

$$\mathbb{P} \left(\frac{L_{2n}}{2n} \leq x \right) \rightarrow \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}$$

Norbert Henze

Irrfahrten – Faszination der Random Walks

Ein elementarer Einstieg
in die stochastischen Prozesse

2. Auflage



Springer Spektrum

Irrfahrten – Faszination der Random Walks

Norbert Henze

Irrfahrten – Faszination der Random Walks

Ein elementarer Einstieg in die
stochastischen Prozesse

2., überarbeitete Auflage



Springer Spektrum

Norbert Henze
Institut für Stochastik
Karlsruher Institut für Technologie KIT
Karlsruhe, Deutschland

ISBN 978-3-658-22857-6
<https://doi.org/10.1007/978-3-658-22858-3>

ISBN 978-3-658-22858-3 (eBook)

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

Die erste Auflage dieses Werkes erschien unter dem Titel „Irrfahrten und verwandte Zufälle“.

© Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2013, 2018

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften. Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Verantwortlich im Verlag: Ulrike Schmickler-Hirzebruch

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature.

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Aus dem Vorwort zur ersten Auflage

Dieses Werk ist aus dem Wunsch heraus entstanden, Studierenden – und hier insbesondere Studierenden des Lehramts Mathematik an Gymnasien – einen elementaren Einstieg in dieses faszinierende Teilgebiet der Stochastik mit zahlreichen, der Intuition zuwiderlaufenden Phänomenen und mannigfachen Anwendungen zu geben. Es ist so konzipiert, dass neben Kenntnissen der Analysis im Rahmen einer einsemestrigen Vorlesung und dem kleinen Einmaleins der Kombinatorik rudimentäres Grundwissen aus der Stochastik im Umfang einer einführenden, „maßtheoriefreien“ Vorlesung als Vorwissen ausreicht. Einige Abschnitte, die sich mit der einfachen symmetrischen Irrfahrt auf der Menge der ganzen Zahlen befassen, kommen sogar ohne diese Kenntnis aus. Insofern eignet sich das Buch als Grundlage für Proseminare (in großen Teilen ab dem zweiten Semester) oder auch Bachelor-Seminare im Bereich der Stochastik. Zu diesem Zweck wurde es zusammen mit Studierenden an zwei Universitäten mit Erfolg getestet. Die im Titel genannten *verwandten Zufälle* beziehen sich zum einen auf die in Kapitel 3 behandelten Brückenwege, also rein zufällige Irrfahrten auf \mathbb{Z} einer festen Länge $2n$, die am Ende wieder zum Ausgangspunkt zurückkehren, sowie den in Abschnitt 4.5 studierten einfachen Galton–Watson-Prozess als einfachstes Beispiel für einen Verzweigungsprozess.

Besonderes Augenmerk habe ich auf eine problemorientierte Darstellung, eine ausführliche Diskussion der erzielten Ergebnisse sowie die Einbeziehung von Grenzwertsätzen zur Verdeutlichung des Langzeitverhaltens von Irrfahrten gelegt. Zahlreiche Graphiken illustrieren die erzielten Ergebnisse und die verwendeten Methoden. An einigen Stellen wurde bewusst auf mathematische Strenge (z.B. Einführung von Stoppzeiten, starke Markov-Eigenschaft) zugunsten eines begrifflichen Verständnisses verzichtet.

Die behandelten Themen sind sämtlich sehr schulnah, geht es doch im ersten Kapitel ausschließlich um Fragen im Zusammenhang mit einer Bernoulli-Kette mit Trefferwahrscheinlichkeit $1/2$ und im gesamten zweiten Kapitel um stochastische Phänomene, die sich im Zusammenhang mit dem sukzessiven rein zufälligen Ziehen aller Kugeln aus einer Urne mit gleich vielen roten und schwarzen Kugeln ergeben. Das dritte Kapitel ist Fragen in Verbindung mit der asymmetrischen Bernoulli-Irrfahrt auf \mathbb{Z} , dem Spieler-Ruin-Problem, der Verteilung der Länge von Runs in Bernoulli-Ketten sowie dem einfachen Galton–Watson-Verzweigungsprozess gewidmet. Das vierte Kapitel behandelt Fragen der einfachen Irrfahrt auf dem ganzzahligen Gitter \mathbb{Z}^d in höheren Dimensionen. So erfährt man etwa, dass die Rückkehrwahrscheinlichkeit zum Ausgangspunkt bei einer rein zufälligen Irrfahrt auf dem kubischen Klettergerüst \mathbb{Z}^3 nur etwas mehr als ein Drittel beträgt.

Im fünften Kapitel habe ich diverse Hilfsmittel aus der Analysis, der Kombinatorik und der Stochastik zusammengestellt, die bei Bedarf nachgeschlagen werden können.

Als Limesverteilungen für die auftretenden Zufallsvariablen ergeben sich in einem fruchtbaren Zusammenspiel zwischen Analysis und Kombinatorik mit elementaren Mitteln diverse stetige Verteilungen wie die Arcus-Sinus-Verteilung, die Verteilung des Betrages der Standardnormalverteilung, die stabile Verteilung mit Index $1/2$, die Rényi-Verteilung, die Weibull-Verteilung, die Gleichverteilung und die Kolmogorov-Verteilung.

Ich danke Ludwig Baringhaus, Daniel Hug und Steffen Winter sowie den Studierenden eines Bachelor-Seminars für zahlreiche Verbesserungsvorschläge. Für Hinweise und Kritik bin ich stets dankbar.

Pfinztal, im Februar 2013

Norbert Henze

Vorwort zur zweiten Auflage

Gegenüber der ersten, unter einem etwas anderen Titel erschienenen Auflage, wurden neben zahlreichen Korrekturen zusätzliche Erklärungen eingefügt und Aktualisierungen vorgenommen. Außerdem wurde das Layout komplett neu gestaltet. Besonderen Dank schulde ich Peter Eichelsbacher, der mich auf gewisse didaktische Defizite hinwies, sowie Nina Gantert und Felizitas Weidner, die mich auf einen Fehler im Beweis von Satz 2.15 aufmerksam machten. Lothar Heinrich danke ich für eine biografische Richtigstellung.

Pfinztal, im Juni 2018

Norbert Henze

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Die einfache symmetrische Irrfahrt auf \mathbb{Z} – gedächtnisloses Hüpfen auf den ganzen Zahlen	3
2.1	Grundbegriffe, Spiegelungsprinzip	9
2.2	Das Hauptlemma	13
2.3	Der Zeitpunkt der letzten Nullstelle	17
2.4	Die Anzahl der Nullstellen	27
2.5	Erstwiederkehrzeit, Rekurrenz	38
2.6	Verweilzeiten	44
2.7	Maximum und Minimum	48
2.8	Anzahl und Lage der Maximalstellen	56
2.9	Leiterzeitpunkte und Leiterepochen	67
2.10	Schnittpunkte von Irrfahrten	77
2.11	Vorzeichenwechsel	86
2.12	Das Betragsmaximum	95
2.13	Ein Test auf Symmetrie	102
2.14	Dualität: Neue Einsichten	106
2.15	Ausblicke	109
3	Brückenwege – Ausgleich nach $2n$ Zeitschritten	117
3.1	Die Anzahl der (inneren) Nullstellen	119
3.2	Verweilzeiten	133
3.3	Letzte Nullstelle und Erstwiederkehrzeit	137
3.4	Maximum und Minimum	141
3.5	Vorzeichenwechsel	148
3.6	Betragsmaximum, Kolmogorov-Verteilung	154
3.7	Der Kolmogorov-Smirnov-Test	161
3.8	Ausblick: Die Brownsche Brücke	167

4	Asymmetrische Irrfahrten und Verwandtes	171
4.1	Leiterzeitpunkte	171
4.2	Die Anzahl der Nullstellen	178
4.3	Irrfahrten mit absorbierenden Rändern: Das Spieler–Ruin-Problem	181
4.4	Längste Auf- und Abwärtsruns	187
4.5	Der Galton–Watson-Prozess	193
5	Irrfahrten auf dem ganzzahligen Gitter in höheren Dimensionen	203
5.1	Rekurrenz und Transienz	204
5.2	Die Anzahl der besuchten Zustände	208
6	Hilfsmittel aus Analysis, Kombinatorik und Stochastik	214
6.1	Ein kanonischer Wahrscheinlichkeitsraum	214
6.2	Verteilungskonvergenz	215
6.3	Zentrale Grenzwertsätze	217
6.4	Ungleichungen für die Logarithmus-Funktion	217
6.5	Erwartungswert und Varianz \mathbb{N}_0 -wertiger Zufallsvariablen	217
6.6	Die Stirling-Formel	218
6.7	Erzeugende Funktionen	219
6.8	Einige Identitäten für Binomialkoeffizienten	221
6.9	Die Binomialreihe	223
6.10	Legendre-Polynome	224
6.11	Das Lemma von Borel–Cantelli	225
	Literaturverzeichnis	227
	Index	232



Kapitel 1

Einleitung

Es war augenscheinlich Karl Pearson [PE], der den Begriff *random walk* (deutsch: *Irrfahrt*, französisch: *promenade au hazard*) einführte, als er den Lesern der Zeitschrift *Nature* im Jahr 1905 (frei übersetzt¹) die folgende Frage stellte:

„Kann mir irgendetwas eine Literaturstelle nennen, in der ich eine Lösung zu folgendem Problem finde oder mir ggf. eine originäre Lösung zukommen lassen? Für Hilfe in dieser Angelegenheit wäre ich sehr dankbar.

Ein Mann startet von einem Punkt O aus und geht l Yards geradeaus. Dann dreht er sich um einen rein zufälligen Winkel und geht wieder l Yards geradeaus. Er wiederholt diesen Vorgang n mal. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach n solcher Wegstrecken sein Abstand zum Ausgangspunkt O zwischen r und $r + \delta r$ liegt?“

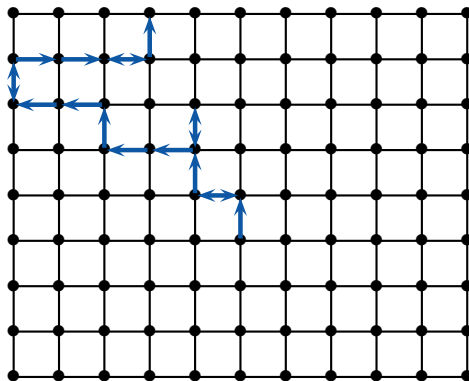
Pearsons Interesse an diesem Problem entstammte dem Wunsch, ein Modell für zufällige Migrationen biologischer Spezies zu finden, und es war wohl überraschend, als bereits eine Woche später Lord Rayleigh eine Antwort auf Pearsons Problem gab, indem er die Irrfahrt begrifflich gleichwertig mit der Überlagerung von n zufällig phasenverschobenen Schwingungen gleicher Amplitude und gleicher Frequenz erkannte. In seinem Dank an Rayleigh (wiederum nur eine Woche später!) resümierte Pearson, wiederum frei übersetzt²: „Wir können aus der Lösung von

¹Can any of your readers refer me to a work wherein I should find a solution of the following problem, or failing the knowledge of any existing solution provide me with an original one? I should be extremely grateful for aid in the matter.

A man starts from a point O and walks l yards in a straight line; he then turns through any angle whatever and walks another l yards in a second straight line. He repeats this process n times. I require the probability that after n of these stretches he is at distance between r and $r + \delta r$ from his starting point, O .

²The lesson of Lord Rayleigh's solution is that in open country the most probable place of finding a drunken man who is at all capable of keeping on his feet is somewhere near his starting point.

Lord Rayleigh die folgende Lehre ziehen: In offenem Gelände ist der wahrscheinlichste Ort, an dem man einen Betrunkenen antrifft, der überhaupt noch auf seinen Beinen stehen kann, irgendwo in der Nähe seines Ausgangspunktes.“



Das obige Bild zeigt das Resultat einer Irrfahrt eines Betrunkenen in einer „Quadrat-Stadt“, in der die Straßen wie auf einem Schachbrett angeordnet sind. An jeder Kreuzung wählt der Betrunkenen rein zufällig eine der vier möglichen Richtungen geht in dieser Richtung bis zur nächsten Kreuzung weiter.

Im Jahre 1921 bewies George Pólya ([PO], s. Kapitel 4), dass eine rein zufällige Irrfahrt auf dem ganzzahligen Gitter in der Ebene mit Wahrscheinlichkeit 1 wieder zum Ausgangspunkt zurückkehrt, im Fall in höheren Dimensionen jedoch nicht. Seine Untersuchungen waren bahnbrechend für weitere Forschungen. Sucht man heute (13.4. 2018) in der Datenbank *mathscinet* unter dem Schlagwort *random walk(s)*, so erhält man insgesamt 6228 Treffer. Diese beeindruckende Zahl verdeutlicht die internationale Forschungsaktivität in diesem Bereich. Zum Thema Irrfahrten gibt neben Zeitschriftenartikeln auch zahlreiche Bücher, aber keines dieser Werke ist an Studierende der Mathematik im zweiten Jahr eines Bachelorstudiums gerichtet. Mit diesem Buch möchte ich diese Lücke schließen. Der Zielgruppe entsprechend betrachten wir in Kapitel 2 zunächst ausgiebig den ein-dimensionalen Fall. Dass dieser Fall selbst Schülerinnen und Schülern der Kursstufe eines Gymnasiums zugänglich ist, zeigt das mit dem QR-Code verlinkte Video.



Kapitel 2



Die einfache symmetrische Irrfahrt auf \mathbb{Z} – gedächtnisloses Hüpfen auf den ganzen Zahlen

Dieses einführende Kapitel ist der einfachen symmetrischen Irrfahrt auf der Menge $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ der ganzen Zahlen gewidmet. Ein Teilchen durchläuft eine solche Irrfahrt, wenn es in 0 startet und anschaulich gesprochen *gedächtnislos auf \mathbb{Z} hin- und herirrt*, wobei zu äquidistanten Zeitpunkten jeweils mit *gleicher* Wahrscheinlichkeit $1/2$ ein Schritt der Länge 1 nach rechts oder links auf dem Zahlenstrahl erfolgt (Bild 2.1).

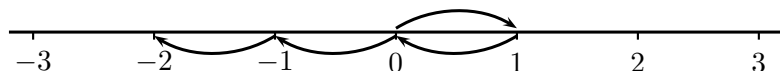


Bild 2.1: Anfang einer Irrfahrt auf \mathbb{Z}

Wir modellieren für $j = 1, 2, \dots$ den j -ten Schritt der Irrfahrt durch eine Zufallsvariable X_j mit der Eigenschaft $\mathbb{P}(X_j = 1) = \mathbb{P}(X_j = -1) = 1/2$. Dabei bedeute das Ereignis $\{X_j = 1\}$ bzw. $\{X_j = -1\}$, dass sich das Teilchen nach rechts bzw. links bewegt. Die Gleichwahrscheinlichkeit der beiden möglichen Richtungen kommt im Attribut *symmetrisch* zum Ausdruck. Wir werden später auch asymmetrische Irrfahrten betrachten, bei denen durch Aufgabe der Gleichwahrscheinlichkeitsannahme ein Trend in eine gewisse Richtung vorherrscht. Der Gedächtnislosigkeit der Irrfahrt wird dadurch Rechnung getragen, dass X_1, X_2, \dots als stochastisch unabhängig vorausgesetzt werden; es gilt also für jedes $k \geq 2$ und

jede Wahl von Schritt-Richtungen $(a_1, \dots, a_k) \in \{-1, 1\}^k$ die Gleichung

$$\mathbb{P}(X_1 = a_1, \dots, X_k = a_k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(= \prod_{j=1}^k \mathbb{P}(X_j = a_j)\right). \quad (2.1)$$

Ein geeigneter Grundraum, auf dem X_1, X_2, \dots als (messbare) Abbildungen definiert sind, wird durch allgemeine Sätze der Maßtheorie garantiert; eine mögliche Wahl findet sich in Abschnitt 6.1.

Setzen wir $S_0 := 0$ sowie für $n \geq 1$

$$S_n := X_1 + X_2 + \dots + X_n, \quad (2.2)$$

so gibt die Zufallsvariable S_n die Position des Teilchens zum Zeitpunkt n an. Wir legen also fest, dass das Teilchen zum Zeitpunkt 0 startet und für jedes $j \geq 1$ der j -te Schritt der Irrfahrt zum Zeitpunkt j abgeschlossen ist.

Um den Verlauf einer Irrfahrt abzubilden, nehmen wir von der hierfür untauglichen Darstellung in Bild 2.1 Abstand. Die dort gezeigte Irrfahrt kann nämlich unter Umständen bereits 1000 Schritte absolviert haben, und zwar 499 mal einen Rechts- gefolgt von einem Linksschritt und erst danach zwei Schritte nach links. Wir stellen vielmehr Irrfahrten in einem rechtwinkligen Koordinatensystem dar, wobei auf der x -Achse als Abszisse die Anzahl der seit Beginn erfolgten Wegschritte gekennzeichnet ist. Die y -Achse steht als Ordinate für die um 90 Grad gegen den Uhrzeigersinn gedrehte Zahlengerade; sie dient dazu, die Position des Teilchens auf dieser Zahlengeraden anzugeben. In diesem Koordinatensystem beschreiben also die Punkte $(0, S_0), (1, S_1), (2, S_2), \dots$ eine Irrfahrt in deren zeitlichem Verlauf. Es ist üblich, aufeinander folgende Punkte (j, S_j) und $(j+1, S_{j+1})$ zu verbinden, wodurch man einen auch *Weg* genannten Polygonzug erhält.

Bild 2.2 illustriert eine Irrfahrt, die zunächst von 0 nach 1, dann von 1 nach 2, dann von 2 nach 1 usw. wandert. Nach 20 Schritten – also zum Zeitpunkt 20 – befindet sie sich in der Position 2. Synonym für *Position* werden auch die Begriffe *Höhe* oder *Zustand* verwendet.

Bild 2.3 zeigt den Verlauf einer Irrfahrt der Länge 200. Wie in Bild 2.2 wurde auch hier ein gleicher Maßstab für die Beschriftung beider Achsen gewählt. Offenbar bleibt aber der Weg in Bild 2.3 flach, und dieser Effekt verstärkt sich noch, je mehr Wegschritte abgebildet werden. Ist dieses Phänomen durch Zufall zu erklären, oder erfordert das stochastische Verhalten von Irrfahrten über längere Zeiträume im Hinblick auf eine graphische Darstellung eine andere Maßstabswahl für beide

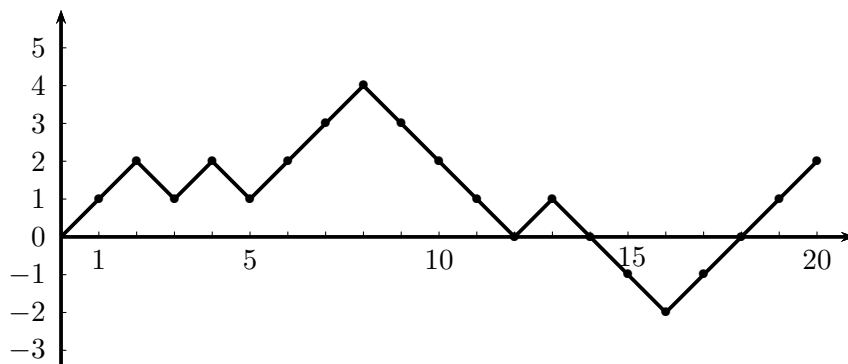


Bild 2.2: Die ersten 20 Schritte einer Irrfahrt als Polygonzug

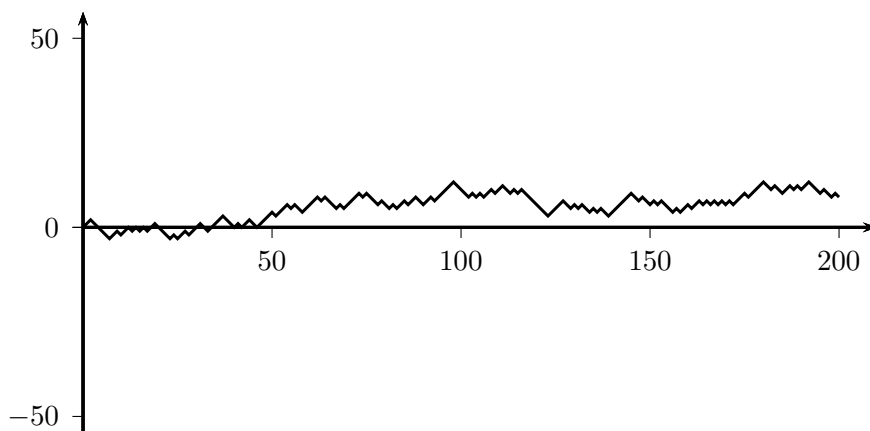


Bild 2.3: Irrfahrt der Länge 200, maßstabsgleich dargestellt

Achsen? Hierzu überlegen wir uns, dass nach (2.2) die Höhe S_n der Irrfahrt nach n Schritten eine Summe von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen ist. Setzen wir

$$Y_j := \frac{X_j + 1}{2}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

notieren wir also einen Rechts-Schritt $X_j = 1$ als *Treffer* ($Y_j = 1$) und einen Links-Schritt $X_j = -1$ als *Niete* ($Y_j = 0$), so sind Y_1, Y_2, \dots unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(Y_j = 1) = \mathbb{P}(Y_j = 0) = 1/2$. Folglich besitzt die Summe

$$B_n := Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$$

die Binomialverteilung $\text{Bin}(n, 1/2)$. Nach dem Zentralen Grenzwertsatz von de

Moivre¹-Laplace² (s. Abschnitt 6.3) gilt für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(a \leq \frac{B_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}} \leq b \right) = \Phi(b) - \Phi(a), \quad (2.3)$$

wobei

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{t^2}{2} \right) dt \quad (2.4)$$

die Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung bezeichnet. Nach Definition von S_n , Y_j und B_n gilt

$$S_n = 2B_n - n. \quad (2.5)$$

Setzt man diese Beziehung in (2.3) ein, so ergibt sich die auch direkt mit dem in Abschnitt 6.3 formulierten allgemeineren Zentralen Grenzwertsatz von Lindeberg³–Lévy⁴ erhältliche Grenzwertaussage

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(a \leq \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq b \right) = \Phi(b) - \Phi(a). \quad (2.6)$$

Insbesondere folgt $\mathbb{P}(-1.96\sqrt{n} \leq S_n \leq 1.96\sqrt{n}) \approx 0.95$ für großes n und somit etwa $\mathbb{P}(-98 \leq S_{2500} \leq 98) \approx 0.95$. In Abschnitt 2.12 werden wir sehen, dass für großes n $\mathbb{P}(-2.242\sqrt{n} \leq \max_{k \leq n} |S_k| \leq 2.242\sqrt{n}) \approx 0.95$ gilt. Die stochastische Schwankungsbreite einer einfachen symmetrischen Irrfahrt bis zur Zeit n ist also *von der Größenordnung* \sqrt{n} , und die Beschriftung der Ordinate sollte dieses n/\sqrt{n} -Maßstabsverhältnis widerspiegeln. So kann etwa eine Irrfahrt der Länge $n = 2500$ am Ende zwar jeden der Werte $-2500, -2498, \dots, -2, 0, 2, \dots, 2498$ und 2500 annehmen, der zugehörige Polygonzug wird jedoch in seinem gesamten zeitlichen Verlauf mit Wahrscheinlichkeit 0.95 zwischen den Grenzen $\pm 2.242\sqrt{2500} \approx \pm 113$ bleiben. Diesem Umstand tragen Bild 2.4 und alle weiteren Bilder, die längere Irrfahrten zeigen, Rechnung.

¹Abraham de Moivre (1667–1754), gilt als bedeutendster Wahrscheinlichkeitstheoretiker vor P.S. Laplace, 1697 Aufnahme in die Royal Society und 1735 in die Berliner Akademie.

²Pierre Simon Laplace (1749–1872), Physiker und Mathematiker, Professor an der École Polytechnique in Paris, sein 1812 erschienenes Buch *Théorie analytique des probabilités* fasste das wahrscheinlichkeitstheoretische Wissen seiner Zeit zusammen.

³Jarl Waldemar Lindeberg (1876–1932), Landwirt und Mathematiker.

⁴Paul Lévy (1886–1971), einer der Hauptbegründer der modernen Wahrscheinlichkeitstheorie, 1919–1959 Professor an der École Polytechnique in Paris.

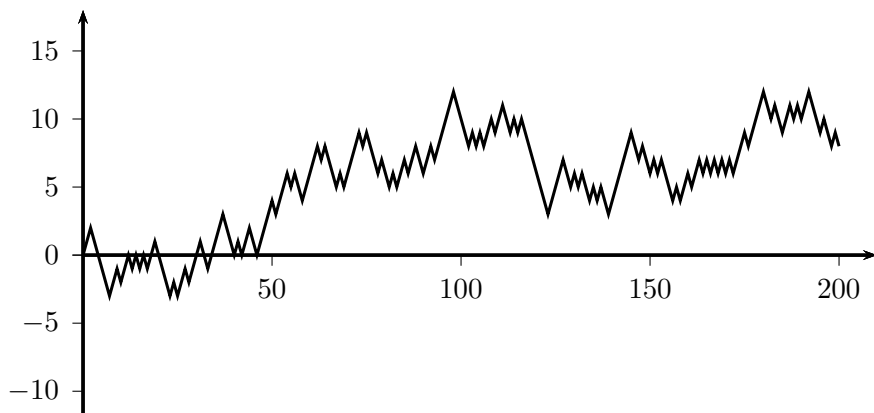


Bild 2.4: Die Irrfahrt aus Bild 2.3 in angepasstem Maßstab

Da nach (2.5) das Ereignis $\{S_n = k\}$ zu $\{B_n = (n+k)/2\}$ äquivalent ist, folgt mit der Festsetzung

$$\binom{n}{\ell} := 0, \quad \text{falls } \ell \notin \mathbb{Z}, \quad (2.7)$$

für $n \in \mathbb{N}$ und $j \in \mathbb{Z}$ mit $|j| \leq n$ die Darstellung

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \frac{\binom{n}{\frac{n+k}{2}}}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad -n \leq k \leq n. \quad (2.8)$$

Die einfache symmetrische Irrfahrt zeigt zahlreiche unerwartete und der allgemeinen Intuition widersprechende Phänomene, die erstmals in geschlossener Form von William Feller⁵ [FEL] publiziert wurden. In den folgenden Abschnitten werden verschiedene nahe liegende Fragen aufgegriffen und beantwortet. Nach einem einführenden Abschnitt 2.1, der einige Bezeichnungen bereitstellt und das beweistechnisch grundlegende Spiegelungsprinzip erläutert, wird letzteres Prinzip in Abschnitt 2.2 benutzt, um verschiedene Mengen von Wegen als gleich mächtig nachzuweisen. Betrachtet man die Irrfahrt in Bild 2.4, so befindet sich diese nach 46 Schritten auf der x -Achse, also in der Höhe 0, kehrt danach aber

⁵William Feller (1906–1970), promovierte 1926 bei R. Courant in Göttingen, 1928 Dozent an der Universität Kiel. Feller floh 1933 vor den Nationalsozialisten aus Deutschland, seit 1944 war er US-amerikanischer Staatsbürger, ab 1950 Professor an der Princeton University. Sein zweibändiges Werk „An Introduction to Probability Theory and Its Applications“ zählt zu den besten mathematischen Lehrbüchern des 20. Jahrhunderts.

(zumindest bis zum Zeitpunkt 200) nicht mehr zu 0 zurück. In Abschnitt 2.3 wird gezeigt, dass der zufällige Zeitpunkt L_{2n} der letzten Nullstelle, also des letzten Aufenthaltes in 0, einer Irrfahrt der Länge $2n$ eine kontraintuitive U -förmige Verteilung besitzt sowie die Grenzverteilung von $L_{2n}/(2n)$ für $n \rightarrow \infty$ hergeleitet. Abschnitt 2.4 untersucht die Anzahl N_{2n} der Nullstellen einer Irrfahrt der Länge $2n$. Überraschend ist, dass N_{2n} bei wachsendem n nicht proportional zur Schrittzahl $2n$ zunimmt, sondern ungefähr proportional zu $\sqrt{2n}$ wächst. Hiermit zusammen hängt das in Abschnitt 2.5 gezeigte Resultat, dass ein Teilchen zwar mit Wahrscheinlichkeit 1 irgendwann wieder zum Startpunkt 0 zurückkehrt, aber hierfür im Mittel unendlich lange benötigt. In Abschnitt 2.6 lernen wir, dass eine Irrfahrt gerne entweder sehr kurz oder sehr lange oberhalb der x -Achse verweilt (s. Bild 2.4), und dass diese in Zeitschritten gemessene Verweilzeit O_{2n} einer $2n$ -schrittigen Irrfahrt die gleiche Verteilung wie L_{2n} besitzt. In Abschnitt 2.7 untersuchen wir die Verteilung der maximalen Höhe M_n einer einfachen symmetrischen Irrfahrt der Länge n und stellen einen interessanten Zusammenhang mit der Anzahl der Nullstellen fest. In Abschnitt 2.8 erfahren wir insbesondere, dass für jede vierte Irrfahrt das Maximum an genau zwei Zeitpunkten angenommen wird. Abschnitt 2.9 ist der Frage gewidmet, wie lange eine Irrfahrt braucht, um erstmalig zu einer vorgegebenen ganzen Zahl k zu gelangen. Hier ergibt sich unter anderem, dass jede zweite Irrfahrt etwa 22000 Schritte benötigt, um erstmals die Höhe 100 zu erreichen. Ähnlich überraschende Phänomene treten bei dem in Abschnitt 2.10 behandelten Problem auf, wann sich zwei Irrfahrten, die in unterschiedlichen Höhen starten, erstmalig treffen. In Abschnitt 2.11 fragen wir nach der Anzahl der Vorzeichenwechsel, also Nulldurchgängen der Irrfahrt, und Abschnitt 2.12 behandelt die Frage nach dem Betragsmaximum, also der Verteilung der (absolut gesehen) größten Zahl, die eine Irrfahrt der Länge n besucht. Die erhaltenen Ergebnisse werden in Abschnitt 2.13 auf eine statistische Problemstellung angewendet. Ein in Abschnitt 2.14 vorgestelltes Dualitätsprinzip zeigt interessante Zusammenhänge zu früheren Überlegungen auf und vermittelt neue Einsichten. Das Kapitel schließt mit einem Ausblick auf verschiedene höhere Gesichtspunkte.

Abschließend sei gesagt, dass eine Irrfahrt verschiedenartige Interpretationen zulässt. Eine davon ist die eines Spiels zwischen zwei Personen A und B, die wiederholt eine faire Münze werfen; dabei setzt A auf Zahl und B auf Wappen. Liegt Zahl oben, so zahlt B einen Euro an A, andernfalls ist es umgekehrt. Bei unbeschränktem Kapital beider Spieler entsteht eine einfache symmetrische Irrfahrt auf \mathbb{Z} ; bei beschränkten Vermögensverhältnissen ist die Irrfahrt durch so genannte *absorbierende Ränder* eingeschränkt (s. Abschnitt 4.3).

2.1 Grundbegriffe, Spiegelungsprinzip

Nach den vorangegangenen Ausführungen stellen wir die Realisierung einer k Zeitschritte dauernden Irrfahrt als **Weg** in einem rechtwinkligen Koordinatensystem dar. Der Weg beginnt im Ursprung $(0,0)$ und ist durch den Vektor $(a_1, \dots, a_k) \in \{-1, 1\}^k$ der Schritt-Richtungen festgelegt. Er verbindet die Punkte $(0, s_0), (1, s_1), \dots, (k, s_k)$ zu einem Polygonzug. Dabei ist $s_0 := 0$ und für $m \geq 1$

$$s_m := a_1 + a_2 + \dots + a_m$$

gesetzt. Wir schreiben hier Klein- anstelle von Großbuchstaben, weil s_m als *Realisierung* der Zufallsvariablen S_m angesehen wird.

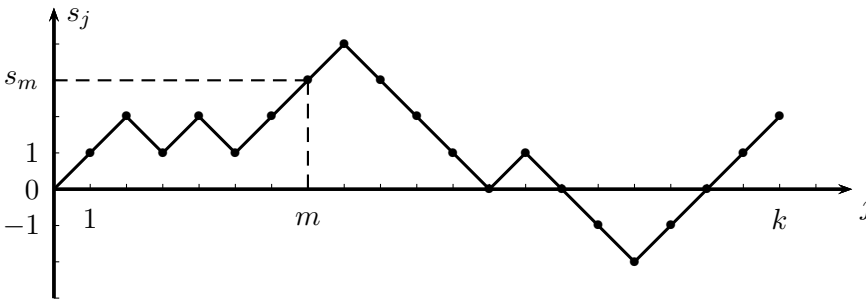


Bild 2.5: Weg der Länge 20

Bild 2.5 zeigt einen solchen Weg für den Fall $k = 20$. Die Anzahl k der Zeitschritte, also die Summe aus Aufwärts- und Abwärtsschritten, heißt **Länge** des Weges. Ein Weg der Länge k wird kurz **k-Weg** genannt.

Wir können einen Weg sowohl mit (a_1, \dots, a_k) als auch mit (s_1, \dots, s_k) identifizieren; wegen $a_1 = s_1$ und $a_j = s_j - s_{j-1}$ für $j = 2, \dots, k$ gibt es nämlich eine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen dem Tupel (a_1, \dots, a_k) der Auf- und Abwärtsschritte des Weges und dem Tupel (s_1, \dots, s_k) , das die auf der Ordinate gemessene **Höhe** des Weges nach den einzelnen Schritten beschreibt. Die Menge aller k -Wege kann also formal durch

$$W_k := \{(s_0, s_1, \dots, s_k) : s_0 = 0, s_j - s_{j-1} \in \{1, -1\} \text{ für } j = 1, \dots, k\}$$

beschrieben werden. Da jeder Schritt eines k -Weges auf zwei Weisen möglich ist, gibt es nach der Multiplikationsformel der Kombinatorik (siehe z.B. [HE], Abschnitt 8.1) 2^k verschiedene k -Wege.

Ein Punkt $(j, 0)$ heißt **Nullstelle** eines k -Weges, falls $1 \leq j \leq k$ und $s_j = 0$ gelten; die Zahl j heißt **Zeitpunkt** der Nullstelle. In diesem Sinn hat der in Bild 2.5 skizzierte Weg drei Nullstellen, und zwar zu den Zeitpunkten 12, 14 und 18.

Ein k -Weg heißt

- **positiv**, falls $s_1 > 0, s_2 > 0, \dots, s_k > 0$ gilt,
- **negativ**, falls $s_1 < 0, s_2 < 0, \dots, s_k < 0$ gilt,
- **nichtnegativ**, falls $s_1 \geq 0, s_2 \geq 0, \dots, s_k \geq 0$ gilt,
- **nichtpositiv**, falls $s_1 \leq 0, s_2 \leq 0, \dots, s_k \leq 0$ gilt,
- **nullstellenfrei**, falls $s_1 \neq 0, s_2 \neq 0, \dots, s_k \neq 0$ gilt,
- **Brückenweg**, falls $s_k = 0$ gilt (dieser Fall kann nur für gerades k auftreten).

Im Folgenden bezeichne

- $W_{k,>0}$ die Menge der positiven k -Wege,
- $W_{k,<0}$ die Menge der negativen k -Wege,
- $W_{k,\geq 0}$ die Menge der nichtnegativen k -Wege,
- $W_{k,\leq 0}$ die Menge der nichtpositiven k -Wege,
- $W_{k,\neq 0}$ die Menge der nullstellenfreien k -Wege,
- W_k° die Menge der Brückenwege der Länge k .

Dabei soll das hochgestellte Symbol „ \circ “ an eine Null erinnern und damit deutlich machen, dass ein Brückenweg am Ende auf das Nullniveau zurückkehrt.

Aufgrund der Unabhängigkeitsvoraussetzung (2.1) sind alle 2^k Wege der Länge k gleich wahrscheinlich; (Laplace)-Wahrscheinlichkeiten für Teilmengen von W_k ergeben sich also durch Abzählen der jeweils günstigen Fälle. Im Folgenden stellen wir verschiedene einschlägige Abzählmethoden für Wege vor und fragen hierbei zunächst nach der Anzahl aller k -Wege, die am Ende die Höhe $b \geq 0$ erreichen, also von $(0, 0)$ zum Punkt (k, b) führen. Offenbar muss $b \leq k$ sein, damit überhaupt ein solcher Weg existiert. Außerdem müssen k und b die gleiche Parität besitzen, also entweder beide gerade oder beide ungerade sein. Da ein Weg durch das Tupel (a_1, \dots, a_k) der Auf- und Abwärtsschritte bestimmt ist, stellt sich die Frage, wie viele Komponenten dieses Tupels gleich 1 sind. Bezeichnet c die Anzahl der Einsen und somit $k - c$ die Anzahl der „Minus-Einsen“, so muss $b = c - (k - c) = 2c - k$

und somit $c = (k+b)/2$ gelten. Die Höhe zur Zeit k ist ja gerade die Differenz aus Aufwärts- und Abwärtsschritten. Da es $\binom{k}{c}$ Möglichkeiten gibt, aus den Komponenten eines k -Tupels c auszuwählen und je mit einer 1 zu belegen, wobei alle übrigen Komponenten gleich -1 sind, haben wir folgendes Resultat erhalten:

Lemma 2.1.

Es seien $k \in \mathbb{N}$ und $b \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq b \leq k$, wobei k und b die gleiche Parität besitzen. Dann gibt es

$$\binom{k}{\frac{k+b}{2}}$$

Wege vom Punkt $(0,0)$ zum Punkt (k,b) , also k -Wege mit der Eigenschaft $s_k = b$.

Wollen wir allgemeiner die Anzahl der Wege bestimmen, die vom Punkt $(u,v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ausgehend zum Punkt $(r,s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ führen, wobei $r > u$ und $s \geq v$ gelte und jeder Wegschritt wie bisher nur nach rechts oder oben erfolgen kann, so ist nach Verschieben von (u,v) in den Ursprung das Problem gleichbedeutend damit, diejenigen Wege abzuzählen, die im Ursprung starten und im Punkt $(r-u, s-v)$ enden. Besitzen $r-u$ und $s-v$ die gleiche Parität, so ist diese Anzahl nach Lemma 2.1 gleich dem Binomialkoeffizienten

$$\binom{r-u}{\frac{r-u+s-v}{2}}. \quad (2.9)$$

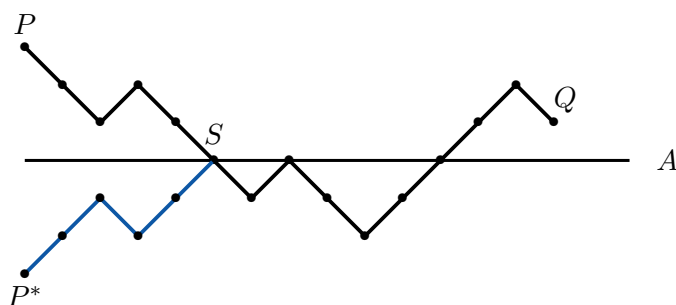


Bild 2.6: Es gibt genauso viele Wege von P nach Q , die die Achse treffen, wie es Wege von P^* nach Q gibt

Spiegelungsprinzipien

Viele Abzählprobleme bei Wegen lassen sich mithilfe sogenannter *Spiegelungsprinzipien* vereinfachen. Ein Spiegelungsprinzip⁶ steht synonym für eine bijektive Abbildung zwischen zwei mit M_1 und M_2 bezeichneten Mengen von Wegen, wobei die Abbildungsvorschrift eine (irgendwie geartete) Spiegelung an einer problem-spezifisch geeignet gewählten Spiegelungsachse beinhaltet. Lässt sich etwa die Anzahl der Elemente von M_2 einfach bestimmen, so kennt man aufgrund der Bijektivität der Abbildung auch die Mächtigkeit der Menge M_1 . Ein einfaches Beispiel für ein Spiegelungsprinzip ist die Abbildung, die einen Weg an der x -Achse spiegelt, also dem Tupel (a_1, \dots, a_k) das Tupel $(-a_1, \dots, -a_k)$ zuordnet. mithilfe dieser Spiegelung wird etwa jeder k -Weg mit $s_k = b > 0$ auf einen k -Weg mit $s_k = -b < 0$ abgebildet und umgekehrt. Die in Lemma 2.1 angegebene Weganzahl ist somit auch die Anzahl der Wege von $(0, 0)$ nach $(k, -b)$.

Bild 2.6 illustriert ein häufig angewandtes Spiegelungsprinzip. Bewusst wurde kein Koordinatensystem eingezeichnet, weil in der Folge meist nur Teile von Wegen Spiegelungen erfahren und die Spiegelachse nicht unbedingt die x -Achse sein muss, sondern auch vertikal verlaufen kann. Liegt ein Weg von P nach Q vor, der die eingezeichnete Achse A trifft, so entsteht durch Spiegelung des Teilweges bis zum erstmaligen – im Bild mit S bezeichneten – Treffpunkt mit A ein Weg, der von P^* nach Q verläuft. Umgekehrt besitzt jeder von P^* nach Q verlaufende Weg einen *ersten* Treffpunkt mit A . Spiegelt man diesen von P^* nach S führenden Teilweg an A und belässt den zweiten Teilweg unverändert, so entsteht der von P nach Q verlaufende Ausgangsweg. Diese Zuordnung von Wegen, die von P nach Q verlaufen und die Achse A mindestens einmal treffen, zu Wegen von P^* nach Q ist offenbar bijektiv, was die Bildunterschrift rechtfertigt.

Das Stimmzettel-Problem (ballot problem)

Das Spiegelungsprinzip führt zu einer schnellen Lösung⁷ des folgenden klassischen Problems (siehe [BE]): Zwischen zwei Kandidaten A und B habe eine Wahl stattgefunden. Da bei der Stimmauszählung ein Stimmzettel nach dem anderen registriert wird, ist stets bekannt, welcher Kandidat gerade in Führung liegt. Am Ende zeigt sich, dass A gewonnen hat, und zwar mit a Stimmen gegenüber b Stimmen für B ($a > b$). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit des mit C bezeichneten Ereignisses, dass Kandidat A während der gesamten Stimmauszählung führte?

⁶Das Spiegelungsprinzip wird gemeinhin dem französischen Mathematiker Désiré André (1840–1918) zugeschrieben. In der dann zitierten Arbeit [AND] finden sich jedoch keinerlei geometrische Argumente.

⁷Die nachfolgende Lösung findet sich in einem 1923 erschienenen Artikel von J. Aebly (s. [AEB]).

Wir ordnen den Auszahlungsverläufen Wege zu, indem wir jede Stimme für A bzw. B als Aufwärts- bzw. Abwärtsschritt notieren. Jeder Auszahlungsverlauf ist dann ein von $(0, 0)$ nach $(a + b, a - b)$ führender Weg (Bild 2.7 links). Nach (2.9) gibt es $\binom{a+b}{a}$ solche Wege, die wir als gleich wahrscheinlich annehmen. Die für

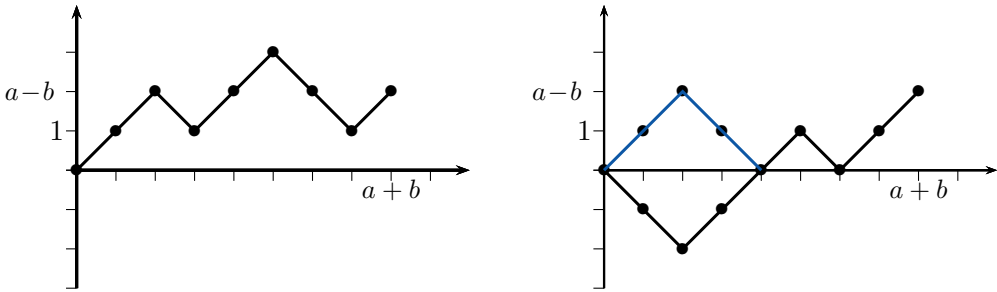


Bild 2.7: Auszahlungsverläufe als Wege und Spiegelungsprinzip

das Eintreten des oben beschriebenen Ereignisses *ungünstigen* Wege sind die, die im ersten Schritt nach unten gehen, also alle Wege, die von $(1, -1)$ nach $(a + b, a - b)$ führen (dies sind nach (2.9) $\binom{a+b-1}{a}$ Stück) und alle Wege, die mit einem Aufwärtsschritt starten und danach die x-Achse treffen. Letztere Anzahl ist aber nach dem Spiegelungsprinzip (s. Bild 2.7 rechts und Bild 2.6) gleich der oben angegebenen Anzahl aller Wege von $(1, -1)$ nach $(a + b, a - b)$. Kandidat A führt also während der gesamten Stimmauszählung mit der Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}(C) = 1 - 2 \frac{\binom{a+b-1}{a}}{\binom{a+b}{a}} = \frac{a-b}{a+b}.$$

2.2 Das Hauptlemma

In diesem Abschnitt werden wir k -Wege mit den in Abschnitt 2.1 beschriebenen Eigenschaften abzählen und hierbei auf verschiedene überraschende Ergebnisse stoßen. Da Brückenwege eine ausgezeichnete Rolle spielen, wird k häufig eine gerade Zahl sein. Die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge M bezeichnen wir in der Folge mit $|M|$.

Hauptlemma 2.2. *Es gilt ([FEL], S. 76)*

$$|W_{2n}^{\circ}| = |W_{2n, \geq 0}| = |W_{2n, \neq 0}|, \quad n \geq 1.$$

Nach dem Hauptlemma gibt es also genauso viele Wege der Länge $2n$ mit einer Nullstelle in $(2n, 0)$ wie nichtnegative $2n$ -Wege. Letztere Anzahl ist gleich der Anzahl der nullstellenfreien $2n$ -Wege. In der Deutung der Irrfahrt als Spiel zwischen zwei Personen A und B weisen somit genauso viele Spielverläufe nach $2n$ Münzwürfen einen Gleichstand auf wie es Spielverläufe gibt, bei denen Spieler B *nie führt*. Genauso viele Spielverläufe existieren aber auch, bei denen *einer der beiden Spieler immer führt*, also *bis zum $2n$ -ten Wurf nie ein Gleichstand eintritt*.

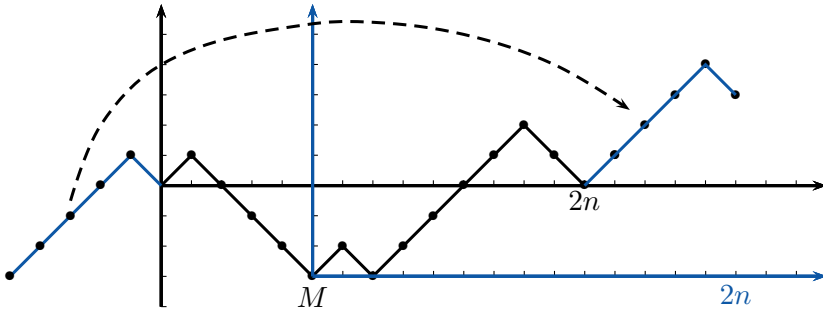


Bild 2.8: Ein $2n$ -Brückenweg (schwarz) wird bis zum erstmaligen Erreichen des Minimums an der Ordinate gespiegelt und der resultierende (blaue) Teilweg in $(2n, 0)$ angesetzt. Im blauen Koordinatensystem entsteht ein Weg aus $W_{2n, \geq 0}$.

BEWEIS: Wir beweisen das Hauptlemma, indem wir bijektive Abbildungen zwischen den beteiligten Mengen von $2n$ -Wegen konstruieren. Um das erste Gleichheitszeichen nachzuweisen, betrachten wir einen beliebigen $2n$ -Brückenweg. Ist dieser nichtnegativ, unternehmen wir nichts. Andernfalls schneiden wir ihn bis zum Punkt M , in dem erstmalig das Minimum angenommen wird, ab, spiegeln den abgeschnittenen Teilweg an der Ordinate und heften den gespiegelten Weg im Punkt $(2n, 0)$ an (Bild 2.8). In einem neuen, in Bild 2.8 blau gezeichneten Koordinatensystem mit dem Ursprung M entsteht dann ein nichtnegativer Weg⁸.

Dieser verbal beschriebenen Zuordnungsvorschrift von Brückenwegen zu nichtnegativen Wegen entspricht die folgende Abbildung $f : W_{2n}^\circ \rightarrow W_{2n, \geq 0}$: Ist $w = (a_1, \dots, a_{2n}) \in \{-1, 1\}^{2n}$ mit $a_1 + \dots + a_{2n} = 0$ ein Brückenweg, so bezeichnen

$$\min(w) := \min\{a_1 + \dots + a_k : k \in \{1, 2, \dots, 2n\}\}$$

das Minimum von w und

$$k_0 = k_0(w) := \min\{k \in \{1, \dots, 2n\} : a_1 + \dots + a_k = \min(w)\}$$

⁸Diese Idee geht auf Edward Nelson, (1932–2014), von 1964 bis 2013 Professor an der University of Princeton, zurück.

denjenigen Zeitpunkt, zu dem erstmalig das Minimum angenommen wird. Für den in Bild 2.8 eingezeichneten Weg w gilt also $\min(w) = -3$ und $k_0 = 5$.

Wir setzen $f(w) := w$, falls $\min(w) = 0$, und

$$f(w) := (a_{k_0+1}, \dots, a_{2n}, -a_{k_0}, -a_{k_0-1}, \dots, -a_1), \quad (2.10)$$

falls $\min(w) < 0$. Man beachte, dass im Fall $\min(w) = -r$ mit $r \in \mathbb{N}_0$ der Bild-Weg $f(w)$ von $(0, 0)$ nach $(2n, 2r)$ führt, denn es gilt ja $a_1 + \dots + a_{k_0} = -r$ und $a_1 + \dots + a_{2n} = 0$. Hieran lässt sich unmittelbar die Injektivität von f ablesen: Haben zwei verschiedene Brückenwege $w = (a_1, \dots, a_{2n})$ und $v = (b_1, \dots, b_{2n})$ unterschiedliche Minima, so werden sie auf verschiedene Wege abgebildet. Im Fall $\min(w) = \min(v)$ gilt entweder $k_0(w) = k_0(v)$ oder $k_0(w) \neq k_0(v)$. Auch jeder dieser beiden Unterfälle führt nach (2.10) zu $f(w) \neq f(v)$ (im zweiten Unterfall sei o.B.d.A. $k_0(w) < k_0(v)$; dann unterscheiden sich die Tupel $f(w)$ und $f(v)$ an der $k_0(w)$ -letzten Stelle).

Die Abbildung f ist aber auch surjektiv. Um diese Behauptung zu zeigen, muss man nur die eben durchgeführte Konstruktion umkehren: Wir starten mit einem beliebigen nichtnegativen Weg. Ist dieser ein Brückenweg, gilt also $s_{2n} = 0$, lassen wir ihn unverändert. Andernfalls gilt $s_{2n} = 2r$ für ein $r \in \{1, \dots, n\}$. Wir schneiden dann den Weg an dem Punkt P , in dem *letztmalig* die Höhe r erreicht wird, ab, spiegeln den abgeschnittenen Teil an der durch den Punkt $(2n, 0)$ verlaufenden senkrechten Achse und heften ihn dann im Ursprung nach links an (Bild 2.9). Auf diese Weise entsteht ein $2n$ -Brückenweg.

Um das zweite Gleichheitszeichen des Hauptlemmas zu beweisen, zerlegen wir die Menge aller nichtnegativen Wege danach, ob sie positiv sind oder mindestens eine Nullstelle besitzen, schreiben also

$$W_{2n, \geq 0} = W_{2n, > 0} \cup (W_{2n, \geq 0} \setminus W_{2n, > 0}). \quad (2.11)$$

Wir zeigen jetzt, dass die Menge $W_{2n, \geq 0} \setminus W_{2n, > 0}$ bijektiv auf $W_{2n, > 0}$ abgebildet werden kann. Mit (2.11) folgt dann

$$|W_{2n, \geq 0}| = 2|W_{2n, > 0}|.$$

Da die rechte Seite aus Symmetriegründen gleich der Anzahl aller nullstellenfreien Wege ist, wäre das Hauptlemma vollständig bewiesen. Um eine bijektive Abbildung zwischen den Mengen $W_{2n, \geq 0} \setminus W_{2n, > 0}$ und $W_{2n, > 0}$ zu konstruieren, betrachten wir einen beliebigen Weg aus $W_{2n, \geq 0} \setminus W_{2n, > 0}$. Wir bilden diesen Weg auf

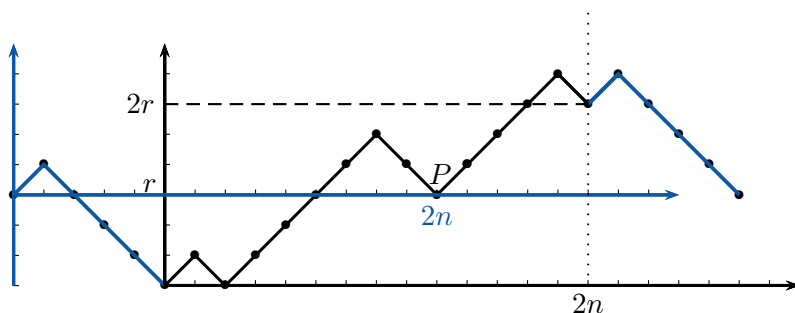


Bild 2.9: Ein Weg aus $W_{2n, \geq 0}$ mit $s_{2n} = 2r$, $r > 0$, wird ab dem letztenmaligen Erreichen der Höhe r an der durch $(2n, 0)$ verlaufenden Senkrechten gespiegelt. Der resultierende blaue Abschnitt wird im Ursprung nach links angeheftet. Im blauen Koordinatensystem entsteht ein $2n$ -Brückenweg.

einen positiven Weg ab, indem wir den letzten Abwärtsschritt vor der ersten, mit $(a, 0)$ bezeichneten Nullstelle in einen Aufwärtsschritt abändern und den in $(a, 0)$ beginnenden Teilweg um 2 Einheiten nach oben verschieben, also im Punkt $(a, 2)$ anheften (Bild 2.10 links). Hierdurch entsteht ein positiver Weg. Da verschiedene Wege entweder verschiedene erste Nullstellen besitzen oder sich bei gleicher erster Nullstelle in ihrem Verlauf entweder vor oder nach dieser Nullstelle unterscheiden, ordnet diese Abbildungsvorschrift verschiedenen Wegen verschiedene Wege zu und ist somit injektiv.

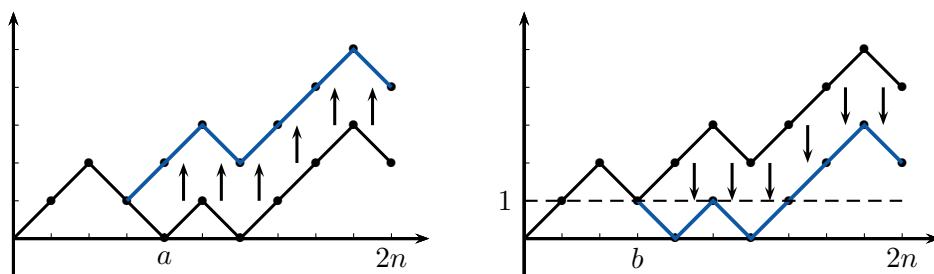


Bild 2.10: Übergang von einem nichtnegativen zu einem positiven Weg (links) und dessen Umkehrung (rechts)

Umgekehrt wird wie folgt jedem positiven Weg genau ein nichtnegativer Weg zugeordnet: Der positive Weg erreicht irgendwann (bis spätestens zum Zeitpunkt

$2n - 1$) *letztmalig* die Höhe 1 (in Bild 2.10 ist dieser Zeitpunkt mit b gekennzeichnet). Wir ändern den nachfolgenden Aufwärtsschritt in einen Abwärtsschritt und verschieben den sich anschließenden Teilweg um 2 Einheiten nach unten. Auf diese Weise entsteht ein nichtnegativer Weg (Bild 2.10 rechts), was zeigt, dass die Abbildung surjektiv ist. Das Hauptlemma ist somit vollständig bewiesen. ■

Folgerung 2.3. *Es gilt*

$$|W_{2n}^{\circ}| = |W_{2n, \geq 0}| = |W_{2n, \leq 0}| = |W_{2n, \neq 0}| = \binom{2n}{n}, \quad n \geq 1.$$

BEWEIS: Nach Lemma 2.1 gibt es $\binom{2n}{n}$ Wege von $(0, 0)$ nach $(2n, 0)$, denn es müssen von $2n$ Wegschritten genau n als Aufwärtsschritte gewählt werden. ■

2.3 Der Zeitpunkt der letzten Nullstelle

Im Folgenden sehen wir alle 2^{2n} Wege der Länge $2n$ als gleich wahrscheinlich an, betrachten also die Gleichverteilung \mathbb{P} auf dem Grundraum

$$W_{2n} = \{w := (s_0, s_1, \dots, s_{2n}) : s_0 = 0, s_j - s_{j-1} \in \{1, -1\} \text{ für } j = 1, \dots, 2n\} \quad (2.12)$$

(Laplace-Modell). Uns interessiert zunächst die Verteilung der durch

$$L_{2n}(w) := \max\{2j : j \in \{0, 1, \dots, n\} \text{ und } s_{2j} = 0\}, \quad w = (s_0, s_1, \dots, s_{2n}),$$

definierten Zufallsvariablen $L_{2n} : W_{2n} \rightarrow \mathbb{N}_0$. Offenbar beschreibt L_{2n} den (geradzahigen) **Zeitpunkt der letzten Nullstelle** einer einfachen symmetrischen Irrfahrt der Länge $2n$, s. Bild 2.11. Eine derartige Irrfahrt besitzt gemäß obiger Definition immer eine (triviale) Nullstelle zum Zeitpunkt 0. Das Ereignis $\{L_{2n} = 0\}$ ($= \{w \in W_{2n} : L_{2n}(w) = 0\}$) tritt also genau dann ein, wenn die Irrfahrt im Sinne der Konvention von Abschnitt 2.1 nullstellenfrei ist.

Setzen wir kurz

$$u_{2m} := \frac{\binom{2m}{m}}{2^{2m}}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.13)$$

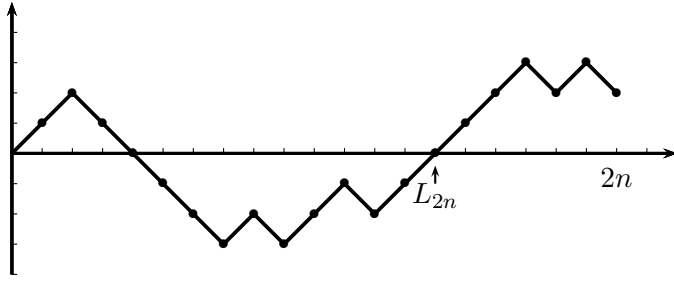


Bild 2.11: L_{2n} als Zeitpunkt der letzten Nullstelle eines $2n$ -Weges

so lautet das Hauptresultat dieses Abschnitts wie folgt (s. [FEL], S. 79):

Satz 2.4. (Verteilung des Zeitpunktes der letzten Nullstelle)

Für den Zeitpunkt L_{2n} der letzten Nullstelle gelten:

a)

$$\mathbb{P}(L_{2n} = 2k) = u_{2k} u_{2(n-k)} = \frac{\binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k}}{2^{2n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

b) $\mathbb{E}(L_{2n}) = n,$

c) $\mathbb{V}(L_{2n}) = \binom{n+1}{2}.$

BEWEIS: a) Wir betrachten zunächst die Spezialfälle $k = 0$ und $k = n$. Das Ereignis $\{L_{2n} = 0\}$ tritt genau dann ein, wenn der Weg zur Menge $W_{2n, \neq 0}$ gehört, also nullstellenfrei ist. Mit dem Hauptlemma und Folgerung 2.3 ergibt sich

$$\mathbb{P}(L_{2n} = 0) = \frac{|W_{2n, \neq 0}|}{2^{2n}} = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} = u_{2n} = u_0 u_{2n}.$$

Im Fall $L_{2n} = 2n$ liegt ein Brückenweg vor, es gilt also $\{L_{2n} = 2n\} = W_{2n}^\circ$. Das Hauptlemma und Folgerung 2.3 liefern

$$\mathbb{P}(L_{2n} = 2n) = \frac{|W_{2n}^\circ|}{2^{2n}} = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} = u_{2n} = u_{2n} u_0. \quad (2.14)$$

Gilt $k \in \{1, \dots, n-1\}$, so besitzt der $2n$ -Weg zum Zeitpunkt $2k$ eine Nullstelle und ist danach nullstellenfrei. Die Anzahl aller Wege mit diesen Eigenschaften lässt sich mithilfe der Multiplikationsregel der Kombinatorik und des Hauptlemmas leicht abzählen: Es gibt $|W_{2k}^\circ|$ Wege der Länge $2k$, die zum Zeitpunkt $2k$ eine Nullstelle besitzen. Für jeden dieser Wege existieren $|W_{2(n-k), \neq 0}|$ nullstellenfreie Fortsetzungen von $(2k, 0)$ bis zum Zeitpunkt $2n$, also von $(2k, 0)$ zu irgendeinem Punkt $(2n, \ell)$ mit $\ell \neq 0$. Folglich gilt

$$\mathbb{P}(L_{2n} = 2k) = \frac{|W_{2k}^\circ| \cdot |W_{2(n-k), \neq 0}|}{2^{2n}} = \frac{|W_{2k}^\circ|}{2^{2k}} \cdot \frac{|W_{2(n-k), \neq 0}|}{2^{2(n-k)}} = u_{2k} u_{2(n-k)}.$$

b) Wegen

$$\mathbb{P}(L_{2n} = 2k) = \mathbb{P}(L_{2n} = 2(n-k)) = \mathbb{P}(2n - L_{2n} = 2k), \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

ist die Verteilung von L_{2n} symmetrisch zu n . Die Zufallsvariablen L_{2n} und $2n - L_{2n}$ besitzen somit dieselbe Verteilung und damit auch den gleichen Erwartungswert, woraus $\mathbb{E}(L_{2n}) = 2n - \mathbb{E}(L_{2n})$ und damit $\mathbb{E}(L_{2n}) = n$ folgt.

c) Wir geben zwei Beweise an, und zwar einen unter Benutzung der in Abschnitt 6.10 auftretenden Legendre-Polynome (s. [REN], S. 510) und einen rein kombinatorischen. Wegen $\mathbb{E}(L_{2n}) = n$ und $\mathbb{V}(L_{2n}) = \mathbb{E}(L_{2n} - \mathbb{E}(L_{2n}))^2$ ist

$$\frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^n (2k-n)^2 \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} = \binom{n+1}{2} \quad (2.15)$$

zu zeigen. Verwenden wir (6.25) zum einen für $z = -xe^{iy}$ und zum anderen für $z = -xe^{-iy}$, wobei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ und $y \in \mathbb{R}$, so folgt

$$\begin{aligned} (1 - xe^{iy})^{-1/2} &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} \frac{1}{2^{2k}} e^{iky} x^k, \\ (1 - xe^{-iy})^{-1/2} &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} \frac{1}{2^{2k}} e^{-iky} x^k. \end{aligned}$$

Cauchy-Produkt-Bildung und $1 - 2x \cos y + x^2 = (1 - xe^{iy})(1 - xe^{-iy})$ liefern

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2x \cos y + x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{\binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k}}{2^{2n}} e^{i(2k-n)y} \right) x^n.$$

Der Vergleich mit (6.26) zeigt, dass die Identität

$$P_n(\cos y) = \sum_{k=0}^n \frac{\binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k}}{2^{2n}} e^{i(2k-n)y}$$

besteht. Dabei bezeichnet P_n das n -te Legendre-Polynom, vgl. (6.27). Differenziert man beide Seiten dieser Gleichung unter Beachtung der Kettenregel zweimal nach y , so ergibt sich auf der linken Seite der Ausdruck $\sin^2 y \cdot P_n''(\cos y) - \cos y \cdot P_n'(\cos y)$. Auf der rechten Seite entsteht durch die Ableitung der Exponentialfunktion der zusätzliche Faktor $-(2k-n)^2$. Betrachtet man die Ableitung an der Stelle $y = 0$, so ergibt sich (2.15) mit (6.29).

Für einen kombinatorischen Beweis (diesen verdanke ich Daniel Hug) definieren wir mit der üblichen Festsetzung $\binom{n}{k} := 0$ für $k > n$

$$F(n, k) := k^2 \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Weiter definieren wir eine Funktion $G : \mathbb{N} \times \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$G(n, k) := 2[k(3n+2) - (n+1)](k-1)k \binom{2k}{k} \binom{2n-2k+1}{n+1-k}$$

für $k \in \{0, 1, \dots, n\}$,

$$G(n, n+1) := n(3n+1)F(n+1, n) = n(3n+1)(n+1)^2 \binom{2n+2}{n+1}$$

sowie $G(n, k) := 0$ für $k \geq n+2$. Insbesondere ist $G(n, 0) = G(n, 1) = 0$.

Wir behaupten die Gültigkeit von

$$G(n, k+1) - G(n, k) = -n(3n+1)F(n+1, k) + 4(3n+4)(n+1)F(n, k) \quad (2.16)$$

für $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{0, \dots, n+1\}$. Mit (2.16) ergäbe sich für die durch

$$f(n) := \sum_{k=0}^n F(n, k) = 2^{2n} \frac{\mathbb{E}(L_{2n}^2)}{4}$$

definierte Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ die Rekursion

$$-n(3n+1)f(n+1) + 4(3n+4)(n+1)f(n) = G(n, n+2) - G(n, 0) = 0$$

und daher

$$f(n+1) = 4 \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{3n+4}{3n+1} \cdot f(n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Mit vollständiger Induktion erhalte man dann $f(n) = 2^{2n-3} n(3n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, und wegen $f(n)2^{-2n} = \mathbb{E}(L_{2n}^2)/4$ sowie $\mathbb{E}(L_{2n}) = n$ die Behauptung.

Zum Nachweis von (2.16) beachten wir, dass (2.16) für $k \geq n+2$ und $k=0$ gilt, da dann beide Seiten gleich Null sind. Weiter gilt (2.16) für $k=n+1$ nach Definition von $G(n, n+1)$. Für den Fall $k=n \geq 1$ lautet die Behauptung

$$\begin{aligned} & -n(3n+1)n^2 \binom{2n}{n} 2 + 4(3n+4)(n+1)n^2 \binom{2n}{n} \\ = & (3n+1)(n+1)^2 \binom{2n+2}{n+1} - 2(3n^2+n-1)(n-1)n \binom{2n}{n}, \end{aligned}$$

was nach Division durch $2n \binom{2n}{n}$ äquivalent ist zu

$$-(3n+1)n^2 + 2(n+1)(3n+4)n = (3n+1)(2n+1)(n+1) - (3n^2+n-1)(n-1)$$

und durch einfache Rechnung bestätigt wird. Sei nun $1 \leq k \leq n-1$ und damit auch $n \geq 2$ sowie $F(n, k) \neq 0$. In diesem Fall gilt

$$\begin{aligned} F(n+1, k) &= 2F(n, k) \cdot \frac{2n-2k+1}{n-k+1}, \\ G(n, k) &= 2F(n, k) \cdot \frac{2n-2k+1}{n-k+1} \cdot \frac{k-1}{k} \cdot [(3n+2)k - (n+1)], \\ G(n, k+1) &= 2F(n, k) [(3n+2)(k+1) - (n+1)] \frac{2k+1}{k}, \end{aligned}$$

sodass Gleichung (2.16) nach Kürzen von $2F(n, k)$ äquivalent ist zu

$$\begin{aligned} & -n(3n+1) \frac{2n-2k+1}{n-k+1} + 2(3n+4)(n+1) \\ &= [(3n+2)(k+1) - (n+1)] \frac{2k+1}{k} - \frac{2n-2k+1}{n-k+1} \frac{k-1}{k} [(3n+2)k - (n+1)]. \end{aligned}$$

Letztere Behauptung bestätigt man wieder durch einfache Rechnung. Hiermit ist (2.16) allgemein bewiesen. ■

Die Konsequenzen von Satz 2.4 sind frappierend. Für die Quotienten

$$q_{n,k} := \frac{\mathbb{P}(L_{2n} = 2(k+1))}{\mathbb{P}(L_{2n} = 2k)} = \frac{(2k+1)(n-k)}{(k+1)(2n-2k-1)},$$

ergibt eine direkte Rechnung

$$q_{n,k} \left\{ \begin{array}{c} < \\ = \\ > \end{array} \right\} 1 \iff 2k \left\{ \begin{array}{c} < \\ = \\ > \end{array} \right\} n-1.$$

Die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(L_{2n} = 2k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ fallen also zunächst streng monoton, besitzen für gerades n ein eindeutiges Minimum und für ungerades n zwei Minima (die an den Stellen $2k = n$ bzw. $2k \in \{n-1, n+1\}$ angenommen werden) und steigen danach streng monoton an; das Stabdiagramm der Verteilung von L_{2n} ist somit U-förmig (s. Bild 2.12 für den Fall $n = 20$).

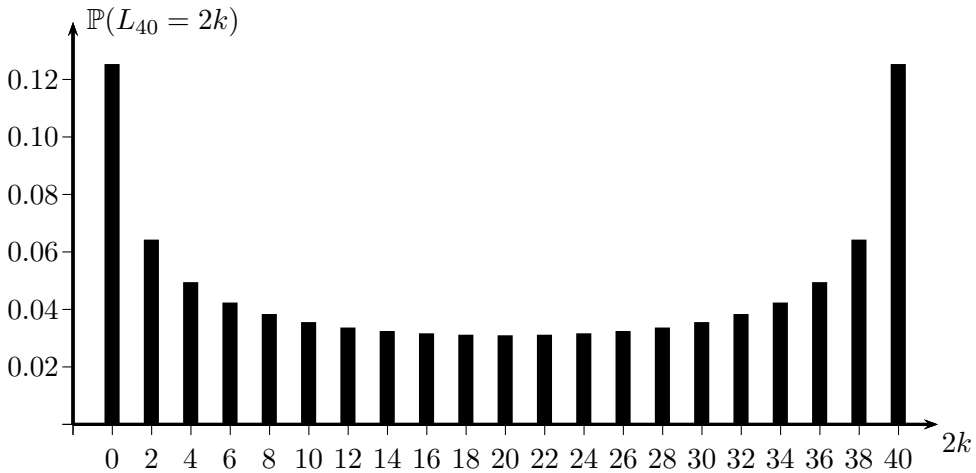


Bild 2.12: Stabdiagramm der Verteilung von L_{40}

Es ist also am wahrscheinlichsten, dass die Irrfahrt bis zur Zeit $2n$ nullstellenfrei ist oder – was mit gleicher Wahrscheinlichkeit passiert – erstmalig zum Zeitpunkt $2n$ wieder das Nullniveau erreicht. Am unwahrscheinlichsten ist der Fall, dass die letzte Nullstelle zur Zeit n (bei geradem n) bzw. zur Zeit $n-1$ oder $n+1$ (bei ungeradem n) auftritt. Mit der letzten Nullstelle ist also sehr früh oder sehr spät zu rechnen, s. auch Bild 2.13. In der Deutung der Irrfahrt als Spiel zwischen zwei Personen ist es somit am wahrscheinlichsten, dass der letzte Spielgleichstand zu Beginn oder ganz am Ende auftritt. So gilt etwa im Fall $2n = 40$ $\mathbb{P}(L_{40} = 0) + \mathbb{P}(L_{40} = 40) \approx 0.2508$, was bedeutet, dass mindestens einer dieser extremen Fälle (ein Spieler führt die ganz Zeit oder es findet erstmalig nach 40 Spielen ein Gleichstand statt) im Durchschnitt in jeder vierten Spielsequenz der Länge 40 eintritt!

Die Verteilung von L_{2n} heißt *diskrete Arcus-Sinus-Verteilung*. Das folgende Resultat (vgl. [FEL], S. 81), das das Grenzverhalten des bis zum Auftreten der letzten Nullstelle verstrichenen *Zeitanteils* $L_{2n}/(2n)$ beschreibt, macht diese Namensgebung verständlich.

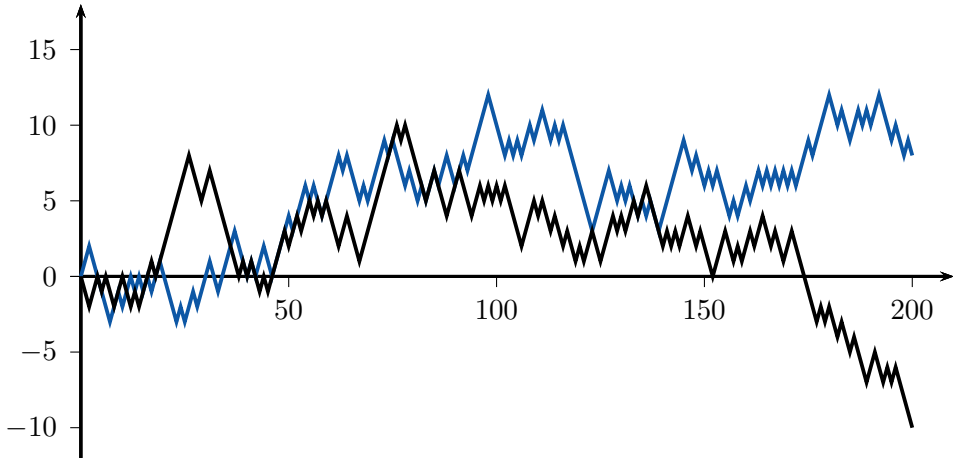


Bild 2.13: Irrfahrten der Länge 200 mit letzten Nullstellen bei 46 bzw. 174

Satz 2.5. (Arcus-Sinus-Gesetz für den Zeitpunkt der letzten Nullstelle)

Für jedes x mit $0 \leq x \leq 1$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{L_{2n}}{2n} \leq x \right) = \int_0^x \frac{1}{\pi \sqrt{t(1-t)}} dt = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}. \quad (2.17)$$

BEWEIS: Wir setzen kurz $L_{2n}^* := L_{2n}/(2n)$ sowie

$$g(t) := \frac{1}{\pi \sqrt{t(1-t)}}, \quad 0 < t < 1, \quad (2.18)$$

und zeigen zunächst die Konvergenz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(a \leq L_{2n}^* \leq b) = \int_a^b g(t) dt \quad (2.19)$$

für jede Wahl von a, b mit $0 < a < b < 1$. Mit $I_n := \{k \in \mathbb{N} : a \leq \frac{k}{n} \leq b\}$ gilt

$$\mathbb{P}(a \leq L_{2n}^* \leq b) = \sum_{k \in I_n} u_{2k} u_{2(n-k)} \quad (2.20)$$

mit u_{2m} wie in (2.13). Definieren wir

$$a_m := \frac{m! e^m}{m^m \sqrt{2\pi m}}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (2.21)$$

und beachten die durch direkte Rechnung einzusehende Gleichheit $a_{2m}/a_m^2 = u_{2m} \sqrt{\pi m}$, so liefert die Stirlingsche Formel (6.13) die Limesbeziehung

$$\lim_{m \rightarrow \infty} u_{2m} \sqrt{\pi m} = 1. \quad (2.22)$$

Zu vorgegebenem ε mit $0 < \varepsilon \leq 1$ gibt es also eine natürliche Zahl m_0 mit der Eigenschaft $|u_{2m} \sqrt{\pi m} - 1| \leq \varepsilon$ für jedes $m \geq m_0$. Für $k \in I_n$ gilt $k \geq na$ und $n - k \geq n(1 - b)$. Ist also die Ungleichung $n \geq C := \max\left(\frac{m_0}{a}, \frac{m_0}{1-b}\right)$ erfüllt, so folgt $k \geq m_0$ sowie $n - k \geq m_0$ und somit sowohl $|u_{2k} \sqrt{\pi k} - 1| \leq \varepsilon$ als auch $|u_{2(n-k)} \sqrt{\pi(n-k)} - 1| \leq \varepsilon$. Da die Ungleichungen $|y - 1| \leq \varepsilon$, $|z - 1| \leq \varepsilon$ ($y, z \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \leq 1$) die Abschätzung

$$|yz - 1| = |(y - 1)(z - 1) + y - 1 + z - 1| \leq \varepsilon^2 + 2\varepsilon \leq 3\varepsilon$$

nach sich ziehen, erhalten wir für jedes $n \geq C$ und jedes $k \in I_n$

$$\left| u_{2k} u_{2(n-k)} \pi \sqrt{k(n-k)} - 1 \right| \leq 3\varepsilon$$

und somit nach Division durch $\pi \sqrt{k(n-k)}$ unter Verwendung von (2.18)

$$\left| u_{2k} u_{2(n-k)} - g\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n} \right| \leq 3\varepsilon g\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n}, \quad n \geq C, \quad k \in I_n.$$

Mit (2.20) und der Dreiecksungleichung ergibt sich also für jedes $n \geq C$

$$\left| \mathbb{P}(a \leq L_{2n}^* \leq b) - \sum_{k \in I_n} g\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n} \right| \leq 3\varepsilon \sum_{k \in I_n} g\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n}. \quad (2.23)$$

Die hier auftretende Summe ist bis auf höchstens einen (für $n \rightarrow \infty$ vernachlässigbaren) Summanden gleich einer mit R_n bezeichneten Riemannschen Näherungssumme für das auf der rechten Seite von (2.19) stehende Integral zur Zerlegung $\{a, b\} \cup \{k/n : k \in I_n\}$ von $[a, b]$ (man beachte, dass weder a noch b zu I_n gehören müssen). Da g auf $[a, b]$ stetig ist und die Feinheit der Zerlegung $1/n$ beträgt, gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \int_a^b g(t) dt$, sodass (2.23) die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(a \leq L_{2n}^* \leq b) &\leq (1 + 3\varepsilon) \int_a^b g(t) dt, \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(a \leq L_{2n}^* \leq b) &\geq (1 - 3\varepsilon) \int_a^b g(t) dt \end{aligned}$$

nach sich zieht. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt (2.19).

Zum Nachweis von (2.17) sei o.B.d.A. $x < 1$ vorausgesetzt (sonst ist die linke Seite gleich 1, aber auch die rechte, da das uneigentliche Integral $\int_0^1 g(t) dt$ existiert und gleich 1 ist). Außerdem können wir $x > 0$ annehmen, denn es ist $\arcsin 0 = 0$ sowie $\mathbb{P}(L_{2n}/(2n) \leq 0) = \mathbb{P}(L_{2n} = 0) = u_{2n} \rightarrow 0$. Wählen wir zu vorgegebenem $\varepsilon \in (0, 1)$ ein $a \in (0, 1/2)$ mit $a \leq x$ und $\int_a^{1-a} g(t) dt \geq 1 - \varepsilon$, so gilt nach dem bereits Bewiesenen $\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(a \leq L_{2n}^* \leq 1 - a) \geq 1 - \varepsilon$ und somit $\mathbb{P}(L_{2n}^* < a) \leq 2\varepsilon$ für jedes genügend große n . Wegen

$$\mathbb{P}(L_{2n}^* \leq x) = \mathbb{P}(L_{2n}^* < a) + \mathbb{P}(a \leq L_{2n}^* \leq x)$$

folgt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(L_{2n}^* \leq x) \leq 2\varepsilon + \int_a^x g(t) dt \leq 2\varepsilon + \int_0^x g(t) dt$$

und somit bei $\varepsilon \downarrow 0$ die Ungleichung $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(L_{2n}^* \leq x) \leq \int_0^x g(t) dt$. Andererseits gilt $\mathbb{P}(L_{2n}^* \leq x) \geq \mathbb{P}(u \leq L_{2n}^* \leq x)$ für jedes $u \in (0, x)$ und somit $\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(L_{2n}^* \leq x) \geq \int_u^x g(t) dt$, also auch $\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(L_{2n}^* \leq x) \geq \int_0^x g(t) dt$, was noch zu zeigen war. ■

Satz 2.5 macht eine Aussage über den *Zeitanteil* $L_{2n}^* = L_{2n}/(2n)$ (als Zahl zwischen 0 und 1) bis zum Auftreten der letzten Nullstelle. Da die linke Seite von (2.17) als Funktion von x die Verteilungsfunktion von L_{2n}^* ist, besagt Satz 2.5, dass die Folge der Verteilungsfunktionen von L_{2n}^* für $n \rightarrow \infty$ gegen die Funktion $A(x) := (2/\pi) \cdot \arcsin \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 1$, konvergiert. Offenbar gilt diese Konvergenz für jedes $x \in \mathbb{R}$, wenn man die Funktion A durch $A(x) := 0$ für $x < 0$ und $A(x) := 1$ für $x > 1$ ergänzt. Die so auf ganz \mathbb{R} erklärte Funktion A ist eine Verteilungsfunktion, d.h. monoton nichtfallend sowie rechtsseitig stetig, und es gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} A(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} A(x) = 0$. Ist Y eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion A , so kann die Aussage von Satz 2.5 im Sinne von Abschnitt 6.2 auch kompakt in der Form

$$\frac{L_{2n}}{2n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} Y \quad (2.24)$$

geschrieben werden. Die Verteilung einer Zufallsvariablen Y mit der im rechten Bild 2.14 skizzierten Verteilungsfunktion A heißt *stetige Arcus-Sinus-Verteilung*. Die Dichte a (Ableitung von A auf $(0, 1)$) ist im linken Bild 2.14 dargestellt. Das p -Quantil $A^{-1}(p)$ der Arcus-Sinus-Verteilung ergibt sich durch Auflösen der Gleichung $A(x) = p$ nach x zu $A^{-1}(p) = \sin^2(p\pi/2)$. Insbesondere erhält man $A^{-1}(0.1) \approx 0.0245$ und $A^{-1}(0.9) \approx 0.9755$, was bedeutet, dass bei langen symmetrischen Irrfahrten der Zeitpunkt der letzten Nullstelle mit ca. 20-prozentiger Wahrscheinlichkeit innerhalb der ersten oder letzten 2.5 Prozent der gesamten Dauer, d.h. sehr früh oder sehr spät, auftritt.

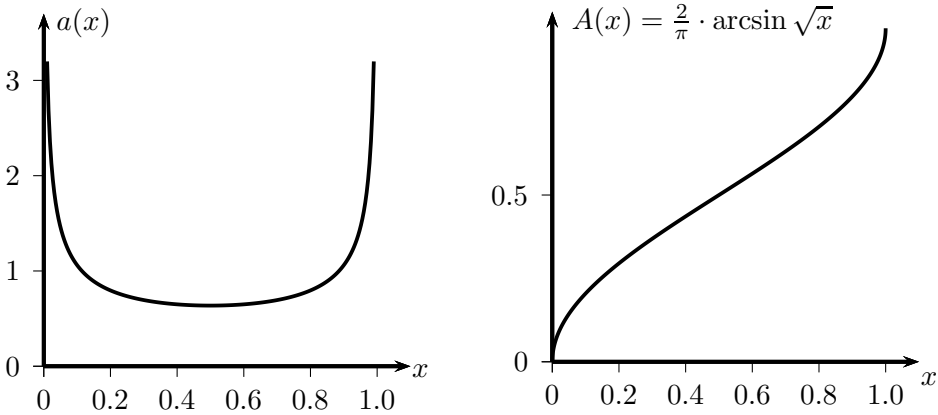


Bild 2.14: Dichte (links) und Verteilungsfunktion (rechts) der Arcus-Sinus-Verteilung

Tabelle 2.1 gibt Werte der Funktion A an. Wegen $A(0.15) = 0.253$ folgt aus Satz 2.5, dass in einer langen Irrfahrt die letzte Nullstelle mit einer Wahrscheinlichkeit von über 50% innerhalb der ersten oder letzten 15% des betrachteten Zeitraums auftritt. Man beachte hierzu auch die vor Bild 2.12 gemachte Bemerkung.

x	$A(x)$	x	$A(x)$	x	$A(x)$	x	$A(x)$	x	$A(x)$
0.00	0.000	0.10	0.205	0.20	0.295	0.30	0.369	0.40	0.436
0.01	0.064	0.11	0.215	0.21	0.303	0.31	0.376	0.41	0.442
0.02	0.090	0.12	0.225	0.22	0.311	0.32	0.383	0.42	0.449
0.03	0.111	0.13	0.235	0.23	0.318	0.33	0.390	0.43	0.455
0.04	0.128	0.14	0.244	0.24	0.326	0.34	0.396	0.44	0.462
0.05	0.144	0.15	0.253	0.25	0.333	0.35	0.403	0.45	0.468
0.06	0.158	0.16	0.262	0.26	0.341	0.36	0.410	0.46	0.474
0.07	0.171	0.17	0.271	0.27	0.348	0.37	0.416	0.47	0.481
0.08	0.183	0.18	0.279	0.28	0.355	0.38	0.423	0.48	0.487
0.09	0.194	0.19	0.287	0.29	0.362	0.39	0.429	0.49	0.494
								0.50	0.500
für $x > 1/2$ verwende $A(1 - x) = 1 - A(x)$									

Tabelle 2.1: Verteilungsfunktion $A(x)$ der Arcus-Sinus-Verteilung

2.4 Die Anzahl der Nullstellen

In diesem Abschnitt betrachten wir die mit

$$N_k := \sum_{j=1}^{\lfloor k/2 \rfloor} \mathbf{1}\{S_{2j} = 0\}$$

bezeichnete **Anzahl der Nullstellen** einer symmetrischen Irrfahrt der Länge k . Dabei stehe allgemein $\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ für die größte ganze Zahl kleiner oder gleich einer reellen Zahl x . Formal ist N_k als Abbildung auf dem in (2.12) definierten Grundraum W_k aller k -Wege durch

$$N_k(w) := |\{j \in \{1, 2, \dots, \lfloor k/2 \rfloor\} : s_{2j} = 0\}|, \quad w = (s_0, s_1, \dots, s_k),$$

gegeben. In diesem Sinn besitzt also der in Bild 2.5 skizzierte Weg 3 Nullstellen. Wie im letzten Abschnitt legen wir die Gleichverteilung \mathbb{P} auf W_k zugrunde, nehmen also alle Wege aus W_k als gleich wahrscheinlich an. Da Nullstellen nur zu geradzahligem Zeitpunkten auftreten können, setzen wir im Folgenden o.B.d.A. $k = 2n$ mit $n \in \mathbb{N}$.

