

**Staatsexamensarbeit
im Fach Mathematik**

Zufällige Geraden

Angefertigt bei Prof. Dr. Wolfgang Weil

Institut für Algebra und Geometrie

Arbeitsgruppe Konvexe Geometrie

Betreut von Dr. Steffen Winter

Vorgelegt von

Franz Sackmann

Studiengang Lehramt Gymnasien

Mathematik und Chemie

Matrikel-Nummer 1097463

Universität Karlsruhe (TH)
im März 2007

Abstract

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit einem speziellen Thema Geometrischer Wahrscheinlichkeiten, dem zufälliger Geraden in der Ebene. Ziel ist es, einen Überblick über Fragen zu geben, die mit diesem Thema in Verbindung stehen. Diese Arbeit soll als Einstieg in dieses Thema dienen und eine Orientierungshilfe bei der Literatursuche geben. Fragestellungen aus Sicht der *Stochastischen Geometrie* wurden außer Acht gelassen.

Verschiedene Arten der Konstruktion zufälliger Geraden werden gezeigt, diese in Bezug zum invarianten Geradenmaß gesetzt und daraus Möglichkeiten abgeleitet, Aussagen über bestimmte Größen, wie die Länge des Schnittes einer solchen Geraden mit einem gegebenen Körper, oder die Verteilung des Schnittpunktes zweier zufälliger Geraden zu machen. Der Schwerpunkt liegt auf der Bestimmung der Erwartungswerte und Momente der Schnittlängen verschiedener zufälliger Geraden mit gegebenen konvexen Körpern.

Im letzten Kapitel werden Simulationen zu solchen Fragestellungen durchgeführt. Dies soll eher als Beispiel verstanden werden, wie Wahrscheinlichkeitstheoretische Probleme im Mathematikunterricht mit Einsatz eines Computers behandelt werden können.

Danksagung

Mein Dank richtet sich an Prof. Dr. Wolfgang Weil für die Vergabe dieses Themas und sein Vertrauen. Außerdem danke ich meinem Betreuer Dr. Steffen Winter sehr für die viele Zeit und Geduld, die er mir schenkte, sowie für seine hilfreichen Anregungen.

Für die Durchsicht dieser Arbeit bedanke ich mich bei meinen Freunden Daniel und Dennis.

Weiter möchte ich mich bei Beate für ihre Geduld und Unterstützung bedanken, vor allem aber bei meinen Eltern, allen vieren, für ihre Hilfe und Unterstützung in den letzten 27 Jahren.

Erklärung

Ich erkläre, dass ich die Arbeit selbständig und nur mit den angegebenen Hilfsmitteln angefertigt habe und dass alle Stellen, die dem Wortlaut oder dem Sinne nach anderen Werken entnommen sind, durch Angabe der Quellen als Entlehnung kenntlich gemacht worden sind.

Karlsruhe, den _____,

Die vorliegende Arbeit wurde erstellt in \LaTeX , die Anfertigung sämtlicher Grafiken wurde mit den Programmen *EUKLID DynaGeoTM*, sowie *MapleTM 8.0* vorgenommen.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	3
1 Grundlagen	9
1.1 Zur Notation	9
1.2 Grundlagen aus der Konvex- und Integralgeometrie	9
1.2.1 Bezeichnungen	10
1.2.2 Die inneren Volumina $V_j(\cdot)$	10
1.2.3 Die Crofton-Formel	11
1.2.4 Die Hausdorff-Metrik	12
1.3 Grundlagen aus der Maß- und Integrationstheorie	13
1.3.1 σ -Algebren	13
1.3.2 Maß und Integral	15
2 Zufällige Geraden im \mathbb{R}^2	19
2.1 Geradenraum und invariante Maße	19
2.1.1 Der Geradenraum \mathcal{G}	19
2.1.2 Geradenmaße	25
2.2 Typen zufälliger Geraden	28
2.2.1 Vorbemerkungen	28
2.2.2 IUZ-Geraden (μ -zufällige Geraden)	29
2.2.3 Nadelproblem von Buffon und Bertrand-Problem	31
2.2.4 Punkt-Richtungsform (ν -zufällige Geraden)	33
2.2.5 Zwei-Punkte-Form (λ -zufällige Geraden)	36
2.2.6 Randpunkt-Richtungsform (γ -zufällige Geraden)	40
2.2.7 Zwei-Randpunkte-Form (β -zufällige Geraden)	43
2.2.8 Randpunkt-innerer Punkt-Form (α -zufällige Geraden)	47
2.3 Erwartungswerte und Momente der Sehnenlängen	50
2.3.1 Vorbemerkungen	50
2.3.2 μ -zufällige Sehnen	51
2.3.3 ν -zufällige Sehnen	52
2.3.4 λ -zufällige Sehnen	53
2.3.5 γ -zufällige Sehnen	54

2.3.6	β -zufällige Sehne	55
2.3.7	α -zufällige Sehnen	55
2.4	Verteilungen und Momente der Sehnenlänge	56
2.4.1	μ -, ν - und λ -zufällige Sehnen	57
2.4.2	α -, β - und γ -zufällige Sehnen	75
2.5	Schnittpunkte zufälliger Geraden	85
2.5.1	Verteilung des Schnittpunktes zweier μ -zufälliger Ge- raden	87
2.6	Zusammenfassung des Kapitels	92
3	Simulationen	95
3.1	Vorbemerkung	95
3.2	Mittlere Sehnenlängen	95
3.2.1	μ -zufällige Sehnen	96
3.2.2	ν -zufällige Sehnen	97
3.2.3	λ -zufällige Sehnen	98
3.2.4	γ -zufällige Sehnen	98
3.2.5	α - und β -zufällige Sehnen	98
3.3	Zur Verteilung der Richtung zufälliger Geraden	98
3.4	Tabellarische Zusammenfassung	100
3.5	Abbildungen	102
3.5.1	Zufällige Geraden durch Kreis und Rechteck	102
3.5.2	Zur Verteilung der Richtung zufälliger Geraden	105
4	Resümee	109
4.1	Abschließende Bemerkungen	109
4.2	Literaturhinweise	109
A	Maple- Simulationen	111
	Literaturverzeichnis	113
	Symbolverzeichnis	117

Einleitung

Das Thema *zufällige Geraden* fällt in zwei eng miteinander verwandte Gebiete – *Geometrische Wahrscheinlichkeiten* oder *Integralgeometrie*. Die Anfänge der Behandlung Geometrischer Wahrscheinlichkeiten können in dem so genannten Nadelproblem von Buffon gesehen werden. Blaschke (1935) schreibt dazu:

Etwa 1760 hat Buffon die Aufgabe behandelt, die als *Nadelproblem* bekannt ist. Sie besteht in etwa darin: Es ist die Wahrscheinlichkeit zu ermitteln, dass eine Nadel, auf eine waagrechte Ebene geworfen, auf der in gleichen Abständen parallele Geraden gezogen sind, eine solche Gerade trifft. Aus dieser Aufgabe hat sich ein Zweig der Geometrie entwickelt, den man meist « *Geometrische Wahrscheinlichkeiten* » nennt. Vielleicht könnte man dafür kürzer « *Integralgeometrie* » sagen, zumal der Ursprung aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung immer mehr zurücktritt.

Der Begriff Integralgeometrie geht zurück auf Wilhelm Blaschke. So schreibt Luis Santaló in (Burau u. a., 1985, Seite 211, f):

[...] In fact, the Hamburg seminar of 1934/ 1935 a mimeographed course of Herglotz on *Geometrische Wahrscheinlichkeiten* held at the University of Göttingen in the year 1933, was widely used. The fine spirit of Blaschke for discovering subjects of research of bright future, glimpsed that many questions of the theory of geometric probability, which combine harmoniously groups and integrals, were also interesting from the point of view of pure geometry, independently of the original probabilistic ideas. This was the origin of the so called Integral Geometry.

Das Nadelproblem von Buffon steht in direktem Bezug zum Thema dieser Arbeit und soll daher als einführendes Beispiel verwendet werden. Sei also $\{g_i\}$, $i \in \mathbb{N}$ eine Schar paralleler Geraden mit Abstand d und N eine Nadel der Länge l , wobei der Einfachheit halber gefordert sein soll $l < d$ (somit gibt es genau einen oder keinen Schnitt). Ein Lösungsweg ist der folgende: Sei x

der Abstand des Mittelpunktes M von N , zu der ihr am nächsten gelegenen Geraden g_0 , sowie φ der Winkel zwischen der Trägergeraden von N mit g_0 . Dann gilt $x \in [0, \frac{d}{2}]$ und $\varphi \in [0, \pi)$. Jede mögliche Lage von N ist damit

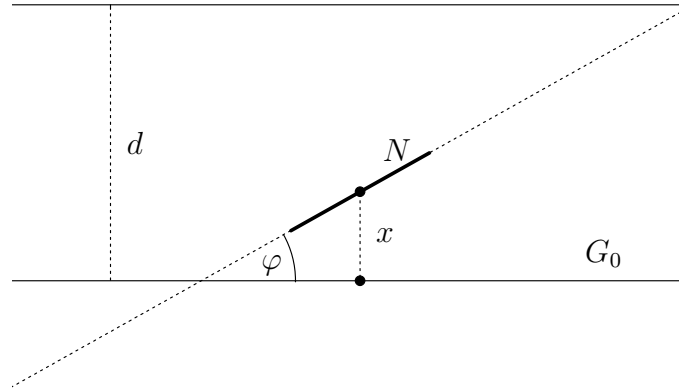


Abbildung 0.1: Zum Nadelproblem.

gegeben durch einen Punkt (x, φ) in dem Rechteck $[0, \frac{d}{2}] \times [0, \pi)$. Die Nadel trifft genau dann g_0 , wenn gilt $x \leq \frac{l}{2} \cdot \sin(\varphi)$. Wird nun angenommen, dass x und φ gleichverteilt sind, so ergibt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit zu

$$\mathbb{P}(\{g_0 \cap N\} \neq \emptyset) = \frac{\int_0^\pi \frac{l}{2} \cdot \sin(\varphi) d\varphi}{\frac{d}{2} \cdot \pi} = \frac{2l}{\pi d}.$$

Um dieses Resultat zu erhalten wurde N in bestimmter Weise durch x und φ parametrisiert und weiter wurde für beide Parameter Gleichverteilung angenommen. Dass nun gerade diese Voraussetzungen mit dem Begriff *zufällig*, im Sinne einer *zufällig geworfenen Nadel*, gleichzusetzen sind ist fragwürdig. Das heißt verschiedene Annahmen können, obwohl mathematisch korrekt, zu verschiedenen Ergebnissen führen. Dies soll an folgendem Beispiel verdeutlicht werden, welches dem Werk von Joseph Bertrand (1972) entnommen ist:

On trace au hasard une corde dans un cercle. Quelle est la probabilité pour qu' elle soit plus petite que le côté du triangle équilatéral inscrit ?¹

¹Gesucht ist also die Wahrscheinlichkeit, dass eine bezüglich eines gegebenen Kreises zufällig gezogene Sehne kürzer ist, als die Seitenlänge des in diesen Kreis eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecks.

Für dieses Problem gibt Bertrand dann die folgenden Lösungen (sinngemäß übersetzt) an:

1. Ist einer der Endpunkte der Sehne bekannt, so ändert dies – wegen der Symmetrie des Kreises – an der Wahrscheinlichkeit nichts. Sei also x ein Endpunkt der zufälligen Sehne, dann muss deren Richtung zufällig bestimmt werden. Zieht man nun zwei Seiten des gleichseitigen Dreiecks, die x zum Schnittpunkt haben, so bilden sie miteinander und mit der Tangente an den Kreis drei Winkel zu je 60° . Damit die Sehne länger als die Seite des gleichseitigen Dreiecks wird, muss sie im mittleren Winkelraum liegen. Diese Wahrscheinlichkeit scheint definitionsgemäß $\frac{1}{3}$ zu sein. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also $\frac{2}{3}$.

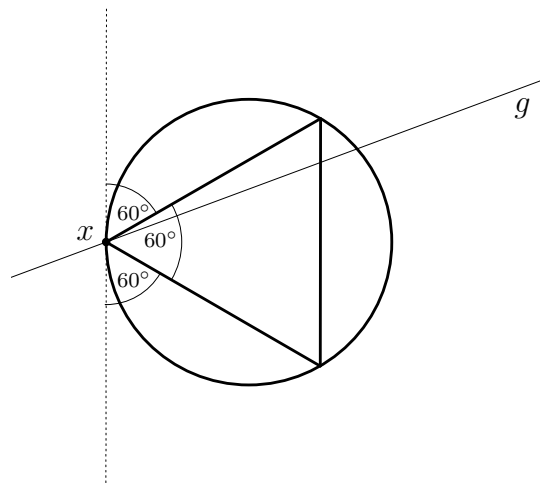


Abbildung 0.2: Zum Bertrand-Problem, Lösung 1.

2. Ist andererseits die Richtung u der Sehne bekannt, so ändert dies – aufgrund der Symmetrie des Kreises – nichts an der Wahrscheinlichkeit. Um größer als eine Seite des gleichseitigen Dreiecks zu sein, so muss sie bei gegebener Richtung den zu ihr senkrechten Radius r in der, dem Kreismittelpunkt näher gelegenen Hälfte schneiden (siehe Abbildung 0.3). Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist dann gegeben durch $\frac{1}{2}$.
3. Schließlich lässt sich eine Sehne zufällig bestimmen, indem ihr Mittelpunkt M zufällig bestimmt wird. Damit die Sehne größer als die Seite des gegebenen Dreiecks wird, muss ihr Mittelpunkt vom Kreismittelpunkt weniger als der halbe Radius entfernt sein, das heißt in einem Kreis liegen, dessen Flächeninhalt $\frac{1}{4}$ des Inhalts des gegebenen

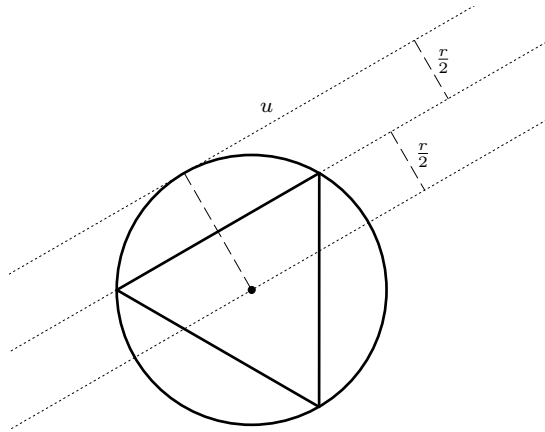


Abbildung 0.3: Zum Bertrand-Problem, Lösung 2.

Kreises beträgt (siehe Abbildung 0.4). Definitionsgemäß scheint diese Wahrscheinlichkeit durch $\frac{1}{4}$ gegeben zu sein. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist demnach gegeben zu $\frac{3}{4}$.

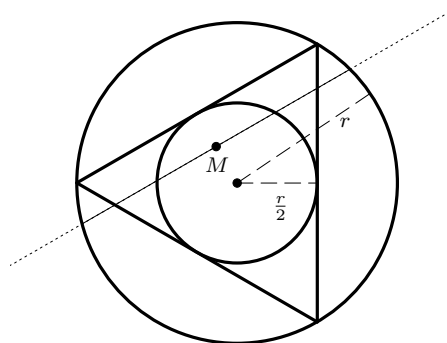


Abbildung 0.4: Zum Bertrand-Problem, Lösung 3.

Bertrand (1972) schreibt zu diesen scheinbar widersprüchlichen Resultaten:

Entre ces trois réponses, quelle est la véritable ? Aucune des trois n'est fausse, aucune n'est exacte, la question est mal posée.²

²Er erkennt also, dass dieser scheinbare Widerspruch in der unpräzisen Formulierung der Aufgabe liegt.

Um Abhilfe für solche Probleme mit *zufälligen* geometrischen Objekten – hier zufälligen Geraden – zu schaffen, definiert man nun Maße auf den Mengen solcher Objekte und stellt gewisse Anforderungen – zum Beispiel die Forderung nach Bewegungsinvarianz – an diese Maße. Im Falle zufälliger Geraden in der Ebene schränkt man – um Endlichkeit zu gewährleisten – diese Maße dann auf die Menge aller Geraden ein, die mit einem gegebenen Körper einen nicht leeren Schnitt haben. Es wird sich zeigen, dass es hier nur ein solches bis auf Normierung bestimmtes Maß gibt, das invariant gegenüber den Bewegungen in der Ebene ist. Bezeichnet man, um auf das Beispiel von Bertrand zurück zu kommen, die Menge aller Geraden, die den Kreis schneiden mit \mathcal{G}_0 , die Menge aller Geraden, deren Schnitt mit dem Kreis länger als die Seite des einbeschriebenen Dreiecks ist mit \mathcal{G}_1 , und ist ein Maß μ auf der Menge aller Geraden der Ebene definiert, so ergibt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit zu

$$\frac{\mu(\mathcal{G}_1)}{\mu(\mathcal{G}_0)}.$$

Diese Wahrscheinlichkeit ist also abhängig, von der Gestalt des zu Grunde liegenden Maßes.

Im ersten Kapitel werden einige Bemerkungen zur Notation gemacht und Grundlagen aus der Konvexen- und Integralgeometrie, sowie der Maß- und Integrationstheorie besprochen.

Das zweite Kapitel befasst sich dann mit dem eigentlichen Thema dieser Arbeit, dem zufälliger Geraden in der Ebene. In Abschnitt 2.1 wird die Menge der Geraden des \mathbb{R}^2 näher betrachtet. Auf dieser Menge wird eine σ -Algebra konstruiert und die Form des gegen den Bewegungen des \mathbb{R}^2 invarianten Geradenmaßes angegeben. Da es sich bei diesem um ein lokal endliches Maß handelt, wird klar, dass dieses Maß auf bestimmte Mengen eingeschränkt werden muss, um es zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß normieren zu können.

In Abschnitt 2.2 werden dann verschiedene Konstruktionen zufälliger Geraden besprochen und – soweit möglich – die Dichte derer Verteilungen bezüglich des invarianten Geradenmaßes angegeben. Diese Konstruktionen werden alle so durchgeführt, dass sie mit einem gegebenen konvexen Körper einen nicht leeren Schnitt haben. Hier wird noch einmal auf die angesprochenen Probleme von Buffon und Bertrand eingegangen.

Im anschließenden Abschnitt 2.3 werden die gefundenen Resultate über die Dichten der Verteilungen der vorgestellten Typen zufälliger Geraden benutzt, um daraus Aussagen über Erwartungswerte und Momente der Längen von Schnitten zufälliger Geraden mit einem konvexen Körper (bezüglich dessen sie konstruiert wurden) zu machen, diese Schnitte werden als zufällige Sehnen

bezeichnet.

Abschnitt 2.4 befasst sich mit den Verteilungen der Längen zufälliger Sehnen. Aus diesen werden weitere Aussagen über Erwartungswerte und Momente der Sehnenlänge abgeleitet.

Weiter wird in Abschnitt 2.5 die Verteilung des Schnittpunkts zweier zufälliger Geraden betrachtet – jedoch nur für einen Typ.

Abschließend findet sich in Abschnitt 2.6 eine tabellarische Zusammenfassung einiger Resultate.

In Kapitel 3 werden Simulationen mit dem Computer-Algebra-System Maple durchgeführt. Dort werden mittlere Längen der Schnitte zufälliger Geraden mit gegebenen Körpern bestimmt. Weiter werden zufällige Geraden bezüglich gegebener konvexer Körper konstruiert und gezeichnet. Außerdem wird eine Frage behandelt, die im theoretischen Teil nicht zur Sprache kam: Es wird die relative Häufigkeit bestimmt, mit der der Winkel zwischen einer zufälligen Geraden und einer Referenzachse in einem bestimmten Intervall liegt.

Im letzten Kapitel werden die Resultate dieser Arbeit reflektiert und eine Übersicht weiterführender Literatur zum Thema gegeben, die im Rahmen dieser Staatsexamensarbeit unberücksichtigt blieb und keine Erwähnung fand.

1 Grundlagen

1.1 Zur Notation

Im Folgenden wird mit \mathbb{R}^n sowohl der n -dimensionale Vektorraum über \mathbb{R} als auch der Euklidische Punktraum mit Ursprung 0 bezeichnet. Weiter bezeichne $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt im \mathbb{R}^n , $\|\cdot\|$ die davon induzierte euklidische Norm. Für eine reelle Zahl a ist durch $|a|$ deren Betrag gegeben.

Geraden werden mit kleinen Buchstaben g, l, \dots bezeichnet, Punkte sowohl mit kleinen Buchstaben x, y, z , als auch mit Großbuchstaben A, B, L, \dots . Ein Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r wird mit $B(r, M)$ bezeichnet.

Für $a < b \in \mathbb{R}$ wird das geschlossene Intervall $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ in der Form $[a, b]$, das halboffene Intervall $\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ beziehungsweise $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ in der Form $(a, b]$ beziehungsweise $[a, b)$, sowie das offene Intervall $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ in der Form (a, b) dargestellt.

λ bezeichne im Folgenden das n -dimensionale Lebesguemaß im \mathbb{R}^n ; λ_q , $q \in \{1, \dots, n\}$, das q -dimensionale Lebesguemaß. Für einen q -dimensionalen affinen Unterraum E des \mathbb{R}^n bezeichne λ_E das q -dimensionale Lebesguemaß auf E , aufgefasst als Maß auf ganz \mathbb{R}^n , also

$$\lambda_E(A) = \lambda_q(A \cap E) \quad \text{für } A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n).$$

ω bezeichnet das sphärische Lebesguemaß.

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses (\cdot) wird $\mathbb{P}(\cdot)$ geschrieben, für eine Zufallsvariable X bezeichnet $\mathbb{E}X$ den Erwartungswert von X .

1.2 Grundlagen aus der Konvex- und Integralgeometrie

Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ wird konvex genannt, wenn sie für je zwei Punkte $x, y \in A$ auch deren Verbindungsstrecke $[x, y]$ enthält. Eine konvexe Menge K wird konvexer Körper genannt, wenn sie konvex und kompakt ist.

Die in diesem Abschnitt aufgeführten Bezeichnungen und Definitionen entstammen den Lehrbüchern von Schneider und Weil (1992, 2000).

1.2.1 Bezeichnungen

Hier einige Bezeichnungen, die in den kommenden Abschnitten verwendet werden.

\mathcal{L}_q^n	Menge der q -dimensionalen linearen Unterräume des \mathbb{R}^n .
\mathcal{E}_q^n	Menge der q -dimensionalen affinen Unterräume des \mathbb{R}^n .
\mathcal{K}	Menge der konvexen Körper des \mathbb{R}^n .
\mathcal{R}	Konvexring, also das System aller endlichen Vereinigungen konvexer Körper im \mathbb{R}^n .
\mathcal{F}	System der abgeschlossenen Teilmengen des \mathbb{R}^n .
\mathcal{C}	Teilsystem der kompakten Teilmengen des \mathbb{R}^n .
\mathcal{O}	System der offenen Teilmengen des \mathbb{R}^n .
$\text{int}(K), K \in \mathcal{K}$	Inneres von K .
$\text{bd}(K), K \in \mathcal{K}$	Rand von K .
B^n	Einheitskugel des \mathbb{R}^n .
S^{n-1}	Einheitssphäre des \mathbb{R}^n , also Rand der Einheitskugel.

Weiter sei

$$\kappa_n := \lambda(B^n) = \begin{cases} \frac{\pi^k}{k!} & \text{für } n = 2k, k = 1, 2, \dots \\ \frac{\pi^k 2^{2k+1} k!}{(2k+1)!} & \text{für } n = 2k + 1, k = 0, 1, \dots \end{cases},$$

$$\kappa_0 := 1,$$

sowie

$$\omega_n := \omega(S^{n-1}) = n\kappa_n.$$

1.2.2 Die inneren Volumina $V_j(\cdot)$

Für einen n -dimensionalen konvexen Körper K wird $V_n(K) := \lambda(K)$ gesetzt. Mit der Steiner-Formel erhält man weitere Funktionale $V_j(K)$.

Satz 1.2.1 (Steiner-Formel) *Für konvexe Körper $K \in \mathcal{K}$ und für $\epsilon \geq 0$ ist $V_n(K + \epsilon B^n)$ ein Polynom in ϵ ,*

$$V_n(K + \epsilon B^n) = \sum_{j=0}^n \epsilon^{n-j} \kappa_{n-j} V_j(K),$$

mit Koeffizienten $V_j(K)$, die nur von K abhängen.

Für einen zwei- bzw. drei-dimensionalen konvexen Körper K bezeichnen

- im Falle $n = 2$
 - $V_2(K)$ den Flächeninhalt A von K ,
 - $2V_1(K)$ die Randlänge, also den Umfang U von K ,
 - sowie $V_0(K)$ die Eulersche Charakteristik.
- Im Falle $n = 3$ bezeichnen
 - $V_3(K)$ das Volumen von K ,
 - $2V_2(K)$ die Oberfläche S von K ,
 - $\frac{1}{2}V_1(K)$ die mittlere Breite,
 - sowie $V_0(K)$ die Eulersche Charakteristik.

1.2.3 Die Crofton-Formel

In Kapitel 2 wird öfter die Crofton-Formel benötigt. Bevor diese vorgestellt wird, sollen hier einige Bemerkungen gemacht werden.

Für $n \in \mathbb{N}$, $q \in \{1, \dots, n\}$ gibt es in \mathcal{E}_q^n nur ein bis auf Normierung bestimmtes lokal endliches bewegungsinvariantes Maß μ_q (siehe hierzu z.B. Abschnitt 1.3 im Lehrbuch von Schneider und Weil (1992)). In Abschnitt 2.1.2 wird dieses Maß für $n = 2$, $q = 1$ – also im Falle der Geraden des \mathbb{R}^2 – näher betrachtet. Dort wird es, da aus dem Zusammenhang klar, einfach mit μ bezeichnet.

Satz 1.2.2 (Crofton-Formel) *Für Mengen $K \in \mathcal{R}$ des Konvexringes und für $q \in \{0, \dots, n\}$, $j \in \{0, \dots, q\}$ gilt*

$$\int_{\mathcal{E}_q^n} V_j(K \cap E) d\mu_q(E) = \alpha_{njq} V_{n+j-q}(K).$$

Dabei ist

$$\alpha_{njq} = \frac{\binom{q}{j} \kappa_q \kappa_{n+j-q}}{\binom{n}{q-j} \kappa_j \kappa_n}.$$

Speziell erhält man im Falle $j = 0$

$$\mu_q(\{E \in \mathcal{E}_q^n : K \cap E \neq \emptyset\}) = \alpha_{n0q} V_{n-q}(K).$$

1.2.4 Die Hausdorff-Metrik

Für eine Metrik d im \mathbb{R}^n – etwa die vom Standardskalarprodukt erzeugte – ist der Hausdorff-Abstand zweier Mengen $C, C' \in \mathcal{C}' := \mathcal{C} \setminus \{\emptyset\}$ definiert durch

$$d_H(C, C') := \max \left\{ \max_{x \in C} \min_{y \in C'} d(x, y), \max_{x \in C'} \min_{y \in C} d(x, y) \right\}.$$

Seien

$$d(x, C) := \min_{y \in C} d(x, y),$$

sowie für $\varepsilon \geq 0$

$$C(\varepsilon) := \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, C) \leq \varepsilon\}.$$

Damit erhält man

$$d_H(C, C') = \min \{\varepsilon \geq 0 : C \subset C'(\varepsilon), C' \subset C(\varepsilon)\}.$$

Im Falle der euklidischen Metrik ist der Hausdorff-Abstand gegeben durch

$$d_H(C, C') = \min \{\varepsilon \geq 0 : C \subset C' + \varepsilon B^n, C' \subset C + \varepsilon B^n\},$$

wobei für $C \in \mathcal{C}'$ durch

$$C + \varepsilon B^n =: C_\varepsilon$$

der *Parallelkörper* von C gegeben ist. (Siehe hierzu Abbildung 1.1)

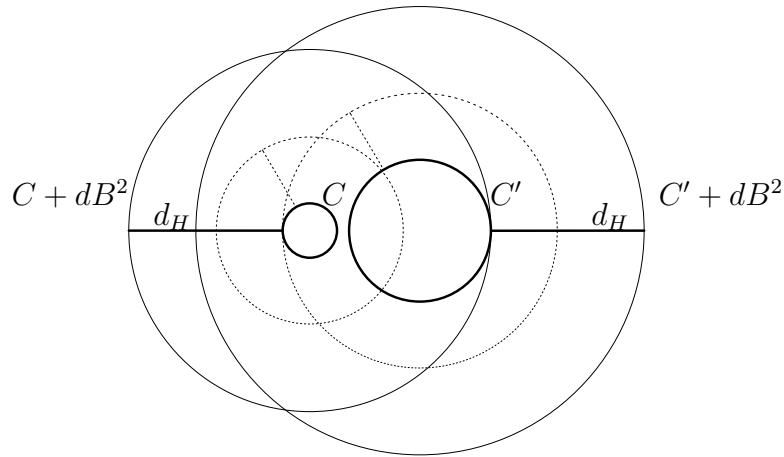


Abbildung 1.1: Hausdorffabstand d_H zweier Kreise im \mathbb{R}^2 .

1.3 Grundlagen aus der Maß- und Integrationstheorie

An dieser Stelle sollen einige Begriffe und Sätze aus der Maß- und Integrationstheorie, die für die folgenden Kapitel wichtig sind, aufgeführt werden. Diese sind den Büchern von Bauer (1992), sowie Elstrodt (2005) entnommen.

1.3.1 σ -Algebren

Sei X eine Menge. Mit $\mathfrak{P}(X)$ wird die Potenzmenge von X , also die Menge aller Teilmengen von X bezeichnet. Ein System $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}(X)$ heißt σ -Algebra in X , wenn es folgende Eigenschaften besitzt:

1. $X \in \mathfrak{A}$,
2. $A \in \mathfrak{A} \Rightarrow A^c \in \mathfrak{A}$,
3. für jede Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Mengen aus \mathfrak{A} liegt $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ in \mathfrak{A} .

(Für eine Menge $A \subset X$ ist A^c das Komplement von A in X , also $A^c = \{x \in X : x \notin A\}$.)

Das Paar (X, \mathfrak{A}) wird *Messraum* oder *messbarer Raum* genannt.

Sei \mathfrak{A} eine σ -Algebra in X und $Y \subset X$. Dann ist

$$\mathfrak{A} \upharpoonright Y := Y \cap \mathfrak{A} := \{Y \cap A : A \in \mathfrak{A}\} \quad (1.1)$$

eine σ -Algebra in Y , genannt *Spur* von \mathfrak{A} in Y . Liegt Y in \mathfrak{A} , so besteht $\mathfrak{A} \upharpoonright Y$ aus allen zu \mathfrak{A} gehörigen Teilmengen von Y .

Seien X, Y Mengen, \mathfrak{B} eine σ -Algebra in Y , sowie $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Dann ist

$$f^{-1}(\mathfrak{B}) := \{f^{-1}(B) : B \in \mathfrak{B}\} \quad (1.2)$$

eine σ -Algebra in X .

Zu jedem System \mathfrak{E} von Teilmengen von X existiert eine kleinste, \mathfrak{E} enthaltende σ -Algebra $\sigma(\mathfrak{E})$ – der Durchschnitt aller σ -Algebren in X , die \mathfrak{E} enthalten. Diese nennt sich die von \mathfrak{E} erzeugte σ -Algebra; \mathfrak{E} ein *Erzeuger* von $\sigma(\mathfrak{E})$.

Sind $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung und $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{P}(Y)$ ein Erzeuger der σ -Algebra \mathfrak{B} über Y , so erzeugt $f^{-1}(\mathfrak{E})$ die σ -Algebra $f^{-1}(\mathfrak{B})$. Das bedeutet also, für jede Menge $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{P}(Y)$ gilt

$$\sigma(f^{-1}(\mathfrak{E})) = f^{-1}(\sigma(\mathfrak{E}))$$

1 Grundlagen

(Kapitel 1 Elstrodt, 2005, Satz 4.4).

Ist \mathfrak{E} ein Erzeuger der σ -Algebra \mathfrak{A} über X und $Y \subset X$, so wird die Spur- σ -Algebra $\mathfrak{A} \upharpoonright Y$ erzeugt von

$$\mathfrak{E} \upharpoonright Y := \{E \cap Y : E \in \mathfrak{E}\}$$

(Kapitel 1 Elstrodt, 2005, Korollar 4.5).

Die von dem System der halboffenen Intervalle $\mathfrak{I}^n := \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}^n\}$ im \mathbb{R}^n erzeugte σ -Algebra heißt *Borel σ -Algebra* des \mathbb{R}^n $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$, beziehungsweise \mathfrak{B}^n (Bauer, 1992, Definition 6.1).

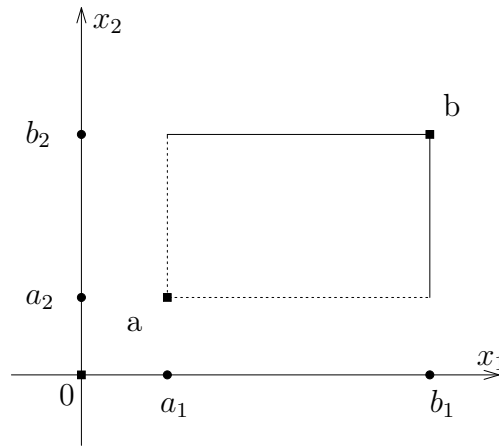


Abbildung 1.2: Erläuterung der Menge $(a, b] \subset \mathbb{R}^n$, am Beispiel eines halboffenen Rechtecks $(a, b] = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$.

Weitere Erzeuger von \mathfrak{B}^n sind (Kapitel 1 Elstrodt, 2005, Satz 4.3):

- $\mathcal{O} := \{U \subset \mathbb{R}^n : U \text{ offen}\}$
- $\mathcal{F} := \{F \subset \mathbb{R}^n : F \text{ abgeschlossen}\}$
- $\mathcal{C} := \{C \subset \mathbb{R}^n : C \text{ kompakt}\}$
- $\mathfrak{I}_o^n := \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}^n\}$
- $\mathfrak{I}_{o, \mathbb{Q}}^n := \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}^n\}$
- $\mathfrak{I}_F^n := \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}^n\}$
- $\mathfrak{I}_{F, \mathbb{Q}}^n := \{[a, b] : a, b \in \mathbb{Q}^n\}$

- $\mathfrak{I}^n := \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}^n\}$
- $\mathfrak{I}_{\mathbb{Q}}^n := \{(a, b] : a, b \in \mathbb{Q}^n\}$
- $\mathcal{V}^n := \{\bigcup_{k=1}^m I_k : I_1, \dots, I_m \in \mathfrak{I}^n \text{ disjunkt}\}$
- $\mathcal{V}_{\mathbb{Q}}^n := \{\bigcup_{k=1}^m I_k : I_1, \dots, I_m \in \mathfrak{I}_{\mathbb{Q}}^n \text{ disjunkt}\}$

Für einen beliebigen topologischen Raum X wird die von dem System der offenen Teilmengen von $X - \mathcal{O}$ – erzeugte σ -Algebra ebenfalls als Borel σ -Algebra $\mathfrak{B}(X)$ bezeichnet. Wieder ist das System der abgeschlossenen Teilmengen von $X - \mathcal{F}$ – ebenfalls ein Erzeuger von $\mathfrak{B}(X)$ (Bauer, 1992, Definition 25.1).

Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ von einem Messraum (X, \mathfrak{A}) in einen Messraum (Y, \mathfrak{B}) heißt $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ -messbar, wenn

$$f^{-1}(B) \in \mathfrak{A} \quad \text{für alle } B \in \mathfrak{B}.$$

1.3.2 Maß und Integral

Ein Maß auf einer σ -Algebra \mathfrak{A} über X ist eine nicht negative, σ -additive Mengenfunktion, also eine Abbildung

$$\begin{aligned} \mu : \mathfrak{A} &\rightarrow [0, \infty] \\ A &\mapsto \mu(A) \end{aligned}$$

mit den Eigenschaften

1. $\mu(\emptyset) = 0$,
2. $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ für paarweise disjunkte A_i (σ -Additivität).

Weiter gilt für ein Maß μ und Mengen $A, B \in \mathfrak{A}$

$$A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B).$$

Ein meßbarer Raum (X, \mathfrak{A}) mit einem auf \mathfrak{A} definierten Maß μ nennt sich *Maßraum* (X, \mathfrak{A}, μ) . Hat das Maß die Gesamtmasse $\mu(X) = 1$, so spricht man von einem *Wahrscheinlichkeitsraum*.

Sei X ein Hausdorff-Raum, das heißt für alle $x, y \in X$, $x \neq y$ existieren offene Umgebungen $U(x), U(y)$ mit $U(x) \cap U(y) = \emptyset$. Dann heißt ein auf $\mathfrak{B}(X)$ definiertes Maß μ

- *endlich*, wenn $\mu(X) < \infty$ und damit $\mu(A) < \infty$ für alle $A \in \mathfrak{B}(X)$,

1 Grundlagen

- ein *Borel-Maß* auf X , wenn $\mu(C) < \infty$ für jede kompakte Menge $C \subset X$,
- *lokal endlich*, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung U mit $\mu(U) < \infty$ besitzt.

Anmerkung: Jedes lokal endliche Maß ist ein Borel-Maß.

Ein Maß μ nennt sich *σ -endlich*, wenn eine Folge von Mengen in \mathfrak{A} $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existiert mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X$ und $\mu(A_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Seien $(X_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1), (X_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$ zwei σ -endliche Maßräume. Dann gibt es genau ein Maß π auf $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ mit

$$\pi(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2)$$

für alle $A_i \in \mathfrak{A}_i$. $\pi := \mu_1 \otimes \mu_2$ heißt das *Produktmaß* von μ_1, μ_2 (Kapitel 5 Elstrodt, 2005, Satz und Definition 1.5). Dabei ist die *Produkt- σ -Algebra* $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ die von $\mathfrak{A}_1 * \mathfrak{A}_2 := \{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathfrak{A}_1, A_2 \in \mathfrak{A}_2\}$ erzeugte σ -Algebra, also

$$\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2 = \sigma(\mathfrak{A}_1 * \mathfrak{A}_2).$$

Ist $\chi : (X, \mathfrak{A}) \rightarrow (Y, \mathfrak{B})$ eine messbare Abbildung, so wird für jedes Maß μ auf \mathfrak{A} durch

$$B \mapsto (\mu \circ \chi^{-1})(B) = \mu(\chi^{-1}(B)), \quad (B \in \mathfrak{B})$$

ein Maß μ' auf \mathfrak{B} definiert, genannt *Bildmaß* $\chi(\mu)$ von μ unter χ (Bauer, 1992, Satz 7.5, Definition 7.6).

