Vorlesungsskript SS 2019

Stochastische Geometrie

Prof. Dr. Daniel Hug, Prof. Dr. Günter Last

22. Juli 2019

Institut für Stochastik

Karlsruher Institut für Technologie

Inhaltsverzeichnis

0 Einführung **3**
0.1 Zufällige geometrische Strukturen . . . 3
0.2 Fragestellungen . . . 3
0.3 Geometrische Wahrscheinlichkeiten . . . 3

1 Zufällige abgeschlossene Mengen **4**
1.1 Der Raum der abgeschlossenen Mengen . . . 4
1.2 Zufällige abgeschlossene Mengen . . . 10
1.3 Das Kapazitätsfunktional . . . 14

2 Zufällige Maße und Punktprozesse **16**
2.1 Grundlagen . . . 16
2.2 Poissonprozesse . . . 22
2.3 Stationarität . . . 29

3 Geometrische Punktprozesse **30**
3.1 Partikelprozesse . . . 30
3.2 Das Boolesche Modell . . . 38
3.3 Die Steinersche Formel . . . 44
3.4 Das Boolesche Modell mit konvexen Körnern . . . 48
3.5 Ebenenprozesse (ausgelassen) . . . 51

4 Dichten innerer Volumina **62**
4.1 Geometrische Dichten von Partikelprozessen . . . 62
4.2 Geometrische Dichten von Keim-Korn-Modellen . . . 64
4.3 Integralgeometrie (Überblick) . . . 69
4.4 Geometrische Dichten des Booleschen Modells . . . 80

5 Zufällige Mosaike **84**
5.1 Grundlagen . . . 84
5.2 Dichterelationen für allgemeine Mosaike . . . 86
5.3 Dichterelationen für Hyperebenenmosaike . . . 92
5.4 Palmsche Wahrscheinlichkeitsmaße (ausgelassen) . . . 95
5.5 Allgemeine Mittelwertformeln (ausgelassen) . . . 99
5.6 Poisson-Voronoi-Mosaike (ausgelassen) . . . 107

0 Einführung

0.1 Zufällige geometrische Strukturen

Beschreibung der Arbeitsrichtung und Motivation (Folien)

1. Zufällige abgeschlossene Mengen
2. Systeme konvexer Partikel und deren Vereinigung (Keim-Korn-Modell). Die Keime bilden einen Punktprozess.
3. Systeme von Hyperebenen
4. Mosaike: Unterteilung des Raumes in paarweise "disjunkte" konvexe Gebiete. Beispiele sind Voronoi- und Hyperebenenmosaike.
5. Exkursionsmengen reellwertiger zufälliger Felder $(X_t)_{t\in I}$, $I \subset \mathbb{R}^d$:
$$Z := \{t \in I \colon X_t \geq c\}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

0.2 Fragestellungen

Sei Z eine Vereinigung von Partikeln oder von Teilen (z.B. Kanten) von Partikeln o.Ä. Gegeben seien (geometrische) reelle Funktionale $f_1, \ldots, f_m$ (z.B. Volumen, Oberfläche, Euler-Charakteristik, etc.).

1. Gilt $\lim\limits_{W\uparrow\mathbb{R}^d} V_d(W)^{-1} f_i(Z \cap W) = \bar{f}_i$ $\mathbb{P}$-f.s.?
2. Gilt $\lim\limits_{W\uparrow\mathbb{R}^d} V_d(W)^{-1} \operatorname{Cov}(f_i(Z\cap W), f_j(Z\cap W)) = \sigma_{ij}$? Wie sehen die σ_{ij} in Abhängigkeit von den Eingangsparametern aus? Gilt der multivariate Zentrale Grenzwertsatz?
3. Perkoliert Z, d.h., gibt es eine unbeschränkte Zusammenhangskomponente von Z? Diese Frage ist Gegenstand der Perkolationstheorie.
4. Wie sehen die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(x_1 \in Z, \ldots, x_k \in Z)$ für $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^d$ aus? Das sind die sogenannten k-Punkt-Korrelationsfunktionen.
5. Es sei X ein zufälliger Punkt in $\mathbb{R}^d \setminus Z$. Was ist die Verteilung von $d(X, Z)$? Diese Frage führt auf den Begriff der Kontaktverteilungen.

0.3 Geometrische Wahrscheinlichkeiten

Hier wurden exemplarisch klassische Fragestellungen zu geometrischen Wahrscheinlichkeiten problematisiert. Hierzu gehören das Buffonsche Nadelproblem, das Bertrandsche Paradoxon sowie das hochaktuelle Studium von Funktionalen konvexer Hüllen zufälliger Punkte. Eine etwas erweiterte Fassung der Darstellung in der Vorlesung findet sich als handschriftliche Notiz in Ilias.

1 Zufällige abgeschlossene Mengen

Sei $(E, \mathcal{O}_E)$ ein topologischer Raum und $\mathcal{F}(E)$ die Familie der abgeschlossenen Teilmengen von E. Ist $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $Z : \Omega \to \mathcal{F}(E)$ eine messbare Abbildung, so werden wir Z eine zufällige abgeschlossene Menge nennen. Messbarkeit bezieht sich hierbei auf die σ-Algebra $\mathcal{A}$ auf Ω und auf die Borelsche σ-Algebra auf $\mathcal{F}(E)$. Dies bedingt die Einführung einer Topologie $\mathcal{O}_{\mathcal{F}(E)}$ auf $\mathcal{F}(E)$. Diese Topologie werden wir so erklären, dass natürliche Operationen zwischen abgeschlossenen Mengen zumindest messbar, in vielen Fällen jedoch sogar stetig oder zumindest halbstetig sind.

1.1 Der Raum der abgeschlossenen Mengen

Wir führen in diesem Abschnitt eine Topologie auf dem Raum der abgeschlossenen Teilmengen eines topologischen Raumes E ein. Dies wird lediglich Durchschnittsbildungen mit offenen beziehungsweise kompakten Testmengen erfordern, so dass die Definition in der Tat in einem ganz allgemeinen Rahmen funktioniert. Konkrete Beispiele solcher metrischer Räume sind zunächst $\mathbb{R}^n, \mathbb{S}^{n-1}$ oder ein beliebiger metrischer Raum.

Definition 1.1.1 Ist $(E, \mathcal{O}_E)$ ein topologischer Raum, so definieren wir

$$\mathcal{F}(E) := \{F \subset E \mid F \text{ abgeschlossen}\},$$

$$\mathcal{C}(E) := \{F \subset E \mid F \text{ kompakt}\},$$

$$\mathcal{G}(E) := \{F \subset E \mid F \text{ offen}\} = \mathcal{O}_E.$$

Des Weiteren führen wir auf $\mathcal{F} = \mathcal{F}(E)$ eine Topologie ein, indem wir eine Basis festlegen. Seien hierzu $A, A_1, \ldots, A_k \subset E$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ und

$$\mathcal{F}^A := \{F \in \mathcal{F} \mid F \cap A = \emptyset\},$$

$$\mathcal{F}_A := \{F \in \mathcal{F} \mid F \cap A \neq \emptyset\},$$

$$\mathcal{F}^A_{A_1,\ldots,A_k} := \mathcal{F}^A \cap \mathcal{F}_{A_1} \cap \ldots \cap \mathcal{F}_{A_k}.$$

Beachte: Es gilt $\emptyset \in \mathcal{F}^A,\ \emptyset \notin \mathcal{F}_A,\ (\mathcal{F}^A)^c = \mathcal{F}_A$.

Das System

$$\tau := \{\mathcal{F}^C_{G_1,\ldots,G_k} \mid C \in \mathcal{C}, G_1, \ldots, G_k \in \mathcal{G}, k \in \mathbb{N}_0\}$$

ist $\cap$-stabil, $\mathcal{F} = \mathcal{F}^\emptyset \in \tau,\ \emptyset = \mathcal{F}^\emptyset_\emptyset \in \tau$, also ist τ Basis einer eindeutig bestimmten Topologie auf $\mathcal{F}(E)$. Die offenen Mengen erhält man als Vereinigungen von Mengen aus τ. Diese im Folgenden betrachtete Topologie heißt „hit-or-miss“ Topologie, Fell-Topologie (nach James M.G. Fell, der diese Topologie 1962 eingeführt und untersucht hat) oder auch Topologie der abgeschlossenen Konvergenz.

Im Folgenden sei stets $(E, \mathcal{O}_E)$ ein lokalkompakter Hausdorffraum mit abzählbarer Basis. Dies ist also insbesondere ein polnischer Raum (vollständig metrisierbarer Raum mit abzählbarer Basis). Der nächste Satz zeigt, dass $(\mathcal{F}(E), \mathcal{O}_{\mathcal{F}(E)})$ (mindestens) ebenso gute Eigenschaften hat. Wenn E aus dem Kontext klar ist, schreiben wir wie oben schon erwähnt auch einfach $\mathcal{F}$ für $\mathcal{F}(E)$, $\mathcal{C}$ für $\mathcal{C}(E)$ und $\mathcal{G}$ für $\mathcal{G}(E)$.

Satz 1.1.2 *(Fell-Topologie) Sei* $(E, \mathcal{O}_E)$ *ein lokalkompakter Hausdorffraum mit abzählbarer Basis. Dann gilt:*

(1) $(\mathcal{F}, \mathcal{O}_{\mathcal{F}})$ *ist ein kompakter Hausdorffraum mit abzählbarer Basis und folglich metrisierbar. Insbesondere ist* $(\mathcal{F}, \mathcal{O}_{\mathcal{F}})$ *auch folgenkompakt.*

(2) *Ist* $C \subset E$ *kompakt, so ist* $\mathcal{F}_C$ *kompakt in* $\mathcal{F}' := \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$*;* $\mathcal{F}'$ *mit der Spurtopologie ist ein lokalkompakter Hausdorffraum mit abzählbarer Basis.*

(3) $\{\mathcal{F}^C \mid C \in \mathcal{C}\}$ *ist eine Umgebungsbasis von* $\emptyset$.

Beweis. Wir zeigen zunächst (1). Aus der Topologie verwenden wir, dass es eine abzählbare Basis $\mathcal{D}$ der Topologie $\mathcal{O}_E$ von E gibt, die aus offenen, relativ kompakten Mengen besteht, sodass jede offene Menge $G \subset E$ die Vereinigung aller $D \in \mathcal{D}$ mit $\mathrm{cl}(D) \subset G$ ist (siehe [6, S. 559/560]).

Hausdorffeigenschaft: Seien $F, F' \in \mathcal{F}$ mit $F \neq F'$. Sei oBdA $x \in F \setminus F'$. Dann existiert $D \in \mathcal{D}$ mit $x \in D$ und $\mathrm{cl}(D) \cap F' = \emptyset$. Dann ist $F \in \mathcal{F}_D$, $F' \in \mathcal{F}^{\mathrm{cl}(D)}$ sowie $\mathcal{F}_D, \mathcal{F}^{\mathrm{cl}(D)} \in \tau$ und $\mathcal{F}_D \cap \mathcal{F}^{\mathrm{cl}(D)} = \emptyset$.

Abzählbare Basis: Eine solche ist gegeben durch

$$\tau' := \{\mathcal{F}^{\mathrm{cl}(D_1)\cup\ldots\cup\mathrm{cl}(D_m)}_{D'_1,\ldots,D'_k} \mid D_i, D'_j \in \mathcal{D}, m \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}_0\}.$$

Zum Nachweis seien $C \in \mathcal{C}$ und $G_i \in \mathcal{G}$ für $i = 1, \ldots, k$ und ein $k \in \mathbb{N}_0$. Ferner sei $F \in \mathcal{F}^C_{G_1,\ldots,G_k}$. Wegen $F \cap C = \emptyset$ gibt es zu $x \in C$ eine Umgebung $U_x \in \mathcal{D}$ mit $x \in U_x$ und $F \cap \mathrm{cl}(U_x) = \emptyset$. Dann liefert U_x, $x \in C$, eine offene Überdeckung von C, zu der es eine endliche Teilüberdeckung $U_{x_1}, \ldots, U_{x_r}$ gibt, also $C \subset \cup_{i=1}^r U_{x_i}$ und $(\cup_{i=1}^r \mathrm{cl}(U_{x_i})) \cap F = \emptyset$. Wegen $z_i \in F \cap G_i \neq \emptyset$ gibt es $D_i \in \mathcal{D}$ mit $z_i \in D_i$ und daher ist $F \cap D_i \neq \emptyset$. Es folgt $F \in \mathcal{F}^{\mathrm{cl}(U_{x_1})\cup\ldots\cup\mathrm{cl}(U_{x_r})}_{D_1,\ldots,D_k} \subset \mathcal{F}^C_{G_1,\ldots,G_k}$.

Kompaktheit: Eine Subbasis der Topologie $\mathcal{O}_{\mathcal{F}(E)}$ ist gegeben durch

$$\{\mathcal{F}^C \mid C \in \mathcal{C}\} \cup \{\mathcal{F}_G \mid G \in \mathcal{G}\}.$$

Nach Alexanders Kompaktheitskriterium genügt es, zu zeigen, dass eine offene Überdeckung von $\mathcal{F}$ mit Mengen aus einer Subbasis stets eine endliche Teilüberdeckung hat (vgl. Querenburg oder www.proofwiki.org). Seien also I, J beliebige Indexmengen, $C_i \in \mathcal{C}$ für $i \in I$, $G_j \in \mathcal{G}$ für $j \in J$ und

$$\mathcal{F} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{F}^{C_i} \cup \bigcup_{j \in J} \mathcal{F}_{G_j}. \tag{1.1.1}$$

Wegen $\emptyset \in \mathcal{F}$ ist $I \neq \emptyset$. Falls es $i_0 \in I$ gibt mit $C_{i_0} = \emptyset$, so ist schon $\mathcal{F} = \mathcal{F}^{C_{i_0}}$, und wir sind fertig. Ist dagegen $C_i \neq \emptyset$ für alle $i \in I$, so impliziert $E \in \mathcal{F}$, dass $J \neq \emptyset$. Im Folgenden sei also $I, J \neq \emptyset$.

Dann ist (1.1.1) äquivalent zu

$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_{C_i} \cap \bigcap_{j \in J} \mathcal{F}^{G_j} = \emptyset$$

oder zu

$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}^G_{C_i} = \emptyset \qquad \text{mit } G := \bigcup_{j \in J} G_j \in \mathcal{G}.$$

Dann existiert ein $i_0 \in I$ mit $C_{i_0} \subset G$, da sonst $G^c \cap C_i \neq \emptyset$ für alle $i \in I$ und somit $G^c \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}^G_{C_i} = \emptyset$. Also ist $C_{i_0} \subset \bigcup_{j \in J} G_j$ und da C_{i_0} kompakt ist, gibt es eine endliche Teilmenge $J_0 \subset J$ mit $C_{i_0} \subset \bigcup_{j \in J_0} G_j$. Daher ist

$$\mathcal{F}^{\bigcup_{j \in J_0} G_j}_{C_{i_0}} = \emptyset$$

und somit
$$\mathcal{F} = \left(\mathcal{F}_{C_{i_0}}^{\bigcup_{j\in J_0} G_j}\right)^c = \mathcal{F}^{C_{i_0}} \cup \bigcup_{j\in J_0} \mathcal{F}_{G_j},$$
was die Behauptung beweist.

Wir zeigen jetzt (2). Ist $C \subset E$ kompakt, so ist $\mathcal{F}_C = \mathcal{F}\backslash\mathcal{F}^C$ abgeschlossen in $\mathcal{F}$, also kompakt in $\mathcal{F}$. Wegen $\emptyset \notin \mathcal{F}_C$ ist $\mathcal{F}_C$ auch kompakt in $\mathcal{F}'$. Es verbleibt der Nachweis, dass jedes $F \in \mathcal{F}'$ eine kompakte Umgebung besitzt. Dazu seien $x \in F$ und D eine offene Umgebung von x mit kompaktem Abschluss $\operatorname{cl} D$. Dann ist $\mathcal{F}_{\operatorname{cl} D}$ eine kompakte Menge, welche die offene Menge $\mathcal{F}_D$ enthält. Offenbar gilt $F \in \mathcal{F}_D$.

Der Beweis von (3) ist klar (Übung). □

Für den effektiven Nachweis der Konvergenz abgeschlossener Mengen sind die folgenden Kriterien häufig hilfreich.

Satz 1.1.3 *(Konvergenzkriterium) Sei $(F_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{F}$ und $F \in \mathcal{F}$. Dann sind (1), (2) und (3) äquivalent:*

(1) *$F_j \to F$ für $j \to \infty$.*

(2) $\forall G \in \mathcal{G}: \ G \cap F \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad G \cap F_j \neq \emptyset$ *für fast alle* $j \in \mathbb{N}$.
$\forall C \in \mathcal{C}: \ C \cap F = \emptyset \quad \Rightarrow \quad C \cap F_j = \emptyset$ *für fast alle* $j \in \mathbb{N}$.

(3) *Zu $x \in F$ existieren $x_j \in F_j$ für fast alle $j \in \mathbb{N}$, sodass $x_j \to x$ für $j \to \infty$. Ist $(i_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{N}$ und $(x_{i_j})_{j\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $x_{i_j} \in F_{i_j}$ für $j \in \mathbb{N}$, so gilt $\lim\limits_{j\to\infty} x_{i_j} \in F$.*

Beweis. Gelte zunächst (1). Sei $G \in \mathcal{G}$ und $G \cap F \neq \emptyset$. Dann ist $F \in \mathcal{F}_G$ und daher $F_j \in \mathcal{F}_G$ für fast alle $j \in \mathbb{N}$, d.h. $F_j \cap G \neq \emptyset$. Sei $C \in \mathcal{C}$ und $C \cap F = \emptyset$. Dann ist $F \in \mathcal{F}^C$ und daher $F_j \in \mathcal{F}^C$ für fast alle $j \in \mathbb{N}$, d.h. $F_j \cap C = \emptyset$. Damit ist (2) erfüllt.

Gelte nun (2). Sei $\mathcal{U}$ eine Umgebung von F. Dann gibt es $C \in \mathcal{C}$ und $G_1, \dots, G_k \in \mathcal{G}$ mit $F \in \mathcal{F}^C_{G_1,\dots,G_k} \subset \mathcal{U}$. Wegen $F \cap C = \emptyset$ und $F \cap G_j \neq \emptyset$ für $j = 1, \dots, k$ gilt aufgrund von (2) dann auch $F_j \in \mathcal{F}^C_{G_1,\dots,G_k} \subset \mathcal{U}$ für fast alle $j \in \mathbb{N}$.

Für die Äquivalenz von (2) und (3) wird auf die Übung verwiesen. Siehe auch Theorem 12.2.2 in [6, S. 656]. □

Korollar 1.1.4 *Die Abbildung $\cup : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, $(F, F') \mapsto F \cup F'$ ist stetig.*

Beweis. Es genügt, die Folgenstetigkeit zu zeigen. Seien dazu (F_j) und (F'_j) Folgen mit $(F_j, F'_j) \to (F, F')$ in $\mathcal{F}\times\mathcal{F}$, d.h. $F_j \to F$ und $F'_j \to F'$. Sei $G \in \mathcal{G}$ mit $G \cap (F \cup F') \neq \emptyset$. Dann ist etwa $G \cap F \neq \emptyset$. Es folgt $G \cap F_j \neq \emptyset$ für fast alle j und damit $G \cap (F_j \cup F'_j) \neq \emptyset$ für fast alle j. Sei $C \in \mathcal{C}$ mit $C \cap (F \cup F')$. Dann ist $C \cap F = \emptyset$ und $C \cap F' = \emptyset$. Es folgt $C \cap F_j = \emptyset$ und $C \cap F'_j = \emptyset$ für fast alle j. Dies zeigt $C \cap (F_j \cup F'_j) = \emptyset$ für fast alle j. Die Behauptung folgt nun mit Satz 1.1.3. □

Alternativ können wir im Beweis von Korollar 1.1.4 auch mit Folgenstetigkeit und der dritten Äquivalenz aus Satz 1.1.3 argumentieren. Seien also (F_j) und (F'_j) Folgen mit $(F_j, F'_j) \to (F, F')$. Sei $x \in F \cup F'$ und o.B.d.A. $x \in F$. Dann existiert eine Folge (x_j) mit $x_j \in F_j$ für fast alle j und $x_j \to x$. Für diese Folge gilt aber auch $x_j \in F_j \cup F'_j$ für fast alle j, wodurch die erste Bedingung des Satzes gezeigt ist. Ist nun (x_{i_j}) eine konvergente Teilfolge mit $x_{i_j} \in F_{i_j} \cup F'_{i_j}$, so kann sie nur Häufungspunkte in F oder F' haben (wieder wegen (3)) und damit muss der Grenzwert in $F \cup F'$ liegen.

Beispiele 1.1.5 In der Vorlesung wurden einfache Beispiele für die Konvergenz von Folgen abgeschlossener Mengen diskutiert und graphisch illustriert. So etwa die Konvergenz von Folgen von Halbräumen gegen die leere Menge oder gegen einen Grenzhalbraum. Ferner die Konvergenz einer Folge von Epigraphen von (zunehmend flacheren) Parabeln oder einer Folge einpunktiger Mengen.

Beispiele 1.1.6 (siehe Übung)

(i) Wenn $x_n \to x$ in $\mathbb{R}^d$ und $r_n \to r$ in $\mathbb{R}_+$, dann folgt $B(x_n, r_n) \to B(x, r)$.

(ii) Aus $||x_n|| \to \infty$ folgt $\{x_n\} \to \emptyset$.

Beispiel 1.1.7 Die Abbildung $\mathcal{F}^d \times \mathcal{F}^d \to \mathcal{F}^d, (F, F') \mapsto F \cap F'$ ist nicht stetig. Dies sieht man folgendermaßen: Seien $x_n \in \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$, mit $x_n \to x$, $x_n \neq x$. Dann gilt $\{x_n\} \to \{x\}$, aber mit $F_n := \{x_n\}$ und $F := \{x\}$ konvergiert $\emptyset = F_n \cap F$ nicht gegen $F \cap F = \{x\}$.

Für diese Abbildung kann man jedoch eine „Halbstetigkeitsaussage“ nachweisen.

Definition 1.1.8 Sei $(T, \mathcal{O}_T)$ ein topologischer Raum. Eine Abbildung $\varphi : T \to \mathcal{F}$ heiße

$$\text{oberhalbstetig} \;:\Leftrightarrow\quad \forall C \in \mathcal{C}:\ \varphi^{-1}(\mathcal{F}^C) \in \mathcal{O}_T,$$
$$\text{unterhalbstetig} \;:\Leftrightarrow\quad \forall G \in \mathcal{G}:\ \varphi^{-1}(\mathcal{F}_G) \in \mathcal{O}_T.$$

Korollar 1.1.9 *Die Abbildung* $\cap : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ *ist oberhalbstetig.*

Beweis. Wäre $\{(F, F') \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} : F \cap F' \cap C = \emptyset\}$ nicht offen in $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$, so gäbe es $F, F' \in \mathcal{F}$ mit $F \cap F' \cap C = \emptyset$ und Folgen $F_i \to F$ und $F'_i \to F'$ mit $F_i \cap F'_i \cap C \neq \emptyset$. Wähle $x_i \in F_i \cap F'_i \cap C$ für $i \in \mathbb{N}$. Da C kompakt ist, existiert eine Teilfolge $x_{i_j} \to x \in C$ mit $x \in F \cap F' \cap C$, ein Widerspruch. $\square$

Da wir im Folgenden die Borelsche σ-Algebra auf $\mathcal{F}$ betrachten, sind die nachfolgenden Bemerkungen oft nützlich.

Bemerkung 1.1.10 Sowohl $\{\mathcal{F}^C : C \in \mathcal{C}\}$ als auch $\{\mathcal{F}_G : G \in \mathcal{O}\}$ erzeugen $\mathcal{B}(\mathcal{F})$. Zu $G \in \mathcal{O}$ gibt es eine Folge $\mathcal{C} \ni C_n \uparrow G \in \mathcal{O}$, und daher folgt

$$\mathcal{F}_G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{C_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}^{C_n}\right).$$

Zu $C \in \mathcal{C}$ gibt es eine Folge relativ kompakter Mengen $\mathcal{O} \ni G_n \downarrow C \in \mathcal{C}$, und daher folgt

$$\mathcal{F}^C = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_{G_n}).$$

Bemerkung 1.1.11 Es gilt $\mathcal{C} \in \mathcal{B}(\mathcal{F})$. Sei hierzu D_n, $n \in \mathbb{N}$, eine aufsteigende Folge offener, relativ kompakter Teilmengen von E mit $\bigcup_{n \geq 1} D_n = E$. Dann gibt es für jede kompakte Menge $C \subset E$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $C \subset D_n \subset \operatorname{cl} D_n$. Daher folgt

$$\mathcal{C} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}^{E \setminus \operatorname{cl} D_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_{E \setminus \operatorname{cl} D_n}\right) \in \mathcal{B}(\mathcal{F}).$$

Für die nachfolgenden Aussagen betrachten wir $E = \mathbb{R}^d$ und schreiben $\mathcal{F}^d$ für $\mathcal{F}(\mathbb{R}^d)$.

Satz 1.1.12 (i) *Die Abbildung* $\mathcal{F}^d \to \mathcal{F}^d$, $F \mapsto -F = F^*$ *ist stetig.*

(ii) *Die Abbildung* $\mathbb{R} \times \mathcal{F}^d \to \mathcal{F}^d$, $(\alpha, F) \mapsto \alpha F$ *ist stetig auf* $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathcal{F}^d$.

Beweis. Übung. Dort wird auch gezeigt, dass die zweite Aussage auf $\mathbb{R} \times \mathcal{F}^d$ nicht richtig ist. □

Satz 1.1.13 (i) *Die Abbildung* $\mathcal{F}^d \times \mathcal{F}^d \to \mathcal{F}^d$, $(F, F') \mapsto F \cap F'$ *ist messbar.*

(ii) *Die Abbildungen* $\mathcal{F}^d \to \mathcal{F}^d$, $F \mapsto \mathrm{cl}(\mathbb{R}^d \setminus F)$, $F \mapsto \mathrm{cl}\,\mathrm{conv}(F)$ *und die Abbildung* $\mathcal{F}^d \to \mathcal{F}^d, F \mapsto \partial F$ *sind messbar.*

(iii) *Die Abbildung* $\mathcal{F}^d \times \mathcal{F}^d \to \mathcal{F}^d$, $(F, F') \mapsto \mathrm{cl}(F + F')$ *ist messbar.*

(iv) *Die Abbildung* $\mathbb{R}^d \times \mathcal{F}^d \to \mathbb{R}$, $(x, F) \mapsto \mathbb{1}_F(x)$ *ist messbar.*

Beweis. Wir zeigen einen Teil der Aussagen und verweisen für die restlichen Aussagen auf [6] bzw. auf analoge Schlussweisen.

Zu (i): Sei $\varphi(F_1, F_2) := F_1 \cap F_2$. Da für $C \in \mathcal{C}^d$ stets $\varphi^{-1}\left(\mathcal{F}^C\right)$ offen ist aufgrund von Korollar 1.1.9, folgt die Behauptung aus Bemerkung 1.1.10.

Für (ii) und (iii) zeigt man, dass die Abbildungen jeweils unterhalbstetig sind. Beispielsweise gilt für eine offene Menge $G \subset \mathbb{R}^d$, dass

$$\{F \in \mathcal{F}^d : G \cap \mathrm{cl}\, F^c \neq \emptyset\} = \{F \in \mathcal{F}^d : G \cap F^c \neq \emptyset\} = \{F \in \mathcal{F}^d : G \subset F\}^c.$$

Nun ist aber $\{F \in \mathcal{F}^d : G \subset F\}$ abgeschlossen. Sei nämlich $F_i \to F$ und $G \subset F_i$ für $i \in \mathbb{N}$. Für $x_i := x \in G \subset F_i$ gilt $x_i \to x$ und daher $x \in F$. Also ist $G \subset F$.

In analoger Weise erhält man für eine offene Menge $G \subset \mathbb{R}^d$, dass

$$\{(F, F') \in \mathcal{F}^d \times \mathcal{F}^d : G \cap \mathrm{cl}(F + F') \neq \emptyset\} = \{(F, F') \in \mathcal{F}^d \times \mathcal{F}^d : G \cap (F + F') \neq \emptyset\}$$

offen ist. Sonst gäbe es nämlich $F, F' \in \mathcal{F}^d$ und Folgen $F_i, F_i' \in \mathcal{F}^d$ mit $F_i \to F$ und $F_i' \to F'$, wobei

$$(F_i + F_i') \cap G = \emptyset, \quad i \in \mathbb{N}, \qquad (F + F') \cap G \neq \emptyset.$$

Dann existieren $x \in F$ und $x' \in F'$ mit $x + y \in G$ sowie Folgen $x_i \in F_i$, $x_i' \in F_i'$ mit $x_i \to x$ und $x_i' \to x'$. Hieraus folgt für hinreichend großes $i \in \mathbb{N}$, dass $x_i + x_i' \in G$, also $(F_i + F_i') \cap G \neq \emptyset$, ein Widerspruch.

Zum Nachweis von (iv) zeigen wir, dass für $\varphi(x, F) := \mathbb{1}\{x \in F\}$ die Urbildmenge $\varphi^{-1}(\{1\})$ abgeschlossen ist. Seien dazu $(x_i, F_i) \in \varphi^{-1}(\{1\})$ für $i \in \mathbb{N}$ und $(x_i, F_i) \to (x, F)$ für $i \to \infty$. Dann ist $x_i \in F_i$ und $x \in F$ wegen Satz 1.1.3 (ii) b). Also folgt $(x, F) \in \varphi^{-1}(\{1\})$. □

Definition 1.1.14 Für $B \subset \mathbb{R}^d$ und $\varepsilon > 0$ sei

$$B_{\oplus\varepsilon} := B + \varepsilon B^d$$

die *Parallelmenge* von B mit Abstand $\varepsilon > 0$.

Bemerkung 1.1.15 Ist $B \in \mathcal{F}^d$, so gilt $B_{\oplus\varepsilon} = \{x \in \mathbb{R}^d : d(x, B) \leq \varepsilon\}$, wobei $d(\cdot, \cdot)$ die euklidische Metrik bezeichnet und $d(x, B) := \inf\{d(x, y) : y \in B\}$. Diese Beschreibung kann man auch in beliebigen metrischen Räumen (E, d) verwenden und hierdurch eine Parallelmenge erklären. Die nachfolgenden Betrachtungen lassen sich dann entsprechend verallgemeinern.

Definition 1.1.16 Die Hausdorff-Metrik δ auf $\mathcal{C}^d \setminus \{\emptyset\}$ ist definiert durch

$$\delta(C, C') := \min\{\varepsilon \geq 0 : C \subset C'_{\oplus\varepsilon}, C' \subset C_{\oplus\varepsilon}\}.$$

Ferner definiert man $\delta(\emptyset, C) = \delta(C, \emptyset) := \infty,\ C \in \mathcal{C}^d \setminus \{\emptyset\}$, und $\delta(\emptyset, \emptyset) := 0$.

Satz 1.1.17 *Die Hausdorff-Metrik ist sowohl auf $\mathcal{C}^d \setminus \{\emptyset\}$ als auch auf $\mathcal{C}^d$ eine Metrik.*

Satz 1.1.18 *Es seien $C, C_1, C_2, \ldots \in \mathcal{C}^d \setminus \{\emptyset\}$. Gilt $\delta(C_n, C) \to 0$, so folgt $C_n \to C$ bezüglich τ^d. Die Umkehrung ist richtig, falls $C_n \subset K$, $n \in \mathbb{N}$, für ein $K \in \mathcal{C}^d$.*

Dass die Umkehrung im Allgemeinen nicht richtig ist, folgt schon daraus, dass $\emptyset$ in $(\mathcal{C}^d, \delta)$ ein isolierter Punkt ist, nicht dagegen in der Spurtopologie von τ.

Beweis. "$\Rightarrow$": Sei $\delta(C_n, C) \to 0$ für $n \to \infty$. Wir zeigen die Konvergenz in $\mathcal{F}^d$ und verwenden hierzu Satz 1.1.3. Sei zunächst $x \in C$. Wegen $d(x, C_i) \to 0$ für $i \to \infty$ gibt es für $i \in \mathbb{N}$ ein $x_i \in C_i$ mit $x_i \to x$. Umgekehrt sei $(C_{i_j})_j$ eine Teilfolge und $x_{i_j} \in C_{i_j}$ mit $x_{i_j} \to x$. Wegen $d(C_{i_j}, C) \to 0$ gibt es $y_{i_j} \in C$ mit $d(x_{i_j}, y_{i_j}) \to 0$. Also ist auch $d(y_{i_j}, x) \to 0$, das heißt $y_{i_j} \to x$ für $j \to \infty$ und damit $x \in C$.

"$\Leftarrow$": Sei $C_i \to C$ für $i \to \infty$ bezüglich τ^d und $C_n \subset K$ für $i \in \mathbb{N}$. Wir zeigen $\delta(C_i, C) \to 0$. Aus $C = \emptyset$ folgt $C_i = \emptyset$ für fast alle $i \in \mathbb{N}$ (warum?). Wir können also $C \neq \emptyset$ und daher auch $C_i \neq \emptyset$ für (fast alle) $i \in \mathbb{N}$ annehmen (warum?).

Angenommen $\delta(C_i, C) \to 0$ für $i \to \infty$ wäre falsch. Dann gäbe es $\varepsilon > 0$ mit $\delta(C_i, C) \geq \varepsilon$ für unendlich viele $i \in \mathbb{N}$, sei etwa $I \subset \mathbb{N}$ eine solche Indexmenge. Dann gilt für alle $i \in I$ jeweils einer der beiden Fälle:

(a) $\exists x_i \in C\, \forall y \in C_i : d(x_i, y) \geq \varepsilon$;

(b) $\exists y_i \in C_i\, \forall x \in C : d(y_i, x) \geq \varepsilon$.

Gilt (a) für eine unendliche Teilmenge $I' \subset I$, so gibt es eine unendliche Teilmenge $J \subset I'$ und eine Teilfolge $(x_j)_j$, $j \in J$, in C mit $x_j \to x_0 \in C$, da C folgenkompakt ist. Wegen $C_j \to C$ in $\mathcal{F}^d$ gibt es $y_j \in C_j$ mit $y_j \to x_0$. Damit gilt $d(x_j, y_j) \to 0$, im Widerspruch zur Voraussetzung in (a).

Gilt (b) für eine unendliche Teilmenge $I' \subset I$, so gibt es eine unendliche Teilmenge $J \subset I'$ und eine Teilfolge (y_j), $j \in J$, mit $y_j \in C_j \subset K$ mit $y_j \to x_0 \in C$ wegen $C_j \to C$ in $\mathcal{F}^d$, im Widerspruch zu (b). $\square$

Wird $\mathcal{C}^d$ mit der Hausdorfmetrik versehen, so sind die folgenden Abbildungen $\mathcal{C}^d \times \mathcal{F}^d \to \mathcal{F}^d$ mit $(C, F) \mapsto C \cup F$ beziehungsweise $(C, F) \mapsto C + F$ stetig. Bezeichnet G_d die Bewegungsgruppe und SO_d die Gruppe der eigentlichen Drehungen des $\mathbb{R}^d$, so sind auch die Abbildungen $G_d \times \mathcal{F}^d \to \mathcal{F}^d$, $(g, F) \mapsto gF$, und $G_d \times \mathcal{C}^d \to \mathcal{C}^d$, $(g, C) \mapsto gC$, stetig.

Lemma 1.1.19 *Die Abbildung $V_d : \mathcal{C}^d \to \mathbb{R}$, $C \mapsto \lambda_d(C)$, ist oberhalbstetig.*

Beweis. Sei $C_i \to C$ in $(\mathcal{C}^d, \delta)$ und $x \in \mathbb{R}^d$. Dann gilt

$$\limsup_{i\to\infty} \mathbf{1}_{C_i}(x) \leq \mathbf{1}_C(x).$$

Für fast alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $C_i \subset C + B^d$, so dass $\mathbf{1}_{C_i} \leq \mathbf{1}_{C+B^d}$, wobei $\mathbf{1}_{C+B^d}$ integrierbar bezüglich λ_d ist. Somit ergibt das Lemma von Fatou

$$V_d(C) = \int \mathbf{1}_C(x)\, \lambda_d(dx) \geq \int \limsup_{i\to\infty} \mathbf{1}_{C_i}(x)\, \lambda_d(dx)$$

$$\geq \limsup_{i\to\infty} \int \mathbf{1}_{C_i}(x)\,\lambda_d(dx)$$
$$= \limsup_{i\to\infty} V_d(C_i),$$

was die Behauptung beweist. □

1.2 Zufällige abgeschlossene Mengen

Im Folgenden ist E stets ein lokalkompakter Hausdorffraum mit abzählbarer Basis und $\mathcal{B}(\mathcal{F}(E))$ die σ-Algebra der Borelmengen in $(\mathcal{F}(E), \mathcal{O}_{\mathcal{F}(E)})$.

Lemma 1.2.1 *Es gilt* $\mathcal{B}(\mathcal{F}(E)) = \sigma(\{\mathcal{F}^C \mid C \in \mathcal{C}\}) = \sigma(\{\mathcal{F}_G \mid G \in \mathcal{G}\})$.

Beweis. Sei $\mathscr{H} := \{\mathcal{F}^C \mid C \in \mathcal{C}\} \cup \{\mathcal{F}_G \mid G \in \mathcal{G}\}$. Wir zeigen zunächst

$$\sigma(\mathscr{H}) = \sigma(\{\mathcal{F}^C \mid C \in \mathcal{C}\}) = \sigma(\{\mathcal{F}_G \mid G \in \mathcal{G}\}). \tag{1.2.1}$$

Tatsächlich wurde dies schon in Bemerkung 1.1.10 festgestellt.

[Sei $G \in \mathcal{G}$. Dann gibt es $C_i \in \mathcal{C},\ i \in \mathbb{N}$, mit $G = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i$. Also ist

$$\mathcal{F}_G = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_{C_i} = \left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{F}^{C_i}\right)^c.$$

Sei $C \in \mathcal{C}$. Dann gibt es $G_i \in \mathcal{G},\ i \in \mathbb{N}$, mit $\mathrm{cl}(G_i) \subset G_{i-1}$, $\mathrm{cl}(G_i) \in \mathcal{C}$ und $C = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} G_i$. Dann gilt $\mathcal{F}^C = (\mathcal{F}_C)^c = \left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_{G_i}\right)^c$. Denn ist $F \in \mathcal{F}$ und $F \cap G_i \neq \emptyset$ für alle $i \in \mathbb{N}$, so gilt auch $F \cap \mathrm{cl}(G_i) \neq \emptyset$ für alle $i \in \mathbb{N}$, aufgrund eines Kompaktheitsarguments also

$$\emptyset \neq \bigcap_{i\in\mathbb{N}} (F \cap \mathrm{cl}(G_i)) = F \cap \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{cl}(G_i) \subset \bigcap_{i\geq 2} (F \cap G_{i-1}) = F \cap C.$$

Damit ist (1.2.1) bewiesen.]

Das System τ aller endlichen Durchschnitte von Mengen aus $\mathcal{H}$ ist eine Basis der Fell-Topologie. Unter Verwendung des im Beweis von Satz 1.1.2 benutzten Systems $\mathcal{D}$ kann man sogar eine abzählbare Basis $\tau' \subset \tau$ angeben. Damit folgt $\mathcal{O}_{\mathcal{F}(E)} \subset \sigma(\tau')$, also

$$\mathcal{B}(\mathcal{F}(E)) = \sigma(\mathcal{O}_{\mathcal{F}(E)}) \subset \sigma(\tau') \subset \sigma(\tau) = \sigma(\mathscr{H})$$

und aus (1.2.1) folgt die Behauptung. □

Korollar 1.2.2 *Ist* $\varphi : (T, \mathcal{O}_T) \to (\mathcal{F}, \mathcal{O}_{\mathcal{F}})$ *halbstetig, so ist* φ *Borel-messbar.*

Beweis. Ist φ oberhalbstetig, so gilt $\varphi^{-1}(\mathcal{F}^C) \in \mathcal{O}_T$ für $C \in \mathcal{C}$. Somit ist

$$\varphi^{-1}(\mathcal{B}(\mathcal{F})) = \varphi^{-1}(\sigma(\{\mathcal{F}^C \mid C \in \mathcal{C}\})) = \sigma(\varphi^{-1}(\{\mathcal{F}^C \mid C \in \mathcal{C}\})) \subset \sigma(\mathcal{O}_T) = \mathcal{B}(T).$$

Analog für φ unterhalbstetig. □

Sei im Folgenden stets $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Definition 1.2.3 Eine messbare Abbildung $Z : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathcal{F}(E), \mathcal{B}(\mathcal{F}(E)))$ heißt zufällige abgeschlossene Menge in E (kurz: ZAM). Das Bildmaß von $\mathbb{P}$ unter Z, d.h. $\mathbb{P}_Z = Z(\mathbb{P}) = \mathbb{P} \circ Z^{-1}$ wird als die Verteilung von Z bezeichnet.

Definition 1.2.4 Sind Z, Z' zufällige abgeschlossene Mengen in E, die auf Wahrscheinlichkeitsräumen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ beziehungsweise $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$ erklärt sind, so schreibt man (wie üblich in der Wahrscheinlichkeitstheorie) $Z \overset{d}{=} Z'$, falls $\mathbb{P}_Z = \mathbb{P}'_{Z'}$.

Bemerkungen 1.2.5

1. Ist nur die Verteilung einer ZAM Z in E von Interesse, so kann Z durch die kanonische Darstellung $\mathrm{kan} : \big(\mathcal{F}(E), \mathcal{B}(\mathcal{F}(E)), \mathbb{P}_Z\big) \to (\mathcal{F}(E), \mathcal{B}(\mathcal{F}(E))$ ersetzt werden, insbesondere ist $Z \overset{d}{=} \mathrm{kan}$.

2. Für $A \in \mathcal{B}(\mathcal{F}(E))$ schreiben wir
$$\mathbb{P}(Z \in A) = \mathbb{P}_Z(A) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid Z(\omega) \in A\}).$$

3. Betrachten wir mehrere ZVen/ZAMen gleichzeitig, so nehmen wir an, dass diese auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum definiert sind. Sind $Z_1, \ldots, Z_k$ ZAMen auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit Werten in $\mathcal{F}(E_1), \ldots, \mathcal{F}(E_k)$, dann ist die gemeinsame Verteilung $\mathbb{P}_{Z_1,\ldots,\mathbb{Z}_k}$ von $Z_1, \ldots, Z_k$ ein W-Maß auf $\times_{i=1}^k \mathcal{F}(E_i)$ mit der Borelschen σ-Algebra $\mathcal{B}\big(\times_{i=1}^k \mathcal{F}(E_i)\big) = \otimes_{i=1}^k \mathcal{B}(\mathcal{F}(E_i))$, das bestimmt ist durch
$$\mathbb{P}_{Z_1,\ldots,Z_k}(\times_{i=1}^k A_i) = \mathbb{P}(Z_1 \in A_1, \ldots, Z_k \in A_k).$$
Die ZAMen $Z_1, \ldots, Z_k$ sind stochastisch unabhängig falls
$$\mathbb{P}_{Z_1,\ldots,\mathbb{Z}_k} = \otimes_{i=1}^k \mathbb{P}_{Z_i},$$
das heißt
$$\mathbb{P}_{Z_1,\ldots,\mathbb{Z}_k}\left(\times_{i=1}^k A_i\right) = \prod_{i=1}^k \mathbb{P}(Z_i \in A_i) \quad \text{für } A_i \in \mathcal{B}(\mathcal{F}(E_i)),\ i = 1, \ldots, k.$$

Beispiele 1.2.6

1. Ist $F \in \mathcal{F}$ (fest), so ist $Z : \Omega \to \mathcal{F}, \omega \mapsto F$ eine ZAM.

2. Sind Z_1, Z_2 ZAM in $\mathcal{F}(E)$ und über einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum erklärt, so sind auch $Z_1 \cup Z_2$ und $Z_1 \cap Z_2$ ZAMen (vgl. Korollare 1.1.4, 1.1.9, 1.2.2).

3. Ist $F \in \mathcal{F}(E)$ und Z eine ZAM in $\mathcal{F}(E)$, so auch $Z \cap F$.

4. Ist $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^d$ ein Zufallsvektor, so ist $\{\xi\}$ eine ZAM. Zum Nachweis sei $G \in \mathcal{G}$. Dann gilt $Z^{-1}(\mathcal{F}_G) = \{Z \cap G \neq \emptyset\} = \{\xi \in G\} \in \mathcal{A}$ und mit Lemma (1.2.1) folgt die Behauptung.
Sind $\xi_i : \Omega \to \mathbb{R}^d,\ i \in \mathbb{N}$, Zufallsvektoren und hat $\{\xi_i(\omega) \mid i \in \mathbb{N}\}$ keinen Häufungspunkt in $\mathbb{R}^d$ für (fast) alle $\omega \in \Omega$, dann ist $\{\xi_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ eine ZAM in $\mathbb{R}^d$.

5. Ist Z eine ZAM, $t \in \mathbb{R}^d$ und $\nu \in SO_d$, so sind $Z+t$ und νZ ebenfalls ZAM (die Addition wird realisierungsweise angewendet, SO_d ist die Gruppe der Drehmatrizen im $\mathbb{R}^d$).

Beispiel 1.2.7 Seien $A, B \in \mathcal{C}^d$ kompakte Mengen. Weiter sei $\Omega = \{0, 1\}$ und $\mathbb{P}$ definiert durch $\mathbb{P}(\{0\}) = p$ für ein $p \in [0, 1]$. Die zufällige abgeschlossene Menge $Z : \Omega \to \mathcal{C}^d$ sei definiert durch $Z(0) := A$ und $Z(1) := B$. Z beschreibt ein Zufallsexperiment, bei dem mit Wahrscheinlichkeit p die Menge A gewählt wird und mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ die Menge B.

Beispiel 1.2.8 Sei R eine nichtnegative reelle Zufallsvariable. Dann ist durch $Z(R) := B^d(0,R) \subset \mathbb{R}^d$ eine zufällige kompakte Menge in $\mathbb{R}^d$ definiert. Das Experiment beschreibt einen Kreis mit dem zufälligen Radius R.

Beispiel 1.2.9 Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ seien unabhängige identisch verteilte zufällige Punkte $\xi_n : \Omega \to \mathbb{R}^d$, die jeweils gleichverteilt im Einheitskreis $B(0,1) \subset \mathbb{R}^d$ seien. Dann ist durch $Z := \operatorname{conv}\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ eine zufällige kompakte, konvexe Menge definiert, d.h. insbesondere $Z : \Omega \to \mathcal{K}^d$. Das Experiment beschreibt ein zufälliges konvexes Polytop in $B^d(0,1)$ mit einer zufälligen Anzahl Ecken ($\leq n$).

Definition 1.2.10 Sei Z eine ZAM in $\mathbb{R}^d$. Man nennt Z

$$\text{stationär} :\Leftrightarrow \forall\, t \in \mathbb{R}^d : \ \mathbb{P}_{Z+t} = \mathbb{P}_Z,$$

$$\text{isotrop} :\Leftrightarrow \forall\, \vartheta \in SO_d : \ \mathbb{P}_{\vartheta Z} = \mathbb{P}_Z.$$

Die Stationarität einer nicht leeren, zufälligen abgeschlossenen Menge hat fast sicher zur Folge, dass die Menge nicht beschränkt sein kann.

Satz 1.2.11 *Sei Z eine stationäre, kompakte ZAM in $\mathbb{R}^d$. Dann gilt $\mathbb{P}(Z = \emptyset) = 1$.*

Beweis. Wir nehmen $\mathbb{P}(Z \neq \emptyset) > 0$ an. Unter dem bedingten Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}' := \mathbb{P}(\cdot \mid Z \neq \emptyset)$ ist die ZAM Z wieder stationär, denn für alle $A \in \mathcal{B}(\mathcal{F}^d)$ und alle $t \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}'(Z+t \in A) &= \frac{\mathbb{P}(Z+t \in A,\, Z \neq \emptyset)}{\mathbb{P}(Z \neq \emptyset)} = \frac{\mathbb{P}(Z+t \in A,\, Z+t \neq \emptyset)}{\mathbb{P}(Z \neq \emptyset)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(Z \in A,\, Z \neq \emptyset)}{\mathbb{P}(Z \neq \emptyset)} \\
&= \mathbb{P}'(Z \in A)\,.
\end{aligned}$$

Sei nun $\ell(B)$ das lexikographische Minimum der kompakten Menge $B \subset \mathbb{R}^d$. Dann gilt zunächst $\ell(B+x) = \ell(B) + x$, $x \in \mathbb{R}^d$, und damit $\ell(Z) + x = \ell(Z+x) \stackrel{d}{=} \ell(Z)$. Hieraus leitet man leicht einen Widerspruch ab. Sei hierzu $\ell(B)_1$ die e_1-Koordinate von $\ell(B)$. Zunächst gilt

$$p := \mathbb{P}(\ell(Z)_1 \in [0,1)) = \mathbb{P}(\ell(Z)_1 \in [n,n+1)), \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Aber dann folgt

$$\begin{aligned}
1 = \mathbb{P}(\ell(Z)_1 \in \mathbb{R}) &= \mathbb{P}\left(\ell(Z)_1 \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n,n+1)\right) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}\left(\ell(Z)_1 \in [n,n+1)\right) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} p,
\end{aligned}$$

ein Widerspruch. $\square$

Der folgende Satz beinhaltet eine geringfügig allgemeinere Aussage. Die Beweisidee ist ähnlich.

Satz 1.2.12 *Sei Z eine stationäre, konvexe ZAM in $\mathbb{R}^d$. Dann ist $Z \in \{\emptyset, \mathbb{R}^d\}$ für fast alle Realisierungen. Insbesondere ist jede stationäre ZAM fast sicher die leere Menge oder unbeschränkt.*

Beweis. Wegen $\mathrm{cl}(\mathrm{conv}(Z+t)) = \mathrm{cl}(\mathrm{conv}(Z)) + t$ ist mit Z auch $\mathrm{cl}(\mathrm{conv}(Z))$ stationär. Daher genügt der Beweis der ersten Behauptung, d.h. wir zeigen $\mathbb{P}(Z \in \{\emptyset, \mathbb{R}^d\}) = 1$, wenn Z eine stationäre konvexe ZAM in $\mathbb{R}^d$ ist. Wir nehmen hierzu indirekt an, dass $\mathbb{P}(Z \notin \{\emptyset, \mathbb{R}^d\}) > 0$ gilt und führen dies auf einen Widerspruch.

Sei $\alpha \in (0, \pi/2)$ (beliebig) fest gewählt und bezeichne $\mathbb{S}^{d-1}$ die Einheitssphäre. Für $x \in \mathbb{R}^d$ und $y \in \mathbb{S}^{d-1}$ ist

$$C(x,y) := \{z \in \mathbb{R}^d : \langle z, y\rangle \geq \|z\| \cos\alpha\} + x$$

ein konvexer Kegel mit Spitze in x, Richtung y und Öffnungswinkel α. Sei $S \subset \mathbb{S}^{d-1}$ abzählbar und dicht.

