d)}{\kappa_{d-j}}.$$

Nun gilt für jedes Polytop  $K \in \mathcal{K}^d$

$$\begin{aligned} V_d(K + \varepsilon B^d) - V_d(K) &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{x \in (K + \varepsilon B^d) \setminus K\} dx \\ &= \sum_{j=0}^{d-1} \sum_{F \in \mathcal{F}_j(K)} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{x \in (K + \varepsilon B^d) \setminus K, p(K, x) \in \text{relint } F\} dx \\ &= \sum_{j=0}^{d-1} \sum_{F \in \mathcal{F}_j(K)} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{z \in N(K, F), \|z\| \leq \varepsilon, y \in \text{relint } F\} \mathcal{H}^{d-j}(dz) \mathcal{H}^j(dy) \\ &= \sum_{j=0}^{d-1} \sum_{F \in \mathcal{F}_j(K)} \mathcal{H}^j(\text{relint } F) \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{z \in N(K, F), \|z\| \leq 1\} \mathcal{H}^{d-j}(dz) \cdot \varepsilon^{d-j} \\ &= \sum_{j=0}^{d-1} \sum_{F \in \mathcal{F}_j(K)} \mathcal{H}^j(\text{relint } F) \mathcal{H}^{d-j}(N(K, F) \cap B^d) \frac{\kappa_{d-j}}{\kappa_{d-j}} \cdot \varepsilon^{d-j} \\ &= \sum_{j=0}^{d-1} \sum_{F \in \mathcal{F}_j(K)} \mathcal{H}^j(F) \cdot \gamma(F, K) \cdot \kappa_{d-j} \cdot \varepsilon^{d-j}, \end{aligned}$$

wobei für die dritte Gleichheit verwendet wurde, dass sich jedes  $x \in (K + \varepsilon B^d) \setminus K$  mit  $p(K, x) \in \text{relint } F$  eindeutig als Summe  $x = y + z$  mit  $y = p(K, x)$  und  $z \in N(K, F)$  schreiben lässt. Setzt man nun

$$V_j(K) := \sum_{F \in \mathcal{F}_j(K)} \mathcal{H}^j(F) \cdot \gamma(F, K), \quad 0, 1, \dots, d, \quad (4.3.2)$$

so gilt offenbar (4.3.1).

Für allgemeines  $K \in \mathcal{K}^d \setminus \{\emptyset\}$  gibt es Polytope  $K_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , mit  $\delta(K_n, K) \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$  (siehe Übung 8.1 für einen Beweis dieser Aussage). Aus (4.3.1) ergibt sich für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $k \in \{1, \dots, d+1\}$ , dass

$$V_d(K_n + k B^d) = \sum_{j=0}^d \kappa_{d-j} k^{d-j} V_j(K_n).$$

Dieses lineare Gleichungssystem kann nach Variablen  $V_0(K_n), \dots, V_d(K_n)$  (eindeutig) aufgelöst werden, und wir erhalten

$$V_j(K_n) = \sum_{k=1}^{d+1} \alpha_{jk} V_d(K_n + k B^d),$$

wobei die Koeffizienten  $\alpha_{jk} \in \mathbb{R}$  nicht von  $K_n$  abhängen. Nun erklärt man

$$V_j(K) := \sum_{k=1}^{d+1} \alpha_{jk} V_d(K + k B^d), \quad K \in \mathcal{K}^d. \quad (4.3.3)$$

Da  $V_d$  stetig ist und ebenso die Minkowskiaddition, ist  $V_j$  ein stetiges Funktional auf den konvexen Körpern bezüglich der Hausdorffmetrik. Die Gleichung

$$V_d(K_n + \varepsilon B^d) = \sum_{j=0}^d \kappa_{d-j} \varepsilon^{d-j} V_j(K_n)$$

gilt nun für die durch (4.3.3) erklärten stetigen Funktionale. Gehen wir jetzt zum Grenzwert  $n \rightarrow \infty$  über, so folgt (4.3.1).  $\square$

**4.3.4 Definition.** Die Zahlen  $V_0(K), \dots, V_d(K)$  heißen *innere Volumina* von  $K$ .

**4.3.5 Bemerkung.** Die Koeffizienten  $\kappa_{d-j}$  wurden aus Normierungsgründen gewählt. Insbesondere gelten die Aussagen (i) und (iii) der nachfolgenden Bemerkungen. Wichtiger, aber schwieriger zu zeigen, ist, dass  $V_j$  so erklärt ist, dass die Berechnung von  $V_j(K)$  für  $K \subset \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^d$  in  $\mathbb{R}^k$  oder auch in  $\mathbb{R}^d$  denselben Wert ergibt. Man sagt daher auch, dass die inneren Volumina von intrinsischer Natur sind.

**4.3.6 Bemerkung.** (i)  $V_d(K)$  auf der rechten Seite von (4.3.1) ist gleich  $\lambda^d(K)$ .

(ii) Aus (i) folgt

$$O_{d-1}(K) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (V_d(K + \varepsilon B^d) - V_d(K)) = \kappa_1 V_{d-1}(K) = 2V_{d-1}(K).$$

Im Fall  $\dim K = d$  ist  $V_{d-1}$  also der halbe Oberflächeninhalt von  $K$  und im Fall  $\dim K \leq d-1$  der Oberflächeninhalt von  $K$ .

(iii) Im Fall  $K \neq \emptyset$  ist  $V_0(K) = 1$  (siehe Übung 8.6). Ferner gilt  $V_0(\emptyset) = \dots = V_d(\emptyset) = 0$ . Man nennt  $V_0$  auch *Euler-Charakteristik*.

**4.3.7 Definition und Satz.** Sei  $j \in \{0, \dots, d\}$ . Dann gilt:

(i) Das Funktional  $V_j$  ist bewegungsinvariant, d.h.

$$V_j(gK) = V_j(K), \quad K \in \mathcal{K}^d, g \in G_d.$$

Dabei ist  $G_d$  die Gruppe der Bewegungen auf  $\mathbb{R}^d$  (Komposition von Drehungen und Verschiebungen).

(ii)  $V_j$  ist homogen von Grad  $j$ , d.h.

$$V_j(\alpha K) = \alpha^j V_j(K), \quad K \in \mathcal{K}^d, \alpha > 0.$$

(iii)  $V_j$  ist stetig auf  $\mathcal{K}^d$  bezüglich der Hausdorffmetrik.

(iv)  $V_j$  ist additiv, d.h.

$$V_j(K \cup L) = V_j(K) + V_j(L) - V_j(K \cap L), \quad K, L, K \cup L \in \mathcal{K}^d.$$

*Beweis.* (i) und (iii) folgen direkt aus (4.3.3) und den entsprechenden Eigenschaften von  $V_d$ .

(ii) Für  $\alpha > 0$ ,  $K \in \mathcal{K}^d$  gilt

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^d \kappa_{d-j} \varepsilon^{d-j} V_j(\alpha K) &\stackrel{(4.3.1)}{=} V_d(\alpha K + \varepsilon B^d) = \alpha^d V_d(K + \frac{\varepsilon}{\alpha} B^d) \\ &\stackrel{(4.3.1)}{=} \alpha^d \sum_{j=0}^d \kappa_{d-j} \varepsilon^{d-j} \alpha^{-(d-j)} V_j(K) = \sum_{j=0}^d \kappa_{d-j} \varepsilon^{d-j} \alpha^j V_j(K). \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich (vor  $\varepsilon^{d-j}$ ) zeigt  $V_j(\alpha K) = \alpha^j V_j(K)$ .

(iv) Es seien  $K, L \in \mathcal{K}^d$  mit  $K \cup L \in \mathcal{K}^d$ . O.B.d.A. gelte  $K \neq \emptyset$  und  $L \neq \emptyset$ . Man zeigt (durch Betrachtung von  $p(K, \cdot)$ ,  $p(L, \cdot)$  und  $p(K \cap L, \cdot)$ ), dass gilt

$$\mathbb{1}_{(K \cup L) + \varepsilon B^d} + \mathbb{1}_{(K \cap L) + \varepsilon B^d} = \mathbb{1}_{K + \varepsilon B^d} + \mathbb{1}_{L + \varepsilon B^d}.$$

Integration liefert, dass  $K \mapsto V(K + \varepsilon B^d)$  additiv ist. Aus (4.3.3) folgt dann die Behauptung. (siehe Übung 8.2)  $\square$

(weggelassen) Die inneren Volumina können auf vielfältige Weise verallgemeinert werden. Es gibt (was hier jedoch nicht bewiesen werden soll) ein eindeutig bestimmtes symmetrisches (nicht-negatives) Funktional  $V: (\mathcal{K}^d \setminus \{\emptyset\})^d \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$V_d(t_1 K_1 + \dots + t_m K_m) = \sum_{i_1, \dots, i_d=1}^m t_{i_1} \dots t_{i_d} V(K_{i_1}, \dots, K_{i_d}) \quad (4.3.4)$$

für alle  $t_1, \dots, t_m \geq 0$ ,  $K_1, \dots, K_m \in \mathcal{K}^d \setminus \{\emptyset\}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , das symmetrisch und “multilinear” in den Argumenten ist. Man nennt dieses Funktional “gemischtes Volumen”.

**4.3.8 Definition.** Die nicht-negative reelle Zahl  $V(K_1, \dots, K_d)$  heißt *gemischtes Volumen* von  $K_1, \dots, K_d$ . Für  $K, L \in \mathcal{K}^d \setminus \{\emptyset\}$ ,  $j \in \{0, \dots, d\}$  schreibt man

$$V(K[j], L[d-j]) := V(\underbrace{K, \dots, K}_j, \underbrace{L, \dots, L}_{d-j}).$$

**4.3.9 Bemerkung.** Wählt man  $m = 2$ ,  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = t$ ,  $K_1 = K$  und  $K_2 = L$  in (4.3.4), so erhält man

$$V_d(K + tL) = \sum_{j=0}^d \binom{d}{j} t^{d-j} V(K[j], L[d-j]).$$

Man nennt diese Formel auch Steiner-Formel zum strukturierenden Element  $L$ . Ein Vergleich mit der Steiner-Formel für  $L = B^d$  zeigt:

$$V_j(K) = \binom{d}{j} \kappa_{d-j}^{-1} V(K[j], B^d[d-j]), \quad j = 0, \dots, d.$$



#### 4.4 Das Boolesche Modell mit konvexen Körnern

Wir betrachten ein stationäres Boolesches Modell  $Z$  mit Intensität  $\gamma$  und typischem Korn  $Z_0$  mit  $\mathbb{P}(Z_0 \in \mathcal{K}^d \setminus \{\emptyset\}) = 1$ .

**4.4.1 Satz.** *Für die sphärische Kontaktverteilungsfunktion von  $Z$  gilt*

$$1 - H_B(r) = \exp \left( -\gamma \sum_{j=0}^{d-1} \kappa_{d-j} r^{d-j} \mathbb{E}[V_j(Z_0)] \right), \quad r \geq 0.$$

*Beweis.* Satz 4.1.12 besagt für  $B \in \mathcal{K}^d$  mit  $0 \in B$

$$1 - H_B(r) = \exp \left( -\gamma \left( \mathbb{E}[\lambda^d(Z_0 + rB^*)] - \mathbb{E}[\lambda^d(Z_0)] \right) \right).$$

Für  $B = B^d$  folgt die Behauptung aus der Steiner-Formel:

$$\mathbb{E}[\lambda^d(Z_0 + rB^d)] = \sum_{j=0}^d \kappa_{d-j} r^{d-j} \mathbb{E}[V_j(Z_0)]. \quad \square$$

**4.4.2 Bemerkung.** Aus der Voraussetzung  $\mathbb{E}[\lambda^d(Z_0 + rB^d)] < \infty$ ,  $r \geq 0$ , folgt

$$\mathbb{E}[V_j(Z_0)] < \infty, \quad j = 0, \dots, d.$$

Auch die Umkehrung dieser Aussage ist richtig.

**4.4.3 Bemerkung.** Die sphärische Kontaktverteilungsfunktion wird durch die Zahlen  $\gamma \mathbb{E}[V_j(Z_0)]$ ,  $j = 0, \dots, d-1$ , festgelegt. Der Volumenanteil wird durch  $\gamma \mathbb{E}[V_d(Z_0)]$  bestimmt.

**4.4.4 Satz.** (weggelassen) *Es sei  $B \in \mathcal{K}^d$  mit  $0 \in B$ . Dann gilt:*

$$1 - H_B(r) = \exp \left( -\gamma \sum_{j=0}^{d-1} r^{d-j} \binom{d}{j} \mathbb{E}[V(Z_0[j], B^*[d-j])] \right), \quad r \geq 0.$$

*Beweis.* Die Behauptung folgt aus Satz 4.1.12 und Bemerkung 4.3.9. Auf Messbarkeitsfragen gehen wir nicht ein.  $\square$

**4.4.5 Satz.** *Für jedes  $u \in S^{d-1}$  gilt*

$$1 - H_{[0,u]}(r) = \exp \left( -\gamma r \mathbb{E}[V_{d-1}(Z_0|u^\perp)] \right).$$

*Dabei ist  $K|u^\perp$  die orthogonale Projektion von  $K \subset \mathbb{R}^d$  auf  $u^\perp := \text{span}(u)^\perp$ . Ist  $Z_0$  isotrop, so gilt*

$$1 - H_{[0,u]}(r) = \exp \left( -\gamma \frac{2\kappa_{d-1}}{d\kappa_d} r \mathbb{E}[V_{d-1}(Z_0)] \right).$$

*Beweis.* Nach Satz 4.1.12 gilt für  $B = [0, u]$

$$\begin{aligned} 1 - H_{[0,u]}(r) &= \exp \left( -\gamma \mathbb{E}[\lambda^d((Z_0 + r[0, u]^*) \setminus Z_0)] \right) \\ &= \exp \left( -\gamma \mathbb{E}[V_d(Z_0 + r[0, -u]) - V_d(Z_0)] \right). \end{aligned}$$

Zum Beweis der ersten Formel genügt es deshalb zu zeigen, dass für  $K \in \mathcal{K}^d$  gilt

$$V_d(K + r[0, u]) = V_d(K) + rV_{d-1}(K|u^\perp), \quad r \geq 0.$$

Für  $y \in u^\perp$  sei  $f(y) := \max\{\lambda \in \mathbb{R} : y + \lambda u \in K\}$ . Dann gilt:

$$y + \lambda u \in (K + rB) \setminus K \Leftrightarrow (i) \ y \in K|u^\perp \text{ und } (ii) \ f(y) < \lambda \leq f(y) + r.$$

Der Satz von Fubini liefert

$$\begin{aligned} V_d((K + rB) \setminus K) &= \int_{u^\perp} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}\{y + \lambda u \in (K + rB) \setminus K\} \, d\lambda \, dy \\ &= \int_{u^\perp} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}\{y \in K|u^\perp\} \mathbb{1}\{f(y) < \lambda \leq f(y) + r\} \, d\lambda \, dy \\ &= \int_{u^\perp} \mathbb{1}\{y \in K|u^\perp\} r \, dy \\ &= rV_{d-1}(K|u^\perp). \end{aligned}$$

Es bezeichne  $\nu$  das Haarsche Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $SO_d$ . Im isotropen Fall schließt man dann für jedes  $u \in S^{d-1}$  und jedes  $\rho \in SO_d$

$$\mathbb{E}V_{d-1}(Z_0|u^\perp) = \mathbb{E}V_{d-1}(Z_0|\rho u^\perp)$$

und damit

$$\begin{aligned} \mathbb{E}V_{d-1}(Z_0|u^\perp) &= \mathbb{E} \int_{SO_d} V_{d-1}(Z_0|\rho u^\perp) \, \nu(d\rho) \\ &= \frac{2}{d\kappa_d} \mathbb{E}\kappa_{d-1} V_{d-1}(Z_0). \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt mit Hilfe der integralgeometrischen Projektionsformel in Kapitel 5.  $\square$

#### 4.4.6 Beispiel. Wie weit kann man in einem (Booleschen) Wald sehen?

Betrachte dazu  $d = 2$  und  $Z_0 = B(0, R)$ . Aus dem isotropen Fall von Satz 4.4.5 folgt für  $u \in S^{d-1}$

$$\begin{aligned} 1 - H_{[0, u]}(r) &= \exp\left(-\gamma r \frac{2\kappa_1}{2\kappa_2} \mathbb{E}[V_1(B(0, R))]\right) \\ &= \exp\left(-\gamma r \frac{2\kappa_1}{2\kappa_2} \mathbb{E}[\kappa_2 R]\right) = \exp(-2\gamma r \mathbb{E}[R]). \end{aligned}$$

Sei zum Beispiel  $\mathbb{E}[R] = 0,2m$  und  $\gamma = 0,01m^{-2}$ . Dann gilt  $H_{[0, u]}(r) = 1 - \exp(-0,004r)$ . So ist etwa die Wahrscheinlichkeit, höchstens 500 Meter weit sehen zu können

$$H_{[0, u]}(500) = 1 - e^{-2} \approx 0,865.$$

**4.4.7 Beispiel.** (weggelassen) Es sei  $u \in S^{d-1}$ . Man zeigt leicht, dass  $Z_u := Z \cap \text{span}(u)$  wieder ein Boolesches Modell in  $\text{span}(u)$  ist (Man betrachte dazu etwa  $T_{Z_u}$ ). Von  $Z_u$  werden Teile von  $\text{span}(u)$  überdeckt. Wir gehen davon aus, dass  $0 \in \text{span}(u)$  nicht von  $Z$

überdeckt wird, und bezeichnen mit  $X_0$  die Länge der Zusammenhangskomponente von  $\text{span}(u) \setminus Z_u$ , welche 0 enthält. Die Länge der (in positive  $u$ -Richtung gezählt) nächsten Zusammenhangskomponente von  $\text{span}(u) \setminus Z_u$  werde mit  $X_1$  bezeichnet, die Länge der vorherigen mit  $X_{-1}$  usw.

Die Zufallsvariablen  $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  sind unabhängig unter  $\mathbb{P}(\cdot | 0 \notin Z_u)$  (ohne Beweis). Ferner sind sie exponentialverteilt (folgt aus Satz 4.4.5). Die  $X_n$  entsprechen den “idle periods“ in einer  $M/G/\infty$ -Warteschlange. Für Details wird auf die Übungen verwiesen.