Der Begriff des *Integrale* (Bauer, 1992, Kapitel 2) wird eingeführt über nicht negative Treppenfunktionen. Eine Treppenfunktion u ist eine auf X definierte reelle, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ -messbare – oder kurz \mathfrak{A} -messbare – Funktion, die nur endlich viele Werte annimmt. Dann lässt sich u darstellen als

$$u = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{A_i}, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}_+,$$

wobei die A_i paarweise disjunkt sind und $\bigcup_{i=1}^n A_i = X$ gilt. Eine solche Darstellung nennt sich *Normaldarstellung* von u .

Dabei bezeichnet

$$1_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

1.3 Grundlagen aus der Maß- und Integrationstheorie

die *Indikatorfunktion* von A . Die Zahl

$$\int u d\mu := \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i)$$

nennt sich das μ -Integral von u über X . Sie ist unabhängig von der speziell gewählten Normaldarstellung.

Für numerische Funktionen $f, g \geq 0$ und einen Maßraum (X, \mathfrak{A}, μ) ist das Integral im wesentlichen durch die folgenden Eigenschaften festgelegt:

1. $\int 1_A d\mu = \mu(A), \quad A \in \mathfrak{A}$
2. $\int (c_1 f_1 + c_2 f_2) d\mu = c_1 \int f_1 d\mu + c_2 \int f_2 d\mu, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
3. $f \leq g \Rightarrow \int f d\mu \leq \int g d\mu$

Statt $\int f d\mu$ schreibt man auch $\int f(x) d\mu(x)$. Eine *numerische Funktion* ist eine Abbildung $A \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} =: \overline{\mathbb{R}}$.

Eine beliebige numerische Funktion f auf X heißt μ -integrierbar, wenn sie \mathfrak{A} -messbar ist und die Integrale $\int f^+ d\mu$, sowie $\int f^- d\mu$ reelle Zahlen sind.

$$\int f d\mu := \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$$

heißt dann das (μ) -Integral von f .

f^+ bzw. f^- bezeichnen den Positiv- bzw. Negativteil von f .

Ist $f \geq 0$ eine numerische, \mathfrak{A} -messbare Funktion, so wird durch

$$\nu(A) := \int_A f d\mu$$

ein Maß ν auf \mathfrak{A} definiert. Man sagt ν sei *Maß mit Dichte f* bezüglich μ (Bauer, 1992, Satz 17.1, Definition 17.2).

Ein Maß ν auf \mathfrak{A} heißt *stetig bezüglich eines Maßes μ* auf \mathfrak{A} , oder kurz μ -stetig, wenn jede μ -Nullmenge auch ν -Nullmenge ist. Eine μ -Nullmenge $N \in \mathfrak{A}$ ist eine Menge mit $\mu(N) = 0$ (Bauer, 1992, Definition 17.7).

Die beiden letzten Aussagen werden durch folgenden Satz (Bauer, 1992, Satz 17.10) verknüpft:

Satz 1.3.1 (von Radon-Nikodym) *Seien μ, ν Maße auf einem messbaren Raum (X, \mathfrak{A}) . Ist μ σ -endlich, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. ν besitzt eine Dichte bezüglich μ .

1 Grundlagen

2. ν ist μ -stetig.

Den Abschluss dieses Kapitels bildet der im Folgenden des Öfteren verwendete *Transformationssatz für Lebesgue-Integrale* (Bauer, 1992, Satz 19.4).

Satz 1.3.2 *Für zwei offene Teilmengen G und G' des \mathbb{R}^n sei $\varphi : G \rightarrow G'$ ein C^1 -Diffeomorphismus von G auf G' . Eine auf G' definierte numerische Funktion f' ist genau dann über G' λ -integrierbar, wenn die Funktion $f' \circ \varphi |\det D\varphi|$ über G λ -integrierbar ist. Es gilt dann*

$$\int_{G'} f' d\lambda = \int_G f' \circ \varphi |\det D\varphi| d\lambda.$$

Eine bijektive Abbildung $\varphi : G \rightarrow G'$ ($G, G' \subset \mathbb{R}^n$ offen) heißt *C^1 -Diffeomorphismus*, wenn φ und deren Umkehrabbildung stetig und stetig differenzierbar sind (Siehe hierzu Walter (2002, S. 118-120)). $|\det D\varphi|$ bezeichnet den Betrag der Funktionaldeterminante von φ .

2 Zufällige Geraden im \mathbb{R}^2

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit zufälligen Geraden in der Ebene, also im \mathbb{R}^2 . Im ersten Abschnitt werden Grundlagen für die folgenden Betrachtungen besprochen. Weiter werden Typen und Konstruktionen verschiedener zufälliger Geraden vorgestellt und untersucht. Anschließend werden die Schnitte der vorgestellten zufälligen Geraden mit konvexen Körpern betrachtet – zum einen werden Erwartungswerte und Momente der Länge solcher Schnitte mit Hilfe der in Abschnitt 2.2 gefundenen Resultate bestimmt, zum anderen werden Verteilungen dieser Schnittlänge betrachtet. Im Anschluss daran wird auf die Verteilung des Schnittpunktes zweier zufälliger Geraden eingegangen.

Am Ende dieses Kapitels – Abschnitt 2.6 – befindet sich eine tabellarische Zusammenfassung der gefundenen Resultate.

2.1 Geradenraum und invariante Maße

In diesem Abschnitt wird die Menge der Geraden des \mathbb{R}^2 besprochen und auf deren Messbarkeit eingegangen. In 2.1.1 wird der Geradenraum \mathcal{G} eingeführt und darauf eine σ -Algebra \mathfrak{G} konstruiert, so dass $[\mathcal{G}, \mathfrak{G}]$ ein messbarer Raum ist. Es wird gezeigt, dass diese σ -Algebra \mathfrak{G} mit $\mathfrak{B}(\mathcal{G})$, also der Borel σ -Algebra in \mathcal{G} übereinstimmt, wobei die Ausführungen aus Abschnitt 1.3.1 verwendet werden.

In 2.1.2 werden Maße auf \mathcal{G} eingeführt, speziell wird die Form des bewegungsinvarianten Maßes μ auf \mathcal{G} angegeben.

Die beiden Teile 2.1.1 und 2.1.2 sind im wesentlichen dem Skriptum von Mecke (2003) entnommen.

2.1.1 Der Geradenraum \mathcal{G}

Im Folgenden sei die Menge der Geraden des $\mathbb{R}^2 = \mathcal{E}_1^2$ – mit \mathcal{G} bezeichnet.

Eine Gerade $g \in \mathcal{G}$ ist durch Angabe ihrer so genannten Geradenkoordinaten α und p eindeutig bestimmt, wobei $\alpha \in [0, \pi)$, sowie $p \in \mathbb{R}$ gelten. α gibt den Winkel zwischen dem Lot l auf g durch den Ursprung und der x_1 -Achse an. p bezeichnet den mit Vorzeichen versehenen Abstand von g zum

2 Zufällige Geraden im \mathbb{R}^2

Koordinatenursprung, also den Abstand des Lotfußpunktes P_L von l auf g zum Ursprung – positiv, falls P_L in der oberen, von der x_1 -Achse berandeten Halbebene oder auf der positiven x_1 -Achse liegt, ansonsten negativ beziehungsweise Null. Durch diese Geradenkoordinaten ist die Hesse-Normalform

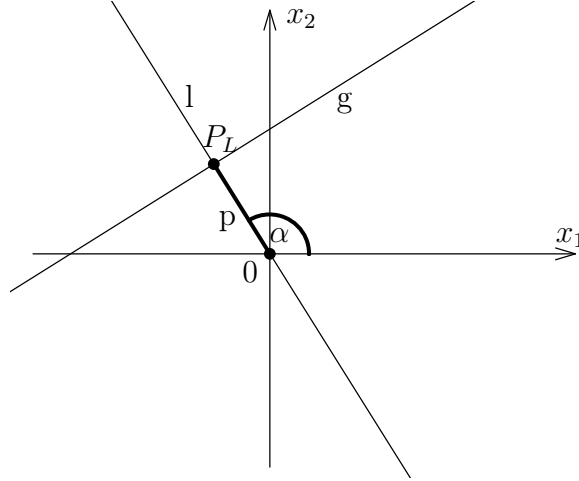


Abbildung 2.1: Die Geradenkoordinaten α , p .

$$g = \{x \in \mathbb{R}^2 : \langle x, e_\alpha \rangle = p\} \quad (2.1)$$

der Geradengleichung festgelegt, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt im \mathbb{R}^2 und $e_\alpha := \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$ bezeichnen.

Für $\Phi := [0, \pi) \times \mathbb{R}$ ist die Abbildung

$$\chi : \begin{array}{l} \mathcal{G} \rightarrow \Phi \\ g \mapsto (\alpha, p) \end{array}$$

eine Bijektion. Mit $\mathfrak{C} := \mathfrak{B}^2 \cap \Phi$ ist $\chi^{-1}(\mathfrak{C}) =: \mathfrak{G}$ eine σ -Algebra über \mathcal{G} , $[\mathcal{G}, \mathfrak{G}]$ ein messbarer Raum (siehe hierzu Abschnitt 1.3.1).

Die obige Variante der Konstruktion einer σ -Algebra \mathfrak{G} auf \mathcal{G} ist im Falle des \mathcal{E}_1^2 naheliegend, jedoch nicht die einzige. Allgemein lassen sich auf dem Raum der q -dimensionalen affinen Unterräume des $\mathbb{R}^n = \mathcal{E}_q^n$ σ -Algebren auf weitere Arten konstruieren, von denen eine im Fall der Geraden des \mathbb{R}^2 ebenfalls vorgestellt werden soll.

Vergleich zweier σ -Algebren auf \mathcal{G}

In einem metrischen Raum X wird eine Borel σ -Algebra erzeugt von den offenen Teilmengen von X , also von einem System der Form

$$\{A \subset X : A \text{ offen in } X\}.$$

Zur besseren Nachvollziehbarkeit der folgenden Überlegungen sollen hier die Definitionen eines metrischen Raumes, einer ϵ -Umgebung, sowie des Begriffes einer offenen Menge wiederholt werden. Ein metrischer Raum (X, d) ist eine nichtleere Menge X , ausgestattet mit einer Metrik d . Die Metrik d ist eine Abbildung $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in X$
2. $d(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$
3. $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall x, y, z \in X$

Für ein $\epsilon > 0$ ist eine ϵ -Umgebung $U_\epsilon(x)$ eines Punktes $x \in X$ definiert durch

$$U_\epsilon(x) := \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\}.$$

Eine Menge $A \subset X$ heißt offen, wenn für alle $x \in A$ ein $\epsilon > 0$ existiert mit $U_\epsilon(x) \subset A$, wenn also jeder Punkt x in A innerer Punkt ist.

Hieraus wird klar, dass die Eigenschaft *offen* abhängig ist von der zu Grunde liegenden Metrik. Im \mathbb{R}^2 wird im Folgenden die durch das Standardskalarprodukt erzeugte euklidische Metrik zu Grunde gelegt und mit $d(\cdot, \cdot)$ bezeichnet. Eine ϵ -Umgebung eines Punktes $x \in \mathbb{R}^2$ ist damit ein Kreis um x mit Radius ϵ .

\mathfrak{B}^2 wird auch von einem kleineren System erzeugt, nämlich vom System der offenen Rechtecke

$$\{\{(a_1, b_1) \times (a_2, b_2)\} \subset \mathbb{R}^2\}$$

(siehe Abschnitt 1.3.1). Als Teilmenge von \mathfrak{B}^2 wird die σ -Algebra \mathfrak{C} (siehe oben) also von Mengen der Form

$$\{(\alpha_1, \alpha_2) \times (p_1, p_2)\}$$

erzeugt, wobei (α_1, α_2) ein offenes Intervall in $[0, \pi)$ ist, (p_1, p_2) ein offenes Intervall in \mathbb{R} . Im Folgenden sei

$$\mathcal{A} := \{\{(\alpha_1, \alpha_2) \times (p_1, p_2)\} : (\alpha_1, \alpha_2) \subset [0, \pi), (p_1, p_2) \subset \mathbb{R}\}$$

2 Zufällige Geraden im \mathbb{R}^2

ein Erzeuger von \mathfrak{C} . Damit wird die σ -Algebra \mathfrak{G} auf \mathcal{G} (siehe oben) erzeugt von

$$\chi^{-1}(\mathcal{A}) = \{\chi^{-1}(A) : A \subset \mathcal{A}\}, \quad (2.2)$$

wobei χ die oben definierte Bijektion von \mathcal{G} nach Φ bezeichnet.

Nun lässt sich aber auch direkt eine Borel σ -Algebra auf \mathcal{G} konstruieren, indem eine Metrik \tilde{d} definiert und als Erzeuger wieder das System der offenen Teilmengen verwendet wird.

Eine Gerade $g \in \mathcal{G}$ ist eindeutig festgelegt durch einen linearen Unterraum $L \in \mathcal{L}_1^2$ (also die zu g parallele Gerade durch 0) und einen Punkt $x \in L^\perp$.

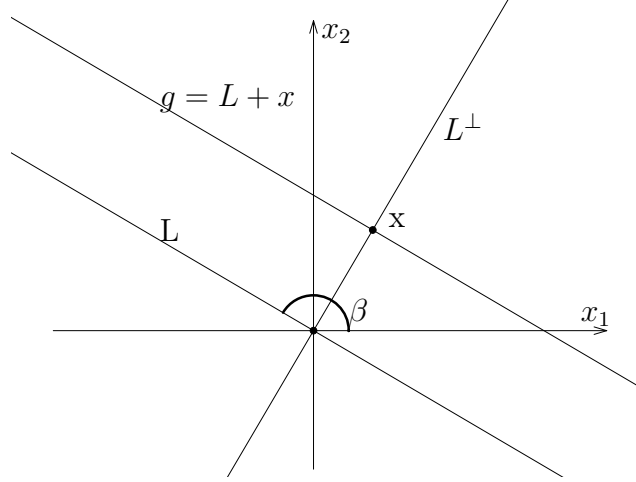


Abbildung 2.2: Charakterisierung einer Geraden durch L, x .

Seien $g^1 = L^1 + x^1$ und $g^2 = L^2 + x^2$ zwei Geraden in \mathcal{G} . Mit Hilfe der Hausdorff-Metrik (siehe Abschnitt 1.2.4) lässt sich der Abstand $d'(L^1, L^2)$ der beiden linearen Unterräume definieren durch

$$d'(L^1, L^2) := d_H(B^2 \cap L^1, B^2 \cap L^2), \quad (2.3)$$

wobei $d_H(\cdot, \cdot)$ den Hausdorff-Abstand bezeichnet. Offensichtlich erfüllt $d'(\cdot, \cdot)$ die Eigenschaften einer Metrik. Durch diese Definition ist der Abstand zweier linearer Unterräume $L^1, L^2 \in \mathcal{L}_q^n$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$, $q \in \{1, \dots, n\}$ gegeben.

Um nun einen Abstand zweier Geraden zu definieren, müssen noch die Punkte $x^1 \in L^{\perp(1)}$, $x^2 \in L^{\perp(2)}$ mit einbezogen werden. Dazu sei

$$d''(x^1, x^2) := \|d^1 - d^2\|, \quad (2.4)$$

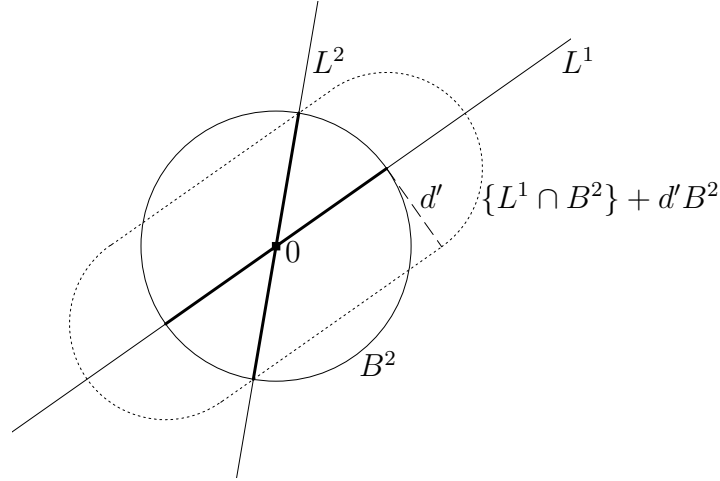


Abbildung 2.3: Abstand zweier linearer Unterräume.

wobei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm bezeichnet, sowie $d^i := \delta(x^i)\|x^i\|$, $i \in \{1, 2\}$ mit $\delta(x^i) = 1$, falls x^i in der oberen, von der x_1 -Achse berandeten Halbebene oder auf der positiven x_1 -Achse liegt, $\delta(x^i) = -1$ sonst. d^i entspricht also dem Parameter p_i der Geraden g^i im oben eingeführten Parameterraum Φ .

Damit lässt sich nun ein Abstand zweier Geraden $g^1 = L^1 + x^1$ und $g^2 = L^2 + x^2$ definieren durch

$$\tilde{d}(g^1, g^2) := \sqrt{d'(L^1, L^2)^2 + d''(x^1, x^2)^2}. \quad (2.5)$$

Offensichtlich erfüllt die durch Gleichung (2.5) definierte Abbildung die Eigenschaften einer Metrik (siehe oben). Nun kann für ein $\epsilon > 0$ eine ϵ -Umgebung einer Geraden g geschrieben werden als

$$U_\epsilon(g) := \left\{ g' \in \mathcal{G} : \tilde{d}(g, g') < \epsilon \right\},$$

womit offene Mengen bezüglich \tilde{d} erklärt sind. Als Erzeuger von $\mathfrak{B}(\mathcal{G})$ kann damit das System

$$\tilde{\mathcal{A}} := \left\{ A \subset \mathcal{G} : A \text{ offen bezüglich } \tilde{d} \right\} \quad (2.6)$$

gewählt werden.

Im Folgenden soll nun gezeigt werden, dass die beiden σ -Algebren \mathfrak{G} und $\mathfrak{B}(\mathcal{G})$ übereinstimmen. Hierzu werden spezielle Eigenschaften von \mathcal{G} verwendet, ein kleinerer Erzeuger von $\mathfrak{B}(\mathcal{G})$ angegeben und schließlich gezeigt, dass die Erzeuger beider σ -Algebren und damit $\mathfrak{B}(\mathcal{G})$ und \mathfrak{G} gleich sind.

2 Zufällige Geraden im \mathbb{R}^2

Ein linearer Unterraum L im \mathbb{R}^2 – hier aufgefasst als Ursprungsgerade – ist eindeutig durch einen Winkel $\beta \in [0, \pi)$ festgelegt, wobei β den Winkel zwischen L und der x_1 -Achse bezeichnet (siehe Abbildung 2.2). Andererseits ist dieser lineare Unterraum L auch durch einen Winkel $\alpha \in [0, \pi)$ festgelegt, wenn α der Winkel zwischen L^\perp und der x_1 -Achse ist, also dem Geradenparameter der Ursprungsgeraden L entspricht. Seien nun α_1, α_2 die zu $L^1, L^2 \in \mathcal{L}_1^2$ gehörigen Winkel. Dann lässt sich der durch Gleichung (2.3) definierte Abstand $d'(L^1, L^2)$ schreiben in der Form

$$d'(L^1, L^2) = \sin(\|\alpha_1 - \alpha_2\|).$$

Werden also nun für eine Gerade $g = L + x$ statt L und $x \in L^\perp$ der Winkel α , sowie d gemäß Gleichung (2.4) gegeben so kommt man wieder zur Darstellung der Geraden im Parameterraum $\Phi \subset \mathbb{R}^2$, wobei der Abstand zweier Geraden gegeben ist durch

$$\tilde{d}(g^1, g^2) := \sqrt{d'(L^1, L^2)^2 + d''(x^1, x^2)^2} = \sqrt{\sin^2(\|\alpha_1 - \alpha_2\|) + d''(x^1, x^2)^2}.$$

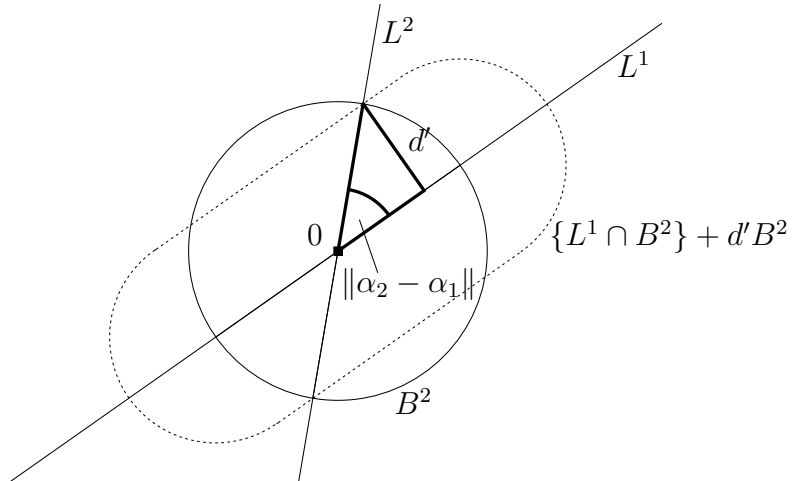


Abbildung 2.4: Abstand zweier linearer Unterräume in Abhängigkeit von α .

\mathcal{G} lässt sich somit wieder als Teilmenge Φ des \mathbb{R}^2 auffassen und damit wird $\mathfrak{B}(\mathcal{G})$ zum Beispiel vom System

$$\tilde{\mathcal{A}} := \{(\alpha_1, \alpha_2) \times (d^1, d^2) : (\alpha_1, \alpha_2) \subset [0, \pi), (d^1, d^2) \subset \mathbb{R}\}$$

erzeugt, wobei die Metrik \tilde{d} zu verwenden ist. Offensichtlich liegt jede Menge $A \subset \tilde{\mathcal{A}}$ in \mathcal{A} und umgekehrt, womit beide Erzeuger und damit \mathfrak{G} und $\mathfrak{B}(\mathcal{G})$ gleich sind.

Wäre der Abstand d' zweier linearer Unterräume – gemäß Gleichung (2.3) – wie folgt definiert, so wären die Metrik \tilde{d} auf \mathcal{G} und die euklidische Metrik in Φ gleich:

$$d'_{\Phi}(L^1, L^2) := \arcsin(d_H(B^2 \cap L^1, B^2 \cap L^2)). \quad (2.7)$$

Eine solche Definition ist möglich, da $d_H(B^2 \cap L^1, B^2 \cap L^2)$ nur Werte in $[0, 1]$ hat.

Anmerkung: Hier macht es vielleicht wenig Sinn, einen Abstand auf \mathcal{G} mit Hilfe der Hausdorff-Metrik einzuführen, wenn diese hier gar nicht verwendet wird. Der Vorteil dieser Variante besteht aber darin, dass mit Gleichung (2.5) für beliebige $n \in \mathbb{N}$, $q \in \{1, \dots, n\}$ der Abstand zweier Elemente $E_1, E_2 \in \mathcal{E}_q^n$ festgelegt ist und damit eine Borel σ -Algebra $\mathfrak{B}(\mathcal{E}_q^n)$ definiert wird.

Zur Definition von \tilde{d} (Gleichung (2.5)) hätte auch einfach die Summe von d' (Gleichung (2.3)) und d'' (Gleichung (2.4)) genügt. Diese spezielle Form wurde aber gewählt, um im Falle des \mathbb{R}^2 mit Gleichung (2.7) die euklidische Metrik zu liefern.

2.1.2 Geradenmaße

Für eine kompakte, konvexe Menge $K \subset \mathbb{R}^2$ sei

$$[K] := \{g \in \mathcal{G} : g \cap K \neq \emptyset\}, \quad (2.8)$$

also die Menge aller Geraden, die mit K einen nicht leeren Schnitt haben.

Definition 2.1.1 *Ein Maß μ auf $[\mathcal{G}, \mathfrak{G}]$ heiße lokal endlich, wenn für alle kompakten konvexen Mengen $K \subset \mathbb{R}^2$ $\mu([K]) < \infty$ gilt.*

Lemma 2.1.1 *Ein Maß μ auf $[\mathcal{G}, \mathfrak{G}]$ ist genau dann lokal endlich, wenn das Maß $\hat{\mu} := \mu \circ \chi^{-1}$ auf dem Parameterraum lokal endlich im üblichen Sinne ist.*

(Siehe hierzu Abschnitt 1.3.2.)

Ein bewegungsinvariantes Geradenmaß μ auf $[\mathcal{G}, \mathfrak{G}]$ ist ein translationsinvariantes Maß μ , das invariant gegen allen Drehungen des \mathbb{R}^2 um den Ursprung ist, was also bedeutet, dass das Maß μ die beiden Eigenschaften

2 Zufällige Geraden im \mathbb{R}^2

1. Translationsinvarianz

$$\forall A \subset \mathcal{G}, \forall z \in \mathbb{R}^2 : \mu(A + z) = \mu(A), \quad \text{mit } A + z = \{g + z : g \in A\}$$

2. Rotationsinvarianz

$$\forall A \subset \mathcal{G}, \forall \vartheta \in SO_2 : \mu(\vartheta A) = \mu(A)$$

hat.

Da jede Bewegung des \mathbb{R}^2 als Komposition einer Translation und Rotation darstellbar ist, implizieren die Eigenschaften 1 und 2 die Bewegungsinvarianz.

Behauptung 2.1.1 *Das Maß $\mu := (\kappa \otimes \lambda_1) \circ \chi$, mit einem endlichen Maß κ auf $[0, \pi)$ und dem 1-dimensionalen Lebesguemaß λ_1 auf \mathbb{R} , ist ein lokal endliches, translationsinvariantes Maß auf \mathcal{G} .*

Beweis: Für eine um $z \in \mathbb{R}^2$ verschobene Gerade g mit Koordinaten (α, p) gilt

$$x \in g + z \Leftrightarrow x - z \in g \stackrel{Gl.(2.1)}{\Leftrightarrow} \langle x - z, e_\alpha \rangle = p \Leftrightarrow \langle x, e_\alpha \rangle = p + \langle z, e_\alpha \rangle.$$

Hat also die Gerade g die Koordinaten (α, p) , so sind die Koordinaten (α', p') von $g + z$ gegeben durch

$$\alpha' = \alpha, \text{ sowie } p' = p + \langle z, e_\alpha \rangle. \quad (2.9)$$

Nun seien κ ein endliches Maß auf $[0, \pi)$, sowie λ_1 das 1-dimensionale Lebesguemaß auf \mathbb{R} . Mit Lemma 2.1.1 folgt die lokale Endlichkeit des Maßes $\mu = (\kappa \otimes \lambda_1) \circ \chi$, da κ ein endliches Maß und das Lebesguemaß lokal endlich sind.

Für $A \in \mathfrak{G}$ sei

$$A_\alpha := \{p \in \mathbb{R} : (\alpha, p) \in \chi(A)\}.$$

Damit wird für $A \in \mathfrak{G}$, $z \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \mu(A + z) &= \int_{\mathcal{G}} 1_{A+z}(g) d\mu(g) = \int_{\mathcal{G}} 1_A(g - z) d\mu(g) \\ &\stackrel{Gl.(2.9)}{=} \int_{[0, \pi)} \int_{\mathbb{R}} 1_{\chi(A)}(\alpha, p - \langle z, e_\alpha \rangle) d\lambda_1(p) d\kappa(\alpha) \\ &= \int_{[0, \pi)} \int_{\mathbb{R}} 1_{A_\alpha}(p - \langle z, e_\alpha \rangle) d\lambda_1(p) d\kappa(\alpha) \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_{[0, \pi)} \int_{\mathbb{R}} 1_{A_\alpha}(p) d\lambda_1(p) d\kappa(\alpha) = \dots = \mu(A) \end{aligned}$$

erhalten, was die Behauptung liefert.

Die Gleichheit (*) folgt dabei aus der Translationsinvarianz des Lebesguemaßes. ■

Behauptung 2.1.2 *Das Maß $\mu := (\lambda_1|_{[0,\pi)} \otimes \lambda_1) \circ \chi = \lambda_2|_\Phi \circ \chi$ ist ein lokal endliches, bewegungsinvariantes Maß auf \mathcal{G} .*

Beweis: Die lokale Endlichkeit, sowie die Translationsinvarianz von μ wurden im Beweis zu Behauptung 2.1.1 gezeigt. Bleibt also noch zu zeigen, dass μ invariant gegen Drehungen um der Ursprung ist.

Die Koordinaten (α', p') einer um $\beta \in [0, 2\pi)$ gedrehten Geraden g mit Koordinaten (α, p) sind gegeben durch

- $\alpha' = \alpha + \beta \mod \pi$
- $p' = p \cdot \epsilon(\alpha + \beta)$, wobei $\epsilon(\gamma) = \begin{cases} +1 & \gamma \in [0, \pi) \mod 2\pi \\ -1 & \text{sonst} \end{cases}$.

Sei wie eben

$$A_\alpha := \{p \in \mathbb{R} : (\alpha, p) \in \chi(A)\}, \quad \text{sowie} \\ A_p := \{\alpha \in [0, \pi) : (\alpha, p) \in \chi(A)\}.$$

Nun sei $\vartheta \in SO_2$ eine Drehung um den Winkel $\beta \in [0, 2\pi)$. Damit wird erhalten

$$\begin{aligned} \mu(\vartheta A) &= \int_{\mathcal{G}} 1_{\vartheta A}(g) d\mu(g) = \int_{\mathcal{G}} 1_A(\vartheta^{-1}g) d\mu(g) \\ &= \int_{[0,\pi)} \int_{\mathbb{R}} 1_{\chi(A)}(\alpha + (-\beta) \mod \pi, p \cdot \epsilon(\alpha - \beta)) d\lambda_1(p) d\lambda_1(\alpha) \\ &= \int_{[0,\pi)} \int_{\mathbb{R}} 1_{A_{\alpha+(-\beta) \mod \pi}}(p \cdot \epsilon(\alpha - \beta)) d\lambda_1(p) d\lambda_1(\alpha) \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_{[0,\pi)} \int_{\mathbb{R}} 1_{A_{\alpha+(-\beta) \mod \pi}}(p) d\lambda_1(p) d\lambda_1(\alpha) \\ &= \int_{[0,\pi)} \int_{\mathbb{R}} 1_{\chi(A)}(\alpha + (-\beta) \mod \pi, p) d\lambda_1(p) d\lambda_1(\alpha) \\ &= \int_{[0,\pi)} \int_{\mathbb{R}} 1_{A_p}(\alpha + (-\beta) \mod \pi) d\lambda_1(p) d\lambda_1(\alpha) \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_{[0,\pi)} \int_{\mathbb{R}} 1_{A_p}(\alpha) d\lambda_1(p) d\lambda_1(\alpha) = \dots = \mu(A), \end{aligned}$$

2 Zufällige Geraden im \mathbb{R}^2

was die Behauptung liefert. (Gleichheit $(*)$ folgt wieder aus der Bewegungsinvarianz des Lebesguemaßes.) ■

Der Fakt, dass es in \mathcal{E}_q^n ($n \in \mathbb{N}$, $q \in \{1, \dots, n\}$) bis auf Normierung genau ein lokal endliches, bewegungsinvariantes Maß gibt – siehe hierzu etwa Satz 1.3.4 im Buch von Schneider und Weil (1992) – führt mit Behauptung 2.1.2 zur abschließenden Aussage des Abschnitts 2.1:

Satz 2.1.1 *Das Maß $\mu := \lambda_2 \mid_{\Phi} \circ \chi$ ist bis auf Normierung das einzige lokal endliche, bewegungsinvariante Maß auf \mathcal{G} .*

Im Folgenden sei die Normierung von μ gegeben durch

$$\mu := \nu \otimes \lambda_1 \quad \text{mit } \nu := \frac{1}{\pi} \lambda_1 \mid_{[0, \pi)} . \quad (2.10)$$

2.2 Typen zufälliger Geraden

2.2.1 Vorbemerkungen

Eine zufällige Gerade lässt sich allgemein als Zufallsvariable, d.h. als Abbildung von einem gegebenen Wahrscheinlichkeitsraum nach $\mathcal{G} = \mathcal{E}_1^2$ ansehen.

Beschränkt man die Konstruktion zufälliger Geraden auf bestimmte Punktmengen des \mathbb{R}^2 – meist kompakte, konvexe Mengen – so kann man einfach zu behandelnde Wahrscheinlichkeitsmaße definieren. Aufgrund der Invarianzeigenschaften des in Abschnitt 2.1 eingeführten bewegungsinvarianten Maßes μ , beziehen sich die folgenden Konstruktionen auf eben dieses, insbesondere die so genannte IUZ-Gerade. Im Folgenden bezieht sich die Bezeichnung μ immer auf das in Abschnitt 2.1 eingeführte bewegungsinvariante Geradenmaß mit Normierung gemäß Gleichung (2.10).

In den folgenden Unterabschnitten werden Konstruktionen verschiedener zufälliger Geraden vorgestellt und deren Dichten bezüglich des Maßes μ angegeben.

Die Besprechung der in 2.2.2 eingeführten IUZ-Geraden, sowie der in den Abschnitten 2.2.4 und 2.2.5 vorgestellten Typen entspricht der in Schneider und Weil (1992) und findet sich auch in den Arbeiten von Kingman (1965, 1969).

Die Konstruktionen zufälliger Geraden unter Verwendung von Randpunkten wird aus Symmetriegründen nur für Kreise mit Radius r besprochen.

2.2.2 IUZ-Geraden (μ -zufällige Geraden)

Da μ ein lokal endliches Maß auf \mathcal{G} ist, muss die Betrachtung auf kompakte Mengen beschränkt werden, um zu gewährleisten, dass nur endliche Werte angenommen werden und μ sich somit zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß normieren lässt. Eine bedingte Wahrscheinlichkeit lässt sich dann folgendermaßen definieren:

Für einen gegebenen konvexen Körper K_0 sei entsprechend Gleichung (2.8)

$$[K_0] := \{g \in \mathcal{G} : g \cap K_0 \neq \emptyset\}.$$

Damit hat

$$\frac{\mu|_{[K_0]}}{\mu([K_0])}, \quad \text{mit } \mu|_{[K_0]}(\cdot) = \mu([K_0] \cap \cdot) \quad (2.11)$$

für $0 < \mu([K_0]) < \infty$ ausschließlich Werte in $[0, 1]$. Somit lässt sich das durch Gleichung (2.11) definierte Maß als Wahrscheinlichkeitsmaß deuten.

Für einen gegebenen konvexen Körper K_0 und einen konvexen Körper K mit $[K] \subset [K_0]$ lässt sich nun mit Hilfe von Gleichung (2.11) die bedingte Wahrscheinlichkeit angeben, dass eine zufällige Gerade g den Körper K trifft, unter der Bedingung, dass sie K_0 trifft. Diese Wahrscheinlichkeit ist gegeben durch

$$\mathbb{P}_\mu(g \cap K \neq \emptyset \mid g \cap K_0 \neq \emptyset) = \frac{\mu([K])}{\mu([K_0])}.$$

Eine zufällige Gerade mit Verteilung gemäß Gleichung (2.11) wird eine K_0 -isotrope Gerade, beziehungsweise IUZ-(isotrop- uniform- zufällig) Gerade durch K_0 genannt. Der Begriff isotrop bezieht sich hier auf die Rotationsinvarianz des Maßes μ . Der Schnitt einer IUZ-Geraden mit einem gegebenen konvexen Körper K wird oft als μ -zufällige Sehne bezeichnet, dementsprechend soll hier auch von einer μ -zufälligen Geraden gesprochen werden.

Mit der Crofton-Formel – Satz 1.2.2 – wird der folgende Satz erhalten:

Satz 2.2.1 Seien $K_0, K \in \mathcal{K}$ konvexe Körper mit $K \subset K_0$, $V_1(K_0) > 0$. Dann gilt

$$\mathbb{P}_\mu(g \cap K \neq \emptyset \mid g \cap K_0 \neq \emptyset) = \frac{V_1(K)}{V_1(K_0)} = \frac{U(K)}{U(K_0)}. \quad (2.12)$$

Beweis: Da hier Geraden g aus $\mathcal{G} = \mathcal{E}_1^2$ betrachtet werden, sind für die Crofton-Formel $q = 1$, sowie $n = 2$ zu verwenden. Das Maß μ_1 aus Satz 1.2.2 entspricht dem Maß μ aus Satz 2.1.1. ■

2 Zufällige Geraden im \mathbb{R}^2

Satz 2.2.1 besagt, die Wahrscheinlichkeit, dass eine IUZ-Gerade einen Körper K trifft – unter der Bedingung, dass sie den Körper K_0 trifft – hängt lediglich vom Verhältnis der Umfänge der beiden Körper ab.