Wir zeigen zunächst, dass aus der Annahme die folgende Behauptung folgt:

Es gibt $x \in \mathbb{Q}^d$ und $y \in S$ mit

$$p := \mathbb{P}(\emptyset \neq Z \cap C(x,y) \subset x + B^d) > 0.$$

Zum Nachweis nehmen wir indirekt an, dass

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{x\in\mathbb{Q}^d, y\in S} \{\emptyset \neq Z \cap C(x,y) \subset x + B^d\}\right) = 0. \tag{1.2.2}$$

Für $\omega \in \Omega$ mit $Z(\omega) \notin \{\emptyset, \mathbb{R}^d\}$ ist $\partial Z(\omega) \neq \emptyset$, und es gibt $x_0 = x_0(\omega) \in \partial Z(\omega)$, $y_0 = y_0(\omega) \in \mathbb{S}^{d-1}$, so dass

$$Z(\omega) \subset \{z \in \mathbb{R}^d : \langle z - x_0, y_0\rangle \leq 0\}.$$

Folglich ist $Z(\omega) \cap C(x_0, y_0) = \{x_0\}$. Dann existieren aber $x \in \mathbb{Q}^d$ und $y \in S$ mit

$$x_0 \in Z(\omega) \cap C(x,y) \subset x + B^d.$$

Wegen (1.2.2) wäre dann aber $\mathbb{P}(Z \notin \{\emptyset, \mathbb{R}^d\}) = 0$, ein Widerspruch zu obiger Annahme. Dies zeigt die Behauptung.

Wir wählen nun x, y wie in der Behauptung. Für $k \in \mathbb{N}$ sei

$$\begin{aligned} A_k :&= \{\emptyset \neq Z \cap C(x + 2ky, y) \subset x + 2ky + B^d\} \\ &= \{\emptyset \neq (Z - 2ky) \cap C(x,y) \subset x + B^d\}. \end{aligned}$$

Da Z stationär ist, gilt $\mathbb{P}(A_k) = p > 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Andererseits gilt $A_k \cap A_l = \emptyset$ für $k \neq l$. Zum Nachweis sei etwa $k > l$. Dann gilt einerseits

$$\emptyset \neq Z \cap C(x + 2ky, y) \subset (x + 2ky + B^d) \cap C(x + 2ky, y) =: C_k$$

und andererseits

$$\emptyset \neq Z \cap C(x + 2ky, y) \subset Z \cap C(x + 2ly, y) \subset (x + 2ly + B^d) \cap C(x + 2ly, y) =: C_l,$$

und damit wäre $C_k \cap C_l \neq \emptyset$, im Widerspruch dazu, dass dieser Durchschnitt offenbar stets leer ist.

Hiermit folgt nun

$$\infty = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq 1,$$

ein Widerspruch. Dies zeigt, dass die ursprüngliche Annahme falsch sein muss. $\square$

1.3 Das Kapazitätsfunktional

Sei ξ eine reelle ZV. Die Verteilungsfunktion

$$F_\xi(t) := \mathbb{P}(\xi \le t) = \mathbb{P}(\{\xi\} \cap (-\infty, t] \ne \emptyset),\ t \in \mathbb{R},$$

von ξ hat folgende Eigenschaften:

(a') $0 \le F_\xi \le 1,\ F_\xi(-\infty) := \lim_{t\to-\infty} F_\xi(t) = 0,$

(b') $F_\xi(t_i) \to F_\xi(t)$ für $t_i \searrow t$ (Rechtsstetigkeit),

(c') $\forall\, t_0 \in \mathbb{R}, t_1 \in [0,\infty):\ F_\xi(t_0+t_1) - F_\xi(t_0) \ge 0$ (Monotonie).

Außerdem ist $\mathbb{P}_\xi$ durch F_ξ eindeutig bestimmt. Erfüllt eine Funktion F die Bedingungen (a'),(b') und (c'), so existiert eine ZV X mit $F = F_X$.

Ein analoges, allgemeineres Konzept existiert für ZAM.

Definition 1.3.1 Sei Z eine ZAM. Man nennt

$$T_Z : \mathcal{C} \to [0,1], \qquad C \mapsto T_Z(C) := \mathbb{P}(Z \cap C \ne \emptyset),$$

das *Kapazitätsfunktional* von Z (auch „hitting“-Funktional oder Choquet Kapazität).

Proposition 1.3.2 *Das Kapazitätsfunktional hat folgende Eigenschaften.*

(a) $0 \le T_Z \le 1,\ T_Z(\emptyset) = 0.$

(b) *Sind* $C_i \in \mathcal{C},\ i \in \mathbb{N},\ C \in \mathcal{C},\ C_i \subset C_{i-1}$ *und* $C = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} C_i$*, so gilt* $T_Z(C_i) \to T_Z(C)$.

(c) *Für* $C_0, C_1, \ldots, C_k \in \mathcal{C},\ k \in \mathbb{N}_0$*, sei*

$$\begin{aligned} S_0(C_0) &:= 1 - T_Z(C_0) = \mathbb{P}(Z \cap C_0 = \emptyset) \\ S_k(C_0; C_1, \ldots, C_k) &:= S_{k-1}(C_0; C_1, \ldots, C_{k-1}) \\ &\qquad - S_{k-1}(C_0 \cup C_k; C_1 \ldots, C_{k-1}). \end{aligned}$$

Dann gilt $S_k \ge 0$.

(d) *Für* $k \in \mathbb{N}$ *und* $C_0, C_1, \ldots, C_k \in \mathcal{C}$ *gilt*

$$S_k(C_0; C_1, \ldots, C_k) = \sum_{r=0}^{k} (-1)^{r-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_r \le k} T(C_0 \cup C_{i_1} \cup \ldots \cup C_{i_r}),$$

wobei für $r = 0$ *der innere Summand als* $T(C_0)$ *zu lesen ist.*

Beweis. (a) trivial.

(b) T_Z ist offensichtlich monoton, außerdem gilt $\{Z \cap C \ne \emptyset\} = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \{Z \cap C_i \ne \emptyset\}$ wegen der Kompaktheit der Mengen $Z \cap C_i$. Da $\mathbb{P}$ stetig von oben ist, folgt die Behauptung.

(c) Man beweise mit Hilfe von

$$\mathcal{F}^{C_0}_{C_1,\dots,C_k} = \mathcal{F}^{C_0}_{C_1,\dots,C_{k-1}} \setminus \mathcal{F}^{C_0 \cup C_k}_{C_1,\dots,C_{k-1}} \tag{1.3.1}$$

per Induktion $S_k(C_0; C_1, \dots, C_k) = \mathbb{P}_Z(\mathcal{F}^{C_0}_{C_1,\dots,C_k})$.

(d) Vollständige Induktion über $k \geq 1$.

□

Satz 1.3.3 *Sei $T : \mathcal{C} \to [0,1]$ ein Funktional, das* (a), (b) *und* (c) *erfüllt. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ auf $\mathcal{F}(E)$ mit $T(C) = \mathbb{Q}(\mathcal{F}_C)$ für alle $C \in \mathcal{C}$. Insbesondere gibt es eine ZAM Z mit $T = T_Z$. Die Verteilung von Z ist dadurch eindeutig bestimmt.*

Beweis. Siehe [6, S. 22-30]. Beweisidee: Man betrachtet das $\cap$-stabile Mengensystem

$$\mathsf{A} := \{\mathcal{F}^{C_0}_{C_1,\dots,C_k} : C_i \in \mathcal{C}, k \in \mathbb{N}_0\}.$$

Es ist leicht zu sehen, dass dies eine Semialgebra ist, das heißt insbesondere, dass Komplemente von Mengen des Systems zumindest endliche Vereinigungen paarweise disjunkter Elemente des Mengensystems sind. Man möchte dann

$$\mathbb{Q}(\mathcal{F}^{C_0}_{C_1,\dots,C_k}) := S_k(C_0; C_1, \dots, C_k)$$

erklären. Das erfordert einigen Aufwand, da die Darstellung nicht eindeutig ist. In jedem Fall gilt aber schon $\mathbb{Q} \geq 0$ sowie $\mathbb{Q}(\emptyset) = \mathbb{Q}(\mathcal{F}^{\emptyset}_{\emptyset}) = S_1(\emptyset;\emptyset) = 0$, $\mathbb{Q}(\mathcal{F}) = \mathbb{Q}(\mathcal{F}^{\emptyset}) = S_0(\emptyset) = 1 - T(\emptyset) = 1$ sowie

$$\mathbb{Q}(\mathcal{F}_C) = \mathbb{Q}(\mathcal{F}^{\emptyset}_C) = S_1(\emptyset; C) = S_0(\emptyset) - S_0(C) = T(C) - T(\emptyset) = T(C).$$

Dann zeigt man, dass die so (korrekt) erklärte Mengenfunktion endlich additiv auf A ist und daher eine eindeutig bestimmte endlich additive Fortsetzung auf die von A erzeugte Algebra $\mathsf{A}^\bullet$ hat. Dann zeigt man mittels einer kompakten Approximation, dass $\mathbb{Q}$ auf $\mathsf{A}^\bullet$ sogar $\emptyset$-stetig und daher σ-additiv ist. Nach dem Maßfortsetzungssatz existiert dann eine σ-additive Fortsetzung von $\mathbb{Q}$ auf die erzeugte σ-Algebra.

Die Eindeutigkeit ist allerdings leicht einzusehen, da offensichtlich $\mathbb{Q}(\mathcal{F}_C) = 1 - \mathbb{Q}(\mathcal{F}^C)$ und $\{\mathcal{F}^C \mid C \in \mathcal{C}\}$ ein $\cap$-stabiles Erzeugendensystem von $\mathcal{B}(\mathcal{F}(E))$ ist. □

Korollar 1.3.4 *Eine ZAM Z in $\mathbb{R}^d$ ist stationär (bzw. isotrop) genau dann, wenn T_Z ein translations- (bzw. rotations-) invariantes Funktional ist.*

Beweis. Für $t \in \mathbb{R}^d$ und $C \in \mathcal{C}$ gilt

$$\begin{aligned}
\text{“}\Rightarrow\text{”} : T_Z(C+t) &= \mathbb{P}(Z \cap (C+t) \neq \emptyset) = \mathbb{P}((Z-t) \cap C \neq \emptyset) \\
&= \mathbb{P}(Z \cap C \neq \emptyset) = T_Z(C) \\
\text{“}\Leftarrow\text{”} : \mathbb{P}_{Z+t}(\mathcal{F}_C) &= \mathbb{P}((Z+t) \cap C \neq \emptyset) = \mathbb{P}(Z \cap (C-t) \neq \emptyset) \\
&= T_Z(C-t) = T_Z(C) = \mathbb{P}_Z(\mathcal{F}_C).
\end{aligned}$$

Die zweite Behauptung folgt analog. □

Kurz erwähnen: Weitere Kenngrößen zufälliger abgeschlossener Mengen, die jedoch im Allgemeinen nicht charakterisierend sind, sind etwa Volumendichte, Kovarianzfunktion und Kontaktverteilungsfunktionen. Diese Größen werden in den Übungen und im weiteren Verlauf der Vorlesung diskutiert.

2 Zufällige Maße und Punktprozesse

Neben zufälligen abgeschlossenen Mengen sind zufällige Maße und spezieller Punktprozesse entscheidende mathematische Konzepte, die für die Beschreibung zufälliger Strukturen in der Stochastischen Geometrie wichtig sind. Grob gesprochen ist ein zufälliges Maß ein Maß, das als das Ergebnis eines Zufallsexperiments entsteht. Das Maß selbst kann konkret auf dem $\mathbb{R}^n$ oder auf einem allgemeineren Raum erklärt sind. Im Folgenden genügt es, wenn der Grundraum ein separabler metrischer Raum ist.

2.1 Grundlagen

Nachfolgend sei stets $(\mathbb{X}, \rho)$ ein separabler metrischer Raum mit Borelscher σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{X}) =: \mathcal{X}$.

Definition 2.1.1 (i) Eine Menge $B \subset \mathbb{X}$ heißt *beschränkt*, falls

$$\rho(B) := \sup\{\rho(x,y) \colon x, y \in B\} < \infty.$$

$\rho(B)$ heißt *Durchmesser* von B. Weiter sei $\mathcal{X}_b := \{B \in \mathcal{X} \colon B \text{ beschränkt}\}$.

(ii) Eine Menge $A \subset \mathbb{X}$ heißt *lokal-endlich*, falls $\operatorname{card}(A \cap B) < \infty$, $B \in \mathcal{X}_b$.

Jede kompakte (und auch jede relativ kompakte) Teilmenge von $\mathbb{X}$ ist beschränkt.

Definition 2.1.2

(i) $M(\mathbb{X}) := \{\mu \colon \mu \text{ ist ein Borel-Maß auf } \mathbb{X} \text{ mit } \mu(B) < \infty \text{ für } B \in \mathcal{X}_b\}$
heißt Menge der *lokal-endlichen Maße* auf $\mathbb{X}$.

(ii) $N(\mathbb{X}) := \{\varphi \in M(\mathbb{X}) \colon \varphi(B) \in \mathbb{N}_0 \text{ für } B \in \mathcal{X}_b\}$
heißt Menge der lokal-endlichen *Zählmaße* auf $\mathbb{X}$.

(iii) $N_s(\mathbb{X}) := \{\varphi \in N(\mathbb{X}) \colon \varphi(\{x\}) \in \{0,1\} \text{ für } x \in \mathbb{X}\}$
heißt Menge der *einfachen* Zählmaße auf $\mathbb{X}$.

(iv) $\mathcal{M}(\mathbb{X})$ sei die kleinste σ-Algebra auf $M(\mathbb{X})$, für die die Abbildungen $\mu \mapsto \mu(B)$ für jedes $B \in \mathcal{X}$ („Auswertungsfunktionale") messbar sind, d.h. $\mathcal{M}(\mathbb{X})$ ist die kleinste σ-Algebra, welche alle Mengen der Form $\{\mu \colon \mu(B) \in C\}$, $B \in \mathcal{X}$, $C \in \mathcal{B}([0,\infty])$, enthält. Ferner seien

$$\mathcal{N}(\mathbb{X}) := \mathcal{M}(\mathbb{X}) \cap N(\mathbb{X}) \text{ und } \mathcal{N}_s(\mathbb{X}) := \mathcal{M}(\mathbb{X}) \cap N_s(\mathbb{X}).$$

Ist $\mu \in M(\mathbb{X})$, so ist μ endlich auf kompakten Mengen.

Definition 2.1.3 Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\{B_{n,i} : i \in \mathbb{N}\}$ eine Zerlegung von $\mathbb{X}$ in Mengen aus $\mathcal{X}_b$. Wir nennen eine Folge $(\{B_{n,i} : i \in \mathbb{N}\})_{n\in\mathbb{N}}$ solcher Zerlegungen eine (ausgezeichnete) gerichtete Folge von Zerlegungen, wenn jedes $B \in \{B_{n,i} : i \in \mathbb{N}\}$ eine Vereinigung von Mengen aus $\{B_{n+1,i} : i \in \mathbb{N}\}$ ist und wenn $\sup\{\rho(B_{n,i}) : i \in \mathbb{N}\} \to 0$ für $n \to \infty$ gilt.

Bemerkung 2.1.4 In separablen metrischen Räumen $(\mathbb{X}, \rho)$ existieren (ausgezeichnete) gerichtete Folgen von Zerlegungen. Zunächst existiert eine abzählbare Umgebungsbasis offener Mengen $B_n \subset \mathbb{X}$, $n \in \mathbb{N}$. Das Teilsystem derjenigen Mengen B_n mit Durchmesser höchstens $1/k$ für ein festes $k \in \mathbb{N}$, ist dann immer noch eine Umgebungsbasis, überdeckt also insbesondere $\mathbb{X}$. Hieraus erhalten wir sukzessiv eine abzählbare, messbare Zerlegung von $\mathbb{X}$ in disjunkte Mengen vom Durchmesser höchstens $1/k$. Durch Schneiden mit den Mengen der Stufe $k-1$ erhalten wir eine Verfeinerung dieser Zerlegung wie gefordert.

Definition 2.1.5 (i) Ein Maß μ auf $\mathbb{X}$ heißt *diffus*, falls $\mu\{x\} := \mu(\{x\}) = 0$ für alle $x \in \mathbb{X}$.

(ii) Ein Punkt $x \in \mathbb{X}$ heißt *Atom* eines Maßes μ, falls $\mu\{x\} > 0$.

Beispiele 2.1.6 (1) Sei $x \in \mathbb{R}^d$. Das Dirac-Maß δ_x,

$$\delta_x(B) := \mathbb{1}_B(x),$$

hat ein Atom bei x.

(2) Jedes Maß auf $\mathbb{R}^d$ mit Lebesgue-Dichte ist diffus.

Bemerkung 2.1.7 Ist $B \in \mathcal{X}_b$, so hat $\mu \in M(\mathbb{X})$ nur endlich viele Atome in B mit Masse mindestens $r > 0$. Insgesamt hat μ also maximal abzählbar unendlich viele Atome in B und damit auch in $\mathbb{X}$.

Satz 2.1.8 *Jedes $\mu \in M(\mathbb{X})$ besitzt eine Darstellung*

$$\mu = \mu_c + \sum_{i=1}^{\tau} a_i \delta_{x_i}$$

mit einem diffusen Maß μ_c, $\tau \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, $a_i > 0$ und $x_i \in \mathbb{X}$. Dabei können die Abbildungen $\mu \mapsto (\mu_c, \tau)$ und $\mu \mapsto (a_1, x_1, a_2, x_2, \ldots)$ messbar gewählt werden, wobei wir $(a_i, x_i) := (0, x_0)$ für $i > \tau$ mit einem festen $x_0 \in \mathbb{X}$ wählen.

Beweis. Definiere für $r > 0$ ein Maß μ_r^* durch

$$\mu_r^*(B) := \text{card}\{x \in B : \mu(\{x\}) \geq r\} \quad \text{für } B \in \mathcal{X}.$$

Dann ist $\mu_r^* \in N_s(\mathbb{X})$. Sei nun $(\{B_{n,i} : i \in \mathbb{N}\})_{n \geq 1}$ eine gerichtete Folge von Zerlegungen von $\mathbb{X}$ mittels Mengen aus $\mathcal{X}_b$. In den Übungen soll gezeigt werden, dass

$$\mu_r^*(B) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{1}\{\mu(B_{n,i} \cap B) \geq r\} \quad \text{für } B \in \mathcal{X}_b.$$

Folglich ist die Abbildung $\mu \mapsto \mu_r^*$ messbar.

Sei $\upsilon \notin \mathbb{X}$ fest gewählt. Der Beweis von Lemma 2.1.6 in [4], der auf der Einführung einer (mit Hilfe gerichteter Zerlegungen erklärten) lexikographischen Ordnung auf $\mathbb{X}$ beruht, zeigt, dass es eine Folge messbarer Abbildungen $\zeta_i : N_s(\mathbb{X}) \to \mathbb{X} \cup \{\upsilon\}$, $i \in \mathbb{N}$, gibt, so dass

$$\eta = \sum_{i \in \mathbb{N}} \delta_{\zeta_i(\eta)}, \quad \eta \in N_s(\mathbb{X}).$$

Wir erklären

$$\zeta_{n,i}(\mu) := \zeta_i\left(\mu^*_{\frac{1}{n}}\right), \qquad i, n \in \mathbb{N}.$$

Dann ist $\mu \mapsto \zeta_{n,i}(\mu)$ messbar, und jedes Atom von μ ist in $(\zeta_{n,i}(\mu) : n, i \in \mathbb{N})$ enthalten. Hieraus erhalten wir eine Abzählung $(\zeta'_1(\mu), \zeta'_2(\mu), \ldots)$ der Atome von μ mittels messbarer Abbildungen $\zeta'_i : M(\mathbb{X}) \to \mathbb{X} \cup \{\upsilon\}$, $i \in \mathbb{N}$, so dass mit $\tau := \lim_{r \to 0} \mu_r^*(\mathbb{X}) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ gilt $\zeta'_i(\mu) \in \mathbb{X}$ für $i < \tau + 1$ und $\zeta'_i(\mu) = \upsilon$ für $i > \tau$. Setze $x_i := \zeta'_i(\mu)$ und $a_i := \mu(\{x_i\})$ für $i \in \mathbb{N}$ mit $\mu(\{\upsilon\}) := 0$ und $\mu_c := \mu - \sum_{i=1}^{\tau} a_i \delta_{x_i}$. Dann ist $\mu \mapsto \mu_c$ messbar und μ_c atomfrei. □

Bemerkung 2.1.9 Im Beweis von Satz 2.1.8 wird (für den Nachweis der Messbarkeit von a_i) verwendet, dass die Abbildung

$$\mathbb{X} \times M(\mathbb{X}) \to [0, \infty], \qquad (x, \mu) \mapsto \mu(\{x\}),$$

messbar ist. Allgemeiner gilt: Ist $f : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to [0, \infty]$ messbar, so ist die Abbildung

$$\mathbb{X} \times M(\mathbb{X}) \to [0, \infty], \qquad (x, \mu) \mapsto \int f(x, y)\, \mu(dy),$$

messbar. Dies zeigt man für $f = \mathbb{1}_A$ und messbare Mengen A mit einem Monotone-Klassen-Argument.

Folgerung 2.1.10 Die Mengen $N(\mathbb{X})$ und $N_s(\mathbb{X})$ sind messbare Teilmengen von $M(\mathbb{X})$.

Beweis. Es gilt $\mu \in N(\mathbb{X}) \Leftrightarrow \mu_c = 0$ und $a_i \in \mathbb{N}_0$ für $i \in \mathbb{N}$. Ferner gilt $\mu \in N_s(\mathbb{X}) \Leftrightarrow \mu \in N(\mathbb{X})$ und $a_i \in \{0, 1\}$ für $i \in \mathbb{N}$. □

Definition 2.1.11 (i) Ein *zufälliges Maß* η auf $\mathbb{X}$ ist eine messbare Abbildung $\eta\colon \Omega \to M(\mathbb{X})$.

(ii) Ein *Punktprozess* Φ auf $\mathbb{X}$ ist eine messbare Abbildung $\Phi\colon \Omega \to N(\mathbb{X})$. Gilt $\mathbb{P}(\Phi \in N_s(\mathbb{X})) = 1$, so heißt Φ *einfach*.

Bemerkungen 2.1.12 (i) Manchmal wird ein Punktprozess auf $\mathbb{X}$ auch als zufälliges Maß Φ mit $\mathbb{P}(\Phi \in N(\mathbb{X})) = 1$ definiert.

(ii) Für $\varphi \in N(\mathbb{X})$ sei der Träger von φ definiert durch $\operatorname{supp} \varphi = \{x \in \mathbb{X}\colon \varphi(\{x\}) > 0\}$. Jedes Maß $\varphi \in N_s(\mathbb{X})$ kann mit $\operatorname{supp} \varphi$ identifiziert werden.

(iii) Ist η ein zufälliges Maß, so schreibt man $\eta(\omega, B) := \eta(\omega)(B)$ für $\omega \in \Omega$ und $B \in \mathcal{X}$ sowie $\eta(B)$ für die Zufallsvariable $\omega \mapsto \eta(\omega, B)$.

(iv) Eine Abbildung $\eta\colon \Omega \to M(\mathbb{X})$ ist genau dann messbar, wenn die Abbildung $\omega \mapsto \eta(\omega, B)$ für jedes $B \in \mathcal{X}$ messbar ist (Übung).

Bemerkung 2.1.13 Es sei Φ ein Punktprozess auf $\mathbb{X}$. Gemäß Satz 2.1.8 gibt es dann Zufallsvariablen $A_i \in \mathbb{N}$, $\xi_i \in \mathbb{X}$ und τ (mit $\xi_i \neq \xi_j$, $i, j \leq \tau$, $i \neq j$) mit $\Phi = \sum_{i=1}^{\tau} A_i \delta_{\xi_i}$. Analog gibt es Zufallsvariablen τ' und ξ_i' mit $\Phi = \sum_{i=1}^{\tau'} \delta_{\xi_i'}$. Oft wird Φ direkt so definiert.

Im folgenden Beispiel und auch später verwenden wir das j-dimensionale Hausdorffmaß $\mathcal{H}^j$ auf $\mathbb{R}^d$. Für die Definition verweisen wir auf Abschnitt 14.5 in [6]. Ist $B \subset \mathbb{R}^d$ eine konvexe Menge, deren affine Hülle die Dimension $k \geq 1$ hat, so ist $\mathcal{H}^k(B)$ das k-dimensionale Lebesguemaß von B, $\mathcal{H}^j(B) = 0$ für $j < k$ und $\mathcal{H}^j(B) = \infty$ für $j > k$. Ferner ist $\mathcal{H}^0$ das Zählmaß auf $\mathbb{R}^d$. Ist B eine j-dimensionale glatte Fläche, so ist $\mathcal{H}^j(B)$ der (differentialgeometrische) Flächeninhalt von B.

Beispiel 2.1.14 Sei Z eine zufällige abgeschlossene Menge in $\mathbb{R}^d$. Dann definiert

$$\eta(B) := \lambda^d(Z \cap B), \quad B \in \mathcal{B}^d,$$

ein zufälliges Maß η auf $\mathbb{R}^d$. Dies folgt mit Satz 1.1.13 (iv) und dem Satz von Fubini. Auch $B \mapsto \mathcal{H}^{d-1}(\partial Z \cap B)$ ist ein zufälliges Maß auf $\mathbb{R}^d$, falls $\mathcal{H}^{d-1}(\partial Z \cap \cdot)$ lokal endlich ist. Dabei sei $\mathcal{H}^{d-1}$ das $(d-1)$-dimensionale Hausdorffmaß auf $\mathbb{R}^d$. Dies folgt aus Satz 1.1.13 (ii) zusammen mit Corollary 2.1.4 in [7].

Beispiel 2.1.15 Es sei $\{X_t \colon t \in \mathbb{R}^d\}$ ein $\mathbb{R}_+$-wertiges zufälliges Feld, sodass $(\omega, t) \mapsto X_t(\omega)$ messbar ist. Dann ist

$$\eta(B) := \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_B(t) X_t \, dt$$

unter Integrabilitätsbedingungen ein zufälliges Maß.

Beispiel 2.1.16 Es seien $X_1, \ldots, X_m$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen in $\mathbb{X}$ mit der Verteilung $\mathbb{V} = \mathbb{P}(X_i \in \cdot)$. Dann heißt der Punktprozess $\Phi = \sum_{i=1}^m \delta_{X_i}$ *Binomialprozess* mit Parametern m und $\mathbb{V}$. Wegen

$$\Phi(B) = \sum_{i=1}^m \mathbb{1}\{X_i \in B\}$$

ist $\Phi(B)$ messbar, d.h. Φ ist ein Punktprozess. Ferner gilt

$$\mathbb{P}(\Phi(B) = k) = \binom{m}{k} \mathbb{V}(B)^k (1 - \mathbb{V}(B))^{m-k}$$

für $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$, und $\mathbb{P}(\Phi(B) = k) = 0$ für $k > m$.

Beispiel 2.1.17 Es seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen in $\mathbb{X}$ und τ eine von $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unabhängige, $\mathbb{N}_0$-wertige Zufallsvariable. Dann heißt

$$\Phi := \sum_{i=1}^{\tau} \delta_{X_i}$$

gemischter Binomialprozess.

Wir sind nun in der Lage, homogene Poissonprozesse im $\mathbb{R}^d$ zu erklären.

Definition 2.1.18 Ein Punktprozess $\Phi : \Omega \to N(\mathbb{R}^d)$ auf $\mathbb{R}^d$ heißt *homogener (stationärer) Poissonprozess* mit Intensität $\gamma \geq 0$, falls gilt:

(i) Für $m \geq 2$ und paarweise disjunkte Borelmengen $B_1, \ldots, B_m \in \mathcal{B}^d$ sind die Zufallsvariablen $\Phi(B_1), \ldots, \Phi(B_m)$ stochastisch unabhängig.

(ii)
$$\mathbb{P}(\Phi(B) = k) = \frac{\gamma^k (\lambda^d(B))^k}{k!} e^{-\gamma \lambda^d(B)}, \quad B \in \mathcal{B}^d, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Dabei ist $\infty \cdot e^{-\infty} := 0$.

Bemerkung 2.1.19 Sei Φ ein homogener Poissonprozess mit Intensität γ in $\mathbb{R}^d$. Nach Satz 2.1.8 gibt es eine Folge von Zufallspunkten $\xi_1, \xi_2, \ldots$ in $\mathbb{R}^d$ und eine Zufallsvariable τ in $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, so dass $\Phi = \sum_{i=1}^{\tau} \delta_{\xi_i}$ gilt. Insbesondere ist dann $\Phi(B) := \mathrm{card}\{n \in \mathbb{N} \colon n \leq \tau : \xi_n \in B\}$ für $B \in \mathcal{X}$ jeweils eine Poisson-verteilte Zufallsvariable.

Die Verteilung $\mathbb{P}_\eta$ eines zufälligen Maßes η ist die Abbildung $A \mapsto \mathbb{P}(\eta \in A)$ von $\mathcal{M}(\mathbb{X})$ nach $[0,1]$. Für einen Punktprozess Φ gilt insbesondere $\mathbb{P}_\Phi(N(\mathbb{X})) = 1$

Beispiel 2.1.20 Es bezeichne Π_γ die Verteilung eines homogenen Poissonprozesses Φ_γ mit Intensität $\gamma \geq 0$. Ist $Y \geq 0$ eine Zufallsvariable und ist Φ ein Punktprozess auf $\mathbb{R}^d$ mit

$$\mathbb{P}(\Phi \in A | Y) = \Pi_Y(A) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}, \quad A \in \mathcal{N}(\mathbb{X}),$$

dann heißt Φ *gemischter Poissonprozess* mit *zufälliger Intensität* Y.

Definition 2.1.21 Das *Intensitätsmaß* Θ eines zufälligen Maßes η ist definiert durch

$$\Theta(B) := \mathbb{E}[\eta(B)], \quad B \in \mathcal{X}.$$

Beispiel 2.1.22 (i) Für den Binomialprozess Φ aus Beispiel 2.1.16 gilt

$$\Theta(B) = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{m} \delta_{X_i}(B)\right] = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{E}[\mathbb{1}\{X_i \in B\}] = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(X_i \in B) = m\mathbb{V}(B).$$

(ii) Für einen gemischten Binomialprozess wie in Beispiel 2.1.17 gilt

$$\begin{aligned}\Theta(B) &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}\{\tau = m\} \sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}\{X_i \in B\}\right] = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}(\tau = m) m\mathbb{V}(B) \\ &= \mathbb{E}[\tau]\mathbb{V}(B).\end{aligned}$$

(iii) Für einen homogenen Poissonprozess Φ in $\mathbb{R}^d$ mit Intensität $\gamma \geq 0$ ist $\Phi(B)$ poissonverteilt mit Parameter $\gamma\lambda^d(B)$ und deshalb gilt $\Theta(B) = \gamma\lambda^d(B)$, $B \in \mathcal{B}$.

(iv) Für den gemischten Poissonprozess gilt

$$\Theta(B) = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[\Phi(B)|Y]\big] = \mathbb{E}\left[\int \varphi(B)\, \Pi_Y(d\varphi)\right] = \mathbb{E}[Y\lambda^d(B)] = \mathbb{E}[Y]\lambda^d(B).$$

Zur Erinnerung: Für eine messbare Funktion $f\colon \mathbb{X} \to [-\infty, \infty]$, seien $f^+ := \max\{0, f\}$ und $f^- := -\min\{0, f\}$ der Positiv- bzw. Negativteil von f. Sei ν ein Maß auf $\mathbb{X}$. Für $f \geq 0$ ist das Integral $\int_{\mathbb{X}} f\, d\nu$ immer definiert, nimmt aber möglicherweise den Wert ∞ an. Für beliebiges f definieren wir $\int_{\mathbb{X}} f\, d\nu := \int_{\mathbb{X}} f^+\, d\nu - \int_{\mathbb{X}} f^-\, d\nu$, sofern dieser Term nicht von der Form $\infty - \infty$ ist. Im Fall $\int_{\mathbb{X}} f^+\, d\nu = \int_{\mathbb{X}} f^-\, d\nu = \infty$ definieren wir $\int_{\mathbb{X}} f\, d\nu := 0$. Außerdem nennen wir f ν-integrierbar, wenn $\int_{\mathbb{X}} f^+\, d\nu < \infty$ und $\int_{\mathbb{X}} f^-\, d\nu < \infty$ gilt. Äquivalent dazu ist die Forderung $\int_{\mathbb{X}} |f|\, d\nu < \infty$.

Satz 2.1.23 (Campbellsche Formel) *Ist η ein zufälliges Maß auf $\mathbb{X}$ mit Intensitätsmaß Θ und $f\colon \mathbb{X} \to [-\infty, \infty]$ messbar, so ist $\int_{\mathbb{X}} f(x)\, \eta(dx)$ eine $[-\infty, \infty]$-wertige Zufallsvariable. Falls zusätzlich $f \geq 0$ gilt oder f Θ-integrierbar ist, so gilt*

$$\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{X}} f(x)\, \eta(dx)\right] = \int_{\mathbb{X}} f(x)\, \Theta(dx). \tag{2.1.1}$$

Beweis. Für $f \geq 0$ zeigt man die Aussage mittels monotoner Konvergenz, wobei man von dem Fall einer Indikatorfunktion ausgeht.

Für allgemeines, Θ-integrierbares f gilt $\int_{\mathbb{X}} |f|\, d\Theta = \int_{\mathbb{X}} f^+\, d\Theta + \int_{\mathbb{X}} f^-\, d\Theta < \infty$. Aus (2.1.1) folgt $\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{X}} f^{\pm}(x)\, \eta(dx)\right] < \infty$. Nach Definition und (2.1.1) folgt:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{X}} f\, d\eta\right] &= \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{X}} f^+\, d\eta - \int_{\mathbb{X}} f^-\, d\eta\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{X}} f^+\, d\eta\right] - \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{X}} f^-\, d\eta\right] \\ &= \int_{\mathbb{X}} f^+\, d\Theta - \int_{\mathbb{X}} f^-\, d\Theta \\ &= \int_{\mathbb{X}} f\, d\Theta.\end{aligned}$$

$\square$

Bemerkung 2.1.24 Ist Φ ein Punktprozess von der Form $\Phi = \sum_{i=1}^{\tau} \delta_{\xi_i}$, so bedeutet Gleichung (2.1.1):

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{\tau} f(\xi_i)\right] = \int_{\mathbb{X}} f \, d\Theta.$$

Wir charakterisieren Verteilungsgleichheit von zufälligen Maßen.

Satz 2.1.25 *Für zufällige Maße η und η' auf $\mathbb{X}$ sind äquivalent:*

(i) $\eta \stackrel{d}{=} \eta'$.

(ii) $\int_{\mathbb{X}} f \, d\eta \stackrel{d}{=} \int_{\mathbb{X}} f \, d\eta'$ *für alle messbaren* $f \geq 0$.

(iii) $\mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_{\mathbb{X}} f \, d\eta\right)\right] = \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_{\mathbb{X}} f \, d\eta'\right)\right]$ *für alle messbaren* $f \geq 0$.

(iv) $(\eta(B_1), \ldots, \eta(B_m)) \stackrel{d}{=} (\eta'(B_1), \ldots, \eta'(B_m))$ *für alle* $m \in \mathbb{N}$, $B_1, \ldots, B_m \in \mathcal{X}_b$.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii) und (ii) $\Rightarrow$ (iii): Klar.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Wählt man in (iii) $f = c_1 \mathbb{1}_{B_1} + \ldots + c_m \mathbb{1}_{B_m}$ mit $c_i \geq 0$, $B_i \in \mathcal{X}_b$, so folgt

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(-\sum_{i=1}^{m} c_i \eta(B_i)\right)\right] = \mathbb{E}\left[\exp\left(-\sum_{i=1}^{m} c_i \eta'(B_i)\right)\right].$$

Hiermit und mit dem Satz von Cramér-Wold (siehe z.B. [2, Seite 205]) (oder alternativ mit einem Eindeutigkeitssatz für die Laplacetransformation von nichtnegativen Zufallsvektoren, siehe Bemerkung 2.2.6 in [4]) erhält man (iv).

(iv) $\Rightarrow$ (i): Es sei $\mathcal{G}$ das System der Mengen

$$A := \{\mu \in M(\mathbb{X}) \colon (\mu(B_1), \ldots, \mu(B_m)) \in C\} \in \mathcal{M}(\mathbb{X})$$

mit $m \in \mathbb{N}$, $B_i \in \mathcal{X}_b$, $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$. Dann ist $\mathcal{G}$ $\cap$-stabil und es gilt $\sigma(\mathcal{G}) = \mathcal{M}(\mathbb{X})$. Voraussetzung (iv) impliziert

$$\mathbb{P}(\eta \in A) = \mathbb{P}(\eta' \in A)$$

für alle $A \in \mathcal{G}$ und somit folgt aus dem Eindeutigkeitssatz für Maße die Verteilungsgleichheit $\eta \stackrel{d}{=} \eta'$. □

Bemerkung 2.1.26 Lemma 2.2.3 in [4] gibt im Fall von Punktprozessen eine zu (iv) äquivalente Bedingung an, nach der es genügt, in (iv) paarweise disjunkte messbare Mengen $B_1, \ldots, B_m \in \mathcal{X}_b$ zu betrachten.

Bemerkung 2.1.27 Für ein zufälliges Maß μ auf $\mathbb{X}$ wird das durch

$$L_\mu(f) := \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_{\mathbb{X}} f \, d\mu\right)\right]$$

für messbare Funktionen $f : \mathbb{X} \to [0, \infty]$ erklärte Funktional als Laplace-Funktional von μ bezeichnet. Damit ist auch das Laplace-Funktional eines Punktprozesses erklärt. Satz 2.1.25 besagt, dass das Laplace-Funktional eines zufälligen Maßes μ die Verteilung von μ eindeutig festlegt.

2.2 Poissonprozesse

Sei $(\mathbb{X}, \rho)$ ein separabler metrischer Raum.

Definition 2.2.1 Es sei Θ ein lokal-endliches Maß auf $\mathbb{X}$. Ein Punktprozess Φ auf $\mathbb{X}$ heißt *Poissonprozess* mit Intensitätsmaß Θ, falls gilt:

(i) $\Phi(B_1), \ldots, \Phi(B_m)$ sind stochastisch unabhängige Zufallsvariablen für paarweise disjunkte messbare Mengen $B_1, \ldots, B_m \in \mathcal{X}$.

(ii)
$$\mathbb{P}(\Phi(B) = k) = \frac{\Theta(B)^k}{k!} e^{-\Theta(B)}, \quad B \in \mathcal{X},\ k \in \mathbb{N}_0,$$
wobei $\infty^k e^{-\infty} := 0$.

Man schreibt $\Phi \sim \text{Poiss}(\Theta)$.

Bemerkungen 2.2.2 (i) Es gilt $\mathbb{E}[\Phi(B)] = \Theta(B), \quad B \in \mathcal{X}$.

(ii) Im Fall $\Theta(B) = \infty$ gilt $\mathbb{P}(\Phi(B) = k) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, d.h.,
$$\mathbb{P}(\Phi(B) = \infty) = 1.$$
Man schreibt $\Phi(B) \sim \text{Poiss}(\infty)$.

(iii) Sind Φ und Ψ Poissonprozesse mit gleichem lokal-endlichem Intensitätsmaß Θ, so haben Φ und Ψ die gleiche Verteilung. Dies folgt aus der Definition von Poissonprozessen zusammen mit Bemerkung 2.1.26.

Ist η ein zufälliges Maß, so auch die Einschränkung $\eta \llcorner B$ auf eine messbare Menge $B \in \mathcal{X}$ (Übung). In diesem Zusammenhang halten wir fest:

Bemerkung 2.2.3 Ist Φ ein Poissonprozess mit Intensitätsmaß Θ und sind $B_1, B_2, \ldots$ paarweise disjunkte Elemente von $\mathcal{X}$, so sind die Einschränkungen $\Phi \llcorner B_1, \Phi \llcorner B_2, \ldots$ unabhängige Poissonprozesse mit Intensitätsmaßen $\Theta \llcorner B_1, \Theta \llcorner B_2, \ldots$ Das folgt leicht aus den Definitionen sowie aus dem Beweis von Satz 2.1.25 (iv) (und Bemerkung 2.1.26).

Satz 2.2.4 *Es sei Φ ein Punktprozess auf $\mathbb{X}$ und Θ ein lokal-endliches Maß auf $\mathbb{X}$. Dann sind äquivalent:*

(a) $\Phi \sim \text{Poiss}(\Theta)$.

(b) *Für alle messbaren Funktionen $f : \mathbb{X} \to [0, \infty]$ gilt*
$$\mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_{\mathbb{X}} f\, d\Phi\right)\right] = \exp\left(-\int_{\mathbb{X}} (1 - e^{-f(x)})\, \Theta(dx)\right). \tag{2.2.1}$$

Beweis. Es gelte $\Phi \sim \text{Poiss}(\Theta)$. Für $B \in \mathcal{X}$ mit $\Theta(B) < \infty$ und $c \geq 0$ gilt zunächst
$$\mathbb{E}[\exp(-c\Phi(B))] = e^{-\Theta(B)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Theta(B)^k}{k!} e^{-ck} = e^{-\Theta(B)} e^{(\Theta(B) e^{-c})} = e^{-\Theta(B)(1-e^{-c})}.$$

Für Treppenfunktionen $f := c_1 \mathbb{1}_{B_1} + \ldots + c_m \mathbb{1}_{B_m}$ mit $c_i \geq 0$ und paarweise disjunkte Mengen $B_i \in \mathcal{X}_b$ folgt daraus
$$L_\Phi(f) = \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_{\mathbb{X}} f d\Phi\right)\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{E}\left[\exp\left(-\sum_{i=1}^m c_i\Phi(B_i)\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^m \exp(-c_i\Phi(B_i))\right] \\
&= \prod_{i=1}^m \mathbb{E}[\exp(-c_i\Phi(B_i))] \\
&= \prod_{i=1}^m \exp(-\Theta(B_i)(1-e^{-c_i})) \\
&= \exp\left(-\sum_{i=1}^m \Theta(B_i)(1-e^{-c_i})\right) \\
&= \exp\left(-\sum_{i=1}^m \int_{B_i} (1-e^{-c_i})\, d\Theta\right) \\
&= \exp\left(-\int_{\mathbb{X}} (1-e^{-f})\, d\Theta\right),
\end{aligned}
$$

wobei im dritten und im letzten Schritt die Disjunktheit der Mengen B_i verwendet wurde. Für eine messbare Funktion $f\colon \mathbb{X} \to [0,\infty]$ gibt es Treppenfunktionen f_n mit $f_n \uparrow f$. Dann folgt (2.2.1) mittels monotoner Konvergenz.

Umgekehrt nehmen wir nun an, dass (2.2.1) erfüllt sei. Sei $B \in \mathcal{X}$ mit $\Theta(B) < \infty$ und $c \geq 0$. Setze $f := c\mathbb{1}_B$. Dann gilt nach Voraussetzung

$$
\begin{aligned}
L_{\Phi(B)}(c) &= \mathbb{E}\left[\exp\left(-c\Phi(B)\right)\right] \\
&= \exp\left(-\int_{\mathbb{X}} \left(1-e^{-c\mathbb{1}_B(x)}\right)\, \Theta(dx)\right) \\
&= \exp\left(-\int_{B} \left(1-e^{-c}\right)\, \Theta(dx)\right) \\
&= \exp\left(-\left(1-e^{-c}\right)\Theta(B)\right) \\
&= L_\xi(c),
\end{aligned}
$$

wenn $\xi \sim \mathrm{Poiss}(\Theta(B))$, wie im ersten Beweisteil nachgerechnet wurde. Also ist mit dem Eindeutigkeitssatz für die Laplace-Transformation $\Phi(B) \sim \mathrm{Poiss}(\Theta(B))$. Ist $\Theta(B) = \infty$, so zeigt obige Umformung, dass $\mathbb{E}\left[\exp\left(-c\Phi(B)\right)\right] = 0$ gilt (für jedes $c > 0$), also ist $\Phi(B) = \infty$ $\mathbb{P}$-fast sicher.

Seien nun $B_1, \ldots, B_m \in \mathcal{X}_b$ paarweise disjunkt und $c_1, \ldots, c_m \geq 0$. Setze $f := \sum_{i=1}^m c_i\mathbb{1}_{B_i}$. Dann folgt wieder aufgrund der Voraussetzung

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\exp\left(-\sum_{i=1}^m c_i\Phi(B_i)\right)\right] &= \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_{\mathbb{X}} f\, d\Phi\right)\right] \\
&= \exp\left(-\int_{\mathcal{X}} \left(1-\exp\left(-\sum_{i=1}^m c_i\mathbb{1}_{B_i}(x)\right)\right)\Theta(dx)\right)
\end{aligned}
$$

$$= \exp\left(-\sum_{i=1}^{m} \int_{B_i} \left(1 - e^{-c_i}\right) \Theta(dx)\right)$$

$$= \exp\left(-\sum_{i=1}^{m} \left(1 - e^{-c_i}\right) \Theta(B_i)\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{m} \mathbb{E}\left[e^{-c_i \Phi(B_i)}\right].$$

Hieraus schließt man, dass $\Phi(B_1), \ldots, \Phi(B_m)$ stochastisch unabhängig sind (siehe dazu z.B. die Ausführungen zur Laplace-Transformierten von Zufallsvektoren nach Bem. 2.2.6 in [4] oder [5, Satz 15.6 und Übung 15.1.2]). Den allgemeinen Fall (einige B_i evtl. unbeschränkt) leitet man hieraus ab. □

Satz 2.2.5 *Es sei $\Phi = \sum_{i=1}^{\tau} \delta_{X_i}$ ein gemischter Binomialprozess wie in Beispiel 2.1.17 mit $\tau \sim \mathrm{Poiss}(c)$ für ein $c \geq 0$ und $X_i \sim \mathbb{V}$ für $i \in \mathbb{N}$, wobei $\tau, X_1, X_2, \ldots$ stochastisch unabhängig seien. Dann ist $\Phi \sim \mathrm{Poiss}(c\mathbb{V})$.*

Beweis. Für eine messbare Funktion $f : \mathbb{X} \to [0, \infty]$ gilt

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_{\mathbb{X}} f \, d\Phi\right)\right] = \mathbb{E}\left[\exp\left(-\sum_{k=1}^{\tau} f(X_k)\right)\right]$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}\{\tau = m\} \exp\left(-\sum_{k=1}^{m} f(X_k)\right)\right]$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}(\tau = m)\mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{m} \exp(-f(X_k))\right]$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} e^{-c} \frac{c^m}{m!} \prod_{k=1}^{m} \mathbb{E}[\exp(-f(X_k))]$$

$$= e^{-c} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c^m}{m!} \left(\int_{\mathbb{X}} e^{-f(x)} \, \mathbb{V}(dx)\right)^m$$

$$= e^{-c} \exp\left(c \int_{\mathbb{X}} e^{-f} \, d\mathbb{V}\right)$$

$$= \exp\left(-c\left(1 - \int_{\mathbb{X}} e^{-f} \, d\mathbb{V}\right)\right)$$

$$= \exp\left(-\int_{\mathbb{X}} (1 - e^{-f}) \, d(c\mathbb{V})\right).$$

Nach Theorem 2.2.4 folgt $\Phi \sim \mathrm{Poiss}(c\mathbb{V})$. □

Satz 2.2.6 *Ist Θ ein lokal-endliches Maß auf $\mathbb{X}$, so gibt es einen Punktprozess Φ auf $\mathbb{X}$ mit*

$$\Phi \sim \mathrm{Poiss}(\Theta).$$

Beweis. Zerlege den Raum $\mathbb{X} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{X}_i$ in messbarer Weise, sodass $\Theta(\mathbb{X}_i) < \infty$. Setze dann $c_i := \Theta(\mathbb{X}_i) \geq 0$ und $\mathbb{V}_i := (c_i)^{-1}\Theta \llcorner \mathbb{X}_i$, falls $c_i > 0$, bzw. wähle $\mathbb{V}_i$ als beliebiges Wahrscheinlichkeitsmaß im Fall $c_i = 0$. Dann gilt $\Theta = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \cdot \mathbb{V}_i$. Seien $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ unabhängige gemischte Binomialprozesse mit den Parametern $\mathrm{Poiss}(c_i)$ und $\mathbb{V}_i$. Man bestätigt nun mit Theorem 2.2.4 leicht, dass $\Phi := \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i \sim \mathrm{Poiss}(\Theta)$ gilt. In der Tat ist für messbare $f \geq 0$

$$\begin{aligned}
L_\Phi(f) = \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int f\, d\Phi\right)\right] &= \mathbb{E}\left[\exp\left(-\sum_{i=1}^{\infty}\int f\, d\Phi_i\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{\infty}\exp\left(-\int f\, d\Phi_i\right)\right] \\
&= \prod_{i=1}^{\infty}\mathbb{E}\left[\exp\left(-\int f\, d\Phi_i\right)\right] \\
&= \prod_{i=1}^{\infty}\exp\left(-c_i\int \left(1-e^{-f}\right)\, d\mathbb{V}_i\right) \\
&= \exp\left(-\sum_{i=1}^{\infty}\int \left(1-e^{-f(x)}\right)\,(c_i\mathbb{V}_i)(dx)\right) \\
&= \exp\left(\int \left(1-e^{-f(x)}\right)\,\Theta(dx)\right),
\end{aligned}$$

was zu zeigen war. □

Wir überspringen die Mecke-Charakterisierung von Poissonprozessen (Satz 3.3.7) und die Multivariate Mecke-Formel (Satz 3.3.9) und zeigen an dieser Stelle direkt, dass Poissonprozesse einfach sind (was auch mit der letzteren Formel gezeigt werden kann).

Korollar 2.2.7 *Sei Φ ein Poissonprozess in $\mathbb{X}$. Dann ist Φ einfach genau dann, wenn das Intensitätsmaß Θ diffus ist.*

Beweis. Falls $\Theta(\{x\}) > 0$, so gilt nach Definition 2.2.1 (ii) $\mathbb{P}(\Phi(\{x\}) = k) > 0$ für $k \in \mathbb{N}$ und damit ist Φ nicht einfach.

Es sei nun umgekehrt $\Theta(\{x\}) = 0$ für alle $x \in \mathbb{X}$. Angenommen Φ ist nicht einfach, d.h. $\mathbb{P}_\Phi(N_s) < 1$. Dann existiert eine messbare, beschränkte Menge $C \in \mathcal{C}^d$ mit

$$\alpha := \mathbb{P}(\Phi \llcorner C \text{ ist nicht einfach }) > 0.$$

Insbesondere ist dann auch $\theta := \Theta(C) > 0$. Wir verwenden nun, dass der Wertebereich eines endlichen, diffusen Maßes ein Intervall ist. Ein elementarer Beweis findet sich in [1, Lemma 9.1]. Somit kann man C für jedes $k \in \mathbb{N}$ in k paarweise disjunkte Mengen $C_1^{(k)}, \ldots, C_k^{(k)}$ zerlegen, so dass gilt

$$\Theta(C_i^{(k)}) = \frac{\theta}{k}, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Dann muss aber für mindestens eine dieser Mengen $C_i^{(k)}$ gelten $\mathbb{P}(\Phi(C_i^{(k)}) > 1) \geq \alpha/k$, woraus sich

$$\frac{\alpha}{k} \leq 1 - e^{-\Theta(C_i^{(k)})}\left(1 + \Theta(C_i^{(k)})\right)$$

ergibt. Das impliziert $\alpha \leq k(1-e^{-\theta/k}) - \theta e^{-\theta/k}$, und zwar für jedes $k \in \mathbb{N}$. Für $k \to \infty$ konvergiert aber die rechte Seite dieser Ungleichung gegen $\theta - \theta = 0$, was im Widerspruch steht zu $\alpha > 0$. □

Definition 2.2.8 Sei $(\mathbb{Y}, \mathcal{Y})$ ein separabler metrischer Raum und K ein stochastischer Kern von $\mathbb{X}$ nach $\mathbb{Y}$, d.h. $K\colon \mathbb{X} \times \mathcal{Y} \to [0,1]$ erfüllt die folgenden Eigenschaften:

(i) $K(x,\cdot)$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{Y}, \mathcal{Y})$.