Satz 2.6. (Verteilung der Anzahl der Nullstellen)

Für die Anzahl N_{2n} der Nullstellen einer symmetrischen Irrfahrt der Länge $2n$ gelten (für a) s. z.B. [FEL], S. 96):

a)

$$\mathbb{P}(N_{2n} = j) = \binom{2n-j}{n} \frac{1}{2^{2n-j}}, \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad (2.25)$$

b)

$$\mathbb{E}(N_{2n}) = (2n+1) \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} - 1,$$

c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}(N_{2n})}{\sqrt{2n}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \approx 0.798,$$

d)

$$\mathbb{V}(N_{2n}) = 2(n+1) - (2n+1) \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \left(1 + (2n+1) \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \right).$$

BEWEIS: a): Der Fall $j = 0$ (keine Nullstelle) ergibt sich unmittelbar aus dem Hauptlemma und Folgerung 2.3, da das Ereignis $\{N_{2n} = 0\}$ gleich der Menge $W_{2n, \neq 0}$ ist. Im Fall $j = n$ besitzt der $2n$ -Weg nach jedem zweiten Zeitschritt eine Nullstelle, was bedeutet, dass zu jedem der n Zeitpunkte $0, 2, 4, \dots, 2n - 2$ zwischen einem Aufwärts- oder einem Abwärtsschritt gewählt werden muss (der nächste Schritt geht dann zwangsläufig in die andere Richtung). Da es somit 2^n günstige Wege gibt, folgt die Behauptung für $j = n$. Es sei also im Folgenden $1 \leq j \leq n - 1$ vorausgesetzt.

Die Idee zum Nachweis von (2.25) besteht darin, diese Gleichung in der Form

$$\mathbb{P}(N_{2n} = j) = 2^j \binom{2n-j}{n} \frac{1}{2^{2n}} \quad (2.26)$$

umzuschreiben. Da 2^{2n} die Anzahl aller $2n$ -Wege ist, müssen wir zeigen, dass es $2^j \binom{2n-j}{n}$ Wege der Länge $2n$ mit genau j Nullstellen gibt. Jeder solche Weg kann sowohl zu Beginn (im Ursprung) als auch direkt nach der ersten, der zweiten, ..., der $j - 1$ -ten Nullstelle entweder einen Aufwärts- oder einen Abwärtsschritt absolvieren. Eine dieser 2^j Möglichkeiten besteht darin, dass der Weg zu Beginn und nach jeder Nullstelle die x -Achse nach oben verlässt, also bis zur j -ten Nullstelle nichtnegativ wird. Nachdem sich also die kombinatorische Bedeutung des Faktors 2^j in (2.26) herausgeschält hat, müssen wir nur zeigen, dass es $\binom{2n-j}{n}$ Wege der Länge $2n$ gibt, die genau j Nullstellen besitzen und bis zur letzten Nullstelle nichtnegativ sind (Bild 2.15 zeigt einen derartigen Weg für den Fall $j = 4$ und $n = 10$). Hierzu konstruieren wir eine bijektive Abbildung von dieser mit

$$M_1 := \{w = (s_0, s_1, \dots, s_{2n}) \in W_{2n} : s_i \geq 0 \ \forall i \leq L_{2n}(w), N_{2n}(w) = j\}$$

bezeichneten Menge von $2n$ -Wegen auf die Menge

$$M_2 := \{w = (s_0, s_1, \dots, s_{2n-j}) \in W_{2n-j} : s_{2n-j} = -j\}$$

aller Wege der Länge $2n - j$, die von $(0, 0)$ zum Punkt $(2n - j, -j)$ führen. Da jeder Weg, der von $(0, 0)$ nach $(2n - j, -j)$ führt, $n - j$ Aufwärtsschritte und n Abwärtsschritte umfasst (insgesamt sind es $2n - j$ Schritte, und die Differenz aus Aufwärts- und Abwärtsschritten muss $-j$ sein, da der Weg in der Höhe $-j$ endet), und es $\binom{2n-j}{n}$ Möglichkeiten gibt, aus den insgesamt $2n - j$ Schritten diejenigen für die Abwärtsschritte festzulegen, gilt

$$|M_2| = \binom{2n-j}{n}.$$

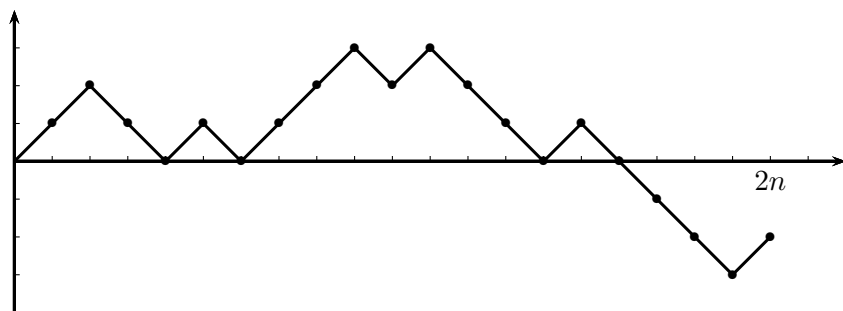


Bild 2.15: Weg mit 4 Nullstellen, der bis zur vierten Nullstelle nichtnegativ ist

Einem Weg aus der Menge M_1 wird wie folgt ein Weg aus M_2 zugeordnet: Wir lassen den ersten Aufwärtsschritt und jeden der direkt nach den ersten $j - 1$ Nullstellen folgenden Aufwärtsschritte weg und fügen den Rest (bis zur j -ten Nullstelle) wieder zusammen. Der nullstellenfreie Teilweg ab der j -ten Nullstelle wird durch einen Brückenweg gleicher Länge ersetzt (dies ist möglich, da nach dem Hauptlemma eine bijektive Abbildung zwischen den nullstellenfreien Wegen einer bestimmten Länge und den Brückenwegen gleicher Länge existiert) und angehängt (s. Bild 2.16, der Brückenweg ist blau markiert).

Offenbar ist diese Abbildungsvorschrift von Wegen aus M_1 zu Wegen aus M_2 injektiv. Liegt andererseits ein beliebiger Weg aus M_2 , also ein von $(0, 0)$ nach $(2n - j, -j)$ führender Weg, vor, so erreicht dieser Weg im zeitlichen Verlauf irgendwann *erstmalig* die Höhe -1 , danach irgendwann *erstmalig* die Höhe -2 usw. Irgendwann erreicht er *erstmalig* die Höhe $-j$.

Der Weg zerfällt also in Teilwege. Der erste Teilweg führt von $(0, 0)$ zum erstmaligen Erreichen der Höhe -1 , der i -te Teilweg vom erstmaligen Erreichen der Höhe $-(i - 1)$ bis zum erstmaligen Erreichen der Höhe $-i$ ($i = 2, \dots, j$). Der letzte Teilweg ist ein vom erstmaligen Erreichen der Höhe $-j$ ausgehender Brückenweg, der zum Punkt $(2n - j, -j)$ führt. Stellt man jedem der ersten j Teilwege einen Aufwärtsschritt voran und heftet diese Teilwege, im Ursprung beginnend, aneinander, so entsteht ein nichtnegativer Weg mit j Nullstellen. Der Brückenweg (letzte Teilweg) korrespondiert nach dem Hauptlemma in eindeutiger Weise mit einem nullstellenfreien Weg gleicher Länge (wir können hier die zu der beim Übergang von Wegen aus M_1 zu Wegen aus M_2 verwendete Zuordnung inverse Abbildung verwenden). Auf diese Weise erhalten wir einen Weg aus M_1 , was zeigt, dass eine Bijektion zwischen M_1 und M_2 existiert.

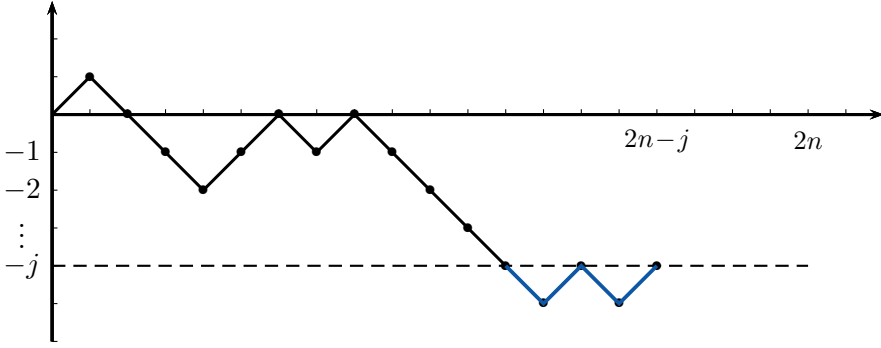


Bild 2.16: Weg von $(0,0)$ nach $(2n-j, -j)$

b): Das Ergebnis (vgl. [FEL2], Theorem 4) kann auf verschiedene Weisen erhalten werden. Eine Möglichkeit besteht darin, eine rekursive Beziehung zwischen den Wahrscheinlichkeiten $p_j := \mathbb{P}(N_{2n} = j)$, $j = 0, \dots, n$, auszunutzen. Setzen wir kurz $N := N_{2n}$, so ist

$$\mathbb{E}(N) = \sum_{j=1}^n j p_j. \quad (2.27)$$

Eine elementare Rechnung liefert $p_{j+1}/p_j = (2n-2j)/(2n-j)$, $j = 0, \dots, n-1$, was gleichwertig mit

$$j p_j + (2n-j)(p_{j+1} - p_j) = 0, \quad j = 0, \dots, n-1,$$

ist. Summiert man diese Gleichungen über j und beachtet (2.27) sowie die Normierungsbedingung $\sum_{j=0}^n p_j = 1$, so folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbb{E}(N) - n p_n + 2n(p_n - p_0) - \sum_{j=0}^{n-1} j p_{j+1} + \mathbb{E}(N) - n p_n \\ &= 2\mathbb{E}(N) - 2n p_0 - \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) p_{j+1} + \sum_{j=0}^{n-1} p_{j+1} \\ &= 2\mathbb{E}(N) - 2n p_0 - \mathbb{E}(N) + 1 - p_0 \end{aligned}$$

und hieraus die Behauptung. Ein alternativer Beweis verwendet die Darstellung $N = \sum_{j=1}^n \mathbf{1}\{S_{2j} = 0\}$ und die Linearität der Erwartungswertbildung sowie die Beziehung $\mathbb{E}\mathbf{1}\{A\} = \mathbb{P}(A)$ für ein Ereignis A . Mit $\mathbb{P}(S_{2j} = 0) = \binom{2j}{j}/2^{2j}$ folgt

$$\mathbb{E}(N) = \sum_{j=1}^n \frac{\binom{2j}{j}}{2^{2j}},$$

sodass man jetzt einen einfachen Induktionsbeweis führen kann.

c): Wegen $p_0 = u_{2n}$ mit u_{2n} wie in (2.13) ist nach b)

$$\frac{\mathbb{E}(N_{2n})}{\sqrt{2n}} = \frac{2n+1}{\sqrt{\pi n} \cdot \sqrt{2n}} \cdot \sqrt{\pi n} \cdot u_{2n} - \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

Mit (2.22) folgt die Behauptung.

d): Der Nachweis der Varianzformel verläuft analog zur Herleitung des Erwartungswertes, indem man jetzt die rekursive Beziehung

$$(2n-j)(2n-j-1)p_{j+2} = 4(n-j)(n-j-1)p_j, \quad j = 0, 1, \dots, n-2,$$

ausnutzt und diese Gleichungen über j summiert. Mit etwas Geduld ergibt sich

$$\mathbb{E}(N^2) = \sum_{j=1}^n j^2 p_j = 2n + 3 - (6n + 3) \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$$

und damit die Behauptung. Die Details seien dem interessierten Leser überlassen. Letzteres gilt auch für die Limesbeziehung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{V}(N_{2n})}{2n} = 1 - \frac{2}{\pi}. \quad \blacksquare \quad (2.28)$$

Die Aussage c) von Satz 2.6 ist kontraintuitiv. Man würde erwarten, dass die Anzahl der Nullstellen eines $2n$ -Weges mit wachsendem n proportional zur Weglänge zunimmt. Dies ist nicht der Fall; die mittlere Anzahl der Nullstellen wächst wesentlich langsamer, nämlich ungefähr proportional zur Wurzel aus der Weglänge. Bild 2.17 illustriert dieses Phänomen anhand zweier Irrfahrten der Länge 2500.

Bild 2.18 zeigt das Stabdiagramm der Verteilung von N_{2n} für den Fall $n = 20$. Betrachtet man die schon im Beweisteil b) von Satz 2.6 verwendeten Quotienten

$$\frac{\mathbb{P}(N_{2n} = j+1)}{\mathbb{P}(N_{2n} = j)} = \frac{2n-2j}{2n-j}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1,$$

so sieht man leicht ein, dass $\mathbb{P}(N_{2n} = 0) = \mathbb{P}(N_{2n} = 1)$ gilt und die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(N_{2n} = j)$ für $j \geq 2$ streng monoton fallen. Das Stabdiagramm weckt Assoziationen an die „rechte Hälfte“ der Gaußschen Glockenkurve (Dichte der Standardnormalverteilung). Dass hier in der Tat ein Zusammenhang besteht, zeigt das folgende Resultat.

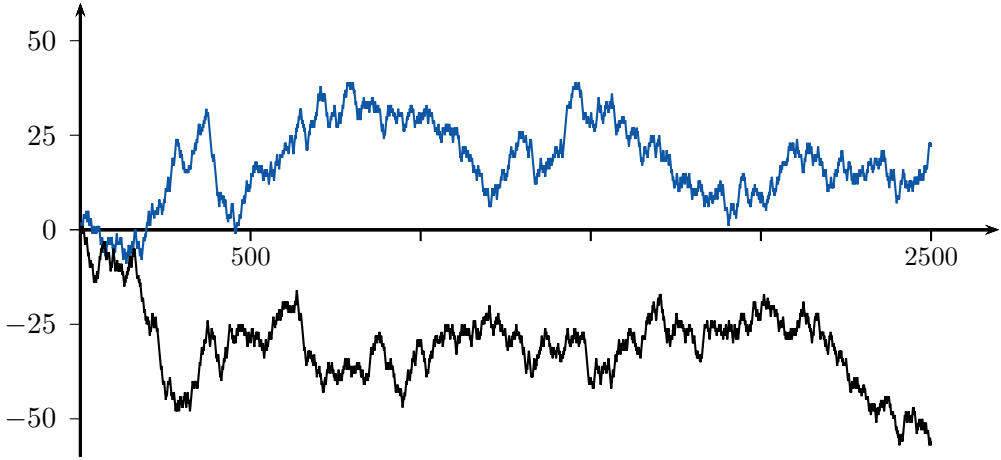


Bild 2.17: Irrfahrten haben überraschend wenige Nullstellen

Satz 2.7. (Limesverteilung für die Anzahl der Nullstellen)

Für jedes $x > 0$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{N_{2n}}{\sqrt{2n}} \leq x \right) = 2 \int_0^x \varphi(t) dt = 2\Phi(x) - 1. \quad (2.29)$$

Dabei bezeichnet

$$\varphi(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{t^2}{2} \right), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.30)$$

die Dichte der Standardnormalverteilung $N(0, 1)$.

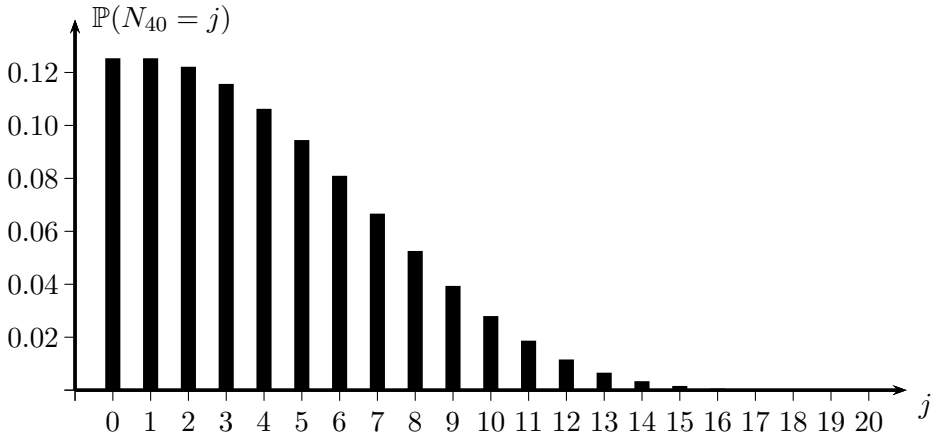
BEWEIS: Es sei $x > 0$ fest gewählt. Setzen wir $I_n := \{k \in \mathbb{N}_0 : k \leq x\sqrt{2n}\}$, so gilt

$$\mathbb{P} \left(\frac{N_{2n}}{\sqrt{2n}} \leq x \right) = \sum_{k \in I_n} p_{n,k},$$

wobei abkürzend

$$p_{n,k} := \binom{2n-k}{n} \frac{1}{2^{2n-k}}$$

geschrieben wurde. Die Beweisidee besteht darin, analog wie beim Nachweis von (2.17) die den obigen Binomialkoeffizienten ausmachenden Fakultäten $(2n-k)!$, $n!$ und $(n-k)!$ mithilfe der Stirlingschen Formel (6.13) zu approximieren und dann

Bild 2.18: Stabdiagramm der Verteilung von N_{40}

bis auf einen asymptotisch vernachlässigbaren Term eine Riemannsche Näherungssumme für das in (2.29) stehende Integral zu erhalten. Bei den folgenden Überlegungen ist wichtig, dass $k \in I_n$ durch $x\sqrt{2n}$ nach oben beschränkt und somit etwa für genügend großes (von x abhängendes) n höchstens gleich $n/2$ ist. Mit a_m wie in (2.21) liefert eine direkte Rechnung

$$\begin{aligned} \frac{a_{2n-k}}{a_n a_{n-k}} &= p_{n,k} \sqrt{2\pi} \frac{n^n (n-k)^{n-k} \sqrt{n(n-k)}}{\left(n - \frac{k}{2}\right)^{2n-k} \sqrt{2n-k}} \\ &= p_{n,k} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n-k}{n-k/2} \cdot \frac{n}{n-k/2} \right)^n \left(\frac{n-k}{n-k/2} \right)^{-k} \cdot \sqrt{\frac{n-k}{2n-k}}. \end{aligned}$$

Der erste Klammerausdruck auf der rechten Seite ist gleich

$$b_{n,k} := \left(1 - \frac{k^2}{(2n-k)^2} \right)^n = \exp \left[n \log \left(1 - \frac{k^2}{(2n-k)^2} \right) \right]$$

und der zweite gleich

$$c_{n,k} := \left(1 - \frac{k/2}{n-k/2} \right)^{-k} = \exp \left[-k \log \left(1 - \frac{k}{2n-k} \right) \right].$$

Unter Verwendung der Ungleichungen für die Logarithmus-Funktion in Abschnitt 6.4 ergeben sich mit

$$x_{n,k} := \frac{k}{\sqrt{2n}}$$

die Abschätzungen

$$e^{-x_{n,k}^2/2} \exp \left(-\frac{x_{n,k}^2}{2} \cdot \frac{4nk}{(2n-k)^2 - k^2} \right) \leq b_{n,k} \leq e^{-x_{n,k}^2/2} \exp \left(-\frac{x_{n,k}^2}{2} \cdot \frac{4nk - k^2}{(2n-k)^2} \right)$$

$$e^{x_{n,k}^2} \exp\left(x_{n,k}^2 \frac{k}{2n-k}\right) \leq c_{n,k} \leq e^{x_{n,k}^2} \exp\left(x_{n,k}^2 \frac{k}{n-k}\right).$$

Wegen $0 \leq x_{n,k} \leq x$ konvergieren die vier hervorgehobenen Exponentialausdrücke beim Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ gleichmäßig für $k \in I_n$ gegen Eins. Da $\sqrt{(n-k)/(2n-k)}$ für $n \rightarrow \infty$ gleichmäßig für $k \in I_n$ gegen $1/\sqrt{2}$ konvergiert und nach der Stirling-Formel (6.13) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-k}/(a_n a_{n-k}) = 1$ gilt, wobei auch diese Konvergenz gleichmäßig in $k \in I_n$ ist, erhalten wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \in I_n} \left| p_{n,k} \sqrt{2\pi n} \exp\left(\frac{x_{n,k}^2}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \right| = 0.$$

Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\left| p_{n,k} \sqrt{2\pi n} \exp\left(\frac{x_{n,k}^2}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \right| \leq \varepsilon, \quad k \in I_n,$$

für jedes $n \geq n_0$. Teilen wir diese Ungleichung durch $\sqrt{2\pi n} \exp(x_{n,k}^2/2)/\sqrt{2}$, so folgt mit (2.30)

$$\left| p_{n,k} - 2\varphi(x_{n,k}) \frac{1}{\sqrt{2n}} \right| \leq \varepsilon 2\varphi(x_{n,k}) \frac{1}{\sqrt{2n}}, \quad k \in I_n, \quad n \geq n_0,$$

und Summation über $k \in I_n$ liefert

$$\left| \mathbb{P}\left(\frac{N_{2n}}{\sqrt{2n}} \leq x\right) - 2 \sum_{k \in I_n} \varphi(x_{n,k}) \frac{1}{\sqrt{2n}} \right| \leq \varepsilon 2 \sum_{k \in I_n} \varphi(x_{n,k}) \frac{1}{\sqrt{2n}}, \quad n \geq n_0.$$

Wegen $1/\sqrt{2n} = x_{n,k+1} - x_{n,k}$ ist die hier zweifach auftretende Summe bis auf höchstens einen (für $n \rightarrow \infty$ vernachlässigbaren) Term gleich einer Riemannschen Näherungssumme für das Integral $\int_0^x \varphi(t) dt$ zur Zerlegung $\{k/\sqrt{2n} : k \in I_n\} \cup \{x\}$ des Intervalls $[0, x]$ (man beachte, dass $x \in \{k/\sqrt{2n} : k \in I_n\}$ gelten kann; dann tritt gegenüber einer Riemannschen Näherungssumme ein zusätzlicher Summand auf). Da die Zerlegung die Feinheit $1/\sqrt{2n}$ besitzt, folgt

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{N_{2n}}{\sqrt{2n}} \leq x\right) &\geq (1 - \varepsilon) 2 \int_0^x \varphi(t) dt \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{N_{2n}}{\sqrt{2n}} \leq x\right) &\leq (1 + \varepsilon) 2 \int_0^x \varphi(t) dt \end{aligned}$$

und damit für $\varepsilon \downarrow 0$ die Behauptung. ■

Bemerkung 2.8.

Ist Z eine standardnormalverteilte Zufallsvariable, so gilt für jedes $x \geq 0$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|Z| \leq x) &= \mathbb{P}(-x \leq Z \leq x) = \Phi(x) - \Phi(-x) = \Phi(x) - (1 - \Phi(x)) \\ &= 2\Phi(x) - 1.\end{aligned}$$

Da $\mathbb{P}(N_{2n}/\sqrt{2n} \leq x)$ als Funktion von x die Verteilungsfunktion von $N_{2n}/\sqrt{2n}$ ist, besagt Satz 2.7, dass die Folge der Verteilungsfunktionen von $N_{2n}/\sqrt{2n}$ punktweise gegen die in Bild 2.19 rechts skizzierte Verteilungsfunktion von $|Z|$ konvergiert (man beachte, dass auch für $x \leq 0$ die Aussage $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(N_{2n}/\sqrt{2n} \leq x) = \mathbb{P}(|Z| \leq x)$ ($= 0$) gültig ist); nach Abschnitt 6.2 gilt somit

$$\frac{N_{2n}}{\sqrt{2n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} |Z|, \quad Z \sim N(0, 1). \quad (2.31)$$

Da $|Z|$ die in Bild 2.19 links dargestellte Dichte $\varphi^*(x) := 2\varphi(x)$, $x \geq 0$, und $\varphi^*(x) := 0$, $x < 0$, besitzt, gilt

$$\mathbb{E}|Z| = \int_0^\infty x \varphi^*(x) dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left[-\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \right]_0^\infty = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Somit ist Aussage c) von Satz 2.6 angesichts der Konvergenz (2.31) „nur konsequent“. Sie folgt aber ohne zusätzliche Überlegungen nicht aus Satz 2.7. Gleiches gilt für das in (2.28) angegebene asymptotische Verhalten der Varianz von N_{2n} : Auch die Varianz von $N_{2n}/\sqrt{2n}$ konvergiert gegen die Varianz der Grenzverteilung, denn es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{V}\left(\frac{N_{2n}}{\sqrt{2n}}\right) = 1 - \frac{2}{\pi} = \mathbb{V}(|Z|) = \mathbb{E}(Z^2) - (\mathbb{E}|Z|)^2.$$

Tabelle 2.2 gibt einige Werte der mit $\Phi^*(x) = 2\Phi(x) - 1$ bezeichneten Verteilungsfunktion des Betrages einer Standardnormalverteilung an. Wegen $\Phi^*(1) = 0.683$ besagt Satz 2.29 beispielsweise, dass $\mathbb{P}(N_{10000} \leq 100) \approx 0.683$ gilt und damit eine ca. 68-prozentige Wahrscheinlichkeit besteht, in einer Irrfahrt der Länge 10000 höchstens 100 Nullstellen zu beobachten. Die Wahrscheinlichkeit, dass in einer solchen Irrfahrt mehr als 200 Nullstellen auftreten, beträgt wegen $\Phi^*(2) = 0.954$ weniger als 5 Prozent.

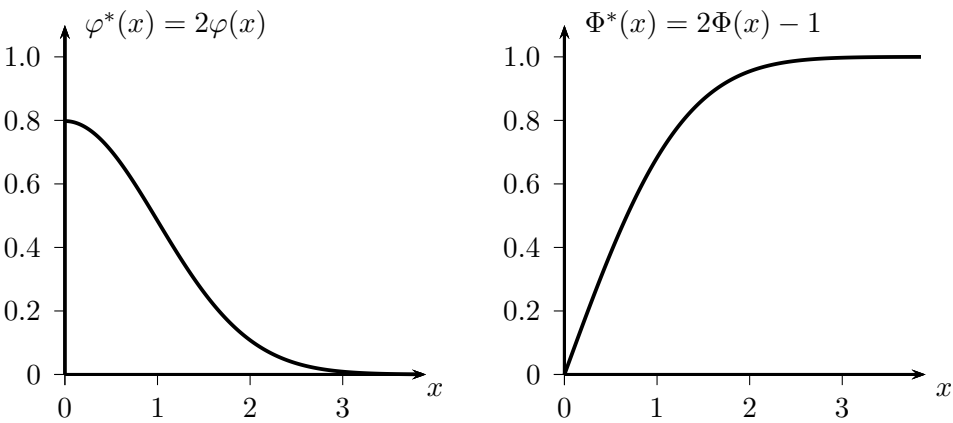


Bild 2.19: Dichte (links) und Verteilungsfunktion (rechts) des Betrages einer Standardnormalverteilung

Verteilungsfunktion $\Phi^*(x) := 2\Phi(x) - 1$					
x	$\Phi^*(x)$	x	$\Phi^*(x)$	x	$\Phi^*(x)$
0.00	0.000	0.80	0.576	1.645	0.900
0.10	0.080	0.90	0.632	1.70	0.911
0.20	0.159	1.00	0.683	1.80	0.928
0.30	0.236	1.10	0.729	1.90	0.943
0.40	0.311	1.20	0.770	1.96	0.950
0.50	0.383	1.30	0.806	2.00	0.954
0.60	0.451	1.40	0.838	2.20	0.972
0.675	0.500	1.50	0.866	2.40	0.984
0.70	0.516	1.60	0.890	2.60	0.991

Tabelle 2.2: Verteilungsfunktion $\Phi^*(x)$ des Betrages einer Standardnormalverteilung

Das Banachsche Steichholzproblem

Der Mathematiker Stefan Banach⁹, ein passionierter Raucher, steckt sich in jede seiner beiden Hosentaschen eine Schachtel mit n Streichhölzern. Immer bevor er sich eine Zigarette anzündet, greift er rein zufällig in eine der beiden Taschen, entnimmt der darin befindlichen Schachtel ein Streichholz und steckt die (u.U. bereits leere) Schachtel wieder in die Hosentasche zurück. Als er sich wieder

⁹Stefan Banach (1892–1945), ab 1922 Professor in Lwów (ehemals Lemberg), Begründer der sog. „polnischen Schule“ (Banachraum, Banachscher Fixpunktsatz).

Bild 2.20: Zum Banachschen Streichholzproblem: Ein Weg von $(0, 0)$ nach $(2n - j, j)$ mit anschließendem Aufwärtsschritt liefert $U_{2n} = j$

Wir können diesen stochastischen Vorgang als Weg darstellen, der im Ursprung eines Koordinatensystems startet. Dabei bedeute ein Aufwärts- bzw. Abwärtsschritt einen Griff in die rechte bzw. linke Hosentasche, was zur Folge hat, dass die auf den beiden Diagonalen in Bild 2.20 aufgetragenen Anzahlen der restlichen Streichhölzer in den beiden Hosentaschen dementsprechend abnehmen. Ein Griff in eine leere Schachtel erfolgt, wenn ein wie in Bild 2.20 eingezeichneter Weg die Gerade $y = 2n - x$ erreicht und der nächste Schritt nach oben geht oder die Gerade $y = x - 2n$ getroffen wird und dann in in die linke Hosentasche gegriffen wird. Bezeichnet U_{2n} die Anzahl an Streichhölzern in der anderen Schachtel, wenn eine Schachtel als leer angetroffen wird, so gilt $U_{2n} = j$, wenn wie in Bild 2.20 der Weg von $(0, 0)$ zum Punkt $(2n - j, j)$ führt und anschließend ein Aufwärtsschritt

erfolgt oder – was mit gleicher Wahrscheinlichkeit passiert – der dazu an der x -Achse spiegelbildliche Fall eintritt. Mit Lemma 2.1 folgt

$$\mathbb{P}(U_{2n} = j) = 2 \frac{\binom{2n-j}{n}}{2^{2n-j}} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(N_{2n} = j), \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Die Zufallsvariable U_{2n} besitzt also die gleiche Verteilung wie die Nullstellenanzahl N_{2n} .

2.5 Erstwiederkehrzeit, Rekurrenz

Wann kehrt eine im Ursprung startende symmetrische Irrfahrt zum ersten Mal wieder auf das Nullniveau zurück, wann tritt also die erste Nullstelle auf? In der Deutung der Irrfahrt als Spiel zwischen zwei Personen fragen wir also nach dem Zeitpunkt des ersten Spielgleichstandes. Offenbar müssen wir hierzu beliebig lange Irrfahrten zulassen, denn nach dem Hauptlemma und Folgerung 2.3 ist eine symmetrische Irrfahrt der Länge $2n$ mit Wahrscheinlichkeit $u_{2n} = \binom{2n}{n} 2^{-2n}$ nullstellenfrei, was bedeutet, dass der Zeitpunkt der ersten Nullstelle größer als $2n$ ist (man beachte, dass im Gegensatz zu Abschnitt 2.3 der Ursprung hier nicht als Nullstelle zählt). Bild 2.21 zeigt das Anfangsstück der Länge 200 einer Irrfahrt, bei der die erste Nullstelle zum Zeitpunkt 182 auftritt.

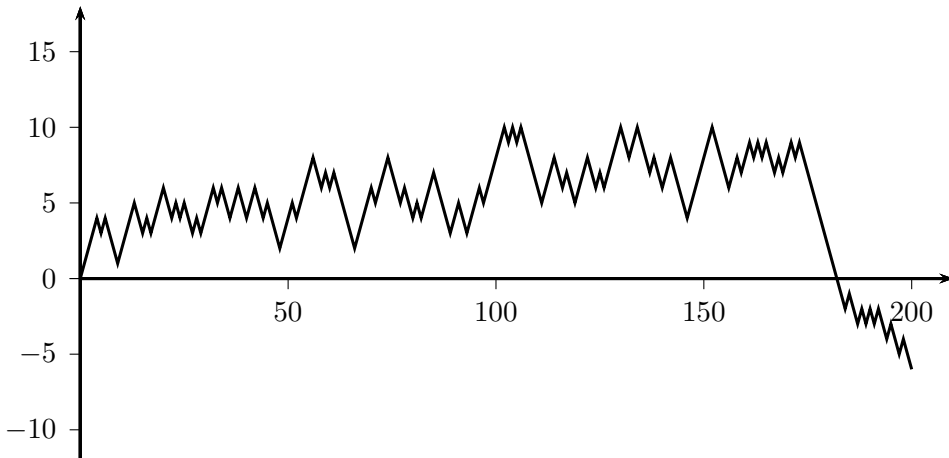


Bild 2.21: Irrfahrt mit erster Nullstelle zum Zeitpunkt 182

Wir legen in diesem Abschnitt für die auf Seite 3 eingeführten Zufallsvariablen X_1, X_2, \dots den in Abschnitt 6.1 vorgestellten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

mit Ω als Menge aller Folgen $\omega = (a_j)_{j \geq 1}$ mit $a_j \in \{1, -1\}$ für jedes $j \geq 1$ zugrunde. Die Folge $(a_j)_{j \geq 1} \in \Omega$ steht für einen (gedanklich) unendlich langen Weg, wobei das j -te Folgenglied a_j die Richtung des j -ten Wegschrittes angibt. Die Zufallsvariable X_k ordnet $\omega = (a_j)_{j \geq 1}$ den Wert a_k zu; X_k beschreibt also den k -ten Wegschritt. Mit $S_0 = 0$ und $S_k = X_1 + \dots + X_k$ (vgl. (2.2)) können wir die **Erstwiederkehrzeit**, also den zufälligen Zeitpunkt der ersten Nullstelle einer unendlich langen Irrfahrt, wie folgt definieren:

$$W(\omega) := \inf\{2k : k \in \mathbb{N} \text{ und } S_{2k}(\omega) = 0\}, \quad \omega = (a_j)_{j \geq 1} \in \Omega,$$

oder kürzer

$$W := \inf\{2k : k \in \mathbb{N} \text{ und } S_{2k} = 0\}. \quad (2.32)$$

Dabei ist das Infimum über die leere Menge wie üblich als ∞ festgelegt. Dieser Wert wird auch angenommen, etwa für die durch die konstante Folge (a_j) mit $a_j = 1$ für jedes $j \geq 1$ gegebene Irrfahrt, die keine Nullstellen besitzt. Teil b) des folgenden Satzes besagt, dass dieser Fall nur mit Wahrscheinlichkeit Null auftritt.

Satz 2.9. (Verteilung der Erstwiederkehrzeit, s. z.B. [FEL], S. 78)

Für die Erstwiederkehrzeit W gelten:

a)

$$\mathbb{P}(W = 2n) = \frac{\binom{2(n-1)}{n-1}}{2^{2(n-1)}} \cdot \frac{1}{2n} = \frac{u_{2(n-1)}}{2n}, \quad n \geq 1,$$

b)

$$\mathbb{P}(W < \infty) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(W = 2n) = 1,$$

c)

$$\mathbb{E}(W) = \infty.$$

BEWEIS: a): Da das Ereignis $\{W \geq 2n\}$ die Vereinigung der disjunkten Ereignisse $\{W = 2n\}$ und $\{W \geq 2n + 2\}$ ist, gilt

$$\mathbb{P}(W = 2n) = \mathbb{P}(W \geq 2n) - \mathbb{P}(W \geq 2n + 2). \quad (2.33)$$

Für $k \geq 2$ tritt das Ereignis $\{W \geq 2k\}$ genau dann ein, wenn das Anfangsstück der Länge $2(k-1)$ des Weges nullstellenfrei ist, also $S_1 \neq 0, \dots, S_{2(k-1)} \neq 0$ gilt. Somit liefern das Hauptlemma und Folgerung 2.3

$$\mathbb{P}(W \geq 2k) = \frac{\binom{2(k-1)}{k-1}}{2^{2(k-1)}} = u_{2(k-1)}. \quad (2.34)$$

Setzt man dieses Resultat für $k = n+1$ und $k = n$ in (2.33) ein, so folgt die Behauptung für den Fall $n \geq 2$ durch direkte Rechnung mit Binomialkoeffizienten. Im Fall $n = 1$ gilt $\mathbb{P}(W = 2) = \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = -1) + \mathbb{P}(X_1 = -1, X_2 = 1) = 1/2$, was wegen $\binom{0}{0} = 1$ ebenfalls mit der rechten Seite von a) übereinstimmt.

b): Es gilt $\{W = \infty\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{W \geq 2k\}$, wobei die Ereignisse $\{W \geq 2k\}$, $k \geq 1$, wegen $\{W \geq 2(k+1)\} \subset \{W \geq 2k\}$ eine absteigende Mengenfølge bilden. Da Wahrscheinlichkeitsmaße stetig von oben sind, folgt mit (2.34) und (2.22)

$$\mathbb{P}(W = \infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(W \geq 2k) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_{2(k-1)} = 0$$

und somit $1 = \mathbb{P}(W < \infty) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(W = 2n)$.

c): Mit Teil a) gilt $\mathbb{E}(W) = \sum_{n=1}^{\infty} 2n \mathbb{P}(W = 2n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{2(n-1)}$. Wegen (2.22) existiert ein n_0 mit der Eigenschaft $u_{2n} \geq 1/(2\sqrt{\pi n})$ für jedes $n \geq n_0$. Es folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2n \mathbb{P}(W = 2n) \geq \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

und somit die Behauptung, da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}$ divergiert. ■

Bild 2.22 zeigt das Stabdiagramm der Verteilung von W . Die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(W = 2n)$ genügen der Rekursionsformel

$$\frac{\mathbb{P}(W = 2(n+1))}{\mathbb{P}(W = 2n)} = \frac{2n-1}{2n+2}, \quad n \geq 1,$$

und der Anfangsbedingung $\mathbb{P}(W = 2) = 1/2$.

Gleichung $\mathbb{P}(W < \infty) = 1$ besagt, dass eine im Zustand 0 startende unendlich lange Irrfahrt mit Wahrscheinlichkeit Eins irgendwann (und damit auch unendlich oft) wieder zu 0 zurückkehrt (die Wartezeit bis zur k -ten Rückkehr wird am

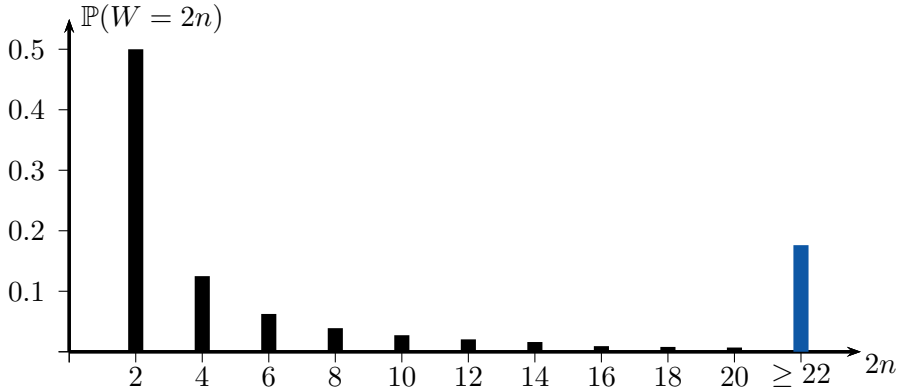


Bild 2.22: Stabdiagramm der Verteilung der Erstwiederkehrzeit (man beachte die große Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(W \geq 22)$)

Ende von Abschnitt 2.9 untersucht). Aus Symmetriegründen überträgt sich diese Eigenschaft auch auf jeden anderen Startzustand, d.h. jedes $k \in \mathbb{Z}$ ist in dem Sinne *rekurrent*, dass $\mathbb{P}((\cup_{j=1}^{\infty} \{S_j = k\}) | S_0 = k) = 1$ gilt. Es sei bereits hier betont, dass diese allgemeiner in [PO] untersuchte *Rekurrenzeigenschaft* verloren geht und die Irrfahrt auf \mathbb{Z} *transient* wird, wenn Auf- und Abwärtsschritte nicht mehr gleich wahrscheinlich sind (siehe Abschnitt 4.1). Die folgende Überlegung zeigt, dass man bei einer symmetrischen Irrfahrt mit Wahrscheinlichkeit Eins von jedem Startpunkt k aus in endlicher Zeit zum Punkt 0 (und damit auch zu jedem anderen vorgegebenen Punkt) gelangt (in Abschnitt 2.9 werden wir die Verteilung der dazu benötigten Schrittzahl genauer studieren). Setzen wir

$$p(k) := \mathbb{P} \left(\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \{S_j = 0\} \right) \middle| S_0 = k \right), \quad k \in \mathbb{Z},$$

so gilt nach Satz 2.9 b) $p(0) = 1$. Zerlegt man das Ereignis $\bigcup_{j=1}^{\infty} \{S_j = 0\}$ nach den beiden Möglichkeiten $X_1 = 1$ und $X_1 = -1$, so liefert die Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit die Differenzengleichung

$$p(k) = \frac{1}{2} p(k+1) + \frac{1}{2} p(k-1), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Diese besagt, dass die Punkte $(k, p(k))$, $k \in \mathbb{Z}$, auf einer durch den Punkt $(0, 1)$ verlaufenden Geraden liegen. Diese Gerade muss eine Parallele zur x -Achse sein (und somit muss wie behauptet $p(k) = 1$ für jedes k gelten). Andernfalls wäre ja für ein $k \in \mathbb{Z}$ die Ungleichung $p(k) < 0$ erfüllt, was unmöglich ist.

Dass die Erstwiederkehrzeit keinen Erwartungswert besitzt, ist vielleicht auf den ersten Blick verblüffend, fügt sich aber nahtlos in die bisherigen Ergebnisse ein. Wäre $\mathbb{E}(W) < \infty$, so würde man erwarten, dass die Anzahl der Nullstellen der Irrfahrt proportional zur verstrichenen Zeit zunehmen würde, was nach Satz 2.6 c) und Satz 2.7 nicht der Fall ist. Dieses eher intuitive Argument kann wie folgt konkretisiert werden: Sind Z_1, Z_2, \dots, Z_k unabhängige Zufallsvariablen mit gleicher Verteilung wie W , so modelliert $Z_1 + \dots + Z_k$ den Zeitpunkt der k -ten Nullstelle der Irrfahrt, weil nach jeder Erstwiederkehr wegen der stochastischen Unabhängigkeit der Auf- und Abwärtsschritte X_1, X_2, \dots die Berechnung der Zeitspanne bis zur nächsten Erstwiederkehr wieder von vorne beginnt (Bild 2.23).

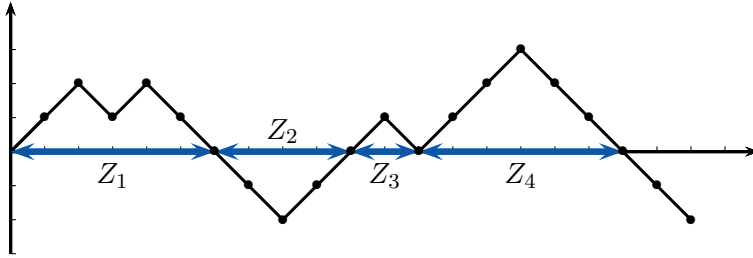


Bild 2.23: Die Zeit bis zur vierten Nullstelle als Summe von unabhängigen Erstwiederkehrzeiten

Da bis zur Zeit $2n$ genau dann mindestens k Nullstellen auftreten, wenn die k -te Wiederkehr bis spätestens zur Zeit $2n$ erfolgt, gilt

$$\mathbb{P}(N_{2n} \geq k) = \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^k Z_j \leq 2n\right).$$

Zusammen mit der Abschätzung

$$\mathbb{P}(N_{2n} \geq k) = \sum_{j=k}^n \mathbb{P}(N_{2n} = j) \leq \sum_{j=k}^n \frac{j}{k} \mathbb{P}(N_{2n} = j) \leq \frac{1}{k} \mathbb{E}(N_{2n})$$

sowie der aus der Konvergenz in Satz 2.6 c) folgenden Tatsache, dass ein $C > 0$ mit $\mathbb{E}(N_{2n}) \leq C\sqrt{n}$, $n \geq 1$, existiert, ergibt sich dann

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k Z_j \leq 2 \cdot \frac{n}{k}\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^k Z_j \leq 2n\right) \leq C \frac{\sqrt{n}}{k}. \quad (2.35)$$

Wäre $\mathbb{E}(W) =: a \in (0, \infty)$ ein endlicher Wert, so würde nach dem Gesetz großer Zahlen $k^{-1} \sum_{j=1}^k Z_j$ für $k \rightarrow \infty$ stochastisch (sogar fast sicher) gegen a konvergieren. Wählt man speziell $n := \lfloor k^{3/2} \rfloor$, so strebt n/k für $k \rightarrow \infty$ gegen ∞ , und die Wahrscheinlichkeit in (2.35) konvergiert gegen 1. Andererseits strebt für diese Wahl von n die obere Schranke in (2.35) gegen 0, was ein Widerspruch ist. Folglich muss $\mathbb{E}(W) = \infty$ gelten.

Die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(W = 2n)$ werden häufig mit

$$f_{2n} := \mathbb{P}(W = 2n) = \frac{\binom{2(n-1)}{n-1}}{2^{2(n-1)}} \cdot \frac{1}{2n} \quad (2.36)$$

abgekürzt. Zerlegt man das Ereignis $\{S_{2n} = 0\}$ nach den möglichen Werten $2, 4, \dots, 2n$ von W , so gilt

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \sum_{r=1}^n \mathbb{P}(W = 2r) \mathbb{P}(S_{2n} = 0 | W = 2r).$$

Da unter der Bedingung $W = 2r$ eine in $(2r, 0)$ startende und nach $(2n, 0)$ verlaufende Irrfahrt ein $(2n - 2r)$ -Brückenweg ist, folgt mit dem Hauptlemma und der in (2.13) eingeführten Abkürzung $u_{2k} = \binom{2k}{k} 2^{-2k}$ die Beziehung

$$u_{2n} = \sum_{r=1}^n f_{2r} u_{2n-2r}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.37)$$

Unter Beachtung von $u_0 = 1$ liefert Summation dieser Gleichungen die für jedes $k \in \mathbb{N}$ bestehende Ungleichung

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^k u_{2n} &= \sum_{n=1}^k \sum_{r=1}^n f_{2r} u_{2n-2r} = \sum_{r=1}^k f_{2r} \sum_{n=r}^k u_{2n-2r} \\ &\leq \sum_{r=1}^k f_{2r} \left(1 + \sum_{n=1}^k u_{2n} \right) \end{aligned}$$

und somit

$$\sum_{n=1}^k u_{2n} \left(1 + \sum_{n=1}^k u_{2n} \right)^{-1} \leq \sum_{r=1}^k f_{2r} \leq 1.$$

Wegen $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n} = \infty$ ergibt sich hiermit ein alternativer Beweis der Beziehung $\sum_{r=1}^{\infty} f_{2r} = \mathbb{P}(W < \infty) = 1$.

2.6 Verweilzeiten

In diesem Abschnitt betrachten wir die Zeitspanne, die eine symmetrische Irrfahrt der Länge $2n$ oberhalb der x -Achse verbringt. Bezeichnet wie früher X_j die Richtung des j -ten Schrittes der Irrfahrt, und ist $S_0 = 0$ sowie $S_k = X_1 + \dots + X_k$ für $k \geq 1$, so kann diese **Verweilzeit** in der Form

$$O_{2n} := \sum_{k=1}^{2n} \mathbf{1}\{S_k \geq 0 \text{ und } S_{k-1} \geq 0\} \quad (2.38)$$

notiert werden. Bild 2.24 zeigt eine Irrfahrt der Länge 20, die sich 12 Zeitschritte oberhalb der x -Achse aufhält. Die rechten Endpunkte dieser je eine Einheit betragenden Zeitschritte sind durch Pfeile gekennzeichnet. Die Pfeil-Enden zeigen auf diejenigen k , für die der in (2.38) stehende Indikator gleich 1 ist.

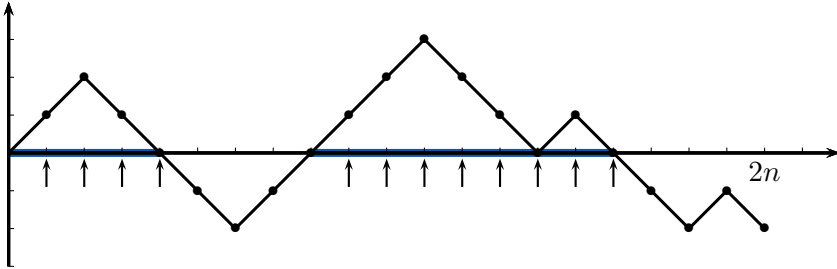


Bild 2.24: 20-Weg mit 12 Zeitschritten oberhalb der x -Achse

Offenbar kann O_{2n} nur die geradzahligen Werte $0, 2, \dots, 2n$ annehmen. Die extremen Fälle $O_{2n} = 0$ bzw. $O_{2n} = 2n$ bedeuten, dass der $2n$ -Weg nichtpositiv bzw. nichtnegativ ist; nach dem Hauptlemma und Folgerung 2.3 gilt also

$$\mathbb{P}(O_{2n} = 0) = \mathbb{P}(S_1 \leq 0, \dots, S_{2n} \leq 0) = u_{2n}, \quad (2.39)$$

$$\mathbb{P}(O_{2n} = 2n) = \mathbb{P}(S_1 \geq 0, \dots, S_{2n} \geq 0) = u_{2n} \quad (2.40)$$

mit u_{2n} wie in (2.13). Bild 2.25 zeigt zwei Irrfahrten der Länge 200, deren Verweilzeiten oberhalb der x -Achse 50 bzw. 174 und damit 25% bzw. 87% der Gesamtzeit betragen. Die in Bild 2.21 dargestellte Irrfahrt verhält sich noch extremer; sie verweilt 182 Zeiteinheiten und damit mehr als 90% der Gesamtzeit 200 oberhalb der x -Achse. In der Deutung der Irrfahrt als Spiel zwischen zwei Personen muss man also damit rechnen, dass einer der beiden Spieler den Großteil der Zeit über führt. Da die Verweilzeit

$$U_{2n} := |\{k \in \{1, \dots, 2n\} : S_k \leq 0 \text{ und } S_{k-1} \leq 0\}|$$

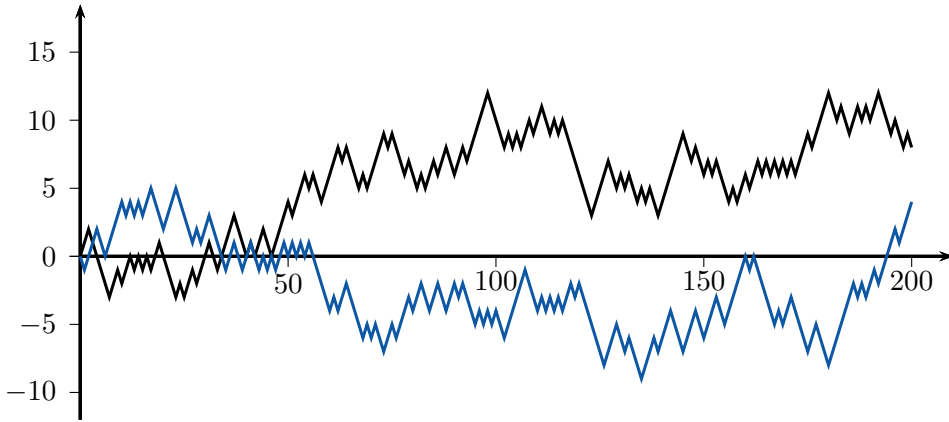


Bild 2.25: Verweilzeiten tendieren zum Extremen

unterhalb der x -Achse aus Symmetriegründen die gleiche Verteilung wie O_{2n} besitzt (Spiegelung an der x -Achse durch Übergang von X_j zu $-X_j$!) und $O_{2n} + U_{2n} = 2n$ gilt, besitzt O_{2n} den Erwartungswert n . Eine Irrfahrt sollte also „im Mittel“ die Hälfte ihrer Zeit oberhalb der x -Achse verbringen. Wer jedoch meint, die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Verweilzeit O_{2n} müsste sich „glockenförmig in der Nähe des Erwartungswertes konzentrieren“, unterliegt einem großen Irrtum. Wie das folgende berühmte Resultat zeigt, ist das Gegenteil der Fall; die Verweilzeit O_{2n} tendiert zu extrem großen und kleinen Werten. Die Bilder 2.21 und 2.25 sind also keine Ausnahmefälle, sondern die Regel!

Satz 2.10. (Verteilung der Verweilzeit ([CF]))

Es gilt

$$\mathbb{P}(O_{2n} = 2k) = u_{2k}u_{2(n-k)} = \frac{\binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k}}{2^{2n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (2.41)$$

BEWEIS: Wir schreiben im Folgenden kurz

$$b_{2k,2n} := \mathbb{P}(O_{2n} = 2k). \quad (2.42)$$

Wegen $u_0 = 1$ sind offenbar die Fälle $k = 0$ und $k = n$ mit (2.39) und (2.40) abgehandelt; wir setzen somit ab jetzt $1 \leq k \leq n - 1$ voraus, was anschaulich

bedeutet, dass die Irrfahrt sowohl Zeit oberhalb als auch unterhalb der x -Achse verbringt. Die Erstwiederkehrzeit W nimmt also einen der Werte $2r$ mit $r \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ an. Wir zerlegen das Ereignis $\{O_{2n} = 2k\}$ nach den möglichen Werten von W sowie danach, ob S_1 positiv oder negativ ist, also der erste Schritt nach oben oder unten verläuft. Im Fall von $S_1 = -1$ muss die Irrfahrt spätestens zur Zeit $2n - 2k$ eine Nullstelle besitzen, da sonst weniger als $2k$ Zeitschritte für ein Verweilen oberhalb der x -Achse zur Verfügung stünden. Im Fall $S_1 = 1$ tritt die erste Nullstelle notwendigerweise spätestens zum Zeitpunkt $2k$ auf, da sonst $O_{2n} > 2k$ gelten würde. Diese Überlegungen liefern die Darstellung

$$\{O_{2n} = 2k\} = \bigcup_{r=1}^k \{O_{2n} = 2k, W = 2r, S_1 = 1\} \cup \bigcup_{r=1}^{n-k} \{O_{2n} = 2k, W = 2r, S_1 = -1\},$$

wobei die rechts stehenden Ereignisse paarweise disjunkt sind. Mit der in (2.36) eingeführten Abkürzung $f_{2r} = \mathbb{P}(W = 2r)$ folgt

$$\begin{aligned} b_{2k, 2n} &= \mathbb{P}(O_{2n} = 2k) \\ &= \sum_{r=1}^k \mathbb{P}(S_1 = 1) \mathbb{P}(O_{2n} = 2k, W = 2r | S_1 = 1) \\ &\quad + \sum_{r=1}^{n-k} \mathbb{P}(S_1 = -1) \mathbb{P}(O_{2n} = 2k, W = 2r | S_1 = -1) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{r=1}^k \mathbb{P}(O_{2n} = 2k, W = 2r | S_1 = 1) + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n-k} \mathbb{P}(O_{2n} = 2k, W = 2r | S_1 = -1) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{r=1}^k f_{2r} \mathbb{P}(O_{2n} = 2k | W = 2r, S_1 = 1) \end{aligned} \tag{2.43}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n-k} f_{2r} \mathbb{P}(O_{2n} = 2k | W = 2r, S_1 = -1). \tag{2.44}$$

Dabei wurde zuletzt verwendet, dass aus Symmetriegründen

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(W = 2r) &= \mathbb{P}(W = 2r, S_1 = 1) + \mathbb{P}(W = 2r, S_1 = -1) \\ &= 2 \mathbb{P}(W = 2r, S_1 = 1) = 2 \mathbb{P}(W = 2r, S_1 = -1) \end{aligned}$$

gilt und somit wegen $\mathbb{P}(S_1 = 1) = \mathbb{P}(S_1 = -1) = 1/2$ folgende Identität besteht:

$$f_{2r} = \mathbb{P}(W = 2r) = \mathbb{P}(W = 2r | S_1 = 1) = \mathbb{P}(W = 2r | S_1 = -1).$$

Da sich die Irrfahrt unter der Bedingung $W = 2r, S_1 = 1$ bis zum Zeitpunkt $2r$ genau $2r$ Zeiteinheiten oberhalb der x -Achse aufhält, muss sie – vom Punkt

$(2r, 0)$ aus startend – bis zum Zeitpunkt $2n$ noch $2k - 2r$ Zeiteinheiten oberhalb der x -Achse verbringen. Nach Definition von $b_{2k,2n}$ in (2.42) gilt somit

$$\mathbb{P}(O_{2n} = 2k | W = 2r, S_1 = 1) = b_{2k-2r,2n-2r}. \quad (2.45)$$

Unter der Bedingung $W = 2r, S_1 = -1$ verläuft die Irrfahrt bis zum Zeitpunkt $2r$ unterhalb der x -Achse, was bedeutet, dass sie – im Punkt $(2r, 0)$ startend – über die verbleibenden $2n - 2r$ Zeitschritte noch $2k$ Zeitschritte oberhalb der x -Achse verlaufen muss. Folglich gilt

$$\mathbb{P}(O_{2n} = 2k | W = 2r, S_1 = -1) = b_{2k,2n-2r}. \quad (2.46)$$

Einsetzen von (2.45) und (2.46) in (2.43) und (2.44) ergibt

$$b_{2k,2n} = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^k f_{2r} b_{2k-2r,2n-2r} + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n-k} f_{2r} b_{2k,2n-2r}, \quad 1 \leq k \leq n-1. \quad (2.47)$$

Wir beweisen jetzt (2.41) durch Induktion über n . Da (2.41) wegen $u_0 = 1$ stets für $k = 0$ und $k = n$ gilt, ist der Induktionsanfang $n = 1$ bereits gezeigt. Der Induktionsschluss von $n - 1$ auf n benutzt Darstellung (2.47) und die Tatsache, dass für die auf der rechten Seite dieser Gleichung auftretenden Terme der Gestalt $b_{2j,2m}$ die Induktionsvoraussetzung anwendbar ist, da stets $m \leq n - 1$ gilt. Wir können also die Gleichungen

$$b_{2k-2r,2n-2r} = u_{2k-2r} u_{2n-2r-(2k-2r)}, \quad b_{2k,2n-2r} = u_{2k} u_{2n-2r-2k}$$

verwenden. Setzt man diese in (2.47) ein, so folgt

$$b_{2k,2n} = \frac{1}{2} \cdot u_{2n-2k} \sum_{r=1}^k f_{2r} u_{2k-2r} + \frac{1}{2} \cdot u_{2k} \sum_{r=1}^{n-k} f_{2r} u_{2n-2k-2r}.$$

Nach (2.37) ist die erste der hier auftretenden Summen gleich u_{2k} und die zweite gleich u_{2n-2k} , sodass sich wie behauptet $b_{2k,2n} = u_{2k} u_{2n-2k}$ ergibt. ■

Wie ein Vergleich mit Satz 2.4 zeigt, besitzt O_{2n} überraschenderweise die gleiche Verteilung wie der Zeitpunkt L_{2n} der letzten Nullstelle. Bild 2.12 illustriert also auch das U-förmige Stabdiagramm der Verteilung von O_{40} . Man sieht, dass mit ca. 25-prozentiger Wahrscheinlichkeit die Verweilzeit oberhalb der x -Achse gleich 0 oder 40 ist; jede vierte Irrfahrt der Länge 40 verläuft also ganz oberhalb oder ganz unterhalb der x -Achse!

Da O_{2n} und L_{2n} die gleiche Verteilung besitzen, liefert Satz 2.5 zugleich den folgenden, zuerst von P. Lévy ([LEV], Corollaire 2, S. 303-304) bemerkten Grenzwertsatz für die Verteilung des *Zeitanteils* $O_{2n}/(2n)$, den die Irrfahrt oberhalb der x -Achse verbringt:

Satz 2.11. (Arcus-Sinus-Gesetz für die Verweilzeit)

Für jedes x mit $0 \leq x \leq 1$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{O_{2n}}{2n} \leq x \right) = \int_0^x \frac{1}{\pi \sqrt{t(1-t)}} dt = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}. \quad (2.48)$$

Auch die Konsequenzen dieses Ergebnisses für lange Irrfahrten sollte man sich vor Augen halten: Aus Tabelle 2.1 für die auf der rechten Seite von (2.48) stehende Verteilungsfunktion $A(x)$ entnimmt man $A(0.15) = 0.253$ und $A(0.85) = 0.747$. Dies bedeutet, dass sich ca. ein Viertel aller langen symmetrischen Irrfahrten mindestens 85% der Gesamtzeit oberhalb der x -Achse aufhält; ein weiteres Viertel verbringt dort nur höchstens 15% der Gesamtzeit. In der Deutung eines aus einer langen Serie von Münzwürfen bestehenden Spiels zwischen zwei Personen heißt dieses Resultat, dass in etwa der Hälfte aller solcher Spiele einer der beiden Spieler zu mindestens 85% der gesamten Spieldauer in Führung liegt!

2.7 Maximum und Minimum

In diesem Abschnitt untersuchen wir, wie weit sich eine symmetrische Irrfahrt der Länge n höchstens vom Nullniveau entfernt und betrachten hierzu das Maximum

$$M_n := \max\{S_0, S_1, \dots, S_n\}$$

sowie das Minimum

$$m_n := \min\{S_0, S_1, \dots, S_n\}.$$

In der Deutung der Irrfahrt als Spiel zwischen zwei Personen A und B gibt M_n den „maximalen Zwischenverlust“ in Euro von Spieler B im Laufe eines auf n Münzwürfe angelegten Spiels an. In gleicher Weise steht $-m_n$ für den maximalen Zwischenverlust von Spieler A.

Da die Zufallsvariablen m_n und $-M_n$ aus Symmetriegründen die gleiche Verteilung besitzen, beschränken wir uns auf den Fall des Maximums. Offenbar gilt $0 \leq M_n \leq n$, wobei der Fall $M_n = 0$ eintritt, wenn der n -Weg nichtpositiv ist. Der andere Extremfall $M_n = n$ tritt (nur) für den Weg ein, der n Aufwärtsschritte absolviert. Wir werden sehen, dass die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(M_n = k)$ ausschließlich von der Verteilung von S_n , also dem stochastischen Verhalten der Irrfahrt am Ende des Zeitraums, abhängen.

Hierzu betrachten wir ein k mit $0 \leq k \leq n$ und zerlegen das Ereignis $\{M_n \geq k\}$ danach, ob $S_n > k$, $S_n < k$ oder $S_n = k$ gilt, erhalten also

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M_n \geq k) &= \mathbb{P}(M_n \geq k, S_n > k) + \mathbb{P}(M_n \geq k, S_n < k) \\ &\quad + \mathbb{P}(M_n \geq k, S_n = k). \end{aligned}$$

Der springende Punkt ist nun, dass die beiden ersten Wahrscheinlichkeiten auf der rechten Seite gleich sind, denn zu jedem n -Weg mit $M_n \geq k$ und $S_n > k$ gehört in eindeutiger Weise ein n -Weg mit $M_n \geq k$ und $S_n < k$: wir müssen nur jeden n -Weg mit der ersten Eigenschaft ab dem erstmaligen Erreichen der Höhe k an der Horizontalen $y = k$ spiegeln. Auf diese Weise entsteht ein Weg mit der zweiten Eigenschaft, und diese Zuordnungsvorschrift ist offenbar injektiv und für jeden Weg mit der zweiten Eigenschaft umkehrbar (Bild 2.26).

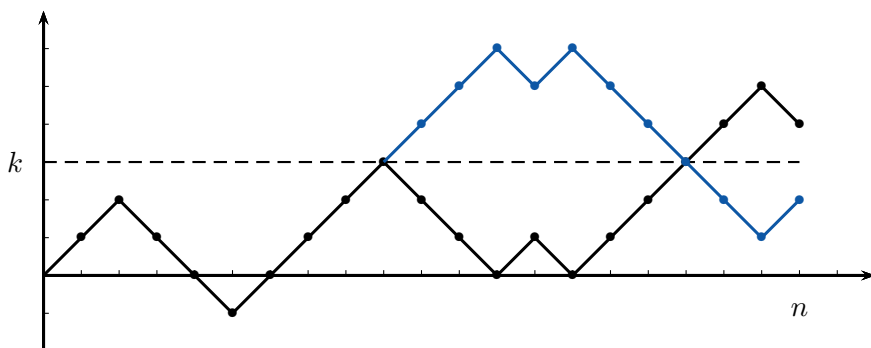


Bild 2.26: Ein Weg mit $M_n \geq k$ wird ab dem erstmaligen Erreichen der Höhe k an $y = k$ gespiegelt, wodurch Wege mit der Zusatzeigenschaft $S_n > k$ bzw. $S_n < k$ umkehrbar eindeutig aufeinander abgebildet werden

Da jedes der Ereignisse $\{S_n \geq k\}$ und $\{S_n = k\}$ das Eintreten des Ereignisses

$\{M_n \geq k\}$ nach sich zieht, ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M_n \geq k) &= 2\mathbb{P}(M_n \geq k, S_n > k) + \mathbb{P}(M_n \geq k, S_n = k) \\ &= 2\mathbb{P}(M_n \geq k, S_n \geq k) - \mathbb{P}(M_n \geq k, S_n = k) \\ &= 2\mathbb{P}(S_n \geq k) - \mathbb{P}(S_n = k)\end{aligned}\quad (2.49)$$

und somit

$$\mathbb{P}(M_n \geq k) = \mathbb{P}(S_n \geq k) + \mathbb{P}(S_n \geq k+1), \quad k = 0, \dots, n. \quad (2.50)$$

Ersetzt man hier k durch $k+1$ und geht zum komplementären Ereignis über, so folgt

$$\mathbb{P}(M_n \leq k) = \mathbb{P}(S_n \leq k) + \mathbb{P}(S_n \leq k+1) - 1, \quad k = 0, \dots, n. \quad (2.51)$$

Unter Beachtung von (2.50) und

$$\mathbb{P}(M_n = k) = \mathbb{P}(M_n \geq k) - \mathbb{P}(M_n \geq k+1) = \mathbb{P}(S_n \geq k) - \mathbb{P}(S_n \geq k+2)$$

ergibt sich ferner

$$\mathbb{P}(M_n = k) = \mathbb{P}(S_n = k) + \mathbb{P}(S_n = k+1), \quad k = 0, \dots, n. \quad (2.52)$$

Da $\mathbb{P}(S_n = k)$ nur dann positiv sein kann, wenn n und k die gleiche Parität besitzen, ist einer der Summanden in (2.52) gleich 0. Mit der Konvention (2.7) sowie (2.8) gilt demnach (s. [FEL], Theorem 1, S. 89)

$$\mathbb{P}(M_n = k) = \frac{1}{2^n} \cdot \max \left(\binom{n}{\frac{n+k}{2}}, \binom{n}{\frac{n+k+1}{2}} \right).$$

Noch kompakter gestaltet sich dieses Resultat mithilfe der unteren Gauß-Klammer $\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$:

Satz 2.12. (Verteilung des Maximums einer Irrfahrt)

Für das Maximum einer symmetrischen Irrfahrt gelten:

a)

$$\mathbb{P}(M_n = k) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{\lfloor \frac{n+k+1}{2} \rfloor}, \quad n \geq 1; \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

b) (vgl. [KP2], S. 160)

$$\mathbb{E}(M_{2n}) = \left(2n + \frac{1}{2}\right) \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} - \frac{1}{2},$$

$$\mathbb{E}(M_{2n+1}) = (2n+1) \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} - \frac{1}{2}.$$

c) (vgl. [KP2], S. 160)

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(M_{2n}) &= 2n + \frac{1}{4} - \left(\left(2n + \frac{1}{2} \right) \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \right)^2, \\ \mathbb{V}(M_{2n+1}) &= 2n + \frac{5}{4} - \left((2n+1) \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \right)^2.\end{aligned}$$

BEWEIS: Es sind nur b) und c) zu zeigen. Wir beweisen zunächst die Darstellung für $\mathbb{E}(M_{2n})$, die zweite Gleichung in b) folgt unter Verwendung von (6.16) analog. Mit Teil a) gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_{2n}) &= \sum_{k=1}^n 2k \frac{\binom{2n}{n+k}}{2^{2n}} + \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) \frac{\binom{2n}{n+k+1}}{2^{2n}} \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \left(\sum_{k=1}^n 2k \binom{2n}{n+k} + \sum_{j=1}^n (2j-1) \binom{2n}{n+j} \right) \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=1}^n (4k-1) \binom{2n}{n+k}.\end{aligned}$$

Mit (6.15) sowie $\sum_{k=1}^n \binom{2n}{n+k} = (2^{2n} - \binom{2n}{n})/2$ ergibt sich jetzt die Behauptung durch direkte Rechnung. Um c) zu zeigen, geht man analog vor. So ist

$$\mathbb{E}(M_{2n}^2) = \sum_{k=1}^n (2k)^2 \mathbb{P}(M_{2n} = 2k) + \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)^2 \mathbb{P}(M_{2n} = 2k+1).$$

Unter Verwendung von (6.15) und (6.17) ergibt sich mit etwas Geduld

$$\mathbb{E}(M_{2n}^2) = 2n + \frac{1}{2} - \left(2n + \frac{1}{2} \right) \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$$

und damit die erste Aussage von c). Die zweite folgt durch direkte Rechnung unter Zuhilfenahme von (6.16) und (6.18). ■

Der Umstand, dass einer der Summanden in (2.52) verschwindet, ist im nachstehendem Stabdiagramm der Verteilung von M_{40} (Bild 2.27) veranschaulicht. Dieses entsteht aus dem Stabdiagramm der Binomialverteilung $\text{Bin}(40, 1/2)$, indem die maximale Wahrscheinlichkeit in 0 und dann die nach absteigender Größe

sortierten Wahrscheinlichkeiten nach rechts in 1, 2 usw. angetragen werden. Wegen der Symmetrie des Stabdiagramms der Verteilung $\text{Bin}(40, 1/2)$ sind dabei jeweils zwei aufeinander folgende Wahrscheinlichkeiten gleich groß.

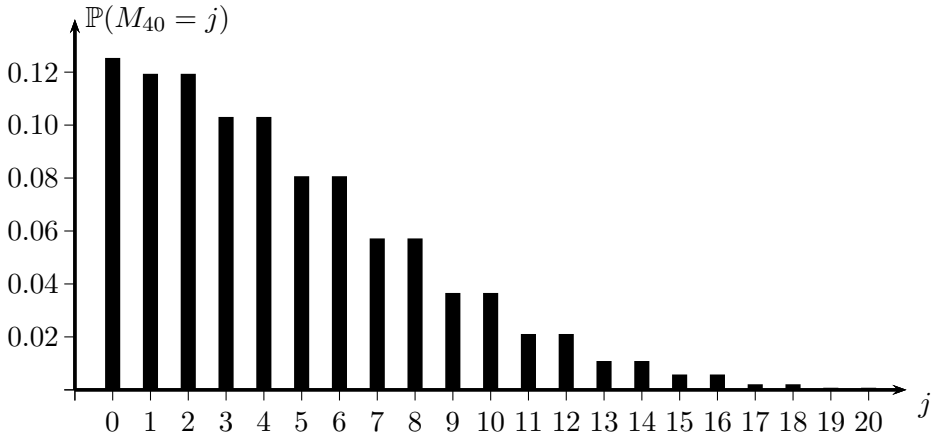


Bild 2.27: Stabdiagramm der Verteilung von M_{40}

Satz 2.13. (Grenzverteilung des Maximums)

Für das Maximum M_n einer symmetrischen Irrfahrt der Länge n gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{M_n}{\sqrt{n}} \leq x \right) = 2\Phi(x) - 1, \quad x \geq 0 \quad (2.53)$$

mit $\Phi(x)$ wie in (2.4).

BEWEIS: Die Beweisidee besteht, darin, (2.51) und den Zentralen Grenzwertsatz von de Moivre-Laplace (s. Abschnitt 6.3) auszunutzen. Zunächst ist ersichtlich, dass die Behauptung für $x = 0$ richtig ist; beide Seiten von (2.53) sind dann gleich Null. Ist $x > 0$ beliebig vorgegeben, so wählen wir $k_n := \lfloor x\sqrt{n} \rfloor$ als größte ganze Zahl kleiner oder gleich $x\sqrt{n}$. Wegen der Ganzzahligkeit von M_n gilt $\{M_n \leq$

$k_n\} = \{M_n \leq x\sqrt{n}\}$, und somit liefert (2.51)

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}\left(\frac{M_n}{\sqrt{n}} \leq x\right) &= \mathbb{P}(M_n \leq x\sqrt{n}) = \mathbb{P}(M_n \leq k_n) \\
 &= \mathbb{P}(S_n \leq k_n) + \mathbb{P}(S_n \leq k_n + 1) - 1 \\
 &= 2\mathbb{P}(S_n \leq k_n) - 1 + \mathbb{P}(S_n = k_n + 1) \\
 &= 2\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq z_n\right) - 1 + \mathbb{P}(S_n = k_n + 1), \quad (2.54)
 \end{aligned}$$

wobei $z_n := k_n/\sqrt{n}$ gesetzt wurde. Nach (2.6) und Abschnitt 6.2 konvergiert S_n/\sqrt{n} nach Verteilung gegen eine Standardnormalverteilung. Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = x$ und (6.5) konvergiert der erste Summand in (2.54) gegen $2\Phi(x)$. Der letzte Summand ist durch

$$C_n := \max_{k=0,1,\dots,n} \binom{n}{k} 2^{-n}$$

nach oben beschränkt. Es ist $C_{2n} = \binom{2n}{n} 2^{-2n} = u_{2n}$ und $C_{2n+1} = \binom{2n+1}{n+1} 2^{-(2n+1)} = u_{2n}(2n+1)/(2n+2) \leq u_{2n}$. Nach (2.22) gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n} = 0$, sodass der letzte Summand in (2.54) gegen Null konvergiert, was noch zu zeigen war. ■

Bemerkung 2.14.

Da $\mathbb{P}(M_n/\sqrt{n} \leq x)$ als Funktion von x die Verteilungsfunktion von M_n/\sqrt{n} ist, besagt Satz 2.13, dass die Folge der Verteilungsfunktionen von M_n/\sqrt{n} punktweise gegen die Verteilungsfunktion von $|Z|$ konvergiert. Nach Abschnitt 6.2 können wir somit die Aussage von Satz 2.13 kompakt in der Form

$$\frac{M_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} |Z|, \quad Z \sim N(0, 1),$$

schreiben.

Setzen wir wie früher $\Phi^*(x) = 2\Phi(x) - 1$, so liefert Tabelle 2.2 die Werte $\Phi^*(0.1) = 0.08$, $\Phi^*(0.672) = 0.5$ und $\Phi^*(1.96) = 0.95$. Satz 2.13 besagt also unter anderem, dass bei symmetrischen Irrfahrten der Länge 10000 das Maximum in etwa der Hälfte aller Fälle höchstens 68 beträgt. Mit Wahrscheinlichkeit 0.08 erreicht die Irrfahrt eine maximale Höhe von höchstens 10, und nur in etwa 5% aller Fälle ist das Maximum größer als 197.

Maxima, Minima und Nullstellen

Die Stabdiagramme der Verteilungen von N_{40} (Bild 2.18) und M_{40} (Bild 2.27) sind verblüffend ähnlich. Frappierend ist auch, dass nach Satz 2.7 und Satz 2.13

die Anzahl N_{2n} der Nullstellen und das Maximum M_{2n} eines rein zufälligen $2n$ -Weges nach Division durch $\sqrt{2n}$ für $n \rightarrow \infty$ die gleiche Grenzverteilung besitzen; beide so normierten Verteilungen nähern sich bei wachsendem n der Verteilung des Betrages einer standardnormalverteilten Zufallsvariablen Z an, da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{N_{2n}}{\sqrt{2n}} \leq x \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{M_{2n}}{\sqrt{2n}} \leq x \right) = 2 \int_0^x \varphi(t) dt, \quad x > 0,$$

gilt. Gibt es einen begrifflichen Zusammenhang zwischen der Anzahl der Nullstellen und dem Maximum eines Weges? Die Antwort ist: Ja, und wir haben sie letztlich schon im Beweis von Satz 2.6 gegeben. Dort sahen wir, dass ein $2n$ -Weg mit genau j Nullstellen, der bis zur j -ten Nullstelle nichtnegativ ist, in eindeutiger Weise einem Weg von $(0, 0)$ nach $(2n - j, -j)$ zugeordnet werden kann. Da die Weglänge für die damaligen (und auch die folgenden) Überlegungen nicht geradzahlig sein muss, starten wir für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ mit einem n -Weg, der *mindestens* j Nullstellen besitzt und bis zur j -ten Nullstelle nichtnegativ ist. Durch Weglassen des ersten Aufwärtsschrittes sowie jedes direkt nach den ersten $j - 1$ Nullstellen folgenden Aufwärtsschrittes erhalten wir einen Weg der Länge $n - j$, dessen Minimum kleiner oder gleich $-j$ ist, und diese Zuordnungsvorschrift ist offenbar injektiv. Die Bilder 2.28 und 2.29 illustrieren diese Zuordnungsvorschrift für den Fall $j = 4$; die Tatsache, dass der Weg nach der j -ten Nullstelle bzw. nach dem ersten Erreichen der Höhe $-j$ beliebig verlaufen kann, ist durch einen grauen Korridor hervorgehoben.

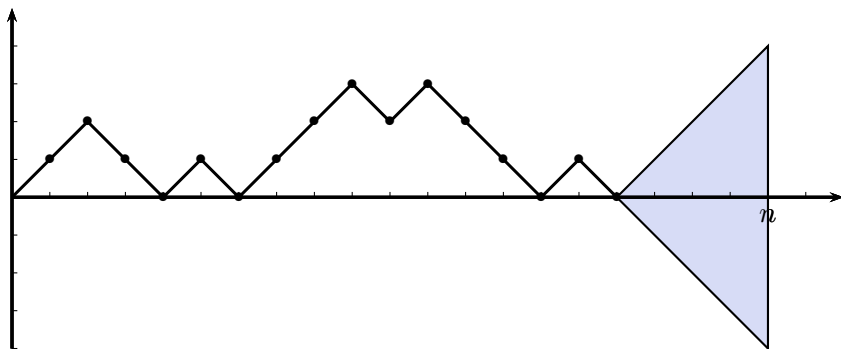


Bild 2.28: n -Weg mit mindestens vier Nullstellen, der bis zur vierten Nullstelle nichtnegativ ist

Die Umkehrung dieser Zuordnungsvorschrift (und damit deren Bijektivitäts-Nachweis) erfolgt wie im Beweis von Satz 2.6: Wir starten mit einem $(n - j)$ -Weg, dessen Minimum kleiner oder gleich $-j$ ist (siehe Bild 2.29 für den Fall $j = 4$).

Ein solcher Weg erreicht im zeitlichen Verlauf irgendwann *erstmalig* die Höhe -1 (erster Teilweg), danach irgendwann *erstmalig* die Höhe -2 (zweiter Teilweg) usw. Irgendwann erreicht er *erstmalig* die Höhe $-j$ (j -ter Teilweg). Stellt man jedem dieser j Teilwege einen Aufwärtsschritt voran und heftet diese Teilwege, im Ursprung beginnend, aneinander, so entsteht ein nichtnegativer Weg mit j Nullstellen. Der letzte Teilweg nach dem erstmaligen Erreichen der Höhe $-j$ (der irgendwie innerhalb des gekennzeichneten Korridors verläuft) wird unverändert an die j -te Nullstelle angeheftet; er kann zu weiteren Nullstellen beitragen. Auf diese Weise erhalten wir einen Weg mit *mindestens* j Nullstellen, der bis zur j -ten Nullstelle nichtnegativ ist.

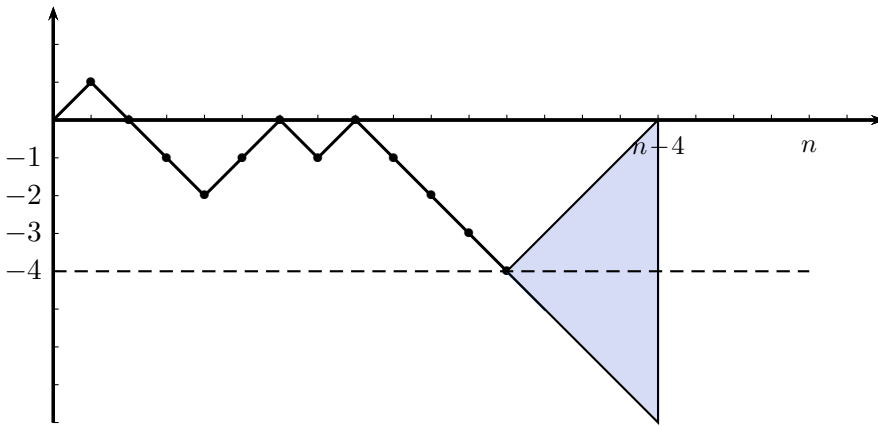


Bild 2.29: $(n-4)$ -Weg, dessen Minimum kleiner oder gleich -4 ist

Da jedem $(n-j)$ -Weg, dessen Minimum kleiner oder gleich $-j$ ist, durch Spiegelung an der x -Achse genau ein $(n-j)$ -Weg, dessen Maximum mindestens gleich j ist, entspricht, können wir folgendes Ergebnis festhalten (bei der folgenden Gleichungskette bezeichne $\{N_n \geq j, \geq 0\}$ die Menge aller n -Wege mit mindestens j Nullstellen, die bis zur j -ten Nullstelle nichtnegativ sind): Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_n \geq j) &= \frac{1}{2^n} |\{N_n \geq j\}| = \frac{1}{2^n} \cdot 2^j |\{N_n \geq j, \geq 0\}| \\ &= \frac{1}{2^n} \cdot 2^j |\{M_{n-j} \geq j\}| = \frac{1}{2^{n-j}} |\{M_{n-j} \geq j\}| \end{aligned}$$

und somit

$$\mathbb{P}(N_n \geq j) = \mathbb{P}(M_{n-j} \geq j), \quad j = 0, 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor. \quad (2.55)$$

Dieses Ergebnis ermöglicht uns den folgenden sehr kurzen Beweis von Satz 2.7 mithilfe von Satz 2.13 (der nur den Zentralen Grenzwertsatz von de Moivre-Laplace benutzt): Für $x > 0$ sei $j_n = \lceil x\sqrt{2n} \rceil$ die kleinste ganze Zahl größer oder gleich $x\sqrt{2n}$ (sog. *obere Gauß-Klammer*); es gilt somit insbesondere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{j_n}{\sqrt{2n - j_n}} = x. \quad (2.56)$$

Mit (2.55) erhalten wir wegen der Ganzzahligkeit von N_{2n}

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\frac{N_{2n}}{\sqrt{2n}} \geq x\right) &= \mathbb{P}(N_{2n} \geq x\sqrt{2n}) = \mathbb{P}(N_{2n} \geq j_n) \\ &= \mathbb{P}(M_{2n-j_n} \geq j_n) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{M_{2n-j_n}}{\sqrt{2n - j_n}} \geq \frac{j_n}{\sqrt{2n - j_n}}\right). \end{aligned}$$

Da in (2.53) links anstelle von „ \leq “ auch das Kleiner-Zeichen stehen sowie x durch x_n ersetzt werden kann, wobei (x_n) eine beliebige gegen x konvergierende Folge ist (siehe Abschnitt 6.2), so liefert (2.53) mit $x_n := j_n/\sqrt{2n - j_n}$ und (2.56)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{M_{2n-j_n}}{\sqrt{2n - j_n}} \geq \frac{j_n}{\sqrt{2n - j_n}}\right) = 1 - (2\Phi(x) - 1)$$

und somit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{N_{2n}}{\sqrt{2n}} \leq x\right) = 2\Phi(x) - 1,$$

also die Aussage von Satz 2.7.