**4.4.8 Satz.** *Das typische Korn  $Z_0$  sei isotrop. Dann gilt*

$$1 - H_B(r) = \exp \left( -\gamma \sum_{j=0}^{d-1} \frac{\kappa_j \kappa_{d-j}}{\binom{d}{j} \kappa_d} r^{d-j} V_{d-j}(B) \mathbb{E}[V_j(Z_0)] \right), \quad r \geq 0.$$

*Beweisidee.* Aufgrund der vorausgesetzten Isotropie gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[V_d(Z_0 + rB^*)] &= \mathbb{E} \left[ \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{(Z_0 + x) \cap rB \neq \emptyset\} dx \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \int_{SO_d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{(\rho Z_0 + x) \cap rB \neq \emptyset\} dx \nu(d\rho) \right]. \end{aligned}$$

Hierbei ist  $\nu$  das eindeutig bestimmte rotationsinvariante (Haarsche) Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $SO_d$ . Das bedeutet

$$\mathbb{E}[V_d(Z_0 + rB^*)] = \mathbb{E} \left[ \int_{G_d} \mathbb{1}\{gZ_0 \cap rB \neq \emptyset\} \mu_d(dg) \right],$$

wobei  $G_d$  die Menge aller Bewegungen auf  $\mathbb{R}^d$  und  $\mu_d$  ein geeignet normiertes bewegungsinvariantes Maß auf  $G_d$  ist (für Details wird auf die Vorlesung verwiesen). Dies führt auf die kinematische Hauptformel, die in Kapitel 5 ausführlicher besprochen wird. Diese besagt

$$\int_{G_d} V_j(K \cap gM) \mu_d(dg) = \sum_{k=j}^d \alpha_{dj k} V_k(K) V_{d+j-k}(M),$$

wobei

$$\alpha_{dj k} = \frac{\binom{k}{j} \kappa_k \kappa_{d+j-k}}{\binom{d}{k-j} \kappa_j \kappa_d}.$$

Speziell für  $j = 0$  erhält man

$$\alpha_{d0 k} = \frac{\kappa_k \kappa_{d-k}}{\binom{d}{k} \kappa_d}.$$

Dies ergibt die Behauptung. □

## 5 Dichten innerer Volumina

### 5.1 Geometrische Dichten von Partikelprozessen

Es sei  $\Phi$  ein stationärer Partikelprozess mit lokal-endlichem Intensitätsmaß  $\Theta$ . Hierbei seien  $\gamma$  und  $\mathbb{Q}$  Intensität und Formverteilung bezüglich des Umkugelmittelpunktes  $c: \mathcal{C}' \rightarrow \mathbb{R}^d$  als Zentrumsfunktion.

**5.1.1 Satz.** *Es sei  $f: \mathcal{C}' \rightarrow \mathbb{R}$  messbar und translationsinvariant. Weiter gelte  $f \geq 0$  oder  $\int_{\mathcal{C}'} |f| d\mathbb{Q} < \infty$ .*

(i) Für  $B \in \mathcal{B}^d$  mit  $0 < \lambda^d(B) < \infty$  gilt

$$\gamma_f := \gamma \int_{\mathcal{C}'} f d\mathbb{Q} = \frac{1}{\lambda^d(B)} \mathbb{E} \left[ \int_{\mathcal{C}'} \mathbb{1}\{c(C) \in B\} f(C) \Phi(dC) \right].$$

(ii) Für  $W \in \mathcal{K}^d$  mit  $V_d(W) > 0$  gilt

$$\gamma_f = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{V_d(rW)} \mathbb{E} \left[ \int_{\mathcal{C}'} \mathbb{1}\{C \subset rW\} f(C) \Phi(dC) \right].$$

(iii) Es gelte

$$\int_{\mathcal{C}'} |f(C)| \lambda^d(C + B^d) \mathbb{Q}(dC) < \infty. \quad (5.1.1)$$

Dann folgt für  $W \in \mathcal{K}^d$  mit  $V_d(W) > 0$

$$\gamma_f = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{V_d(rW)} \mathbb{E} \left[ \int_{\mathcal{C}'} \mathbb{1}\{C \cap rW \neq \emptyset\} f(C) \Phi(dC) \right].$$

*Beweis.* (i) Mit der Campbellschen Formel und Satz 4.2.8 erhält man

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \int_{\mathcal{C}'} \mathbb{1}\{c(C) \in B\} f(C) \Phi(dC) \right] &= \int_{\mathcal{C}'} \mathbb{1}\{c(C) \in B\} f(C) \Theta(dC) \\ &= \gamma \int_{\mathcal{C}_0} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{c(K+x) \in B\} f(K+x) dx \mathbb{Q}(dK) \\ &= \gamma \int_{\mathcal{C}_0} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{c(K) + x \in B\} f(K) dx \mathbb{Q}(dK) \\ &= \gamma \int_{\mathcal{C}_0} \lambda^d(B) f(K) \mathbb{Q}(dK) \\ &= \lambda^d(B) \gamma_f. \end{aligned}$$

(ii) Wie in (i) folgt

$$\mathbb{E} \left[ \int_{\mathcal{C}'} \mathbb{1}\{C \subset rW\} f(C) \Phi(dC) \right] = \gamma \int_{\mathcal{C}_0} f(K) \lambda^d(\{x \in \mathbb{R}^d: K+x \subset rW\}) \mathbb{Q}(dK).$$

O.B.d.A. (!) gelte  $0 \in \text{int } W$ . Es gibt eine messbare Funktion  $\rho: \mathcal{C}' \rightarrow [0, \infty)$  mit

$$K \subset \rho(K)W, \quad K \in \mathcal{C}'.$$

Für fixiertes  $K \in \mathcal{C}'$  sei  $r > \rho(K)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned}
 \left(1 - \frac{\rho(K)}{r}\right)^d &= \frac{(r - \rho(K))^d}{r^d} \\
 &= \frac{V_d((r - \rho(K))W)}{V_d(rW)} \\
 &= V_d(rW)^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{x \in (r - \rho(K))W\} dx \\
 &\leq V_d(rW)^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{K + x \subset rW\} dx \leq 1.
 \end{aligned}$$

Für die Ungleichung überlegt man sich, dass für  $x \in (r - \rho(K))W$  gilt

$$K + x \subset K + (r - \rho(K))W \subset \rho(K)W + (r - \rho(K))W = rW.$$

Damit folgt aus

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{V_d(rW)} \mathbb{E} \left[ \int_{\mathcal{C}'} \mathbb{1}\{C \subset rW\} f(C) \Phi(dC) \right] \\
 &= \gamma \int_{\mathcal{C}_0} f(K) \underbrace{\frac{\lambda^d(\{x \in \mathbb{R}^d: K + x \subset rW\})}{\lambda^d(rW)}}_{\uparrow 1, r \rightarrow \infty} \mathbb{Q}(dK)
 \end{aligned}$$

die Behauptung im Fall  $f \geq 0$  mittels monotoner Konvergenz angewendet auf die untere Schranke für den Integranden. Im integrierbaren Fall folgt die Behauptung aus dem Satz über majorisierte Konvergenz.

(iii) (siehe Übung 10.2)

□

**5.1.2 Definition.** Die Zahl

$$\gamma_f := \gamma \int_{\mathcal{C}_0} f d\mathbb{Q}$$

heißt *f-Dichte* von  $\Phi$ . Für translationsinvariantes  $f$ , welches zusätzlich eine Integrabilitätsbedingung erfüllt, gilt

$$\gamma_f = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{V_d(rW)} \mathbb{E} \left[ \int_{\mathcal{C}'} \mathbb{1}\{C \cap rW \neq \emptyset\} f(C) \Phi(dC) \right], \quad C \in \mathcal{C}',$$

wie gerade gezeigt wurde.

## 5.2 Geometrische Dichten von Keim-Korn-Modellen

**5.2.1 Definition.** (i) Der *Konvexring*  $\mathcal{R}^d$  ist das System aller endlichen Vereinigungen konvexer Körper.

(ii) Der *erweiterte Konvexring*  $\mathcal{S}^d$  ist das System aller Mengen  $M \subset \mathbb{R}^d$  mit

$$M \cap K \in \mathcal{R}^d, \quad K \in \mathcal{K}^d.$$

(iii) Eine Funktion  $f: \mathcal{K}^d \setminus \{\emptyset\} \rightarrow \mathbb{R}$  (oder  $f: \mathcal{K}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ) heißt *additiv*, falls

$$f(K \cup L) + f(K \cap L) = f(K) + f(L),$$

für alle  $K, L \in \mathcal{K}^d \setminus \{\emptyset\}$  mit  $K \cup L \in \mathcal{K}^d$  gilt. Gehört die leere Menge zum Definitionsbereich von  $f$ , so fordert man noch  $f(\emptyset) = 0$ . Eine Funktion  $f: \mathcal{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *additiv*, falls  $f(\emptyset) = 0$  und die obige Gleichung für alle  $K, L \in \mathcal{R}^d$  richtig ist.

**Ziele:** Sei  $Z$  eine stationäre zufällige abgeschlossene Menge im erweiterten Konvexring, die passende Integrabilitätsbedingungen erfüllt.

(i) Für translationsinvariante und additive Funktionen  $f: \mathcal{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  zeigen wir die Existenz des Grenzwertes

$$\delta_f := \lim_{r \rightarrow \infty} V_d(rW)^{-1} \mathbb{E}[f(Z \cap rW)]$$

für  $W \in \mathcal{K}^d$  mit  $V_d(W) > 0$ .

(ii) Alternative Darstellungen für  $\delta_f$ .

(iii) Formeln für Boolesche Modelle (“ $\delta_{V_i}$  ist eine Funktion von  $\gamma_{V_i}$ ”).

(iv) Ergodische Interpretation von  $\delta_f$ .

Wir benötigen zunächst einige Lemmata.

**5.2.2 Lemma.** Ist  $f: \mathcal{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  additiv, so gilt das Inklusions-Exklusionsprinzip:

$$f(K_1 \cup \dots \cup K_m) = \sum_{j=1}^m (-1)^{j-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq m} f(K_{i_1} \cap \dots \cap K_{i_j}), \quad K_1, \dots, K_m \in \mathcal{R}^d$$

mit  $m \in \mathbb{N}$ .

*Beweis.* Induktion (Übung 10.2). □

**Bezeichnungen:**

- $C^d := [0, 1]^d$ ,  $C_0^d := [0, 1)^d$ ,  $\partial^+ C^d := C^d \setminus C_0^d$ .
- Für  $z \in \mathbb{Z}^d$  sei  $C_z := C^d + z$ ,  $C_{0,z} := C_0^d + z$  und  $\partial^+ C_z := \partial^+ C^d + z$ .
- Für  $f: \mathcal{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  sei

$$f(K, z) := f(K \cap C_z) - f(K \cap \partial^+ C_z).$$

Es folgt ein zentrales Lemma:

**5.2.3 Lemma.** Ist  $f: \mathcal{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  additiv, so gilt:

$$f(K) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} f(K, z), \quad K \in \mathcal{R}^d.$$

*Beweis.* Es bezeichne  $<$  die (strikte) lexikographische Ordnung auf  $\mathbb{Z}^d$ . Für  $(z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{Z}^d$  und  $(y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{Z}^d$  ist diese erklärt durch

$$(z_1, \dots, z_d) < (y_1, \dots, y_d)$$

genau dann, wenn es ein  $k \in \{1, \dots, d\}$  gibt mit  $z_1 = y_1, \dots, z_{k-1} = y_{k-1}$  und  $z_k < y_k$ .

Dann gilt

$$\partial^+ C_z = C_z \cap \bigcup_{y: z < y} C_y, \quad z \in \mathbb{Z}^d.$$

Aus Lemma 5.2.2 folgt

$$\begin{aligned} \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} f(K \cap \partial^+ C_z) &= \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} f\left(\bigcup_{y: z < y} (K \cap C_z \cap C_y)\right) \\ &= \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \sum_{z < y_1 < \dots < y_j} f(K \cap C_z \cap C_{y_1} \cap \dots \cap C_{y_j}) \\ &= - \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k-1} \sum_{z_1 < \dots < z_k} f(K \cap C_{z_1} \cap \dots \cap C_{z_k}), \end{aligned}$$

wobei wir im zweiten Schritt die Tatsache nutzen, dass  $C_z \cap C_{y_j} \neq \emptyset$  nur für endlich viele  $j$  und  $f(\emptyset) = 0$  gilt. Damit folgt wiederum mit Lemma 5.2.2

$$\begin{aligned} f(K) &= f\left(\bigcup_{z \in \mathbb{Z}^d} (K \cap C_z)\right) \\ &= \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} f(K \cap C_z) + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k-1} \sum_{z_1 < \dots < z_k} f(K \cap C_{z_1} \cap \dots \cap C_{z_k}) \\ &= \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} f(K \cap C_z) - \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} f(K \cap \partial^+ C_z) \\ &= \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} (f(K \cap C_z) - f(K \cap \partial^+ C_z)) \\ &= \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} f(K, z). \end{aligned} \quad \square$$

**5.2.4 Definition.** Eine Funktion  $f: \mathcal{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *bedingt beschränkt*, falls sie für jedes  $K \in \mathcal{K}'$  beschränkt auf  $\{L \in \mathcal{K}': L \subset K\}$  ist.

**5.2.5 Lemma.** Ist  $f: \mathcal{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  verschiebungsinvariant, additiv und bedingt beschränkt, so gilt

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{f(rW)}{V_d(rW)} = f(C^d) - f(\partial^+ C^d),$$

falls  $W \in \mathcal{K}^d$  mit  $V_d(W) > 0$ .

*Beweis.* O.B.d.A. sei  $0 \in \text{int } W$ . Aus Lemma 5.2.3 folgt

$$f(rW) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} f(rW, z), \quad r > 0. \quad (5.2.1)$$

Definiere

$$Z_r^1 := \{z \in \mathbb{Z}^d : C_z \cap rW \neq \emptyset, C_z \not\subset rW\} \quad \text{und} \quad Z_r^2 := \{z \in \mathbb{Z}^d : C_z \subset rW\}.$$

Wir benutzen (Übung 10.3)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\text{card } Z_r^1}{V_d(rW)} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\text{card } Z_r^2}{V_d(rW)} = 1. \quad (5.2.2)$$

Aus der Translationsinvarianz und der bedingten Beschränktheit von  $f$  folgt

$$\begin{aligned} |f(rW, z)| &= |f(rW \cap C_z) - f(rW \cap \partial^+ C_z)| \\ &= |f((rW - z) \cap C^d) - f((rW - z) \cap \partial^+ C^d)| \leq b \end{aligned}$$

für ein von  $z$ ,  $r$  und  $W$  unabhängiges  $b \geq 0$ . Damit ist

$$V_d(rW)^{-1} \left| \sum_{z \in Z_r^1} f(rW, z) \right| \leq V_d(rW)^{-1} \text{card}(Z_r^1) b \xrightarrow{(5.2.2)} 0, \quad r \rightarrow \infty.$$

Also folgt mit (5.2.1) und  $f(\emptyset) = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} V_d(rW)^{-1} f(rW) &= \lim_{r \rightarrow \infty} V_d(rW)^{-1} \sum_{z \in Z_r^2} f(rW, z) \\ &= f(C_0^d) \lim_{r \rightarrow \infty} V_d(rW)^{-1} \text{card } Z_r^2 \stackrel{(5.2.2)}{=} f(C_0^d). \end{aligned}$$

Dabei haben wir im zweiten Schritt ausgenutzt, dass für  $C_z \subset rW$  gilt

$$\begin{aligned} f(rW, z) &= f(rW \cap C_z) - f(rW \cap \partial^+ C_z) \\ &= f(C_z) - f(\partial^+ C_z) = f(C^d) - f(\partial^+ C^d), \end{aligned}$$

wobei wir wieder die Translationsinvarianz von  $f$  verwendet haben.  $\square$

Mit dem nächsten Theorem erreichen wir zwei der zu Beginn des Abschnitts formulierten Ziele.

**5.2.6 Theorem.** *Es sei  $\Psi$  ein stationärer markierter Punktprozess mit endlicher Intensität  $\gamma$  und einer Formverteilung  $\mathbb{Q}$ , die auf  $\mathcal{K}'$  konzentriert sei und die Voraussetzung (2.2.4) aus Satz 2.2.8 erfülle. Sei  $Z$  das zugehörige Keim-Korn-Modell. Desweiteren sei  $f: \mathcal{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  messbar, translationsinvariant, additiv und bedingt beschränkt und es gelte*

$$\mathbb{E}[2^{N_{C^d}}] < \infty, \quad (5.2.3)$$

wobei die Zufallsvariable  $N_M$  für  $M \in \mathcal{B}^d$  definiert ist durch

$$N_M := \int_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{C}'} \mathbb{1}\{(K + x) \cap M \neq \emptyset\} \Psi(d(x, K)).$$

Dann existiert der Grenzwert

$$\delta_f := \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[f(Z \cap rW)]}{V_d(rW)} = \mathbb{E}[f(Z \cap C^d) - f(Z \cap \partial^+ C^d)].$$



*Beweis.* O.B.d.A. kann  $W \subset C^d$  vorausgesetzt werden. Man betrachte den Partikelprozess

$$\Phi_W(\cdot) := \int_{\mathbb{R}^d \times C'} \mathbb{1}\{K+x \in \cdot\} \mathbb{1}\{(K+x) \cap W \neq \emptyset\} \Psi(d(x, K)),$$

d.h. man betrachtet nur die Körner  $K+x$ , die  $W$  schneiden. Es existieren zufällige kompakte Mengen  $K_1, K_2, \dots$  mit  $\Phi_W = \sum_{j=1}^{N_W} \delta_{K_j}$ . Damit gilt mit Lemma 5.2.2:

$$f(Z \cap W) = f\left(W \cap \bigcup_{j=1}^{N_W} K_j\right) = \sum_{j=1}^{N_W} (-1)^{j-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq N_W} f(W \cap K_{i_1} \cap \dots \cap K_{i_j}).$$

Weil  $f$  bedingt beschränkt ist, gibt es ein  $b > 0$  mit

$$\mathbb{E}[|f(Z \cap W)|] \leq b \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{N_W} \binom{N_W}{j}\right] \leq b \mathbb{E}[2^{N_W}] \leq b \mathbb{E}[2^{N_{C^d}}] < \infty.$$

Wegen Stationarität und Translationsinvarianz erhält man  $\mathbb{E}[|f(Z \cap (W+x))|] < \infty$  für  $x \in \mathbb{R}^d$ . Aus Lemma 5.2.2 folgt  $\mathbb{E}[|f(Z \cap M)|] < \infty$  für  $M \in \mathcal{R}^d$ . Somit ist  $f^*: \mathcal{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f^*(M) := \mathbb{E}[f(Z \cap M)]$  eine additive, translationsinvariante, bedingt beschränkte Funktion. Lemma 5.2.5, angewendet auf  $f^*$ , liefert die Behauptung.  $\square$

### 5.3 Integralgeometrie (Überblick)

Ist  $f: \mathcal{K}^d \rightarrow \mathbb{R}$  additiv, so heißt eine additive Funktion  $\tilde{f}: \mathcal{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  *additive Fortsetzung* von  $f$ , wenn  $\tilde{f}|_{\mathcal{K}^d} = f$ . In diesem Fall schreibt man oft  $f := \tilde{f}$ . Wegen der Inklusions-Exklusions-Formel kann es höchstens eine Fortsetzung geben.

**5.3.1 Satz.** Für jedes  $j \in \{0, \dots, d\}$  gibt es genau eine additive Fortsetzung von  $V_j$ .

Für den Beweis benötigen wir noch ein paar Vorbereitungen.

**5.3.2 Lemma.** Es sei  $f: \mathcal{K}^d \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und additiv. Gilt

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbb{1}_{K_i} = 0$$

für  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ ,  $K_1, \dots, K_m \in \mathcal{K}^d$ , so folgt

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i f(K_i) = 0.$$

*Beweis.* Angenommen, die Aussage ist falsch. Dann gibt es ein  $m \in \mathbb{N}$  mit

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbb{1}_{K_i} = 0, \tag{5.3.1}$$

aber

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i f(K_i) = a \neq 0, \tag{5.3.2}$$

für  $\alpha_i \in \mathbb{R}$  und  $K_i \in \mathcal{K}^d$ . Wir wählen  $m$  minimal!

