Institut für Stochastik
Prof. Dr. D. Hug · Dr. F. Nestmann

Stochastische Geometrie (SS2019)

Übungsblatt 13

Aufgabe 1 (Voraussetzung (4.2.3))
Es seien $\gamma > 0$, $\mathbb{Q}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{C}'$ mit

$$\int_{\mathcal{C}'} \lambda_d(K + C)\,\mathbb{Q}(\mathrm{d}K) < \infty, \qquad C \in \mathcal{C}^d,$$

und Ψ ein Poisson-Prozess in $\mathbb{R}^d \times \mathcal{C}'$ mit Intensitätsmaß $\gamma\lambda_d \otimes \mathbb{Q}$. Weiter seien $C \in \mathcal{C}'$ und

$$N_C := \int_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{C}'} \mathbf{1}\{(K + x) \cap C \neq \emptyset\}\,\Psi(\mathrm{d}(x, K)).$$

Zeigen Sie:

$$\mathbb{E}\left[r^{N_C}\right] < \infty, \qquad r \in \mathbb{R}.$$

Lösung: Wir verwenden den Abbildungssatz für Poissonprozesse mit

$$T\colon \mathbb{R}^d \times \mathcal{C}' \to \mathcal{C}', \quad (x, K) \mapsto T(x, K) := K + x.$$

Dann gilt

$$N_C = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{C}'} \mathbb{1}\{(K + x) \in \mathcal{F}_C\}\,\Psi(\mathrm{d}(x, K)) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{C}'} \mathbb{1}\{T(x, K) \in \mathcal{F}_C\}\,\Psi(\mathrm{d}(x, K)) = \Phi(\mathcal{F}_C),$$

wobei $\Phi = T(\Psi)$ ein stationärer Poissonprozess ist mit Intensitätsmaß

$$\Lambda(\cdot) = \big(T(\gamma\lambda_d \otimes \mathbb{Q})\big)(\cdot) := (\gamma\lambda_d \otimes \mathbb{Q})(T^{-1}(\cdot)) = \gamma \int_{\mathcal{C}'} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{K + x \in \cdot\}\,\mathrm{d}x\,\mathbb{Q}(\mathrm{d}K).$$

Dann gilt nach Satz 1.1.2 $\Lambda(\mathcal{F}_C) < \infty$ (beachte: $\mathcal{F}_C$ ist kompakt und Λ lokal-endlich) und folglich

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[r^{N_C}\right] &= \mathbb{E}\left[r^{\Phi(\mathcal{F}_C)}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} r^k\,\mathbb{P}(\Phi(\mathcal{F}_C) = k) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k\,\frac{e^{-\Lambda(\mathcal{F}_C)}\Lambda(\mathcal{F}_C)^k}{k!} \\ &= e^{-\Lambda(\mathcal{F}_C)} e^{r\Lambda(\mathcal{F}_C)} = e^{(r-1)\Lambda(\mathcal{F}_C)} = \left(e^{\Lambda(\mathcal{F}_C)}\right)^{r-1} < \infty, \qquad r \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Aufgabe 2 (Vgl. Aufgabe 2, Übungsblatt 11)
Es seien $M, K, K_0 \in \mathcal{K}'$ mit $K \subset K_0$, $V_d(K_0) > 0$ und

$$A_{K_0} := \{g \in G_d : K_0 \cap gM \neq \emptyset\}.$$

Weiter sei α eine G_d-wertige Zufallsvariable mit Verteilung $\frac{\mu(\cdot \cap A_{K_0})}{\mu(A_{K_0})}$.

(a) Die inneren Volumina von M, K und K_0 seien bekannt. Bestimmen Sie damit die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}(\alpha M \cap K \neq \emptyset).$$

(b) Nun sei $d = 2$, $e \in S^1$, $0 < r \leq 1$ und $K_0 = B^2$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}(\alpha\big([0,1]^2\big) \cap [-re, re] \neq \emptyset).$$

Hinweis: Verwenden Sie die Formel

$$V_i\big([0,1]^d\big) = \binom{d}{i}.$$

Lösung:

(a) Es gilt wegen $A_K \subset A_{K_0}$ und der kinematischen Hauptformel

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\alpha M \cap K \neq \emptyset) &= \frac{\mu(A_K \cap A_{K_0})}{\mu(A_{K_0})} = \frac{\mu(A_K)}{\mu(A_{K_0})} = \frac{\int_{G_d} \mathbb{1}\{gM \cap K \neq \emptyset\}\,\mu(\mathrm{d}g)}{\int_{G_d} \mathbb{1}\{gM \cap K_0 \neq \emptyset\}\,\mu(\mathrm{d}g)} \\ &= \frac{\sum\limits_{k=0}^{d} c_{0,d}^{k,d-k} V_k(K) V_{d-k}(M)}{\sum\limits_{k=0}^{d} c_{0,d}^{k,d-k} V_k(K_0) V_{d-k}(M)}.\end{aligned}$$

