Bachelorarbeit

Das Wachstumsverhalten Brownscher Pfade

Simon Drüssel

01.10.2017

Betreuung: Prof. Dr. Nicole Bäuerle

Fakultät für Mathematik

Karlsruher Institut für Technologie

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Wer sich mit der Bewegung von Teilchen beschäftigen möchte, wird schnell auf den Begriff der Brownschen Molekularbewegung stoßen. Robert Brown (1773-1858) entdeckte im Jahr 1827 bei Versuchen mit Gasen und Flüssigkeiten eine Wärmebewegung von mikroskopisch sichtbaren Teilchen. Der Begriff "Molekül" darf dabei nicht im heutigen Sinn verstanden werden, da es sich dabei nur um sehr kleine Teilchen handelt.
Brown zeigte bei seinen Veröffentlichungen 1828 und 1829 dabei hauptsächlich folgende Punkte auf:

- Die Bewegung ist eine sehr unregelmäßige Mischung aus Translation und Rotation
- Die Teilchen scheinen sich unabhängig von anderen zu bewegen
- Die Bewegung ist umso aktiver umso kleiner die Teilchen sind
- Die Zusammensetzung und Anzahl der Teilchen hat keinen Einfluss
- Die Bewegung wird bei geringerer Viskosität aktiver
- Die Bewegung stoppt zu keinem Zeitpunkt
- Die Bewegung wird nicht durch Verdunstung oder Flüssigkeitsströmungen beeinflusst
- Die Teilchen werden nicht angeregt

In der darauf folgenenden Zeit gab es immer weitere Theorien, es war jedoch Norbert Wiener der 1923 dem ganzen Prozess ein vollständiges mathematisches Fundament gab und die wahrscheinlichkeitstheoretische Existenz dessen bewies.

Bevor wir jetzt zur Definition der Brownschen Bewegung kommen, machen vorab noch zwei Anmerkungen:
Zunächst möchte ich an dieser Stelle ausdrücklich darauf hinweisen, dass sich die Kapitel 2 und 3 sehr stark an [1, Kapitel 2], die Kapitel 3 und 4 sehr stark an [1, Kapitel 11] orientieren.
Außerdem sei noch gesagt, dass zum Lesen dieser Bachelorarbeit allgemeine Kenntnisse, wie sie üblicherweise in der Analysis 3 aber auch in der Wahrscheinlichkeitstheorie, siehe [2], vermittelt werden, grundsätzlich vorausgesetzt sein sollen.

2 Definition der Brownschen Bewegung

Um uns mit der Brownschen Bewegung beschäftigen zu können, benötigen wir als erstes eine Definition deren.
Sei dafür $d \in \mathbb{N}$ und $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Dann ist eine *$d-$dimensionale Brownsche Bewegung* $B = (B_t)_{t \geq 0} = B(t)_{t \geq 0}$ ein stochastischer Prozess, also ein Prozess mit Indexwerten $t \in [0, \infty)$, sodass B_t zu jedem Zeitpunkt $t \in [0, \infty)$ eine Zufallsvariable ist und $B(t, \omega) \in \mathbb{R}^d$ für alle $\omega \in \Omega$ und der Prozess insgesamt dabei den folgenden Eigenschaften genügt:

(B0) $B_0(\omega) = 0$ für fast alle ω;

(B1) $B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, \dots, B_{t_1} - B_{t_0}$ sind unabhängig für alle $n \geq 1$, $0 = t_0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < \infty$;

(B2) $B_t - B_s \sim B_{t+h} - B_{s+h}$ für alle $0 \leq s < t$, $h \geq -s$;

(B3) $B_t - B_s \sim N(0, t-s)^{\otimes d}$, wobei $N(0,t)(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp(-\frac{x^2}{2t}) dx$;

(B4) $t \mapsto B_t(\omega)$ ist stetig für alle ω.

Eine Brownsche Bewegung ist also ein $\mathbb{R}^d$-wertiger Prozess der nach (B0) in 0 startet, der nach (B1) unabhängige und nach (B2) stationäre Zuwächse hat und dessen Pfade nach (B4) stetig sind. Außerdem kennen wir nach (B3) noch zu jedem Zeitpunkt die Verteilung von $B(t)$.

Im Folgenden wird anstatt $B(t, \omega)$ häufig auch $B_t(\omega)$ oder auch anstatt $B(t)$ auch B_t geschrieben. Dies sollte allerdings zu keinen weiteren Verwirrungen sorgen.

Bemerkung In vielen Lehr- und Einführungsbüchern zur Brownschen Bewegung werden in der Definitionen oft nur die Eigenschaften (B0)-(B3) gefordert, da mit diesen bereits auch (B4) gelten muss, oder alternativ dazu auch (B0)-(B2) und (B4), mit denen dann auch (B3) gilt. Dies soll hier nicht gemacht werden, dass so einerseits die Motivation der Definition aus der physikalischen Herleitung näher scheint, andererseits aber auch in Beweisen genauer auf die jeweiligen Eigenschaften verwiesen werden kann.

3 Die Brownsche Bewegung als Gaußprozess

Um die Brownsche Bewegung etwas besser kennen zu lernen, ist es notwendig die Brownsche Bewegung als Gaußprozess zu betrachten. Dafür benötigen wir zunächst einmal die Definition einer Gaußschen Zufallsvariablen:

Definition 3.1. Eine eindimensionale Zufallsvariable X heißt gaußsch, genau dann wenn die charakteristische Funktion ϕ_X von X gegeben ist durch:

$$\phi_X = \mathbb{E}e^{i\xi X} = e^{im\xi - \frac{1}{2}\sigma^2\xi^2} \tag{3.1}$$

für Zahlen $m \in \mathbb{R}$ und $\sigma \geq 0$.

Zwei-maliges Differenzieren von (3.1) nach ξ und mit $\xi = 0$ sieht man: $m = \mathbb{E}X$ und $\sigma^2 = \mathbb{V}X$.

Satz 3.2. *Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine ein-dimensionale Brownsche Bewegung, $t \geq 0$. Dann ist $B_t = B(t)$ gaußsch mit Erwartungswert 0 und Varianz t und es gilt:*

$$\phi_{B_t} = \phi_t = \mathbb{E}e^{i\xi B_t} = e^{-t\xi^2/2} \text{ für alle } t \geq 0,\ \xi \in \mathbb{R}. \tag{3.2}$$

Beweis. Differenzierung von ϕ_t nach ξ ergibt:

$$\sqrt{2\pi t} \cdot \phi_t'(\xi) \overset{(B3)}{=} \frac{d}{d\xi} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/(2t)} e^{i\xi x} dx \overset{Lebesgue}{=} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/(2t)} e^{i\xi x} \cdot (ix) dx$$