2.8 Anzahl und Lage der Maximalstellen

Eine symmetrische Irrfahrt der Länge n kann ihr Maximum $M_n = \max_{0 \leq j \leq n} S_j$ zu mehreren Zeitpunkten annehmen. Definieren wir

$$D_n := \{k \in \{0, 1, \dots, n\} : S_k = M_n\}$$

als die Menge der *Maximalstellen* der Irrfahrt, so liegt die Frage nahe, wie groß die Menge D_n typischerweise ist. Wird zu Beginn ein Abwärtsschritt und dann stets abwechselnd ein Auf- und Abwärtsschritt absolviert, so entsteht offenbar die größtmögliche Anzahl von $\lfloor n/2 \rfloor + 1$ Maximalstellen. Die mit

$$Q_n := |D_n| = \sum_{k=0}^n \mathbf{1}\{S_k = M_n\} \quad (2.57)$$

bezeichnete *Anzahl der Maximalstellen* kann also die Werte $1, 2, \dots, \lfloor n/2 \rfloor + 1$ annehmen. Wir stellen uns das Problem, die Verteilung von Q_n zu bestimmen. Wie das folgende Resultat zeigt, hängt diese direkt mit der Verteilung des Maximums von Irrfahrten zusammen (vgl. [RE], S. 152).

Satz 2.15. (Maximalstellen und Maximum)

Für jedes $n = 1, 2, \dots$ und jedes $j \in \{0, 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor\}$ gilt

$$\mathbb{P}(Q_n \geq j+1) = \frac{1}{2^j} \mathbb{P}(M_{n-j} \geq j). \quad (2.58)$$

BEWEIS: Wir folgen nicht dem in [RE] angegebenen Beweis, sondern überlegen uns, dass zwei Mengen A_1 und A_2 von sämtlich im Ursprung startenden Wegen gleich mächtig sind. Die Menge A_1 bezeichne alle Wege der Länge $n-j$, deren Maximum größer oder gleich j ist, und die Menge A_2 stehe für alle Wege der Länge n , bei denen das Maximum mindestens $j+1$ mal angenommen wird, also $Q_n \geq j+1$ gilt. Wäre $|A_1| = |A_2|$ gezeigt, so würde die Behauptung aus

$$\mathbb{P}(Q_n \geq j+1) = \frac{|A_2|}{2^n} = \frac{1}{2^j} \frac{|A_1|}{2^{n-j}} = \frac{1}{2^j} \mathbb{P}(M_{n-j} \geq j)$$

folgen. Da im Fall $j = 0$ beide Seiten von (2.58) gleich 1 sind, sei fortan $j \geq 1$ vorausgesetzt. Wir zeigen, dass es eine injektive Abbildung von A_1 nach A_2 gibt, die sich umkehren lässt, womit $|A_1| = |A_2|$ gelten würde.

Um diese Abbildung zu konstruieren starten wir mit einem beliebigen $(n-j)$ -Weg mit der Eigenschaft $M_{n-j} \geq j$. Dieser erreicht für jedes $s = 0, 1, \dots, j-1$ irgendwann erstmalig die Höhe $M_{n-j} - j + s$. Wir fügen diesem Weg Schritte hinzu, und zwar für jedes $s \in \{0, \dots, j-1\}$ direkt nach dem erstmaligen Erreichen der Höhe $M_{n-j} - j + s$ einen Abwärtsschritt. Auf diese Weise erhalten wir einen Weg der Länge n , der mindestens $j+1$ mal sein Maximum erreicht, das nun $M_{n-j} - j$ ist.

Als Beispiel betrachten wir den in Bild 2.30 dargestellten Weg, für den $n = 18$ und $j = 3$ gelten. Diejenigen Punkte, an denen erstmals die Höhe $M_{n-j} - j + s$ für $s = 0, 1, \dots, j-1$ erreicht wird, sind hervorgehoben und blau markiert. Fügt man nach jedem dieser Punkte einen Abwärtsschritt ein, so ergibt sich der in Bild 2.31 dargestellte Weg, der mindestens j mal sein Maximum erreicht. Als Ergebnis der Transformation eines Wegs aus A_1 erhalten wir also einen Weg aus der Menge A_2 , und offenbar ist diese Zuordnungsvorschrift von Wegen aus A_1 zu Wegen aus A_2 injektiv.

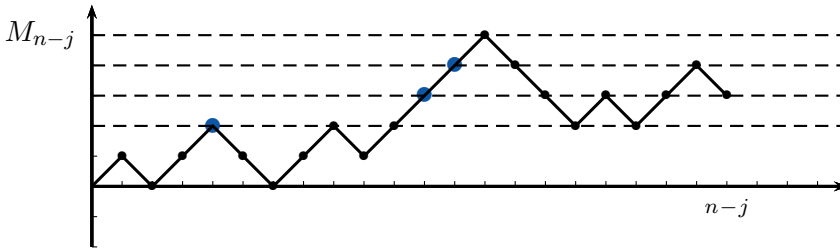


Bild 2.30: $(n-j)$ -Weg, dessen Maximum größer oder gleich j ist

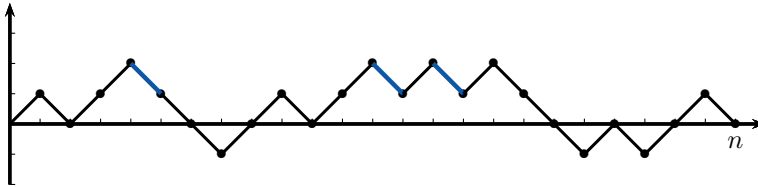


Bild 2.31: Der $(n-j)$ -Weg aus Bild 2.30 wurde in einen n -Weg transformiert, der mindestens $j+1$ mal sein Maximum annimmt

Die Umkehrung dieser Abbildung ergibt sich, indem man von einem beliebigem n -Weg, der mindestens $j+1$ mal sein Maximum annimmt, das Anfangsstück bis zum erstmaligen Erreichen des Maximums unverändert lässt. Von dem restlichen, mit einem Abwärtsschritt beginnenden Teilweg entfernt man diesen Abwärtsschritt sowie die nächsten $j-1$ sich direkt an Maxima anschließenden Abwärtsschritte und fügt den Rest zusammen. In Bild 2.31 sind für den Fall $n = 24$ und $j = 3$ die wegzulassenden Abwärtsschritte blau markiert. Entfernt man diese und fügt den Rest zusammen, so ergibt sich der Weg aus Bild 2.30. ■

Über die Verteilung von Q_n gibt der folgende Satz Auskunft.

Satz 2.16. (Verteilungseigenschaften von Q_n , vgl. [KP2], S. 160/161)

Für die Anzahl Q_n der Maximalstellen einer Irrfahrt der Länge n gelten:

a)

$$\mathbb{P}(Q_n \geq k+1) = \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n-k}{\lfloor \frac{n-k+j+1}{2} \rfloor}, \quad n \geq 1, \quad 0 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor.$$

b) Für jedes $n \geq 1$ besitzen Q_{2n} und Q_{2n+1} dieselbe Verteilung.

c) Für $1 \leq k \leq \lfloor (n+1)/2 \rfloor$ bzw. $0 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor$ gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Q_{2n} = 2k) &= \frac{1}{2^{2k}} - \frac{1}{2^{2n}} \sum_{j=1}^{k-1} \binom{2n-2k+1}{n-j}, \\ \mathbb{P}(Q_{2n} = 2k+1) &= \frac{1}{2^{2k+1}} - \frac{1}{2^{2n}} \left(\sum_{j=1}^k \binom{2n-2k}{n-j} - \binom{2n-2k-1}{n-k} \right).\end{aligned}$$

d) Mit $u_{2(n+1)} = \binom{2(n+1)}{n+1} / 2^{2(n+1)}$ gilt für jedes $n \geq 1$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Q_{2n}) &= 2 - 2 u_{2(n+1)}, \\ \mathbb{V}(Q_{2n}) &= 2 - \frac{2(3n+2)}{n+2} \cdot u_{2(n+1)} - 4 u_{2(n+1)}^2.\end{aligned}$$

BEWEIS: a) folgt unmittelbar aus Satz 2.15 und Satz 2.12 a). Nach Satz 2.15 und (2.55) gilt für jedes $j \in \{0, 1, \dots, n\}$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Q_{2n} \geq j+1) &= 2^{-j} \mathbb{P}(M_{2n-j} \geq j) = 2^{-j} \mathbb{P}(N_{2n} \geq j), \\ \mathbb{P}(Q_{2n+1} \geq j+1) &= 2^{-j} \mathbb{P}(M_{2n+1-j} \geq j) = 2^{-j} \mathbb{P}(N_{2n+1} \geq j).\end{aligned}$$

Da Nullstellen nur zu geradzahligem Zeitpunkten auftreten, sind die rechten Seiten identisch, was b) beweist. Von den beiden Aussagen in c) zeigen wir nur die erste; die zweite folgt analog. Wegen $\mathbb{P}(Q_{2n} = 2k) = \mathbb{P}(Q_{2n} \geq 2k) - \mathbb{P}(Q_{2n} \geq 2k+1)$ liefert a) mit $2n$ anstelle von n und $2k-1$ sowie $2k$ anstelle von k

$$\mathbb{P}(Q_{2n} = 2k) = \frac{1}{2^{2k}} - \frac{1}{2^{2n}} \left(\sum_{j=0}^{2k-2} \binom{2n-2k+1}{\lfloor n-k+1+\frac{j}{2} \rfloor} - \sum_{j=0}^{2k-1} \binom{2n-2k}{\lfloor n-k+\frac{j+1}{2} \rfloor} \right).$$

Die hier auftretenden Summen über Binomialkoeffizienten sind gleich

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{2k-2} \binom{2n-2k+1}{\lfloor n-k+1+\frac{j}{2} \rfloor} &= 2 \sum_{\nu=0}^{k-2} \binom{2n-2k+1}{n-k+1+\nu} + \binom{2n-2k+1}{n}, \\ \sum_{j=0}^{2k-1} \binom{2n-2k}{\lfloor n-k+\frac{j+1}{2} \rfloor} &= \binom{2n-2k}{n-k} + 2 \sum_{\nu=1}^{k-1} \binom{2n-2k}{n-k+\nu} + \binom{2n-2k}{n}.\end{aligned}$$

Unter Verwendung der Rekursionsformel

$$\binom{m+1}{\ell} = \binom{m}{\ell} + \binom{m}{\ell-1}$$

folgt

$$\sum_{\nu=0}^{k-2} \binom{2n-2k+1}{n-k+1+\nu} = \sum_{\nu=0}^{k-2} \binom{2n-2k}{n-k+1+\nu} + \sum_{\nu=0}^{k-2} \binom{2n-2k}{n-k+\nu}$$

und damit für die Differenz der beiden rechten Seiten wie behauptet der Ausdruck

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{\nu=0}^{k-2} \binom{2n-2k}{n-k+\nu+1} + \binom{2n-2k}{n-k} - \binom{2n-2k}{n-1} \\ &= \binom{2n-2k}{n-1} + 2 \sum_{\nu=0}^{k-3} \binom{2n-2k}{n-k+1+\nu} + \binom{2n-2k}{n-k} \\ &= \sum_{\nu=0}^{k-2} \binom{2n-2k}{n-k+1+\nu} + \sum_{\nu=-1}^{k-3} \binom{2n-2k}{n-k+1+\nu} \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} \left[\binom{2n-2k}{n-k+j} + \binom{2n-2k}{n-k+j-1} \right] \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} \binom{2n-2k+1}{n-j}. \end{aligned}$$

Um d) zu zeigen, verwenden wir die Darstellung (2.57) und erhalten wegen der Additivität der Erwartungswertbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Q_{2n}) &= \sum_{j=0}^{2n} \mathbb{P}(S_j = M_{2n}) \\ &= \mathbb{P}(S_0 = M_{2n}) + \mathbb{P}(S_{2n} = M_{2n}) + \sum_{j=1}^{2n-1} \mathbb{P}(S_j = M_{2n}). \end{aligned}$$

Nach Folgerung 2.3 und (2.13) ist $\mathbb{P}(S_0 = M_{2n}) = \mathbb{P}(S_1 \leq 0, \dots, S_{2n} \leq 0) = u_{2n}$ und weiter

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_{2n} = M_{2n}) &= \mathbb{P}(S_0 \leq S_{2n}, S_1 \leq S_{2n}, \dots, S_{2n-1} \leq S_{2n}) \\ &= \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_{2n} \geq 0, X_2 + \dots + X_{2n} \geq 0, \dots, X_{2n} \geq 0) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \geq 0, X_1 + X_2 \geq 0, \dots, X_1 + \dots + X_{2n} \geq 0) \\ &= \mathbb{P}(S_1 \geq 0, S_2 \geq 0, \dots, S_{2n} \geq 0) \\ &= u_{2n}. \end{aligned}$$

Dabei wurde beim dritten Gleichheitszeichen verwendet, dass (X_1, \dots, X_{2n}) und (X_{2n}, \dots, X_1) die gleiche Verteilung besitzen. Dieses in Abschnitt 2.14 näher betrachtete sog. *Dualitätsprinzip* wird im Folgenden mehrfach ausgenutzt. Allgemeiner besitzt der Zufallsvektor $(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(2n)})$ für jede Permutation $\pi =$

$(\pi(1), \dots, \pi(2n))$ von $(1, \dots, 2n)$ die gleiche Verteilung wie (X_1, \dots, X_{2n}) . Durch Aufspaltung nach geraden und ungeraden Werten von j gilt

$$\sum_{j=1}^{2n-1} \mathbb{P}(S_j = M_{2n}) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(S_{2k} = M_{2n}) + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(S_{2k+1} = M_{2n}).$$

Weiter ist $\mathbb{P}(S_{2k} = M_{2n}) = \mathbb{P}(A_k \cap B_k)$, wobei $A_k = \{S_0 \leq S_{2k}, \dots, S_{2k-1} \leq S_{2k}\}$ und $B_k = \{S_{2k+1} \leq S_{2k}, \dots, S_{2n} \leq S_{2k}\}$. Die Ereignisse A_k und B_k sind unabhängig, denn $A_k = \{X_1 + \dots + X_{2k} \geq 0, \dots, X_{2k-1} + X_{2k} \geq 0, X_{2k} \geq 0\}$ hängt nur von X_1, \dots, X_{2k} ab, und $B_k = \{X_{2k+1} \leq 0, X_{2k+1} + X_{2k+2} \leq 0, \dots, X_{2k+1} + \dots + X_{2n} \leq 0\}$ ist nur durch X_{2k+1}, \dots, X_{2n} bestimmt. Mit Folgerung 2.3 und (2.13) gilt $\mathbb{P}(A_k) = u_{2k}$, und nach obigem Dualitätsprinzip ist

$$\mathbb{P}(B_k) = \mathbb{P}(X_1 \leq 0, X_1 + X_2 \leq 0, \dots, X_1 + \dots + X_{2n-2k} \leq 0) = u_{2(n-k)},$$

sodass sich $\mathbb{P}(S_{2k} = M_{2n}) = u_{2k}u_{2(n-k)}$ ergibt. Da $S_{2k+1} \geq 0$ automatisch $S_{2k+2} \geq 0$ nach sich zieht, erhält man analog $\mathbb{P}(S_{2k+1} = M_{2n}) = u_{2(k+1)}u_{2(n-k)}$ und folglich

$$\sum_{j=1}^{2n-1} \mathbb{P}(S_j = M_{2n}) = \sum_{k=1}^{n-1} u_{2k}u_{2(n-k)} + \sum_{k=0}^{n-1} u_{2(k+1)}u_{2(n-k)}.$$

Wegen Satz 2.4 a) und $u_0 = 1$ gilt $\sum_{k=1}^{n-1} u_{2k}u_{2(n-k)} = \sum_{k=0}^n u_{2k}u_{2(n-k)} - 2u_{2n} = 1 - 2u_{2n}$, und mit einer Indexverschiebung folgt gleichermaßen

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_{2(k+1)}u_{2(n-k)} = \sum_{\nu=1}^n u_{2\nu}u_{2(n+1-\nu)} - 2u_{2(n+1)} = 1 - 2u_{2(n+1)}.$$

Insgesamt ergibt sich wie behauptet

$$\mathbb{E}(Q_{2n}) = 2u_{2n} + 1 - 2u_{2n} + 1 - 2u_{2(n+1)} = 2 - 2u_{2(n+1)}.$$

Die Varianz bestimmen wir über die Darstellung $\mathbb{V}(Q_{2n}) = \mathbb{E}(Q_{2n}^2) - (EQ_{2n})^2$ und schreiben dazu Q_{2n}^2 als Doppelsumme $\sum_{j=0}^{2n} \sum_{k=0}^{2n} \mathbf{1}\{S_j = M_{2n}\} \mathbf{1}\{S_k = M_{2n}\}$. Zerlegt man diese Doppelsumme in die Fälle $j = k$ und $j \neq k$ und verwendet die Beziehungen $\mathbf{1}\{A \cap B\} = \mathbf{1}\{A\} \mathbf{1}\{B\}$ und $\mathbf{1}\{A\}^2 = \mathbf{1}\{A\}$ für Indikatorfunktionen von Ereignissen, so liefert die Additivität der Erwartungswertbildung

$$\mathbb{E}(Q_{2n}^2) = \sum_{j=0}^{2n} \mathbb{P}(S_j = M_{2n}) + 2 \sum_{k=1}^{2n} \sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{P}(S_j = M_{2n}, S_k = M_{2n}).$$

Hier ist die erste Summe gleich $\mathbb{E}(Q_{2n})$. Da j und k in der Doppelsumme gleiche Parität besitzen müssen, damit $\mathbb{P}(S_j = M_{2n}, S_k = M_{2n})$ positiv ist, gilt

$$\sum_{k=1}^{2n} \sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{P}(S_j = M_{2n}, S_k = M_{2n}) = a_n + b_n,$$

wobei

$$a_n := \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{P}(S_{2j} = M_{2n} = S_{2k}), \quad b_n := \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{P}(S_{2j+1} = M_{2n} = S_{2k+1}).$$

Setzen wir

$$\begin{aligned} A_j &:= \{S_0 \leq S_{2j}, S_1 \leq S_{2j}, \dots, S_{2j-1} \leq S_{2j}\}, \\ B_{j,k} &:= \{S_{2j+1} \leq S_{2j}, \dots, S_{2k-1} \leq S_{2j}, S_{2k} = S_{2j}\}, \\ C_k &:= \{S_{2k+1} \leq S_{2k}, S_{2k+2} \leq S_{2k}, \dots, S_{2n} \leq S_{2k}\}, \end{aligned}$$

so gilt $\mathbb{P}(S_{2j} = M_{2n} = S_{2k}) = \mathbb{P}(A_j \cap B_{j,k} \cap C_k)$. Die Ereignisse, $A_j, B_{j,k}$ und C_k sind unabhängig, denn sie werden wegen

$$\begin{aligned} A_j &= \{X_1 + \dots + X_{2j} \geq 0, X_2 + \dots + X_{2j} \geq 0, \dots, X_{2j} \geq 0\}, \\ B_{j,k} &= \{X_{2j+1} \leq 0, \dots, X_{2j+1} + \dots + X_{2k-1} \leq 0, X_{2j+1} + \dots + X_{2k} = 0\}, \\ C_k &= \{X_{2k+1} \leq 0, \dots, X_{2k+1} + \dots + X_{2n} \leq 0\}. \end{aligned}$$

von paarweise disjunkten Blöcken der Zufallsvariablen X_1, \dots, X_{2n} gebildet. Es gilt somit $\mathbb{P}(S_{2j} = M_{2n} = S_{2k}) = \mathbb{P}(A_j)\mathbb{P}(B_{j,k})\mathbb{P}(C_k)$, wobei $\mathbb{P}(A_j) = u_{2j}$ und $\mathbb{P}(C_k) = u_{2(n-k)}$ (vgl. die Herleitung von $\mathbb{E}(Q_{2n})$). Aus Symmetriegründen gilt weiter

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_{j,k}) &= \mathbb{P}(S_1 \leq 0, S_2 \leq 0, \dots, S_{2(k-j)-1} \leq 0, S_{2(k-j)} = 0) \\ &= \mathbb{P}(S_{2(k-j)} = 0) \mathbb{P}(S_1 \leq 0, S_2 \leq 0, \dots, S_{2(k-j)-1} \leq 0 | S_{2(k-j)} = 0). \end{aligned}$$

Hier ist der erste Faktor gleich $u_{2(k-j)}$ und der zweite die Wahrscheinlichkeit, dass ein rein zufälliger Brückenweg der Länge $2(k-j)$ nichtpositiv ist. Diese ergibt sich nach kurzer Überlegung zu $1/(k-j+1)$, wenn man alle Wege von $(1, -1)$ nach $(2(k-j), 0)$ betrachtet (dies sind $\binom{2(k-j)-1}{k-j}$ Stück) und von diesen diejenigen subtrahiert, die die Achse $y = 1$ treffen. Letztere Wegmenge ist nach dem Spiegelungsprinzip die $\binom{2(k-j)}{k-j+1}$ -elementige Menge aller Wege von $(1, -1)$ nach $(2(k-j), 2)$. Mit der in (2.36) definierten Größe f_{2n} gilt also $\mathbb{P}(B_{j,k}) = u_{2(k-j)}/(k-j+1) = 2f_{2(k-j+1)}$ und somit

$$a_n = 2 \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=0}^{k-1} u_{2j} f_{2(k-j+1)} \right) u_{2(n-k)} = 2 \sum_{k=1}^n \left(\sum_{r=2}^{k+1} f_{2r} u_{2(k+1-r)} \right) u_{2(n-k)}.$$

Wegen (2.37) ist die innere Summe über r gleich $u_{2(k+1)} - f_2 u_{2k} = u_{2(k+1)} - u_{2k}/2$, und Satz 2.4 a) sowie $u_0 = 1$ und $u_2 = 1/2$ liefern

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \sum_{k=1}^n \left(u_{2(k+1)} - \frac{u_{2k}}{2} \right) u_{2(n-k)} = 2 \sum_{\nu=2}^{n+1} u_{2\nu} u_{2(n+1-\nu)} - \sum_{k=1}^n u_{2k} u_{2(n-k)} \\ &= 2 \left(1 - u_{2(k+1)} - \frac{u_{2n}}{2} \right) - (1 - u_{2n}) \\ &= 1 - 2u_{2(n+1)}. \end{aligned}$$

Mit den gleichen Überlegungen und ein wenig Durchhaltevermögen ergibt sich

$$b_n = 2 \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{k-1} u_{2(j+1)} f_{2(k-j+1)} u_{2(n-k)} = 1 - 6u_{2(n+2)} + \left(2 + \frac{1}{n+2} \right) u_{2(n+1)}.$$

Insgesamt folgt

$$\mathbb{E}(Q_{2n}^2) = \mathbb{E}(Q_{2n}) + 2a_n + 2b_n = 6 - 12u_{2(n+2)} + \left(\frac{2}{n+2} - 2 \right) u_{2(n+1)}$$

und damit die Darstellung für $\mathbb{V}(Q_{2n})$ durch direkte Rechnung. ■

Nach diesem etwas längeren Beweis ist es Zeit, die erhaltenen Ergebnisse zu kommentieren. Bild 2.32 zeigt ein Stabdiagramm der Verteilung von Q_{30} . Ins Auge springt, dass die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(Q_{30} = k)$ mit wachsendem k schnell abnehmen (in der Tat gilt $\mathbb{P}(Q_{30} = k) < 0.0001$ für $k \geq 8$), und dass die Wahrscheinlichkeit für genau eine Maximalstelle größer als $1/2$ ist. Außerdem scheint $\mathbb{P}(Q_{30} = 2)$ sehr nahe bei $1/4$ zu liegen. In der Tat liefert Satz 2.16

$$\mathbb{P}(Q_{2n} = 1) = \mathbb{P}(Q_{2n+1} = 1) = \frac{1}{2} + \frac{\binom{2n-1}{n}}{2^{2n}} = \frac{1}{2} + \frac{u_{2n}}{2} > \frac{1}{2}$$

sowie das überraschende Resultat

$$\mathbb{P}(Q_{2n} = 2) = \mathbb{P}(Q_{2n+1} = 2) = \frac{1}{4}.$$

Völlig unabhängig von ihrer Weglänge hat also jede vierte symmetrische Irrfahrt genau 2 Maximalstellen. Anhand von Satz 2.16 (oder Satz 2.15) liest man auch ab, dass die Verteilung von Q_n für $n \rightarrow \infty$ gegen eine um 1 verschobene *geometrische Verteilung* konvergiert. Wir notieren dieses Ergebnis als

Satz 2.17. (Grenzverteilung von Q_n)

Für die Anzahl Q_n der Maximalstellen einer Irrfahrt der Länge n gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Q_n = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

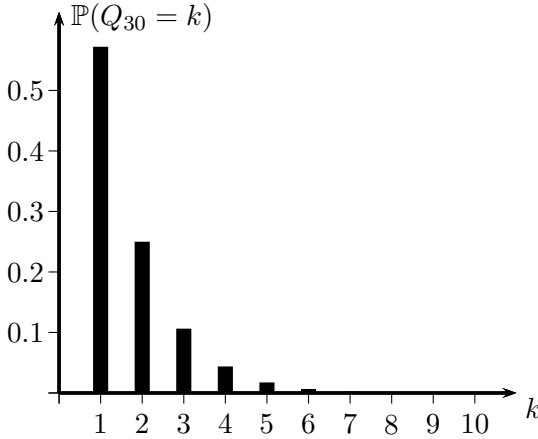


Bild 2.32: Stabdiagramm der Verteilung von Q_{30}

Wir fragen jetzt danach, *wo* die Maximalstellen einer Irrfahrt liegen und betrachten der Einfachheit halber Irrfahrten einer geraden Länge $2n$. Genauer fragen wir nach der Verteilung der *ersten* Maximalstelle

$$E_{2n} := \min \left\{ k \in \{0, 1, \dots, 2n\} : S_k = \max_{0 \leq j \leq 2n} S_j \right\}. \quad (2.59)$$

Die Zufallsvariable E_{2n} kann jeden der Werte $0, 1, \dots, 2n$ annehmen. Der Extremfall $E_{2n} = 0$ ergibt sich genau dann, wenn der Weg nichtpositiv ist, also $S_1 \leq 0, S_2 \leq 0, \dots, S_{2n} \leq 0$ gilt. Nach Folgerung 2.3 ist die Wahrscheinlichkeit hierfür gleich $u_{2n} = \binom{2n}{n}/2^{2n}$, es gilt also $\mathbb{P}(E_{2n} = 0) = u_{2n}$. Der andere Extremfall $E_{2n} = 2n$ tritt ein, wenn $S_0 < S_{2n}, S_1 < S_{2n}, \dots, S_{2n-1} < S_{2n}$ gilt, also für jedes $j = 1, \dots, 2n-1$ die Summe $X_j + \dots + X_{2n}$ größer als 0 ist. Da X_1, \dots, X_{2n} unabhängig und identisch verteilt sind, hat letzteres Ereignis die gleiche Wahrscheinlichkeit wie das Ereignis $\{X_1 > 0, X_1 + X_2 > 0, \dots, X_1 + \dots + X_{2n} > 0\}$. Mit der Definition von S_1, \dots, S_{2n} gilt also

$$\mathbb{P}(E_{2n} = 2n) = \mathbb{P}(S_1 > 0, S_2 > 0, \dots, S_{2n} > 0), \quad (2.60)$$

was mit Folgerung 2.3 $\mathbb{P}(E_{2n} = 2n) = \frac{1}{2} u_{2n}$ bedeutet. Wir nehmen also zur Bestimmung von $\mathbb{P}(E_{2n} = k)$ im Folgenden den Fall $1 \leq k \leq 2n-1$ an. Setzen

wir kurz $A_k := \{S_0 < S_k, \dots, S_{k-1} < S_k\}$ und $B_k := \{S_{k+1} \leq S_k, \dots, S_{2n} \leq S_k\}$, so gilt

$$\mathbb{P}(E_{2n} = k) = \mathbb{P}(A_k \cap B_k).$$

Die Ereignisse A_k und B_k sind stochastisch unabhängig, denn A_k hängt nur von X_1, \dots, X_k und B_k nur von X_{k+1}, \dots, X_{2n} ab. Es gilt somit $\mathbb{P}(E_{2n} = k) = \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}(B_k)$. Mit den gleichen Überlegungen, die zu (2.60) führten, erhält man $\mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(S_1 > 0, \dots, S_k > 0)$ und $\mathbb{P}(B_k) = \mathbb{P}(S_1 \leq 0, S_2 \leq 0, \dots, S_{2n-k} \leq 0)$, sodass sich als Zwischenergebnis

$$\mathbb{P}(E_{2n} = k) = \mathbb{P}(S_1 > 0, \dots, S_k > 0) \mathbb{P}(S_1 \leq 0, \dots, S_{2n-k} \leq 0) \quad (2.61)$$

ergibt. Wir unterscheiden jetzt die Fälle, dass k gerade oder ungerade ist, also $k = 2\ell$ für ein $\ell \in \{1, \dots, n-1\}$ oder $k = 2\ell + 1$ für ein $\ell \in \{0, \dots, n-1\}$ gilt. Im ersten Fall ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten in (2.61) zu

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_1 > 0, \dots, S_{2\ell} > 0) &= \frac{1}{2} \mathbb{P}(S_1 \neq 0, \dots, S_{2\ell} \neq 0) = \frac{1}{2} \cdot u_{2\ell}, \\ \mathbb{P}(S_1 \leq 0, \dots, S_{2n-2\ell} \leq 0) &= u_{2(n-\ell)} \end{aligned}$$

und im zweiten zu

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_1 > 0, \dots, S_{2\ell+1} > 0) &= \frac{1}{2} \mathbb{P}(S_2 > 0, \dots, S_{2\ell+1} > 0 | X_1 = 1) = \frac{1}{2} \cdot u_{2\ell} \\ \mathbb{P}(S_1 \leq 0, \dots, S_{2n-2\ell-1} \leq 0) &= \mathbb{P}(S_1 \leq 0, \dots, S_{2n-2\ell} \leq 0) = u_{2(n-\ell)}. \end{aligned}$$

Wegen $u_0 = 1$ erhalten wir somit das folgende Resultat (vgl. [FEL], S.94):

Satz 2.18. (Verteilung der ersten Maximalstelle)

Für den Zeitpunkt E_{2n} der ersten Maximalstelle gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E_{2n} = 0) &= u_{2n}, \\ \mathbb{P}(E_{2n} = 2\ell) &= \frac{1}{2} \cdot u_{2\ell} u_{2(n-\ell)}, \quad \ell = 1, \dots, n, \\ \mathbb{P}(E_{2n} = 2\ell + 1) &= \frac{1}{2} \cdot u_{2\ell} u_{2(n-\ell)}, \quad \ell = 0, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Überraschenderweise ist es völlig unabhängig von der Weglänge mit Abstand am wahrscheinlichsten, dass das Maximum gleich zu Beginn angenommen wird. Ein Vergleich mit der in Satz 2.4 angegebenen diskreten Arcus-Sinus-Verteilung der letzten Nullstelle L_{2n} zeigt, dass sich die Verteilung von E_{2n} aus derjenigen von L_{2n} ergibt, indem man die Wahrscheinlichkeit im Nullpunkt unverändert lässt und für jedes $k = 1, 2, \dots, n$ die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(L_{2n} = 2k)$ zu gleichen Teilen auf die Stellen $2k-1$ und $2k$ aufteilt. Bild 2.33 veranschaulicht diesen Sachverhalt im Vergleich mit Bild 2.12 am Beispiel $2n = 40$.

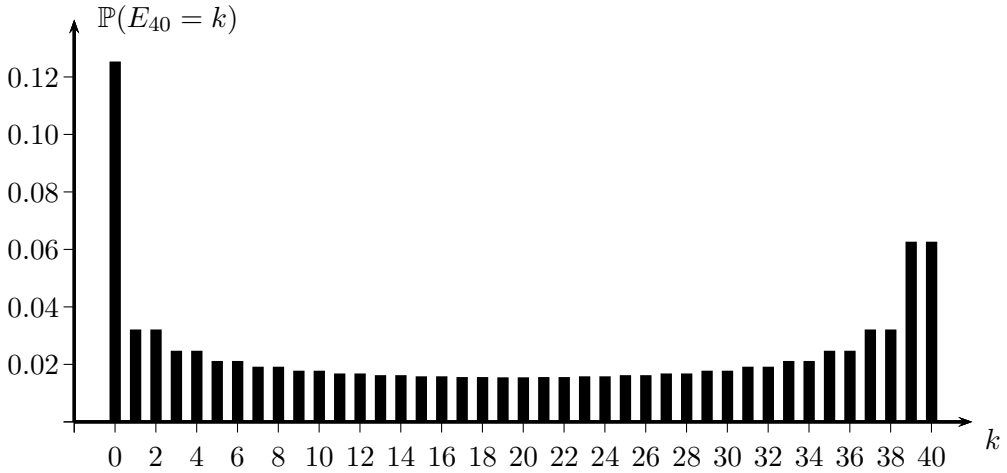


Bild 2.33: Stabdiagramm der Verteilung von E_{40}

Für jedes $k = 0, 1, \dots, n$ gilt somit $\mathbb{P}(L_{2n} \leq 2k) = \mathbb{P}(E_{2n} \leq 2k)$, und für jedes $k = 1, \dots, n$ unterscheiden sich $\mathbb{P}(L_{2n} \leq 2k - 1)$ und $\mathbb{P}(E_{2n} \leq 2k - 1)$ um die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(E_{2n} = 2k - 1)$, die unabhängig von k durch das für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergierende u_{2n} nach oben beschränkt ist. Diese Überlegungen machen klar, dass das Arcus-Sinus-Gesetz aus Satz 2.5 auch für E_{2n} gilt. Wir notieren diesen Erkenntnis als

Satz 2.19. (Arcus-Sinus-Gesetz für die erste Maximalstelle)

Für jedes x mit $0 \leq x \leq 1$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{E_{2n}}{2n} \leq x\right) = \int_0^x \frac{1}{\pi \sqrt{t(1-t)}} dt = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}. \quad (2.62)$$

In der Deutung eines wiederholt durchgeführten fairen Spiels besagen Satz 2.19 und Satz 2.5, dass in einer langen Spielserie der auf die gesamte Spieldauer bezogene Zeitanteil bis zum erstmaligen Erreichen des maximalen Zwischengewinns für Spieler A die gleiche Verteilung besitzt wie der Zeitanteil bis zum letzten Spielgleichstand. Man mache sich klar, dass die durch Ersetzen von \min durch \max in (2.59) entstehende *letzte Maximalstelle* eine Verteilung besitzt, deren Stabdiagramm durch Spiegelung des Stabdiagramms der Verteilung von E_{2n} an der Achse $x = n$ hervorgeht. Für diese letzte Maximalstelle gilt das gleiche asymptotische Arcus-Sinus-Gesetz wie für E_{2n} .

2.9 Leiterzeitpunkte und Leiterepochen

In diesem Abschnitt stellen wir uns die Frage, wann eine in 0 startende Irrfahrt erstmalig die Höhe k erreicht. Dabei sei k eine vorgegebene ganze Zahl. Der zufällige Zeitpunkt, zu dem dies passiert, sei mit V_k bezeichnet; formal ist also

$$V_k := \inf\{n \geq 0 : S_n = k\}.$$

Wie die Erstwiederkehrzeit W kann auch die Zufallsvariable V_k im Fall $k \neq 0$ prinzipiell den Wert ∞ annehmen; wir haben jedoch schon auf Seite 41 gesehen (und werden dies auch auf anderem Wege zeigen), dass dieser Fall nur mit Wahrscheinlichkeit Null auftritt. Man beachte, dass $V_0 = 0$ gilt.

Man nennt V_k den ***k*-ten Leiterzeitpunkt**, wobei für $k > 0$ bzw. $k < 0$ auch die Attribute ***steigend*** bzw. ***fallend*** üblich sind. Diese Namensgebung wird klar, wenn man sich die Höhe der Irrfahrt als Position auf einer Leiter vorstellt (in Bild 2.34 sind die Sprossen dieser Leiter gestrichelt dargestellt; dort sind auch die Leiterzeitpunkte V_1, \dots, V_4 markiert). Eine andere Sichtweise ist die des Zeitpunktes für den ***k*-ten Rekord einer Irrfahrt**; dabei liege zur Zeit n definitionsgemäß ein Rekord vor, wenn $S_n > \max(S_0, \dots, S_{n-1})$ (für $k > 0$) bzw. $S_n < \min(S_0, \dots, S_{n-1})$ (für $k < 0$) gilt. Man beachte, dass V_k für gerades k nur gerade Werte und für ungerades k nur ungerade Werte annehmen kann. Die Differenzen $D_k := V_k - V_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$ (bzw. $D_{-k} := V_{-k} - V_{-(k-1)}$, $k \in \mathbb{N}$) aufeinander folgender Leiterzeitpunkte heißen ***Leiterepochen***, s. Bild 2.34.

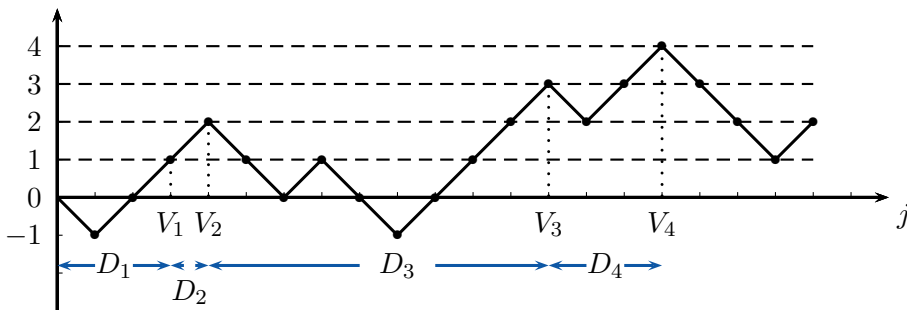


Bild 2.34: Leiterzeitpunkte und Leiterepochen

Wir untersuchen zunächst das stochastische Verhalten von V_1 . Man beachte, dass aus Symmetriegründen V_1 und V_{-1} identisch verteilt sind. Gleiches gilt für V_k und V_{-k} sowie D_k und D_{-k} für allgemeines $k \in \mathbb{N}$.

Satz 2.20. (Verteilung des ersten Leiterzeitpunktes)

Für den ersten Leiterzeitpunkt V_1 gelten:

a)

$$\mathbb{P}(V_1 = 2n + 1) = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \cdot \frac{1}{2(n+1)} = \frac{u_{2n}}{2(n+1)}, \quad n \geq 0,$$

b) Die Zufallsvariable $V_1 + 1$ und die in (2.32) definierte Erstwiederkehrzeit W besitzen die gleiche Verteilung, d.h. es gilt

$$V_1 + 1 \sim W,$$

c)

$$\mathbb{P}(V_1 < \infty) = 1,$$

d)

$$\mathbb{E}(V_1) = \infty.$$

BEWEIS: a): Es ist $V_1 \geq 2n + 1$ genau dann, wenn $S_1 \leq 0, \dots, S_{2n} \leq 0$ gilt. Mit Folgerung 2.3 ergibt sich

$$\mathbb{P}(V_1 \geq 2n + 1) = \mathbb{P}(S_1 \leq 0, \dots, S_{2n} \leq 0) = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} = u_{2n}$$

und somit für jedes $n \geq 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V_1 = 2n + 1) &= \mathbb{P}(V_1 \geq 2n + 1) - \mathbb{P}(V_1 \geq 2n + 3) = u_{2n} - u_{2(n+1)} \\ &= \frac{u_{2n}}{2(n+1)}. \end{aligned}$$

b): Nach a) und Satz 2.9 a) ist $\mathbb{P}(V_1 + 1 = 2n) = \mathbb{P}(V_1 = 2(n-1) + 1) = u_{2(n-1)}/(2n) = \mathbb{P}(W = 2n)$, $n \in \mathbb{N}$. Die Behauptungen c) und d) folgen unmittelbar aus b) und Satz 2.9 b) und c). ■

Wohingegen die Verteilungsgleichheit in b) unmittelbar einleuchtet (die Irrfahrt muss ja für die erste Rückkehr zu 0 einen Schritt nach oben oder unten gehen und dann die Leiter um einen Schritt hinab- bzw. hinaufsteigen), verläuft das Ergebnis d) der Intuition zuwider. Obwohl die Irrfahrt zu Beginn einen Schritt nach oben oder unten vollzieht, ist die erwartete Zeit, bis die Höhe 1 erreicht wird, unendlich lang. In der Einkleidung einer Irrfahrt als Münzwurfspiel wartet man

also im Mittel unendlich lange, bis Spieler A zum ersten Mal in Vorteil gelangt.

Wie das folgende Resultat zeigt, sind die Leiterzeitpunkte V_1, V_2, \dots einer Irrfahrt eng mit den in Abschnitt 2.7 untersuchten Maxima M_1, M_2, \dots verknüpft.

Lemma 2.21. (Leiterzeitpunkte und Maxima)

Für jede Wahl von $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ gilt $\{V_k \leq n\} = \{M_n \geq k\}$.

BEWEIS: Das Ereignis $\{V_k \leq n\}$ bedeutet, dass die Irrfahrt bis spätestens zum Zeitpunkt n die Höhe k erreicht, was gleichbedeutend damit ist, dass das Maximum M_n größer oder gleich k ist. ■

Zusammen mit Satz 2.13 liefert Lemma 2.21 einige wichtige Folgerungen:

Folgerungen 2.22.

Für eine symmetrische Irrfahrt gelten:

$$\text{a) } \mathbb{P}(V_k < \infty) = 1 \text{ für jedes feste } k \in \mathbb{N},$$

$$\text{b) } \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \{V_k < \infty\}\right) = 1,$$

$$\text{c) } \mathbb{P}(\limsup_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty) = 1.$$

BEWEIS: a): Nach Lemma 2.21 gilt für $n \geq k$

$$\mathbb{P}(V_k > n) = \mathbb{P}(M_n < k) = \mathbb{P}(M_n \leq k-1) = \mathbb{P}\left(\frac{M_n}{\sqrt{n}} \leq \frac{k-1}{\sqrt{n}}\right).$$

Mit Satz 2.13 und $\{V_k = \infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{V_k > n\}$ folgt

$$\mathbb{P}(V_k = \infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(V_k > n) = 2\Phi(0) - 1 = 0$$

und damit $\mathbb{P}(V_k < \infty) = 1$. b) ergibt sich mit a) und

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \{V_k < \infty\}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(V_k < \infty),$$

da \mathbb{P} als Wahrscheinlichkeitsmaß stetig von oben ist. Nach b) existiert in dem in Abschnitt 6.1 eingeführten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ für unendlich lange Irrfahrten eine Menge $\Omega_0 \in \mathcal{A}$ mit $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$, sodass gilt:

$$V_k(\omega) < \infty \quad \text{für jedes } \omega \in \Omega_0 \text{ und jedes } k \in \mathbb{N}.$$

Für jedes $\omega \in \Omega_0$ gibt es somit zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $n \geq k$ mit $S_n(\omega) \geq k$, was $\limsup_{n \rightarrow \infty} S_n(\omega) = \infty$ bedeutet. ■

Wir sehen also, dass eine symmetrische Irrfahrt jede vorgegebene Höhe k mit Wahrscheinlichkeit Eins irgendwann einmal erreicht (Aussage a), s. auch Seite 41), und sie erreicht mit Wahrscheinlichkeit Eins in endlicher Zeit jede Höhe (Aussage b)). Wegen $V_k \geq V_1$ und $\mathbb{E}(V_1) = \infty$ gilt $\mathbb{E}(V_k) = \infty$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Aus Symmetriegründen bleiben alle bisherigen Resultate natürlich auch für *absteigende Leiterzeitpunkte* V_k mit $k < 0$ gültig. Insbesondere ergibt sich

$$\mathbb{P}\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} S_n = -\infty\right) = 1,$$

was zusammen mit Folgerung 2.22 c) zeigt, dass die symmetrische Irrfahrt *oszilliert*: Es gibt mit Wahrscheinlichkeit Eins sowohl unendlich viele aufsteigende als auch unendlich viele absteigende Leiterhöhen.

Aus Lemma 2.21 ergibt sich auch die Verteilung von V_k für allgemeines k :

Satz 2.23. (Verteilung des k -ten Leiterzeitpunktes, vgl. [FEL], S.89)

Es seien k und n natürliche Zahlen mit gleicher Parität. Dann gilt

$$\mathbb{P}(V_k = n) = \frac{k}{n} \cdot \binom{n}{\frac{n+k}{2}} 2^{-n}, \quad n \geq k.$$

BEWEIS: Es seien k und n wie oben. Nach Lemma 2.21 und (2.49) gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V_k = n) &= \mathbb{P}(V_k \leq n) - \mathbb{P}(V_k \leq n-1) \\ &= \mathbb{P}(M_n \geq k) - \mathbb{P}(M_{n-1} \geq k) \\ &= 2\mathbb{P}(S_n \geq k) - \mathbb{P}(S_n = k) - (2\mathbb{P}(S_{n-1} \geq k) - \mathbb{P}(S_{n-1} = k)) \\ &= 2(\mathbb{P}(S_n \geq k) - \mathbb{P}(S_{n-1} \geq k)) - \mathbb{P}(S_n = k) + \mathbb{P}(S_{n-1} = k). \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(S_n \geq k) &= \mathbb{P}(S_n \geq k, X_n = 1) + \mathbb{P}(S_n \geq k, X_n = -1) \\
 &= \mathbb{P}(X_n = 1) \mathbb{P}(S_n \geq k | X_n = 1) + \mathbb{P}(X_n = -1) \mathbb{P}(S_n \geq k | X_n = -1) \\
 &= \frac{1}{2} \mathbb{P}(S_{n-1} \geq k-1) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(S_{n-1} \geq k+1)
 \end{aligned}$$

und $\mathbb{P}(S_{n-1} = k) = 0$ ($n-1$ und k haben ungleiche Parität!) sowie

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(S_n = k) &= \mathbb{P}(S_n = k | X_n = 1) \cdot \frac{1}{2} + \mathbb{P}(S_n = k | X_n = -1) \cdot \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot (\mathbb{P}(S_{n-1} = k-1) + \mathbb{P}(S_{n-1} = k+1))
 \end{aligned}$$

ergibt sich

$$\mathbb{P}(V_k = n) = \frac{1}{2} (\mathbb{P}(S_{n-1} = k-1) - \mathbb{P}(S_{n-1} = k+1)).$$

Die Behauptung folgt nun wegen (2.8) durch Einsetzen der Binomialwahrscheinlichkeiten und Zusammenfassen. ■

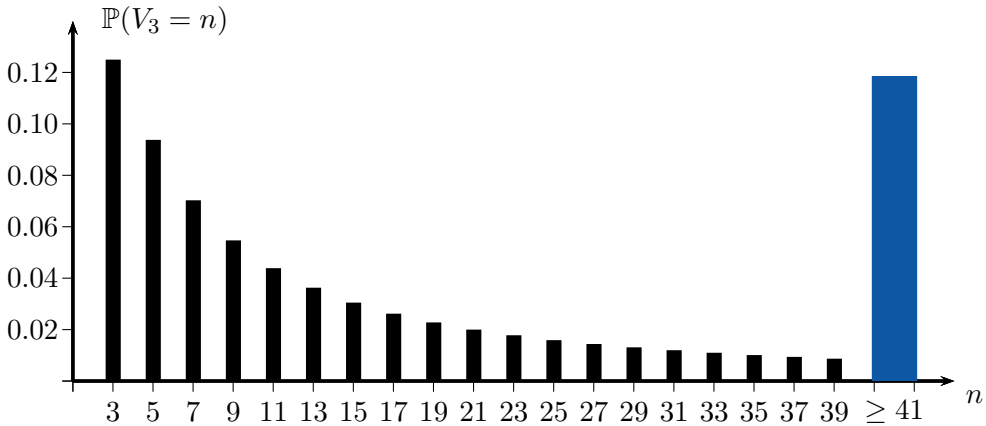


Bild 2.35: Stabdiagramm der Verteilung von V_3 (man beachte die große Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(V_3 \geq 41)$)

Die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(V_k = n)$ genügen der Rekursionsformel

$$\mathbb{P}(V_k = n+2) = \frac{n(n+1)}{(n+2+k)(n+2-k)} \mathbb{P}(V_k = n), \quad n \geq k, \quad (2.63)$$

sowie der Anfangsbedingung $\mathbb{P}(V_k = k) = 2^{-k}$. Gleichung (2.63) zeigt, dass $\mathbb{P}(V_k = n)$ für $n \rightarrow \infty$ nur sehr langsam gegen Null konvergiert. Dieser Effekt wird auch in dem in Bild 2.35 skizzierten Stabdiagramm der Verteilung von V_3 deutlich. Die Wahrscheinlichkeit, dass man mindestens 41 Zeitschritte warten muss, bis eine symmetrische Irrfahrt erstmalig die Höhe 3 erreicht, ist gleich 0.356, was in Bild 2.35 durch einen Balken der dreifachen Dicke und Höhe 0.356/3 dargestellt ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass selbst 1000 Zeitschritte nicht ausreichen, um die Höhe 3 zu erreichen, ist immerhin noch stolze 7,55% !

Wir betrachten jetzt die *Leiterepochen* $D_k := V_k - V_{k-1}$, $k \geq 1$, also die zufälligen Zeitspannen, die die Irrfahrt benötigt, um von der Höhe $k - 1$ auf die Höhe k zu gelangen und somit die „Leiter eine Sprosse hinaufzuklettern“. Aufgrund der Gedächtnislosigkeit und der nicht von der Höhe der Irrfahrt abhängenden Wahrscheinlichkeit, einen weiteren Schritt nach oben oder unten zu gehen, ist zu vermuten, dass die Leiterepochen D_1, D_2, D_3, \dots stochastisch unabhängige Zufallsvariablen sind, die alle die gleiche Verteilung wie V_1 besitzen. Der folgende Satz zeigt, dass diese Vermutung zutrifft.

Satz 2.24. (Unabhängigkeit und gleiche Verteilung der Leiterepochen)

Die Leiterepochen $D_k = V_k - V_{k-1}$, $k \geq 1$, sind unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen, wobei $D_k \sim V_1$ für jedes $k \geq 1$.

BEWEIS: Wir nutzen aus, dass die Höhen $S_k = X_1 + \dots + X_k$, $k \geq 1$, Partialsummen von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen X_1, X_2, \dots sind und weisen zunächst die Unabhängigkeit von D_1 und D_2 nach, indem wir für beliebige ungerade natürlichen Zahlen r und n die Gleichheit

$$\mathbb{P}(D_2 = r | D_1 = n) = \mathbb{P}(D_2 = r) \quad (2.64)$$

zeigen. Unter der Bedingung $D_1 = n$ tritt das Ereignis $D_2 = r$ genau dann ein, wenn für jedes j mit $n + 1 \leq j \leq n + r - 1$ die Ungleichung $S_j \leq 1$ sowie $S_{n+r} = 2$ gelten. Wegen $S_n = 1$ (folgt aus $D_n = 1$) und $S_j = S_n + (S_j - S_n)$ ist dies zu $1 + \sum_{i=n+1}^j X_i \leq 1$ für $j = n + 1, \dots, n + r - 1$ und $1 + \sum_{i=n+1}^{n+r} X_i = 2$ und somit zu

$$\sum_{i=n+1}^j X_i \leq 0 \quad (j = n + 1, \dots, n + r - 1), \quad \sum_{i=n+1}^{n+r} X_i = 1 \quad (2.65)$$

äquivalent. Die linke Seite von (2.64) ist also die bedingte Wahrscheinlichkeit des in (2.65) stehenden Ereignisses unter der Bedingung $D_1 = n$. Da diese Bedingung

ein Ereignis ist, das von den Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n gebildet wird und in (2.65) X_{n+1}, \dots, X_{n+r} auftreten, dürfen wir aufgrund der Unabhängigkeit aller X_j die Bedingung $D_1 = n$ weglassen und erhalten

$$\mathbb{P}(D_2 = r | D_1 = n) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=n+1}^j X_i \leq 0, j = n+1, \dots, n+r-1; \sum_{i=n+1}^{n+r} X_i = 1\right).$$

Wegen der Unabhängigkeit und identischen Verteilung aller X_j kann auf der rechten Seite eine Indexverschiebung $i \rightarrow i - n$ vorgenommen werden, ohne die Wahrscheinlichkeit zu ändern. Nach dieser Verschiebung steht aber dort das Ereignis $\{S_1 \leq 0, \dots, S_{r-1} \leq 0, S_r = 1\}$, also $\{D_1 = r\}$, und es ergibt sich

$$\mathbb{P}(D_2 = r | D_1 = n) = \mathbb{P}(D_2 = r) = \mathbb{P}(D_1 = r).$$

Die Zufallsvariablen D_1 und D_2 sind somit unabhängig und identisch wie V_1 verteilt. Der Rest des Beweises erfordert keine neue Idee. Am einfachsten geht man induktiv vor, indem man für beliebige ungerade Zahlen n_1, \dots, n_{k+1} die Gleichheit

$$\mathbb{P}(D_{k+1} = n_{k+1} | D_1 = n_1, \dots, D_k = n_k) = \mathbb{P}(D_{k+1} = n_{k+1}) = \mathbb{P}(D_1 = n_{k+1})$$

zeigt. Die Details seien dem Leser überlassen. ■

Nach Satz 2.24 ist der k -te Leiterzeitpunkt

$$V_k = D_1 + D_2 + \dots + D_k \tag{2.66}$$

eine Summe von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen. Für derartige Summen gälte ein Gesetz großer Zahlen in dem Sinne, dass $k^{-1}V_k$ für $k \rightarrow \infty$ mit Wahrscheinlichkeit Eins konvergiert, wenn der Erwartungswert der Summanden existierte. Da diese Voraussetzung in unserem Fall nicht vorliegt, besitzt dieses Gesetz für $k^{-1}V_k$ keine Gültigkeit. Das nachstehende Resultat besagt, dass man V_k nicht durch k , sondern das viel größere k^2 dividieren muss und dann beim Grenzübergang $k \rightarrow \infty$ eine Limesverteilung erhält.

Satz 2.25. (Grenzverteilung des k -ten Leiterzeitpunktes, [FEL], S.90)

Es gilt für jedes $x > 0$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{V_k}{k^2} \leq x\right) = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right) = 2 \int_{x^{-1/2}}^{\infty} \varphi(t) dt.$$

BEWEIS: Zu gegebenem $x > 0$ setzen wir $n_k := \lfloor x \cdot k^2 \rfloor$ und erhalten mit Lemma 2.21 und der Ganzzahligkeit von V_k

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\frac{1}{k^2} V_k \leq x\right) &= \mathbb{P}(V_k \leq xk^2) = \mathbb{P}(V_k \leq n_k) \\ &= \mathbb{P}(M_{n_k} \geq k) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{M_{n_k}}{\sqrt{n_k}} \geq \frac{k}{\sqrt{n_k}}\right). \end{aligned}$$

Wegen $\lim_{k \rightarrow \infty} k/\sqrt{n_k} = 1/\sqrt{x}$ liefert Satz 2.13

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{M_{n_k}}{\sqrt{n_k}} \geq \frac{k}{\sqrt{n_k}}\right) = 1 - \left(2\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) - 1\right),$$

was zu zeigen war. ■

Bemerkung 2.26.

Ist Z eine standardnormalverteilte Zufallsvariable, so gilt für jedes $x > 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\frac{1}{Z^2} \leq x\right) &= \mathbb{P}\left(Z^2 \geq \frac{1}{x}\right) = \mathbb{P}\left(|Z| \geq \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \\ &= 2 \left(1 - \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right). \end{aligned}$$

Da $\mathbb{P}(V_k/k^2 \leq x)$ als Funktion von x die Verteilungsfunktion von V_k/k^2 ist, besagt Satz 2.25, dass die Folge der Verteilungsfunktionen von V_k/k^2 für $k \rightarrow \infty$ punktweise gegen die mit

$$L(x) := 2 \left(1 - \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right), \quad x > 0, \quad L(x) := 0, \quad x \leq 0, \quad (2.67)$$

bezeichnete Verteilungsfunktion konvergiert. Die zu L gehörende Verteilung heißt (Standard-) **Lévy-Verteilung**. Sie gehört zur Klasse der sogenannten α -stabilen Verteilungen, zu denen auch die Normalverteilung und die Cauchy-Verteilung zählen. Wir können also den Sachverhalt von Satz 2.25 wie in (2.24) und (2.31) in der kompakten Form

$$\frac{V_k}{k^2} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} Y, \quad Y \sim L$$

schreiben. Dabei gilt $Y \sim 1/Z^2$ mit $Z \sim N(0,1)$. Die Verteilungsfunktion der Lévy-Verteilung ist in Bild 2.36 rechts skizziert. Das linke Bild zeigt die mit

$$\ell(x) := \frac{1}{(2\pi x^3)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2x}\right), \quad x > 0, \quad \ell(x) := 0, \quad x \leq 0,$$

bezeichnete Dichte der Lévy-Verteilung.

Tabelle 2.3 gibt einige Werte der Verteilungsfunktion L an. Offenbar konvergieren

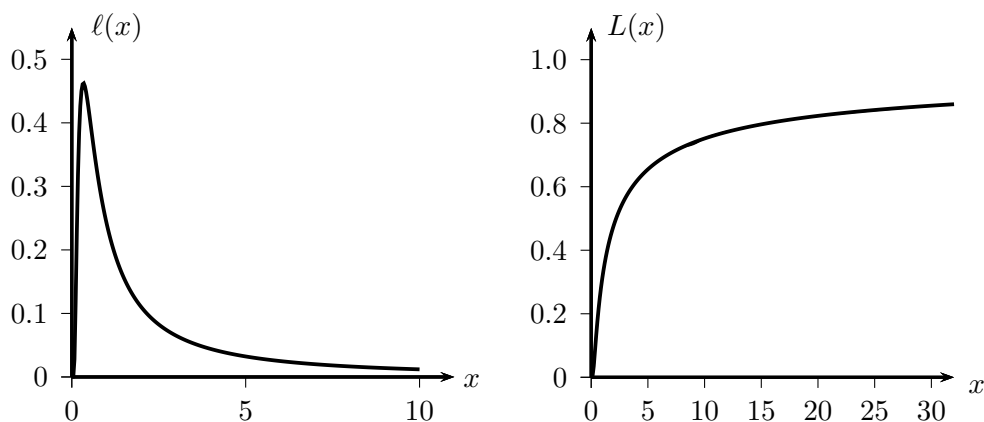


Bild 2.36: Dichte (links) und Verteilungsfunktion (rechts) der Lévy-Verteilung

die Werte $L(x)$ für $x \rightarrow \infty$ verblüffend langsam gegen 1. Der Median von L ist 2.2, das 95%-Quantil gleich 254 und das 99%-Quantil stolze 6366! Die Konsequenzen für die Leiterzeit V_k sind frappierend, gilt doch nach Satz 2.25 für großes k

$$\mathbb{P}(V_k \leq 2.2 \cdot k^2) \approx 0.5, \quad \mathbb{P}(V_k \leq 254 \cdot k^2) \approx 0.95, \quad \mathbb{P}(V_k \leq 6366 \cdot k^2) \approx 0.99.$$

Jede zweite Irrfahrt benötigt also mehr als 22000 Zeitschritte, um erstmals die Höhe 100 zu erreichen, und für jede zwanzigste Irrfahrt reichen hierfür selbst zweieinhalb Millionen Zeitschritte nicht aus!

x	$L(x)$	x	$L(x)$	x	$L(x)$
0.1	0.0016	2.5	0.527	20	0.823
0.2	0.025	3	0.564	30	0.855
0.3	0.068	4	0.617	40	0.874
0.4	0.114	5	0.655	50	0.888
0.5	0.157	6	0.683	75	0.908
0.7	0.232	7	0.706	100	0.920
1.0	0.317	8	0.724	200	0.944
1.5	0.414	9	0.734	500	0.964
2.0	0.480	10	0.752	1000	0.975
2.2	0.500	15	0.796	5000	0.989

Tabelle 2.3: Verteilungsfunktion $L(x) := 2(1 - \Phi(1/\sqrt{x}))$ der Lévy-Verteilung

Mit den Erkenntnissen über Leiterzeiten erhalten wir unmittelbar folgende Resultate über die mit

$$W_k := \inf \left\{ 2j : j \geq 1, \sum_{l=1}^j \mathbf{1}\{S_{2l} = 0\} = k \right\}$$

bezeichnete k -te Nullstelle einer Irrfahrt (vgl. [FEL], S. 90/91):

Satz 2.27. ((Grenz-)Verteilung des Zeitpunktes der k -ten Nullstelle)

Für die k -te Nullstelle W_k einer symmetrischen Irrfahrt gelten:

a) $W_k \sim V_k + k,$

b)

$$\mathbb{P}(W_k = 2n) = \frac{k}{2n - k} \frac{\binom{2n-k}{n}}{2^{2n-k}}, \quad n \geq k,$$

c)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{W_k}{k^2} \leq x \right) = L(x), \quad x \geq 0.$$

BEWEIS: Zieht man Satz 2.23 heran, so sind a) und b) offenbar äquivalente Aussagen. a) ergibt sich begrifflich, wenn man beachtet, dass W_k die gleiche Verteilung wie eine Summe $Z_1 + \dots + Z_k$ besitzt, wobei die Z_j unabhängig sind und die gleiche Verteilung wie die Erstwiederkehrzeit W besitzen (vgl. Bild 2.23 und die

davor geführte Diskussion). Nach Satz 2.20 b) ist jedes Z_j verteilt wie ein um 1 vergrößerter erster Leiterzeitpunkt. Hieraus folgt die angegebene Verteilungsgleichheit. Ein alternativer Nachweis zeigt b) (und damit a)) mithilfe des Spiegelungsprinzips. Hierzu bilde man einen *nichtpositiven* Weg, der zum Zeitpunkt $2n$ seine k -te Nullstelle hat, durch Weglassen der k Abwärtsschritte zu Beginn und nach jeder Nullstelle auf einen Weg ab, dessen k -ter Leiterzeitpunkt V_k gleich $2n - k$ ist. Diese Abbildung ist injektiv und lässt sich auch umkehren, indem man zu Beginn und für jedes $j = 1, \dots, k - 1$ direkt nach Erreichen der Höhe j einen zusätzlichen Abwärtsschritt einfügt. Da jeder gegebene nichtpositive Weg, dessen k -te Nullstelle gleich $2n$ ist, zu 2^k verschiedenen Wegen mit den gleichen Nullstellen führt, folgt b). c) ergibt sich mit a) und Satz 2.25 zusammen mit (6.5) aus

$$\mathbb{P}\left(\frac{W_k}{k^2} \leq x\right) = \mathbb{P}\left(\frac{V_k + k}{k^2} \leq x\right) = \mathbb{P}\left(\frac{V_k}{k^2} \leq x_k\right)$$

mit $x_k = x - 1/k$ und $x_k \rightarrow x$. ■

2.10 Schnittpunkte von Irrfahrten

Zwei symmetrische Irrfahrten starten gleichzeitig in unterschiedlichen Höhen auf der Ordinate und laufen stochastisch unabhängig voneinander ab. Wann treffen sie sich zum ersten Mal, wann besitzen also die korrespondierenden Polygonzüge – wenn überhaupt – einen ersten Schnittpunkt (mit ganzzahligen Koordinaten)? Wie lange dauert es im Mittel bis zum ersten Zusammentreffen? Bild 2.37 zeigt diese Situation anhand zweier Irrfahrten, die in den Höhen 0 bzw. 4 beginnen und sich erstmals nach 16 Zeitschritten treffen.

Offenbar ist aus Paritätsgründen ein Treffen nur möglich, wenn die Anfangshöhen der Irrfahrten entweder beide gerade oder beide ungerade sind. Da es für die aufgeworfenen Fragen nur auf die jeweiligen Höhendifferenzen der Irrfahrten im zeitlichen Verlauf ankommt, können wir des weiteren ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass eine der Irrfahrten im Ursprung startet und die andere in der Höhe $2k$. Dabei ist k eine feste natürliche Zahl.

Wir modellieren diese Situation durch stochastisch unabhängige Zufallsvariablen $X_1, X_1^*, X_2, X_2^*, \dots$ mit $\mathbb{P}(X_j = 1) = \mathbb{P}(X_j^* = 1) = 1/2$ sowie $\mathbb{P}(X_j = -1) = \mathbb{P}(X_j^* = -1) = 1/2$ ($j = 1, 2, \dots$) und setzen $S_0 := 0$, $S_n := X_1 + \dots + X_n$ sowie $S_0^* := 2k$ und $S_n^* := 2k + X_1^* + \dots + X_n^*$ für $n \geq 1$. Die Zufallsvariablen S_n bzw.

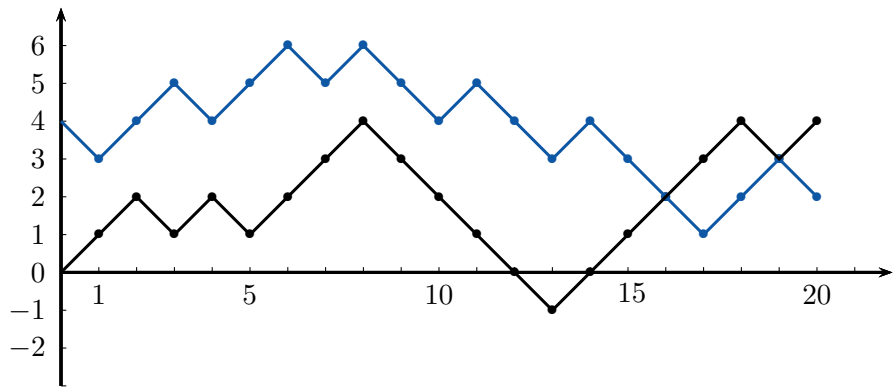


Bild 2.37: Zwei Irrfahrten, die sich erstmalig nach 16 Schritten treffen

S_n^* beschreiben die Höhe der im Ursprung bzw. in der Höhe $2k$ startenden Irrfahrt zum Zeitpunkt n , und der zufällige Zeitpunkt, zu dem sich beide Irrfahrten erstmalig treffen, ist

$$T_k := \inf\{n \geq 1 : S_n^* = S_n\}.$$

Dabei wird durch die übliche Vereinbarung $\inf \emptyset = \infty$ der Tatsache Rechnung getragen, dass ein solches Zusammentreffen (etwa für den Fall, dass jedes X_j und jedes X_j^* den Wert 1 annimmt) eventuell gar nicht stattfindet. Die Zufallsvariable T_k wird in der Folge als **Distanz- k -Schnittzeitpunkt** bezeichnet.

Nach Definition von S_n und S_n^* ist die Gleichung $S_n = S_n^*$ gleichbedeutend mit $\sum_{j=1}^n (X_j - X_j^*) = 2k$, sodass wir mit den Abkürzungen

$$\delta_j := X_j - X_j^*, \quad j \geq 1, \quad \Delta_n := \delta_1 + \dots + \delta_n, \quad n \geq 1,$$

den Distanz- k -Schnittzeitpunkt in der Form

$$T_k = \inf \{n \geq 1 : \Delta_n = 2k\} \tag{2.68}$$

schreiben können. Tabelle 2.4 zeigt die Realisierungen von X_j , X_j^* und δ_j ($j = 1, \dots, 20$) für die in Bild 2.37 gezeigten Irrfahrten.

X_j	1	1	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	-1	1
X_j^*	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	1	-1
δ_j	2	0	-2	2	-2	0	2	0	0	0	-2	0	0	0	2	2	2	0	-2

Tabelle 2.4: Realisierungen von X_j , X_j^* und δ_j für die Irrfahrten aus Bild 2.37

Setzt man $\Delta_0 := 0$ und verbindet die Punkte (j, Δ_j) , $j = 0, \dots, 20$, miteinander, so entsteht der in Bild 2.38 gezeigte Polygonzug. Der Zeitpunkt des ersten Zusammentreffens der Irrfahrten aus Bild 2.37 ist in diesem Bild gerade der Zeitpunkt, zu dem erstmalig die Höhe 4 erreicht wird.

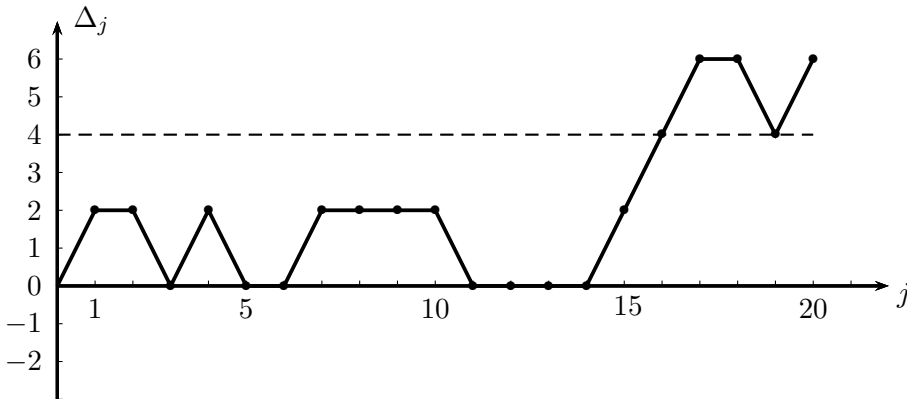


Bild 2.38: Die Irrfahrt (j, Δ_j) , $0 \leq j \leq 20$, für die Daten aus Tabelle 2.4

Allgemein beschreiben die Punkte (j, Δ_j) , $j \geq 0$, eine Irrfahrt, die im Ursprung beginnt und gedächtnislos zu jedem Zeitpunkt entweder zwei Schritte nach oben oder unten geht oder aber auf der erreichten Höhe bleibt. Dies liegt daran, dass die Zufallsvariablen $\delta_1, \delta_2, \dots$ stochastisch unabhängig sind und die Werte 2, 0 und -2 annehmen. Wegen

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\delta_j = 2) &= \mathbb{P}(X_j = 1, X_j^* = -1) = \frac{1}{4}, \\ \mathbb{P}(\delta_j = -2) &= \mathbb{P}(X_j = -1, X_j^* = 1) = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

und $\mathbb{P}(\delta_j = 0) = 1/2$ kann man sich diese neue Irrfahrt wie folgt erzeugt denken: Man wirft zu jedem Zeitpunkt eine echte Münze. Zeigt diese Zahl, so bleibt man in der erreichten Höhe. Im Fall von Kopf wirft man erneut und geht beim Auftreten von Zahl zwei Schritte nach oben und andernfalls zwei Schritte nach unten.

In gleicher Weise wie bei den im vorigen Abschnitt untersuchten Leiterzeiten und Leiterepochen der symmetrischen Irrfahrt kann man sich auch beim Studium der Zufallsvariablen T_k in (2.68) im Wesentlichen auf den Fall $k = 1$ konzentrieren, denn es gilt der

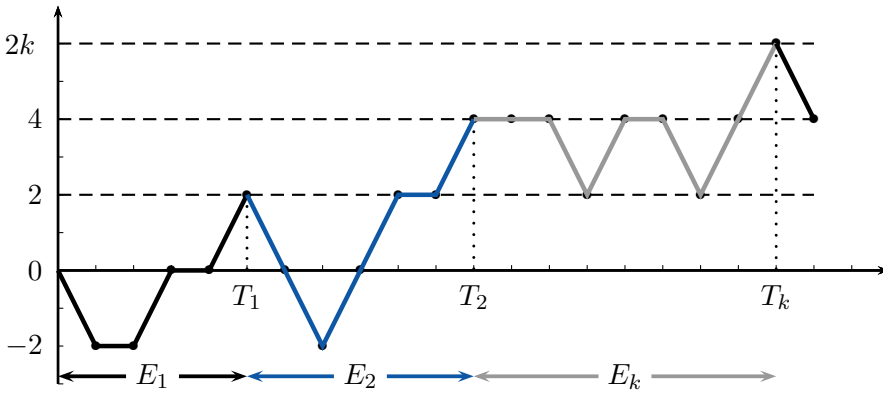


Bild 2.39: Leiterzeiten und -epochen für die Irrfahrt (j, Δ_j) , $j \geq 0$

Satz 2.28.

Es seien $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$, $E_1 := T_1$ sowie $E_j := T_j - T_{j-1}$ für $j = 1, \dots, k$. Dann gilt: Die Zufallsvariablen E_1, \dots, E_k sind stochastisch unabhängig und identisch verteilt, wobei $E_j \sim T_1$ für $j = 1, \dots, k$.

BEWEIS: Die Beweisführung folgt wörtlich dem Beweis von Satz 2.24. Wie dort nutzt man aus, dass E_1, E_2, \dots, E_k Leiterepochen einer Irrfahrt sind, die auf den Partialsummen Δ_n der unabhängigen, identisch verteilten und den Erwartungswert 0 besitzenden Zufallsvariablen $X_j - X_j^*$ gründet, siehe Bild 2.39. Diese Irrfahrt erreicht zuerst die Höhe 2 (schwarzer Teilweg in Bild 2.39), was zum zufälligen Zeitpunkt $T_1 = E_1$ geschieht. Aufgrund der Gedächtnislosigkeit der Irrfahrt verlaufen die sich anschließenden, in Bild 2.39 blau eingezeichneten Wegschritte bis zum erstmaligen Erreichen der Höhe 4 völlig unbeeinflusst vom stochastischen Verhalten der Irrfahrt bis T_1 , und zwar so, als wenn der blau eingezeichnete Teilweg im Ursprung starten würde und die Höhe 2 erreichen müsste. Gleiches gilt für den sich anschließenden, grau gezeichneten Teilweg bis zum erstmaligen Erreichen der Höhe $2k$, wobei in Bild 2.39 $k = 3$ gilt. ■

Um die Verteilung von T_1 zu bestimmen, leiten wir einen geschlossenen Ausdruck für die mit

$$g(t) := \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T_1 = n) \cdot t^n, \quad |t| \leq 1,$$

bezeichnete erzeugende Funktion von T_1 her und entwickeln g in eine Potenzreihe

um 0. Da die Koeffizienten dieser Entwicklung eindeutig sind, kann man dann die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(T_1 = n)$ ablesen (siehe Abschnitt 6.7 für die wichtigsten Eigenschaften erzeugender Funktionen). Zunächst notieren wir

$$\mathbb{P}(T_1 = 1) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}(T_1 = 2) = \frac{1}{8}, \quad (2.69)$$

denn es gilt $\{T_1 = 1\} = \{\delta_1 = 2\}$ sowie $\{T_1 = 2\} = \{\delta_1 = 0, \delta_2 = 2\}$, und die Wahrscheinlichkeiten hierfür sind $1/4$ bzw. $1/2 \cdot 1/4 = 1/8$. Für die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(T_1 = n)$, $n \geq 3$, leiten wir eine Rekursionsformel her und betrachten dazu den ersten Schritt der Irrfahrt, für den die drei sich gegenseitig ausschließenden und mit den Wahrscheinlichkeiten $1/4$, $1/2$ und $1/4$ eintretenden Fälle $\delta_1 = 2$, $\delta_1 = 0$ und $\delta_1 = -2$ möglich sind. Nach der Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit gilt dann für jedes $n \geq 3$

$$\mathbb{P}(T_1 = n) = \frac{1}{4}\mathbb{P}(T_1 = n|\delta_1 = 2) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(T_1 = n|\delta_1 = 0) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(T_1 = n|\delta_1 = -2).$$

Hier verschwindet der erste Summand auf der rechten Seite, denn es gilt $\mathbb{P}(T_1 = 1|\delta_1 = 2) = 1$. Im Fall $\delta_1 = 0$ verharret die Irrfahrt einen Zeitschritt lang auf der Abszisse, was bedeutet, dass sie – vom Punkt $(1, 0)$ aus startend – einen Zeitschritt weniger zur Verfügung hat, um die Höhe 2 zu erreichen. Somit gilt

$$\mathbb{P}(T_1 = n|\delta_1 = 0) = \mathbb{P}(T_1 = n - 1). \quad (2.70)$$

Im verbleibenden Fall $\delta_1 = -2$ haben wir es nach einem Zeitschritt mit einer Irrfahrt zu tun, die vom Punkt $(1, -2)$ ausgehend die Höhe 2 erreichen muss, was äquivalent dazu ist, nach einem verbrauchten Zeitschritt vom Nullpunkt startend die Höhe 4 zu erreichen. Nach Satz 2.28 besitzt die Zeit bis zum Erreichen der Höhe 4 die gleiche Verteilung wie $E_1 + E_2$. Hierbei sind E_1 und E_2 stochastisch unabhängig und jeweils verteilt wie T_1 . Diese Überlegungen führen zur Gleichung

$$\mathbb{P}(T_1 = n|\delta_1 = -2) = \mathbb{P}(E_1 + E_2 = n - 1). \quad (2.71)$$

Setzt man die rechten Seiten von (2.70) und (2.71) in die Rekursionsformel ein und summiert über n , so ergibt sich für jedes t mit $|t| \leq 1$

$$\sum_{n=3}^{\infty} \mathbb{P}(T_1 = n) t^n = \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{\infty} \mathbb{P}(T_1 = n - 1) t^n + \frac{1}{4} \sum_{n=3}^{\infty} \mathbb{P}(E_1 + E_2 = n - 1) t^n.$$

Nach Definition von $g(t)$ und (2.69) ist die linke Seite gleich $g(t) - t/4 - t^2/8$, und die erste Summe auf der rechten Seite ist nach Abspalten des Faktors t und einer Indexverschiebung sowie (2.69) gleich $t(g(t) - t/4)$. Wegen $\mathbb{P}(E_1 + E_2 \geq 2) = 1$ ist die zweite Summe gleich $t h(t)$, wobei $h(t)$ die erzeugende Funktion von $E_1 + E_2$

ist. Wegen der Unabhängigkeit von E_1 und E_2 sowie der Verteilungs-Identitäten $E_1 \sim T_1$, $E_2 \sim T_1$ gilt (vgl. Abschnitt 6.7) $h(t) = g(t)^2$, sodass wir

$$g(t) - \frac{t}{4} - \frac{t^2}{8} = \frac{t}{2} \left(g(t) - \frac{t}{4} \right) + \frac{t}{4} g(t)^2$$

und somit für jedes $t \in [-1, 1]$ mit $t \neq 0$ die quadratische Gleichung

$$g(t)^2 + 2 \left(1 - \frac{2}{t} \right) g(t) + 1 = 0$$

für $g(t)$ erhalten. Beachtet man, dass $g(t)$ für $t \rightarrow 0$ gegen $\mathbb{P}(T_1 = 0) = 0$ konvergiert, so ergibt sich die Lösung

$$g(t) = \frac{2(1 - \sqrt{1-t}) - t}{t}, \quad |t| \leq 1, t \neq 0$$

mit der stetigen Ergänzung $g(0) := \lim_{t \rightarrow 0} g(t) = 0$. Unter Verwendung der Binomialreihe

$$\sqrt{1-t} = (1-t)^{1/2} = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n-2}{n-1}}{n 2^{2n}} t^n, \quad |t| < 1,$$

(siehe Abschnitt 6.9) liefert eine direkte Rechnung

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{(n+1) 2^{2n}} t^n, \quad |t| < 1,$$

sodass wir folgendes Resultat erhalten:

Satz 2.29. (Verteilung des Distanz-1-Schnittzeitpunktes T_1)

Es gilt

$$\mathbb{P}(T_1 = n) = \frac{\binom{2n}{n}}{(n+1) 2^{2n}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Bild 2.40 zeigt ein Stabdiagramm der Verteilung von T_1 . Die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(T_1 = n)$ genügen der Rekursionsformel

$$\mathbb{P}(T_1 = n+1) = \frac{2n+1}{2n+4} \mathbb{P}(T_1 = n), \quad n \geq 1,$$

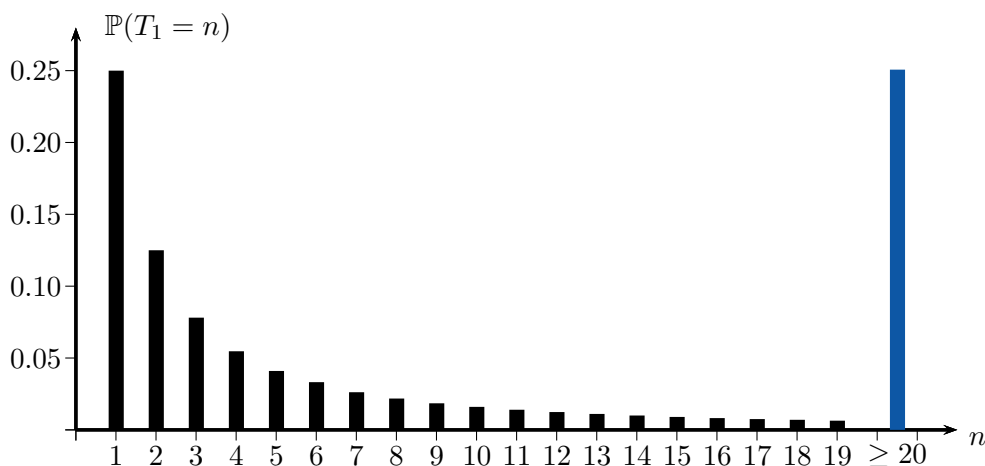


Bild 2.40: Stabdiagramm der Verteilung des Distanz-1-Schnittzeitpunktes (man beachte die große Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(T_1 \geq 20) \approx 0.251$)

sie fallen also vergleichsweise langsam mit wachsendem n . So gilt etwa $\mathbb{P}(T_1 \geq 20) \approx 0.251$ und $\mathbb{P}(T_1 \geq 127) \approx 0.100$. Startet man also wiederholt eine symmetrische Irrfahrt im Ursprung und zeitgleich eine zweite in der Höhe 2, so treffen sich beide auf die Dauer in jedem vierten Fall nicht vor dem zwanzigsten Zeitschritt, und in 10% aller Fälle müssen mindestens 127 Schritte bis zum ersten Zusammentreffen erfolgen.

Vergleicht man das Resultat von Satz 2.29 mit der in Satz 2.23 angegebenen Verteilung der zweiten Leiterzeit V_2 der symmetrischen Irrfahrt, so folgt

$$\mathbb{P}(T_1 = n) = \mathbb{P}(V_2 = 2n) = \mathbb{P}\left(\frac{V_2}{2} = n\right), \quad n \geq 1.$$

Es gilt also die auf den ersten Blick verblüffende Verteilungsgleichheit

$$T_1 \sim \frac{V_2}{2}. \quad (2.72)$$

Die zufällige Zeitspanne bis zum ersten Zusammentreffen zweier unabhängig verlaufender symmetrischer Irrfahrten, die im Ursprung und in der Höhe 2 beginnen, besitzt also die gleiche Verteilung wie die Hälfte der Zeit, die eine im Ursprung startende symmetrische Irrfahrt benötigt, um erstmalig die Höhe 2 zu erreichen. Diesen Zusammenhang kann man wie folgt auch begrifflich einsehen: Die Zufallsvariable T_1 beschreibt die Zeit, die eine im Ursprung startende Irrfahrt, deren Sprunghöhen 2, 0 oder -2 (mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten $1/4, 1/2$

und $1/4$ sind), benötigt, um erstmalig die Höhe 2 zu erreichen. Interpretiert man einen Auf- bzw. Abwärtsschritt dieser Irrfahrt als *zwei hintereinander ausgeführte Auf- bzw. Abwärtsschritte der symmetrischen Irrfahrt* sowie ein Verharren auf einer erreichten Höhe über einen Zeitschritt als *zwei hintereinander ausgeführte Schritte der symmetrischen Irrfahrt, von denen einer nach oben und der andere nach unten geht*, so wird klar, dass gewisse Wege der symmetrischen Irrfahrt aggregiert und in ihrer zeitlichen Dauer halbiert werden. So fasst man etwa die beiden das Ereignis $\{V_2 = 4\}$ ausmachenden Wege $(1, -1, 1, 1)$ und $(-1, 1, 1, 1)$ der symmetrischen Irrfahrt zum Weg $(0, 2)$ der auf den Zufallsvariablen $\delta_1, \delta_2, \dots$ basierenden Irrfahrt zusammen.

