Institut für Stochastik
Prof. Dr. D. Hug · Dr. F. Nestmann

Stochastische Geometrie (SS2019)

Übungsblatt 5

Aufgabe 1 (Schätzung der Intensität)
Es sei $\gamma > 0$ und ξ ein Poisson-Prozess in $\mathbb{R}^d$ mit Intensitätsmaß $\gamma\lambda_d$.

(a) Es sei $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ mit $0 < \lambda_d(B) < \infty$. Zeigen Sie, dass

$$\widehat{\gamma}_B := \frac{\xi(B)}{\lambda_d(B)}$$

ein erwartungstreuer Schätzer für γ ist.

(b) Zeigen Sie, dass der Schätzer aus (a) *schwach konsistent* in folgendem Sinne ist: Ist $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Folge messbarer Mengen in $\mathbb{R}^d$ mit $0 < \lambda_d(B_n) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, und $\lambda_d(B_n) \to \infty$, dann gilt für alle $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\big(\big|\widehat{\gamma}_{B_n} - \gamma\big| > \varepsilon\big) = 0.$$

(c) Zeigen Sie, dass der Schätzer aus (a) *stark konsistent* in folgendem Sinne ist: Ist $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge kompakter Mengen in $\mathbb{R}^d$ mit $0 < \lambda_d(B_n) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, und $\lambda_d(B_n) \to \infty$, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{\gamma}_{B_n} = \gamma \qquad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

Lösung:

(a) Es gilt

$$\mathbb{E}\widehat{\gamma}_B = \frac{\mathbb{E}\xi(B)}{\lambda_d(B)} = \frac{\gamma\lambda_d(B)}{\lambda_d(B)} = \gamma.$$

(b) Mit $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\xi(B)) = \gamma\lambda_d(B)$ für $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ gilt für $\varepsilon > 0$ mit der Ungleichung von Tschebyschev

$$\mathbb{P}\big(\big|\widehat{\gamma}_{B_n} - \gamma\big| > \varepsilon\big) \leq \frac{\mathbb{V}\mathrm{ar}(\widehat{\gamma}_{B_n})}{\varepsilon^2} = \frac{\gamma\lambda_d(B_n)}{\varepsilon^2(\lambda_d(B_n))^2} = \frac{\gamma}{\varepsilon\lambda_d(B_n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Damit ist $\widehat{\gamma}$ schwach konsistent.

(c) Es existieren eine Folge beschränkter und paarweise disjunkter Mengen $U_1, U_2, \ldots \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ mit $\lambda_d(U_n) = 1$, $n \in \mathbb{N}$, und eine monotone Folge $k_1, k_2, \ldots \in \mathbb{N}$ mit $k_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, sodass $\bigcup_{i=1}^{k_n} U_i \subset B_n$ und $\lambda_d\Big(B_n \setminus \bigcup_{i=1}^{k_n} U_i\Big) \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten. Weiterhin existieren eine Folge beschränkter und paarweise disjunkter Mengen $V_1, V_2, \ldots \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ mit $\lambda_n(V_n) = 1$, $n \in \mathbb{N}$, und eine monotone Folge $l_1, l_2, \ldots \in \mathbb{N}$ mit $l_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, sodass $B_n \subset \bigcup_{i=1}^{l_n} V_i$ und $\lambda_d\Big(\bigcup_{i=1}^{l_n} V_i \setminus B_n\Big) \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten. Damit gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{k_n}{\lambda_d(B_n)} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{k_n} \xi(U_i)}{k_n} \leq \frac{\xi(B_n)}{\lambda_d(B_n)} \leq \frac{l_n}{\lambda_d(B_n)} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{l_n} \xi(V_i)}{l_n}.$$

Das starke Gesetz großer Zahlen für u.i.v.-Zufallsvariablen liefert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} \xi(U_i) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{l_n} \sum_{i=1}^{l_n} \xi(V_i) = \gamma \qquad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

Die Behauptung folgt nun aus

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{\lambda_d(B_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{l_n}{\lambda_d(W_n)} = 1.$$