(ii) Die Abbildung $x \mapsto K(x, C)$ ist für alle $C \in \mathcal{Y}$ messbar.

Für $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und $\varphi := \sum_{i=1}^k \delta_{x_i} \in N(\mathbb{X})$ sei $K^*(\varphi, \cdot)$ die Verteilung des Punktprozesses $\sum_{i=1}^k \delta_{(x_i, Y_i)}$; hierbei sind $Y_1, Y_2, \ldots$ unabhängige Zufallselemente in $\mathbb{Y}$ mit Verteilungen $K(x_1,\cdot), K(x_2,\cdot), \ldots$, wobei ggf. $x_i := x_0$ gesetzt wird für $i > k$.

Die obige Definition besagt mit anderen Worten, dass

$$K^*(\varphi, A) = \int \mathbb{1}\left\{\sum_{j=1}^k \delta_{(x_j, y_j)} \in A\right\} (\otimes_{i\in\mathbb{N}} K(x_i,\cdot)) \left(d\,(y_i)_{i\in\mathbb{N}}\right).$$

für $A \in \mathcal{N}(\mathbb{X} \times \mathbb{Y})$. Man kann zeigen (Übung!), dass K^* ein stochastischer Kern von $N(\mathbb{X})$ nach $N(\mathbb{X} \times \mathbb{Y})$ ist.

Definition 2.2.9 Ein Punktprozess Ψ auf $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ heißt K-*Markierung* eines Punktprozesses Φ auf $\mathbb{X}$, falls

$$\mathbb{P}(\Psi \in A | \Phi) = K^*(\Phi, A) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

für alle $A \in \mathcal{N}(\mathbb{X} \times \mathbb{Y})$ gilt. Im Fall $K(x,\cdot) = \mathbb{Q}$ für alle $x \in \mathbb{X}$ bezeichnet man eine K-Markierung als *unabhängige* $\mathbb{Q}$-*Markierung*.

Genau dann ist Ψ eine K-Markierung von Φ, wenn die gemeinsame Verteilung von Ψ und Φ gegeben ist durch

$$\mathbb{P}((\Psi, \Phi) \in \cdot) = \int\int \mathbb{1}\{(\psi, \varphi) \in \cdot\}\, K^*(\varphi, d\psi)\, \mathbb{P}_\Phi(d\varphi).$$

Insbesondere ist

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Psi \in \cdot) &= \int\int \mathbb{1}\{\psi \in \cdot\}\, K^*(\varphi, d\psi)\, \mathbb{P}_\Phi(d\varphi) \\ &= \mathbb{E}\int \mathbb{1}\{\psi \in \cdot\}\, K^*(\Phi, d\psi) \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

die Verteilung von Ψ. Ist Ψ eine unabhängige $\mathbb{Q}$-Markierung von Φ, so ist $\mathbb{P}_\Psi = \mathbb{P}_\Phi \otimes \mathbb{Q}$.

Bemerkung 2.2.10 Die Voraussetzungen an $(\mathbb{Y}, \mathcal{Y})$ stellen lediglich sicher, dass auch $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ (mit der Produkt-Metrik) ein separabler metrischer Raum ist.

Satz 2.2.11 *Ist Ψ eine K-Markierung eines Punktprozesses Φ mit Intensitätsmaß Θ, dann hat Ψ das Intensitätsmaß*

$$(\Theta \otimes K)(C) := \int_{\mathbb{X}}\int_{\mathbb{Y}} \mathbb{1}_C(x,y)\, K(x, dy)\, \Theta(dx), \quad C \in \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}.$$

Beweis. Mit der Notation (und den Voraussetzungen) des Satzes gilt zunächst für $\varphi = \sum_{i=1}^k \delta_{x_i}$ und $C \in \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$, dass

$$\begin{aligned}
\int \psi(C)\, K^*(\varphi, d\psi) &= \int \sum_{j=1}^k \mathbb{1}_C(x_j, y_j)\, (\otimes_{i\in\mathbb{N}} K(x_i, \cdot)) \big(d\,(y_i)_{i\in\mathbb{N}}\big) \\
&= \sum_{j=1}^k \int \mathbb{1}_C(x_j, y_j)\, (\otimes_{i\in\mathbb{N}} K(x_i, \cdot)) \big(d\,(y_i)_{i\in\mathbb{N}}\big) \\
&= \sum_{j=1}^k \int \mathbb{1}_C(x_j, y)\, K(x_j, dy) \\
&= \sum_{j=1}^k g_C(x_j) = \int g_C\, d\varphi,
\end{aligned}$$

wobei

$$g_C(x) := \int \mathbb{1}_C(x,y) K(x, dy), \quad x \in \mathbb{X}.$$

Hiermit und aufgrund von (2.2.2) erhalten wir nun

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\Psi(C)\right] &= \mathbb{E}\left[\int \psi(C)\, K^*(\Phi, d\psi)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int g_C\, d\Phi\right] \\
&= \int g_C(x)\, \Theta(dx) \\
&= \iint \mathbb{1}_C(x,y)\, K(x, dy)\, \Theta(dx),
\end{aligned}$$

was zu zeigen war. □

Korollar 2.2.12 *Ist Ψ eine unabhängige $\mathbb{Q}$-Markierung eines Punktprozesses Φ mit Intensitätsmaß Θ, dann ist das Intensitätsmaß von Ψ das Produktmaß $\Theta \otimes \mathbb{Q}$.*

Satz 2.2.13 *Es seien Φ ein Poissonprozess auf $\mathbb{X}$ und Ψ eine K-Markierung von Φ. Dann ist Ψ ein Poissonprozess mit Intensitätsmaß $\Theta^* = \Theta \otimes K$.*

Beweis. Es sei $f\colon \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \to [0, \infty]$. Es gilt (siehe unten)

$$L_\Psi(f) := \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}} f\, d\Psi\right)\right] = \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_{\mathbb{X}} f^*\, d\Phi\right)\right] = L_\Phi(f^*),$$

wobei $f^*(x) := -\ln \int_{\mathbb{Y}} e^{-f(x,y)}\, K(x, dy)$ und $-\ln(0) := \infty$. Aus Theorem 2.2.4 folgt, wenn Θ das Intensitätsmaß von Φ ist,

$$\begin{aligned}
L_\Psi(f) &= \exp\left(-\int_{\mathbb{X}} (1 - e^{-f^*})\, d\Theta\right) \\
&= \exp\left(-\int_{\mathbb{X}} \left(1 - \int_{\mathbb{Y}} e^{-f(x,y)}\, K(x, dy)\right)\, \Theta(dx)\right)
\end{aligned}$$

$$= \exp\left(-\int_{\mathbb{X}}\int_{\mathbb{Y}}(1-e^{-f(x,y)})\,K(x,dy)\,\Theta(dx)\right)$$
$$= \exp\left(-\int_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}}(1-e^{-f})\,d(\Theta\otimes K)\right).$$

Eine erneute Anwendung von Theorem 2.2.4 impliziert nun $\Psi \sim \mathrm{Poiss}(\Theta^*)$.

Wir tragen nun noch den fehlenden Nachweis nach. Aufgrund von (2.2.2) gilt

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(-\int f\,d\Psi\right)\right] = \mathbb{E}\left[\int \exp\left(-\int f\,d\psi\right)\,K^*(\Phi,d\psi)\right]. \tag{2.2.3}$$

Nun ist mit derselben Notation wie früher

$$\int \exp\left(-\int f\,d\psi\right)\,K^*(\varphi,d\psi)$$
$$= \int \exp\left(-\sum_{j=1}^{k} f(x_j,y_j)\right)\,(\otimes_{i\in\mathbb{N}}K(x_i,\cdot))\,(d\,(y_i)_{i\in\mathbb{N}}))$$
$$= \int \prod_{j=1}^{k} e^{-f(x_j,y_j)}\,\,(\otimes_{i\in\mathbb{N}}K(x_i,\cdot))\,(d\,(y_i)_{i\in\mathbb{N}}))$$
$$= \prod_{j=1}^{k}\int e^{-f(x_j,y_j)}\,K(x_j,dy_j)$$
$$= \prod_{j=1}^{k}\int e^{-f(x_j,y)}\,K(x_j,dy)$$
$$= \exp\left[\sum_{j=1}^{k}\ln\int e^{-f(x_j,y)}\,K(x_j,dy)\right]$$
$$= \exp\left[-\int_{\mathbb{X}}\left(-\ln\int_{\mathbb{Y}} e^{-f(x,y)}\,K(x,dy)\right)\,\varphi(dx)\right]$$
$$= \exp\left[-\int_{\mathbb{X}} f^*(x)\,\varphi(dx)\right]. \tag{2.2.4}$$

Die Gleichungen (2.2.3) und (2.2.4) ergeben zusammen die Behauptung. □

Definition 2.2.14 Es sei $p : \mathbb{X} \to [0,1]$ messbar und K der durch

$$K(x,\cdot) := (1-p(x))\delta_0 + p(x)\delta_1 \tag{2.2.5}$$

definierte Kern von $\mathbb{X}$ nach $\{0,1\}$. Ist Ψ die K-Markierung von Φ, so heißt

$$\Phi_p := \Psi(\cdot\times\{1\})$$

p-Verdünnung von Φ.

Korollar 2.2.15 *Sei K wie in* (2.2.5)*, und sei Ψ eine K-Markierung eines Poissonprozesses Φ mit Intensitätsmaß Θ. Dann sind $\Phi_p := \Psi(\cdot\times\{1\})$ und $\Phi - \Phi_p := \Psi(\cdot\times\{0\})$ unabhängige Poissonprozesse mit Intensitätsmaßen*

$$\Theta_1(B) = \int_B p(x)\,\Theta(dx) \quad \textit{bzw.} \quad \Theta_0(B) = \int_B (1-p(x))\,\Theta(dx)$$

für $B \in \mathcal{X}$.

Beweis. Nach Theorem 2.2.13 ist Ψ ein Poissonprozess auf $\mathbb{X} \times \{0,1\}$. Aus Bemerkung 2.2.3 folgt, dass die Einschränkungen von Ψ auf $\mathbb{X} \times \{1\}$ bzw. auf $\mathbb{X} \times \{0\}$ unabhängige Poissonprozesse sind. Dann sind aber auch Φ_p und $\Phi - \Phi_p$ als die Bildmaße dieser Einschränkungen unter Projektion auf $\mathbb{X}$ unabhängige Poissonprozesse. Ferner gilt nach Satz 2.2.11

$$\mathbb{E}[\Phi_p(B)] = \mathbb{E}[\Psi(B \times \{1\})] = \int_{\mathbb{X}} \mathbb{1}_B(x) K(x, \{1\})\, \Theta(dx) = \int_B p(x)\, \Theta(dx),$$

was alle Behauptungen beweist. □

2.3 Stationarität

Sei $\mu \in M(\mathbb{R}^d)$. Wir erklären

$$(\mu + x)(A) := \mu(A - x), \qquad x \in \mathbb{R}^d, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

Allgemeiner lassen sich die Translationen (und Drehungen) eines Maßes wie folgt erklären. Seien für $x \in \mathbb{R}^d$ (bzw. $\rho \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$) Abbildungen $T_x : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ (bzw. $T_\rho : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$) erklärt durch $T_x(z) := z + x$ (bzw. $T_\rho(z) := \rho z$). Dann definiert man

$$\mu + x := T_x(\mu), \qquad \rho\mu := T_\rho(\mu),$$

das heißt, als die entsprechenden Bildmaße von μ unter der jeweiligen Transformation. Insbesondere ist dann $(\rho\mu)(A) = \mu(\rho^{-1}A)$, wobei $\rho^{-1}A := \{x \in \mathbb{R}^d : \rho x \in A\}$ für $A \subset \mathbb{R}^d$ erklärt ist. Für $\varphi \in N(\mathbb{R}^d)$ mit $\varphi = \sum_{i=1}^k \delta_{x_i}$ etwa erhält man

$$(T_x\varphi)(A) = \varphi(T_x^{-1}(A)) = \sum_{i=1}^k \delta_{x_i}(T_x^{-1}(A)) = \sum_{i=1}^k \delta_{T_x(x_i)}(A) = \left(\sum_{i=1}^k \delta_{T_x(x_i)}\right)(A),$$

also

$$T_x\varphi = \sum_{i=1}^k \delta_{T_x(x_i)}.$$

Eine analoge Beschreibung erhält man für $T_\rho\varphi$. Eine gute Merkregel ist $T_x(\delta_0) = \delta_x$. Außerdem erwähnen wir die für alle messbaren $f : \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$ gültige Formel

$$\int f(y)\, (T_x\varphi)(dy) = \int f(y + x)\, \varphi(dy) = \int f \circ T_x \, d\varphi.$$

Die Abbildungen $T_x, T_\rho : M(\mathbb{R}^d) \to M(\mathbb{R}^d)$ sind messbar und ebenso die entsprechenden Abbildungen auf $N(\mathbb{R}^d)$

Definition 2.3.1 Ein zufälliges Maß (oder ein Punktprozess) μ in $\mathbb{R}^d$ heißt *stationär*, falls $\mu + x \stackrel{d}{=} \mu$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ gilt. Man nennt μ *isotrop*, falls $T_\rho\mu \stackrel{d}{=} \mu$ für alle $\rho \in SO_d$ gilt.

Sei nun μ ein stationäres (isotropes) zufälliges Maß in $\mathbb{R}^d$ mit lokal-endlichem Intensitätsmaß $\Theta = \mathbb{E}\mu$. Dann ist Θ translationsinvariant (rotationsinvariant) und daher gilt $\Theta = \gamma\lambda^d$ mit $\gamma \geq 0$. Man nennt γ die Intensität von μ. Ist speziell Φ ein stationärer Poissonprozess in $\mathbb{R}^d$ mit Intensität $\gamma > 0$, so ist Θ atomfrei (und nicht der Nullprozess). Folglich ist Φ einfach und hat daher eine Darstellung der Form $\Phi = \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_{\xi_n}$ mit einer Folge paarweise verschiedener zufälliger Punkte $\xi_1, \xi_2, \ldots$ in $\mathbb{R}^d$.

Im vorangehenden Abschnitt hatten wir die K-Markierung Ψ eines Punktprozesses Φ betrachtet. Als Ergebnis einer solchen Markierungskonstruktion hatten wir einen Punktprozess auf einem Produktraum erhalten, der nach Konstruktion jedoch eine bedingte Unabhängigkeitseigenschaft besitzt. Diese drückt sich dadurch aus, dass in der Definition des Kerns K^* das unendliche Produktmaß der Kerne $K(x_i, \cdot)$ in den Punkten x_i von Φ verwendet wird.

Im Folgenden betrachten wir auch allgemeiner Punktprozesse Ψ auf einem Produktraum, wobei der aus Ψ abgeleitete unmarkierte Prozess $\Psi(\cdot \times \mathbb{Y})$ wieder lokalendlich, also ein Punktprozess sein soll. In der Regel wird dazu sogar stärker die lokale Endlichkeit von $\mathbb{E}\,\Psi(\cdot \times \mathbb{Y})$ gefordert. Wir bezeichnen dann solche Punktprozesse Ψ ebenfalls als als markierte Punktprozesse, auch wenn diese Begriffsbildung nicht viel spezieller ist als ein beliebiger Punktprozess auf einem Produktraum. Im Allgemeinen werden markierte Punktprozesse auf Produkträumen nicht durch eine K-Markierung erhältlich sein. Unter technischen Voraussetzungen gelingt dies jedoch im Spezialfall von Poissonprozessen auf Produkträumen (siehe Abschnitt 6.5 in [3]).

Um die Stationarität eines solchen markierten Punktprozesses Ψ bzw. die Stationarität eines zufälligen Maßes η auf einem Produktraum $\mathbb{R}^d \times \mathbb{Y}$ zu erklären, betrachten wir für $x \in \mathbb{R}^d$ die Abbildung $T_x : \mathbb{R}^d \times \mathbb{Y} \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{Y}$, die durch $T_x(z, y) := (z + x, y)$ erklärt ist. Dann ist klar, dass T_x messbar ist. Man nennt η stationär, wenn η und $T_x\eta = \eta \circ T_x^{-1}$ verteilungsgleich sind für jedes $x \in \mathbb{X}$.

Satz 2.3.2 *Ist η (oder Ψ) ein stationäres zufälliges Maß (Punktprozess) und ist $\mathbb{E}\,\eta(\cdot \times \mathbb{Y})$ (bzw. $\mathbb{E}\,\Psi(\cdot \times \mathbb{Y})$) lokalendlich, so gibt es eine Konstante $\gamma \geq 0$ und ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ auf $\mathbb{Y}$, so dass $\mathbb{E}\,\eta = \gamma\lambda_d \otimes \mathbb{Q}$ (analog für Punktprozesse).*

Beweis. Sei η ein stationäres zufälliges Maß. Betrachte das durch $\Lambda_A(B) := \mathbb{E}\,\eta(B \times A)$ für $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ und ein festes $A \in \mathcal{Y}$ erklärte Maß Λ_A auf $\mathbb{R}^d$. Dieses Maß ist aufgrund der Voraussetzungen lokalendlich und translationsinvariant. Also gibt es eine Konstante $c(A) \geq 0$, so dass $\Lambda_A(B) = c(A)\lambda_d(B)$ für $A \in \mathcal{Y}$ und $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Ferner gilt $\mathbb{E}[\eta([0,1]^d \times \mathbb{Y})] = \Lambda_{\mathbb{Y}}([0,1]^d) = c(\mathbb{Y}) < \infty$. Ist $c(\mathbb{Y}) > 0$, so erklärt man $\mathbb{Q}(A) = c(\mathbb{Y})^{-1}c(A)$, andernfalls wird $\mathbb{Q}$ als beliebiges Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{Y}$ erklärt. Dann gilt

$$\mathbb{E}[\eta(B \times A)] = c(\mathbb{Y})\mathbb{Q}(A)\lambda_d(B) = c(\mathbb{Y})(\lambda_d \otimes \mathbb{Q})(B \times A),$$

woraus die Behauptung folgt. □

Satz 2.3.3 *Sei Φ ein stationärer markierter Poissonprozess auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{Y}$ mit Intensitätsmaß $\gamma\lambda_d \otimes \mathbb{Q}$, wobei $\gamma > 0$ und $\mathbb{Q}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{Y}$ sei. Dann ist Φ verteilungsgleich zu einer unabhängigen $\mathbb{Q}$-Markierung eines stationären Poissonprozesses auf $\mathbb{R}^d$ mit Intensität γ.*

Beweis. Dies folgt aus Satz 2.2.13 sowie daraus, dass Poissonprozesse durch ihr Intensitätsmaß in Verteilung festgelegt sind. □

3 Geometrische Punktprozesse

3.1 Partikelprozesse

Es bezeichne

$$\mathcal{F}' := \mathcal{F}^d \setminus \{\emptyset\} \quad \text{und} \quad \mathcal{C}' := \mathcal{C}^d \setminus \{\emptyset\}.$$

Damit ist $\mathcal{F}'$ ein lokalkompakter Hausdorffraum mit abzählbarer Basis, insbesondere also ein separabler, vollständig metrisierbarer topologischer Raum (Polnischer Raum).

Definition 3.1.1 Ein *Partikelprozess* Φ (in $\mathbb{R}^d$) ist ein Punktprozess auf $\mathcal{F}'$ mit

$$\mathbb{P}(\Phi(\mathcal{F}' \setminus \mathcal{C}') = 0) = 1.$$

Dies bedeutet, dass mit Wahrscheinlichkeit 1 nur kompakte Mengen auftreten.

Ein Partikelprozess Φ in $\mathbb{R}^d$ lässt sich in der Form

$$\Phi = \sum_{i=1}^{\tau} \delta_{C_i}$$

mit zufälligen kompakten Mengen C_i und einer Zufallsvariablen τ in $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ darstellen (vgl. Satz 2.1.8).

Definition 3.1.2 Eine *Zentrumsfunktion* $c\colon \mathcal{C}' \to \mathbb{R}^d$ ist eine messbare Abbildung mit

$$c(K + x) = c(K) + x, \quad K \in \mathcal{C}', x \in \mathbb{R}^d.$$

Man nennt c kovariant unter Translation (translationskovariant).

Beispiel 3.1.3 Für $K \in \mathcal{C}'$ sei $c(K)$ der Mittelpunkt der (eindeutig bestimmten) Umkugel $B(K)$ von K. Weil

$$B(K + x) = B(K) + x, \quad K \in \mathcal{K}', x \in \mathbb{R}^d,$$

gilt, ist $c(\cdot)$ kovariant. Man kann zeigen, dass $B(\cdot)$ und $c(\cdot)$ stetig bezüglich der Hausdorff-Metrik sind (Übung!). Aus Satz (1.1.18) folgt

$$\mathcal{B}(\mathcal{F}^d) \cap \mathcal{C}^d = \mathcal{B}(\mathcal{C}^d),$$

also ist c messbar.

Ausblick: Wir fixieren eine Zentrumsfunktion c. Unter gewissen Voraussetzungen an einen Partikelprozess Φ mit

$$\Phi = \sum_{i=1}^{\tau} \delta_{K_i}$$

liefert dann

$$\begin{aligned} \Psi :&= \int_{\mathcal{C}'} \mathbb{1}\{(c(K), K - c(K)) \in \cdot\}\, \Phi(dK) \\ &= \sum_{i=1}^{\tau} \delta_{(c(K_i), K_i - c(K_i))} \end{aligned}$$

einen Punktprozess auf $\mathbb{R}^d \times \mathcal{C}'$ (einen markierten Punktprozess auf $\mathbb{R}^d$ mit Markenraum $\mathcal{C}'$). Man erhält somit Ψ als Bildmaß von Φ unter der Abbildung

$$T : \mathcal{C}' \to \mathbb{R}^d \times \mathcal{C}', \quad K \mapsto (c(K), K - c(K)).$$

Genauer kommen als Marken nur Mengen aus der Familie

$$\mathcal{C}_0 := \{K \in \mathcal{C}' : c(K) = 0\}$$

vor.

Definition 3.1.4 Für $\varphi \in N(\mathcal{F}^d)$ und $x \in \mathbb{R}^d$ sei $T_x\colon N(\mathcal{F}^d) \to N(\mathcal{F}^d)$ definiert durch

$$(T_x\varphi)(A) = \int_{\mathcal{F}^d} \mathbb{1}\{K + x \in A\}\, \varphi(dK), \quad A \in \mathcal{B}(\mathcal{F}^d),$$

die *Translation* von φ um x, also $(T_x\varphi)(A) = \varphi(T_x^{-1}(A))$. Ist

$$\varphi = \sum_{i=1}^{k} \delta_{K_i},$$

so ist

$$T_x\varphi = \sum_{i=1}^{k} \delta_{K_i+x}.$$

Speziell ist $T_x\delta_K = \delta_{K+x}$.

Obige Definition kann man alternativ auch wie folgt erhalten: Zunächst erklärt man eine messbare Abbildung $T_x : \mathcal{F}^d \to \mathcal{F}^d$ durch $F \mapsto F + x$. Dann ist $T_x\varphi$ gerade das Bildmaß von φ unter T_x.

Bemerkung 3.1.5 Die Abbildung $N(\mathcal{F}^d) \times \mathbb{R}^d \to N(\mathcal{F}^d)$, $(\varphi, x) \mapsto T_x\varphi$, ist messbar.

Definition 3.1.6 Ein Punktprozess Φ auf $\mathcal{F}^d$ (insbesondere kann Φ ein Partikelprozess sein) heißt *stationär*, falls

$$T_x\Phi \overset{d}{=} \Phi, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

gilt.

Die folgende Definition ist eine Wiederholung aus dem vorangehenden Abschnitt.

Definition 3.1.7 Sei $\mathbb{Y}$ ein separabler metrischer Raum mit Borelscher σ-Algebra $\mathcal{Y}$.

(i) Ein *markierter Punktprozess* auf $\mathbb{R}^d$ mit Markenraum $\mathbb{Y}$ ist ein Punktprozess Ψ auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{Y}$ mit $\Psi(B \times \mathbb{Y}) < \infty$, $B \in \mathcal{C}^d$. Insbesondere ist dann $\Psi(\cdot \times \mathbb{Y})$ ein Punktprozess auf $\mathbb{R}^d$. (Manchmal fordert man noch die Einfachheit dieses zugeordneten Punktprozesses.

(ii) Ein markierter Punktprozess Ψ auf $\mathbb{R}^d$ mit Markenraum $\mathbb{Y}$ heißt *stationär*, falls $T_x\Psi \overset{d}{=} \Psi$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ gilt. Dabei ist für ein Maß μ auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{Y}$ das Maß $T_x\mu$ auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{Y}$ definiert durch

$$(T_x\mu)(A) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{M}} \mathbb{1}_A(y + x, m)\, \mu(d(y, m)). \tag{3.1.1}$$

Erklärt man $T_x(z, m) := (z+x, m)$, so ist $T_x\mu$ das Bildmaß von μ unter T_x. Speziell gilt für $B \in \mathcal{B}^d$, $C \in \mathcal{Y}$, dass

$$(T_x\mu)(B \times C) = \mu((B - x) \times C).$$

Merkregel:

$$T_x\delta_{(0,m)} = \delta_{(x,m)} \quad \text{bzw.} \quad T_x\delta_{(y,m)} = \delta_{(y+x,m)}.$$

Satz 3.1.8 *Es sei Φ ein stationärer Partikelprozess mit lokal-endlichem Intensitätsmaß $\Theta \neq 0$. Ferner sei $c\colon \mathcal{C}' \to \mathbb{R}^d$ eine Zentrumsfunktion. Dann ist*

$$\Psi(\cdot) := \int_{\mathcal{C}'} \mathbb{1}\{(c(C), C - c(C)) \in \cdot\}\, \Phi(dC) \tag{3.1.2}$$

ein stationärer markierter Punktprozess mit Markenraum $\mathcal{C}_0 = \{C \in \mathcal{C}' \colon c(C) = 0\}$. Ferner gibt es eine eindeutig bestimmte Zahl $\gamma > 0$ und ein eindeutig bestimmtes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ auf $\mathcal{C}'$ mit der Eigenschaft $\mathbb{Q}(\mathcal{C}_0) = 1$ und

$$\Theta(\mathcal{H}) = \gamma \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathcal{C}'} \mathbb{1}_{\mathcal{H}}(K + x)\, \mathbb{Q}(dK)\, dx, \quad \mathcal{H} \in \mathcal{B}(\mathcal{C}'). \tag{3.1.3}$$

Beweis. Wir betrachten $C^d := [0,1]^d$ und $C_0^d := [0,1)^d$ (also C^d ohne den "rechten oberen Rand" von C^d, der erklärt ist als $\partial^+ C^d := \{(x_1, \dots, x_d) \in C^d \colon \max_{i=1,\dots,d} x_i = 1\}$). Ferner sei $z_1, z_2, \dots$ eine Nummerierung von $\mathbb{Z}^d$. Da Φ stationär ist, ist Θ translationsinvariant. Aus der Campbellschen Formel (Satz 2.1.23) sowie $\bigcup_i (C_0^d + z_i) = \mathbb{R}^d$ folgt nun

$$\begin{aligned}
\gamma :&= \mathbb{E}\left[\int_{\mathcal{C}'} \mathbb{1}\{c(C) \in C_0^d\}\, \Phi(dC)\right] \\
&= \int_{\mathcal{C}'} \mathbb{1}\{c(C) \in C_0^d\}\, \Theta(dC) \\
&\le \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\mathcal{C}'} \mathbb{1}\{C \cap (C_0^d + z_i) \neq \emptyset, c(C) \in C_0^d\}\, \Theta(dC) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\mathcal{C}'} \mathbb{1}\{(C + z_i) \cap (C_0^d + z_i) \neq \emptyset, c(C + z_i) \in C_0^d\}\, \Theta(dC) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\mathcal{C}'} \mathbb{1}\{C \cap C_0^d \neq \emptyset, c(C) \in C_0^d - z_i\}\, \Theta(dC) \\
&= \int_{\mathcal{C}'} \mathbb{1}\{C \cap C_0^d \neq \emptyset\}\, \Theta(dC) < \infty.
\end{aligned}$$

Zuletzt wurde die lokale Endlichkeit von Θ sowie die Kompaktheit von $\mathcal{F}_K$ für $K \in \mathcal{C}^d$ verwendet.

Da Φ stationär ist, gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\int_{\mathcal{C}'} \mathbb{1}\{c(C) \in C_0^d + x\}\, \Phi(dC) &= \mathbb{E}\int_{\mathcal{C}'} \mathbb{1}\{c(C - x) \in C_0^d\}\, \Phi(dC) \\
&= \mathbb{E}\int_{\mathcal{C}'} \mathbb{1}\{c(C) \in C_0^d\}\, \Phi(dC).
\end{aligned}$$

Für eine beliebige Menge $K \in \mathcal{C}$ gibt es $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^d$, so dass $K \subset \bigcup_{i=1}^m (C_0^d + x_i)$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\int_{\mathcal{C}'} \mathbb{1}\{c(C) \in K\}\, \Phi(dC) &\le \mathbb{E}\int_{\mathcal{C}'} \sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}\{c(C) \in C_0^d + x_i\}\, \Phi(dC) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \mathbb{E}\int_{\mathcal{C}'} \mathbb{1}\{c(C) \in C_0^d + x_i\}\, \Phi(dC) \\
&= m\mathbb{E}\int_{\mathcal{C}'} \mathbb{1}\{c(C) \in C_0^d\}\, \Phi(dC) < \infty.
\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass fast sicher $\Psi(\cdot \times \mathbb{M})$ ein Punktprozess (insbesondere lokal endlich) ist.

Beachtet man, dass

$$\big\{\{c(C)\colon \Phi(\{C\}) > 0\} \text{ ist nicht lokal-endlich}\big\} \text{ und } \{\Phi(\mathcal{F}' \setminus \mathcal{C}^d) > 0\}$$

(messbare) Nullmengen sind, so folgt, dass Ψ ein markierter Punktprozess ist. (Die Messbarkeit folgt aus dem Satz von Campbell.)

Zu zeigen ist nun noch die Stationarität von Ψ. Für eine messbare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^d \times \mathcal{C}' \to [0, \infty)$ und $x \in \mathbb{R}^d$ erhält man mit Hilfe von (3.1.2), dass

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{C}'} f \, d(T_x\Psi) &= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{C}'} f(y + x, C) \, \Psi(d(y, C)) \\
&= \int_{\mathcal{C}'} f(c(K) + x, K - c(K)) \, \Phi(dK) \\
&= \int_{\mathcal{C}'} f(c(K + x), K + x - c(K + x)) \, \Phi(dK) \\
&= \int_{\mathcal{C}'} f(c(K), K - c(K)) \, (T_x\Phi)(dK) \\
&\stackrel{d}{=} \int_{\mathcal{C}'} f(c(K), K - c(K)) \, \Phi(dK) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{C}'} f \, d\Psi,
\end{aligned}$$

wobei im vorletzten Schritt die Stationarität von Φ, d.h. $T_x\Phi \stackrel{d}{=} \Phi$, verwendet wurde. Damit folgt $\Psi \stackrel{d}{=} T_x\Psi$ aufgrund von Satz 2.1.25 Nach Satz 2.3.2 ist $\mathbb{E}\,\Psi = \tilde{\gamma}\lambda_d \otimes \mathbb{Q}$ mit einer Konstanten $\tilde{\gamma} \geq 0$ und einem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ auf $\mathcal{C}_0$ (wir können $\mathbb{Q}$ als Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{C}'$ fortsetzen, indem wir $\mathbb{Q}(\mathcal{C}' \setminus \mathcal{C}_0) = 0$ festlegen). Sei $T : \mathbb{R}^d \times \mathcal{C}_0 \to \mathcal{C}'$ erklärt durch $T(x, C) = C + x$. Die Abbildung ist bijektiv mit $T^{-1}(C) = (c(C), C - c(C))$. Dann ist $\Psi = T^{-1}\Phi$ sowie $\Phi = T\Psi$ und damit

$$\begin{aligned}
\Theta = \mathbb{E}\Phi = \mathbb{E}T(\Psi) = T(\mathbb{E}\Psi) &= T(\tilde{\gamma}\lambda_d \otimes \mathbb{Q}) \\
&= \tilde{\gamma} \int \int \mathbb{1}\{K + c \in \cdot\} \, dx \, \mathbb{Q}(dK)
\end{aligned}$$

sowie

$$\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}(\lambda_d \otimes \mathbb{Q})(C_0^d \times \mathcal{C}_0) = \mathbb{E}\Psi(C_0^d \times \mathcal{C}_0) = \mathbb{E} \int \mathbb{1}\{c(C) \in C_0^d\} \, \Phi(dC) = \gamma.$$

Insbesondere folgt $\gamma > 0$ aus $\Theta \neq 0$. Die Eindeutigkeitsaussagen werden in den nachfolgenden Bemerkungen bewiesen und diskutiert. □

Bemerkung 3.1.9 Unter den Voraussetzungen von Satz 3.1.8 gilt für eine Menge $B \in \mathcal{B}^d$ mit $0 < \lambda^d(B) < \infty$

$$\gamma = \frac{1}{\lambda^d(B)} \mathbb{E}\left[\int_{\mathcal{C}'} \mathbb{1}_B(c(K)) \, \Phi(dK)\right].$$

Dazu setzt man $\mathcal{H} := \{K \in \mathcal{C}' \colon c(K) \in B\}$ in (3.1.3) und erhält

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_{\mathcal{C}'} \mathbb{1}\{c(K) \in B\}\, \Phi(dK)\right] &= \Theta(\mathcal{H}) \\
&= \gamma \int_{\mathcal{C}_0} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{c(K+x) \in B\}\, dx\, \mathbb{Q}(dK) \\
&= \gamma \int_{\mathcal{C}_0} \lambda^d(B - c(K))\, \mathbb{Q}(dK) \\
&= \gamma \int_{\mathcal{C}_0} \lambda^d(B)\, \mathbb{Q}(dK) = \gamma \lambda^d(B).
\end{aligned}$$

Allgemeiner und mit gleicher Argumentation erhält man

$$\mathbb{Q}(\mathcal{H}) = \frac{1}{\gamma \lambda^d(B)} \mathbb{E}\left[\int_{\mathcal{C}'} \mathbb{1}_B(c(K)) \mathbb{1}_{\mathcal{H}}(K - c(K))\, \Phi(dK)\right]$$

für eine beliebige messbare Menge $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}'$. Für eine “frequentistische Beschreibung” wird auf die Vorlesung verwiesen.

Definition 3.1.10 Ist Φ ein stationärer Partikelprozess mit lokalendlichem Intensitätsmaß, so heißt γ die *Intensität* und $\mathbb{Q}$ die *Formverteilung* von Φ (jeweils bezüglich der gegebenen Zentrumsfunktion).

Lemma 3.1.11 *Es sei c' eine weitere Zentrumsfunktion. Unter den Voraussetzungen von Satz 3.1.8 gilt*

$$\gamma = \mathbb{E}\left[\int_{\mathcal{C}'} \mathbb{1}\{c'(K) \in B\}\, \Phi(dK)\right]$$

für $B \in \mathcal{B}^d$ mit $\lambda^d(B) = 1$. Intensitäten hängen also nicht von der gewählten Zentrumsfunktion ab.

Beweis. Übung 9.3 □

Bemerkung 3.1.12 Unter den Voraussetzungen von Lemma 3.1.11 sei $\mathbb{Q}'$ die Formverteilung bezüglich c'. Dann gehen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}'$ durch “Verschiebung” auseinander hervor. Ist etwa $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}'$ verschiebungsinvariant (d.h. $\mathcal{H} = \mathcal{H} + x := \{K + x : K \in \mathcal{H}\}$ für jedes $x \in \mathbb{R}^d$), so gilt

$$\mathbb{Q}(\mathcal{H}) = \mathbb{Q}'(\mathcal{H}).$$

Nachweis: Übung 9.3.

Bemerkung 3.1.13 Nicht jedes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ auf $\mathcal{C}$ kann unter den Voraussetzungen von Satz 3.1.8 als Formverteilung vorkommen. Für $C \in \mathcal{C}'$ gilt:

$$\begin{aligned}
\infty > \Theta(\mathcal{F}_C) &= \gamma \int_{\mathcal{C}'} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{(K+x) \cap C \neq \emptyset\}\, dx\, \mathbb{Q}(dK) \\
&= \gamma \int_{\mathcal{C}_0} \lambda^d(K + C^*)\, \mathbb{Q}(dK).
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\int_{\mathcal{C}_0} \lambda^d(K + C^*)\, \mathbb{Q}(dK) < \infty, \quad C \in \mathcal{C}^d. \tag{3.1.4}$$

Satz 3.1.14 *Unter den Voraussetzungen von Satz 3.1.8 sei Φ ein Poissonprozess. Dann ist*

$$\Psi := \int_{\mathcal{C}'} \mathbb{1}\{(c(K), K - c(K)) \in \cdot\}\, \Phi(dK)$$

ein Poissonprozess auf $\mathbb{R}^d \times \mathcal{C}'$.

Beweis. Wir verwenden den „Abbildungssatz“ für Poissonprozesse, der in den Übungen besprochen wird. Sei Φ ein Poissonprozess auf $\mathbb{X}$ mit Intensitätsmaß Θ und $T\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ messbar. Definiere

$$T(\Phi)(B) := \int_{\mathbb{X}} \mathbb{1}\{T(x) \in B\}\, \Phi(dx).$$

Gilt nun zusätzlich

$$\mathbb{E}[T(\Phi)(B)] = \int_{\mathbb{X}} \mathbb{1}\{T(x) \in B\}\, \Theta(dx) < \infty, \quad B \subset \mathbb{Y} \text{ beschränkt},$$

so ist $T(\Phi)$ ein Poissonprozess. In unserem Fall ist $T(K) := (c(K), K - c(K))$. Insbesondere erhält man

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\, T(\Phi)(C_0 \times \mathcal{C}') &= \gamma \int_{\mathcal{C}'} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{c(K + x) \in C_0\}\, dx\, \mathbb{Q}(dK) \\ &= \gamma \int_{\mathcal{C}'} \lambda_d(C_0)\, \mathbb{Q}(dK), \end{aligned}$$

so dass Ψ insbesondere auch ein markierter Punktprozess ist. □

Satz 3.1.15 *Es sei Ψ ein Poissonprozess auf $\mathbb{R}^d \times \mathcal{C}'$ mit Intensitätsmaß $\gamma\lambda^d \otimes \mathbb{Q}$ für $\gamma > 0$ und ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ auf $\mathcal{C}'$. Es gelte (3.1.4). Dann ist*

$$\Phi(\cdot) := \int_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{C}'} \mathbb{1}\{K + x \in \cdot\}\, \Psi(d(x, K))$$

ein stationärer Poissonprozess.

Beweis. Da Ψ als Poissonprozess durch sein Intensitätsmaß in Verteilung festgelegt ist, ist Ψ stationär. Dann ist auch Φ stationär und ein Poissonprozess, wie aus dem Abbildungssatz für Poissonprozesse folgt. □

Schließlich erklären wir noch Dichten von Funktionalen auf $\mathcal{C}'$ in Bezug auf einen gegebenen Partikelprozess Φ. Sei dazu $\varphi : \mathcal{C}' \to \mathbb{R}$ eine translationsinvariante, messbare Abbildung (Funktional). Sei c eine Zentrumsfunktion. Ferner sei Φ ein stationärer Partikelprozess mit Intensität γ. Ist $\varphi \geq 0$ oder ist φ eine $\mathbb{Q}$-integrierbare Funktion, so wird

$$\overline{\varphi}(\Phi) := \gamma \int_{\mathcal{C}_0} \varphi\, d\mathbb{Q} = \gamma \int_{\mathcal{C}_0} \varphi(C)\, \mathbb{Q}(dC)$$

erklärt. Man nennt $\overline{\varphi}(\Phi)$ die φ-Dichte von Φ. Sei Z_0 eine zufällige kompakte Menge mit Verteilung $\mathbb{Q}$ (auf einem geeigneten Warhscheinlichkeitsraum). Man nennt Z_0 typisches Korn von Φ (bezogen auf die gegebene Zentrumsfunktion). Man erhält dann

$$\overline{\varphi}(\Phi) = \gamma \mathbb{E}[\varphi(Z_0)].$$

Folgende Punkte sind zu beachten:

- In der Literatur wird die Dichte gelegentlich auch ohne den Faktor γ (Intensität) erklärt. Das ist beim Vergleich von Formeln zu beachten, die Dichten betreffen.
- Auch wenn Φ zufällig ist, ist $\overline{\varphi}(\Phi)$ deterministisch, ganz in Analogie zur Notation für Erwartungswerte.

Satz 3.1.16 *Sei Φ ein stationärer Partikelprozess in $\mathbb{R}^d$ mit Formverteilung $\mathbb{Q}$ und Intensität γ (bei gegebener Zentrumsfunktion c). Sei $\varphi : \mathcal{C}' \to \mathbb{R}$ eine translationsinvariante, messbare Abbildung und $\varphi \geq 0$ oder eine $\mathbb{Q}$-integrierbare Funktion.*

(a) *Für $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ mit $\lambda_d(B) \in (0, \infty)$ gilt*

$$\begin{aligned}\overline{\varphi}(\Phi) &= \frac{1}{\lambda_d(B)} \mathbb{E} \sum_{C \in \Phi, c(C) \in B} \varphi(C) \\ &= \frac{1}{\lambda_d(B)} \mathbb{E} \int_{\mathcal{C}'} \mathbb{1}\{c(C) \in B\} \varphi(C)\, \Phi(dC).\end{aligned}$$

(b) *Für $W \in \mathcal{K}^d$ mit $V_d(W) > 0$ gilt*

$$\begin{aligned}\overline{\varphi}(\Phi) &= \lim_{r \to \infty} \frac{1}{V_d(rW)} \mathbb{E} \sum_{C \in \Phi, C \subset rW} \varphi(C) \\ &= \lim_{r \to \infty} \frac{1}{V_d(rW)} \mathbb{E} \int_{\mathcal{C}'} \mathbb{1}\{C \subset rW\} \varphi(C)\, \Phi(dC).\end{aligned}$$

(c) *Unter der zusätzlichen Voraussetzung*

$$\int_{\mathcal{C}_0^d} |\varphi(C)| \lambda_d(C + B^d)\, \mathbb{Q}(dC) < \infty$$

gilt für $W \in \mathcal{K}^d$ mit $V_d(W) > 0$ ferner

$$\begin{aligned}\overline{\varphi}(\Phi) &= \lim_{r \to \infty} \frac{1}{V_d(rW)} \mathbb{E} \sum_{C \in \Phi, C \cap rW \neq \emptyset} \varphi(C) \\ &= \lim_{r \to \infty} \frac{1}{V_d(rW)} \mathbb{E} \int_{\mathcal{C}'} \mathbb{1}\{C \cap rW \neq \emptyset\} \varphi(C)\, \Phi(dC).\end{aligned}$$

Beweis. (a) Wir bezeichnen mit Θ das Intensitätsmaß zu Φ. Mit Campbell und der Translationsinvarianz von φ erhalten wir

$$\begin{aligned}&\mathbb{E} \int_{\mathcal{C}'} \mathbb{1}\{c(C) \in B\} \varphi(C)\, \Phi(dC) \\ &= \int_{\mathcal{C}'} \mathbb{1}\{c(C) \in B\} \varphi(C)\, \Theta(dC) \\ &= \gamma \int \int \mathbb{1}\{c(C + x) \in B\} \varphi(C + x)\, \lambda_d(dx)\, \mathbb{Q}(dC) \\ &= \gamma \int \int \mathbb{1}\{c(C) + x \in B\} \varphi(C)\, \lambda_d(dx)\, \mathbb{Q}(dC)\end{aligned}$$

$$= \gamma \int \lambda_d(B)\varphi(C)\,\mathbb{Q}(dC)$$

$$= \gamma\lambda_d(B) \int \varphi(C)\,\mathbb{Q}(dC)$$

$$= \lambda_d(B)\overline{\varphi}(\Phi).$$

(b) Zunächst erhält man mit analoger Argumentation wie in (a)

$$\mathbb{E}\int_{\mathcal{C}'} \mathbb{1}\{C \subset rW\}\varphi(C)\,\Phi(dC)$$
$$= \gamma \int \varphi(C)\lambda_d(\{x \in \mathbb{R}^d : C + x \subset rW\})\,\mathbb{Q}(dC).$$

Wir können $o \in \text{int}(W)$ annehmen (warum?). Sei zu $C \in \mathcal{C}_0^d$ mit $\varrho(C)$ die kleinste nichtnegative Zahl bezeichnet mit $C \subset \varrho(C)W$. Ist also $r > \varrho(C)$ und $x \in (r - \varrho(C))W$, so gilt $C + x \subset rW$. Dies zeigt

$$\left(1 - \frac{\varrho(C)}{r}\right)^d \leq \frac{\lambda_d(\{x \in \mathbb{R}^d : C + x \subset rW\})}{V_r(rW)} \leq 1.$$

Die linke Seite konvergiert für festes C monoton gegen 1, wenn $r \uparrow \infty$. Ist $\varphi \geq 0$, so folgt die Behauptung mit dem Satz von der monotonen Konvergenz. Ist φ integrierbar, so erhält man die Aussage mit dem Satz von der dominierten Konvergenz.
(c) Übung. □

3.2 Das Boolesche Modell

Sei nun Φ ein Partikelprozess und Ψ der zugehörige markierte Punktprozess (bei gegebener Zentrumsfunktion c) mit Markenraum $\mathcal{C}_0^d$. Sind Φ und $\Psi(\cdot \times \mathcal{C}_0^d)$ lokal endlich (was zum Beispiel erfüllt ist, wenn sogar die zugehörigen Intensitätsmaße lokal endlich sind), so nennt man Ψ einen Keim-Korn-Prozess. In diesem Fall haben wir messbare Darstellungen

$$\Phi = \sum_{i=1}^{\tau} \delta_{C_i} \qquad \text{und} \qquad \Psi = \sum_{i=1}^{\tau} \delta_{(x_i,K_i)}$$

mit einer Zufallsvariable $\tau \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ und Zufallselementen $C_1, C_2, \ldots$ sowie mit $x_i = c(C_i)$ und $K_i = C_i - x_i$. Außerdem ist klar, dass Φ genau dann stationär ist, wenn Ψ stationär ist.

Zu gegebenem Φ bzw. Ψ nennt man die Vereinigungsmenge

$$Z := \bigcup_{K\in\Phi} K = \bigcup_{i=1}^{\tau} C_i = \bigcup_{i=1}^{\tau} (K_i + x_i)$$

das zugehörige Keim-Korn-Modell. Für jedes $C \in \mathcal{C}^d$ ist $\Phi(\mathcal{F}_C)$ endlich (nach Voraussetzung). Hieraus folgert man leicht die Abgeschlossenheit von Z (zumindest $\mathbb{P}$-fast sicher). Wir formulieren dies als einen Hilfssatz.

Lemma 3.2.1 *Sei Φ ein Partikelprozess, d.h. insbesondere ist $\Phi(\mathcal{F}_C)$ $\mathbb{P}$-fast sicher endlich für jede Menge $C \in \mathcal{C}^d$. Dann ist das von Φ erzeugte Keim-Korn-Modell fast sicher abgeschlossen.*

Beweis. Sei B_n, $n \in \mathbb{N}$, eine gegen $\mathbb{R}^d$ aufsteigende Folge kompakter Mengen mit $B_n \subset \operatorname{int}(B_{n+1}$, z. B. $B_n = nB^d$. Sei Ω_0 die Menge aller $\omega \in \Omega$ mit $\Phi(\omega)(\mathcal{F}_{B_n}) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ und es bleibt zu zeigen, dass $Z(\omega)$ für $\omega \in \Omega_0$ abgeschlossen ist. Sei also $\omega \in \Omega_0$. Sei weiter $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten in $Z(\omega)$ mit $z_i \to z \in \mathbb{R}^d$ für $i \to \infty$. Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $z_i \in B_n$ für $i \in \mathbb{N}$. Da $\Phi(\omega)(\mathcal{F}_{B_n}) < \infty$ gilt, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ und Partikel C_j, $j \in \{1, \ldots, N\}$ im Träger von Φ mit

$$Z(\omega) \cap B_n = \left(\bigcup_{j=1}^{N} C_j \right) \cap B_n.$$

Es folgt $z_i \in \bigcup_{j=1}^{N} C_j \in \mathcal{C}'$ für $i \in \mathbb{N}$ und daher auch

$$z \in \bigcup_{j=1}^{N} C_j \subset Z(\omega),$$

was die Abgeschlossenheit von $Z(\omega)$ beweist. □

Beispiel 3.2.2 Seien $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Punkte des Gitters $\mathbb{Z}^2$ (in einer fest gewählten Nummerierung).

(a) Seien $Z_n := B(0, R_n)$, $n \in \mathbb{N}$, Bälle mit Mittelpunkt 0 in $\mathbb{R}^2$ und zufälligen Radien R_n, gleichverteilt in $[0, 1]$. Dabei sei die Folge (R_n) unabhängig. Dann definiert

$$\Psi = \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_{(\xi_n, T_n)}$$

einen Keim-Korn-Prozess.

(b) Seien $Z_n := B(0, S_n)$, $n \in \mathbb{N}$ Bälle mit Mittelpunkt 0 und zufälligen Radien S_n. Dabei sei $S_n := \min\{R_n, \min\{d(\xi_n, \xi_j) - R_j : j = 1, \ldots, n-1\}\}$ (mit R_n wie in (a)). Hier sind die Zufallsvariablen der Folge (S_n) abhängig (und damit auch die zufälligen Primärkörner der Folge (Z_n)). Dann wird durch Ψ entsprechend wieder ein Keim-Korn-Prozess definiert.

Beispiel 3.2.3 Sei $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen, zufälligen Punkten gleichverteilt gewählt in dem Fenster $W := [0, 10]^2 \subset \mathbb{R}^2$. Sei τ poissonverteilt mit Parameter $\lambda > 0$.

(a) Dann ist $\Psi = \{(\xi_n, B(0, 1)) : 1 \leq n \leq \tau\}$ ein markierter Punktprozess (mit deterministischen Marken $Z_n = B(0, 1)$ aus $\mathcal{K}^2$). Die zufällige Menge $Z = \bigcup_{n=1}^{\tau}(Z_n + \xi_n)$ ist ein Keim-Korn-Modell.

(b) Als Variante kann man zufällige Radien betrachten, solange die lokale Endlichkeit gesichert ist.

Sei nun Φ ein Poissonscher Partikelprozess mit einem lokal-endlichen Intensitätsmaß Θ. Dann nennt man das zugehörige Keim-Korn-Modell

$$Z := \bigcup_{K\in\Phi} K$$

ein Boolesches Modell. Ist Φ stationär, so ist Z stationär und man spricht von einem stationären Booleschen Modell. Im stationären Fall liegt Φ in Verteilung durch die Intensität und die Formverteilung $\mathbb{Q}$ des zugehörigen markierten Punktprozesses Ψ eindeutig fest (bei gegebener Zentrumsfunktion). Wir sagen dafür kurz, dass Φ durch $(\gamma, \mathbb{Q})$ bestimmt ist.