Nach (2.66) besitzt V_{2k} die gleiche Verteilung wie die Summe $\sum_{j=1}^{2k} D_j$, wobei D_1, \dots, D_{2k} unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen bezeichnen, die wie die erste Leiterzeit V_1 der symmetrischen Irrfahrt verteilt sind. Fasst man je zwei dieser D_j zusammen, indem man $V_{2,j} := D_{2j-1} + D_{2j}$, $j = 1, \dots, k$ setzt, so sind $V_{2,1}, \dots, V_{2,k}$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen, die sämtlich wie V_2 verteilt sind. Da nach (2.72) $V_{2,j}/2$ die gleiche Verteilung wie die in Satz 2.28 auftretende Zufallsvariable E_j besitzt und $T_k = E_1 + \dots + E_k$ gilt, überträgt sich die Verteilungsgleichheit (2.72) für allgemeines k ; es gilt also

$$T_k \sim \frac{V_{2k}}{2}, \quad k \geq 1. \quad (2.73)$$

Zusammen mit den Ergebnissen für Leiterzeiten bei der symmetrischen Irrfahrt ergibt sich hieraus insbesondere $\mathbb{P}(T_k < \infty) = 1$ und $\mathbb{E}(T_k) = \infty$. Obwohl ein Zusammentreffen der Irrfahrten in endlicher Zeit mit Wahrscheinlichkeit Eins stattfindet, wartet man jedoch im Mittel unendlich lange auf ein solches Treffen.

Aus (2.73) erhält man mit Satz 2.23 auch unmittelbar die Verteilung von T_k für allgemeines k .

Satz 2.30. (Verteilung des Distanz- k -Schnittzeitpunktes)

Für $k, n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k$ gilt

$$\mathbb{P}(T_k = n) = \frac{k}{n} \binom{2n}{n+k} 2^{-2n}.$$

Nach den bisherigen Überlegungen ist es nicht verwunderlich, dass man im Allgemeinen recht lange bis zum Zusammentreffen zweier in unterschiedlichen Höhen startenden symmetrischen Irrfahrten warten muss. Bild 2.41 zeigt das Ergebnis einer Simulation von zwei Irrfahrten der Länge 200, von denen eine im Ursprung

und die andere in der Höhe 10 beginnt. In diesem Fall nimmt der Distanz-5-Schnittzeitpunkt T_5 den Wert 154 an.

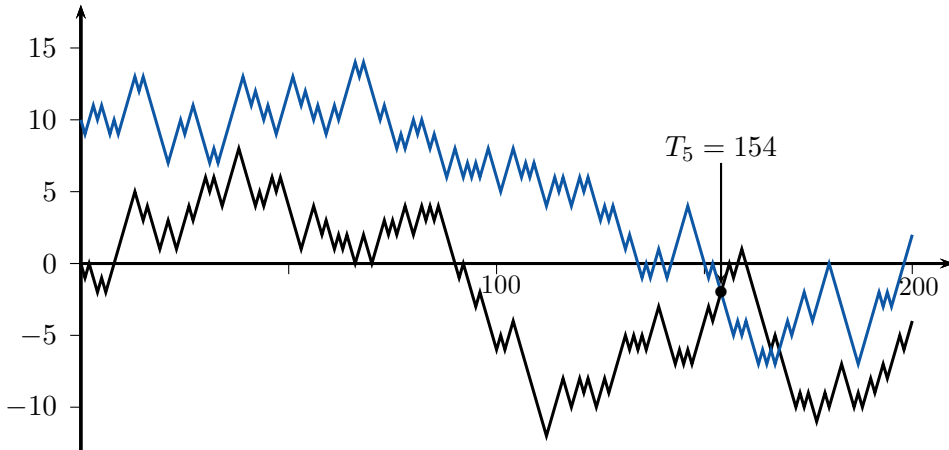


Bild 2.41: Zwei im Ursprung bzw. in der Höhe 10 startende Irrfahrten, die sich erstmalig zur Zeit 154 treffen

Wir wollen abschließend das stochastische Verhalten von T_k für großes k untersuchen, um den Zeitpunkt des ersten Zusammentreffens zweier weit entfernt voneinander startenden Irrfahrten einschätzen zu können. Nach Satz 2.25 gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{V_k}{k^2} \leq x \right) = L(x), \quad x > 0$$

mit der in (2.67) definierten Verteilungsfunktion der Lévy-Verteilung. Ersetzt man hier k durch $2k$ und verwendet die Verteilungsgleichheit $T_k \sim V_{2k}/2$, so ergibt sich der folgende Grenzwertsatz für die Verteilung von T_k für $k \rightarrow \infty$.

Satz 2.31. (Grenzverteilung von T_k)

Es gilt für jedes $x > 0$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{T_k}{2k^2} \leq x \right) = L(x).$$

In einer schon mehrfach verwendeten Kurzschreibweise ergibt sich also

$$\frac{T_k}{2k^2} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} Y, \quad Y \sim L,$$

was bedeutet, dass die Folgen $(T_k/(2k^2))$ und (V_k/k^2) bei $k \rightarrow \infty$ dieselbe Grenzverteilung besitzen. Einige Werte von $L(x)$ finden sich in Tabelle 2.3. Für großes k erhalten wir somit

$$\mathbb{P}(T_k \leq 2k^2x) \approx L(x).$$

Wegen $L(2.2) \approx 0.5$ und $L(254) \approx 0.95$ (vgl. Seite 75) gilt also insbesondere

$$\mathbb{P}(T_k \leq 4.4 \cdot k^2) \approx 0.5, \quad \mathbb{P}(T_k \leq 508 \cdot k^2) \approx 0.95$$

für großes k . Startet also eine Irrfahrt im Ursprung und die andere in der Höhe $2k = 100$, so beträgt die Wahrscheinlichkeit ungefähr $1/2$, dass das erste Zusammentreffen bis spätestens zur Zeit 11000 erfolgt. Andererseits besteht eine fünfprozentige Wahrscheinlichkeit, dass sich beide Irrfahrten selbst nach 1.270.000 Schritten noch nicht getroffen haben!

Eine letzte Bemerkung: Nach dem ersten Treffzeitpunkt kann der jeweils nächste Schritt zweier symmetrischer Irrfahrten in die gleiche oder in die entgegengesetzte Richtung verlaufen, wobei beide Möglichkeiten gleich wahrscheinlich sind. Im ersten Fall treffen sich die Irrfahrten bereits nach einem weiteren Zeitschritt zum zweiten Mal. Im zweiten Fall beträgt die Höhendifferenz 2, sodass die zufällige Zeitspanne zwischen dem ersten und dem zweiten Treffzeitpunkt die gleiche Verteilung wie $1 + T_1$ besitzt.

2.11 Vorzeichenwechsel

Wie oft kreuzt eine symmetrische Irrfahrt die x -Achse und ändert somit das Vorzeichen? Wie häufig wechselt also in der Deutung einer Irrfahrt als Spiel zwischen zwei Personen die Führung? Aus Abschnitt 2.4 wissen wir, dass es überraschend wenige Nullstellen und somit Spielgleichstände gibt. Da jeder Vorzeichenwechsel der Irrfahrt nur nach einer direkt davor liegenden Nullstelle auftreten kann, müssen wir mit deutlich weniger Führungswechseln als Spielgleichständen rechnen. So gibt es bei der in Bild 2.42 dargestellten Irrfahrt 8 Vorzeichenwechsel und ungefähr doppelt so viele Nullstellen, nämlich 17. Im Folgenden präzisieren wir den Begriff *Vorzeichenwechsel* und untersuchen das stochastische Verhalten der Anzahl der Vorzeichenwechsel in symmetrischen Irrfahrten. Die Ergebnisse sind verblüffend: Was die Anzahl der Vorzeichenwechsel betrifft, ist es unabhängig von der Länge der Irrfahrt am wahrscheinlichsten, dass überhaupt kein Vorzeichenwechsel stattfindet! Des Weiteren kann man in einer Irrfahrt der Länge 10000 getrost darauf wetten, dass höchstens 34 Vorzeichenwechsel auftreten.

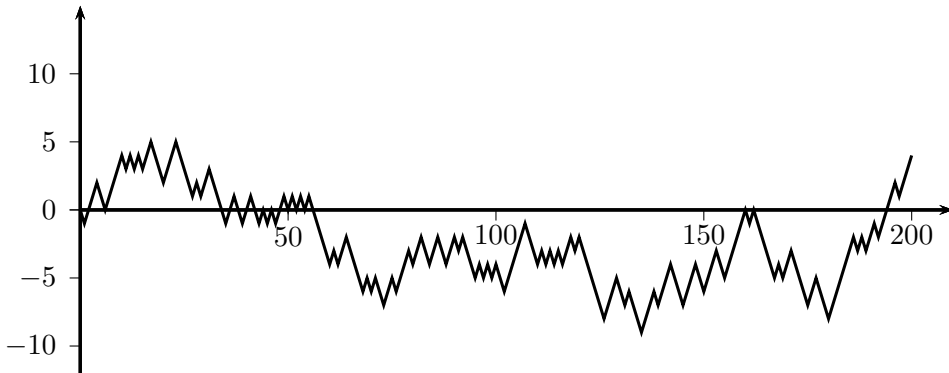


Bild 2.42: Irrfahrt mit 8 Vorzeichenwechseln und 17 Nullstellen

Eine Irrfahrt besitze zur Zeit $2k$ einen **Vorzeichenwechsel**, falls $S_{2k+1}S_{2k-1} = -1$ gilt. Man beachte, dass Vorzeichenwechsel nur zu geraden Zeitpunkten auftreten können, da dann notwendigerweise $S_{2k} = 0$ gilt. Im Folgenden bezeichne

$$C_{2n+1} := \sum_{k=1}^n \mathbf{1}\{S_{2k+1} S_{2k-1} = -1\}$$

die Anzahl der Vorzeichenwechsel in einer symmetrischen Irrfahrt der Länge $2n+1$. Die Länge wurde ungerade gewählt, weil der erste Schritt von der Höhe Null wegführt und erst danach (maximal n) Vorzeichenwechsel möglich sind.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten genau r Vorzeichenwechsel auf? Die Antwort hierauf scheint nicht einfach zu sein, sie erschließt sich aber wie folgt mithilfe der in Abschnitt 2.9 eingeführten Leiterzeiten: Betrachtet man Bild 2.43, so hat sich die Irrfahrt nach einem Schritt in die Höhe 1 bewegt. Damit irgendwann danach ein Vorzeichenwechsel stattfindet, muss sie die Höhe -1 erreichen, also die Leiter um 2 Stufen hinabsteigen. Die dafür benötigte, mit T_1 bezeichnete Zeitspanne ist verteilt wie V_{-2} (in Bild 2.43 nimmt T_1 den Wert 6 an). Wäre der erste Schritt der Irrfahrt in die Höhe -1 erfolgt, so hätte sie für den ersten Vorzeichenwechsel um zwei Stufen hinauf in die Höhe 1 steigen müssen. Die zufällige Zeitspanne hierfür ist verteilt wie V_2 . Da V_2 und V_{-2} die gleiche Verteilung besitzen, ist – unabhängig davon, ob $S_1 = 1$ oder $S_1 = -1$ gilt – die zufällige Zeitspanne T_1 bis zum ersten Vorzeichenwechsel verteilt wie die Leiterzeit V_2 . Man beachte, dass T_1 ab dem Zeitpunkt 1 zählt, aber auch den letzten Schritt nach Erreichen der Nullstelle beinhaltet.

Hat der erste Vorzeichenwechsel stattgefunden, so befindet sich die Irrfahrt entweder in der Höhe 1 oder -1 , sie muss also für den nächsten Vorzeichenwechsel die Leiter um 2 Stufen hinab- oder hinaufsteigen. Die hierfür benötigte, mit T_2 bezeichnete zufällige Zeitspanne ist aufgrund der Gedächtnislosigkeit der Irrfahrt stochastisch unabhängig von T_1 und verteilt wie V_2 usw. (siehe Bild 2.43). Die hervorgehobenen, nach unten bzw. oben zeigenden Pfeile deuten an, dass die Irrfahrt ab den jeweiligen Zeitpunkten zwei Stufen ab- bzw. aufsteigen muss, um den nächsten Vorzeichenwechsel herbeizuführen.

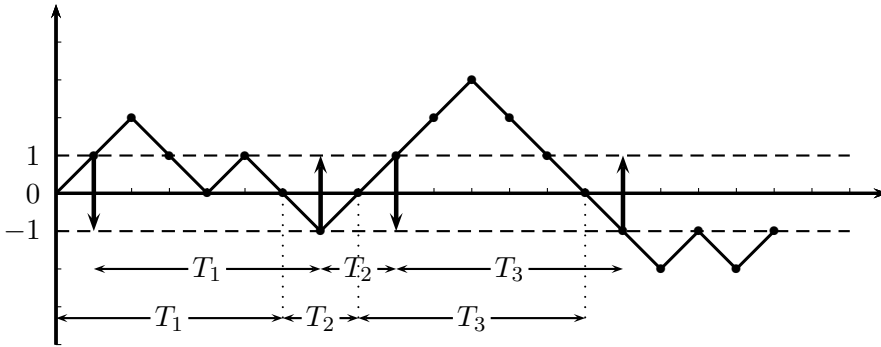


Bild 2.43: Die Zeitspannen zwischen Vorzeichenwechseln sind unabhängig und identisch verteilt wie V_2

Bezeichnen T_1 wie oben die Zeit bis zum ersten Vorzeichenwechsel und für $j \geq 2$ die Zufallsvariable T_j die Zeitspanne zwischen dem $(j-1)$ -ten und dem j -ten Vorzeichenwechsel, so gilt die Ereignisgleichheit

$$\{C_{2n+1} \geq r\} = \left\{ \sum_{j=1}^r T_j \leq 2n \right\}, \quad (2.74)$$

denn es finden genau dann mindestens r Vorzeichenwechsel bis spätestens zum Zeitpunkt $2n+1$ statt, wenn die durch $T_1 + \dots + T_r$ beschriebene Zeit bis zum r -ten Vorzeichenwechsel höchstens gleich $2n$ ist. Da die Zufallsvariablen T_1, \dots, T_r stochastisch unabhängig und je wie V_2 verteilt sind, besitzt $T_1 + \dots + T_r$ die gleiche Verteilung wie V_{2r} , sodass (2.74) die Identität

$$\mathbb{P}(C_{2n+1} \geq r) = \mathbb{P}(V_{2r} \leq 2n)$$

liefert. Mit Lemma 2.21 und (2.49) folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(C_{2n+1} \geq r) &= \mathbb{P}(M_{2n} \geq 2r) \\ &= 2\mathbb{P}(S_{2n} \geq 2r) - \mathbb{P}(S_{2n} = 2r) \end{aligned} \quad (2.75)$$

und somit

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(C_{2n+1} = r) &= \mathbb{P}(C_{2n+1} \geq r) - \mathbb{P}(C_{2n+1} \geq r+1) \\
 &= 2\mathbb{P}(S_{2n} \geq 2r) - \mathbb{P}(S_{2n} = 2r) \\
 &\quad - (2\mathbb{P}(S_{2n} \geq 2(r+1)) - \mathbb{P}(S_{2n} = 2(r+1))) \\
 &= \mathbb{P}(S_{2n} = 2r) + \mathbb{P}(S_{2n} = 2r+2).
 \end{aligned}$$

Unter Beachtung der Gleichungskette

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(S_{2n+1} = 2r+1) &= \mathbb{P}(S_{2n} + X_{2n+1} = 2r+1) \\
 &= \mathbb{P}(S_{2n} + 1 = 2r+1 | X_{2n+1} = 1) \cdot \frac{1}{2} \\
 &\quad + \mathbb{P}(S_{2n} - 1 = 2r+1 | X_{2n+1} = -1) \cdot \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \mathbb{P}(S_{2n} = 2r) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(S_{2n} = 2(r+1))
 \end{aligned}$$

gilt (s. [FEL], S. 84)

$$\mathbb{P}(C_{2n+1} = r) = 2\mathbb{P}(S_{2n+1} = 2r+1), \quad (2.76)$$

und wir erhalten wegen (2.8) das folgende Resultat:

Satz 2.32. (Verteilung der Anzahl der Vorzeichenwechsel)

Für die Anzahl C_{2n+1} der Vorzeichenwechsel in einer symmetrischen Irrfahrt der Länge $2n+1$ gelten:

a)

$$\mathbb{P}(C_{2n+1} = r) = \binom{2n+1}{r+n+1} \frac{1}{2^{2n}}, \quad r = 0, 1, \dots, n. \quad (2.77)$$

b)

$$\mathbb{E}(C_{2n+1}) = (n+1) \frac{\binom{2n+1}{n}}{2^{2n+1}} - \frac{1}{2}.$$

c)

$$\mathbb{V}(C_{2n+1}) = \frac{n+1}{2} - \frac{1}{4} - \left((n+1) \frac{\binom{2n+1}{n}}{2^{2n+1}} \right)^2.$$

BEWEIS: Es sind nur b) und c) zu zeigen. Mit (6.16) folgt

$$\mathbb{E}(C_{2n+1}) = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{r=1}^n r \binom{2n+1}{r+n+1} = \frac{1}{2^{2n}} \left(\frac{n+1}{2} \binom{2n+1}{n} - 2^{2n-1} \right)$$

und damit b) (vgl. auch [FEL2], Theorem 4). Unter Verwendung von (6.18) ergibt sich analog

$$\mathbb{E}(C_{2n+1}^2) = \sum_{r=1}^n r^2 \binom{2n+1}{r+n+1} \frac{1}{2^{2n}} = \frac{n+1}{2} - \frac{2n+1}{2} \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}},$$

also zusammen mit b) die Behauptung c) durch direkte Rechnung. ■

Das Ergebnis von Satz 2.32 ist überraschend. Zunächst erstaunt, dass die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(C_{2n+1} = r)$ streng monoton in r fallen, da

$$\frac{\mathbb{P}(C_{2n+1} = r+1)}{\mathbb{P}(C_{2n+1} = r)} = \frac{n-r}{n+r+2}, \quad r = 0, 1, \dots, n-1$$

gilt. Was die Anzahl der Vorzeichenwechsel betrifft, ist es also unabhängig von der Länge der Irrfahrt am wahrscheinlichsten, keinen Vorzeichenwechsel zu beobachten! Der nächst wahrscheinliche Fall ist, dass genau ein Vorzeichenwechsel auftritt, der dann nächst wahrscheinliche Fall, dass sich genau zwei Vorzeichenwechsel einstellen usw.

Bild 2.44 zeigt ein Stabdiagramm der Verteilung von C_{101} . Die Wahrscheinlichkeit, dass in einer symmetrischen Irrfahrt der Länge 101 überhaupt kein Vorzeichenwechsel beobachtet wird, beträgt beachtenswerte 15,8%, die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens vier Vorzeichenwechsel stattfinden, 68%. Mindestens 10 Vorzeichenwechsel treten nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 4,6% auf!

Ein alternativer Ansatz („Nullstellen-Ausdünnung“)

Wir haben zu Beginn dieses Abschnitts bemerkt, dass es höchstens so viele Vorzeichenwechsel wie Nullstellen geben kann. Hilft uns vielleicht die aus Abschnitt 2.4 bekannte Verteilung der Anzahl N_{2n} aller Nullstellen bis zur Zeit $2n$, um die Verteilung von C_{2n+1} herzuleiten? Die Antwort ist: Ja, wir müssen uns nur vergegenwärtigen, dass jede Nullstelle unabhängig von möglichen anderen Nullstellen mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ zu einem Vorzeichenwechsel führt, und zwar genau dann, wenn die beiden Schritte der Irrfahrt vor und nach der Nullstelle in die

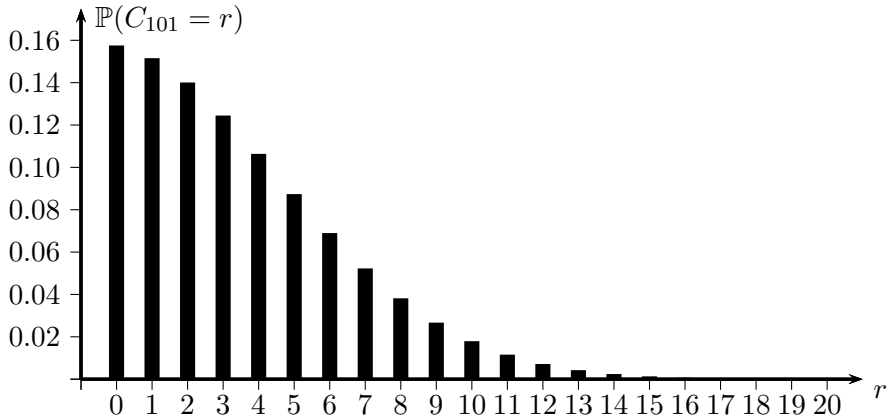


Bild 2.44: Stabdiagramm der Verteilung von C_{101}

gleiche Richtung verlaufen. Die Verteilung von C_{2n+1} müsste sich also ergeben, wenn wir für jede Nullstelle eine faire Münze werfen und sie nur für den Fall, dass Kopf auftritt, als Vorzeichenwechsel deklarieren und zählen. Auf diese Weise dünne wir die Anzahl N_{2n} „stochastisch aus“.

Zur mathematischen Präzisierung seien U_1, U_2, \dots, U_n stochastisch unabhängige Bernoulli-verteilte Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(U_j = 1) = \mathbb{P}(U_j = 0) = 1/2$ für jedes $j = 1, \dots, n$, die auch stochastisch unabhängig von N_{2n} sind. Die oben beschriebene Ausdünnung führt dann auf die Zufallsvariable

$$\tilde{C}_{2n+1} := \sum_{j=1}^{N_{2n}} U_j, \quad (2.78)$$

die – wie wir gleich sehen werden – die gleiche Verteilung wie C_{2n+1} besitzt. Weil der obere Summationsindex N_{2n} eine Zufallsvariable ist, wird der in (2.78) rechts stehende Ausdruck auch als *randomisierte Summe* bezeichnet. Letzte nimmt den Wert $\sum_{j=1}^k U_j$ an, ist also binomialverteilt mit Parametern k und $1/2$, falls N_{2n} den Wert k annimmt. Dabei definieren wir im Fall $k = 0$ die Summe als Null.

Wir bestimmen $\mathbb{P}(\tilde{C}_{2n+1} = r)$, indem wir die randomisierte Summe nach den möglichen Werten k für N_{2n} zerlegen und die Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit anwenden. Da $k \geq r$ sein muss, folgt aufgrund der Unabhängigkeit

von N_{2n} und U_1, \dots, U_n zunächst

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tilde{C}_{2n+1} = r) &= \sum_{k=r}^n \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^k U_j = r \mid N_{2n} = k\right) \mathbb{P}(N_{2n} = k) \\ &= \sum_{k=r}^n \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^k U_j = r\right) \mathbb{P}(N_{2n} = k). \end{aligned}$$

Da $\sum_{j=1}^k U_j$ die Binomialverteilung $\text{Bin}(k, 1/2)$ besitzt, liefert (2.25)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tilde{C}_{2n+1} = r) &= \sum_{k=r}^n \binom{k}{r} \frac{1}{2^k} \binom{2n-k}{n} \frac{1}{2^{2n-k}} \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=r}^n \binom{k}{r} \binom{2n-k}{n}. \end{aligned}$$

Der Vergleich mit (2.77) zeigt, dass wir fertig wären, wenn wir die Gleichung

$$\binom{2n+1}{r+n+1} = \sum_{k=r}^n \binom{k}{r} \binom{2n-k}{n}, \quad r = 0, 1, \dots, n \quad (2.79)$$

zeigen könnten, denn dann besäßen C_{2n+1} und \tilde{C}_{2n+1} die gleiche Verteilung.

Die linke Seite von (2.79) ist nach Lemma 2.1 die Anzahl aller Wege von $(0, 0)$ nach $(2n+1, 2r+1)$. Ein solcher Weg ist in Bild 2.45 skizziert. Jeder Weg von $(0, 0)$ nach $(2n+1, 2r+1)$ muss innerhalb des in Bild 2.45 gestrichelt umrandeten Rechtecks verlaufen. Wir zerlegen die Menge aller Wege von $(0, 0)$ nach $(2n+1, 2r+1)$ danach, welchen Punkt der fett eingezeichneten, eine Strecke auf der Geraden $y = 2r+2-x$ bildenden, Barriere sie *zuerst* treffen. Der letzte Schritt vor dem Erreichen der Barriere muss ein Aufwärtsschritt gewesen sein, also einen Punkt der Geraden $y = -x + 2r$ verlassen haben. Die hierfür in Frage kommenden Punkte haben die Koordinaten $(k, 2r-k)$, wobei $k \in \{r, r+1, \dots, n\}$. Nach Lemma 2.1 gibt es $\binom{k}{r}$ Wege von $(0, 0)$ nach $(k, 2r-k)$. Jeder im Punkt $(k, 2r-k)$ angekommene Weg erreicht im nächsten Schritt den Punkt $(k+1, 2r-k+1)$. Von dort besitzt er nach (2.9) $\binom{2n-k}{n}$ Möglichkeiten, zum Punkt $(2n+1, 2r+1)$ zu gelangen, was (2.79) beweist. ■

$\text{Bin}(1, 1/2)$ -verteilten U_1, \dots, U_n ist

$$\mathbb{E} \left(\sum_{j=1}^{N_{2n}} U_j \right) = \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left(\sum_{j=1}^{N_{2n}} U_j \middle| N_{2n} \right) \right] = \mathbb{E}(N_{2n} \mathbb{E}(U_1)) = \frac{1}{2} \mathbb{E}(N_{2n}).$$

Das Grenzverhalten von C_{2n+1} für $n \rightarrow \infty$ kennzeichnet der folgende Satz (s. [FEL], S. 86):

Satz 2.33. (Grenzverteilung für die Anzahl der Vorzeichenwechsel)

Es gilt für jedes $x \geq 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{C_{2n+1}}{\sqrt{2n+1}} \leq x \right) = 2\Phi(2x) - 1 = 2 \int_0^{2x} \varphi(t) dt. \quad (2.80)$$

BEWEIS: Wir können $x > 0$ voraussetzen, da sonst beide Seiten von (2.80) gleich Null sind. Definieren wir r_n als die kleinste ganze Zahl r mit der Eigenschaft $r \geq x\sqrt{2n+1}$, so folgt aus der Ganzzahligkeit von C_{2n+1} und (2.75)

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\frac{C_{2n+1}}{\sqrt{2n+1}} \geq x \right) &= \mathbb{P}(C_{2n+1} \geq r_n) = \mathbb{P}(M_{2n} \geq 2r_n) \\ &= \mathbb{P} \left(\frac{M_{2n}}{\sqrt{2n}} \geq \frac{2r_n}{\sqrt{2n}} \right). \end{aligned}$$

Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} (2r_n/\sqrt{2n}) = 2x$ liefert Satz 2.53

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{C_{2n+1}}{\sqrt{2n+1}} \geq x \right) = 1 - (2\Phi(2x) - 1),$$

und die Behauptung folgt. ■

Bemerkung 2.34.

Auf der rechten Seite von (2.80) steht die Verteilungsfunktion von $|Z|/2$, wobei Z eine standardnormalverteilte Zufallsvariable ist. Wir können also analog zu früher die Aussage von Satz 2.33 in der kompakten Form

$$\frac{C_{2n+1}}{\sqrt{2n+1}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \frac{1}{2} |Z|, \quad Z \sim N(0, 1), \quad (2.81)$$

schreiben. Im Vergleich zur Grenzverteilung von N_{2n} (vgl. (2.31)) rührt der Faktor $1/2$ in (2.81) gerade vom durchgeführten Ausdünnungsprozess her.

Tabelle 2.5 zeigt einige Werte der mit C bezeichneten Verteilungsfunktion von $|Z|/2$. Da C den Median 0.337 besitzt, folgt aus Satz 2.80 unter anderem, dass für großes n $\mathbb{P}(C_{2n+1} \leq 0.337\sqrt{2n+1}) \approx 0.5$ gilt. In einer Irrfahrt der Länge 10001 gibt es also mit einer Wahrscheinlichkeit von ungefähr 0.5 höchstens 34 Vorzeichenwechsel, und wegen $C(1.29) = 0.99$ treten mehr als 130 Vorzeichenwechsel nur bei jeder hundertsten Irrfahrt dieser Länge auf!

x	$C(x)$	x	$C(x)$	x	$C(x)$
0.00	0.000	0.45	0.632	0.90	0.928
0.05	0.080	0.50	0.683	0.95	0.943
0.10	0.159	0.55	0.729	1.0	0.955
0.15	0.236	0.60	0.770	1.1	0.972
0.20	0.311	0.65	0.806	1.2	0.984
0.25	0.383	0.70	0.839	1.3	0.991
0.30	0.452	0.75	0.866	1.4	0.995
0.35	0.516	0.80	0.890	1.5	0.997
0.40	0.576	0.85	0.911	1.6	0.998

Tabelle 2.5: Verteilungsfunktion $C(x) := 2\Phi(2x) - 1$ von $|Z|/2$, wobei $Z \sim N(0, 1)$

2.12 Das Betragsmaximum

Wie wahrscheinlich ist es, dass eine symmetrische Irrfahrt der Länge n irgendwann einmal die Höhe k oder die Höhe $-k$ erreicht, also mit den Bezeichnungen aus Abschnitt 2.7 mindestens eines der Ereignisse $\{M_n \geq k\}$ oder $\{m_n \leq -k\}$ eintritt? Komplementär dazu gefragt: Mit welcher Wahrscheinlichkeit verläuft eine symmetrische Irrfahrt der Länge n ganz innerhalb eines x -Achsen-zentrierten Korridors der Breite $2(k-1)$? Offenbar führen uns diese Fragen dazu, die Verteilung des mit

$$|M|_n = \max_{j=1, \dots, n} |S_j|$$

bezeichneten *Betragsmaximums* der Irrfahrt zu untersuchen.

Hierzu bestimmen wir zunächst die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(|M|_n \geq k)$ für $k = 1, \dots, n$. Die Fälle $k = 1$ und $k = n$ sind schnell abgehandelt; im ersten gilt $\mathbb{P}(|M|_n \geq 1) = 1$, im zweiten $\mathbb{P}(|M|_n \geq n) = 2/2^n$, da es genau zwei Wege der Länge n gibt, für die $|M|_n$ den maximal möglichen Wert n annimmt, nämlich die stets auf- bzw. absteigenden. Es sei also $2 \leq k \leq n - 1$ vorausgesetzt.

Wir unterdrücken im Folgenden das fest gewählte $k \in \{2, \dots, n - 1\}$ und schreiben kurz r_n für die Anzahl aller n -Wege mit der Eigenschaft $|M|_n \geq k$. Die Bestimmung von r_n und damit $\mathbb{P}(|M|_n \geq k)$ erfolgt durch elementares Abzählen mit dem Ein-Ausschluss-Prinzip. Für $s \geq 1$ bezeichne hierzu

$r_{n,s}^+$ die Anzahl aller n -Wege, die die Höhe k und danach noch mindestens $s - 1$ mal die jeweils gegenüberliegende Höhe, also $-k$, dann k usw. treffen

und

$r_{n,s}^-$ die Anzahl aller n -Wege, die die Höhe $-k$ und danach noch mindestens $s - 1$ mal die jeweils gegenüberliegende Höhe, also k , dann $-k$ usw. treffen.

Da ein solcher Weg mindestens $k + 2k(s - 1)$ Zeitschritte verbraucht, muss $k + 2k(s - 1) \leq n$ gelten, was

$$s \leq s_n := s_n(k) := \left\lfloor \frac{n - k}{2k} + 1 \right\rfloor \quad (2.82)$$

zur Folge hat. In der Summe $r_{n,1}^+ + r_{n,1}^-$ sind alle Wege mindestens einmal gezählt, die die Höhe k oder $-k$ treffen. Diejenigen Wege, die wie der in Bild 2.46 dargestellte sowohl die Höhe k als auch die Höhe $-k$ erreichen, werden jedoch doppelt gezählt. Subtrahiert man dementsprechend die Summe $r_{n,2}^+ + r_{n,2}^-$, so sind diejenigen Wege genau einmal erfasst, die entweder genau eine der Höhen k oder $-k$ (u.U. mehrfach) treffen oder beide Höhen treffen, aber danach nicht wieder zu der zuerst getroffenen Höhe zurückkehren. Der in Bild 2.46 dargestellte Weg wird jedoch nicht mehr mitgezählt, da er zu jedem der vier Summanden $r_{n,j}^+$, $r_{n,j}^-$, $j = 1, 2$, beiträgt. Aus diesem Grund müssen wir die Summe $r_{n,3}^+ + r_{n,3}^-$ addieren (man beachte, dass der Weg aus Bild 2.46 zur Summe $r_{n,3}^+$ beiträgt).

Fährt man auf diese Weise fort und bedenkt, dass das Verfahren des Ein- und Ausschließens wegen (2.82) abbricht und aus Symmetriegründen (Spiegelung an der x -Achse!) $r_{n,s}^+ = r_{n,s}^-$, $s \leq s_n$, gilt, so folgt

$$r_n = 2 \sum_{s=1}^{s_n} (-1)^{s-1} r_{n,s}^+$$

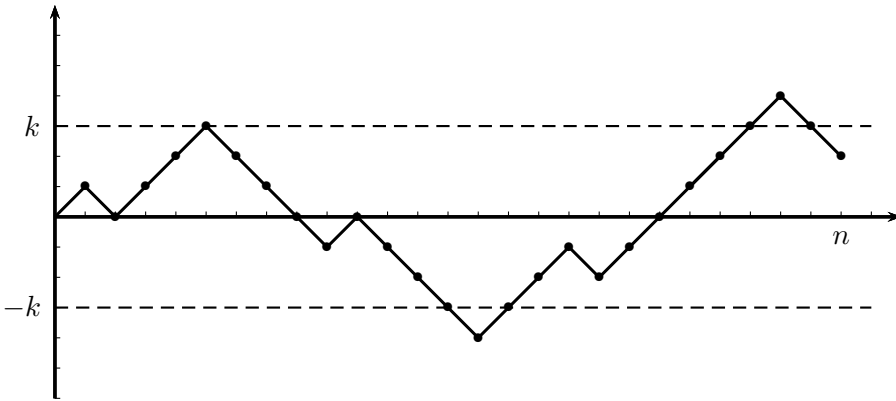


Bild 2.46: Weg mit $|M|_n \geq k$, der zuerst $+k$, danach $-k$ und danach $+k$ trifft

und somit

$$\mathbb{P}(|M|_n \geq k) = 2 \sum_{s=1}^{s_n} (-1)^{s-1} \frac{r_{n,s}^+}{2^n}.$$

In dieser alternierenden Summe (in der s_n und $r_{n,s}^+$ von k abhängen!) ist der Bruch die Wahrscheinlichkeit, dass eine Irrfahrt der Länge n die Höhe k erreicht und danach in der Diktion von Abschnitt 2.9 noch mindestens $s-1$ mal die Leiter um je $2k$ Stufen abwechselnd hinab- und hinaufsteigt. Die hierfür benötigte Zeit ist – ausgedrückt in den Leiterzeiten von Abschnitt 2.9 – verteilt wie die Summe unabhängiger Leiterzeiten, wobei insgesamt $k + 2k(s-1)$ Leitersprossen genommen werden müssen. Die hierfür benötigte Zeit ist somit verteilt wie $V_{k+2k(s-1)}$. Da diese Zeit genau dann höchstens gleich n ist, wenn das oben beschriebene Ereignis eintritt, gilt $r_{n,s}^+/2^n = \mathbb{P}(V_{(2s-1)k} \leq n)$, und somit erhalten wir nach Lemma 2.21 und Satz 2.12 das folgende Resultat:

Satz 2.35. (Verteilung von $|M|_n$)

Es gilt für jedes $k = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|M|_n \geq k) &= 2 \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{n}{2k} + \frac{1}{2} \rfloor} (-1)^{s-1} \mathbb{P}(M_n \geq (2s-1)k) \\ &= 2 \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{n}{2k} + \frac{1}{2} \rfloor} (-1)^{s-1} \sum_{j=(2s-1)k}^n \frac{1}{2^n} \binom{n}{\lfloor \frac{n+j+1}{2} \rfloor}. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(|M|_n = k)$ können hieraus wie üblich durch Differenzbildung gewonnen werden. Für spätere Zwecke notieren wir noch, dass nach dem Vorgehen des Ein- Ausschluss-Prinzips die Partialsummen in (2.83) abwechselnd zu groß und zu klein sind, d.h. es gelten die sog. *Bonferroni*¹⁰-Ungleichungen

$$\mathbb{P}(|M|_n \geq k) \leq 2 \sum_{s=1}^{2r+1} (-1)^{s-1} \mathbb{P}(M_n \geq (2s-1)k), \quad (2.84)$$

$$\mathbb{P}(|M|_n \geq k) \geq 2 \sum_{s=1}^{2r} (-1)^{s-1} \mathbb{P}(M_n \geq (2s-1)k) \quad (2.85)$$

für jedes feste r , für das die obere Summationsgrenze in (2.84) bzw. (2.85) mindestens 1 und höchstens gleich s_n ist.

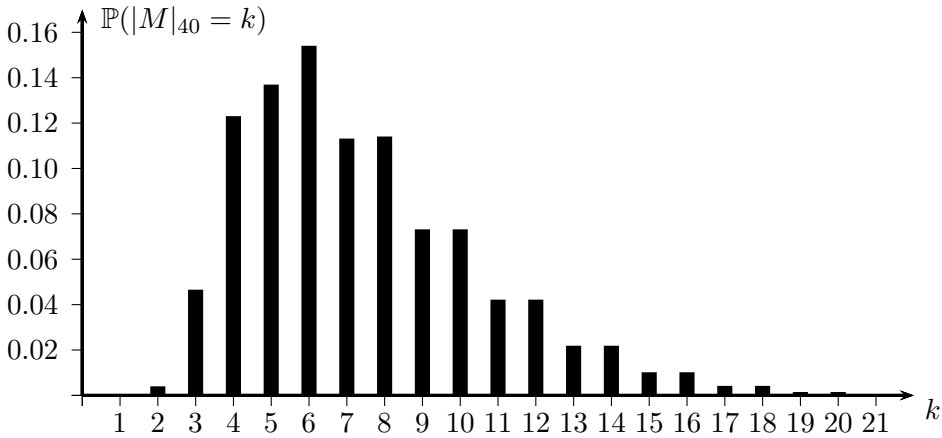


Bild 2.47: Stabdiagramm der Verteilung von $|M|_{40}$

Bild 2.47 zeigt das Stabdiagramm der Verteilung von $|M|_{40}$. Es fällt auf, dass die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(|M|_{40} = 2j)$ und $\mathbb{P}(|M|_{40} = 2j-1)$ für $j \geq 4$ etwa gleich groß sind. Um dieses Phänomen zu verstehen, beachte man, dass allgemein

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|M|_{2n} \geq k) &= \mathbb{P}(\{M_{2n} \geq k\} \cup \{m_{2n} \leq -k\}) \\ &= \mathbb{P}(M_{2n} \geq k) + \mathbb{P}(m_{2n} \leq -k) - \mathbb{P}(M_{2n} \geq k, m_{2n} \leq -k) \\ &= 2\mathbb{P}(M_{2n} \geq k) - \mathbb{P}(M_{2n} \geq k, m_{2n} \leq -k) \end{aligned}$$

¹⁰Carlo Emilio Bonferroni (1892–1960), Professor für Finanzmathematik in Bari und Florenz. Hauptarbeitsgebiete: Finanzmathematik, Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, Analysis.

gilt. Für im Vergleich zu n genügend großes k ist die Schnitt-Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(M_{2n} \geq k, m_{2n} \leq -k)$ so klein, dass für solche k die Approximation $\mathbb{P}(|M|_{2n} \geq k) \approx 2\mathbb{P}(M_{2n} \geq k)$ und somit (Differenzbildung!) auch

$$\mathbb{P}(|M|_{2n} = k) \approx 2\mathbb{P}(M_{2n} = k) \quad (2.86)$$

gilt. Für hinreichend großes k steht in (2.86) sogar das Gleichheitszeichen, da das gleichzeitige Eintreten der Ereignisse $\{M_{2n} = k\}$ und $\{m_{2n} = -k\}$ notwendigerweise die Ungleichung $k + 2k \leq 2n$ nach sich zieht. Der Vergleich von Bild 2.47 mit dem in Bild 2.27 dargestellten Stabdiagramm der Verteilung von M_{40} zeigt, dass die Approximation (2.86) für $k \geq 9$ sehr gut ist. Bezüglich des asymptotischen Verhaltens von $|M|_n$ für $n \rightarrow \infty$ gilt folgender Grenzwertsatz:

Satz 2.36. (Grenzverteilung von $|M|_n$)

Es gilt für jedes $x > 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{|M|_n}{\sqrt{n}} \leq x\right) = R(x),$$

wobei

$$R(x) := 1 - 4 \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} (1 - \Phi((2s-1)x)). \quad (2.87)$$

BEWEIS: Zu $x > 0$ sei $k_n = k_n(x)$ die kleinste ganze Zahl, die größer oder gleich $x\sqrt{n}$ ist. Aus (2.83) folgt dann wegen der Ganzzahligkeit von $|M|_n$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\frac{|M|_n}{\sqrt{n}} \geq x\right) &= \mathbb{P}(|M|_n \geq k_n) \\ &= 2 \sum_{s=1}^{s_n} (-1)^{s-1} \mathbb{P}\left(\frac{M_n}{\sqrt{n}} \geq (2s-1) \frac{k_n}{\sqrt{n}}\right) \end{aligned} \quad (2.88)$$

mit $s_n = s_n(k_n)$ wie in (2.82). Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n/\sqrt{n} = x$ liefert Satz 2.13 die Konvergenz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{M_n}{\sqrt{n}} \geq (2s-1) \frac{k_n}{\sqrt{n}}\right) = 1 - (2\Phi((2s-1)x) - 1) = 2(1 - \Phi((2s-1)x))$$

jedes einzelnen Summanden in (2.88). Die Bonferroni-Ungleichungen ergeben dann die Abschätzungen

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{|M|_n}{\sqrt{n}} \geq x\right) \leq 4 \sum_{s=1}^{2r+1} (-1)^{s-1} (1 - \Phi((2s-1)x)), \quad r = 0, 1, \dots$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{|M|_n}{\sqrt{n}} \geq x \right) \geq 4 \sum_{s=1}^{2r} (-1)^{s-1} (1 - \Phi((2s-1)x)), \quad r = 1, 2, \dots$$

Da die Reihe $\sum_{s=1}^m (-1)^{s-1} (1 - \Phi((2s-1)x))$ für $m \rightarrow \infty$ nach dem Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen konvergiert, folgt die Behauptung durch Grenzübergang $r \rightarrow \infty$ und Komplementbildung unter Beachtung von (6.6). ■

Bemerkung 2.37.

Die in (2.87) auftretende und um $R(x) := 0$ für $x \leq 0$ ergänzte Funktion $R : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt die Eigenschaften einer Verteilungsfunktion, ist also insbesondere monoton wachsend. Diese aus 2.87 nicht unmittelbar einzusehende Eigenschaft ergibt sich aus der Tatsache, dass R nach Satz 2.36 Grenzwert einer Folge monoton wachsender Funktionen ist. Die zugehörige Verteilung wird auch als *Rényi*¹¹-Verteilung bezeichnet. Nach Satz 2.36 ist die Rényi-Verteilung die Grenzverteilung des mit $1/\sqrt{n}$ reskalierten Betragsmaximums der einfachen symmetrischen Irrfahrt für $n \rightarrow \infty$. Ist Z eine Zufallsvariable mit der Verteilungsfunktion R (kurz: $Z \sim R$), so kann die Aussage von Satz 2.36 in der kompakten Form

$$\frac{|M|_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} Z, \quad Z \sim R,$$

geschrieben werden.

Die Dichte und die Verteilungsfunktion der Rényi-Verteilung sind in Bild 2.48 veranschaulicht. Werte der Verteilungsfunktion R finden sich in Tabelle 2.6. Sowohl zur Erstellung von Bild 2.48 als auch zur Anfertigung von Tabelle 2.6 wurde die gegenüber der Darstellung (2.87) wesentlich schneller konvergierende Reihendarstellung (s. [CH], S. 223)

$$R(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{2s+1} \exp \left(-(2s+1)^2 \frac{\pi^2}{8x^2} \right), \quad x > 0,$$

verwendet. Die Dichte r von R ergibt sich hieraus durch gliedweise Differentiation, d.h. es ist

$$r(x) = \frac{\pi}{x^3} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (2s+1) \exp \left(-(2s+1)^2 \frac{\pi^2}{8x^2} \right), \quad x > 0.$$

¹¹Alfréd Rényi (1921–1970), ungarischer Mathematiker, ab 1950 Direktor des später nach ihm benannten Instituts für Angewandte Mathematik der Ungarischen Akademie der Wissenschaften. Seit 1952 Professor an der Universität Budapest. Hauptarbeitsgebiete: Zahlentheorie, Wahrscheinlichkeitstheorie, Kombinatorik, Graphentheorie, Analysis.

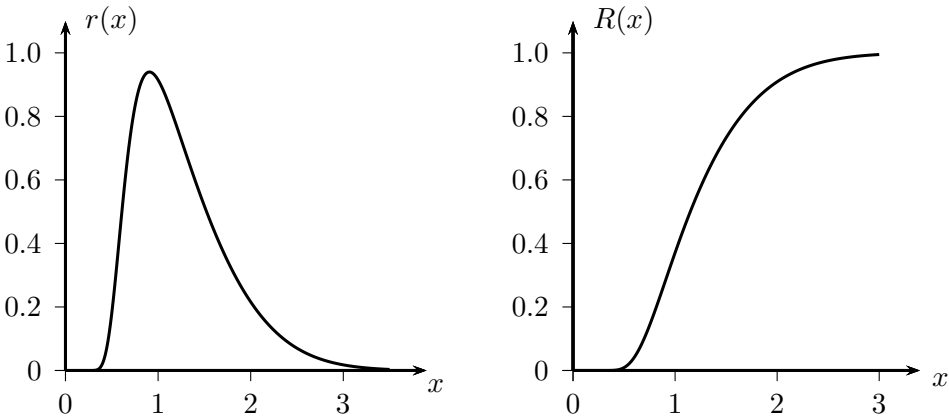


Bild 2.48: Dichte (links) und Verteilungsfunktion (rechts) der Rényi-Verteilung

Wegen $R(1.149) = 0.5$ besagt Satz 2.36 unter anderem, dass in einer symmetrischen Irrfahrt der Länge 10000 der größte Abstand des Weges zur x -Achse mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ höchstens 115 beträgt. In der Deutung der Irrfahrt als ein aus 10000 Münzwürfen bestehendes Spiel zwischen zwei Personen ist also im Durchschnitt bei jedem zweiten Spiel dieser Länge damit zu rechnen, dass im Verlauf des Spiels irgendwann einmal einer der Spieler mit mindestens 116 Würfeln in Führung liegt.

Verteilungsfunktion $R(x)$					
x	$R(x)$	x	$R(x)$	x	$R(x)$
0.00	0.000	1.20	0.540	2.10	0.929
0.40	0.001	1.30	0.613	2.20	0.944
0.50	0.009	1.40	0.677	2.242	0.950
0.60	0.041	1.50	0.733	2.30	0.957
0.70	0.103	1.60	0.781	2.40	0.967
0.80	0.185	1.70	0.822	2.50	0.975
0.90	0.278	1.80	0.856	2.60	0.981
1.00	0.371	1.90	0.885	2.70	0.986
1.10	0.459	1.96	0.900	2.80	0.990
1.149	0.500	2.0	0.909	2.90	0.993

Tabelle 2.6: Verteilungsfunktion der Rényi-Verteilung

2.13 Ein Test auf Symmetrie

Nehmen wir an, n Personen mit Hypertonie erhalten ein blutdrucksenkendes Medikament. Bezeichnet Y_j bzw. Z_j den (zufallsbehafteten) Blutdruck des j -ten Patienten vor bzw. nach Verabreichung des Medikamentes, so können unter vereinfachenden Modellannahmen die Differenzen $D_j := Y_j - Z_j$ ($j = 1, \dots, n$) als unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen angesehen werden. Die unbekannte, als stetig angenommene Verteilungsfunktion von D_1 sei mit $F(x) := \mathbb{P}(D_1 \leq x)$ bezeichnet. Falls das Medikament keine Wirkung besitzt, ist die Differenz $Y_1 - Z_1$ („vorher minus nachher“) stochastisch nicht von $Z_1 - Y_1$ („nachher minus vorher“) zu unterscheiden, was bedeutet, dass D_1 und $-D_1$ die gleiche Verteilungsfunktion besitzen. Eine hierzu äquivalente Formulierung besagt, dass die Verteilung von D_1 symmetrisch um 0 ist.

Wegen $\mathbb{P}(-D_1 \leq x) = \mathbb{P}(D_1 \geq -x) = 1 - F(-x)$ kann die mit H_0 bezeichnete Hypothese der Verteilungsgleichheit von D_1 und $-D_1$ – also in der obigen Situation der Unwirksamkeit des Medikaments – in der Form

$$H_0 : \text{Es gilt } F(x) + F(-x) - 1 = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.89)$$

geschrieben werden.

Butler ([BU]) schlug vor, zur Prüfung von H_0 die sog. *empirische Verteilungsfunktion*

$$\hat{F}_n(x) := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}\{D_j \leq x\}, \quad x \in \mathbb{R},$$

von D_1, \dots, D_n zu bilden und die Hypothese für große Werte der Teststatistik

$$Q_n := \sup_{x \leq 0} |\hat{F}_n(x) + \hat{F}_n(-x) - 1| \quad (2.90)$$

abzulehnen. Dieses Vorgehen erscheint vernünftig, konvergiert doch $\hat{F}_n(x)$ als arithmetisches Mittel unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen mit Erwartungswert $\mathbb{E}(\mathbf{1}\{D_1 \leq x\}) = \mathbb{P}(D_1 \leq x) = F(x)$ nach dem Gesetz Großer Zahlen für $n \rightarrow \infty$ stochastisch (und auch mit Wahrscheinlichkeit Eins) gegen $F(x)$. Nach einem Satz von Glivenko¹² und Cantelli¹³ gilt sogar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\hat{F}_n(x) - F(x)| = 0$$

¹²Waleri Iwanowitsch Glivenko (1897–1940), ab 1928 Professor am Pädagogischen Institut der Universität Moskau. Hauptarbeitsgebiete: Mathematische Logik, Wahrscheinlichkeitstheorie.

¹³Francesco Paolo Cantelli (1875–1966), ab 1903 Versicherungsmathematiker im italienischen Finanzministerium, ab 1925 Professor für Finanz- und Versicherungsmathematik an verschiedenen Universitäten. Hauptarbeitsgebiete: Finanzmathematik und Stochastik.

mit Wahrscheinlichkeit Eins. Dabei sei D_1, D_2, \dots eine Folge stochastisch unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F , die alle auf dem gleichen Wahrscheinlichkeitsraum definiert sind. Die Existenz eines solchen Wahrscheinlichkeitsraumes ist nach allgemeinen Sätzen gesichert (siehe Abschnitt 6.1). Man beachte, dass das Supremum in (2.90) nur über $x \leq 0$ gebildet wird, weil die Hypothese H_0 schon dann gilt, wenn man die Gültigkeit der in (2.89) stehenden Gleichung nur für $x \leq 0$ fordert.

Was hat diese Fragestellung mit dem Betragsmaximum einer symmetrischen Irrfahrt zu tun? Nun, bei jedem Test muss man sich zunächst Gedanken über die Verteilung der Teststatistik – also in unserem Fall Q_n – für die Situation machen, dass die Hypothese H_0 gilt. Bei Gültigkeit von H_0 möchte man ja nur mit einer kleinen vorgegebenen Wahrscheinlichkeit zur Ablehnung von H_0 gelangen und somit einen Fehler erster Art begehen. Wir werden sehen, dass unter H_0 die Zufallsvariable nQ_n die gleiche Verteilung wie das Betragsmaximum $|M|_n$ der einfachen symmetrischen Irrfahrt besitzt, und zwar völlig unabhängig von der unter H_0 unbekannten zugrunde liegenden Verteilungsfunktion F , solange letztere stetig ist! Hierzu setzen wir

$$R_n(x) := n \left(\widehat{F}_n(x) + \widehat{F}_n(-x) - 1 \right)$$

und beachten, dass wegen $1 = \widehat{F}_n(-x) + n^{-1} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}\{D_j > -x\}$ die Identität

$$R_n(x) = \sum_{j=1}^n (\mathbf{1}\{D_j \leq x\} - \mathbf{1}\{D_j > -x\}) \quad (2.91)$$

besteht. Im Folgenden nehmen wir an, dass $|D_1|, |D_2|, \dots, |D_n|$ paarweise verschieden und von 0 verschieden sind, denn dieses Ereignis hat wegen der Stetigkeit von F die Wahrscheinlichkeit Eins. Im Fall von $x < \min(-|D_1|, \dots, -|D_n|)$ gilt $R_n(x) = 0$, da jede der in (2.91) auftretenden Indikatorvariablen gleich 0 ist. An der Stelle $x = -|D_j|$ springt die Funktion R_n um eine Einheit nach oben oder unten je nachdem, ob $D_j < 0$ oder $D_j > 0$ gilt. Dabei ist sie wegen des Kleiner-Gleich- und des Größer-Zeichens in (2.91) in einer Sprungstelle nach oben rechtsseitig und in einer Sprungstelle nach unten linksseitig stetig. Bild 2.49 zeigt den Graphen von R_n , wobei der Funktionswert in einer Sprungstelle durch einen kleinen ausgefüllten Kreis hervorgehoben ist.

Wir überlegen uns jetzt, dass unter der Hypothese H_0 die $2n$ Zufallsvariablen $|D_1|, \dots, |D_n|, \operatorname{sgn}(D_1), \dots, \operatorname{sgn}(D_n)$ stochastisch unabhängig voneinander sind und $\mathbb{P}(\operatorname{sgn}(D_j) = 1) = \mathbb{P}(\operatorname{sgn}(D_j) = -1) = 1/2$ ($j = 1, \dots, n$) gilt. Dabei bezeichne wie üblich $\operatorname{sgn}(t)$ das Vorzeichen einer reellen Zahl t . Zunächst ergibt sich

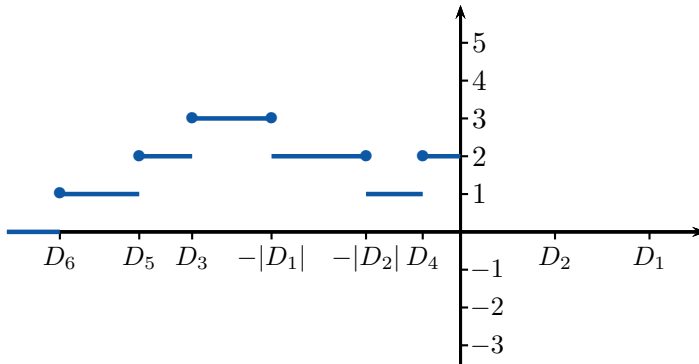


Bild 2.49: Graph der Funktion $R_n(x)$

wegen der Stetigkeit von F unter H_0 für jedes $j = 1, \dots, n$

$$\frac{1}{2} = F(0) = \mathbb{P}(D_j < 0) = \mathbb{P}(\text{sgn}(D_j) = 1) = \mathbb{P}(\text{sgn}(D_j) = -1)$$

sowie für $x > 0$

$$\mathbb{P}(|D_j| \leq x) = \mathbb{P}(-x \leq D_j \leq x) = F(x) - F(-x) = 2F(x) - 1.$$

Weiter gilt für $x > 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{sgn}(D_j) = 1, |D_j| \leq x) &= \mathbb{P}(0 < D_j \leq x) = F(x) - F(0) \\ &= F(x) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (2F(x) - 1) \\ &= \mathbb{P}(\text{sgn}(D_j) = 1) \mathbb{P}(|D_j| \leq x). \end{aligned}$$

Da D_1, \dots, D_n stochastisch unabhängig sind, folgt die Behauptung.

Mit dieser Erkenntnis wird klar, dass der Graph der Funktion R_n wie eine einfache symmetrische Irrfahrt der Länge n gleich wahrscheinliche Aufwärts- oder Abwärtsschritte durchläuft, die stochastisch unabhängig voneinander sind. Zudem kommt es für die Supremumbildung in (2.90) nicht darauf an, *wo* die Sprungstellen der Funktion R_n liegen, solange sie verschieden voneinander sowie von 0 verschieden sind (hier geht die Stetigkeit von F ein!). Wir können also unter H_0 ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass F eine spezielle Verteilungsfunktion, z.B. die der Gleichverteilung auf dem Intervall $[-1/2, 1/2]$, ist. Aber auch diese würde uns nur verschiedene Sprungstellen $-|D_1|, \dots, -|D_n|$ liefern. Im Hinblick auf die Verteilung von Q_n ist es somit gleichbedeutend, eine im Ursprung startende symmetrische Irrfahrt der Länge n zu durchlaufen. Da es zudem für die Supremumbildung in (2.90) irrelevant ist, ob man zwischen aufeinander folgenden Sprunghöhen linear interpoliert oder nicht, haben wir folgendes Resultat erhalten:

Satz 2.38. (H_0 -Verteilung der Testgröße von Butler)

Unter der Symmetrie-Hypothese H_0 besitzt nQ_n die gleiche Verteilung wie das Betragsmaximum $|M|_n$ einer symmetrischen Irrfahrt.

Dieses Ergebnis erlaubt uns, den Test in einer konkreten Situation durchzuführen. Bei einer zugelassenen Wahrscheinlichkeit α für einen Fehler erster Art würde man die Hypothese H_0 genau dann verwerfen, wenn die Ungleichung $Q_n \geq k_0/n$ erfüllt ist. Dabei ist k_0 die kleinste natürliche Zahl k mit der Eigenschaft

$$\mathbb{P}_{H_0} \left(Q_n \geq \frac{k}{n} \right) = \mathbb{P}(|M|_n \geq k) \leq \alpha, \quad (2.92)$$

und $\mathbb{P}(|M|_n \geq k)$ ist in (2.83) gegeben. Man beachte, dass wir die links stehende Wahrscheinlichkeit mit dem Index H_0 gekennzeichnet haben, um zu betonen, dass die Berechnung der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{Q_n \geq k/n\}$ unter der Annahme erfolgt, dass die Hypothese H_0 zutrifft. Dann gilt ja nach obigem Satz das in (2.92) stehende Gleichheitszeichen.

Tabelle 2.7 zeigt den diastolischen Blutdruck von 15 Patienten direkt vor und zwei Stunden nach der Einnahme eines blutdrucksenkenden Präparats (Quelle: [HA], S. 56). In der letzten Zeile stehen die Wegschritte der zugehörigen Irrfahrt; diese ergeben sich aus den Vorzeichen der jeweiligen Differenzen der darüber stehenden Werte.

130	122	124	104	112	101	121	124	115	102	98	119	106	107	100
125	121	121	106	101	85	98	105	103	98	90	98	110	103	82
1	1	1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	1	1

Tabelle 2.7: Diastolischer Blutdruck (in mm Hg) vor (erste Zeile) und nach (zweite Zeile) Einnahme eines Medikaments bei 15 Patienten sowie Wegschritte der zugehörigen Irrfahrt (letzte Zeile)

Aus der letzten Zeile ist ersichtlich, dass die Testgröße Q_{15} von Butler für diesen Datensatz den Wert $11/15$ annimmt. Wegen $\mathbb{P}_{H_0}(Q_{15} \geq 11/15) = \mathbb{P}(|M|_{15} \geq 11) = 0.00836$ ist das erhaltene Resultat unter H_0 so unwahrscheinlich, dass die Hypothese der Unwirksamkeit des Medikaments selbst bei einer zugelassenen Wahrscheinlichkeit von 0.01 für einen Fehler erster Art verworfen wird.

Da $|M|_n/\sqrt{n}$ nach Satz 2.36 asymptotisch für $n \rightarrow \infty$ eine Rényi-Verteilung besitzt, folgt unter H_0

$$\sqrt{n}Q_n = \sqrt{n} \sup_{x \leq 0} |\hat{F}_n(x) + \hat{F}_n(-x) - 1| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} Z, \quad Z \sim R. \quad (2.93)$$

Wegen $R(2.242) = 0.95$ (s. Tabelle 2.6) verwirft man also bei großem n die Hypothese der Symmetrie der Verteilung um 0 im Fall $\alpha = 0.05$, falls die Ungleichung

$$Q_n \geq \frac{2.242}{\sqrt{n}}$$

erfüllt ist. Dieser Test besitzt asymptotisch für $n \rightarrow \infty$ das Niveau 0.05, d.h. es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{H_0}(Q_n \geq 2.242/\sqrt{n}) = 0.05$.

Wir wollen uns abschließend überlegen, wie sich der Test von Butler bei wachsendem Stichprobenumfang n verhält, wenn die Hypothese H_0 nicht gilt. In diesem Fall gibt es mindestens ein $x_0 \leq 0$ mit $\delta := |F(x_0) + F(-x_0) - 1| > 0$. Wählen wir ein $\varepsilon > 0$ so, dass $0 < \delta - \varepsilon$ gilt, so folgt wegen der stochastischen Konvergenz von $|\hat{F}_n(x_0) + \hat{F}_n(-x_0) - 1|$ gegen δ und der Ungleichung $Q_n \geq |\hat{F}_n(x_0) + \hat{F}_n(-x_0) - 1|$ die Limesbeziehung $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Q_n \geq \delta - \varepsilon) = 1$ und somit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\sqrt{n}Q_n \geq c) = 1 \quad \text{für jedes feste } c > 0.$$

Da nach (2.93) $\sqrt{n}Q_n$ unter H_0 eine Grenzverteilung besitzt und somit die Folge der kritischen Werte des mit $\sqrt{n}Q_n$ als Prüfgröße operierenden Tests beschränkt bleibt, konvergiert die Ablehnwahrscheinlichkeit von H_0 im Fall der Nichtgültigkeit der Hypothese für $n \rightarrow \infty$ gegen Eins. Der Symmetrie-Test von Butler ist somit konsistent gegen jede feste Alternative zu H_0 .

2.14 Dualität: Neue Einsichten

Das stochastische Verhalten einer einfachen symmetrischen Irrfahrt ist vollständig durch die Unabhängigkeit der (die Schritt-Richtungen beschreibenden) Zufallsvariablen X_1, X_2, \dots und die Annahme $\mathbb{P}(X_j = 1) = \mathbb{P}(X_j = -1) = 1/2$ ($j \geq 1$) der Gleichwahrscheinlichkeit von Auf- und Abwärtsbewegungen gekennzeichnet. Unter diesen Annahmen sind alle 2^n symmetrischen Irrfahrten der Länge n gleich wahrscheinlich. Die Höhe einer Irrfahrt zum Zeitpunkt $k \geq 0$ ist – mit der Konvention, eine leere Summe gleich 0 zu setzen – gleich $S_k = X_1 + \dots + X_k$.

Wir werden jetzt zu einer Irrfahrt der Länge n eine sog. *duale Irrfahrt* konstruieren, die das gleiche stochastische Verhalten aufweist und neue überraschende Einsichten vermittelt (s. [FEL], S. 91ff.). Hierzu setzen wir

$$X_1^* := X_n, \quad X_2^* := X_{n-1}, \quad \dots, \quad X_n^* := X_1. \quad (2.94)$$

Da die Zufallsvektoren (X_1, \dots, X_n) und (X_1^*, \dots, X_n^*) die gleiche Verteilung besitzen (es gilt $\mathbb{P}(X_1 = a_1, \dots, X_n = a_n) = \mathbb{P}(X_1^* = a_1, \dots, X_n^* = a_n) = 2^{-n}$ für jede Wahl von $(a_1, \dots, a_n) \in \{-1, 1\}^n$), besitzen auch gleiche Funktionen dieser Vektoren dieselbe Verteilung. Zu X_1^*, \dots, X_n^* gehören die Partialsummen

$$S_0^* := 0, \quad S_k^* := X_1^* + \dots + X_k^* = S_n - S_{n-k}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.95)$$

Die duale Irrfahrt $\{(k, S_k^*) : 0 \leq k \leq n\}$ geht aus der ursprünglichen Irrfahrt $\{(k, S_k) : 0 \leq k \leq n\}$ dadurch hervor, dass man letztere einer 180°-Drehung um ihren Endpunkt (n, S_n) unterwirft und die so erhaltene Irrfahrt im Ursprung starten lässt (Bild 2.50).

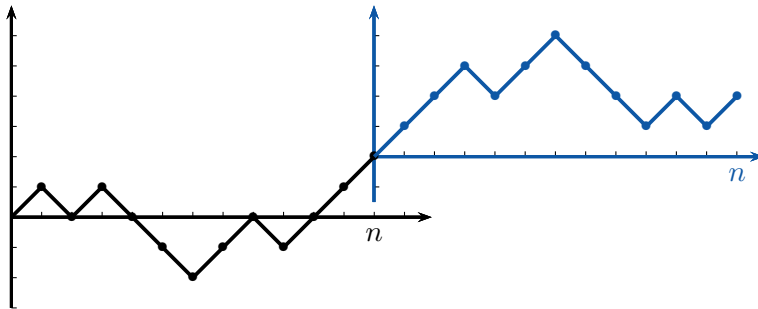


Bild 2.50: Irrfahrt und duale Irrfahrt (180°-Drehung um Endpunkt)

Da die obige Drehung gleichbedeutend mit einer Punktspiegelung der Irrfahrt an deren Endpunkt ist, handelt es sich beim Übergang zur dualen Irrfahrt geometrisch um ein „Punktspiegelungsprinzip“. Dieses folgt der sprichwörtlichen Redewendung „die letzten werden die ersten sein und die ersten die letzten“, denn (2.94) bedeutet ja eine Permutation der Auf- und Abwärtsschritte in obigem Sinn.

Da jedem Ereignis, das mithilfe von S_0, S_1, \dots, S_n beschrieben werden kann, ein gleich wahrscheinliches *duales Ereignis* entspricht, das durch Ersetzen von S_k durch S_k^* ($k = 0, 1, \dots, n$) entsteht, kann man gespannt sein, ob durch dieses *Dualitätsprinzip* neue Erkenntnisse über die symmetrische Irrfahrt gewonnen werden können.

Rekord zur Zeit n (Erstbesuch im Endpunkt am Schluss)

Wie wahrscheinlich ist es, dass eine symmetrische Irrfahrt der Länge $n \geq 2$ erstmals zur Zeit n in der Höhe S_n ist? Mit anderen Worten: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses

$$B_n := \{S_n > \max(S_0, \dots, S_{n-1})\} \cup \{S_n < \min(S_0, \dots, S_{n-1})\}?$$

Diese Frage lässt sich leicht durch Übergang zur dualen Irrfahrt beantworten: Das Ereignis $\{S_n > \max(S_0, \dots, S_{n-1})\}$ ist nach (2.95) zum dualen Ereignis

$$\{S_n - S_{n-k} > 0 \text{ für } k = 1, \dots, n\} = \{S_1^* > 0, \dots, S_n^* > 0\}$$

äquivalent. In gleicher Weise gilt

$$\begin{aligned} \{S_n < \min(S_0, \dots, S_{n-1})\} &= \{S_n - S_{n-k} < 0 \text{ für } k = 1, \dots, n\} \\ &= \{S_1^* < 0, \dots, S_n^* < 0\}, \end{aligned}$$

und man erhält

$$\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(S_1^* \neq 0, \dots, S_n^* \neq 0) = \mathbb{P}(S_1 \neq 0, \dots, S_n \neq 0).$$

Da $S_{2j} > 0$ notwendigerweise $S_{2j+1} > 0$ nach sich zieht und diese Implikation auch für den Fall des Kleiner-Zeichens gilt, folgt mit dem Hauptlemma und Folgerung 2.1 für jedes $j \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(B_n) = \frac{\binom{2j}{j}}{2^{2j}}, \quad \text{falls } n \in \{2j, 2j+1\}.$$

In der Einkleidung einer Irrfahrt als wiederholtes Münzwurfspiel zwischen zwei Personen gibt es also nach dem Hauptlemma genauso viele Spielverläufe geradzähliger Länge, die am Ende zu einem Gleichstand führen, wie es Spielverläufe gibt, bei denen der letzte Spielstand im Verlauf des Spiels vorher nie auftrat!

Maxima zur Zeit n und Leiterzeiten

Geben wir zusätzlich zur Forderung $S_n > \max(S_0, \dots, S_{n-1})$ noch einen Wert k mit $1 \leq k \leq n$ für S_n vor, so gilt mit der in Abschnitt 2.9 eingeführten Leiterzeit $V_k = \inf\{n \geq 1 : S_n = k\}$ die Ereignisgleichheit

$$\{S_n > \max(S_0, \dots, S_{n-1}), S_n = k\} = \{V_k = n\}.$$

Da das links stehende Ereignis zum dualen Ereignis $\{S_1^* > 0, \dots, S_n^* > 0, S_n^* = k\}$ korrespondiert, gilt

$$\mathbb{P}(V_k = n) = \mathbb{P}(S_1^* > 0, \dots, S_n^* > 0, S_n^* = k) \quad (2.96)$$

(man beachte, dass Bild 2.50 den Fall $k = 2$ illustriert). Die für das Eintreten des Ereignisses $\{S_1^* > 0, \dots, S_n^* > 0, S_n^* = k\}$ günstigen n -Wege wurden auf Seite 12 abgezählt (es handelt sich um ein Stimmzettelpuzzle mit $a + b = n$ und $a - b = k$). Mit (2.96) folgt das schon in Abschnitt 2.9, Satz 2.23, auf anderem Weg hergeleitete Resultat

$$\mathbb{P}(V_k = n) = 2^{-n} \left(\binom{n}{\frac{n+k}{2}} - 2 \binom{n-1}{\frac{n+k}{2}} \right) = 2^{-n} \frac{k}{n} \binom{n}{\frac{n+k}{2}}.$$

Nullstellen und Besuche der Höhe im Endpunkt

In Abschnitt 2.4 haben wir die Nullstellenanzahl

$$N_{2n} := \sum_{j=1}^n \mathbf{1}\{S_{2j} = 0\}$$

untersucht. Ersetzt man hier S_{2j} durch $S_{2j}^* = S_{2n} - S_{2n-2j}$, so ergibt sich die mit

$$N_{2n}^* := \sum_{j=1}^n \mathbf{1}\{S_{2n} = S_{2n-2j}\} = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}\{S_{2k} = S_{2n}\}$$

bezeichnete Anzahl der Zeitpunkte vor $2n$, zu denen die Irrfahrt die spätere Endhöhe S_{2n} annimmt. Die Zufallsvariable N_{2n}^* besitzt somit die gleiche (in Satz 2.6 angegebene) Verteilung wie N_{2n} .

Interpretiert man einen Vorzeichenwechsel als Oszillation um das Niveau 0, so besitzt die in Abschnitt 2.11 untersuchte Anzahl C_{2n+1} der Vorzeichenwechsel nach dem Dualitätsprinzip die gleiche Verteilung wie die Anzahl

$$C_{2n+1}^* = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{1}\{(S_{2j} - S_{2n+1})(S_{2(j+1)} - S_{2n+1}) = -1\}$$

der Oszillationen der Irrfahrt um die Endhöhe S_{2n+1} .

2.15 Ausblicke

Brown–Wiener-Prozess und Invarianzprinzip

Wir haben in diesem Kapitel die einfache symmetrische Irrfahrt auf \mathbb{Z} betrachtet. Zur graphischen Darstellung von Irrfahrten der Länge n wurden die (Realisierungen der) Punkte $(0, S_0), (1, S_1), \dots, (n, S_n)$ in einem Koordinatensystem geplottet und aufeinander folgende Punkte verbunden, wodurch ein Polygonzug entsteht, der *Weg* oder auch *Pfad* genannt wird. Zwei der zahlreichen Grenzwertsätze zu diversen Aspekten von Irrfahrten bei Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ machten eine Aussage über *Zeitanteile*, bezogen auf die Gesamtdauer der Irrfahrt, nämlich Satz 2.5 (verstrichener Zeitanteil bis zum Auftreten der letzten Nullstelle) und Satz 2.11 (Zeitanteil, den die Irrfahrt oberhalb der x -Achse verbringt).

Normiert man die Zeitdauer n einer symmetrischen Irrfahrt der Länge n auf 1 und beachtet, dass S_n/\sqrt{n} asymptotisch für $n \rightarrow \infty$ standardnormalverteilt ist (vgl. (2.6)), so liegt es nahe, nicht $(0, S_0), (1, S_1), \dots, (n, S_n)$, sondern die Punkte

$$\left(\frac{j}{n}, \frac{S_j}{\sqrt{n}}\right), \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

zu plotten und linear zu verbinden. Auf diese Weise entsteht eine auf dem Einheitsintervall $[0, 1]$ definierte (zufällige) stetige Funktion, deren (zufälliger) Wert an der Stelle $t \in [0, 1]$ gleich

$$W_n(t) := \frac{S_j}{\sqrt{n}} + \frac{t - (j/n)}{1/n} \cdot \frac{X_{j+1}}{\sqrt{n}}, \quad \text{falls } t \in \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right]$$

($j = 0, 1, \dots, n-1$) oder – kompakter geschrieben – gleich

$$W_n(t) = \frac{S_{\lfloor nt \rfloor}}{\sqrt{n}} + (nt - \lfloor nt \rfloor) \frac{X_{\lfloor nt \rfloor + 1}}{\sqrt{n}}, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (2.97)$$

ist. Man nennt die Familie der Zufallsvariablen $\{W_n(t), 0 \leq t \leq 1\}$, auch den n -ten *Partialsummenprozess zur Folge* $(X_j)_{j \geq 1}$.

Da X_1, X_2, \dots und deren Partialsummen $S_k = X_1 + \dots + X_k$, $k \geq 1$, Zufallsvariablen darstellen, die auf dem in Abschnitt 6.1 gegebenen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ definiert sind, ist auch $W_n(t)$ für jedes t eine Zufallsvariable auf Ω . Um diesen Sachverhalt zu betonen, müssten wir in (2.97) eigentlich

$$W_n^\omega(t) := \frac{S_{\lfloor nt \rfloor}(\omega)}{\sqrt{n}} + (nt - \lfloor nt \rfloor) \frac{X_{\lfloor nt \rfloor + 1}(\omega)}{\sqrt{n}}, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad \omega \in \Omega, \quad (2.98)$$

schreiben. Bezeichnet $C[0, 1]$ die Menge der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[0, 1]$, so zeigt (2.98), dass für festes $\omega \in \Omega$ die durch $[0, 1] \ni t \mapsto W_n^\omega(t)$ definierte Funktion W_n^ω , der sog. *Weg* oder *Pfad* des Partialsummenprozesses W_n zur Realisierung ω , ein Element von $C[0, 1]$ ist. Drei solche durch Simulation gewonnene Pfade (Wege) sind für den Fall $n = 100$ in Bild 2.51 skizziert.

Bei wachsendem n scheinen sich die so simulierten Pfade in gewisser Weise stochastisch zu stabilisieren. In der Tat konvergiert für festes $t \in (0, 1]$ der zweite Summand in (2.97) bei $n \rightarrow \infty$ stochastisch gegen Null, und der erste ist gleich $c_n S_{\lfloor nt \rfloor} / \sqrt{\lfloor nt \rfloor}$ mit $c_n = \sqrt{\lfloor nt \rfloor} / \sqrt{n}$. Wegen $c_n \rightarrow \sqrt{t}$ und $S_{\lfloor nt \rfloor} / \sqrt{\lfloor nt \rfloor} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} N(0, 1)$ (vgl. (2.6)) folgt $W_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} N(0, t)$.

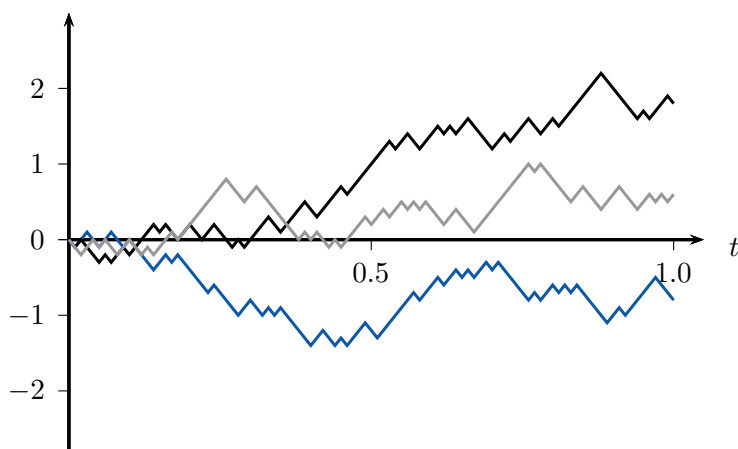


Bild 2.51: Drei Realisierungen des Partialsummenprozesses W_{100}

Es lässt sich zeigen (s. z.B. [BI], Section 8), dass nicht nur $W_n(t)$ für festes t nach Verteilung konvergiert, sondern bei $n \rightarrow \infty$ eine Verteilungskonvergenz

$$W_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} W$$

für die Folge der Partialsummenprozesse $(W_n) = (W_n(t))_{0 \leq t \leq 1}$ gegen einen stochastischen Prozess $W = (W(t))_{0 \leq t \leq 1}$ besteht. Diese ist definiert durch die Konvergenz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}h(W_n) = \mathbb{E}h(W)$$

der Erwartungswerte aller beschränkten Funktionen $h : C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, die stetig bezüglich der Supremumsnorm $\|f\| := \max_{0 \leq t \leq 1} |f(t)|$, $t \in C[0, 1]$, auf $C[0, 1]$ sind und beinhaltet insbesondere die Limesbeziehungen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(W_n(t_1) \leq x_1, \dots, W_n(t_k) \leq x_k) = \mathbb{P}(W(t_1) \leq x_1, \dots, W(t_k) \leq x_k)$$

für jede Wahl von $k \geq 1$, $t_1, \dots, t_k \in [0, 1]$ mit $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k \leq 1$ und $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$. Der stochastische Prozess $W(t)$, $0 \leq t \leq 1$, dessen Realisierungen (Pfade) W^ω stetige Funktionen auf $[0, 1]$ sind, heißt *Brown¹⁴-Wiener¹⁵-Prozess*. Er bildet den Ausgangspunkt für viele weitere stochastische Prozesse und ist durch folgende Eigenschaften charakterisiert:

¹⁴Robert Brown (1773–1858), schottischer Mediziner und Botaniker. 1810 Fellow der Royal Society und 1822 Fellow sowie 1849 bis 1853 Präsident der Linnean Society.

¹⁵Norbert Wiener (1894–1964), amerikanischer Mathematiker, Begründer der Kybernetik. Hauptarbeitsgebiete: Analysis, Wahrscheinlichkeitstheorie, Neurophysiologie.

- a) $\mathbb{P}(W(0) = 0) = 1$ (der Prozess startet in 0),
- b) W besitzt *unabhängige Zuwächse*, d.h. für jede Wahl von k und jede Wahl von $0 < t_1 < \dots < t_k$ sind die Zufallsvariablen $W(t_1) - W(t_0), \dots, W(t_k) - W(t_{k-1})$ stochastisch unabhängig (hierbei ist $t_0 := 0$ gesetzt).
- c) Für s und t mit $0 \leq s < t$ gilt $W(t) - W(s) \sim N(0, t - s)$.

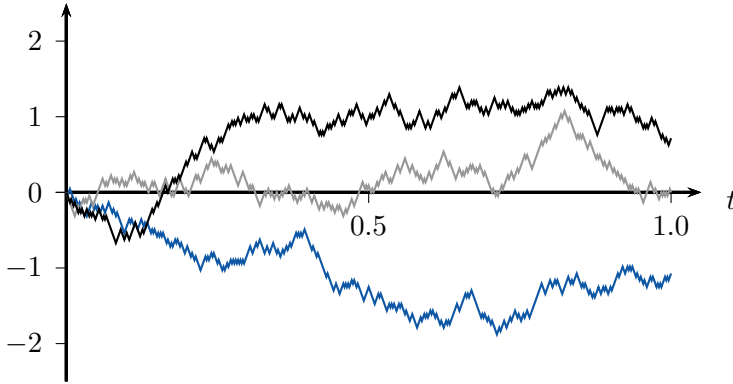


Bild 2.52: Drei Realisierungen des Partialsummenprozesses W_{1000}

Bild 2.52 zeigt drei Pfade von W_n für $n = 1000$. Ein weitere Vergrößerung von n würde keinen anderen Eindruck erzeugen. Insofern hat man bei diesem Bild einige approximative Realisierungen des Brown–Wiener-Prozesses vor Augen.

Die Verteilungskonvergenz $W_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} W$ zieht die Verteilungskonvergenz von gewissen reellwertigen Funktionalen $h(W_n)$ gegen die Verteilung von $h(W)$ mit sich. Insbesondere gelten (siehe z.B. [BI], S. 94 ff.):

$$\sup\{t \in [0, 1] : W_n(t) = 0\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \sup\{t \in [0, 1] : W(t) = 0\}, \quad (2.99)$$

$$\lambda^1(\{t \in [0, 1] : W_n(t) > 0\}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \lambda^1(\{t \in [0, 1] : W(t) > 0\}), \quad (2.100)$$

$$\max_{0 \leq t \leq 1} W_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \max_{0 \leq t \leq 1} W(t), \quad (2.101)$$

$$\max_{0 \leq t \leq 1} |W_n(t)| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \max_{0 \leq t \leq 1} |W(t)|. \quad (2.102)$$

Dabei bezeichnet λ^1 das Lebesgue-Maß im \mathbb{R}^1 . Wegen

$$\frac{L_{2n}}{2n} = \sup\{t \in [0, 1] : W_n(t) = 0\}$$

liefern (2.99) und Satz 2.5 das Arcus-Sinus-Gesetz

$$\mathbb{P}(\sup\{t \in [0, 1] : W(t) = 0\} \leq x) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

für die Verteilung des Zeitpunktes der letzten Nullstelle des Brown–Wiener-Prozesses $W(t)$, $0 \leq t \leq 1$. In gleicher Weise zieht

$$\frac{O_{2n}}{2n} = \lambda^1(\{t \in [0, 1] : W_n(t) > 0\})$$

zusammen mit (2.100) und Satz 2.11 das Arcus-Sinus-Gesetz

$$\mathbb{P}(\lambda^1(\{t \in [0, 1] : W(t) > 0\}) \leq x) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

für die Verweilzeit oberhalb der x -Achse von $W(t)$, $0 \leq t \leq 1$, nach sich, und die Identitäten

$$\max_{0 \leq t \leq 1} W_n(t) = \frac{M_n}{\sqrt{n}}, \quad \max_{0 \leq t \leq 1} |W_n(t)| = \frac{|M|_n}{\sqrt{n}}$$

liefern zusammen mit (2.101), (2.102) und den Sätzen 2.13 und 2.36 die Verteilungen des Maximums und des Betragsmaximums von W : Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\max_{0 \leq t \leq 1} W(t) \leq x\right) &= 2\Phi(x) - 1, & x \geq 0, \\ \mathbb{P}\left(\max_{0 \leq t \leq 1} |W(t)| \leq x\right) &= R(x), & x > 0. \end{aligned}$$

Ist allgemein X_1, X_2, \dots eine Folge unabhängiger identisch verteilter Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}(X_1) = 0$ und $\mathbb{V}(X_1) = 1$, und bezeichnet $S_n := X_1 + \dots + X_n$ die n -te Partialsumme der X_j , so besagt der Zentrale Grenzwertsatz von Lindeberg–Lévy, dass S_n/\sqrt{n} für $n \rightarrow \infty$ nach Verteilung gegen eine Standardnormalverteilung konvergiert (ist allgemeiner $\mathbb{E}(X_1) = a$ und $\mathbb{V}(X_1) = \sigma^2 > 0$, so muss vorher standardisiert werden; es ist also X_j durch $(X_j - a)/\sigma$ zu ersetzen). Die Grenzverteilung von S_n/\sqrt{n} ist also *invariant* in Bezug auf die Ausgangsverteilung der X_j , solange diese nur zentriert ($\mathbb{E}(X_1) = 0$) und reskaliert ($\mathbb{V}(X_1) = 1$) ist.

Ein berühmtes Resultat, das sog. *Invarianzprinzip von Donsker*¹⁶ (s. z.B. [BI], Theorem 8.2) besagt, dass diese Invarianzeigenschaft für den Partialsummenprozess W_n in (2.97) bestehen bleibt: die Folge der (W_n) konvergiert auch in dieser, gegenüber der symmetrischen Irrfahrt (d.h. $\mathbb{P}(X_1 = -1) = \mathbb{P}(X_1 = 1) = 1/2$)

¹⁶Monroe David Donsker (1925–1991), amerikanischer Mathematiker, Professor an der New York University. Hauptarbeitsgebiet: Wahrscheinlichkeitstheorie.

wesentlich allgemeineren Situation nach Verteilung gegen den Brown–Wiener-Prozess W . Bild 2.53 zeigt drei Realisierungen von W_{100} für den Fall, dass X_1 die Verteilungsfunktion $F(t) = 1 - \exp(-(t + 1))$, $t \geq -1$ ($F(t) := 0$, falls $t < -1$) besitzt, also wie eine um 1 verminderte standardexponentialverteilte Zufallsvariable verteilt ist. Die in Bild 2.54 dargestellten, auf jeweils $n = 1000$ Zufallsvariablen mit der gleichen Ausgangsverteilung basierenden Realisierungen von W_n sind qualitativ nicht mehr von denen in Bild 2.52 zu unterscheiden.