Aufgabe 2 (Abbildungsprinzip)
Seien $\mathbb{X}$ und $\mathbb{Y}$ separable metrische Räume mit σ-Algebra $\mathcal{X}$ bzw. $\mathcal{Y}$. Sei weiter Φ ein Poisson-Prozess auf $\mathbb{X}$ mit Intensitätsmaß Θ und $g\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ eine messbare Abbildung mit der Eigenschaft, dass $\Theta \circ g^{-1}$ ein lokal-endliches Maß auf $\mathbb{Y}$ ist. Zeigen Sie:

(a) $\Psi := \Phi \circ g^{-1}$ ist ein Poissonprozess mit Intensitätsmaß $\Lambda := \Theta \circ g^{-1}$.

(b) Sei $A \in \mathcal{X}$. Dann ist die Restriktion $\Phi_A := \Phi(\,\cdot \cap A)$ von Φ auf A ein Poisson-Prozess auf $\mathbb{X}$. Außerdem sind Φ_A und Φ_B unabhängig, wenn $A \in \mathcal{X}$ und $B \in \mathcal{X}$ disjunkte Mengen sind.

Lösung:

(a) Zuerst zeigen wir, dass $\Psi\colon \Omega \to N(\mathbb{Y})$ eine messbare Abbildung ist. Zunächst ist Φ f.s. ein Maß. Für beliebiges $A \in \mathcal{Y}$ gilt wegen der Messbarkeit von g

$$\Psi(A) = \Phi(g^{-1}(A)) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\} \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Außerdem folgt, dass

$$\{\Psi(A) = k\} = \{\Phi(g^{-1}(A)) = k\}$$

für beliebige $A \in \mathcal{Y}$ und $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ eine messbare Teilmenge von Ω ist. Sei nun $A \in \mathcal{Y}_b$ eine beschränkte Menge, dann gilt

$$\mathbb{E}\left[\Psi(A)\right] = \mathbb{E}\left[\Phi(g^{-1}(A))\right] = \Theta(g^{-1}(A)) = \Lambda(A) < \infty$$

nach Voraussetzung. Es folgt $\Psi(A) < \infty$ $\mathbb{P}$-fast sicher, also gilt insgesamt $\Psi \in N(\mathbb{Y})$ $\mathbb{P}$-fast sicher. Für $A \in \mathcal{Y}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\Psi(A) = k) &= \mathbb{P}(\Phi(g^{-1}(A)) = k) \\ &= e^{-\Theta(g^{-1}(A))}\frac{\Theta(g^{-1}(A))^k}{k!} \\ &= e^{-\Lambda(A)}\frac{\Lambda(A_1)^k}{k!}.\end{aligned}$$

Seien $n \geq 2$ und $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{Y}$ paarweise disjunkt. Da $A_1, \ldots, A_n$ paarweise disjunkt sind folgt, dass $g^{-1}(A_1), \ldots, g^{-1}(A_n)$ ebenfalls paarweise disjunkt sind. Also sind die Zufallsvariablen

$$\Psi(A_1) = \Phi(g^{-1}(A_1)), \ldots, \Psi(A_n) = \Phi(g^{-1}(A_n))$$

stochastisch unabhängig.

(b) Wir erhalten direkt, dass Φ_A das Intensitätsmaß $\Theta(\cdot \cap A)$ besitzt. Weiterhin übertragen sich die beiden definierenden Eigenschaften des Poisson-Prozesses von Φ auf Φ_A.

Um die Unabhängigkeit der Prozesse zu zeigen, müssen wir die Unabhängigkeit der erzeugten σ-Algebren zeigen. Diese werden von Ereignissen der Form $\{\Phi_A(A') = k\}$ bzw. $\{\Phi_B(B') = j\}$ mit $A' \subset A,\ B' \subset B$ messbar und $k, j \in \mathbb{N}_0$ erzeugt. Für Ereignisse dieser Art folgt die Unabhängigkeit also direkt, da Φ ein Poisson-Prozess ist und $A' \cap B' = \emptyset$ gilt.

