Institut für Stochastik
Prof. Dr. D. Hug · Dr. F. Nestmann

Stochastische Geometrie (SS2019)

Übungsblatt 8

Aufgabe 1 (Mecke-Charakterisierung von Poisson-Prozessen)
Zeigen Sie die Implikation „$\Rightarrow$“ der *Mecke-Charakterisierung von Poisson-Prozessen*:

Es sei Φ ein Punktprozess auf $\mathbb{X}$ mit lokal-endlichem Intensitätsmaß $\Theta(\cdot) = \mathbb{E}\Phi(\cdot)$. Genau dann ist Φ ein Poisson-Prozess, wenn

$$\mathbb{E}\int_{\mathbb{X}} f(\Phi, x)\,\Phi(\mathrm{d}x) = \int_{\mathbb{X}} \mathbb{E}f(\Phi + \delta_x, x)\,\Theta(\mathrm{d}x)$$

für alle messbaren Abbildungen $f\colon \mathbf{N}(\mathbb{X}) \times \mathbb{X} \to [0,\infty]$ gilt.

Lösung: Der hier präsentierte Beweis kann im Buch *Lectures on the Poisson Process* (2017) von G. Last und M. Penrose gefunden werden.
Zunächst stellen wir fest, dass die Abbildung

$$\mathbb{X} \times \mathbf{N}(\mathbb{X}) \ni (x,\mu) \mapsto \mu + \delta_x$$

messbar ist. Dies folgt aus der Messbarkeit der Abbildungen

$$\mathbb{X} \times \mathbf{N}(\mathbb{X}) \ni (x,\mu) \mapsto \mu(B) + \delta_x(B) = \mu(B) + \mathbb{1}_B(x), \qquad B \in \mathcal{X}.$$

Es seien Φ ein Poisson-Prozess auf $\mathbb{X}$ mit lokal-endlichem Intensitätsmaß Θ und $f\colon \mathbf{N}(\mathbb{X}) \times \mathbb{X} \to [0,\infty]$ eine messbare Funktion. Wir nehmen zunächst $\Theta(\mathbb{X}) < \infty$ an. In diesem Fall gilt $\Theta = \gamma\mathbb{Q}$ mit $\gamma > 0$ und einem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ auf $\mathbb{X}$. Nach Satz 2.2.5 können wir im Folgenden annehmen, dass

$$\Phi = \sum_{i=1}^{\kappa} \delta_{X_i}$$

gilt, wobei κ eine $\mathrm{Po}(\gamma)$-verteilte Zufallsvariable ist und $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine von κ unabhängige Folge unabhängiger und $\mathbb{Q}$-verteilter Zufallselemente in $\mathbb{X}$ ist. Es gilt

$$\mathbb{E}\int_{\mathbb{X}} f(\Phi, x)\,\Phi(\mathrm{d}x) = \mathbb{E}\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\kappa = k) \sum_{i=1}^{k} f\big(\delta_{X_1} + \cdots + \delta_{X_k}, X_i\big) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\gamma}\frac{\gamma^k}{k!} \sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}f\big(\delta_{X_1} + \cdots + \delta_{X_k}, X_i\big),$$

wobei im ersten Schritt die Unabhängigkeit zwischen κ und $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ einging und im zweiten Schritt wegen $f \geq 0$ Summation und Erwartungswertbildung getauscht werden durfte. Da die X_i unabhängig und $\mathbb{Q}$-verteilt sind, folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\gamma}\frac{\gamma^k}{k!} \sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}f\big(\delta_{X_1} + \cdots + \delta_{X_k}, X_i\big) &= \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\gamma}\frac{\gamma^k k}{k!}\,\mathbb{E}\int_{\mathbb{X}} f\left(\sum_{j=1}^{k-1} \delta_{X_j} + \delta_x, x\right) \mathbb{Q}(\mathrm{d}x) \\
&= \gamma \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\gamma}\frac{\gamma^{k-1}}{(k-1)!} \int_{\mathbb{X}} \mathbb{E}f\left(\sum_{j=1}^{k-1} \delta_{X_j} + \delta_x, x\right) \mathbb{Q}(\mathrm{d}x) \\
&= \int_{\mathbb{X}} \mathbb{E}f(\Phi + \delta_x, x)\,\Theta(\mathrm{d}x),
\end{aligned}$$

was die Behauptung für $\Theta(\mathbb{X}) < \infty$ zeigt.