Ist K_0 ein Kreis mit Radius r , so lässt sich eine IUZ-Gerade erzeugen, indem die Geradenkoordinaten (α, p) gleichverteilt in $([0, \pi) \times [-r, r]) \subset \Phi$ gewählt werden. Damit folgt offensichtlich (siehe Abbildung 2.5)

$$\chi^{-1}([0, \pi) \times [-r, r]) = [K_0].$$

Also gilt für beliebiges $A \in \mathfrak{G}$

$$\frac{\lambda_2|_{([0, \pi) \times [-r, r])}(\chi(A))}{\lambda_2([0, \pi) \times [-r, r])} = \frac{\lambda_2|_{([0, \pi) \times [-r, r])}(\chi(A))}{\lambda_2(\chi([K_0]))} = \frac{\mu|_{[K_0]}(A)}{\mu([K_0])}.$$

Das heißt, die so erzeugte zufällige Gerade hat eine Verteilung gemäß Gleichung (2.11), ist also eine IUZ-Gerade. Zur Konstruktion einer IUZ-Geraden

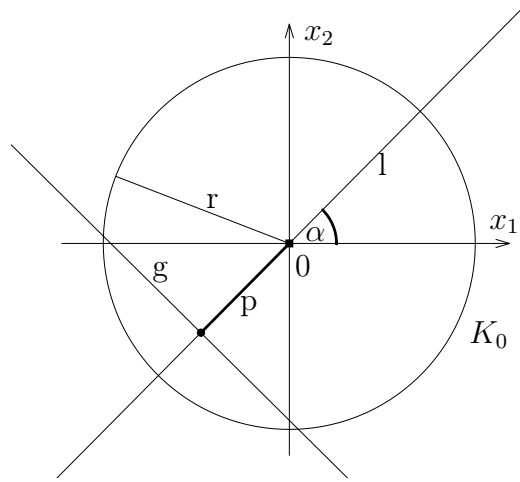


Abbildung 2.5: IUZ-Gerade durch einen Kreis mit Radius r .

durch einen beliebigen konvexen Körper K wird der folgende Satz, der sinngemäß aus dem Buch von Schneider und Weil (1992, Satz 5.1.5) übernommen wurde, zur Hilfe genommen.

Satz 2.2.2 Seien $K, M \in \mathcal{K}$ konvexe Körper mit $M \subset K$ und $V_1(M) > 0$. Ist f eine IUZ-Gerade durch K und g eine IUZ-Gerade durch M , so gilt

$$\mathbb{P}_\mu(f \in A \mid f \cap M \neq \emptyset) = \mathbb{P}_\mu(g \in A)$$

für alle $A \in \mathfrak{G}$.

Beweis: Seien $K, M \in \mathcal{K}$ mit $M \subset K$, $V_1(M) > 0$, f IUZ-Gerade durch K , sowie g IUZ-Gerade durch M .

Mit $M \subset K$ folgt $[M] \subset [K]$ und mit $V_1(K) > 0$ folgt daraus $\mu([M]) \neq 0$, sowie $\mu([K]) \neq 0$. Mit der Definition einer IUZ-Geraden und der Definition einer bedingten Wahrscheinlichkeit folgt nun

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\mu(f \in A | f \cap M \neq \emptyset) &= \frac{\mathbb{P}_\mu(\{f \in A\} \cap \{f \cap M \neq \emptyset\})}{\mathbb{P}_\mu(f \cap M \neq \emptyset)} = \frac{\mathbb{P}_\mu(f \in A \cap [M])}{\mathbb{P}_\mu(f \in [M])} \\ &= \frac{\frac{\mu(A \cap [M])}{\mu([K])}}{\frac{\mu([M])}{\mu([K])}} = \frac{\mu(A \cap [M])}{\mu([M])} \\ &= \mathbb{P}_\mu(g \in A). \end{aligned}$$

■

Demnach lässt sich eine IUZ-Gerade durch einen beliebigen konvexen Körper K in der Weise konstruieren, dass man so lange IUZ-Geraden durch einen Kreis, der K enthält, erzeugt, bis eine solche den Körper K trifft.

2.2.3 Nadelproblem von Buffon und Bertrand-Problem

Bevor weitere Typen zufälliger Geraden vorgestellt werden, soll hier nochmals – unter Verwendung der in Abschnitt 2.2.2 gefundenen Resultate – auf die in der Einleitung besprochenen Probleme von Buffon und Bertrand eingegangen werden.

Nadelproblem von Buffon

Bei dem Nadelproblem von Buffon ist die Wahrscheinlichkeit gesucht, dass eine zufällig geworfene Nadel N der Länge $l < d$ eine Gerade g einer Schar paralleler Geraden mit Abstand d trifft. Vertauscht man die Rollen von Nadel und Geraden, das heißt, wird die Nadel als fest angenommen, so lässt sich das Problem auf zufällige Geraden zurückführen, wobei das bewegungsinvariante Geradenmaß μ verwendet werden soll.

Es ist also die Wahrscheinlichkeit gesucht, dass eine μ -zufällige Gerade die Nadel N trifft. Wie in der Einleitung erläutert, reicht es aus, nur diejenige Gerade g_0 der Schar zu betrachten, die der Nadel N am nächsten liegt. Übertragen bedeutet dies, dass μ -zufällige Geraden bezüglich des Kreises $B(\frac{d}{2}, M)$ um den Nadelmittelpunkt M mit Radius $r = \frac{d}{2}$ betrachtet werden, also diejenigen Geraden, die mit $B(\frac{d}{2}, M)$ einen nicht leeren Schnitt haben. Somit ergibt sich für das zu Grunde liegende Wahrscheinlichkeitsmaß

2 Zufällige Geraden im \mathbb{R}^2

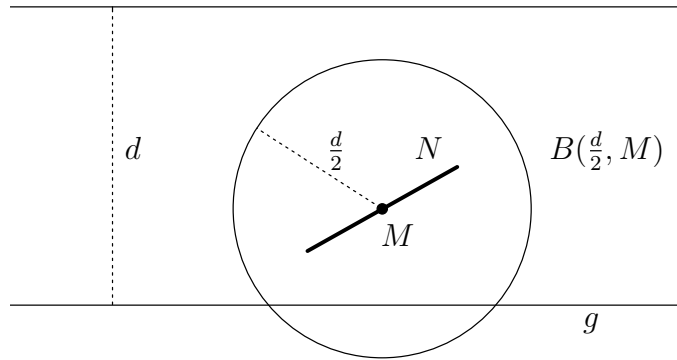


Abbildung 2.6: Zum Nadelproblem. Betrachtet werden μ -zufällige Geraden g bezüglich $B(\frac{d}{2}, M)$.

$$\frac{\mu|_{[B(\frac{d}{2}, M)]}}{\mu([B(\frac{d}{2}, M)])}.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also gegeben durch

$$\mathbb{P}_\mu(g \cap N \neq \emptyset \mid g \cap B(\frac{d}{2}, M) \neq \emptyset) = \frac{\mu([N])}{\mu([B(\frac{d}{2}, M)])} = \frac{V_1(N)}{V_1(B(\frac{d}{2}, M))} = \frac{2l}{\pi d},$$

was mit dem Resultat in der Einleitung übereinstimmt.

Bertrand-Problem

Bei diesem Problem sind aus der Menge aller Geraden, die einen Kreis mit Radius r schneiden diejenigen gesucht, deren Schnitte mit dem Kreis länger als die Seitenlänge eines einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks sind. Legt man auch hier das invariante Geradenmaß μ zu Grunde, so betrachtet man also μ -zufällige Geraden durch einen Kreis, der mit $B(r, M)$ bezeichnet sein soll. Das Wahrscheinlichkeitsmaß ist damit gegeben durch

$$\frac{\mu|_{[B(r, M)]}}{\mu([B(r, M)])}.$$

Von allen Geraden, die den Kreis $B(r, M)$ schneiden ergeben genau diejenigen einen längeren Schnitt, als die Seitenlänge des einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks, die auch den Kreis $B(\frac{r}{2}, M)$ schneiden. Die gesuchte Wahrschein-

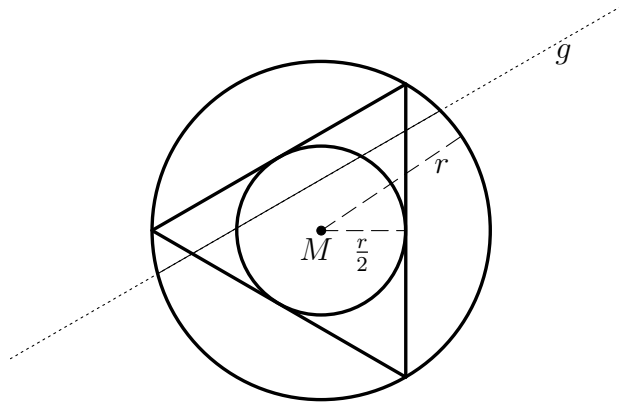


Abbildung 2.7: Zum Bertrand-Problem.

lichkeit ergibt sich somit zu

$$\mathbb{P}_\mu(g \cap B(\frac{r}{2}, M) \neq \emptyset \mid g \cap B(r, M) \neq \emptyset) = \frac{V_1(B(\frac{r}{2}, M))}{V_1(B(r, M))} = \frac{1}{2}.$$

Diese entspricht der zweiten, in der Einleitung zitierten Lösung von Bertrand.

2.2.4 Punkt-Richtungsform (ν -zufällige Geraden)

Eine weitere Möglichkeit der Konstruktion einer zufälligen Geraden bezüglich eines konvexen Körpers K besteht darin, einen eindimensionalen linearen Unterraum $L \in \mathcal{L}_1^2$, sowie einen Punkt $x \in K$ unabhängig gleichverteilt zu wählen. L kann dabei als Ursprungsgerade angesehen werden, der Punkt x gibt die Verschiebung dieser Geraden an. Die Gerade g ist dann gegeben durch

$$g := L + x.$$

Eine solche zufällige Gerade nennt sich eine *1-gewichtete zufällige Gerade durch K* . Eine verbreitete Bezeichnung für den Schnitt einer solchen zufälligen Geraden mit einem gegebenen Körper ist die der *ν -zufälligen Sehne*. Dementsprechend soll eine 1-gewichtete zufällige Gerade auch als *ν -zufällige Gerade* bezeichnet werden.

In Schneider und Weil (1992) wird gezeigt, dass es für $n \in \mathbb{N}$, $q \in \{1, \dots, n\}$ genau ein Maß ν_q auf \mathcal{L}_q^n gibt mit $\nu_q(\mathcal{L}_q^n) = 1$.

2 Zufällige Geraden im \mathbb{R}^2

Im \mathbb{R}^2 ist ein eindimensionaler linearer Unterraum L eindeutig durch einen Winkel $\beta \in [0, \pi)$ bestimmt, wobei β den Winkel zwischen L und der x_1 -Achse bezeichnet (siehe Abschnitt 2.1.1). Andererseits ist L auch durch einen Winkel $\alpha \in [0, \pi)$ eindeutig bestimmt, nämlich durch den Winkel α zwischen L^\perp und der x_1 -Achse (analog dem Geradenparameter α). Damit lässt sich ein Maß $\tilde{\nu}$ auf \mathcal{L}_1^2 finden, das ausschließlich Werte in $[0, 1]$ hat, also ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist. Hierzu sei eine Abbildung φ definiert durch

$$\varphi : \begin{array}{l} [0, \pi) \rightarrow \mathcal{L}_1^2 \\ \alpha \mapsto L \end{array} . \quad (2.13)$$

Nun kann das Wahrscheinlichkeitsmaß $\tilde{\nu}$ auf \mathcal{L}_1^2 definiert werden durch

$$\tilde{\nu} := \nu \circ \varphi^{-1},$$

mit dem Maß

$$\nu = \frac{\lambda_1|_{[0, \pi)}}{\lambda_1([0, \pi))} = \frac{1}{\pi} \cdot \lambda_1|_{[0, \pi)}, \quad (2.14)$$

gemäß Gleichung (2.10), Seite 28. Aus der Eindeutigkeit des Maßes ν_q auf \mathcal{L}_q^n folgt, dass das Maß $\tilde{\nu}$ obigem Maß ν_q im Falle $n = 2$, $q = 1$ entspricht.

Da das Maß

$$\frac{\lambda_2|_K}{\lambda_2(K)}$$

für $0 < \lambda_2(K) < \infty$ ein Maß auf K mit Werten in $[0, 1]$ ist, lässt sich ein Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P}_ν für 1-gewichtete zufällige Geraden auf der Menge $[K] \subset \mathcal{G}$ schreiben in der Form

$$\tilde{\nu} \otimes \frac{\lambda_2|_K}{\lambda_2(K)}, \quad (2.15)$$

wobei das durch Gleichung (2.15) gegebene Maß auf der Menge $\mathcal{L}_1^2 \otimes K$ definiert ist.

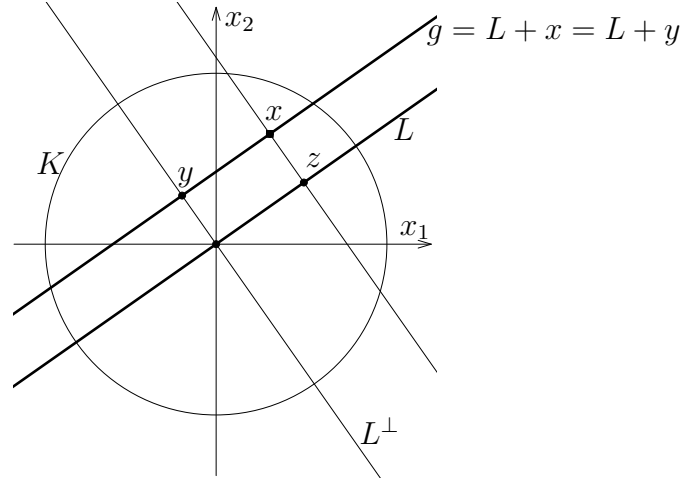
Damit ergibt sich nun für eine ν -zufällige Gerade durch K und Borelmengen $A \in \mathfrak{G}$

$$\mathbb{P}_\nu(g \in A) = \frac{1}{\lambda_2(K)} \int_{\mathcal{L}_1^2} \int_K 1_A(L + x) d\lambda_2(x) d\tilde{\nu}(L). \quad (2.16)$$

Für gegebenes L lässt sich der Punkt x in der Form

$$x = y + z$$

schreiben, wobei $z \in L$ gegeben ist als die orthogonale Projektion von x auf L , und y als Schnittpunkt $L^\perp \cap (L + x)$. Die Gerade $g = L + x$ kann damit


 Abbildung 2.8: Zerlegung der Koordinaten des Punktes x .

offensichtlich auch als $g = L + y$ geschrieben werden, der Abstand von 0 zu y entspricht dem Abstand von g zu 0 – also dem Betrag des Geradenparameters p , wie in Abschnitt 2.1.1 eingeführt. Damit lässt sich die in Gleichung (2.16) gegebene Wahrscheinlichkeit schreiben als

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\nu(g \in A) &= \frac{1}{\lambda_2(K)} \int_{\mathcal{L}_1^2} \int_{L^\perp} \int_L 1_A(L + y) \underbrace{1_K(y + z) d\lambda_L(z)}_{\int_L \dots = \lambda_1((L + y) \cap K)} d\lambda_{L^\perp}(y) d\tilde{\nu}(L) \\ &= \frac{1}{\lambda_2(K)} \int_{\mathcal{L}_1^2} \int_{L^\perp} \lambda_1((L + y) \cap K) 1_A(L + y) d\lambda_{L^\perp}(y) d\tilde{\nu}(L). \end{aligned}$$

Wie weiter oben bereits erwähnt, ist ein $L \in \mathcal{L}_1^2$ eindeutig durch einen Winkel $\alpha \in [0, \pi)$ bestimmt, der dem Geradenparameter α entspricht. Durch $p(y) := \delta(y) \|y\|$ ($\delta(y) = 1$, falls y in der oberen, von der x_1 -Achse berandeten Halbebene, oder auf der positiven x_1 -Achse liegt; $\delta(y) = -1$ sonst) ist der mit Vorzeichen versehene Abstand der Geraden g zum Koordinatenursprung bestimmt, also der Geradenparameter p . Durch L und y sind somit die Koordinaten der Geraden g gegeben und mit Gleichung (2.10) erhält man

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{L}_1^2} \int_{L^\perp} 1_A(L + y) d\lambda_{L^\perp}(y) d\tilde{\nu}(L) &= \int_{[0, \pi)} \int_{\mathbb{R}} 1_{\chi(A)}(\alpha, p) d\lambda_1(p) d\nu(\alpha) \\ &= \int_{\mathcal{G}} 1_A(g) d\mu(g). \end{aligned}$$

2 Zufällige Geraden im \mathbb{R}^2

Die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}_\nu(g \in A)$ wird somit zu

$$\mathbb{P}_\nu(g \in A) = \frac{1}{\lambda_2(K)} \int_{\mathcal{G}} 1_A(g) \lambda_1(g \cap K) d\mu(g). \quad (2.17)$$

Mit Gleichung (2.17) folgt, dass die Verteilung einer ν -zufälligen Geraden g stetig bezüglich des invarianten Geradenmaßes μ ist, was in folgendem Satz festgehalten wird.

Satz 2.2.3 *Sei g eine ν -zufällige Gerade durch K . Dann ist die Verteilung von g stetig bezüglich des invarianten Geradenmaßes μ mit zugehöriger Dichte*

$$g \mapsto \frac{1}{V_2(K)} V_1(g \cap K). \quad (2.18)$$

Mit Gleichung (2.11) und der Crofton-Formel wird schließlich der folgende Satz erhalten.

Satz 2.2.4 *Seien \tilde{g} eine μ -zufällige Gerade durch K und g eine ν -zufällige Gerade durch K . Dann ist die Verteilung von g stetig bezüglich der Verteilung von \tilde{g} mit Dichte*

$$g \mapsto \frac{2}{\pi} \frac{V_1(K)}{V_2(K)} V_1(g \cap K).$$

Beweis: Aus den Gleichungen (2.18) und (2.11) folgt die Stetigkeit der Verteilung von g , sowie die zugehörige Dichte

$$g \mapsto \mu([K]) \frac{1}{V_2(K)} V_1(g \cap K).$$

Mit der Crofton-Formel wird

$$\mu([K]) = \frac{2}{\pi} V_1(K)$$

erhalten, was die Behauptung liefert. ■

2.2.5 Zwei-Punkte-Form (λ -zufällige Geraden)

Ein dritter Weg, zufällige Geraden bezüglich eines konvexen Körpers K zu konstruieren, besteht darin, zwei Punkte y, z aus dem Inneren von $K - \text{int}(K)$ – unabhängig gleichverteilt zu wählen. Dann legen y und z eine zufällige Gerade g fest, die mit K einen nicht leeren Schnitt hat. Eine so definierte

2.2 Typen zufälliger Geraden

zufällige Gerade soll im Folgenden auch λ -zufällige Gerade genannt werden – entsprechend ihrem Schnitt mit einem gegebenen Körper.

Da das Maß

$$\frac{\lambda_2|_K}{\lambda_2(K)} \otimes \frac{\lambda_2|_K}{\lambda_2(K)} = \frac{1}{(\lambda_2(K))^2} \cdot \lambda_2|_K \otimes \lambda_2|_K$$

für $0 < \lambda_2(K) < \infty$ nur Werte in $[0, 1]$ besitzt, lässt sich die Verteilung von g beschreiben durch

$$\mathbb{P}_\lambda(g \in A) = \frac{1}{(V_2(K))^2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} 1_A(\text{aff}\{y, z\}) 1_K(y) 1_K(z) d\lambda_2(y) d\lambda_2(z), \quad (2.19)$$

für $A \in \mathfrak{G}$. $\text{aff}\{y, z\}$ bezeichnet dabei die affine Hülle von y und z , also die Gerade durch diese beiden Punkte.

Da die Punkte y und z durch ihre Koordinaten $y_i, z_i, i \in \{1, 2\}$, gegeben sind, lässt sich Gleichung (2.19) auch in der Form

$$\mathbb{P}_\lambda(g \in A) = \frac{1}{(V_2(K))^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} 1_A(\text{aff}\{y, z\}) 1_K(y) 1_K(z) d\lambda_1(y_1) d\lambda_1(y_2) d\lambda_1(z_1) d\lambda_1(z_2) \quad (2.20)$$

schreiben.

Nun lassen sich die Punkte y, z auch in Abhängigkeit von den Parametern α, p, d_y, d_z schreiben, wobei α, p die Koordinaten der Geraden g bezeichnen. Der Parameter d_y beschreibt den signierten Abstand des Punktes y vom Schnittpunkt P_L des Lotes l auf g durch den Ursprung mit g (siehe hierzu Santaló (2004)). d_y wird positiv gezählt, falls y in positiver x_2 -Richtung von P_L liegt, ansonsten negativ beziehungsweise null. Ist die Gerade g parallel zur x_1 -Achse, so ist d_y negativ, falls y in positiver x_1 -Richtung von P_L liegt. Entsprechend gibt d_z den signierten Abstand von z zu P_L an.

Die Koordinaten der Punkte y, z sind dann gegeben durch

$$\begin{aligned} y_1 &= p \cos \alpha - d_y \sin \alpha \\ y_2 &= p \sin \alpha + d_y \cos \alpha \\ z_1 &= p \cos \alpha - d_z \sin \alpha \\ z_2 &= p \sin \alpha + d_z \cos \alpha \end{aligned}$$

Damit wird eine Abbildung $f : (\alpha, p, d_y, d_z) \mapsto (y_1, y_2, z_1, z_2)$ definiert, deren

2 Zufällige Geraden im \mathbb{R}^2

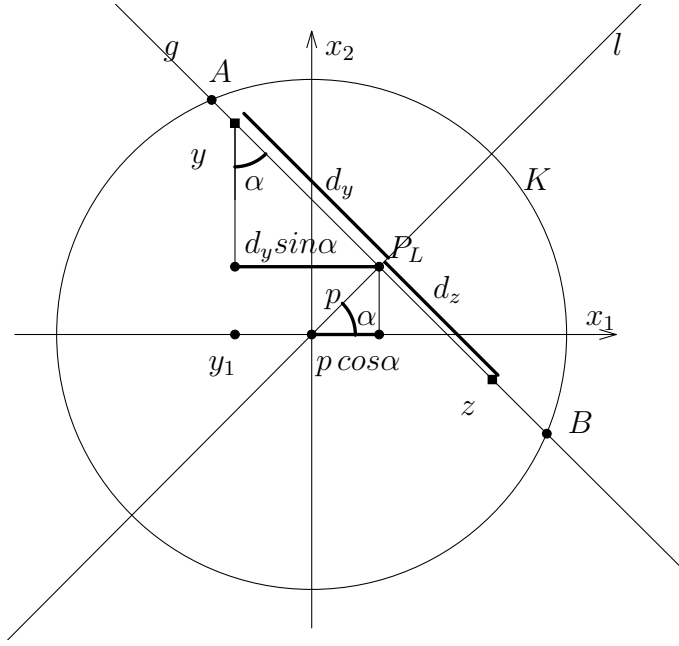


Abbildung 2.9: Abhängigkeit der Punkte y, z von α, p, d_y, d_z . Wegen der Übersichtlichkeit wurde nur y_1 mit Konstruktion angegeben.

Funktionaldeterminante gegeben ist durch

$$\det Df = \begin{vmatrix} -p \sin \alpha - d_y \cos \alpha & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ p \cos \alpha - d_y \sin \alpha & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ -p \sin \alpha - d_z \cos \alpha & \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ p \cos \alpha - d_z \sin \alpha & \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{vmatrix} = d_y - d_z. \quad (2.21)$$

Mit dem Transformationssatz für Lebesgueintegrale (Abschnitt 1.3.2, Satz 1.3.2) lässt sich die durch Gleichung (2.20) gegebene Verteilung auch schreiben als

$$\mathbb{P}_\lambda(g \in A) = \frac{1}{(V_2(K))^2} \int_{[0, \pi)} \int_{\mathbb{R}} \int_{g \cap K} \int_{g \cap K} 1_{\chi(A)}(\alpha, p) \|y - z\| d\lambda_{g \cap K}(y) d\lambda_{g \cap K}(z) d\lambda_1(p) d\lambda_1(\alpha). \quad (2.22)$$

g bezeichnet hierbei die durch α und p festgelegte Gerade, also $g = \chi^{-1}(\alpha, p)$. Weiter wurde verwendet, dass $|d_y - d_z|$ dem Betrag des Abstandes der Punkte y und z , also $\|y - z\|$ entspricht. Daher taucht in obiger Gleichung nicht der Betrag der Funktionaldeterminante der Abbildung f auf, sondern gleich die auf y, z transformierte Form.

2.2 Typen zufälliger Geraden

Unter Verwendung von Gleichung (2.10), Seite 28, vereinfacht sich Gleichung (2.22) zu

$$\mathbb{P}_\lambda(g \in A) = \frac{\pi}{(V_2(K))^2} \int_{\mathcal{G}} \int_{g \cap K} \int_{g \cap K} 1_A(g) \|y - z\| d\lambda_{g \cap K}(y) d\lambda_{g \cap K}(z) d\mu(g). \quad (2.23)$$

Hiermit wird abschließend der folgende Satz erhalten.

Satz 2.2.5 *Sei $K \in \mathcal{K}$ mit $\text{int}(K) \neq \emptyset$. Die Verteilung einer zufälligen Geraden g , die durch zwei unabhängig gleichverteilte Punkte $y, z \in \text{int}(K)$ erzeugt wird, ist stetig bezüglich des invarianten Geradenmaßes μ mit zugehöriger Dichte*

$$\begin{aligned} g &\mapsto \frac{\pi}{(V_2(K))^2} \int_{g \cap K} \int_{g \cap K} \|y - z\| d\lambda_{g \cap K}(y) d\lambda_{g \cap K}(z) \\ &= \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{(V_2(K))^2} \cdot (V_1(g \cap K))^3. \end{aligned}$$

Beweis: Sei $K \in \mathcal{K}$ mit $\text{int}(K) \neq \emptyset$. Die Stetigkeit der Verteilung von g bezüglich μ mit zugehöriger Dichte

$$g \mapsto \frac{\pi}{(V_2(K))^2} \int_{g \cap K} \int_{g \cap K} \|y - z\| d\lambda_{g \cap K}(y) d\lambda_{g \cap K}(z)$$

folgt aus Gleichung (2.23). Für gegebenes $g \in \mathcal{G}$ seien A, B die Schnittpunkte von g mit $\text{bd}(K)$ (siehe Abbildung 2.9), weiter sei $d := \|A - B\|$ der Abstand von A zu B , das heißt $d = V_1(g \cap K)$. Damit lässt sich das doppelte Integral

$$\int_{g \cap K} \int_{g \cap K} \|y - z\| d\lambda_{g \cap K}(y) d\lambda_{g \cap K}(z)$$

in der Form

$$\int_0^d \int_0^d |t^0 - t^1| dt^0 dt^1$$

schreiben. Nun folgt

$$\begin{aligned} &\int_0^d \int_0^d |t^0 - t^1| dt^0 dt^1 = \int_0^d \frac{1}{2} [|t^0 - t^1|^2]_0^d dt^1 \\ &= \frac{1}{2} \int_0^d | (d - t^1)^2 - | - t^1|^2 | dt^1 \\ &= \frac{1}{2 \cdot 3} [- | (d - t^1)^3 + | - t^1|^3]_0^d \\ &= \frac{1}{3} d^3. \end{aligned}$$

Mit $d = V_1(g \cap K)$ folgt die Behauptung. ■

2.2.6 Randpunkt-Richtungsform (γ -zufällige Geraden)

Eine weitere Variante der Konstruktion zufälliger Geraden bezüglich eines gegebenen konvexen Körpers K besteht darin, einen zufälligen Punkt x gleichverteilt vom Rand von $K = \text{bd}(K)$ zu wählen und unabhängig davon eine Richtung entsprechend Abschnitt 2.2.4. Diese Richtung ist dann wieder durch einen Winkel $\alpha \in [0, \pi)$ gegeben und kann als linearer Unterraum $L \in \mathcal{L}_1^2$ aufgefasst werden, wobei α den Winkel zwischen L^\perp und der x_1 -Achse bezeichnet.

In dem Artikel von Enns und Ehlers (1981) wird der Schnitt einer solchen Geraden als γ -zufällige Sehne bezeichnet, analog soll die Gerade g als γ -zufällige Gerade bezeichnet werden.

Die zufällige Gerade g lässt sich wieder darstellen in der Form

$$g := L + x.$$

Als Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathcal{L}_1^2 kann wieder das Maß

$$\tilde{\nu} = \nu \circ \varphi^{-1}$$

verwendet werden, wobei φ und ν entsprechend Abschnitt 2.2.4 (Gleichungen (2.13) und (2.14)) gegeben sind.

Konstruktion bezüglich eines Kreises

Im Falle eines Kreises K mit Radius $r > 0$ ist ein Randpunkt x eindeutig durch einen Winkel $\gamma \in [0, 2\pi)$ festgelegt über

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos \gamma \\ r \cdot \sin \gamma \end{pmatrix}.$$

Mit der Abbildung

$$\vartheta : \begin{array}{l} [0, 2\pi) \rightarrow \text{bd}(K) \\ \gamma \mapsto x \end{array}$$

lässt sich ein Wahrscheinlichkeitsmaß ρ auf $\text{bd}(K)$ angeben gemäß

$$\rho := \frac{\lambda_1|_{[0, 2\pi)}}{\lambda_1([0, 2\pi))} \circ \vartheta^{-1} = \frac{1}{2\pi} \cdot \lambda_1|_{[0, 2\pi)} \circ \vartheta^{-1}.$$

2.2 Typen zufälliger Geraden

Für eine Menge $A \in \mathfrak{G}$ lässt sich somit die Wahrscheinlichkeit $g \in A$ schreiben als

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_\gamma(g \in A) &= \int_{\mathcal{L}_1^2} \int_{\text{bd}(K)} 1_A(L+x) d\rho(x) d\tilde{\nu}(L) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{[0,\pi)} \int_{[0,2\pi)} 1_A(L(\alpha) + x(\gamma)) d\lambda_1(\gamma) d\nu(\alpha).\end{aligned}\tag{2.24}$$

Sind die Geradenkoordinaten α und p von g , sowie ein weiterer Parameter ξ gegeben, so lässt sich daraus der Winkel γ bestimmen. ξ ist dabei wie folgt definiert (siehe Abbildung 2.10):

Sei P_L der Schnittpunkt der Geraden $g(=L+x)$ mit L^\perp und weiter P_Σ der Schnittpunkt der Halbgeraden $0P_L^+$ – also derjenigen Halbgeraden, die in 0 beginnt und P_L enthält – mit $\text{bd}(K)$.

Im Falle

- $|p| > 0$ gilt
 - $\xi = -1$, falls für den Kreisbogen $\sphericalangle(x, 0, P_\Sigma)$ gilt $\sphericalangle(x, 0, P_\Sigma) < \pi r$,
 - $\xi = 1$, falls $\sphericalangle(x, 0, P_\Sigma) > \pi r$.

Dabei ist der Kreisbogen im mathematischen Sinne – das heißt gegen den Uhrzeigersinn – orientiert.

Im Falle

- $p = 0$ gilt
 - $\xi = -1$, falls x in der rechten, von der x_2 -Achse berandeten Halbebene oder auf der negativen x_2 -Achse liegt,
 - $\xi = 1$, sonst.

Wird ein Winkel δ definiert als

$$\delta := \arccos\left(\frac{|p|}{r}\right),\tag{2.25}$$

so berechnet sich für gegebene α , p , ξ der Winkel γ gemäß

$$\gamma = \begin{cases} (\alpha + \xi \cdot \delta) \mod 2\pi, & \text{für } p \geq 0, \\ (\alpha + \xi \cdot \delta + \pi) \mod 2\pi, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(Siehe Abbildung 2.10.)

Unter Berücksichtigung der Definition des Winkels δ ergibt sich

2 Zufällige Geraden im \mathbb{R}^2

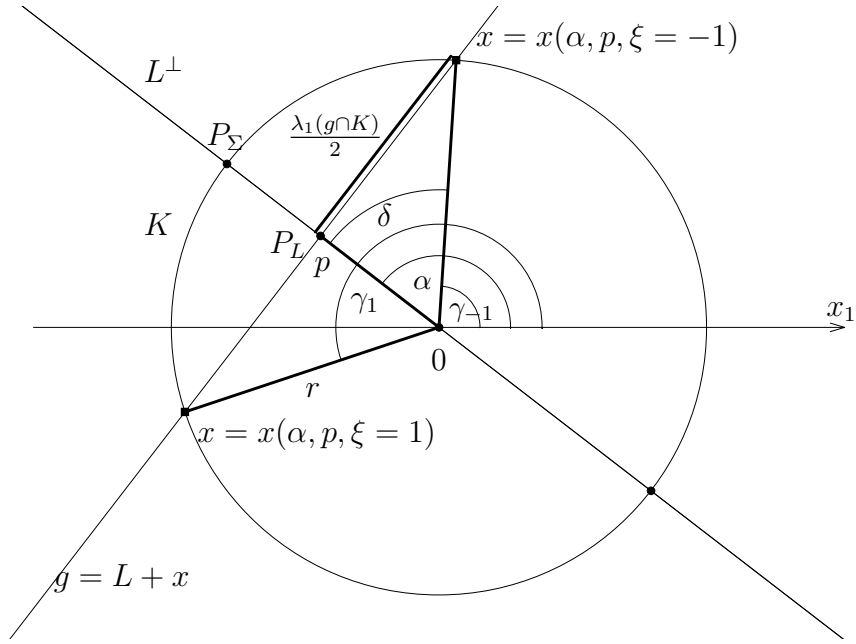


Abbildung 2.10: Zufällige Gerade durch einen Randpunkt x und Richtung L .

$$\frac{\partial \gamma}{\partial p} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\xi}{\sqrt{1 - \frac{p^2}{r^2}}} = -\frac{\xi}{\sqrt{r^2 - p^2}} = -\frac{2\xi}{\lambda_1(g \cap K)}.$$

Damit lässt sich nun die durch Gleichung (2.24) gegebene Wahrscheinlichkeit schreiben als

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\gamma(g \in A) &= \sum_{\xi \in \{-1, 1\}} \frac{1}{2\pi} \int_{[0, \pi)} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial \gamma}{\partial p} \right| 1_{\chi(A)}(\alpha, p) d\lambda_1(p) d\nu(\alpha) \\ &= \frac{2}{2\pi} \int_{[0, \pi)} \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{\lambda_1(g \cap K)} 1_{\chi(A)}(\alpha, p) d\lambda_1(p) d\nu(\alpha) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{\mathcal{G}} \frac{1}{\lambda_1(g \cap K)} 1_A(g) d\mu(g). \end{aligned}$$

Mit diesem Resultat wird abschließend der folgende Satz erhalten:

Satz 2.2.6 *Seien K ein Kreis mit Radius $r > 0$ und $g = L + x$ eine zufällige Gerade, festgelegt durch einen Punkt $x \in \text{bd}(K)$ und einen linearen Unterraum $L \in \mathcal{L}_1^2$ – beide unabhängig gleichverteilt. Dann ist die Verteilung von*

g stetig bezüglich des invarianten Geradenmaßes μ mit zugehöriger Dichte

$$g \mapsto \frac{2}{\pi \cdot V_1(g \cap K)}.$$

2.2.7 Zwei-Randpunkte-Form (β -zufällige Geraden)

Durch zwei unabhängig gleichverteilte Punkte $y, z \in \text{bd}(K)$, $K \in \mathcal{K}$ wird wieder eine zufällige Gerade g definiert, die mit K einen nicht leeren Schnitt hat. Enns und Ehlers (1981) nennen diesen Schnitt *β -zufällige Sehne*, demgemäß wird die Gerade g als *β -zufällige Gerade* bezeichnet.

Konstruktion bezüglich eines Kreises

Für einen Kreis K mit Radius $r > 0$ sind die beiden Punkte y, z wie eben durch zwei Winkel $\gamma_y, \gamma_z \in [0, 2\pi)$ gegeben. Damit kann wieder obiges (Abschnitt 2.2.6) Wahrscheinlichkeitsmaß

$$\rho = \frac{1}{2\pi} \cdot \lambda_1|_{[0, 2\pi)} \circ \vartheta^{-1}$$

verwendet werden.

Für eine Menge $A \in \mathfrak{G}$ ist dann die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}_\beta(g \in A)$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\beta(g \in A) &= \int_{\text{bd}(K)} \int_{\text{bd}(K)} 1_{A \text{ aff } \{y, z\}} d\rho(y) d\rho(z) \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{[0, 2\pi)} \int_{[0, 2\pi)} 1_{A \text{ aff } \{y(\gamma_y), z(\gamma_z)\}} d\lambda_1(\gamma_y) d\lambda_1(\gamma_z). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Aus den Geradenkoordinaten α und p , sowie eines weiteren Parameters ξ lassen sich die zu x, y gehörigen Winkel γ_y , sowie γ_z bestimmen. Dabei bezeichnet ξ den zur Charakterisierung des Punktes y erforderlichen weiteren Parameter entsprechend Abschnitt 2.2.6. Damit ist auch der Punkt z vollständig gegeben, da y und z auf der selben Geraden g liegen und somit z durch $(-\xi)$ charakterisiert ist (siehe Abbildung 2.10).

Für gegebene α, p und ξ berechnen sich somit γ_y, γ_z mit δ gemäß Gleichung (2.25) zu

$$\begin{aligned} \gamma_y &= \begin{cases} (\alpha + \xi \cdot \delta) \mod 2\pi, & \text{für } p \geq 0 \\ (\alpha + \xi \cdot \delta + \pi) \mod 2\pi, & \text{für } p < 0 \end{cases} \\ \gamma_z &= \begin{cases} (\alpha - \xi \cdot \delta) \mod 2\pi, & \text{für } p \geq 0 \\ (\alpha - \xi \cdot \delta + \pi) \mod 2\pi, & \text{für } p < 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

2 Zufällige Geraden im \mathbb{R}^2

Für festes ξ wird damit eine Abbildung $f : (\alpha, p) \rightarrow (\gamma_y, \gamma_z)$ definiert, deren Funktionaldeterminante $\det Df$ gegeben durch

$$\det Df = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{r} \cdot \frac{\xi}{\sqrt{1-\frac{p^2}{r^2}}} \\ 1 & +\frac{1}{r} \cdot \frac{\xi}{\sqrt{1-\frac{p^2}{r^2}}} \end{vmatrix} = \frac{2\xi}{\sqrt{p^2 - r^2}} = \frac{4\xi}{\lambda_1(g \cap K)}.$$

Mit Hilfe des Transformationssatzes für Lebesgueintegrale ergibt sich für die in Gleichung (2.26) gegebene Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\beta(g \in A) &= \sum_{\xi \in \{-1, 1\}} \frac{1}{4\pi^2} \int_{[0, \pi)} \int_{\mathbb{R}} 1_{\chi(A)}(\alpha, p) \left| \frac{4\xi}{\lambda_1(g \cap K)} \right| d\lambda_1(p) d\lambda_1(\alpha) \\ &= \frac{2}{4\pi^2} \int_{[0, \pi)} \int_{\mathbb{R}} 1_{\chi(A)}(\alpha, p) \frac{4}{\lambda_1(g \cap K)} d\lambda_1(p) d\lambda_1(\alpha) \\ &= \frac{4\pi}{2\pi^2} \int_{[0, \pi)} \int_{\mathbb{R}} 1_{\chi(A)}(\alpha, p) \frac{1}{\lambda_1(g \cap K)} d\lambda_1(p) d\nu(\alpha) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{\mathcal{G}} 1_A(g) \frac{1}{\lambda_1(g \cap K)} d\mu(g). \end{aligned}$$

Der Faktor π in der dritten Zeile muss wegen der Normierung von μ (Gleichung (2.10), Seite 28) eingefügt werden.