Satz 3.2.4 *Sei Φ ein Poissonscher Partikelprozess mit lokal-endlichem Intensitätsmaß Θ. Sei Z das von Φ erzeugte Boolesche Modell.*

(a) *Dann gilt*

$$T_Z(C) = 1 - \exp(-\Theta(\mathcal{F}_C)), \qquad C \in \mathcal{C}^d. \tag{3.2.1}$$

(b) *Das Boolesche Modell Z legt die Verteilung des erzeugenden Poissonschen Partikelprozesses eindeutig fest.*

(c) *Ist Φ stationär und bestimmt durch $(\gamma, \mathbb{Q})$, so gilt*

$$\begin{aligned} T_Z(C) &= 1 - \exp\left(-\gamma \int_{\mathcal{C}_0^d} \lambda_d(K + C^*)\, \mathbb{Q}(dK)\right) \\ &= 1 - \exp\left(-\gamma \mathbb{E}\lambda_d(Z_0 + C^*)\right). \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

wenn Z_0 ein typisches Korn mit Verteilung $\mathbb{Q}$ ist.

(d) *Ist Z ein Boolesches Modell und zugleich eine stationäre zufällige abgeschlossene Menge, so ist der erzeugende Partikelprozess stationär, das heißt, Z ist ein stationäres Boolesches Modell.*

Beweis. (a) Sei $C \in \mathcal{C}^d$. Dann gilt

$$\begin{aligned} T_Z(C) &= \mathbb{P}(Z \cap C \neq \emptyset) = 1 - \mathbb{P}(Z \cap C = \emptyset) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\Phi(\mathcal{F}_C) = 0) \\ &= 1 - \exp(-\Theta(\mathcal{F}_C)). \end{aligned}$$

(b) Ein lokal endliches Maß μ auf $\mathcal{F}'$ liegt fest, falls die Werte $\mu(\mathcal{F}_C)$ für $C \in \mathcal{C}^d$ von μ festliegen. Zum Nachweis verwendet man, dass

$$\mu(\mathcal{F}^{C_0}_{C_1,\dots,C_k}) = \sum_{r=0}^{k} (-1)^{r-1} \sum_{1 \le i_1 < \dots i_r \le k} \mu(\mathcal{F}_{C_0 \cup C_{i_1} \cup \dots \cup C_{i_r}})$$

für $C_0, C_1, \dots, C_k \in \mathcal{C}^d$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt. Dies erhält man durch vollständige Induktion mittels (1.3.1). Insbesondere liegen dann also auch die Werte von μ auf den Mengen des schnittstabilen und erzeugenden Mengensystems $\{\mathcal{F}_{C_1,\dots,C_k} : C_0, C_1, \dots, C_k \in \mathcal{C}^d, k \in \mathbb{N}\}$ fest. Wegen der vorausgesetzten lokalen Endlichkeit von μ folgt die Behauptung aus einem Eindeutigkeitssatz der Maßtheorie.

Wenn nun $Z = Z(\Phi) = Z(\Phi')$ wäre, so würde aus (a) folgen, dass $\mathbb{E}\Phi = \mathbb{E}\Phi'$ erst auf den Mengen $\mathcal{F}_C$ mit $C \in \mathcal{C}$ gilt. Mit der vorangehenden Überlegung folgt dann aber auch die Gleichheit allgemein. Dies ergibt $\Phi \overset{d}{=} \Phi'$, da Poissonprozesse mit gleichem Intensitätsmaß gleich in Verteilung sind.
(c) Beachte, dass

$$\begin{aligned} \Theta(\mathcal{F}_C) &= \gamma \int \int \mathbb{1}\{(K + x) \cap C \neq \emptyset\}\, \lambda_d(dx)\, \mathbb{Q}(dK) \\ &= \gamma \int \int \mathbb{1}\{(x \in C + K^*\}\, \lambda_d(dx)\, \mathbb{Q}(dK) \end{aligned}$$

$$= \gamma \int \lambda_d(K + C^*)\, \mathbb{Q}(dK),$$

was die Behauptung zusammen mit (a) beweist.
(d) Zunächst ist Z genau dann stationär ist, wenn T_Z translationsinvariant ist. Letzteres impliziert aufgrund von (b), dass Θ translationsinvariant ist. Dies zeigt die Stationarität von Φ. □

Setzt man $C = \{0\}$ in (3.2.2), so erhält für den Volumenanteil von Z

$$p = \mathbb{P}(0 \in Z) = T_Z(\{0\}) = 1 - \exp[-\gamma \mathbb{E}\lambda^d(Z_0)].$$

Weiterhin bezeichnen wir die Drehgruppe auf $\mathbb{R}^d$ mit SO_d. Wir nennen eine zufällige abgeschlossene Menge Z auf $\mathbb{R}^d$ *isotrop*, wenn $\vartheta Z \overset{d}{=} Z$ für alle $\vartheta \in SO_d$ gilt.

Satz 3.2.5 *Sei Z ein stationäres Boolesches Modell mit typischem Korn Z_0. Gilt $Z_0 \overset{d}{=} \vartheta Z_0$ für (jedes) $\vartheta \in SO_d$, so ist $\vartheta Z \overset{d}{=} Z$ für (jedes) $\vartheta \in SO_d$.*

Beweis. Die Abbildung $\mathcal{F}^d \to \mathcal{F}^d, A \mapsto \vartheta A$ ist für festes $\vartheta \in SO_d$ stetig. Für $C \in \mathcal{C}^d$ gilt dann

$$\begin{aligned}
T_{\vartheta Z}(C) &= \mathbb{P}((\vartheta Z) \cap C \neq \emptyset) \\
&= \mathbb{P}(Z \cap (\vartheta^{-1} C)) \\
&= T_Z(\vartheta^{-1} C) \\
&= 1 - \exp\big(- \gamma \mathbb{E}[\lambda^d(Z_0 + (\vartheta^{-1}C)^*)]\big) \\
&= 1 - \exp\big(- \gamma \mathbb{E}[\lambda^d(Z_0 + \vartheta^{-1}C^*)]\big) \\
&= 1 - \exp\big(- \gamma \mathbb{E}[\lambda^d(\vartheta Z_0 + C^*)]\big) = T_Z(C),
\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Isotropie von Z_0 verwendet wurde. □

Außer in Spezialfällen (Übungen) gilt keine Umkehrung dieser Aussage.

Im Folgenden betrachten wir stets ein stationäres Boolesches Modell.

Definition 3.2.6 Die *Kovarianzfunktion* einer zufälligen abgeschlossenen Menge Z wird definiert durch

$$C(x) := \mathbb{P}(0 \in Z, x \in Z), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Bemerkungen 3.2.7 (i) Wegen der Stationarität von Z gilt

$$C(x) = \mathbb{P}(y \in Z, x + y \in Z), \quad x, y \in \mathbb{R}^d.$$

(ii) Man betrachte das zufällige Feld $Y(x) := \mathbb{1}_Z(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$. Dann gilt:

$$\mathrm{Cov}(Y(0), Y(x)) = \mathbb{E}[Y(0)Y(x)] - \mathbb{E}[Y(0)]\mathbb{E}[Y(x)] = C(x) - p^2.$$

Satz 3.2.8 *Ist Z ein stationäres Boolesches Modell, so gilt*

$$C(x) = 2p - 1 + (1-p)^2 \exp\big(\gamma C_0(x)\big), \qquad x \in \mathbb{R}^d,$$

wobei

$$C_0(x) := \mathbb{E}[\lambda^d(Z_0 \cap (Z_0 - x))] = \mathbb{E}[\lambda^d(Z_0 \cap (Z_0 + x))]$$

das sogenannte erwartete Kovariogramm von Z_0 in x ist.

Beweisidee. Siehe die Übungen für Details. Es gilt

$$\begin{aligned} C(x) &= 1 - \mathbb{P}((\{0 \in Z\} \cap \{x \in Z\})^c) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\{0 \notin Z\} \cup \{x \notin Z\}) \\ &= 1 - \mathbb{P}(0 \notin Z) - \mathbb{P}(x \notin Z) + \mathbb{P}(0 \notin Z, x \notin Z) \\ &= 1 - (1-p) - (1-p) + \mathbb{P}(\{0,x\} \cap Z = \emptyset) \\ &= 2p - 1 + 1 - T_Z(\{0,x\}) \\ &= 2p - 1 + \exp\big(-\gamma \mathbb{E}[\lambda^d(Z_0 + \{0,-x\})]\big) \\ &= 2p - 1 + \exp\big(-\gamma \mathbb{E}[\lambda^d(Z_0 \cup (Z_0 - x))]\big) = \ldots \end{aligned}$$

□

Folgerung 3.2.9 Es gilt

$$\lim_{\|x\|\to\infty} C(x) = p^2,$$

das heißt,

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \mathbb{P}(0 \in Z, x \in Z) = \mathbb{P}(0 \in Z)\mathbb{P}(x \in Z).$$

Ferner gilt (unter technischen Voraussetzungen an Z_0) auch

$$\lim_{x\to 0} C(x) = p.$$

Beispiel 3.2.10 Es gelte $Z_0 \stackrel{d}{=} B(0,R)$ für eine Zufallsvariable $R \geq 0$, $d = 3$, $\mathbb{E}(R^3) < \infty$. Bezeichnet F die Verteilung von R, so gilt

$$\mathbb{E}[\lambda^3(Z_0)] = \mathbb{E}\left[\frac{4}{3}\pi R^3\right] = \frac{4}{3}\pi \int_0^\infty r^3 \, F(dr).$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned} C_0(x) &= 2\mathbb{E} \int 1\{\|x\|/2 \leq t \leq u\} \pi(u^2 - t^2)\, dt \\ &= \frac{4}{3}\pi \int_{\frac{\|x\|}{2}}^\infty u^3 \left(1 - \frac{3\|x\|}{4u} + \frac{\|x\|^3}{16u^3}\right) F(du). \end{aligned}$$

Es sei daran erinnert, dass wir mit $\mathcal{K}^d$ die Menge der konvexen und kompakten Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ bezeichnen. Außerdem sei im Folgenden

$$\mathcal{K}' := \mathcal{K}^d \setminus \{\emptyset\}$$

die Menge der nicht-leeren konvexen Körper.

Definition 3.2.11 Es sei $B \in \mathcal{K}^d$ mit $0 \in B$. Dann heißt die Abbildung

$$r \mapsto H_B(r) := 1 - \mathbb{P}(Z \cap rB = \emptyset \mid 0 \notin Z), \qquad r \geq 0,$$

Kontaktverteilungsfunktion zum *Eichkörper* (oder *strukturierenden Element*) B.

Bemerkung 3.2.12 Die Kontaktverteilungsfunktion wird für beliebige stationäre zufällige abgeschlossene Mengen eingeführt. Im Fall $\dim(B) \leq d-1$ (z.B. sei B das Segment $[0,u]$ für einen Einheitsvektor u) kann der Fall

$$H_B(\infty) := \lim_{r\to\infty} H_B(r) < 1$$

eintreten.

Definition 3.2.13 Im Fall $B = B^d$ heißt H_{B^d} *sphärische Kontaktverteilungsfunktion*. Im Fall $B = [0,u]$ mit $u \in S^{d-1} := \{x \in \mathbb{R}^d : ||x|| = 1\}$ heißt H_B *lineare Kontaktverteilungsfunktion*.

Aus $0 \in B$ folgt

$$H_B(r) = 1 - \frac{\mathbb{P}(Z \cap rB = \emptyset, 0 \notin Z)}{\mathbb{P}(0 \notin Z)} = 1 - \frac{\mathbb{P}(Z \cap rB = \emptyset)}{\mathbb{P}(0 \notin Z)} = 1 - \frac{1 - T_Z(B)}{\mathbb{P}(0 \notin Z)}. \quad (3.2.3)$$

Man beachte dabei, dass

$$\mathbb{P}(0 \notin Z) = 1 - p = \exp\big(-\gamma\mathbb{E}[\lambda^d(Z_0)]\big) > 0$$

für ein Boolesches Modell Z gilt.

Bemerkung 3.2.14 Man betrachte die Zufallsvariable

$$R := \inf\{r > 0 : Z \cap rB \neq \emptyset\}$$

mit $\inf\emptyset := \infty$. Dann gilt

$$\{R \leq r\} = \{Z \cap rB \neq \emptyset\},$$

wobei die Inklusion "$\subseteq$" aus der Abgeschlossenheit folgt und "$\supseteq$" offensichtlich gilt. Außerdem gilt $\{R = 0\} = \{0 \in Z\}$, d.h.

$$H_B(r) = \mathbb{P}(R \leq r \mid R > 0).$$

Satz 3.2.15 *Sei Z ein stationäres Boolesches Modell. Für $B \in \mathcal{K}'$ mit $0 \in B$ gilt*

$$1 - H_B(r) = \exp\big(-\gamma\mathbb{E}[\lambda^d((Z_0 + rB^*) \setminus Z_0)]\big).$$

Beweis. Aus (3.2.3) und Theorem 3.2.4 folgt

$$\begin{aligned}1 - H_B(r) &= \frac{\exp\big(-\gamma\mathbb{E}[\lambda^d(Z_0 + rB^*)]\big)}{\exp\big(-\gamma\mathbb{E}[\lambda^d(Z_0)]\big)} \\ &= \exp\big(-\gamma(\mathbb{E}[\lambda^d(Z_0 + rB^*)] - \mathbb{E}[\lambda^d(Z_0)])\big) \\ &= \exp\big(-\gamma\mathbb{E}[\lambda^d((Z_0 + rB^*) \setminus Z_0)]\big),\end{aligned}$$

da $Z_0 \subseteq Z_0 + rB^*$ ist. □

Beispiel 3.2.16 Es gelte $Z_0 \stackrel{d}{=} B(0, R_0)$. Dann folgt aus Satz 3.2.15 sofort

$$\begin{aligned}H_{B^d}(r) &= 1 - \exp\big(-\gamma\mathbb{E}[\lambda^d((R_0 + r)B^d) \setminus R_0B^d)]\big) \\ &= 1 - \exp\big(-\gamma\kappa_d\mathbb{E}[(R_0 + r)^d - R_0^d]\big)\end{aligned}$$

$$= 1 - \exp\left(-\gamma\kappa_d \mathbb{E}\left[\sum_{j=0}^{d-1}\binom{d}{j} R_0^j r^{d-j}\right]\right)$$

$$= 1 - \exp\left(-\gamma\kappa_d \sum_{j=1}^{d-1}\binom{d}{j} r^{d-j}\mathbb{E}[R_0^j]\right).$$

Wir werden dieses Beispiel später noch verallgemeinern. Als Vorbereitung dient der folgende Abschnitt.

3.3 Die Steinersche Formel

Im Folgenden bezeichnen wir mit $V_d(K)$ das d-dimensionale Volumen und mit $O_{d-1}(K)$ den Oberflächeninhalt einer Borelmenge $K \subset \mathbb{R}^d$. Formal erklärt man $O_{d-1}(K)$ als das $(d-1)$-dimensionale Hausdorffmaß des Randes ∂K von K. Unter geeigneten Regularitätsvoraussetzungen an ∂K (Rektifizierbarkeit; erfüllt insbes. für die Ränder konvexer Mengen) stimmt $O_{d-1}(K)$ mit dem *äußeren Minkowski-Inhalt* überein, d.h., es gilt

$$O_{d-1}(K) = \lim_{\varepsilon\searrow 0}\frac{1}{\varepsilon}(V_d(K+\varepsilon B^d) - V_d(K)).$$

Lemma 3.3.1 *Für $K \in \mathcal{C}^d$ und $\varepsilon \geq 0$ ist*

$$K + \varepsilon B^d := \{x + y \colon x \in K,\ y \in \varepsilon B^d\} = \{x \in \mathbb{R}^d \colon d(x, K) \leq \varepsilon\}.$$

Beweis. Übungsaufgabe. □

Wir untersuchen jetzt das Parallelvolumen $V_d(K + \varepsilon B^d)$ in Abhängigkeit von ε.

Beobachtung.

$$V_d(K + \varepsilon B^d) \approx V_d(K) + \varepsilon O_{d-1}(K) + O(\varepsilon^2),$$

d.h., der Restterm ist im Vergleich zu ε klein.

Beispiel 3.3.2 Sei $d = 2, K = rB^2$. Dann gilt

$$V_2(K + \varepsilon B^2) = V_2((r+\varepsilon)B^2) = \pi(r+\varepsilon)^2 = \pi r^2 + 2\pi r\varepsilon + \pi\varepsilon^2$$

$$= V_2(K) + \varepsilon O_1(K) + \pi\varepsilon^2.$$

Beispiel 3.3.3 Sei wieder $d = 2$ und K ein konvexes Polygon.

$$V_2(K + \varepsilon B^2) = V_2(K) + \varepsilon O_1(K) + \pi\varepsilon^2$$

ist ein Polynom in ε vom Grad zwei.

Definition 3.3.4 Für $d \in \mathbb{N}$ sei

$$\kappa_d := V_d(B^d) = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma((d/2)+1)}$$

das Volumen der d-dimensionalen Einheitskugel. Ferner sei $\kappa_0 := 1$.

Es gilt $\kappa_1 = 2, \kappa_2 = \pi, \kappa_3 = \frac{4}{3}\pi, \ldots$ Außerdem gilt für den Oberflächeninhalt der Einheitskugel

$$O_{d-1}(B^d) = \lim_{\varepsilon\searrow 0}\frac{1}{\varepsilon}\left(V_d((1+\varepsilon)B^d) - V_d(B^d)\right) = \kappa_d \lim_{\varepsilon\searrow 0}\frac{1}{\varepsilon}\left((1+\varepsilon)^d - 1\right) = d\kappa_d =: \omega_d.$$

Satz 3.3.5 (Steinersche Formel) *Für $K \in \mathcal{K}^d$ gibt es Zahlen $V_0(K), \ldots, V_d(K) \geq 0$, sodass*

$$V_d(K + \varepsilon B^d) = \sum_{j=0}^{d} \kappa_{d-j} \varepsilon^{d-j} V_j(K) \tag{3.3.1}$$

für alle $\varepsilon \geq 0$ gilt.

Beweis. O.B.d.A. sei $K \neq \emptyset$. Für $x \in \mathbb{R}^d$ sei

$$p(K, x) := y \in K, \text{ falls } \|x - y\| = d(x, K).$$

Für $x \in K$ ist $p(K, x) = x$ und für $x \notin K$ ist $p(K, x) \in \partial K$. Weil K konvex ist, ist y eindeutig bestimmt. Der Vektor $p(K, x)$ heißt *metrische Projektion* von x auf K. Jeder Randpunkt y von K ist Bild $p(K, x) = y$ eines Punktes $x \notin K$ unter der metrischen Projektion auf K. Der durch

$$u(K, x) := \frac{x - p(K, x)}{d(x, K)} \in S^{d-1}, \quad x \notin K,$$

definierte Vektor ist eine *äußere Normale* von K im Punkt $y = p(K, x)$ in dem Sinn, dass

$$K \subset \{z \in \mathbb{R}^d : \langle z - y, u(K, x) \rangle \leq 0\}$$

gilt. Also liegt K in einem der beiden Halbräume, die von der Hyperebene

$$\{z \in \mathbb{R}^d : \langle z - y, u(K, x) \rangle = 0\}$$

berandet werden. (Eine Stützhyperebene von K ist eine Hyperebene H mit $K \cap H \neq \emptyset$ und $K \subset H^-$, wobei H^- einer der beiden Halbräume ist, die von H berandet werden.) Also ist $\{z \in \mathbb{R}^d : \langle z - y, u(K, x) \rangle = 0\}$ eine Stützhyperebene von K durch y mit Normalenvektor $u(K, x)$.

Die Menge aller äußeren Normalenvektoren von K im Randpunkt y ist ein abgeschlossener, konvexer Kegel, der mit $N(K, y)$ bezeichnet wird.

Wir setzen zunächst voraus, dass K ein *Polytop* ist, d.h. ein endlicher Durchschnitt von Halbräumen, der beschränkt ist (äquivalent dazu ist ein Polytop die konvexe Hülle einer endlichen Punktmenge). Für ein Polytop K definieren wir eine *Seite* von K als den Schnitt von K mit einer Stützhyperebene. Wir bezeichnen eine Seite F von K als eine *j-Seite*, falls $\dim F := \dim(\text{aff } F) = j$ gilt. Für $j = 0, \ldots, d-1$ erklären wir außerdem $\mathcal{F}_j(K)$ als das endliche System aller j-Seiten von K. Eine wichtige Beobachtung ist, dass der Rand jedes Polytops die disjunkte Vereinigung des relativen Inneren seiner Seiten ist.

Des Weiteren ist der *Normalenkegel* $N(K, F)$ eines Polytops zu einer Seite $F \in \bigcup_{j=0}^{d-1} \mathcal{F}_j(K)$ von K die Menge der äußeren Normalenvektoren in einem beliebigen Punkt $x \in \text{relint } F$. Diese Definition ist unabhängig von der konkreten Wahl von x. Ferner sei

$$\gamma(F, K) := \frac{\mathcal{H}^{d-j-1}(N(K, F) \cap S^{d-1})}{\mathcal{H}^{d-j-1}(L \cap S^{d-1})}, \quad F \in \mathcal{F}_j(K),$$

der *äußere Winkel* von K bei F, wobei L das orthogonale Komplement des Richtungsraums von F und $\mathcal{H}^k$ das k-dimensionale Hausdorff-Maß auf dem $\mathbb{R}^d$ ist. Wegen der Proportionalität des Oberflächeninhalts von $N(K, F) \cap S^{d-1}$ zum zugehörigen $(d-j)$-dimensionalen Volumen von $N(K, F) \cap B^d$ gilt

$$\gamma(F, K) = \frac{\mathcal{H}^{d-j}(N(K, F) \cap B^d)}{\mathcal{H}^{d-j}(L \cap B^d)} = \frac{\mathcal{H}^{d-j}(N(K, F) \cap B^d)}{\kappa_{d-j}}.$$

Nun gilt für jedes Polytop $K \in \mathcal{K}^d$

$$V_d(K + \varepsilon B^d) - V_d(K) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{x \in (K + \varepsilon B^d) \setminus K\}\, dx$$

$$= \sum_{j=0}^{d-1} \sum_{F \in \mathcal{F}_j(K)} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{x \in (K + \varepsilon B^d) \setminus K,\ p(K, x) \in \operatorname{relint} F\}\, dx$$

$$= \sum_{j=0}^{d-1} \sum_{F \in \mathcal{F}_j(K)} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\,\{z \in N(K, F), ||z|| \leq \varepsilon, y \in \operatorname{relint} F\}\ \mathcal{H}^{d-j}(dz)\, \mathcal{H}^j(dy)$$

$$= \sum_{j=0}^{d-1} \sum_{F \in \mathcal{F}_j(K)} \mathcal{H}^j(\operatorname{relint} F) \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\,\{z \in N(K, F), ||z|| \leq 1\}\ \mathcal{H}^{d-j}(dz) \cdot \varepsilon^{d-j}$$

$$= \sum_{j=0}^{d-1} \sum_{F \in \mathcal{F}_j(K)} \mathcal{H}^j(\operatorname{relint} F) \mathcal{H}^{d-j}(N(K, F) \cap B^d) \frac{\kappa_{d-j}}{\kappa_{d-j}} \cdot \varepsilon^{d-j}$$

$$= \sum_{j=0}^{d-1} \sum_{F \in \mathcal{F}_j(K)} \mathcal{H}^j(F) \cdot \gamma(F, K) \cdot \kappa_{d-j} \cdot \varepsilon^{d-j},$$

wobei für die dritte Gleichheit verwendet wurde, dass sich jedes $x \in (K + \varepsilon B^d) \setminus K$ mit $p(K, x) \in \operatorname{relint} F$ eindeutig als Summe $x = y + z$ mit $y = p(K, x)$ und $z \in N(K, F)$ schreiben lässt. Setzt man nun

$$V_j(K) := \sum_{F \in \mathcal{F}_j(K)} \mathcal{H}^j(F) \cdot \gamma(F, K), \quad j \in \{0, 1, \ldots, d\}, \tag{3.3.2}$$

so gilt offenbar (3.3.1).

Für allgemeines $K \in \mathcal{K}^d \setminus \{\emptyset\}$ gibt es Polytope K_n, $n \in \mathbb{N}$, mit $\delta(K_n, K) \to 0$, $n \to \infty$ (siehe Übung für einen Beweis dieser Aussage). Aus (3.3.1) ergibt sich für alle $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{1, \ldots, d + 1\}$, dass

$$V_d(K_n + kB^d) = \sum_{j=0}^{d} \kappa_{d-j} k^{d-j} V_j(K_n).$$

Dieses lineare Gleichungssystem kann nach den Variablen $V_0(K_n), \ldots, V_d(K_n)$ (eindeutig) aufgelöst werden. Wir erhalten somit

$$V_j(K_n) = \sum_{k=1}^{d+1} \alpha_{jk} V_d(K_n + kB^d),$$

wobei die Koeffizienten $\alpha_{jk} \in \mathbb{R}$ nicht von K_n abhängen. Nun erklärt man

$$V_j(K) := \sum_{k=1}^{d+1} \alpha_{jk} V_d(K + kB^d), \quad K \in \mathcal{K}^d. \tag{3.3.3}$$

Da V_d stetig ist und ebenso die Minkowski-Addition, ist V_j ein stetiges Funktional auf den konvexen Körpern bezüglich der Hausdorffmetrik. Die Gleichung

$$V_d(K_n + \varepsilon B^d) = \sum_{j=0}^{d} \kappa_{d-j} \varepsilon^{d-j} V_j(K_n)$$

gilt nun für die durch (3.3.3) erklärten stetigen Funktionale. Gehen wir jetzt zum Grenzwert $n \to \infty$ über, so folgt (3.3.1). □

Definition 3.3.6 Die Zahlen $V_0(K), \ldots, V_d(K)$ heißen *innere Volumina* von K.

Bemerkung 3.3.7 Die Koeffizienten κ_{d-j} wurden aus Normierungsgründen gewählt. Insbesondere gelten die Aussagen (i) und (iii) der nachfolgenden Bemerkungen. Wichtiger, aber schwieriger zu zeigen, ist, dass V_j so erklärt ist, dass die Berechnung von $V_j(K)$ für $K \subset \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^d$ in $\mathbb{R}^k$ oder auch in $\mathbb{R}^d$ denselben Wert ergibt. Man sagt daher auch, dass die inneren Volumina von intrinsischer Natur sind.

Bemerkungen 3.3.8 (i) $V_d(K)$ auf der rechten Seite von (3.3.1) ist gleich $\lambda^d(K)$.

(ii) Aus (i) folgt

$$O_{d-1}(K) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}(V_d(K + \varepsilon B^d) - V_d(K)) = \kappa_1 V_{d-1}(K) = 2V_{d-1}(K).$$

Im Fall $\dim K = d$ ist $V_{d-1}(K)$ also der halbe Oberflächeninhalt von K und im Fall $\dim K \leq d-1$ ist $V_{d-1}(K)$ das $(d-1)$-dimensionale Lebesguemaß von K, also auch die halbe Oberfläche, wenn jede "Seite von K" einzeln zur Oberfläche gezählt wird.

(iii) Im Fall $K \neq \emptyset$ ist $V_0(K) = 1$ (siehe Übung 8.6). Ferner gilt $V_0(\emptyset) = \ldots = V_d(\emptyset) = 0$. Man nennt V_0 auch *Euler-Charakteristik*.

Satz 3.3.9 *Sei $j \in \{0, \ldots, d\}$. Dann gilt:*

(i) *Das Funktional V_j ist bewegungsinvariant, d.h.*

$$V_j(gK) = V_j(K), \quad K \in \mathcal{K}^d, g \in G_d.$$

Dabei ist G_d die Gruppe der Bewegungen auf $\mathbb{R}^d$ (Komposition von Drehungen und Verschiebungen).

(ii) *V_j ist homogen von Grad j, d.h.*

$$V_j(\alpha K) = \alpha^j V_j(K), \quad K \in \mathcal{K}^d, \alpha > 0.$$

(iii) *V_j ist stetig auf $\mathcal{K}^d$ bezüglich der Hausdorffmetrik.*

(iv) *V_j ist additiv, d.h.*

$$V_j(K \cup L) = V_j(K) + V_j(L) - V_j(K \cap L), \quad K, L, K \cup L \in \mathcal{K}^d.$$

Beweis. (i) und (iii) folgen direkt aus (3.3.3) und den entsprechenden Eigenschaften von V_d.

(ii) Für $\alpha > 0$, $K \in \mathcal{K}^d$ gilt

$$\sum_{j=0}^{d} \kappa_{d-j} \varepsilon^{d-j} V_j(\alpha K) \overset{(3.3.1)}{=} V_d(\alpha K + \varepsilon B^d) = \alpha^d V_d(K + \frac{\varepsilon}{\alpha} B^d)$$

$$\overset{(3.3.1)}{=} \alpha^d \sum_{j=0}^{d} \kappa_{d-j} \varepsilon^{d-j} \alpha^{-(d-j)} V_j(K)$$

$$= \sum_{j=0}^{d} \kappa_{d-j} \varepsilon^{d-j} \alpha^j V_j(K).$$

Koeffizientenvergleich (vor ε^{d-j}) zeigt $V_j(\alpha K) = \alpha^j V_j(K)$. Alternativ: Verwende die Darstellung von V_j für Polytope.

(iv) Es seien $K, L \in \mathcal{K}^d$ mit $K \cup L \in \mathcal{K}^d$. O.B.d.A. gelte $K \neq \emptyset$ und $L \neq \emptyset$. Man zeigt (durch Betrachtung von $p(K, \cdot)$, $p(L, \cdot)$ und $p(K \cap L, \cdot)$), dass gilt

$$\mathbb{1}_{(K \cup L)+\varepsilon B^d} + \mathbb{1}_{(K \cap L)+\varepsilon B^d} = \mathbb{1}_{K+\varepsilon B^d} + \mathbb{1}_{L+\varepsilon B^d}.$$

Integration liefert, dass $K \mapsto V(K + \varepsilon B^d)$ additiv ist. Aus (3.3.3) folgt dann die Behauptung (siehe Übung). □

Die inneren Volumina können auf vielfältige Weise verallgemeinert werden. Es gibt (was hier jedoch nicht bewiesen werden soll) ein eindeutig bestimmtes symmetrisches (nicht-negatives) Funktional $V\colon (\mathcal{K}^d \setminus \{\emptyset\})^d \to \mathbb{R}$ mit

$$V_d(t_1 K_1 + \ldots + t_m K_m) = \sum_{i_1,\ldots,i_d=1}^{m} t_{i_1} \cdots t_{i_d} V(K_{i_1}, \ldots, K_{i_d}) \tag{3.3.4}$$

für alle $t_1, \ldots, t_m \geq 0$, $K_1, \ldots, K_m \in \mathcal{K}^d \setminus \{\emptyset\}$, $m \in \mathbb{N}$, das symmetrisch und "multilinear" in den Argumenten ist. Man nennt dieses Funktional "gemischtes Volumen".

Definition 3.3.10 Die nicht-negative reelle Zahl $V(K_1, \ldots, K_d)$ heißt *gemischtes Volumen* von $K_1, \ldots, K_d$. Für $K, L \in \mathcal{K}^d \setminus \{\emptyset\}$, $j \in \{0, \ldots, d\}$ schreibt man

$$V(K[j], L[d-j]) := V(\underbrace{K, \ldots, K}_{j}, \underbrace{L, \ldots, L}_{d-j}).$$

Bemerkung 3.3.11 Wählt man $m = 2$, $t_1 = 1$, $t_2 = t$, $K_1 = K$ und $K_2 = L$ in (3.3.4), so erhält man

$$V_d(K + tL) = \sum_{j=0}^{d} \binom{d}{j} t^{d-j} V(K[j], L[d-j]).$$

Man nennt diese Formel auch Steiner-Formel zum strukturierenden Element L. Ein Vergleich mit der Steiner-Formel für $L = B^d$ zeigt:

$$V_j(K) = \binom{d}{j} \kappa_{d-j}^{-1} V(K[j], B^d[d-j]), \quad j = 0, \ldots, d.$$

3.4 Das Boolesche Modell mit konvexen Körnern

Wir betrachten ein stationäres Boolesches Modell Z mit Intensität γ und typischem Korn Z_0 mit $\mathbb{P}(Z_0 \in \mathcal{K}^d \setminus \{\emptyset\}) = 1$.

Satz 3.4.1 *Für die sphärische Kontaktverteilungsfunktion von Z gilt*

$$1 - H_{B^d}(r) = \exp\left(-\gamma \sum_{j=0}^{d-1} \kappa_{d-j} r^{d-j} \mathbb{E}[V_j(Z_0)]\right), \quad r \geq 0.$$

Beweis. Satz 3.2.15 besagt für $B \in \mathcal{K}^d$ mit $0 \in B$

$$1 - H_B(r) = \exp\left(-\gamma\left(\mathbb{E}[\lambda^d(Z_0 + rB^*)] - \mathbb{E}[\lambda^d(Z_0)]\right)\right).$$

Für $B = B^d$ folgt die Behauptung aus der Steiner-Formel:

$$\mathbb{E}[\lambda^d(Z_0 + rB^d)] = \sum_{j=0}^{d} \kappa_{d-j} r^{d-j} \mathbb{E}[V_j(Z_0)]. \qquad \square$$

Bemerkung 3.4.2 Aus der Voraussetzung $\mathbb{E}[\lambda^d(Z_0 + rB^d)] < \infty$, $r \geq 0$, folgt

$$\mathbb{E}[V_j(Z_0)] < \infty, \quad j = 0, \dots, d.$$

Auch die Umkehrung dieser Aussage ist richtig.

Bemerkung 3.4.3 Die sphärische Kontaktverteilungsfunktion wird durch die Zahlen $\gamma\mathbb{E}[V_j(Z_0)]$, $j = 0, \dots, d-1$, festgelegt. Der Volumenanteil wird durch $\gamma\mathbb{E}[V_d(Z_0)]$ bestimmt.

Satz 3.4.4 *Es sei $B \in \mathcal{K}^d$ mit $0 \in B$. Dann gilt:*

$$1 - H_B(r) = \exp\left(-\gamma \sum_{j=0}^{d-1} r^{d-j} \binom{d}{j} \mathbb{E}\left[V(Z_0[j], B^*[d-j])\right]\right), \quad r \geq 0.$$

Beweis. Die Behauptung folgt aus Satz 3.2.15 und Bemerkung 3.3.11. Auf Messbarkeitsfragen gehen wir nicht ein. $\square$

Satz 3.4.5 *Für jedes $u \in S^{d-1}$ gilt*

$$1 - H_{[0,u]}(r) = \exp\left(-\gamma r \mathbb{E}[V_{d-1}(Z_0 | u^\perp)]\right).$$

Dabei ist $K|u^\perp$ die orthogonale Projektion von $K \subset \mathbb{R}^d$ auf $u^\perp := \operatorname{span}(u)^\perp$. Ist Z_0 isotrop, so gilt

$$1 - H_{[0,u]}(r) = \exp\left(-\gamma \frac{2\kappa_{d-1}}{d\kappa_d} r \mathbb{E}[V_{d-1}(Z_0)]\right).$$

Beweis. Nach Satz 3.2.15 gilt für $B = [0, u]$

$$\begin{aligned} 1 - H_{[0,u]}(r) &= \exp\left(-\gamma \mathbb{E}[\lambda^d((Z_0 + r[0,u]^*) \setminus Z_0)]\right) \\ &= \exp\left(-\gamma \mathbb{E}[V_d(Z_0 + r[0,-u]) - V_d(Z_0)]\right). \end{aligned}$$

Zum Beweis der ersten Formel genügt es deshalb zu zeigen, dass für $K \in \mathcal{K}^d$ gilt

$$V_d(K + r[0,u]) = V_d(K) + rV_{d-1}(K|u^\perp), \quad r \geq 0.$$

Für $y \in u^\perp$ sei $f(y) := \max\{\lambda \in \mathbb{R} \colon y + \lambda u \in K\}$. Dann gilt:

$$y + \lambda u \in (K + rB) \setminus K \Leftrightarrow (i)\ y \in K|u^\perp \text{ und } (ii)\ f(y) < \lambda \leq f(y) + r.$$

Der Satz von Fubini liefert somit für $B = [0, u]$

$$V_d((K + rB) \setminus K) = \int_{u^\perp} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}\{y + \lambda u \in (K + rB) \setminus K\}\, d\lambda\, dy$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{u^\perp} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}\{y \in K|u^\perp\} \mathbb{1}\{f(y) < \lambda \le f(y) + r\} \, d\lambda \, dy \\
&= \int_{u^\perp} \mathbb{1}\{y \in K|u^\perp\} r \, dy \\
&= rV_{d-1}(K|u^\perp).
\end{aligned}$$

Es bezeichne ν das Haarsche Wahrscheinlichkeitsmaß auf SO_d. Im isotropen Fall schließt man dann für jedes $u \in S^{d-1}$ und jedes $\rho \in SO_d$

$$\mathbb{E}V_{d-1}(Z_0|u^\perp) = \mathbb{E}V_{d-1}(Z_0|\varrho u^\perp)$$

und damit

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}V_{d-1}(Z_0|u^\perp) &= \mathbb{E} \int_{SO_d} V_{d-1}(Z_0|\varrho u^\perp) \, \nu(d\varrho) \\
&= \frac{2}{d\kappa_d} \mathbb{E}\kappa_{d-1} V_{d-1}(Z_0).
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt mit Hilfe der integralgeometrischen Projektionsformel in Kapitel 4. □

Beispiel 3.4.6 Wie weit kann man in einem (Booleschen) Wald sehen?

Betrachte dazu $d = 2$ und $Z_0 = B(0, R)$. Aus dem isotropen Fall von Satz 3.4.5 folgt für $u \in S^{d-1}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([0, ru] \cap Z = \emptyset | 0 \notin Z)) &= 1 - H_{[0,u]}(r) \\
&= \exp\left(-\gamma r \frac{2\kappa_1}{2\kappa_2} \mathbb{E}[V_1(B(0, R))]\right) \\
&= \exp\left(-\gamma r \frac{2\kappa_1}{2\kappa_2} \mathbb{E}[\kappa_1 R]\right) = \exp(-2\gamma r \mathbb{E}[R]).
\end{aligned}$$

Sei zum Beispiel $\mathbb{E}[R] = 0,2m$ und $\gamma = 0,01m^{-2}$. Dann gilt $H_{[0,u]}(r) = 1 - \exp(-0,004r)$. So ist etwa die Wahrscheinlichkeit, höchstens 500 Meter weit sehen zu können

$$H_{[0,u]}(500) = 1 - e^{-2} \approx 0,865.$$

Beispiel 3.4.7 Es sei $u \in S^{d-1}$. Man zeigt leicht, dass $Z_u := Z \cap \mathrm{span}(u)$ wieder ein Boolesches Modell in $\mathrm{span}(u)$ ist (Man betrachte dazu etwa T_{Z_u}). Von Z_u werden Teile von $\mathrm{span}(u)$ überdeckt. Wir gehen davon aus, dass $0 \in \mathrm{span}(u)$ nicht von Z überdeckt wird, und bezeichnen mit X_0 die Länge der Zusammenhangskomponente von $\mathrm{span}(u) \setminus Z_u$, welche 0 enthält. Die Länge der (in positive u-Richtung gezählt) nächsten Zusammenhangskomponente von $\mathrm{span}(u) \setminus Z_u$ werde mit X_1 bezeichnet, die Länge der vorherigen mit X_{-1} usw.

Die Zufallsvariablen $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ sind unabhängig unter $\mathbb{P}(\cdot | 0 \notin Z_u)$ (ohne Beweis). Ferner sind sie exponentialverteilt (folgt aus Satz 3.4.5). Die X_n entsprechen den "idle periods" in einer $M/G/\infty$-Warteschlange. Für Details wird auf die Übungen verwiesen.

Satz 3.4.8 *Das typische Korn Z_0 sei isotrop. Dann gilt*

$$1 - H_B(r) = \exp\left(-\gamma \sum_{j=0}^{d-1} \frac{\kappa_j \kappa_{d-j}}{\binom{d}{j} \kappa_d} r^{d-j} V_{d-j}(B) \mathbb{E}[V_j(Z_0)]\right), \quad r \ge 0.$$

Beweisidee. Aufgrund der vorausgesetzten Isotropie gilt

$$\mathbb{E}[V_d(Z_0 + rB^*)] = \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{(Z_0 + x) \cap rB \neq \emptyset\}\, dx\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[\int_{SO_d}\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{(\rho Z_0 + x) \cap rB \neq \emptyset\}\, dx\, \nu(d\rho)\right].$$

Hierbei ist ν das eindeutig bestimmte rotationsinvariante (Haarsche) Wahrscheinlichkeitsmaß auf SO_d. Das bedeutet

$$\mathbb{E}[V_d(Z_0 + rB^*)] = \mathbb{E}\left[\int_{G_d} \mathbb{1}\{gZ_0 \cap rB \neq \emptyset\}\, \mu_d(dg)\right],$$

wobei G_d die Menge aller Bewegungen auf $\mathbb{R}^d$ und μ_d ein geeignet normiertes bewegungsinvariantes Maß auf G_d ist (für Details wird auf die Vorlesung verwiesen). Dies führt auf die kinematische Hauptformel, die später ausführlicher besprochen wird. Diese besagt

$$\int_{G_d} V_j(K \cap gM)\, \mu_d(dg) = \sum_{k=j}^{d} \alpha_{djk} V_k(K) V_{d+j-k}(M),$$

wobei

$$\alpha_{djk} = \frac{\binom{k}{j}\kappa_k \kappa_{d+j-k}}{\binom{d}{k-j}\kappa_j \kappa_d}.$$

Speziell für $j = 0$ erhält man

$$\alpha_{d0k} = \frac{\kappa_k \kappa_{d-k}}{\binom{d}{k}\kappa_d}.$$

Dies ergibt die Behauptung. □

3.5 Ebenenprozesse (ausgelassen)

Sei $G(d,k)$ der Graßmann-Raum der k-dimensionalen Untervektorräume des $\mathbb{R}^d$, $k \in \{0,\dots,d\}$, und $A(d,k)$ der affine Graßmann-Raum der k-dimensionalen affinen Unterräume des $\mathbb{R}^d$. Auf $G(d,k)$ betrachten wir die Finaltopologie zu der Abbildung

$$\beta_k : SO(d) \to G(d,k),\ \rho \mapsto \rho U_0, \tag{3.5.1}$$

wobei $U_0 \in G(d,k)$ beliebig aber fest ist. Die ist die feinste Topologie, so dass β_k stetig ist (d.h. Urbilder offener Mengen offen sind). Eine Abbildung $\beta : G(d,k) \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig, wenn $\beta \circ \beta_\gamma$ stetig ist. Analog wird auf $A(d,k)$ die Finaltopologie bezüglich der Abbildung

$$\gamma_k : G_d \to A(d,k),\ g \mapsto gE_0, \tag{3.5.2}$$

wobei $E_0 \in A(d,k)$ fest ist, betrachtet. Beide Topologien stimmen jeweils mit der Spurtopologie von $\mathcal{F}(\mathbb{R}^d)$ überein. Hierbei wird $G(d,k)$ zu einem kompakten topologischen Hausdorffraum mit abzählbarer Basis, $A(d,k)$ zu einem lokalkompakten topologischen Raum.

Bei der Untersuchung von Punktprozessen von k-Ebenen, die stationär sind, werden wir auf translationsinvariante Maße auf $A(d,k)$ geführt. Daher untersuchen wir zunächst deren Struktur genauer. Wie bislang sei ν_k das $SO(d)$-invariante Wahrscheinlichkeitsmaß auf $G(d,k)$ und

$$\pi_0 : \bigcup_{k=1}^{d-1} A(d,k) \to \bigcup_{k=1}^{d-1} G(d,k),\ E \mapsto U(E) \tag{3.5.3}$$

die Abbildung, die einem affinen Raum E den eindeutig bestimmten, parallelen linearen Unterraum $U(E)$ zuordnet.

3.5.1 Satz. *Sei Θ ein lokalendliches, translationsinvariantes Borelmaß auf $A(d,k)$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes endliches Maß Θ_0 auf $G(d,k)$ mit*

$$\Theta(A) = \int_{G(d,k)} \int_{L^\perp} \mathbb{1}\{L + x \in A\}\ \lambda_{L^\perp}(dx)\Theta_0(dL) \tag{3.5.4}$$

für alle Borelmengen $A \subset A(d,k)$.

Beweis. Sei zunächst $U \in G(d, d-k)$ beliebig und fest gewählt. Dazu sei

$$G_U := \{L \in G(d,k) \colon L \cap U = \{0\}\},$$
$$A_U := \{L + x \colon L \in G_U,\ x \in U\}.$$

Wegen $L \oplus U = \mathbb{R}^d$ ist $A_U + t = A_U$ für alle $t \in \mathbb{R}^d$.

Die Abbildung

$$\varphi_U : U \times G_U \to A_U,\ (x, L) \mapsto L + x, \tag{3.5.5}$$

ist bijektiv und ein Homöomorphismus.

Sei $C \subset G_U$ eine Borelmenge. Für eine messbare Menge $B \subset U$ wird durch

$$\eta(B) := \Theta(\varphi_U(C \times B)) \tag{3.5.6}$$

ein lokalendliches, translationsinvariantes Borelmaß auf U erklärt, also $\eta(B) = \rho(C)\lambda_U(B)$, d.h.

$$\Theta(\varphi_U(C \times B)) = \rho(C)\lambda_U(B). \tag{3.5.7}$$

Dann ist aber ρ ein endliches Borelmaß auf G_U, d.h. es folgt

$$\Theta(\varphi_U(C \times B)) = (\rho \otimes \lambda_U)(C \times B) \tag{3.5.8}$$

und daher

$$(\varphi_U)^{-1}\Theta = \rho \otimes \lambda_U, \quad \Theta|_{A_U} = \varphi(\rho \otimes \lambda_U). \tag{3.5.9}$$

Für eine beliebige messbare Funktion $f : A(d,k) \to (0,\infty)$ gilt daher

$$\int_{A_U} f\, d\Theta = \int_{G_U} \int_U f(L + x)\ \lambda_U(dx)\rho(dL). \tag{3.5.10}$$

Für komplementäre Unterräume $L \in G(d,k)$, $U \in G(d, d-k)$ mit $k \in \{1, \dots, d-1\}$ und $L \oplus U = \mathbb{R}^d$ seien

$$a_1, \dots, a_k \text{ ONB von } L,\ a_{k+1}, \dots, a_d \text{ ONB von } L^\perp$$

$$b_1, \dots, b_{d-k} \text{ ONB von } U, \ b_{d-k+1}, \dots, b_d \text{ ONB von } U^\perp.$$

Wir schreiben anstelle von $a_{k+1}, \dots, a_d$ auch $d_1, \dots, d_{d-k}$ und anstelle von $b_{d-k+1}, \dots, b_d$ schreiben wir auch $c_1, \dots, c_k$. Unabhängig von diesen konkreten Wahlen von ONBen wird dann erklärt

$$\begin{aligned}
[L, U] :=& |\det(a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_{d-k})| \\
=& |\det(\langle a_i, c_j\rangle_{i,j=1}^k)| \\
=& |\det(a_{k+1}, \dots, a_d, c_1, \dots, c_k)| \\
=& [L^\perp, U^\perp].
\end{aligned}$$

Die Abbildung $\pi_{L^\perp} : U \to L^\perp$ sei die Orthogonalprojektion von U auf $L^\perp$ in obiger Situation, d.h. $L \oplus U = \mathbb{R}^d$. Dann ist $\pi_{L^\perp}$ ein Homomorphismus (und ein Homöomorphismus) und

$$(\pi_{L^\perp})\lambda_U = [L, U]^{-1}\lambda_{L^\perp}, \quad (\pi_{L^\perp})^{-1}\lambda_{L^\perp} = [L, U]\lambda_U. \tag{3.5.11}$$

Nachweis: Es ist leicht zu sehen, dass $\ker(\pi_{L^\perp}) = \{0\}$. Wegen $\dim L^\perp = \dim U$ folgt die Bijektivität.

Setze $\nu(\cdot) := \lambda_{L^\perp}(\pi_{L^\perp}(\cot))$ auf $\mathcal{B}(U)$. Da ν invariant unter Translationen in U ist, gilt $\nu = c_{L,U}\lambda_U$. Wähle $W := [0, b_1] + \dots + [0, b_{d-k}]$, der Standardwürfel in U mit $\lambda_U(W) = 1$. Nun gilt

$$\pi_{L^\perp}(W) = [0, b_1|_{L^\perp}] + \dots + [0, b_{d-k}|_{L^\perp}] \tag{3.5.12}$$

und daher

$$\begin{aligned}
\lambda_{L^\perp}(\pi_{L^\perp}(W)) &= |\det(b_i|_{L^\perp}, \dots, b_{d-k}|_{L^\perp})| \\
&= |\det(\langle b_i, d_j\rangle_{i,j=1}^{d-k})| \\
&= |\det(b_1, \dots, b_{d-k}, a_1, \dots, a_k)| \\
&= [L, U].
\end{aligned}$$

Die restlichen Aussagen sind elementare lineare Algebra.

Nun folgt aus (3.5.10), dass

$$\begin{aligned}
\int_{A_U} f \, d\Theta &= \int_{G_U} \int_U f(L + x) \, \lambda_U(dx)\nu_U(dL) \\
&= \int_{G_U} \int_U f(L + \pi_{L^\perp}(x)) \, \lambda_U(dx)\nu_U(dL) \\
&= \int_{G_U} \int_{L^\perp} f(L + z) \, \lambda_{L^\perp}(dz)[L, U]^{-1} \, \nu_U(dL) \\
&= \int_{G(d,k)} \int_{L^\perp} f(L + z) \, \lambda_{L^\perp}(dz)\Theta_U(dL),
\end{aligned}$$

wobei $\Theta_U := [L, U]^{-1}\nu_U|_{G_U}$.

Da G_U offen ist, für jedes $U \in G(d, d-k)$, und $G(d, d-k)$ kompakt, gibt es $U_1, \ldots, U_r \in G(d, d-k)$, so dass

$$G(d,k) = \bigcup_{i=1}^{r} G_{U_i} \text{ und daher } A(d,k) = \bigcup_{i=1}^{r} A_{U_i}.$$

Ferner ist jede der Mengen A_{U_i} invariant unter Translationen. Somit sind auch die Mengen

$$A_k := A_{U_k} \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{k-1}), \quad A_0 := \emptyset, \tag{3.5.13}$$

translationsinvariant und $A(d,k) = A_1 \dot\cup \ldots \dot\cup A_r$. Das Maß $\Theta \llcorner A_i$ ist translationsinvariant. Wie oben erhalten wir dann ein Maß $\Theta_i := (\Theta \llcorner A_i)_{U_i}$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\int_{A(d,k) f \; d\Theta} &= \sum_{i=1}^{r} \int_{A_i} f \; d\Theta \\
&= \sum_{i=1}^{r} \int_{A_{U_i}} f \; d(\Theta \llcorner A_i) \\
&= \sum_{i=1}^{r} \int_{G(d,k)} \int_{L^\perp} f(L+z) \; \lambda_{L^\perp}(dz) \Theta_i(dL) \\
&= \int_{G(d,k)} \int_{L^\perp} f(L,z) \; \lambda_{L^\perp}(dz) \Theta_0(dL)
\end{aligned}$$

mit $\Theta_0 = \Theta_1 + \cdots + \Theta_r$.