Mit der geschickten Umformung $\frac{d}{dx} e^{-x^2/(2t)} = -\frac{x}{t} e^{-x^2/(2t)}$ können wir das Ingetral auch aufschreiben als:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/(2t)} e^{i\xi x} \cdot (ix) dx &= \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dx} e^{-x^2/(2t)} (-it) e^{i\xi x} dx \\
&\overset{PI}{=} - \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/(2t)} (-it) e^{i\xi x} (i\xi) dx \\
&= -t\xi \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/(2t)} e^{i\xi x} dx \\
&= -t\xi \phi_t(\xi)
\end{aligned}$$

Dies führt uns also zu der Differentialgleichung $\phi_t'(\xi) = -t\xi\phi_t(\xi)$ die äquivalent ist zu:

$$\frac{\phi_t'(\xi)}{\phi_t(\xi)} = -t\xi \tag{3.3}$$

Da auch $\phi_t(0) = \mathbb{E}e^{i\cdot 0 \cdot B_t} = 1$ gelten muss, wird (3.3) eindeutig gelöst von $\phi_t(\xi) = e^{-t\xi^2/2}$. □

Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung. Wir wollen im Folgenden zeigen, dass der stochastische Prozess $(W_t)_{t\geq 0}$ definiert durch

$$W(t) := \begin{cases} tB(\frac{1}{t}), & \text{falls } t > 0, \\ 0, & \text{falls } t = 0, \end{cases} \tag{3.4}$$

ebenfalls eine Brownsche Bewegung ist. Damit können wir aus dem Wachstumsverhalten von (B_t) für $t \to \infty$ auch direkt Aussagen über das Verhalten von (B_t) für $t \to 0$ folgern. Um dies zeigen zu können benötigen wir allerdings zuerst noch ein paar allgemeine Feststellungen und die Definition eines Gaußprozess.
Betrachten wir zu aller erst einmal die Verteilung von (W_t) und schauen wir uns dafür die charakteristische Funktion $\psi_{w_t} = \psi_t$ an. Wie eben leiten wir $\psi_t(\xi)$ nach ξ ab und erhalten für $t > 0$:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2\pi}{t}} \cdot \psi_t'(\xi) &= \sqrt{\frac{2\pi}{t}} \frac{d}{d\xi} \mathbb{E} e^{i\xi t B_{1/t}} = \int_{\mathbb{R}} (itx) e^{i\xi tx} e^{-x^2 t/2} dx = \int_{\mathbb{R}} (-i) e^{i\xi tx} \frac{d}{dx} e^{-x^2 t/2} dx \\ &= i \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi tx} (i\xi t) e^{-x^2 t/2} = -\xi t \sqrt{\frac{2\pi}{t}} \psi_t(\xi) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Die charakteristische Funktion ϕ_t von $\cancel{(B_t)_{t\geq 0}}$ und ψ_t von $\cancel{(W_t)_{t\geq 0}}$ stimmen überein und da die charakteristische Funktion die Verteilung eindeutig bestimmt, siehe [2, Satz 15.7 Seite 158], haben B_t und W_t also auch diesselbe Verteilung für alle $t \geq 0$.
Kommen wir nun zur Definition eines Gauß-Prozess.

Definition 3.3. Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein eindimensionaler stochastischer Prozess. Dann ist (X_t) ein Gauß-Prozess $:\Leftrightarrow$ Alle Vektoren $\Gamma = (X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}), n \geq 1, 0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, sind gaußsche Zufallsvektoren.

Theorem 3.4. *Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung. Dann ist der Vektor $\Gamma := (B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})^{\mathrm{T}}$, $t_0 := 0 < t_1 < \cdots < t_n, n \geq 1$, ein Gaußscher Zufallsvektor (und damit nach Defintion (B_t) ein Gauß-Prozess) mit strikt positiv definiter, symmetrischer Kovarianzmatrix $C = (t_j \wedge t_k)_{j,k=1,\ldots,n}$ und Erwartungswertvektor $m = 0_n \in \mathbb{R}^n$.*

Beweis. [1, Theorem 2.6, Seite 9 ff] □

Jetzt wollen wir noch ein kleines Resultat beweisen, das vielleicht sogar aus der Analysis 1 bekannt sein könnte.

Lemma 3.5. *Sei $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}, f(0) = 0$ und f stetig auf $(0,\infty)$. Dann gilt:*
$f$stetig $:\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ \exists m_n \in \mathbb{N}\ \forall r \in \mathbb{Q} \cap (0, \frac{1}{m}] : |f(r)| \leq \frac{1}{n}$

Beweis. " $\Rightarrow$ " Folgt sofort aus der Definition von Stetigkeit.
Zeige also " $\Leftarrow$ ". Sei dafür $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,\infty)$, mit $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 0$.
Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist f nach Voraussetzung in t_n stetig, also existiert $\delta_n > 0$:

$$|f(t_n) - f(t)| \leq \frac{1}{n} \text{ für alle } t \in U_{\delta_n}(t_n)$$

Sei o.B.d.A $\delta_n \to 0$. Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$, existiert $r_n \in \mathbb{Q}^+ \cap U_{\delta_n}(t_n)$.
Also gilt $|f(t_n) - f(r_n)| \leq \frac{1}{n}$.
Da $t_n \to 0$ und $\delta_n \to 0$, muss auch $r_n \to 0$ und damit nach Voraussetzung auch $f(r_n) \to 0$ (für $n \to \infty$).
$\Rightarrow |f(t_n)| - \underbrace{|f(r_n)|}_{\to 0} \leq |f(t_n) - f(r_n)| \leq \frac{1}{n}$
$\Rightarrow f(t_n) \to 0$ für $(n \to \infty) \Rightarrow$ f stetig. $\square$

Mit der ganzen Vorarbeit können wir jetzt oben gemachte Behauptung beweisen.

Satz 3.6. *Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ Brownsche Bewegung und $(W_t)_{t\geq 0}$ definiert wie in Gleichung (3.4). Dann ist $(W_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung.*

Beweis. Nach Theorem 3.4 wissen wir bereits, dass (B_t) ein Gauß-Prozess und $\Gamma := (B_{t_1}, \dots, B_{t_n}))^{\mathrm{T}}$ gaußsch mit Kovarianzmatrix $C = (t_j \wedge t_k)_{j,k=1,\dots,n}$ und Erwartunswert $m = 0 \in \mathbb{R}^n$ ist.
$\Rightarrow \mathbb{E}(W(t)) = \mathbb{E}(t(B(\frac{1}{t})) = t\,\mathbb{E}(B(\frac{1}{t})) = t \cdot 0 = 0$, für $t > 0$ und $\mathbb{E}(W(0)) = \mathbb{E}(0) = 0$.
Die Kovarianzmatrix von W_t zu den den Zeitpunkten $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ ist für $1 \leq j, k \leq n$ gegeben durch:

$$\mathrm{Cov}(W(t_j), W(t_k)) = \mathrm{Cov}(t_j B(\tfrac{1}{t_j}), t_k B(\tfrac{1}{t_k})) = t_j t_k (\tfrac{1}{t_j} \wedge \tfrac{1}{t_k}) = t_j \wedge t_k$$