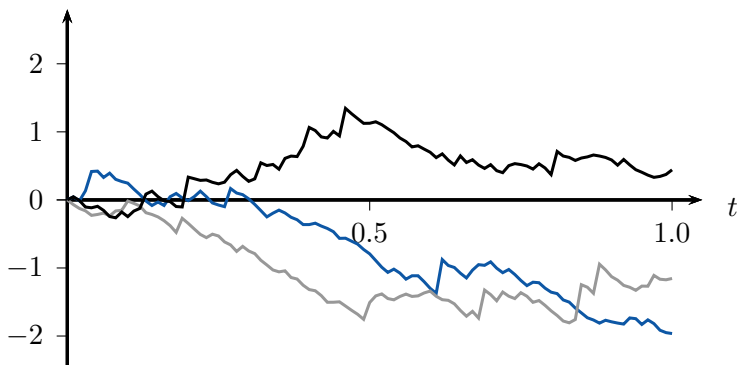


Bild 2.53: Realisierungen von W_{100} mit (zentriert)-exponentialverteilten X_j

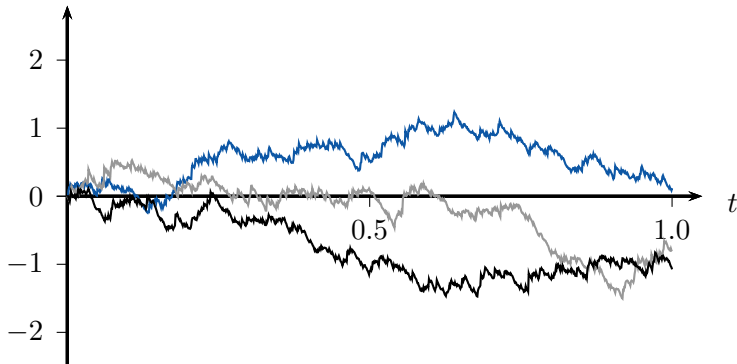


Bild 2.54: Realisierungen von W_{1000} mit (zentriert)-exponentialverteilten X_j

Da sich die Verteilungskonvergenz von W_n gegen W auf die Verteilungskonvergenz gewisser reellwertiger Funktionale $h(W_n)$ gegen $h(W)$ überträgt, gelten die Aussagen (2.99) – (2.102) auch für Partialsummenprozesse mit einer allgemeinen (zentrierten und reskalierten) Verteilung der zugrunde liegenden Zufallsvariablen X_1, X_2, \dots . Für ein auf n Runden angelegtes Spiel zwischen zwei Personen, dessen Spielstand (im Sinne von per Saldo an Spieler A geflossene Geldeinheiten) nach k Runden durch die Summe $X_1 + \dots + X_k$ gegeben ist und der zwischen

den einzelnen Runden durch Bildung des Partialsummenprozesses W_n in (2.97) interpoliert wird, bedeutet dies etwa, dass der verstrichene Zeitanteil bis zum letzten Gleichstand für großes n approximativ durch die Arcus-Sinus-Verteilung gegeben ist, d.h. es gilt

$$\mathbb{P}(\sup\{t \in [0, 1] : W_n(t) = 0\} \leq x) \approx \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Weil die Verteilung der X_j beliebig ist, solange nur $\mathbb{E}(X_j) = 0$ und $\mathbb{V}(X_j) = 1$ gilt, ist das eine wahrhaft universelle Aussage!

Das Gesetz vom iterierten Logarithmus

Die Höhe S_n einer einfachen symmetrischen Irrfahrt auf \mathbb{Z} ist nach Division durch \sqrt{n} asymptotisch für $n \rightarrow \infty$ standard-normalverteilt (s. (2.6)). Aus diesem Resultat kann man etwa schließen, in welchen Intervallen sich S_n für *ein festes* großes n mit großer Wahrscheinlichkeit aufhält. Eine natürliche Frage betrifft das *fast sichere Fluktuationsverhalten* der Folge $(S_n)_{n \geq 1}$. Gibt es eine positive wachsende Funktion $\lambda : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, sodass für jedes feste positive ε Folgendes gilt:

$$\mathbb{P}(S_n \geq (1 + \varepsilon)\lambda(n) \text{ für unendlich viele } n) = 0, \quad (2.103)$$

$$\mathbb{P}(S_n \geq (1 - \varepsilon)\lambda(n) \text{ für unendlich viele } n) = 1? \quad (2.104)$$

Da der Durchschnitt von abzählbar-unendlich vielen Ereignissen der Wahrscheinlichkeit 1 ebenfalls die Wahrscheinlichkeit 1 und die Vereinigung von abzählbar vielen Mengen der Wahrscheinlichkeit 0 ebenfalls die Wahrscheinlichkeit 0 besitzen, folgt aus (2.103) und (2.104), wenn wir

$$A_\varepsilon := \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{S_n}{\lambda(n)} \geq 1 + \varepsilon \right\}, \quad B_\varepsilon := \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{S_n}{\lambda(n)} \geq 1 - \varepsilon \right\}$$

setzen und die Definition des Limes superior einer Mengenfolge in Abschnitt 6.11 beachten:

$$\mathbb{P} \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_{1/k} \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_{1/k} \right) \right) = 1.$$

Das hier auftretende Ereignis besteht als Teilmenge im kanonischen Wahrscheinlichkeitsraum für unendlich lange Irrfahrten aus Abschnitt 6.1 aus allen Folgen $\omega = (\omega_j)_{j \geq 1}$, für die der Limes superior der reellen Zahlenfolge $S_n(\omega)/\lambda(n)$ gleich 1 ist. Dass eine solche Funktion λ existiert, hat für die Situation der symmetrischen Irrfahrt zuerst A. Khintchin¹⁷ [KH] bewiesen. bewiesen. Die Gestalt der Funktion λ gibt dem folgenden berühmten Resultat seinen Namen.

¹⁷Alexander Khintchin (1894–1959), russischer Mathematiker, einer der einflussreichsten Stochastiker der sog. russischen Schule. Hauptarbeitsgebiete: Analysis, Wahrscheinlichkeitstheorie, statistische Physik.

Satz 2.39. (Gesetz vom iterierten Logarithmus)

Es seien X_1, X_2, \dots unabhängige Zufallsvariablen mit gleicher Verteilung, wobei $\mathbb{E}(X_1) = 0$ und $\mathbb{V}(X_1) = 1$ gelte. Dann gilt für die Folge (S_n) der Partialsummen $S_n = X_1 + \dots + X_n$:

$$\mathbb{P} \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n \log \log n}} = 1 \right) = 1.$$

Ein Beweis dieses Satzes findet sich in [BI2], S. 151 ff. Wendet man obiges Resultat auf die Zufallsvariablen $-X_1, -X_2, \dots$ an, so folgt

$$\mathbb{P} \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n \log \log n}} = -1 \right) = 1.$$

Bild 2.55 zeigt Graphen der Funktionen $n \mapsto \sqrt{2n \log \log n}$ und $n \mapsto -\sqrt{2n \log \log n}$ zusammen mit drei simulierten Irrfahrten der Länge 2500. Zusätzlich sind auch in blau die Graphen der Funktionen $n \mapsto \pm(1 \pm \varepsilon)\sqrt{2n \log \log n}$ für $\varepsilon = 0.05$ eingezeichnet. Für diese gilt (2.103) und (2.104) mit $\lambda(n) = \sqrt{2n \log \log n}$.

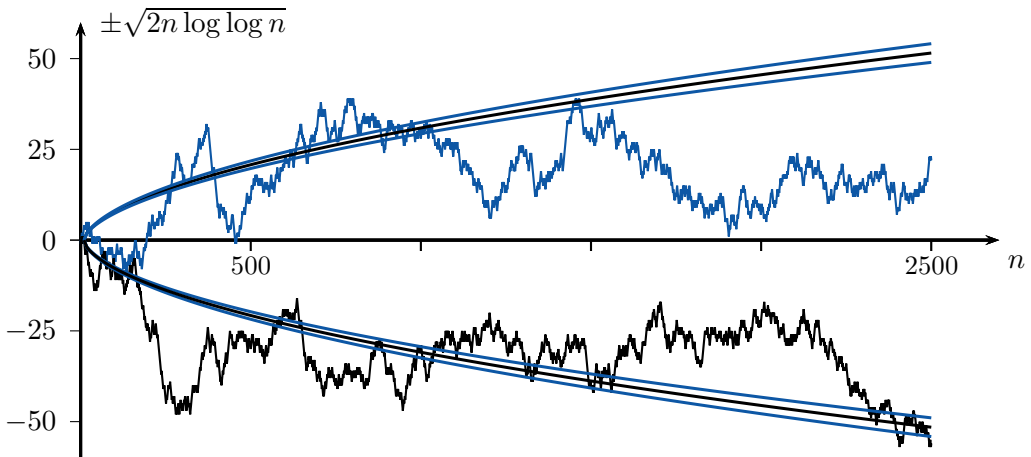


Bild 2.55: Zum Gesetz vom iterierten Logarithmus

Kapitel 3



Brückenwege – Ausgleich nach $2n$ Zeitschritten

In diesem Kapitel geht es um diverse stochastische Fragen im Zusammenhang mit Brückenwegen, also Irrfahrten auf \mathbb{Z} , die im Ursprung starten und nach $2n$ Zeitschritten im Punkt $(2n, 0)$ enden. Bild 3.1 zeigt einen solchen Brückenweg – im Folgenden auch kurz *Brücke* genannt – der Länge 500.

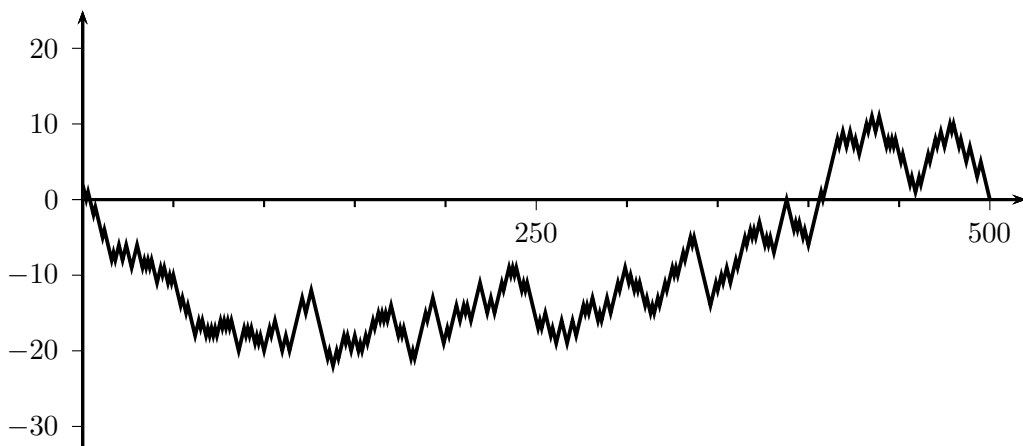


Bild 3.1: Ein Brückenweg der Länge 500

Wir machen durchweg die Annahme, dass jede dieser $\binom{2n}{n}$ Brücken die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzt, legen also eine Gleichverteilung auf der Menge

$$W_{2n}^{\circ} := \{w := (a_1, \dots, a_{2n}) \in \{-1, 1\}^{2n} : a_1 + \dots + a_{2n} = 0\}$$

aller $2n$ -Brücken zugrunde. Wie in Kapitel 2 stehe hier a_j für die Richtung des j -ten Schrittes der Irrfahrt, also 1 für einen Aufwärts- und -1 für einen Abwärtsschritt. Der obere Index „o“ in der Schreibweise W_{2n}^o soll hervorheben, dass die Irrfahrt der Länge $2n$ am Ende zum Nullniveau zurückkehrt. Eine analoge Notation verwenden wir für Zufallsvariablen, die auf W_{2n}^o definiert sind, schreiben also etwa M_{2n}^o für das Maximum einer $2n$ -Brücke. Eine Ausnahme bildet die Zufallsvariable X_j auf W_{2n}^o , die wie in Kapitel 2 den j -ten Schritt der Irrfahrt bezeichnet; es gilt also $X_j(w) = a_j$. Ebenso verfahren wir mit den Partialsummen $S_k := X_1 + \dots + X_k$ ($k = 1, \dots, 2n$), die die Höhen der Irrfahrt zu den Zeitpunkten $1, 2, \dots, n$ angeben. Wie früher sei auch $S_0 := 0$ gesetzt.

Brückenwege entstehen in natürlicher Weise beim sog. *Zwei-Stichproben-Problem* der *Nichtparametrischen Statistik*. Bei diesem Problem liegen Realisierungen unabhängiger Zufallsvariablen U_1, \dots, U_n und V_1, \dots, V_n vor, wobei U_1, \dots, U_n die gleiche unbekannte stetige Verteilungsfunktion $F(x) = \mathbb{P}(U_1 \leq x)$ und V_1, \dots, V_n die gleiche unbekannte stetige Verteilungsfunktion $G(x) = \mathbb{P}(V_1 \leq x)$ besitzen. Zu testen ist die Hypothese $H_0 : F = G$ der Gleichheit beider Funktionen. Ordnet man die wegen der Stetigkeit von F und G mit Wahrscheinlichkeit 1 paarweise verschiedenen Realisierungen der $2n$ Zufallsvariablen der Größe nach an und startet eine Irrfahrt im Ursprung, indem man zum Zeitpunkt j einen Schritt nach oben bzw. unten geht, wenn die j -kleinste Beobachtung eine Realisierung von U_1, \dots, U_n bzw. von V_1, \dots, V_n ist, so entsteht ein Brückenweg. Unter der Hypothese H_0 sind alle so möglichen Wege gleichwahrscheinlich. Wir kommen auf dieses Problem in Abschnitt 3.7 zurück.

Die Annahme einer Gleichverteilung auf allen Wegen $w = (a_1, \dots, a_{2n})$ aus W_{2n}^o korrespondiert mit der durch

$$\mathbb{P}(X_1 = a_1, \dots, X_{2n} = a_{2n}) := \binom{2n}{n}^{-1}, \quad \text{falls } \sum_{j=1}^{2n} \mathbf{1}\{a_j = 1\} = n \quad (3.1)$$

und $\mathbb{P}(X_1 = a_1, \dots, X_{2n} = a_{2n}) := 0$, sonst, definierten gemeinsamen Verteilung von X_1, \dots, X_{2n} . Man beachte, dass X_1, \dots, X_{2n} im Gegensatz zu Kapitel 2 nicht stochastisch unabhängig sind. Es gilt zwar weiterhin $\mathbb{P}(X_j = 1) = \mathbb{P}(X_j = -1) = 1/2$ für jedes $j = 1, \dots, 2n$, aber z. B.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) &= \mathbb{P}(X_1 = 1) \cdot \mathbb{P}(X_2 = 1 | X_1 = 1) \\ &= \frac{\binom{2n-2}{n-2} \cdot \binom{n}{n}}{\binom{2n}{n}} = \frac{n}{2n} \cdot \frac{n-1}{2n-1} \\ &\neq \frac{1}{4} = \mathbb{P}(X_1 = 1) \cdot \mathbb{P}(X_2 = 1). \end{aligned}$$

Interpretiert man eine 1 als das Ziehen einer roten und eine -1 als das Ziehen einer schwarzen Kugel aus einer Urne, die n rote und n schwarze Kugeln enthält, wobei das Ziehen rein zufällig ohne Zurücklegen erfolgt, so beschreibt der Zufallsvektor (X_1, \dots, X_{2n}) mit der in (3.1) angegebenen Verteilung gerade die Farben der gezogenen Kugeln in der Ziehungsreihenfolge. Dabei werden der Reihe nach alle $2n$ Kugeln entnommen. Es ist hilfreich, die zeitliche Entstehung einer $2n$ -Brücke mit dieser Vorstellung zu verbinden.

Wie in Kapitel 2 werden wir wieder einige interessante Grenzwertsätze herleiten. Für die zugehörigen asymptotischen Betrachtungen ($n \rightarrow \infty$) müssten wir genau genommen einen zweiten Index einführen und $X_{n,1}, X_{n,2}, \dots, X_{n,2n}$ anstelle von X_1, \dots, X_{2n} schreiben (sowie die zugrunde gelegte Gleichverteilung auf der Grundmenge W_{2n}° mit dem Index n kennzeichnen), werden diese schwerfällige Schreibweise aber nur im letzten Abschnitt verwenden. Da eine $2n$ -Brücke im Gegensatz zu einer „freien“ Irrfahrt der Länge $2n$ wie in Kapitel 2, deren Schritte unabhängig voneinander gewählt werden, am Ende gleichsam „auf die x -Achse gezwungen wird“, ist zu vermuten, dass ein solcher Weg in seiner Volatilität gedämpft wird und die in Kapitel 2 betrachteten Größen wie Anzahl der Nullstellen, Verweilzeiten, Anzahl der Vorzeichenwechsel usw. jetzt ein weniger erratisches Verhalten zeigen. Wir werden sehen, inwieweit diese Vermutung zutrifft.

3.1 Die Anzahl der (inneren) Nullstellen

In diesem Abschnitt betrachten wir die mit

$$N_{2n}^\circ := \sum_{j=1}^{n-1} \mathbf{1}\{S_{2j} = 0\} \quad (3.2)$$

bezeichnete Anzahl der **Nullstellen** eines Brückenweges. Dabei zählen wir nur die sogenannten *inneren* Nullstellen, berücksichtigen also nicht die beiden trivialen Nullstellen zu Beginn und am Ende. Die Zufallsvariable N_{2n}° kann somit die Werte $0, 1, \dots, n-1$ annehmen. Um die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(N_{2n}^\circ = k)$ zu bestimmen, benötigen wir die Anzahl aller $2n$ -Brücken, die genau k Nullstellen besitzen. Etwas einfacher gestaltet sich diese Aufgabe, wenn wir zuerst nach der Anzahl aller $2n$ -Brücken fragen, die *mindestens* k Nullstellen aufweisen, für die also $N_{2n}^\circ \geq k$ gilt. Da jeder solche Weg sowohl zu Beginn als auch direkt nach jeder der k Nullstellen auf zwei Weisen fortgesetzt werden kann, ist die gesuchte Anzahl gleich 2^{k+1} mal der Anzahl der $2n$ -Brücken mit mindestens k Nullstellen, die bis direkt nach der k -ten (inneren) Nullstelle oberhalb der x -Achse verlaufen, siehe Bild 3.2. Die letztere Menge von $2n$ -Brücken sei mit M_1 bezeichnet.

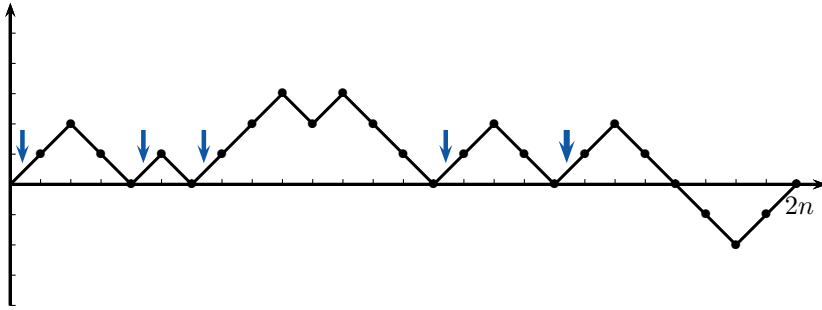


Bild 3.2: $2n$ -Brücke mit mindestens 4 Nullstellen, die bis direkt nach der vierten Nullstelle nichtnegativ ist

Lässt man bei einem Weg aus M_1 den ersten und jeden nach der j -ten Nullstelle folgenden, in Bild 3.2 durch einen Pfeil markierten Aufwärtsschritt ($j = 1, \dots, k$) weg und fügt den Rest zusammen, so entsteht ein von $(0,0)$ zum Punkt $(2n - (k+1), -(k+1))$ führender Weg (Bild 3.3), und diese Zuordnungsvorschrift von Wegen ist eine injektive Abbildung auf M_1 .

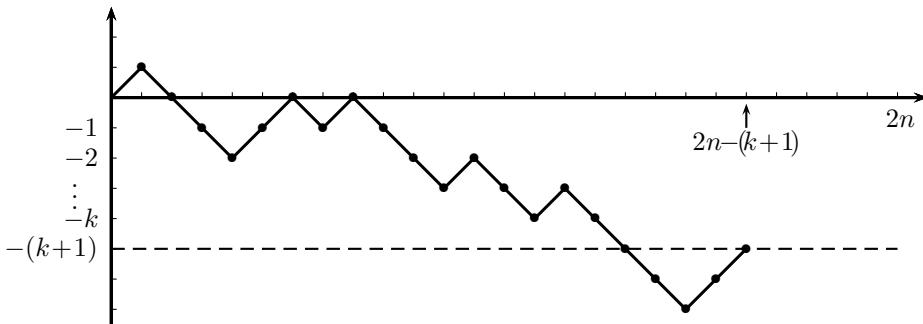


Bild 3.3: Weg von $(0,0)$ nach $(2n - (k+1), -(k+1))$.

Bezeichnet M_2 die Menge aller Wege von $(0,0)$ nach $(2n - (k+1), -(k+1))$, so gilt nach Lemma 2.1

$$|M_2| = \binom{2n - (k+1)}{n}.$$

Die oben beschriebene „Aufwärtsschritt-Weglassungs“-Abbildung von M_1 in M_2 ist aber auch surjektiv und damit insgesamt bijektiv. Man muss hierzu nur jedem Weg aus M_2 genau $k+1$ Aufwärtsschritte hinzufügen, und zwar einen im Ursprung sowie für jedes $j \in \{1, \dots, k\}$ einen Aufwärtsschritt direkt nach dem erstmaligen

Erreichen der Höhe $-j$. Auf diese Weise wird der Weg aus Bild 3.3 in den Weg aus Bild 3.2 zurücktransformiert. Wegen $|M_1| = |M_2|$ folgt also

$$|\{N_{2n}^\circ \geq k\}| = 2^{k+1} |M_1| = 2^{k+1} |M_2| = 2^{k+1} \binom{2n - (k+1)}{n}$$

und somit (vgl. [DW], S. 1046)

$$\mathbb{P}(N_{2n}^\circ \geq k) = 2^{k+1} \frac{\binom{2n - k - 1}{n}}{\binom{2n}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (3.3)$$

Das nachstehende Resultat gibt die Verteilung von N_{2n}° an.

Satz 3.1. (Verteilung der Nullstellenanzahl einer Brücke)

Für die Anzahl N_{2n}° der (inneren) Nullstellen einer $2n$ -Brücke gelten:

a)

$$\mathbb{P}(N_{2n}^\circ = k) = \frac{2^{k+1}(k+1)}{n} \cdot \frac{\binom{2n - k - 2}{n-1}}{\binom{2n}{n}}, \quad 0 \leq k \leq n-1,$$

b)

$$\mathbb{E}(N_{2n}^\circ) = \frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n}} - 2,$$

c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}(N_{2n}^\circ)}{\sqrt{2n}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \approx 1.253.$$

d)

$$\mathbb{V}(N_{2n}^\circ) = 2(2n+1) - \frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n}} \left(1 + \frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n}} \right).$$

BEWEIS: a) folgt aus (3.3) und $\mathbb{P}(N_{2n}^\circ = k) = \mathbb{P}(N_{2n}^\circ \geq k) - \mathbb{P}(N_{2n}^\circ \geq k+1)$ für $k = 0, 1, \dots, n-2$ sowie $\mathbb{P}(N_{2n}^\circ \geq n-1) = \mathbb{P}(N_{2n}^\circ = n-1)$.

b) Wir geben zwei verschiedene Beweise an. Aufgrund von Darstellung (3.2) gilt

$$\mathbb{E}(N_{2n}^\circ) = \sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{P}(S_{2j} = 0).$$

Die für das Ereignis $\{S_{2j} = 0\}$ günstigen unter allen $\binom{2n}{n}$ möglichen Wegen sind dadurch gekennzeichnet, dass von den ersten $2j$ Wegschritten j für die Aufwärtsschritte und von den letzten $2n-2j$ Schritte $n-j$ für die Aufwärtsschritte ausgewählt werden müssen. Die nicht ausgewählten Schritte sind Abwärtsschritte. Die Anzahl der günstigen Wege ist somit $\binom{2j}{j} \binom{2(n-j)}{n-j}$, und es folgt

$$\mathbb{E}(N_{2n}^\circ) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\binom{2j}{j} \binom{2(n-j)}{n-j}}{\binom{2n}{n}}.$$

Da die Summe über die in Satz 2.4 auftretenden Wahrscheinlichkeiten gleich 1 ist, erhält man

$$\mathbb{E}(N_{2n}^\circ) = \frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n}} \cdot \left(\sum_{j=0}^n \frac{\binom{2j}{j} \binom{2(n-j)}{n-j}}{2^{2n}} - 2 \cdot \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \right) = \frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n}} \cdot \left(1 - 2 \cdot \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \right)$$

und somit die Behauptung. Ein anderer Nachweis kann mithilfe der in Abschnitt 6.5 gezeigten Beziehung $\mathbb{E}(N_{2n}^\circ) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(N_{2n}^\circ \geq k)$ erfolgen. Die Behauptung ergibt sich dann aus (3.3) und der Tatsache, dass die Summe der in (2.25) stehenden Wahrscheinlichkeiten gleich 1 ist und folglich

$$\sum_{k=1}^{n-1} 2^{k+1} \binom{2n-k-1}{n} = 2^{2n} - \binom{2n}{n} - 2 \binom{2n-1}{n}$$

gilt.

c) Es ist

$$\frac{\mathbb{E}(N_{2n}^\circ)}{\sqrt{2n}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi n} \cdot u_{2n}} - \frac{2}{\sqrt{2n}}$$

mit u_{2n} wie in (2.13). Die Behauptung folgt jetzt aus (2.22).

d) Es sei $q_k := \mathbb{P}(N_{2n}^\circ \geq k)$ mit $\mathbb{P}(N_{2n}^\circ \geq k)$ wie in (3.3). Eine direkte Rechnung ergibt

$$(2n-k-1)q_{k+1} = 2(n-k-1)q_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-2.$$

Summiert man diese Gleichungen über k und verwendet die aus (6.9) und (6.10) folgenden Beziehungen $\mathbb{E}(N_{2n}^\circ) = \sum_{k=1}^{n-1} q_k$ und $\mathbb{E}(N_{2n}^{\circ 2}) = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1)q_k$, so ergibt sich mit etwas Geduld die Gleichung

$$\mathbb{E}(N_{2n}^{\circ 2}) = 4(n-1) - 5\mathbb{E}(N_{2n}^\circ)$$

und damit die Behauptung. Die Einzelheiten seien dem Leser überlassen. ■

Bild 3.4 zeigt ein Stabdiagramm der Verteilung von N_{40}° . Vergleicht man dieses Bild mit dem Stabdiagramm der Verteilung der Anzahl N_{2n} der Nullstellen einer einfachen Irrfahrt wie in Kapitel 2 (Bild 2.18), so fällt ein gravierender qualitativer Unterschied auf: Wohingegen die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(N_{40} = k)$ monoton in k fallen, steigen die Wahrscheinlichkeiten $p_k := \mathbb{P}(N_{2n}^\circ = k)$ zunächst schnell an (es gilt $p_{k+1} > p_k \iff (k+1)(k+2) < 2n$) und fallen dann langsamer wieder ab. Dieser als „Rechts-Schiefe“ bezeichnete Effekt ist auch bei größeren Werten von n zu beobachten. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.114 treten 5 Nullstellen auf, wobei diese Nullstellenanzahl am wahrscheinlichsten ist. Ohne eine einzige Nullstelle bleibt ein Brückenweg der Länge 40 nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.0256.

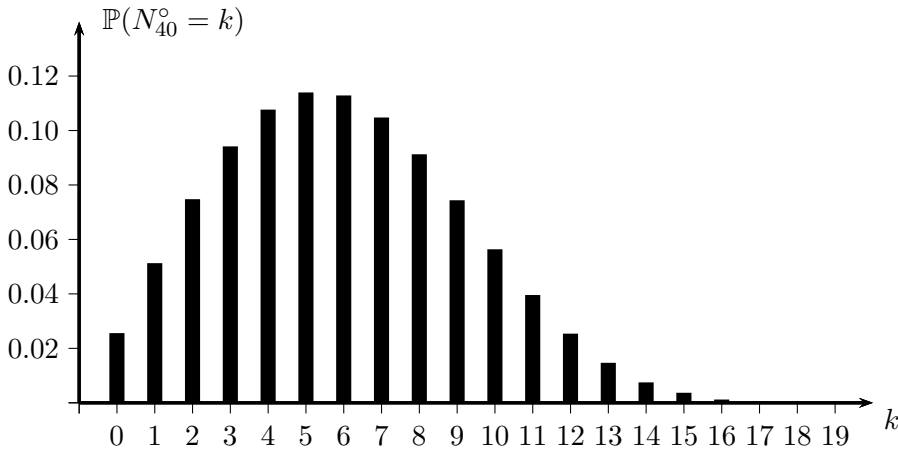


Bild 3.4: Stabdiagramm der Verteilung von N_{40}°

Vergleicht man Satz 3.1 c) mit Satz 2.6 c), so fällt auf, dass es in einer langen einfachen Irrfahrt wie in Kapitel 2 im Mittel deutlich weniger Nullstellen gibt als in einem gleich langen Brückenweg, denn es gilt für großes n zum einen $\mathbb{E}(N_{2n}) \approx 0.798\sqrt{2n}$, aber andererseits $\mathbb{E}(N_{2n}^\circ) \approx 1.253\sqrt{2n}$. Hier wirkt sich die

Tatsache aus, dass ein Brückenweg am Ende auf der x -Achse „festgebunden ist“ und somit in gewisser Weise ein „stärkerer Drang zum Ausgleich“ besteht, der sich in einer größeren Zahl von Nullstellen manifestiert.

Das nächste Resultat besagt, dass die Limesverteilung von $N_{2n}^\circ/\sqrt{2n}$ für $n \rightarrow \infty$ eine Weibull¹-Verteilung mit Formparameter 2 ist.

Satz 3.2. (Grenzverteilung der Nullstellenanzahl von Brückenwegen)

Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{N_{2n}^\circ}{\sqrt{2n}} \leq x\right) = 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad x \geq 0. \quad (3.4)$$

BEWEIS: Wir können $x > 0$ voraussetzen, da die Aussage offenbar für $x = 0$ gilt. Schreiben wir $k_n := k_n(x)$ für die kleinste ganze Zahl, die größer oder gleich $x\sqrt{2n}$ ist und beachten die Ganzzahligkeit von N_{2n}° sowie (3.3), so folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\frac{N_{2n}^\circ}{\sqrt{2n}} \geq x\right) &= \mathbb{P}(N_{2n}^\circ \geq k_n) = 2^{k_n+1} \frac{\binom{2n-k_n-1}{n}}{\binom{2n}{n}} \\ &= \prod_{j=1}^{k_n} \left(1 - \frac{j}{2n-j}\right). \end{aligned}$$

Geht man hier zum Logarithmus über und beachtet (6.7), (6.8), so ergibt sich

$$\log \mathbb{P}(N_{2n}^\circ \geq k_n) \leq -\sum_{j=1}^{k_n} \frac{j}{2n-j} \leq -\sum_{j=1}^{k_n} \frac{j}{2n-1} \leq -\frac{k_n(k_n+1)}{2(2n-1)}, \quad (3.5)$$

$$\log \mathbb{P}(N_{2n}^\circ \geq k_n) \geq -\sum_{j=1}^{k_n} \frac{j}{2n-2j} \geq -\sum_{j=1}^{k_n} \frac{j}{2n-2k_n} \geq -\frac{k_n(k_n+1)}{4(n-k_n)}. \quad (3.6)$$

Nach Definition von k_n konvergieren die rechten Seiten von (3.5) und (3.6) für $n \rightarrow \infty$ gegen $-x^2/2$, woraus die Behauptung folgt. ■

¹Ernst Hjalmar Waloddi Weibull (1887–1979), schwedischer Ingenieur und Mathematiker, seit 1941 Professor für Technische Physik an der Königlichen Technischen Hochschule Stockholm. Seine Methode der Seeseismik findet noch heute in der Erdölexploration Anwendung. Hauptarbeitsgebiete: Materialermüdung, Materialfestigkeit, Bruchverhalten von Festkörpern.

Bemerkung 3.3.

Wie schon vor Satz 3.2 erwähnt, ist die in (3.4) auftretende Grenzverteilung eine Weibull-Verteilung, und zwar mit dem Formparameter 2 und dem Skalenparameter $1/2$. Dabei heißt allgemein eine Zufallsvariable Z **Weibull-verteilt mit Formparameter $\alpha > 0$ und Skalenparameter $\lambda > 0$** , falls Z die Verteilungsfunktion

$$G_{\alpha,\lambda}(x) := 1 - \exp(-\lambda x^\alpha), \quad x \geq 0, \quad (3.7)$$

und $G_{\alpha,\lambda}(x) := 0, x < 0$, besitzt, und man schreibt hierfür kurz

$$Z \sim W(\alpha, \lambda).$$

Die Dichte $g_{\alpha,\lambda}$ der Weibull-Verteilung $W(\alpha, \lambda)$ ist durch

$$g_{\alpha,\lambda}(x) = \alpha \lambda x^{\alpha-1} \exp(-\lambda x^\alpha), \quad x > 0,$$

sowie $g_{\alpha,\lambda}(x) := 0$ für $x \leq 0$ gegeben.

Satz 3.2 besagt also, dass die Folge der Verteilungsfunktionen von $N_{2n}^\circ / \sqrt{2n}$ für $n \rightarrow \infty$ gegen die Verteilungsfunktion einer $W(2, 0.5)$ -verteilten Zufallsvariablen Z konvergiert, und wir schreiben hierfür kurz

$$\frac{N_{2n}^\circ}{\sqrt{2n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} Z, \quad Z \sim W(2, 0.5).$$

Bild 3.5 zeigt die Dichte (links) und die Verteilungsfunktion (rechts) der Weibull-

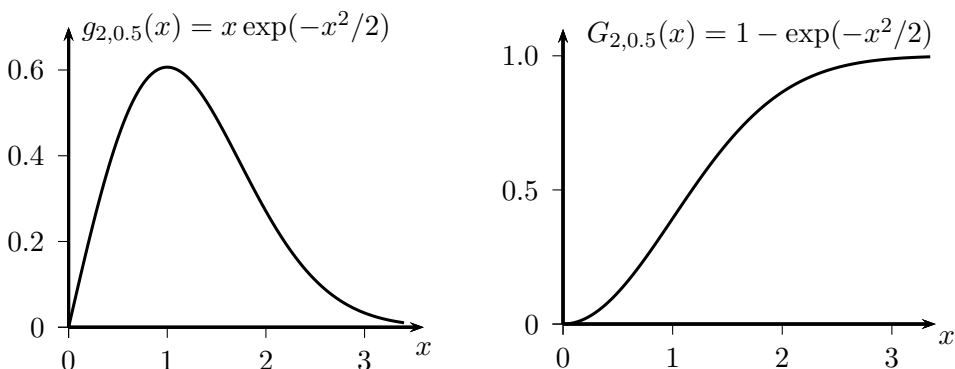


Bild 3.5: Dichte (links) und Verteilungsfunktion (rechts) der Weibull-Verteilung $W(2, 0.5)$

Verteilung $W(2, 0.5)$. Tabelle 3.1 gibt einige Werte der Verteilungsfunktion $G_{2,0.5}$ an. Vergleicht man diese Werte mit den entsprechenden der Verteilungsfunktion Φ^* aus Tabelle 2.2, so bestätigt sich das schon beim Vergleich der Erwartungswerte von N_{2n} und N_{2n}° festgestellte Phänomen, dass bei einer Brücke mit deutlich mehr Nullstellen im Vergleich zu einer einfachen Irrfahrt gleicher Länge wie in Kapitel 2 zu rechnen ist. Wegen $\Phi^*(0.655) = 0.5$ und $G_{2,0.5}(1.177) = 0.5$ werden einfache Irrfahrten der Länge 10000 in etwa der Hälfte aller Fälle höchstens 66 Nullstellen aufweisen, wohingegen bei etwa jedem zweiten Brückenweg der gleichen Länge mehr als 118 Nullstellen vorkommen.

Bild 3.6 zeigt diesen Effekt anhand der Graphen der Grenzverteilungsfunktionen von $N_{2n}^\circ/\sqrt{2n}$ und $N_{2n}/\sqrt{2n}$: Für jedes $x > 0$ gilt die Ungleichung $G_{2,0.5}(x) < \Phi^*(x)$ und somit $1 - \Phi^*(x) < 1 - G_{2,0.5}(x)$. Diese ergibt sich, indem man die durch

$$h(x) := \Phi^*(x) - G_{2,0.5}(x) = 2\Phi(x) + \exp(-x^2/2) - 2, \quad x \geq 0,$$

definierte Funktion $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ einer Kurvendiskussion unterzieht: Es gelten $h(0) = 0$, $h(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$ sowie $h'(x) = (\sqrt{2/\pi} - x) \exp(-x^2/2)$ für $x > 0$. Aufgrund des Verlaufs der Ableitung h' folgt dann $h(x) > 0$ für $x > 0$. Dieser Sachverhalt zeigt, dass die Grenzverteilung von $N_{2n}^\circ/\sqrt{2n}$ stochastisch größer als die Grenzverteilung von $N_{2n}/\sqrt{2n}$ ist.

x	$G_{2,0.5}(x)$	x	$G_{2,0.5}(x)$	x	$G_{2,0.5}(x)$
0.00	0.000	0.90	0.333	2.146	0.900
0.20	0.020	1.00	0.394	2.20	0.911
0.30	0.044	1.177	0.500	2.40	0.944
0.40	0.077	1.20	0.513	2.448	0.950
0.50	0.118	1.40	0.625	2.60	0.966
0.60	0.165	1.60	0.722	2.80	0.980
0.70	0.217	1.80	0.802	3.00	0.989
0.80	0.274	2.00	0.865	3.034	0.990

Tabelle 3.1: Werte der Verteilungsfunktion $G_{2,0.5}(x) = 1 - \exp(-x^2/2)$

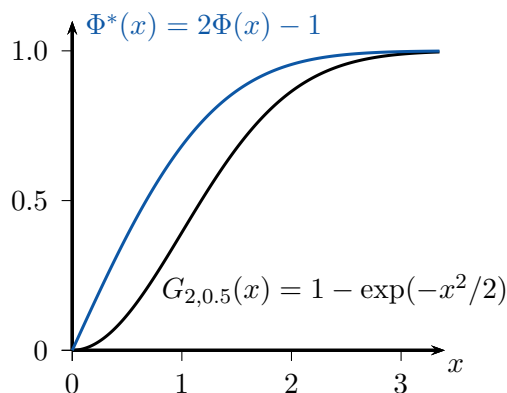


Bild 3.6: Grenzverteilungsfunktionen $G_{2,0.5}$ von $N_{2n}^o/\sqrt{2n}$ und Φ^* von $N_{2n}/\sqrt{2n}$

Vater oder Kind – wer gewinnt?

Das folgende Problem wurde in [LE] und [ZA] behandelt: Ein Kartenspiel mit $2n$ Karten, von denen n rot und n schwarz sind, wird gut gemischt, und die Karten werden einzeln der Reihe nach aufgedeckt. Es soll die Farbe der jeweils nächsten Karte geraten werden. Ein Kind macht die Vorhersage *rot* bzw. *schwarz* vom Ergebnis eines Wurfs mit einer echten Münze abhängig. Sein Vater erinnert sich, wie viele rote und schwarze Karten schon gezogen wurden und wirft nur dann wie sein Kind eine Münze, wenn gleich viele rote und schwarze Karten im Stapel verblieben sind; andernfalls setzt er jeweils auf diejenige Farbe, die mehrheitlich im Stapel vertreten ist. Es gewinnt, wer öfter richtig geraten hat. Offenbar ist der Vater im Vorteil, aber um wieviel? Bezeichnen wir die Anzahl der richtigen Vorhersagen des Vaters mit V_n und die des Kindes mit K_n , so werden wir insbesondere sehen, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbb{E}(V_n) - \mathbb{E}(K_n)) = \infty$ gilt. Für den Gewinn dieses Spiels ist aber nur entscheidend, ob das Ereignis $\{V_n > K_n\}$ eintritt. Hier ergibt sich das verblüffende Resultat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(V_n > K_n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{8}} \approx 0.854. \quad (3.8)$$

Obwohl also die mittlere Anzahl der richtigen Vorhersagen des Vaters im Vergleich zu dessen Kind bei größer werdendem Kartenstapel über alle Grenzen wächst, konvergiert seine Gewinnwahrscheinlichkeit gegen einen Wert, der in der Nähe von $6/7$ liegt. Das Kind sollte also auf die Dauer bei täglich einem Spiel einmal pro Woche über den Vater triumphieren.

Offenbar ist die Situation gedanklich gleichwertig damit, eine $2n$ -Brücke in deren zeitlichen Verlauf zu beobachten, wobei ohne Beschränkung der Allgemeinheit ein Aufwärtsschritt dem Ziehen einer roten und ein Abwärtsschritt dem Ziehen einer schwarzen Karte entspricht. Unter der Bedingung, dass *ein konkreter* aller

$\binom{2n}{n}$ möglichen Wege vorliegt, ist die Anzahl K_n der richtigen Vorhersagen des Kindes binomialverteilt mit Parametern $2n$ und $1/2$. Der konkrete Weg legt ja vor jedem Münzwurf nur fest, welche Seite der Münze als Treffer und welche als Niete zu gelten hat. Nach der Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit gilt somit $\mathbb{P}(K_n = k) = \binom{2n}{k}(1/2)^{2n}$, $k = 0, 1, \dots, 2n$, was bedeutet, dass K_n die Binomialverteilung $\text{Bin}(2n, 1/2)$ besitzt.

Der Vater wirft zu Beginn und direkt nach jeder inneren Nullstelle der $2n$ -Brücke unabhängig vom Kind eine echte Münze, um die Vorhersage „hoch“ oder „runter“ zu treffen. Bezeichnet T_j den geradzahligem Zeitpunkt der j -ten inneren Nullstelle ($j = 1, \dots, N_{2n}^\circ$), so macht der Vater aufgrund seiner Strategie auf jeden Fall

$$\frac{T_1}{2} + \frac{T_2 - T_1}{2} + \dots + \frac{T_{N_{2n}^\circ} - T_{N_{2n}^\circ - 1}}{2} + \frac{2n - T_{N_{2n}^\circ}}{2} = n$$

richtige Vorhersagen. Hinzu kommt ein zufälliger Anteil, der auf den Ergebnissen von $1 + N_{2n}^\circ$ Münzwürfen basiert. Es gilt also die Verteilungsgleichheit

$$V_n \sim n + \sum_{j=1}^{1+N_{2n}^\circ} U_j. \quad (3.9)$$

Dabei sind U_1, U_2, \dots, U_n unabhängige und je $\text{Bin}(1, 1/2)$ -verteilte Zufallsvariablen, die auch unabhängig von N_{2n}° sind. Man beachte, dass von den U_j nur eine zufällige Anzahl benötigt wird.

Die Zufallsvariable V_n ist also bis auf eine additive Konstante eine randomisierte Summe, wie sie uns schon in (2.78) begegnet ist. Mithilfe iterierter Erwartungswertbildung (siehe [HE], Abschnitt 25) gilt wegen der Unabhängigkeit von N_{2n}° und den identisch $\text{Bin}(1, 1/2)$ -verteilten U_j (vgl. auch Seite 94 sowie Satz 3.1 b)

$$\mathbb{E}(V_n) = n + \mathbb{E}(U_1) \cdot (1 + \mathbb{E}(N_{2n}^\circ)) = n + \frac{1}{2} \left(\frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n}} - 1 \right).$$

Wegen $\mathbb{E}(K_n) = n$ ergibt sich somit

$$\mathbb{E}(V_n) - \mathbb{E}(K_n) = \frac{1}{2} \left(\frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n}} - 1 \right)$$

und damit unter Beachtung von (2.13) und (2.22)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}(V_n) - \mathbb{E}(K_n)}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Insbesondere folgt wie eingangs behauptet $\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbb{E}(V_n) - \mathbb{E}(K_n)) = \infty$.

Die Verteilung von V_n ergibt sich über die Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit, indem man nach den Werten der Zufallsvariablen N_{2n}° bedingt und beachtet, dass unter der Bedingung $N_{2n}^\circ = \ell$ die in (3.9) auftretende randomisierte Summe die Binomialverteilung $\text{Bin}(\ell + 1, 1/2)$ besitzt. Da ℓ mindestens gleich $k - 1$ sein muss, damit die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{1+N_{2n}^\circ} U_j = k \mid N_{2n}^\circ = \ell\right)$ positiv ist, folgt mit Satz 3.1 a) für jedes $k \in \{0, \dots, n\}$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(V_n = n + k) &= \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{1+N_{2n}^\circ} U_j = k\right) \\
 &= \sum_{\ell=k-1}^{n-1} \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{1+N_{2n}^\circ} U_j = k \mid N_{2n}^\circ = \ell\right) \cdot \mathbb{P}(N_{2n}^\circ = \ell) \\
 &= \sum_{\ell=k-1}^{n-1} \binom{\ell+1}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{\ell+1} \frac{2^{\ell+1}(\ell+1)}{n} \cdot \frac{\binom{2n-\ell-2}{n-1}}{\binom{2n}{n}} \\
 &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{\ell=k-1}^{n-1} \binom{\ell+1}{k} (\ell+1) \frac{\binom{2n-\ell-2}{n-1}}{\binom{2n}{n}}.
 \end{aligned}$$

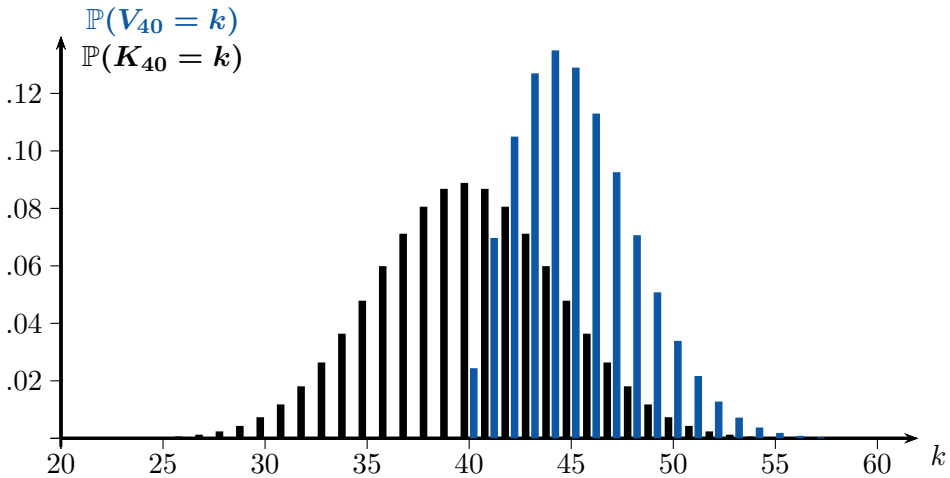


Bild 3.7: Stabdiagramme der Verteilungen von V_{40} (blau) und K_{40} (schwarz)

Bild 3.7 zeigt Stabdiagramme der Verteilungen von V_n und K_n für den Fall $n = 40$. Es ist deutlich zu erkennen, dass der Vater im Vorteil ist.

Wir beweisen jetzt die Grenzwertaussage (3.8) und setzen hierzu kurz $L_n := 1 + N_{2n}^\circ$. Nach Satz 3.2 und (6.5) konvergiert $L_n/\sqrt{2n}$ in Verteilung gegen eine Zufallsvariable Z , die die Weibull-Verteilung $W(2, 0.5)$ besitzt. Wählen wir zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon \in (0, 1)$ reelle Zahlen a, b mit $0 < a < b$ so, dass $\mathbb{P}(Z < a) = \varepsilon/4$ und $\mathbb{P}(Z > b) = \varepsilon/4$ gilt und setzen $A_n := \{a \leq L_n/\sqrt{2n} \leq b\}$, so gibt es wegen der Verteilungskonvergenz von $L_n/\sqrt{2n}$ gegen Z ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\mathbb{P}(A_n) \geq 1 - \varepsilon$ für jedes $n \geq n_0$. Ab jetzt sei stets $n \geq n_0$ vorausgesetzt. Die Ungleichungskette

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{V_n > K_n\} \cap A_n) &\leq \mathbb{P}(V_n > K_n) \\ &= \mathbb{P}(\{V_n > K_n\} \cap A_n) + \mathbb{P}(\{V_n > K_n\} \cap A_n^c) \quad (3.10) \\ &\leq \mathbb{P}(\{V_n > K_n\} \cap A_n) + \varepsilon \end{aligned}$$

zeigt, dass wir im Folgenden die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(\{V_n > K_n\} \cap A_n)$ untersuchen können. Mit $I_n := \{k \in \mathbb{N} : a \leq k/\sqrt{2n} \leq b\}$ gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{V_n > K_n\} \cap A_n) &= \sum_{k \in I_n} \mathbb{P}(V_n > K_n, L_n = k) \\ &= \sum_{k \in I_n} \mathbb{P}(L_n = k) \cdot \mathbb{P}(V_n > K_n | L_n = k). \end{aligned}$$

Die hier auftretenden Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(L_n = k)$ sind wegen Satz 3.1 a) und elementaren Umformungen für Binomialkoeffizienten gleich

$$\mathbb{P}(L_n = k) = \mathbb{P}(N_{2n}^\circ = k - 1) = \frac{k}{2n} \cdot \frac{\prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right)}{\prod_{j=1}^k \left(1 - \frac{j}{2n}\right)}.$$

Setzen wir

$$h(t) := t \cdot \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right), \quad t \geq 0, \quad (3.11)$$

so ergibt sich unter Verwendung der Ungleichungen (6.7) und (6.8) mit direkter Rechnung die Existenz einer von ε (über a und b) abhängenden Konstanten $C > 0$ mit der Eigenschaft

$$\sup_{k \in I_n} \left| \frac{\mathbb{P}(L_n = k)}{\frac{1}{\sqrt{2n}} \cdot h\left(\frac{k}{\sqrt{2n}}\right)} - 1 \right| \leq \frac{C}{\sqrt{n}}, \quad n \geq 1,$$

und somit – wenn wir kurz $x_{n,k} := k/\sqrt{2n}$ schreiben –

$$\left| \mathbb{P}(L_n = k) - \frac{h(x_{n,k})}{\sqrt{2n}} \right| \leq \frac{C}{\sqrt{n}} \cdot \frac{h(x_{n,k})}{\sqrt{2n}}, \quad k \in I_n.$$

Da die Wahrscheinlichkeiten $p_{n,k} := \mathbb{P}(V_n > K_n | L_n = k)$ höchstens gleich 1 sind, folgt

$$\sum_{k \in I_n} \left| \mathbb{P}(L_n = k) \cdot p_{n,k} - \frac{h(x_{n,k})}{\sqrt{2n}} \cdot p_{n,k} \right| \leq \frac{C}{\sqrt{n}} \cdot \sum_{k \in I_n} \frac{h(x_{n,k})}{\sqrt{2n}}.$$

Wegen $x_{n,k+1} - x_{n,k} = 1/\sqrt{2n}$ konvergiert die rechts stehende Summe als Riemannsche Näherungssumme für $n \rightarrow \infty$ gegen das Integral $\int_a^b h(t)dt$, und so besitzen die Summen $\sum_{k \in I_n} \mathbb{P}(L_n = k) \cdot p_{n,k}$ und $\sum_{k \in I_n} (h(x_{n,k})/\sqrt{2n}) \cdot p_{n,k}$ für $n \rightarrow \infty$ denselben Grenzwert. Um den Limes der zweiten Summe herzuleiten, müssen wir noch herausfinden, wie sich die Wahrscheinlichkeiten $p_{n,k} = \mathbb{P}(V_n > K_n | L_n = k)$ für $n \rightarrow \infty$ verhalten. Nun ist

$$\mathbb{P}(V_n > K_n | L_n = k) = \mathbb{P}(n + Z_{n,k} > K_n),$$

wobei $Z_{n,k}$ eine von K_n stochastisch unabhängige Zufallsvariable mit der Binomialverteilung $\text{Bin}(k, 1/2)$ bezeichnet. Durch die Doppelindizierung mit n und k möchten wir betonen, dass auch eine Abhängigkeit von n besteht, denn k ist ja wegen der Bedingung $k \in I_n$ nicht fest, sondern wächst (wie \sqrt{n}) mit n . Schreiben wir $K_n^* = (K_n - n)/\sqrt{n/2}$ und $Z_{n,k}^* = (Z_{n,k} - k/2)/\sqrt{k/4}$ für die aus K_n bzw. $Z_{n,k}$ durch Standardisierung hervorgehenden Zufallsvariablen, und setzen wir $c_{n,k} := \sqrt{k/(2n)}$, so ergibt eine direkte Rechnung

$$\mathbb{P}(V_n > K_n | L_n = k) = \mathbb{P}(Z_{n,k}^* \cdot c_{n,k} + x_{n,k} > K_n^*).$$

Die Zufallsvariable $\tilde{Z}_{n,k} := Z_{n,k}^* \cdot c_{n,k}$ besitzt den Erwartungswert 0 und die Varianz $c_{n,k}^2$. Wegen $c_{n,k} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ folgt nach der Tschebyschow-Ungleichung $\mathbb{P}(|\tilde{Z}_{n,k}| > \varepsilon) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Für genügend großes n (unter Umständen müssen wir hier n_0 vergrößern) gilt also $\mathbb{P}(|\tilde{Z}_{n,k}| > \varepsilon) \leq \varepsilon$. Zerlegt man das Ereignis $\{\tilde{Z}_{n,k} + x_{n,k} > K_n^*\}$ danach, ob zusätzlich $\{|\tilde{Z}_{n,k}| > \varepsilon\}$ oder $\{|\tilde{Z}_{n,k}| \leq \varepsilon\}$ eintritt, so ergibt sich für solche n

$$\mathbb{P}(Z_{n,k}^* \cdot c_{n,k} + x_{n,k} > K_n^*) \leq \mathbb{P}(K_n^* \leq x_{n,k} + \varepsilon) + \varepsilon$$

und analog $\mathbb{P}(Z_{n,k}^* \cdot c_{n,k} + x_{n,k} > K_n^*) \geq \mathbb{P}(K_n^* \leq x_{n,k} - \varepsilon) - \varepsilon$. Da K_n^* nach dem Zentralen Grenzwertsatz von de Moivre–Laplace in Verteilung gegen die Standard-Normalverteilung $N(0, 1)$ konvergiert und die Verteilungsfunktion Φ der Verteilung $N(0, 1)$ stetig ist, gilt wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Verteilungsfunktion von K_n^* gegen Φ (vgl. (6.3)) für genügend große n (eventuell muss n_0 noch einmal vergrößert werden)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(K_n^* \leq x_{n,k} + \varepsilon) &\leq \Phi(x_{n,k} + \varepsilon) + \varepsilon \leq \Phi(x_{n,k}) + 2\varepsilon, \\ \mathbb{P}(K_n^* \leq x_{n,k} - \varepsilon) &\geq \Phi(x_{n,k} - \varepsilon) - \varepsilon \geq \Phi(x_{n,k}) - 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Dabei ergeben sich die jeweils zweiten Ungleichungen aufgrund der Tatsache, dass die Ableitung von Φ höchstens gleich $1/\sqrt{2\pi}$ und damit kleiner als 1 ist. Insgesamt folgt für genügend großes n

$$\mathbb{P}(V_n > K_n | L_n = k) \leq \Phi(x_{n,k}) + 3\varepsilon, \quad \mathbb{P}(V_n > K_n | L_n = k) \geq \Phi(x_{n,k}) - 3\varepsilon$$

und damit

$$\sum_{k \in I_n} \frac{h(x_{n,k})}{\sqrt{2n}} \cdot \mathbb{P}(V_n > K_n | L_n = k) \leq \sum_{k \in I_n} \frac{h(x_{n,k})}{\sqrt{2n}} \cdot \Phi(x_{n,k}) + 3\varepsilon \sum_{k \in I_n} \frac{h(x_{n,k})}{\sqrt{2n}}.$$

Hier konvergiert die erste Summe auf der rechten Seite gegen $\int_a^b h(t)\Phi(t)dt$ und die zweite gegen $\int_a^b h(t)dt$, was wegen $\int_0^\infty h(t)dt = 1$ die Abschätzung

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in I_n} \frac{h(x_{n,k})}{\sqrt{2n}} \cdot \mathbb{P}(V_n > K_n | L_n = k) \leq \int_a^b h(t)\Phi(t)dt + 3\varepsilon$$

zur Folge hat. In gleicher Weise folgt

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in I_n} \frac{h(x_{n,k})}{\sqrt{2n}} \cdot \mathbb{P}(V_n > K_n | L_n = k) \geq \int_a^b h(t)\Phi(t)dt - 3\varepsilon.$$

und somit aufgrund der Ungleichungskette (3.10)

$$\begin{aligned} \int_a^b h(t)\Phi(t)dt - 4\varepsilon &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(V_n > K_n) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(V_n > K_n) \leq \int_a^b h(t)\Phi(t)dt + 4\varepsilon. \end{aligned}$$

Lässt man jetzt ε gegen 0 streben, so konvergieren a gegen 0 und b gegen ∞ , und es folgt wie behauptet

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(V_n > K_n) &= \int_0^\infty h(t)\Phi(t)dt \\ &= \int_0^\infty h(t) \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx dt \\ &= \int_0^\infty h(t) \left(\frac{1}{2} + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \right) dt \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \left(\int_x^\infty t \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \right) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \exp(-x^2) dx \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{8}}. \end{aligned}$$

3.2 Verweilzeiten

Nach den Ergebnissen von Abschnitt 2.6 verweilen einfache symmetrische Irrfahrten gerne lange oder kurz oberhalb der x -Achse (s. Bild 2.25): die Verteilung der Verweilzeit $O_{2n} = \sum_{j=1}^{2n} \mathbf{1}\{S_j \geq 0, S_{j-1} \geq 0\}$ besitzt ein U-förmiges Stabdiagramm (Bild 2.12), und beim Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ konvergiert der Zeitanteil $O_{2n}/(2n)$, den die Irrfahrt oberhalb der x -Achse verbringt, gegen die Arcus-Sinus-Verteilung mit der in Bild 2.14 dargestellten Dichte. Wir untersuchen jetzt die mit

$$O_{2n}^\circ := \sum_{j=1}^{2n} \mathbf{1}\{S_j \geq 0, S_{j-1} \geq 0\}$$

bezeichnete Zeitspanne, die sich eine rein zufällige $2n$ -Brücke oberhalb der x -Achse aufhält. Das nächste, auf Chung und Feller ([CF]) zurückgehende (und wohl unabhängig von Gnedenko² und Mihalevič³ [GM] entdeckte) Resultat steht in starkem Kontrast zu Satz 2.10.

Satz 3.4. (Verteilung der Verweilzeit eines Brückenweges)

Für die Verweilzeit O_{2n}° eines $2n$ -Brückenweges gilt:

$$\mathbb{P}(O_{2n}^\circ = 2k) = \frac{1}{n+1}, \quad k = 0, \dots, n. \quad (3.12)$$

BEWEIS: Wir betrachten zunächst die Extremfälle $k = n$ und $k = 0$. Aus Symmetriegründen können wir uns dabei auf den Fall beschränken, dass die Brücke ganz oberhalb der x -Achse verläuft, also $k = n$ gilt. Die für das Eintreten des Ereignisses $\{O_{2n}^\circ = 2n\}$ günstigen unter allen $\binom{2n}{n}$ möglichen $2n$ -Brücken sind diejenigen, die nach einem ersten Aufwärtsschritt vom Punkt $(1, 1)$ zum Punkt $(2n, 0)$ verlaufen, ohne die Höhe $y = -1$ zu treffen. Insgesamt gibt es nach (2.9) $\binom{2n-1}{n}$ Wege von $(1, 1)$ nach $(2n, 0)$, und nach dem Spiegelungsprinzip (s. Bild 2.6) entspricht jeder solche Weg, der die Höhe $y = -1$ trifft, in eindeutiger Weise einem von $(1, -3)$ nach $(2n, 0)$ verlaufenden Weg. Da (wiederum nach (2.9)) genau $\binom{2n-1}{n+1}$ Wege von $(1, -3)$ nach $(2n, 0)$ führen, gilt

$$|\{O_{2n}^\circ = 2n\}| = \binom{2n-1}{n} - \binom{2n-1}{n+1} = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1},$$

und wir erhalten (3.12) für den Fall $k = n$ und $k = 0$.

²Boris Wladimirowitsch Gnedenko (1912–1997), eines der führenden Mitglieder der russischen Schule für Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik.

³V.S. Mihalevič

Wir beweisen jetzt (3.12) durch Induktion über n , wobei die Gültigkeit der Aussage $n = 1$ schon gezeigt wurde (Induktionsanfang). Im Folgenden nehmen wir $n \geq 2$ an und gehen davon aus, dass (3.12) für $2s$ -Brücken mit $s \leq n - 1$ richtig ist (Induktionsannahme). Schreiben wir kurz

$$c(s) := \binom{2s}{s} \cdot \frac{1}{s+1}, \quad s = 0, 1, 2, \dots,$$

so besagt die Induktionsannahme

$$|\{O_{2s}^\circ = 2l\}| = c(s), \quad 1 \leq s \leq n-1, \quad l \in \{0, 1, \dots, s\}. \quad (3.13)$$

Da nach obigen Überlegungen Aussage (3.12) stets (d.h. für jedes $n \in \mathbb{N}$) für die extremen Fälle $k = 0$ und $k = n$ gilt, setzen wir für die weiteren Betrachtungen $1 \leq k \leq n-1$ voraus. Die für das Eintreten des Ereignisses $\{O_{2n}^\circ = 2k\}$ günstigen Wege haben also mindestens eine und somit auch eine *erste* Nullstelle, deren zufälliger Zeitpunkt mit T° bezeichnet werde. Wir zerlegen jetzt die Menge aller $2n$ -Brücken mit der Eigenschaft $O_{2n}^\circ = 2k$ danach, ob $S_1 = 1$ oder $S_1 = -1$ gilt sowie nach den dann jeweils möglichen Werten von T° . Geht der erste Schritt nach oben, so kann T° nur die Werte $2r$ mit $r \in \{1, 2, \dots, k\}$ annehmen, da andernfalls $O_{2n}^\circ > 2k$ gelten würde. Für jedes solche r zerfällt die $2n$ -Brücke in zwei Teilwege. Der erste geht von $(0, 0)$ nach $(1, 1)$, verläuft dann zum Punkt $(2r-1, 1)$, ohne die x -Achse zu treffen, und geht schließlich von $(2r-1, 1)$ zum Punkt $(2r, 0)$, der ersten Nullstelle des Gesamtweges. Der zweite Teilweg ist eine von $(2r, 0)$ nach $(2n, 0)$ verlaufende $(2n-2r)$ -Brücke, die die noch fehlenden $2k-2r$ Zeitschritte oberhalb der x -Achse verbringt (Bild 3.8).

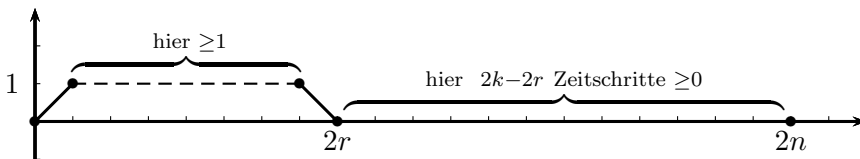


Bild 3.8: Zerlegung einer $2n$ -Brücke mit $O_{2n}^\circ = 2k$ und $S_1 = 1$ nach der ersten Nullstelle

Im verbleibenden Fall $S_1 = -1$ kann T° nur die Werte $2r$ mit $r \in \{1, 2, \dots, n-k\}$ annehmen, da sonst $O_{2n}^\circ < 2k$ wäre. Für jedes solche r zerfällt die $2n$ -Brücke wie oben in zwei Teilwege. Der erste geht von $(0, 0)$ nach $(1, -1)$, verläuft danach zum Punkt $(2r-1, -1)$, ohne die x -Achse zu treffen, und geht dann von $(2r-1, -1)$ zum Punkt $(2r, 0)$. Der zweite Teilweg ist eine von $(2r, 0)$ nach $(2n, 0)$ verlaufende $(2n-2r)$ -Brücke, die $2k$ Zeitschritte oberhalb der x -Achse verbringt (Bild 3.9).

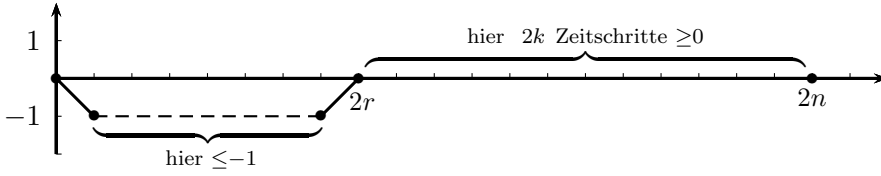


Bild 3.9: Zerlegung einer $2n$ -Brücke mit $O_{2n}^\circ = 2k$ und $S_1 = -1$ nach der ersten Nullstelle

Da jeder der auftretenden Teilwege eine Höchstlänge von $2n-2$ aufweist, gilt nach der Induktionsannahme (3.13) und der Multiplikationsformel der Kombinatorik

$$|\{O_{2n}^\circ = 2k\}| = \sum_{r=1}^k c(r-1) \cdot c(n-r) + \sum_{r=1}^{n-k} c(r-1) \cdot c(n-r).$$

Die zweite Summe geht mit der Index-Transformation $t := n+1-r$ in

$$\sum_{t=k+1}^n c(t-1) \cdot c(n-t)$$

über, und es ergibt sich, indem wir wieder $r := t$ setzen,

$$|\{O_{2n}^\circ = 2k\}| = \sum_{r=1}^n c(r-1) \cdot c(n-r).$$

Da die rechte Seite nicht von $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ abhängt und folglich

$$\begin{aligned} \binom{2n}{n} &= |W_{2n}^\circ| = \sum_{k=0}^n |\{O_{2n}^\circ = 2k\}| \\ &= 2 \cdot |\{O_{2n}^\circ = 2n\}| + (n-1) \cdot |\{O_{2n}^\circ = 2\}| \\ &= 2 \cdot \binom{2n}{n} \cdot \frac{1}{n+1} + (n-1) \cdot |\{O_{2n}^\circ = 2\}| \end{aligned}$$

gilt, ergibt sich $|\{O_{2n}^\circ = 2k\}| = \binom{2n}{n}/(n+1)$ für jedes $k = 0, 1, \dots, n$, was zu zeigen war. ■

Satz 3.4 besagt, dass die Verweilzeit O_{2n}° einer $2n$ -Brücke oberhalb der x -Achse auf den möglichen Werten *gleichverteilt* ist. Natürlich hätte man erwarten können, dass wegen der gegenüber einer einfachen symmetrischen Irrfahrt volatilitätsdämpfend wirkenden Bedingung $S_{2n} = 0$ bei einer $2n$ -Brücke ein sehr kurzes

oder sehr langes Verweilen oberhalb der x -Achse erschwert wird. Dass sich dieser Umstand aber gerade in einer Gleichverteilung auswirkt, ist erstaunlich. Die diskrete Gleichverteilung auf den Werten $0, 2, 4, \dots, 2n$ geht bei Betrachtung des Zeitanteils $O_{2n}^\circ/(2n)$ in eine Gleichverteilung auf den Werten $0, 1/n, 2/n, \dots, 1$ über. Beim Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ ergibt sich dann unmittelbar das folgende Resultat.

Satz 3.5. (Grenzverteilung der Verweilzeit eines Brückenweges)

Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{O_{2n}^\circ}{2n} \leq x \right) = x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Der Zeitanteil, den eine rein zufällige $2n$ -Brücke oberhalb der x -Achse verbringt, besitzt also asymptotisch für $n \rightarrow \infty$ die (stetige) Gleichverteilung $U(0, 1)$ auf dem Einheitsintervall, und wir schreiben hierfür kurz

$$\frac{O_{2n}^\circ}{2n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} Z, \quad Z \sim U(0, 1).$$

Bild 3.10 zeigt das im Vergleich zu Bild 2.25 qualitativ andere – weil wesentlich weniger extreme – Verhalten der Verweilzeit oberhalb der x -Achse bei Brückenwegen im Gegensatz zu einfachen Irrfahrten anhand dreier Brücken der Länge 500.

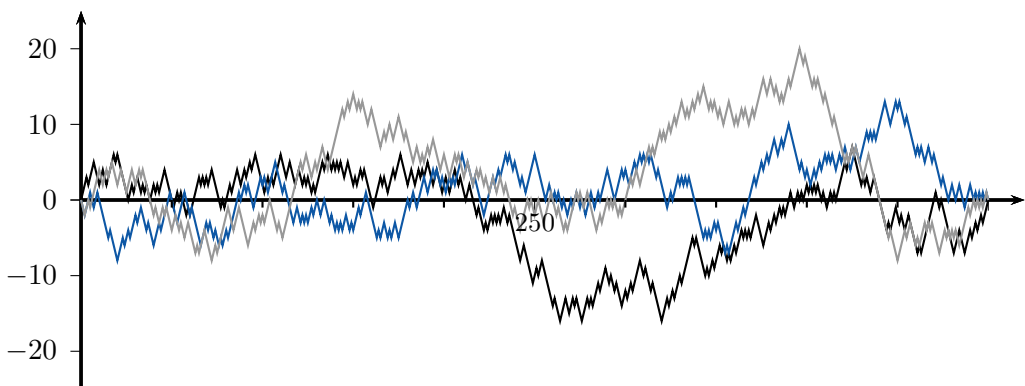


Bild 3.10: Verweilzeiten von Brückenwegen sind gleichverteilt

3.3 Letzte Nullstelle und Erstwiederkehrzeit

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Verteilungen der *Erstwiederkehrzeit*

$$T_{2n}^{\circ} := \min\{2j : 1 \leq j \leq n \text{ und } S_{2j} = 0\}$$

sowie des mit

$$L_{2n}^{\circ} := \max\{2j : 0 \leq j \leq n-1 \text{ und } S_{2j} = 0\}$$

bezeichneten *Zeitpunktes der letzten Nullstelle* einer $2n$ -Brücke (Bild 3.11).

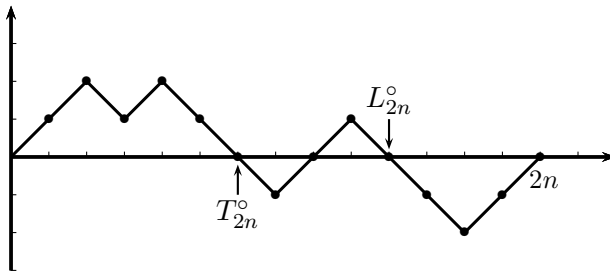


Bild 3.11: Erstwiederkehrzeit und letzte Nullstelle einer $2n$ -Brücke

Man beachte, dass der Ursprung $(0,0)$ als Nullstelle mitgezählt wird, sodass L_{2n}° die möglichen Werte $0, 2, \dots, 2n-2$ annimmt. Die Erstwiederkehrzeit T_{2n}° kann die Werte $2, 4, \dots, 2n$ annehmen. Da die Brücke im Punkt $(2n, 0)$ endet, geschieht spätestens zum Zeitpunkt $2n$ eine Erstwiederkehr (zum Nullniveau).

Satz 3.6. (Verteilung der Erstwiederkehrzeit einer Brücke)

Für die Erstwiederkehrzeit T_{2n}° einer $2n$ -Brücke gelten:

a)

$$\mathbb{P}(T_{2n}^{\circ} = 2k) = \frac{2}{k} \cdot \frac{\binom{2(k-1)}{k-1} \binom{2(n-k)}{n-k}}{\binom{2n}{n}}, \quad k = 1, \dots, n,$$

b)

$$\mathbb{E}(T_{2n}^{\circ}) = \frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n}} = \frac{1}{u_{2n}}.$$

c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T_{2n}^\circ = 2k) = \frac{1}{2k} \cdot \frac{\binom{2(k-1)}{k-1}}{2^{2(k-1)}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

d)

$$\mathbb{V}(T_{2n}^\circ) = \frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n}} \left(n + 1 - \frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n}} \right).$$

BEWEIS: a): Die für das Eintreten des Ereignisses $\{T_{2n}^\circ = 2k\}$ günstigen unter allen $\binom{2n}{n}$ möglichen $2n$ -Brückenwegen zerfallen jeweils in zwei Teilwege, nämlich eine $2k$ -Brücke von $(0, 0)$ nach $(2k, 0)$ und eine von $(2k, 0)$ nach $(2n, 0)$ verlaufende Brücke, wobei letztere Brücke keinen Einschränkungen unterliegt. Die von $(0, 0)$ nach $(2k, 0)$ verlaufende Brücke besitzt im Intervall $[1, 2k - 1]$ keine Nullstelle, verläuft also nach einem im Punkt $(0, 0)$ angebrachten Aufwärts- bzw. Abwärtsschritt bis zum Zeitpunkt $2k - 1$ ganz oberhalb der Höhe $y = 1$ bzw. ganz unterhalb der Höhe $y = -1$ und steigt dann zum „Erstwiederkehrpunkt“ $(2k, 0)$ ab bzw. auf. Nach den in Abschnitt 3.2 angestellten Überlegungen gilt

$$|\{T_{2n}^\circ = 2k\}| = 2 \cdot \binom{2(k-1)}{k-1} \cdot \frac{1}{k} \cdot \binom{2(n-k)}{n-k},$$

woraus die Behauptung folgt.

b): Mit u_{2m} wie in (2.13) ergibt sich

$$\mathbb{E}(T_{2n}^\circ) = \sum_{k=1}^n 2k \cdot \mathbb{P}(T_{2n}^\circ = 2k) = 4 \cdot \frac{2^{2(n-1)}}{\binom{2n}{n}} \sum_{k=1}^n u_{2(k-1)} \cdot u_{2(n-k)}$$

und somit die Behauptung, da die letzte Summe nach einer Indexverschiebung ($j = k - 1$) gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(L_{2(n-1)} = 2j)$ über $j = 0, 1, \dots, n - 1$, also gleich 1 ist (vgl. Satz 2.4).

c): Diese Behauptung folgt aus a) und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{2(n-k)}{n-k}}{\binom{2n}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{j=0}^{k-1} \frac{n-j}{2n-j} \cdot \prod_{j=0}^{k-1} \frac{n-j}{2n-k-j} \right) = \frac{1}{2^{2k}}.$$

d): Mit u_{2m} wie in (2.13) erhält man

$$\mathbb{E}(T_{2n}^{\circ 2}) = \sum_{k=1}^n (2k)^2 \mathbb{P}(T_{2n}^{\circ} = 2k) = \frac{2^{2n+1}}{\binom{2n}{n}} \sum_{k=1}^n k u_{2(k-1)} u_{2(n-k)}.$$

Wegen $u_{2(k-1)} u_{2(n-k)} = \mathbb{P}(L_{2(n-1)} = 2(k-1))$ (s. Satz 2.4) ist letztere Summe gleich

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [2(k-1) + 2] \cdot \mathbb{P}(L_{2(n-1)} = 2(k-1)) = \frac{1}{2} (\mathbb{E}(L_{2(n-1)}) + 2) = \frac{n+1}{2},$$

sodass die Behauptung mit $\mathbb{V}(T_{2n}^{\circ}) = \mathbb{E}(T_{2n}^{\circ 2}) - (\mathbb{E}(T_{2n}^{\circ}))^2$ und Teil b) folgt. ■

Die rechte Seite von Aussage c) ist nach Satz 2.9 gleich der Wahrscheinlichkeit, dass eine einfache symmetrische Irrfahrt zur Zeit $2k$ erstmalig zum Nullniveau zurückkehrt. Dieses Resultat ist plausibel, spiegelt es doch nur die anschaulich klare Tatsache wider, dass das stochastische Verhalten einer $2n$ -Brücke in der Nähe des Ursprungs bei wachsendem n demjenigen einer einfachen symmetrischen Irrfahrt immer ähnlicher wird. In der Deutung der zeitlichen Entwicklung einer $2n$ -Brücke als sukzessives rein zufälliges Ziehen aus einer Urne mit n roten und n schwarzen Kugeln ist es bei wachsendem n für die Wahrscheinlichkeit, dass sich nach $2k$ Ziehungen erstmals ein Gleichstand von gezogenen roten und schwarzen Kugeln einstellt, immer unbedeutender, ob das Ziehen mit oder ohne Zurücklegen erfolgt. Der erste Fall entspricht der einfachen symmetrischen Irrfahrt, der zweite demjenigen einer $2n$ -Brücke. Bild 3.12 zeigt das Stabdiagramm der Verteilung von T_{2n}° für den Fall $n = 20$.

Wir wenden uns nun der Verteilung von L_{2n}° zu. Man könnte versucht sein, diese analog zu derjenigen von T_{2n}° herzuleiten. Es geht aber viel einfacher, und zwar durch eine Symmetriebetrachtung. Wir haben bereits gesehen, dass die zeitliche Entwicklung einer $2n$ -Brücke durch ein Urnenmodell beschrieben werden kann. In diesem Modell werden aus einer Urne mit n roten und n schwarzen Kugeln nacheinander rein zufällig ohne Zurücklegen alle Kugeln entnommen, wobei man das Ziehen einer roten bzw. schwarzen Kugeln als Auf- bzw. Abwärtsschritt einer Irrfahrt notiert. Stellt man sich vor, alle Kugeln seien jeweils aus zwei Hälften zusammengesetzt und sähen äußerlich gleich aus, so könnte man gedanklich alle $2n$ Kugeln in der gedachten Ziehungsreihenfolge in eine Reihe legen und erst danach jede Kugel öffnen, um die jeweils innen angebrachte Farbe zu sehen. Aus Symmetriegründen könnte man aber auch die zeitliche Reihenfolge umkehren und

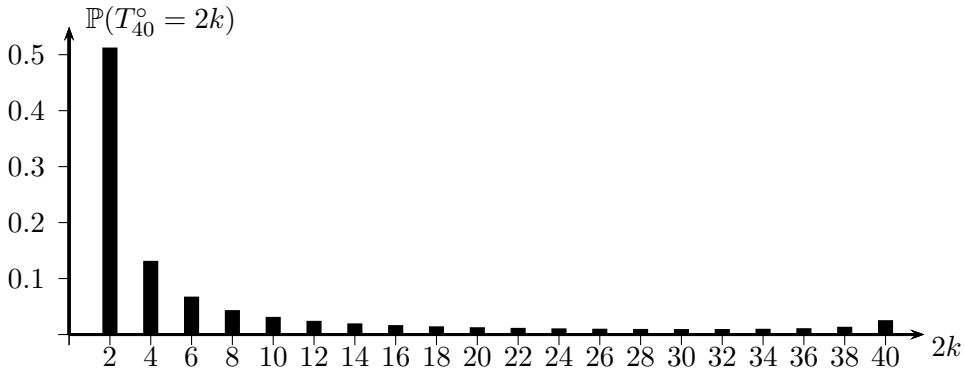


Bild 3.12: Stabdiagramm der Verteilung der Erstwiederkehrzeit T_{40}°

bei der letzten Kugel beginnen, dann mit der vorletzten Kugel fortfahren usw., was nichts anderes bedeutet, als die $2n$ -Brücke im Punkt $(2n, 0)$ starten und sich dann anschaulich gesprochen „nach links entwickeln zu lassen“, bis sie im Ursprung endet. Diese Möglichkeit ergibt sich unmittelbar daraus, dass die in (3.1) gegebene gemeinsame Verteilung von X_1, \dots, X_{2n} symmetrisch in X_1, \dots, X_{2n} ist und insbesondere die Verteilungsgleichheit

$$(X_1, X_2, \dots, X_{2n-1}, X_{2n}) \sim (X_{2n}, X_{2n-1}, \dots, X_2, X_1)$$

besteht. Die in Zeitumkehr durchlaufene $2n$ -Brücke besitzt also das gleiche stochastische Verhalten wie die ursprüngliche $2n$ -Brücke. Nun ist die letzte Nullstelle einer $2n$ -Brücke zugleich die erste nichttriviale Nullstelle der in umgekehrter Richtung durchlaufenen Brücke. Der zufällige Zeitpunkt L_{2n}° dieser letzten Nullstelle besitzt also die gleiche Verteilung wie $2n - T_{2n}^{\circ}$; aus diesem Grund gelten

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(L_{2n}^{\circ} = 2k) &= \mathbb{P}(2n - T_{2n}^{\circ} = 2k) = \mathbb{P}(T_{2n}^{\circ} = 2n - 2k), \\ \mathbb{E}(L_{2n}^{\circ}) &= \mathbb{E}(2n - T_{2n}^{\circ}) = 2n - \mathbb{E}(T_{2n}^{\circ}) \end{aligned}$$

sowie $\mathbb{V}(L_{2n}^{\circ}) = \mathbb{V}(T_{2n}^{\circ})$. Satz 3.6 liefert somit unmittelbar folgendes Resultat:

Satz 3.7. (Verteilung der letzten Nullstelle einer Brücke)

Für den Zeitpunkt L_{2n}° der letzten Nullstelle einer $2n$ -Brücke gelten:

a)

$$\mathbb{P}(L_{2n}^{\circ} = 2k) = \frac{2}{n-k} \cdot \frac{\binom{2k}{k} \binom{2(n-k-1)}{n-k-1}}{\binom{2n}{n}}, \quad k = 0, \dots, n-1,$$

b)

$$\mathbb{E}(L_{2n}^\circ) = 2n - \frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n}},$$

c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(L_{2n}^\circ = 2n - 2k) = \frac{1}{2k} \cdot \frac{\binom{2(k-1)}{k-1}}{2^{2(k-1)}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

d)

$$\mathbb{V}(L_{2n}^\circ) = \frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n}} \left(n + 1 - \frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n}} \right).$$

3.4 Maximum und Minimum

Die Verteilung des Maximums

$$M_{2n}^\circ := \max(S_0, S_1, \dots, S_{2n})$$

einer $2n$ -Brücke ergibt sich unmittelbar aus dem auf Seite 12 vorgestellten Spiegelungsprinzip: Spiegelt man eine $2n$ -Brücke mit der Eigenschaft $M_{2n}^\circ \geq k$ ($k \in \{1, \dots, n\}$) ab dem Zeitpunkt, zu dem sie zum ersten Mal die Höhe k erreicht, an der Geraden $y = k$ und lässt den Teilweg davor unverändert, so entsteht ein Weg von $(0, 0)$ nach $(2n, 2k)$. Andererseits erreicht jeder von $(0, 0)$ nach $(2n, 2k)$ verlaufende Weg erstmalig die Höhe k . Spiegelt man den Weg ab diesem Zeitpunkt an der Geraden $y = k$ und belässt den ersten Teilweg, so entsteht eine $2n$ -Brücke (Bild 3.13). Es existiert somit eine bijektive Abbildung zwischen der Menge aller $2n$ -Brücken mit $M_{2n}^\circ \geq k$ und der Menge aller Wege von $(0, 0)$ nach $(2n, 2k)$.

Nach Lemma 2.1 gilt

$$\mathbb{P}(M_{2n}^\circ \geq k) = \frac{\binom{2n}{n+k}}{\binom{2n}{n}}, \quad k = 0, \dots, n, \quad (3.14)$$

und wir erhalten das folgende, für Teil a) auf B.V. Gnedenko und V.S. Korolyuk [GK] zurückgehende Resultat (s.a. [REN], S. 496 ff.):

b)

$$\mathbb{E}(M_{2n}^{\circ}) = \frac{2^{2n-1}}{\binom{2n}{n}} - \frac{1}{2},$$

c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}(M_{2n}^{\circ})}{\sqrt{2n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

d)

$$\mathbb{V}(M_{2n}^{\circ}) = n + \frac{1}{4} - \frac{2^{4n-2}}{\binom{2n}{n}^2}.$$

BEWEIS: a) folgt aus (3.14) und $\mathbb{P}(M_{2n}^{\circ} = k) = \mathbb{P}(M_{2n}^{\circ} \geq k) - \mathbb{P}(M_{2n}^{\circ} \geq k+1)$. Wegen (6.9), $\binom{2n}{n+k} = \binom{2n}{n-k}$ für $k = 0, \dots, n$ sowie $\sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} = 2^{2n}$ erhält man

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_{2n}^{\circ}) &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(M_{2n}^{\circ} \geq k) = \binom{2n}{n}^{-1} \sum_{k=1}^n \binom{2n}{n+k} \\ &= \binom{2n}{n}^{-1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(2^{2n} - \binom{2n}{n} \right), \end{aligned}$$

was b) beweist. Aufgrund der Gleichung $\mathbb{E}(M_{2n}^{\circ}) = 1/(2u_{2n}) - 1/2$ mit u_{2n} wie in (2.13) ergibt sich c) aus (2.22). Nach (6.10) gilt

$$\mathbb{E}[(M_{2n}^{\circ})^2] = \sum_{k=1}^n (2k-1) \mathbb{P}(M_{2n}^{\circ} \geq k) = 2 \cdot \sum_{k=1}^n \frac{k \cdot \binom{2n}{n+k}}{\binom{2n}{n}} - \mathbb{E}(M_{2n}^{\circ}).$$

Unter Verwendung von (6.15) ergibt sich dann d) mit etwas Geduld durch direkte Rechnung. ■

Der folgende, in allgemeinerer Form von N.W. Smirnov⁴ [SM] bewiesene Satz (s.a. [REN], S. 496 ff.) beschreibt das asymptotische Verhalten von M_{2n}° für $n \rightarrow \infty$:

⁴Nikolai Wassiljewitsch Smirnov (1900–1966), war ein führender russischer mathematischer Statistiker. Ab 1938 arbeitete er am Steklow-Institut, wo er in seinem letzten Lebensjahr als Nachfolger von A.N. Kolmogorov die Abteilung mathematische Statistik leitete.