(b) Aus (a), Aufgabe 3 von Übungsblatt 9 und dem Hinweis folgt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\alpha\big([0,1]^2\big) \cap [-re, re] \neq \emptyset) &= \frac{\sum\limits_{k=0}^{2} c_{0,2}^{k,2-k} V_k([-re, re]) V_{2-k}([0,1]^2)}{\sum\limits_{k=0}^{2} c_{0,2}^{k,2-k} V_k(B^2) V_{2-k}([0,1]^2)} \\ &= \frac{c_{0,2}^{0,2} V_0([-re, re]) V_2([0,1]^2) + c_{0,2}^{1,1} V_1([-re, re]) V_1([0,1]^2) + 0}{\sum\limits_{k=0}^{2} c_{0,2}^{k,2-k} \binom{2}{k} \frac{\kappa_2}{\kappa_{2-k}} \binom{2}{2-k}} \\ &= \frac{1 + \frac{8r}{\pi}}{\sum\limits_{k=0}^{2} \kappa_k \binom{2}{k}} = \frac{1 + \frac{8r}{\pi}}{1 + 4 + \pi} \approx 0.12 + 0.31r.\end{aligned}$$

Aufgabe 3
Es seien $K \in \mathcal{K}^3$ mit $K \subset [0,1]^3$ und X_1 eine zufällige Gerade in $[0,1]^3$, definiert wie in Aufgabe 2 von Übungsblatt 11. Nehmen Sie an, Sie können für Realisierungen $X_1(\omega)$ der zufälligen Gerade feststellen, ob der Schnitt $X_1(\omega) \cap K$ leer ist und außerdem die Länge von $X_1(\omega) \cap K$ bestimmen. Konstruieren Sie nun erwartungstreue Schätzer für die Oberfläche und das Volumen von K.

Lösung: Nach Aufgabe 2 von Übungsblatt 11 besitzt X_1 die Verteilung $\dfrac{\mu_1(\,\cdot\, \cap A_{[0,1]^3})}{\mu_1(A_{[0,1]^3})}$, wobei

$$A_{K_0} := \{E \in A(3,1) : K_0 \cap E \neq \emptyset\}, \qquad K_0 \in \mathcal{K}^3.$$

Wegen $K \subset [0,1]^3$, gilt für $j \in \{0,1,2,3\}$

$$\mathbb{E}[V_j(K \cap X_1)] = \frac{\int_{A(3,1)} V_j(K \cap E)\, \mu_1(\mathrm{d}E)}{\int_{A(3,1)} V_0([0,1]^3 \cap E)\, \mu_1(\mathrm{d}E)} = \frac{c_{j,3}^{1,2+j} V_{2+j}(K)}{c_{0,3}^{1,2} V_2([0,1]^3)},$$

wobei die letzte Gleichung durch zweimaliges Anwendung der Crofton-Formel folgt. Es gilt also für $j \in \{0,1,2,3\}$

$$V_{2+j}(K) = \frac{c_{0,3}^{1,2}}{c_{j,3}^{1,2+j}} V_2([0,1]^3)\mathbb{E}[V_j(K \cap X_1)] = \frac{2\pi j! \kappa_j}{(2+j)! \kappa_{2+j}} \mathbb{E}[3V_j(K \cap X_1)].$$

Setzt man $j = 0$ ein, so erhält man mit

$$\widehat{V}_2(K) := 3V_0(K \cap X_1)$$

einen erwartungstreuen Schätzer für $V_2(K)$ und für $j = 1$ erhält man mit

$$\widehat{V}_3(K) := \frac{3}{2} V_1(K \cap X_1)$$

einen erwartungstreuen Schätzer für das Volumen von K.

Aufgabe 4 (Lemma 5.1.3)
Es seien m ein Mosaik und $K \in m$.

(a) Zeigen Sie, dass es endlich viele Zellen $K_1, \ldots, K_k \in m \setminus \{K\}$ gibt mit $K_i \cap K \neq \emptyset$ für $i = 1, \ldots, k$ und dass gilt

$$\operatorname{bd} K = \bigcup_{i=1}^{k} (K_i \cap K).$$

(b) Für jedes $i \in \{1, \ldots, k\}$ gibt es wegen $\operatorname{int} K \cap \operatorname{int} K_i = \emptyset$ eine Hyperebene H_i, die K und K_i trennt, das heißt sie erfüllt $K \subset H_i^+$ und $K_i \subset H_i^-$, wobei H_i^+ und H_i^- die beiden durch H_i berandeten abgeschlossenen Halbräume sind. Zeigen Sie, dass K ein Polytop ist, das heißt

$$K = \bigcap_{i=1}^{k} H_i^+.$$

Hinweis: Ist $A \subset \mathbb{R}^d$ konvex, $x \in \operatorname{cl} A$ und $y \in \operatorname{relint} A$, so gilt $(x, y] \subset \operatorname{relint} A$.