Also ist $(W(t_1), \dots, W(t_n))^{\mathrm{T}}$ ein Gauß-Prozess. Da $t \mapsto W(t) = tB(\frac{1}{t})$ für $t > 0$ stetig ist, genügt der Prozess $(W_t)_{t>0}$ nach [1, Lemma 2.7, Seite 11] den Forderungen (B1)-(B4). Also müssen wir noch zeigen, dass $\lim_{t\to 0} W(t) = W(0) = 0$ gilt.
Nach Lemma (3.5) können wir uns dabei auf die Betrachtung von positiven, rationalen Zahlen beschränken. Dafür definieren wir uns die Menge

$$\Omega^W := \left\{ \lim_{t \to 0^+} W(t) = 0 \right\} = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{m \geq 1} \bigcap_{r \in \mathbb{Q} \cap \left(0, \frac{1}{m}\right]} \left\{ |W(r)| \leq \frac{1}{n} \right\}$$

Wir wissen bereits, dass $(W_t)_{t>0}$ und $(B_t)_{t>0}$ dieselbe Verteilung haben und da die Mengen Ω^W und die analog definierte Menge Ω^B durch abzählbare viele Mengen der Form $\{|W(r)| \leq \frac{1}{n}\}$ und $\{|B(r)| \leq \frac{1}{n}\}$ definiert sind, können wir folgern, dass $\mathbb{P}(\Omega^W) = \mathbb{P}(\Omega^B)$. Also gilt

$$P(\Omega^W) = \mathbb{P}(\Omega^B) \overset{(B4)}{=} \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

Der stochastische Prozess $(W_t)_{t\geq 0}$ ist also auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega^W, \Omega^W \cap \mathcal{A}, \mathbb{P})$ eine Brownsche Bewegung. $\square$

Satz 3.7. *Sei* $(B_t)_{t\geq 0}$ *eine Brownsche Bewegegung. Dann ist* $(-B_t)_{t\geq 0}$ *ebenfalls eine Brownsche Bewegung.*

Beweis. Die Eigenschaften (B0)-(B2) & (B4) folgen sofort, die Eigenschaft (B3) folgt aus der Symmetrie der Normalverteilung. □

Auch der nächste Satz zeigt uns eine Möglichkeit, wie wir aus einer gegebenen Brownschen Bewegung (B_t) wieder einer Brownsche Bewegung (W_t) bekommen

Satz 3.8. *Sei* $(B_t)_{t\geq 0}$ *eine Brownsche Bewegung und* $a > 0$*.*
Dann ist $W(t) := B(t+a) - B(a)$ *ebenfalls eine Brownsche Bewegung.*

Beweis. $W(0) = B(a) - B(a) = 0$ und da $B(t)$ stetig für alle t, ist auch $W(t)$ stetig. Die Eigenschaften (B0) und (B4) sind also erfüllt. Seien $0 \leq s \leq t$, $0 \leq h$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} W(t+h) - W(s+h) &= B(t+h+a) - B(a) - (B(s+h+a) - B(a)) \\ &= B(t + \underbrace{h+a}_{\tilde{h}}) - B(s + \underbrace{h+a}_{\tilde{h}}) \overset{(B2)}{\sim} B(t) - B(s) \overset{(B3)}{\sim} N(0, t-s) \end{aligned}$$

Also gelten auch (B2) und (B3) für den Prozess (W_t). Bleibt also noch (B1) zu zeigen. Seien dafür $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$. Es gilt:

$$W(t_j) - W(t_{j-1}) = B(t_j + a) - B(t_{j-1} + a) \quad \text{für alle } j = 1, \ldots, n$$

Da nach Voraussetzung für die Zeipunkte $\bar{t}_j := t_j + a$ die Zuwächse $B(\bar{t}_j) - B(\bar{t}_{j-1})$ unabhängig sind, gelten alle Eigenschaften (B0)-(B4) für unseren Prozess (W_t) und damit ist (W_t) eine Brownsche Bewegung. □

4 Das Wachstum einer Brownschen Bewegung

In diesem Kapitel wollen wir uns anschauen, wie sich zu gegebenem $\omega \in \Omega$ der Pfad $B(t, \omega)$ in t verhält, genauer wollen wir versuchen Aussagen zu finden, wie schnell die Brownsche Bewegung insgesamt wächst, also $\mathbb{P}$-fast sichere Aussagen finden.
Dafür wollen wir die enge Beziehung der Brownschen Bewegung zur Normalverteilung ausnutzen. Dies motiviert dazu, bei einer Standardnormalverteilten Zufallsvariable X und zu gegebenem $x > 0$, die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X > x)$ näher zu betrachten. Wir erhalten die folgende beidseitig einschließende Abschätzung:

Lemma 4.1. *Sei $X \sim N(0,1)$. Dann gilt für $x > 0$:*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{x}{x^2+1} e^{-x^2/2} \leq \mathbb{P}(X > x) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} e^{-x^2/2} \tag{4.1}$$

Beweis. Mit partieller Integration folgt:

$$\frac{1}{x^2} \int_x^\infty e^{-y^2/2} dy \geq \int_x^\infty \frac{1}{y^2} e^{-y^2/2} dy \overset{P.I.}{=} (-)(-)\frac{1}{x} e^{-x^2/2} - \int_x^\infty (-y^{-1}) e^{-y^2/2}(-y) dy$$

und damit

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{x^2}+1\right)^{-1} \frac{1}{x} e^{-x^2/2} &\leq \int_x^\infty e^{-y^2/2} dy \\ &= \sqrt{2\pi}\mathbb{P}(X > x) \leq \int_x^\infty \frac{y}{x} e^{-y^2/2} dy = \frac{1}{x} e^{-x^2/2} \end{aligned}$$

□

Genau dies sind die entscheidenden Abschätzungen um das Theorem des iterierten Logarithmus beweisen zu können:

Theorem 4.2. *Gesetz des iterierten Logarithmus von Khintchine*
Sei $(B_t)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung. Dann gilt:

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{t \to \infty} \frac{B(t)}{\sqrt{2t \log \log t}} = 1\right) = 1 \tag{4.2}$$

Beweis. Wir wollen den Beweis in 2 Teile teilen, indem wir im ersten Schritt „$\leq$" und im zweiten Schritt $\geq$ zeigen.