Dies bedeutet, dass die Verteilung einer zufälligen Geraden durch zwei Randpunkte eines Kreises stetig bezüglich μ ist und weiter die gleiche Dichte bezüglich des invarianten Geradenmaßes besitzt, wie die Verteilung einer γ -zufälligen Geraden bezüglich dieses Kreises. Dieses Resultat wird in folgendem Satz festgehalten:

Satz 2.2.7 *Seien K ein Kreis mit Radius $r > 0$, g eine zufällige Gerade durch zwei unabhängig gleichverteilte Punkte $y, z \in \text{bd}(K)$. Dann ist die Verteilung von g stetig bezüglich des invarianten Geradenmaßes μ mit zugehöriger Dichte*

$$g \mapsto \frac{2}{\pi \cdot V_1(g \cap K)}.$$

Anschauliche Deutung von Satz 2.2.7

Satz 2.2.7 sagt aus, dass für einen Kreis K mit Radius $r > 0$ die Dichte der Verteilung einer β -zufälligen Geraden g durch K – bezüglich des invarianten Geradenmaßes μ – identisch ist mit der Dichte der Verteilung einer γ -zufälligen Geraden durch K bezüglich μ .

Sei also K ein Kreis mit Radius $r > 0$ und der Punkt $x \in \text{bd}(K)$ fest. Nun soll die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, dass im Falle

2.2 Typen zufälliger Geraden

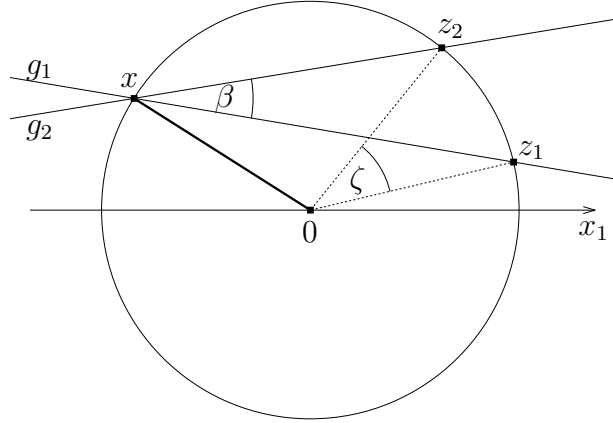


Abbildung 2.11: Zufällige Gerade durch einen Randpunkt x und Richtung L .

- a) durch Wahl eines zufälligen linearen Unterraumes L – festgelegt durch den Parameter α –, beziehungsweise
 - b) durch Wahl eines Randpunktes z – festgelegt durch einen Winkel γ_z –
- die so erzeugte zufällige Gerade g zwischen den Geraden g_1 und g_2 (siehe Abbildung 2.11) liegt. Werden die Geraden g_1, g_2 im Falle
- a) als $g_1 = x + L_1$ und $g_2 = x + L_2$ aufgefasst sowie g als $g = x + L$, so lässt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit mit Hilfe der zu L_1, L_2 gehörigen Winkel α_1 sowie α_2 angeben als

$$\mathbb{P}_{(a)} := \mathbb{P}(\alpha \in [\min\{\alpha_1, \alpha_2\}, \max\{\alpha_1, \alpha_2\}]).$$

Damit wird

$$\mathbb{P}_{(a)} = \nu((\alpha_1 - \alpha_2) \bmod \pi) =: \nu(\beta) = \frac{\beta}{\pi},$$

wobei ν das schon bekannte Bildmaß des Maßes $\tilde{\nu}$ auf \mathcal{L}_1^2 bezeichnet.

Fasst man die Geraden g, g_1 , sowie g_2 im Falle

- b) als $g = \text{aff}\{x, z(\gamma_z)\}$, $g_1 = \text{aff}\{x, z(\gamma_1)\}$, sowie $g_2 = \text{aff}\{x, z(\gamma_2)\}$ auf, so bestimmt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}_{(b)}$ über die zu z_1, z_2 gehörigen Winkel γ_1 und γ_2 . Damit ergibt sich

$$\mathbb{P}_{(b)} := \mathbb{P}(\gamma_z \in [\min\{\gamma_1, \gamma_2\}, \max\{\gamma_1, \gamma_2\}]).$$

2 Zufällige Geraden im \mathbb{R}^2

Dies bedeutet

$$\mathbb{P}_{(b)} = \frac{1}{2\pi} ((\gamma_1 - \gamma_2) \bmod 2\pi) =: \frac{\zeta}{2\pi}.$$

Nun bezeichnen β den Peripheriewinkel über dem Bogen $\widehat{z_1 z_2}$, sowie ζ den Zentriwinkel über diesem Bogen. Damit gilt

$$\zeta = 2 \cdot \beta.$$

Somit erhält man

$$\mathbb{P}_{(b)} = \frac{\zeta}{2\pi} = \frac{2\beta}{2\pi} = \frac{\beta}{\pi} = \mathbb{P}_{(a)}.$$

Beide Wahrscheinlichkeiten stimmen also überein, was bedeutet, dass die Dichten beider Verteilungen bezüglich μ ebenfalls übereinstimmen.

Bemerkung zur Dichte bezüglich μ

Für einen konvexen Körper K , für den ein Ursprung $0 \in \text{int}(K)$ definiert sei, lässt sich jeder Randpunkt x durch einen Winkel $\gamma \in [0, 2\pi)$ beschreiben (siehe Abbildung 2.12) gemäß

$$\begin{aligned} \vartheta : [0, 2\pi) &\rightarrow \text{bd}(K) \\ \gamma &\mapsto x. \end{aligned}$$

Lässt sich ein Teil des Randes von K als Strecke S beschreiben, so hat das Ereignis, dass zwei zufällig gewählte Punkte x, y in dieser Strecke liegen eine von null verschiedene Wahrscheinlichkeit. Seien P, Q die Endpunkte dieser Strecke mit $\vartheta^{-1}(P) := \alpha < \vartheta^{-1}(Q) := \beta$. Dann ist diese Wahrscheinlichkeit gegeben durch

$$\mathbb{P}(x, y \in S) = \mathbb{P}(y \in S \mid x \in S) = \frac{\lambda_1([\alpha, \beta])^2}{4\pi^2}.$$

Dies bedeutet aber, dass eine einzelne Gerade g – die Trägergerade $g_T(S)$ von S – eine von null verschiedene Wahrscheinlichkeit im Sinne von Gleichung (2.26), Seite 43 hat, und somit

$$\mathbb{P}_\beta(g = g_T(S)) = \frac{\lambda_1([\alpha, \beta])^2}{4\pi^2}.$$

Im Parameterraum Φ entspricht eine einzelne Gerade g einem Punkt. Da das invariante Geradenmaß μ auf \mathcal{G} durch das zweidimensionale Lebesguemaß auf

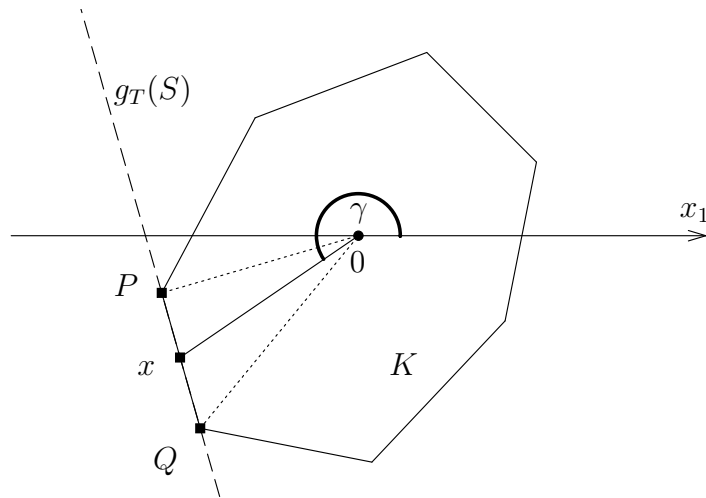


Abbildung 2.12: Parametrisierung eines Randpunktes.

Φ festgelegt ist, hat eine einzelne Gerade das Maß null. Die einelementige Menge $\{g_T(S)\}$ ist also μ -Nullmenge, jedoch keine Nullmenge im Sinne der Verteilung gemäß Gleichung (2.26). Mit Satz 1.3.1 folgt, dass die Verteilung von β -zufälligen Geraden bezüglich eines konvexen Körpers K , dessen Rand sich teilweise durch Strecken beschreiben lässt, keine Dichte bezüglich dem invarianten Geradenmaß μ besitzt.

2.2.8 Randpunkt-innerer Punkt-Form (α -zufällige Geraden)

Werden für einen gegebenen konvexen Körper K ein Punkt $y \in \text{bd}(K)$, sowie ein Punkt $z \in \text{int}(K)$ unabhängig gleichverteilt gewählt, so legen diese beiden Punkte eine zufällige Gerade g fest, deren Schnitt mit K nicht leer ist. Da dieser Schnitt von Enns und Ehlers (1981) als *α -zufällige Sehne* bezeichnet wird, soll die Gerade g die Bezeichnung *α -zufällige Gerade* erhalten.

Konstruktion bezüglich eines Kreises

Bezieht man die Konstruktion der Geraden g auf einen Kreis K mit Radius $r > 0$, so lässt sich als Wahrscheinlichkeitsmaß definieren

$$\frac{\lambda_2|_K}{\lambda_2(K)} \otimes \rho = \frac{\lambda_2|_K}{\lambda_2(K)} \otimes \frac{\lambda_1|_{[0,2\pi)}}{2\pi} \circ \vartheta^{-1},$$

2 Zufällige Geraden im \mathbb{R}^2

mit ρ und ϑ entsprechend Abschnitt 2.2.6, wobei der Randpunkt y wieder durch einen Winkel $\gamma \in [0, 2\pi)$ festgelegt ist.

Für eine Menge $A \in \mathfrak{G}$ kann damit die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(g \in A)$ geschrieben werden als

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(g \in A) &= \frac{1}{\lambda_2(K)} \int_{\text{bd}(K)} \int_K 1_A \text{aff} \{y, z\} d\lambda_2(z) d\rho(y) \\ &= \frac{1}{2\pi \cdot \lambda_2(K)} \int_{[0, 2\pi)} \int_K 1_A (\text{aff} \{y(\gamma), z\}) d\lambda_2(z) d\lambda_1(\gamma).\end{aligned}$$

Da der innere Punkt z gegeben ist durch seine Koordinaten z_1, z_2 kann diese Wahrscheinlichkeit ausgedrückt werden durch

$$\mathbb{P}(g \in A) = \frac{1}{2\pi \cdot \lambda_2(K)} \int_{[0, 2\pi)} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} 1_A (\text{aff} \{y(\gamma), z\}) 1_K((z_1, z_2)) d\lambda_1(z_1) d\lambda_1(z_2) d\lambda_1(\gamma). \quad (2.27)$$

Sind andererseits die Geradenkoordinaten α, p , sowie d – der Abstand von z zum Lotfußpunkt P_L des Lotes l auf g durch Null, gemäß Abschnitt 2.2.5 –, und ξ gemäß Abschnitt 2.2.6 gegeben, so lassen sich z_1, z_2, γ berechnen durch

$$\begin{aligned}z_1 &= p \cos \alpha - d \sin \alpha \\ z_2 &= p \sin \alpha + d \cos \alpha \\ \gamma &= \begin{cases} (\alpha + \xi \cdot \delta) \bmod 2\pi & \text{für } p \geq 0 \\ (\alpha + \xi \cdot \delta + \pi) \bmod 2\pi & \text{für } p < 0 \end{cases},\end{aligned}$$

wobei sich der Winkel δ entsprechend Gleichung (2.25) berechnet als

$$\delta := \arccos \left(\frac{|p|}{r} \right).$$

Für festes ξ wird damit eine Abbildung $f : (\alpha, p, d) \rightarrow (z_1, z_2, \gamma)$ definiert, deren Funktionaldeterminante gegeben ist durch

$$\begin{aligned}\det Df &= \begin{vmatrix} -p \sin \alpha - d \cos \alpha & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ p \cos \alpha - d \sin \alpha & \sin \alpha & \cos \alpha \\ 1 & -\frac{1}{r} \frac{\xi}{\sqrt{1 - \frac{p^2}{r^2}}} & 0 \end{vmatrix} \\ &= 1 - \frac{d \cdot \xi}{\sqrt{r^2 - p^2}} = 1 - \frac{2 \cdot d \cdot \xi}{\lambda_1(g \cap K)}.\end{aligned}$$

2.2 Typen zufälliger Geraden

Mit $\tilde{d} := \frac{\lambda_1(g \cap K)}{2}$ lässt sich die durch Gleichung (2.27) gegebene Wahrscheinlichkeit auch schreiben in der Form

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(g \in A) &= \sum_{\xi \in \{-1, 1\}} \frac{1}{2\pi \cdot \lambda_2(K)} \int_{[0, \pi)} \int_{\mathbb{R}} \int_{-\tilde{d}}^{\tilde{d}} 1_{\chi(A)}(\alpha, p) \left| 1 - \frac{2 \cdot \xi \cdot d}{\lambda_1(g \cap K)} \right| \\
 &\quad d(d) d\lambda_1(p) d\lambda_1(\alpha) \\
 &= \sum_{\xi \in \{-1, 1\}} \frac{1}{2 \cdot \lambda_2(K)} \int_{\mathcal{G}} \int_{-\tilde{d}}^{\tilde{d}} 1_A(g) \left| 1 - \frac{2 \cdot \xi \cdot d}{\lambda_1(g \cap K)} \right| d(d) d\mu(g) \\
 &= \sum_{\xi \in \{-1, 1\}} \frac{1}{2 \cdot \lambda_2(K)} \int_{\mathcal{G}} \int_{-\tilde{d}}^{\tilde{d}} 1_A(g) \left| 1 - \frac{4 \cdot \xi \cdot d}{\tilde{d}} \right| d(d) d\mu(g)
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

Der Faktor π folgt aus der Normierung des invarianten Maßes μ .

Für feste α , p , sowie $\xi = -1$ berechnet sich

$$\int_{-\tilde{d}}^{\tilde{d}} \left| 1 - \frac{4 \cdot \xi \cdot d}{\tilde{d}} \right| d(d)$$

zu

$$\int_{-\tilde{d}}^{\tilde{d}} \left| 1 + \frac{4 \cdot d}{\tilde{d}} \right| d(d) = \left[\left| d + \frac{2 \cdot d^2}{\tilde{d}} \right| \right]_{-\tilde{d}}^{\tilde{d}} = 2 \cdot \tilde{d} = \lambda_1(g \cap K). \tag{2.29}$$

Für feste α , p , sowie $\xi = 1$ berechnet sich obiges Integral ebenfalls zu

$$\int_{-\tilde{d}}^{\tilde{d}} \left| 1 - \frac{4 \cdot d}{\tilde{d}} \right| d(d) = \left[\left| d - \frac{2 \cdot d^2}{\tilde{d}} \right| \right]_{-\tilde{d}}^{\tilde{d}} = 2 \cdot \tilde{d} = \lambda_1(g \cap K). \tag{2.30}$$

Mit den Gleichungen (2.29) und (2.30) wird die mit Gleichung (2.28) gegebene Wahrscheinlichkeit zu

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(g \in A) &= \frac{2}{2 \cdot \lambda_2(K)} \int_{\mathcal{G}} 1_A(g) \lambda_1(g \cap K) d\mu(g) \\
 &= \frac{1}{\lambda_2(K)} \int_{\mathcal{G}} 1_A(g) \lambda_1(g \cap K) d\mu(g).
 \end{aligned}$$

Dieses Resultat liefert den folgenden Satz:

Satz 2.2.8 *Seien K ein Kreis mit Radius $r > 0$, sowie g eine zufällige Gerade, festgelegt durch zwei unabhängig gleichverteilte Punkte $y \in \text{bd}(K)$*

2 Zufällige Geraden im \mathbb{R}^2

und $z \in \text{int}(K)$. Dann ist die Verteilung von g stetig bezüglich des invarianten Geradenmaßes μ mit zugehöriger Dichte

$$g \mapsto \frac{1}{V_2(K)} V_1(g \cap K).$$

Ein Vergleich mit Satz 2.2.3, Seite 36 zeigt, dass g die gleiche Dichte bezüglich μ besitzt wie, ν -zufällige Gerade – beide konstruiert bezüglich des Kreises K .

2.3 Erwartungswerte und Momente der Sehnenlängen

2.3.1 Vorbemerkungen

Die in Abschnitt 2.2 vorgestellten Typen zufälliger Geraden g wurden alle bezüglich eines gegebenen konvexen Körpers K konstruiert, mit dem sie aufgrund der Konstruktion einen nicht leeren Schnitt hatten. In diesem Abschnitt werden nun diese Schnitte betrachtet.

Die Menge $(g \cap K)$ wird als zufällige Sehne von K bezeichnet, weiter bezeichne die Zufallsvariable $\sigma_r(K)$, $r \in \{\mu, \nu, \lambda, \alpha, \beta, \gamma\}$ die Länge einer solchen zufälligen Sehne, also

$$\sigma_r(K) : \begin{cases} (\mathcal{G}, \mathbb{P}_r) & \rightarrow [0, \infty] \\ g & \mapsto \lambda_1(g \cap K) \end{cases}, \quad \text{für festes } K \in \mathcal{K}.$$

Im Folgenden werden die Erwartungswerte und Momente der Sehnenlängen der verschiedenen zufälligen Geraden bestimmt.

Die in den Abschnitten 2.3.2, 2.3.3 und 2.3.4 durchgeführte Besprechung der so genannten μ -, ν -, sowie λ -zufälligen Sehnen entstammt im wesentlichen dem Buch von Schneider und Weil (1992). Diese drei Fälle wurden in der Literatur recht häufig erwähnt, siehe z.B. Santaló (2004), Kingman (1965, 1969), Enns und Ehlers (1978), oder Coleman (1969).

In Enns und Ehlers (1981) werden Verteilungen, Momente und Erwartungswerte der Längen α -, β -, sowie γ -zufälliger Sehnen in allgemeiner Form, sowie für spezielle Beispiele bestimmt. Erwartungswerte und Momente dieser Länge bezüglich eines Kreises K sollen hier aber mit den in den letzten drei Abschnitten gefundenen Dichten bestimmt werden. Die Arbeiten von Enns und Ehlers (1978, 1980, 1981), werden in dem gesonderten Abschnitt 2.4 behandelt.

2.3 Erwartungswerte und Momente der Sehnenlängen

In Schneider und Weil (1992, S. 176) werden die so genannten *Sehnenpotenzintegrale* $I_k(K)$ für einen n -dimensionalen konvexen Körper $K \in \mathcal{K}$ im \mathbb{R}^n definiert durch

$$I_k(K) := \frac{\omega_n}{2} \int_{\mathcal{G}} V_1(K \cap g)^k d\mu(g), \quad k \geq 1. \quad (2.31)$$

mit $\omega_n = n\kappa_n$. Weiter wird dort – Satz 6.3.7 – folgender Satz bewiesen, der hier für zwei Dimensionen wiedergegeben wird:

Satz 2.3.1 *Für einen zweidimensionalen konvexen Körper $K \in \mathcal{K}$ gilt*

$$I_k(K) \leq I_k(B^2) \left(\frac{V_2(K)}{\pi} \right)^{(k+1)/2}$$

für $1 < k < 3$ und

$$I_k(K) \geq I_k(B^2) \left(\frac{V_2(K)}{\pi} \right)^{(k+1)/2}$$

für $k > 3$. Gleichheit gilt jeweils genau dann, wenn K eine Kugel ist.

Dabei ist

$$I_k(B^2) = 2 \cdot 2^{k-1} \frac{\pi \kappa_{k+1}}{\kappa_k}.$$

2.3.2 μ -zufällige Sehnen

Für einen gegebenen konvexen Körper K ist die Verteilung einer IUZ-Geraden g durch K mit Gleichung (2.11) gegeben als

$$\frac{\mu|_{[K]}}{\mu([K])} \stackrel{\text{Crofton}}{=} \frac{\pi}{2V_1(K)} \mu|_{[K]}.$$

Der Schnitt einer IUZ-Geraden g mit K wird als μ -zufällige Sehne von K bezeichnet, da in ihre Definition das invariante Geradenmaß μ eingeht.

Für die Momente der Sehnenlänge $\sigma_\mu(K)$ folgt damit

$$\mathbb{E}\sigma_\mu(K)^k = \frac{\pi}{2V_1(K)} \int_{\mathcal{G}} V_1(g \cap K)^k d\mu(g).$$

Der Erwartungswert der Sehnenlänge lässt sich nun mit Hilfe der Crofton-Formel angeben als

$$\mathbb{E}\sigma_\mu(K) = \frac{\pi}{2V_1(K)} \int_{\mathcal{G}} V_1(g \cap K) d\mu(g) = \frac{\pi V_2(K)}{2V_1(K)}.$$

2 Zufällige Geraden im \mathbb{R}^2

Mit $V_2(K) = A(K)$ und $2V_1(K) = U(K)$, wobei $A(K)$ den Flächeninhalt und $U(K)$ den Umfang von K bezeichnen, erhält man schließlich

$$\mathbb{E}\sigma_\mu(K) = \pi \cdot \frac{A(K)}{U(K)}. \quad (2.32)$$

Gleichung (2.32) besagt, dass der Erwartungswert der Länge einer μ -zufälligen Sehne von K vom Verhältnis Flächeninhalt zu Umfang des konvexen Körpers K abhängt.

Im Ebenen Fall besagt die isoperimetrische Ungleichung, dass von allen gegebenen konvexen Körpern mit gegebenem Flächeninhalt A genau die Kreise den kleinsten Umfang U haben. Dies führt mit Gleichung (2.32) zur Aussage, dass für konvexe Körper K mit gegebenem Flächeninhalt A der Erwartungswert der Schnittlänge einer IUZ-Geraden durch K im Falle eines Kreises maximal wird.

Wird eine IUZ-Gerade durch den Einheitskreis des \mathbb{R}^2 betrachtet, so ergibt sich für den Erwartungswert der Sehnenlänge

$$\mathbb{E}\sigma_\mu(B^2) = \pi \cdot \frac{\pi}{2\pi} = \frac{\pi}{2} \approx 1,5708.$$

2.3.3 ν -zufällige Sehnen

Der Schnitt einer ν -zufälligen Geraden g mit einem gegebenen konvexen Körper K wird – wie erwähnt – oft als *ν -zufällige Sehne* bezeichnet. Mit Satz 2.2.3, Seite 36, ist die Dichte von g bezüglich μ gegeben durch

$$g \mapsto \frac{1}{V_2(K)} V_1(g \cap K).$$

Daher ergibt sich für die Momente der Sehnenlänge

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\sigma_\nu(K)^k &= \frac{1}{V_2(K)} \int_{\mathcal{G}} V_1(g \cap K)^{k+1} d\mu(g) \\ &= \frac{2}{\omega_2} \cdot \frac{1}{V_2(K)} I_{k+1}(K). \end{aligned}$$

2.3 Erwartungswerte und Momente der Sehnenlängen

Satz 2.3.1 liefert damit folgende Ungleichung für den Erwartungswert:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\sigma_\nu(K) &= \frac{2}{\omega_2} \frac{1}{V_2(K)} I_2(K) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{V_2(K)} I_2(K) \\
&\leq \frac{1}{\pi} \frac{1}{V_2(K)} I_2(B^2) \left(\frac{V_2(K)}{\pi} \right)^{3/2} \\
&= \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{V_2(K)}{\pi} \right)^{1/2} I_2(B^2) \\
&= \frac{4\kappa_3}{\pi^2} \left(\frac{V_2(K)}{\pi} \right)^{1/2} = \frac{16}{3\pi} \left(\frac{V_2(K)}{\pi} \right)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Da für obige Ungleichung genau im Falle der Kugeln (hier also im Falle eines Kreises) Gleichheit gilt, folgt, dass der Erwartungswert der Sehnenlänge eines konvexen Körpers K mit gegebenem Volumen $V_2(K)$ genau dann maximal wird, wenn K ein Kreis ist. Im Falle $K = B^2$ berechnet sich der Erwartungswert zu

$$\mathbb{E}\sigma_\nu(B^2) = \frac{16}{3\pi} \cdot 1 \approx 1,6977.$$

2.3.4 λ -zufällige Sehnen

Sei g eine Gerade, die durch zwei unabhängig gleichverteilte Punkte $y, z \in \text{int}(K)$, $K \in \mathcal{K}$ definiert wird. Damit ist nach Satz 2.2.5, Seite 39, die Dichte von g bezüglich μ gegeben durch

$$g \mapsto \frac{\pi}{3 \cdot (V_2(K))^2} \cdot V_1(g \cap K)^3. \tag{2.34}$$

Die Sehne $(g \cap K)$ wird in der Literatur – siehe z.B. Enns und Ehlers (1978) – oft als λ -zufällige Sehne bezeichnet. Mit Gleichung (2.34) gilt für die Momente der Sehnenlänge

$$\mathbb{E}\sigma_\lambda(K)^k = \frac{\pi}{3 \cdot (V_2(K))^2} \int_{\mathcal{G}} V_1(g \cap K)^{3+k} d\mu(g).$$

Mit Satz 2.3.1 erhält man daher für den Erwartungswert der Sehnenlänge die Ungleichung

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\sigma_\lambda(K) &= \frac{\pi}{3 \cdot (V_2(K))^2} \int_{\mathcal{G}} V_1(g \cap K)^4 d\mu(g) = \frac{\pi}{3\pi(V_2(K))^2} I_4(K) \\
&\geq \frac{1}{3(V_2(K))^2} I_4(B^2) \left(\frac{V_2(K)}{\pi} \right)^{5/2} = \frac{1}{3\pi^2} I_4(B^2) \left(\frac{V_2(K)}{\pi} \right)^{1/2} \\
&= \frac{256}{45\pi} \left(\frac{V_2(K)}{\pi} \right)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{2.35}$$

2 Zufällige Geraden im \mathbb{R}^2

Im Gegensatz zur ν -zufälligen Sehne wird der Erwartungswert der Länge einer λ -zufälligen Sehne minimal, falls der konvexe Körper K , bezüglich dessen sie konstruiert wird, ein Kreis ist.

Im Falle $K = B^2$ erhält man somit für den Erwartungswert der Sehnenlänge

$$\mathbb{E}\sigma_\lambda(B^2) = \frac{256}{45\pi} \cdot 1 \approx 1,8108.$$

Ein Vergleich von Ungleichung (2.33) mit Ungleichung (2.35) liefert

$$\mathbb{E}\sigma_\nu(K) \leq \frac{16}{3\pi} \cdot \left(\frac{V_2(K)}{\pi} \right)^{1/2} < \frac{256}{45\pi} \cdot \left(\frac{V_2(K)}{\pi} \right)^{1/2} \leq \mathbb{E}\sigma_\lambda(K),$$

für beliebige $K \in \mathcal{K}$ mit $\text{int}(K) \neq \emptyset$. Dieses Resultat wird festgehalten in folgendem

Satz 2.3.2 *Für einen konvexen Körper K mit $\text{int}(K) \neq \emptyset$ gilt für die Erwartungswerte der Längen ν - beziehungsweise λ -zufälliger Sehnen durch K die Beziehung*

$$\mathbb{E}\sigma_\nu(K) < \mathbb{E}\sigma_\lambda(K).$$

2.3.5 γ -zufällige Sehnen

Der Schnitt eines gegebenen konvexen Körpers K mit einer zufälligen Geraden $g = L + x$, festgelegt durch einen zufälligen Punkt $x \in \text{bd}(K)$ und einen linearen Unterraum $L \in \mathcal{L}_1^2$ – beide unabhängig gleichverteilt – wird als γ -zufällige Sehne bezeichnet.

Ist der konvexe Körper K ein Kreis mit Radius r , so ist (siehe Satz 2.2.6, Seite 42) die Dichte der Verteilung von g bezüglich μ gegeben durch

$$g \mapsto \frac{2}{\pi \cdot V_1(g \cap K)}.$$

Damit erhält man für die Momente der Sehnenlänge

$$\mathbb{E}\sigma_\gamma(K)^k = \frac{2}{\pi} \int_{\mathcal{G}} V_1(g \cap K)^{k-1} d\mu(g).$$

Der Erwartungswert der Sehnenlänge ergibt sich also zu

$$\mathbb{E}\sigma_\gamma(K) = \frac{2}{\pi} \int_{\mathcal{G}} V_0(g \cap K) d\mu(g),$$

2.3 Erwartungswerte und Momente der Sehnenlängen

was mit der Crofton-Formel (Satz 1.2.2)

$$\mathbb{E}\sigma_\gamma(K) = \frac{2}{\pi} \cdot \alpha_{201} \cdot V_1(K) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 V_1(K) = \frac{4r}{\pi}$$

liefert. Im Falle $K = B^2$ ist der Erwartungswert der Sehnenlänge somit gegeben durch

$$\mathbb{E}\sigma_\gamma(B^2) = \frac{4}{\pi} \approx 1,2732.$$

2.3.6 β -zufällige Sehne

Der Schnitt einer zufälligen Geraden g , die durch zwei unabhängig gleichverteilte Punkte $y, z \in \text{bd}(K)$, $K \in \mathcal{K}$, festgelegt wird, mit einem gegebenen konvexen Körper K wird als β -zufällige Sehne bezeichnet.

Betrachtet man zufällige Sehnen bezüglich eines Kreises K , so ist mit Satz 2.2.7, Seite 44, die Dichte der Verteilung von g bezüglich μ gegeben durch

$$g \mapsto \frac{2}{\pi \cdot V_1(g \cap K)},$$

die der Dichte der Verteilung einer γ -zufälligen Geraden \tilde{g} bezüglich μ entspricht.

Dies bedeutet, dass die Gleichungen für die Momente und den Erwartungswert einer β -zufälligen Sehne identisch sind mit denen einer γ -zufälligen Sehne. Somit gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\sigma_\beta(K)^k &= \frac{2}{\pi} \int_{\mathcal{G}} V_1(g \cap K)^{k-1} d\mu(g), \\ \mathbb{E}\sigma_\beta(K) &= \frac{4r}{\pi}, \quad \text{sowie} \\ \mathbb{E}\sigma_\beta(B^2) &= \frac{4}{\pi} \approx 1,2732. \end{aligned}$$

2.3.7 α -zufällige Sehnen

Für eine zufällige Gerade g , die durch zwei unabhängig gleichverteilte Punkte $y \in \text{bd}(K)$, $z \in \text{int}(K)$, $K \in \mathcal{K}$ festgelegt wird, sei der Schnitt $g \cap K$ als α -zufällige Sehne bezeichnet.

Die Verteilung einer solchen zufälligen Geraden – konstruiert bezüglich eines Kreises K mit Radius r – hat nach Satz 2.2.8, Seite 49, die Dichte

$$g \mapsto \frac{1}{V_2(K)} \cdot V_1(g \cap K)$$

2 Zufällige Geraden im \mathbb{R}^2

bezüglich des invarianten Geradenmaßes μ . Diese Dichte entspricht der einer ν -zufälligen Geraden, womit die Gleichungen für den Erwartungswert und die Momente der Sehnenlänge einer ν -zufälligen Sehne identisch sind mit denen einer α -zufälligen.

Es ergeben sich

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\sigma_\alpha(K)^k &= \frac{2}{\omega_2} \cdot \frac{1}{V_2(K)} \cdot I_{k+1}(K), \\ \mathbb{E}\sigma_\alpha(K) &= \frac{16}{3\pi} \cdot \left(\frac{V_2(K)}{\pi}\right)^{1/2} = \frac{16r}{3\pi}, \quad \text{sowie} \\ \mathbb{E}\sigma_\alpha(B^2) &= \frac{16}{3\pi} \approx 1,6977.\end{aligned}$$

2.4 Verteilungen und weitere Ausdrücke für die Momente der Sehnenlängen

Im vorangegangenen Abschnitt wurden die Erwartungswerte der Länge des Schnittes einer zufälligen Geraden g mit einem konvexen Körper K bestimmt, bezüglich dessen g konstruiert wurde. Nur im Falle der IUZ-Geraden konnten für beliebige konvexe Körper K explizite Werte bestimmt werden. Nun soll nach der Verteilung der Sehnenlänge gefragt werden, also der Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}_r(\sigma_r(K) \leq l) =: F_r(l), \quad K \in \mathcal{K},$$

$r \in \{\mu, \nu, \lambda, \alpha, \beta, \gamma\}$. Die zugehörige Wahrscheinlichkeitsdichte sei mit $f_r(l)$ bezeichnet. Hier sei bemerkt, dass im Allgemeinen nicht gesichert ist, dass solch eine Dichte existiert. Gates (1987) schreibt hierzu

[...] Sulanke also shows that F^1 is continuous; it is usually assumed (but I believe unproven) that F is absolutely continuous with density f .

Im Folgenden soll angenommen werden, dass für einen konvexen Körper K die Verteilung der Sehnenlänge $F_r(l)$ eine Dichte $f_r(l)$ besitzt. Aus dieser werden dann weitere Ausdrücke für die Momente der Sehnenlänge abgeleitet. Dies wird zuerst in allgemeiner Form, dann für einige Konstruktionen an den Beispielen Kreis und Rechteck durchgeführt.

Sulanke (1965b) beschäftigt sich mit Verteilungen der Länge μ -zufälliger Sehnen und zeigt, dass die Verteilungsfunktion der Sehnenlänge bezüglich

¹Die Verteilung der Länge einer μ -zufälligen Sehne

eines zweidimensionalen konvexen Körpers K mit $\text{int}(K) \neq \emptyset$ stetig ist (Sulanke, 1965b, Satz 2).

Enns und Ehlers (1978, 1980, 1981) finden für allgemeine Dimensionen Ausdrücke für die Verteilungen der Längen α -, β -, γ -, sowie ν - und λ -zufälliger Sehnen und setzen sie in Bezug zu den entsprechenden Erwartungswerten, sowie speziellen Momenten der Sehnenlängen. Im Folgenden sollen diese Gedanken – übertragen auf zwei Dimensionen – wiedergegeben werden.