Lösung:

(a) Wegen der lokalen Endlichkeit von m (Eigenschaft (i) in Definition 5.1.1) gibt es nur endlich viele Zellen $K_1, \ldots, K_k \in m \setminus \{K\}$ mit $K_i \cap K \neq \emptyset$ für $i = 1, \ldots, k$.

Sei zunächst $x \in \operatorname{bd} K$. Es existiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus $\mathbb{R}^d \setminus K$ mit $x_n \to x$. Die Menge $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ ist kompakt und hat daher nur mit endlich vielen $K_1', \ldots, K_l' \in m$ einen nichtleeren Schnitt. Daher muss es insbesondere ein $K' \in m \setminus \{K\}$ und eine unendliche Teilfolge $(x_n')_{n \in \mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ geben mit $x_n' \in K'$, $n \in \mathbb{N}$. Aus der Konvergenz der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ erhalten wir $x_n' \to x$ und aus der Kompaktheit von K' folgt $x \in K'$. Also gilt $x \in \bigcup_{i=1}^{k} (K_i \cap K)$.

Sei nun $x \in K_i \cap K$ für ein $i \in \{1, \ldots, k\}$. Eigenschaft (iv) des Mosaiks besagt $\operatorname{int} K_i \cap \operatorname{int} K = \emptyset$. Es gilt also insbesondere $x \notin \operatorname{int} K_i \cap \operatorname{int} K$. Angenommen $x \in \operatorname{bd} K_i \cap \operatorname{int} K$. Da die Zellen eines Mosaiks ein nichtleeres Inneres haben, existiert ein $y \in \operatorname{int} K_i$. Wegen dem Hinweis gilt $[y, x) \subset \operatorname{int} K_i$. Andererseits gilt jedoch $x \in \operatorname{int} K$, woraus sich $\operatorname{int} K_i \cap \operatorname{int} K \neq \emptyset$ ergibt, was ein Widerspruch zur Mosaik-Definition ist. Insgesamt gilt damit $x \notin \operatorname{int} K$, also $x \in \operatorname{bd} K$.

(b) Die Aussage $K \subset \bigcap_{i=1}^{k} H_i^+$ ist trivial. Sei also $x \in \bigcap_{i=1}^{k} H_i^+$. Angenommen es gilt $x \notin K$. Da die Zellen eines Mosaiks innere Punkte haben, existiert ein

$$y \in \operatorname{int} K \subset \operatorname{int} \bigcap_{i=1}^{k} H_i^+.$$

Wegen des Hinweises gilt $(x, y) \subset \operatorname{int} \bigcap_{i=1}^{k} H_i^+$. Außerdem gibt es einen Punkt

$$z \in \big((x, y) \cap \operatorname{bd} K\big) \subset \operatorname{int} \bigcap_{i=1}^{k} H_i^+.$$

Wegen Teil (a) ist dann $z \in K_i$ für ein $i \in \{1, \ldots, k\}$. Die Hyperebene H_i war jedoch so gewählt, dass $(\operatorname{int} H_i^+) \cap K_i = \emptyset$ gilt, was ein Widerspruch zu $z \in \operatorname{int} \bigcap_{i=1}^{k} H_i^+$ ist.

Aufgabe 5 (Beispiel 5.1.7)
Es sei $\varphi \in N_s(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\}$ und für $x \in \varphi$ sei

$$C(\varphi, x) := \{z \in \mathbb{R}^d : \|z - x\| \leq \|z - y\| \ \forall y \in \varphi\}$$

die *Voronoi-Zelle* von x. Zeigen Sie, dass alle Voronoi-Zellen beschränkt sind, falls $\operatorname{conv}(\varphi) = \mathbb{R}^d$ gilt.

Lösung: Angenommen, es gibt eine unbeschränkte Voronoi-Zelle $C(\varphi, x)$ mit $x \in \varphi$. Da $C(\varphi, x)$ konvex ist, existiert eine Richtung $u \in S^{d-1}$, sodass der Strahl

$$S := \{x + \alpha u : \alpha \geq 0\}$$

in $C(\varphi, x)$ enthalten ist. Sei $\alpha > 0$. Es gilt $x \in \operatorname{bd} B(x + \alpha u, \alpha)$. Angenommen, es gibt ein

$$y \in \varphi \cap \operatorname{int} B(x + \alpha u, \alpha),$$

dann gelten

$$\|y - (x + \alpha u)\| < \alpha \qquad \text{und} \qquad \|x - (x + \alpha u)\| = \alpha$$

und somit

$$x + \alpha u \in C(\varphi, y) \qquad \text{und} \qquad x + \alpha u \notin C(\varphi, x),$$

was einen Widerspruch zu $S \subset C(\varphi, x)$ darstellt. Damit folgt insgesamt

$$\operatorname{int} B(x + \alpha u, \alpha) \cap \varphi = \emptyset$$

für alle $\alpha > 0$. Wir erhalten, dass der offene Halbraum

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{int} B(x + nu, n)$$

keinen Punkt aus φ enthält, was der Voraussetzung $\operatorname{conv}(\varphi) = \mathbb{R}^d$ widerspricht.