1. Seien $\epsilon > 0$, $q > 1$, und die Mengen

$$A_n := \left\{ \sup_{0 \leq s \leq q^n} B(s) \geq (1+\epsilon)\sqrt{2q^n \log \log q^n} \right\}$$

Nach [1, Gleichung 6.11, Seite 69] können wir direkt folgern:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_n) &\leq 2\mathbb{P}\left(B(q^n) \geq (1+\epsilon)\sqrt{2q^n \log\log q^n}\right)\\ &= 2\mathbb{P}\left(\frac{B(q^n)}{\sqrt{q^n}} \geq (1+\epsilon)\sqrt{2\cancel{q^n}\log\log q^n}\right)\end{aligned}$$

Da allgemein für eine $N(0,\sigma^2)$-verteilte Zufallsvariable X gilt, dass $\frac{X}{\sigma} \sim N(0,1)$ ist, gilt $B(q^n)/\sqrt{q^n} \sim B(1)$ und damit:

$$\mathbb{P}\left(\frac{B(q^n)}{\sqrt{q^n}} \geq (1+\epsilon)\sqrt{2\cancel{q^n}\log\log q^n}\right) = \mathbb{P}\left(B(1) \geq (1+\epsilon)\sqrt{2\cancel{q^n}\log\log q^n}\right).$$

Mithilfe der Gleichung (4.1) und $x = (1+\epsilon)\sqrt{2\log\log q^n}$ können wir $\mathbb{P}(A_n)$ also nach oben abschätzen wie folgt:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_n) &\leq \frac{2}{(1+\epsilon)\sqrt{2\log\log q^n}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(1+\epsilon)^2\log\log q^n}\\ &= \underbrace{\frac{1}{(1+\epsilon)\sqrt{\pi\log\log q^n}}}_{\leq c}\underbrace{e^{-(1+\epsilon)^2\log\log q^n}}_{=(\log q^n)^{-(1+\epsilon)2}}\\ &\leq c\cdot(n\log q)^{-(1+\epsilon)^2}\end{aligned}$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_n) < \infty$ und wir können das Borel-Cantelli Lemma, siehe [2, 9.18, Seite 106ff], benutzen um $\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 0$ zu folgern, wobei der lim sup von Mengen definiert ist als:

$$\begin{aligned}&\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_{\cancel{n}}\\ &\Rightarrow \omega \in \limsup_{n\to\infty} A_n \Leftrightarrow \exists \text{ Teilfolge } (A_{n_k}) \text{ von } (A_n) : \omega \in A_{n_k}\ \forall k\end{aligned}$$

Damit können wir sagen, dass $\mathbb{P}\left((\limsup_{n\to\infty} A_n)^C\right) \underset{Def}{=} \mathbb{P}\left(\liminf_{n\to\infty} A_n^C\right) = 1$
Also gilt mit Wahrscheinlichkeit 1:

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\sup_{0\leq s\leq q^n} B(s)}{\sqrt{2q^n\log\log q^n}} \leq (1+\epsilon) \tag{4.3}$$

Die folgenden Gleichungen bzw Ungleichungen sind alle $\mathbb{P}$-fast sicher auf unserer gefundenen 1-Menge $\liminf_{n\to\infty} A_n^C$ zu betrachten. Seien $t > 3$ und $\Lambda(t) := \sqrt{2t\log\log t}$. Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$: $t \in [q^{n-1}, q^n]$. Da weiter

$$\frac{d}{dt}\Lambda(t) = \frac{1}{2}(2t\log\log t)^{-1/2}\cdot\left(2\log\log t + 2t\frac{1}{\log t}\frac{1}{t}\right) > 0 \text{ für alle } t > 3$$

ist Λ stri~~c~~kt mononton wachsend auf $(3, \infty)$ und somit gilt für $q^n > t \geq q^{n-1} > 3$

$$\frac{B(t)}{\sqrt{2t \log\log t}} \leq \frac{\sup_{s \leq q^n} B(s)}{\sqrt{2q^{n-1} \log\log q^{n-1}}} = \frac{\sup_{s \leq q^n} B(s)}{\sqrt{2q^n \log\log q^n}} \cdot \frac{\sqrt{2q^n \log\log q^n}}{\sqrt{2q^{n-1} \log\log q^{n-1}}} \tag{4.4}$$

Sei (t_m) eine Folge in $(3, \infty)$ mit $t_m \to \infty$ für $m \to \infty$. Dann können wir für jedes Folgenglied t_m die Abschätzung aus (4.4) ~~machen~~ und damit auch für den $\lim\limits_{m\to\infty}$:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{B(t_m)}{\sqrt{2t_m \log\log t_m}} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{\sup_{s \leq q^n} B(s)}{\sqrt{2q^n \log\log q^n}} \cdot \frac{\sqrt{2q^n \log\log q^n}}{\sqrt{2q^{n-1} \log\log q^{n-1}}}$$

Damit können wir insgesamt für den $\limsup\limits_{t\to\infty}$ sagen:

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{B(t)}{\sqrt{2t \log\log t}} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{\sup_{s \leq q^n} B(s)}{\sqrt{2q^n \log\log q^n}} \cdot \frac{\sqrt{2q^n \log\log q^n}}{\sqrt{2q^{n-1} \log\log q^{n-1}}} \leq (1+\epsilon) \cdot \sqrt{q}$$

Seien (ϵ_k) bzw. (q_l) beliebig von oben konvergente Folgen gegen 0 bzw 1. Dann können wir die Beweisschritte wie eben für jedes Folgenglied ϵ_k und q_l machen und erhalten damit im $\lim\limits_{\epsilon\to 0}$ bzw $\lim\limits_{q\to 1}$

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{B(t)}{\sqrt{2t \log\log t}} \leq 1 \ \mathbb{P}\text{-fast sicher}$$

2. Benutzen wir die Ungleichung (4.3) bei der Brownschen Bewegung $(-B_t)_{t\geq 0}$ zum Zeitpunkt q^{n-1} und mit $\epsilon = 1$ wissen wir:

$$-B(q^{n-1}) \leq \sqrt{2q^{n-1} \log\log q^{n-1}}(1+\epsilon) \leq \frac{2}{\sqrt{q}} \sqrt{2q^n \log\log q^n} \tag{4.5}$$

Wir werden dies im dritten Beweisschritt noch benutzen.

3. Bis hierhin haben wir die Eigenschaften (B1) und (B2), also dass die Zuwächse der Brownschen Bewegung unabhängig und stationär sind, nicht benutzt. Es ist also naheliegend, dass dies für die Abschätzung $\geq$ notwendig sein wird. Wie eben wollen wir uns zuerst eine geschickt gewählte 1-Menge konstruieren. Sei dafür $q > 1$ und

$$C_n := \left\{ B(q^n) - B(q^{n-1}) \geq \sqrt{2(q^n - q^{n-1}) \log\log q^n} \right\}, \text{ für alle } n \geq 1.$$

Dann sind die Mengen C_n, C_m für alle $n \neq m$ unabhängig, da gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(C_n \cap C_m) = \mathbb{P}\Bigg(&\left\{ B(q^n) - B(q^{n-1}) \geq \sqrt{2(q^n - q^{n-1}) \log\log q^n} \right\} \\ &\cap \left\{ B(q^m) - B(q^{m-1}) \geq \sqrt{2(q^m - q^{m-1}) \log\log q^m} \right\} \Bigg) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(B1)}{=}\mathbb{P}\left(\left\{B(q^n)-B(q^{n-1})\geq\sqrt{2(q^n-q^{n-1})\log\log q^n}\right\}\right)\\
&\cap\,\mathbb{P}\left(\left\{B(q^m)-B(q^{m-1})\geq\sqrt{2(q^m-q^{m-1})\log\log q^m}\right\}\right)\\
&=\mathbb{P}(C_n)\mathbb{P}(C_m)
\end{aligned}
$$