Satz 3.9. (Grenzverteilung des Maximums eines Brückenweges)*Es gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{M_{2n}^\circ}{\sqrt{2n}} \leq x \right) = 1 - \exp(-2x^2), \quad x \geq 0. \quad (3.15)$$

BEWEIS: Wir können $x > 0$ voraussetzen, da die Aussage offenbar für $x = 0$ gilt. Schreiben wir k_n für die kleinste ganze Zahl, die größer oder gleich $x\sqrt{2n}$ ist, so gilt wegen der Ganzzahligkeit von M_{2n}° und (3.14)

$$\mathbb{P} \left(\frac{M_{2n}^\circ}{\sqrt{2n}} \geq x \right) = \mathbb{P}(M_{2n}^\circ \geq k_n) = \frac{\binom{2n}{n+k_n}}{\binom{2n}{n}} = \prod_{j=0}^{k_n-1} \left(1 - \frac{k_n}{n-j+k_n} \right).$$

Geht man hier zum Logarithmus über und verwendet die Ungleichungen (6.7) und (6.8), so ergeben sich die Abschätzungen

$$\log \mathbb{P} \left(\frac{M_{2n}^\circ}{\sqrt{2n}} \geq x \right) \leq -k_n \cdot \sum_{j=0}^{k_n-1} \frac{1}{n-j+k_n} \leq -\frac{k_n^2}{n+k_n}, \quad (3.16)$$

$$\log \mathbb{P} \left(\frac{M_{2n}^\circ}{\sqrt{2n}} \geq x \right) \geq -k_n \cdot \sum_{j=0}^{k_n-1} \frac{1}{n-j} \geq -\frac{k_n^2}{n-k_n+1}. \quad (3.17)$$

Nach Definition von k_n konvergieren die rechten Seiten von (3.16) und (3.17) für $n \rightarrow \infty$ gegen $-2x^2$, sodass die Behauptung folgt. ■

x	$G_{2,2}(x)$	x	$G_{2,2}(x)$	x	$G_{2,2}(x)$
0.00	0.000	0.589	0.500	1.20	0.944
0.05	0.005	0.60	0.513	1.224	0.950
0.10	0.020	0.70	0.625	1.30	0.966
0.15	0.044	0.80	0.722	1.40	0.980
0.20	0.077	0.90	0.802	1.50	0.989
0.30	0.165	1.00	0.865	1.52	0.990
0.40	0.274	1.073	0.900	1.60	0.994
0.50	0.394	1.10	0.911	1.70	0.997

Tabelle 3.2: Verteilungsfunktion $G_{2,2}(x) := 1 - \exp(-2x^2)$

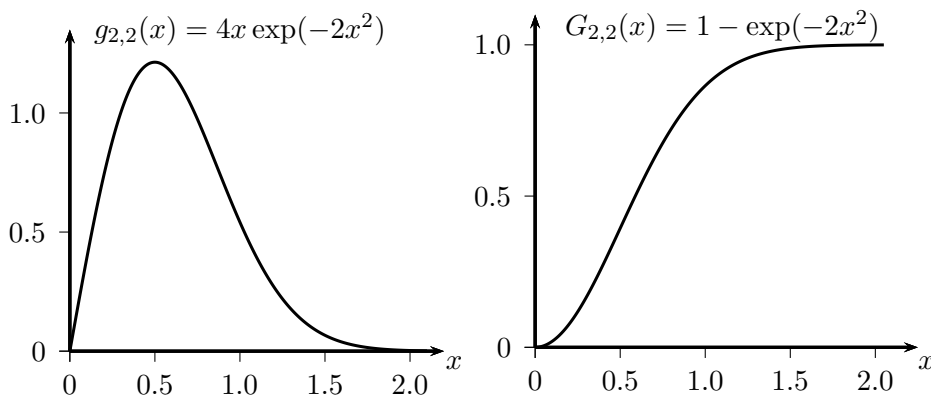


Bild 3.15: Dichte und Verteilungsfunktion der Weibull-Verteilung $W(2,2)$

Bild 3.15 zeigt die Verteilungsfunktion $G_{2,2}$ (rechts) und die Dichte $g_{2,2}$ (links) der Verteilung $W(2,2)$ (vgl. (3.7)), und Tabelle 3.2 enthält einige Werte von $G_{2,2}$. Es ist interessant, das asymptotische Verhalten des in Abschnitt 2.7 studierten Maximums M_{2n} einer einfachen Irrfahrt mit demjenigen eines gleich langen Brückenweges in Beziehung zu setzen. Wir hatten ja vermutet, dass eine Brücke im Vergleich zu einer einfachen Irrfahrt in ihrer Volatilität eingeschränkt ist, was sich beim stochastischen Verhalten des „maximalen Ausschlags nach oben“ bemerkbar machen sollte. Nach Satz 2.13 und Satz 3.9 gilt für großes n und $x > 0$

$$\mathbb{P}(M_{2n} \leq x\sqrt{2n}) \approx \Phi^*(x), \quad \mathbb{P}(M_{2n}^\circ \leq x\sqrt{2n}) \approx W_{2,2}(x),$$

was mit Tabelle 3.2 und Tabelle 2.2 für $x = 0.1$ bzw. $x = 1$ die Vergleichswerte

$$\mathbb{P}(M_{10000} \leq 10) \approx 0.08, \quad \mathbb{P}(M_{10000}^\circ \leq 10) \approx 0.02,$$

$$\mathbb{P}(M_{10000} \leq 100) \approx 0.683, \quad \mathbb{P}(M_{10000}^\circ \leq 100) \approx 0.865,$$

liefert. Einfache symmetrische Irrfahrten haben also im Vergleich zu Brücken eine größere Aussicht auf ein *kleines* Maximum; andererseits besitzen Brückenwege verglichen mit gleich langen einfachen Irrfahrten eine kleinere Chance auf ein *großes* Maximum. Eine freie Irrfahrt kann ja nach dem Start „durch keinen Rückstellmechanismus beeinträchtigt in den Bereich der negativen ganzen Zahlen abdriften“ und die x -Achse nicht mehr erreichen, was mit einer durchaus substantziellen Wahrscheinlichkeit passiert. So gilt etwa nach Satz 2.12 c) und Satz 3.8

$$\mathbb{P}(M_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} 2^{-2n} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi n}}, \quad \mathbb{P}(M_{2n}^\circ = 0) = \frac{1}{n+1}.$$

Auf der anderen Seite kann eine symmetrische Irrfahrt der Länge $2n$ die maximal mögliche Höhe n für $2n$ -Brücken deutlich überschreiten.

Bild 3.16 zeigt, dass für kleines x die Ungleichung $\Phi^*(x) > W_{2,2}(x)$ gilt, wohingegen sich für großes x die umgekehrte Ungleichung einstellt (der numerisch ermittelte Wert x_0 , für den $\Phi^*(x_0) = W_{2,2}(x_0)$ gilt, ist $x_0 = 0.4791$).

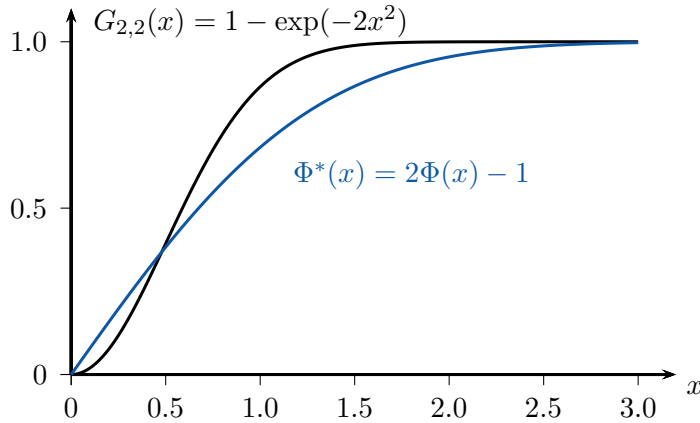


Bild 3.16: Graphen der Funktionen Φ^* und $W_{2,2}$

Wegen

$$m_{2n}^\circ := \min(S_0, S_1, \dots, S_{2n}) = -\max(-S_0, -S_1, \dots, -S_{2n})$$

ergibt sich die Verteilung des Minimums m_{2n}° unmittelbar aus derjenigen des Maximums, da M_{2n}° und $\max(-S_0, \dots, -S_{2n})$ die gleiche Verteilung besitzen, weil letzteres auf die Zufallsvektoren (X_1, \dots, X_{2n}) und $(-X_1, \dots, -X_{2n})$ zutrifft.

Wir möchten abschließend noch eine nahe liegende Frage beantworten: An welcher Stelle $k \in \{0, 1, \dots, 2n-1\}$ wird das Maximum eines $2n$ -Brückenweges angenommen? Für den Weg in Bild 3.13 geschieht dies an genau einer Stelle, nämlich zum Zeitpunkt 9. Es können im Allgemeinen aber auch mehrere Werte von k sein. Im Folgenden bezeichne

$$A := \left\{ k \in \{0, 1, \dots, 2n-1\} : S_k = \max_{0 \leq j \leq 2n-1} S_j \right\} \quad (3.18)$$

die zufällige Menge der Zeitpunkte, an denen das Maximum der $2n$ -Brücke angenommen wird. Man beachte, dass die Menge A maximal n Elemente besitzen

kann. Diese Maximalzahl wird zum Beispiel für den Weg erreicht, der abwechselnd um einen Schritt nach unten und dann wieder nach oben geht. Wir vereinbaren, aus der Menge A rein zufällig ein Element auszuwählen. Bezeichnen wir das Ergebnis dieser Auswahl mit T , so nimmt die als *Maximalstelle* der $2n$ -Brücke bezeichnete Zufallsvariable T einen der Werte $0, 1, \dots, 2n - 1$ an. Das folgende überraschende Resultat besagt, dass T eine Gleichverteilung besitzt.

Satz 3.10. (Verteilung der Maximalstelle eines Brückenweges)

Die Maximalstelle T einer $2n$ -Brücke ist gleichverteilt, d.h. es gilt

$$\mathbb{P}(T = k) = \frac{1}{2n}, \quad k = 0, 1, \dots, 2n - 1. \quad (3.19)$$

BEWEIS: Auf der Menge

$$\Omega := \{(a_1, \dots, a_{2n}) \in \{-1, 1\}^{2n} : a_1 + \dots + a_{2n} = 0\}$$

aller $2n$ -Brücken nennen wir zwei Wege (a_1, \dots, a_{2n}) und (b_1, \dots, b_{2n}) aus Ω *äquivalent*, wenn sie durch eine zyklische Vertauschung auseinander hervorgehen, wenn es also ein $j \in \{0, 1, \dots, 2n - 1\}$ mit der Eigenschaft $b_k = a_{k+j}$ für $k = 1, \dots, 2n - j$ und $b_k = a_{j-2n+k}$ für $k = 2n - j + 1, \dots, 2n$ gibt.

Geometrisch entstehen die durch zyklische Vertauschung hervorgehenden Wege, indem man den Brückenweg noch einmal im Punkt $(2n, 0)$ anträgt und dann einen Zeitabschnitt der Länge $2n$ dieses „gedoppelten Weges“ für jedes $j = 0, 1, \dots, 2n - 1$ vom Punkt (j, S_j) als neuem Ursprung aus betrachtet. Die zyklische Vertauschung definiert eine Äquivalenzrelation auf Ω , wobei jede Äquivalenzklasse genau $2n$ Wege enthält.

Je zwei äquivalente Wege besitzen das gleiche Maximum, und die zugehörigen Mengen A der Maximalstellen wie in (3.18) gehen durch die gleiche zyklische Vertauschung wie die beiden Wege auseinander hervor. Jede der Maximalstellen nimmt dabei jeden der Werte $0, 1, \dots, 2n - 1$ an. Es folgt, dass T auf jeder der Äquivalenzklassen gleichverteilt ist; es gilt also $\mathbb{P}(T = k | B_i) = 1/(2n)$, $k = 0, 1, \dots, 2n - 1$, für jede Äquivalenzklasse $B_i \subset \Omega$. Hieraus ergibt sich die Behauptung mit der Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit. ■

3.5 Vorzeichenwechsel

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Anzahl

$$C_{2n}^{\circ} := \sum_{j=1}^{n-1} \mathbf{1}\{S_{2j+1} \cdot S_{2j-1} = -1\}$$

der Vorzeichenwechsel einer $2n$ -Brücke. Offenbar nimmt C_{2n}° die möglichen Werte $0, 1, \dots, n-1$ an. Auch hier empfiehlt es sich, zunächst $\mathbb{P}(C_{2n}^{\circ} \geq k)$ und somit die Anzahl $|\{C_{2n}^{\circ} \geq k\}|$ aller $2n$ -Brücken mit *mindestens* k Vorzeichenwechseln zu bestimmen. Dabei gilt aus Symmetriegründen

$$|\{C_{2n}^{\circ} \geq k\}| = 2 \cdot |\{C_{2n}^{\circ} \geq k, S_1 = 1\}|; \quad (3.20)$$

wir können also annehmen, dass die Brücke mit einem Aufwärtsschritt startet. Die nachfolgenden Überlegungen zeigen, dass die Menge $M_{1,k}$ aller $2n$ -Brücken mit $C_{2n}^{\circ} \geq k$ und $S_1 = 1$ bijektiv auf die mit $M_{2,k}$ bezeichnete Menge aller Wege von $(1, 1)$ nach $(2n, -2k)$ abgebildet werden kann. Da $M_{2,k}$ nach (2.9) $\binom{2n-1}{n+k}$ Elemente besitzt, erhielten wir zusammen mit (3.20) das Resultat (vgl. [DW], S. 1049)

$$\mathbb{P}(C_{2n}^{\circ} \geq k) = 2 \cdot \frac{\binom{2n-1}{n+k}}{\binom{2n}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (3.21)$$

Zur Konstruktion der Bijektion zwischen $M_{1,k}$ und $M_{2,k}$ nehmen wir o.B.d.A. $k \geq 1$ an, da im Fall $k = 0$ beide Seiten von (3.21) gleich 1 sind und somit nichts zu zeigen ist. Bild 3.17 zeigt eine $2n$ -Brücke, die für jedes $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ zu $M_{1,k}$ gehört (man beachte, dass $M_{1,1} \supset M_{1,2} \supset M_{1,3} \supset \dots$ gilt).

Als Weg aus $M_{1,k}$ erreicht die Brücke nach dem ersten Vorzeichenwechsel die Höhe -1 . Spiegelt man den sich anschließenden Teilweg an der Geraden $y = -1$, so erhält man einen von $(1, 1)$ nach $(2n, -2)$ verlaufenden Weg, also ein Element aus $M_{2,1}$. Dabei ist diese Zuordnung von Wegen aus $M_{1,k}$ zu Wegen aus $M_{2,k}$ offenbar injektiv. Umgekehrt erreicht ein von $(1, 1)$ nach $(2n, -2)$ führender Weg irgendwann erstmalig die Höhe -1 . Spiegelung des sich anschließenden Teilweges an der Geraden $y = -1$ und Hinzufügen eines Aufwärtsschrittes zu Beginn liefert eine $2n$ -Brücke aus $M_{1,1}$ (Bild 3.18), was die Surjektivität der Zuordnung zeigt.

Ein Weg aus $M_{1,2}$ erreicht nach dem ersten Vorzeichenwechsel die Höhe -1 und nach dem zweiten Vorzeichenwechsel die Höhe 1 . Spiegelt man den Teilweg zwischen dem ersten und zweiten Vorzeichenwechsel an der Geraden $y = -1$, so

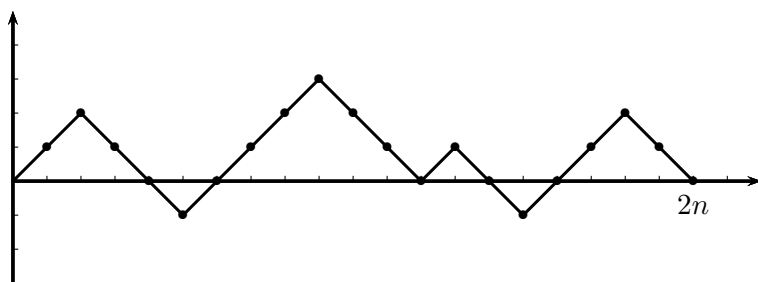


Bild 3.17: $2n$ -Brückenweg mit mindestens k Vorzeichenwechseln ($k = 1, 2, 3, 4$)

erreicht der gespiegelte Teilweg die Höhe -3 . Setzt man den Teilweg nach dem zweiten Vorzeichenwechsel dort an (verschiebt man ihn also um 4 Einheiten nach unten), so entsteht ein von $(1, 1)$ zum Punkt $(2n, -4)$ führender Weg, also ein Weg aus $M_{2,2}$, s. Bild 3.19.

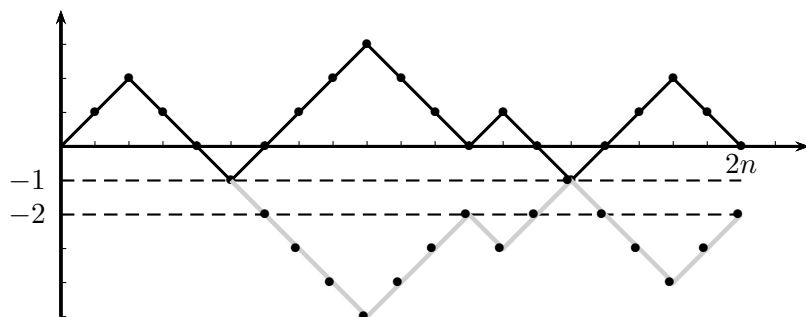


Bild 3.18: Bijektion von $M_{1,1}$ auf $M_{2,1}$

Umgekehrt erhält man wie folgt in eindeutiger Weise aus einem von $(1, 1)$ nach $(2n, -4)$ verlaufenden Weg eine $2n$ -Brücke mit mindestens zwei Vorzeichenwechseln: Ein Weg aus $M_{2,2}$ erreicht erstmalig die Höhe -1 (hat also dann den ersten Vorzeichenwechsel absolviert) und danach erstmalig die Höhe -3 . Der Teilweg zwischen dem jeweils erstmaligen Erreichen dieser Höhen wird an der Geraden $y = -1$ gespiegelt (hierdurch vollzieht der gespiegelte Teilweg einen weiteren Vorzeichenwechsel); den anschließenden Teilweg verschiebt man um 4 Einheiten nach oben, setzt ihn also an den gespiegelten Weg an (Bild 3.19). Fügt man noch zu Beginn einen Aufwärtsschritt hinzu, so entsteht insgesamt ein Weg aus $M_{1,2}$.

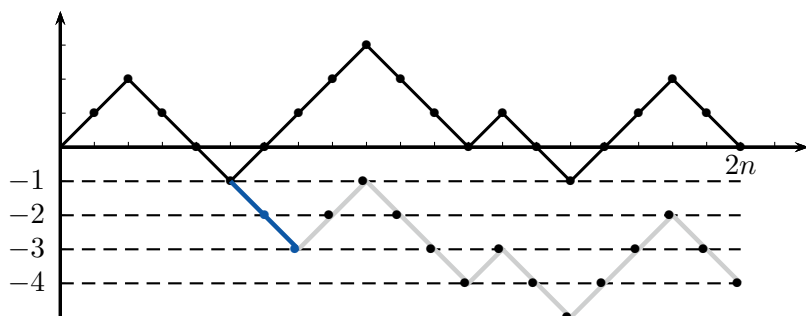


Bild 3.19: Bijektion von $M_{1,2}$ auf $M_{2,2}$ durch Spiegeln (blauer Teilweg) und Verschieben (grauer Teilweg)

Ein Weg aus $W_{1,k}$ mit $k \geq 3$ wird wie folgt durch abwechselndes Spiegeln und Verschieben auf einen von $(1, 1)$ nach $(2n, -2k)$ führenden Weg abgebildet: Man streicht den ersten Aufwärtsschritt und lässt den Teilweg bis zum ersten Vorzeichenwechsel unverändert. Den anschließenden Teilweg bis zum zweiten Vorzeichenwechsel spiegelt man an der Geraden $y = -1$, sodass der gespiegelte Teilweg in der Höhe -3 endet. Dort setzt man den (unverändert belassenen) Teilweg bis zum dritten Vorzeichenwechsel an, was einen in der Höhe -5 endenden Weg liefert. Ist $k = 3$, so heftet man den restlichen Teilweg an und endet so im Punkt $(2n, -2k)$. Andernfalls spiegelt man den Teilweg bis zum nächsten Vorzeichenwechsel an der Geraden $y = -5$; der gespiegelte Teilweg endet dann in der Höhe -7 . Ist $k = 4$, so heftet man den restlichen Teilweg an und endet so im Punkt $(2n, -2k)$ usw. Bild 3.20 illustriert die Vorgehensweise im Fall $k = 4$.

Durch die abwechselnden Spiegelungen und Verschiebungen ist die Zuordnungsvorschrift von Wegen aus $M_{1,k}$ zu Wegen aus $M_{2,k}$ injektiv. Die Surjektivität ergibt sich wie im oben ausgeführten Spezialfall $k = 2$, indem man den von $(1, 1)$ nach $(2n, -2k)$ führenden Weg in $k + 1$ Teilwege unterteilt, wobei der erste bis zum erstmaligen Erreichen der Höhe -1 und die weiteren vom erstmaligen Erreichen der Höhe $-2j + 1$ bis zum erstmaligen Erreichen der Höhe $-2j - 1$ verlaufen ($j = 1, \dots, k - 1$). Der letzte Teilweg erreicht dann den Endpunkt $(2n, -2k)$. Dem ersten Teilweg stellt man einen Aufwärtsschritt voran, den nächsten spiegelt man an der Geraden $y = -1$ und heftet ihn danach an den ersten Teilweg an, den dritten Teilweg heftet man an das Ende des gespiegelten Teilwegs an, den nächsten Teilweg spiegelt man an der Geraden $y = -3$ und heftet ihn an usw. Auf diese Weise erhält man eine $2n$ -Brücke aus $M_{1,k}$.

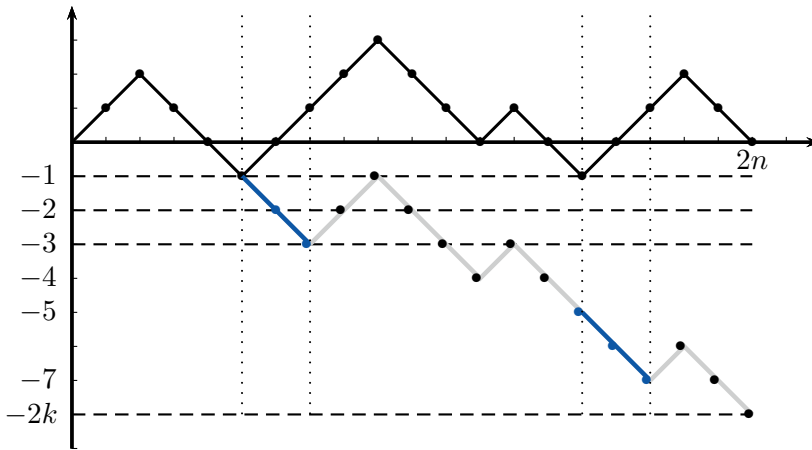


Bild 3.20: Bijektion von $M_{1,4}$ auf $M_{2,4}$ durch abwechselndes Spiegeln (blaue Teilwege) und Verschieben (graue Teilwege)

Formel (3.21) ist der Schlüssel für nachfolgende Resultate über das stochastische Verhalten von C_{2n}° (siehe [CV]).

Satz 3.11. (Verteilung der Vorzeichenwechsel in Brückenwegen)

Für die Anzahl C_{2n}° der Vorzeichenwechsel in $2n$ -Brückenwegen gelten:

a)

$$\mathbb{P}(C_{2n}^\circ = k) = \frac{2(k+1)}{n} \cdot \frac{\binom{2n}{n+k+1}}{\binom{2n}{n}}, \quad k = 0, \dots, n-1$$

b)

$$\mathbb{E}(C_{2n}^\circ) = \frac{2^{2n-1}}{\binom{2n}{n}} - 1,$$

c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}(C_{2n}^\circ)}{\sqrt{2n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}},$$

d)

$$\mathbb{V}(C_{2n}^\circ) = n - \left(\frac{2^{2n-1}}{\binom{2n}{n}} \right)^2.$$

BEWEIS: a) folgt mit $\mathbb{P}(C_{2n}^\circ = k) = \mathbb{P}(C_{2n}^\circ \geq k) - \mathbb{P}(C_{2n}^\circ \geq k+1)$ aus (3.21). Zum Nachweis von b) verwenden wir (3.21) und die Darstellung

$$\mathbb{E}(C_{2n}^\circ) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(C_{2n}^\circ \geq k) = 2 \cdot \binom{2n-1}{n+k} \binom{2n}{n}^{-1}.$$

Mit $\sum_{j=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{j} = 2^{2n-1}$ und $\binom{2n-1}{j} = \binom{2n-1}{2n-1-j}$ ergibt sich

$$2 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \binom{2n-1}{n+k} = 2^{2n-1} - 2 \cdot \binom{2n-1}{n}.$$

Hieraus folgt die Behauptung. Wegen $2^{2n-1}/\binom{2n}{n} = 2/u_{2n}$ mit u_{2n} wie in (2.13) und

$$\frac{\mathbb{E}(C_{2n}^\circ)}{\sqrt{2n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi n} \cdot u_{2n}} - \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

erhält man c) aus (2.22). Um d) zu zeigen, verwenden wir (3.21) und (6.10), wonach

$$\mathbb{E} \left[(C_{2n}^\circ)^2 \right] = \frac{1}{\binom{2n}{n}} \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) \cdot 2 \cdot \binom{2n-1}{n+k}$$

gilt. Mit (6.16) und $\sum_{k=1}^{n-1} \binom{2n-1}{n+k} = 2^{2n-2} - \binom{2n-1}{n-1}$ sowie Teil b) ergibt sich dann die Varianz von C_{2n}° mit etwas Geduld durch direkte Rechnung. Die Einzelheiten seien dem Leser überlassen. Mit (2.22) erhält man auch das asymptotische Verhalten der Varianz: Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{V} \left(\frac{C_{2n}^\circ}{\sqrt{2n}} \right) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}.$$

Satz 3.12. (Grenzverteilung von C_{2n}° , [CV])

Für die Anzahl C_{2n}° der Vorzeichenwechsel in $2n$ -Brückenwegen gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{C_{2n}^\circ}{\sqrt{2n}} \leq x \right) = 1 - \exp(-2x^2), \quad x \geq 0.$$

BEWEIS: Da der Fall $x = 0$ unmittelbar einzusehen ist, sei im Folgenden $x > 0$ vorausgesetzt. Schreiben wir k_n für die kleinste ganze Zahl größer oder gleich

$x\sqrt{2n}$, so liefert wegen (3.21) die Ganzzahligkeit von C_{2n}°

$$\mathbb{P}\left(\frac{C_{2n}^\circ}{\sqrt{2n}} \geq x\right) = 2 \cdot \frac{\binom{2n-1}{n+k_n}}{\binom{2n}{n}} = \prod_{j=0}^{k_n} \left(1 - \frac{k_n}{n+k_n-j}\right).$$

Unter Beachtung von (6.7) und (6.8) ergibt sich durch Logarithmieren

$$\log \mathbb{P}\left(\frac{C_{2n}^\circ}{\sqrt{2n}} \geq x\right) \leq -k_n \cdot \sum_{j=0}^{k_n} \frac{1}{n+k_n-j} \leq -\frac{k_n(k_n+1)}{n+k_n}, \quad (3.22)$$

$$\log \mathbb{P}\left(\frac{C_{2n}^\circ}{\sqrt{2n}} \geq x\right) \geq -k_n \cdot \sum_{j=0}^{k_n} \frac{1}{n-j} \geq -\frac{k_n(k_n+1)}{n-k_n}. \quad (3.23)$$

Nach Definition von k_n konvergieren die rechten Seiten von (3.22) und (3.23) für $n \rightarrow \infty$ gegen den gleichen Grenzwert $-2x^2$, woraus die Behauptung folgt. ■

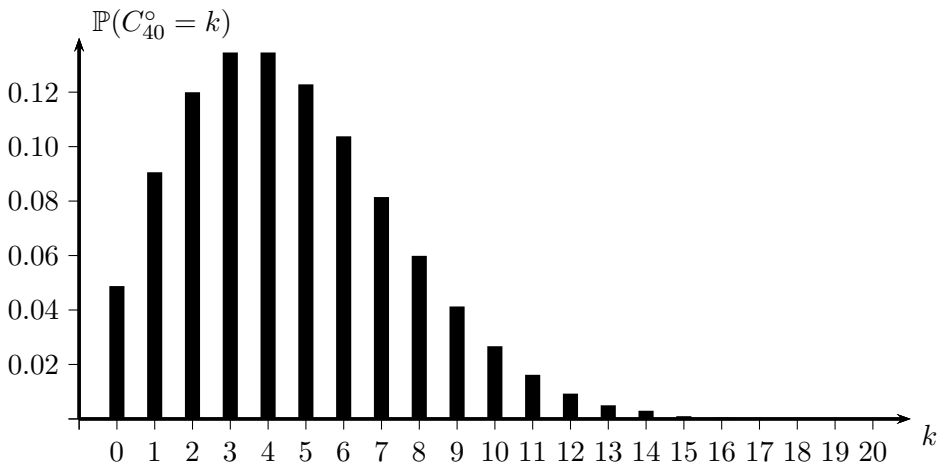


Bild 3.21: Stabdiagramm der Verteilung von C_{40}°

Das in Bild 3.21 gezeigte Stabdiagramm der Verteilung von C_{40}° hat eine andere Gestalt als das Stabdiagramm in Bild 2.44, was sich auch in den unterschiedlichen Grenzverteilungen der Anzahl von Vorzeichenwechseln in „freien“ Irrfahrten (Satz 2.33) und Brückenwegen (Satz 3.12) widerspiegelt. Man beachte, dass die Weibull-Grenzverteilungen von $C_{2n}^\circ/\sqrt{2n}$ und $M_{2n}^\circ/\sqrt{2n}$ identisch sind.

Bild 3.22 zeigt die Graphen der beiden Verteilungsfunktionen $C(x) = 2\Phi(2x) - 1$ aus Satz 2.33 und $G_{2,2}(x) = 1 - \exp(-2x^2)$ aus Satz 3.12; es ist bis auf die Skalenänderung $x \mapsto 2x$ identisch mit Bild 3.6.

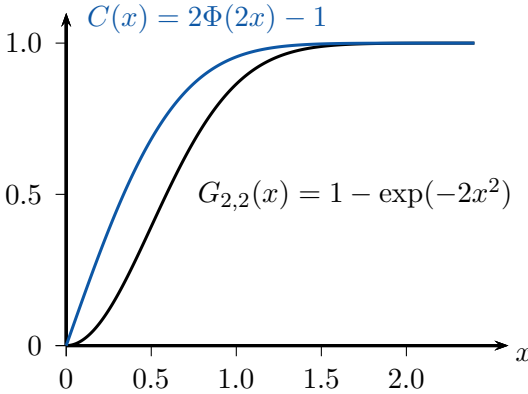


Bild 3.22: Grenzverteilungsfunktionen $G_{2,2}$ von $C_{2n}^\circ/\sqrt{2n}$ und C von $C_{2n}/\sqrt{2n}$

Man sieht den schon bei der Anzahl der Nullstellen beobachteten Effekt, dass ein Brückenweg im Vergleich zu einer freien Irrfahrt zu deutlich mehr Vorzeichenwechseln tendiert. Die Grenzverteilung der Anzahl von Vorzeichenwechseln in Brückenwegen ist stochastisch größer als die entsprechende Grenzverteilung bei freien Irrfahrten.

3.6 Betragsmaximum, Kolmogorov-Verteilung

Wir fragen jetzt ganz analog zu den in Abschnitt 2.12 angestellten Betrachtungen für das Betragsmaximum einer freien Irrfahrt nach der Verteilung der Zufallsvariablen

$$|M^\circ|_{2n} = \max_{j=1,\dots,2n} |S_j|,$$

also des *Betragsmaximums* eines $2n$ -Brückenweges.

Auch hier erweist es sich als vorteilhaft, zunächst für $k = 2, \dots, n-1$ die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(|M^\circ|_{2n} \geq k)$ zu bestimmen. Offenbar gelten $\mathbb{P}(|M^\circ|_{2n} \geq 1) = 1$ sowie $\mathbb{P}(|M^\circ|_n \geq n) = 2\binom{2n}{n}^{-1}$, da es genau zwei $2n$ -Brückenwege gibt, für die $|M^\circ|_{2n}$ den maximal möglichen Wert n annimmt, nämlich den Weg, der zunächst bis zur Höhe n aufsteigt und danach zum Nullniveau zurückkehrt, sowie dessen Spiegelbild zur x -Achse. Es sei also ab sofort $2 \leq k \leq n-1$ vorausgesetzt.

Die nachfolgenden Abzählbetrachtungen sind identisch mit denen von Abschnitt

2.12, wobei wir wie früher auch hier die Abhängigkeit von k in der Notation unterdrücken. Für die mit b_n bezeichnete Anzahl aller $2n$ -Brücken mit der Eigenschaft $|M^\circ|_{2n} \geq k$ gilt mit dem Ein-Ausschluss-Prinzip (die Argumentation aus Abschnitt 2.12 kann hier wörtlich übernommen werden)

$$b_n = 2 \cdot \sum_{s \geq 1} (-1)^{s-1} \cdot b_{n,s}^+. \quad (3.24)$$

Hierbei bezeichne $b_{n,s}^+$ die Anzahl aller $2n$ -Brücken, die die Höhe k und danach noch mindestens $s - 1$ mal die jeweils gegenüberliegende Höhe, also $-k$, dann k usw. treffen. Man beachte, dass die obige alternierende Summe abbricht, da ein Weg der Länge $2n$ nur endlich oft zwischen den Höhen k und $-k$ fluktuieren kann.

Aus (3.14) (siehe auch Bild 3.13) erhalten wir die Gleichung

$$b_{n,1}^+ = \binom{2n}{n+k}.$$

Um die Anzahl $b_{n,2}^+$ aller $2n$ -Brücken zu bestimmen, die die Höhe k und danach die Höhe $-k$ treffen, konstruieren wir eine bijektive Abbildung zwischen der Menge aller $2n$ -Brücken mit obiger Eigenschaft und der Menge aller Wege von $(0,0)$ nach $(2n, 4k)$. Da es nach Lemma 2.1 $\binom{2n}{n+2k}$ Wege mit letzterer Eigenschaft gibt, hätten wir

$$b_{n,2}^+ = \binom{2n}{n+2k}$$

gezeigt. Zur Konstruktion der oben angesprochenen Bijektion spiegeln wir eine $2n$ -Brücke, die die Höhe k und danach die Höhe $-k$ trifft, ab dem erstmaligen Erreichen der Höhe k an der Geraden $y = k$ und erhalten so einen von $(0,0)$ nach $(2n, 2k)$ führenden Weg (Bild 3.23). Da der ursprüngliche Weg auch noch die Höhe $-k$ trifft, erreicht der von $(0,0)$ nach $(2n, 2k)$ führende Weg die Höhe $3k$. Spiegelt man ihn ab dem *erstmaligen* Erreichen der Höhe $3k$ an der Geraden $y = 3k$, so ergibt sich ein von $(0,0)$ nach $(2n, 4k)$ führender Weg (Bild 3.23).

Offenbar ist diese Zuordnungsvorschrift von Wegen injektiv. Sie ist aber auch surjektiv, denn jeder Weg von $(0,0)$ nach $(2n, 4k)$ erreicht irgendwann *erstmalig* die Höhe $3k$. Spiegelt man den Weg ab diesem Zeitpunkt an der Geraden $y = 3k$, so entsteht ein Weg von $(0,0)$ nach $(2n, 2k)$, der wegen $2k > k$ gezwungenermaßen irgendwann erstmalig die Höhe k erreicht. Spiegelt man ihn ab diesem Zeitpunkt an der Geraden $y = k$, so ergibt sich ein $2n$ -Brückenweg, der die Höhe k und danach die Höhe $-k$ erreicht (Bild 3.23).

Erreicht eine $2n$ -Brücke zuerst die Höhe k , danach $-k$ und danach noch mindestens einmal die Höhe k , so erreicht der nach zweimaliger Spiegelung wie in

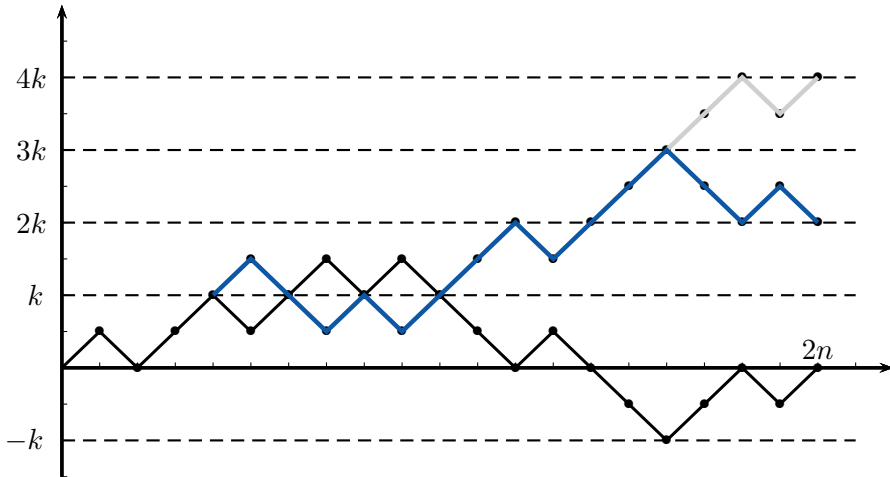


Bild 3.23: Zweifache Spiegelung eines Weges, der zuerst die Höhe k und danach die Höhe $-k$ erreicht, ergibt einen Weg von $(0,0)$ nach $(2n, 4k)$

Bild 3.23 entstehende, von $(0,0)$ nach $(2n, 4k)$ führende Weg die Höhe $5k$. Spiegelt man diesen Weg ab dem erstmaligen Erreichen dieser Höhe an der Geraden $y = 5k$, so entsteht ein von $(0,0)$ nach $(2n, 6k)$ führender Weg. Diese Zuordnung von $2n$ -Brücken, die zuerst die Höhe k und danach die Höhe $-k$ und später nochmals die Höhe k erreichen, zu allen von $(0,0)$ nach $(2n, 6k)$ führenden Wegen ist bijektiv, und letztere Weganzahl ist gleich dem Binomialkoeffizienten $\binom{2n}{n+3k}$. Eventuelle weitere Spiegelungen an den Geraden $y = 7k$, $y = 9k$ usw. sind nötig, falls die $2n$ -Brücke noch öfter zwischen den Höhen k und $-k$ oszillieren sollte. Wir erhalten also allgemein

$$b_{n,s}^+ = \binom{2n}{n+sk}.$$

Zusammen mit (3.24) ergibt sich die folgende Verteilung des Betragsmaximums einer $2n$ -Brücke (siehe [GK] sowie [GRV] für ein allgemeineres Resultat über die gemeinsame Verteilung von M_{2n}° und m_{2n}°).

Satz 3.13. (Verteilung des Betragsmaximums einer $2n$ -Brücke)

Für jedes $k = 1, \dots, n$ gilt

$$\mathbb{P}(|M^\circ|_{2n} \geq k) = 2 \cdot \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor} (-1)^{s-1} \frac{\binom{2n}{n+sk}}{\binom{2n}{n}}. \quad (3.25)$$

Durch Differenzbildung

$$\mathbb{P}(|M^\circ|_{2n} = k) = \mathbb{P}(|M^\circ|_{2n} \geq k) - \mathbb{P}(|M^\circ|_{2n} \geq k+1)$$

erhält man hieraus die Wahrscheinlichkeiten, dass das Betragsmaximum eines Brückenweges einen bestimmten Wert annimmt. Bild 3.24 zeigt das Stabdiagramm der Verteilung von $|M^\circ|_{100}$. Obwohl für $|M^\circ|_{100}$ jeder der Werte $1, 2, \dots, 50$ möglich ist, gilt $\mathbb{P}(3 \leq |M^\circ|_{100} \leq 19) > 0.999$, was zeigt, dass die Verteilung im Wesentlichen auf den Bereich $3 \leq k \leq 19$ konzentriert ist.

Summiert man die Wahrscheinlichkeiten in (3.25) über k , so ergibt sich nach (6.9) der Erwartungswert von $|M^\circ|_{2n}$. Nach (6.10) gilt $\mathbb{E}|M^\circ|_{2n}^2 = \sum_{k=1}^n (2k-1)\mathbb{P}(|M^\circ|_{2n} \geq k)$, sodass man auch einen (nicht sehr handlichen) Ausdruck für die Varianz von $|M^\circ|_{2n}$ hinschreiben kann. Katzenbeisser und Panny [KP] erhielten unter anderem folgende Darstellungen für $\mathbb{E}(|M^\circ|_{2n})$ und $\mathbb{V}(|M^\circ|_{2n})$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|M^\circ|_{2n}) &= \log 2\sqrt{\pi n} - \frac{1}{2} + \frac{\log 2\sqrt{\pi}}{8} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} + o(1/\sqrt{n}), \\ \mathbb{V}(|M^\circ|_{2n}) &= \left(\frac{\pi^2}{6} - \pi (\log 2)^2 \right) \cdot n + \frac{1}{12} - \frac{\pi}{4} \cdot \left((\log 2)^2 - \frac{\pi}{9} \right) + o(1).\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet allgemein $o(a_n)$ einen Term, der nach Division durch a_n bei $n \rightarrow \infty$ gegen Null konvergiert.

Bezüglich des asymptotischen Verhaltens von $|M^\circ|_{2n}$ für $n \rightarrow \infty$ gilt folgender, in allgemeinerer Form von N.W. Smirnov [SM] bewiesene Grenzwertsatz:

Satz 3.14. (Grenzverteilung von $|M^\circ|_{2n}$)

Für jedes $x > 0$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{|M^\circ|_{2n}}{\sqrt{2n}} \leq x \right) = K(x),$$

wobei

$$K(x) := 1 - 2 \cdot \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} \exp(-2s^2 x^2). \quad (3.26)$$

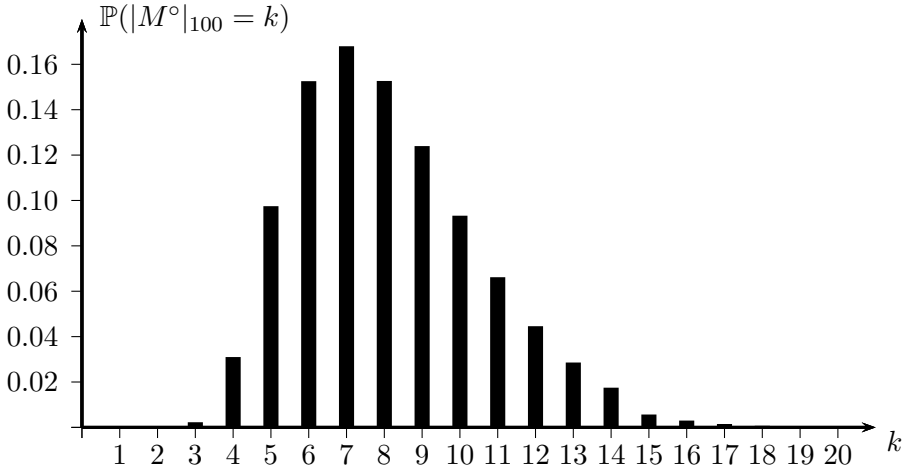


Bild 3.24: Stabdiagramm der Verteilung von $|M^o|_{100}$

BEWEIS: Zu festem $x > 0$ bezeichne $k_n = k_n(x)$ die kleinste ganze Zahl, die größer oder gleich $x \cdot \sqrt{2n}$ ist. Im Folgenden sei n so groß gewählt, dass $1 \leq k_n \leq n$ gilt. Die Ganzzahligkeit von $|M^o|_{2n}$ und (3.25) liefern dann

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(|M^o|_{2n} \geq x \cdot \sqrt{2n}\right) &= \mathbb{P}(|M^o|_{2n} \geq k_n) \\ &= 2 \sum_{s=1}^{s_n} (-1)^{s-1} \frac{\binom{2n}{n+sk_n}}{\binom{2n}{n}}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

wobei kurz $s_n = s_n(x) = \lfloor n/k_n(x) \rfloor$ gesetzt ist. Wir behaupten zunächst die Gültigkeit von

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{2n}{n+sk_n}}{\binom{2n}{n}} = e^{-2s^2x^2}. \quad (3.28)$$

Hierzu schreiben wir den mit q_n bezeichneten Quotienten in (3.28) in der Form

$$\begin{aligned} q_n &= \frac{n!}{(n - sk_n)!} \cdot \frac{n!}{(n + sk_n)!} \\ &= \prod_{j=0}^{sk_n-1} \left(\frac{n-j}{n+sk_n-j} \right) = \prod_{j=0}^{sk_n-1} \left(1 - \frac{sk_n}{n+sk_n-j} \right). \end{aligned}$$

Verwendet man hier die Ungleichung $\log t \leq t - 1$, so ergibt sich

$$\log q_n \leq - \sum_{j=0}^{sk_n-1} \frac{sk_n}{n+sk_n-j} \leq - \frac{(sk_n)^2}{n+sk_n}.$$

Wegen $x \cdot \sqrt{2n} \leq k_n \leq 1 + x \cdot \sqrt{2n}$ konvergiert der rechts stehende Quotient für $n \rightarrow \infty$ gegen $-2s^2x^2$, sodass wir $\limsup_{n \rightarrow \infty} q_n \leq \exp(-2s^2x^2)$ erhalten. Andererseits liefert die Ungleichung $\log t \geq 1 - 1/t$ für $t = 1 - (sk_n)/(n + sk_n - j)$

$$\log q_n \geq - \sum_{j=0}^{sk_n-1} \frac{sk_n}{n-j} \geq - \frac{(sk_n)^2}{n - sk_n + 1}.$$

Nach Definition von k_n konvergiert auch hier die rechte Seite gegen $-2s^2x^2$, was $\liminf_{n \rightarrow \infty} q_n \geq \exp(-2s^2x^2)$ und damit zusammen mit der oberen Abschätzung für q_n (3.28) impliziert. Um den Beweis abzuschließen, beachten wir, dass durch das Verfahren des Ein- und Ausschließens beim Abzählen der günstigen Wege die durch Abbruch der in (3.27) stehenden Summe nach einer ungeraden bzw. geraden Anzahl von Summanden entstehenden Partialsummen abwechselnd zu groß und zu klein sind, d.h. es gilt ganz analog wie in im Beweis auf Seite 99

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(|M^\circ|_{2n} \geq x \cdot \sqrt{2n}\right) &\leq 2 \sum_{s=1}^{2r+1} (-1)^{s-1} \frac{\binom{2n}{n+sk_n}}{\binom{2n}{n}}, \\ \mathbb{P}\left(|M^\circ|_{2n} \geq x \cdot \sqrt{2n}\right) &\geq 2 \sum_{s=1}^{2r} (-1)^{s-1} \frac{\binom{2n}{n+sk_n}}{\binom{2n}{n}} \end{aligned}$$

für jedes feste r , für das die obigen oberen Summationsgrenzen jeweils mindestens 1 und höchstens s_n sind. Zusammen mit (3.28) folgt dann

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(|M^\circ|_{2n} \geq x \cdot \sqrt{2n}\right) &\leq 2 \sum_{s=1}^{2r+1} (-1)^{s-1} e^{-2s^2x^2}, \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(|M^\circ|_{2n} \geq x \cdot \sqrt{2n}\right) &\geq 2 \sum_{s=1}^{2r} (-1)^{s-1} e^{-2s^2x^2} \end{aligned}$$

für jedes feste r und somit für $r \rightarrow \infty$ die Grenzwertaussage

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(|M^\circ|_{2n} \geq x \cdot \sqrt{2n}\right) = 2 \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} e^{-2s^2x^2}.$$

Geht man zum Komplement über und beachtet (6.6), so folgt die Behauptung. ■

Die durch (3.26) für $x > 0$ erklärte und die Festsetzung $K(x) := 0$ für $x \leq 0$ auf ganz \mathbb{R} erweiterte stetige Funktion $K : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ heißt **Verteilungsfunktion der Kolmogorov-Verteilung**. Sie ist nach dem russischen Mathematiker

A. N. Kolmogorov⁵ benannt. Da die in (3.26) stehende Reihe für jedes $a > 0$ auf dem Intervall $[a, \infty)$ gleichmäßig konvergiert, ist die Funktion $K(x)$ für $x > 0$ gliedweise differenzierbar. Die um die Definition $k(x) := 0$ für $x \leq 0$ ergänzte Ableitung

$$k(x) := 8x \cdot \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} s^2 e^{-2s^2 x^2}, \quad x > 0,$$

von K heißt *Dichte der Kolmogorov-Verteilung*.

Bild 3.25 zeigt die Dichte $k(x)$ (links) und die Verteilungsfunktion $K(x)$ (rechts) der Kolmogorov-Verteilung. Die Dichte ist rechtsschief; ihre Gestalt ähnelt derjenigen des Stabdiagramms der Verteilung von $|M^\circ|_{100}$ von Bild 3.24.

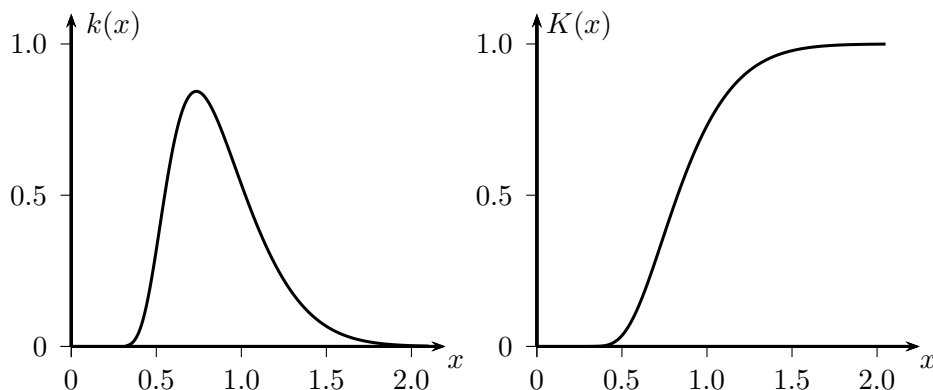


Bild 3.25: Dichte (links) und Verteilungsfunktion (rechts) der Kolmogorov-Verteilung

Der Median der Kolmogorov-Verteilung ist 0.828, das 95%-Quantil gleich 1.36. Satz 3.14 besagt somit unter anderem, dass ein rein zufälliger Brückenweg der Länge 10000 nur mit Wahrscheinlichkeit 0.05 in seinem Verlauf irgendwann einmal weiter als 136 Einheiten von der x -Achse entfernt ist, und dass etwa jeder zweite Brückenweg dieser Länge ein Betragsmaximum von mindestens 83 aufweist.

⁵Andrej Nikolajewitsch Kolmogorov (1903–1987), Professor in Moskau (ab 1930), einer der bedeutendsten Mathematiker des 20. Jahrhunderts, leistete u.a. fundamentale Beiträge zur Wahrscheinlichkeitstheorie, Mathematischen Statistik, Mathematischen Logik, Topologie, Maß- und Integrationstheorie, Funktionalanalysis, Informations- und Algorithmentheorie.

x	$K(x)$	x	$K(x)$	x	$K(x)$
0.40	0.0028	0.80	0.4559	1.15	0.8580
0.45	0.0126	0.83	0.5038	1.20	0.8877
0.50	0.0361	0.85	0.5347	1.23	0.9030
0.55	0.0772	0.90	0.6073	1.30	0.9319
0.60	0.1357	0.95	0.6725	1.40	0.9603
0.65	0.2080	1.00	0.7300	1.48	0.9750
0.70	0.2888	1.05	0.7798	1.63	0.9902
0.75	0.3728	1.10	0.8223	1.73	0.9950

Tabelle 3.3: Verteilungsfunktion $K(x)$ aus (3.26)

3.7 Der Kolmogorov-Smirnov-Test

Die Ergebnisse über die Verteilung des Betragsmaximums eines Brückenweges haben unmittelbare Anwendungen im Zusammenhang mit dem *Zwei-Stichproben-Problem* der *nichtparametrischen Statistik*. Hier geht es darum, die Hypothese

$$H_0 : F(x) = G(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

der Gleichheit zweier unbekannter Verteilungsfunktionen F und G zu testen. Die Prüfung von H_0 erfolgt anhand von Daten, die als Realisierungen unabhängiger Zufallsvariablen $U_1, \dots, U_n, V_1, \dots, V_n$ angenommen werden. Dabei besitze jedes U_i die gleiche *stetige* Verteilungsfunktion F und jedes V_j die gleiche *stetige* Verteilungsfunktion G . Die Stetigkeit garantiert, dass $U_1, \dots, U_n, V_1, \dots, V_n$ mit Wahrscheinlichkeit Eins paarweise verschiedene Werte annehmen.

Um H_0 zu testen, liegt es zunächst nahe, die unbekannten Verteilungsfunktionen F und G durch die sogenannten *empirischen Verteilungsfunktionen*

$$\hat{F}_n(x) := \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n \mathbf{1}\{U_j \leq x\}, \quad \hat{G}_n(x) := \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n \mathbf{1}\{V_j \leq x\}, \quad x \in \mathbb{R},$$

von U_1, \dots, U_n bzw. von V_1, \dots, V_n zu schätzen. Als arithmetische Mittel stochastisch unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen mit existierenden Erwartungswerten $\mathbb{E}(\mathbf{1}\{U_j \leq x\}) = F(x)$, $\mathbb{E}(\mathbf{1}\{V_j \leq x\}) = G(x)$ konvergieren die

Zufallsvariablen $\hat{F}_n(x)$ und $\hat{G}_n(x)$ nach dem Gesetz großer Zahlen für $n \rightarrow \infty$ stochastisch (und auch mit Wahrscheinlichkeit Eins) gegen $F(x)$ bzw. $G(x)$. Nach dem Satz von Glivenko-Cantelli gilt sogar mit Wahrscheinlichkeit Eins

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\hat{F}_n(x) - F(x)| = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\hat{G}_n(x) - G(x)| = 0. \quad (3.29)$$

Die empirischen Verteilungsfunktionen \hat{F}_n und \hat{G}_n konvergieren also für $n \rightarrow \infty$ mit Wahrscheinlichkeit Eins gleichmäßig auf ganz \mathbb{R} gegen die jeweils zugrunde liegenden Verteilungsfunktionen F bzw. G . Man beachte, dass alle Zufallsvariablen $U_1, \dots, U_n, V_1, \dots, V_n$ (und für asymptotische Betrachtungen weitere Zufallsvariablen U_j, V_j , $j \geq n+1$) auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ definiert sind, dessen Existenz durch allgemeine Resultate der Maßtheorie gesichert ist. Für ein festes $\omega \in \Omega$ sind dann \hat{F}_n^ω und \hat{G}_n^ω durch

$$\hat{F}_n^\omega(x) := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}\{U_j(\omega) \leq x\}, \quad \hat{G}_n^\omega(x) := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}\{V_j(\omega) \leq x\}$$

definierte Funktionen $\hat{F}_n^\omega : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, $\hat{G}_n^\omega : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, die Realisierungen der empirischen Verteilungsfunktionen \hat{F}_n und \hat{G}_n zu $\omega \in \Omega$ darstellen. Sind alle Werte $u_j := U_j(\omega)$, $1 \leq j \leq n$, paarweise verschieden, so ist \hat{F}_n^ω eine Treppenfunktion, die an den Stellen u_j um jeweils $1/n$ springt und zwischen je zwei verschiedenen u_j konstant ist (Bild 3.26). Gleiches gilt für die Funktion \hat{G}_n^ω . Man beachte, dass die Funktion \hat{F}_n^ω monoton wachsend und – in Bild 3.26 durch Markierung der Funktionswerte an den Sprungstellen angedeutet – rechtsseitig stetig ist und $\lim_{x \rightarrow -\infty} \hat{F}_n^\omega(x) = 0$ sowie $\lim_{x \rightarrow \infty} \hat{F}_n^\omega(x) = 1$ gelten. Dies zeigt, dass \hat{F}_n^ω und \hat{G}_n^ω alle an eine Verteilungsfunktion gestellten Eigenschaften besitzen.

Es bietet sich nun an, die Hypothese H_0 mithilfe der nach A.N. Kolmogorov und N.W. Smirnov benannten Prüfgröße

$$KS_n := \sup_{x \in \mathbb{R}} |\hat{F}_n(x) - \hat{G}_n(x)| \quad (3.30)$$

zu testen. Dabei erfolgt eine Ablehnung von H_0 für große Werte von KS_n . Was „groß“ bedeutet, richtet sich nach der vorgegebenen Wahrscheinlichkeit α für einen Fehler erster Art. Dieser besteht darin, die Hypothese abzulehnen, obwohl sie in Wahrheit zutrifft. Wir müssen somit die Verteilung der Teststatistik KS_n bei Gültigkeit der Hypothese H_0 kennen. Da im Fall von H_0 alle beteiligten Zufallsvariablen U_i, V_j die gleiche unbekannte Verteilungsfunktion F besitzen, sollte auf den ersten Blick auch die Verteilung von KS_n unter H_0 von F abhängen. Die folgenden, in ähnlicher Weise in Abschnitt 2.13 angestellten Überlegungen zeigen, dass dies glücklicherweise nicht zutrifft: Die Zufallsvariablen

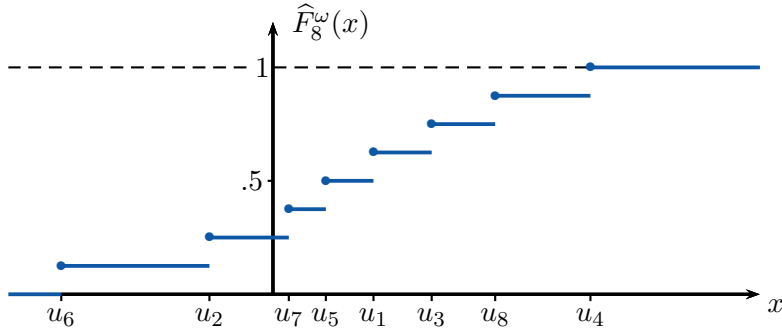


Bild 3.26: Realisierung einer empirischen Verteilungsfunktion zu Daten $u_j = U_j(\omega)$, $j = 1, \dots, 8$

$U_1, \dots, U_n, V_1, \dots, V_n$ nehmen wegen der Stetigkeit von F mit Wahrscheinlichkeit Eins paarweise verschiedene Werte an. Die Funktion

$$\Delta_n(x) := n \cdot (\hat{F}_n(x) - \hat{G}_n(x)) = \sum_{j=1}^n (\mathbf{1}\{U_j \leq x\} - \mathbf{1}\{V_j \leq x\}), \quad x \in \mathbb{R},$$

besitzt die Eigenschaften $\Delta_n(x) = 0$ für $x < \min(U_1, \dots, U_n, V_1, \dots, V_n)$ und $x \geq \max(U_1, \dots, U_n, V_1, \dots, V_n)$, und sie springt (mit Wahrscheinlichkeit Eins) an den Stellen U_i und V_j um jeweils eine Einheit nach oben bzw. unten. Wegen der gleichen Verteilung aller Zufallsvariablen U_i, V_j sind dabei alle $\binom{2n}{n}$ Reihenfolgen der n „+1-Sprünge“ sowie der n „−1-Sprünge“ gleichwahrscheinlich. Bild 3.27 zeigt eine Realisierung von Δ_n für den Fall $n = 5$.

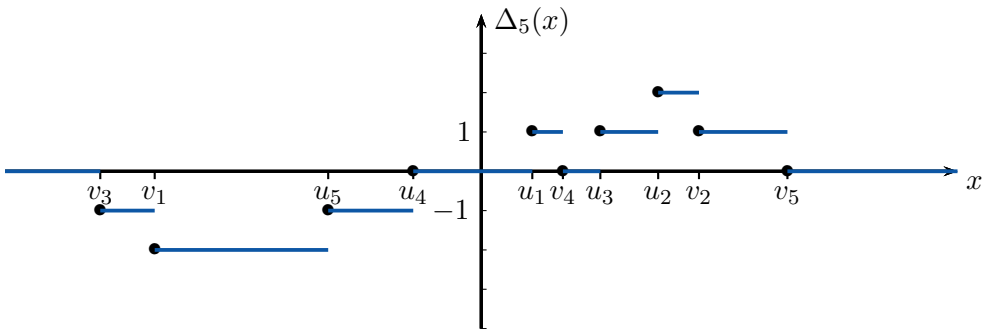


Bild 3.27: Graph von Δ_5 zu Realisierungen $u_j = U_j(\omega), v_j = V_j(\omega)$, $1 \leq j \leq 5$

Da es wegen $KS_n = n^{-1} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\Delta_n(x)|$ nur auf den betragsmäßig größten Wert von Δ_n ankommt und dieser an einer der Sprungstellen der Funktion Δ_n angenommen wird, ist klar, dass die spezielle Gestalt der unbekannten stetigen Verteilungsfunktion F keinerlei Auswirkung auf die Verteilung von KS_n besitzt. Man kann ja alle Zufallsvariablen U_i, V_j der sogenannten *Wahrscheinlichkeitsintegral-Transformation* $U_i \mapsto F(U_i)$, $V_j \mapsto F(V_j)$ unterwerfen. Hierdurch entsteht die Gleichverteilung im Intervall $[0, 1]$, und der Wert von KS_n ändert sich nicht. Entscheidend für die Verteilung von KS_n unter H_0 bleibt aber auch dann, dass alle Reihenfolgen der n „+1-Sprünge“ und n „-1-Sprünge“ gleichwahrscheinlich sind. Wir können diese Sprünge also auch zu den festen Zeitpunkten $1, 2, \dots, 2n$ stattfinden lassen. Da es zudem für die Supremumbildung in (3.30) irrelevant ist, ob man zwischen aufeinander folgenden Sprunghöhen linear interpoliert oder nicht und den ersten Punkt $(1, 1)$ oder $(1, -1)$ mit dem Ursprung verbinden kann, besitzt die Zufallsvariable nKS_n bei Gültigkeit der Hypothese H_0 die gleiche Verteilung wie das Betragsmaximum $|M|_{2n}^\circ$ eines $2n$ -Brückenweges. Nach Satz 3.13 gilt also für jedes $k = 1, \dots, n$

$$\mathbb{P}_{H_0} \left(KS_n \geq \frac{k}{n} \right) = 2 \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor} (-1)^{s-1} \frac{\binom{2n}{n+sk}}{\binom{2n}{n}}. \quad (3.31)$$

Dabei wurde \mathbb{P}_{H_0} geschrieben, um zu betonen, dass die Wahrscheinlichkeit bei Gültigkeit der Hypothese H_0 berechnet wird. Ist k_0 die kleinste Zahl k mit der Eigenschaft, dass die obige Wahrscheinlichkeit kleiner oder gleich α ist, so haben wir mit k_0 einen kritischen Wert für die Teststatistik KS_n gefunden. Wir lehnen die Hypothese H_0 ab, falls $KS_n \geq k_0/n$ gilt; andernfalls erheben wir keinen Einwand gegen H_0 . Eine andere Möglichkeit besteht darin, für eine Realisierung k/n der Prüfgröße KS_n die in (3.31) stehende Wahrscheinlichkeit als so genannten „ p -Wert p^* des Ergebnisses k/n “ zu berechnen. Die Hypothese H_0 wird dann bei einer zugelassenen Wahrscheinlichkeit von α für einen Fehler erster Art genau dann abgelehnt, wenn die Ungleichung $p^* \leq \alpha$ erfüllt ist.

Als Anwendungsbeispiel zum Kolmogorov–Smirnov-Test betrachten wir das Problem, die Wirksamkeit zweier Penizillinproben zu vergleichen. Hierzu wird ein Versuch mit jeweils 14 Agarplatten zu Probe A und Probe B unter gleichartigen, unabhängigen Bedingungen durchgeführt. Gemessen werden die Durchmesser der Hemmungszone in mm. Dabei werden die vor Durchführung des Versuchs zufälligen Durchmesser als unabhängige Zufallsvariablen $U_1, \dots, U_n, V_1, \dots, V_n$ mit $n = 14$ und den zu Beginn dieses Abschnitts getroffenen Vereinbarungen angenommen. Insbesondere sind die als stetig angenommenen Verteilungsfunktionen F von U_1 und G von V_1 unbekannt. Nach Durchführung des Versuchs

ergaben sich die folgenden, in jeder Stichprobe der Größe nach sortierten Werte:

Probe A:	20.2	20.6	20.8	20.9	21.5	21.8	22.0
	22.7	23.8	24.1	24.3	25.0	25.5	25.6
Probe B:	21.0	21.3	22.4	23.2	23.3	23.5	24.4
	24.7	25.3	26.1	26.7	26.9	27.1	28.3

Tabelle 3.4: Durchmesser von Hemmungszonen (in mm) von je 14 Werten zweier Penizillinproben

Bild 3.28 zeigt die empirischen Verteilungsfunktionen beider Stichproben. Die Länge des Doppelpfeils gibt den (auch an anderer Position angenommenen) maximalen Abstand von $5/14$, also den realisierten Wert der Kolmogorov-Smirnov-Testgröße KS_{14} an. Unter der Hypothese $H_0 : F = G$ gilt nach (3.31)

$$\mathbb{P}_{H_0} \left(KS_{14} \geq \frac{5}{14} \right) = 2 \cdot \sum_{s=1}^2 (-1)^{s-1} \cdot \frac{\binom{28}{14+s \cdot 5}}{\binom{28}{14}} = 0.343 \dots$$

Die Wahrscheinlichkeit, unter H_0 eine Mindestabweichung von $5/14$ zu beobachten, ist somit so groß, dass H_0 bei einer zugelassenen Fehlerwahrscheinlichkeit von $\alpha = 0.05$ für einen Fehler erster Art nicht abgelehnt werden kann.

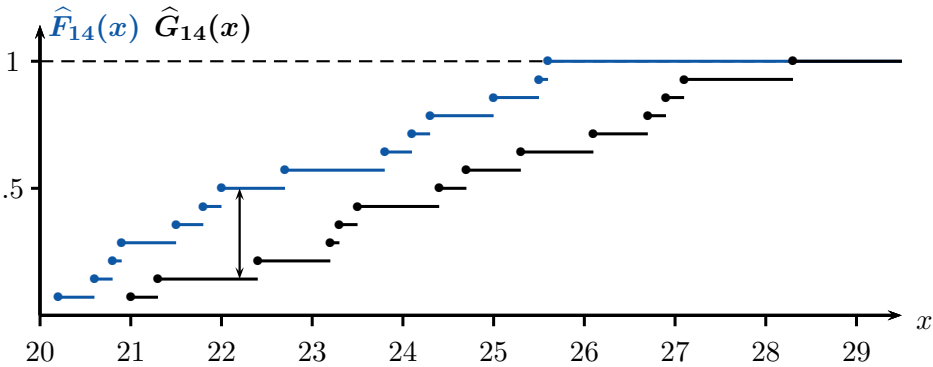


Bild 3.28: Graphen der empirischen Verteilungsfunktionen der Daten aus Probe A (blau) und Probe B (schwarz)

Für große Stichprobenumfänge n können wir uns die Verteilungsgleichheit von nKS_n und $|M|_{2n}^\circ$ sowie den Grenzwertsatz 3.14 zunutze machen. Es folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{H_0} \left(\sqrt{\frac{n}{2}} \cdot KS_n > x \right) = 1 - K(x), \quad x > 0, \quad (3.32)$$

mit der in (3.26) definierten Kolmogorovschen Verteilungsfunktion K . Wegen $K(1.36) = 0.95$ würde man also bei großem n die Hypothese H_0 der Gleichheit von F und G bei einer zugelassenen Wahrscheinlichkeit von 0.05 für einen Fehler erster Art verwerfen, falls die Ungleichung $\sqrt{n/2} \cdot KS_n > 1.36$ erfüllt ist.

Gilt die Hypothese H_0 nicht, so gibt es mindestens ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $|F(x_0) - G(x_0)| > 0$. Wegen $KS_n \geq |\hat{F}_n(x_0) - \hat{G}_n(x_0)|$ und (3.29) folgt dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\sqrt{\frac{n}{2}} \cdot KS_n > c \right) = 1$$

für jedes $c > 0$. Bei Gültigkeit der Alternative konvergiert also die Wahrscheinlichkeit für eine Ablehnung von H_0 bei wachsendem n gegen Eins. In diesem Sinn ist der Kolmogorov-Smirnov-Test konsistent gegen jede Alternative zu H_0 .

Abschließend sei gesagt, dass sich das obige Testproblem natürlich auch dann stellt, wenn zwei Stichproben mit möglicherweise unterschiedlichen Umfängen, also Realisierungen unabhängiger Zufallsvariablen $U_1, \dots, U_m, V_1, \dots, V_n$ mit $m \neq n$ vorliegen. Auch hier kann die Hypothese H_0 der Gleichheit von F und G mithilfe der Kolmogorov-Smirnov-Prüfgröße

$$KS_{m,n} := \sup_{x \in \mathbb{R}} |\hat{F}_m(x) - \hat{G}_n(x)|$$

getestet werden. Mit den gleichen Überlegungen wie oben sieht man ein, dass die Verteilung von $KS_{m,n}$ unter $H_0 : F = G$ nicht von F abhängt. Die kombinatorischen Überlegungen zur Bestimmung der Verteilung von $KS_{m,n}$ sind jetzt nur komplizierter, weil die empirischen Verteilungsfunktionen \hat{F}_m und \hat{G}_n die unterschiedlichen Sprunghöhen $1/m$ bzw. $1/n$ besitzen. Sie führen auf Irrfahrten, die vom Punkt $(0, 0)$ zum Punkt $(m + n, m - n)$ verlaufen.

3.8 Ausblick: Die Brownsche Brücke

In Abschnitt 2.15 hatten wir gesehen, dass eine symmetrische Irrfahrt der Länge n über die Festsetzung

$$W_n(t) := \frac{S_{\lfloor nt \rfloor}}{\sqrt{n}} + (nt - \lfloor nt \rfloor) \cdot \frac{X_{\lfloor nt \rfloor + 1}}{\sqrt{n}}, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (3.33)$$

eine zufällige stetige Funktion W_n auf $[0, 1]$ definiert, und dass die Folge (W_n) dieser sogenannten Partialsummenprozesse für $n \rightarrow \infty$ gegen den Brown–Wiener-Prozess $W = (W(t)_{0 \leq t \leq 1})$ konvergiert. Für einen rein zufälligen $2n$ -Brückenweg gilt ein analoger Sachverhalt, der im Folgenden vorgestellt werden soll.

Dass eine rein zufällige $2n$ -Brücke aus n Aufwärts- und n Abwärtsschritten besteht, wobei alle $\binom{2n}{n}$ möglichen Reihenfolgen von Auf- und Abwärtsschritten gleich wahrscheinlich sind, kann man durch einen Vektor $(X_{n,1}, \dots, X_{n,2n})$ von Zufallsvariablen $X_{n,1}, \dots, X_{n,2n}$ beschreiben, der Werte in dem kartesischen Produkt $\{-1, 1\}^{2n}$ annimmt, und für den gilt:

$$\mathbb{P}(X_{n,1} = a_1, \dots, X_{n,2n} = a_{2n}) := \binom{2n}{n}^{-1}, \quad \text{falls } \sum_{j=1}^{2n} \mathbf{1}\{a_j = 1\} = n \quad (3.34)$$

und $\mathbb{P}(X_{n,1} = a_1, \dots, X_{n,2n} = a_{2n}) := 0$, sonst. Mit $S_{2n,0} := 0$ und $S_{2n,k} := X_{n,1} + \dots + X_{n,k}$ für $1 \leq k \leq 2n$ definiert man jetzt wie in (3.33) – nur mit dem Unterschied, dass auf der rechten Seite jetzt $2n$ anstelle von n steht – einen stochastischen Prozess in Form einer zufälligen stetigen Funktion auf $[0, 1]$ durch

$$W_n^\circ(t) := \frac{S_{2n, \lfloor 2nt \rfloor}}{\sqrt{2n}} + (2nt - \lfloor 2nt \rfloor) \cdot \frac{X_{n, \lfloor 2nt \rfloor + 1}}{\sqrt{2n}}, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (3.35)$$

Dabei ist $X_{n,2n+1} := 0$ gesetzt.

Bild 3.29 zeigt drei mithilfe von Simulation gewonnener Realisierungen dieses Prozesses für den Fall $n = 50$. Bild 3.30 illustriert das Verhalten von W_n° für den Fall $n = 500$. Wie schon beim Partialsummenprozess W_n scheint auch hier eine stochastische Stabilisierung beim Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ stattzufinden. Zum besseren Verständnis dieses Verhaltens zeigen wir

$$\mathbb{E}(W_n^\circ(t)) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{V}(W_n^\circ(t)) = t(1-t), \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (3.36)$$

Die erste Gleichung folgt aus $\mathbb{E}(X_{n,j}) = 0$, denn es gilt $\mathbb{P}(X_{n,j} = 1) = \mathbb{P}(X_{n,j} = -1) = 1/2$. Für die zweite Gleichung können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $0 < t < 1$ annehmen, da wegen $0 = W_n^\circ(0) = W_n^\circ(1)$ die Zufallsvariablen

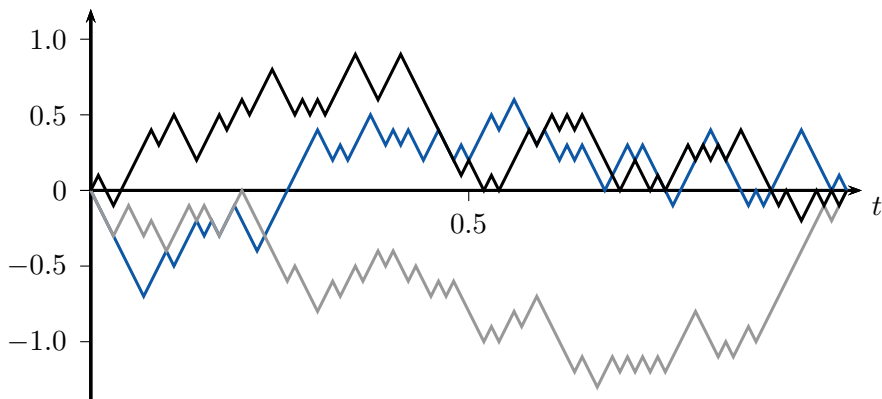


Bild 3.29: Drei Realisierungen des Prozesses W_{50}°

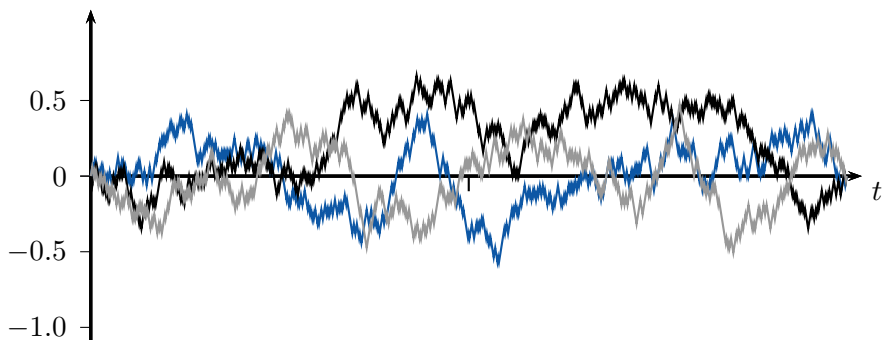


Bild 3.30: Drei Realisierungen des Prozesses W_{500}°

$W_n^{\circ}(0)$ und $W_n^{\circ}(1)$ konstant sind. Um die Varianz von $W_n^{\circ}(t)$ zu bestimmen, beachten wir, dass die gemeinsame Verteilung der $\{0, 1\}$ -wertigen Zufallsvariablen $Y_{n,j} := (X_{n,j} + 1)/2$, $j = 1, \dots, 2n$ nach (3.34) rein zufällig n der $2n$ Plätze des Tupels $(a_1, \dots, a_{2n}) \in \{0, 1\}^{2n}$ mit Einsen und die restlichen mit Nullen belegt. Diese Verteilung kann als Verteilung von Indikatorvariablen interpretiert werden, die beim rein zufälligen Ziehen ohne Zurücklegen aus einer Urne mit n roten und n schwarzen Kugeln entsteht. Sieht man eine 1 als Ziehen einer roten und eine 0 als Ziehen einer schwarzen Kugel an, so steht die Summe $\sum_{j=1}^{\lfloor 2nt \rfloor} Y_{n,j}$ für die Anzahl der gezogenen roten Kugeln nach $\lfloor 2nt \rfloor$ -maligem Ziehen. Sie besitzt also eine hypergeometrische Verteilung mit Parametern $\lfloor 2nt \rfloor$, n und n (vgl. [HE],

Kapitel 13). Insbesondere gilt

$$\mathbb{V} \left(\sum_{j=1}^{\lfloor 2nt \rfloor} Y_{n,j} \right) = \lfloor 2nt \rfloor \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{\lfloor 2nt \rfloor - 1}{2n - 1} \right),$$

siehe [HE], Beispiel 21.6 b). Wegen $S_{2n, \lfloor 2nt \rfloor} = 2 \sum_{j=1}^{\lfloor 2nt \rfloor} Y_{n,j} - \lfloor 2nt \rfloor$ folgt dann mit der allgemeinen Rechenregel $\mathbb{V}(aU + b) = a^2 \mathbb{V}(U)$

$$\mathbb{V} \left(\frac{S_{2n, \lfloor 2nt \rfloor}}{\sqrt{2n}} \right) = \frac{\lfloor 2nt \rfloor}{2n} \cdot \left(1 - \frac{\lfloor 2nt \rfloor - 1}{2n - 1} \right)$$

und somit die zweite Gleichung in (3.36), da der zweite Summand in (3.35) dem Betrage nach höchstens gleich $1/\sqrt{2n}$ ist und somit asymptotisch für $n \rightarrow \infty$ die Varianz von $W_n^\circ(t)$ nicht beeinflusst. Weiter lässt sich zeigen, dass eine Folge hypergeometrischer Verteilungen, deren Varianzen gegen ∞ streben, nach Standardisierung in Verteilung gegen eine Standardnormalverteilung konvergiert (s. z.B. [MO], S. 62). Hieraus folgt $W_n^\circ(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} N(0, t(1-t))$, $0 \leq t \leq 1$. Dabei interpretieren wir die Verteilung $N(0, 0)$ als ausgeartete Verteilung im Punkt 0.

Allgemeiner lässt sich zeigen, dass nicht nur $W_n^\circ(t)$ für festes t nach Verteilung konvergiert, sondern – wie auch für den Partialsummenprozess W_n – für $n \rightarrow \infty$ eine geeignet definierte Verteilungskonvergenz für die Folge der Prozesse $(W_n^\circ) = (W_n^\circ(t))_{0 \leq t \leq 1}$ gegen einen stochastischen Prozess $(W^\circ(t))_{0 \leq t \leq 1}$ besteht. Diese beinhaltet unter anderem die Limesbeziehungen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(W_n^\circ(t_1) \leq x_1, \dots, W_n^\circ(t_k) \leq x_k) = \mathbb{P}(W^\circ(t_1) \leq x_1, \dots, W^\circ(t_k) \leq x_k)$$

für jede Wahl von $k \geq 1$, $t_1, \dots, t_k \in [0, 1]$ mit $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k \leq 1$ und $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$, geht aber darüber hinaus.

Der stochastische Prozess $W^\circ(t)$, $0 \leq t \leq 1$, dessen Realisierungen stetige Funktionen auf $[0, 1]$ sind, heißt **Brownsche Brücke**. Er hängt mit dem Brown-Wiener-Prozess $W(t)$ über die Beziehung

$$W^\circ(t) = W(t) - t \cdot W(1)$$

zusammen. Diese Gleichung kann so interpretiert werden, dass man jeder Realisierung von W als stetiger Funktion f auf $[0, 1]$ die durch $f^\circ(t) := f(t) - t \cdot f(1)$ definierte stetige Funktion f° zuordnet und so eine Realisierung von W° erhält, siehe z. B. [BI], S. 101 ff..

Analog zu den Betrachtungen für W_n in Abschnitt 2.15 zieht die Verteilungskonvergenz von W_n gegen W° die Verteilungskonvergenz von gewissen reellwertigen Funktionalen $h(W_n^\circ)$ gegen die Verteilung von $h(W^\circ)$ mit sich. Insbesondere gelten (siehe z.B. [BI], S. 103 ff.):

$$\lambda^1(\{t \in [0, 1] : W_n^\circ(t) > 0\}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \lambda^1(\{t \in [0, 1] : W^\circ(t) > 0\}), \quad (3.37)$$

$$\max_{0 \leq t \leq 1} W_n^\circ(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \max_{0 \leq t \leq 1} W^\circ(t), \quad (3.38)$$

$$\max_{0 \leq t \leq 1} |W_n^\circ(t)| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \max_{0 \leq t \leq 1} |W^\circ(t)|. \quad (3.39)$$

Wegen

$$\frac{O_{2n}^\circ}{2n} = \lambda^1(\{t \in [0, 1] : W_n^\circ(t) > 0\})$$

folgt aus (3.37) und Satz 3.5 die Verteilungsaussage

$$\mathbb{P}(\lambda^1(\{t \in [0, 1] : W^\circ(t) > 0\}) \leq x) = x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Die Verweilzeit der Brownschen Brücke oberhalb der x -Achse ist somit gleichverteilt auf dem Intervall $[0, 1]$. Weiter liefern die Identitäten

$$\max_{0 \leq t \leq 1} W_n^\circ(t) = \frac{M_{2n}^\circ}{\sqrt{2n}}, \quad \max_{0 \leq t \leq 1} |W_n^\circ(t)| = \frac{|M|_{2n}^\circ}{\sqrt{2n}}$$

zusammen mit (3.38), (3.39) und den Sätzen 3.9 und 3.14 die Verteilungen des Maximums und des Betragsmaximums der Brownschen Brücke: Es gelten

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\max_{0 \leq t \leq 1} W^\circ(t) \leq x\right) &= 1 - \exp(-2x^2), \quad x \geq 0, \\ \mathbb{P}\left(\max_{0 \leq t \leq 1} |W^\circ(t)| \leq x\right) &= K(x), \quad x > 0. \end{aligned}$$

Kapitel 4



Asymmetrische Irrfahrten und Verwandtes

In diesem Kapitel befreien wir uns von der in Kapitel 2 gemachten Voraussetzung, dass die Wegerichtungen einer Irrfahrt auf \mathbb{Z} gleich wahrscheinlich seien, geben also die Symmetrieannahme auf. Zur Präzisierung sei X_1, X_2, \dots eine Folge stochastisch unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(X_j = 1) := p$, $\mathbb{P}(X_j = -1) = q := 1 - p$, wobei $p \in (0, 1)$. Die Irrfahrt ist dann wie in Kapitel 2 durch $S_0 := 0$ und $S_n := X_1 + \dots + X_n$, $n \geq 1$, gegeben. Im Unterschied zu dort lassen wir ab jetzt zu, dass die Wahrscheinlichkeiten p bzw. q für einen Aufwärts- bzw. Abwärtsschritt verschieden sein können. In einem solchen Fall sprechen wir auch von einer *asymmetrischen Irrfahrt*. Wegen $\mathbb{E}(X_j) = p - q = 2p - 1$ folgt

$$\mathbb{E}(S_n) = \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(X_j) = n \cdot (2p - 1).$$

Asymmetrische Irrfahrten zeigen also im Hinblick auf die Erwartungswerte der Höhen im zeitlichen Verlauf einen gewissen Trend. Die Punkte $(n, \mathbb{E}(S_n))$ mit $n \geq 0$ liegen auf der diesen Trend beschreibenden Geraden $x \mapsto (2p - 1)x$. Im Fall $p > 1/2$ besitzt diese Gerade eine positive Steigung, im Fall $p < 1/2$ ist die Steigung negativ. Bild 4.1 zeigt zwei Irrfahrten der Länge 2500. Von diesen ist die blau eingezeichnete symmetrisch und die schwarz gekennzeichnete asymmetrisch, wobei $p = 0.51$ gewählt wurde. Zusätzlich ist die Trendgerade eingezeichnet.

