

Stochastische Geometrie, SS 2019

(0) Einführung

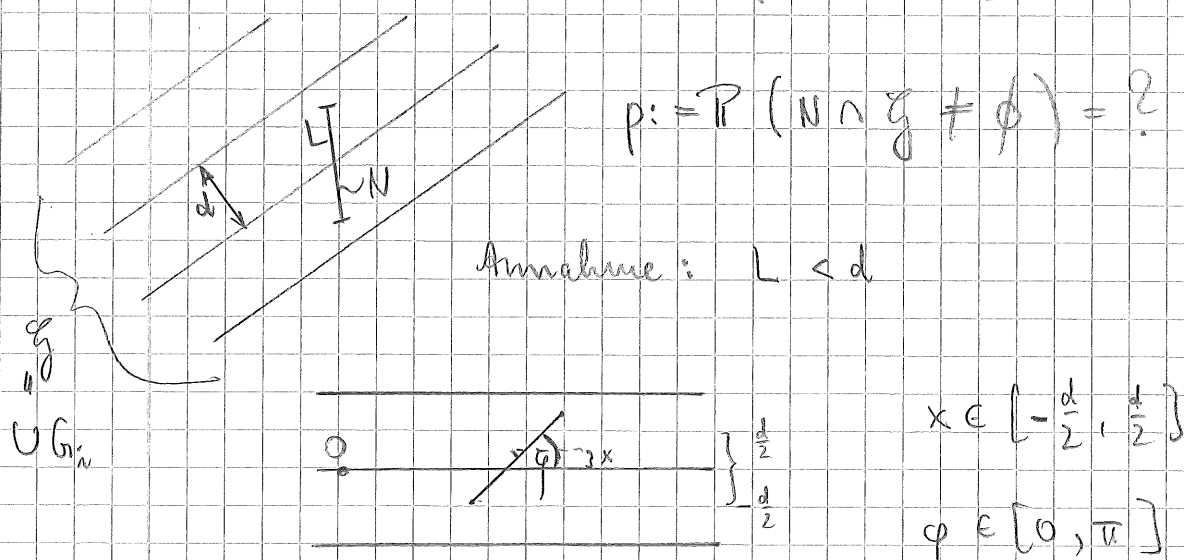
In diesem Vorlesum soll ein erster Einblick in die Thematik gegeben werden. Zu diesem Zweck gehen wir kurz auf die historischen Wurzeln der stochastischen Geometrie ein und beschreiben die Stellung dieses Gebiets im Verhältnis zu verwandten Disziplinen.
Synthese = Geometrie & Stochastik

(a) Ursprung: Geometrische Wahrscheinlichkeiten Behandlung einiger einfacher Fragestellungen

(1) Comptes de Buffon (1733)

Zerlegung der Ebene durch Mosaike. In diese Ebene werde zufällig eine Münze geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Münze ganz innerhalb eines Mosaiksteins liegt?

Einfacher: parallele, äquidistante Geraden - Nadel



x, φ seien jeweils gleichverteilt.

$$A = "N \cap g \neq \emptyset" = \left\{ (x, \varphi) \in \left[-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}\right] \times [0, \pi] : |x| < \frac{L}{2} \sin \varphi \right\}$$

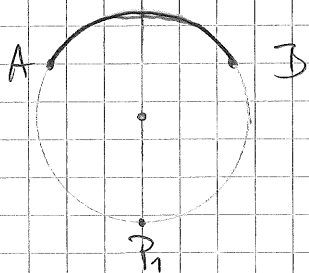
$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \rho &= \left(\int_0^{\frac{L}{2}} \int_0^{\pi} dx dp \right)^{-1} \int_A dx dp \\
 &= \left(\frac{L}{2} \pi \right)^{-1} \int_0^{\pi} \int_{-\frac{L}{2} \sin p}^{\frac{L}{2} \sin p} dx dp \\
 &= \frac{1}{\frac{L}{2} \pi} \int_0^{\pi} L \sin p dp = \frac{2L}{L\pi} = \frac{2}{\pi}
 \end{aligned}$$

(2) Bertrand'sches Paradoxon

Wie groß ist die Wsk., daß eine zufällige Sehne im Einheitskreis B^2 länger als $\sqrt{3}$ ist?

