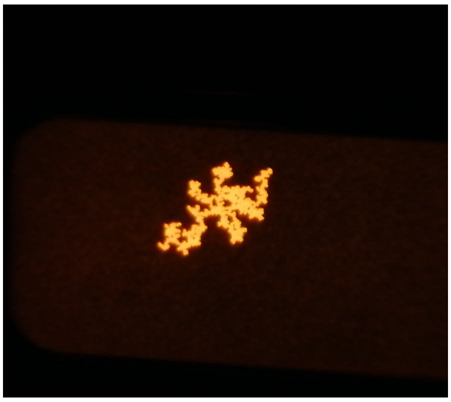
Karlsruher Institut für Technologie

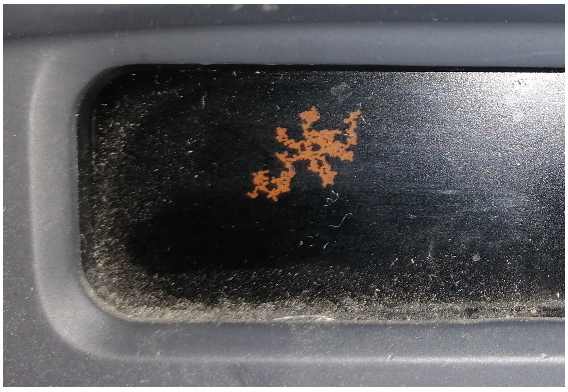
Trash

Contents

1 Einleitung

External DLA beschreibt einen stochastischen Prozess, welcher zumindest in ähnlicher Form in natürlichen Prozessen beobachtbar ist. Er ähnelt zum Beispiel der fraktalen Gestalt eines sich kreisförmig ausbreitenden Risses einer Glasscheibe, oder eines Risses eines Kristallfluids wie in LCD Displays in alten Autoradios (siehe Fotos). Er kann auch in Schneeflocken oder in elektrostatischen Anhaftungen an Metallen beobachtet werden. Die Formalisierung solcher Prozesse ist sehr aktuell und die sehr konstruktive Definition erlaubten bisher nur mühsame Folgerungen über Struktur und Verhalten des Prozesses. Wir werden uns Modelle auf $\mathbb{Z}^2$, sowie auf anderen Graphen, darunter auch fraktale Graphen, anschauen, und außerdem versuchen, eine Approximation der bisherigen Definition zu finden, die grundsätzlich handlicher ist und auf einfachere Weise zu Erkenntnissen führt. Wir werden außerdem diese Arbeit mit einigen Python Simulationen begleiten. Der Code ist frei verfügbar auf Github.





2 harmonic measure

For the following we are interested in letting start the random walk "from infinity". Thus we are looking for someting like $\lim_{|x|\to\infty} h_A(x,y)$ for $y \in A$. This is solved the following way. Define the *escape probability* from A

$$e_A(x) := \mathbb{1}\{x \in A\}\mathbb{P}(T_A^+ = \infty), \quad x \in \mathbb{Z}^2$$

and the *capacity* of A

$$cap(A) := \sum_{x\in\mathbb{Z}^2} e_A(x).$$

Note that this sum is finite since A is finite. Now we can define the *harmonic measure* (from infinity) of A as

$$h_A(x) := \frac{e_A(x)}{cap(A)}, \quad x \in \mathbb{Z}^2.$$

The idea here is to use the symmetry of random walks and to not look the probability of coming from infinity to hit A, but actually starting in A and stating the probability to escape A, which means to never hit A again and therefore necessarily move away to infinity. We finally define the harmonic measure $h = (h_A)_{A\in\mathcal{P}_f}$.

3 A naive attempt

We will look closer at the thought of the last Remark and find a reason, why this way of choosing a random line intersecting $K_0 \in \mathcal{K}^2$ is maybe not the best idea.

Definition 3.0.1. Let $\gamma \sim \mathcal{U}([0,\pi))$ and for $\alpha \in [0,\pi)$ define $y_\alpha \sim \mathcal{U}(M_\alpha(K_0))$ where

$$M_\alpha(K) := \begin{cases} \{h \in \mathbb{R} \mid L_{\binom{0}{h},\binom{1}{0}} \cap K \neq \emptyset\}, & \text{if } \alpha = 0 \\ \{h \in \mathbb{R} \mid L_{\binom{h}{0},\binom{cos(\alpha)}{sin(\alpha)}} \cap K \neq \emptyset\}, & \text{if } \alpha \in (0,\pi). \end{cases}$$

For $K \in \mathcal{K}^2$ define

$$\nu_{K_0}(K) := \int_{[0,\pi)} \mathbb{P}_{y_\alpha}(M_\alpha(K \cap K_0))\mathbb{P}_\gamma(d\alpha).$$

Interpretation: $\nu_{K_0}(K)$ is the probability that a random line which intersects with K_0 also intersects with $K_0 \cap K$.
Conjecture: $\nu_{K_0}(K) = \frac{\mu_1(K\cap K_0)}{\mu_1(K_0)}$ for $K, K_0 \in \mathcal{K}^2$ (μ_1 Gradenmaß).

