Institut für Stochastik

Prof. Dr. D. Hug · Dr. F. Nestmann

Stochastische Geometrie (SS2019)

Übungsblatt 7

Aufgabe 1 (Satz 3.1.16 (c))
Es sei Φ ein stationärer Partikelprozess in $\mathbb{R}^d$ mit Formverteilung $\mathbb{Q}$ und Intensität γ (bei gegebener Zentrumsfunktion c). Es sei $\varphi\colon \mathcal{C}' \to \mathbb{R}$ eine messbare und translationsinvariante Abbildung mit $\varphi \geq 0$ oder $\int_{\mathcal{C}'} |\varphi| \, \mathrm{d}\mathbb{Q} < \infty$. Weiter gelte

$$\int_{\mathcal{C}_0} |\varphi(C)| \lambda_d(C + B^d) \, \mathbb{Q}(\mathrm{d}C) < \infty.$$

Zeigen Sie, dass für $W \in \mathcal{K}^d$ mit $V_d(W) > 0$

$$\begin{aligned}\overline{\varphi}(\Phi) &= \lim_{r\to\infty} \frac{1}{V_d(rW)} \mathbb{E} \sum_{C\in\Phi,\, C\cap rW\neq\emptyset} \varphi(C) \\ &= \lim_{r\to\infty} \frac{1}{V_d(rW)} \mathbb{E} \int_{\mathcal{C}'} \mathbb{1}\{C \cap rW \neq \emptyset\} \varphi(C) \, \Phi(\mathrm{d}C).\end{aligned}$$

Lösung: Als Vorüberlegung zeigen wir zunächst für $K \in \mathcal{C}^d$ und $W \in \mathcal{K}^d$ mit $V_d(W) > 0$ die drei folgenden Aussagen:

(a) Es gilt

$$\lim_{r\to\infty} V_d(W + r^{-1}K) = V_d(W).$$

(b) Ist $0 \in W$ und $r \geq 1$, so existiert eine positive Konstante b_W mit

$$V_d(W + r^{-1}K) \leq b_W V_d(W + K),$$

wobei b_W nicht von K oder r abhängt.

(c) Es existiert eine positive Konstante b'_W mit

$$V_d(W - K) \leq b'_W V_d(B^d + K),$$

wobei b'_W nicht von K abhängt.

Zu (a): Da K kompakt ist, gibt es ein $\rho > 0$ mit $K \subset \rho B^d$. Dann gilt für $r \geq 0$

$$V_d(W) \leq V_d(W + r^{-1}K) \leq V_d\Big(W + \frac{\rho}{r} B^d\Big).$$

Mit monotoner Konvergenz erhalten wir

$$\lim_{r\to\infty} V_d\Big(W + \frac{\rho}{r} B^d\Big) = \lim_{r\to\infty} \int \mathbb{1}\Big\{x \in W + \frac{\rho}{r} B^d\Big\} \mathrm{d}x = \int \mathbb{1}\{x \in W\} \mathrm{d}x = V_d(W).$$

Zu (b): Es seien $y_1, \dots, y_m \in K$ mit $(W + y_i) \cap (W + y_j) = \emptyset$ für $j \neq i$. Es gilt

$$mV_d(W) \le V_d(K+W), \text{ also } m \le \frac{V_d(K+W)}{V_d(W)}. \tag{1}$$

Wir nehmen an, dass m maximal ist. Dann gibt es für jedes $x \in K$ ein $i \in \{1, \dots, m\}$ mit

$$(W + x) \cap (W + y_i) \neq \emptyset \text{ bzw. } x \in y_i + W - W.$$

Also gilt

$$K \subset \bigcup_{i=1}^m (y_i + W - W).$$

Wegen $0 \in W$, $r \geq 1$ und der Konvexität von W ist $\frac{1}{r}W \subset W$ und $-\frac{1}{r}W \subset -W$, also gilt

$$W + \frac{1}{r}K \subset \bigcup_{i=1}^m \Big(W + \frac{1}{r}(y_i + W - W)\Big) \subset \bigcup_{i=1}^m \Big(\frac{1}{r}y_i + 2W - W\Big). \tag{2}$$

Aus (2) und (1) erhält man

$$V_d\Big(W + \frac{1}{r}K\Big) \le mV_d(2W - W) \le \frac{V_d(K+W)}{V_d(W)} V_d(2W-W) = \underbrace{\frac{V_d(2W-W)}{V_d(W)}}_{=:b_W} V_d(W+K).$$

