Institut für Stochastik
Prof. Dr. D. Hug · Dr. F. Nestmann

Stochastische Geometrie (SS2019)

Übungsblatt 9

Aufgabe 1 (Der zufällige geometrische Graph)
Es sei $\gamma > 0$ und $\Phi = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{X_i}$ ein Poisson-Prozess auf $\mathbb{R}^d$ mit Intensitätsmaß $\Theta := \gamma\lambda_d$. Weiter sei $r > 0$ und $G_r(\Phi)$ der *zufällige geometrische Graph* mit Knotenmenge $\{X_1, X_2, \ldots\}$ und Kantenmenge

$$\{\{X_i, X_j\} : i, j \in \mathbb{N},\ i \neq j,\ \|X_i - X_j\| \leq 2r\}.$$

Wir betrachten den Punktprozess der isolierten Knoten in $G_r(\Phi)$, gegeben durch

$$\Phi_1 := \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}\{X_i \text{ ist isoliert in } G_r(\Phi)\}\delta_{X_i}.$$

Berechnen Sie das Intensitätsmaß von Φ_1.

Hinweis: Es gilt die folgende Variante der Mecke-Formel:
Es sei Φ ein Poisson-Prozess auf $\mathbb{X}$ mit lokal-endlichem Intensitätsmaß Θ. Dann gilt

$$\mathbb{E}\int_{\mathbb{X}} f(x, \Phi \setminus \delta_x)\,\Phi(\mathrm{d}x) = \int_{\mathbb{X}} \mathbb{E}f(x, \Phi)\,\Theta(\mathrm{d}x)$$

für alle messbaren Funktionen $f\colon \mathbb{X} \times \mathbf{N}(\mathbb{X}) \to [0, \infty]$, wobei für $\mu \in \mathbf{N}(\mathbb{X})$ und $x \in \mathbb{X}$ das Maß $\mu \setminus \delta_x$ durch

$$\mu \setminus \delta_x := \begin{cases} \mu - \delta_x, & \text{falls } \mu \geq \delta_x, \\ \mu, & \text{sonst,} \end{cases}$$

definiert ist.

Lösung: Für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Phi_1(A) &= \mathbb{E}\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}\{X_i \in A\}\mathbb{1}\{X_i \text{ ist isoliert in } G_r(\Phi)\} \\
&= \mathbb{E}\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}\{X_i \in A\} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{\infty} \mathbb{1}\{\|X_i - X_j\| > 2r\} \\
&= \mathbb{E}\int \mathbb{1}\{x \in A\} \prod_{z \in \Phi\setminus\delta_x} \mathbb{1}\{\|x - z\| > 2r\}\,\Phi(\mathrm{d}x).
\end{aligned}$$

Dabei ging im letzten Schritt ein, dass es sich bei Φ $\mathbb{P}$-fast sicher um ein einfaches Zählmaß handelt und wir somit Φ mit seinem Träger identifizieren können.