2.4.1 μ -, ν - und λ -zufällige Sehnen

Im Folgenden sei $K \in \mathcal{K}$ ein fester konvexer Körper im \mathbb{R}^2 mit $\text{int}(K) \neq \emptyset$, bezüglich dessen eine zufällige Gerade konstruiert wird. Zur Bestimmung der Verteilung ν - und λ -zufälliger Sehnen verwenden Enns und Ehlers folgende Beziehung

Satz 2.4.1 *Sei $K \in \mathcal{K}$ ein konvexer Körper mit $\text{int}(K) \neq \emptyset$. Falls die Verteilung der Länge μ -zufälliger Sehnen durch K eine Dichte $f_\mu(l)$ besitzt, so existieren auch die Dichten der Verteilungen der Längen ν -, sowie λ -zufälliger Sehnen durch K . Zwischen diesen Dichten besteht dann die Beziehung*

$$f_\nu(l) = c_1 \cdot l \cdot f_\mu(l) = c_2 \cdot l^{-2} \cdot f_\lambda(l),$$

mit den Konstanten

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{2V_1(K)}{\pi V_2(K)}, \\ c_2 &= \frac{1}{V_2(K)} \int_{\mathcal{G}} 1_{[K]}(g) \lambda_1(g \cap K)^3 d\mu(g). \end{aligned}$$

Beweis: Die Verteilung der Länge μ -zufälliger Sehnen durch K lässt sich schreiben als

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\sigma_\mu(K) \leq l) &= \frac{\mu(\{g \in [K] : \lambda_1(g \cap K) \leq l\})}{\mu([K])} \\ &= \frac{1}{\mu([K])} \cdot \int_{\mathcal{G}} 1_{\{g \in [K] : \lambda_1(g \cap K) \leq l\}}(g) d\mu(g) \\ &=: c_\mu \cdot \int_{\mathcal{G}} 1_{\{g \in [K] : \lambda_1(g \cap K) \leq l\}}(g) d\mu(g). \end{aligned} \tag{2.36}$$

2 Zufällige Geraden im \mathbb{R}^2

Mit den Sätzen 2.2.3, sowie 2.2.5 sind die Verteilungen der Längen ν - beziehungsweise λ -zufälliger Sehnen gegeben als

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\sigma_\nu(K) \leq l) &= \frac{\int_{\mathcal{G}} 1_{\{g \in [K]: \lambda_1(g \cap K) \leq l\}}(g) \cdot \lambda_1(g \cap K) d\mu(g)}{\int_{\mathcal{G}} 1_{[K]}(g) \cdot \lambda_1(g \cap K) d\mu(g)} \\ &=: c_\nu \cdot \int_{\mathcal{G}} 1_{\{g \in [K]: \lambda_1(g \cap K) \leq l\}}(g) \cdot \lambda_1(g \cap K) d\mu(g), \\ \mathbb{P}(\sigma_\lambda(K) \leq l) &= \frac{\int_{\mathcal{G}} 1_{\{g \in [K]: \lambda_1(g \cap K) \leq l\}}(g) \cdot \lambda_1(g \cap K)^3 d\mu(g)}{\int_{\mathcal{G}} 1_{[K]}(g) \cdot \lambda_1(g \cap K)^3 d\mu(g)} \\ &=: c_\lambda \cdot \int_{\mathcal{G}} 1_{\{g \in [K]: \lambda_1(g \cap K) \leq l\}}(g) \cdot \lambda_1(g \cap K)^3 d\mu(g),\end{aligned}\tag{2.37}$$

Nun lässt sich die Verteilung der Längen μ -zufälliger Sehnen auch schreiben als

$$F_\mu(l) = \int_0^l f_\mu(t) dt,$$

mit der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f_\mu(l) = \frac{d}{dl} F_\mu(l),$$

die nach Voraussetzung existieren soll. Mit Gleichung (2.36) lässt sich für $h \in \mathbb{R}$ damit schreiben

$$\begin{aligned}f_\mu(l) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_\mu(l+h) - F_\mu(l)}{h} \\ &= c_\mu \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \int_{\mathcal{G}} 1_{\{g \in [K]: \lambda_1(g \cap K) \in [\min\{l, l+h\}, \max\{l, l+h\}]\}}(g) d\mu(g).\end{aligned}\tag{2.38}$$

Analog erhält man mit den Gleichungen (2.37)

$$\begin{aligned}f_\nu(l) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_\nu(l+h) - F_\nu(l)}{h} \\ &= c_\nu \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \int_{\mathcal{G}} 1_{\{g \in [K]: \lambda_1(g \cap K) \in [\min\{l, l+h\}, \max\{l, l+h\}]\}}(g) \cdot \lambda_1(g \cap K) d\mu(g),\end{aligned}\tag{2.39}$$

sowie

$$\begin{aligned}f_\lambda(l) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_\lambda(l+h) - F_\lambda(l)}{h} \\ &= c_\lambda \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \int_{\mathcal{G}} 1_{\{g \in [K]: \lambda_1(g \cap K) \in [\min\{l, l+h\}, \max\{l, l+h\}]\}}(g) \cdot \lambda_1(g \cap K)^3 d\mu(g).\end{aligned}\tag{2.40}$$

2.4 Verteilungen und Momente der Sehnenlänge

Mit den Gleichungen (2.38) und (2.39) lässt sich $f_\nu(l)$ wie folgt abschätzen durch

a) für $h < 0$ gilt

$$\begin{aligned} f_\nu(l) &= c_\nu \lim_{h \nearrow 0} \frac{1}{h} \int_{\mathcal{G}} 1_{\{g \in [K] : \lambda_1(g \cap K) \in [l+h, l]\}}(g) \cdot \lambda_1(g \cap K) d\mu(g) \\ &\leq c_\nu \lim_{h \nearrow 0} \frac{1}{h} \int_{\mathcal{G}} 1_{\{g \in [K] : \lambda_1(g \cap K) \in [l+h, l]\}}(g) \cdot l d\mu(g) \\ &= \frac{c_\nu}{c_\mu} l \cdot f_\mu(l). \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} f_\nu(l) &= c_\nu \lim_{h \nearrow 0} \frac{1}{h} \int_{\mathcal{G}} 1_{\{g \in [K] : \lambda_1(g \cap K) \in [l+h, l]\}}(g) \cdot \lambda_1(g \cap K) d\mu(g) \\ &\geq c_\nu \lim_{h \nearrow 0} \frac{1}{h} \int_{\mathcal{G}} 1_{\{g \in [K] : \lambda_1(g \cap K) \in [l+h, l]\}}(g) \cdot (l+h) d\mu(g) \\ &= \frac{c_\nu}{c_\mu} l \cdot f_\mu(l). \end{aligned}$$

Insgesamt wird erhalten

$$f_\nu(l) = \frac{c_\nu}{c_\mu} l \cdot f_\mu(l).$$

b) für $h > 0$ gilt analog

$$\begin{aligned} f_\nu(l) &= c_\nu \lim_{h \searrow 0} \frac{1}{h} \int_{\mathcal{G}} 1_{\{g \in [K] : \lambda_1(g \cap K) \in [l, l+h]\}}(g) \cdot \lambda_1(g \cap K) d\mu(g) \\ &\geq c_\nu \lim_{h \searrow 0} \frac{1}{h} \int_{\mathcal{G}} 1_{\{g \in [K] : \lambda_1(g \cap K) \in [l, l+h]\}}(g) \cdot l d\mu(g) \\ &= \frac{c_\nu}{c_\mu} l \cdot f_\mu(l), \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} f_\nu(l) &= c_\nu \lim_{h \searrow 0} \frac{1}{h} \int_{\mathcal{G}} 1_{\{g \in [K] : \lambda_1(g \cap K) \in [l, l+h]\}}(g) \cdot \lambda_1(g \cap K) d\mu(g) \\ &\leq c_\nu \lim_{h \searrow 0} \frac{1}{h} \int_{\mathcal{G}} 1_{\{g \in [K] : \lambda_1(g \cap K) \in [l, l+h]\}}(g) \cdot (l+h) d\mu(g) \\ &= \frac{c_\nu}{c_\mu} l \cdot f_\mu(l), \end{aligned}$$

2 Zufällige Geraden im \mathbb{R}^2

was liefert

$$f_\nu(l) = \frac{c_\nu}{c_\mu} \cdot l \cdot f_\mu(l).$$

Insgesamt erhält man somit

$$f_\nu(l) = \frac{c_\nu}{c_\mu} \cdot l \cdot f_\mu(l). \quad (2.41)$$

Analog leitet man aus den Gleichungen (2.38) und (2.40) ab

$$f_\lambda(l) = \frac{c_\lambda}{c_\mu} \cdot l^3 \cdot f_\mu(l). \quad (2.42)$$

Die Konstanten sind dabei gegeben durch

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_\mu} &= \mu([K]) = \frac{2}{\pi} V_1(K), \\ \frac{1}{c_\nu} &= \int_{\mathcal{G}} 1_{[K]}(g) \lambda_1(g \cap K) d\mu(g) = V_2(K), \\ \frac{1}{c_\lambda} &= \int_{\mathcal{G}} 1_{[K]}(g) \lambda_1(g \cap K)^3 d\mu(g). \end{aligned}$$

Die Gleichungen (2.41) und (2.42) liefern schließlich Satz 2.4.1. ■

Das normierte Überlappungsvolumen $\Omega_K(l, \vartheta)$

In ihrer Arbeit führen Enns und Ehlers (1978) das so genannte *normierte Überlappungsvolumen* $\Omega_K(l, \vartheta)$ ein, welches wie folgt definiert wird. Sei K ein konvexer Körper mit nicht leerem Inneren, l eine positive reelle Zahl, sowie ϑ ein Winkel aus $[0, 2\pi)$. Durch ϑ wird ein Einheitsvektor $u = u(\vartheta) \in S^1$ festgelegt. Dann ist $\Omega_K(l, \vartheta)$ das Volumen (im Zweidimensionalen also die Fläche) des Schnittes von K mit dem um l in Richtung $u(\vartheta)$ verschobenen Körper K , dividiert durch $V_2(K)$. Damit lässt sich $\Omega_K(l, \vartheta)$ schreiben als

$$\Omega_K(l, \vartheta) = \frac{V_2(K \cap (K + l \cdot u(\vartheta)))}{V_2(K)}. \quad (2.43)$$

Weiter wird das *gemittelte Überlappungsvolumen* $\Omega_K(l)$ definiert als Erwartungswert von $\Omega_K(l, \vartheta)$ bezüglich ϑ , so normiert, dass $\Omega_K(0) = 1$ gilt. $\Omega_K(l)$ ist demnach gegeben durch

$$\begin{aligned} \Omega_K(l) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{V_2(K \cap (K + l \cdot u(\vartheta)))}{V_2(K)} d\vartheta \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{V_2(K)} \int_0^{2\pi} V_2(K \cap (K + l \cdot u(\vartheta))) d\vartheta. \end{aligned} \quad (2.44)$$

2.4 Verteilungen und Momente der Sehnenlänge

Da sich hier alle Konstruktionen auf konvexe Körper – also beschränkte Mengen – beziehen, existiert immer ein \tilde{l} , so dass für alle $l > \tilde{l}$ gilt $\Omega_K(l) = 0$.

Das Überlappungsvolumen $\Omega_K(l, \vartheta)$ steht in engem Zusammenhang mit dem so genannten *Kovariogramm* – der Funktion (hier übertragen auf Dimension Zwei)

$$g_K(x) = V_2(K \cap (K + x)), \quad x \in \mathbb{R}^2, K \in \mathcal{K}.$$

Diese Funktion findet sich in dem Buch von Matheron (1975), wobei dort noch nicht der Ausdruck Kovariogramm verwendet wird. Eine mit dem Kovariogramm verbundene Frage ist die so genannte *Vermutung von Matheron*, dass das Kovariogramm einen konvexen Körper bis auf Verschiebung und Punktspiegelung festlege. In zwei Dimensionen stimmt dies offenbar, falls der konvexe Körper gewisse Anforderungen erfüllt.

Einige nützliche Aussagen über das Kovariogramm und damit für $\Omega_K(l)$ sind in folgendem Satz enthalten, der sinngemäß, übertragen auf Zwei Dimensionen für einen konvexen Körper mit nicht leerem Inneren, aus dem Buch von Matheron (1975, Seite 86, Proposition 4.3.1) entnommen ist.

Satz 2.4.2 *Sei $K \in \mathcal{K}$ ein konvexer Körper mit $\text{int}(K) \neq \emptyset$, sowie $u \in S^1$ ein fester Einheitsvektor. Dann ist für $r > 0$ die Funktion*

$$r \mapsto g_K(r, u) := V_2(K \cap (K + r \cdot u))$$

stetig und monoton fallend. Diese Funktion ist für $r > 0$ mit $g_K(r, u) > 0$ stetig differenzierbar mit

$$\frac{dg_K}{dr}(r, u) = -\gamma(r, u) := -\lambda_1(\Pi_{u^\perp}(K \cap (K + r \cdot u))).$$

Weiter existiert an der Stelle $r = 0$ die rechtsseitige Ableitung mit

$$\frac{dg_K}{dr}(0, u) = -\gamma(0, u).$$

Dabei bezeichnet $\Pi_{u^\perp}(\cdot)$ die orthogonale Projektion von (\cdot) auf das orthogonale Komplement u^\perp von u . Die Funktion $g_K(r, u)$ ist mit diesem Satz stetig und weiter ab einem $\tilde{r} = \tilde{r}(u) > 0$ konstant Null. Das heißt, für alle $r > \tilde{r}$ ist $g_K(r, u)$ und damit $\Omega_K(l, \vartheta)$ unendlich oft stetig differenzierbar, wobei die jeweiligen Ableitungen konstant Null sind. Es bleibt also nur die Frage, ob $\gamma_K(r, u)$ an der Stelle \tilde{r} stetig ist.

2 Zufällige Geraden im \mathbb{R}^2

ν -zufällige Sehnen

Enns und Ehlers (1978) zeigen, dass für ν -zufällige Geraden g durch einen konvexen Körper K die folgende Beziehung gilt:

Satz 2.4.3 *Für die Wahrscheinlichkeitsdichte der Verteilung der Länge einer ν -zufälligen Sehne bezüglich eines konvexen Körpers K mit nicht leerem Inneren gilt*

$$f_\nu(l) = l \cdot \frac{d^2 \Omega_K(l)}{dl^2}. \quad (2.45)$$

Hier sei noch einmal bemerkt, dass vorausgesetzt, beziehungsweise angenommen wurde, dass die Dichte $f_\nu(l)$ existiert.

Vor dem Beweis von Satz 2.4.3 soll hier noch eine Bemerkung gemacht werden, um diesen mit der in der vorliegenden Arbeit getroffenen Definition einer ν -zufälligen Geraden führen zu können.

Enns und Ehlers definieren $\Omega_K(l, \vartheta)$ für Winkel $\vartheta \in [0, 2\pi)$. Es reichen jedoch auch Winkel $\vartheta \in [0, \pi)$, um alle möglichen Werte von $\Omega_K(l, \vartheta)$ im ersteren Sinn zu erhalten: Sei $K \in \mathcal{K}$ fest, $\vartheta \in [\pi, 2\pi)$, sowie $u \in S^1$ der durch ϑ festgelegte Einheitsvektor. Wird $\tilde{\vartheta}$ definiert als $\tilde{\vartheta} := \vartheta - \pi$, mit zugehörigem Einheitsvektor $\tilde{u} \in S^1$, so gilt $u = -\tilde{u}$, sowie (siehe Abbildung 2.13)

$$K \cap (K + u) = (K \cap (K + \tilde{u})) + u.$$

Mit der Translationsinvarianz des Lebesguemaßes folgt

$$V_2(K \cap (K + u)) = V_2(K \cap (K + \tilde{u})),$$

womit für $\vartheta \in [0, 2\pi)$ gilt

$$\Omega_K(l, \vartheta) = \Omega_K(l, \vartheta \mod \pi).$$

■

Im Folgenden wird ϑ also mit einem Winkel $\vartheta \in [0, \pi)$ identifiziert.

Beweis von Satz 2.4.3 (Enns und Ehlers, 1978): Sei $K \in \mathcal{K}$ mit $\text{int}(K) \neq \emptyset$, g eine Gerade, festgelegt durch einen Punkt $x \in \text{int}(K)$ und einen Winkel $\vartheta \in [0, \pi)$ – also eine ν -zufällige Gerade. Nun sei $\vartheta = \tilde{\vartheta}$ ein fester Winkel, sowie $L(\tilde{\vartheta})$ die zu $u(\tilde{\vartheta})$ senkrechte Gerade durch 0. Bezeichnet man die Punkte $x \in L(\tilde{\vartheta})$ mit \tilde{x} und eine Gerade, festgelegt durch \tilde{x} und $\tilde{\vartheta}$, mit $g_{(\tilde{x}, \tilde{\vartheta})}$, so lässt sich die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}_\nu(\sigma_\nu(K) > l | \vartheta = \tilde{\vartheta})$ schreiben als

2.4 Verteilungen und Momente der Sehnenlänge

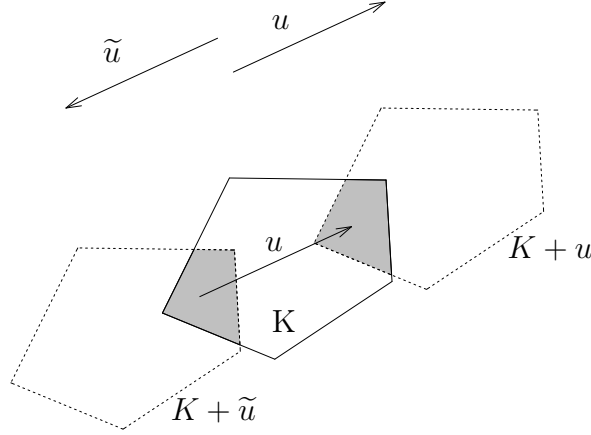


Abbildung 2.13: Zur Bemerkung zu $\Omega_K(l, \vartheta)$.

(siehe Abbildung 2.14)

$$\mathbb{P}_\nu(\sigma_\nu(K) > l | \vartheta = \tilde{\vartheta}) = \frac{1}{V_2(K)} \int_{L(\tilde{\vartheta})} 1_{(0, \infty)} \left(\lambda_1(g_{(\tilde{x}, \tilde{\vartheta})} \cap K) - l \right) \lambda_1 \left(g_{(\tilde{x}, \tilde{\vartheta})} \cap K \right) d\lambda_{L(\tilde{\vartheta})}(\tilde{x}). \quad (2.46)$$

Analog lässt sich $\Omega_K(l, \vartheta)$ schreiben als (siehe Abbildung 2.15)

$$\Omega(l, \vartheta) = \frac{1}{V_2(K)} \int_{L(\tilde{\vartheta})} 1_{(0, \infty)} \left(\lambda_1(g_{(\tilde{x}, \tilde{\vartheta})} \cap K) - l \right) \left(\lambda_1(g_{(\tilde{x}, \tilde{\vartheta})} \cap K) - l \right) d\lambda_{L(\tilde{\vartheta})}(\tilde{x}). \quad (2.47)$$

Ableiten von Gleichung (2.47) nach l liefert

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega_K}{\partial l}(l, \vartheta) &= -\frac{1}{V_2(K)} \int_{L(\tilde{\vartheta})} 1_{(0, \infty)} \left(\lambda_1(g_{(\tilde{x}, \tilde{\vartheta})} \cap K) - l \right) d\lambda_{L(\tilde{\vartheta})}(\tilde{x}) \\ &= \frac{1}{l} \left(\Omega_K(l, \vartheta) - \mathbb{P}_\nu \left(\sigma_\nu(K) > l | \vartheta = \tilde{\vartheta} \right) \right), \end{aligned} \quad (2.48)$$

was äquivalent ist zu

$$\begin{aligned} \bar{F}_\nu(l | \vartheta = \tilde{\vartheta}) &:= (1 - F_\nu(l | \vartheta = \tilde{\vartheta})) = \mathbb{P}_\nu \left(\sigma_\nu(K) > l | \vartheta = \tilde{\vartheta} \right) \\ &= \Omega_K(l, \vartheta) - l \cdot \frac{\partial \Omega_K}{\partial l}(l, \vartheta). \end{aligned}$$

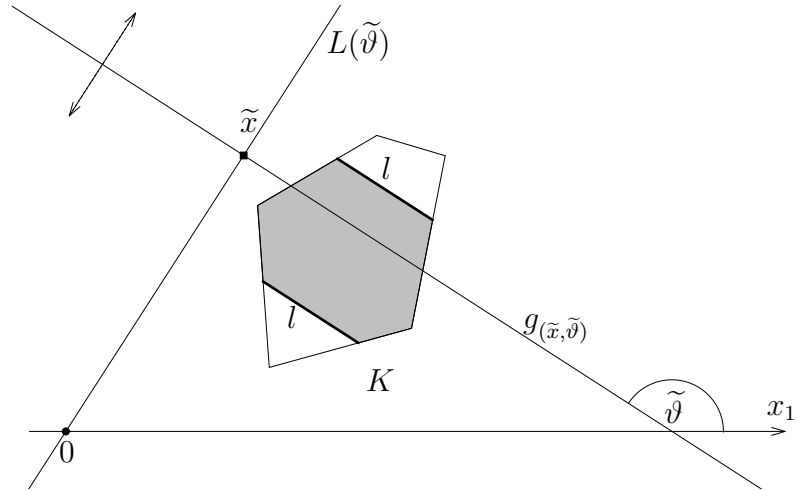


Abbildung 2.14: Zu $\mathbb{P}_\nu(\sigma_\nu(K) > l \mid \vartheta = \tilde{\vartheta})$. Die graue Fläche entspricht dem Wert des Integrals in Gleichung (2.46).

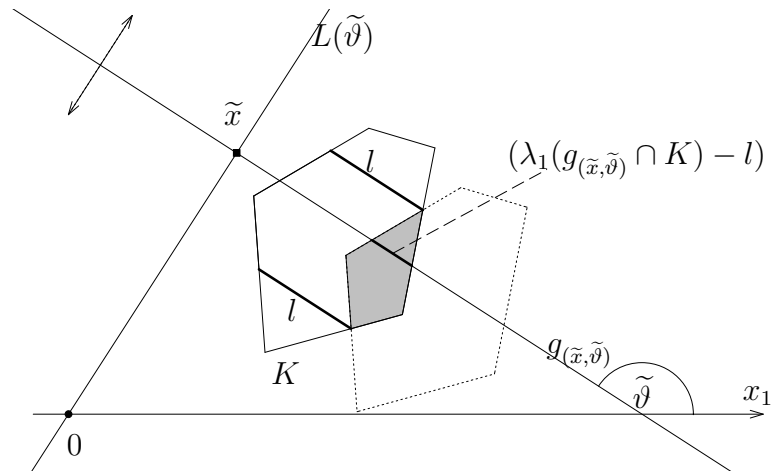


Abbildung 2.15: Zu $\Omega_K(l, \vartheta)$. Die graue Fläche entspricht dem Wert des Integrals in Gleichung (2.47).

2.4 Verteilungen und Momente der Sehnenlänge

Dabei ist die Existenz von $\frac{\partial \Omega_K}{\partial l}(l, \vartheta)$ mit Satz 2.4.2 gesichert. Integration bezüglich ϑ liefert

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \bar{F}_\nu(l | \vartheta) d\vartheta = \bar{F}_\nu(l) = \Omega_K(l) - l \cdot \frac{d\Omega_K}{dl}(l). \quad (2.49)$$

Mit Gleichung (2.49) wird für die Verteilung der Länge einer ν -zufälligen Geraden erhalten

$$F_\nu(l) = 1 - \Omega_K(l) + l \cdot \frac{\partial \Omega_K}{\partial l}(l). \quad (2.50)$$

Ableiten dieses Ausdruckes nach l liefert schließlich Gleichung (2.45), wobei durch die Voraussetzung der Existenz von $f_\nu(l)$ die Existenz von $\frac{d^2 \Omega_K}{dl^2}(l)$ folgt. ■

Durch Gleichung (2.50) ist – in allgemeiner Form – die Verteilung der Länge einer ν -zufälligen Sehne bezüglich eines konvexen Körpers K gegeben. Da diese jedoch abhängig ist von $\Omega_K(l)$, was wiederum von der speziellen Gestalt von K abhängt, werden von Enns und Ehlers (1978) nur die speziellen Körper Kugel (für allgemeine Dimension) und Sphäroid (für Dimension drei) behandelt (weiter unten aufgeführt). Mit der bisherigen Notation lässt sich Gleichung (2.50) schreiben als

$$F_\nu(l) = 1 - \frac{1}{\pi V_2(K)} \left(\int_0^\pi V_2(K \cap (K + l \cdot u(\vartheta))) + l \cdot \frac{\partial}{\partial l} V_2(K \cap (K + l \cdot u(\vartheta))) d\vartheta \right). \quad (2.51)$$

Eine andere, von Enns und Ehlers (1978) bewiesene Aussage ist nachstehender, auf zwei Dimensionen übertragener

Satz 2.4.4 *Für einen konvexen Körper K im \mathbb{R}^2 gilt*

$$\int_0^\infty l \cdot \Omega_K(l) dl = \frac{V_2(K)}{2\pi}. \quad (2.52)$$

Beweis: Das Integral in Gleichung (2.52) lässt sich mit der Definition von $\Omega_K(l)$ schreiben als

$$\int_0^\infty l \cdot \Omega_K(l) dl = \frac{1}{2\pi V_2(K)} \cdot \int_0^\infty \int_0^{2\pi} l \cdot V_2(K \cap (K + l \cdot u(\vartheta))) d\vartheta dl. \quad (2.53)$$

2 Zufällige Geraden im \mathbb{R}^2

(hier wurde $\vartheta \in [0, 2\pi)$ zugelassen, um sämtliche Vektoren des \mathbb{R}^2 zu erhalten.) Sei nun eine bijektive Abbildung

$$\varphi : \begin{array}{ccc} [0, \infty) \times [0, 2\pi) & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (l, \vartheta) & \mapsto & (v_1, v_2) := v \end{array}$$

gegeben durch

$$\begin{aligned} v_1 &= l \cdot \cos(\vartheta), \\ v_2 &= l \cdot \sin(\vartheta), \end{aligned}$$

die jedem Paar (l, ϑ) den Vektor $l \cdot u(\vartheta) = v$ zuordnet. Mit dem Transformationssatz für Lebesgueintegrale und der Funktionaldeterminante

$$\det D\varphi = \begin{vmatrix} \cos(\vartheta) & \sin(\vartheta) \\ -l \cdot \sin(\vartheta) & l \cdot \cos(\vartheta) \end{vmatrix} = l$$

lässt sich dann schreiben

$$\int_{\mathbb{R}^2} V_2(K \cap (K + v)) d\lambda_2(v) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} l \cdot V_2(K \cap (K + l \cdot u(\vartheta))) d\vartheta dl.$$

Das linke Integral lässt sich mit einem Spezialfall der kinematischen Hauptformel (Schneider und Weil, 2000, Seite 303, Gleichung (7.9)) lösen, der für Mengen $K, M \in \mathcal{R}$ im \mathbb{R}^2 lautet

$$\int_{\mathbb{R}^2} V_2(K \cap (M + x)) d\lambda(x) = V_2(K) \cdot V_2(M).$$

Damit erhält man

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} l \cdot V_2(K \cap (K + u(\vartheta) \cdot l)) d\vartheta dl = V_2(K)^2,$$

was schließlich mit Gleichung (2.53) die Behauptung liefert. ■

Mit Gleichung (2.45) ergibt sich im Fall $k > 0$ für die k -ten Momente der

Länge einer ν -zufälligen Sehne bezüglich K

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}\sigma_\nu(K)^k &= \int_0^\infty l^k \cdot f_\nu(l) dl = \int_0^\infty l^{k+1} \frac{d^2\Omega_K(l)}{dl^2} dl \\
 &= \underbrace{\left[l^{k+1} \cdot \frac{d\Omega_K(l)}{dl} \right]_0^\infty}_{=0, (*)} - \int_0^\infty (k+1) \cdot l^k \frac{d\Omega_K(l)}{dl} dl \\
 &= -(k+1) \underbrace{\left[l^k \cdot \Omega_K(l) \right]_0^\infty}_{=0} + (k+1) \int_0^\infty k \cdot l^{k-1} \Omega_K(l) dl \\
 &= k \cdot (k+1) \int_0^\infty l^{k-1} \Omega_K(l) dl.
 \end{aligned} \tag{2.54}$$

Die Integrierbarkeit obigen Ausdrucks wird gewährleistet durch die Forderung, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_\mu(l)$ und damit $f_\nu(l)$ existiere. An der Stelle (*) wurde verwendet, dass $\lim_{l \rightarrow \infty} l^{k+1} \cdot \frac{d\Omega_K(l)}{dl} = 0$ gilt. Dies lässt sich wie folgt erklären: Im Anschluss an Satz 2.4.2 wurde bemerkt, dass für $r > \tilde{r}(u)$ die Funktion $g_K(r, u)$ unendlich oft nach r , also für $l > \tilde{l}(\vartheta)$ die Funktion $\Omega_K(l, \vartheta)$ unendlich oft partiell nach l differenzierbar ist. Setzt man $\tilde{l}' := \max\{\tilde{l}(\vartheta) : \vartheta \in [0, \pi]\}$, so ist die über ϑ gemittelte Funktion $\Omega_K(l)$ für $l > \tilde{l}'$ ebenfalls unendlich oft differenzierbar und konstant Null. Durch $(k+1)$ -faches Anwenden der Regel von l'Hospital erhält man (*). Analog ergibt sich $\lim_{l \rightarrow \infty} l^k \Omega_K(l) = 0$. Weiter wurde verwendet, dass $\frac{d\Omega_K}{dl}(l)$ an der Stelle Null einen endlichen Wert annimmt. Mit Satz 2.4.2 folgt, dass die partielle Ableitung $\frac{\partial \Omega_K(l, \vartheta)}{\partial l}$ an der Stelle Null einen endlichen Wert – und zwar für alle $\vartheta \in [0, \pi)$ (beziehungsweise $\vartheta \in [0, 2\pi)$ – annimmt, da die orthogonale Projektion eines beschränkten Bereiches auf einen linearen Unterraum wieder beschränkt ist, und $\text{int}(K) \neq \emptyset$ gefordert wurde. Damit nimmt aber auch das Mittel über alle Richtungen einen endlichen Wert an.

Speziell sind für einen gegebenen zweidimensionalen konvexen Körper K Erwartungswert und zweites Moment der Länge einer ν -zufälligen Sehne bezüglich K gegeben durch

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}\sigma_\nu(K) &= 2 \int_0^\infty \Omega_K(l) dl \\
 &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{V_2(K)} \int_0^\infty \int_0^\pi V_2(K \cap (K + l \cdot u(\vartheta))) d\vartheta dl, \quad \text{sowie} \\
 \mathbb{E}\sigma_\nu(K)^2 &= 6 \int_0^\infty l \Omega_K(l) dl \stackrel{\text{Gl. (2.52)}}{=} 3 \cdot \frac{V_2(K)}{\pi}.
 \end{aligned}$$

2 Zufällige Geraden im \mathbb{R}^2

In Appendix II des Artikels von Enns und Ehlers (1978) werden mit Hilfe der Betafunktion $\Omega_K(l)$, damit $f_\nu(l)$ und schließlich die k -ten Momente einer ν -zufälligen Sehne für eine n -dimensionale Kugel mit Radius r und ein dreidimensionales Sphäroid bestimmt. Dies soll hier für den Fall eines Kreises mit Radius r , sowie für ein Rechteck mit Seitenlängen a, b ebenfalls getan werden, wobei sich hier $\Omega_K(l)$ einfacher bestimmen lässt. Im Folgenden (das heißt für alle Konstruktionen) werden für die konkreten Beispiele nur $\Omega_K(l)$ (beziehungsweise $\omega_K(l)$ – weiter unten definiert), sowie der Erwartungswert der Sehnenlänge angegeben, da in manchen Fällen recht lange Ausdrücke für $f_r(l)$ und $F_r(l)$ entstehen können; Diese lassen sich aber bei Bedarf direkt aus $\Omega_K(l)$, beziehungsweise $\omega_K(l)$ ableiten.

Sei nun $B(r, M)$ ein Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r . Zunächst wird bemerkt, dass im Falle eines Kreises $\Omega_{B(r, M)}(l, \vartheta)$ mit $\Omega_{B(r, M)}(l)$ übereinstimmt, und damit $\Omega_{B(r, M)}(l, \vartheta)$ lediglich von l abhängt und somit nicht der Erwartungswert bezüglich ϑ gebildet werden muss. Damit beschränkt sich die Bestimmung von $\Omega_{B(r, M)}(l)$ auf die Ermittlung der Schnittfläche von $B(r, M)$ mit dem um l in eine beliebige Richtung u verschobenen Translat von $B(r, M)$. Zur Bestimmung müssen nur $l \in [0, 2r)$ betrachtet werden,

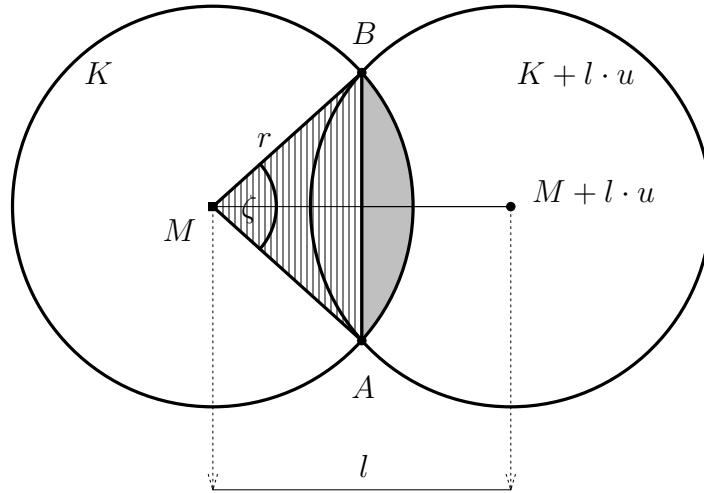


Abbildung 2.16: Zu $\Omega_K(l)$, $K = B(r, M)$. Die graue Fläche entspricht $\frac{\Omega_K(l)}{2}$.

da für größere l der Schnitt der beiden Kreise leer wird, im Folgenden gelte also $l \in [0, 2r)$. Werden für $l > 0$ mit A, B die beiden Schnittpunkte von $\text{bd}(B(r, M))$ mit $\text{bd}(B(r, M) + l \cdot u)$ bezeichnet ($u \in S^1$ beliebig), so legen M, A, B ein gleichschenkliges Dreieck K_Δ fest. Der Winkel zwischen den bei-

2.4 Verteilungen und Momente der Sehnenlänge

den Schenkeln der Länge r sei mit ζ bezeichnet (siehe Abbildung 2.16). Die Schnittfläche von $B(r, M)$ mit $(B(r, M) + l \cdot u)$ berechnet sich als Zweifaches des durch A und B festgelegten Kreissegments K_{seg} von $B(r, M)$. Die Fläche von K_{seg} lässt sich darstellen als Differenz der Flächen von K_c und K_Δ , wobei K_c den durch ζ festgelegten Kreissektor bezeichnet. Mit

$$\zeta = 2 \cdot \arccos\left(\frac{l}{2r}\right)$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \Omega_{B(r, M)}(l) &= \frac{1}{V_2(B(r, M))} \cdot (V_2(K_c) - V_2(K_\Delta)) \\ &= \frac{2}{V_2(B(r, M))} \cdot \left(r^2 \cdot \arccos\left(\frac{l}{2r}\right) - \frac{lr}{2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{l}{2r}\right)^2} \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \arccos\left(\frac{l}{2r}\right) - \frac{l}{\pi r} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{l}{2r}\right)^2}, \end{aligned} \tag{2.55}$$

für $l \in [0, 2r]$. Mit Gleichung (2.54) ergibt sich damit für den Erwartungswert der Länge einer ν -zufälligen Sehne bezüglich $B(r, M)$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\sigma_\nu(B(r, M)) &= 2 \cdot \int_0^{2r} \frac{2}{\pi} \cdot \arccos\left(\frac{l}{2r}\right) - \frac{l}{\pi r} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{l}{2r}\right)^2} dl \\ &= 2 \cdot \left[\frac{4r}{\pi} \cdot \left(\frac{l}{2r} \cdot \arccos\left(\frac{l}{2r}\right) - \sqrt{1 - \left(\frac{l}{2r}\right)^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{r}{6\pi} \cdot \left(4 - \frac{l^2}{r^2} \right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{2r} \\ &= r \cdot \frac{16}{3\pi}. \end{aligned}$$

Dieses Resultat stimmt mit dem in Abschnitt 2.3 überein.

Nun sei $R_{a,b}$ ein Rechteck mit Seitenlängen a, b . Der Schnitt von $R_{a,b}$ mit $(R_{a,b} + l \cdot u(\vartheta))$ ist für $l > \sqrt{a^2 + b^2}$ leer, für kleinere l ebenfalls leer, oder wieder ein Rechteck. Die Bestimmung von $\Omega_{R_{a,b}}(l, \vartheta)$ reduziert sich also auf die Bestimmung der Seitenlängen a', b' des Rechtecks $(R_{a,b} \cap (R_{a,b} + l \cdot u(\vartheta)))$.