Zu (c): Da W kompakt ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}^d$ mit $W \subset \bigcup_{i=1}^n (B^d + t_i)$. Es gilt also:

$$W - K \subset \bigcup_{i=1}^n (B^d - K + t_i),$$

und somit

$$V_d(W-K) \le nV_d(B^d - K) = nV_d(K + B^d).$$

Wir kommen nun zur Lösung der eigentlichen Aufgabe. Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{V_d(rW)} \mathbb{E} \int_{\mathcal{C}'} \mathbb{1}\{C \cap rW \neq \emptyset\} \varphi(C)\, \Phi(\mathrm{d}C) &= \frac{\gamma}{V_d(rW)} \int_{\mathcal{C}_0} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{(K+x) \cap rW \neq \emptyset\} \varphi(K)\, \mathrm{d}x\, \mathbb{Q}(\mathrm{d}K) \\
&= \frac{\gamma}{V_d(W)} \int_{\mathcal{C}_0} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{(r^{-1}K + y) \cap W \neq \emptyset\} \varphi(K)\, \mathrm{d}y\, \mathbb{Q}(\mathrm{d}K) \\
&= \frac{\gamma}{V_d(W)} \int_{\mathcal{C}_0} V_d(W - r^{-1}K) \varphi(K)\, \mathbb{Q}(\mathrm{d}K).
\end{aligned}$$

Nach (a) gilt

$$\lim_{r \to \infty} V_d(W - r^{-1}K) = V_d(W).$$

OBdA gelte $0 \in W$. Nach (b) gilt

$$V_d(W - r^{-1}K) \le b_W V_d(W - K), \qquad r \geq 1,$$

für ein $b_W > 0$, welches unabhängig von K ist. Weiter gilt nach (c)

$$V_d(W-K) \le b'_W V_d(B^d + K),$$

für ein $b'_W > 0$, welches unabhängig von K ist. Da nach Voraussetzung $\int_{\mathcal{C}_0} |\varphi(K)| V_d(K + B^d)\, \mathbb{Q}(\mathrm{d}K) < \infty$ gilt, folgt die Behauptung mit majorisierter Konvergenz.

Aufgabe 2 (Boolesches Modell)
Es sei Z ein stationäres Boolesches Modell mit Intensität γ, Formverteilung $\mathbb{Q}$, typischem Korn Z_0 und Volumenanteil p.

(a) Zeigen Sie für $C \in \mathcal{C}^d$ und $x, y \in \mathbb{R}^d$

$$(C+y) \cap \{x, 0\} \neq \emptyset \;\Leftrightarrow\; y \in C^* \cup (x + C^*).$$

(b) Das *mittlere Kovariogram* C_0 von Z ist definiert durch

$$C_0(x) := \mathbb{E}[\lambda_d(Z_0 \cap (Z_0 + x))], \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Zeigen Sie

$$\mathbb{E}[\lambda_d(Z_0 \cup (Z_0 - x))] = 2\mathbb{E}[\lambda_d(Z_0)] - C_0(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^d.$$

(c) Verwenden Sie (a) und (b), um

$$\mathbb{P}(0 \in Z, x \in Z) = p^2 + (1-p)^2 \left(e^{\gamma C_0(x)} - 1\right).$$

zu zeigen.

Lösung:

(a) Für $C \in \mathcal{C}^d$ und $x, y \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$\begin{aligned}
(C+y) \cap \{x, 0\} \neq \emptyset &\Leftrightarrow \text{es gibt ein } z \in C \text{ mit } z + y = x \text{ oder } z + y = 0 \\
&\Leftrightarrow \text{es gibt ein } z \in C \text{ mit } y = x - z \text{ oder } y = -z \\
&\Leftrightarrow y \in (x + C^*) \cup C^*.
\end{aligned}$$

(b) Für $x \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\lambda_d(Z_0 \cup (Z_0 - x)) &= \mathbb{E}\left[\lambda_d(Z_0) + \lambda_d(Z_0 - x) - \lambda_d(Z_0 \cap (Z_0 - x))\right] \\
&= \mathbb{E}\left[2\lambda_d(Z_0) - \lambda_d((Z_0 + x) \cap Z_0)\right] \\
&= 2\mathbb{E}\lambda_d(Z_0) - C_0(x).
\end{aligned}$$

(c) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass

$$p = 1 - e^{-\gamma C_0(0)}$$

gilt. Damit folgt

$$\begin{aligned}
p^2 + (1-p)^2(e^{\gamma C_0(0)} - 1) &= p^2 + (1-p)^2 \left(\frac{1}{-(-e^{-\gamma C_0(0)} + 1) + 1} - 1\right) \\
&= p^2 + (1-p)^2 \left(\frac{1}{1-p} - 1\right) \\
&= p = \mathbb{P}(0 \in Z)
\end{aligned}$$

und somit die Behauptung für $x = 0$.