4.1 Leiterzeitpunkte

In diesem Abschnitt gehen wir der Frage nach, wann eine im Ursprung startende asymmetrische Irrfahrt erstmals die Höhe 1 erreicht. In der Deutung der Irrfahrt

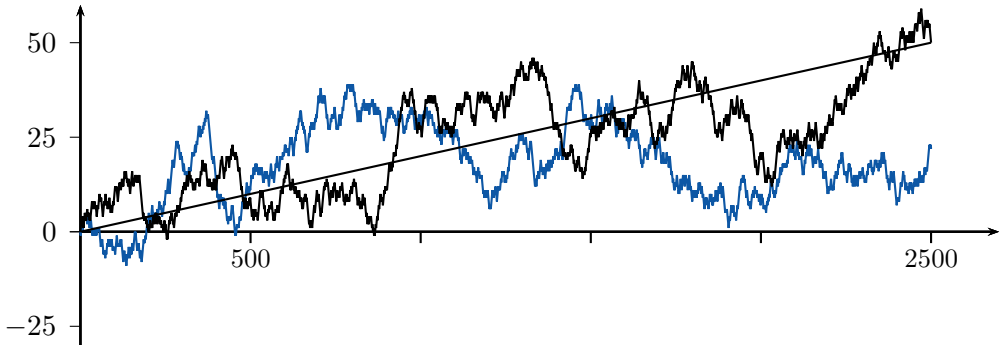


Bild 4.1: Symmetrische (blau) und asymmetrische (schwarz) Irrfahrt zu $p = 0.51$ mit Trendgerade

als ein (im Fall $p \neq 1/2$) nicht faires Spiel zwischen zwei Spielern wird also danach gefragt, wann ein bestimmter der beiden Spieler erstmals in Führung geht. Wie in Abschnitt 2.9 sei diese erste Leiterzeit mit

$$V_1 := \inf\{n \geq 1 : S_n = 1\}$$

bezeichnet. Dort hatten wir unter anderem gesehen, dass im Fall einer symmetrischen Irrfahrt $\mathbb{P}(V_1 < \infty) = 1$ und $\mathbb{E}(V_1) = \infty$ gelten, also mit Sicherheit in endlicher Zeit die Höhe 1 (und auch jede andere Höhe) erreicht wird, aber der Erwartungswert der dafür benötigten Zeit unendlich groß ist.

Liegt eine asymmetrische Irrfahrt mit negativem Trend vor, gilt also $p < 1/2$, so dürften sich die Aussichten auf das Erreichen der Höhe 1 drastisch verschlechtern. Vielleicht verläuft ja im Fall $p < 1/2$ die Irrfahrt mit positiver Wahrscheinlichkeit immer strikt unterhalb der Geraden $y = 1$ und nimmt somit nie den Wert 1 an? Umgekehrt ist zu erwarten, dass im Fall $p > 1/2$ „erst recht“ $\mathbb{P}(V_1 < \infty) = 1$ zutrifft, und vielleicht besitzt ja dann V_1 einen endlichen Erwartungswert? Das nachstehende Resultat zeigt, dass diese Vermutungen richtig sind.

Satz 4.1. (Verteilung des ersten Leiterzeitpunkts)

Für den ersten Leiterzeitpunkt V_1 gelten:

a)

$$\mathbb{P}(V_1 = 2k - 1) = \frac{1}{qk} \cdot \binom{2k-2}{k-1} \cdot (pq)^k, \quad k \geq 1,$$

b)

$$\mathbb{P}(V_1 = \infty) = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } p \geq 1/2, \\ 1 - \frac{p}{q}, & \text{ falls } p < 1/2, \end{cases}$$

c)

$$\mathbb{E}(V_1) = \begin{cases} \frac{1}{p-q}, & \text{ falls } p > 1/2, \\ \infty, & \text{ falls } p \leq 1/2. \end{cases}$$

BEWEIS: a) Es seien $a_n := \mathbb{P}(V_1 = n)$, $n \in \mathbb{N}_0$, sowie g die durch

$$g(t) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad |t| \leq 1, \quad (4.1)$$

definierte erzeugende Funktion von V_1 . Wir leiten im Folgenden einen geschlossenen Ausdruck für g her, aus dem sich alle oben aufgestellten Behauptungen ergeben. Offenbar gilt $a_{2k} = 0$ für jedes $k \in \{0, 1, \dots\}$, da V_1 (neben dem Wert ∞) nur ungerade Werte annehmen kann. Wegen $\mathbb{P}(V_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 1)$ ergibt sich zudem $a_1 = p$. Tritt für ein $n \geq 3$ das Ereignis $\{V_1 = n\}$ ein, so folgt insbesondere $X_1 = -1$. Die Irrfahrt muss also nach dem ersten Schritt von der Höhe -1 ausgehend zum Zeitpunkt n erstmalig die Höhe 1 erreichen und hierzu vorher mindestens einmal die x -Achse treffen. Wir zerlegen das Ereignis $\{V_1 = n\}$ nach dem mit $r \in \{2, \dots, n-1\}$ bezeichneten *ersten* Zeitpunkt mit der Eigenschaft $S_r = 0$, indem wir

$$\{V_1 = n\} = \bigcup_{r=2}^{n-1} A \cap B_r \cap C_r \quad (4.2)$$

mit $A := \{S_1 = -1\}$ und

$$B_r := \{S_1 < 0, \dots, S_{r-1} < 0, S_r = 0\}, \quad C_r := \{S_{r+1} \leq 0, \dots, S_{n-1} \leq 0, S_n = 1\}$$

($r = 2, \dots, n-1$) setzen. Die auf der rechten Seite von (4.2) stehenden Mengen sind für verschiedene r paarweise disjunkt, und somit liefern die Additivität von \mathbb{P} sowie die Multiplikationsregel

$$\mathbb{P}(V_1 = n) = \sum_{r=2}^{n-1} \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B_r|A) \cdot \mathbb{P}(C_r|A \cap B_r).$$

Dabei gilt $\mathbb{P}(A) = q$. Unter der Bedingung A liegt eine im Punkt $(1, -1)$ startende Irrfahrt vor. Die (bedingte) Wahrscheinlichkeit, dass eine solche Irrfahrt erstmalig zur Zeit r die Höhe 0 erreicht, ist gleich der Wahrscheinlichkeit, dass eine im Ursprung startende Irrfahrt erstmalig zur Zeit $r - 1$ die Höhe 1 erreicht; es gilt also $\mathbb{P}(B_r|A) = \mathbb{P}(V_1 = r - 1) = a_{r-1}$. Unter der Bedingung $A \cap B_r$ liegt eine Irrfahrt vor, die zum Zeitpunkt r eine Nullstelle besitzt und folglich im Hinblick auf das Eintreten des Ereignisses C_r vom Punkt $(r, 0)$ aus startend erstmalig zum Zeitpunkt n die Höhe 1 erreichen soll. Wegen der zeitlichen Homogenität der Irrfahrt ist die Situation äquivalent dazu, dass eine im Ursprung startende Irrfahrt erstmalig zur Zeit $n - r$ die Höhe 1 erreicht; es gilt somit $\mathbb{P}(C_r|A \cap B_r) = \mathbb{P}(V_1 = n - r) = a_{n-r}$. Wegen $\mathbb{P}(V_1 = n) = a_n$ folgt also die (auch für $n = 2$ geltende) Identität

$$a_n = q \cdot \sum_{r=2}^{n-1} a_{r-1} a_{n-r}, \quad n \geq 2. \quad (4.3)$$

Multipliziert man beide Seiten dieser Gleichung mit t^n und summiert über $n \geq 2$, so ergibt sich unter Beachtung von $a_0 = 0$ und $a_1 = p$ auf der linken Seite $g(t) - pt$. Die Summe auf der rechten Seite von (4.3) ist der Koeffizient von t^{n-1} in der Potenzreihenentwicklung von $g(t)^2$. Multiplikation mit t^n und Summation über $n \geq 2$ führt also auf der rechten Seite von (4.3) zu dem Ausdruck $qtg^2(t)$. Wir erhalten folglich für die erzeugende Funktion von V_1 die quadratische Gleichung

$$g(t) - p \cdot t = q \cdot t \cdot g^2(t), \quad |t| \leq 1.$$

Eine der beiden Lösungen ist beim Grenzübergang $t \rightarrow 0$ unbeschränkt, was für eine erzeugende Funktion nicht möglich ist, und so erhalten wir als eindeutig bestimmte Lösung obiger Gleichung die erzeugende Funktion von V_1 in der geschlossenen Form

$$g(t) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4pqt^2}}{2qt}, \quad |t| \leq 1, \quad t \neq 0, \quad (4.4)$$

mit der stetigen Ergänzung $g(0) = 0 = \lim_{t \rightarrow 0} g(t)$. Mithilfe der Binomialreihe $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$, $|x| < 1$ (siehe Abschnitt 6.9) nimmt die rechte Seite von (4.4) nach direkter Rechnung die Gestalt $\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$ mit

$$b_{2k-1} = \frac{(-1)^{k-1}}{2q} \binom{1/2}{k} (4pq)^k = \frac{1}{kq} \binom{2k-2}{k-1} (pq)^k, \quad k \geq 1,$$

sowie $b_{2k} = 0$ für $k \geq 0$ an. Nach Definition von g folgt dann a) aus der Eindeutigkeit der Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung.

b) Nach (4.1) gilt $g(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(V_1 = n) = \mathbb{P}(V_1 < \infty)$, und wegen $1 - 4pq = (p - q)^2$ ergibt sich mithilfe von (4.4)

$$g(1) = \frac{1 - |p - q|}{2q}.$$

Es folgt $g(1) = 1$ im Fall $p \geq 1/2$ und $g(1) = p/q$, falls $p < 1/2$, was zu zeigen war.

c) Dass $\mathbb{E}(V_1) = \infty$ für $p = 1/2$ gilt, wurde schon in Abschnitt 2.9 gezeigt. Im Fall $p < 1/2$ gilt nach b) $\mathbb{P}(V_1 = \infty) > 0$ und somit insbesondere $\mathbb{E}(V_1) = \infty$. Im Fall $p > 1/2$ liefert eine direkte Rechnung für $t \neq 0$ und $|t| \leq 1$

$$g'(t) = \frac{2p}{\sqrt{1 - 4pqt^2}} - \frac{1}{2qt^2} + \frac{\sqrt{1 - 4pqt^2}}{2qt^2} \quad (4.5)$$

und somit wegen $\sqrt{1 - 4pq} = p - q$

$$\mathbb{E}(V_1) = g'(1) = \frac{2p}{p - q} - \frac{1}{2q} + \frac{p - q}{2q} = \frac{1}{p - q}. \quad (4.6)$$

Dabei gilt das erste Gleichheitszeichen nach Abschnitt 6.7. ■

In der Interpretation eines wiederholt gespielten Spiels zwischen zwei Personen A und B, bei dem A und B die Erfolgswahrscheinlichkeiten p und $q = 1 - p$ besitzen, bedeutet Satz 4.1 b), dass Spieler A für den Fall, dass das Spiel für ihn unvorteilhaft ist, mit der positiven Wahrscheinlichkeit $1 - p/q$ nie in Vorteil gelangt. Bild 4.2 links zeigt diese, von p abhängende und deshalb durch den Index p gekennzeichnete Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}_p(V_1 = \infty)$. Ist etwa $p = 1/3$, so besteht eine fünfzigprozentige Chance, dass Spieler A nie in Führung geht. Bild 4.2 rechts illustriert den Erwartungswert von V_1 als Funktion von p für $p > 1/2$. Im Fall $p = 0.55$ muss Spieler A im Mittel 10 Spiele warten, bis er zum ersten Mal die Führung übernimmt.

Im Fall $p > 1/2$ ist die Leiterzeit V_1 eine Zufallsvariable, die die Werte $1, 3, 5, \dots$ annimmt und einen endlichen Erwartungswert besitzt. Aus (4.5) ergibt sich die zweite Ableitung der erzeugenden Funktion g von V_1 mit etwas Rechnung zu

$$g''(t) = \frac{8p^2qt}{(1 - 4pqt^2)^{3/2}} + \frac{1 - \sqrt{1 - 4pqt^2}}{qt^3} - \frac{2p}{t\sqrt{1 - 4pqt^2}}, \quad |t| < 1, t \neq 0.$$

Da $g''(t)$ für $t \uparrow 1$ beschränkt bleibt, existiert $\mathbb{E}(V_1^2)$, und wegen $\mathbb{E}(V_1^2) = g''(1) + g'(1)$ (vgl. Abschnitt 6.7) ergibt sich die Varianz von V_1 nach direkter Rechnung zu

$$\mathbb{V}(V_1) = \frac{4pq}{(p - q)^3}. \quad (4.7)$$

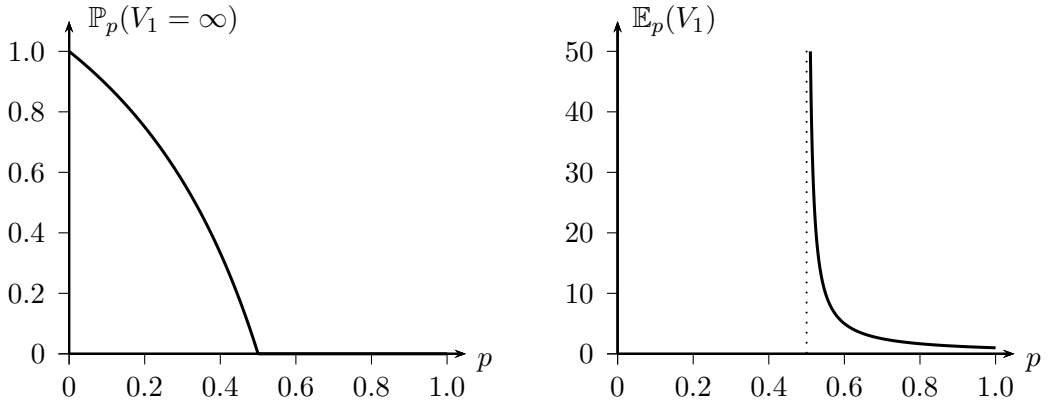


Bild 4.2: Wahrscheinlichkeit für $\{V_1 = \infty\}$ (links) und Erwartungswert von V_1 (rechts) als Funktion von p

Aufgrund der Gedächtnislosigkeit der Irrfahrt ist wie in Abschnitt 2.9 die k -te Leiterzeit $V_k := \inf\{n \geq 1 : S_n = k\}$ verteilt wie die Summe $V_{1,1} + V_{1,2} + \dots + V_{1,k}$ stochastisch unabhängiger Zufallsvariablen $V_{1,j}$ ($j = 1, \dots, k$), die stochastisch unabhängig und je wie V_1 verteilt sind. Hieraus folgt insbesondere, dass im Fall $p \geq 1/2$ jeder Wert $k \in \mathbb{N}$ mit Wahrscheinlichkeit Eins in endlicher Zeit erreicht wird, und dass die Irrfahrt im Fall $p \leq 1/2$ mit Wahrscheinlichkeit Eins in endlicher Zeit in jede vorgegebene Höhe $-k$ mit $k \in \mathbb{N}$ gelangt. Zum Anderen gestattet diese Einsicht, die Verteilung von V_k für allgemeines k aus der erzeugenden Funktion g von V_1 zu bestimmen, denn die erzeugende Funktion von V_k ist ja nach Abschnitt 6.7 die k -te Potenz g^k von g .

Des Weiteren ergibt sich mithilfe des Zentralen Grenzwertsatzes von Lindeberg-Lévy das folgende asymptotische Verhalten von V_k für $k \rightarrow \infty$:

Satz 4.2. (Grenzverteilung des k -ten Leiterzeitpunkts V_k)

Im Fall $p > 1/2$ gilt für den k -ten Leiterzeitpunkt V_k

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{V_k - \frac{k}{p-q}}{\sqrt{\frac{4pqk}{(p-q)^3}}} \leq x \right) = \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.8)$$

Dabei bezeichnet wie früher Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Mit (4.6) und (4.7) besteht also die Verteilungskonvergenz

$$\frac{V_k - \mathbb{E}(V_k)}{\sqrt{\mathbb{V}(V_k)}} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} Z, \quad Z \sim N(0, 1).$$

BEWEIS: Die Behauptung folgt wegen Satz 4.1 c) und (4.7) aus dem Zentralen Grenzwertsatz von Lindeberg-Lévy in Abschnitt 6.3. ■

Aussage (4.8) erlaubt eine begründete Prognose hinsichtlich der Zeit, die eine Irrfahrt mit positivem Trend benötigt, um eine große Höhe zu erreichen, denn es gilt

$$\mathbb{P} \left(V_k \leq \frac{k}{p-q} + x \cdot \sqrt{k \cdot \left(\frac{1}{p-q} + \frac{8pq-1}{(p-q)^3} \right)} \right) \approx \Phi(x)$$

für großes k . Insbesondere folgt für $x = 0$

$$\mathbb{P} \left(V_k \leq k \cdot \frac{1}{p-q} \right) \approx \frac{1}{2}$$

bei großem k .

Dieses Resultat steht in starkem Kontrast zu Satz 2.25, wonach bei einer *symmetrischen* Irrfahrt die k -te Leiterzeit ungefähr proportional zu k^2 wächst. Es reicht also ein noch so schwacher positiver Trend im Sinne von $p > 1/2$ aus, um das Wachstum von V_k für $k \rightarrow \infty$ um eine ganze Größenordnung zu ändern! Wählen wir speziell $x = \Phi^{-1}(0.95) = 1.645$ und $p = 0.6$, so folgt speziell $\mathbb{E}(V_1) = 5$ und $\mathbb{V}(V_1) = 120$, und wir erhalten

$$\mathbb{P} \left(V_{100} \leq 500 + 1.645 \cdot \sqrt{100 \cdot 120} \right) \approx 0.95,$$

also $\mathbb{P}(V_{100} \leq 681) \approx 0.95$. Nur etwa jede zwanzigste Irrfahrt mit $p = 0.6$ benötigt also mehr als 681 Zeitschritte, um die Höhe 100 zu erreichen. Im Vergleich dazu braucht *jede zweite symmetrische Irrfahrt* hierfür etwa 22000 Schritte, vgl. Seite 75.

In Abschnitt 2.5 hatten wir gesehen, dass eine *symmetrische* Irrfahrt mit Wahrscheinlichkeit Eins wieder zum Ausgangspunkt zurückkehrt: nach Satz 2.9 b) gilt $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$, wobei

$$T := \inf\{2k : k \in \mathbb{N} \text{ und } S_{2k} = 0\}.$$

Wie der folgende Satz zeigt, geht diese *Rekurrenzeigenschaft* im Fall $p \neq 1/2$ verloren.

Satz 4.3. (Transienz der asymmetrischen Irrfahrt auf \mathbb{Z})

Die asymmetrische Irrfahrt auf \mathbb{Z} ist **transient**, d.h. im Fall $p \neq 1/2$ gilt

$$\mathbb{P}(T < \infty) < 1.$$

Genauer gilt

$$\mathbb{P}(T < \infty) = 1 - |p - q| = 1 - |2p - 1|.$$

BEWEIS: Aus Symmetriegründen reicht es, den Fall $p > 1/2$ zu betrachten. Wir zerlegen das Ereignis $\{T < \infty\}$ nach den beiden Möglichkeiten für den ersten Schritt der Irrfahrt und verwenden die Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit, wonach

$$\mathbb{P}(T < \infty) = p \cdot \mathbb{P}(T < \infty | X_1 = 1) + q \cdot \mathbb{P}(T < \infty | X_1 = -1)$$

gilt. Unter der Bedingung $X_1 = 1$ tritt das Ereignis $\{T < \infty\}$ genau dann ein, wenn die Irrfahrt vom Punkt $(1, 1)$ aus startend in endlicher Zeit die x -Achse erreicht. Diese Situation ist gleichbedeutend mit der einer Irrfahrt, die vom Ursprung ausgehend in endlicher Zeit auf die Höhe -1 hinabsteigen muss, wobei die Wahrscheinlichkeit für einen Abwärtsschritt q beträgt. Nach Satz 4.1 b) gilt unter Vertauschung der Rollen von p und q $\mathbb{P}(T < \infty | X_1 = 1) = q/p$. Damit das Ereignis $\{T < \infty\}$ im Fall $X_1 = -1$ eintritt, muss die Irrfahrt in endlicher Zeit vom Punkt $(1, -1)$ aus startend die Leiter um eine Stufe hinaufklettern. Dies ist gleichbedeutend damit, dass eine im Ursprung beginnende Irrfahrt in endlicher Zeit die Höhe 1 erreicht. Wegen $p > 1/2$ ist diese Wahrscheinlichkeit nach Satz 4.1 b) gleich Eins. Wir erhalten somit

$$\mathbb{P}(T < \infty) = p \cdot \frac{q}{p} + q \cdot 1 = 2q = 2 \min(p, q) = 1 - |p - q| < 1. \blacksquare$$

Das obige Resultat besagt, dass eine asymmetrische, im Ursprung startende Irrfahrt nur mit der Wahrscheinlichkeit $1 - |p - q|$ mindestens eine Nullstelle aufweist. Wir werden gleich sehen, dass in diesem Fall die Anzahl der Nullstellen eine geometrische Verteilung besitzt.

4.2 Die Anzahl der Nullstellen

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Anzahl

$$N := \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}\{S_{2k} = 0\}$$

der Nullstellen einer asymmetrischen Irrfahrt. Ist die Irrfahrt symmetrisch, so nimmt die Zufallsvariable N wegen der Rekurrenzeigenschaft mit Wahrscheinlichkeit Eins den Wert ∞ an. Zudem hatten wir in Abschnitt 2.4 gesehen, dass die Anzahl

$$N_{2n} := \sum_{k=1}^{2n} \mathbf{1}_{\{S_{2k} = 0\}}$$

der Nulldurchgänge bis zur Zeit $2n$ von der Größenordnung $\sqrt{2n}$ ist. Für den Erwartungswert von N gilt:

Satz 4.4. (Erwartungswert der Anzahl der Nullstellen)

Für die Anzahl N der Nullstellen einer asymmetrischen Irrfahrt auf \mathbb{Z} gilt

$$\mathbb{E}(N) = \frac{1}{|p - q|} - 1.$$

BEWEIS: Nach Gleichung (6.11) aus Abschnitt 6.5 gilt

$$\mathbb{E}(N) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(N_{2n}).$$

Wegen $\mathbb{E}(N_{2n}) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(S_{2k} = 0)$ und $\mathbb{P}(S_{2k} = 0) = \binom{2k}{k} (pq)^k$ sowie

$$\binom{2k}{k} = (-1)^k \binom{-1/2}{k} 2^{2k}$$

folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(N) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(S_{2k} = 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{2k}{k} (pq)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{-1/2}{k} (-4pq)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} (-4pq)^k - 1 = (1 - 4pq)^{-1/2} - 1 \\ &= \frac{1}{|p - q|} - 1. \end{aligned}$$

Dabei wurde beim vorletzten Gleichheitszeichen die Binomialreihe aus Abschnitt 6.9 verwendet. ■

Der obige Satz besagt also unter anderem, dass eine asymmetrische Irrfahrt mit $p = 0.51$ im Mittel 49 Nullstellen besitzt. Bild 4.3 illustriert die Abhängigkeit des Erwartungswertes der Nullstellenanzahl als Funktion von p .

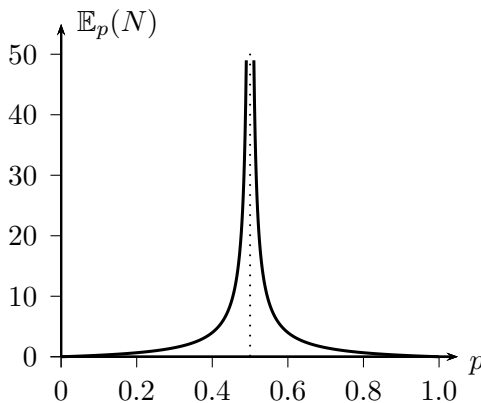


Bild 4.3: Erwartungswert von N in Abhängigkeit von p

Satz 4.5. (Verteilung der Anzahl der Nullstellen)

Die Anzahl N der Nullstellen einer asymmetrischen Irrfahrt auf \mathbb{Z} besitzt eine geometrische Verteilung mit Parameter $|p - q|$, d.h. es gilt

$$\mathbb{P}(N = k) = |p - q| \cdot (1 - |p - q|)^k, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

BEWEIS: Die Behauptung ergibt sich begrifflich, wenn man das Ereignis $\{T = \infty\}$, dass die Irrfahrt *nicht* zur x -Achse zurückkehrt, als einen *Treffer* und dementsprechend $\{T < \infty\}$, also das Auftreten einer Nullstelle, als *Niete* deutet. Das Ereignis $\{N = k\}$ besagt dann, dass sich vor dem ersten Treffer genau k Nieten einstellen. Hierfür muss die Irrfahrt vom Ursprung aus startend genau k mal zur x -Achse zurückkehren, und nach der k -ten Rückkehr darf sie keine weitere Nullstelle besitzen. Aufgrund der Gedächtnislosigkeit der Irrfahrt ist beim Auftreten einer Nullstelle die Situation im Hinblick auf das Auftreten einer weiteren Nullstelle die gleiche, als wenn die Irrfahrt wieder vom Ursprung aus starten würde. Somit liegt eine Folge gleichartiger und sich gegenseitig nicht beeinflussender Experimente (sog. Bernoulli-Kette) vor, welche jeweils mit den Wahrscheinlichkeit $1 - |p - q|$ bzw. $|p - q|$ eine Niete bzw. einen Treffer ergeben. Hieraus folgt die Behauptung. ■

Aus der Verteilung von N erhält man natürlich auch unmittelbar den auf anderem Weg hergeleiteten Erwartungswert von N sowie die Varianz von N . Letztere ergibt sich zu

$$\mathbb{V}(N) = \frac{1 - |p - q|}{|p - q|^2}.$$

4.3 Irrfahrten mit absorbierenden Rändern: Das Spieler–Ruin-Problem

In diesem Abschnitt betrachten wir eine nicht notwendigerweise asymmetrische, im Ursprung startende Irrfahrt. Diese endet, wenn sie erstmalig entweder die Höhe $-a$ oder die Höhe b erreicht. Dabei seien a und b beliebige, gegebene natürliche Zahlen. Die Geraden $y = -a$ und $y = b$ stellen also *absorbierende Ränder* dar. Hier stellen sich die folgenden natürlichen Fragen:

- Wie lange dauert es, bis einer der absorbierenden Ränder erreicht ist?
- Wie wahrscheinlich ist es, dass die Absorption am oberen Rand $y = b$ bzw. am unteren Rand $y = -a$ stattfindet?

Interpretieren wir die Zahlen a und b als die Kapitalvermögen (in Euro) zweier Spieler A und B, die wiederholt in unabhängiger Folge ein Spiel spielen, bei dem A und B mit den Wahrscheinlichkeiten p bzw. q gewinnen und im Gewinnfall einen Euro von ihrem Gegenspieler erhalten, so besagt eine Absorption der Irrfahrt in der Höhe b bzw. $-a$, dass Spieler B bzw. A bankrott ist. Dabei bedeute ein Auf- bzw. Abwärtsschritt der Irrfahrt, dass A bzw. B ein Einzelspiel gewinnt (Bild 4.4).

Wie früher modellieren wir diese Situation mithilfe von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen X_1, X_2, \dots mit $\mathbb{P}(X_j = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_j = -1)$, $j \geq 1$, wobei $0 < p < 1$. Mit $S_0 := 0$ und $S_n := X_1 + \dots + X_n$, $n \geq 1$, beschreibt die Zufallsvariable

$$T := \inf\{n \geq 0 : S_n \in \{-a, b\}\} \quad (4.9)$$

die Zeitspanne bis zur Absorption. Wir wissen bereits, dass $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ gilt, also mit Sicherheit in endlicher Zeit einer der beiden Ränder erreicht wird, denn nach Satz 4.1 gelangt die Irrfahrt im Fall $p \geq 1/2$ mit Wahrscheinlichkeit Eins in die Höhe b , und im Fall $p < 1/2$ erreicht sie mit Wahrscheinlichkeit Eins in endlicher Zeit die Höhe $-a$. Dies bedeutet, dass die durch

$$S_T(\omega) := \begin{cases} S_{T(\omega)}(\omega), & \text{falls } T(\omega) < \infty, \\ 0, & \text{falls } T(\omega) = \infty, \end{cases} \quad \omega \in \Omega,$$

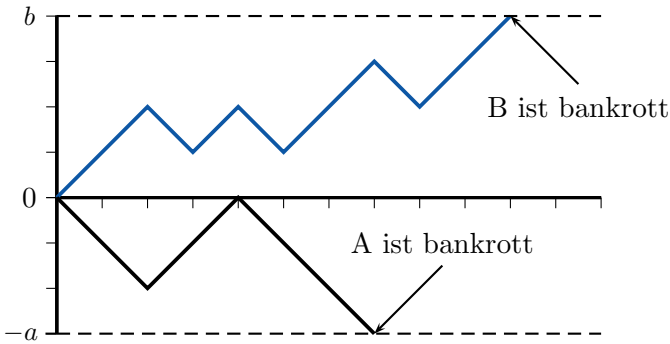


Bild 4.4 Zum
Spieler-Ruin-Problem

definierte Zufallsvariable $S_T : \Omega \rightarrow \mathbb{N}_0$ mit Wahrscheinlichkeit Eins einen der beiden Werte $-a$ oder b annimmt. Dabei legen wir den in Abschnitt 6.1 angegebenen kanonischen Wahrscheinlichkeitsraum für unendlich lange Irrfahrten zugrunde. Die Wahrscheinlichkeit, dass Absorption am oberen Rand, also auf der Geraden $y = b$, stattfindet und somit Spieler A gewinnt, ist dann durch $\mathbb{P}(S_T = b)$ gegeben.

Satz 4.6. (Absorptions- bzw. Ruinwahrscheinlichkeiten)

Für die Absorptionswahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(S_T = b)$ und $\mathbb{P}(S_T = -a)$ gelten:

a)

$$\mathbb{P}(S_T = b) = \begin{cases} \frac{a}{a+b} & , \text{ falls } p = 1/2, \\ \frac{1 - (q/p)^a}{1 - (q/p)^{a+b}}, & \text{ falls } p \neq 1/2. \end{cases}$$

b) $\mathbb{P}(S_T = -a) = 1 - \mathbb{P}(S_T = b).$

Dabei ist wie früher $q := 1 - p$ gesetzt.

BEWEIS: Das Problem ist gleichwertig damit, die Irrfahrt in der Höhe $y = a$ starten zu lassen und auch die absorbierenden Ränder um jeweils a Einheiten nach oben zu verschieben, was bedeutet, dass jetzt die Gerade $y = a+b$ und die x -Achse die absorbierend sind. Spieler B ist also ruiniert, wenn diese Irrfahrt (ohne vorher die x -Achse zu treffen) erstmalig die Höhe $a+b$ erreicht. Der Schlüssel zur Herleitung der Ruinwahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(S_T = b)$ besteht darin, die Anfangshöhe dieser Irrfahrt als einen mit k bezeichneten *Parameter* zu betrachten und die

Wahrscheinlichkeit, dass Absorption in der Höhe $a + b$ stattfindet, als Funktion von k zu studieren. Bezeichnen wir diese Wahrscheinlichkeit mit P_k und schreiben kurz $r := a + b$, so gelten offenbar die Beziehungen

$$P_0 = 0, \quad P_r = 1, \quad (4.10)$$

denn im Fall $k = 0$ bzw. $k = r$ findet bereits zu Beginn eine Absorption statt. Im Fall $1 \leq k \leq r - 1$ befindet sich die Irrfahrt nach einem Schritt entweder in der Höhe $k + 1$ oder in der Höhe $k - 1$. Da die einzelnen Schritte der Irrfahrt voneinander unabhängig sind, stellt sich die Situation nach dem ersten Schritt wie zu Beginn dar, wobei sich nur der Parameter k geändert hat. Nach der Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit folgt

$$P_k = p \cdot P_{k+1} + q \cdot P_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, r - 1,$$

und somit für die Differenzen $d_k := P_{k+1} - P_k$ die Rekursionsformel

$$d_k = d_{k-1} \cdot \frac{q}{p}, \quad k = 1, \dots, r - 1. \quad (4.11)$$

Hieraus liest man sofort die Wahrscheinlichkeit P_k im Fall $p = q = 1/2$ ab: Da die Differenzen d_0, \dots, d_{r-1} nach (4.11) gleich sind, ergibt sich wegen (4.10) das Resultat $P_k = k/r$ und somit $\mathbb{P}(S_T = b) = P_a = a/(a + b)$, falls $p = 1/2$. Im Fall $p \neq 1/2$ folgt aus (4.11) induktiv $d_j = (q/p)^j \cdot d_0$ ($j = 1, \dots, r - 1$) und somit

$$P_k = P_k - P_0 = \sum_{j=0}^{k-1} d_j = d_0 \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{q}{p}\right)^j = d_0 \cdot \frac{1 - (q/p)^k}{1 - q/p}.$$

Setzt man hier $k = r$, so ergibt sich wegen $P_r = 1$ die Größe d_0 zu

$$d_0 = \frac{1 - q/p}{1 - (q/p)^r},$$

und man erhält

$$P_k = \frac{1 - (q/p)^k}{1 - (q/p)^r}, \quad \text{falls } p \neq 1/2,$$

insbesondere also $\mathbb{P}(S_T = b) = P_a$ und damit Behauptung a). Wegen $\mathbb{P}(S_T \in \{b, -a\}) = 1$ gilt $\mathbb{P}(S_T = -a) = 1 - \mathbb{P}(S_T = b)$. ■

Bild 4.5 zeigt die Absorptionswahrscheinlichkeit am oberen Rand und damit die Ruinwahrscheinlichkeit für Spieler B in Abhängigkeit der Erfolgswahrscheinlichkeit p für Spieler A im Falle eines Startkapitals von jeweils drei Euro (links)

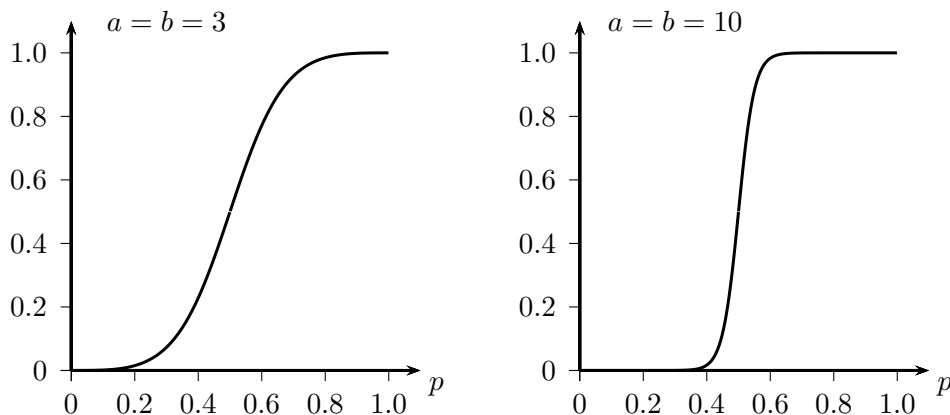


Bild 4.5: $\mathbb{P}(S_T = b)$ in Abhängigkeit der Erfolgswahrscheinlichkeit p für Spieler A für $a = b = 3$ (links) und $a = b = 10$ (rechts)

bzw. jeweils 10 Euro (rechts) für jeden der Spieler. Bemerkenswert ist, wie sich das größere Startkapital auf die Ruinwahrscheinlichkeit auswirkt: Besitzt jeder Spieler ein Kapital von 3 Euro, so geht Spieler B bei einer Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 0.55$ für Spieler A mit einer Wahrscheinlichkeit von ungefähr 0.65 bankrott. Geht jedoch jeder Spieler mit 10 Euro an den Start, so kann sich die größere Erfolgswahrscheinlichkeit von A gegenüber B in einer längeren Serie von Einzelspielen besser durchsetzen, was sich in der großen Ruinwahrscheinlichkeit von 0.88 für Spieler B auswirkt. Man beachte auch, dass im Fall $p > 1/2$ die Wahrscheinlichkeit eines Ruins für Spieler B unabhängig von dessen Startkapital b immer mindestens gleich $1 - (q/p)^a$ ist.

Wir fragen jetzt nach dem Erwartungswert der in (4.9) definierten Zeitspanne T bis zur Absorption. Bevor wir diesen Erwartungswert bestimmen, möchten wir zunächst dessen Existenz nachweisen.

Satz 4.7. (Existenz des Erwartungswertes von T)

Für die Zeitspanne T bis zur Absorption gelten:

a) Es gibt ein $c > 0$ und ein ρ mit $0 < \rho < 1$, sodass

$$\mathbb{P}(T \geq n) \leq c \cdot \rho^n, \quad n \geq 1.$$

b) $\mathbb{E}(T) < \infty$.

BEWEIS: a) Wir setzen wieder $r := a + b$ und wählen eine natürliche Zahl m mit $m > r$. Falls für ein $k \in \mathbb{N}_0$ das Ereignis $\{X_{k+1} = 1, \dots, X_{k+m} = 1\}$ eintritt (dies geschieht mit der Wahrscheinlichkeit p^m), so folgt $S_{k+m} - S_k > r$; somit gilt $\mathbb{P}(S_{k+m} - S_k > r) \geq p^m$. Gilt $T \geq km + 1$ für ein $k \in \mathbb{N}$, so zieht diese Ungleichung notwendigerweise das Eintreten aller Ereignisse $\{S_m - S_0 \leq r\}, \{S_{2m} - S_m \leq r\}, \dots, \{S_{km} - S_{(k-1)m} \leq r\}$ nach sich. Da diese Ereignisse von paarweise disjunkten Mengen der Zufallsvariablen X_1, X_2, \dots gebildet werden, sind sie stochastisch unabhängig, und es folgt

$$\mathbb{P}(T \geq mk + 1) \leq (1 - p^m)^k, \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (4.12)$$

Wir setzen jetzt $c := (1 - p^m)^{-1}$ und $\rho := (1 - p^m)^{1/m}$. Ist $n \in \mathbb{N}$ beliebig, so gibt es ein $k \in \mathbb{N}_0$ mit $km < n \leq (k+1)m$. Mit (4.12) ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T \geq n) &\leq \mathbb{P}(T \geq km + 1) \leq (1 - p^m)^k = c \cdot (1 - p^m)^{k+1} \\ &= c \cdot \rho^{m(k+1)} \leq c \cdot \rho^n, \end{aligned}$$

was a) beweist. Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n$ konvergiert, existiert nach Abschnitt 6.5 der Erwartungswert von T . ■

Man beachte, dass wir die Existenz des Erwartungswertes von T für den Fall $p \neq 1/2$ schon mit Satz 4.1 gezeigt haben. Es gilt nämlich $T \leq \tilde{T} := \inf\{n \geq 1 : S_n = b\}$, und \tilde{T} hat die gleiche Verteilung wie die Summe $V_{1,1} + \dots + V_{1,b}$, wobei $V_{1,1}, \dots, V_{1,b}$ stochastisch unabhängig sind und die gleiche Verteilung wie die erste Leiterzeit V_1 besitzen. Im Fall $p > 1/2$ gilt nach Satz 4.1 $\mathbb{E}(V_1) < \infty$ und somit $\mathbb{E}(\tilde{T}) < \infty$, also auch $\mathbb{E}(T) < \infty$. Ebenso argumentiert man im Fall $p < 1/2$.

Satz 4.8. (Erwartungswert der Zeitspanne bis zur Absorption)

Für die Zeitspanne T bis zur Absorption gilt:

$$\mathbb{E}(T) = \begin{cases} \frac{1}{p-q} \cdot \frac{b\{1 - (p/q)^a\} - a\{(q/p)^b - 1\}}{(q/p)^b - (p/q)^a}, & \text{falls } p \neq 1/2, \\ a \cdot b, & \text{falls } p = 1/2. \end{cases}$$

BEWEIS: Wie beim Beweis von Satz 4.6 betrachten wir die absorbierenden Ränder $y = r (= a + b)$ und $y = 0$ und lassen die Irrfahrt in der Höhe k starten, wobei wir $k \in \{0, 1, \dots, r\}$ als Parameter betrachten. Schreiben wir m_k für den Erwartungswert von $T (= \inf\{n \geq 0 : S_n \in \{0, r\}\})$ unter der Bedingung $S_0 = k$, so

ist der gesuchte Erwartungswert offenbar gleich m_a . Da T bei einem Start in der Höhe 0 oder r mit Wahrscheinlichkeit Eins den Wert 0 annimmt, gilt

$$m_0 = m_r = 0. \quad (4.13)$$

Im Fall $1 \leq k \leq r-1$ befindet sich die Irrfahrt nach dem ersten Schritt mit Wahrscheinlichkeit p in der Höhe $k+1$ und mit Wahrscheinlichkeit q in der Höhe $k-1$. Aufgrund der Gedächtnislosigkeit der Irrfahrt stellt sich die Situation nach dem ersten Schritt jeweils wie zu Beginn dar, nur mit anderen Parameterwerten und dem Unterschied, dass ein Zeitschritt im Hinblick auf das Erreichen eines der beiden Ränder verbraucht wurde. Es folgt

$$\begin{aligned} m_k &= p \cdot (1 + m_{k+1}) + q \cdot (1 + m_{k-1}) \\ &= 1 + p m_{k+1} + q m_{k-1}, \quad 1 \leq k \leq r-1 \end{aligned}$$

und somit für die Differenzen $d_j := m_{j+1} - m_j$ ($j = 0, 1, \dots, r-1$) die rekursive Beziehung

$$d_j = \frac{1}{p} (q d_{j-1} - 1), \quad j = 1, \dots, r-1. \quad (4.14)$$

Nach (4.13) gilt $d_0 = m_1$, und somit folgt hieraus unter Verwendung der Summenformel für die geometrische Reihe im Fall $p \neq q$

$$d_j = \left(\frac{q}{p}\right)^j \cdot m_1 - \frac{1 - (q/p)^j}{p - q}, \quad j = 0, 1, \dots, r-1.$$

Wegen $m_r = 0$ gilt $0 = d_0 + \dots + d_{r-1}$, sodass sich aus obiger Darstellung m_1 zu

$$m_1 = \frac{1}{p - q} \cdot \left(\frac{r(1 - q/p)}{1 - (q/p)^r} - 1 \right)$$

ergibt. Unter Verwendung der Beziehung $m_a = m_1 + d_1 + \dots + d_{a-1}$ erhält man nun mit etwas Geduld die Behauptung des Satzes im Fall $p \neq q$. Im Fall $p = q$ nimmt Gleichung (4.14) die Gestalt $d_j = m_1 - 2j$ an. Hieraus folgt wie oben $m_1 = r-1$ und $m_a = a(r-a) = ab$. ■

Bild 4.6 zeigt den Erwartungswert von T als Funktion von p für die Fälle $a = b = 3$ (links) und $a = 5, b = 10$ (rechts). In der Interpretation der Irrfahrt als wiederholtes Spiel mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p für Spieler A und Anfangskapitalständen von a bzw. b Euro für Spieler A bzw. B zeigen die beiden Bilder die erwartete Dauer des Spiels bis zum Ruin eines der beiden Spieler. Im linken Bild ist der Graph der Funktion wegen der Gleichheit der Kapitalstände zu Beginn symmetrisch zur Geraden $x = 1/2$. Bei sehr kleinem bzw. großem p ist der Erwartungswert kaum größer als 3, was zu erwarten war. Die größte mittlere Spieldauer

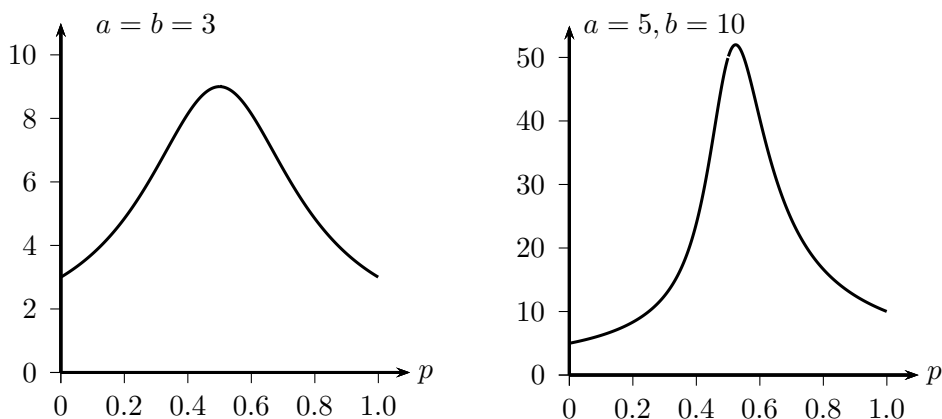


Bild 4.6: Erwartungswert der Zeitspanne bis zum Ruin eines der beiden Spieler im Fall $a = b = 3$ (links) und $a = 5, b = 10$ (rechts)

von 9 Spielen wird für den Fall eines fairen Spiels erreicht. Geht Spieler A mit 5 und Spieler B mit 10 Euro an den Start, so ist nicht verwunderlich, dass bei sehr kleinem p kaum mehr als 5 Spiele absolviert werden, bis (aller Voraussicht nach) Spieler A bankrott ist. Bei sehr großem p wird A so gut wie alle Spiele gewinnen. Da B mit 10 Euro ins Spiel ging, müssen dann etwas mehr als 10 Spiele absolviert werden, bis einer der Spieler (jetzt aller Voraussicht nach B) bankrott ist.

Offenbar nimmt die erwartete Spieldauer im rechten Bild ihren maximalen Wert nicht für $p = 1/2$, sondern für einen etwas größeren Wert an. Dies ist nicht verwunderlich, denn wenn Spieler A pro Einzelspiel eine etwas höhere Chance als B besitzt, könnte diese den Nachteil des kleineren Kapitals von A dahingehend kompensieren, dass beide Spieler die gleiche Ruinwahrscheinlichkeit besitzen, was die Spieldauer grundsätzlich verlängert. Setzt man die in Satz 4.6 angegebene Ruinwahrscheinlichkeit von B im Fall $a = 5, b = 10$ gleich $1/2$, so ergibt sich für $x := (q/p)^5$ die kubische Gleichung $1 - 2x + x^3 = 0$. Diese hat im Intervall $(0, 1)$ die einzige Lösung $x_0 \approx 0.61803$, was zu $p \approx 0.524$ führt. Bei dieser Erfolgswahrscheinlichkeit für A dauert es im Mittel etwas mehr als 52 Einzelspiele bis zum Ruin eines der Kontrahenten.

4.4 Längste Auf- und Abwärtsruns

In diesem Abschnitt betrachten wir eine Irrfahrt der Länge n auf \mathbb{Z} , die symmetrisch oder asymmetrisch sein kann, wir setzen also neben der Unabhängigkeit der Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n nur $\mathbb{P}(X_j = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_j = -1)$, $j \geq 1$, sowie

$0 < p < 1$ voraus. Interpretieren wir einen Aufwärtsschritt als Treffer und einen Abwärtsschritt als Niete und assoziieren wir mit einem Treffer „Glück“ und mit einer Niete „Pech“, so fragen wir im Folgenden nach der Verteilung der längsten Serie direkt aufeinander folgender Treffer, also der längsten Glückssträhne in einer Bernoulli-Kette der Länge n mit Trefferwahrscheinlichkeit p .

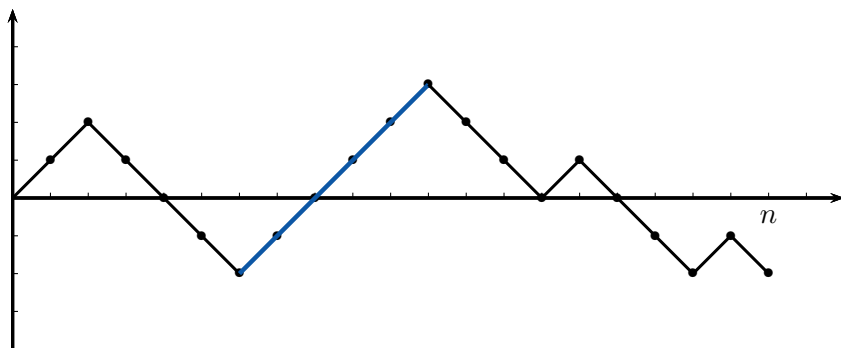


Bild 4.7: Irrfahrt der Länge 20 mit maximalem Aufwärtssrun der Länge 5

In einer neutraleren Formulierung werden wir eine Serie maximaler Länge direkt aufeinander folgender Treffer als **Aufwärtssrun** und eine Serie maximaler Länge direkt aufeinander folgender Nieten als **Abwärtssrun** bezeichnen. Bild 4.7 zeigt das Ergebnis einer zur Wahrscheinlichkeit $p = 1/2$ simulierten Irrfahrt der Länge $n = 20$, die mit einem Aufwärtssrun der Länge 2 beginnt, an den sich ein Abwärtssrun der Länge 4 und danach ein Aufwärtssrun der Länge 5 anschließt. Es folgen (in dieser Reihenfolge) ein Abwärtssrun der Länge 3, ein Aufwärtssrun der Länge 1, ein Abwärtssrun der Länge 3 und je ein Auf- und Abwärtssrun der Länge 1. Hier springt insbesondere die ungewöhnlich lange Glückssträhne von 5 Aufwärtsschritten in Folge ins Auge.

Über die Verteilung der Länge des längsten Aufwärtssruns gibt der nachfolgende Satz Auskunft (siehe z.B. [PM]).

Satz 4.9. (Verteilung der Länge des längsten Aufwärtssruns)

Es bezeichne

$$R_n := \max \{m \in \mathbb{N} : \exists \ell \in \{1, \dots, n - m + 1\} \text{ mit } X_\ell = 1, \dots, X_{\ell+m-1} = 1\}$$

die Länge der längsten Serie direkt aufeinander folgender Treffer in einer Bernoulli-Kette der Länge n mit Trefferwahrscheinlichkeit p , $0 < p < 1$ (Länge des längsten

Aufwärtsruns). Dann gilt für jedes $k = 1, \dots, n$:

$$\mathbb{P}(R_n \geq k) = \sum_{r=1}^{\lfloor \frac{n+1}{k+1} \rfloor} (-1)^{r-1} q^{r-1} p^{rk} \left(\binom{n-rk}{r-1} + q \binom{n-rk}{r} \right). \quad (4.15)$$

BEWEIS: Es bezeichnen

$$\begin{aligned} A_1 &:= \{X_1 = 1, \dots, X_k = 1\} \\ A_j &:= \{X_{j-1} = -1, X_j = 1, \dots, X_{j+k-1} = 1\}, \quad j = 2, \dots, n-k+1 \end{aligned}$$

die Ereignisse, dass eine Serie von *mindestens* k direkt aufeinander folgenden Treffern im j -ten Versuch *beginnt* (im Fall $j \geq 2$ darf also der $(j-1)$ -te Versuch keinen Treffer ergeben). Hiermit stellt sich das Ereignis $\{R_n \geq k\}$ in der Form

$$\{R_n \geq k\} = \bigcup_{j=1}^{n-k+1} A_j$$

dar, was die Verwendung der Formel des Ein- und Ausschließens (siehe z.B. [HE], Kap. 11) nahelegt. Nach dieser Formel gilt

$$\mathbb{P}(R_n \geq k) = \sum_{r=1}^{n-k+1} (-1)^{r-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n-k+1} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r}), \quad (4.16)$$

was bedeutet, dass wir die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A_i sowie der Schnitte von irgendwelchen dieser Ereignisse kennen müssen. Offenbar gelten

$$\mathbb{P}(A_1) = p^k \quad (4.17)$$

sowie

$$\mathbb{P}(A_j) = q \cdot p^k, \quad j = 2, 3, \dots, n-k+1. \quad (4.18)$$

Für ein $r \geq 2$ hängen die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r})$ wie folgt von i_1, \dots, i_r mit $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n-k+1$ ab: Ist $i_{s+1} - i_s \leq k$ für ein $s \in \{1, \dots, r-1\}$, so schließen sich die Ereignisse A_{i_s} und $A_{i_{s+1}}$ gegenseitig aus, da zugleich $X_{i_{s+1}-1} = 1$ und $X_{i_{s+1}-1} = -1$ gelten muss. Folglich gilt $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r}) = 0$. Im gegenteiligen Fall $i_{s+1} - i_s \geq k+1$ für jedes $s \in \{1, \dots, r-1\}$ sind die Ereignisse A_{i_1}, \dots, A_{i_r} stochastisch unabhängig, so dass die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r})$ gleich $q^r p^{kr}$ bzw. gleich $q^{r-1} p^{kr}$ ist, und zwar je nachdem, ob $i_1 \geq 2$ oder $i_1 = 1$ gilt.

Die Anzahl der r -Tupel (i_1, \dots, i_r) mit $2 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n - k + 1$ und $i_{s+1} - i_s \geq k + 1$ für jedes $s = 1, \dots, r - 1$ ist gleich dem Binomialkoeffizienten $\binom{n-kr}{r}$, da die Menge dieser Tupel durch die Kontraktionsabbildung

$$j_\nu := i_\nu - (\nu - 1)k, \quad \nu = 1, \dots, r$$

bijektiv auf die Menge aller Tupel (j_1, \dots, j_r) mit $2 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n - kr + 1$ abgebildet wird. In gleicher Weise ist die Anzahl der r -Tupel (i_1, \dots, i_r) mit $1 = i_1 < \dots < i_r \leq n - k + 1$ und $i_{s+1} - i_s \geq k + 1$ für jedes $s = 1, \dots, r - 1$ gleich dem Binomialkoeffizienten $\binom{n-kr}{r-1}$. Aus (4.17) und (4.18) folgt zusammen mit (4.16) die Behauptung. Man beachte, dass sich der obere Summationsindex in (4.15) aus der Ungleichung $n - kr \geq r - 1$ ergibt. ■

Da sich $\mathbb{P}(R_n = k)$ als Differenz der Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(R_n \geq k)$ und $\mathbb{P}(R_n \geq k + 1)$ schreiben lässt, liefert Satz 4.9 eine explizite Formel zur numerischen Bestimmung der Verteilung von R_n , solange n nicht zu groß ist. Bild 4.8 zeigt Stabdiagramme der Verteilung von R_n im Fall $p = 18/37$ und $n = 50$ sowie $n = 100$. Der Wert $18/37$ für p wurde gewählt, weil er gleich der Wahrscheinlichkeit ist, bei Roulettespiel auf einer sogenannten *einfachen Chance* zu gewinnen. Diese einfache Chance ist dadurch gekennzeichnet, dass 18 der 37 Felder des Roulette-Kessels, d.h. 18 der Zahlen von 0 bis 36, für den Spieler günstig sind. Ein Beispiel einer einfachen Chance ist das Setzen auf *Impair*, also das Auftreten einer ungeraden Zahl.

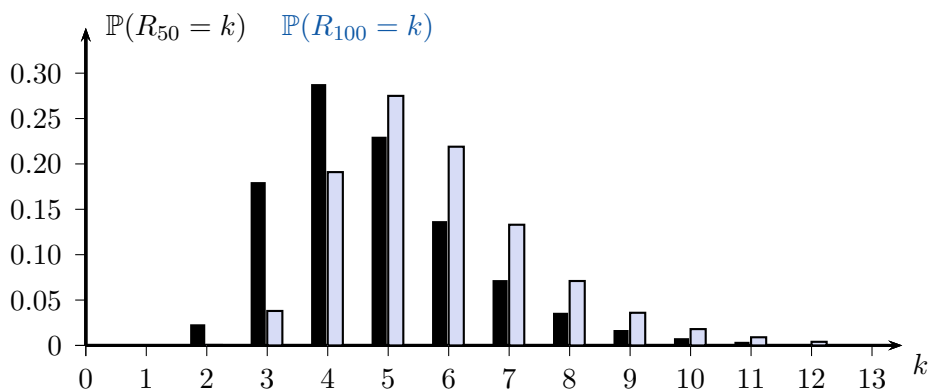


Bild 4.8: Stabdiagramm der Verteilung von R_{50} (schwarz) und R_{100} (blau) für den Fall $p = 18/37$ (einfache Chance beim Roulette)

Bei der Betrachtung von Bild 4.8 fällt auf, dass – in der Interpretation eines Aufwärtsruns als Glückssträhne beim Roulettespiel beim Setzen auf einfache

Chance – beim 100-maligen fortgesetzten Spielen eine Glückssträhne der Mindestlänge 7 gar nicht so unwahrscheinlich ist. Natürlich kann man Glück auch als Pech interpretieren, was bedeutet, dass ein Spieler beim Setzen auf eine einfache Chance durchaus mit längeren Pechsträhnen rechnen muss. Viele Spieler ignorieren hier die stochastische Unabhängigkeit der Ergebnisse einzelner Spiele und verdoppeln spätestens nach dem zweiten oder dritten Verlust des Einsatzes in Folge die Höhe ihres Einsatzes.

Es ist zu vermuten, dass die in Satz 4.15 auftretende Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(R_n \geq k)$ in Abhängigkeit von p monoton wächst. Der folgende Satz besagt, dass diese Vermutung zutrifft. Der rein probabilistische Beweis kommt gänzlich ohne die üblichen Hilfsmittel der Analysis (Untersuchung der Ableitung) aus. Der Leser möge selbst versuchen, die Monotonie der Funktion $p \rightarrow \mathbb{P}_p(R_n \geq k)$, $0 < p < 1$, auf anderem Wege zu beweisen! Dabei haben wir die Abhängigkeit der Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(R_n \geq k)$ durch Indizierung mit p kenntlich gemacht.

Satz 4.10. (Monotonie von $\mathbb{P}_p(R_n \geq k)$ in p)

Unter den Voraussetzungen von Satz 4.9 ist die Überschreitungswahrscheinlichkeit $\mathbb{P}_p(R_n \geq k)$ bei festem n und k monoton wachsend in p .

BEWEIS: Die Idee des Beweises besteht darin, die Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n als Funktionen von stochastisch unabhängigen und je im Einheitsintervall $(0, 1)$ gleichverteilten Zufallsvariablen U_1, \dots, U_n zu schreiben, indem man

$$X_j(\omega) := 2 \cdot \mathbf{1}\{U_j(\omega) \leq p\} - 1, \quad \omega \in \Omega, \quad j = 1, \dots, n, \quad (4.19)$$

setzt. Dabei sind U_1, \dots, U_n auf einem Grundraum Ω definiert, der nicht weiter spezifiziert werden muss. Hiermit sind X_1, \dots, X_n stochastisch unabhängig und identisch verteilt, und wegen $\mathbb{P}(U_j \leq p) = p$ gilt $\mathbb{P}(X_j = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_j = -1)$, was bedeutet, dass die Satz 4.9 zugrunde liegende Annahme vorliegt. Der Vorteil dieser Konstruktion besteht darin, dass sich die Ungleichung $p_1 < p_2$ in Gleichung (4.19) dahingehend auswirkt, dass $\mathbf{1}\{U_j(\omega) \leq p_1\} \leq \mathbf{1}\{U_j(\omega) \leq p_2\}$ gilt und somit beim Übergang von p_1 zu p_2 gewisse Werte $X_j(\omega)$ von -1 nach $+1$ wechseln können. Dies hat zur Folge, dass der von $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$ abhängende Wert von R_n prinzipiell nur größer werden kann. ■

Die Frage nach dem Verhalten der Länge R_n des längsten Runs in einer Bernoulli-Kette der Länge n bei wachsendem n hat eine umfangreiche Literatur hervorgebracht. So bewiesen P. Erdős¹ und A. Rényi ([ER]) das starke Gesetz großer

¹Paul Erdős (1913–1996), einer der bedeutendsten Mathematiker des 20. Jahrhunderts,

Zahlen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_n}{\log n} = \frac{1}{-\log p} \text{ mit Wahrscheinlichkeit Eins.}$$

Hieraus folgt, dass R_n logarithmisch mit n wächst. Einen guten Überblick über diverse Resultate zum Verhalten von R_n für $n \rightarrow \infty$ gibt Abschnitt 8.5. in [EKM].

Abschließend sei angemerkt, dass in einer *unendlich langen* Irrfahrt – ganz gleich, ob diese symmetrisch oder asymmetrisch ist – ein Aufwärtsrun einer vorgegebenen festen Länge mit Wahrscheinlichkeit Eins unendlich oft auftritt. Um dieses Resultat einzusehen, seien X_1, X_2, \dots stochastisch unabhängige Zufallsvariablen auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ (siehe Abschnitt 6.1) mit $\mathbb{P}(X_j = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_j = -1)$ für jedes $j \geq 1$. Dabei ist $p \in (0, 1)$ beliebig. Für eine fest gewählte natürliche Zahl k seien

$$\begin{aligned} A_1 &:= \{X_1 = 1, \dots, X_k = 1, X_{k+1} = -1\} \\ A_j &:= \{X_{j-1} = -1, X_j = 1, \dots, X_{j+k-1} = 1, X_{j+k} = -1\}, \quad j \geq 2, \end{aligned}$$

die Ereignisse, dass eine Serie von *genau* k direkt aufeinander folgenden Treffern im j -ten Versuch *beginnt*. Setzen wir

$$A := \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{j=n}^{\infty} A_j \right),$$

so gehört ein $\omega \in \Omega$ genau dann zu A , wenn es Element von unendlichen vielen der A_1, A_2, \dots ist. Das Ereignis A tritt also genau dann ein, wenn unendlich viele der A_j eintreten. Um $\mathbb{P}(A) = 1$ zu zeigen, wählen wir die Teilfolge $(A_{rk+2r+1})_{r \geq 0}$ von A_1, A_2, \dots aus. Da diese Ereignisse $A_1, A_{k+3}, A_{2k+5}, A_{3k+7}, \dots$ von paarweise disjunkten Mengen der Zufallsvariablen X_1, X_2, \dots gebildet werden, sind die $A_{rk+2r+1}$, $r \geq 1$, stochastisch unabhängig. Wegen $\mathbb{P}(A_j) = p^k(1-p)^2 > 0$ für $k \geq 2$ gilt $\sum_{r=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_{rk+2r+1}) = \infty$. Aus Teil b) des Lemmas von Borel–Cantelli aus Abschnitt 6.11 ergibt sich

$$\mathbb{P} \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{r=n}^{\infty} A_{rk+2r+1} \right) \right) = 1.$$

Da das links stehende Ereignis eine Teilmenge von A ist, folgt die Behauptung.

veröffentlichte ca. 1500 mathematische Arbeiten. Aus dieser großen Anzahl resultiert auch die sog. *Erdős-Zahl*. Die 509 Mathematiker, die direkt mit ihm als Koautor einer Publikation aufgeführt waren, haben die Erdős-Zahl 1, diejenigen, die Koautor einer Publikation eines Mathematikers mit der Erdős-Zahl 1 sind, weisen die Erdős-Zahl 2 auf usw. Hauptarbeitsgebiete: Zahlentheorie und Kombinatorik.

Offenbar gilt das obige Resultat auch, wenn anstelle einer Sequenz von direkt aufeinander folgenden Einsen eine beliebige andere, noch so lange Sequenz aus 1 und -1 vorgegeben wird. Die Wahrscheinlichkeit, dass diese Sequenz in einer unendlich langen Irrfahrt unendlich oft auftritt, ist Eins!

4.5 Der Galton–Watson-Prozess

Francis Galton² formulierte im Jahre 1873 das folgende Problem: Mit welcher Wahrscheinlichkeit stirbt die männliche Linie der Nachkommenschaft eines Mannes aus, wenn dieser und jeder seiner Söhne, Enkel usw. unabhängig voneinander mit der gleichen Wahrscheinlichkeit p_k genau k Söhne hat ($k \in \{0, 1, 2, \dots\}$)?

In einer neutralen Einkleidung stellen wir uns eine Population von Individuen vor, die sämtlich eine Lebensdauer von einer Zeiteinheit besitzen und sich ungeschlechtlich vermehren. Dabei kommen alle Individuen einer Generation simultan zur Welt und sterben auch gleichzeitig. Wir bezeichnen mit M_n Umfang der Population zur Zeit $n \geq 1$ und setzen $M_0 := 1$, nehmen also an, dass der populationsdynamische Prozess mit einem Urahn in der nullten Generation startet.

Zur Beschreibung der stochastischen Entwicklung der Population geben wir eine sogenannte **Reproduktionsverteilung** vor. Diese ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf der Menge \mathbb{N}_0 , wobei der Zahl k die Wahrscheinlichkeit p_k zukommt. Die erzeugende Funktion dieser Verteilung sei mit

$$g(t) := \sum_{k=0}^{\infty} p_k t^k, \quad |t| \leq 1, \quad (4.20)$$

bezeichnet; sie wird im Folgenden eine zentrale Rolle spielen.

Wir nehmen an, dass sich jedes Individuum in jeder Generation unabhängig von den anderen Individuen nach dieser Reproduktionsverteilung fortpflanzt. Diese Annahme führt zur **Reproduktionsgleichung**

$$M_{n+1} = \sum_{j=1}^{M_n} X_{n+1}^{(j)}. \quad (4.21)$$

²Francis Galton (1822–1911), Vetter von Charles Darwin, studierte zunächst in Cambridge Medizin, ging dann auf Entdeckungsreisen (1853 Goldmedaille der Königl. Geographischen Gesellschaft) und wandte sich schließlich der Meteorologie zu (erkannte als erster die Bedeutung der von ihm so genannten Antizyklonen), ab 1865 Beschäftigung mit Vererbungslehre und Statistik (Regression, Korrelation, „Galton–Brett“), erfand die Methode der Fingerabdrücke zur Personenidentifikation.

Dabei seien $\{X_n^{(j)} : n, j \in \mathbb{N}\}$ unabhängige \mathbb{N}_0 -wertige Zufallsvariablen mit obiger Reproduktionsverteilung, und $X_{n+1}^{(j)}$ bezeichne die Anzahl der Nachkommen des j -ten Individuums in der n -ten Generation. Die durch (4.21) rekursiv definierte Folge $(M_n)_{n \geq 0}$ heißt (einfacher) *Galton–Watson*³-Prozess (kurz: GW-Prozess). Wir können die Entwicklung der Populationsumfänge M_n als eine im Punkt $(0, 1)$ startende Irrfahrt betrachten, die sich zum Zeitpunkt n (der n -ten Generation) im Punkt (n, M_n) befindet. Sie bewegt sich von dort – ungeachtet ihres vorherigen Verhaltens – zum Punkt $(n+1, M_{n+1})$. Dabei erzeugt der Zufall die neue Höhe M_{n+1} gemäß Gleichung (4.21) aus der alten Höhe M_n , indem er M_n mal in unabhängiger Folge die Realisierung einer Zufallsvariablen mit der Reproduktionsverteilung $(p_k)_{k \geq 0}$ beobachtet und die erhaltenen Werte aufaddiert. Bild 4.9 zeigt das Ergebnis einer solchen Irrfahrt, die mit der Binomialverteilung $\text{Bin}(3, 1/3)$ als Reproduktionsverteilung, also mit den Wahrscheinlichkeiten

$$p_0 = \frac{8}{27}, \quad p_1 = \frac{12}{27}, \quad p_2 = \frac{6}{27}, \quad p_3 = \frac{1}{27},$$

erhalten wurde. Im Fall dieser durch Simulation gewonnenen Werte stirbt die Population in der 20.ten Generation aus. Man beachte, dass diese Reproduktionsverteilung den Erwartungswert 1 besitzt und – wie wir später sehen werden – zu einer Population führt, die mit Wahrscheinlichkeit Eins ausstirbt.

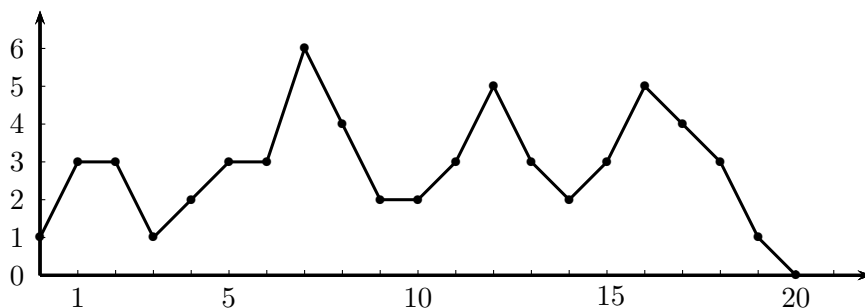


Bild 4.9: Realisierung eines Galton–Watson-Prozesses zur Nachkommenverteilung $\text{Bin}(3, 1/3)$ als Polygonzug

Im Folgenden bezeichne

$$\mu := \sum_{k=1}^{\infty} k p_k = g'(1)$$

³Henry William Watson (1827–1903), Geistlicher, Mathematiker und Alpinist, sein wichtigstes Buch war *A treatise on the kinetic theory of gases* (1876). Seine Korrespondenz mit Francis Galton (1873) legte den Grundstein für die Theorie der Verzweigungsprozesse.

den als existent angenommenen Erwartungswert der Reproduktionsverteilung. Im Fall $\mu > 1$ hat jedes Individuum im Mittel mehr als einen Nachkommen, was als **superkritischer Fall** bezeichnet wird. Der sogenannte **kritische Fall** entsteht, wenn jedem Individuum im Mittel genau ein Individuum nachfolgt, wenn also $\mu = 1$ gilt. Der verbleibende Fall $\mu < 1$ ist als sog. **subkritischer Fall** bekannt.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit, dass der Prozess $(M_n)_{n \geq 0}$ irgendwann einmal ausstirbt, sei mit

$$w := \mathbb{P} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{M_n = 0\} \right)$$

bezeichnet. Sie hängt nur von der Reproduktionsverteilung ab, wobei triviale Fälle wie $p_1 = 1$ oder $p_0 = 0$ ausgeschlossen werden können. Im ersten Fall ist die Population konstant (insbesondere gilt dann $w = 0$), im zweiten wird immer mindestens ein Nachkomme geboren, sodass auch dann $w = 0$ gilt. Wir machen also für alle weiteren Betrachtungen die grundlegende Annahme $0 < p_0 < 1$.

Den Schlüssel zur Bestimmung der Aussterbewahrscheinlichkeit liefert das folgende Lemma über die erzeugende Funktion einer Summe von „zufällig vielen“ unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen wie in (4.21).

Lemma 4.11. (Erzeugende Funktion einer randomisierten Summe)

Es seien N, X_1, X_2, \dots auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum definierte unabhängige \mathbb{N}_0 -wertige Zufallsvariablen, wobei X_1, X_2, \dots die gleiche Verteilung und somit auch die gleiche erzeugende Funktion

$$g(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_1 = n) t^n$$

besitzen. Die erzeugende Funktion von N sei mit

$$\varphi(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N = k) t^k$$

bezeichnet. Dann besitzt die durch $S_0 := 0$, $S_k := X_1 + \dots + X_k$, $k \geq 1$, und

$$S_N(\omega) := S_{N(\omega)}(\omega), \quad \omega \in \Omega,$$

*definierte **randomisierte Summe** S_N die erzeugende Funktion*

$$h(t) = \varphi(g(t)). \tag{4.22}$$

BEWEIS: Zerlegt man das Ereignis $\{S_N = j\}$ nach dem angenommenen Wert von N und verwendet die stochastische Unabhängigkeit von N und S_k , so ergibt sich

$$\mathbb{P}(S_N = j) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N = k, S_k = j) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N = k) \cdot \mathbb{P}(S_k = j).$$

Da S_k nach Abschnitt 6.7 die erzeugende Funktion $g(t)^k$ besitzt, folgt (4.22) aus

$$\begin{aligned} h(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_N = j) t^j \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N = k) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_k = j) t^j \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N = k) (g(t))^k. \blacksquare \end{aligned}$$

Folgerung 4.12. (Erwartungswert und Varianz von S_N)

a) In der Situation von Lemma 4.11 gelte $\mathbb{E}|N| < \infty$ und $\mathbb{E}|X_1| < \infty$. Dann folgt

$$\mathbb{E}(S_N) = \mathbb{E}(N) \cdot \mathbb{E}(X_1).$$

b) In der Situation von Lemma 4.11 gelte $\mathbb{E}(N^2) < \infty$ und $\mathbb{E}(X_1^2) < \infty$. Dann folgt

$$\mathbb{V}(S_N) = \mathbb{V}(N) \cdot (\mathbb{E}(X_1))^2 + \mathbb{E}(N) \cdot \mathbb{V}(X_1).$$

BEWEIS: Mit (4.22) ergibt sich $h'(t) = \varphi'(g(t)) \cdot g'(t)$ und

$$h''(t) = \varphi''(g(t)) \cdot (g'(t))^2 + \varphi'(g(t)) \cdot g''(t), \quad |t| < 1.$$

Unter den gemachten Voraussetzungen existieren die (linksseitigen) Ableitungen $\varphi'(1) = \mathbb{E}(N)$ und $g'(1) = \mathbb{E}(X_1)$ (für a)) bzw. $\varphi''(1) = \mathbb{E}(N(N-1))$ und $g''(1) = \mathbb{E}(X_1(X_1-1))$ (für b)), vgl. Abschnitt 6.7. Somit existieren auch die (linksseitigen) Ableitungen $h'(1) = \mathbb{E}(S_N)$ und $h''(1) = \mathbb{E}(S_N(S_N-1))$, sodass die Behauptung a) unmittelbar und Teil b) durch direkte Rechnung folgt. \blacksquare

Folgerung 4.12 gestattet die folgende Aussage über den Erwartungswert und die Varianz des Populationsumfangs zur Zeit n .

Satz 4.13. (Erwartungswert und Varianz von M_n)

Es sei $(M_n)_{n \geq 0}$ mit $M_0 := 1$ ein GW-Prozess, dessen Reproduktionsverteilung $(p_k)_{k \geq 0}$ neben einem endlichen Erwartungswert μ auch eine endliche Varianz σ^2 besitze. Dann gelten:

a) $\mathbb{E}(M_n) = \mu^n,$

b)

$$\mathbb{V}(M_n) = \begin{cases} \frac{\sigma^2 \mu^{n-1} (\mu^n - 1)}{\mu - 1}, & \text{falls } \mu \neq 1, \\ n \cdot \sigma^2, & \text{falls } \mu = 1. \end{cases}$$

BEWEIS: Aus (4.21) und Folgerung 4.12 ergibt sich für jedes $n \geq 0$

$$\mathbb{E}(M_{n+1}) = \mathbb{E}(M_n) \cdot \mu, \quad \mathbb{V}(M_{n+1}) = \mathbb{V}(M_n) \cdot \mu^2 + \mathbb{E}(M_n) \cdot \sigma^2,$$

sodass die Behauptung durch Induktion über n folgt. ■

Wegen $\mathbb{E}(M_n) \rightarrow 0$ im Fall $\mu < 1$ ist damit zu rechnen, dass die Population auf Dauer ausstirbt, wohingegen das Langzeitverhalten von M_n im kritischen Fall $\mu = 1$ nicht klar ist. Im Fall $\mu > 1$ könnte man wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(M_n) = \infty$ erwarten, dass der Populationsumfang M_n geometrisch mit n wächst. Andererseits gilt $w > 0$, denn schon der Urahn in der nullten Generation kann ohne Nachkommen sterben. Aus diesem Grund könnte man vermuten, dass eine Population mit superkritischer Reproduktionsverteilung für den Fall, dass sie zu einem großen Zeitpunkt n noch nicht ausgestorben ist, typischerweise sehr groß ist. Wir werden sehen, inwieweit diese Vermutungen zutreffen und wenden uns zunächst der Frage zu, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein GW-Prozess in endlicher Zeit ausstirbt.

Satz 4.14. (Kriterium für die Aussterbewahrscheinlichkeit)

Es sei $(M_n)_{n \geq 0}$ mit $M_0 := 1$ ein GW-Prozess, dessen Reproduktionsverteilung $(p_k)_{k \geq 0}$ die erzeugende Funktion g besitze. Dann gelten:

a) Die Aussterbewahrscheinlichkeit w von (M_n) ist gleich der kleinsten nicht-negativen Lösung t der Fixpunktgleichung $g(t) = t$.

b) Falls $\mu \leq 1$, so gilt $w = 1$.

c) Falls $\mu > 1$, so ist $w < 1$.

BEWEIS: a) Bezeichnet φ_n die erzeugende Funktion von M_n , so gilt aufgrund der rekursiven Beziehung (4.21) und Lemma 4.11

$$\varphi_{n+1}(t) = \varphi_n(g(t)) \quad (4.23)$$

und somit wegen $\varphi_1(t) = g(t)$

$$\varphi_n(t) = (g \circ \dots \circ g)(t) \quad (n\text{-fach iterierte Anwendung von } g). \quad (4.24)$$

Da die Ereignisse $\{M_n = 0\}$, $n \geq 1$, eine aufsteigende Mengenfolge bilden, folgt nach Definition der Aussterbewahrscheinlichkeit und wegen der Tatsache, dass \mathbb{P} als Wahrscheinlichkeitsmaß stetig von unten ist, die Beziehung

$$w = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(M_n = 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(0).$$

Weiter ist wegen

$$g(w) = g(\lim \varphi_n(0)) = \lim g(\varphi_n(0)) = \lim \varphi_{n+1}(0) = w$$

die Aussterbewahrscheinlichkeit w ein Fixpunkt von g . Ist $x \geq 0$ ein beliebiger Fixpunkt von g , so gilt $x = g(x) \geq g(0) = \varphi_1(0)$ und somit durch Induktion $x \geq \varphi_n(0)$ für jedes $n \geq 1$, also $x \geq w = \lim \varphi_n(0)$.

b) Wir unterscheiden die Fälle $p_0 + p_1 = 1$ und $p_0 + p_1 < 1$. Im ersten Fall folgt $\mathbb{P}(M_n = 0) = 1 - p_1^n$ und somit $w = 1$, im zweiten verläuft die weitere Argumentation wie in c). Die Gleichung $g(t) = t$ besitzt den einzigen Fixpunkt $w = 1$, siehe Bild 4.10 links.

c) Im Fall $\mu = g'(1) > 1$ gilt $p_0 + p_1 < 1$, und $g'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k t^{k-1}$ ist auf $[0, 1]$ streng monoton, was bedeutet, dass g dort strikt konvex ist. Die Funktion g besitzt dann neben dem trivialen Fixpunkt $t = 1$ noch genau einen weiteren Fixpunkt w im Intervall $[0, 1)$, siehe Bild 4.10 rechts. ■

Das obige Resultat besagt also, dass der Prozess genau dann mit Wahrscheinlichkeit Eins ausstirbt, wenn der subkritische oder kritische Fall vorliegt, also im Mittel höchstens ein Nachkomme geboren wird; andernfalls ist die Aussterbewahrscheinlichkeit kleiner als Eins.

Beispiel 4.15. (Geometrische Reproduktionsverteilung)

Die geometrische Reproduktionsverteilung

$$p_k = \frac{1}{\mu + 1} \cdot \left(\frac{\mu}{\mu + 1} \right)^k, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad (4.25)$$

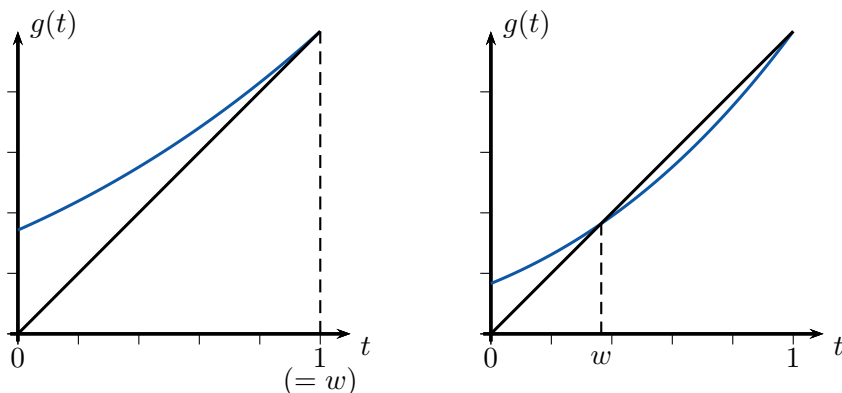


Bild 4.10: Zur Bestimmung der Aussterbewahrscheinlichkeit

besitzt den Erwartungswert $\mu > 1$ und die erzeugende Funktion

$$g(t) = \frac{1}{\mu + 1 - \mu t}, \quad |t| \leq 1.$$

Die Fixpunktgleichung $g(t) = t$ führt auf die quadratische Gleichung

$$\mu t^2 - (\mu + 1)t + 1 = 0,$$

die neben der trivialen Lösung $t = 1$ die zweite Lösung $1/\mu < 1$ besitzt. Der GW-Prozess mit der Reproduktionsverteilung (4.25) stirbt also mit der Wahrscheinlichkeit $1/\mu$ aus.

Beispiel 4.16. (Familienplanung)

Für den Fall, dass jedes Individuum höchstens zwei Nachkommen besitzen kann, gilt $g(s) = p_0 + p_1 s + p_2 s^2$. Wegen $g'(s) = p_1 + 2sp_2$ und $1 = p_0 + p_1 + p_2$ folgt

$$\mu = g'(1) = p_1 + 2p_2 = 1 + p_2 - p_0.$$

Es gilt also $\mu > 1 \iff p_2 > p_0$. In diesem superkritischen Fall ist die Aussterbewahrscheinlichkeit gleich der eindeutig bestimmten Lösung $w \in (0, 1)$ der quadratischen Gleichung $s = p_0 + p_1 s + p_2 s^2$. Diese ergibt sich nach direkter Rechnung zu $w = p_0/p_2$, hängt also insbesondere nicht von p_1 ab.

Beispiel 4.17. (Reproduktionsverteilung ohne Erwartungswert)

Für die Reproduktionsverteilung (p_j) mit $p_j := 1/((j+1)(j+2))$, $j \geq 0$, ergibt sich wegen $1/((j+1)(j+2)) = 1/(j+1) - 1/(j+2)$ und der Potenzreihenentwicklung der Logarithmusfunktion die erzeugende Funktion zu

$$g(s) = \frac{1}{s} \cdot \left(1 + \left(\frac{1}{s} - 1 \right) \log(1-s) \right), \quad |s| < 1, \quad s \neq 0,$$

sowie $g(0) = 1/2$. Da die harmonische Reihe divergiert, besitzt diese Reproduktionsverteilung keinen Erwartungswert. Die Gleichung $w = g(w)$ zur Bestimmung der Aussterbewahrscheinlichkeit w führt auf die durch Iteration erhältliche Lösung $w = 0.683803 \dots$.

Das folgende Resultat präzisiert die weiter oben geäußerte Vermutung, dass ein superkritischer GW-Prozess ein äußerst instabiles Langzeitverhalten aufweist: Er ist entweder ausgestorben oder „explodiert“, umfasst also eine sehr große Anzahl an Populationsmitgliedern (Extinktions-Explosions-Dichotomie).