Zum Nachweis der Eindeutigkeit von Θ_0 sei $A \subset G(d,k)$ messbar. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\Theta(\mathcal{F}_{B^d} \cap \pi_0^{-1}(A)) &= \int_{G(d,k)} \int_{L^\perp} \mathbb{1}\{(L+x) \cap B^d \neq \emptyset\} \mathbb{1}\{L \in A\} \; \lambda_{L^\perp}(dx) \Theta_0(dL) \\
&= \kappa_{d-k} \Theta_0(A).
\end{aligned}$$

$\square$

Sei nun Φ ein Punktprozess in $\mathcal{F}'(\mathbb{R}^d)$ mit

$$\mathbb{E}[\Phi(\mathcal{F}'(\mathbb{R}^d) \setminus A(d,k))] = 0. \tag{3.5.14}$$

Mann nennt Φ dann einen k-Ebenen-Prozess. Wir setzen voraus, dass $\mathbb{E}[\Phi]$ lokalendlich ist, d.h.

$$\mathbb{E}[\Phi(\mathcal{H}_K)] < \infty, \quad K \in \mathcal{C}^d, \tag{3.5.15}$$

wobei $\mathcal{H}_K = \{A \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^d) \colon A \cap K \neq \emptyset\}$. Ist Φ stationär, so ist $\mathbb{E}[\Phi]$ ein translationsinvariantes Maß, das auf $A(d,k)$ konzentriert ist. Wir betrachten daher $\Theta := \mathbb{E}[\Phi]$ also Borelmaß auf $A(d,k)$. Aus Satz 3.5.1 folgt, dass es ein endliches Maß Θ_0 auf $G(d,k)$ gibt mit

$$\mathbb{E}[\Phi(\cdot)] = \int_{G(d,k)} \int_{L^\perp} \mathbb{1}\{L + x \in \cdot\} \; \lambda_{d-k}(dx) \Theta_0(dL). \tag{3.5.16}$$

Hierbei ist

$$\Theta_0(C) = \frac{1}{\kappa_{d-k}} \Theta(\mathcal{F}_{B^d} \cap \pi_0^{-1}(C)) \tag{3.5.17}$$

für $C \in \mathcal{B}(G(d,k))$. Wir fassen dies geeignet im folgenden Satz zusammen.

3.5.2 Satz. *Ist Φ ein stationärer k-Ebenen-Prozess im $\mathbb{R}^d$ mit lokalendlichem Intensitätsmaß $\Theta \neq 0$. Dann existiert eine Zahl $\gamma \in (0, \infty)$ und ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ auf $G(d,k)$, so dass*

$$\Theta(\cdot) = \mathbb{E}[\Phi(\cdot)] = \gamma \int_{G(d,k)} \int_{L^\perp} \mathbb{1}\{L + x \in \cdot\}\, \lambda_{L^\perp}(dx)\mathbb{Q}(dL), \tag{3.5.18}$$

wobei γ und $\mathbb{Q}$ eindeutig bestimmt sind. Wir nennen γ die Intensität und $\mathbb{Q}$ die Richtungsverteilung von Φ.

3.5.3 Bemerkung. Sei Φ ein stationärer k-Ebenen-Prozess mit Intensität γ und Richtungsverteilung $\mathbb{Q}$. Sei $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \sum_{E \in \Phi} \lambda_E(A) &= \int_{A(d,k)} \lambda_E(A)\, \Theta(dE) \\
&= \gamma \int_{G(d,k)} \int_{L^\perp} \lambda_{L+x}(A)\, \lambda_{L^\perp}(dx)\mathbb{Q}(dL) \\
&= \gamma \int_{G(d,k)} \lambda_d(A)\, \mathbb{Q}(dL) \\
&= \gamma \lambda_d(A).
\end{aligned}$$

Die Messbarkeit der Abbildung $E \mapsto \lambda_E(A)$ wird in den Übungen gezeigt. Speziell für $A \subset \mathbb{R}^d$ mit $\lambda_d(A) = 1$ erhalten wir so eine Interpretation der Intensität als mittleres k-dimensionales Schnittvolumen von Ebenen in Φ innerhalb von A.

3.5.4 Korollar. *Sei $\gamma \in (0, \infty)$ und $\mathbb{Q}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $G(d,k)$. Dann gibt es bis auf stochastische Äquivalenz genau einen stationären Poissonschen k-Ebenenprozess Φ in $\mathbb{R}^d$ mit Intensität γ und Richtungsverteilung $\mathbb{Q}$. Dieser ist genau dann isotrop, wenn $\mathbb{Q} = \nu_k$.*

Beweis. Die Verteilung eines Poissonprozess ist durch sein Intensitätsmaß eindeutig festgelegt. Ferner existiert zu vorgegebenem Intensitätsmaß stets ein Poissonprozess. □

Bei der Betrachtung von Schnittprozessen spielt die folgende Begriffsbildung eine wichtige Rolle.

3.5.5 Definition. Unterräume L, L' sind in allgemeiner Lage, falls

$$\dim(L \cap L') = \max\{0, \dim L + \dim L' - d\} \tag{3.5.19}$$

gilt. Zwei affine Unterräume E, E' sind in allgemeiner Lage, wenn die dazu parallelen Unterräumen $L(E)$, $L(E')$ in allgemeiner Lage sind.

3.5.6 Bemerkung. (a) Genau dann sind L, L' in allgemeiner Lage, wenn

$$\dim(L \cap L') = 0 \text{ oder } \operatorname{lin}(L \cup L') = \mathbb{R}^d. \tag{3.5.20}$$

(b) Sind L, L' feste lineare Unterräume, dann sind $L, \rho L'$ in allgemeiner Lage für ν-fast alle $\rho \in SO(d)$.

Für einen Poissonschen k-Ebenenprozess kann man Aussagen über die Lage je zweier Ebenen des Prozesses treffen.

3.5.7 Proposition. *Sei Φ ein stationärer k-Ebenen-Poissonprozess im $\mathbb{R}^d$.*

(a) Ist $k < \frac{d}{2}$, so sind $\mathbb{P}$-f.s. je zwei k-Ebenen in Φ disjunkt.

(b) Ist die Richtungsverteilung $\mathbb{Q}$ von Φ atomfrei, dann sind $\mathbb{P}$-f.s. je zwei k-Ebenen von Φ nicht Translate voneinander.

(c) Ist $\mathbb{Q}$ absolut stetig bezüglich des Haar'schen Maßes ν_k auf $A(d,k)$, dann sind $\mathbb{P}$-f.s. je zwei k-Ebenen von Φ in allgemeiner Lage.

Beweis. Sei $A \subset A(d,k)$ eine Borelmenge. Dann gilt mit der multivariaten Meckeformel für Poissonprozesse

$$\mathbb{E} \sum_{(E_1,E_2)\in\Phi^2_{\neq}} \mathbb{1}\{(E_1,E_2) \in A\}$$

$$= \int_{A(d,k)^2} \mathbb{1}_A \, d\Theta^2$$

$$= \gamma^2 \int_{G(d,k)} \int_{G(d,k)} \int_{L_2^\perp} \int_{L_1^\perp} \mathbb{1}\{(L_1+x_1, L_2+x_2) \in A\} \, \lambda_{L_1^\perp}(dx_1)\lambda_{L_2^\perp}(dx_2)\mathbb{Q}(dL_1)\mathbb{Q}(dL_2),$$

wobei der Satz von Fubini und die Zerlegung des Intensitätsmaßes Θ von Φ wie in Satz 3.5.2 verwendet wurde.

Sei nun $k < \frac{d}{2}$ und

$$A^* := \{(E_1,E_2) \in A(d,k)^2 \colon E_1 \cap E_2 \neq \emptyset\}. \tag{3.5.21}$$

Sind $E_2 = L_2 + x_2$ und L_1 fest, so ist für $x_1 \in L_1^\perp$ gerade

$$(L_1 + x_1) \cap E_2 \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad x_1 \in (E_2 + L_1) \cap L_1^\perp. \tag{3.5.22}$$

Insbesondere ist $x_1 \in E_2|L_1^\perp$ (Orthogonalprojektion von E_2 auf $L_1^\perp$). Wegen

$$\dim(E_2|L_1^\perp) \leq \dim(E_2) = k < d-k \tag{3.5.23}$$

folgt

$$\int_{L_1^\perp} \mathbb{1}\{(L_1+x_1, L_2+x_2) \in A^*\} \, \lambda_{L_1^\perp}(dx_1) = 0, \tag{3.5.24}$$

also auch

$$\mathbb{E} \sum_{(E_1,E_2)\in\Phi^2_{\neq}} \mathbb{1}\{(E_1,E_2) \in A^*\} = 0, \tag{3.5.25}$$

woraus unmittelbar (a) folgt. Die Aussagen (b) und (c) folgen in ähnlicher Weise (Übung). □

Sei nun Φ ein stationärer k-Ebeneprozess in $\mathbb{R}^d$ mit $1 \leq k \leq d-1$. Sei $S \in G(d, d-k+j)$ fest mit $0 \leq j \leq k-1$. Wir erklären einen Schnittprozess $\Phi \cap S$ von Φ in S durch

$$\Phi \cap S := \sum_{\substack{E\in\Phi \\ E\cap S\neq\emptyset}} \delta_{E\cap S}. \tag{3.5.26}$$

Hierzu einige Erläuterungen: Wenn $E \cap S \neq \emptyset$, so ist zunächst nur $\dim(E \cap S) \geq j$ klar sowie $\dim(E \cap S) \leq \min\{k, d+j-k\}$, d.h. $\dim(E \cap S) \in \{j, \ldots, \min\{k, d+j-k\}\}$. Es ist jedoch nicht schwierig zu sehen, dass $\mathbb{P}$-f.s. $E \cap S = \emptyset$ oder $\dim(E \cap S) = j$ gilt. Ferner ist $\Phi \cap S$ fast sicher einfach. Somit ist $\Phi \cap S$ ein stationärer j-Ebenenprozess in S.

Im Folgenden benötigen wir den „Winkel" zwischen zwei Unterräumen. Für $L \in G(d,k)$ und $S \in G(d, d-k)$ ist dieser erklärt durch

$$[L, S] := |\det(a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_{d-k})|, \tag{3.5.27}$$

wobei $a_1, \ldots, a_k$ eine beliebige Orthonormalbasis von L und $b_1, \ldots, b_{d-k}$ eine beliebige Orthonormalbasis von S ist (siehte oben).

3.5.8 Satz. *Sei $1 \leq k \leq d-1$ und Φ ein stationärer k-Ebenenprozess in $\mathbb{R}^d$ mit Intensität γ und Richtungsverteilung $\mathbb{Q}$. Sei $S \in G(d, d-k)$ und γ_S die Intensität des Punktprozesses $\Phi \cap S$. Dann ist*

$$\gamma_S = \gamma \int_{G(d,k)} [L, S] \, \mathbb{Q}(dL). \tag{3.5.28}$$

Beweis. Ist $B^{d-k} := S \cap B^d$, so gilt für den stationären Punktprozess $\Phi \cap S$ in S mit den früheren Bezeichnungen

$$\begin{aligned}
\kappa_{d-k}\gamma_S &= \mathbb{E}[(\Phi \cap S)(\mathcal{F}_{B^{d-k}})] \\
&= \mathbb{E}[\Phi(\mathcal{F}_{B^{d-k}})] \\
&= \Theta(\mathcal{F}_{B^{d-k}}) \\
&= \gamma \int_{G(d,k)} \int_{L^\perp} \mathbb{1}\{L + x \in \mathcal{F}_{B^{d-k}}\} \, \lambda_{L^\perp}(dx) \mathbb{Q}(dL) \\
&= \gamma \int_{G(d,k)} \lambda_{L^\perp}(\{x \in L^\perp \colon (L+x) \cap B^{d-k} \neq \emptyset\}) \, \mathbb{Q}(dL) \\
&= \gamma \int_{G(d,k)} \lambda_{L^\perp}(B^{d-k} | L^\perp) \, \mathbb{Q}(dL),
\end{aligned}$$

wobei $B^{d-k} \subset S$ ist. Sind nun L und S komplementäre Unterräume, so gilt

$$\lambda_{L^\perp}(B^{d-k} | L^\perp) = [L, S] \lambda_S(B^{d-k}) = \kappa_{d-k}[L, S]. \tag{3.5.29}$$

Dies gilt auch, wenn L und S nicht komplementär sind, da dann beide Seiten Null sind. Es folgt daher

$$\kappa_{d-k}\gamma_S = \gamma \int_{G(d,k)} [L, S] \kappa_{d-k} \, \mathbb{Q}(dL), \tag{3.5.30}$$

also die Behauptung. $\square$

Wir betrachten die Spezialfälle $k \in \{1, d-1\}$ gesondert. Um ein Integral über $G(d, 1)$ bzw. $G(d, d-1)$ in ein Integral über $\mathcal{S}^{d-1}$ umschreiben zu können, stellen wir eine zusätzliche Überlegung voran.

Sei $\mathbb{Q}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $G(d, 1)$. Sei $\mathcal{S} = \mathcal{S}_+ \cup \mathcal{S}_-$ mit $\mathcal{S}_+ = -\mathcal{S}_-$ eine Zerlegung der Sphäre in messbare Mengen $\mathcal{S}_+$ und $\mathcal{S}_-$, so dass für jedes $L \in G(d, 1)$

gilt $L \cap \mathcal{S}^{d-1} = \{p_+, p_-\}$ und $p_+ \in \mathcal{S}_+$, $p_- \in \mathcal{S}_-$. Wir definieren dann zwei messbare Abbildungen T_+, T_- mit

$$T_\pm : G(d,1) \to \mathcal{S}^{d-1},\ T_\pm(L) \in L \cap \mathcal{S}_\pm, \tag{3.5.31}$$

d.h. $T_+(L) = p_+$, $T_-(L) = p_-$. Dann wird durch

$$\varphi := \frac{1}{2}(T_+(\mathbb{Q}) + T_-(\mathbb{Q})) \tag{3.5.32}$$

ein gerades Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{S}^{d-1}$ erklärt, da

$$\begin{aligned}
&(T_+(\mathbb{Q}) + T_-(\mathbb{Q}))(u)\\
&= \mathbb{Q}(\{L \in G(d,1)\colon T_+(L) \in u\}) + \mathbb{Q}(\{L \in G(d,1)\colon T_-(L) \in u\})\\
&= \mathbb{Q}(\{L \in G(d,1)\colon T_+(L) \in u \cap \mathcal{S}_+\}) + \mathbb{Q}(\{L \in G(d,1)\colon T_-(L) \in u \cap \mathcal{S}_-\})\\
&= \mathbb{Q}(\{L \in G(d,1)\colon L \cap u \cap \mathcal{S}_+ \neq \emptyset\}) + \mathbb{Q}(\{L \in G(d,1)\colon L \cap u \cap \mathcal{S}_- \neq \emptyset\})\\
&= \mathbb{Q}(\{L \in G(d,1)\colon -L \cap u \cap \mathcal{S}_+ \neq \emptyset\}) + \mathbb{Q}(\{L \in G(d,1)\colon -L \cap u \cap \mathcal{S}_- \neq \emptyset\})\\
&= \mathbb{Q}(\{L \in G(d,1)\colon L \cap -u \cap \mathcal{S}_- \neq \emptyset\}) + \mathbb{Q}(\{L \in G(d,1)\colon L \cap -u \cap \mathcal{S}_+ \neq \emptyset\})\\
&= (T_+(\mathbb{Q}) + T_-(\mathbb{Q}))(-u).
\end{aligned}$$

Dann gilt weiterhin für eine gerade messbare Funktion $f : \mathcal{S}^{d-1} \to (0,\infty)$, d.h. mit $f(u) = f(-u)$ für $u \in \mathcal{S}^{d-1}$, dass

$$\int_{\mathcal{S}^{d-1} f\ d\varphi} = \frac{1}{2}\left(\int_{G(d,1)} f \circ T_+\, d\mathbb{Q} + \int_{G(d,1)} f \circ T_-\, d\mathbb{Q}\right) = \int_{G(d,1)} f \circ T_\pm\, d\mathbb{Q}.$$

Speziell für $f(v) = |\langle v, u\rangle|$, $v \in \mathcal{S}^{d-1}$ und $u \in \mathcal{S}^{d-1}$ gilt mit $L = L(v) = \operatorname{lin}(v)$ die Relation

$$(f \circ T_\pm)(L) = |\langle L, u\rangle| = |\langle v, u\rangle| = [L, u^\perp] \tag{3.5.33}$$

und somit

$$\int_{\mathcal{S}^{d-1}} |\langle v, u\rangle|\, \varphi(du) = \int_{G(d,1)} [L, u^\perp]\, \mathbb{Q}(dL). \tag{3.5.34}$$

Im Spezialfall $k = 1$ ist Φ ein Geradenprozess und $\dim(S) = d - 1$ sowie

$$\gamma_S = \gamma \int_{G(d,1)} [L, S]\, \mathbb{Q}(dL) = \gamma \int_{\mathcal{S}^{d-1}} |\langle v, u\rangle|\, \varphi(dv), \tag{3.5.35}$$

wenn $S = u^\perp$. Ist nun $\gamma_{u^\perp}$ für alle $u \in \mathcal{S}^{d-1}$ bekannt, so folgt aus

$$\gamma_{u^\perp} = \int_{\mathcal{S}^{d-1}} |\langle v, u\rangle|\, (\gamma\varphi)(dv), \tag{3.5.36}$$

dass $\gamma\varphi$ ebenfalls bekannt ist bzw. festgelegt ist. Dies ist gerade die Injektivität der Kosinustransformation

$$\mu \mapsto \left\{ \int_{\mathcal{S}^{d-1}} |\langle v, u\rangle|\, \mu(dv)\colon u \in \mathcal{S}^{d-1} \right\}, \tag{3.5.37}$$

die einem geraden Maß μ auf der Sphäre die Funktion

$$\mathcal{C}(\mu): \mathcal{S}^{d-1} \to [0, \infty),\ u \mapsto \int_{\mathcal{S}^{d-s}} |\langle v, u\rangle|\ \mu(dv) \tag{3.5.38}$$

zuordnet. Weitere Fragen, die sich in diesem Kontext stellen sind die nach der tatsächlichen Rekonstruktion von μ aus $\mathcal{C}(\mu)$. Schärfer bei unvollständiger, verrauschter Information.

Im Spezialfall $k = d-1$, $\dim(S) = 1$, $S = L(u)$ wollen wir

$$\gamma_S = \gamma \int_{G(d,d-1)} [L, S]\ \mathbb{Q}(dL) \tag{3.5.39}$$

wieder in ein Integral über $\mathcal{S}^{d-1}$ mit einem geraden Maß umschreiben. Mit

$$\mathbb{Q}^{\perp}(\cdot) := \mathbb{Q}(\{L \in G(d,1) \colon L^{\perp} \in \cdot\}) \tag{3.5.40}$$

gilt

$$\begin{aligned}\int_{G(d,d-1)} [L, S]\ \mathbb{Q}(dL) &= \int_{G(d,1)} [U^{\perp}, S]\ \mathbb{Q}^{\perp}(dU)\\ &= \int_{G(d,1)} [U, S^{\perp}]\ \mathbb{Q}^{\perp}(dU)\\ &= \int_{\mathcal{S}^{d-1}} |\langle v, u\rangle|\ \varphi_{\mathbb{Q}^{\perp}}(dv),\end{aligned}$$

so dass

$$\gamma_S = \gamma \int_{\mathcal{S}^{d-1}} |\langle v, u\rangle|\ \varphi_{\mathbb{Q}^{\perp}}(dv), \quad S = L(u), \tag{3.5.41}$$

auf dasselbe Inversionsproblem wie oben führt.

An dieser Stelle sei aber angemerkt, dass für $k \in \{2, \ldots, d-2\}$ keine Eindeutigkeitsaussagen möglich sind, d.h. für zwei ganz unterschiedliche stationäre k-Ebenenprozesse (auch Poissonsch) kann die Intensität γ_S des Schnittprozesses für jedes $S \in G(d, d-k)$ gleich sein, so dass auch bei vollständiger Information $(\gamma_S)_{S \in G(d,d-k)}$ nicht auf den Ausgangsprozess geschlossen werden kann.

Wir werden in der Folge die bisherige Argumentation erweitern und den allgemeinen Fall betrachten, in dem $\dim(S) = d-k+j$, $j \geq 0$. Zunächst verallgemeinern wir hierfür den Begriff des „Winkels“ zwischen Unterräumen, indem wir für $L \in G(d,k)$ und $S \in G(d, d-k+j)$ erklären

$$[L, S] := |\det(a_1, \ldots, a_k, b_{j+1}, \ldots, b_{d-k+j})|, \tag{3.5.42}$$

falls $\operatorname{lin}(L \cup S) = \mathbb{R}^d$, wobei $j \in \{1, \ldots, k-1\}$, $k \in \{2, \ldots, d-1\}$ und $a_1, \ldots, a_j$ eine ONB von $L \cap S$ ist, die durch $a_{j+1}, \ldots, a_k$ zu einer ONB von L ergänzt wird und die durch $b_{j+1}, \ldots, b_{d-k+j}$ zu einer ONB von S ergänzt wird. Ist dagegen $\operatorname{lin}(L \cup S) \neq \mathbb{R}^d$, so wird $[L, S] := 0$ erklärt.

3.5.9 Satz. *Sei $2 \leq k \leq d-1$, Φ ein stationärer k-Ebenenprozess mit Intensität γ und Richtungsverteilung $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}^d$. Sei $j \in \{1, \ldots, k-1\}$ und $S \in G(d, d-k+j)$. Seien γ_S die Intensität und $\mathbb{Q}_S$ die Richtungsverteilung des Schnittprozesses in S. Dann gilt*

$$\gamma_S \mathbb{Q}_S(\cdot) = \gamma \int_{G(d,k)} \mathbb{1}\{L \cap S \in \cdot\}[L, S]\ \mathbb{Q}(dL). \tag{3.5.43}$$

3.5.10 Bemerkung. (1) Ist $\gamma_S = 0$, so ist $\mathbb{Q}_S$ nicht definiert.

(2) Auch hier hat man für $2 \leq k \leq d-2$ keine Eindeutigkeitsaussagen.

(3) Für $k = d-1$ wurden Eindeutigkeits- und Inversionsfragen von Spodarev und Rubin behandelt.

(4) Duale Konzepte wie Proximität und deren Verallgemeinerungen wurden von Schneiden, Spodarev, Hug-Last-Weil bzw. Hug-Thäle-Weil studiert.

Beweis. Sei $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(A(d,j))$. Für den stationären j-Ebenenprozess $\Phi \cap S$ in S gilt dann

$$\begin{aligned}
\Theta_{\Phi\cap S}(\mathcal{A}) &= \mathbb{E}[(\Phi \cap S)(\mathcal{A})] \\
&= \mathbb{E}\sum_{E\in\Phi} \mathbb{1}\{E \cap S \in \mathcal{A}\} \\
&= \int_{A(d,k)} \mathbb{1}\{E \cap S \in \mathcal{A}\}\, \theta(dE) \\
&= \gamma \int_{G(d,k)} \int_{L^\perp} \mathbb{1}\{(L+x) \cap S \in \mathcal{A}\}\, \lambda_{L^\perp}(dx)\mathbb{Q}(dL).
\end{aligned}$$

Wir setzen nun $B_S := B^d \cap S$. Dann folgt für $A \in \mathcal{B}(G(d,j))$ durch die Anwendung von (3.5.17) auf $\Phi \cap S$ in S:

$$\begin{aligned}
\gamma_S\mathbb{Q}_S(A) &= \frac{1}{\kappa_{(d-k+j)-j}} \Theta_{\Phi\cap S}(\mathcal{F}_{B_S} \cap \pi_0^{-1}(A)) \\
&= \frac{\gamma}{\kappa_{d-k}} \int_{G(d,k)} \int_{L^\perp} \mathbb{1}\{(L+x) \cap S \in \mathcal{F}_{B_S} \cap \pi_0^{-1}(A)\}\, \lambda_{L^\perp(dx)}\mathbb{Q}(dL) \\
&= \frac{\gamma}{\kappa_{d-k}} \int_{G(d,k)} \int_{L^\perp} \mathbb{1}\{L \cap S \in A, (L+x) \cap B_S \neq \emptyset\}\, \lambda_{L^\perp(dx)}\mathbb{Q}(dL) \\
&= \frac{\gamma}{\kappa_{d-k}} \int_{G(d,k)} \mathbb{1}\{L \cap S \in A\}\lambda_{L^\perp}(B_S|L^\perp)\, \mathbb{Q}(dL).
\end{aligned}$$

Wenn $\dim(L \cap S) \neq j$, dann ist $L \cap S \notin A \subset G(d,j)$, so dass der Integrand Null ist (und bleibt). Sei also $\dim(L \cap S) = j$. Dann gilt für $T = S \cap (L \cap S)^\perp$ gerade $\dim(T) = d-k$ sowie

$$B_S|L^\perp = (B_S|T)|L^\perp = B_T|L^\perp \tag{3.5.44}$$

und daher

$$\lambda_{L^\perp}(B_S|L^\perp) = \lambda_{L^\perp}(B_T|L^\perp) = \kappa_{d-k}|\det(\underbrace{b_{j+1},\dots,b_{d-k+j}}_{\text{ONB von } T}, \underbrace{a_1,\dots,a_k}_{\text{ONB von } L})| = \kappa_{d-k}[L,S]. \tag{3.5.45}$$

Einsetzen und Kürzen ergibt nun die Behauptung. □

Anstelle von Schnitten eines Prozesses mit einer festen Ebene untersuchen wir nun Selbstschnitte/Schnitte der Ebenen eines Prozesses untereinander. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf Hyperebenenprozesse. Allgemeiner Situationen und neuere Entwicklungen wurden in Hug-Thäle-Weil beschrieben.

Sei also Φ ein stationärer Hyperebenenprozess. Für $u \in \mathcal{S}^{d-1}$ und $t \in \mathbb{R}$ sei

$$H(u,t) := \{x \in \mathbb{R}^d \colon \langle x, u\rangle = t\} \text{ und } H(u,0) = u^\perp. \tag{3.5.46}$$

Wie früher erläutert, erhalten wir für das Intensitätsmaß Θ von Φ eine Integraldarstellung der Art

$$\Theta(\cdot) = \mathbb{E}\Phi(\cdot) = \gamma \int_{\mathcal{S}^{d-1}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}\{H(u,t) \in \cdot\}\, dt\varphi(du), \tag{3.5.47}$$

wobei $\gamma \geq 0$ und φ ein gerades Wahrscheinlichkeitsmaß auf der Sphäre $\mathcal{S}^{d-1}$ ist. Wir nennen φ die Richtungsverteilung von Φ. Wir erklären nun einen stationären Prozess von $(d-k)$-dimensionalen Ebenen in $\mathbb{R}^d$ durch

$$\Phi_k(\mathcal{A}) := \frac{1}{k!} \sum_{(H_1,\dots,H_k)\in\Phi^k_{\neq}} \delta_{H_1\cap\cdots H_k}(\mathcal{A}) \tag{3.5.48}$$

mit $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(A(d,d-k))$. Eventuell hat Φ_k Intensität $\gamma_k = 0$, effektiv werden nur k-Tupel $(H_1,\dots,H_k) \in \Phi^k$ berücksichtigt, die paarweise verschieden sind und für die $\dim(H_1 \cap \cdots \cap H_k) = d-k$ gilt. Wir nennen Φ_k den Schnittprozess k-ter Ordnung von Φ.

Ist Φ ein Poissonprozess, so gilt $\mathbb{P}$-f.s. $H_1\cap\cdots\cap H_k = \emptyset$ oder $\dim(H_1\cap\cdots\cap H_k) = d-k$, wie analog zum Vorgehen im Beweis von Proposition 3.5.7 gezeigt werden kann.

Für $u_1,\dots,u_k \in \mathcal{S}^{d-1}$ erklären wir

$$\nabla_k(u_1,\dots,u_k) := |\det(u_1,\dots,u_k)|. \tag{3.5.49}$$

3.5.11 Satz. *Sei Φ ein stationärer Poissonscher Hyperebenenprozess in $\mathbb{R}^d$ mit Intensität γ und Richtungsverteilung φ. Sei $k \in \{2,\dots,d\}$ und Φ_k wie oben erklärt. Dann erfüllen die Intensität γ_k und die Richtungsverteilung $\mathbb{Q}_k$ von Φ_k die Relation*

$$\gamma_k\mathbb{Q}_k(A) = \frac{\gamma^k}{k!} \int_{(\mathcal{S}^{d-1})^k} \mathbb{1}\{u_1^\perp \cap \cdots \cap u_k^\perp \in A\}\nabla_k(u_1,\dots,u_k)\, \varphi^k(d(u_1,\dots,u_k)) \tag{3.5.50}$$

wobei $A \in \mathcal{B}(G(d,d-k))$.

Beweis. Sei $\Theta_k := \mathbb{E}\Phi_k$ und $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(A(d,d-k))$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\Theta_k(\mathcal{A}) &= \frac{1}{k!}\mathbb{E} \sum_{(H_1,\dots,H_k)\in\Phi^k_{\neq}} \mathbb{1}\{H_1\cap\cdots\cap H_k \in \mathcal{A}\}\\ &= \frac{1}{k!}\int_{A(d,d-1)^k} \mathbb{1}\{H_1\cap\cdots\cap \in \mathcal{A}\}\, \Lambda^{(k)}(d(H_1,\dots,H_k)),\end{aligned}$$

wobei $\Lambda^{(k)}$ das k-te faktorielle Momentenmaß von Φ ist. Da Φ ein Poissonprozess ist, ergibt ein Spezialfall der multivariaten Mecke-Formel $\Lambda^{(k)} = \Theta^k$ und somit

$$k!\Theta_k(\mathcal{A}) = \gamma^k \int_{(\mathcal{S}^{d-1})^k} \int_{(\mathbb{R})^k} \mathbb{1}\{H(u_1,t_1)\cap\cdots\cap H(u_k,t_k) \in \mathcal{A}\}\, d(t_1,\dots,t_k)\varphi^k(d(u_1,\dots,u_k)), \tag{3.5.51}$$

wobei auch der Satz von Fubini sowie (3.5.47) angewendet wurde. Speziell mit $\mathcal{A} = \pi_0^{-1}(A) \cap \mathcal{F}_{B^d}$ für $A \in \mathcal{B}(G(d, d-k))$ erhalten wir

$$\begin{aligned} k!\gamma_k \mathbb{Q}_k(A) &= \frac{k!}{\kappa_k} \Theta_k(\pi_0^{-1}(A) \cap \mathcal{F}_{B^d}) \\ &= \frac{\gamma^k}{\kappa_k} \int_{(\mathcal{S}^{d-1})^k} \int_{(\mathbb{R})^k} \mathbb{1}\{H(u_1, t_1) \cap \cdots \cap H(u_k, t_k) \in \mathcal{A}\} \\ &\qquad\qquad \times\ d(t_1, \ldots, t_k) \varphi^k(d(u_1, \ldots, u_k)) \\ &= \frac{\gamma^k}{\kappa_k} \int_{(\mathcal{S}^{d-1})^k} \mathbb{1}\{u_1^\perp \cap \cdots \cap u_k^\perp \in A\} I_k(u_1, \ldots, u_k)\ \varphi^k(d(u_1, \ldots, u_k)) \end{aligned}$$

mit

$$I_k(u_1, \ldots, u_k) = \int_{(\mathbb{R})^k} \mathbb{1}\{H(u_1, t_1) \cap \cdots \cap H(u_k, t_k) \in \mathcal{F}_{B^d}\}\ d(t_1, \ldots, t_k). \tag{3.5.52}$$

Wir können uns auf den Fall beschränken, dass $u_1, \ldots, u_k$ linear unabhängig sind. In diesem Fall gilt

$$\bigcap_{i=1}^k H(u_i, t_i) \in \mathcal{F}_{B^d} \quad \Leftrightarrow \quad \bigcap_{i=1}^k H(u_i, t_i) \cap \operatorname{lin}\{u_1, \ldots, u_k\} \in B^d \cap \operatorname{lin}\{u_1, \ldots, u_k\}. \tag{3.5.53}$$

Sei $T : \mathbb{R}^k \to \operatorname{lin}\{u_1, \ldots, u_k\}$ so erklärt, dass $T(t_1, \ldots, t_k)$ der eindeutig bestimmte Schnittpunkt z in

$$\bigcap_{i=1}^k H(u_i, t_i) \cap \operatorname{lin}\{u_1, \ldots, u_k\} =: \{z\} \tag{3.5.54}$$

ist. Dann ist T bijektiv und

$$T^{-1}(z) = (\langle z, u_1 \rangle, \ldots, \langle z, u_k \rangle) \tag{3.5.55}$$

mit Jakobischer $JT^{-1}(z) = \nabla_k(u_1, \ldots, u_k)$. Somit folgt

$$\begin{aligned} I_k(u_1, \ldots, u_k) &= \int_{\mathbb{R}^k} \mathbb{1}\{T(t_1, \ldots, t_k) \in B^d\}\ dt_1 \ldots dt_k \\ &= \int_{\operatorname{lin}\{u_1, \ldots, u_k\}} \mathbb{1}\{z \in B^d\} \nabla_k(u_1, \ldots, u_k)\ dz \\ &= \kappa_k \nabla_k(u_1, \ldots, u_k). \end{aligned}$$

Einsetzen ergibt die Behauptung. □

4 Dichten innerer Volumina

4.1 Geometrische Dichten von Partikelprozessen

Es sei Φ ein stationärer Partikelprozess mit lokal-endlichem Intensitätsmaß Θ. Hierbei seien γ und $\mathbb{Q}$ Intensität und Formverteilung bezüglich des Umkugelmittelpunktes $c\colon \mathcal{C}' \to \mathbb{R}^d$ als Zentrumsfunktion. Wir erinnern an den folgenden Satz, der in natürlicher Weise das Konzept der Dichte eines Funktionals eines stationären Partikelprozesses begründet.

Satz 4.1.1 *Es sei $f\colon \mathcal{C}' \to \mathbb{R}$ messbar und translationsinvariant. Weiter gelte $f \geq 0$ oder $\int_{\mathcal{C}'} |f|\, d\mathbb{Q} < \infty$.*

(i) *Für $B \in \mathcal{B}^d$ mit $0 < \lambda^d(B) < \infty$ gilt*

$$\gamma_f := \gamma \int_{\mathcal{C}'} f\, d\mathbb{Q} = \frac{1}{\lambda^d(B)} \mathbb{E}\left[\int_{\mathcal{C}'} \mathbb{1}\{c(C) \in B\} f(C)\, \Phi(dC)\right].$$

(ii) *Für $W \in \mathcal{K}^d$ mit $V_d(W) > 0$ gilt*

$$\gamma_f = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{V_d(rW)} \mathbb{E}\left[\int_{\mathcal{C}'} \mathbb{1}\{C \subset rW\} f(C)\, \Phi(dC)\right].$$

(iii) *Es gelte*

$$\int_{\mathcal{C}'} |f(C)| \lambda^d(C + B^d)\, \mathbb{Q}(dC) < \infty. \tag{4.1.1}$$

Dann folgt für $W \in \mathcal{K}^d$ mit $V_d(W) > 0$

$$\gamma_f = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{V_d(rW)} \mathbb{E}\left[\int_{\mathcal{C}'} \mathbb{1}\{C \cap rW \neq \emptyset\} f(C)\, \Phi(dC)\right].$$

Beweis. (i) Mit der Campbellschen Formel und Satz 3.1.8 erhält man

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_{\mathcal{C}'} \mathbb{1}\{c(C) \in B\} f(C)\, \Phi(dC)\right] &= \int_{\mathcal{C}'} \mathbb{1}\{c(C) \in B\} f(C)\, \Theta(dC) \\
&= \gamma \int_{\mathcal{C}_0} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{c(K + x) \in B\} f(K + x)\, dx\, \mathbb{Q}(dK) \\
&= \gamma \int_{\mathcal{C}_0} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{c(K) + x \in B\} f(K)\, dx\, \mathbb{Q}(dK) \\
&= \gamma \int_{\mathcal{C}_0} \lambda^d(B) f(K)\, \mathbb{Q}(dK) \\
&= \lambda^d(B) \gamma_f.
\end{aligned}$$

(ii) Wie in (i) folgt

$$\mathbb{E}\left[\int_{\mathcal{C}'} \mathbb{1}\{C \subset rW\} f(C)\, \Phi(dC)\right] = \gamma \int_{\mathcal{C}_0} f(K) \lambda^d(\{x \in \mathbb{R}^d\colon K + x \subset rW\})\, \mathbb{Q}(dK).$$

O.B.d.A. (!) gelte $0 \in \operatorname{int} W$. Es gibt eine messbare Funktion $\rho\colon \mathcal{C}' \to [0, \infty)$ mit

$$K \subset \rho(K) W, \quad K \in \mathcal{C}'.$$

Für fixiertes $K \in \mathcal{C}'$ sei $r > \rho(K)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{\rho(K)}{r}\right)^d &= \frac{(r - \rho(K))^d}{r^d} \\
&= \frac{V_d((r - \rho(K))W)}{V_d(rW)}
\end{aligned}$$

$$= V_d(rW)^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{x \in (r - \rho(K))W\}\, dx$$

$$\leq V_d(rW)^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{K + x \subset rW\}\, dx \leq 1.$$

Für die Ungleichung überlegt man sich, dass für $x \in (r - \rho(K))W$ gilt

$$K + x \subset K + (r - \rho(K))W \subset \rho(K)W + (r - \rho(K))W = rW.$$

Damit folgt aus

$$\frac{1}{V_d(rW)} \mathbb{E}\left[\int_{\mathcal{C}'} \mathbb{1}\{C \subset rW\} f(C)\, \Phi(dC)\right]$$
$$= \gamma \int_{\mathcal{C}_0} f(K) \underbrace{\frac{\lambda^d(\{x \in \mathbb{R}^d \colon K + x \subset rW\})}{\lambda^d(rW)}}_{\uparrow 1,\ r \to \infty} \mathbb{Q}(dK)$$

die Behauptung im Fall $f \geq 0$ mittels monotoner Konvergenz angewendet auf die untere Schranke für den Integranden. Im integrierbaren Fall folgt die Behauptung aus dem Satz über majorisierte Konvergenz.

(iii) (siehe Übung 10.2) □

Mit geringfügig anderer Notation hatten wir dann die f-Dichte von Φ erklärt.

Definition 4.1.2 Die Zahl

$$\gamma_f := \gamma \int_{\mathcal{C}_0} f\, d\mathbb{Q}$$

heißt *f-Dichte* von Φ. Für translationsinvariantes f, welches zusätzlich eine Integrabilitätsbedingung erfüllt, gilt

$$\gamma_f = \lim_{r \to \infty} \frac{1}{V_d(rW)} \mathbb{E}\left[\int_{\mathcal{C}'} \mathbb{1}\{C \cap rW \neq \emptyset\} f(C) \Phi(dC)\right], \quad C \in \mathcal{C}',$$

wie gerade gezeigt wurde.

4.2 Geometrische Dichten von Keim-Korn-Modellen

In diesem Abschnitt stellen wir der Dichte eines Partikelprozesses (aus dem vorangehenden Abschnitt) die Dichte eines Keim-Korn-Modells gegenüber. Allgemein werden Dichten additiver Funktionale von gewissen stationären zufälligen abgeschlossenen Mengen erklärt.

Definition 4.2.1 (i) Der *Konvexring* $\mathcal{R}^d$ ist das System aller endlichen Vereinigungen konvexer Körper.

(ii) Der *erweiterte Konvexring* $\mathcal{S}^d$ ist das System aller Mengen $M \subset \mathbb{R}^d$ mit

$$M \cap K \in \mathcal{R}^d, \quad K \in \mathcal{K}^d.$$

(iii) Eine Funktion $f\colon \mathcal{K}^d \setminus \{\emptyset\} \to \mathbb{R}$ (oder $f\colon \mathcal{K}^d \to \mathbb{R}$) heißt *additiv*, falls

$$f(K \cup L) + f(K \cap L) = f(K) + f(L),$$

für alle $K, L \in \mathcal{K}^d \setminus \{\emptyset\}$ mit $K \cup L \in \mathcal{K}^d$ gilt. Gehört die leere Menge zum Definitionsbereich von f, so fordert man noch $f(\emptyset) = 0$. Eine Funktion $f\colon \mathcal{R}^d \to \mathbb{R}$ heißt *additiv*, falls $f(\emptyset) = 0$ und die obige Gleichung für alle $K, L \in \mathcal{R}^d$ richtig ist.

Ziele: Sei Z eine stationäre zufällige abgeschlossene Menge im erweiterten Konvexring, die passende Integrabilitätsbedingungen erfüllt.

(i) Für translationsinvariante und additive Funktionen $f\colon \mathcal{R}^d \to \mathbb{R}$ zeigen wir die Existenz des Grenzwertes

$$\delta_f := \lim_{r\to\infty} V_d(rW)^{-1}\mathbb{E}[f(Z \cap rW)]$$

für $W \in \mathcal{K}^d$ mit $V_d(W) > 0$.

(ii) Alternative Darstellungen für δ_f.

(iii) Formeln für Boolesche Modelle ("δ_{V_i} ist eine Funktion von γ_{V_i}").

(iv) Ergodische Interpretation von δ_f.

Wir benötigen zunächst einige Lemmata.

Lemma 4.2.2 *Ist $f\colon \mathcal{R}^d \to \mathbb{R}$ additiv, so gilt das Inklusions-Exklusionsprinzip:*

$$f(K_1 \cup \ldots \cup K_m) = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \sum_{1\le i_1<\ldots<i_j\le m} f(K_{i_1} \cap \ldots \cap K_{i_j}), \quad K_1, \ldots K_m \in \mathcal{R}^d$$

mit $m \in \mathbb{N}$.

Beweis. Induktion (Übung). □

Bezeichnungen:

- $C^d := [0,1]^d$, $C_0^d := [0,1)^d$, $\partial^+ C^d := C^d \setminus C_0^d$.
- Für $z \in \mathbb{Z}^d$ sei $C_z := C^d + z$, $C_{0,z} := C_0^d + z$ und $\partial^+ C_z := \partial^+ C^d + z$.
- Für $f\colon \mathcal{R}^d \to \mathbb{R}$ sei

$$f(K, z) := f(K \cap C_z) - f(K \cap \partial^+ C_z).$$

Es folgt ein zentrales Lemma.

Lemma 4.2.3 *Ist $f\colon \mathcal{R}^d \to \mathbb{R}$ additiv, so gilt*

$$f(K) = \sum_{z\in\mathbb{Z}^d} f(K, z), \quad K \in \mathcal{R}^d.$$

Beweis. Es bezeichne $<$ die (strikte) lexikographische Ordnung auf $\mathbb{Z}^d$. Für $(z_1,\ldots,z_d) \in \mathbb{Z}^d$ und $(y_1,\ldots,y_d) \in \mathbb{Z}^d$ ist diese erklärt durch

$$(z_1,\ldots,z_d) < (y_1,\ldots,y_d)$$

genau dann, wenn es ein $k \in \{1,\ldots,d\}$ gibt mit $z_1 = y_1,\ldots,z_{k-1} = y_{k-1}$ und $z_k < y_k$.

Dann gilt

$$\partial^+ C_z = C_z \cap \bigcup_{y:\, z<y} C_y, \quad z \in \mathbb{Z}^d.$$

Aus Lemma 4.2.2 folgt

$$\begin{aligned}\sum_{z\in\mathbb{Z}^d} f(K\cap\partial^+C_z) &= \sum_{z\in\mathbb{Z}^d} f\left(\bigcup_{y:z<y}(K\cap C_z\cap C_y)\right)\\ &= \sum_{z\in\mathbb{Z}^d}\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1}\sum_{z<y_1<\ldots<y_j} f(K\cap C_z\cap C_{y_1}\cap\ldots\cap C_{y_j})\\ &= -\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k-1}\sum_{z_1<\ldots<z_k} f(K\cap C_{z_1}\cap\ldots\cap C_{z_k}),\end{aligned}$$

wobei wir im zweiten Schritt die Tatsache nutzen, dass $C_z\cap C_{y_j}\neq\emptyset$ nur für endlich viele j und $f(\emptyset)=0$ gilt. Damit folgt wiederum mit Lemma 4.2.2

$$\begin{aligned}f(K) = f&\left(\bigcup_{z\in\mathbb{Z}^d}(K\cap C_z)\right)\\ &= \sum_{z\in\mathbb{Z}^d} f(K\cap C_z) + \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k-1}\sum_{z_1<\ldots<z_k} f(K\cap C_{z_1}\cap\ldots\cap C_{z_k})\\ &= \sum_{z\in\mathbb{Z}^d} f(K\cap C_z) - \sum_{z\in\mathbb{Z}^d} f(K\cap\partial^+C_z)\\ &= \sum_{z\in\mathbb{Z}^d}\big(f(K\cap C_z) - f(K\cap\partial^+C_z)\big)\\ &= \sum_{z\in\mathbb{Z}^d} f(K,z).\end{aligned}$$

□

Definition 4.2.4 Eine Funktion $f\colon \mathcal{R}^d\to\mathbb{R}$ heißt *bedingt beschränkt*, falls sie für jedes $K\in\mathcal{K}'$ beschränkt auf $\{L\in\mathcal{K}'\colon L\subset K\}$ ist.

Lemma 4.2.5 *Ist $f\colon\mathcal{R}^d\to\mathbb{R}$ verschiebungsinvariant, additiv und bedingt beschränkt, so gilt*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{f(rW)}{V_d(rW)} = f(C^d) - f(\partial^+C^d),$$

falls $W\in\mathcal{K}^d$ mit $V_d(W)>0$.

Beweis. O.B.d.A. sei $0\in\operatorname{int}W$. Aus Lemma 4.2.3 folgt

$$f(rW) = \sum_{z\in\mathbb{Z}^d} f(rW,z), \quad r>0. \tag{4.2.1}$$

Definiere

$$Z_r^1 := \{z \in \mathbb{Z}^d : C_z \cap rW \neq \emptyset, C_z \not\subset rW\} \quad \text{und} \quad Z_r^2 := \{z \in \mathbb{Z}^d : C_z \subset rW\}.$$

Wir benutzen (Übung)

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\operatorname{card} Z_r^1}{V_d(rW)} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{r\to\infty} \frac{\operatorname{card} Z_r^2}{V_d(rW)} = 1. \tag{4.2.2}$$

Aus der Translationsinvarianz und der bedingten Beschränktheit von f folgt

$$\begin{aligned} |f(rW,z)| &= |f(rW \cap C_z) - f(rW \cap \partial^+ C_z)| \\ &= |f((rW - z) \cap C^d) - f((rW - z) \cap \partial^+ C^d)| \leq b \end{aligned}$$

für ein von z, r und W unabhängiges $b \geq 0$. Damit ist

$$V_d(rW)^{-1} \left| \sum_{z \in Z_r^1} f(rW,z) \right| \leq V_d(rW)^{-1} \operatorname{card}(Z_r^1) b \overset{(4.2.2)}{\longrightarrow} 0, \quad r \to \infty.$$

Also folgt mit (4.2.1) und $f(\emptyset) = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{r\to\infty} V_d(rW)^{-1} f(rW) &= \lim_{r\to\infty} V_d(rW)^{-1} \sum_{z \in Z_r^2} f(rW,z) \\ &= (f(C^d) - f(\partial^+ C^d)) \lim_{r\to\infty} V_d(rW)^{-1} \operatorname{card} Z_r^2 \\ &\overset{(4.2.2)}{=} f(C^d) - f(\partial^+ C^d). \end{aligned}$$

Dabei haben wir im zweiten Schritt ausgenutzt, dass für $C_z \subset rW$ gilt

$$\begin{aligned} f(rW,z) &= f(rW \cap C_z) - f(rW \cap \partial^+ C_z) \\ &= f(C_z) - f(\partial^+ C_z) = f(C^d) - f(\partial^+ C^d), \end{aligned}$$

wobei wir wieder die Translationsinvarianz von f verwendet haben. □

Mit dem nächsten Theorem erreichen wir zwei der zu Beginn des Abschnitts formulierten Ziele.

Satz 4.2.6 *Es sei Ψ ein stationärer markierter Punktprozess mit endlicher Intensität γ und einer Formverteilung $\mathbb{Q}$, die auf $\mathcal{K}'$ konzentriert sei, so dass das Intensitätsmaß des zugehörigen Partikelprozesses lokalendlich ist. Sei Z das zugehörige Keim-Korn-Modell. Das Funktional $f\colon \mathcal{R}^d \to \mathbb{R}$ sei messbar, translationsinvariant, additiv und bedingt beschränkt, und es gelte*

$$\mathbb{E}[2^{N_{C^d}}] < \infty, \tag{4.2.3}$$

wobei die Zufallsvariable N_M für $M \in \mathcal{B}^d$ definiert ist durch

$$N_M := \int_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{C}'} \mathbb{1}\{(K + x) \cap M \neq \emptyset\}\, \Psi(d(x,K)).$$

Dann existiert der Grenzwert

$$\delta_f := \lim_{r\to\infty} \frac{\mathbb{E}[f(Z \cap rW)]}{V_d(rW)} = \mathbb{E}[f(Z \cap C^d) - f(Z \cap \partial^+ C^d)].$$

Beweis. Sei zunächst $W \in \mathcal{K}^d$ und $W \subset C^d$. Seien $K_1, K_2, \ldots, K_{N_W}$ diejenigen konvexen Partikel des Ψ zugeordneten Partikelprozesses Φ, die W treffen. (Wir betrachten die Situation realisierungsweise.) Dann gilt aufgrund von Lemma 4.2.2

$$f(Z \cap W) = f\left(W \cap \bigcup_{j=1}^{N_W} K_j\right) = \sum_{j=1}^{N_W} (-1)^{j-1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_j \le N_W} f(W \cap K_{i_1} \cap \ldots \cap K_{i_j}).$$

Weil f bedingt beschränkt ist und $W \cap K_{i_1} \cap \ldots \cap K_{i_j} \subset C^d$, gibt es ein $b > 0$ mit

$$|f(W \cap K_{i_1} \cap \ldots \cap K_{i_j})| \le b = b_{C^d}.$$

Hieraus folgt mittels Dreiecksungleichung

$$|f(Z \cap W)| \le b_{C^d} 2^{N_W} \le b_{C^d} 2^{N_{C^d}}. \tag{4.2.4}$$

Sei nun $W \in \mathcal{K}^d$ beliebig. Dann gibt es $z_1, \ldots, z_m \in \mathbb{Z}^d$ mit $W = \cup_{i=1}^m (W \cap C_{z_i})$ und daher wiederum mit Lemma 4.2.2

$$\begin{aligned} f(Z \cap W) &= f\left(\bigcup_{i=1}^m (Z \cap W \cap C_{z_i})\right) \\ &= \sum_{j=1}^m (-1)^{j-1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_j \le m} f\left(Z \cap W \cap C_{z_{i_1}} \cap \cdots \cap C_{z_{i_j}}\right) \\ &= \sum_{j=1}^m (-1)^{j-1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_j \le m} f\left((Z - z_{i_1}) \cap (W - z_{i_1}) \cap C^d \cap \cdots \cap C_{z_{i_j} - z_{i_1}}\right) \end{aligned}$$

aufgrund der Translationsinvarianz von f. Da $\overline{W} := (W - z_{i_1}) \cap C^d \cap \cdots \cap C_{z_{i_j} - z_{i_1}} \subset C^d$ und konvex ist, ergibt aufgrund der Stationarität von Z eine Andwendung von (4.2.4) auf $\overline{W}$ gerade

$$\mathbb{E}|f(Z \cap W)| \le 2^m b_{C^d} \mathbb{E}[2^{N_{C^d}}].$$

Ist nun $K \subset W$ konvex, so gilt $K = \cup_{i \in I}(K \cap C_{z_i})$ mit einer Teilmenge $I \subset \{1, \ldots, m\}$ und daher ist aufgrund des vorherigen Arguments auch

$$\mathbb{E}|f(Z \cap K)| \le 2^{|I|} b_{C^d} \mathbb{E}[2^{N_{C^d}}] \le 2^m b_{C^d} \mathbb{E}[2^{N_{C^d}}].$$

Ist schließlich $R \in \mathcal{R}^d$ und $R = \cup_{i=1}^n W_i$ mit konvexen Körpern K_i, so erhält man wie oben

$$\mathbb{E}|f(Z \cap W)| \le \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_j \le n} \mathbb{E}|f(Z \cap W_{i_1} \cap \cdots \cap W_{i_j})| < \infty.$$

Somit ist $f^* \colon \mathcal{R}^d \to \mathbb{R}$ mit $f^*(M) := \mathbb{E}[f(Z \cap M)]$ eine reellwertige, additive, translationsinvariante, bedingt beschränkte Funktion. Lemma 4.2.5, angewendet auf f^*, liefert die Behauptung. $\square$

Hinweis: Anstelle der bedingten Beschränktheit wird für translationsinvariante, additive Funktionale lediglich die Beschränktheit auf konvexen Teilmengen des Einheitswürfels (etwa) benötigt. Dies zeigt gerade das obige Argument.

