Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Stochastik

Prof. Dr. D. Hug · Dr. F. Nestmann

Stochastische Geometrie (SS2019)

Übungsblatt 11

Aufgabe 1
Zeigen Sie, dass das in der Vorlesung definierte Maß μ auf G_d linksinvariant ist.

Aufgabe 2
Es seien $K, K_0 \in \mathcal{K}^d$ mit $K \subset K_0$ und $V_d(K_0) > 0$. Weiter sei $q \in \{0, \dots, d-1\}$ und

$$A_{K_0} := \{E \in A(d,q) : K_0 \cap E \neq \emptyset\}.$$

Eine $A(d,q)$-wertige Zufallsvariable X_q mit Verteilung $\frac{1}{\mu_q(A_{K_0})}\mu_q(\,\cdot\, \cap A_{K_0})$ bezeichnet man als *zufällige q-Ebene in K_0*.

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X_q \cap K \neq \emptyset)$. Dabei können Sie die inneren Volumina von K und K_0 als bekannt voraussetzen.

(b) Es seien $d = 2$, $e \in S^1$ und $0 < r \leq 1$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällige Gerade in $B(0,1)$ die Strecke $[-re, re]$ schneidet.

Aufgabe 3
Es seien $K \in \mathcal{K}^d$, $j \in \{0, \dots, d-1\}$, $r \geq 0$ und

$$A(r) := \{E_{d-j-1} \in A(d, d-j-1) : K \cap E_{d-j-1} = \emptyset, (K + rB^d) \cap E_{d-j-1} \neq \emptyset\}$$

(a) Beweisen Sie die folgende Version der Steiner-Formel:

$$V_j(K + rB^d) = \sum_{i=0}^{j} r^{j-i} \binom{d-i}{d-j} \frac{\kappa_{d-i}}{\kappa_{d-j}} V_i(K).$$

(b) Bestimmen Sie mithilfe von (a)

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{r} \mu_{d-j-1}(A(r)).$$

Man kann diesen Grenzwert interpretieren als das Maß der $(d-j-1)$-dimensionalen Ebenen, die K berühren.

Aufgabe 4
Es sei G eine lokalkompakte Gruppe mit abzählbarer Basis und der Hausdorffeigenschaft (später: $G = SO_d$). Sei μ ein Radon-Maß auf G, d.h. $\mu(A) < \infty$ für kompakte $A \in \mathcal{B}(G)$. Das Maß μ heißt *links-invariant* falls $\mu(gA) = \mu(A)$, *rechts-invariant* falls $\mu(Ag) = \mu(A)$ und *inversions-invariant* falls $\mu(A^{-1}) = \mu(A)$ für alle $g \in G$ und $A \in \mathcal{B}(G)$ gilt. Falls μ alle drei Eigenschaften hat, so nennt man es *invariant*. Ein links-invariantes (rechts-invariantes, invariantes) Maß auf $\mathcal{B}(G)$, welches nicht das Nullmaß ist, heißt *linkes Haarsches Maß (rechtes Haarsches Maß, Haarsches Maß)*.

Zeigen Sie, dass es auf der Drehgruppe SO_d ein eindeutiges Haarsches Maß ν mit $\nu(SO_d) = 1$ gibt.

Allgemeine Hinweise: (nicht zu zeigen, siehe z.B. Schneider & Weil, Kapitel 13):

(a) Jedes linke Haarsche Maß auf einer kompakten Gruppe G mit einer abzählbaren Basis ist invariant.

(b) Es sei G eine lokalkompakte Gruppe mit einer abzählbaren Basis und μ ein Haarsches Maß und ν ein linkes Haarsches Maß. Dann gilt $\mu = c\nu$ für ein $c > 0$.

(c) Die Drehgruppe SO_d ist eine kompakte topologische Gruppe mit abzählbarer Basis.

Tipps zum Vorgehen: Verwenden Sie das *sphärische Lebesgue-Maß* σ auf S^{d-1}, das durch

$$\sigma(A) := \int_{B^d} \mathbb{1}\left\{ \frac{x}{\|x\|} \in A \right\} \mathrm{d}x, \quad A \in \mathcal{B}(S^{d-1}),$$

gegeben ist. Mithilfe einer geeigneten Abbildung $\psi : (S^{d-1})^d \to SO_d$ kann das (nicht normierte) Maß

$$\bar{\nu}(\cdot) := \int_{(S^{d-1})^d} \mathbb{1}\{\psi(x_1, \ldots, x_d) \in \cdot\}\, \sigma^d(\mathrm{d}(x_1, \ldots, x_d))$$

definiert werden.

Die Aufgaben werden in der Übung am 12. Juli besprochen.