Sei  $H \subset \mathbb{R}^d$  eine Hyperebene mit Halbräumen  $H^+$ ,  $H^-$  und  $K_1 \subset \text{int } H^+$ . Multipliziert man (5.3.1) mit  $\mathbb{1}_{H^-}$  bzw.  $\mathbb{1}_H$ , so erhält man

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbb{1}_{K_i \cap H^-} = 0, \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbb{1}_{K_i \cap H} = 0.$$

Wegen  $K_1 \cap H^- = K_1 \cap H = \emptyset$  haben beide Summen höchstens  $m - 1$  Summanden ungleich 0. Aus der Minimalität von  $m$  folgt

$$\sum_{i=2}^m \alpha_i f(K_i \cap H^-) = \sum_{i=2}^m \alpha_i f(K_i \cap H) = 0.$$

Beide Summen ändern sich nicht, wenn man sie bei  $i = 1$  beginnen lässt, da  $f(\emptyset) = 0$ . Weil  $f$  additiv ist, folgt aus (5.3.2) mit  $K_i = (K_i \cap H^+) \cup (K_i \cap H^-)$ :

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i f(K_i \cap H^+) = a. \quad (5.3.3)$$

Weiter gibt es eine Folge  $(H_j)_{j \geq 1}$  von Hyperebenen mit  $K_1 = \bigcap_{j=1}^{\infty} H_j^+$  und  $K_1 \subset \text{int } H_j^+$ ,  $j \in \mathbb{N}$ . Dazu kann man beispielsweise eine abzählbare, in  $\mathbb{R}^d \setminus K$  dichte Teilmenge  $\{x_j : j \geq 1\}$  wählen und dann jeden Punkt  $x_j$  durch eine Hyperebene senkrecht zu  $x_j - p(K_1, x_j)$  von  $K_1$  trennen. Iteration des obigen Arguments liefert

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i f\left(K_i \cap \bigcap_{j=1}^k H_j^+\right) = a, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Im Fall  $K_i \cap K_1 \neq \emptyset$  gilt  $K_i \cap \bigcap_{j=1}^k H_j^+ \rightarrow K_i \cap K_1$ ,  $k \rightarrow \infty$ . Im Fall  $K_i \cap K_1 = \emptyset$  gilt  $K_i \cap \bigcap_{j=1}^k H_j^+ = \emptyset$  für genügend große  $k$ . Also folgt aus der Stetigkeit von  $f$  und  $f(\emptyset) = 0$ :

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i f(K_i \cap K_1) = a.$$

Wiederhole diesen Schritt mit  $K'_i := K_i \cap K_1$  und approximiere  $K'_2$ . Schließlich erhält man

$$\mathbb{1}_{K_1 \cap \dots \cap K_m} \sum_{i=1}^m \alpha_i = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbb{1}_{K_1 \cap \dots \cap K_m} = 0 \quad (\star)$$

und

$$f(K_1 \cap \dots \cap K_m) \sum_{i=1}^m \alpha_i = \sum_{i=1}^m \alpha_i f(K_1 \cap \dots \cap K_m) = a \neq 0. \quad (\star\star)$$

Aus  $(\star)$  folgt  $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 0$  oder  $K_1 \cap \dots \cap K_m = \emptyset$ , jeweils im Widerspruch zu  $(\star\star)$ .  $\square$

*Beweis von 5.3.1.* Wir setzen  $f := V_j$ . Es sei  $V$  der reelle Vektorraum aller Linearkombination von Indikatorfunktionen konvexer Körper. Weil die Abbildung  $B \mapsto \mathbb{1}_B$  additiv ist, folgt für  $K = \bigcup_{i=1}^m K_i$ ,  $K_1, \dots, K_m \in \mathcal{K}^d$ :

$$\mathbb{1}_K = \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} \mathbb{1}_{K_{i_1} \cap \dots \cap K_{i_k}} \in V.$$

Für  $h = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbb{1}_{K_i} \in V$  setzen wir  $\tilde{f}(h) := \sum_{i=1}^m \alpha_i f(K_i)$ . Wegen Lemma 5.3.2 ist diese Definition sinnvoll! Die Abbildung  $\tilde{f}$  ist linear und es gilt  $\tilde{f}(\mathbb{1}_K) = f(K)$ ,  $K \in \mathcal{K}^d$ . Wir setzen  $f(K) := \tilde{f}(\mathbb{1}_K)$ ,  $K \in \mathcal{R}^d$ . Es bleibt zu zeigen, dass  $f$  additiv ist. Für  $K, M \in \mathcal{R}^d$  gilt:

$$\begin{aligned} f(K \cup M) + f(K \cap M) &= \tilde{f}(\mathbb{1}_{K \cup M}) + \tilde{f}(\mathbb{1}_{K \cap M}) \\ &= \tilde{f}(\mathbb{1}_{K \cup M} + \mathbb{1}_{K \cap M}) \\ &= \tilde{f}(\mathbb{1}_K + \mathbb{1}_M) \\ &= \tilde{f}(\mathbb{1}_K) + \tilde{f}(\mathbb{1}_M) \\ &= f(K) + f(M). \end{aligned} \quad \square$$

**5.3.3 Bemerkung.** Satz 5.3.1 gilt auch für jedes stetige, additive Funktional  $f: \mathcal{K}^d \rightarrow \mathbb{R}$ . Dabei kann  $\mathbb{R}$  auch durch einen topologischen Vektorraum ersetzt werden.

**5.3.4 Bemerkung.**  $\mathcal{R}^d$  ist abzählbare Vereinigung abgeschlossener Teilmengen von  $\mathcal{C}^d$ . Ist  $f: \mathcal{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  messbar auf  $\mathcal{K}^d$  und additiv, so ist  $f$  messbar auf  $\mathcal{R}^d$ . Vergleiche dazu Theorem 14.4.4 in [4].

**5.3.5 Bemerkung.** Die Abbildung  $V_j: \mathcal{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  heißt ebenfalls  $j$ -tes inneres Volumen. Sie ist additiv, homogen vom Grade  $j$  und bewegungsinvariant. Für  $A = \bigcup_{i=1}^m K_i \in \mathcal{R}^d$  mit  $K_i \in \mathcal{K}^d$  gilt nämlich:

$$V_j(A) = V_j\left(\bigcup_{i=1}^m K_i\right) = \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} V_j(K_{i_1} \cap \dots \cap K_{i_k}).$$

Weiter ist  $V_d(A) = \lambda^d(A)$ . Für  $\text{cl}(\text{int } A) = A$  gilt  $V_{d-1}(A) = \frac{1}{2} \mathcal{H}^{d-1}(\partial A)$  (ohne Beweis). Die Funktion  $V_0 = \chi$  ist die *Euler-Charakteristik*. Sie nimmt nur Werte in  $\mathbb{Z}$  an. Im Fall  $d = 2$  gilt  $V_0(A) = k(A) - l(A)$ , wobei  $k(A)$  die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von  $A$  und  $l(A)$  die Anzahl der Löcher von  $A$ , d.h. der beschränkten Zusammenhangskomponenten von  $\mathbb{R}^2 \setminus A$ , ist.

**5.3.6 Beispiel.** Die Euler-Charakteristik eines gefüllten Quadrats ist 1, dreier disjunkter, ausgefüllter Quadrate 3. Stanzt man aus dem ausgefüllten Quadrat ein kleineres Quadrat aus, so ergibt sich die Euler-Charakteristik 0. Auch der Rand dieser Menge hat Euler-Charakteristik 0. Stanzt man zwei disjunkte Quadrate aus, so ergibt sich  $-1$ , betrachtet man den Rand dieser Menge, so erhält man allerdings 0.

**5.3.7 Theorem** (Charakterisierungssatz von Hadwiger). *Ist  $\Psi: \mathcal{K}' \rightarrow \mathbb{R}$  additiv, stetig und bewegungsinvariant, so gibt es  $c_0, \dots, c_d \in \mathbb{R}$ , so dass*

$$\Psi = \sum_{i=0}^d c_i V_i.$$

Der Beweis beruht auf folgendem Satz:

**5.3.8 Satz.** *Die Funktion  $\Psi: \mathcal{K}' \rightarrow \mathbb{R}$  sei additiv, stetig und bewegungsinvariant. Ferner gelte  $\Psi(K) = 0$ , falls  $\dim K \leq d-1$  oder falls  $K = C^d$  ist. Dann ist  $\Psi \equiv 0$ .*

*Beweisidee.* Induktion über  $d$ . Für  $d = 0$  ( $\mathbb{R}^0 = \{0\}$ ) ist die Behauptung trivial.

Sei nun  $d = 1$ . Dann ist  $\Psi(\{x\}) = 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}^d$  und  $\Psi(I) = 0$  für  $I = [a, a + 1]$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . Wegen

$$[a, a + 1] = [a, a + \frac{1}{k}] \cup \dots \cup [a + 1 - \frac{1}{k}, a + 1]$$

ist  $\Psi(I) = 0$ , falls  $I$  ein abgeschlossenes Intervall mit rationaler Länge ist.

Die Behauptung gelte nun für  $d - 1 \geq 0$ . Es sei  $H \subset \mathbb{R}^d$  eine Hyperebene und  $I$  eine Strecke orthogonal zu  $H$  mit der Länge 1. Setze

$$f(K) := \Psi(K + I), \quad K \in \mathcal{K}', K \subset H.$$

Bezogen auf  $H$  erfüllt  $f$  alle Voraussetzungen von Satz 5.3.8. Nach Induktionsvoraussetzung ist  $f(K) = 0$ , also  $\Psi(K + I) = 0$ . Das bleibt richtig für jede zu  $H$  orthogonale Strecke  $I$  (vergleiche dazu die Argumentation für  $d = 1$ ). Weiteres Vorgehen:

- $\Psi(Z) = 0$  für jeden „Zylinder“  $Z$  (durch zerschneiden und zusammensetzen).
- $\Psi(S) = 0$  für Simplicies  $S$ .
- $\Psi(P) = 0$  für Polytope  $P$ .
- Stetigkeit von  $\Psi$  impliziert  $\Psi = 0$ . □

*Beweis von 5.3.7.* Erneute Induktion über  $d$ . Für  $d = 0$  ist die Behauptung trivial.

Die Behauptung gelte nun für  $d - 1 \geq 0$ . Sei  $H \subset \mathbb{R}^d$  eine Hyperebene. Aus der Induktionsvoraussetzung erhalten wir die Existenz von  $c_0, \dots, c_{d-1} \in \mathbb{R}$  mit

$$\Psi(K) = \sum_{j=0}^{d-1} c_j V_j(K), \quad K \in \mathcal{K}', K \subset H.$$

Hierbei wurde benutzt, dass die  $V_i$  dimensionsunabhängig sind, was aus der Dimensionsunabhängigkeit der äußeren Winkel folgt. Weil  $\Psi$  und  $V_j$  bewegungsinvariant sind, folgt

$$\Psi(K) = \sum_{j=0}^{d-1} c_j V_j(K), \quad K \in \mathcal{K}^d, \dim K \leq d - 1.$$

Setze

$$\Psi'(K) := \Psi(K) - \sum_{j=0}^d c_j V_j(K), \quad K \in \mathcal{K}^d,$$

wobei  $c_d \in \mathbb{R}$  so gewählt wird, dass  $\Psi'(C^d) = 0$ . Mit Satz 5.3.8 angewendet auf  $\Psi'$  folgt  $\Psi' \equiv 0$  und somit die Behauptung. □

**Wir führen einige Bezeichnungen ein:**

- $G(d, q)$  bezeichnet die Menge der  $q$ -dimensionalen linearen Unterräume des  $\mathbb{R}^d$ .
- $A(d, q)$  bezeichnet die Menge der  $q$ -dimensionalen affinen Unterräume des  $\mathbb{R}^d$ .
- Mit  $SO_d$  wird die spezielle orthogonale Gruppe des  $\mathbb{R}^d$  bezeichnet.
- $G_d$  bezeichnet die Bewegungsgruppe auf dem  $\mathbb{R}^d$ .

Im Folgenden ist unser Ziel die Behandlung von Integralen der Form

$$\int_{G_d} V_j(K \cap gM) \, dg, \quad K, M \in \mathcal{K}^d \longrightarrow \text{kinematisches Integral}$$

und

$$\int_{A(d,q)} V_j(K \cap F) \, dF, \quad K \in \mathcal{K}^d \longrightarrow \text{Crofton-Integral.}$$

**5.3.9 Definition.** Es sei  $G$  eine topologische Gruppe mit neutralem Element  $e$ . Eine *Operation* von  $G$  auf einem topologischen Raum  $E$  ist eine Abbildung von  $G \times E$  nach  $E$ ,  $(g, x) \mapsto gx$ , mit:

$$(i) \quad g'(gx) = (g'g)x, \quad g, g' \in G, \quad x \in E.$$

$$(ii) \quad ex = x, \quad x \in E.$$

Ist diese Abbildung stetig, so heißt die Operation *stetig*. Gibt es für alle  $x, y \in E$  ein  $g \in G$  mit  $gx = y$ , so heißt die Operation *transitiv*.

**5.3.10 Bemerkung.** (i) Jede Gruppe wirkt auf sich selbst durch Multiplikation von links:  $(g, x) \mapsto g \cdot x$ ,  $g, x \in G$ .

(ii) Operiert  $G$  auf  $E$ , so gilt

$$g^{-1}(gx) = (g^{-1}g)(x) = ex = x \quad \text{und} \quad g(g^{-1}x) = x.$$

Also ist die Abbildung  $x \mapsto gx$  von  $E$  nach  $E$  bijektiv und ihre Inverse ist  $x \mapsto g^{-1}x$ .

**5.3.11 Beispiel.** (i)  $SO_d$  operiert auf  $S^{d-1}$  und auf  $G(d, q)$ .

(ii)  $G_d$  operiert auf  $A(d, q)$  vermöge  $gF := \{gx : x \in F\}$ .

**5.3.12 Definition.**  $G$  operiere stetig auf  $E$ . Ein Maß  $\nu$  auf  $E$  heißt *invariant*, falls gilt

$$\nu(gA) = \nu(A), \quad A \in \mathcal{B}(E), \quad g \in G.$$

Äquivalent dazu kann man auch fordern, dass für alle  $f: E \rightarrow [0, \infty)$ ,  $g \in G$  gilt

$$\int_E f(gx) \, \nu(dx) = \int_E f(x) \, \nu(dx).$$

Für  $G = E$  heißt diese Eigenschaft *Linksinvarianz* von  $\nu$ . Im Fall  $G = E$  heißt  $\nu$  *rechtsinvariant*, falls  $\nu(Ag) = \nu(A)$ ,  $A \in \mathcal{B}(E)$ ,  $g \in G$ .

Allgemeine Voraussetzung:  $G$  sei eine lokal-kompakte Gruppe mit abzählbarer Basis und mit der Hausdorff-Eigenschaft. Abkürzung: LCSCH-Gruppe. Ein Maß  $\nu$  auf einem lokal-kompakten Raum  $E$  heißt *Radon-Maß*, falls  $\nu(A) < \infty$  für  $A \subset E$  kompakt gilt.

**5.3.13 Theorem.** Auf  $G$  gibt es ein linksinvariantes Radon-Maß  $\nu \neq 0$ . Ist  $\nu'$  ein weiteres linksinvariantes Radon-Maß, so gilt  $\nu' = c\nu$  für ein  $c \geq 0$ .

*Beweis.* ohne. □

**5.3.14 Definition.** Das Maß  $\nu$  aus Theorem 5.3.13 heißt *Haarsches Maß*.

**5.3.15 Beispiel.** (i) Ist  $G$  eine abzählbare Gruppe, so ist das Zählmaß ein invariantes Maß auf  $G$ .

(ii) Das Lebesguemaß  $\lambda_d := \lambda^d$  auf  $\mathbb{R}^d$  ist invariant unter  $G_d$ .

(iii) Auf  $SO_d$  gibt es ein eindeutig bestimmtes invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß  $\nu$ .

**5.3.16 Theorem.** Auf der Bewegungsgruppe  $G_d$  gibt es ein bis auf Faktoren eindeutig bestimmtes linksinvariantes Radon-Maß  $\mu$ .

*Beweis.* Betrachte

$$\gamma: \mathbb{R}^d \times SO_d \rightarrow G_d, \quad \gamma(x, \vartheta) := t_x \circ \vartheta$$

mit  $t_x(y) := x+y$ . Diese Abbildung ist bijektiv (!). Man definiert  $g_n \rightarrow g$ , falls  $\gamma^{-1}(g_n) \rightarrow \gamma^{-1}(g)$ . Damit ist  $G_d$  eine LCSCH-Gruppe. Es kann also Theorem 5.3.13 angewendet werden. Konkret:

$$\mu(\cdot) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{SO_d} \mathbb{1}_{\{\underbrace{t_x \circ \vartheta}_{=\gamma(x, \vartheta)} \in \cdot\}} \nu(d\vartheta) \lambda_d(dx).$$

Es gilt:  $\mu(\{g \in G_d: \gamma^{-1}(g) \in [0, 1]^d \times SO_d\}) = 1$ . □

**5.3.17 Theorem.** Auf  $G(d, q)$  gibt es ein eindeutig bestimmtes  $SO_d$ -invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß  $\nu_q$ .