Außerdem verrät uns (B2), mit $s=0$, $t=q^n-q^{n-1}$ und $h=q^{n-1}$

$$
B(q^n-q^{n-1})=B(t)=B(t)-B(s)\overset{(B2)}{\sim}B(t+h)-B(s+h)=B(q^n)-B(q^{n-1}).
$$

Also liefern ~~und~~ die stationären Zuwächse der Brownschen Bewegung für $\mathbb{P}(C_n)$:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(C_n)&=\mathbb{P}\left(\frac{B(q^n)-B(q^{n-1})}{\sqrt{q^n-q^{n-1}}}\geq\sqrt{2\log\log q^n}\right)\\
&=\mathbb{P}\left(\frac{B(q^n-q^{n-1})}{\sqrt{q^n-q^{n-1}}}\geq\sqrt{2\log\log q^n}\right)
\end{aligned}
$$

Wie bereits in Teil 1. genutzt, gilt auch hier

$$
\frac{B(q^n)-B(q^{n-1})}{\sqrt{q^n-q^{n-1}}}\sim B(1)\sim N(0,1)
$$

Wir können also die untere Abschätzung der Gleichung (4.1) mit $x=\sqrt{2\log\log q^n}$ benutzen. Für $x\geq 1$ gilt zudem, dass $2x^2\geq x^2+1\Leftrightarrow x^2\geq\frac{1}{2}(x^2+1)\Leftrightarrow\frac{x}{x^2+1}\geq\frac{1}{2}\frac{1}{x}$ und da für n groß genug auch $x\geq 1$ gilt können wir also abschätzen:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(C_n)&\geq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sqrt{2\log\log q^n}}{2\log\log q^n+1}e^{-\log\log q^n}\\
&\geq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\log\log q^n}}e^{-\log\log q^n}\\
&=\frac{1}{\sqrt{8\pi}}\frac{1}{\sqrt{2\log\log q^n}}(n\log q)^{-1}\\
&=c\cdot\underbrace{\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{\log(n\log q)}}}_{:=a_n}
\end{aligned}
$$

Dann ist $a_n>0$ und $a_{n+1}\leq a_n$ für alle n, also gilt nach dem Cauchy-Verdichtungssatz: $\sum a_n$ konvergent $\Leftrightarrow\sum 2^k a_{2^k}$ konvergent. Es gilt aber

$$
\sum_{k=1}^{\infty}2^k a_{2^k}=\sum_{k=1}^{\infty}2^k\frac{1}{2^k}\frac{1}{\sqrt{\log 2^k\log q}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{1}{\sqrt{\log(2\log q)}}=\frac{1}{\sqrt{\log(2\log q)}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}},
$$

also muss $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(C_n) \geq \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ gelten und da die C_n wie oben gezeigt unabhängig sind können wir das Borel-Cantelli Lemma anwenden und es folgt:

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} C_n\right) = 1.$$

Es gilt also:

$$\begin{aligned}
0 &= \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega \mid \omega \in C_n^C \text{ für fast alle n}\}\right)\\
&= \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega \mid \frac{B(q^n - q^{n-1})}{\sqrt{q^n - q^{n-1}}} < \sqrt{2\log\log q^n} \text{ für fast alle n}\}\right)
\end{aligned}$$

oder, äquivalent dazu: Es gilt $\mathbb{P}$-fast sicher für unendlich viele $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
B(q^n) &\geq \sqrt{2(q^n - q^{n-1})\log\log q^n} + B(q^{n-1})\\
&\overset{2.}{\geq} \sqrt{2(q^n - q^{n-1})\log\log q^n} - \frac{2}{\sqrt{q}}\sqrt{2q^n \log\log q^n}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{B(q^n)}{\sqrt{2q^n\log\log q^n}} \geq \sqrt{\frac{2(q^n - q^{n-1})\log\log q^n}{2q^n \log\log q^n}} - \frac{2}{\sqrt{q}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{B(q^n)}{\sqrt{2q^n\log\log q^n}} \geq \sqrt{\frac{q^n - q^{n-1}}{q^n}} - \frac{2}{\sqrt{q}} \underset{n\to\infty}{\to} \sqrt{1 - \frac{1}{q}} - \frac{2}{\sqrt{q}}$$

Da dies für unendlich viele n gilt, folgt für die Brownsche Bewegung insgesamt:

$$\begin{aligned}
\limsup_{t\to\infty} \frac{B(t)}{\sqrt{2t\log\log t}} &\geq \limsup_{n\to\infty} \frac{B(q^n)}{\sqrt{2q^n \log\log q^n}}\\
\geq \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{q^n - q^{n-1}}{q^n}} - \frac{2}{\sqrt{q}} &= \sqrt{\frac{q-1}{q}} - \frac{2}{\sqrt{q}}
\end{aligned}$$

Ähnlich wie im ersten Teil, nehmen wir jetzt eine beliebige Folge $(q_l), q_l \to \infty$ und können die einzelnen Schritte für jedes q_l machen. Also können wir mit dem $\lim\limits_{q\to\infty}$ sagen:

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{B(t)}{\sqrt{2t\log\log t}} \geq \lim_{q\to\infty} \sqrt{\frac{q-1}{q}} - \frac{2}{\sqrt{q}} = 1$$

Definieren wir uns die Menge $\bar{\Omega} := \liminf\limits_{n\to\infty} A_n^C \cap \limsup\limits_{n\to\infty} C_n$, so gilt einerseits $\mathbb{P}(\bar{\Omega}) = 1$, vor allem aber auch:

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{B(t)}{\sqrt{2t\log\log t}} \geq 1 \text{ und } \limsup_{t\to\infty} \frac{B(t)}{\sqrt{2t\log\log t}} \leq 1 \; \forall \omega \in \bar{\Omega}$$

$$\Longrightarrow \mathbb{P}\left(\limsup_{t\to\infty} \frac{B(t)}{\sqrt{2t\log\log t}} = 1\right) = 1$$

$\square$

Wir wissen bereits, dass zu gegebener Brownscher Bewegung $(B_t)_{t\geq 0}$ die Prozesse $-B(t)$ und $tB(\frac{1}{t})$ ebenfalls Brownsche Bewegungen sind. Dies wollen wir nutzen, um über $\liminf\limits_{n\to\infty}$ und $\liminf\limits_{t\to 0}$ bzw $\limsup\limits_{t\to 0}$ weitere Ergebnisse aus dem Theorem 4.2 zu bekommen. Das folgende Lemma gibt uns darüber direkt Auskunft.

Lemma 4.3. *Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung. Dann gilt $\mathbb{P}$-fast sicher:*

$$(a)\quad \limsup_{t\to\infty} \frac{B(t)}{\sqrt{2t\log\log t}} = 1 \qquad (b)\quad \limsup_{t\to 0} \frac{B(t)}{\sqrt{2t\log\log\frac{1}{t}}} = 1$$

$$(c)\quad \liminf_{t\to\infty} \frac{B(t)}{\sqrt{2t\log\log t}} = -1 \qquad (d)\quad \liminf_{t\to 0} \frac{B(t)}{\sqrt{2t\log\log\frac{1}{t}}} = -1$$

Beweis.