Aufgabe 3
Zeigen Sie, dass K^* aus Definition 2.2.8 ein stochastischer Kern von $N(\mathbb{X})$ nach $N(\mathbb{X}\times\mathbb{Y})$ ist.

Lösung: Nach Definition 2.2.8 gilt

$$K^*(\varphi, A) = \int \mathbb{1}\left\{\sum_{j=1}^{k} \delta_{(x_j,y_j)} \in A\right\}\left(\bigotimes_{i\in\mathbb{N}} K(x_i,\cdot)\right)\big(d(y_i)_{i\in\mathbb{N}}\big),$$

wobei $\varphi = \sum_{i=1}^k \delta_{x_i} \in N(\mathbb{X})$ mit $k \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$ und $x_1, x_2, \ldots \in \mathbb{X}$, $A \in \mathcal{N}(\mathbb{X}\times\mathbb{Y})$ und K ein stochastischer Kern von $\mathbb{X}$ nach $\mathbb{Y}$ ist.
Für $\varphi = \sum_{i=1}^k \delta_{x_i} \in N(\mathbb{X})$ ist $\bigotimes_{i\in\mathbb{N}} K(x_i,\cdot)$ ein (möglicherweise unendliches) Produkt von Wahrscheinlichkeitsmaßen und damit wieder ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Somit überträgt sich die σ-Additivität von $\bigotimes_{i\in\mathbb{N}} K(x_i,\cdot)$ auf $K^*(\varphi,\cdot)$. Außerdem folgt direkt $K^*(\varphi, N(\mathbb{X}\times\mathbb{Y})) = 1$. Insgesamt ist $K^*(\varphi,\cdot)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(N(\mathbb{X}\times\mathbb{Y}), \mathcal{N}(\mathbb{X}\times\mathbb{Y}))$.
Für den Nachweis der Messbarkeit sei $A \in \mathcal{N}(\mathbb{X}\times\mathbb{Y})$. Wir halten zunächst fest, dass wegen Satz 2.1.8 lediglich die Messbarkeit der Abbildung

$$(\mathbb{N}\cup\{\infty\})\times\mathbb{X}^{\mathbb{N}} \ni \big(k,(x_i)_{i\in\mathbb{N}}\big) \mapsto \int \mathbb{1}\left\{\sum_{j=1}^{k} \delta_{(x_j,y_j)} \in A\right\}\left(\bigotimes_{i\in\mathbb{N}} K(x_i,\cdot)\right)\big(d(y_i)_{i\in\mathbb{N}}\big)$$

zu zeigen ist. Außerdem ist die Abbildung

$$(\mathbb{N}\cup\{\infty\})\times\mathbb{X}^{\mathbb{N}}\times\mathbb{Y}^{\mathbb{N}} \ni \big(k,(x_i)_{i\in\mathbb{N}},(y_i)_{i\in\mathbb{N}}\big) \mapsto \mathbb{1}\left\{\sum_{j=1}^{k} \delta_{(x_j,y_j)} \in A\right\}$$

messbar. Wir zeigen nun allgemeiner die Messbarkeit von

$$(\mathbb{N}\cup\{\infty\})\times\mathbb{X}^{\mathbb{N}} \ni \big(k,(x_i)_{i\in\mathbb{N}}\big) \mapsto \int f\big(k,(x_i)_{i\in\mathbb{N}},(y_i)_{i\in\mathbb{N}}\big)\left(\bigotimes_{i\in\mathbb{N}} K(x_i,\cdot)\right)\big(d(y_i)_{i\in\mathbb{N}}\big), \tag{1}$$

wobei

$$f\colon (\mathbb{N}\cup\{\infty\})\times\mathbb{X}^{\mathbb{N}}\times\mathbb{Y}^{\mathbb{N}} \to [0,\infty)$$

eine messbare Abbildung ist. Als messbare Abbildung lässt sich f durch Linearkombinationen von Indikatorfunktionen der Form