*Beweis.* Fixiere  $L_q \in G(d, q)$ . Betrachte die surjektive (aber nicht injektive) Abbildung

$$\beta_q: SO_d \rightarrow G(d, q), \quad \vartheta \mapsto \vartheta L_q.$$

Betrachte auf  $G(d, q)$  die größte Topologie, sodass  $\beta_q$  stetig ist, d.h. eine Menge  $A \subset G(d, q)$  ist genau dann offen, wenn  $\beta_q^{-1}(A)$  offen in  $SO_d$  ist. Die Behauptung folgt aus allgemeinen Resultaten der Maßtheorie. Konkret:

$$\nu_q(\cdot) = \int_{SO_d} \mathbb{1}_{\{\underbrace{\vartheta L_q}_{=\beta_q(\vartheta)} \in \cdot\}} \nu(d\vartheta). \quad (5.3.4)$$

□

**5.3.18 Theorem.** Auf  $A(d, q)$  gibt es ein eindeutig bestimmtes, bzgl.  $G_d$  invariantes Radon-Maß  $\mu_q$  mit

$$\mu_q(\{F \in A(d, q): F \cap B^d \neq \emptyset\}) = \kappa_{d-q}.$$

Ist  $f: A(d, q) \rightarrow [0, \infty]$  messbar, so gilt

$$\int_{A(d, q)} f d\mu_q = \int_{G(d, q)} \int_{L^\perp} f(L + y) \lambda_{d-q}(dy) \nu_q(dL). \quad (5.3.5)$$

*Beweisidee.* Fixiere  $L_q \in G(d, q)$ . Betrachte die surjektive (aber nicht injektive) Abbildung

$$\gamma_q: L_q^\perp \times SO_d \rightarrow A(d, q), \quad (x, \vartheta) \mapsto \vartheta(L_q + x).$$

Wir definieren

$$\mu_q(\cdot) := \int_{SO_d} \int_{L_q^\perp} \underbrace{\mathbb{1}\{\vartheta(L_q + x) \in \cdot\}}_{=\gamma_q(x, \vartheta)} \lambda_{d-q}(dx) \nu(d\vartheta). \quad (5.3.6)$$

Beachte:  $A(d, q)$  ist eine messbare Teilmenge von  $\mathcal{F}^d$ . Wir versehen  $A(d, q)$  deshalb mit der Spurtopologie. Jede kompakte Teilmenge von  $A(d, q)$  ist dann in einer der Mengen  $\{\gamma_q(x, \vartheta) : x \in L_q^\perp, \|x\| \leq n, \vartheta \in SO_d\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , enthalten. Das  $\mu_q$ -Maß dieser Mengen ist endlich. Damit ist  $\mu_q$  ein Radon-Maß. Es sei  $f : A(d, q) \rightarrow [0, \infty]$  messbar und es sei  $g = \gamma(x, \vartheta) = t_x \circ \vartheta \in G_d$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \int_{A(d, q)} f(gF) \mu_q(dF) &= \int_{SO_d} \int_{L_q^\perp} f(g\rho(L_q + y)) \lambda_{d-q}(dy) \nu(d\rho) \\ &= \int_{SO_d} \int_{L_q^\perp} f(\vartheta\rho(L_q + y) + x) \lambda_{d-q}(dy) \nu(d\rho) \\ &= \int_{SO_d} \int_{L_q^\perp} f(\vartheta\rho(L_q + y + \rho^{-1}\vartheta^{-1}x)) \lambda_{d-q}(dy) \nu(d\rho) \\ &= \int_{SO_d} \int_{L_q^\perp} f(\vartheta\rho(L_q + y + \pi_{L_q^\perp}(\rho^{-1}\vartheta^{-1}x))) \lambda_{d-q}(dy) \nu(d\rho) \\ &= \int_{SO_d} \int_{L_q^\perp} f(\vartheta\rho(L_q + y)) \lambda_{d-q}(dy) \nu(d\rho) \\ &= \int_{SO_d} \int_{L_q^\perp} f(\rho(L_q + y)) \lambda_{d-q}(dy) \nu(d\rho) \\ &= \int_{A(d, q)} f d\mu_q. \end{aligned}$$

Dabei wurde in den letzten Schritten zunächst die Invarianz von  $\lambda_{d-q}$  und von  $\nu$  ausgenutzt. Weiter gilt:

$$\begin{aligned} \int_{A(d, q)} f d\mu_q &= \int_{SO_d} \int_{L_q^\perp} f(\rho(L_q + y)) \lambda_{d-q}(dy) \nu(d\rho) \\ &= \int_{SO_d} \int_{L_q^\perp} f(\rho L_q + \underbrace{\rho y}_{=:z}) \lambda_{d-q}(dy) \nu(d\rho) \\ &= \int_{SO_d} \int_{(\rho L_q)^\perp} f(\rho L_q + z) \lambda_{d-q}(dz) \nu(d\rho) \\ &\stackrel{(5.3.4)}{=} \int_{G(d, q)} \int_{L^\perp} f(L + z) \lambda_{d-q}(dz) \nu_q(dL). \end{aligned}$$

Insbesondere ist die Definition von  $\mu_q$  unabhängig vom gewählten  $L_q$ . Die Normierung rechnet man nach. Zu zeigen bleibt die Eindeutigkeit.  $\square$

**Erinnerung:**  $\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ ,  $x > 0$ . Es gilt  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ ,  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$  und  $\kappa_m = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2}+1)}$ . Es sei  $c_j^k := \frac{k! \kappa_k}{j! \kappa_j}$  und  $c_{s_1, \dots, s_k}^{r_1, \dots, r_k} := \prod_{j=1}^k c_{s_j}^{r_j}$ .

**5.3.19 Theorem** (Crofton-Formel). *Es seien  $K \in \mathcal{K}'$ ,  $k \in \{1, \dots, d-1\}$  und  $j \in \{0, \dots, k\}$ . Dann gilt:*

$$\int_{A(d,k)} V_j(K \cap F) \mu_k(dF) = c_{j,d}^{k,d-k+j} V_{d-k+j}(K). \quad (5.3.7)$$

Die Fälle  $k = d$  und  $k = 0$  sind auch zugelassen. Dabei ist  $\mu_d = \delta_{\mathbb{R}^d}$  und  $\mu_0 = \lambda^d$ , wobei man dabei  $A(d, 0)$  mit  $\mathbb{R}^d$  identifiziert.

*Beweis.* Definiere

$$\psi: \mathcal{K}' \rightarrow [0, \infty), \quad \psi(K) := \int_{A(d,k)} V_j(K \cap F) \mu_k(dF), \quad K \in \mathcal{K}'.$$

Dabei ist zu beachten, dass der Integrand (für jedes  $K$ ) durch eine von  $F$  unabhängige Konstante beschränkt ist. Aus der Steiner-Formel (4.3.1) folgt nämlich

$$V_d(K + B^d) \geq V_d((K \cap F) + B^d) = \sum_{i=0}^d \kappa_{d-i} V_i(K \cap F)$$

und damit  $V_j(K \cap F) \leq c_j \mathbb{1}_{\{K \cap F \neq \emptyset\}}$ , für eine von  $F \in A(d, k)$  unabhängige Konstante  $c_j > 0$ . Man beachte ferner, dass  $\mathcal{F}_K \cap A(d, k)$  in  $A(d, k)$  kompakt (und  $\mu_k$  ein Radonmaß) ist. Somit ist  $\psi(K) < \infty$  für jedes  $K \in \mathcal{K}'$  (d.h.,  $\psi$  ist in der Tat ein Funktional von  $\mathcal{K}'$  nach  $[0, \infty)$ ). Aus den entsprechenden Eigenschaften der inneren Volumina folgt leicht, dass  $\psi$  additiv ist. Ferner gilt für  $g \in G_d$ :

$$\psi(gK) = \int_{A(d,k)} V_j(K \cap g^{-1}F) \mu_k(dF) \stackrel{\mu_k \text{ invariant}}{=} \psi(K),$$

d.h.  $\psi$  ist bewegungsinvariant. Das Funktional  $\psi$  ist auch stetig. Seien dazu  $K_n \in \mathcal{K}'$  mit  $K_n \rightarrow K$  für  $n \rightarrow \infty$ . Im Allgemeinen folgt daraus nicht  $K_n \cap F \rightarrow K \cap F$  für  $F \in A(d, k)$ . Allerdings gilt diese Konvergenz für  $\mu_k$ -fast alle  $F$ . Dazu verweisen wir auf den Beweis von Theorem 5.1.2 in [4]. Aus majorisierter Konvergenz folgt nun  $\psi(K_n) \rightarrow \psi(K)$ , d.h. die Stetigkeit von  $\psi$ .

Nach Theorem 5.3.7 (Hadwiger) gilt deshalb

$$\psi(K) = \sum_{r=0}^d c_r V_r(K),$$

für geeignete  $c_0, \dots, c_r \in \mathbb{R}$ . Nun gilt für  $\alpha > 0$  mit (5.3.5):

$$\begin{aligned} \psi(\alpha K) &= \int_{G(d,k)} \int_{L^\perp} V_j(\alpha K \cap (L + x)) \lambda_{d-k}(dx) \nu_k(dL) \\ &= \alpha^j \int_{G(d,k)} \int_{L^\perp} V_j(K \cap (L + \alpha^{-1}x)) \lambda_{d-k}(dx) \nu_k(dL) \\ &\stackrel{\alpha^{-1}x=y}{=} \alpha^j \alpha^{d-k} \int_{G(d,k)} \int_{L^\perp} V_j(K \cap (L + y)) \lambda_{d-k}(dy) \nu_k(dL) = \alpha^{d+j-k} \psi(K). \end{aligned}$$

Da unter den  $V_j$  nur  $V_{d+j-k}$  den passenden Homogenitätsgrad besitzt, folgt  $c_r V_r(K) = 0$  für  $r \neq d + j - k$ . Es verbleibt die Bestimmung der Konstanten  $c$  in

$$\int_{A(d,k)} V_j(K \cap F) \mu_k(dF) = c V_{d-k+j}(K), \quad K \in \mathcal{K}'.$$



Diese lässt sich durch Einsetzen einer speziellen Menge für  $K$ , etwa  $K = B^d$  ermitteln.

Für  $K = B^d$  folgt aus (5.3.6) (mit fixiertem  $L_k \in G(d, k)$ ):

$$\begin{aligned} cV_{d+j-k}(B^d) &= \int_{SO_d} \int_{L_k^\perp} V_j(B^d \cap (\theta(L_k + x)) \lambda_{d-k}(dx) \nu(d\theta) \\ &\stackrel{B^d = \theta B^d, V_j \text{ invariant}}{=} \int_{L_k^\perp} V_j(\underbrace{B^d \cap (L_k + x)}_{\text{Kugel in } L_k + x \text{ mit MP } x \text{ und Radius } \sqrt{1 - \|x\|^2}}) \lambda_{d-k}(dx) \\ &= \int_{L_k^\perp \cap B^d} (\sqrt{1 - \|x\|^2})^j V_j(B^d \cap L_k) \lambda_{d-k}(dx). \end{aligned}$$

Nun gilt (Übungsaufgabe)

$$V_i(B^d) = \binom{d}{i} \frac{\kappa_d}{\kappa_{d-i}},$$

d.h.

$$V_j(B^d \cap L_k) = \binom{k}{j} \frac{\kappa_k}{\kappa_{k-j}}.$$

Es folgt

$$c = \frac{\binom{k}{j} \kappa_{k-j} \kappa_k}{\binom{d}{d-k+j} \kappa_{k-j} \kappa_d} \int_{L_k^\perp} (1 - \|x\|^2)^{\frac{j}{2}} \lambda_{d-k}(dx). \quad (5.3.8)$$

Mittels Polarkoordinaten (" $dx = r^{d-k-1} \mathcal{H}^{d-k-1}(du)$ ") folgt

$$\begin{aligned} \int_{L_k^\perp} (1 - \|x\|^2)^{\frac{j}{2}} \lambda_{d-k}(dx) &= \mathcal{H}^{d-k-1}(S^{d-1}) \int_0^1 r^{d-k-1} (1 - r^2)^{\frac{j}{2}} dr \\ &\stackrel{r=\sqrt{t}}{=} (d-k) \kappa_{d-k} \int_0^1 t^{\frac{d-k-1}{2}} (1-t)^{\frac{j}{2}} \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{(d-k) \kappa_{d-k}}{2} \int_0^1 t^{\frac{d-k}{2}-1} (1-t)^{\frac{j+2}{2}-1} dt \\ &= \frac{(d-k) \kappa_{d-k}}{2} B\left(\frac{d-k}{2}, \frac{j+2}{2}\right) \\ &= \frac{(d-k) \kappa_{d-k}}{2} \frac{\Gamma(\frac{d-k}{2}) \Gamma(\frac{j}{2} + 1)}{\Gamma(\frac{d-k+j}{2} + 1)} \\ &= \kappa_{d-k} \frac{\Gamma(\frac{d-k}{2} + 1) \Gamma(\frac{j}{2} + 1)}{\Gamma(\frac{d-k+j}{2} + 1)}. \end{aligned}$$

Verwendet man  $\kappa_m = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2} + 1)}$  und setzt in (5.3.8) ein, so folgt

$$c = c_j^k c_d^{d-k+j} = \frac{k! \kappa_k (d-k+j)! \kappa_{d-k+j}}{j! \kappa_j d! \kappa_d} = c_{j,d}^{k,d-k+j}. \quad \square$$

**5.3.20 Bemerkung.** Setzt man  $j = 0$  und  $m = d - k$  in Theorem 5.3.19, so folgt

$$V_m(K) = c_{m,d-m}^{0,d} \int_{A(d,d-m)} V_0(K \cap F) \mu_{d-m}(dF)$$

und damit eine geometrische Interpretation der inneren Volumina. Im Fall  $d = 2$  ergibt sich beispielsweise

$$V_1(K) = c_{1,1}^{0,2} \int_{A(2,1)} \mathbb{1}\{K \cap F \neq \emptyset\} \mu_1(dF).$$

**5.3.21 Bemerkung.** Wegen (5.3.5) ist

$$\begin{aligned} V_m(K) &= c_{m,d-m}^{0,d} \int_{G(d,d-m)} \int_{L^\perp} V_0(K \cap (L + y)) \lambda_m(dy) \nu_{d-m}(dL) \\ &\stackrel{!}{=} c_{m,d-m}^{0,d} \int_{G(d,d-m)} \int_{L^\perp} \mathbb{1}\{y \in K|L^\perp\} \lambda_m(dy) \nu_{d-m}(dL) \\ &= c_{m,d-m}^{0,d} \int_{G(d,d-m)} \lambda_m(K|L^\perp) \nu_{d-m}(dL) \\ &\stackrel{!}{=} c_{m,d-m}^{0,d} \int_{G(d,m)} \lambda_m(K|L) \nu_m(dL). \end{aligned}$$

Dabei bezeichne  $K|L^\perp$  das Bild von  $K$  unter der orthogonalen Projektion auf  $L^\perp$ . (Für die Gültigkeit der letzten Gleichheit siehe Übung 12.3.) Im Fall  $m = 1$  ergibt sich  $V_1(K)$  als Vielfaches der mittleren Breite.

**5.3.22 Folgerung.** Die inneren Volumina sind monoton.

**5.3.23 Bemerkung.** Beide Seiten der Crofton-Formel sind additiv. Deswegen gilt sie auch auf  $\mathcal{R}^d$ .

Eine Anwendung der Crofton-Formeln sind sogenannte  $K_0$ -isotrope zufällige  $q$ -Ebenen, wobei  $K_0 \in \mathcal{K}'$  und  $q \in \{0, \dots, d-1\}$  sind (siehe Vorlesung und Übungsblatt 11). Mit diesen zufälligen  $q$ -Ebenen lassen sich Probleme aus dem Gebiet der *Geometrischen Wahrscheinlichkeiten* behandeln, u.a. das Buffonsche Nadelproblem oder die Frage, mit welcher Wahrscheinlichkeit, eine zufällige Gerade, die den Einheitskreis schneidet, auch einen (fest gewählten) Halbkreis schneidet (siehe Vorlesung und Übungsblatt 11).

**5.3.24 Theorem.** Ist  $f: \mathcal{K}' \rightarrow \mathbb{R}$  additiv und stetig, so gilt

$$\int_{G_d} f(K \cap gM) \mu(dg) = \sum_{k=0}^d f_{d-k}(K) V_k(M), \quad K, M \in \mathcal{K}' \quad (5.3.9)$$

mit

$$f_{d-k}(K) := \int_{A(d,k)} f(K \cap F) \mu_k(dF), \quad K \in \mathcal{K}', k = 0, \dots, d.$$

*Beweis.* Mit ähnlichen Überlegungen wie im Beweis von Theorem 5.3.19 folgt, dass die Abbildung  $g \mapsto f(K \cap gM)$  für alle  $K, M \in \mathcal{K}'$  messbar ist, siehe auch Beweis von Theorem 5.1.2 in [4]. Setze für fixiertes  $K \in \mathcal{K}'$ :

$$\psi(M) = \int_{G_d} f(K \cap gM) \mu(dg), \quad M \in \mathcal{K}'.$$

Dann ist  $\psi$  additiv und wegen der Bewegungsinvarianz von  $\mu$  auch bewegungsinvariant. Damit ist nach Theorem 5.3.7 (Hadwiger)

$$\psi(M) = \sum_{i=0}^d f_{d-i}(K) V_i(M)$$

für gewisse Konstanten  $f_{d-i}(K)$  (die von  $K$  abhängen).

Seien  $k \in \{0, \dots, d\}$  und  $L_k \in G(d, k)$ . Sei weiter  $C \subset L_k$  ein  $k$ -dimensionaler Einheitswürfel mit Zentrum 0. Für  $r > 0$  folgt (wegen  $V_i(C) = 0$  für  $i > k$ )

$$\psi(rC) = \sum_{i=0}^k f_{d-i}(K) r^i V_i(C).$$

Andererseits folgt nach einer Rechnung (siehe Beweis von Theorem 5.1.2 in [4])

$$\frac{1}{r^k} \psi(rC) = \frac{1}{r^k} \int_{G_d} f(K \cap grC) \mu(dg) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \int_{A(d,k)} f(K \cap F) \mu_k(dF).$$

□

**5.3.25 Theorem** (Kinematische Hauptformel). *Für  $K, M \in \mathcal{K}'$  und  $j \in \{0, \dots, d\}$  gilt:*

$$\int_{G_d} V_j(K \cap gM) \mu(dg) = \sum_{k=j}^d c_{j,d}^{k,d-k+j} V_k(K) V_{d-k+j}(M).$$

*Beweis.* Wir wenden Theorem 5.3.24 mit  $f = V_j$  an. In diesem Fall liefert die Crofton-Formel (5.3.7) für  $j \leq k$ :

$$(V_j)_{d-k}(K) = \int_{A(d,k)} V_j(K \cap F) \mu_k(dF) = c_{j,d}^{k,d-k+j} V_{d-k+j}(K).$$

Dieses Integral ist Null für  $j > k$ .

□

**5.3.26 Theorem** (Iterierte Kinematische Hauptformel). *Es seien  $K_0, \dots, K_k \in \mathcal{K}'$  und  $j \in \{0, \dots, d\}$ . Dann gilt:*

$$\int_{(G_d)^k} V_j(K_0 \cap g_1 K_1 \cap \dots \cap g_k K_k) \mu^k(d(g_1, \dots, g_k)) = \sum_{\substack{m_0, \dots, m_k = j \\ m_0 + \dots + m_k = kd + j}}^d c_j^d \prod_{i=0}^k c_d^{m_i} V_{m_i}(K_i).$$

*Beweis.* Wir verwenden Induktion. Für  $k = 1$  gilt  $m_0 + m_1 = d + j$  und  $c_j^d c_d^{m_0} c_d^{m_1} = c_{j,d}^{m_0, d-m_0+j}$  und obige Formel ist genau die kinematische Hauptformel.

Für  $k + 1$  ist die linke Seite der Behauptung gleich

$$\begin{aligned} & \int_{G_d} \dots \int_{G_d} V_j(K_0 \cap g_1 (K_1 \cap g_1^{-1} g_2 K_2 \cap \dots \cap g_1^{-1} g_{k+1} K_{k+1})) \mu(dg_1) \dots \mu(dg_{k+1}) \\ &= \int_{G_d} \dots \int_{G_d} V_j(K_0 \cap g_1 (K_1 \cap g_2 K_2 \cap \dots \cap g_{k+1} K_{k+1})) \mu(dg_1) \mu(dg_2) \dots \mu(dg_{k+1}) \\ &= \int_{(G_d)^k} \sum_{m_0=j}^d c_{j,d}^{m_0, d-m_0+j} V_{m_0}(K_0) V_{d-m_0+j}(K_1 \cap g_2 K_2 \cap \dots \cap g_{k+1} K_{k+1}) \mu^k(dg) \\ &= \sum_{m_0=j}^d c_{j,d}^{m_0, d-m_0+j} c_{d-m_0+j}^d V_{m_0}(K_0) \sum_{\substack{m_1, \dots, m_{k+1} = d-m_0+j \\ m_1 + \dots + m_{k+1} = kd + d - m_0 + j}}^d \prod_{i=1}^{k+1} c_d^{m_i} V_{m_i}(K_i) \end{aligned}$$

$$= \sum_{\substack{m_0, \dots, m_{k+1}=j \\ m_0 + \dots + m_{k+1} = (k+1)d+j}}^d c_j^d \prod_{i=0}^{k+1} c_d^{m_i} V_{m_i}(K_i).$$

Dabei verwenden wir im ersten Schritt die Invarianz des Maßes  $\mu$  (sowie zweimal Fubini), danach die kinematische Hauptformel (Theorem 5.3.26) mit  $K = K_0$  und  $M = K_1 \cap g_2 K_2 \cap \dots \cap g_{k+1} K_{k+1}$  und der Abkürzung  $g = (g_2, \dots, g_{k+1})$  und im Anschluss die Induktionsvoraussetzung. Im letzten Schritt beachte man, dass aus  $m_0 + \dots + m_{k+1} = (k+1)d+j$  die Ungleichungen  $m_l \geq j, l = 1, \dots, k+1$ , folgen (Man kann sich elementar überlegen, dass die beiden Laufbereiche der Indizes übereinstimmen).  $\square$

**5.3.27 Bemerkung.** Für  $K, M \in \mathcal{K}'$  gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^d} V_{d-1}(K \cap (M+x)) dx = V_{d-1}(K)V_d(M) + V_d(K)V_{d-1}(M),$$

d.h. die Kinematische Hauptformel bleibt (für  $j = d-1$ ) auch „ohne Integration“ bzgl. der Drehungen richtig.