($\sqrt{3}$ = Kantenlänge des gleichseitigen Dreiecks mit B^2 als Umkreis)

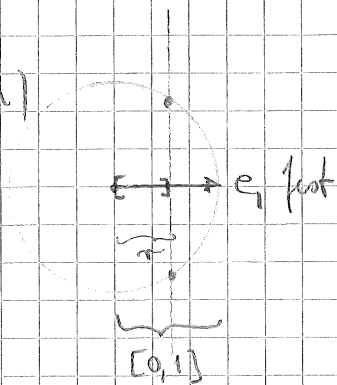
(i) Ein Endpunkt P der Sehne ist fest.



P_2 gleichverteilt in \widehat{AB} .

$$\Rightarrow \rho = \frac{1}{3} \cdot 2\pi / 2\pi = \frac{1}{3}$$

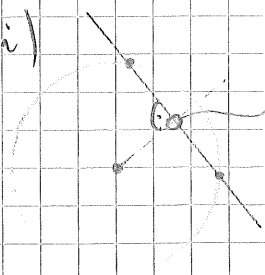
(ii)



r gleichverteilt in $[0, 1]$

$$\Rightarrow \rho = \frac{1}{2} / 1 = \frac{1}{2}$$

(iii)



Lotfußpunkt auf Sehne in B^2 gleichverteilt

$$\Rightarrow \rho = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \pi / 1^2 \cdot \pi = \frac{1}{4}$$

Hier liegen also unterschiedliche Modelle "zufälliger Strukturen" vor, was die verschiedenen Wskten erklärt. Der Festlegung eines geeigneten WS-Raumes kommt also eine wesentliche Bedeutung zu.

Neben der Berechnung konkreter Wahrscheinlichkeiten spezieller Ereignisse ist man natürlich auch daran interessiert, Erwartungswerte, höhere Momente bzw. sogar Verteilungen zu bestimmen. Letzteres ist i.a. aber ein schwieriges Problem.

(3) Uniforme, zufällige Punkte und Sylvesters Problem

Def. Sei $K \subset \mathbb{R}^2$ eine Borelmenge mit $\lambda^2(K) \in (0, \infty)$. Ein uniformer zufälliger Punkt in K ist eine auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{O}, \mathbb{P})$ erklärte Zufallsvariable

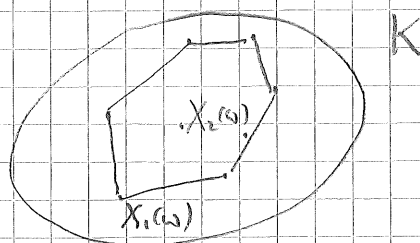
$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ mit}$$

$$\mathbb{P}(X \in \cdot) = \lambda^2(K)^{-1} \cdot (\lambda^2|_K)$$

Alternative Schreibweisen: $X(\mathbb{P}) = \mathbb{P}(X^{-1}(\cdot)) = \mathbb{P}_X = X(\mathbb{P})$

Sei $K \subset \mathbb{R}^2$ eine kompakte, konvexe Menge mit inneren Punkten und somit mit $0 < \lambda^2(K) < \infty$.

Seien $X_1, \dots, X_n, n \in \mathbb{N}$, unabhängige, uniforme zufällige Punkte in K . Jede Realisierung $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$ bestimmt eine geometrische Konfiguration, welche in zufälliger Weise reelle Zahlen bestimmt.



Def $\omega \mapsto$

Wir betrachten in erster Linie geometrische Funktionale der konvexen Hülle $\text{conv}(x_1, \dots, x_n)$ von (x_1, \dots, x_n) .

Bsp. $\omega \mapsto f(\text{conv}\{x_1(\omega), \dots, x_n(\omega)\})$
 $= f \circ \text{conv} \circ (x_1, \dots, x_n)(\omega).$

mit $f(P) := F(P) = \lambda^2(P)$, P Polygon

oder $f(P) := L(P)$ (Umfang)

oder $f(P) := e(P)$ (Eckenzahl).

oder $f_3(P) := \begin{cases} 1, & \text{falls } P \text{ 3 Ecken hat} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

Frage: Ist $f \circ \text{conv} \circ (x_1, \dots, x_n)$ meßbar?

→ Kapitel 1

$$E_n[f, K] := E[f \circ \text{conv} \circ (x_1, \dots, x_n)]$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} \dots \int_{\mathbb{R}^2} f(\text{conv}\{x_1, \dots, x_n\}) P_{x_1}(dx_1) \dots P_{x_n}(dx_n)$$

$$= \lambda(K)^{-n} \int_K \dots \int_K f(\text{conv}\{x_1, \dots, x_n\}) dx_1 \dots dx_n$$

Bem: $1 - E_n[f, K] = E_n[1 - f, K]$ ist dann die Wahrscheinlichkeit, daß die konvexe Hülle von n unabhängigen, uniformen zufälligen Punkten in K ein Viereck ist.