Mit Hilfe der Mecke-Formel (siehe Hinweis) und Satz 2.2.4 folgt weiter

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\int \prod_{z\in\Phi\setminus\delta_x} \mathbb{1}\{\|x-z\|>2r\}\mathbb{1}\{x\in A\}\,\Phi(\mathrm{d}x)\\
&\overset{\text{Mecke}}{=} \gamma\int_A \mathbb{E}\prod_{z\in\Phi}\mathbb{1}\{\|x-z\|>2r\}\,\mathrm{d}x\\
&= \gamma\int_A \mathbb{E}\exp\Bigg(\sum_{z\in\Phi}\log(\mathbb{1}\{\|x-z\|>2r\})\Bigg)\,\mathrm{d}x\\
&= \gamma\int_A \mathbb{E}\exp\Bigg(-\int -\log(\mathbb{1}\{\|x-z\|>2r\})\,\Phi(\mathrm{d}z)\Bigg)\,\mathrm{d}x\\
&\overset{\text{Satz 2.2.4}}{=} \gamma\int_A \exp\Bigg(-\gamma\int(1-\mathbb{1}\{\|x-z\|>2r\})\,\mathrm{d}z\Bigg)\,\mathrm{d}x\\
&= \gamma\int_A \exp\Bigg(-\gamma\int\mathbb{1}\{\|x-z\|\le 2r\}\,\mathrm{d}z\Bigg)\,\mathrm{d}x\\
&= \gamma\int_A \exp\big(-\gamma\kappa_d(2r)^d\big)\,\mathrm{d}x\\
&= \gamma\lambda_d(A)\exp\big(-\gamma\kappa_d(2r)^d\big).
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 (Boolesches Modell)
Es sei $Z = \bigcup_{i=1}^{\infty}(X_i + Z_i)$ ein stationäres Boolesches Modell im $\mathbb{R}^d$ mit Intensität γ und einer Kornverteilung $\mathbb{Q}$, die auf Mengen aus $\mathcal{C}^d$ konzentriert ist, die 0 enthalten. Weiter sei $v_d := \int_{\mathcal{C}^d} \lambda_d(K)\,\mathbb{Q}(\mathrm{d}K) < \infty$. Wir nennen einen Punkt $z \in Z$ *sichtbar*, falls

$$|\{i \in \mathbb{N} : z \in X_i + Z_i\}| = 1,$$

falls also z in genau einem Partikel des Booleschen Modells enthalten ist. Sei nun

$$\Phi := \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{X_i} \mathbb{1}\{X_i \text{ ist sichtbar}\}.$$

Zeigen Sie, dass Φ ein stationärer Punktprozess mit Intensität $\gamma_{\mathbb{Q}} := \gamma e^{-\gamma \mathbb{E}[\lambda_d(Z_1)]}$ ist.

Lösung: Es sei

$$\Psi := \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{(X_i, Z_i)}$$

der stationäre unabhängig markierte Poisson-Prozess, der dem Booleschen Modell zugrunde liegt und

$$\mu(\Psi, x) := \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}_{X_i + Z_i}(x), \qquad x \in \mathbb{R}^d.$$

Wir erhalten, dass ein Punkt $x \in \mathbb{R}^d$ genau dann sichtbar ist, wenn $\mu_\Psi(x) = 1$ ist. Daher gilt

$$\Phi(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{X_i}(A) \mathbb{1}\{\mu(\Psi, X_i) = 1\} = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{C}^d} \mathbb{1}\{x \in A\} \mathbb{1}\{\mu(\Psi, x) = 1\}\, \Psi(\mathrm{d}(x, K)), \qquad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

Die Stationarität folgt aus

$$\begin{aligned}
(\Phi + t)(A) &= \Phi(A - t) \\
&= \int \mathbb{1}\{x \in A - t\} \mathbb{1}\{\mu(\Psi, x) = 1\}\, \Psi(\mathrm{d}(x, K)) \\
&\overset{d}{=} \int \mathbb{1}\{x \in A - t\} \mathbb{1}\{\mu(\Psi - t, x) = 1\}\, (\Psi - t)(\mathrm{d}(x, K)) \\
&= \int \mathbb{1}\{x - t \in A - t\} \mathbb{1}\{\mu(\Psi - t, x - t) = 1\}\, \Psi(\mathrm{d}(x, K)) \\
&= \int \mathbb{1}\{x \in A\} \mathbb{1}\{\mu(\Psi, x) = 1\}\, \Psi(\mathrm{d}(x, K)) \\
&= \Phi(A), \qquad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad t \in \mathbb{R}^d.
\end{aligned}$$

Unter Verwendung der Mecke-Gleichung erhalten wir

$$\begin{aligned}
\gamma_{\mathbb{Q}} &= \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{x \in [0,1]^d\}\, \Phi(\mathrm{d}x) \\
&= \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{C}^d} \mathbb{1}\{x \in [0,1]^d\} \mathbb{1}\{\mu(\Psi, x) = 1\}\, \Psi(\mathrm{d}(x, K)) \\
&= \gamma \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathcal{C}^d} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}\{x \in [0,1]^d\} \mathbb{1}\{\mu(\Psi + \delta_{(x,K)}, x) = 1\}\right] \mathbb{Q}(\mathrm{d}K)\, \mathrm{d}x \\
&= \gamma \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}\{x \in [0,1]^d\} \mathbb{1}\{\mu(\Psi, x) = 0\}\right] \mathrm{d}x \\
&= \gamma \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{x \in [0,1]^d\} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}\{x \notin Z\}\right] \mathrm{d}x \\
&= \gamma \mathbb{P}(0 \notin Z) \\
&= \gamma e^{-\gamma \mathbb{E}[\lambda_d(Z_1)]},
\end{aligned}$$

