

Masterthesis

External DLA

Tillmann Tristan Bosch

10. March 2020

Supervisor: Prof. Dr. Steffen Winter

Mathematics Faculty

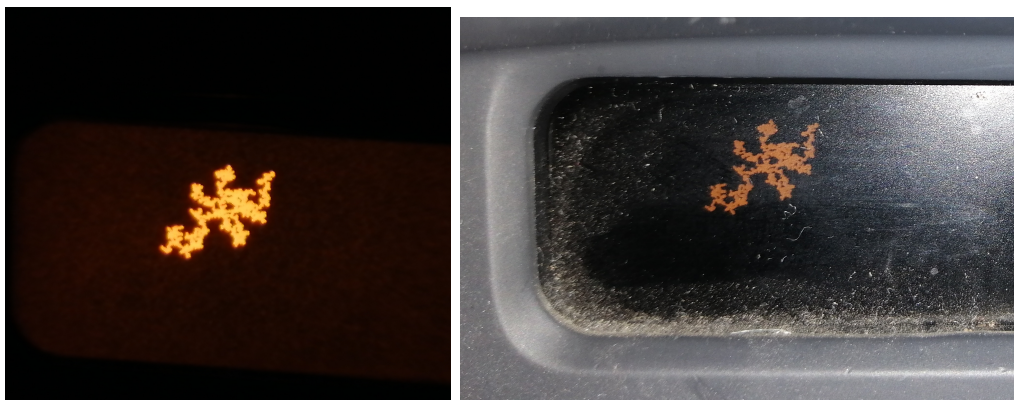
Karlsruhe Institute of Technology

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Preliminaries	2
3	External DLA	3

1 Einleitung

External DLA beschreibt einen stochastischen Prozess, welcher zumindest in ähnlicher Form in natürlichen Prozessen beobachtbar ist. Er ähnelt zum Beispiel der fraktalen Gestalt eines sich kreisförmig ausbreitenden Risses einer Glasscheibe, oder eines Risses eines Kristallfluids wie in LCD Displays in alten Autoradios (siehe Fotos). Er kann auch in Schneeflocken oder in elektrostatischen Anhaftungen an Metallen beobachtet werden. Die Formalisierung solcher Prozesse ist sehr aktuell und die sehr konstruktive Definition erlaubten bisher nur mühsame Folgerungen über Struktur und Verhalten des Prozesses. Wir werden uns Modelle auf \mathbb{Z}^2 , sowie auf anderen Graphen, darunter auch fraktale Graphen, anschauen, und außerdem versuchen, eine Approximation der bisherigen Definition zu finden, die grundsätzlich handlicher ist und auf einfachere Weise zu Erkenntnissen führt. Wir werden außerdem diese Arbeit mit einigen Python Simulationen begleiten. Der Code ist frei verfügbar auf Github.



2 Preliminaries

We prepare this script with the following preliminaries.

Graphs. Let G be an infinite graph. Denote $\deg(x)$ the degree of a vertex $x \in G$. G shall be additionally locally finite, i.e. $\deg(x) < \infty$ for all $x \in G$. Let $o \in G$ be a distinguished vertex which we call *origin* or *root*. Define the distance between two vertices $x, y \in G$ as

$$d(x, y) := \min\{n \geq 1 \mid \exists x_1, \dots, x_{n-1} \in G : (x, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, y) \in E(G)\},$$

thus the distance between two vertices is the minimal length of paths connecting the two vertices. For $n \in \mathbb{N}$ and $x \in G$ *balls* are defined as $B_n(x) := \{y \in G \mid d(x, y) \leq n\}$, and for the special case $B_n := B_n(o)$. Let $A \subset G$ a subgraph, then we define the boundary of A as

$$\partial A := \{y \in G \setminus A \mid \exists x \in A : (x, y) \in E(G)\}.$$

Random Walks. Let $(S_n)_n$ be a random walk on G and denote \mathbb{P}_x the probability measure of the random walk started at x . That means precisely

$$\mathbb{P}_x(A) := \mathbb{P}_{S_n}(A \mid S_0 = x) = \mathbb{P}(S_n \in A \mid S_0 = x)$$

for any subset $A \subset G$. We define the *hitting time* of A as

$$T(A) := \min\{n \geq 0 \mid S_n \in A\},$$

and for the special case $T(\{x\}) =: T(x)$ for every $x \in G$. The *heat kernel* of the random walk S_n is defined to be

$$p_n(x, y) := \mathbb{P}_x(S_n = y)$$

and following the *Green function* as

$$G(x, y) := \sum_{n \geq 0} p_n(x, y).$$

Similarly for a subset $A \subset G$ the *killed* or *stopped Green function* is defined as

$$G_A(x, y) := \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}_x(S_n = y, T(A) > n).$$

The *hitting distribution* of elements in A with *hitting position* $S_{T(A)}$ is then

$$H_A(x, y) := p_{T(A)}(x, y), \quad y \in A,$$

and for the special case $x = o$ we define

$$h_A(y) := H_A(o, y) = \mathbb{P}_o(S_{T(A)} = y), \quad y \in A.$$

Thus, $h_A(y)$ is the probability of hitting A for the first time at y starting from o . h_A is called the *harmonic measure (from o)*.

3 External DLA

External DLA is a model building a sequence of random growing sets $(\mathcal{E}_n)_{n \geq 0}$ starting with one particle $\mathcal{E}_0 = \{o\}$ at the origin. At each timestep $n + 1$ a new particle starts a random walk $(S_k)_k$ from "far away" (infinity) until it hits the boundary $\partial\mathcal{E}_n$ of the current exting cluster for the first time. The union of this vertex and the already exting cluster then form the new cluster. Lets see the formal definition.

Definition 3.1. Let G be an infinite graph and $(S_n)_n$ a random walk on it. *External DLA* on G is a Markov chain $(\mathcal{E}_n)_{n \geq 0}$ on finite subsets of G which evolve in the following way. We start with a single vertex at the origin, thus $\mathcal{E}_0 := \{o\}$. Then given the process \mathcal{E}_n at time n , let y_{n+1} be a random vertex in $\partial\mathcal{E}_n$ chosen according to the harmonic measure (from infinity) of $\partial\mathcal{E}_n$. Precisely that is

$$\mathbb{P}(y_{n+1} = y \mid \mathcal{E}_n) = \mu_{\partial\mathcal{E}_n}(y), \quad y \in \partial\mathcal{E}_n.$$

We then set $\mathcal{E}_{n+1} := \mathcal{E}_n \cup \{y_{n+1}\}$.

Comment 3.1. Given the definition above, how does a realization of the process mathematically look like? We start with a constant $\mathcal{E}_0 = \{o\}$. Now we want to realize a vertex y_1 in $\partial\mathcal{E}_0$. For this choose $\omega_1 \in \Omega$ and realize a random walk $(S(\omega_1)_n)_n$ at ω_1 (starting from infinity). $y_1(\omega_1)$ is the hitting vertex of the random walk and $\partial\mathcal{E}_0$. We can then set a realization of \mathcal{E}_1 , which is $\mathcal{E}_1(\omega_1) = \{o, y_1(\omega_1)\}$.

Literatur

- [1] N. Henze. *Maß und Wahrscheinlichkeitstheorie (Stochastik II)*. Karlsruher Institut für Technologie, Karlsruhe, 2010

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich diese Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt, die wörtlich oder inhaltlich übernommenen Stellen als solche kenntlich gemacht und die Satzung des Karlsruher Instituts für Technologie zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis in der jeweils gültigen Fassung beachtet habe.

Karlsruhe, den 10. März 2020