Es gelte nun $\Theta(\mathbb{X}) = \infty$. Nach der Konstruktion im Beweis von Satz 2.2.6 können wir annehmen, dass

$$\Phi = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i$$

gilt, wobei $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ unabhängige Poisson-Prozesse auf $\mathbb{X}$ sind mit zugehörigen Intensitätsmaßen $\Theta_1, \Theta_2, \ldots$, für welche $0 < \Theta_i(\mathbb{X}) < \infty$, $i \in \mathbb{N}$, und $\sum_{i=1}^{\infty} \Theta_i = \Theta$ gelten. Für $i \in \mathbb{N}$ seien

$$\xi_i := \sum_{j=1}^{i} \Phi_j \qquad \text{und} \qquad \chi_i := \sum_{j=i+1}^{\infty} \Phi_j.$$

Nach dem Blockungslemma sind ξ_i und χ_i für alle $i \in \mathbb{N}$ stochastisch unabhängig. Außerdem ist ξ_i ein Poisson-Prozess mit Intensitätsmaß $\widetilde{\Theta}_i := \sum_{j=1}^{i} \Theta_i$ und für $i \to \infty$ gelten $\xi_i \uparrow \Phi$ und $\widetilde{\Theta}_i \uparrow \Theta$. Es folgt

$$\mathbb{E} \int_{\mathbb{X}} f(\Phi, x)\, \Phi(\mathrm{d}x) = \lim_{i \to \infty} \mathbb{E} \int_{\mathbb{X}} f(\underbrace{\xi_i + \chi_i}_{=\Phi}, x)\, \xi_i(\mathrm{d}x) = \lim_{i \to \infty} \mathbb{E} \int_{\mathbb{X}} f_i(\xi_i, x)\, \xi_i(\mathrm{d}x),$$

wobei für $i \in \mathbb{N}$

$$f_i(\mu, x) := \mathbb{E} f(\mu + \chi_i, x), \qquad (\mu, x) \in \mathbf{N}(\mathbb{X}) \times \mathbb{X}.$$

Wegen $\widetilde{\Theta}_i(\mathbb{X}) < \infty$, $i \in \mathbb{N}$, erhalten wir mit dem ersten Teil des Beweises und $\widetilde{\Theta}_i \uparrow \Theta$ für $i \to \infty$

$$\begin{aligned}
\lim_{i \to \infty} \mathbb{E} \int_{\mathbb{X}} f_i(\xi_i, x)\, \xi_i(\mathrm{d}x) &= \lim_{i \to \infty} \int_{\mathbb{X}} \mathbb{E} f_i(\xi_i + \delta_x, x)\, \widetilde{\Theta}_i(\mathrm{d}x) \\
&= \lim_{i \to \infty} \int_{\mathbb{X}} \mathbb{E} f(\Phi + \delta_x, x)\, \widetilde{\Theta}_i(\mathrm{d}x) \\
&= \int_{\mathbb{X}} \mathbb{E} f(\Phi + \delta_x, x)\, \Theta(\mathrm{d}x),
\end{aligned}$$

was den Beweis beendet.

Aufgabe 2 (Beispiel 3.2.10)
Es sei $Z_0 := B(0, R)$ eine 3-dimensionale Kugel mit zufälligem Radius R mit Verteilungsfunktion F und

$$\mathbb{E}[R^3] < \infty.$$

Zeigen Sie

$$C_0(x) = \frac{4\pi}{3} \int\limits_{\|x\|/2}^{\infty} u^3 \left(1 - \frac{3\|x\|}{4u} + \frac{\|x\|^3}{16u^3}\right) F(\mathrm{d}u), \qquad x \in \mathbb{R}^3,$$

wobei $C_0(x) = \mathbb{E}[\lambda_3(Z_0 \cap (Z_0 + x))]$ das mittlere Kovariogramm aus Aufgabe 2 von Übungsblatt 7 ist.