Sei nun $x \neq 0$. Weiter bezeichne $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_{(\xi_n, Z_n)}$ den zu Z gehörenden Keim-Korn-Prozess. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(0 \in Z, x \in Z) &= 1 - \mathbb{P}(\{0 \notin Z\} \cup \{x \notin Z\}) \\
&= 1 - \mathbb{P}(0 \notin Z) - \mathbb{P}(x \notin Z) + \mathbb{P}(0 \notin Z, x \notin Z) \\
&= 1 - (1-p) - (1-p) + \mathbb{P}(\#\{n \in \mathbb{N} : (\xi_n + Z_n) \cap \{0, x\} \neq \emptyset\} = 0) \\
&= 2p - 1 + \exp\left(-\gamma \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{P}(\{0, x\} \cap (Z_0 + y) \neq \emptyset) \, \mathrm{d}y\right) \\
&= 2p - 1 + \exp\left(-\gamma \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}\mathbb{1}\{\{0, x\} \cap (Z_0 + y) \neq \emptyset\} \, \mathrm{d}y\right).
\end{aligned}$$

Aus (a) erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{(Z_0+y)\cap\{x,0\}\neq\emptyset\}\,\mathrm{d}y &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{y\in Z_0^*\cup(x+Z_0^*)\}\,\mathrm{d}y \\ &= \lambda_d(Z_0^*\cup(x+Z_0^*)) \\ &= \lambda_d(Z_0\cup(Z_0-x)).\end{aligned}$$

Es folgt

$$\mathbb{P}(0\in Z, x\in Z) = 2p-1+\exp\left(-\gamma\mathbb{E}\lambda_d(Z_0\cup(Z_0-x))\right).$$

Mit (b) erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}2p-1+\exp\left(-\gamma\mathbb{E}\lambda_d(Z_0\cup(Z_0-x))\right) &= 2p-1+\exp\left(-\gamma(2\mathbb{E}\lambda_d(Z_0)-C_0(x))\right) \\ &= 2p-1+\exp\left(-\gamma 2\mathbb{E}\lambda_d(Z_0)\right)\exp\left(\gamma C_0(x)\right) \\ &= 2p-1+(1-p)^2\cdot\exp\left(\gamma C_0(x)\right) \\ &= p^2+(1-p)^2\left(e^{\gamma C_0(x)}-1\right).\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (Fortsetzung von Aufgabe 2)
Vorgegeben sei die Situation aus Aufgabe 2.

(a) Es sei $x \in \mathbb{R}^d$, dann sind die Zufallsvariablen $\mathbb{1}\{x \in Z\}$ und $\mathbb{1}\{0 \in Z\}$ nicht negativ korreliert.

(b) Es sei $R > 0$. Weiter gelte $\mathbb{P}$-fast sicher

$$Z_0 \subset B(0, R).$$

Dann sind für $x \in \mathbb{R}^d$ mit $\|x\| > 2R$ die Ereignisse $\{x \in Z\}$ und $\{0 \in Z\}$ stochastisch unabhängig.

(c) Es gelte

$$\mathbb{E}[\lambda_d(Z_0)] < \infty.$$

Zeigen Sie, dass für $x \in \mathbb{R}^d$ die Ereignisse $\{x \in Z\}$ und $\{0 \in Z\}$ asymptotisch unabhängig sind, d.h.

$$\lim_{\|y\| \to \infty} \mathbb{P}(y \in Z, 0 \in Z) = \mathbb{P}(x \in Z)\mathbb{P}(0 \in Z).$$

(d) Die *Kovarianzfunktion* des Booleschen Modells Z ist definiert durch

$$C : \begin{cases} \mathbb{R}^d & \to \quad [0,1] \\ \quad x & \mapsto \quad \mathbb{P}(0 \in Z, x \in Z). \end{cases}$$

Es gelten

$$\lambda_d(\partial Z_0) = 0 \ \ \mathbb{P}\text{-f.s.} \ \text{ und } \ \mathbb{E}[\lambda_d(Z_0)] < \infty.$$

Zeigen Sie, dass dann folgende Stetigkeitseigenschaft gilt:

$$\lim_{x \to 0} C(x) = p.$$

Lösung:

