Institut für Stochastik
Prof. Dr. D. Hug · Dr. F. Nestmann

Stochastische Geometrie (SS2019)

Übungsblatt 10

Aufgabe 1 (Die Euler-Charakteristik)
Zeigen Sie mithilfe der Steiner-Formel, dass für $K \in \mathcal{K}^d \setminus \{\emptyset\}$

$$V_0(K) = 1$$

gilt.

Aufgabe 2 (Schnitte durch Boolsche Modelle)
Sei Φ ein homogener Poissonprozess in $\mathbb{R}^d$ mit Intensität $\gamma > 0$ und $\mathbb{Q}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{C}^d$ mit $\int_{\mathcal{C}^d} \lambda_d(K + C)\,\mathbb{Q}(\mathrm{d}K) < \infty$, $C \in \mathcal{C}^d$. Weiter seien Ψ der zugehörige Poissonsche Partikelprozess mit Intensitätsmaß Θ und Z das zugehörige Boolesche Modell. Außerdem sei $k \in \{1, \ldots, d-1\}$ und $0 \in H \subset \mathbb{R}^d$ eine k-dimensionale Ebene.

(a) Zeigen Sie, dass $\Psi_H := \sum_{C \in \Psi} \mathbb{1}\{C \cap H \neq \emptyset\}\delta_{C \cap H}$ ein Poissonscher Partikelprozess auf H ist und stationär im Sinne von $T_y \Psi_H \stackrel{d}{=} \Psi_H$, $y \in H$.

(b) Zeigen Sie, dass $Z \cap H$ ein Boolesches Modell in H ist.
Hinweis: Ein Boolesches Modell in H wird definiert, indem H mit $\mathbb{R}^k$ identifiziert wird.

Aufgabe 3 (Ergänzung zum Beweis von Lemma 4.2.5)
Für $z \in \mathbb{Z}^d$ sei $C_z := C^d + z$ mit $C^d := [0,1]^d$. Es seien $r > 0$ und $W \in \mathcal{K}^d$ mit $V_d(W) > 0$ und $0 \in \mathrm{int}(W)$. Weiter seien

$$Z_r^1 := \{z \in \mathbb{Z}^d : C_z \cap rW \neq \emptyset, C_z \not\subset rW\} \qquad \text{und} \qquad Z_r^2 := \{z \in \mathbb{Z}^d : C_z \subset rW\}.$$

Zeigen Sie

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\mathrm{card}\ Z_r^1}{V_d(rW)} = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{r\to\infty} \frac{\mathrm{card}\ Z_r^2}{V_d(rW)} = 1.$$

Aufgabe 4 (Inklusions- Exklusionsprinzip und Ergänzung zum Beweis von Satz 4.3.1)

(a) Es sei $f : \mathcal{R}^d \to \mathbb{R}$ eine additive Abbildung, das heißt

$$f(\emptyset) = 0 \qquad \text{und} \qquad f(K \cup L) + f(K \cap L) = f(K) + f(L), \quad K, L \in \mathcal{R}^d.$$

Zeigen Sie, dass für $m \in \mathbb{N}$ und $K_1, \ldots, K_m \in \mathcal{R}^d$

$$f(K_1 \cup \cdots \cup K_m) = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le m} f(K_{i_1} \cap \cdots \cap K_{i_k})$$

gilt.

(b) Es bezeichne $\mathbb{F}$ den Vektorraum aller Funktionen $f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\varphi \colon \mathcal{R}^d \to \mathbb{F}, \quad B \mapsto \varphi(B) := \mathbb{1}_B,$$

additiv ist.

(c) Zeigen Sie für $m \in \mathbb{N}$, $K_1, \ldots, K_m \in \mathcal{K}^d$ und $K := \bigcup_{i=1}^m K_i$, dass

$$\mathbb{1}_K = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le m} \mathbb{1}_{K_{i_1} \cap \cdots \cap K_{i_k}}$$

gilt.

Die Aufgaben werden in der Übung am 5. Juli besprochen.