*Beweis.* Wir nehmen  $\dim K = \dim M = d$  an (die restlichen Fälle gehen analog). Dann ist die linke Seite gleich

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{y \in \partial(K \cap (M+x))\} \mathcal{H}^{d-1}(dy) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{y \in \partial K, y \in M+x\} \mathcal{H}^{d-1}(dy) dx \\ & \quad + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{y \in K, y \in \partial M+x\} \mathcal{H}^{d-1}(dy) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{y \in \partial K, -x \in M-y\} dx \mathcal{H}^{d-1}(dy) \\ & \quad + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{y+x \in K, y \in \partial M\} dx \mathcal{H}^{d-1}(dy) \\ &= \frac{1}{2} V_d(M)V_{d-1}(K) + \frac{1}{2} V_d(K)V_{d-1}(M). \end{aligned}$$

Wir verwenden dabei die Darstellung von  $V_{d-1}$  durch  $\mathcal{H}^{d-1}$  (vgl. Bemerkung 4.3.6), spalten dann im ersten Schritt  $\partial(K \cap (M+x))$  geeignet auf und substituieren dann  $y-x$  durch  $y$ . Letzteres braucht man, um den Satz von Fubini auf das zweite Integral anwenden zu dürfen ( $\mathcal{H}^{d-1}$  ist nicht  $\sigma$ -endlich auf  $\mathbb{R}^d$ , aber eingeschränkt auf  $\partial M$  ist es ( $\sigma$ -endlich)).  $\square$

Analog zu den zufälligen  $q$ -Ebenen, betrachtet man im Gebiet der *Geometrischen Wahrscheinlichkeiten* zufällig bewegte Körper: Für  $A_0 \in \mathcal{B}(G_d)$  ist eine  $A_0$ -isotrope zufällige Bewegung eine  $G_d$ -wertige Zufallsvariable  $\tilde{g}$  mit der Verteilung  $\frac{\mu(A_0 \cap \cdot)}{\mu(A_0)}$ . Zum Beispiel kann für konvexe Körper  $K_0, M \in \mathcal{K}^d$  die Menge  $A_0 := \{g \in G_d : K_0 \cap gM \neq \emptyset\}$  betrachtet und die Wahrscheinlichkeit studiert werden, dass der zufällig bewegte Körper  $M$  einen zweiten unbewegten konvexen Körper  $K \subset K_0$  schneidet. Hierbei hilft dann die kinematische Hauptformel (siehe Vorlesung und Übungsblatt 11).

## 5.4 Geometrische Dichten des Booleschen Modells

Wir betrachten ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{Q}$  auf  $\mathcal{K}'$  und eine unabhängige  $\mathbb{Q}$ -Markierung  $\Psi = \{(\xi_n, Z_n) : n \in \mathbb{N}\}$  eines stationären Poissonprozesses  $\Phi = \{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$  mit Intensität  $\gamma > 0$ . Wegen Theorem 3.3.16 ist  $\Psi$  ein Poissonprozess auf  $\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}'$  mit Intensitätsmaß  $\gamma \lambda^d \otimes \mathbb{Q}$ . Weiter sei  $Z_0 \sim \mathbb{Q}$  das typische Korn mit

$$\mathbb{E}[\lambda_d(Z_0 + C)] < \infty, \quad C \in \mathcal{C}^d.$$

Das Boolesche Modell ist gegeben durch

$$Z = \bigcup_{n=1}^{\infty} (Z_n + \xi_n).$$

Wir betrachten für  $i \in \{0, \dots, d\}$  die sogenannten Dichten der inneren Volumina von  $\Psi$

$$\gamma_i := \gamma_{V_i} = \gamma \int_{\mathcal{K}'} V_i(K) \mathbb{Q}(dK) = \gamma \mathbb{E}[V_i(Z_0)].$$

Beachte  $\gamma_0 = \gamma$ . Weiter betrachten wir

$$\delta_i := \delta_{V_i} = \lim_{r \rightarrow \infty} V_d(rW)^{-1} \mathbb{E}[V_i(Z \cap rW)]$$

mit  $W \in \mathcal{K}'$ ,  $V_d(W) > 0$ . Weil  $V_i$  messbar, verschiebungsinvariant, additiv und bedingt beschränkt ist und weil Voraussetzung (5.2.3) nach Übung 12.1 erfüllt ist, existiert der Grenzwert nach Theorem 5.2.6. Die Zahl  $\delta_i$  ist die  $V_i$ -Dichte des Booleschen Modells  $Z$ . Aus Satz 2.3.6 und Satz 2.2.11 folgt

$$\delta_d = p = 1 - \exp(-\gamma \mathbb{E}[V_d(Z_0)]) = 1 - e^{-\gamma^d}.$$

**5.4.1 Theorem.** Ist  $\mathbb{Q}$  isotrop, so gilt für  $j \in \{0, \dots, d-1\}$ :

$$\delta_j = (1 - p) \left[ \gamma_j - \sum_{s=2}^{d-j} \frac{(-1)^s}{s!} \sum_{\substack{m_1, \dots, m_s = j+1 \\ m_1 + \dots + m_s = (s-1)d+j}}^{d-1} c_j^d \prod_{i=1}^s c_d^{m_i} \gamma_{m_i} \right].$$

$\delta_j$  lässt sich somit als Polynom in  $\gamma_j, \dots, \gamma_{d-1}$  schreiben.

**5.4.2 Satz.** Es sei  $\Psi$  ein Poissonprozess auf  $\mathbb{X}$  mit diffusem Intensitätsmaß  $\Lambda$ . Ferner sei  $f: \mathbb{X}^n \rightarrow \mathbb{R}$  messbar und es gelte  $f \geq 0$  oder  $\int_{\mathbb{X}^n} |f| d\Lambda^n < \infty$ . Dann gilt:

$$\mathbb{E} \left[ \sum_{x_1, \dots, x_n \in \Psi}^{\neq} f(x_1, \dots, x_n) \right] = \int_{\mathbb{X}^n} f d\Lambda^n.$$

Dabei bedeutet  $\sum^{\neq}$ , dass nur über  $n$ -Tupel mit paarweise verschiedenen Einträgen summiert wird.

**Beweisskizze.** Aus dem Beweis von Theorem 3.3.6 folgt, dass  $\Psi$  einfach ist. Deswegen genügt es, Funktionen  $f$  mit  $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ , falls  $x_i = x_j$  für  $i \neq j$ , zu betrachten. Eine „typische“ Funktion mit dieser Eigenschaft ist  $f(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{1}_{B_1}(x_1) \dots \mathbb{1}_{B_n}(x_n)$  mit  $B_i \cap B_j = \emptyset$  für  $i \neq j$ . In diesem Fall ist die linke Seite der Behauptung gleich

$$\mathbb{E}[\Psi(B_1) \dots \Psi(B_n)] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[\Psi(B_i)] = \prod_{i=1}^n \Lambda(B_i) = \Lambda^n(B_1 \times \dots \times B_n) = \int_{\mathbb{X}^n} f d\Lambda^n.$$

□

**5.4.3 Bemerkung.** Satz 5.4.2 gilt auch für einen Poissonprozess mit nicht diffusem Intensitätsmaß  $\Lambda$ .

*Beweis von Theorem 5.4.1.* Es seien  $W \in \mathcal{K}'$  und wie im Abschnitt 5.2 sei  $N_W := \text{card}\{n \geq 1 : (Z_n + \xi_n) \cap W \neq \emptyset\}$ . Es seien  $M_1, \dots, M_{N_W}$  die Sekundärkörner, welche  $W$  schneiden. Dann folgt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[V_j(Z \cap W)] &= \mathbb{E} \left[ V_j \left( \bigcup_{k=1}^{N_W} M_k \cap W \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \sum_{k=1}^{N_W} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq N_W} V_j(M_{i_1} \cap \dots \cap M_{i_k} \cap W) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \sum_{(x_1, K_1), \dots, (x_k, K_k) \in \Psi}^{\neq} V_j((K_1 + x_1) \cap \dots \cap (K_k + x_k) \cap W) \right]. \end{aligned}$$

Im Beweis von Theorem 5.2.6 haben wir  $\mathbb{E}[\sum \frac{1}{k!} \sum^{\neq} \dots] < \infty$  gesehen ( $\mathbb{E}[2^{N_W}] < \infty$ ). Nach Vertauschung von Erwartungswert und Summation und Anwendung von Satz 5.4.2 liefert das (mit  $dx = d(x_1, \dots, x_k)$  und  $dK = d(K_1, \dots, K_k)$ ):

$$\mathbb{E}[V_j(Z \cap W)] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \gamma^k}{k!} \int_{(\mathcal{K}')^k} \int_{(\mathbb{R}^d)^k} V_j \left( \bigcap_{i=1}^k (K_i + x_i) \cap W \right) \lambda_d^k(dx) \mathbb{Q}^k(dK).$$

Weil  $\mathbb{Q}$  isotrop ist, kann jetzt  $K_i$  durch  $\rho_i K_i$  ( $\rho_i \in SO_d$ ) ersetzt werden. (Für  $j = d-1$  kann man hier Bemerkung 5.3.27 benutzen, um einfacher zu argumentieren.) Es folgt (mit  $d\rho = d(\rho_1, \dots, \rho_k)$  und  $dg = d(g_1, \dots, g_k)$ ):

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[V_j(Z \cap W)] &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \gamma^k}{k!} \int_{(\mathcal{K}')^k} \int_{(\mathbb{R}^d)^k} \int_{(SO_d)^k} V_j \left( \bigcap_{i=1}^k (\rho_i K_i + x_i) \cap W \right) \nu^k(d\rho) \lambda_d^k(dx) \mathbb{Q}^k(dK) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \gamma^k}{k!} \int_{(\mathcal{K}')^k} \int_{(G_d)^k} V_j \left( \bigcap_{i=1}^k g_i K_i \cap W \right) \mu^k(dg) \mathbb{Q}^k(dK) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \gamma^k}{k!} \sum_{\substack{m_0, \dots, m_k = j \\ m_0 + \dots + m_k = kd+j}}^d \int_{(\mathcal{K}')^k} c_j^{m_0} V_{m_0}(W) \prod_{i=1}^k c_d^{m_i} V_{m_i}(K_i) \mathbb{Q}^k(dK) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \sum_{\substack{m_0, \dots, m_k = j \\ m_0 + \dots + m_k = kd+j}}^d c_j^{m_0} V_{m_0}(W) \prod_{i=1}^k c_d^{m_i} \gamma_{m_i} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} V_j(W) \gamma_d^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \sum_{m=j+1}^d c_j^m V_m(W) \sum_{\substack{m_1, \dots, m_k = j \\ m_1 + \dots + m_k = kd+j-m}}^d \prod_{i=1}^k c_d^{m_i} \gamma_{m_i}. \end{aligned}$$

Hierbei wird im vierten Schritt die Definition von  $\gamma_{m_i} = \gamma \int_{\mathcal{K}'} V_{m_i}(K_i) \mathbb{Q}(dK_i)$  verwendet und im fünften Schritt die Summation über  $m_0$  getrennt betrachtet. Das heißt

$$\mathbb{E}[V_j(Z \cap W)] =$$

$$-(e^{-\gamma_d} - 1)V_j(W) + \sum_{m=j+1}^d c_j^m V_m(W) \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \sum_{\substack{m_1, \dots, m_k=j \\ m_1 + \dots + m_k = kd+j-m}}^d \prod_{i=1}^k c_d^{m_i} \gamma_{m_i}}_{=: a_m}.$$

Zur Behandlung von  $a_m$  sei  $s$  die Anzahl der  $m_i$  mit  $m_i \leq d-1$ . Wegen  $m > j$  ist  $s \geq 1$  und  $s \leq m-j$ . Es folgt

$$a_m = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \sum_{s=1}^{\min\{m-j, k\}} \binom{k}{s} \gamma_d^{k-s} \sum_{\substack{m_1, \dots, m_s=j \\ m_1 + \dots + m_s = sd+j-m}}^{d-1} \prod_{i=1}^s c_d^{m_i} \gamma_{m_i},$$

d.h.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[V_j(Z \cap W)] &= -(e^{-\gamma_d} - 1)V_j(W) \\ &\quad + e^{-\gamma_d} \sum_{m=j+1}^d c_j^m V_m(W) \sum_{s=1}^{m-j} \frac{(-1)^{s-1}}{s!} \sum_{\substack{m_1, \dots, m_s=j \\ m_1 + \dots + m_s = sd+j-m}}^{d-1} \prod_{i=1}^s c_d^{m_i} \gamma_{m_i}. \end{aligned} \quad (5.4.2)$$

Ersetzt man in (5.4.2)  $W$  durch  $rW$  und dividiert durch  $V_d(rW)$ , so verschwinden die Summanden für  $m \leq d-1$ , wenn man  $r \rightarrow \infty$  laufen lässt. Für  $s=1$  ist  $m_1 = j$  und  $c_j^d c_d^j = 1$ . Weil für  $s \geq 2$  die Ungleichung  $m_i \geq j+1$ ,  $i=1, \dots, s$  gelten muss, folgt die Behauptung.  $\square$

**5.4.4 Bemerkung.** Für  $j = d-1$  gilt

$$\delta_{d-1} = (1-p)\gamma_{d-1} = \gamma(1-p)\mathbb{E}[V_{d-1}(Z_0)].$$

**5.4.5 Bemerkung.** Für  $d=2$  gilt für die Dichte der Euler-Charakteristik

$$\delta_0 = (1-p)\left(\gamma - \frac{1}{2}c_0^2(c_2^1\gamma_1)^2\right),$$

$$\begin{aligned} \text{d.h.} \quad \delta_0 &= (1-p)\left(\gamma - \frac{\gamma_1^2}{\pi}\right) \\ &= (1-p)\left(\gamma - \frac{\gamma^2 \mathbb{E}[V_1(Z_0)]^2}{\pi}\right) \\ &= (1-p)\left(\gamma - \frac{\gamma^2 \mathbb{E}[U(Z_0)]^2}{4\pi}\right) \\ &= (1-p)\left(-\frac{\log(1-p)}{\mathbb{E}[V_2(Z_0)]} + \frac{(\log(1-p))^2 \mathbb{E}[V_1(Z_0)]^2}{\pi \mathbb{E}[V_2(Z_0)]^2}\right), \end{aligned}$$

wobei  $U$  den Umfang bezeichnet.

**5.4.6 Bemerkung.** Die aktuelle Forschung beschäftigt sich mit Größen zweiter Ordnung, z.B.

$$\sigma_{i,j} := \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{V_d(rW)} \text{Cov}(V_i(Z \cap rW), V_j(Z \cap rW)).$$

Zum Beispiel gilt

$$\sigma_{d,d} = (1-p)^2 \int_{\mathbb{R}^d} (e^{\gamma C_0(x)} - 1) dx = \int_{\mathbb{R}^d} (C(x) - p^2) dx,$$

mit  $C_0(x) = \mathbb{E}[\lambda_d(Z_0 \cap (Z_0 - x))]$ , vgl. dazu Satz 4.1.5.

**5.4.7 Theorem.** *Das typische Korn  $Z_0$  sei isotrop. Dann gilt:*

$$T_Z(K) = 1 - \exp \left( -\frac{1}{\kappa_d} \sum_{i=0}^d \frac{\kappa_i \kappa_{d-i}}{\binom{d}{i}} V_{d-i}(K) \gamma_i \right), \quad K \in \mathcal{K}'.$$

*Beweis.* Für  $K \in \mathcal{K}'$  folgt aus Theorem 4.1.1:

$$\begin{aligned} 1 - T_Z(K) &= \mathbb{P}(Z \cap K = \emptyset) \\ &= \exp \left( -\gamma \mathbb{E} \left[ \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{(Z_0 + x) \cap K \neq \emptyset\} dx \right] \right) \\ &= \exp \left( -\gamma \mathbb{E} \left[ \int_{\mathbb{R}^d} \int_{SO_d} \mathbb{1}\{(\rho Z_0 + x) \cap K \neq \emptyset\} \nu(d\rho) dx \right] \right) \\ &= \exp \left( -\gamma \mathbb{E} \left[ \int_{G_d} \mathbb{1}\{g Z_0 \cap K \neq \emptyset\} \mu(dg) \right] \right) \\ &= \exp \left( -\gamma \mathbb{E} \left[ \sum_{i=0}^d c_{0,d}^{i,d-i} V_i(K) V_{d-i}(Z_0) \right] \right) \\ &= \exp \left( -\sum_{i=0}^d \frac{i! \kappa_i (d-i)! \kappa_{d-i}}{d! \kappa_d} V_i(K) \gamma_{d-i} \right) \\ &= \exp \left( -\frac{1}{\kappa_d} \sum_{i=0}^d \frac{\kappa_i \kappa_{d-i}}{\binom{d}{i}} V_{d-i}(K) \gamma_i \right). \end{aligned}$$

Dabei wurde in der dritten Umformung die Isotropie von  $Z_0$  und in der fünften Gleichheit die kinematische Hauptformel (Theorem 5.3.25 mit  $j = 0$ ) verwendet.

Insbesondere folgt Satz 4.4.8. □

**5.4.8 Theorem.** *Für jedes  $j \in \{0, \dots, d\}$  gilt*

$$\delta_j = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{V_j(Z \cap rW)}{V_d(rW)} \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

*Beweisidee.* Das Ergebnis ist eine Konsequenz räumlicher Ergodentheorie. Wir verwenden Satz 4.1.19 aus [3]: Ist  $\xi = \xi(\Psi)$  ein zufälliges Maß auf  $\mathbb{R}^d$  mit  $\xi(\Psi + x, B + x) = \xi(\Psi, B)$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$ , so gilt:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\xi(rW)}{V_d(rW)} = \mathbb{E} [\xi([0, 1]^d)] \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Wie können wir  $\xi$  wählen? Im Fall  $j = d$  können wir  $\xi(B) = \lambda_d(Z \cap B)$  wählen (beachte  $\delta_d = p$ ). Für  $j \leq d - 1$  setzen wir  $\xi(B) := C_j(Z, B)$ ,  $B \in \mathcal{B}^d$ , wobei  $C_j(K, \cdot)$  das  $j$ -te Krümmungsmaß von  $K \in \mathcal{S}^d$  ist. Es gilt  $C_j(K, \mathbb{R}^d) = V_j(K)$ ,  $K \in \mathcal{R}^d$ . Außerdem gilt  $C_j(K, B) = C_j(L, B)$ ,  $B \subset A$ ,  $A$  offen, sodass  $K \cap A = L \cap A$ . Ferner gilt  $C_j(K + x, B + x) = C_j(K, B)$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$ . Wendet man den räumlichen Ergodensatz auf den Negativ- bzw. Positivanteil von  $\xi$  an, so ergibt sich das Resultat. □

## 5.5 Ebenenprozesse (nicht behandelt)



## 6 Zufällige Mosaike

### 6.1 Definitionen

**6.1.1 Definition.** Ein Mosaik  $\mathfrak{m}$  in  $\mathbb{R}^d$  ist ein abzählbares System (nicht leerer) kompakter Mengen mit den folgenden Eigenschaften:

- (i)  $\mathfrak{m}$  ist lokal-endlich, d.h.  $\text{card}\{C \in \mathfrak{m} : C \cap K \neq \emptyset\} < \infty, K \in \mathcal{C}^d$ .
- (ii) Jedes  $C \in \mathfrak{m}$  ist konvex und hat innere Punkte.
- (iii)  $\bigcup_{C \in \mathfrak{m}} C = \mathbb{R}^d$ .
- (iv) Für  $C, C' \in \mathfrak{m}$  mit  $C \neq C'$  gilt  $\text{int } C \cap \text{int } C' = \emptyset$ .