4.3 Integralgeometrie (Überblick)

Ist $f\colon \mathcal{K}^d \to \mathbb{R}$ additiv, so heißt eine additive Funktion $\tilde{f}\colon \mathcal{R}^d \to \mathbb{R}$ *additive Fortsetzung* von f, wenn $\tilde{f}|_{\mathcal{K}^d} = f$. In diesem Fall schreibt man oft $f := \tilde{f}$. Wegen der Inklusions-Exklusions-Formel kann es höchstens eine Fortsetzung geben.

Satz 4.3.1 *Für jedes $j \in \{0,\dots,d\}$ gibt es genau eine additive Fortsetzung von V_j.*

Lemma 4.3.2 *Es sei $f\colon \mathcal{K}^d \to \mathbb{R}$ stetig und additiv. Gilt*

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbb{1}_{K_i} = 0$$

für $m \in \mathbb{N}$, $\alpha_1,\dots,\alpha_m \in \mathbb{R}$, $K_1,\dots,K_m \in \mathcal{K}^d$, so folgt

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i f(K_i) = 0.$$

Beweis. Angenommen, die Aussage ist falsch. Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, $\alpha_1,\dots,\alpha_m \in \mathbb{R}$ und $K_1,\dots,K_m \in \mathcal{K}^d$ mit

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbb{1}_{K_i} = 0, \tag{4.3.1}$$

aber

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i f(K_i) = a \neq 0. \tag{4.3.2}$$

Wir wählen m minimal, so dass solche Wahlen möglich sind.

Sei $H \subset \mathbb{R}^d$ eine Hyperebene mit Halbräumen H^+, H^- und $K_1 \subset \operatorname{int} H^+$. Multipliziert man (4.3.1) mit $\mathbb{1}_{H^-}$ bzw. $\mathbb{1}_H$, so erhält man

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbb{1}_{K_i\cap H^-} = 0, \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbb{1}_{K_i\cap H} = 0.$$

Wegen $K_1 \cap H^- = K_1 \cap H = \emptyset$ haben beide Summen höchstens $m-1$ Summanden ungleich 0. Aus der Minimalität von m folgt

$$\sum_{i=2}^m \alpha_i f(K_i \cap H^-) = \sum_{i=2}^m \alpha_i f(K_i \cap H) = 0.$$

Beide Summen ändern sich nicht, wenn man sie bei $i = 1$ beginnen lässt, da $f(\emptyset) = 0$. Weil f additiv ist, folgt aus (4.3.2) mit $K_i = (K_i \cap H^+) \cup (K_i \cap H^-)$:

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i f(K_i \cap H^+) = a. \tag{4.3.3}$$

Weiter gibt es eine Folge $(H_j)_{j\geq 1}$ von Hyperebenen mit $K_1 = \bigcap_{j=1}^\infty H_j^+$ und $K_1 \subset \operatorname{int} H_j^+$, $j \in \mathbb{N}$. Dazu kann man beispielsweise eine abzählbare, in $\mathbb{R}^d \setminus K$ dichte Teilmenge $\{x_j\colon j \geq 1\}$ wählen und dann jeden Punkt x_j durch eine Hyperebene senkrecht zu $x_j - p(K_1, x_j)$ von K_1 trennen. Iteration des obigen Arguments liefert

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i f\left(K_i \cap \bigcap_{j=1}^k H_j^+\right) = a, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Im Fall $K_i \cap K_1 \neq \emptyset$ gilt $K_i \cap \bigcap_{j=1}^k H_j^+ \to K_i \cap K_1$, $k \to \infty$. Im Fall $K_i \cap K_1 = \emptyset$ gilt $K_i \cap \bigcap_{j=1}^k H_j^+ = \emptyset$ für genügend große k. Also folgt aus der Stetigkeit von f und $f(\emptyset) = 0$:

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i f(K_i \cap K_1) = a.$$

Wiederhole diesen Schritt mit $K_i' := K_i \cap K_1$ und approximiere K_2'. Schließlich erhält man

$$\mathbb{1}_{K_1 \cap \ldots \cap K_m} \sum_{i=1}^m \alpha_i = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbb{1}_{K_1 \cap \ldots \cap K_m} = 0 \tag{$\star$}$$

und

$$f(K_1 \cap \ldots \cap K_m) \sum_{i=1}^m \alpha_i = \sum_{i=1}^m \alpha_i f(K_1 \cap \ldots \cap K_m) = a \neq 0. \tag{$\star\star$}$$

Aus ($\star$) folgt $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 0$ oder $K_1 \cap \ldots \cap K_m = \emptyset$, jeweils im Widerspruch zu ($\star\star$). □

Beweis von Satz 4.3.1. Wir setzen $f := V_j$. Es sei V der reelle Vektorraum aller Linearkombination von Indikatorfunktionen konvexer Körper. Die Abbildung $B \mapsto \mathbb{1}_B$ ist additiv auf $\mathcal{R}^d$ und für $K = \bigcup_{i=1}^m K_i$ mit $K_1, \ldots, K_m \in \mathcal{K}^d$ gilt

$$\mathbb{1}_K = \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq m} \mathbb{1}_{K_{i_1} \cap \ldots \cap K_{i_k}} \in V$$

(Übung). Für $h = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbb{1}_{K_i} \in V$ setzen wir $\tilde{f}(h) := \sum_{i=1}^m \alpha_i f(K_i)$. Wegen Lemma 4.3.2 ist diese Definition korrekt. Ferner folgt nun, dass die Abbildung $\tilde{f}$ linear ist und $\tilde{f}(\mathbb{1}_K) = f(K)$ für $K \in \mathcal{K}^d$ gilt. Wir setzen $f(K) := \tilde{f}(\mathbb{1}_K)$ für $K \in \mathcal{R}^d$. Es bleibt zu zeigen, dass f additiv ist. Für $K, M \in \mathcal{R}^d$ gilt nun

$$\begin{aligned} f(K \cup M) + f(K \cap M) &= \tilde{f}(\mathbb{1}_{K \cup M}) + \tilde{f}(\mathbb{1}_{K \cap M}) \\ &= \tilde{f}(\mathbb{1}_{K \cup M} + \mathbb{1}_{K \cap M}) \\ &= \tilde{f}(\mathbb{1}_K + \mathbb{1}_M) \\ &= \tilde{f}(\mathbb{1}_K) + \tilde{f}(\mathbb{1}_M) \\ &= f(K) + f(M), \end{aligned}$$

was die Behauptung beweist. □

Bemerkung 4.3.3 Satz 4.3.1 gilt auch für jedes stetige, additive Funktional $f\colon \mathcal{K}^d \to \mathbb{R}$. Dabei kann $\mathbb{R}$ auch durch einen topologischen Vektorraum ersetzt werden.

Bemerkung 4.3.4 $\mathcal{R}^d$ ist abzählbare Vereinigung abgeschlossener Teilmengen von $\mathcal{C}^d$. Ist $f\colon \mathcal{R}^d \to \mathbb{R}$ messbar auf $\mathcal{K}^d$ und additiv, so ist f messbar auf $\mathcal{R}^d$. Vergleiche dazu Theorem 14.4.4 in [6].

Bemerkung 4.3.5 Die Abbildung $V_j\colon \mathcal{R}^d \to \mathbb{R}$ heißt ebenfalls j-tes inneres Volumen. Sie ist additiv, homogen vom Grade j und bewegungsinvariant. Für $A = \bigcup_{i=1}^m K_i \in \mathcal{R}^d$ mit $K_i \in \mathcal{K}^d$ gilt nämlich:

$$V_j(A) = V_j\left(\bigcup_{i=1}^m K_i\right) = \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq m} V_j(K_{i_1} \cap \ldots \cap K_{i_k}).$$

Weiter ist $V_d(A) = \lambda^d(A)$. Für $\mathrm{cl}(\mathrm{int}\, A) = A$ gilt $V_{d-1}(A) = \frac{1}{2}\mathcal{H}^{d-1}(\partial A)$ (ohne Beweis). Die Funktion $V_0 = \chi$ ist die *Euler-Charakteristik*. Sie nimmt nur Werte in $\mathbb{Z}$ an. Im Fall $d = 2$ gilt $V_0(A) = k(A) - l(A)$, wobei $k(A)$ die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von A und $l(A)$ die Anzahl der Löcher von A, d.h. der beschränkten Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^2 \setminus A$, ist.

Beispiel 4.3.6 Die Euler-Charakteristik eines gefüllten Quadrats ist 1, dreier disjunkter, ausgefüllter Quadrate 3. Stanzt man aus dem ausgefüllten Quadrat ein kleineres Quadrat aus, so ergibt sich die Euler-Charakteristik 0. Auch der Rand dieser Menge hat Euler-Charakteristik 0. Stanzt man zwei disjunkte Quadrate aus, so ergibt sich -1, betrachtet man den Rand dieser Menge, so erhält man allerdings 0.

Satz 4.3.7 (Charakterisierungssatz von Hadwiger) *Ist $\Psi\colon \mathcal{K}' \to \mathbb{R}$ additiv, stetig und bewegungsinvariant, so gibt es $c_0, \dots, c_d \in \mathbb{R}$, so dass*

$$\Psi = \sum_{i=0}^{d} c_i V_i.$$

Satz 4.3.8 *Die Funktion $\Psi\colon \mathcal{K}' \to \mathbb{R}$ sei additiv, stetig und bewegungsinvariant. Ferner gelte $\Psi(K) = 0$, falls $\dim K \le d-1$ oder falls $K = C^d$ ist. Dann ist $\Psi \equiv 0$.*

Beweisidee. Induktion über d. Für $d = 0$ ($\mathbb{R}^0 = \{0\}$) ist die Behauptung trivial.

Sei nun $d = 1$. Dann ist $\Psi(\{x\}) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ und $\Psi(I) = 0$ für $I = [a, a+1],\ a \in \mathbb{R}$. Wegen

$$[a, a+1] = [a, a+\frac{1}{k}] \cup \ldots \cup [a+1-\frac{1}{k}, a+1]$$

ist $\Psi(I) = 0$, falls I ein abgeschlossenes Intervall mit rationaler Länge ist.

Die Behauptung gelte nun für $d-1 \ge 0$. Es sei $H \subset \mathbb{R}^d$ eine Hyperebene und I eine Strecke orthogonal zu H mit der Länge 1. Setze

$$f(K) := \Psi(K + I), \quad K \in \mathcal{K}', K \subset H.$$

Bezogen auf H erfüllt f alle Voraussetzungen von Satz 4.3.8. Nach Induktionsvoraussetzung ist $f(K) = 0$, also $\Psi(K + I) = 0$. Das bleibt richtig für jede zu H orthogonale Strecke I (vergleiche dazu die Argumentation für $d = 1$). Weiteres Vorgehen:

- $\Psi(Z) = 0$ für jeden „Zylinder“ Z (durch zerschneiden und zusammensetzen).
- $\Psi(S) = 0$ für Simplizes S.
- $\Psi(P) = 0$ für Polytope P.
- Stetigkeit von Ψ impliziert $\Psi = 0$. □

Beweis von 4.3.7. Erneute Induktion über d. Für $d = 0$ ist die Behauptung trivial.

Die Behauptung gelte nun für $d-1 \ge 0$. Sei $H \subset \mathbb{R}^d$ eine Hyperebene. Aus der Induktionsvoraussetzung erhalten wir die Existenz von $c_0, \dots, c_{d-1} \in \mathbb{R}$ mit

$$\Psi(K) = \sum_{j=0}^{d-1} c_j V_j(K), \quad K \in \mathcal{K}',\ K \subset H.$$

Hierbei wurde benutzt, dass die V_i dimensionsunabhängig sind, was aus der Dimensionsunabhängigkeit der äußeren Winkel folgt. Weil Ψ und V_j bewegungsinvariant sind, folgt

$$\Psi(K) = \sum_{j=0}^{d-1} c_j V_j(K), \quad K \in \mathcal{K}^d,\ \dim K \leq d-1.$$

Setze

$$\Psi'(K) := \Psi(K) - \sum_{j=0}^{d} c_j V_j(K), \quad K \in \mathcal{K}^d,$$

wobei $c_d \in \mathbb{R}$ so gewählt wird, dass $\Psi'(C^d) = 0$. Mit Satz 4.3.8 angewendet auf Ψ' folgt $\Psi' \equiv 0$ und somit die Behauptung. □

Wir führen einige Bezeichnungen ein:

- $G(d,q)$ bezeichnet die Menge der q-dimensionalen linearen Unterräume des $\mathbb{R}^d$.
- $A(d,q)$ bezeichnet die Menge der q-dimensionalen affinen Unterräume des $\mathbb{R}^d$.
- Mit SO_d wird die spezielle orthogonale Gruppe des $\mathbb{R}^d$ bezeichnet.
- G_d bezeichnet die Bewegungsgruppe auf dem $\mathbb{R}^d$.

Im Folgenden ist unser Ziel die Behandlung von Integralen der Form

$$\int_{G_d} V_j(K \cap gM)\, \text{"}dg\text{"}, \quad K, M \in \mathcal{K}^d \quad \longrightarrow \text{ kinematisches Integral}$$

und

$$\int_{A(d,q)} V_j(K \cap F)\, \text{"}dF\text{"}, \quad K \in \mathcal{K}^d \quad \longrightarrow \text{ Crofton-Integral.}$$

Definition 4.3.9 Es sei G eine topologische Gruppe mit neutralem Element e. Eine *Operation* von G auf einem topologischen Raum E ist eine Abbildung von $G \times E$ nach E, $(g,x) \mapsto gx$, mit:

(i) $g'(gx) = (g'g)x,\ g, g' \in G,\ x \in E.$

(ii) $ex = x,\ x \in E.$

Ist diese Abbildung stetig, so heißt die Operation *stetig*. Gibt es für alle $x, y \in E$ ein $g \in G$ mit $gx = y$, so heißt die Operation *transitiv*.

Bemerkung 4.3.10 (i) Jede Gruppe wirkt auf sich selbst durch Multiplikation von links: $(g,x) \mapsto g \cdot x,\ g, x \in G.$

(ii) Operiert G auf E, so gilt

$$g^{-1}(gx) = (g^{-1}g)(x) = ex = x \quad \text{und} \quad g(g^{-1}x) = x.$$

Also ist die Abbildung $x \mapsto gx$ von E nach E bijektiv und ihre Inverse ist $x \mapsto g^{-1}x$.

Beispiel 4.3.11 (i) SO_d operiert auf S^{d-1} und auf $G(d,q)$.

(ii) G_d operiert auf $A(d,q)$ vermöge $gF := \{gx : x \in F\}$.

Definition 4.3.12 G operiere stetig auf E. Ein Maß ν auf E heißt *invariant*, falls gilt

$$\nu(gA) = \nu(A), \quad A \in \mathcal{B}(E),\ g \in G.$$

Äquivalent dazu kann man auch fordern, dass für alle $f\colon E \to [0,\infty)$, $g \in G$ gilt

$$\int_E f(gx)\,\nu(dx) = \int_E f(x)\,\nu(dx).$$

Für $G = E$ heißt diese Eigenschaft *Linksinvarianz* von ν. Im Fall $G = E$ heißt ν *rechtsinvariant*, falls $\nu(Ag) = \nu(A),\ A \in \mathcal{B}(E),\ g \in G$.

Allgemeine Voraussetzung: G sei eine lokal-kompakte Gruppe mit abzählbarer Basis und mit der Hausdorffeigenschaft. Abkürzung: LCSCH-Gruppe. Ein Maß ν auf einem lokal-kompakten Raum E heißt *Radon-Maß*, falls $\nu(A) < \infty$ für $A \subset E$ kompakt gilt.

Satz 4.3.13 *Auf G gibt es ein linksinvariantes Radon-Maß $\nu \neq 0$. Ist ν' ein weiteres linksinvariantes Radon-Maß, so gilt $\nu' = c\nu$ für ein $c \geq 0$.*

Beweis. ohne. □

Definition 4.3.14 Das Maß ν aus Theorem 4.3.13 heißt *Haarsches Maß*.

Beispiel 4.3.15 (i) Ist G eine abzählbare Gruppe, so ist das Zählmaß ein invariantes Maß auf G.

(ii) Das Lebesguemaß $\lambda_d := \lambda^d$ auf $\mathbb{R}^d$ ist invariant unter G_d.

(iii) Auf SO_d gibt es ein eindeutig bestimmtes invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß ν.

Satz 4.3.16 *Auf der Bewegungsgruppe G_d gibt es ein bis auf Faktoren eindeutig bestimmtes linksinvariantes Radon-Maß μ.*

Beweis. Betrachte

$$\gamma\colon \mathbb{R}^d \times SO_d \to G_d,\ \gamma(x,\vartheta) := t_x \circ \vartheta$$

mit $t_x(y) := x+y$. Diese Abbildung ist bijektiv (!). Man definiert $g_n \to g$, falls $\gamma^{-1}(g_n) \to \gamma^{-1}(g)$. Damit ist G_d eine LCSCH-Gruppe. Es kann also Theorem 4.3.13 angewendet werden. Konkret:

$$\mu(\cdot) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{SO_d} \mathbb{1}\{\underbrace{t_x \circ \vartheta}_{=\gamma(x,\vartheta)} \in \cdot\}\ \nu(d\vartheta)\lambda_d(dx).$$

Es gilt: $\mu(\{g \in G_d\colon \gamma^{-1}(g) \in [0,1]^d \times SO_d\}) = 1$. □

Satz 4.3.17 *Auf $G(d,q)$ gibt es ein eindeutig bestimmtes SO_d-invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß ν_q.*

Beweis. Fixiere $L_q \in G(d,q)$. Betrachte die surjektive (aber nicht injektive) Abbildung

$$\beta_q\colon SO_d \to G(d,q),\ \vartheta \mapsto \vartheta L_q.$$

Betrachte auf $G(d,q)$ die gröbste Topologie, sodass β_q stetig ist, d.h. eine Menge $A \subset G(d,q)$ ist genau dann offen, wenn $\beta_q^{-1}(A)$ offen in SO_d ist. Die Behauptung folgt aus allgemeinen Resultaten der Maßtheorie. Konkret:

$$\nu_q(\cdot) = \int_{SO_d} \mathbb{1}\{\underbrace{\vartheta L_q}_{=\beta_q(\vartheta)} \in \cdot\}\ \nu(d\vartheta). \tag{4.3.4}$$

□

Satz 4.3.18 *Auf $A(d,q)$ gibt es ein eindeutig bestimmtes, bzgl. G_d invariantes Radon-Maß μ_q mit*

$$\mu_q(\{F \in A(d,q)\colon F \cap B^d \neq \emptyset\}) = \kappa_{d-q}.$$

Ist $f\colon A(d,q) \to [0,\infty]$ messbar, so gilt

$$\int_{A(d,q)} f \, d\mu_q = \int_{G(d,q)} \int_{L^\perp} f(L+y) \, \lambda_{d-q}(dy)\nu_q(dL). \tag{4.3.5}$$

Beweisidee. Fixiere $L_q \in G(d,q)$. Betrachte die surjektive (aber nicht injektive) Abbildung

$$\gamma_q\colon L_q^\perp \times SO_d \to A(d,q), \ (x,\vartheta) \mapsto \vartheta(L_q + x).$$

Wir definieren

$$\mu_q(\cdot) := \int_{SO_d} \int_{L_q^\perp} \mathbb{1}\{\underbrace{\vartheta(L_q+x)}_{=\gamma_q(x,\vartheta)} \in \cdot\} \, \lambda_{d-q}(dx)\nu(d\vartheta). \tag{4.3.6}$$

Beachte: $A(d,q)$ ist eine messbare Teilmenge von $\mathcal{F}^d$. Wir versehen $A(d,q)$ deshalb mit der Spurtopologie. Jede kompakte Teilmenge von $A(d,q)$ ist dann in einer der Mengen $\{\gamma_q(x,\vartheta)\colon x \in L_q^\perp, \|x\| \leq n, \vartheta \in SO_d\}$, $n \in \mathbb{N}$, enthalten. Das μ_q-Maß dieser Mengen ist endlich. Damit ist μ_q ein Radon-Maß. Es sei $f\colon A(d,q) \to [0,\infty]$ messbar und es sei $g = \gamma(x,\vartheta) = t_x \circ \vartheta \in G_d$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\int_{A(d,q)} f(gF) \, \mu_q(dF) &= \int_{SO_d} \int_{L_q^\perp} f(g\rho(L_q+y)) \, \lambda_{d-q}(dy)\nu(d\rho) \\
&= \int_{SO_d} \int_{L_q^\perp} f(\vartheta\rho(L_q+y)+x) \, \lambda_{d-q}(dy)\nu(d\rho) \\
&= \int_{SO_d} \int_{L_q^\perp} f(\vartheta\rho(L_q+y+\rho^{-1}\vartheta^{-1}x)) \, \lambda_{d-q}(dy)\nu(d\rho) \\
&= \int_{SO_d} \int_{L_q^\perp} f(\vartheta\rho(L_q+y+\pi_{L_q^\perp}(\rho^{-1}\vartheta^{-1}x))) \, \lambda_{d-q}(dy)\nu(d\rho) \\
&= \int_{SO_d} \int_{L_q^\perp} f(\vartheta\rho(L_q+y)) \, \lambda_{d-q}(dy)\nu(d\rho) \\
&= \int_{SO_d} \int_{L_q^\perp} f(\rho(L_q+y)) \, \lambda_{d-q}(dy)\nu(d\rho) \\
&= \int_{A(d,q)} f \, d\mu_q.
\end{aligned}$$

Dabei wurde in den letzten Schritten zunächst die Invarianz von λ_{d-q} und von ν ausgenutzt. Weiter gilt:

$$\int_{A(d,q)} f \, d\mu_q = \int_{SO_d} \int_{L_q^\perp} f(\rho(L_q+y)) \, \lambda_{d-q}(dy)\nu(d\rho)$$

$$= \int_{SO_d} \int_{L_q^\perp} f(\rho L_q + \underbrace{\rho y}_{=:z})\, \lambda_{d-q}(dy)\nu(d\rho)$$

$$= \int_{SO_d} \int_{(\rho L_q)^\perp} f(\rho L_q + z)\, \lambda_{d-q}(dz)\nu(d\rho)$$

$$\overset{(4.3.4)}{=} \int_{G(d,q)} \int_{L^\perp} f(L + z)\, \lambda_{d-q}(dz)\nu_q(dL).$$

Insbesondere ist die Definition von μ_q unabhängig vom gewählten L_q. Die Normierung rechnet man nach. Zu zeigen bleibt die Eindeutigkeit. □

Erinnerung: $\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\, dt,\ x > 0$. Es gilt $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ und $\kappa_m = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2}+1)}$. Es sei $c_j^k := \frac{k!\kappa_k}{j!\kappa_j}$ und $c_{s_1,\ldots,s_k}^{r_1,\ldots,r_k} := \prod_{j=1}^k c_{s_j}^{r_j}$.

Satz 4.3.19 (Crofton-Formel) *Es seien $K \in \mathcal{K}'$, $k \in \{1, \ldots, d-1\}$ und $j \in \{0, \ldots, k\}$. Dann gilt:*

$$\int_{A(d,k)} V_j(K \cap F)\, \mu_k(dF) = c_{j,d}^{k,d-k+j} V_{d-k+j}(K). \tag{4.3.7}$$

Die Fälle $k = d$ und $k = 0$ sind auch zugelassen. Dabei ist $\mu_d = \delta_{\mathbb{R}^d}$ und $\mu_0 = \lambda^d$, wobei man dabei $A(d,0)$ mit $\mathbb{R}^d$ identifiziert.

Beweis. Definiere

$$\psi\colon \mathcal{K}' \to [0,\infty),\ \psi(K) := \int_{A(d,k)} V_j(K \cap F)\, \mu_k(dF), \quad K \in \mathcal{K}'.$$

Dabei ist zu beachten, dass der Integrand (für jedes K) durch eine von F unabhängige Konstante beschränkt ist. Aus der Steiner-Formel (3.3.1) folgt nämlich

$$V_d(K + B^d) \geq V_d((K \cap F) + B^d) = \sum_{i=0}^d \kappa_{d-i} V_i(K \cap F)$$

und damit $V_j(K \cap F) \leq c_j \mathbb{1}\{K \cap F \neq \emptyset\}$, für eine von $F \in A(d,k)$ unabhängige Konstante $c_j > 0$. Man beachte ferner, dass $\mathcal{F}_K \cap A(d,k)$ in $A(d,k)$ kompakt (und μ_k ein Radonmaß) ist. Somit ist $\psi(K) < \infty$ für jedes $K \in \mathcal{K}'$ (d.h., ψ ist in der Tat ein Funktional von $\mathcal{K}'$ nach $[0,\infty)$). Aus den entsprechenden Eigenschaften der inneren Volumina folgt leicht, dass ψ additiv ist. Ferner gilt für $g \in G_d$:

$$\psi(gK) = \int_{A(d,k)} V_j(K \cap g^{-1}F)\, \mu_k(dF) \overset{\mu_k \text{ invariant}}{=} \psi(K),$$

d.h. ψ ist bewegungsinvariant. Das Funktional ψ ist auch stetig. Seien dazu $K_n \in \mathcal{K}'$ mit $K_n \to K$ für $n \to \infty$. Im Allgemeinen folgt daraus nicht $K_n \cap F \to K \cap F$ für $F \in A(d,k)$. Allerdings gilt diese Konvergenz für μ_k-fast alle F. Dazu verweisen wir auf den Beweis von Theorem 5.1.2 in [6]. Aus majorisierter Konvergenz folgt nun $\psi(K_n) \to \psi(K)$, d.h. die Stetigkeit von ψ.

Nach Theorem 4.3.7 (Hadwiger) gilt deshalb

$$\psi(K) = \sum_{r=0}^d c_r V_r(K),$$

für geeignete $c_0, \dots, c_r \in \mathbb{R}$. Nun gilt für $\alpha > 0$ mit (4.3.5):

$$\begin{aligned}\psi(\alpha K) &= \int_{G(d,k)} \int_{L^\perp} V_j(\alpha K \cap (L+x))\lambda_{d-k}(dx)\nu_k(dL) \\ &= \alpha^j \int_{G(d,k)} \int_{L^\perp} V_j(K \cap (L+\alpha^{-1}x))\lambda_{d-k}(dx)\nu_k(dL) \\ &\overset{\alpha^{-1}x=y}{=} \alpha^j \alpha^{d-k} \int_{G(d,k)} \int_{L^\perp} V_j(K \cap (L+y))\lambda_{d-k}(dy)\nu_k(dL) = \alpha^{d+j-k}\psi(K).\end{aligned}$$

Da unter den V_j nur V_{d+j-k} den passenden Homogenitätsgrad besitzt, folgt $c_r V_r(K) = 0$ für $r \neq d+j-k$. Es verbleibt die Bestimmung der Konstanten c in

$$\int_{A(d,k)} V_j(K \cap F)\mu_k(dF) = cV_{d-k+j}(K), \quad K \in \mathcal{K}'.$$

Diese lässt sich durch Einsetzen einer speziellen Menge für K, etwa $K = B^d$ ermitteln.

Für $K = B^d$ folgt aus (4.3.6) (mit fixiertem $L_k \in G(d,k)$):

$$\begin{aligned}cV_{d+j-k}(B^d) &= \int_{SO_d} \int_{L_k^\perp} V_j(B^d \cap (\theta(L_k + x))\lambda_{d-k}(dx)\nu(d\theta) \\ &\overset{B^d=\theta B^d, V_j \text{ invariant}}{=} \int_{L_k^\perp} V_j(\underbrace{B^d \cap (L_k+x)}_{\text{Kugel in } L_k+x \text{ mit MP } x \text{ und Radius } \sqrt{1-||x||^2}})\lambda_{d-k}(dx) \\ &= \int_{L_k^\perp \cap B^d} (\sqrt{1-||x||^2})^j V_j(B^d \cap L_k)\lambda_{d-k}(dx).\end{aligned}$$

Nun gilt (Übungsaufgabe)

$$V_i(B^d) = \binom{d}{i}\frac{\kappa_d}{\kappa_{d-i}},$$

d.h.

$$V_j(B^d \cap L_k) = \binom{k}{j}\frac{\kappa_k}{\kappa_{k-j}}.$$

Es folgt

$$c = \frac{\binom{k}{j}\kappa_{k-j}\kappa_k}{\binom{d}{d-k+j}\kappa_{k-j}\kappa_d} \int_{L_k^\perp} (1-||x||^2)^{\frac{j}{2}}\lambda_{d-k}(dx). \tag{4.3.8}$$

Mittels Polarkoordinaten ("$dx = r^{d-k-1}\mathcal{H}^{d-k-1}(du)$") folgt

$$\begin{aligned}\int_{L_k^\perp} (1-||x||^2)^{\frac{j}{2}}\lambda_{d-k}(dx) &= \mathcal{H}^{d-k-1}(S^{d-1}) \int_0^1 r^{d-k-1}(1-r^2)^{\frac{j}{2}} dr \\ &\overset{r=\sqrt{t}}{=} (d-k)\kappa_{d-k} \int_0^1 t^{\frac{d-k-1}{2}}(1-t)^{\frac{j}{2}}\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt \\ &= \frac{(d-k)\kappa_{d-k}}{2}\int_0^1 t^{\frac{d-k}{2}-1}(1-t)^{\frac{j+2}{2}-1}dt \\ &= \frac{(d-k)\kappa_{d-k}}{2}B(\frac{d-k}{2}, \frac{j+2}{2})\end{aligned}$$

$$= \frac{(d-k)\kappa_{d-k}}{2} \frac{\Gamma(\frac{d-k}{2})\Gamma(\frac{j}{2}+1)}{\Gamma(\frac{d-k+j}{2}+1)}$$

$$= \kappa_{d-k} \frac{\Gamma(\frac{d-k}{2}+1)\Gamma(\frac{j}{2}+1)}{\Gamma(\frac{d-k+j}{2}+1)}.$$

Verwendet man $\kappa_m = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2}+1)}$ und setzt in (4.3.8) ein, so folgt

$$c = c_j^k c_d^{d-k+j} = \frac{k!\kappa_k}{j!\kappa_j} \frac{(d-k+j)!\kappa_{d-k+j}}{d!\kappa_d} = c_{j,d}^{k,d-k+j}. \qquad \square$$

Bemerkung 4.3.20 Setzt man $j = 0$ und $m = d - k$ in Theorem 4.3.19, so folgt

$$V_m(K) = c_{m,d-m}^{0,d} \int_{A(d,d-m)} V_0(K \cap F)\, \mu_{d-m}(dF)$$

und damit eine geometrische Interpretation der inneren Volumina. Im Fall $d = 2$ ergibt sich beispielsweise

$$V_1(K) = c_{1,1}^{0,2} \int_{A(2,1)} \mathbb{1}\{K \cap F \neq \emptyset\}\, \mu_1(dF).$$

Bemerkung 4.3.21 Wegen (4.3.5) ist

$$\begin{aligned} V_m(K) &= c_{m,d-m}^{0,d} \int_{G(d,d-m)} \int_{L^\perp} V_0(K \cap (L+y))\lambda_m(dy)\nu_{d-m}(dL) \\ &\stackrel{!}{=} c_{m,d-m}^{0,d} \int_{G(d,d-m)} \int_{L^\perp} \mathbb{1}\{y \in K|L^\perp\}\lambda_m(dy)\nu_{d-m}(dL) \\ &= c_{m,d-m}^{0,d} \int_{G(d,d-m)} \lambda_m(K|L^\perp)\nu_{d-m}(dL) \\ &\stackrel{!}{=} c_{m,d-m}^{0,d} \int_{G(d,m)} \lambda_m(K|L)\nu_m(dL). \end{aligned}$$

Dabei bezeichne $K|L^\perp$ das Bild von K unter der orthogonalen Projektion auf $L^\perp$. (Für die Gültigkeit der letzten Gleichheit siehe Übung 12.3.) Im Fall $m = 1$ ergibt sich $V_1(K)$ als Vielfaches der mittleren Breite.

Folgerung 4.3.22 Die inneren Volumina sind monoton.

Bemerkung 4.3.23 Beide Seiten der Crofton-Formel sind additiv. Deswegen gilt sie auch auf $\mathcal{R}^d$.

Eine Anwendung der Crofton-Formeln sind sogenannte *K_0-isotrope zufällige q-Ebenen*, wobei $K_0 \in \mathcal{K}'$ und $q \in \{0, \ldots, d-1\}$ sind (siehe Vorlesung und Übungsblatt 11). Mit diesen zufälligen q-Ebenen lassen sich Probleme aus dem Gebiet der *Geometrischen Wahrscheinlichkeiten* behandeln, u.a. das Buffonsche Nadelproblem oder die Frage, mit welcher Wahrscheinlichkeit, eine zufällige Gerade, die den Einheitskeis schneidet, auch einen (fest gewählten) Halbkreis schneidet (siehe Vorlesung und Übungsblatt 11).

Satz 4.3.24 *Ist $f\colon \mathcal{K}' \to \mathbb{R}$ additiv und stetig, so gilt*

$$\int_{G_d} f(K \cap gM)\,\mu(dg) = \sum_{k=0}^{d} f_{d-k}(K)V_k(M), \quad K, M \in \mathcal{K}' \tag{4.3.9}$$

mit

$$f_{d-k}(K) := \int_{A(d,k)} f(K \cap F)\,\mu_k(dF), \quad K \in \mathcal{K}', k = 0, \ldots, d.$$

Beweis. Mit ähnlichen Überlegungen wie im Beweis von Theorem 4.3.19 folgt, dass die Abbildung $g \mapsto f(K \cap gM)$ für alle $K, M \in \mathcal{K}'$ messbar ist, siehe auch Beweis von Theorem 5.1.2 in [6]. Setze für fixiertes $K \in \mathcal{K}'$:

$$\psi(M) = \int_{G_d} f(K \cap gM)\,\mu(dg), \quad M \in \mathcal{K}'.$$

Dann ist ψ additiv und wegen der Bewegungsinvarianz von μ auch bewegungsinvariant. Damit ist nach Theorem 4.3.7 (Hadwiger)

$$\psi(M) = \sum_{i=0}^{d} f_{d-i}(K)V_i(M)$$

für gewisse Konstanten $f_{d-i}(K)$ (die von K abhängen).

Seien $k \in \{0, \ldots, d\}$ und $L_k \in G(d, k)$. Sei weiter $C \subset L_k$ ein k-dimensionaler Einheitswürfel mit Zentrum 0. Für $r > 0$ folgt (wegen $V_i(C) = 0$ für $i > k$)

$$\psi(rC) = \sum_{i=0}^{k} f_{d-i}(K)r^i V_i(C).$$

Andererseits folgt nach einer Rechnung (siehe Beweis von Theorem 5.1.2 in [6])

$$\frac{1}{r^k}\psi(rC) = \frac{1}{r^k}\int_{G_d} f(K \cap grC)\,\mu(dg) \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} \int_{A(d,k)} f(K \cap F)\,\mu_k(dF).$$

□

Satz 4.3.25 (Kinematische Hauptformel) *Für $K, M \in \mathcal{K}'$ und $j \in \{0, \ldots, d\}$ gilt:*

$$\int_{G_d} V_j(K \cap gM)\,\mu(dg) = \sum_{k=j}^{d} c_{j,d}^{k,d-k+j} V_k(K)V_{d-k+j}(M).$$

Beweis. Wir wenden Satz 4.3.24 mit $f = V_j$ an. In diesem Fall liefert die Crofton-Formel (4.3.7) für $j \le k$:

$$(V_j)_{d-k}(K) = \int_{A(d,k)} V_j(K \cap F)\,\mu_k(dF) = c_{j,d}^{k,d-k+j} V_{d-k+j}(K).$$

Dieses Integral ist Null für $j > k$. □

Satz 4.3.26 (Iterierte Kinematische Hauptformel) *Es seien $K_0, \ldots, K_k \in \mathcal{K}'$ und $j \in \{0, \ldots, d\}$. Dann gilt:*

$$\int_{(G_d)^k} V_j(K_0 \cap g_1K_1 \cap \ldots \cap g_kK_k)\,\mu^k(d(g_1, \ldots, g_k)) = \sum_{\substack{m_0,\ldots,m_k=j \\ m_0+\ldots+m_k=kd+j}}^{d} c_j^d \prod_{i=0}^{k} c_d^{m_i} V_{m_i}(K_i).$$

Beweis. Wir verwenden Induktion. Für $k = 1$ gilt $m_0 + m_1 = d + j$ und $c_j^d c_d^{m_0} c_d^{m_1} = c_{j,d}^{m_0,d-m_0+j}$ und obige Formel ist genau die kinematische Hauptformel.

Für $k + 1$ ist die linke Seite der Behauptung gleich

$$\int_{G_d} \dots \int_{G_d} V_j(K_0 \cap g_1(K_1 \cap g_1^{-1} g_2 K_2 \cap \dots \cap g_1^{-1} g_{k+1} K_{k+1}))\, \mu(dg_1) \dots \mu(dg_{k+1})$$

$$= \int_{G_d} \dots \int_{G_d} V_j(K_0 \cap g_1(K_1 \cap g_2 K_2 \cap \dots \cap g_{k+1} K_{k+1}))\, \mu(dg_1)\mu(dg_2) \dots \mu(dg_{k+1})$$

$$= \int_{(G_d)^k} \sum_{m_0=j}^{d} c_{j,d}^{m_0,d-m_0+j} V_{m_0}(K_0) V_{d-m_0+j}(K_1 \cap g_2 K_2 \cap \dots \cap g_{k+1} K_{k+1})\, \mu^k(dg)$$

$$= \sum_{m_0=j}^{d} c_{j,d}^{m_0,d-m_0+j} c_{d-m_0+j}^{d} V_{m_0}(K_0) \sum_{\substack{m_1,\dots,m_{k+1}=d-m_0+j \\ m_1+\dots+m_{k+1}=kd+d-m_0+j}}^{d} \prod_{i=1}^{k+1} c_d^{m_i} V_{m_i}(K_i)$$

$$= \sum_{\substack{m_0,\dots,m_{k+1}=j \\ m_0+\dots+m_{k+1}=(k+1)d+j}}^{d} c_j^d \prod_{i=0}^{k+1} c_d^{m_i} V_{m_i}(K_i).$$

Dabei verwenden wir im ersten Schritt die Invarianz des Maßes μ (sowie zweimal Fubini), danach die kinematische Hauptformel (Theorem 4.3.26) mit $K = K_0$ und $M = K_1 \cap g_2 K_2 \cap \dots \cap g_{k+1} K_{k+1}$ und der Abkürzung $g = (g_2, \dots, g_{k+1})$ und im Anschluss die Induktionsvoraussetzung. Im letzten Schritt beachte man, dass aus $m_0 + \dots + m_{k+1} = (k+1)d+j$ die Ungleichungen $m_l \geq j, l = 1, \dots, k+1$, folgen (Man kann sich elementar überlegen, dass die beiden Laufbereiche der Indizes übereinstimmen). $\square$

Bemerkung 4.3.27 Für $K, M \in \mathcal{K}'$ gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^d} V_{d-1}(K \cap (M + x))\, dx = V_{d-1}(K) V_d(M) + V_d(K) V_{d-1}(M),$$

d.h. die Kinematische Hauptformel bleibt (für $j = d - 1$) auch „ohne Integration" bzgl. der Drehungen richtig.

Beweis. Wir nehmen $\dim K = \dim M = d$ an (die restlichen Fälle gehen analog). Dann ist die linke Seite gleich

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{y \in \partial(K \cap (M + x))\}\, \mathcal{H}^{d-1}(dy) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{y \in \partial K, y \in M + x\}\, \mathcal{H}^{d-1}(dy) dx$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{y \in K, y \in \partial M + x\}\, \mathcal{H}^{d-1}(dy) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{y \in \partial K, -x \in M - y\}\, dx \mathcal{H}^{d-1}(dy)$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{y + x \in K, y \in \partial M\}\, dx \mathcal{H}^{d-1}(dy)$$

$$= \frac{1}{2} V_d(M) V_{d-1}(K) + \frac{1}{2} V_d(K) V_{d-1}(M).$$

Wir verwenden dabei die Darstellung von V_{d-1} durch $\mathcal{H}^{d-1}$ (vgl. Bemerkung 3.3.8), spalten dann im ersten Schritt $\partial(K \cap (M + x))$ geeignet auf und substituieren dann $y - x$ durch y. Letzteres braucht man, um den Satz von Fubini auf das zweite Integral anwenden zu dürfen ($\mathcal{H}^{d-1}$ ist nicht σ-endlich auf $\mathbb{R}^d$, aber eingeschränkt auf ∂M ist es (σ)-endlich). □

Analog zu den zufälligen q-Ebenen, betrachtet man im Gebiet der *Geometrischen Wahrscheinlichkeiten* zufällig bewegte Körper: Für $A_0 \in \mathcal{B}(G_d)$ ist eine *A_0-isotrope zufällige Bewegung* eine G_d-wertige Zufallsvariable $\tilde{g}$ mit der Verteilung $\frac{\mu(A_0 \cap \cdot)}{\mu(A_0)}$. Zum Beispiel kann für konvexe Körper $K_0, M \in \mathcal{K}^d$ die Menge $A_0 := \{g \in G_d : K_0 \cap gM \neq \emptyset\}$ betrachtet und die Wahrscheinlichkeit studiert werden, dass der zufällig bewegte Körper M einen zweiten unbewegten konvexen Körper $K \subset K_0$ schneidet. Hierbei hilft dann die kinematische Hauptformel (siehe Vorlesung und Übungsblatt 11).

4.4 Geometrische Dichten des Booleschen Modells

Wir betrachten ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ auf $\mathcal{K}'$ und eine unabhängige $\mathbb{Q}$-Markierung $\Psi = \{(\xi_n, Z_n) : n \in \mathbb{N}\}$ eines stationären Poissonprozesses $\Phi = \{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ mit Intensität $\gamma > 0$. Wegen Theorem 2.2.13 ist Ψ ein Poissonprozess auf $\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}'$ mit Intensitätsmaß $\gamma\lambda^d \otimes \mathbb{Q}$. Weiter sei $Z_0 \sim \mathbb{Q}$ das typische Korn mit

$$\mathbb{E}[\lambda_d(Z_0 + C)] < \infty, \qquad C \in \mathcal{C}^d.$$

Das Boolesche Modell ist gegeben durch

$$Z = \bigcup_{n=1}^{\infty} (Z_n + \xi_n).$$

Wir betrachten für $i \in \{0, \ldots, d\}$ die sogenannten Dichten der inneren Volumina von Ψ

$$\gamma_i := \gamma_{V_i} = \gamma \int_{\mathcal{K}'} V_i(K)\, \mathbb{Q}(dK) = \gamma \mathbb{E}[V_i(Z_0)].$$

Beachte $\gamma_0 = \gamma$. Weiter betrachten wir

$$\delta_i := \delta_{V_i} = \lim_{r \to \infty} V_d(rW)^{-1} \mathbb{E}[V_i(Z \cap rW)]$$

mit $W \in \mathcal{K}'$, $V_d(W) > 0$. Weil V_i messbar, verschiebungsinvariant, additiv und bedingt beschränkt ist und weil Voraussetzung (4.2.3) nach Übung 12.1 erfüllt ist, existiert der Grenzwert nach Theorem 4.2.6. Die Zahl δ_i ist die V_i-Dichte des Booleschen Modells Z. Aus Satz **??** und Satz **??** folgt

$$\delta_d = p = 1 - \exp(-\gamma \mathbb{E}[V_d(Z_0)]) = 1 - e^{-\gamma_d}.$$

4.4.1 Theorem. *Ist $\mathbb{Q}$ isotrop, so gilt für $j \in \{0, \ldots, d-1\}$:*

$$\delta_j = (1-p) \left[\gamma_j - \sum_{s=2}^{d-j} \frac{(-1)^s}{s!} \sum_{\substack{m_1, \ldots, m_s = j+1 \\ m_1 + \ldots + m_s = (s-1)d + j}}^{d-1} c_j^d \prod_{i=1}^{s} c_d^{m_i} \gamma_{m_i} \right].$$

δ_j lässt sich somit als Polynom in $\gamma_j, \ldots, \gamma_{d-1}$ schreiben.

4.4.2 Satz. *Es sei Ψ ein Poissonprozess auf $\mathbb{X}$ mit diffusem Intensitätsmaß Λ. Ferner sei $f\colon \mathbb{X}^n \to \mathbb{R}$ messbar und es gelte $f \geq 0$ oder $\int_{\mathbb{X}^n} |f| \, d\Lambda^n < \infty$. Dann gilt:*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{x_1,\ldots,x_n\in\Psi}^{\neq} f(x_1,\ldots,x_n)\right] = \int_{\mathbb{X}^n} f \, d\Lambda^n.$$

Dabei bedeutet $\sum^{\neq}$, dass nur über n-Tupel mit paarweise verschiedenen Einträgen summiert wird.

Beweisskizze. Aus dem Beweis von Theorem 2.2.6 folgt, dass Ψ einfach ist. Deswegen genügt es, Funktionen f mit $f(x_1,\ldots,x_n) = 0$, falls $x_i = x_j$ für $i \neq j$, zu betrachten. Eine „typische" Funktion mit dieser Eigenschaft ist $f(x_1,\ldots,x_n) = \mathbb{1}_{B_1}(x_1)\ldots\mathbb{1}_{B_n}(x_n)$ mit $B_i \cap B_j = \emptyset$ für $i \neq j$. In diesem Fall ist die linke Seite der Behauptung gleich

$$\mathbb{E}[\Psi(B_1)\ldots\Psi(B_n)] = \prod_{i=1}^{n}\mathbb{E}[\Psi(B_i)] = \prod_{i=1}^{n}\Lambda(B_i) = \Lambda^n(B_1\times\ldots\times B_n) = \int_{\mathbb{X}^n} f \, d\Lambda^n.$$

$\square$

4.4.3 Bemerkung. Satz 4.4.2 gilt auch für einen Poissonprozess mit nicht diffusem Intensitätsmaß Λ.

Beweis von Theorem 4.4.1. Es seien $W \in \mathcal{K}'$ und wie im Abschnitt 5.2 sei $N_W := \operatorname{card}\{n \geq 1 : (Z_n + \xi_n) \cap W \neq \emptyset\}$. Es seien $M_1,\ldots,M_{N_W}$ die Sekundärkörner, welche W schneiden. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[V_j(Z\cap W)] &= \mathbb{E}\left[V_j\left(\bigcup_{k=1}^{N_W} M_k \cap W\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N_W}(-1)^{k-1}\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq N_W} V_j(M_{i_1}\cap\ldots\cap M_{i_k}\cap W)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\sum_{(x_1,K_1),\ldots,(x_k,K_k)\in\Psi}^{\neq} V_j((K_1+x_1)\cap\ldots\cap(K_k+x_k)\cap W)\right].
\end{aligned}$$

Im Beweis von Theorem 4.2.6 haben wir $\mathbb{E}[\sum \frac{1}{k!}\sum^{\neq}\ldots] < \infty$ gesehen ($\mathbb{E}[2^{N_W}] < \infty$). Nach Vertauschung von Erwartungswert und Summation und Anwendung von Satz 4.4.2 liefert das (mit $dx = d(x_1,\ldots,x_k)$ und $dK = d(K_1,\ldots,K_k)$):

$$\mathbb{E}[V_j(Z\cap W)] = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\gamma^k}{k!}\int_{(\mathcal{K}')^k}\int_{(\mathbb{R}^d)^k} V_j\left(\bigcap_{i=1}^{k}(K_i+x_i)\cap W\right)\lambda_d^k(dx)\mathbb{Q}^k(dK).$$

Weil $\mathbb{Q}$ isotrop ist, kann jetzt K_i durch $\rho_i K_i$ ($\rho_i \in SO_d$) ersetzt werden. (Für $j = d-1$ kann man hier Bemerkung 4.3.27 benutzen, um einfacher zu argumentieren.) Es folgt (mit $d\rho = d(\rho_1,\ldots,\rho_k)$ und $dg = d(g_1,\ldots,g_k)$):

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[V_j(Z\cap W)] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\gamma^k}{k!}\int_{(\mathcal{K}')^k}\int_{(\mathbb{R}^d)^k}\int_{(SO_d)^k} V_j\left(\bigcap_{i=1}^{k}(\rho_i K_i+x_i)\cap W\right)\nu^k(d\rho)\lambda_d^k(dx)\mathbb{Q}^k(dK)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}\gamma^k}{k!} \int_{(\mathcal{K}')^k} \int_{(G_d)^k} V_j \left(\bigcap_{i=1}^{k} g_i K_i \cap W \right) \mu^k(dg) \mathbb{Q}^k(dK)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}\gamma^k}{k!} \sum_{\substack{m_0,\dots,m_k=j \\ m_0+\dots+m_k=kd+j}}^{d} \int_{(\mathcal{K}')^k} c_j^{m_0} V_{m_0}(W) \prod_{i=1}^{k} c_d^{m_i} V_{m_i}(K_i) \mathbb{Q}^k(dK)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \sum_{\substack{m_0,\dots,m_k=j \\ m_0+\dots+m_k=kd+j}}^{d} c_j^{m_0} V_{m_0}(W) \prod_{i=1}^{k} c_d^{m_i} \gamma_{m_i}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} V_j(W) \gamma_d^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \sum_{m=j+1}^{d} c_j^m V_m(W) \sum_{\substack{m_1,\dots,m_k=j \\ m_1+\dots+m_k=kd+j-m}}^{d} \prod_{i=1}^{k} c_d^{m_i} \gamma_{m_i}.$$

Hierbei wird im vierten Schritt die Definition von $\gamma_{m_i} = \gamma \int_{\mathcal{K}'} V_{m_i}(K_i)\mathbb{Q}(dK_i)$ verwendet und im fünften Schritt die Summation über m_0 getrennt betrachtet. Das heißt

$$\mathbb{E}[V_j(Z \cap W)] =$$

$$-(e^{-\gamma_d} - 1)V_j(W) + \sum_{m=j+1}^{d} c_j^m V_m(W) \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \sum_{\substack{m_1,\dots,m_k=j \\ m_1+\dots+m_k=kd+j-m}}^{d} \prod_{i=1}^{k} c_d^{m_i} \gamma_{m_i}}_{=:a_m}.$$

Zur Behandlung von a_m sei s die Anzahl der m_i mit $m_i \leq d-1$. Wegen $m > j$ ist $s \geq 1$ und $s \leq m-j$. Es folgt

$$a_m = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \sum_{s=1}^{\min\{m-j,r\}} \binom{k}{s} \gamma_d^{k-s} \sum_{\substack{m_1,\dots,m_s=j \\ m_1+\dots+m_s=sd+j-m}}^{d-1} \prod_{i=1}^{s} c_d^{m_i} \gamma_{m_i},$$

d.h.

$$\mathbb{E}[V_j(Z \cap W)] = -(e^{-\gamma_d} - 1)V_j(W)$$
$$+ e^{-\gamma_d} \sum_{m=j+1}^{d} c_j^m V_m(W) \sum_{s=1}^{m-j} \frac{(-1)^{s-1}}{s!} \sum_{\substack{m_1,\dots,m_s=j \\ m_1+\dots+m_s=sd+j-m}}^{d-1} \prod_{i=1}^{s} c_d^{m_i} \gamma_{m_i}. \tag{5.4.2}$$

Ersetzt man in (5.4.2) W durch rW und dividiert durch $V_d(rW)$, so verschwinden die Summanden für $m \leq d-1$, wenn man $r \to \infty$ laufen lässt. Für $s = 1$ ist $m_1 = j$ und $c_j^d c_d^j = 1$. Weil für $s \geq 2$ die Ungleichung $m_i \geq j+1,\ i = 1, \dots, s$ gelten muss, folgt die Behauptung. □

4.4.4 Bemerkung. Für $j = d-1$ gilt

$$\delta_{d-1} = (1-p)\gamma_{d-1} = \gamma(1-p)\mathbb{E}[V_{d-1}(Z_0)].$$

4.4.5 Bemerkung. Für $d = 2$ gilt für die Dichte der Euler-Charakteristik

$$\delta_0 = (1-p)(\gamma - \frac{1}{2}c_0^2(c_2^1\gamma_1)^2),$$

d.h. $$\begin{aligned}\delta_0 &= (1-p)(\gamma - \frac{\gamma_1^2}{\pi}) \\ &= (1-p)\left(\gamma - \frac{\gamma^2\mathbb{E}[V_1(Z_0)]^2}{\pi}\right) \\ &= (1-p)\left(\gamma - \frac{\gamma^2\mathbb{E}[U(Z_0)]^2}{4\pi}\right) \\ &= (1-p)\left(-\frac{\log(1-p)}{\mathbb{E}[V_2(Z_0)]} + \frac{(\log(1-p))^2\mathbb{E}[V_1(Z_0)]^2}{\pi\mathbb{E}[V_2(Z_0)]^2}\right),\end{aligned}$$

wobei U den Umfang bezeichnet.