$$\mathbb{1}_D\big(k,(x_i)_{i\in\mathbb{N}},(y_i)_{i\in\mathbb{N}}\big), \qquad \big(k,(x_i)_{i\in\mathbb{N}},(y_i)_{i\in\mathbb{N}}\big) \in (\mathbb{N}\cup\{\infty\})\times\mathbb{X}^{\mathbb{N}}\times\mathbb{Y}^{\mathbb{N}},$$

von unten approximieren, wobei $D \subset (\mathbb{N}\cup\{\infty\})\times\mathbb{X}^{\mathbb{N}}\times\mathbb{Y}^{\mathbb{N}}$ eine messbare Menge ist. Es sei $\mathcal{D}$ das Mengensystem aller messbarer Mengen $D \subset (\mathbb{N}\cup\{\infty\})\times\mathbb{X}^{\mathbb{N}}\times\mathbb{Y}^{\mathbb{N}}$, sodass

$$(\mathbb{N}\cup\{\infty\})\times\mathbb{X}^{\mathbb{N}} \ni \big(k,(x_i)_{i\in\mathbb{N}}\big) \mapsto \int \mathbb{1}_D\big(k,(x_i)_{i\in\mathbb{N}},(y_i)_{i\in\mathbb{N}}\big)\left(\bigotimes_{i\in\mathbb{N}} K(x_i,\cdot)\right)\big(d(y_i)_{i\in\mathbb{N}}\big) \tag{2}$$

eine messbare Abbildung ist. Man rechnet leicht nach, dass $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System ist.
Es sei speziell $D = N\times B\times C$, wobei $N \subset \mathbb{N}\cup\{\infty\}$ eine messbare Menge ist und $B \in \mathcal{X}^{\mathbb{N}}$ und $C \in \mathcal{Y}^{\mathbb{N}}$ Zylindermengen sind, d.h. es gibt $l, m \in \mathbb{N}$, $B_1,\ldots,B_l \in \mathcal{X}$ und $C_1,\ldots,C_m \in \mathcal{Y}$, sodass

$$B = B_1\times B_2\times\cdots\times B_l \times \bigtimes_{i=l+1}^{\infty} \mathbb{X} \qquad \text{und} \qquad C = C_1\times C_2\times\cdots\times C_m \times \bigtimes_{i=m+1}^{\infty} \mathbb{Y}.$$

Es gilt

$$
\begin{aligned}
&\int \mathbb{1}_D\big(k, (x_i)_{i\in\mathbb{N}}, (y_i)_{i\in\mathbb{N}}\big) \left(\bigotimes_{i\in\mathbb{N}} K(x_i,\cdot)\right)\big(d(y_i)_{i\in\mathbb{N}}\big) \\
&\quad = \int \mathbb{1}\{k\in N\} \prod_{n=1}^{l} \mathbb{1}\{x_n \in B_n\} \prod_{j=1}^{m} \mathbb{1}\{y_j \in C_j\} \left(\bigotimes_{i\in\mathbb{N}} K(x_i,\cdot)\right)\big(d(y_i)_{i\in\mathbb{N}}\big) \\
&\quad = \mathbb{1}\{k\in N\} \prod_{n=1}^{l} \mathbb{1}\{x_n \in B_n\} \prod_{j=1}^{m} K(x_j, C_j). \qquad (3)
\end{aligned}
$$

Die rechte Seite der vorangegangenen Gleichung ist messbar in $\big(k,(x_i)_{i\in\mathbb{N}}\big)$, da K ein stochastischer Kern ist. Also gilt $D \in \mathcal{D}$. Insgesamt enthält $\mathcal{D}$ somit einen $\cap$-stabilen Erzeuger der σ-Algebra auf $(\mathbb{N}\cup\{\infty\})\times\mathbb{X}^{\mathbb{N}}\times\mathbb{Y}^{\mathbb{N}}$, woraus folgt, dass $\mathcal{D}$ gleich der σ-Algebra auf $(\mathbb{N}\cup\{\infty\})\times\mathbb{X}^{\mathbb{N}}\times\mathbb{Y}^{\mathbb{N}}$ ist. Folglich sind also alle Abbildungen der Form (2) messbar. Da sich die rechte Seite von (1) als Grenzwert einer Funktionenfolge bestehend aus Linearkombinationen von Funktionen der Form (3) ergibt, folgt die Messbarkeit von (1).