(a) Die Aussage (a) ist Theorem 4.2.

(b)

$$\limsup_{t\to 0} \frac{B(t)}{\sqrt{2t\log\log\frac{1}{t}}} = \limsup_{t\to\infty} \frac{B\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{2\frac{1}{t}\log\log t}} = \limsup_{t\to\infty} \frac{t}{t}\frac{B\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{2\frac{1}{t}\log\log t}}$$
$$= \limsup_{t\to\infty} \frac{\tilde{B}(t)}{\sqrt{2t\log\log t}} = 1$$

(c)

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{B(t)}{\sqrt{2t\log\log t}} = \liminf_{t\to\infty}(-)\frac{-B(t)}{\sqrt{2t\log\log t}} = -\limsup_{t\to\infty} \frac{\tilde{B}(t)}{\sqrt{2t\log\log t}} = -1$$

(d)

$$\liminf_{t\to 0} \frac{B(t)}{\sqrt{2t\log\log\frac{1}{t}}} = -\limsup_{t\to\infty} \frac{-tB(\frac{1}{t})}{\sqrt{2\frac{1}{t}t^2\log\log t}} = -\limsup_{t\to\infty} \frac{\tilde{\tilde{B}}(t)}{\sqrt{2t\log\log t}} = -1$$

$\square$

An dieser Stelle soll noch ein kleiner Exkurs gemacht werden. Dazu sei wieder $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung und für $t > 0$ $W_h := B(t+h) - B(t)$. Dann ist nach Satz 3.8 (W_h) auch eine Brownsche Bewegung und damit gilt

$$\limsup_{h\to 0} \frac{|B(t+h) - B(t)|}{\sqrt{2h \log\log \frac{1}{h}}} = 1 \tag{4.6}$$

Nach Satz von Lévy (1937) gilt aber auch $\mathbb{P}$-fast sicher

$$\limsup_{h\to 0} \frac{\sup_{0\leq t\leq 1-h} |B(t+h) - B(t)|}{\sqrt{2h \log \frac{1}{h}}} = 1 \tag{4.7}$$

Das Interessante daran ist, dass Gleichung (4.6) uns verrät, dass der lokale Stetigkeitsmodul einer Brownschen Bewegung durch die Funktion $\sqrt{2h \log\log \frac{1}{h}}$ gegeben ist. Andererseits muss nach Gleichung (4.7) der globale Stetigkeitsmodul größer als $\sqrt{2h \log \frac{1}{h}}$ sein. Es muss also für jeden Pfad Punkte geben, an denen das Gesetz des iterierten Logarithmus nicht gilt! Definieren wir uns die Menge der Punkte, abhängig von ω, an denen das Gesetz des iterierten Logarithmus von Khintchine nicht gilt

$$E(\omega) = \left\{ t \geq 0 \mid \limsup_{h\to 0} \frac{|B(t+h,\omega) - B(t,\omega)|}{\sqrt{2h \log\log \frac{1}{h}}} \neq 1 \right\},$$

kann gezeigt werden, dass $E(\omega)$ fast sicher überabzählbar und dicht in $[0,\infty)$ liegt. Dieses auf den ersten Blick überraschende Ergebnis kann zum Beispiel in [Taylor, S.J.:Regularity of irregulatities on a Brownian Path, *Ann. Inst. Fourier* **24.2** (1974), 195-203] oder auch in [Orey, S.,Taylor, S.J.: How often does the law of the iterated logarithm fail? *Proc. London Math. Soc.* **28** (1974), 174-192] nachgelesen werden.

5 Chung's Gesetz des interierten Logarithmus

Bevor wir ein weiteres iteriertes Logarithmus Gesetz kennen lernen, soll eine kleine Motivation dafür gemacht werden. Dafür sei $((X_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten (kurz uiv.) Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}(X_1) = 0$ und $\mathbb{E}(X_1^2) < \infty$. In [Chung, K.L.: On the maximum partial sums of sequences of independent random variables, *Trans. Am. Math. Soc.* **61** (1948), 205-233] wurde bewiesen, dass

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\max_{j\leq n} |X_1 + \cdots + X_n|}{\sqrt{n/\log\log n}} = \frac{\pi}{\sqrt{8}}.$$

Wir wollen versuchen, ein ähnliches Resultat für die Brownsche Bewegung zu finden. Dafür benötigen wir allerdings eine etwas feinere Abschätzung für die Verteilung des Maximums einer Brownschen Bewegung.
Der folgende Satz geht auf Lévy aus dem Jahr 1948 zurück:

Satz 5.1. *Seien (B_t) eine Brownsche Bewegung und $m_t := \inf_{s\leq t} B(s)$, $M_t := \sup_{s\leq t} B(s)$. Dann gilt für $a < b \in \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$*

$$\mathbb{P}(m_t > a, M_t < b, B_t \in I) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \int_I \left(e^{-\frac{(x-2n(a-b))^2}{2t}} - e^{-\frac{(2a-x-2n(a-b))^2}{2t}} \right) dx$$

Beweis. Siehe [1, Theorem 6.18, Seite 76 ff] □

Dies lässt sich auf unsere Situation übertragen und es gilt:

Satz 5.2.

$$\mathbb{P}\left(\sup_{s\leq 1} |B_s| < x\right) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} e^{-\pi^2(2k+1)^2/(8x^2)}$$

Beweis. Sei $x > 0$. Wir setzen $a = -x$, $b = x$ und $t = 1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\sup_{s\leq 1} |B_s| < x\right) &= \mathbb{P}\left(\inf_{s\leq 1} B(s) > -x, \sup_{s\leq 1} B(s) < x, B_1 \in (-x,x)\right) \\
&\overset{(5.1.)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \int_{-x}^{x} \left(\exp\left[-\frac{(y+4nx)^2}{2}\right] - \exp\left[-\frac{(-2x-y+4nx))^2}{2}\right]\right) dy \\
&\underset{Konv.}{\overset{abs.}{=}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^{x} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \left(\exp\left[-\frac{(y+4nx)^2}{2}\right] - \exp\left[-\frac{(-2x-y+4nx))^2}{2}\right]\right) dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^{x} \left(\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \exp\left[-\frac{(y+4nx)^2}{2}\right] - \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \exp\left[-\frac{((4n-2)x-y))^2}{2}\right]\right) dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^{x} \left(\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \exp\left[-\frac{(y+4nx)^2}{2}\right] - \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \exp\left[-\frac{((4n-2)x+y))^2}{2}\right]\right) dy
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^{x} \sum_{j=-\infty}^{j=\infty} (-1)^j \exp\left[-\frac{(y+2jx)^2}{2}\right] dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=-\infty}^{j=\infty} (-1)^j \int_{-x}^{x} e^{-\frac{(y+2jx)^2}{2}} dy
\end{aligned}
$$

und mit der Substitution $t = y + 2jx$ folgt:

$$
\begin{aligned}
&\overset{Subs.}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=-\infty}^{j=\infty} (-1)^j \int_{x(2j-1)}^{x(2j+1)} e^{-t^2/2} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\sum_{j=-\infty}^{j=\infty} (-1)^j \mathbb{1}_{((2j-1)x,(2j+1)x)}(y)}_{=:f(y)} \cdot e^{-y^2/2} dy
\end{aligned}
$$