Lösung: Es seien $u > 0$ und $x \in \mathbb{R}^3$. Gilt $\|x\| \geq 2u$, so folgt $\lambda_3(B(x, u) \cap B(0, u)) = 0$. Im Fall $\|x\| < 2u$ sieht man anhand einer Skizze, dass der Schnitt der beiden Kugeln in zwei gleiche Teile zerlegt werden kann, deren Volumen man jeweils als Integral über Flächeninhalte von Kreisen bekommt (Prinzip von Cavalieri). Mit dem Satz von Pythagoras erhalten wir

$$\begin{aligned}
\lambda_3(B(x, u) \cap B(0, u)) &= 2 \int\limits_{\|x\|/2}^{u} \pi(u^2 - t^2)\,\mathrm{d}t \\
&= 2\pi \left[u^2 t - \frac{1}{3}t^3\right]_{t=\|x\|/2}^{u} \\
&= 2\pi\left(u^2\left(u - \frac{\|x\|}{2}\right) - \left(\frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{24}\|x\|^3\right)\right) \\
&= \frac{4\pi}{3}u^3\left(1 - \frac{3\|x\|}{4u} + \frac{\|x\|^3}{16u^3}\right),
\end{aligned}$$

womit die Behauptung folgt.

Aufgabe 3 (Ergänzung zu Bemerkung 3.2.14)
Es seien $\emptyset \neq F \subset \mathbb{R}^d$ abgeschlossen und $B \subset \mathbb{R}^d$ kompakt und konvex mit $0 \in B$. Weiter sei

$$R := \inf\{r \geq 0 : F \cap rB \neq \emptyset\}.$$

Zeigen Sie für $r \in [0, \infty)$ die Äquivalenz

$$R \leq r \quad \Leftrightarrow \quad F \cap rB \neq \emptyset.$$

Lösung: Sei $D := \{r \geq 0 \; : \; F \cap rB \neq \emptyset\}$. Falls $D = \emptyset$ gilt, so folgt $R = \inf D = \inf \emptyset = \infty$. In diesem Fall ist nichts zu zeigen. Also gelte $D \neq \emptyset$. Seien $s \in D$ und $s' > s$. Dann gilt wegen der Konvexität von B

$$\emptyset \neq (F \cap sB) \subset (F \cap s'B)$$

und damit $s' \in D$. Wegen $R = \inf D$ existiert eine Folge $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $r_n \in D$, $n \in \mathbb{N}$, und $r_n \downarrow R$.

Zunächst gelte $F \cap rB \neq \emptyset$. Damit folgt $r \in D$ und $r \geq \inf D = R$. Dies zeigt die Richtung „$\Leftarrow$".

Für die Richtung „$\Rightarrow$" gelte zunächst $R < r$. Wegen $r_n \downarrow R$ existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $R \leq r_m < r$. Aus der Vorüberlegung und $r_m \in D$ folgt $r \in D$, und damit $F \cap rB \neq \emptyset$.
Es bleibt noch der Fall $R = r$ zu behandeln. Hier muss $F \cap RB \neq \emptyset$ gezeigt werden. Zunächst existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in F \cap r_n B \neq \emptyset$. Wegen $r_n \downarrow R$ folgt $x_n \in F \cap r_1 B$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $F \cap r_1 B$ kompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, welche gegen ein $x \in F \cap r_1 B$ konvergiert. Wir nehmen oBdA an, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen x konvergiert. Insbesondere gilt $x \in F$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $y_n \in B$ mit $x_n = r_n y_n$. Für den Abstand zwischen x und RB gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{dist}(x, RB) &= \min_{z \in RB} \|x - z\| \\
&\leq \min_{z \in RB} (\|x - x_n\| + \|x_n - z\|) \\
&\leq \|x - x_n\| + \|r_n y_n - R y_n\| \\
&= \|x - x_n\| + |r_n - R| \cdot \|y_n\| \\
&\to 0,
\end{aligned}$$

für $n \to \infty$. Dabei ging ein, dass wegen der Kompaktheit von B ein $c \in (0, \infty)$ existiert mit $\|y_n\| \leq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Demnach gilt $\operatorname{dist}(x, RB) = 0$ und wegen der Abgeschlossenheit von RB folgt $x \in RB$. Insgesamt also $F \cap RB \neq \emptyset$.