Aufgabe 4 (p-Verdünnungen)
Es seien $p : \mathbb{X} \to [0,1]$ eine messbare Abbildung, Φ ein Punktprozess auf $\mathbb{X}$ und Φ_p die p-Verdünnung von Φ (siehe Definition 2.2.14).

(a) Sei $A \in \mathcal{X}$. Zu Φ sei $\Phi_A := \Phi(\,\cdot \cap A)$ die Restriktion von Φ auf A. Kann man Φ_A als eine p-Verdünnung von Φ interpretieren? Falls ja, wie muss p gewählt werden?

(b) Zeigen Sie, dass sich Φ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ stets als Überlagerung geeigneter identisch verteilter Punktprozesse $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ schreiben lässt mit der Eigenschaft, dass aus $\mathbb{P}(\Phi(\mathbb{X}) \geq 1) > 0$ folgt, dass
$$\mathbb{P}(\Phi_i(\mathbb{X}) \geq 1) > 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

(c) Zeigen Sie, dass (b) falsch ist, wenn man zusätzlich fordert, dass die Φ_i unabhängig sein sollen.

(d) Zeigen Sie, dass ein Poisson-Prozess Φ mit lokal-endlichem Intensitätsmaß Λ *unbegrenzt teilbar* ist, d.h. für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt
$$\Phi \overset{d}{=} \Phi_1 + \ldots + \Phi_n$$
mit geeignet gewählten unabhängigen, identisch verteilten $\Phi_1, \dots, \Phi_n$.

Lösung: Wiederholung: Nach Bemerkung 2.1.13 gibt es $\mathbb{X}$-wertige Zufallsvariablen $\xi_i, i \in \mathbb{N}$, und eine $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$-wertige Zufallsvariable τ mit
$$\Phi = \sum_{i=1}^{\tau} \delta_{\xi_i}.$$
Es sei K der durch
$$K(x, \cdot) := (1 - p(x))\delta_0 + p(x)\delta_1, \quad x \in \mathbb{X},$$
definierte stochastische Kern von $\mathbb{X}$ nach $\{0,1\}$. Außerdem sei Ψ eine K-Markierung von Φ, d.h. es gilt
$$\Psi = \sum_{i=1}^{\tau} \delta_{(\xi_i, Y_i)},$$
wobei bedingt nach $\tau, \xi_1, \xi_2, \dots$ die Zufallsvariablen $Y_1, Y_2, \dots$ unabhängig sind mit $Y_i \sim K(\xi_i, \cdot)$, $i \in \mathbb{N}$. Die p-Verdünnung Φ_p von Φ ist dann nach Definition 2.2.14 der Punktprozess $\Psi(\cdot \times \{1\})$. Es gilt
$$\Phi_p(\cdot) = \Psi(\cdot \times \{1\}) = \sum_{i=1}^{\tau} \delta_{(\xi_i, Y_i)}(\cdot \times \{1\}) = \sum_{i=1}^{\tau} \delta_{\xi_i}(\cdot)\mathbb{1}\{Y_i = 1\}.$$

(a) Ja. Wähle $p(x) = \mathbb{1}_A(x)$ und $Y_i = \mathbb{1}\{\xi_i \in A\}$, $i \in \mathbb{N}$. Dann gilt
$$\Phi_p = \sum_{i=1}^{\tau} \delta_{\xi_i}\mathbb{1}\{Y_i = 1\} = \sum_{i=1}^{\tau} \delta_{\xi_i}\mathbb{1}_A(\xi_i) = \Phi_A.$$

(b) Es sei $Z_1, Z_2, \dots$ eine von Φ unabhängige Folge unabhängiger Zufallsvariablen, die jeweils auf der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$ gleichverteilt sind. Dann gilt
$$\Phi = \sum_{i=1}^{\tau} \delta_{\xi_i} = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\sum_{i=1}^{\tau} \mathbb{1}\{Z_i = k\}\delta_{\xi_i}}_{=:\Phi_k} = \sum_{k=1}^{n} \Phi_k.$$