(a) Für $x \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{Cov}(\mathbb{1}\{x \in Z\}, \mathbb{1}\{0 \in Z\}) &= \mathbb{E}[\mathbb{1}\{x \in Z\}\mathbb{1}\{0 \in Z\}] - \mathbb{E}[\mathbb{1}\{x \in Z\}]\mathbb{E}[\mathbb{1}\{0 \in Z\}] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{1}\{0 \in Z, x \in Z\}] - \mathbb{E}[\mathbb{1}\{x \in Z\}]\mathbb{E}[\mathbb{1}\{0 \in Z\}] \\ &= \mathbb{P}(0 \in Z, x \in Z) - \mathbb{P}(x \in Z)\mathbb{P}(0 \in Z) \\ &= C(x) - p^2 \\ &= (1-p)^2(e^{\gamma C_0(x)} - 1) \geq 0. \end{aligned}$$

(b) Falls $Z_0 \subset B(0, R)$ gilt, so folgt für $x \in \mathbb{R}^d$ mit $\|x\| > 2R$

$$(Z_0 \cap (Z_0 + x)) \subset (B(0, R) \cap (B(0, R) + x)) = \emptyset,$$

und somit $\lambda_d(Z_0 \cap (Z_0 + x)) = 0$. Da $Z_0 \subset B(0, R)$ $\mathbb{P}$-f.s. gilt, erhalten wir

$$C_0(x) = \mathbb{E}[\lambda_d(Z_0 \cap (Z_0 + x))] = 0.$$

Hiermit folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(0 \in Z, x \in Z) &= p^2 + (1-p)^2(e^{\gamma C_0(x)} - 1) \\ &= p^2 \\ &= \mathbb{P}(x \in Z)\mathbb{P}(0 \in Z). \end{aligned}$$

(c) Da Z_0 eine zufällige kompakte Menge ist, also insbesondere $\mathbb{P}$-f.s. beschränkt ist, gilt $\mathbb{P}$-f.s.

$$\lim_{\|y\|\to\infty} \lambda_d(Z_0 \cap (Z_0 + y)) = 0.$$

Außerdem gilt nach Voraussetzung

$$\mathbb{E}[\lambda_d(Z_0 \cap (Z_0 + x))] \leq \mathbb{E}[\lambda_d(Z_0)] < \infty, \qquad x \in \mathbb{R}^d.$$

Mit dem Satz von der dominierten Konvergenz folgt

$$\begin{aligned}\lim_{\|y\|\to\infty} C_0(y) &= \lim_{\|y\|\to\infty} \mathbb{E}[\lambda_d(Z_0 \cap (Z_0 + y))] \\ &= \mathbb{E} \lim_{\|y\|\to\infty} \lambda_d(Z_0 \cap (Z_0 + y)) = 0.\end{aligned}$$

Mit Aufgabe 2 (c) und wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion erhalten wir somit

$$\lim_{\|y\|\to\infty} \mathbb{P}(0 \in Z, y \in Z) = \lim_{\|y\|\to\infty} p^2 + (1-p)^2(e^{\gamma C_0(y)} - 1) = p^2 = \mathbb{P}(x \in Z)\mathbb{P}(0 \in Z), \qquad x \in \mathbb{R}^d.$$

(d) Nach Aufgabe 2 (c) gilt

$$C(x) = \mathbb{P}(0 \in Z, x \in Z) = 2p - 1 + (1-p)^2 e^{\gamma C_0(x)}, \qquad x \in \mathbb{R}^d.$$

Wegen

$$\mathbf{1}_{\operatorname{int} Z_0} \quad \leq \quad \liminf_{x\to 0} \mathbf{1}_{Z_0 \cap (Z_0 + x)} \quad \leq \quad \limsup_{x \to 0} \mathbf{1}_{Z_0 \cap (Z_0 + x)} \quad \leq \quad \mathbf{1}_{Z_0}$$

und

$$\lambda_d(\partial Z_0) = 0 \qquad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

folgt

$$\lambda_d(Z_0) = \lambda_d(\operatorname{int} Z_0) = \lim_{x\to 0} \lambda_d(Z_0 \cap (Z_0 + x)) \qquad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Wegen $\lambda_d(Z_0 \cap (Z_0 + x)) \leq \lambda_d(Z_0)$, $x \in \mathbb{R}^d$, und $\mathbb{E}[\lambda_d(Z_0)] < \infty$ folgt aus dem Satz von der dominierten Konvergenz

$$\mathbb{E}[\lambda_d(Z_0)] = \lim_{x\to 0} \mathbb{E}[\lambda_d(Z_0 \cap (Z_0 + x))] = \lim_{x\to 0} C_0(x).$$

Aus $\mathbb{E}[\lambda_d(Z_0)] = \log((1-p)^{-1})/\gamma$ (siehe Vorlesung) folgt also

$$\lim_{x\to 0} C(x) = 2p - 1 + (1-p)^2 e^{\gamma \mathbb{E}[\lambda_d(Z_0)]} = p.$$