Aufgabe 4 (Beispiel 3.2.16)
Es sei Z ein stationäres Boolesche Modell mit Intensität γ und typischem Korn Z_0. Das typische Korn Z_0 sei eine d-dimensionale Kugel mit zufälligem Radius $R_0 \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ und Mittelpunkt 0.

(a) Berechnen Sie die sphärische Kontaktverteilungsfunktion $H_{B^d}(r),\ r > 0$.

(b) Nun sei $d = 2$, und $r_1, r_2 > 0$ mit $r_1 \neq r_2$. Weiter seien $H_{B^2}(r_1)$ und $H_{B^2}(r_2)$ bekannt. Bestimmen Sie die Intensität γ und den Parameter λ in Abhängigkeit von $H_{B^2}(r_1)$ und $H_{B^2}(r_2)$.

Lösung:

(a) Aus Satz 3.2.15 der Vorlesung und $\mathbb{E}[R_0^i] = \frac{i!}{\lambda^i}$, $i \in \mathbb{N}$, folgt für $r > 0$

$$\begin{aligned}
H_{B^d}(r) &= 1 - \exp\Big(- \gamma \mathbb{E}\big[\lambda_d\big((Z_0 + r(B^d)^*) \setminus Z_0\big)\big]\Big) \\
&= 1 - \exp\Big(- \gamma \mathbb{E}\big[\lambda_d\big((r + R_0)B^d \setminus R_0 B^d\big)\big]\Big) \\
&= 1 - \exp\Big(- \gamma \kappa_d \mathbb{E}\big[(R_0 + r)^d - R_0^d\big]\Big) \\
&= 1 - \exp\left(- \gamma \kappa_d \mathbb{E}\left[\sum_{j=0}^{d-1} \binom{d}{j} r^{d-j} R_0^j\right]\right) \\
&= 1 - \exp\left(- \gamma \kappa_d \sum_{j=0}^{d-1} \binom{d}{j} r^{d-j} \mathbb{E} R_0^j\right) \\
&= 1 - \exp\left(- \gamma \kappa_d \sum_{j=0}^{d-1} \binom{d}{j} \frac{j!}{\lambda^j} r^{d-j}\right).
\end{aligned}$$

(b) Es sei

$$f(r) := -\log(1 - H_{B^d}(r)), \qquad r > 0.$$

Dann gilt wegen $d = 2$ und mit Teil (a)

$$f(r) = \gamma\pi\left(r^2 + \frac{2}{\lambda} r\right), \qquad r > 0$$

und insbesondere

$$\frac{f(r_1)}{r_1} = \gamma\pi\left(r_1 + \frac{2}{\lambda}\right) \qquad \text{und} \qquad \frac{f(r_2)}{r_2} = \gamma\pi\left(r_2 + \frac{2}{\lambda}\right),$$

was äquivalent ist zu $Ax = b$ mit

$$A := \pi \begin{pmatrix} r_1 & 2 \\ r_2 & 2 \end{pmatrix}, \quad x := \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma/\lambda \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} f(r_1)/r_1 \\ f(r_2)/r_2 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{2\pi(r_1 - r_2)} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -r_2 & r_1 \end{pmatrix},$$

also

$$\begin{aligned}
\gamma &= \frac{1}{\pi(r_1 - r_2)}\left(\frac{f(r_1)}{r_1} - \frac{f(r_2)}{r_2}\right), \\
\frac{\gamma}{\lambda} &= \frac{1}{2\pi(r_1 - r_2)}\left(-\frac{r_2 f(r_1)}{r_1} + \frac{r_1 f(r_2)}{r_2}\right) = \frac{r_1 r_2}{2\pi(r_1 - r_2)}\left(-\frac{f(r_1)}{r_1^2} + \frac{f(r_2)}{r_2^2}\right).
\end{aligned}$$

Dabei gilt $\frac{\gamma}{\lambda} \neq 0$, da die Funktion $(0, \infty) \ni r \mapsto \frac{f(r)}{r^2}$ streng monoton fallend ist. Wir erhalten

$$\lambda = 2 \cdot \frac{f(r_1) r_2 - f(r_2) r_1}{r_1^2 f(r_2) - r_2^2 f(r_1)}.$$