Remark 3.0.1. Note that $M_\alpha(K) \in \mathcal{K}^1$ for all $K \in \mathcal{K}^2$ and $\alpha \in [0,\pi)$ (Proof). Proof rotation symmetry.

Example 3.0.1. Let $0 < r < R$ and $K_0 := B_R$ and analogously $K := B_r$. Note that $K, K_0 \in \mathcal{K}^2$ and $K \subset K_0$. Then by trigonometry we get

$$M_\alpha(K_0) = \begin{cases} [-R,R], & \text{if } \alpha = 0, \\ [-\frac{R}{sin(\alpha)}, \frac{R}{sin(\alpha)}], & \text{if } \alpha \in (0,\pi) \end{cases}$$

and analogously $M_\alpha(K)$. Finally we get

$$\begin{aligned} \nu_{K_0}(K) &= \int_{[0,\pi)} \mathbb{P}_{y_\alpha}(M_\alpha(K \cap \mathcal{K}_0))\mathbb{P}_\gamma(d\alpha) \\ &= \int_{[0,\pi)} \frac{\lambda(M_\alpha(K))}{\lambda(M_\alpha(K_0))} \frac{d\alpha}{\lambda([0,\pi))} \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{[0,\pi)} \frac{2r}{2R} d\alpha = \frac{1}{\pi}\frac{r}{R}\int_{[0,\pi)} 1 d\alpha = \frac{r}{R} \end{aligned}$$

This result makes sense considering the symmetries of the balls B_r and B_R and the relation of their diameters.

Example 3.0.2. Let $0 < r \leq \frac{R}{\sqrt{2}}$, $K_0 := B_R$ as above and $K := [-r,r]^2$. Note that $K, K_0 \in \mathcal{K}^2$ and $K \subset K_0$. We get

$$M_\alpha(K) = \begin{cases} [-r,r], & \text{if } \alpha \in \{0, \frac{\pi}{2}\}, \\ [-r(1+\frac{1}{tan(\alpha)}),\ r(1+\frac{1}{tan(\alpha)})], & \text{if } \alpha \in (0,\pi) \setminus \{\frac{\pi}{2}\} \end{cases}$$

and finally

$$\begin{aligned}\nu_{K_0}(K) &= \int_{[0,\pi)} \mathbb{P}_{y_\alpha}(M_\alpha(K))\mathbb{P}_\gamma(d\alpha)\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{(0,\pi)\setminus\{\frac{\pi}{2}\}} \frac{r}{R}(sin(\alpha)+cos(\alpha))d\alpha\\ &= \frac{r}{R\pi}[-cos(\alpha)+sin(\alpha)]_0^\pi = \frac{r}{R\pi}(1+1) = \frac{2r}{R\pi}\end{aligned}$$

Example 3.0.3. Let $K_0 := B_R$ and $K := [-r, r]$ for some $0 < r \leq R$. Note $K_0, K \in \mathcal{K}^2$ and $K \subset K_0$. Then

$$M_\alpha(K) = \begin{cases}\{0\}, & \alpha = 0,\\ [-r, r], & \alpha \in (0, \pi).\end{cases}$$

and finally

$$\nu_{K_0}(K) = \frac{1}{\pi}\int_{(0,\pi)} \frac{r}{R} sin(\alpha)d\alpha = \frac{2r}{R\pi}.$$

Remark 3.0.2. Only fair if K_0 symmetric.

References

[1] N. Henze. *Maß und Wahrscheinlichkeitstheorie (Stochastik II)*. Karlsruher Institut für Technologie, Karlsruhe, 2010

[2] Daniel Hug, Günter Last, Steffen Winter. *Stochastic Geometry, Lecture Notes (summer term 2020)*. Institute of Technologie, Karlsruhe

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich diese Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt, die wörtlich oder inhaltlich übernommenen Stellen als solche kenntlich gemacht und die Satzung des Karlsruher Instituts für Technologie zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis in der jeweils gültigen Fassung beachtet habe.

Karlsruhe, den 10. März 2020