4.4.6 Bemerkung. Die aktuelle Forschung beschäftigt sich mit Größen zweiter Ordnung, z.B.

$$\sigma_{i,j} := \lim_{r\to\infty} \frac{1}{V_d(rW)} \operatorname{Cov}(V_i(Z\cap rW), V_j(Z\cap rW)).$$

Zum Beispiel gilt

$$\sigma_{d,d} = (1-p)^2 \int_{\mathbb{R}^d} (e^{\gamma C_0(x)} - 1)dx = \int_{\mathbb{R}^d} (C(x) - p^2)dx,$$

mit $C_0(x) = \mathbb{E}[\lambda_d(Z_0 \cap (Z_0 - x))]$, vgl. dazu Satz 3.2.8.

4.4.7 Theorem. *Das typische Korn Z_0 sei isotrop. Dann gilt:*

$$T_Z(K) = 1 - \exp\left(-\frac{1}{\kappa_d}\sum_{i=0}^d \frac{\kappa_i\kappa_{d-i}}{\binom{d}{i}} V_{d-i}(K)\gamma_i\right), \quad K \in \mathcal{K}'.$$

Beweis. Für $K \in \mathcal{K}'$ folgt aus Theorem **??**:

$$\begin{aligned}1 - T_Z(K) &= \mathbb{P}(Z\cap K = \emptyset) \\ &= \exp\left(-\gamma\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{(Z_0+x)\cap K \neq \emptyset\}\, dx\right]\right) \\ &= \exp\left(-\gamma\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^d}\int_{SO_d} \mathbb{1}\{(\rho Z_0+x)\cap K \neq \emptyset\}\, \nu(d\rho)dx\right]\right) \\ &= \exp\left(-\gamma\mathbb{E}\left[\int_{G_d} \mathbb{1}\{gZ_0\cap K \neq \emptyset\}\, \mu(dg)\right]\right) \\ &= \exp\left(-\gamma\mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^d c_{0,d}^{i,d-i} V_i(K)V_{d-i}(Z_0)\right]\right) \\ &= \exp\left(-\sum_{i=0}^d \frac{i!\kappa_i(d-i)!\kappa_{d-i}}{d!\kappa_d} V_i(K)\gamma_{d-i}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{\kappa_d}\sum_{i=0}^d \frac{\kappa_i\kappa_{d-i}}{\binom{d}{i}} V_{d-i}(K)\gamma_i\right).\end{aligned}$$

Dabei wurde in der dritten Umformung die Isotropie von Z_0 und in der fünften Gleichheit die kinematische Hauptformel (Theorem 4.3.25 mit $j=0$) verwendet.

Insbesondere folgt Satz 3.4.8. □

4.4.8 Theorem. *Für jedes $j \in \{0, \dots, d\}$ gilt*

$$\delta_j = \lim_{r\to\infty} \frac{V_j(Z \cap rW)}{V_d(rW)} \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Beweisidee. Das Ergebnis ist eine Konsequenz räumlicher Ergodentheorie. Wir verwenden Satz 4.1.19 aus [4]: Ist $\xi = \xi(\Psi)$ ein zufälliges Maß auf $\mathbb{R}^d$ mit $\xi(\Psi + x, B + x) = \xi(\Psi, B)$, $x \in \mathbb{R}^d$, so gilt:

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\xi(rW)}{V_d(rW)} = \mathbb{E}\left[\xi([0,1]^d)\right] \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Wie können wir ξ wählen? Im Fall $j = d$ können wir $\xi(B) = \lambda_d(Z \cap B)$ wählen (beachte $\delta_d = p$). Für $j \leq d - 1$ setzen wir $\xi(B) := C_j(Z, B)$, $B \in \mathcal{B}^d$, wobei $C_j(K, \cdot)$ das j*-te Krümmungsmaß* von $K \in \mathcal{S}^d$ ist. Es gilt $C_j(K, \mathbb{R}^d) = V_j(K)$, $K \in \mathcal{R}^d$. Außerdem gilt $C_j(K, B) = C_j(L, B)$, $B \subset A$, A offen, sodass $K \cap A = L \cap A$. Ferner gilt $C_j(K+x, B+x) = C_j(K, B)$, $x \in \mathbb{R}^d$. Wendet man den räumlichen Ergodensatz auf den Negativ- bzw. Positivanteil von ξ an, so ergibt sich das Resultat. □

5 Zufällige Mosaike

5.1 Grundlagen

5.1.1 Definition. Ein Mosaik $\mathfrak{m}$ in $\mathbb{R}^d$ ist ein abzählbares System (nicht leerer) kompakter Mengen mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $\mathfrak{m}$ ist lokal-endlich, d.h. $\operatorname{card}\{C \in \mathfrak{m} \colon C \cap K \neq \emptyset\} < \infty$, $K \in \mathcal{C}^d$.

(ii) Jedes $C \in \mathfrak{m}$ ist konvex und hat innere Punkte.

(iii) $\bigcup_{C \in \mathfrak{m}} C = \mathbb{R}^d$.

(iv) Für $C, C' \in \mathfrak{m}$ mit $C \neq C'$ gilt $\operatorname{int} C \cap \operatorname{int} C' = \emptyset$.

Die Elemente von $\mathfrak{m}$ heißen *Zellen* von $\mathfrak{m}$.

Natürlich kann es insbesondere für Anwendungen sinnvoll sein, Mosaike weniger restriktiv zu erklären. Die hier angegebene Definition erzwingt unter anderem, dass die Zellen Polytope sind.

5.1.2 Definition. Es sei $P \subset \mathbb{R}^d$ ein *Polytop*, d.h. eine kompakte Menge, die endlicher Durchschnitt von Halbräumen ist. Eine *Seite* F von P ist der Durchschnitt von P mit einer Stützhyperebene von P. Dabei sei $\dim F := \dim \operatorname{aff} F$. Für $j \in \{0, \dots, d-1\}$ sei $\mathcal{F}_j(P)$ die Menge aller j-dimensionalen Seiten von P. Ferner sei $\mathcal{F}_d(P) := \{P\}$.

In der Konvexgeometrie wird ein Polytop als die konvexe Hülle von endlich vielen Punkten erklärt. Dort wird gezeigt, dass diese Definition mit der hier gegebenen äquivalent ist. Auch der Begriff der Seite wird in der Literatur unterschiedlich erklärt. Ist $A \subset \mathbb{R}^d$ convex und $F \subset A$, so heißt F Seite von A, falls für jede Strecke $[x, y] \subset A$ mit $(x, y) \cap F \neq \emptyset$ gilt $[x, y] \subset F$. Eine Seite ist dann stets abgeschlossen. Im Fall eines Polytopes stimmt dieser Seitenbegriff mit dem obigen überein.

5.1.3 Lemma. *Die Zellen eines Mosaiks sind Polytope.*

Beweis. (siehe Übung 12.5) □

5.1.4 Definition. Ein Mosaik $\mathfrak{m}$ heißt *seitentreu*, falls $P \cap P'$ für alle $P, P' \in \mathfrak{m}$ mit $P \cap P' \neq \emptyset$ sowohl eine Seite von P als auch eine Seite von P' ist. Ferner sei

$$\mathbb{M} := \{\mathfrak{m} : \mathfrak{m} \text{ ist ein Mosaik}\}$$

und

$$\mathbb{M}^* := \{\mathfrak{m} \in \mathbb{M} : \mathfrak{m} \text{ ist seitentreu}\}.$$

5.1.5 Bemerkung. Die Mengen $\mathbb{M}$ und $\mathbb{M}^*$ sind Teilmengen der Potenzmenge von $\mathcal{F}' := \mathcal{F}^d \setminus \{\emptyset\}$. Nun ist $\mathcal{F}'$ ein lokal-kompakter Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis. Man kann daher auf $\mathcal{F}'$ als Grundraum die Fell-Matheron Topologie und die zugehörige Borelsche σ-Algebra einführen. Zu jeder kompakten Teilmenge $\mathcal{L}$ von $\mathcal{F}'$ gibt es ein $C \in \mathcal{C}^d$ mit $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}_C$. Ist nun $\mathfrak{m} = \{F_i : i \in \mathbb{N}\}$ ein Mosaik, also ein lokal-endliches System von nichtleeren kompakten Teilmengen des $\mathbb{R}^d$, so gilt $F_i \in \mathcal{F}_C$ nur für endliche viele $i \in \mathbb{N}$. Für jedes $\mathfrak{m} \in \mathbb{M}$ ist daher nicht nur $\mathfrak{m} \subset \mathcal{F}'$, sondern $\mathfrak{m}$ ist abgeschlossen in $\mathcal{F}'$, d.h. ein Element von $\mathcal{F}(\mathcal{F}')$. Man kann zeigen, dass $\mathbb{M}$ und $\mathbb{M}^*$ messbare Teilmengen von $\mathcal{F}(\mathcal{F}')$ sind. Ferner sind die Abbildungen

$$\mathfrak{m} \mapsto \mathcal{F}_j(\mathfrak{m}) := \bigcup_{P \in \mathfrak{m}} \mathcal{F}_j(P) \quad \big(\in \mathcal{F}(\mathcal{F}')\big)$$

für jedes $j \in \{0, \dots, d\}$ messbar auf $\mathbb{M}^*$.

5.1.6 Definition. Ein *zufälliges Mosaik* X ist ein einfacher Partikelprozess mit

$$\mathbb{P}(\operatorname{supp} X \in \mathbb{M}^*) = 1.$$

Vernachlässigt man Nullmengen, so kann man X auch als zufälliges Element in $\mathbb{M}^*$ einführen. Man nennt X *stationär*, wenn X als Partikelprozess stationär ist.

5.1.7 Beispiel. Für $\varphi \in N_s(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\}$ sei

$$C(\varphi, x) := \{z \in \mathbb{R}^d \colon \|z - x\| \leq \|z - y\| \; \forall y \in \varphi\}, \quad x \in \varphi,$$

die Voronoi-Zelle von x. Sind alle Zellen von $\mathfrak{m}(\varphi) := \{C(\varphi, x) \colon x \in \varphi\}$ beschränkt, so ist $\mathfrak{m}(\varphi)$ ein seitentreues Mosaik, das von φ erzeugte *Voronoi-Mosaik*. In diesem Fall gilt insbesondere $\varphi(\mathbb{R}^d) = \infty$. Eine hinreichende Bedingung für die Beschränktheit der Zellen ist die Bedingung $\operatorname{conv}(\varphi) = \mathbb{R}^d$ (siehe [6, Seiten 470-1]).

Ist Φ ein Punktprozess auf $\mathbb{R}^d$ mit $\mathbb{P}(\operatorname{conv}(\Phi) = \mathbb{R}^d) = 1$, so ist

$$X := \{C(\Phi, x) \colon x \in \Phi\} = \sum_{x \in \Phi} \delta_{C(\Phi, x)}$$

ein zufälliges Mosaik, wenn wir einfache Zählmaße mit deren Träger identifizieren. Ist Φ stationär, so ist X stationär als Partikelprozess. Das folgt aus der Translationskovarianz

$$C(\varphi + z, x + z) = C(\varphi, x) + z,$$

für alle $\varphi \in N_s \setminus \{0\}$, $x \in \varphi$, $z \in \mathbb{R}^d$.

5.1.8 Satz. *Ist $\Phi \neq 0$ ein stationärer Punktprozess auf $\mathbb{R}^d$, so gilt*

$$\mathbb{P}(\operatorname{conv}(\operatorname{supp} \Phi) = \mathbb{R}^d) = 1.$$

Beweis. Wäre conv supp $\Phi \neq \mathbb{R}^d$, so wäre auch cl conv supp $\Phi \neq \mathbb{R}^d$. Dieses Ereignis kann nach Satz 1.2.12 aber nur auf einer Nullmenge eintreten, da cl conv supp Φ eine nichtleere, konvexe zufällige abgeschlossene Menge ist. □

5.1.9 Beispiel. Es sei $\varphi \subset A(d, d-1)$ lokal-endlich, d.h.

$$\operatorname{card}\{H \in \varphi \colon H \cap K \neq \emptyset\} < \infty, \quad K \in \mathcal{C}^d.$$

Es sei $\mathfrak{m}(\varphi)$ das System der Abschlüsse der Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^d \setminus (\bigcup_{H \in \varphi} H)$. Unter Regularitätsvoraussetzungen an φ ist $\mathfrak{m}(\varphi)$ ein seitentreues Mosaik, nämlich das von φ erzeugte *Hyperebenen-Mosaik*.

Ziele und Fragestellungen für stationäre Mosaike

- Wie viele j-Seiten gibt es im Mittel in einer Menge $B \in \mathcal{B}^d$? Was ist die asymptotische Varianz?
- Welchen Einfluss hat Anisotropie auf Mittelwerte und Verteilungen?
- Was ist die Verteilung einer "typischen" Zelle beziehungsweise von Funktionalen (wie der Eckenzahl oder dem Volumen) typischer Zellen?
- Wie verhalten sich innere Volumina des j-Skeletts?
- Welche Form haben große und kleine Zellen?

5.2 Dichterelationen für allgemeine Mosaike

Much of the following will deal with investigating the average sizes of the polytopes appearing in a stationary random tessellation. Here 'average' will be made precise by considering, for example, typical cells and k-faces. To measure the sizes, we use a series of functionals, which regard combinatorial or metrical aspects. These functionals are introduced in the following, and the rest of this chapter will then deal with relations between their densities. These are relations for general random face-to-face tessellations in the first section, and for hyperplane tessellations in the second section. Apart from some integrability assumptions, the relations do not depend on the distributions of the random tessellations. Correspondingly, the arguments will be more geometric than stochastic in nature.

We denote by $V_r(K)$ the rth intrinsic volume of a convex body $K \in \mathcal{K}^d$, for $r = 0, \dots, d$.

For a polytope $P \in \mathcal{P}^d$, a general class of functionals for measuring its size is defined by

$$Y_{r,s}(P) := \sum_{F \in \mathcal{F}_s(P)} V_r(F), \quad P \in \mathcal{P}^d,$$

for $0 \leq r \leq s \leq d$. This includes the most natural and prominent functionals associated with a convex polytope. Since $V_0 = 1$, the special case $r = 0$ gives

$$Y_{0,s}(P) = f_s(P),$$

which is (with its usual notation), the **number of s-dimensional faces (s-faces)** of P. If P is a k-dimensional polytope, then

$$Y_{r,k}(P) = V_r(P)$$

is the rth intrinsic volume of P. In particular, if $\dim P = d$, then $Y_{d,d}(P)$ is the volume of P, the case $2Y_{d-1,d}(P)$ gives the surface area of P, and $(2\kappa_{d-1}/d\kappa_d)Y_{1,d}(P)$ is the mean width of P.

Of particular interest are also the special cases

$$L_s(P) := Y_{s,s}(P),$$

giving the total s-dimensional volume of the s-faces of P. For example, $Y_{1,1}(P)$ is the **total edge length** of P. If $\dim P = d$, these functionals interpolate between $L_0(P) = f_0(P)$, the vertex number of P, and $L_d(P) = V_d(P)$, the volume of P. We call the quantities $L_0(P), \dots, L_d(P)$ the **total face contents** of P.

The intrinsic volumes $V_0, \dots, V_d$ are motion invariant, continuous functionals on the space $\mathcal{K}^d$ of convex bodies. Therefore, their densities make sense for general stationary particle processes. Their finiteness follows from the strong local finiteness of the intensity measure.

Lemma 5.2.1 *Let X be a stationary particle process in $\mathbb{R}^d$ which has a locally finite intensity measure $\Theta \neq 0$ and hence has a grain distribution $\mathbb{Q}$. Then*

$$\int_{\mathcal{K}_c} V_d(K + \rho B^d)\, \mathbb{Q}(dK) < \infty \quad \textit{for all } \rho > 0 \tag{5.2.1}$$

and

$$\overline{V}_r(X) < \infty \quad \textit{for } r = 0, \dots, d. \tag{5.2.2}$$

Beweis. Let $\rho > 0$. Since the intensity measure Θ of X is locally finite, we have

$$\int_{\mathcal{K}} \mathbb{1}\{K \cap \rho B^d \neq \emptyset\}\, \Theta(dK) < \infty.$$

The left side is equal to

$$\begin{aligned} &\gamma \int_{\mathcal{K}_c} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{(K + x) \cap \rho B^d \neq \emptyset\}\, \lambda_d(dx)\, \mathbb{Q}(dK) \\ &= \gamma \int_{\mathcal{K}_c} V_d(-K + \rho B^d)\, \mathbb{Q}(dK) = \gamma \int_{\mathcal{K}_c} V_d(K + \rho B^d)\, \mathbb{Q}(dK). \end{aligned}$$

By the Steiner formula, the latter is equal to

$$\sum_{\rho=0}^{d} \rho^{d-r} \kappa_{d-r} \gamma \int_{\mathcal{K}_c} V_r(K)\, \mathbb{Q}(dK) = \sum_{\rho=0}^{d} \rho^{d-r} \kappa_{d-r} \overline{V}_r(X).$$

This yields the assertions. □

For additive functionals, the density interpretations which have been discussed before can be supplemented by another one, which we formulate here for the intrinsic volumes.

Theorem 5.2.2 *Let X be a stationary particle process in $\mathbb{R}^d$ with a locally finite intensity measure. Let $r \in \{0, \dots, d\}$ and $W \in \mathcal{K}_d$. Then*

$$\overline{V}_r(X) = \lim_{\rho \to \infty} \frac{1}{\lambda_d(\rho W)}\, \mathbb{E} \sum_{K \in X} V_r(K \cap \rho W). \tag{5.2.3}$$

Beweis. The following argument is a revision of the proof given in [6, Thm. 9.2.2]. We set $f = V_r$, write C^d for the unit cube $[0,1]^d$ and define $\partial^+ C^d := C^d \setminus [0,1)^d \in \mathcal{R}$. For $M \in \mathcal{K}$, let $Z_M := \{z \in \mathbb{Z}^d : M \cap (C^d + z) \neq \emptyset\}$. If $z \in Z_M$, then $C^d + z \subset M + \sqrt{d}B^d$, hence $|Z_M| \leq V_d(M + \sqrt{d}B^d)$. Let $W \in \mathcal{K}$ and $x \in \mathbb{R}^d$ be fixed. Since $K \mapsto f(K \cap (W - x))$ is additive on $\mathcal{R}$, it follows from Lemma 4.2.3 that

$$f(K \cap (W - x)) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} f_{W-x}(K, z), \quad K \in \mathcal{K},$$

where

$$f_M(L, y) := f(L \cap M \cap (C^d + y)) - f(L \cap M \cap (\partial^+ C^d + y))$$

for $L \in \mathcal{K}$, $M \in \mathcal{K} \cup \{\mathbb{R}^d\}$ and $y \in \mathbb{R}^d$. Since f is translation invariant, additive on $\mathcal{R}$ and conditionally bounded, we have $|f_M(L, y)| \leq b$ with a constant $b > 0$ which depends only onf f and d (and is independent of L, M, y). Moreover, by the translation invariance of f,

$$f((K + x) \cap W) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} f_W(K + x, z + x), \quad K \in \mathcal{K}.$$

Since $(K + x) \cap (C^d + z + x) \neq \emptyset$ if and only if $K \cap (C^d + z) \neq \emptyset$, we have

$$\begin{aligned} |f((K + x) \cap W)| &\leq \sum_{z \in Z_K} |f_W(K + x, z + x)| \\ &\leq \sum_{z \in Z_K} b\, \mathbf{1}\{W \cap (C^d + z + x) \neq \emptyset\}, \end{aligned} \tag{5.2.4}$$

and hence

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |f((K + x) \cap W)| \, \lambda_d(dx) &\leq \sum_{z \in Z_K} b\, V_d(W + \sqrt{d}B^d) \\ &\leq b\, V_d(K + \sqrt{d}B^d) V_d(W + \sqrt{d}B^d). \end{aligned} \tag{5.2.5}$$

This implies that

$$\int_{\mathcal{K}_o} \int_{\mathbb{R}^d} |f((K + x) \cap W)| \, \lambda_d(dx) \, \mathbb{Q}(dK) < \infty$$

for $W \in \mathcal{K}$. In addition, (5.2.4) shows (with $x = 0$ and $W \supset K$) that

$$|f(K)| \leq \sum_{z \in Z_K} b \leq b\, V_d(K + \sqrt{d}B^d),$$

which implies that

$$\int_{\mathcal{K}_o} |f(K)| \, \mathbb{Q}(dK) < \infty.$$

For $\rho > 0$ and $W \in \mathcal{K}$, we define

$$A_\rho := \{x \in \mathbb{R}^d : (C^d + x) \cap \rho W \neq \emptyset\}$$

and have the disjoint decomposition $A_\rho = A_\rho^1 \cup A_\rho^2$ with

$$A_\rho^1 := \{x \in \mathbb{R}^d : C^d + x \subset \operatorname{int} \rho W\}, \; A_\rho^2 := \{x \in \mathbb{R}^d : (C^d + x) \cap \partial \rho W \neq \emptyset\}.$$

Now, (5.2.4) and (5.2.5) (with W replaced by ρW) allow us to interchange summation and integration, and then we use first the translation invariance of λ_d and then the definition of A_ρ (for the second equation), to get

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} f((K+x)\cap \rho W)\,\lambda_d(dx) &= \sum_{z\in Z_K}\int_{\mathbb{R}^d} f_{\rho W}(K+x, z+x)\,\lambda_d(dx)\\ &= \sum_{z\in Z_K}\int_{A_\rho} f_{\rho W}(K+x-z, x)\,\lambda_d(dx)\\ &= I_1(\rho, K) + I_2(\rho, K),\end{aligned}$$

where

$$I_i(\rho, K) := \sum_{z\in Z_K}\int_{A_\rho^i} f_{\rho W}(K+x-z, x)\,\lambda_d(dx), \quad i\in\{1,2\}.$$

We use the definition of A_ρ^1, the translation invariance of f and again Lemma 4.2.3 to get

$$\begin{aligned}I_1(\rho, K) &= \sum_{z\in Z_K}\int_{A_\rho^1} f_{\mathbb{R}^d}(K+x-z, x)\,\lambda_d(dx)\\ &= \sum_{z\in Z_K}\int_{A_\rho^1} f_{\mathbb{R}^d}(K, z)\,\lambda_d(dx)\\ &= \sum_{z\in Z_K} f_{\mathbb{R}^d}(K, z)\lambda_d(A_\rho^1)\\ &= f(K)\lambda_d(A_\rho^1). \end{aligned}\tag{5.2.6}$$

Moreover, we have

$$|I_2(\rho, K)| \le \sum_{z\in Z_K} b\,\lambda_d(A_\rho^2) \le b\,V_d(K+\sqrt{d}B^d)\lambda_d(A_\rho^2). \tag{5.2.7}$$

Clearly,

$$\lim_{\rho\to\infty}\frac{\lambda_d(A_\rho^1)}{\lambda_d(\rho W)} = 1, \qquad \lim_{\rho\to\infty}\frac{\lambda_d(A_\rho^2)}{\lambda_d(\rho W)} = 0. \tag{5.2.8}$$

Hence, by Campbell's theorem

$$\begin{aligned}&\lim_{\rho\to\infty}\frac{1}{\lambda_d(\rho W)}\,\mathbb{E}\sum_{K\in X} f(K\cap \rho W)\\ &= \gamma\lim_{\rho\to\infty}\frac{1}{\lambda_d(\rho W)}\int_{\mathcal{K}_o}\int_{\mathbb{R}^d} f((K+x)\cap\rho W)\,\lambda_d(dx)\,\mathbb{Q}(dK)\\ &= \gamma\lim_{\rho\to\infty}\frac{1}{\lambda_d(\rho W)}\int_{\mathcal{K}_o} I_1(\rho, K) + I_2(\rho, K)\,\mathbb{Q}(dK)\\ &= \gamma\lim_{\rho\to\infty}\frac{\lambda_d(A_\rho^1)}{\lambda_d(\rho W)}\int_{\mathcal{K}_o} f(K)\,\mathbb{Q}(dK) + \gamma\lim_{\rho\to\infty}\frac{1}{\lambda_d(\rho W)}\int_{\mathcal{K}_o} I_2(\rho, K)\,\mathbb{Q}(dK)\\ &= \gamma\int_{\mathcal{K}_o} f(K)\,\mathbb{Q}(dK),\end{aligned}$$

where we used (5.2.6), (5.2.7) and (5.2.8). □

Korollar 5.2.3 *Let X be a stationary particle process in $\mathbb{R}^d$ with a locally finite intensity measure and intensity γ. Then*

$$\gamma = \lim_{\rho\to\infty} \frac{1}{\lambda_d(\rho W)} \mathbb{E} \sum_{K\in X} \mathbb{1}\{K \cap \rho W \neq \emptyset\} \tag{5.2.9}$$

and

$$\lim_{\rho\to\infty} \frac{1}{\lambda_d(\rho W)} \mathbb{E} \sum_{K\in X} \mathbb{1}\{K \cap \partial\rho W \neq \emptyset\} = 0. \tag{5.2.10}$$

Beweis. Since V_0 is the Euler characteristic and $\overline{V}_0 = \gamma$, relation (5.2.9) follows from (5.2.3) for $r = 0$.

For the proof of (5.2.10), we note that

$$\frac{1}{\lambda_d(\rho W)} \mathbb{E} \sum_{K\in X} \mathbb{1}\{K \cap \partial\rho W \neq \emptyset\} = \frac{\gamma}{\lambda_d(W)} \int_{\mathcal{K}_c} \lambda_d(\rho^{-1}K + \partial(-W))\, \mathbb{Q}(dK)$$

by Campbell's theorem. Since $\lambda_d(\rho^{-1}K + \partial(-W)) \leq \lambda_d(K + \partial(-W))$ for $\rho \geq 1$ and $\lim_{\rho\to\infty} \lambda_d(\rho^{-1}K + \partial(-W)) = 0$, the assertion (5.2.10) follows from the dominated convergence theorem. □

Now we derive a series of density relations for stationary random tessellations, which in the next section will be applied to hyperplane tessellations. The following relations are due to Viola Weiss, though with a different proof.

For the rest of this subsection, we assume that X is a stationary random face-to-face tessellation in $\mathbb{R}^d$. Further, we suppose that the k-face processes $X^{(k)}$, for $k \in \{0, \dots, d\}$, of X have locally finite intensity measures. Here we define

$$X^{(k)} := \mathcal{F}_k(X) := \bigcup_{m\in X} \mathcal{F}_k(m) = \sum_{m\in\mathcal{F}_k(X)} \delta_m$$

and observe that with X also $X^{(k)}$ is stationary. The intensity and the shape distribution of $X^{(k)}$ are denoted by $\gamma^{(k)}$ and $\mathbb{Q}^{(k)}$, respectively. The latter is also called the distribution of the typical k-face of X. If $k = d$ the upper indices may be omitted and $\mathbb{Q}^{(d)} = \mathbb{Q}$ is the distribution of the typical cell of the stationary random tessellation $X = X^{(d)}$.

Theorem 5.2.4 *Let X be a stationary random face-to-face tessellation in $\mathbb{R}^d$. Suppose that the k-face processes of X have locally finite intensity measures. Then*

$$\sum_{k=j}^{d} (-1)^k \overline{V}_j(X^{(k)}) = 0 \quad \textit{for } j = 0, \dots, d-1.$$

In particular,

$$\sum_{k=0}^{d} (-1)^k \gamma^{(k)} = 0 \quad \textit{for } j = 0, \dots, d-1.$$

Beweis. The initial considerations hold for an arbitrary fixed face-to-face tessellation T. Let $C_1, \dots, C_p$ be the cells of T that meet an "observation window" $W \in \mathcal{K}^d$. Let $j \in \{0, \dots, d-1\}$. The inclusion-exclusion principle (additivity) yields

$$V_j(W) \;=\; V_j\left(W \cap \bigcup_{i=1}^{p} C_i\right)$$

$$= \sum_{r=1}^{p}(-1)^{r-1}\sum_{i_1<\cdots<i_r} V_j(W\cap C_{i_1}\cap\cdots\cap C_{i_r}).$$

If $C_{i_1}\cap\cdots\cap C_{i_r}$ is not empty, it is a face of the tessellation T, of some dimension k, and in addition we have $k\ge j$ if $V_j(W\cap C_{i_1}\cap\cdots\cap C_{i_r})\ne 0$. Further, each face F of T with $V_j(W\cap F)\ne 0$ is of the form $F=C_{i_1}\cap\cdots\cap C_{i_r}$ for a suitable choice $C_{i_1},\dots,C_{i_r}$ of the cells $C_1,\dots,C_p$. Therefore

$$V_j(W)=\sum_{k=j}^{d}\sum_{F\in\mathcal{F}_k(T)} V_j(W\cap F)\sum_{r=1}^{p}(-1)^{r-1}\nu(F,r), \tag{5.2.11}$$

where $\nu(F,r)$ denotes the number of r-tuples $(C_{i_1},\dots,C_{i_r})$ with $C_{i_1}\cap\cdots\cap C_{i_r}=F$. We claim that

$$\sum_{r=1}^{p}(-1)^{r-1}\nu(F,r)=(-1)^{d-\dim F}. \tag{5.2.12}$$

For the proof, we first assume that $F=\{x\}$ with $x\in B^d$. Then we can assume that $C_1,\dots,C_m$ are precisely the cells of T that contain x. We can choose a polytope P with $x\in\operatorname{int}P$ and such that the cells of T meeting P are precisely $C_1,\dots,C_m$. We use the Euler characteristic χ (for finite unions of convex polytopes) and its properties that $\chi(\partial P)=1-(-1)^d$ and that a line-free convex polyhedral cone $C\ne\{x\}$ with apex x satisfies $\chi(C\cap\partial P)=1$. Any intersection $C_{i_1}\cap\cdots\cap C_{i_r}$ with $1\le i_1<\cdots<i_r\le m$ is either equal to $\{x\}$ or is a polytope with vertex x that has nonempty intersection with ∂P. It follows that

$$\chi(C_{i_1}\cap\cdots\cap C_{i_r}\cap\partial P)=\begin{cases}0 & \text{if } C_{i_1}\cap\cdots\cap C_{i_r}=\{x\},\\ 1 & \text{else.}\end{cases}$$

This, together with the inclusion-exlusion principle, gives

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}\nu(\{x\},r) &= \sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}\sum_{i_1<\cdots<i_r}[1-\chi(C_{i_1}\cap\cdots\cap C_{i_r}\cap\partial P)]\\ &= 1-\chi(\partial P)=1-(1-(-1)^d)=(-1)^d.\end{aligned}$$

This proves (5.2.12) if $\dim F=0$. If $\dim F>0$, then (5.2.12) is obtained by choosing a $(d-\dim F)$-dimensional plane that intersects F transversally in a relatively interior point, and applying the foregoing to the intersection of T with E.

From (5.2.11) and (5.2.12) we get

$$\sum_{k=j}^{d}(-1)^{d-k}\sum_{F\in\mathcal{F}_k(T)} V_j(F\cap W)=V_j(W). \tag{5.2.13}$$

Now let X be a stationary random face-to-face tessellation in $\mathbb{R}^d$. Then

$$\sum_{k=j}^{d}(-1)^{d-k}\sum_{F\in\mathcal{F}_k(X)} V_j(F\cap W)=V_j(W)\quad\text{a.s.}$$

Here

$$\mathbb{E}\sum_{F\in\mathcal{F}_k(X)} V_j(F\cap W)\le V_j(W)\,\mathbb{E}\sum_{F\in\mathcal{F}_k(X)}\mathbb{1}\{F\cap W\ne\emptyset\}<\infty,$$

since the k-face processes of X have finite intensities. In (5.2.11), we specialize W to ρB^d with $\rho > 0$ and thus obtain

$$\sum_{k=j}^{d}(-1)^{d-k}\,\mathbb{E}\sum_{F\in X^{(k)}} V_j(F\cap \rho B^d) = V_j(\rho B^d).$$

Now we can conclude that

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\rho\to\infty}\frac{V_j(\rho B^d)}{V_d(\rho B^d)} \quad (\text{since } j<d)\\ &= \lim_{\rho\to\infty}\frac{1}{\lambda_d(\rho B^d)}\,\mathbb{E}\sum_{k=j}^{d}(-1)^{d-k}\sum_{F\in X^{(k)}} V_j(F\cap\rho B^d)\\ &= \sum_{k=j}^{d}(-1)^{d-k}\,\overline{V}_j(X^{(k)}), \end{aligned}$$

by Theorem 5.2.2. This was the assertion. □

5.3 Dichterelationen für Hyperebenenmosaike

We now want to approach the determination of the densities $\overline{Y}_{r,s}(X^{(k)})$ of the functionals $Y_{r,s}$, introduced in the previous section, for typical k-faces of random hyperplane tessellations.

In the following, we say that a system of hyperplanes in $\mathbb{R}^d$ is in translationally general position if every k-dimensional plane of $\mathbb{R}^d$ is contained in at most $d-k$ hyperplanes of the system, for $k = 0, \dots, d-1$.

Henceforth, we assume that a stationary hyperplane process $\widehat{X}$ is given, which generates a random hyperplane tessellation X in translationally general position that has k-face processes with positive, locally finite intensity measures. Then the k-face process $X^{(k)}$ of X has an intensity $\gamma^{(k)} > 0$ and a grain distribution $\mathbb{Q}^{(k)}$. The **typical k-face** of X was defined as a random polytope $Z^{(k)}$ with distribution $\mathbb{Q}^{(k)}$.

We recall that the typical k-cell has the following intuitive interpretations. If $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ is an arbitrary Borel set with $0 < \lambda_d(B) < \infty$, then

$$\mathbb{P}(Z^{(k)}\in A) = \frac{\mathbb{E}\sum_{P\in X^{(k)},\,c(P)\in B}\mathbb{1}_A(P-c(P))}{\mathbb{E}\sum_{P\in X^{(k)},\,c(P)\in B}1}$$

for $A \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$. And if $W \in \mathcal{K}$ has positive volume, then

$$\mathbb{P}(Z^{(k)}\in A) = \lim_{r\to\infty}\frac{\mathbb{E}\sum_{P\in X^{(k)},\,P\subset rW}\mathbb{1}_A(P-c(P))}{\mathbb{E}\sum_{P\in X^{(k)},\,P\subset rW}1}.$$

Let f be a translation invariant nonnegative function on polytopes in $\mathbb{R}^d$. We recall that the f-density of the face process $X^{(k)}$ is defined by

$$\overline{f}(X^{(k)}) = \gamma^{(k)}\mathbb{E}f(Z^{(k)}). \tag{5.3.1}$$

The following theorem reduces the determination of several general densities to that of a few basic ones.

Theorem 5.3.1 *Let X be a stationary random hyperplane tessellation in translationally general position in $\mathbb{R}^d$, and let $Z^{(k)}$ denote its typical k-face ($k = 0, \dots, d$). Suppose that for the generating hyperplane process $\widehat{X}$, the ℓth order intersection process $\widehat{X}_\ell$ exists and has finite intensity $\widehat{\gamma}_\ell$ ($\ell = 1, \dots, d$). Then, for $0 \leq r \leq s \leq k \leq d$, the following holds.*

$$\overline{Y}_{r,s}(X^{(k)}) = 2^{k-s}\binom{d-s}{d-k}\binom{d-r}{d-s}\overline{V}_r(X^{(r)}), \tag{5.3.2}$$

in particular (case $s = k$)

$$\overline{V}_r(X^{(k)}) = \binom{d-r}{d-k}\overline{V}_r(X^{(r)}), \tag{5.3.3}$$

especially (case $r = 0$)

$$\gamma^{(k)} = \binom{d}{k}\widehat{\gamma}_d. \tag{5.3.4}$$

Further,

$$\mathbb{E}Y_{r,s}(Z^{(k)}) = 2^{k-s}\binom{k}{s}\binom{s}{r}\mathbb{E}V_r(Z^{(r)}), \tag{5.3.5}$$

in particular (case $s = k$)

$$\mathbb{E}V_r(Z^{(k)}) = \binom{k}{r}\mathbb{E}V_r(Z^{(r)}), \tag{5.3.6}$$

and (case $r = 0$ of (5.3.5))

$$\mathbb{E}f_s(Z^{(k)}) = 2^{k-s}\binom{k}{s}. \tag{5.3.7}$$

Beweis. Let $0 \leq j < k \leq d$ (the case $k = 0$ is trivial), let $\rho > 0$. We work with a realization of $\widehat{X}$ that is in translationally general position. (In the following, $\widehat{X}_0$ has to be read as $\mathbb{R}^d$, and $\widehat{\gamma}_0 := 1$. Of course, $\widehat{X}_1 = \widehat{X}$.) In every k-plane E of the intersection process $\widehat{X}_{d-k}$, a tessellation is induced by the intersections of the hyperplanes in $\widehat{X}$ with E. To this tessellation, we apply (5.2.13) and then sum over all $E \in \widehat{X}_{d-k}$, to obtain

$$\begin{aligned}\sum_{E\in\widehat{X}_{d-k}} V_j(E\cap\rho B^d) &= \sum_{i=j}^{k}(-1)^{k-i}\sum_{E\in\widehat{X}_{d-k}}\ \sum_{F\in X^{(i)},\,F\subset E} V_j(F\cap\rho B^d)\\ &= \sum_{i=j}^{k}(-1)^{k-i}\binom{d-i}{d-k}\sum_{F\in X^{(i)}} V_j(F\cap\rho B^d),\end{aligned}$$

since every i-face of X is (under translational general position) contained in precisely $\binom{d-i}{d-k}$ planes of the intersection process $\widehat{X}_{d-k}$. We take the expectation and divide by $\lambda_d(\rho B^d)$. On the left side, we obtain

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda_d(\rho B^d)}\mathbb{E}\sum_{E\in\widehat{X}_{d-k}} V_j(E\cap\rho B^d) &\leq \frac{\rho^j V_j(B^k)}{\lambda_d(\rho B^d)}\mathbb{E}\sum_{E\in\widehat{X}_{d-k}}\mathbb{1}\{E\cap\rho B^d\neq\emptyset\}\\ &= \frac{\rho^j V_j(B^k)}{\lambda_d(\rho B^d)}\rho^{d-k}\kappa_{d-k}\widehat{\gamma}_{d-k}\\ &\to 0 \quad \text{as } \rho\to\infty,\end{aligned}$$

since $j < k$ and $\widehat{\gamma}_{d-k} < \infty$. The result is

$$0 = \lim_{\rho\to\infty} \frac{1}{\lambda_d(\rho B^d)} \sum_{i=j}^{k} (-1)^{k-i} \binom{d-i}{d-k} \mathbb{E} \sum_{F\in X^{(i)}} V_j(F \cap \rho B^d)$$

$$= \sum_{i=j}^{k} (-1)^i \binom{d-i}{d-k} \overline{V}_j(X^{(i)}),$$

by Theorem 5.2.2. For each $j \in \{0, \dots, d-1\}$, we have obtained a system of linear equations for $\overline{V}_j(X^{(j)}), \dots, \overline{V}_j(X^{(d)})$, the solution of which is

$$\overline{V}_j(X^{(i)}) = \binom{d-j}{d-i} \overline{V}_j(X^{(j)}), \quad i = j, \dots, d,$$

by elementary identities for binomial coefficients. These are the relations (5.3.3).

The proof of (5.3.2) relies on the fact that every s-face of X with $s \le k$ lies in precisely $2^{k-s}\binom{d-s}{d-k}$ k-faces of X. We use [6, Thm. 10.1.1], with j replaced by s and with the function $f(S,T) := V_r(T)$. Together with [6, (10.9)], this yields

$$\gamma^{(s)} \int_{\mathcal{K}_c} 2^{k-s} \binom{d-s}{d-k} V_r(T)\, \mathbb{Q}^{(s)}(dT) = \gamma^{(k)} \int_{\mathcal{K}_c} Y_{r,s}(S)\, \mathbb{Q}^{(k)}(dS),$$

hence

$$2^{k-s} \binom{d-s}{d-k} \overline{V}_r(X^{(s)}) = \overline{Y}_{r,s}(X^{(k)}).$$

In view of (5.3.3), we have obtained (5.3.2).

Specializing (5.3.3) to $r = 0$, we obtain $\gamma^{(k)} = \binom{d}{k}\gamma^{(0)}$. Since $\gamma^{(0)} = \widehat{\gamma}_d$, this is relation (5.3.4). In view of (5.3.1) and (5.3.4), relation (5.3.5) is equivalent to (5.3.2). The remaining relations are special cases. □

We see from (5.3.1) and (5.3.4) that

$$\overline{V}_r(X^{(r)}) = \binom{d}{r} \widehat{\gamma}_d\, \mathbb{E} V_r(Z^{(r)}).$$

Thus, all densities and expectations appearing in Theorem 5.3.1 can be deduced if we know $\widehat{\gamma}_d$, the dth order intersection density of the generating hyperplane process $\widehat{X}$, and $\mathbb{E}V_r(Z^{(r)})$, the expectation of the r-dimensional volume of the typical r-face, for $r = 1, \dots, d$. These quantities, however, will heavily depend on the distribution of the generating hyperplane process. Under Poisson assumptions, explicit representations will be available, from which the kind of dependence on the spherical directional distribution is revealed.

A very special case of Theorem 5.3.1, namely (5.3.7) for $k = d$ and $s = 0$, says that

$$\mathbb{E} f_0(Z^{(d)}) = 2^d,$$

that is, the expected vertex number of the typical cell of a stationary hyperplane tessellation (satisfying the assumptions) is equal to 2^d. Since this is independent of the spherical directional distribution, it is necessarily the same value as for a parallel process, where it is obvious. This independence of the directional distribution is drastically lost (even under Poisson assumptions) if we consider higher moments.

5.4 Palmsche Wahrscheinlichkeitsmaße (ausgelassen)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Wir betrachten einen *Fluss* $\{\theta_x : x \in \mathbb{R}^d\}$, d.h. eine Familie von Abbildungen $\theta_x \colon \Omega \to \Omega$, sodass

(i) die Abbildung $\Omega \times \mathbb{R}^d \to \Omega$, $(\omega, x) \mapsto \theta_x \omega$ messbar ist,

(ii) $\theta_y \circ \theta_x = \theta_{x+y}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$ gilt und

(iii) $\theta_0 = \mathrm{id}_\Omega$ gilt.

Insbesondere ist θ_x bijektiv mit $\theta_x^{-1} = \theta_{-x}$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ und messbar.

5.4.1 Beispiel. Für $\Omega = \mathcal{F}^d$ sei

$$\theta_x F := F + x, \quad x \in \mathbb{R}^d, F \in \mathcal{F}^d.$$

Dies ist ein Fluss.

5.4.2 Beispiel. Wir setzen das vorherige Beispiel fort und erklären einen Fluss auf $\Omega = \mathbb{M}^*$, indem wir

$$\theta_x \mathfrak{m} := \{\theta_x C : C \in \mathfrak{m}\}, \quad x \in \mathbb{R}^d, \mathfrak{m} \in \mathbb{M}^*$$

definieren. Auch dies ist ein Fluss, der für die später zu beweisenden Mittelwertformeln ausreicht. Für manche Anwendungen ist es aber sinnvoll, zusätzlichen Zufall zuzulassen.

5.4.3 Beispiel. Auf dem messbaren Raum $(M(\mathbb{R}^d), \mathcal{M}(\mathbb{R}^d))$ aller lokal-endlichen Maße auf $\mathbb{R}^d$ bilden die zu Beginn von Abschnitt 2.3 definierten Verschiebungsoperatoren T_x, $x \in \mathbb{R}^d$, einen Fluss (siehe auch Bemerkung 5.4.7). Man kann auch auf diesem Raum ein stationäres Mosaik definieren. Dazu betrachtet man für ein Mosaik $\mathfrak{m}$ die Vereinigung der Ränder aller Zellen von $\mathfrak{m}$ und das darauf gegebene $(d-1)$-dimensionale Hausdorff-Maß. Aus diesem Maß lässt sich das Mosaik $\mathfrak{m}$ zurückgewinnen. Als Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ kann das Bild der Verteilung eines stationären Mosaiks unter der oben beschriebenen Abbildung verwendet werden.

Auch die in Definition 3.1.7 definierten Verschiebungen von Maßen auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{M}$ (mit einem Markenraum $\mathbb{M}$) bilden einen Fluss.

5.4.4 Definition (und Voraussetzung)**.** Das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf $(\Omega, \mathcal{A})$ sei *invariant* bezüglich des gegebenen Flusses $\{\theta_x : x \in \mathbb{R}^d\}$ auf Ω, d.h.

$$\mathbb{P}(\theta_x A) = \mathbb{P}(A), \quad x \in \mathbb{R}^d, A \in \mathcal{A},$$

wobei $\theta_x A := \{\theta_x \omega : \omega \in A\}$.

5.4.5 Definition. Ein zufälliges Maß η auf $\mathbb{R}^d$ heißt *invariant* (oder auch adaptiert), falls

$$\eta(\theta_x \omega, B + x) = \eta(\omega, B), \quad \omega \in \Omega, B \in \mathcal{B}^d, x \in \mathbb{R}^d$$

bzw.

$$\eta(\theta_x \omega, B) = \eta(\omega, B - x), \quad \omega \in \Omega, B \in \mathcal{B}^d, x \in \mathbb{R}^d$$

gilt.

5.4.6 Bemerkung. Ein zufälliges Maß η auf $\mathbb{R}^d$ ist genau dann invariant, wenn für alle $\omega \in \Omega$, $B \in \mathcal{B}^d$ und $x \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$\eta(\theta_x \omega, B) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{z + x \in B\}\, \eta(\omega, dz).$$

5.4.7 Bemerkung. Ein invariantes zufälliges Maß η ist *stationär*, d.h.

$$T_x\eta \overset{d}{=} \eta, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Dabei ist für ein Maß μ auf $\mathbb{R}^d$

$$T_x\mu(B) := \mu(B - x), \quad x \in \mathbb{R}^d, B \in \mathcal{B}^d.$$

In der Tat gilt für $B_1, \ldots, B_m \in \mathcal{B}^d$, $x \in \mathbb{R}^d$ und $\omega \in \Omega$:

$$\begin{aligned}\big(T_x\eta(\omega, B_1), \ldots, T_x\eta(\omega, B_m)\big) &= \big(\eta(\omega, B_1 - x), \ldots, \eta(\omega, B_m - x)\big)\\ &= \big(\eta(\theta_x\omega, B_1), \ldots, \eta(\theta_x\omega, B_m)\big).\end{aligned}$$

Deswegen folgt aus $\mathbb{P} \circ \theta_x = \mathbb{P}$ die Verteilungsgleichheit

$$\big(T_x\eta(B_1), \ldots, T_x\eta(B_m)\big) \overset{d}{=} \big(\eta(B_1), \ldots, \eta(B_m)\big)$$

und damit die Behauptung.

5.4.8 Definition. Ist η ein invariantes zufälliges Maß auf $\mathbb{R}^d$, so heißt

$$\gamma_\eta := \mathbb{E}[\eta([0, 1]^d)]$$

Intensität von η.

5.4.9 Bemerkung. Ist η ein invariantes zufälliges Maß auf $\mathbb{R}^d$ und $\mathbb{E}[\eta([0, 1]^d)] < \infty$, so gilt

$$\mathbb{E}[\eta(B)] = \gamma_\eta\lambda_d(B), \quad B \in \mathcal{B}^d.$$

Dies folgt sofort daraus, dass $\mathbb{E}[\eta(\cdot)]$ ein translationsinvariantes, lokalendliches Maß auf der Borelschen σ-Algebra von $\mathbb{R}^d$ ist.

5.4.10 Theorem (Verallgemeinerte Campbell-Formel)**.** *Es sei η ein invariantes zufälliges Maß auf $\mathbb{R}^d$ mit $0 < \gamma_\eta < \infty$. Dann existiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^0_\eta$ auf $(\Omega, \mathcal{A})$ mit*

$$\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^d} f(\theta_{-x}, x)\, \eta(dx)\right] = \gamma_\eta \mathbb{E}^0_\eta\left[\int_{\mathbb{R}^d} f(\theta_0, x)\, dx\right] \tag{5.4.1}$$

für messbare Funktionen $f : \Omega \times \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$, wobei $\mathbb{E}^0_\eta$ den Erwartungswert bezüglich $\mathbb{P}^0_\eta$ bezeichnet.