wobei im vorletzten Schritt die Stationarität von Z einging und im letzten Schritt Satz 3.2.4 verwendet wurde.

Aufgabe 3 (Innere Volumina der Einheitskugel)
Bestimmen Sie alle inneren Volumina V_j, $j \in \{0, \dots, d\}$, der d-dimensionalen Einheitskugel B^d.

Lösung: Einerseits gilt für $r \geq 0$

$$V_d(B^d + rB^d) = (1+r)^d \kappa_d = \sum_{j=0}^{d} \binom{d}{j} r^{d-j} \kappa_d.$$

Andererseits folgt aus der Steiner-Formel

$$V_d(B^d + rB^d) = \sum_{j=0}^{d} \kappa_{d-j} r^{d-j} V_j(B^d).$$

Ein Vergleich der Koeffizienten ergibt

$$V_j(B^d) = \binom{d}{j} \frac{\kappa_d}{\kappa_{d-j}}.$$

Aufgabe 4 (Additivität der inneren Volumina)

(a) Es seien $K, L \in \mathcal{K}^d \setminus \{\emptyset\}$ mit $K \cup L \in \mathcal{K}^d$. Zeigen Sie für $\varepsilon \geq 0$

$$\mathbb{1}_{(K\cup L)+\varepsilon B^d} + \mathbb{1}_{(K\cap L)+\varepsilon B^d} = \mathbb{1}_{K+\varepsilon B^d} + \mathbb{1}_{L+\varepsilon B^d}.$$

(b) Folgern Sie aus (a), dass V_j für $j \in \{0, \dots, d\}$ additiv ist.

Lösung:

(a) Für $M \in \mathcal{K}^d \setminus \{\emptyset\}$ und $x \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$\mathbb{1}_{M+\varepsilon B^d}(x) = \mathbb{1}\{d(M,x) \leq \varepsilon\} = \mathbb{1}\{\|p(M,x) - x\| \leq \varepsilon\}.$$

Die zu beweisende Gleichung ist also äquivalent zu

$$\begin{aligned} &\mathbb{1}\{\|p(K\cup L,x) - x\| \leq \varepsilon\} + \mathbb{1}\{\|p(K\cap L,x) - x\| \leq \varepsilon\} \\ &= \mathbb{1}\{\|p(K,x) - x\| \leq \varepsilon\} + \mathbb{1}\{\|p(L,x) - x\| \leq \varepsilon\}, \quad x \in \mathbb{R}^d. \end{aligned} \tag{1}$$

Es sei $x \in \mathbb{R}^d$. Da (1) symmetrisch in K und L ist, können wir oBdA annehmen, dass $p(K\cup L, x) \in K$ gilt. Es folgt

$$d(K,x) \leq \|\underbrace{p(K\cup L,x)}_{\in K} - x\| = d(K\cup L, x) \leq d(K,x) \tag{2}$$

und nach Definition der metrischen Projektion erhalten wir

$$p(K,x) = p(K\cup L, x).$$

Daraus folgt wiederum

$$\mathbb{1}\{\|p(K\cup L,x) - x\| \leq \varepsilon\} = \mathbb{1}\{\|p(K,x) - x\| \leq \varepsilon\}. \tag{3}$$

Wir unterscheiden nun die beiden folgenden Fälle.

1. Fall: Es gelte $p(L,x) \in L \cap K$. Wir erhalten

$$d(L,x) \leq d(L\cap K, x) \leq \|p(L,x) - x\| = d(L,x),$$

also $d(L\cap K, x) = \|p(L,x) - x\|$ und somit $p(L\cap K, x) = p(L,x)$.