Aus der Unabhängigkeit der Folge (Z_i) von Φ und der Tatsache
$$\{\Phi_k(\mathbb{X}) \geq 1\} \subset \{\Phi(\mathbb{X}) \geq 1\} = \{\tau \geq 1\}$$

folgt

$$\mathbb{P}(\Phi_k(\mathbb{X}) \geq 1) = \mathbb{P}(\Phi_k(\mathbb{X}) \geq 1,\, \tau \geq 1) \geq \mathbb{P}(Z_1 = k,\, \tau \geq 1) = \frac{1}{n} \cdot \mathbb{P}(\tau \geq 1) > 0.$$

Alternativ kann auch wie folgt argumentiert werden: Es gilt

$$\begin{aligned} 0 < \mathbb{P}(\Phi(\mathbb{X}) \geq 1) &\leq \mathbb{P}(\text{es gibt ein } k \in \{1, \ldots, n\} \text{ mit } \Phi_k(\mathbb{X}) \geq 1) \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\Phi_k(\mathbb{X}) \geq 1) \\ &= n\mathbb{P}(\Phi_1(\mathbb{X}) \geq 1). \end{aligned}$$

(c) Wähle $\Phi := \delta_x$ für ein festes $x \in \mathbb{X}$. Angenommen es gibt ein $n \geq 2$ und u.i.v. $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ mit $\delta_x = \Phi_1 + \ldots + \Phi_n$, dann gilt für $i \in \{1, \ldots, n\}$ f.s. $\Phi_i(\mathbb{X} \setminus \{x\}) = 0$ und außerdem $\Phi_i\{x\} \in \{0, 1\}$, also $\Phi_i\{x\} \sim \mathrm{Bern}(p_i)$ für ein $p_i \geq 0$. Da $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ identisch verteilt sind, folgt $p_1 = \ldots = p_n =: p$. Außerdem gilt

$$0 = \mathbb{P}(\delta_x\{x\} = 2) = \mathbb{P}((\Phi_1 + \ldots + \Phi_n)\{x\} = 2) = \binom{n}{2} p^2 (1-p)^{n-2},$$

also $p \in \{0, 1\}$. Aber weder für $p = 1$ noch für $p = 0$ gilt $\Phi_1 + \ldots + \Phi_n = \delta_x$.

(d) Es sei $\mathcal{U}$ die Gleichverteilung auf $\{1, \ldots, n\}$ und Ψ eine unabhängige $\mathcal{U}$-Markierung von Φ. Nach Satz 2.2.13 ist Ψ ein Poisson-Prozess mit Intensitätsmaß $\Lambda \otimes \mathcal{U}$. Dann sind

$$\Phi_1 := \Psi(\cdot \times \{1\}), \ldots, \Phi_n := \Psi(\cdot \times \{n\})$$

als Einschränkungen eines Poisson-Prozesses auf messbare Teilmengen wiederum Poisson-Prozesse. Diese haben jeweils Intensitätsmaß $\frac{1}{n}\Lambda$, da für $B \in \mathcal{X}$ und $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt

$$(\Lambda \otimes \mathcal{U})(B \times \{i\}) = \frac{1}{n}\Lambda(B).$$

Für den Nachweis der Unabhängigkeit von $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ schreiben wir

$$\Phi_i = \Psi(\cdot \times \{i\}) = \Psi_{|_{\mathbb{X} \times \{i\}}}(\cdot \times \{i\}).$$

Die $\Psi_{|_{\mathbb{X} \times \{i\}}}(\cdot \times \{i\})$ sind unabhängig, weil die Mengen $\mathbb{X} \times \{i\}, i \in \{1, \ldots, n\}$, disjunkt sind. Aus Aufgabe 3 von Übungsblatt 4 ist bekannt, dass $\Phi_1 + \ldots + \Phi_n$ ein Poisson-Prozess mit Intensitätsmaß $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\Lambda = \Lambda$ ist. Die Behauptung folgt nun aus Bemerkung 2.2.2.