Dann ist f gerade bzgl. 0 ($f(y) = f(-y)$) und $4x$-periodisch ($f(y+4x) = f(y)$). Wir können für f also eine Fourierreihe berechnen und da f gerade ist , benötigen wir dafür nur die cos-Koeffizienten. Diese ergeben sich zu:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{4x} \int_{-2x}^{2x} \left(\sum_{j=-\infty}^{j=\infty} (-1)^j \mathbb{1}_{((2j-1)x,(2j+1)x)}(y) \right) dy \\
&= \frac{1}{4x} \left(\int_{-2x}^{x} -1dy + \int_{-x}^{x} 1dy + \int_{x}^{2x} -1dy \right) = 0
\end{aligned}
$$

und für $n \in \mathbb{N}$:

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{2x} \int_{-2x}^{2x} \left(\sum_{j=-\infty}^{j=\infty} (-1)^j \mathbb{1}_{((2j-1)x,(2j+1)x)}(y) \right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{2x} y\right) dy \\
&= \frac{1}{2x} \left(\int_{-2x}^{-x} - \cos\left(\frac{n\pi}{2x} y\right) dy + \int_{-x}^{x} \cos\left(\frac{n\pi}{2x} y\right) dy + \int_{x}^{2x} - \cos\left(\frac{n\pi}{2x} y\right) dy \right) \\
&= \frac{1}{2x} \frac{2x}{n\pi} \left(\left[- \sin\left(\frac{n\pi}{2x} y\right) \right]_{-2x}^{-x} \left[\sin\left(\frac{n\pi}{2x} y\right) + \right]_{-x}^{x} + \left[- \sin\left(\frac{n\pi}{2x} y\right) \right]_{x}^{2x} \right) \\
&= \frac{1}{n\pi} \left(\underbrace{- \sin\left(-\frac{\pi}{2} n\right)}_{=\sin(\frac{\pi}{2} n)} + \underbrace{\sin(-n\pi)}_{=0} + \sin\left(\frac{\pi}{2} n\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2} n\right) - \sin(\pi n) + \sin\left(\frac{\pi}{2} n\right) \right) \\
&= \frac{4}{n\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2} n\right) = \frac{4}{n\pi} \cdot \begin{cases} 1, & \text{falls } n \in 4\mathbb{N}_0 + 1, \\ -1, & \text{falls } n \in 4\mathbb{N}_0 + 3, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \\
\Longrightarrow f(y) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n}{2x} \pi y\right) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos\left(\frac{2k+1}{2x} \pi y\right).
\end{aligned}
$$

Jetzt definieren wir $b_k := \frac{2k+1}{2x}\pi$ und damit gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\sup_{s\leq 1}|B_s| < x\right) &= \frac{4}{\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\int_{\mathbb{R}}\cos(b_k y)e^{-y^2/2}dy \\ &= \frac{4}{\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{2}\left(e^{i(-b_k)y} + e^{i(a_k)y}\right)e^{-y^2/2}dy\end{aligned}$$

An dieser Stelle können wir die explizite Darstellung der charakteristischen Funktion einer Brownschen Bewegung, Gleichung 3.2, benutzen und wissen daher:

$$\int_R e^{i\xi y}e^{-y^2/2}dy = \sqrt{2\pi}e^{-\xi^2/2}$$

Insgesamt folgt:

$$\mathbb{P}\left(\sup_{s\leq 1}|B_s| < x\right) = \frac{4}{\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\sqrt{2\pi}e^{-\left(\frac{2k+1}{2x}\pi\right)^2\frac{1}{2}} = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}e^{-\frac{\pi^2(2k+1)^2}{(8x^2)}}$$

□

Theorem 5.3. *Chung's Gesetz vom interierten Logarithmus (1948)*
Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung. Dann gilt

$$\mathbb{P}\left(\liminf_{t\to\infty}\frac{\sup_{s\leq t}|B(s)|}{\sqrt{t/\log\log t}} = \frac{\pi}{\sqrt{8}}\right) = 1$$

Beweis. Wie auch den Beweis des ersten Gesetz des iterierten Logarithmus wollen wir auch diesen Beweis in 2 Schritten vollführen, wobei wir im ersten Teil " $\leq$ " und im zweiten Teil " $\geq$ " beweisen wollen.

1. Es ist naheliegend, sich wieder eine geschickte 1-Menge zu konstruieren. Dafür definieren wir uns die Folge $t_n := n^n$ und damit die Mengen:

$$C_n := \left\{\sup_{t_{n-1}\leq s\leq t_n}|B(s) - B(t_{n-1})| < \frac{\pi}{\sqrt{8}}\sqrt{\frac{t_n}{\log\log t_n}}\right\}$$

   Wir benutzen die Eigenschaft (B2) der Brownschen Bewegung mit $t = r$, $h = t_{n-1}$, $s = 0$ und es folgt:

$$B(r + t_{n-1}) - B(t_{n-1}) \sim B(r) \quad \text{und damit}$$

$$\begin{aligned}\frac{\sup_{t_{n-1}\le r\le t_n}|B(r)-B(t_{n-1})|}{\sqrt{t_n}} &= \frac{\sup_{0\le r\le t_n-t_{n-1}}|B(t_{n-1}+r)-B(t_{n-1})|}{\sqrt{t_n}}\\ &\sim \frac{\sup_{0\le r\le t_n-t_{n-1}}|B(r)|}{\sqrt{t_n}}\\ &\le \frac{\sup_{0\le r\le t_n-t_{n-1}}|B(r)|}{\sqrt{t_n-t_{n-1}}}\end{aligned}$$

Benutzen wir an dieser Stelle Satz 5.2 mit $x = \frac{\pi}{\sqrt{8\log\log t_n}}$ können wir damit $\mathbb{P}(C_n)$ nach unten abschätzen gegen:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C_n) &\ge \mathbb{P}\left(\frac{\sup_{0\le r\le t_n-t_{n-1}}|B(r)|}{\sqrt{t_n-t_{n-1}}} < \frac{\pi}{\sqrt{8}}\sqrt{\frac{1}{\log\log t_n}}\right)\\ &= \mathbb{P}\left(\sup_{r\le 1}|B(r)| < \frac{\pi}{8\log\log t_n}\right)\\ &= \frac{4}{\pi}e^{-\frac{8\pi^2\log\log t_n}{8\pi^2}}\\ &= \frac{4}{\pi}\log(t_n)^{-1} = \frac{4}{\pi}\frac{1}{n\log n}\end{aligned}$$