Satz 4.18. (Extinktions-Explosions-Dichotomie)

Für einen Galton–Watson-Prozess $(M_n)_{n \geq 0}$ mit $M_0 = 1$ und Aussterbewahrscheinlichkeit $w = \mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty} \{M_n = 0\})$ gilt

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0\right) = w, \quad \mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \infty\right) = 1 - w.$$

BEWEIS: Für eine beliebige natürliche Zahl k bezeichne $T_k := \sup\{n \geq 1 : M_n = k\}$ den letzten Zeitpunkt, zu dem der Populationsumfang den Wert k annimmt (wobei $T_k = \infty$ möglich ist). Wegen unserer Grundannahme $p_0 > 0$ für die Reproduktionsverteilung gilt dann für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_k = n) &= \mathbb{P}(M_n = k) \cdot \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} \{M_{n+j} \neq k\} \mid M_n = k\right) \\ &\geq \mathbb{P}(M_n = k) \cdot \mathbb{P}(M_{n+1} = 0 \mid M_n = k) \\ &= \mathbb{P}(M_n = k) \cdot p_0^k. \end{aligned}$$

Summiert man hier über n , so ergibt sich

$$1 \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T_k = n) = p_0^k \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(M_n = k)$$

und somit insbesondere $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(M_n = k) < \infty$. Hieraus erhält man nicht nur

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(M_n = k) = 0 \quad \text{für jedes } k \geq 1,$$

sondern nach dem Lemma von Borel–Cantelli aus Abschnitt 6.11

$$\mathbb{P} \left(\bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{n=l}^{\infty} \{M_n = k\} \right) = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Geht man zum komplementären Ereignis über und beachtet, dass der Durchschnitt von abzählbar vielen Mengen der Wahrscheinlichkeit Eins ebenfalls die Wahrscheinlichkeit Eins besitzt, so folgt

$$\mathbb{P} \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcap_{n=l}^{\infty} \{M_n \neq k\} \right) = 1. \quad (4.26)$$

Bezeichnen wir das hier auftretende Ereignis kurz mit Ω_0 , so besitzt für jedes $\omega \in \Omega_0$ die Folge $(M_n(\omega))_{n \geq 1}$ aus \mathbb{N}_0 die Eigenschaft, dass jede natürliche Zahl nur endlich oft als Folgenglied vorkommt. Es gilt somit die Inklusion

$$\Omega_0 \subset \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0 \right\} \cup \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \infty \right\}, \quad (4.27)$$

denn zu jedem $\omega \in \Omega_0$ gibt es entweder ein $n \in \mathbb{N}$ mit $M_n(\omega) = 0$ (und somit $M_k(\omega) = k$ für jedes $k \geq n$, also $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n(\omega) = 0$), oder es gilt $M_n(\omega) \neq 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. In diesem Fall gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n(\omega) = \infty$, denn andernfalls würde mindestens eine natürliche Zahl unendlich oft als Folgenglied auftreten. Aus (4.26) und (4.27) folgt dann die Behauptung. ■

Für einen superkritischen Galton–Watson-Prozess würde man erwarten, dass der Prozess auf der (die positive Wahrscheinlichkeit $1 - w$ besitzenden) Menge $\{\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} M_n(\omega) = \infty\}$ exponentiell von der Größenordnung μ^n wächst. Bildet man nämlich den mit μ^{-n} reskalierten Prozess

$$W_n := \frac{M_n}{\mu^n}, \quad n \geq 0,$$

so gilt nach Satz 4.13 und den Rechenregeln $\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}(aX) = a^2\mathbb{V}(X)$ für Erwartungswert und Varianz einer mit der Konstanten a multiplizierten Zufallsvariablen X

$$\mathbb{E}(W_n) = 1, \quad \mathbb{V}(W_n) = \sigma^2 \cdot \frac{\mu^{n-1} \cdot (\mu^n - 1)}{\mu^{2n}(\mu - 1)} \rightarrow \frac{\sigma^2}{\mu(\mu - 1)} \text{ bei } n \rightarrow \infty.$$

Dabei haben wir angenommen, dass die Reproduktionsverteilung eine endliche Varianz σ^2 besitzt. Den Schlüssel für detailliertere Untersuchungen zu W_n bildet die Beobachtung, dass der Prozess (W_n) folgende charakteristische *Martingaleigenschaft* besitzt: Es gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(W_{n+1}|W_n) &= \mathbb{E}\left[\frac{M_{n+1}}{\mu^{n+1}} \middle| W_n\right] = \frac{1}{\mu^{n+1}} \cdot \mathbb{E}[M_{n+1}|M_n] = \frac{1}{\mu^{n+1}} \cdot \mu \cdot M_n \\ &= W_n.\end{aligned}$$

Hiermit lässt sich zeigen, dass W_n für $n \rightarrow \infty$ mit Wahrscheinlichkeit 1 gegen eine Zufallsvariable W konvergiert, die den Erwartungswert 1 und die Varianz $\sigma^2/(\mu(\mu-1))$ besitzt. Der interessierte Leser sei hier auf weiterführende Literatur wie etwa [HAR] oder [AN] verwiesen.

Kapitel 5



Irrfahrten auf dem ganzzahligen Gitter in höheren Dimensionen

In diesem Kapitel betrachten wir eine Irrfahrt auf dem ganzzahligen Gitter $\mathbb{Z}^d := \{\mathbf{k} := (k_1, \dots, k_d) : k_j \in \mathbb{Z} \text{ für } j = 1, \dots, d\}$. Diese startet im Ursprung $\mathbf{0} := (0, \dots, 0)$ des \mathbb{R}^d und bewegt sich gedächtnislos, wobei sie zu jedem Zeitpunkt mit Wahrscheinlichkeit $1/(2d)$ vom Punkt \mathbf{k} in einen der $2d$ möglichen Nachbarpunkte von \mathbf{k} gelangt. Dabei heißt $\mathbf{j} := (j_1, \dots, j_d) \in \mathbb{Z}^d$ *Nachbarpunkt von \mathbf{k}* , falls $\sum_{m=1}^d |k_m - j_m| = 1$ gilt. Ein Teilchen, das eine solche Irrfahrt durchläuft, sucht sich also jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit $1/d$ eine der Koordinatenachsen aus und geht dann auf der gewählten Achse rein zufällig um eine Einheit vor oder zurück. Wir nehmen also vorläufig an, dass diese Irrfahrt symmetrisch ist. Welche Konsequenzen sich ergeben, wenn von obiger Gleichverteilungsannahme abgewichen wird, wird später diskutiert.

Bild 5.1 zeigt die ersten 21 Schritte einer derartigen Irrfahrt im Fall $d = 2$. Der Verlauf dieser Irrfahrt ist aus dem Bild zusammen mit der Information, dass genau 21 Schritte zurückgelegt wurden, eindeutig rekonstruierbar. So geht der 5. Schritt von $(-1, 1)$ nach $(-1, 2)$ und der 14. Schritt von $(-5, 4)$ nach $(-5, 3)$. Im Fall $d = 3$ kann man sich eine symmetrische Irrfahrt als Wanderung auf einem kubischen Klettergerüst vorstellen.

Wir modellieren die symmetrische Irrfahrt auf \mathbb{Z}^d durch eine Folge unabhängiger identisch verteilter Zufallsvektoren X_1, X_2, \dots , die jeweils eine Gleichverteilung auf der Menge $E_d := \{e_1, -e_1, \dots, e_d, -e_d\}$ besitzen, vgl. Abschnitt 6.1. Dabei steht e_j für den j -ten kanonischen Einheitsvektor des \mathbb{R}^d und $-e_j$ für dessen

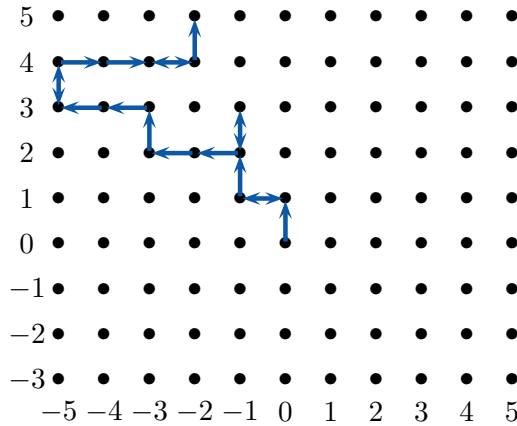


Bild 5.1: Die ersten 21 Schritte einer Irrfahrt auf \mathbb{Z}^2

Spiegelbild am Ursprung. Setzen wir $S_0 := \mathbf{0}$ und $S_n := X_1 + \dots + X_n$ für $n \geq 1$, so gibt der Punkt S_n die Position der Irrfahrt zur Zeit n an. Bezeichnet wie in Abschnitt 2.5

$$T := \inf\{2k : k \in \mathbb{N} \text{ und } S_{2k} = \mathbf{0}\} \quad (5.1)$$

die Erstwiederkehrzeit zum Startpunkt $\mathbf{0}$, so stellt sich die Frage, ob die symmetrische Irrfahrt auf \mathbb{Z}^d für allgemeines d rekurrent ist, also wie im Fall $d = 1$ mit Wahrscheinlichkeit Eins in endlicher Zeit zum Ausgangspunkt zurückkehrt. Der nächste Abschnitt ist diesem Problem gewidmet. In Abschnitt 5.2 wird der Frage nachgegangen, wie viele verschiedene Gitterpunkte eine Irrfahrt nach n Zeitschritten besucht hat.

5.1 Rekurrenz und Transienz

Der folgende, auf George Pólya¹ ([PO]) zurückgehende zentrale Satz besagt, dass die Rekurrenzeigenschaft der symmetrischen Irrfahrt auf \mathbb{Z} für den Fall $d = 2$ der ebenen Irrfahrt erhalten bleibt, aber im Fall $d \geq 3$ verloren geht.

¹George Pólya (1887–1985), lehrte 1914–1940 an der ETH Zürich (ab 1928 Professor), 1940–1942 Gastprofessur an der Brown University, 1942–1953 Professor an der Stanford University. Pólya war in erster Linie Analytiker. Er lieferte u.a. wichtige Beiträge zur Analysis, Wahrscheinlichkeitstheorie, mathematischen Physik, Kombinatorik und Zahlentheorie.

Satz 5.1. (Rekurrenz/Transienz der symmetrischen Irrfahrt auf \mathbb{Z}^d)

Für die in (5.1) definierte Erstwiederkehrzeit einer symmetrischen Irrfahrt auf \mathbb{Z}^d gelten:

$$a) \mathbb{P}(T < \infty) = 1, \text{ falls } d \leq 2.$$

$$b) \mathbb{P}(T < \infty) < 1, \text{ falls } d \geq 3.$$

BEWEIS: Es seien $N := \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}\{S_{2n} = \mathbf{0}\}$ die Anzahl der Besuche der Irrfahrt im Ursprung (einschließlich des Besuchs zu Beginn) und

$$L := \sup\{2n : n \geq 0 \text{ und } S_{2n} = \mathbf{0}\}, \quad 0 \leq L \leq \infty,$$

der zufällige Zeitpunkt des *letzten* Aufenthalts der Irrfahrt in $\mathbf{0}$. Nach (6.11) gilt

$$\mathbb{E}(N) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_{2n} = \mathbf{0}). \quad (5.2)$$

Wegen der Gedächtnislosigkeit der Irrfahrt erhalten wir für jedes $n \geq 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(L = 2n) &= \mathbb{P}(S_{2n} = \mathbf{0}) \cdot \mathbb{P}(S_{2n+2j} \neq \mathbf{0} \text{ für jedes } j \geq 1 | S_{2n} = \mathbf{0}) \\ &= \mathbb{P}(S_{2n} = \mathbf{0}) \cdot \mathbb{P}(S_{2j} \neq \mathbf{0} \text{ für jedes } j \geq 1) \\ &= \mathbb{P}(S_{2n} = \mathbf{0}) \cdot \mathbb{P}(T = \infty). \end{aligned}$$

Summation über $n \geq 0$ liefert wegen der Ereignisgleichheit $\{L < \infty\} = \{N < \infty\}$ zusammen mit (5.2)

$$\mathbb{P}(N < \infty) = \mathbb{E}(N) \cdot \mathbb{P}(T = \infty). \quad (5.3)$$

Wir unterscheiden jetzt die beiden Fälle $\mathbb{E}(N) = \infty$ und $0 < \mathbb{E}(N) < \infty$ (man beachte, dass $\mathbb{E}(N)$ wegen $\mathbb{P}(S_2 = \mathbf{0}) = 1/(2d)$ strikt positiv ist). Im ersten Fall gilt wegen (5.3) notwendigerweise $\mathbb{P}(T = \infty) = 0$, es liegt somit Rekurrenz vor. Im zweiten Fall folgt $\mathbb{P}(N < \infty) = 1$ und $\mathbb{P}(T = \infty) = 1/\mathbb{E}(N) > 0$, also insbesondere Transienz. Dabei ist die Wiederkehrwahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(T < \infty)$ mit (5.2) und $\mathbb{P}(S_0 = \mathbf{0}) = 1$ durch

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T < \infty) &= 1 - \mathbb{P}(T = \infty) = 1 - \frac{1}{\mathbb{E}(N)} = \frac{\mathbb{E}(N) - 1}{\mathbb{E}(N)} \\ &= \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(S_{2n} = \mathbf{0})}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(S_{2n} = \mathbf{0})} \end{aligned} \quad (5.4)$$

gegeben. Die Frage, ob die symmetrische Irrfahrt auf \mathbb{Z}^d rekurrent oder transient ist, wird also allein durch das Verhalten der unendlichen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(S_{2n} = \mathbf{0})$

bestimmt. Divergiert diese Reihe, so liegt Rekurrenz vor, andernfalls Transienz. Man beachte, dass mit der Festsetzung $\infty/(1+\infty) := 1$ die obige Gleichung auch im Fall $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(S_{2n} = \mathbf{0}) = \infty$ gültig ist.

Im Fall $d = 1$ gilt mit (2.22)

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \quad (5.5)$$

Dabei bedeutet das Symbol $a_n \sim b_n$ für Zahlenfolgen (a_n) und (b_n) , dass der Quotient a_n/b_n für $n \rightarrow \infty$ gegen 1 konvergiert. Man nennt dann (a_n) und (b_n) *asymptotisch äquivalent*. Wegen $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2} = \infty$ haben wir uns noch einmal die Rekurrenz der symmetrischen Irrfahrt auf \mathbb{Z} klar gemacht. Im Fall $d = 2$ tritt das Ereignis $\{S_{2n} = \mathbf{0}\}$ genau dann ein, wenn man in den ersten $2n$ Wegschritten gleich oft nach rechts und nach links und gleich oft nach oben und nach unten geht. Bezeichnet k die Anzahl der Wegschritte nach rechts, so folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_{2n} = \mathbf{0}) &= \frac{1}{4^{2n}} \cdot \sum_{k=0}^n \binom{2n}{k} \binom{2n-k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} \\ &= \frac{1}{4^{2n}} \binom{2n}{n} \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \frac{1}{4^{2n}} \binom{2n}{n}^2 \\ &= \left[\frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \right]^2 \sim \frac{1}{\pi n} \quad \text{bei } n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Dabei haben wir beim vorletzten Gleichheitszeichen die Normierungsbedingung für die hypergeometrische Verteilung benutzt. Da die harmonische Reihe divergiert, ist die symmetrische Irrfahrt in der Ebene rekurrent.

Im Fall $d \geq 3$ gelangt man genau dann nach $2n$ Schritten zum Ursprung zurück, wenn für jedes $j \in \{1, \dots, d\}$ k_j Schritte in Richtung des j -ten Einheitsvektors e_j und k_j Schritte in Richtung $-e_j$ erfolgen. Dabei sind k_1, \dots, k_d nichtnegative ganze Zahlen mit der Eigenschaft $k_1 + \dots + k_d = n$. Schreiben wir $C_n := \{\mathbf{k} := (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{N}_0^d : k_1 + \dots + k_d = n\}$, so folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_{2n} = \mathbf{0}) &= \frac{1}{(2d)^{2n}} \cdot \sum_{\mathbf{k} \in C_n} \frac{(2n)!}{k_1!^2 \cdot \dots \cdot k_d!^2} \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \cdot \sum_{\mathbf{k} \in C_n} \left[d^{-n} \frac{n!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_d!} \right]^2. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Innerhalb der eckigen Klammer stehen Wahrscheinlichkeiten einer Multinomialverteilung, deren Summe über alle $\mathbf{k} \in C_n$ gleich Eins ist, und so erhalten wir die

Abschätzung

$$\mathbb{P}(S_{2n} = \mathbf{0}) \leq \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \cdot \max_{\mathbf{k} \in C_n} \left(d^{-n} \frac{n!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_d!} \right).$$

Das hier auftretende Maximum wird angenommen, wenn für jedes j die Ungleichung $|k_j - n/d| \leq 1$ gilt. Andernfalls würde nämlich für mindestens ein Paar i, j die Ungleichung $k_i \geq k_j + 2$ erfüllt sein, und man könnte durch die Ersetzungen $k_i \rightsquigarrow k_i - 1$, $k_j \rightsquigarrow k_j + 1$ den Multinomialkoeffizienten vergrößern. Mit der Stirling-Formel (vgl. (2.22)) folgt somit nach direkter Rechnung

$$\max_{\mathbf{k} \in C_n} \left(d^{-n} \frac{n!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_d!} \right) \sim \frac{d^{d/2}}{(2\pi n)^{(d-1)/2}}$$

bei $n \rightarrow \infty$, und deshalb existiert ein $a < \infty$ mit $\mathbb{P}(S_{2n} = \mathbf{0}) \leq a \cdot n^{-d/2}$. Wegen $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-d/2} < \infty$ für $d \geq 3$ ist die symmetrische Irrfahrt für $d \geq 3$ transient. ■

Bestimmung von $\mathbb{P}(T < \infty)$ im Fall $d \geq 3$

Nachdem die symmetrische Irrfahrt auf dem ganzzahligen Gitter \mathbb{Z}^d im Fall $d \geq 3$ als transient nachgewiesen wurde, stellt sich die Frage, ob man die Rückkehrwahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(T < \infty)$ zum Ursprung einer solchen Irrfahrt explizit angeben kann. Nach (5.4) benötigen wir hierfür die Summe $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(S_{2n} = \mathbf{0})$ und damit insbesondere einen handhabbaren Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(S_{2n} = \mathbf{0})$ in (5.7). Schreiben wir kurz

$$P_d(n) := \mathbb{P}(S_{2n} = \mathbf{0})$$

für diese dimensionsabhängige Wahrscheinlichkeit, machen also die Abhängigkeit von d durch Indizierung deutlich, so gilt die Rekursionsformel (Griffin [GR])

$$P_d(n) = \sum_{j=0}^n \binom{2n}{2j} \frac{P_1(j) P_{d-1}(n-j) (d-1)^{2n-2j}}{d^{2n}} \quad (5.8)$$

($d \geq 2$, $j \in \{0, 1, \dots, n\}$). Dabei ist $P_d(0) := 1$ gesetzt. Gleichung (5.8) folgt aus der einfachen Überlegung, dass eine Irrfahrt, die sich nach $2n$ Schritten wieder im Ursprung befindet, in jeder einzelnen Koordinate zu 0 zurückkehren muss. Das Ereignis $\{S_{2n} = \mathbf{0}\}$ wird nach der Anzahl $2j$, $j = 0, \dots, n$, der auf der *ersten* Koordinatenachse zu absolvierenden Schritte zerlegt. Der Faktor $\binom{2n}{2j}$ gibt dabei die Anzahl der Möglichkeiten an, aus den $2n$ Zeitpunkten $0, 1, \dots, 2n-1$ genau $2j$ auszuwählen, zu denen die Irrfahrt auf der ersten Koordinatenachse erfolgen soll. Sind diese Zeitpunkte festgelegt, so ist $(1/d)^{2j}$ die Wahrscheinlichkeit,

dass sich jeder dieser $2j$ Schritte *in einer der beiden Richtungen* auf der ersten Koordinatenachse vollzieht, und

$$P_1(j) = \frac{\binom{2j}{j}}{2^{2j}} \quad (5.9)$$

die Wahrscheinlichkeit, dass *dann* nach $2j$ Schritten eine Rückkehr zu 0 erfolgt. Zu jedem der übrigen $2n - 2j$ Zeitschritte soll die Irrfahrt *nicht* auf der ersten Koordinatenachse verlaufen. Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist $((d-1)/d)^{2n-2j}$. Unter dieser Bedingung ist die Wahrscheinlichkeit, nach $2n - 2j$ Schritten zum Ursprung zurückzukehren, gleich $P_{d-1}(n-j)$, was (5.8) zeigt. Nach (5.6) gilt $P_2(n) = P_1(n)^2$, und somit muss die Rekursion in (5.8) mit der Anfangsbedingung (5.9) erst ab $d = 3$ erfolgen. Griffin [GR] benutzte (5.8) zusammen mit einem Verfahren der Konvergenzbeschleunigung, um (unter anderem) in den Fällen $3 \leq d \leq 8$ mithilfe eines Computers die folgenden Werte für $\mathbb{P}(T < \infty)$ zu erhalten.

d	3	4	5	6	7	8
$\mathbb{P}(T < \infty)$	0.340537	0.193202	0.135179	0.104715	0.085845	0.072913

Tabelle 5.1: Rückkehrwahrscheinlichkeiten der symmetrischen Irrfahrt auf \mathbb{Z}^d

Wir möchten zum Schluss dieses Abschnitts noch eine Bemerkung zu *asymmetrischen* Irrfahrten auf \mathbb{Z}^d im Fall $d \geq 2$ machen. Eine derartige Irrfahrt ist dadurch gekennzeichnet, dass sie keine Gleichverteilung auf den $2d$ Nachbarpunkten eines Punktes für die möglichen Wegschritte zugrunde legt. Eine solche Irrfahrt ist immer transient, es sei denn, sie verläuft nur auf höchstens zwei der Koordinatenachsen und ist dort symmetrisch. Dieses Ergebnis folgt unmittelbar aus der Transienz der eindimensionalen Irrfahrt im Fall $p \neq 1/2$. Eine solche muss ja dann o.B.d.A. für diejenigen Wegschritte, die in Richtung der ersten Koordinatenachse gemacht werden, vorliegen. Wenn die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Koordinate des umherirrenden Teilchens nie wieder den Wert 0 annimmt, positiv ist, ist auch die Wahrscheinlichkeit positiv, dass das Teilchen nicht wieder zum Ursprung zurückkehrt.

5.2 Die Anzahl der besuchten Zustände

Wie „neugierig“ ist eine Irrfahrt, neue, noch nicht besuchte Zustände zu entdecken? Präziser formuliert fragen wir in diesem Abschnitt, wie sich die Anzahl

$$R_n := |\{S_0, S_1, \dots, S_n\}|$$

der *verschiedenen* bis zum Zeitpunkt n besuchten Zustände einer Irrfahrt auf \mathbb{Z}^d bei wachsendem n verhält. Dabei schließen wir auch den Fall $d = 1$ und die Möglichkeit mit ein, dass die als unabhängig und identisch verteilt vorausgesetzten Zufallsvektoren X_1, X_2, \dots nicht unbedingt eine Gleichverteilung auf $E_d = \{e_1, -e_1, \dots, e_d, -e_d\}$ besitzen. In der Literatur ist für R_n auch die etwas irreführende Begriffsbildung *Spannweite* (engl.: *range*) geläufig, obwohl diese Bezeichnung für die *Menge* $\{S_0, S_1, \dots, S_n\}$ angemessener wäre.

Als Beispiel betrachten wir die in Bild 5.1 dargestellte Irrfahrt. Diese hat nach 21 Zeitschritten genau 15 verschiedene Punkte besucht. Über die exakte Verteilung von R_n ist selbst im einfachsten Fall der symmetrischen eindimensionalen Irrfahrt wenig bekannt. Wie man durch Abzählen von Wegen bestätigt, gelten hier die Beziehungen $\mathbb{P}(R_3 = 3) = \mathbb{P}(R_3 = 4) = 1/4$ und $\mathbb{P}(R_3 = 2) = 1/2$, und für größere Werte von n kann die Verteilung von R_n in diesem Fall mithilfe eines Computers bestimmt werden. Natürlich gilt ganz allgemein $R_0 = 1$ und $2 \leq R_n \leq n + 1$ für jedes $n \geq 1$.

Im Folgenden untersuchen wir zunächst den Erwartungswert von R_n . Dieser wird mit wachsendem n ebenfalls wachsen, aber wie schnell? Im Fall der *eindimensionalen* symmetrischen Irrfahrt können wir sofort einen geschlossenen Ausdruck für $\mathbb{E}(R_n)$ angeben, denn dann gilt ja $R_n = 1 + M_n - m_n$, wobei M_n das Maximum und m_n das Minimum der Partialsummen S_0, S_1, \dots, S_n bezeichnen, vgl. Abschnitt 2.7. Da $-m_n$ und M_n aus Symmetriegründen die gleiche Verteilung und damit auch den gleichen Erwartungswert besitzen, folgt $\mathbb{E}(R_n) = 1 + 2\mathbb{E}(M_n)$, sodass wir mit Satz 2.12 b) das folgende Resultat erhalten:

Satz 5.2. ($\mathbb{E}(R_n)$ im Fall der einfachen symmetrischen Irrfahrt auf \mathbb{Z})

Im Fall der einfachen symmetrischen Irrfahrt auf \mathbb{Z} gilt

$$\mathbb{E}(R_{2n}) = (4n + 1) \cdot \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}, \quad \mathbb{E}(R_{2n+1}) = (4n + 2) \cdot \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}.$$

Wegen (5.5) folgt aus obigem Resultat die asymptotische Gleichheit

$$\mathbb{E}(R_n) \sim \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{n} \tag{5.10}$$

für $n \rightarrow \infty$. Der Erwartungswert von R_n wächst also bei der einfachen symmetrischen Irrfahrt ungefähr proportional zur Wurzel aus n . Wir werden sehen, dass $\mathbb{E}(R_n)$ im Fall der *asymmetrischen* Irrfahrt auf \mathbb{Z} wesentlich schneller wächst,

und zwar ungefähr proportional zu n . Liegt mit $p = \mathbb{P}(X_1 = 1) \neq 1/2$ ein Trend in eine bestimmte Richtung vor, so wird es anschaulich gesprochen leichter, neue Zustände zu besuchen. Im Extremfall $p = 1$ gilt ja $\mathbb{P}(R_n = n + 1) = 1$ und damit $\mathbb{E}(R_n) = n + 1$.

Die Darstellung von R_n als $1 + M_n - m_n$ ist natürlich auf den Fall $d = 1$ beschränkt, und für Irrfahrten im Mehrdimensionalen ist zunächst nicht klar, wie man Informationen über $\mathbb{E}(R_n)$ erhalten sollte. Hier hilft die Erkenntnis, dass R_n als Summe von Indikatorvariablen dargestellt werden kann, denn mit der Definition $I_0 := 1$ sowie

$$I_k := \mathbf{1}\{S_k \neq S_j \text{ für } j = 0, 1, \dots, k-1\}$$

für $k = 1, 2, \dots, n$ gilt

$$R_n = \sum_{k=0}^n I_k. \quad (5.11)$$

Die Zufallsvariable I_k gibt an, ob zum Zeitpunkt k ein vorher noch nicht besuchter Zustand angenommen wird oder nicht. Wegen der Additivität der Erwartungswertbildung gilt dann $\mathbb{E}(R_n) = \sum_{k=0}^n \mathbb{E}(I_k)$. Aus Symmetriegründen ergibt sich mit der in (5.1) definierten Erstwiederkehrzeit T zum Ursprung für jedes $k \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(I_k) &= \mathbb{P}(S_k \neq S_{k-1}, S_k \neq S_{k-2}, \dots, S_k \neq S_1, S_k \neq S_0 (= 0)) \\ &= \mathbb{P}(X_k \neq 0, X_k + X_{k-1} \neq 0, \dots, X_k + \dots + X_1 \neq 0) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \neq 0, X_1 + X_2 \neq 0, \dots, X_1 + \dots + X_k \neq 0) \\ &= \mathbb{P}(T \geq k + 1). \end{aligned}$$

Wegen $\mathbb{P}(T \geq 1) = 1$ und $I_0 = 1$ gilt diese Gleichung auch für $k = 0$, und somit erhalten wir

$$\mathbb{E}(R_n) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(T \geq k + 1). \quad (5.12)$$

Das folgende Resultat zeigt, dass R_n unterschiedlich schnell wächst je nachdem, ob $\mathbb{P}(T = \infty) = 0$ oder $\mathbb{P}(T = \infty) > 0$ gilt, also Rekurrenz oder Transienz vorliegt (vgl. [SP], S. 35 ff.).

Satz 5.3. (Stochastische Konvergenz von R_n/n)

Für die Anzahl R_n der besuchten Zustände gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\left| \frac{R_n}{n} - \mathbb{P}(T = \infty) \right| \geq \varepsilon \right) = 0$$

für jedes $\varepsilon > 0$. Die Folge (R_n/n) konvergiert also stochastisch gegen $\mathbb{P}(T = \infty)$.

BEWEIS: Wir schreiben kurz $p_\infty := \mathbb{P}(T = \infty)$ sowie $\overline{R}_n := R_n/n$ und zeigen zunächst die Konvergenz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\overline{R}_n) = p_\infty. \quad (5.13)$$

Anschließend beweisen wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{V}(\overline{R}_n) = 0. \quad (5.14)$$

Um (5.13) zu zeigen, beachten wir, dass $\mathbb{E}(I_k) = \mathbb{P}(T \geq k+1)$ für $k \rightarrow \infty$ gegen p_∞ konvergiert. Der Erwartungswert $\mathbb{E}(\overline{R}_n)$ ist somit (bis auf den irrelevanten Faktor $n/(n+1)$) das arithmetische Mittel der ersten Glieder einer konvergenten Folge, konvergiert also nach dem Cauchyschen Grenzwertsatz der Analysis (siehe z.B. [HEU], Satz 27.1) gegen denselben Grenzwert, was (5.13) bedeutet.

Zum Nachweis von (5.14) können wir schnell den rekurrenten Fall $p_\infty = 0$ erledigen, denn dann gilt mit der Ungleichung $0 \leq \mathbf{1}\{\overline{R}_n \geq \varepsilon\} \leq \overline{R}_n/\varepsilon$ für $\varepsilon > 0$ und der Monotonie der Erwartungswertbildung $\mathbb{P}(\overline{R}_n \geq \varepsilon) \leq \mathbb{E}(\overline{R}_n)/\varepsilon$, und der rechts stehende Ausdruck konvergiert nach (5.13) gegen 0. Im verbleibenden Fall $p_\infty > 0$ gehen wir von der Darstellung (5.11) aus und erhalten mit der Additivität der Erwartungswertbildung sowie der Ungleichung $\mathbb{E}(I_k)(1 - \mathbb{E}(I_k)) \leq \mathbb{E}(I_k)$

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(R_n) &= \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^n I_k\right)^2 - \left(\mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^n I_k\right)\right)^2 \\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n I_j I_k\right) - \left(\sum_{k=0}^n \mathbb{E}(I_k)\right)^2 \\ &= \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n (\mathbb{E}(I_j I_k) - \mathbb{E}(I_j)\mathbb{E}(I_k)) \\ &\leq 2 \sum_{0 \leq j < k \leq n} (\mathbb{E}(I_j I_k) - \mathbb{E}(I_j)\mathbb{E}(I_k)) + \sum_{k=0}^n \mathbb{E}(I_k). \end{aligned}$$

Um eine geeignete obere Schranke für $\mathbb{V}(R_n)$ zu finden, machen wir uns klar, dass für $j < k$ die Ungleichung

$$\mathbb{E}(I_j I_k) \leq \mathbb{E}(I_j)\mathbb{E}(I_{k-j}) \quad (5.15)$$

erfüllt ist. Hierzu setzen wir $A := \{S_j \neq S_i \text{ für jedes } i \in \{0, \dots, j-1\}\}$, $B := \{S_k \neq S_\ell \text{ für jedes } \ell \in \{0, \dots, k-1\}\}$ und $C := \{S_k \neq S_\ell \text{ für jedes } \ell \in \{j, \dots, k-1\}\}$. Dann gilt $B \subseteq C$, und die Ereignisse A und C sind stochastisch unabhängig, weil A nur von X_1, \dots, X_j und C nur von X_{j+1}, \dots, X_k abhängt. Da aus Symmetriegründen $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(I_{k-j})$ gilt, folgt (5.15) wegen

$$\mathbb{E}(I_j I_k) = \mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) = \mathbb{E}(I_j)\mathbb{E}(I_{k-j}).$$

Setzen wir (5.15) in die erhaltene obere Schranke für $\mathbb{V}(R_n)$ ein, so ergibt sich

$$\mathbb{V}(R_n) \leq 2 \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}(I_j) \sum_{k=j+1}^n (\mathbb{E}(I_{k-j}) - \mathbb{E}(I_k)) + \mathbb{E}(R_n).$$

Wegen $\mathbb{E}(I_1) \geq \mathbb{E}(I_2) \geq \dots \geq \mathbb{E}(I_n)$ wird die Summe $\sum_{k=j+1}^n (\mathbb{E}(I_{k-j}) - \mathbb{E}(I_k))$ für $j = \lceil n/2 \rceil = \min\{\ell \in \mathbb{N} : \ell \geq n/2\}$ maximal, und wir erhalten

$$\mathbb{V}(R_n) \leq 2 \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}(I_j) \{ \mathbb{E}(R_{n-\lceil n/2 \rceil}) + \mathbb{E}(R_{\lceil n/2 \rceil}) - \mathbb{E}(R_n) \} + \mathbb{E}(R_n)$$

und somit unter Weglassen der Klammern bei der Erwartungswertbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(\overline{R}_n) &= \frac{\mathbb{V}(R_n)}{n^2} \\ &\leq 2 \cdot \frac{\mathbb{E}R_n}{n} \cdot \left(\frac{\mathbb{E}R_{n-\lceil n/2 \rceil}}{n - \lceil n/2 \rceil} \cdot \frac{n - \lceil n/2 \rceil}{n} + \frac{\mathbb{E}R_{\lceil n/2 \rceil}}{\lceil n/2 \rceil} \cdot \frac{\lceil n/2 \rceil}{n} - \frac{\mathbb{E}R_n}{n} \right) + \frac{\mathbb{E}R_n}{n^2}. \end{aligned}$$

Mit (5.13) folgt jetzt (5.14) wegen

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{V}(\overline{R}_n) \leq 2p_\infty \left(\frac{p_\infty}{2} + \frac{p_\infty}{2} - p_\infty \right) + 0. \blacksquare$$

Die Konvergenz (5.13) bedeutet die asymptotische Gleichheit

$$\mathbb{E}(R_n) \sim n \cdot \mathbb{P}(T = \infty)$$

für $n \rightarrow \infty$. Im Fall einer transienten Irrfahrt wächst der Erwartungswert von R_n für großes n somit ungefähr proportional zu n . Für die symmetrische Irrfahrt auf \mathbb{Z}^d mit $d \geq 3$ gilt also $\mathbb{E}(R_n) \sim (1 - \mathbb{P}(T < \infty)) \cdot n$, wobei $\mathbb{P}(T < \infty)$ für $d \in \{3, 4, \dots, 8\}$ in Tabelle 5.1 angegeben ist. Im Fall der asymmetrischen Irrfahrt auf \mathbb{Z} erhalten wir mit Satz 4.3 das Resultat $\mathbb{E}(R_n) \sim |2p - 1| \cdot n$, ganz im Gegensatz zum „ \sqrt{n} -Wachstum“ (5.10), falls $p = 1/2$.

Satz 5.3 sagt über die symmetrische Irrfahrt auf dem ebenen Gitter \mathbb{Z}^2 nur aus, dass der Quotient $\mathbb{E}(R_n)/n$ gegen Null konvergiert, dass also der Erwartungswert von R_n langsamer wächst als n , denn es gilt ja $\mathbb{P}(T = \infty) = 0$. Hier zeigten Dvoretzky und Erdős ([DE]) die asymptotische Gleichheit

$$\mathbb{E}(R_n) \sim \frac{\pi n}{\log n} \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \quad (5.16)$$

Downham und Fotopoulos ([DF]) erhielten die Ungleichungen

$$\frac{2\pi n}{1.16\pi - 1 + \log n} < \mathbb{E}(R_{2n-1}) < \frac{2\pi n}{1.066\pi - 1 + \log n}, \quad n \geq 7,$$

aus denen wegen $R_{2n-1} \leq R_{2n} \leq R_{2n-1} + 1$ das Resultat (5.16) folgt.

Da R_n nach (5.11) eine Summe von Zufallsvariablen ist, liegt es nahe, nach einem Zentralen Grenzwertsatz für R_n Ausschau zu halten, der das in Satz 5.3 angegebene Gesetz Großer Zahlen verschärfen würde. Die hiermit verbundene technische Schwierigkeit besteht darin, dass die Summanden in (5.11) nicht stochastisch unabhängig sind. Die stochastische Abhängigkeit ist aber im Fall $d \geq 3$ so schwach, dass in der Tat ein Zentraler Grenzwertsatz für R_n gilt. So konnten Jain und Orey ([JO]) unter anderem die Verteilungskonvergenz

$$\frac{R_n - \mathbb{E}R_n}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} N(0, 1) \quad (5.17)$$

für die (auch als nicht symmetrisch zugelassene) Irrfahrt auf \mathbb{Z}^d im Fall $d \geq 5$ zeigen. Dabei ist $\sigma^2 > 0$ eine positive Konstante, die unter anderem von der als positiv vorausgesetzten Rückkehrwahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(T < \infty)$ zum Ursprung abhängt. Auch im Fall $d = 4$ gilt das obige Resultat ([JP1]). Im Fall $d = 3$ bleibt (5.17) gültig, wenn man im Nenner des dort auftretenden Bruchs noch den Faktor $\sqrt{\log n}$ aufnimmt (siehe [JP1]). Das asymptotische Verhalten von R_n für die symmetrische Irrfahrt auf \mathbb{Z}^2 war lange ein offenes Problem. Hier konnte Le Gall ([LG]) im Jahr 1985 zeigen, dass $(\log n)^2(R_n - \mathbb{E}(R_n))/n$ für $n \rightarrow \infty$ eine Grenzverteilung besitzt, die keine Normalverteilung ist. Im Fall der eindimensionalen symmetrischen Irrfahrt gilt ([JP2])

$$\frac{R_n}{\sqrt{n}} = \frac{M_n - m_n + 1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \max_{0 \leq t \leq 1} W(t) - \min_{0 \leq t \leq 1} W(t).$$

Dabei bezeichnet $W(t)$ den in Abschnitt 2.15 vorgestellten Brown-Wiener-Prozess.

Kapitel 6



Hilfsmittel aus Analysis, Kombinatorik und Stochastik

6.1 Ein kanonischer Wahrscheinlichkeitsraum

An verschiedenen Stellen benötigen wir einen hinreichend reichhaltigen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, auf dem eine Folge X_1, X_2, \dots stochastisch unabhängiger \mathbb{R}^d -wertiger Zufallsvektoren mit vorgegebenen Verteilungen definiert ist. Nach allgemeinen Sätzen der Maßtheorie kann hierfür der Grundraum

$$\Omega := (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}} := \{\omega := (\omega_j)_{j \geq 1} : \omega_j \in \mathbb{R}^d \text{ für } j \geq 1\}$$

sowie für X_j die j -te Koordinatenabbildung $X_j(\omega) := \omega_j$, $\omega \in \Omega$, gewählt werden. Die σ -Algebra \mathcal{A} über Ω ist die kleinste σ -Algebra über Ω , bezüglich welcher jede der Abbildungen $X_j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ ($\mathcal{A}, \mathcal{B}^d$)-messbar ist. Dabei bezeichnet \mathcal{B}^d die vom System der offenen Mengen erzeugte σ -Algebra der Borelmengen des \mathbb{R}^d . Die σ -Algebra \mathcal{A} enthält also insbesondere für jedes $j \geq 1$ die Urbilder $X_j^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X_j(\omega) \in B\}$ jeder Borelschen Menge $B \in \mathcal{B}^d$.

Damit X_j ein gegebenes Wahrscheinlichkeitsmaß Q_j auf \mathcal{B}^d als Verteilung besitzt, wird für \mathbb{P} das Produkt-Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P} := \otimes_{j \geq 1} Q_j$ gewählt. Dieses ist durch die für jedes $n \geq 1$ und jede Wahl von Borelmengen $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}^d$ geltende Eigenschaft

$$\mathbb{P}(\{\omega = (\omega_j)_{j \geq 1} \in \Omega : \omega_j \in B_j \text{ für } j = 1, \dots, n\}) = \prod_{j=1}^n Q_j(B_j)$$

bestimmt. Als Spezialfall ergibt sich ein Modell für unendlich lange Irrfahrten auf dem d -dimensionalen ganzzahligen Gitter \mathbb{Z}^d . Soll der Zufallsvektor X_j den j -ten

Schritt der Irrfahrt beschreiben, und gehen die einzelnen Schritte der Irrfahrt in Richtung der kanonischen Einheitsvektoren e_1, \dots, e_d und deren Spiegelbilder $-e_1, \dots, -e_d$ am Ursprung, so ist die Verteilung von X_j auf der Menge

$$E_d := \{e_1, -e_1, e_2, -e_2, \dots, e_d, -e_d\}$$

konzentriert. Als Grundraum Ω kann dann auch die Menge $E_d^{\mathbb{N}}$ gewählt werden, was bedeutet, dass die Folge $\omega = (\omega_j)_{j \geq 1} \in \Omega$ für einen (gedanklich) unendlich langen Weg steht, dessen j -ter Schritt durch ω_j angegeben wird. Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen, die wie $A := \{(\omega_j)_{j \geq 1} \in \Omega : (\omega_1, \dots, \omega_n) \in A_n\}$ mit $A_n \subset E_d^n$ durch ein (noch so langes) Anfangsstück eines unendlich langen Weges bestimmt sind, werden für den Fall, dass alle $2d$ Richtungen aus E_d gleich wahrscheinlich sind, durch Abzählen der für das Eintreten von A_n günstigen unter allen $(2d)^n$ möglichen Anfangsstücken der Länge n bestimmt: es ist

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A_n|}{(2d)^n}.$$

6.2 Verteilungskonvergenz

Es seien Z, Z_1, Z_2, \dots Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktionen $F(z) := \mathbb{P}(Z \leq z)$, $F_n(z) := \mathbb{P}(Z_n \leq z)$, $z \in \mathbb{R}$. Gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(z) = F(z) \tag{6.1}$$

für jede Stetigkeitsstelle z von F , so schreibt man kurz

$$Z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} Z \tag{6.2}$$

und sagt, die Folge $(Z_n)_{n \geq 1}$ **konvergiere nach Verteilung** gegen Z .

Ist die Verteilungsfunktion F stetig, so folgt aus $Z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} Z$ sogar die gleichmäßige Konvergenz von F_n gegen F , d.h. es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in \mathbb{R}} |F_n(z) - F(z)| = 0. \tag{6.3}$$

Zum Beweis beachten wir, dass wegen der Stetigkeit von F zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein $k \in \mathbb{N}$ sowie $z_1, \dots, z_k \in \mathbb{R}$ mit $z_1 < \dots < z_k$ und $F(z_1) \leq \varepsilon$, $F(z_{j+1}) - F(z_j) \leq \varepsilon$ für $j = 1, \dots, k-1$ sowie $F(z_k) \geq 1 - \varepsilon$ existieren. Ist $n_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass

$$\max_{j=1, \dots, k} |F_n(x_j) - F(x_j)| \leq \varepsilon \tag{6.4}$$

für jedes $n \geq n_0$ gilt, und wählen wir ein beliebiges $z \in \mathbb{R}$, so gilt entweder $z \leq z_1$ oder $z_j < z \leq z_{j+1}$ für ein $j \in \{1, \dots, k-1\}$ oder $z > z_k$. Im Fall $z_j < z \leq z_{j+1}$ folgt wegen der Monotonie von F_n und F sowie (6.4) für $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} F_n(z) - F(z) &\leq F_n(z_{j+1}) - F(z_j) \leq F(z_{j+1}) + \varepsilon - F(z_j) \leq 2\varepsilon, \\ F_n(z) - F(z) &\geq F_n(z_j) - F(z_{j+1}) \geq F(z_j) - \varepsilon - F(z_{j+1}) \geq -2\varepsilon, \end{aligned}$$

also $|F_n(z) - F(z)| \leq 2\varepsilon$. Ebenso behandelt man die Fälle $z \leq z_1$ und $z > z_k$ unter Verwendung der Ungleichungen $0 \leq F_n(z), F(z) \leq 1$, was (6.3) zeigt.

Sind z eine Stetigkeitsstelle von F und $(z_n)_{n \geq 1}$ eine gegen z konvergierende Folge, so gilt im Fall der Verteilungskonvergenz (6.2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(z_n) = F(z). \quad (6.5)$$

Weiter gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_n < z) = F(z). \quad (6.6)$$

Zum Beweis von (6.5) wählen wir zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $F(z + \delta) \leq F(z) + \varepsilon$, so dass $z + \delta$ Stetigkeitsstelle von F ist. Dies ist wegen der Stetigkeit von F an der Stelle z und der Tatsache, dass F höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen besitzt, möglich. Wegen $z_n \rightarrow z$ gilt für genügend großes n die Ungleichung $z_n \leq z + \delta$ und somit wegen der Monotonie von F_n für solche n die Abschätzung $F_n(z_n) \leq F_n(z + \delta)$. Es folgt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} F_n(z_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(z + \delta) = F(z + \delta) \leq F(z) + \varepsilon$$

und somit $\limsup_{n \rightarrow \infty} F_n(z_n) \leq F(z)$, da $\varepsilon > 0$ beliebig war. Ebenso zeigt man die Ungleichung $\liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(z_n) \geq F(z)$, was (6.5) beweist. Wegen $F_n(z - \delta) \leq \mathbb{P}(Z_n < z) \leq F_n(z)$ für jedes $\delta > 0$ liefert (6.2)

$$F(z - \delta) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_n < z) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_n < z) \leq F(z),$$

falls $z - \delta$ Stetigkeitsstelle von F ist. Lässt man δ unter letzterer Nebenbedingung gegen Null konvergieren, so folgt (6.6).

6.3 Zentrale Grenzwertsätze

Sind Y_1, Y_2, \dots unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit existierendem Erwartungswert $\mu := \mathbb{E}(Y_1)$ und positiver, endlicher Varianz $\sigma^2 := \mathbb{V}(Y_1)$, so gilt für jede Wahl von a, b mit $-\infty \leq a < b \leq \infty$ (vgl. [BH], S. 887)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(a \leq \frac{\sum_{j=1}^n Y_j - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq b \right) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{t^2}{2} \right) dt.$$

(*Zentraler Grenzwertsatz von Lindeberg-Lévy*).

Im Spezialfall $Y_j \sim \text{Bin}(1, p)$ entsteht der *Zentrale Grenzwertsatz von de Moivre-Laplace*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(a \leq \frac{\sum_{j=1}^n Y_j - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b \right) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{t^2}{2} \right) dt.$$

6.4 Ungleichungen für die Logarithmus-Funktion

Für die Logarithmus-Funktion $t \rightarrow \log t$, $t > 0$, gelten die Ungleichungen

$$\log t \leq t - 1, \quad (6.7)$$

$$\log t \geq 1 - \frac{1}{t}. \quad (6.8)$$

Die erste Ungleichung gilt wegen der strikten Konkavität der Logarithmus-Funktion (die zweite Ableitung ist strikt negativ). Die zweite Ungleichung folgt aus der ersten, indem man dort t durch $1/t$ ersetzt.

6.5 Erwartungswert und Varianz \mathbb{N}_0 -wertiger Zufallsvariablen

Der Erwartungswert einer \mathbb{N}_0 -wertigen Zufallsvariablen Y existiert genau dann, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(Y \geq n)$ konvergiert. In diesem Fall gilt

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(Y \geq n). \quad (6.9)$$

Zum Beweis beachte man die (auch im Fall der Divergenz der in (6.9) auftretenden Reihe geltende) Gleichungskette

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^k 1 \right) \mathbb{P}(Y = k) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(Y = k) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(Y \geq n).$$

Hieraus folgt die Behauptung. In gleicher Weise existiert $\mathbb{E}Y^2$ genau dann, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)\mathbb{P}(Y \geq n)$ konvergiert. In diesem Fall gilt

$$\mathbb{E}(Y^2) = \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)\mathbb{P}(Y \geq n), \quad (6.10)$$

denn es ist

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)\mathbb{P}(Y \geq n) &= \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^k (2n-1) \right) \mathbb{P}(Y = k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{E}Y^2. \end{aligned}$$

Wegen $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}Y)^2$ können (6.9) und (6.10) zur Berechnung der Varianz von Y verwendet werden.

Wir benötigen an mehreren Stellen die folgende Aussage, die ein Spezialfall des aus der Maßtheorie bekannten Satzes von der monotonen Konvergenz ([BH], S. 245) bildet: Ist Y eine $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ -wertige Zufallsvariable, die sich als unendliche Reihe der Form $Y = \sum_{j=1}^{\infty} Y_j$ von $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ -wertigen Zufallsvariablen Y_1, Y_2, \dots darstellt, so gilt

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E}(Y_j). \quad (6.11)$$

Dabei darf auf beiden Seiten dieser Gleichung auch ∞ stehen. Dies kann vorkommen, wenn mindestens einer der Erwartungswerte der Y_j nicht existiert oder die rechte Seite als unendliche Reihe reeller Zahlen nicht konvergiert.

6.6 Die Stirling-Formel

Es sei

$$a_n := \frac{n! \cdot e^n}{n^n \cdot \sqrt{2\pi n}}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (6.12)$$

Dann gilt die auch oft in der Form

$$n! \sim n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n}$$

geschriebene Konvergenz (sog. Stirling¹-Formel)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1. \quad (6.13)$$

Ein elementarer Beweis dieses Resultats findet sich z.B. in [PA].

6.7 Erzeugende Funktionen

Ist $a := (a_k)_{k \geq 0}$ eine reelle Zahlenfolge, so heißt die Potenzreihe

$$g(t) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$$

die **erzeugende Funktion von a** . Dabei sei vorausgesetzt, dass diese Reihe für ein $t \neq 0$ absolut konvergiert und somit einen nichtverschwindenden Konvergenzradius besitzt. Die Funktion g ist dann auf einem Intervall $(-t_0, t_0)$ mit $0 < t_0 \leq \infty$ definiert und dort beliebig oft differenzierbar, wobei gliedweise differenziert werden kann. Es gilt also

$$g^{(r)}(t) = \frac{d^r}{dt^r} g(t) = \sum_{k=r}^{\infty} k(k-1) \dots (k-r+1) a_k t^{k-r}, \quad |t| < t_0$$

und somit insbesondere $g^{(r)}(0) = r! a_r$, $r \geq 1$. Zusammen mit $a_0 = g(0)$ erhält man, dass die Folge a durch ihre erzeugende Funktion eindeutig bestimmt ist.

Eine \mathbb{N}_0 -wertige Zufallsvariable N definiert eine spezielle Folge (a_k) , nämlich $a_k := \mathbb{P}(N = k)$, $k \geq 1$. In diesem Fall nennt man die erzeugende Funktion der Folge (a_k) auch die **erzeugende Funktion von N** und schreibt

$$g_N(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N = k) t^k. \quad (6.14)$$

Da diese Reihe für $t = 1$ konvergiert, ist also auch die Verteilung von N durch die erzeugende Funktion g_N eindeutig bestimmt.

¹James Stirling (1692–1770) wurde 1726 Mitglied der Londoner Royal Society und war ab 1735 Geschäftsführer bei der schottischen Bergbaugesellschaft in Leadhills. Hauptarbeitsgebiete: Algebraische Kurven, Differenzenrechnung, asymptotische Entwicklungen.

Sind M und N stochastisch unabhängige \mathbb{N}_0 -wertige Zufallsvariablen mit den erzeugenden Funktionen $g_M(t)$ bzw. $g_N(t)$, so folgt wegen $\mathbb{P}(M + N = k) = \sum_{j=0}^k \mathbb{P}(M = j)\mathbb{P}(N = k - j)$ für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ und jedes $t \in [-1, 1]$

$$\begin{aligned}
 g_M(t) \cdot g_N(t) &= \left(\sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}(M = m) t^m \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N = n) t^n \right) \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(M = m) \mathbb{P}(N = n) t^{m+n} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^k \mathbb{P}(M = j) \mathbb{P}(N = k - j) \right) t^k \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(M + N = k) t^k \\
 &= g_{M+N}(t).
 \end{aligned}$$

Die erzeugende Funktion der Summe unabhängiger Zufallsvariablen ist also das Produkt der erzeugenden Funktionen der Summanden.

Ein- bzw. zweimalige Differentiation der erzeugenden Funktion (6.14) liefert

$$\begin{aligned}
 g'_N(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} k \mathbb{P}(N = k) t^{k-1}, \quad |t| < 1, \\
 g''_N(t) &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \mathbb{P}(N = k) t^{k-2}, \quad |t| < 1.
 \end{aligned}$$

Wenn diese Ableitungen beim Grenzübergang $t \uparrow 1$ beschränkt bleiben, also die mit $g'_N(1)$ bzw. $g''_N(1)$ bezeichneten linksseitigen ersten bzw. zweiten Ableitungen von g_N an der Stelle 1 existieren, existieren der Erwartungswert von N sowie das sogenannte *zweite faktorielle Moment* $\mathbb{E}(N(N-1))$ von N , und es gelten

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(N) &= g'_N(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k \mathbb{P}(N = k), \\
 \mathbb{E}(N(N-1)) &= g''_N(1) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \mathbb{P}(N = k).
 \end{aligned}$$

Hiermit ergibt sich die Varianz von N zu

$$\mathbb{V}(N) = g''_N(1) + g'_N(1) - (g'_N(1))^2.$$

6.8 Einige Identitäten für Binomialkoeffizienten

Wir benötigen die für jedes $n \geq 1$ geltenden Gleichungen (vgl. [RI], S. 34)

$$\sum_{k=1}^n k \binom{2n}{n+k} = n \binom{2n-1}{n-1}, \quad (6.15)$$

$$\sum_{k=1}^n k \binom{2n+1}{n+k+1} = \frac{n+1}{2} \binom{2n+1}{n} - 2^{2n-1}, \quad (6.16)$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 \binom{2n}{n+k} = n \cdot 2^{2n-2}, \quad (6.17)$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 \binom{2n+1}{n+k+1} = (n+1) \cdot 2^{2n-1} - \frac{2n+1}{2} \binom{2n}{n}. \quad (6.18)$$

Wir beweisen zunächst die beiden ersten Gleichungen und schreiben kurz a_n für die linke Seite von (6.15) und b_n für die linke Seite von (6.16). Mithilfe der Rekursionsformel

$$\binom{m+1}{\ell} = \binom{m}{\ell-1} + \binom{m}{\ell}, \quad m \geq 1, \ell = 1, \dots, m,$$

für Binomialkoeffizienten ergibt sich durch direkte Rechnung

$$a_n = 2b_{n-1} + 2^{2n-2}, \quad n \geq 2, \quad (6.19)$$

$$b_n = 2a_n - \frac{1}{2} \cdot \left(2^{2n} - \binom{2n}{n} \right), \quad n \geq 1. \quad (6.20)$$

Die durch

$$A(x) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n, \quad B(x) := \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$$

definierten erzeugenden Funktionen der Folgen (a_n) bzw. (b_n) konvergieren wegen $\binom{2n}{n+k} \leq \binom{2n}{n}$ und $\binom{2n+1}{n+k+1} \leq \binom{2n+2}{n+1}$ sowie $\binom{2n}{n} = u_{2n} 2^{2n}$ mit u_{2n} wie in (2.13) und (2.22) für jedes x mit $|x| < 1/4$. Letztere Bedingung ist in der Folge stillschweigend vorausgesetzt. Aus (6.19) und der Formel für die geometrische Reihe ergibt sich

$$A(x) = 2xB(x) + \frac{x}{1-4x}, \quad (6.21)$$

und (6.20) hat wegen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-4x)^n = (1-4x)^{-1/2} - 1$$

(vgl. (6.24) und (6.23)) die Beziehung

$$B(x) = 2A(x) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-4x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-4x}} \quad (6.22)$$

zur Folge. Aus (6.21) und (6.22) ergeben sich die Funktionen A und B zu

$$A(x) = \frac{x}{(1-4x)^{3/2}}, \quad B(x) = \frac{1}{2(1-4x)^{3/2}} - \frac{1}{2(1-4x)}.$$

Verwendet man jetzt (6.23) für $p = -3/2$, so folgt mit etwas Rechnung

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{2n-1}{n-1} x^n, \\ B(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2} \cdot \binom{2n+1}{n} - 2^{2n-1} \right) x^n \end{aligned}$$

und damit (6.15) und (6.16). Der Nachweis von (6.17) und (6.18) erfolgt analog. Schreiben wir u_n bzw. v_n für die linke Seite von (6.17) bzw. (6.18), so gelten

$$\begin{aligned} u_n &= 2v_{n-1} + n \binom{2n-1}{n-1}, \quad n \geq 2, \\ v_n &= 2u_n - \frac{2n+1}{2} \cdot \binom{2n}{n} + 2^{2n-1}, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Setzen wir $U(x) := \sum_{n=1}^{\infty} u_n x^n$, $V(x) := \sum_{n=1}^{\infty} v_n x^n$ für die für jedes x mit $|x| < 1/4$ wohldefinierten erzeugenden Funktionen von (u_n) bzw. (v_n) , so gelten

$$\begin{aligned} U(x) &= 2xV(x) + \frac{x}{(1-4x)^{3/2}}, \\ V(x) &= 2U(x) + \frac{1}{2(1-4x)} - \frac{1}{2(1-4x)^{3/2}} \end{aligned}$$

und somit

$$U(x) = \frac{x}{(1-4x)^2}, \quad V(x) = \frac{1}{2(1-4x)^2} - \frac{1}{2(1-4x)^{3/2}}.$$

Hieraus ergeben sich (6.17) und (6.18) durch Potenzreihenentwicklung.

6.9 Die Binomialreihe

Für $p \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt

$$(1+x)^p = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} x^n. \quad (6.23)$$

Dabei ist

$$\binom{p}{0} := 1, \quad \binom{p}{n} := \frac{p \cdot (p-1) \cdot \dots \cdot (p-n+1)}{n!}, \quad n \geq 1,$$

gesetzt (siehe [HL1], Abschnitt 6.9). Speziell für $p = 1/2$ und $n \geq 1$ gilt

$$\begin{aligned} \binom{1/2}{n} &= \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - 2\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{2} - n + 1\right) \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n!} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3) = \frac{(-1)^{n-1} (2n-2)!}{2^{2n-1} (n-1)! n!} \\ &= (-1)^{n-1} \frac{2}{n} \frac{\binom{2n-2}{n-1}}{2^{2n-1}}. \end{aligned}$$

In gleicher Weise ist

$$\binom{-1/2}{n} = (-1)^n 2^{-2n} \binom{2n}{n}. \quad (6.24)$$

Wir benötigen die Binomialreihe

$$(1+z)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} z^n, \quad z \in \mathbb{C}, \quad |z| < 1, \quad (6.25)$$

auch für komplexwertiges Argument. Multipliziert man die rechte Seite von (6.25) mit sich selbst, so ergibt sich unter Beachtung der Tatsache, dass die in Teil a) von Satz 2.4 auftretenden Wahrscheinlichkeiten gleich 1 ist,

$$\begin{aligned} \sum_{k,\ell=0}^{\infty} (-1)^{k+\ell} \cdot \frac{\binom{2k}{k} \binom{2\ell}{\ell}}{2^{2(k+\ell)}} \cdot z^{k+\ell} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k}}{2^{2n}} \cdot (-z)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n = \frac{1}{1+z} \end{aligned}$$

und somit in der Tat die Identität (6.25) für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$.

6.10 Legendre-Polynome

Schließen zwei Seiten eines Dreiecks, von denen eine die Länge 1 und die andere die Länge $x < 1$ besitzt, den Winkel ϑ ein, so ist das Reziproke der Länge der dritten Seite nach dem Kosinussatz durch $1/\sqrt{1 - 2x \cos \vartheta + x^2}$ gegeben. Betrachtet man diesen Ausdruck als Funktion von x und entwickelt ihn in eine Potenzreihe um 0, so ist der resultierende Koeffizient vor x^n ein Polynom n -ten Grades in $\cos \vartheta$. Dieses Polynom heißt **Legendre²-Polynom der Ordnung n** ; es wird mit P_n bezeichnet. Nach Definition gilt also

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + x^2}} =: \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) x^n, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (6.26)$$

für jedes betragsmäßig genügend kleine x . Um einen geschlossenen Ausdruck für $P_n(t)$ anzugeben, setzen wir zunächst $y := x^2 - 2xt$ und erhalten für jedes y mit $|y| < 1$ mithilfe der Binomialreihe (6.23), der binomischen Formel sowie (6.24)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + x^2}} &= (1 + y)^{-1/2} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-1/2}{r} y^r \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\binom{2r}{r}}{2^{2r}} (-1)^r \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} x^{2k} (-2tx)^{r-k} \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k=0}^r (-1)^k \frac{\binom{2r}{r}}{2^{r+k}} \binom{r}{k} t^{r-k} x^{r+k}. \end{aligned}$$

Führt man den Summationsindex $n := r + k$ ein und beachtet, dass bei festem n der Index k von 0 bis $\lfloor n/2 \rfloor$ läuft, so folgt

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{(2n - 2k)!}{k!(n - k)!(n - 2k)!} \cdot t^{n-2k} \right) x^n,$$

und es ergibt sich der geschlossene Ausdruck

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{(2n - 2k)!}{k!(n - k)!(n - 2k)!} \cdot t^{n-2k} \quad (6.27)$$

für das n -te Legendre-Polynom. Die ersten vier Legendre-Polynome sind

$$P_0(t) = 1, \quad P_1(t) = t, \quad P_2(t) = \frac{1}{2} \cdot (3t^2 - 1), \quad P_3(t) = \frac{1}{2} \cdot (5t^3 - 3t).$$

²Adrien-Marie Legendre (1752–1833), französischer Mathematiker, 1813–1833 Mitglied des „Bureau de Longitudes“ als Nachfolger von J.L. Lagrange. Hauptarbeitsgebiete: Himmelmechanik, Variationsrechnung, Ausgleichsrechnung, Zahlentheorie, Grundlagen der Geometrie.

Eine andere Darstellung der Legendre-Polynome ist

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n. \quad (6.28)$$

Die Gleichheit von (6.27) und (6.28) sieht man unmittelbar ein, wenn man

$$\frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \cdot \frac{d^n}{dt^n} t^{2k}$$

beachtet. Die rechts stehende Ableitung verschwindet für $k < n/2$; andernfalls ist sie gleich $t^{2k-n} (2k)! / (2k-n)!$. Mit $t^2 - 1 = (t-1)(t+1)$ und der Leibniz-Regel für die Differentiation von Produkten ergibt sich aus (6.28) die weitere Darstellung

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (t-1)^k (t+1)^{n-k}$$

und hieraus mittels direkter Rechnung die in Abschnitt 2.3 benötigte Beziehung

$$P'_n(1) = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (6.29)$$

Wegen der Orthogonalitätseigenschaft $\int_{-1}^1 P_n(t) \cdot P_m(t) dt = 0$ für $m \neq n$ spielen die Legendre-Polynome unter anderem eine wichtige Rolle in der Approximationstheorie und in der numerischen Quadratur, s. z.B. [BH], S. 468.

6.11 Das Lemma von Borel-Cantelli

Für Ereignisse A_1, A_2, \dots in einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ bezeichne

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

das Ereignis, dass unendlich viele der A_j eintreten (sog. *Limes superior der Folge* (A_n)). Dann gelten:

- a) Falls $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$, so folgt $\mathbb{P}(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 0$.
- b) Sind die Ereignisse A_1, A_2, \dots stochastisch unabhängig, so gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty \implies \mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = 1.$$

BEWEIS: a) Es sei $B_k := \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$, $k \geq 1$, gesetzt. Die Mengenfolge (B_k) ist absteigend, und es gilt $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$. Da Wahrscheinlichkeitsmaße stetig von oben sind, folgt $\mathbb{P}(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_k)$. Die σ -Subadditivität von \mathbb{P} liefert $\mathbb{P}(B_k) \leq \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$, und der letzte Ausdruck konvergiert als Endstück einer nach Voraussetzung konvergenten Reihe für $k \rightarrow \infty$ gegen Null, was zu zeigen war.

b) Die Ungleichung $1 - x \leq e^{-x}$ ($x \geq 0$) liefert für $x = \mathbb{P}(A_k)$

$$1 - \exp\left(-\sum_{k=n}^m \mathbb{P}(A_k)\right) \leq 1 - \prod_{k=n}^m (1 - \mathbb{P}(A_k)) \leq 1 \quad (1 \leq n \leq m)$$

und somit beim Grenzübergang $m \rightarrow \infty$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{k=n}^m (1 - \mathbb{P}(A_k)) = 0. \quad (6.30)$$

Es folgt aufgrund der Unabhängigkeit von A_n, \dots, A_m ($n \leq m$)

$$\begin{aligned} 1 - \mathbb{P}(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) &= 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^m A_k^c\right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{k=n}^m (1 - \mathbb{P}(A_k)) \right] \\ &= 0, \end{aligned}$$

was zu zeigen war. Dabei gilt das letzte Gleichheitszeichen wegen (6.30). ■

Literaturverzeichnis

- [AEB] *Aebly, J.* (1923): Démonstration du problème du scrutin par des considérations géométriques. *L'Enseignement Mathématique* 23, 13–14.
- [AND] *André, D.* (1887): Solution directe du problème résolu par. M. Bertrand. *Compt. Rend. Acad. Sci. Paris* 105, 436 –437.
- [AN] *Arthreya, K.B., und Ney, P.E.* (2000): *Branching Processes*. Dover Publications, Mineola, N.Y.
- [BE] *Bertrand, J.* (1887): Solution d'un problème. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris* 105, S. 369.
- [BI] *Billingsley, P.* (1999): *Convergence of Probability Measures*. 2. Auflage. Wiley, New York.
- [BI2] *Billingsley, P.* (1986): *Probability and Measure*. 2. Auflage. Wiley, New York.
- [BO] *Borovkov, A.A., und Borovkov, K.A.* (2008): Asymptotic analysis of random walks. Heavy-tailed distributions. *Encyclopedia of Mathematics and its applications* 118. Cambridge University Press, Cambridge.
- [BH] *Brokate, M., Henze, N., Hettlich, F., Meister, A., Schranz-Kirlinger, G., und Th. Sonar* (2016): *Grundwissen Mathematikstudium. Höhere Analysis, Numerik und Stochastik*. Springer Spektrum, Berlin, Heidelberg.
- [BU] *Butler, C.* (1969): A test for symmetry using the sample distribution function. *Ann. Math. Statist.* 40, 2209–2210.
- [CH] *Chung, K.L.* (1974): *A course in Probability Theory*. 2. Auflage. Academic Press, New York.
- [CF] *Chung, K.L., und Feller, W.* (1949): On fluctuations in coin-tossing. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 35, 605–608.

- [CO] *Cohen, J.W.* (1992): Analysis of random walks. Studies in Probability, Optimization and Statistics. 2. IOS Press, Amsterdam.
- [CV] *Csáki, E., und Vincze, I.* (1961). On some problems connected with the Galton test. Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci. 6, 97–109.
- [DF] *Downham, D.Y., und Fotopoulos, S.B.* (1988): The transient behaviour of the simple random walk in the plane. Journal of Appl. Probab. 25, 58–69.
- [DS] *Doyle, P., und Snell, J.L.* (1984). Random walks and electric networks. The Carus Mathematical Monographs, 22. Wiley & Sons, New York.
- [DE] *Dvoretzky, A., und Erdős, P.* (1951): Some problems on the random walk in space. Proc. Second Berkeley Symp. Math. Statist. Probab., 353–367.
- [DW] *Dwass, M.* (1967). Simple random walk and rank order statistics. Ann. Math. Statist. 38, 1042–1053.
- [EKM] *Embrechts, P., Klüppelberg, C., und Mikosch, Th.* (1997): Modelling extremal events. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- [ER] *Erdős, P., und Révész, P.* (1970): On a new law of large numbers. J. Analyse Math. 22, 103–111.
- [FEL] *Feller, W.* (1970): An Introduction to Probability Theory and Its Applications Vol.1, 3. Auflage. Wiley, New York.
- [FEL2] *Feller, W.* (1957). The number of zeroes and changes of sign in a simple random walk. L'enseignement Mathématique, tome III, fasc. 3, 229–235.
- [GK] *Gnedenko, B.V., und Korolyuk, V.S.* (1951): On the maximum discrepancy between two empirical distributions. Dokl. Akad. Nauk SSSR. 80, 525–528. Englische Übersetzung in: Selected Translations in Mathematical Statistics and Probability Vol.1, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island 1961, 13–16.
- [GM] *Gnedenko, B.V., und Mihalevič, V.S.* (1952): On the distribution of the number of excesses of one empirical distribution function over another. Dokl. Akad. Nauk SSSR. 82, 841–843. Englische Übersetzung in: Selected Translations in Mathematical Statistics and Probability Vol.1, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island 1961, 83–86.
- [GRV] *Gnedenko, B.V., und Rvačeva, E.L.* (1952): On a problem of the comparison of two empirical distributions. Dokl. Akad. Nauk SSSR. 82, 513–516.

Englische Übersetzung in: Selected Translations in Mathematical Statistics and Probability Vol.1, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island 1961, 69–72.

- [GR] *Griffin, P.* (1990): Accelerating beyond the third dimension: Returning to the origin in simple random walk. *Math. Scientist* 15, 24–35.
- [GS] *Guillotín-Plantard, N., und Schott, R.* (2006): Dynamic random walks. Theory and applications. Elsevier, Amsterdam.
- [GU] *Gut, A.* (2009): Stopped random walks. Limit theorems and applications, 2. Auflage. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer, New York.
- [HA] *Hand, D.J. et al. (Hrsg.)* (1994): A Handbook of Small Data Sets. Verlag Chapman & Hall, London, New York.
- [HAR] *Harris, T.E.* (1989): The Theory of Branching Processes. Dover Publications, Mineola, New York.
- [HE] *Henze, N.* (2018): Stochastik für Einsteiger. 12. Auflage. Springer Spektrum, Wiesbaden.
- [HL1] *Henze, N., und Last, G.* (2005): Mathematik für Wirtschaftsingenieure und für naturwissenschaftlich–technische Studiengänge. Band 1. 2. Auflage. Vieweg+Teubner, Wiesbaden.
- [HEU] *Heuser, H.* (2009): Lehrbuch der Analysis. Teil 1. 17. Auflage. Vieweg+Teubner, Wiesbaden.
- [HU] *Hughes, B.D.* (1995): Random walks and random environments. Vol. 1: Random walks. Clarendon Press xxi, Oxford.
- [JO] *Jain, N.C., und S. Orey* (1968): On the range of random walk. *Israel J. Mathem.* 6, 373–380.
- [JP1] *Jain, N.C., und Pruitt, W.E.* (1971): The range of transient random walk. *J. Analyse Math.* 24, 369–393.
- [JP2] *Jain, N.C., und Pruitt, W.E.* (1973): The range of random walk. *Proc. 6th Berkeley Symp. on Mathem. Statist. and Probab.*, Berkeley, University of California Press, Vo. 3, 31–50. *J. Analyse Math.* 24, 369–393.
- [KP] *Katzenbeisser, W., und Panny, W.* (1984): Asymptotic results on the maximal deviation of simple random walks. *Stoch. Proc. Appl.* 18, 263 – 275.

- [KP2] *Katzenbeisser, W., und Panny, W.* (2002): The maximal height of simple random walks revisited. *Journ. Statist. Plann. Infer.* 101, 149–161.
- [KH] *Khintchin, A.Y.* (1924). Über einen Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Fund. Mathem.* 6, 9–20.
- [KS] *Klafter, J., und Sokolov, I.M.* (2011): First steps in random walks. From tools to applications. Oxford University Press, Oxford.
- [LA] *Lawler, G.F.* (1996): Intersections of random walks. Birkhäuser, Boston, MA.
- [LAW] *Lawler, G.F.* (2010): Random walk and the heat equation. Student Mathematical Library 55. American Mathematical Society. Providence, RI.
- [LL] *Lawler, G.F., und Limic, V.* (2010): Random walk. A modern introduction. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 123. Cambridge University press, Cambridge.
- [LE] *Levasseur, K.M.* (1988): How to beat your kids at their own game. *Mathematics Magazine* 61, 301–305.
- [LG] *Le Gall, J-F.* (1985): Un théorème central limite pour le nombre de points visités par une marche aléatoire plane récurrente. *Comptes Rend. Acad. Sci. Paris* 300, 505–508.
- [LEV] *Lévy, P.* (1940): Sur certains processus stochastiques homogènes. *Composito Math.* 7, 283–330.
- [MO] *Morgenstern, D.* (1968): Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik. 2. Auflage. Springer, Berlin, Heidelberg, New York.
- [PA] *Patin, J.M.* (1989): A very short Proof of Stirling’s Formula. *Amer. Math. Monthly* 96, 41–42.
- [PM] *Philippou, A.N. und Makri, F.S.* (1986): Successes, runs and longest runs. *Statist. & Probab. Lett.* 4, 211–215.
- [PE] *Pearson. K.* (1905): The problem of the random walk. *Nature* 72, 294.
- [PO] *Pólya, G.* (1921): Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung betreffend die Irrfahrt im Straßennetz. *Mathem. Annalen* 84, 149–160.
- [REN] *Rényi, A.* (1970): Probability Theory. North Holland, Amsterdam, London.

- [RE] *Révész, P.* (2005): Random walk in random and non-random environments. 2. Auflage. Singapore etc.: World Scientific. xiv.
- [RI] *Riordan, J.* (1968): Combinatorial Identities. John Wiley & Sons, New York.
- [SM] *Smirnov, N. V.* (1939): On the estimation of the discrepancy between empirical curves of distribution for two independent samples. Bull. Moskov. Gos. Univ. Sect. A 2.
- [SP] *Spitzer, F.* (1976): Principles of random walk. 2. Auflage. Graduate Texts in Mathematics 34. Springer-Verlag, New York.
- [TE] *Telcs, A.* (2006). The art of random walks. Lecture Notes in Mathematics 185. Springer, Berlin.
- [WO] *Woess, W.* (2000). Random walks on infinite graphs and groups. Cambridge Tracts in Mathematics 138. Cambridge University Press, Cambridge.
- [ZA] *Zagier, D.* (1990): How often should you beat your kids? Mathematics Magazine 63, 89–92.

Index

- Absorptionswahrscheinlichkeit, 182
- Abwärtsrun, 188
- Anzahl der Maximalstellen
 - Grenzverteilung, 64
 - Verteilung, 58
- Anzahl der Nullstellen, 27, 119, 179
- Arcus-Sinus-Gesetz
 - für die erste Maximalstelle, 66
 - für die letzte Nullstelle, 23, 113
 - für die Verweilzeit, 48, 113
- Arcus-Sinus-Verteilung
 - diskrete, 22
 - stetige, 25
- asymmetrische Irrfahrt, 171
- asymptotisch äquivalent, 206
- Aufwärtsrun, 188
- Aussterbewahrscheinlichkeit, 197

- Ballot problem, 12
- Banach, 36
- Banachsches Streichholzproblem, 36
- Betragsmaximum
 - der symmetrischen Irrfahrt, 95
 - einer Brücke, 154
- Binomialreihe, 223
- Binomialverteilung, 5, 93
- Bonferroni, 98
- Brückenweg, 10, 117
- Brown, 111
- Brown–Wiener-Prozess, 111, 167
- Brownsche Brücke, 169

- Cantelli, 102, 162

- de Moivre, 6
- Distanz-1-Schnittzeitpunkt
 - Verteilung, 82
- Distanz- k -Schnittzeitpunkt, 78

- Grenzverteilung, 85
- Verteilung, 84
- Donsker, 113
- duale Irrfahrt, 106
- Dualität, 106

- empirische Verteilungsfunktion, 102, 161
- Erdős, 191
- erste Maximalstelle, 64
 - Arcus-Sinus-Gesetz, 66
 - Verteilung, 65
- Erstwiederkehrzeit, 38, 137, 204
- Erwartungswert
 - der Erstwiederkehrzeit einer Brücke, 137
 - der letzten Nullstelle einer Brücke, 141
 - der Nullstellenanzahl einer Brücke, 121
 - der Nullstellenanzahl einer symmetrischen Irrfahrt, 27
 - der Vorzeichenwechsel einer Brücke, 151
 - der Vorzeichenwechsel einer symmetrischen Irrfahrt, 89
 - des Maximums einer Brücke, 143
 - des Maximums einer symmetrischen Irrfahrt, 50
 - des Zeitpunkts der letzten Nullstelle, 18
 - einer N_0 -wertigen Zufallsvariablen, 217
- erzeugende Funktion, 80, 219
 - einer randomisierten Summe, 195
- Extinktions-Explosions-Dichotomie, 200

- Feller, 7

- Galton, 193
- Galton–Watson-Prozess, 194
 - Aussterbewahrscheinlichkeit, 197

- Erwartungswert, 197
- Extinktions-Explosions-Dichotomie, 200
- kritischer, 195
- subkritischer, 195
- superkritischer, 195
- Varianz, 197
- geometrische Verteilung, 63, 180
- Gesetz vom iterierten Logarithmus, 116
- Gleichverteilung
 - stetige, 136
- Glivenko, 102, 162
- Grenzverteilung
 - Anzahl der Nullstellen einer symmetrischen Irrfahrt, 32
 - Anzahl der Vorzeichenwechsel in symmetrischer Irrfahrt, 94
 - der Anzahl der Maximalstellen, 64
 - der Nullstellenanzahl einer Brücke, 124
 - der Verweilzeit einer Brücke, 136
 - der Verweilzeit einer symmetrischen Irrfahrt, 48
 - der Vorzeichenwechsel einer Brücke, 152
 - des k -ten Leiterzeitpunkts, 73, 176
 - des Betragsmaximums einer Brücke, 157
 - des Betragsmaximums einer symmetrischen Irrfahrt, 99
 - des Distanz- k -Schnittzeitpunkts, 85
 - des Maximums einer Brücke, 144
 - des Maximums einer symmetrischen Irrfahrt, 52
 - des Zeitpunktes der k -ten Nullstelle, 76
- Hauptlemma, 13
- Identitäten für Binomialkoeffizienten, 221
- Invarianzprinzip, 113
- Irrfahrt
 - asymmetrische, 171
 - auf \mathbb{Z}^d , 203
 - duale, 106
 - einfache symmetrische auf \mathbb{Z} , 3
 - mit absorbierenden Rändern, 181
- Khintchin, 115
- Kolmogorov, 160
- Kolmogorov-Smirnov-Test, 161
- Kolmogorov-Verteilung, 159, 166
- längster Aufwärtssrun, 188
- Laplace, 6
- Legendre, 224
- Legendre-Polynom, 224
- Leiterepochen, 67
 - Unabhängigkeit, 72
- Leiterzeitpunkt, 67, 70, 171
 - k -ter, Grenzverteilung, 73
 - Zusammenhang mit Maximum, 69
- Lemma von Borel-Cantelli, 225
- letzte Nullstelle einer Brücke
 - Erwartungswert, 141
 - Varianz, 141
 - Verteilung, 140
- Lévy, 6
- Lévy-Verteilung, 74, 85
- Lindeberg, 6
- Maximalstelle einer Brücke
 - Verteilung, 147
- Maximum einer Brücke
 - Erwartungswert, 143
 - Grenzverteilung, 144
 - Varianz, 143
 - Verteilung, 142
- Maximum einer symmetrischen Irrfahrt
 - Erwartungswert, 50
 - Grenzverteilung, 52
 - Varianz, 51
 - Verteilung, 50
- Nelson, 14
- Nullstelle, 10
 - innere eines Brückenweges, 119
- Nullstellenanzahl einer Brücke
 - Erwartungswert, 121
 - Grenzverteilung, 124
 - Varianz, 121
 - Verteilung, 121
- Nullstellenanzahl einer symmetrischen Irrfahrt
 - Erwartungswert, 27
 - Grenzverteilung, 32

- Varianz, 27
- Verteilung, 27
- Nullstellenanzahl einer transienten Irrfahrt
 - Erwartungswert, 179
 - Verteilung, 180
- Parität, 10
- Partialsummenprozess, 110
- Pfad, 110
- Pólya, 204
- Rückkehrwahrscheinlichkeit der symmetrischen Irrfahrt, 208
- randomisierte Summe, 91, 195
 - Erwartungswert, 196
 - erzeugende Funktion, 195
 - Varianz, 196
- Rekord zur Zeit n , 107
- Rekurrenz, 38
- Rekurrenz der symmetrischen Irrfahrt für $d \leq 2$, 205
- Rényi, 100
- Rényi-Verteilung, 100
- Reproduktionsgleichung, 193
- Reproduktionsverteilung, 193
 - geometrische, 198
- Roulette, 190
- Ruinwahrscheinlichkeiten, 182
- Satz
 - von Glivenko-Cantelli, 102, 162
- Schnittpunkt, 77
- Smirnov, N. W., 143
- Spiegelungsprinzip, 12
- Spieler-Ruin-Problem, 181
- Standardnormalverteilung, 32
- Stimmzettel-Problem, 12
- Stirling, 219
- Stirling-Formel, 219
- Streichholzproblem, 36
- Symmetrietest, 102
- Test
 - auf Symmetrie, 102
 - Zwei-Stichproben-, 162
- Transienz
 - der asymmetrischen Irrfahrt, 178
 - der symmetrischen Irrfahrt für $d \geq 3$, 205
- Unabhängigkeit
 - der Leiterepochen, 72
- Ungleichungen für den Logarithmus, 217
- Urnenmodell, 139, 168
- Varianz
 - der Erstwiederkehrzeit einer Brücke, 138
 - der letzten Nullstelle einer Brücke, 141
 - der Nullstellenanzahl einer Brücke, 121
 - der Nullstellenanzahl einer symmetrischen Irrfahrt, 27
 - der Vorzeichenwechsel einer Brücke, 151
 - der Vorzeichenwechsel einer symmetrischen Irrfahrt, 89
 - des Maximums einer Brücke, 143
 - des Maximums einer symmetrischen Irrfahrt, 51
 - des Zeitpunkts der letzten Nullstelle, 18
 - einer N_0 -wertigen Zufallsvariablen, 218
- Verteilung
 - Arcus-Sinus, diskrete, 22
 - Arcus-Sinus, stetige, 25
 - Binomial, 5, 93
 - der Anzahl der Maximalstellen, 58
 - der ersten Maximalstelle, 65
 - der Erstwiederkehrzeit einer Brücke, 137
 - der Erstwiederkehrzeit einer symmetrischen Irrfahrt, 39
 - der Länge des längsten Aufwärtsruns, 188
 - der letzten Nullstelle einer Brücke, 140
 - der Maximalstelle einer Brücke, 147
 - der Nullstellenanzahl einer Brücke, 121
 - der Nullstellenanzahl einer symmetrischen Irrfahrt, 27
 - der Nullstellenanzahl einer transienten Irrfahrt, 180
 - der Verweilzeit der Brownschen Brücke, 170
 - der Verweilzeit einer Brücke, 133

- der Verweilzeit einer symmetrischen Irrfahrt, 45
- der Vorzeichenwechsel einer Brücke, 151
- der Vorzeichenwechsel einer symmetrischen Irrfahrt, 89
- des k -ten Leiterzeitpunkts einer symmetrischen Irrfahrt, 70
- des Betrags einer Standardnormalverteilung, 35, 53
- des Betragsmaximums der Brownschen Brücke, 170
- des Betragsmaximums des Brown-Wiener-Prozesses, 113
- des Betragsmaximums einer Brücke, 156
- des Betragsmaximums einer symmetrischen Irrfahrt, 97
- des Distanz-1-Schnittzeitpunkts, 82
- des Distanz- k -Schnittzeitpunkts, 84
- des ersten Leiterzeitpunkts, 173
- des ersten Leiterzeitpunkts einer symmetrischen Irrfahrt, 68
- des Maximums der Brownschen Brücke, 170
- des Maximums des Brown-Wiener-Prozesses, 113
- des Maximums einer Brücke, 142
- des Maximums einer symmetrischen Irrfahrt, 50
- des Zeitpunktes der k -ten Nullstelle, 76
- des Zeitpunkts der letzten Nullstelle, 18
 - geometrische, 63, 180
 - Kolmogorov, 159, 166
 - Länge des längsten Aufwärtsruns, 188
 - Lévy, 74, 85
 - Rényi, 100
 - stetige Gleich-, 136
 - Weibull, 124, 125, 145, 153
- Verteilungskonvergenz, 215
- Verweilzeit einer symmetrischen Irrfahrt, 44
 - Arcus-Sinus-Gesetz, 48
 - Verteilung, 45
- Verweilzeit eines Brückenweges, 133
 - Verteilung, 133, 136
- Vorzeichenwechsel einer Brücke, 148
 - Erwartungswert, 151
 - Grenzverteilung, 152
 - Varianz, 151
 - Verteilung, 151
- Vorzeichenwechsel einer symmetrischen Irrfahrt, 87
 - Erwartungswert, 89
 - Grenzverteilung, 94
 - Varianz, 89
 - Verteilung, 89
- Wahrscheinlichkeitsintegral-Transformation, 164
- Watson, 194
- Weg, 9
 - Höhe eines, 9
 - Länge eines, 9
 - negativer, 10
 - nichtnegativer, 10
 - nichtpositiver, 10
 - nullstellenfreier, 10
 - positiver, 10
- Weibull, 124
- Weibull-Verteilung, 124, 125, 145, 153
- Wiener, 111
- Zeit bis zur Absorption
 - Erwartungswert, 184, 185
- Zeitpunkt der k -ten Nullstelle
 - Grenzverteilung, 76
 - Verteilung, 76
- Zeitpunkt der letzten Nullstelle, 17, 137
 - Arcus-Sinus-Gesetz, 23
 - Erwartungswert, 18
 - Varianz, 18
 - Verteilung, 18
- Zentraler Grenzwertsatz
 - von de Moivre-Laplace, 5
 - von Lindeberg-Lévy, 6
- Zwei-Stichproben-Problem, 118, 161
- Zwei-Stichproben-Test, 162
- zweites faktorielles Moment, 220