Die Elemente von  $\mathfrak{m}$  heißen *Zellen* von  $\mathfrak{m}$ .

Natürlich kann es insbesondere für Anwendungen sinnvoll sein, Mosaike weniger restriktiv zu erklären. Die hier angegebene Definition erzwingt unter anderem, dass die Zellen Polytope sind.

**6.1.2 Definition.** Es sei  $P \subset \mathbb{R}^d$  ein *Polytop*, d.h. eine kompakte Menge, die endlicher Durchschnitt von Halbräumen ist. Eine *Seite*  $F$  von  $P$  ist der Durchschnitt von  $P$  mit einer Stützhyperebene von  $P$ . Dabei sei  $\dim F := \dim \text{aff } F$ . Für  $j \in \{0, \dots, d-1\}$  sei  $\mathcal{F}_j(P)$  die Menge aller  $j$ -dimensionalen Seiten von  $P$ . Ferner sei  $\mathcal{F}_d(P) := \{P\}$ .

In der Konvexgeometrie wird ein Polytop als die konvexe Hülle von endlich vielen Punkten erklärt. Dort wird gezeigt, dass diese Definition mit der hier gegebenen äquivalent ist. Auch der Begriff der Seite wird in der Literatur unterschiedlich erklärt. Ist  $A \subset \mathbb{R}^d$  convex und  $F \subset A$ , so heißt  $F$  Seite von  $A$ , falls für jede Strecke  $[x, y] \subset A$  mit  $(x, y) \cap F \neq \emptyset$  gilt  $[x, y] \subset F$ . Eine Seite ist dann stets abgeschlossen. Im Fall eines Polytopes stimmt dieser Seitenbegriff mit dem obigen überein.

**6.1.3 Lemma.** *Die Zellen eines Mosaiks sind Polytope.*

*Beweis.* (siehe Übung 12.5) □

**6.1.4 Definition.** Ein Mosaik  $\mathfrak{m}$  heißt *seitentreu*, falls  $P \cap P'$  für alle  $P, P' \in \mathfrak{m}$  mit  $P \cap P' \neq \emptyset$  sowohl eine Seite von  $P$  als auch eine Seite von  $P'$  ist. Ferner sei

$$\mathbb{M} := \{\mathfrak{m} : \mathfrak{m} \text{ ist ein Mosaik}\}$$

und

$$\mathbb{M}^* := \{\mathfrak{m} \in \mathbb{M} : \mathfrak{m} \text{ ist seitentreu}\}.$$

**6.1.5 Bemerkung.** Die Mengen  $\mathbb{M}$  und  $\mathbb{M}^*$  sind Teilmengen der Potenzmenge von  $\mathcal{F}' := \mathcal{F}^d \setminus \{\emptyset\}$ . Nun ist  $\mathcal{F}'$  ein lokal-kompakter Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis. Man kann daher auf  $\mathcal{F}'$  als Grundraum die Fell-Matheron Topologie und die zugehörige Borelsche  $\sigma$ -Algebra einführen. Zu jeder kompakten Teilmenge  $\mathcal{L}$  von  $\mathcal{F}'$  gibt es ein  $C \in \mathcal{C}^d$  mit  $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}_C$ . Ist nun  $\mathfrak{m} = \{F_i : i \in \mathbb{N}\}$  ein Mosaik, also ein lokal-endliches System von nichtleeren kompakten Teilmengen des  $\mathbb{R}^d$ , so gilt  $F_i \in \mathcal{F}_C$  nur für endliche viele  $i \in \mathbb{N}$ . Für jedes  $\mathfrak{m} \in \mathbb{M}$  ist daher nicht nur  $\mathfrak{m} \subset \mathcal{F}'$ , sondern  $\mathfrak{m}$  ist abgeschlossen in  $\mathcal{F}'$ , d.h. ein Element von  $\mathcal{F}(\mathcal{F}')$ . Man kann zeigen, dass  $\mathbb{M}$  und  $\mathbb{M}^*$  messbare Teilmengen von  $\mathcal{F}(\mathcal{F}')$  sind. Ferner sind die Abbildungen

$$\mathfrak{m} \mapsto \mathcal{F}_j(\mathfrak{m}) := \bigcup_{P \in \mathfrak{m}} \mathcal{F}_j(P) \quad (\in \mathcal{F}(\mathcal{F}'))$$

für jedes  $j \in \{0, \dots, d\}$  messbar auf  $\mathbb{M}^*$ .

**6.1.6 Definition.** Ein *zufälliges Mosaik*  $X$  ist ein einfacher Partikelprozess mit

$$\mathbb{P}(\text{supp } X \in \mathbb{M}^*) = 1.$$

Vernachlässigt man Nullmengen, so kann man  $X$  auch als zufälliges Element in  $\mathbb{M}^*$  einführen. Man nennt  $X$  *stationär*, wenn  $X$  als Partikelprozess stationär ist.

**6.1.7 Beispiel.** Für  $\varphi \in N_s(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\}$  sei

$$C(\varphi, x) := \{z \in \mathbb{R}^d : \|z - x\| \leq \|z - y\| \forall y \in \varphi\}, \quad x \in \varphi,$$

die Voronoi-Zelle von  $x$ . Sind alle Zellen von  $\mathbf{m}(\varphi) := \{C(\varphi, x) : x \in \varphi\}$  beschränkt, so ist  $\mathbf{m}(\varphi)$  ein seitentreues Mosaik, das von  $\varphi$  erzeugte *Voronoi-Mosaik*. In diesem Fall gilt insbesondere  $\varphi(\mathbb{R}^d) = \infty$ . Eine hinreichende Bedingung für die Beschränktheit der Zellen ist die Bedingung  $\text{conv}(\varphi) = \mathbb{R}^d$  (siehe [4, Seiten 470-1]).

Ist  $\Phi$  ein Punktprozess auf  $\mathbb{R}^d$  mit  $\mathbb{P}(\text{conv}(\Phi) = \mathbb{R}^d) = 1$ , so ist

$$X := \{C(\Phi, x) : x \in \Phi\} = \sum_{x \in \Phi} \delta_{C(\Phi, x)}$$

ein zufälliges Mosaik, wenn wir einfache Zählmaße mit deren Träger identifizieren. Ist  $\Phi$  stationär, so ist  $X$  stationär als Partikelprozess. Das folgt aus der Translationskovarianz

$$C(\varphi + z, x + z) = C(\varphi, x) + z,$$

für alle  $\varphi \in N_s \setminus \{0\}$ ,  $x \in \varphi$ ,  $z \in \mathbb{R}^d$ .

**6.1.8 Satz.** Ist  $\Phi \neq 0$  ein stationärer Punktprozess auf  $\mathbb{R}^d$ , so gilt

$$\mathbb{P}(\text{conv}(\text{supp } \Phi) = \mathbb{R}^d) = 1.$$

*Beweisidee.* “Analog” zu Satz 2.2.2. Eine allgemeinere Aussage steht beispielsweise in [4, Theorem 2.4.4].  $\square$

**6.1.9 Beispiel.** Es sei  $\varphi \subset A(d, d-1)$  lokal-endlich, d.h.

$$\text{card}\{H \in \varphi : H \cap K \neq \emptyset\} < \infty, \quad K \in \mathcal{C}^d.$$

Es sei  $\mathbf{m}(\varphi)$  das System der Abschlüsse der Zusammenhangskomponenten von  $\mathbb{R}^d \setminus (\bigcup_{H \in \varphi} H)$ . Unter Regularitätsvoraussetzungen an  $\varphi$  ist  $\mathbf{m}(\varphi)$  ein seitentreues Mosaik, nämlich das von  $\varphi$  erzeugte *Hyperebenen-Mosaik*.

### Ziele und Fragestellungen für stationäre Mosaik

- Wie viele  $j$ -Seiten gibt es im Mittel in einer Menge  $B \in \mathcal{B}^d$ ? Was ist die asymptotische Varianz?
- Welchen Einfluss hat Anisotropie auf Mittelwerte und Verteilungen?
- Was ist die Verteilung einer “typischen” Zelle beziehungsweise von Funktionalen (wie der Eckenzahl oder dem Volumen) typischer Zellen?
- Wie verhalten sich innere Volumina des  $j$ -Skeletts?
- Welche Form haben große und kleine Zellen?

## 6.2 Palmsche Wahrscheinlichkeitsmaße

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum. Wir betrachten einen *Fluss*  $\{\theta_x : x \in \mathbb{R}^d\}$ , d.h. eine Familie von Abbildungen  $\theta_x : \Omega \rightarrow \Omega$ , sodass

- (i) die Abbildung  $\Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \Omega$ ,  $(\omega, x) \mapsto \theta_x \omega$  messbar ist,
- (ii)  $\theta_y \circ \theta_x = \theta_{x+y}$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}^d$  gilt und
- (iii)  $\theta_0 = \text{id}_\Omega$  gilt.

Insbesondere ist  $\theta_x$  bijektiv mit  $\theta_x^{-1} = \theta_{-x}$  für alle  $x \in \mathbb{R}^d$  und messbar.

**6.2.1 Beispiel.** Für  $\Omega = \mathcal{F}^d$  sei

$$\theta_x F := F + x, \quad x \in \mathbb{R}^d, F \in \mathcal{F}^d.$$

Dies ist ein Fluss.

**6.2.2 Beispiel.** Wir setzen das vorherige Beispiel fort und erklären einen Fluss auf  $\Omega = \mathbb{M}^*$ , indem wir

$$\theta_x \mathbf{m} := \{\theta_x C : C \in \mathbf{m}\}, \quad x \in \mathbb{R}^d, \mathbf{m} \in \mathbb{M}^*$$

definieren. Auch dies ist ein Fluss, der für die später zu beweisenden Mittelwertformeln ausreicht. Für manche Anwendungen ist es aber sinnvoll, zusätzlichen Zufall zuzulassen.

**6.2.3 Beispiel.** Auf dem messbaren Raum  $(M(\mathbb{R}^d), \mathcal{M}(\mathbb{R}^d))$  aller lokal-endlichen Maße auf  $\mathbb{R}^d$  bilden die zu Beginn von Abschnitt 3.4 definierten Verschiebungsoperatoren  $T_x$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$ , einen Fluss (siehe auch Bemerkung 6.2.7). Man kann auch auf diesem Raum ein stationäres Mosaik definieren. Dazu betrachtet man für ein Mosaik  $\mathbf{m}$  die Vereinigung der Ränder aller Zellen von  $\mathbf{m}$  und das darauf gegebene  $(d-1)$ -dimensionale Hausdorff-Maß. Aus diesem Maß lässt sich das Mosaik  $\mathbf{m}$  zurückgewinnen. Als Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P}$  kann das Bild der Verteilung eines stationären Mosaiks unter der oben beschriebenen Abbildung verwendet werden.

Auch die in Definition 4.2.7 definierten Verschiebungen von Maßen auf  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{M}$  (mit einem Markenraum  $\mathbb{M}$ ) bilden einen Fluss.

**6.2.4 Definition** (und Voraussetzung). Das Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P}$  auf  $(\Omega, \mathcal{A})$  sei *invariant* bezüglich des gegebenen Flusses  $\{\theta_x : x \in \mathbb{R}^d\}$  auf  $\Omega$ , d.h.

$$\mathbb{P}(\theta_x A) = \mathbb{P}(A), \quad x \in \mathbb{R}^d, A \in \mathcal{A},$$

wobei  $\theta_x A := \{\theta_x \omega : \omega \in A\}$ .

**6.2.5 Definition.** Ein zufälliges Maß  $\eta$  auf  $\mathbb{R}^d$  heißt *invariant* (oder auch adaptiert), falls

$$\eta(\theta_x \omega, B + x) = \eta(\omega, B), \quad \omega \in \Omega, B \in \mathcal{B}^d, x \in \mathbb{R}^d$$

bzw.

$$\eta(\theta_x \omega, B) = \eta(\omega, B - x), \quad \omega \in \Omega, B \in \mathcal{B}^d, x \in \mathbb{R}^d$$

gilt.

**6.2.6 Bemerkung.** Ein zufälliges Maß  $\eta$  auf  $\mathbb{R}^d$  ist genau dann invariant, wenn für alle  $\omega \in \Omega$ ,  $B \in \mathcal{B}^d$  und  $x \in \mathbb{R}^d$  gilt

$$\eta(\theta_x \omega, B) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{z + x \in B\} \eta(\omega, dz).$$

**6.2.7 Bemerkung.** Ein invariantes zufälliges Maß  $\eta$  ist *stationär*, d.h.

$$T_x \eta \stackrel{d}{=} \eta, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Dabei ist für ein Maß  $\mu$  auf  $\mathbb{R}^d$

$$T_x \mu(B) := \mu(B - x), \quad x \in \mathbb{R}^d, B \in \mathcal{B}^d.$$

In der Tat gilt für  $B_1, \dots, B_m \in \mathcal{B}^d$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$  und  $\omega \in \Omega$ :

$$\begin{aligned} (T_x \eta(\omega, B_1), \dots, T_x \eta(\omega, B_m)) &= (\eta(\omega, B_1 - x), \dots, \eta(\omega, B_m - x)) \\ &= (\eta(\theta_x \omega, B_1), \dots, \eta(\theta_x \omega, B_m)). \end{aligned}$$

Deswegen folgt aus  $\mathbb{P} \circ \theta_x = \mathbb{P}$  die Verteilungsgleichheit

$$(T_x \eta(B_1), \dots, T_x \eta(B_m)) \stackrel{d}{=} (\eta(B_1), \dots, \eta(B_m))$$

und damit die Behauptung.

**6.2.8 Definition.** Ist  $\eta$  ein invariantes zufälliges Maß auf  $\mathbb{R}^d$ , so heißt

$$\gamma_\eta := \mathbb{E}[\eta([0, 1]^d)]$$

*Intensität* von  $\eta$ .

**6.2.9 Bemerkung.** Ist  $\eta$  ein invariantes zufälliges Maß auf  $\mathbb{R}^d$  und  $\mathbb{E}[\eta([0, 1]^d)] < \infty$ , so gilt

$$\mathbb{E}[\eta(B)] = \gamma_\eta \lambda_d(B), \quad B \in \mathcal{B}^d.$$

Dies folgt sofort daraus, dass  $\mathbb{E}[\eta(\cdot)]$  ein translationsinvariantes, lokalendliches Maß auf der Borelschen  $\sigma$ -Algebra von  $\mathbb{R}^d$  ist.

**6.2.10 Theorem** (Verallgemeinerte Campbell-Formel). *Es sei  $\eta$  ein invariantes zufälliges Maß auf  $\mathbb{R}^d$  mit  $0 < \gamma_\eta < \infty$ . Dann existiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P}_\eta^0$  auf  $(\Omega, \mathcal{A})$  mit*

$$\mathbb{E} \left[ \int_{\mathbb{R}^d} f(\theta_{-x}, x) \eta(dx) \right] = \gamma_\eta \mathbb{E}_\eta^0 \left[ \int_{\mathbb{R}^d} f(\theta_0, x) dx \right] \quad (6.2.1)$$

für messbare Funktionen  $f : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty]$ , wobei  $\mathbb{E}_\eta^0$  den Erwartungswert bezüglich  $\mathbb{P}_\eta^0$  bezeichnet.

*Beweis.* Der Beweis ist analog zum Beweis von Satz 2.2.5. Für  $A \in \mathcal{A}$  sei

$$\Lambda_A(B) := \mathbb{E} \left[ \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{x \in B, \theta_{-x} \in A\} \eta(dx) \right], \quad B \in \mathcal{B}^d.$$

Es seien  $B \in \mathcal{B}^d$  und  $z \in \mathbb{R}^d$ . Dann gilt, wenn zunächst die Invarianz von  $\mathbb{P}$  und dann die Invarianz von  $\eta$  verwendet wird,

$$\begin{aligned} \Lambda_A(B + z) &= \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{x \in B + z, \theta_{-x} \omega \in A\} \eta(\omega, dx) \mathbb{P}(d\omega) \\ &= \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{x - z \in B, \underbrace{\theta_{-x} \circ \theta_z}_{=\theta_{-(x-z)}} \omega \in A\} \eta(\theta_z \omega, dx) \mathbb{P}(d\omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{y \in B, \theta_{-y}\omega \in A\} \eta(\omega, dy) \mathbb{P}(d\omega) \\
&= \Lambda_A(B).
\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\Lambda_A(B) = \mathbb{P}'_{\eta}(A) \lambda_d(B), \quad B \in \mathcal{B}^d,$$

mit einer von  $A$  abhängenden Konstanten  $0 \leq P'_{\eta}(A)$ . Für  $B = [0, 1]^d$  folgt  $\mathbb{P}'_{\eta}(\Omega) = \gamma_{\eta} < \infty$ . Also ist  $\mathbb{P}'_{\eta}$  ein endliches Maß auf  $(\Omega, \mathcal{A})$ . Mit  $\mathbb{P}_{\eta}^0 := \gamma_{\eta}^{-1} \mathbb{P}'_{\eta}$  erhält man

$$\mathbb{E} \left[ \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{x \in B\} \mathbb{1}\{\theta_{-x} \in A\} \eta(dx) \right] = \gamma_{\eta} \mathbb{P}_{\eta}^0(A) \lambda_d(B).$$

Algebraische Induktion führt nun zur Behauptung. □

**6.2.11 Bemerkung.** Unter den Voraussetzungen des Satzes gilt auch “die äquivalente Gleichung”

$$\mathbb{E} \left[ \int_{\mathbb{R}^d} f(\theta_0, x) \eta(dx) \right] = \gamma_{\eta} \mathbb{E}_{\eta}^0 \left[ \int_{\mathbb{R}^d} f(\theta_x, x) dx \right]. \quad (6.2.2)$$

**6.2.12 Definition.** Das Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P}_{\eta}^0$  aus Theorem 6.2.10 heißt *Palmsches Wahrscheinlichkeitsmaß* von  $\eta$ .

**6.2.13 Bemerkung.** Für  $B \in \mathcal{B}^d$  mit  $0 < \lambda_d(B) < \infty$  und  $A \in \mathcal{A}$  folgt aus (6.2.1) mit  $f(\omega, x) := \mathbb{1}_A(\omega) \mathbb{1}_B(x)$  die Darstellung

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{\eta}^0(A) &= \frac{1}{\gamma_{\eta} \lambda_d(B)} \mathbb{E} \left[ \int_B \mathbb{1}_A(\theta_{-x}) \eta(dx) \right] \\
&= \frac{1}{\gamma_{\eta} \lambda_d(B)} \int_{\Omega} \int_B \mathbb{1}\{\omega \in \theta_x A\} \eta(\omega, dx) \mathbb{P}(d\omega).
\end{aligned} \quad (6.2.3)$$

Für eine messbare Funktion  $h: \Omega \rightarrow [0, \infty)$  folgt analog mit  $f(\omega, x) := h(\omega) \mathbb{1}_B(x)$  die Gleichung

$$\mathbb{E}_{\eta}^0[h] = \frac{1}{\gamma_{\eta} \lambda_d(B)} \mathbb{E} \left[ \int_B h(\theta_{-y}) \eta(dy) \right]. \quad (6.2.4)$$

Man kann  $\mathbb{P}_{\eta}^0$  als das Wahrscheinlichkeitsmaß interpretieren, welches das zugrundeliegende stochastische Experiment aus der Sicht eines „zufällig ausgewählten“ Punktes in der „Masse“ von  $\eta$  beschreibt. Diese etwas vage Aussage kann mit Ergodentheorie präzisiert werden. Im Falle eines einfachen Punktprozesses kann  $\mathbb{P}_{\eta}^0(\eta \in \cdot)$  auch als bedingte Verteilung von  $\eta$  interpretiert werden. Dabei bedingt man auf das Ereignis, dass im Punkt 0 ein Punkt von  $\eta$  liegt. Auch darauf gehen wir hier nicht näher ein.