2 Zufällige Geraden im \mathbb{R}^2

Aufgrund der Symmetrie eines Rechtecks reicht es aus, nur $\vartheta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ zu betrachten. Die x_1 -Achse sei so gewählt, dass die Seite a des Rechtecks parallel zu dieser ist und damit ϑ den Winkel zwischen der Seite a und $u(\vartheta)$ angibt. Um bei der Bestimmung von a' und b' keine negativen Seitenlängen

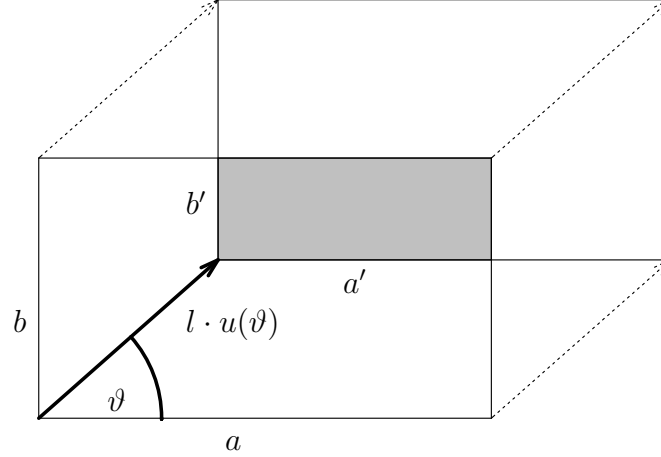


Abbildung 2.17: Zu $\Omega_K(l, \vartheta)$, für ein Rechteck K mit Seitenlängen a, b . Die graue Fläche entspricht $V_2(K \cap K + l \cdot u(\vartheta))$.

zu erhalten ist es nötig, l in Abhängigkeit von ϑ zu betrachten. Das heißt, zu jedem $\vartheta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ gibt es ein \tilde{l} , so dass der Schnitt $R_{a,b} \cap (R_{a,b} + l \cdot u(\vartheta))$ leer ist für alle $l > \tilde{l}$. Die Seitenlängen a', b' bestimmen sich dann wie folgt:

a) Für $\vartheta \in [0, \arctan(\frac{b}{a})]$:

$$\left. \begin{aligned} a' &= a - l \cdot \cos(\vartheta) \\ b' &= b - l \cdot \sin(\vartheta) \end{aligned} \right\} \quad \text{für } l \in [0, \frac{a}{\cos(\vartheta)}],$$

$$a' = b' = 0 \quad \text{sonst.}$$

b) Für $\vartheta \in [\arctan(\frac{b}{a}), \frac{\pi}{2}]$:

$$\left. \begin{aligned} a' &= a - l \cdot \cos(\vartheta) \\ b' &= b - l \cdot \sin(\vartheta) \end{aligned} \right\} \quad \text{für } l \in [0, \frac{b}{\sin(\vartheta)}],$$

$$a' = b' = 0 \quad \text{sonst.}$$

2.4 Verteilungen und Momente der Sehnenlänge

Damit erhält man

$$\Omega_{R_{a,b}}(l, \vartheta) = \frac{1}{ab} \cdot (a - l \cos(\vartheta)) \cdot (b - l \sin(\vartheta)),$$

für $(\vartheta \in [0, \arctan(\frac{b}{a})]$ und $l \in [0, \frac{a}{\cos(\vartheta)}]$), oder $(\vartheta \in [\arctan(\frac{b}{a}), \frac{\pi}{2}]$ und $l \in [0, \frac{b}{\sin(\vartheta)}]$). Für $\Omega_{R_{a,b}}(l)$ ergibt sich somit

$$\begin{aligned} \Omega_{R_{a,b}}(l) = & \frac{2}{\pi ab} \cdot \left(\int_0^{\arctan(\frac{b}{a})} 1_{[0, \frac{a}{\cos \vartheta}]}(l) (a - l \cos(\vartheta)) \cdot (b - l \sin(\vartheta)) d\vartheta \right. \\ & \left. + \int_{\arctan(\frac{b}{a})}^{\frac{\pi}{2}} 1_{[0, \frac{b}{\sin \vartheta}]}(l) (a - l \cos(\vartheta)) \cdot (b - l \sin(\vartheta)) d\vartheta \right). \end{aligned} \quad (2.56)$$

Mit Gleichung (2.54) ist damit der Erwartungswert der Sehnenlänge gegeben als

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\sigma_\nu(R_{a,b}) &= \frac{4}{\pi ab} \left(\int_0^{\arctan(\frac{b}{a})} \int_0^{\frac{a}{\cos \vartheta}} (a - l \cos(\vartheta)) \cdot (b - l \sin(\vartheta)) dl d\vartheta \right. \\ & \quad \left. + \int_{\arctan(\frac{b}{a})}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{b}{\sin \vartheta}} (a - l \cos(\vartheta)) \cdot (b - l \sin(\vartheta)) dl d\vartheta, \right) \\ &= \frac{4}{\pi ab} \left(\int_0^{\arctan(\frac{b}{a})} -\frac{1}{6} a^3 \cdot \frac{\tan \vartheta}{\cos \vartheta} + \frac{a^2 b}{2} \cdot \frac{1}{\cos \vartheta} d\vartheta \right. \\ & \quad \left. + \int_{\arctan(\frac{b}{a})}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{6} b^3 \cdot \frac{1}{\sin \vartheta \tan \vartheta} + \frac{b^2 a}{2} \cdot \frac{1}{\sin \vartheta} d\vartheta \right). \end{aligned}$$

Das heißt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\sigma_\nu(R_{a,b}) &= \frac{4}{\pi ab} \cdot \left[-\frac{a^3}{6 \cos(\vartheta)} + \frac{a^2 b}{2} \ln \left(\frac{1 + \sin(\vartheta)}{\cos(\vartheta)} \right) \right]_0^{\arctan(\frac{b}{a})} \\ & \quad + \frac{4}{\pi ab} \left[\frac{b^3}{6 \sin(\vartheta)} + \frac{ab^2}{2} \ln \left(\frac{\sin(\vartheta)}{\cos(\vartheta) + 1} \right) \right]_{\arctan(\frac{b}{a})}^{\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Beziehungen

$$\begin{aligned} \sin(\arctan(x)) &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \text{sowie} \\ \cos(\arctan(x)) &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned} \quad (2.57)$$

2 Zufällige Geraden im \mathbb{R}^2

ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\sigma_\nu(R_{a,b}) &= \frac{2(a^3 + b^3)}{3\pi ab} - \frac{2(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}{3\pi ab} \\ &\quad + \frac{2a}{\pi} \ln \left(\frac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{a} \right) + \frac{2b}{\pi} \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{b} \right).\end{aligned}$$

Für ein zu B^2 flächengleiches Rechteck $R_{\pi,1}$ mit Seitenlängen $a = \pi$, $b = 1$ ergibt sich Beispielsweise

$$\mathbb{E}\sigma_\nu(R_{\pi,1}) \approx 1,5532.$$

μ -zufällige Sehnen

Sei wieder $K \in \mathcal{K}$ mit $\text{int}(K) \neq \emptyset$. Mit Satz 2.4.1 ergibt sich für die zur Verteilung $F_\mu(l)$ gehörige Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f_\mu(l) = \frac{\pi V_2(K)}{2V_1(K)} \cdot \frac{d^2\Omega_K}{dl^2}(l).$$

Für die Verteilung $F_\mu(l)$ erhält man daher

$$\begin{aligned}F_\mu(l) &= \frac{\pi V_2(K)}{2V_1(K)} \int_0^l \frac{d^2\Omega_K}{dl^2}(t) dt \\ &= \frac{\pi V_2(K)}{2V_1(K)} \left[\frac{d\Omega_K}{dt}(t) \right]_0^l.\end{aligned}$$

Die k -ten Momente (für $k \geq 2$) der Sehnenlänge sind gegeben durch (Anwendung der Regeln zur Produktintegration, analog Gleichung (2.54))

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\sigma_\mu(K)^k &= \frac{\pi V_2(K)}{2V_1(K)} \int_0^\infty l^k \cdot \frac{d^2\Omega_K}{dl^2}(l) dl \\ &= k(k-1) \cdot \frac{\pi V_2(K)}{2V_1(K)} \int_0^\infty l^{k-2} \Omega_K(l) dl.\end{aligned}$$

Für den Erwartungswert wird erhalten

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\sigma_\mu(K) &= \frac{\pi V_2(K)}{2V_1(K)} \int_0^\infty l \cdot \frac{d^2\Omega_K}{dl^2}(l) dl \\ &= -\frac{\pi V_2(K)}{2V_1(K)} \cdot [\Omega_K(l)]_0^\infty = \frac{\pi V_2(K)}{2V_1(K)},\end{aligned}$$

was wie erwartet mit dem Resultat aus Abschnitt 2.3 übereinstimmt.

Da sich mit obiger Gleichung der Erwartungswert der Sehnenlänge bezüglich beliebiger konvexer Körper bestimmen lässt, wird an dieser Stelle auf die Beispiele Kreis und Rechteck verzichtet.

λ -zufällige Sehnen

Mit Satz (2.4.1) wird für λ -zufällige Geraden durch einen konvexen Körper K mit $\text{int}(K) \neq \emptyset$ erhalten

$$\begin{aligned} f_\lambda(l) &= \frac{V_2(K)}{\int_{\mathcal{G}} 1_{[K]}(g) \lambda_1(g \cap K)^3 d\mu(g)} \cdot l^2 \cdot f_\nu(l) \\ &=: c \cdot l^2 \cdot f_\nu(l) = c \cdot l^3 \cdot \frac{d^2 \Omega_K}{dl^2}(l). \end{aligned}$$

Da f_λ eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist, muss gelten

$$\begin{aligned} 1 &= c \int_0^\infty l^3 \frac{d^2 \Omega_K}{dl^2}(l) dl \\ &= 6c \int_0^\infty l \cdot \Omega_K(l) dl \stackrel{\text{Satz 2.4.4}}{=} c \cdot \frac{3V_2(K)}{\pi}. \end{aligned}$$

(Hier wurden ebenfalls – analog Gleichung 2.54 – die Regeln zur Produktintegration angewandt.) Hieraus ergibt sich schließlich

$$f_\lambda(l) = \frac{\pi}{3V_2(K)} \cdot l^3 \cdot \frac{d^2 \Omega_K}{dl^2}(l). \quad (2.58)$$

Mit Gleichung (2.58) wird für die k -ten Momente ($k \geq -1$) der Sehnenlängen durch zweimaliges anwenden der Regeln zur Produktintegration (analog Gleichung (2.54)) erhalten

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \sigma_\lambda(K)^k &= \frac{\pi}{3V_2(K)} \cdot \int_0^\infty l^{k+3} \cdot \frac{d^2 \Omega_K}{dl^2}(l) dl \\ &= \frac{\pi}{3V_2(K)} \cdot (k+3) \cdot (k+2) \cdot \int_0^\infty l^{k+1} \Omega_K(l) dl. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Damit erhält man für den Erwartungswert

$$\mathbb{E} \sigma_\lambda(K) = \frac{4\pi}{V_2(K)} \int_0^\infty l^2 \Omega_K(l) dl.$$

2 Zufällige Geraden im \mathbb{R}^2

Für einen Kreis $B(r, M)$ ergibt sich mit den Gleichungen (2.55) und (2.59) als Erwartungswert der Sehnenlänge

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\sigma_\lambda(B(r, M)) &= \frac{4}{r^2} \cdot \int_0^{2r} \frac{2 \cdot l^2}{\pi} \cdot \arccos\left(\frac{l}{2r}\right) - \frac{l^3}{\pi r} \sqrt{1 - \left(\frac{l}{2r}\right)^2} dl \\
&= \frac{4}{r^2} \cdot \left[\frac{16r^3}{\pi} \left(\frac{l^3}{24r^3} \cdot \arccos\left(\frac{l}{2r}\right) - \left(\frac{l}{6r}\right)^2 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{l}{2r}\right)^2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{2}{9} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{l}{2r}\right)^2} + \left(1 - \left(\frac{l}{2r}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{12l^2r + 32r^3}{15\pi}\right) \right) \right]_0^{2r} \\
&= \frac{4}{r^2} \cdot \frac{64r^3}{45\pi} = \frac{256r}{45\pi},
\end{aligned}$$

was mit dem Resultat in Abschnitt 2.3 übereinstimmt.

Für ein Rechteck $R_{a,b}$ mit Seitenlängen a, b wird mit den Gleichungen (2.56) und (2.59) für den Erwartungswert der Sehnenlänge erhalten

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\sigma_\lambda(R_{a,b}) &= \frac{8}{a^2b^2} \cdot \left(\int_0^{\arctan(\frac{b}{a})} \int_0^{\frac{a}{\cos(\vartheta)}} l^2 \cdot (a - l \cos(\vartheta))(b - l \sin(\vartheta)) dl d\vartheta \right. \\
&\quad \left. + \int_{\arctan(\frac{b}{a})}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{b}{\sin(\vartheta)}} l^2 \cdot (a - l \cos(\vartheta))(b - l \sin(\vartheta)) dl d\vartheta \right) \\
&= \frac{1}{a^2b^2} \cdot \left(\int_0^{\arctan(\frac{b}{a})} \frac{2a^4b}{3 \cos^3(\vartheta)} - \frac{2a^5 \tan(\vartheta)}{5 \cos^3(\vartheta)} d\vartheta \right. \\
&\quad \left. + \int_{\arctan(\frac{b}{a})}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2ab^4}{3 \sin^3(\vartheta)} - \frac{2b^5}{5 \sin^3(\vartheta) \tan(\vartheta)} d\vartheta \right)
\end{aligned}$$

Unter Verwendung der Beziehungen (2.57) ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\sigma_\lambda(R_{a,b}) &= \frac{1}{15} \left(\frac{2a^3}{b^2} + \frac{2b^3}{a^2} + \sqrt{a^2 + b^2} \left(6 - \frac{2a^2}{b^2} - \frac{2b^2}{a^2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{5a^2}{b} \ln \left(\frac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{a} \right) + \frac{5b^2}{a} \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{b} \right) \right),
\end{aligned}$$

ein Resultat, das sich auch bei Santaló (2004) findet, der diesen Ausdruck aus der Beziehung zum Erwartungswert des Abstandes zweier zufälliger Punkte ableitet, wobei er dafür auf eine Arbeit von Ghosh (1951) verweist.

2.4 Verteilungen und Momente der Sehnenlänge

Für ein mit B^2 flächengleiches Rechteck $R_{\pi,1}$ ergibt sich im Fall λ -zufälliger Geraden durch $R_{\pi,1}$ für den Erwartungswert der Sehnenlänge

$$\mathbb{E}\sigma_\lambda(R_{\pi,1}) \approx 2,3112.$$

2.4.2 α -, β - und γ -zufällige Sehnen

In einem weiteren Artikel befassen sich Enns und Ehlers (1981) mit Verteilungen und Momenten der Längen α -, β -, sowie γ -zufälliger Sehnen. Die dort gefundenen Resultate sollen hier – ebenfalls übertragen auf zwei Dimensionen – wiedergegeben werden.

γ -zufällige Sehnen

Sei $K \in \mathcal{K}$ ein konvexer Körper im \mathbb{R}^2 mit nicht leerem Inneren, g eine γ -zufällige Gerade bezüglich K . Weiter seinen $\tilde{\vartheta}$ ein Winkel in $[0, \pi)$ – der einen Einheitsvektor $u(\tilde{\vartheta}) \in S^1$ festlegt –, sowie l eine positive reelle Zahl. Enns und Ehlers geben für die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(\sigma_\gamma(K) > l \mid \vartheta = \tilde{\vartheta})$ an

$$\mathbb{P}(\sigma_\gamma(K) > l \mid \vartheta = \tilde{\vartheta}) = \frac{V_1(K \cap (K + l \cdot u(\tilde{\vartheta})))}{V_1(K)},$$

Weiter definieren sie

$$\omega_K(l) := \mathbb{P}(\sigma_\gamma(K) > l) = \mathbb{E}_\vartheta \left(\frac{V_1(K \cap (K + l \cdot u(\vartheta)))}{V_1(K)} \right), \quad (2.60)$$

wobei $\mathbb{E}_\vartheta(\cdot)$ den Erwartungswert von (\cdot) bezüglich ϑ bezeichnet. Dies entspricht dem folgendem Integral:

$$\omega_K(l) = \frac{1}{\pi \cdot V_1(K)} \int_0^\pi V_1(K \cap (K + l \cdot u(\vartheta))) d\vartheta. \quad (2.61)$$

Mit obiger Definition von $\omega_K(l)$ gilt $\omega_K(0) = 1$, und weiter existiert ein \tilde{l} , so dass $\omega_K(l) = 0$ für alle $l > \tilde{l}$, da K ein beschränkter Bereich ist. Die Verteilung der Länge einer γ -zufälligen Sehne ist demnach gegeben durch

$$F_\gamma(l) = 1 - \mathbb{P}(\sigma_\gamma(K) > l) = 1 - \omega_K(l).$$

Damit erhält man für die zugehörige Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f_\gamma(l) = -\frac{d\omega_K}{dl}(l). \quad (2.62)$$

2 Zufällige Geraden im \mathbb{R}^2

Für die k -ten Momente ($k > 0$) der Sehnenlänge bedeutet dies

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\sigma_\gamma(K)^k &= - \int_0^\infty l^k \cdot \frac{d\omega_K}{dl}(l) dl \\ &= - \underbrace{[l^k \cdot \omega_K(l)]_0^\infty}_{=0} + \int_0^\infty k \cdot l^{k-1} \cdot \omega_K(l) dl \\ &= k \cdot \int_0^\infty l^{k-1} \cdot \omega_K(l) dl.\end{aligned}\tag{2.63}$$

Diese Momente lassen sich schreiben als

$$\mathbb{E}\sigma_\gamma(K)^k = \frac{k}{\pi \cdot V_1(K)} \int_0^\infty \int_0^\pi l^{k-1} \cdot V_1(K \cap (K + l \cdot u(\vartheta))) d\vartheta dl.$$

In einer dritten Arbeit (über zufällige Strahlen) zeigen Enns und Ehlers (1980) folgende, von der Form des Körpers K unabhängige Beziehung, die hier auf zwei Dimensionen übertragen wird.

Satz 2.4.5 *Für einen konvexen Körper K im \mathbb{R}^2 gilt*

$$\int_0^\infty l \cdot \omega_K(l) dl = \frac{V_2(K)}{\pi}.$$

Beweis: Mit der im Beweis zu Satz 2.4.4 verwendeten Transformation von $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ auf $(l, \vartheta) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi)$ lässt sich schreiben

$$\begin{aligned}\int_0^\infty l \cdot \omega_K(l) dl &= \frac{1}{2\pi V_1(K)} \cdot \int_0^\infty \int_0^{2\pi} l \cdot V_1(K \cap (K + l \cdot u(\vartheta))) d\vartheta dl \\ &= \frac{1}{2\pi V_1(K)} \cdot \int_{\mathbb{R}^2} V_1(K \cap (K + v)) d\lambda(v)\end{aligned}$$

Das letzte Integral lässt sich mit einem weiteren Spezialfall der kinematischen Hauptformel (Schneider und Weil, 2000, Gleichung (7.10), Seite 303) lösen, der für Mengen $K, M \in \mathcal{R}$ im \mathbb{R}^2 lautet

$$\int_{\mathbb{R}^2} V_1(K \cap (M + v)) d\lambda(v) = V_2(K) \cdot V_1(M) + V_1(K) \cdot V_2(M).$$

Damit ergibt sich

$$\int_0^\infty l \cdot \omega_K(l) dl = \frac{1}{2\pi V_1(K)} \cdot 2V_1(K)V_2(K),$$

2.4 Verteilungen und Momente der Sehnenlänge

und hieraus schließlich Satz 2.4.5. ■

Mit diesem Resultat erhält man für die zweiten Momente der Sehnenlänge den einfachen Ausdruck

$$\mathbb{E}\sigma_\gamma(K)^2 = \frac{2V_2(K)}{\pi},$$

für ein Rechteck mit Seitenlängen a, b beispielsweise

$$\mathbb{E}\sigma_\gamma(R_{a,b})^2 = \frac{2ab}{\pi}.$$

Als Beispiele bestimmen Enns und Ehlers (1981) Momente und Erwartungswerte der Länge γ -zufälliger Sehnen bezüglich einer n -dimensionalen Kugel, eines dreidimensionalen Sphäroids und eines n -dimensionalen Kubus. Dies soll hier für einen Kreis mit Radius r , sowie für ein Rechteck mit Seitenlängen a, b geschehen, wobei $\omega_K(l)$, sowie der Erwartungswert der Sehnenlänge angegeben wird.

Sei $B(r, M)$ ein Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r . Auch hier stimmen $\omega_{B(r,M)}(l, \vartheta)$ und $\omega_{B(r,M)}(l)$ aufgrund der Symmetrie des Kreises überein. Die Bestimmung von $\omega_{B(r,M)}(l)$ beschränkt sich also auf die Bestimmung des Umfangs des Schnittes von $B(r, M)$ mit dem um l in eine beliebige Richtung $u \in S^1$ verschobenen Translat von $B(r, M)$. Verwendet man wieder die Bezeichnungen entsprechend der Bestimmung von $\Omega_{B(r,M)}(l)$ für einen Kreis (Abschnitt 2.4.1, Teil über ν -zufällige Sehnen), so ergibt sich der gesuchte Umfang als Zweifaches der Länge L_ζ , des durch ζ festgelegten Kreisbogens und damit $V_1(B(r, M) \cap (B(r, M) + l \cdot u(\vartheta))) = L_\zeta$.

Mit

$$\zeta = 2 \cdot \arccos\left(\frac{l}{2r}\right)$$

ergibt sich für die Länge L_ζ des Kreisbogens

$$L_\zeta = r \cdot \zeta = 2r \cdot \arccos\left(\frac{l}{2r}\right),$$

und mit Gleichung (2.60) folgt somit

$$\omega_{B(r,M)}(l) = \frac{2r}{V_1(B(r, M))} \cdot \arccos\left(\frac{l}{2r}\right) = \frac{2}{\pi} \cdot \arccos\left(\frac{l}{2r}\right). \quad (2.64)$$

2 Zufällige Geraden im \mathbb{R}^2

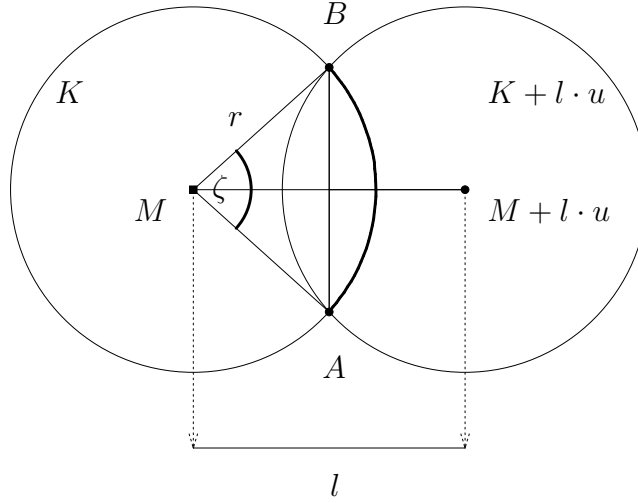


Abbildung 2.18: Zu $\omega_K(l)$, $K = B(r, M)$. $\frac{\omega_K(l)}{2}$ entspricht dem fetten Kreisbogen.

Mit Gleichung (2.63) erhält man somit für den Erwartungswert der Sehnenlänge

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\sigma_\gamma(B(r, M)) &= \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{2r} \arccos\left(\frac{l}{2r}\right) dl \\ &= \frac{2}{\pi} \left[l \arccos\left(\frac{l}{2r}\right) - 2r \sqrt{1 - \left(\frac{l}{2r}\right)^2} \right]_0^{2r} \\ &= \frac{4r}{\pi}. \end{aligned}$$

Dieses Resultat stimmt mit dem in Abschnitt 2.3 überein.

Für ein Rechteck $R_{a,b}$ mit Seitenlängen a, b wurde auf Seite 70 die Bestimmung der Seitenlängen a', b' des Rechtecks $R_{a,b} \cap (R_{a,b} + l \cdot u(\vartheta))$ angegeben. Mit Gleichung (2.61) erhält man daher

$$\begin{aligned} \omega_{R_{a,b}}(l) &= \frac{2}{\pi(a+b)} \cdot \left(\int_0^{\arctan(\frac{b}{a})} 1_{[0, \frac{a}{\cos(\vartheta)}]}(l) \left((a - l \cos(\vartheta)) + (b - l \sin(\vartheta)) d\vartheta \right) \right. \\ &\quad \left. + \int_{\arctan(\frac{b}{a})}^{\frac{\pi}{2}} 1_{[0, \frac{b}{\sin(\vartheta)}]}(l) \left((a - l \cos(\vartheta)) + (b - l \sin(\vartheta)) d\vartheta \right) \right). \quad (2.65) \end{aligned}$$

2.4 Verteilungen und Momente der Sehnenlänge

Der Faktor Zwei wird hier eingefügt, da der Erwartungswert bezüglich ϑ gebildet wird über $\vartheta \in [0, \frac{\pi}{2})$ anstatt $[0, \pi]$. Damit erhält man unter Verwendung von Gleichung (2.63) für den Erwartungswert der Sehnenlänge

$$\mathbb{E}\sigma_\gamma(R_{a,b}) = \frac{2}{\pi(a+b)} \cdot \left(\int_0^{\arctan(\frac{b}{a})} \int_0^{\frac{a}{\cos(\vartheta)}} (a - l \cos(\vartheta)) + (b - l \sin(\vartheta)) dl d\vartheta \right. \\ \left. + \int_{\arctan(\frac{b}{a})}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{b}{\sin(\vartheta)}} (a - l \cos(\vartheta)) + (b - l \sin(\vartheta)) dl d\vartheta \right).$$

Dies ergibt

$$\mathbb{E}\sigma_\gamma(R_{a,b}) = \frac{2}{\pi(a+b)} \cdot \left(\int_0^{\arctan(\frac{b}{a})} \frac{a^2}{2 \cos(\vartheta)} + \frac{ab}{\cos(\vartheta)} - \frac{a^2 \tan(\vartheta)}{2 \cos(\vartheta)} d\vartheta \right. \\ \left. + \int_{\arctan(\frac{b}{a})}^{\frac{\pi}{2}} \frac{b^2}{2 \sin(\vartheta)} + \frac{ab}{\sin(\vartheta)} - \frac{b^2}{2 \sin(\vartheta) \tan(\vartheta)} d\vartheta \right).$$

Unter Verwenung der Beziehungen 2.57 erhält man schließlich

$$\mathbb{E}\sigma_\gamma(R_{a,b}) = \frac{1}{\pi(a+b)} \cdot \left(a^2 + b^2 + \ln \left(\frac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{a} \right) \cdot (a^2 + 2ab) \right. \\ \left. + \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{b} \right) \cdot (b^2 + 2ab) - \sqrt{a^2 + b^2} \cdot (a + b) \right).$$

In diesem Fall ergibt sich für den Erwartungswert der Länge einer γ -zufälligen Sehne bezüglich eines zu B^2 flächengleichen Rechtecks $R_{\pi,1}$ mit Seitenlängen $a = \pi$, $b = 1$

$$\mathbb{E}\sigma_\gamma(R_{\pi,1}) \approx 1,2172.$$

β -zufällige Sehnen

Das Problem, die Verteilung der Länge β -zufälliger Sehnen zu bestimmen führen Enns und Ehlers (1981) zurück auf die Bestimmung der Verteilung des Abstandes zweier zufällig gewählter Punkte – gemäß dem Wahrscheinlichkeitsmaß $\frac{\lambda_2|_K}{\lambda_2(K)} \otimes \frac{\lambda_2|_K}{\lambda_2(K)}$, nach welchem λ -zufällige Geraden durch K definiert werden – aus $\text{int}(K)$, $K \in \mathcal{K}$.

Bei der Bearbeitung des Artikels von Enns und Ehlers (1981) blieben einige Unklarheiten. Aus diesem Grund werden hier nur einige Resultate grob wiedergegeben.

2 Zufällige Geraden im \mathbb{R}^2

Enns und Ehlers geben als Wahrscheinlichkeitsdichte der Verteilung des Abstands zweier zufällig gewählter Punkte im Inneren eines konvexen Körpers K an

$$f_{\tilde{R}; \lambda}(l) = \frac{2\pi}{V_2(K)} \cdot l \cdot \Omega_K(l), \quad (2.66)$$

wobei die Zufallsvariable, die zwei Punkten ihren Abstand zuordnet mit \tilde{R} bezeichnet wird.

Dann zeigen Enns und Ehlers, dass Gleichung (2.66) nicht nur für zufällig gewählte Punkte im Inneren eines konvexen Körpers, sondern für allgemeinere Körper gilt, die nicht konvex zu sein brauchen. Es wird jedoch gefordert, dass der Rand von K in höchstens endlich vielen Punkten Krümmung Null hat (siehe hierzu auch Abschnitt 2.2.7, *Bemerkung zur Dichte bezüglich μ*). Von dieser Tatsache machen Enns und Ehlers nun Gebrauch, um die Verteilung der Länge einer β -zufälligen Sehne durch einen Konvexen Körper K zu bestimmen.

Mit dem Parallelkörper

$$K_\varepsilon = K + \varepsilon B^2, \quad 0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$$

definieren Enns und Ehlers (1981)

$$K_{\Delta\varepsilon} := K_\varepsilon \setminus K.$$

(siehe Abbildung 2.19)

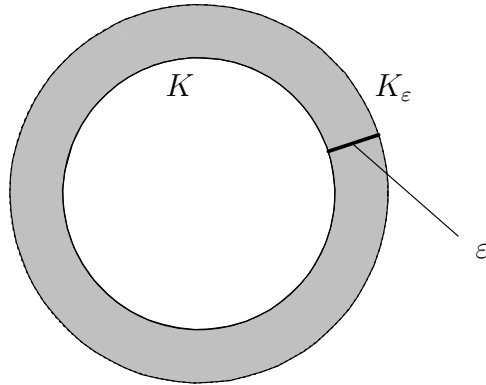


Abbildung 2.19: Zu $K_{\Delta\varepsilon}$. Die graue Fläche entspricht $K_{\Delta\varepsilon}$.

2.4 Verteilungen und Momente der Sehnenlänge

Nun folgt

$$\tilde{R} \rightarrow \sigma_\beta(K), \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0,$$

wobei die Zufallsvariable \tilde{R} zwei in $K_{\Delta\varepsilon}$ – bezüglich $\lambda_2|_{K_{\Delta\varepsilon}}$ – zufällig gewählten Punkten ihren Abstand zuordnet. Die bedeutet

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}_\lambda(\tilde{R} \leq l) = \mathbb{P}_\beta(\sigma_\beta(K) \leq l),$$

wobei sich der linke Ausdruck auf $K_{\Delta\varepsilon}$, der rechte auf K bezieht. Gleichung (2.66) liefert somit

$$f_\beta(l) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_{\tilde{R}; \lambda}(l) = 2\pi l \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\Omega_{K_{\Delta\varepsilon}}(l)}{V_2(K_{\Delta\varepsilon})} \right).$$

Für einen Kreis K mit Radius r bestimmen Enns und Ehlers (1981) diese Dichte zu

$$f_\beta(l) = \frac{1}{2rB\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)} \left(1 - \left(\frac{l}{2r} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}},$$

wobei $B(\cdot, \cdot)$ die Betafunktion bezeichnet, und damit

$$\mathbb{E}\sigma_\beta(K) = \frac{2r\Gamma(1)\Gamma(1)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{4r}{\pi},$$

was dem Resultat aus Abschnitt 2.3 entspricht. Wie erwartet stimmt dieser Wert mit dem Erwartungswert der Länge einer γ -zufälligen Sehne bezüglich des selben Kreises überein. Für Kugeln rB^n im \mathbb{R}^n , $n > 2$ stimmt dies jedoch nicht mehr (siehe Enns und Ehlers (1981)). Der Fall eines Rechtecks wird nicht betrachtet, da ein solches die geforderten Voraussetzungen nicht erfüllt.

α -zufällige Sehnen

Sei $K \in \mathcal{K}$, $x \in \text{bd}(K)$, sowie $l \in \mathbb{R}$ und weiter $B(l, x)$ ein Kreis um x mit Radius l . Enns und Ehlers (1981) definieren $\Pi(l, x)$ als Vereinigung aller konischen Teilmengen C_i von $B(l, x)$, die nicht ganz in K liegen (siehe Abbildung 2.20). Ordnet man jedem $C_i \in \Pi(l, x)$ einen Winkel ζ_i zu (siehe Abbildung 2.20), so lässt sich definieren:

$$\Phi(l, P) := \sum_i \zeta_i,$$

2 Zufällige Geraden im \mathbb{R}^2

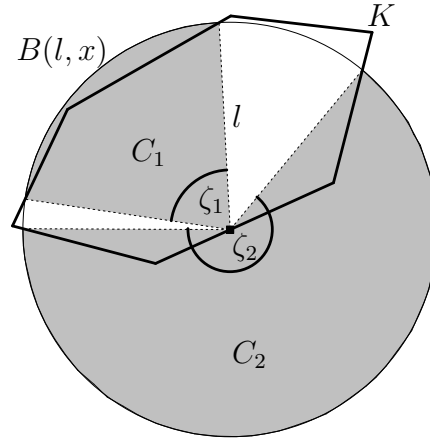


Abbildung 2.20: Zu $\Phi(l, x)$. Die Grauen Flächen entsprechen C_1, C_2 .

und weiter

$$\bar{\Phi}(l, x) := 2\pi - \Phi(l, x),$$

den zu $\Phi(l, x)$ komplementären Winkel.

Mit dieser Definition lässt sich Gleichung (2.60) (Seite 75) ausdrücken als

$$\mathbb{P}(\sigma_\gamma(K) > l) = \frac{1}{\pi} \cdot \mathbb{E}_{x \in \text{bd}(K)} (\bar{\Phi}(l, x)),$$

wobei der Erwartungswert bezüglich $x \in \text{bd}(K)$ – gleichverteilt gewählt – gebildet wird.

Eine α -zufällige Gerade bezüglich eines konvexen Körpers K ist definiert durch zwei unabhängig gleichverteilte Punkte $x \in \text{bd}(K)$ und $y \in \text{int}(K)$. Der Schnitt der Halbgeraden yx^+ , also derjenigen, die in y beginnt und x enthält mit K wird als α -zufälliger Strahl bezeichnet (Enns und Ehlers, 1980). Die Zufallsvariable, die einem solchen Strahl die Länge zuordnet sei mit R_α bezeichnet.

Mit den obigen Definitionen lassen sich die Verteilungen der Längen α -zufälliger Strahlen, beziehungsweise Sehnen darstellen als

$$\mathbb{P}(\sigma_\alpha(K) \leq l) = \mathbb{E}_{x \in \text{bd}(K)} \left(\frac{V_2(\Pi(l, x) \cap K)}{V_2(K)} \right),$$

sowie

$$\mathbb{P}(R_\alpha(K) \leq l) = \mathbb{E}_{x \in \text{bd}(K)} \left(\frac{V_2(B(l, x) \cap K)}{V_2(K)} \right).$$

2.4 Verteilungen und Momente der Sehnenlänge

Weiter gilt

$$V_2(B(l, x) \cap K) = V_2(\Pi(l, x) \cap K) + \frac{\bar{\Phi}(l, x) \cdot l^2}{2}.$$

Damit erhält man als Zusammenhang zwischen den Verteilungen der Strahlenbeziehungsweise Sehnenlängen

$$\mathbb{P}(R_\alpha \leq l) = \mathbb{P}(\sigma_\alpha(K) \leq l) + \frac{\pi l^2}{2V_2(K)} \cdot \mathbb{P}(\sigma_\gamma(K) > l). \quad (2.67)$$

In der Arbeit von Enns und Ehlers (1980, Gl.(18)) wurde als Wahrscheinlichkeitsdichte der Verteilung der Länge eines α -zufälligen Strahles ermittelt

$$\frac{d}{dl} \mathbb{P}(R_\alpha \leq l) = f_{R_\alpha}(l) = \frac{\pi}{V_2(K)} \cdot l \cdot \omega_K(l). \quad (2.68)$$

Mit den Gleichungen (2.67) und (2.60) erhält man somit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dl} \mathbb{P}(R_\alpha \leq l) &= \frac{d}{dl} \mathbb{P}(\sigma_\alpha(K) \leq l) + \frac{d}{dl} \left(\frac{\pi l^2}{2V_2(K)} \cdot \omega_K(l) \right) \\ \Leftrightarrow f_{R_\alpha}(l) &= f_\alpha(l) + \frac{\pi l}{V_2(K)} \cdot \omega_K(l) + \frac{\pi l^2}{2V_2(K)} \cdot \frac{d\omega_K(l)}{dl} \\ \Leftrightarrow f_\alpha(l) &= -\frac{\pi}{2V_2(K)} \cdot l^2 \cdot \frac{d\omega_K(l)}{dl}. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Die k -ten Momente ($k > -2$) der Länge einer α -zufälligen Sehne stehen zu den k -ten Momenten der Länge eines α -zufälligen Strahls wie folgt in Beziehung:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\sigma_\alpha(K)^k &\stackrel{Gl.(2.69)}{=} -\frac{\pi}{2V_2(K)} \cdot \int_0^\infty l^{k+2} \cdot \frac{d\omega_K(l)}{dl} dl \\ &= -\frac{\pi}{2V_2(K)} \left(\underbrace{[l^{k+2} \cdot \omega_K(l)]_0^\infty}_{=0} - \int_0^\infty (k+2) \cdot l^{k+1} \cdot \omega_K(l) dl \right) \\ &= \frac{(k+2)\pi}{2V_2(K)} \int_0^\infty l^{k+1} \omega_K(l) dl \\ &\stackrel{Gl.(2.68)}{=} \frac{k+2}{2} \cdot \mathbb{E}(R_\alpha)^k. \end{aligned} \quad (2.70)$$

2 Zufällige Geraden im \mathbb{R}^2

Für einen Kreis $B(r, M)$ erhält man aus den Gleichungen (2.70) und (2.64) für den Erwartungswert der Sehnenlänge

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\sigma_\alpha(B(r, M)) &= \frac{3}{V_2(B(r, M))} \cdot \int_0^{2r} l^2 \arccos\left(\frac{l}{2r}\right) dl \\ &= \frac{3}{V_2(B(r, M))} \cdot \left[\frac{l^3}{3} \arccos\left(\frac{l}{2r}\right) \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{1 - \left(\frac{l}{2r}\right)^2} \cdot \frac{2rl^2 + 16r^3}{9} \right]_0^{2r} \\ &= \frac{3}{\pi r^2} \cdot \frac{16r^3}{9} = \frac{16r}{3\pi}.\end{aligned}$$

Dieser Erwartungswert stimmt wie erwartet mit dem der Länge einer ν -zufälligen Sehne überein. Ein Vergleich der Arbeiten von Enns und Ehlers (1978, 1981) zeigt jedoch, dass dies nur für Dimension Zwei zutrifft.

Für ein Rechteck $R_{a,b}$ ist mit Gleichung (2.65) der Ausdruck für $\omega_{R_{a,b}}(l)$ gegeben. Durch Kombination mit Gleichung (2.70) erhält man daher für den Erwartungswert der Sehnenlänge

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\sigma_\alpha(R_{a,b}) &= \frac{3}{ab(a+b)} \\ &\cdot \left(\int_0^{\arctan(\frac{b}{a})} \int_0^{\frac{a}{\cos(\vartheta)}} l^2(a - l \cos(\vartheta)) + l^2(b - l \sin(\vartheta)) dld\vartheta \right. \\ &\quad \left. + \int_{\arctan(\frac{b}{a})}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{b}{\sin(\vartheta)}} l^2(a - l \cos(\vartheta)) + l^2(b - l \sin(\vartheta)) dld\vartheta \right).\end{aligned}$$

Dies berechnet sich zu

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\sigma_\alpha(R_{a,b}) &= \frac{3}{ab(a+b)} \cdot \left(\int_0^{\arctan(\frac{b}{a})} \frac{a^4}{12 \cos^3(\vartheta)} + \frac{a^3 b}{3 \cos^3(\vartheta)} - \frac{a^4 \tan(\vartheta)}{4 \cos^3(\vartheta)} d\vartheta \right. \\ &\quad \left. + \int_{\arctan(\frac{b}{a})}^{\frac{\pi}{2}} \frac{b^4}{12 \sin^3(\vartheta)} + \frac{ab^3}{3 \sin^3(\vartheta)} - \frac{b^4}{4 \tan(\vartheta) \sin^3(\vartheta)} d\vartheta \right).\end{aligned}$$

Unter Verwendung der Beziehungen (2.57) erhält man damit schließlich für

den Erwartungswert

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\sigma_\alpha(R_{a,b}) = & \frac{1}{4ab(a+b)} \cdot \left(a^4 + b^4 - \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \left(a^3 + b^3 - \frac{3}{2}a^2b - \frac{3}{2}ab^2 \right) \right. \\ & + \ln \left(\frac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{a} \right) \cdot \left(\frac{a^4}{2} + 2a^3b \right) \\ & \left. + \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{b} \right) \cdot \left(\frac{b^4}{2} + 2ab^3 \right) \right).\end{aligned}$$

Für das Beispiel des Rechtecks $R_{\pi,1}$ ergibt sich hier

$$\mathbb{E}\sigma_\alpha(R_{\pi,1}) \approx 2,0086.$$

2.5 Schnittpunkte zufälliger Geraden

In diesem Abschnitt werden Schnitte zweier zufälliger Geraden betrachtet. Zuerst wird gezeigt, dass sich zwei zufällige Geraden – entsprechend der vorgestellten Konstruktionen – fast sicher in einem Punkt S schneiden. Dann wird die Verteilung dieses Schnittpunktes für zwei μ -zufällige Geraden bestimmt.