Beweis. Der Beweis ist analog zum Beweis von Satz **??**. Für $A \in \mathcal{A}$ sei

$$\Lambda_A(B) := \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{x \in B, \theta_{-x} \in A\}\, \eta(dx)\right], \quad B \in \mathcal{B}^d.$$

Es seien $B \in \mathcal{B}^d$ und $z \in \mathbb{R}^d$. Dann gilt, wenn zunächst die Invarianz von $\mathbb{P}$ und dann die Invarianz von η verwendet wird,

$$\begin{aligned}\Lambda_A(B + z) &= \int_\Omega \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{x \in B + z, \theta_{-x}\omega \in A\}\, \eta(\omega, dx)\, \mathbb{P}(d\omega)\\ &= \int_\Omega \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{x - z \in B, \underbrace{\theta_{-x} \circ \theta_z}_{=\theta_{-(x-z)}} \omega \in A\}\, \eta(\theta_z\omega, dx)\, \mathbb{P}(d\omega)\end{aligned}$$

$$= \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{y \in B, \theta_{-y}\omega \in A\} \, \eta(\omega, dy) \, \mathbb{P}(d\omega)$$
$$= \Lambda_A(B).$$

Somit gilt

$$\Lambda_A(B) = \mathbb{P}'_\eta(A)\lambda_d(B), \quad B \in \mathcal{B}^d,$$

mit einer von A abhängenden Konstanten $0 \leq P'_\eta(A)$. Für $B = [0,1]^d$ folgt $\mathbb{P}'_\eta(\Omega) = \gamma_\eta < \infty$. Also ist $\mathbb{P}'_\eta$ ein endliches Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Mit $\mathbb{P}^0_\eta := \gamma_\eta^{-1}\mathbb{P}'_\eta$ erhält man

$$\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{x \in B\}\mathbb{1}\{\theta_{-x} \in A\} \, \eta(dx)\right] = \gamma_\eta \mathbb{P}^0_\eta(A)\lambda_d(B).$$

Algebraische Induktion führt nun zur Behauptung. □

5.4.11 Bemerkung. Unter den Voraussetzungen des Satzes gilt auch “die äquivalente Gleichung”

$$\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^d} f(\theta_0, x) \, \eta(dx)\right] = \gamma_\eta \mathbb{E}^0_\eta\left[\int_{\mathbb{R}^d} f(\theta_x, x) \, dx\right]. \tag{5.4.2}$$

5.4.12 Definition. Das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^0_\eta$ aus Theorem 5.4.10 heißt *Palmsches Wahrscheinlichkeitsmaß* von η.

5.4.13 Bemerkung. Für $B \in \mathcal{B}^d$ mit $0 < \lambda_d(B) < \infty$ und $A \in \mathcal{A}$ folgt aus (5.4.1) mit $f(\omega, x) := \mathbb{1}_A(\omega)\mathbb{1}_B(x)$ die Darstellung

$$\mathbb{P}^0_\eta(A) = \frac{1}{\gamma_\eta \lambda_d(B)} \mathbb{E}\left[\int_B \mathbb{1}_A(\theta_{-x}) \, \eta(dx)\right] \tag{5.4.3}$$
$$= \frac{1}{\gamma_\eta \lambda_d(B)} \int_\Omega \int_B \mathbb{1}\{\omega \in \theta_x A\} \, \eta(\omega, dx) \, \mathbb{P}(d\omega).$$

Für eine messbare Funktion $h\colon \Omega \to [0, \infty)$ folgt analog mit $f(\omega, x) := h(\omega)\mathbb{1}_B(x)$ die Gleichung

$$\mathbb{E}^0_\eta[h] = \frac{1}{\gamma_\eta \lambda_d(B)} \mathbb{E}\left[\int_B h(\theta_{-y}) \, \eta(dy)\right]. \tag{5.4.4}$$

Man kann $\mathbb{P}^0_\eta$ als das Wahrscheinlichkeitsmaß interpretieren, welches das zugrundeliegende stochastische Experiment aus der Sicht eines „zufällig ausgewählten“ Punktes in der „Masse“ von η beschreibt. Diese etwas vage Aussage kann mit Ergodentheorie präzisiert werden. Im Falle eines einfachen Punktprozesses kann $\mathbb{P}^0_\eta(\eta \in \cdot)$ auch als bedingte Verteilung von η interpretiert werden. Dabei bedingt man auf das Ereignis, dass im Punkt 0 ein Punkt von η liegt. Auch darauf gehen wir hier nicht näher ein.

5.4.14 Theorem (Austauschformel von Neveu)**.** *Sind η, η' invariante zufällige Maße mit positiven und endlichen Intensitäten, so gilt für alle messbaren Funktionen $g\colon \Omega \times \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$*

$$\gamma_\eta \mathbb{E}^0_\eta\left[\int_{\mathbb{R}^d} g(\theta_{-x}, x) \, \eta'(dx)\right] = \gamma_{\eta'} \mathbb{E}^0_{\eta'}\left[\int_{\mathbb{R}^d} g(\theta_0, -x) \, \eta(dx)\right]. \tag{5.4.5}$$

Beweis. Es seien $B \in \mathcal{B}^d$ mit $\lambda_d(B) = 1$ und $g\colon \Omega \times \mathbb{R}^d \to [0,\infty]$ eine messbare Abbildung. Aus (5.4.4) mit

$$h(\omega) := \int_{\mathbb{R}^d} g(\theta_{-x}\omega, x)\, \eta'(\omega, dx),$$

der Flusseigenschaft, der Invarianz des zufälligen Maßes η' und dem Satz von Fubini folgt dann

$$\begin{aligned}
\gamma_\eta \mathbb{E}^0_\eta \left[\int_{\mathbb{R}^d} g(\theta_{-x}, x)\, \eta'(dx)\right] &= \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_B(y) g(\theta_{-x}\circ\theta_{-y}, x)\, \eta'(\theta_{-y}, dx)\, \eta(dy)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_B(y) g(\theta_{-(x+y)}, x)\, \eta'(\theta_{-y}, dx)\, \eta(dy)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_B(y) g(\theta_{-(x-y+y)}, x-y)\, \eta'(dx)\, \eta(dy)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_B(y) g(\theta_{-x}, x-y)\, \eta(dy)\, \eta'(dx)\right].
\end{aligned}$$

Mit der Invarianz von η, der verallgemeinerten Campbell-Formel (5.4.1) für η' mit

$$f(\omega, x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_B(z+x) g(\omega, -z)\, \eta(\omega, dz),$$

dem Satz von Fubini und $\lambda_d(B) = 1$ folgt weiter

$$\begin{aligned}
\gamma_\eta \mathbb{E}^0_\eta \left[\int_{\mathbb{R}^d} g(\theta_{-x}, x)\, \eta'(dx)\right] &= \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_B(z+x) g(\theta_{-x}, -z)\, \eta(\theta_{-x}, dz)\, \eta'(dx)\right] \\
&= \gamma_{\eta'} \mathbb{E}^0_{\eta'}\left[\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_B(z+x) g(\theta_0, -z)\, \eta(\theta_0, dz)\, dx\right] \\
&= \gamma_{\eta'} \mathbb{E}^0_{\eta'}\left[\int_{\mathbb{R}^d} g(\theta_0, -z) \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_B(z+x)\, dx\, \eta(\theta_0, dz)\right] \\
&= \gamma_{\eta'} \mathbb{E}^0_{\eta'}\left[\int_{\mathbb{R}^d} g(\theta_0, -z)\, \eta(dz)\right].
\end{aligned}$$

Dies zeigt die behauptete Gleichung. □

5.4.15 Bemerkung. Es sei $\eta' = \lambda_d$. Dann gilt $\gamma_{\eta'} = 1$ und $\mathbb{P}^0_{\eta'} = \mathbb{P}$. In der Tat, wir erhalten aus (5.4.3), dass

$$\begin{aligned}
\gamma_{\eta'} \mathbb{P}^0_{\eta'}(A) &= \frac{1}{\lambda_d(B)} \mathbb{E} \int_B \mathbb{1}_A(\theta_{-x})\, \lambda_d(dx) \\
&= \frac{1}{\lambda_d(B)} \int_B \underbrace{\mathbb{E}\mathbb{1}_A(\theta_{-x})}_{=\mathbb{P}(A)}\, \lambda_d(dx) \\
&= \mathbb{P}(A).
\end{aligned}$$

Hieraus folgen beide Behauptungen. Gleichung (5.4.5) bedeutet dann

$$\gamma_\eta \mathbb{E}^0_\eta \left[\int_{\mathbb{R}^d} g(\theta_{-x}, x)\, dx\right] = \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^d} g(\theta_0, -x)\, \eta(dx)\right].$$

Dies ist äquivalent zu (5.4.1) und zu (5.4.2).

5.5 Allgemeine Mittelwertformeln (ausgelassen)

Es sei X ein stationäres zufälliges Mosaik mit $X(\omega) \in \mathbb{M}^*$, $\omega \in \Omega$. Wir erinnern hierbei daran, dass wir ein zufälliges Mosaik als einen speziellen Partikelprozess (mit konvexen Partikeln) und zugleich als eine spezielle lokalendliche Kollektion konvexer Partikel ansehen. Für $k \in \{0, \dots, d\}$ sei $X_k := \mathcal{F}_k(X)$ der Partikelprozess der k-Seiten von X. Es gilt $\mathcal{F}_k(\mathfrak{m} + x) = \mathcal{F}_k(\mathfrak{m}) + x$ für alle $\mathfrak{m} \in \mathbb{M}^*$ und $x \in \mathbb{R}^d$. Deshalb folgt

$$\mathbb{P}(X_k + x \in \cdot) = \mathbb{P}(\mathcal{F}_k(X) + x \in \cdot) = \mathbb{P}(\mathcal{F}_k(X + x) \in \cdot) = \mathbb{P}(\mathcal{F}_k(X) \in \cdot) = \mathbb{P}(X_k \in \cdot),$$

d.h. X_k ist stationär.

5.5.1 Voraussetzung und Definition. Die Intensitätsmaße von X_k seien lokal-endlich für jedes $k \in \{0, \dots, d\}$. Es bezeichne

$$\gamma_k := \mathbb{E}\left[\operatorname{card}\{F \in X_k \colon c(F) \in [0,1]^d\}\right] < \infty \tag{5.5.1}$$

die Intensität von X_k und $\mathbb{Q}_k$ die Formverteilung von X_k. Für die Zentrumsfunktion $c\colon \mathcal{K}' \to \mathbb{R}^d$ gelte $c(K) \in \operatorname{relint}(K)$ für alle Polytope $K \in \mathcal{K}'$.

5.5.2 Voraussetzung. Sei $\{\theta_x \colon x \in \mathbb{R}^d\}$ ein Fluss auf Ω, sodass

$$X(\theta_x \omega) = X(\omega) + x$$

für $\omega \in \Omega$ und $x \in \mathbb{R}^d$ gilt. Wie bisher nehmen wir an, dass $\mathbb{P} \circ \theta_x = \mathbb{P}$ für $x \in \mathbb{R}^d$ erfüllt ist. Daraus folgt schon die Stationarität von X. Wegen der möglichen Wahl $\Omega := \mathbb{M}^*$, $\theta_x \mathfrak{m} := \mathfrak{m} + x$ für $\mathfrak{m} \in \mathbb{M}^*$ und $x \in \mathbb{R}^d$ sowie $\mathbb{P} := \mathbb{P}(X \in \cdot)$ ist die Beschreibung mit Hilfe eines Flusses für die Zwecke dieses Abschnitts keine Einschränkung der Allgemeinheit.

5.5.3 Definition. Für jedes $j \in \{0, \dots, d\}$ sei

$$\Phi_j := \sum_{F \in X_j} \delta_{c(F)}$$

und

$$\eta_j := \sum_{F \in X_j} \mathcal{H}^j(F \cap \cdot).$$

Beachte $\Phi_0 = \eta_0$.

5.5.4 Bemerkung. Offenbar ist Φ_j ein invarianter Punktprozess auf $\mathbb{R}^d$ (d.h. ein spezielles invariantes zufälliges Maß). Nach Definition ist Φ_j nicht das Nullmaß. Damit ist die Intensität γ_j von Φ_j nicht nur endlich (nach Voraussetzung 5.5.1) sondern auch positiv: $\gamma_j > 0$. Ferner ist η_j ein invariantes zufälliges Maß auf $\mathbb{R}^d$. Es gilt nämlich wegen $X_j(\theta_x \omega) = X_j(\omega) + x$, dass

$$\begin{aligned}
\eta_j(\theta_x \omega, B + x) &= \sum_{F \in X_j(\theta_x \omega)} \mathcal{H}^j(F \cap (B + x)) \\
&= \sum_{F \in X_j(\omega)} \mathcal{H}^j((F + x) \cap (B + x)) \\
&= \eta_j(\omega, B).
\end{aligned}$$

Die Intensität von η_j bezeichnen wir mit

$$\delta_j := \mathbb{E}[\eta_j([0,1]^d)].$$

Auch hier folgt aus $\eta_j \neq 0$ die Positivität von δ_j. Allerdings können wir den Fall $\delta_j = \infty$ nicht ausschließen. Wir weisen auch auf die Gleichung $\eta_d = \lambda_d$ hin. Insbesondere gilt $\delta_d = 1$ und $\mathbb{P}^0_{\eta_d} = \mathbb{P}$.

5.5.5 Lemma. (a) *Es gilt* $\mathbb{P}^0_{\Phi_j}(0 \in \operatorname{relint}(G) \text{ für ein } G \in X_j) = 1.$

(b) *Ist* $\delta_j < \infty$, *so gilt* $\mathbb{P}^0_{\eta_j}(0 \in \operatorname{relint}(G) \text{ für ein } G \in X_j) = 1.$

Beweis. Sei B eine Borelmenge mit Volumen 1.

(a) Aus der Definition der Palmschen Verteilung folgt

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}^0_{\Phi_j}(0 \in \operatorname{relint}(G) \text{ für ein } G \in X_j) \\
&= \frac{1}{\gamma_j}\mathbb{E}\sum_{F\in X_j} \mathbb{1}\{c(F)\in B\}\mathbb{1}\left\{0 \in \operatorname{relint}(G) \text{ für ein } G \in X_j \circ \theta_{-c(F)}\right\} \\
&= \frac{1}{\gamma_j}\mathbb{E}\sum_{F\in X_j} \mathbb{1}\{c(F)\in B\}\underbrace{\mathbb{1}\left\{0 \in \operatorname{relint}(G) \text{ für ein } G \in X_j - c(F)\right\}}_{=1,\text{ da } G = F - c(F) \text{ für } F\in X_j \text{ gewählt werden kann}} \\
&= \frac{1}{\gamma_j}\mathbb{E}\sum_{F\in X_j(\omega)} \mathbb{1}\{c(F)\in B\} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

(b) Wir argumentieren ähnlich wie in (a). So erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}^0_{\eta_j}(0 \in \operatorname{relint}(G) \text{ für ein } G \in X_j) \\
&= \frac{1}{\delta_j}\mathbb{E}\sum_{F\in X_j}\int_{B\cap F} \underbrace{\mathbb{1}\left\{0 \in \operatorname{relint}(F) \text{ für ein } F \in X_j - x\right\}}_{=1 \text{ für } \mathcal{H}^j\text{-f.a. } x\in F}\mathcal{H}^j(dx) \\
&= \frac{1}{\delta_j}\mathbb{E}\sum_{F\in X_j(\omega)} \mathcal{H}^j(B\cap F) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

□

Die folgenden Definitionen benötigen die (bisher nicht benutzte) Seitentreue eines Mosaiks $\mathfrak{m} \in \mathbb{M}^*$.

5.5.6 Definition. Für $\mathfrak{m} \in \mathbb{M}^*$, $j \in \{0,\dots,d\}$ und $x \in \mathbb{R}^d$ sei

$$Z_j(\mathfrak{m},x) := \begin{cases} F, & \text{falls } F \in \mathcal{F}_j(\mathfrak{m}) \text{ und } x \in \operatorname{relint} F, \\ \{x\}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir setzen $Z_j(x) := Z_j(X,x)$. Ferner seien $Z_j(\mathfrak{m}) := Z_j(\mathfrak{m},0)$ und $Z_j := Z_j(X) = Z_j(X,0)$. Speziell wird $Z_d(\mathfrak{m},0)$ als *Nullzelle* von $\mathfrak{m}$ bezeichnet.

5.5.7 Bemerkung. Es gilt

$$Z_j(\mathfrak{m} + y, x + y) = Z_j(\mathfrak{m}, x) + y, \quad x, y \in \mathbb{R}^d, \mathfrak{m} \in \mathbb{M}^*.$$

Wegen (5.5.2) ergibt sich daraus

$$Z_j(X \circ \theta_{-x}) = Z_j(X \circ \theta_{-x}, 0) = Z_j(X - x, x - x) = Z_j(X, x) - x.$$

Hiermit und aus (5.4.3) folgt für $\mathcal{H} \in \mathcal{B}(\mathcal{K}')$ und $B \in \mathcal{B}^d$ mit $\lambda_d(B) = 1$, dass

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^0_{\Phi_j}(Z_j \in \mathcal{H}) &= \gamma_j^{-1} \mathbb{E}\left[\int_B \mathbb{1}\{Z_j(\underbrace{X \circ \theta_{-x}}_{=X-x}) \in \mathcal{H}\}\, \Phi_j(dx)\right] \\
&= \gamma_j^{-1} \mathbb{E}\left[\int_B \mathbb{1}\{Z_j(X, x) - x \in \mathcal{H}\}\, \Phi_j(dx)\right] \\
&= \gamma_j^{-1} \mathbb{E}\left[\sum_{F \in X_j} \mathbb{1}\{c(F) \in B\} \mathbb{1}\{\underbrace{Z_j(X, c(F))}_{=F} - c(F) \in \mathcal{H}\}\right] \\
&= \mathbb{Q}_j(\mathcal{H}),
\end{aligned}$$

vergleiche dazu Bemerkung 3.1.9. Man bezeichnet $\mathbb{Q}_j(\cdot) = \mathbb{P}^0_{\Phi_j}(Z_j \in \cdot)$ als die Verteilung der *"typischen" j-Seite* von X. Im Fall $j = d$ ist $\mathbb{Q}_d$ die Verteilung der *typischen Zelle* von X. Hierbei ist zu beachten, dass wir in Lemma 5.5.5 (a) schon

$$\mathbb{P}^0_{\Phi_j}(0 \in \operatorname{relint} F \text{ für ein } F \in X_j) = 1$$

bewiesen hatten.

5.5.8 Bemerkung. Hat η_j eine endliche Intensität, so nennt man $\mathbb{P}^0_{\eta_j}(Z_j \in \cdot)$ die Verteilung der *flächengewichteten typischen* j-Seite. Diese Bezeichnung wird auch durch den folgenden Satz gerechtfertigt.

5.5.9 Theorem. *Es sei $j \in \{0, \dots, d\}$. Das zufällige Maß η_j habe eine endliche Intensität δ_j. Sei $f\colon \mathcal{K}' \to [0, \infty]$ eine messbare Abbildung. Dann gilt*

$$\delta_j \mathbb{E}^0_{\eta_j}[f(Z_j - c(Z_j))] = \gamma_j \mathbb{E}^0_{\Phi_j}[\lambda_j(Z_j) f(Z_j)]. \tag{5.5.2}$$

Beweis. Wir verwenden die Austauschformel von Neveu in der Form

$$\gamma_\eta \mathbb{E}^0_\eta\left[\int_{\mathbb{R}^d} g(\theta_{-x}, -x)\, \eta'(dx)\right] = \gamma_{\eta'} \mathbb{E}^0_{\eta'}\left[\int_{\mathbb{R}^d} g(\theta_0, x)\, \eta(dx)\right]$$

mit $\eta' := \Phi_j$ und $\eta := \eta_j$. Mit

$$g(\omega, x) = f(Z_j(X(\omega))) \mathbb{1}\{x \in \text{relint}(Z_j(X(\omega)))\}$$

ergibt sich für die rechte Seite der Behauptung

$$\gamma_j \mathbb{E}^0_{\Phi_j}\left[\int_{\mathbb{R}^d} f(Z_j)\, \underbrace{\mathbb{1}\{x \in \operatorname{relint} Z_j\}\, \eta_j(dx)}_{=\lambda_j(Z_j)}\right].$$

Hierbei wurde verwendet, dass es unter $\mathbb{P}^0_{\Phi_j}$ genau eine j-Seite von X gibt, die 0 im relativen Inneren enthält. Diese ist $Z_j(X,0) = Z_j(X) = Z_j$. Nun ist η_j gerade das $\mathcal{H}^j$-Maß auf den j-Seiten und die Integration erstreckt sich über $x \in \text{relint}(Z_j(X,0))$.

Für die linke Seite erhält man

$$\delta_j \mathbb{E}^0_{\eta_j}\left[\int_{\mathbb{R}^d} f(\underbrace{Z_j(X-x,0)}_{=Z_j(X,x)-x})\mathbb{1}\{-x \in \text{relint}\, Z_j(X-x,0)\}\,\Phi_j(dx)\right]$$

$$= \delta_j \mathbb{E}^0_{\eta_j}\left[\sum_{F\in X_j} f(Z_j(X,c(F)) - c(F))\mathbb{1}\{0 \in \text{relint}\, Z_j(X,c(F))\}\right],$$

wobei

$$-x \in \text{relint}\, Z_j(X-x,0) \Leftrightarrow 0 \in \text{relint}\, Z_j(X,x)$$

verwendet wurde. Nun gibt es unter $\mathbb{P}^0_{\eta_j}$ genau eine j-Seite $F \in X_j$ mit $0 \in \text{relint}\, Z_j(X,c(F))$, nämlich $F = Z_j(X,0) = Z_j$. Daraus folgt die Behauptung. □

5.5.10 Bemerkung. Unter $\mathbb{P}^0_{\Phi_j}$ ist Z_j die eindeutig bestimmte j-Seite von X, die 0 im relativen Inneren enthält. Also folgt $\lambda_j(Z_j) > 0$ fast sicher unter $\mathbb{P}^0_{\Phi_j}$.

5.5.11 Folgerung. Für $j \in \{0,\dots,d\}$ gelte $\delta_j < \infty$. Dann gilt

$$\mathbb{E}^0_{\Phi_j}[\lambda_j(Z_j)] = \frac{\delta_j}{\gamma_j}. \tag{5.5.3}$$

$$\mathbb{E}^0_{\eta_j}[\lambda_j(Z_j)^{-1}] = \frac{\gamma_j}{\delta_j}. \tag{5.5.4}$$

Insbesondere folgt

$$\mathbb{E}^0_{\Phi_d}[\lambda_d(Z_d)] = \frac{1}{\gamma_d}. \tag{5.5.5}$$

$$\mathbb{E}[\lambda_d(Z_d)^{-1}] = \gamma_d. \tag{5.5.6}$$

Beweis. Wählen wir in (5.5.2) $f = 1$, so folgt $\mathbb{E}^0_{\Phi_j}[\lambda_j(Z_j)] < \infty$. Ferner ist $\lambda_j(Z_j) > 0$ unter $\mathbb{P}^0_{\Phi_j}$ fast sicher erfüllt.

(5.5.3) folgt mit der Wahl von $f \equiv 1$ in (5.5.2).

(5.5.4) folgt mit $f(K) = \lambda_j(K)^{-1}$, $K \in \mathcal{K}'$, da $\lambda_j(Z_j) > 0$ fast sicher unter $\mathbb{P}^0_{\Phi_j}$ gilt.

(5.5.5) und (5.5.6) folgen mit $j = d$.

Beachte hierzu $\eta_d = \lambda_d$ (vgl. Bemerkung 5.5.4 und Bemerkung 5.4.15). □

5.5.12 Bemerkung. Die Funktion $x \mapsto x^{-1}$ ist konvex. Die Jensen'sche Ungleichung liefert

$$\mathbb{E}^0_{\eta_j}[\lambda_j(Z_j)] = \frac{1}{(\mathbb{E}^0_{\eta_j}[\lambda_j(Z_j)])^{-1}} \geq \frac{1}{\mathbb{E}^0_{\eta_j}[\lambda_j(Z_j)^{-1}]} \overset{(5.5.4)}{=} \frac{\delta_j}{\gamma_j} \overset{(5.5.3)}{=} \mathbb{E}^0_{\Phi_j}[\lambda_j(Z_j)].$$

Im Fall $j = d$ ergibt sich $\mathbb{E}[\lambda_d(Z_d)] \geq \mathbb{E}^0_{\Phi_d}[\lambda_d(Z_d)]$. Das mittlere Volumen der Nullzelle ist gleich dem mittleren Volumen der volumengewichteten typischen Zelle und dieses ist mindestens so groß wie das mittlere Volumen der typischen Zelle. Das ist eine räumliche Version des Wartezeitparadoxons. Man kann zeigen (Übungsaufgabe), dass sogar gilt:

$$\mathbb{P}^0_{\eta_j}(\lambda_j(Z_j) > t) \geq \mathbb{P}^0_{\Phi_j}(\lambda_j(Z_j) > t), \quad t \geq 0.$$

Für jedes $\mathfrak{m} \in \mathbb{M}^*$ und jedes $x \in \mathbb{R}^d$ gibt es ein eindeutig bestimmtes $i \in \{0, \ldots, d\}$ und ein eindeutig bestimmtes $F \in \mathcal{F}_i(\mathfrak{m})$ mit $x \in \operatorname{relint} F$. Wie setzen $Z(\mathfrak{m}, x) := F$. Ist x im relativen Inneren einer j-Seite $F \in \mathcal{F}_j(\mathfrak{m})$, so ist $Z(\mathfrak{m}, x) = Z_j(\mathfrak{m}, x)$. Damit werden also die früheren Definitionen von $Z_j(\mathfrak{m}, x)$ zusammengeführt. Wie zuvor gilt

$$Z(\mathfrak{m} + y, x + y) = Z(\mathfrak{m}, x) + y, \quad x, y \in \mathbb{R}^d, \mathfrak{m} \in \mathbb{M}^*. \tag{5.5.7}$$

Für $k \in \{0, \ldots, d\}$ definieren wir den *k-Seitenstern* von $\mathfrak{m}$ bei $x \in \mathbb{R}^d$ durch

$$\mathcal{S}_k(\mathfrak{m}, x) := \begin{cases} \mathcal{F}_k(Z(\mathfrak{m}, x)), & \text{falls } k \leq \dim Z(\mathfrak{m}, x), \\ \{G \in \mathcal{F}_k(\mathfrak{m}) : Z(\mathfrak{m}, x) \subset G\}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Erneut gilt

$$\mathcal{S}_k(\mathfrak{m} + y, x + y) = \mathcal{S}_k(\mathfrak{m}, x) + y, \quad x, y \in \mathbb{R}^d, \mathfrak{m} \in \mathbb{M}^*. \tag{5.5.8}$$

Definiere $Z(x) := Z(X, x), Z := Z(X, 0), \mathcal{S}_k(x) := \mathcal{S}_k(X, x), \mathcal{S}_k := \mathcal{S}_k(X, 0)$. Wir bemerken

$$\mathbb{P}^0_{\Phi_j}(Z = Z_j) = 1, \quad j \in \{0, \ldots, d\}. \tag{5.5.9}$$

Im Weiteren sei $\mathbb{P}^0_j := \mathbb{P}^0_{\Phi_j}$ und $\mathbb{E}^0_j := \mathbb{E}^0_{\Phi_j}$.

5.5.13 Definition. Für $j, k \in \{0, \ldots, d\}$ sei $n_{jk} := \mathbb{E}^0_j[\operatorname{card} \mathcal{S}_k]$. Für $j < k$ ist das die mittlere Anzahl der k-Seiten, welche die typische j-Seite enthalten. Für $j \geq k$ ist n_{jk} die mittlere Anzahl der k-Seiten, welche in der typischen j-Seite enthalten sind. Ferner gilt $n_{jj} = 1$.

5.5.14 Satz. *Für $j \in \{0, \ldots, d\}$ gilt*

$$\sum_{k=0}^{j} (-1)^k n_{jk} = 1 \tag{5.5.10}$$

und

$$\sum_{k=j}^{d} (-1)^{d-k} n_{jk} = 1. \tag{5.5.11}$$

Beweis. Ist $P \in \mathcal{K}'$ ein Polytop, so bezeichne $f_k(P) := \operatorname{card} \mathcal{F}_k(P), k \in \{0, \ldots, d\}$. Die *Eulersche Formel* (sh. Abschnitt 14.4 in [6]) ergibt

$$\sum_{k=0}^{j} (-1)^k f_k(P) = 1, \quad \text{falls } \dim P = j. \tag{5.5.12}$$

Wegen $\mathbb{P}^0_j(\dim Z(0) = j) = 1$ folgt also

$$\sum_{k=0}^{j} (-1)^k n_{jk} = \mathbb{E}^0_j \left[\sum_{k=0}^{j} (-1)^k \operatorname{card} \mathcal{S}_k(X, 0) \right] = \mathbb{E}^0_j[1] = 1.$$

Zum Beweis von (5.5.11) kann $j \leq d - 1$ vorausgesetzt werden. Für $\mathfrak{m} \in \mathbb{M}^*$ und $G \in \mathcal{F}_j(\mathfrak{m})$ sei $f_k(\mathfrak{m}, G) := \operatorname{card}\{F \in \mathcal{F}_k(\mathfrak{m}) : G \subset F\}$. Dann gilt (Übung bzw. [6, Seite 627])

$$\sum_{k=j}^{d} (-1)^{d-k} f_k(\mathfrak{m}, G) = 1$$

Die Behauptung folgt wie zuvor. $\square$

5.5.15 Bemerkung. Aus (5.5.10) folgt für $j = 1$: $n_{10} - n_{11} = 1$, d.h. $n_{10} = 2$. Für $j = 2$ folgt: $n_{20} - n_{21} + 1 = 1$, d.h. $n_{20} = n_{21}$.

Aus (5.5.11) folgt für $j = d-1$: $-n_{d-1,d-1} + n_{d-1,d} = 1$, d.h. $n_{d-1,d} = 2$. Für $j = d-2$ folgt: $n_{d-2,d-2} - n_{d-2,d-1} + n_{d-2,d} = 1$, d.h. $n_{d-2,d} = n_{d-2,d-1}$. All diese Formeln sind auch deterministisch richtig.

Im folgenden Satz beachte man, dass $\mathbb{P}^0_j(0 \in \operatorname{relint} F$ für ein $F \in \mathcal{S}_j(X)) = 1$ gilt.

5.5.16 Satz. *Für $0 \le j \le k \le d$ und messbares $g\colon \mathcal{K}' \times \mathcal{K}' \times \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$ gilt*

$$\gamma_j \mathbb{E}^0_j \left[\sum_{G \in \mathcal{S}_k} g(Z, G - c(G), -c(G)) \right] = \gamma_k \mathbb{E}^0_k \left[\sum_{F \in \mathcal{S}_j} g(F - c(F), Z, c(F)) \right]. \quad (5.5.13)$$

Insbesondere gilt für messbares $g\colon \mathcal{K}' \times \mathcal{K}' \to [0, \infty)$

$$\gamma_j \mathbb{E}^0_j \left[\sum_{G \in \mathcal{S}_k} g(Z - c(G), G - c(G)) \right] = \gamma_k \mathbb{E}^0_k \left[\sum_{F \in \mathcal{S}_j} g(F, Z) \right]. \quad (5.5.14)$$

Beweis. Die rechte Seite von (5.5.13) ist gleich

$$I := \gamma_k \mathbb{E}^0_k \left[\int_{\mathbb{R}^d} g(Z(x) - x, Z, x) \mathbb{1}\{Z(x) \subset Z\}\, \Phi_j(dx) \right].$$

Beachte, dass hier $x = c(Z(x))$ für $x \in \Phi_j$ gilt und $Z(x) = Z(X, x)$ sowie $Z = Z(X, 0)$. Mit der Austauschformel von Neveu erhält man, dass I gleich ist zu

$$\gamma_j \mathbb{E}^0_j \left[\int_{\mathbb{R}^d} g(Z(X - x, -x) + x, Z(X - x, 0), -x) \mathbb{1}\{Z(X - x, -x) \subset Z(X - x, 0)\}\, \Phi_k(dx) \right].$$

Wegen (5.5.7) ist $Z(X - x, -x) = Z(X, 0) - x$ und ferner $Z(X - x, 0) = Z(X - x, x - x) = Z(X, x) - x$. Somit folgt

$$I = \gamma_j \mathbb{E}^0_j \left[\int_{\mathbb{R}^d} g(Z, Z(x) - x, -x) \mathbb{1}\{Z \subset Z(x)\}\, \Phi_k(dx) \right]$$

und damit die Behauptung. □

5.5.17 Folgerung. Für $i, j, k \in \{0, \ldots, d\}$ gilt

$$\gamma_j \mathbb{E}^0_j \left[\sum_{G \in \mathcal{S}_k} V_i(G) \right] = \gamma_k \mathbb{E}^0_k [V_i(Z) \operatorname{card} \mathcal{S}_j]. \quad (5.5.15)$$

Speziell gilt

$$\gamma_j n_{jk} = \gamma_k n_{kj}. \quad (5.5.16)$$

Beweis. Sei zunächst $j \le k$. Man wähle in (5.5.14) $g(F, G) := V_i(G) = V_i(G - c(G))$, da V_i verschiebungsinvariant. Dann folgt (5.5.15).

Im Fall $j > k$ muss man in (5.5.13) die Rollen von j und k vertauschen und $g(F, G) := V_i(F)$ wählen. Dann folgt wieder (5.5.15).

Für $i = 0$ folgt (5.5.16). □

5.5.18 Folgerung. Es gilt

$$\gamma_0 \mathbb{E}_0^0 \left[\sum_{G \in \mathcal{S}_1} V_1(G) \right] = 2\gamma_1 \mathbb{E}_1^0 [V_1(Z)]. \tag{5.5.17}$$

Beweis. Aus (5.5.15) für $j = 0$, $i = k = 1$ folgt

$$\gamma_0 \mathbb{E}_0^0 \left[\sum_{G \in \mathcal{S}_1} V_1(G) \right] = \gamma_1 \mathbb{E}_1^0 [V_1(Z) \underbrace{\operatorname{card} \mathcal{F}_0(Z)}_{=2, \text{ da } Z \text{ Kante}}] = 2\gamma_1 \mathbb{E}_1^0 [V_1(Z)].$$

□

5.5.19 Definition. Sei P ein Polytop mit $\dim P = d$ und F eine Seite von P. Für $z \in \operatorname{relint} F$ sei

$$S(P, F) := \{\alpha(x - z) \colon x \in P, \alpha \geq 0\}$$

und

$$\beta(F, P) := \frac{1}{\kappa_d} \lambda_d (S(P, F) \cap B^d).$$

Man nennt $\beta(F, P)$ den *inneren Winkel* von P an der Seite F. Diese Definition ist unabhängig von der Wahl von $z \in \operatorname{relint} F$.

5.5.20 Theorem. *Sei $f \colon \mathcal{K}' \to [0, \infty]$ messbar und translationsinvariant. Sei $j \in \{0, \dots, d\}$. Dann gilt*

$$\gamma_d \mathbb{E}_d^0 \left[\sum_{F \in \mathcal{S}_j} \beta(F, Z) f(F) \right] = \gamma_j \mathbb{E}_j^0 [f(Z)]. \tag{5.5.18}$$

Insbesondere ist

$$\gamma_j = \gamma_d \mathbb{E}_d^0 \left[\sum_{F \in \mathcal{S}_j} \beta(F, Z) \right]. \tag{5.5.19}$$

Beweis. Wir verwenden (5.5.14) für $k = d$, also

$$\gamma_j \mathbb{E}_j^0 \left[\sum_{G \in \mathcal{S}_d} g(Z - c(G), G - c(G)) \right] = \gamma_d \mathbb{E}_d^0 \left[\sum_{F \in \mathcal{S}_j} g(F, Z) \right] \tag{5.5.20}$$

mit $g(F, G) := \beta(F, G) f(F)$, wobei $\beta(F', G') := 0$, falls G' kein volldimensionales Polytop ist oder falls F' keine Seite von G' ist. Dann ist die linke Seite von (5.5.18) gleich der rechten Seite von (5.5.20) und die linke Seite von (5.5.20) gleich

$$\gamma_j \mathbb{E}_j^0 \left[\sum_{G \in \mathcal{S}_d} \beta(Z - c(G), G - c(G)) f(Z) \right] = \gamma_j \mathbb{E}_j^0 \Big[f(Z) \underbrace{\sum_{G \in \mathcal{S}_d} \beta(Z, G)}_{=1} \Big] = \gamma_j \mathbb{E}_j^0 [f(Z)],$$

was gerade die rechte Seite von (5.5.18) ist.

Für $f \equiv 1$ folgt (5.5.19). □

5.5.21 Satz. *Es gilt*

$$\sum_{j=0}^{d} (-1)^j \gamma_j = 0.$$

Beweis. Für jedes Polytop P mit $\dim P = d$ gilt die *Gramsche Beziehung* (vgl. [6, Seite 458])

$$\sum_{j=0}^{d}(-1)^j \sum_{F\in\mathcal{F}_j(P)} \beta(F,P) = 0. \tag{5.5.21}$$

Die Behauptung folgt damit aus (5.5.19). □

Im Fall $d = 2$ bedeutet (5.5.21) für ein Polygon P mit n Ecken und Innenwinkeln $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ gerade

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k - \frac{n}{2} + 1 = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\alpha_k = \frac{n-2}{2}.$$

5.5.22 Satz. *Im Fall $d = 2$ gilt*

$$n_{20} = \frac{2n_{02}}{n_{02}-2}, \tag{5.5.22}$$

$$\gamma_0 = \frac{2}{n_{02}-2}\gamma_2 \tag{5.5.23}$$

und

$$\gamma_1 = \frac{n_{02}}{n_{02}-2}\gamma_2. \tag{5.5.24}$$

Beweis. Aus (5.5.16) folgt

$$\gamma_0 n_{02} = \gamma_2 n_{20}, \tag{5.5.25}$$

$$\gamma_1 n_{10} = \gamma_0 n_{01}, \tag{5.5.26}$$

d.h. wegen $n_{10} = 2$ und $n_{01} = n_{02}$ (vgl. Bemerkung 5.5.15)

$$2\gamma_1 = \gamma_0 n_{02}. \tag{5.5.27}$$

Ferner gilt wegen Satz 5.5.21

$$\gamma_0 - \gamma_1 + \gamma_2 = 0. \tag{5.5.28}$$

Aus (5.5.27) und (5.5.28) folgt

$$\gamma_0 - \gamma_0\frac{n_{02}}{2} + \gamma_2 = 0.$$

Mit (5.5.25) folgt

$$\gamma_2\frac{n_{20}}{n_{02}} - \gamma_2\frac{n_{20}}{2} + \gamma_2 = 0$$

und damit (5.5.22). Aus (5.5.25) und (5.5.22) folgt (5.5.23). Aus (5.5.27) folgt dann (5.5.24). □

5.5.23 Beispiel. Es gelte $d = 2$ und $n_{02} = 3$ (Letzteres ist bei einem "genügend zufälligen" Voronoi-Mosaik der Fall). Dann liefert Satz 5.5.22

$$n_{20} = 6, \quad \gamma_0 = 2\gamma_2 \text{ und } \quad \gamma_1 = 3\gamma_2.$$

5.5.24 Beispiel. Es gelte $d = 2$ und $n_{02} = 4$ (Das ist bei einem Geraden-Mosaik der Fall). Dann liefert Satz 5.5.22

$$n_{20} = 4, \quad \gamma_0 = \gamma_2 \text{ und } \quad \gamma_1 = 2\gamma_2.$$

5.5.25 Bemerkung. Es gelte $d = 2$. Jede Ecke sende die “Masse“ 1 an die anliegenden Zellen. Das Massentransportprinzip besagt:

$$\mathbb{E}[\text{aus Einheitsfläche gesendete Masse}] = \mathbb{E}[\text{in Einheitsfläche empfangene Masse}],$$

also $\gamma_0 n_{02} = \gamma_2 n_{20}$.

Nun sende jede Ecke den Innenwinkel an die jeweilige Zelle. Dann liefert das Massentransportprinzip $\gamma_0 = \gamma_2 \frac{n_{20}-2}{2}$. Das Massentransportprinzip ist eine Version der Austauschformel von Neveu.

5.6 Poisson-Voronoi-Mosaike (ausgelassen)

Es sei Φ ein stationärer Poissonprozess mit Intensität $\gamma > 0$. Sei $X := \{C(\Phi, x) : x \in \Phi\}$ das von Φ erzeugte Voronoi-Mosaik (vergleiche Beispiel 5.1.7). Man kann leicht die Gleichung $\gamma_d = \gamma$ für die Intensität der Zellen beweisen (Übung).

5.6.1 Satz. *Das Poisson-Voronoi-Mosaik X ist $\mathbb{P}$-f.s. seitentreu. Ferner ist $\mathbb{P}$-f.s. jede k-Seite in genau $d - k + 1$ Zellen enthalten.*

Beweisidee. Die Seitentreue haben wir in Beispiel 5.1.7 kurz diskutiert.

Die zweite Eigenschaft nennt man auch *Normalität*. Zum Beweis sei $F \in \mathcal{F}_k(X)$ für $k \le d - 2$. Es seien $x_0, \dots, x_m \in \Phi$, sodass

$$F \subset \partial C(\Phi, x_i), \quad i = 0, \dots, m.$$

Dabei sei m maximal. Dann ist $\operatorname{aff}(F)$ Schnitt von m Hyperebenen. Jeder Punkt in $\operatorname{aff} F$ hat zu allen x_i den gleichen Abstand. Weil $\mathbb{P}$-f.s. nicht $d + 2$ Poisson-Punkte von Φ auf einer Sphäre liegen, gilt $m \le d$. Andererseits liegen $x_0, \dots, x_m$ $\mathbb{P}$-f.s. nicht in einer $(m - 1)$-dimensionalen Ebene (siehe Übungsaufgabe 14.4) und können deshalb als affin unabhängig vorausgesetzt werden. Damit hat $\operatorname{aff}(F)$ als Schnitt von m Hyperebenen die Dimension $d - m$. □

Wegen der Gleichung $\delta_0 = \gamma_0$ liefert das folgende Theorem (für Poisson-Voronoi Mosaike) insbesondere eine explizite Formel für die Intensität der Ecken. Für $d = 2$ (aber auch nur dann) gilt diese Formel für ganz allgemeine stationäre normale Mosaike, sh. Beispiel 5.5.23.

5.6.2 Theorem. *Für jedes $k \in \{0, \dots, d\}$ gilt*

$$\delta_k = \frac{2^{d-k+1}\pi^{\frac{d-k}{2}}\Gamma\left(\frac{d^2-kd+k+1}{2}\right)\left(\Gamma\left(1+\frac{d}{2}\right)\right)^{d-k+\frac{d}{k}}\Gamma\left(d-k+\frac{k}{2}\right)}{d(d-k+1)!\Gamma\left(\frac{d^2-kd+k}{2}\right)\left(\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)\right)^{d-k}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}\gamma^{\frac{d-k}{d}} \tag{5.6.1}$$

sowie

$$\gamma_j \mathbb{E}_j^0\left[\sum_{G \in \mathcal{S}_k} V_k(G)\right] = \binom{d-k+1}{j-k}\underbrace{\gamma_k \mathbb{E}_k^0\left[V_k(Z)\right]}_{=\delta_k}, \quad j \in \{k, \dots, d\}. \tag{5.6.2}$$

Beweisidee. Gleichung (5.6.2) folgt aus Folgerung 5.5.17 (mit $i = k$) und

$$\operatorname{card} \mathcal{S}_j = \binom{d-k+1}{d-j+1} = \binom{d-k+1}{j-k} \quad \mathbb{P}_k^0\text{-f.s.}$$

für $k \leq j$.

Zum Beweis von (5.6.1) seien $x_0, \ldots, x_{d-k} \in \Phi$ in allgemeiner Lage. (Im Fall $k < d$ gibt es keinen $(d-k-1)$-dimensionalen affinen Unterraum, der diese Punkte enthält.) Dann gibt es eine eindeutig bestimmte $(d-k)$-dimensionale Kugel $B^{d-k}(x_0, \ldots, x_{d-k})$ mit $x_0, \ldots, x_{d-k}$ im relativen Rand der Kugel $B^{d-k}(x_0, \ldots, x_{d-k})$. Es seien $z(x_0, \ldots, x_{d-k})$ der Mittelpunkt von $B^{d-k}(x_0, \ldots, x_{d-k})$ und $F(x_0, \ldots, x_{d-k})$ der k-dimensionale affine Unterraum mit

$$z(x_0, \ldots, x_{d-k}) \in F(x_0, \ldots, x_{d-k}) \quad \text{und} \quad F(x_0, \ldots, x_{d-k}) \perp B^{d-k}(x_0, \ldots, x_{d-k}).$$

Setze

$$S(x_0, \ldots, x_{d-k}, \Phi) := \{y \in F(x_0, \ldots, x_{d-k}) : B^0(y, ||y - x_0||) \cap \Phi = \emptyset\}.$$

Hierbei bezeichnet $B^0(y, r)$ die offene Kugel um y mit Radius r. Ist $S(x_0, \ldots, x_{d-k}, \Phi) \neq \emptyset$, so ist $S(x_0, \ldots, x_{d-k}, \Phi)$ eine k-dimensionale Seite. Alle k-dimensionalen Seiten entstehen auf diese Weise. Es folgt

$$\delta_k = \frac{1}{V_d(B^d)} \frac{1}{(d-k+1)!} \mathbb{E}\left[\sum_{x_0, \ldots, x_{d-k} \in \Phi}^{\neq} V_k(S(x_0, \ldots, x_{d-k}, \Phi) \cap B^d)\right].$$

Mit Hilfe der multivariaten Mecke-Gleichung erhalten wir

$$\mathbb{E}\left[\sum_{x_0, \ldots, x_{d-k} \in \Phi}^{\neq} h(\Phi, x_0, \ldots, x_{d-k})\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[\int_{(\mathbb{R}^d)^{d-k+1}} h(\Phi + \delta_{x_0} + \ldots + \delta_{x_{d-k}}, x_0, \ldots, x_{d-k}) \, \Lambda^{d-k+1}(d(x_0, \ldots, x_{d-k}))\right],$$

wobei Λ das Intensitätsmaß von Φ bezeichnet und h eine nicht negative messbare Funktion ist. Damit folgt

$$\delta_k = \frac{\gamma^{d-k+1}}{\kappa_d (d-k+1)!} \int_{(\mathbb{R}^d)^{d-k+1}} \mathbb{E}\left[V_k(S(x_0, \ldots, x_{d-k}, \Phi + \sum_{i=0}^{d-k} \delta_{x_i}) \cap B^d)\right] \, d(x_0, \ldots, x_{d-k})$$
$$= \frac{\gamma^{d-k+1}}{\kappa_d (d-k+1)!} \int_{(\mathbb{R}^d)^{d-k+1}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{y \in F(x_0, \ldots, x_{d-k}) \cap B^d\}$$
$$\times \underbrace{\mathbb{E}[\mathbb{1}\{B^0(y, ||y - x_0||) \cap \Phi = \emptyset\}]}_{= \exp(-\gamma \kappa_d ||y - x_0||^d)} \, \mathcal{H}^k(dy) \, d(x_0, \ldots, x_{d-k}).$$

Wir verwenden die *Blaschke-Petkantschin Formel* der Integralgeometrie. Dazu sei

$$\Delta_{d-k}(x_0, \ldots, x_{d-k}) := \mathcal{H}^{d-k}(\mathrm{conv}\{x_0, \ldots, x_{d-k}\}).$$

Mittels der affinen Version dieser Blaschke-Petkantschin Formel (siehe [6, Theorem 7.2.7]) folgt

$$\delta_k = \frac{\gamma^{d-k+1}}{\kappa_d (d-k+1)!} ((d-k)!)^k b_k \int_{A(d, d-k)} \int_E \cdots \int_E \int_{(z(x_0, \ldots, x_{d-k}) + E^\perp) \cap B^d}$$

$$e^{-\gamma\kappa_d||y-x_0||^d}\Delta_{d-k}(x_0,\dots,x_{d-k})^k\,\mathcal{H}^k(dy)\,\lambda_E(dx_0)\dots\lambda_E(dx_{d-k})\,\mu_{d-k}(dE)$$

mit

$$b_k := \frac{\omega_{k+1}\cdot\ldots\cdot\omega_d}{\omega_1\cdot\ldots\cdot\omega_{d-k}} \quad \text{und} \quad \omega_i := i\cdot\kappa_i.$$

Jetzt verwenden wir für festes $E \in A(d, d-k)$ eine weitere integralgeometrische Transformationsformel, die auf Miles zurückgeht. Diese lautet (siehe [6, Theorem 7.3.1], angewendet in E)

$$\int_{E^{d-k+1}} hd(\lambda_E^{d-k+1}) = (d-k)!\int_E\int_0^\infty\int_{E\cap S^{d-1}}\cdots\int_{E\cap S^{d-1}} h(z+ru_0,\dots,z+ru_{d-k})$$
$$r^{(d-k)^2-1}\Delta_{d-k}(u_0,\dots,u_{d-k})\,\sigma_E(du_0)\dots\sigma_E(du_{d-k})\,dr\,\mathcal{H}^{d-k}(dz).$$

Mit der Abkürzung

$$c_k := \frac{\gamma^{d-k+1}}{\kappa_d(d-k+1)!}((d-k)!)^k b_k$$

folgt

$$\delta_k = c_k\int_{A(d,d-k)}\int_{E\cap S^{d-1}}\cdots\int_{E\cap S^{d-1}} J(E,u_0)\Delta_{d-k}(u_0,\dots,u_{d-k})^{k+1}$$
$$\sigma_E(du_0)\dots\sigma_E(du_{d-k})\,\mu_{d-k}(dE), \qquad (6.4.3)$$

wobei

$$J(E,u_0) := \int_E\int_0^\infty\int_{(z+E^\perp)\cap B^d} e^{-\gamma\kappa_d||y-(z+ru_0)||^d} r^{d(d-k)-1}\,\mathcal{H}^k(dy)\,dr\,\mathcal{H}^{d-k}(dz).$$

Die Zahl $J(E,u_0)$ ist unabhängig von u_0 in der Einheitssphäre von E, d.h. es gilt $J(E,u_0)\equiv J(E,u_E)$. Die innere Integration in (6.4.3) kann ausgeführt werden. Es verbleibt die Berechnung von

$$\int_{A(d,d-k)} J(E,u_E)\,\mu_{d-k}(dE).$$

Es ergibt sich ein Beta-Integral. Für Details wird auf [6, Seiten 475-6] verwiesen. □

5.6.3 Theorem. *Es gelte $d=3$. Dann ist*

$$\gamma_0 = \frac{24\pi^2}{35}\gamma,$$
$$\gamma_1 = \frac{48\pi^2}{35}\gamma,$$
$$\gamma_2 = \left(\frac{24\pi^2}{35}+1\right)\gamma$$

und

$$\gamma_3 = \gamma.$$

Ferner gilt

$$n_{21} = \frac{144\pi^2}{24\pi^2+35} \approx 5.23,$$

$$n_{30} = \frac{96\pi^2}{35} \approx 27.17,$$
$$n_{31} = \frac{144\pi^2}{35} \approx 40.61$$

und

$$n_{32} = \frac{48\pi^2}{35} + 2 \approx 15.54.$$

Beweis. Übung. □

Literatur

[1] Richard J. Gardner, W. F. Pfeffer: Borel measures. In: Kunen, K., Vaughan, J. E. (eds). Handbook of Set-theoretic Topology. pp. 961–1043. North-Holland, Amsterdam, 1984.

[2] Norbert Henze: Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie (Stochastik II), Vorlesungsskript, Karlsruhe, 2010.

[3] Günter Last, Mathew Penrose: Lectures on the Poisson Process. Cambridge University Press, IMS Textbooks, 2018.

[4] Daniel Hug, Günter Last: *Räumliche Stochastik*. Vorlesungsskript, KIT, WS 2018/19.

[5] Achim Klenke: Wahrscheinlichkeitstheorie, 2. Auflage, Springer, Berlin, Heidelberg, 2008.

[6] Rolf Schneider, Wolfgang Weil: *Stochastic And Integral Geometry*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2008.

[7] Martina Zähle: Random processes of Hausdorff rectifiable closed sets. Math. Nachr. 108, 49–72, 1982.