Aufgabe 4
Es seien $\Phi = \{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ ein stationärer Poisson-Prozess in $\mathbb{R}^d$ mit Intensität $\gamma > 0$ und $R, R_1, R_2, \ldots$ eine von Φ unabhängige Folge unabhängiger, nicht-negativer Zufallsvariablen mit derselben Verteilung. Es sei

$$Z := \bigcup_{n=1}^{\infty} B(\xi_n, R_n).$$

Zeigen Sie die folgende Äquivalenz:

$$\mathbb{P}(Z = \mathbb{R}^d) = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbb{E}[R^d] = \infty.$$

Lösung: Aus der Vorlesung wissen wir, dass

$$\text{(3)} \qquad \mathbb{E}[\lambda_d(Z \cap B)] = \mathbb{P}(0 \in Z)\lambda_d(B) = p\lambda_d(B), \qquad \mathcal{B}(\mathbb{R}^d),$$

gilt. Die Messbarkeit der Abbildung $(x, \omega) \mapsto \mathbb{1}\{x \in Z(\omega)\}$ folgt aus

$$\mathbb{1}\left\{x \in \bigcup_{n \geq 1} (B(0, R_n) + \xi_n)\right\} = \max_{n \geq 1} \mathbb{1}\{x \in B(0, R_n) + \xi_n\},$$

wobei $B^d(0, R_n) + \xi_n$ für $n \in \mathbb{N}$ eine zufällige abgeschlossene Menge ist.

Es gilt

$$\text{(4)} \qquad p = 1 - e^{-\gamma \mathbb{E}\lambda_d(B(0,R))} = 1 - e^{-\gamma \kappa_d \mathbb{E}R^d}.$$

Gilt $\mathbb{P}(Z = \mathbb{R}^d) = 1$, so folgt $p = \mathbb{P}(0 \in Z) = 1$, also $\mathbb{E}R^d = \infty$.

Umgekehrt folgt aus $\mathbb{E}R^d = \infty$ für beschränkte Mengen $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, dass

$$\lambda_d(Z \cap B) = \lambda_d(B) \qquad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Zunächst besitzen die Zufallsvariablen auf beiden Seiten dieser Gleichung wegen (4) und (3) den gleichen Erwartungswert. Mit $\lambda_d(Z \cap B) \leq \lambda_d(B)$ folgt die Gleichheit auch $\mathbb{P}$-f.s., das heißt $\lambda_d(B \setminus Z) = 0$ $\mathbb{P}$-f.s. Da es eine Folge $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkter Mengen in $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ gibt mit $B_n \uparrow \mathbb{R}^d$, folgt $\lambda_d(\mathbb{R}^d \setminus Z) = 0$ $\mathbb{P}$-f.s. Das bleibt richtig, falls Z durch

$$Z_\varepsilon := \bigcup_{n=1}^{\infty} B(\xi_n, (R_n - \varepsilon)_+)$$

ersetzt wird. Dabei ist $\varepsilon > 0$ fest gewählt. Beachte hierzu, dass $\mathbb{E}(R - \varepsilon)_+^d = \infty$. Also gilt für

$$Z'_\varepsilon := \bigcup_{n \in \mathbb{N} \,:\, R_n > \varepsilon} B(\xi_n, R_n - \varepsilon)$$

immer noch $\lambda_d(\mathbb{R}^d \setminus Z'_\varepsilon) = 0$ $\mathbb{P}$-f.s. Außerdem ist

$$Z'_\varepsilon + B(0, \varepsilon) \subset Z \qquad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Angenommen, es gäbe ein $x \in \mathbb{R}^d \setminus \big(Z'_\varepsilon + B(0, \varepsilon)\big)$, das heißt $x \notin Z'_\varepsilon + B(0, \varepsilon)$, so ist der Abstand $\mathrm{d}(x, Z'_\varepsilon) \geq \varepsilon$, womit die offene Kugel $\operatorname{int} B(x, \varepsilon)$ in $\mathbb{R}^d \setminus Z'_\varepsilon$ liegt. Dann ist aber $\lambda_d\big(\mathbb{R}^d \setminus Z'_\varepsilon\big) \neq 0$. Somit kann $Z'_\varepsilon + B(0, \varepsilon) \neq \mathbb{R}^d$ nur auf einer $\mathbb{P}$-Nullmenge gelten, das heißt, es folgt

$$Z'_\varepsilon + B(0, \varepsilon) = \mathbb{R}^d \qquad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

und damit auch die Behauptung.