Zielfür erhält man:

$$\begin{aligned}
 E_4[f_3; K] &= \frac{4}{\lambda(K)^4} \cdot \int_K \int_K \int_K \left\{ \underbrace{\int 1_{\{y \in \text{conv}\{x_1, x_2, x_3\}\}} dy}_{= F \circ \text{conv} \circ (x_1, x_2, x_3)} \right\} dx_1 dx_2 dx_3 \\
 &= \frac{4}{\lambda(K)^4} E_3[F; K]
 \end{aligned}$$

Ein analoges Argument zeigt ferner:

$$\begin{aligned}
 E_n[f_3; K] &= \lambda(K)^{-n} \int \dots \int_{\substack{K \quad K \\ n \text{ mal}}} f \circ \text{conv} \circ (x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \\
 &= \binom{n}{3} \frac{1}{\lambda(K)^{n-3}} E_3[F^{n-3}; K].
 \end{aligned}$$

↑ höhere Momente!

Als nächstes soll $E_n[e; K]$ in Relation zu $E_n[F; K]$ gesetzt werden.

Def:

$$g_i(x_1, \dots, x_n) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } x_i \text{ Ecke von } \text{conv}\{x_1, \dots, x_n\} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow e \circ \text{conv} \circ (x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n g_i(x_1, \dots, x_n), \quad x_i \in \overline{K}^2.$$

Somit folgt:

$$\begin{aligned}
 E_n[e; K] &= E \left[\sum_{i=1}^n g_i(x_1, \dots, x_n) \right] \\
 &= \sum_{i=1}^n P(\{x_i \text{ ist Ecke von } \text{conv}\{x_1, \dots, x_n\}\})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= n \cdot \mathbb{P}(\{X_1 \text{ ist Ecke von } \text{conv}\{X_2, \dots, X_n\}\}) \\
&= n \left(1 - \mathbb{P}(\{X_1 \notin \text{conv}\{X_2, \dots, X_n\}\}) \right) \\
&= n \left(1 - \frac{1}{\lambda^2(K)^n} \int_K \dots \int_K \left\{ \int \mathbb{1}_{\{X_1 \in \text{conv}\{x_2, \dots, x_n\}\}} dx_1 \right\} dx_2 \dots dx_n \right)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}_n[e; K] = n \left(1 - \frac{1}{\lambda^2(K)} \cdot \mathbb{E}_{n-1}[\bar{F}; K] \right)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}_n[\bar{F}; K] = \lambda^2(K) \left(1 - \frac{1}{n+1} \mathbb{E}_{n+1}[e; K] \right).$$

Für eine weitere Analyse von $\mathbb{E}_n[e; K]$ eignet sich eine andere Beschreibung besser:

Def $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^2$, $1 \leq i, j \leq n$.

$$g_{ij}(x_1, \dots, x_n) := \begin{cases} 1, & \text{conv}\{x_i, x_j\} \text{ Kante zu } \text{conv}\{x_1, \dots, x_n\} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow e \circ \text{conv} \circ (x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}_n[e; K] = \sum_{i < j} \mathbb{E}[g_{ij}(X_1, \dots, X_n)]$$

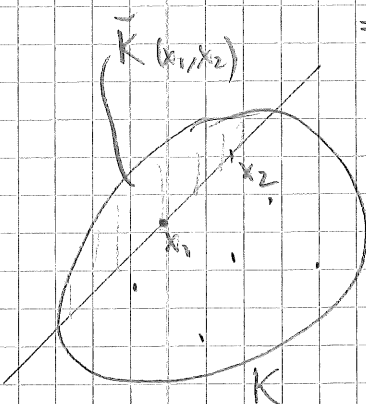
$$= \binom{n}{2} \mathbb{P}(\{[X_1, X_2] \text{ Kante zu } \text{conv}\{X_3, \dots, X_n\}\})$$

$$= \binom{n}{2} \frac{1}{\lambda^2(K)^2} \int_K \int_K \left\{ \frac{1}{\lambda^2(K)^{n-2}} \int_K \dots \int_K \mathbb{1}_{\{x_3, \dots, x_n \in \tilde{K}(x_1, x_2)\}} dx_3 \dots dx_n \right\} dx_1 dx_2$$

$\underbrace{\quad}_{n-2}$
 $\underbrace{\quad}_{K}$
 $\underbrace{\quad}_{K}$

$$+ \frac{1}{\lambda^2(K)^{n-2}} \int_K \dots \int_K \mathbb{1}_{\{x_3, \dots, x_n \in \tilde{K}(x_1, x_2)\}} dx_3 \dots dx_n \} dx_1 dx_2$$