Die Bestimmung der Verteilung des Schnittpunktes zweier μ -zufälliger Geraden entspricht der im Lehrbuch von Santaló (2004). Diese Verteilung findet sich für zufällige Geraden in der Ebene ebenfalls in den Artikeln von Crofton (1867), sowie Sulanke (1965a). In den Artikeln von Schneider (1982, 1985), werden Schnittpunkte in allgemeineren Dimensionen betrachtet.

Satz 2.5.1 *Sei $K \in \mathcal{K}$ ein konvexer Körper mit $\text{int}(K) \neq \emptyset$. Dann schneiden sich zwei μ -zufällige Geraden g_1, g_2 durch K mit Wahrscheinlichkeit 1 in einem Punkt S .*

Beweis: Sei K ein konvexer Körper mit nicht leerem Inneren und g_1 eine μ -zufällige Gerade durch K . Diese Gerade ist festgelegt durch die beiden Geradenparameter α_1 und p_1 . Wird nun eine zweite μ -zufällige Gerade g_2 gewählt, so sind folgende drei Fälle möglich:

1. g_1 und g_2 schneiden sich in genau einem Punkt S .
2. g_1 und g_2 sind parallel.
3. g_1 und g_2 sind identisch.

2 Zufällige Geraden im \mathbb{R}^2

Da diese drei Ereignisse disjunkt sind, berechnet sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit zu

$$\mathbb{P}(g_1 \cap g_2 = \{S\}) = 1 - \mathbb{P}(g_1 \cap g_2 = \{\emptyset\}) - \mathbb{P}(g_1 = g_2).$$

Sollen g_1 und g_2 parallel sein, so müssen für die Parameter α_2 und p_2 der Geraden g_2 die Bedingungen $\alpha_2 = \alpha_1$, sowie $p_2 \neq p_1$ erfüllt sein. mit

$$A_{\alpha_1} := \{(\alpha_1, p) : p \neq p_1, p \in \mathbb{R}\}$$

folgt somit

$$\mathbb{P}(g_1 \cap g_2 = \{\emptyset\}) = \frac{\mu|_{[K]}(\chi^{-1}(A_{\alpha_1}))}{\mu([K])} = \frac{\lambda_2|_{\chi([K])}(A_{\alpha_1})}{\lambda_2(\chi([K]))} = \frac{0}{\lambda_2(\chi([K]))} = 0.$$

Da das zweidimensionale Lebesguemaß der eindimensionalen Menge A_{α_1} Null ist, ist obige Wahrscheinlichkeit Null.

Sollen die Geraden g_1 und g_2 identisch sein, so müssen die Parameter beider Geraden übereinstimmen. Somit ergibt sich

$$\mathbb{P}(g_1 = g_2) = \frac{\mu|_{[K]}(\chi^{-1}(\alpha_1, p_1))}{\mu([K])} = 0.$$

Da das zweidimensionale Lebesguemaß des Punktes (α_1, p_1) ebenfalls null ist, ist auch diese Wahrscheinlichkeit null.

Mit diesen Resultaten folgt

$$\mathbb{P}(g_1 \cap g_2 = \{S\}) = 1 - 0 - 0 = 1,$$

was die Behauptung war. ■

Bemerkung: In diesem Beweis wurde verwendet, dass es sich für eine feste Gerade g_1 bei den Mengen der Geraden, welche parallel zu g_1 , beziehungsweise identisch mit g_1 sind um μ -Nullmengen handelt. In den Abschnitten 2.2.4 bis 2.2.8 wurde gezeigt, dass die Verteilungen sämtlicher in dieser Arbeit vorgestellter Typen zufälliger Geraden stetig sind bezüglich des invarianten Geradenmaßes μ (in den drei letzten Fällen wurde dies nur für die Konstruktion bezüglich eines Kreises getan). Somit sind für eine feste Gerade g_1 für alle hier vorgestellten Typen zufälliger Geraden – konstruiert bezüglich eines Kreises – die Mengen der zu g_1 parallelen beziehungsweise mit g_1 identischen Geraden ebenfalls μ -Nullmengen und damit ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich zwei zufällige Geraden in genau einem Punkt schneiden gleich eins. Im

Fall ν - und λ -zufälliger Geraden gilt diese Aussage für Konstruktionen bezüglich beliebiger konvexer Körper. Für β -zufällige Geraden lässt sich bemerken, dass diese Aussage nicht gilt, falls der Rand des konvexen Körpers, bezüglich dessen die Gerade konstruiert wird, sich teilweise als Strecken beschreiben lässt. In Abschnitt 2.2.7 (*Bemerkung zur Dichte bezüglich μ*) wurde gezeigt, dass dann eine einzelne Gerade eine von Null verschiedene Masse und damit eine positive Wahrscheinlichkeit \mathbb{P}_β hat. Somit hat das Ereignis $g_2 = g_1$ (g_2 β -zufällige Gerade durch K) eine von Null verschiedene Wahrscheinlichkeit. Hat K parallele Seiten (zum Beispiel ein Rechteck), so hat damit das Ereignis $g_2 \parallel g_1$ ebenfalls eine positive Wahrscheinlichkeit.

2.5.1 Verteilung des Schnittpunktes zweier μ -zufälliger Geraden

Seien K ein konvexer Körper mit nicht leerem Inneren, sowie g_1, g_2 zwei μ -zufällige Geraden durch K , die sich mit Satz 2.5.1 fast sicher in einem Punkt $S \in \mathbb{R}^2$ schneiden. Für eine Borelmenge $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^2)$ lässt sich die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(S \in A)$ schreiben als

$$\mathbb{P}(S \in A) = \frac{\int_{\mathcal{G}} 1_{[K]}(g_1) \int_{\mathcal{G}} 1_A(S) 1_{[K]}(g_2) d\mu(g_2) d\mu(g_1)}{\int_{\mathcal{G}} 1_{[K]}(g_1) \int_{\mathcal{G}} 1_{[K]}(g_2) d\mu(g_2) d\mu(g_1)}. \quad (2.71)$$

Das Integral im Nenner berechnet sich mit Hilfe der Crofton-Formel zu

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{G}} 1_{[K]}(g_1) \int_{\mathcal{G}} 1_{[K]}(g_2) d\mu(g_2) d\mu(g_1) &= \mu([K]) \int_{\mathcal{G}} 1_{[K]}(g_1) d\mu(g_1) \\ &= \mu([K])^2 = \alpha_{201}^2 V_1(K)^2 = \frac{1}{\pi^2} U(K)^2. \end{aligned}$$

Die beiden Geraden g_1 und g_2 lassen sich einerseits durch Angabe ihrer Koordinaten (α_1, p_1) beziehungsweise (α_2, p_2) im Paramterraum beschreiben, andererseits durch Angabe ihres Schnittpunktes $S = (s_1, s_2)$ sowie der beiden Winkel β_1, β_2 , welche den Winkel zwischen der x_1 -Achse und g_1 beziehungsweise g_2 bezeichnen. Aus gegebenen S, β_1, β_2 berechnen sich $\alpha_1, p_1, \alpha_2, p_2$ zu

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \left(\beta_1 - \frac{\pi}{2} \right) \mod \pi \\ \alpha_2 &= \left(\beta_2 - \frac{\pi}{2} \right) \mod \pi \\ p_1 &= s_1 \sin(\beta_1) - s_2 \cos(\beta_1) \\ p_2 &= s_1 \sin(\beta_2) - s_2 \cos(\beta_2). \end{aligned}$$

2 Zufällige Geraden im \mathbb{R}^2

Damit wird eine Abbildung $f : (s_1, s_2, \beta_1, \beta_2) \mapsto (\alpha_1, \alpha_2, p_1, p_2)$ definiert,

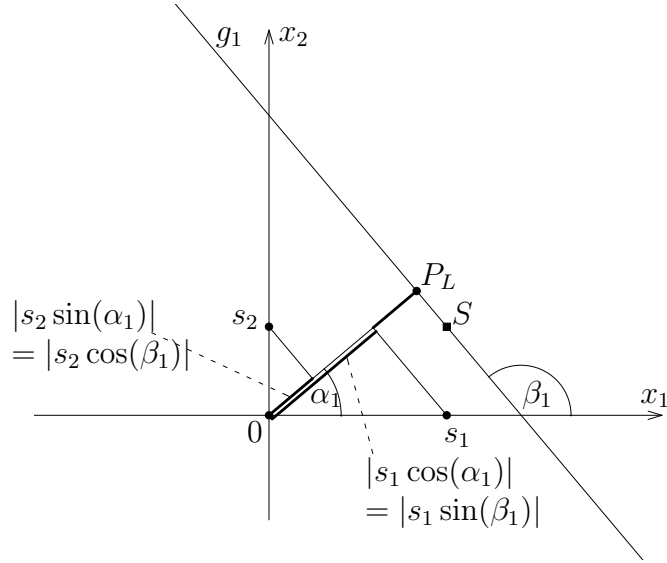


Abbildung 2.21: Bestimmung der Geradenkoordinaten α_1 , p_1 aus dem Schnittpunkt S und dem Winkel β_1 .

deren Funktionaldeterminante gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \det Df &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \sin(\beta_1) & -\cos(\beta_1) & s_1 \cos(\beta_1) + s_2 \sin(\beta_1) & 0 \\ \sin(\beta_2) & -\cos(\beta_2) & 0 & s_1 \cos(\beta_2) + s_2 \sin(\beta_2) \end{vmatrix} \\ &= \sin(\beta_2) \cos(\beta_1) - \cos(\beta_2) \sin(\beta_1) = \sin(\beta_2 - \beta_1). \end{aligned}$$

Die durch Gleichung (2.71) gegebene Wahrscheinlichkeit lässt sich somit schreiben als

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S \in A) &= \frac{\pi^2}{U(K)^2} \cdot \frac{1}{\pi^2} \cdot \int_A \int_{B_1} \int_{B_2} |\sin(\beta_2 - \beta_1)| d\lambda_1(\beta_2) d\lambda_1(\beta_1) d\lambda(S) \\ &= \frac{1}{U(K)^2} \cdot \int_A \int_{B_1} \int_{B_2} |\sin(\beta_2 - \beta_1)| d\lambda_1(\beta_2) d\lambda_1(\beta_1) d\lambda(S), \end{aligned} \tag{2.72}$$

mit $B_i := \{\beta \in [0, \pi) : g_i \cap K \neq \emptyset\}$, $i \in \{1, 2\}$. Der Faktor $\frac{1}{\pi^2}$ muss wegen der Normierung des invarianten Maßes μ eingefügt werden.

2.5 Schnittpunkte zufälliger Geraden

Für einen festen Punkt $S \in \text{int}(K)$ gilt $B_1 = B_2 = [0, \pi)$. Sei also nun $K \supset A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^2)$, damit wird erhalten

$$\begin{aligned}
 & \int_A \int_{B_1} \int_{B_2} |\sin(\beta_2 - \beta_1)| d\lambda_1(\beta_2) d\lambda_1(\beta_1) d\lambda(S) \\
 &= \int_A \int_0^\pi \int_0^\pi |\sin(\beta_2 - \beta_1)| d\beta_2 d\beta_1 d\lambda(S) \\
 &= \int_A \int_0^\pi \left(\int_0^{\beta_1} \sin(\beta_2 - \beta_1) + \int_{\beta_1}^\pi \sin(\beta_2 - \beta_1) \right) d\beta_2 d\beta_1 d\lambda(S) \quad (2.73) \\
 &= \int_A \int_0^\pi 2 - \cos(\beta_1 - 0) - \cos(\pi - \beta_1) d\beta_1 d\lambda(S) \\
 &= \int_A 2\pi d\lambda(S) = 2\pi\lambda(A).
 \end{aligned}$$

Liegt der Schnittpunkt S zweier Geraden außerhalb von K , so gilt $B_1 = B_2 = [\gamma, \delta]$ ($\gamma < \delta$), wobei γ, δ die beiden Winkel zwischen den Stützgeraden an K durch S mit der x_1 -Achse bezeichnen (siehe Abbildung 2.22).

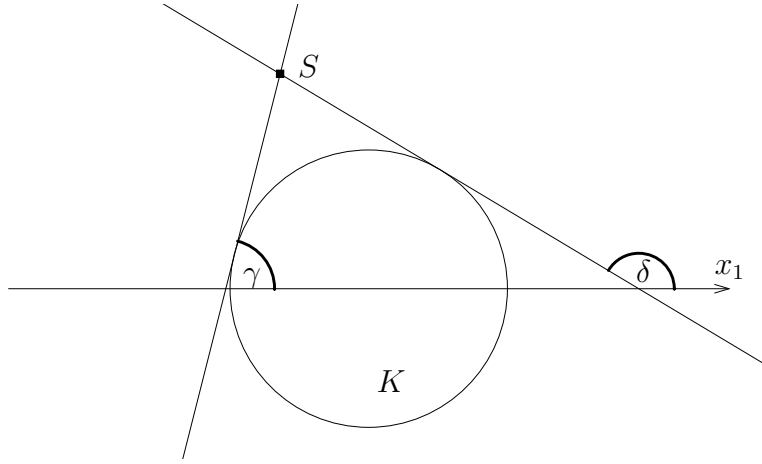


Abbildung 2.22: Integrationsgrenzen in Abhängigkeit der Lage des Schnittpunktes S .

2 Zufällige Geraden im \mathbb{R}^2

Für $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^2)$ mit $A \cap K = \emptyset$ wird erhalten

$$\begin{aligned}
& \int_A \int_{B_1} \int_{B_2} |\sin(\beta_2 - \beta_1)| d\lambda_1(\beta_2) d\lambda_1(\beta_1) d\lambda(S) \\
&= \int_A \int_{\gamma}^{\delta} \int_{\gamma}^{\delta} |\sin(\beta_2 - \beta_1)| d\beta_2 d\beta_1 d\lambda(S) \\
&= \int_A \int_{\gamma}^{\delta} \left(\int_{\gamma}^{\beta_1} \sin(\beta_2 - \beta_1) + \int_{\beta_1}^{\delta} \sin(\beta_2 - \beta_1) \right) d\beta_2 d\beta_1 d\lambda(S) \quad (2.74) \\
&= \int_A \int_{\gamma}^{\delta} 2 - \cos(\beta_1 - \gamma) - \cos(\delta - \beta_1) d\beta_1 d\lambda(S) \\
&= \int_A 2(\delta - \gamma) - 2 \sin(\delta - \gamma) := \int_A 2\omega - 2 \sin(\omega).
\end{aligned}$$

Insgesamt erhält man mit den Gleichungen (2.72), (2.73) und (2.74) folgende Verteilung des Schnittpunktes S zweier μ -zufälliger Geraden: Für $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^2)$ gilt

$$\mathbb{P}(S \in A) = \begin{cases} \frac{2\pi\lambda(A)}{U(K)^2}, & \text{für } A \subset K \\ \frac{2}{U(K)^2} \int_A \omega(S) - \sin(\omega(S)) d\lambda(S), & \text{für } A \cap K = \{\emptyset\}. \end{cases} \quad (2.75)$$

Gleichung (2.75) besagt, dass der Schnittpunkt S im Inneren von K gleichverteilt ist. Je weiter S von K entfernt ist, desto kleiner wird $\omega(S)$.

Die Wahrscheinlichkeiten, dass für einen zweidimensionalen konvexen Körper K mit nicht leerem Inneren der Schnittpunkt S zweier μ -zufälliger Geraden durch K innerhalb beziehungsweise außerhalb von K liegt, sind mit Gleichung (2.75) gegeben zu

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S \in K) &= \frac{2\pi A(K)}{U(K)^2}, \\
\mathbb{P}(S \notin K) &= \frac{2}{U(K)^2} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus K} \omega(S) - \sin(\omega(S)) d\lambda(S) = 1 - \frac{2\pi A(K)}{U(K)^2},
\end{aligned}$$

wobei $A(K)$ den Flächeninhalt und $U(K)$ den Umfang von K bezeichnen. Aus der isoperimetrischen Ungleichung folgt damit, dass für je zwei μ -zufällige Geraden durch konvexe Körper K mit gegebenem Flächeninhalt die Wahrscheinlichkeit für einen Schnitt im Inneren von K genau dann maximal wird, wenn K ein Kreis ist.

Beachtet man weiter, dass für μ -zufällige Geraden bezüglich eines Kreises

2.5 Schnittpunkte zufälliger Geraden

rB^2 gilt

$$\mathbb{P}(S \in rB^2) = \frac{2\pi^2 r^2}{4\pi^2 r^2} = \frac{1}{2},$$

so folgt für den Schnittpunkt S zweier μ -zufälliger Geraden durch beliebige konvexe Körper K

$$\mathbb{P}(S \in K) \leq \frac{1}{2},$$

mit Gleichheit genau dann, wenn K ein Kreis ist.

Als Beispiel soll noch die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, im Falle eines Kreises $B(r, M)$ den Abstand $d(S, M)$ des Schnittpunkts S zweier μ -zufälliger Geraden durch $B(r, M)$ vom Mittelpunkt des Kreises im Intervall $[\tilde{r}, r)$ zu finden, wobei gilt $0 \leq \tilde{r} < r$. Gesucht ist also die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}(\tilde{r} \leq d(S, M) < r).$$

Dies ist die Wahrscheinlichkeit, dass S im Inneren des Kreises $B(r, M)$ und

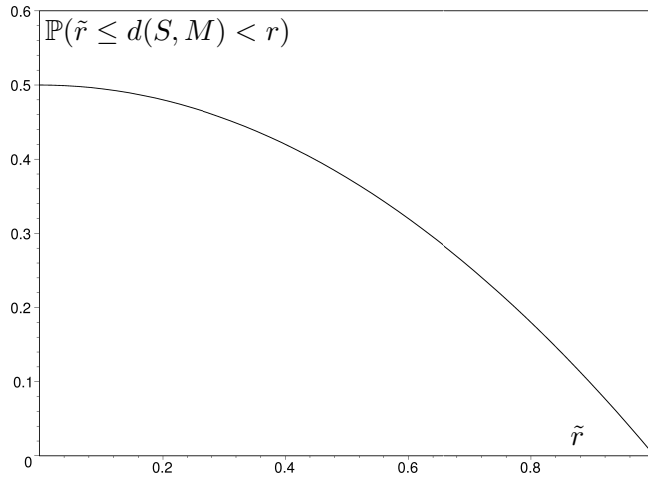


Abbildung 2.23: $\mathbb{P}(\tilde{r} \leq d(S, M) < r)$ im Falle μ -zufälliger Geraden durch $B(r, M)$. Grafik erstellt in Maple für $r = 1$.

nicht im Inneren des Kreises $B(\tilde{r}, M)$ liegt. Es wird erhalten

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tilde{r} \leq d(S, M) < r) &= \frac{1}{2} - \mathbb{P}(S \in B(\tilde{r}, M)) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{r}}{r} \right)^2. \end{aligned}$$

(siehe Abbildung 2.23)

2.6 Zusammenfassung des Kapitels

An dieser Stelle sollen die in diesem Kapitel gefundenen Resultate tabellarisch zusammengefasst werden.

Tabelle 2.1: Zusammenfassung 1.

	IUZ-Gerade	Punkt-Richtung	Zwei-Punkte
Festgelegt durch	Geraden- koordinaten α, p	$x \in \text{int}(K),$ $L \in \mathcal{L}_1^2$	$y, z \in \text{int}(K)$
Dichte bezüglich μ	1	$\frac{V_1(g \cap K)}{V_2(K)}$	$\frac{\pi}{3} \cdot \frac{V_1(g \cap K)^3}{V_2(K)^2}$
Bezeichnung der zufälligen Sehne	μ	ν	λ
$\mathbb{E}\sigma_r(K)$	$\pi \cdot \frac{A(K)}{U(K)}$	$\leq \frac{16}{3\pi} \cdot \left(\frac{V_2(K)}{\pi}\right)^{1/2}$	$\geq \frac{256}{45\pi} \cdot \left(\frac{V_2(K)}{\pi}\right)^{1/2}$
$\mathbb{E}\sigma_r(B^2)$	$\frac{\pi}{2} \approx 1,5708$	$\frac{16}{3\pi} \approx 1,6977$	$\frac{256}{45\pi} \approx 1,8108$
$\mathbb{E}\sigma_r(R_{\pi,1})$	$\frac{\pi^2}{2\pi+2} \approx 1,1915$	$\approx 1,5532$	$\approx 2,3112$
$\mathbb{P}(S \in K)$	$2\pi \frac{A(K)}{U(K)^2}$		
$\mathbb{P}(S \in B^2)$	$\frac{1}{2}$		

Tabelle 2.2: Zusammenfassung 2. Die Dichten bezüglich μ sind für Konstruktionen der Geraden bezüglich $K = \tilde{r}B^2$ angegeben.

	Randpunkt- Richtung	Zwei Rand- punkte	Randpunkt- innerer Punkt
Festgelegt durch	$x \in \text{bd}(K),$ $L \in \mathcal{L}_1^2$	$y, z \in \text{bd}(K)$	$y \in \text{bd}(K),$ $z \in \text{int}(K)$

Tabelle 2.2: Fortsetzung Zusammenfassung 2.

	Randpunkt- Richtung	Zwei Rand- punkte	Randpunkt- innerer Punkt
Dichte bezüglich μ	$\frac{2}{\pi \cdot V_1(g \cap K)}$	$\frac{2}{\pi \cdot V_1(g \cap K)}$	$\frac{V_1(g \cap K)}{V_2(K)}$
Bezeichnung der zufälligen Sehne	γ	β	α
$\mathbb{E}\sigma_r(\tilde{r} \cdot B^2)$	$\frac{4\tilde{r}}{\pi}$	$\frac{4\tilde{r}}{\pi}$	$\frac{16\tilde{r}}{3\pi}$
$\mathbb{E}\sigma_r(B^2)$	$\frac{4}{\pi} \approx 1,2732$	$\frac{4}{\pi} \approx 1,2732$	$\frac{16}{3\pi} \approx 1,6977$
$\mathbb{E}\sigma_r(R_{\pi,1})$	$\approx 1,2172$		$\approx 2,0086$

 Tabelle 2.3: Dichten $f_r(l)$.

Gerade	Dichte $f_r(l)$
μ -zufällig	$\frac{\pi V_2(K)}{2V_1(K)} \cdot \frac{d^2\Omega_K}{dl^2}(l)$
ν -zufällig	$l \frac{d^2\Omega_K}{dl^2}(l)$
λ -zufällig	$\frac{\pi}{3V_2(K)} \cdot l^3 \cdot \frac{d^2\Omega_K}{dl^2}(l)$
γ -zufällig	$-\frac{d\omega_K}{dl}(l)$
β -zufällig	$2\pi l \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\Omega_{K_{\Delta\varepsilon}}(l)}{V_2(K_{\Delta\varepsilon})} \right) \quad (*)$
α -zufällig	$-\frac{\pi}{2V_2(K)} \cdot l^2 \cdot \frac{d\omega_K}{dl}(l)$

Die an der Stelle $(*)$ angegebene Dichte gilt bezüglich konvexer Körper, die höchstens endlich viele Randpunkte mit Krümmung Null haben.

2 Zufällige Geraden im \mathbb{R}^2

Tabelle 2.4: Erwartungswerte der Sehnenlänge bezüglich eines Rechtecks.

Gerade	$\mathbb{E}\sigma_r(R_{a,b})$
μ -zufällig	Siehe oben.
ν -zufällig	$\frac{2(a^3+b^3)}{3\pi ab} - \frac{2(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}{3\pi ab} + \frac{2a}{\pi} \ln\left(\frac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{a}\right) + \frac{2b}{\pi} \ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b}\right)$
λ -zufällig	$\frac{1}{15} \left(\frac{2a^3}{b^2} + \frac{2b^3}{a^2} + \sqrt{a^2+b^2} \left(6 - \frac{2a^2}{b^2} - \frac{2b^2}{a^2} \right) \right. \\ \left. + \frac{5a^2}{b} \ln\left(\frac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{a}\right) + \frac{5b^2}{a} \ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b}\right) \right)$
γ -zufällig	$\frac{1}{\pi(a+b)} \cdot \left(a^2 + b^2 + \ln\left(\frac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{a}\right) \cdot (a^2 + 2ab) \right. \\ \left. + \ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b}\right) \cdot (b^2 + 2ab) - \sqrt{a^2+b^2} \cdot (a+b) \right)$
β -zufällig	Nicht betrachtet.
α -zufällig	$\frac{1}{4ab(a+b)} \cdot \left(a^4 + b^4 - \sqrt{a^2+b^2} \cdot (a^3 + b^3 - \frac{3}{2}a^2b - \frac{3}{2}ab^2) \right. \\ \left. + \ln\left(\frac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{a}\right) \cdot \left(\frac{a^4}{2} + 2a^3b\right) + \ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b}\right) \cdot \left(\frac{b^4}{2} + 2ab^3\right) \right)$

3 Simulationen mit Maple

In diesem Kapitel werden zu einigen der im vorherigen Kapitel besprochenen Resultate Simulationen mit dem Computer Algebra-System Maple vorgestellt.

Im vorletzten Abschnitt dieses Kapitels findet sich eine tabellarische Zusammenfassung und Gegenüberstellung mit den theoretischen Resultaten, im letzten Abschnitt einige Abbildungen der durchgeführten Simulationen.

Im Anhang A befindet sich eine CD mit sämtlichen hier durchgeführten Simulationen.

3.1 Vorbemerkung

Für die folgenden Simulationen werden auf verschiedenen Intervallen stetig gleichverteilte Zufallszahlen benötigt. Mit Maple lassen sich jedoch nur ganze Zahlen aus einem vorgegebenen Intervall (mit ganzzahligen Grenzen) gleichverteilt generieren. Wählt man jedoch ein sehr großes Intervall, aus dem dann Zahlen z generiert werden und teilt diese Zahlen z durch die Länge dieses Intervalles, so erhält man quasi stetig gleichverteilte Zahlen \tilde{z} in einem Intervall der Länge eins. Durch Multiplikation mit einem entsprechenden Faktor werden dann \tilde{z} in einem beliebigen Intervall erhalten.

3.2 Mittlere Sehnenlängen

In diesem Abschnitt werden mittlere Längen der Schnitte zufälliger Geraden g mit

- a) dem Einheitskreis B^2 mit Mittelpunkt 0,
- b) einem Rechteck $R_{\pi,1}$ mit den Seitenlängen $a = \pi$ und $b = 1$, also mit $V_2(R_{\pi,1}) = V_2(B^2)$,

bestimmt. Hierzu werden zufällige Geraden g – entsprechend der in Abschnitt 2.2 vorgestellten Typen – bezüglich B^2 , beziehungsweise $R_{\pi,1}$ konstruiert,

3 Simulationen

deren Schnittlängen mit diesen bestimmt und schließlich der Mittelwert gebildet. Dies wird für jede Konstruktion je zwei mal mit 30000 Geraden durchgeführt.

Die folgenden Berechnungen unterscheiden sich lediglich in der Konstruktion der zufälligen Geraden g . Allgemein werden die mittleren Sehnenlängen folgendermaßen bestimmt:

1. Laden von Paketen, Definitionen.
2. In einer Schleife vorgegebener Länge N :
 - a) Festlegung der Geraden g_i ,
 - b) Bestimmung der beiden Schnittpunkte S_1^i, S_2^i von g_i mit B^2 , beziehungsweise $R_{\pi,1}$,
 - c) Ermittlung der Sehnenlänge l_i als Abstand der beiden Schnittpunkte,
 - d) Aufsummierung der Sehnenlängen l_i .
3. Ausgabe:
 - a) Mittelwert als Quotient $\frac{\sum_{i=1}^N l_i}{N}$.

Für die meisten Berechnungen und Definitionen gibt es Routinen und Pakete in Maple, wodurch sich die Simulationen sehr einfach gestalten – lediglich die Schnitte der zufälligen Geraden mit dem Rechteck erfordern einige Fallunterscheidungen (siehe Anhang A).

Im Falle der Konstruktion einer zufälligen Geraden durch zwei Randpunkte ist die Sehnenlänge für die Konstruktion bezüglich B^2 durch den Abstand der beiden zufällig gewählten Punkte gegeben. Der Fall β -zufälliger Geraden bezüglich $R_{\pi,1}$ wird nicht betrachtet, da er auch in Kapitel 2 ausgeschlossen wurde.

Die Resultate sind in Abschnitt 3.4, ab Seite 100 aufgeführt, Abbildungen mit je 200 Geraden finden sich in Abschnitt 3.5.

3.2.1 μ -zufällige Sehnen

Gemäß Abschnitt 2.2.2 erhält man eine IUZ-Gerade durch den Kreis B^2 um Mittelpunkt 0, indem man die Geradenkoordinaten $\alpha \in [0, \pi)$, sowie $p \in [-1, 1]$ unabhängig gleichverteilt wählt.

Zur Konstruktion einer IUZ-Geraden werden also zwei stetig gleichverteilte Zahlen $\alpha \in [0, \pi)$, sowie $p \in [-1, 1]$ generiert (siehe Abschnitt 3.1) und mit diesen die Gerade g wie folgt konstruiert:

Die Koordinaten p_1, p_2 des Lotfußpunktes P_L des Lotes auf g durch 0 sind gegeben durch

$$\begin{aligned} p_1 &= p \cdot \cos(\alpha), \\ p_2 &= p \cdot \sin(\alpha). \end{aligned}$$

Einen weiteren Punkt $(q_1, q_2) \in g$ erhält man mit

$$\begin{aligned} q_1 &= p_1 + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right), \\ q_2 &= p_2 + \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Somit kann die Gerade g durch die beiden Punkte (p_1, p_2) , sowie (q_1, q_2) definiert und wie oben erläutert die mittlere Länge des Schnitts $g \cap B^2$ ermittelt werden.

Zur Konstruktion der IUZ-Geraden durch das Rechteck $R_{\pi,1}$ verfährt man wie folgt:

Man definiert einen Kreis \tilde{K} mit Radius $r = \frac{1}{2}\sqrt{\pi^2 + 1}$ – der $R_{\pi,1}$ enthält – und konstruiert eine IUZ-Gerade g durch \tilde{K} wie eben erläutert. Schneidet diese Gerade g das Rechteck $R_{\pi,1}$, so wird sie verwendet, ansonsten eine neue konstruiert (siehe Satz 2.2.2).

3.2.2 ν -zufällige Sehnen

Zur Konstruktion einer ν -zufälligen Geraden g wird ein Punkt P mit Koordinaten p_1, p_2 aus dem Inneren von B^2 beziehungsweise $R_{\pi,1}$, sowie eine zufällige Richtung, gegeben durch einen Winkel $\alpha \in [0, \pi)$, benötigt. Damit kann g durch die Punkte P und (q_1, q_2) definiert werden, wobei die Koordinaten des zweiten Punktes gegeben sind durch

$$\begin{aligned} q_1 &= p_1 + \cos(\alpha), \\ q_2 &= p_2 + \sin(\alpha). \end{aligned}$$

Der Punkt P im Inneren von $R_{\pi,1}$ wird erhalten, indem seine Koordinaten $p_1 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und $p_2 \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ gleichverteilt gewählt werden. Um einen gleichverteilt gewählten Punkt P aus dem Inneren von B^2 zu erhalten, wählt man seine Koordinaten $p_1 \in [-1, 1]$ und $p_2 \in [-1, 1]$ gleichverteilt und verwendet ihn nur, falls er in B^2 liegt.

3.2.3 λ -zufällige Sehnen

Die hier benötigte zufällige Gerade g wird definiert durch zwei unabhängig gleichverteilte Punkte P und Q aus dem Inneren von B^2 , beziehungsweise $R_{\pi,1}$. Diese lassen sich wie im vorangegangenen Abschnitt erläutert generieren.

3.2.4 γ -zufällige Sehnen

Diese Konstruktion entspricht der in Abschnitt 3.2.2, nur dass statt eines inneren Punktes P nun ein Randpunkt P verwendet wird. Dieser wird im Falle eines Kreises erhalten, indem ein Winkel $\beta \in [0, 2\pi)$ gleichverteilt gewählt wird, wobei seine Koordinaten dann gegeben sind durch

$$\begin{aligned} p_1 &= \cos(\beta) \\ p_2 &= \sin(\beta). \end{aligned}$$

Um einen Randpunkt P des Rechtecks $R_{\pi,1}$ mit Eckpunkten $(\frac{\pi}{2}, -\frac{1}{2})$, $(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2})$, $(-\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2})$, sowie $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{1}{2})$ zu erhalten wird eine zufällig gleichverteilte Zahl $z \in [0, 2\pi + 2) = [0, U(R_{\pi,1}))$ gewählt. Dann ist der Punkt $P = (p_1, p_2)$ gegeben durch

$$(p_1, p_2) = \begin{cases} (\frac{\pi}{2}, z - \frac{1}{2}) & \text{für } z \in [0, 1], \\ (-z + 1 + \frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}) & \text{für } z \in (1, \pi + 1), \\ (-\frac{\pi}{2}, -z + \pi + \frac{3}{2}) & \text{für } z \in [\pi + 1, \pi + 2], \\ (z - 2 - \frac{3}{2}\pi, -\frac{1}{2}) & \text{für } z \in (\pi + 2, 2\pi + 2). \end{cases}$$

3.2.5 α - und β -zufällige Sehnen

In diesen beiden Fällen werden die beiden zur Definition der Geraden g benötigten Punkte wieder entsprechend der vorangegangenen Abschnitte generiert.

3.3 Zur Verteilung der Richtung zufälliger Geraden

An dieser Stelle soll noch auf eine Frage (zumindest im Rahmen einer Simulation) eingegangen werden, die in der bisherigen Arbeit noch nicht gestellt wurde.

3.3 Zur Verteilung der Richtung zufälliger Geraden

Jede Gerade g in der Ebene lässt sich, wie bereits erwähnt, in der Form

$$g = L + x, \quad L \in \mathcal{L}_1^2, \quad x \in \mathbb{R}^2$$

schreiben, wobei der lineare Unterraum L durch einen Winkel $\beta \in [0, \pi)$ gegeben ist (der Winkel, den die Ursprungsgerade L mit der x_1 -Achse einschließt).

Für zufällige Geraden g eines bestimmten Typs und Borelmengen $A \in \mathfrak{B}([0, \pi))$ lässt sich nun die Frage nach der Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(L \in \varphi(A))$ stellen, mit

$$\varphi : \begin{array}{l} [0, \pi) \rightarrow \mathcal{L}_1^2 \\ \beta \mapsto L. \end{array}$$

Für IUZ-Geraden, sowie ν - und γ -zufällige Geraden ist dieser lineare Unterraum dann per Definition gleichverteilt.

Die übrigen Fälle sollen nun im Rahmen einer Simulation betrachtet werden. Diese gliedert sich wie folgt:

1. Definitionen, Laden von Paketen.
2. Aufteilen des Intervalles $[0, \pi)$ in T Teile $T_i := [t_i, t_{i+1})$,
 $i \in \{0, \dots, T-1\}$ mit $t_0 := 0$, $t_i := t_{i-1} + \frac{\pi}{T}$.
3. In einer Schleife der Länge N :
 - a) Konstruktion einer zufälligen Geraden g ,
 - b) Bestimmung der Winkels β zwischen g und der x_1 -Achse,
 - c) Falls β im Intervall T_{i+1} , $i \in \{0, \dots, T-1\}$ liegt, so erhöhe den Zähler \tilde{Z}_{i+1} um eins,
4. Zeichnen der Punkte $\left(j \cdot \frac{\pi}{T}, \frac{\tilde{Z}_j}{N}\right)$, $j \in \{1, \dots, T\}$.

Für ein $j \in \{1, \dots, T\}$ bezeichnet der Punkt $\left(j \cdot \frac{\pi}{T}, \frac{\tilde{Z}_j}{N}\right)$ die relative Häufigkeit, dass eine zufällige Gerade g mit der x_1 -Achse einen Winkel $\beta \in \left[(j-1)\frac{\pi}{T}, j\frac{\pi}{T}\right)$ einschließt.

Diese Simulation wird für ν -zufällige Geraden (zum Vergleich), sowie für λ -, β - und α -zufällige Geraden durchgeführt. Die zufälligen Geraden werden konstruiert bezüglich des Einheitskreises B^2 , dem Rechteck $R_{\pi,a}$ mit Seitenlängen $a = \pi$, $b = 1$, sowie bezüglich eines Rechteckes $R_{2\pi,1/2}$ mit Seitenlängen $a = 2\pi$, $b = \frac{1}{2}$, wobei die Rechtecke so definiert werden, dass ihre längeren Seiten parallel zur x_1 -Achse liegen.

3 Simulationen

In diesen Simulationen werden $[0, \pi)$ in 100 Teile zerlegt und je 30000 Geraden konstruiert. Die zugehörigen Abbildungen finden sich in Abschnitt 3.5.

Bemerkungen:

Die erhaltenen Resultate (siehe Abschnitt 3.5) sind rein qualitativer Natur, jedoch lassen sich einige Beobachtungen festhalten:

- Im Falle der Konstruktion bezüglich B^2 scheinen die Richtungen sämtlicher Typen gleichverteilt zu sein.
- Für ν -zufällige Geraden scheint – wie erwartet – die Richtung auch bei Konstruktion bezüglich eines Rechtecks gleichverteilt zu sein.
- In den drei übrigen Fällen werden Richtungen parallel zur längeren Rechteckseite häufiger, dieser Effekt nimmt zu, je größer das Verhältnis $\frac{\text{Länge der langen Seite}}{\text{Länge der kürzeren Seite}}$ wird.
- Bei der Simulation mit β -zufälligen Geraden bezüglich der Rechtecke finden sich in $\frac{\pi}{100}$ und π , sowie (etwas niedriger) in $(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{100})$ unverhältnismäßig hohe Häufigkeiten – wie erwähnt besteht eine von Null verschiedene Wahrscheinlichkeit, dass beide Randpunkte in der gleichen Seite des Rechtecks liegen – umso größer, je länger die Seite im Verhältnis zu den übrigen – , was diesen Effekt bewirkt.