2. Fall: Es gelte $p(L,x) \in L \setminus K$. Wegen der Konvexität von $K \cup L$ gilt $[p(K,x), p(L,x)] \subset K \cup L$. Aus (2) und aus $p(L,x) \notin K \cap L$ folgt $d(K,x) = d(K\cup L, x) < d(L,x)$, also gilt $p(K,x) \notin L$, das heißt $p(K,x) \in K \setminus L$. Somit existiert ein minimales $\lambda \in (0,1)$ mit $\lambda p(K,x) + (1-\lambda)p(L,x) \in K \cap L$. Das heißt

$$\begin{aligned} d(K\cap L, x) &\leq \|\lambda p(K,x) + (1-\lambda)p(L,x) - x\| \\ &\leq \lambda\|p(K,x) - x\| + (1-\lambda)\|p(L,x) - x\| = \lambda d(K,x) + (1-\lambda) d(L,x) \\ &< d(L,x) \leq d(K\cap L, x), \end{aligned}$$

was ein Widerspruch ist.

Also tritt nur der 1. Fall ein, in dem gezeigt wurde, dass $p(L\cap K, x) = p(L,x)$ gilt, woraus folgt

$$\mathbb{1}\{\|p(K\cap L,x) - x\| \leq \varepsilon\} = \mathbb{1}\{\|p(L,x) - x\| \leq \varepsilon\}.$$

Zusammen mit (3) folgt also (1) und somit die Behauptung.

(b) Aus Teil (a) erhält man für $K, L \in \mathcal{K}^d$ mit $K \cup L \in \mathcal{K}^d$ und $\varepsilon \geq 0$

$$\begin{aligned}
V_d((K \cup L) + \varepsilon B^d) + V_d((K \cap L) + \varepsilon B^d) &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{(K \cup L) + \varepsilon B^d}(x) + \mathbb{1}_{(K \cap L) + \varepsilon B^d}(x) \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{K + \varepsilon B^d}(x) + \mathbb{1}_{L + \varepsilon B^d}(x) \,\mathrm{d}x \\
&= V_d(K + \varepsilon B^d) + V_d(L + \varepsilon B^d).
\end{aligned}$$

Wir müssen hierbei nicht fordern, dass K und L nichtleer sind, da andernfalls die Behauptung offensichtlich ist. Es folgt nun mit der Steiner-Formel für jedes $\varepsilon \geq 0$

$$\sum_{j=0}^{d} \kappa_{d-j} \varepsilon^{d-j} V_j(K \cup L) + \sum_{j=0}^{d} \kappa_{d-j} \varepsilon^{d-j} V_j(K \cap L) = \sum_{j=0}^{d} \kappa_{d-j} \varepsilon^{d-j} V_j(K) + \sum_{j=0}^{d} \kappa_{d-j} \varepsilon^{d-j} V_j(L)$$

und damit die Behauptung aus

$$\sum_{j=0}^{d} \kappa_{d-j} \varepsilon^{d-j} \big(V_j(K \cup L) + V_j(K \cap L)\big) = \sum_{j=0}^{d} \kappa_{d-j} \varepsilon^{d-j} \big(V_j(K) + V_j(L)\big).$$

Aufgabe 5 (Eine Abschätzung der inneren Volumina)
Die Menge $W \in \mathcal{K}^d$ enthalte eine Kugel mit Radius r, das heißt es gibt ein $x \in \mathbb{R}^d$ und ein $r > 0$ mit $x + rB^d \subset W$. Zeigen Sie für $j \in \{0, \dots, d-1\}$

$$V_j(W) \le \frac{(2^d - 1)V_d(W)}{\kappa_{d-j} r^{d-j}}.$$

Lösung: Es sei $j \in \{0, \dots, d-1\}$. Mit der Steiner-Formel erhalten wir

$$(2^d - 1)V_d(W) = V_d(2W) - V_d(W) \ge V_d(W + rB^d) - V_d(W) = \sum_{i=0}^{d-1} r^{d-i}\kappa_{d-i}V_i(W) \ge r^{d-j}\kappa_{d-j}V_j(W),$$

und damit die Behauptung.