Da außerdem die Zuwächse von (B_t) unabhängig und stationär sind, nach (B1) und (B2), sind die Mengen C_n, C_m für alle $n \neq m$ unabhängig. Damit gilt das Borel-Cantelli Lemma und wir können sagen, dass:

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} C_n\right) = 1,$$

dass also $\mathbb{P}$-fast sicher gilt, dass

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{\sup_{t_{n-1}\le s\le t_n}|B(s)-B(t_{n-1})|}{\sqrt{t_n/\log\log t_n}} \le \frac{\pi}{\sqrt{8}}$$

Der 1. Schritt im Beweis vom Gesetz des iterierten Logarithmus, Satz 4.2, lieferte uns:

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{B(t)}{\sqrt{2t\log\log t}} \le (1+\epsilon)\sqrt{q} \quad \text{für alle } \epsilon > 0,\ q > 1$$

und damit können wir mit $\epsilon = 1/2$, $q = 2$ abschätzen:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sup_{s\le t_{n-1}} |B(s)|}{\sqrt{t_n/\log\log t_n}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\sup_{s\le t_{n-1}} |B(s)|}{\sqrt{t_n/\log\log t_n}} \cdot \sqrt{\frac{t_{n-1}/\log\log t_{n-1}}{t_{n-1}/\log\log t_{n-1}}}$$

$$= \limsup_{n\to\infty} \frac{\sup_{s\le t_{n-1}} |B(s)|}{\sqrt{t_{n-1}/\log\log t_{n-1}}} \cdot \sqrt{\frac{t_{n-1}/\log\log t_{n-1}}{t_n/\log\log t_n}}$$

$$= \limsup_{n\to\infty} \frac{\sup_{s\le t_{n-1}} |B(s)|}{\sqrt{t_{n-1}\log\log t_{n-1}}} \cdot \sqrt{\frac{t_{n-1}\cdot\log\log t_{n-1}\cdot\log\log t_n}{t_n}}$$

$$\le \frac{3}{2}\sqrt{2}\cdot 0 = 0$$

Also können wir abschätzen:

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\sup_{s\le t_n} |B(s)|}{\sqrt{t_n/\log\log t_n}} \le \liminf_{n\to\infty} \frac{2\cdot\sup_{s\le t_{n-1}} |B(s)| + \sup_{t_{n-1}\le s\le t_n} |B(s)-B(t_{n-1})|}{\sqrt{t_n/\log\log t_n}}$$

$$\le \limsup_{n\to\infty} 2\cdot \frac{\sup\limits_{s\le t_{n-1}} |B(s)|}{\sqrt{t_n/\log\log t_n}} + \liminf_{n\to\infty} \frac{\sup\limits_{t_{n-1}\le s\le t_n} |B(s)-B(t_{n-1})|}{\sqrt{t_n/\log\log t_n}}$$

$$\le 0 + \frac{\pi}{\sqrt{8}} \qquad \mathbb{P}\text{-fast sicher}$$

Und insgesamt folgt damit:

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{\sup_{s\le t} |B(s)|}{\sqrt{t/\log\log t}} \le \liminf_{n\to\infty} \frac{\sup_{s\le t_n} |B(s)|}{\sqrt{t_n/\log\log t}} \le 1 \qquad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

2. Der Beweis, dass auch $\mathbb{P}$-fast sicher " $\ge$ " gilt, erinnert etwas an den 1. Teil des Beweises von Khintchine's Gesetz des iterierten Logarithmus. Auch hier sei wieder $\epsilon > 0$ und $q > 1$. Wir definieren uns die Mengen

$$A_n := \left\{ \sup_{s\le q^n} B(s) < (1-\epsilon)\frac{\pi}{\sqrt{8}}\sqrt{\frac{q^n}{\log\log q^n}} \right\}.$$

Wir benutzen wieder Satz 5.2, diesesmal mit $x = (1-\epsilon)\frac{\pi}{\sqrt{8\log\log q^n}}$ und damit gilt für fast alle n:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_n) &= \mathbb{P}\left(\frac{\sup_{s\le q^n}|B(s)|}{\sqrt{q^n}} < (1-\epsilon)\frac{\pi}{\sqrt{8\log\log q^n}}\right)\\
&= \mathbb{P}\left(\sup_{s\le 1}|B(s)| < (1-\epsilon)\frac{\pi}{\sqrt{8\log\log q^n}}\right)\\
&\overset{5.2}{\le} \quad \frac{4}{\pi}e^{-\frac{\pi^2}{8}\cdot\frac{8\log\log q^n}{(1-\epsilon)^2\pi^2}}\\
&= \frac{4}{\pi}(n\log q)^{-1/(1-\epsilon)^2} = \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{n\log q}\right)^{\frac{1}{(1-\epsilon)^2}}
\end{aligned}
$$

Erneut benutzen wir das Borel-Cantelli Lemma und es folgt:

$$
\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(C_n) < \infty
$$

Dies sagt uns, dass $\mathbb{P}(\{\omega\in\Omega \mid \omega\in A_n^C \text{ für fast alle n }\}) = 1$. Es gilt also:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\frac{\sup_{s\le q^n}|B(s)|}{\sqrt{q^n/\log\log q^n}} \ge (1-\epsilon)\frac{\pi}{\sqrt{8}}\right) = 1\\
\Rightarrow &\liminf_{n\to\infty}\frac{\sup_{s\le q^n}|B(s)|}{\sqrt{q^n/\log\log q^n}} \ge (1-\epsilon)\frac{\pi}{\sqrt{8}} \qquad \mathbb{P}\text{-fast sicher}
\end{aligned}
$$

Dann gibt es für alle $t>1$ ein $n\in\mathbb{N}$: $t\in[q^{n-1},q^n]$ und wir können schlussendlich abschätzen:

$$
\begin{aligned}
\frac{\sup_{s\le t}|B(s)|}{\sqrt{t/\log\log t}} &\ge \frac{\sup_{s\le q^{n-1}}|B(s)|}{\sqrt{q^n/\log\log q^n}} = \frac{\sup_{s\le q^{n-1}}|B(s)|}{\sqrt{q^{n-1}/\log\log q^{n-1}}}\cdot\frac{\sqrt{q^{n-1}/\log\log q^{n-1}}}{\sqrt{q^n/\log\log q^n}}\\
&\ge (1-\epsilon)\frac{\pi}{\sqrt{8}}\cdot\sqrt{\frac{1}{q}\frac{\log\log q^n}{\log\log q^{n-1}}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (1-\epsilon)\sqrt{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

$\square$

Literatur

[1] René L. Schilling, Lothar Partzsch *Brownian Motion. An Introduction to Stoachastic Processes,* Degruyter, 2012.

[2] N. Henze. *Maß und Wahrscheinlichkeitstheorie (Stochastik II).* Karlsruher Institut für Technologie, Karlsruhe, 2010

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich diese Arbeit selbständig verfasst und keine anderen, als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt, die wörtlich oder inhaltlich übernommenen Stellen als solche kenntlich gemacht und die Satzung des Karlsruher Instituts für Technologie zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis in der jeweils gültigen Fassung beachtet habe.

Ort, den Datum