**6.2.14 Theorem** (Austauschformel von Neveu). *Sind  $\eta, \eta'$  invariante zufällige Maße mit positiven und endlichen Intensitäten, so gilt für alle messbaren Funktionen  $g: \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty]$*

$$\gamma_{\eta} \mathbb{E}_{\eta}^0 \left[ \int_{\mathbb{R}^d} g(\theta_{-x}, x) \eta'(dx) \right] = \gamma_{\eta'} \mathbb{E}_{\eta'}^0 \left[ \int_{\mathbb{R}^d} g(\theta_0, -x) \eta(dx) \right]. \quad (6.2.5)$$

*Beweis.* Es seien  $B \in \mathcal{B}^d$  mit  $\lambda_d(B) = 1$  und  $g: \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty]$  eine messbare Abbildung. Aus (6.2.4) mit

$$h(\omega) := \int_{\mathbb{R}^d} g(\theta_{-x}\omega, x) \eta'(\omega, dx),$$

der Flusseigenschaft, der Invarianz des zufälligen Maßes  $\eta'$  und dem Satz von Fubini folgt dann

$$\begin{aligned} \gamma_\eta \mathbb{E}_\eta^0 \left[ \int_{\mathbb{R}^d} g(\theta_{-x}, x) \eta'(dx) \right] &= \mathbb{E} \left[ \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_B(y) g(\theta_{-x} \circ \theta_{-y}, x) \eta'(\theta_{-y}, dx) \eta(dy) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_B(y) g(\theta_{-(x+y)}, x) \eta'(\theta_{-y}, dx) \eta(dy) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_B(y) g(\theta_{-(x-y+y)}, x-y) \eta'(dx) \eta(dy) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_B(y) g(\theta_{-x}, x-y) \eta(dy) \eta'(dx) \right]. \end{aligned}$$

Mit der Invarianz von  $\eta$ , der verallgemeinerten Campbell-Formel (6.2.1) für  $\eta'$  mit

$$f(\omega, x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_B(z+x) g(\omega, -z) \eta(\omega, dz),$$

dem Satz von Fubini und  $\lambda_d(B) = 1$  folgt weiter

$$\begin{aligned} \gamma_\eta \mathbb{E}_\eta^0 \left[ \int_{\mathbb{R}^d} g(\theta_{-x}, x) \eta'(dx) \right] &= \mathbb{E} \left[ \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_B(z+x) g(\theta_{-x}, -z) \eta(\theta_{-x}, dz) \eta'(dx) \right] \\ &= \gamma_{\eta'} \mathbb{E}_{\eta'}^0 \left[ \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_B(z+x) g(\theta_0, -z) \eta(\theta_0, dz) dx \right] \\ &= \gamma_{\eta'} \mathbb{E}_{\eta'}^0 \left[ \int_{\mathbb{R}^d} g(\theta_0, -z) \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_B(z+x) dx \eta(\theta_0, dz) \right] \\ &= \gamma_{\eta'} \mathbb{E}_{\eta'}^0 \left[ \int_{\mathbb{R}^d} g(\theta_0, -z) \eta(dz) \right]. \end{aligned}$$

Dies zeigt die behauptete Gleichung.  $\square$

**6.2.15 Bemerkung.** Es sei  $\eta' = \lambda_d$ . Dann gilt  $\gamma_{\eta'} = 1$  und  $\mathbb{P}_{\eta'}^0 = \mathbb{P}$ . In der Tat, wir erhalten aus (6.2.3), dass

$$\begin{aligned} \gamma_{\eta'} \mathbb{P}_{\eta'}^0(A) &= \frac{1}{\lambda_d(B)} \mathbb{E} \int_B \mathbb{1}_A(\theta_{-x}) \lambda_d(dx) \\ &= \frac{1}{\lambda_d(B)} \int_B \underbrace{\mathbb{E} \mathbb{1}_A(\theta_{-x})}_{=\mathbb{P}(A)} \lambda_d(dx) \\ &= \mathbb{P}(A). \end{aligned}$$

Hieraus folgen beide Behauptungen. Gleichung (6.2.5) bedeutet dann

$$\gamma_\eta \mathbb{E}_\eta^0 \left[ \int_{\mathbb{R}^d} g(\theta_{-x}, x) dx \right] = \mathbb{E} \left[ \int_{\mathbb{R}^d} g(\theta_0, -x) \eta(dx) \right].$$

Dies ist äquivalent zu (6.2.1) und zu (6.2.2).

### 6.3 Allgemeine Mittelwertformeln

Es sei  $X$  ein stationäres zufälliges Mosaik mit  $X(\omega) \in \mathbb{M}^*$ ,  $\omega \in \Omega$ . Wir erinnern hierbei daran, dass wir ein zufälliges Mosaik als einen speziellen Partikelprozess (mit konvexen Partikeln) und zugleich als eine spezielle lokalendliche Kollektion konvexer Partikel ansehen. Für  $k \in \{0, \dots, d\}$  sei  $X_k := \mathcal{F}_k(X)$  der Partikelprozess der  $k$ -Seiten von  $X$ . Es gilt  $\mathcal{F}_k(\mathbf{m} + x) = \mathcal{F}_k(\mathbf{m}) + x$  für alle  $\mathbf{m} \in \mathbb{M}^*$  und  $x \in \mathbb{R}^d$ . Deshalb folgt

$$\mathbb{P}(X_k + x \in \cdot) = \mathbb{P}(\mathcal{F}_k(X) + x \in \cdot) = \mathbb{P}(\mathcal{F}_k(X + x) \in \cdot) = \mathbb{P}(\mathcal{F}_k(X) \in \cdot) = \mathbb{P}(X_k \in \cdot),$$

d.h.  $X_k$  ist stationär.

**6.3.1 Voraussetzung und Definition.** Die Intensitätsmaße von  $X_k$  seien lokal-endlich für jedes  $k \in \{0, \dots, d\}$ . Es bezeichne

$$\gamma_k := \mathbb{E} [\text{card}\{F \in X_k : c(F) \in [0, 1]^d\}] < \infty \quad (6.3.1)$$

die Intensität von  $X_k$  und  $\mathbb{Q}_k$  die Formverteilung von  $X_k$ . Für die Zentrumsfunktion  $c: \mathcal{K}' \rightarrow \mathbb{R}^d$  gelte  $c(K) \in \text{relint}(K)$  für alle Polytope  $K \in \mathcal{K}'$ .

**6.3.2 Voraussetzung.** Sei  $\{\theta_x : x \in \mathbb{R}^d\}$  ein Fluss auf  $\Omega$ , sodass

$$X(\theta_x \omega) = X(\omega) + x$$

für  $\omega \in \Omega$  und  $x \in \mathbb{R}^d$  gilt. Wie bisher nehmen wir an, dass  $\mathbb{P} \circ \theta_x = \mathbb{P}$  für  $x \in \mathbb{R}^d$  erfüllt ist. Daraus folgt schon die Stationarität von  $X$ . Wegen der möglichen Wahl  $\Omega := \mathbb{M}^*$ ,  $\theta_x \mathbf{m} := \mathbf{m} + x$  für  $\mathbf{m} \in \mathbb{M}^*$  und  $x \in \mathbb{R}^d$  sowie  $\mathbb{P} := \mathbb{P}(X \in \cdot)$  ist die Beschreibung mit Hilfe eines Flusses für die Zwecke dieses Abschnitts keine Einschränkung der Allgemeinheit.

**6.3.3 Definition.** Für jedes  $j \in \{0, \dots, d\}$  sei

$$\Phi_j := \sum_{F \in X_j} \delta_{c(F)}$$

und

$$\eta_j := \sum_{F \in X_j} \mathcal{H}^j(F \cap \cdot).$$

Beachte  $\Phi_0 = \eta_0$ .

**6.3.4 Bemerkung.** Offenbar ist  $\Phi_j$  ein invarianter Punktprozess auf  $\mathbb{R}^d$  (d.h. ein spezielles invariantes zufälliges Maß). Nach Definition ist  $\Phi_j$  nicht das Nullmaß. Damit ist die Intensität  $\gamma_j$  von  $\Phi_j$  nicht nur endlich (nach Voraussetzung 6.3.1) sondern auch positiv:  $\gamma_j > 0$ . Ferner ist  $\eta_j$  ein invariantes zufälliges Maß auf  $\mathbb{R}^d$ . Es gilt nämlich wegen  $X_j(\theta_x \omega) = X_j(\omega) + x$ , dass

$$\begin{aligned} \eta_j(\theta_x \omega, B + x) &= \sum_{F \in X_j(\theta_x \omega)} \mathcal{H}^j(F \cap (B + x)) \\ &= \sum_{F \in X_j(\omega)} \mathcal{H}^j((F + x) \cap (B + x)) \\ &= \eta_j(\omega, B). \end{aligned}$$

Die Intensität von  $\eta_j$  bezeichnen wir mit

$$\delta_j := \mathbb{E}[\eta_j([0, 1]^d)].$$

Auch hier folgt aus  $\eta_j \neq 0$  die Positivität von  $\delta_j$ . Allerdings können wir den Fall  $\delta_j = \infty$  nicht ausschließen. Wir weisen auch auf die Gleichung  $\eta_d = \lambda_d$  hin. Insbesondere gilt  $\delta_d = 1$  und  $\mathbb{P}_{\eta_d}^0 = \mathbb{P}$ .

**6.3.5 Lemma.** (a) Es gilt  $\mathbb{P}_{\Phi_j}^0(0 \in \text{relint}(G) \text{ für ein } G \in X_j) = 1$ .

(b) Ist  $\delta_j < \infty$ , so gilt  $\mathbb{P}_{\eta_j}^0(0 \in \text{relint}(G) \text{ für ein } G \in X_j) = 1$ .

*Beweis.* Sei  $B$  eine Borelmenge mit Volumen 1.

(a) Aus der Definition der Palmschen Verteilung folgt

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{\Phi_j}^0(0 \in \text{relint}(G) \text{ für ein } G \in X_j) \\ &= \frac{1}{\gamma_j} \mathbb{E} \sum_{F \in X_j} \mathbb{1}\{c(F) \in B\} \mathbb{1}\{0 \in \text{relint}(G) \text{ für ein } G \in X_j \circ \theta_{-c(F)}\} \\ &= \frac{1}{\gamma_j} \mathbb{E} \sum_{F \in X_j} \mathbb{1}\{c(F) \in B\} \underbrace{\mathbb{1}\{0 \in \text{relint}(G) \text{ für ein } G \in X_j - c(F)\}}_{=1, \text{ da } G = F - c(F) \text{ für } F \in X_j \text{ gewählt werden kann}} \\ &= \frac{1}{\gamma_j} \mathbb{E} \sum_{F \in X_j(\omega)} \mathbb{1}\{c(F) \in B\} \\ &= 1. \end{aligned}$$

(b) Wir argumentieren ähnlich wie in (a). So erhalten wir

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{\eta_j}^0(0 \in \text{relint}(G) \text{ für ein } G \in X_j) \\ &= \frac{1}{\delta_j} \mathbb{E} \sum_{F \in X_j} \int_{B \cap F} \underbrace{\mathbb{1}\{0 \in \text{relint}(F) \text{ für ein } F \in X_j - x\}}_{=1 \text{ für } \mathcal{H}^j\text{-f.a. } x \in F} \mathcal{H}^j(dx) \\ &= \frac{1}{\delta_j} \mathbb{E} \sum_{F \in X_j(\omega)} \mathcal{H}^j(B \cap F) \\ &= 1. \end{aligned} \quad \square$$

Die folgenden Definitionen benötigen die (bisher nicht benutzte) Seitentreue eines Mosaiks  $\mathbf{m} \in \mathbb{M}^*$ .

**6.3.6 Definition.** Für  $\mathbf{m} \in \mathbb{M}^*$ ,  $j \in \{0, \dots, d\}$  und  $x \in \mathbb{R}^d$  sei

$$Z_j(\mathbf{m}, x) := \begin{cases} F, & \text{falls } F \in \mathcal{F}_j(\mathbf{m}) \text{ und } x \in \text{relint } F, \\ \{x\}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir setzen  $Z_j(x) := Z_j(X, x)$ . Ferner seien  $Z_j(\mathbf{m}) := Z_j(\mathbf{m}, 0)$  und  $Z_j := Z_j(X) = Z_j(X, 0)$ . Speziell wird  $Z_d(\mathbf{m}, 0)$  als *Nullzelle* von  $\mathbf{m}$  bezeichnet.



**6.3.7 Bemerkung.** Es gilt

$$Z_j(\mathbf{m} + y, x + y) = Z_j(\mathbf{m}, x) + y, \quad x, y \in \mathbb{R}^d, \mathbf{m} \in \mathbb{M}^*.$$

Wegen (6.3.2) ergibt sich daraus

$$Z_j(X \circ \theta_{-x}) = Z_j(X \circ \theta_{-x}, 0) = Z_j(X - x, x - x) = Z_j(X, x) - x.$$

Hiermit und aus (6.2.3) folgt für  $\mathcal{H} \in \mathcal{B}(\mathcal{K}')$  und  $B \in \mathcal{B}^d$  mit  $\lambda_d(B) = 1$ , dass

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\Phi_j}^0(Z_j \in \mathcal{H}) &= \gamma_j^{-1} \mathbb{E} \left[ \int_B \mathbb{1}\{Z_j(\underbrace{X \circ \theta_{-x}}_{=X-x}) \in \mathcal{H}\} \Phi_j(dx) \right] \\ &= \gamma_j^{-1} \mathbb{E} \left[ \int_B \mathbb{1}\{Z_j(X, x) - x \in \mathcal{H}\} \Phi_j(dx) \right] \\ &= \gamma_j^{-1} \mathbb{E} \left[ \sum_{F \in X_j} \mathbb{1}\{c(F) \in B\} \mathbb{1}\{\underbrace{Z_j(X, c(F))}_{=F} - c(F) \in \mathcal{H}\} \right] \\ &= \mathbb{Q}_j(\mathcal{H}), \end{aligned}$$

vergleiche dazu Bemerkung 4.2.9. Man bezeichnet  $\mathbb{Q}_j(\cdot) = \mathbb{P}_{\Phi_j}^0(Z_j \in \cdot)$  als die Verteilung der “typischen“  $j$ -Seite von  $X$ . Im Fall  $j = d$  ist  $\mathbb{Q}_d$  die Verteilung der *typischen Zelle* von  $X$ . Hierbei ist zu beachten, dass wir in Lemma 6.3.5 (a) schon

$$\mathbb{P}_{\Phi_j}^0(0 \in \text{relint } F \text{ für ein } F \in X_j) = 1$$

bewiesen hatten.

**6.3.8 Bemerkung.** Hat  $\eta_j$  eine endliche Intensität, so nennt man  $\mathbb{P}_{\eta_j}^0(Z_j \in \cdot)$  die Verteilung der *flächengewichteten typischen  $j$ -Seite*. Diese Bezeichnung wird auch durch den folgenden Satz gerechtfertigt.

**6.3.9 Theorem.** Es sei  $j \in \{0, \dots, d\}$ . Das zufällige Maß  $\eta_j$  habe eine endliche Intensität  $\delta_j$ . Sei  $f: \mathcal{K}' \rightarrow [0, \infty]$  eine messbare Abbildung. Dann gilt

$$\delta_j \mathbb{E}_{\eta_j}^0[f(Z_j - c(Z_j))] = \gamma_j \mathbb{E}_{\Phi_j}^0[\lambda_j(Z_j) f(Z_j)]. \quad (6.3.2)$$

*Beweis.* Wir verwenden die Austauschformel von Neveu in der Form

$$\gamma_{\eta} \mathbb{E}_{\eta}^0 \left[ \int_{\mathbb{R}^d} g(\theta_{-x}, -x) \eta'(dx) \right] = \gamma_{\eta'} \mathbb{E}_{\eta'}^0 \left[ \int_{\mathbb{R}^d} g(\theta_0, x) \eta(dx) \right]$$

mit  $\eta' := \Phi_j$  und  $\eta := \eta_j$ . Mit

$$g(\omega, x) = f(Z_j(X(\omega))) \mathbb{1}\{x \in \text{relint}(Z_j(X(\omega)))\}$$

ergibt sich für die rechte Seite der Behauptung

$$\gamma_j \mathbb{E}_{\Phi_j}^0 \left[ \int_{\mathbb{R}^d} f(Z_j) \underbrace{\mathbb{1}\{x \in \text{relint } Z_j\}}_{=\lambda_j(Z_j)} \eta_j(dx) \right].$$

Hierbei wurde verwendet, dass es unter  $\mathbb{P}_{\Phi_j}^0$  genau eine  $j$ -Seite von  $X$  gibt, die 0 im relativen Inneren enthält. Diese ist  $Z_j(X, 0) = Z_j(X) = Z_j$ . Nun ist  $\eta_j$  gerade das  $\mathcal{H}^j$ -Maß auf den  $j$ -Seiten und die Integration erstreckt sich über  $x \in \text{relint}(Z_j(X, 0))$ .

Für die linke Seite erhält man

$$\begin{aligned} & \delta_j \mathbb{E}_{\eta_j}^0 \left[ \int_{\mathbb{R}^d} f(\underbrace{Z_j(X - x, 0)}_{=Z_j(X, x) - x}) \mathbb{1}\{-x \in \text{relint } Z_j(X - x, 0)\} \Phi_j(dx) \right] \\ &= \delta_j \mathbb{E}_{\eta_j}^0 \left[ \sum_{F \in X_j} f(Z_j(X, c(F)) - c(F)) \mathbb{1}\{0 \in \text{relint } Z_j(X, c(F))\} \right], \end{aligned}$$

wobei

$$-x \in \text{relint } Z_j(X - x, 0) \Leftrightarrow 0 \in \text{relint } Z_j(X, x)$$

verwendet wurde. Nun gibt es unter  $\mathbb{P}_{\eta_j}^0$  genau eine  $j$ -Seite  $F \in X_j$  mit  $0 \in \text{relint } Z_j(X, c(F))$ , nämlich  $F = Z_j(X, 0) = Z_j$ . Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

**6.3.10 Bemerkung.** Unter  $\mathbb{P}_{\Phi_j}^0$  ist  $Z_j$  die eindeutig bestimmte  $j$ -Seite von  $X$ , die 0 im relativen Inneren enthält. Also folgt  $\lambda_j(Z_j) > 0$  fast sicher unter  $\mathbb{P}_{\Phi_j}^0$ .

