Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Stochastik

Prof. Dr. D. Hug · Dr. F. Nestmann

Stochastische Geometrie (SS2019)

Übungsblatt 12

Aufgabe 1 (Bemerkung 4.3.21)
Es seien $m \in \{0, \dots, d\}$, $K \in \mathcal{K}^d$ und $f\colon \mathcal{K}^d \to \mathbb{R}$ eine messbare Abbildung. Zeigen Sie

$$\int_{G(d,d-m)} f(K|L^\perp)\,\nu_{d-m}(\mathrm{d}L) = \int_{G(d,m)} f(K|L)\,\nu_m(\mathrm{d}L),$$

wobei $K|L$ (bzw. $K|L^\perp$) die orthogonale Projektion von K auf L (bzw. $L^\perp$) ist.

Aufgabe 2
Folgern Sie die Formel von Steiner aus der kinematischen Hauptformel.

Aufgabe 3 (Iterierte kinematische Hauptformel; Satz 4.3.26)
Es seien $k \in \mathbb{N}$, $K_0, \dots, K_k \in \mathcal{K}'$ und $j \in \{0, \dots, d\}$. Zeigen Sie

$$\int_{(G_d)^k} V_j(K_0 \cap g_1 K_1 \cap \dots \cap g_k K_k)\,\mu^k(\mathrm{d}(g_1, \dots, g_k)) = \sum_{\substack{m_0, \dots, m_k = j \\ m_0 + \dots + m_k = kd + j}}^{d} c_j^d \prod_{i=0}^{k} c_d^{m_i} V_{m_i}(K_i).$$

Aufgabe 4 (Multivariate Mecke-Formel)
Es sei Φ ein Poisson-Prozess auf $\mathbb{X}$ mit lokal-endlichem Intensitätsmaß Θ. Zeigen Sie, dass für alle $m \in \mathbb{N}$ und alle messbaren Funktionen $f\colon \mathbb{X}^m \times \mathbf{N}(\mathbb{X}) \to [0, \infty]$ die Gleichung

$$\mathbb{E} \int f(x_1, \dots, x_m, \Phi)\,\Phi^{(m)}(\mathrm{d}(x_1, \dots, x_m)) = \int \mathbb{E} f(x_1, \dots, x_m, \Phi + \delta_{x_1} + \dots + \delta_{x_m})\,\Theta^m(\mathrm{d}(x_1, \dots, x_m))$$

gilt. Dabei ist für $\mu = \sum_{i=1}^{\tau} \delta_{x_i} \in \mathbf{N}(\mathbb{X})$ das Maß $\mu^{(m)}$ auf $\mathbb{X}^m$ durch

$$\mu^{(m)} := \sum_{i_1, \dots, i_m \le \tau}^{\neq} \delta_{(x_{i_1}, \dots, x_{i_m})}$$

definiert. Die Schreibweise $\sum^{\neq}$ bedeutet, dass nur über paarweise verschiedene $i_1, \dots, i_m$ summiert wird.

Aufgabe 5 (Geometrische Dichten des Booleschen Modells)
Es sei Z ein stationäres und isotropes Boolesches Modell in $\mathbb{R}^3$ mit Intensität $\gamma > 0$ und einer auf $\mathcal{K}'$ konzentrierten Kornverteilung $\mathbb{Q}$.

(a) Bestimmen Sie die Dichten $\delta_0, \ldots, \delta_3$ in Abhängigkeit von $\gamma_0, \ldots, \gamma_3$.

(b) Es seien

$$\delta_0 = 0.34, \quad \delta_1 = 0.1, \quad \delta_2 = 0.11, \quad \delta_3 = 0.52.$$

Bestimmen Sie die Intensität γ.

(c) Es seien $M \in \mathcal{K}_0$ und $\mathbb{Q}(\cdot) = \int_{SO_3} \mathbf{1}\{\vartheta M \in \cdot\}\, \nu(\mathrm{d}\vartheta)$. Bestimmen Sie mit

$$\delta_0 = 10, \quad \delta_1 = 20, \quad \delta_2 = 0, \quad \delta_3 = 0,$$

die Intensität γ. Was können Sie aus diesen Werten bezüglich M folgern?

Die Aufgaben werden in der Übung am 19. Juli besprochen.