-6-

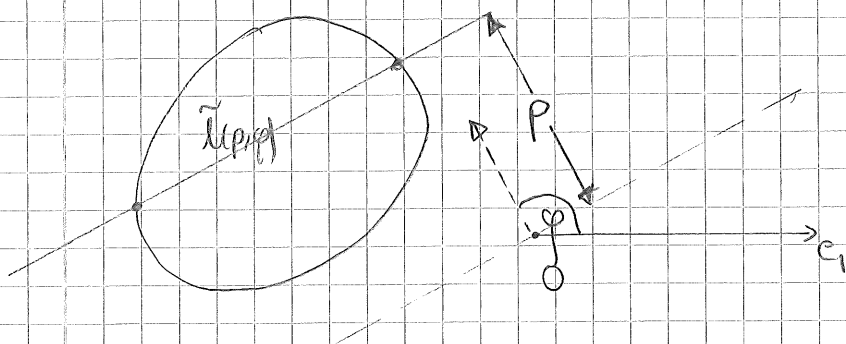
$$= \binom{n}{2} \frac{1}{\lambda^2(K)^2} \iint_{KK} \left(\tilde{F}^{n-2}(x_1, x_2) + \left(1 - \tilde{F}^{n-2}(x_1, x_2)\right)^{n-2} \right) dx_1 dx_2$$


Mit Hilfe einer integralgeometrischen Transformation zeigt man dann:

$$\tilde{F}(x_1, x_2) = \frac{\lambda^2(\tilde{K}(x_1, x_2))}{\lambda^2(K)}$$

$$E_n[e; K] = \frac{1}{3} \binom{n}{2} \frac{1}{\lambda^2(K)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{h(K, \varphi)} \left[\tilde{F}^{n-2}(p, \varphi) + \left(1 - \tilde{F}^{n-2}(p, \varphi)\right)^{n-2} \right] \tilde{\lambda}^3(p, \varphi) dp d\varphi$$

Körperfunktion



Speziell für $K = B^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ erhält man hieraus:

$$E_n[e; K] = -\frac{2n}{3} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-1} \int_0^{2\pi} (t - \sin t)^{n-1} \sin t dt$$

Ist eine explizite Berechnung nicht möglich, so kann man versuchen, Abschätzungen oder aber asymptotische Aussagen zu erhalten. Eine weitere interessante Thematik ist die Untersuchung geometrischer Extremalprobleme.

Bsp. Für $k \geq 3, n \geq 1$ und $K \subset \mathbb{R}^2$ konvex körner mit $\text{int } K \neq \emptyset$ gilt:

$$\text{Für } \mathbb{E}_n[F^r; K] = \frac{1}{F(K)^n} \cdot \int_K \dots \int_K F(\text{conv}\{x_1, \dots, x_n\})^r dx_1 \dots dx_n$$

hat man

$$\mathbb{E}_n[F^n; K] \geq \mathbb{E}_n[F^n; K_0],$$

wenn $K_0 \subset \mathbb{R}^2$ eine Kugel ist mit $F(K) = F(K_0)$.

Gleichheit gilt genau dann, wenn K eine Ellipse ist.

Bsp. Zufällige Approximation:

$K \in \mathcal{K}^2$ von Klasse \mathcal{C}_+^3 :

$$F(K) - \mathbb{E}_n[F; K] = \frac{2}{3} \Gamma\left(\frac{5}{3}\right) \int_{\partial K} h^{\frac{1}{3}} ds \left(\frac{n}{F(K)}\right)^{-\frac{2}{3}} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

für $n \rightarrow \infty$.

Dagegen gilt für ein Polygon $K \in \mathcal{K}^2$:

$$F(K) - \mathbb{E}_n[F; K] = C_2(K) \cdot \frac{\ln(n)}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

Aussagen über Verteilungskonvergenz sind seltener:

Bsp: Δ zufälliges r -Simplex in \mathbb{B}^d mit $r+1 = i+j \leq d+1$ Ecken, von denen i -Ecken in \mathbb{B}^d uniform und j -Ecken in $\partial \mathbb{B}^d$ uniform verteilt sind. Dann gilt

$$Z_d := \left(\frac{2d}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \left(r! |\Delta|^{r-\text{Vol}} - (r+1)^{\frac{1}{2}} \right) \xrightarrow{d} N(0,1)$$

für $d \rightarrow \infty$

(Reuten '77)