**6.3.11 Folgerung.** Für  $j \in \{0, \dots, d\}$  gelte  $\delta_j < \infty$ . Dann gilt

$$\mathbb{E}_{\Phi_j}^0[\lambda_j(Z_j)] = \frac{\delta_j}{\gamma_j}. \quad (6.3.3)$$

$$\mathbb{E}_{\eta_j}^0[\lambda_j(Z_j)^{-1}] = \frac{\gamma_j}{\delta_j}. \quad (6.3.4)$$

Insbesondere folgt

$$\mathbb{E}_{\Phi_d}^0[\lambda_d(Z_d)] = \frac{1}{\gamma_d}. \quad (6.3.5)$$

$$\mathbb{E}[\lambda_d(Z_d)^{-1}] = \gamma_d. \quad (6.3.6)$$

*Beweis.* Wählen wir in (6.3.2)  $f = 1$ , so folgt  $\mathbb{E}_{\Phi_j}^0[\lambda_j(Z_j)] < \infty$ . Ferner ist  $\lambda_j(Z_j) > 0$  unter  $\mathbb{P}_{\Phi_j}^0$  fast sicher erfüllt.

(6.3.3) folgt mit der Wahl von  $f \equiv 1$  in (6.3.2).

(6.3.4) folgt mit  $f(K) = \lambda_j(K)^{-1}$ ,  $K \in \mathcal{K}'$ , da  $\lambda_j(Z_j) > 0$  fast sicher unter  $\mathbb{P}_{\Phi_j}^0$  gilt.

(6.3.5) und (6.3.6) folgen mit  $j = d$ .

Beachte hierzu  $\eta_d = \lambda_d$  (vgl. Bemerkung 6.3.4 und Bemerkung 6.2.15).  $\square$

**6.3.12 Bemerkung.** Die Funktion  $x \mapsto x^{-1}$  ist konvex. Die Jensen'sche Ungleichung liefert

$$\mathbb{E}_{\eta_j}^0[\lambda_j(Z_j)] = \frac{1}{(\mathbb{E}_{\eta_j}^0[\lambda_j(Z_j)])^{-1}} \geq \frac{1}{\mathbb{E}_{\eta_j}^0[\lambda_j(Z_j)^{-1}]} \stackrel{(6.3.4)}{=} \frac{\delta_j}{\gamma_j} \stackrel{(6.3.3)}{=} \mathbb{E}_{\Phi_j}^0[\lambda_j(Z_j)].$$

Im Fall  $j = d$  ergibt sich  $\mathbb{E}[\lambda_d(Z_d)] \geq \mathbb{E}_{\Phi_d}^0[\lambda_d(Z_d)]$ . Das mittlere Volumen der Nullzelle ist gleich dem mittleren Volumen der volumengewichteten typischen Zelle und dieses ist mindestens so groß wie das mittlere Volumen der typischen Zelle. Das ist eine räumliche Version des Wartezeitparadoxons. Man kann zeigen (Übungsaufgabe), dass sogar gilt:

$$\mathbb{P}_{\eta_j}^0(\lambda_j(Z_j) > t) \geq \mathbb{P}_{\Phi_j}^0(\lambda_j(Z_j) > t), \quad t \geq 0.$$

Für jedes  $\mathbf{m} \in \mathbb{M}^*$  und jedes  $x \in \mathbb{R}^d$  gibt es ein eindeutig bestimmtes  $i \in \{0, \dots, d\}$  und ein eindeutig bestimmtes  $F \in \mathcal{F}_i(\mathbf{m})$  mit  $x \in \text{relint } F$ . Wie setzen  $Z(\mathbf{m}, x) := F$ . Ist  $x$  im relativen Inneren einer  $j$ -Seite  $F \in \mathcal{F}_j(\mathbf{m})$ , so ist  $Z(\mathbf{m}, x) = Z_j(\mathbf{m}, x)$ . Damit werden also die früheren Definitionen von  $Z_j(\mathbf{m}, x)$  zusammengeführt. Wie zuvor gilt

$$Z(\mathbf{m} + y, x + y) = Z(\mathbf{m}, x) + y, \quad x, y \in \mathbb{R}^d, \mathbf{m} \in \mathbb{M}^*. \quad (6.3.7)$$

Für  $k \in \{0, \dots, d\}$  definieren wir den  $k$ -Seitenstern von  $\mathbf{m}$  bei  $x \in \mathbb{R}^d$  durch

$$\mathcal{S}_k(\mathbf{m}, x) := \begin{cases} \mathcal{F}_k(Z(\mathbf{m}, x)), & \text{falls } k \leq \dim Z(\mathbf{m}, x), \\ \{G \in \mathcal{F}_k(\mathbf{m}) : Z(\mathbf{m}, x) \subset G\}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Erneut gilt

$$\mathcal{S}_k(\mathbf{m} + y, x + y) = \mathcal{S}_k(\mathbf{m}, x) + y, \quad x, y \in \mathbb{R}^d, \mathbf{m} \in \mathbb{M}^*. \quad (6.3.8)$$

Definiere  $Z(x) := Z(X, x)$ ,  $Z := Z(X, 0)$ ,  $\mathcal{S}_k(x) := \mathcal{S}_k(X, x)$ ,  $\mathcal{S}_k := \mathcal{S}_k(X, 0)$ . Wir bemerken

$$\mathbb{P}_{\Phi_j}^0(Z = Z_j) = 1, \quad j \in \{0, \dots, d\}. \quad (6.3.9)$$

Im Weiteren sei  $\mathbb{P}_j^0 := \mathbb{P}_{\Phi_j}^0$  und  $\mathbb{E}_j^0 := \mathbb{E}_{\Phi_j}^0$ .

**6.3.13 Definition.** Für  $j, k \in \{0, \dots, d\}$  sei  $n_{jk} := \mathbb{E}_j^0[\text{card } \mathcal{S}_k]$ . Für  $j < k$  ist das die mittlere Anzahl der  $k$ -Seiten, welche die typische  $j$ -Seite enthalten. Für  $j \geq k$  ist  $n_{jk}$  die mittlere Anzahl der  $k$ -Seiten, welche in der typischen  $j$ -Seite enthalten sind. Ferner gilt  $n_{jj} = 1$ .

**6.3.14 Satz.** Für  $j \in \{0, \dots, d\}$  gilt

$$\sum_{k=0}^j (-1)^k n_{jk} = 1 \quad (6.3.10)$$

und

$$\sum_{k=j}^d (-1)^{d-k} n_{jk} = 1. \quad (6.3.11)$$

*Beweis.* Ist  $P \in \mathcal{K}'$  ein Polytop, so bezeichne  $f_k(P) := \text{card } \mathcal{F}_k(P)$ ,  $k \in \{0, \dots, d\}$ . Die *Eulersche Formel* (sh. Abschnitt 14.4 in [4]) ergibt

$$\sum_{k=0}^j (-1)^k f_k(P) = 1, \quad \text{falls } \dim P = j. \quad (6.3.12)$$

Wegen  $\mathbb{P}_j^0(\dim Z(0) = j) = 1$  folgt also

$$\sum_{k=0}^j (-1)^k n_{jk} = \mathbb{E}_j^0 \left[ \sum_{k=0}^j (-1)^k \text{card } \mathcal{S}_k(X, 0) \right] = \mathbb{E}_j^0[1] = 1.$$

Zum Beweis von (6.3.11) kann  $j \leq d - 1$  vorausgesetzt werden. Für  $\mathbf{m} \in \mathbb{M}^*$  und  $G \in \mathcal{F}_j(\mathbf{m})$  sei  $f_k(\mathbf{m}, G) := \text{card}\{F \in \mathcal{F}_k(\mathbf{m}) : G \subset F\}$ . Dann gilt (Übung bzw. [4, Seite 627])

$$\sum_{k=j}^d (-1)^{d-k} f_k(\mathbf{m}, G) = 1$$

Die Behauptung folgt wie zuvor. □

**6.3.15 Bemerkung.** Aus (6.3.10) folgt für  $j = 1$ :  $n_{10} - n_{11} = 1$ , d.h.  $n_{10} = 2$ . Für  $j = 2$  folgt:  $n_{20} - n_{21} + 1 = 1$ , d.h.  $n_{20} = n_{21}$ .

Aus (6.3.11) folgt für  $j = d-1$ :  $-n_{d-1,d-1} + n_{d-1,d} = 1$ , d.h.  $n_{d-1,d} = 2$ . Für  $j = d-2$  folgt:  $n_{d-2,d-2} - n_{d-2,d-1} + n_{d-2,d} = 1$ , d.h.  $n_{d-2,d} = n_{d-2,d-1}$ . All diese Formeln sind auch deterministisch richtig.

Im folgenden Satz beachte man, dass  $\mathbb{P}_j^0(0 \in \text{relint } F \text{ für ein } F \in \mathcal{S}_j(X)) = 1$  gilt.

**6.3.16 Satz.** Für  $0 \leq j \leq k \leq d$  und messbares  $g: \mathcal{K}' \times \mathcal{K}' \times \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$  gilt

$$\gamma_j \mathbb{E}_j^0 \left[ \sum_{G \in \mathcal{S}_k} g(Z, G - c(G), -c(G)) \right] = \gamma_k \mathbb{E}_k^0 \left[ \sum_{F \in \mathcal{S}_j} g(F - c(F), Z, c(F)) \right]. \quad (6.3.13)$$

Insbesondere gilt für messbares  $g: \mathcal{K}' \times \mathcal{K}' \rightarrow [0, \infty)$

$$\gamma_j \mathbb{E}_j^0 \left[ \sum_{G \in \mathcal{S}_k} g(Z - c(G), G - c(G)) \right] = \gamma_k \mathbb{E}_k^0 \left[ \sum_{F \in \mathcal{S}_j} g(F, Z) \right]. \quad (6.3.14)$$

*Beweis.* Die rechte Seite von (6.3.13) ist gleich

$$I := \gamma_k \mathbb{E}_k^0 \left[ \int_{\mathbb{R}^d} g(Z(x) - x, Z, x) \mathbb{1}\{Z(x) \subset Z\} \Phi_j(dx) \right].$$

Beachte, dass hier  $x = c(Z(x))$  für  $x \in \Phi_j$  gilt und  $Z(x) = Z(X, x)$  sowie  $Z = Z(X, 0)$ . Mit der Austauschformel von Neveu erhält man, dass  $I$  gleich ist zu

$$\gamma_j \mathbb{E}_j^0 \left[ \int_{\mathbb{R}^d} g(Z(X - x, -x) + x, Z(X - x, 0), -x) \mathbb{1}\{Z(X - x, -x) \subset Z(X - x, 0)\} \Phi_k(dx) \right].$$

Wegen (6.3.7) ist  $Z(X - x, -x) = Z(X, 0) - x$  und ferner  $Z(X - x, 0) = Z(X - x, x - x) = Z(X, x) - x$ . Somit folgt

$$I = \gamma_j \mathbb{E}_j^0 \left[ \int_{\mathbb{R}^d} g(Z, Z(x) - x, -x) \mathbb{1}\{Z \subset Z(x)\} \Phi_k(dx) \right]$$

und damit die Behauptung. □

**6.3.17 Folgerung.** Für  $i, j, k \in \{0, \dots, d\}$  gilt

$$\gamma_j \mathbb{E}_j^0 \left[ \sum_{G \in \mathcal{S}_k} V_i(G) \right] = \gamma_k \mathbb{E}_k^0 [V_i(Z) \text{card } \mathcal{S}_j]. \quad (6.3.15)$$

Speziell gilt

$$\gamma_j n_{jk} = \gamma_k n_{kj}. \quad (6.3.16)$$

*Beweis.* Sei zunächst  $j \leq k$ . Man wähle in (6.3.14)  $g(F, G) := V_i(G) = V_i(G - c(G))$ , da  $V_i$  verschiebungsinvariant. Dann folgt (6.3.15).

Im Fall  $j > k$  muss man in (6.3.13) die Rollen von  $j$  und  $k$  vertauschen und  $g(F, G) := V_i(F)$  wählen. Dann folgt wieder (6.3.15).

Für  $i = 0$  folgt (6.3.16). □

**6.3.18 Folgerung.** Es gilt

$$\gamma_0 \mathbb{E}_0^0 \left[ \sum_{G \in \mathcal{S}_1} V_1(G) \right] = 2\gamma_1 \mathbb{E}_1^0[V_1(Z)]. \quad (6.3.17)$$

*Beweis.* Aus (6.3.15) für  $j = 0, i = k = 1$  folgt

$$\gamma_0 \mathbb{E}_0^0 \left[ \sum_{G \in \mathcal{S}_1} V_1(G) \right] = \gamma_1 \mathbb{E}_1^0[V_1(Z) \underbrace{\text{card } \mathcal{F}_0(Z)}_{=2, \text{ da } Z \text{ Kante}}] = 2\gamma_1 \mathbb{E}_1^0[V_1(Z)].$$

□

**6.3.19 Definition.** Sei  $P$  ein Polytop mit  $\dim P = d$  und  $F$  eine Seite von  $P$ . Für  $z \in \text{relint } F$  sei

$$S(P, F) := \{\alpha(x - z) : x \in P, \alpha \geq 0\}$$

und

$$\beta(F, P) := \frac{1}{\kappa_d} \lambda_d(S(P, F) \cap B^d).$$

Man nennt  $\beta(F, P)$  den *inneren Winkel* von  $P$  an der Seite  $F$ . Diese Definition ist unabhängig von der Wahl von  $z \in \text{relint } F$ .

**6.3.20 Theorem.** Sei  $f: \mathcal{K}' \rightarrow [0, \infty]$  messbar und translationsinvariant. Sei  $j \in \{0, \dots, d\}$ . Dann gilt

$$\gamma_d \mathbb{E}_d^0 \left[ \sum_{F \in \mathcal{S}_j} \beta(F, Z) f(F) \right] = \gamma_j \mathbb{E}_j^0[f(Z)]. \quad (6.3.18)$$

Insbesondere ist

$$\gamma_j = \gamma_d \mathbb{E}_d^0 \left[ \sum_{F \in \mathcal{S}_j} \beta(F, Z) \right]. \quad (6.3.19)$$

*Beweis.* Wir verwenden (6.3.14) für  $k = d$ , also

$$\gamma_j \mathbb{E}_j^0 \left[ \sum_{G \in \mathcal{S}_d} g(Z - c(G), G - c(G)) \right] = \gamma_d \mathbb{E}_d^0 \left[ \sum_{F \in \mathcal{S}_j} g(F, Z) \right] \quad (6.3.20)$$

mit  $g(F, G) := \beta(F, G)f(F)$ , wobei  $\beta(F', G') := 0$ , falls  $G'$  kein volldimensionales Polytop ist oder falls  $F'$  keine Seite von  $G'$  ist. Dann ist die linke Seite von (6.3.18) gleich der rechten Seite von (6.3.20) und die linke Seite von (6.3.20) gleich

$$\gamma_j \mathbb{E}_j^0 \left[ \sum_{G \in \mathcal{S}_d} \beta(Z - c(G), G - c(G)) f(Z) \right] = \gamma_j \mathbb{E}_j^0 \left[ f(Z) \underbrace{\sum_{G \in \mathcal{S}_d} \beta(Z, G)}_{=1} \right] = \gamma_j \mathbb{E}_j^0[f(Z)],$$

was gerade die rechte Seite von (6.3.18) ist.

Für  $f \equiv 1$  folgt (6.3.19). □

**6.3.21 Satz.** Es gilt

$$\sum_{j=0}^d (-1)^j \gamma_j = 0.$$

*Beweis.* Für jedes Polytop  $P$  mit  $\dim P = d$  gilt die *Gramsche Beziehung* (vgl. [4, Seite 458])

$$\sum_{j=0}^d (-1)^j \sum_{F \in \mathcal{F}_j(P)} \beta(F, P) = 0. \quad (6.3.21)$$

Die Behauptung folgt damit aus (6.3.19).  $\square$

Im Fall  $d = 2$  bedeutet (6.3.21) für ein Polygon  $P$  mit  $n$  Ecken und Innenwinkeln  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  gerade

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k - \frac{n}{2} + 1 = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^n \alpha_k = \frac{n-2}{2}.$$

**6.3.22 Satz.** *Im Fall  $d = 2$  gilt*

$$n_{20} = \frac{2n_{02}}{n_{02} - 2}, \quad (6.3.22)$$

$$\gamma_0 = \frac{2}{n_{02} - 2} \gamma_2 \quad (6.3.23)$$

und

$$\gamma_1 = \frac{n_{02}}{n_{02} - 2} \gamma_2. \quad (6.3.24)$$

*Beweis.* Aus (6.3.16) folgt

$$\gamma_0 n_{02} = \gamma_2 n_{20}, \quad (6.3.25)$$

$$\gamma_1 n_{10} = \gamma_0 n_{01}, \quad (6.3.26)$$

d.h. wegen  $n_{10} = 2$  und  $n_{01} = n_{02}$  (vgl. Bemerkung 6.3.15)

$$2\gamma_1 = \gamma_0 n_{02}. \quad (6.3.27)$$

Ferner gilt wegen Satz 6.3.21

$$\gamma_0 - \gamma_1 + \gamma_2 = 0. \quad (6.3.28)$$

Aus (6.3.27) und (6.3.28) folgt

$$\gamma_0 - \gamma_0 \frac{n_{02}}{2} + \gamma_2 = 0.$$

Mit (6.3.25) folgt

$$\gamma_2 \frac{n_{20}}{n_{02}} - \gamma_2 \frac{n_{20}}{2} + \gamma_2 = 0$$

und damit (6.3.22). Aus (6.3.25) und (6.3.22) folgt (6.3.23). Aus (6.3.27) folgt dann (6.3.24).  $\square$

**6.3.23 Beispiel.** Es gelte  $d = 2$  und  $n_{02} = 3$  (Letzteres ist bei einem “genügend zufälligen“ Voronoi-Mosaik der Fall). Dann liefert Satz 6.3.22

$$n_{20} = 6, \quad \gamma_0 = 2\gamma_2 \text{ und } \gamma_1 = 3\gamma_2.$$

**6.3.24 Beispiel.** Es gelte  $d = 2$  und  $n_{02} = 4$  (Das ist bei einem Geraden-Mosaik der Fall). Dann liefert Satz 6.3.22

$$n_{20} = 4, \quad \gamma_0 = \gamma_2 \text{ und } \gamma_1 = 2\gamma_2.$$

**6.3.25 Bemerkung.** Es gelte  $d = 2$ . Jede Ecke sende die “Masse“ 1 an die anliegenden Zellen. Das Massentransportprinzip besagt:

$$\mathbb{E}[\text{aus Einheitsfläche gesendete Masse}] = \mathbb{E}[\text{in Einheitsfläche empfangene Masse}],$$

also  $\gamma_0 n_{02} = \gamma_2 n_{20}$ .

Nun sende jede Ecke den Innenwinkel an die jeweilige Zelle. Dann liefert das Massentransportprinzip  $\gamma_0 = \gamma_2 \frac{n_{20}-2}{2}$ . Das Massentransportprinzip ist eine Version der Austauschformel von Neveu.

## 6.4 Poisson-Voronoi-Mosaike (nicht mehr behandelt)

## Literatur

- [1] Norbert Henze: Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie (Stochastik II), Vorlesungsskript, Karlsruhe, 2010.
- [2] Achim Klenke: Wahrscheinlichkeitstheorie, 2. Auflage, Springer, Berlin, Heidelberg, 2008.
- [3] Daniel Hug and Günter Last: Räumliche Stochastik. Vorlesungsskript, Karlsruhe, 2014.
- [4] Rolf Schneider and Wolfgang Weil: Stochastic and Integral Geometry. Springer, Berlin, Heidelberg, 2008.
- [5] Martina Zähle: Random processes of Hausdorff rectifiable closed sets. Math. Nachr. **108** (1982), 49-72.