3.4 Tabellarische Zusammenfassung

An dieser Stelle werden die in diesem Kapitel gefundenen Resultate zur Bestimmung der mittleren Sehnenlängen zusammengefasst und den Theoretischen gegenübergestellt. Im Folgenden bezeichne für $r \in \{\mu, \nu, \lambda, \gamma, \beta, \alpha\}$ $\bar{L}_r(\cdot)$ den Mittelwert der entsprechenden Sehnenlänge, $\sigma_r(\cdot)$ den Erwartungswert.

Die erhaltenen Werte stimmen relativ gut mit denen aus Kapitel 2 überein, und werden durchgehend auf vier Nachkommastellen gerundet angegeben.

3.4 Tabellarische Zusammenfassung

Tabelle 3.1: Mittlere Sehnenlängen 1.

Form	IUZ-Gerade	Punkt- Richtung	Zwei Punkte
Bezeichnung der zufälligen Sehne	μ	ν	λ
$\bar{L}_r(B^2)$	1,5677 1,5741	1,6966 1,6982	1,8119 1,8109
$\bar{L}_r(R_{\pi,1})$	1,1872 1,1983	1,5515 1,5553	2,3057 2,3005
$\mathbb{E}\sigma_r(B^2)$	$\frac{\pi}{2} \approx 1,5708$	$\frac{16}{3\pi} \approx 1,6977$	$\frac{256}{45\pi} \approx 1,8108$
$\mathbb{E}\sigma_r(R_{\pi,1})$	$\frac{\pi^2}{2\pi+2} \approx 1,1915$	$\approx 1,5532$	$\approx 2,3112$

Tabelle 3.2: Mittlere Sehnenlängen 2.

Form	Randpunkt- Richtung	Zwei Randpunkte	Randpunkt- innerer Punkt
Bezeichnung der zufälligen Sehne	γ	β	α
$\bar{L}_r(B^2)$	1,2699 1,2747	1,2685 1,2743	1,6954 1,6970
$\bar{L}_r(R_{\pi,1})$	1,2150 1,2152		2,0135 2,0030
$\mathbb{E}\sigma_r(B^2)$	$\frac{4}{\pi} \approx 1,2732$	$\frac{4}{\pi} \approx 1,2732$	$\frac{16}{3\pi} \approx 1,6977$
$\mathbb{E}\sigma_r(R_{\pi,1})$	$\approx 1,2172$		$\approx 2,0086$

3.5 Abbildungen

3.5.1 Zufällige Geraden durch Kreis und Rechteck

Für die folgenden Abbildungen wurden je 200 zufällige Geraden bezüglich eines Kreises mit Radius $r = 1$, beziehungsweise eines Rechteckes $R_{\pi,1}$ mit Seitenlängen $a = 1$ und $b = \pi$ konstruiert.

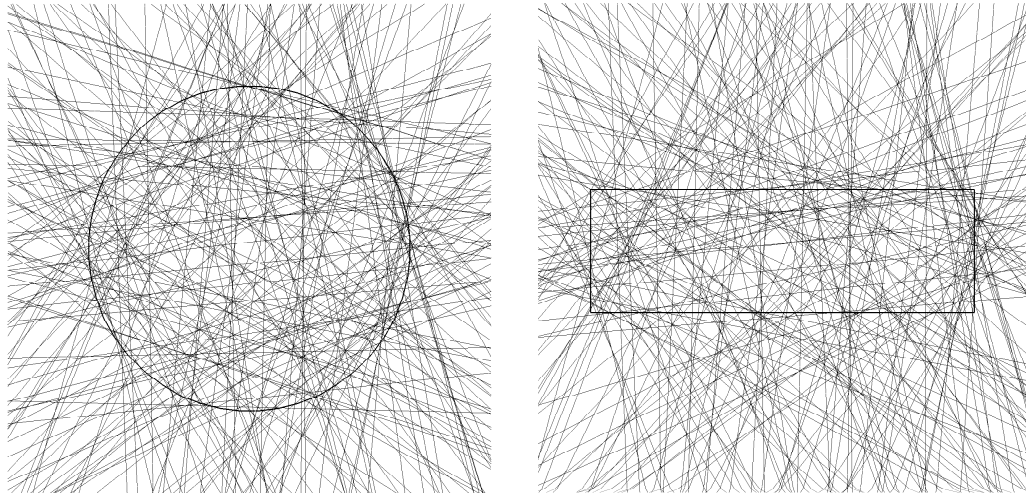


Abbildung 3.1: μ -zufällige Geraden.

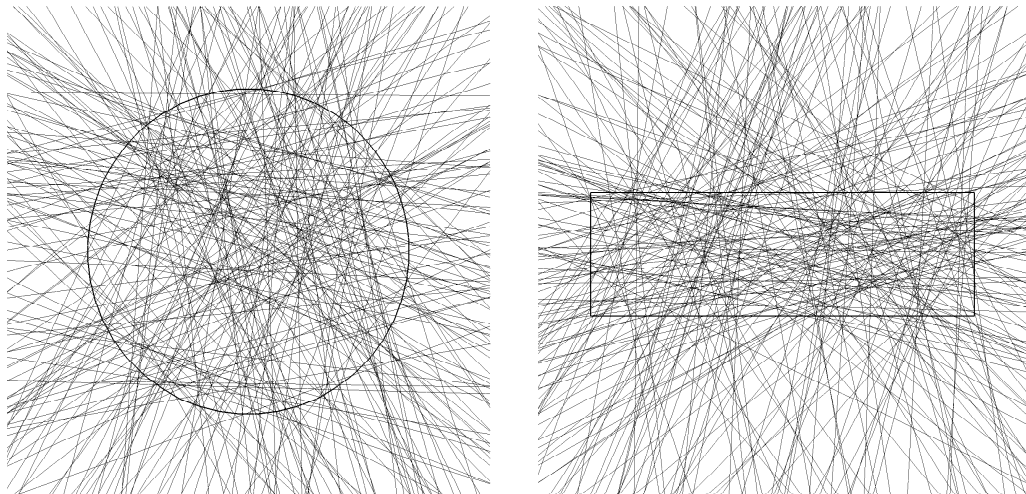


Abbildung 3.2: ν -zufällige Geraden.

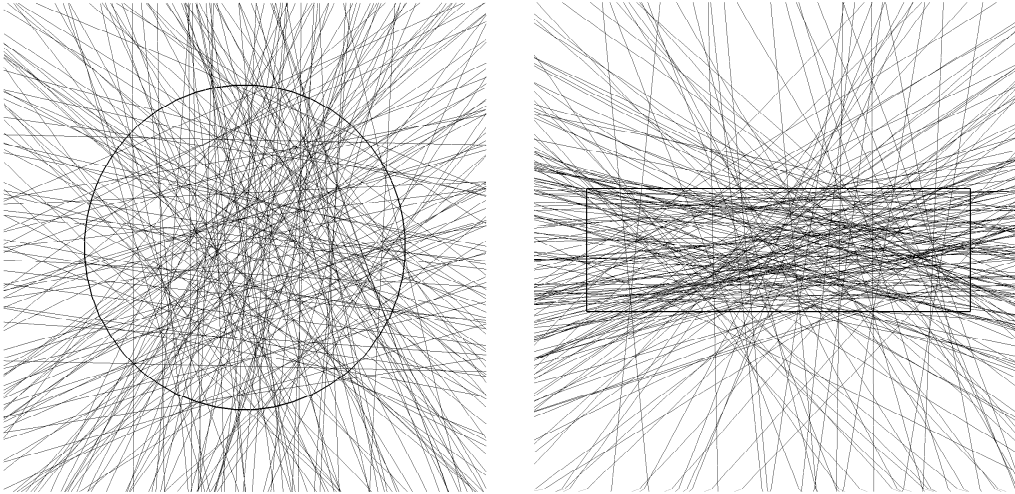


Abbildung 3.3: λ -zufällige Geraden.

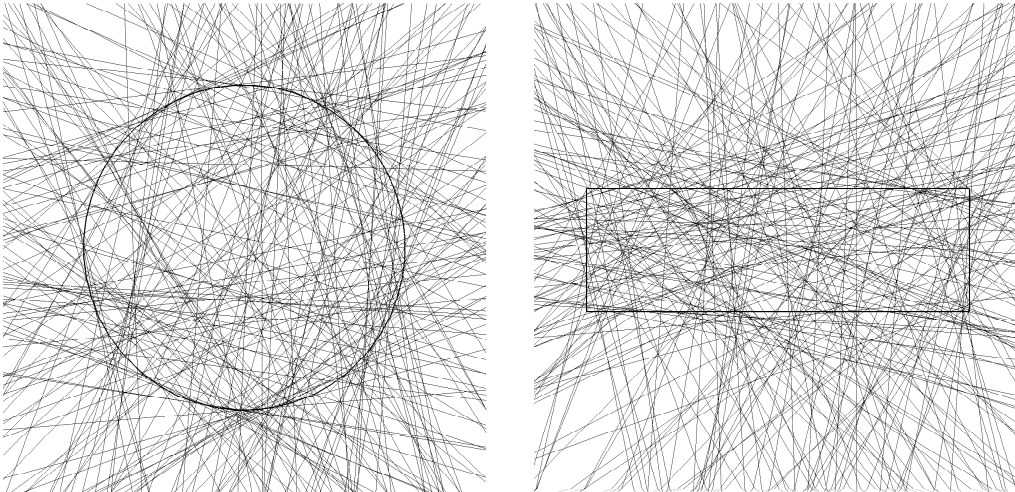


Abbildung 3.4: γ -zufällige Geraden.

3 Simulationen

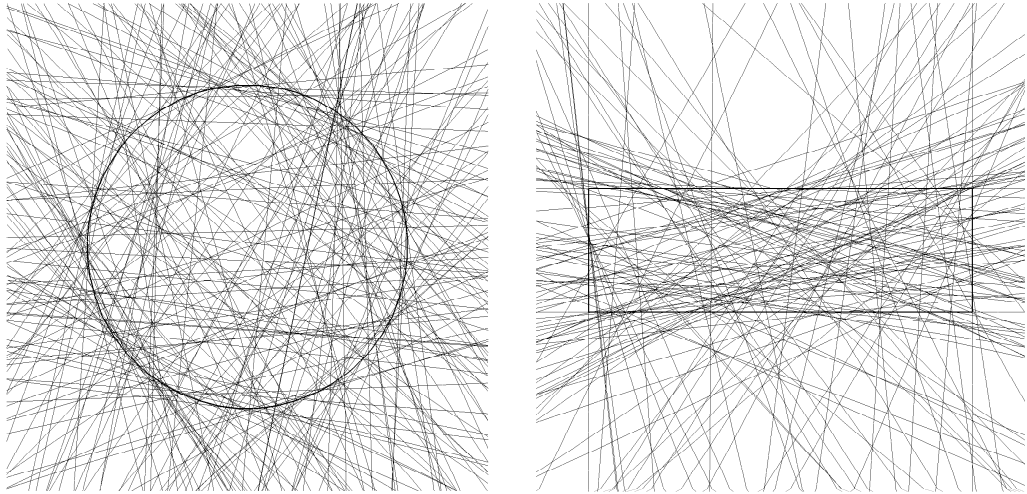


Abbildung 3.5: β -zufällige Geraden.

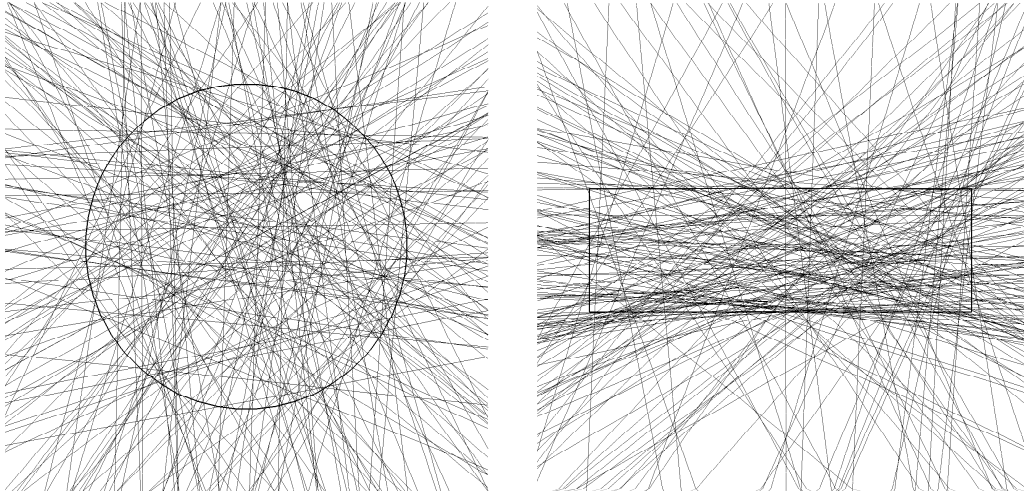


Abbildung 3.6: α -zufällige Geraden.

3.5.2 Zur Verteilung der Richtung zufälliger Geraden

In diesem Abschnitt sind Abbildungen zu der in Abschnitt 3.3 erläuterten Simulation aufgeführt.

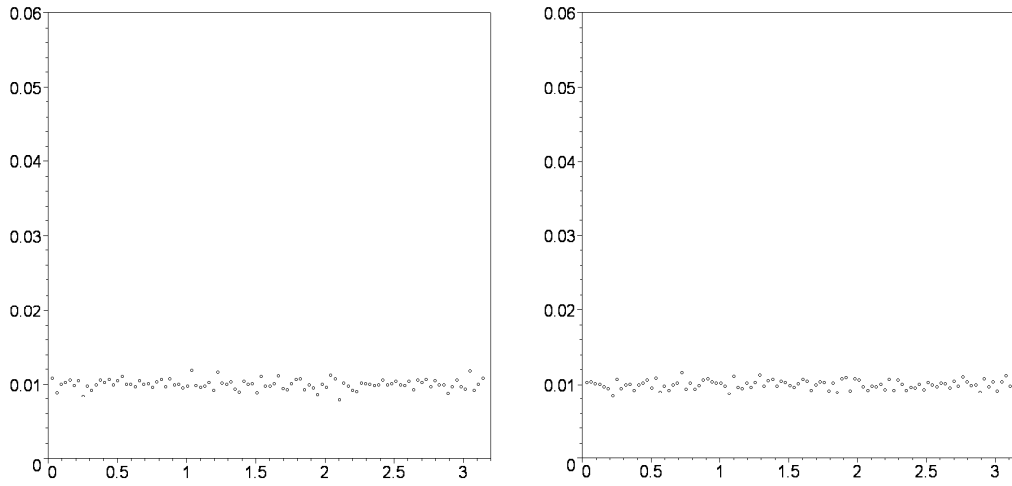


Abbildung 3.7: Zufällige Geraden durch B^2 . Links: λ -zufällige Geraden. Rechts: α -zufällige Geraden .

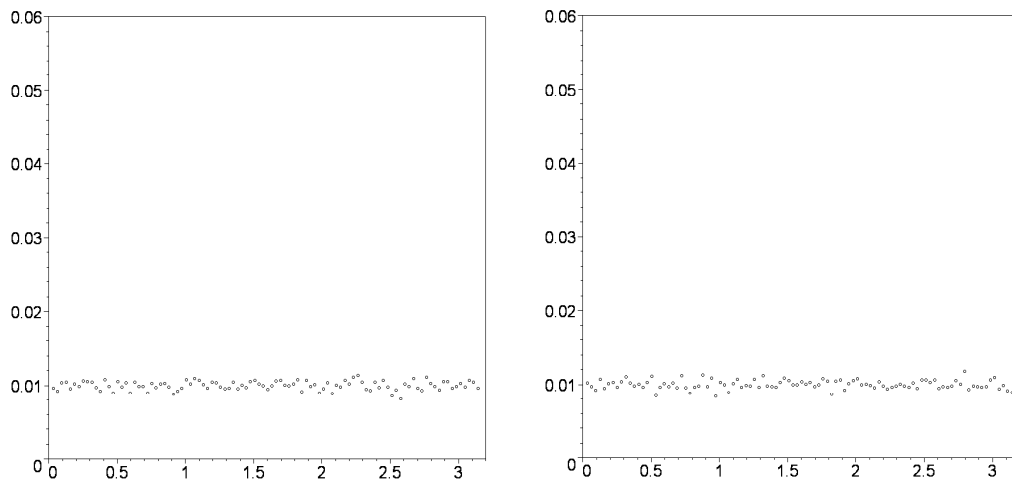


Abbildung 3.8: Zufällige Geraden durch B^2 . Links: β -zufällige Geraden. Rechts: ν -zufällige Geraden.

3 Simulationen

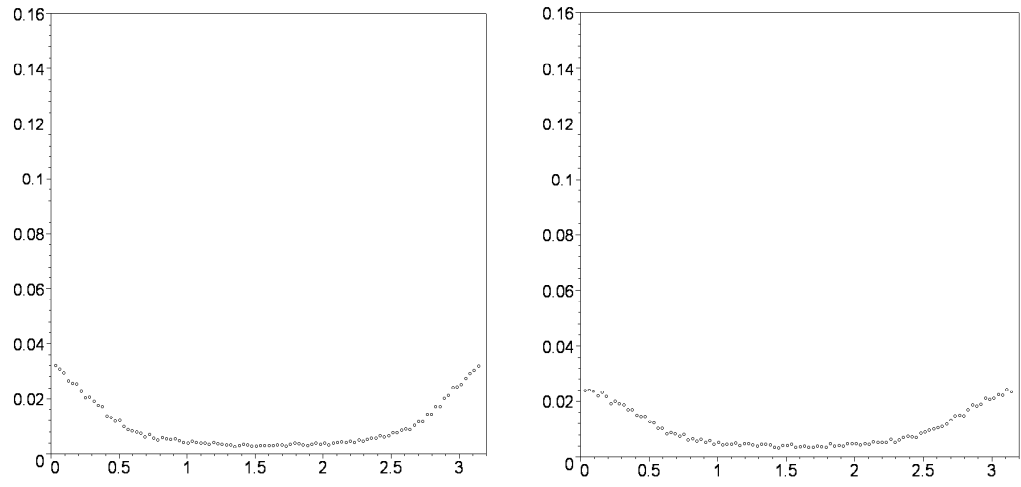


Abbildung 3.9: Zufällige Geraden durch $R_{\pi,1}$. Links: λ -zufällige Geraden. Rechts: α -zufällige Geraden.

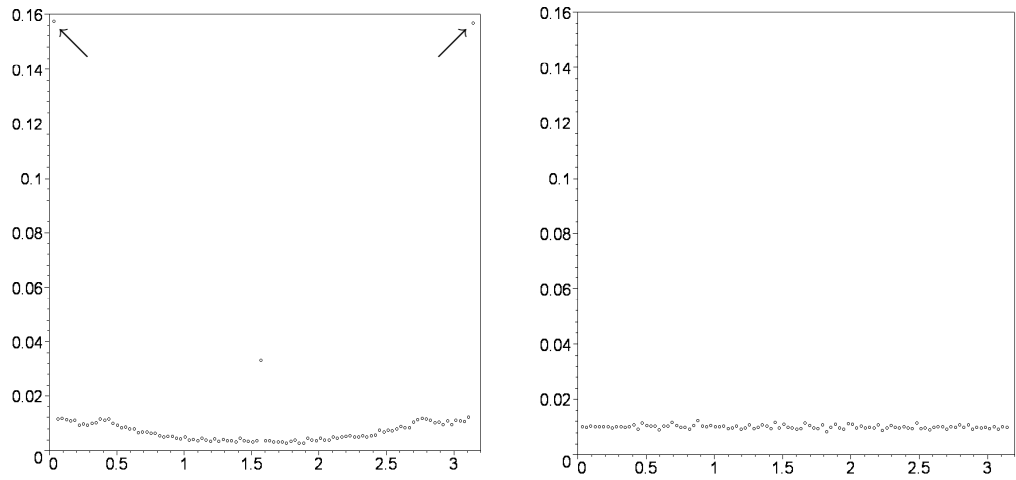


Abbildung 3.10: Zufällige Geraden durch $R_{\pi,1}$. Links: β -zufällige Geraden. Rechts: ν -zufällige Geraden.

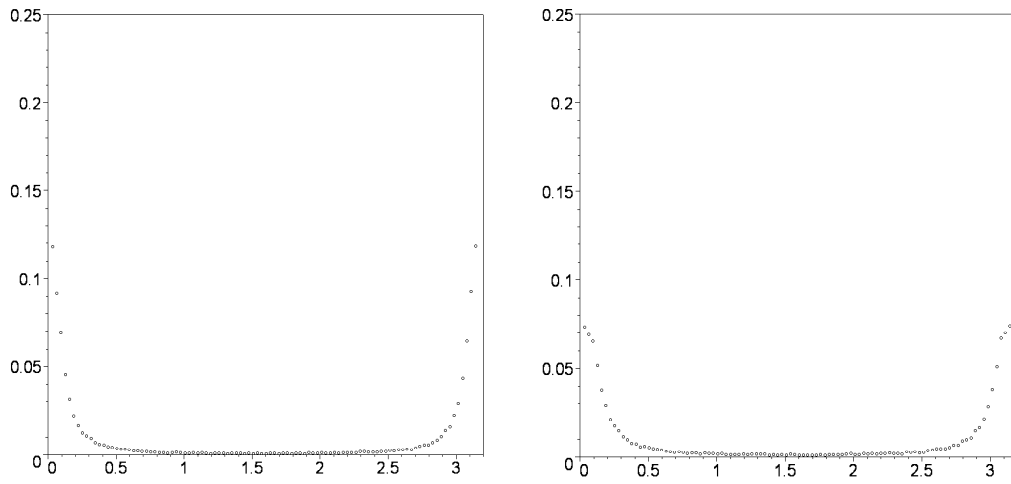


Abbildung 3.11: Zufällige Geraden durch $R_{2\pi,1/2}$. Links: λ -zufällige Geraden. Rechts: α -zufällige Geraden.

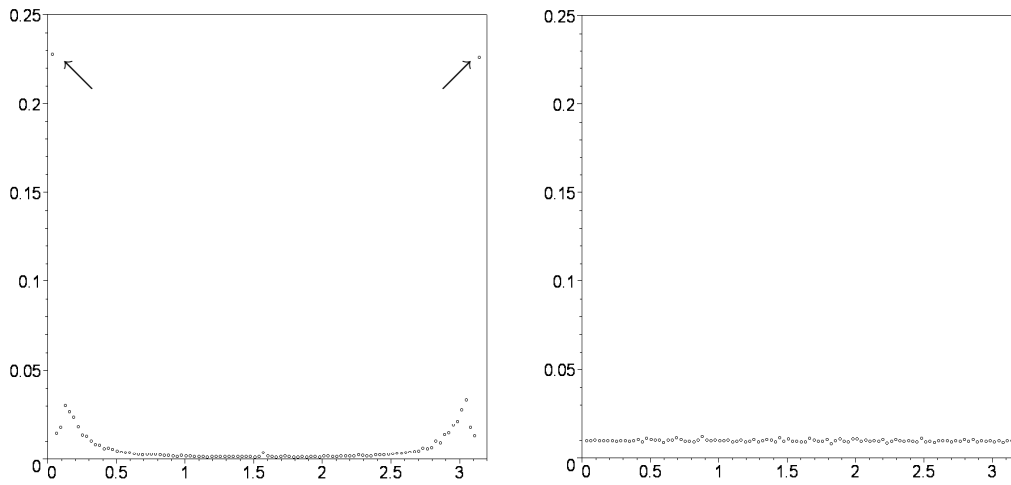


Abbildung 3.12: Zufällige Geraden durch $R_{2\pi,1/2}$. Links: β -zufällige Geraden. Rechts: ν -zufällige Geraden.

4 Resümee

4.1 Abschließende Bemerkungen

Das Ziel, einen Überblick über das Thema *zufällige Geraden* zu geben, wurde in zweierlei Hinsicht nicht vollständig erreicht. Einerseits stellt die ausschließliche Betrachtung des ebenen Falls eine Einschränkung dar, andererseits wurden lediglich die Momente und Erwartungswerte der Sehnenlänge etwas tiefergehend betrachtet. Den Schnittpunkt zweier oder mehrerer zufälliger Geraden betreffende Aspekte wurden nur kurz angeschnitten, die Verteilung der Richtung zufälliger Geraden ganz außer Acht gelassen. Diese Festlegung des Schwerpunkts war einerseits zeitlich bedingt, andererseits spiegeln sich darin die Schwerpunkte in der Literatur. So wurden mit Abstand meist Arbeiten gefunden, die sich – aus Integralgeometrischer Sicht – mit Sehnenlängen beschäftigen. Allgemeinere Aussagen lassen sich vielleicht mit Mitteln der *Stochastischen Geometrie* ableiten, die mit flexibleren Modellen arbeitet. Bei der Bearbeitung wurde jedoch nicht auf Fragestellungen aus Sicht der Stochastischen Geometrie eingegangen, weshalb an dieser Stelle auch keine Aussage darüber gemacht werden kann.

Die Übertragung, der in dieser Arbeit genannten Aussagen auf allgemeine Dimensionen geht in vielen Fällen fast wörtlich, die meiste bearbeitete Literatur war für den \mathbb{R}^n verfasst und wurde – der Einfachheit, Anschaulichkeit und Durchgängigkeit halber – übertragen auf zwei Dimensionen.

Aus den oben genannten Gründen und der Tatsache, dass diese Arbeit keine wesentlichen Neuerungen hervorgebracht hat, kann sie am ehesten – wie Eingangs erwähnt – als Einstieg in dieses Thema oder als Orientierungshilfe bei der Literatursuche dienen.

4.2 Literaturhinweise

In den vorherigen Kapiteln wurde bereits Literatur zum Thema *zufällige Geraden* genannt, jedoch fand ein Großteil der gefundenen Arbeiten keine Erwähnung. Aus diesem Grund soll hier – chronologisch geordnet – eine Zusammenfassung weiterführender Literatur angegeben werden, wobei auch

4 Resümee

Arbeiten aufgelistet sind, die sich nur teilweise mit zufälligen Geraden befassen.

Aus den Jahren 1960 bis 1969 wurden Arbeiten von Horowitz (1965), Moran (1966, 1969) und Miles (1969) gefunden. Weiter sei auf das Lehrbuch von Kendall und Moran (1963) verwiesen. Aus den folgenden Jahren seien genannt, die Arbeiten von Little (1974), Alagar (1976), Baddeley (1977) Piefke (1978a,b), sowie von Miles (1979). Weiter wurden Artikel von Piefke (1980), Hall (1981), Kuchel und Vaughan (1981), Davy (1984), Enns und Ehlers (1988) und Coleman (1989) gefunden. Artikel der letzten fünfzehn Jahre wurden gefunden von Enns und Ehlers (1993), Coleman (1997, 2000), Mazzolo (2003) und Rosenberg (2004).

A Maple- Simulationen

Auf der beigelegten CD befinden sich die durchgeführten Simulationen sowohl im .mws, als auch im .pdf Format.

Literaturverzeichnis

- [Alagar 1976] ALAGAR, V. S.: The distribution of the distance between random points. In: *J. Appl. Prob.* 13 (1976), S. 558–566
- [Baddeley 1977] BADDELEY, A.: A fourth note on recent research in geometrical probability. In: *Adv. Appl. Prob.* 9 (1977), Nr. 4, S. 824–860
- [Bauer 1992] BAUER, Heinz: *Maß- und Integrationstheorie*. zweite überarbeitete Auflage. Berlin, New York : Walter de Gruyter, 1992
- [Bertrand 1972] BERTRAND, Joseph: *Calcul des probabilités*. third edition, reprint of the 1907 ed. Bronx New York : Chelsea Publ., 1972
- [Blaschke 1935] BLASCHKE, Wilhelm: Integralgeometrie I: Ermittlung der Dichten für lineare Unterräume im E_n . In: *Actualités scientifiques et industrielles* 252 (1935)
- [Bureau u. a. 1985] BUREAU, W. (Hrsg.) ; CHERN, S.S. (Hrsg.) ; LICHTWEISS, K. (Hrsg.) ; MÜLLER, H.R. (Hrsg.) ; SANTALÓ, L.A. (Hrsg.) ; SIMON, U. (Hrsg.) ; STRUBECKER, K. (Hrsg.): *Wilhelm Blaschke, Gesammelte Werke, Band 2*. Essen : Thales Verlag, 1985
- [Coleman 1989] COLEMAN, R.: Random sections of a sphere. In: *Canad. J. Statist.* 1 (1989), S. 27–39
- [Coleman 1997] COLEMAN, R.: Crossings of random secants. In: *Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl.* No. 50 (1997)
- [Coleman 2000] COLEMAN, R.: Intersections of random lines. In: *Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl.* No. 65, part I (2000)
- [Coleman 1969] COLEMAN, Rodney: Random paths through convex bodies. In: *J. Appl. Prob.* 6 (1969), S. 430–441
- [Crofton 1867] CROFTON, M. W.: On the Theory of Probability, Applied to Random Straight Lines. [Abstract]. In: *Proceedings of the Royal Society of London* 16 (1867), S. 266–269

- [Davy 1984] DAVY, P. J.: Inequalities for moments of secant length. In: *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete* 68 (1984), S. 243–246
- [Elstrodt 2005] ELSTRODT, Jürgen: *Maß- und Integrationstheorie*. zweite überarbeitete Auflage. Berlin, Heidelberg : Springer, 2005
- [Enns und Ehlers 1988] ENNS, E. G. ; EHLERS, P. F.: Chords through a convex body generated from within an embedded body. In: *J. Appl. Prob.* 25 (1988), S. 700–707
- [Enns und Ehlers 1993] ENNS, E. G. ; EHLERS, P. F.: Notes on random chords in convex bodies. In: *J. Appl. Prob.* 30 (1993), S. 889–897
- [Enns und Ehlers 1978] ENNS, E.G. ; EHLERS, P.F.: Random paths through a convex region. In: *J. Appl. Prob.* 15 (1978), S. 144–152
- [Enns und Ehlers 1980] ENNS, E.G. ; EHLERS, P.F.: Random paths originating within a convex region and terminating on its surface. In: *Austral. J. Statist.* 22 (1980), Nr. 1, S. 60–68
- [Enns und Ehlers 1981] ENNS, E.G. ; EHLERS, P.F.: Random secants of a convex body generated by surface randomness. In: *J. Appl. Prob.* 18 (1981), S. 157–166
- [Gates 1987] GATES, J.: Some properties of chord length distributions. In: *J. Appl. Prob.* 24 (1987), S. 863–874
- [Ghosh 1951] GHOSH, B.: Random distances within a rectangle and between two rectangles. In: *Bull. Calcutta Math. Soc.* 43 (1951), S. 17–24
- [Hall 1981] HALL, P.: On the distribution of random lines. In: *J. Appl. Prob.* 18 (1981), S. 606–616
- [Horowitz 1965] HOROWITZ, M.: Probability of random paths across elementary geometrical shapes. In: *J. Appl. Prob.* 2 (1965), S. 169–177
- [Kendall und Moran 1963] KENDALL, M. G. ; MORAN, P. A. P.: *Geometrical probability*. Griffin, 1963
- [Kingman 1965] KINGMAN, J. F. C.: Mean free paths in a convex reflecting region. In: *J. Appl. Prob.* 2 (1965), S. 162–168
- [Kingman 1969] KINGMAN, J. F. C.: Radom secants of a convex body. In: *J. Appl. Prob.* 6 (1969), S. 660–672

- [Kuchel und Vaughan 1981] KUCHEL, P. W. ; VAUGHAN, R. J.: Average lengths of chords in a square. In: *Math. Mag.* 54 (1981), S. 261–296
- [Little 1974] LITTLE, D. V.: A third note on recent research in geometrical probability. In: *Adv. Appl. Prob.* 6 (1974), Nr. 1, S. 103–130
- [Matheron 1975] MATHERON, G.: *Random sets and integral geometry*. Wiley, 1975
- [Mazzolo 2003] MAZZOLO, A.: Probability density distribution of random line segments inside a convex body: application to random media. In: *J. Math. Phys.* 44 (2003), Nr. 2, S. 853–863
- [Mecke 2003] MECKE, Joseph: *Stochastische Geometrie*. Vorlesung, Universität Jena. Juli 2003
- [Miles 1969] MILES, R. E.: Poisson flats in euclidean spaces. Part I: A finite number of random uniform flats. In: *Adv. Appl. Prob.* 1 (1969), S. 211–237
- [Miles 1979] MILES, R. E.: Some new integral geometric formulae, with stochastic applications. In: *J. Appl. Prob.* 16 (1979), S. 592–606
- [Moran 1966] MORAN, P. A. P.: A note on recent research in geometrical probability. In: *J. Appl. Prob.* 2 (1966), S. 453–463
- [Moran 1969] MORAN, P. A. P.: A second note on recent research in geometrical probability. In: *Adv. Appl. Prob.* 1 (1969), Nr. 1, S. 73–89
- [Piefke 1978a] PIEFKE, F.: Maße für gerichtete Geraden und nicht-symmetrische Pseudometriken in der Ebene. In: *Mh. Math.* 86 (1978), S. 143–154
- [Piefke 1978b] PIEFKE, F.: Zwei integralgeometrische Formeln für Paare konvexer Körper. In: *ZAMP* 29 (1978), S. 664–669
- [Piefke 1980] PIEFKE, F.: Maße für gerichtete Geraden und nicht-symmetrische Pseudometriken in der Ebene II. In: *Mh. Math.* 89 (1980), S. 45–56
- [Rosenberg 2004] ROSENBERG, E.: The expected length of a random line segment in a rectangle. In: *Oper. Res. Lett.* 32 (2004), S. 99–102

- [Santaló 2004] SANTALÓ, Luis: *Integral geometry and geometric probability*. second edition, first published 1976. Cambridge University Press, 2004
- [Schneider 1982] SCHNEIDER, Rolf: Random hyperplanes meeting a convex body. In: *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete* 61 (1982), S. 379–387
- [Schneider 1985] SCHNEIDER, Rolf: Inequalities for random flats meeting a convex body. In: *J. Appl. Prob.* 22 (1985), S. 710–716
- [Schneider und Weil 1992] SCHNEIDER, Rolf ; WEIL, Wolfgang: *Integral-geometrie*. Stuttgart : B. G. Teubner, 1992
- [Schneider und Weil 2000] SCHNEIDER, Rolf ; WEIL, Wolfgang: *Stochastische Geometrie*. Stuttgart : B. G. Teubner, 2000
- [Sulanke 1965a] SULANKE, Rolf: Schnittpunkte zufälliger Geraden. In: *Arch. Math.* 16 (1965), S. 320–324
- [Sulanke 1965b] SULANKE, Rolf: Die Verteilung der Sehnenlängen an ebenen und räumlichen Figuren. In: *Math. Nachr.* 23 (1965), S. 51–74
- [Walter 2002] WALTER, Wolfgang: *Analysis 2*. Fünfte, erweiterte Auflage. Berlin, Heidelberg : Springer, 2002

Symbolverzeichnis

α_{njq}	, Seite 11
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Standardskalarprodukt, Seite 9
$\mathfrak{A} \mid Y$	Spur von \mathfrak{A} in Y , Seite 13
$\ \cdot, \cdot\ $	Euklidische Norm, Seite 9
$ \cdot $	Betrag von (\cdot) , Seite 9
$B(r, M)$	Kreis um M mit Radius r , Seite 9
$\mathfrak{B}(\cdot)$	Borel σ -Algebra über (\cdot) , Seite 15
$\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$	Borel σ -Algebra des \mathbb{R}^n , Seite 14
B^n	Einheitskugel im \mathbb{R}^n , Seite 10
$\text{bd}(\cdot)$	Rand von (\cdot) , Seite 10
$d_H(\cdot, \cdot)$	Hausdorffabstand von (\cdot) , (\cdot) , Seite 12
$\mathbb{E}(X)$	Erwartungswert von X , Seite 9
\mathcal{E}_q^n	Menge der q -dimensionalen affinen Unterräume des \mathbb{R}^n , Seite 10
Φ	Parameterraum von \mathcal{G} , Seite 20
$F_r(l)$	Verteilung $\mathbb{P}(\sigma_r(K) \leq l)$, Seite 56
$f_r(l)$	Wahrscheinlichkeitsdichte zur Verteilung $\mathbb{P}(\sigma_r(K) \leq l)$, Seite 56
\mathcal{G}	Menge der Geraden des \mathbb{R}^2 , Seite 19
\mathfrak{G}	Borel σ -Algebra auf \mathcal{G} , Seite 20
$\text{int}(\cdot)$	Inneres von (\cdot) , Seite 10

$[K]$	Menge aller Geraden im \mathbb{R}^2 , die mit K einen nicht leeren Schnitt haben, Seite 25
κ_n	$\lambda(B^n)$, Seite 10
\mathcal{K}	Menge der konvexen Körper, Seite 10
λ	Lebesguemaß über \mathbb{R}^n , Seite 9
λ_E	Lebesguemaß auf E , Seite 9
λ_q	q -dimensionales Lebesguemaß, Seite 9
\mathcal{L}_q^n	Menge der q -dimensionalen linearen Unterräume des \mathbb{R}^n , Seite 10
μ	invariantes Geradenmaß, Seite 28
ω	sphärisches Lebesguemaß, Seite 9
$\Omega_K(l)$	mittleres normiertes Überlappungsvolumen, Seite 60
$\omega_K(l)$	mittlere normierte Überlappungsoberfläche, Seite 75
$\Omega_K(l, \vartheta)$	normiertes Überlappungsvolumen, Seite 60
ω_n	$n\kappa_n$, Seite 10
$\mathbb{P}(\cdot)$	Wahrscheinlichkeit von (\cdot) , Seite 9
C_ε	Parallelkörper von C , Seite 12
\mathcal{R}	Konvexring, Seite 10
$R_{a,b}$	Rechteck mit Seitenlängen a, b , Seite 69
$\sigma_r(K)$, Seite 50
S^{n-1}	Einheitssphäre des \mathbb{R}^n , Seite 10
$V_j(\cdot)$	j -tes inneres Volumen, Seite 10